
提供各种书籍的pd电子版代找服务，如果你找不到自己想要的书的pdf电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系QQ2028969416.

PDF代找说明：

本人可以帮助你找到你要的PDF电子书，计算机类，文学，艺术，设计，医学，理学，经济，金融，等等。质量都很清晰，而且每本100%都带书签索引和目录，方便读者阅读观看，只要您提供给我书的相关信息，一般我都能找到，如果您有需求，请联系我QQ2028969416。

本人已经帮助了上万人找到了他们需要的PDF，其实网上有很多PDF,大家如果在网上不到的话，可以联系我QQ，大部分我都可以找到，而且每本100%带书签索引目录。因PDF电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

声明：本人只提供代找服务，每本100%索引书签和目录，因寻找pdf电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因PDF产生的版权纠纷，本人概不负责，我们仅仅只是帮助你寻找到你要的pdf而已。

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I

Л. Д. ЛАНДАУ

Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА

朗道

《理论物理学教程》解读丛书

朗道《力学》解读

鞠国兴 编著

高等教育出版社

朗道和栗弗席兹的《理论物理学教程》(共十卷)是国际公认的一套著名的物理学经典教材,以其内容广博、讲解精炼、方法独特等优点著称。《教程》对物理学各学科的基本原理、基础理论和应用等方面进行了认真、细致地梳理,精心选材和组织材料,试图将从事理论物理所必需的物理学基础知识纳入一个统一的框架,其中特别包含了作者在相关领域的许多重要研究成果。《教程》从出版至今赢得了广泛的好评,成为物理学工作者案头常备的参考书,在物理学以及相关领域也是经常引用的重要参考文献。

本书是为学习《理论物理学教程》第一卷《力学》所编写的辅导书,是作者在广泛调研相关文献资料和在南京大学匡亚明学院多年从事理论力学课程教学的基础之上完成的。书中每节包含《教程》对应节的内容提要、内容补充和习题解答三个部分:

内容提要部分概括了力学中的基本方法、基本原理和重要的结论;内容补充部分包括对基本概念、基本方法的详细讨论,一些结论的完整导出过程和补充说明,方法和结论在其它问题中的一些应用,与物理学相关进展之间的联系等;习题解答部分给出《力学》中原有习题的详细求解过程,并补充了一些习题以说明相关概念、方法等。书中还讨论了一些问题的矢量力学处理方法,注意到了力学与非线性物理、量子力学等其它物理学分支学科之间的一些关联性。特别是,为了方便读者深入学习和理解有关内容,书中列出了许多参考文献。

本书可作为理工类院校物理专业或相关专业的学生学习理论力学课程的参考书,也可供大专院校物理教师以及物理学研究工作者参考。



本书微信、微博



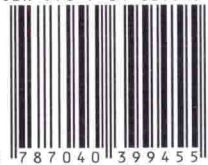
微信号: ldjjhwxx



@朗道集结号

学科类别: 物理

ISBN 978-7-04-039945-5



9 787040 399455 >

定价 59.00元

academic.hep.com.cn

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I

Л. Д. ЛАНДАУ

Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА

《理论物理学教程》解读丛书

LANGDAO LIXUE JIEDU

朗道《力学》解读

鞠国兴 编著

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

朗道《力学》解读 / 鞠国兴编著. — 北京: 高等教育出版社, 2014.7

ISBN 978-7-04-039945-5

I. ①朗… II. ①鞠… III. ①力学 - 高等学校 - 教学参考资料 IV. ①O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 103740 号

策划编辑 王 超
责任校对 刘丽娴

责任编辑 王 超
责任印制 毛斯璐

封面设计 王 洋

版式设计 余 杨

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京中科印刷有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16
印 张 25
字 数 400 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2014 年 7 月第 1 版
印 次 2014 年 7 月第 1 次印刷
定 价 59.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 39945-00

前言

朗道和栗弗席兹的《理论物理学教程》是国际公认的一套著名的物理学经典教材,以其内容广博、讲解精炼、方法独特等优点著称。《教程》对物理学各学科的基本原理、基础理论和应用等方面进行了认真、细致地梳理,精心选材和组织材料,试图将从事理论物理所必需的物理学基础知识纳入一个统一的框架,其中特别包含了作者在相关领域的许多重要研究成果。《教程》从出版至今赢得了广泛的好评,成为物理学工作者案头常备的参考书,在物理学以及相关领域也是经常引用的重要参考文献。该《教程》自出版以来先后多次修订,同时也已出版或正在出版包括英文、中文等多种文字的译本,已经并仍将惠及众多的物理学工作者或相关领域的学者。

也正因为上述特点,要系统地学习《教程》,准确理解《教程》中所涉及的诸多物理原理,深刻领会其物理实质,掌握处理问题的方法、技巧,充分欣赏作者的意图,读者非具备扎实的专业基础知识、广博的知识面、足够的耐心和毅力不可。

经典力学是学习近代物理的重要基础,它为近代物理提供了重要的理论背景,处理问题的基本框架、方法和工具。《力学》作为《教程》的第一卷,无疑是为学习后面其它各卷作引导的。但是,通常认为《力学》是面向研究生的经典力学教材,需要具备一定的力学和理论力学方面的基础。特别是,《力学》以分析力学内容为主,以变分原理作为出发点,通过空间的各向同性和均匀性作为基本假设,由此导出基本的动力学方程。起点高,内容精炼,在很小的篇幅中浓缩了力学的基本原理和许多具体应用(除了混沌等非线性内容外)。遗憾的是,国内研究生阶段不再开设经典力学方面的课程,因此谈起《力学》常常是将其作为本科生理论力学课程的参考书,本科生研读《力学》时遇到的困难不言而喻。

作者最早接触《力学》一书是在二十多年前,当时是出于讲授理论力

学课程的需要,针对教学中的特定问题阅读了其中的相关章节。近年来,为了强化学生的专业基础,特别是为针对学生学习理论课程时不太愿意花较多的时间重复理论推导过程这种比较普遍的倾向,对教学环节作了一些调整。教学中,除了选读常规教学参考书之外,我们特别将研读经典名著作为课程教学的一个基本组成部分,选定《力学》作为理论力学课程的必读著作。要求学生以小组为单位,重复著作中的每一个细节,并将过程(包括存在的疑问)等整理成文作为课外作业的一部分。在此背景下,为有效地掌握学生的情况和考察实际完成的效果,作者开始从头至尾按部就班地系统研读《力学》。根据对《力学》的理解,所参阅的文献以及学生提出的问题等,作者以问题解答的形式编写了一个电子文稿,在课程结束后散发给学生,这个文稿就是本书的雏形。后来应高等教育出版社的约请,参与了《力学》中文本的译校工作。为保证译文的准确性,在以前工作的基础之上,作者不仅多次反复阅读原著,而且又广泛调研和研读了相关的文献,由此对《力学》内容的精练性,选材的独特性,处理方法的广泛适用性等有了更为深刻的认识和理解,充分享受到经典名著的独特魅力。往往一个小节,看上去是处理一个特定的力学问题,但是其蕴含的思想方法可以适用于多个问题,可以推广到量子理论等其它物理学学科,有些结果甚至在不同问题中有较广的适用性。为了与读者分享这种学习、思考的结果,也为了在一定程度上弥补前面提到因为起点高,技巧性强等对初学者造成的研读费力,进度缓慢,演算过程难以重复等方面的欠缺,作者不揣冒昧尝试搭建这样的桥梁。在原有稿件的基础之上,作者对内容作了大幅度的扩充,编写了这本参考书。

本书按原书章节编排,每节中一般分为内容提要,内容补充和习题解答三个部分。内容提要部分扼要概括所讨论的问题的基本要点,内容补充部分包括过程推导,补充说明,内容扩展和引申等,习题解答将给出原例题中的详细求解过程,同时也补充了一些习题以说明相关概念、方法等。需要说明的是,出于完整性的考虑,有些习题的求解过程部分重复了原书的内容,而对于不需要作补充的习题一概省略。书中内容充分吸收了文献中的一些成果,在相关地方列出参考文献,当然也包括本书作者的一些学习心得和体会。凡原书公式和图形标号前均附加字母 o (original),以示区别。考虑到矢量力学方法相比于分析力学方法有相对较好的直观性,在个别地方增加了这种处理方法。另外,也注意到了力学与量子力学之间的一些关联性,但对此不作具体讨论仅列出有关文献供参考。

