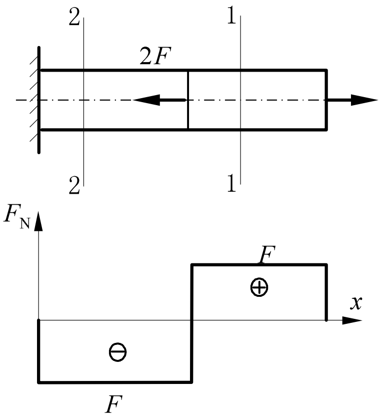
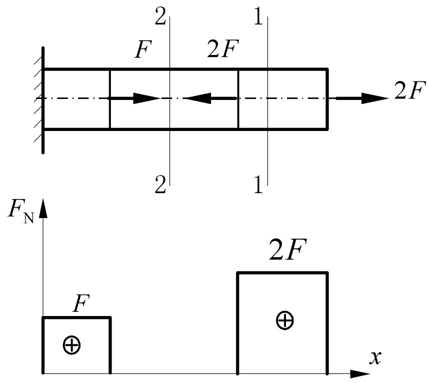
第 1 章 绪论及基本概念（无习题）
第二章　轴向拉伸和压缩

2-1　试求图示各杆 1-1 和 2-2 横截面上的轴力，并作轴力图。

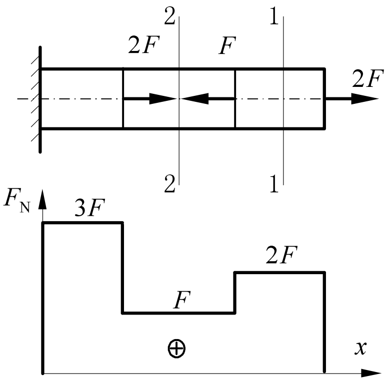
（a）**解：** $F_{\mathrm{N1}} = +F$；$F_{\mathrm{N2}} = -F$；



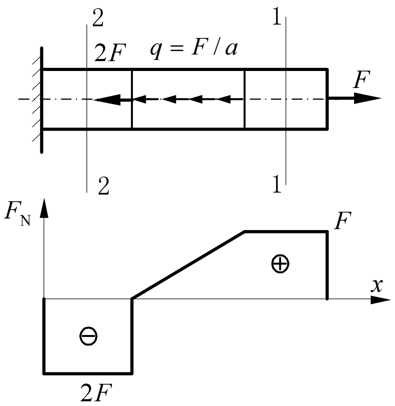
（b）**解：** $F_{\mathrm{N1}} = +2F$；$F_{\mathrm{N2}} = 0$；



（c）**解：** $F_{\mathrm{N}} = +2F$；$F_{\mathrm{N2}} = +F$。



(d) **解：** $F_{\mathrm{N1}} = F, F_{\mathrm{N2}} = -2F$。



2-2　试求图示等直杆横截面 1-1，2-2 和 3-3 上的轴力，并作轴力图。若横截面面积 $A = 400\,\mathrm{mm}^2$，试求各横截面上的应力。

解： $F_{\mathrm{N1}} = -20\,\mathrm{kN}$

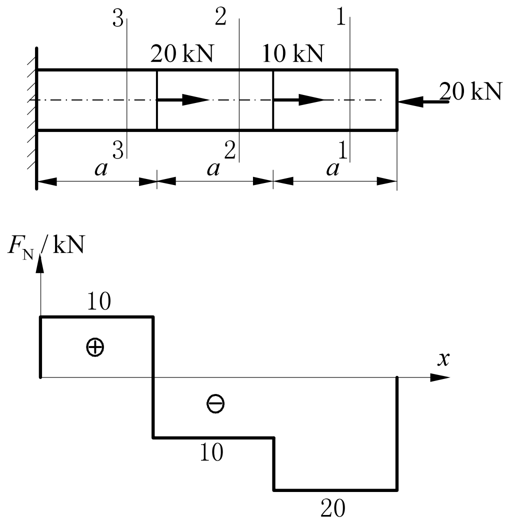
$F_{\mathrm{N2}} = -10\,\mathrm{kN}$

$F_{\mathrm{N3}} = +10\,\mathrm{kN}$

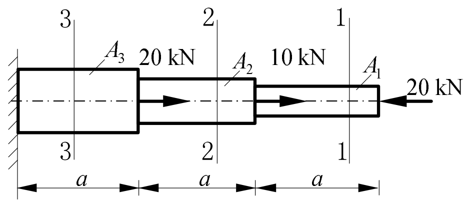
$$\sigma_1 = \frac{F_{\mathrm{N1}}}{A} = \frac{-20\times10^3}{400\times10^{-6}} = -50\,\mathrm{MPa}$$

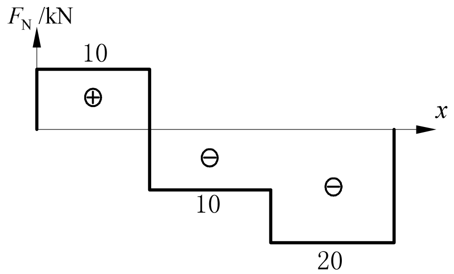
$$\sigma_2 = \frac{F_{\mathrm{N2}}}{A} = \frac{-10\times10^3}{400\times10^{-6}} = -25\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{F_{\mathrm{N3}}}{A} = \frac{10\times10^3}{400\times10^{-6}} = +25\,\mathrm{MPa}$$



2-3　试求图示阶梯状直杆横截面 1-1，2-2 和 3-3 上的轴力，并作轴力图。若横截面面积 $A_1=200\,\text{mm}^2$，$A_2=300\,\text{mm}^2$，$A_3=400\,\text{mm}^2$，并求各横截面上的应力。





解： $F_{\mathrm{N}1}=-20\,\text{kN}$

$F_{\mathrm{N}2}=-10\,\text{kN}$

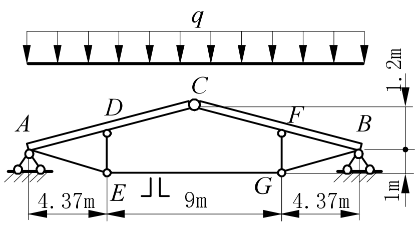
$F_{\mathrm{N}3}=+10\,\text{kN}$

$$\sigma_1=\frac{F_{\mathrm{N}1}}{A_1}=\frac{-20\times10^3}{200\times10^{-6}}=-100\,\text{MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{F_{\mathrm{N}2}}{A_2}=\frac{-10\times10^3}{300\times10^{-6}}=-33.3\,\text{MPa}$$

$$\sigma_3=\frac{F_{\mathrm{N}3}}{A_3}=\frac{10\times10^3}{400\times10^{-6}}=+25.0\,\text{MPa}$$

2-4　图示一混合屋架结构的计算简图。屋架的上弦用钢筋混凝土制成。下面的拉杆和中间竖向撑杆用角钢构成，其截面均为两个 75mm×8mm 的等边角钢。已知屋面承受集度为 $q=20\,\text{kN/m}$ 的竖直均布荷载。试求拉杆 AE 和 EG 横截面上的应力。

