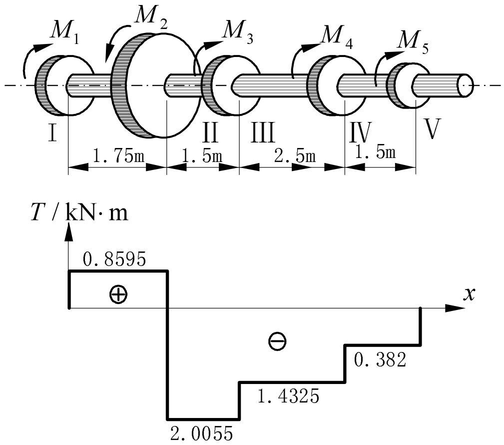
第三章 扭转

3-1 一传动轴作匀速转动，转速$n = 200\,\mathrm{r/min}$，轴上装有五个轮子，主动轮Ⅱ输入的功率为60kW，从动轮，Ⅰ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ依次输出18kW，12kW,22kW和8kW。试作轴的扭矩图。



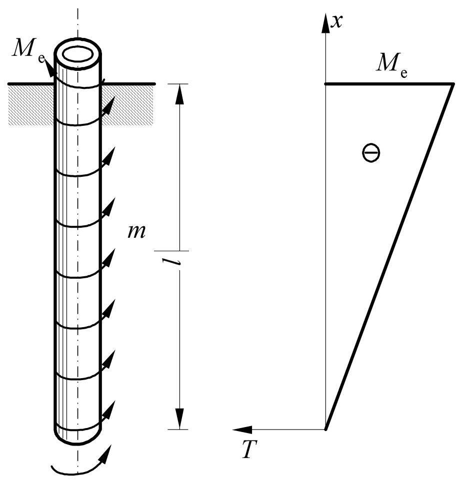
解：$M_1 = 9.55 \times \dfrac{18}{200} = 0.8595\,\mathrm{kN \cdot m}$

$$M_3 = 9.55 \times \frac{12}{200} = 0.5730\,\mathrm{kN \cdot m}$$

$$M_4 = 9.55 \times \frac{22}{200} = 1.0505\,\mathrm{kN \cdot m}$$

$$M_5 = 9.55 \times \frac{8}{200} = 0.3820\,\mathrm{kN \cdot m}$$

3-2 一钻探机的功率为 10kW，转速$n = 180\,\mathrm{r/min}$。钻杆钻入土层的深度$l = 40\,\mathrm{m}$。如土壤对钻杆的阻力可看作是均匀分布的力偶，试求分布力偶的集度m，并作钻杆的扭矩图。



解：$T = 9.55 \times \dfrac{10}{180}$

$$= 0.5305\ \ \mathrm{kN \cdot m}$$

$$m = \frac{T}{l} = \frac{0.5305}{40}$$

$$= 0.0133\,\mathrm{kN \cdot m/m}$$

3-3 圆轴的直径$d = 50\,\mathrm{mm}$，转速为$120\,\mathrm{r/min}$。若该轴横截面上的最大切应力等于$60\,\mathrm{MPa}$，试问所传递的功率为多大？

解：$\tau_{\max} = \dfrac{T}{W_{\mathrm{p}}}$ 故$T = \tau_{\max} \times \dfrac{\pi (50)^3}{16} \times 10^{-9}$

即 $T = 60 \times 10^6 \times \dfrac{\pi \times 1.25 \times 10^5}{16 \times 10^9} = 1470\,\mathrm{N \cdot m}$

又 $T = 9550 \times \dfrac{P}{120} = 1470$

故 $P = \dfrac{1470 \times 120}{9550} = 18.47\,\mathrm{kw}$

3-4　空心钢轴的外径$D = 100\,\text{mm}$，内径$d = 50\,\text{mm}$。已知间距为$l = 2.7\,\text{m}$的两横截面的相对扭转角$\varphi = 1.8^\circ$，材料的切变模量$G = 80\,\text{GPa}$。试求：

（1）轴内的最大切应力；

（2）当轴以$n = 80\,\text{r/min}$的速度旋转时，轴所传递的功率。

解：$\varphi = \dfrac{Tl}{GI_\text{P}} \times \dfrac{180}{\pi}$，故$T = \dfrac{\varphi G I_\text{P} \pi}{180 l}$

$$\tau_{\max} = \frac{T \times \dfrac{D}{2}}{I_\text{P}} = \frac{\varphi G I_\text{p} T \times \dfrac{F}{2}}{I_\text{P} \times 180 l} = \frac{\varphi G \pi D}{2l \times 180} = \frac{1.8 \times 8.0 \times 10^{10} \pi \times 0.1}{2 \times 2.7 \times 180} = 46.6\,\text{MPa}$$

$$T = \frac{1.8 \times 8 \times 10^{10}}{180 \times 2.7} \times \frac{\pi^2 (100^4 - 50^4)}{32 \times 10^{12}} = 9550 \frac{P}{80}$$