感谢卢德馨教授,从他关于研究型教学的研究和实施,相关的著作以及与他多次的讨论,作者受益匪浅。感谢我的妻子张志洁多年来对我的工

作的理解和大力支持。对刘寄星教授、金国钧教授多年来的帮助和鼓励也表示衷心的感谢。感谢高等教育出版社自然科学学术著作分社编辑王超先生的大力帮助(该书的写作最早也是由他提议的)。

解读经典著作对作者而言是一件诚惶诚恐的事情,限于作者的水平,错误和不当之处在所难免,欢迎同行专家和读者批评指正,并期望在再版时予以改正。作者邮箱: jugx@nju.edu.cn

鞠国兴 谨识

2013年9月于南京大学物理学院

版本说明

20 世纪 30 年代,在哈尔科夫 (Khar'kov) 工作期间,朗道 (L. D. Landau, 1908—1968) 就计划编写一套教材,为理论物理工作者提供必备的基础知识。30 年代后期,朗道开始实施这项计划,这就是著名的《理论物理学教程》。经过朗道以及栗弗席兹 (E. M. Lifshitz, 1915—1985),皮塔耶夫斯基 (L. P. Pitaevskii, 1933—) 等朗道学派的物理学家的通力合作,历时 40 余年,直到 1979 年第十卷《物理动理学》的出版才标志着整个教程的全部完成。此后,教程的体系没有变化,仅对部分内容作了修订,这就是我们现今广泛使用的版本。

《理论物理学教程》第一卷是《力学》,主要介绍力学的基础,首次成稿于 1938 年,当时是与皮亚季戈尔斯基 (L. Pyatigorsky, 1909—1993) 合著的,于 1940 年由国立技术和理论文献出版社出版。该版全书共六章计 63 节,另外包含序言以及一个关于张量代数的附录,篇幅与后来的各个版本大致相当。1937 年,朗道与皮亚季戈尔斯基因为所谓“技术物理所反革命事件”而失和^①,整个教程的写作也因此事件以及其他相关原因受到影响。此后,朗道改与栗弗席兹合作进行教程的写作。1957 年,由国立物理数学书籍出版社出版《力学》新版第一版。与 1940 年的版本相比,新版在内容和体系方面均作了大幅度的调整,即使保留下来的章节也做了大量修改甚至完全重写,全书改为七章 50 节,不再包括序言和附录。1965 年出版第二版,与第一版相比内容体系均没有变化。1973 年出版第三版,皮塔耶夫斯基参与了修订工作,全书变为七章 52 节,与第二版相比主要是将第 50 节扩展为三节。1985 年栗弗席兹去世后,于 1988 年以及 2004 年分别出版了第四和第五版,这些版本经由皮塔耶夫斯基修订,但基本上是第三版的重印,仅是修订了印刷错误以及少量的文字。第五版另外将 1940 版本朗道所写序言

^① 参见刘寄星先生为《统计物理学 I》(第五版)中译本 2012 年第二次印刷本所写版本说明以及 I. Hargittai, Struct Chem, 19(2008)373–376。

附于书后。

《理论物理学教程》的完整英译工作于 1951 年由美国物理学家 M. Hamermesh (1915—2003) 启动, 后来由天体物理学家和翻译家 J. B. Skyes (1929—1993) 等接任并完成。但是, 1938 年 Clarendon 出版公司出版了《统计物理》的初版, 由 D. Shoenberg 翻译, 是教程中最早的英译本^①。《力学》英文第一版于 1960 年出版, 由 J. B. Skyes 和物理学家 J. S. Bell (1928—1990) 翻译, 后者是量子力学中 Bell 不等式的提出者。英文版中增加了朗道小传。1969 年第二版, 1976 年第三版, 分别据俄文相应版本翻译。书前附有栗弗席兹为朗道文集俄文版所写的朗道小传, 介绍了他的家庭情况, 学习和研究经历以及对物理学的重要贡献。

《力学》中译本第一版是由莫斯科大学物理系四年级中国留学生根据 1958 年俄文第一版进行翻译的, 于 1959 年由当时的高等教育出版社出版。其后该书各版一直没有中译本, 直到 2006 年高等教育出版社重新启动《理论物理学教程》的引进翻译工作。2007 年根据俄文第五版翻译出版了《力学》新的译本, 2010 年对该中译本进行修订重新印刷发行。

^① 1958 年第一版英译本由 E. Peierls 和 R. F. Peierls 夫妇翻译, 1969 年英译第二版, 1980 年的英译第三版均由 J. B. Skyes 和 M. J. Kearsley 翻译。

目 录

| | | |
|------|-------------|----|
| 第一章 | 运动方程 | 1 |
| §1 | 广义坐标 | 1 |
| §1.1 | 内容提要 | 1 |
| §1.2 | 内容补充 | 2 |
| §2 | 最小作用量原理 | 5 |
| §2.1 | 内容提要 | 5 |
| §2.2 | 内容补充 | 6 |
| §3 | 伽利略相对性原理 | 9 |
| §3.1 | 内容提要 | 9 |
| §3.2 | 内容补充 | 10 |
| §4 | 自由质点的拉格朗日函数 | 13 |
| §4.1 | 内容提要 | 13 |
| §4.2 | 内容补充 | 13 |
| §5 | 质点系的拉格朗日函数 | 14 |
| §5.1 | 内容提要 | 14 |
| §5.2 | 内容补充 | 14 |
| §5.3 | 习题解答 | 15 |
| 第二章 | 守恒定律 | 24 |
| §6 | 能量 | 24 |
| §6.1 | 内容提要 | 24 |
| §6.2 | 内容补充 | 25 |
| §6.3 | 补充习题 | 29 |

| | |
|------------------------------|-----------|
| §7 动量 | 32 |
| §7.1 内容提要 | 32 |
| §7.2 内容补充 | 33 |
| §7.3 习题解答 | 34 |
| §8 质心 | 37 |
| §8.1 内容概要 | 37 |
| §8.2 内容补充 | 38 |
| §8.3 习题解答 | 39 |
| §9 角动量 | 41 |
| §9.1 内容概要 | 41 |
| §9.2 内容补充 | 41 |
| §9.3 习题解答 | 46 |
| §10 力学相似性 | 50 |
| §10.1 内容概要 | 50 |
| §10.2 内容补充 | 50 |
| §10.3 习题解答 | 51 |
| 第三章 运动方程的积分 | 53 |
| §11 一维运动 | 53 |
| §11.1 内容提要 | 53 |
| §11.2 内容补充 | 54 |
| §11.3 习题解答 | 54 |
| §12 根据振动周期确定势能 | 58 |
| §12.1 内容提要 | 58 |
| §12.2 内容补充 | 59 |
| §13 约化质量 | 63 |
| §13.1 内容提要 | 63 |
| §13.2 习题解答 | 63 |
| §14 有心力场内的运动 | 65 |
| §14.1 内容提要 | 65 |
| §14.2 内容补充 | 66 |
| §14.3 习题解答 | 75 |
| §15 开普勒问题 | 84 |
| §15.1 内容提要 | 84 |

| | |
|-----------------|------------|
| §15.2 内容补充 | 85 |
| §15.3 习题解答 | 97 |
| 第四章 质点碰撞 | 104 |
| §16 质点分裂 | 104 |
| §16.1 内容提要 | 104 |
| §16.2 内容补充 | 106 |
| §16.3 习题解答 | 107 |
| §17 质点弹性碰撞 | 110 |
| §17.1 内容提要 | 110 |
| §17.2 内容补充 | 111 |
| §17.3 习题解答 | 114 |
| §18 质点散射 | 115 |
| §18.1 内容提要 | 115 |
| §18.2 内容补充 | 116 |
| §18.3 习题解答 | 118 |
| §19 卢瑟福公式 | 125 |
| §19.1 内容提要 | 125 |
| §19.2 内容补充 | 125 |
| §19.3 习题解答 | 128 |
| §20 小角度散射 | 131 |
| §20.1 内容提要 | 131 |
| §20.2 内容补充 | 132 |
| §20.3 习题解答 | 132 |
| 第五章 微振动 | 136 |
| §21 一维自由振动 | 136 |
| §21.1 内容提要 | 136 |
| §21.2 习题解答 | 137 |
| §22 强迫振动 | 142 |
| §22.1 内容提要 | 142 |
| §22.2 内容补充 | 143 |
| §22.3 习题解答 | 144 |