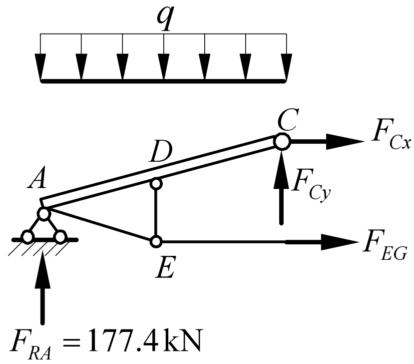


解： $F_{\mathrm{R}A}=F_{\mathrm{R}B}=\dfrac{1}{2}ql=\dfrac{1}{2}\times20\times17.74=177.4\,\text{kN}$

1)　求内力

取 I-I 分离体　$\sum M_C=0$

$$q\times\frac{(4.37+4.5)^2}{2}-F_{\mathrm{R}A}(4.37+4.5)+F_{EG}\times2.2=0$$



得　$F_{EG}=356\,\text{kN}$（拉）

取节点 E 为分离体

$\sum F_x=0$，$F_{AE}\cos\alpha=356\,\text{kN}$

$\overline{AE}=\sqrt{4.37^2+1^2}=4.47\,\text{m}$

$$\cos\alpha=\frac{4.37}{4.47}$$

故 $F_{AE}=\dfrac{356}{\cos\alpha}=\dfrac{356\times4.47}{4.37}=366\,\text{kN}$（拉）

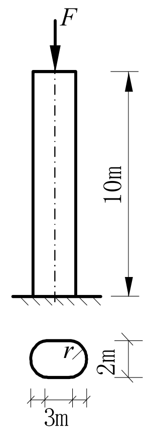
2)　求应力

75×8 等边角钢的面积 A=11.5 cm^2

$$\sigma_{EG}=\frac{F_{EG}}{2A}=\frac{356\times10^3}{2\times11.5\times10^{-4}}=155\,\text{MPa}\ \text{(拉)}$$

$$\sigma_{AE}=\frac{F_{AE}}{2A}=\frac{366\times10^3}{2\times11.5\times10^{-4}}=159\,\text{MPa}\ \text{（拉）}$$

2-5　石砌桥墩的墩身高 $l = 10\,\text{m}$，其横截面尺寸如图所示。若荷载 $F = 1000\,\text{kN}$，材料的密度 $\rho = 2.35\times10^3\ \text{kg/m}^3$ 求墩身底部横截面上的压应力。



解： 墩横截面积 A

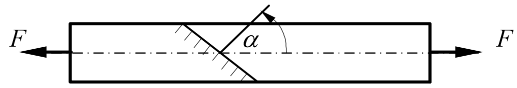
$$A = 3\times2 + \frac{\pi\times2^2}{4} = 9.14\,\text{m}^2，$$

$$\sigma_{底} = \frac{F}{A} + \frac{\rho g A l}{A} = \frac{F}{A} + 10\rho g$$

$$= \frac{1000\times10^3}{9.14} + 10\times2.35\times10^3\times9.8$$

$$= 0.34\,\text{MPa}\quad（压）$$

2-6　图示拉杆承受轴向拉力 $F = 10\,\text{kN}$，杆的横截面面积 $A = 100\,\text{mm}^2$。如以 α 表示斜截面与横截面的夹角，试求当 $\alpha = 0^\circ$，30°，45°，60°，90° 时各斜截面上的正应力和切应力，并用图表示其方向。

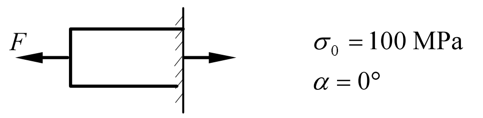


解： $\sigma_\alpha = \sigma_0\cos^2\alpha$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin2\alpha$$

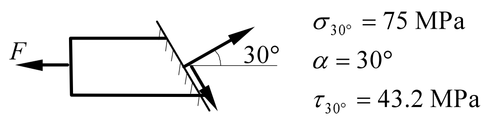
$$\sigma_{0^\circ} = \frac{F}{A} = \frac{10\times10^3}{100\times10^{-6}} = 100\,\text{MPa}$$

$$\tau_{0^\circ} = 0$$



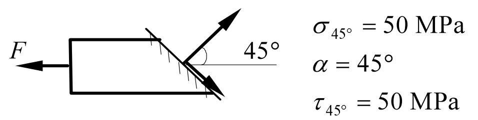
$$\sigma_{30^\circ} = 100\cos^2 30^\circ = 100\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 75\,\text{MPa}$$

$$\tau_{30^\circ} = \frac{100}{2}\sin2\times30^\circ = 43.2\,\text{MPa}$$



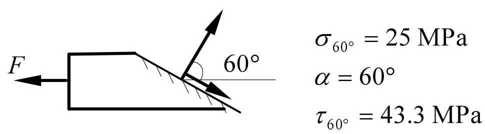
$$\sigma_{45^\circ} = 100\cos^2 45^\circ = 100\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 50\,\text{MPa}$$

$$\tau_{45^\circ} = \frac{100}{2}\sin2\times45^\circ = 50\,\text{MPa}$$



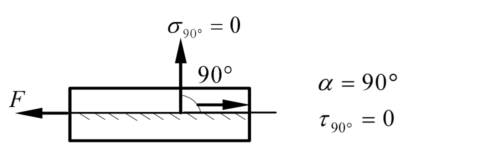
$$\sigma_{60^\circ} = 100\cos^2 60^\circ = 100\times(\frac{1}{2})^2 = 25\,\text{MPa}$$

$$\tau_{60^\circ} = \frac{100}{2}\sin2\times60^\circ = \frac{100}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 43.3\,\text{MPa}$$

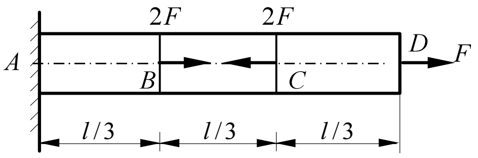


$$\sigma_{90^\circ} = 0$$

$$\tau_{90^\circ} = \frac{100}{2}\sin2\times90^\circ = 0$$

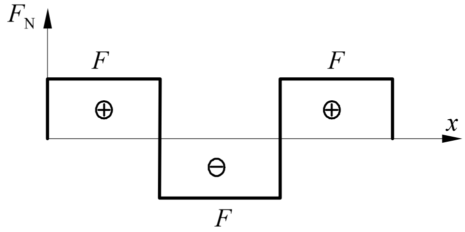


2-7　一根等直杆受力如图所示。已知杆的横截面面积 A 和材料的弹性模量 E。试作轴力图，并求杆端点 D 的位移。



解：

$$\Delta_D = \sum \frac{F_N l}{EA} = 2\frac{F\cdot l/3}{EA} - \frac{F\cdot l/3}{EA} = \frac{Fl}{3EA}$$



