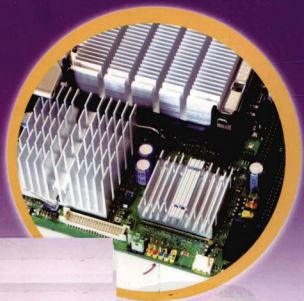


21 世纪高等学校教材

电路分析

DIANLU FENXI

主 编 曾 辉



武汉理工大学出版社

PDF
PDG



责任编辑：陈昌敏
封面设计：牛 力

<http://www.techbook.com.cn>

欢迎浏览理工图书网

武汉理工大学出版社

地 址：武汉市洪山区珞狮路122号

邮 编：430070

电 话：(027) 87394412 87383695

传 真：(027) 87397097

ISBN 978-7-5629-3409-7



9 787562 934097 >

定价：28.50元

21 世纪高等学校教材

电路分析

主 编 曾 辉

副主编 杨永华 曾素琼 陈昭炎

武汉理工大学出版社

• 武汉 •



内 容 提 要

本书共分15章,从基本电路元件、电压电流基本概念入手,介绍了节点和网孔分析、叠加原理和电源置换、戴维南和诺顿等效等常用分析方法。对于交流电路,由一阶、二阶电路的时域分析出发,逐步深入到RLC正弦稳态响应、相量、阻抗和导纳计算方法。详细介绍了交流电路的功率分析、三相电路、磁耦合电路、频率响应和双端口网络。在每一章的最后两节,分别介绍了本章与后续课程之间的关系和工程电路的实例,附录部分是与相关内容对应的公式证明。

本书可作为电子信息工程、通信工程、自动控制、计算机科学与技术、测控技术与仪器、应用物理等专业的本科教材。在编写过程中,内容尽量详尽并注意层次的把握,适当选择其中的内容,可作为对电路有一定要求的专科生和职业技术学院学生的学习用书;也可供有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电路分析/曾辉主编. —武汉:武汉理工大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5629-3409-7

I. ①电… II. ①曾… III. ①电路分析—高等学校—教材 IV. ①TM133

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第020421号

项目负责人:吴正刚

责任编辑:陈昌敏

责任校对:王 体

装帧设计:陶 冶

出版发行:武汉理工大学出版社

社 址:武汉市洪山区珞狮路122号

邮 编:430070

网 址:<http://www.techbook.com.cn>

经 销:各地新华书店

印 刷:通山金地印务有限公司

开 本:787×1092 1/16

印 张:18.25

字 数:467千字

版 次:2011年3月第1版

印 次:2011年3月第1次印刷

印 数:1—3000册

定 价:28.50元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话:027-87394412 87383695 87384729 87397097(传真)

· 版权所有 盗版必究 ·

前 言

电路分析是高等院校电子信息、通信工程、自动控制、计算机科学技术及应用物理等专业的一门重要的专业基础课,既具有较强的理论性,又具有广阔的工程应用背景。随着近代电路理论不断发展,加之作为辅助手段的计算和仿真工具不断更新,以及当今新的学科领域和分支的相继涌现,使得相关专业的知识结构和相应学时产生了变化。因此,有必要根据所在学校的实际情况,更新教材内容,以适应新的教学要求。为了使学生更好地掌握理论知识,强化学生应用知识的能力,面向省级院校和地方院校培养 21 世纪的应用型高级技术人才,特编写本教材。

尽管超大规模集成电路(VLSI)技术日趋成熟,并在科研、生产以及日常生活的各个层面起到越来越重要的作用;数字系统的应用已明显超过模拟系统,数字与模拟混合系统也得到了非常广泛的应用。但是,这些都是在分立元件的基础上设计的,并且仍有一些电路很难全部进入芯片以实现集成化,这主要表现在大功率和高频率两个方面。在电力电子技术中,较大功率运行的电路仍然需要分立器件来实现;在无线通信靠近射频前端以及频率较高的电子仪器设备中,也保留有一些分立电路。因此,电路分析课程的重要地位仍不容忽视。