| | |
|------------------|------------|
| §23 多自由度系统振动 | 150 |
| §23.1 内容提要 | 150 |
| §23.2 内容补充 | 151 |
| §23.3 习题解答 | 155 |
| §24 分子振动 | 162 |
| §24.1 内容提要 | 162 |
| §24.2 内容补充 | 162 |
| §24.3 习题解答 | 163 |
| §25 阻尼振动 | 171 |
| §25.1 内容提要 | 171 |
| §25.2 内容补充 | 173 |
| §26 有摩擦的强迫振动 | 174 |
| §26.1 内容提要 | 174 |
| §26.2 内容补充 | 175 |
| §26.3 习题解答 | 179 |
| §27 参变共振 | 180 |
| §27.1 内容提要 | 180 |
| §27.2 内容补充 | 181 |
| §27.3 习题解答 | 187 |
| §28 非简谐振动 | 187 |
| §28.1 内容提要 | 187 |
| §28.2 内容补充 | 188 |
| §29 非线性振动中的共振 | 199 |
| §29.1 内容提要 | 199 |
| §29.2 内容补充 | 201 |
| §29.3 习题解答 | 206 |
| §30 快速振动场中的运动 | 209 |
| §30.1 内容提要 | 209 |
| §30.2 内容补充 | 210 |
| §30.3 习题解答 | 217 |
| 第六章 刚体的运动 | 221 |
| §31 角速度 | 221 |
| §31.1 内容提要 | 221 |

| | |
|----------------|-----|
| §31.2 内容补充 | 222 |
| §32 惯量张量 | 223 |
| §32.1 内容提要 | 223 |
| §32.2 内容补充 | 224 |
| §32.3 习题解答 | 226 |
| §33 刚体角动量 | 236 |
| §33.1 内容提要 | 236 |
| §33.2 内容补充 | 237 |
| §34 刚体运动方程 | 239 |
| §34.1 内容提要 | 239 |
| §34.2 内容补充 | 240 |
| §35 欧拉角 | 242 |
| §35.1 内容提要 | 242 |
| §35.2 内容补充 | 243 |
| §35.3 习题解答 | 244 |
| §36 欧拉方程 | 254 |
| §36.1 内容提要 | 254 |
| §36.2 内容补充 | 254 |
| §36.3 补充习题 | 255 |
| §37 非对称陀螺 | 257 |
| §37.1 内容提要 | 257 |
| §37.2 内容补充 | 257 |
| §37.3 习题解答 | 262 |
| §38 刚体的接触 | 266 |
| §38.1 内容提要 | 266 |
| §38.2 内容补充 | 267 |
| §38.3 习题解答 | 271 |
| §39 非惯性参考系中的运动 | 278 |
| §39.1 内容提要 | 278 |
| §39.2 内容补充 | 279 |
| §39.3 习题解答 | 279 |

| | |
|-----------------------|-----|
| 第七章 正则方程 | 287 |
| §40 哈密顿方程 | 287 |
| §40.1 内容提要 | 287 |
| §40.2 内容补充 | 288 |
| §40.3 习题解答 | 293 |
| §41 罗斯函数 | 293 |
| §41.1 内容提要 | 293 |
| §41.2 习题解答 | 294 |
| §42 泊松括号 | 295 |
| §42.1 内容提要 | 295 |
| §42.2 内容补充 | 297 |
| §42.3 习题解答 | 300 |
| §43 作为坐标函数的作用量 | 304 |
| §43.1 内容提要 | 304 |
| §43.2 内容补充 | 304 |
| §44 莫培督原理 | 308 |
| §44.1 内容提要 | 308 |
| §44.2 内容补充 | 309 |
| §44.3 习题解答 | 309 |
| §45 正则变换 | 313 |
| §45.1 内容提要 | 313 |
| §45.2 内容补充 | 314 |
| §45.3 补充习题 | 320 |
| §46 刘维尔定理 | 324 |
| §46.1 内容提要 | 324 |
| §46.2 内容补充 | 324 |
| §47 哈密顿-雅可比方程 | 329 |
| §47.1 内容提要 | 329 |
| §47.2 内容补充 | 330 |
| §47.3 补充习题 | 331 |
| §48 分离变量 | 332 |
| §48.1 内容提要 | 332 |
| §48.2 内容补充 | 333 |
| §48.3 不同坐标系下的分离变量, 例题 | 334 |

| | |
|-----------------|-----|
| §48.4 习题解答 | 341 |
| §49 浸渐不变量 | 347 |
| §49.1 内容提要 | 347 |
| §49.2 内容补充 | 347 |
| §49.3 补充习题 | 348 |
| §50 正则变量 | 354 |
| §50.1 内容提要 | 354 |
| §50.2 内容补充 | 355 |
| §50.3 习题解答 | 355 |
| §51 浸渐不变量守恒的准确度 | 360 |
| §51.1 内容提要 | 360 |
| §51.2 内容补充 | 361 |
| §51.3 习题解答 | 362 |
| §52 条件周期运动 | 364 |
| §52.1 内容提要 | 364 |
| §52.2 内容补充 | 366 |
| §52.3 习题解答 | 372 |
| 索引 | 379 |

第一章

运动方程

本章所讨论的系统是仅受到理想完整约束且所有主动力均为有势力(或保守力)的系统. 在这种情况下, 可以从哈密顿原理^①(或最小作用量原理)导出系统的运动微分方程, 即拉格朗日方程^②.

哈密顿原理表示的是, 对实际运动作用量 $S = \int L dt$ 取极值. 对于理想完整保守系统, 作用量 S 中的拉格朗日函数 L 是系统的特性函数, 即由它原则上可以完全确定系统的运动情况. 对自由粒子系统, L 的表示形式可以利用时间空间的性质(即时间是均匀的, 空间是均匀和各向同性的)得到, 然后再推广到有相互作用的问题. 有非保守力和非完整约束的系统相关的动力学方程等在第六章最后一节(即 §38)中讨论.

§1 广义坐标

§1.1 内容提要

对于力学系统, 设有 N 个质点, 通常用径矢 $\mathbf{r}_a (a = 1, 2, \dots, N)$ 指定其中各个质点的位置, 即系统的位形, 这总计有 $3N$ 个坐标. 但是实际系统会受到各种约束的限制, $3N$ 个坐标并不都是独立的.

能唯一地确定系统位置(即位形)所需独立变量的数目称为系统的自由度(设为 s), 相应的变量称为广义坐标, 记为 q_1, q_2, \dots, q_s , 其导数 $\dot{q}_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 和 $\ddot{q}_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 分别称为广义速度和广义加速度. 广义坐标不一定是笛卡儿坐标. 广义坐标与笛卡儿坐标之间的关系称为坐标变换关

① William Rowan Hamilton, 1805—1865, 爱尔兰数学家、物理学家及天文学家.

② Joseph-Louis Lagrange, 1736—1813, 法国籍意大利裔数学家和天文学家.

系

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad (a = 1, 2, \dots, N). \quad (1.1)$$

系统的力学状态由广义坐标和相应的广义速度给定, 即它们原则上可以确定系统在任意时刻的位形以及位形的变化.

§1.2 内容补充

1. 约束和分类

要理解广义坐标以及相关的问题, 需要对约束以及分类有一个基本的了解.

在分析力学中处理问题时, 首要的是先明确系统, 这是所有讨论的基本出发点. 系统中各质点 (离散系统) 或质元 (连续分布的系统) 的位置的集合称为系统的位形. 约束是对系统的位形以及位形的变化的一种限制.

按照是否同时限制位形和位形的变化可将约束分为完整约束 (也称为几何约束) 和非完整约束两类. 前者仅对位形有限制, 也就是约束相应的数学关系 (称为约束方程) 一般具有下列形式

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, l), \quad (1.2)$$

其中 l 为这类约束的个数. 非完整约束对位形以及位形的变化均有限制, 约束方程通常具有下列形式

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, l'). \quad (1.3)$$

依据约束方程中是否显含时间, 又可将约束分为定常约束和非定常约束两类. 前者是显含时间的, 后者则否. 方程 (1.2) 和 (1.3) 表示的均是非定常约束.