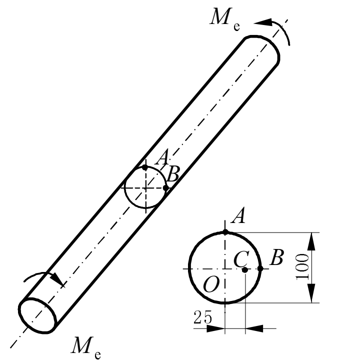
则　$$P = \frac{1.8 \times 8 \times 10^{10} \times 80}{9550 \times 180 \times 2.7} \times \frac{\pi^2 \times 93.75 \times 10^6}{32 \times 10^{12}} = 71.8\,\text{kW}$$

3-5　实心圆轴的直径$d = 100\,\text{mm}$，长$l = 1\,\text{m}$，其两端所受外力偶矩$M_\text{e} = 14\,\text{kN}\cdot\text{m}$，材料的切变模量$G = 80\,\text{GPa}$。试求：

（1）最大切应力及两端截面间的相对扭转角；

（2）图示截面上A，B，C三点处切应力的数值及方向；

（3）C点处的切应变。



解：$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\text{p}} = \frac{14 \times 10^3}{\dfrac{\pi \times 100^3}{16} \times 10^{-9}} = 71.4\,\text{MPa}$$

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_\text{P}} = \frac{14 \times 10^3 \times 1}{8 \times 10^{10} \dfrac{\pi \times 100^4}{32} \times 10^{-12}} \times \frac{180}{\pi} = 1.02^\circ$$

$$\tau_A = \tau_B = \tau_{\max} = 71.4\,\text{MPa}$$

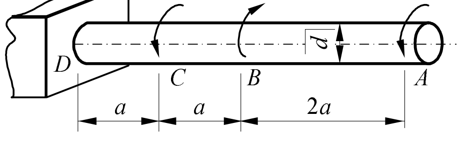
$$\tau_C = \tau_{\max} \frac{25}{d/2} = 71.4 \times \frac{25}{50} = 35.7\,\text{MPa}$$

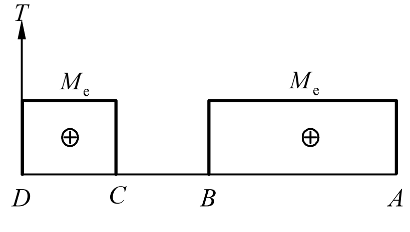
$$\gamma_C = \frac{\tau_C}{G} = 0.446 \times 10^{-3}$$

3-6　图示一等直圆杆，已知$d = 40\,\text{mm}$，$a = 400\,\text{mm}$，$G = 80\,\text{GPa}$，$\varphi_{DB} = 1^\circ$。试求：

（1）最大切应力；

（2）截面A相对于截面C的扭转角。





解：（1）由已知得扭矩图（a）

$$\varphi_{DB} = \varphi_{DC} + \varphi_{CB} = \varphi_{DC} = \frac{M_\text{e} a}{GI_\text{P}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 1^\circ$$

$$\frac{M_\text{e}}{I_\text{P}} = \frac{\pi G}{180 a}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_\text{e}}{I_\text{P}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi G d}{360 a} = \frac{\pi \times 80 \times 10^9 \times 40 \times 10^{-3}}{360 \times 400 \times 10^{-3}}$$
$$= 69.8 \times 10^6 = 69.8\,\text{MPa}$$

（2）$\varphi_{AC}=\varphi_{AB}=\dfrac{M_e\cdot 2a}{GI_P}\cdot\dfrac{180^\circ}{\pi}=2^\circ$

3-7　某小型水电站的水轮机容量为 50kW，转速为 300r/min，钢轴直径为 75mm，若在正常运转下且只考虑扭矩作用，其许用切应力$[\tau]=20\,\text{MPa}$。试校核轴的强度。

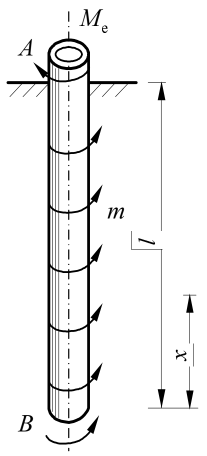
解： $T=9550\dfrac{P}{n}$

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_P}=\frac{9550\dfrac{50}{300}}{\dfrac{\pi\times75^3\times10^{-9}}{16}}=\frac{9550\times50\times16}{300\pi\times75^3\times10^{-9}}=19.2\times10^6=19.2\,\text{MPa}<[\tau]$$

故该轴强度满足。

3-8　已知钻探机钻杆(参看题 3-2 图)的外径$D=60\,\text{mm}$，内径$d=50\,\text{mm}$，功率$P=7.355\,\text{kW}$，转速$n=180\,\text{r/min}$，钻杆入土深度$l=40\,\text{m}$，钻杆材料的$G=80\,\text{GPa}$，许用切应力$[\tau]=40\,\text{MPa}$。假设土壤对钻杆的阻力是沿长度均匀分布的，试求：