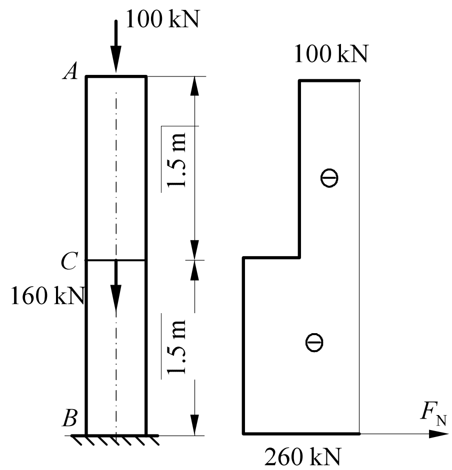
2-8　一木桩柱受力如图所示。柱的横截面为边长 200mm 的正方形，材料可认为符合胡克定律，其弹性模量 E=10 GPa。如不计柱的自重，试求：

（1）作轴力图；

（2）各段柱横截面上的应力；

（3）各段柱的纵向线应变；

（4）柱的总变形。



解： $\sigma_{AC} = \dfrac{100\times10^3}{200\times200\times10^{-6}} = 2.5\,\mathrm{MPa}$　（压）

$$\sigma_{CB} = \frac{260\times10^3}{200\times200\times10^{-6}} = 6.5\,\mathrm{MPa}\quad（压）$$

$$\Delta l_{AC} = \frac{-F_{N\,AC}l_{AC}}{EA} = \frac{-100\times10^3\times1.5}{10\times10^9\times40000\times10^{-6}} = -0.375\,\mathrm{mm}$$

$$\Delta l_{CB} = \frac{-F_{N\,CB}l_{CB}}{EA} = \frac{-260\times10^3\times1.5}{10\times10^9\times40000\times10^{-6}} = -0.975\,\mathrm{mm}$$

$$\Delta l = -\Delta l_{AC} - \Delta l_{CB} = -0.375 - 0.975 = -1.35\,\mathrm{mm}$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E} = \frac{-2.5\times10^6}{10\times10^9} = -0.25\times10^{-3}$$

$$\varepsilon_{CB} = \frac{\sigma_{CB}}{E} = \frac{-6.5\times10^6}{10\times10^9} = -0.65\times10^{-3}$$

2-9　一根直径 $d = 16\,\mathrm{mm}$、长 $l = 3\,\mathrm{m}$ 的圆截面杆，　承受轴向拉力 $F = 30\,\mathrm{kN}$，其伸长为 $\Delta l = 2.2\,\mathrm{mm}$。试求杆横截面上的应力与材料的弹性模量 E。

解： $\sigma = \dfrac{F}{A} = \dfrac{30\times10^3}{\dfrac{\pi\times16^2}{4}\times10^{-6}} = 149\,\mathrm{MPa}$

$$E = \frac{\sigma l}{\Delta l} = \frac{149\times10^6\times3}{2.2\times10^{-3}} = 203\,\mathrm{G\,Pa}$$

2-10　（1）试证明受轴向拉伸（压缩）的圆截面杆横截面沿圆周方向的线应变 ε_s。等于直径方向的线应变 ε_d。

（2）一根直径为 $d = 10\,\mathrm{mm}$ 的圆截面杆，在轴向拉力 F 作用下，直径减小 0.0025 mm 。如材料的弹性模量 $E = 210\,\mathrm{GPa}$，泊松比 $\nu = 0.3$，试求轴向拉力 F。

（3）空心圆截面钢杆，外直径 $D = 120\,\text{mm}$，内直径 $d = 60\,\text{mm}$，材料的泊松比 $\nu = 0.3$。当其受轴向拉伸时，已知纵向线应变 $\varepsilon = 0.001$，试求其壁厚 δ。

解：（1）证明 $\varepsilon_{\text{s}} = \varepsilon_{\text{d}}$

圆截面原圆周长 $s = \pi d$

变形后圆周长 $s' = \pi(d + \Delta d)$

$$\varepsilon_{\text{s}} = \frac{s' - s}{s} = \frac{\pi(d + \Delta d) - \pi d}{\pi d} = \frac{\Delta d}{d} = \varepsilon_{\text{d}}$$

（2）求轴向拉力 F

横向应变 $\varepsilon' = \dfrac{\Delta d}{d} = \dfrac{0.0025}{10} = 0.00025$

纵向应变 $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{\nu} = \dfrac{0.00025}{0.3} = 0.00083$

$$F = EA\varepsilon = 210 \times 10^9 \times \frac{\pi \times 10^2}{4 \times 10^6} \times 0.00083 = 13.75\,\text{kN}$$

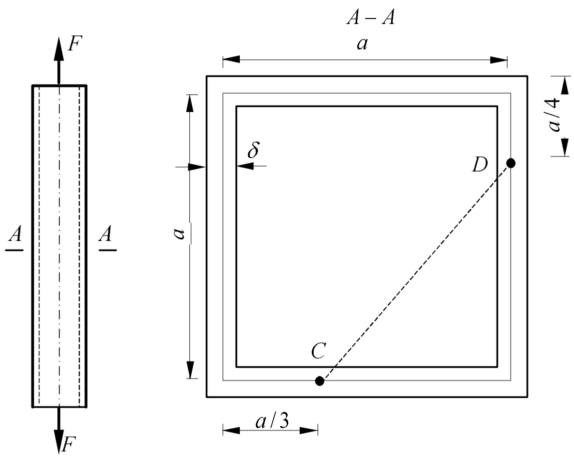
(3）求变形后的壁厚 δ

$\varepsilon' = \varepsilon\nu = 0.001 \times 0.25 = 0.00025$

则变形后的壁厚 $\delta = \dfrac{D - d}{2} - \varepsilon'(\dfrac{D - d}{2})$

$$\delta = (1 - \varepsilon')\frac{D - d}{2} = (1 - 0.00025) \times 30 = 29.99\,\text{mm}$$

2-11　受轴向拉力 F 作用的箱形薄壁杆如图所示。已知该杆材料的弹性常数为 E，ν，试求 C 与 D 两点间的距离改变量 $\varDelta_{CD}$。



解：$\sigma_z = \dfrac{F}{A} = \dfrac{F}{(a + \delta)^2 - (a - \delta)^2} = \dfrac{F}{4a\delta}$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_z}{E} = -\frac{\nu F}{4a\delta E}$$

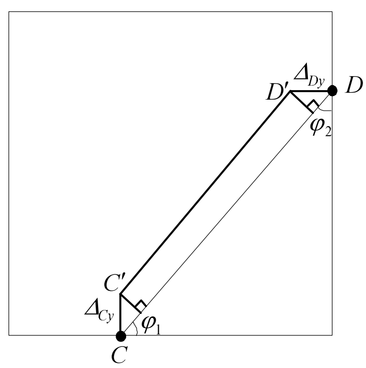
$$\varDelta_{Dx} = \frac{2}{3}a\varepsilon_x = \frac{-\nu F a}{6a\delta E} = \frac{-\nu F}{6\delta E}$$

$$\varDelta_{Cy} = \frac{3}{4}a\varepsilon_y = \frac{-3\nu F}{16\delta E}$$

$$\varDelta_{CD} = \varDelta_{Dx}\cos\varphi_1 + \varDelta_{Cy}\cos\varphi_2 = \frac{-\nu F}{4\delta E}(\frac{2}{3}\cos\varphi_1 + \frac{3}{4}\cos\varphi_2) \qquad (1)$$

