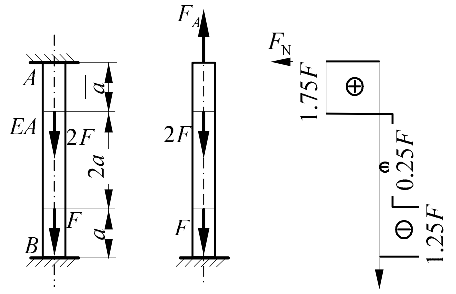
第六章　简单超静定问题

6-1　试作图示等直杆的轴力图。



解：取消 A 端的多余约束，以 F_{FA} 代之，则 $\Delta l_{FA}=\dfrac{F_{FA}\cdot 4a}{EA}$（伸长），在外力作用下杆产生缩短变形。

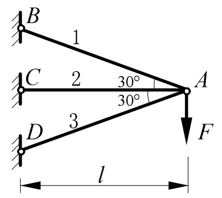
$$\Delta l_F=\frac{2F3a}{EA}+\frac{F\cdot a}{EA}$$

因为固定端不能移动，故变形协调条件为：$\Delta l_{FA}=\Delta l_F$

故 $\dfrac{F_{FA}\cdot 4a}{EA}=\dfrac{2F\cdot 3a}{EA}+\dfrac{F\cdot a}{EA}$

故 $F_{FA}=\dfrac{7F}{4}$

6-2　图示支架承受荷载 $F=10\,\text{kN}$,1,2,3 各杆由同一材料制成，其横截面面积分别为 $A_1=100\,\text{mm}^2$，$A_2=150\,\text{mm}^2$ 和 $A_3=200\,\text{mm}^2$。试求各杆的轴力。



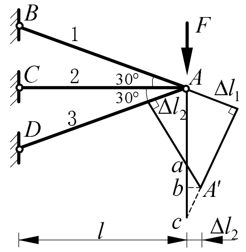
解：设想在荷载 F 作用下由于各杆的变形，节点 A 移至 A'。此时各杆的变形 $\Delta l_1,\Delta l_2$ 及 Δl_3 如图所示。现求它们之间的几何关系表达式以便建立求内力的补充方程。

$$ab=Ac-Aa-bc$$

$$\frac{\Delta l_2}{\tan 30^\circ}=\frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ}-\frac{\Delta l_3}{\sin 30^\circ}-\frac{\Delta l_2}{\tan 30^\circ}$$

即：$\sqrt{3}\Delta l_2=2\Delta l_1-2\Delta l_3-\sqrt{3}\Delta l_2$

亦即：$\sqrt{3}\Delta l_2=\Delta l_1-\Delta l_3$



将 $\Delta l_1=\dfrac{F_{\text{N}1}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}l}{EA_1}$，$\Delta l_2=\dfrac{F_{\text{N}2}\cdot l}{EA_2}$，$\Delta l_3=\dfrac{F_{\text{N}3}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}l}{EA_3}$ 代入，得：

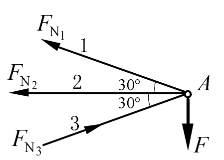
$$\frac{\sqrt{3}F_{\text{N}2}}{A_2}=\frac{2F_{\text{N}1}}{\sqrt{3}A_1}-\frac{2F_{\text{N}3}}{\sqrt{3}A_3}$$

即：$\dfrac{\sqrt{3}F_{\text{N}2}}{150}=\dfrac{2F_{\text{N}1}}{\sqrt{3}\times 100}-\dfrac{2F_{\text{N}3}}{\sqrt{3}\times 200}$

亦即：$\dfrac{3F_{\text{N}2}}{150}=\dfrac{F_{\text{N}1}}{50}-\dfrac{F_{\text{N}3}}{100}$

$$2F_{\text{N}2}=2F_{\text{N}1}-F_{\text{N}3} \qquad (1)$$

此即补充方程。与上述变形对应的内力 F_{N1},F_{N2},F_{N3} 如图所示。根据节点 A 的平衡条件有：



$$\sum F_x=0;\quad F_{\text{N}1}\frac{\sqrt{3}}{2}+F_{\text{N}2}=F_{\text{N}3}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

亦即：　$\sqrt{3}F_{\text{N}1}+2F_{\text{N}2}=\sqrt{3}F_{\text{N}3}$　　(2)

$$\sum F_y=0;\quad F_{\text{N}1}\frac{1}{2}+F_{\text{N}3}\frac{1}{2}=F,$$

亦即：　　$F_{N1}+F_{N3}=2F$　　（3）

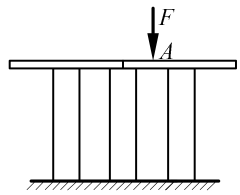
联解（1）、（2）、（3）三式得：

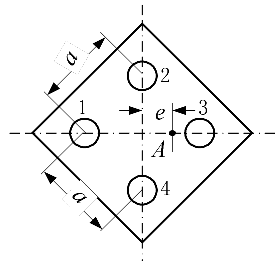
$$F_{\mathrm{N}1}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}}F=0.845F=8.45\,\mathrm{kN}$$（拉）

$$F_{\mathrm{N}2}=\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}F=0.268F=2.68\,\mathrm{kN}$$（拉）

$$F_{\mathrm{N}3}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}}F=1.153F=11.53\,\mathrm{kN}$$（压）

6-3　一刚性板由四根支柱支撑，四根支柱的长度和截面都相同，如图所示。如果荷载 F 作用在 A 点，试求这四根支柱各受力多少。





解：因为 2，4 两根支柱对称，所以 $F_{\mathrm{N}2}=F_{\mathrm{N}4}$，以它们为多余约束力 X，在 F 力作用下：

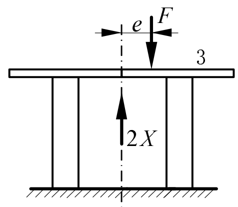
$$\sum M_3=0, F_{\mathrm{N}1}\times 2a\cos 45^{\circ}=F(a\cos 45^{\circ}-e)$$