（1）单位长度上土壤对钻杆的阻力矩集度 m；
（2）作钻杆的扭矩图，并进行强度校核；
（3）两端截面的相对扭转角。



解： $M_e=9550\times\dfrac{7.355}{180}=0.390\,\text{kN}\cdot\text{m}$

$m=\dfrac{M_e}{l}=\dfrac{0.390}{40}=0.00976\,\text{kN}\cdot\text{m/m}$

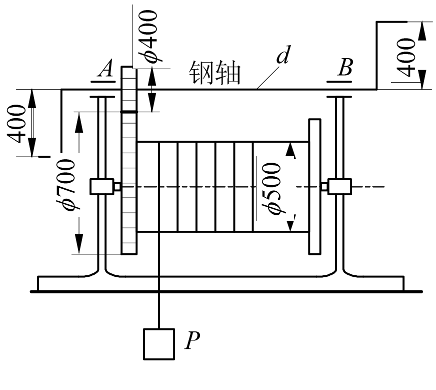
$$\tau_{\max}=\frac{TD/2}{\dfrac{\pi(D^4-d^4)}{32}}=\frac{390\times32\times30\times10^{-3}}{\pi(60^4-50^4)\times10^{-12}}$$

$=17.76\,\text{MPa}<[\tau]$　安全

$$\varphi=\int_0^l\frac{mx\,\mathrm{d}x}{GI_p}=\frac{ml^2}{2GI_p}=\frac{9.76\times40^2}{2\times80\times10^9\times\dfrac{\pi(60^4-50^4)}{32}\times10^{-12}}\times\frac{180^\circ}{\pi}=8.49^\circ$$

3-9　图示绞车由两人同时操作，若每人在手柄上沿旋转的切向作用力 F 均为 0.2kN，已知轴材料的许用切应力$[\tau]=40\,\text{MPa}$，试求：

（1）AB 轴的直径；
（2）绞车所能吊起的最大重量。



解： 摇手柄　$T=F\times400\times10^{-3}$

钢轴内

$T=400P\times10^{-3}=400\times10^{-3}\times0.2\times10^3=80\,\text{N}\cdot\text{m}$

$$\tau_{\max}=\frac{T}{\dfrac{\pi d^3}{16}}\le[\tau]$$

即：$\dfrac{80\times16}{\pi\times d^3\times10^{-9}}\le40\times10^6$

AB 轴直径: $d = \sqrt[3]{\dfrac{80\times16\times10^9}{\pi\times40\times10^6}} = 21.6\,\text{mm}$

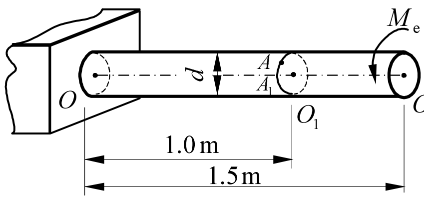
Ⅰ轮的切向力 $F_t = \dfrac{2F\times400\times10^{-3}}{200\times10^{-3}} = 800\,\text{N}$

Ⅱ轮的外力偶 $M = 800\times350\times10^{-3}$

故 $P\times250\times10^{-3} = 800\times350\times10^{-3}$

故 $P = \dfrac{800\times350}{250} = 1.12\,\text{kN}$

3-10 直径 $d = 50\,\text{mm}$ 的等直圆杆，在自由端截面上承受外力偶矩 $M_e = 12\,\text{kN}\cdot\text{m}$，而在圆杆表面上的 A 点将移动到 A_1 点，如图所示。已知 $\Delta s = \widehat{AA_1} = 6.3\,\text{mm}$，圆杆材料的弹性模量 $E = 200\,\text{GPa}$，试求泊松比 ν。(提示：各向同性体材料的三个弹性常数 E, G, ν 间存在 $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ 的关系。)



解：全杆扭矩 $T = M_e$

$$\varphi_{OO_1} = \frac{M_e l_{OO_1}}{GI_p},\quad \varphi_{OO_1}\cdot\frac{d}{2} = \Delta s$$

$$\frac{M_e l_{OO_1}}{GI_p}\cdot\frac{d}{2} = \Delta s$$

$$G = \frac{M_e l_{OO_1}\cdot d}{2\Delta s I_p} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\nu = \frac{E\Delta s I_P}{M_e l_{OO_1} d} - 1 = \frac{E\Delta s\dfrac{\pi d^4}{32}}{M_e l_{OO_1} d} - 1$$

$$= \frac{\pi E\Delta s d^3}{32 M_e l_{OO_1}} - 1 = \frac{\pi\times200\times10^9\times6.3\times10^{-3}\times50^3\times10^{-9}}{32\times12\times10^3\times1.0} - 1 = 1.2885 - 1 \approx 0.289$$

3-11 直径 $d = 25\,\text{mm}$ 的钢圆杆，受轴向拉力 $60\,\text{kN}$ 作用时，在标距为 200mm 的长度内伸长了 0.113mm。当其承受一对扭转外力偶矩 $M_e = 0.2\,\text{kN}\cdot\text{m}$ 时，在标距为 200 mm 的长度内相对扭转了 0.732° 的角度。试求钢材的弹性常数 E，G 和 ν。

