

材料力学教师用书

范钦珊 编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是与主教材《材料力学》配套出版的教师教学用书,内容为主教材全部习题的详细解答过程,可以帮助使用本教材的教师备课和讲课。

本套教材包括主教材——《材料力学》、学生学习指导书——《材料力学学习指导》、教师教学参考书——《材料力学教师用书》和供课堂教学使用的《材料力学电子教案》。

本套教材可作为高等院校理工科各专业中学时和少学时材料力学课程的教材。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13901104297 13801310933

封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学教师用书/范钦珊编著. —北京:清华大学出版社,2004.9

(普通高等院校基础力学系列教材)

ISBN 7-302-09321-0

. 材... . 范... . 材料力学 - 高等学校 - 教学参考资料 . TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087892 号

出 版 者:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

客户服务:010-62776969

责任编辑:杨 倩

印 装 者:北京市清华园胶印厂

开 本:170×230 印张:7.25 字数:121千字

版 次:2004年9月第1版 2004年9月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-09321-0/O·394

印 数:1~600

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

普通高等院校基础力学系列教材

编委会名单

主 任：范钦珊

编 委：王焕定 王 琪

刘 燕 殷雅俊

普通高等院校基础力学系列教材包括“理论力学”、“材料力学”、“结构力学”、“工程力学(静力学 + 材料力学)”以及“工程流体力学”。目前出版的是前面的 3 种,“工程力学(静力学 + 材料力学)”将在以后出版。

这套教材是根据我国高等教育改革的形势和教学第一线的实际需求,由清华大学出版社组织编写的。

从 2002 年秋季学期开始,全国普通高等学校新一轮培养计划进入实施阶段,新一轮培养计划的特点是,加强素质教育、培养创新精神。根据新一轮培养计划,课程的教学总学时数大幅度减少,为学生自主学习留出了较大的空间。相应地,课程的教学时数都要压缩,基础力学课程也不例外。

怎样在有限的教学时数内,使学生既能掌握力学的基本知识,又能了解一些力学的最新进展;既能培养学生的力学素质,又能加强工程概念。这是很多力学教育工作者所共同关心的问题。

现有的基础教材大部分都是根据在比较多的学时内进行教学而编写的,因而篇幅都比较大。教学第一线迫切需要适用于学时压缩后教学要求的小篇幅的教材。

根据“有所为、有所不为”的原则,这套教材更注重基本概念,而不追求冗长的理论推导与繁琐的数字运算。这样做不仅可以满足一些专业对于力学基础知识的要求,而且可以切实保证教育部颁布的基础力学课程教学基本要求的教学质量。

为了让学生更快地掌握最基本的知识,本套教材在概念、原理的叙述方面作了一些改进。一方面从提出问题、分析问题和解决问题等方面作了比较详尽的论述与讨论;另一方面通过较多的例题分析,特别是新增加了关于一些重要概念的例题分析,著者相信这将有助于读者加深对于基本内容的了解和掌握。

此外,为了帮助学生学习和加深理解以及方便教师备课和授课,与每门课

材料力学教师用书

程主教材配套出版了学习指导、教师用书(习题详细解答)和供课堂教学使用的电子教案。

本套教材内容的选取以教育部颁布的相关课程的“教学基本要求”为依据,同时根据各院校的具体情况,作了灵活的安排,绝大部分为必修内容,少部分为选修内容。每门课程所需学时一般不超过 60。

范钦珊

2004 年 7 月于清华大学

前言

为了减轻教学第一线老师不必要的重复劳动,同时也为了给刚刚走上材料力学教学岗位的青年教师提供教学参考资料,我们将“材料力学”教材中全部习题作了详细解答,编写成册,定名为“材料力学教师用书”。

全书包括教材中的全部 11 章内容的习题解答,即:材料力学概述,轴向载荷作用下杆件的材料力学问题,轴向载荷作用下材料的力学性能,圆轴扭转时的强度与刚度计算,梁的强度问题,梁的变形分析与刚度问题,应力状态与强度理论及其工程应用,压杆的稳定问题,材料力学中的能量方法,动载荷与疲劳强度概述以及新材料的材料力学概述。

编者希望这本书能为提高老师的工作效率作出一点贡献,当然也希望对老师们提高教学质量有所帮助。

书中不足之处,恳请老师们批评指正。

范钦珊

2004 年 7 月于清华大学

目录

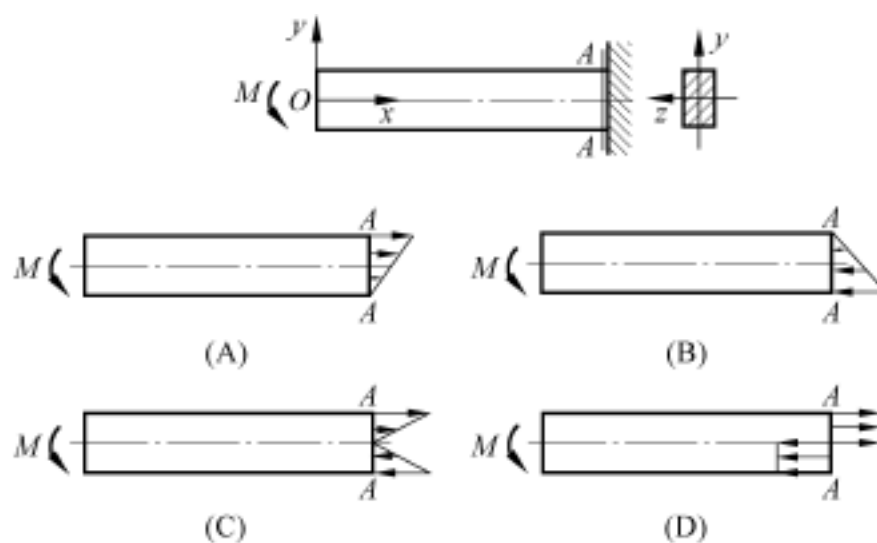
第 1 章	材料力学概述.....	1
第 2 章	轴向载荷作用下杆件的材料力学问题.....	3
第 3 章	轴向载荷作用下材料的力学性能	13
第 4 章	圆轴扭转时的强度与刚度计算	17
第 5 章	梁的强度问题	25
第 6 章	梁的变形分析与刚度问题	53
第 7 章	应力状态与强度理论及其工程应用	63
第 8 章	压杆的稳定问题	73
第 9 章	材料力学中的能量方法	85
第 10 章	动载荷与疲劳强度概述.....	93
第 11 章	新材料的材料力学概述	101

材料力学概述

习题解答

1-1 图示矩形截面直杆,右端固定,左端在杆的对称平面内作用有集中力偶,数值为 M 。关于固定端处横截面 $A-A$ 上的内力分布,有四种答案,根据弹性体的特点,试分析哪一种答案比较合理。

正确答案是____(C)____。



习题 1-1 图

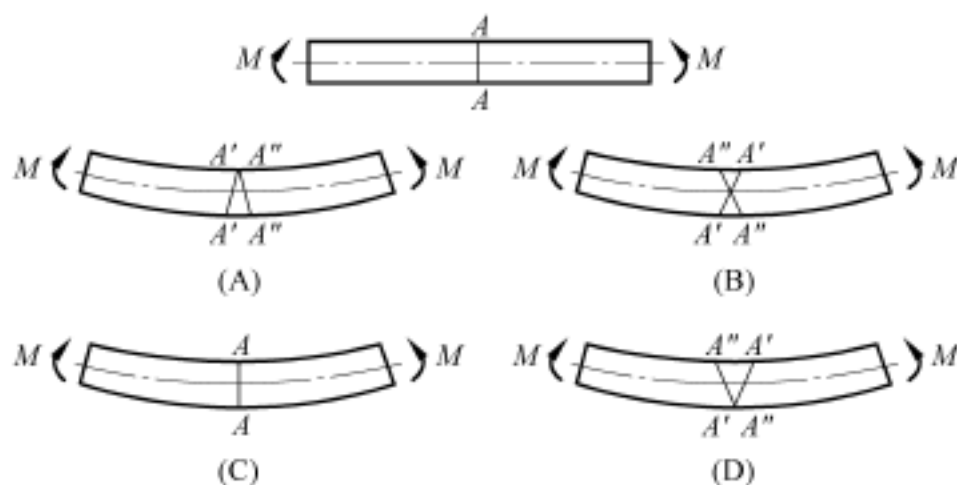
解:首先,从平衡的要求加以分析,横截面上的分布内力只能组成一个力偶与外加力偶矩 M 平衡。而答案(A)和(B)中的分布内力将合成一合力,而不是一力偶,所以是不正确的。

直杆在外力偶 M 作用下将产生上面受拉、下面受压的变形。根据变形协调要求,由拉伸变形到压缩变形,必须是连续变化的,因而,受拉与受压的材料之间必有一层材料不变形,这一层材料不受力。因此,答案(D)也是不正确的。正确的答案是(C)。

1-2 图示等截面直杆在两端作用有力偶,数值为 M ,力偶作用面与杆的对称面一致。关于杆中点处截面 $A-A$ 在杆变形后的位置(对于左端,为

$A-A$; 对于右端, 为 $A-A$), 有四种答案, 试判断哪一种答案是正确的。

正确答案是 (C) 。

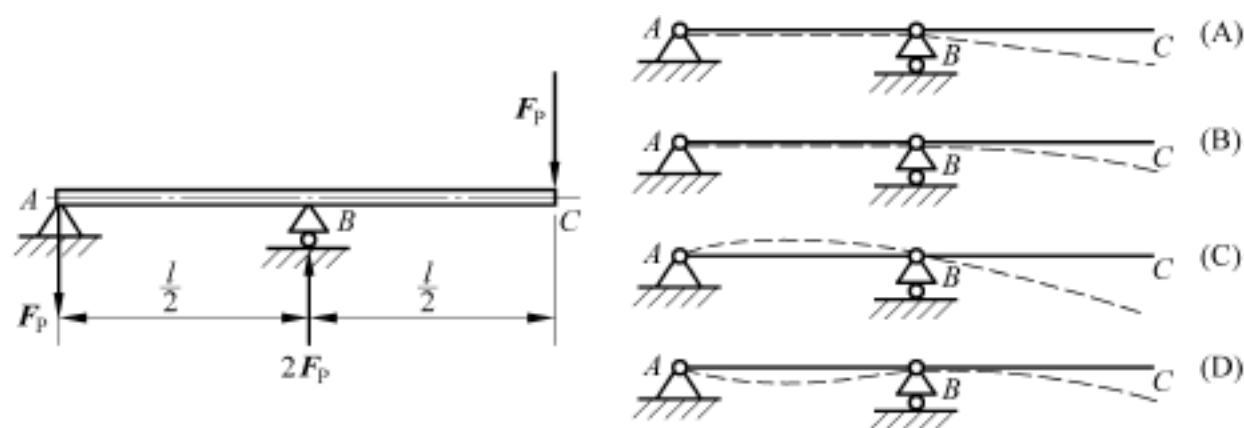


习题 1-2 图

解: 根据变形协调的要求, 杆件各部分变形协调一致, 既不能断开, 也不能互相重叠。答案(A)和(D)中同一处左右两侧横截面 $A-A$ 和 $A-A$ 断开; 答案(B)中同一处左右两侧横截面 $A-A$ 和 $A-A$ 发生重叠。因而答案(A)、(B)和(D)都是不正确的。答案(C)中同一处左右两侧横截面既不断开也没有发生重叠, 所以是正确的。

1-3 等截面直杆其支承和受力如图所示。关于其轴线在变形后的位置 (图中虚线所示), 有四种答案, 根据弹性体的特点, 试分析哪一种合理的。

正确答案是 (C) 。



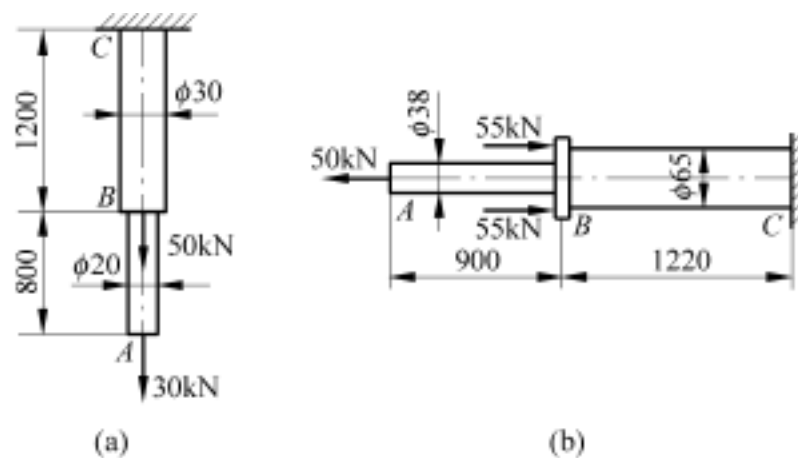
习题 1-3 图

解: 直杆受 3 个力的作用, 将发生弯曲变形, 因而 AB 和 BC 段都要弯曲, 因此答案(A)和(B)都是不正确的。根据弯矩的实际方向, AB 和 BC 段弯曲后的曲线都是向上凸的。所以, 答案(C)是正确的, 答案(D)是不正确的。

轴向载荷作用下杆件的材料力学问题

习题解答

2-1 两根直径不同的实心截面杆,在 B 处焊接在一起,弹性模量均为 $E = 200\text{GPa}$,受力和尺寸等均标在图中。



习题 2-1 图

试求:

1. 画轴力图;
2. 各段杆横截面上的工作应力;
3. 杆的轴向变形总量。

解: 轴力图(略)

$$(a) \quad 1. \quad \sigma_{AB} = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{4 F_{N1}}{d_1^2} = \frac{4 \times 30 \times 10^3}{\pi \times 20^2 \times 10^{-6}} = 95.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{4 \times (50 + 30) \times 10^3}{\pi \times 30^2 \times 10^{-6}} = 113 \text{ MPa}$$

$$2. \quad l = l_{AB} + l_{BC} = \frac{F_{N1} l}{EA_1} + \frac{F_{N2} l}{EA_2} = 1.06 \text{ mm}$$

$$(b) 1. \quad \sigma_{AB} = \frac{F_{NAB}}{A_1} = \frac{4 \times 50 \times 10^3}{\pi \times 38^2 \times 10^{-6}} = 44.1 \text{ MPa}$$

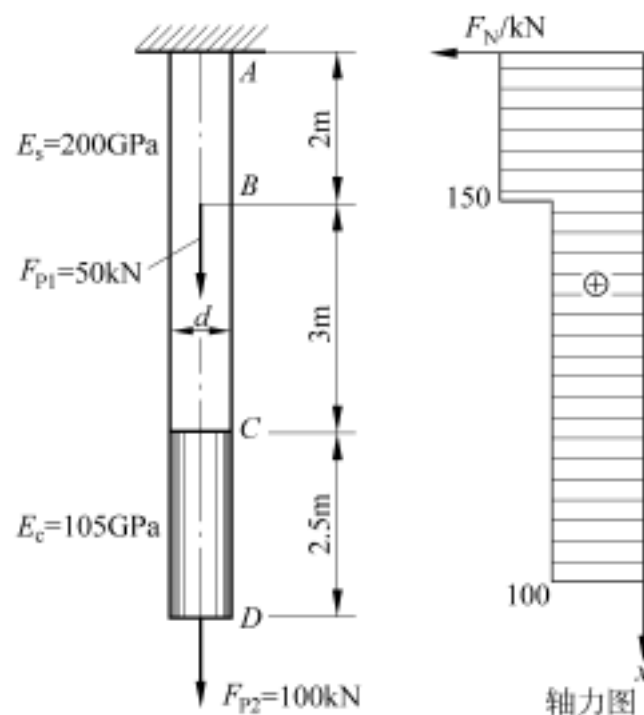
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{NBC}}{A_2} = \frac{4 \times (-60) \times 10^3}{\pi \times 65^2 \times 10^{-6}} = -18.1 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \Delta l &= \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \frac{F_{NAB} l_{AB}}{E A_1} + \frac{F_{NBC} l_{BC}}{E A_2} \\ &= \frac{50 \times 10^3 \times 0.9 \times 4}{200 \times 10^9 \times \pi \times 38^2 \times 10^{-6}} + \frac{-60 \times 10^3 \times 1.22 \times 4}{200 \times 10^9 \times \pi \times 65^2 \times 10^{-6}} \\ &= 0.0881 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.0881 \text{ mm} \end{aligned}$$

2-2 直径 $d=36\text{mm}$ 的钢杆 ABC 与铜杆 CD 在 C 处连接, 杆受力如图所示。若不考虑杆的自重, 试:

1. 求 C 、 D 二截面的铅垂位移;

2. 令 $F_{P1}=0$, 设 AC 段长度为 l_1 , 杆全长为 l , 杆的总伸长 $\Delta l = \frac{F_{P2} l}{EA}$, 写出 E 的表达式。



习题 2-2 图

$$\begin{aligned} \text{解: } 1. \quad u_C &= u_A + \frac{(F_N)_{AB} l_{AB}}{E_s \frac{\pi d^2}{4}} + \frac{(F_N)_{BC} l_{BC}}{E_s \frac{\pi d^2}{4}} \\ &= 0 + \frac{150 \times 10^3 \times 2000 + 100 \times 10^3 \times 3000}{200 \times 10^3} \times \frac{4}{\pi \times 36^2} \\ &= 2.947 \text{ mm} \end{aligned}$$

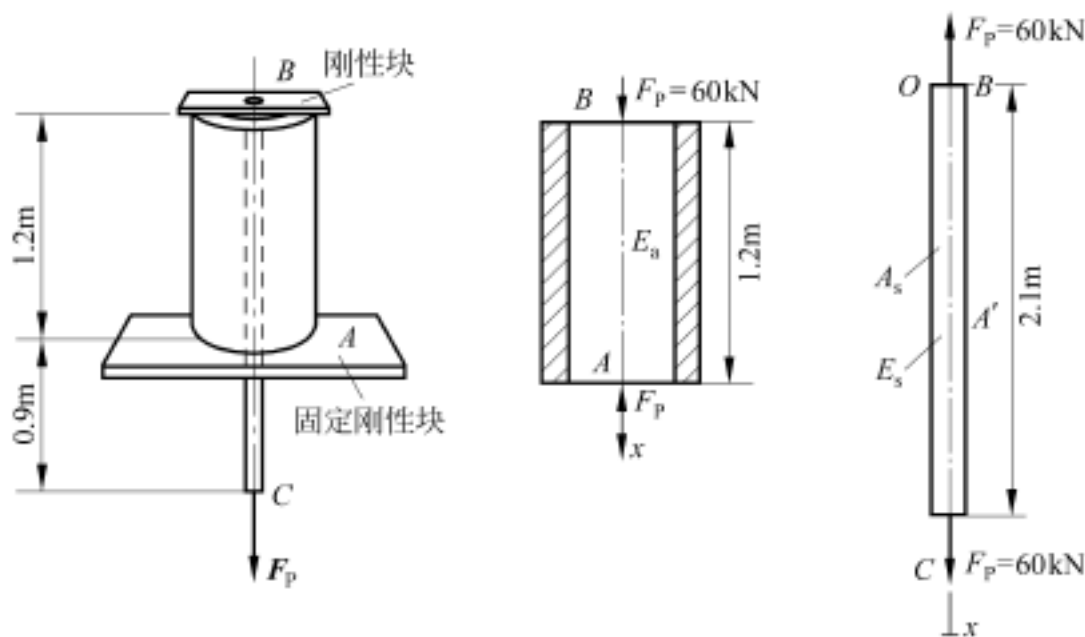
$$u_D = u_C + \frac{(F_N)_{CD} l_{CD}}{E_c \frac{d^2}{4}} = 2.947 + \frac{100 \times 10^3 \times 2500 \times 4}{105 \times 10^3 \times 36^2} = 5.286 \text{ mm}$$

$$2. \frac{F_{P2} l}{EA} = l = l_{AC} + l_{CD} = \frac{F_{P2} l}{E_s A} + \frac{F_{P2} (l - l)}{E_c A}, \text{ 令 } \frac{l}{EA} = \frac{l}{E_s A}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_s} + \frac{1}{E_c}$$

$$E = \frac{E_c E_s}{E_c + (1 -) E_s}$$

2-3 长度 $l = 1.2 \text{ m}$ 、横截面面积为 $1.10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 的铝制圆筒放置在固定的刚性块上；直径 $d = 15.0 \text{ mm}$ 的钢杆 BC 悬挂在铝筒顶端的刚性板上；铝制圆筒的轴线与钢杆的轴线重合。若在钢杆的 C 端施加轴向拉力 F_P ，且已知钢和铝的弹性模量分别为 $E_s = 200 \text{ GPa}$ ， $E_a = 70 \text{ GPa}$ ；轴向载荷 $F_P = 60 \text{ kN}$ ，试求钢杆 C 端向下移动的距离。



习题 2-3 图

解：1. 铝筒： $u_A - u_B = \frac{-F_P l_{AB}}{E_a A_a}$ (其中 $u_A = 0$)

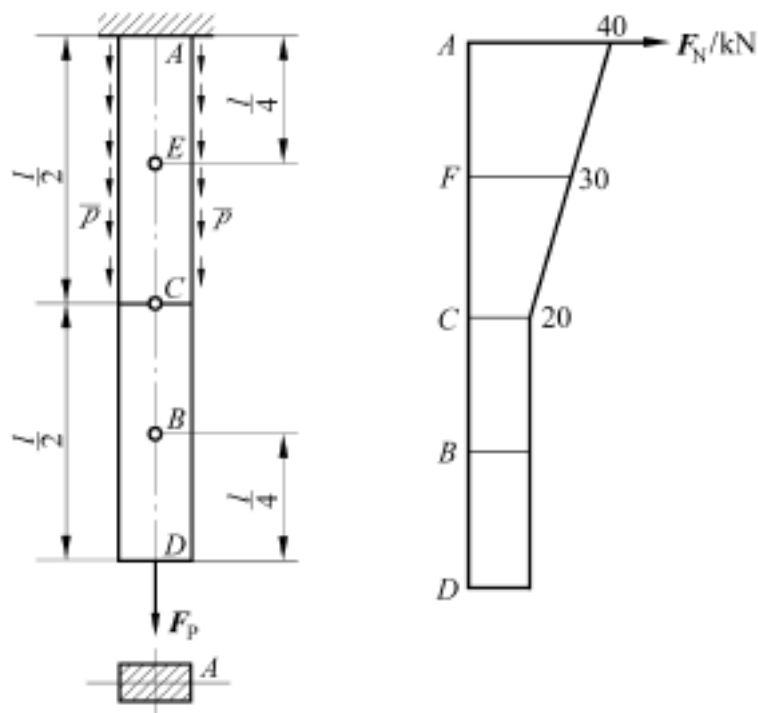
$$u_B = \frac{60 \times 10^3 \times 1.2 \times 10^3}{70 \times 10^3 \times 1.10 \times 10^{-3} \times 10^6} = 0.935 \text{ mm}$$

$$2. \text{ 钢杆： } u_C = u_B + \frac{F_P l_{BC}}{E_s A_s} = 0.935 + \frac{60 \times 10^3 \times 2.1 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} \times 15^2} = 4.50 \text{ mm}$$

2-4 直杆在上半部两侧面都受有平行于杆轴线的均匀分布载荷，其集度均为 $q = 10 \text{ kN/m}$ ；在自由端 D 处作用有集中力 $F_P = 20 \text{ kN}$ 。已知杆的横

截面面积 $A = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $l = 2\text{m}$ 。试求:

1. A 、 B 、 E 三个横截面上的正应力;
2. 杆内横截面上的最大正应力, 并指明其作用位置。



习题 2-4 图

解: 由已知条件, 用截面法求得

$$F_{NA} = 40\text{kN}, \quad F_{NB} = 20\text{kN}, \quad F_{NE} = 30\text{kN}$$

$$1. \quad \sigma_A = \frac{F_{NA}}{A} = \frac{40 \times 10^3}{2.0 \times 10^{-4}} = 200\text{MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{F_{NB}}{A} = 100\text{MPa}$$

$$\sigma_E = \frac{F_{NE}}{A} = 150\text{MPa}$$

$$2. \quad \sigma_{\max} = \sigma_A = 200\text{MPa} \text{ (A 截面)}$$

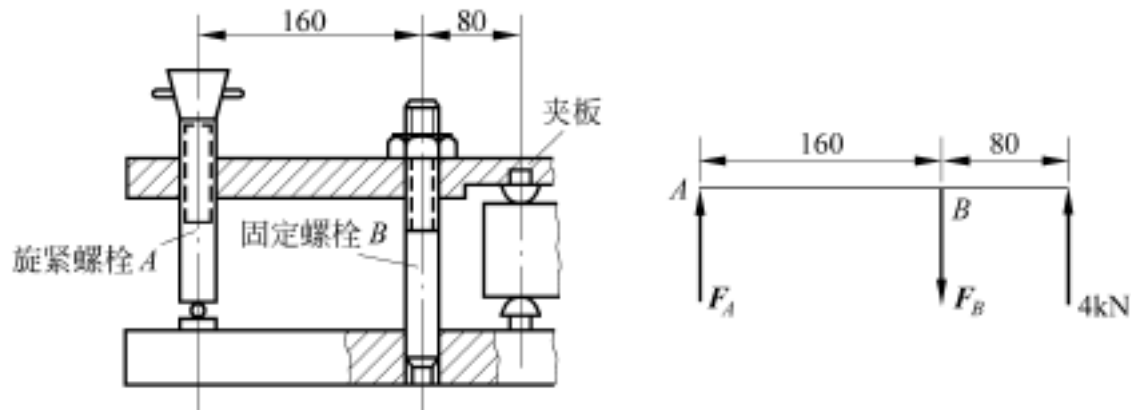
2-5 螺旋压紧装置如图所示。现已知工件所受的压紧力为 $F = 4\text{kN}$ 。装置中旋紧螺栓螺纹的内径 $d_1 = 13.8\text{mm}$; 固定螺栓内径 $d_2 = 17.3\text{mm}$ 。两根螺栓材料相同, 其许用应力 $[\sigma] = 53.0\text{MPa}$ 。试校核各螺栓的强度是否安全。

解: $M_B = 0, \quad F_A = 2\text{kN}$

$$F_y = 0, \quad F_B = 6\text{kN}$$

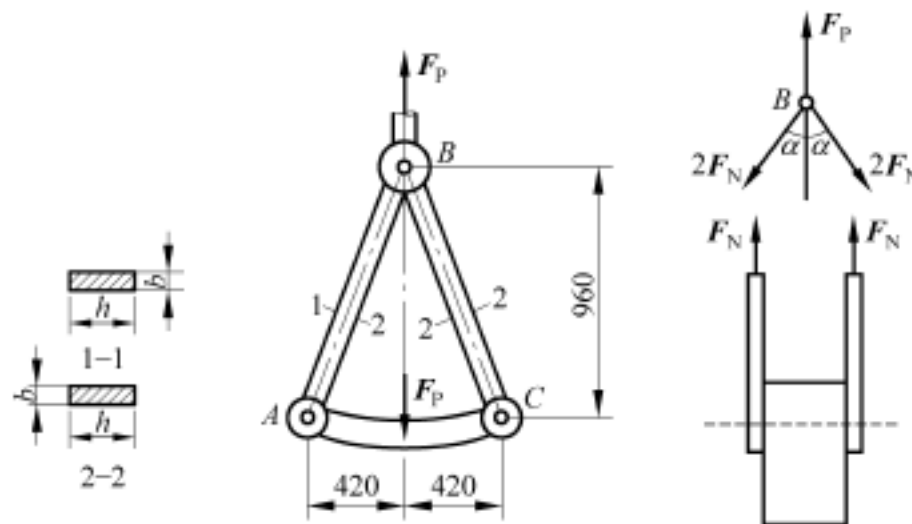
$$\sigma_A = \frac{F_A}{A_A} = \frac{2000}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \frac{2000 \times 4}{\pi \times 13.8^2 \times 10^{-6}} = 13.8\text{MPa} < [\sigma], \text{ 安全。}$$

$$\sigma_B = \frac{F_B}{A_B} = \frac{6000 \times 4}{\frac{\pi}{4} \times 17.3^2 \times 10^{-6}} = 25.53 \text{ MPa} < [\sigma], \text{ 安全。}$$



习题 2-5 图

2-6 现场施工所用起重机吊环由两根侧臂组成。每一侧臂 AB 和 BC 都由两根矩形截面杆所组成, A 、 B 、 C 三处均为铰链连接, 如图所示。已知起重载荷 $F_P = 1200 \text{ kN}$, 每根矩形杆截面尺寸比例 $b/h = 0.3$, 材料的许用应力 $[\sigma] = 78.5 \text{ MPa}$ 。试设计矩形杆的截面尺寸 b 和 h 。



习题 2-6 图

解: 由对称性受力图, 得

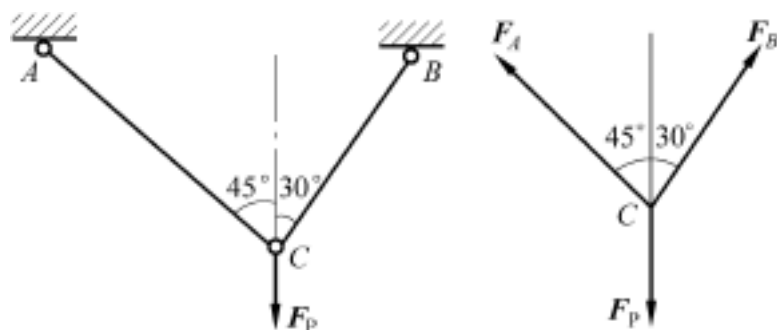
$$\begin{aligned} F_y &= 0, \quad 4 F_N \cos \alpha = F_P \\ F_N &= \frac{F_P}{4 \cos \alpha} = \frac{1200 \times 10^3}{4 \times \frac{960}{\sqrt{960^2 + 420^2}}} = 3.275 \times 10^5 \text{ N} \\ &= \frac{F_N}{A} = \frac{F_N}{0.3 h^2} \quad [\sigma] \end{aligned}$$

$$h = \sqrt{\frac{F_N}{0.3[\sigma]}} = \sqrt{\frac{3.275 \times 10^5}{0.3 \times 78.5 \times 10^6}} = 0.118\text{m}$$

$$b = 0.3h = 0.3 \times 0.118 = 0.0354\text{m} = 35.4\text{mm}$$

$$h = 118\text{mm}, \quad b = 35.4\text{mm}$$

2-7 图示结构中 BC 和 AC 都是圆截面直杆, 直径均为 $d = 20\text{mm}$, 材料都是 Q235 钢, 其许用应力 $[\sigma] = 157\text{MPa}$ 。试求该结构的许用载荷。



习题 2-7 图

$$\text{解:} \quad F_x = 0, \quad F_B = \sqrt{2} F_A \quad (1)$$

$$F_y = 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} F_A + \frac{\sqrt{3}}{2} F_B - F_P = 0 \quad (2)$$

$$F_P = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} F_B \quad (3)$$

$$F_B = [\sigma] \times \frac{\pi d^2}{4}$$

$$F_P = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi d^2}{4} [\sigma] \quad (4)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{4} \times 20^2 \times 10^{-4} \times 157 \times 10^6 = 67.4\text{kN}$$

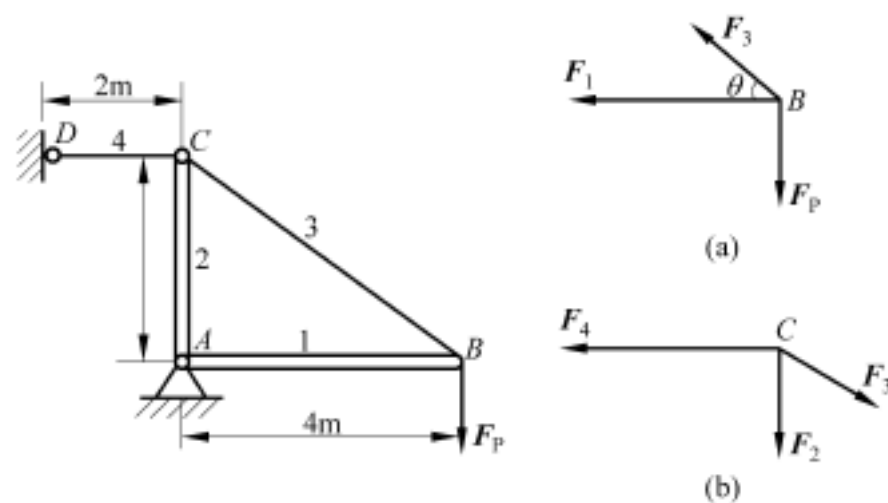
由(1)、(2)得

$$F_P = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2} F_A = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2} \times [\sigma] \times \frac{\pi d^2}{4} = 90.28\text{kN} \quad (5)$$

比较(4)、(5)式, 得 $[F_P] = 67.4\text{kN}$

讨论: 有一种解法, 认为 $[F_P] = [\sigma] A_a + [\sigma] A_b$ (A_a 和 A_b 分别为 AC 杆和 BC 杆的横截面面积), 这是不正确的。因为保持平衡时, 两杆内应力并不是正好都同时达到许用应力。

2-8 图示的杆件结构中 1、2 杆为木制, 3、4 杆为钢制。已知 1、2 杆的横截面面积 $A_1 = A_2 = 4000\text{mm}^2$, 3、4 杆的横截面面积 $A_3 = A_4 = 800\text{mm}^2$; 1、2 杆的许用应力 $[\sigma_w] = 20\text{MPa}$, 3、4 杆的许用应力 $[\sigma_s] = 120\text{MPa}$ 。试求结构的许用载荷 $[F_P]$ 。



习题 2-8 图

解：由图(a)：

$$F_y = 0, \quad F_3 = \frac{5}{3} F_P$$

$$F_x = 0, \quad F_1 = -\frac{4}{5} F_3 = -\frac{4}{3} F_P,$$

由图(b)：

$$F_x = 0, \quad F_4 = \frac{4}{5} F_3 = \frac{4}{3} F_P$$

$$F_y = 0, \quad F_2 = -\frac{5}{3} F_3 = -F_P$$

$$|F_1| > |F_2|$$

$$\frac{|F_1|}{A_1} \quad [w]$$

$$\frac{4}{3} F_P \quad A_1 [w]$$

$$F_P \quad \frac{3}{4} A_1 [w] = \frac{3}{4} \times 4000 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^6 = 60 \text{ kN}$$

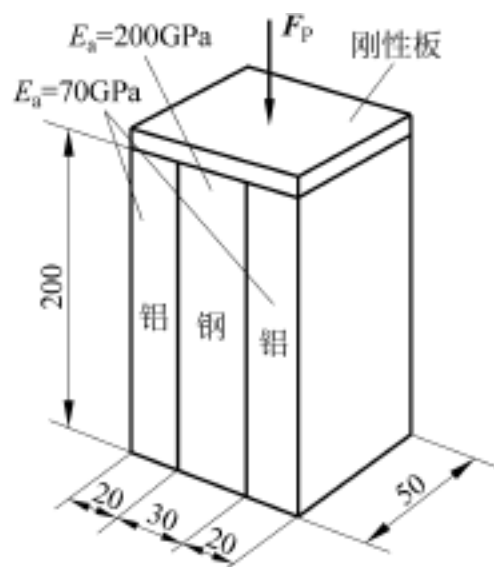
$$F_3 > F_4, \quad \frac{F_3}{A_3} \quad [s], \quad \frac{5}{3} F_P \quad [A_3]$$

$$F_P \quad \frac{3}{5} [A_3] = \frac{3}{5} \times 120 \times 10^6 \times 800 \times 10^{-6} = 57.6 \text{ kN}$$

$$[F_P] = \min(57.6 \text{ kN}, 60 \text{ kN}) = 57.6 \text{ kN}$$

* 2-9 由铝板和钢板组成的复合柱,通过刚性板承受纵向载荷 $F_P = 38 \text{ kN}$,其作用线沿着复合柱的轴线方向。试确定铝板和钢板横截面上的正应力。

解：由于刚性板的存在,又是对称加载,所以铝板和钢板具有相同的压缩变形量。于是有



习题 2-9 图

$$\frac{F_{Ns}}{E_s A_s} = \frac{F_{Na}}{E_a A_a} \quad (1)$$

根据平衡条件, 有

$$F_{Ns} + F_{Na} = -F_P \quad (2)$$

$$\begin{cases} F_{Ns} = -\frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_a A_a} F_P \\ F_{Na} = -\frac{E_a A_a}{E_s A_s + E_a A_a} F_P \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_s = \frac{F_{Ns}}{A_s} &= -\frac{E_s F_P}{E_s b h + E_a \cdot 2b h} = -\frac{E_s F_P}{b h E_s + 2b h E_a} \\ &= \frac{-200 \times 10^9 \times 385 \times 10^3}{0.03 \times 0.05 \times 200 \times 10^9 + 2 \times 0.02 \times 0.05 \times 70 \times 10^9} \\ &= -175 \text{ MPa (压)} \\ \epsilon_a = \frac{F_{Na}}{A_a} &= -\frac{E_a F_P}{b h E_s + 2b h E_a} = \frac{-175 E_a}{E_s} = -175 \times \frac{70}{200} \\ &= -61.25 \text{ MPa (压)} \end{aligned}$$