其中 $\cos\varphi_1 = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{145}}{12}} = \dfrac{8}{\sqrt{145}}$，$\varphi_1 = 48.37^\circ$

$\cos\varphi_2 = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{145}}{12}} = \dfrac{9}{\sqrt{145}}$，$\varphi_2 = 41.63^\circ$

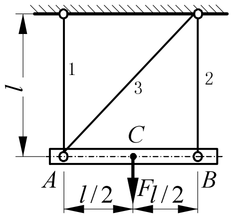


代入式（1），得　$\varDelta_{CD} = -1.003\dfrac{\nu F}{4\delta E}$

注：图 2-11a 中，$C'D'$ 实际上与 CD 不平行，但因是小变形，且 φ_1, φ_2 相差不大，故取图示

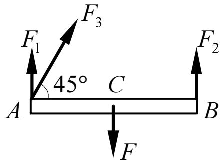
近似计算。

2-12 图示结构中，AB 为水平放置的刚性杆，杆 1，2，3 材料相同，其弹性模量 E=210GPa，已知 $l=1\,\text{m}$，$A_1=A_2=100\,\text{mm}^2$，$A_3=150\,\text{mm}^2$，$F=20\,\text{kN}$。试求 C 点的水平位移和铅垂位移。



解：（1）受力图（a）

$$\sum F_x=0, F_3=0\text{，}\quad F_2=F_1=\frac{F}{2}\text{。}$$



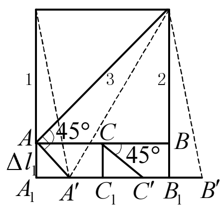
（2）变形协调图（b）

因 $F_3=0$，故 $\Delta l_3=0$

$$\Delta l_1=\frac{F_1\cdot l}{EA_1}=\frac{\frac{F}{2}l}{EA_1}=\frac{10\times10^3\times1}{210\times10^9\times100\times10^{-6}}$$

$$=\frac{1}{2100}\,\text{m}=0.476\,\text{mm}\text{（向下）}$$

$\Delta l_2=\Delta l_1=0.476\,\text{mm}$（向下）

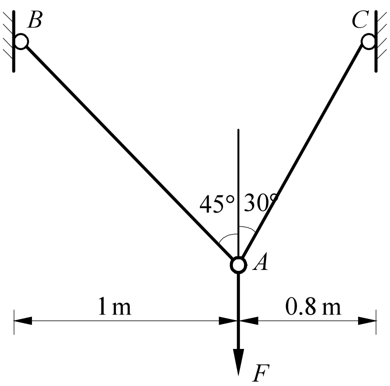


为保证 $\Delta l_3=0$，点 A 移至 A'，由图中几何关系知；

$\varDelta_{Cx}=\varDelta_{Ax}=\varDelta_{Ay}=0.476\,\text{mm}$

$\varDelta_{Cy}=0.476\,\text{mm}$

2-13 图示实心圆钢杆 AB 和 AC 在 A 点以铰相连接，在 A 点作用有铅垂向下的力 F=35kN。已知杆 AB 和 AC 的直径分别为 $d_1=12\,\text{mm}$ 和 $d_2=15\,\text{mm}$，钢的弹性模量 $E=210\,\text{GPa}$。试求 A 点在铅垂方向的位移。



解：由节点 A 的平衡，$\sum F_x=0$

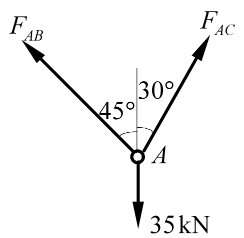
$$F_{AB}\cos45^\circ=F_{AC}\sin30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F_{AC}=\frac{1}{2}F_{AC}\text{，}\quad F_{AC}=\sqrt{2}F_{AB}\text{（1）}$$

$$\sum F_y=0\text{，}\quad F_{AB}\cos45^\circ+F_{\text{N}AC}\cos30^\circ=35\text{kN}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F_{AB}+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{AC}=35\,\text{kN}$$

$$\sqrt{2}F_{AB}+\sqrt{3}F_{AC}=70\,\text{kN}\text{（2）}$$



联解（1）、（2）得

$$F_{\text{N}AB}=18.2\,\text{kN}\text{，}\quad F_{\text{N}AC}=25.7\,\text{kN}$$

$$\Delta l_{AB}=\frac{F_{AB}l_{AB}}{EA_{AB}}=\frac{18.2\times10^3\times\sqrt{2}}{210\times10^9\times\dfrac{\pi\times12\times12}{4}\times10^{-6}}$$

$$=1.08\times10^{-3}\,\text{m}$$

节点 A 的总位移为 $\overline{AA'}$

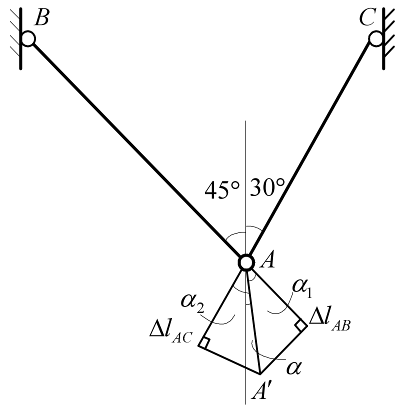
$$\frac{\Delta l_{AB}}{\overline{AA'}}=\cos\alpha_1=\cos(45^\circ-\alpha)$$

$$\overline{AA'}=\frac{\Delta l_{AB}}{\cos(45^{\circ}-\alpha)}$$

$$\frac{\Delta l_{AC}}{\overline{AA'}}=\cos\alpha_2=\cos(30^{\circ}+\alpha)$$

$$\overline{AA'}=\frac{\Delta l_{AC}}{\cos(30^{\circ}+\alpha)}$$

$$\frac{\Delta l_{AB}}{\cos(45^{\circ}-\alpha)}=\frac{\Delta l_{AC}}{\cos(30^{\circ}+\alpha)}$$



即

$$\frac{1.08}{0.707\cos\alpha+0.707\sin\alpha}=\frac{1.1}{0.866\cos\alpha-0.5\sin\alpha}$$

整理得：$0.157\cos\alpha=1.318\sin\alpha$； $\tan\alpha=0.119$， $\alpha=6^{\circ}47'$

故 A 点在垂直方向的位移 $\varDelta A_{\perp}$ 为

$$\varDelta_{A\perp}=\overline{AA'}\cos\alpha=\frac{\Delta l_{AC}}{\cos(30^{\circ}+\alpha)}\cos\alpha=\frac{1.1\times10^{-3}}{\cos36^{\circ}47'}\times\cos6^{\circ}47'$$

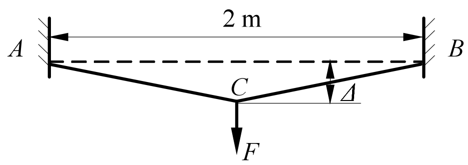
$$=\frac{1.1\times10^{3}\times0.993}{0.8009}=1.365\,\text{mm}$$

