

普通高等教育测绘类规划教材

# 测量平差基础

(第三版)

武汉测绘科技大学测量平差教研室 编著

测绘出版社

· 北 京 ·

## 第三版前言

《测量平差基础》教材的第一版于1978年6月出版,1981年第二次印刷,共发行6万余册。1982年由我室宗俦教授和鲁林成教授主编,组织教师对该书作了较大的修改和补充,于1983年6月出版了该书的增订本,前后共5次印刷,发行10万余册。虽然作为一本测绘本科的专业基础课教材,教学大纲并没有大的更动,而且该书的质量已经得到社会上的承认,但是考虑到增订本使用时间已超过10年,有必要对该书再作一次修订和更新,使其教学内容更符合当前和未来发展的需要。

这次修订的基本思想是,根据教学大纲要求,教学内容仍以基本的误差理论和测量平差的基础方法为主,属于这部分的内容则修订不大;删去了不属于本课程教学内容的数学基础以及陈旧的与当前科学技术发展不相称的内容;加强测量平差基础的系统概念,适当补充近代误差理论和测量平差方法的基础知识,为学习后续有关课程打好基础。

本书与第二版(增订本)相比,已从10章加5个附录80多万字修订成11章不加附录约40万字。对第二版本的具体修订情况是:删去第二版本的第一章“概率基本知识”,第五章“条件分组平差”,第九章“线性方程组的迭代解法”和全部附录;增加绪论为第一章;第二章“精度指标与误差传播”不变,只作文字增订;原第三章“参数点估计和平差原则”改为“平差数学模型与最小二乘原理”,删去了属于数理统计的内容,加强了平差中的函数模型和随机模型的概念;原第四章“条件平差”和第六章“间接平差”中有关解算法方程的高斯约化法和顾及起始数据误差的内容全部删除,改为第四章和第五章。将原属第六章的附有未知数的条件平差法和附有条件的间接平差法改写成第六、第七两章;增加第八章“概括平差函数模型”,对经典测量平差方法作了系统概括,加深了概念。原第七章“广义测量平差法”改为第十一章“近代平差概论”,原第八章“参数区间估计与误差检验”改为第十章“误差分布与平差参数的统计假设检验”,这两章内容作了更新和全面修改。原第十章“误差椭圆”基本不动,仅更新了公式推证方法,列为第九章。

本书由宗俦教授、陶本藻教授统一定稿。其中第一章由陶本藻编写,第二章由周勇前编写,第三、第五、第七章由高士纯编写,第四、第六章由鲁林成编写,第八章由宗俦编写,第九章由任慧龄编写,第十章由邱卫宁编写,第十一章由王新洲编写。于正林教授为本书修订做了大量组织和准备工作。本书的修订得到了崔希璋教授的支持和指导。

本书插图由冯秦珍同志完成,刘彤鹭、秦咏梅、邱华为书稿打字复印做了不少工作。测绘教材委员会大地测量专业组为本书组织了审查,测绘出版社为本书的出版作了大量工作,在此表示深切感谢。

我们恳切希望使用本教材的教师和广大读者对本书提出宝贵意见,以便再版时修正。

武汉测绘科技大学地球科学与测量工程学院

测量平差教研室

1994年12月

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	( 1 )
§ 1-1 观测误差 .....	( 1 )
§ 1-2 测量平差的简史和发展 .....	( 3 )
§ 1-3 本课程的任务和内容 .....	( 5 )
<b>第二章 精度指标与误差传播</b> .....	( 6 )
§ 2-1 概述 .....	( 6 )
§ 2-2 偶然误差的规律性 .....	( 6 )
§ 2-3 衡量精度的指标 .....	( 10 )
§ 2-4 协方差传播律 .....	( 16 )
§ 2-5 协方差传播律在测量上的应用 .....	( 29 )
§ 2-6 权与定权的常用方法 .....	( 32 )
§ 2-7 协因数和协因数传播律 .....	( 37 )
§ 2-8 由真误差计算中误差及其实际应用 .....	( 44 )
§ 2-9 系统误差的传播 .....	( 48 )
<b>第三章 平差数学模型与最小二乘原理</b> .....	( 52 )
§ 3-1 测量平差概述 .....	( 52 )
§ 3-2 测量平差的数学模型 .....	( 54 )
§ 3-3 函数模型的线性化 .....	( 58 )
§ 3-4 参数估计与最小二乘原理 .....	( 60 )
<b>第四章 条件平差</b> .....	( 65 )
§ 4-1 条件平差原理 .....	( 65 )
§ 4-2 条件方程 .....	( 69 )
§ 4-3 精度评定 .....	( 76 )
§ 4-4 条件平差公式汇编和水准网平差示例 .....	( 80 )
<b>第五章 间接平差</b> .....	( 83 )
§ 5-1 间接平差原理 .....	( 83 )
§ 5-2 误差方程 .....	( 86 )
§ 5-3 精度评定 .....	( 96 )
§ 5-4 间接平差公式汇编和示例 .....	( 101 )
§ 5-5 间接平差特例——直接平差 .....	( 112 )
<b>第六章 附有参数的条件平差</b> .....	( 114 )
§ 6-1 基础方程和它的解 .....	( 114 )

§ 6-2	精度评定 .....	(116)
§ 6-3	公式汇编和示例 .....	(119)
<b>第七章</b>	<b>附有限制条件的间接平差</b> .....	(123)
§ 7-1	基础方程和它的解 .....	(123)
§ 7-2	精度评定 .....	(124)
§ 7-3	公式汇编与示例 .....	(127)
<b>第八章</b>	<b>概括平差函数模型</b> .....	(133)
§ 8-1	概述 .....	(133)
§ 8-2	基础方程和它的解 .....	(135)
§ 8-3	精度评定 .....	(137)
§ 8-4	各种平差方法的共性和特性 .....	(140)
§ 8-5	平差结果的统计性质 .....	(141)
<b>第九章</b>	<b>误差椭圆</b> .....	(146)
§ 9-1	概述 .....	(146)
§ 9-2	点位误差 .....	(147)
§ 9-3	误差曲线 .....	(152)
§ 9-4	误差椭圆 .....	(153)
§ 9-5	相对误差椭圆 .....	(156)
§ 9-6	点位落入误差椭圆内的概率 .....	(158)
<b>第十章</b>	<b>误差分布与平差参数的统计假设检验</b> .....	(162)
§ 10-1	统计假设检验概述 .....	(162)
§ 10-2	误差分布的假设检验 .....	(169)
§ 10-3	平差参数的显著性检验 .....	(177)
§ 10-4	后验方差的检验 .....	(180)
<b>第十一章</b>	<b>近代平差概论</b> .....	(183)
§ 11-1	序贯平差 .....	(183)
§ 11-2	秩亏自由网平差 .....	(186)
§ 11-3	附加系统参数的平差 .....	(189)
§ 11-4	最小二乘配置 .....	(192)
§ 11-5	赫尔默特方差分量估计 .....	(195)
§ 11-6	粗差检验的数据探测法 .....	(199)
§ 11-7	稳健估计概论 .....	(200)
<b>参考文献</b>	.....	(203)

# 第一章 绪 论

## § 1-1 观测误差

当对某量进行重复观测时,就会发现,这些观测值之间往往存在一些差异。例如,对同一段距离重复丈量若干次,量得的长度通常是互有差异。另一种情况是,如果已经知道某几个量之间应该满足某一理论关系,但当对这几个量进行观测后,也会发现实际观测结果往往不能满足应有的理论关系。例如,从几何上知道一平面三角形三内角之和应等于 $180^\circ$ ,但如果对这三个内角进行观测,则三内角观测值之和常常不等于 $180^\circ$ ,而有差异。

在同一量的各观测值之间,或在各观测值与其理论上的应有值之间存在差异的现象,在测量工作中是普遍存在的。为什么会产生这种差异呢?不难理解,这是由于观测值中包含有观测误差的缘故。

观测误差的产生,原因很多,概括起来有以下三方面:

### 1. 测量仪器

测量工作通常是利用测量仪器进行的。由于每一种仪器只具有一定限度的精密度,因而使观测值的精密度受到了一定的限制,例如,在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时,就难以保证在估读厘米以下的尾数时完全正确无误;同时,仪器本身也有一定的误差,例如,水准仪的视准轴不平行于水准轴,水准尺的分划误差等等。因此,使用这样的水准仪和水准尺进行观测,就会使水准测量的结果产生误差。同样,经纬仪、测距仪等的仪器误差也使三角测量、导线测量的结果产生误差。

### 2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性,所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时,观测者的工作态度和技术水平,也是对观测成果质量有直接影响的重要因素。

### 3. 外界条件

观测时所处的外界条件,如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果直接影响;同时,随着温度的高低,湿度的大小,风力的强弱以及大气折光的不同,它们对观测结果的影响也随之不同,因而在这样的客观环境下进行观测,就必然使观测的结果产生误差。

上述测量仪器、观测者、外界条件三方面的因素是引起误差的主要来源。因此,我们把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想象,观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好一些,观测中所产生的误差平均说来就可能相应地小一些,因而观测成果的质量就会高一些。反之,观测条件差一些,观测成果的质量就会低一些。如果观测条件相同,观测成果的质量也就可以说是相同的。所以说,观测成果的质量高低也

就客观地反映了观测条件的优劣。

但是，不管观测条件如何，在整个观测过程中，由于受到上述种种因素的影响，观测的结果就会产生这样或那样的误差。从这一意义上来说，在测量中产生误差是不可避免的。当然，在客观条件允许的限度内，测量工作者可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

根据观测误差对观测结果的影响性质，可将观测误差分为系统误差和偶然误差两种：

### 1. 系统误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为某一常数，那么，这种误差就称为系统误差。

例如，用具有某一尺长误差的钢尺量距时，由尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加，距离愈长，所积累的误差也愈大；经纬仪因校正或整置的不完善而使所测角度产生误差；等等。这些都是由于仪器不完善或工作前未经检验校正而产生的系统误差。又如，用钢尺量距时的温度与检定尺长时的温度不一致，而使所测的距离产生误差；测角时因大气折光的影响而产生的角度误差等等，这些都是由于外界条件所引起的系统误差。此外，如某些观测者在照准目标时，总是习惯于把望远镜十字丝对准目标中央的某一侧，也会使观测结果带有系统误差。

### 2. 偶然误差

在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。

例如，在用经纬仪测角时，测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差、仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然（随机）因素所引起的小误差的代数和。例如照准误差可能是由于脚架或觇标的晃动或扭转、风力风向的变化、目标的背影、大气折光和大气透明度等等偶然因素影响而产生的小误差的代数和。因此，测角误差实际上是许许多多微小误差项的总和，而每项微小误差又随着偶然因素影响的不断变化，其数值忽大忽小，其符号或正或负，这样，由它们所构成的总和，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的，因此，把这种性质的误差称为偶然误差。

根据概率统计理论知，如果各个误差项对其总和的影响都是均匀地小，即其中没有一项比其它项的影响占绝对优势时，那么它们的总和将是服从或近似地服从正态分布的随机变量。因此，偶然误差就其总体而言，都具有一定的统计规律，故有时又把偶然误差称为随机误差。

在测量工作的整个过程中，除了上述两种性质的误差以外，还可能发生错误。错误的发生，大多是由于工作中的粗心大意造成的。错误的存在不仅大大影响测量成果的可靠性，而且往往造成返工浪费，给工作带来难以估量的损失。因此，必须采取适当的方法和措施，保证观测结果中不存在错误。所以一般来说，错误不算作观测误差。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质。反之，则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般具有累积的作用,它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中,应该采用各种方法来消除系统误差,或者减小其对观测成果的影响,达到实际上可以忽略不计的程度。例如,在进行水准测量时,使前后视距相等,以消除由于视准轴不平行于水准轴对观测高差所引起的系统误差;对量距用的钢尺预先进行检定,求出尺长误差的大小,对所量的距离进行尺长改正,以消除由于尺长误差对量距所引起的系统误差等等,都是消除系统误差的方法。

当观测列中已经排除了系统误差的影响,或者与偶然误差相比已处于次要地位,则该观测列中主要是存在着偶然误差。这样的观测列,就称为带有偶然误差的观测列。这样的观测结果和偶然误差便都是一些随机变量,如何处理这些随机变量,是测量平差这一学科所要研究的内容。

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响,因此,在实际工作中,为了提高成果的质量,同时也为了检查和及时发现观测值中有无错误存在,通常要使观测值的个数多于未知量的个数,也就是要进行多余观测。例如,对一条导线边,丈量一次就可得出其长度,但实际上总要丈量两次或两次以上;一个平面三角形,只需要观测其中的两个内角,即可决定它的形状,但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在,通过多余观测必然会发现观测结果之间不相一致,或不符合应有关系而产生的不符值。因此,必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理,使得消除不符值后的结果,可以认为是观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量,因此,可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果,这就是测量平差的一个主要任务。

测量平差的另一个任务,就是评定观测值以及最可靠结果的精度,也就是考核测量成果的质量。

概括说来,测量平差的任务就是:

1. 对一系列带有观测误差的观测值,运用概率统计的方法来消除它们之间的不符值,求出未知量的最可靠值。
2. 评定测量成果的精度。

## § 1-2 测量平差的简史和发展

测量平差与其它学科一样,是由于生产的需要而产生的,并在生产实践的过程中,随着科学技术的进步而发展。18世纪末,在测量学、天文测量学等实践中提出了如何消除由于观测误差引起的观测量之间矛盾的问题,即如何从带有误差的观测值中找出待定量的最优值。1794年,年仅17岁的高斯(C. F. Gauss)首先提出了解决这个问题的方法——最小二乘法。他是根据偶然误差的四个特性,并以算术平均值为待求量的最或然值出发,导出了偶然误差的概率分布,给出了在最小二乘原理下求待定量最或然值的计算方法。当时高斯并没有正式发表。19世纪初(1801年),天文学家对刚发现的谷神星运行轨道的一段弧长作了一系列的观测,后来因故中止了。这就需要根据这些带有误差的观测结果求出该星运行的实际轨道。高斯用自己提出的最小二乘法解决了这个当时很大的难题,对谷神星运行轨

道进行了预报,使天文学家及时又找到了这颗彗星。1809年高斯才在《天体运动的理论》一文中正式发表了他的方法。在此之前,1806年,勒戎德尔(A. M. Legendre)发表了《决定彗星轨道新方法》一文,从代数观点也独立地提出了最小二乘法,并定名为最小二乘法。所以,后人称它为高斯-勒戎德尔方法。

自19世纪初到20世纪五六十年代的一百多年来,测量平差学者在基于最小二乘原理的平差方法上作了许多研究,提出了一系列解决各类测量问题的平差方法,针对这一时期的计算工具的情况,提出了许多分组解算线性方程组的方法,达到简化计算的目的。

自20世纪70年代开始,随着计算技术的进步和生产实践中高精度的需要,测量平差得到了很大发展,主要表现在以下几个方面:

1. 从单纯研究观测的偶然误差扩展到包含系统误差和粗差,在偶然误差理论的基础上,对误差理论及其相应测量平差理论和方法进行全方位研究,大大地扩充了测量平差学科的研究领域和范围。

2. 1947年,铁斯特拉(T. M. Tienstra)提出了相关观测值的平差理论,限于当时计算条件,直到70年代以后才被广泛应用。相关平差的出现,使观测值的概念广义化了,将经典的最小二乘平差法推向更广泛的应用领域。

3. 高斯的最小二乘法,所选平差参数假设是非随机变量。随着测量技术的进步,需要解决观测量和平差参数均为随机变量的平差问题,60年代末提出并经70年代发展,产生了顾及随机参数的最小二乘平差方法。它起源于最小二乘内插和外推重力异常的平差问题,由克拉鲁普(T. Krarup)1969年提出,取名为最小二乘滤波,推估和配置,也称为拟合推估法。

4. 高斯的最小二乘法是一种满秩平差问题,即平差时的法方程组是满秩的,方程组有唯一解。1962年,迈塞尔(P. Meissl)提出了针对非满秩平差问题的内制约平差原理,后经七八十年代多位国内外学者的深入研究,现已形成了一整套秩亏自由网平差的理论体系和多种解法,并广泛应用于测量实践。

5. 随着微波测距技术在测量中的应用,经典平差中的定权理论和方法也有所革新。许多学者致力于将经典的先验定权方法改进为后验定权方法的研究。在80年代,方差-协方差估计理论已经形成,所提解法之多,发表论文之多是其课题所不及的。

6. 观测中既然包含系统误差,系统误差特性、传播、检验、分析的理论研究自然展开,相应的平差方法也就产生,例如附有系统参数的平差法。为了检验系统误差的存在和影响,引进了数理统计学中的假设检验方法,结合平差对象和特点,测量学者发展了统计假设检验理论,提出了与平差同时进行的有效的检验方法。

7. 观测中有可能包含粗差,相应的误差理论也得到发展。其中最著名的是60年代后期荷兰巴尔达(W. Baarda)教授提出的测量系统的数据探测法和可靠性理论,为粗差的理论研究和实用检验方法奠定了基础。到目前为止,已经形成了粗差定位、估计和假设检验等理论体系。处理粗差问题,一种途径是仍基于最小二乘法;另一种途径是放弃最小二乘平差,提出了在数学中称为稳健估计的方法,或称抗差估计。稳健估计理论研究和在测量平差中的应用还在深入中。

总之,自70年代以来,特别是近十多年来,测量平差与误差理论得到了充分发展。这



些研究成果在常规测量技术中的应用已经相当普遍,但是近期发展的全球定位系统(GPS)、地理信息系统(GIS)和遥感(RS)等技术出现的误差理论和测量平差问题都将有新的内容,需要应用已有的理论和方法去解决,同时更需要提出新的理论和方法,以适应当前和未来测量事业的发展。

### § 1-3 本课程的任务和内容

测量平差基础,顾名思义是为测量平差奠定其理论基础。本课程的任务是讲授测量平差的基本理论和基本方法,为进一步学习和研究测量平差打好深入的基础。

本课程的基本内容是讲授基于偶然误差的最小二乘平差理论和方法。具体内容为:

1. 偶然误差理论。包含偶然误差特性和偶然误差的传播定律;权与中误差的定义和定权方法。
2. 测量平差的函数模型和随机模型的概念和建立,最小二乘原理及方法。
3. 测量平差的基础方法。包含条件平差法;间接平差法;附有未知参数的条件平差法和附有限制条件的间接平差法。按最小二乘原理导出平差计算和精度评定的分式,指出其应用。
4. 测量平差中必要的统计假设检验方法。
5. 简要地介绍一些近代测量平差理论和方法,以便与后续有关测量平差课程相连接,为进一步学习和研究这种理论和方法打下基础。

本课程理论和实践并重,所学的基础平差方法均要求不仅弄懂原理而且学会处理测量实际平差问题。

## 第二章 精度指标与误差传播

### § 2-1 概 述

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值,求出未知量的最可靠值,并评定测量成果的精度。解决这两个问题的基础,是要研究观测误差的理论,简称误差理论。偶然误差是一种随机变量,就其总体来说具有一定的统计规律,本章从阐明其统计规律性着手,引出测量中常用的精度含意,详细讨论误差理论中最重要的内容之一,即偶然误差的传播规律,导出误差传播的各种关系式。

衡量精度的指标有多种,本章着重介绍最主要的指标,即方差和中误差,给出衡量观测向量精度的方差-协方差阵,系统地讨论协方差阵的传播律及其在测量中的应用,最后给出权的定义以及测量中常用的定权方法。

### § 2-2 偶然误差的规律性

任何一个观测量,客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数值。这一数值就称为该观测量的真值。从概率和数理统计的观点看,当观测量仅含偶然误差时,其数学期望也就是它的真值。

设进行了  $n$  次观测,其观测值为  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , 假定观测量的真值为  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$ , 由于各观测值都带有一定的误差,因此,每一观测值  $L_i$  与其真值  $\tilde{L}_i$  或  $E(L_i)$  之间必存在一差数, 设为

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i, \quad (2-2-1)$$

式中  $\Delta$  称为真误差,有时简称为误差。若记

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}_{n,1}, \quad \tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix}_{n,1}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}_{n,1},$$

则有

$$\Delta = \tilde{L} - L, \quad (2-2-2)$$

如果以被观测量的数学期望

$$E(L) = [E(L_1), E(L_2), \dots, E(L_n)]^T$$

表示其真值,则

$$\left. \begin{aligned} E(L) &= \tilde{L}, \\ \Delta &= E(L) - L. \end{aligned} \right\} \quad (2-2-3)$$

如 § 1-1 所述, 测量平差中所要处理的观测值是假定不包含系统误差的, 因此这里的  $\Delta$  仅仅是指偶然误差。

在 § 1-1 中已经指出, 就单个偶然误差而言, 其大小或符号没有规律性, 即呈现出一种偶然性(或随机性)。但就其总体而言, 却呈现出一定的统计规律性。并且指出它是服从正态分布的随机变量。人们从无数的测量实践中发现, 在相同的观测条件下, 大量偶然误差的分布也确实表现出了一定的统计规律性。下面通过实例来说明这种规律性。

在某测区, 在相同的条件下, 独立地观测了 358 个三角形的全部内角, 由于观测值带有误差, 故三内角观测值之和不等于其真值  $180^\circ$ , 根据(2-2-1)式, 各个三角形内角和的真误差可由下式算出:

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3) \quad (i = 1, 2, \dots, 358),$$

式中  $(L_1 + L_2 + L_3)_i$  表示各三角形内角和的观测值。现取误差区间的间隔  $d\Delta$  为  $0.20''$ , 将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列; 统计误差出现在各区间内的个数  $\nu_i$ , 以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率  $\nu_i/n$ (此处  $n=358$ ), 其结果列于表 2-1 中。

表 2-1

误差的区间 "	$\Delta$ 为 负 值			$\Delta$ 为 正 值			备 注
	个数 $\nu_i$	频率 $\nu_i/n$	$\frac{\nu_i/n}{d\Delta}$	个数 $\nu_i$	频率 $\nu_i/n$	$\frac{\nu_i/n}{d\Delta}$	
0.00~0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	$d\Delta=0.20''$ ; 等于区间左端值的 误差算入该区间 内。
0.20~0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40~0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60~0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80~1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00~1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20~1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40~1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
和	181	0.505		177	0.495		

从表 2-1 中可以看出, 误差的分布情况具有以下性质:(1)误差的绝对值有一定的限值;(2)绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多;(3)绝对值相等的正负误差的个数相近。

为了便于以后对误差分布互相比, 下面对另一测区的 421 个三角形内角和的一组真误差, 按上述方法作了统计, 其结果列于表 2-2。

表 2-2 中所列的 421 个真误差, 尽管其观测条件不同于表 2-1 中的真误差, 但从表中可以看出: 愈接近于零误差的区间, 其频率愈大; 随着离开零误差愈来愈远, 其频率亦逐渐递减; 且出现在正负误差区间内的频率基本上相等。因而, 表 2-2 的误差分布情况与表 2-1 内误差分布的情况具有相同的性质。

表 2-2

误差的区间 "	$\Delta$ 为 负 值			$\Delta$ 为 正 值			备 注
	个数 $\nu_i$	频率 $\nu_i/n$	$\frac{\nu_i/n}{d\Delta}$	个数 $\nu_i$	频率 $\nu_i/n$	$\frac{\nu_i/n}{d\Delta}$	
0.00~0.20	40	0.095	0.475	37	0.088	0.440	$d\Delta=0.20''$ ; 等于区间左端值的 误差算入该区间 内。
0.20~0.40	34	0.081	0.405	36	0.085	0.425	
0.40~0.60	31	0.074	0.370	29	0.069	0.345	
0.60~0.80	25	0.059	0.295	27	0.064	0.320	
0.80~1.00	20	0.048	0.240	18	0.043	0.215	
1.00~1.20	16	0.038	0.190	17	0.040	0.200	
1.20~1.40	14	0.033	0.165	13	0.031	0.155	
1.40~1.60	9	0.021	0.105	10	0.024	0.120	
1.60~1.80	7	0.017	0.085	8	0.019	0.095	
1.80~2.00	5	0.012	0.060	7	0.017	0.085	
2.00~2.20	6	0.014	0.070	4	0.009	0.045	
2.20~2.40	2	0.005	0.025	3	0.007	0.035	
2.40~2.60	1	0.002	0.010	2	0.005	0.025	
2.60 以上	0	0	0	0	0	0	
和	210	0.499		211	0.501		

误差分布的情况,除了采用上述误差分布表的形式表达外,还可以利用图形来表达。例

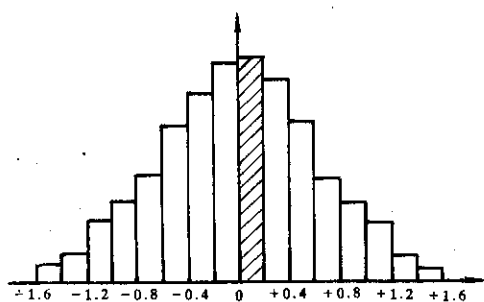


图 2-1

如,以横坐标表示误差的大小,纵坐标代表各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值,即 $\frac{\nu_i/n}{d\Delta}$ (此处间隔值均取为 $d\Delta=0.20''$ )。分别根据表 2-1 和表 2-2 中的数据绘制出图 2-1 和图 2-2。可见,此时图中每一误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率。例如,图 2-1 中画有斜线的长方条面积,就是代表误差出现在 $0.00''\sim+0.20''$ 区间内的频率 0.128。这种图通常称为直方图,它形象地表示了误差的分布情况。

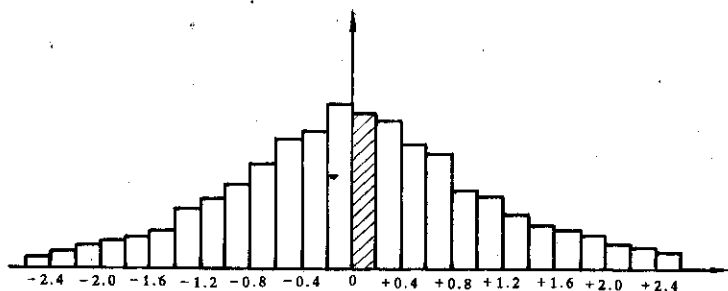


图 2-2

由此可知,在相同观测条件下所得到的一组独立观测的误差,只要误差的总个数  $n$  足够多,那么,误差出现在各区间内的频率就总是稳定在某一常数(理论频率)附近,而且当观测个数愈多时,稳定的程度也就愈大。例如,就表 2-1 的一组误差而言,在观测条件不变的情况下,如果再继续观测更多的三角形,则可预期,随着观测的个数愈来愈多,误差出现在各区间内的频率,其变动的幅度也就愈来愈小,当  $n \rightarrow \infty$  时,各频率也就趋于一个完全确定的数值,这就是误差出现在各区间的概率。这就是说,在一定的观测条件下,对应着一种确定的误差分布。

在  $n \rightarrow \infty$  的情况下,由于误差出现的频率已趋于完全稳定,如果此时把误差区间间隔无限缩小,则可想象到,图 2-1 及图 2-2 中各长方条顶边所形成的折线将分别变成如图 2-3 所示的两条光滑的曲线。这种曲线也就是误差的概率分布曲线,或称为误差分布曲线。由此可见,偶然误差的频率分布,随着  $n$  的逐渐增大,都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布

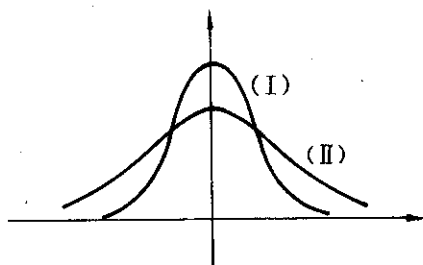


图 2-3

为其经验分布,而将正态分布称为它们的理论分布。因此,在以后的理论研究中,都是以正态分布作为描述偶然误差分布的数学模型,这不仅可以带来工作上的便利,而且基本上也是符合实际情况的。

通过以上讨论,我们还可以进一步用概率的术语来概括偶然误差的几个特性:

1. 在一定的观测条件下,误差的绝对值有一定的限值,或者说,超出一定限值的误差,其出现的概率为零;

2. 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大;

3. 绝对值相等的正负误差出现的概率相同;

4. 根据(2-2-3)式可知,偶然误差的数学期望为零,即

$$E(\Delta) = E(E(L) - L) = E(L) - E(L) = 0 \quad (2-2-4)$$

换句话说,偶然误差的理论平均值为零。

对于一系列的观测而言,不论其观测条件是好是差,也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测,只要这些观测是在相同的条件下独立进行的,则所产生的一组偶然误差必然都具有上述的四个特性。

图 2-1 和图 2-2 中各长方条的纵坐标为  $\frac{\nu_i}{n}$ , 其面积即为误差出现在该区间内的频率。如果将这个问题提到理论上来讨论,则以理论分布取代经验分布(图 2-3),此时,图 2-1 和图 2-2 中各长方条的纵坐标就是  $\Delta$  的密度函数  $f(\Delta)$ , 而长方条的面积为  $f(\Delta)d\Delta$ , 即代表误差出现在该区间内的概率,即

$$P(\Delta) = f(\Delta)d\Delta. \quad (2-2-5)$$

顾及(2-2-4)式,可写出  $\Delta$  的概率密度式为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}, \quad (2-2-6)$$

式中 $\sigma$ 为中误差<sup>①</sup>。当上式中的参数 $\sigma$ 确定后,即可画出它所对应的误差分布曲线。由于 $E(\Delta)=0$ ,所以该曲线是以横坐标为0处的纵轴为对称轴。当 $\sigma$ 不同时,曲线的位置不变,但分布曲线的形状将发生变化。例如,图2-3中就是表示 $\sigma$ 不相等时的两条曲线。由上述讨论可知,偶然误差 $\Delta$ 是服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布的随机变量。

## § 2-3 衡量精度的指标

测量平差的主要任务之一,就是评定测量成果的精度。如何正确理解“精度”的含义以及怎样衡量精度的高低?这是本节所要讨论的主要内容。

为了阐述精度的含义,先分析上节中的两个实例。图2-1和图2-2分别是在不同的观测条件下所测得的两组误差的频率分布图(直方图),图中每个长方条的面积就是误差出现于该区间内的频率。频率的大小见表2-1及表2-2中的数值。

不难理解,如果将表2-1中 $0.00''\sim-0.20''$ 和 $0.00''\sim+0.20''$ 这两个区间的频率相加,即得 $-0.20''\sim+0.20''$ 区间内的频率为0.254。如果按此法进行累计,则知误差出现于 $-0.60''\sim+0.60''$ 区间内的频率为0.665。这就是说,在表2-1的这组误差中,出现于 $-0.60''\sim+0.60''$ 区间以内的误差占误差总数的66.5%;而出现在这一区间以外的误差,即绝对值大于 $0.6''$ 的误差,其频率为 $1-0.665=0.335$ ,即占误差总数的33.5%。如果对表2-2的那组误差也如此累计,即知出现在 $-0.60''\sim+0.60''$ 区间内的频率为0.492,而出现在这一区间以外的频率为 $1-0.492=0.508$ 。这就是说,出现于 $-0.60''\sim+0.60''$ 这一区间之内和区间之外的误差,各占误差总数的49.2%和50.8%。

上述数字说明了,表2-1中的误差更集中于零的附近,因此可以说这一组误差分布得较为密集,或者说它的离散度小;相对而言,可以说表2-2中的误差分布得较为离散或者说它的离散度大。

从直方图来看,误差分布较为密集的图2-1,其图形在纵轴附近的顶峰则较高,且由各长方条所构成的阶梯比较陡峭;而误差分布较为分散的图2-2,在纵轴附近的顶峰则较低,且其阶梯较为平缓。这个性质同样反映在误差分布曲线(图2-3)的形态上,即误差分布曲线(I)较高而陡峭,误差分布曲线(II)则较低而平缓。

在一定的观测条件下进行的一组观测,它对应着一种确定的误差分布。不难理解,如果分布较为密集,即离散度较小时,则表示该组观测质量较好,也就是说,这一组观测精度较高;反之,如果分布较为离散,即离散度较大时,则表示该组观测质量较差,也就是说,这一组观测精度较低。

因此,所谓精度,就是指误差分布的密集或离散的程度,也就是指离散度的大小。假如两组观测成果的误差分布相同,便是两组观测成果的精度相同;反之,若误差分布不同,则精度也就不同。

<sup>①</sup> 在数理统计学中,一般称 $\sigma$ 为标准差(Standard deviation),而在测量工作中,则称为中误差。从本章起,将开始阐述测量工作中观测数据处理的有关理论和方法,因此,在本书的以后章节中,只称 $\sigma$ 为中误差。

在相同的观测条件下所进行的一组观测，由于它们对应着同一种误差分布，因此，对于这一组中的每一个观测值，都称为是同精度观测值。例如，表 2-1 中所列的 358 个观测结果是在相同观测条件下测得的，各个结果的真误差彼此并不相等，有的甚至相差很大（例如有的出现于  $0.00'' \sim 0.20''$  区间，有的出现于  $1.40'' \sim 1.60''$  区间），但是，由于它们所对应的误差分布相同，因此，这些结果彼此是同精度的。

将上节表 2-1 及表 2-2 中数值相比较可知，表 2-2 中的误差分布比表 2-1 中的误差分布较为离散，因此，表 2-2 中的 421 个观测值，其精度均低于表 2-1 中的观测值。

为了衡量观测值的精度高低，当然可以按上节的方法，把在一组相同条件下得到的误差，用组成误差分布表、绘制直方图或画出误差分布曲线的方法来比较。但在实际工作中，这样做比较麻烦，有时甚至很困难，而且人们还需要对精度有一个数字概念。这种具体的数字应该能够反映误差分布的密集或离散的程度，即应能够反映其离散度的大小，因此称它为衡量精度的指标。

衡量精度的指标有很多种，下面介绍几种常用的精度指标。

## 一、方差和中误差

误差  $\Delta$  的概率密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}},$$

式中  $\sigma^2$  是误差分布的方差。由方差的定义知

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta, \quad (2-3-1)$$

而  $\sigma$  就是中误差

$$\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)}. \quad (2-3-2)$$

不同的  $\sigma$  将对应着不同形状的分布曲线， $\sigma$  愈小，曲线愈为陡峭， $\sigma$  愈大，则曲线愈为平缓。正态分布曲线具有两个拐点，它们在横轴上的坐标为  $X_{拐} = \mu_x \pm \sigma$ ， $\mu_x$  为变量  $X$  的数学期望。对于偶然误差而言，由于其数学期望  $E(\Delta) = 0$ ，所以拐点在横轴上的坐标应为

$$\Delta_{拐} = \pm \sigma. \quad (2-3-3)$$

由此可见， $\sigma$  的大小可以反映精度的高低。故常用中误差  $\sigma$  作为衡量精度的指标。

如果在相同的条件下得到了一组独立的观测误差，可由 (2-3-1) 式，并根据定积分的定义可以写出

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta$$

或

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k^2}{n},$$

即

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n} \\ \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (2-3-4)$$

根据(2-3-4)式的第一式或(2-3-1)式定义的方差,是真误差平方( $\Delta^2$ )的数学期望,也就是 $\Delta^2$ 的理论平均值。在分布律为已知的情况下,它是一个确定的常数。或者说,(2-3-4)式中的方差 $\sigma^2$ 和中误差 $\sigma$ ,分别是 $\frac{[\Delta\Delta]}{n}$ 和 $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ 的极限值,它们都是理论上的数值。但是实际上观测个数 $n$ 总是有限的,由有限个观测值的真误差只能求得方差和中误差的估计值。方差 $\sigma^2$ 和中误差 $\sigma$ 的估值将用符号 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 表示<sup>①</sup>,即

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{[\Delta\Delta]}{n} \\ \hat{\sigma} &= \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (2-3-5)$$

这就是根据一组等精度真误差计算方差和中误差估值的基本公式。

顺便指出,由于分别采用了不同的符号以区分方差和中误差的理论值和估值,因此在本书以后的文字叙述中,在不需要特别强调“估值”意义的情况下,也将“中误差的估值”简称为“中误差”。

## 二、平均误差

在一定的观测条件下,一组独立的偶然误差绝对值的数学期望称为平均误差。设以 $\theta$ 表示平均误差,则有

$$\theta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta,$$

同样,如果在相同条件下得到了一组独立的观测误差,上式也可写为

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n}, \quad (2-3-6)$$

即平均误差是一组独立的偶然误差绝对值的算术平均值之极限值。

因为

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta = 2 \int_0^{\infty} \Delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} d\Delta \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (-\sigma de^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \right]_0^{\infty}, \end{aligned}$$

所以有

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \approx 0.7979 \sigma \approx \frac{4}{5} \sigma. \quad (2-3-7)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \approx 1.253 \theta \approx \frac{5}{4} \theta. \quad (2-3-8)$$

上式是平均误差 $\theta$ 与中误差 $\sigma$ 的理论关系式,由此式可以看到,不同大小的 $\theta$ ,对应着不同的 $\sigma$ ,也就对应着不同的误差分布曲线。因此,也可以用平均误差 $\theta$ 作为衡量精度的指

<sup>①</sup> 在测量中,中误差常用 $m$ 表示,其估值为 $\hat{m}$ ,即 $m$ 与 $\sigma$ , $\hat{m}$ 与 $\hat{\sigma}$ 意义同,本书统一采用符号 $\sigma$ 和 $\hat{\sigma}$ 。



标。

由于观测值的个数  $n$  总是一个有限值,因此在实用上也只能用  $\theta$  的估值来衡量精度,并用  $\hat{\theta}$  表示  $\theta$  的估值,但仍简称为平均误差。则

$$\hat{\theta} = \pm \frac{[\Delta]}{n}. \quad (2-3-9)$$

### 三、或然误差

随机变量  $X$  落入区间  $(a, b)$  内的概率为

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx,$$

对于偶然误差  $\Delta$  来说,误差  $\Delta$  落入区间  $(a, b)$  的概率为

$$P(a < \Delta \leq b) = \int_a^b f(\Delta) d\Delta. \quad (2-3-10)$$

或然误差  $\rho$  是这样定义的:误差出现在  $(-\rho, +\rho)$  之间的概率等于  $1/2$ , 即

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta) d\Delta = \frac{1}{2}. \quad (2-3-11)$$

如图 2-4 所示,图中的误差分布曲线与横轴所包围的面积为 1,则在曲线下  $(-\rho, +\rho)$  间的面积为  $1/2$ 。

将  $\Delta$  的概率密度代入 (2-3-11) 式,并作变量代换,令

$$\frac{\Delta}{\sigma} = t, \Delta = \sigma t, d\Delta = \sigma dt,$$

则得

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta) d\Delta = 2 \int_0^{\rho/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2},$$

由概率积分表可查得,当概率为  $1/2$  时,积分限为 0.6745, 即得

$$\left. \begin{aligned} \rho &\approx 0.6745\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma \\ \sigma &\approx 1.4826\rho \approx \frac{3}{2}\rho \end{aligned} \right\} \quad (2-3-12)$$

上式是或然误差  $\rho$  与中误差  $\sigma$  的理论关系。由此式也可以看到不同的  $\rho$  也对应着不同的误差分布曲线,因此,或然误差  $\rho$  也可以作为衡量精度的指标。

实用上,因为观测值个数  $n$  是有限值,因此也只能得到  $\rho$  的估值  $\hat{\rho}$ ,但仍简称为或然误差。它是这样求得的:将在相同观测条件下得到的一组误差,按绝对值的大小排列,当  $n$  为奇数时,取位于中间的一个误差值作为  $\hat{\rho}$ ,当  $n$  为偶数时,则取中间两个误差值的平均值作为  $\hat{\rho}$ 。在实用上,通常都是先求出中误差的估值,然后按 (2-3-12) 式求出或然误差  $\hat{\rho}$ 。

例[2-1] 为了比较两架经纬仪的观测精度,分别对同一角度各进行了 30 次观测,其观测结果列于表 2-3 中。该角已预先用精密经纬仪测定,其值为  $76^\circ 42' 18.0''$ 。由于此值的精度远远高于上述两架经纬仪的观测精度,故将它看成是该角的真值。试计算这两架经纬仪

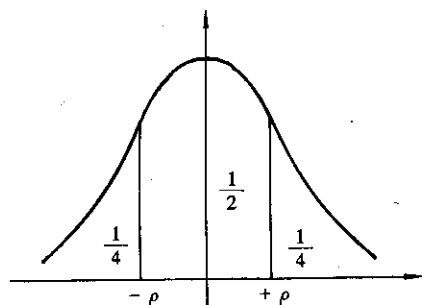


图 2-4

的中误差，平均误差和或然误差。

根据表 2-3 的数据可算得：

$$\hat{\sigma}_1 = \pm \sqrt{\frac{74.65}{30}} = \pm 1.58'',$$

$$\hat{\sigma}_2 = \pm \sqrt{\frac{25.86}{30}} = \pm 0.93'',$$

$$\hat{\theta}_1 = \pm \frac{43.9}{30} = \pm 1.46'', \quad \hat{\theta}_2 = \pm \frac{24.4}{30} = \pm 0.81'',$$

$$\hat{\rho}_1 = \pm 1.3'', \quad \hat{\rho}_2 = \pm 0.8''.$$

上列  $\hat{\rho}$  值是按定义求出的。在计算时，对精度指标值，通常取 2~3 个有效数字，并在数值前冠以“±”号，数值后写上单位。从上列结果可见，用第一架经纬仪观测的观测值的中误差、平均误差和或然误差，均相应地大于用第二架经纬仪观测的观测值的中误差、平均误差和或然误差，所以后者的精度高于前者。

表 2-3

编号	第一架经纬仪			第二架经纬仪		
	观测值 $L$	$\Delta$	$\Delta^2$	观测值 $L$	$\Delta$	$\Delta^2$
1	76°42'17.2"	-0.8	0.64	76°42'19.5"	+1.5	2.25
2	19.5	+1.5	2.25	19.0	+1.0	1.00
3	19.2	+1.2	1.44	18.8	+0.8	0.64
4	16.5	-1.5	2.25	16.9	-1.1	1.21
5	19.6	+1.6	2.56	18.6	+0.6	0.36
6	16.4	-1.6	2.56	19.1	+1.1	1.21
7	15.5	-2.5	6.25	18.2	+0.2	0.04
8	19.9	+1.9	3.61	17.7	-0.3	0.09
9	19.2	+1.2	1.44	17.5	-0.5	0.25
10	16.8	-1.2	1.44	18.6	+0.6	0.36
11	15.0	-3.0	9.00	16.0	-2.0	4.00
12	16.9	-1.1	1.21	17.3	-0.7	0.49
13	16.6	-1.4	1.96	17.2	-0.8	0.64
14	20.4	+2.4	5.76	16.8	-1.2	1.44
15	16.3	-1.7	2.89	18.8	+0.8	0.64
16	16.7	-1.3	1.69	17.7	-0.3	0.09
17	16.0	-2.0	4.00	18.6	+0.6	0.36
18	15.5	-2.5	6.25	18.8	+0.8	0.64
19	19.1	+1.1	1.21	17.7	-0.3	0.09
20	18.8	+0.8	0.64	17.1	-0.9	0.81
21	18.7	+0.7	0.49	16.9	-1.1	1.21
22	19.2	+1.2	1.44	17.6	-0.4	0.16
23	17.5	-0.5	0.25	17.0	-1.0	1.00
24	16.7	-1.3	1.69	17.5	-0.5	0.25
25	19.0	+1.0	1.00	18.2	+0.2	0.04
26	16.8	-1.2	1.44	18.3	+0.3	0.09
27	19.3	+1.3	1.69	19.8	+1.8	3.24
28	20.0	+2.0	4.00	18.6	+0.6	0.36
29	17.4	+0.6	0.36	16.9	-1.1	1.21
30	16.2	-1.8	3.24	16.7	-1.3	1.69
	[ $\Delta$ ]=43.9			[ $\Delta$ ]=24.4		
	74.65			25.86		

中误差、平均误差和或然误差都可以作为衡量精度的指标。在实用上,由于 $n$ 是有限值,故只能分别求得它们的估值,与理论值有一定的差异, $n$ 愈大,这一差异愈小,也就愈能反映观测精度。如果 $n$ 很小,求出来的估值是不可靠的。

由于当 $n$ 不大时,中误差比平均误差能更灵敏地反映大的真误差的影响,同时,在计算或然误差时往往是先算出中误差,因此,世界各国在实用上通常都是采用中误差作为精度指标,我国也统一采用中误差作为衡量精度的指标。

#### 四、极限误差

中误差不是代表个别误差的大小,而是代表误差分布的离散度的大小。由中误差的定义式(2-3-4)可知,它是代表一组同精度观测误差平方的平均值的平方根极限值,中误差愈小,即表示在该组观测中,绝对值较小的误差愈多。按正态分布表查得,在大量同精度观测的一组误差中,误差落在 $(-\sigma, +\sigma)$ ,  $(-2\sigma, +2\sigma)$ 和 $(-3\sigma, +3\sigma)$ 的概率分别为

$$\left. \begin{aligned} P(-\sigma < \Delta < +\sigma) &\approx 68.3\%, \\ P(-2\sigma < \Delta < +2\sigma) &\approx 95.5\%, \\ P(-3\sigma < \Delta < +3\sigma) &\approx 99.7\%. \end{aligned} \right\} \quad (2-3-13)$$

这就是说,绝对值大于中误差的偶然误差,其出现的概率为31.7%;而绝对值大于二倍中误差的偶然误差出现的概率为4.5%;特别是绝对值大于三倍中误差的偶然误差出现的概率仅有0.3%,这已经是概率接近于零的小概率事件,或者说这是实际上的不可能事件。因此,通常以三倍中误差作为偶然误差的极限值 $\Delta_{\text{限}}$ ,并称为极限误差。即

$$\Delta_{\text{限}} = 3\sigma \quad (2-3-14)$$

实践中,也有采用 $2\sigma$ 作为极限误差的。实用上则以中误差的估值 $\hat{\sigma}$ 代替 $\sigma$ ,即以 $3\hat{\sigma}$ 或 $2\hat{\sigma}$ 作为极限误差。同时,(2-3-13)式也反映了中误差与真误差间的概率关系。

在测量工作中,如果某误差超过了极限误差,那就可以认为它是错误,相应的观测值应舍去不用。

#### 五、相对误差

对于某些观测结果,有时单靠中误差还不能完全表达观测结果的好坏。例如,分别丈量了1000m及80m的两段距离,观测值的中误差均为 $\pm 2\text{cm}$ ,虽然两者的中误差相同,但就单位长度而言,两者精度并不相同。显然前者的相对精度比后者要高。此时,须采用另一种办法来衡量精度,通常采用相对中误差,它是中误差与观测值之比。如上述两段距离,前者的相对中误差为 $\frac{1}{50000}$ ,而后者则为 $\frac{1}{4000}$ 。

相对中误差是个无名数,在测量中一般将分子化为1,即用 $\frac{1}{N}$ 表示。

对于真误差与极限误差,有时也用相对误差来表示。例如,经纬仪导线测量时,规范中所规定的相对闭合差不能超过 $\frac{1}{2000}$ ,它就是相对极限误差;而在实测中所产生的相对闭合差,则是相对真误差。

与相对误差相对应,真误差、中误差、极限误差等均称为绝对误差。

## § 2-4 协方差传播律

在实际工作中,往往会遇到某些量的大小并不是直接测定的,而是由观测值通过一定的函数关系间接计算出来的,即常常遇到的某些量是观测值的函数。这类例子很多,例如在一个三角形中,观测了三内角  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ ,其闭合差  $w$  和将闭合差平均分配之后所得的各角平差值  $\hat{L}_1$ 、 $\hat{L}_2$ 、 $\hat{L}_3$  为

$$w = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3),$$

$$\hat{L}_i = L_i + \frac{1}{3}w \quad (i=1, 2, 3).$$

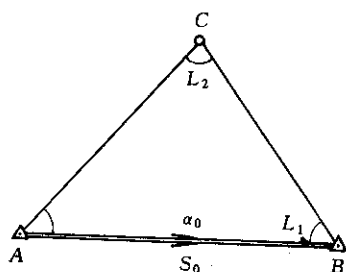


图 2-5

又如,在侧方交会中(如图 2-5),已知  $A$ 、 $B$  两点的坐标  $x_A$ 、 $y_A$  和  $x_B$ 、 $y_B$ ,它们之间的距离为  $S_0$  和坐标方位角为  $\alpha_0$ ,由交会的观测角  $L_1$ 、 $L_2$  通过以下公式求交会点的坐标:

$$S_{AC} = S_0 \frac{\sin L_1}{\sin L_2},$$

$$\alpha_{AC} = \alpha_0 - (180^\circ - L_1 - L_2),$$

$$x_C = x_A + S_{AC} \cos \alpha_{AC},$$

$$y_C = y_A + S_{AC} \sin \alpha_{AC}.$$

现在提出这样一个问题:观测值的函数的中误差与观测值的中误差之间,存在着怎样的关系?因为中误差可以由相应的方差开方得到,所以它们之间的关系可以通过方差和协方差的运算规律来导出,故将阐述这种关系的公式称为协方差传播律。

为了讨论方便,本节先进一步说明协方差和协方差阵的概念,再推求观测值函数的协方差阵,即协方差传播律的一般公式。最后说明求观测值非线性函数的协方差阵的方法。

### 一、协方差

设有观测值  $X$  和  $Y$ ,则它们的协方差被定义为

$$\sigma_{xy} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \quad (2-4-1)$$

式中  $E(X) - X$  和  $E(Y) - Y$  分别为  $X$  和  $Y$  的真误差,即

$$\Delta_x = E(X) - X$$

$$\Delta_y = E(Y) - Y$$

故(2-4-1)式可写为

$$\sigma_{xy} = E(\Delta_x \Delta_y). \quad (2-4-2)$$

从(2-4-1)和(2-4-2)两式可以看出,协方差是用数学期望来定义的。其中  $\Delta_{x_i}$  是观测值  $x_i$  的真误差,  $\Delta_{y_i}$  是观测值  $y_i$  的真误差,而协方差  $\sigma_{xy}$  则是这两种真误差所有可能取值的乘积的理论平均值,即

$$\sigma_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_x \Delta_y]}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\Delta_{x_1} \Delta_{y_1} + \Delta_{x_2} \Delta_{y_2} + \cdots + \Delta_{x_n} \Delta_{y_n}). \quad (2-4-3)$$

因实用上  $n$  总是有限值, 所以也只能求得它的估值, 记为

$$\hat{\sigma}_{xy} = \frac{[\Delta_x \Delta_y]}{n}, \quad (2-4-4)$$

当  $X$  和  $Y$  的协方差  $\sigma_{xy}=0$  时, 表示这两个(或两组)观测值的误差之间互不影响, 或者说, 它们的误差是不相关的, 并称这些观测值为不相关的观测值; 如果  $\sigma_{xy} \neq 0$ , 则表示它们的误差是相关的, 称这些观测值为相关观测值。由于在测量上所涉及的观测值和观测误差都是服从正态分布的随机变量, 对于正态随机变量而言, “不相关”与“独立”是等价的, 所以把不相关观测值也称为独立观测值, 同样把相关观测值也称为不独立观测值。因此, 在无需强调“不独立”与“相关”两者差别的情况下, 本书就不再严加区分了。

独立观测值之间的协方差  $\sigma_{xy}=0$  这一性质, 可以这样来证明:

由于  $\Delta_x$  与  $\Delta_y$  相互独立, 所以顾及(2-2-4)式得

$$\sigma_{xy} = E(\Delta_x \Delta_y) = E(\Delta_x)E(\Delta_y) = 0.$$

在测量工作中, 直接观测得到的高差、距离、角度和方向等, 都是独立观测值; 按组合测角法观测并经过测站平差后的方向值、三角高程测量求得的高差等, 也是独立观测值。一般来说, 独立观测值的各个函数之间是不独立的, 或者说是相关的, 因而它们是相关观测值。例如, 当一个测站上的水平方向值是独立观测值时, 由这些方向值所算得的相邻角度就是相关观测值; 又如, 三角网或导线网中根据观测角度和边长求得的各点的坐标也是相关观测值。

假定有  $n$  个不同精度的相关观测值  $X_i (i=1, 2, \dots, n, \text{下同})$ , 它们的数学期望和方差为  $\mu_{x_i}$  和  $\sigma_{x_i}^2$ , 它们两两之间的协方差为  $\sigma_{x_i x_j} (i \neq j)$ , 用矩阵表示为

$$\left. \begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, & \mu_X &= \begin{bmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_n} \end{bmatrix} = E(X), \\ D_{XX} &= \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \sigma_{x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{x_n x_1} & \sigma_{x_n x_2} & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} = E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T], \end{aligned} \right\} \quad (2-4-5)$$

式中  $X$  为观测值向量, 或简称为观测值;  $\mu_X = E(X)$  为  $X$  的数学期望; 而称  $D_{XX}$  为  $X$  的方差-协方差阵, 简称为协方差阵。

如果有观测值  $X$  和  $Y$ , 它们的数学期望分别为  $\mu_X$  和  $\mu_Y$ 。若记

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

则  $Z$  的方差阵  $D_{ZZ}$  为

$$D_{ZZ} = \begin{bmatrix} D_{XX} & D_{XY} \\ D_{YX} & D_{YY} \end{bmatrix},$$

其中  $D_{XX}$  和  $D_{YY}$  分别为  $X$  和  $Y$  的协方差阵, 而

$$D_{XY} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1 y_1} & \sigma_{x_1 y_2} & \cdots & \sigma_{x_1 y_r} \\ \sigma_{x_2 y_1} & \sigma_{x_2 y_2} & \cdots & \sigma_{x_2 y_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{x_n y_1} & \sigma_{x_n y_2} & \cdots & \sigma_{x_n y_r} \end{bmatrix}, \quad (2-4-6)$$

且有

$$D_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T] = D_{YX}^T, \quad (2-4-7)$$

称  $D_{XY}$  为观测值向量  $X$  关于  $Y$  的互协方差阵。当  $X$  和  $Y$  的维数  $n=r=1$  时(即  $X$ 、 $Y$  都是一个观测值), 互协方差阵就是  $X$  关于  $Y$  的协方差。

若  $D_{XY}=0$ , 则称  $X$  与  $Y$  是相互独立的观测向量。

## 二、观测值线性函数的方差

设有观测值  $X$ , 其数学期望为  $\mu_X$ , 协方差阵为  $D_{XX}$ , 即

$$\left. \begin{aligned} X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mu_X = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{bmatrix} = E(X), \\ D_{XX} = E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (2-4-8)$$

其中  $\sigma_i^2$  为  $X_i$  的方差,  $\sigma_{ij}$  为  $X_i$  与  $X_j$  的协方差, 又设有  $X$  的线性函数为

$$Z = \underset{1,1}{K} \underset{1,n}{X} + \underset{n,1}{k_0}, \quad (2-4-9)$$

式中

$$K = [\underset{1,n}{k_1 k_2 \cdots k_n}].$$

(2-4-9)式的纯量形式为

$$Z = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_n X_n + k_0.$$

现在来求  $Z$  的方差  $D_{ZZ}$ 。对(2-4-9)式取数学期望, 得

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(KX + k_0) = KE(X) + k_0 \\ &= K\mu_X + k_0. \end{aligned} \quad (2-4-10)$$

根据方差的定义可知,  $Z$  的方差为

$$D_{ZZ} = \sigma_Z^2 = E[(Z - E(Z))(Z - E(Z))^T].$$

将(2-4-9)和(2-4-10)式代入上式, 得

$$\begin{aligned} D_{ZZ} &= \sigma_Z^2 = E[(KX - K\mu_X)(KX - K\mu_X)^T] \\ &= E[K(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T K^T] \end{aligned}$$

$$=KE[(X-\mu_X)(X-\mu_X)^TK^T,$$

所以

$$D_{ZZ}=\sigma_z^2=KD_{XX}K^T. \quad (2-4-11)$$

将上式展开成纯量形式, 得

$$\begin{aligned} D_{ZZ}=\sigma_z^2 &= k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_n^2\sigma_n^2+2k_1k_2\sigma_{12}+2k_1k_3\sigma_{13} \\ &+\cdots+2k_1k_n\sigma_{1n}+\cdots+2k_{n-1}k_n\sigma_{n-1,n}. \end{aligned} \quad (2-4-12)$$

当向量中的各分量  $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$  两两独立时, 它们之间的协方差  $\sigma_{ij}=0$ , 此时上式为

$$D_{ZZ}=\sigma_z^2=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_n^2\sigma_n^2. \quad (2-4-13)$$

通常将(2-4-11)、(2-4-12)和(2-4-13)诸式称为协方差传播律。其中(2-4-13)式是(2-4-12)式的一个特例。

例[2-2] 在 1:500 的图上, 量得某两点间的距离  $d=23.4\text{mm}$ ,  $d$  的量测中误差  $\sigma_d=\pm 0.2\text{mm}$ , 求该两点实地距离  $S$  及中误差  $\sigma_s$ 。

解:  $S=500d=500\times 23.4=11700\text{mm}=11.7\text{m}$ ,

$$\sigma_s^2=500^2\sigma_d^2,$$

$$\sigma_s=500\sigma_d=500\times(\pm 0.2)$$

$$=\pm 100\text{mm}=\pm 0.1\text{m},$$

最后写成

$$S=11.7\pm 0.1\text{m}.$$

例[2-3] 设  $x$  为独立观测值  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  的函数

$$X=\frac{1}{7}L_1+\frac{2}{7}L_2+\frac{4}{7}L_3,$$

已知  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  的中误差  $\sigma_1=\pm 3\text{mm}$ ,  $\sigma_2=\pm 2\text{mm}$  及  $\sigma_3=\pm 1\text{mm}$ , 求函数的中误差  $\sigma_x$ 。

解: 因  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  是独立观测值, 所以按(2-4-13)式得

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \left(\frac{1}{7}\right)^2\sigma_1^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2\sigma_2^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2\sigma_3^2 \\ &= \frac{1}{49}\times 9 + \frac{4}{49}\times 4 + \frac{16}{49}\times 1 = \frac{41}{49} = 0.84, \end{aligned}$$

$$\sigma_x=\pm 0.9\text{mm}.$$

例[2-4] 设在测站  $A$  上(如图 2-6), 已知  $\angle BAC=\alpha$ , 设无误差, 而观测角  $\beta_1$  和  $\beta_2$  的中误差为  $\sigma_1=\sigma_2=\pm 1.4''$ , 协方差  $\sigma_{12}=-1(\text{秒}^2)$ 。求角  $x$  的中误差  $\sigma_x$ 。

解: 因  $x=\alpha-\beta_1-\beta_2$

$$=[-1 \quad -1]\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} + \alpha$$

令

$$\beta=\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix},$$

则









$$\begin{aligned}
D_{LL} &= \begin{bmatrix} \sigma_{L_1}^2 & \sigma_{L_1 L_2} & \sigma_{L_1 L_3} \\ \sigma_{L_2 L_1} & \sigma_{L_2}^2 & \sigma_{L_2 L_3} \\ \sigma_{L_3 L_1} & \sigma_{L_3 L_2} & \sigma_{L_3}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & +1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & +1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 & \sigma^2 & 3\sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma^2 & -\frac{1}{3}\sigma^2 & -\frac{1}{3}\sigma^2 \\ -\frac{1}{3}\sigma^2 & \frac{2}{3}\sigma^2 & -\frac{1}{3}\sigma^2 \\ -\frac{1}{3}\sigma^2 & -\frac{1}{3}\sigma^2 & \frac{2}{3}\sigma^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

从上式可见，分配闭合差后的各角  $L_i$  的中误差均为  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma$ ，而它们之间的协方差均为  $-\frac{1}{3}\sigma^2$ 。

如果在实际计算中，并不要求计算所有  $L_i$  的中误差以及它们之间的协方差，而只要计算其中个别元素，例如只要计算  $L_2$  的中误差和  $L_3$  关于  $L_2$  的协方差，则由(2-4-17)和(2-4-22)式可以写出

$$D_{L_2 L_2} = k_2 D_{L_{\text{基}} L_{\text{基}}} k_2^T,$$

$$D_{L_3 L_2} = k_3 D_{L_{\text{基}} L_{\text{基}}} k_2^T,$$

由上例可知其中

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

所以

$$\sigma_{L_2}^2 = D_{L_2 L_2} = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 & \sigma^2 & 3\sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\sigma^2.$$

则

$$D_{L_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma.$$

而

$$\sigma_{L_1 L_2} = D_{L_1 L_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \sigma^2 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 & \sigma^2 & 3\sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\sigma^2.$$

例[2-6] 设有函数

$$Z = F_1 \underset{t,1}{X} + F_2 \underset{n,1}{Y}, \quad (2-4-24)$$

已知  $X$  和  $Y$  的协方差阵分别为  $D_{XX}$  和  $D_{YY}$ ,  $X$  关于  $Y$  的互协方差阵为  $D_{XY}$ , 求  $Z$  的协方差阵  $D_{ZZ}$  和  $Z$  关于  $X$  及  $Y$  的互协方差阵  $D_{ZX}$  和  $D_{ZY}$ .

解: 将(2-4-24)式写为

$$Z = [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

则由协方差传播律(2-4-17)式得

$$D_{ZZ} = [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} D_{XX} & D_{XY} \\ D_{YX} & D_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix},$$

由此得

$$D_{ZZ} = F_1 D_{XX} F_1^T + F_1 D_{XY} F_2^T + F_2 D_{YX} F_1^T + F_2 D_{YY} F_2^T. \quad (2-4-25)$$

而  $X$ 、 $Y$  可写为

$$X = [I \quad 0] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad Y = [0 \quad I] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

根据协方差传播律(2-4-22)式可得

$$\begin{aligned} D_{ZX} &= [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} D_{XX} & D_{XY} \\ D_{YX} & D_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ D_{ZY} &= [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} D_{XX} & D_{XY} \\ D_{YX} & D_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{cases} D_{ZX} = F_1 D_{XX} + F_2 D_{YX} \\ D_{ZY} = F_1 D_{XY} + F_2 D_{YY} \end{cases} \quad (2-4-26)$$

当  $D_{XY} = D_{YX} = 0$  时, 则(2-4-25)和(2-4-26)式变为

$$\begin{cases} D_{ZZ} = F_1 D_{XX} F_1^T + F_2 D_{YY} F_2^T \\ D_{ZX} = F_1 D_{XX} \\ D_{ZY} = F_2 D_{YY} \end{cases} \quad (2-4-27)$$

#### 四、非线性函数的情况

设有观测值  $X$  的非线性函数

$$Z = f(X), \quad (2-4-28)$$

或写为

$$Z=f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2-4-29)$$

已知 $X$ 的协方差阵 $D_{XX}$ , 欲求 $Z$ 的方差 $D_{ZZ}$ 。

假定观测值 $X$ 有近似值 $X^0$

$$X^0 = [X_1^0 \ X_2^0 \ \dots \ X_n^0]^T,$$

则可将函数式(2-4-29)按台劳级数在点 $X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0$ 处展开为

$$\begin{aligned} Z = & f(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) + \left( \frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_0 (X_1 - X_1^0) \\ & + \left( \frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_0 (X_2 - X_2^0) + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_0 (X_n - X_n^0) + (\text{二次以上项}), \end{aligned} \quad (2-4-30)$$

式中 $\left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0$ 是函数对各个变量所取的偏导数, 并以近似值 $X^0$ 代入所算得的数值, 它们都是常数, 当 $X^0$ 与 $X$ 非常接近时, 上式中二次以上各项很微小, 故可以略去。因此, 可将上式写为

$$\begin{aligned} Z = & \left( \frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_0 X_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_0 X_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_0 X_n + f(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) \\ & - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_0 X_i^0, \end{aligned} \quad (2-4-31)$$

令

$$\begin{aligned} K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] &= \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_0 \ \left( \frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_0 \ \dots \ \left( \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_0 \right], \\ k_0 &= f(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) - \sum_{i=1}^n k_i X_i^0 \end{aligned} \quad (2-4-32)$$

则

$$Z = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_n X_n + k_0 = KX + k_0 \quad (2-4-33)$$

这样, 就将非线性函数式(2-4-29)化成了线性函数式(2-4-33), 它与线性函数式(2-4-9)完全相同, 故可以按(2-4-11)式求得 $Z$ 的方差 $D_{ZZ}$ 为

$$D_{ZZ} = KD_{XX}K^T, \quad (2-4-34)$$

如果令

$$\left. \begin{aligned} dX_i &= X_i - X_i^0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ dX &= (dX_1 \ dX_2 \ \dots \ dX_n)^T \\ dZ &= Z - Z^0 = Z - f(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) \end{aligned} \right\}, \quad (2-4-35)$$

则(2-4-31)式可写为

$$dZ = \left( \frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_0 dX_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_0 dX_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_0 dX_n = KdX. \quad (2-4-36)$$

易知, 上式是非线性函数(2-4-29)式的全微分。因为根据(2-4-33)式应用协方差传播律(2-4-11)式求 $D_{ZZ}$ 时, 只要求知道式中的系数阵 $K$ , 所以, 为了求非线性函数的方差, 只要对它求全微分就行了。

如果有  $t$  个非线性函数

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Z_2 &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\dots\dots\dots \\ Z_t &= f_t(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \right\}, \quad (2-4-37)$$

将  $t$  个函数求全微分得

$$\left. \begin{aligned} dZ_1 &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right)_0 dX_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \right)_0 dX_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \right)_0 dX_n \\ dZ_2 &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \right)_0 dX_1 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right)_0 dX_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \right)_0 dX_n \\ &\dots\dots\dots \\ dZ_t &= \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_1} \right)_0 dX_1 + \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_2} \right)_0 dX_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_n} \right)_0 dX_n \end{aligned} \right\}, \quad (2-4-38)$$

若记

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_t \end{bmatrix}_{t,1}, \quad dZ = \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \\ \vdots \\ dZ_t \end{bmatrix}_{t,1}, \quad K = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \right)_0 \\ \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \right)_0 \\ \dots\dots\dots \\ \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial f_t}{\partial X_n} \right)_0 \end{bmatrix}_{t,n}, \quad (2-4-39)$$

则有

$$dZ = K dX, \quad (2-4-40)$$

亦可按(2-4-17)式求得  $Z$  的协方差阵

$$D_{ZZ} = K D_{XX} K^T. \quad (2-4-41)$$

同样, 若还有函数

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 &= F_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\dots\dots\dots \\ Y_r &= F_r(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \right\}, \quad (2-4-42)$$

记

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_r \end{bmatrix}_{r,1}, \quad dY = \begin{bmatrix} dY_1 \\ dY_2 \\ \vdots \\ dY_r \end{bmatrix}_{r,1}, \quad F = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial F_1}{\partial X_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial F_1}{\partial X_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \right)_0 \\ \dots\dots\dots \\ \left( \frac{\partial F_r}{\partial X_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial F_r}{\partial X_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial F_r}{\partial X_n} \right)_0 \end{bmatrix}, \quad (2-4-43)$$

则有

$$dY = F dX. \quad (2-4-44)$$

按(2-4-17)和(2-4-22)式可得到

$$\left. \begin{aligned} D_{YY} &= F D_{XX} F^T \\ D_{YZ} &= F D_{XX} K^T \end{aligned} \right\} \quad (2-4-45)$$

例[2-7] 设在三角形  $ABC$  (如图 2-7) 中, 观测三内角  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ , 将闭合差平均分配后得到的各角之值为

$$\hat{L}_1 = 40^\circ 10' 30'',$$

$$\hat{L}_2 = 50^\circ 05' 20'',$$

$$\hat{L}_3 = 89^\circ 44' 10''.$$

按例[2-5]的方法求得它们的协方差阵为

$$D_{LL} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{单位: 秒}^2)$$

已知边长  $S_0 = 1500.000\text{m}$  (无误差), 试求  $S_a$ 、 $S_b$  的长度和它们的协方差阵  $D_{ss}$ 。

解: 边长  $S_a$ 、 $S_b$  可按下式计算

$$\begin{aligned} S_a &= S_0 \frac{\sin \hat{L}_1}{\sin \hat{L}_3} = 1500.00 \times \frac{0.6451244}{0.9999894} \\ &= 967.697\text{m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_b &= S_0 \frac{\sin \hat{L}_2}{\sin \hat{L}_3} = 1500.00 \times \frac{0.7670407}{0.9999894} \\ &= 1150.573\text{m}, \end{aligned}$$

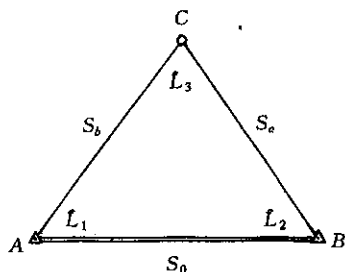


图 2-7

为了求它们的协方差阵, 须对上述函数式进行全微分, 也可以先将函数式取对数, 再求全微分, 本题解算用对数形式较为简便。

现对函数式取自然对数, 得

$$\ln S_a = \ln S_0 + \ln \sin \hat{L}_1 - \ln \sin \hat{L}_3,$$

$$\ln S_b = \ln S_0 + \ln \sin \hat{L}_2 - \ln \sin \hat{L}_3,$$

对上式取全微分得

$$\frac{dS_a}{S_a} = \frac{\cos \hat{L}_1}{\sin \hat{L}_1} d\hat{L}_1 - \frac{\cos \hat{L}_3}{\sin \hat{L}_3} d\hat{L}_3,$$

$$\frac{dS_b}{S_b} = \frac{\cos \hat{L}_2}{\sin \hat{L}_2} d\hat{L}_2 - \frac{\cos \hat{L}_3}{\sin \hat{L}_3} d\hat{L}_3,$$

或为

$$dS_a = S_a \operatorname{ctg} \hat{L}_1 d\hat{L}_1 - S_a \operatorname{ctg} \hat{L}_3 d\hat{L}_3,$$

$$dS_b = S_b \operatorname{ctg} \hat{L}_2 d\hat{L}_2 - S_b \operatorname{ctg} \hat{L}_3 d\hat{L}_3.$$

写为矩阵形式

$$dS = \begin{bmatrix} dS_a \\ dS_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_a \operatorname{ctg} \hat{L}_1 & 0 & -S_a \operatorname{ctg} \hat{L}_3 \\ 0 & S_b \operatorname{ctg} \hat{L}_2 & -S_b \operatorname{ctg} \hat{L}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{L}_1 \\ d\hat{L}_2 \\ d\hat{L}_3 \end{bmatrix}.$$

按(2-4-17)式就可得到  $D_{ss}$ , 但在代入数值时必须注意, 上式中的  $dL_i$  是以弧度为单位的, 当所给的角度的中误差(或方差、协方差)是度分秒单位系统时, 则应除以  $\rho$  (或  $\rho^2$ ,  $\rho = 180^\circ/\pi$ ), 将其单位化为弧度系统。本例中的  $D_{LL}$  是以秒<sup>2</sup> 为单位, 故有

$$\begin{aligned} D_{ss} &= \begin{bmatrix} 1146 & 0 & -4 \\ 0 & 962 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1146 & 0 \\ 0 & 962 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \\ &\times \frac{1}{(206 \times 10^3)^2} = \begin{bmatrix} 6888 & -3426 & -3462 \\ -2871 & 5787 & -2916 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1146 & 0 \\ 0 & 962 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \frac{1}{(206 \times 10^3)^2} (\text{m}^2) = \begin{bmatrix} 1.86 & -0.77 \\ -0.77 & 1.32 \end{bmatrix} (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

所以  $S_s$  和  $S_b$  的中误差和协方差分别为

$$\sigma_{S_s} = \pm 1.36 \text{cm},$$

$$\sigma_{S_b} = \pm 1.15 \text{cm},$$

$$\sigma_{S_s S_b} = -0.77 \text{cm}^2.$$

通过本例可以看出:

1. 有些函数可以先取对数再求全微分, 则较为方便;
2. 偏导数  $\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0$  的数值是用  $X$  的近似值代入后算出的;
3. 用数值代入计算时, 应注意各项的单位要统一。

根据以上非线性函数的协方差的计算过程, 可以总结出应用协方差传播律的具体步骤为:

1. 按要求写出函数式, 如  $Z_i = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , ( $i=1, 2, \dots, t$ );
2. 对函数式求全微分, 得

$$dZ_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right)_0 dX_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_2}\right)_0 dX_2 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_n}\right)_0 dX_n, \quad (i=1, 2, \dots, t);$$

3. 将微分关系写成矩阵形式

$$dZ = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} K \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} dX \\ \\ \\ \end{matrix},$$