根据约束是否可以解除又将约束分为单侧约束和双侧约束. 单侧约束是可解除的约束, 约束方程通常表示为不等式. 在实际问题中, 约束解除与否取决于约束力的变化情况. 约束方程可以表示为等式的约束称为双侧约束.

在讨论动力学问题时, 往往需要根据系统所受各约束力的虚功之代数和是否等于零将约束分为理想约束和非理想约束. 设各质点的虚位移分别为 $\delta \mathbf{r}_a$, 受到的约束力为 \mathbf{F}'_a , 如果有

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{F}'_a \cdot \delta \mathbf{r}_a = 0, \quad (1.4)$$

则称约束是理想的. 注意, 这里所说的不是单个约束力的虚功, 而是系统所有约束力的虚功之和. 与广义坐标等概念一样, 约束是否是理想的针对的也是整个系统, 而不是系统中的某一部分. 也就是说, “第 i 个约束是理想约束” 之类的表述通常是没有意义的.

理想约束一般而言是一种近似, 在具体问题中, 光滑接触、刚性杆、铰链、不可伸长等类型的约束均是理想约束.

2. 广义坐标

要说明的是, 广义坐标是针对整个系统的. 也就是说, “系统中某一部分的广义坐标是什么” 之类的表述一般是没有意义的. 后面讨论中引入的与广义坐标相关的广义力、广义动量、势能等等概念也同样是针对整个系统的.

广义坐标的选取, 通常并没有一定的原则, 只要是相互独立并能唯一地确定系统的位形 (或状态) 的一组数目最少的参量就可. 对于同一系统, 可以有多组广义坐标, 其中每一组均可以同等地用来描述系统的运动情况. 实际上, 广义坐标的选取包含一定的经验技巧. 对于有限大小的物体, 将其方位角作为系统的广义坐标的一部分是一个好的选择. 如果系统具有一定的对称性, 选取与对称变换 (或操作) 相关联的参量为广义坐标可为运动的求解带来便利, 因为后面可以看到这样的广义坐标将不会出现在系统的拉格朗日函数中 (这样的广义坐标称为可遗坐标或循环坐标), 由此将有对应的运动积分存在. 例如, 如果系统关于某轴具有转动不变性, 则可选绕轴的转动操作相应的转动角度为广义坐标 (参见 §9 习题 3).

在选定广义坐标后, 完整约束方程自动隐含在坐标变换关系中, 因此除了求相应的约束力外通常不必再考虑该类约束了. 另外, 要注意约束方程与坐标变换关系一般而言是不相同的.

例 长为 l 的匀质刚性杆置于半径为 R ($l > 2R$) 的固定半球壳内侧 (见图 1.1) 而处于平衡状态. 为求平衡位置, 以杆为系统, 它有一个自由度. 如果取杆的质心 C 的纵坐标 y 为广义坐标, 则它不能唯一指定系统的位形, 因为图中两种位形有相同的 y .

在该问题中, 通常可取杆与水平方向的夹角 θ 为广义坐标. 于此, 有如下坐标变换关系. 对于 A 点, 有

$$\begin{aligned}x_A &= 2R - (2R \cos \theta) \cos \theta = 2R \sin^2 \theta, \\y_A &= (2R \cos \theta) \sin \theta = R \sin(2\theta).\end{aligned}\tag{1}$$

由这两个关系消去 θ , 得到

$$(x_A - R)^2 + y_A^2 = R^2.$$

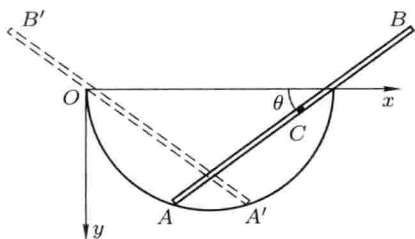


图 1.1

这就是 A 点的约束方程, 它是完整的约束.

对 B 点, 有

$$\begin{aligned} x_B &= 2R + (l - 2R \cos \theta) \cos \theta = l \cos \theta + 2R \sin^2 \theta, \\ y_B &= -(l - 2R \cos \theta) \sin \theta = -l \sin \theta + R \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

由式 (1) 和 (2) 消去 θ , 得到

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2.$$

这是杆为刚性杆的约束方程, 它也是完整的约束.

3. 坐标变换关系 (1.1) 的时间依赖性

坐标变换关系 (1.1) 是否显含时间, 是与约束的类型以及广义坐标的选取密切相关的. 一般而言, 对于非定常约束, 坐标变换关系总是显含时间的. 但是, 对于定常约束, 可以选取广义坐标使得它不显含时间. 也就是说, 在定常约束下, 显含时间与否取决于如何选取广义坐标. 在《力学》后面的讨论中, 往往认为坐标变换关系是不显含时间的, 也就是所涉及的约束是定常约束. 注意, §5 习题 3 考虑的是非定常约束的情况.

例 如图 1.2 所示, 弹簧一端固定于支架上, 支架以速度 v_0 沿固定的水平轴 Ox 运动, 质量为 m 的质点与弹簧相连, 弹簧的劲度系数为 k , 自然长度为 l_0 .

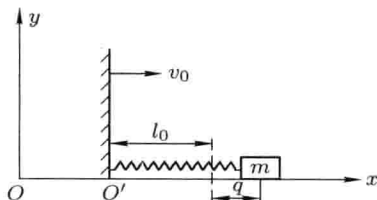


图 1.2

解: 取弹簧和质点为系统, 它有一个自由度. 约束条件为

$$y = 0.$$

这是定常完整约束. 取质点相对于支架且弹簧处于原长时端点所在位置的坐标 q 为广义坐标, 则坐标变换方程为

$$x = v_0 t + l_0 + q,$$

其中 l_0 为弹簧的原长. 变换方程中含有时间 t .

但是, 如果选任一时刻质点相对于 O 的坐标 x 为广义坐标, 则坐标变换关系是 $x = x$, 它不显含时间.

§2 最小作用量原理

§2.1 内容提要

力学系统的运动规律是由使哈密顿作用量

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (\text{o2.1})$$

这个泛函取极值时, 即变分问题 $\delta S = 0$ 中广义坐标所满足的微分方程所描述的, 其中 L 是系统的拉格朗日函数. 这个原理称为最小作用量原理, 通常称为哈密顿原理.

在固定边界条件下, 即 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ 时, 哈密顿原理给出拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, s). \quad (\text{o2.6})$$

这是关于 q_i 的二阶微分方程, 即系统的运动微分方程.

拉格朗日函数具有性质: (1) 如果系统可以分为几个相互独立的部分, 则系统的拉格朗日函数等于各部分的拉格朗日函数之和. (2) 拉格朗日函数不具有唯一性. (i) 拉格朗日函数乘以一个任意常数不会改变运动微分方程; (ii) 两个拉格朗日函数 $L'(q, \dot{q}, t)$ 和 $L(q, \dot{q}, t)$, 如果它们相差某个坐标和时间的函数 $f(q, t)$ 对时间的全导数:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t), \quad (\text{o2.8})$$

它们将给出完全相同的动力学微分方程, 即拉格朗日函数仅可以确定到相差任意一个关于时间和坐标的函数的全导数项.

§2.2 内容补充

1. 哈密顿原理与参考系

哈密顿原理是变分法中的一个基本原理, 是用于求泛函的极值的, 本身并不涉及参考系的问题. 但是物理问题的描述, 运动规律的讨论均离不开参考系. 参考系是研究物理问题的基本出发点. 在矢量力学中, 牛顿第一定律本质上就表示了特殊类型参考系即惯性参考系的存在性, 构成了牛顿力学的基础.

将哈密顿原理与物理联系起来, 这也就要求考虑参考系的问题. 具体来说就是, 相对于什么样的参考系找出系统的拉格朗日函数. 在 §3 及其后面各节的讨论中, 我们可以看到, 通过所谓简单性原则 (即使力学规律的表述形式上尽可能简单), 假定时空具有均匀性和各向同性的性质就可以求出拉格朗日函数, 其中明确了惯性参考系的基本地位, 它仍然是分析力学研究问题的出发点. 基于此, 由哈密顿原理导出的拉格朗日方程就等同于牛顿第二定律这个动力学方程.