则：$F_{\mathrm{N}1F}=\dfrac{F}{\sqrt{2}a}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-e)$（压）

$$F_{\mathrm{N}3F}=\frac{F}{\sqrt{2}a}(\frac{\sqrt{2}}{2}a+e)$$（压）

$$\Delta l_{1F}=\frac{F}{\sqrt{2}a}(\frac{\sqrt{2}}{2}a-e)\frac{l}{EA}$$（缩短）

$$\Delta l_{3F}=\frac{F}{\sqrt{2}a}(\frac{\sqrt{2}}{2}a+e)\frac{l}{EA}$$（缩短）



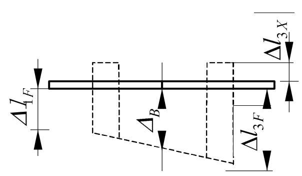
在 $2X$ 作用下：$F_{\mathrm{N}1X}=F_{\mathrm{N}3X}=X$（拉），$\Delta l_{1X}=\Delta l_{3X}=\dfrac{Xl}{EA}$

在 F、X 共同作用下：

$$\Delta l_1=\Delta l_{1F}-\Delta l_{1X}- =\frac{Fl}{\sqrt{2}aEA}(\frac{\sqrt{2}}{2}a-e)-\frac{Xl}{EA}$$

$$\Delta l_3=\Delta l_{3F}-\Delta l_{3X}=\frac{Fl}{\sqrt{2}aEA}(\frac{\sqrt{2}}{2}a+e)-\frac{Xl}{EA}$$

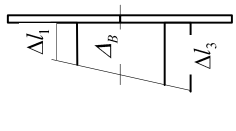
则 B 点的位移为 $\varDelta_B$，



$$\varDelta_B=\Delta l_1+\frac{\Delta l_3-\Delta l_1}{2}=\frac{Fl}{\sqrt{2}aEA}(\frac{\sqrt{2}}{2}a-e)-\frac{Xl}{EA}+\frac{Fle}{\sqrt{2}aEA}$$

$$=\frac{l}{EA}(\frac{F}{2}-X)$$

柱 2 和柱 4 在 X 作用下被压缩 $\Delta l_2=\dfrac{Xl}{EA}$



变形协调条件：$\Delta l_2=\varDelta_B$

故：$\dfrac{Xl}{EA}=\dfrac{l}{EA}(\dfrac{F}{2}-X)$，则 $X=\dfrac{F}{4}=F_{\mathrm{N}2}=F_{\mathrm{N}4}$

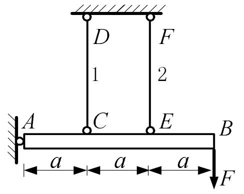
由整体平衡：$\sum M_3 = 0$

$$F\times(\frac{\sqrt{2}}{2}a-e)=2F_{\mathrm{N}2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a+F_{\mathrm{N}1}\sqrt{2}a=\frac{F}{4}\sqrt{2}a+F_{\mathrm{N}1}\sqrt{2}a$$

故 $F_{\mathrm{N}1}=(\frac{1}{4}-\frac{e}{\sqrt{2}a})F$

$$F_{\mathrm{N}3}=F-F_{\mathrm{N}1}-2F_{\mathrm{N}2}=F-(\frac{1}{4}-\frac{e}{\sqrt{2}a}F-2\times\frac{F}{4}=(\frac{1}{4}+\frac{e}{\sqrt{2}a})F$$

6-4　刚性杆 AB 的左端铰支，两根长度相等、横截面面积相同的钢杆 CD 和 EF 使该刚性杆处于水平位置，如图所示。如已知 $F=50\,\mathrm{kN}$，两根钢杆的横截面面积 $A=1000\,\mathrm{mm}^2$，试求两杆的轴力和应力。

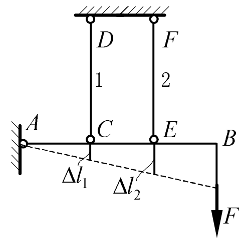


解：$\sum M_A=0$，$F_{\mathrm{N}1}a+F_{\mathrm{N}2}\times 2a=3aF$

$$F_{\mathrm{N}1}+2F_{\mathrm{N}2}=3F \qquad (1)$$

又由变形几何关系得知：

$$\Delta l_1=\frac{\Delta l_2}{2},\quad F_{\mathrm{N}1}=\frac{1}{2}F_{\mathrm{N}2} \qquad (2)$$



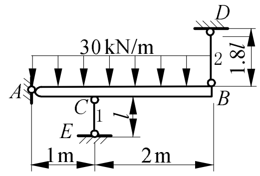
联解式（1），（2），得 $F_{\mathrm{N}2}=\frac{6}{5}F=60\,\mathrm{kN}$，$F_{\mathrm{N}1}=30\,\mathrm{kN}$

故 $F_{EF}=F_{\mathrm{N}2}=60\,\mathrm{kN}$，$F_{CD}=F_{\mathrm{N}1}=30\,\mathrm{kN}$

$$\sigma_{EF}=\frac{F_{EF}}{A}=\frac{60\times10^3}{1000\times10^{-6}}=60\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{CD}=\frac{F_{CD}}{A}=\frac{30\times10^3}{1000\times10^{-6}}=30\,\mathrm{MPa}$$

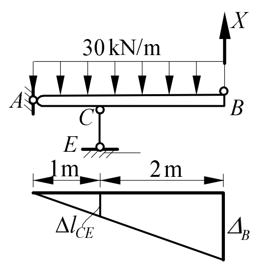
6-5　图示刚性梁受均布荷载作用，梁在 A 端铰支，在 B 点和 C 点由两根钢杆 BD 和 CE 支承。已知钢杆 BD 和 CE 的横截面面积 $A_2=200\,\mathrm{mm}^2$ 和 $A_1=400\,\mathrm{mm}^2$，钢的许用应力 $[\sigma]=170\,\mathrm{MPa}$，试校核钢杆的强度。



解：以杆 DB 为多余约束，则 $F_{DB}=X$，平衡条件：$\sum M_A=0$

$$F_{CE}\times1+30\times3\times1.5-3X=0$$

$$F_{CE}=135-3X \qquad (1)$$



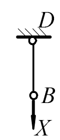
变形协调条件：$\varDelta_B=3\Delta l_{CE}$

即：$\dfrac{X\times1.8l}{200E}=\dfrac{3(135-3X)}{400E}$

解得：$X=32.2\,\mathrm{kN}=F_{DB}$

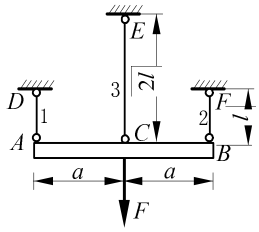
$$F_{CE}=38.4\,\mathrm{kN}$$

$$\sigma_{DB}=\frac{F_{DB}}{A_{DB}}=\frac{32.2\times10^3}{200\times10^{-6}}=161\,\mathrm{MPa}<[\sigma]\text{，强度够。}$$



$$\sigma_{CE}=\frac{F_{CE}}{A_{CE}}=\frac{38.4\times10^3}{400\times10^{-6}}=96.0\,\mathrm{MPa}<[\sigma]\text{，强度够。}$$