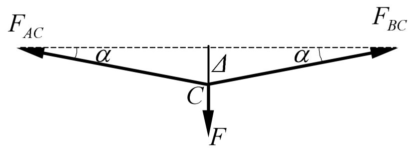
2-14　图示 A 和 B 两点之间原有水平方向的一根直径 $d=1\,\text{mm}$ 的钢丝，在钢丝的中点 C 加一竖直荷载 F。已知钢丝产生的线应变为 $\varepsilon=0.0035$，其材料的弹性模量 $E=210\,\text{GPa}$，钢丝的自重不计。试求：

（1）钢丝横截面上的应力（假设钢丝经过冷拉，在断裂前可认为符合胡克定律）；

（2）钢丝在 C 点下降的距离 $\varDelta$；

（3）荷载 F 的值。





解：（1）求 σ

$$\sigma=E\varepsilon=210\times10^{9}\times3.5\times10^{-5}=735\,\text{MPa}$$

（2）求钢丝在 C 点下降的距离 $\varDelta$

$$\varepsilon=\frac{\varDelta_{AC}}{l_{AC}}=\frac{\varDelta_{AC}}{1\,\text{m}}$$

$$\varDelta_{AC}=\varepsilon\times1\,\text{m}=0.0035\,\text{m}$$

伸长后 AC 长：$l_{AC}=1+\varDelta_{AC}=1+0.0035\,\text{m}=1.0035\,\text{m}$

即：$\sqrt{1^2+\varDelta^2}=1.0035\,\text{m}$

$$1+\varDelta^2=(1.0035)^2=1.007\,\text{m}$$

$$\varDelta^2=0.007\,\text{m}^2\qquad\varDelta=83.7\,\text{mm}$$

（3）求此时荷载 F 的值

由节点 C 的力的平衡得：

$$2F_{AC}\sin\alpha=F$$

即

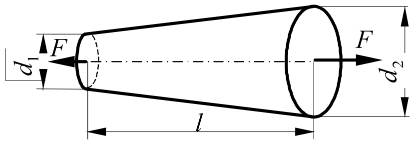
$$2\sigma A\cdot\frac{0.837}{1.0035}=F$$

$$2\times735\times10^{6}\times\frac{\pi\times1^{2}}{4\times10^{6}}\times\frac{0.0837}{1.0035}=F$$

$$F=96.3\,\text{N}$$

2-15　图示圆锥形杆受轴向拉力作用，试求杆的伸长。

解： $\Delta l=\int_0^l \frac{F\,\mathrm{d}l}{EA(y)}=\frac{F}{E}\int_0^l \frac{\mathrm{d}l}{A(y)}$



取微段 $\mathrm{d}\,y$ 研究，将微段 $\mathrm{d}\,y$ 处的直径看成相同，则单位长度的直径变化为：$\frac{d_2-d_1}{l}$

故 $\mathrm{d}\,y$ 处的直径为：$d_1+\frac{d_2-d_1}{l}(l-y)$

则 $\mathrm{d}\,y$ 处的面积为：$\frac{\pi}{4}[d_1+\frac{d_2-d_1}{l}(l-y)]^2$

故 $\Delta l=\int_0^l \frac{F\cdot \mathrm{d}\,y}{E\frac{\pi}{4}[d_1+\frac{d_2-d_1}{l}(l-y)]^2}=\frac{4Fl^2}{E\pi}\int_0^l \frac{\mathrm{d}\,y}{[d_2l-(d_2-d_1)y]^2}$

$$\mathrm{d}[d_2l-(d_2-d_1)y]=0-(d_2-d_1)\,\mathrm{d}\,y$$

$$\mathrm{d}\,y=\frac{\mathrm{d}[d_2l-(d_2-d_1)y]}{-(d_2-d_1)}$$

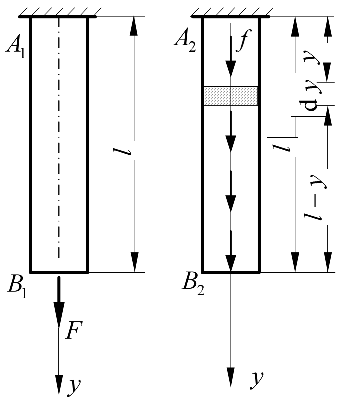
故 $\Delta l=\frac{-4Fl^2}{E\pi(d_2-d_1)}\int_0^l \frac{\mathrm{d}[d_2l-(d-d_1)y]}{[d_2l-(d_2-d_1)y]^2}=\frac{-4Fl^2}{E\pi(d_2-d_1)}[\frac{-1}{d_2l-(d_2-d_1)y}]_0^l$

$$=\frac{4Fl^2}{E\pi(d_2-d_1)}[\frac{1}{d_2l-d_2l+d_1l}-\frac{1}{d_2l}]=\frac{4Fl}{\pi\, d_1\cdot d_2E}$$

2-16　有一长度为 300mm 的等截面钢杆承受轴向拉力 $F=30\,\mathrm{kN}$。已知杆的横截面面积 $A=2500\,\mathrm{mm}^2$，材料的弹性模量 $E=210\,\mathrm{GPa}$。试求杆中所积蓄的应变能。

解： $V_\varepsilon=\frac{{F_\mathrm{N}}^2 l}{2EA}=\frac{30\times30\times10^6\times0.3}{2\times210\times10^9\times2500\times10^{-6}}=0.257\,\mathrm{N\cdot m}$

2-17　两根杆 A_1B_1 和 A_2B_2 的材料相同，其长度和横截面面积也相同。杆 $A\,B$ 承受作用在端点的集中荷载 F；杆 A_2B_2 承受沿杆长均匀分布的荷载，其集度为 $f=\frac{F}{l}$。试比较这两根杆内积蓄的应变能。



解： $A\,B$ 杆在端部集中荷载 F 作用下，$V_{\varepsilon 1}=\frac{F^2l}{2EA}$，$A_2B_2$ 杆在沿杆长均匀分布的荷载作用下，轴力 F_N 沿 y 变化，则 $\mathrm{d}\,y$ 段杆上的 $F_\mathrm{N}=\frac{F}{l}(l-y)$。

故　$\mathrm{d}V_{\varepsilon 2}=\frac{[\frac{F}{l}(l-y)]^2\,\mathrm{d}\,y}{2EA}$

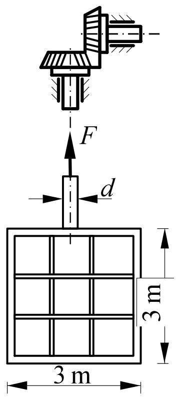
故

$$V_{\varepsilon 2}=\int_0^l \frac{[\frac{F}{l}(l-y)]^2\cdot \mathrm{d}\,y}{2EA}=\frac{F^2}{2EAl^2}\int_0^l (l^2+y^2-2ly)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\frac{F^2}{2EAl^2}[l^2y+\frac{y^3}{3}-\frac{2ly^2}{2}]\Big|_0^l=\frac{F^2l}{3\times 2EA}$$

$$V_{\varepsilon 1}=3V_{\varepsilon 2}$$

2-18 图示一钢筋混凝土平面闸门，其最大启门力为 $F=140\,\text{kN}$ 。如提升闸门的钢质丝杆内径 $d=40\,\text{mm}$，钢的许用应力 $[\sigma]=170\,\text{MPa}$，试校核丝杠的强度