解：$\Delta l = \dfrac{F\cdot l}{EA}, E = \dfrac{F\cdot l}{A\Delta l}$

$$E = \frac{60\times10^3\times200\times10^{-3}}{0.113\times\dfrac{\pi\times25^2}{4}\times10^{-9}} = 216\,\text{GPa}$$

$$G = \frac{T\cdot l}{\varphi I_p}$$

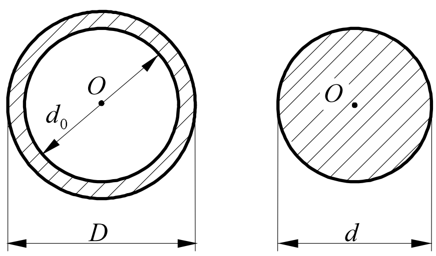
$$G=\frac{0.2\times10^{3}\times200\times10^{-3}\times57.3}{0.732\times\dfrac{\pi\times(25)^{4}}{32}\times10^{-12}}=81.8\,\text{GPa}\text{，}G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

即 $81.8\times10^{9}=\dfrac{216\times10^{9}}{2(1+\nu)}$

则 $1+\nu=\dfrac{216}{81.8\times2}$

$$\nu=\frac{216}{163.6}-1=1.320-1=0.320$$

3-12 长度相等的两根受扭圆轴，一为空心圆轴，一为实心圆轴，两者材料相同，受力情况也一样。实心轴直径为 d；空心轴外径为 D，内径为 d_0，且 $\dfrac{d_0}{D}=0.8$。试求当空心轴与实心轴的最大切应力均达到材料的许用切应力（$\tau_{\max}=[\tau]$），扭矩 T 相等时的重量比和刚度比。



解： 重量比=$\dfrac{W_{空}}{W_{实}}=\dfrac{\dfrac{\pi(D^2-d^2)}{4}}{\dfrac{\pi d^2}{4}}$

$$=\frac{D^2-(0.8D)^2}{d^2}=\frac{D^2}{d^2}\times0.36$$

因为 $\tau_{\max空}=\tau_{\max实}$

即 $\dfrac{T}{\dfrac{\pi D^3(1-0.8^4)}{16}}=\dfrac{T}{\dfrac{\pi d^3}{16}}$

故 $\dfrac{D^3}{d^3}=\dfrac{1}{0.59};\dfrac{D}{d}=\dfrac{1}{0.84}$

故 $\dfrac{W_{空}}{W_{实}}=\dfrac{D^2}{d^2}\times0.36=\dfrac{1}{0.84^2}\times0.36=0.51$

刚度比=$\dfrac{GI_{空}}{GI_{实}}=\dfrac{\dfrac{\pi(D^4-d_0^4)}{32}}{\dfrac{\pi d^4}{32}}=\dfrac{D^4(1-0.8^4)}{d^4}$

$$=0.59\frac{D^4}{d^4}=0.59\times\frac{1}{(0.84)^4}=\frac{0.59}{0.496}=1.19$$

3-13 全长为 l，两端面直径分别为 d_1，d_2 的圆锥形杆，在两端各承受一外力偶矩 M_{e}，如图所示。试求杆两端面间的相对扭转角。

解： $D_x=d_1+\dfrac{d_2-d_1}{l}x$ ， $T=M\mathrm{e}$

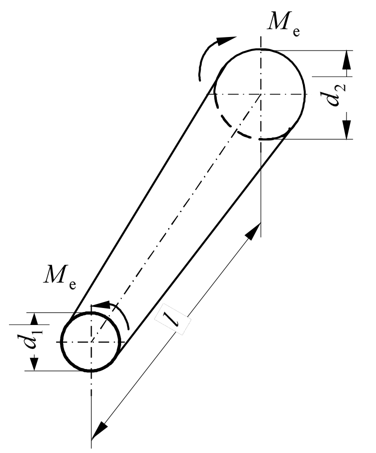
$$\varphi=\int_0^l \frac{T\,\mathrm{d}x}{G\dfrac{\pi[d_1+\dfrac{d_2-d_2}{l}x]^4}{32}}$$

$$=\frac{32Tl^4}{G\pi}\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{[d_1 l+(d_2-d_1)x]^4}$$

$$=\frac{32Tl^4}{G\pi(d_2-d_1)}\int_0^l \frac{\mathrm{d}[(d_1 l+(d_2-d_1)x]}{[d_1 l+(d_2-d_1)x]^4}$$

$$=\frac{32Tl^4}{G\pi(d_2-d_1)}\times\frac{-1}{3[d_1 l+(d_2-d_1)x]^3}\Big|_0^l$$

$$=\frac{32Tl^4}{3G\pi(d_2-d_1)}[\frac{-1}{(d_2 l)^3}-\frac{-1}{(d_1 l)^3}]=\frac{32Tl}{3G\pi}\cdot\frac{d_2^2+d_1 d_2+d_1^2}{d_2^3 d_1^3}$$



3-14 已知实心圆轴的转速 $n=300\,\mathrm{r/min}$，传递的功率 $P=330\,\mathrm{kW}$，轴材料的许用切应力 $[\tau]=60\,\mathrm{MPa}$，切变模量 $G=80\,\mathrm{GPa}$。若要求在 2m 长度的相对扭转角不超过1°，试求该轴的直径。