其中

$$dZ = \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \\ \vdots \\ dZ_t \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial X_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial X_n}\right)_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_t}{\partial X_n}\right)_0 \end{bmatrix}.$$

4. 应用协方差传播律(2-4-11)、(2-4-17)或(2-4-22)式求方差或协方差阵(实用上是求估值)。



按最小二乘法进行平差，其主要内容之一是评定精度，即评定观测值及观测值函数的精度。协方差传播律正是用来求观测值函数的中误差和协方差的基本公式。在以后有关平差计算的几章中，都是以协方差传播律为基础，分别推导适用于不同平差方法的精度计算公式的。

## § 2-5 协方差传播律在测量上的应用

### 一、水准测量的精度

经  $N$  个测站测定  $A$ 、 $B$  两水准点间的高差，其中第  $i$  站的观测高差为  $h_i$ ，则  $A$ 、 $B$  两水准点间的总高差  $h_{AB}$  为

$$h_{AB} = h_1 + h_2 + \cdots + h_N. \quad (2-5-1)$$

设各测站观测高差是精度相同的独立观测值，其中误差均为  $\sigma_{\text{站}}$ ，则可由协方差传播律(2-4-12)式并顾及  $\sigma_{ij} = 0$ ，求得  $h_{AB}$  的方差  $\sigma_{h_{AB}}^2$  为

$$\sigma_{h_{AB}}^2 = \sigma_{\text{站}}^2 + \sigma_{\text{站}}^2 + \cdots + \sigma_{\text{站}}^2 = N\sigma_{\text{站}}^2$$

由此得中误差  $\sigma_{h_{AB}}$

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{N}\sigma_{\text{站}}. \quad (2-5-2)$$

若水准路线敷设在平坦地区，前后两测站间的距离  $s$  大致相等，设  $A$ 、 $B$  间的距离为  $S$ ，则测站数  $N = S/s$ ，代入上式得

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{\frac{S}{s}}\sigma_{\text{站}}. \quad (2-5-3)$$

如果  $S = 1\text{km}$ ， $s$  以  $\text{km}$  为单位，则一公里的测站数为

$$N_{\text{公里}} = \frac{1}{s},$$

而一公里观测高差的中误差即为

$$\sigma_{\text{公里}} = \sqrt{\frac{1}{s}}\sigma_{\text{站}}, \quad (2-5-4)$$

所以，距离为  $S$  公里的  $A$ 、 $B$  两点的观测高差的中误差为

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{S}\sigma_{\text{公里}}. \quad (2-5-5)$$

(2-5-2)和(2-5-5)两式是水准测量中计算高差中误差的基本公式。由(2-5-2)式可知，当各测站高差的观测精度相同时，水准测量高差的中误差与测站数的平方根成正比；由(2-5-5)式知，当各测站的距离大致相等时，水准测量高差的中误差与距离的平方根成正比。

### 二、同精度独立观测值的算术平均值的精度

设对某量以同精度独立观测了  $N$  次，得观测值  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $\cdots$ 、 $L_N$ ，它们的中误差均等于  $\sigma$ 。则  $N$  个观测值的算术平均值  $x$  为

$$x = \frac{[L]}{N} = \frac{1}{N}L_1 + \frac{1}{N}L_2 + \cdots + \frac{1}{N}L_N. \quad (2-5-6)$$

由协方差传播律知, 平均值  $x$  的方差为

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N^2}\sigma^2 + \frac{1}{N^2}\sigma^2 + \cdots + \frac{1}{N^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N},$$

或中误差为

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (2-5-7)$$

即  $N$  个同精度独立观测值的算术平均值的中误差, 等于各观测值的中误差除以  $\sqrt{N}$ 。

### 三、若干独立误差的联合影响

测量工作中经常会遇到这种情况: 一个观测结果同时受到许多独立误差的联合影响。例如照准误差、读数误差、目标偏心误差和仪器偏心误差对测角的影响。在这种情况下, 观测结果的真误差是各个独立误差的代数和, 即

$$\Delta_z = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n,$$

由于这里的真误差是相互独立的, 各种误差的出现都是纯属偶然(随机)的, 因而也可由(2-4-12)式并顾及  $\sigma_{ij} = 0$  得出它们之间的方差关系式

$$\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2, \quad (2-5-8)$$

即观测结果的方差  $\sigma_z^2$ , 等于各独立误差所对应的方差之和。

### 四、交会定点的精度

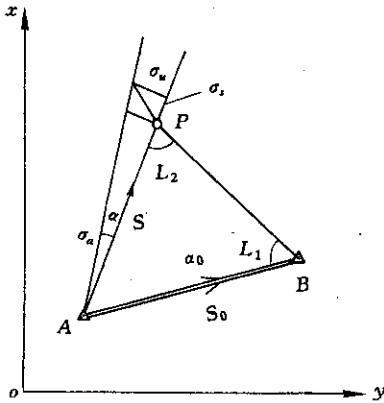


图 2-8

图 2-8 表示用侧方交会法定点  $P$  的位置。图中  $A$ 、 $B$  为已知点。边长  $S_0$  和坐标方位角  $\alpha_0$  认为是没有误差的, 设独立观测值为  $L_1$  和  $L_2$ , 它们的中误差均为  $\sigma$ 。交会点  $P$  的坐标  $(x, y)$  由以下公式计算

$$\left. \begin{aligned} S &= S_0 \frac{\sin L_1}{\sin L_2} \\ \alpha &= \alpha_0 - (180^\circ - L_1 - L_2) \\ x &= x_A + S \cos \alpha \\ y &= y_A + S \sin \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (2-5-9)$$

式中  $S$  为  $AP$  边的边长,  $\alpha$  为它的方位角。

为了求得交会点坐标  $(x, y)$  的中误差和协方差, 可以先求边长  $S$  和方位角  $\alpha$  的方差和协方差。为此, 由(2-5-9)式中的第一、二式求全微分可得

$$\begin{aligned} dS &= S_0 \frac{\cos L_1}{\sin L_2} \frac{dL_1}{\rho} - S_0 \frac{\sin L_1 \cos L_2}{\sin^2 L_2} \frac{dL_2}{\rho} \\ &= S \operatorname{ctg} L_1 \frac{dL_1}{\rho} - S \operatorname{ctg} L_2 \frac{dL_2}{\rho}, \end{aligned}$$

$$d\alpha = dL_1 + dL_2,$$

即得

$$\begin{bmatrix} dS \\ d\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S}{\rho} \operatorname{ctg} L_1 & -\frac{S}{\rho} \operatorname{ctg} L_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dL_1 \\ dL_2 \end{bmatrix} \quad (2-5-10)$$

因

$$D_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix},$$

所以  $S$ 、 $\alpha$  的协方差阵为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{sa} \\ \sigma_{sa} & \sigma_a^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{S}{\rho} \operatorname{ctg} L_1 & -\frac{S}{\rho} \operatorname{ctg} L_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{S}{\rho} \operatorname{ctg} L_1 & 1 \\ -\frac{S}{\rho} \operatorname{ctg} L_2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{S^2}{\rho^2} (\operatorname{ctg}^2 L_1 + \operatorname{ctg}^2 L_2) & \frac{S}{\rho} (\operatorname{ctg} L_1 - \operatorname{ctg} L_2) \\ \frac{S}{\rho} (\operatorname{ctg} L_1 - \operatorname{ctg} L_2) & 2 \end{bmatrix} \sigma^2 \end{aligned} \quad (2-5-11)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^2 &= \frac{S^2}{\rho^2} (\operatorname{ctg}^2 L_1 + \operatorname{ctg}^2 L_2) \sigma^2 \\ \sigma_a^2 &= 2\sigma^2 \\ \sigma_{sa} &= \frac{S}{\rho} (\operatorname{ctg} L_1 - \operatorname{ctg} L_2) \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-5-12)$$

再由 (2-5-9) 式的第三、四式取全微分得

$$dx = \cos \alpha dS - S \sin \alpha \frac{d\alpha}{\rho},$$

$$dy = \sin \alpha dS + S \cos \alpha \frac{d\alpha}{\rho},$$

上式写为

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\frac{S}{\rho} \sin \alpha \\ \sin \alpha & \frac{S}{\rho} \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dS \\ d\alpha \end{bmatrix}, \quad (2-5-13)$$

故  $P$  点坐标  $(x, y)$  的协方差阵为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\frac{S}{\rho} \sin \alpha \\ \sin \alpha & \frac{S}{\rho} \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{sa} \\ \sigma_{sa} & \sigma_a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\frac{S}{\rho} \sin \alpha & \frac{S}{\rho} \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

将 (2-5-11) 式代入上式, 整理后可得

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x^2 &= \left( \cos^2 \alpha \sigma_i^2 - \frac{2S}{\rho} \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{is} + \frac{S^2}{\rho^2} \sin^2 \alpha \sigma_a^2 \right) \sigma^2 \\
 &= \{ \cos^2 \alpha (\text{ctg}^2 L_1 + \text{ctg}^2 L_2) - \sin 2\alpha (\text{ctg} L_1 - \text{ctg} L_2) + 2 \sin^2 \alpha \} \frac{S^2 \sigma^2}{\rho^2}, \\
 \sigma_y^2 &= \left( \sin^2 \alpha \sigma_i^2 + \frac{2S}{\rho} \sin \alpha \cos \alpha \sigma_{is} + \frac{S^2}{\rho^2} \cos^2 \alpha \sigma_a^2 \right) \sigma^2 \\
 &= \{ \sin^2 \alpha (\text{ctg}^2 L_1 + \text{ctg}^2 L_2) + \sin 2\alpha (\text{ctg} L_1 - \text{ctg} L_2) + 2 \cos^2 \alpha \} \frac{S^2 \sigma^2}{\rho^2}, \\
 \sigma_{xy} &= \left\{ \cos \alpha \sin \alpha \sigma_s^2 + \frac{S}{\rho} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sigma_{is} - \frac{S^2}{\rho^2} \sin \alpha \cos \alpha \sigma_a^2 \right\} \sigma^2 \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\text{ctg}^2 L_1 + \text{ctg}^2 L_2 - 2) + \cos 2\alpha (\text{ctg} L_1 - \text{ctg} L_2) \right\} \cdot \frac{S^2 \sigma^2}{\rho^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (2-5-14)$$

在测量工作中，常用点位方差来衡量交会点的精度，点位方差等于该点在两个互相垂直方向上的方差之和，因此，交会点  $P$  的点位方差为

$$\sigma_p^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \quad (2-5-15)$$

将(2-5-14)式代入上式，可得

$$\sigma_p^2 = \frac{S^2 \sigma^2}{\rho^2} (\text{ctg}^2 L_1 + \text{ctg}^2 L_2 + 2). \quad (2-5-16)$$

另外，图 2-8 中交会点  $P$  在  $AP$  边上边长方差  $\sigma_s^2$  称为纵向方差，而在它的垂直方向的方差  $\sigma_u^2$  称为横向方差。横向方差是由  $AP$  边的坐标方位角  $\alpha$  的方差引起的，由图 2-8 可知

$$\sigma_u^2 = S^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{\rho^2},$$

所以，点位方差也可由  $\sigma_s^2$  和  $\sigma_u^2$  来计算。即

$$\sigma_p^2 = \sigma_s^2 + \sigma_u^2 = \sigma_s^2 + \frac{S^2}{\rho^2} \sigma_\alpha^2,$$

将(2-5-12)式的结果代入上式，也得

$$\sigma_p^2 = \frac{S^2 \sigma^2}{\rho^2} (\text{ctg}^2 L_1 + \text{ctg}^2 L_2 + 2).$$

## § 2-6 权与定权的常用方法

如 § 2-3 所述，一定的观测条件就对应着一定的误差分布，而一定的误差分布就对应着一个确定的方差(或中误差)。因此，方差是表征精度的一个绝对的数字指标。为了比较各观测值之间的精度，除了可以应用方差之外，还可以通过方差之间的比例关系来衡量观测值之间的精度的高低。这种表示各观测值方差之间比例关系的数字特征称之为权。所以，权是表征精度的相对的数字指标。

在测量实际工作中，平差计算之前，精度的绝对数字指标(方差)往往是不知道的，而精度的相对的数字指标(权)却可以根据事先给定的条件予以确定，然后根据平差的结果估算出表征精度的绝对数字指标(方差)。因此，权在平差计算中将起着很重要的作用。本

节将先给出权的定义和讨论权的一些性质, 然后介绍测量工作中几种常用的定权方法。

## 一、权的定义

设有观测值  $L_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 它们的方差为  $\sigma_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$ , 如选定任一常数  $\sigma_0$ , 则定义

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (2-6-1)$$

并称  $p_i$  为观测值  $L_i$  的权。

由权的定义式(2-6-1)可以写出各观测值的权之间的比例关系为

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} : \dots : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \dots : \frac{1}{\sigma_n^2} \quad (2-6-2)$$

可见, 对于一组观测值, 其权之比等于相应方差的倒数之比, 这就表明, 方差(或中误差)愈小, 其权愈大; 或者说, 精度愈高, 其权愈大。因此, 权可以作为比较观测值之间的精度高低的一种指标。

就普遍情况而言, (2-6-1)式中的方差  $\sigma_i^2$ , 可以是同一个量的观测值的方差, 也可以是不同量的观测值的方差。就是说, 用权来比较各观测值之间的精度高低, 不限于是对同一量的观测值, 同样也适用于对不同量的观测值。

在式(2-6-1)中,  $\sigma_0$  是可以任意选定的常数, 例如在图 2-9 的水准网中, 已知各条路线的距离为

$$S_1 = 1.5 \text{ km},$$

$$S_2 = 2.5 \text{ km},$$

$$S_3 = 2.0 \text{ km},$$

$$S_4 = 4.0 \text{ km},$$

$$S_5 = 3.0 \text{ km}.$$

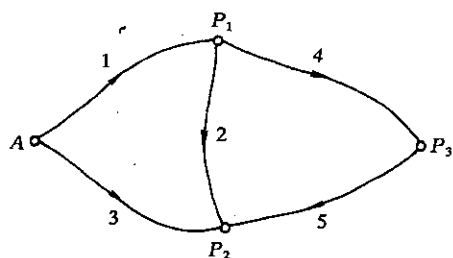


图 2-9

在该水准网中, 如果我们并不知道每公里观测高差中误差的具体数值, 而只知道每公里观测高差的精度相同, 例如, 水准网中的所有水准路线都是按同一等级的水准测量规范的技术要求进行观测的, 那么, 一般就可认为每公里观测高差的精度是相同的, 此时若假定每公里观测高差的中误差为  $\sigma_{\text{公里}}$ , 则根据协方差传播律可知, 各线路观测高差的中误差为

$$\sigma_1 = \sqrt{1.5} \sigma_{\text{公里}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{2.5} \sigma_{\text{公里}}, \quad \sigma_3 = \sqrt{2.0} \sigma_{\text{公里}},$$

$$\sigma_4 = \sqrt{4.0} \sigma_{\text{公里}}, \quad \sigma_5 = \sqrt{3.0} \sigma_{\text{公里}},$$

如令  $\sigma_0 = \sigma_5 = \sqrt{3.0} \sigma_{\text{公里}}$ , 则得

$$p_1 = 2.0, \quad p_2 = 1.2, \quad p_3 = 1.5, \quad p_4 = 0.75, \quad p_5 = 1.0.$$

可以看出, 在上述事先给定的条件之下(即每公里观测高差的精度相同, 各线路的距离不等), 由于  $\sigma_i = \sqrt{S_i} \sigma_{\text{公里}}$ , 其中  $\sigma_{\text{公里}}$  是一个定值,  $S_i$  为第  $i$  条线路的公里数, 当  $S_i$  愈小, 则

$\sigma_i$  愈小, 而其对应的权则愈大, 反之亦然。所以, 通过权的大小可以反映各观测高差的精度高低。

若另选  $\sigma_0 = \sigma_1 = \sqrt{1.5} \sigma_{\text{公里}}$ , 则得

$$p'_1 = 1.0, p'_2 = 0.6, p'_3 = 0.75, p'_4 = 0.375, p'_5 = 0.5.$$

这一组权虽然由于所取的  $\sigma_0$  值不同, 其大小与前一组不同, 但它们同样能反映各观测高差间的精度高低。

由以上例子可知, 对于一组已知中误差的观测值而言:

1. 选定了  $\sigma_0$  值, 即有一组对应的权。或者说, 有一组权, 必有一个对应的  $\sigma_0$  值。
2. 一组观测值的权, 其大小是随  $\sigma_0$  的不同而异, 但不论  $\sigma_0$  选用何值, 权之间的比例关系始终不变。如果设观测值  $L_i (i=1, 2, \dots, n)$  对于选定的  $\sigma_0$  和  $\sigma'_0$  的权分别为  $p_i$  和  $p'_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 则有

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = p'_1 : p'_2 : \dots : p'_n.$$

例如, 前述的两组权之比为

$$2.0 : 1.2 : 1.5 : 0.75 : 1.0 = 1.0 : 0.6 : 0.75 : 0.375 : 0.5.$$

3. 为了使权能起到比较精度高低的作用, 在同一问题中只能选定一个  $\sigma_0$  值, 不能同时选用几个不同的  $\sigma_0$  值, 否则就破坏了权之间的比例关系。

4. 只要事先给定了一定的条件, 例如, 已知每公里观测高差的精度相同和各水准线路的公里数, 则不一定要知道每公里观测高差精度的具体数值, 就可以确定出权的数值。

由以上讨论可知, 方差是用来反映观测值的绝对精度的, 而权仅是用来比较各观测值相互之间精度高低的比例数。因而, 权的意义, 不在于它们本身数值的大小, 而重要的是它们之间所存在的比例关系。

## 二、单位权中误差

从以上所述来看,  $\sigma_0$  只起着一个比例常数的作用, 但  $\sigma_0$  值一经选定, 它还有着具体的含义。

在上述的水准网的前一组权  $p_i$  中, 因令  $\sigma_0 = \sigma_5$ , 实际上就是以  $h_5$  的精度作为标准, 其它观测高差的精度都是和它进行比较。因此,  $h_5$  的权  $p_5 = 1$ , 而其它的观测高差的权, 则是以  $p_5$  作为单位而确定出来的。同样, 在后一组权  $p'_i$  中, 因令  $\sigma_0 = \sigma_1$ , 故  $p'_1 = 1$ , 其它观测高差的权, 就是以  $p'_1$  作为单位而确定出来的。由此可见, 凡是中误差等于  $\sigma_0$  的观测值, 其权必然等于 1; 或者说, 权为 1 的观测值的中误差必然等于  $\sigma_0$ 。因此, 通常称  $\sigma_0$  为单位权中误差, 而  $\sigma_0^2$  称为单位权方差或方差因子, 把权等于 1 的观测值, 称为单位权观测值。例如, 在例中, 前一组权中的  $p_5 = 1$ , 此时是令  $\sigma_0 = \sigma_5$ , 所以  $\sigma_5$  就是单位权中误差,  $h_5$  就是单位权观测值; 而后一组权中的  $p'_1 = 1$ , 此时是令  $\sigma_0 = \sigma_1$ , 所以  $\sigma_1$  就是单位权中误差,  $h_1$  就是单位权观测值。

因为  $\sigma_0$  可以是任意选定的某一常数, 故所选定的  $\sigma_0$  也可能不等于某一个具体观测值的中误差。例如, 对于上述水准网, 若选定  $\sigma_0 = \sqrt{6.0} \sigma_{\text{公里}}$ , 则可求得一组权为

$$p_1^* = 4.0, p_2^* = 2.4, p_3^* = 3.0, p_4^* = 1.5, p_5^* = 2.0,$$

这时,  $\sigma_0$  不再是 5 个观测值中某一个的中误差。因而, 也就不出现数值为 1 的权。所以为了实际的需要或计算上的方便, 可以选取某一假定的观测值作为单位权观测值, 以这个假定观测值的中误差作为单位权中误差。如这里选  $\sigma_0 = \sqrt{6.0} \sigma_{\text{公里}}$ , 它是代表路线长度为 6 公里的观测高差的中误差, 因此, 路线长度为 6 公里的观测高差就是单位权观测值, 它的中误差就是单位权中误差。

在确定一组同类元素的观测值的权时, 所选取的单位权中误差  $\sigma_0$  的单位, 一般是与观测值中误差的单位相同的, 由于权是单位权中误差平方与观测值中误差平方之比, 所以, 权一般是一组无量纲的数值, 也就是说, 在这种情况下权是没有单位的。但如果需要确定权的观测值(或它们的函数)包含有两种以上的不同类型元素时, 情况就不同了。例如, 要确定其权的观测值(或它们的函数)包含有角度和长度, 它们的中误差的单位分别为“秒”和“毫米”, 若选取的单位权中误差的单位是秒, 即与角度观测值之中误差单位相同, 那么, 各个角度观测值的权是无量纲(或无单位)的, 而长度观测值的权的量纲则为“秒<sup>2</sup>/mm<sup>2</sup>”。这种情况在平差计算中是常常会遇到的。

### 三、测量上确定权的常用方法举例

前面已经提到, 在测量实际工作中, 往往是要根据事先给定的条件, 先确定出各观测值的权, 也就是先确定它们精度的相对数字指标, 然后通过平差计算, 一方面求出各观测值的最可靠值, 另一方面求出它们精度的绝对数字指标。下面将从权的定义式(2-6-1)及(2-6-2)出发, 对于测量作业中经常遇到的几种情况, 导出其实用的定权公式。这些定权方法称为定权的常用方法。

#### 1. 水准测量的权

设在图 2-10 所示的水准网中, 有  $n(=7)$  条水准路线, 现沿每一条路线测定两点间的高差, 得各路线的观测高差为  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , 各路线的测站数分别为  $N_1, N_2, \dots, N_n$ 。

设每一测站观测高差的精度相同, 其中误差均为  $\sigma_{\text{站}}$ , 则由(2-5-2)式知, 各路线观测高差的中误差为

$$\sigma_i = \sqrt{N_i} \sigma_{\text{站}} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2-6-3)$$

如以  $p_i$  代表  $h_i$  的权, 并设单位权中误差为

$$\sigma_0 = \sqrt{C} \sigma_{\text{站}}, \quad (2-6-4)$$

则将(2-6-3)和(2-6-4)代入(2-6-1)可得

$$p_i = \frac{C}{N_i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2-6-5)$$

且有关系

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = \frac{C}{N_1} : \frac{C}{N_2} : \dots : \frac{C}{N_n} = \frac{1}{N_1} : \frac{1}{N_2} : \dots : \frac{1}{N_n}, \quad (2-6-6)$$

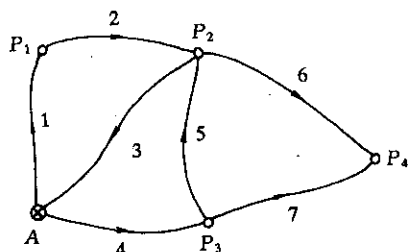


图 2-10

即当各测站的观测高差为同精度时,各路线的权与测站数成反比。

由(2-6-5)式可知,如果某段高差的测站数  $N_i=1$ , 则它的权为

$$p_i=C;$$

而当  $p_i=1$  时,有

$$N_i=C.$$

可见,常数  $C$  有两个意义:(1) $C$  是 1 测站的观测高差的权;(2) $C$  是单位权观测高差的测站数。

例[2-8] 设在图 2-10 的水准网中,已知各路线的测站数分别为 40, 25, 50, 20, 40, 50, 25。试确定各路线所测得的高差的权。

解:设取  $C=100$ , 即取 100 个测站的观测高差为单位权观测值,由(2-6-5)式得

$$p_1=\frac{100}{40}=2.5, \quad p_2=\frac{100}{25}=4.0, \quad p_3=\frac{100}{50}=2.0,$$

$$p_4=\frac{100}{20}=5.0, \quad p_5=\frac{100}{40}=2.5, \quad p_6=\frac{100}{50}=2.0$$

$$p_7=\frac{100}{25}=4.0.$$

在水准测量中,如已知一公里的观测高差的中误差均相等,设为  $\sigma_{\text{公里}}$ , 又已知各路线的距离为  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , 则由(2-5-5)式知各路线观测高差的中误差为

$$\sigma_i=\sqrt{S_i}\sigma_{\text{公里}}. \quad (2-6-7)$$

若令

$$\sigma_0=\sqrt{C}\sigma_{\text{公里}}, \quad (2-6-8)$$

则得

$$p_i=\frac{C}{S_i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2-6-9)$$

$$p_1:p_2:\dots:p_n=\frac{C}{S_1}:\frac{C}{S_2}:\dots:\frac{C}{S_n}=\frac{1}{S_1}:\frac{1}{S_2}:\dots:\frac{1}{S_n} \quad (2-6-10)$$

即当每公里观测高差为同精度时,各路线观测高差的权与距离的公里数成反比。

由(2-6-9)式可知,若  $S_i=1$ , 则  $p_i=C$ ; 而当  $p_i=1$  时,  $S_i=C$ , 可见,这里的  $C$  的意义是:(1) $C$  是 1 公里观测高差的权;(2) $C$  是单位权观测高差的线路公里数。

例[2-9] 在图 2-11 中,各水准路线的长度为

$$S_1=3.0\text{km}, S_2=6.0\text{km}, S_3=2.0\text{km}, S_4=1.5\text{km}.$$

设每公里观测高差的精度相同,已知第 4 条路线观测高差的权为 3,试求其它各路线观测高差之权。

$$\text{解:因 } p_4=\frac{C}{S_4},$$

所以

$$C=p_4S_4=1.5\times 3=4.5,$$

故有



$$p_1 = \frac{C}{S_1} = \frac{4.5}{3.0} = 1.50,$$

$$p_2 = \frac{C}{S_2} = \frac{4.5}{6.0} = 0.75,$$

$$p_3 = \frac{C}{S_3} = \frac{4.5}{2.0} = 2.25.$$

在水准测量中,究竟用水准路线的距离 $S$ 定权,还是用测站数 $N$ 定权,这要视具体情况而定,一般说来,起伏不大的地区,每公里的测站数大致相同,则可按水准路线的距离定权;而在起伏较大的地区,每公里的测站数相差较大,则按测站数定权。

## 2. 同精度观测值的算术平均值的权

设有 $L_1, L_2, \dots, L_n$ , 它们分别是 $N_1, N_2, \dots, N_n$ 次同精度观测值的平均值,若每次观测的中误差均为 $\sigma$ ,则由(2-5-7)式可知, $L_i$ 的中误差为

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{N_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2-6-11)$$

令

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{C}}, \quad (2-6-12)$$

则由权的定义可得 $L_i$ 的权 $p_i$ 为

$$p_i = \frac{N_i}{C} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2-6-13)$$

即由不同次数的同精度观测值所算得的算术平均值,其权与观测次数成正比。

若令 $N_i=1$ ,则 $C=\frac{1}{p_i}$ ;而当 $p_i=1$ , $C=N_i$ 。所以 $C$ 也有两个意义:(1) $C$ 是一次观测的权倒数;(2) $C$ 是单位权观测值的观测次数。

显然 $C$ 可以任意假定,但不论 $C$ 取何值,权的比例关系不会改变, $C$ 一经确定,单位权观测值也就确定了。

以上几种常用的定权方法的共同特点是,虽然它们都是以权的定义式(2-6-1)为依据的,但是在实际定权时,并不需要知道各观测值方差的具体数字,而只要应用测站数、公里数、...等等就可以定权了。要强调的是,在用这些方法定权时,必须注意它们的前提条件,例如,用测站数来定观测高差的权时,必须满足“每测站观测高差的精度均相等”这一前提条件,否则,就不能应用这个定权公式。

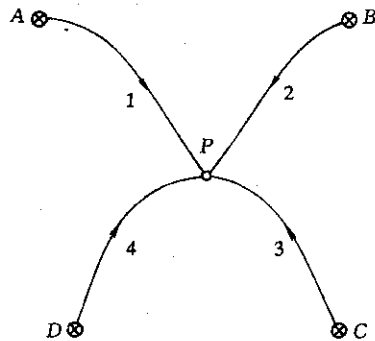


图 2-11

## § 2-7 协因数和协因数传播律

权是一种比较观测值之间精度高低的指标,当然,也可以用权来比较各个观测值函数之间的精度。因此,同§ 2-4 一样,也存在根据观测值的权来求观测值函数权的问题。

在 § 2-4 中是通过协方差的运算规律导出协方差传播律的, 由于权与方差成反比, 所以, 可以通过协方差传播律来导出求观测值函数之权的计算法则。但在导出这种法则之前, 还需要阐述协因数 and 协因数阵的概念。

## 一、协因数与协因数阵

由权的定义知道, 观测值的权与它的方差成反比。设有观测值  $L_i$  和  $L_j$ , 它们的方差分别为  $\sigma_i^2$  和  $\sigma_j^2$ , 它们之间的协方差为  $\sigma_{ij}$ , 我们令

$$\left. \begin{aligned} Q_{ii} &= \frac{1}{p_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \\ Q_{jj} &= \frac{1}{p_j} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_j^2} \\ Q_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2} \end{aligned} \right\}, \quad (2-7-1)$$

或写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma_0^2 Q_{ii} \\ \sigma_j^2 &= \sigma_0^2 Q_{jj} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_0^2 Q_{ij} \end{aligned} \right\}, \quad (2-7-2)$$

称  $Q_{ii}$  和  $Q_{jj}$  分别为  $L_i$  和  $L_j$  的协因数或权倒数, 而称  $Q_{ij}$  为  $L_i$  关于  $L_j$  的协因数或相关权倒数。在式(2-7-1)和(2-7-2)中,  $\sigma_0$  仍然是单位权中误差。

由(2-7-1)或(2-7-2)式可知, 观测值的协因数  $Q_{ii}$  和  $Q_{jj}$  (权倒数)与方差成正比, 而协因数  $Q_{ij}$  (相关权倒数)与协方差成正比。容易理解, 协因数  $Q_{ii}$ ,  $Q_{jj}$  与权  $p_i$  和  $p_j$  有类似的作用, 它们是比较观测值精度高低的一种指标; 而协因数  $Q_{ij}$  是比较观测值之间相关程度的一种指标。

现在我们把协因数的概念扩充, 假定有观测值向量(或者是观测值函数向量)  $X$  和  $Y$ , 它们的方差阵分别为  $D_{XX}$  和  $D_{YY}$ ,  $X$  关于  $Y$  的互协方差阵为  $D_{XY}$ , 令

$$\left. \begin{aligned} Q_{XX} &= \frac{1}{\sigma_0^2} D_{XX} \\ Q_{YY} &= \frac{1}{\sigma_0^2} D_{YY} \\ Q_{XY} &= \frac{1}{\sigma_0^2} D_{XY} \end{aligned} \right\}, \quad (2-7-3)$$

或写为

$$\left. \begin{aligned} D_{XX} &= \sigma_0^2 Q_{XX} \\ D_{YY} &= \sigma_0^2 Q_{YY} \\ D_{XY} &= \sigma_0^2 Q_{XY} \end{aligned} \right\}, \quad (2-7-4)$$

则称  $Q_{XX}$  和  $Q_{YY}$  分别为  $X$  和  $Y$  的协因数阵, 而称  $Q_{XY}$  为  $X$  关于  $Y$  的互协因数阵。由于协因数阵  $Q_{XX}$  中的对角元素就是各个  $X_i$  的权倒数, 它的非对角元素是  $X_i$  关于  $X_j (i=j)$  的相关

权倒数；而  $Q_{XY}$  中的元素就是  $X_i$  关于  $Y_j$  的相关权倒数，所以，也称  $Q_{XX}$  和  $Q_{YY}$  为  $X$  和  $Y$  的权逆阵，而称互协因数阵  $Q_{XY}$  为  $X$  关于  $Y$  的相关权逆阵。因  $D_{YX} = D_{XY}^T$ ，所以  $Q_{YX} = Q_{XY}^T$ 。当  $Q_{XY} = Q_{YX}^T = 0$  时， $X$  和  $Y$  也是互相独立的观测向量。

若记

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

则  $Z$  的方差阵  $D_{ZZ}$  和协因数阵(权逆阵)  $Q_{ZZ}$  为

$$\left. \begin{aligned} D_{ZZ} &= \begin{bmatrix} D_{XX} & D_{XY} \\ D_{YX} & D_{YY} \end{bmatrix}, \\ Q_{ZZ} &= \begin{bmatrix} Q_{XX} & Q_{XY} \\ Q_{YX} & Q_{YY} \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (2-7-5)$$

且有

$$\left. \begin{aligned} Q_{ZZ} &= \frac{1}{\sigma_0^2} D_{ZZ}, \\ D_{ZZ} &= \sigma_0^2 Q_{ZZ}. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-6)$$

设有独立观测值  $L_i (i=1, 2, \dots, n, \text{下同})$ ，其方差为  $\sigma_i^2$ ，权为  $p_i$ ，单位权方差为  $\sigma_0^2$ ，现组成向量和矩阵

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}_{n,1}, \quad D_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{n,n}, \quad P_{LL} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}_{n,n},$$

则由(2-7-3)式知， $L$  的协因数阵为

$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} D_{LL} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}, \quad (2-7-7)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} P_{LL} &= Q_{LL}^{-1}, \\ P_{LL} Q_{LL} &= I. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-8)$$

可见， $P_{LL}$  是由独立观测值  $L_i$  的权  $p_i$  构成的对角阵，且  $P_{LL}$  与权逆阵(协因数阵)  $Q_{LL}$  互为逆阵，通常称  $P_{LL}$  为  $L$  的权阵。

类似地，对相关的观测向量  $X$ ，我们令

$$\left. \begin{aligned} P_{XX} &= Q_{XX}^{-1}, \\ P_{XX} Q_{XX} &= I. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-9)$$

也称  $P_{xx}$  为  $X$  的权阵, 但需要指出的是, 当  $Q_{xx}$  是非对角阵时, 权阵  $P_{xx}$  的对角元素不再是  $x_i$  的权了。权阵  $P_{xx}$  的各个元素也不再有权的意义了。但是, 相关观测向量的权阵在平差计算的公式中, 也能起到同独立观测向量的权阵一样的作用。这些内容还将在第七章中介绍。

## 二、协因数传播律

由协因数和协因数阵的定义可知, 协因数阵可以由协方差阵乘上常数  $1/\sigma_0^2$  得到; 而且观测向量的协因数阵的对角元素是相应的权倒数。因此, 有了协因数和协因数阵的概念, 根据协方差传播律, 可以方便地得到由观测向量的协因数阵求其函数的协因数阵的计算公式从而也就得到了函数的权。

设有观测值  $X$ , 已知它的协因数阵为  $Q_{xx}$ , 又设有  $X$  的函数  $Y$  和  $Z$

$$\begin{aligned} Y &= FX + F^0, \\ Z &= KX + K^0. \end{aligned} \quad (2-7-10)$$

下面根据协方差传播律(2-4-17)和(2-4-22)式, 来导出由  $Q_{xx}$  求  $Q_{yy}$ 、 $Q_{zz}$  和  $Q_{yz}$  的公式。

假定  $X$  的方差阵为  $D_{xx}$ , 单位权方差为  $\sigma_0^2$ , 则按协方差传播律(2-4-17)知,  $Y$  和  $Z$  的协方差阵为

$$\left. \begin{aligned} D_{yy} &= FD_{xx}F^T, \\ D_{zz} &= KD_{xx}K^T, \end{aligned} \right\} \quad (2-7-11)$$

由(2-4-22)式知  $Y$  关于  $Z$  的互协方差阵为

$$D_{yz} = FD_{xx}K^T \quad (2-7-12)$$

而由(2-7-4)式知

$$\left. \begin{aligned} D_{xx} &= \sigma_0^2 Q_{xx}, & D_{yy} &= \sigma_0^2 Q_{yy}, \\ D_{zz} &= \sigma_0^2 Q_{zz}, & D_{yz} &= \sigma_0^2 Q_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (2-7-13)$$

将上式代入(2-7-11)及(2-7-12)式, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0^2 Q_{yy} &= F(\sigma_0^2 Q_{xx})F^T, \\ \sigma_0^2 Q_{zz} &= K(\sigma_0^2 Q_{xx})K^T, \end{aligned} \right\} \quad (2-7-14)$$

$$\sigma_0^2 Q_{yz} = F(\sigma_0^2 Q_{xx})K^T. \quad (2-7-15)$$

再将(2-7-14)和(2-7-15)两式都除以  $\sigma_0^2$ , 即得

$$\left. \begin{aligned} Q_{yy} &= FQ_{xx}F^T, \\ Q_{zz} &= KQ_{xx}K^T, \\ Q_{yz} &= FQ_{xx}K^T. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-16)$$

这就是观测值的协因数阵与其线性函数的协因数阵的关系式, 通常称之为协因数传播律, 或称之为权逆阵传播律。(2-7-16)式在形式上与协方差传播律相同, 所以将协方差传播律与协因数传播律合称为广义传播律。

如果  $Y$  和  $Z$  的各个分量都是  $X$  的非线性函数

[illegible]

也可按 § 2-4 的方法求  $Y$  和  $Z$  的全微分, 得

$$\left. \begin{aligned} dY &= FdX \\ dZ &= KdX \end{aligned} \right\}, \quad (2-7-18)$$

式中

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_r}{\partial X_1} & \frac{\partial F_r}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_r}{\partial X_n} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_t}{\partial X_1} & \frac{\partial f_t}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_t}{\partial X_n} \end{bmatrix},$$

则 Y、Z 的协因数阵  $Q_{YY}$ 、 $Q_{ZZ}$ 、 $Q_{YZ}$  也可按 (2-7-16) 式求得。

对于独立观测值 $L$ ，假定各 $L_i$ 的权为 $p_i$ ，则 $L$ 的权阵为对角阵

$$P_{LL} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix},$$

它的协因数阵(权逆阵)也是对角阵

$$Q_{LL} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}.$$

如果有函数

$$Z=f(L_1, L_2, \cdots, L_n), \quad (2-7-19)$$

全微分得

$$dZ = \frac{\partial f}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2} dL_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial L_n} dL_n = K dL, \quad (2-7-20)$$

由协因数传播律(2-7-16)式可得

$$Q_{zz} = K Q_{LL} K^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial L_1} & \frac{\partial f}{\partial L_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial L_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{P_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{P_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{P_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial L_1} \\ \frac{\partial f}{\partial L_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial L_n} \end{bmatrix},$$

展开后得纯量形式为

$$\frac{1}{P_z} = \left( \frac{\partial f}{\partial L_1} \right)^2 \frac{1}{p_1} + \left( \frac{\partial f}{\partial L_2} \right)^2 \frac{1}{p_2} + \cdots + \left( \frac{\partial f}{\partial L_n} \right)^2 \frac{1}{p_n}. \quad (2-7-21)$$

这就是独立观测值权倒数与其函数的权倒数之间的关系式，通常称之为权倒数传播律。它与(2-4-13)式的形式相同，显然，它是协因数传播律的一种特殊情况。

由于协因数传播律与协方差传播律在形式上完全相同，因此，应用协因数传播律的实际步骤也与应用协方差传播律的步骤相同，这里就不多述了。

例[2-10] 已知独立观测值  $L_i (i=1, 2, \cdots, n)$  的权均为  $p$ ，试求算术平均值  $X = \frac{[L]}{n}$  的权  $p_x$ 。

$$\text{解: } X = \frac{[L]}{n} = \frac{1}{n} L_1 + \frac{1}{n} L_2 + \cdots + \frac{1}{n} L_n,$$

由权倒数传播律得

$$\frac{1}{p_x} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{p} = \frac{1}{np},$$

所以

$$p_x = np, \quad (2-7-22)$$

即算术平均值之权等于观测值之权的  $n$  倍。

当各个观测值为单位权观测值，即令  $p=1$  时，则  $p_x=n$ 。

例[2-11] 已知独立观测值  $L_i$  的权为  $p_i (i=1, 2, \cdots, n)$ ，试求  $x = \frac{[pL]}{p}$  的权  $p_x$ 。

解：

$$x = \frac{[pL]}{[p]} = \frac{1}{[p]} (p_1 L_1 + p_2 L_2 + \cdots + p_n L_n), \quad (2-7-23)$$

应用权倒数传播律得

$$\frac{1}{p_x} = \frac{1}{[p]^2} \left( p_1^2 \frac{1}{p_1} + p_2^2 \frac{1}{p_2} + \cdots + p_n^2 \frac{1}{p_n} \right) = \frac{1}{[p]},$$

所以

$$p_x = [p]. \quad (2-7-24)$$

一般称(2-7-23)式的  $x$  为带权平均值，因此带权平均值的权等于各观测值权之和。若  $p_1=p_2=\cdots=p_n=p$  时，则由(2-7-24)式得  $p_x=np$ ，这就是(2-7-22)式中的结果。可见，例[2-10]

是本例的一种特殊情况。

例[2-12] 已知观测向量  $X_1$  和  $X_2$  的协因数阵  $Q_{X_1X_1}$ 、 $Q_{X_2X_2}$  和互协因数阵  $Q_{X_1X_2}$  或写为

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad Q_{XX} = \begin{bmatrix} Q_{X_1X_1} & Q_{X_1X_2} \\ Q_{X_2X_1} & Q_{X_2X_2} \end{bmatrix},$$

设有函数

$$\begin{cases} Y = FX_1, \\ Z = KX_2, \end{cases} \quad (2-7-25)$$

试求  $Y$  关于  $Z$  的协因数阵  $Q_{YZ}$ 。

解: (2-7-25) 式可写为

$$\begin{cases} Y = [F \quad 0] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \\ Z = [0 \quad K] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \end{cases}$$

应用协因数传播律得

$$\begin{aligned} Q_{YZ} &= [F \quad 0] \begin{bmatrix} Q_{X_1X_1} & Q_{X_1X_2} \\ Q_{X_2X_1} & Q_{X_2X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ K^T \end{Bmatrix} \\ &= [FQ_{X_1X_1} \quad FQ_{X_1X_2}] \begin{Bmatrix} 0 \\ K^T \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

即有

$$Q_{YZ} = FQ_{X_1X_2}K^T, \quad (2-7-26)$$

上式也可以作为协因数传播律的一个公式应用。不难理解, 若已知  $X_1$  关于  $X_2$  的协方差  $D_{X_1X_2}$ , 也可得到  $Y$  关于  $Z$  的协方差阵为

$$D_{YZ} = FD_{X_1X_2}K^T. \quad (2-7-27)$$

例[2-13] 设已知观测值  $L$  的协因数阵为  $Q_{LL}$ , 又设

$$\begin{cases} V = Q_{LL}A^TK, \\ AQ_{LL}A^TK + W = 0, \\ W = AL + A_0, \end{cases} \quad (2-7-28)$$

式中  $AQ_{LL}A^T$  为对称方阵, 且为可逆阵。试求  $K$  和  $V$  的协因数阵  $Q_{KK}$ 、 $Q_{VV}$  及  $K$  关于  $V$  的互协因数阵  $Q_{KV}$ 。

解: 应用协因数传播律, 由 (2-7-28) 之第三式可得  $W$  的协因数阵为

$$Q_{WW} = AQ_{LL}A^T. \quad (2-7-29)$$

又由 (2-7-28) 式的第二式得

$$K = -(AQ_{LL}A^T)^{-1}W,$$

所以

$$Q_{KK} = (AQ_{LL}A^T)^{-1}Q_{WW}(AQ_{LL}A^T)^{-1}$$

即得

$$= (AQ_{LL}A^T)^{-1}(AQ_{LL}A^T)(AQ_{LL}A^T)^{-1},$$

$$Q_{KK} = (AQ_{LL}A^T)^{-1},$$

(2-7-3)

又由(2-7-28)之第一式按协因数传播律得

$$\left. \begin{aligned} Q_{VV} &= Q_{LL}A^T Q_{KK} (Q_{LL}A^T)^T = Q_{LL}A^T (AQ_{LL}A^T)^{-1} AQ_{LL}, \\ Q_{KV} &= I \cdot Q_{KK} (Q_{LL}A^T)^T = (AQ_{LL}A^T)^{-1} AQ_{LL}. \end{aligned} \right\} \quad (2-7-3)$$

## § 2-8 由真误差计算中误差及其实际应用

本节将阐述两方面的内容,一是如何利用一组不同精度的真误差来计算中误差的估值另一个是,通过实例来说明这些估值公式的实际应用。

### 一、用不同精度的真误差计算单位权中误差的基本公式

设有一组同精度独立观测值  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , 它们的数学期望为  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , 真误差为

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , 有

$$\Delta_i = \mu_i - L_i, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2-8-1)$$

则如 § 2-3 所述, 观测值  $L_i$  的中误差为

$$\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad (2-8-2)$$

此时,  $\Delta_i$  的数学期望为  $E(\Delta_i) = 0$ , 它们的中误差也等于  $\sigma$ 。由于  $L_i$  和  $\Delta_i$  都服从正态分布, 所以可以将它们写为

$$\left. \begin{aligned} L_i &\sim N(\mu_i, \sigma^2) \\ \Delta_i &\sim N(0, \sigma^2) \end{aligned} \right\} \quad (2-8-3)$$

当  $n$  为有限值时, (2-8-2)式变成

$$\hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad (2-8-4)$$

上式就是 § 2-3 中的(2-3-5)式, 它是根据一组同精度独立的真误差计算中误差的基本公式。

现在设  $L_1, L_2, \dots, L_n$  是一组不同精度的独立观测值, 它们所对应的数学期望, 中误差和权分别为

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n,$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n,$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

对应的真误差  $\Delta_i$  仍按(2-8-1)式得到。则有

$$\left. \begin{aligned} L_i &\sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \\ \Delta_i &\sim N(0, \sigma_i^2) \end{aligned} \right\} \quad (2-8-5)$$



根据权的定义式(2-6-1)知

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}, \quad (2-8-6)$$

式中  $\sigma_0$  是单位权中误差。可见, 如果单位权中误差为已知, 则不难求得各观测值的中误差  $\sigma_i$ 。现在提出问题: 如何利用一组不同精度的真误差来求得单位权中误差  $\sigma_0$ ?

可以看到, 为了求得单位权中误差  $\sigma_0$ , 应需要得到一组精度相同且其权为 1 的独立的真误差。有了这样一组真误差, 便可由(2-8-2)或(2-8-4)式来求得  $\sigma_0$ 。我们不妨假定  $\Delta'_i$  是一组同精度, 且权为  $p_i=1$  的独立的真误差, 并设  $\Delta'_i$  与  $\Delta_i$  有关系

$$\Delta'_i = \alpha_i \Delta_i \quad (2-8-7)$$

根据协方差传播律知

$$\frac{1}{p_i} = \alpha_i^2 \frac{1}{p_i} = 1$$

可得

$$\alpha_i = \sqrt{p_i}.$$

所以,

$$\Delta'_i = \sqrt{p_i} \Delta_i \quad (2-8-8)$$

这就是说, 由(2-8-8)式得到的  $\Delta'_i$  是一组同精度且权为 1 的真误差, 由于  $\Delta_i$  是独立的真误差, 所以,  $\Delta'_i$  也是一组独立的真误差, 即有

$$\Delta'_i \sim N(0, \sigma_0^2). \quad (2-8-9)$$

根据(2-8-2)式, 就可得到

$$\sigma_0 = \sqrt{E(\Delta^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[\Delta \Delta]}{n}}. \quad (2-8-10)$$

将(2-8-8)式代入上式, 则可写出

$$\sigma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[p \Delta \Delta]}{n}}. \quad (2-8-11)$$

上式就是根据一组不同精度的真误差所定义的单位权中误差的理论值。实用上, 由于  $n$  总是有限的, 故只能求得单位权中误差  $\sigma_0$  的估值  $\hat{\sigma}_0$ , 即

$$\hat{\sigma}_0 = \pm \sqrt{\frac{[p \Delta \Delta]}{n}}. \quad (2-8-12)$$

上式就是根据一组不同精度的真误差计算单位权中误差的基本公式。

当所有观测值的权相等, 且都等于 1 时(即  $p_i=1$ ), (2-8-12)式就变成了(2-3-5)式的第二式。可见, (2-3-5)式的第二式是(2-8-12)式的一种特殊情况。

## 二、由真误差计算中误差的实际应用

在一般情况下, 由于观测量的真值(或数学期望)是不知道的, 因此真误差也就无法知道, 这时也就不能直接利用(2-3-5)或(2-8-12)式计算方差或中误差的估值了。然而, 在某

些情况下,由若干个观测量(例如角度、长度、高差等)所构成的函数,其真值有时是已知的,因而,其真误差也是可以求得的。例如一个平面三角形三内角之和的真值为  $180^\circ$ ,由三内角观测值算得的三角形闭合差,就是三内角观测值之和的真误差。这时就有可能根据闭合差(真误差)算出实际作业中所要求得的某些观测值的中误差。下面介绍在测量工作中常用的两种根据有限个真误差计算中误差(估值)的公式。

### 1. 由三角形闭合差求测角中误差

设在一个三角网中,以同精度独立观测了各三角形之内角,由各观测角值计算而得的三角形内角和的闭合差分别为  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , 它们是一组真误差,根据(2-3-5)式可知,三角形内角和的中误差为

$$\sigma_{\Sigma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[\omega\omega]}{n}}, \quad (2-8-13)$$

其中  $[\omega\omega] = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^2$ ,  $n$  为三角形的个数。

由于内角和  $\Sigma_i$  是一个三角形中三个观测角值  $\alpha_i, \beta_i$  和  $\gamma_i$  之和,即

$$\Sigma_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

根据协方差传播律可得

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{3} \sigma_{\beta},$$

式中  $\sigma_{\Sigma}$  为三角形三内角和的中误差,  $\sigma_{\beta}$  为各内角观测值的中误差。因此测角中误差为

$$\sigma_{\beta} = \frac{\sigma_{\Sigma}}{\sqrt{3}}. \quad (2-8-14)$$

当三角形个数  $n$  为有限的情况下,考虑(2-8-13)式可求得测角中误差  $\sigma_{\beta}$  的估值  $\hat{\sigma}_{\beta}$  为

$$\hat{\sigma}_{\beta} = \pm \sqrt{\frac{[\omega\omega]}{3n}}, \quad (2-8-15)$$

上式称为菲列罗公式。在三角测量中经常用它来初步评定测角的精度。

### 2. 由双观测值之差求中误差

在测量工作中,常常对一系列被观测量分别进行成对的观测。例如,在水准测量中对每段路线进行往返观测;在导线测量中每条边测量两次等。这种成对的观测,称为双观测,对同一个量所进行的两次观测称为一个观测对。

设对量  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 各测两次,得独立观测值为

$$\begin{aligned} L'_1, L'_2, \dots, L'_n \\ L''_1, L''_2, \dots, L''_n \end{aligned}$$

其中观测对  $L'_i$  和  $L''_i$  是对量  $X_i$  的两次观测的结果。又假定不同的观测对的精度不同,而同一观测对的两个观测值的精度相同,设已知各观测对的权分别为

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

即  $L'_i$  和  $L''_i$  的权都为  $p_i$ 。

对于任何一个观测量而言,不论其真值  $X_i$  的大小如何,都应有

$$X_i - X_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

即真值与它本身之差的真值为零。

现在已对每个量  $X_i$  进行了两次观测，由于观测值带有误差，因此，每个量的两个观测值的差数一般是不等于零的，设

$$L'_i - L''_i = d_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2-8-16)$$

式中的  $d_i$  是第  $i$  个观测量  $X_i$  的两次观测值的差数。既然已知各差数的真值应为零，因此， $d_i$  也就是各差数的真误差。即

$$\Delta_{d_i} = (L'_i - L''_i) - (X_i - X_i) = d_i - 0 = d_i, \quad (2-8-17)$$

按权倒数传播律可得  $d_i$  的权倒数为

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i},$$

即

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}. \quad (2-8-18)$$

这样，我们就得到了  $n$  个差数的真误差  $\Delta_{d_i}$  和它们的权  $p_{d_i}$ 。

顾及(2-8-17)和(2-8-18)式，由公式

$$\sigma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[P_d \Delta_d \Delta_d]}{n}}$$

可得由双观测值之差求单位权中误差的公式为

$$\sigma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}. \quad (2-8-19)$$

当  $n$  有限时，其估值为

$$\hat{\sigma}_0 = \pm \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}.$$

按(2-6-1)式，可求得各观测值  $L'_i$  和  $L''_i$  的中误差为

$$\sigma_{L'_i} = \sigma_{L''_i} = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{p_i}}, \quad (2-8-20)$$

而第  $i$  对观测值的平均值  $X_i = \frac{L'_i + L''_i}{2}$  的中误差为

$$\sigma_{x_i} = \frac{\sigma_{L'_i}}{\sqrt{2}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{2p_i}}, \quad (2-8-21)$$

如果所有的观测值  $L'_1, L'_2, \dots, L'_n$  和  $L''_1, L''_2, \dots, L''_n$  都是同精度的，可令它们的权  $p_i$  都等于 1，则由(2-8-19)式得各观测值的中误差为

$$\hat{\sigma}_L = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \quad (2-8-22)$$

而每对观测值的平均值  $X_i$  的中误差为

$$\sigma_{x_i} = \sigma_L \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (2-8-23)$$

其估值为

$$\hat{\sigma}_{x_i} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{n}}$$

例[2-14] 设分5段测定A、B两水准点间的高差，每段各测两次，其结果列于表2-4，试求：(1)每公里观测高差的中误差；(2)第二段观测高差的中误差；(3)第二段高差的平均值的中误差；(4)全长一次(往测或返测)观测高差的中误差及全长高差平均值的中误差。

解：令 $C=1$ ，即令一公里观测高差为单位权观测值。 $[pdd]$ 的计算列于表2-4中。

表 2-4

段 号	高 差 (m)		$d_i = L'_i - L''_i$	$d_i d_i$	距 离 $S(\text{km})$	$p_i d_i d_i = \frac{d_i d_i}{S_i}$
	$L'_i$	$L''_i$				
1	+3.248	+3.240	+8	64	4.0	16.0
2	+0.348	+0.356	-8	64	3.2	20.0
3	+1.444	+1.437	+7	49	2.0	24.5
4	-3.360	-3.352	-8	64	2.6	24.6
5	-3.699	-3.704	+5	25	3.4	7.4
[ ]					15.2	92.5

(1)单位权中误差(每公里观测高差的中误差)为

$$\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_{\text{公里}} = \pm \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{92.5}{10}} = \pm 3.0\text{mm};$$

(2)第二段观测高差的中误差为

$$\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_{\text{公里}} \sqrt{\frac{1}{p_2}} = \pm 3.0 \sqrt{3.2} = \pm 5.4\text{mm};$$

(3)第二段高差平均值的中误差为

$$\hat{\sigma}_{x_2} = \frac{\hat{\sigma}_2}{\sqrt{2}} = \pm 3.8\text{mm};$$

(4)全长一次观测高差的中误差为

$$\hat{\sigma}_{\text{全}} = \hat{\sigma}_{\text{公里}} \sqrt{[S]} = \pm 3.0 \sqrt{15.2} = \pm 11.7\text{mm};$$

全长高差平均值的中误差为

$$\hat{\sigma}_{x_{\text{全}}} = \frac{\hat{\sigma}_{\text{全}}}{\sqrt{2}} = \frac{\pm 11.7}{\sqrt{2}} = \pm 8.3\text{mm}.$$

## § 2-9 系统误差的传播

前几节所讨论的问题，是以观测值只含有偶然误差为前提的。也就是说，要求在测量过程中设法消除系统误差，但由于种种原因，观测成果中总是或多或少地存在残余的系统误差，这些系统误差的数值和符号随着观测条件的变化而变化。

由于系统误差产生的原因多种多样，它们的性质各不相同，因而只能对不同的具体情

况采用不同的处理方法,不可能得到某些通用的处理方法。所以,对于残余的系统误差对成果的影响,也不可能有严密的计算方法。这里仅讨论估计系统误差的概念和一种在某些情况下可以应用的近似估算方法。

## 一、观测值的系统误差与综合误差的方差

设有观测值 $L$ , 观测量的真值为 $\tilde{L}$ , 则 $L$ 的综合误差 $\Omega$ 可定义为

$$\Omega = \tilde{L} - L$$

如果综合误差 $\Omega$ 中只包含有偶然误差 $\Delta$ , 由偶然误差的特性可知其数学期望应为 $E(\Omega) = E(\Delta) = 0$ , 如果 $\Omega$ 中除包含偶然误差 $\Delta$ 外, 还包含系统误差 $\epsilon$ , 即

$$\Omega = \Delta + \epsilon = \tilde{L} - L \quad (2-9-1)$$

此时, 由于系统误差 $\epsilon$ 不是随机变量, 所以 $\Omega$ 的数学期望为

$$E(\Omega) = E(\Delta) + \epsilon = \epsilon \neq 0. \quad (2-9-2)$$

又因为

$$\epsilon = E(\Omega) = E(\tilde{L} - L) = \tilde{L} - E(L), \quad (2-9-3)$$

所以, $\epsilon$ 也就是观测值 $L$ 的数学期望对于观测量真值的偏差值, 观测值 $L$ 含的系统误差愈小, 即 $\epsilon$ 愈小, 则 $L$ 的数学期望对于真值的偏差值愈小, 或者说 $L$ 愈准确。因此, 有时也称 $\epsilon = E(\Omega)$ 为 $L$ 的准确度。

当观测值 $L$ 中既存在偶然误差 $\Delta$ , 又存在残余的系统误差 $\epsilon$ 时, 常常用观测值的综合误差方差 $E(\Omega^2)$ 来表征观测值的可靠性。因为

$$\Omega^2 = \Delta^2 + 2\epsilon\Delta + \epsilon^2,$$

其中系统误差 $\epsilon$ 是非随机量, 所以综合误差的方差为

$$D_{LL} = E(\Omega^2) = E(\Delta^2) + 2\epsilon E(\Delta) + \epsilon^2.$$

又因 $E(\Delta) = 0$ , 而 $E(\Delta^2)$ 是由偶然误差产生的方差 $\sigma^2$ , 故有

$$D_{LL} = E(\Omega^2) = \sigma^2 + \epsilon^2. \quad (2-9-4)$$

即观测值的综合误差方差 $D_{LL}$ 等于它的方差 $\sigma^2$ 与系统误差的平方 $\epsilon^2$ 之和。

当系统误差 $\epsilon$ 为中误差 $\sigma$ 的五分之一, 即当 $\epsilon = \sigma/5$ 时, 则由(2-9-4)式得

$$\sigma_L = \sqrt{D_{LL}} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{25}} = \sqrt{1.04}\sigma = 1.02\sigma,$$

同样地, 若 $\epsilon = \sigma/3$ 时, 则有

$$\sigma_L = \sqrt{D_{LL}} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{9}} = \sqrt{1.11}\sigma = 1.05\sigma.$$

由此可见, 在这种情况下, 如果不考虑系统误差的影响, 对于前者, 所求得的 $\sigma_L$ 将减小2%, 对于后者, 将减小5%。因此, 在实用上, 如果系统误差部分是偶然误差部分的三分之一或者更小时, 则可将系统误差的影响忽略不计。

## 二、系统误差的传播

由于某些观测值残余的系统误差的影响, 使观测值函数也产生系统误差, 称之为系统

误差的传播。

设已知观测值  $L_i (i=1, 2, \dots, n)$  的系统误差为

$$\epsilon_i = E(\Omega_i) = E(L_i) - \bar{L}_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2-9-5)$$

式中  $\bar{L}_i$  和  $\Omega_i$  是  $L_i$  所对应的观测量的真值和综合误差。又设有线性函数

$$Z = k_1 L_1 + k_2 L_2 + \dots + k_n L_n + k_0, \quad (2-9-6)$$

由上式容易写出函数的综合误差  $\Omega_Z$  与各个  $L_i$  的综合误差  $\Omega_i$  之间的关系式为

$$\Omega_Z = k_1 \Omega_1 + k_2 \Omega_2 + \dots + k_n \Omega_n. \quad (2-9-7)$$

根据数学期望的运算规律可知

$$\begin{aligned} E(\Omega_Z) &= E(k_1 \Omega_1) + E(k_2 \Omega_2) + \dots + E(k_n \Omega_n) \\ &= k_1 E(\Omega_1) + k_2 E(\Omega_2) + \dots + k_n E(\Omega_n), \end{aligned}$$

所以得

$$\epsilon_Z = E(\Omega_Z) = [k\epsilon]. \quad (2-9-8)$$

上式就是线性函数的系统误差的传播公式。

若函数  $Z$  是非线性形式，即

$$Z = f(L_1, L_2, \dots, L_n), \quad (2-9-9)$$

也可以用它们的微分关系代替它们的误差之间的关系，即有

$$\Omega_Z = \frac{\partial Z}{\partial L_1} \Omega_1 + \frac{\partial Z}{\partial L_2} \Omega_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial L_n} \Omega_n. \quad (2-9-10)$$

令

$$k_i = \frac{\partial Z}{\partial L_i} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

则仍有

$$\Omega_Z = k_1 \Omega_1 + k_2 \Omega_2 + \dots + k_n \Omega_n.$$

于是，同样可以得到(2-9-8)式的关系。因此，(2-9-8)式也就是一般函数的系统误差的传播公式。

### 三、系统误差与偶然误差的联合传播

当观测值中同时含有偶然误差和残余的系统误差时，还有必要考虑它们对观测值的函数的联合影响问题。这里只讨论独立观测值的情况。

设有函数

$$Z = k_1 L_1 + k_2 L_2, \quad (2-9-11)$$

其中  $L_1$  和  $L_2$  是独立观测值，假定它们的综合误差为

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \Delta_1 + \epsilon_1, \\ \Omega_2 &= \Delta_2 + \epsilon_2, \end{aligned} \right\},$$

其中  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  和  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$  分别为  $L_1$  和  $L_2$  包含的偶然误差和系统误差，并假定  $L_1$ 、 $L_2$  由偶然误差产生的方差为  $\sigma_1^2$ 、 $\sigma_2^2$ 。

由(2-9-11)式可以写出它的误差关系

$$\begin{aligned}\Omega_Z &= k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 \\ &= (k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2) + (k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2),\end{aligned}$$

将等式两边平方，得

$$\begin{aligned}\Omega_Z^2 &= k_1^2\Delta_1^2 + k_2^2\Delta_2^2 + 2k_1k_2\Delta_1\Delta_2 + (k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2)^2 \\ &\quad + 2(k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2)(k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2),\end{aligned}$$

再取数学期望，则函数  $Z$  的综合误差方差为

$$\begin{aligned}D_{ZZ} &= E(\Omega_Z^2) = k_1^2E(\Delta_1^2) + k_2^2E(\Delta_2^2) + 2k_1k_2E(\Delta_1)E(\Delta_2) \\ &\quad + 2(k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2)(k_1E(\Delta_1) + k_2E(\Delta_2)) + (k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2)^2,\end{aligned}$$

再顾及

$$\left. \begin{aligned}E(\Delta_1) &= E(\Delta_2) = 0, \\ E(\Delta_1^2) &= \sigma_1^2, \quad E(\Delta_2^2) = \sigma_2^2.\end{aligned} \right\},$$

所以得

$$D_{ZZ} = E(\Omega_Z^2) = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + (k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2)^2 \quad (2-9-12)$$

不难将上式的结果加以推广，对于线性函数

$$Z = k_1L_1 + k_2L_2 + \cdots + k_nL_n,$$

它们的综合误差之间的关系为

$$\Omega_Z = k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \cdots + k_n\Omega_n,$$

则  $Z$  的综合误差方差为

$$D_{ZZ} = E(\Omega_Z^2) = [k^2\sigma^2] + [k\epsilon]^2. \quad (2-9-13)$$

当  $Z$  为非线性函数时，亦可用它们的微分关系代替误差关系。此时，以上两式中的系数  $k_i$  即为偏导数  $\frac{\partial Z}{\partial L_i}$ 。

当上式中的  $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$  时，(2-9-13)式可写成

$$D_{ZZ} = [\sigma^2] + [\epsilon]^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_n)^2. \quad (2-9-14)$$

此即一般文献中称为均方误差的计算式。

例[2-15] 在用钢尺量距时，共量了  $n$  个尺段，设已知每一尺段的读数和照准中误差为  $m$ ，而检定误差为  $\epsilon$ ，求全长的综合中误差。

解：量距的总长为

$$S = L_1 + L_2 + \cdots + L_n,$$

其中

$$L_1 = L_2 = \cdots = L_n = L,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = \sigma,$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots = \epsilon_n = \epsilon.$$

由(2-9-13)知，全长的综合中误差为

$$\sigma_S^2 = n\sigma^2 + (n\epsilon)^2,$$

又因  $n = \frac{S}{L}$ ，所以

$$M_S^2 = \frac{S}{L}\sigma^2 + \frac{S^2}{L^2}\epsilon^2.$$

### 第三章 平差数学模型与最小二乘原理

本章介绍测量平差的基本概念，简要地给出基本平差方法的数学模型，为以后各章系统学习各种平差理论打好基础。最后介绍最小二乘原理，这是测量平差法所遵循的准则。

#### § 3-1 测量平差概述

在测量工程中，最常见的是要求定某些几何量的大小。例如，为了求定一些点的高程而建立了水准网，为了求定某些点的坐标而建立了平面控制网或三维测量网。前者包含点间的高差、点的高程等元素，后者包含角度、边长、边的方位角以及点的二维或三维坐标等等元素。这些元素都是几何量，以下统称这些网为几何模型。

为了确定一个几何模型，并不需要知道该模型中所有元素的大小，而只需要知道其中部分元素的大小就行了，其它元素可以通过它们来确定。例如：

(1) 在图 3-1 的  $\triangle ABC$  中，为了确定它的形状(相似形)，只要知道其中任意 2 个内角的大小就行了，如  $\tilde{L}_1$ 、 $\tilde{L}_2$  或  $\tilde{L}_1$ 、 $\tilde{L}_3$  或  $\tilde{L}_2$ 、 $\tilde{L}_3$  等。它们都是同一类型的元素(角度)。

(2) 为了确定  $\triangle ABC$  的形状和大小(全等形)，只要知道其中任意的 2 角 1 边、2 边 1 角或 3 边的大小就行了，如  $\tilde{L}_1$ 、 $\tilde{L}_2$ 、 $\tilde{S}_1$ ， $\tilde{S}_1$ 、 $\tilde{S}_2$ 、 $\tilde{L}_3$ ， $\tilde{S}_1$ 、 $\tilde{S}_2$ 、 $\tilde{S}_3$ ，…，等等。它们包含两种类型的元素(角度，边长)。

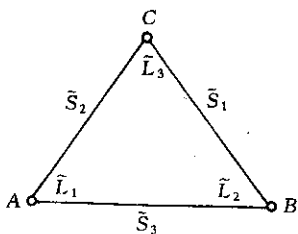


图 3-1

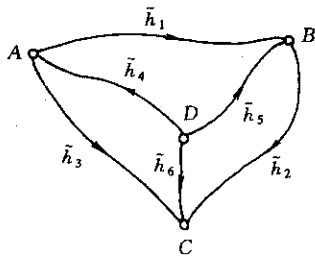


图 3-2

(3) 在图 3-2 的水准网中，为了确定 A、B、C、D 4 点之间高度的相对关系，只要知道其中 3 个高差就行了，如  $\tilde{h}_1$ 、 $\tilde{h}_3$ 、 $\tilde{h}_4$  或  $\tilde{h}_1$ 、 $\tilde{h}_2$ 、 $\tilde{h}_6$  或  $\tilde{h}_4$ 、 $\tilde{h}_5$ 、 $\tilde{h}_6$ …等等。它们是同一类型的元素(高差)。

能够唯一地确定一个几何模型所必要的元素，简称必要元素；必要元素的个数用  $t$  来表示。对于上述三种情况，分别是  $t=2$ ， $t=3$  和  $t=3$ 。对于第二种情况，3 个元素中除了角度还至少要包含一个边长，没有边长仍然只能确定其形状，而无法确定其大小，因此，必要元素不仅要考虑其个数，而且要考虑到它的类型。由此可知，当某个几何模型给定之后，能



够唯一确定该模型的必要元素的个数  $t$  及其类型,  $t$  只与几何模型有关, 与实际观测量无关。

对于任一几何模型, 它的  $t$  个必要元素之间必须不存在函数关系, 亦即其中任一元素不能表达成其余  $(t-1)$  个元素的函数。例如, 对于(1)中的情况, 若以  $\tilde{L}_1$  和  $\tilde{L}_2$  作为必要元素, 则  $\tilde{L}_1$  与  $\tilde{L}_2$  间无函数关系; 又如在(2)的情况中, 若以  $\tilde{L}_1$ 、 $\tilde{L}_2$ 、 $\tilde{S}_1$  作为必要元素, 它们之间也不存在函数关系。如果在(2)情况中, 选  $\tilde{L}_1$ 、 $\tilde{L}_2$ 、 $\tilde{L}_3$ , 则  $\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 = 180^\circ$ , 三者之间存在函数关系, 就不能说  $t=3$ , 实际必要元素只选了两个, 而漏选了一个。因此必要元素  $t$  个量为函数独立量, 简称独立量。

在一个几何模型中, 除了  $t$  个独立量以外, 若再增加一个量, 则必然产生一个相应的函数关系式。仍以(2)中情况为例, 必要量选为  $\tilde{L}_1$ 、 $\tilde{L}_2$ 、 $\tilde{S}_1$ , 若增加一个量  $\tilde{L}_3$ , 则存在  $\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 = 180^\circ$ , 若再增加一个量  $\tilde{S}_2$ , 则有

$$\tilde{S}_2 = \tilde{S}_1 \frac{\sin \tilde{L}_2}{\sin \tilde{L}_1}.$$

由此可知, 一个几何模型的独立量个数最多为  $t$  个, 除此之外, 增加一个量必然要产生一个相应的函数关系式, 这种函数关系式, 在测量平差中称为条件方程。

在测量工程中, 为了求得一个几何模型中各量的大小就必须进行观测。如果总共观测了该模型中  $n$  个量的大小, 若观测个数少于必要元素的个数, 即  $n < t$ , 显然它无法确定该模型, 即出现了数据不足的情况; 若观测了  $t$  个独立量,  $n = t$ , 则可唯一地确定该模型。由于它们都是独立量, 故不存在任何条件方程, 在这种情况下, 如果观测结果中含有粗差甚至错误, 都将无法发现, 在测量工作中是不允许这样做的。为了能及时发现粗差和错误, 并提高测量成果的精度, 就必须使  $n > t$ , 若令

$$r = n - t \quad (3-1-1)$$

式中  $n$  为观测值个数,  $t$  称为必要观测数,  $r$  称为多余观测数。多余观测数在测量中又称“自由度”。

一个几何模型如果有  $r$  个多余观测, 就产生  $r$  个条件方程。由于观测值不可避免地存在观测误差, 由观测值组成上述条件方程必不能满足, 仍以(2)中情况为例, 若观测了角度  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  和边长  $S_1$ 、 $S_2$ , 考虑观测误差, 有

$$\tilde{L}_1 = L_1 + \Delta_1, \quad \tilde{L}_2 = L_2 + \Delta_2, \quad \tilde{L}_3 = L_3 + \Delta_3,$$

$$\tilde{S}_1 = S_1 + \Delta_{S_1}, \quad \tilde{S}_2 = S_2 + \Delta_{S_2}$$

因  $r = n - t = 5 - 3 = 2$ , 可组成 2 个条件方程为

$$(L_1 + \Delta_1) + (L_2 + \Delta_2) + (L_3 + \Delta_3) = 180^\circ \quad (3-1-2)$$

$$(S_2 + \Delta_{S_2}) = (S_1 + \Delta_{S_1}) \frac{\sin(L_2 + \Delta_2)}{\sin(L_1 + \Delta_1)} \quad (3-1-3)$$

若用观测值组成上述两个条件方程, 则不能成立, 即

$$L_1 + L_2 + L_3 - 180^\circ = \omega \neq 0 \quad (3-1-4)$$

$$S_2 \neq S_1 \frac{\sin L_2}{\sin L_1}$$

造成条件方程不闭合, 或者说存在闭合差, 例如(3-1-4)式中的  $\omega$ , 就是该三角形角度条件

方程的闭合差。

由于观测不可避免地存在偶然误差,当 $n>t$ 时,几何模型中应该满足的 $r=n-t$ 个条件方程,实际存在闭合差而并不满足,如何调整观测值,即对观测值合理地加上改正数,使其达到消除闭合差的目的,这是测量平差的主要任务。