6-6 试求图示结构的许可荷载$[F]$。已知杆 AD，CE，BF 的横截面面积均为 A，杆材料的许用应力为$[\sigma]$，梁 AB 可视为刚体。



解：由于结构对称，故$F_{\mathrm{N1}}=F_{\mathrm{N2}}$，因此$2F_{\mathrm{N1}}+F_{\mathrm{N3}}=F$ （1）

结构受力变形时，$\Delta l_1=\Delta l_2=\Delta l_3$

故 $$\frac{F_{\mathrm{N1}}l}{EA}=\frac{F_{\mathrm{N2}}\times 2l}{EA}$$

即： $F_{\mathrm{N1}}=2F_{\mathrm{N2}}$ （2）

解得：$$F_{\mathrm{N}CE}=F_{\mathrm{N3}}=\frac{F}{5}$$

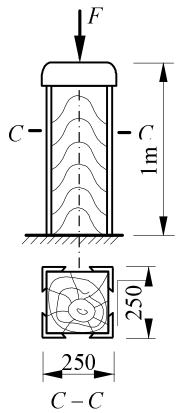
$$F_{AD}=F_{BF}=F_{\mathrm{N1}}=\frac{2F}{5}$$

$$\sigma_{EC}=\frac{F_{EC}}{A}=\frac{F}{5A},\qquad \sigma_{AD}=\sigma_{BF}=\frac{2F}{5A}$$

故$\sigma_{AD}=\dfrac{2F}{5A}\le[\sigma]$

则$[F]\le\dfrac{5A[\sigma]}{2}$，故$[F]\le 2.5[\sigma]A$。

6-7 横截面为 250mm×250mm 的短木柱，用四根 40mm×40mm×5mm 的等边角钢加固，并承受压力 F，如图所示。已知角钢的许用应力$[\sigma]_{\mathrm{s}}=160\,\mathrm{MPa}$，弹性模量$E_{\mathrm{s}}=200\,\mathrm{GPa}$；木材的许用应力$[\sigma]_{\mathrm{w}}=12\,\mathrm{MPa}$，弹性模量$E_{\mathrm{w}}=10\,\mathrm{GPa}$。试求短木柱的许可荷载$[F]$。



解：（1）木柱与角钢的轴力由盖板的静力平衡条件：

$$\sum F_y=0,F_{\mathrm{Ns}}+F_{\mathrm{Nw}}=F \qquad (1)$$

由木柱与角钢间的变形相容条件，有

$$\Delta l_{\mathrm{s}}=\Delta l_{\mathrm{w}} \qquad (2)$$

由物理关系：

$$\Delta l_{\mathrm{s}}=\frac{F_{\mathrm{Ns}}l}{E_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{s}}},\Delta l_{\mathrm{w}}=\frac{F_{\mathrm{Nw}}l}{E_{\mathrm{w}}A_{\mathrm{w}}} \qquad (3)$$

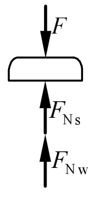
式（3）代入式（2），得

$$\frac{F_{\mathrm{Ns}}\cdot 1}{200\times 10^9\times 4\times 3.791\times 10^{-4}}=\frac{F_{\mathrm{Nw}}\cdot 1}{10\times 10^9\times 0.25^2} \qquad (4)$$

解得： $F_{\mathrm{Nw}}=2.06F_{\mathrm{Ns}}$

代入式（1），得：$F_{\mathrm{Ns}}=0.327F,F_{\mathrm{Nw}}=0.673F$

（2）许可载荷



由角钢强度条件

$$\sigma_{\mathrm{s}}=\frac{F_{\mathrm{Ns}}}{A_{\mathrm{s}}}=\frac{0.327F}{4\times 3.791\times 10^{-4}}\le 160\times 10^6$$

$$F\le 742\,\mathrm{kN}$$

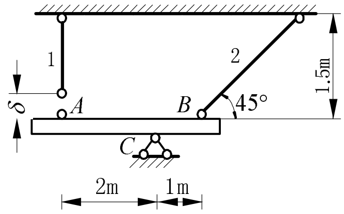
由木柱强度条件：

$$\sigma_{\mathrm{w}}=\frac{F_{\mathrm{Nw}}}{A_{\mathrm{w}}}=\frac{0.673F}{0.25^2}\le 12\times 10^6$$

$$F \le 1114\,\text{kN}$$

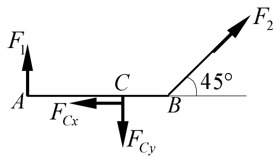
故许可载荷为：$\left[F\right] = 742\,\text{kN}$

6-8　水平刚性横梁 AB 上部由杆 1 和杆 2 悬挂，下部由铰支座 C 支承，如图所示。由于制造误差，杆 1 的长度短了 $\delta = 1.5\,\text{mm}$。已知两杆的材料和横截面面积均相同，且 $E_1 = E_2 = E = 200\,\text{GPa}$，$A_1 = A_2 = A$。试求装配后两杆的应力。



解：由受力图（a），$\sum M_C = 0, 2F_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} F_2 \cdot 1$

$$F_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} F_2 \qquad (1)$$



变形谐调，由图（a）：$\Delta l_1 + 2\sqrt{2}\Delta l_1 = \delta$　　（2）

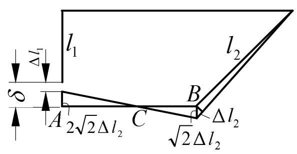
由物理方程：$\dfrac{F_1 l_1}{E_1 A_1} + 2\sqrt{2}\dfrac{F_2 l_2}{E_2 A_2} = \delta$

即：$\dfrac{F_1 l}{EA} + 2\sqrt{2}\dfrac{F_2 \sqrt{2} l}{EA} = \delta$

$$F_1 + 4F_2 = \frac{EA\delta}{l} \qquad (3)$$

式（1）代入式（3）：$(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 4)F_2 = \dfrac{EA\delta}{l}$

$$F_2 = \frac{4EA\delta}{(16 + \sqrt{2})l}$$



代入式（1）：$F_1 = \dfrac{\sqrt{2}EA\delta}{(16 + \sqrt{2})l}$

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}E\delta}{(16 + \sqrt{2})l} = \frac{\sqrt{2} \times 200 \times 10^9 \times 1.5 \times 10^{-3}}{17.414 \times 1.5} = 16.2\,\text{MPa}$$