本教材编写的指导思想是以具体应用为目的。因为课堂讲授的学时分配越来越少,应尽量避免让理论和公式推导占用太多的课时,必要时将公式的证明放在附录中;每个知识点的阐述尽可能全面,便于学生预习和自学;在每章的后两节安排有与后续课程的关系和实际电路应用举例,有利于学生对所学理论知识的理解和掌握。

本教材特邀几位长期担任电类专业课程教学且具有丰富教学经验和实验经验的教师参加编写工作。许多内容都是在优秀教案、讲义的基础上编写而成的,并适当引入 PSpice 计算机软件进行仿真。

杨永华老师编写第 2、3、15 章和所有章节中的实用电路应用内容;曾素琼老师编写第 1、9、10 章和所有章节中的与后续内容的关系内容;陈昭炎老师编写第 13、14 章;曾辉教授编写第 4~8、11、12 章以及附录内容。该书由曾辉教授担任主编工作,并负责全书的统稿和定稿工作。

本教材的编写工作是在众多前辈们的成果基础之上完成的,值此公开出版之际,对各位同行以及参考文献中的前辈们表示深深的谢意。尽管经过长期准备和反复修改,但限于编者水平,书中仍然会出现错误和疏漏之处,期待读者和专家斧正。

编 者

2010 年 12 月

PDG

目 录

第1章 概论	1
1.1 电学发展史	1
1.2 电路分析课程的任务	7
第2章 基本元件和基本概念	10
2.1 电流和电压	10
2.2 电阻元件	11
2.3 电感元件	12
2.4 电容元件	13
2.5 功率	15
2.6 独立电源和受控电源	16
2.7 与后续课程的关系	20
2.8 设备实用电路举例——家装电线规格选择	21
习题	23
第3章 电压和电流定律	26
3.1 节点、支路和回路	26
3.2 基尔霍夫电流定律	26
3.3 基尔霍夫电压定律	27
3.4 电源的串联和并联	28
3.5 电阻的串联和并联及 Δ -Y转换	31
3.6 电感的串联和并联	34
3.7 电容的串联和并联	35
3.8 分流和分压	36
3.9 与后续课程的关系	37
3.10 设备实用电路举例——基尔霍夫定律在电器故障诊断中的运用	38
习题	39
第4章 基本节点和网孔分析	41
4.1 节点分析	41
4.2 支路带有电压源的节点分析	42
4.3 网孔分析	45
4.4 支路上带有电流源的网孔分析	47
4.5 与后续课程的关系	49
4.6 实用电路举例	50

习题	51
第5章 常用电路分析方法	54
5.1 电源变换	54
5.2 叠加原理	58
5.3 戴维南和诺顿等效电路	60
5.4 最大功率传输	65
5.5 与后续课程的关系	68
5.6 实用电路举例	70
习题	72
第6章 一阶电路的时域分析	74
6.1 激励函数	74
6.2 零输入 RL 电路	78
6.3 零输入 RC 电路	81
6.4 零状态 RL 电路	83
6.5 零状态 RC 电路	87
6.6 完全响应电路	89
6.7 与后续课程的关系	94
6.8 实用电路举例	95
习题	97
第7章 二阶电路的时域分析	99
7.1 串联 RLC 零输入电路	99
7.2 并联 RLC 零输入电路	103
7.3 无损耗 LC 电路	106
7.4 串联 RLC 电路的零状态响应	107
7.5 并联 RLC 电路的零状态响应	108
7.6 RLC 电路的完全响应	109
7.7 与后续课程的关系	110
7.8 实用电路举例——无线话筒的基本原理与制作	111
习题	112
第8章 正弦稳态响应	114
8.1 正弦波的特性	114
8.2 电路对正弦激励的零状态响应	115
8.3 复激励函数	117
8.4 相量	120
8.5 阻抗与导纳	124
8.6 用阻抗和导纳表示的电路分析	127
8.7 相量图	132