一个测量平差问题,首先要由观测值和待求量间组成数学模型,然后采用一定的平差原则对待求量进行估计,这种估计要求是最优的,最后计算和分析成果的精度。

## § 3-2 测量平差的数学模型

在日常生活和科学技术领域中,时常见到许多模型,一般可将其分为两大类,一类是将实物尺寸放大或缩小而得的模型,称为实物模型;另一类是用文字、符号、图表或者对研究的对象进行抽象概括,用数学关系式来描述它的某种特征或内在联系的模型。前者称为模拟模型,后者称为数学模型。总称为抽象模型。

在测量工程中,涉及的是通过观测量确定某些几何量或物理量大小等有关数量问题,因而考虑的模型总是数学模型。平差的数学模型与一般数学只考虑函数模型不同,它还要考虑随机模型,因为观测量是一种随机变量。所以平差的数学模型同时包含函数模型和随机模型两种,在研究任何平差方法时必须同时予以考虑。

函数模型是描述观测量与待求量间的数学函数关系的模型,是确定客观实际的本质或特征的模型。随机模型是描述观测量及其相互间统计相关性质的模型。建立这两种模型是测量平差中最基本而首先考虑的问题。

对于一个实际平差问题,可建立不同形式的函数模型,与此相应,就产生了不同的平差方法。函数模型分为线性函数模型和非线性函数模型两类。测量平差通常是基于线性函数模型的,当函数模型为非线性形式时(例如(3-1-3)式),总是将其用台劳公式展开,并取其一次项化为线性形式。下面简述各类基本平差方法的线性函数模型和随机模型,总称为数学模型。

### 一、条件平差法

以条件方程为函数模型的平差方法,称为条件平差法。

现以图 3-2 所示水准网为例,说明条件平差的函数模型。图中 A 为已知其高程的水准点, B、C、D 均为未知点。网中观测向量的真值为

$$\tilde{L} = [\tilde{h}_1 \quad \tilde{h}_2 \quad \tilde{h}_3 \quad \tilde{h}_4 \quad \tilde{h}_5 \quad \tilde{h}_6]^T,$$

为了确定 B、C、D 三点的高程,其必要观测数(即必要元素) $t=3$ ,故多余观测数 $r=n-t=3$ 。应列出 3 个线性无关的条件方程,它们可以是

$$\left. \begin{aligned} F_1(\tilde{L}) &= \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3 = 0 \\ F_2(\tilde{L}) &= \tilde{h}_2 + \tilde{h}_5 - \tilde{h}_6 = 0 \\ F_3(\tilde{L}) &= -\tilde{h}_3 - \tilde{h}_4 + \tilde{h}_6 = 0 \end{aligned} \right\},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则上式为

$$A_{3,6} \tilde{L}_{6,1} = 0 \quad (3-2-1)$$

又如在图 3-1  $\triangle ABC$  中, 观测了三个内角, 多余观测  $r = n - t = 3 - 2 = 1$ , 存在条件方程为

$$\tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 - 180 = 0$$

令

$$\begin{aligned} A_{1,3} &= [1 \quad 1 \quad 1] \\ \tilde{L}_{3,1} &= [\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \tilde{L}_3]^T \\ A_0 &= [-180^\circ] \end{aligned}$$

则上式为

$$A \tilde{L} + A_0 = 0 \quad (3-2-2)$$

一般而言, 如果有  $n$  个观测值  $L$ ,  $t$  个必要观测, 则应列出  $r = n - t$  个条件方程, 即

$$F(\tilde{L}) = 0 \quad (3-2-3)$$

如果条件方程为线性形式, 可直接写为

$$A_{r,n} \tilde{L}_{n,1} + A_0 = 0 \quad (3-2-4)$$

$A_0$  为常数向量, 如在 (3-2-1) 式中  $A_0 = O_{3,1} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ , 在 (3-2-2) 式中为  $-180^\circ$ 。

将  $\tilde{L} = L + \Delta$  代入 (3-2-4) 式, 并令

$$W = -(AL + A_0) \quad (3-2-5)$$

则 (3-2-4) 式为

$$A \Delta - W = 0 \quad (3-2-6)$$

(3-2-4) 或 (3-2-6) 式为条件平差的函数模型。

条件平差的自由度即为多余观测数  $r$ , 即条件方程的个数。

## 二、间接平差法

由 § 3-1 知, 在一个几何模型中, 最多只能选出  $t$  个独立量, 如果在进行平差时, 就选定  $t$  个独立量作为参数, 那末通过这  $t$  个独立参数就能唯一地确定该几何模型了。换言之, 模型中的所有量都一定是这  $t$  个独立参数的函数, 亦即每个观测量都可表达成所选  $t$  个独立参数的函数。

选择几何模型中  $t$  个独立量为平差参数, 将每一个观测量表达成所选参数的函数, 即列出  $n$  个这种函数关系式, 以此为平差的函数模型, 称为间接平差法, 又称为参数平差法。

在图 3-3 的  $\triangle ABC$  中, 观测量为其中三个内角,  $\tilde{L} = [\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \tilde{L}_3]^T$ , 选定  $\angle A$  和  $\angle B$  为平差参数, 设为  $\bar{X}_1$  和  $\bar{X}_2$ , 即

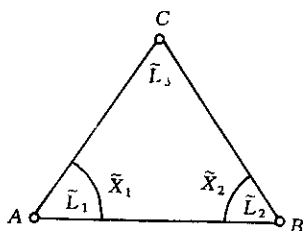


图 3-3

$$\bar{X} = [\bar{X}_1 \ \bar{X}_2]^T,$$

因为通过这  $t=2$  个参数可以唯一地确定该三角形的形状。将每一个观测值均表达为这两个平差参数的函数，由图知

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_1 &= \bar{X}_1 \\ \bar{L}_2 &= \bar{X}_2 \\ \bar{L}_3 &= -\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + 180 \end{aligned} \right\} \quad (3-2-7)$$

方程的个数等于观测值的个数。

一般而言，如果某平差问题有  $n$  个观测值， $t$  个必要观测值，选择  $t$  个独立量作为平差参数  $\bar{X}$ ，则每个观测值必定可以表达成这  $t$  个参数的函数，即有

$$\bar{L} = F(\bar{X}) \quad (3-2-8)$$

如果这种表达式是线性的，一般为

$$\bar{L} = B \bar{X} + d, \quad (3-2-9)$$

例如，在(3-2-7)式中

$$\begin{aligned} \bar{L} &= [\bar{L}_1 \ \bar{L}_2 \ \bar{L}_3]^T, \\ \bar{X} &= [\bar{X}_1 \ \bar{X}_2]^T, \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 180 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将  $\bar{L} = L + \Delta$  代入(3-2-9)式，并令

$$l = L - d \quad (3-2-10)$$

则有

$$\Delta = B \bar{X} - l \quad (3-2-11)$$

考虑  $E(\Delta) = 0$ ，上式也可写成

$$E(l) = B \bar{X} \quad (3-2-12)$$

以上的(3-2-9)或(3-2-11)式就是间接平差的函数模型。

尽管间接平差法是选了  $t$  个独立参数，但多余观测数不随平差不同而异，其自由度仍是  $r = n - t$ 。

### 三、附有参数的条件平差法

设在平差问题中，观测值个数为  $n$ ， $t$  为必要观测数，则可列出  $r = n - t$  个条件方程，现又增设了  $u$  个独立量作为参数，而  $0 < u < t$ ，每增设一个参数应增加一个条件方程。以含有参数的条件方程作为平差的函数模型，称为附有参数的条件平差法。

例如，在图 3-3 的  $\triangle ABC$  中，观测量为三个内角， $\bar{L} = [\bar{L}_1 \ \bar{L}_2 \ \bar{L}_3]^T$ ，选择  $\angle A$  为平差参数  $\bar{X}$ ，此时， $r = n - t = 3 - 2 = 1$ ，有一个条件方程，由于增加了一个参数，应再增加一个条件方程。现列出如下

$$\bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \bar{L}_3 - 180 = 0$$

$$\bar{L}_1 - \bar{X} = 0,$$

令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} -180 \\ 0 \end{bmatrix},$$

则上式可写成

$$A \bar{L} + B \bar{X} + A_0 = 0 \quad (3-2-14)$$

一般而言,在某一平差问题中,观测值个数为  $n$ , 必要观测数为  $t$ , 多余观测数  $r = n - t$ , 再增选  $u$  个独立参数,  $0 < u < t$ , 则总共应列出  $c = r + u$  个条件方程, 一般形式为

$$F(\bar{L} \quad \bar{X}) = 0 \quad (3-2-15)$$

如果条件方程是线性的, 其形式为

$$A \bar{L} + B \bar{X} + A_0 = 0 \quad (3-2-16)$$

将  $\bar{L} = L + \Delta$  代入上式, 并令

$$W = -(AL + A_0), \quad (3-2-17)$$

则得

$$A \Delta + B \bar{X} - W = 0. \quad (3-2-18)$$

(3-2-16)或(3-2-18)式为附有参数的条件平差法的函数模型。

此平差问题, 由于选了  $u$  个独立参数, 方程总数由  $r$  个增加到  $c = r + u$  个, 故平差的自由度为  $r = c - u$ 。

#### 四、附有限制条件的间接平差法

如果进行间接平差, 就要选出  $t$  个独立量为平差参数, 按每一个观测值与所选参数间函数关系, 组成  $n$  个观测方程。如果在平差问题中, 不是选  $t$  个而是选定  $u > t$  个参数, 其中包含  $t$  个独立参数, 则多选的  $s = u - t$  个参数必是  $t$  个独立参数的函数, 亦即在  $u$  个参数之间存在着  $s$  个函数关系, 它们是用来约束参数之间应满足的关系。因此, 在选定  $u > t$  个参数进行间接平差时, 除了建立  $n$  个观测方程外, 还要增加  $s$  个约束参数的条件方程, 故称此平差方法为附有限制条件的间接平差法。

一般而言, 附有限制条件的间接平差法可组成下列方程:

$$\bar{L} = F(\bar{X}) \quad (3-2-19)$$

$$\Phi(\bar{X}) = 0 \quad (3-2-20)$$

线性形式的函数模型为

$$\Delta = B \bar{X} - l \quad (3-2-21)$$

$$C \bar{X} - W_x = 0. \quad (3-2-22)$$

该平差问题的自由度  $r = n - (u - s)$ 。

## 五、平差的随机模型

对于以上四种基本平差方法，最基本的数据都是观测向量 $L$ ，进行平差时，除了建立其函数模型外，还要同时考虑到它的随机模型，亦即观测向量的协方差阵：

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (3-2-23)$$

式中 $D$ 为 $L$ 的协方差阵， $Q$ 为 $L$ 的协因数阵， $P$ 为 $L$ 的权阵， $Q$ 与 $P$ 互为逆阵， $\sigma_0^2$ 为单位权方差。以上各种平差方法的函数模型连同(3-2-23)式中的随机模型，就称为平差方法的数学模型。在进行平差计算之前，必须同时具备其函数模型和随机模型，前者可以按上述介绍的方法建立，后者则须知道 $D$ 、 $Q$ 或 $P$ 中之一。一般情况下，观测向量的协方差阵 $D$ 在平差前都是未知的，通常是按第二章中介绍的方法估计确定，称为先验协方差。 $\sigma_0^2$ 可通过平差计算求出其估值 $\hat{\sigma}_0^2$ ，然后求得 $D$ 的估值：

$$\hat{D} = \hat{\sigma}_0^2 Q. \quad (3-2-24)$$

## § 3-3 函数模型的线性化

在各种平差中，所列出的条件方程或观测方程，有的是线性形式，也有的是非线性形式。在进行平差计算时，必须首先将非线性方程按台劳公式展开，取至一次项，转换成线性方程。

四种基本平差方法的一般形式的函数模型为(3-2-3)、(3-2-8)、(3-2-15)和(3-2-19)式。如果是非线性形式，就需要将其线性化。

设有函数

$$F = F(\underset{c,1}{L}, \underset{n,1}{X}), \quad (3-3-1)$$

为了线性化，取 $\bar{X}$ 的充分近似值 $X^0$ ，使

$$\bar{X} = X^0 + \tilde{x} \quad (3-3-2)$$

同时考虑到

$$\bar{L} = L + \Delta, \quad (3-3-3)$$

$\tilde{x}$ 和 $\Delta$ 均要求是微小量，故在按台劳公式展开时可以略去二次和二次以上的项，而只取至一次项，于是有

$$F = F(L + \Delta, X^0 + \tilde{x}) = F(L, X^0) + \frac{\partial F}{\partial \bar{L}} \bigg|_{L, X^0} \Delta + \frac{\partial F}{\partial \bar{X}} \bigg|_{L, X^0} \tilde{x},$$

若令

$$A = \frac{\partial F}{\partial \bar{L}} \bigg|_{L, X^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \bar{L}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \bar{L}_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \bar{L}_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \bar{L}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \bar{L}_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \bar{L}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_c}{\partial \bar{L}_1} & \frac{\partial F_c}{\partial \bar{L}_2} & \cdots & \frac{\partial F_c}{\partial \bar{L}_n} \end{bmatrix}_{L, X^0} \quad (3-3-4)$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial \tilde{X}} \bigg|_{L, X^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{X}_u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{X}_u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial F_c}{\partial \tilde{X}_u} \end{bmatrix}_{L, X^0} \quad (3-3-5)$$

则函数 $F$ 的线性形式为

$$F = F(L, X^0) + A\Delta + B\tilde{x}. \quad (3-3-6)$$

根据函数线性化过程,很容易将上述四种基本平差方法的非线性方程转换成线性方程。

条件平差法:

$$F(\tilde{L}) = F(L) + A \Delta = 0,$$

式中  $A = \frac{\partial F}{\partial \tilde{L}} \bigg|_L$ , 令

$$W = -F(L) \quad (3-3-7)$$

可得其函数模型为

$$A \Delta - W = 0. \quad (3-3-8)$$

此即(3-2-6)式。

间接平差法:

$$\tilde{L} = L + \Delta = F(\tilde{X}) = F(X^0) + B \tilde{x},$$

式中  $B = \frac{\partial F}{\partial \tilde{X}} \bigg|_{X^0}$ , 令

$$l = L - F(X^0), \quad (3-3-9)$$

可得其函数模型为

$$\Delta = B\tilde{x} - l. \quad (3-3-10)$$

此即(3-2-11)式。

附有参数的条件平差法:

$$F(\tilde{L}, \tilde{X}) = F(L, X^0) + A \Delta + B \tilde{x} = 0,$$

式中  $A, B$  即(3-3-4)、(3-3-5)式, 令

$$W = -F(L, X^0), \quad (3-3-11)$$

可得其函数模型为

$$A \Delta + B\tilde{x} - W = 0. \quad (3-3-12)$$

此即(3-2-18)式。

附有限制条件的间接平差法:

由(3-2-19)、(3-2-20)式知,一般方程为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{L} &= F(\tilde{X}) \\ \Phi(\tilde{X}) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} n+1 \\ u+1 \end{matrix}$$

因为

$$\Phi(\tilde{X}) = \Phi(X^0) + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{X}} \bigg|_{X^0} \tilde{x} = \Phi(X^0) + C \tilde{x} = 0$$

令

$$W_x = -\Phi(X^0) \quad (3-3-13)$$

考虑(3-3-10)式, 其函数模型为

$$\Delta = B\tilde{x} - l \quad (3-3-14)$$

$$C\tilde{x} - W_x = 0 \quad (3-3-15)$$

此即(3-2-21)和(3-2-22)式。式中

$$C = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{X}} \bigg|_{X^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tilde{X}_u} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tilde{X}_u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_t}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial \Phi_t}{\partial \tilde{X}_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t}{\partial \tilde{X}_u} \end{bmatrix}_{X^0} \quad (3-3-16)$$

### § 3-4 参数估计与最小二乘原理

平差问题是由于测量中进行了多余观测而产生, 不论何种平差方法, 平差最终目的都是对参数  $\tilde{X}$  和观测量  $\tilde{L}$  (或  $\Delta$ ) 作出某种估计, 并评定其精度。所谓评定精度, 就是对待估计量的方差与协方差作出估计。所以, 可统称为对平差模型的参数进行估计。

#### 一、参数估计及其最优性质

由于多余观测而产生的平差数学模型, 都不可能直接获得唯一解。例如, 条件平差的函数模型(3-2-6)式, 条件方程个数为  $r$ , 而待估未知量  $\Delta$  有  $n$  个,  $n > r$ ,  $\Delta$  不能唯一确定。又如间接平差的函数模型(3-2-11)式, 方程个数为  $n$ , 待求参数  $\tilde{X}$  和  $\Delta$  共有  $t+n$  个, 同样,  $\tilde{X}$  和  $\Delta$  不能唯一确定。测量平差中的参数估计, 是要在众多的解中, 找出一个最为合理的解, 作为平差参数的最终估计。为此, 对最终估计值应该提出某种要求, 考虑平差所处理的是随机观测值, 这种要求自然要从数理统计观点去寻求, 即参数估计要具有最优的统计性质, 从而可对平差数学模型附加某种约束, 实现满足最优性质的参数唯一解。这种约束是用某种准则实现的, 其中最广泛采用的准则是最小二乘原理。

数理统计中所述的估计量最优性质, 主要是估计量应具有无偏性、一致性和有效性的要求, 现简单引用如下:



(1) 无偏性 设  $\hat{\theta}$  为参数  $\theta$  的估计量, 如果估计量的数学期望等于参数  $\theta$ , 即

$$E(\hat{\theta}) = \theta, \quad (3-4-1)$$

则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计量。否则估计量不具有无偏性。

(2) 一致性 满足概率表达式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta - \epsilon < \hat{\theta} < \theta + \epsilon) = 1, \quad (3-4-2)$$

的估计量  $\hat{\theta}$  为参数  $\theta$  的一致估计量, 其中  $n$  为子样容量,  $\epsilon$  是任意小的正数。

若估计量同时满足

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \theta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E[(\hat{\theta} - \theta)^2] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-4-3)$$

则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的严格一致性估计量。严格一致性估计量一定是一致性估计量。

(3) 有效性 若  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计量, 具有无偏性的估计量并不唯一。如果两个无偏估计量  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$ , 具有

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2) \quad (3-4-4)$$

则称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  有效, 其中具有方差最小性的估计量, 即  $D(\hat{\theta}) = \min$ , 则  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的最有效估计量, 称为最优估计量。

数理统计理论证明, 具有无偏性、最优性的估计量必然是一致性估计量, 所以测量平差中参数的最佳估值要求是最优无偏估计量。由于平差模型是线性的, 最佳估计也称为最优线性无偏估计。

## 二、最小二乘原理

在生产实践中, 经常会遇到利用一组观测数据来估计某些未知参数的问题。例如, 一个作匀速运动的质点在时刻  $\tau$  的位置是  $\tilde{y}$ , 可以用如下的线性函数来描述:

$$\tilde{y} = \bar{\alpha} + \tau\beta, \quad (3-4-5)$$

式中  $\bar{\alpha}$  是质点在  $\tau=0$  时刻的初始位置,  $\beta$  是平均速度, 它们是待估计的未知参数, 可见这类问题为线性参数的估计问题。对于这一问题, 如果观测没有误差, 则只要在两个不同时刻  $\tau_1$  和  $\tau_2$  观测出质点的相应位置  $\tilde{y}_1$  和  $\tilde{y}_2$ , 由 (3-4-5) 式分别建立两个方程, 就可以解出  $\bar{\alpha}$  和  $\beta$  的值了。但是, 实际上在观测时, 被观测的不是  $\tilde{y}$  而是  $y = \tilde{y} - \Delta$ ,  $\Delta$  是观测误差。

于是有

$$y + \Delta = \bar{\alpha} + \tau\beta.$$

这样, 为了求得  $\bar{\alpha}$  和  $\beta$ , 就需要在不同时刻  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  来测定其位置, 得一组观测值  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 这时, 由上式可以得到

$$\Delta_i = \bar{\alpha} + \tau_i\beta - y_i, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3-4-6)$$

若令

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n,1}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \tau_1 \\ 1 & \tau_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & \tau_n \end{bmatrix}_{n,2}, \quad X = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \beta \end{bmatrix}_{2,1}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}_{n,1}$$

则(3-4-6)式为

$$\Delta = B\hat{X} - Y \quad (3-4-7)$$

这是间接平差的函数模型。

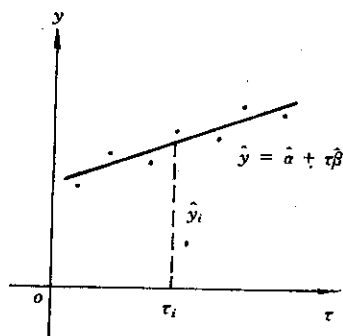


图 3-4

如果我们将对应的  $y_i, x_i (i=1, 2, \dots, n)$  用图解来表示, 则可作出如图 3-4 所示的图形, 从图中可以看出, 由于存在观测误差的缘故, 由观测数据绘出的点——观测点, 描绘不成直线, 而有某些“摆动”。

这里就产生这样一个问题: 用什么准则, 来对参数  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  进行估计, 从而使估计直线  $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$  “最佳”地拟合于诸观测点。这里的“最佳”一词可以有不同的理解。例如, 可以认为: 各观测点对直线最大距离取最小值时, 直线是“最佳”的; 也可以认为, 各观测点到直线的偏差的绝对值之和取最小值时, 直线是“最佳”的, 等等。在不同的“最佳”要求下, 可以求得相应问题中参数  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  不同的估值。但是, 在解这

类问题时, 一般应用的是最小二乘原理, 按照最小二乘原理的要求, 认为“最佳”地拟合于诸观测点的估计曲线, 应使诸观测点到该曲线的偏差的平方和达到最小。

设观测值  $y_i$  的估值为  $\hat{y}_i = y_i + v_i$ ,  $v_i$  是观测值  $y_i$  的改正数(或称残差), 是  $\Delta_i$  的估值; 则由  $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}x_i$  可以写出

$$v_i = \hat{a} + \hat{b}x_i - y_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

所谓最小二乘原理, 就是要在满足

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{a} + \hat{b}x_i - y_i)^2 = \text{最小} \quad (3-4-8)$$

的条件下解出参数  $\hat{a}, \hat{b}$  的估值  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$ , 若令  $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$  则上式也可写为

$$V^T V = (B\hat{X} - Y)^T (B\hat{X} - Y) = \text{最小} \quad (3-4-9)$$

式中  $\hat{X}$  表示未知参数的估计向量, 在上述例子中,  $\hat{X} = [\hat{a} \ \hat{b}]^T$ 。满足(3-4-9)式的估计  $\hat{X}$  称为  $\hat{X}$  的最小二乘估计, 这种求估计量的方法就称为最小二乘法。

从以上的推导可以看出, 只要具有(3-4-6)式的线性关系的参数估计问题, 则不论观测值属于何种统计分布, 都可按最小二乘原理进行参数估计, 因此, 这种估计方法在实践中被广泛地应用。

测量中的观测值是服从正态分布的随机变量, 最小二乘原理可用数理统计中的最大似然估计来解释, 两种估计准则的估值相同。

设观测向量为  $L$ ,  $L$  为随机正态向量, 其数学期望和方差分别为

$$\mu_L = E(L) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad D = D_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

由最大似然估计准则知, 其似然函数(即  $L$  的正态密度函数)为

$$G = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |D|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (L - \mu_L)^T D^{-1} (L - \mu_L) \right\} \quad (3-4-10)$$

由(3-4-7)式并顾及  $E(\Delta) = 0$ , 则知

$$\mu_L = E(L) = E(B\hat{X})^T = B\hat{X} \quad (3-4-11)$$

故(3-4-10)式也可写成

$$G = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |D|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (L - B\hat{X})^T D^{-1} (L - B\hat{X}) \right\}$$

或

$$\ln G = -\ln \{ (2\pi)^{n/2} |D|^{1/2} \} - \frac{1}{2} \{ (L - B\hat{X})^T D^{-1} (L - B\hat{X}) \}. \quad (3-4-12)$$

按最大似然估计的要求, 应选取能使  $\ln G$  取得极大值时的  $\hat{X}$  作为  $X$  的估计量。由于上式右边的第二项前是负号, 所以只有当该项取得极小值时,  $\ln G$  才能取得极大值, 换言之,  $\hat{X}$  的估计量应满足如下条件:

$$(L - B\hat{X})^T D^{-1} (L - B\hat{X}) = \text{最小} \quad (3-4-13)$$

考虑  $D = D_{LL} = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}$ ,  $\sigma_0^2$  为常量, 上式可写成

$$(L - B\hat{X})^T P (L - B\hat{X}) = \min \quad (3-4-14)$$

顾及  $V$  是  $\Delta$  的估值, 则有

$$V = B\hat{X} - L \quad (3-4-15)$$

(3-4-14)式可简写成

$$V^T P V = \min \quad (3-4-16)$$

此即最小二乘原理。

由此可见, 当观测值为正态随机变量时, 最小二乘估计可由最大似然估计导出, 由以上两个准则出发, 平差结果完全一致。

最小二乘原理中的  $P$  阵, 称为权阵, 定义是  $P = Q^{-1}$ 。

设  $L_1, L_2, \dots, L_n$  为独立观测值, 其权为  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , 则有

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{P_i} = \sigma_0^2 Q_{ii}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

式中  $Q_{ii}$  为  $L_i$  的权倒数或协因数, 权阵及协因数阵为

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & & & \\ & Q_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_{nn} \end{bmatrix}$$

如果  $L_1, L_2, \dots, L_n$  为相关观测值, 则有

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}$$

协因数  $Q$  与协方差  $D$  统计含义相同, 数量上仅差一常量  $\sigma_0^2$ , 如果  $\sigma_0^2=1$ , 则  $D=Q$ 。因为权阵

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{1n} & P_{2n} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} = Q^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

虽然  $Q_{11}, Q_{22}, \dots, Q_{nn}$  仍为  $L_1, L_2, \dots, L_n$  的权倒数, 但由于  $Q_{ii}^{-1} \neq P_{ii}$ , 权阵  $P$  中主对角元素  $P_{ii}$  已不再具有权的意义,  $P$  仅表示  $Q^{-1}$ , 但在运算时具有权的作用。

特别地, 当为同精度观测时, 则  $P=I$ , 则最小二乘原理是

$$V^T V = \min \quad (3-4-17)$$

例[3-1] 设对某物理量  $X$  进行了  $n$  次同精度观测得  $L_{n,1}$ , 试按最小二乘原理求该量的估值。

解: 设该量的估值为  $\hat{x}$ , 则有

$$v_i = \hat{x} - L_i.$$

根据(3-4-17)式知, 此时  $V^T = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$  应满足

$$V^T V = \text{最小},$$

为此, 将  $V^T V$  对  $\hat{x}$  取一阶导数, 并令其等于零, 得

$$\frac{dV^T V}{d\hat{x}} = 2 V_{1,n}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n,1} = 2 \sum_{i=1}^n v_i = 0.$$

将  $v_i = \hat{x} - L_i$  代入得

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (\hat{x} - L_i) = n\hat{x} - \sum_{i=1}^n L_i = 0,$$

由此解得

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i = \frac{[L]}{n}.$$

按最大似然法求得的参数估计称为最似然值或最或然值。因此, 在测量中由最小二乘原理所求的估值也称为最或然值。

## 第四章 条件平差

## § 4-1 条件平差原理

在第三章已给出各条件平差的数学模型为

$$A \Delta - W = 0 \quad (4-1-1)$$

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (4-1-2)$$

条件方程个数等于多余观测数  $r = n - t$ ,  $n$  为观测值总数,  $t$  为必要观测数。由于  $r < n$ , 由 (4-1-1) 式不能求得  $\Delta$  的唯一解, 但可按最小二乘原理求  $\Delta$  的最或然值, 从而求出观测量  $L$  的最或然值  $\hat{L}$ , 又称平差值。

将(4-1-1)式中的  $\Delta$  改写成其估值  $V$ , 条件方程为

$$A V - W = 0, \quad (4-1-3)$$

$V$  的求得要求满足  $V^T P V = \min$ 。 $\hat{L}$  的平差值为

$$\hat{L}=L+V. \quad (4-1-4)$$

条件平差法就是要求在满足  $r$  个条件方程(4-1-3)下,求函数  $V^T P V = \min$  的  $V$  值,在数学中是求函数的条件极值问题。

### 一、基础方程和它的解

设有  $r$  个平差值线性条件方程:

[illegible]

式中  $a_i, b_i, \dots, r_i (i=1, 2, \dots, n)$  为条件方程系数,  $a_0, b_0, \dots, r_0$  为条件方程常数项。将 (4-1-4) 式代入上式, 得条件方程为

[illegible]

式中  $w_a$ 、 $w_b$ 、 $\cdots$ 、 $w_r$  称为条件方程的闭合差，或称不符值，即

$$\left. \begin{aligned} w_a &= -(a_1 L_1 + a_2 L_2 + \dots + a_n L_n + a_0) \\ w_b &= -(b_1 L_1 + b_2 L_2 + \dots + b_n L_n + b_0) \\ &\vdots \\ w_r &= -(r_1 L_1 + r_2 L_2 + \dots + r_n L_n + r_0) \end{aligned} \right\}, \quad (4-1-7)$$

令

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_1, n \end{matrix} & \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad W = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_a \\ w_b \\ \vdots \\ w_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r, 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} w_a \\ w_b \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad V = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} n, 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \end{matrix}$$

则(4-1-6)式为

$$AV - W = 0 \quad (4-1-8)$$

同样, (4-1-5)式可写成

$$AL + A_0 = 0 \quad (4-1-9)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{L} &= [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]^T, \\ A_0 &= [a_0 \quad b_0 \quad \cdots \quad r_0]^T. \end{aligned}$$

(4-1-7)式为

$$W = -(AL + A_0) \quad (4-1-10)$$

按求函数极值的拉格朗日乘数法, 设其乘数为  $K = [k_a \ k_b \ \cdots \ k_r]^T$ , 称为联系数向量。组成函数

$$\Phi = V^T P V - 2K^T (AV - W),$$

将  $\Phi$  对  $V$  求一阶导数, 并令其为零, 得

$$\frac{d\Phi}{dV} = 2V^T P - 2K^T A = 0,$$

两边转置, 得

$$PV = A^T K,$$

得改正数  $V$  的计算公式为

$$V = P^{-1} A^T K = Q A^T K \quad (4-1-11)$$

上式称为改正数方程。

将  $n$  个改正数方程(4-1-11)和  $r$  个条件方程(4-1-8)联立求解, 就可以求得一组唯一的解:  $n$  个改正数和  $r$  个联系数。为此, 将(4-1-8)和(4-1-11)式合称为条件平差的基础方程。显然, 由基础方程解出的一组  $V$ , 不仅能消除闭合差, 也必能满足  $V^T P V = \min$  的要求。

解算基础方程时, 是先将(4-1-11)式代入(4-1-8)式, 得

$$AQA^T K - W = 0,$$

令

$$N_{aa} = AQA^T = AP^{-1}A^T, \quad (4-1-12)$$

则有

$$N_{aa}K - W = 0 \quad (4-1-13)$$

上式称为联系数法方程, 简称法方程。法方程系数阵  $N_{aa}$  的秩  $R(N_{aa}) = R(AQA^T) = R(A) = r$ , 即  $N_{aa}$  是一个  $r$  阶的满秩方阵, 且可逆。由此可得联系数  $K$  的唯一解。

特别地, 当  $P$  为对角阵时, 改正数方程(4-1-11)和法方程(4-1-13)的纯量形式分别为

$$v_i = \frac{1}{p_i} (a_i k_a + b_i k_b + \dots + r_i k_r), \quad (4-1-14)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{aa}{p} \right] k_a + \left[ \frac{ab}{p} \right] k_b + \dots + \left[ \frac{ar}{p} \right] k_r - w_a &= 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] k_a + \left[ \frac{bb}{p} \right] k_b + \dots + \left[ \frac{br}{p} \right] k_r - w_b &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \left[ \frac{ar}{p} \right] k_a + \left[ \frac{br}{p} \right] k_b + \dots + \left[ \frac{rr}{p} \right] k_r - w_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-1-15)$$

从法方程解出联系数  $K$  后, 将  $K$  值代入改正数方程(4-1-11)式, 求出改正数  $V$  值, 再求平差值  $\hat{L} = L + V$ , 这样就完成了按条件平差求平差值的工作。

## 二、按条件平差求平差值的计算步骤及示例

综合以上所述可知, 按条件平差求平差值的计算步骤可归结为:

1. 根据平差问题的具体情况, 列出条件方程(4-1-8)式, 条件方程的个数等于多余观测数  $r$ 。
2. 根据条件式的系数, 闭合差及观测值的权组成法方程(4-1-13)式, 法方程的个数等于多余观测数  $r$ 。
3. 解算法方程, 求出联系数  $K$  值。
4. 将  $K$  代入改正数方程(4-1-11)式, 求出  $V$  值, 并求出平差值  $\hat{L} = L + V$ 。
5. 为了检查平差计算的正确性, 常用平差值  $\hat{L}$  重新列出平差值条件方程(4-1-9)式, 看其是否满足方程。

上述计算步骤的具体内容, 将分别在以后各节中作详细介绍。

例[4-1] 设对图 4-1 中的三个内角作同精度观测, 得观测值:  $L_1 = 42^\circ 12' 20''$ 、 $L_2 = 78^\circ 09' 09''$ 、 $L_3 = 59^\circ 38' 40''$ 。试按条件平差求三内角的平差值。

解: 本题有一个条件式, 其平差值条件为

$$\hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{L}_3 - 180^\circ = 0,$$

以  $\hat{L}_i = L_i + v_i$  及  $L_i$  的值代入上式得条件方程

$$v_1 + v_2 + v_3 + 9 = 0,$$

式中

$$-w = (L_1 + L_2 + L_3) - 180^\circ = 9''.$$

上列条件用矩阵表示为:

$$[+1 \quad +1 \quad +1] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + 9 = 0,$$

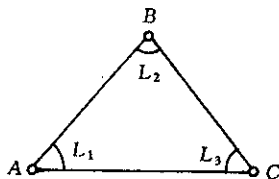


图 4-1

因为观测值精度相同，设其权  $p_1=p_2=p_3=1$ ，则观测值的权阵  $P$  为单位阵，即  $P=I$ 。故法方程系数为

$$N_{aa}=AP^{-1}A^T=AA^T=3,$$

法方程为

$$3k_a+9=0,$$

解得  $k_a=-3$ ，代入(4-1-11)式，即

$$V_{3,1}=QA^TK=A^TK=[-3'' \quad -3'' \quad -3'']^T.$$

由此得各角平差值为

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \\ \hat{L}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42^\circ 12' 17'' \\ 78^\circ 09' 06'' \\ 59^\circ 38' 37'' \end{bmatrix}.$$

为了检核，将平差值  $L$  重新组成平差值条件方程，得

$$42^\circ 12' 17'' + 78^\circ 09' 06'' + 59^\circ 38' 37'' - 180^\circ = 0.$$

可见各角的平差值满足了三角形内角和等于  $180^\circ$  的几何条件，即闭合差为零，故知计算无误。

例[4-2] 在图 4-2 中， $A$ 、 $B$  为已知水准点，其高程  $H_A=+12.013\text{m}$ ， $H_B=+10.013\text{m}$  视为无误差。为了确定  $C$  及  $D$  点的高程，共观测了四个高差，高差观测值及相应水准路线的距离为

$$\begin{aligned} h_1 &= -1.004\text{m}, & S_1 &= 2\text{km}; & h_2 &= +1.516\text{m}, & S_2 &= 1\text{km}; \\ h_3 &= +2.512\text{m}, & S_3 &= 2\text{km}; & h_4 &= +1.520\text{m}, & S_4 &= 1.5\text{km}; \end{aligned}$$

试求  $C$  和  $D$  点高程的平差值。

解：此例  $n=4$ ， $t=2$ ，故  $r=2$ ，可列出如下两个条件方程：

$$\left. \begin{aligned} \hat{h}_1 + \hat{h}_2 - \hat{h}_3 + H_A - H_B &= 0 \\ \hat{h}_2 - \hat{h}_4 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

以  $\hat{h}_i = h_i + v_i$  代入上式，经计算可得条件方程最后形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

式中闭合差的单位是  $\text{mm}$ 。

令一公里的观测高差为单位权观测，即  $P_i = \frac{1}{S_i}$ ，于是有

$$\frac{1}{p_1} = S_1 = 2, \quad \frac{1}{p_2} = S_2 = 1, \quad \frac{1}{p_3} = S_3 = 2, \quad \frac{1}{p_4} = S_4 = 1.5.$$

法方程系数为



$$N_{aa} = AP^{-1}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

由此得法方程为

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_a \\ k_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

解得  $k_a = -0.35$ ,  $k_b = 1.74$ 。代入改正数方程计算  $V$  得

$$V = [0.7 \quad 1.4 \quad 0.7 \quad -2.6]^T (\text{mm}),$$

观测量的平差值为

$$\hat{L}_1 = -1.0047\text{m}, \hat{L}_2 = 1.5174\text{m}, \hat{L}_3 = 2.5127\text{m}, \hat{L}_4 = 1.5174\text{m}.$$

用平差值重新列出平差值条件方程, 得

$$-1.0047 + 1.5174 - 2.5127 + 2.000 = 0$$

$$1.5174 - 1.5174 = 0$$

经检核计算无误, 最后计算  $C$  和  $D$  点平差高程为

$$H_C = H_A + \hat{L}_1 = 11.0083\text{m},$$

$$H_D = H_A + \hat{L}_1 + \hat{L}_4 = 12.5257\text{m}.$$

## § 4-2 条件方程

从上节中可以看出, 条件方程的组成是关键性的一步, 如果这一步有误, 即使在后续计算中不发生错误, 也会导致平差结果的不正确, 达不到平差的最后目的。本节介绍常规测量中遇到的基本图形条件方程的组成。

### 一、水准网

水准网平差的主要目的, 是确定网中未知点的最或然高程。例如图 4-3 的水准网中, 有四个已知水准点(图中以“ $\otimes$ ”表示的点), 两个未知点(图中以“ $\circ$ ”表示的点), 并有六个观测值。从图中可以看出, 要确定  $E$  和  $F$  点的高程, 必须观测两个观测值, 如  $h_1$  和  $h_6$ , 或  $h_4$  和  $h_3$  等等。可见, 在有已知点的水准网中, 必要观测的个数就等于未知点的个数。图 4-3 中, 必要观测个数  $t=2$ , 而条件方程个数  $r=n-t=6-2=4$ 。

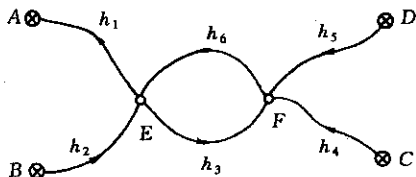


图 4-3

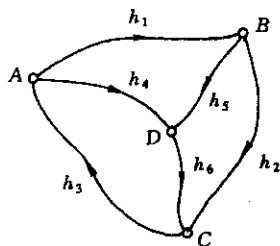


图 4-4

如果水准网中没有已知点, 这时, 只能假定某点的高程为已知, 并以此为基准, 去确定其它各点的相对高程。例如图 4-4 的水准网, 其中没有已知水准点, 这时, 通过平差计算, 只能确定各点的相对高程。为此, 可先假定某一点高程值为已知, 例如设  $H_A=100, 000\text{m}$ , 并以此为基准, 去确定  $B$ 、 $C$ 、 $D$  等点的相对高程。这样, 只要观测三个观测值就行了。所以, 在没有已知点的水准网中, 必要观测的个数等于网中全部未知点的个数减 1。图 4-4 的水准网中, 必要观测个数  $t=4-1=3$ , 而条件方程个数为  $r=6-3=3$ 。

水准网中条件方程的组成方法见例[4-1]和例[4-2]。

## 二、测角网

图 4-5 为一测角网, 其中  $A$ 、 $B$  是坐标为已知的三角点,  $C$  和  $D$  为待定点, 要确定其坐标。共观测了 9 个水平角, 即  $a_i, b_i, c_i (i=1, 2, 3)$ 。根据角度交会的原理知, 为了确定  $C$ 、 $D$  两点的平面坐标, 必要观测  $t=4$ , 例如测量  $a_1$  和  $b_1$  可计算  $D$  点坐标, 再测量  $a_2$  和  $c_2$  可确定待定点  $C$ 。于是, 图 4-5 的多余观测数  $r=n-t=9-4=5$ 。故总共应列出 5 个条件方程。

测角网的基本条件方程有三种类型, 现以此例说明。

一类是三角形内角和条件, 通称图形条件。由图 4-5 可列出三个图形条件, 即

$$\hat{a}_i + \hat{b}_i + \hat{c}_i - 180^\circ = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

其最后形式为

$$V_{a_i} + V_{b_i} + V_{c_i} - W_i = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

一类是圆周条件或称水平条件。由图 4-5 可列出一个圆周条件, 即

$$\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 - 360^\circ = 0$$

或

$$V_{c_1} + V_{c_2} + V_{c_3} - W_4 = 0$$

一类是极条件或称边长条件。满足上述 4 个条件方程的角值还不能使图 4-5 的几何图形完全闭合, 例如, 由边长  $\overline{CD}$  通过  $a_2, b_2, c_2$  计算边长  $\overline{BD}$ , 通过  $a_1, b_1, c_1$  由  $\overline{BD}$  计算边长  $\overline{AD}$ , 再由  $\overline{AD}$  通过  $a_3, b_3, c_3$  计算边长  $\overline{CD}$ , 计算的结果, 其边长不会相同。为了使其相同, 要列出一个极条件。即

$$\overline{CD} \frac{\sin \hat{a}_3}{\sin \hat{b}_3} \cdot \frac{\sin \hat{a}_1}{\sin \hat{b}_1} \cdot \frac{\sin \hat{a}_2}{\sin \hat{b}_2} = \overline{CD}$$

或

$$\frac{\sin \hat{a}_1 \cdot \sin \hat{a}_2 \cdot \sin \hat{a}_3}{\sin \hat{b}_1 \cdot \sin \hat{b}_2 \cdot \sin \hat{b}_3} = 1 \quad (4-2-1)$$

此即极条件方程, 为非线性形式。按函数模型线性化方法, 将上式用台劳公式展开取至一阶线性形式的极条件方程。

$\hat{a}_i = a_i + v_{a_i}, \hat{b}_i = b_i + v_{b_i}, \hat{c}_i = c_i + v_{c_i}$  代入 (4-2-1) 式, 展开可得

$$\frac{\sin(a_1+v_{a_1}) \cdot \sin(a_2+v_{a_2}) \cdot \sin(a_3+v_{a_3})}{\sin(b_1+v_{b_1}) \cdot \sin(b_2+v_{b_2}) \cdot \sin(b_3+v_{b_3})} - 1 = \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3} \\
- 1 + \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3} \operatorname{ctg} a_1 \frac{v_{a_1}}{\rho''} + \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3} \operatorname{ctg} a_2 \frac{v_{a_2}}{\rho''} \\
+ \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3} \operatorname{ctg} a_3 \frac{v_{a_3}}{\rho''} - \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3} \operatorname{ctg} b_1 \frac{v_{b_1}}{\rho''} \\
- \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3} \operatorname{ctg} b_2 \frac{v_{b_2}}{\rho''} - \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3} \operatorname{ctg} b_3 \frac{v_{b_3}}{\rho''} = 0,$$

经化简即有

$$\operatorname{ctg} a_1 v_{a_1} + \operatorname{ctg} a_2 v_{a_2} + \operatorname{ctg} a_3 v_{a_3} - \operatorname{ctg} b_1 v_{b_1} - \operatorname{ctg} b_2 v_{b_2} - \operatorname{ctg} b_3 v_{b_3} \\
+ \left( 1 - \frac{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3}{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3} \right) \rho'' = 0, \quad (4-2-2)$$

这就是极条件(4-2-1)式的线性形式。

上述非线性条件方程也可以先取对数，再按台劳公式展开成线性形式。例如，将(4-2-1)式取对数，得

$$\lg \sin \hat{a}_1 + \lg \sin \hat{a}_2 + \lg \sin \hat{a}_3 - \lg \sin \hat{b}_1 - \lg \sin \hat{b}_2 - \lg \sin \hat{b}_3 = 0, \quad (4-2-3)$$

将上式分项按台劳公式展开，例如

$$\lg \sin \hat{a}_1 = \lg \sin(a_1 + v_{a_1}) = \lg \sin a_1 + \left( \frac{d \lg \sin \hat{a}_1}{d \hat{a}_1} \right)_{a_1=a_1} \frac{v_{a_1}}{\rho''} \\
= \lg \sin a_1 + \delta_{a_1} v_{a_1},$$

式中

$$\delta_{a_1} = \left( \frac{d \lg \sin \hat{a}_1}{d \hat{a}_1} \right)_{a_1=a_1} \frac{1}{\rho''}.$$

将上式代入(4-2-3)式，得

$$\delta_{a_1} v_{a_1} + \delta_{a_2} v_{a_2} + \delta_{a_3} v_{a_3} - \delta_{b_1} v_{b_1} - \delta_{b_2} v_{b_2} - \delta_{b_3} v_{b_3} - w = 0 \quad (4-2-4)$$

式中

$$-w = \lg \sin a_1 + \lg \sin a_2 + \lg \sin a_3 - \lg \sin b_1 - \lg \sin b_2 - \lg \sin b_3. \quad (4-2-5)$$

(4-2-4)式的 $\delta$ 可以这样计算，因为

$$\lg \sin(a_1 + v_{a_1}) = \lg \sin a_1 + \delta_{a_1} v_{a_1},$$

所以

$$\delta_{a_1} = \frac{\lg \sin(a_1 + v_{a_1}) - \lg \sin a_1}{v_{a_1}}.$$

从上式可见，其分子是 $a_1$ 角变化 $v_{a_1}$ 时，正弦对数的变化值，分母是变化量 $v_{a_1}$ ，所以， $\delta_{a_1}$ 是 $a_1$ 角变化一秒时的正弦对数变化值，通称为正弦对数在 $a_1$ 角处的“每秒表差”，简称秒差。因此，当用对数表查 $\lg \sin a_1$ (求闭合差时用)值时， $\delta_{a_1}$ 可以从相应表中一并查得。

由于秒差 $\delta$ 和闭合差 $w$ 都是微小值，所以习惯上都以对数第六位为单位。例如， $a_1 = 28^\circ 45' 25''$ 时， $\delta_{a_1} = +0.000\ 00384$ ，可写为 $\delta_{a_1} = +3.84$ 。同时，当 $w = -0.000\ 0041$ 时，则

写成  $w = -4.10$ 。

在电子计算机已普及的现在，秒差和上述闭合差都可以在计算机上直接算出。此时， $\delta$  可按下式计算：

$$\delta_{a_1} = \left( \frac{d \lg \sin \hat{a}_1}{d \hat{a}_1} \right)_{\hat{a}_1 = a_1} \frac{1}{\rho''} = \frac{M}{\rho''} \operatorname{ctg} a_1, \quad (4-2-6)$$

式中  $M = \lg e = 0.434\ 294 \dots$ ，它是对数的模。而闭合差  $w$  为

$$-w = \lg \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3}. \quad (4-2-7)$$

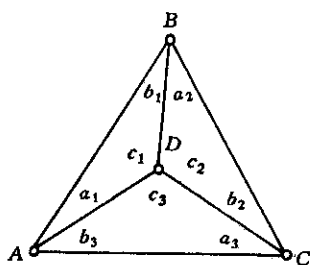


图 4-6

例[4-3] 在图 4-6 中，9 个同精度观测值为

$$a_1 = 30^\circ 52' 39''.2, \quad b_1 = 42^\circ 16' 41''.2,$$

$$a_2 = 33^\circ 40' 54''.8, \quad b_2 = 20^\circ 58' 26''.4,$$

$$a_3 = 23^\circ 45' 12''.5, \quad b_3 = 28^\circ 26' 07''.9,$$

$$c_1 = 106^\circ 50' 40''.6, \quad c_2 = 125^\circ 20' 37''.2, \quad c_3 = 127^\circ 48' 39''.0.$$

试列出条件方程。

解：本题有条件方程  $r = n - t = 9 - 4 = 5$  个。其中三个图形条件及一个圆周条件为：

$$v_{a_1} + v_{b_1} + v_{c_1} + 1.0 = 0,$$

$$v_{a_2} + v_{b_2} + v_{c_2} - 1.6 = 0,$$

$$v_{a_3} + v_{b_3} + v_{c_3} - 0.6 = 0,$$

$$v_{c_1} + v_{c_2} + v_{c_3} - 3.2 = 0$$

而非线性的极条件为

$$\frac{\sin \hat{a}_1 \cdot \sin \hat{a}_2 \cdot \sin \hat{a}_3}{\sin \hat{b}_1 \cdot \sin \hat{b}_2 \cdot \sin \hat{b}_3} = 1.$$

其线性形式为

$$\operatorname{ctg} a_1 v_{a_1} + \operatorname{ctg} a_2 v_{a_2} + \operatorname{ctg} a_3 v_{a_3} - \operatorname{ctg} b_1 v_{b_1} - \operatorname{ctg} b_2 v_{b_2} - \operatorname{ctg} b_3 v_{b_3} + \left( 1 - \frac{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3}{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3} \right) \rho'' = 0.$$

将观测值代入，得

$$1.67v_{a_1} + 1.50v_{a_2} + 2.27v_{a_3} - 1.10v_{b_1} - 2.61v_{b_2} - 1.85v_{b_3} - 33.12 = 0.$$

如果将非线性的极条件，取对数后线性化，得

$$\delta_{a_1} v_{a_1} + \delta_{a_2} v_{a_2} + \delta_{a_3} v_{a_3} - \delta_{b_1} v_{b_1} - \delta_{b_2} v_{b_2} - \delta_{b_3} v_{b_3} - w = 0,$$

式中

$$-w = \lg \frac{\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3}.$$

线性化后的极条件为

$$3.5v_{a_1} + 3.15v_{a_2} + 4.79v_{a_3} - 2.31v_{b_1} - 5.49v_{b_2} - 3.89v_{b_3} - 69.7 = 0.$$

例[4-4] 图 4-7 为一大地四边形，试列出条件方程。

解:本题条件方程个数  $r=n-t=8-4=4$ , 可组成三个图形条件和一个极条件。即

$$\left. \begin{aligned} v_{a_1} + v_{b_1} + v_{a_2} + v_{b_4} - w_1 &= 0 \\ v_{b_1} + v_{a_2} + v_{b_2} + v_{a_3} - w_2 &= 0 \\ v_{b_2} + v_{a_3} + v_{b_3} + v_{a_4} - w_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

和

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = 1 \quad (4-2-8)$$

或

$$\frac{\sin \hat{a}_2 \sin(\hat{a}_3 + \hat{b}_3) \sin \hat{a}_1}{\sin(\hat{a}_1 + \hat{b}_1) \sin \hat{b}_2 \sin \hat{b}_3} = 1 \quad (4-2-9)$$

其线性形式为

$$\begin{aligned} & \text{ctg } a_2 v_{a_2} + \text{ctg}(a_3 + b_3)(v_{a_3} + v_{b_3}) + \text{ctg } a_1 v_{a_1} \\ & - \text{ctg}(a_1 + b_1)(v_{a_1} + v_{b_1}) - \text{ctg } b_2 v_{b_2} - \text{ctg } b_3 v_{b_3} - w = 0 \end{aligned}$$

整理之, 得

$$\begin{aligned} & [\text{ctg } a_1 - \text{ctg}(a_1 + b_1)]v_{a_1} - \text{ctg}(a_1 + b_1)v_{b_1} + \text{ctg } a_2 v_{a_2} - \text{ctg } b_2 v_{b_2} \\ & + \text{ctg}(a_3 + b_3)v_{a_3} + [\text{ctg}(a_3 + b_3) - \text{ctg } b_3]v_{b_3} - w_4 = 0 \end{aligned} \quad (4-2-10)$$

式中

$$w_4 = \left[ \frac{\sin(a_1 + b_1) \sin b_2 \sin b_3}{\sin a_2 \sin(a_3 + b_3) \sin a_1} - 1 \right] \rho''$$

(4-2-9)式线性化后的对数形式为

$$\begin{aligned} & (\delta_{a_1} - \delta_{(a_1+b_1)})v_{a_1} - \delta_{(a_1+b_1)}v_{b_1} + \delta_{a_2}v_{a_2} - \delta_{b_2}v_{b_2} \\ & + \delta_{(a_3+b_3)}v_{a_3} + (\delta_{(a_3+b_3)} - \delta_{b_3})v_{b_3} - w = 0 \end{aligned} \quad (4-2-11)$$

式中

$$-w = \lg \frac{\sin a_2 \sin(a_3 + b_3) \sin a_1}{\sin(a_1 + b_1) \sin b_2 \sin b_3}$$

(4-2-10)或(4-2-11)式即为大地四边形的极条件方程。

从(4-2-8)式看出, 组成极条件时以  $A$  点为极点, 即从  $AB$  出发, 经过  $AC$ ,  $AD$  闭合至  $AB$ 。此例中也可以  $B$  或  $C$  或  $D$  为极, 按以上推导类似方法组成极条件。但在列出三个图形条件情况下, 只能任选其中一个为极条件, 保持 4 个互相独立的 (不存在线性组合) 条件方程。

### 三、测边网

和测角网一样, 在测边网中也可分解为三角形, 大地四边形和中点多边形三种基本图形。对于测边三角形, 决定其形状和大小的必要观测为三条边长。所以  $t=3$ , 此时  $r=n-t=3-3=0$ , 即测边三角形不存在条件方程。对于测边四边形, 决定第一个三角形必须观测

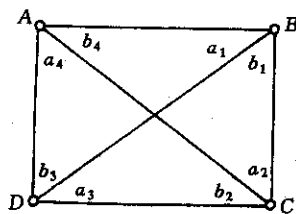


图 4-7

3 条边长, 决定第二个三角形只需再增加 2 条边长, 所以确定一个四边形的图形, 必须观测 5 条边长, 即  $t=5$ , 所以  $r=n-t=6-5=1$ , 存在一个条件方程。对于中点多边形, 例如中点五边形, 它由四个独立三角形组成, 此时  $t=3+2\times 3=9$ , 故有  $r=n-t=10-9=1$ 。因此, 测边网中的中点多边形与大地四边形个数之和, 即为该网条件方程的总数。这类条件称为图形条件。

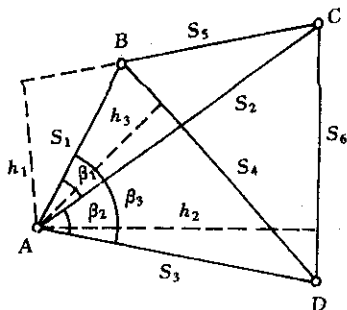


图 4-8

图形条件的列出, 可乘用角度闭合法、边长闭合法和面积闭合法等, 本节仅介绍角度闭合法。

测边网的图形条件按角度闭合法列出, 其基本思想是: 利用观测边长求出网中的内角, 列出角度间应满足的条件, 然后, 以边长改正数代换角度改正数, 得到以边长改正数表示的图形条件。例如, 图 4-8 的测边四边形中, 由观测边长  $S_i (i=1, 2, 3 \dots 6)$  精确地算出角值  $\beta_j (j=1, 2, 3)$ , 此时, 平差值条件方程为

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3 = 0,$$

以角度改正数表示的图形条件为

$$v_{\beta_1} + v_{\beta_2} - v_{\beta_3} - w = 0, \quad (4-2-12)$$

式中

$$-w = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3.$$

同样, 图 4-9 中的测边中点三角形中, 以角度改正数表示的图形条件为:

$$v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + v_{\beta_3} - w = 0, \quad (4-2-13)$$

式中

$$-w = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 360^\circ.$$

上述条件中的角度改正数必须代换成观测值(边长)的改正数, 才是图形条件的最终形式。为此, 必须找出边长改正数和角度改正数之间的关系式。

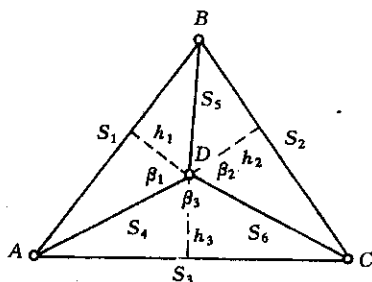


图 4-9

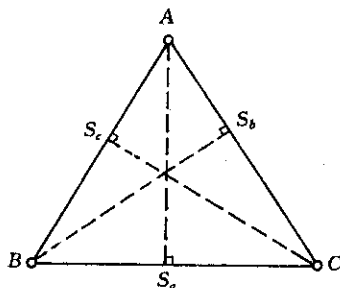


图 4-10

下面(以图 4-10 为例)给出角度改正数与边长改正数之间的关系式。由余弦定理知

$$S_a^2 = S_b^2 + S_c^2 - 2S_b S_c \cos A$$

微分得

$$2S_a dS_a = (2S_b - 2S_c \cos A) dS_b + (2S_c - 2S_b \cos A) dS_c + 2S_b S_c \sin A dA$$

$$A = \frac{1}{S_b S_c \sin A} (S_a dS_a - (S_b - S_c \cos A) dS_b - (S_c - S_b \cos A) dS_c) \quad (4-2-14)$$

由图知

$$S_b S_c \sin A = S_b h_b = (2 \text{ 倍三角形面积}) = S_a h_a, \\ S_b - S_c \cos A = S_a \cos C, \quad S_c - S_b \cos A = S_a \cos B,$$

故有

$$dA = \frac{1}{h_a} (dS_a - \cos C dS_b - \cos B dS_c) \quad (4-2-15)$$

将上式中的微分换成相应的改正数,同时考虑到式中  $dA$  的单位是弧度,而角度改正数是以(")为单位,故上式可写成:

$$v_A'' = \frac{\rho''}{h_a} (v_{S_a} - \cos C v_{S_b} - \cos B v_{S_c}) \quad (4-2-16)$$

这就是角度改正数与三个边长改正数之间的关系式,以后称该式为角度改正数方程。上式规律极为明显,即任意一角(例如  $A$  角)的改正数等于其对边( $S_a$  边)的改正数与两个夹边( $S_b, S_c$  边)的改正数分别与其邻角余弦( $S_b$  边邻角为  $C$  角,  $S_c$  边邻角为  $B$  角)乘积负值之和,再乘以  $\rho''$  为分子,以该角至其对边之高( $h_a$ )为分母的分式。

按照上述规律,可以写出图 4-8 中角  $\beta_1, \beta_2$  及  $\beta_3$  的角度改正数方程分别为

$$v_{\beta_1} = \frac{\rho''}{h_1} (v_{S_5} - \cos \angle ABC v_{S_1} - \cos \angle ACB v_{S_2})$$

$$v_{\beta_2} = \frac{\rho''}{h_2} (v_{S_6} - \cos \angle ACD v_{S_2} - \cos \angle ADC v_{S_3})$$

$$v_{\beta_3} = \frac{\rho''}{h_3} (v_{S_4} - \cos \angle ABD v_{S_1} - \cos \angle ADB v_{S_3})$$

式中  $h_1, h_2$  及  $h_3$  分别是  $A$  点向  $\beta_i (i=1, 2, 3)$  角对边所作的高。将上列三式代入(4-2-12)式,按  $v_{S_i} (i=1, 2, \dots, 6)$  的顺序并项,即得四边形的以边长改正数表示的图形条件:

$$\begin{aligned} & \rho'' \left( \frac{\cos \angle ABD}{h_3} - \frac{\cos \angle ABC}{h_1} \right) v_{S_1} - \rho'' \left( \frac{\cos \angle ACB}{h_1} + \frac{\cos \angle ACD}{h_2} \right) v_{S_2} \\ & + \rho'' \left( \frac{\cos \angle ADB}{h_3} - \frac{\cos \angle ADC}{h_2} \right) v_{S_3} - \frac{\rho''}{h_3} v_{S_4} \\ & + \frac{\rho''}{h_1} v_{S_5} + \frac{\rho''}{h_2} v_{S_6} - w = 0, \end{aligned} \quad (4-2-17)$$

如果图形中出现已知边时,在条件方程中,要把相应于该边的改正数项舍去。对于图 4-9 中的中点三角形来说,  $\beta_1, \beta_2$  及  $\beta_3$  的改正数与各边改正数的关系式为

$$v_{\beta_1} = \frac{\rho''}{h_1} (v_{S_1} - \cos \angle DAB v_{S_4} - \cos \angle DBA v_{S_5}),$$

$$v_{\beta_2} = \frac{\rho''}{h_2} (v_{S_2} - \cos \angle DBC v_{S_5} - \cos \angle DCB v_{S_6}),$$

$$v\beta_3 = \frac{\rho}{h_3}(v_{s_3} - \cos\angle DCA v_{s_6} - \cos\angle DAC v_{s_4}),$$

将上述关系代入(4-2-13)式,并按  $v_{s_i} (i=1, 2, \dots, 6)$  的顺序并项,即得中点三角形的图形条件,即:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{h_1}v_{s_1} + \frac{\rho}{h_2}v_{s_2} + \frac{\rho}{h_3}v_{s_3} - \rho\left(\frac{\cos\angle DAB}{h_1} + \frac{\cos\angle DAC}{h_3}\right)v_{s_4} \\ - \rho\left(\frac{\cos\angle DBA}{h_1} + \frac{\cos\angle DBC}{h_2}\right)v_{s_5} \\ - \rho\left(\frac{\cos\angle DCB}{h_2} + \frac{\cos\angle DCA}{h_3}\right)v_{s_6} - w = 0. \end{aligned} \quad (4-2-18)$$

在具体计算图形条件的系数和闭合差时,一般取边长改正数的单位为 cm,高  $h$  的单位为 km,  $\rho$  取 2.062,而闭合差  $w$  的单位为 (").由观测边长计算系数中的角值(图 4-10),可按余弦定理或下式计算

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{r}{p-S_a}, & \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{r}{p-S_b}, \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{r}{p-S_c}, \end{aligned} \quad (4-2-19)$$

式中

$$p = (S_a + S_b + S_c)/2,$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-S_a)(p-S_b)(p-S_c)}{p}},$$

而高  $h$  为

$$\left. \begin{aligned} h_a &= S_b \sin C = S_c \sin B \\ h_b &= S_a \sin C = S_c \sin A \\ h_c &= S_a \sin B = S_b \sin A \end{aligned} \right\} \quad (4-2-20)$$

### § 4-3 精度评定

在条件平差中,精度评定包括给出单位权方差的估值计算公式和平差值函数的协因数及其中误差的计算公式。为此,还要导出有关向量平差后的协因数阵,或称验后协因数阵。

在一般情况下,观测向量的协方差阵往往是不知道的,为了评定精度,还要利用改正数  $V$  计算单位权方差的估值  $\hat{\sigma}_0^2$ ,然后才能计算所需要的各向量的协方差阵和任何平差结果的精度。

#### 一、计算单位权方差的估值公式

计算任何平差方法中的单位权方差估值,都是用  $V^T P V$  除以该平差方法的自由度  $r$ ,即

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r}, \quad (4-3-1)$$



有了单位权方差的估值和某向量的验后协因数阵,例如已知平差值  $\hat{L}$  的协因数阵  $Q_{LL}$ ,即可计算平差值向量的协方差阵

$$D_{LL} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{LL} \quad (4-3-2)$$

至于计算单位权方差估值的公式为何要用  $V^T P V$  除以相应平差方法的自由度  $r$ ,将在 § 8-5 中予以说明。

(4-3-1)中的  $V^T P V$  可以用已经算出的  $V$  向量和已知的权阵  $P$  直接计算,也可以按以下导出的公式进行计算。

因为  $V = P^{-1} A^T K = Q A^T K$ , 故有

$$V^T P V = (Q A^T K)^T P (Q A^T K) = K^T A Q P Q A^T K = K^T N_{aa} K \quad (4-3-3)$$

即二次型  $V^T P V$  也可以用联系数  $K$  的具有方阵  $N_{aa}$  的二次型来进行计算。

此外, 因为

$$V^T P V = V^T P (P^{-1} A^T K) = V^T A^T K = (AV)^T K = W^T K \quad (4-3-4)$$

$V^T P V$  也可用联系数  $K$  和闭合差  $W$  进行计算。

顺便指出, 改正数平方和这一二次型函数是测量平差中一个重要的统计量, 在误差统计检验和统计分析中常要用到。

## 二、协因数阵

在条件平差中, 基本向量为  $L$ 、 $W$ 、 $K$ 、 $V$ 、 $\hat{L}$ , 通过平差计算之后, 它们都可表达成随机向量  $L$  的函数, 本节将推求它们各自的协因数阵以及两两向量间的互协因数阵。

设

$$Z^T = [L^T \ W^T \ K^T \ V^T \ \hat{L}^T]$$

则  $Z$  的协因数阵为

$$Q_{ZZ} = \begin{bmatrix} Q_{LL} & Q_{LW} & Q_{LK} & Q_{LV} & Q_{L\hat{L}} \\ Q_{WL} & Q_{WW} & Q_{WK} & Q_{WV} & Q_{W\hat{L}} \\ Q_{KL} & Q_{KW} & Q_{KK} & Q_{KV} & Q_{K\hat{L}} \\ Q_{VL} & Q_{VW} & Q_{VK} & Q_{VV} & Q_{V\hat{L}} \\ Q_{\hat{L}L} & Q_{\hat{L}W} & Q_{\hat{L}K} & Q_{\hat{L}V} & Q_{\hat{L}\hat{L}} \end{bmatrix}$$

下面分别推导  $Q_{ZZ}$  中各协因数阵的计算式, 已知  $Q_{LL} = Q$ 。

上述各基本量的关系式已知为

$$L = L, \quad (4-3-5)$$

$$W = -AL - A_0, \quad (4-3-6)$$

$$K = N_{aa}^{-1} W = -N_{aa}^{-1} AL - N_{aa}^{-1} A_0, \quad (4-3-7)$$

$$V = Q A^T K = Q A^T N_{aa}^{-1} W = -Q A^T N_{aa}^{-1} AL - Q A^T N_{aa}^{-1} A_0, \quad (4-3-8)$$

$$\hat{L} = L + V. \quad (4-3-9)$$

按协因数传播律, 可得  $L$ 、 $W$ 、 $K$ 、 $V$  及相互间的协因数阵为

$$Q_{LL} = Q,$$

$$\begin{aligned}
Q_{ww} &= AQA^T = N_{aa}, \\
Q_{KK} &= N_{aa}^{-1}Q_{ww}N_{aa}^{-1} = N_{aa}^{-1}N_{aa}N_{aa}^{-1} = N_{aa}^{-1}, \\
Q_{vv} &= QA^TQ_{KK}AQ = QA^TN_{aa}^{-1}AQ, \\
Q_{LW} &= -QA^T, \\
Q_{LK} &= -QA^TN_{aa}^{-1}, \\
Q_{LV} &= -QA^TN_{aa}^{-1}AQ, \\
Q_{WK} &= AQA^TN_{aa}^{-1} = N_{aa}N_{aa}^{-1} = I, \\
Q_{WV} &= Q_{ww}N_{aa}^{-1}AQ = N_{aa}N_{aa}^{-1}AQ = AQ, \\
Q_{KV} &= N_{aa}^{-1}Q_{ww}N_{aa}^{-1}AQ = N_{aa}^{-1}AQ.
\end{aligned}$$

下面再计算  $\hat{L}$  的自协因数阵以及它和  $L$ 、 $W$ 、 $K$ 、 $V$  间的互协因数阵，得

$$\begin{aligned}
Q_{LL} &= Q_{LL} + Q_{LV} = Q - QA^TN_{aa}^{-1}AQ, \\
Q_{WL} &= Q_{WL} + Q_{WV} = Q_{LW}^T + Q_{WV} = -AQ + AQ = 0, \\
Q_{KL} &= Q_{KL} + Q_{KV} = -N_{aa}^{-1}AQ + N_{aa}^{-1}AQ = 0, \\
Q_{VL} &= Q_{VL} + Q_{VV} = 0.
\end{aligned}$$

因为  $L = \hat{L} - V$ ，而  $Q_{VL} = 0$ ，即  $V$  与  $\hat{L}$  为互相统计独立，于是  $Q_{LL} = Q_{LL} + Q_{VV}$ ，即

$$Q_{LL} = Q_{LL} - Q_{VV} = Q - QA^TN_{aa}^{-1}AQ.$$

将以上结果列于表 4-1，以便查用。

条件平差各量的协因数

表 4-1

	$L$	$W$	$K$	$V$	$\hat{L}$
$L$	$Q$	$-QA^T$	$-QA^TN_{aa}^{-1}$	$-Q_{vv}$	$Q - QA^TN_{aa}^{-1}AQ$
$W$	$-AQ$	$N_{aa}$	$I$	$AQ$	$0$
$K$	$-N_{aa}^{-1}AQ$	$I$	$N_{aa}^{-1}$	$N_{aa}^{-1}AQ$	$0$
$V$	$-Q_{vv}$	$QA^T$	$QA^TN_{aa}^{-1}$	$AQ^TN_{aa}^{-1}AQ$	$0$
$\hat{L}$	$Q - QA^TN_{aa}^{-1}AQ$	$0$	$0$	$0$	$Q - Q_{vv}$

由表 4-1 可见，平差值  $\hat{L}$  与改正数  $V$ 、闭合差  $W$ 、联系数  $K$  是不相关的统计量，因为它们都是正态向量，所以也可以说  $\hat{L}$  与  $V$ 、 $W$ 、 $K$  互独立。

### 三、平差值函数的协因数

在条件平差中，经平差计算，首先得到的是各个观测量的平差值。例如，水准网平差先求得的是观测高差的平差值，测角网中则是观测角度的平差值。但是水准网平差后要求得到的是各待定点的平差高程，测角网平差后则要知道点的坐标、边长和方位角等。这些都是观测值平差值的函数，如何计算平差值函数的协因数，则是下面要讨论的问题。

如在例[4-2]中，为求  $C$  点平差高程可建立如下平差值函数式

$$\hat{H}_C = H_A + \hat{h}_1$$

这是一种线性形式。

又知, 在图 4-11 中, 为求平差后  $CD$  边方位角  $\hat{\alpha}_{CD}$ ,  $CD$  边边长  $\hat{S}_{CD}$  和  $D$  点坐标  $\hat{X}_D$  和  $\hat{Y}_D$ , 可列出如下平差值函数式, 即

$$\hat{\alpha}_{CD} = \alpha_{AB} + \hat{a}_1 + \hat{c}_1 + \hat{c}_2$$

和

$$\hat{S}_{CD} = \overline{AB} \frac{\sin \hat{a}_1 \sin \hat{a}_2}{\sin \hat{c}_1 \sin \hat{b}_2},$$

及

$$\hat{X}_D = X_A + \overline{AD} \cos \hat{\alpha}_{AD} = X_A + \overline{AB} \frac{\sin \hat{a}_1}{\sin \hat{c}_1} \cos(\alpha_{AB} + \hat{a}_1),$$

$$\hat{Y}_D = Y_A + \overline{AD} \sin \hat{\alpha}_{AD} = Y_A + \overline{AB} \frac{\sin \hat{a}_1}{\sin \hat{c}_1} \sin(\alpha_{AB} + \hat{a}_1).$$

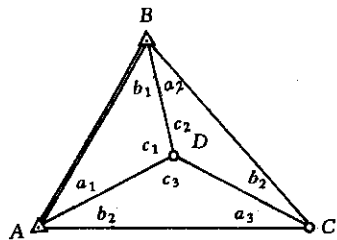


图 4-11

从以上讨论可以看出, 所求各量都是平差值的函数。就函数形式来说, 第一种是线性的, 第二、三种都是非线性的。

为了计算某一平差值函数的中误差, 当单位权中误差  $\sigma_0$  求出以后, 如果知道它们的协因数, 其中误差也就知道了, 所以下面推导计算平差值函数的协因数公式。

由于线性形式的平差值函数只是非线性形式的一种特例, 下面就非线性形式的函数出发来推导其协因数的计算公式。

设有平差值函数为

$$\hat{\varphi} = f(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n) \quad (4-3-10)$$

考虑  $\hat{L}_i = L_i + v_i$ ,  $L_i = \bar{L}_i - \Delta_i$ , 故上式为

$$\hat{\varphi} = f(\bar{L}_1 - \Delta_1 + v_1, \bar{L}_2 - \Delta_2 + v_2, \dots, \bar{L}_n - \Delta_n + v_n) \quad (4-3-11)$$

真误差  $\Delta$  和改正数  $v$  为微小量, 将上式按台劳公式展开, 取至一次项, 得

$$\hat{\varphi} = F(\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_n) + \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{L}_1} \right)_L (-\Delta_1 + v_1) + \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{L}_2} \right)_L (-\Delta_2 + v_2) + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{L}_n} \right)_L (-\Delta_n + v_n),$$