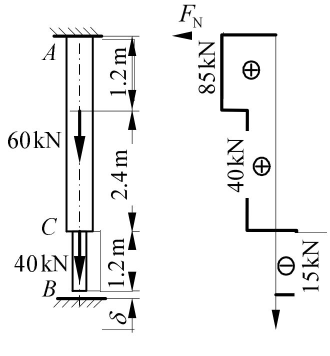
$$\sigma_2 = \frac{4E\delta}{(16 + \sqrt{2})l} = \frac{4 \times 200 \times 10^9 \times 1.5 \times 10^{-3}}{17.414 \times 1.5} = 45.9\,\text{MPa}$$

6-9　图示阶梯状杆，其上端固定，下端与支座距离 $\delta = 1\,\text{mm}$。已知上、下两段杆的横截面面积分别为 $600\,\text{mm}^2$ 和 $300\,\text{mm}^2$，材料的弹性模量 $E = 210\,\text{GPa}$。试作图示荷载作用下杆的轴力图。

解：变形协条条件 $\Delta l_F - \delta = \Delta l_{FA}$

$$\Delta l_F = \frac{60 \times 10^3 \times 1.2}{210 \times 10^9 \times 600 \times 10^{-6}} + \frac{40 \times 10^3 \times 3.6}{210 \times 10^9 \times 600 \times 10^{-6}}$$

$$\Delta l_{FA} = \frac{F_A \times 10^3 \times 1.2}{210 \times 10^9 \times 300 \times 10^{-6}} + \frac{F_A \times 10^3 \times 3.6}{210 \times 10^9 \times 600 \times 10^{-6}}$$

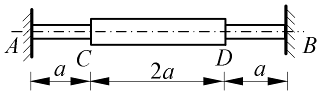


故　$\dfrac{1.2 \times 10^6 \times 10^3}{210 \times 600 \times 10^9}(60 + 40 \times 3) - \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1.2 \times 10^6 \times 10^3 \times 5F_A}{210 \times 10^9 \times 600}$

$$216 - 126 = 6F_A$$

故　$F_A = 15\,\text{kN}$，$F_B = 85\,\text{kN}$

6-10　两端固定的阶梯状杆如图所示。已知 AC 段和 BD 段的横截面面积为 A，CD 段的横截面面积为 $2A$；杆材料的弹性模量为 $E=210\,\text{GPa}$，线膨胀系数 $\alpha_l=12\times10^{-6}$ ℃$^{-1}$。试求当温度升高 30 ℃后，该杆各部分产生的应力。



解：设轴力为 F_N，总伸长为零，故

$$\alpha_l \Delta T\cdot 4a+\frac{F_\text{N}a}{EA}+\frac{F_\text{N}\cdot 2a}{E\cdot 2A}+\frac{F_\text{N}\cdot a}{EA}=0$$

$$4\alpha_l \Delta TEA+3F_\text{N}=0$$

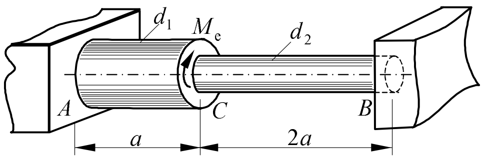
$$F_\text{N}=-\frac{4}{3}\alpha_l \Delta TEA=-\frac{4}{3}\times12\times10^{-6}\times30\times210\times10^{9}A=-100.8\times10^{6}A$$

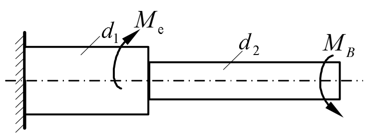
$$\sigma_{AC}=\frac{F_\text{N}}{A}=-100.8\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{CD}=\frac{F_\text{N}}{2A}=-50.4\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{DB}=\frac{F_\text{N}}{A}=-100.8\,\text{MPa}$$

6-11　图示为一两端固定的阶梯状圆轴，在截面突变处承受外力偶矩 M_e。若 $d_1=2d_2$，试求固定端的支反力偶矩 M_A 和 M_B，并作扭矩图。





解：解除 B 端多余约束 T_B，则变形协调条件为

$$\varphi_B=0$$

即　$\varphi_{BM_B}-\varphi_{B_{M_\text{e}}}=0$

故：$$\frac{M_Ba}{G\frac{\pi d_1^4}{32}}+\frac{M_B 2a}{G\frac{\pi d_2^4}{32}}-\frac{M_\text{e}a}{G\frac{\pi d_1^4}{32}}=0$$

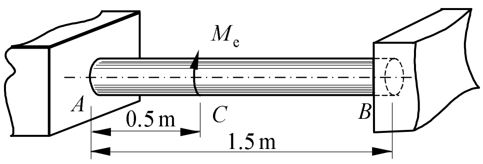
即：$$\frac{M_B}{(2d_2)^4}+\frac{2M_B}{d_2^4}-\frac{M_\text{e}}{(2d_2)^4}=0$$

解得：$M_B=\dfrac{M_\text{e}}{33}$

由于　$M_A+M_B=M_\text{e}$

故　$M_A=M_\text{e}-\dfrac{M_\text{e}}{33}=\dfrac{32M_\text{e}}{33}$

6-12　图示一两端固定的钢圆轴，其直径 $d=60\,\text{mm}$。轴在截面 C 处承受一外力偶矩 $M_\text{e}=3.8\,\text{kN}\cdot\text{m}$。已知钢的切变模量 $G=80\,\text{GPa}$。试求截面 C 两侧横截面上的最大切应力和截面 C 的扭转角。



解：取消 B 端约束 M_B，变形协调条件

$$\varphi_{BM_\text{e}}+\varphi_{BM_B}=0$$

$$\frac{M_\text{e}\times0.5}{GI_\text{p}}-\frac{M_B\times1.5}{GI_\text{p}}=0$$

故 $M_B=\dfrac{M_e}{3}$；$M_A=\dfrac{2M_e}{3}$

截面 C 左侧：

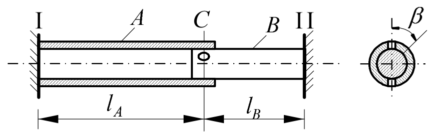
$$\tau_{max}=\frac{M_A}{W_p}=\frac{2}{3}\frac{3.8\times10^3}{\dfrac{\pi\times60^3}{16}\times10^{-9}}=\frac{2\times16\times3.8\times10^{12}}{3\pi\times21.6\times10^4}=59.8\,\text{MPa}$$