解：$T=9550\times\dfrac{330}{300}=10.5\,\mathrm{kN\cdot m}$

按强度要求：

$$\tau=\frac{10.5\times10^3}{\dfrac{\pi d^3}{16}\times10^{-9}}\le 60\times10^6$$

$$d=\sqrt[3]{\frac{16\times10.5\times10^{12}}{\pi\times60\times10^6}}=99.5\,\mathrm{mm}$$

按刚度要求：$\varphi=\dfrac{10.5\times10^3\times2\times180^\circ}{80\times10^9\times\dfrac{\pi d^4}{32}\times\pi\times10^{-12}}\le1^\circ$

$$d=\sqrt[4]{\frac{64\times10.5\times180\times10^{15}}{80\times10^9\times\pi^2}}=111\,\mathrm{mm}$$

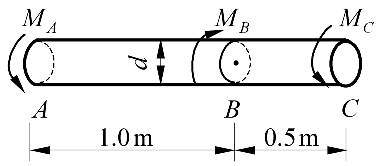
故该轴直径选用 111mm。

3-15 图示等直圆杆，已知外力偶矩 $M_A=2.99\,\mathrm{kN\cdot m}$，$M_B=7.20\,\mathrm{kN\cdot m}$，$M_C=4.21\,\mathrm{kN\cdot m}$ 许用切应力 $[\tau]=70\,\mathrm{MPa}$，许可单位长度扭转角 $[\varphi']=1(^\circ)/\mathrm{m}$，切变模量 $G=80\,\mathrm{GPa}$。试确定该轴的直径 d。

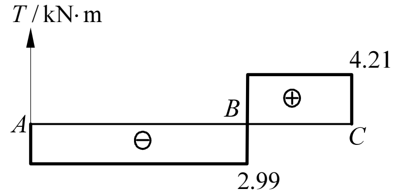
解：扭矩图如图（a）

（1）考虑强度，最大扭矩在 BC 段，且 $T_{\max}=4.21\,\mathrm{kN\cdot m}$

$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_P}=\frac{4.21\times10^3}{\dfrac{\pi d_1^3}{16}}\le70\times10^6$$



$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16\times 4.21}{70\pi\times 10^3}} = 0.0674\,\text{m} = 67.4\,\text{mm} \qquad （1）$$



(2）考虑变形

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_{\text{P}}}$$

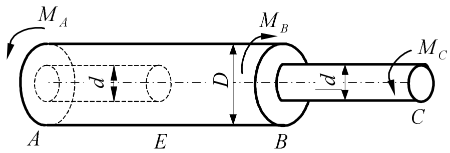
$$\frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_{\text{P}}}\times\frac{180}{\pi}\leq 1$$

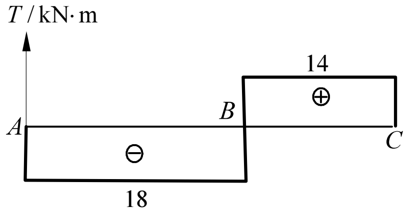
$$\frac{T}{G\cdot\frac{\pi d_2^4}{32}}\cdot\frac{180}{\pi}\leq 1$$

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32\times 180T}{\pi^2 G}} = \sqrt[4]{\frac{32\times 180\times 4.21\times 10^3}{\pi^2\times 80\times 10^9}} = 0.0744\,\text{m} = 74.4\,\text{mm} \qquad （2）$$

比较式（1)、（2)，取$d\geq 74.4\,\text{mm}$

3-16　阶梯形圆杆，AE 段为空心，外径 D=140mm，内径 d=100mm；BC 段为实心，直径 d=100mm。外力偶矩 $M_A = 18\,\text{kN·m}$，$M_B = 32\,\text{kN·m}$，$M_C = 14\,\text{kN·m}$。已知：$[\tau] = 80\,\text{MPa}$，$[\varphi'] = 1.2(^\circ)/\text{m}$，$G = 80\,\text{GPa}$。试校核该轴的强度和刚度。





解：扭矩图如图（a）

（1）强度

$$\tau_{BC\max} = \frac{T_1}{W_{\text{p1}}} = \frac{T_1}{\frac{\pi d_3}{16}}$$

$$= \frac{16T_1}{\pi d_3} = \frac{16\times 14\times 10^3}{\pi\times 0.1^3} = 71.3\times 10^6 = 71.3\ \text{MPa} < [\tau] = 80\ \text{MPa}$$

$$\tau_{AB\max} = \frac{T_2}{W_{\text{p2}}} = \frac{T_2}{\frac{\pi D^3}{16}[1-(\frac{d}{D})^4]} = \frac{18\times 10^3\times 16}{\pi\times 140^3\times 10^{-9}\times[1-(\frac{5}{7})^4]}$$

$$= 45.1\times 10^6 = 45.1\text{MPa} < [\tau]$$

故强度满足。

（2）刚度

$$BC\text{段：}\frac{\varphi}{l} = \frac{T_1}{GI_{\text{p1}}}\times\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{14\times 10^3\times 180^\circ}{80\times 10^9\times\frac{\pi\times 0.1^4}{32}\cdot\pi} = 1.02^\circ < [\varphi'] = 1.2\ (^\circ)/\text{m}$$

$$AE\text{段：}\frac{\varphi}{l} = \frac{T_2}{GI_{\text{p2}}}\times\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{18\times 10^3\times 180}{80\times 10^9\times\frac{\pi\times 0.14^4}{32}\cdot[1-(\frac{5}{7})^4]\pi} = 0.462^\circ < [\varphi']$$