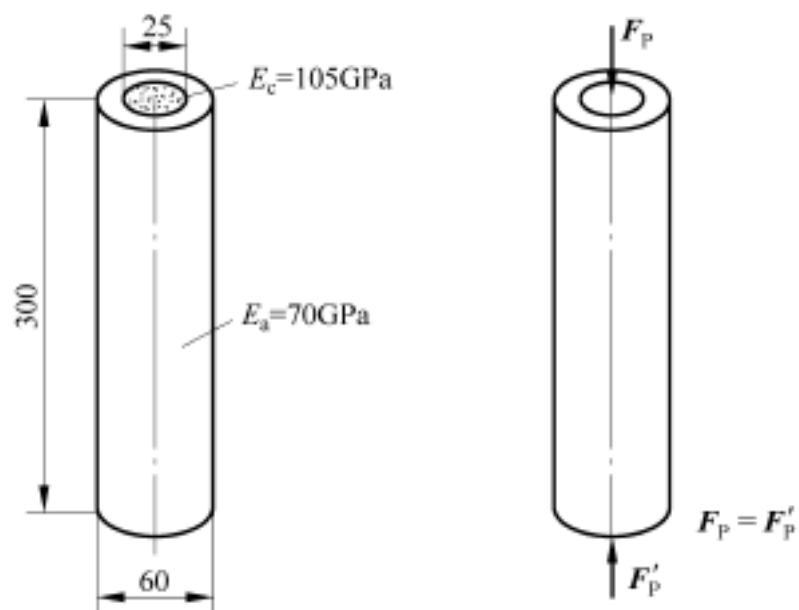
* 2-10 铜芯与铝壳组成的复合棒材如图所示, 轴向载荷通过两端刚性板加在棒材上。现已知结构总长减少了 0.24mm。试求:

1. 所加轴向载荷的大小;
2. 铜芯横截面上的正应力。

解: 1. 设铜芯与铝壳之间无内压, 二者具有相同的轴向应变, 其值为

$$= \frac{0.24}{300} = 8 \times 10^{-4}$$

轴向载荷等于二者受力之和:



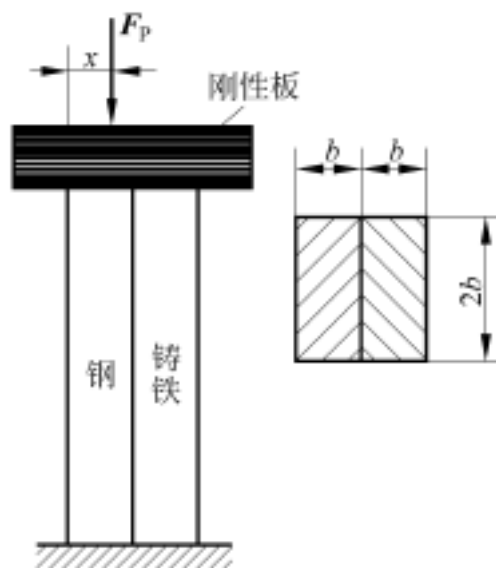
习题 2-10 图

$$\begin{aligned}
 F_P &= \sigma_{cu} A_{cu} + \sigma_{al} A_{al} = E_{cu} \epsilon A_{cu} + E_{al} \epsilon A_{al} \\
 &= 105 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-4} \times \frac{1}{4} \times 25^2 \times 10^{-3} + \\
 &\quad 70 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-4} \times \frac{1}{4} (60^2 - 25^2) \times 10^{-3} \\
 &= 172.1 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

2. 铜芯应力

$$\sigma_{cu} = E_{cu} \epsilon = 105 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-4} = 84 \text{ MPa}$$

* 2-11 图示组合柱由钢和铸铁制成, 组合柱横截面为边长为 $2b$ 的正方形, 钢和铸铁各占横截面的一半 ($b \times 2b$)。载荷 F_P 通过刚性板沿铅垂方向加在组合柱上。已知钢和铸铁的弹性模量分别为 $E_s = 196 \text{ GPa}$, $E_i = 98.0 \text{ GPa}$ 。今欲使刚性板保持水平位置, 试求加力点的位置 $x = ?$



习题 2-11 图

解: $M_0 = 0, \quad (b \cdot 2b_s) \cdot \left[x - \frac{b}{2} \right] = (b \cdot 2b) \cdot \left[\frac{3}{2}b - x \right]$

$$\frac{2x - b}{3b - 2x} = \frac{b_s}{b} \quad (1)$$

$$\frac{b_s}{E_s} = \frac{b}{E}$$

$$\frac{b_s}{E_s} = \frac{98}{196} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式得

$$4x - 2b = 3b - 2x$$

由此解得

$$x = \frac{5}{6}b$$

轴向载荷作用下杆件材料的力学性能

习题解答

3-1 韧性材料应变硬化后,材料的力学性能发生了变化。试判断以下结论哪一个是正确的:

- (A) 屈服应力提高,弹性模量降低;
- (B) 屈服应力提高,韧性降低;
- (C) 屈服应力不变,弹性模量不变;
- (D) 屈服应力不变,韧性不变。

正确答案是 (B)。

解:韧性材料应变硬化后,如果再加载,材料的屈服应力提高,韧性即延伸率降低。所以正确答案是(B)。

3-2 关于材料的力学一般性能,有如下结论,请判断哪一个是正确的:

- (A) 脆性材料的抗拉能力低于其抗压能力;
- (B) 脆性材料的抗拉能力高于其抗压能力;
- (C) 韧性材料的抗拉能力高于其抗压能力;
- (D) 脆性材料的抗拉能力等于其抗压能力。

正确答案是 (A)。

解:大多数脆性材料的抗拉强度低于抗压强度。所以答案(A)是正确的。

3-3 低碳钢材料在拉伸实验过程中,不发生明显的塑性变形时,承受的最大应力应当小于的数值,有以下四种答案,请判断哪一个是正确的:

- (A) 比例极限;
- (B) 屈服强度;
- (C) 强度极限;
- (D) 许用应力。

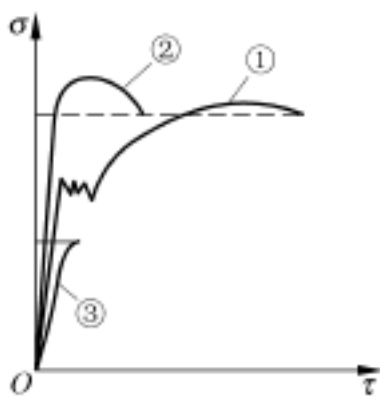
正确答案是____(B)_____。

解：低碳钢拉伸时,当应力大于或等于屈服强度时才会出现明显的塑性变形。所以正确的答案应该是(B)。

3-4 根据图示三种材料拉伸时的应力-应变曲线,得出的如下四种结论,请判断哪一种是正确的:

- (A) 强度极限 $\sigma_b(1) = \sigma_b(2) > \sigma_b(3)$, 弹性模量 $E(1) > E(1) > E(3)$, 延伸率 $(1) > (2) > (3)$;
- (B) 强度极限 $\sigma_b(2) > \sigma_b(1) > \sigma_b(3)$, 弹性模量 $E(2) > E(1) > E(3)$, 延伸率 $(1) > (2) > (3)$;
- (C) 强度极限 $\sigma_b(3) < \sigma_b(1) < \sigma_b(2)$, 弹性模量 $E(3) > E(1) > E(2)$, 延伸率 $(3) > (2) > (1)$;
- (D) 强度极限 $\sigma_b(1) > \sigma_b(2) > \sigma_b(3)$, 弹性模量 $E(2) > E(1) > E(3)$, 延伸率 $(2) > (1) > (3)$ 。

正确答案是____(B)_____。



习题 3-4 图

解：图示的三种拉伸曲线表明，

三种材料的强度极限 $\sigma_b(2) > \sigma_b(1) > \sigma_b(3)$;

三种材料的弹性模量 $E(2) > E(1) > E(3)$;

三种材料的延伸率 $(1) > (2) > (3)$ 。

所以答案(B)是正确的。

3-5 关于低碳钢试样拉伸至屈服时,有以下结论,请判断哪一个是正确的:

- (A) 应力和塑性变形很快增加,因而认为材料失效;
- (B) 应力和塑性变形虽然很快增加,但不意味着材料失效;
- (C) 应力不增加,塑性变形很快增加,因而认为材料失效;
- (D) 应力不增加,塑性变形很快增加,但不意味着材料失效。

正确答案是____(C)____。

解：屈服的特征是应力不增加，而塑性变形很快增加，这时，材料已经丧失承载能力，即失效。所以正确答案是(C)。

3-6 关于条件屈服强度有如下四种论述，请判断哪一种是正确的：

- (A) 弹性应变为 0.2% 时的应力值；
- (B) 总应变为 0.2% 时的应力值；
- (C) 塑性应变为 0.2% 时的应力值；
- (D) 塑性应变为 0.2 时的应力值。

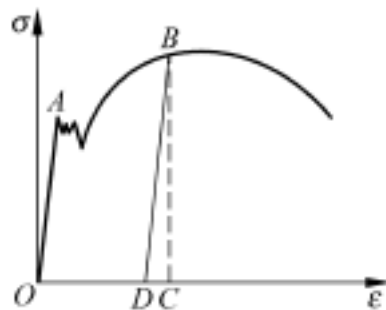
正确答案是____(C)____。

解：条件屈服强度是人为规定的。规定：产生 0.2% 塑性应变时的应力值，称为材料的条件屈服强度。所以正确答案是(C)。

3-7 低碳钢加载 卸载 再加载路径有以下四种，请判断哪一种是正确的：

- (A) $OAB \quad BC \quad COAB$;
- (B) $OAB \quad BD \quad DOAB$;
- (C) $OAB \quad BAO \quad ODB$;
- (D) $OAB \quad BD \quad DB$ 。

正确答案是____(D)____。



习题 3-7 图

解：加载时的路径是 OAB ；卸载时的路径是 BD ；再加载路径是 DB 。所以正确答案是(D)。

圆轴扭转时的强度与刚度计算

习题解答

4-1 关于扭转剪应力公式 $\tau = M_x / I_p$ 的应用范围有以下几种,试判断哪一种是正确的。

- (A) 等截面圆轴,弹性范围内加载;
- (B) 等截面圆轴;
- (C) 等截面圆轴与椭圆轴;
- (D) 等截面圆轴与椭圆轴,弹性范围内加载。

正确答案是 (A)。

解: $\tau = M_x / I_p$ 在推导时利用了等截面圆轴受扭后,其横截面保持平面的假设,同时推导过程中还应用了剪切胡克定律,要求在线弹性范围加载。所以正确答案是(A)。

4-2 两根长度相等、直径不等的圆轴承受相同的扭矩受扭后,轴表面上母线转过相同的角度。设直径大的轴和直径小的轴的横截面上的最大剪应力分别为 $\tau_{1\max}$ 和 $\tau_{2\max}$,剪切弹性模量分别为 G_1 和 G_2 。试判断下列结论的正确性。

- (A) $\tau_{1\max} > \tau_{2\max}$;
- (B) $\tau_{1\max} < \tau_{2\max}$;
- (C) 若 $G_1 > G_2$,则有 $\tau_{1\max} > \tau_{2\max}$;
- (D) 若 $G_1 > G_2$,则有 $\tau_{1\max} < \tau_{2\max}$ 。

正确答案是 (C)。

解: 因两圆轴等长,轴表面上母线转过相同角度,则剪应变相同,即 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ 。由剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$,知 $G_1 > G_2$ 时, $\tau_{1\max} > \tau_{2\max}$ 。因此,正确答案是(C)。

4-3 承受相同扭矩且长度相等的直径为 d_1 的实心圆轴与内、外径分别为 d_2 、 D_2 ($d_2 = d_1 / D_2$) 的空心圆轴,二者横截面上的最大剪应力相等。关于二者重之比 (W_1 / W_2) 有如下结论,试判断哪一种是正确的。

- (A) $(1 - \frac{1}{4})^{3/2}$;
 (B) $(1 - \frac{1}{4})^{3/2} (1 - \frac{1}{2})$;
 (C) $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{2})$;
 (D) $(1 - \frac{1}{4})^{2/3} (1 - \frac{1}{2})$ 。

正确答案是____(D)____。

解：由 $\tau_{1\max} = \tau_{2\max}$ 得

$$\frac{16 M_x}{d_1^3} = \frac{16 M_x}{D_2^3 (1 - \frac{1}{4})}$$

即

$$\frac{d_1}{D_2} = (1 - \frac{1}{4})^{1/3} \quad (\text{a})$$

二者重量之比

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{D_2^2 (1 - \frac{1}{4})} \quad (\text{b})$$

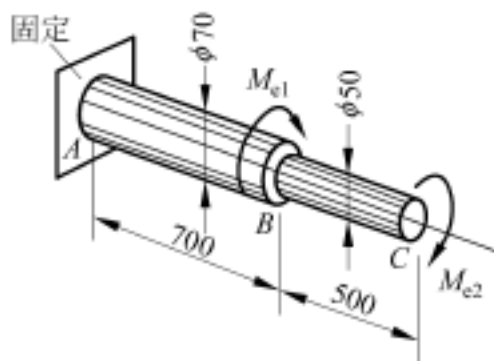
(a)式代入(b)式,得

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{(1 - \frac{1}{4})^{2/3}}{1 - \frac{1}{4}}$$

所以,正确答案是(D)。

4-4 变截面轴受力如图所示,图中尺寸单位为 mm。若已知 $M_{e1} = 1765\text{N} \cdot \text{m}$, $M_{e2} = 1171\text{N} \cdot \text{m}$,材料的切变模量 $G = 80.4\text{GPa}$,求:

1. 轴内最大剪应力,并指出其作用位置;
2. 轴内最大相对扭转角 φ_{\max} 。



习题 4-4 图

解：1. 确定最大剪应力

AB段:

$$M_{xAB} = M_{e1} + M_{e2} = 1765\text{N} \cdot \text{m} + 1171\text{N} \cdot \text{m} = 2936\text{N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\max}(AB) = \frac{M_{xAB}}{W_{pAB}} = \frac{M_{xAB}}{\frac{\pi d_1^3}{16}} = \frac{2936}{\frac{\pi (70 \times 10^{-3})^3}{16}} = 43.6\text{MPa}$$

BC段:

$$M_{xBC} = M_{e1} = 1171 \text{ N} \cdot \text{m}$$

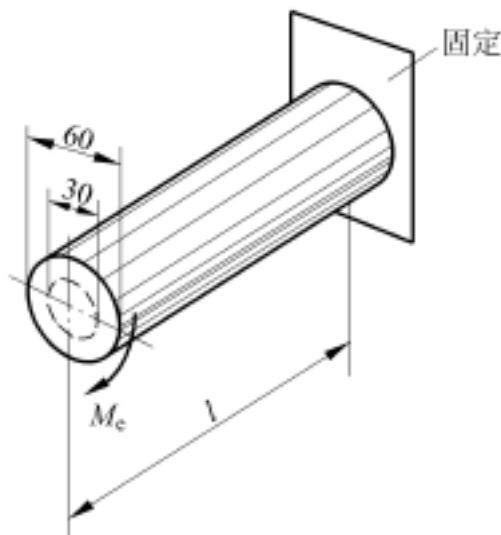
$$\tau_{\max}(BC) = \frac{M_{xBC}}{W_{p2}} = \frac{M_{xBC}}{\frac{d^3}{16}} = \frac{1171}{\frac{(50 \times 10^{-3})^3}{16}} = 47.7 \text{ MPa}$$

2. 确定轴内最大相对扭转角 φ_{\max}

$$\begin{aligned} \varphi_{\max} &= \varphi_{AB} + \varphi_{BC} \\ &= \frac{M_{xAB} l_2}{GI_{p1}} + \frac{M_{xBC} l_1}{GI_{p2}} \\ &= \frac{2936 \times 700 \times 10^{-3} \times 32}{80.4 \times 10^9 \times (70 \times 10^{-3})^4} + \frac{1171 \times 500 \times 10^{-3} \times 32}{80.4 \times 10^9 \times (50 \times 10^{-3})^4} \\ &= 1.084 \times 10^{-2} + 1.187 \times 10^{-2} = 2.271 \times 10^{-2} \text{ rad} \end{aligned}$$

4-5 图示实心圆轴承受外加扭转力偶,其力偶矩 $M_e = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。试求:

1. 轴横截面上的最大剪应力;
2. 轴横截面上半径 $r = 15 \text{ mm}$ 以内部分承受的扭矩所占全部横截面上扭矩的百分比;
3. 去掉 $r = 15 \text{ mm}$ 以内部分,横截面上的最大剪应力增加的百分比。



习题 4-5 图

$$\text{解: 1. } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{M_e}{W_p} = \frac{M_e}{\frac{d^3}{16}} = \frac{3 \times 10^3 \times 16}{0.06^3} = 70.7 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad M_r &= \int_{A1} r \cdot dA = \int_0^r \frac{M_x}{I_p} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2\pi M_x}{I_p} \cdot \frac{r^4}{4} \\ \frac{M_r}{M_x} &= \frac{2\pi r^4}{4 \times \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16r^4}{d^4} = 16 \times \left(\frac{15}{60} \right)^4 = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

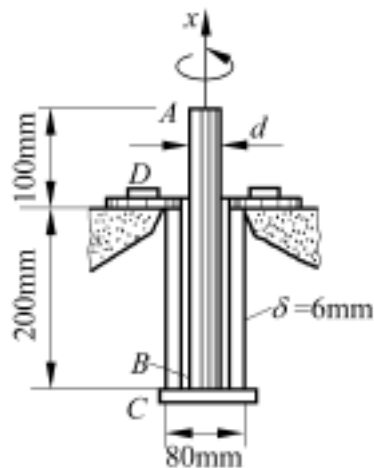
$$= 0.0625 \times 100\% = 6.25\%$$

请读者思考, 还有没有更好的解法?

$$3. \quad \sigma_{2\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{M_e}{\frac{d^3}{16} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right]} = 75.4 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_{2\max} - \sigma_{1\max}}{\sigma_{1\max}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4} = \frac{1}{15} = 6.67\%$$

4-6 同轴线的芯轴 AB 与轴套 CD , 在 D 处二者无接触, 而在 C 处焊成一体。轴的 A 端承受扭转力偶作用, 如图所示。已知轴直径 $d=66\text{mm}$, 轴套外直径 $D=80\text{mm}$, 厚度 $\delta=6\text{mm}$; 材料的许用剪应力 $[\tau]=60\text{MPa}$ 。求: 结构所能承受的最大外加扭力矩。



习题 4-6 图

解: $\sigma_{\text{轴}\max} = \frac{M_x}{W_{p1}} = \frac{T_1}{\frac{d^3}{16}} \leq 60 \times 10^6$

$$T_1 \leq 60 \times 10^6 \times \frac{\pi \times 66^3}{16} \times 10^{-9} = 3387 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\text{套}\max} = \frac{M_x}{W_{p2}} = \frac{T_2}{\frac{d^3}{16} \left[1 - \left(\frac{68}{80} \right)^4 \right]} \leq 60 \times 10^6$$

$$T_2 \leq 60 \times 10^6 \times \frac{\pi \times 80^3}{16} \times 10^{-9} \left[1 - \left(\frac{17}{20} \right)^4 \right] = 2883 \text{ N} \cdot \text{m}$$

所以, $T_{\max} = T_2 = 2883 \text{ N} \cdot \text{m} = 2.883 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$

* 4-7 图示开口和闭口薄壁圆管横截面的平均直径均为 D , 壁厚均为 δ , 横截面上的扭矩均为 $T = M_e$ 。试:

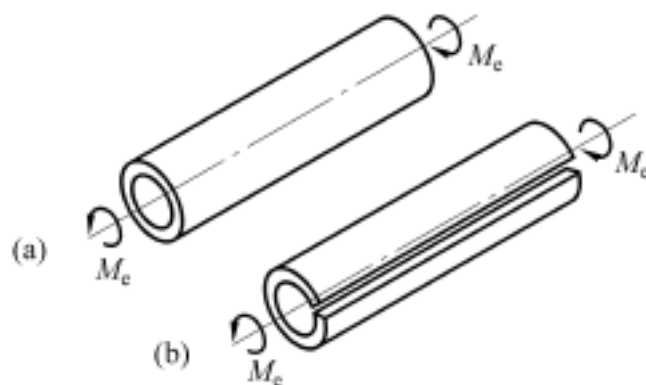
1. 证明闭口圆管受扭时横截面上最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_e}{D^2}$$

2. 证明开口圆管受扭时横截面上最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{3 M_e}{2 D}$$

3. 画出两种情形下,剪应力沿壁厚方向的分布。



习题 4-7 图

解:

1. 证明闭口圆管受扭时横截面上最大剪应力

由于是薄壁,所以圆环横截面上的剪应力可以认为沿壁厚均匀分布 (图 a-1),于是有

$$M_e = \int_A \frac{D}{2} \cdot \tau \cdot dA = \frac{D}{2} \cdot \tau \cdot A$$

由此得到

$$\tau = \frac{2 M_e}{D^2} \quad \text{即} \quad \tau_{\max} = \frac{2 M_e}{D^2}$$

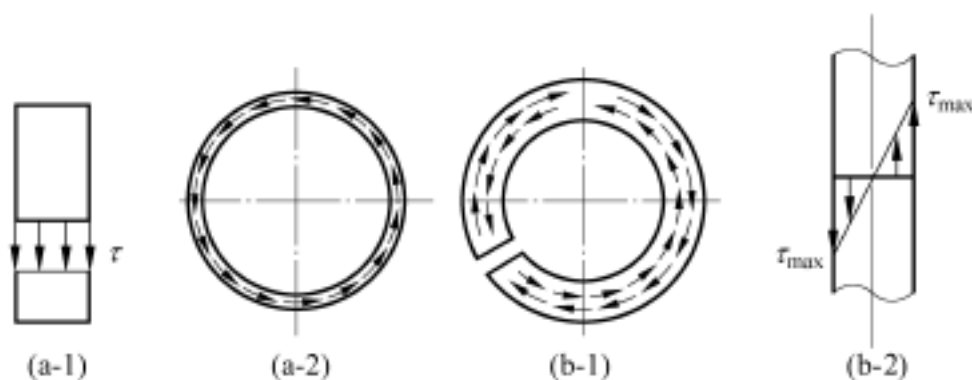
2. 证明开口圆管受扭时横截面上最大剪应力

根据狭长矩形扭转剪应力公式,有

$$\tau_{\max} = \frac{3 M_e}{h b^2} = \frac{3 M_e}{D \cdot \frac{D^2}{4}} = \frac{3 M_e}{\frac{D^3}{4}} = \frac{3 M_e}{\frac{D^3}{4}}$$

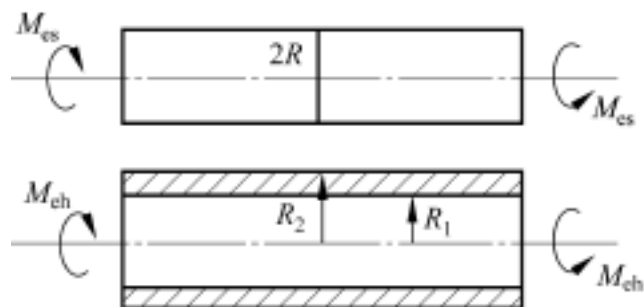
3. 画出两种情形下,剪应力沿壁厚方向的分布

两种情形下剪应力沿壁厚方向的分布分别如图(a-1)和(b-2)所示。



4-8 由同一材料制成的实心圆轴和空心圆轴,二者长度和质量均相等。设实心轴半径为 R_0 ,空心圆轴的内、外半径分别为 R_1 和 R_2 ,且 $R_1/R_2 = n$,二者所承受的外扭转力偶矩分别为 M_{es} 和 M_{eh} 。若二者横截面上的最大剪应力相等,试证明:

$$\frac{M_{es}}{M_{eh}} = \frac{\sqrt{1-n^2}}{1+n^2}$$



解: 因为长度和质量相等,所以面积也相等。于是有

$$R_0^2 = (R_2^2 - R_1^2) \quad (a)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{es}}{\frac{d^3}{16}} = \frac{M_{es}}{\frac{R_0^3}{2}} \quad (b)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{eh}}{\frac{(2R_2)^3}{16}(1-n^4)} \quad (c)$$

由(b)、(c)二式,得

$$\frac{M_{es}}{M_{eh}} = \frac{R_0^3}{R_2^3(1-n^4)} \quad (d)$$

由(a)式有

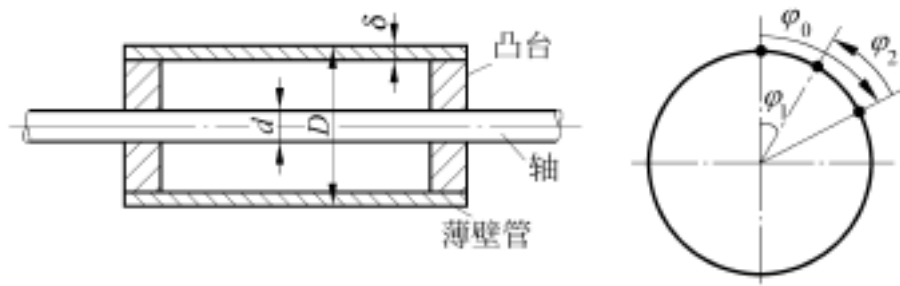
$$R_0^2 = R_2^2 - R_1^2$$

将其代入(d)式,最后得到所要证明的结论:

$$\frac{M_{es}}{M_{eh}} = \frac{(R_2^2 - R_1^2)^{\frac{3}{2}}}{R_2^3(1-n^4)} = \frac{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}{1-n^4} = \frac{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-n^2)(1+n^2)} = \frac{\sqrt{1-n^2}}{1+n^2}$$

* 4-9 直径 $d = 25\text{mm}$ 的钢轴上焊有两个凸台,凸台上套有外径 $D = 75\text{mm}$ 、壁厚 $\delta = 1.25\text{mm}$ 的薄壁管,当杆承受外扭转力偶矩 $M_e = 73.6\text{N} \cdot \text{m}$ 时,将薄壁管与凸台焊在一起,然后再卸去外加扭转力偶。假定凸台不变形,薄壁管与轴的材料相同,切变模量 $G = 40\text{MPa}$ 。试:

1. 分析卸载后轴和薄壁管的横截面上有没有内力,二者如何平衡?
2. 确定轴和薄壁管横截面上的最大剪应力。



习题 4-9 图

解:

1. 分析卸载后轴和薄壁管横截面上的内力

焊接前,轴承受扭矩,轴发生扭转变形。这时,如果卸载,轴的扭转变形将全部恢复,因而轴的横截面上将没有扭矩。

与薄壁管焊接后,再除去轴上的外加扭力矩,轴的扭转变形不能完全恢复,因而轴的横截面上仍然存在扭矩,但已经不是加载时的扭矩,而是小于原来的扭矩。

二者焊接后形成一个整体,如果用一个假想截面将整体截开,这时的横截面由轴和薄壁管的横截面组成,卸载后,没有外加扭力矩作用,仅仅轴的横截面上存在扭矩无法平衡,因此,薄壁管的横截面上必然存在与之大小相等方向相反的扭矩,二者组成平衡力系,使截开的部分保持平衡。设轴和薄壁管横截面上的扭矩分别为 M_{x1} 和 M_{x2} ,于是有

$$M_{x1} = M_{x2}$$

2. 确定轴和薄壁管横截面上的最大剪应力

设轴受 $M_e = 73.6 \text{ N} \cdot \text{m}$ 时,相对扭转角为 φ_0 ,于是有

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = \frac{M_x}{GI_{p1}} = \frac{M_e}{GI_{p1}} \quad (\text{a})$$

焊接后卸载,管承受扭转,其相对扭转角为 φ_2 ,轴上没有恢复的相对扭转角为 $\varphi_1 = \varphi_0 - \varphi_2$,即

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0 \quad (\text{b})$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{M_{x1} l}{GI_{p1}} \\ \varphi_2 &= \frac{M_{x2} l}{GI_{p2}} \end{aligned} \quad (\text{c})$$

将(a)式和(c)式代入(b)式得

$$\frac{M_e l}{GI_{p1}} = \frac{M_{x1} l}{GI_{p1}} + \frac{M_{x2} l}{GI_{p2}} \quad (\text{d})$$

由此解得

$$M_{x1} = M_{x2} = \frac{I_{p2}}{I_{p1} + I_{p2}} M_e \quad (e)$$

其中

$$\begin{aligned} I_{p1} &= \frac{d^4}{32} = \frac{1}{32} \times 25^4 \times 10^{-12} = 38349.5 \times 10^{-12} \text{ m}^4 \\ I_{p2} &= \frac{D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{D-2}{D} \right)^4 \right] = \frac{1}{32} \times 75^4 \left[1 - \left(\frac{72.5}{75} \right)^4 \right] \times 10^{-12} \\ &= 393922 \times 10^{-12} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

于是, 卸载后薄壁管横截面上的最大剪应力为

$$\tau_{2\max} = \frac{M_{x2}}{W_{p2}} = \frac{M_e}{I_{p1} + I_{p2}} \cdot \frac{I_{p2}}{W_{p2}} = \frac{M_e}{I_{p1} + I_{p2}} \cdot \frac{D}{2} \quad (f)$$

将 I_{p1} 、 I_{p2} 值代入(f)式得

$$\tau_{2\max} = \frac{73.6 \times \frac{75}{2} \times 10^{-3}}{(38349.5 + 393922) \times 10^{-12}} = 6.38 \text{ MPa}$$

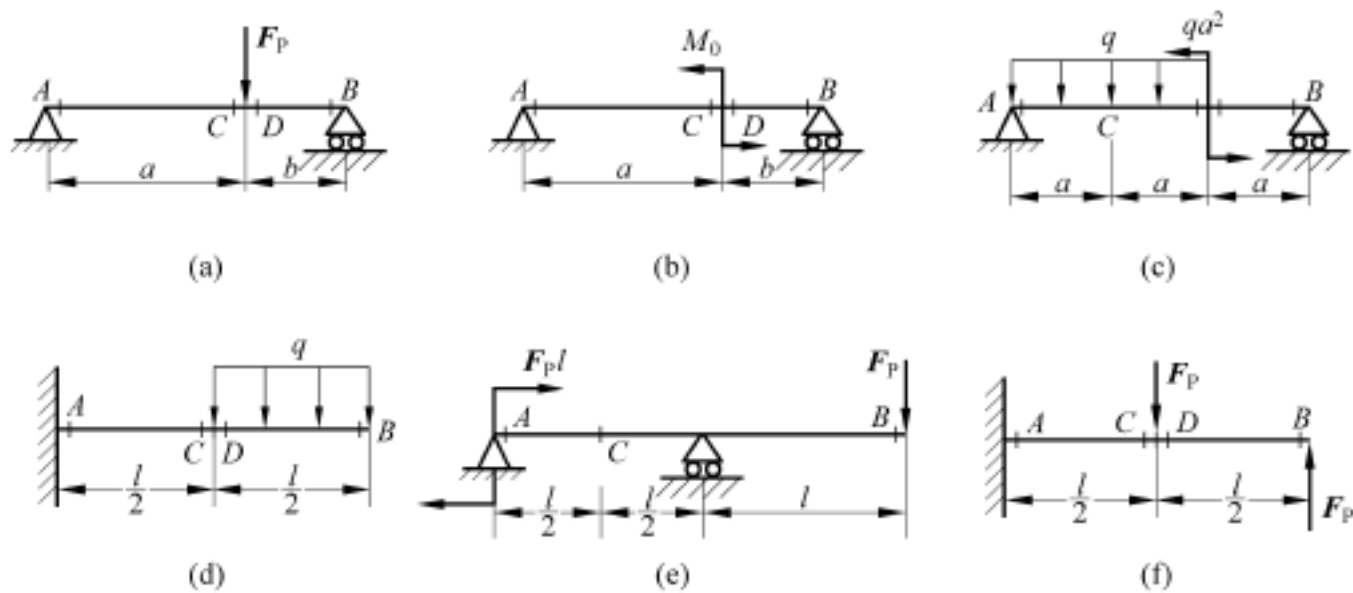
卸载后, 轴横截面上的最大剪应力为

$$\begin{aligned} \tau_{1\max} &= \frac{M_{x1}}{I_{p1}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{I_{p2} \cdot M_e}{I_{p1} (I_{p1} + I_{p2})} \cdot \frac{d}{2} \\ &= \frac{73.6 \times \frac{25}{2} \times 393922 \times 10^{-3}}{(38349.5 + 393922) \times 38349.5 \times 10^{-12}} = 21.86 \text{ MPa} \end{aligned}$$

梁的强度问题

习 题 解 答

5-1 试求图示各梁中指定截面上的剪力、弯矩值。



习题 5-1 图

解：(a)题 A 截面： $F_Q = \frac{b}{a+b} F_P$, $M = 0$

C 截面： $F_Q = \frac{b}{a+b} F_P$, $M = \frac{ab}{a+b} F_P$

D 截面： $F_Q = -\frac{a}{a+b} F_P$, $M = \frac{ab}{a+b} F_P$

B 截面： $F_Q = -\frac{a}{a+b} F_P$, $M = 0$

(b)题 A 截面： $F_Q = \frac{M_0}{a+b}$, $M = 0$

C 截面： $F_Q = \frac{M_0}{a+b}$, $M = \frac{a}{a+b} M_0$

$$D \text{ 截面: } F_Q = -\frac{M_0}{a+b}, \quad M = \frac{b}{a+b}M_0$$

$$B \text{ 截面: } F_Q = -\frac{M_0}{a+b}, \quad M = 0$$

$$(c) \text{ 题 } A \text{ 截面: } F_Q = \frac{5}{3}qa, \quad M = 0$$

$$C \text{ 截面: } F_Q = \frac{5}{3}qa, \quad M = \frac{7}{6}qa^2$$

$$B \text{ 截面: } F_Q = -\frac{1}{3}qa, \quad M = 0$$

$$(d) \text{ 题 } A \text{ 截面: } F_Q = \frac{1}{2}ql, \quad M = -\frac{3}{8}qa^2$$

$$C \text{ 截面: } F_Q = \frac{1}{2}ql, \quad M = -\frac{1}{8}qa^2$$

$$D \text{ 截面: } F_Q = \frac{1}{2}ql, \quad M = -\frac{1}{8}qa^2$$

$$B \text{ 截面: } F_Q = 0, \quad M = 0$$

$$(e) \text{ 题 } A \text{ 截面: } F_Q = -2F_P, \quad M = F_P l$$

$$C \text{ 截面: } F_Q = -2F_P, \quad M = 0$$

$$B \text{ 截面: } F_Q = F_P, \quad M = 0$$

$$(f) \text{ 题 } A \text{ 截面: } F_Q = 0, \quad M = \frac{F_P l}{2}$$

$$C \text{ 截面: } F_Q = 0, \quad M = \frac{F_P l}{2}$$

$$D \text{ 截面: } F_Q = -F_P, \quad M = \frac{F_P l}{2}$$

$$B \text{ 截面: } F_Q = -F_P, \quad M = 0$$

5-2 试写出以下各梁的剪力方程、弯矩方程。

解:

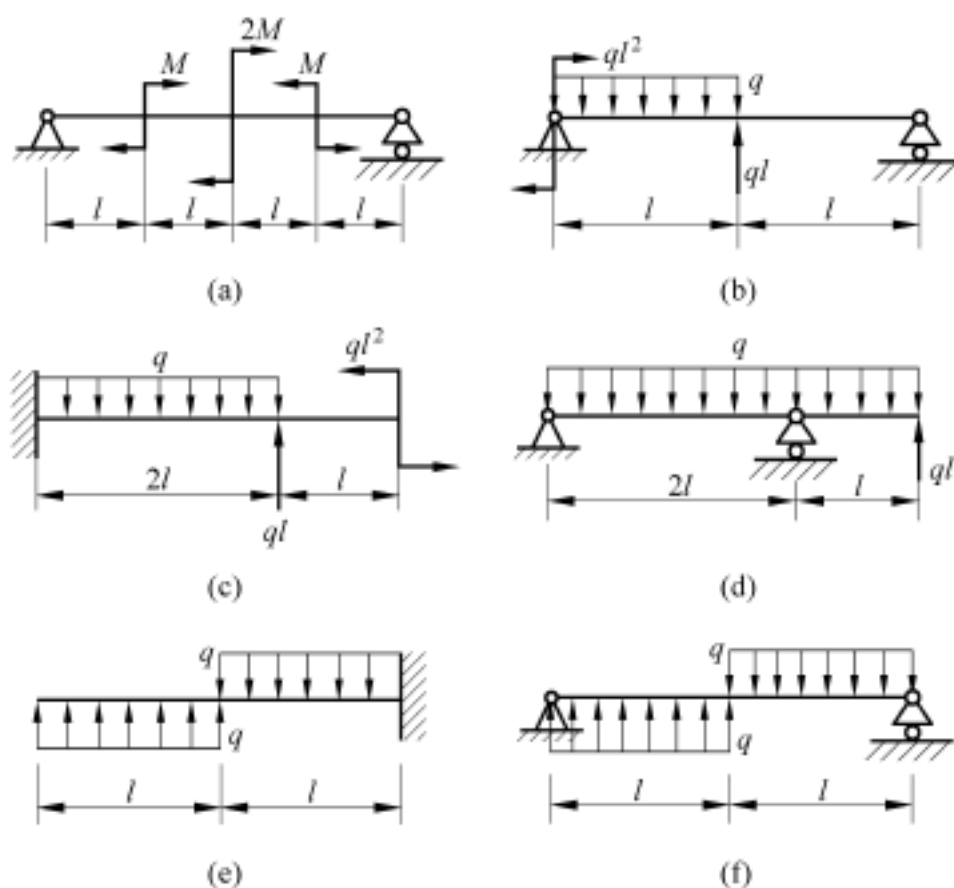
(a) 题

$$F_Q(x) = -\frac{M}{2l}, \quad M(x) = -\frac{M}{2l}x \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$F_Q(x) = -\frac{M}{2l}, \quad M(x) = -\frac{M}{2l}x + M \quad (l \leq x \leq 2l)$$

$$F_Q(x) = -\frac{M}{2l}, \quad M(x) = -\frac{M}{2l}x + 3M \quad (2l \leq x \leq 3l)$$

$$F_Q(x) = -\frac{M}{2l}, \quad M(x) = -\frac{M}{2l}x + 2M \quad (3l \leq x \leq 4l)$$