截面 C 右侧：$\tau_{max}=29.9\,\text{MPa}$

$$\varphi_{CA}=\frac{(M_e-\dfrac{M_e}{3})l}{GI_p}=\frac{2\times3.8\times10^3}{3}\frac{0.5}{80\times10^9\times\dfrac{\pi\times60^4}{32}\times10^{-12}}\times\frac{180^\circ}{\pi}=0.713^\circ=\varphi_{CB}$$

6-13　一空心圆管 A 套在实心圆杆 B 的一端，如图所示。两杆在同一横截面处各有一直径相同的贯穿孔，但两孔的中心线构成一个 β 角。现在杆 B 上施加外力偶使杆 B 扭转，以使两孔对准，并穿过孔装上销钉。在装上销钉后卸除施加在杆 B 上的外力偶。试问管 A 和杆 B 横截面上的扭矩为多大？已知管 A 和杆 B 的极惯性矩分别为 I_{pA}和I_{pB}；两杆的材料相同，其切变模量为 G。

解：解除Ⅱ端约束 M_2，则Ⅱ端相对于截面 C 转了 β 角，（因为事先将杆 B 的 C 端扭了一个 β 角），故变形协调条件为 $\beta-\varphi_{2M2}$=0



故：$\beta-\dfrac{M_2l_A}{GI_{pA}}-\dfrac{M_2l_B}{GI_{pB}}=0$

故：$M_2=\dfrac{\beta GI_{pA}I_{pB}}{l_AI_{pB}+l_BI_{pA}}$

故连接处截面 C，相对于固定端Ⅱ的扭转角 φ_{C2} 为：

$$\varphi_{C2}=\frac{M_2l_B}{GI_{pB}}=\frac{\beta I_{PA}l_B}{l_AI_{pB}+l_BI_{pA}}$$

而连接处截面 C，相对于固定端 I 的扭转角 φ_{C1} 为：

$$\varphi_{C1}=\beta-\varphi_{C2}=\beta-\frac{\beta I_{pA}l_B}{l_AI_{pB}+l_BI_{pA}}=\frac{\beta I_{pB}l_A}{l_AI_{pB}+l_BI_{pA}}$$

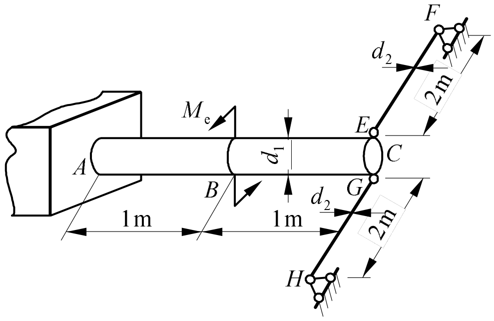
应变能 $V_\varepsilon=\dfrac{GI\varphi^2}{2l}=\dfrac{GI_{pA}\varphi_{C1}^{\ 2}}{2l_A}+\dfrac{GI_{pB}\varphi_{C2}^2}{2l_B}$

$$=\frac{GI_{pA}\beta^2I_{pB}^{\ 2}l_A^{\ 2}}{2l_A(l_AI_{pB}+l_BI_{pA})^2}+\frac{GI_{pB}\beta^2I_{pA}^{\ 2}l_B^{\ 2}}{2l_B(l_AI_{pB}+l_BI_{pA})^2}$$

$$=\frac{G\beta^2}{2}\frac{I_{pA}I_{pB}}{l_AI_{pB}+l_BI_{pA}}$$

6-14　图示圆截面杆 AC 的直径 $d_1=100\,\text{mm}$，A 端固定，在截面 B 处承受外力偶矩 M_e=7kN·m，截面 C 的上、下两点处与直径均为 $d_1=20\,\text{mm}$ 的圆杆 EF、GH 铰接。已知各杆材料相同，弹性常数间的关系为 G=0.4E。试求杆 AC 中的最大切应力。

解：由图（a）：$\varphi_C = \dfrac{F \cdot 2}{EA_2 \cdot \dfrac{d_1}{2}}$

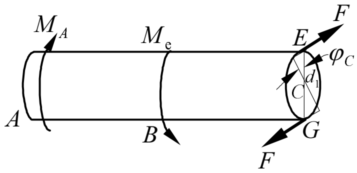


由图（b）：$\varphi_C = \dfrac{(M_e - Fd_1) \cdot 1}{GI_{p1}} - \dfrac{Fd_1 \cdot 1}{GI_{p1}}$

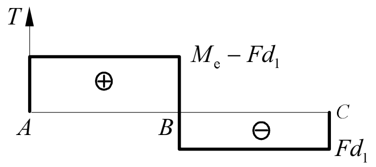
$$\frac{4F}{EA_2 d_1} = \frac{M_e - Fd_1}{GI_{p1}} - \frac{Fd_1}{GI_{p1}}$$

$$\frac{4F}{EA_2 d_1} = \frac{M_e - Fd_1}{0.4EI_{P1}} - \frac{Fd_1}{0.4EI_{P1}}$$

$$F = \frac{M_e}{2d_1 + \dfrac{1.6I_{p1}}{A_2 d_1}}$$



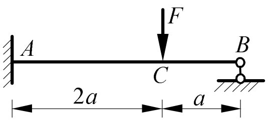
$$T_{BC} = Fd_1 = \frac{M_e}{2 + 1.6\dfrac{I_{p1}}{A_2 d_1^2}}$$



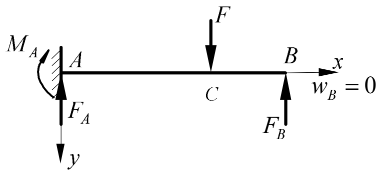
$$T_{AB} = M_e - Fd_1 = \frac{(1 + 1.6\dfrac{I_{p1}}{A_2 d_1^2})M_e}{2 + 1.6\dfrac{I_{p1}}{A_2 d_1^2}} = T_{max}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_{p1}} = \frac{(1 + 1.6\dfrac{I_{p1}}{A_2 d_1^2})M_e}{(2 + 1.6\dfrac{I_{p1}}{A_2 d_1^2})\dfrac{\pi d_1^3}{16}} = \frac{1 + 1.6\dfrac{\dfrac{\pi d_1^4}{32}}{\dfrac{\pi d_2^2}{4} \cdot d_1^2}}{2 + 1.6\dfrac{\dfrac{\pi d_1^4}{32}}{\dfrac{\pi d_2^2}{4} d_1^2} \cdot \dfrac{\pi d_1^3}{16}} M_e = \frac{48 \times 7 \times 10^3}{3.5\pi \times 0.1^3} = 30.6\,\text{MPa}$$