2. 关系 $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ 成立的条件

关系式 $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ 表明变分和对时间的微分这两种运算是可以交换次序的, 但这是有条件的, 仅对等时变分是成立的.

所谓等时变分, 是指这种变化在物理学中来看不是运动引起的, 也就是不是历经时间的变化, 因此是一种假想的变化.

以一个自由度的情况为例. 如图 1.3 所示, 设 $\bar{q}(t)$ 是与 $q(t)$ 无限相邻的函数, 即 $\bar{q}(t) - q(t) = \delta q(t)$ 是小量, 则 $\bar{q}(t)$ 称为 $q(t)$ 的等时变分. 图中 A, A', B, B' 各点的坐标可以按如下方式得到.

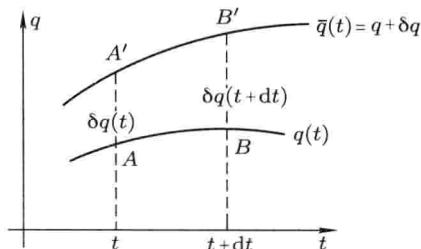


图 1.3

从 A 点到 B 点函数 $q(t)$ 没有改变, 自变量则从 t 变为 $t + dt$, 因此如 A 点的坐标为: (t, q) , 则 B 点的坐标是: $(t + dt, q(t + dt) = q + dq)$. 这里坐标的

变化与时间变化有关, 相应于微分.

A' 点和 A 点是在二条不同的函数曲线上, 但它们的 t 坐标相同, 于是从 A 点到 A' 点是由于函数 q 变为 \bar{q} 所引起的, 自变量没有改变, 这相应于变分. 因此 A' 点的坐标应为 $(t, \bar{q}(t)) = (t, q(t) + \delta q(t))$.

B' 点的坐标既可以从 B 点变更过去, 也可以从 A' 点变更过去. 前者是变分, 后者是微分. 从 B 点变更时, B' 点的纵坐标应为

$$\bar{q}(t + dt) = q(t + dt) + \delta q(t + dt) = q(t) + dq(t) + \delta(q(t) + dq(t)).$$

从 A' 点变更时, B' 点的纵坐标应为

$$\bar{q}(t + dt) = \bar{q}(t) + d\bar{q}(t) = q(t) + \delta q(t) + d(q(t) + \delta q(t)).$$

这两种表示式应相等, 因此得

$$\delta(dq) = d(\delta q).$$

这表明变分和微分的运算可以交换次序.

由上述关系可证明 δ 和 $\frac{d}{dt}$ 也是可以交换次序的:

$$\delta \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{\delta(dq)dt - \delta(dt)dq}{(dt)^2} = \frac{d(\delta q)}{dt},$$

即

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q.$$

如果当时间从 t 变到 $t' = t + \Delta t$ 时, 坐标 q 作如下的变化

$$q(t) \rightarrow q'(t') = q(t) + \Delta q(t). \quad (2.1)$$

当 Δt 与 Δq 为一无穷小量时, 式 (2.1) 称为无穷小变换, 而 $\Delta q(t)$ 称为 q 的全变分 (即非等时变分). 这里用 Δ 与等时变分 δ ($\delta t = 0$) 相区分. 下面证明

$$\frac{d}{dt} \Delta q \neq \Delta \frac{dq}{dt}.$$

考虑到

$$\begin{aligned} \Delta q(t) &= q'(t') - q(t) = q'(t + \Delta t) - q(t) = q'(t) + \frac{dq'(t)}{dt} \Delta t - q(t) \\ &= (q'(t) - q(t)) + \frac{dq(t)}{dt} \Delta t = \delta q(t) + \frac{dq(t)}{dt} \Delta t, \end{aligned}$$

这里的 δ 是等时变分. 在上式中实际上仅保留到 Δt , Δq 的一阶小量项, 所

以可用 $\frac{dq(t)}{dt}\Delta t$ 代替 $\frac{dq'(t)}{dt}\Delta t$. 同样有

$$\begin{aligned}\Delta\dot{q}(t) &= \delta\dot{q}(t) + \frac{d\dot{q}(t)}{dt}\Delta t = \delta\dot{q}(t) + \frac{d(\dot{q}(t)\Delta t)}{dt} - \dot{q}(t)\frac{d}{dt}(\Delta t) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\delta q(t) + \Delta t\frac{d}{dt}q(t)\right) - \dot{q}(t)\frac{d}{dt}(\Delta t) = \frac{d}{dt}(\Delta q(t)) - \dot{q}(t)\frac{d}{dt}(\Delta t).\end{aligned}$$

上式右边多出一项 $-\dot{q}(t)\frac{d}{dt}(\Delta t)$, 表明全变分 Δ 和微分 $\frac{d}{dt}$ 是不能交换次序的.

3. 拉格朗日函数的不唯一性与规范变换

在《力学》中, 拉格朗日函数的不唯一性是通过考虑 (o2.8) 联系的两个拉格朗日函数相应的哈密顿作用量仅相差边界项来证明的. 然而也可以直接计算两个拉格朗日函数有相同的运动微分方程, 这只要注意到下列结论即可.

因为 $f(q, t)$ 对时间的全微商可写为

$$\frac{d}{dt}f(q, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial f(q, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f(q, t)}{\partial t},$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{d}{dt}f(q, t) \right] &= \frac{\partial f(q, t)}{\partial q_i}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{d}{dt}f(q, t) \right] \right) &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 f(q, t)}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 f(q, t)}{\partial t \partial q_i}, \\ \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{d}{dt}f(q, t) \right] &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 f(q, t)}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 f(q, t)}{\partial q_i \partial t}.\end{aligned}$$

所以,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{d}{dt}f(q, t) \right] \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{d}{dt}f(q, t) \right] = 0,$$

即全微商项对动力学方程的贡献为零.

通常也将 (o2.8) 这种关系称为规范变换. 一个代表性的实例是处于均匀电磁场中的带电粒子的运动, 其拉格朗日函数可以表示为

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - (e\varphi - e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.2)$$

其中 e 是粒子的电量, φ 为标势, \mathbf{A} 为矢势. 如果对矢势和标势分别作如下变换

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (2.3)$$

其中 ψ 是坐标和时间的可微标量函数, 易证在该变换下电场强度 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 保持不变, 即不改变带电粒子所受的力. 上述变换称为规范变换. 如果定义变换以后的拉格朗日函数为

$$L' = \frac{1}{2}mv^2 - (e\varphi' - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}'), \quad (2.4)$$

则将变换 (2.3) 代入上式可得

$$L' = L + e \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \right] = L + \frac{d}{dt}(e\psi).$$

可见 L 和 L' 之间相差一个标量函数 $e\psi$ 的时间全微商, 该标量函数仅是坐标和时间的函数. 根据前面的讨论知道, 变换前后的拉格朗日函数对应相同的运动方程. 在规范变换下系统的运动方程不发生变化, 这种性质通常称为系统具有规范不变性.

另外, 作一点相关的说明. 在经典电磁理论中, 电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 是基本物理量, 而电势 φ 和矢势 \mathbf{A} 是辅助量, 不是具有直接观测意义的物理量. 但是, 在拉格朗日描述或后面将讨论的哈密顿描述中, φ 和 \mathbf{A} 确是基本量, 尽管它们不是唯一确定的. 在量子理论中, φ 和 \mathbf{A} 不仅是基本物理量, 更有可观测的物理效应^①.

§3 伽利略相对性原理

§3.1 内容提要

惯性参考系是这样一种参考系, 相对于它 (i) 空间是均匀的和各向同性的, (ii) 时间是均匀的, (iii) 运动规律具有最简单的形式.

在惯性参考系中, 自由运动的质点其拉格朗日函数只能是速度 \mathbf{v} 大小 $v = |\mathbf{v}|$ 的函数, 即

$$L = L(v^2). \quad (o3.1)$$

由此据拉格朗日方程可以导出自由运动的特征.

伽利略变换^②建立相对于两个不同惯性参考系 K 和 K' 描述质点同一运动的坐标和时间之间的关系. 设 K' 相对于 K 以匀速度 \mathbf{V} 运动, 则伽利略变换关系为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t, \quad (o3.3)$$

^① 参见文献 Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, Phys. Rev., **115**(1959)485; R. G. Chambers, Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux, Phys. Rev. Lett., **5**(1960)3.