习题 5-2 图

(b)题

$$F_Q(x) = -\frac{1}{4}ql - qx, \quad M(x) = ql^2 - \frac{1}{4}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$F_Q(x) = -\frac{1}{4}ql, \quad M(x) = \frac{1}{4}ql(2l - x) \quad (l \leq x \leq 2l)$$

(c)题

$$F_Q(x) = ql - qx, \quad M(x) = qlx + ql^2 - \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq 2l)$$

$$F_Q(x) = 0, \quad M(x) = ql^2 \quad (2l \leq x \leq 3l)$$

(d)题

$$F_Q(x) = \frac{5}{4}ql - qx, \quad M(x) = \frac{5}{4}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq 2l)$$

$$F_Q(x) = -ql + q(3l - x), \quad M(x) = ql(3l - x) - \frac{1}{2}q(3l - x)^2 \quad (2l \leq x \leq 3l)$$

(e)题

$$F_Q(x) = qx, \quad M(x) = \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$F_Q(x) = ql - q(x - l), \quad M(x) = ql\left(x - \frac{l}{2}\right) - \frac{1}{2}q(x - l)^2 \quad (l \leq x \leq 2l)$$

(f) 题

$$F_Q(x) = -\frac{ql}{2} + qx, \quad M(x) = -\frac{1}{2}qlx + \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$F_Q(x) = -\frac{ql}{2} + q(2l - x), \quad M(x) = \frac{ql}{2}(2l - x) - \frac{1}{2}q(2l - x)^2 \quad (l \leq x \leq 2l)$$

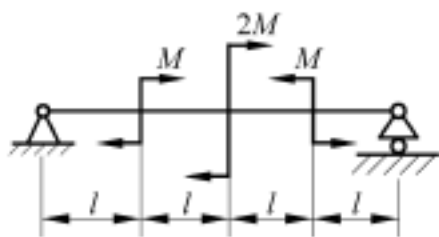
5-3 试画出习题 5-2 中各梁的剪力图、弯矩图, 并确定剪力和弯矩的绝对值的最大值。

解: (a) $M_A = 0, \quad F_{RB} = \frac{M}{2l}(\quad)$

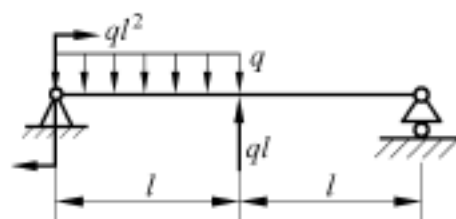
$$F_y = 0, \quad F_{RA} = \frac{M}{2l}(\quad)$$

$$|F_Q|_{\max} = \frac{M}{2l}$$

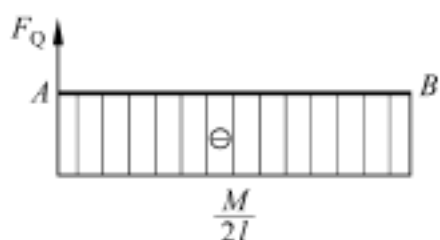
$$|M|_{\max} = 2M$$



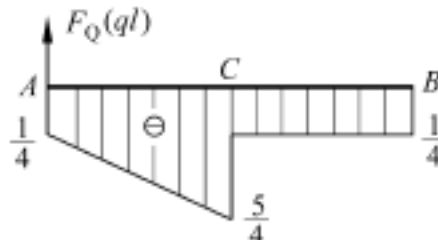
(a)



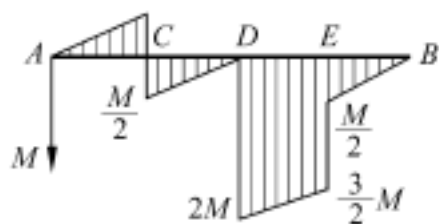
(b)



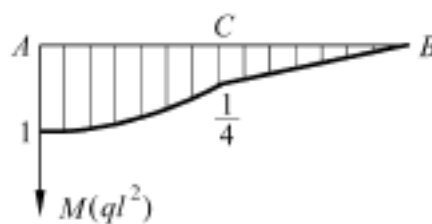
(a-1)



(b-1)



(a-2)



(b-2)

习题 5-3 图

$$(b) \quad M_A = 0, \quad -ql^2 - ql \cdot \frac{l}{2} + ql \cdot l + F_{RB} \cdot 2l = 0$$

$$F_{RB} = \frac{1}{4}ql(\quad)$$

$$F_y = 0, \quad F_{RA} = \frac{1}{4}ql(\quad)$$

$$M_C = F_{RB} \cdot l = \frac{1}{4}ql \cdot l = \frac{1}{4}ql^2 (\quad)$$

$$M_A = ql^2$$

$$|F_Q|_{\max} = \frac{5}{4}ql$$

$$|M|_{\max} = ql^2$$

$$(c) \quad F_y = 0, \quad F_{RA} = ql(\quad)$$

$$M_A = 0, \quad M_A = ql^2$$

$$M_D = 0, \quad ql^2 + ql \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - M_D = 0$$

$$M_D = \frac{3}{2}ql^2$$

$$|F_Q|_{\max} = ql$$

$$|M|_{\max} = \frac{3}{2}ql^2$$

$$(d) \quad M_B = 0$$

$$F_{RA} \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot \frac{l}{2} - ql \cdot l = 0$$

$$F_{RA} = \frac{5}{4}ql(\quad)$$

$$F_y = 0, \quad F_{RB} = \frac{3}{4}ql(\quad)$$

$$M_B = 0, \quad M_B = \frac{q}{2}l^2$$

$$M_D = 0, \quad M_D = \frac{25}{32}ql^2$$

$$|F_Q|_{\max} = \frac{5}{4}ql$$

$$|M|_{\max} = \frac{25}{32}ql^2$$

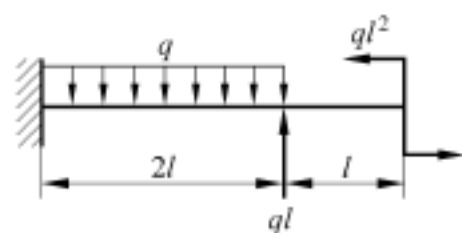
$$(e) \quad F_y = 0, \quad F_{RC} = 0$$

$$M_C = 0, \quad -ql \cdot \frac{3}{2}l + ql \cdot \frac{l}{2} + M_C = 0$$

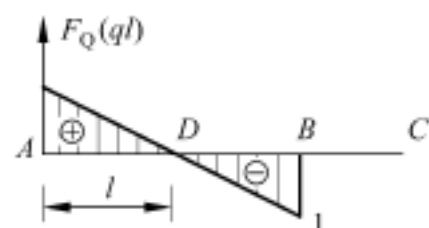
$$M_C = ql^2$$

$$M_B = 0, \quad M_B = \frac{1}{2}ql^2$$

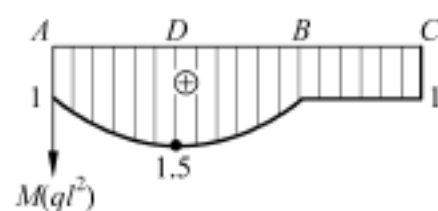
$$F_y = 0, \quad F_{QB} = ql$$



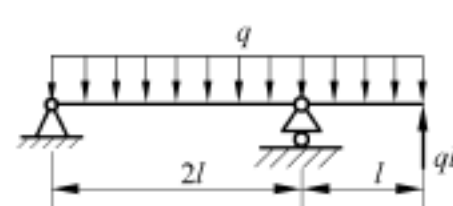
(c)



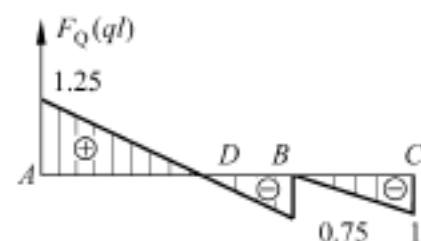
(c-1)



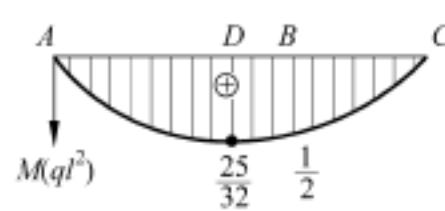
(c-2)



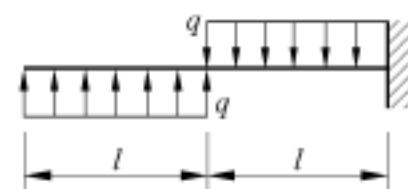
(d)



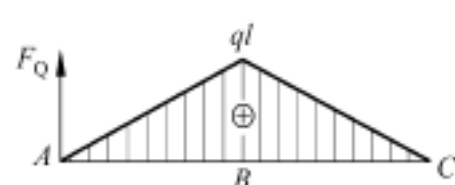
(d-1)



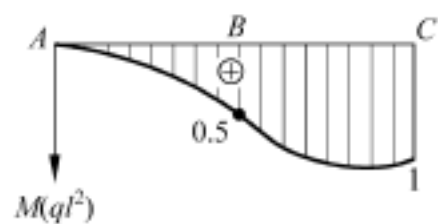
(d-2)



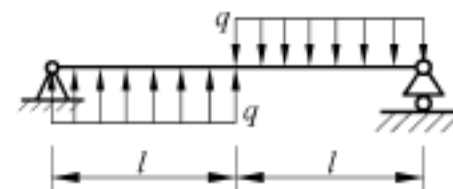
(e)



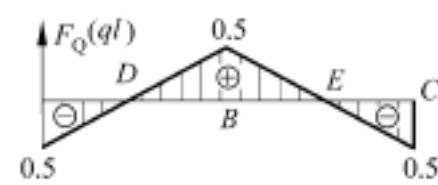
(e-1)



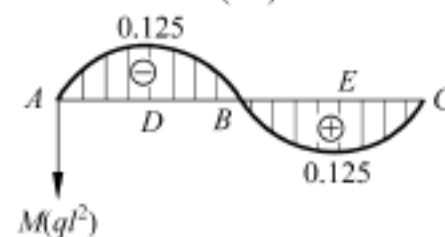
(e-2)



(f)



(f-1)



(f-2)

习题 5-3 图(续)

$$|F_Q|_{\max} = ql$$

$$|M|_{\max} = ql^2$$

$$(f) \quad M_A = 0, \quad F_{RB} = \frac{1}{2}ql(\quad)$$

$$F_y = 0, \quad F_{RA} = \frac{1}{2}ql(\quad)$$

$$F_y = 0, \quad -\frac{1}{2}ql + ql - F_{QB} = 0$$

$$F_{QB} = \frac{1}{2}ql$$

$$M_D = 0, \quad \frac{1}{2}ql \cdot \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + M_D = 0$$

$$M_D = -\frac{1}{8}ql^2$$

$$M_E = \frac{1}{8}ql^2$$

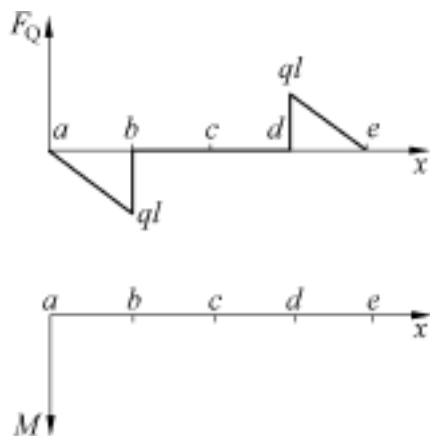
$$|F_Q|_{\max} = \frac{1}{2}ql$$

$$|M|_{\max} = \frac{1}{8}ql^2$$

* 5-4 已知图示梁的剪力图以及 a 、 e 两截面上的弯矩 M_a 和 M_e 均为零。为确定 b 、 d 两截面上的弯矩 M_b 、 M_d ，现有下列四种答案，试分析哪一种是正确的。

- (A) $M_b = M_a + A_{a-b}(F_Q)$, $M_d = M_e + A_{e-d}(F_Q)$;
 (B) $M_b = M_a - A_{a-b}(F_Q)$, $M_d = M_e - A_{e-d}(F_Q)$;
 (C) $M_b = M_a + A_{a-b}(F_Q)$, $M_d = M_e - A_{e-d}(F_Q)$;
 (D) $M_b = M_a - A_{a-b}(F_Q)$, $M_d = M_e + A_{e-d}(F_Q)$ 。

上述各式中 $A_{a-b}(F_Q)$ 为截面 a 、 b 之间剪力图的面积，以此类推。剪力图的面积可以为正，也可以为负。



习题 5-4 图

解：根据微分关系的定积分以及 a 、 b 之间剪力图的面积为负值，有

$$M_b = M_a - A_{a-b}(F_Q)$$

因为 d 、 e 之间剪力图的面积为正值，所以有

$$M_e = M_d + A_{d-e}(F_Q)$$

以及

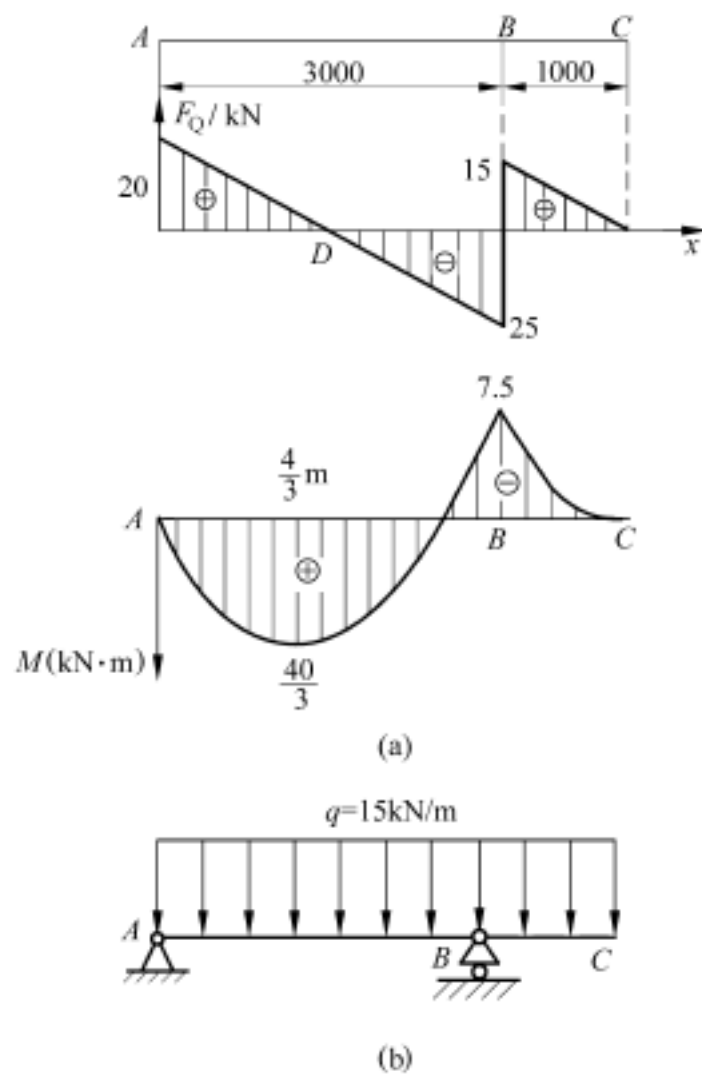
$$A_{d \rightarrow e}(F_Q) = A_{e \rightarrow d}(F_Q)$$

改写后为

$$M_d = M_e - A_{e \rightarrow d}(F_Q)$$

因此, 正确答案是(B)。

* 5-5 静定梁承受平面载荷, 但无集中力偶作用, 其剪力图如图所示。若已知 A 端弯矩 $M_A = 0$ 。试确定梁上的载荷及梁的弯矩图。并指出梁在何处有约束, 且为何种约束。



习题 5-5 图

解: 由 F_Q 图线性分布且斜率相同知, 梁上有向下均布载荷 q , 由 A、B 处 F_Q 向上突变知, A、B 处有向上集中力; 又因 A、B 处弯矩无突变, 说明 A、B 处为简支约束, 由 A、B 处 F_Q 值知

$$F_{RA} = 20 \text{ kN} ()$$

$$F_{RB} = 40 \text{ kN} ()$$

由 $F_y = 0$, 即

$$F_{RA} + F_{RB} - q \times 4 = 0$$

得

$$q = 15 \text{ kN/m}$$

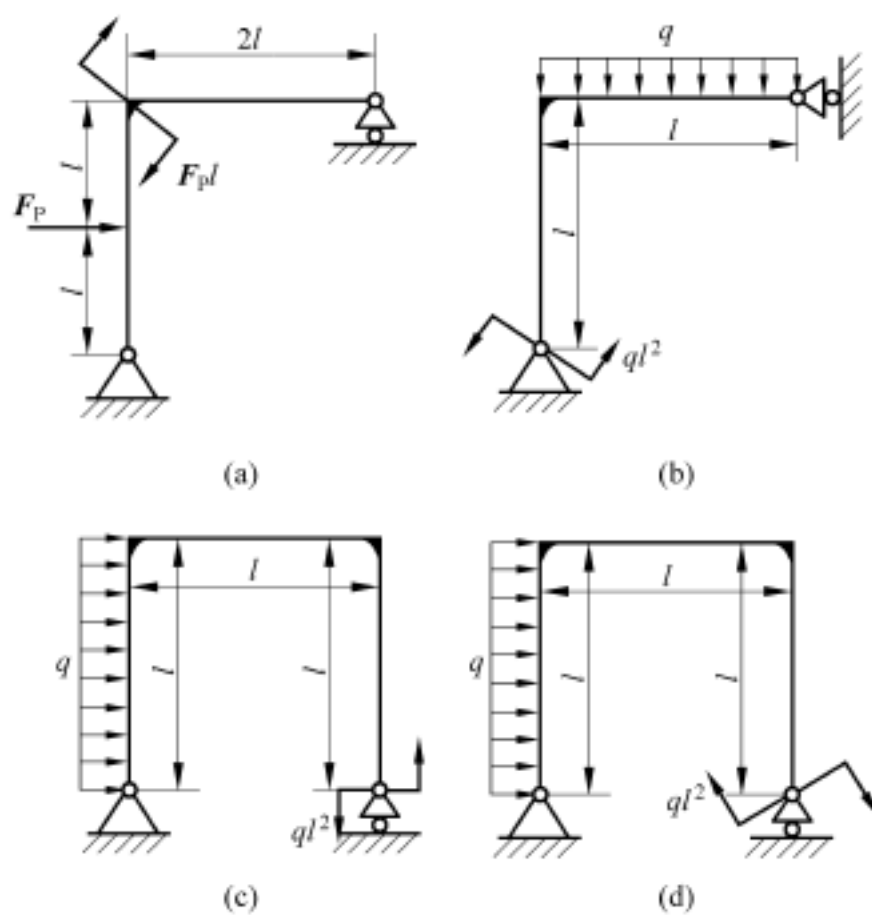
由 F_Q 图 D 、 B 处值知, M 在 D 、 B 处取极值

$$M_D = 20 \times \frac{4}{3} - 15 \times \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{40}{3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = - q \times 1 \times \frac{1}{2} = - 7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

梁上载荷及梁的弯矩图分别如图(b)、(a)所示。

* 5-6 试作图示刚架的剪力图和弯矩图, 并确定 $|F_Q|_{\max}$ 、 $|M|_{\max}$ 。



习题 5-6 图

解: 图(a):

$$M_A = 0$$

$$F_{RB} \cdot 2l - F_P \cdot l - F_P \cdot l = 0$$

$$F_{RB} = F_P (\quad)$$

$$F_y = 0, \quad F_{Ay} = F_P (\quad)$$

$$F_x = 0, \quad F_{Ax} = F_P (\quad)$$

弯矩图如图(a-1), 其中 $|M|_{\max} = 2 F_P l$, 位于刚节点 C 截面。

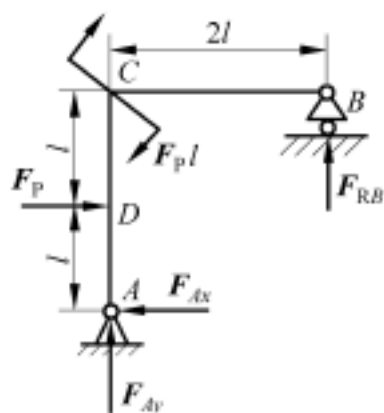
图(b):

$$F_y = 0, \quad F_{Ay} = ql (\quad)$$

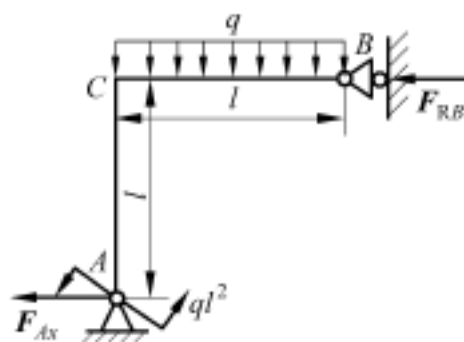
$$M_A = 0, \quad F_{RB} = \frac{1}{2}ql(\quad)$$

$$F_x = 0, \quad F_{Ax} = \frac{1}{2}ql(\quad)$$

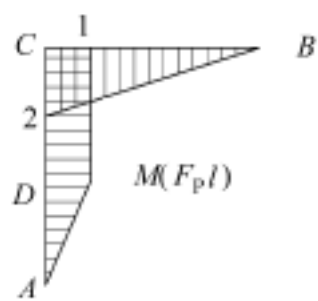
弯矩图如图(b-1), 其中 $|M|_{\max} = ql^2$ 。



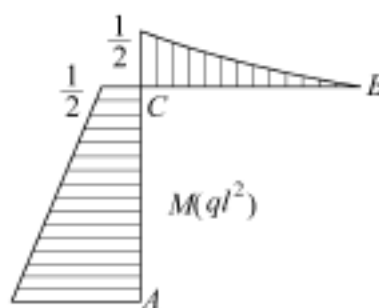
(a)



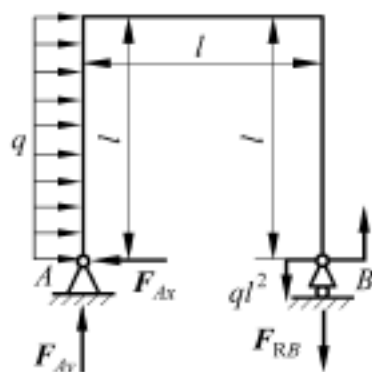
(b)



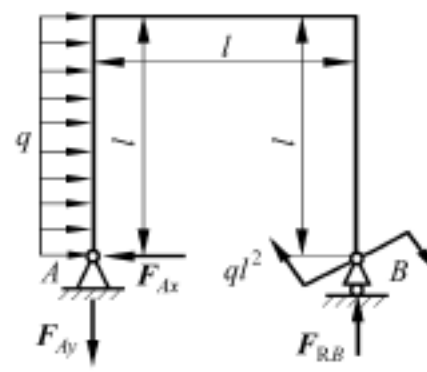
(a-1)



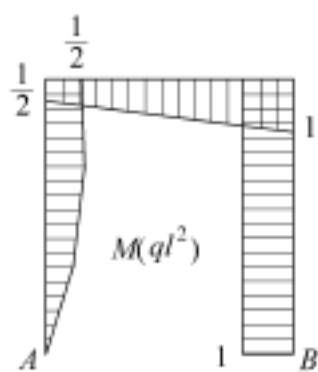
(b-1)



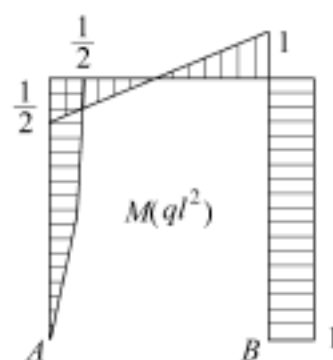
(c)



(d)



(c-1)



(d-1)

图(c):

$$F_x = 0, \quad F_{Ax} = ql(\quad)$$

$$M_A = 0$$

$$ql^2 - ql \cdot \frac{l}{2} - F_{RB} \cdot l = 0$$

$$F_{RB} = \frac{1}{2}ql(\quad)$$

$$F_y = 0, \quad F_{Ay} = \frac{1}{2}ql(\quad)$$

弯矩图如图(c-1), 其中 $|M|_{\max} = ql^2$ 。

图(d):

$$F_x = 0, \quad F_{Ax} = ql(\quad)$$

$$M_A = 0$$

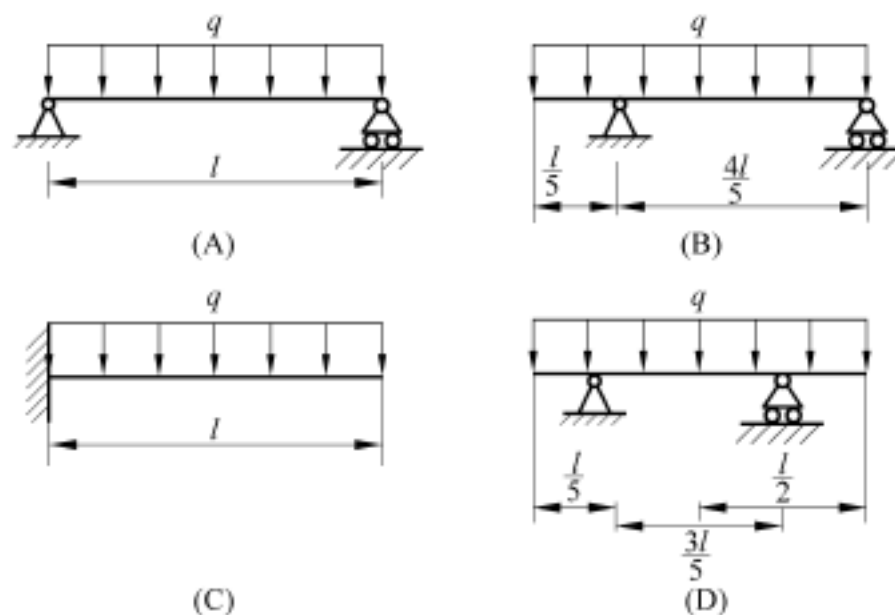
$$-ql \cdot \frac{l}{2} - ql^2 + F_{RB} \cdot l = 0$$

$$F_{RB} = \frac{3}{2}ql(\quad)$$

$$F_y = 0, \quad F_{Ay} = \frac{3}{2}ql^2(\quad)$$

弯矩图如图(d-1), 其中 $|M|_{\max} = ql^2$ 。

5-7 长度相同、承受同样的均布载荷 q 作用的梁, 有图中所示的四种支承方式, 如果从梁的强度考虑, 请判断哪一种支承方式最合理。



习题 5-7 图

解: (A) $M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2$

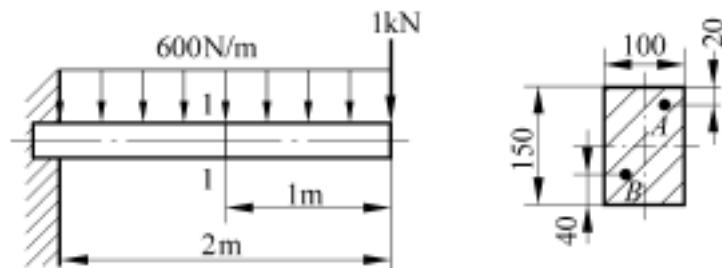
(B) $M_{\max} = \frac{1}{40}ql^2$

(C) $M_{\max} = \frac{1}{2}ql^2$

(D) $M_{\max} = \frac{7}{100}ql^2$

正确答案是(B)。

5-8 悬臂梁受力及截面尺寸如图所示。图中的尺寸单位为 mm。求: 梁的 1-1 截面上 A、B 两点的正应力。



习题 5-8 图

解:

1. 计算梁 1-1 截面上的弯矩

$$M = - \left[1 \times 10^3 \text{ N} \times 1 \text{ m} + 600 \text{ N/m} \times 1 \text{ m} \times \frac{1 \text{ m}}{2} \right] = -1300 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 确定梁 1-1 截面上 A、B 两点的正应力

A 点:

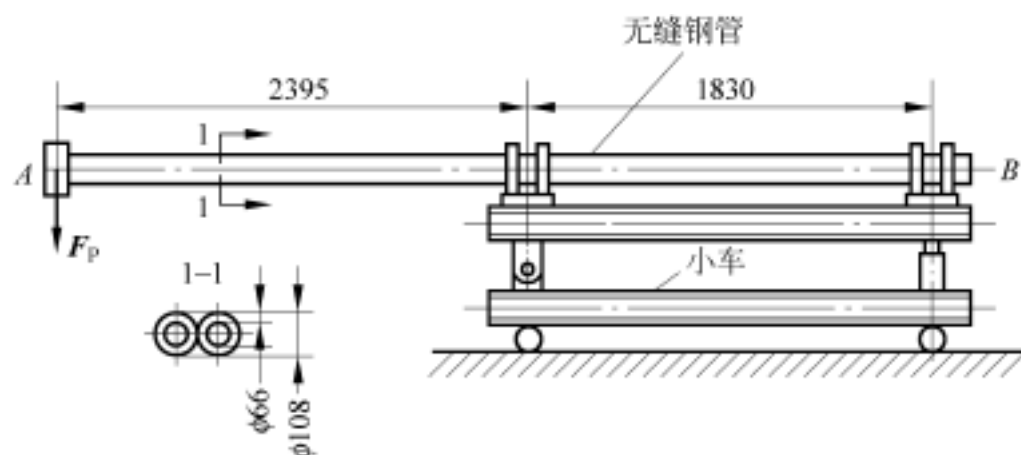
$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_z y}{I_z} = \frac{1300 \text{ N} \cdot \text{m} \times \left[\frac{150 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} - 20 \times 10^{-3} \text{ m} \right]}{\frac{100 \times 10^{-3} \text{ m} \times (150 \times 10^{-3} \text{ m})^3}{12}} \\ &= 2.54 \times 10^6 \text{ Pa} = 2.54 \text{ MPa (拉应力)} \end{aligned}$$

B 点:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M_z y}{I_z} = \frac{1300 \text{ N} \cdot \text{m} \times \left[\frac{150 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} - 40 \times 10^{-3} \text{ m} \right]}{\frac{100 \times 10^{-3} \text{ m} \times (150 \times 10^{-3} \text{ m})^3}{12}} \\ &= 1.62 \times 10^6 \text{ Pa} = 1.62 \text{ MPa (压应力)} \end{aligned}$$

5-9 加热炉炉前机械操作装置如图所示, 图中的尺寸单位为 mm。其操作臂由两根无缝钢管所组成。外伸端装有夹具, 夹具与所夹持钢料的总重 $F_P =$

2200N, 平均分配到两根钢管上。求: 梁内最大正应力(不考虑钢管自重)。



习题 5-9 图

解:

1. 计算最大弯矩

$$M_{\max} = -2200\text{N} \times 2395 \times 10^{-3}\text{m} = -5.269 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}$$

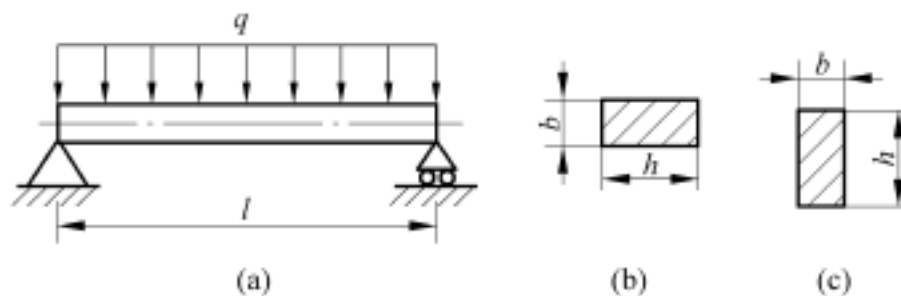
2. 确定最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{2W} = \frac{M_{\max}}{2 \times \frac{D^3}{32}(1 - \alpha^4)}, \quad \alpha = \frac{66\text{mm}}{108\text{mm}} = 0.611$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{2W} = \frac{5.269 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}}{2 \times \frac{(108 \times 10^{-3}\text{m})^3}{32}(1 - 0.611^4)}$$

$$= 24.71 \times 10^6 \text{Pa} = 24.71 \text{MPa}$$

5-10 图示矩形截面简支梁, 承受均布载荷 q 作用。若已知 $q = 2\text{kN/m}$, $l = 3\text{m}$, $h = 2b = 240\text{mm}$ 。试求: 截面竖放(图 c)和横放(图 b)时梁内的最大正应力, 并加以比较。



习题 5-10 图

解:

1. 计算最大弯矩

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \times 10^3 \text{N/m} \times (3\text{m})^2}{8} = 2.25 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}$$

2. 确定最大正应力

平放:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{2.25 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 6}{240 \times 10^{-3} \text{ m} \times (120 \times 10^{-3} \text{ m})^2}$$

$$= 3.91 \times 10^6 \text{ Pa} = 3.91 \text{ MPa}$$

竖放:

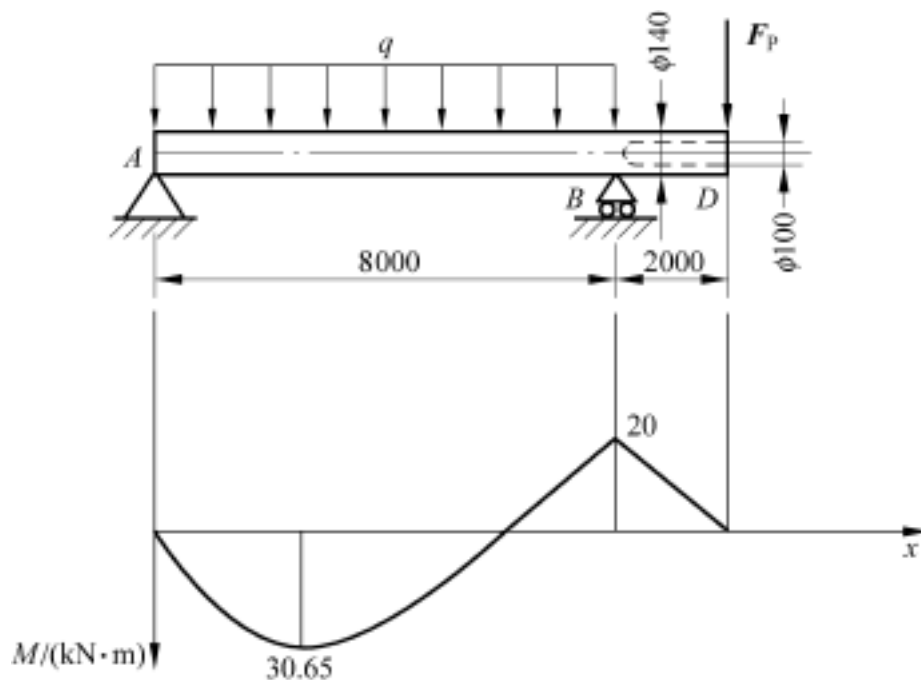
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{2.25 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 6}{120 \times 10^{-3} \text{ m} \times (240 \times 10^{-3} \text{ m})^2}$$

$$= 1.95 \times 10^6 \text{ Pa} = 1.95 \text{ MPa}$$

3. 比较平放与竖放时的最大正应力

$$\frac{\sigma_{\max}(\text{平放})}{\sigma_{\max}(\text{竖放})} = \frac{3.91}{1.95} = 2.0$$

5-11 圆截面外伸梁, 其外伸部分是空心的, 梁的受力与尺寸如图所示。图中尺寸单位为 mm。已知 $F_P = 10 \text{ kN}$, $q = 5 \text{ kN/m}$, 许用应力 $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$, 试校核梁的强度。



习题 5-11 图

解: 画弯矩图如图所示。

实心部分与空心部分的最大正应力分别为:

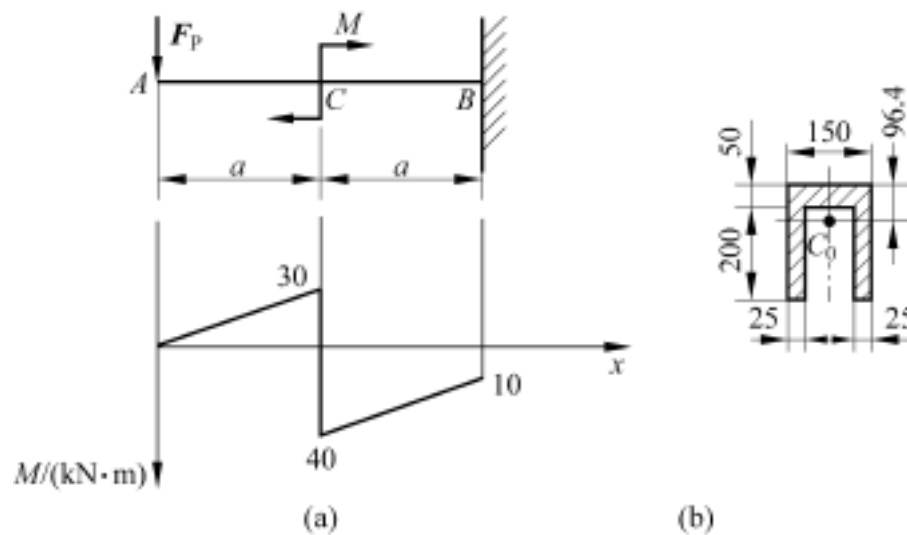
$$\sigma_{\max}^{\text{实}} = \frac{M_{\max 1}}{W_1} = \frac{32 \times 30.65 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{(40 \times 10^{-3} \text{ m})^3} = 113.8 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$= 113.8 \text{ MPa} < [\sigma]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max 2}}{W_2} = \frac{32 \times 20 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{(40 \times 10^{-3} \text{ m})^3 \times \left[1 - \left(\frac{100}{140} \right)^4 \right]} = 100.3 \times 10^6 \text{ Pa} \\ &= 100.3 \text{ MPa} < [\]\end{aligned}$$