若令

$$f_0 = f(\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_n), \quad f_i = \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{L}_i} \right)_L,$$

则线性化后的函数式为

$$\hat{\varphi} = f_0 + f_1(-\Delta_1 + v_1) + f_2(-\Delta_2 + v_2) + \dots + f_n(-\Delta_n + v_n). \quad (4-3-12)$$

令

$$f = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n]^T$$

则上式可写成

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= f_0 - f^T \Delta + f^T V \\ &= f_0 + [-f^T \quad f^T] \begin{bmatrix} \Delta \\ V \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-3-13)$$

按协因数传播律, 得

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = [-f^T \quad f^T] \begin{bmatrix} Q_{\Delta\Delta} & Q_{\Delta V} \\ Q_{V\Delta} & Q_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f \\ f \end{bmatrix} \quad (4-3-14)$$

或

$$Q_{\hat{\hat{p}}} = f^T Q_{\Delta\Delta} f - f^T Q_{\Delta V} f - f^T Q_{V\Delta} f + f^T Q_{VV} f \quad (4-3-15)$$

考虑  $\Delta = \tilde{L} - L$ , 有  $Q_{\Delta\Delta} = Q_{LL}$ ,  $Q_{\Delta V} = -Q_{LV}$ , 查表 4-1 得

$$Q_{\Delta\Delta} = Q, \quad Q_{\Delta V} = -Q_{VV}, \quad Q_{VV} = Q A^T N_{aa}^{-1} A Q.$$

将这些式子代入(4-3-15)式, 最后得平差值协因数公式为

$$Q_{\hat{\hat{p}}} = f^T Q f - (A Q f)^T N_{aa}^{-1} A Q f \quad (4-3-16)$$

由此可见, 当列出平差值函数式后, 只要求出其系数  $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 即可代入上式计算  $\hat{\varphi}$  的协因数。

当平差值函数  $\hat{\varphi}$  为线性形式时, 其函数式一般可表示为

$$\hat{\varphi} = f_1 \hat{L}_1 + f_2 \hat{L}_2 + \dots + f_n \hat{L}_n \quad (4-3-17)$$

亦即在观测量平差值前的系数就是  $f_i$  值。

当平差值函数为非线性形式时, 它为(4-3-10)式, 求其全微分得

$$\begin{aligned} d\hat{\varphi} &= \left( \frac{\partial f}{\partial \hat{L}_1} \right)_{L=L} d\hat{L}_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial \hat{L}_2} \right)_{L=L} d\hat{L}_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial \hat{L}_n} \right)_{L=L} d\hat{L}_n \\ &= f_1 d\hat{L}_1 + f_2 d\hat{L}_2 + \dots + f_n d\hat{L}_n \end{aligned} \quad (4-3-18)$$

就可求出系数值  $f_i$ , 这是一种简单可行的方法, 称(4-3-18)为平差值函数的权函数式, 顾名思义是求协因数用的表达式。

## § 4-4 条件平差公式汇编和水准网平差示例

### 一、公式汇编

条件平差的函数模型和随机模型是

$$A\Delta - W = 0 \quad (4-1-1)$$

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}, \quad (4-1-2)$$

条件方程:

$$A V - W = 0. \quad (4-1-3)$$

法方程:

$$N_{aa} K - W = 0, \quad (4-1-13)$$

其解为

$$K = N_{aa}^{-1} W.$$

改正数方程:

$$V = P^{-1} A^T K = Q A^T K. \quad (4-1-11)$$

观测量平差值:

$$\hat{L} = L + V.$$

平差值函数:

$$\hat{\varphi} = f(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n),$$

其权函数式为

$$d\hat{\varphi} = f_1 d\hat{L}_1 + f_2 d\hat{L}_2 + \cdots + f_n d\hat{L}_n, \quad \left( f_i = \frac{\partial F}{\partial \hat{L}_i} \right).$$

单位权方差的估值:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r}, \quad \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}} \quad (4-3-2)$$

平差值函数  $\hat{\varphi}$  的方差:

$$\sigma_{\hat{\varphi}}^2 = \sigma_0^2 Q_{FF} = \sigma_0^2 (f^T Q f - f^T Q A^T N_{aa}^{-1} A Q f) \quad (4-3-16)$$

## 二、水准网条件平差示例

例[4-5] 在水准网(图 4-12)中, A 和 B 是已知高程的水准点, 并设这些点已知高程无误差。图中  $P_1$ ,  $P_2$  和  $P_3$  点是待定点。A 和 B 点高程, 观测高差和相应的水准路线长度见表 4-2。试按条件平差求: (1) 各待定点的平差高程; (2)  $P_1$  至  $P_2$  点间高差平差值的中误差

观测与起始数据

表 4-2

路线号	观测高差(m)	水准路线长(km)	已知高程(m)
1	+1.359	1.1	$H_A = 5.016$
2	+2.009	1.7	$H_B = 6.016$
3	+0.363	2.3	
4	+1.012	2.7	
5	+0.657	2.4	
6	+0.238	1.4	
7	-0.595	2.6	

解: 1. 列条件方程和平差值函数式。

本题有 7 个观测值, 有 3 个待定点, 所以有条件  $r = n - t = 7 - 3 = 4$  个。

(1) 4 个条件方程为

$$\left. \begin{aligned} v_1 - v_2 + v_5 + 7 &= 0 \\ v_3 - v_4 + v_5 + 8 &= 0 \\ v_3 + v_6 + v_7 + 6 &= 0 \\ v_2 - v_4 - 3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

式中闭合差以 mm 为单位。

(2) 所求平差值函数式:

$$\hat{\varphi} = \hat{L}_5,$$

所以  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_6 = f_7 = 0$ ,  $f_5 = +1$ 。

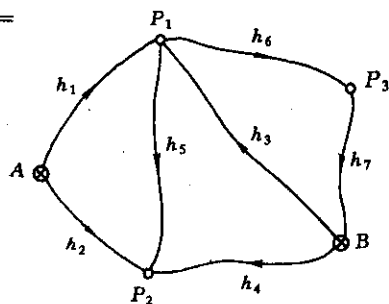


图 4-12

2. 定权, 并组成法方程。令  $C=1$ , 即以一公里观测高差为单位权观测, 于是  $P_i = \frac{1}{S_i}$ ,

$Q_{ii}=P_i^{-1}=S_i$ 。因各观测高差不相关，故协因数阵为对角阵，即

$$Q=P^{-1}=\begin{bmatrix} 1.1 & & & & & & \\ & 1.7 & & & & & \\ & & 2.3 & & & & \\ & & & 2.7 & & & \\ & & & & 2.4 & & \\ & & & & & 1.4 & \\ & & & & & & 2.6 \end{bmatrix},$$

由条件方程知系数阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由此组成法方程为

$$\begin{bmatrix} 5.2 & 2.4 & 0 & -1.7 \\ 2.4 & 7.4 & 2.3 & 2.7 \\ 0 & 2.3 & 6.3 & 0 \\ -1.7 & 2.7 & 0 & 4.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.$$

3. 解算法方程。可用解线性方程组的任意方法计算，现用高斯约化法程序算得

$$k_1 = -0.2226, \quad k_2 = -1.4028, \quad k_3 = -0.4414, \quad k_4 = 1.4568.$$

4. 计算改正数。利用改正数方程求得

$$V = [-0.2 \quad 2.9 \quad -4.2 \quad -0.1 \quad -3.9 \quad -0.6 \quad -1.2]^T (\text{mm}).$$

5. 计算平差值，并代入平差值条件式检核。

$$\hat{L} = [1.3588 \quad 2.0119 \quad 0.3588 \quad 1.0119 \quad 0.6531 \quad 0.2374 \quad -0.5962]^T (\text{m}).$$

经检验满足所有条件方程。

6. 计算  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$  点平差高程

$$H_{P_1} = H_A + \hat{L}_1 = 6.3748 \text{m},$$

$$H_{P_2} = H_A + \hat{L}_2 = 7.0279 \text{m},$$

$$H_{P_3} = H_B - \hat{L}_7 = 6.6121 \text{m}.$$

7. 计算单位权中误差

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}} = \sqrt{\frac{19.80}{4}} = \pm 2.2 \text{mm}.$$

即该水准网一公里观测高差的后验中误差为  $\pm 2.2 \text{mm}$ 。

8. 计算平差后  $P_1$  至  $P_2$  点间平差高差及其中误差

$$\hat{\varphi} = \hat{L}_5 = 0.6531 \text{m}$$

$$\hat{\sigma}_{\varphi} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\varphi\varphi}} = 2.2 \sqrt{0.99} = \pm 2.2 \text{mm}.$$

## 第五章 间接平差

### § 5-1 间接平差原理

间接平差法(参数平差法)是通过选定  $t$  个独立参数,将每个观测量分别表达成这  $t$  个参数的函数,建立函数模型,按最小二乘原理,用求自由极值的方法解出参数的最或然值,从而求得各观测量的平差值。

在 § 3-2 中已经简述了间接平差法建立函数模型和随机模型的方法,即其函数模型为(3-2-11)式:

$$\Delta = B \hat{X} - l \quad (5-1-1)$$

$\begin{matrix} n,1 & n,t & t,1 & n,1 \end{matrix}$

随机模型为(3-2-23)式,即

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (5-1-2)$$

$\begin{matrix} n,n & n,n & n,n \end{matrix}$

用参数的估值  $\hat{X}$  和  $\Delta$  的估值  $V$  代入,则(5-1-1)式写成

$$V = B \hat{X} - l \quad (5-1-3)$$

$\begin{matrix} n,1 & n,t & t,1 & n,1 \end{matrix}$

表达了参数估值  $\hat{X}$  与观测值改正数  $V$  之间的函数关系,称为误差方程。

由于误差方程个数为  $n$ ,待求量  $\hat{X}$  和  $V$  的总数为  $n+t$ ,而  $n < n+t$ , (5-1-3)式具有无穷多组解,但可按最小二乘原理,在  $V^T P V = \min$  下求得其唯一解。下面导出间接平差的计算公式。

#### 一、间接平差的基础方程及其解

设平差问题中有  $n$  个观测值  $L$ , 已知其协因数阵  $Q = P^{-1}$ , 必要观测数为  $t$ , 选定  $t$  个独立量为参数  $\hat{X}$ , 其估值为  $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$ , 观测值  $L$  与改正数  $V$  之和  $\hat{L} = L + V$ , 称为观测量平差值。按具体平差问题,可列出  $n$  个平差值方程为

$$L_i + v_i = a_i \hat{X}_1 + b_i \hat{X}_2 + \cdots + t_i \hat{X}_t + d_i \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad (5-1-4)$$

令

$$\begin{aligned} L &= [L_1 \ L_2 \cdots L_n]^T \\ V &= [V_1 \ V_2 \cdots V_n]^T \\ \hat{X} &= [\hat{X}_1 \ \hat{X}_2 \cdots \hat{X}_t]^T \\ d &= [d_1 \ d_2 \cdots d_n]^T \\ B &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & t_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & t_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{matrix} n,1 & n,1 & t,1 & n,1 & n,t \end{matrix}$

则平差值方程的矩阵形式为

$$L+V=B\hat{X}+d \quad (5-1-5)$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}$$

$$l_{n,1} = L - (BX^0 + d) \quad (5-1-6)$$

式中  $X^0$  为参数的充分近似值, 于是得误差方程为

$$V=B \hat{x}-l \quad (5-1-7)$$

按最小二乘原理，上式的  $\hat{x}$  必须满足  $V^T P V = \min$  的要求，因为  $t$  个参数为独立量，故可按数学上求函数自由极值的方法，得

$$\frac{\partial V^T P V}{\partial \hat{x}} = 2V^T P \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} = V^T P B = 0$$

转置后得

$$B^T P V = 0 \quad (5-1-8)$$

以上所得的(5-1-7)和(5-1-8)式中的待求量是  $n$  个  $V$  和  $t$  个  $\hat{x}$ , 而方程个数也是  $n+t$  个, 有唯一解, 称此两式为间接平差的基础方程。

解此基础方程，一般是将(5-1-7)式代入(5-1-8)式，以便先消去  $V$ ，得

$$B^T P B \hat{x} - B^T P l = 0 \quad (5-1-9)$$

$$N_{t,t} = B^T P B, \quad W_{t,1} = B^T P l$$

上式可简写成

$$N_{bb} \hat{x} - W = 0 \quad (5-1-10)$$

式中系数阵  $N_{bb}$  为满秩, 即  $R(N_{bb})=t$ ,  $\hat{x}$  有唯一解, 上式称为间接平差的法方程。解之, 得

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1} W \quad (5-1-11)$$

或

$$\hat{x} = (B^T P B)^{-1} B^T P l \quad (5-1-12)$$

将求出的  $\hat{x}$  代入误差方程(5-1-7), 即可求得改正数  $V$ , 从而平差结果为

$$\hat{L}=L+V, \quad \hat{X}=X^0+\hat{x} \quad (5-1-13)$$

特别地, 当  $P$  为对角阵时, 即观测值间互独立, 则法方程(5-1-12)的纯量形式为

[illegible]

## 二、按间接平差法求平差值的计算步骤

1. 根据平差问题的性质, 选择  $t$  个独立量作为参数;
2. 将每一个观测量的平差值分别表达成所选参数的函数, 若函数非线性要将其线性



化, 列出误差方程(5-1-7);

3. 由误差方程系数  $B$  和自由项  $l$  组成法方程(5-1-10), 法方程个数等于参数的个数  $t$ ;

4. 解算法方程, 求出参数  $\hat{x}$ , 计算参数的平差值  $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$ ;

5. 由误差方程计算  $V$ , 求出观测量平差值  $\hat{L} = L + V$ 。

例[5-1] 在图 5-1 所示的水准网中, 已知水准点  $A$  的高程为  $H_A = 237.483 \text{ m}$ , 为求  $B$ 、 $C$ 、 $D$  三点的高程, 进行了水准测量, 测得高差  $L$  和水准路线的长度  $S$ , 其结果见表 5-1, 试按间接平差求定  $B$ 、 $C$ 、 $D$  三点高程的平差值。

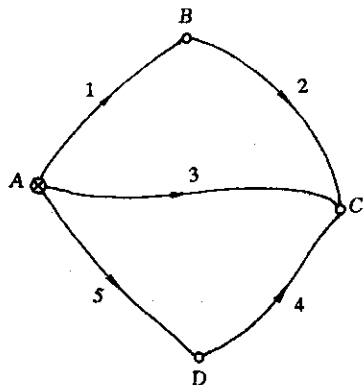


图 5-1

解: 按题意知必要观测数  $t = 3$ , 选取  $B$ 、 $C$ 、 $D$  三点高程  $\hat{X}_1$ 、 $\hat{X}_2$ 、 $\hat{X}_3$  为参数。

表 5-1

水准路线 $i$	观测高差 $L_i$ (m)	路线长度 $S_i$ (km)
1	5.835	3.5
2	3.782	2.7
3	9.640	4.0
4	7.384	3.0
5	2.270	2.5

根据图 5-1 所示的水准路线写出  $5(=n)$  个平差值方程

$$\left. \begin{aligned} L_1 + v_1 &= \hat{X}_1 - H_A \\ L_2 + v_2 &= -\hat{X}_1 + \hat{X}_2 \\ L_3 + v_3 &= \hat{X}_2 - H_A \\ L_4 + v_4 &= \hat{X}_2 - \hat{X}_3 \\ L_5 + v_5 &= \hat{X}_3 - H_A \end{aligned} \right\},$$

将观测值移至等号右侧, 即得误差方程

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \hat{X}_1 - (H_A + L_1) \\ v_2 &= -\hat{X}_1 + \hat{X}_2 - L_2 \\ v_3 &= \hat{X}_2 - (H_A + L_3) \\ v_4 &= \hat{X}_2 - \hat{X}_3 - L_4 \\ v_5 &= \hat{X}_3 - (H_A + L_5) \end{aligned} \right\}.$$

将观测高差和已知点高程代入上式, 即可计算误差方程的常数项。此时, 这些常数项将具有 5~6 个数字, 这对后续计算是不利的。为了便于计算, 可以选取参数的近似值, 例如令

$$\left. \begin{aligned} X_1^0 &= H_A + L_1 \\ X_2^0 &= H_A + L_3 \\ X_3^0 &= H_A + L_5 \end{aligned} \right\}$$

这样，后续计算求定的只是未知数近似值的改正数  $\hat{x}_1$ 、 $\hat{x}_2$ 、 $\hat{x}_3$ ，它们存在下列关系：

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_1 &= X_1^0 + \hat{x}_1 = \hat{x}_1 + H_A + L_1 \\ \hat{X}_2 &= X_2^0 + \hat{x}_2 = \hat{x}_2 + H_A + L_3 \\ \hat{X}_3 &= X_3^0 + \hat{x}_3 = \hat{x}_3 + H_A + L_5 \end{aligned} \right\}$$

将上式代入误差方程，得

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \hat{x}_1 & +0 \\ v_2 &= -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 & +23 \\ v_3 &= \hat{x}_2 & +0 \\ v_4 &= \hat{x}_2 - \hat{x}_3 - 14 \\ v_5 &= \hat{x}_3 & +0 \end{aligned} \right\}$$

取 10 km 的观测高差为单位权观测，即按

$$P_i = \frac{C}{S_i} = \frac{10}{S_i}$$

定权，得各观测值的权分别为

$$P_1 = 2.9, P_2 = 3.7, P_3 = 2.5, P_4 = 3.3, P_5 = 4.0.$$

按(5-1-14)式组成法方程为

$$\left. \begin{aligned} 6.6 \hat{x}_1 - 3.7 \hat{x}_2 & - 85.1 = 0 \\ -3.7 \hat{x}_1 + 9.5 \hat{x}_2 - 3.3 \hat{x}_3 + 38.9 & = 0 \\ -3.3 \hat{x}_2 + 7.3 \hat{x}_3 + 46.2 & = 0 \end{aligned} \right\}$$

解法方程得

$$\hat{x}_1 = 11.75 \text{ mm}, \hat{x}_2 = -2.04, \hat{x}_3 = -7.25,$$

代入误差方程求改正数

$$v_1 = 12 \text{ mm}, v_2 = 9, v_3 = -2, v_4 = -9, v_5 = -7,$$

最后得平差值

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= 243.330 \text{ m}, \hat{X}_2 = 247.121, \hat{X}_3 = 239.746; \\ \hat{L}_1 &= 5.847 \text{ m}, \hat{L}_2 = 3.791, \hat{L}_3 = 9.638, \hat{L}_4 = 7.375, \hat{L}_5 = 2.263. \end{aligned}$$

## § 5-2 误差方程

按间接平差法进行平差计算，第一步就是列出误差方程。为此，要确定平差问题中参数的个数，参数的选择以及误差方程的建立等。

### 一、确定待定参数的个数

在间接平差中，待定参数的个数必须等于必要观测的个数  $t$ ，而且要求这  $t$  个参数必须

是独立的。这样才有可能将每个观测量表达成这  $t$  个参数的函数，而这种类型的函数式正是间接平差函数模型的基本形式。就水准网而言，如果网中有高程已知的水准点，则  $t$  就等于待定点的个数；若无已知点，则等于全部点数减一，因为这一点的高程可以任意给定，以作为全网高程的基准，这并不影响网点高程之间的相对关系。

## 二、参数的选取

在水准网中，既可以选取待定点高程作为参数，也可选取点间的高差作为参数，例如在例[5-1]中就是选取待定点高程作为参数的。如果选取高差作为参数，只要任意 3 个独立的高差都可以。例如，在图 5-1 中，可选取高差 1, 3, 5 或 1, 2, 4 等等作为参数，但不能选取例如 1, 2, 3 等高差为参数，因为，此时

$$\bar{X}_1 = \bar{L}_1, \bar{X}_2 = \bar{L}_2, \bar{X}_3 = \bar{L}_3,$$

而  $\bar{L}_1 + \bar{L}_2 - \bar{L}_3 = 0$ ，故  $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 - \bar{X}_3 = 0$ ，三个参数间函数相关。

在图 5-2 中，A、B、C 是已知坐标的三角点，D 是待定点。为求 D 点坐标，观测了图中 6 个水平角。此例，必要观测数为  $t=2$ ，通常选取 D 点的纵横坐标值  $\bar{X}_D$ 、 $\bar{Y}_D$  为参数，这样的参数总是函数独立的。此外，也可选取两个独立观测量为参数，例如，选取

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X}_1 = \bar{L}_2 \\ \bar{X}_2 = \bar{L}_3 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \bar{X}_1 = \bar{L}_1 \\ \bar{X}_2 = \bar{L}_2 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \bar{X}_1 = \bar{L}_4 \\ \bar{X}_2 = \bar{L}_6 \end{array} \right\},$$

等，它们都是函数独立的。但不能选取  $\bar{X}_1 = \bar{L}_2$ ， $\bar{X}_2 = \bar{L}_4$ ，因为  $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 = \angle BAC$ 。

综上所述，采用间接平差，应该选定刚好  $t$  个而又函数独立的一组量作为参数。至于应选择其中哪些量作为参数，则应按实际需要和是否便于计算而定。

## 三、误差方程的组成

例[5-1]已就水准网说明了误差方程的组成方法，观测量的平差值是参数的线性函数。现举例说明，观测量平差值与参数间为非线性函数时组成误差方程的方法。

例如在图 5-2 中，不管选择怎样的一组参数，都将出现非线性形式的平差值方程。设以 D 点坐标  $\bar{X}_D$  和  $\bar{Y}_D$  为参数，由图知，第 1 个平差值方程为

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= \hat{\alpha}_{DB} - \hat{\alpha}_{DA} \\ &= \arctg \frac{Y_B - \hat{Y}_D}{X_B - \hat{X}_D} - \arctg \frac{Y_A - \hat{Y}_D}{X_A - \hat{X}_D} \end{aligned} \quad (5-2-1)$$

式中  $(X_A, Y_A)$ ， $(X_B, Y_B)$  为已知点 A 和 B 的坐标。上式为非线性方程。

又如对图 5-3 测边交会图形来说，若选择待定点 D 的坐标为参数，平差值为  $\bar{X}_D$ 、 $\bar{Y}_D$ ，由图可列出其中第 1 个平

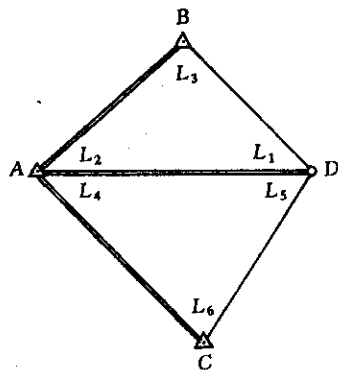


图 5-2

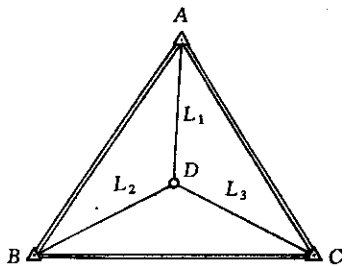


图 5-3

差值方程为

$$\hat{L}_1 = \sqrt{(\hat{X}_D - X_A)^2 + (\hat{Y}_D - Y_A)^2} \quad (5-2-2)$$

它们也是非线性函数关系。

#### 四、误差方程线性化

按 § 3-3 中阐述的误差方程线性化的方法，可对非线性平差值方程线性化，将

$$\hat{L}_i = L_i + V_i = f_i(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_t) \quad (5-2-3)$$

按台劳公式展开得

$$v_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}_1} \right)_0 \hat{x}_1 + \left( \frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}_2} \right)_0 \hat{x}_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}_t} \right)_0 \hat{x}_t - (L_i - f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0)) \quad (5-2-4)$$

令

$$a_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}_1} \right)_0, b_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}_2} \right)_0, \dots, t_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}_t} \right)_0$$

$$l_i = L_i - f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0) = L_i - L_i^0 \quad (5-2-5)$$

式中  $L_i^0$  为相应的函数的近似值，自由项  $l_i$  为观测值  $L_i$  减去其近似值  $L_i^0$ 。由此 (5-2-4) 式为

$$v_i = a_i \hat{x}_1 + b_i \hat{x}_2 + \dots + t_i \hat{x}_t - l_i \quad (5-2-6)$$

需要指出，线性化的误差方程是个近似式，因为它略去了  $\hat{x}_j$  的二次以上的各项。当  $\hat{x}_j$  很小时，略去高次项是不会影响计算精度的。如果由于某种原因不能求得较为准确的参数的近似值，即  $\hat{x}_j (j=1, 2, \dots, t)$  都很大，这样，平差值之间仍然会存在不符值。此时，就要把第一次平差结果作为参数的近似值再进行一次平差。

下面结合测角和测边两种情况，来讨论相应误差方程的线性化问题。

##### 1. 测角网坐标平差的误差方程

这里讨论测角网中选择待定点  $D$  的坐标平差值为参数时，误差方程的线性化问题。先介绍坐标改正数与坐标方位角改正数之间的关系式。

在图 5-4 中， $j, k$  是两个待定点，它们的近似坐标为  $X_j^0, Y_j^0, X_k^0$  和  $Y_k^0$ 。根据这些近似坐标可以计算  $j, k$  两点间的近似坐标方位角  $\alpha_{jk}^0$  和近似边长  $S_{jk}^0$ 。设这两点的近似坐标的改正数为  $\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{x}_k$  和  $\hat{y}_k$ ，即

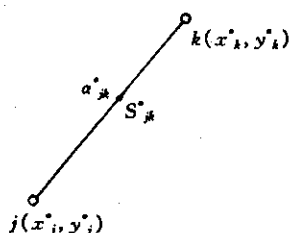


图 5-4

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_j &= X_j^0 + \hat{x}_j \\ \hat{Y}_j &= Y_j^0 + \hat{y}_j \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \hat{X}_k &= X_k^0 + \hat{x}_k \\ \hat{Y}_k &= Y_k^0 + \hat{y}_k \end{aligned} \right\}.$$

由近似坐标改正数引起的近似坐标方位角的改正数为  $\delta\alpha_{jk}$ ，即

$$\hat{\alpha}_{jk} = \alpha_{jk}^0 + \delta\alpha_{jk}, \quad (5-2-7)$$

现求坐标改正数  $\hat{x}_j, \hat{y}_j, \hat{x}_k, \hat{y}_k$  与坐标方位角改正数  $\delta\alpha_{jk}$  之间的线性关系。

根据图 5-4 可以写出：

$$\hat{\alpha}_{jk} = \arctg \frac{(Y_k^0 + \hat{y}_k) - (Y_j^0 + \hat{y}_j)}{(X_k^0 + \hat{x}_k) - (X_j^0 + \hat{x}_j)},$$

将上式右端按台劳公式展开, 得

$$\hat{\alpha}_{jk} = \arctg \frac{Y_k^0 - Y_j^0}{X_k^0 - X_j^0} + \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{X}_j} \right)_0 \hat{x}_j + \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{Y}_j} \right)_0 \hat{y}_j + \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{X}_k} \right)_0 \hat{x}_k + \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{Y}_k} \right)_0 \hat{y}_k,$$

等式中右边第一项就是由近似坐标算得的近似坐标方位角  $\alpha_{jk}^0$ , 对照(5-2-7)式可知

$$\delta \alpha_{jk} = \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{X}_j} \right)_0 \hat{x}_j + \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{Y}_j} \right)_0 \hat{y}_j + \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{X}_k} \right)_0 \hat{x}_k + \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{Y}_k} \right)_0 \hat{y}_k \quad (5-2-8)$$

式中

$$\left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{X}_j} \right)_0 = \frac{\frac{Y_k^0 - Y_j^0}{(X_k^0 - X_j^0)^2}}{1 + \frac{Y_k^0 - Y_j^0}{(X_k^0 - X_j^0)^2}} = \frac{Y_k^0 - Y_j^0}{(X_k^0 - X_j^0)^2 + (Y_k^0 - Y_j^0)^2} = \frac{\Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}.$$

同理可得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{Y}_j} \right)_0 &= -\frac{\Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}, \\ \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{X}_k} \right)_0 &= -\frac{\Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}, \\ \left( \frac{\partial \hat{\alpha}_{jk}}{\partial \hat{Y}_k} \right)_0 &= \frac{\Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}. \end{aligned}$$

将上列结果代入(5-2-8)式, 并顾及全式的单位得

$$\delta \alpha_{jk} = \frac{\rho \Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{x}_j - \frac{\rho \Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{y}_j - \frac{\rho \Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{x}_k + \frac{\rho \Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{y}_k, \quad (5-2-9)$$

或写成

$$\delta \alpha_{jk} = \frac{\rho \sin \alpha_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{x}_j - \frac{\rho \cos \alpha_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{y}_j - \frac{\rho \sin \alpha_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{x}_k + \frac{\rho \cos \alpha_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{y}_k. \quad (5-2-10)$$

上式就是坐标改正数与坐标方位角改正数间的一般关系式, 称为坐标方位角改正数方程。其中  $\delta \alpha$  以秒为单位。平差计算时, 可按不同的情况灵活运用上式。例如:

(1) 若某边的两端均为待定点, 则坐标改正数与坐标方位角改正数间的关系式就是(5-2-10)式。此时,  $\hat{x}_j$  与  $\hat{x}_k$  前的系数的绝对值相等;  $\hat{y}_j$  与  $\hat{y}_k$  前的系数的绝对值也相等。

(2) 若测站点  $j$  为已知点, 则  $\hat{x}_j = \hat{y}_j = 0$ , 得

$$\delta \alpha_{jk} = -\frac{\rho \Delta y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{x}_k + \frac{\rho \Delta x_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{y}_k, \quad (5-2-11)$$

若照准点  $k$  为已知点, 则  $\hat{x}_k = \hat{y}_k = 0$ , 得

$$\delta \alpha_{jk} = +\frac{\rho \Delta y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{x}_j - \frac{\rho \Delta x_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{y}_j. \quad (5-2-12)$$

(3) 若某边的两个端点均为已知点, 则

$$\hat{x}_j = \hat{y}_j = \hat{x}_k = \hat{y}_k = 0$$

得

$$\delta \alpha_{jk} = 0.$$

(4)同一边的正反坐标方位角的改正数相等,它们与坐标改正数的关系式也一样。这是因为

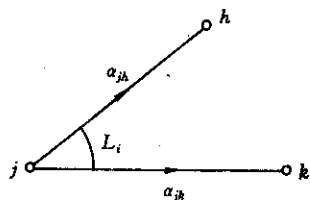


图 5-5

对照(5-2-10)式,顾及

$$\delta\alpha_{kj} = +\frac{\rho''\Delta Y_{kj}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{x}_k - \frac{\rho''\Delta X_{kj}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{y}_k - \frac{\rho''\Delta Y_{kj}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{x}_j + \frac{\rho''\Delta X_{kj}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{y}_j,$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y_{jk}^0 &= -\Delta Y_{kj}^0 \\ \Delta X_{jk}^0 &= -\Delta X_{kj}^0 \end{aligned} \right\},$$

得

$$\delta\alpha_{jk} = \delta\alpha_{kj}.$$

据此,实际计算时,只要对每条待定边计算一个坐标方位角改正数方程即可。

对于角度观测值  $L_i$ (图 5-5)来说,其观测值方程为

$$L_i + v_i = \hat{\alpha}_{jk} - \hat{\alpha}_{jh} \quad (5-2-13)$$

将  $\hat{\alpha} = \alpha^0 + \delta\alpha$  代入,并令

$$l_i = L_i - (\alpha_{jk}^0 - \alpha_{jh}^0) = L_i - L_i^0 \quad (5-2-14)$$

可得

$$v_i = \delta\alpha_{jk} - \delta\alpha_{jh} - l_i \quad (5-2-15)$$

然后根据这个角的三个端点  $j$ 、 $h$ 、 $k$  是已知点还是待定点而灵活运用(5-2-10)式,并以其代入(5-2-15)式,即得线性化后的误差方程。例如, $j$ 、 $h$  和  $k$  点都是待定点时,(5-2-15)式为

$$\begin{aligned} v_i = & \frac{\rho''\Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{x}_j - \frac{\rho''\Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{y}_j - \frac{\rho''\Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{x}_k + \frac{\rho''\Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{y}_k \\ & - \left\{ \frac{\rho''\Delta Y_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2}\hat{x}_j - \frac{\rho''\Delta X_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2}\hat{y}_j - \frac{\rho''\Delta Y_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2}\hat{x}_h + \frac{\rho''\Delta X_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2}\hat{y}_h \right\} - l_i \end{aligned}$$

合并同类项最后可得

$$\begin{aligned} v_i = & \rho'' \left( \frac{\Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} - \frac{\Delta Y_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2} \right) \hat{x}_j - \rho'' \left( \frac{\Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} - \frac{\Delta X_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2} \right) \hat{y}_j \\ & - \rho'' \frac{\Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{x}_k + \rho'' \frac{\Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2} \hat{y}_k + \rho'' \frac{\Delta Y_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2} \hat{x}_h - \rho'' \frac{\Delta X_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2} \hat{y}_h - l_i \end{aligned} \quad (5-2-16)$$

上式即为线性化后的误差方程。

综上所述,对于角度观测的三角网,采用间接平差,选择待定点的坐标为参数时,列误差方程的步骤为:

1. 计算各待定点的近似坐标  $X^0$ ,  $Y^0$ ;
2. 由待定点的近似坐标和已知点的坐标计算各待定边的近似坐标方位角  $\alpha^0$  和近似边长  $S^0$ ;

3. 列出各待定边的坐标方位角改正数方程,并计算其系数;

4. 按(5-2-16)、(5-2-14)式列出误差方程。

例[5-2] 同精度测得图 5-2 中的六个角度  $L_1, \dots, L_6$ , 其观测值列于表 5-2 中; 已知点  $B$ 、 $A$ 、 $C$  的起算数据列于表 5-3 中。试以待定点  $D$  的坐标为参数, 列出线性误差方程并求出平差值。

表 5-2

角号	观测值 $L_i$	角号	观测值 $L_i$
1	106°50'42.2"	4	28°26'05.0"
2	30 52 44.0	5	127 48 41.2
3	42 16 39.1	6	23 45 16.2

表 5-3

点 名	坐 标 (m)		坐标方位角 $\alpha$	边 长 $S$ (m)
	X	Y		
B	13737.37	10501.92		
A	8986.68	5705.03	225°16'38.1"	6751.24
C	6642.27	14711.75	104 35 24.3	9306.84

解:(1)由已知点  $B$ 、 $A$  和观测值  $L_3$ 、 $L_2$ , 按余切公式计算待定点  $D$  的近似坐标

$$X_D^0 = \frac{x_A \text{ctg} L_3 + x_B \text{ctg} L_2 - y_B + y_A}{\text{ctg} L_2 + \text{ctg} L_3} = 10122.12\text{m},$$

$$Y_D^0 = \frac{y_A \text{ctg} L_3 + y_B \text{ctg} L_2 + x_B - x_A}{\text{ctg} L_2 + \text{ctg} L_3} = 10312.47\text{m}.$$

(2)由已知点坐标和待定点近似坐标计算待定边的近似坐标方位角  $\alpha^0$  和近似边长  $S^0$  (见表 5-4)。

表 5-4

方向	近似坐标方位角 $\alpha^0$	近似边长 $S^0$ (m)
DA	256°09'22.0"	4745
DB	2 59 59.0	3620
DC	128 20 39.0	5609

(3)计算坐标方位角改正数方程的系数。计算时  $S^0$ 、 $\Delta X^0$ 、 $\Delta Y^0$  均以 m 为单位, 而  $\hat{x}_D$ 、 $\hat{y}_D$  因其数值较小, 采用 dm 为单位。对于已知边, 因  $\delta\alpha=0$ , 故不必计算。对本例而言, 只要计算三条边的坐标方位角改正数方程, 它们是

$$\delta\alpha_{DA} = \frac{\rho'' \Delta Y_{DA}^0}{(S_{DA}^0)^2 \cdot 10} \hat{x}_D - \frac{\rho'' \Delta X_{DA}^0}{(S_{DA}^0)^2 \cdot 10} \hat{y}_D$$

$$\delta\alpha_{DB} = \frac{\rho'' \Delta Y_{DB}^0}{(S_{DB}^0)^2 \cdot 10} \hat{x}_D - \frac{\rho'' \Delta X_{DB}^0}{(S_{DB}^0)^2 \cdot 10} \hat{y}_D$$

$$\delta\alpha_{DC} = \frac{\rho'' \Delta Y_{DC}^0}{(S_{DC}^0)^2 \cdot 10} \hat{x}_D - \frac{\rho'' \Delta X_{DC}^0}{(S_{DC}^0)^2 \cdot 10} \hat{y}_D$$

式中有关系数值的计算见表 5-5, 系数的单位是: 秒/dm。

表 5-5

方 向	$\Delta Y^0(\text{m})$	$\Delta X^0(\text{m})$	$(S^0)^2(\text{m}^2)$	$\delta\alpha$ 的系数(秒/dm)	
				$\hat{x}_D$	$\hat{y}_D$
DA	-4607	-1135	2252.10 <sup>4</sup>	-4.22	+1.04
DB	189	3615	1311.10 <sup>4</sup>	+0.30	-5.69
DC	4399	-3480	3146.10 <sup>4</sup>	+2.88	+2.28

根据表 5-5 的数据可以写出待定边的坐标方位角改正数方程

$$\left. \begin{aligned} \delta\alpha_{DA} &= \delta\alpha_{AD} = -4.22\hat{x}_D + 1.04\hat{y}_D \\ \delta\alpha_{DB} &= \delta\alpha_{BD} = 0.30\hat{x}_D - 5.69\hat{y}_D \\ \delta\alpha_{DC} &= \delta\alpha_{CD} = 2.88\hat{x}_D + 2.28\hat{y}_D \end{aligned} \right\}$$

(4) 参照图 5-2 列出观测值方程:

$$\begin{aligned} L_1 + v_1 &= \hat{\alpha}_{DB} - \hat{\alpha}_{DA}, & L_4 + v_4 &= \hat{\alpha}_{AC} - \hat{\alpha}_{AD}, \\ L_2 + v_2 &= \hat{\alpha}_{AD} - \hat{\alpha}_{AB}, & L_5 + v_5 &= \hat{\alpha}_{DA} - \hat{\alpha}_{DC}, \\ L_3 + v_3 &= \hat{\alpha}_{BA} - \hat{\alpha}_{BD}, & L_6 + v_6 &= \hat{\alpha}_{CD} - \hat{\alpha}_{CA}. \end{aligned}$$

将  $\hat{\alpha} = \alpha^0 + \delta\alpha$  代入上式后可得

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta\alpha_{DB} - \delta\alpha_{DA} - l_1 \\ v_2 &= \delta\alpha_{AD} - l_2 \\ v_3 &= -\delta\alpha_{BD} - l_3 \\ v_4 &= -\delta\alpha_{AD} - l_4 \\ v_5 &= \delta\alpha_{DA} - \delta\alpha_{DC} - l_5 \\ v_6 &= \delta\alpha_{CD} - l_6, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} l_1 &= L_1 - (\alpha_{DB}^0 - \alpha_{DA}^0) = L_1 - L_1^0 \\ l_2 &= L_2 - (\alpha_{AD}^0 - \alpha_{AB}^0) = L_2 - L_2^0 \\ l_3 &= L_3 - (\alpha_{BA}^0 - \alpha_{BD}^0) = L_3 - L_3^0 \\ l_4 &= L_4 - (\alpha_{AC}^0 - \alpha_{AD}^0) = L_4 - L_4^0 \\ l_5 &= L_5 - (\alpha_{DA}^0 - \alpha_{DC}^0) = L_5 - L_5^0 \\ l_6 &= L_6 - (\alpha_{CD}^0 - \alpha_{CA}^0) = L_6 - L_6^0. \end{aligned}$$

将(3)中算得的坐标方位角改正数方程、近似及已知的坐标方位角值和观测值代入上式, 得误差方程式



$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 4.52 \hat{x}_D - 6.73 \hat{y}_D - 5.2 \\ v_2 &= -4.22 \hat{x}_D + 1.04 \hat{y}_D - 0.1 \\ v_3 &= -0.30 \hat{x}_D + 5.69 \hat{y}_D + 0.0 \\ v_4 &= 4.22 \hat{x}_D - 1.04 \hat{y}_D - 2.7 \\ v_5 &= -7.10 \hat{x}_D - 1.24 \hat{y}_D + 1.8 \\ v_6 &= 2.88 \hat{x}_D + 2.28 \hat{y}_D - 1.5 \end{aligned} \right\}$$

如果把属于同一个三角形的三个误差方程求和，其未知数部分自相抵消，而常数项之和就等于该三角形的闭合差反号。

(5) 组成法方程，求参数及观测量的平差值。

由误差方程组成法方程

$$\begin{pmatrix} 114.84 & -25.53 \\ -25.53 & 86.57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_D \\ \hat{y}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -51.58 \\ 32.05 \end{pmatrix} = 0,$$

解算法方程，得

$$\hat{x}_D = 0.393 \text{dm},$$

$$\hat{y}_D = -0.254 \text{dm}.$$

代入误差方程计算观测值的改正数和平差值，并计算待定点  $D$  的坐标平差值，得

$$V = \begin{pmatrix} -1.7'' \\ -2.0 \\ -1.6 \\ -0.8 \\ -0.7 \\ -0.9 \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} 106^\circ & 50' & 40.5'' \\ 30 & 52 & 42.0 \\ 42 & 16 & 37.5 \\ 28 & 26 & 04.2 \\ 127 & 48 & 40.5 \\ 23 & 45 & 15.3 \end{pmatrix}, \quad \left. \begin{aligned} \hat{X}_D &= 10122.16 \text{m} \\ \hat{Y}_D &= 10312.44 \text{m} \end{aligned} \right\}.$$

## 2. 测边网坐标平差的误差方程

现在来讨论，在测边网平差中，选择待定点的坐标为参数时的误差方程的线性化问题。

先讨论一般情况。在图 5-6 中，测得待定点间的边长  $L_i$ ，设待定点的坐标平差值  $\hat{X}_j$ 、 $\hat{Y}_j$ 、 $\hat{X}_k$  和  $\hat{Y}_k$  为参数，令

$$\hat{X}_j = X_j^0 + \hat{x}_j, \quad \hat{Y}_j = Y_j^0 + \hat{y}_j,$$

$$\hat{X}_k = X_k^0 + \hat{x}_k, \quad \hat{Y}_k = Y_k^0 + \hat{y}_k.$$

由图 5-6 可写出  $\hat{L}_i$  的平差值方程为

$$\hat{L}_i = L_i + v_i = \sqrt{(\hat{X}_k - \hat{X}_j)^2 + (\hat{Y}_k - \hat{Y}_j)^2} \quad (5-2-17)$$

按台劳公式展开，得

$$L_i + v_i = S_{jk}^0 + \frac{\Delta X_{jk}^0}{S_{jk}^0} (\hat{x}_k - \hat{x}_j) + \frac{\Delta Y_{jk}^0}{S_{jk}^0} (\hat{y}_k - \hat{y}_j) \quad (5-2-18)$$

式中

$$\Delta X_{jk}^0 = X_k^0 - X_j^0, \quad \Delta Y_{jk}^0 = Y_k^0 - Y_j^0$$

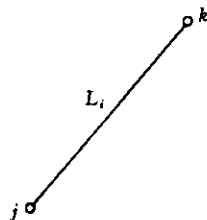


图 5-6

$$S_{jk}^0 = \sqrt{(X_k^0 - X_j^0)^2 + (Y_k^0 - Y_j^0)^2}$$

再令

$$l_i = L_i - S_{jk}^0 \quad (5-2-19)$$

则由(5-2-18)式可得测边的误差方程为

$$v_i = -\frac{\Delta X_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{x}_j - \frac{\Delta Y_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{y}_j + \frac{\Delta X_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{x}_k + \frac{\Delta Y_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{y}_k - l_i \quad (5-2-20)$$

式中右边前4项之和是由坐标改正数引起的边长改正数。

(5-2-20)式就是测边坐标平差误差方程的一般形式，它是在假设两端都是待定点的情况下导出的。具体计算时，可按不同情况灵活运用。

(1)若某边的两端均为待定点，则(5-2-20)式就是该观测边的误差方程。式中， $\hat{x}_j$ 与 $\hat{x}_k$ 的系数的绝对值相等， $\hat{y}_j$ 与 $\hat{y}_k$ 的系数的绝对值也相等。常数项等于该边的观测值减其近似值。

(2)若j为已知点，则 $\hat{x}_j = \hat{y}_j = 0$ ，得

$$v_i = \frac{\Delta X_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{x}_k + \frac{\Delta Y_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{y}_k - l_i \quad (5-2-21)$$

若k为已知点，则 $\hat{x}_k = \hat{y}_k = 0$ ，得

$$v_i = -\frac{\Delta X_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{x}_j - \frac{\Delta Y_{jk}^0}{S_{jk}^0} \hat{y}_j - l_i \quad (5-2-22)$$

若j、k均为已知点，则该边为固定边(不观测)，故对该边不需要列误差方程。

(3)某边的误差方程，按jk向列立或按kj向列立的结果相同。

例[5-3] 同精度测得如图5-7中的三个边长，其结果为

$$L_1 = 387.363\text{m}$$

$$L_2 = 306.065\text{m}$$

$$L_3 = 354.862\text{m}$$

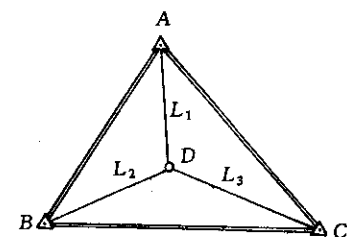


图 5-7

已知点A、B、C的起算数据列于表5-6。试列出误差方程并求平差值。

表 5-6

点名	坐 标 (m)		边长(m) S	方位角 $\alpha$
	X	Y		
A	2692.201	5203.153		
B	2092.765	5132.304	603.608	186°44'26.4"
C	2210.593	5665.422	545.984	77 32 13.3
A			667.562	316 10 25.6

解：(1)本题 $t=2$ ，选择待定点D的坐标 $X_D$ 和 $Y_D$ 为未知数，其近似值 $X_D^0$ 和 $Y_D^0$ 由已

知点  $A$ 、 $B$  和观测边  $L_1$ 、 $L_2$  交会计算而得。图 5-8 中, 设  $h$  为三角形  $ABD$  底边  $AB$  上的高,  $l$  为  $L_1$  在  $AB$  上的投影。得

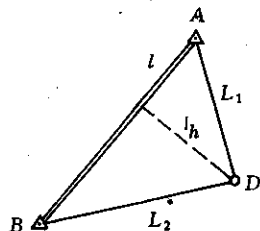


图 5-8

$$l = \frac{L_1^2 + AB^2 - L_2^2}{2AB} = 348.502,$$

$$h = \sqrt{L_1^2 - l^2} = 169.105,$$

$$\cos \alpha_{AB} = \frac{x_B - x_A}{AB} = -0.9930882,$$

$$\sin \alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{AB} = -0.1173758.$$

按此, 计算待定点  $D$  的近似坐标为

$$\left. \begin{aligned} X_D^0 &= X_A + l \cos \alpha_{AB} + h \sin \alpha_{AB} = 2326.259 \text{m} \\ Y_D^0 &= Y_A + l \sin \alpha_{AB} - h \cos \alpha_{AB} = 5330.184 \text{m} \end{aligned} \right\}.$$

(2) 根据近似坐标和已知点坐标列出误差方程的系数和常数项, 并组成误差方程。

表 5-7

方向 $j \quad k$	$x_k^0 - x_j$ (m)	$y_k^0 - y_j$ (m)	近似边长 $S^0$ (m)	$\frac{\Delta X_{jk}^0}{S^0}$	$\frac{\Delta Y_{jk}^0}{S^0}$	$l = L - S^0$
AD	-365.942	127.031	387.363	-0.9447	0.3279	0
BD	233.494	197.880	306.065	0.7629	0.6465	0
CD	115.666	-335.238	354.631	0.3262	-0.9453	0.231

由表 5-7 的最后三列数值, 写出误差方程

$$V = \begin{bmatrix} -0.9447 & 0.3279 \\ 0.7629 & 0.6465 \\ 0.3262 & -0.9453 \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.231 \end{bmatrix}.$$

(3) 求平差值

根据误差方程组成法方程

$$\begin{bmatrix} 1.5808 & -0.1249 \\ -0.1249 & 1.4192 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -0.0753 \\ 0.2182 \end{bmatrix} = 0.$$

解算法方程, 得  $\hat{x}_D = 0.036 \text{m}$ ,  $\hat{y}_D = -0.151 \text{m}$ . 待定点坐标平差值为

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_D &= X_D^0 + \hat{x}_D = 2326.295 \text{m} \\ \hat{Y}_D &= Y_D^0 + \hat{y}_D = 5330.033 \text{m} \end{aligned} \right\}.$$

将  $\hat{x}$  代入误差方程计算观测值的改正数并从而求得平差值

$$V = \begin{bmatrix} -0.083 \\ -0.070 \\ -0.077 \end{bmatrix} (\text{m}), \quad \hat{L} = \begin{bmatrix} 387.280 \\ 305.995 \\ 354.785 \end{bmatrix} (\text{m}).$$

## § 5-3 精度评定

### 一、单位权中误差

间接平差与条件平差虽采用了不同的函数模型，但它们是在相同的最小二乘原理下进行的，所以两法的平差结果总是相同的，这是因为在满足  $V^T PV = \min$  条件下的  $V$  是唯一确定的，故平差值  $\hat{L} = L + V$  不因方法不同而异。

单位权方差  $\sigma_0^2$  的估值  $\hat{\sigma}_0^2$ ，计算式仍是  $V^T PV$  除以其自由度，即

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{r} = \frac{V^T PV}{n-t}, \quad (5-3-1)$$

中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T PV}{n-t}}. \quad (5-3-2)$$

计算  $V^T PV$ ，可将误差方程代入后计算，即

$$V^T PV = (B\hat{x} - l)^T PV = \hat{x}^T B^T PV - l^T PV,$$

顾及(5-1-8)式  $B^T PV = 0$ ，得

$$V^T PV = -l^T P(B\hat{x} - l) = l^T Pl - l^T PB\hat{x}$$

考虑  $l^T PB = B^T Pl$ ，得

$$V^T PV = l^T Pl - B^T Pl\hat{x} \quad (5-3-3)$$

### 二、协因数阵

在间接平差中，基本向量为  $L(l)$ ， $\hat{X}(\hat{x})$ ， $V$  和  $\hat{L}$ 。已知  $Q_{LL} = Q$ 。由(3-3-9)式知， $l = L - F(X^0) = L - L^0$ ， $L^0 = F(X^0)$  是由近似值计算的函数值，故  $F(X^0)$  对于讨论精度将不产生影响。此外，按定义知， $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$ ，故  $Q_{\hat{X}\hat{X}} = Q_{xx}$ ，因此下面在与  $\hat{x}$  有关的协因数阵中，均将  $\hat{x}$  写成  $x$ 。

下面推求各基本向量的自协因数阵和两两向量间的互协因数阵。

设  $Z^T = (L^T \hat{X}^T V^T l^T)$ ，则  $Z$  的协因数阵为

$$Q_{ZZ} = \begin{bmatrix} Q_{LL} & Q_{LX} & Q_{LV} & Q_{LL} \\ Q_{XL} & Q_{XX} & Q_{XV} & Q_{XL} \\ Q_{VL} & Q_{VX} & Q_{VV} & Q_{VL} \\ Q_{LL} & Q_{LX} & Q_{LV} & Q_{LL} \end{bmatrix}.$$

式中对角线上子矩阵，就是各基本向量的自协因数阵，非对角线上为两两向量的互协因数阵。

现分别推求如下。上述各量的关系式已知为

$$L = l + L^0 \quad (5-3-4)$$

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1} B^T Pl \quad (5-3-5)$$

$$V = B\hat{x} - l \quad (5-3-6)$$

$$\hat{L} = L + V$$

(5-3-7)

由前三个式子, 按协因数传播律很容易得出:

$$Q_{LL} = Q$$

$$Q_{XX} = N_{bb}^{-1} B^T P Q P B N_{bb}^{-1} = N_{bb}^{-1}$$

$$Q_{XL} = N_{bb}^{-1} B^T P Q = N_{bb}^{-1} B^T = Q_{LX}^T$$

$$Q_{VL} = B Q_{XL} - Q = B N_{bb}^{-1} B^T - Q = Q_{LV}^T$$

$$Q_{VX} = B Q_{XX} - Q_{LX} = B N_{bb}^{-1} - B N_{bb}^{-1} = 0 = Q_{XV}$$

$$\begin{aligned} Q_{VV} &= B Q_{XX} B^T - B Q_{XL} - Q_{LX} B^T + Q \\ &= B N_{bb}^{-1} B^T - B N_{bb}^{-1} B^T - B N_{bb}^{-1} B^T + Q \\ &= Q - B N_{bb}^{-1} B^T. \end{aligned}$$

再计算与(5-3-7)式有关的协因数阵, 得

$$Q_{LL} = Q + Q_{VL} = B N_{bb}^{-1} B^T = Q_{LL}^T$$

$$\begin{aligned} Q_{LX} &= Q (N_{bb}^{-1} B^T P)^T + Q_{VX} \\ &= Q P B N_{bb}^{-1} + 0 = B N_{bb}^{-1} = Q_{XL}^T \end{aligned}$$

$$Q_{LV} = Q_{LV} + Q_{VV} = 0 = Q_{VL}^T$$

$$\begin{aligned} Q_{LL} &= Q + Q_{LV} + Q_{VL} + Q_{VV} \\ &= B N_{bb}^{-1} B^T \end{aligned}$$

将以上导得的全部协因数阵列于表 5-8, 以备查阅。

间接平差的协因数公式

表 5-8

	$L$	$\hat{X}$	$V$	$\hat{L}$
$L$	$Q$	$B N_{bb}^{-1}$	$B N_{bb}^{-1} B^T - Q$	$B N_{bb}^{-1} B^T$
$\hat{X}$	$N_{bb}^{-1} B^T$	$N_{bb}^{-1}$	0	$N_{bb}^{-1} B$
$V$	$B N_{bb}^{-1} B^T - Q$	0	$Q - B N_{bb}^{-1} B^T$	0
$\hat{L}$	$B N_{bb}^{-1} B^T$	$B N_{bb}^{-1}$	0	$B N_{bb}^{-1} B^T$

由表 5-8 可知, 平差值  $\hat{X}$ 、 $\hat{L}$  与改正数  $V$  的互协因数阵为零, 说明  $\hat{L}$  与  $V$ ,  $\hat{X}$  与  $V$  统计不相关, 这是一个很重要的结果。

### 三、参数函数的中误差

在间接平差中, 解算法方程后首先求得的是  $t$  个参数。有了这些参数, 便可根据它们来计算该平差问题中任一量的平差值(最或然值)。如在图 5-9 的水准网中, 已知  $A$  点的高程为  $H_A$ 。若平差时选定  $AP_1$ 、 $AP_2$ 、 $P_3P_1$  等三条路线高差的平差值作为参数  $\hat{X}_1$ 、 $\hat{X}_2$ 、 $\hat{X}_3$ , 则在平差后, 不但求得了参数, 即  $AP_1$ 、 $AP_2$  及  $P_3P_1$  等三条路线高差

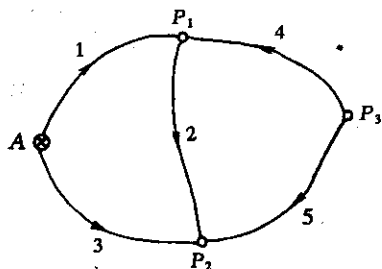


图 5-9

的平差值,而且可以根据它们求出其它各观测高差或待定点高程的平差值。例如,  $P_3P_2$  路线高差的平差值为

$$\hat{L}_5 = -X_1 + X_2 + X_3;$$

$P_3$  点的高程平差值为

$$H_{P_3} = H_A + X_1 - X_3.$$

又如在图 5-2 中,求得  $D$  点坐标平差值  $\hat{X}_D$  和  $\hat{Y}_D$  后,即可计算任何一边的边长或坐标方位角的平差值。如  $AD$  间边长平差值为

$$\hat{S}_{AD} = \sqrt{(\hat{X}_D - \hat{X}_A)^2 + (\hat{Y}_D - \hat{Y}_A)^2};$$

坐标方位角的平差值为

$$\hat{\alpha}_{AD} = \arctg \frac{\hat{Y}_D - \hat{Y}_A}{\hat{X}_D - \hat{X}_A}.$$

通过以上举例可知,在间接平差中,任何一个量的平差值都可以由平差所选参数求得,或者说都可以表达为参数的函数。下面将从一般情况来讨论如何求参数函数的中误差的问题。

假定间接平差问题中有  $t$  个参数,设参数的函数为

$$\hat{\varphi} = \Phi(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_t), \quad (5-3-8)$$

将  $\hat{X}_j = X_j^0 + \hat{x}_j (j=1, 2, \dots, t)$  代入上式后,按台劳公式展开,取至一次项,得

$$\hat{\varphi} = \Phi(X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \right)_0 \hat{x}_1 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \right)_0 \hat{x}_2 + \dots + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_t} \right)_0 \hat{x}_t,$$

式中,  $\Phi(X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0)$  是参数函数的近似值,当近似值一经取定,它是一个已知的常数,对计算函数  $\hat{\varphi}$  的精度没有影响,令  $f_0 = \Phi(X_1^0, X_2^0, \dots, X_t^0)$ ; 又  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right)_0$  是函数  $\hat{\varphi}$  对  $X_j$  的偏导数,以  $X_j$  的近似值  $x_j^0$  代入后即可计算其结果,在平差中,它们是已知的系数,令  $f_j = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right)_0$ .

由此,上式可以写成

$$\hat{\varphi} = f_0 + f_1 \hat{x}_1 + f_2 \hat{x}_2 + \dots + f_t \hat{x}_t, \quad (5-3-9)$$

或

$$\delta \hat{\varphi} = f_1 \hat{x}_1 + f_2 \hat{x}_2 + \dots + f_t \hat{x}_t. \quad (5-3-10)$$

对于评定函数  $\hat{\varphi}$  的精度而言,给出  $\hat{\varphi}$  或  $\delta \hat{\varphi}$  是一样的。通常把(5-3-10)式称为参数函数的权函数式,简称权函数式。

令  $F^T = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_t]$ , 则(5-3-10)式为

$$\delta \hat{\varphi} = F^T \hat{x} \quad (5-3-11)$$

由表 5-8 查得  $Q_{xx} = N_{bb}^{-1}$ , 故函数  $\hat{\varphi}$  的协因数为

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = F^T Q_{xx} F = F^T N_{bb}^{-1} F \quad (5-3-12)$$

一般,设有函数向量  $\hat{\varphi}_{m,1}$  的权函数式为

$$\delta \hat{\varphi}_{m,1} = F_{m,t}^T \hat{x}_{t,1} \quad (5-3-13)$$

即用来计算  $m$  个函数的精度, 其协因数阵为

$$Q_{\hat{\hat{y}}\hat{\hat{y}}} = F^T Q_{xx} F = F^T N_{bb}^{-1} F \quad (5-3-14)$$

$Q_{xx}$  是参数向量  $\hat{X} = [\hat{X}_1 \hat{X}_2 \cdots \hat{X}_t]^T$  的协因数阵, 即

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{x_1 x_1} & Q_{x_1 x_2} & \cdots & Q_{x_1 x_t} \\ Q_{x_2 x_1} & Q_{x_2 x_2} & \cdots & Q_{x_2 x_t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{x_t x_1} & Q_{x_t x_2} & \cdots & Q_{x_t x_t} \end{bmatrix}$$

其中对角线元素  $Q_{x_j x_j}$  是参数  $\hat{X}_j$  的协因数, 故  $\hat{X}_j$  的中误差为

$$\sigma_{\hat{X}_j} = \sigma_0 \sqrt{Q_{x_j x_j}} \quad (5-3-15)$$

(5-3-13) 式的函数  $\hat{\phi}$  的方差为

$$D_{\hat{\hat{y}}\hat{\hat{y}}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{\hat{y}}\hat{\hat{y}}} = \sigma_0^2 (F^T N_{bb}^{-1} F) \quad (5-3-16)$$

例[5-4] 在图 5-10 中, A、B 为已知水准点, 高程为  $H_A$ 、 $H_B$ , 设为无误差, 各观测的路线长度分别为

$$S_1 = 4 \text{ km}, S_2 = 2 \text{ km},$$

$$S_3 = 2 \text{ km}, S_4 = 4 \text{ km}.$$

试求  $P_1$  点和  $P_2$  点平差高程的协因数。

解: 平差的参数选取  $P_1$  和  $P_2$  点高程, 设为  $\hat{X}_1$  和  $\hat{X}_2$ , 按图组成误差方程为

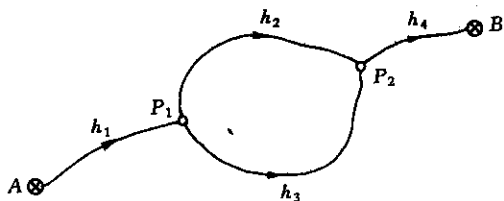


图 5-10

$$v_1 = \hat{x}_1 - l_1 \quad P_1 = \frac{4}{4} = 1$$

$$v_2 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - l_2 \quad P_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$v_3 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - l_3 \quad P_3 = \frac{4}{2} = 2$$

$$v_4 = -\hat{x}_2 - l_4 \quad P_4 = \frac{4}{4} = 1$$

定权时令  $C=4$ , 即以 4 km 观测高差为单位权观测值, 因观测值互独立, 故  $P_i = 1/Q_{ii}$ , 相关协因数  $Q_{ij} = 0 (i \neq j)$ , 由此得法方程为

$$5\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 - W_1 = 0$$

$$-4\hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - W_2 = 0$$

因为  $Q_{xx} = N_{bb}^{-1}$ , 故有

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.44 & 0.56 \end{bmatrix}.$$

平差后  $P_1$ 、 $P_2$  点高程的协因数分别为

$$Q_{x_1 x_1} = 0.56, \quad Q_{x_2 x_2} = 0.56,$$

$X_1$  与  $X_2$  的协因数则为

$$Q_{X_1, X_2} = 0.44.$$

例[5-5] 对固定角内插点的平差问题(图 5-2), 已在例[5-2]中求得参数及观测量的平差值  $\hat{X}$ 、 $\hat{L}$ , 现要求平差后  $D$  点坐标、 $\overline{DA}$  边的坐标方位角和边长的协因数及其中误差。

解:(1)列出  $\overline{DA}$  边坐标方位角  $\hat{a}_{DA}$  的权函数式。已知

$$\hat{a}_{DA} = \arctg \frac{Y_A - \hat{Y}_D}{X_A - \hat{X}_D},$$

式中  $(X_A, Y_A)$  为  $A$  点已知坐标, 对函数全微分得权函数式为

$$\delta \hat{a}_{DA} = \frac{\rho'' \Delta Y_{DA}^0}{(S_{DA}^0)^2 \cdot 10} \hat{x}_D - \frac{\rho'' \Delta X_{DA}^0}{(S_{DA}^0)^2 \cdot 10} \hat{y}_D,$$

式中  $\delta \hat{a}_{DA}$  的单位为秒("),  $\hat{x}_D$ 、 $\hat{y}_D$  的单位为分米(dm)。将例[5-2]中的数据代入, 即得其权函数式为

$$\delta \hat{a}_{DA} = -4.22 \hat{x}_D + 1.04 \hat{y}_D.$$

顺便指出, 上式实际上就是  $DA$  边坐标方位角的改正数方程, 在例[5-2]中列误差方程时已作过计算。由此可知, 列误差方程时所用的坐标方位角改正数方程, 可以直接用来作为坐标方位角的权函数式。

(2)列出边长  $\hat{S}_{DA}$  的权函数式。已知

$$\hat{S}_{DA} = \sqrt{(X_A - \hat{X}_D)^2 + (Y_A - \hat{Y}_D)^2},$$

对函数进行全微分, 得

$$\delta \hat{S}_{DA} = -\frac{\Delta X_{DA}^0}{S_{DA}^0 \cdot 10} \hat{x}_D - \frac{\Delta Y_{DA}^0}{S_{DA}^0 \cdot 10} \hat{y}_D,$$

式中  $\delta \hat{S}_{DA}$  的单位为 m,  $x_D$ 、 $y_D$  的单位为 dm。将例[5-2]中的有关数据代入上式, 得边长  $\hat{S}_{DA}$  的权函数式为

$$\delta \hat{S}_{DA} = 0.02 \hat{x}_D + 0.10 \hat{y}_D.$$

(3)计算协因数

综合以上两个权函数式, 写成矩阵形式为

$$\delta \hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \delta \hat{a}_{DA} \\ \delta \hat{S}_{DA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.22 & 1.04 \\ 0.02 & 0.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_D \\ \hat{y}_D \end{bmatrix},$$

按协因数计算式(5-3-12)得

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \begin{bmatrix} -4.22 & 1.04 \\ 0.02 & 0.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}_D \hat{x}_D} & Q_{\hat{x}_D \hat{y}_D} \\ Q_{\hat{x}_D \hat{y}_D} & Q_{\hat{y}_D \hat{y}_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.22 & 0.02 \\ 1.04 & 0.10 \end{bmatrix}.$$

由例[5-2]取得法方程系数阵为

$$N_{bb} = \begin{bmatrix} 114.84 & -25.53 \\ -25.53 & 86.57 \end{bmatrix},$$

则有

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{x}_D \hat{x}_D} & Q_{\hat{x}_D \hat{y}_D} \\ Q_{\hat{y}_D \hat{x}_D} & Q_{\hat{y}_D \hat{y}_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114.84 & -25.53 \\ -25.53 & 86.57 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0093 & 0.0027 \\ 0.0027 & 0.0124 \end{bmatrix},$$



于是

$$Q_{\hat{\hat{p}}} = \begin{bmatrix} 0.1552 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.00014 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\hat{\hat{a}}\hat{\hat{a}}} & Q_{\hat{\hat{a}}\hat{\hat{s}}} \\ Q_{\hat{\hat{s}}\hat{\hat{a}}} & Q_{\hat{\hat{s}}\hat{\hat{s}}} \end{bmatrix}.$$

(4) 计算单位权中误差

从例[5-2]中取得改正数  $V$ , 观测角为同精度, 权均为 1, 单位权观测值就是观测角度, 其中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T V}{n-t}} = \sqrt{\frac{11.39}{4}} = \pm 1.7''.$$

(5) 计算  $\hat{X}_D$ 、 $\hat{Y}_D$ 、 $\hat{a}_{DA}$  和  $\hat{S}_{DA}$  的中误差

$$\hat{\sigma}_{\hat{X}_D} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_D \hat{X}_D}} = \pm 1.7 \sqrt{0.0093} = \pm 0.16 \text{ dm},$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{Y}_D} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{Y}_D \hat{Y}_D}} = \pm 1.7 \sqrt{0.0124} = \pm 0.19 \text{ dm},$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_{DA}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{a}_{DA} \hat{a}_{DA}}} = \pm 1.7 \sqrt{0.1552} = \pm 0.67'',$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{S}_{DA}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{S}_{DA} \hat{S}_{DA}}} = \pm 1.7 \sqrt{0.00014} = \pm 0.02 \text{ m}.$$

## § 5-4 间接平差公式汇编和示例

### 一、公式汇编

间接平差的函数模型和随机模型是

$$\Delta = B\hat{X} - l \quad (5-1-1)$$

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (5-1-2)$$

平差值方程和误差方程为

$$\hat{L} = L + V = B\hat{X} + d \quad (5-1-5)$$

$$V = B\hat{x} - l \quad (5-1-7)$$

$$l = L - L^0 = L - (BX^0 + d) \quad (5-1-6)$$

或

$$l = L - F(X^0) \quad (5-2-5)$$

法方程为

$$B^T P B \hat{x} - B^T P l = 0 \quad (5-1-9)$$

其解为

$$\hat{x} = (B^T P B)^{-1} B^T P l = N_{bb}^{-1} W. \quad (5-1-11)$$

观测量和参数的平差值:

$$\hat{L} = L + V, \quad \hat{X} = X^0 + \hat{x}. \quad (5-1-13)$$

单位权中误差:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}} = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-t}}. \quad (5-3-2)$$

平差参数  $X$  的协方差阵:

$$D_{XX} = \sigma_0^2 Q_{XX} = \sigma_0^2 N_{bb}^{-1}.$$

平差参数的函数的协方差阵

权函数式:

$$\delta \hat{\varphi} = F^T \hat{x} \quad (5-3-13)$$

协因数:

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = F^T Q_{XX} F = F^T N_{bb}^{-1} F. \quad (5-3-14)$$

方差:

$$D_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}. \quad (5-3-16)$$

## 二、水准网按间接平差示例

例[5-6] 将 § 4-4 中图 4-12 所示的水准网, 按间接平差求:

- (1) 各待定点的高程平差值;
- (2)  $P_1$  至  $P_2$  点间高差平差值的中误差;
- (3) 待定点  $P_1$ 、 $P_2$  高程平差值的中误差。

解: 在图 4-12 所示水准网中, 待定点  $P_3$  不是 3 条或 3 条以上水准路线相交的结点, 可以把观测高差  $h_6$  和  $h_7$  合并成一条水准路线, 即

$$h'_6 = h_6 + h_7,$$

经平差求得  $h'_6$  的改正数  $v'_6$  后, 在单一水准路线  $P_1P_3B$  上, 将  $v'_6$  按路线长度比例分配给线路  $P_1P_3$  和  $P_3B$  上, 可得  $h_6$  和  $h_7$  的改正数为

$$v_6 = \frac{S_6}{S_6 + S_7} v'_6,$$

$$v_7 = \frac{S_7}{S_6 + S_7} v'_6.$$

式中  $S_6$ 、 $S_7$  分别为相应水准路线的长度。如此处理可以少设一个参数, 但不能直接求出待定点  $P_3$  的高程平差值的中误差。现将该例表 4-2 中观测数据改写在表 5-9 中。

表 5-9

线路编号	观测高差 (m)	线路长度 (km)	已知高程 (m)
1	+1.359	1.1	$H_A = 5.016$ $H_B = 6.016$
2	+2.009	1.7	
3	+0.363	2.3	
4	+1.012	2.7	
5	+0.657	2.4	
6' $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$	$-0.357 \begin{pmatrix} +0.238 \\ -0.595 \end{pmatrix}$	4.0 $\begin{pmatrix} 1.4 \\ 2.6 \end{pmatrix}$	

### 1. 列出误差方程

设  $P_1$  和  $P_2$  点高程平差值为  $\hat{X}_1$  和  $\hat{X}_2$ ，相应的近似值取为

$$X_1^0 = H_A + h_1, \quad X_2^0 = H_A + h_2.$$

按图 4-12 列出平差值方程后，将有关观测数据代入即得误差方程

$$\begin{aligned} v_1 &= \hat{x}_1 + 0 \\ v_2 &= \hat{x}_2 + 0 \\ v_3 &= \hat{x}_1 - 4 \\ v_4 &= \hat{x}_2 - 3 \\ v_5 &= -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - 7 \\ v_6 &= -\hat{x}_1 - 2 \end{aligned}$$

式中常数项以 mm 为单位。

### 2. 列出权函数式

$P_1$  至  $P_2$  间高差平差值的权函数式为

$$\delta \hat{H}_{P_1 P_2} = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2$$

### 3. 组成法方程

以 1km 水准测量的观测高差为单位权观测值，各观测值互独立，定权式为  $p_i = 1/S_i$ ，得权阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.91 & & & & & \\ & 0.59 & & & & \\ & & 0.43 & & & \\ & & & 0.37 & & \\ & & & & 0.42 & \\ & & & & & 0.25 \end{bmatrix},$$

由此组成法方程为

$$\begin{bmatrix} 2.01 & -0.42 \\ -0.42 & 1.38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.72 \\ 4.05 \end{bmatrix} = 0,$$

解得

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.258 \\ 2.860 \end{bmatrix}.$$

### 4. 计算 $V$ 和 $\hat{L}$

$$V = B\hat{x} - l,$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.3 & 2.9 & -4.3 & -0.1 & -3.9 & -1.7 \end{bmatrix}^T \text{ (mm)},$$

由  $v_6 = -1.7$ ，可求得

$$v_6 = \frac{1.4}{4}(-1.7) = -0.6, \quad v_7 = \frac{2.6}{4}(-1.7) = -1.1.$$

由此得平差值为

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1.359 & 2.012 & 0.359 & 1.012 & 0.653 & 0.237 & -0.596 \end{bmatrix}^T \text{ (m)}.$$