^② Galileo Galilei, 1564—1642, 意大利物理学家、数学家、天文学家.

$$t = t', \quad (\text{o3.4})$$

其中不带撇和带撇的量分别表示相对于参考系 K 和 K' 。

伽利略相对性原理是指, 在伽利略变换下运动方程是不变的, 即在任意惯性参考系中力学规律是相同的。

§3.2 内容补充

1. 惯性参考系

在《力学》中, 惯性参考系是按照时空的性质和物理规律相对于它具有形式简单性定义的, 这完全不同于一般教材中的定义。通常教材中将不受到其它力作用的自由质点相对于其作匀速直线运动的参考系定义为惯性参考系, 即据自由运动的特征定义惯性参考系。或者按另外一种说法是, 牛顿第一定律成立的参考系称为惯性参考系。按时空性质和按自由运动的特征这两种方式定义惯性参考系在一定程度上是等价的, 在力学范围内它们能导出完全相同的结论。但是, 前一种定义更反映物理本质。例如, 从时空性质的角度可以看到动量守恒比牛顿第三定律更基本 (见 §7)。后面的讨论 (见第二章) 也可以看到, 运动积分 (或守恒量) 是与时空的这些性质密切相关的。这种据时空性质确定运动积分的方法在力学之外的物理学其它领域仍然是有效的, 事实上构成了现代物理学的重要基础。从牛顿定律导出的守恒律局限于与力有关的问题, 也即仅在力学领域中成立, 难以推广到没有力概念或力概念仅起辅助作用的那些问题或学科领域 (如量子力学)。

2. 洛伦兹变换^①

伽利略变换体现的是绝对时空观, (i) 时间和空间完全分离; (ii) 时间是绝对的, 即在不同的惯性参考系中时间是完全相同的。时间的同时性也是绝对的, 即在一个惯性参考系中同时发生的事件在另一个参考系中来看也是同时发生的; (iii) 长度是绝对的, 与参考系无关。

在相对论中, 时间和空间是相互联系的, 时间和长度不再具有绝对性, 同时性也只有相对的意义。时间和空间是与运动相关的。运动规律仅相对于洛伦兹^②变换具有不变性。设 K' 相对于 K 以匀速度 V 沿 K 的 x 方向

^① 有关相对论的详细讨论参见 Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗席兹, 场论 (第八版), 鲁欣, 任朗, 袁炳南译, 北京: 高等教育出版社, 2012。这里的讨论仅是为了与非相对论的时空观、伽利略变换等作对比, 以此了解两种时空观的联系和区别。

^② Hendrik Antoon Lorentz, 1853—1928, 荷兰物理学家, 1902 年因对 Zeeman 效应的理论解释荣获 Nobel 物理学奖。

运动, 洛伦兹变换为

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma(x - \beta ct), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma(t - \beta x/c), \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 c 是光速,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}.$$

当 $V \ll c$ 时, 洛伦兹变换退化为伽利略变换 (o3.3) 和 (o3.4).

如果引入四维矢量 $x_\mu = (x, y, z, ict)$, 即 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$, 则 (3.1) 可改写为

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

上式也可以写为更紧凑的形式

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_\nu, \quad (3.3)$$

其中 $a_{\mu\nu}$ 是式 (3.2) 右边第一个矩阵的矩阵元.

将式 (3.1) 中的 V 变为 $-V$, 同时将带撇和不带撇的量互换, 可以得到从 K 到 K' 变换的逆变换, 也即从 K' 到 K 的洛伦兹变换为

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma(x' + \beta ct'), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma(t' + \beta x'/c). \end{cases} \quad (3.4)$$

引入固有时 $d\tau$, 它是洛伦兹不变量,

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma_v} dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ 是质点相对于 K 系的速度. 注意, 这里的 γ_v 与洛伦兹变换中的 γ 含义不同, 不是两个有相对运动的参考系之间的变换因子, 而是相对于特定参考系 K 以速度 v 运动时的一个变换因子. 四维速度定义为

$$u = (u_x, u_y, u_z, u_t) = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dw}{d\tau} \right) = \gamma(v_x, v_y, v_z, v_t), \quad (3.6)$$

其中 $w = ict$, $v_t = \frac{dw}{dt} = ic$. 四维速度具有与式 (3.2) 相同形式的变换关系. 相应地, 速度变换关系为

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

也即所谓的速度合成定理.

§4 自由质点的拉格朗日函数

§4.1 内容提要

根据伽利略相对性原理以及拉格朗日函数可以确定到相差一个坐标和时间函数的全微分的特性, 自由质点系统的拉格朗日函数具有下列形式

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2. \quad (\text{o4.2})$$

在此基础上, 可以引进质量的概念. 对于质点系统, 根据拉格朗日函数的乘以任一常数不改变运动方程的性质可以确定系统中不同质点之间的质量之比是有确定物理意义的量, 而最小作用量原理又要求质量是非负的.

§4.2 内容补充

• 相对论性自由粒子的拉格朗日函数

需要说明的是, 这里关于如何得到相对论中自由粒子的拉格朗日函数的讨论主要关注的是《力学》中所采用的方法.

考虑到固有时 $d\tau$ 与 dt 的关系为 (见式 (3.5))

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} dt, \quad (4.1)$$

则哈密顿原理原可以表示为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma L d\tau. \quad (4.2)$$

如果要求在所有惯性参考系中运动方程有相同的形式, 则 γL 应是洛伦兹不变量. 该不变量必由四维矢量 x_μ 和四维速度 u_ν 构造出来. 但是, 时空的均匀性要求在平移变换 $x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu$ (这里 a_μ 是常值矢量) 下, 作用量是不变的, 则 γL 只能是 u_μ 的函数. γL 是标量, 而由 u_μ 只能构造一个不变的标量 $\sum_\mu u_\mu u_\mu = -c^2$, 因此 γL 只能是一个常数 a , 即

$$L = a \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (4.3)$$

常数 a 由非相对论近似下在相差一个可加常数的条件下 L 可变为非相对论的动能这个要求来确定. 在非相对论近似下, $v/c \ll 1$, 则有

$$L = a \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx a \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = a - \frac{av^2}{2c^2},$$

其中第一项是常数, 第二项应该等同于 $\frac{1}{2}mv^2$, 由此可得 $a = -mc^2$, 故相对论性自由粒子的拉格朗日函数为

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (4.4)$$

§5 质点系的拉格朗日函数

§5.1 内容提要

对于封闭质点系统, 没有系统之外的其它物体对它的作用, 仅有系统中各质点之间有相互作用, 且所有相互作用可以用系统的势能 $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$ 表示, 系统的拉格朗日函数为

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots). \quad (o5.1)$$

相应的动力学方程为

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (o5.3)$$

此即牛顿第二定律的具体表示.

用广义坐标和广义速度表示时, 拉格朗日函数的形式为

$$L = \sum_{i,k} \frac{1}{2} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q). \quad (o5.5)$$

对于非封闭系统, 系统与外界有相互作用或者说系统在外场中运动. 如果外界的运动完全已知, 则系统的拉格朗日函数仍具有式 (o5.5) 的形式, 但是其中的 U 将可能显含时间, 即具有形式 $U(q, t)$.

§5.2 内容补充

1. 相互作用的传递与伽利略相对性原理

设相互作用在参考系 K' 中以有限速度 v_0 传递, 而 K' 系相对于 K 系以速度 \mathbf{V} 运动. 假设 v_0, \mathbf{V} 同向, 则根据伽利略相对性原理, 在 K 系中, 相互作用以速度 $(v_0 + \mathbf{V})$ 传递.

令 d 为 A, B 两质点在 v_0 方向上的距离. 如果改变 B 的状态而引起相互作用 \mathbf{F} , 取时间间隔为 t_0 , 则当 $v_0 t_0 < d < (v_0 + V)t_0$ 时, 根据相互作用传递速度的有限性和牛顿时空观, 在 K' 参考系中, 对质点 A 将有 $\ddot{x}'_a = 0$, 而在 K 参考系中, 则有 $\ddot{x}_a = \frac{\mathbf{F}}{m_a}$, 即两参考系中运动规律不相同. 所以, 如果运动规律在伽利略变换下具有不变性, 则要求相互作用的传递速度是无限

大的. 因为电磁相互作用的传递速度 (即光速) 是有限的, 伽利略变换与电磁学的规律是不相容的, 即电磁学规律在伽利略变换下不具有不变性. 这种内在矛盾是提出狭义相对论的重要动力之一.