AE 段刚度满足，显然 EB 段刚度也满足。

3-17　习题 3-1 中所示的轴，材料为钢，其许用切应力$[\tau]=20\,\text{MPa}$，切变模量$G=80\,\text{GPa}$，许可单位长度扭转角$[\varphi']=0.25(^\circ)/\text{m}$。试按强度及刚度条件选择圆轴的直径。

解：由 3-1 题得：$T_{\max}=2.006\,\text{kN}\cdot\text{m}$

$$\tau_{\max}=\frac{2.006\times10^3}{\frac{\pi}{16}d^3\times10^{-9}}\le 20\times10^6$$

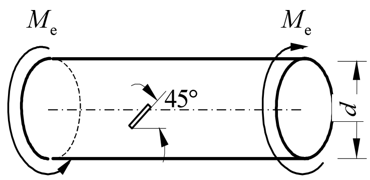
$$d\ge\sqrt[3]{\frac{2.006\times16\times10^{12}}{\pi\times20\times10^6}}=80\,\text{mm}$$

$$\varphi'=\frac{2.006\times10^3\times32\times180^\circ}{8\times10^{10}\pi\,d^4\pi\times10^{-12}}=0.25^\circ\,/\text{m}$$

$$d\ge\sqrt[4]{\frac{2.006\times32\times180\times10^5}{8\times10^{10}\times\pi^2\times0.25}}=87.5\,\text{mm}$$

故选用$d=87.5\,\text{mm}$。

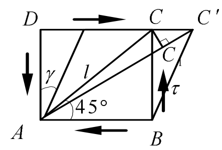
3-18　一直径为 d 的实心圆杆如图，在承受扭转力偶矩M_e后，测得圆杆表面与纵向线成45°方向上的线应变为ε。试导出以M_e，d和ε表示的切变模量G的表达式。



解：圆杆表面贴应变片处的切应力为

$$\tau=\frac{M_\text{e}}{W_\text{p}}=\frac{16M_\text{e}}{\pi\,d^3}$$

圆杆扭转时处于纯剪切状态，图（a）。



切应变　$\gamma=\dfrac{\tau}{G}=\dfrac{16M_\text{e}}{\pi\,d^3G}$　　（1）

对角线方向线应变：

$$\varepsilon=\frac{C_1C'}{l}=\frac{CC'\cos45^\circ}{l}$$

$$=\frac{\gamma l\cos45^\circ\cdot\cos45^\circ}{l}=\gamma\cdot\cos^2 45^\circ=\frac{\gamma}{2}$$

$$\gamma=2\varepsilon\qquad（2）$$

式（2）代入（1）：$2\varepsilon=\dfrac{16M_\text{e}}{\pi\,d^3G}$

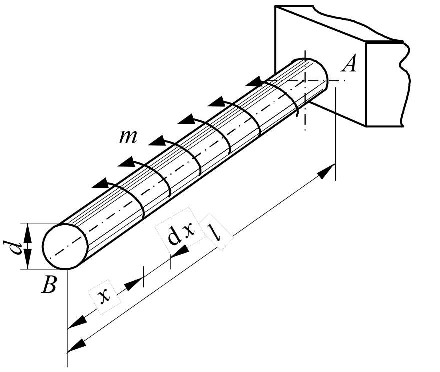
$$G=\frac{8M_\text{e}}{\pi\,d^3\varepsilon}$$

3-19　有一壁厚为 25mm、内径为 250mm 的空心薄壁圆管，其长度为 1m，作用在轴两端面内的外力偶矩为 $180\,\text{kN}\cdot\text{m}$。试确定管中的最大切应力，并求管内的应变能。已知材料的切变模量$G=80\,\text{GPa}$。

解：$\tau_{\max}=\dfrac{180\times10^3\times150\times10^{-3}}{\dfrac{\pi(300^4-250^4)}{32}\times10^{-12}}=\dfrac{32\times180\times150\times10^{12}}{\pi\times42\times10^8}=65.6\,\text{MPa}$

$$V_{\varepsilon}=\frac{T^2 l}{2GI_{\mathrm{p}}}=\frac{180\times180\times10^6\times1}{2\times8\times10^{10}\times\dfrac{\pi(300^4-250^4)}{32}\times10^{-12}}=0.492\,\mathrm{kN\cdot m}$$