## 5. 精度评定

单位权中误差

$$\hat{\sigma}_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T P V}{n-t}} = \pm \sqrt{\frac{19.75}{4}} = \pm 2.2 \text{ mm}$$

待定点高程中误差

$$\hat{\sigma}_{P_1} = \pm 2.2 \sqrt{0.53} = \pm 1.6 \text{ mm}$$

$$\hat{\sigma}_{P_2} = \pm 2.2 \sqrt{0.78} = \pm 1.9 \text{ mm}$$

$P_1$  至  $P_2$  间高差平差值中误差

$$\hat{\sigma}_{\Delta H_{P_1 P_2}} = \pm 2.2 \sqrt{0.98} = \pm 2.2 \text{ mm}$$

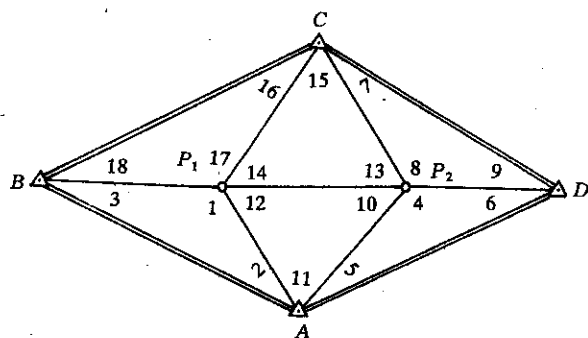


图 5-11

## 三、测角网坐标平差算例

例[5-7] 设有一测角三角网，如图 5-11 所示，网中 A、B、C、D 是已知点， $P_1$ 、 $P_2$  是待定点，同精度观测了 18 个角度。试按间接平差法求平差后  $P_1$ 、 $P_2$  点的坐标及  $P_1$ 、 $P_2$  点坐标的中误差。起算数据和观测值见表 5-10 及表 5-11。

表 5-10

点 名	坐 标(m)		边 长(m)	坐标方位角
	X	Y		
A	9684.28	43836.82		
B	10649.55	31996.50	11879.60	274°39'38.4"
C	19063.66	37818.86	10232.16	34°40'56.3"
D	17814.63	49923.19	12168.60	95°53'29.1"
A			10156.11	216°49'06.5"

表 5-11

角度编号	观 测 值	角度编号	观 测 值	角度编号	观 测 值
1	126°14'24.1"	7	22°02'43.0"	13	46°38'56.4"
2	23°39'46.9"	8	130°03'14.2"	14	66°34'54.7"
3	30°05'46.7"	9	27°53'59.3"	15	66°46'08.2"
4	117°22'46.2"	10	65°55'00.8"	16	29°58'35.5"
5	31°26'50.0"	11	67°02'49.4"	17	120°08'31.1"
6	31°10'22.6"	12	47°02'11.4"	18	29°52'55.4"

解:1. 算得待定点  $P_1$  和  $P_2$  点的近似坐标为:

$$X_1^0 = 13188.61\text{m}, \quad X_2^0 = 15578.61\text{m},$$

$$Y_1^0 = 37334.97\text{m}, \quad Y_2^0 = 44391.03\text{m}.$$

根据已知点的坐标和待定点的近似坐标反算各边的近似坐标方位角  $\alpha_{jk}^0$ ，其结果见表 5-12。

表 5-12

方 向	近似坐标方位角	方 向	近似坐标方位角
$P_1A$	118°19'24.7"	$P_2A$	185°22'17.0"
$P_1B$	244°33'48.6"	$P_2C$	297°56'09.0"
$P_1C$	4°42'30.4"	$P_2D$	67°59'31.7"
$P_1P_2$	71°17'16.6"		

2. 计算与待定点  $P_1$  和  $P_2$  相连各边的坐标方位角改正数方程的系数，结果列于表 5-13。

表 5-13

方 向	$\Delta y^0$ (m)	$\Delta x^0$ (m)	$(S^0)^2$ (m <sup>2</sup> )	$\delta\alpha$ 系 数(秒/dm)			
				$\hat{x}_1$	$\hat{y}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{y}_2$
$P_1A$	+6502	-3504	5455.10 <sup>4</sup>	+2.46	+1.32		
$P_1B$	-5338	-2539	3495.10 <sup>4</sup>	-3.15	+1.50		
$P_1C$	+484	+5875	3475.10 <sup>4</sup>	+0.29	-3.49		
$P_1P_2$	+7056	+2390	5550.10 <sup>4</sup>	+2.62	-0.89	-2.62	+0.89
$P_2A$	-554	-5894	3505.10 <sup>4</sup>			-0.33	+3.47
$P_2C$	-6572	+3485	5534.10 <sup>4</sup>			-2.45	-1.30
$P_2D$	+5532	+2236	3560.10 <sup>4</sup>			+3.20	-1.30

表 5-14

参 数 角 号	$a$	$b$	$c$	$d$	$-l$	$v$
	$\hat{x}_1$	$\hat{y}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{y}_2$		
	-0.1030	+2.3208	-1.2069	-0.5348		
1	-5.61	+0.18			-0.2	+0.8
2	+2.46	+1.32			-0.6	+2.2
3	+3.15	-1.50			+3.1	-0.7
4			-3.53	+4.77	-0.9	+0.8
5			+0.33	-3.47	-0.5	+1.0
6			+3.20	-1.30	+2.6	-0.6
7			-2.45	-1.30	-3.1	+0.5
8			+5.65	0	+8.5	+1.7
9			-3.20	+1.30	-1.9	+1.3
10	+2.62	-0.89	-2.29	-2.58	-1.2	+0.6
11	-2.46	-1.32	-0.33	+3.47	+2.9	-1.4
12	-0.16	+2.21	+2.62	-0.89	-3.3	-0.8
13	-2.62	+0.89	+0.17	-2.19	-4.0	-0.7
14	+2.33	+2.60	-2.60	+0.89	-8.5	-0.0
15	+0.29	-3.49	+2.45	+1.30	+13.2	+1.4
16	-0.29	+3.49			-9.6	-1.5
17	+3.44	-4.99			+10.7	-1.2
18	-3.15	+1.50			-3.1	+0.7
加 和	0	0	0	0	+4.1	

3. 计算误差方程系数和常数项, 结果列于表 5-14, 表中每一行表示一个误差方程。 $v$  为角度改正数, 在解出坐标改正数  $\hat{x}$  后算得。

#### 4. 组成法方程

$$\begin{bmatrix} 94.61 & -22.11 & -11.45 & -6.96 \\ -22.11 & 70.51 & -6.95 & -8.42 \\ -11.45 & -6.95 & 96.09 & -20.21 \\ -6.96 & -8.42 & -20.21 & 66.63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43.52 \\ 178.81 \\ -120.11 \\ -30.07 \end{bmatrix},$$

$$N_{bb}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0121 & 0.0044 & 0.0023 & 0.0025 \\ 0.0044 & 0.0161 & 0.0024 & 0.0032 \\ 0.0023 & 0.0024 & 0.0117 & 0.0041 \\ 0.0025 & 0.0032 & 0.0041 & 0.0169 \end{bmatrix}.$$

由  $\hat{x} = N_{bb}^{-1}W$  可得

$$\hat{x} = [\hat{x}_1 \quad \hat{y}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{y}_2]^T = [-0.1030 \quad 2.3208 \quad -1.2069 \quad -0.5348]^T (\text{dm}).$$

#### 5. 平差值计算

##### (1) 坐标平差值

$$\hat{X}_1 = 13188.60\text{m},$$

$$\hat{Y}_1 = 37335.20\text{m},$$

$$\hat{X}_2 = 15578.49\text{m},$$

$$\hat{Y}_2 = 44390.98\text{m}.$$

(2) 待定边坐标方位角和边长的平差值。由待定点坐标和已知点坐标计算的待定边的坐标方位角和边长平差值, 结果见表 5-15。

表 5-15

方 向	边 长(m)	坐标方位角	方 向	边 长(m)	坐标方位角
$P_1A$	7385.89	118°19'27.5"	$P_2A$	5920.20	185°22'15.7"
$P_1B$	5911.73	244°33'52.4"	$P_2C$	7439.03	297°56'12.6"
$P_1C$	5894.93	4°42'22.4"	$P_2D$	5967.05	67°59'28.5"
$P_1P_2$	7449.54	71°17'17.0"			

##### (3) 观测量的平差值

将表 5-14 中的改正数  $v_i$  与观测值相加, 即得观测量的平差值  $\hat{L}_i$  (略)。

#### 6. 精度计算

##### (1) 单位权中误差, 即测角中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \pm \sqrt{\frac{22.28}{18-4}} = \pm 1.3''.$$

##### (2) 待定点坐标中误差

由  $N_{bb}^{-1}$  中取得未知数的权倒数, 计算

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{x_1} &= \pm 1.3 \sqrt{0.0121} = \pm 0.14\text{dm}, & \hat{\sigma}_{y_1} &= \pm 1.3 \sqrt{0.0161} = \pm 0.16\text{dm}, \\ \sigma_{P_1} &= \pm \sqrt{(0.14)^2 + (0.16)^2} = \pm 0.21\text{dm}, \\ \hat{\sigma}_{x_2} &= \pm 1.3 \sqrt{0.0117} = \pm 0.14\text{dm}, & \hat{\sigma}_{y_2} &= \pm 1.3 \sqrt{0.0169} = \pm 0.17\text{dm}, \\ \sigma_{P_2} &= \pm \sqrt{(0.14)^2 + (0.17)^2} = \pm 0.22\text{dm}.\end{aligned}$$

式中  $\sigma$  为点位中误差。

#### 四、测边网坐标平差算例

例[5-8] 今有测边网如图 5-12 所示。网中 A、B、C 及 D 为已知点， $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  及  $P_4$  为待定点，同精度观测了 13 条边长。起算数据及观测边长见表 5-16。试按间接平差法求待定点坐标平差值及其中误差。

解：1. 计算待定点近似坐标

按例[5-3]中的公式，由已知点 B、A 及观测值  $L_1$ 、 $L_2$  交会计算待定点  $P_1$  的近似坐标；由  $P_1$ 、A 及  $L_4$ 、 $L_3$  交会计算  $P_2$  点近似坐标；由  $P_1$ 、 $P_2$  及  $L_{10}$ 、 $L_5$  交会计算  $P_3$  点的近似坐标；由  $P_1$ 、 $P_3$  及  $L_{12}$ 、 $L_9$  交会计算  $P_4$  点近似坐标。其结果为

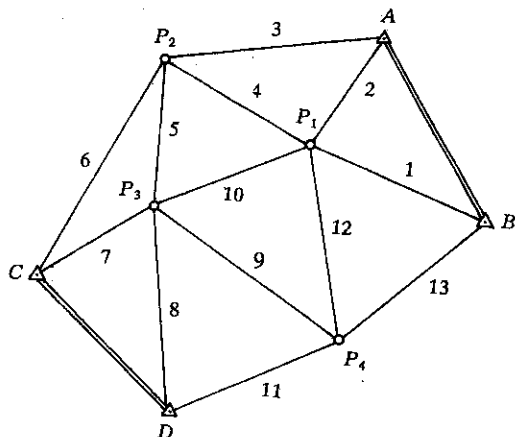


图 5-12

$$\begin{aligned}X_1^0 &= 48\,580.270\text{m}, & Y_1^0 &= 60\,500.505\text{m}, \\ X_2^0 &= 48\,681.390\text{m}, & Y_2^0 &= 55\,018.279\text{m}, \\ X_3^0 &= 43\,767.223\text{m}, & Y_3^0 &= 57\,968.593\text{m}, \\ X_4^0 &= 40\,843.219\text{m}, & Y_4^0 &= 64\,867.875\text{m}.\end{aligned}$$

表 5-16

点 名	坐 标(m)		边 长(m)	坐标方位角
	X	Y		
A	53 743.136	61 003.826	7804.558	138°00'08.6"
B	47 943.002	66 225.854		
C	40 049.229	53 782.790	7889.381	113°19'50.8"
D	36 924.728	61 027.086		

编 号	边 观 测 值(m)	编 号	边 观 测 值(m)	编 号	边 观 测 值(m)
1	5 760.706	6	8 720.162	11	5 487.073
2	5 187.342	7	5 598.570	12	8 884.587
3	7 838.880	8	7 494.881	13	7 228.367
4	5 483.158	9	7 493.323		
5	5 731.788	10	5 438.382		

## 2. 计算误差方程的系数及常数项

由已知点坐标和待定点近似坐标计算系数及常数项, 其结果见表 5-17。

表 5-17

边号	方向	$\Delta X^0$ (m)	$\Delta Y^0$ (m)	$S^0$ (m)	$a = -\Delta X^0/S^0$	$b = -Y^0/S^0$	$w(\text{dm})$ $L-S^0$
1	$P_1B$	-637.268	5725.349	5 760.70583	0.1106	-0.9939	0.0017
2	$P_1A$	5162.866	503.321	5 187.34203	-0.9953	-0.0970	-0.0003
3	$P_2A$	5061.746	5985.547	7 838.88037	-0.6457	-0.7636	-0.0037
4	$P_2P_1$	-101.120	5482.226	5 483.15850	0.0184	-0.9998	-0.0050
5	$P_2P_3$	-4914.167	2950.314	5 781.78768	0.8574	-0.1547	0.0032
6	$P_2C$	-8632.161	-1235.489	8 720.12824	0.9899	0.1417	0.3376
7	$P_3C$	-3717.994	-4185.803	5 598.60930	0.6641	0.7477	-0.3930
8	$P_3D$	-6842.495	3058.493	7 494.93944	0.9129	-0.4081	-0.5844
9	$P_3P_4$	-2924.004	6899.282	7 493.32313	0.3902	-0.9207	-0.0013
10	$P_3P_1$	4813.047	2531.912	5 438.38209	-0.8850	-0.4656	-0.0009
11	$P_4D$	-3918.491	-3840.789	5 486.91460	0.7142	0.7000	1.5840
12	$P_4P_1$	7737.051	-4367.370	8 884.58659	-0.8708	0.4916	0.0041
13	$P_4B$	7099.783	1357.979	7 228.48709	-0.9822	-0.1879	-1.2009

根据表 5-17 中的  $a$ 、 $b$  系数及常数项  $w$  可列出全网的误差方程, 其系数和常数项结果列于表 5-18 共 13 个误差方程。

3. 组成法方程, 列于表 5-19。求  $N_{bb}^{-1}$  列于表 5-20。按  $\hat{x} = N_{bb}^{-1} B^T P w$  解算结果写在表 5-19 表头上, 计算的改正数  $v$  列于表 5-18 中。

## 4. 平差值计算

### (1) 坐标平差值

$$\hat{X}_1 = X_1^0 + \hat{x}_1 = 48\,580.274\text{m},$$

$$\hat{Y}_1 = Y_1^0 + \hat{y}_1 = 60\,500.498\text{m},$$

$$\hat{X}_2 = X_2^0 + \hat{x}_2 = 48\,681.389\text{m},$$

$$\hat{Y}_2 = Y_2^0 + \hat{y}_2 = 55\,018.290\text{m},$$

$$\hat{X}_3 = X_3^0 + \hat{x}_3 = 43\,767.188\text{m},$$

$$\hat{Y}_3 = Y_3^0 + \hat{y}_3 = 57\,968.614\text{m},$$

$$\hat{X}_4 = X_4^0 + \hat{x}_4 = 40\,843.318\text{m},$$

$$\hat{Y}_4 = Y_4^0 + \hat{y}_4 = 64\,867.981\text{m}.$$

### (2) 观测边的平差值

结果见表 5-18 的  $\hat{L}$  列。



表 5-18

编 号	$(a)/\hat{x}_1$	$(b)/\hat{y}_1$	$(c)/\hat{x}_2$	$(d)/\hat{y}_2$	$(e)/\hat{x}_3$	$(f)/\hat{y}_3$	$(g)/\hat{x}_4$	$(h)/\hat{y}_4$	$-l$ (dm)	$s$ 和检核	$v$ (dm)	$\hat{L}$ (m)	编 号
1	0.1106	-0.9939							-0.0017	-0.8850	0.0696	5 760.713	1
2	-0.9953	-0.0970							0.0003	-1.0920	-0.0356	5 187.328	2
3			-0.6457	-0.7636					0.0037	-1.4056	-0.0691	7 838.873	3
4	-0.0184	0.9998	0.0184	-0.9998					0.0050	0.0050	-0.1686	5 483.142	4
5			0.8574	-0.5147	-0.8574	0.5147			-0.0032	-0.0032	0.3379	5 731.822	5
6			0.9899	-0.1417					-0.3376	0.7940	-0.3346	8 720.128	6
7					0.66.1	0.7477			0.3930	1.8048	0.3209	5 598.602	7
8					0.9129	-0.4031			0.5844	1.0892	0.1819	7 494.899	8
9					0.3902	-0.9207	-0.3902	0.9207	0.0013	0.0013	0.2599	7 493.349	9
10	0.8850	0.4656			-0.8850	-0.4656			0.0009	0.0009	0.2156	5 438.404	10
11							0.7142	0.7000	-1.5840	-0.1698	-0.1413	5 487.059	11
12	0.8708	-0.4916					-0.8708	0.4916	-0.0041	-0.0041	-0.2722	8 884.560	12
13							-0.9822	-0.1879	1.2009	0.0308	0.0353	7 228.370	13
加 和	0.8527	-0.1171	1.2200	-2.1364	0.2248	-0.5320	-1.5209	1.9244	0.2589	0.1663			

表 5-19

	$a/\hat{x}_1$	$b/\hat{y}_1$	$c/\hat{x}_2$	$d/\hat{y}_2$	$e/\hat{x}_3$	$f/\hat{y}_3$	$g/\hat{x}_4$	$h/\hat{y}_5$	$w$
	0.0426	-0.0670	-0.0121	0.1056	-0.3465	0.2114	0.9846	1.0564	
$a$	2.5447	-0.0478	-0.0003	0.0184	-0.7832	-0.4121	-0.7583	0.4281	0.0034
$b$		2.4553	0.0184	-0.9996	-0.4121	-0.2168	0.4281	-0.2417	-0.0091
$c$			2.1323	0.1736	-0.7351	0.4413	0	0	0.3392
$d$	对			1.8677	0.4413	-0.2649	0	0	0.0540
$e$		称			2.9450	-0.2645	-0.1523	0.3593	-0.7969
$f$						2.0550	0.3593	-0.8477	-0.0521
$g$							2.3853	-0.1028	2.3078
$h$								1.6147	1.3353

表 5-20

$N_{ss}^{-1} =$	0.5401	-0.0413	0.0780	-0.0832	0.2015	-0.0066	0.1850	-0.1859
		0.6340	-0.0948	0.3881	-0.0179	0.2491	-0.1556	0.2307
			0.5935	-0.1813	0.1902	-0.2094	0.0777	-0.1822
				0.8361	-0.1511	0.2793	-0.1370	0.2517
					0.4837	-0.0532	0.0982	-0.1854
						0.8031	-0.1512	0.4628
							0.5290	-0.1399
								0.9785

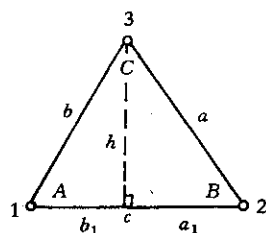


图 5-13

(3) 观测边的坐标方位角平差值、三边形的内角平差值

为了检核平差结果的正确性,由已知点  $A$ 、 $B$  出发,利用边长平差值推算待定点及已知点的坐标。此外,按此坐标推算了待定边的坐标方位角;按边长平差值推算了三边形的内角。计算结果列于在表 5-21 中。由检核结果可知,平差值间已消除了矛盾。

由起算点 1、2 推算 3 点坐标(见图 5-13)的公式,可以从余切公式导得,其结果为

$$a_1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}, \quad b_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c},$$

$$h = \sqrt{a^2 - a_1^2},$$

$$\hat{X}_3 = \{a_1 X_1 + b_1 X_2 - h(Y_1 - Y_2)\} / c,$$

$$\hat{Y}_3 = \{a_1 Y_1 + b_1 Y_2 + h(X_1 - X_2)\} / c.$$

式中,  $X_1$ 、 $Y_1$ 、 $X_2$ 、 $Y_2$  为起算点坐标;  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为三边形的边长;  $a_1$ 、 $b_1$  为  $a$ 、 $b$  边在  $c$  边上的投影;  $h$  为  $c$  边上的高。

由三边形的边长推算内角的公式为

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c), \quad S_1 = S - a, \quad S_2 = S - b, \quad S_3 = S - c,$$

$$R = (S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 / S)^{1/2},$$

$$A = 2\arctg(R/S_1), \quad B = 2\arctg(R/S_2),$$

$$C = 2 \arctg(R/S_3).$$

式中,  $S$  为三边形周长之半;  $R$  为三边形内切圆的半径。

表 5-21

三边形	点 号	坐标平差值(m)		角 平 差 值	边平差值(m)	边 号	坐标方位角平差值
		$\hat{X}$	$\hat{Y}$				
1	B	47 943.002	66 225.854	41°39'03.96"	5 187.338	2	185°34'05.42"
	A	53 743.136	61 003.826	47°33'56.86"	5 760.713	1	276°21'04.60"
	P <sub>1</sub>	48 580.274	60 500.498	90°46'59.18"	7 804.558	BA	
2	P <sub>1</sub>			94°30'41.48"	7 838.873	3	229°46'48.12"
	A			44°12'42.69"	5 483.141	4	271°03'23.94"
	P <sub>2</sub>	48 681.389	55 018.290	41°16'35.83"	5 187.338	2	
3	P <sub>1</sub>			63°18'37.46"	5 731.822	5	149°01'14.80"
	P <sub>2</sub>			57°57'50.86"	5 438.404	10	207°44'46.48"
	P <sub>3</sub>	43 767.188	57 968.614	58°43'31.68"	5 483.141	4	
4	P <sub>3</sub>			100°37'59.17"	8 720.128	6	188°08'43.02"
	P <sub>2</sub>			39°07'28.22"	5 598.602	7	228°23'15.62"
	C	40 049.229	53 782.790	40°14'32.61"	5 731.822	5	
5	P <sub>3</sub>			42°56'58.01"	5 487.059	11	44°25'34.76"
	D			68°30'36.77"	7 493.349	9	112°57'59.98"
	P <sub>4</sub>	40 843.318	64 867.981	68°32'25.22"	7 494.899	8	155°54'58.00"
6	P <sub>3</sub>			85°13'13.51"	8 884.560	12	330°33'19.58"
	P <sub>4</sub>			37°35'19.59"	5 438.404	10	27°44'46.48"
	P <sub>1</sub>	48 580.274	60 500.498	57°11'21.90"	7 493.349	9	
7	P <sub>1</sub>			54°12'14.97"	7 228.370	13	10°49'39.12"
	P <sub>4</sub>			40°16'19.54"	5 760.713	1	96°21'04.61"
	B	47 943.002	66 225.854	85°31'25.49"	8 884.560	12	

## 5. 精度计算

### (1) 单位权中误差(测边中误差)

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{0.611}{13-8}} = \pm 0.35 \text{dm}.$$

### (2) 待定点坐标中误差

由参数的协因数阵(即  $N_{bb}^{-1}$ )取得参数的权倒数, 计算待定点坐标和点位中误差

$$\hat{\sigma}_{x_1} = \pm 0.35 \sqrt{0.54} = \pm 0.26 \text{dm},$$

$$\hat{\sigma}_{y_1} = \pm 0.35 \sqrt{0.63} = \pm 0.28 \text{dm},$$

$$\hat{\sigma}_{p_1} = \pm \sqrt{0.26^2 + 0.28^2} = \pm 0.38 \text{dm},$$

$$\hat{\sigma}_{x_2} = \pm 0.35 \sqrt{0.59} = \pm 0.27 \text{dm},$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{y_2} &= \pm 0.35 \sqrt{0.84} = \pm 0.32 \text{dm}, \\
\hat{\sigma}_{p_2} &= \pm \sqrt{0.27^2 + 0.32^2} = \pm 0.42 \text{dm}, \\
\hat{\sigma}_{x_3} &= \pm 0.35 \sqrt{0.48} = \pm 0.24 \text{dm}, \\
\hat{\sigma}_{y_3} &= \pm 0.35 \sqrt{0.80} = \pm 0.31 \text{dm}, \\
\hat{\sigma}_{p_3} &= \pm \sqrt{0.24^2 + 0.31^2} = \pm 0.39 \text{dm}, \\
\hat{\sigma}_{x_4} &= \pm 0.35 \sqrt{0.53} = \pm 0.25 \text{dm}, \\
\hat{\sigma}_{y_4} &= \pm 0.35 \sqrt{0.98} = \pm 0.35 \text{dm}, \\
\hat{\sigma}_{p_4} &= \pm \sqrt{0.25^2 + 0.35^2} = \pm 0.43 \text{dm}.
\end{aligned}$$

## § 5-5 间接平差特例——直接平差

对同一未知量进行多次直接观测，求该量的平差值并评定精度，称为直接平差，显然它是间接平差中具有一个参数的特殊情况。

设对未知量  $\hat{X}$  独立地进行  $n$  次不同精度观测，观测值  $L$ ，相应的权阵为  $P$ ，它为对角阵，对角线元素为  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ， $P_i$  为  $L_i$  的权。按间接平差法，误差方程为

$$V_i = \hat{X} - L_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5-5-1)$$

组成法方程

$$[p]\hat{X} - [pL] = 0 \quad (5-5-2)$$

解得

$$\hat{X} = \frac{[pL]}{[p]} \quad (5-5-3)$$

上式称为带权平均值，即在直接平差中，未知量的平差值就是带权平均值。

为计算方便，设  $\hat{X}$  的近似值为  $X^0$ ，即

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}$$

并令

$$l_i = L_i - x^0 \quad (5-5-4)$$

此时，(5-5-1)式为

$$v_i = \hat{x} - l_i,$$

法方程及其解为

$$\begin{aligned}
[p]\hat{x} - [pl] &= 0, \\
\hat{x} &= \frac{[pl]}{[p]},
\end{aligned}$$

于是

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x} = X^0 + \frac{[pl]}{[p]}. \quad (5-5-5)$$

特别地，当  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$  时，则与(5-5-3)、(5-5-5)式相应，未知量的平差值为

$$\hat{x} = \frac{[L]}{n}, \quad (5-5-6)$$

$$\hat{X} = X^0 + \frac{[l]}{n} \quad (5-5-7)$$

直接平差问题仅有一个参数，即  $t=1$ ，故单位权中误差计算式为

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-1}}. \quad (5-5-8)$$

由(5-5-2)式知，法方程系数  $N_{bb} = [p]$ ，则  $X$  的协因数为

$$Q_{xx} = N_{bb}^{-1} = 1/[p], \quad (5-5-9)$$

或

$$p_x = [p]. \quad (5-5-10)$$

故  $X$  的中误差为

$$\sigma_x = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{[p]}}. \quad (5-5-11)$$

观测值  $L_i$  的中误差为

$$\sigma_{L_i} = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{p_i}}. \quad (5-5-13)$$

特别地，当  $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ ，即为同精度观测时，精度评定公式为

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T V}{n-1}} \quad (5-5-14)$$

$$\sigma_x = \hat{\sigma}_0 / \sqrt{n} \quad (5-5-15)$$

亦即对某个量所作的  $n$  个同精度观测值的算术平均值就是该量的平差值，此平差值的权  $p_x$  为单个观测值的权  $p_i = 1$  的  $n$  倍。

## 第六章 附有参数的条件平差

在一个平差问题中,如果观测值个数为 $n$ ,必要观测数为 $t$ ,则多余观测数 $r=n-t$ 。若不增选参数,只须列出 $r$ 个条件方程,这就是条件平差法。如果又选了 $u$ 个独立量为参数(而 $0 < u < t$ )参加平差计算,就可建立含有参数的条件方程为平差的函数模型,这就是附有参数的条件平差法。

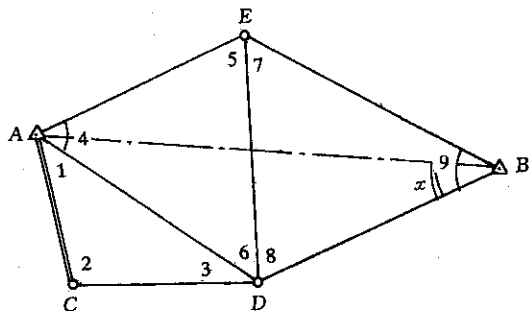


图 6-1

例如,在图 6-1 的测角网中, $A$ 、 $B$  为已知点,  $\overline{AC}$  为已知边。在网中观测了 9 个角度,即  $n=9$ ,为了确定  $C$ 、 $D$ 、 $E$  三点坐标,其必要观测数  $t=5$ ,故  $r=n-t=4$ ,因此,须列出 4 个条件方程。其中 3 个图形条件是比较容易列出的,但要列出第 4 个条件就比较困难了。为了解决这一问题,选取非观测测量  $\angle ABD$  作为参数  $\bar{X}$ ,这样就要列出  $c=r+u$

$=4+1=5$  个条件方程。此时除了 3 个图形条件外,还可列出 1 个极条件和 1 个固定边条件。若以  $A$  点为极,则极条件为:

$$\frac{\sin(\tilde{L}_5 + \tilde{L}_7) \sin \bar{X} \sin \tilde{L}_5}{\sin(\tilde{L}_9 - \bar{X}) \sin(\tilde{L}_6 + \tilde{L}_8) \sin \tilde{L}_5} = 1.$$

固定边条件为(由  $\overline{AC}$  推算到  $\overline{AB}$ ):

$$S_{AB} = S_{AC} \frac{\sin \tilde{L}_2 \sin(\tilde{L}_6 + \tilde{L}_8)}{\sin \tilde{L}_3 \sin \bar{X}}.$$

或写成

$$\frac{S_{AC} \sin \tilde{L}_2 \sin(\tilde{L}_6 + \tilde{L}_8)}{S_{AB} \sin \tilde{L}_3 \sin \bar{X}} = 1.$$

从这 5 个条件方程出发进行平差,就是附有参数的条件平差方法,它是平差的基础方法之一。

### § 6-1 基础方程和它的解

在附有参数的条件平差法中,在所列出的方程中,可能有的是线性的,有的是非线性的。当有非线性方程时,须将其化为线性形式。在第三章中已经给出其线性或线性化后的函数模型为:

$$A \Delta + B \bar{x} - W = 0. \quad (6-1-1)$$

$c, n, n, 1 \quad c, u, u, 1 \quad c, 1 \quad c, 1$

这里  $c=r+u$ ,  $c < n$ ,  $u < c$ . 系数阵的秩分别为:

$$R(A)=C, \quad R(B)=u.$$

即  $A$  为行满秩,  $B$  为列满秩。仍以  $\Delta$  和  $\hat{x}$  的估值  $V$  和  $\hat{x}$  代入, 则附有参数的条件平差法的条件方程为:

$$A V + B \hat{x} - W = O. \quad (6-1-2)$$

$c, n \quad n, 1 \quad c, u \quad u, 1 \quad c, 1 \quad c, 1$

随机模型为

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}. \quad (6-1-3)$$

$n, n \quad n, n \quad n, n$

(6-1-2)式中待求量为  $n$  个改正数和  $u$  个参数, 方程的个数为  $c=r+u$ , 而  $c < n+u$ , 即方程个数少于未知数的个数, 且其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩, 即  $R(A \ B) = R(A \ B \ W) = C$ , 故(6-1-2)式是一组具有无穷多组解的相容方程组。按最小二乘原理, 应在无穷多组解中求出能使  $V^T P V = \min$  的一组解。为此, 组成函数:

$$\Phi = V^T P V - 2K^T (AV + B\hat{x} - W)$$

式中  $K$  是对应于条件方程(6-1-2)的联系数向量, 为求  $\Phi$  的极小, 将其分别对  $V$  和  $\hat{x}$  求一阶导数并令其等于零, 则有

$$\partial \Phi / \partial V = 2V^T P - 2K^T A = 0,$$

$$\partial \Phi / \partial \hat{x} = -2K^T B = 0.$$

由两式转置得

$$P V - A^T K = 0, \quad (6-1-4)$$

$n, n \quad n, 1 \quad n, c \quad c, 1$

$$B^T K = 0. \quad (6-1-5)$$

$u, c \quad c, 1 \quad u, 1$

在(6-1-2)、(6-1-4)和(6-1-5)三式中, 总共有  $c+n+u$  个方程, 待求的未知数是  $n$  个改正数,  $u$  个参数和  $c$  个联系数, 即方程个数等于未知数个数, 所以由它们可以求得能使  $V^T P V = \min$  的一组唯一解。称这三式为附有参数的条件平差法的基础方程。

将(6-1-4)式左乘  $P^{-1}$  得

$$V = P^{-1} A^T K = Q A^T K. \quad (6-1-6)$$

$n, 1$

上式称为改正数方程。于是基础方程为:

$$\left. \begin{aligned} A V + B \hat{x} - W &= O \\ V &= P^{-1} A^T K = Q A^T K \\ B^T K &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6-1-7)$$

$c, n \quad n, 1 \quad c, u \quad u, 1 \quad c, 1 \quad c, 1$   
 $n, 1 \quad n, n \quad n, c \quad c, 1 \quad n, n \quad n, c \quad c, 1$   
 $u, c \quad c, 1$

解算此基础方程, 通常是将其中的改正数方程代入条件方程, 得到一组包含  $K$  和  $\hat{x}$  的对称线性方程组, 即

$$\left. \begin{aligned} A Q A^T K + B \hat{x} - W &= 0 \\ B^T K &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6-1-8)$$

在第四章中已令  $N_{aa} = A Q A^T$ , 故上式也可写成

$$\left. \begin{aligned} N_{aa} K + B \hat{x} - W &= 0 \\ B^T K &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (6-1-9)$$

$c, c \quad c, 1 \quad c, u \quad u, 1 \quad c, 1 \quad c, 1$   
 $u, c \quad c, 1 \quad u, 1$

上式称为附有参数的条件平差法的法方程。因为  $R(N_{aa}) = R(AQA^T) = R(A) = C$ , 且  $N_{aa}^T = (AQA^T)^T = AQA^T = N_{aa}$ , 故知  $N_{aa}$  为一  $C$  阶的对称满秩方阵, 是一可逆阵。用  $N_{aa}^{-1}$  左乘 (6-1-9) 的第一式, 得

$$K = N_{aa}^{-1}(W - B\hat{x}), \quad (6-1-10)$$

又以  $B^T N_{aa}^{-1}$  左乘 (6-1-9) 中的第一式, 并与第二式相减, 得

$$B^T N_{aa}^{-1} B\hat{x} - B^T N_{aa}^{-1} W = 0.$$

现今

$$N_{bb} = B^T N_{aa}^{-1} B, \quad (6-1-11)$$

则有

$$N_{bb} \hat{x} = B^T N_{aa}^{-1} W. \quad (6-1-12)$$

因  $R(N_{bb}) = R(B^T N_{aa}^{-1} B) = R(B) = u$ , 且  $N_{bb}^T = N_{bb}$ , 故  $N_{bb}$  是  $u$  阶可逆对称方阵, 解之得

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} W. \quad (6-1-13)$$

在实际计算时, 由 (6-1-13) 式计算  $\hat{x}$ , 由 (6-1-10) 式计算  $K$ , 再由 (6-1-6) 式计算  $V$ , 最后可计算平差值

$$\hat{L} = L + V, \quad (6-1-14)$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}. \quad (6-1-15)$$

联系数  $K$  不是平差计算的目的, 有时可以不计算, 这样就可将 (6-1-10) 式代入 (6-1-6) 式, 得

$$V = QA^T N_{aa}^{-1} (W - B\hat{x}). \quad (6-1-16)$$

就可在算出  $\hat{x}$  后, 直接计算改正数  $V$ 。

## § 6-2 精度评定

### 一、单位权方差

和其他平差方法一样, 单位权方差的估值是  $V^T PV$  除以该平差方法的自由度, 即

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{r} = \frac{V^T PV}{c - u}. \quad (6-2-1)$$

式中  $V^T PV$  可用已求得的  $V$  计算外, 还可由以下导出的公式计算。顾及 (6-1-6) 式, 则有

$$V^T PV = (QA^T K)^T PV = K^T AV,$$

由 (6-1-2) 式知,

$$AV = W - B\hat{x},$$

代入上式, 得

$$V^T PV = K^T W - K^T B\hat{x},$$

由 (6-1-5) 式知  $B^T K = 0$ , 故有

$$V^T PV = W^T K. \quad (6-2-2)$$

式中顾及了  $(V^T PV)^T = V^T PV$ 。又将 (6-1-10) 式代入得:



$$V^T P V = W^T N_{aa}^{-1} W - W^T N_{aa}^{-1} B \hat{x} = W^T N_{aa}^{-1} W - (B^T N_{aa}^{-1} W)^T \hat{x}. \quad (6-2-3)$$

(6-2-2)式是用条件方程常数项  $W$  和联系数  $K$  计算的, 而(6-2-3)式则是用  $W$  和  $\hat{x}$  来计算的。以上几种公式可用来作为  $V^T P V$  计算的校核。

## 二、协因数阵

在附有参数的条件平差中, 基本向量为  $L, W, \hat{X}, K, V, \hat{L}$ , 由  $Q_{LL} = Q$  可推求各向量的自协因数阵以及两两向量之间的互协因数阵。

由(3-3-7)式知  $-W = F(L, X^0)$ , 顾及  $L = \tilde{L} - \Delta$ , 则  $-W = F(\tilde{L} - \Delta, X^0)$ , 按台劳公式展开,  $-W = F(\tilde{L}, X^0) + \partial F / \partial L|_{L, X^0} \Delta$  故  $W = -A\Delta - W^0$ , 其中  $W^0 = F(\tilde{L}, X^0)$  是常量, 与精度无关, 且知  $Q_{aa} = Q_{LL} = Q$ , 故对于推导精度公式来说, 可将  $W$  写成  $W = -AL - W^0$ 。于是各基本向量的表达式可写成:

$$L = L$$

$$W = -AL - W^0$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x} = X^0 + N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} W \quad (6-1-13)$$

$$K = N_{aa}^{-1} W - N_{aa}^{-1} B \hat{x} \quad (6-1-10)$$

$$V = QA^T K \quad (6-1-6)$$

$$\hat{L} = L + V \quad (6-1-14)$$

先求以上前三个向量的自协因数阵和互协因数阵的计算公式。按协因数传播律得:

$$Q_{LL} = Q$$

$$Q_{WW} = AQA^T = N_{aa}$$

$$\begin{aligned} Q_{\hat{X}\hat{X}} &= N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} Q_{WW} N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} = N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} N_{aa} N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} \\ &= N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} = N_{bb}^{-1} N_{bb} N_{bb}^{-1} = N_{bb}^{-1} \end{aligned}$$

$$Q_{WL} = -AQ$$

$$Q_{\hat{X}L} = N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} Q_{WL} = -N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} AQ = -Q_{\hat{X}\hat{X}} B^T N_{aa}^{-1} AQ$$

$$Q_{\hat{X}W} = N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} Q_{WW} = N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} N_{aa} = N_{bb}^{-1} B^T = Q_{\hat{X}\hat{X}} B^T$$

以下推导其他向量的有关协因数阵:

$$\begin{aligned} Q_{KK} &= N_{aa}^{-1} Q_{WW} N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{\hat{X}W} N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} Q_{W\hat{X}} B^T N_{aa}^{-1} + N_{aa}^{-1} B Q_{\hat{X}\hat{X}} B^T N_{aa}^{-1} \\ &= N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} + N_{aa}^{-1} B N_{aa}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} \\ &= N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} = N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{\hat{X}} B^T N_{aa}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{KL} &= N_{aa}^{-1} Q_{WL} - N_{aa}^{-1} B Q_{\hat{X}L} = -N_{aa}^{-1} AQ + N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} AQ \\ &= -(N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1}) AQ = -Q_{KK} AQ \end{aligned}$$

$$Q_{KW} = N_{aa}^{-1} Q_{WW} - N_{aa}^{-1} B Q_{\hat{X}W} = N_{aa}^{-1} N_{aa} - N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} N_{aa} = Q_{KK} N_{aa}$$

$$Q_{K\hat{X}} = N_{aa}^{-1} Q_{W\hat{X}} - N_{aa}^{-1} B Q_{\hat{X}\hat{X}} = N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} - N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} = 0$$

$$Q_{VV} = QA^T Q_{KK} AQ$$

$$Q_{VL} = QA^T Q_{KL} = -QA^T Q_{KK} AQ = -Q_{VV}$$

$$Q_{VW} = QA^T Q_{KW} = QA^T Q_{KK} N_{aa}$$

$$Q_{VX} = QA^T Q_{KX} = 0$$

$$Q_{VK} = QAQ_{KK}$$

$$Q_{LL} = Q + Q_{LV} + Q_{VL} + Q_{VV} = Q - Q_{VV} - Q_{VV} + Q_{VV} = Q - Q_{VV}$$

$$Q_{LL} = Q + Q_{VL} = Q - Q_{VV}$$

$$Q_{LW} = Q_{LW} + Q_{VW} = -QA^T + QA^T Q_{KK} N_{aa} = -QA^T N_{aa}^{-1} BQ_{XX} B^T$$

$$Q_{LK} = Q_{LK} + Q_{VK} = -QA^T Q_{KK} + QA^T Q_{KK} = 0$$

$$Q_{LX} = Q_{LX} + Q_{VX} = -QA^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1}$$

$$Q_{LV} = Q_{LV} + Q_{VV} = 0$$

现将以上推出的协因数阵的计算列于表 6-1, 以供查阅。

表 6-1

	$L$	$W$	$X$	$K$	$V$	$\hat{L}$
$L$	$Q$	$-QA^T$	$-QA^T N_{aa}^{-1} BQ_{XX}$	$-QA^T Q_{KK}$	$-Q_{VV}$	$Q - Q_{VV}$
$W$	$-AQ$	$N_{aa}$	$BQ_{XX}$	$N_{aa} Q_{KK}$	$N_{aa} Q_{KK} AQ$	$-BQ_{XX} B^T N_{aa}^{-1} AQ$
$X$	$-Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} AQ$	$Q_{XX} B^T$	$N_{bb}^{-1}$	0	0	$-N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} AQ$
$K$	$-Q_{KK} AQ$	$Q_{KK} N_{aa}$	0	$N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} BQ_{XX} B^T N_{aa}^{-1}$	$Q_{KK} AQ$	0
$V$	$-Q_{VV}$	$QA^T Q_{KK} N_{aa}$	0	$QA^T Q_{KK}$	$QA^T Q_{KK} AQ$	0
$\hat{L}$	$Q - Q_{VV}$	$-QA^T N_{aa}^{-1} BQ_{XX} B^T$	$-QA^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1}$	0	0	$Q - Q_{VV}$

### 三、平差值函数的协因数

在附有参数的条件平差中, 任何一个量的平差值都可表达成观测量平差值和参数平差值的函数。例如, 在图 6-1 中, 如果要求平差后  $\angle BAC$  的角值和中误差, 则由图知, 它的函数式应为

$$\hat{\varphi}_1 = 180^\circ - \hat{X} - \hat{L}_8 - \hat{L}_6 + \hat{L}_1$$

若还要求平差后  $\overline{BD}$  边的边长和中误差, 由图知它的函数式可写成:

$$\hat{\varphi}_2 = \hat{S}_{BD} = \overline{AB} \frac{\sin(180 - \hat{L}_6 - \hat{L}_8 - \hat{X})}{\sin(\hat{L}_6 + \hat{L}_8)}$$

式中  $\overline{AB}$ 、 $180^\circ$  均为常量, 视为无误差。 $\hat{\varphi}_1$  为线性函数,  $\hat{\varphi}_2$  为非线性函数。一般而言, 如有一平差函数为:

$$\hat{\varphi} = \Phi(\hat{L}, \hat{X}) \quad (6-2-4)$$

对其全微分, 得权函数式:

$$d\hat{\varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{L}} d\hat{L} + \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}} d\hat{X} = F^T d\hat{L} + F_x^T d\hat{X} \quad (6-2-5)$$

式中

$$F^T = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{L}_1} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{L}_2} \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{L}_n} \right], \quad F_x^T = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_1} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_2} \cdots \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_n} \right] \quad (6-2-6)$$

按协因数传播律得  $\hat{\varphi}$  的协因数为:

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = F^T Q_{LL} F + F^T Q_{Lx} F_x + F_x^T Q_{xL} F + F_x^T Q_{xx} F_x \quad (6-2-7)$$

其中  $Q_{LL}$ ,  $Q_{Lx} = Q_{xL}^T$ ,  $Q_{xx}$  等协因数阵可按表 6-1 中的公式计算。 $\hat{\varphi}$  的中误差为:

$$\sigma_{\hat{\varphi}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{1/P_{\hat{\varphi}}} \quad (6-2-8)$$

## § 6-3 公式汇编和示例

### 一、公式汇编

附有参数的条件平差的函数模型和随机模型

$$A_{c,n} V + B_{c,u} \hat{x} - W_{c,1} = O \quad (6-1-2)$$

$$D_{n,n} = \sigma_0^2 Q_{n,n} = \sigma_0^2 P_{n,n}^{-1} \quad (6-1-3)$$

$$W = -AL - W^0$$

法方程

$$\left. \begin{aligned} N_{aa} K + B_{c,u} \hat{x} - W_{c,1} &= O \\ B_{c,u}^T K &= O \end{aligned} \right\} \quad (6-1-9)$$

其解为

$$K = N_{aa}^{-1} (W_{c,1} - B_{c,u} \hat{x}) \quad (6-1-10)$$

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1} B_{c,u}^T N_{aa}^{-1} W_{c,1} \quad (6-1-13)$$

$$V_{n,1} = Q A^T K = Q A^T N_{aa}^{-1} (W_{c,1} - B_{c,u} \hat{x}) \quad (6-1-6)$$

观测值和参数的平差值

$$\hat{L}_{n,1} = L + V_{n,1} \quad (6-1-14)$$

$$\hat{X}_{u,1} = X^0 + \hat{x} \quad (6-1-15)$$

单位权方差估值公式

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} = \frac{V^T P V}{c - u} \quad (6-2-1)$$

$$V^T P V = W^T K \quad (6-2-2)$$

$$V^T P V = W^T N_{aa}^{-1} W - (B^T N_{aa}^{-1} W)^T \hat{x} \quad (6-2-3)$$

平差参数的方差

$$D_{xx} = \sigma_0^2 Q_{xx} = \sigma_0^2 N_{bb}^{-1} \quad (\text{表 } 6-1)$$

平差值函数的权函数式及其协因数

$$d\hat{\varphi} = F^T d\hat{L} + F_x^T d\hat{X} \quad (6-2-5)$$

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = F^T Q_{LL} F + F^T Q_{Lx} F_x + F_x^T Q_{xL} F + F_x^T Q_{xx} F_x \quad (6-2-7)$$

## 二、示例

例[6-1] 图 6-1 所示的三角网之起算数据列于表 6-2, 观测角值(同精度)列于表 6-3, 选取  $\angle ABD$  的平差值为参数  $X$ , 试按附有参数的条件平差法对该三角网进行平差, 并求平差后  $BE$  边长的相对中误差。

表 6-2

点 名	坐 标		边长 $S(m)$	至何点
	$X(m)$	$Y(m)$		
A	2798372.451	523925.867	6177.162	B
A			2307.880	C
B	2793886.844	528172.826		

解: (1) 计算参数的近似值  $X^0$ .

$$\sin X^0 = \frac{S_{AC} \sin L_2 \sin(L_6 + L_8)}{S_{AB} \sin L_3},$$

得  $X^0 = 24^\circ 34' 31.3''$ .

(2) 列条件方程(其中(d)、(e)两条件的闭合差见表 6-3)

条件方程闭合差的计算

表 6-3

角 号	顶 点	观 测 角 值	正 弦 对 数	$\delta$
1	A	35°19'16.2"		
2	C	109 47 28.8	9.97355824	-0.76
3	D	34 53 12.0	9.75736186	+3.02
		179 59 57.0		
4	A	47 01 21.8		
5	E	57 05 04.0	9.9240 0641	+1.36
6	D	75 53 35.7	9.9867 0158	+0.53
		180 00 01.5		
7	E	51 38 11.9		
8	D	61 31 30.5		
9	B	66 50 19.2		
		180 00 01.6		
$X^0$	B	24 34 31.3	9.6189 7823	+4.60
5+7	E	108 43 15.9	9.9763 9228	-0.71
9- $X^0$	B	42 15 47.9	9.8277 1727	+2.32
6+8	D	137 25 06.2	9.8303 5747	-2.29
8+ $X^0$ -5	A	29 00 57.8	9.6857 9071	+3.80
		$\lg S_{AB} = 3.7907\ 8900$		$w_d = -9.06$
		$\lg S_{AC} = 3.3632\ 1320$		$w_e = -0.18$

图形条件:

$$v_1 + v_2 + v_3 - 3.0 = 0 \quad (a)$$

$$v_4 + v_5 + v_6 + 1.5 = 0 \quad (b)$$

$$v_7 + v_8 + v_9 + 1.6 = 0 \quad (c)$$

极条件(以 A 点为极):

$$\frac{\sin(\hat{L}_5 + \hat{L}_7) \sin \hat{x} \sin \hat{L}_6}{\sin(\hat{L}_9 - \hat{x}) \sin(\hat{L}_6 + \hat{L}_8) \sin \hat{L}_5} = 1,$$

上式的线性形式为

$$(\delta_{5+7} - \delta_5) v_5 + (\delta_6 - \delta_{6+8}) v_6 + \delta_{5+7} v_7 - \delta_{6+8} v_8 - \delta_{9-x} v_9 + (\delta_{9-x} + \delta_x) \hat{x} + w_d = 0,$$

即为

$$-2.07 v_5 + 2.82 v_6 - 0.71 v_7 + 2.29 v_8 - 2.32 v_9 + 6.92 \hat{x} - 9.06 = 0 \quad (d)$$

固定边条件( $S_{AC} \rightarrow S_{AB}$ ):

$$S_{AC} \frac{\sin \hat{L}_2 \sin(\hat{L}_6 + \hat{L}_8)}{\sin \hat{L}_3 \sin \hat{x}} = S_{AB},$$

其线性形式为

$$-0.76 v_2 - 3.02 v_3 - 2.29 v_6 - 2.29 v_8 - 4.60 \hat{x} - 0.18 = 0 \quad (e)$$

(3) 列平差值函数式

$$\hat{\varphi} = \lg S_{BE} = \lg \left\{ S_{AB} \frac{\sin(\hat{L}_8 + \hat{x} - \hat{L}_5)}{\sin(\hat{L}_5 + \hat{L}_7)} \right\},$$

线性形式的权函数式为

$$d\hat{\varphi} = d \lg S_{BE} = -3.09 v_5 + 0.71 v_7 + 3.80 v_8 + 3.80 \hat{x}.$$

(4) 编制条件式和权函数式系数表(表 6-4)

条件式与函数式系数表

表 6-4

角号	a	b	c	d	e	s	f	s'	v
1	+1					+1.00		+1.00	+2.46
2	+1				-0.76	+0.24		+0.24	+1.58
3	+1				-3.02	-2.02		-2.02	-1.04
4		+1				+1.00		+1.00	+0.19
5		+1		-2.07		-1.07	-3.09	-4.16	-1.40
6		+1		+2.82	-2.29	+1.53		+1.53	-0.29
7			+1	-0.71		+0.29	+0.71	+1.00	0.00
8			+1	+2.29	-2.29	+1.00	+3.80	+4.80	-0.35
9			+1	-2.32		-1.32		-1.32	-1.25
$f\hat{x}$				+6.92	-4.60	+2.32	+3.80	+6.12	
W	-3.00	+1.50	+1.60	-9.06	-0.18				

(5)组成并解算法方程

法方程

$$\begin{bmatrix} 3.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.78 \\ 0.00 & 3.00 & 0.00 & +0.75 & -2.29 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 & -0.74 & -2.29 \\ 0.00 & +0.75 & -0.74 & +23.32 & -11.70 \\ -3.78 & -2.29 & -2.29 & -11.70 & +20.19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +6.92 \\ -4.60 \end{bmatrix} \hat{x} = \begin{bmatrix} -3.00=0 \\ +1.05=0 \\ +1.60=0 \\ -9.06=0 \\ -0.18=0 \end{bmatrix}$$

$$6.92k_4 - 4.60k_5 = 0$$

由此解得

$$K_{5,1} = [+2.4615 \ +0.1925 \ +0.5424 \ +0.7114 \ +1.1599]^T, \quad \hat{x} = +0.7018$$

(6)计算改正数  $v_i$  (见表 6-4)

(7)精度评定

单位权中误差

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{13.43}{4}} = 1.83'',$$

BE 边长对数的中误差

$$\sigma_{\hat{p}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{P_p}} = 1.83 \sqrt{3.08} = 3.21. \text{ (对数第六位为单位)}$$

BE 边长相对中误差

$$\frac{\sigma_{\hat{s}_{BE}}}{\hat{s}_{BE}} = \frac{\sigma_{\hat{p}}}{M} = \frac{3.21 \times 10^{-6}}{0.4343} = \frac{1}{135000}$$

(8)最后坐标计算(略)

## 第七章 附有限制条件的间接平差

在一个平差问题中, 多余观测数  $r=n-t$ , 如果在平差中又增选了  $u>t$  个量作为参数, 其中包含了  $t$  个独立量, 则参数间存在  $s=u-t$  个限制条件。平差时列出  $n$  个观测方程和  $s$  个限制参数间关系的条件方程, 以此为函数模型的平差方法, 就是附有限制条件的间接平差。

### § 7-1 基础方程和它的解

在测角网、测边网、边角网等类型的测量网平差中, 列出的观测方程和条件方程很多是非线性的, 因此必须先按台劳公式将其化为线性形式。附有限制条件的间接平差的线性或线性化后的函数模型为

$$\Delta = B \hat{x} - l, \quad (7-1-1)$$

$$C \hat{x} - W_x = 0. \quad (7-1-2)$$

其中

$$R(B)=u, R(C)=s, u < n, s < u. \quad (7-1-3)$$

即  $B$  为列满秩阵,  $C$  为行满秩阵。仍用  $\hat{x}$  和  $\Delta$  的估值  $\hat{x}$  和  $V$  代入, 得误差方程和限制条件方程为

$$V = B \hat{x} - l, \quad (7-1-4)$$

$$C \hat{x} - W_x = 0, \quad (7-1-5)$$

随机模型为

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P_{n,n}^{-1}. \quad (7-1-6)$$

在(7-1-4)、(7-1-5)两式中, 待求量是  $n$  个改正数和  $u$  个参数, 而方程个数为  $n+s$ , 少于待求量的个数  $n+u$ , 且系数阵的秩等于其增广矩阵的秩, 即

$$R \begin{bmatrix} -I & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} -I & B & l \\ 0 & C & W_x \end{bmatrix} = n+s. \quad (7-1-7)$$

故是有无穷多组解的一组相容方程。为此, 应在无穷多组解中求出能使  $V^T P V = \min$  的一组解。按求条件极值法组成函数:

$$\Phi = V^T P V + 2K_s^T (C\hat{x} - W_x), \quad (7-1-8)$$

式中  $K_s$  是对应于限制条件方程的联系数向量。由(7-1-4)式知,  $V$  是  $\hat{x}$  的显函数, 为求  $\Phi$  的极小, 将其对  $\hat{x}$  取偏导数并令其为零, 则有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}} = 2V^T P \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} + 2K_s^T C = 2V^T P B + 2K_s^T C = 0,$$

转置后得

$$B^T P V + C^T K_s = 0. \quad (7-1-9)$$

在(7-1-4)、(7-1-5)和(7-1-9)三式中, 方程的个数是  $n+s+u$ , 待求未知数的个数是  $n$  个改正数,  $u$  个参数和  $s$  个联系数, 即方程个数等于未知数个数, 故有唯一解。称这三个方程为附有限制条件的间接平差法的基础方程。

解此基础方程通常是先将(7-1-4)代入(7-1-9)式, 得

$$B^T P B \hat{x} + C^T K_s - B^T P l = 0, \quad (7-1-10)$$

$$C \hat{x} - W_x = 0. \quad (7-1-11)$$

前面已令

$$N_{bb} = B^T P B, \quad W = B^T P l, \quad (7-1-12)$$

故上式可写成

$$N_{bb} \hat{x} + C^T K_s - W = 0, \quad (7-1-13)$$

$$C \hat{x} - W_x = 0. \quad (7-1-14)$$

上式称为附有限制条件的间接平差法的法方程。由它可解出  $\hat{x}$  和  $K_s$ 。第五章已指出,  $N_{bb}$  为一满秩对称方阵, 是可逆阵。用  $C N_{bb}^{-1}$  左乘(7-1-13)式, 并减去(7-1-14)式得:

$$C N_{bb}^{-1} C^T K_s - (C N_{bb}^{-1} W - W_x) = 0. \quad (7-1-15)$$

若令

$$N_{cc} = C N_{bb}^{-1} C^T, \quad (7-1-16)$$

则(7-1-15)式也可写成

$$N_{cc} K_s - (C N_{bb}^{-1} W - W_x) = 0. \quad (7-1-17)$$

式中  $N_{cc}$  的秩为  $R(N_{cc}) = R(C N_{bb}^{-1} C^T) = R(C) = s$ , 且  $N_{cc}^T = (C N_{bb}^{-1} C^T)^T = C N_{bb}^{-1} C^T$ , 故  $N_{cc}$  为一  $s$  阶的满秩对称方阵, 是可逆阵。于是

$$K_s = N_{cc}^{-1} (C N_{bb}^{-1} W - W_x). \quad (7-1-18)$$

将上式代入(7-1-13)式, 经整理可得:

$$\hat{x} = (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) W + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} W_x. \quad (7-1-19)$$

由上式解得  $\hat{x}$  之后, 代入(7-1-4)式可求得  $V$ , 最后即可求出:

$$\hat{L} = L + V, \quad (7-1-20)$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}. \quad (7-1-21)$$

在实际平差计算中, 当列出误差方程和限制条件方程之后, 即可计算  $N_{bb}$ 、 $N_{bb}^{-1}$ 、 $N_{cc}$ 、 $N_{cc}^{-1}$ , 然后由(7-1-19)式计算  $\hat{x}$ , 再代入误差方程(7-1-4)计算  $V$ , 最后由(7-1-20)和(7-1-21)式求得观测值和参数的平差值。

## § 7-2 精度评定

精度评定仍是给出单位权方差的估值公式、推导协因数阵和平差参数的函数的协因数



和中误差的公式。

## 一、单位权方差的估值公式

附有限制条件的间接平差的单位权方差估值仍是  $V^T PV$  除以其自由度，即

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{r} = \frac{V^T PV}{n-u+s}. \quad (7-2-1)$$

式中  $V^T PV$  可以用已经算出的  $V$  和已知的权阵  $P$  直接计算。此外，也可按以下导出的公式计算。

因为

$$V^T PV = (B\hat{x} - l)^T PV = \hat{x}^T B^T PV - l^T PV,$$

顾及(7-1-9)和(7-1-4)式，则有

$$V^T PV = -\hat{x}^T C^T K_s - l^T P(B\hat{x} - l) = l^T Pl - \hat{x}^T C^T K_s - l^T PB\hat{x},$$

又考虑到(7-1-11)和(7-1-12)式，则上式可写成：

$$V^T PV = l^T Pl - W_x^T K_s - W^T \hat{x}. \quad (7-2-2)$$

## 二、协因数阵

在附有限制条件的间接平差法中，基本向量为  $L, W, \hat{X}, K_s, V$  和  $\hat{L}$ 。顾及  $Q_{LL} = Q$ ，即可推求各基本向量的自协因数阵以及两两向量之间的互协因数阵。

因为平差值方程的形式是  $\hat{L} = F(\hat{X})$ ，根据(3-3-9)式知，误差方程的常数项  $l = L - F(X^0)$ ，其中  $F(X^0)$  为常量，对精度计算无影响，故有

$$W = B^T Pl = B^T PL + W^0,$$

其中  $W^0$  亦为常量。于是基本向量的表达式为：

$$L = L,$$

$$W = B^T PL + W^0,$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x} = X^0 + (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) W + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} W_x, \quad (7-1-19)$$

$$K_s = N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} W - N_{cc}^{-1} W_x, \quad (7-1-18)$$

$$V = B\hat{x} - l, \quad (7-1-4)$$

$$\hat{L} = L + V. \quad (7-1-20)$$

由以上各表达式，按协因数传播律可得：

$$Q_{LL} = Q,$$

$$Q_{WW} = B^T P Q P B = B^T P B = N_{bb},$$

$$Q_{WL} = B^T P Q = B^T,$$

$$\begin{aligned} Q_{K_s K_s} &= N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{WW} N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} = N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} N_{bb} N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} \\ &= N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} = N_{cc}^{-1} N_{cc} N_{cc}^{-1} = N_{cc}^{-1}, \end{aligned}$$

$$Q_{K_s L} = N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{WL} = N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T,$$

$$Q_{K_s W} = N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{WW} = N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} N_{bb} = N_{cc}^{-1} C,$$

$$Q_{\hat{X} \hat{X}} = (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) Q_{WW} (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1})^T$$

$$\begin{aligned}
&= (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) N_{bb} (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) \\
&= N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}, \\
Q_{XL} &= (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) Q_{WL} = Q_{XX} B^T, \\
Q_{XW} &= (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) Q_{WW} = Q_{XX} N_{bb}, \\
Q_{XK_i} &= (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) Q_{WW} (N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1})^T \\
&= Q_{XX} N_{bb} N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} = Q_{XX} C^T N_{cc}^{-1} = 0, \\
Q_{VV} &= B Q_{XX} B^T - B Q_{XL} - Q_{LX} B^T + Q = B Q_{XX} B^T - B Q_{XX} B^T \\
&\quad - B Q_{XX} B^T + Q = Q - B Q_{XX} B^T, \\
Q_{VL} &= B Q_{XL} - Q_{LL} = B Q_{XX} B^T - Q = -Q_{VV}, \\
Q_{VW} &= B Q_{XW} - Q_{LW} = B Q_{XX} N_{bb} - Q_{LW} = B Q_{XX} N_{bb} - B \\
&= B (Q_{XX} N_{bb} - I), \\
Q_{VX} &= B Q_{XX} - Q_{LX} = B Q_{XX} - Q_{LX} = B Q_{XX} - B Q_{XX} = 0, \\
Q_{VK_i} &= B Q_{XK_i} - Q_{LK_i} = -Q_{LW} N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} = -B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1}, \\
Q_{LL} &= Q - Q_{VV}, \\
Q_{LL} &= Q_{LL} + Q_{VL} = Q - Q_{VV}, \\
Q_{LW} &= Q_{LW} + Q_{VW} = B + B Q_{XX} N_{bb} - B = B Q_{XX} N_{bb}, \\
Q_{LX} &= Q_{LX} + Q_{VX} = B Q_{XX}, \\
Q_{LK_i} &= Q_{LK_i} + Q_{VK_i} = Q_{LW} N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} - B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} \\
&= B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} - B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} = 0, \\
Q_{LV} &= Q_{LV} + Q_{VV} = 0.
\end{aligned}$$

将以上推得的协因数阵计算公式列于表 7-1, 以便查用。

表 7-1

	$L$	$W$	$K_i$	$\hat{X}$	$V$	$\hat{L}$
$L$	$Q$	$B$	$B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1}$	$B Q_{XX}$	$-Q_{VV}$	$Q - Q_{VV}$
$W$	$B^T$	$N_{bb}$	$C^T N_{cc}^{-1}$	$N_{bb} Q_{XX}$	$(Q_{XX} N_{bb} - I)^T B^T$	$N_{bb} Q_{XX} B^T$
$K_i$	$N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T$	$N_{cc}^{-1} C$	$N_{cc}^{-1}$	0	$-N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T$	0
$\hat{X}$	$Q_{XX} B^T$	$Q_{XX} N_{bb}$	0	$N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}$	0	$Q_{XX} B^T$
$V$	$-Q_{VV}$	$B (Q_{XX} N_{bb} - I)$	$-B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1}$	0	$Q - B Q_{XX} B^T$	0
$\hat{L}$	$Q - Q_{VV}$	$B Q_{XX} N_{bb}$	0	$B Q_{XX}$	0	$Q - Q_{VV}$

### 三、平差参数函数的协因数

在附有限制条件的间接平差中, 因在  $u$  个参数中包含了  $t$  个独立参数, 故平差中所求任一量都能表达成这  $u$  个参数的函数。设某个量的平差值  $\hat{\varphi}$  为

$$\hat{\varphi} = \Phi(\hat{X}). \quad (7-2-3)$$

对其全微分, 得权函数式为

$$d\hat{\varphi} = \frac{d\Phi}{d\hat{X}} d\hat{X} = F^T d\hat{X}. \quad (7-2-4)$$

式中  $F$  为

$$F^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_2} & \cdots & \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_n} \end{bmatrix}. \quad (7-2-5)$$

用  $\hat{X}$  代入各偏导数中, 即得各偏导数值, 然后按下式计算其协因数:

$$Q_{\hat{\varphi}} = F^T Q_{\hat{X}} F. \quad (7-2-6)$$

$Q_{\hat{X}\hat{X}}$  可按表 7-1 中给出的公式计算。于是函数  $\hat{\varphi}$  的中误差为

$$\sigma_{\hat{\varphi}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{\varphi}}}. \quad (7-2-7)$$

## § 7-3 公式汇编与示例

### 一、公式汇编

附有限制条件的间接平差法的数学模型

$$V = B \hat{x} - l, \quad (7-1-4)$$

$$C \hat{x} - W_x = 0, \quad (7-1-5)$$

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}. \quad (7-1-6)$$

其中  $l = L - F(X^0)$ ,  $W_x = \Phi(X^0)$ .

法方程

$$N_{bb} \hat{x} + C^T K_s - W = 0, \quad (7-1-13)$$

$$C \hat{x} - W_x = 0. \quad (7-1-14)$$

式中  $N_{bb} = B^T P B$ ,  $W = B^T P l$ .

(7-1-12)

其解为

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) W + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} W_x \\ &= Q_{\hat{X}\hat{X}} W + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} W_x, \end{aligned} \quad (7-1-19)$$

$$K_s = N_{cc}^{-1} (C N_{bb}^{-1} W - W_x). \quad (7-1-18)$$

式中  $N_{cc} = C N_{bb}^{-1} C^T$ .

(7-1-16)

观测值和参数的平差值

$$\hat{L} = L + V, \quad (7-1-20)$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}. \quad (7-1-21)$$

单位权方差的估值

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} = \frac{V^T P V}{n - u + s}, \quad (7-2-1)$$

$$V^T P V = l^T P l - W^T \hat{x} - W_x^T K_s. \quad (7-2-2)$$

协因数阵见表 7-1.

参数平差值函数

$$\hat{\varphi} = \Phi(\hat{X}). \quad (7-2-3)$$

平差值函数的权函数式

$$d\hat{\varphi} = F^T d\hat{X}. \quad (7-2-4)$$

式中

$$F^T = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_1} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}_n} \right]. \quad (7-2-5)$$

平差值函数的协因数

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = F^T Q_{\hat{X}\hat{X}} F. \quad (7-2-6)$$

平差值函数的中误差

$$\sigma_{\hat{\varphi}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}}. \quad (7-2-7)$$

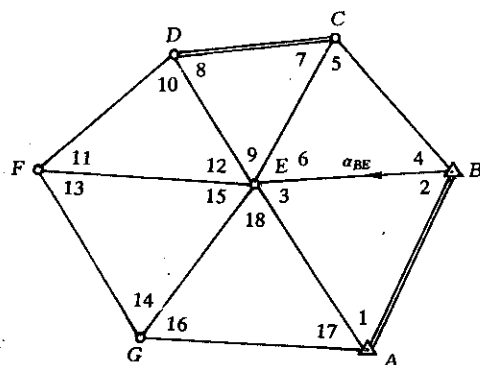


图 7-1

## 二、示例

例[7-1] 在图 7-1 的三角网中, A、B 为已知点,  $\overline{CD}$  为基线边, 又已知 B-E 的方位角  $\alpha_{BE}$ , 观测了全部角度值列于表 7-3, 试求各待定点坐标的平差值和点位中误差。

解: (1) 绘制平差略图(图 7-1)。

(2) 编制起算数据表(表 7-2)。

(3) 计算近似坐标(计算过程略, 近似坐标列于表 7-4)。

(4) 计算近似边长和近似方位角(计算过程略, 结果列于表 7-5)。

起算数据表

表 7-2

点 名	坐 标 (m)		边 长 (m)	方 位 角	至 何 点
	X	Y	S	$\alpha$	
B	2802234.190	19437826.220		249°22'10.17"	E
C			6523.643		D
A	2794005.704	19433831.155			

角度观测值

表 7-3

角度编号	观 测 值	角度编号	观 测 值	角度编号	观 测 值
1	54° 49' 29.57"	7	77° 14' 59.05"	13	56° 31' 36.22"
2	43 28 18.20	8	46 18 21.93	14	67 51 49.11
3	81 42 11.62	9	56 26 38.83	15	55 36 35.70
4	48 19 00.60	10	52 27 11.49	16	64 22 06.50
5	85 31 37.20	11	60 48 47.60	17	62 16 36.29
6	46 09 20.35	12	66 43 59.30	18	53 21 14.20

(5) 计算  $a$ 、 $b$  系数, 例中  $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$  以 cm 为单位, 故  $a$ 、 $b$  系数按下列计算:

$$a_{ik} = \frac{2.06265 \sin a_{ik}^0}{S_{ik}^0(\text{km})}, \quad b_{ik} = \frac{2.06265 \cos a_{ik}^0}{S_{ik}^0(\text{km})}.$$

计算结果见表 7-5.