2. 公式 (o5.5) 中系数 a_{ik} 的具体形式

在将笛卡儿坐标用广义坐标表示时, 需要使用坐标变换关系. 设对 x_a , 有

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s),$$

则有

$$\dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

如果相应地有 $y_a = g_a(q_1, q_2, \dots, q_s)$, $z_a = h_a(q_1, q_2, \dots, q_s)$, 则有

$$\dot{y}_a = \sum_k \frac{\partial g_a}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad \dot{z}_a = \sum_k \frac{\partial h_a}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

将这些关系代入原来用笛卡儿坐标表示的动能, 即

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2)$$

中即可得到拉格朗日函数 (o5.5) 的系数 a_{ik} 的表示式为

$$a_{ik} = \sum_{a=1}^N m_a \left(\frac{\partial f_a}{\partial q_i} \frac{\partial f_a}{\partial q_k} + \frac{\partial g_a}{\partial q_i} \frac{\partial g_a}{\partial q_k} + \frac{\partial h_a}{\partial q_i} \frac{\partial h_a}{\partial q_k} \right).$$

系数 a_{ik} 通常是广义坐标的函数.

需要说明的是, 这里的坐标变换关系中均不显含时间, 实际上要求约束方程中不显含时间, 即约束是定常的. 对坐标变换关系中显含时间情况下动能用广义坐标表示时的形式可参见后面 §6 中的相关讨论.

§5.3 习题解答

试求下面在均匀重力场 (重力加速度为 g) 中各系统的拉格朗日函数.

习题 1 平面双摆

解: 取两个小球及连线为整个系统, 系统的自由度为 2. 建立如图 o1 所示的直角坐标系, 坐标原点取在悬挂点. 取绳 l_1 和 l_2 分别与竖直方向的夹角 φ_1 和 φ_2 为广义坐标. 取悬挂点所在水平面为重力势能零势面. 对质点 m_1 , 动能和势能分别为

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \quad U_1 = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1.$$

为了求出第二个质点的动能, 我们用角 φ_1 和 φ_2 表示第二个质点的笛卡儿坐标 x_2, y_2 , 也即有坐标变换关系为

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

相应地有

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2, \quad \dot{y}_2 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2.$$

于是, 动能和势能分别为

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

$$U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2).$$

系统的动能

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

系统的势能

$$U = U_1 + U_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

由 $L = T - U$, 最后得系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

对 φ_1 , 有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1.$$

代入 φ_1 相应的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0$, 可得

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 = 0.$$

对 φ_2 , 则有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g l_2 \sin \varphi_2.$$

代入 φ_2 相应的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$, 可得

$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 g l_2 \sin \varphi_2 = 0.$$

注: 关于该题在 φ_1, φ_2 均为小量, 即 $\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1$ 情况下的求解, 参见 §23 习题 2.

习题 2 质量为 m_2 的平面摆, 其悬挂点 (质量为 m_1) 可以沿着位于 m_2 运动平面内的水平直线运动 (图 o2).

解: 取两个质点及其连线为整个系统, 系统的自由度为 2. 建立如图 o2 所示坐标系. 取 m_1 所在水平面为重力势能零势面.

设质点 m_1 的坐标为 x , 摆线与竖直方向夹角为 φ , 将它们取为广义坐标, 则有坐标变换关系

$$x_2 = x + l \sin \varphi, \quad y_2 = l \cos \varphi.$$

对于悬挂点 m_1 , 其动能和势能分别为

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2, \quad U_1 = 0.$$

对于摆 m_2 , 动能为

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi),$$

势能为

$$U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos \varphi.$$

系统的动能为

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi).$$

系统的势能为

$$U = U_1 + U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos \varphi.$$

由 $L = T - U$, 可得系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi.$$

对 x , 有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

代入 x 相应的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, 可得

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

对 φ , 有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l \dot{x} \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g l \sin \varphi.$$

代入 φ 相应的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, 可得

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \cos \varphi + m_2 g l \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

如果 φ 可以视为小量, 即可以作近似 $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, 同时式 (1) 和式 (2) 中仅保留到 $\varphi, \dot{\varphi}$ 的一阶项, 则式 (1) 和式 (2) 分别变为

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0, \quad (3)$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} + m_2 g l \varphi = 0. \quad (4)$$

对式 (3) 作一次积分, 可得

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} = c_1,$$

其中 c_1 为积分常数. 对上式再作一次积分, 可得

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l \varphi = c_1 t + c_2, \quad (5)$$

其中 c_2 也是积分常数.

由式 (3) 和式 (4) 消去 x , 可得

$$\frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + g \varphi = 0,$$

即

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (6)$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}.$$

方程 (6) 的解为

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

其中 A, α 均为积分常数.

将式 (7) 代入式 (5), 可得

$$x = \frac{1}{m_1 + m_2}(c_1 t + c_2) - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} A \cos(\omega t + \alpha). \quad (8)$$

注: 该题的有关求解可参见 §14 习题 3. 在 $\varphi \ll 1$ 情况下的求解可参见 §21 习题 5.

习题 3 设有一平面摆, 其悬挂点:

- 沿着竖直圆以定常圆频率 γ 运动 (图 o3),
- 按规律 $a \cos \gamma t$ 在摆的运动平面内水平振动,
- 按规律 $a \cos \gamma t$ 竖直振动.

解: 以摆为系统, 其自由度为 1. 取摆线与竖直方向夹角 φ 为广义坐标, 建立如图 o3 所示坐标系. 取 $y = 0$ 水平面为重力势能零势面.

- 用广义坐标表示的质点 m 的坐标, 即坐标变换关系为

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \quad y = -a \sin \gamma t + l \cos \varphi.$$

相应地有

$$\dot{x} = -a\gamma \sin \gamma t + l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = -a\gamma \cos \gamma t - l\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

系统的动能

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (a^2 \gamma^2 + l^2 \dot{\varphi}^2) + mla\gamma \dot{\varphi} \sin(\varphi - \gamma t).$$

系统的势能

$$U = -mgy = -mg(-a \sin \gamma t + l \cos \varphi).$$

由 $L = T - U$, 系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} m (a^2 \gamma^2 + l^2 \dot{\varphi}^2) + mla\gamma \dot{\varphi} \sin(\varphi - \gamma t) + mg(-a \sin \gamma t + l \cos \varphi).$$

这里由拉格朗日函数的不唯一性可以将上述 L 中的某些项略去而不改变系统的动力学微分方程.

(i) $\frac{1}{2} m a^2 \gamma^2$ 是常数, 可以略去.

(ii) $-mga \sin \gamma t$ 可视为 $\frac{mga}{\gamma} \cos \gamma t$ 对时间的全导数, 可以略去.

(iii) $\sin(\varphi - \gamma t)\dot{\varphi} = -\frac{d}{dt}\cos(\varphi - \gamma t) + \gamma\sin(\varphi - \gamma t)$, 其中 $-\frac{d}{dt}\cos(\varphi - \gamma t)$ 是关于时间的全导数, 可以略去, 所以 $\dot{\varphi}\sin(\varphi - \gamma t)$ 可用 $\gamma\sin(\varphi - \gamma t)$ 代替. 经过上述处理并整理, 得到系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\sin(\varphi - \gamma t) + mgl\cos\varphi.$$

由 L 的表示式, 可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mla\gamma^2\cos(\varphi - \gamma t) - mgl\sin\varphi.$$

代入 φ 相应的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, 可得系统的动力学微分方程为

$$ml^2\ddot{\varphi} - mla\gamma^2\cos(\varphi - \gamma t) + mgl\sin\varphi = 0.$$

b. 用广义坐标表示的质点 m 的坐标为

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \quad y = l\cos\varphi.$$

相应地对时间的导数为

$$\dot{x} = -a\gamma\sin\gamma t + l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(a^2\gamma^2\sin^2\gamma t + l^2\dot{\varphi}^2 - 2la\gamma\dot{\varphi}\sin\gamma t\cos\varphi).$$

系统的势能为

$$U = -mgy = -mgl\cos\varphi.$$

由 $L = T - U$, 得拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(a^2\gamma^2\sin^2\gamma t + l^2\dot{\varphi}^2) - mla\gamma\dot{\varphi}\sin\gamma t\cos\varphi + mgl\cos\varphi.$$

这里由拉格朗日函数的不唯一性, 可以去掉某些项.