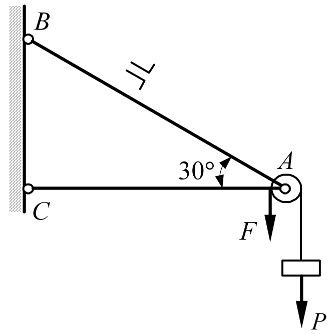
解： $\sigma=\dfrac{F}{A}$

$$=\frac{140\times10^3}{\dfrac{\pi\times40\times40}{4}\times10^{-6}}$$

$$=111\,\text{MPa}$$

$\sigma<[\sigma]$，丝杠的强度够。

2-19 简易起重设备的计算简图如图所示。已知斜杆 AB 用两根 $63\,\text{mm}\times40\,\text{mm}\times4\,\text{mm}$ 不等边角钢组成，钢的许用应力 $[\sigma]=170\,\text{MPa}$ 。试问在提起重量为 $P=15\,\text{kN}$ 的重物时，斜杆 AB 是否满足强度条件？

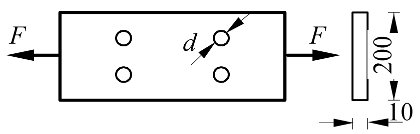


解： $F_{\text{N}AB}\sin30^\circ=2W$

$$F_{\text{N}AB}=4W=4\times15\,\text{kN}$$

$$\sigma_{AB}=\frac{F_{\text{N}AB}}{A}=\frac{4\times15\times10^3}{2\times4.058\times10^{-4}}=74\,\text{MPa}$$

2-20 一块厚 10mm、宽 200mm 的旧钢板，其截面被直径 d =20mm 的圆孔所削弱，圆孔的排列对称于杆的轴线，如图所示。钢板承受轴向拉力 F =200kN。材料的许用应力 $[\sigma]=170\,\text{MPa}$，试校核钢板的强度。

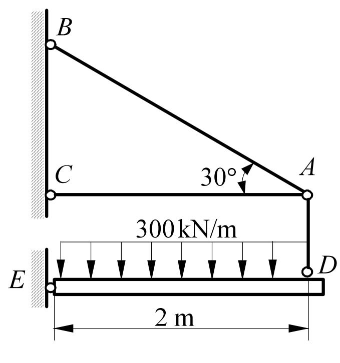


解： $\sigma=\dfrac{F}{(200-2\times20)\times10\times10^{-6}}$

$$=\frac{200\times10^3\times10^6}{1600}=125\,\text{MPa}$$

$\sigma<[\sigma]$强度够。

2-21 一结构受力如图所示，杆件 AB，AD 均由两根等边角钢组成。已知材料的许用应力 $[\sigma]=170\,\text{MPa}$，试选择杆 AB，AD 的角钢型号。



解： 分离体图(a)

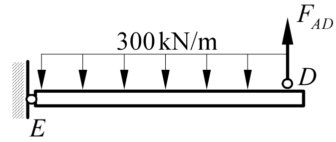
$$\sum M_E=0,F_{\text{N}AD}\times2=300\times10^3\times\frac{1}{2}\times2\times2$$

$$F_{\text{N}AD}=300\times10^3\ \text{N}$$

由节点 A: $F_{\text{N}AB}\sin30^\circ=F_{\text{N}AD}$

$$F_{\text{N}AB}=2F_{\text{N}AD}=600\,\text{kN}$$

$$\sigma_{AB}=\frac{F_{AB}}{2A_{AB}}\le 170\times10^{6}$$



故 $A_{AB}\ge\dfrac{F_{AB}}{2\times170\times10^{6}}=\dfrac{600\times10^{2}}{2\times170\times10^{6}}$

$$=1.77\times10^{-3}\ \mathrm{m}^{2}=17.7\ \mathrm{cm}^{2}$$

故杆 AB 选 2 根 100×10 角钢。

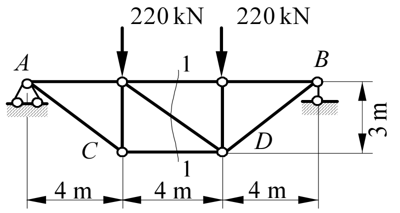
$$\sigma_{AD}=\frac{F_{\mathrm{N}AD}}{2A_{AD}}=\frac{300\times10^{3}}{2\times A_{AD}}\le 170\times10^{6}$$

故杆 AD 选 2 根 80×6 角钢。

2-22 一桁架受力如图所示。各杆都由两个等边角钢组成。已知材料的许用应力 $[\sigma]=170\,\mathrm{MPa}$，试选择杆 AC 和 CD 的角钢型号。

解： $F_{\mathrm{R}A}=F_{\mathrm{R}B}=220\,\mathrm{kN}$

$$\overline{AC}=\sqrt{4^{2}+3^{2}}=5\,\mathrm{m}$$



由节点 A：$F_{AC}\sin\alpha=F_{\mathrm{R}A}$

即 $F_{AC}\times\dfrac{3}{5}=220$

故 $F_{AC}=\dfrac{220\times5}{3}=367\,\mathrm{kN}$

$\sum M_{E}=0, F_{CD}\times3=220\times4$ 故 $F_{CD}=29.4\,\mathrm{kN}$

$$\sigma_{AC}=\frac{F_{AC}}{2A_{AC}}=\frac{367\times10^{3}}{2A_{AC}}\le170\times10^{6}$$

$$A_{AC}\ge\frac{367}{2\times170\times10^{3}}=1.04\times10^{-3}\ \mathrm{m}^{2}=10.4\,\mathrm{cm}^{2}$$

故杆 AC 选用 2 根 80×7 角钢。

$$\sigma_{CD}=\frac{F_{CD}}{2A_{CD}}=\frac{274\times10^{3}}{2A_{CD}}\le170\times10^{6}$$

$$A_{CD}\ge\frac{294}{2\times170\times10^{3}}=8.66\,\mathrm{cm}^{2}$$

故杆 CD 选用 2 根 75×6 角钢。

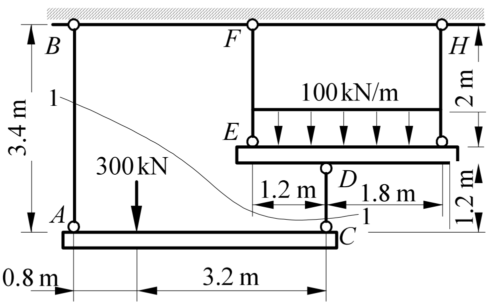
2-23 一结构受力如图所示，杆件 AB，CD，EF，GH 都由两根不等边角钢组成。已知材料的许用应力 $[\sigma]=170\,\mathrm{MPa}$，材料的弹性模量 $E=210\,\mathrm{GPa}$，杆 AC 及 EG 可视为刚性的。试选择各杆的角钢型号，并分别求点 D，C，A 处的铅垂位移 $\varDelta_{D}$，$\varDelta_{C}$，$\varDelta_{A}$。