8.8 与后续课程的关系	134
8.9 实用电路举例——日光灯电路及其功率因数的改善	135
习题	137
第9章 交流电路的功率分析	140
9.1 瞬时功率	140
9.2 平均功率 P	143
9.3 电流和电压的有效值	148
9.4 视在功率和功率因数	149
9.5 复功率	151
9.6 功率因数的提高	152
9.7 与后续课程的关系	154
9.8 实用电路举例	155
习题	157
第10章 三相电路	158
10.1 三相电源	158
10.2 电源与负载连接	162
10.3 负载不对称的三相电路	170
10.4 三相电路的功率测量	173
10.5 与后续课程的关系	175
10.6 实用电路举例	175
习题	176
第11章 磁耦合电路	178
11.1 互感与耦合	178
11.2 空心变压器	183
11.3 理想变压器	187
11.4 等效电路	191
11.5 与后续课程的关系	193
11.6 实用电路举例——电力变压器	195
习题	195
第12章 频率响应	198
12.1 网络函数	198
12.2 谐振电路	202
12.3 与后续课程的关系	213
12.4 实用电路举例	214
习题	216
第13章 双口网络	218
13.1 导数参数	218

13.2 阻抗参数.....	221
13.3 混合参数.....	224
13.4 传输函数.....	227
13.5 双口网络组合.....	229
13.6 与后续课程的关系.....	235
13.7 实用电路举例——无源滤波器.....	237
习题.....	239
第14章 其他电路定理和公式	240
14.1 2b 方程法	240
14.2 齐次定理.....	241
14.3 置换(替代)定理.....	242
14.4 特勒根定理.....	243
14.5 互易定理.....	245
习题.....	247
第15章 PSpice 软件应用	249
15.1 PSpice 软件的简介	249
15.2 PSpice 软件的组成和应用范围	250
15.3 PSpice 软件的使用	251
习题参考答案.....	271
附录.....	277
主要参考文献.....	284

第 1 章 概 论

1.1 电学发展史

1.1.1 古人对于电和磁的理解

自然界的电闪雷鸣,很早就引起人们的注意。但对雷电现象做出正确解释,在当时是很困难的,因此民间流传着神秘和迷信的说法。不过,雷电现象终究是自然界固有的,人们能够控制并重复实现的电学现象是摩擦琥珀后可使它吸引纸屑、芥子等微小物体的实验。公元前 600 年前后,希腊哲学家泰勒斯发现了当时的希腊人摩擦琥珀吸引羽毛,但在当时人们认为“琥珀吸引微物是它们内在的能力”,并不能给出正确的解释。天上的雷电和手中的琥珀在人们看来并没有任何联系。直到 18 世纪,通过美国人富兰克林在雷雨中放风筝的著名实验,证明了雷电和摩擦带电具有同样的属性。

我国战国时期编纂的《吕氏春秋》一书中记载了磁石吸铁的现象,古希腊人也记载过磁石吸铁的事实。我国早在战国时期就已经可以利用这一现象制成用于辨别方向的“司南”(即后来的中国四大发明之一——指南针)。

1.1.2 静电学的发展

从 16 世纪开始,随着自然科学的飞速发展,对电磁的研究有了极大的进步。近代的电磁研究开始于英国人吉尔伯特,他主张用实验的方法研究物理。1600 年,他写成了《论磁石、磁体、大磁石——地球》一书,书中系统地讨论了地球的磁性,认为地球是个大磁石,他还提出可以用磁倾角判断地球上各处的纬度。书中还讨论了摩擦带电的现象,他发现可以通过摩擦而带电的物体不限于琥珀,并列举出硫磺、玻璃、火漆等都具有这一性质。

1734 年,法国的杜法伊发现摩擦玻璃棒或摩擦胶木棒时,棒上所带电的性质不同,并发现“同性相斥、异性相吸”的现象。

1746 年,莱顿大学教授缪仙布鲁克发明了可储电的莱顿瓶。

1745 年,俄国科学家里赫曼发明了静电计,用亚麻线与金属杆间张开的角度来指示带电量的强弱,这成为最早的具有定量性质的静电仪器。美国杰出的科学家富兰克林借用数学上的正、负来代表电荷的性质,首次给出了正电和负电的名称。他认为等量异号的电荷相遇,将通过放电使正负电相抵消而中和。

1751 年,富兰克林提出了雷电与摩擦起电的性质相同的推测。1752 年他进行了著名的风筝实验,在闪电时用风筝将空中的电收集到莱顿瓶上,证明了他的推测。并且还提出了避雷针的建议,这是静电现象的最早应用。