所以, 梁的强度是安全的。

5-12 悬臂梁 AB 受力如图所示, 其中 $F_P = 10 \text{ kN}$, $M = 70 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $a = 3 \text{ m}$ 。梁横截面的形状及尺寸均示于图中(单位为 mm), C_0 为截面形心, 截面对中性轴的惯性矩 $I_z = 1.02 \times 10^8 \text{ mm}^4$, 拉伸许用应力 $[\]^+ = 40 \text{ MPa}$, 压缩许用应力 $[\]^- = 120 \text{ MPa}$ 。试校核梁的强度是否安全。



习题 5-12 图

解: 画弯矩图如图所示。

C 截面和 D 截面上的最大拉应力与最大压应力分别为:

C 截面:

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{30 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 96.4 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.02 \times 10^8 \times 10^{-12} \text{ m}^4} = 28.35 \times 10^6 \text{ Pa} = 28.35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{30 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 153.6 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.02 \times 10^8 \times 10^{-12} \text{ m}^4} = 45.7 \times 10^6 \text{ Pa} = 45.18 \text{ MPa}$$

D 截面:

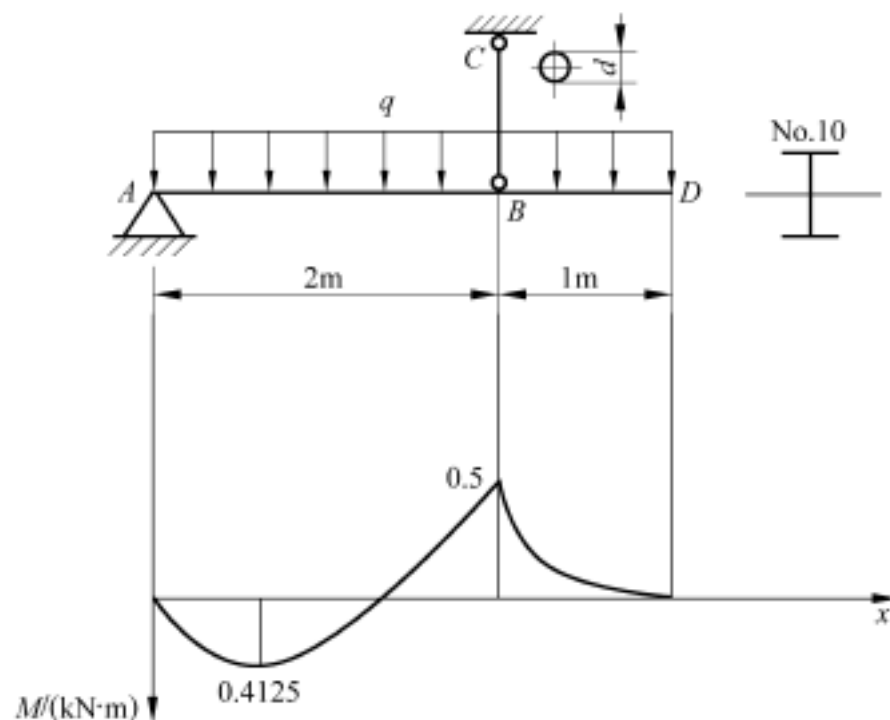
$$\sigma_{\max}^+ = \frac{40 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 153.6 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.02 \times 10^8 \times 10^{-12} \text{ m}^4} = 60.2 \times 10^6 \text{ Pa} = 60.2 \text{ MPa} > [\]$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{40 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 96.4 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.02 \times 10^8 \times 10^{-12} \text{ m}^4} = 37.8 \times 10^6 \text{ Pa} = 37.8 \text{ MPa}$$

所以, 梁的强度不安全。

5-13 由 No. 10 号工字钢制成的 ABD 梁, 左端 A 处为固定铰链支座, B 点处用铰链与钢制圆截面杆 BC 连接, BC 杆在 C 处用铰链悬挂。已知圆截面

杆直径 $d = 20\text{ mm}$, 梁和杆的许用应力均为 $[\sigma] = 160\text{ MPa}$ 。试求: 结构的许用均布载荷集度 $[q]$ 。



习题 5-13 图

解: 画弯矩图如图所示。

强度计算

对于梁:

$$\begin{aligned}
 M_{\max} &= 0.5q \\
 \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W} \quad [\sigma], \quad \frac{0.5q}{W} \quad [\sigma] \\
 q \frac{[\sigma] W}{0.5} &= \frac{160 \times 10^6 \times 49 \times 10^{-6}}{0.5} \\
 &= 15.68 \times 10^3 \text{ N/m} = 15.68 \text{ kN/m}
 \end{aligned}$$

对于杆:

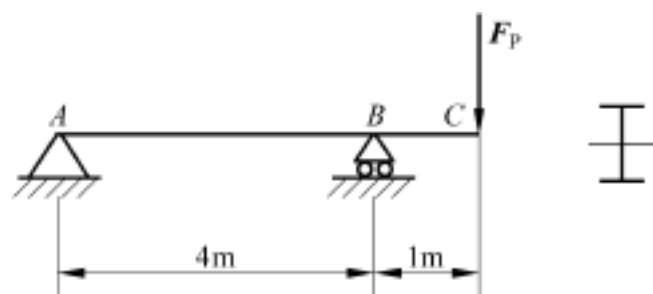
$$\begin{aligned}
 \sigma_{\max} &= \frac{F_N}{A} \quad [\sigma], \quad \frac{4F_B}{d^2} = \frac{4 \times 2.25q}{d^2} \quad [\sigma] \\
 q \frac{d^2 \times [\sigma]}{4 \times 2.25} &= \frac{(20 \times 10^{-3})^2 \times 160 \times 10^6}{4 \times 2.25} \\
 &= 22.34 \times 10^3 \text{ N/m} = 22.34 \text{ kN/m}
 \end{aligned}$$

所以结构的许可载荷为

$$[q] = 15.68 \text{ kN/m}$$

5-14 图示外伸梁承受集中载荷 F_P 作用, 尺寸如图所示。已知 $F_P =$

20kN, 许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$, 试选择工字钢的号码。



习题 5-14 图

解:

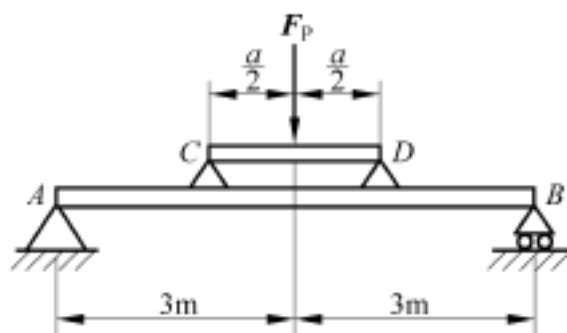
$$M_{\max} = F_P \times 1\text{m} = 20 \times 10^3 \text{ N} \times 1\text{m} = 20 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad [\sigma]$$

$$W \geq \frac{F_P \times 1\text{m}}{[\sigma]} = \frac{20 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{160 \times 10^6 \text{ Pa}} = 0.125 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 125 \text{ cm}^3$$

所以, 选择 No. 16 工字钢。

5-15 图示之 AB 为简支梁, 当载荷 F_P 直接作用在梁的跨度中点时, 梁内最大弯曲正应力超过许用应力 30%。为减小 AB 梁内的最大正应力, 在 AB 梁配置一辅助梁 CD , CD 也可以看作是简支梁。试求辅助梁的长度 a 。



习题 5-15 图

解:

没有辅助梁时

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad [\sigma]$$

$$\frac{F_P l}{4} = 1.30[\sigma]$$

有辅助梁时

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad [\sigma]$$

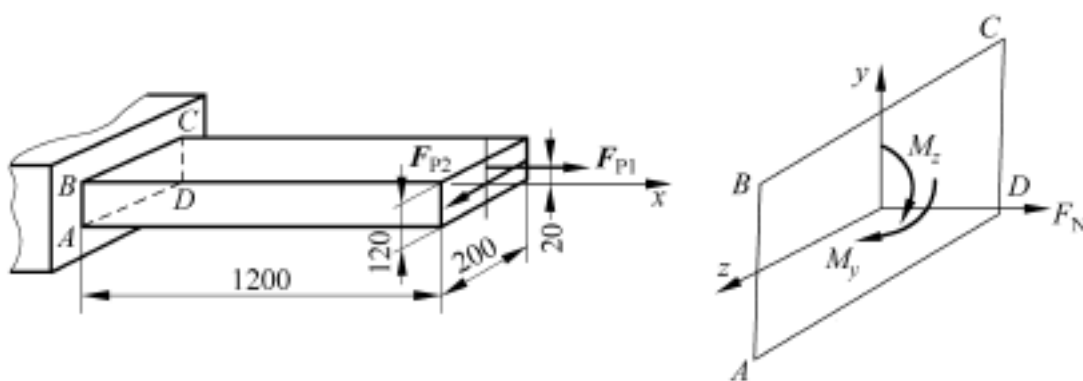
$$\frac{\frac{F_P l}{2}(3 - 2a)}{W} = []$$

$$\frac{\frac{F_P l}{2}(3 - 2a)}{W} = \frac{\frac{F_P l}{4}}{1.30 \times W} = []$$

$$1.30 \times (3 - 2a) = 0.5$$

$$a = 1.308\text{m}$$

5-16 矩形截面悬臂梁左端为固定端,受力如图所示,图中尺寸单位为mm。若已知 $F_{P1} = 60\text{kN}$, $F_{P2} = 4\text{kN}$ 。求:固定端处横截面上 A 、 B 、 C 、 D 四点的正应力。



习题 5-16 图

解:

1. 确定固定端处横截面上的内力分量

$$F_N = F_{P1} = 60\text{kN}$$

$$M_y = F_{P2} \times 1.2\text{m} = 4\text{kN} \times 1.2\text{m} = 4.8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = F_{P1} \times 20 \times 10^{-3}\text{m} = 60\text{kN} \times 0.02\text{m} = 1.2\text{kN} \cdot \text{m}$$

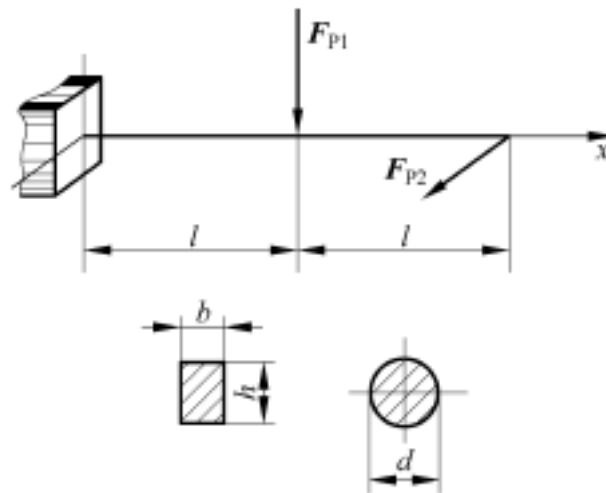
2. 确定固定端处横截面上 A 、 B 、 C 、 D 四点的正应力

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} \\ &= \frac{60 \times 10^3}{200 \times 120 \times 10^{-6}} - \frac{6 \times 4.8 \times 10^3}{120 \times 200^2 \times 10^{-9}} - \frac{6 \times 1.2 \times 10^3}{200 \times 120^2 \times 10^{-9}} \\ &= 2.5 \times 10^6 \text{Pa} - 6 \times 10^6 \text{Pa} - 2.5 \times 10^6 \text{Pa} \\ &= 2.5\text{MPa} - 6\text{MPa} - 2.5\text{MPa} = -6\text{MPa} \\ \sigma_B &= \frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \\ &= 2.5\text{MPa} - 6\text{MPa} + 2.5\text{MPa} = -1\text{MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \\
 &= 2.5 \text{ MPa} + 6 \text{ MPa} + 2.5 \text{ MPa} = 11 \text{ MPa} \\
 d &= \frac{F_N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \\
 &= 2.5 \text{ MPa} + 6 \text{ MPa} - 2.5 \text{ MPa} = 6 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

5-17 图示悬臂梁中, 集中力 F_{P1} 和 F_{P2} 分别作用在铅垂对称面和水平对称面内, 并且垂直于梁的轴线, 如图所示。已知 $F_{P1} = 800 \text{ N}$, $F_{P2} = 1.6 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, 许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试确定以下两种情形下梁的横截面尺寸:

1. 截面为矩形, $h = 2b$;
2. 截面为圆形。



习题 5-17 图

解:

1. 截面为矩形

$$M_y = F_{P2} l = 1600 \text{ N} \times 1 \text{ m} = 1600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = F_{P1} \times 2l = 800 \text{ N} \times 2 \text{ m} = 1600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \quad []$$

$$\frac{\frac{M_y}{hb^2}}{6} + \frac{\frac{M_z}{bh^2}}{6} \quad []$$

$$\frac{6 \times 1600}{2b^3} + \frac{6 \times 1600}{4b^3} \leq 160 \times 10^6$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \times 2.4 \times 10^3}{160 \times 10^6}} = 0.03556 \text{ m} = 35.56 \text{ mm}$$

2. 截面为圆形

$$M_y = F_{P2} l = 1600\text{N} \times 1\text{m} = 1600\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = F_{P1} \times 2l = 800\text{N} \times 2\text{m} = 1600\text{N} \cdot \text{m}$$

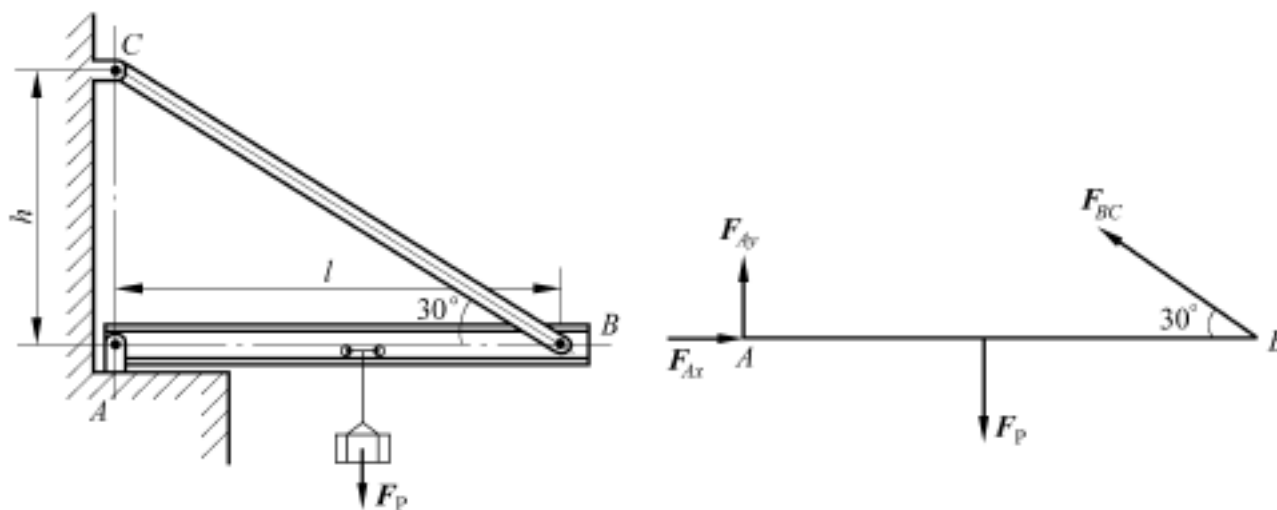
$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{1600^2 + 1600^2} = 2262.7\text{N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad []$$

$$\frac{32 \times 2262.7}{d^3} \leq 160 \times 10^6$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times 2262.7}{160 \times 10^6}} = 0.0524\text{m} = 52.4\text{mm}$$

5-18 旋转式起重机由工字梁 AB 及拉杆 BC 组成, A 、 B 、 C 三处均可以简化为铰链约束。起重载荷 $F_P = 22\text{kN}$, $l = 2\text{m}$ 。已知 $[] = 100\text{MPa}$ 。试: 选择 AB 梁的工字钢的号码。



习题 5-18 图

解:

1. 受力分析

起重载荷位于 AB 梁中点时, 梁处于危险状态。这时, 梁承受弯曲与轴向压缩的共同作用。

$$M_A = 0, \quad -F_P \times \frac{l}{2} + F_{BC} \times l \sin 30^\circ = 0, \quad F_{BC} = F_P = 22\text{kN}$$

AB 梁在 B 点承受的轴向压缩力

$$F_N = F_{BC} \cos 30^\circ = 19052\text{N}$$

2. 强度设计

首先按照弯曲强度设计, 然后再对弯曲与压缩载荷共同作用时的强度进行校核。

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad []$$

$$W \geq \frac{F_P l}{4 []} = \frac{22 \times 10^3 \text{ N} \times 2 \text{ m}}{4 \times 160 \times 10^6 \text{ Pa}} = 110 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 110 \text{ cm}^3$$

所以, 选择 No .16 工字钢。

No .16 工字钢的横截面面积与弯曲截面模量分别为:

$$A = 26.1 \text{ cm}^2 = 26.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

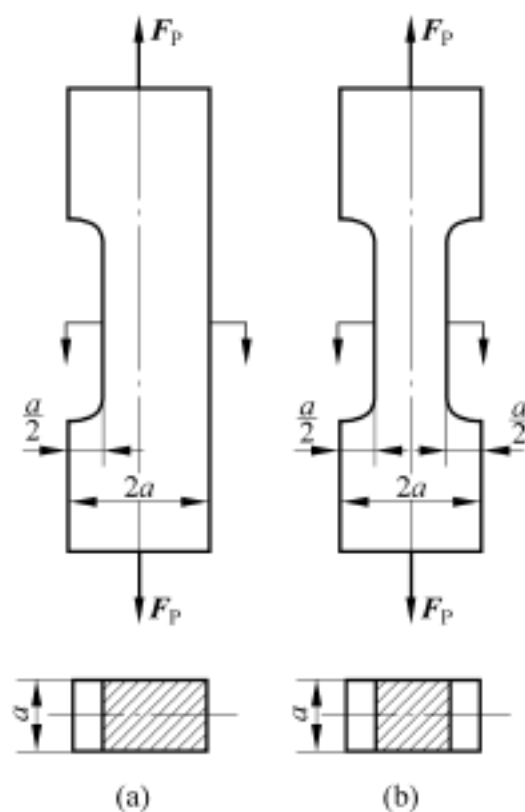
$$W = 141 \text{ cm}^3 = 141 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

再校核弯曲与压缩载荷共同作用时的强度

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} \\ &= \frac{19052}{26.1 \times 10^{-4}} + \frac{22 \times 10^3 \times 2}{4 \times 141 \times 10^{-6}} \\ &= 7.3 \times 10^6 \text{ Pa} + 78 \times 10^6 \text{ Pa} \\ &= 85.3 \text{ MPa} < [] \end{aligned}$$

所以, 选择 No .16 工字钢, 梁的强度是安全的。

5-19 试求图(a)和(b)中所示之二杆横截面上最大正应力及其比值。



习题 5-19 图

解: (a) 为拉弯组合

$$\sigma_a = \frac{F_P}{a \times \frac{3}{2}a} + \frac{F_P \cdot \frac{a}{4}}{a \left[\frac{3}{2}a \right]^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{F_P}{a^2}$$

(b) 为单向拉伸

$$\sigma_b = \frac{F_P}{a^2}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{4}{3}$$

5-20 图中所示为承受纵向载荷的人骨受力简图。试:

1. 假定骨骼为实心圆截面, 确定横截面 $B-B$ 上的应力分布;

2. 假定骨骼中心部分(其直径为骨骼外直径的一半)由海绵状骨质所组成, 忽略海绵状承受应力的能力, 确定横截面 $B-B$ 上的应力分布;

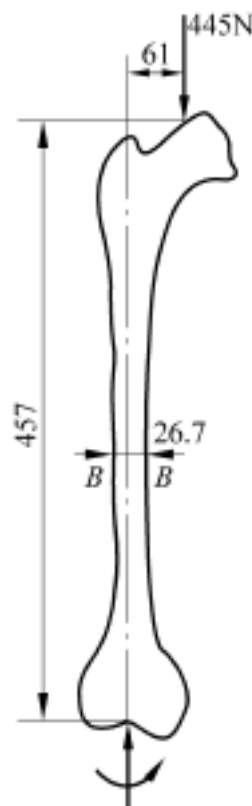
3. 确定 1、2 两种情形下, 骨骼在横截面 $B-B$ 上最大压应力之比。

解: 1. $\sigma_{N1} = - \frac{F_N}{A_1} = \frac{445 \times 10^6}{\frac{\pi \times 26.7^2}{4}} = -0.795 \text{ MPa}$

$$\sigma_{M1\max} = \frac{M_z}{W_{z1}} = \frac{445 \times 61 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \times 26.7^3}{32} \times 10^{-9}} = 14.526 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^+ = 14.526 - 0.795 = 13.73 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = -14.526 - 0.795 = -15.32 \text{ MPa}$$



习题 5-20 图

沿 y 方向应力分布如图(c)所示, 中性轴为 z_c 。

$$2. \quad \sigma_{N2} = \frac{F_N}{A_2} = - \frac{445 \times 10^6}{\frac{\pi \left[26.7^2 - \left(\frac{26.7}{2} \right)^2 \right]}{4}} = \frac{-4 \times 445 \times 10^6}{\pi \times 26.7^2 \left[1 - \frac{1}{4} \right]}$$

$$= -0.795 \times \frac{4}{3} = -1.06 \text{ MPa}$$

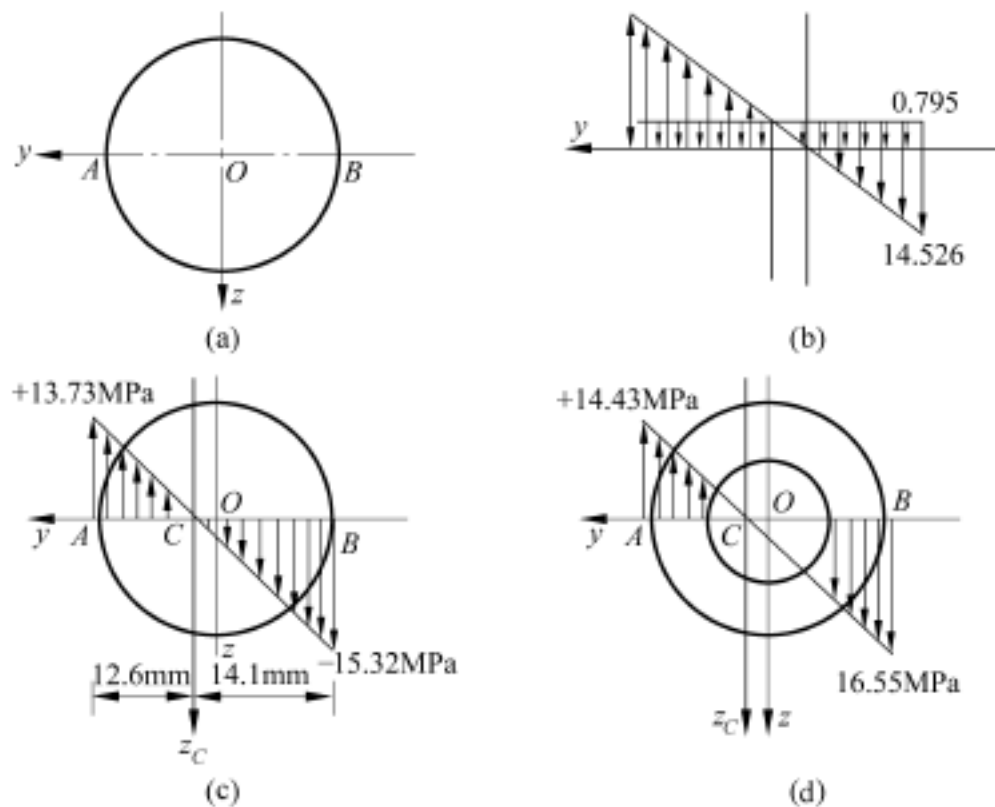
$$\sigma_{M2\max} = \frac{M_z}{W_{z2}} = \frac{M_z}{W_{z1} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right]} = 14.526 \times \frac{16}{15} = 15.494 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^+ = 15.494 - 1.06 = 14.43 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = -15.494 - 1.06 = -16.55 \text{ MPa}$$

z_C 为中性轴, 沿 y 轴应力分布如图(d)所示。

$$3. \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{16.55}{15.32} = 1.08, \quad \text{或} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{15.32}{16.55} = 0.926$$



5-21 正方形截面杆一端固定, 另一端自由, 中间部分开有切槽。杆自由端受有平行于杆轴线的纵向力 F_P 。若已知 $F_P = 1 \text{ kN}$, 杆各部分尺寸如图中所示。试求: 杆内横截面上的最大正应力, 并指出其作用位置。

解: $A = 5 \times 10 \times 10^{-6} = 50 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

$$W_y = \frac{5 \times 10^{-2}}{6} \times 10^{-9} = \frac{1}{12} \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_z = \frac{10 \times 5^2}{6} \times 10^{-9} = \frac{1}{24} \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

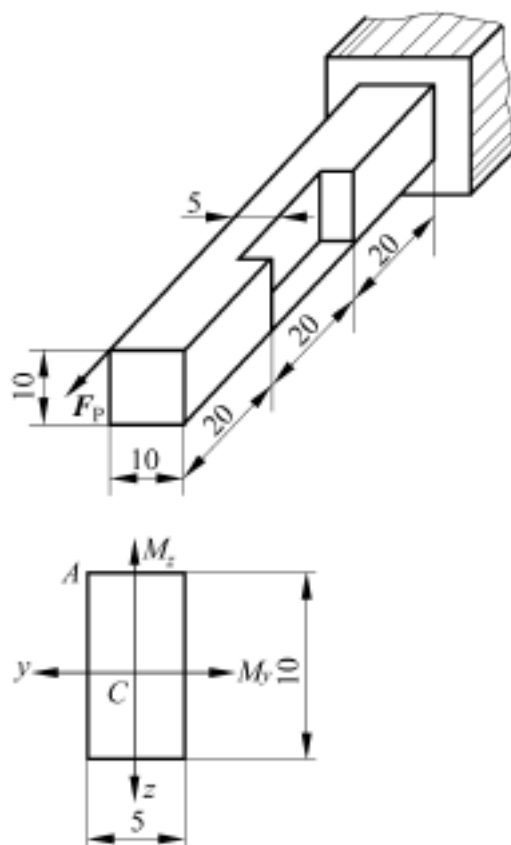
$$F_N = 1 \text{ kN}$$

$$M_y = 1000 \times 5 \times 10^{-3} = 5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 1000 \times 2.5 \times 10^{-3} = 2.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$

$$= \left[\frac{1000}{50} + \frac{5}{\frac{1}{12}} + \frac{2.5}{\frac{1}{24}} \right] \times 10^6 = 140 \text{ MPa}$$



习题 5-21 图

最大正应力作用位置位于中间开有切槽的横截面的左上角点 \$A\$, 如图所示。

* 5-22 从圆木中锯成的矩形截面梁, 受力及尺寸如图所示。试求下列两种情形下 \$h\$ 与 \$b\$ 的比值:

1. 横截面上的最大正应力尽可能小;
2. 曲率半径尽可能大。

$$\text{解: 1. } \frac{M_z}{W_z} = \frac{M_z}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{6M_z}{b(d^2 - b^2)}$$

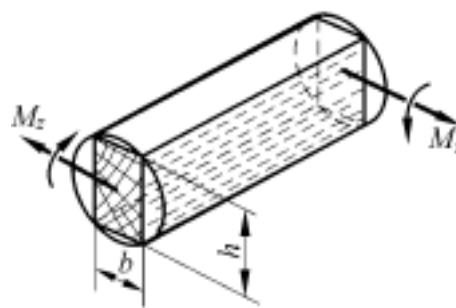
$$\frac{dW_z}{db} = \frac{d}{db}(bd^2 - b^3) = d^2 - 3b^2 = 0$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$$

$$h^2 = d^2 - b^2 = \frac{2}{3}d^2$$

$$\frac{h}{b} = \sqrt{2} \quad (\text{正应力尽可能小})$$

$$2. \frac{1}{z} = \frac{M_z}{EI_z}$$



习题 5-22 图

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{\sqrt{d^2 - h^2} h^3}{12}$$

$$\frac{dI_z}{dh} = 0, \quad \text{得 } h^2 = \frac{3}{4} d^2$$

$$b^2 = d^2 - h^2 = \frac{1}{4} d^2$$

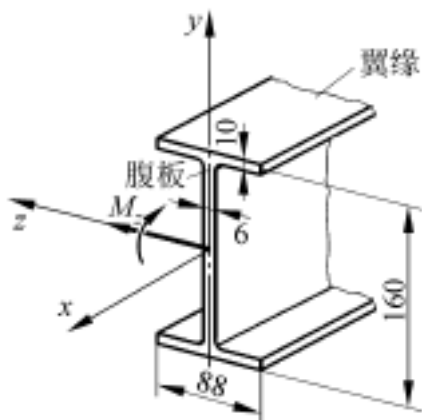
$$\frac{h}{b} = \sqrt{3} \quad (\text{曲率半径尽可能大})$$

* 5-23 工字形截面钢梁, 已知梁横截面上只承受弯矩一个内力分量, $M_z = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $I_z = 11.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$, 其他尺寸示于图中。试求横截面中性轴以上部分分布力系沿 x 方向的合力。

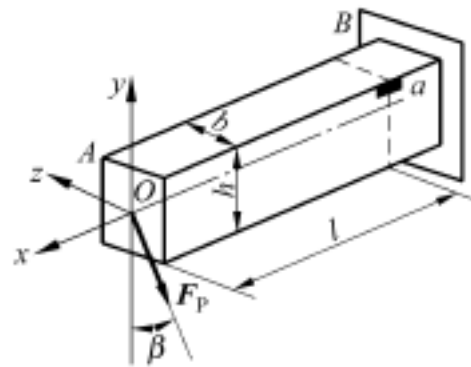
解:

$$\begin{aligned} F_N &= \int_{\frac{A}{2}} x dA = \int_{A_1} - \frac{M_z}{I_z} y dA + \int_{A_2} - \frac{M_z}{I_z} y dA \\ &= - \frac{M_z}{I_z} \left[\int_0^{0.07} y \times 0.006 dy + \int_0^{0.080} y \times 0.088 dy \right] \\ &= - \frac{M_z}{I_z} \left[6 \times \frac{1}{2} \times 70^2 + 88 \times \frac{1}{2} (80^2 - 70^2) \right] \times 10^{-9} \\ &= - \frac{20 \times 10^3}{11.3 \times 10^{-6}} \times 10^{-9} [3 \times 70^2 + 44 \times (80^2 - 70^2)] \\ &= - 143 \times 10^3 = - 143 \text{ kN} \\ / F_N / \cdot y_{c^*} &= \frac{M_z}{2} \\ y_{c^*} &= \frac{20}{2 \times 143} = 0.0699 \text{ m} = 70 \text{ mm} \end{aligned}$$

即上半部分布力系合力大小为 143kN(压力), 作用位置离中心轴 $y = 70 \text{ mm}$ 处, 即位于腹板与翼缘交界处。



习题 5-23 图



习题 5-24 图

5-24 矩形截面悬臂梁受力如图所示,其中力 F_P 的作用线通过截面形心。试:

1. 已知 F_P 、 b 、 h 、 l 和 α , 求图中虚线所示截面上点 a 处的正应力;
2. 求使点 a 处正应力为零时的角度 α 值。

解: 1. $M_y = F_P l \sin \alpha$, $W_y = \frac{hb^2}{6}$

$$M_z = F_P l \cos \alpha, \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_a = \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} = \frac{6lF_P}{b^2 h^2} (b \cos \alpha - h \sin \alpha)$$

2. 令 $\sigma_a = 0$, 则 $\tan \alpha = \frac{b}{h}$, $\alpha = \arctan \frac{b}{h}$

5-25 根据杆件横截面正应力分析过程,中性轴在什么情形下才会通过截面形心?关于这一问题有以下四种答案,请分析哪一种是正确的。

- (A) $M_y = 0$ 或 $M_z = 0$, $F_N \neq 0$;
- (B) $M_y = M_z = 0$, $F_N \neq 0$;
- (C) $M_y = 0$, $M_z \neq 0$, $F_N \neq 0$;
- (D) $M_y \neq 0$ 或 $M_z \neq 0$, $F_N = 0$ 。

正确答案是 (D)。

解: 只要轴力 $F_N \neq 0$, 则截面形心处其拉、压正应力一定不为零, 而其弯曲正应力一定为零, 二者叠加的结果, 其合正应力一定不为零, 所以其中性轴一定不通过截面形心, 所以正确答案是 (D)。

5-26 关于斜弯曲的主要特征有以下四种答案, 请判断哪一种是正确的。

- (A) $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$, $F_N \neq 0$, 中性轴与截面形心主轴不一致, 且不通过截面形心;
- (B) $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$, $F_N = 0$, 中性轴与截面形心主轴不一致, 但通过截面形心;
- (C) $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$, $F_N = 0$, 中性轴与截面形心主轴平行, 但不通过截面形心;
- (D) $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$, $F_N \neq 0$, 中性轴与截面形心主轴平行, 但不通过截面形心。

正确答案是 (B)。

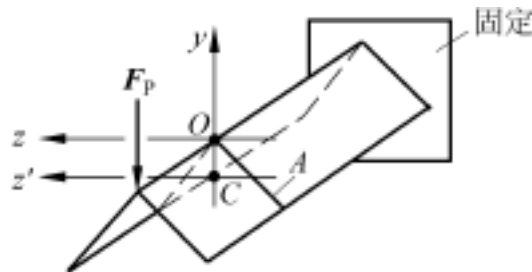
解: 斜弯曲时, 由于轴力为零, 所以中性轴一定通过截面形心。而且斜弯曲与平面弯曲的不同点之一是中性轴与形心主轴不一致。所以, 正确答案是 (B)。

5-27 槽形截面悬臂梁加载如图所示。图中 C 为形心, O 为弯曲中心。

关于自由端截面位移有以下四种结论,请判断哪一种是正确的。

- (A) 只有向下的移动,没有转动;
- (B) 只绕点 C 顺时针方向转动;
- (C) 向下移动且绕点 O 逆时针方向转动;
- (D) 向下移动且绕点 O 顺时针方向转动。

正确答案是____(D)____。



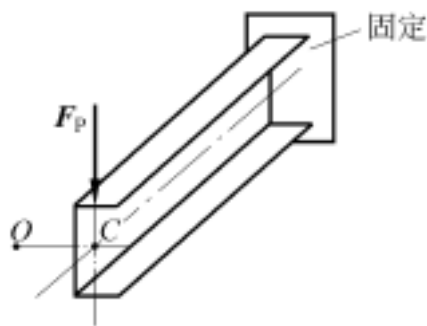
习题 5-27 图

解: 将力 F_P 向弯曲中心简化得到一个力和一个力偶,力偶的转向为顺时针。所以,正确答案是(D)。

5-28 等边角钢悬臂梁,受力如图所示。关于截面 A 的位移有以下四种答案,请判断哪一种是正确的。

- (A) 下移且绕点 O 转动;
- (B) 下移且绕点 C 转动;
- (C) 下移且绕 z 轴转动;
- (D) 下移且绕 z 轴转动。

正确答案是____(D)____。



习题 5-28 图

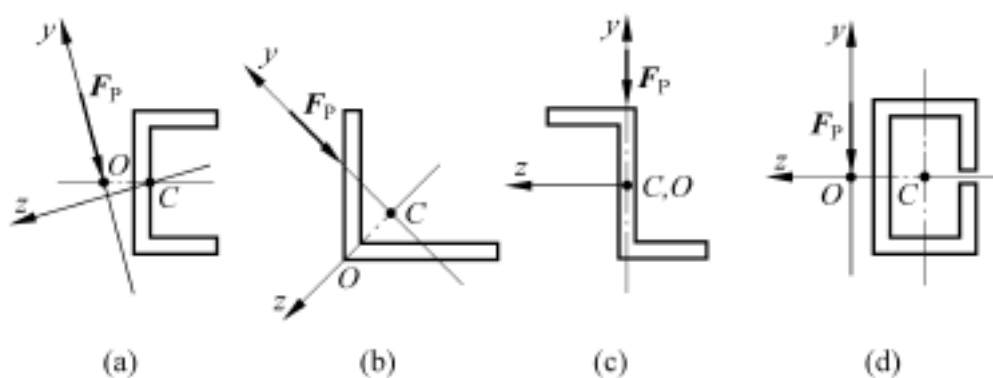
解: 因为力 F_P 的作用线通过弯曲中心,而且沿着对称轴方向,因而产生平面弯曲。平面弯曲时,横截面绕中性轴转动,而中性轴通过截面形心,所以,正确答案是(D)。

5-29 四种不同截面的悬臂梁,在自由端承受集中力,其作用方向如图

所示,图中 O 为弯曲中心。关于哪几种情形下可以直接应用正应力公式,有以下四种结论,请判断哪一种是正确的。

- (A) 仅(a)、(b)可以;
- (B) 仅(b)、(c)可以;
- (C) 除(c)之外都可以;
- (D) 除(d)之外都不可以。

正确答案是____(D)____。



习题 5-29 图

解:

情形(a): 因为力 F_P 的作用线虽然通过弯曲中心,但不是主轴方向,所以不是平面弯曲;

情形(b): 因为力 F_P 的作用线虽然沿着主轴方向,但不通过弯曲中心,因而将产生扭转,所以也不是平面弯曲;

情形(c): 因为力 F_P 的作用线虽然通过弯曲中心,但不是主轴方向,所以也不是平面弯曲;

情形(d): 因为力 F_P 的作用线既通过弯曲中心,又是主轴方向,所以将产生平面弯曲。

因此正确答案是(D)。

梁的变形分析与刚度问题

习 题 解 答

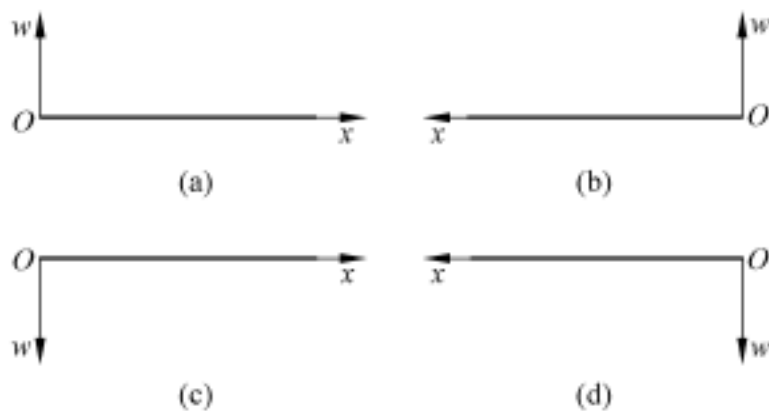
6-1 与小挠度微分方程

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

对应的坐标系有图(a)、(b)、(c)、(d)所示的四种形式。试判断哪几种是正确的：

- (A) 图(b)和(c)；
- (B) 图(b)和(a)；
- (C) 图(b)和(d)；
- (D) 图(c)和(d)。

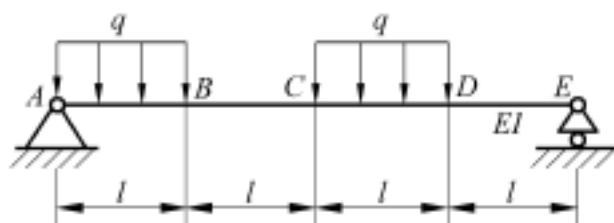
正确答案是 (D)。



习题 6-1 图

解：根据弯矩的正负号和曲线的凸凹性，可以判断图(c)和(d)两种情形下 $\frac{d^2 w}{dx^2}$ 和 M 都是异号的，所以，正确答案是(D)。

6-2 简支梁承受间断性分布载荷，如图所示。试说明需要分几段建立微分方程，积分常数有几个，确定积分常数的条件是什么？（不要求详细解答）



习题 6-2 图

解:

1. 分 4 段积分, 共有 8 个积分常数

2. 确定积分常数的条件是:

$$x = 0, \quad w_1 = 0;$$

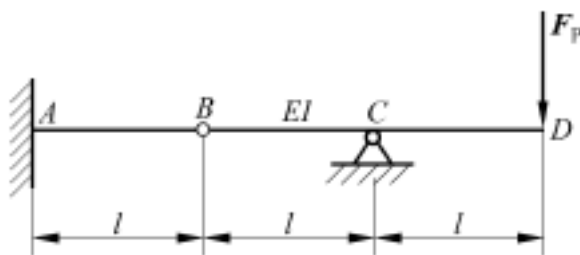
$$x = l, \quad w_1 = w_2; \quad \theta_1 = \theta_2;$$

$$x = 2l, \quad w_2 = w_3; \quad \theta_2 = \theta_3;$$

$$x = 3l, \quad w_3 = w_4; \quad \theta_3 = \theta_4;$$

$$x = 4l, \quad w_4 = 0.$$

6-3 具有中间铰的梁受力如图所示。试画出挠度曲线的大致形状, 并说明需要分几段建立微分方程, 积分常数有几个, 确定积分常数的条件是什么? (不要求详细解答)



习题 6-3 图

解:

1. 分 3 段积分, 共有 6 个积分常数

2. 确定积分常数的条件是:

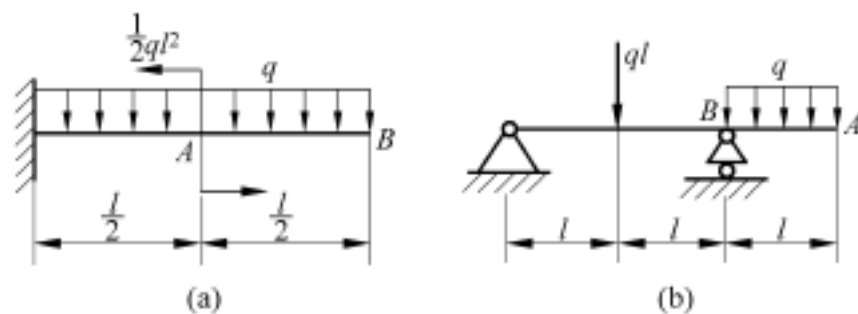
$$x = 0, \quad w_1 = 0; \quad \theta_1 = 0$$

$$x = l, \quad w_1 = w_2;$$

$$x = 2l, \quad w_2 = 0; \quad w_2 = w_3; \quad \theta_2 = \theta_3;$$

$$x = 4l, \quad w_4 = 0.$$

6-4 试用叠加法求下列各梁中截面 A 的挠度和截面 B 的转角。图中 q 、 l 、 a 、 EI 等为已知。

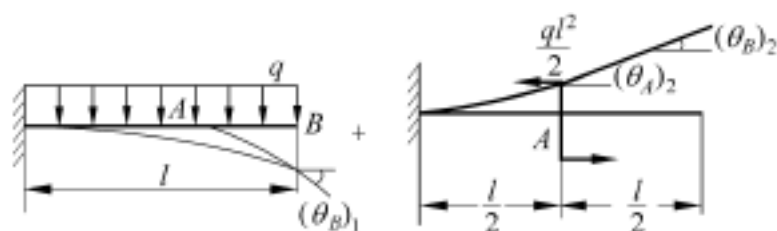


习题 6-4 图

解:

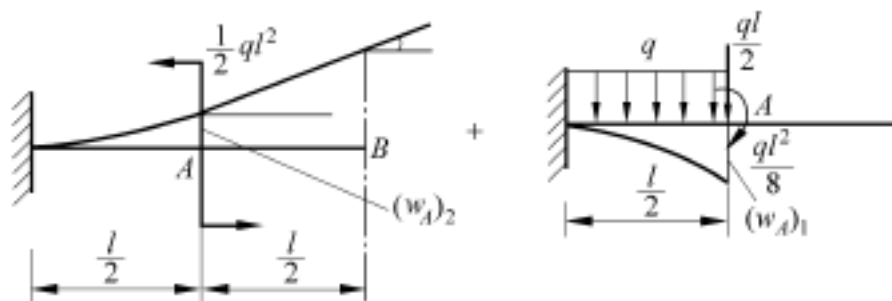
(a) 题:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \theta_B &= (\theta_B)_1 + (\theta_B)_2 = (\theta_B)_1 + (\theta_A)_2 = -\frac{ql^3}{6EI} + \frac{\left[\frac{1}{2}ql^2\right] \cdot \left[\frac{l}{2}\right]}{EI} \\
 &= \frac{ql^3}{12EI} \quad (\text{逆时针})
 \end{aligned}$$



习题 6-4(a)解图(1)

$$\begin{aligned}
 2. \quad w_A &= (w_A)_1 + (w_A)_2 = \left[-\frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EI} - \frac{ql^2\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} - \frac{ql\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} \right] + \\
 &\quad \frac{\frac{1}{2}ql^2\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} = \frac{7ql^4}{384EI} \quad ()
 \end{aligned}$$



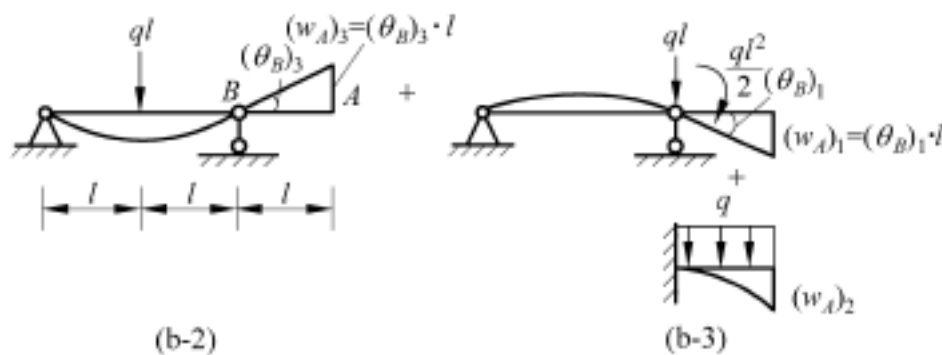
习题 6-4(a)解图(2)

(b) 题:

$$1. \quad \theta_B = (\theta_B)_1 + (\theta_B)_3 = -\frac{ql(2l)}{3EI} + \frac{(ql) \cdot (2l)^2}{16EI}$$

$$= -\frac{ql^3}{12EI} (\text{顺时针})$$

$$\begin{aligned} 2. \quad w_A &= (w_A)_1 + (w_A)_2 + (w_A)_3 = -\frac{\frac{ql^2}{2}(2l)}{3EI}l - \frac{ql^3}{8EI} + \frac{(ql)(2l)^2}{16EI}l \\ &= -\frac{5ql^4}{24EI} (\quad) \end{aligned}$$

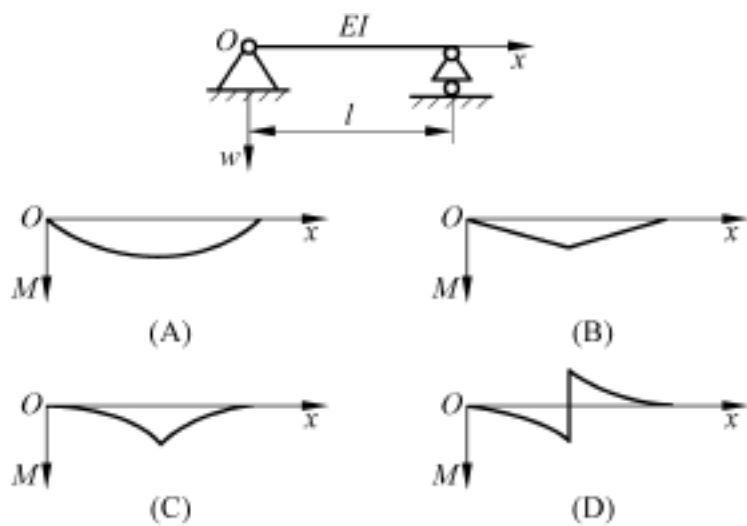


习题 6-4(b)解图

6-5 已知刚度为 EI 的简支梁的挠度方程为：

$$w(x) = \frac{qx}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

据此推知的弯矩图有(A) ~ (D)四种答案, 试分析哪一种是正确的。



习题 6-5 图

解：根据

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \text{ 和 } \frac{d^2 M}{dx^2} = -q$$

可以得到

$$EI \frac{d^2 w}{dx^4} = q \quad (\text{a})$$

将所给的

$$w(x) = \frac{q}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

对 x 求 4 次导数, 有

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{24EI} \quad (b)$$

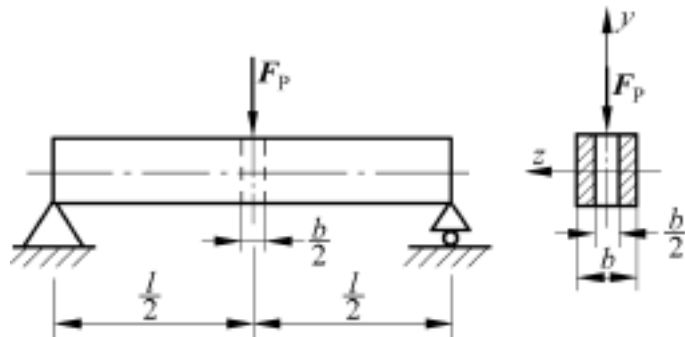
将(b)式代入(a)式后, 得到

$$q = \frac{q}{24} = \text{const}$$

这一结果表明, 梁上作用有连续均布载荷。图(A)中的弯矩图就是对应连续均布载荷的弯矩图, 所以正确答案是(A)。

6-6 图示承受集中力的细长简支梁, 在弯矩最大截面上沿加载方向开一小孔, 若不考虑应力集中影响, 关于小孔对梁强度和刚度的影响, 有如下论述, 试判断哪一种是正确的:

- (A) 大大降低梁的强度和刚度;
- (B) 对强度有较大影响, 对刚度的影响很小可以忽略不计;
- (C) 对刚度有较大影响, 对强度的影响很小可以忽略不计;
- (D) 对强度和刚度的影响都很小, 都可以忽略不计。

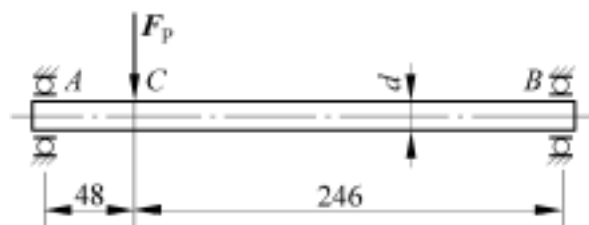


习题 6-6 图

解: 强度取决于危险截面上危险点的应力, 现在梁在弯矩最大的中间截面开孔, 而且又是竖向的, 使得截面的惯性矩减小, 从而使危险点的应力增加, 因而对强度影响较大。对刚度的影响是指对梁的变形的影响, 由于梁的变形是梁的所有横截面变形累加的结果, 因此个别截面的削弱不会对梁的变形产生很大的影响。所以正确答案是(B)。

6-7 轴受力如图所示, 已知 $F_P = 1.6\text{kN}$, $d = 32\text{mm}$, $E = 200\text{GPa}$ 。若要求加力点的挠度不大于许用挠度 $[w] = 0.05\text{mm}$, 试校核该轴是否满足刚度要求。

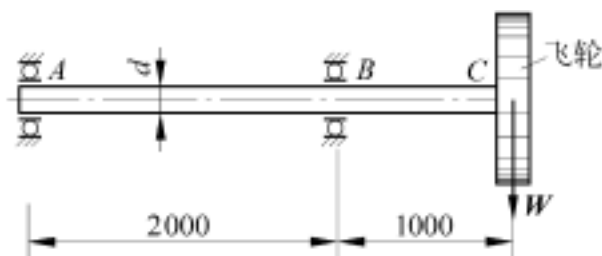
解: 由挠度表查得



习题 6-7 图

$$\begin{aligned}
 w_C &= \frac{F_P b a}{6 l E I} (l^3 - a^3 - b^3) \\
 &= \frac{1.6 \times 10^3 \times 0.246 \times 0.048 \times (294^3 - 48^3 - 246^3) \times 10^{-6} \times 64}{6 \times (246 + 48) \times 10^{-3} \times 200 \times 10^9 \times 2^4 \times 10^{-12}} \\
 &= 2.46 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.0246 \text{ mm} < [w], \text{ 安全。}
 \end{aligned}$$

6-8 图示一端外伸的轴在飞轮重量作用下发生变形, 已知飞轮重 $W = 20 \text{ kN}$, 轴材料的 $E = 200 \text{ GPa}$, 轴承 B 处的许用转角 $[\theta] = 0.5^\circ$ 。试设计轴的直径。

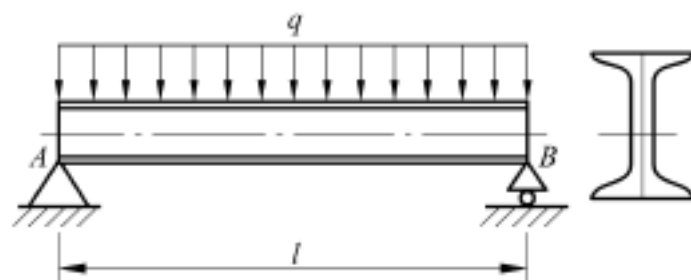


习题 6-8 图

解: 由挠度表查得

$$\begin{aligned}
 \theta_B &= \frac{F_P a l}{3 E I} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{W a l}{3 E I} \times \frac{180^\circ}{\pi} \\
 &= \frac{20000 \times 1 \times 2 \times 64}{3 \times 200 \times 10^9 \times d^4} \times \frac{180^\circ}{\pi} \\
 &= 0.5^\circ \\
 d &= 0.1117 \text{ m, 取 } d = 112 \text{ mm。}
 \end{aligned}$$

6-9 图示承受均布载荷的简支梁由两根竖向放置的普通槽钢组成。已知 $q = 10 \text{ kN/m}$, $l = 4 \text{ m}$, 材料的 $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$, 许用挠度 $[w] = l/1000$, $E = 200 \text{ GPa}$ 。试确定槽钢型号。



习题 6-9 图

解: 1. 强度设计

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q l^2$$

$$= \frac{M_{\max}}{W_z} \quad []$$

$$W_z \quad \frac{M_{\max}}{[]} = \frac{10000 \times 4^2}{8 \times 100 \times 10^6} = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

每根槽钢 $W_{z1} = \frac{W_z}{2} = 100 \text{ cm}^3$

选 No. 16a 槽钢, 其 $W_z = 108.3 \text{ cm}^4$ 。

2. 刚度设计

$$w_{\max} = \frac{5 q l^4}{384 E I_z} \quad \frac{l}{1000}$$

$$I_z \quad \frac{5 \times 10000 \times 4^3 \times 1000}{384 \times 200 \times 10^9} = 0.41667 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{z1} = \frac{I_z}{2} = 2083.3 \text{ cm}^4$$

选 No. 22a 槽钢, 其 $I_z = 2393.9 \text{ cm}^4$ 。

最后选定两根 No. 22a 槽钢。

6-10 试求图示梁的约束力, 并画出剪力图和弯矩图。

解:

(a) 题:

变形协调方程

$$\Delta_A = (\Delta_A)_1 + (\Delta_A)_2 = 0$$

$$- \frac{M_A l}{3 E I} + \frac{M_0}{6 E I} \cdot \frac{l}{4} = 0$$

得 $M_A = \frac{M_0}{8}$

约束力

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{M_0 + \frac{M_0}{8}}{l} = \frac{9}{8} \frac{M_0}{l}$$

剪力图、弯矩图如图(a-3)、(a-4)所示。

(b) 题:

$$\Delta_B = 0$$

$$\frac{1}{E I} \left[M_A l + \frac{F_{RA}}{2} l^2 - \frac{q}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 \right] = 0$$

$$48 M_A + 24 l F_{RA} = ql^2 \quad (1)$$

$$w_B = 0$$

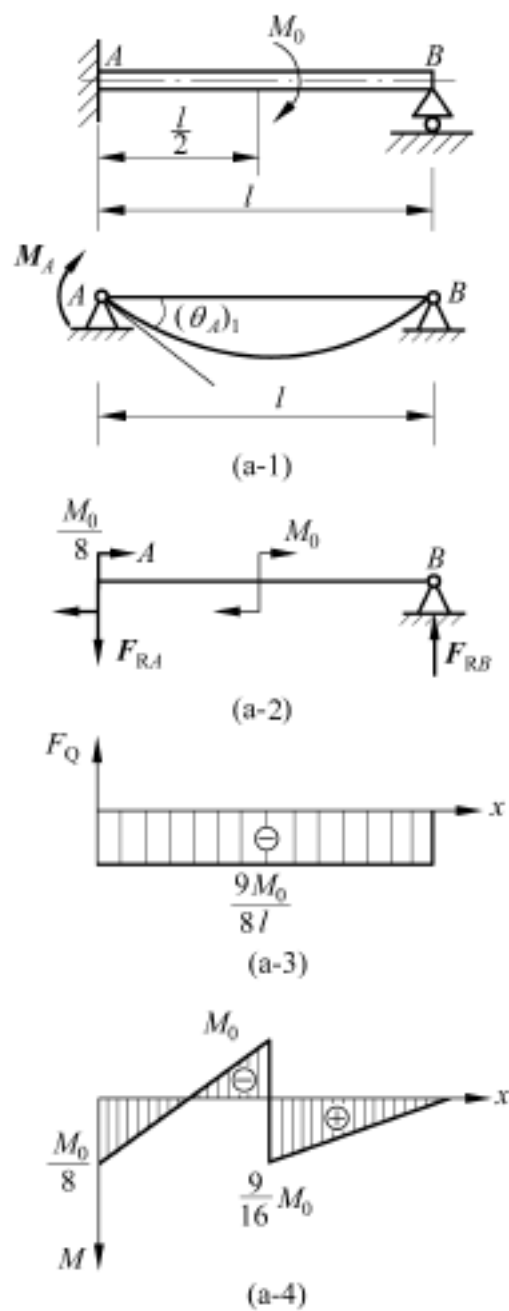
$$\frac{1}{EI} \left[\frac{M_A}{2!} l^2 + \frac{F_{RA}}{3!} l^3 - \frac{q}{4!} \left(\frac{l}{2} \right)^4 \right] = 0$$

$$192 M_A + 64 l F_{RA} = ql^2 \quad (2)$$

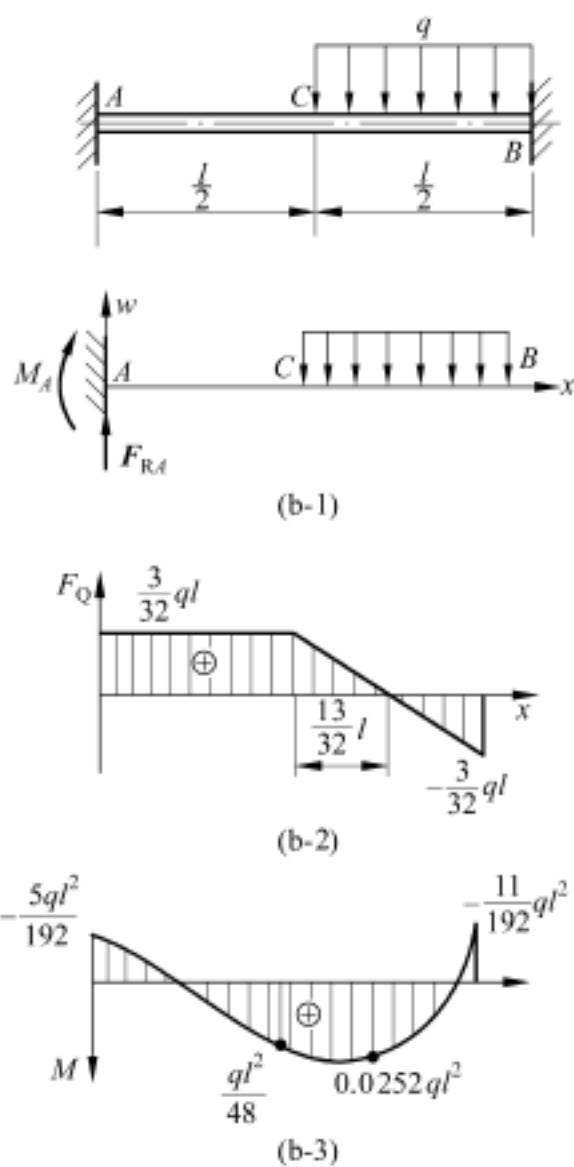
联立式(1)、(2)解得

$$\begin{cases} M_A = -\frac{5}{192} ql^2 \\ F_{RA} = \frac{3}{32} ql \end{cases}$$

其剪力图、弯矩图如图(b-2)、(b-3)所示。

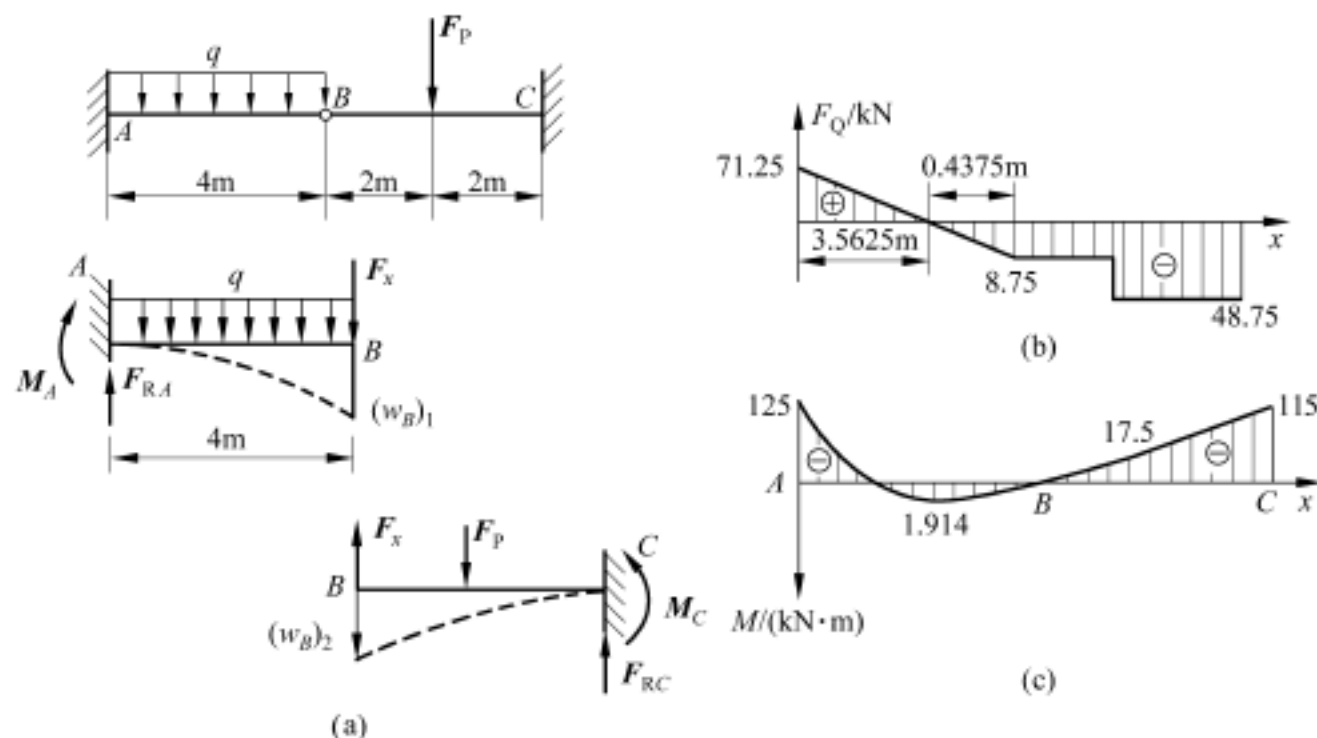


习题 6-10 图(a)



习题 6-10 图(b)

* 6-11 梁 AB 和 BC 在 B 处用铰链连接, A 、 C 两端固定, 两梁的弯曲刚度均为 EI , 受力及各部分尺寸均示于图中。 $F_P = 40\text{kN}$, $q = 20\text{kN/m}$ 。试画出梁的剪力图与弯矩图。



习题 6-11 图

解:

变形协调 $(w_B)_1 = (w_B)_2$

$$(w_B)_1 = -\frac{q \times 4^4}{8EI} - \frac{F_x \times 4^3}{3EI}$$

$$(w_B)_2 = -\frac{F_P(2^2)}{6EI}(3 \times 4 - 2) + \frac{F_x \times 4^3}{3EI}$$

$$\text{代入 } \frac{2}{3} F_x \times 4^3 = -\frac{F_P \times 4}{6} \times 10 - \frac{q \times 4^4}{8}$$

$$F_x = \frac{3}{2} \left[\frac{40 \times 10}{6 \times 4^2} - \frac{20 \times 4^4}{8 \times 4^3} \right] = -8.75\text{kN}$$

$$F_{RA} = 20 \times 4 - 8.75 = 71.25\text{kN}(\quad)$$

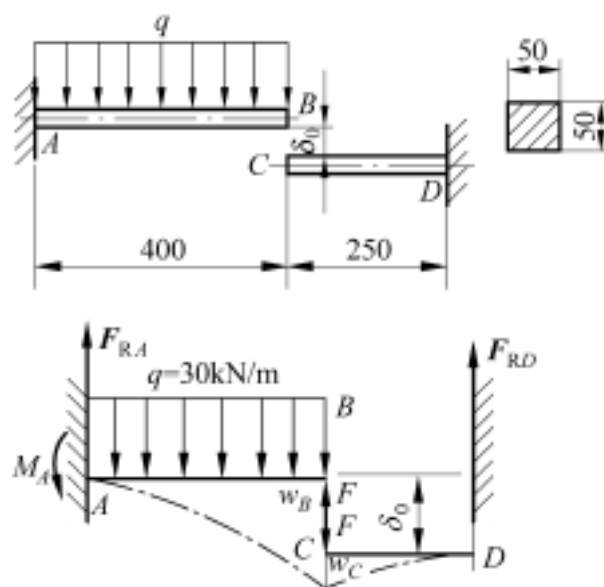
$$M_A = 8.75 \times 4 - 20 \times \frac{1}{2} \times 4^2 = -125\text{kN} \cdot \text{m}(\text{逆时针})$$

$$F_{RC} = 40 + 8.75 = 48.75\text{kN}(\quad)$$

$$M_C = -40 \times 2 - 8.75 \times 4 = -115\text{kN} \cdot \text{m}(\text{顺时针})$$

剪力图和弯矩图分别如图(b)和(c)所示。

* 6-12 图示梁 AB 和 CD 横截面尺寸相同, 梁在加载之前, B 与 C 之间存在间隙 $\delta_0 = 1.2\text{mm}$ 。若两梁的材料相同, 弹性模量 $E = 105\text{GPa}$, $q = 30\text{kN/m}$, 试求 A 、 D 端的约束力。



习题 6-12 图

解：变形协调方程

$$w_C - w_B = 0 = 1.2 \quad (1)$$

$$w_C = - \frac{F(250)^3 \times 10^3}{3 \times 105 \times 10^3 \times \frac{50 \times 50^3}{12}} = - 0.0952 F \quad (2)$$

$$w_B = \frac{- 30 \times 400^4}{8 \times 105 \times 10^3 \times \frac{50 \times 50^3}{12}} + \frac{F(400)^3 \times 10^3}{3 \times 105 \times 10^3 \times \frac{50 \times 50^3}{12}} \quad (3)$$

$$= - 1.755 + 0.39 F$$

将式(2)、(3)代入式(1)得到

$$0.4853 F = 0.555$$

$$F = 1.144 \text{ kN}$$

CD 梁

$$F_{RD} = F = 1.144 \text{ kN} (\quad)$$

$$M_D = 1.144 \times 250 = 286 \text{ N} \cdot \text{m} (\text{顺时针})$$

AB 梁

$$F_{RA} = 30 \times 400 \times 10^{-3} - 1.144 = 10.856 \text{ kN} (\quad)$$

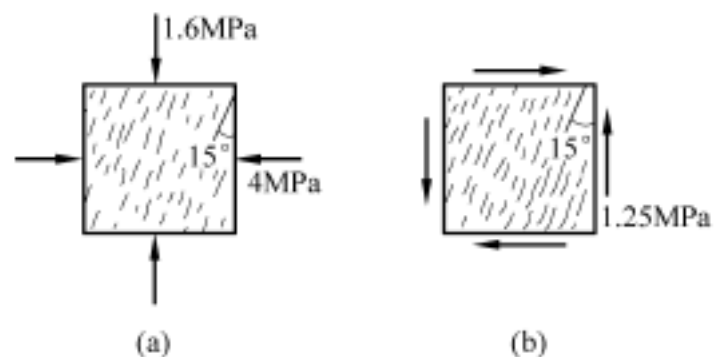
$$M_A = 1.144 \times 400 - \frac{1}{2} \times 30 \times 400^2 \times 10^{-3} = - 1942 \text{ N} \cdot \text{m}$$

应力状态与强度理论 及其工程应用

习题解答

7-1 木制构件中的微元受力如图所示, 其中所示的角度为木纹方向与铅垂方向的夹角。试求:

1. 面内平行于木纹方向的剪应力;
2. 垂直于木纹方向的正应力。



习题 7-1 图

解:

(a)题:

平行于木纹方向的剪应力:

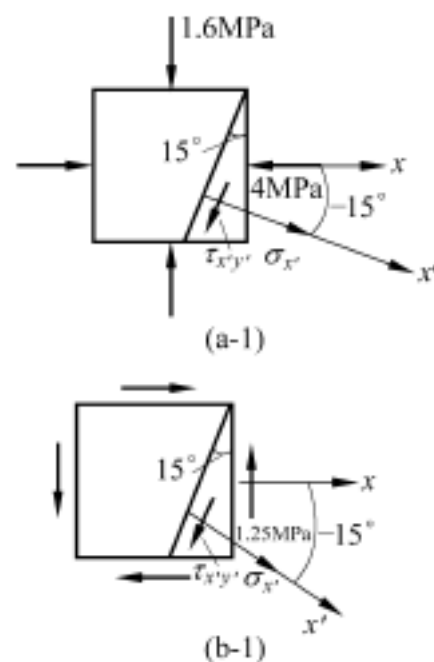
$$\tau_{xy} = \frac{-4 - (-1.6)}{2} \sin[2 \times (-15^\circ)] +$$

$$0 \cdot \cos[2 \times (-15^\circ)] = 0.6 \text{ MPa}$$

垂直于木纹方向的正应力:

$$\sigma_x = \frac{-4 + (-1.6)}{2} + \frac{-4 - (-1.6)}{2} \times$$

$$\cos[2 \times (-15^\circ)] + 0 = -3.84 \text{ MPa}$$



(b)题:

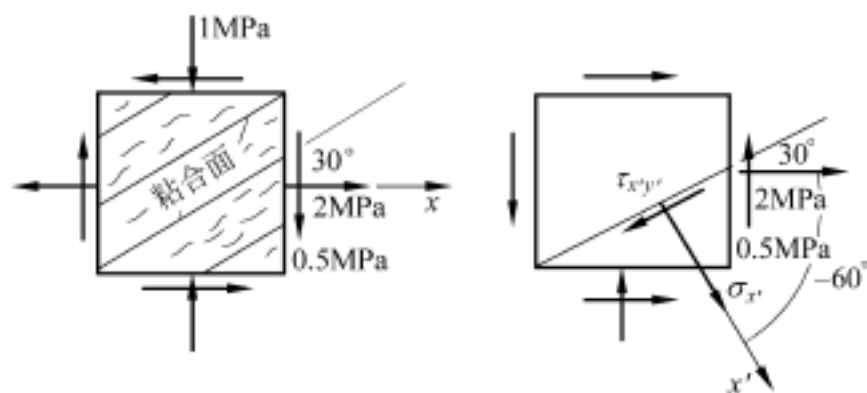
平行于木纹方向的剪应力:

$$\tau_{xy} = -1.25 \cos[2 \times (-15^\circ)] = -1.08 \text{ MPa}$$

垂直于木纹方向的正应力:

$$\sigma_x = -(-1.25) \sin[2 \times (-15^\circ)] = -0.625 \text{ MPa}$$

7-2 层合板构件中微元受力如图所示,各层板之间用胶粘接,接缝方向如图中所示。若已知胶层剪应力不得超过 1MPa。试分析是否满足这一要求。



习题 7-2 图

$$\begin{aligned} \text{解: } \tau_{xy} &= \frac{-2 - (-1)}{2} \sin[2 \times (-60^\circ)] + 0.5 \cdot \cos[2 \times (-60^\circ)] \\ &= -1.55 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$|\tau_{xy}| = 1.55 \text{ MPa} > 1 \text{ MPa}, \text{ 不满足。}$$

7-3 从构件中取出的微元受力如图所示,其中 AC 为自由表面(无外力作用)。试求 σ_x 和 τ_{xy} 。

解:

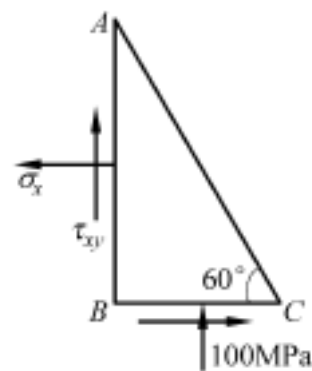
$$-100 = \frac{\sigma_x - 100}{2} + \frac{0 - (\sigma_x - 100)}{2} \cdot \cos(2 \times 60^\circ)$$

$$0.75 \sigma_x = -25$$

$$\sigma_x = -33.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yx} = \frac{0 - [-33.3 - 100]}{2} \sin(2 \times 60^\circ) = 57.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = -57.7 \text{ MPa}$$



习题 7-3 图

7-4 构件微元表面 AC 上作用有数值为 14MPa 的压应力,其余受力如图所示。试求 σ_x 和 τ_{xy} 。

解:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 2 \times \left[\frac{0.7}{\sqrt{1^2 + 0.7^2}} \right]^2 - 1 \end{aligned}$$

$$= -0.342$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0.7^2}} \times \frac{0.7}{\sqrt{1^2 + 0.7^2}}$$

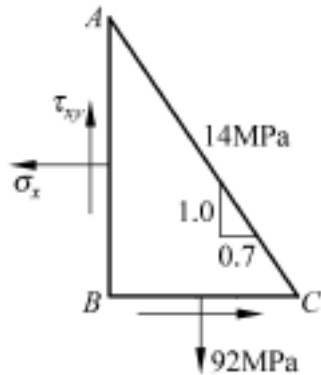
$$= 0.94$$

$$\frac{(\sigma_x + 92 + 14) - 14}{2} + \frac{(-14) - (\sigma_x + 92 + 14) - 14}{2} \times (-0.342) = 92$$