待定点近似坐标与最后坐标

表 7-4

点 名	近 似 坐 标 (m)		改 正 数 (cm)		最 后 坐 标 (m)	
	$X^0$	$Y^0$	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{X}$	$\hat{Y}$
C	2804773.909	19432985.959	0.00	+0.35	2804773.909	19432985.962
D	2805958.639	19426570.796	+0.14	+0.27	2805958.640	19426570.799
E	2799571.971	19430754.937	+0.15	+0.31	2799571.972	19430754.940
F	2798372.250	19423925.543	+0.20	+0.21	2798372.252	19423925.545
G	2793886.720	19428172.793	+0.10	+0.12	2793886.721	19428172.794

a, b 系数的计算

表 7-5

测 站	照准点	近似方位角 $a^0$	近似边长(m) $s^0$	a	b
A	G	268° 47' 43.31"	5659.6	-0.3644	+0.0077
	E	331 04 21.37	6359.8	-0.1569	-0.2839
	B	25 53 50.40	9147.0		
B	A	205 53 50.40			
	E	249 22 10.16	7555.8	-0.2555	+0.0962
	C	297 41 10.72	5466.1	-0.3341	-0.1753
C	B	117 41 10.72			
	E	203 12 49.19	5660.2	-0.1436	+0.3349
	D	280 27 47.87	6523.6	-0.3109	-0.0574
D	C	100 27 47.87			
	E	146 46 10.99	7635.2	+0.1480	+0.2260
	F	199 13 22.26	8034.3	-0.0845	+0.2424
E	B	69 22 10.16			
	A	151 04 21.37			
	G	204 25 36.26	6244.2	-0.1366	+0.3008
	F	260 02 11.40	6934.0	-0.2930	+0.0515
	D	326 46 10.99			
	C	23 12 49.19			
F	D	19 13 22.26			
	E	80 02 11.40			
	G	136 33 46.68	6177.3	+0.2296	+0.2425
G	F	316 33 46.68			
	E	24 25 36.26			
	A	88 47 43.31			

表 7-6

误差方程和条件方程系数表

角 号	$\hat{x}_C$	$\hat{y}_C$	$\hat{x}_D$	$\hat{y}_D$	$\hat{x}_E$	$\hat{y}_E$	$\hat{x}_G$	$\hat{y}_G$	$\hat{x}_F$	$\hat{y}_F$	$-l$	$v$
1					-0.1569	-0.2839					-0.54	-0.65''
2					+0.2555	-0.0962					+1.55	+1.56
3					-0.0986	+0.3801					-0.41	-0.31
4	+0.3341	+0.1753			-0.2555	+0.0962					-0.04	+0.01
5	-0.4777	+0.1596			+0.1436	-0.3349					+1.26	+1.23
6	+0.1436	-0.3349			+0.1119	+0.2387					+0.62	+0.59
7	-0.1673	-0.3923	+0.3109	+0.0574	-0.1436	+0.3349					-0.36	-0.36
8	+0.3109	+0.0574	-0.1629	+0.1686	-0.1480	-0.2260					+1.19	+1.14
9	-0.1436	+0.3349	-0.1480	-0.2260	+0.2916	-0.1089					-0.63	-0.58
10			-0.2325	+0.0164	+0.1480	+0.2260			+0.0845	-0.2424	-0.22	-0.19
11			+0.0845	-0.2424	-0.2930	+0.0515			+0.2085	+0.1909	+1.53	+1.53
12			+0.1480	+0.2260	+0.1450	-0.2775			-0.2930	+0.0515	+0.29	+0.26
13					+0.2930	-0.0515	-0.2296	-0.2425	-0.0634	+0.2940	-0.93	-0.90
14					-0.1366	+0.3008	+0.3662	-0.0583	-0.2296	-0.2425	+0.47	+0.48
15					-0.1564	-0.2493	-0.1366	+0.3008	+0.2930	-0.0515	-0.56	-0.59
16					+0.1366	-0.3008	+0.2278	+0.2931			+0.56	+0.55
17					+0.1569	+0.2839	-0.3644	+0.0077			+1.77	+1.85
18					-0.2935	+0.0169	+0.1366	-0.3008			+0.69	+0.63
边长条件	-0.1816	+0.9834	+0.1816	-0.9834							-0.10	
方位角条件					+0.2555	-0.0962					-0.10	[ $\rho_{\rho\rho}$ ]=
												14.4067

(6)编制误差方程系数和常数项表(表 7-6), 其中

$$l_i = L_i - (a_{ik}^0 - a_{ij}^0).$$

(7)列立条件方程。由于选取了全部待定点坐标为参数, 所以在基线边的两端点的参数  $\hat{x}_C$ 、 $\hat{y}_C$ 、 $\hat{x}_D$ 、 $\hat{y}_D$  之间存在着一个基线条件, 而在已知点坐标  $X_B$ 、 $Y_B$  与参数  $\hat{x}_E$ 、 $\hat{y}_E$  之间存在一个方位角条件。基线条件为

$$S_{CD}^2 = (\hat{X}_D - \hat{X}_C)^2 + (\hat{Y}_D - \hat{Y}_C)^2,$$

方位角条件为

$$\alpha_{BE} = \arctg \frac{\hat{Y}_E - Y_B}{\hat{X}_E - X_B}.$$

它们的线性化后形式为

$$\begin{aligned} -\cos \alpha_{CD}^0 \hat{x}_C - \sin \alpha_{CD}^0 \hat{y}_C + \cos \alpha_{CD}^0 \hat{x}_D + \sin \alpha_{CD}^0 \hat{y}_D - w_s &= 0, \\ a_{EB} \hat{x}_E + b_{EB} \hat{y}_E - w_a &= 0. \end{aligned}$$

式中

$$w_s = S_{CD} - \sqrt{(X_D^0 - X_C^0)^2 + (Y_D^0 - Y_C^0)^2} = S_{CD} - S_{CD}^0,$$

$$w_a = \alpha_{BE} - \arctg \frac{Y_E^0 - Y_B}{X_E^0 - X_B} = \alpha_{BE} - \alpha_{BE}^0.$$

$a_{EB}$  与  $b_{EB}$  的计算与误差方程系数相同。

(8)组成法方程并进行解算。结果为

$$\begin{aligned} \hat{x} &= [0.002 \ 0.349 \ 0.142 \ 0.273 \ 0.155 \ 0.308 \ 0.099 \ 0.122 \ 0.195 \ 0.258]^T \text{ cm}, \\ K_s &= [-0.010 \ 0.040]^T. \end{aligned}$$

(9)将坐标改正数列入表 7-4, 计算平差后坐标。

(10)计算观测方向改正数(表 7-6)和平差后的角值(略)。

(11)精度评定。

单位权中误差

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n - u + s}} = \sqrt{\frac{14.4067}{10}} = 1.20''.$$

$F$  点的纵横坐标的协因数、中误差和点位中误差为

$$Q_{x_F x_F} = 10.8513, \quad Q_{y_F y_F} = 9.9436,$$

$$\hat{\sigma}_{x_F} = 1.20 \sqrt{10.8513} = 3.95 \text{ cm},$$

$$\hat{\sigma}_{y_F} = 1.20 \sqrt{9.9436} = 3.78 \text{ cm},$$

$$M_F = \sqrt{3.95^2 + 3.78^2} = 5.47 \text{ cm}.$$

例[7-2] 为了确定通过已知点( $x_0=0.4$ ;  $y_0=1.2$ )处的一条直线方程(见图 7-2):  $y=ax+b$ , 现以等精度量测了  $x=1, 2, 3$  处的函数值  $y_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), 其结果列于表 7-7。又选直线方程中的  $a$ 、 $b$  作为参数:  $X=[a \ b]^T$ 。试列出其误差方程和限制条件方程, 并求  $a$ 、 $b$  的估值及其协因数阵。

表 7-7

点号	$x_i$	$y_i$
1	1	1.6
2	2	2.0
3	3	2.4

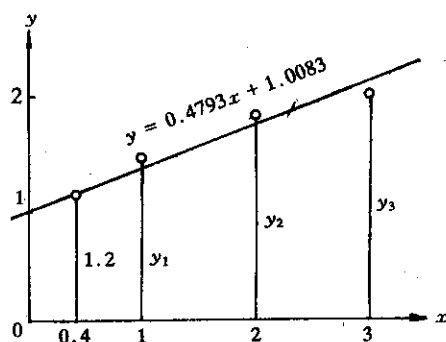


图 7-2

相应的法方程为

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 & 0.4 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0.4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ k_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.8 \\ 6.0 \\ 1.2 \end{bmatrix},$$

解得

$$\hat{a} = 0.4793, \hat{b} = 1.0083, k_s = 0.0992.$$

所以, 直线方程为

$$y = 0.4793x + 1.0083.$$

计算参数的协因数阵  $Q_{xx}$ . 由表 7-1 知:

$$Q_{xx} = N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}.$$

因为

$$N_{bb}^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5000 & -1.0000 \\ -1.0000 & 2.3333 \end{bmatrix},$$

$$N_{cc}^{-1} = [C N_{bb}^{-1} C^T]^{-1} = [1.6133]^{-1} = 0.6198,$$

所以

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 0.1033 & -0.0413 \\ -0.0413 & 0.0165 \end{bmatrix}.$$

解: 由题知  $n=3, t=1, r=3-1=2, u=2$ , 即总共应列  $r+u=4$  个方程。其中  $s=u-t=2-1=1$  个限制条件, 其余 3 个为误差方程。

观测方程为:

$$\hat{y}_i = x_i \hat{a} + \hat{b} \quad (i=1, 2, 3).$$

限制条件为:  $x_0 \hat{a} + \hat{b} - y_0 = 0$ .

将观测数据(表 7-7)代入观测方程, 将  $(x_0, y_0)$  代入条件方程, 即得误差方程和限制条件方程:

$$\begin{aligned} v_1 &= \hat{a} + \hat{b} - 1.6, & v_2 &= 2\hat{a} + \hat{b} - 2.0, \\ v_3 &= 3\hat{a} + \hat{b} - 2.4, & 0.4\hat{a} + \hat{b} - 1.2 &= 0. \end{aligned}$$



## 第八章 概括平差函数模型

### § 8-1 概 述

在前面几章中,已经介绍了条件平差、间接平差(参数平差)、附有参数的条件平差以及附有限制条件的间接平差等四种基本平差方法。

从这几种平差方法的函数模型来看,其中包括了如下几种类型的条件方程:

$$F(\tilde{L})=0, \quad (8-1-1)_a$$

$$\tilde{L}=F(\tilde{X}), \quad (8-1-1)_b$$

$$F(\tilde{L}, \tilde{X})=0, \quad (8-1-1)_c$$

$$\Phi(\tilde{X})=0. \quad (8-1-1)_d$$

在前三种方程中都含有观测量或同时含有观测量和未知参数,在最后一种方程中则只含有未知参数而无观测量,为了便于区分起见,将前三种类型的条件方程统称为一般条件方程,特别地,将(8-1-1)<sub>b</sub>中的一般条件方程又称为观测方程;将后一种类型的条件方程称为限制条件方程。

就建立上述几种平差方法的函数模型来看,它们都各自具有其特定的要求,具体地说:

(1)条件平差是不加入任何参数的一种平差法,即 $u=0$ 的情况。当多余观测数 $r=n-t$ 时,则只要列出形如(8-1-1)<sub>a</sub>的 $r$ 个条件方程。

(2)间接平差是在 $r$ 个多余观测的基础上,再增选 $u=t$ 个独立的参数,故总共应列出 $c=r+u=r+t=n$ 个条件方程, $c$ 是表示一般条件方程的个数。由于通过 $t$ 个独立参数能唯一地确定一个几何模型,因此就有可能将每个观测量都表达成形如(8-1-1)<sub>b</sub>的条件方程,亦即观测方程,且方程的个数正好等于 $n$ 。

(3)附有参数的条件平差是在 $r$ 个多余观测的基础上,再增选 $u<t$ 个独立的参数,故总共应列出 $c=r+u$ 个形如(8-1-1)<sub>c</sub>的一般条件方程。

(4)附有限制条件的间接平差是在 $r$ 个多余观测的基础上,再增选 $u>t$ 个参数,且要求在 $u$ 个参数中必须含有 $t$ 个独立的参数,故总共应列出 $r+u$ 个方程。因为在任一几何模型中最多只能选出 $t$ 个独立参数,故一定有 $s=u-t$ 个是不独立参数,换句话说,在 $u$ 个参数中产生了 $s$ 个参数之间的函数关系式,因此须列出形如(8-1-1)<sub>d</sub>的 $s$ 个限制条件方程。由于总共应列出 $r+u$ 个方程,除了必须列出的 $s$ 个限制条件方程之外,还要列出 $c=r+u-s=r+(t+s)-s=r+t=n$ 个一般条件方程。又由于在 $u$ 个参数中包含了 $t$ 个独立参数,该几何模型已被唯一确定,因而就有可能将每个观测量都表达成形如(8-1-1)<sub>b</sub>的一般条件方程,亦即观测方程,且方程的个数正好等于 $n$ 。

前已提及,在任何几何模型中,最多只能选出 $u=t$ 个独立的参数,故就独立参数而言,在任一几何模型中,其个数总是介于下述范围之内:

$$0 \leq u \leq t. \quad (8-1-2)$$

在某一平差问题中, 设多余观测数  $r = n - t$ , 若又选用了  $u$  个独立参数, 则总共应列出

$$c = r + u \quad (8-1-3)$$

个一般条件方程, 因此, 一般条件方程的个数总是介于下述范围之内:

$$r \leq c \leq n. \quad (8-1-4)$$

这就是说, 对于任何平差问题, 一般条件方程(包括(8-1-1) $a$ 、 $b$ 、 $c$ 三种类型的条件)的总数不会超过  $n$  个, 即不会多于观测值的个数。从(8-1-2)和(8-1-4)两式可以看出, 当  $u = 0$  时(这是独立参数个数的下限), 则应列出  $c = r$  个一般条件方程; 当  $u = t$  时(这是独立参数个数的上限), 则应列出  $c = n$  个一般条件方程。事实上, 前者就是条件平差的情况, 而后者则是间接平差的情况。可见, 对于独立参数而言, 条件平差和间接平差是两种极限的情况。

必须强调指出, 我们说在一个几何模型中, 最多只能选出  $t$  个独立的参数, 但这决不是说, 只要选了  $u = t$  或  $u < t$  个参数, 那么这  $u$  个参数就一定是彼此独立的, 或者说, 在这  $u$  个参数之间就一定不存在任何函数关系式。同样地, 即使是选了  $u > t$  个参数, 也不能说在这  $u$  个参数中就一定包含着  $t$  个独立的参数。这是一个在前面几章中尚未提及过的概念。举例来说, 为了确定图 8-1 中所示网形的形状(确定其相似形), 现观测了图形中的 6 个内角, 即观测向量为:

$$\underline{L} = [\underline{L}_1 \ \underline{L}_2 \ \dots \ \underline{L}_6]^T,$$

平差时若又选定其中的 1、2、3、4 角作为参数, 即参数向量为:

$$\underline{X} = [\underline{X}_1 \ \underline{X}_2 \ \underline{X}_3 \ \underline{X}_4]^T,$$

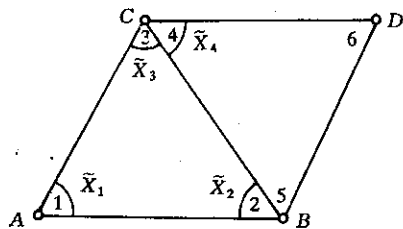


图 8-1

显然, 为了确定该网形的形状, 只要知道每个三角形中的任意 2 个角度就行了, 即必要观测数  $t = 4$ 。故多余观测数  $r = n - t = 6 - 4 = 2$ 。因为增选了 4 个参数, 故总共应列出  $r + u = 2 + 4 = 6$  个条件方程。但从图中可以明显看出, 在参数之间存在着如下的一个函数关系式:

$$\underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \underline{X}_3 - 180^\circ = 0.$$

因此, 尽管这里  $u = t = 4$ , 但 4 个参数中只有 3 个是独立的。如果去掉  $\underline{X}_4$ , 只取 1、2、3 角作为参数  $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3$ , 即  $u = 3$ , 这时  $u < t$ , 但在这 3 个参数之间仍然存在着上述函数关系, 它们同样不是彼此独立的。同样地, 当选定  $u > t$  个参数时, 也可能其中并不包含  $t$  个独立的参数。

在前几章中已经指出, 间接平差是要求选用  $u = t$  个独立的参数, 附有参数的条件平差是要求选用  $u < t$  个独立参数, 附有限制条件的间接平差是选用  $u > t$  个参数, 但要求其中必须含有  $t$  个独立的参数。如果不满足上述相应的要求, 例如, 选定了  $u = t$  或  $u < t$  个参数, 但  $u$  个参数不彼此独立, 或者是选定了  $u > t$  个参数, 但其中没有包含  $t$  个独立的参数, 在这些情况下, 就无法应用上述几种平差方法来进行平差计算了。当所选参数不满足上述各种要求时, 将可采用什么函数模型和平差方法, 这正是本章所要讨论的问题。

一般而言, 对于任何一个平差问题, 设观测值个数为  $n$ , 必要观测数为  $t$ , 则多余观测

数  $r=n-t$ 。若增选了  $u$  个参数, 不论  $u<t$ ,  $u=t$  或  $u>t$ , 也不论参数是否独立, 每增加 1 个参数则相应地多产生 1 个方程, 故总共应列出  $r+u$  个方程。如果在  $u$  个参数中有  $s$  个是不独立的, 或者说, 在这  $u$  个参数(包括  $u<t$  或  $u=t$  的情况以及  $u>t$ , 但其中没有  $t$  个独立参数的情况)之间存在着  $s$  个函数关系式, 则应列出  $s$  个形如(8-1-1)<sub>a</sub>的限制条件方程, 此外, 还应列出

$$c=r+u-s \quad (8-1-5)$$

个形如(8-1-1)<sub>c</sub>的一般条件方程((8-1-1)<sub>a</sub>和(8-1-1)<sub>b</sub>实际上都是(8-1-1)<sub>c</sub>的一种特殊形式), 因此就形成了如下的函数模型:

$$F_{c,1}(\bar{L}, \bar{X})=0, \quad (8-1-6)_a$$

$$\Phi_{s,1}(\bar{X})=0. \quad (8-1-6)_b$$

由(8-1-5)式知:

$$c+s=r+u, \quad (8-1-7)$$

(8-1-7)式是个很重要的关系式, 它告诉我们在进行平差时, 一般条件方程的个数  $c$  与限制条件方程的个数  $s$  之和, 必须等于多余观测数  $r$  与所选参数个数  $u$  之和。如果不相等, 则表明所列出的方程个数( $c+s$ )少于或多于应有的个数( $r+u$ )。如果  $c+s<r+u$ , 则表明少列了某些条件方程, 这样, 平差后求得的结果将无法使该几何模型完全闭合。如  $c+s>r+u$ , 则表示所列的条件存在线性相关的情况, 这将造成解点上的困难。由(8-1-7)式知, 这一模型的自由度为  $r=c-u+s$ 。

## § 8-2 基础方程和它的解

在上节(8-1-6)式中已经给出了概括平差函数模型的一般形式。在实际平差工作中, 所列出的条件式可能有非线性形式的, 为此也要将其按台劳级数化为线性形式。采用第三章中同样的方法和符号定义, 则可写出其线性化后的形式为

$$A_{c,n \times n,1} \Delta + B_{c,u \times u,1} \bar{x} - W_{c,1} = 0, \quad (8-2-1)_a$$

$$C_{s,u \times u,1} \bar{x} - W_{s,1} = 0. \quad (8-2-1)_b$$

$$\text{式中} \quad W = -F(L, X^0), \quad -W_x = -\Phi(X^0) \quad (8-2-1)_c$$

这里  $c=r+u-s$ ,  $c>r$ ,  $u<c$ ,  $s<u$ , 系数阵的秩分别为

$$R(A)=c, \quad R(B)=u, \quad R(C)=s \quad (8-2-2)$$

即  $A$  为行满秩,  $B$  为列满秩,  $C$  为行满秩。

仍以  $\Delta$  和  $\bar{x}$  的估值  $V$  和  $\hat{x}$  代入, 则(8-2-1)式为:

$$A_{c,n \times n,1} V + B_{c,u \times u,1} \hat{x} - W_{c,1} = 0 \quad (8-2-3)_a$$

$$C_{s,u \times u,1} \hat{x} - W_{s,1} = 0 \quad (8-2-3)_b$$

其随机模型为:

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}. \quad (8-2-4)$$

以(8-2-3)式作为函数模型进行平差称为附有限制条件的条件平差法。(8-2-3)、(8-2-

4) 两式是它的数学模型。

在(8-2-3)<sub>a</sub>和(8-2-3)<sub>b</sub>式中, 含有 $c+s$ 个方程, 其中待求量 $n$ 个改正数和 $u$ 个参数, 而 $(c+s) < (n+u)$ , 用其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩, 即

$$R \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} A & B & W \\ O & C & W_x \end{bmatrix} = c+s.$$

故该函数模型是有无穷多组解的相容方程组。为此应在无穷多组解中求出一组能使 $V^T P V = \min$ 的一组解, 按求条件极值法组成函数

$$\Phi = V^T P V - 2K^T (AV + B\hat{x} - W) - 2K_s^T (C\hat{x} - W_x). \quad (8-2-5)$$

为求其极小, 将上式分别对 $V$ 和 $\hat{x}$ 取偏导数并令其为零, 得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = 2V^T P - 2K^T A = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}} = -2K^T B - 2K_s^T C = 0,$$

转置后得:

$$P V - A^T K = 0, \quad (8-2-6)$$

$$B^T K + C^T K_s = 0. \quad (8-2-7)$$

在(8-2-3)<sub>a</sub>、(8-2-3)<sub>b</sub>、(8-2-6)和(8-2-7)诸式中, 包含待求量为 $n$ 个改正数,  $u$ 个参数,  $c$ 个对应于一般条件式的联系数以及 $s$ 个对应于限制条件的联系数, 而方程的个数为 $c+s+n+u$ , 即方程个数等于未知数个数, 故有唯一解。以上四式即称附有限制条件的条件平差法的基础方程。

解此基础方程, 通常是先从(8-2-6)式解得:

$$V = P^{-1} A^T K = Q A^T K, \quad (8-2-8)$$

上式称为改正数方程。将此式代入(8-2-3)式。则有

$$A Q A^T K + B \hat{x} - W = 0.$$

以前已令

$$N_{aa} = A Q A^T, \quad (8-2-9)$$

连同(8-2-7)和(8-2-3)<sub>b</sub>式, 则得

$$N_{aa} K + B \hat{x} - W = 0, \quad (8-2-10)_a$$

$$B^T K + C^T K_s = 0 \quad (8-2-10)_b$$

$$C \hat{x} - W_x = 0. \quad (8-2-10)_c$$

(8-2-10)式称为附有限制条件的条件平差的法方程。其系数为对称, 所以也是一个对称线性方程组。其中 $N_{aa}$ 是 $c$ 阶的可逆的对称方阵。以 $N_{aa}^{-1}$ 左乘(8-2-10)<sub>a</sub>式可得

$$K = N_{aa}^{-1} (W - B \hat{x}), \quad (8-2-11)$$

再以 $B^T N_{aa}^{-1}$ 左乘(8-2-10)<sub>a</sub>并减去(8-2-10)<sub>b</sub>式, 得:

$$B^T N_{aa}^{-1} B \hat{x} - C^T K_s - B^T N_{aa}^{-1} W = 0. \quad (8-2-12)_a$$

若令

$$N_{bb} = B^T N_{aa}^{-1} B, \quad W_e = B^T N_{aa}^{-1} W, \quad (8-2-12)_b$$

则(8-2-12)<sub>a</sub>式可写成

$$N_{bb} \hat{x} - C^T K_s - W_e = 0. \quad (8-2-13)$$

上式中  $R(N_{bb}) = R(B^T N_{aa}^{-1} B) = R(B) = u$ , 且  $N_{bb}^T = (B^T N_{aa}^{-1} B)^T = B^T N_{aa}^{-1} B = N_{bb}$ , 即  $N_{bb}$  是  $u$  阶对称满秩方阵, 是可逆阵, 于是由(8-2-13)式解得

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1} (C^T K_s + W_e), \quad (8-2-14)$$

将上式代入(8-2-10)<sub>c</sub>式, 得

$$CN_{bb}^{-1} C^T K_s + CN_{bb}^{-1} W_e - W_x = 0.$$

令

$$N_{cc} = CN_{bb}^{-1} C^T, \quad (8-2-15)$$

于是前式可写成:

$$N_{cc} K_s + C N_{bb}^{-1} W_e - W_x = 0. \quad (8-2-16)$$

因为  $R(N_{cc}) = R(CN_{bb}^{-1} C^T) = R(C) = s$ , 且  $N_{cc}^T = (CN_{bb}^{-1} C^T)^T = CN_{bb}^{-1} C^T = N_{cc}$ , 故  $N_{cc}$  是一  $s$  阶的满秩对称方阵, 是可逆阵。最后由(8-2-16)式解得:

$$K_s = N_{cc}^{-1} (W_x - CN_{bb}^{-1} W_e). \quad (8-2-17)$$

将上式代入(8-2-14)式, 经整理即得:

$$\hat{x} = (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) W_e + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} W_x. \quad (8-2-18)$$

在实际计算时, 当(8-2-1)<sub>a</sub>和(8-2-1)<sub>b</sub>式中的一般条件方程和限制条件方程列出以后, 即可计算  $N_{aa}$ 、 $N_{aa}^{-1}$ 、 $N_{bb}$ 、 $N_{bb}^{-1}$ 、 $N_{cc}$ 、 $N_{cc}^{-1}$  和  $W_e$ , 然后由(8-2-18)式算出  $\hat{x}$ , 由(8-2-11)式计算  $K$ , 再由(8-2-8)式计算  $V$ 。一般说来, 求  $K$  和  $K_s$  并非平差计算的主要目的, 如果不需要计算  $K$  和  $K_s$ , 则(8-2-8)式可写成:

$$V = Q A^T N_{aa}^{-1} (W - B \hat{x}). \quad (8-2-19)$$

这样, 当算出  $\hat{x}$  后即可由上式计算  $V$ 。如果需要计算  $K$  和  $K_s$ , 则可由(8-2-11)式计算  $K$  和由(8-2-17)式计算  $K_s$ 。最后平差值为

$$\hat{L} = L + V, \quad (8-2-20)$$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}. \quad (8-2-21)$$

### § 8-3 精度评定

这一平差方法的精度评定也是包括: 计算单位权方差的估值, 推导各向量的协因数阵和互协因数阵的计算公式以及平差值函数的协因数和误差中误差等内容。

#### 一、单位权方差的估值公式

附有限制条件的条件平差法的单位权方差估值也是  $V^T P V$  除以它的自由度, 即

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} = \frac{V^T P V}{c - u + s}, \quad (8-3-1)$$

其中  $V^T P V$  可以用算得的  $V$  和已知的权阵直接计算, 也可以用以下推出的任一公式计算。

因为  $V = Q A^T K$  (见 (8-2-8) 式), 并顾及 (8-2-3)<sub>0</sub> 和 (8-2-10)<sub>0</sub> 式, 则有

$$\begin{aligned} V^T P V &= V^T P (Q A^T K) = (A V)^T K = (W - B \hat{x})^T K \\ &= W^T K - \hat{x}^T B^T K = W^T K + \hat{x}^T C^T K_s = W^T K + W_x^T K_s, \end{aligned} \quad (8-3-2)$$

将 (8-2-11) 式代入上式并顾及 (8-2-12)<sub>0</sub> 式, 得

$$V^T P V = W^T N_{aa}^{-1} W - W^T N_{aa}^{-1} B \hat{x} + W_x^T K_s = W^T N_{aa}^{-1} W - W_x^T \hat{x} + W_x^T K_s, \quad (8-3-3)$$

## 二、协因数阵

在附有限制条件的条件平差法中, 基本向量有:  $L, W, \hat{X}, K, K_s, V, \hat{L}$ 。由  $Q_{LL} = Q$  可以推求各向量的自协因数阵和两两向量之间的互协因数阵。

这些向量的基本表达式为:

$$L = L,$$

$$W = -AL - BX^0 - A^0 = -AL + W^0,$$

$$\hat{X} = (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) W_e + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} W_x, \quad (8-2-18)$$

$$K = N_{aa}^{-1} W - N_{aa}^{-1} B \hat{x}, \quad (8-2-11)$$

$$K_s = N_{cc}^{-1} W_x - N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} W_e, \quad (8-2-17)$$

$$V = Q A^T K, \quad (8-2-8)$$

$$\hat{L} = L + V.$$

在推导中应顾及  $W_x$  是由参数近似值算得的闭合差, 可视为常量, 对推求精度无关。应用协因数传播律, 可得:

$$Q_{LL} = Q,$$

$$Q_{WW} = A Q A^T = N_{aa},$$

$$Q_{WL} = -AQ,$$

$$\begin{aligned} Q_{XX} &= (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) B^T N_{aa}^{-1} Q_{WW} N_{aa}^{-1} B (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) \\ &= (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) N_{bb} (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) \\ &= N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}. \end{aligned}$$

根据上式, 在以下推导中, 为了书写方便起见, 将上面  $\hat{X}$  的表达式 (8-2-18) 式写成  $\hat{X} = Q_{XX} W_e$ 。后面一项对推导协因数阵无影响。

$$Q_{XL} = Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} Q_{WL} = -Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} AQ,$$

$$Q_{XW} = Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} Q_{WW} = Q_{XX} B^T,$$

$$\begin{aligned} Q_{KK} &= N_{aa}^{-1} Q_{WW} N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} Q_{WX} B^T N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{XW} N_{aa}^{-1} + N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} \\ &= N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} + N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} \\ &= N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{KL} &= N_{aa}^{-1} Q_{WL} - N_{aa}^{-1} B Q_{XL} = -N_{aa}^{-1} AQ + N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} AQ \\ &= -Q_{KK} AQ, \end{aligned}$$

$$Q_{KW} = N_{aa}^{-1} Q_{WW} - N_{aa}^{-1} B Q_{XW} = N_{aa}^{-1} N_{aa} - N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T = Q_{KK} N_{aa},$$

$$\begin{aligned}
Q_{KX} &= N_{aa}^{-1} Q_{WX} - N_{aa}^{-1} B Q_{XX} \\
&= N_{aa}^{-1} B Q_{XX} - N_{aa}^{-1} B Q_{XX} = 0, \\
Q_{K,K_i} &= N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{W_i, W_i} N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} = N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} N_{bb} N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} \\
&= N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} = N_{cc}^{-1}, \\
Q_{K,L} &= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{W_i, L} = N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} A Q, \\
Q_{K,W} &= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{W_i, W} = -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} Q_{WW} \\
&= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T, \\
Q_{K,X} &= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{W_i, X} = -N_{cc}^{-1} C Q_{XX} \\
&= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} + N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} \\
&= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} + N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} = 0, \\
Q_{K,K} &= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{W_i, W} N_{aa}^{-1} + N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} Q_{W_i, X} B^T N_{aa}^{-1} \\
&= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} + N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} \\
&= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} + N_{cc}^{-1} C Q_{XX} B^T N_{aa}^{-1} \\
&= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} + N_{cc}^{-1} C (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) B^T N_{aa}^{-1} \\
&= -N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1}, \\
Q_{VV} &= Q A^T Q_{KK} A Q, \\
Q_{VL} &= Q A^T Q_{KL} = -Q A^T Q_{KK} A Q = -Q_{VV}, \\
Q_{VW} &= Q A^T Q_{KW} = Q A^T Q_{KK} N_{aa}, \\
Q_{VX} &= Q A^T Q_{KX} = 0, \\
Q_{VK} &= Q A^T Q_{KK}, \\
Q_{V,K_i} &= Q A^T Q_{K,K_i} = -Q A^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1}, \\
Q_{LL} &= Q_{LL} + Q_{VL} + Q_{LV} + Q_{VV} = Q - Q_{VV}, \\
Q_{LL} &= Q_{LL} + Q_{VL} = Q - Q_{VV}, \\
Q_{LW} &= Q_{LW} + Q_{VW} = -Q A^T + Q A^T Q_{KK} N_{aa} \\
&= Q A^T (Q_{KK} N_{aa} - I) = Q A^T (I - N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T - I) \\
&= -Q A^T N_{aa}^{-1} B Q_{XX} B^T, \\
Q_{LX} &= Q_{LX} + Q_{VX} = -Q A^T N_{aa}^{-1} B Q_{XX}, \\
Q_{LK} &= Q_{LK} + Q_{VK} \\
&= -Q A^T Q_{KK} + Q A^T Q_{KK} = 0, \\
Q_{L,K_i} &= Q_{L,K_i} + Q_{V,K_i} \\
&= Q A^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} - Q A^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} = 0, \\
Q_{LV} &= Q_{LV} + Q_{VV} \\
&= -Q_{VV} + Q_{VV} = 0.
\end{aligned}$$

将以上推出的计算公式列于表 8-1 中，以供查阅。

以上三节已经全面介绍了附有限制条件的条件平差原理，列出了全部计算公式。其应用示例可参阅文献[11]，为节省篇幅，不再重复列出。

表 8-1

	$L$	$W$	$\hat{X}$	$K$	$K_s$	$V$	$\hat{L}$
$L$	$Q$	$Q_{WL}^T$	$Q_{XL}^T$	$Q_{KL}^T$	$Q_{K_s L}^T$	$Q_{VL}^T$	$Q_{LL}^T$
$W$	$-AQ$	$N_{aa}$	$Q_{XW}^T$	$Q_{KW}^T$	$Q_{K_s W}^T$	$Q_{VW}^T$	$Q_{LW}^T$
$\hat{X}$	$-Q_{XX}B^T$ $N_{aa}^{-1}AQ$	$Q_{XX}B^T$	$N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}$ $C^TN_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}$	$Q_{KX}^T$	$Q_{K_s X}^T$	$Q_{VX}^T$	$Q_{LX}^T$
$K$	$-Q_{KK}AQ$	$Q_{KK}N_{aa}$	0	$N_{aa}^{-1}-N_{aa}^{-1}$ $BQ_{XX}B^TN_{aa}^{-1}$	$Q_{K_s K}^T$	$Q_{VK}^T$	$Q_{LK}^T$
$K_s$	$N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}$ $B^TN_{aa}^{-1}AQ$	$-N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}B^T$	0	$-N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}$ $B^TN_{aa}^{-1}$	$N_{cc}^{-1}$	$Q_{VK_s}^T$	$Q_{LK_s}^T$
$V$	$-Q_{VV}$	$QA^TQ_{KK}N_{aa}$	0	$QAQ_{KK}$	$-QA^TN_{aa}^{-1}$ $BN_{bb}^{-1}CN_{cc}^{-1}$	$QA^TQ_{KK}$ $AQ$	$Q_{LV}^T$
$\hat{L}$	$Q-Q_{VV}$	$-QA^TN_{aa}^{-1}$ $BQ_{XX}B^T$	$-QA^TN_{aa}^{-1}BQ_{XX}$	0	0	0	$Q-Q_{VV}$

## § 8-4 各种平差方法的共性和特性

迄今为止,已经分别介绍了5种不同的平差方法。不同的平差方法都对应着形式各异的函数模型,在所有这些函数模型中,待求的未知数都是多于其方程的个数,而且它们系数矩阵的秩都是等于其增广矩阵的秩。因此,它们都是具有无穷多组解的相容方程组。为了解决解的不唯一性问题,采用了最小二乘原理。对同一个平差问题而言,无论采用何种函数模型,其最后平差结果(包括平差值及其精度)也是相同的。

各种不同的平差方法都有其各自的优点和特点,因此,我们不能断言哪一种是最好的方法。但是就实际应用来说,当前较多采用的是间接平差法和附有限制条件的间接平差法,原因在于:(1)这些方法中的误差方程,其形式统一,规律性较强,便于计算机的程序设计;(2)所选的参数往往就是平差后所需要的最后成果(包括精度),例如水准网中选待定点的高程,三角网中选待定点的坐标等等作为参数,这可以说是这两种平差方法的最大优点。但这决不是说,除了这两种方法,其他平差方法就不重要了。例如,如果只为了求得个别非观测量的平差值和精度,当然采用附有参数的条件平差法就较为合适了,其他方法也是各有特点,不再一一举例说明了。

但是必须强调指出的是,作为一个函数模型来说,其中附有限制条件的条件平差法的函数模型则有着特殊的作用。例如:

(1)当(8-2-3)<sub>a</sub>和(8-2-3)<sub>b</sub>式中的系数阵 $B=0, C=0$ 时,它就变成了条件平差法的函数模型;

(2)当(8-2-3)<sub>a</sub>和(8-2-3)<sub>b</sub>式中的系数阵 $C=0$ 时,它就变成了附有参数的条件平差的函数模型;

(3)当(8-2-3)<sub>a</sub>和(8-2-3)<sub>b</sub>式中的系数阵 $A=-I$ 和 $C=0$ 时,它就变成了间接平差法的函数模型;(常数项 $W$ 和 $l$ 实际上具有相同的意义和作用,关于这一点以后将不再说明)。



(4)当(8-2-3)<sub>a</sub>和(8-2-3)<sub>b</sub>式中的  $A = -I$  时,就变成了附有限制条件的间接平差法的函数模型。

由此可见,所有其他平差方法的函数模型都可以说是附有限制条件的条件平差法函数模型的一个特例而已。换言之,该模型概括了所有的函数模型。因此,这是将该函数模型称之为“概括平差函数模型”的由来。

既然当(8-2-3)<sub>a</sub>和(8-2-3)<sub>b</sub>式中的系数矩阵等于特定的矩阵,例如等于“ $O$ ”或“ $-I$ ”就变成了不同的函数模型,那么,由本章所导出的全部公式,自然也可应用于其他任何一种平差方法了,只要将公式中涉及到系数阵  $A$ 、 $B$ 、 $C$  处代以“ $O$ ”或“ $-I$ ”就可简化成其他方法的公式了,因此,将本章中所有的(包括求估值和精度的)公式,称之为“通用公式”。这不仅便于人们应用,而且更加深了人们对各种平差方法的理解。

## § 8-5 平差结果的统计性质

在 § 3-4 中已经说明了有关参数估计最优性质的几个判定标准,即无偏性、一致性和有效性。本节将证明:按最小二乘原理进行平差计算所求得的结果具有上述最优性质。由于其他平差方法只是概括平差模型的特例,因此对该平差模型进行证明的结论自然也适用于其他平差模型,故无需一一分别证明了。

### 一、估计量 $\hat{L}$ 和 $\hat{X}$ 均为无偏估计

要证明  $\hat{L}$  和  $\hat{X}$  具有无偏性,也就是要证明:

$$E(\hat{L}) = \tilde{L} \text{ 和 } E(\hat{X}) = \tilde{X}. \quad (8-5-1)$$

因为  $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$ ,  $\tilde{X} = X^0 + \tilde{x}$ , 故要证明  $E(\hat{X}) = \tilde{X}$ , 也就是要证明

$$E(\hat{x}) = \tilde{x}. \quad (8-5-2)$$

由(8-2-1)<sub>a</sub>及(8-2-1)<sub>b</sub>式取期望,并顾及  $E(\Delta) = 0$ ,  $\tilde{x}$  为真值  $\tilde{X}$  与  $X^0$  之差,  $X^0$  取定后,  $\tilde{x}$  即为一定值,于是得:

$$E(W) = AE(\Delta) + BE(\tilde{x}) = B\tilde{x}, \quad (8-5-3)_a$$

$$E(W_x) = CE(\tilde{x}) = C\tilde{x}. \quad (8-5-3)_b$$

对(8-2-18)式取期望,为书写方便,将其中  $W_x$  的系数写成  $Q_{xx}$ (见表 8-1),并将  $W_x$  写成  $B^T N_{aa}^{-1} W$ (见(8-2-12)<sub>b</sub>式),则有

$$\begin{aligned} E(\hat{x}) &= Q_{xx} B^T N_{aa}^{-1} E(W) + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} E(W_x) \\ &= Q_{xx} B^T N_{aa}^{-1} B\tilde{x} + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C\tilde{x} \\ &= (I - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C)\tilde{x} + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C\tilde{x} = \tilde{x}. \end{aligned} \quad (8-5-4)$$

此即(8-5-2)式中的结果。再由(8-2-19)式取期望,得:

$$E(V) = Q A^T N_{aa}^{-1} (E(W) - BE(\hat{x})) = Q A^T N_{aa}^{-1} (B\tilde{x} - B\tilde{x}) = 0. \quad (8-5-5)$$

由(8-2-20)式取期望,得:

$$E(\hat{L}) = E(L) + E(V) = E(L) = \tilde{L}. \quad (8-5-6)$$

这就证明了  $\hat{X}$  和  $\hat{L}$  是  $\tilde{X}$  和  $\tilde{L}$  的无偏估计量。

## 二、估计量 $\hat{X}$ 具有最小方差(有效性)

参数估计量的方差阵为

$$D_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{X}\hat{X}}. \quad (8-5-6)$$

$D_{\hat{X}\hat{X}}$  中对角线元素分别是各  $\hat{X}_i (i=1, 2, \dots, u)$  的方差, 要证明参数估计量方差最小, 根据迹的定义知, 也就是要证明

$$\text{tr}(D_{\hat{X}\hat{X}}) = \min \quad \text{或} \quad \text{tr}(Q_{\hat{X}\hat{X}}) = \min. \quad (8-5-7)$$

由(8-2-18)式知,  $\hat{x}$  是  $W_x (= B^T N_{aa}^{-1} W)$  和  $W_x$  的函数, 也就是条件方程和限制条件中常数项  $W$  和  $W_x$  的线性函数。现在假设有  $W$  和  $W_x$  的另一个线性函数  $\hat{x}'$ , 即设

$$\hat{x}' = H_1 W + H_2 W_x, \quad (8-5-8)$$

式中  $H_1$ 、 $H_2$  均为待定的系数阵, 问题是  $H_1$  和  $H_2$  应等于什么, 才能使  $\hat{x}'$  既是无偏而且方差最小, 即其  $\text{tr}(Q_{\hat{x}'\hat{x}'}) = \min$ 。首先要满足无偏性, 则须使

$$\begin{aligned} E(\hat{x}') &= H_1 E(W) + H_2 E(W_x) = H_1 B\bar{x} + H_2 C\bar{x} \\ &= (H_1 B + H_2 C)\bar{x} = \bar{x}. \end{aligned} \quad (8-5-9)$$

显然, 只有当

$$H_1 B + H_2 C = I \quad (8-5-10)$$

时, 则  $\hat{x}'$  是  $\bar{x}$  的无偏估计。应用协因数传播律, 由(8-5-8)式并顾及  $W_x$  为非随机量(因  $W_x = -\Phi(X^0)$ ), 得:

$$Q_{\hat{x}'\hat{x}'} = H_1 Q_{WW} H_1^T.$$

现在的问题是要求出  $H_1$  和  $H_2$ , 既能满足(8-5-10)式中的条件, 而又能使  $\text{tr}(Q_{\hat{x}'\hat{x}'}) = \min$ 。这是一个求条件极值的问题, 为此组成函数

$$\Phi = \text{tr}(H_1 Q_{WW} H_1^T) + \text{tr}(2(H_1 B + H_2 C - I)K^T),$$

其中  $K^T$  为联系数向量。为求函数  $\Phi$  极小, 须将上式对  $H_1$  和  $H_2$  求偏导数并令其为零, 得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial H_1} = 2H_1 Q_{WW} + 2KB^T = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial H_2} = 2KC^T = 0. \quad (8-5-11)$$

由表 8-1 知,  $Q_{WW} = N_{aa}$ , 故由第 1 式可解得:

$$H_1 = -KB^T N_{aa}^{-1}, \quad (8-5-12)$$

代入(8-5-10)式, 得:

$$-KB^T N_{aa}^{-1} B + H_2 C = I. \quad (8-5-13)$$

因  $B^T N_{aa}^{-1} B = N_{bb}$ , 故得

$$K = (H_2 C - I)N_{bb}^{-1}, \quad (8-5-14)$$

代入(8-5-11)的第 2 式, 则有

$$(H_2 C - I)N_{bb}^{-1} C^T = 0. \quad (8-5-15)$$

因  $CN_{bb}^{-1}C^T = N_{cc}$ , 故由上式解得:

$$H_2 = N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1}, \quad (8-5-16)$$

再将其代入(8-5-14)式, 则有

$$K = (N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1}). \quad (8-5-17)$$

于是, 由(8-5-12)式得:

$$H_1 = (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1})B^TN_{aa}^{-1}. \quad (8-5-18)$$

将(8-5-18)和(8-5-16)两式代入(8-5-8)式, 得:

$$\hat{x}' = (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1})B^TN_{aa}^{-1}W + N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}W_x. \quad (8-5-19)$$

与(8-2-18)式相比较知,  $\hat{x}' = \hat{x}$ ,  $\hat{x}'$ 是在无偏和方差最小的条件下导得的, 因此, 这说明由最小二乘估计求得的  $\hat{x}$  也是无偏估计, 且方差最小(有效性), 故  $\hat{x} = X^0 + \hat{x}$  是最优无偏估计。

### 三、估计量 $\hat{L}$ 具有最小方差

要证明  $\hat{L}$  具有最小方差, 也就是要证明:

$$\text{tr}(D_{LL}) = \min \text{ 或 } \text{tr}(Q_{LL}) = \min. \quad (8-5-20)$$

这一证明步骤类似于(二)中所述, 故在下面的证明中将不作过多的解释。

因为(见(8-2-20)和(8-2-21)两式):

$$\hat{L} = L + V = L + QA^TN_{aa}^{-1}(W - B\hat{x}). \quad (8-5-21)$$

将  $\hat{x} = Q_{xx}B^TN_{aa}^{-1}W + N_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}W_x$  代入上式, 经整理可得

$$\hat{L} = L + QA^TN_{aa}^{-1}((I - BQ_{xx}B^TN_{aa}^{-1})W - BN_{bb}^{-1}C^TN_{cc}^{-1}W_x), \quad (8-5-22)$$

即  $\hat{L}$  是  $L$ ,  $W$  和  $W_x$  的线性函数。现设有另一函数:

$$\hat{L}' = L + G_1W + G_2W_x, \quad (8-5-23)$$

其中  $G_1$ ,  $G_2$  均为待定系数。取期望, 得

$$\begin{aligned} E(\hat{L}') &= E(L) + G_1E(W) + G_2E(W_x) \\ &= \bar{L} + G_1B\bar{x} + G_2C\bar{x} = \bar{L} + (G_1B + G_2C)\bar{x}. \end{aligned}$$

故知, 若  $\hat{L}'$  为无偏估计, 则必须满足

$$(G_1B + G_2C) = 0. \quad (8-5-24)$$

按协因数传播律, 并顾及  $W_x$  为非随机量, 由(8-5-23)式得

$$Q_{LL'} = Q + Q_{LW}G_1^T + G_1Q_{WL} + G_1Q_{WW}G_1^T. \quad (8-5-25)$$

要在满足(8-5-24)式的条件下求  $\text{tr}(Q_{LL'}) = \min$ , 为此组成函数:

$$\Phi = \text{tr}(Q_{LL'}) + \text{tr}(2(G_1B + G_2C)K^T). \quad (8-5-26)$$

为使  $\Phi$  极小, 将其对  $G_1$ ,  $G_2$  求偏导数并令其为零:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial G_1} = 2Q_{LW} + 2G_1Q_{WW} + 2KB^T = 0, \quad (8-5-27)_a$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial G_2} = 2KC^T = 0. \quad (8-5-27)_b$$

由表 8-1 查得  $Q_{LW} = -QA^T$ ,  $Q_{WW} = N_{aa}$ , 由(8-5-27)<sub>a</sub> 式解得:

$$G_1 = (QA^T - KB^T)N_{aa}^{-1}, \quad (8-5-28)$$

代入(8-5-24)式, 得

$$QA^TN_{aa}^{-1}B - KB^TN_{aa}^{-1}B + G_2C = 0.$$

顾及  $B^T N_{aa}^{-1} B = N_{bb}$ , 由上式得:

$$K = Q A^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} + G_2 C N_{bb}^{-1}, \quad (8-5-29)$$

代入(8-5-27), 则有

$$Q A^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} C^T + G_2 C N_{bb}^{-1} C^T = 0.$$

因  $C N_{bb}^{-1} C^T = N_{cc}$ , 故可解得:

$$G_2 = -Q A^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1}, \quad (8-5-30)$$

代入(8-5-29)式, 得

$$K = Q A^T N_{aa}^{-1} B (N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}) = Q A^T N_{aa}^{-1} B Q_{xx}. \quad (8-5-31)$$

再代入(8-5-28)式, 得:

$$G_1 = Q A^T N_{aa}^{-1} (I - B Q_{xx} B^T N_{aa}^{-1}), \quad (8-5-32)$$

将(8-5-30)和(8-5-32)式中的  $G_1$  和  $G_2$  代入(8-5-23), 得:

$$\hat{L}' = L + Q A^T N_{aa}^{-1} ((I - B Q_{xx} B^T N_{aa}^{-1}) W - B N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} W_x). \quad (8-5-33)$$

对照(8-5-33)和(8-5-22)式知, 两者完全相同, (8-5-33)式中  $\hat{L}'$  是在无偏和方差最小的条件下求得的, 这说明由最小二乘估计求得的  $\hat{L}$  也是无偏估计, 且方差最小, 即无偏最优估计。

#### 四、单位权方差估值 $\hat{\sigma}_0^2$ 是 $\sigma_0^2$ 的无偏估计量

在以上各章中, 单位权方差的估计公式都是用  $V^T P V$  除以各自的自由度, 即

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} \quad (8-5-33)$$

自由度即为多余观测数。现在要证明:

$$E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2. \quad (8-5-34)$$

由数理统计学知, 若有服从任一分布的  $q$  维随机向量  $Y$ , 已知其数学期望为  $\eta$ , 方差阵为  $\Sigma$ , 则  $Y$  向量的任二次型的数学期望可以表达成:

$$E(Y^T B Y) = \text{tr}(B \Sigma) + \eta^T B \eta. \quad (8-5-35)$$

式中  $B$  为一  $q$  阶的对称可逆阵。

现用  $V$  向量代替上式中的  $Y$  向量, 则其中  $\eta$  应换为  $E(V)$ ,  $\Sigma$  应换成  $D_{vv}$ ,  $B$  阵可以换成权阵  $P$ , 于是有

$$E(V^T P V) = \text{tr}(P D_{vv}) + E(V)^T P E(V), \quad (8-5-36)$$

前已证明  $E(V) = 0$  (见(8-5-5)式), 而  $D_{vv} = \sigma_0^2 Q_{vv}$ , 于是有:

$$E(V^T P V) = \sigma_0^2 \text{tr}(P Q_{vv}). \quad (8-5-37)$$

由表 8-1 查得  $Q_{vv} = Q A^T Q_{xx} A Q = Q A^T (N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{xx} B^T N_{aa}^{-1}) A Q$ , 代入上式, 顾及  $P Q = I$ ,  $A Q A^T = N_{aa}$ ,  $B^T N_{aa}^{-1} B = N_{bb}$ , 则得:

$$\begin{aligned} E(V^T P V) &= \sigma_0^2 \text{tr}[P Q A^T (N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{xx} B^T N_{aa}^{-1}) A Q] \\ &= \sigma_0^2 \text{tr}[A Q A^T (N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B Q_{xx} B^T N_{aa}^{-1})] \\ &= \sigma_0^2 \text{tr}[I_c - Q_{xx} B^T N_{aa}^{-1} B] = \sigma_0^2 [c - \text{tr}(Q_{xx} N_{bb})]. \end{aligned} \quad (8-5-38)$$

再由表 8-1 查出  $Q_{xx} = N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} C N_{bb}^{-1}$ , 则有

$$\begin{aligned}\text{tr}(Q_{xx}N_{bb}) &= \text{tr}(I_u - N_{bb}^{-1}C^T N_{cc}^{-1}C) = \text{tr}(I_u) - \text{tr}(N_{cc}N_{cc}^{-1}) \\ &= u - \text{tr}(I_s) = u - s,\end{aligned}$$

代入(8-5-38)式, 则有

$$E(V^T PV) = \sigma_0^2(c - u + s) \text{ 或 } E\left(\frac{V^T PV}{c - u + s}\right) = \sigma_0^2. \quad (8-5-39)$$

由(8-3-1)式知, 上式也可写成

$$E\left(\frac{V^T PV}{r}\right) = E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2. \quad (8-5-40)$$

因此, (8-5-34)式得证。即  $\hat{\sigma}_0^2$  是  $\sigma_0^2$  的无偏估计。

上述有关无偏和方差最小的统计性质是从概括平差模型(附有限制条件的条件平差法)出发推证的, 由于其他所有平差方法都是它的特例, 其推证的上述结论必然也适用于其他任一平差方法。由此可知, 最小二乘估计具有优良的统计性质。

## 第九章 误差椭圆

### § 9-1 概 论

在控制测量中, 点的平面位置是用一对平面直角坐标来确定的。为了确定待定点的平面坐标, 通常需进行一系列观测。由于观测值总是带有随机误差, 因而根据观测值, 通过平差计算所获得的是待定点的 $\text{最或然坐标 } x, y$ 并不是待定点的真坐标值  $\tilde{x}, \tilde{y}$ 。

在图 9-1 中,  $A$  为已知点, 假设它的坐标是不带误差的数值。 $P$  为待定点的真位置,  $P'$  为由观测值通过平差所求得的最或然点位, 在待定点  $P$  的这两对坐标之间存在着误差  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 由图知

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \tilde{x} - x \\ \Delta y &= \tilde{y} - y \end{aligned} \right\} \quad (9-1-1)$$

由于  $\Delta x$  和  $\Delta y$  的存在而产生的距离  $\Delta P$  称为  $P$  点的点位真误差, 简称为真位差。由图知

$$\Delta P^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \quad (9-1-2)$$

$P$  点的最或然坐标  $x$  和  $y$  都是由同一组观测值通过平差所求得的结果。设平差后的坐标  $x, y$  与观测向量之间的线性函数关系为

$$x = a_0 + aL, \quad y = b_0 + \beta L,$$

显然, 随着观测值的不同,  $x$  和  $y$  也将取得不同的数值。换言之, 对应于不同的观测值, 将得到不同的  $x$ 、

$y$  值, 因而就出现不同的  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  和  $\Delta P$  值, 所以它们都是随机变量, 对以上两式取数学期望, 得

$$E(x) = a_0 + aE(L) = a_0 + a\tilde{L} = \tilde{x},$$

$$E(y) = b_0 + \beta E(L) = b_0 + \beta\tilde{L} = \tilde{y},$$

根据方差的定义, 并顾及(9-1-1)式, 则有

$$\sigma_x^2 = E[(E(x) - x)^2] = E[(\tilde{x} - x)^2] = E[\Delta x^2],$$

$$\sigma_y^2 = E[(E(y) - y)^2] = E[(\tilde{y} - y)^2] = E[\Delta y^2].$$

对(9-1-2)式两边取数学期望, 得

$$E(\Delta P^2) = E(\Delta x^2) + E(\Delta y^2) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2,$$

式中  $E(\Delta P^2)$  是  $P$  点真位差平方的理论平均值, 通常定义为  $P$  点的点位方差, 并记为  $\sigma_P^2$ , 于是有

$$\sigma_P^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \quad (9-1-3)$$

如果将图 9-1 中的坐标系旋转某一角度, 即以  $x'oy'$  为坐标系(图 9-2), 则  $A$ 、 $P$ 、 $P'$  各

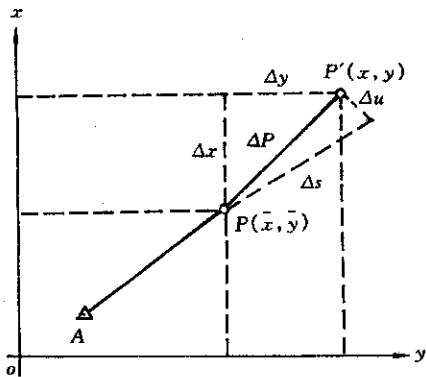


图 9-1

点的坐标分别为 $(\tilde{x}_A, \tilde{y}_A)$ ,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 和 $(x', y')$ 。虽然在新坐标系中对应的真误差 $\Delta x'$ 和 $\Delta y'$ 的大小变了,但 $\Delta P$ 的大小将不受坐标轴的变动而发生变化,此时 $\Delta P^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$ ,仿(9-1-3)式可以直接写出

$$\sigma_P^2 = \sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2 \quad (9-1-4)$$

由(9-1-3)和(9-1-4)式可见,点位方差 $\sigma_P^2$ 总是等于两个相互垂直的方向上的坐标方差 $\sigma_x^2$ 和 $\sigma_y^2$ 或 $\sigma_{x'}^2$ 和 $\sigma_{y'}^2$ 的平方和,即点位方差 $\sigma_P^2$ 的大小与坐标系的选择无关。

如果再将 $P$ 点的真位差 $\Delta P$ 投影于 $AP$ 方向和垂直于 $AP$ 的方向上,则得 $\Delta s$ 和 $\Delta u$ (图9-1),此时有

$$\Delta P^2 = \Delta s^2 + \Delta u^2,$$

仿(9-1-3)式又可以写出

$$\sigma_P^2 = \sigma_s^2 + \sigma_u^2. \quad (9-1-5)$$

式中 $\sigma_s$ 称纵向误差, $\sigma_u$ 称横向误差。通过纵横向误差来求定点位误差,这在测量工作中也是一种常用的方法。

上述的 $\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ 分别为 $P$ 点在纵横坐标 $x$ 和 $y$ 方向上的中误差,或称为 $x$ 和 $y$ 方向上的位差。同样, $\sigma_s$ 和 $\sigma_u$ 是 $P$ 点在 $AP$ 边的纵向和横向上的位差。为了衡量待定点的精度,一般是求出其点位中误差 $\sigma_P$ 。为此,可求出它在两个相互垂直方向上的中误差。例如, $\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ 或 $\sigma_s$ 和 $\sigma_u$ ,就可由(9-1-3)或(9-1-5)式计算点位中误差了。

从以上的讨论中可以看出,点位中误差 $\sigma_P$ 虽然可以用来评定待定点的点位精度,但是它却不能代表该点在某一任意方向上的位差大小。而上面提到的 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_s$ 和 $\sigma_u$ 等等,也只能代表待定点在 $x$ 和 $y$ 轴上以及在 $AP$ 边的纵向、横向上的位差。但在有些情况下,往往需要研究点位在某些特殊方向上的位差大小,此外还要了解点位在哪个方向上的位差最大,在哪个方向上的位差最小,例如,在工程放样工作中,就经常需要研究这个问题。为了便于求定待定点位在任意方向上位差的大小,一般是通过求出待定点的点位误差椭圆来实现的,通过误差椭圆可以求得待定点在任意方向上的位差,这样就可以较精确地、形象而全面地反映待定点点位在各个方向上误差的分布情况。

## § 9-2 点位误差

### 一、点位误差的计算

待定点的纵横坐标的方差是按下式计算的:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_0^2 \frac{1}{p_x} = \sigma_0^2 Q_{xx} \\ \sigma_y^2 &= \sigma_0^2 \frac{1}{p_y} = \sigma_0^2 Q_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (9-2-1)$$

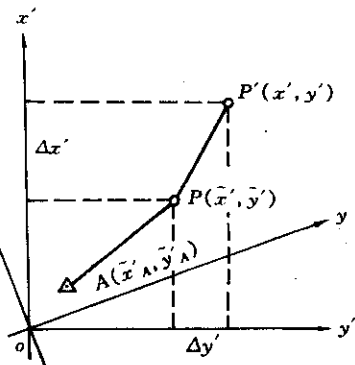


图 9-2

根据(9-1-3)式可求得点位中误差

$$\sigma_P^2 = \sigma_0^2(Q_{xx} + Q_{yy}). \quad (9-2-2)$$

关于  $Q_{xx}$ ,  $Q_{yy}$  的计算问题, 现分别按两种平差法概述如下。

当以三角网中待定点的坐标作为未知数, 按间接平差法平差时, 法方程系数阵的逆阵就是未知数的协因数阵  $Q_{xx}$ , 当平差问题中只有一个待定点时

$$Q_{xx} = (B^T P B)^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{bmatrix}, \quad (9-2-3)$$

其中主对角线元素  $Q_{xx}$ ,  $Q_{yy}$  就是待定点坐标  $x$  和  $y$  的权倒数, 而  $Q_{xy}$  或  $Q_{yx}$  则是它们的相关权倒数。相关权倒数将在后面的公式推导中用到。当平差问题中有多个待定点, 例如  $s$  个待定点时, 未知数的协因数阵为

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = (B^T P B)^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{x_1 x_1} & Q_{x_1 y_1} & \cdots & Q_{x_1 x_i} & Q_{x_1 y_i} & \cdots & Q_{x_1 x_s} & Q_{x_1 y_s} \\ Q_{y_1 x_1} & Q_{y_1 y_1} & \cdots & Q_{y_1 x_i} & Q_{y_1 y_i} & \cdots & Q_{y_1 x_s} & Q_{y_1 y_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{x_i x_1} & Q_{x_i y_1} & \cdots & Q_{x_i x_i} & Q_{x_i y_i} & \cdots & Q_{x_i x_s} & Q_{x_i y_s} \\ Q_{y_i x_1} & Q_{y_i y_1} & \cdots & Q_{y_i x_i} & Q_{y_i y_i} & \cdots & Q_{y_i x_s} & Q_{y_i y_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{x_s x_1} & Q_{x_s y_1} & \cdots & Q_{x_s x_i} & Q_{x_s y_i} & \cdots & Q_{x_s x_s} & Q_{x_s y_s} \\ Q_{y_s x_1} & Q_{y_s y_1} & \cdots & Q_{y_s x_i} & Q_{y_s y_i} & \cdots & Q_{y_s x_s} & Q_{y_s y_s} \end{bmatrix}. \quad (9-2-4)$$

待定点坐标的权倒数仍为相应的主对角线上的元素, 而相关权倒数则在相应权倒数联线的两侧。

当平面控制网按条件平差时, 待定点最或然坐标由观测值的平差值计算。故欲求其权倒数, 需按照求平差值函数的权倒数的方法进行计算。设待定点  $P$  的最或然坐标  $x, y$  的权函数式为

$$\left. \begin{aligned} dx &= f_x^T d\hat{L} \\ dy &= f_y^T d\hat{L} \end{aligned} \right\} \quad (9-2-5)$$

按协因数传播律并顾及  $\hat{L}$  的协因数阵

$$Q_{LL} = P^{-1} - P^{-1} A^T N_{aa}^{-1} A P^{-1}$$

得

$$\left. \begin{aligned} Q_{xx} &= f_x^T Q_{LL} f_x = f_x^T P^{-1} f_x - (A P^{-1} f_x)^T N_{aa}^{-1} A P^{-1} f_x \\ Q_{yy} &= f_y^T Q_{LL} f_y = f_y^T P^{-1} f_y - (A P^{-1} f_y)^T N_{aa}^{-1} A P^{-1} f_y \\ Q_{xy} &= f_x^T Q_{LL} f_y = f_x^T P^{-1} f_y - (A P^{-1} f_x)^T N_{aa}^{-1} A P^{-1} f_y \end{aligned} \right\} \quad (9-2-6)$$

将  $Q_{xx}$  和  $Q_{yy}$  代入(9-2-1)式和(9-2-2)式, 便可求出  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$  和  $\sigma_P^2$ 。但对平面控制网进行平差时, 由于子样的容量有限, 因此不论用何种方法平差, 只能求得单位权方差  $\sigma_0^2$  的估值  $\hat{\sigma}_0^2$ , 所以实用上只能得到待定点纵、横坐标的方差估值以及相应的点位方差的估值, 即

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_x^2 &= \hat{\sigma}_0^2 Q_{xx} \\ \hat{\sigma}_y^2 &= \hat{\sigma}_0^2 Q_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (9-2-7)$$

和

$$\hat{\sigma}_P^2 = \hat{\sigma}_0^2 (Q_{xx} + Q_{yy}) \quad (9-2-8)$$

本章都从方差出发来讨论问题。实用时, 只要用相应的方差估值代替方差, 便得到实



用的公式，故今后不再一一对照说明了。

## 二、任意方向 $\varphi$ 的位差

为了求定  $P$  点在某一任意方向  $\varphi$  上的位差，需先找出待定点  $P$  在  $\varphi$  方向上的真误差  $\Delta\varphi$  与纵横坐标的真误差  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  的函数关系，然后求出位差。 $P$  点在  $\varphi$  方向上的位置真误差，实际上就是  $P$  点点位真误差在  $\varphi$  方向上的投影值。如图 9-3，点位真误差  $PP'$  在  $\varphi$  方向上的投影值为  $PP''$ 。

由图 9-3 可以看出  $\Delta\varphi$  与  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  的关系为：

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \overline{PP''} + \overline{P''P'''} \\ &= \cos\varphi\Delta x + \sin\varphi\Delta y,\end{aligned}$$

根据协因数传播律得

$Q_{\varphi\varphi} = Q_{xx}\cos^2\varphi + Q_{yy}\sin^2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi$ ， $Q_{\varphi\varphi}$  即为求方向  $\varphi$  的位差时的权倒数。类似于 (9-2-1) 式，若以  $Q_{\varphi\varphi}$  乘以单位权方差  $\sigma_0^2$ ，即得

$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_0^2 Q_{\varphi\varphi} = \sigma_0^2 (Q_{xx}\cos^2\varphi + Q_{yy}\sin^2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi), \quad (9-2-9)$$

此式即为  $P$  点在给定方向  $\varphi$  上的位差计算式。式中单位权方差为常量， $\sigma_\varphi^2$  的大小取决于  $Q_{\varphi\varphi}$ ，而  $Q_{\varphi\varphi}$  是  $\varphi$  的函数。

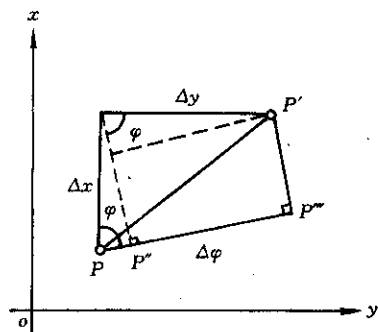


图 9-3

## 三、位差的极大值 $E$ 和极小值 $F$

当方向  $\varphi$  取图 9-2 中的  $x$ 、 $y$ 、 $x'$ 、 $y'$  或  $AP$  方向以及垂直于  $AP$  的方向时，相应方向上的位差权倒数为  $Q_{xx}$ 、 $Q_{yy}$ 、 $Q_{x'x'}$ 、 $Q_{y'y'}$  和  $Q_{ss}$ 、 $Q_{nn}$ 。在众多的位差权倒数中，必有一对权倒数取得极大值和极小值，分别设为  $Q_{EE}$  和  $Q_{FF}$ 。为求  $Q_{EE}$  和  $Q_{FF}$ ，可利用协方差阵 (9-2-3)，因为  $Q_{EE}$  和  $Q_{FF}$  就是这个协方差阵特征值的两个根。 $Q_{xx}$  的特征方程为：

$$|Q_{xx} - \lambda I| = \begin{vmatrix} Q_{xx} - \lambda & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (9-2-10)$$

展开得

$$\begin{aligned}(Q_{xx} - \lambda)(Q_{yy} - \lambda) - Q_{xy}^2 &= 0, \\ \lambda^2 - (Q_{xx} + Q_{yy})\lambda + (Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2) &= 0,\end{aligned}$$

解之，则有

$$\lambda = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2},$$

即得

$$\lambda_1 = Q_{EE} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + K), \quad (9-2-11)$$

$$\lambda_2 = Q_{FF} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} - K). \quad (9-2-12)$$

式中

$$K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}. \quad (9-2-13)$$

将  $Q_{EE}$ ,  $Q_{FF}$  乘上单位权方差就可求出  $P$  点位差的极大值  $E$  和极小值  $F$ , 计算式为

$$E^2 = \sigma_0^2 Q_{EE} = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} + K), \quad (9-2-14)$$

$$F^2 = \sigma_0^2 Q_{FF} = \frac{\sigma_0^2}{2} (Q_{xx} + Q_{yy} - K), \quad (9-2-15)$$

或

$$E = \sigma_0 \sqrt{Q_{EE}}, \quad (9-2-16)$$

$$F = \sigma_0 \sqrt{Q_{FF}}. \quad (9-2-17)$$

将(9-2-14)、(9-2-15)两式求和, 并顾及(9-2-11)和(9-2-12)式, 得

$$E^2 + F^2 = \sigma_0^2 (Q_{xx} + Q_{yy}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \sigma_P^2. \quad (9-2-18)$$

再顾及关系式(9-1-4)和(9-1-5)可知, 在  $P$  点上任意两个相互垂直方向位差的平方和均相等, 而且等于  $P$  点的点位方差。

$Q_{EE}$  和  $Q_{FF}$  分别表示  $P$  点在方向  $\varphi_E$  和  $\varphi_F$  上位差的权倒数, 在  $\varphi_E$  方向上的位差具有极大值和在  $\varphi_F$  方向上的位差具有极小值。为此, 要导出计算  $\varphi_E$  和  $\varphi_F$  值的公式。

实际上,  $\varphi_E$ 、 $\varphi_F$  分别是  $Q_{XX}$  的特征值  $\lambda_1 = Q_{EE}$ 、 $\lambda_2 = Q_{FF}$  对应的特征向量的方位角。作  $Q_{XX}$  的特征向量方程

$$(Q_{XX} - \lambda I)X = 0, \quad (9-2-19)$$

$X$  为与  $\lambda$  对应的特征向量, 设  $X = (x \ y)^T$ , 分量  $x$  和  $y$  为纵、横坐标上的单位长度。将  $\lambda = \lambda_1 = Q_{EE}$  代入, 得

$$\begin{bmatrix} Q_{xx} - Q_{EE} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} - Q_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

或

$$(Q_{xx} - Q_{EE})x + Q_{xy}y = 0,$$

$$Q_{xy}x + (Q_{yy} - Q_{EE})y = 0,$$

由此, 可解得具有位差极大值的方向  $\varphi_E$  为

$$\operatorname{tg} \varphi_E = \frac{y}{x} = \frac{Q_{EE} - Q_{xx}}{Q_{xy}} = \frac{Q_{xy}}{Q_{EE} - Q_{yy}}, \quad (9-2-20)$$

后两个等式可用作互相检核。

类似地, 将  $\lambda = \lambda_2 = Q_{FF}$  代入(9-2-19)式, 得

$$(Q_{xx} - Q_{FF})x + Q_{xy}y = 0,$$

$$Q_{xy}x + (Q_{yy} - Q_{FF})y = 0,$$

可得具有位差极小值的方向  $\varphi_F$  为

$$\operatorname{tg} \varphi_F = \frac{y}{x} = \frac{Q_{FF} - Q_{xx}}{Q_{xy}} = \frac{Q_{xy}}{Q_{FF} - Q_{yy}}, \quad (9-2-21)$$

$\varphi_E$  和  $\varphi_F$  两方向之差为  $90^\circ$ 。

此外, 还可由(9-2-20)式求得

$$\operatorname{tg} 2\varphi_E = \frac{2\operatorname{tg}\varphi_E}{1-\operatorname{tg}^2\varphi_E} = \frac{\frac{2Q_{xy}}{Q_{EE}-Q_{yy}}}{1-\frac{Q_{xy}}{Q_{EE}-Q_{yy}} \cdot \frac{Q_{EE}-Q_{xx}}{Q_{xy}}},$$

化简得

$$\operatorname{tg} 2\varphi_E = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx}-Q_{yy}}.$$

如果由(9-2-21)式类似地推导, 也可得

$$\operatorname{tg} 2\varphi_F = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx}-Q_{yy}}.$$

合并上两式, 记为

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx}-Q_{yy}} \quad (9-2-22)$$

由此式也可求极值方向  $\varphi_0$ .  $\varphi_0$  有两个根, 一个是极大值方向  $\varphi_E$ , 另一个是极小值方向  $\varphi_F$ .