6-15　试求图示各超静定梁的支反力。

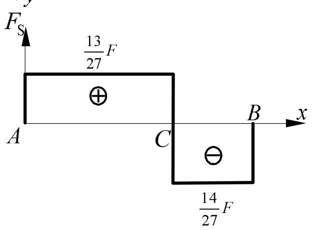


解（a）：原梁 AB 是超静定的，当去掉多余的约束铰支座 B 时，得到可静定求解的基本系统（图 i）去掉多余约束而代之以反力 F_B，并根据原来约束条件，令 B 点的挠度 $w_B = 0$，则得到原超静定梁的相当系统（图 ii）。利用 $w_B = 0$ 的位移条件，得补充方程：



$$w_B = [\frac{F(2a)^3}{3EI} + \frac{F(2a)^2}{2EI}a] - \frac{F_B(3a)^3}{3EI} = 0$$

由此得：$F_B = \dfrac{14}{27}F$



由静力平衡，求得支反力 F_A，M_A 为：

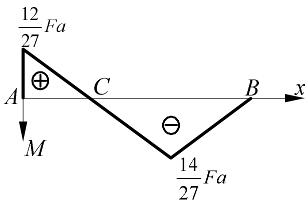
$F_A = F - F_B$

$$= F - \frac{14}{27}F = \frac{13}{27}F$$

$$M_A = F_B \cdot 3a - F \cdot 2a$$

$$= \frac{14F}{27} \cdot 3a - 2Fa$$

$$= -\frac{4Fa}{9}$$



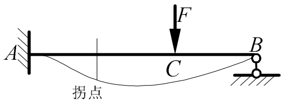
剪力图、弯矩图分别如图（iii），（iv）所示。梁的挠曲线形状如图（v）所示。这里遵循这样几个原则：

（1）固定端截面挠度，转角均为零；

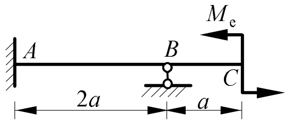
（2）铰支座处截面挠度为零；

（3）正弯矩时，挠曲线下凹，负弯矩时，挠曲线上凸；

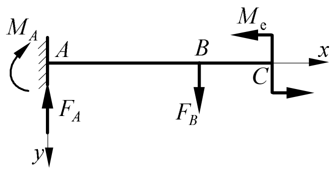
（4）弯矩为零的截面，是挠曲线的拐点位置。



（b）**解**：由相当系统（图 ii）中的位移条件 $w_B = 0$，得补充方程式：



$$\frac{M_e(2a)^2}{2EI} - \frac{F_B(2a)^3}{3EI} = 0$$



因此得支反力：$F_B = \dfrac{3M_e}{4a}$

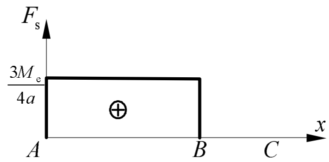
根据静力平衡，求得支反力 F_A, M_A：

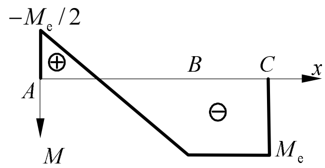
$$F_A = F_B = \frac{3M_e}{4a}$$

$$M_A = M_e - F_B \cdot 2a$$

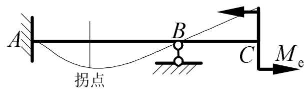
$$= M_e - \frac{3M_e}{4a}2a$$

$$= -\frac{M_e}{2}$$

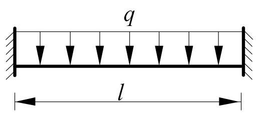




剪力图、弯矩图，挠曲线图分别如图（iii）、（iv）、（v）所示。

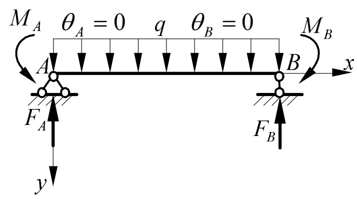


（c）**解**：由于结构、荷载对称，因此得支反力 $F_A = F_B = \dfrac{1}{2}ql$；$M_A = M_B$



应用相当系统的位移条件 $\theta_A = 0$，得补充方程式：

$$\frac{ql^2}{24EI} - \frac{M_A l}{3EI} - \frac{M_B l}{6EI} = 0$$



注意到 $M_A = M$，于是得：

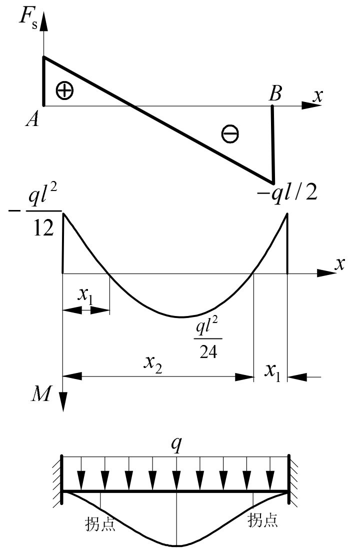
$$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$$

剪力图、弯矩图、挠曲线分别如图（iii）、（iv）、（v）所示。

其中：$M\Big|_{x=\frac{l}{2}}=F_A\cdot\dfrac{l}{2}-M_A-\dfrac{1}{2}q(\dfrac{l}{2})^2$

$$=\frac{ql^2}{4}-\frac{ql^2}{12}-\frac{ql^2}{8}$$

$$=\frac{ql^2}{24}$$



若 x_1 截面的弯矩为零，则有：

$$F_Ax_1-\frac{1}{2}qx_1^2-M_A=0$$

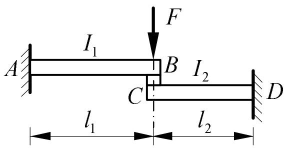
$$\frac{1}{2}qlx_1-\frac{1}{2}qx_1^2-\frac{ql^2}{12}=0$$

整理：$6x_1^2-6lx_1+l^2=0$

解得：$x_1=0.211l$ 或 $x_1=0.789l$。

6-16　荷载 F 作用在梁 AB 及 CD 的连接处，试求每根梁在连接处所受的力。已知其跨长比和刚度比分别为

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{3}{2}\text{和}\frac{EI_1}{EI_2}=\frac{4}{5}$$