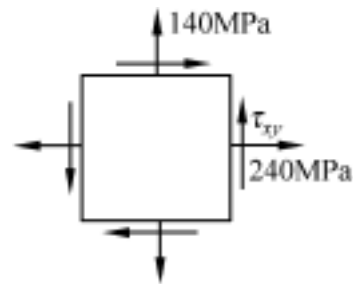
解得

$$\sigma_x = 37.97 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{(-14) - (37.97 + 92 + 14)}{2} \times 0.94 = -74.25 \text{ MPa}$$



习题 7-4 图



习题 7-5 图

7-5 对于图示的应力状态,若要求其中的最大剪应力 $\tau_{\max} < 160 \text{ MPa}$, 试求 τ_{xy} 取何值。

解: 1. 当应力圆半径 $r > OC$ (坐标原点到应力圆圆心的距离)

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{(240 - 140)^2 + 4 \tau_{xy}^2} > \frac{240 + 140}{2}$$

$$\text{即 } |\tau_{xy}| > 183.3 \text{ MPa 时} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{1,3} = \frac{240 + 140}{2} \pm \frac{1}{2} \times \sqrt{(240 - 140)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{100^2 + 4 \tau_{xy}^2} < 160 \text{ MPa}$$

解得

$$|\tau_{xy}| < 152 \text{ MPa} \quad (2)$$

由式(1)、(2)知,显然不存在。

2. 当 $r < OC$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{(240 - 140)^2 + 4 \tau_{xy}^2} > \frac{240 + 140}{2}$$

$$\text{即 } |\tau_{xy}| < 183.3 \text{ MPa 时}$$

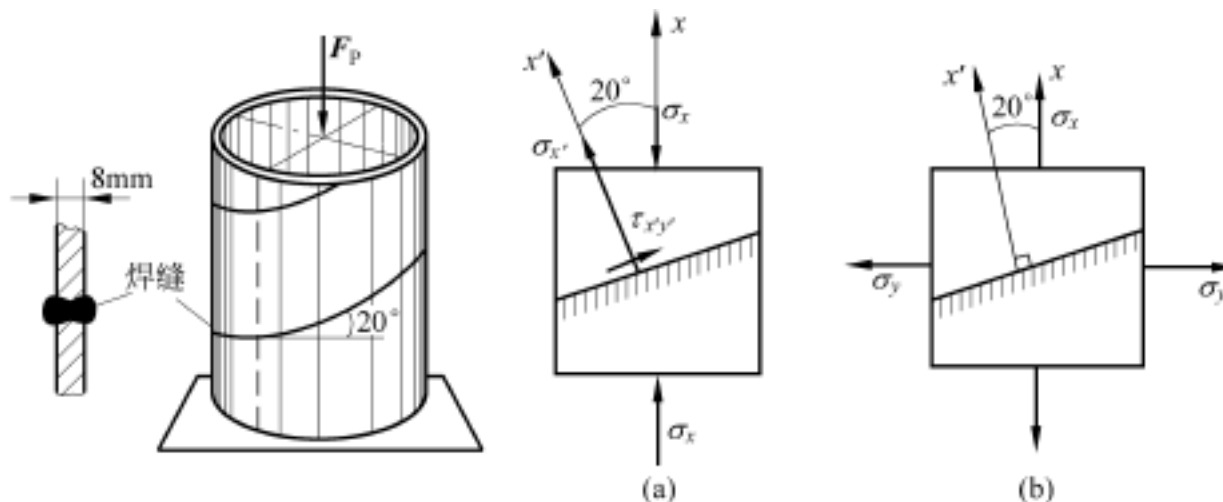
$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{240 + 140}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(240 - 140)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{380}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{100^2 + 4 \tau_{xy}^2} < 160 \text{ MPa}$$

解得 $|\tau_{xy}| < 120 \text{ MPa}$, 所以, 取 $|\tau_{xy}| < 120 \text{ MPa}$ 。

7-6 图示外径为 300mm 的钢管由厚度为 8mm 的钢带沿 20° 角的螺旋线卷曲焊接而成。试求下列情形下, 焊缝上沿焊缝方向的剪应力和垂直于焊缝方向的正应力。

1. 只承受轴向载荷 $F_P = 250 \text{ kN}$;
2. 只承受内压 $p = 5.0 \text{ MPa}$ (两端封闭);
3. 同时承受轴向载荷 $F_P = 250 \text{ kN}$ 和内压 $p = 5.0 \text{ MPa}$ (两端封闭)。



习题 7-6 图

解:

1. 图(a): $\sigma_x = \frac{F_P}{D} = \frac{250 \times 10^3}{\pi (300 - 8) \times 8} = 34.07 \text{ MPa (压)}$
 $\sigma_{x'} = \frac{-34.07}{2} + \frac{-34.07}{2} \cos(2 \times 20^\circ) = -30.09 \text{ MPa}$
 $\tau_{x'y'} = \frac{-34.07}{2} \sin(2 \times 20^\circ) = -10.95 \text{ MPa}$
2. 图(b): $\sigma_x = \frac{pD}{4} = \frac{5 \times (300 - 8)}{4 \times 8} = 45.63 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = \frac{pD}{2} = \frac{5 \times (300 - 8)}{2 \times 8} = 91.25 \text{ MPa}$
 $\sigma_{x'} = \frac{45.63 + 91.25}{2} + \frac{45.63 - 91.25}{2} \cos(2 \times 20^\circ) = 50.97 \text{ MPa}$

$$\sigma_{xy} = \frac{45.63 - 91.25}{2} \sin(2 \times 20^\circ) = -14.66 \text{ MPa}$$

3. 图(a)、图(b)叠加:

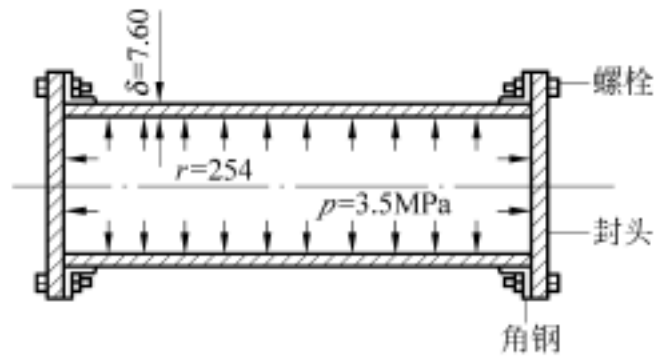
$$\sigma_x = 45.63 - 34.07 = 11.56 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 91.25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{11.56 + 91.25}{2} + \frac{11.56 - 91.25}{2} \cos(2 \times 20^\circ) = 20.88 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{11.56 - 91.25}{2} \sin(2 \times 20^\circ) = -25.6 \text{ MPa}$$

7-7 承受内压的铝合金制的圆筒形薄壁容器如图所示。已知内压 $p = 3.5 \text{ MPa}$, 材料的 $E = 75 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$ 。试求圆筒的半径改变量。



习题 7-7 图

解:

$$\sigma_m = \frac{3.5 \times (254 \times 2 + 7.6)}{4 \times 7.6} = 59.36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{3.5 \times (254 \times 2 + 7.6)}{2 \times 7.6} = 118.72 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_t = \frac{2}{2} \left(\frac{r + r}{r} \right) - \frac{2}{2} \frac{r}{r} = \frac{r}{r}$$

$$r = \epsilon_t \cdot r = \frac{1}{E} [\sigma_t - (\sigma_m + \sigma_r)] r$$

$$= \frac{1}{75 \times 10^3} (118.72 - 0.33 \times 59.36) \times 254 = 0.34 \text{ mm}$$

7-8 构件中危险点的应力状态如图所示。试选择合适的强度理论对以下两种情形作强度校核:

1. 构件为钢制

$$\sigma_x = 45 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 135 \text{ MPa}, \quad \sigma_z = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \text{许用应力} [\sigma] = 160 \text{ MPa}。$$

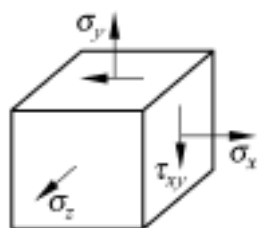
2. 构件材料为铸铁

$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -25 \text{ MPa}, \quad \sigma_z = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad [\sigma] = 30 \text{ MPa}。$$

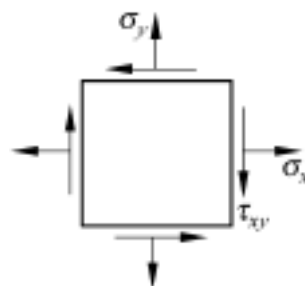
解:

$$1. \quad r_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = 135 \text{ MPa} < [\sigma], \text{ 强度满足。}$$

$$2. \quad r_1 = \sigma_1 = 30 \text{ MPa} = [\sigma], \text{ 强度满足。}$$



习题 7-8 图



习题 7-9 图

7-9 对于图示平面应力状态,各应力分量的可能组合有以下几种情形,试按第三和第四强度理论分别计算此几种情形下的计算应力。

$$1. \quad \sigma_x = 40 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 40 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa};$$

$$2. \quad \sigma_x = 60 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -80 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = -40 \text{ MPa};$$

$$3. \quad \sigma_x = -40 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 0;$$

$$4. \quad \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 45 \text{ MPa}。$$

解:

$$1. \quad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 40 \pm 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -20 \text{ MPa}$$

$$r_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = 120 \text{ MPa}$$

$$r_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = 111.4 \text{ MPa}$$

$$2. \quad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -10 \pm \sqrt{70^2 + 40^2} \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 70.6 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -90.6 \text{ MPa}$$

$$r_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = 161.2 \text{ MPa}$$

$$r_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = 139.8 \text{ MPa}$$

$$3. \quad \sigma_1 = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -40 \text{ MPa}$$

$$r_3 = 90 \text{ MPa}$$

$$r_4 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = 78.1 \text{ MPa}$$

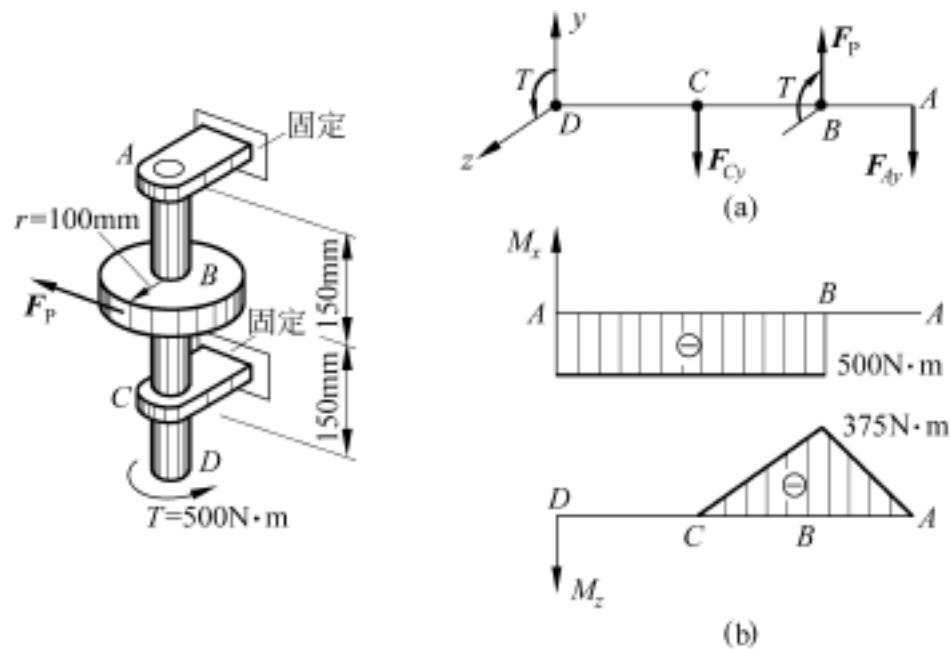
$$4. \quad \sigma = \pm 45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 45 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -45 \text{ MPa}$$

$$\tau_3 = 90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2} (45^2 + 45^2 + 90^2)} = 77.9 \text{ MPa} \quad (\sigma_{r4} = \sqrt{3} \sigma_{xy} = 77.9 \text{ MPa})$$

7-10 传动轴受力如图所示。若已知材料的 $[\sigma] = 120 \text{ MPa}$, 试设计该轴的直径。



习题 7-10 图

解:

$$T = F_P r$$

$$F_P = \frac{T}{r} = 5000 \text{ N}$$

受力图(a)

$$F_{Ay} = F_{Cy} = \frac{1}{2} F_P = 2500 \text{ N}$$

危险面 B(图 b):

$$M_x = 500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = F_{Cy} \times 0.15 = 375 \text{ N} \cdot \text{m}$$

不计剪力影响

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{W} \quad [\sigma]$$

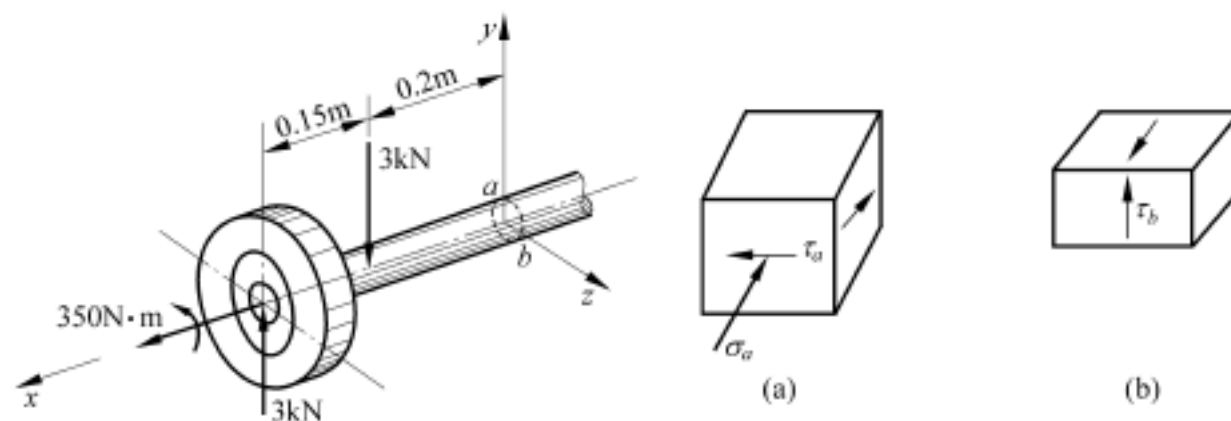
$$\frac{32 \sqrt{375^2 + 500^2}}{d^3} \leq 120 \times 10^6$$

$$d = 0.037575\text{m}$$

取

$$d = 37.6\text{mm}$$

7-11 铝制圆轴右端固定、左端受力如图所示。若轴的直径 $d = 32\text{mm}$ ，试确定点 a 和点 b 的应力状态，并计算 r_3 和 r_4 值。



习题 7-11 图

解： $M_x = 350\text{N} \cdot \text{m}$, $M_y = -3 \times 15 = -45\text{N} \cdot \text{m}$

1. a 点：

$$\sigma_a = \frac{M_z}{W} = \frac{-45}{\frac{\pi \times 32^3}{32} \times 10^{-9}} = -13.99\text{MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{M_x}{W_p} = \frac{350}{\frac{\pi \times 32^3}{16} \times 10^{-9}} = 54.40\text{MPa}$$

$$r_3 = \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2} = 109.7\text{MPa}$$

$$r_4 = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = 95.26\text{MPa}$$

a 点应力状态如图(a)。

2. b 点：

$$\sigma_b = 0, \quad \tau_b = \frac{M_x}{W_p} = 54.40\text{MPa}$$

$$r_3 = 2\tau_b = 108.8\text{MPa}$$

$$r_4 = \sqrt{3}\tau_b = 94.22\text{MPa}$$

b 点应力状态如图(b)。

7-12 直杆 AB 与直径 $d = 40\text{mm}$ 的圆柱焊成一体，结构受力如图所示。试确定点 a 和点 b 的应力状态，并计算 r_4 。

解：

$$1. F_N = -5\text{kN}, \quad F_{Qy} = -400\text{N}$$

$$M_x = (1000 + 600) \times 0.150 = 240 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = -(1000 - 600) \times 0.275 = -110 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$2. \quad \sigma_a = \frac{F_N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{-5 \times 10^3}{\frac{\pi \times 40^2}{4} \times 10^{-6}} + \frac{110}{\frac{\pi \times 40^3}{32} \times 10^{-9}} = 13.53 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{M_x}{W_p} = 19.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = \sqrt{13.53^2 + 3 \times 19.1^2} = 35.74 \text{ MPa}$$

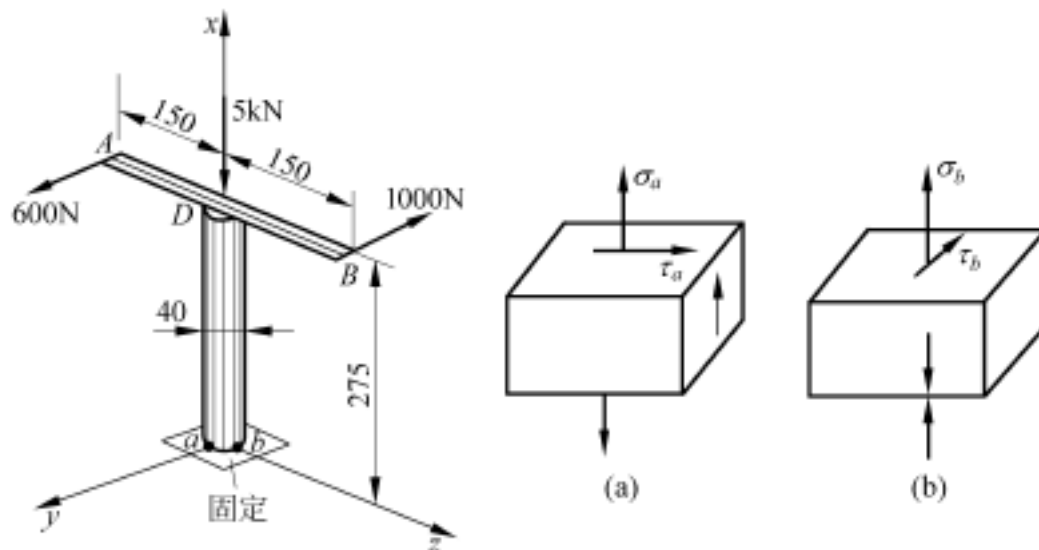
点 a 应力状态如图 (a)。

$$3. \quad \sigma_b = \frac{F_N}{A} = -\frac{5 \times 10^3}{\frac{\pi \times 40^2}{4} \times 10^{-6}} = -3.979 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{M_x}{W_p} + \frac{4}{3} \frac{F_{Qy}}{A} \\ &= \frac{240}{\frac{\pi \times 40^3}{16} \times 10^{-9}} + \frac{4}{3} \times \frac{400}{\frac{\pi \times 40^2}{4} \times 10^{-6}} \\ &= 19.52 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_b^2} = 34.0 \text{ MPa}$$

点 b 应力状态如图 (b)。



习题 7-12 图

压杆的稳定问题

习题解答

8-1 关于钢制细长压杆承受轴向压力达到临界载荷之后,还能不能继续承载,有如下四种答案,试判断哪一种是正确的。

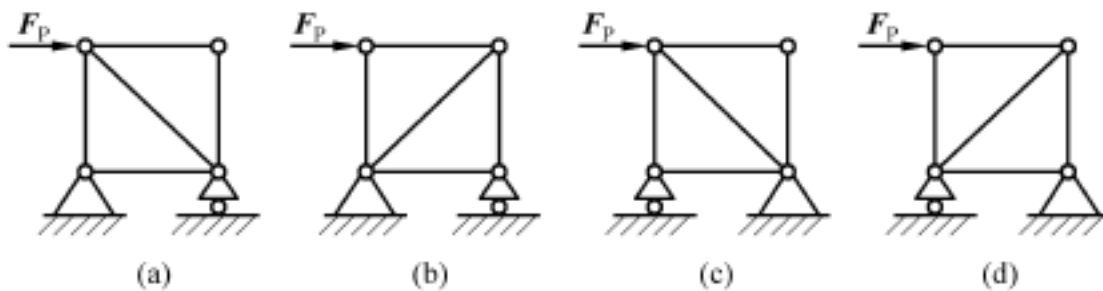
- (A) 不能。因为载荷达到临界值时屈曲位移将无限制地增加;
- (B) 能。因为压杆一直到折断时为止都有承载能力;
- (C) 能。只要横截面上的最大正应力不超过比例极限;
- (D) 不能。因为超过临界载荷后,变形不再是弹性的。

正确答案是____(C)____。

解: 正确答案是(C)。

因为临界点以及其后的平衡路径是稳定的,所以细长压杆承受轴向压力达到临界载荷之后,仍能继续承载。对于实际结构,由于结构缺陷以及载荷偏心,超过临界载荷后将会发生坍塌。

8-2 图示(a)、(b)、(c)、(d)四桁架的几何尺寸、圆杆的横截面直径、材料、加力点及加力方向均相同。关于四桁架所能承受的最大外力 $F_{P\max}$ 有如下四种结论,试判断哪一种是正确的。



习题 8-2 图

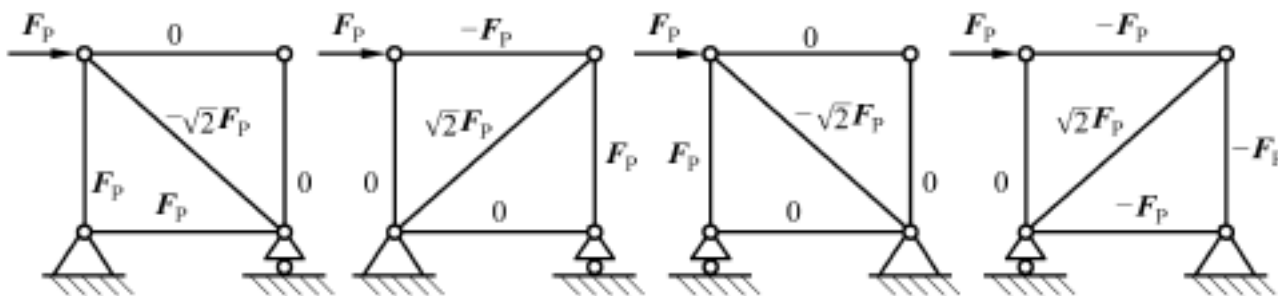
- (A) $F_{P\max}(a) = F_{P\max}(c) < F_{P\max}(b) = F_{P\max}(d)$;
- (B) $F_{P\max}(a) = F_{P\max}(c) = F_{P\max}(b) = F_{P\max}(d)$;

$$(C) F_{P\max}(a) = F_{P\max}(d) < F_{P\max}(b) = F_{P\max}(c);$$

$$(D) F_{P\max}(a) = F_{P\max}(b) < F_{P\max}(c) = F_{P\max}(d)。$$

正确答案是 (A)。

解：各杆内力如解图所示，由各受杆内力情况可知，正确答案是(A)。



习题 8-2 解图

8-3 图中四杆均为圆截面直杆，杆长相同，且均为轴向加载，关于四者临界载荷的大小，有四种解答，试判断哪一种是正确的（其中弹簧的刚度较大）。

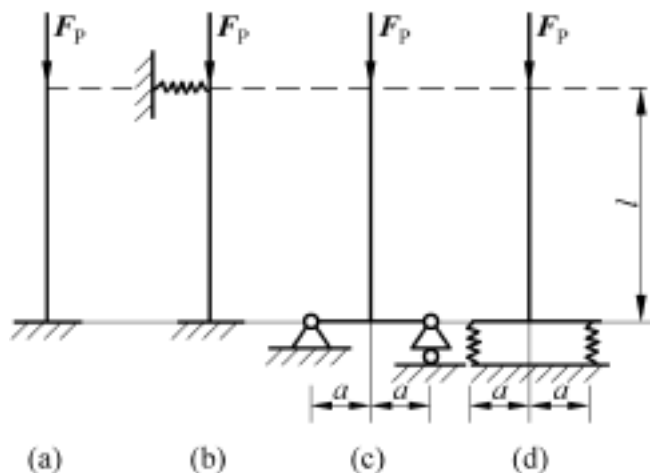
$$(A) F_{Pcr}(a) < F_{Pcr}(b) < F_{Pcr}(c) < F_{Pcr}(d);$$

$$(B) F_{Pcr}(a) > F_{Pcr}(b) > F_{Pcr}(c) > F_{Pcr}(d);$$

$$(C) F_{Pcr}(b) > F_{Pcr}(c) > F_{Pcr}(d) > F_{Pcr}(a);$$

$$(D) F_{Pcr}(b) > F_{Pcr}(a) > F_{Pcr}(c) > F_{Pcr}(d)。$$

正确答案是 (D)。



习题 8-3 图

解：图(b)上端有弹性支承，故其临界力比图(a)大；图(c)下端不如图(a)刚性好，故图(c)临界力比图(a)小；图(d)下端弹簧不如图(c)下端刚性好，故图(d)临界力比图(c)小。所以，正确答案是(D)。

8-4 一端固定、另一端由弹簧侧向支承的细长压杆，可采用欧拉公式 $F_{Pcr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ 计算。试确定压杆的长度系数 μ 的取值范围：

- (A) $\mu > 2.0$;
 (B) $0.7 < \mu < 2.0$;
 (C) $\mu < 0.5$;
 (D) $0.5 < \mu < 0.7$ 。

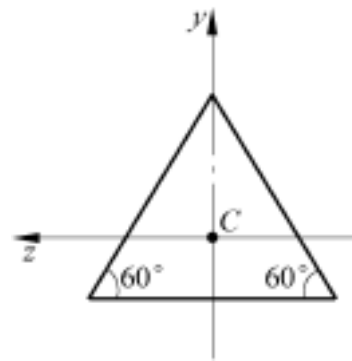
正确答案是 (B)。

解：因为弹性支座比自由端刚性好，比较支刚性差。所以，正确答案是 (B)。

8-5 正三角形截面压杆，其两端为球铰链约束，加载方向通过压杆轴线。当载荷超过临界值，压杆发生屈曲时，横截面将绕哪一根轴转动？现有四种答案，请判断哪一种是正确的。

- (A) 绕 y 轴；
 (B) 绕通过形心 C 的任意轴；
 (C) 绕 z 轴；
 (D) 绕 y 轴或 z 轴。

正确答案是 (B)。



习题 8-5 图

解：因为过正多边形截面形心的任意轴均为形心主轴，且惯性矩相等。所以，正确答案是 (B)。

8-6 同样材料、同样截面尺寸和长度的两根管状细长压杆两端由球铰链支承，承受轴向压缩载荷，其中，管 a 内无内压作用，管 b 内有内压作用。关于二者横截面上的真实应力 (a) 与 (b) 、临界应力 $\sigma_{cr}(a)$ 与 $\sigma_{cr}(b)$ 之间的关系，有如下结论。试判断哪一结论是正确的。

- (A) $(a) > (b)$, $\sigma_{cr}(a) = \sigma_{cr}(b)$;
 (B) $(a) = (b)$, $\sigma_{cr}(a) < \sigma_{cr}(b)$;
 (C) $(a) < (b)$, $\sigma_{cr}(a) < \sigma_{cr}(b)$;
 (D) $(a) < (b)$, $\sigma_{cr}(a) = \sigma_{cr}(b)$ 。

正确答案是 (D)。

解：
$$(a) = -\frac{F_{Pcr}}{A}, \quad (b) = -\frac{F_{Pcr}}{A} + \frac{pD}{4}$$

(p 为内压, D 为管径, δ 为壁厚, A 为管横截面积)

$$(a) < (b)$$

$$\sigma_{cr}(a) = \frac{F_{Pcr}}{A}, \quad (b) = \frac{F_{Pcr}}{A}$$

$$\sigma_{cr}(a) = \sigma_{cr}(b)$$

所以，正确答案是 (D)。

8-7 提高钢制细长压杆承载能力有如下方法。试判断哪一种是最正确的。

- (A) 减小杆长,减小长度系数,使压杆沿横截面两形心主轴方向的长细比相等;
- (B) 增加横截面面积,减小杆长;
- (C) 增加惯性矩,减小杆长;
- (D) 采用高强度钢。

正确答案是 (A)。

解: 由细长杆临界力公式: $F_{\text{Pcr}} = \frac{E I_{\min}}{(\mu l)^2}$ 中各量可知; 另外各种钢的弹性模量 E 值差别不大。正确答案是(A)。

8-8 根据压杆稳定设计准则,压杆的许可载荷 $[F_P] = \frac{\sigma_{\text{cr}} A}{[n]_{\text{st}}}$ 。当横截面面积 A 增加一倍时,试分析压杆的许可载荷将按下列四种规律中的哪一种变化?

- (A) 增加 1 倍;
- (B) 增加 2 倍;
- (C) 增加 1/2 倍;
- (D) 压杆的许可载荷随着 A 的增加呈非线性变化。

正确答案是 (D)。

解: 由于 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$, 长细比 $\lambda = \frac{\mu l}{i}$, 而临界应力 $\sigma_{\text{cr}} = \frac{E}{\lambda^2}$ 或 $\sigma_{\text{cr}} = a - b$

所以, $\sigma_{\text{cr}} - A$ 不存在线性关系, $[F_P] = \frac{\sigma_{\text{cr}} A}{[n]_{\text{st}}}$ 与面积 A 之间为非线性关系。所以, 正确答案是(D)。

* 8-9 图示结构中两根柱子下端固定, 上端与一可活动的刚性块固结在一起。已知 $l = 3\text{m}$, 直径 $d = 20\text{mm}$, 柱子轴线之间的间距 $a = 60\text{mm}$ 。柱子的材料均为 Q235 钢, $E = 200\text{GPa}$, 柱子所受载荷 F_P 的作用线与两柱子等间距, 并作用在两柱子的轴线所在的平面内。假设, 各种情形下, 欧拉公式均适用, 试求结构的临界载荷。

解: 本题可能的屈曲方式有四种, 如解图所示。

图(a)两杆分别屈曲 $\mu = 0.5$

$$\text{单根 } F_{\text{Pcr}} = \frac{E I}{(\mu l)^2} = \frac{E \cdot \frac{d^4}{64}}{(0.5 l)^2} = \frac{E d^4}{16 l^2}$$

$$F_{\text{Pcr}} = 2 \times F_{\text{Pcr}} = \frac{^3 E d^4}{8 l^2}$$

图(b)两杆作为整体绕 y 轴屈曲 $\mu = 2$

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{^2 EI_y}{(\mu l)^2} = \frac{^2 E}{4 l^2} \cdot 2 \cdot \frac{d^4}{64} = \frac{^3 E d^4}{128 l^2}$$

图(c)两杆作为整体绕 z 轴屈曲 $\mu = 2$

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{^2 EI_z}{(\mu l)^2} = \frac{^2 E}{4 l^2} \cdot 2 \cdot \left[\frac{d^4}{64} + \frac{d^2}{4} \cdot \left[\frac{a}{2} \right]^2 \right] = \frac{^3 E d^2}{128 l^2} (d^2 + 4a^2)$$

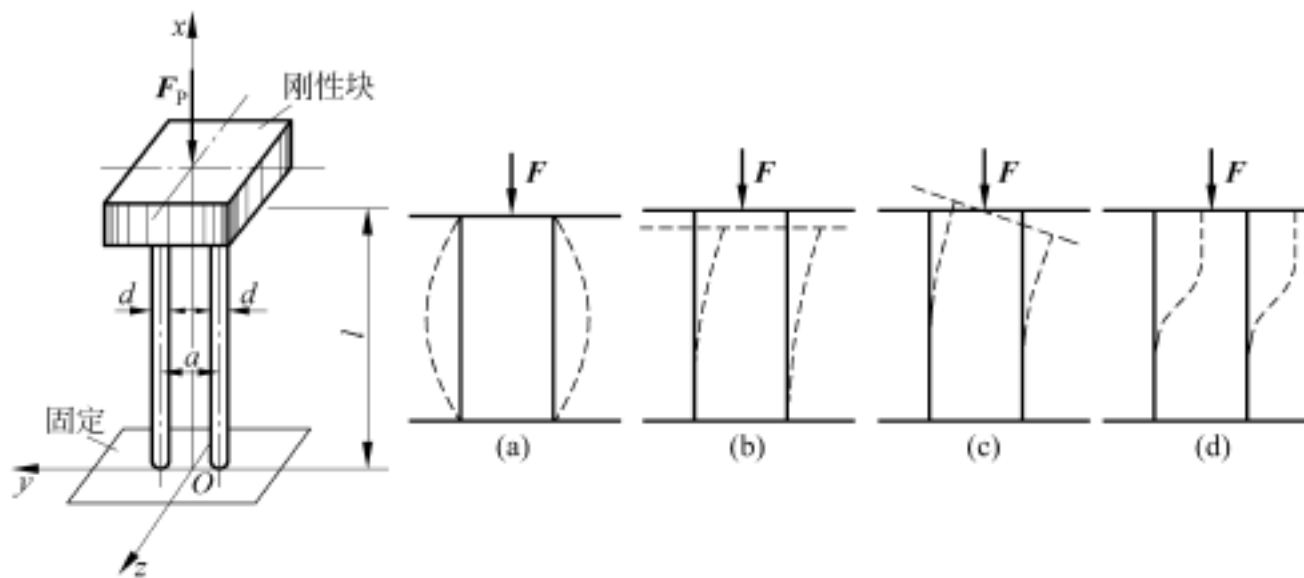
图(d)两杆共同沿 z 方向(或沿 y 方向)屈曲,由杆的绕曲线可见,对于 $\frac{l}{2}$ 长度,可视作一端固定,一端自由,即:

$$\mu \left[\frac{l}{2} \right] = 2 \left[\frac{l}{2} \right] = 1 \times l, \text{ 故对于全长 } l, \mu = 1$$

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{^2 E}{l^2} \cdot 2 \cdot \frac{d^4}{64} = \frac{^3 E d^4}{32 l^2}$$

比较图(a)(b)(c)(d)后知图(b)即:两杆共同绕 y 轴屈曲时的临界力最小。其值为:

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{^3 E d^4}{128 l^2} = \frac{^3 \times 200 \times 10^9 \times 20^4 \times 10^{-12}}{128 \times 3^2} = 861 \text{ N}$$



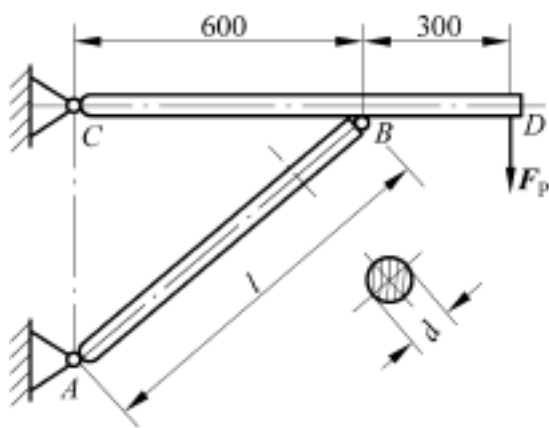
习题 8-9 图

8-10 图示托架中杆 AB 的直径 $d = 40 \text{ mm}$, 长度 $l = 800 \text{ mm}$ 。两端可视为球铰链约束, 材料为 Q235 钢。试:

1. 求托架的临界载荷;
2. 若已知工作载荷 $F_P = 70 \text{ kN}$, 并要求杆 AB 的稳定安全因数 $[n]_{\text{st}} =$

2. 0, 校核托架是否安全;

3. 若横梁为 No. 18 普通热轧工字钢, $[\sigma] = 160\text{MPa}$, 则托架所能承受的最大载荷有没有变化?