例[9-1] 已知某平面控制网中待定点  $P$  的协因数为

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 1.236 & -0.314 \\ -0.314 & 1.192 \end{bmatrix}$$

其单位为  $\left(\frac{\text{dm}}{\text{秒}}\right)^2$ , 并求得  $\hat{\sigma}_0 = 1''$ , 试求  $E$ 、 $F$  和  $\varphi_E$  之值。

$$\text{解: } K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} = 0.6295$$

$$Q_{EE} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} + K) = 1.528$$

$$Q_{FF} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy} - K) = 0.899$$

$$\hat{E} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{EE}} = 1.24 \text{ dm}$$

$$\hat{F} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{FF}} = 0.95 \text{ dm}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_E = \frac{Q_{EE} - Q_{xx}}{Q_{xy}} = -0.932$$

$$\varphi_E = 137^\circ \text{ 或 } \varphi_E = 317^\circ$$

$$\operatorname{tg} \varphi_F = \frac{Q_{FF} - Q_{xx}}{Q_{xy}} = 1.073$$

$$\varphi_F = 47^\circ \text{ 或 } \varphi_F = 227^\circ$$

#### 四、以极值 $E$ 、 $F$ 表示任意方向 $\psi$ 上的位差

由(9-2-9)式计算任意方向  $\varphi$  上的位差时,  $\varphi$  是从纵坐标轴  $x$  顺时针方向起算的。现导出用  $E$ 、 $F$  表示并以  $E$  轴(即方向  $\varphi_E$  轴)为起算的任意方向上的位差, 这个任意方向用  $\psi$  表示(图 9-4)。



图可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_P} &= \overline{Pa} \\ \sigma_{y_P} &= \overline{Pb} \\ \sigma_{\varphi_E} &= \overline{Pc} = E \\ \sigma_{\varphi_F} &= \overline{Pd} = F \end{aligned} \right\}, \quad (9-3-1)$$

由图还可找到坐标平差值函数的中误差。例如要求平差后方位角  $\alpha_{PA}$  的中误差  $\sigma_{\alpha_{PA}}$ ，则可先从图中量出垂直于  $PA$  方向上的位差  $\overline{Pg}$ ，这就是  $\overline{PA}$  边的横向误差，于是由下式可求得

$$\sigma''_{\alpha_{PA}} = \rho'' \frac{\overline{Pg}}{S_{PA}}. \quad (9-3-2)$$

其中  $S_{PA}$  为  $PA$  的距离。又例如求  $PB$  边边长的中误差为

$$\sigma''_{S_{PB}} = \overline{Pe}. \quad (9-3-3)$$

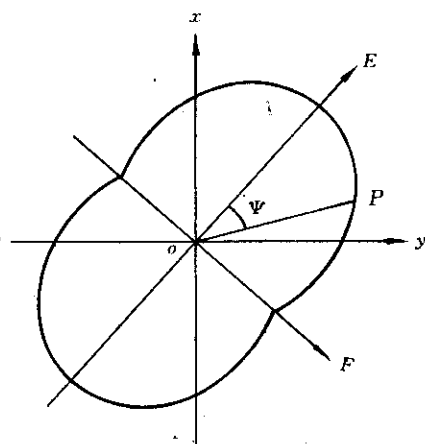


图 9-5

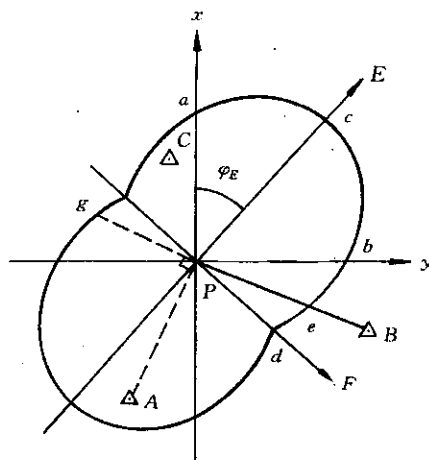


图 9-6

## § 9-4 误差椭圆

点位误差曲线不是一种典型曲线，作图也不方便，因此降低了它的实用价值。但其形状与以  $E$ 、 $F$  为长短半轴的椭圆很相似(如图 9-7 所示)，此椭圆称点位误差椭圆， $\varphi_E$ 、 $E$ 、 $F$  称为点位误差椭圆的参数。故实用上常以点位误差椭圆代替点位误差曲线。在点位误差椭圆上可以图解出任意方向  $\Psi$  的位差  $\sigma_\Psi$ 。其方法是：自椭圆作  $\Psi$  方向的正交切线  $PD$ ， $P$  为切点， $D$  为垂点，则  $\sigma_\Psi = \overline{OD}$ 。下面证明此结论。

图 9-8 中，粗虚线表示误差曲线，大圆弧  $\widehat{EE'}$  的半径是  $E$ ，小圆弧  $\widehat{FF'}$  的半径是  $F$ ，图中，作一以  $OE$  为起始方向的角度  $\tau$  的向径，交大圆于  $P'$ ，交小圆于  $P''$ ，过  $P'$  作  $y$  轴的平行线交  $x$  轴于  $a$  点。过  $P''$  作  $x$  轴的平行线交  $y$  轴于  $b$  点，两平行线的交点  $P$ ，正好是椭圆上的一点。这是因为，



而其中

$$x_1 = E \cos \tau_1, \quad y_1 = F \sin \tau_1,$$

所以  $\overline{oD}$  可写成:

$$\overline{oD} = E \cos \tau_1 \cos \Psi + F \sin \tau_1 \sin \Psi,$$

两边平方, 得

$$\begin{aligned} oD^2 &= E^2 \cos^2 \tau_1 \cos^2 \Psi + F^2 \sin^2 \tau_1 \sin^2 \Psi + 2EF \cos \tau_1 \cos \Psi \sin \tau_1 \sin \Psi \\ &= E^2 \cos^2 \Psi (1 - \sin^2 \tau_1) + F^2 \sin^2 \Psi (1 - \cos^2 \tau_1) \\ &\quad + 2EF \cos \tau_1 \cos \Psi \sin \tau_1 \sin \Psi \\ &= E^2 \cos^2 \Psi + F^2 \sin^2 \Psi - (E^2 \cos^2 \Psi \sin^2 \tau_1 + F^2 \sin^2 \Psi \cos^2 \tau_1 \\ &\quad - 2EF \cos \tau_1 \cos \Psi \sin \tau_1 \sin \Psi), \end{aligned}$$

或

$$\overline{oD^2} = E^2 \cos^2 \Psi + F^2 \sin^2 \Psi - (E \cos \Psi \sin \tau_1 - F \cos \tau_1 \sin \Psi)^2. \quad (9-4-2)$$

上式末项为零, 即

$$E \cos \Psi \sin \tau_1 - F \cos \tau_1 \sin \Psi = 0.$$

现证明上式成立。由图 9-9 可知,  $\overline{P_1D}$  的斜率为

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_1 = -\operatorname{ctg} \Psi,$$

因为

$$x_1 = E \cos \tau_1, \quad y_1 = F \sin \tau_1,$$

所以

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_1 = \left( \frac{dy_1}{d\tau_1} \right) \left( \frac{d\tau_1}{dx_1} \right) = -\frac{F \cos \tau_1}{E \sin \tau_1} = -\operatorname{ctg} \Psi,$$

亦即

$$F \cos \tau_1 \sin \Psi = E \cos \Psi \sin \tau_1,$$

所以(9-4-2)式成为

$$\overline{oD^2} = E^2 \cos^2 \Psi + F^2 \sin^2 \Psi,$$

由(9-2-30)式知

$$\overline{oD^2} = \sigma_{\Psi}^2.$$

这就证明了利用点位误差椭圆求某点位在任意方向  $\Psi$  的位差  $\hat{\sigma}_{\Psi}$  时, 只要在垂直于该方向上作椭圆的切线, 则垂足与原点的连线长度就是  $\Psi$  方向上的位差  $\hat{\sigma}_{\Psi}$ 。

最后指出, 在以上的讨论中, 都是以一个待定点为例, 说明了如何确定该点点位误差椭圆或点位误差曲线的问题。如果网中有多个待定点, 也可以利用上述相同的方法, 为每一个待定点确定一个点位误差椭圆或点位误差曲线。

若平差时是采用间接平差法, 设有  $s$  个待定点, 则有  $2s$  个坐标未知数, 其相应的协因数阵为(9-2-4)式。为了计算第  $i$  点点位误差椭圆的元素, 则须用到  $Q_{x_i x_i}$ 、 $Q_{y_i y_i}$  和  $Q_{x_i y_i}$ , 并按 § 9-2 中所述的方法, 由(9-2-20)、(9-2-16)和(9-2-17)式算出  $\varphi_{xi}$ 、 $E_i$ 、 $F_i$ , 然后, 作出该点的点位误差椭圆。

若平差时是采用条件平差法, 则应列出第  $i$  点的坐标  $x_i$  和  $y_i (i=1, 2, \dots, s)$  的权函数式, 并按 § 9-2 中的 9-2-6 式求出相应的协因数, 以后的计算就和间接平差时相一致了。

此外还须指出, 在 § 9-3 中曾说明, 如何利用点位误差曲线从图上量出已知点与待定点之间的边长中误差, 以及与该边相垂直的横向误差, 从而求出方位角误差。如果网中有多个待定点时, 则可作出多个点位误差曲线, 此时, 也可利用这些点位误差曲线, 确定已知点与任一待定点之间的边长中误差或方位角中误差, 但不能确定待定点与待定点之间的边长中误差或方位角中误差, 这是因为这些待定点的坐标是相关的。

## § 9-5 相对误差椭圆

在平面控制网中, 有时不需要研究点位相对于起始点的精度, 而需要了解任意两个待定点之间相对位置的精度情况。

根据前几节中所讲的方法, 可以给每一个待定点作出一个点位误差曲线, 利用这些曲线图求所需要的某些量的中误差。但是在前一节中已经指出, 不能用这些点位误差曲线来确定待定点与待定点之间的某些精度指标。为了确定任意两个待定点之间相对位置的精度, 就需要进一步作出两待定点之间的相对误差椭圆。

设两个待定点为  $P_i$  及  $P_k$ , 这两点的相对位置可通过其坐标差来表示, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{ik} &= x_k - x_i \\ \Delta y_{ik} &= y_k - y_i \end{aligned} \right\} \quad (9-5-1)$$

根据协因数传播律可得

$$\left. \begin{aligned} Q_{\Delta x \Delta x} &= Q_{x_k x_k} + Q_{x_i x_i} - 2Q_{x_k x_i} \\ Q_{\Delta y \Delta y} &= Q_{y_k y_k} + Q_{y_i y_i} - 2Q_{y_k y_i} \\ Q_{\Delta x \Delta y} &= Q_{x_k y_k} - Q_{x_k y_i} - Q_{x_i y_k} + Q_{x_i y_i} \end{aligned} \right\} \quad (9-5-2)$$

从(9-5-1)式可以看出, 如果  $P_i$  和  $P_k$  两点中有一个点(例如  $P_i$  点)为不带误差的已知点, 则从(9-5-2)式可以看出,  $Q_{\Delta x \Delta x} = Q_{x_k x_k}$ ,  $Q_{\Delta y \Delta y} = Q_{y_k y_k}$ ,  $Q_{\Delta x \Delta y} = Q_{x_k y_k}$ 。因此, 两点之间坐标差的协因数就等于待定点坐标的协因数。而在前几节中, 所有的讨论都是以此为基础的。由此可见, 这样作出的点位误差曲线都是待定点相对于已知点而言的。

利用这些协因数, 根据(9-2-16)、(9-2-17)、(9-2-20)式就可得到计算  $P_i$  与  $P_k$  点间相对误差椭圆的三个参数的方式:

$$\left. \begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 \{ Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} + \sqrt{(Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x \Delta y}^2} \} \\ F^2 &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 \{ Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} - \sqrt{(Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x \Delta y}^2} \} \\ \operatorname{tg} \varphi_E &= \frac{Q_{EE} - Q_{xx}}{Q_{xy}} = \frac{Q_{xy}}{Q_{EE} - Q_{yy}} \end{aligned} \right\} \quad (9-5-3)$$

下面通过例题来说明相对误差椭圆参数的计算及相对误差椭圆的绘制。

例[9-3] 在某三角网中插入  $P_1$  及  $P_2$  两个新点。设用间接平差法平差该网。新点坐标



近似值的改正数为  $\delta x_1$ 、 $\delta y_1$ 、 $\delta x_2$  及  $\delta y_2$  (以分米为单位)。其法方程如下。试求  $P_1$ 、 $P_2$  点的点位误差椭圆以及  $P_1$  与  $P_2$  点间的相对误差椭圆。

$$\left. \begin{aligned} 906.91\delta x_1 + 107.07\delta y_1 - 426.42\delta x_2 - 172.17\delta y_2 - 94.23 &= 0 \\ 107.07\delta x_1 + 486.22\delta y_1 - 177.64\delta x_2 - 142.65\delta y_2 + 41.40 &= 0 \\ -426.42\delta x_1 - 177.64\delta y_1 + 716.39\delta x_2 + 60.25\delta y_2 + 52.78 &= 0 \\ -172.17\delta x_1 - 142.65\delta y_1 + 60.25\delta x_2 + 444.60\delta y_2 + 1.06 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解: 经平差计算, 得单位权中误差为  $\sigma_0 = \pm 0.8''$ 。令  $N_{ss}$  表示法方程式系数, 则参数的协因数为

$$Q_{xx} = N_{ss}^{-1} = \begin{bmatrix} +0.0016 & +0.0002 & +0.0010 & +0.0005 \\ +0.0002 & +0.0024 & +0.0006 & +0.0008 \\ +0.0010 & +0.0006 & +0.0021 & +0.0003 \\ +0.0005 & +0.0008 & +0.0003 & +0.0027 \end{bmatrix}$$

(1)  $P_1$  点的误差椭圆参数的计算。

按(9-2-14)、(9-2-15)式得

$$E_{P_1}^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \left\{ (Q_{x_1x_1} + Q_{y_1y_1}) + \sqrt{(Q_{x_1x_1} - Q_{y_1y_1})^2 + 4Q_{x_1y_1}^2} \right\} = 0.00157$$

$$F_{P_1}^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \left\{ (Q_{x_1x_1} + Q_{y_1y_1}) - \sqrt{(Q_{x_1x_1} - Q_{y_1y_1})^2 + 4Q_{x_1y_1}^2} \right\} = 0.00099$$

则

$$E_{P_1} = 0.040\text{dm}, \quad F_{P_1} = 0.032\text{dm}.$$

按(9-2-20)式得

$$\text{tg}\varphi_{E_1} = 4.25, \quad \varphi_{E_1} = 76^\circ 45'.$$

(2)  $P_2$  点误差椭圆参数的计算。

同(1)算法, 得

$$E_{P_2} = 0.042\text{dm}, \quad F_{P_2} = 0.036\text{dm}.$$

$$\varphi_{E_2} = 67^\circ 30'.$$

(3)  $P_1$  与  $P_2$  点间相对误差椭圆参数的计算。

按(9-5-2)式求得

$$Q_{\Delta x \Delta x} = 0.0017, \quad Q_{\Delta y \Delta y} = 0.0035,$$

$$Q_{\Delta x \Delta y} = -0.0006.$$

按(9-5-3)式得

$$E_{P_1P_2}^2 = 0.0024, \quad F_{P_1P_2} = 0.049\text{dm}.$$

同理

$$F_{P_1P_2} = 0.031\text{dm}.$$

相对误差椭圆的  $E$  轴方向为

$$\varphi_{E_{P_1P_2}} = 106^\circ 50'.$$

根据以上数据即可绘出  $P_1$  点、 $P_2$  点的点位误差椭圆以及  $P_1P_2$  点间的相对误差椭圆, 相对误差椭圆一般是画在有关两点连线的中间部分。图 9-10 中以  $O$  点为中心的椭圆即为相

对误差椭圆。

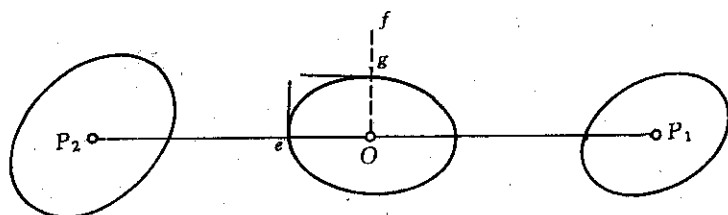


图 9-10

有了  $P_1$ 、 $P_2$  点的相对误差椭圆，就可以按上节所述的方法，用图解法量取所需要的任意方向上的位差大小。例如，要确定  $P_1$ 、 $P_2$  点间的边长  $S_{P_1P_2}$  的中误差，则可作  $P_1P_2$  的垂线，并使垂线与相对误差椭圆相切，则垂足  $e$  至中心  $O$  的长度  $Oe$  即为  $\sigma_{P_1P_2}$ 。同样，也可以量出与  $P_1P_2$  连线相垂直方向  $Of$  上的垂足  $g$ ，则  $Og$  就是  $P_1P_2$  边的横向位差，进而可以求出  $P_1P_2$  边的方位角误差。

以上各节介绍了点位误差椭圆和两点间相对误差椭圆的作法和用途，在测量工作中，特别是在对精度要求较高的工程测量中，往往利用点位误差椭圆对布网方案进行精度分析。因为在确定点位误差椭圆的三个元素  $\varphi_e$ 、 $E$  和  $F$  时，除了单位权中误差  $\sigma_0$  外，只需要知道各个协因数  $Q_{ij}$  的大小。而协因数阵  $Q_{xx}$  是相应平差问题的法方程式系数的逆阵，即  $Q_{xx} = (B^T P B)^{-1}$ 。当在适当的比例尺的地形图上设计了三角网的点位以后，可以从图上量取各边边长和方位角的概略值，根据这些可以算出误差方程的系数，而观测值的权则可根据需要事先加以确定。因此，可以求出该网的协因数阵  $Q_{xx}$ ；另一方面，根据设计中所拟定的观测仪器来确定单位权中误差  $\sigma_0$  的大小，这样就可以估算出  $\varphi_e$ 、 $E$  和  $F$  等数值了。如果估算的结果符合工程建设对控制网所提出的精度要求，则可认为该设计方案是可采用的。否则，可改变设计方案，重新估算，以达到预期的精度要求。有时也可以通过对不同设计方案的精度，同时考虑到各种因素，例如，建网的经费开支，施测工期的长短，布网的难易程度等等，在满足精度要求的前提下，从中选择最优的布网方案。

## § 9-6 点位落入误差椭圆内的概率

平面控制点的点位是通过一组观测值而求得的，由于观测值总是带有随机误差，求得的点位通常不是其真位置。随着观测值取值的不同，实际求得的点将是分布于待定点真位置周围的一组平面上的随机点。

观测误差一般是服从正态分布的，在其影响下而得到的这组平面上的随机点，其分布就是二维正态分布。二维正态分布的联合分布密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}, \quad (9-6-1)$$

式中  $\mu_x$ 、 $\mu_y$  是待定点纵、横坐标的数学期望，而  $\rho$  是随机向量  $x$  与  $y$  的相关系数，即

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

式中， $\sigma_x$  与  $\sigma_y$  为  $x$  与  $y$  的中误差， $\sigma_{xy}$  为  $x$  与  $y$  的协方差。

在几何上，可以把函数  $f(x, y)$  描绘成某一曲面（如图 9-11），并称此曲面为分布曲面，它的形状如山岗，在点  $(\mu_x, \mu_y)$  上达到最高峰。

用平行于  $f(x, y)$  轴的平面截分布曲面，得到类似于正态分布的曲线。用平行于平面  $xOy$  的平面截该分布曲面，将截线投影到平面  $xOy$  上，得到一族同心的椭圆，这些椭圆的中心是  $(\mu_x, \mu_y)$ ，它们的方程为

$$\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} = \lambda^2. \quad (9-6-2)$$

式中  $\lambda^2$  为一常数。在同一椭圆上的所有点，其分布密度  $f(x, y)$  是相同的，因此这些椭圆称为等密度椭圆。当分布密度  $f(x, y)$  为不同常数时，这族同心椭圆反映了待定点点位分布情况。因此，也称为误差椭圆。

为了讨论时的方便，可以简化(9-6-2)式，即将坐标原点移到椭圆中心  $(\mu_x, \mu_y)$  上，则(9-6-2)式成为

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{xy}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = \lambda^2. \quad (9-6-3)$$

上式可改写成

$$\sigma_y^2 x^2 - 2\rho \sigma_x \sigma_y xy + \sigma_x^2 y^2 = \lambda^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2. \quad (9-6-4)$$

由解析几何知，当有方程  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = R^2$  时，为了消去方程中的  $Bxy$  项，使其变成标准化形式，则须将坐标系旋转一  $\theta$  角，该  $\theta$  角应由下式确定：

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C},$$

将(9-6-4)式中的系数代入，则有

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-2\rho \sigma_x \sigma_y}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2} = \frac{2\rho \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2},$$

顾及  $\rho \sigma_x \sigma_y = \sigma_{xy}$ ，且  $\sigma_{xy} = \sigma_0^2 Q_{xy}$ ，同时  $\sigma_x^2 = \sigma_0^2 Q_{xx}$ ， $\sigma_y^2 = \sigma_0^2 Q_{yy}$ ，则上式可以写成

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}.$$

由此可见，这里的旋转角  $\theta$  实际上就是(9-2-22)式中确定的  $\varphi_0$  角，而  $\varphi_0$  角是  $\sigma_r$  取得极大值或极小值的方向，换句话说，只要坐标轴与  $E$ 、 $F$  方向相重合，则(9-6-4)式就可变成标准化形式。此时，(9-6-4)式中第二项前的系数  $-2\rho \sigma_x \sigma_y = 0$ ，由于  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  不为零，所以  $\rho = 0$ ，并且式中的  $\sigma_x^2$  和  $\sigma_y^2$  可以分别换写成  $E^2$  和  $F^2$ 。现令  $\lambda = k$ ，则(9-6-4)式即可写成

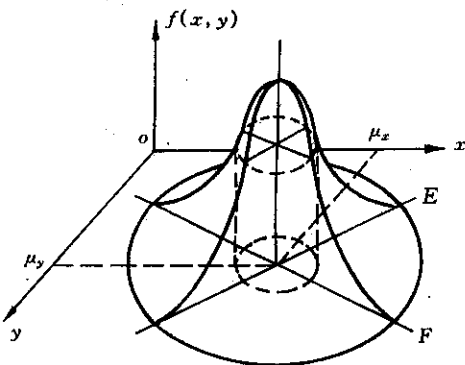


图 9-11

$$\frac{x^2}{E^2} + \frac{y^2}{F^2} = k^2 \quad (9-6-5)$$

当  $k$  取不同的值时, 就得到一族同心的误差椭圆, 并记作  $B_k$ 。当  $k=1$  时的误差椭圆称为标准误差椭圆。

经过上述简化后, 二维正态分布的密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi EF} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{E^2} + \frac{y^2}{F^2} \right) \right\}.$$

现在讨论待定点落入误差椭圆  $B_k$  (记作  $(x, y) \in B_k$ ) 内的概率, 即

$$\begin{aligned} P((x, y) \in B_k) &= \iint_{B_k} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{B_k} \frac{1}{2\pi EF} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{E^2} + \frac{y^2}{F^2} \right) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

在上面的积分式中作变量代换, 令

$$u = \frac{x}{\sqrt{2} E}, \quad v = \frac{y}{\sqrt{2} F},$$

代入(9-6-4)式, 得

$$u^2 + v^2 = \frac{k^2}{2},$$

上式是以半径为  $\frac{k}{\sqrt{2}}$  的圆  $C_k$  的方程, 待定点落入椭圆  $B_k$  内的概率就相当于落入圆  $C_k$  内的概率, 因而有

$$P((x, y) \in B_k) = \frac{1}{\pi} \iint_{C_k} e^{-u^2 - v^2} du dv, \quad (9-6-6)$$

现今

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta,$$

以此两式代入(9-6-6)式, 就把(9-6-6)式由平面直角坐标变换为极坐标表达式了, 即

$$\begin{aligned} P((x, y) \in B_k) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2}}} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2}}} r e^{-r^2} dr = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}. \end{aligned} \quad (9-6-7)$$

给予  $k$  不同的值, 就得到表 9-1 内相应的概率  $P$ 。

表 9-1

$k$	$P$	$k$	$P$
0	0	2.5	0.9561
0.5	0.1175	3.0	0.9889
1.0	0.3935	3.5	0.9978
1.5	0.6752	4.0	0.9996
2.0	0.8647	4.5	0.99996

将  $k=1, 2, 3$  及  $4$  的四个相应的椭圆表示在图 9-12 中，每一椭圆上注明在该椭圆内出现待定点的概率，椭圆之间所标明的数字是表示待定点出现在两椭圆之间的概率。由图可以看出，点出现在  $k=1, 2$  两椭圆之间的概率为最大，约为 47%。而点出现在  $k=3$  的椭圆以外的概率很小，约为 1%，即  $k=3$  的椭圆实际上可视为最大的误差椭圆。

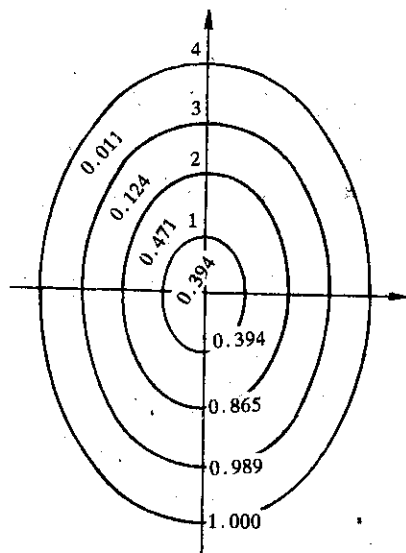


图 9-12

## 第十章 误差分布与平差参数的统计假设检验

以上各章所涉及的平差模型,均假定观测误差纯属偶然误差,观测误差这一随机变量服从正态分布,其数学期望为零,即  $E(\Delta)=0$ 。平差中的定权,是假定先验方差  $D(\Delta)=\sigma_0^2$ 、 $Q=\sigma_0^2 P^{-1}$  为已知。在这种假设前提下,按最小二乘原理求出平差参数的最优无偏估计以及精度评定。为了保证一个平差问题得到正确的结果,必须对上述假定或者说对误差分布与平差参数的正确性进行检验。由于采用的检验方法是基于数理统计学的,故本章阐述误差分布与平差参数的统计假设检验方法。

### § 10-1 统计假设检验概述

统计假设检验所解决的问题,就是根据子样的信息,通过检验来判断母体分布是否具有指定的特征。例如,母体的数学期望  $\mu$  是否等于某已知的数值  $\mu_0$ ,母体的方差  $\sigma^2$  是否等于某已知的数值  $\sigma_0^2$ ,两个(或多个)母体的数学期望或方差是否相等,即检验  $\mu_1=\mu_2, \sigma_1^2=\sigma_2^2$  等等。解决这类问题就需要进行统计假设检验。

举例来说,如果从正态母体  $N(\mu, \sigma^2)$  中抽取容量为  $n$  的子样,设母体方差  $\sigma^2$  为已知,计算子样平均值  $\bar{x}$ ,其数学期望仍为  $\mu$ ,方差  $\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$ ,那么标准化随机变量为

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

上述统计量的  $100(1-\alpha)\%$  置信区间可由下式确定:

$$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha. \quad (10-1-1)$$

式中子样均值  $\bar{x}$  可由子样观测值计算而得,  $\sigma$  是假定为已知的,  $n$  为子样的容量,它也是已知的,而区间的上下限  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  则是根据给定的  $1-\alpha$  从正态分布表中查得的数值,换句话说,只要给定了  $1-\alpha$  的大小,  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  也是一个确定的数值。

如果现在提出问题:上述母体均值  $\mu$  是否等于某一个数值  $\mu_0$ ? 为了对这一问题作出肯定或否定的回答,不妨先作一个假设,即假设  $\mu=\mu_0$ 。为了检验这一假设是否成立,只要将 (10-1-1) 式中的  $\mu$  代以假设的数值  $\mu_0$ ,从而算出  $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  的数值,如果这时能使下式成立:

$$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha. \quad (10-1-2)$$

那么,就表示  $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  是落在以  $-z_{\frac{\alpha}{2}}$  和  $+z_{\frac{\alpha}{2}}$  为界限的范围之内(见图 10-1)。在这种情况下,人们就没有理由否定原来所作的  $\mu=\mu_0$  的假设,换言之,就得接受原假设,即承认原假设是正确的。通常把区间  $(-z_{\frac{\alpha}{2}}, +z_{\frac{\alpha}{2}})$  称之为接受域。反之,如果计算的结果,  $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  竟然 >

$+z_{\frac{\alpha}{2}}$  或者  $< -z_{\frac{\alpha}{2}}$ , 这就表示概率很小 ( $=\alpha$ ) 的事件居然发生了。根据小概率事件在一次实验中实际上不可能出现的原理, 就有足够的理由否定原来所作的  $\mu=\mu_0$  的假设, 换言之, 即应拒绝  $\mu=\mu_0$  的原假设, 而应认为  $\mu\neq\mu_0$ 。通常把区间  $(-z_{\frac{\alpha}{2}}, +z_{\frac{\alpha}{2}})$  以外的范围称之为拒绝域。

以上所述是举例说明统计假设检验的基本思想。

(10-1-2)式可改写成如下形式:

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha. \quad (10-1-3)$$

或

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha. \quad (10-1-4)$$

就是说, 当统计量  $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  的绝对值大于  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  时, 则表示小概率事件出现了, 因而就应拒绝原假设, 否则, 接受原假设。

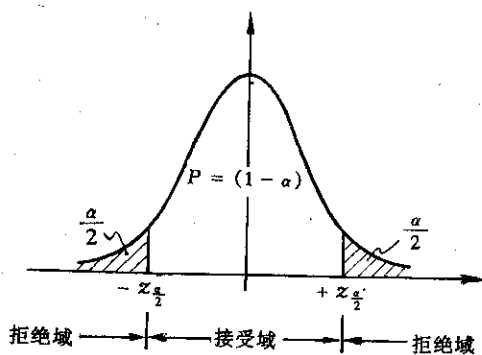


图 10-1

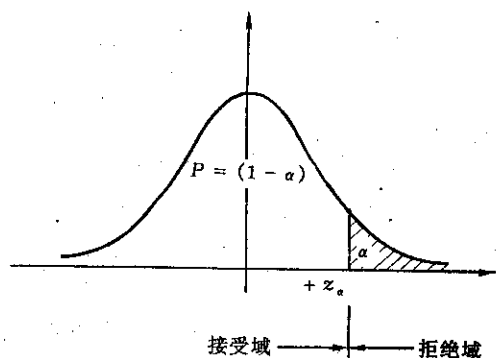


图 10-2

由以上所述可见, 当需要根据子样的信息来判断母体分布是否具有指定的特征时, 总是先作一个假设, 称为原假设 (或零假设), 记为  $H_0$  (例如  $H_0: \mu=\mu_0$ )。然后, 找一个适当的且其分布为已知的统计量, 从而确定该统计量经常出现的区间, 使统计量落入此区间的概率接近于 1。如果由抽样的结果所算出的统计量的数值不落在这一经常出现的区间内, 那就表示小概率事件发生了, 则应拒绝原假设  $H_0$ 。当  $H_0$  遭到拒绝, 实质上就相当于接受了另一个假设, 这另一假设称为备选假设, 记为  $H_1$  (例如  $H_1: \mu\neq\mu_0$ )。因此, 假设检验实际上就是要在原假设  $H_0$  与备选假设  $H_1$  中作出选择。

不难理解, 接受域和拒绝域的范围大小是与我们所给定的  $\alpha$  值的大小有关的。 $\alpha$  愈大, 则拒绝域愈大,  $H_0$  被拒绝的机会就愈大。 $\alpha$  的大小通常应根据问题的性质来选定, 当我们不应轻易拒绝原假设  $H_0$  时, 则应选定较小的  $\alpha$ 。一般使用的  $\alpha$  值可以是 0.05、0.01 等等。

对于上述举例而言, 当  $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$  时, 则称  $\bar{x}$  与  $\mu_0$  之间的差异是显著的, 反之, 则称  $\bar{x}$  与  $\mu_0$  之间的差异并不显著。所以把数  $\alpha$  又称之为检验的显著 (性) 水平, 并把上述的假设检验问题通常叙述成: 在显著水平  $\alpha$  下, 检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

上述假设检验的例子,是将拒绝域(见图 10-1)布置在统计量分布密度曲线两侧的尾巴上,这种检验法称为双尾检验法。有时根据实际情况,需要判断母体均值  $\mu$  是否增大了,例如,某工厂为了提高产品质量(如产品的使用寿命,材料强度等),采用了一种新工艺,这时自然希望母体均值越大越好,如果能判断在新工艺下母体均值确实比以往正常生产的大,则可考虑采用新工艺。在此情况下,只要检验新工艺下的母体均值  $\mu$  是等于原来的母体均值  $\mu_0$ ,还是大于  $\mu_0$ 。因此,这种假设检验就是要在显著水平  $\alpha$  下,检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu > \mu_0.$$

为了进行这种假设检验,只要把概率  $\alpha$  布置在右尾上,如图 10-2 所示。由图知:

$$P\left\{\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right\} = \alpha. \quad (10-1-5)$$

若检验结果,  $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ , 它是小概率事件,则应拒绝  $H_0$  (接受  $H_1$ )。这就表示用新工艺生产的产品质量( $\bar{x}$ )比原来的质量(比原来的使用寿命  $\mu_0$ )有了显著的差异,因而,应考虑采用新工艺。否则,接受  $H_0$  (拒绝  $H_1$ ),即表示用新工艺生产的产品质量与原质量并无显著差异。同样地,如需要进行  $H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$  的假设检验,则可将  $\alpha$  布置在左尾上。以上这种检验方法称之为单尾检验法。

由上述原理可知,假设检验是以小概率事件在一次实验中实际上是不可能发生的这一前提为依据的。必须指出,小概率事件虽然其出现的概率很小,但这并不是说这种事件就完全不可能发生。事实上,如果我们重复抽取容量为  $n$  的许多组子样,由于抽样的随机性,子样均值  $\bar{x}$  不可能完全相同,因而由此算得的统计量的数值也具有随机性。若检验的显著水平定为  $\alpha = 0.05$ ,那么,即使原假设  $\mu = \mu_0$  是正确的(真的),其中仍约有 5% 的计算数值将会落入拒绝域中。由此可见,进行任何假设检验总是有作出不正确判断的可能性,换言之,不可能绝对不犯错误。只不过犯错误的可能性很小而已。以  $H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$  为例,当  $H_0$  为真(正确)而遭到拒绝的错误称为犯第一类错误,也称为弃真的错误。由图 10-3 可知,犯第一类错误的概率就是  $\alpha$ 。同样地,当  $H_0$  为不真(不正确)时,我们也有可能接受  $H_0$ ,这种错误称为犯第二类错误,或称为纳伪的错误。从图中看出,犯第二类错误的概率为  $\beta$ 。显然,当子样容量  $n$  确定后,犯这两类错误的概率不可能同时减小。当  $\alpha$  增大,  $\beta$  则减小,当  $\alpha$  减小,  $\beta$  则增大。

概括起来说,进行假设检验的要点是:

1. 根据实际需要提出原假设  $H_0$  和备选假设  $H_1$ ;
2. 选取适当的显著水平  $\alpha$ ;
3. 确定检验用的统计量,其分布应是已知的;
4. 根据已定的显著水平  $\alpha$ , 求出拒绝域的界限值,如被检验的数值落入拒绝域,则拒绝  $H_0$  (接受  $H_1$ )。否则,接受  $H_0$  (拒绝  $H_1$ )。

下面将介绍几种常用的假设检验方法,并举简单的测量例子说明其应用。



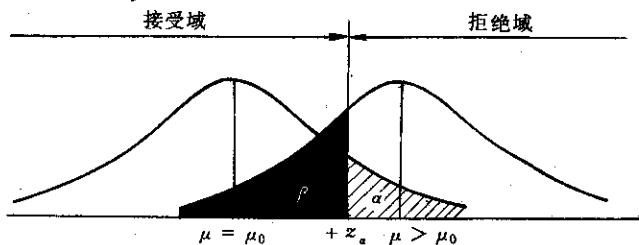


图 10-3

## 一、u 检验法

前面已经讲了，当从正态母体  $N(\mu, \sigma^2)$  中抽得容量为  $n$  的子样，得子样均值  $\bar{x}$ ，设母体方差  $\sigma^2$  为已知，则可利用统计量

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (10-1-6)$$

对母体均值  $\mu$  进行各种假设检验。这种服从标准正态分布的统计量称为  $u$  变量，所进行的检验方法称为  $u$  检验法。

$$\text{设 } H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

此时用双尾检验法。

作统计量  $u$  (10-1-6) 式，选定  $\alpha$ ，查正态分布表得  $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 。如果  $|u| > z_{\frac{\alpha}{2}}$ ，则拒绝  $H_0$ ，否则原假设  $H_0$  成立。这就是  $u$  检验法的全过程。

例[10-1] 统计三角网中 421 个三角形闭合差，得闭合差平均值  $\bar{x} = 0.04''$ ，已知闭合差中误差  $\sigma = 0.62''$ ，问该闭合差的数学期望是否为零？

解：三角形闭合差为三角形中三内角观测值之和的真误差，若是偶然误差，其数学期望应等于零。故作原假设和备选假设为

$$H_0: \mu_x = 0; \quad H_1: \mu_x \neq 0.$$

计算统计量

$$u = \frac{0.04}{0.62 / \sqrt{421}} = 1.32.$$

选定  $\alpha = 0.05$ ，查正态分布表得  $z_{0.025} = 1.96$ 。现  $|u| < z_{\frac{\alpha}{2}}$ ，接受原假设  $H_0$ ，说明从三角形闭合差平均值看，系统误差并不显著。

此例中已知母体中误差  $\sigma$ ，实际测量中， $\sigma$  经常未知，可以利用实测结果计算的估值  $\hat{\sigma}$  代替，数理统计中已说明，这种代替，当子样容量  $n \geq 200$ ，则可认为是严密的，当一般  $n > 30$  时，用  $\hat{\sigma}$  代  $\sigma$  进行  $u$  检验则认为是近似可用的。

除了大子样容量外，应用  $u$  检验法，要求母体方差已知。这一要求在实际中往往难以满足，当母体方差未知，检验问题又是小子样时， $u$  检验法便不能应用。由此产生了以下的  $t$  检验法。

## 二、 $t$ 检验法

当从正态母体  $N(\mu, \sigma^2)$  中抽得容量为  $n$  的子样, 得子样平均值  $\bar{x}$  和子样中误差  $\hat{\sigma}$ , 此时, 可作统计量

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}}, \quad (10-1-7)$$

对母体数学期望进行假设检验, 统计量  $t$  与  $u$  不同之处仅用  $\hat{\sigma}$  代替  $\sigma$ , 但  $t$  已不服从正态分布, 而是服从具有自由度为  $n-1$  的  $t$  分布, 用统计量  $t$  检验正态母体数学期望的方法, 称  $t$  检验法。

$t$  检验法的原假设与  $u$  检验法相同, 即有

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

在  $H_0$  成立时, 统计量(10-1-7)满足如下概率式:

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha. \quad (10-1-8)$$

或

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = \alpha. \quad (10-1-9)$$

如果  $\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}}$ , 则拒绝  $H_0$ , 即  $H_1$  成立,  $\mu \neq \mu_0$ , 否则接受  $H_0$ 。

例[10-2] 为了测定经纬仪视距常数是否正确, 设置了一条基线, 其长为 100 m, 与视距精度比可视为无误差, 用该仪器进行视距测量, 量得长度为:

100.3 99.5 99.7 100.2 100.4 100.0

99.8 99.4 99.9 99.7 100.3 100.2

试检验该仪器视距常数是否正确。

解:  $H_0: \mu = 100; \quad H_1: \mu \neq 100.$

计算

$$\bar{x} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} x_i = 99.95,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2}{12-1}} = 0.37,$$

$$t = \frac{99.95 - 100}{0.37 / \sqrt{12}} = -0.46.$$

以自由度  $n-1=11$ ,  $\alpha=0.05$  查  $t$  分布表得  $t_{\frac{\alpha}{2}}=2.2$ , 现  $|t| < t_{\frac{\alpha}{2}}$ , 接受  $H_0$ , 可认为在 100 m 左右范围内, 视距常数正确。

顺便指出, 当  $t$  的自由度  $n-1 > 30$  时,  $t$  检验法与  $u$  检验法的检验结果实际相同。

### 三、 $\chi^2$ 检验法

从正态母体  $N(\mu, \sigma^2)$  中抽取一组子样, 容量为  $n$ , 得子样方差  $\hat{\sigma}^2$ , 利用服从自由度为  $n-1$  的  $\chi^2$  分布的统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \quad (10-1-10)$$

对母体方差进行假设检验, 用统计量  $\chi^2$  检验正态母体方差的方法, 称  $\chi^2$  检验法。

1. 检验母体方差  $\sigma^2$  是否为一已知数  $\sigma_0^2$ , 可作

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

当  $H_0$  成立时, 有如下概率式

$$P\left\{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2\right\} = 1 - \alpha, \quad (10-1-11)$$

如果统计量  $\chi^2$  之值落在区间  $(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2, \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2)$  之内, 则接受  $H_0$ , 否则接受  $H_1$ 。

2. 检验母体方差  $\sigma^2$  是否大于已知方差  $\sigma_0^2$ , 此时原假设和备选假设为

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2.$$

这里  $H_0$  虽记为  $\sigma^2 = \sigma_0^2$ , 实际上相对  $H_1$  来说是  $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ 。当  $H_0$  成立时, 有

$$P\left\{\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\alpha}^2\right\} = 1 - \alpha. \quad (10-1-12)$$

或

$$P\left\{\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha}^2\right\} = \alpha. \quad (10-1-13)$$

如果统计量  $\chi^2$  的计算值  $\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$  大于以显著水平  $\alpha$  和自由度  $n-1$  查得的  $\chi_{\alpha}^2$  值, 则拒绝原假设  $H_0$ , 接受  $H_1$ 。否则接受  $H_0$ 。

例[10-3] 一测量队原来一直使用某种经纬仪, 已知其测角方差为  $1.0(\text{秒}^2)$ , 后来该队换用另一种型号的经纬仪, 为了比较, 按相同操作规程进行了 20 个测回, 计算得测角方差  $\hat{\sigma}^2 = 0.7$ , 假设观测值均是正态变量, 试在  $\alpha = 0.05$  下, 检验这两种型号经纬仪的测角精度是否有显著差别。

$$\text{解: } H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 1.0; \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

已知自由度  $n-1 = 20-1 = 19$ ,  $\alpha/2 = 0.025$ ,  $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ 。查  $\chi^2$  分布表得  $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 = 32.9$ ,  $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 = 8.91$ , 计算统计量得

$$\chi^2 = \frac{19 \times 0.7}{1.0} = 13.3.$$

$\chi^2$  在区间  $(8.91, 32.9)$  之内, 两者测角精度无显著差别。

如果此例问后来的仪器测角精度是否比原来的低, 则  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 1.0$ ,  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ , 此时以自由度 19 查  $\chi^2$  分布表, 得  $\chi_{0.05}^2 = 30.1$ , 现  $\chi^2 < \chi_{\alpha}^2$ , 说明后者测角精度不会比前者测角精度低。

#### 四、F 检验

F 检验是利用服从 F 分布的统计量 F 变量对两正态母体方差比进行检验。当两个母体均值  $\mu_1$  和  $\mu_2$  未知时, 则可利用统计量

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

对方差比进行如下假设检验:

$$1. \text{ 设 } H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

因

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha. \quad (10-1-14)$$

故当  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}$  或  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > F_{\frac{\alpha}{2}}$  时拒绝  $H_0$ , 接受  $H_1$ ; 否则, 接受  $H_0$ 。

但在实际检验时, 我们总是可以将其中较大的一个子样方差作为  $\sigma_1^2$ , 另一个作为  $\sigma_2^2$ , 这样就可以使  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  永远大于 1。因为

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)},$$

而在 F 分布表中的所有表列值都大于 1, 即上式右端中的分母大于 1, 故其左端必小于 1, 而  $\sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$ , 所以不可能有  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$  的情况发生, 这样, 就只须考察  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  是否落入右尾的拒绝域就可以了, 不必再去考虑左尾的拒绝域。在这一情况下, (10-1-14) 式也可写成

$$P\left\{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1 - \alpha. \quad (10-1-15)$$

$$2. H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

因

$$P\left\{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)\right\} = \alpha. \quad (10-1-16)$$

故当  $\sigma_1^2/\sigma_2^2 > F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$  时, 则拒绝  $H_0$ , 接受  $H_1$ ; 否则, 接受  $H_0$ 。

由于前面讲过的理由, 我们总是可以使  $\sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$ , 所以进行单尾检验时, 就没有必要再考虑备选假设为  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$  的情况了。

例[10-4] 给出两台测距仪测定某一距离的测回数和计算的测距方差为

测距仪甲:  $n_1 = 8$ ,  $\sigma_1^2 = 0.10 \text{cm}^2$

测距仪乙:  $n_2 = 12$ ,  $\sigma_2^2 = 0.07 \text{cm}^2$

试在显著水平  $\alpha = 0.05$  下, 检验两台仪器测距精度有否显著差别。

解:  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

以分子自由度 7, 分母自由度 11, 查得  $F_{0.025} = 3.76$ , 计算统计量

$$F = \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 0.10/0.07 = 1.43$$

现  $F < F_{\alpha/2}$ , 故接受  $H_0$ 。

如果上例问测距仪乙测距精度是否比甲低, 此时的  $\sigma_1^2 = 0.07$ ,  $\sigma_2^2 = 0.10$ , 原假设和备选假设为

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

统计量为

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{0.07}{0.10} = 0.7$$

在  $F$  分布表查得  $F_{0.05}(11, 7) = 3.7$ ,  $F < F_{\alpha}$ ,  $H_0$  成立, 测距仪乙的测距精度不比甲差。因  $F$  分布表中之值均大于 1, 发现  $F$  值小于 1,  $H_0$  必成立。

## § 10-2 误差分布的假设检验

观测误差是服从正态分布的随机变量, 这是测量平差的前提假设, 如果否定了这一假设, 或者说观测误差包含了系统误差或粗差, 所得的平差结果不再是最优无偏估计, 甚至是无效的结果。为此需对误差分布的正态性进行检验。

### 一、偶然误差特性的检验

在 § 2-2 中, 给出了偶然误差的四个特性, 简单地描述了其正态分布的统计表象。

当我们进行了一系列的观测, 若出现的误差是以偶然误差为主导的, 那么, 无论是从误差的正负号或者从误差数值的大小等方面来进行分析和考察, 它们都应该基本上符合上述几个特性。这里之所以说是“基本”符合, 这是由于我们在实际工作中加以分析的误差列, 其容量  $n$  总是个有限数。而由于观测误差出现的随机性, 实际出现的误差分布(以频率为基础的经验分布)不可能与其理论分布(以概率为极限的理论分布)完全吻合, 总是会有不同程度的随机性的波动。问题是这种波动的大小是在某种允许界限之内, 还是超出了这一界限。所以为了对一系列误差进行检验, 从而判断其是否符合偶然误差的特性, 其基本思想仍然是针对所要检验的具体项目, 找出一个适当的且其分布为已知的统计量, 并在给定的显著水平  $\alpha$  下, 提出原假设  $H_0$ , 然后根据实际的观测结果来计算该统计量的数值是落在拒绝域内还是落在接受域内。如果落在拒绝域内, 则表明它与理论分布之间的差异是显著的, 超出了随机波动所允许的界限, 因而可以认为该观测列有某种系统误差的存在。

下面介绍五项检验方法。

#### 1. 误差正负号个数的检验

设以  $x_i$  表示误差列中第  $i$  个误差的正负号, 当  $\Delta_i$  为正时, 取  $x_i = +1$ , 为负时, 取  $x_i = -1$ , 则

$$S_x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = [x] \quad (10-2-1)$$

是表示在  $n$  个误差中正误差出现的个数。在概率论中知道,  $S_x$  是服从二项分布的变量, 当  $n$  很大时, 标准化后  $S_x$  变量将近似于  $N(0, 1)$  分布。

由偶然误差的第三特性可知, 正负误差出现的概率应相等, 即  $P(\Delta > 0) = P(\Delta < 0) =$

$\frac{1}{2}$ , 或写成  $p=q=\frac{1}{2}$  (若误差列中有恰好等于 0 的误差, 则不把它包括在内)。

为了检验  $p$  是否为  $\frac{1}{2}$ , 作出假设:

$$H_0: p = \frac{1}{2}; \quad H_1: p \neq \frac{1}{2}.$$

在  $H_0$  的假设下, 统计量

$$\frac{S_x - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}} \sim N(0, 1). \quad (10-2-2)$$

故有

$$P\left\{\left|\frac{S_x - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha. \quad (10-2-3)$$

若以二倍中误差作为极限误差, 即令  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2$  时, 相当于取置信度为 95.45%, 则

$$P\left\{\left|\frac{S_x - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right| < 2\right\} = 0.9545,$$

或

$$P\left\{\left|S_x - \frac{n}{2}\right| < \sqrt{n}\right\} = 0.9545. \quad (10-2-4)$$

或检验结果

$$\left|S_x - \frac{n}{2}\right| < \sqrt{n}. \quad (10-2-5)$$

则表示(10-2-2)式中的统计量落入接受域内, 说明  $S_x$  与  $\frac{n}{2}$  之间无显著差异, 否则, 就有理由怀疑  $H_0$  的正确性, 因而不能认为正负误差出现的概率各为  $\frac{1}{2}$ , 即误差列中可能存在着某种系统误差的影响。

若以  $S'_x$  表示负误差的个数, 则有

$$S_x = n - S'_x.$$

由于正负误差出现的概率相等, 即  $p=q=\frac{1}{2}$ , 将上式代入(10-2-4)式就可直接写出

$$P\left\{\left|\frac{n}{2} - S'_x\right| < \sqrt{n}\right\} = 0.9545. \quad (10-2-6)$$

因此, 也可以由下式来检验  $H_0$  是否成立:

$$\left|\frac{n}{2} - S'_x\right| < \sqrt{n}. \quad (10-2-7)$$

由(10-2-5)和(10-2-7)两式, 还可得到

$$|S_x - S'_x| < 2\sqrt{n}. \quad (10-2-8)$$

这就是用正负误差个数之差来进行检验的公式。

## 2. 正负误差分配顺序的检验

有时误差的正负号可能是受到某一因素的支配而产生系统性的变化,例如可能随着时间而改变,在某一时间段内误差大多为正,而在另一时间段内则大多为负,但是,在这种情况下,正负误差的个数有可能基本相等。如果只用上述方法进行检验,就难以发现是否存在上述系统性的变化。所以,就应将误差按时间的先后顺序排列,从而检验其是否随时间而发生着系统性的变化。

根据偶然误差的特性可知,误差之为正或为负应该是具有随机性的,而且前一个误差的正负号与后一个误差的正负号之间也不应具有什么明显的规律性,即误差正负号的交替变换也是随机性的。换言之,当前一个误差为正时,后一个误差可能为正,也可能为负,同样,当前一个误差为负时,后一个误差可能为正,也可能为负。

若将误差按某一因素的顺序排列,设以  $v_i$  表示第  $i$  个误差和第  $i+1$  个误差的正负号的交替变换,当相邻两误差正负相同时,取  $v_i=1$ ,正负号相反时,取  $v_i=0$ 。当有  $n$  个误差时,则有  $n-1$  个交替变换(恰好等于 0 的误差不计算在内)。现组成统计量

$$S_v = v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} = [v]. \quad (10-2-9)$$

则  $S_v$  是表示相邻两误差正负号相同时的个数。显然,  $S_v$  仍是服从二项分布的变量,且由于正负号交替变换的随机性,  $v_i$  取值 1 与取值 0 的概率应相等,即  $p=q=\frac{1}{2}$ 。仿(10-2-2)式可以写出

$$\frac{S_v - \frac{(n-1)}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n-1}} \sim N(0, 1). \quad (10-2-10)$$

类似于(10-2-8)式的推导过程,可得

$$|S_v - S'_v| < 2\sqrt{n-1}. \quad (10-2-11)$$

式中  $S'_v$  表示相邻两误差正负号相反时的个数。若检验结果不满足上式,则应否定  $p=q=\frac{1}{2}$  的假设,即表明该误差列可能受到某种固定因素的影响而存在系统性的变化。

## 3. 误差数值和的检验

将一系列误差求和:

$$S_{[\Delta]} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = [\Delta]. \quad (10-2-12)$$

根据偶然误差的第三特性可知,上述  $S_{[\Delta]}$  在理论上应为零。

因为  $\Delta_i \sim N(0, \sigma^2)$ , 故有

$$E(S_{[\Delta]}) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2) + \cdots + E(\Delta_n) = 0,$$

$$D(S_{[\Delta]}) = D(\Delta_1) + D(\Delta_2) + \cdots + D(\Delta_n)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 = n\sigma^2,$$

因此  $S_{[\Delta]}$  是服从  $N(0, n\sigma^2)$  的变量。它的标准化变量则为

$$\frac{S_{[\Delta]}}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1). \quad (10-2-13)$$

为了检验误差的数值和是否为零, 此处作出“ $H_0$ : 误差的数值和的期望为零”的假设。  
若取 95.45% 的置信度, 则有

$$P\left\{\left|\frac{S_{[\Delta]}}{\sqrt{n}\sigma}\right| < 2\right\} = 0.9545,$$

或

$$P\{|S_{[\Delta]}| < 2\sqrt{n}\sigma\} = 0.9545. \quad (10-2-14)$$

在  $H_0$  为正确的条件下, 检验结果应满足

$$|S_{[\Delta]}| < 2\sqrt{n}\sigma. \quad (10-2-15)$$

否则, 即应否定原假设  $H_0$ 。当  $n$  大时, 可用中误差的估值  $\hat{\sigma}$  代替  $\sigma$ , 即应满足

$$|S_{[\Delta]}| < 2\sqrt{n}\hat{\sigma}. \quad (10-2-16)$$

此检验与用误差的平均值进行  $\mu$  检验效果相同。

#### 4. 正负误差平方和之差的检验

将一系列误差各自平方, 并组成如下代数:

$$S_{[k\Delta^2]} = k_1\Delta_1^2 + k_2\Delta_2^2 + \cdots + k_n\Delta_n^2 = [k\Delta^2]. \quad (10-2-17)$$

在上式中, 当  $\Delta_i$  原为正误差时, 则使  $k_i$  为 +1,  $\Delta_i$  为负误差时, 则使  $k_i$  为 -1。可见  $S_{[k\Delta^2]}$  是正误差平方和与负误差平方和之差。根据偶然误差的第三特性可知,  $S_{[k\Delta^2]}$  在理论上应等于零, 其中  $k_i$  取值 1 的概率  $p$  与取值 -1 的概率  $q$  相等, 即  $p=q=\frac{1}{2}$ , 因而

$$\left. \begin{aligned} E(k_i) &= (+1) \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0, \\ E(k_i^2) &= (+1)^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10-2-18)$$

考虑到偶然误差正负号的出现与误差绝对值的大小无关, 故有

$$E(k_i\Delta_i^2) = E(k_i)E(\Delta_i^2) = 0, \quad (10-2-19)$$

$$\begin{aligned} D(k_i\Delta_i^2) &= E\{[(k_i\Delta_i^2) - E(k_i\Delta_i^2)]^2\} = E\{(k_i\Delta_i^2)^2\} \\ &= E\{k_i^2\Delta_i^4\} = E(k_i^2)E(\Delta_i^4) = E(\Delta_i^4). \end{aligned} \quad (10-2-20)$$

可以证明

$$E(\Delta^4) = 3\sigma^4,$$

故有

$$D(k_i\Delta_i^2) = 3\sigma^4.$$

由此可以求得  $S_{[k\Delta^2]}$  的数学期望为

$$E(S_{[k\Delta^2]}) = \sum_{i=1}^n E(k_i\Delta_i^2) = 0, \quad (10-2-21)$$

其方差为

$$D(S_{[k\Delta^2]}) = \sum_{i=1}^n D(k_i\Delta_i^2) = 3n\sigma^4. \quad (10-2-22)$$

当  $n$  很大时,  $S_{[k\Delta^2]}$  将趋近于正态分布  $N(0, 3n\sigma^4)$ 。



为了进行检验, 作出“ $H_0: S_{[\Delta^2]}$  的期望为零”的假设。将  $S_{[\Delta^2]}$  标准化后, 则有

$$\frac{S_{[\Delta^2]}}{\sqrt{3n\sigma^2}} \sim N(0, 1). \quad (10-2-23)$$

若取 95.45% 的置信度, 则

$$P\left\{\left|\frac{S_{[\Delta^2]}}{\sigma^2 \sqrt{3n}}\right| < 2\right\} = 0.9545,$$

或

$$P\{|S_{[\Delta^2]}| < 2\sigma^2 \sqrt{3n}\} = 0.9545. \quad (10-2-24)$$

在  $H_0$  正确的条件下, 检验结果应满足

$$|S_{[\Delta^2]}| < 2\sigma^2 \sqrt{3n}. \quad (10-2-25)$$

否则, 即应否定原假设  $H_0$ 。

当  $n$  很大时, 也可用中误差的估值  $\hat{\sigma}$  代替  $\sigma$ , 即应满足

$$|S_{[\Delta^2]}| < 2\hat{\sigma}^2 \sqrt{3n}. \quad (10-2-26)$$

#### 5. 个别误差值的检验

当观测误差服从正态分布, 即

$$\Delta_i \sim N(0, \sigma^2). \quad (10-2-27)$$

标准化后, 则有

$$\frac{\Delta_i}{\sigma} \sim N(0, 1). \quad (10-2-28)$$

若取 95.45% 的置信度, 则可写出

$$P\left\{\left|\frac{\Delta_i}{\sigma}\right| < 2\right\} = 0.9545.$$

或

$$P\{|\Delta_i| < 2\sigma\} = 0.9545. \quad (10-2-29)$$

根据偶然误差的第一特性可知, 误差值超过某一界限的概率接近于零。由上式知, 某一误差  $\Delta_i$ , 其绝对值大于  $2\sigma$  的概率为 4.55%, 这是小概率事件, 因此, 可取  $2\sigma$  作为极限误差。当某一误差的绝对值超过这一界限时, 就把该误差作为粗差处理, 并把其对应的观测值舍弃不用。

顺便指出, 有时也有取  $3\sigma$  作为极限误差的, 这就相当于取置信度为 99.74%, 即

$$P\{|\Delta_i| < 3\sigma\} = 0.9974. \quad (10-2-30)$$

例[10-5] 在某地区进行三角观测, 共 30 个三角形, 其闭合差(以秒为单位)如下, 试对该闭合差进行偶然误差特性的检验。

+1.5	+1.0	+0.8	-1.1	+0.6	+1.1	+0.2	-0.3
-0.5	+0.6	-2.0	-0.7	-0.8	-1.2	+0.8	-0.3
+0.6	+0.8	-0.3	-0.9	-1.1	-0.4	-1.0	-0.5
+0.2	+0.3	+1.8	+0.6	-1.1	-1.3		

解:按三角形闭合差算出

$$\hat{\sigma}_w = \pm \sqrt{\frac{[w^2]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{25.86}{30}} = \pm 0.93''.$$

设检验时均取置信度为 95.45%。

### 1. 正负号个数的检验

$$\left. \begin{array}{l} \text{正误差个数: } S_x = 14, \\ \text{负误差个数: } S'_x = 16, \end{array} \right\}$$

所以  $|S_x - S'_x| = 2$ , 而  $2\sqrt{n} = 2\sqrt{30} = 11$ , 所以  $|S_x - S'_x| < 2\sqrt{n}$ , 即满足(10-2-8)式。

### 2. 正负误差分配顺序的检验

$$\left. \begin{array}{l} \text{相邻两误差同号的个数 } S_v = 18, \\ \text{相邻两误差异号的个数 } S'_v = 11, \end{array} \right\}$$

所以  $|S_v - S'_v| = 7$ , 而  $2\sqrt{n-1} = 2\sqrt{29} = 10.8 \approx 11$ , 可见  $|S_v - S'_v| < 2\sqrt{n-1}$ , 即满足(10-2-11)式。

### 3. 误差数值和的检验

$$|S_{[\Delta]}| = |[w]| = 2.6,$$

而  $2\sqrt{n}\hat{\sigma}_w = 2\sqrt{30}(0.93) = 10.2$ , 可见  $|S_{[\Delta]}| < 2\sqrt{n}\hat{\sigma}_w$ , 即满足(10-2-16)式。

### 4. 正负误差平方和之差的检验

$$\left. \begin{array}{l} \text{正误差平方和: } 11.23, \\ \text{负误差平方和: } 14.63, \end{array} \right\}$$

$|S_{[k\Delta^2]}| = 3.40$ , 而  $2\hat{\sigma}_w^2\sqrt{3n} = 2\sqrt{90} \cdot (0.93)^2 = 16.41$ , 所以  $|S_{[k\Delta^2]}| < 2\hat{\sigma}_w^2\sqrt{3n}$ , 即满足(10-2-26)式。

### 5. 最大误差值的检验

此处最大的一个闭合差为  $-2.0''$ , 如以二倍中误差作为极限误差,  $2\hat{\sigma}_w = 2 \times 0.93 = 1.86''$ , 可见该闭合差超限。

## 二、误差分布的假设检验

前面讲到的一些检验都是在母体分布形式为已知的前提下进行讨论的。但是在许多实际问题中, 对于母体分布的类型可能事先一无所知, 或者仅需要判断一下是否服从于正态分布就行了, 这时就需要先根据子样来对母体分布的各种假设进行检验, 从而判断对母体分布所作的原假设是否正确。本节只介绍常用的  $\chi^2$  检验法。

$\chi^2$  检验法可以根据子样来检验母体是否服从某种分布的原假设  $H_0$ , 而这个原假设不限定是正态分布, 也可以是其它类型的分布。例如, 已知  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是取自母体分布函数为  $F(x)$  的一个子样, 现在要根据子样来检验下述原假设是否成立:

$$H_0: F(x) = F_0(x).$$

式中  $F_0(x)$  是我们事先假设的某一已知的分布函数。

为了检验子样是否来自分布函数为  $F(x)$  的母体, 它的做法是: 先将子样观测值按一定的组距分组(分成区间), 例如, 分成  $k$  组, 并统计子样值落入各组内的实际频数  $v_i$ 。另一方面, 在用下述  $\chi^2$  检验法检验假设  $H_0$  时, 要求在假设  $H_0$  下,  $F_0(x)$  的形式及其参数都是已知的。譬如说, 如果我们所假设的  $F_0(x)$  是正态分布函数, 那么其中的两个参数  $\mu$  和  $\sigma$  应该是已知的。可是实际上参数值往往是未知的, 因此要根据子样值来估计原假设中理论分布  $F_0(x)$  中的参数, 从而确定该分布函数的具体形式, 这样就可以在假设  $H_0$  下, 计算出子样值落入上述各组中的概率  $p_1, p_2, \dots, p_k$  (即理论频率), 以及将  $p_i$  与子样容量  $n$  的乘积算出理论频数  $np_1, np_2, \dots, np_k$ 。

由于子样总是带有随机性, 因而落入各组中的实际频数  $v_i$  总是不会和理论频数  $np_i$  完全相等。一般说来, 若  $H_0$  为真, 则这种差异并不显著; 若  $H_0$  为假, 这种差异就显著。这样, 就必须找出一个能够描述它们之间偏离程度的一个统计量, 从而通过此统计量的大小来判断它们之间的差异是由于子样随机性引起的, 还是由于  $F_0(x) \neq F(x)$  所引起的, 描述上述偏离程度的统计量为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} \quad (10-2-31)$$

从理论上已经证明, 不论母体是属于什么分布, 当子样容量  $n$  充分大 ( $n \geq 50$ ) 时, 则上述统计量总是趋近于服从自由度为  $k-r-1$  的  $\chi^2$  分布。其中  $k$  为分组的组数,  $r$  是在假设的某种理论分布中用实际子样值估计出的参数个数。

进行检验时, 对于事先给定的显著水平  $\alpha$ , 可由

$$P(\chi^2 > \chi_{\alpha}^2) = \alpha \quad (10-2-32)$$

定出临界值  $\chi_{\alpha}^2$ 。最后将按 (10-2-31) 式算出的  $\chi^2$  和  $\chi_{\alpha}^2$  相比较, 若  $\chi^2 < \chi_{\alpha}^2$ , 则接受  $H_0$ , 否则, 拒绝  $H_0$ 。

必须指出, (10-2-31) 式中的统计量只有在  $n$  充分大时 ( $n \geq 50$ ) 才接近于  $\chi^2$  分布。因此, 它是适用于大子样的一种检验方法。在实际应用时组的实际频数  $v_i$  也要足够大, 一般要求每组中的子样个数不少于 5 个。在分组后, 若某几组的子样个数少于 5 时, 可以将几组并成一组, 使得合并后的子样个数大于 5。

下面举例说明  $\chi^2$  检验法的具体做法。

例[10-6] 某地震形变台站在两个固定点之间进行重复水准测量, 测得 100 个高差观测值, 试检验该列观测高差是否服从正态分布。

解: 检验时先将观测数据分组(表 10-1), 当观测个数较多时, 一般以分成 10-15 组为宜。本例分成 10 组。由于各观测高差的米位数均相同, 故在表 10-1 中只列出观测高差分米以后的尾数。每组数据所处的区间端点称为组限, 上下限之差称为组距, 本例组距均为 0.01dm。

先由表 10-1 中的数据来估计母体参数  $\mu$  和  $\sigma^2$ 。利用每组的组中值(即上下限的平均值)和频数求子样均值  $\bar{x}$  (即  $\hat{\mu}$ ), 由于观测高差的尾数均在 6.900 左右, 为了计算方便起见, 先取  $\bar{x}_0 = 6.900$ , 然后按下式求得

表 10-1

高 差(dm)	频 数 $v_i$	频 率 $v_i/n$	累计频率
6.881~6.890	1	0.01	0.01
6.890~6.900	4	0.04	0.05
6.900~6.910	7	0.07	0.12
6.910~6.920	22	0.22	0.34
6.920~6.930	23	0.23	0.57
6.930~6.940	25	0.25	0.82
6.940~6.950	10	0.10	0.92
6.950~6.960	6	0.06	0.98
6.960~6.970	1	0.01	0.99
6.970~6.980	1	0.01	1.00
$\Sigma$	$n=100$	1.00	

\* 观测高差等于组上限的数值算入该区间内。

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 6.900 + \frac{1}{100} [(1)(-15) + (4)(-5) + (7)(5) + (22)(15)$$

$$+ (23)(25) + (25)(35) + (10)(45) + (6)(55)$$

$$+ (1)(65) + (1)(75)] 0.001 = 6.900 + 0.027 = 6.927,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (\sum v_i x_i^2 - n\bar{x}^2) = \frac{1}{100} (4798.3587 - 4798.3329) = 0.000258,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{0.000258} = 0.016.$$

因此, 我们需要检验的原假设为

$$H_0: X \sim N(6.927, 0.000258).$$

为了便于计算  $np_i$ , 可先作变换  $y = (x - 6.927)/0.016$ , 使  $x$  化为标准变量  $y$ , 由此算出表 10-1 中各组的组限。其中第一组下限应为  $-\infty$ , 末组上限应为  $+\infty$ , 同时根据正态分布表算得  $p$ , 其余计算结果列于表 10-2 中。

表 10-2

$y$ 的 组 限	$v_i$	$np_i$	$v_i - np_i$	$(v_i - np_i)^2$	$\frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}$
$-\infty \sim -2.31$	1	1.04			
$-2.31 \sim -1.69$	4	3.51	-2.46	6.0516	0.4185
$-1.69 \sim -1.06$	7	9.91			
$-1.06 \sim -0.44$	22	18.54	3.46	11.9716	0.6457
$-0.44 \sim +0.19$	23	24.53	-1.53	2.3409	0.0954
$+0.19 \sim 0.81$	25	21.57	3.43	11.7649	0.5454
$0.81 \sim 1.44$	10	13.41	-3.41	11.6281	0.8671
$1.44 \sim 2.06$	6	5.52			
$2.06 \sim 2.69$	1	1.61	0.51	0.2601	0.0347
$2.69 \sim +\infty$	1	0.36			
$\Sigma$	100				2.6068

由于前三组和末三组的频数太小,故分别将三组并成一组。这样  $k=6$ ,  $r=2$ , 自由度  $k-r-1=3$ 。若取显著水平  $\alpha=0.05$ , 则由  $\chi^2$  分布表可查得

$$\chi_{0.05}^2(3)=7.815>2.6068.$$

从(10-2-32)式可见,在水平 0.05 下接受  $H_0$ , 即认为观测高差服从正态分布。

### § 10-3 平差参数的显著性检验

在以上各章中,所建立的平差函数模型,所描述的变量(观测量、参数)与变量之间的关系,均为确定性关系,或称函数相关。例如,高差与高程之间,测边与坐标之间等,其真值之间具有确定的函数关系。但还有一种是变量与变量之间不存在确定的函数关系而是存在相关关系,或者说是统计上的相关关系,称为统计相关。例如,经纬仪视距的乘常数  $c$  与测量时温度  $t$  可能存在相关关系,其形式为

$$\bar{c}=\bar{b}_0+\bar{b}_1 t+\bar{b}_2 t^2+\cdots \quad (10-3-1)$$

$c$  为观测量,  $t$  为已知常数,  $\bar{b}_0$ 、 $\bar{b}_1$ 、 $\bar{b}_2$  为参数,此式不是确定函数关系,是一种统计回归模型。所谓不确定,是指(10-3-1)式是否存在,如存在是直线型还是几次曲线方程,需要通过平差和假设检验最后确定。又如,严格来说,两点间观测高差并不单纯是端点高程的函数,可能与折光参数有关,即观测高差的方程可写成

$$\bar{h}_{ij}=\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{c}R_{ij}+\bar{d}R_{ij}^2+\cdots \quad (10-3-2)$$

$R$  为折光参数。同样,  $R$  是否存在? 若存在,是几次项? 等等。

测量平差的任务是在给定函数模型和随机模型下,求模型中参数的平差值及评定精度。但给定的函数模型是否完善,仅通过平差是得不到结论的,需要借助于统计假设检验来完善函数模型。例如,对于(10-3-1)式,可以检验一下  $H_0: \bar{b}_0=0$ ,  $H_0: \bar{b}_1=0$ ,  $H_0: \bar{b}_2=0$ , ... 来了解此函数模型是否存在,如存在,  $t$  取至几次项。同样,也可对(10-3-2)式中的  $\bar{c}=0$ ,  $\bar{d}=0$  进行假设检验。这种检验称为平差参数显著性检验。

一般地,设有平差的函数模型和随机模型为

$$L = B \begin{matrix} \bar{X} \\ \text{3,1} \end{matrix} + \Delta, \quad (10-3-3)$$

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 \begin{matrix} P^{-1} \\ \text{3,3} \end{matrix}. \quad (10-3-4)$$

对参数显著性检验的原假设和备选假设为

$$H_0: H\bar{X}=W; \quad H_1: H\bar{X} \neq W. \quad (10-3-5)$$

例如,对于(10-3-1)式,有

$$\begin{aligned} \bar{X} &= [\bar{b}_0 \quad \bar{b}_1 \quad \bar{b}_2]^T, \\ H_0: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} &= 0, \text{ 亦即} \\ H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3,3} = I, \quad W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3,1}. \end{aligned}$$

# 一、参数显著性的 $u$ 、 $t$ 检验法

由(10-3-3)式得误差方程为

$$V = B\hat{x} - l. \quad (10-3-6)$$

参数的解为

$$\hat{x} = N_w^{-1} B^T P l = Q_{\hat{x}\hat{x}} B^T P l. \quad (10-3-7)$$

检验的原假设和备选假设为  $H_0: \hat{x}_i = w_i; \quad H_1: \hat{x}_i \neq w_i$ ,

或写成

$$H_0: E(\hat{x}_i) = w_i; \quad H_1: E(\hat{x}_i) \neq w_i,$$

若  $\sigma_0^2$  已知, 可采用  $u$  检验法。作统计量

$$u = \frac{\hat{x}_i - w_i}{\sigma_{\hat{x}_i}} = \frac{\hat{x}_i - w_i}{\sigma_0 \sqrt{Q_{\hat{x}_i \hat{x}_i}}}. \quad (10-3-8)$$

如果  $|u| > u_{\frac{\alpha}{2}}$ , 则拒绝  $H_0$ , 接受  $H_1$ ; 否则, 接受  $H_0$ 。

若  $\sigma_0^2$  未知, 在平差中已算得估值

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-t}}. \quad (10-3-9)$$

则可采用  $t$  检验法。作统计量

$$t = \frac{\hat{x}_i - w_i}{\hat{\sigma}_{\hat{x}_i}} = \frac{\hat{x}_i - w_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{x}_i \hat{x}_i}}}. \quad (10-3-10)$$

它的自由度为  $n-t$ 。以  $\alpha$  和自由度  $n-t$  查  $t$  分布表, 可得  $t_{\frac{\alpha}{2}}$ 。如果  $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$ , 则拒绝  $H_0$ , 接受  $H_1$ ; 否则接受  $H_0$ 。

例[10-7] 为了考察经纬仪视距乘常数  $C$  在测量时随温度变化的影响, 选择 10 段不同距离进行了试验。测得 10 组平均  $C$  值和平均气温  $t$ , 结果列于表 10-3。设  $C$  与  $t$  呈线性关系, 试检验平差参数的显著性。

表 10-3

$t$	11.9°	11.5°	14.5°	15.2°	15.9°	16.3°	14.6°	12.9°	15.8°	14.1°
$C$	96.84	96.84	97.14	97.03	97.05	97.13	97.04	96.96	96.95	96.98

解: 设函数模型为

$$\bar{C}_i = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 t_i, \quad i = (1, 2, \dots, 10)$$

其误差方程为

$$v_{C_i} = \hat{b}_0 + t_i \hat{b}_1 - C_i,$$

解得:

$$\hat{b}_0 = 96.31, \quad \hat{b}_1 = 0.048.$$

计算中得到

$$Q_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = N_{bb}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{b_0 b_0} & Q_{b_0 b_1} \\ Q_{b_0 b_1} & Q_{b_1 b_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.16 & -0.56 \\ -0.56 & 0.039 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[v_{e_i} v_{e_i}]}{n-2}} = \sqrt{\frac{0.0377}{8}} = 0.068$$

现要检验:

$$H_0: \bar{b}_1 = 0; \quad H_1: \bar{b}_1 \neq 0.$$

因  $\sigma$  未知, 采用  $t$  检验法。作统计量

$$t = \frac{\hat{b}_1 - 0}{\hat{\sigma} \sqrt{Q_{b_1 b_1}}} = \frac{0.048}{0.0134} = 3.58.$$

令  $\alpha = 0.05$ , 以  $\alpha$  和自由度 8 查  $t$  分布表, 得  $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.31$ 。因  $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$ , 故拒绝  $H_0$ , 即  $\bar{b}_1 \neq 0$ , 说明参数  $\bar{b}_1$  显著, 回归模型有效, 此例  $C$  与  $t$  的回归方程为

$$C = 96.31 + 0.048t.$$

## 二、平差参数显著性的线性假设检验法

将(10-3-3)式和(10-3-5)式写成

$$V = B\hat{x} - l, \quad (10-3-11)$$

$$H\hat{x} = W. \quad (10-3-12)$$

线性假设检验法的基本思想是, 如果将线性假设  $H_0$ , 即(10-3-12)式, 与(10-3-11)式联合平差, 求得的单位权方差估值与单独平差(10-3-11)式求得的单位权方差估值无显著差别, 则可认为在(10-3-11)式中已包含了(10-3-12)这个等式, 原假设成立, 否则  $H_0$  不成立。下面推导检验公式。