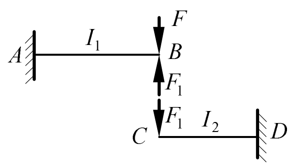
解：令梁在连接处受力为 F_1，则梁 AB、CD 受力如图（b）所示。

梁 AB 截面 B 的挠度为：

$$w_B=\frac{(F-F_1)l_1^3}{3EI}$$

梁 CD 截面 C 的挠度为：

$$w_C=\frac{F_1l_2^3}{3EI_2}$$



由于在铅垂方向截面 B 与 C 连成一体，因此有 $w_B=w_C$。

将有关式子代入得：

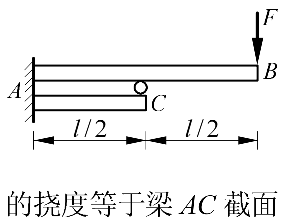
$$\frac{(F-F_1)l_1^3}{3EI_1}=\frac{F_1l_2^3}{3EI_2}$$

变换成：　$$\frac{(F-F_1)}{F_1}\cdot(\frac{l_1}{l_2})^3=\frac{EI_1}{EI_2}$$

即：$(\dfrac{F-F_1}{F_1})(\dfrac{3}{2})^3=\dfrac{4}{5}$

解得每个梁在连接处受力：$F_1=\dfrac{135}{167}F$

6-17　梁 AB 因强度和刚度不足，用同一材料和同样截面的短梁 AC 加固，如图所示。试求：



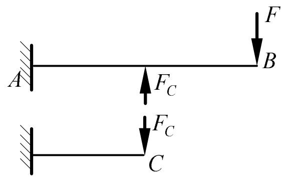
（1）二梁接触处的压力 F_C；

（2）加固后梁 AB 的最大弯矩和 B 点的挠度减小的百分数。

解：（1）梁 AB 与 AC 之间的相互作用如图（b）所示　。根据梁 AB 截面 C 的挠度等于梁 AC 截面 C

的挠度，得补充方程式：

$$\frac{F(\frac{l}{2})^3}{3EI}+\frac{(F\frac{l}{2})(\frac{l}{2})^2}{2EI}-\frac{F_C(\frac{l}{2})^3}{3EI}=\frac{F_C(\frac{l}{2})^3}{3EI}$$

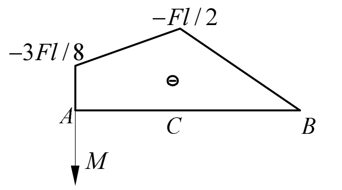


得到： $F_C=\frac{5}{4}F$

（2）加固前梁 AB 最大弯矩 $M_{1,\max}$ 为：

$$M_{1,\max}=Fl$$

加固后梁 AB 的弯矩变化如图（c）所示，其最大弯矩，$M_{2,\max}=\frac{Fl}{2}$ 。显然加固后，最大弯矩减少了 50%。



加固前点 B 的挠度 w_{B1} 为：

$$w_{B1}=\frac{Fl^3}{3EI}$$

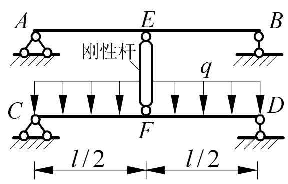
加固后点 B 的挠度 w_{B2} 为：

$$w_{B2}=\frac{Fl^3}{3EI}-[\frac{F_C(\frac{l}{2})^3}{3EI}+\frac{F_C(\frac{l}{2})^2}{2EI}\cdot\frac{l}{2}]=\frac{13Fl^3}{64EI}$$

因此，点 B 挠度的减少是：

$$\frac{w_{B1}-w_{B2}}{w_{B1}}\times 100\%=\frac{\frac{Fl^3}{3EI}-\frac{13Fl^3}{64EI}}{\frac{Fl^3}{3EI}}\times 100\%=39\%$$

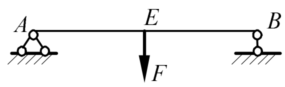
6-18　图示结构中梁 AB 和梁 CD 的尺寸及材料均相同，已知 EI 为常量。试绘出梁 CD 的剪力图和弯矩图。

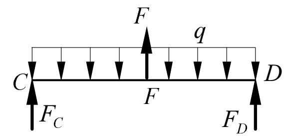


解：由 EF 为刚性杆得　$w_E=w_F$

即　$$\frac{Fl^3}{48EI}=\frac{5ql^4}{384EI}-\frac{Fl^3}{48EI}$$

$$F=\frac{5ql}{16}$$



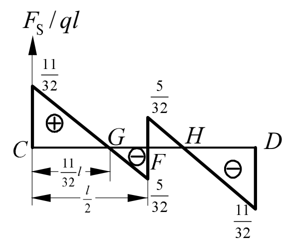


图（b）：由对称性，

$$F_C=F_D=(ql-F)/2=11ql/32$$

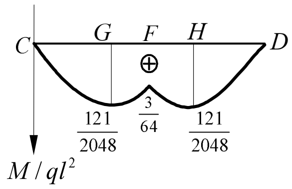
剪力图如图（c）所示，

$$F_{S\max}=\frac{11}{32}ql$$



弯矩图如图（d）所示，

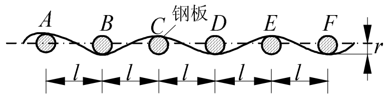
$$M_{\max}=\frac{121}{2048}ql^2$$



6-19　在一直线上打入 n 个半径为 r 的圆桩，桩的间距均为 l。将厚度为 δ 的平钢板按图示方式插入圆桩之间，钢板的弹性模量为 E，试求钢板内产生的最大弯曲正应力。