习题 8-10 图

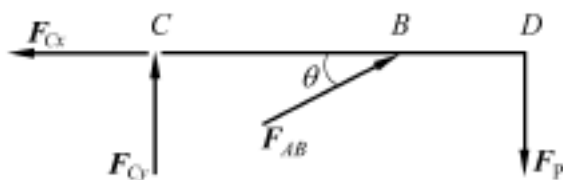
解:

1. 求托架的临界载荷

$$(\text{图(a)}) \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$M_C = 0, \quad 900 F_P = 600 F_{AB} \sin \theta \quad (\text{a})$$

$$F_P = \frac{2}{3} F_{AB} \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{6} F_{AB} \quad (1)$$



$$i = \frac{d}{4} = 10\text{mm}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 800}{10} = 80 < \lambda_p, \text{ 中长杆}$$

$$\sigma_{cr} = 304 - 1.14 \lambda = 304 - 1.14 \times 80 \\ = 212.8\text{MPa}$$

$$F_{ABcr} = \sigma_{cr} \cdot A = \sigma_{cr} \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

$$= 212.8 \times \frac{\pi}{4} \times (40 \times 10^{-3})^2 \text{ kN}$$

$$= 0.2674\text{MN} = 267.4\text{kN}$$

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{\sqrt{7}}{6} \times 267.4 \text{ kN} = 118 \text{ kN}$$

2. 校核托架是否安全

当已知工作载荷为 70kN 时

$$\text{由 (1), } F_{AB} = \frac{6}{\sqrt{7}} F_{\text{P}} = 158.7 \text{ kN}$$

$$n_{\text{st}} = \frac{267.4}{158.7} = 1.685 < [n]_{\text{st}}, \text{ 不安全。}$$

3. 横梁为 No. 18 普通热轧工字钢, $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 计算托架所能承受的最大载荷条件 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 意味着既要保证 CD 强度, 又要保证 AB 杆稳定。

CD 梁中:

$$M_{\text{max}} = M_B = 0.3 F_{\text{P}},$$

$$F_{\text{N}} = F_{AB} \cos \alpha = \frac{3}{2} \cot \alpha \cdot F_{\text{P}}$$

$$F_{\text{Q}} = F_{\text{P}}$$

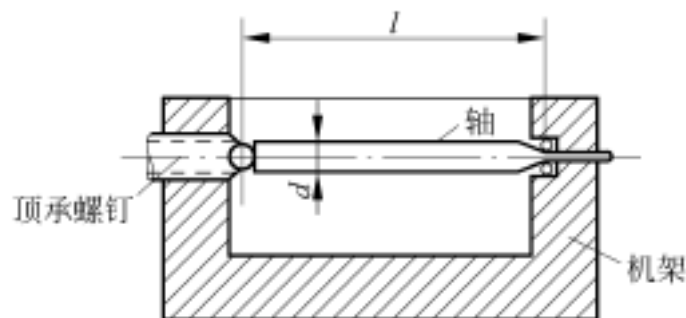
$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_B}{W} + \frac{F_{\text{N}}}{A} \quad [\sigma]$$

$$\frac{0.3 F_{\text{P}}}{185 \times 10^{-8}} + \frac{\frac{3}{2} \cot \alpha \cdot F_{\text{P}}}{30.6 \times 10^{-4}} = 160 \times 10^6$$

$$F_{\text{P}} = 73.5 \text{ kN} < F_{\text{Pcr}} = 118 \text{ kN}$$

所以, 托架所能承受的最大载荷为 73.5kN。

8-11 长 $l = 50 \text{ mm}$, 直径 $d = 6 \text{ mm}$ 的 40Cr 钢制微型圆轴, 在温度为 $t_1 = -60^\circ \text{C}$ 时安装, 这时轴既不能沿轴向移动, 又不承受轴向载荷, 温度升高时, 轴和架身将同时因热膨胀而伸长。轴材料的线膨胀系数 $\alpha_1 = 125 \times 10^{-6} / ^\circ \text{C}$; 架身材料的线膨胀系数 $\alpha_2 = 75 \times 10^{-6} / ^\circ \text{C}$ 。40Cr 钢的 $\sigma_s = 600 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$ 。若规定轴的稳定工作安全因数 $[n]_{\text{st}} = 2.0$, 并且忽略架身因受力而引起的微小变形, 试校核当温度升高到 $t_2 = 60^\circ \text{C}$ 时, 该轴是否安全。



习题 8-11 图

解：温升时， $\alpha_1 > \alpha_2$ 使轴受压力 F_N 。这是轴向载荷作用下的静不定问题。

变形协调条件为：

$$\alpha_1 (t_2 - t_1) l - \frac{F_N l}{EA} = \alpha_2 (t_2 - t_1) l$$

由此解出轴所受的轴向载荷为

$$F_N = (\alpha_1 - \alpha_2)(t_2 - t_1) EA$$

弹性屈曲范围的长细比的极限

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{\sigma_s}} = \sqrt{\frac{2 \pi^2 \times 210 \times 10^9}{600}} = 83$$

根据支承条件以及轴的几何尺寸，计算轴的长细比

$$i = \frac{d}{4} = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ mm}$$

$$\mu = 1$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 150}{1.5} = 100 > \lambda_p \text{ 属细长杆}$$

采用欧拉公式计算临界力

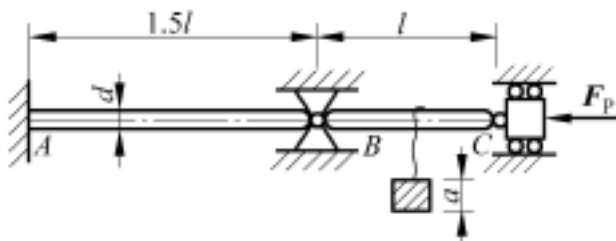
$$F_{Pcr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

轴的工作安全因数

$$\begin{aligned} n_w &= \frac{F_{Pcr}}{F_N} = \frac{\pi^2 EA}{(\alpha_1 - \alpha_2)(t_2 - t_1) EA} \\ &= \frac{\pi^2}{100^2 \times 0.5 \times 10^{-5} \times 120} = 1.65 < [n]_{st} = 2 \end{aligned}$$

所以轴不安全。

8-12 图示结构中， AB 为圆截面杆，直径 $d=80\text{mm}$ ，杆 BC 为正方形截面，边长 $a=70\text{mm}$ ，两杆材料均为 Q235 钢， $E=200\text{GPa}$ 。两部分可以各自独立发生屈曲而互不影响。已知 A 端固定， B 、 C 端为球铰链。 $l=3\text{m}$ ，稳定安全因数 $[n]_{st}=2.5$ 。试求此结构的许可载荷。



习题 8-12 图

解: 1. 计算长细比

$$AB \text{ 杆: } \mu = 0.7, i = \frac{d}{4} = 20\text{mm}$$

$$= \frac{\mu l}{i} = \frac{0.7 \times 1.5 \times 3}{0.02} = 157.5$$

BC 杆: $\mu = 1$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 70 = 20.2\text{mm}$$

$$= \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 3}{0.0202} = 148.5$$

2. 计算临界力

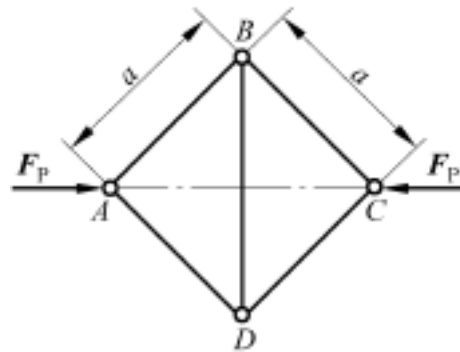
$$AB \text{ 杆: } F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4} \times 80^2 \times 10^{-6}}{157.5^2} = 400\text{kN}$$

$$BC \text{ 杆: } F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 70^2 \times 10^{-6}}{148.5^2} = 438.6\text{kN}$$

$$F_{\text{Pcr}} = 400\text{kN}$$

$$[n]_{\text{st}} = \frac{F_{\text{Pcr}}}{[F_{\text{P}}]}, \quad [F_{\text{P}}] = \frac{F_{\text{Pcr}}}{[n]_{\text{st}}} = \frac{400}{2.5} = 160\text{kN}$$

8-13 图示正方形桁架结构,由五根圆截面钢杆组成,连接处均为铰链,各杆直径均为 $d = 40\text{mm}$, $a = 1\text{m}$ 。材料均为 Q235 钢, $E = 200\text{GPa}$, $[n]_{\text{st}} = 1.8$ 。试:



习题 8-13 图

1. 求结构的许可载荷;
2. 若 F_{P} 力的方向与 1 中相反,问:许可载荷是否改变,若有改变应为多少?

解:

1. (1) 由静力平衡得

$$F_{AB} = F_{AD} = F_{BC} = F_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{\text{P}} (\text{压})$$

$$F_{DB} = F_{\text{P}} (\text{拉})$$

(2) 对于拉杆 BC, 由强度条件

$$F_{\text{P}} = F_{BD} = [] A = 160 \times 10^6 \times \frac{d^2}{4} = 160 \times \frac{\pi}{4} \times 40^2 = 201\text{kN}$$

对于压杆 AB 等, 需进行稳定计算:

$$= \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 1000}{\frac{40}{4}} = 100 < \mu_p = 101$$

则

$$F_{ABcr} = (a - b) A = (304 - 1.14 \times 100) \times \frac{1}{4} \times 40^2 \times 10^{-6}$$

$$= 0.2387 \text{ MN} = 238.7 \text{ kN}$$

$$F_{Pcr} = \sqrt{2} F_{ABcr} = \sqrt{2} \times 238.7 \text{ kN} = 337.6 \text{ kN}$$

$$[F_P] = \frac{F_{Pcr}}{[n]_{st}} = \frac{337.6}{1.8} = 187.6 \text{ kN}$$

2. 若 F_P 向外, 则

$$F_{AB} = F_{AD} = F_{BC} = F_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_P (\text{拉})$$

$$F_{BD} = F_P (\text{压})$$

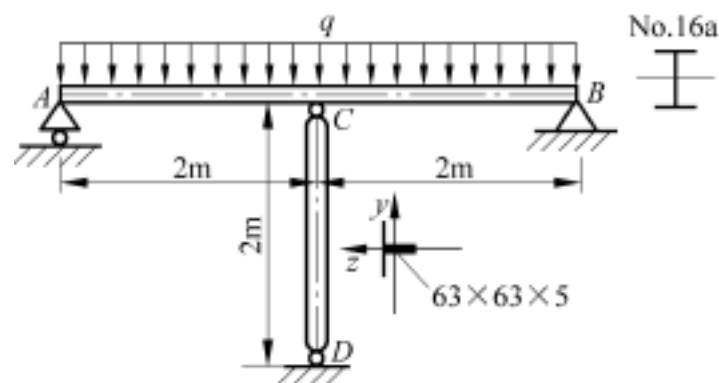
由于此时受压杆 BD 比前一种情况长, 所以只要进行稳定计算:

$$= \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times \sqrt{2} \times 1000}{10} = 141.4 > \mu_p = 100$$

采用欧拉公式计算临界力

$$\begin{aligned} [F_P] &= \frac{F_{Pcr}}{[n]_{st}} = \frac{F_{BDcr}}{[n]_{st}} \\ &= \frac{F_{BDcr} A}{[n]_{st}} = \frac{1}{[n]_{st}} \times \frac{E}{2} \times \frac{1}{4} \times 40^2 \times 10^{-6} = 68.9 \text{ kN} \\ &= \frac{1}{1.8} \times \frac{E}{141.4^2} \times \frac{1}{4} \times 40^2 \times 10^{-6} \\ &= 68.9 \times 10^{-3} \text{ MN} = 68.9 \text{ kN} \end{aligned}$$

8-14 图示结构中, 梁与柱的材料均为 Q235 钢, $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$ 。均匀分布载荷集度 $q = 24 \text{ kN/m}$ 。竖杆为两根 $63 \text{ mm} \times 63 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ 等边角钢(焊接成一体)。试确定梁与柱的工作安全因数。



习题 8-14 图

解：1. 查型钢表得

$$\text{No. 16aI: } I_z = 1130\text{cm}^4, W_z = 141\text{cm}^3$$

$$2\text{No. 63} \times 63 \times 5: A = 2 \times 6.143 = 12.286\text{cm}^2$$

$$i_y = 1.94\text{cm}$$

$$I_y = 2 \times 23.17 = 46.34\text{cm}^4$$

2. 梁为静不定问题, 由变形协调条件, 得

$$\begin{aligned} \frac{5ql^4}{384EI_z} - \frac{F_N l^3}{48EI_z} &= \frac{F_N l}{2EA} \\ \frac{5ql^3}{384} - \frac{F_N l^2}{48} &= \frac{I_z}{2A} F_N \end{aligned} \quad (1)$$

$$F_N = \frac{5ql^3}{384 \left[\frac{l^2}{48} + \frac{I_z}{2A} \right]} = \frac{5 \times 24 \times 10^3 \times 4^3}{384 \left[\frac{4^2}{48} + \frac{1130 \times 10^{-8}}{2 \times 12.286 \times 10^{-4}} \right]} = 59.18\text{kN}$$

$$3. \text{ 梁: } F_y = 0, 2F_A + F_N = 4q$$

$$\text{梁的支反力: } F_B = F_A = (4 \times 24 - 59.18) / 2 = 18.41\text{kN} ()$$

$$M_C = F_A \times 2 - \frac{1}{2} q \times 2^2 = 18.41 \times 2 - \frac{1}{2} \times 24 \times 4 = -11.18\text{kN} \cdot \text{m}$$

梁弯矩值:

$$F_Q = F_A - qx = 0, \quad 18.41 - 24x = 0, \quad x = 0.767\text{m}$$

$$M_{\max} = 18.41 \times 0.767 - \frac{1}{2} \times 24 \times 0.767^2 = 7.0625\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$|M|_{\max} = |M_C| = 11.18\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{梁内: } \sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{11.18 \times 10^3}{141 \times 10^{-6}} = 79.29\text{MPa}$$

$$\text{梁的安全因数: } n = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{240}{79.29} = 3.03$$

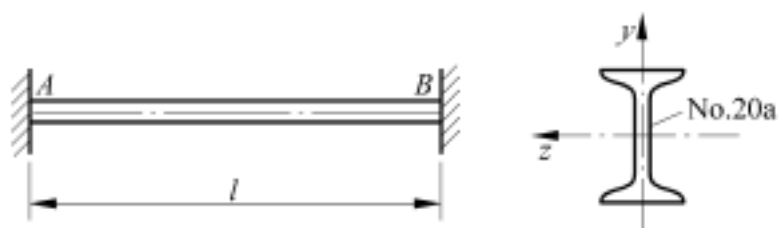
$$4. \text{ 柱: } \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 200}{1.94} = 103 > 100$$

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3 \text{MPa}}{103^2} = 186\text{MPa}$$

$$F_{\text{Pcr}} = \sigma_{\text{cr}} A = 186 \times 10^6 \times 12.286 \times 10^{-4} \text{N} = 228.5\text{kN}$$

$$n_{\text{st}} = \frac{F_{\text{Pcr}}}{F_N} = \frac{228.5}{98.63} = 2.31$$

* 8-15 图示工字钢直杆在温度 $t_1 = 20^\circ\text{C}$ 时安装, 此时杆不受力。已知杆长 $l = 6\text{m}$, 材料为 Q235 钢, $E = 200\text{GPa}$ 。试问: 当温度升高到多少度时, 杆将失稳 (材料的线膨胀系数 $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$)。



习题 8-15 图

解：查型钢表 No. 20aI 的 $i_{\min} = 2.12\text{cm}$

$$= \frac{\mu l}{i} = \frac{0.5 \times 600}{2.12} = 141.5, \text{为细长杆}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

当温升 t 时, 杆中应力

$$\sigma_t = E t = \sigma_{cr}$$

$$E t = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$t = \frac{\pi^2 E}{E \lambda^2} = \frac{\pi^2}{12.5 \times 10^{-6} \times 141.5^2} = 39.43$$

即温度升高 39.43 时杆将失稳。

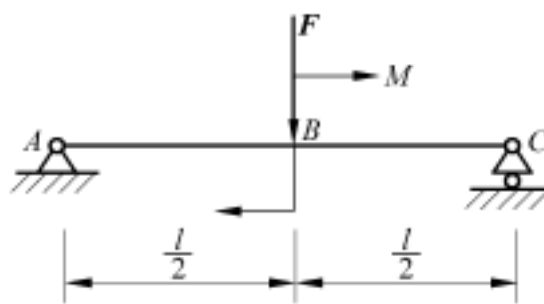
讨论：若取 $\lambda = 142$, 则

$$t = \frac{\pi^2 E}{E \lambda^2} = \frac{\pi^2}{12.5 \times 10^{-6} \times 142^2} = 39.16$$

材料力学中的能量方法

习题解答

9-1 图示简支梁中点只承受集中力 F 时, 最大转角为 θ_{\max} , 应变能为 $V(F)$; 中点只承受集中力偶 M 时, 最大挠度为 w_{\max} , 梁的应变能为 $V(M)$ 。当同时在中点施加 F 和 M 时, 梁的应变能有以下四种答案, 试判断哪一种是正确的。



习题 9-1 图

- (A) $V(F) + V(M)$;
 (B) $V(F) + V(M) + M \theta_{\max}$;
 (C) $V(F) + V(M) + F w_{\max}$;
 (D) $V(F) + V(M) + \frac{1}{2}(M \theta_{\max} + F w_{\max})$ 。

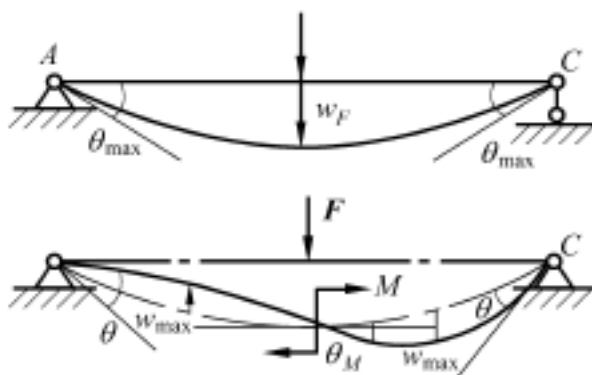
正确答案是 (A)。

解: 正确答案是(A)。因为对于线性弹性结构, 先加 F 时梁内的应变能为:

$$V(F) = \frac{1}{2} F w_F$$

再加 M 时, 由于反对称载荷, 梁中点的挠度仍为 w_F , 这时先加的力 F 不作功, 所以梁内应变能将增加:

$$\frac{1}{2} M \theta_M = V(M)$$

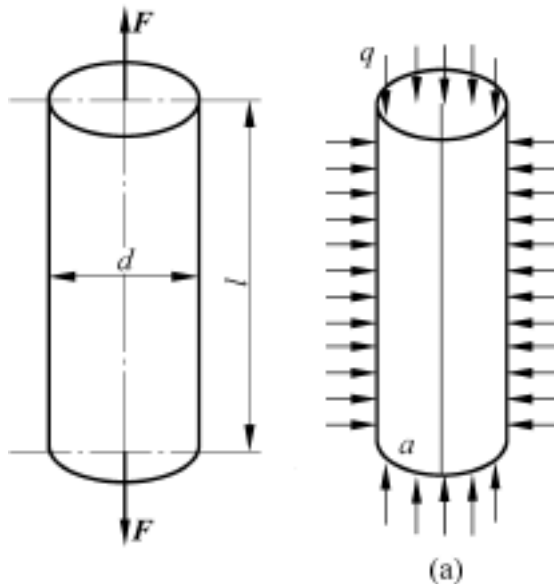


(a)

当同时施加 F 和 M 时的应变能,等于先加 F 、再加 M 时的应变能,即

$$V(F, M) = V(F) + V(M)$$

9-2 图示圆柱体承受轴向拉伸,已知 F 、 l 、 d 以及材料弹性常数 E 、 ν 。试用功的互等定理,求圆柱体的体积改变量。



习题 9-2 图

解: 将外加载荷作为第 1 力系: 一对 F 力; 为应用功的互等定理, 建立辅助力系——静水压力 q 作为第 2 力系(图(a))。

在第 2 力系作用下, 圆柱体上的任意点都处于三向等压应力状态 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = q$ 。因此圆柱体两端面的相对线位移为

$$\Delta l(q) = \Delta l_x = \frac{1}{E} [q - (\nu(q + q))] l = \frac{1 - 2\nu}{E} ql \quad (\text{靠拢})$$

一对 F 力沿 $\Delta l(q)$ 方向的功为

$$W_F(q) = \frac{1 - 2\nu}{E} Fql \quad (1)$$

将静水压力 q 作为广义力, 与之对应的广义位移就是圆柱体的体积改变量:

$$\int_{S_{\text{表面}}} q ds \cdot dr = q \int_{S_{\text{表面}}} dr ds = q(\Delta V) \quad (2)$$

于是, 应用功的互等定理, 有

$$q \Delta V(F) = W_F(q) = \frac{1 - 2\nu}{E} Fql$$

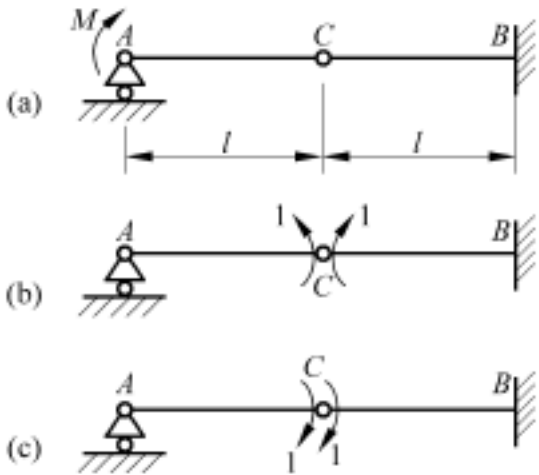
由此解得

$$\Delta V(F) = \frac{1 - 2\nu}{E} Fl$$

9-3 具有中间铰的线弹性材料梁, 受力如图(a)所示, 两段梁的弯曲刚度均为 EI 。用莫尔法确定中间铰两侧截面的相对转角有下列四种分段方法, 试判断哪一种是正确的。

- (A) 按图(b)所示施加一对单位力偶, 积分时不必分段;
- (B) 按图(b)所示施加一对单位力偶, 积分时必须分段;
- (C) 按图(c)所示施加一对单位力偶, 积分时不必分段;
- (D) 按图(c)所示施加一对单位力偶, 积分时必须分段。

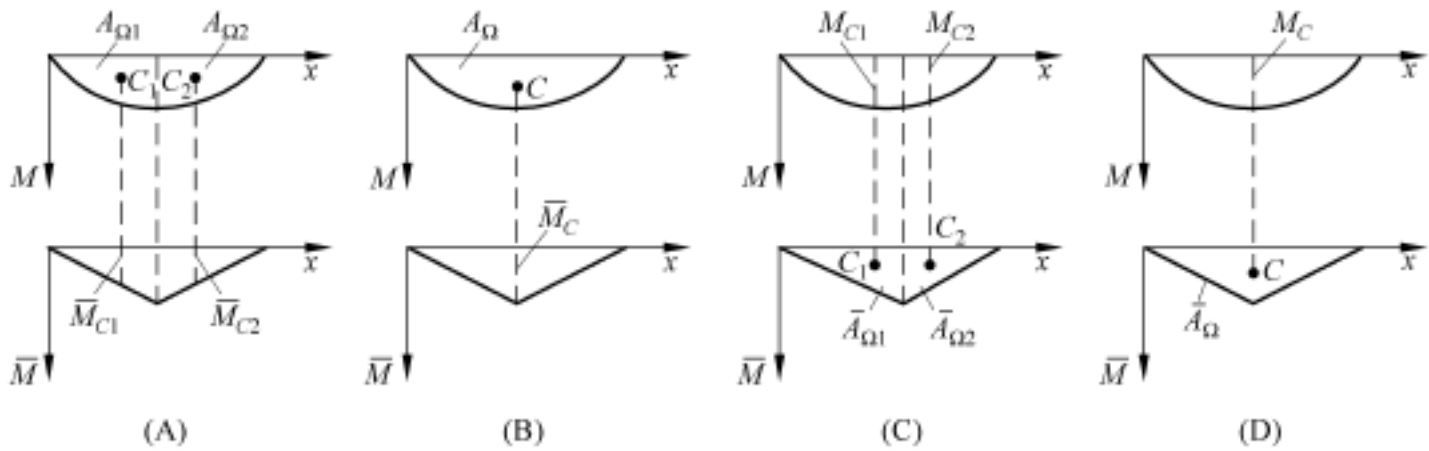
正确答案是 (A)。



习题 9-3 图

解: 根据受力分析, 载荷引起的弯矩方程 M 和单位载荷引起的弯矩方程 \bar{M} 在 AC 和 CB 两段都是相同的。所以, 作莫尔积分时可以不分段, 只需将一段的积分结果乘以 2。

9-4 图示 M 和 \bar{M} 图分别为同一等截面梁的载荷弯矩图和单位弯矩图, 则在下列四种情形下, A 与 M_{Ci} 或 A_i 与 M_{Ci} 相乘, 试判断哪一种是正确的。



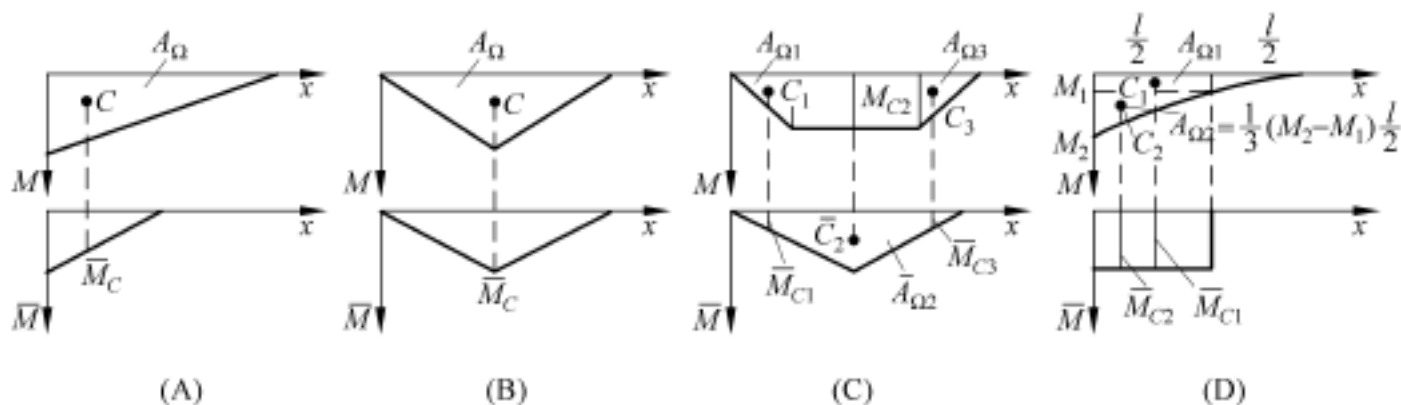
习题 9-4 图

解：图形互乘时的原则是：第一，单位载荷引起的弯矩图，必须为直线；第二，单位载荷引起的弯矩图只能有一个斜率，否则，就要分段。

如果载荷引起的弯矩图也是直线的，也可以互乘，但原则是相同的。

图(B)中的乘法，不符合单位载荷弯矩图的分段原则，所以是不正确的；图(C)和(D)中的乘法，因为载荷引起的弯矩图不是直线，所以不能相乘，因而也是不正确的。图(A)中的乘法符合图形互乘的原则，所以正确答案是(A)。

9-5 图示 M 和 \bar{M} 图分别为等截面梁的载荷弯矩图和单位弯矩图。试判断下列四种图乘方法哪一种是正确的。



习题 9-5 图

解：图形互乘时的原则是：第一，单位载荷引起的弯矩图，必须为直线；第二，单位载荷引起的弯矩图只能有一个斜率，否则，就要分段。如果载荷引起的弯矩图也是直线的，也可以互乘，但原则是相同的。

图(A)、(B)、(D)中的乘法，都不符合单位载荷弯矩图的分段原则，所以是不正确的。只有图(C)中的乘法符合图形互乘的原则，所以正确答案是(C)。

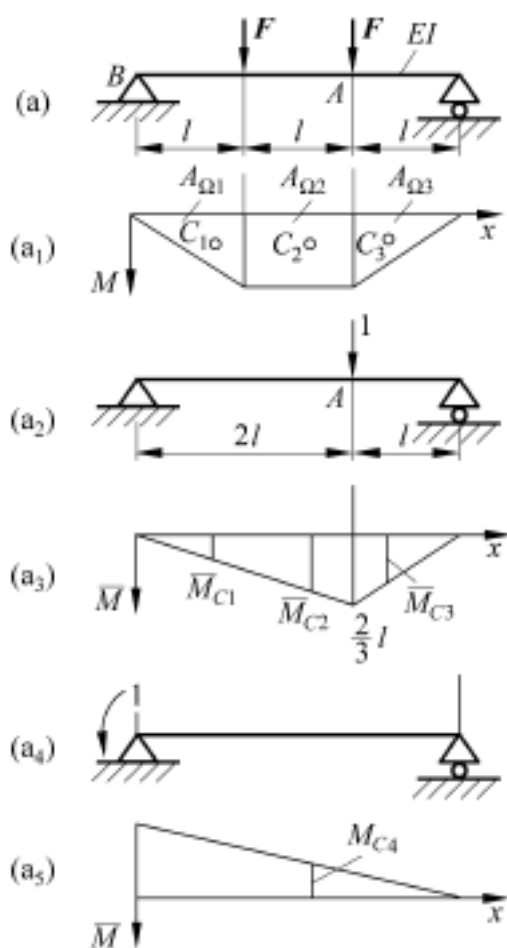
9-6 图示各梁中 F 、 M 、 q 、 l 以及弯曲刚度 EI 等均已知，忽略剪力影响。试用图乘法求点 A 的挠度；截面 B 的转角。

解：

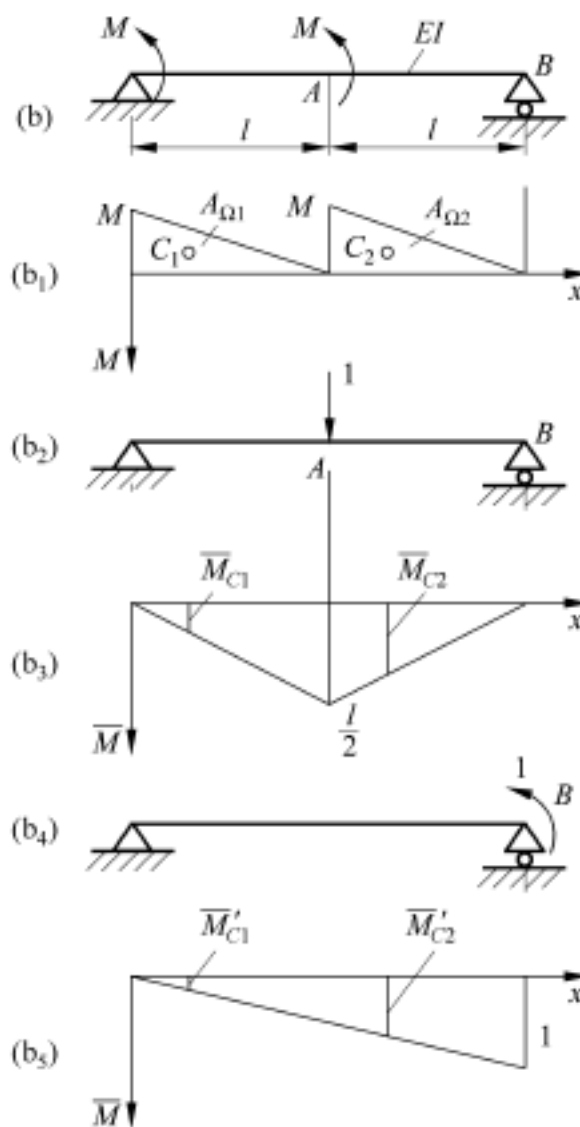
$$\begin{aligned}
 \text{(a) } w_A &= \frac{1}{EI} (q A_1 + M^2 A_2 + M_{C3} A_3) \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{2}{9} l \cdot \left[\frac{1}{2} Fl \cdot l \right] + \frac{l}{2} (Fl \cdot l) + \frac{4}{9} l \left[\frac{1}{2} Fl \cdot l \right] \right] = \frac{5Fl^2}{6EI} () \\
 \theta_B &= \frac{1}{EI} [- M_{C4} (A_1 + A_2 + A_3)] = - \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} Fl \cdot l \cdot 2 + Fl \cdot l \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{Fl^2}{EI} \text{ (顺时针)}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad w_A &= \frac{1}{EI}(-M_{C1} A_1 - M_{C2} A_2) \\ &= -\frac{1}{EI} \left[\left(\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} Ml \right) + \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{2} Ml \right) \right] = -\frac{Ml^2}{4EI} () \\ \theta_B &= \frac{1}{EI}(M_{C1} A_1 + M_{C2} A_2) = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times Ml + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times Ml \right] \\ &= -\frac{5Ml}{12EI} \text{ (顺时针)} \end{aligned}$$



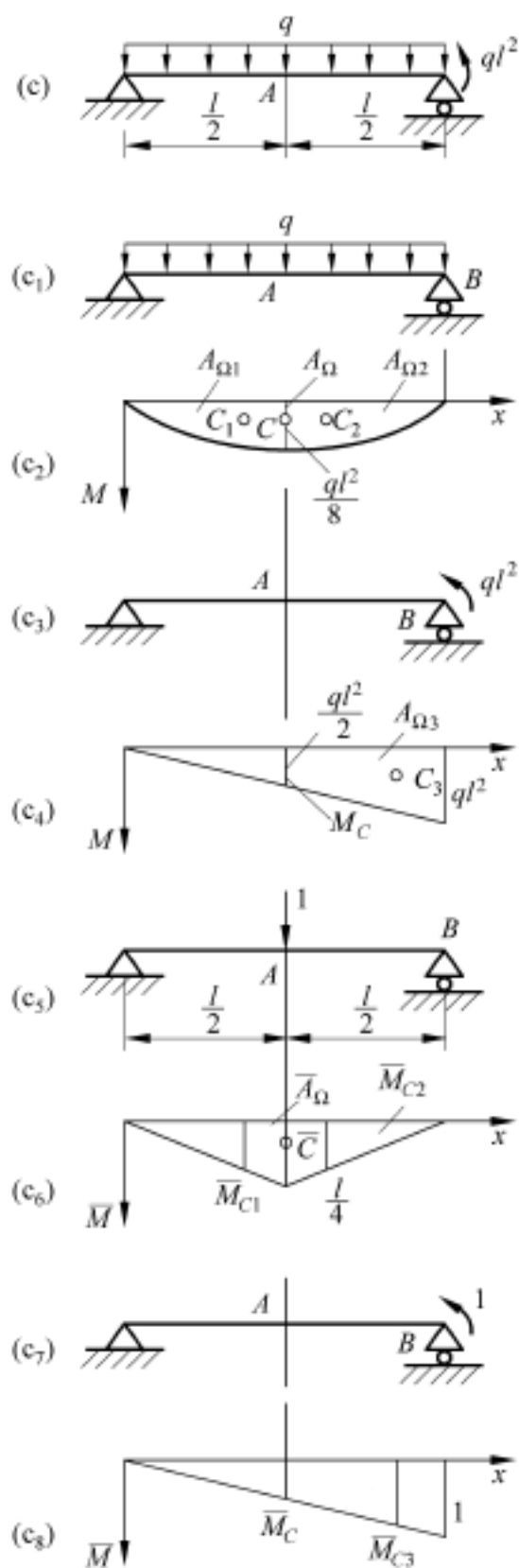
习题 9-6(a)解图



习题 9-6(b)解图

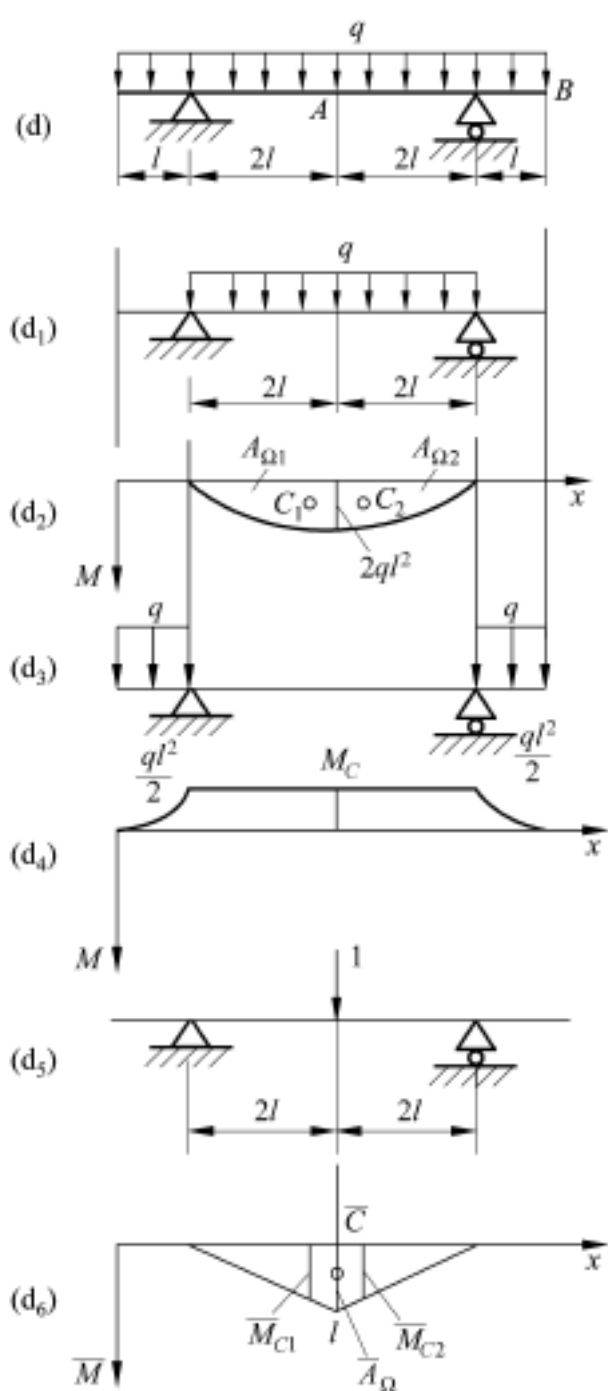
$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad w_A &= \frac{1}{EI}(2 M_{C1} A_1 + M_{C2} A_2) \\ &= \frac{1}{EI} \left[2 \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{l}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot l \right) \left(\frac{1}{2} \cdot ql^2 \right) \right] \\ &= \frac{29ql^4}{384EI} () \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{EI} (M_{cA} + M_{c3} A_3) \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \right) \left(\frac{1}{2} ql^2 \cdot l \right) \right] \\
 &= \frac{5ql^3}{24EI} \text{ (顺时针)}
 \end{aligned}$$