1785 年,法国科学家库仑设计并进行了著名的静电扭秤实验,证明静电作用力的平方反比定律。库仑的实验带有直观性和定量性质,成果发表之后就广泛流传并为科学界所接受,称之为库仑定律。

之后,法国数学家泊松和德国数学家高斯根据库仑定律推导出泊松方程和高斯定律。至此,静电学的基础已经形成。

1.1.3 电池的发明与电磁学的发展

1780年,意大利生物学家加伐尼发现,电火花能引起青蛙腿肌肉抽搐。他认为青蛙肌肉的抽动是电引起的,这种电称为“动物电”。

加伐尼的发现引起了意大利物理学家伏特的注意。1800年,他发表了《关于不同导电物质接触时产生电的问题》的论文,阐述了两金属一接触就产生电这一现象,并发明了将稀硫酸放入铜与锌电极的伏特电池,使电学的研究发生了一次变革。电压的单位“伏特”就是以他的名字命名的。

电池的发明被用来发现了电解、电弧、电流的磁效应及电磁力等,为电流的各种应用开辟了道路。

利用电池,英国化学家戴维奠定了电离理论的基础,并且分离出钠、钾、铜、钡、硼、钙、氯、氟、碘等元素。1810年,戴维把2000个伏特电池连在一起,进行了弧光放电实验。这就是电用于照明的开始。他还注意到另一个重要事实:导线传送电流的能力与导线的材料有重要关系,而同样材料的导线其导电能力还与环境温度有关。这为后来欧姆的研究创造了条件。

1820年,丹麦人奥斯特发现了电流的磁效应。首次建立起电和磁之间的关系,诞生了电磁学。

1820—1827年,法国物理学家安培通过一系列实验发现了安培定则(描述磁针转动方向和电流方向关系的右手定则),发现了电流的相互作用规律(电流方向相同的两条平行载流导线互相吸引,电流方向相反的两条平行载流导线互相排斥),发明了电流计,提出了分子电流假说,总结了电流元之间的作用规律——安培定律(两电流元之间的相互作用同两电流元的大小、间距以及相对取向之间的关系)。为了纪念他在电磁学上的杰出贡献,电流的单位“安培”以他的姓氏命名。

1827年,德国科学家欧姆深入地研究了导线传送电流的能力,提出了著名的欧姆定律。欧姆在自己的许多著作中都证明:电阻与导体的长度成正比,与导体的横截面积和传导性成反比;在稳定电流的情况下,电荷不仅在导体的表面上,而且在导体的整个截面上运动。人们为纪念他,将测量电阻的物理量单位以欧姆的姓氏命名。

1840年,英国物理学家焦耳发表了论文,提出:“当伏特电流沿金属导体流过时,在一定时间内产生的热量与导体的电阻及电流强度平方的乘积成正比。”这就是著名的焦耳定律。通过科学的实验确立了能量守恒和转化定律,使电压、电流、热量、机械功都联系起来,对以后的许多研究起了重要作用。后人为了纪念焦耳,把功和能的单位定为焦耳。

1831年,英国科学家法拉第经过多次重复实验后,提出了具有划时代意义的电磁感应定律(一个线圈中产生的感应电流,其大小与单位时间中线圈所割切的磁力线多少成正比,与线圈的电阻成反比),并发明了世界上第一台直流电动机。法拉第的电磁感应定律,在电流生磁之后发现磁生电,使电磁之间的关系接近完备,有重大的理论意义,使电磁学有了飞速的发展。

1834年,俄国科学家楞次根据作用与反作用的概念,提出如何判断电磁感应中电流方向的定律——楞次定律(感应电流的方向在于产生一个磁通,以抵抗电流回路中原有磁通的变化),这一定律为判断感应电流实际方向提供了简单的办法。

1832年,美国科学家亨利发现自感现象和两个线圈间的互感现象,并提出线圈的自感系数 L 代表通过电流时的自感应作用。为表彰他的贡献,电感的单位以他的名字“亨利”命名。