解： 由 1-1 以下分离体：

$\sum M_{A}=0, F_{CD}\times4=300\times0.8$

得 $F_{CD}=60\,\mathrm{kN}$

$F_{AB}=300-60=240\,\mathrm{kN}$



由 1-1 以上分离体，$\sum M_{E}=0$

$$F_{HG}\times3-60\times1.2-100\times3\times\frac{3}{2}=0,$$

得 $F_{HG}=174\,\mathrm{kN}$

$$\sum F_y = 0，\quad F_{FE} = 100\times 3 + 60 - 174 = 186\,\text{kN}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{2A_{AB}} \le 170\times 10^6$$

$$A_{AB} \ge \frac{240\times 10^3}{2\times 170\times 10^6} = 7.059\times 10^{-4}\ \ \text{m}^2$$

故杆 AB 选用 2 根 90×56×5 角钢，($A = 2\times 7.212\,\text{cm}^2$)

$$A_{CD} \ge \frac{F_{CD}}{2[\sigma]} = \frac{60\times 10^3}{2\times 170\times 10^6} = 1.765\times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

故杆 CD 选用 2 根 40×25×3 角钢，（A=2×1.89cm^2）

$$A_{EF} = \frac{F_{EF}}{2[\sigma]} = \frac{186\times 10^3}{2\times 170\times 10^6} = 5.47\times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

故杆 EF 选用 2 根 70×45×5 角钢，（A=2×5.609cm^2）

$$A_{HG} = \frac{F_{HG}}{2[\sigma]} = \frac{174\times 10^3}{2\times 170\times 10^6} = 5.12\times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

故杆 HG 选用 2 根 70×45×5 角钢。

$$\varDelta_G = \frac{F_{HG} l_3}{A_{HG} E} = \frac{174\times 10^3\times 2}{2\times 5.609\times 10^{-4}\times 210\times 10^9} = 1.477\times 10^{-3}\ \text{m} = 1.477\,\text{mm}$$

$$\varDelta_E = \frac{F_{EF}}{F_{HG}}\cdot\varDelta_G = \frac{186}{174}\times 1.477\,\text{mm} = 1.579\,\text{mm}$$

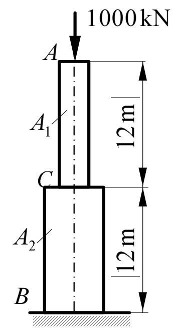
故 $$\varDelta_D = 1.477 + \frac{1.8}{3}\times(1.579 - 1.477) = 1.54\,\text{mm}$$

$$\varDelta_C = \varDelta_D + \frac{F_{CD} l_2}{EA_{CD}} = 1.54\times 10^{-3} + \frac{60\times 10^3\times 1.2}{2\times 1.89\times 10^{-4}\times 210\times 10^9}$$

$$= 2.45\times 10^{-3}\ \text{m} = 2.45\,\text{mm m}$$

$$\varDelta_A = \frac{F_{AB} l_1}{EA_{AB}} = \frac{240\times 10^3\times 3.4}{2\times 7.26\times 10^{-4}\times 210\times 10^9} = 2.68\times 10^{-3} = 2.68\,\text{mm}$$

2-24 已知混凝土的密度 $\rho = 2.25\times 10^3\ \text{kg/m}^3$，许用压应力 $[\sigma] = 2\,\text{MPa}$。试按强度条件确定图示混凝土柱所需的横截面面积 A_1 和 A_2。若混凝土的弹性模量 $E = 20\,\text{GPa}$，试求柱顶 A 的位移。



解： 上部截面 C 轴力最大。

$$F_{1\max} = 1000\times 10^3 + \rho g A_1\times 12$$

$$=1000\times 10^3 + 2.25\times 9.8\times 10^3 A_1\times 12$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1\times 10^6}{A_1} + 22\times 12\times 10^3 \le 2\times 10^6$$

故 $$A_1 \ge \frac{1\times 10^6}{10^6(2 - 2.2\times 1.2\times 10^{-1})} = 0.576\,\text{m}^2$$

$$F_{2\max} = 1000\times 10^3 + 22\times A_1\times 12\times 10^9 + 22\times A_2\times 12\times 10^3$$

$$=1152\times 10^3 + 264\times 10^3 A_2$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{1152\times 10^3 + 264\times 10^3 A_2}{A_2} \le 2\times 10^6$$

故 $\quad A_2 \geq \dfrac{1152\times10^3}{1.736\times10^6}=0.665\,\mathrm{m}^2$

$$\varDelta_A=\frac{1000\times10^3\times12}{EA_1}+\int_0^{12}\frac{(\rho gA_1y)\,\mathrm{d}\,y}{EA_1}+\frac{(1000\times10^3+\rho gA_1\times12)\times12}{EA_2}+\int_0^{12}\frac{\rho gA_2\,y\,\mathrm{d}\,y}{EA_2}$$

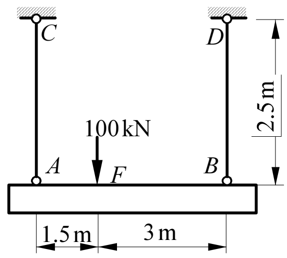
$$=\frac{1}{E}[\frac{1\times10^6\times12}{0.576}+\frac{\rho gl^2}{2}\Big|_0^{12}+\frac{(1\times10^6+22\times10^3\times0.576\times12)12}{0.665}+\frac{\rho gl^2}{2}\Big|_0^{12}]$$

$$=\frac{1}{20\times10^9}[\frac{1\times10^6\times12}{0.576}+22\times10^3\times12^2+\frac{11.52\times10^5\times12}{0.665}]=2.24\,\mathrm{mm}$$

2-25 （1）刚性梁 AB 用两根钢杆 AC，BD 悬挂，其受力如图所示。已知钢杆 AC 和 BD 的直径分别为 $d_1=25\,\mathrm{mm}$ 和 $d_2=18\,\mathrm{mm}$，钢的许用应力 $[\sigma]=170\,\mathrm{MPa}$，弹性模量 $E=210\,\mathrm{GPa}$。试校核钢杆的强度，并计算钢杆的变形 Δl_{AC}，Δl_{DB} 及 A，B 两点的铅直位移 $\varDelta_A$，$\varDelta_B$。

（2）若荷载 $F=100\,\mathrm{kN}$ 作用于 A 点处，试求 F 点的铅直位移 $\varDelta_F$。（计算结果表明，$\varDelta_F=\varDelta$ ，事实上这是线性弹性体中普遍存在的关系，称为位移互等定理。）