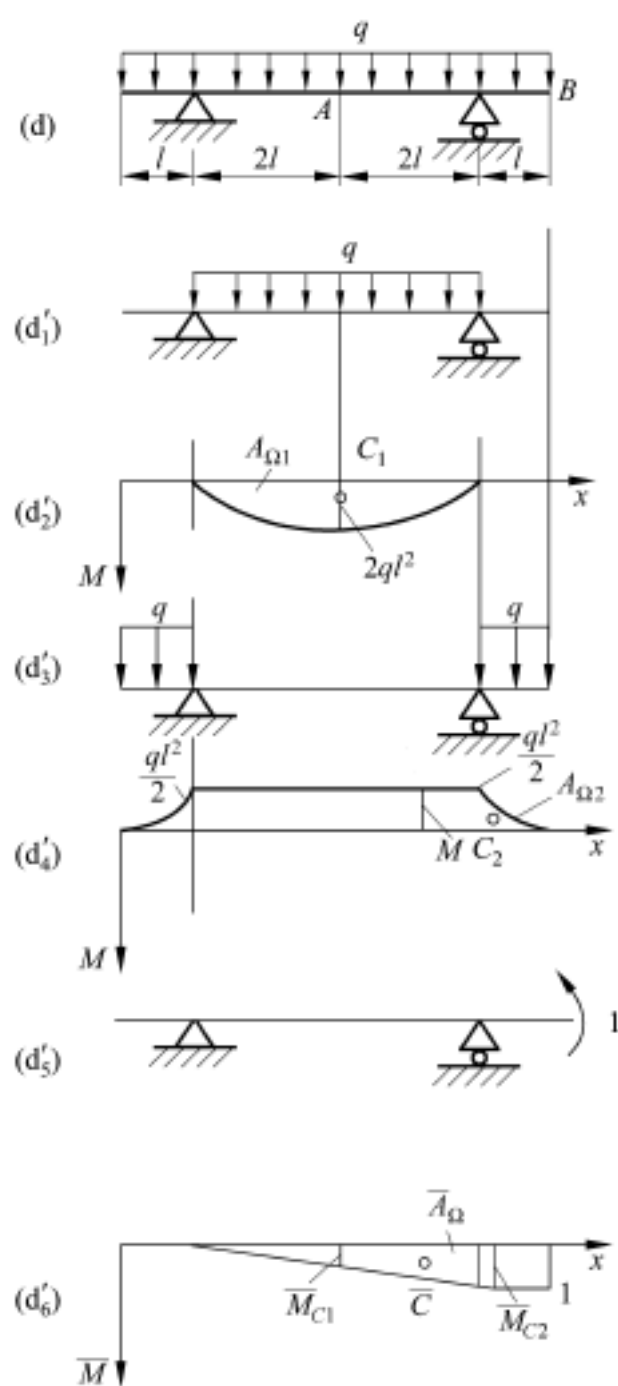


习题 9-6(c) 解图

$$\begin{aligned}
 (d) \quad w_A &= \frac{1}{EI} (M_{C1} A_1 + c_2 A_2 - A M_C) = \frac{1}{EI} (2M_{C1} A_1 - A M_C) \\
 &= \frac{1}{EI} \left[2 \cdot \left[\frac{5}{8} l \right] \left[\frac{2}{3} \cdot 2ql^2 \cdot 2l \right] - \left[\frac{1}{2} \cdot ql^2 \right] \left[\frac{1}{2} l \cdot 4l \right] \right] = \frac{7ql^4}{3EI} \quad () \\
 \theta_B &= \frac{1}{EI} (M_{C1} A_1 + M_{C2} A_2 + M_C A) \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \times \left[\frac{2}{3} \cdot 2ql^2 \cdot 4l \right] - 1 \times \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \right] - \left[\frac{1}{2} ql^2 \right] \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4l \right] \right] \\
 &= \frac{3ql^3}{2EI} \quad (\text{逆时针})
 \end{aligned}$$



习题 9-6(d)解图(1)

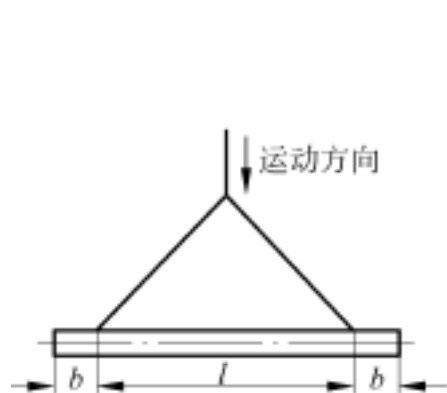


习题 9-6(d)解图(2)

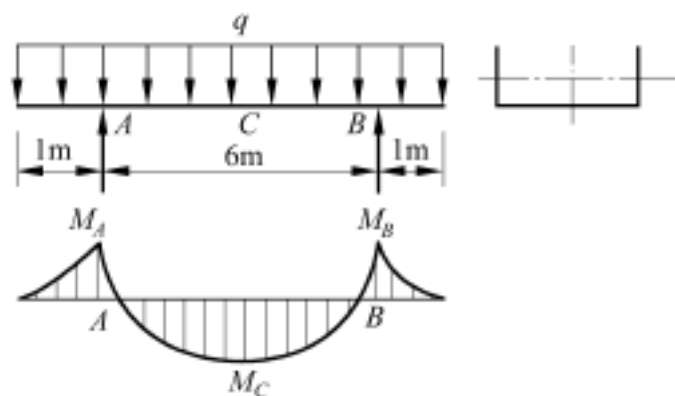
动载荷与疲劳强度概述

习 题 解 答

10-1 图示的 No. 20a 普通热轧槽钢以等减速度下降, 若在 0.2s 时间内速度由 1.8m/s 降至 0.6m/s, 已知 $l=6\text{m}$, $b=1\text{m}$ 。试求槽钢中最大的弯曲正应力。



习题 10-1 图



习题 10-1 解图

解: No. 20a 槽钢的线密度 $= 22.63\text{kg/m}$
 加速度

$$a = \frac{0.6 - 1.8}{0.2} = -6\text{m/s}^2$$

由自重引起的均布载荷集度:

$$q = g(\quad)$$

由惯性力引起的均布载荷集度:

$$q = a(\quad)(\text{加速度} \quad)$$

总的均布载荷集度:

$$q = q + q = (g + a)$$

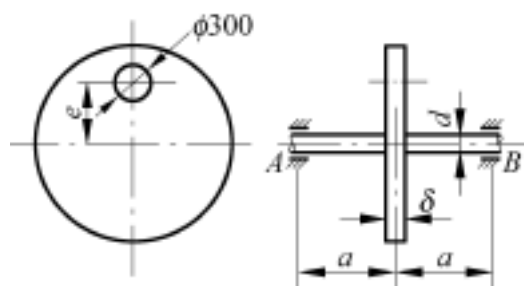
弯矩:

$$\begin{aligned}
 M_C = M_{\max} &= -q \times 4 \times 2 + q \times \frac{8}{2} \times 3 = q \times 4 = 4(g + a) \\
 &= 4 \times 22.63(9.8 + 6) = 1430 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

槽钢横截面上的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_C}{W_{\min}} = \frac{1430}{24.2 \times 10^{-6}} = 59.1 \text{ MPa}$$

10-2 钢制圆轴 AB 上装有一开孔的匀质圆盘如图所示。圆盘厚度为 δ , 孔直径为 300mm 。圆盘和轴一起以匀角速度 ω 转动。若已知: $\delta = 30\text{mm}$, $a = 1000\text{mm}$, $e = 300\text{mm}$; 轴直径 $d = 120\text{mm}$, $\omega = 40\text{rad/s}$; 圆盘材料密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。试求由于开孔引起的轴内最大弯曲正应力(提示: 可以将圆盘上的孔作为一负质量($-m$), 计算由这一负质量引起的惯性力)。



习题 10-2 图

解: 因开孔引起的惯性力:

$$F_1 = m e^2 \omega^2 = \frac{\rho \pi \delta}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot e^2 \omega^2$$

由此引起的附加动反力:

$$F_A = F_B = \frac{F_1}{2}$$

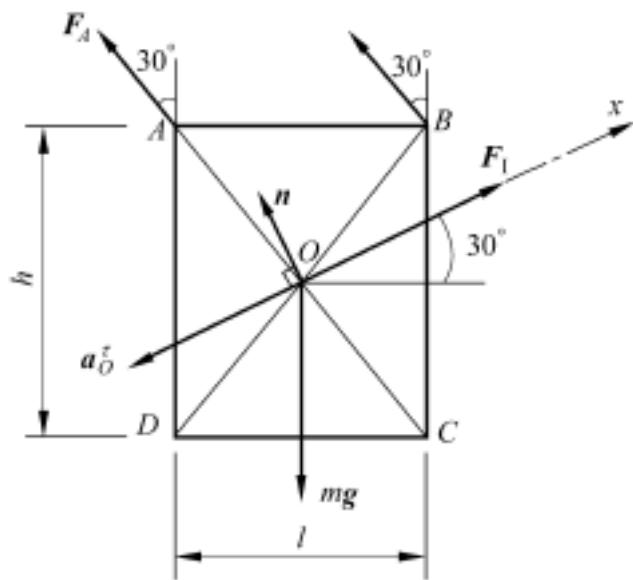
动载荷引起的附加最大动弯矩发生在 C 截面, 其值为:

$$M_{\max} = F_A a = \frac{1}{2} F_1 a$$

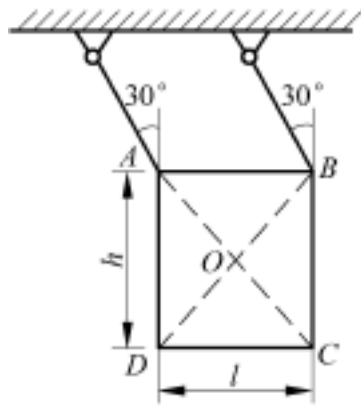
于是最大附加弯曲动应力:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{\rho \pi \delta}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot e^2 \omega^2}{\frac{\pi d^3}{32}} = 67.2 \text{ MPa}$$

10-3 质量为 m 的匀质矩形平板用两根平行且等长的轻杆悬挂着, 如图所示。已知平板的尺寸为 h, l 。若将平板在图示位置无初速度释放, 试求此瞬时两杆所受的轴向力。



习题 10-3 图



习题 10-3 解图

解：平板作曲线平移，初瞬时 $\dot{\theta} = 0$ ，只有加速度 a_o 。
惯性力

$$F_I = ma_o$$

由 $F_x = 0$

$$mg \sin 30^\circ - ma_o = 0, \quad a_o = \frac{g}{2} \quad (1)$$

由 $M_A(F) = 0$

$$- mg \cdot \frac{l}{2} + F_I \cos 30^\circ \cdot \frac{h}{2} + F_I \sin 30^\circ \cdot \frac{l}{2} + F_B \cos 30^\circ \cdot l = 0$$

将 $F_I = \frac{1}{2} mg$ 代入上式，得

$$F_B = \frac{mg}{4l} (\sqrt{3}l - h) \quad (2)$$

由 $F_n = 0$

$$F_A + F_B - mg \cos 30^\circ = 0$$

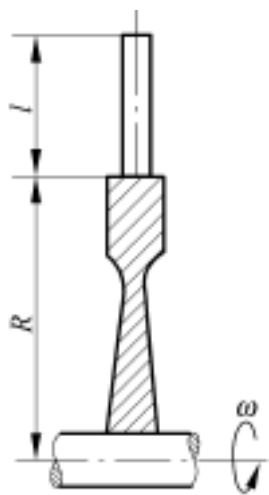
$$F_A = \frac{mg}{4l} (\sqrt{3}l + h) \quad (3)$$

10-4 计算图示汽轮机叶片的受力时，可近似将叶片视为等截面匀质杆。若已知叶轮的转速 $n = 3000 \text{ r/min}$ ，叶片长度 $l = 250 \text{ mm}$ ，叶片根部处叶轮的半径 $R = 600 \text{ mm}$ 。试求叶片根部横截面上的最大拉应力。

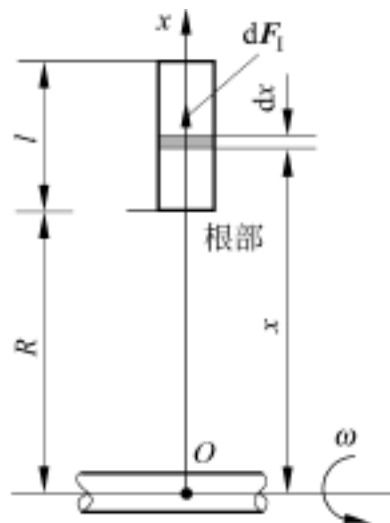
解：设叶片截面积为 A ，密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，则惯性力

$$F_I = \int_R^{R+l} A dx \cdot x^2$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\max} &= \frac{F_l}{A} = \frac{R+l}{R} \int_0^{R+l} x dx \\
 &= \frac{0.85}{0.6} \int_0^{0.85} x dx \\
 &= \frac{1}{2} (0.85^2 - 0.6^2) \\
 &= 7.8 \times 10^3 \times \left[\frac{2-n}{60} \right]^2 \times \frac{1}{2} (0.85^2 - 0.6^2) \\
 &= 7.8 \times 10^3 \times (100)^2 \times 0.18125 \\
 &= 140 \times 10^6 \text{ Pa} \\
 &= 140 \text{ MPa (叶片根部应力最大)}
 \end{aligned}$$



习题 10-4 图



习题 10-4 解图

10-5 图示结构中,重量为 W 的重物 C 可以绕 A 轴(垂直于纸面)转动,重物在铅垂位置时,具有水平速度 v ,然后冲击到 AB 梁的中点。梁的长度为 l ,材料的弹性模量为 E ; 梁横截面的惯性矩为 I , 弯曲截面模量为 W 。如果 l 、 E 、 I 、 W 、 v 等均为已知。求: 梁内的最大弯曲正应力。

解: 应用机械能守恒定律

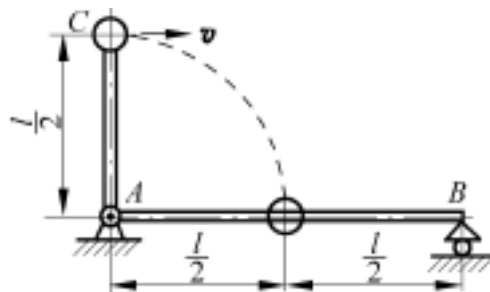
$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\left(\frac{l}{2} + \delta_d\right) = \frac{1}{2}P_d \delta_d$$

即

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\left(\frac{l}{2} + K_d \delta_{st}\right) = \frac{1}{2}mg \delta_{st} K_d^2$$

$$g \delta_{st} K_d^2 - 2 \delta_{st} K_d - (v^2 + gl) = 0$$

由此得到动荷系数



习题 10-5 图

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2 + gl}{g_{st}}}$$

静载最大弯曲正应力

$$\sigma_{st \max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{mgl}{4W}$$

最大动载应力

$$\sigma_{d \max} = K_d \sigma_{st \max} = \frac{mgl}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v^2 + gl}{g_{st}}} \right]$$

$$\sigma_{st} = \frac{mgl^3}{48EI}$$

$$\sigma_{d \max} = \frac{mgl}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{48EI(v^2 + gl)}{mg^2 l^3}} \right]$$

10-6 铰车起吊重量为 $W = 50\text{kN}$ 的重物, 以等速度 $v = 1.6\text{m/s}$ 下降。当重物与铰车之间的钢索长度 $l = 240\text{m}$ 时, 突然刹住铰车。若钢索横截面积 $A = 1000\text{mm}^2$ 。求: 钢索内的最大正应力(不计钢索自重)。

解: 重物等速下降时, 钢索静变形 σ_{st}

静变形能 $\frac{1}{2} k_{st}^2$, 重物动能 $\frac{W}{2g} v^2$

突然刹车, 钢索动变形能 $\frac{1}{2} k_d^2$

钢索变形能增量等于重物动能和位能减少, 即

$$\frac{1}{2} k_d (\sigma_d^2 - \sigma_{st}^2) = \frac{W}{2g} v^2 + W(\sigma_d - \sigma_{st}), \quad k = \frac{W}{\sigma_{st}}$$

$$\sigma_d = \sigma_{st} \left[1 + v \sqrt{\frac{1}{\sigma_{st} g}} \right]$$

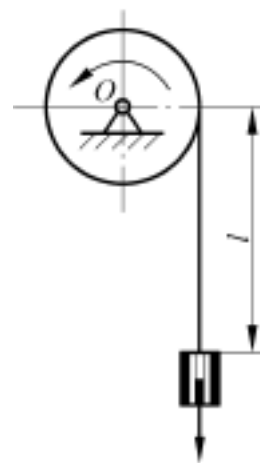
动荷系数:

$$K_d = \frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} = 1 + v \sqrt{\frac{1}{\sigma_{st} g}}$$

$$\sigma_{st} = \frac{Wl}{EA} = \frac{50 \times 10^3 \times 240}{210 \times 10^9 \times 1000 \times 10^{-6}} = 0.0571\text{m}$$

不计自重, 钢索内的最大正应力

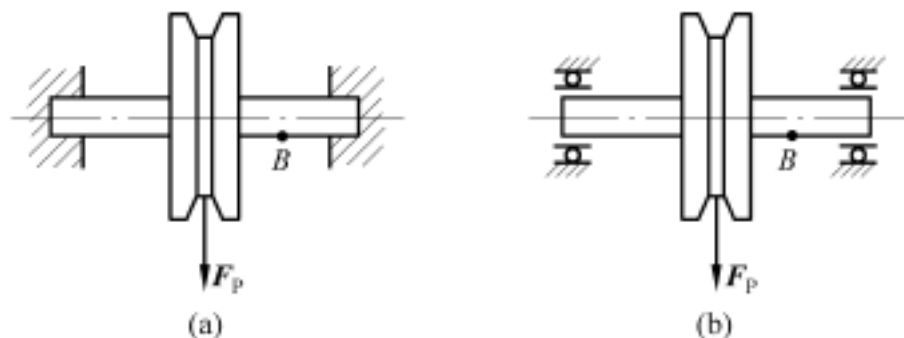
$$\begin{aligned} \sigma_d &= K_d \sigma_{st} = \left[1 + v \sqrt{\frac{1}{\sigma_{st} g}} \right] \frac{W}{A} \\ &= \left[1 + 1.6 \times \sqrt{\frac{1}{0.0571 \times 9.8}} \right] \times \frac{50 \times 10^3}{1000 \times 10^{-6}} = 157\text{MPa} \end{aligned}$$



习题 10-6 图

10-7 试确定下列各题中轴上点 B 的应力比:

1. 图(a)为轴固定不动,滑轮绕轴转动,滑轮上作用着不变载荷 F_P ;
2. 图(b)为轴与滑轮固结成一体而转动,滑轮上作用着不变载荷 F_P 。



习题 10-7 图

解:

1. B 点受到的是静应力,即

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min}, \quad r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 1$$

2. B 点受到的是对称循环交变应力,即

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}, \quad r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$$

10-8 确定下列各题中构件上指定点 B 的应力比:

1. 图(a)为一端固定的圆轴,在自由端处装有一绕轴转动的轮子,轮上有一偏心质量 m 。
2. 图(b)为旋转轴,其上安装有偏心零件 AC 。
3. 图(c)为梁上安装有偏心转子电机,引起振动,梁的静载挠度为 δ ,振幅为 a 。
4. 图(d)为小齿轮(主动轮)驱动大齿轮时,小齿轮上的点 B 。

解:

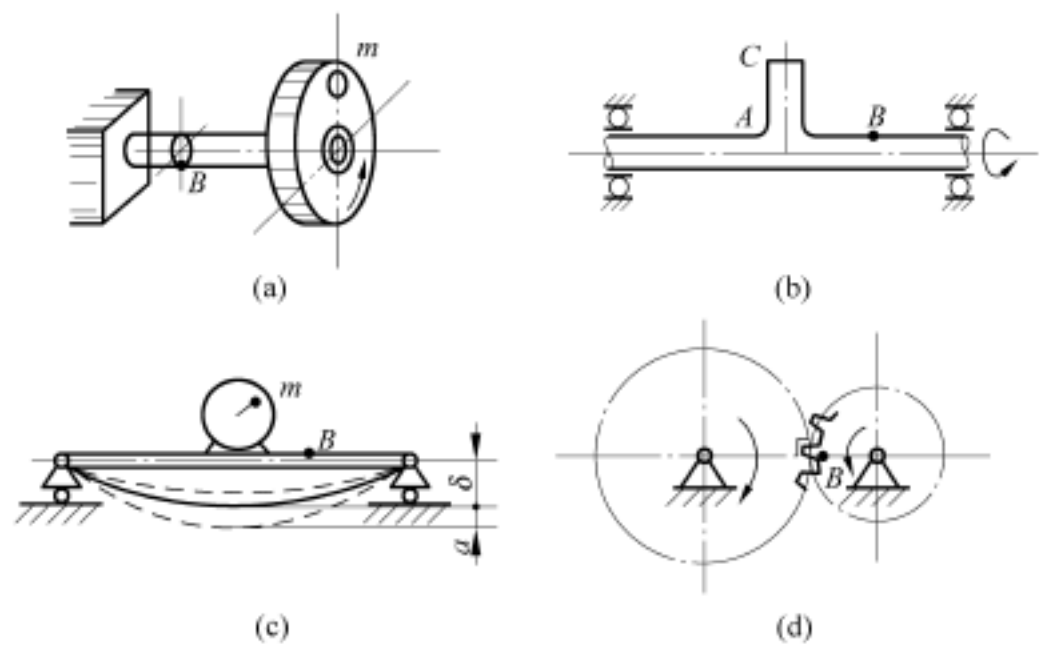
1. 偏心质量产生的惯性力,使圆轴有对称循环的弯矩,所以 B 点受对称循环交变应力

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}, \quad r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$$

2. 旋转轴上 AC 段产生的惯性力,对 B 点始终受不变的拉应力,即

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 1$$



习题 10-8 图

3. 当振形为最低部曲线时，
B 点有 σ_{\max} ,最高部位时有 σ_{\min} ,而

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{+a}{-a}$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{-a}{+a}$$

4. 齿轮上的点受到脉动交变应力,即

$$\sigma_{\max} = 0, \quad \sigma_{\min} = 0$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 0$$

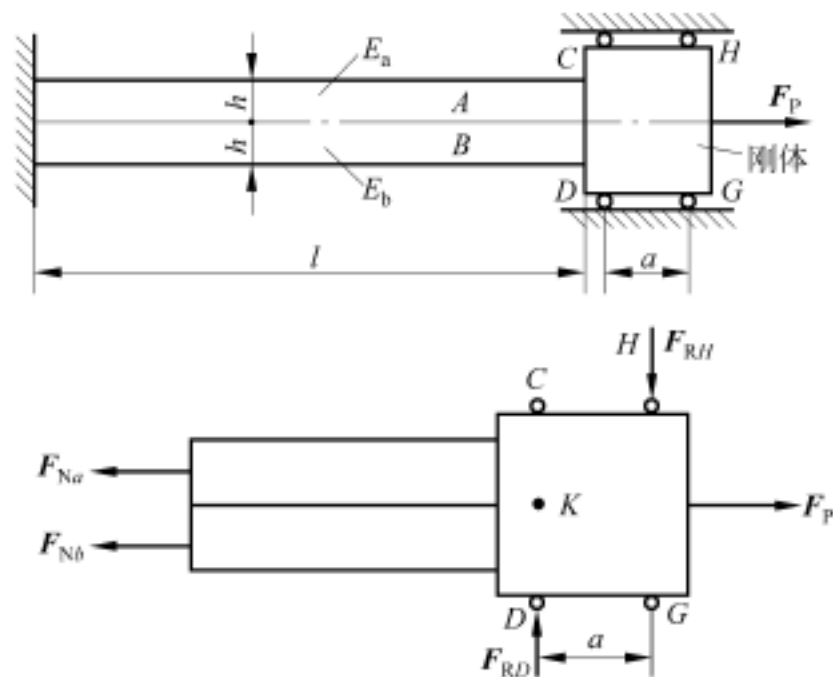
第 11 章

新材料的材料力学概述

习题解答

11-1 图示结构中,两种材料的弹性模量分别为 E_a 和 E_b ,且已知 $E_a > E_b$,二杆的横截面面积均为 bh ,长度为 l ,两轮之间的间距为 a ,试求:

1. 二杆横截面上的正应力;
2. 杆的总伸长量及复合弹性模量;
3. 各轮所受的力。



习题 11-1 图

解: 1. 计算二杆横截面上的正应力

$$F_{Na} + F_{Nb} = F_P \quad (1)$$

$$l_a = l_b \quad (2)$$

$$l_a = \frac{F_{Na} l}{E_a b h} \quad (3)$$

$$l_b = \frac{F_{Nb} l}{E_b b h} \quad (4)$$

将(3)、(4)式代入(2)式,得

$$\frac{F_{Na}}{E_a} = \frac{F_{Nb}}{E_b} \quad (5)$$

将式(1)、(5)联立,解得

$$F_{Na} = \frac{E_a}{E_a + E_b} F_P, \quad F_{Nb} = \frac{E_b}{E_a + E_b} F_P$$

$$\sigma_a = \frac{F_{Na}}{b h} = \frac{E_a}{E_a + E_b} \frac{F_P}{b h}, \quad \sigma_b = \frac{F_{Nb}}{b h} = \frac{E_b}{E_a + E_b} \frac{F_P}{b h}$$

2. 确定杆的总伸长量及复合弹性模量

由(3)式

$$l_a = \frac{F_{Na} l}{E_a b h} = \frac{F_P l}{(E_a + E_b) b h}$$

设复合弹性模量为 E_c

$$l = \frac{F_P l}{E_c (2 b h)}$$

由于 $l = l_a$, 比较上述二式得

$$E_c = \frac{E_a + E_b}{2}$$

3. 计算各轮所受的力

由于 $F_{Na} > F_{Nb}$, 所以, 轮 C 轮 G 脱离接触面, 受力为零。

$$M_K(F) = 0, \quad F_{Na} \frac{h}{2} - F_{Nb} \frac{h}{2} - F_{RH} a = 0$$

$$F_{RH} = \frac{F_P h}{2 a} \frac{E_a - E_b}{E_a + E_b}, \quad F_{RD} = F_{RH} = \frac{F_P h}{2 a} \frac{E_a - E_b}{E_a + E_b}$$

11-2 玻璃纤维/环氧树脂单层复合材料由 2.5kg 纤维与 5kg 树脂组成。已知玻璃纤维的弹性模量 $E_f = 85\text{GPa}$, 密度 $\rho_f = 2500\text{kg/m}^3$, 环氧树脂的弹性模量 $E_m = 5\text{GPa}$, 密度 $\rho_m = 1200\text{kg/m}^3$ 。试求垂直于纤维方向和平行于纤维方向的弹性模量 E_y 和 E_x 。

解: 纤维和基体的总体积:

$$V = \frac{2.5}{2500} + \frac{5}{1200} = 0.00517\text{m}^3$$

纤维体积与复合材料总体积之比:

$$V_f = \frac{\frac{2.5}{2500}}{0.00517} = 0.1934$$

代入弹性模量公式,得到

$$E_y = \frac{E_m E_f}{V_f E_m + (1 - V_f) E_f} = \frac{5 \times 85}{0.1934 \times 5 + (1 - 0.1934) \times 85} = 6.11 \text{ GPa}$$

$$E_x = E_f V_f + E_m (1 - V_f) = 85 \times 0.1934 + 5 \times (1 - 0.1934) = 20.47 \text{ GPa}$$

11-3 已知组成单层复合材料的基体材料具有明显的屈服平台,屈服强度 $\sigma_{ms} = 20 \text{ MPa}$,强度极限 $\sigma_{mb} = 50 \text{ MPa}$,相应的极限应变为 $\epsilon_{ms} = 0.145$, $\epsilon_{mb} = 0.30$;纤维的强度极限 $\sigma_{fb} = 2000 \text{ MPa}$,极限应变 $\epsilon_{fb} = 0.15$ 。现要求这种复合材料在平行于纤维方向加载时能承受 1300 MPa 的应力,试确定所需纤维的体积比。

解:根据增强纤维增强体积比公式,有

$$V_f = \frac{\sigma_{cb} - \sigma_{ms}}{\sigma_{fb} - \sigma_{ms}} = \frac{1300 - 20}{2000 - 20} = 64.65\%$$

11-4 具有明显屈服平台的树脂,其屈服强度 $\sigma_{ms} = 35 \text{ MPa}$,强度极限 $\sigma_{mb} = 65 \text{ MPa}$,相应的极限应变为 $\epsilon_{ms} = 0.15$, $\epsilon_{mb} = 0.40$;玻璃纤维的强度极限 $\sigma_{fb} = 1860 \text{ MPa}$,极限应变 $\epsilon_{fb} = 0.155$ 。若以树脂为基体,以纤维作为增强材料组成单层复合材料,试求产生增强效果所需的最小纤维体积比,并确定沿纤维方向加载时复合材料横截面上所能承受的最大的名义应力。

解:最小纤维体积比:

$$V_{fcr} = \frac{\sigma_{mb} - \sigma_{ms}}{\sigma_{fb} - \sigma_{ms}} = \frac{65 - 35}{1860 - 35} = 1.64\%$$

沿纤维方向加载时复合材料横截面上所能承受的最大的名义应力:

$$\begin{aligned} \sigma_{cb} &= \sigma_{fb} V_{fcr} + \sigma_{ms} (1 - V_{fcr}) \\ &= 1860 \times 1.64\% + 35 \times (1 - 0.0164) = 64.93 \text{ MPa} \end{aligned}$$

11-5 对于麦克斯韦模型,保持初始应力为 σ_0 时的应变不变,试证明经过时间 t 后其应力由下式给出:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$$

并说明其中 τ 的含义。

解:麦克斯韦模型的本构方程:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{k} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

式中 k 为弹簧刚度, η 为粘度,令 $\frac{d\epsilon}{dt} = 0$,得到

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{k}{\eta} \sigma$$

分离变量后

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{k}{\eta} \sigma$$

积分后得

$$\sigma = C \cdot e^{-\frac{k}{\eta} t}$$

根据初始条件: $t=0$ 时 $\sigma = \sigma_0$, 求得

$$C = \sigma_0$$

于是,

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{k}{\eta} t}$$

或

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中 $\tau = \frac{\eta}{k}$ 为粘度与刚度之比。

11-6 承受轴向拉伸的橡皮带, 当横截面上应力 $\sigma_0 = 10\text{MPa}$ 时, 其纵向正应变为 0.5, 然后保持应变不变, 50 天后应力减小为 5MPa。试计算若保持同样应变, 再经过 50 天后应力减少到什么数值。

解: 对于这一问题, 采用串联模型, 适用麦克斯韦模型方程

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau} = 0$$

利用习题 11-5 的结果, 求得

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-\frac{t}{\tau}}$$

根据已知条件, 当 $t=50$ (天) 时, 应力由 10MPa 下降至 5MPa。于是有

$$5 = 10 \cdot e^{-\frac{50}{\tau}} = 10e^{-\frac{50}{\tau}}$$

由此求得

$$\tau = \frac{50}{\ln 2}$$

因而有

$$\sigma(t) = 10 \cdot e^{-\frac{t}{50 \ln 2}} = 10 \times 2^{-\frac{t}{50}} \text{MPa}$$

其中时间 t 以天为单位。

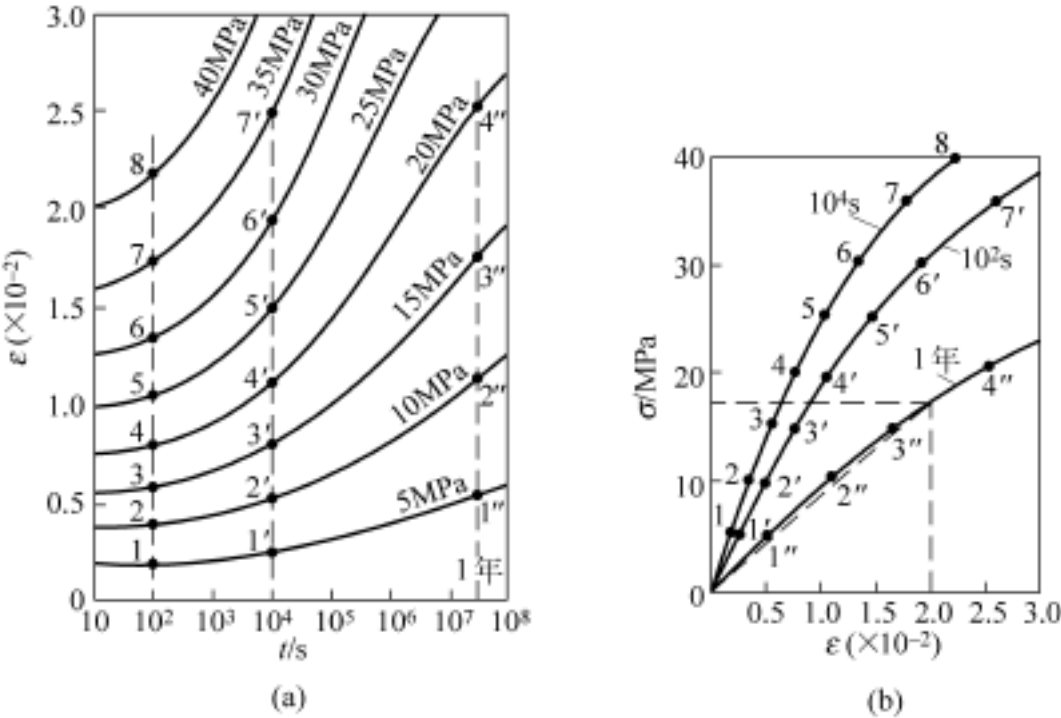
再令 $t=100$ (天), 可求得

$$\sigma(100) = 10 \times 2^{-2} = 2.5 \text{MPa}$$

因此, 再经过 50 天(一共经过 100 天), 应力减小到 2.5MPa。

11-7 两端封闭的圆柱薄壁容器由乙二醇塑料制成。已知容器平均直径 $D=300\text{mm}$, 壁厚 $\delta=10\text{mm}$, 容器承受内压作用。乙二醇塑料的蠕变曲线

族如图(a)所示,相当泊松比 $\nu(t)$ 可取为常量,即 $\nu(t) = 0.4$ 。若规定容器的环向应变 ϵ_t 在 1 年内不得超过 1%。试求容器所能承受的最大内压 p 。



习题 11-7 图

解：由 $t = 365 \times 3600 \times 24 = 3.15 \times 10^7$ (s), 允许环向应变 $\epsilon_t = 1\%$
由轴向应力和环向应力分别为：

$$\sigma_m = \frac{pD}{4}, \quad \sigma_t = \frac{pD}{2}, \quad \sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_t$$

设 $\epsilon_r = 0$, 根据广义胡克定律有

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu \sigma_m] = \frac{1 - 0.5\nu}{E} \sigma_t$$

据此解出

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - 0.5\nu} \epsilon_t = \frac{E}{1 - 0.5 \times 0.4} \epsilon_t = \frac{E}{0.8} \epsilon_t$$

利用图(a)可求得过一年期的割线弹性模量

$$E = \frac{17.1 \text{MPa}}{0.02} = 855 \text{MPa}$$

将其代入应力表达式, 得

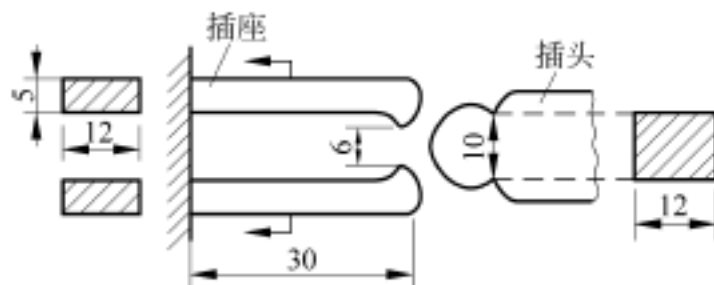
$$\sigma_t = \frac{855}{0.8} \times 1\% = 10.7 \text{MPa}$$

代入应变表达式, 从而求出容器的最大内压

$$p = \frac{2}{D} \cdot \sigma_t = 0.71 \text{MPa}$$

* 11-8 塑料制成的插座与插头结构如图所示。当施加在插座一侧臂上的横向力降低到 33N 时, 插头将从插座中滑出。若材料的弹性模量 $E = 3.35\text{GPa}$, 材料在 20 时的蠕变曲线族如习题 11-7 图(a)所示。试求:

1. 插头第一次插入插座后, 插座一侧臂上所受的横向力;
2. 插入后需经历多长时间插头将从插座中滑出。



习题 11-8 图

解: 1. 插头第一次插入插座后, 插座一侧臂上所受的横向力
根据挠度表中公式, 可以查到

$$w = \frac{F_P l^3}{3EI}, \quad F_P = \frac{3EI}{l^3} w$$

取 $w = 2\text{mm}$, $E = 3.35\text{GPa}$, $l = 30\text{mm}$, $I = \frac{1}{12}bh^3 = 125\text{mm}^4$, 代入后, 得到:

$$F_P = 93\text{N}$$

2. 插入后需经历多长时间插头将从插座中滑出

首先计算应变最大值, 利用公式 $\epsilon = \frac{F_P l}{E}$, 其中 ϵ 、 E 均取最初时刻的值:

$$\epsilon = \frac{F_P l}{E} = \frac{F_P l}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{93 \times 30}{\frac{1}{6} \times 12 \times 5^2} = 55.8\text{MPa}$$

于是

$$\epsilon = \frac{55.8}{3.35 \times 10^3} = 1.67 \times 10^{-2}$$

当横向力下降到 $F_{P1} = 33\text{N}$ 时, 应力将下降到

$$\sigma_1 = \frac{F_{P1}}{F_P} \cdot \sigma = \frac{33}{93} \times 55.8 = 19.8\text{MPa} < 20\text{MPa}$$

此时插头将滑出。通过习题 11-7 图(a)中 $\epsilon = 1.67 \times 10^{-2}$ 作一水平线与应力为 20MPa 的那一根蠕变曲线相交, 再量出其横坐标值, 可得出松脱的时间为:

$$t = 5.01 \times 10^5 \text{ s}$$