3-20　一端固定的圆截面杆 AB，承受集度为 m 的均布外力偶作用，如图所示。试求杆内积蓄的应变能。已知材料的切变模量为 G。



解： x 截面上的扭矩为 $T(x)=mx$

$$V_{\varepsilon}=\int_0^l \frac{1}{2}\cdot\frac{(mx)^2\,\mathrm{d}x}{GI_{\mathrm{p}}}=\frac{m^2}{2GI_{\mathrm{p}}}\int_0^l x^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{m^2}{2GI_{\mathrm{p}}}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^l$$

$$=\frac{m^2 l^3}{6GI_{\mathrm{p}}}$$

3-21　簧杆直径 $d=18\,\mathrm{mm}$ 的圆柱形密圈螺旋弹簧，受拉力 $F=0.5\,\mathrm{kN}$ 作用，弹簧的平均直径为 $D=125\,\mathrm{mm}$，材料的切变模量 $G=80\,\mathrm{GPa}$。试求：

（1）簧杆内的最大切应力；

（2）为使其伸长量等于 6mm 所需的弹簧有效圈数。

解： $\tau_{\max}=k\dfrac{16FR}{\pi d^3}$，$c=\dfrac{D}{d}=\dfrac{125}{18}=6.95$

$$k=\frac{4c+2}{4c-3}=\frac{4\times6.95+2}{4\times6.95-3}=\frac{27.7}{24.7}=1.2$$

故　$\tau_{\max}=1.2\dfrac{16\times0.5\times10^3\times62.5\times10^{-3}}{\pi\times(18)^3\times10^{-9}}=32.8\,\mathrm{MPa}$

因为 $\varDelta=\dfrac{64FR^3 n}{Gd^4}$

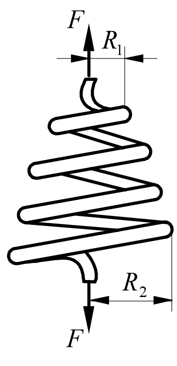
$$\frac{6}{1000}=\frac{64\times0.5\times10^3\times(62.5)^3\times10^{-9}\,n}{8\times10^{10}\times(18)^4\times10^{-12}}$$

故　$n=\dfrac{6\times8\times10.55\times10^5}{64\times0.5\times2.44\times10^5}=6.5$ 圈

3-22　一圆锥形密圈螺旋弹簧承受轴向拉力 F 如图，簧丝直径 d=10mm，上端面平均半径 $R_1=5\,\mathrm{cm}$，下端面平均半径 $R_2=10\,\mathrm{cm}$，材料的许用切应力 $[\tau]=500\,\mathrm{MPa}$，切变模量为 G，弹簧的有效圈数为 n。试求：

（1）弹簧的许可拉力；

（2）证明弹簧的伸长 $\Delta l=\dfrac{16Fn}{Gd^4}(R_1+R_2)(R_1^2+R_2^2)$。



解：（1）许可拉力

最大扭矩发生在下底处，$T_{\max}=FR_2$

由强度条件，$T_{\max}\le[\tau]W_{\mathrm{p}}$

故 $$F \le \frac{[\tau]W_{\mathrm{p}}}{R_2} = \frac{500\times10^6\times\dfrac{\pi}{16}\times10^3\times10^{-9}}{0.1} = \frac{500\pi}{16\times0.1} = 981\,\mathrm{N} = [F]$$

（2）证明：

弹簧圈任一截面处的半径 R 与极角 α 的关系为

$$R = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}$$

任一截面上的扭矩为 $$T = FR = F[R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}]$$

任一截面处微段扭转所引起的伸长为

$$\mathrm{d}\Delta l = \frac{T\,\mathrm{d}x}{GI_{\mathrm{p}}}R = \frac{32FR^3}{G\pi d^4}\mathrm{d}\alpha \qquad （\mathrm{d}x = R\,\mathrm{d}\alpha）$$

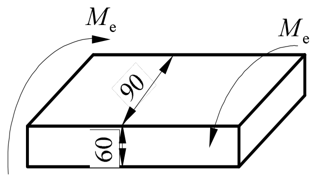
$$\Delta l = \int_l \mathrm{d}\Delta l = \frac{32F}{G\pi d^4}\int_0^{2\pi n}[R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\alpha}{2\pi n}]^3\,\mathrm{d}\alpha = \frac{16Fn}{Gd^4}（R_1 + R_2)(R_1^2 + R_2^2)$$

3-23 图示矩形截面钢杆承受一对外力偶矩 $M_{\mathrm{e}} = 3\,\mathrm{kN\cdot m}$。已知材料的切变模量 $G = 80\,\mathrm{GPa}$，试求：

（1）杆内最大切应力的大小、位置和方向；

（2）横截面矩边中点处的切应力；

（3）杆的单位长度扭转角。



解： $T = M_{\mathrm{e}}$，$I_{\mathrm{t}} = \alpha b^4$，$W_{\mathrm{t}} = \beta b^3$

$$\frac{h}{b} = \frac{90}{60} = 1.5$$ 由表得

$$\alpha = 0.294, \beta = 0.346, \nu = 0.858$$

$$I_{\mathrm{t}} = 0.294\times60^4\times10^{-12} = 381\times10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