单独平差(10-3-11)式, 这是间接平差情形, 得

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1} B^T P l = Q_{\hat{x}\hat{x}} B^T P l. \quad (10-3-13)$$

改正数平方和  $\Omega$  为

$$\Omega = V^T P V = (B\hat{x} - l)^T P (B\hat{x} - l). \quad (10-3-14)$$

考虑条件方程(10-3-12)式, 就成为附有条件的间接平差问题了。

按(7-1-19)、(7-1-18)式可得联合平差(10-3-11)、(10-3-12)式的参数估值为

$$\hat{x}_c = N_{bb}^{-1} B^T P l - N_{bb}^{-1} H^T (H N_{bb}^{-1} H^T)^{-1} (H N_{bb}^{-1} B^T P l - W). \quad (10-3-15)$$

将(10-3-13)式代入, 得

$$\hat{x}_c = \hat{x} - N_{bb}^{-1} H^T (H N_{bb}^{-1} H^T)^{-1} (H\hat{x} - W). \quad (10-3-16)$$

查表 7-1, 可得  $\hat{x}_c$  的协因数为

$$Q_{\hat{x}_c \hat{x}_c} = N_{bb}^{-1} - N_{bb}^{-1} H^T (H N_{bb}^{-1} H^T)^{-1} H N_{bb}^{-1}. \quad (10-3-17)$$

改正数记为  $V_H$ , 其平方和记为  $\Omega_H$ , 则有

$$\begin{aligned} \Omega_H &= V_H^T P V_H = (B\hat{x}_H - l)^T P (B\hat{x}_H - l) \\ &= [B\hat{x} - l - B(\hat{x} - \hat{x}_H)]^T P [B\hat{x} - l - B(\hat{x} - \hat{x}_H)] \end{aligned}$$

$$=V^T P V + (\hat{x} - \hat{x}_H)^T B^T P B (\hat{x} - \hat{x}_H). \quad (10-3-18)$$

式中顾及了

$$\begin{aligned} V &= B\hat{x} - l, & V_H &= B\hat{x}_H - l, \\ (B\hat{x} - l)^T P B (\hat{x} - \hat{x}_H) &= V^T P B (\hat{x} - \hat{x}_H) = 0. \end{aligned}$$

令(10-3-18)式右端第二项为  $R$ ，顾及(10-3-16)式，化简得

$$\begin{aligned} R &= [N_{bb}^{-1} H^T (H N_{bb}^{-1} H^T)^{-1} (H\hat{x} - W)]^T N_{bb} [N_{bb}^{-1} H^T (H N_{bb}^{-1} H^T)^{-1} (H\hat{x} - W)] \\ &= (H\hat{x} - W)^T (H N_{bb}^{-1} H^T)^{-1} (H\hat{x} - W). \end{aligned} \quad (10-3-19)$$

由此，(10-3-18)式可简记成

$$\Omega_H = \Omega + R \quad (10-3-20)$$

亦即附有条件的改正数平方和是不带条件的改正数平方和与向量  $(H\hat{x} - W)$  的一个二次型  $R$  之和， $R$  是考虑条件方程(10-3-12)后对  $\Omega$  的影响项。

可以证明(见参考文献[14])： $\Omega/\sigma_0^2$  是服从自由度为  $n-t$  的  $\chi^2$  变量， $R/\sigma_0^2$  是服从自由度为  $c$  的  $\chi^2$  变量，而且  $R$  与  $\Omega$  独立，于是可采用  $F$  检验法。作  $F$  统计量

$$F = \frac{R/c}{\Omega/(n-t)} \quad (10-3-21)$$

选显著水平  $\alpha$ ，以分子自由度  $c$ ，分母自由度  $n-t$ ，由  $\alpha$  查得  $F_\alpha$ 。如果  $F > F_\alpha$ ，则表示由  $R/c$  估计的单位权方差与平差问题本身的单位权方差  $\sigma_0^2 = \Omega/(n-t)$  有显著差别，线性假设  $H\hat{x} = W$  不成立。反之  $F < F_\alpha$ ，则接受  $H_0$ 。

这是对平差参数显著性检验的一般理论和方法，它是由 Koch 提出的(参考文献[30])。由(10-3-19)式可见， $R$  的计算仅用到原间接平差中的量，所以作  $F$  检验时不需要多作附加计算。

## § 10-4 后验方差的检验

前节已指出，测量平差是在给定函数模型和随机模型下进行的。在所给模型中，建立的函数关系可能不完善，例如 § 10-3 中所述的水准测量中应顾及折光影响而模型中并未涉及；模型中起算数据与观测数据可能不匹配，这是由于起始数据误差大或者观测中包含系统误差或粗差所致；定权可能不正确等，这些都将使平差结果遭到歪曲。为了保证平差成果的正确性，必须对各种有可能影响其正确性的原因，通过统计假设检验方法予以查明，然后再改进和完善平差模型。

本节介绍的后验方差的检验方法，是一种对平差模型的总体检验方法，称为平差模型正确性检验。其原假设是平差模型正确，备选假设则是不正确，如果拒绝原假设，说明在一定显著水平下，平差成果值得怀疑，这不是计算本身错误，而是上述的某种原因所致。

后验方差检验的基本思想是，定权时先验单位权方差  $\sigma_0^2$  是已知的，通过平差，可求得其估值即后验方差  $\hat{\sigma}_0^2$ ，两者应该统计一致，即满足  $E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2$ ，如果不满足此等式，说明所求的  $\hat{\sigma}_0^2$  并非  $\sigma_0^2$  的无偏估计，这是平差模型不正确所致。

因此，后验方差检验的假设是

$$H_0: E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2, \quad H_1: E(\hat{\sigma}_0^2) \neq \sigma_0^2. \quad (10-4-1)$$



平差的误差方程和单位权方差估值为

$$V = B\hat{x} - l$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n-t}$$

可以证明统计量

$$\chi_{(f)}^2 = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} = f \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \quad (10-4-2)$$

服从自由度  $f=n-t$  的  $\chi^2$  分布, 故采用  $\chi^2$  检验法。选取  $\alpha$ , 查得  $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$  和  $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ , 得区间

$$(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2, \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2)$$

如果统计量  $\chi_{(f)}^2$  不在此区间内, 则拒绝  $H_0$ , 认为平差模型不正确。只有在通过后验方差检验后才能使用平差成果, 因此本节检验是平差中一个组成部分, 不能省略。

例[10-8] 同 § 5-4 中例[5-6]。该例定权时, 以 1km 观测高差为单位权观测, 即取  $P_i = 1/S_i$ 。此时的先验单位权中误差  $\sigma_0$  就是 1km 观测高差的中误差, 虽然例中未说明  $\sigma_0$  是何值, 但按什么等级进行水准测量是已知的, 假设该例是进行的二等水准测量, 则  $\sigma_0 = 1.0\text{mm}$ , 如是三等水准测量, 则  $\sigma_0 = 3.0\text{mm}$ 。

如属二等水准测量, 后验方差检验假设为

$$H_0: E(\hat{\sigma}_0^2) = 1.0, \quad H_1: E(\hat{\sigma}_0^2) \neq 1.0.$$

该例已算出:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n-t} = \frac{19.75}{4} = 4.94,$$

作统计量

$$\chi_{(4)}^2 = \frac{19.75}{1} = 19.75,$$

以自由度  $f=4$ ,  $\alpha=0.05$  查  $\chi^2$  分布表得

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 = 0.484, \quad \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 = 11.1.$$

可见,  $\chi_{(4)}^2$  不在  $(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2, \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2)$  内, 应拒绝  $H_0$ , 亦即该例对二等水准测量而言, 平差模型不正确。

如属三等水准测量, 后验方差检验假设为

$$H_0: E(\hat{\sigma}_0^2) = 9.0, \quad H_1: E(\hat{\sigma}_0^2) \neq 9.0.$$

作统计量

$$\chi_{(4)}^2 = \frac{19.75}{9.00} = 2.19$$

检验通过, 平差模型正确, 成果使用。

例[10-9] 同 § 5-4 例[5-7]。该例是三等三角测量, 已知测角中误差  $\sigma_0 = 1.8''$ 。试检验平差模型是否正确。

解:  $H_0: E(\hat{\sigma}_0^2) = 1.8^2, \quad H_1: E(\hat{\sigma}_0^2) \neq 1.8^2.$

该例已算得:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{22.28}{18-4} = 1.59$$

## 计算统计量

$$\chi^2_{(14)} = \frac{22 \cdot 28}{1.8^2} = \frac{22 \cdot 28}{3.24} = 6.88,$$

以  $f=14$ ,  $\alpha=0.05$  查得  $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}=5.63$ ,  $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}=26.1$ 。  $\chi^2_{(14)}$  在区间  $(5.63, 26.1)$  之内, 该平差模型正确, 平差成果可用。

例[10-10] 同 § 5-4 例[5-8]。该例测边网测距仪的标称精度为  $5\text{mm} + 2\text{ppm} \cdot S$ 。平差时是取等权的。其平均边长约为  $6.5\text{km}$ , 按标称精度计算  $\sigma_0 = 5 + 2 \times 6.5 = 18\text{mm} = 0.18\text{dm}$ ,  $\sigma_0^2 = 0.0324(\text{dm}^2)$ 。现检验

$$H_0: E(\sigma_0^2) = 0.0324; \quad E(\sigma_0^2) \neq 0.0324.$$

该例已算出

$$\sigma_0^2 = \frac{0.611}{13-8} = 0.1222$$

作统计量

$$\chi^2_{(5)} = \frac{0.611}{0.0324} = 18.86,$$

以  $f=5$ ,  $\alpha=0.05$  查得

$$(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}) = (0.831, 12.8)$$

$\chi^2_{(5)} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ , 拒绝  $H_0$ , 平差模型不正确。

从该例看, 经检核平差计算没有问题, 其主要原因可能是: 定权不正确, 测距仪标称精度较高, 从  $5-8\text{km}$  不等长, 边长不应视为等权; 也可能起始数据误差较大或测边中存在系统误差所致。要进一步查明原因。

§ 5-4 中例[5-8]作为教科书中一例, 主要说明平差过程, 在实际工作中, 如果测边等级较高, 应采用不等权平差; 如果等级较低, 由于边长  $5-8\text{km}$  范围相差不算大, 用等权平差也是可以的。但最后必须通过平差模型正确性检验, 其成果才有效。

## 第十一章 近代平差概论

以上各章阐述了四种基本的测量平差方法,即条件平差法,间接平差法,附有参数的条件平差法和附有限制条件的间接平差法。还给出了综合这四种基本平差方法的概括模型,即附有限制条件的条件平差法。四种基本平差方法的数学模型都是概括模型的特例,从而阐明了各种平差方法的各自特征和相互联系。

绪论中已指出,近 20 多年来,测量平差与误差理论得到了很大的发展,并扼要地举出了所产生的一些新的测量平差模型,为了区别,通常将上述四种基本平差方法称为经典测量平差方法,后者称为近代测量平差方法。

本章仅阐述近代平差方法的原理,详细讨论和研究将属后续有关课程的内容。

### § 11-1 序贯平差

序贯平差,亦称逐次相关间接平差。序贯平差有一套规律性很强的递推公式,便于计算机工作,用途非常广泛。

本节介绍的序贯平差,其参数不随时间变化,故又称静态卡尔曼滤波。

#### 一、平差原理

将观测值  $L$  分为两组,记为  $L_{k-1}$  和  $L_k$ , 它们的权阵分别记为  $P_{k-1}$  和  $P_k$ , 设这两组观测值不相关, 即有

$$L = \begin{bmatrix} L_{k-1} \\ L_k \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_{k-1} & 0 \\ 0 & P_k \end{bmatrix}.$$

而  $n = n_{k-1} + n_k$ ,  $n_{k-1} > t$ ,  $t$  为必要观测数。

当参数之间不存在约束条件时,其误差方程为

$$V_{k-1} = B_{k-1}\hat{x} - l_{k-1}, \quad (11-1-1)$$

$$V_k = B_k\hat{x} - l_k. \quad (11-1-2)$$

式中

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}, \quad l_i = L_i - \bar{L}_i^0 \quad (i = k, k-1).$$

将(11-1-1)式单独平差,得

$$\hat{x}_{k-1} = Q_{x_{k-1}} B_{k-1}^T P_{k-1} l_{k-1}. \quad (11-1-3)$$

式中

$$Q_{x_{k-1}} = (B_{k-1}^T P_{k-1} B_{k-1})^{-1}, \quad (11-1-4)$$

或

$$Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} = B_{k-1}^T P_{k-1} B_{k-1}. \quad (11-1-5)$$

$\hat{x}_{k-1}$ 表示由第一组观测值  $L_{k-1}$  平差所得  $\hat{x}$  的值。

将(11-1-1)和(11-1-2)式联合解算, 即由两组观测值作整体平差, 可组成法方程为

$$(Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} + B_k^T P_k B_k) \hat{x} - (B_{k-1}^T P_{k-1} l_{k-1} + B_k^T P_k l_k) = 0. \quad (11-1-6)$$

其解为

$$\hat{x} = (Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} + B_k^T P_k B_k)^{-1} (B_{k-1}^T P_{k-1} l_{k-1} + B_k^T P_k l_k),$$

已知

$$Q_{\bar{x}} = (Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} + B_k^T P_k B_k)^{-1}. \quad (11-1-7)$$

故有

$$\hat{x} = Q_{\bar{x}} B_{k-1}^T P_{k-1} l_{k-1} + Q_{\bar{x}} B_k^T P_k l_k. \quad (11-1-8)$$

考虑

$$B_{k-1}^T P_{k-1} l_{k-1} = Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} \hat{x}_{k-1}, \quad (11-1-9)$$

$$Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} = Q_{\bar{x}}^{-1} - B_k^T P_k B_k. \quad (11-1-10)$$

则(11-1-8)式为

$$\hat{x} = \hat{x}_{k-1} + Q_{\bar{x}} B_k^T P_k (l_k - B_k \hat{x}_{k-1}). \quad (11-1-11)$$

令

$$J = Q_{\bar{x}} B_k^T P_k, \quad (11-1-12)$$

$$\bar{l}_k = l_k - B_k \hat{x}_{k-1}. \quad (11-1-13)$$

则上式为

$$\hat{x} = \hat{x}_{k-1} + J \bar{l}_k. \quad (11-1-14)$$

将(11-1-10)式两边左乘  $Q_{\bar{x}}$ , 顾及(11-1-12)式得

$$Q_{\bar{x}} Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} = I - Q_{\bar{x}} B_k^T P_k B_k = I - J B_k.$$

再对两边右乘  $Q_{\bar{x}_{k-1}}$ , 得

$$Q_{\bar{x}} = Q_{\bar{x}_{k-1}} - J B_k Q_{\bar{x}_{k-1}}. \quad (11-1-15)$$

由矩阵反演公式知

$$\begin{aligned} Q_{\bar{x}} &= (Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} + B_k^T P_k B_k)^{-1} \\ &= Q_{\bar{x}_{k-1}} - Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} B_k Q_{\bar{x}_{k-1}}. \end{aligned} \quad (11-1-16)$$

比较(11-1-15)与(11-1-16)式知:

$$J = Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1}. \quad (11-1-17)$$

$J$  阵称为卡尔曼滤波增益矩阵, 或称序贯平差的增益矩阵。

将(11-1-17)式代入(11-1-14)式即得序贯平差的递推计算式。

当  $n_k=1$  时, (11-1-17)式中的  $(P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)$  和由(11-1-13)计算的  $l_k$  都是纯量, 前者的逆  $(P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1}$  也是一个数, 在这种情况下, 序贯平差计算非常简单。这是应用序贯平差的主要场合, 亦即第二组总是假定  $n_k=1$ , 逐次递推, 求出整体平差的最后结果。

## 二、精度评定

单位权中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{r}} = \sqrt{\frac{V^T P V}{n_{k-1} + n_k - t}} \quad (11-1-18)$$

当两组观测值整体平差时, 有

$$\begin{aligned} V^T P V &= [V_{k-1}^T \ V_k^T] \begin{bmatrix} P_{k-1} & 0 \\ 0 & P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{k-1} \\ V_k \end{bmatrix} \\ &= V_{k-1}^T P_{k-1} V_{k-1} + V_k^T P_k V_k. \end{aligned} \quad (11-1-19)$$

因为

$$\begin{aligned} V_{k-1} &= B_{k-1} \hat{x}_{k-1} - l_{k-1} \\ &= B_{k-1} (\hat{x}_{k-1} + J \bar{l}_k) - l_{k-1} \\ &= \bar{V}_{k-1} + B_{k-1} J \bar{l}_k, \end{aligned}$$

式中

$$\bar{V}_{k-1} = B_{k-1} \hat{x}_{k-1} - l_{k-1}. \quad (11-1-20)$$

即  $\bar{V}_{k-1}$  为仅用第一组观测值单独平差时所算得的改正数。

顾及(11-1-5)式以及单独平差第一组观测值时  $\bar{V}_{k-1}$  应满足  $B_{k-1} P_{k-1} \bar{V}_{k-1} = 0$ , 得:

$$V_{k-1}^T P_{k-1} V_{k-1} = \bar{V}_{k-1}^T \bar{P}_{k-1} \bar{V}_{k-1} + \bar{l}_k^T J^T Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} J \bar{l}_k. \quad (11-1-21)$$

故

$$V^T P V = \bar{V}_{k-1}^T P_{k-1} V_{k-1} + \bar{l}_k^T J^T Q_{\bar{x}_{k-1}}^{-1} J \bar{l}_k + V_k^T P_k V_k. \quad (11-1-22)$$

又因为

$$\begin{aligned} V_k &= B_k \hat{x} - l_k = B_k (\hat{x}_{k-1} + J \bar{l}_k) - l_k \\ &= B_k \hat{x}_{k-1} + B_k J \bar{l}_k - l_k \end{aligned} \quad (11-1-23)$$

顾及(11-1-13)式, (11-1-23)式可写为:

$$V_k = (B_k J - I) \bar{l}_k \quad (11-1-24)$$

将(11-1-17)式代入(11-1-24)式, 得:

$$\begin{aligned} V_k &= [B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} - I] \bar{l}_k \\ &= [(P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T - P_k^{-1}) (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} - I] \bar{l}_k \\ &= -P_k^{-1} (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} \bar{l}_k \end{aligned} \quad (11-1-25)$$

所以

$$\begin{aligned} V_k^T P_k V_k &= \bar{l}_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} P_k^{-1} P_k P_k^{-1} (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} \bar{l}_k \\ &= \bar{l}_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} P_k^{-1} (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} \bar{l}_k \end{aligned} \quad (11-1-26)$$

因为

$$J^T Q_{\bar{x}_{k-1}} J = (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1},$$

所以

$$\bar{l}_k^T J^T Q_{\bar{x}_{k-1}} J + V_k^T P_k V_k = \bar{l}_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{\bar{x}_{k-1}} B_k^T)^{-1} \bar{l}_k \quad (11-1-27)$$

将(11-1-27)式代入(11-1-22)式得  $V^T PV$  的递推公式为

$$V^T PV = \bar{V}_{k-1}^T P_{k-1} \bar{V}_{k-1} + \bar{l}_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{X_{k-1}} B_k^T)^{-1} \bar{l}_k \quad (11-1-28)$$

参数的协因数阵的递推公式就是(11-1-15)式即

$$Q_X = Q_{X_{k-1}} - J B_k Q_{X_{k-1}} = (I - J B_k) Q_{X_{k-1}}.$$

由以上推导, 即得到了序贯平差的一组递推公式, 即

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_{k-1} + J \bar{l}_k \\ V^T PV &= \bar{V}_{k-1}^T P_{k-1} \bar{V}_{k-1} + \bar{l}_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{X_{k-1}} B_k^T)^{-1} \bar{l}_k \\ Q_X &= Q_{X_{k-1}} - J B_k Q_{X_{k-1}} = (I - J B_k) Q_{X_{k-1}} \end{aligned} \right\} \quad (11-1-29)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} J &= Q_{X_{k-1}} B_k^T (P_k^{-1} + B_k Q_{X_{k-1}} B_k^T)^{-1} \\ \bar{l}_k &= (l_k - B_k \hat{x}_{k-1}). \end{aligned} \right\} \quad (11-1-30)$$

由这组递推公式可以看出, 每增加一个或几个观测数据, 只需利用前  $k-1$  个观测数据求得参数  $\hat{x}_{k-1}$ 、残差平方和  $\bar{V}_{k-1}^T P_{k-1} \bar{V}_{k-1}$  和协因数阵  $Q_{X_{k-1}}$ , 便可按递推公式求出平差结果。这样, 只要知道初始状态的值, 就可从第一个或第一组方程出发, 依次求出新的估值, 如此一个观测值一个观测值地增加, 直到全部观测值用完, 便可得到参数的平差结果  $\hat{x}$ 、单位权中误差的估值  $\hat{\sigma}_0$  和参数的协因数阵  $Q_X$ 。

## § 11-2 秩亏自由网平差

### 一、问题的提出

在经典间接平差中, 必须具有足够的起算数据。当控制网中仅含必要的起算数据时, 通常称为自由网。用经典平差方法平差这种网, 俗称经典自由网平差。当控制网中除必要起算数据外, 还有多余起算数据的网称为附合网。不论是自由网还是附合网, 在间接平差时, 当所选的待定参数之间不存在函数关系时, 误差方程的系数矩阵  $B$  总是列满秩的, 即  $R(B) = t$  ( $t$  为必要观测数)。由此所得到的法方程系数阵  $N = B^T P B$  就是一个对称的满秩方阵, 即  $R(N) = t$ , 法方程有唯一解。

没有起始数据参与的并以待定点的坐标为参数的控制网, 也是自由网, 是一种经常遇到的具有特殊用途的控制网。此时, 由于缺乏确定控制网坐标的基准, 误差方程系数阵  $B$  就不是列满秩, 设此时的全部待定坐标参数个数为  $u$ , 必要观测数为  $t$ , 则有  $R(B) = t < u$ , 相应的法方程系数阵  $N$  为奇异阵,  $R(N) = R(B) < u$ , 令

$$d = u - R(N) = u - t$$

称为  $N$  的秩亏数。这种自由网就称为秩亏自由网。

产生秩亏的原因是控制网中没有起算数据, 所以  $d$  就是网中必要起算数据的个数。对于水准网, 必要起算数据是一个点的高程, 故  $d=1$ 。对于测角网, 必要起算数据是两个点的坐标, 故  $d=4$ 。对于测边网或边角网, 必要起算数据是一个点的坐标和一条边的方位, 故  $d=3$ 。

秩亏自由网的法方程系数阵  $N$  奇异, 即  $|N|=0$ , 故  $N$  的凯利逆  $N^{-1}$  不存在, 法方程有无穷解。如何合理解算这类平差问题, 就是本节要讨论的秩亏自由网平差问题。

## 二、秩亏自由网平差原理

设  $u$  个坐标参数为  $\hat{X}_{u,1}$ , 观测向量为  $L_{n,1}$ , 函数模型为

$$L = B\hat{X} + B_0 - \Delta \quad (11-2-1)$$

其中  $R(B) = t < u$ ,  $d = u - t$ , 相应的误差方程为

$$V = B\hat{x} - l \quad (11-2-2)$$

式中

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x}, \quad l = L - (BX^0 + B_0) = L - L^0.$$

秩亏自由网平差的函数模型是具有系数阵秩亏的间接平差模型。随机模型仍是

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}. \quad (11-2-3)$$

按最小二乘原理, 在  $V^T P V = \min$  下, 由 (11-2-2) 可组成法方程为

$$B^T P B \hat{x} = B^T P l. \quad (11-2-4)$$

由于  $R(B^T P B) = R(N) = t < u$ ,  $N^{-1}$  不存在, 方程 (11-2-4) 不具有唯一解, 这是因为参数  $\hat{x}$  必须在一定的坐标基准下才能唯一确定。坐标基准个数即为秩亏数  $d$ , 设有  $d$  个坐标基准条件, 其形式为

$$S_{d,u,u,1}^T \hat{x} = 0 \quad (11-2-5)$$

基准条件, 也就是所选的  $u$  个参数之间存在的  $d$  个约束条件, 这是基准秩亏所致。例如在水准网中,  $d=1$ , 即  $u=t+1$ , 有一个基准条件, 若设  $\hat{x}_1=0$ , 则剩下  $t$  个独立参数可得唯一解。在测角网中, 需要四个基准条件, 即  $d=4$ , 若设条件为

$$\hat{x}_1=0, \quad \hat{y}_1=0, \quad \hat{x}_2=0, \quad \hat{y}_2=0$$

则其余坐标参数就可在此坐标基准下求得平差值。

附加的基准条件 (11-2-5) 应与法方程 (11-2-4) 线性无关, 这一要求等价于满足下列关系:

$$N_{u,u,u,d} S = 0 \quad (11-2-6)$$

因  $N = B^T P B$ , 故亦有

$$B S = 0 \quad (11-2-7)$$

此外, (11-2-5) 式中的  $d$  个方程也要线性无关, 故必须  $R(S) = d$ 。

联合解算 (11-2-2) 和 (11-2-5) 式, 在

$$\phi = V^T P V + 2K^T (S^T \hat{x}) = \min$$

下得法方程为

$$\left. \begin{aligned} B^T P B \hat{x} + S K &= B^T P l \\ S^T \hat{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-2-8)$$

将上式的第一方程两边左乘  $S^T$ , 顾及 (11-2-7) 式得

$$S^T S K = 0,$$

因矩阵  $S^T S$  正则, 故有

$$K=0 \quad (11-2-9)$$

因此,

$$\phi = V^T P V + 2K^T (S^T \hat{x}) = V^T P V,$$

亦即, 秩亏自由网平差中的  $V$  和  $V^T P V$  是与基准条件无关的不变量。

将(11-2-8)中第二式左乘  $S$  并与第一式相加, 考虑  $K=0$ , 得

$$(B^T P B + S S^T) \hat{x} = B^T P l, \quad (11-2-10)$$

其解为

$$\hat{x} = (B^T P B + S S^T)^{-1} B^T P l = Q' B^T P l, \quad (11-2-11)$$

式中

$$Q' = (B^T P B + S S^T)^{-1} \quad (11-2-12)$$

$\hat{x}$  的协因数为

$$Q_{xx} = Q' B^T P B Q' \quad (11-2-13)$$

由(11-2-12)式知

$$Q' (B^T P B + S S^T) = I,$$

或

$$Q' B^T P B = I - Q' S S^T, \quad (11-2-14)$$

代入(11-2-13)式得

$$Q_{xx} = Q' - Q' S S^T Q'. \quad (11-2-15)$$

单位权中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-t}} = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-(u-d)}}. \quad (11-2-16)$$

以上导得的(11-2-11)、(11-2-15)、(11-2-16)即为秩亏自由网平差公式。

### 三、 $S$ 的具体形式

秩亏自由网平差基准条件有多种取法, 例如上述高程网中取平差后一点的高程改正数为零; 平面网中取平差后两点的坐标改正数为零等等。下面给出满足(11-2-6)式的  $S$  的一组基础解, 其具体形式为:

水准网平差: 秩亏水准网的  $d=1$ ,  $S$  的表达式可取为

$$S_{1,u}^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]. \quad (11-2-17)$$

代入(11-2-5)式, 其基准条件方程为

$$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_n = 0. \quad (11-2-18)$$

即所有点的高程平差改正数之和为零。

测边网平差: 秩亏测边网的  $d=3$ ,  $S$  的表达式可取为

$$S_{3,u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -Y_1^0 & X_1^0 & -Y_2^0 & X_2^0 & \dots & -Y_m^0 & X_m^0 \end{bmatrix}. \quad (11-2-19)$$



式中  $m$  为网中全部点数,  $u=2m$ 。基准条件方程(11-2-5)的显式为

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \cdots + \hat{x}_m &= 0 \\ \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \cdots + \hat{y}_m &= 0 \\ -Y_1^0 \hat{x}_1 + X_1^0 \hat{y}_1 + \cdots - Y_m^0 \hat{x}_m + X_m^0 \hat{y}_m &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (11-2-20)$$

式中第一方程是纵坐标基准条件, 第二方程是横坐标基准条件, 第三方程是方位角基准条件。

测角网平差: 秩亏测角网的  $d=4$ ,  $S$  的表达式可取为

$$S_{4,u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -Y_1^0 & X_1^0 & -Y_2^0 & X_2^0 & \cdots & -Y_m^0 & X_m^0 \\ X_1^0 & Y_1^0 & X_2^0 & Y_2^0 & \cdots & X_m^0 & Y_m^0 \end{bmatrix}, \quad (11-2-21)$$

基准条件显式为

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \cdots + \hat{x}_m &= 0 \\ \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \cdots + \hat{y}_m &= 0 \\ -Y_1^0 \hat{x}_1 + X_1^0 \hat{y}_1 + \cdots - Y_m^0 \hat{x}_m + X_m^0 \hat{y}_m &= 0 \\ X_1^0 \hat{x}_1 + Y_1^0 \hat{y}_1 + \cdots + X_m^0 \hat{x}_m + Y_m^0 \hat{y}_m &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (11-2-22)$$

式中前三个方程与测边网一样, 它们是纵、横坐标和方位角基准条件, 第四个方程为边长基准条件。

采用上述确定  $S$  的方法组成基准条件, 称为自由网平差的重心基准。

## § 11-3 附加系统参数的平差

### 一、平差原理

经典平差中总是假设观测值中不含系统误差, 但测量实践表明, 尽管观测值经过各种改正, 其中仍会含有残余系统误差。消除或减弱这种残余系统误差可借助于平差方法。即通过在经典平差模型中附加系统参数来对系统误差进行补偿, 这种平差方法称为附加系统参数的平差法。

经典的高斯—马尔可夫模型为

$$L = B\tilde{X} - \Delta, \quad E(\Delta) = 0 \quad (11-3-1)$$

$$D(L) = D(\Delta) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (11-3-2)$$

当观测值中含有系统误差时, 显然

$$E(\Delta) \neq 0 \quad (11-3-3)$$

在这种情况下, 需要对经典的高斯—马尔可夫模型进行扩充。设观测误差  $\Delta_G$  包含系统误差  $\Delta_S$  和随机误差  $\Delta$ , 即

$$\Delta_G = \Delta_S + \Delta \quad (11-3-4)$$

考虑平差是线性模型, 设  $\Delta_S = A\tilde{S}$ , 于是有

$$\Delta_G = A\tilde{S} + \Delta, \quad (11-3-5)$$

及

$$E(\Delta_S) = A\tilde{S} \quad (11-3-6)$$

将(11-3-5)式代入(11-3-1)式, 即得附加系统参数的平差模型为:

$$\left. \begin{aligned} L &= B \underset{n,1}{\tilde{X}} + A \underset{n,m,m,1}{\tilde{S}} - \underset{n,1}{\Delta}, \\ D(L) &= D(\Delta) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11-3-7)$$

式中

$$R(B) = t, \quad R(A) = m.$$

由(11-3-7)式得误差方程为

$$V = B\hat{x} + A\hat{S} - l, \quad (11-3-8)$$

其法方程为

$$\begin{bmatrix} B^T P B & B^T P A \\ A^T P B & A^T P A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P l \\ A^T P l \end{bmatrix}, \quad (11-3-9)$$

$$\text{令 } B^T P B = N_{11}, \quad N_{12} = N_{21}^T = B^T P A, \quad N_{22} = A^T P A \quad (11-3-10)$$

上式简写为

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P l \\ A^T P l \end{bmatrix},$$

由分块求逆公式得:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1} N_{12} M^{-1} N_{21} N_{11}^{-1} & -N_{11}^{-1} N_{12} M^{-1} \\ -M^{-1} N_{21} N_{11}^{-1} & M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T P l \\ A^T P l \end{bmatrix}, \quad (11-3-11)$$

式中

$$\begin{aligned} M &= N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12} \\ &= B^T P B - B^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P B. \end{aligned} \quad (11-3-12)$$

如果平差模型中不存在系统误差, 即  $\tilde{S} = 0$ , 则有

$$\hat{x}_1 = N_{11}^{-1} B^T P l,$$

考虑此关系式, 则(11-3-11)式可写成

$$\hat{x} = \hat{x}_1 - N_{11}^{-1} N_{12} M^{-1} (A^T P l - N_{21} \hat{x}_1) \quad (11-3-13)$$

和

$$\hat{S} = M^{-1} (A^T P l - N_{21} \hat{x}_1). \quad (11-3-14)$$

由(11-3-11)式知,  $\hat{x}$  与  $\hat{S}$  的协因数阵为

$$Q_{xx} = N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1} N_{12} M^{-1} N_{21} N_{11}^{-1}, \quad (11-3-15)$$

$$Q_{SS} = M^{-1}. \quad (11-3-16)$$

单位权中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n - (t + r)}}. \quad (11-3-17)$$

## 二、系统参数的假设检验

系统参数的引入, 改变了平差原模型, 为了确保平差模型的正确性, 要对系统参数的显著性进行检验。因为, 如果系统参数不存在或者存在但与列入模型的项  $AS$  不符, 而仍采用模型(11-3-8)平差, 必将影响求  $\hat{x}$  与  $Q_{xx}$  的正确性, 所以附加系统参数的平差必须对列入项  $AS$  的显著性进行检验。

系统参数显著性检验可采用第十章 § 10-3 中介绍的线性假设法。

将(11-3-8)式改写成

$$V = [B \quad A] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ S \end{bmatrix} - l, \quad (11-3-18)$$

对系统参数  $S$  检验的原假设  $H_0: S=0$ , 作线性假设条件为  $S=0$ , 或

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ S \end{bmatrix} = 0, \quad (11-3-19)$$

按(10-3-20)式, 即

$$\Omega_H = \Omega + R, \quad (11-3-20)$$

考虑(11-3-18)和(11-3-19)式知, 其中

$$\Omega = (B\hat{x} + AS - l)^T P (B\hat{x} + AS - l), \quad (11-3-21)$$

$$\Omega_H = (B\hat{x} - l)^T P (B\hat{x} - l), \quad (11-3-22)$$

及按(10-3-19)式得

$$\begin{aligned} R &= S^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \right\}^{-1} S \\ &= S^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xs} \\ Q_{sx} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \right\}^{-1} S, \end{aligned}$$

即

$$R = \hat{S}^T Q_{ss} \hat{S} = \hat{S}^T M \hat{S}. \quad (11-3-22)$$

按(10-3-21)式组成统计量

$$F = \frac{R/m}{\Omega/(n-(t+m))}, \quad (11-3-24)$$

检验统计量  $F$  的拒绝域为

$$F > F_\alpha(m, n-(t+m)).$$

若检验遭拒绝, 表明系统参数显著, 可将其作为参数列入函数模型, 否则要将  $S$  从模型中剔除。

若仅检验其中一个系统参数, 即  $H_0: S_i=0$ , 此时, 由(11-3-24)式可得

$$F_i = \frac{\hat{S}_i^T Q_{\hat{S}_i} \hat{S}_i}{\Omega/(n-(t+m))} = \frac{\hat{S}_i^2}{\hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{S}_i} \hat{S}_i} = \frac{\hat{S}_i^2}{\hat{\sigma}_{\hat{S}_i}^2} \quad (11-3-25)$$

或

$$t_i = F_{i-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{\hat{S}_i}{\hat{\sigma}_{S_i}} \quad (11-3-26)$$

此为  $t$  分布统计量，亦即可对参数  $\hat{S}_i$  用  $t$  检验法检验。

## § 11-4 最小二乘配置

以上所介绍的各种平差方法，尽管函数模型各异，但它们都有一个共同点，就是各种方法的函数模型中都只含有无先验统计信息的非随机参数。在测量实际中，有些参数在平差前就已知其期望和方差的先验信息，像这种具有先验信息的参数是随机参数。考虑附有随机参数的平差问题称为最小二乘配置或称最小二乘拟合推估。

### 一、数学模型

配置的函数模型为：

$$L = B \underset{n,1}{\bar{X}} + A \underset{n,t,1}{Y} - \underset{n,mm,1}{\Delta} \quad (11-4-1)$$

式中  $L$  为观测向量， $\bar{X}$  为非随机参数， $Y$  为随机参数。 $Y$  又可分为两种情况，一是已测点的参数，与观测值间有函数关系，用  $S$  表示，它是  $m_1 \times 1$  向量；另一种是未测点参数，用  $S'$  表示，是  $m_2 \times 1$  向量，它与观测值不发生函数关系，但  $S'$  与  $S$  统计相关，即用协方差与  $S$  相联系。故有

$$Y^T = [S^T \quad S'^T], \quad (11-4-2)$$

$$A = \underset{n,m_1}{[A_1 \quad 0]}. \quad (11-4-3)$$

且

$$R(A_1) = m_1.$$

由  $Y$  与  $\Delta$  的已知先验信息构成随机模型为

$$E(\Delta) = 0$$

$$E(Y) = \begin{bmatrix} E(S) \\ E(S') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_S \\ \mu_{S'} \end{bmatrix} \quad (11-4-5)$$

$$D(\Delta) = D_\Delta = P_\Delta^{-1} \quad (11-4-6)$$

$$D(Y) = D_Y = \begin{bmatrix} D_S & D_{SS'} \\ D_{S'S} & D_{S'} \end{bmatrix} = P_Y^{-1} \quad (11-4-7)$$

$$D(L) = D_L = P_L^{-1} \quad (11-4-8)$$

$$D(\Delta, Y) = 0, \quad D(Y, \Delta) = 0 \quad (11-4-9)$$

$$\begin{aligned} D(L) &= D(\Delta) + D(Y) \\ &= D_\Delta + [A_1 \quad 0] \begin{bmatrix} D_S & D_{SS'} \\ D_{S'S} & D_{S'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= D_\Delta + A_1 D_S A_1^T \end{aligned} \quad (11-4-10)$$

### 二、平差原理

由(11-4-1)式可得误差方程为

$$V = B\hat{X} + A\hat{Y} - L, \quad (11-4-11)$$

式中

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ \hat{S}' \end{bmatrix}. \quad (11-4-12)$$

根据最小二乘原理有

$$V^T P_{\Delta} V + V_Y^T P_Y V_Y = \min, \quad (11-4-13)$$

式中  $V$  是观测值  $L$  的改正数;  $V_Y$  是  $Y$  的先验期望  $E(Y)$  的改正数, 且

$$V_Y = \begin{bmatrix} V_S \\ V_{S'} \end{bmatrix}. \quad (11-4-14)$$

为了导出参数  $\hat{X}$  和  $Y$  的估计公式, 不妨将  $E(Y)$  看成是方差为  $D(Y)$ , 权为  $P_Y$  的虚拟观测值, 故可令

$$L_Y = \begin{bmatrix} L_S \\ L_{S'} \end{bmatrix} = E(Y) = \begin{bmatrix} E(S) \\ E(S') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_S \\ \mu_{S'} \end{bmatrix}, \quad (11-4-15)$$

并令与  $L_Y$  相对应的观测误差为

$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} \Delta_S \\ \Delta_{S'} \end{bmatrix},$$

则虚拟观测方程可写为

$$L_Y = Y - \Delta_Y = \begin{bmatrix} S \\ S' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_S \\ \Delta_{S'} \end{bmatrix}, \quad (11-4-16)$$

与  $L_Y$  相应的误差方程为

$$V_Y = \hat{Y} - L_Y. \quad (11-4-17)$$

由(11-4-11)式和(11-4-17)式可得:

$$\left. \begin{aligned} V &= B\hat{X} + A\hat{Y} - L \\ V_Y &= \hat{Y} - L_Y \end{aligned} \right\}, \quad (11-4-18)$$

利用误差方程(11-4-18)在最小二乘原理(11-4-13)式下平差, 已将配置问题转化为一般间接平差问题了, 于是可得法方程

$$\begin{bmatrix} B^T P_{\Delta} B & B^T P_{\Delta} A \\ A^T P_{\Delta} B & A^T P_{\Delta} A + P_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P_{\Delta} L \\ A^T P_{\Delta} A + P_Y L_Y \end{bmatrix}, \quad (11-4-19)$$

解之得

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P_{\Delta} B & B^T P_{\Delta} A \\ A^T P_{\Delta} B & A^T P_{\Delta} A + P_Y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B^T P_{\Delta} L \\ A^T P_{\Delta} A + P_Y L_Y \end{bmatrix}. \quad (11-4-20)$$

由(11-4-19)式的第二式得

$$\begin{aligned} (A^T P_{\Delta} A + P_Y) \hat{Y} &= A^T P_{\Delta} L + P_Y L_Y - A^T P_{\Delta} B \hat{X} \\ &= A^T P_{\Delta} (L - B\hat{X}) + P_Y L_Y, \end{aligned}$$

故有

$$\hat{Y} = (A^T P_{\Delta} A + P_Y)^{-1} A^T P_{\Delta} (L - B\hat{X}) + (A^T P_{\Delta} A + P_Y)^{-1} P_Y L_Y. \quad (11-4-21)$$

应用矩阵反演公式，并顾及  $P_Y^{-1}=D_Y$ ,  $P_\Delta^{-1}=D_\Delta$ ，即令  $\sigma_0^2=1$ ，得

$$\hat{Y}=D_Y A^T (D_\Delta + A D_Y A^T)^{-1} (L - B\hat{X}) \\ + [D_Y - D_Y A^T (D_\Delta + A D_Y A^T)^{-1} A D_Y] P_Y L_Y,$$

即

$$\hat{Y}=L_Y + D_Y A^T (D_\Delta + A D_Y A^T)^{-1} (L - B\hat{X} - A L_Y). \quad (11-4-22)$$

将(11-4-3)、(11-4-7)、(11-4-12)和(11-4-15)式代入(11-4-22)式，可得

$$\hat{S}=\mu_S + D_S A_1^T (D_\Delta + A_1 D_S A_1^T)^{-1} (L - B\hat{X} - A_1 \mu_S), \quad (11-4-23)$$

$$\hat{S}'=\mu_{S'} + D_{S'} A_1^T (D_\Delta + A_1 D_{S'} A_1^T)^{-1} (L - B\hat{X} - A_1 \mu_S). \quad (11-4-24)$$

由间接平差知：

$$\begin{bmatrix} B & A \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_\Delta & 0 \\ 0 & P_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V_Y \end{bmatrix} = 0,$$

或

$$\left. \begin{aligned} B^T P_\Delta V &= 0 \\ A^T P_\Delta V + P_Y V_Y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (11-4-25)$$

由(11-4-25)式的第二式，顾及  $D_Y=P_Y^{-1}$ ，得

$$V_Y = -D_Y A^T P_\Delta V. \quad (11-4-26)$$

将(11-4-26)式代入(11-4-18)式中的第二式，得

$$\hat{Y} = L_Y - D_Y A^T P_\Delta V, \quad (11-4-27)$$

将(11-4-27)式代入(11-4-18)式中的第一式，得

$$V = B\hat{X} + A L_Y - A D_Y A^T P_\Delta V - L,$$

或

$$(I + A D_Y A^T P_\Delta) V = B\hat{X} + A L_Y - L,$$

或

$$(D_\Delta + A D_Y A^T) P_\Delta V = B\hat{X} + A L_Y - L. \quad (11-4-28)$$

于是有

$$V = D_\Delta (D_\Delta + A D_Y A^T)^{-1} (B\hat{X} + A L_Y - L), \quad (11-4-29)$$

将(11-4-29)式代入(11-4-25)式中的第一式，得

$$B^T (D_\Delta + A D_Y A^T)^{-1} (B\hat{X} + A L_Y - L) = 0. \quad (11-4-30)$$

因为

$$\left. \begin{aligned} A D_Y A^T &= A_1 D_S A_1^T \\ A L_Y &= A_1 \mu_S \end{aligned} \right\}, \quad (11-4-31)$$

所以由(11-4-30)式可得

$$\hat{X} = [B^T (D_\Delta + A_1 D_S A_1^T)^{-1} B]^{-1} B^T (D_\Delta + A_1 D_S A_1^T)^{-1} (L - A_1 \mu_S). \quad (11-4-32)$$

(11-4-32)、(11-4-23)、(11-4-24)式就是最小二乘配置参数估计公式。

### 三、估值 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 的方差和协方差

按间接平差法， $\hat{X}$  和  $\hat{Y}$  的协方差阵为

$$\begin{bmatrix} D_X & D_{XY} \\ D_{YX} & D_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T P_\Delta B & B^T P_\Delta A \\ A^T P_\Delta B & A^T P_\Delta A + P_Y \end{bmatrix}^{-1}, \quad (11-4-33)$$

由分块矩阵求逆公式可得

$$D_X = \{B^T [P_\Delta - P_\Delta A (A^T P_\Delta A + P_Y)^{-1} A^T P_\Delta] B\}^{-1},$$

$$D_Y = (A^T P_\Delta A + P_Y)^{-1} + (A^T P_\Delta A + P_Y)^{-1} A^T P_\Delta B D_X B^T P_\Delta A (A^T P_\Delta A + P_Y)^{-1},$$

$$D_{YX} = -(A^T P_\Delta A + P_Y)^{-1} A^T P_\Delta B D_X,$$

应用矩阵反演公式, 上式为

$$D_X = [B^T (D_\Delta + A D_Y A^T)^{-1} B]^{-1} = [B^T (D_\Delta + A_1 D_S A_1^T)^{-1} B]^{-1}, \quad (11-4-34)$$

$$D_Y = D_Y - D_Y A^T (A D_Y A^T + D_\Delta)^{-1} \{I - B D_X B^T (A D_Y A^T + D_\Delta)^{-1}\} A D_Y, \quad (11-4-35)$$

$$D_{YX} = -D_Y A^T (D_\Delta + A D_Y A^T)^{-1} B D_X, \quad (11-4-36)$$

将后两式展开得

$$D_S = D_S - D_S A_1^T (A_1 D_S A_1^T + D_\Delta)^{-1} \{I - B D_X B^T (A_1 D_S A_1^T + D_\Delta)^{-1}\} A_1 D_S, \quad (11-4-37)$$

$$D_{S'} = D_{S'} - D_{S'} A_1^T (A_1 D_S A_1^T + D_\Delta)^{-1} \{I - B D_X B^T (A_1 D_S A_1^T + D_\Delta)^{-1}\} A_1 D_{S'}, \quad (11-4-38)$$

$$D_{SX} = -D_S A_1^T (A_1 D_S A_1^T + D_\Delta)^{-1} B D_X, \quad (11-4-39)$$

$$D_{S'X} = -D_{S'} A_1^T (A_1 D_S A_1^T + D_\Delta)^{-1} B D_X. \quad (11-4-40)$$

#### 四、最小二乘配置的特殊情况

在平差中, 把仅确定非随机参数  $X$  的估值方法称为最小二乘平差, 把仅确定观测点上的随机参数  $S$  的估值方法称为最小二乘滤波, 把确定非观测点上随机参数  $S'$  的估值方法称为最小二乘推估。

当配置的函数模型(11-4-1)中不含非随机参数, 即当  $B=0$  时, 就可得到滤波和推估的函数模型为

$$L = AY - \Delta. \quad (11-4-41)$$

由(11-4-22)、(11-4-23)、和(11-4-24)式, 立即可得最小二乘滤波和推估的计算公式:

$$\hat{Y} = L_Y + D_Y A^T (D_\Delta + A D_Y A^T)^{-1} (L - A L_Y), \quad (11-4-42)$$

$$\hat{S} = \mu_S + D_S A_1^T (D_\Delta + A_1 D_S A_1^T)^{-1} (L - A_1 \mu_S), \quad (11-4-43)$$

$$\hat{S}' = \mu_{S'} + D_{S'} A_1^T (D_\Delta + A_1 D_S A_1^T)^{-1} (L - A_1 \mu_S). \quad (11-4-44)$$

由(11-4-44)式可见, 虽然  $S'$  为未测点上的随机参数, 且与观测值间无函数关系, 如果已知  $S'$  与  $S$  的协方差  $D_{S'S}$ , 就可计算  $S'$  的估值  $\hat{S}'$ 。在这里也就说明了平差前了解各量之间统计相关性的重要意义。推估公式(11-4-44)在许多场合得到应用。

### § 11-5 赫尔默特方差分量估计

前已述及, 在经典平差中, 都是对单一的同类观测量进行平差, 可按第二章介绍的常用方法定权。但在有些平差问题中, 观测向量往往由不同类观测值组成, 且各类观测值的方差在平差前又未知, 这就难以准确地确定各类观测值的权。为了合理地确定各类观测值

的权, 可以利用预平差的改正数来估计各类观测值的方差因子, 然后再据此进行定权。这种通过预平差定权的方法, 称为验后方差分量估计。此概念最早由赫尔默特 (F. R. Helmert) 在 1924 年提出, 故又称赫尔默特方差分量估计方法。下面将扼要介绍赫尔默特方差分量估计。

## 一、赫尔默特方差分量估计的基本思想

设观测值  $L$  由  $m$  类不同的观测量组成, 每类观测量对应不同的方差。为简单起见, 先设  $m=2$ , 且两类观测值不相关。则间接平差的数学模型可写为:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= B_1 \hat{X} - \Delta_1 \\ L_2 &= B_2 \hat{X} - \Delta_2 \end{aligned} \right\}, \quad (11-5-1)$$

$$\left. \begin{aligned} D(L_1) &= D(\Delta_1) = \sigma_0^2 P_1^{-1} \\ D(L_2) &= D(\Delta_2) = \sigma_0^2 P_2^{-1} \\ D(L_1, L_2) &= D(\Delta_1, \Delta_2) = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11-5-2)$$

其误差方程为

$$V_1 = B_1 \hat{x} - l_1, \quad \text{权阵 } P_1 \quad (11-5-3)$$

$$V_2 = B_2 \hat{x} - l_2, \quad \text{权阵 } P_2 \quad (11-5-4)$$

对(11-5-3)和(11-5-4)式作整体平差, 其法方程为

$$N \hat{x} = W, \quad (11-5-5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} N &= N_1 + N_2, \quad N_1 = B_1^T P_1 B_1, \quad N_2 = B_2^T P_2 B_2 \\ W &= W_1 + W_2, \quad W_1 = B_1^T P_1 l_1, \quad W_2 = B_2^T P_2 l_2 \end{aligned} \right\}. \quad (11-5-6)$$

由于平差前  $D(L_1)$ 、 $D(L_2)$  一般是未知的, 设为

$$D(L_1) = \sigma_{01}^2 P_1^{-1}, \quad D(L_2) = \sigma_{02}^2 P_2^{-1} \quad (11-5-7)$$

以  $P_1$ 、 $P_2$  为权, 只有当  $\sigma_{01}^2 = \sigma_{02}^2 = \sigma_0^2$  时, 定权才正确, 由(11-5-5)式解出的  $\hat{x}$  才是最优线性无偏估计。平差时先以某种方式定初权  $P_1$ 、 $P_2$ , 此时关系式(11-5-7)成立, 进行预平差, 求出两组观测向量的改正数  $V_1$  和  $V_2$ , 并求估计量  $\hat{\sigma}_{01}^2$  和  $\hat{\sigma}_{02}^2$ , 由(11-5-7)式可求得  $\hat{D}(L_1)$  和  $\hat{D}(L_2)$ , 由这个方差估值再定权  $P_1$  和  $P_2$ , 再平差, 往而复之, 直至所求的  $\hat{\sigma}_{01}^2 = \hat{\sigma}_{02}^2$  为止。根据实测数据用统计方法定权是赫尔默特方差估计的特点。

## 二、赫尔默特方差估计公式

为了在两类观测值整体平差时用  $V_1^T P_1 V_1$  和  $V_2^T P_2 V_2$  分别估计方差分量  $\hat{\sigma}_{01}^2$  和  $\hat{\sigma}_{02}^2$ , 必须建立  $V_1^T P_1 V_1$ 、 $V_2^T P_2 V_2$  与  $\hat{\sigma}_{01}^2$ 、 $\hat{\sigma}_{02}^2$  之间的关系式, 而建立它们之间的关系式, 要用到二次型的期望。故在此不加证明地给出二次型期望公式。

设随机向量  $Y$  的方差  $D(Y) = \Sigma$ , 期望  $E(Y) = \mu$  则二次型  $Y^T M Y$  ( $M$  为二次型对称非奇异矩阵)的数学期望为



$$E(Y^TMY) = \text{tr}(M\sum) + \mu^T M \mu \quad (11-5-8)$$

残差平方和  $V_1^T P_1 V_1$  和  $V_2^T P_2 V_2$  均为二次型，而

$$\begin{aligned} E(V_1) &= E(B_1 \hat{x} - l_1) = E(B_1 \hat{x}) - E(l_1) \\ &= B_1 E(\hat{x}) - B_1 \bar{X} = 0. \end{aligned} \quad (11-5-9)$$

故有

$$E(V_1^T P_1 V_1) = \text{tr}(P_1 D(V_1)), \quad (11-5-10)$$

式中， $D(V_1)$  为改正数  $V_1$  的方差。

由误差方程(11-5-3)得

$$V_1 = (B_1 N^{-1} B_1^T P_1 - I) l_1 + B_1 N^{-1} B_2^T P_2 l_2. \quad (11-5-11)$$

应用协方差传播律得

$$\begin{aligned} D(V_1) &= (B_1 N^{-1} B_1^T P_1 - I) D(L_1) (B_1 N^{-1} B_1^T P_1 - I)^T \\ &\quad + B_1 N^{-1} B_2^T P_2 D(L_2) P_2 B_2 N^{-1} B_1^T. \end{aligned}$$

将  $D(L_1) = \sigma_{01}^2 P_1^{-1}$ ， $D(L_2) = \sigma_{02}^2 P_2^{-1}$  代入上式，经整理得

$$D(V_1) = \sigma_{01}^2 (B_1 N^{-1} N_1 N^{-1} B_1^T - 2B_1 N^{-1} B_1^T + P_1^{-1}) + \sigma_{02}^2 B_1 N^{-1} N_2 N^{-1} B_1^T.$$

将上式代入(11-5-10)式，得

$$\begin{aligned} E(V_1^T P_1 V_1) &= \text{tr}(P_1 D(V_1)) \\ &= \sigma_{01}^2 \text{tr}(P_1 P_1^{-1} - 2P_1 B_1 N^{-1} B_1^T + P_1 B_1 N^{-1} N_1 N^{-1} B_1^T) \\ &\quad + \sigma_{02}^2 \text{tr}(P_1 B_1 N^{-1} N_2 N^{-1} B_1^T). \end{aligned}$$

顾及迹的性质，上式可写为

$$\begin{aligned} E(V_1^T P_1 V_1) &= \sigma_{01}^2 [n_1 - 2\text{tr}(N_1 N^{-1}) + \text{tr}(N_1 N^{-1} N_1 N^{-1})] \\ &\quad + \sigma_{02}^2 \text{tr}(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}). \end{aligned} \quad (11-5-12)$$

同理可得

$$\begin{aligned} E(V_2^T P_2 V_2) &= \sigma_{01}^2 \text{tr}(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}) \\ &\quad + \sigma_{02}^2 [\text{tr}(n_2 - 2\text{tr}(N_2 N^{-1}) + \text{tr}(N_2 N^{-1} N_2 N^{-1}))] \end{aligned} \quad (11-5-13)$$

去掉上两式中的期望符号，并将  $\sigma_{0i}^2$  改为相应的估值  $\hat{\sigma}_{0i}^2$ ，得

$$\begin{aligned} &[n_1 - 2\text{tr}(N_1 N^{-1}) + \text{tr}(N_1 N^{-1} N_1 N^{-1})] \hat{\sigma}_{01}^2 + \text{tr}(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}) \hat{\sigma}_{02}^2 = V_1^T P_1 V_1 \\ &\text{tr}(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}) \hat{\sigma}_{01}^2 + [n_2 - 2\text{tr}(N_2 N^{-1}) + \text{tr}(N_2 N^{-1} N_2 N^{-1})] \hat{\sigma}_{02}^2 = V_2^T P_2 V_2 \end{aligned} \quad (11-5-14)$$

其矩阵形式可写成

$$\begin{matrix} S & \hat{\theta} = W_{\theta} \\ \begin{matrix} 2,2 & 2,1 \\ 2,1 & 2,1 \end{matrix} & \end{matrix} \quad (11-5-15)$$

式中

$$S = \begin{bmatrix} n_1 - 2\text{tr}(N_1 N^{-1}) + \text{tr}(N_1 N^{-1} N_1 N^{-1}) & \text{tr}(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}) \\ \text{tr}(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}) & n_2 - 2\text{tr}(N_2 N^{-1}) + \text{tr}(N_2 N^{-1} N_2 N^{-1}) \end{bmatrix} \quad (11-5-16)$$

$$\hat{\theta} = [\hat{\sigma}_{01}^2 \quad \hat{\sigma}_{02}^2]^T$$

$$W_{\theta} = [V_1^T P_1 V_1 \quad V_2^T P_2 V_2]^T$$

(11-5-15)式即为赫尔默特方差估计的严密公式。

现将以上推导扩展至  $m$  组观测值情形。误差方程为

$$V_i = B_i \hat{x} - l_i \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (11-5-17)$$

令

$$\begin{aligned} D(L_i) &= \sigma_{0i}^2 P_i^{-1}, \\ N_i &= B_i^T P_i B_i, \quad N = \sum_{i=1}^m N_i \\ W_i &= B_i^T P_i l_i, \quad W = \sum_{i=1}^m W_i \end{aligned}$$

则得参数估值为

$$\hat{x} = N^{-1}W. \quad (11-5-18)$$

按上述类似推导, 可得  $V_i^T P_i V_i$  的期望为

$$\begin{aligned} E(V_i^T P_i V_i) &= [n_i - 2tr(N_i N^{-1}) + tr(N_i N^{-1} N_i N^{-1})] \sigma_{0i}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1, j \neq i}^m tr(N_i N^{-1} N_j N^{-1}) \sigma_{0j}^2. \end{aligned} \quad (11-5-19)$$

去掉期望, 并用  $\hat{\sigma}_{0i}^2$  代替  $\sigma_{0i}^2$ , 得线性对称方程组为

$$S \hat{\theta} = W_\theta, \quad (11-5-20)$$

式中

$$S = \begin{bmatrix} n_1 - 2tr(N_1 N^{-1}) + tr(N_1 N^{-1} N_1 N^{-1}) & tr(N_1 N^{-1} N_2 N^{-1}) & \dots & tr(N_1 N^{-1} N_m N^{-1}) \\ \text{对称} & n_2 - 2tr(N_2 N^{-1}) + tr(N_2 N^{-1} N_2 N^{-1}) & \dots & tr(N_2 N^{-1} N_m N^{-1}) \\ & & \dots & \\ & & & n_m - 2tr(N_m N^{-1}) + tr(N_m N^{-1} N_m N^{-1}) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\theta} = [\hat{\sigma}_{01}^2 \quad \hat{\sigma}_{02}^2 \quad \dots \quad \hat{\sigma}_{0m}^2]^T$$

$$W_\theta = [V_1^T P_1 V_1 \quad V_2^T P_2 V_2 \quad \dots \quad V_m^T P_m V_m]^T.$$

因为  $S$  非奇异, 所以(11-5-20)式的解为

$$\hat{\theta} = S^{-1}W_\theta.$$

### 三、赫尔默特方差分量估计的近似公式

由(11-5-20)式知, 严密赫尔默特方差分量估计公式非常复杂, 要进行大量的多个矩阵连乘后求迹的运算, 当控制网较大时, 多个大型矩阵连乘既费时, 又占内存。所以, 多年来人们提出了大量的近似公式, 下面介绍使用较多的两个近似公式。

#### 1. Förstner 公式

在严密公式(11-5-19)中, 若令

$$\sigma_{01}^2 = \sigma_{02}^2 = \dots = \sigma_{0m}^2 = \sigma_0^2 \quad (11-5-21)$$

则有

$$E(V_i^T P_i V_i) = [n_i - 2tr(N_i N^{-1}) + tr(N_i N^{-1} (\sum_{j=1}^m N_j) N^{-1})] \sigma_0^2$$

$$\begin{aligned}
&= [n_i - 2tr(N_i N^{-1}) + tr(N_i N^{-1} N N^{-1})] \sigma_{0i}^2 \\
&= [n_i - tr(N_i N^{-1})] \sigma_{0i}^2 \quad (i=1, 2)
\end{aligned}
\tag{11-5-22}$$

去掉期望, 再用  $\hat{\sigma}_{0i}^2$  代替  $\sigma_{0i}^2$ , 得

$$\hat{\sigma}_{0i}^2 = \frac{V_i^T P_i V_i}{n_i - tr(N_i N^{-1})}, \tag{11-5-23}$$

令

$$r_i = n_i - tr(N_i N^{-1}), \tag{11-5-24}$$

$r_i$  称为第  $i$  类观测值的多余观测分量, 则有

$$\hat{\sigma}_{0i}^2 = \frac{V_i^T P_i V_i}{r_i}. \tag{11-5-25}$$

## 2. Welsch 公式

在(11-5-23)式中, 略去分母的第二项, 得

$$\hat{\sigma}_{0i}^2 = \frac{V_i^T P_i V_i}{n_i}. \tag{11-5-26}$$

上式是 Welsch 提出使用的近似公式。

## § 11-6 粗差检验的数据探测法

粗差作为一种误差来源, 在许多情况下, 只要小心谨慎地工作, 采取适当方法和观测措施, 是可以避免的。但在现代化的测量数据采集传输和自动化处理过程中, 由于种种原因可能产生粗差。如果不及时处理粗差, 将使平差结果受到严重的歪曲。为此, 从 60 年代起, 对粗差的研究一直是误差理论中的重要课题之一。

荷兰巴尔达教授(Baarda)在 1967~1968 年的著作中提出了测量可靠性理论和数据探测方法(参考文献[31]和[32]), 奠定了粗差理论研究的发展基础。

巴尔达提出的数据探测法, 前提是一个平差系统只存在一个粗差, 用统计假设检验探测粗差, 从而剔除被探测的粗差。数据探测法已广泛应用于测量平差中。

设观测值  $l$  的平差改正数为  $V$ , 现以间接平差为例说明数据探测的原理。误差方程为

$$V = B\hat{x} - l, \tag{11-6-1}$$

或

$$V = B(\hat{x} - \tilde{x}) - (l - B\tilde{x}),$$

将

$$\hat{x} = N^{-1}B^T P l, \quad \Delta = B\tilde{x} - l$$

代入上式得

$$\begin{aligned}
V &= B(N^{-1}B^T P l - N^{-1}B^T P B\tilde{x}) + \Delta \\
&= B N^{-1}B^T P (l - B\tilde{x}) + \Delta \\
&= (I - B N^{-1}B^T P) \Delta \\
&= R \Delta.
\end{aligned}
\tag{11-6-2}$$

这是  $V$  与  $\Delta$  的关系式,  $R$  是一个常数矩阵, 两边求数学期望得

$$E(V) = RE(\Delta), \quad (11-6-3)$$

由此式可见, 当  $\Delta$  仅是偶然误差, 不含粗差时,  $E(\Delta) = 0$ , 故  $E(V) = 0$ 。V 是  $\Delta$  的线性函数, V 与  $\Delta$  的概率分布相同, 因此当  $\Delta$  是偶然误差时, V 为正态随机向量, 其期望为零, 方差  $D(V) = \sigma_0^2 Q_{VV}$ 。

数据探测法的原假设是  $H_0: E(V_i) = 0$ , 即观测值  $L_i$  不存在粗差, 考虑  $V_i \sim N(0, \sigma_0^2 Q_{V_i V_i})$ , 于是可作标准正态分布统计量

$$u = \frac{V_i}{\sigma_0 \sqrt{Q_{V_i V_i}}} = \frac{V_i}{\sigma_{V_i}} \quad (11-6-4)$$

作正态  $u$  检验, 如果

$$|u| > u_{\alpha/2}$$

则否定  $H_0$ , 亦即  $E(V_i) \neq 0$ ,  $L_i$  可能存在粗差。

利用数据探测法, 一次只能发现一个粗差, 当要再次发现另一粗差时, 就要先剔除所发现的粗差, 重新平差, 计算统计量, 逐次不断进行, 直至不再发现粗差。

数据探测法的优点是计算方便、实用, 已普遍用于平差计算中。但由于每次只考虑一个粗差, 并未顾及各改正数之间的相关性, 检验可靠性受到一定的限制。

## § 11-7 稳健估计概论

对粗差的处理, 目前有两种基本途径。一种是将粗差归入函数模型, 在未正式进行最小二乘平差之前设法探测和定位粗差。然后剔除含粗差的观测值, 从而得到一组较净化的观测值。最后, 再用这组较净化的观测值进行正式的最小二乘平差。上节介绍的数据探测法就属于这种方法。

另一种途径是将粗差归于随机模型, 然后寻找一些既能自动抗拒粗差的影响, 又基本上具备经典最优估计的一些优良的统计特性的估计方法。稳健(Robust)估计, 就是这种途径的一种有效方法。

稳健估计的思想很早就已萌芽, 但真正引起人们的重视还是始于本世纪 60 年代。其理论体系系统化还是近十来年的事。

稳健估计是针对最小二乘估计不具备抗干扰性这一缺陷提出的。其目的在于构造某种估计方法, 使其对粗差具有一定的抵抗能力, 即具有下述特点:

1. 在假定模型正确时, 所估计的参数具有良好的性质, 是接近最优的。
2. 当实际模型与假定模型差异较小时, 所估计的参数变化也较小。
3. 当实际情况偏离假定模型较大时, 所估计的参数也不会变得太差。

前两个特点是要求稳健估计在假定模型正确或假定模型略有偏离时对所估计的参数影响较小, 这就能保证我们的模型只是近似正确。例如含有少量粗差时, 这个估计方法是比较好的, 从而能得到比较正确的结果。而保证这两个特点的代价是, 在假定模型正确时, 所获得的估计结果不是最优的, 只是接近最优的。第三个特点可以防止某些相当坏的情况, 估

计结果也不会变得太坏。可见稳健就是实际情况偏离假定模型的不敏感性。如果一个估计方法，在实际情况与假定模型相差较小时，其性能变化也较小，则称它是稳健的。

稳健估计的具体方法很多，本节只作一般介绍。

设有误差方程为

$$V = B \underset{n,1}{\hat{x}} - \underset{n,1}{l} \quad (11-7-1)$$

假定为等权观测，若不等权则可转化为等权观测。稳健估计的原则是

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \sum_{i=1}^n \rho(b_i \hat{x} - l_i) = \min \quad (11-7-2)$$

此处，令

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

即  $b_i$  为  $B$  阵中第  $i$  行向量。最小二乘估计，可理解为  $\rho(v_i) = v_i^2$ ，由于  $v^2$  随  $v$  的增加而迅速增大且无限，所以最小二乘估计不具有稳健性。为使估计稳健化，要求能控制奇异值对解的影响，寻求增长速度缓慢的有界函数作为极值函数。例如选取  $\rho(V) = |V|$ ，即一次范数最小，就是一种稳健估计的极值函数。选取不同的极值函数，就会得出不同稳健程度的估计值。

稳健估计是一种求非线性方程的极值解，为了利用最小二乘估计的计算方法，出现了一种迭代权函数法，本节仅介绍这种解法。

以一次范数最小估计为例，说明这种方法。

极值函数为

$$\sum \rho(v_i) = \sum |v_i| = \min. \quad (11-7-3)$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \sum |v_i| = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \sum \sqrt{v_i^2} = \sum (v_i^2)^{-\frac{1}{2}} v_i \frac{\partial v_i}{\partial \hat{x}} = 0,$$

考虑

$$v_i = b_i \hat{x} - l_i,$$

则上式为

$$\sum \frac{v_i b_i}{|v_i|} = 0, \quad (11-7-4)$$

或

$$\sum \frac{b_i^T v_i}{|v_i|} = 0, \quad (11-7-5)$$

令权函数

$$W = \text{diag} \left[ \frac{1}{|v_1|} \quad \frac{1}{|v_2|} \quad \cdots \quad \frac{1}{|v_n|} \right], \quad (11-7-6)$$

则(11-7-5)式为

$$\sum b_i^T W_i v_i = B^T W V = 0. \quad (11-7-7)$$

将  $W$  视为间接平差的权阵, 上式相当于法方程。但  $W$  为改正数  $V$  的函数, 其确定必须通过迭代运算。

定权时, 为了避免因  $v=0$  而出现的计算问题, 可取

$$W_i = \frac{1}{|v_i| + c}. \quad (11-7-8)$$

综上所述, 一次范数最小估计的步骤是:

1. 列出误差方程(11-7-1);
2. 令  $P_1 = P_2 = \cdots P_n = 1$ , 组成法方程

$$B^T B \hat{x} = B^T l;$$

3. 计算  $\hat{x}$  和改正数  $v$ ;
4. 计算权函数  $W_1, W_2, \cdots W_n$ ;
5. 组成法方程

$$B^T W B \hat{x} = B^T W l;$$

6. 再计算  $\hat{x}$  和  $v$ , 再定权函数  $W$ ;

7. 同上述步骤进行迭代, 直至两次迭代权函数之差小于限值为止, 最后求得  $\hat{x}$ , 为其稳健估计结果。

稳健估计方法最常用的有 Huber 估计法、丹麦法、周江文法以及李德仁法等等, 这些方法都具有各自的稳健估计函数和权函数, 读者可查阅有关参考书。

## 参考文献

- [1] 武汉测绘学院测量平差编写组. 测量平差. 测绘出版社, 1959
- [2] 武汉测绘学院最小二乘法教研组. 最小二乘法. 中国工业出版社, 1961
- [3] 武汉测绘学院大地测量系. 测量平差基础. 测绘出版社, 1978
- [4] 崔希璋, 陶本藻. 矩阵在测量中的应用. 测绘出版社, 1980
- [5] 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 刘大杰. 广义测量平差. 测绘出版社, 1982
- [6] 於宗俦, 鲁林成主编. 测量平差基础 (增订本). 测绘出版社, 1983
- [7] 高士纯, 于正林. 测量平差基础习题集. 测绘出版社, 1983
- [8] 陶本藻. 自由网平差与变形分析. 测绘出版社, 1984
- [9] 吴俊昶, 刘大杰. 控制网测量平差. 测绘出版社, 1985
- [10] 任慧龄. 测量平差基础自学指导. 测绘出版社, 1985
- [11] 於宗俦, 于正林. 测量平差原理. 武汉测绘科技大学出版社, 1990
- [12] 王新洲. 测量平差. 水利电力出版社, 1991
- [13] 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 刘大杰, 于正林. 广义测量平差 (第二版). 1992
- [14] 陶本藻. 测量数据统计分析. 测绘出版社, 1992
- [15] 李庆海, 陶本藻. 概率统计原理和在测量中的应用. 测绘出版社, 1982, 增订本 1992
- [16] 於宗俦, 陶本藻, 刘大杰, 张方仁, 于正林. 平差模型误差理论及其应用论文集. 测绘出版社, 1993
- [17] 游祖吉, 樊功瑜. 测量平差教程. 测绘出版社, 1991
- [18] 李德仁. 误差处理和可靠性理论. 测绘出版社, 1988
- [19] 黄维彬. 近代平差理论及其应用. 解放军出版社, 1992
- [20] H. Wolf 著, 方佩竹译. 平差计算 (实用公式). 测绘出版社, 1985
- [21] H. Wolf 著, 方佩竹译. 平差计算 (习题题解). 测绘出版社, 1985
- [22] Edward M. Mikhail, Gordon Gracie 著, 游祖吉、鲁林成、吴俊昶等译. 测量数据分析与平差. 测绘出版社, 1987
- [23] Moritz. H.. *Least-squares Estimation in Physical Geodesy*. Deut. Komm., A, 69, 1970
- [24] Moritz, H.. *Least-squares Collocation*. Deut. Komm., A, 75, 1973
- [25] A. Bjerhammar. *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*. New York, 1973
- [26] E. M. Mikhail, F. Ackermann. *Observations and Least Squares*. New York, 1976
- [27] E. M. Mikhail, G. Gracie. *Analysis and Adjustment of Survey Measurements*. New York, 1981
- [28] P. J. Huber. *Robust Statistics*. Wiley, New York, 1981
- [29] P. Meissl. *Least Squares Adjustment a Modern Approach*. Technischen Universität Czaz, 1982
- [30] K. R. Koch. *Parameter Estimation and Hypothesis Testing Linear Models*. Springer-Verlag, 1980
- [31] Baarda, W.. *Statistical Concepts in Geodesy*. Netherlands Geodetic Commission, New Series Vo. 12, No. 4, Delft 1967
- [32] Baarda, W.. *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, No. 5, Delft, 1968