解：（1）$F_D=33.3\,\mathrm{kN}$，$F_{AC}=66.7\,\mathrm{kN}$

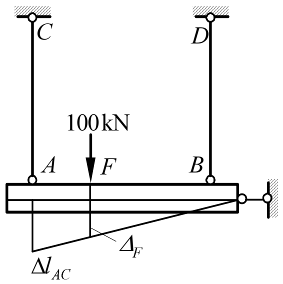


$$\sigma_{AC}=\frac{66.7\times10^3}{\frac{\pi\times25^2\times10^{-6}}{4}}=136\,\mathrm{MPa}<[\sigma] \quad 安全$$

$$\sigma_{DB}=\frac{33.3\times10^3}{\frac{\pi\times18^2}{4}\times10^{-6}}=131\,\mathrm{MPa}<[\sigma] \quad 安全$$

$$\Delta l_{AC}=\frac{136\times10^6\times2.5}{210\times10^9}=1.62\,\mathrm{mm}$$

$$\Delta l_{DB}=\frac{131\times10^6\times2.5}{210\times10^9}=1.56\,\mathrm{mm}$$



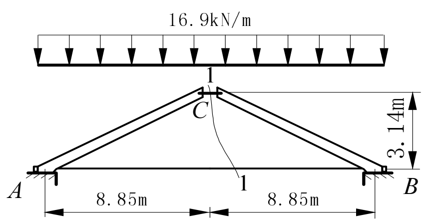
（2）$\Delta l_{AC}=\dfrac{100\times10^3\times2.5}{210\times10^9\times\dfrac{\pi\times25^2}{4}\times10^{-6}}=2.43\,\mathrm{mm}$

$$\varDelta_F=\frac{3\times2.43}{4.5}=1.62\,\mathrm{mm}$$

2-26 图示三铰拱屋架的拉杆用 16 锰钢杆制成。已知此材料的许用应力 $[\sigma]=210\,\mathrm{MPa}$，弹性模量 $E=210\,\mathrm{GPa}$。试按强度条件选择钢杆的直径，并计算钢杆的伸长。

解： $F_{\mathrm{R}A}=F_{\mathrm{R}B}=149\,\mathrm{kN}$

$\overline{AC}=\sqrt{3.14^2+8.85^2}=9.4\,\mathrm{m}$



取 1-1 以左分离体：$\sum M_C=0$

$$16.9\times\frac{8.85^2}{2}+3.14F_{AB}-149\times8.85=0$$

$$F_{AB}=210\,\mathrm{kN}$$

$$\sigma_s = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{210\times10^3}{\frac{\pi d^2}{4}\times10^{-6}} \le 210\times10^6$$

$d^2 \ge 1270$, $d \ge 35.6\,\text{mm}$

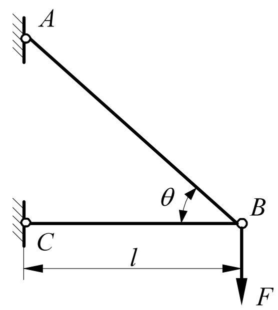
$$\Delta l_s = \sigma_s \times \frac{l_{AB}}{E} = 210\times10^6 \times \frac{17.7}{210\times10^9} = 17.7\times10^{-3}\ \text{m}$$

故 $\Delta l_s = 17.7\,\text{mm}$

2-27 简单桁架及其受力如图所示，水平杆 BC 的长度 l 保持不变，斜杆 AB 的长度可随夹角 θ 的变化而改变。两杆由同一材料制造，且材料的许用拉应力与许用压应力相等。要求两杆内的应力同时达到许用应力，且结构的总重量为最小时，试求：

（1）两杆的夹角 θ 值；

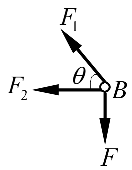
（2）两杆横截面面积的比值。



解：（1）各杆轴力，图（a）

$$\sum F_y = 0, F_1\sin\theta - F = 0, F_1 = \frac{F}{\sin\theta}$$

$$\sum F_x = 0, F_1\cos\theta + F_2 = 0, F_2 = \frac{F\cos\theta}{\sin\theta}$$



（2）两杆同时达到许用应力时的横截面面积

$$A_1 = \frac{F_1}{[\sigma]} = \frac{F}{\sin\theta[\sigma]}, A_2 = \frac{F_2}{[\sigma]} = \frac{F\cos\theta}{\sin\theta[\sigma]}$$

（3）结构具有最小重量时的 θ 值，结构的总重量：

$$W = W_1 + W_2 = \rho g A_1 l_1 + \rho g A_2 l_2 = \frac{\rho g F l}{[\sigma]}\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\rho g F l}{[\sigma]}\left(\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) = 0$$

$$\tan^2\theta - 2 = 0$$

$$\theta = \arctan\sqrt{2} = 54^\circ 44'$$

(4) 两杆横截面积之比

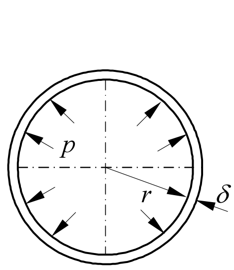
许用拉应力与许用压应力相等，故横截面积之比等于其轴力之比，即：

$$\frac{A_{AB}}{A_{BC}} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{3}$$

2-28 一内半径为 r，厚度为 $\delta(\delta \le \frac{r}{10})$，宽度为 b 的薄壁圆环。在圆环的内表面承受均匀分布的压力 p（如图），试求：

（1）由内压力引起的圆环径向截面上的应力；

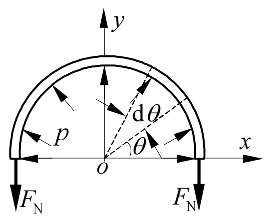
（2）由内压力引起的圆环半径的伸长。



解：（1）径向截面上的内力

用截面法得受力图（a）。任取微弧段 $r\,\mathrm{d}\theta$，作用在该微段上的径向力为

$$\mathrm{d}F = p\cdot br\,\mathrm{d}\theta$$



由 $\sum F_y = 0$，得

$$2F_N = \int_0^{\pi} pbr\,\mathrm{d}\theta\cdot\sin\theta = 2pbr，\quad F_N = pbr$$

（2）径向截面上应力

$$\sigma = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} = \frac{pbr}{\delta b} = \frac{pr}{\delta}$$

（3）圆环可看成是宽度为 b，厚度为 δ，长度为 $2\pi(r + \frac{\delta}{2})$，并受轴力 F_{N} 的平板条，因此圆环沿圆长方向的伸展为：

$$\delta_{\mathrm{c}} = \frac{F_{\mathrm{N}} l}{EA} = \frac{pbr \cdot 2\pi(r + \frac{\delta}{2})}{E \cdot b\delta} = \frac{2\pi\ pr^2}{E\delta}(1 + \frac{\delta}{2r})$$

半径伸长：

$$\delta_{\mathrm{r}} = \frac{\delta_{\mathrm{c}}}{2\pi} = \frac{pr^2}{E\delta}(1 + \frac{\delta}{2r})$$

因是薄壁圆环，故 $\frac{\delta}{2r} << 1$，得

$$\delta_{\mathrm{r}} = \frac{pr^2}{E\delta}$$