(i) $\frac{1}{2}ma^2\gamma^2\sin^2\gamma t = \frac{1}{4}ma^2\gamma^2 - \frac{1}{8}ma^2\gamma\frac{d}{dt}[\sin(2\gamma t)]$, 其中第一部分是常数, 第二部分是对时间的全导数, 故均可以略去.

(ii) $\dot{\varphi}\sin\gamma t\cos\varphi = \frac{d}{dt}(\sin\gamma t\sin\varphi) - \gamma\cos\gamma t\sin\varphi$, 而 $\frac{d}{dt}(\sin\gamma t\sin\varphi)$ 是关于时间的全导数, 可以略去, 所以 $\dot{\varphi}\sin\gamma t\cos\varphi \sim -\gamma\cos\gamma t\sin\varphi$.

略去对时间的全导数项和常数项后, 系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi + mgl \cos \varphi.$$

由 L 的表示式, 可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi - mgl \sin \varphi.$$

代入 φ 相应的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, 可得系统的动力学微分方程为

$$ml^2\ddot{\varphi} - mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \sin \varphi = 0.$$

注: 该题在特定条件下的求解参见 §30 习题 2.

c. 用广义坐标表示的质点坐标为

$$x = l \sin \varphi, \quad y = a \cos \gamma t + l \cos \varphi.$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(a^2\gamma^2 \sin^2 \gamma t + l^2\dot{\varphi}^2 + 2la\gamma\dot{\varphi} \sin \gamma t \sin \varphi).$$

系统的势能为

$$U = -mgy = -mg(a \cos \gamma t + l \cos \varphi).$$

由 $L = T - U$, 得系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m(a^2\gamma^2 \sin^2 \gamma t + l^2\dot{\varphi}^2) + mla\gamma\dot{\varphi} \sin \gamma t \sin \varphi + mgl(\cos \gamma t + l \cos \varphi).$$

类似于 b 中的处理过程, $\frac{1}{2}ma^2\gamma^2 \sin^2 \gamma t$ 项可略去, 而 $mgl a \cos \gamma t = \frac{mgl a}{\gamma} \frac{d}{dt}(\sin \gamma t)$ 也可略去. 又因为 $\dot{\varphi} \sin \gamma t \sin \varphi = -\frac{d}{dt}(\sin \gamma t \cos \varphi) + \gamma \cos \gamma t \cos \varphi$, 则 $\dot{\varphi} \sin \gamma t \sin \varphi$ 可用 $\gamma \cos \gamma t \cos \varphi$ 代替. 在略去常数项和对时间的全导数项后, 系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + mgl \cos \varphi.$$

由 L 的表示式, 可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi - mgl \sin \varphi.$$

代入 φ 相应的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, 可得系统的动力学微分方程为

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mla\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi + mgl \sin \varphi = 0.$$

注: 该题的求解参见 §27 习题 3 以及 §30 习题 1.

习题 4 在图 o4 所示的力学系统中, 质点 m_2 沿着竖直轴运动, 整个系统以常角速度 Ω 绕该轴转动.

解: 取所有质点以及连线为系统, 系统的自由度为 1. 设线段 a 与竖直方向夹角为 θ . 取 θ 为广义坐标, A 点所在水平面为重力势能零势面. 以 A 为原点建立直角坐标系, 以竖直向上为 y 轴正方向.

设系统绕竖直轴转动的角度为 φ , 则有 $\dot{\varphi} = \Omega$. 每个质点 m_1 的微小位移可以分为两部分, 即绕竖直转轴转动的位移 $a \sin \theta d\varphi$ 和绕与竖直转轴垂直的水平轴的转动位移 $a d\theta$. 这两个位移的方向相互垂直, 于是有位移的大小为

$$dl_1^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

相应地, 速度大小为

$$v_1^2 = \left(\frac{dl_1}{dt} \right)^2 = a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \Omega^2 \sin^2 \theta.$$

质点 m_2 到 A 点的距离为 $2a \cos \theta$, 因此有

$$dl_2 = -2a \sin \theta d\theta, \quad v_2 = \frac{dl_2}{dt} = -2a \dot{\theta} \sin \theta.$$

系统的动能为

$$T = 2 \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_1 (a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \Omega^2 \sin^2 \theta) + 2m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta.$$

以上是通过几何位形确定各质点的动能和广义坐标以及广义位移之间的关系的, 下面用常规的坐标变换方法求动能的表示式.

左边的 m_1 坐标为

$$x_{11} = -a \sin \theta, \quad y_{11} = -a \cos \theta.$$

右边的 m_1 坐标为

$$x_{12} = a \sin \theta, \quad y_{12} = -a \cos \theta.$$

m_1 的动能和势能分别为

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{11}^2 + \dot{y}_{11}^2 + \dot{x}_{12}^2 + \dot{y}_{12}^2) + 2 \times \frac{1}{2}m_1(a\Omega \sin \theta)^2 \\ &= m_1a^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta), \end{aligned}$$

$$U_1 = m_1gy_{11} + m_1gy_{12} = -2m_1ga \cos \theta.$$

m_2 的坐标为

$$x_2 = 0, \quad y_2 = -2a \cos \theta.$$

它的动能和势能分别为

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = 2m_2a^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta,$$

$$U_2 = m_2gy_2 = -2m_2ga \cos \theta.$$

系统的动能为

$$T = T_1 + T_2 = (m_1 + 2m_2 \sin^2 \theta)a^2\dot{\theta}^2 + m_1a^2\Omega^2 \sin^2 \theta.$$

系统的势能为

$$U = U_1 + U_2 = -2(m_1 + m_2)ga \cos \theta.$$

系统的拉格朗日函数为

$$L = T - U = (m_1 + 2m_2 \sin^2 \theta)a^2\dot{\theta}^2 + m_1a^2\Omega^2 \sin^2 \theta + 2ga(m_1 + m_2) \cos \theta.$$

根据 L 的表示式, 可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2(m_1 + 2m_2 \sin^2 \theta)a^2\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 4m_2a^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + 2m_1a^2\Omega^2 \sin \theta \cos \theta - 2ga(m_1 + m_2) \sin \theta.$$

代入 θ 相应的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, 可得系统的动力学微分方程为

$$(m_1 + 2m_2 \sin^2 \theta)a^2\ddot{\theta} + (2m_2\dot{\theta}^2 - m_1\Omega^2)a^2 \sin \theta \cos \theta + ga(m_1 + m_2) \sin \theta = 0.$$

第二章

守恒定律

本章从时间和空间的均匀性和各向同性导出了系统通常的动量、角动量和机械能三个守恒定律 (或称运动积分). 这里针对的主要是封闭系统或处于均匀外场中的系统, 涉及三个相互关联的方面: 变换, 不变性 (拉格朗日函数以及拉格朗日方程在变换下的不变性) 和守恒量. 具体而言, 动量守恒与空间的均匀性以及平移变换下的不变性相联系, 角动量守恒与空间的各向同性以及在转动变换下的不变性相联系, 而机械能守恒与时间的均匀性, 即在时间平移下的不变性联系. 牛顿第三定律、动量和角动量沿某方向的分量守恒作为上述三个运动积分的推论.

§6 能量

§6.1 内容提要

在运动过程中, 变量 $q_i, \dot{q}_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 的某些函数如果不随时间变化, 则称其为运动积分. 对于 s 个自由度的封闭力学系统, 独立的运动积分的个数最多为 $2s - 1$. 运动积分的值完全由初始条件确定.

因为时间具有均匀性, 对于封闭系统, 它的拉格朗日函数在时间平移变换下不变, 即拉格朗日函数不显含时间 t , 则系统的能量 E 是运动积分, 其定义为

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (06.1)$$

对于完整有势系统, $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$. 在 $T(q, \dot{q})$ 是广义速度 \dot{q}_i 的二次齐次