解：由对称性，取 BD 段考虑，显然截面 B 和 D 的转角为零，故可将钢板简化为图（a）所示结构，两固定端共 6 个未知力。由于梁无水平方向荷载作用，在小变形条件下，忽略水平反力，即：

$$F_{Bx}=F_{Dx}=0$$



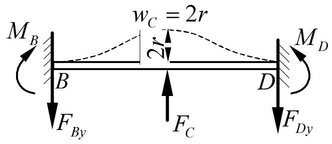
由梁及荷载的对称性知：

$$F_{By}=F_{Dy}, M_A=M_B$$

由静力平衡方程：

$$F_{By}+F_{Dy}-F_C=0$$

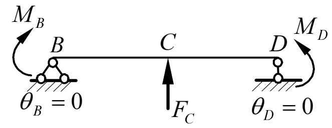
$$F_{By}=F_{Dy}=\frac{F_C}{2}$$



静定基图（b），变形协调条件：

$$\theta_B=\theta_D=0$$

补充方程：



$$\frac{F_C(2l)^2}{16EI}-\frac{M_B\cdot 2l}{3EI}-\frac{M_D\cdot 2l}{6EI}=0$$

$$M_B=M_D=\frac{F_C l}{4}$$

$$M_C=M_B-F_{By}\cdot l=\frac{F_C l}{4}-\frac{F_C}{2}\cdot l=-\frac{F_C l}{4}$$

$$w_C=\frac{F_C(2l)^3}{48EI}-2\cdot\frac{M_C(2l)^2}{16EI}=\frac{F_C l^3}{24EI}=2r$$

$$F_C=\frac{48EIr}{l^3}$$

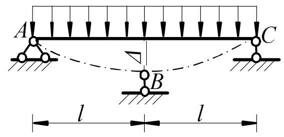
$$M_C=M_B=\frac{F_C l}{4}=\frac{12EIr}{l^2}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{I}\cdot\frac{\delta}{2}=\frac{12Er}{l^2}\cdot\frac{\delta}{2}=\frac{6Er\delta}{l^2}$$

6-20　直梁 ABC 在承受荷载前搁置在支座 A 和 C 上，梁与支座 B 间有一间隙 Δ。当加上均布荷载后，梁的中点处与支座 B 接触，因而三个支座都产生约束力。为使这三个约束力相等，试求其 Δ 值。

解：当去掉支座 B，而代之以反力 F_B 时，梁 AC 在均布荷载 q 作用下截面 B 的挠度设为 w_{B1}，其方向向下；而反力 F_B 引起的挠度设为 w_{B2}，方向向上。梁在 B 处的位移条件是：

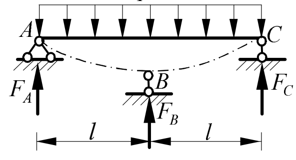
$$w_B - w_{B2}=\Delta \qquad （1）$$



其中：$w_{B1}=\dfrac{5q(2l)^4}{384EI}=\dfrac{5ql^4}{24EI}$；$w_{B2}=\dfrac{F_B(2l)^3}{48EI}=\dfrac{F_B l^3}{6EI}$　　（2）

若三个约束反力相等，即：$F_A=F_B=F_C$，则根据静力平衡有：

$$F_A=F_B=F_C=\frac{2ql}{3} \qquad （3）$$

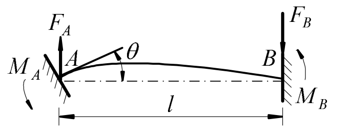


式（3）代入式（2），进而式（2）代入式（1）得到 Δ 值为：

$$\Delta = w_{B1} - w_{B2} = \frac{5ql^4}{24EI} - \frac{(\frac{2}{3}ql)l^3}{6EI} = \frac{7ql^4}{72EI}$$

6-21　梁 AB 的两端均为固定端，当其左端转动了一个微小角度 θ 时，试确定梁的约束反力 M_A, F_A, M_B 和 F_B。

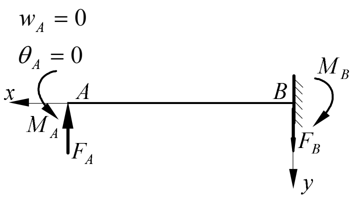
解：当去掉梁的 A 端约束时，得一悬臂梁的基本系统（图 a)。对去掉的约束代之以反力 F_A 和 M_{eA}，并限定 A 截面的位移：$w_A = 0, \theta_A = 0$。这样得到原结构的相当系统（图 b)。利用位移条件，$w_A = 0, \theta_A = 0$，与附录（Ⅳ）得补充式方程如下：



$$\frac{M_{eA}l^2}{2EI} - \frac{F_A l^3}{3EI} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{M_{eA}l}{EI} - \frac{F_A l^2}{2EI} = \theta \qquad (2)$$

由式（1)、(2）联解，得：$M_{eA} = \frac{4EI\theta}{l}; F_A = \frac{6EI\theta}{l^2}$

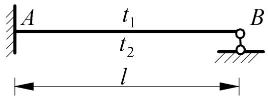


从静力平衡，进而求得反力 F_B, M_{eB} 是：

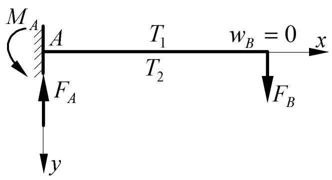
$$F_B = -F_A = -\frac{6EI\theta}{l^2}$$

$$M_{eB} = M_{eA} - F_A l = \frac{4EI\theta}{l} - \frac{6EI\theta}{l^2} \cdot l = -\frac{2EI\theta}{l}$$

6-22　梁 AB 的左端固定而右端铰支如图所示。梁的横截面高为 h。设梁在安装后其顶面温度为 t_1 而底面温度为 t_2，设 $t_2 > t$，且沿截面高度 h 成线性变化。梁的弯曲刚度为 EI，材料的线膨胀系数为 α_l。试求梁的约束反力。



解：去掉 B 端约束，代之反力 F_B，并令 B 端挠度 $w_B = 0$，得原系统的相当系统（图 a)。对相当系统的悬臂梁 AB，先考虑仅由于上、下顶面温度差引起的位移。假定 $T_2 > T_1$，温度差引起的挠曲线的微分方程将是：



$$w''_{\mathrm{T}} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}$$

积分并利用边界条件：$w'_{\mathrm{T}}\big|_{x=0} = 0; w_T\big|_{x=0} = 0$；

得到转角公式与挠度公式：$w'_{\mathrm{T}} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{h}x$

$$w_{\mathrm{T}} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}x^2$$

因此 B 端由于温度差形成的挠度 w_{B1} 是：

$$w_{B1} = w_{\mathrm{T}}\Big|_{x=l} = -\frac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h}l^2$$

而悬臂梁 AB 由于 F_B 引起的挠度 w_{B2} 根据附录（Ⅳ）为

$$w_{B2} = \frac{f_B l^3}{3EI}$$

据 B 端的位移条件，$w_B = 0$，即 $w_{B1} + w_{B2} = 0$

于是：$-\dfrac{\alpha(T_2 - T_1)}{2h} l^2 + \dfrac{F_B l^3}{3EI} = 0$

得到支反力 F_B 是：$F_B = \dfrac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{2hl}$

再根据静力平衡，求得支反力 F_A, M_A 为：

$$F_A = F_B = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{2hl};$$

$$M_A = F_B \cdot l = \frac{3\alpha EI(T_2 - T_1)}{2h}$$