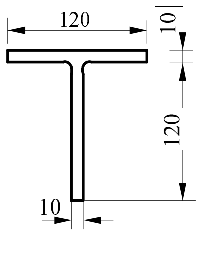
$$W_{\mathrm{t}} = 0.346\times60^3\times10^{-9} = 74.7\times10^{-6}\,\mathrm{m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_{\mathrm{t}}} = \frac{3000}{74.7\times10^{-6}} = 40.2\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau'_{\max} = \nu\tau_{\max} = 0.858\times40.2 = 34.4\ \mathrm{MPa}$$

$$\varphi' = \frac{3000}{80\times10^9\times381\times10^{-8}}\times\frac{180^\circ}{\pi} = 0.564^\circ\,/\mathrm{m}$$

3-24 图示 T 形薄壁截面杆的长度 $l = 2\,\mathrm{m}$，在两端受扭转力偶矩作用，材料的切变模量 $G = 80\,\mathrm{GPa}$，杆的横截面上的扭矩为 $T = 0.2\,\mathrm{kN\cdot m}$。试求杆在纯扭转时的最大切应力及单位长度扭转角。



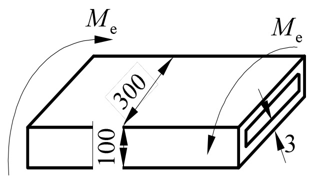
解： $$I_{\mathrm{t}} = \sum\frac{1}{3}h_i\delta_i^{\,3} = \frac{2}{3}\times120\times10^3\times10^{-12} = 80\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{M\delta_{\max}}{I_{\mathrm{t}}} = \frac{0.2\times10^3\times10\times10^{-3}}{80\times10^{-9}} = 25\,\mathrm{MPa}$$

$$\varphi' = \frac{T}{\eta GI_{\mathrm{t}}} = \frac{200}{1.15\times8\times10^{10}\times80\times10^{-9}}\times\frac{180^\circ}{\pi} = 1.56^\circ\,/\,\mathrm{m}$$

该 T 形截面 $\eta = 1.15$ 。

3-25　图示为一闭口薄壁截面杆的横截面，杆在两端承受一对外力偶矩 M_{e} 。材料的许用切应力 $[\tau] = 60\,\mathrm{MPa}$ 。试求：



（1）按强度条件确定其许可扭转力偶矩 $[M_{\mathrm{e}}]$；

（2）若在杆上沿母线切开一条缝，则其许可扭转力偶矩 $[M_{\mathrm{e}}]$将减至多少？

解：闭口薄壁杆：$\tau_{\max} = \dfrac{T}{2A\delta} = \dfrac{T}{2(300-3)(100-3)\times 3\times 10^{-9}} \le 60\times 10^{6}$

$$T = 10\times 10^{6}\times 6\times 297\times 97 = 10.35\,\mathrm{kN\cdot m}$$

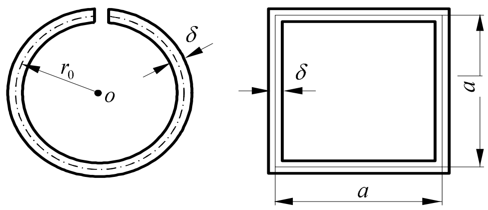
开口薄壁杆：$\tau_{\max} = \dfrac{T\delta}{\dfrac{1}{3}\sum h\delta^{3}} = \dfrac{T\times 3\times 10^{3}}{\dfrac{2}{3}(300\times 3^{3} + 94\times 3^{3})\times 10^{-12}} \le 60\times 10^{6}$

$$T = \frac{60\times 6\times 394\times 10^{6}}{1\times 10^{3}} = 142\,\mathrm{N\cdot m}$$

3-26　图示为薄壁杆的两种不同形状的横截面，其壁厚及管壁中线的周长均相同。两杆的长度和材料也相同，当在两端承受相同的一对扭转外力偶矩时，试求：

（1）最大切应力之比；

（2）相对扭转角之比。



解：（1）$\tau_{\max开圆} = \dfrac{T}{\dfrac{1}{3}h\delta^{2}} = \dfrac{3T}{4a\delta^{2}}$

$$\tau_{\max闭方} = \frac{T}{2a^{2}\delta}$$

开口环形截面：$\dfrac{\tau_{\max开圆}}{\tau_{\max闭方}} = \dfrac{3T/(4a\delta^{2})}{\dfrac{T}{2a^{2}\delta}} = \dfrac{3a}{2\delta}$

（2）$\varphi_{开圆} = \dfrac{Tl}{G\dfrac{1}{3}\times 4a\delta^{3}} = \dfrac{3Tl}{4Ga\delta^{3}}$，　　$\varphi_{闭方} = \dfrac{Tls}{4G\delta A_{2}^{2}} = \dfrac{Tl\cdot 4a}{4G\delta a^{4}}$

闭口箱形截面：$\dfrac{\varphi_{开圆}}{\varphi_{闭方}} = \dfrac{3Tl}{G4a\delta^{3}}\cdot\dfrac{4G\delta a^{4}}{Tl\cdot 4a} = \dfrac{3a^{2}}{4\delta^{2}}$