之后,麦克斯韦在总结前人工作的基础上,引入位移电流的概念,建立了一组微分方程。这组方程就是著名的麦克斯韦电磁场方程组。它确定了电荷、电流(运动的电荷)、电场、磁场之间的普遍联系,是电磁学的基本方程。直到现在,它仍是研究电磁场问题的基本依据。

1887年,德国科学家赫兹进行了著名的电磁波实验。实验不仅证明了电磁波的存在,并且表明电磁波与光有同样的反射、折射、散射等性质。他的发现具有划时代意义,它不仅证实了麦克斯韦发现的真理,更重要的是开创了无线电电子技术的新纪元。为了纪念他的功绩,人们用他的名字来命名各种波动频率的单位。

1.1.4 电路理论的建立和发展

电路学科的发展大体上经历了三个阶段。

第一阶段:从18世纪20年代开始到20世纪30年代,电路理论被看成电磁学的一个分支。这一时期的主要成果有:1827年的欧姆定律,1845年的基尔霍夫定律,1911年提出的阻抗概念,1920年提出的理想变压器概念,1921年提出的四端网络和黑盒子概念,1926年提出的瞬态响应的概念。

第二阶段:从20世纪30年代开始到60年代初,伴随着电力系统、通讯系统和控制系统的发展,电路理论逐步成熟,形成一门独立的学科,通常称为传统电路理论或经典电路理论阶段。这一阶段的主要成就有:1930年的网络综合逼近理论;1933年提出一般四端网络的综合方法;1934年提出的负反馈理论;1938年把傅立叶变换应用于分析网络响应;20世纪40年代以后,在电路中引入图论基础,用拓扑的观点来研究电路的模型,在电路分析中提出节点法;把复变函数理论严谨地应用于电路的分析和综合,使电路的物理行为确切地展示在复频率平面上。

第三阶段:从20世纪60年代至今,电路理论又经历了一次重大的变革。从原来研究线性、时不变、无源、双向元件的 RLC 电路理论,向研究非线性的、时变的、有源的、非互易的电路理论发展。在这一阶段的发展过程中,矩阵、抽象空间、拓扑、广义函数论、泛函分析等在电路理论中的运用,使这一学科在理论上的完备性和逻辑上的严密性达到完美。20世纪60年代以后的电路理论一般称为近代电路理论。

1.1.5 电路科学家

(1) 欧姆

乔治·西蒙·欧姆生于德国埃尔兰根城,父亲是锁匠。父亲自学了数学和物理方面的知识,并教给少年时期的欧姆,唤起了欧姆对科学的兴趣。16岁时他进入埃尔兰根大学研究数学、物理与哲学,由于经济困难,中途辍学,到1813年才完成博士学业。欧姆是一个很有天才和科学抱负的人,他长期担任中学教师,由于缺少资料和仪器,给他的研究工作带来



不少困难,但他在孤独与困难的环境中始终坚持不懈地进行科学研究,自己动手制作仪器。

欧姆对导线中的电流进行了研究。他从傅立叶发现的热传导规律中受到启发,导热杆中两点间的热流正比于这两点间的温度差。因而欧姆认为,电流现象与此相似,猜想导线中两点之间的电流也许正比于它们之间的某种驱动力,即现在所称的电动势。欧姆花了很大的精力在这方面进行研究,开始他用伏打电堆作电源,但是因为电流不稳定,效果不好。后来他接受别人的建议改用温差电池作电源,从而保证了电流的稳定性。但是如何测量电流的大小,这在当时还是一个没有解决的难题。开始,欧姆利用电流的热效应,用热胀冷缩的方法来测量电流,但这种方法难以得到精确的结果。后来他把奥斯特关于电流磁效应的发现和库仑扭秤结合起来,巧妙地设计了一个电流扭秤,用一根扭丝悬挂一磁针,让通电导线和磁针都沿子午线方向平行放置;再用铈和铜温差电池,一端浸在沸水中,另一端浸在碎冰中,并用两个水银槽做电极,与铜线相连。当导线中通过电流时,磁针的偏转角与导线中的电流成正比。他将实验结果于1826年发表。1827年,欧姆又在《电路的数学研究》一书中把他的实验规律总结成如下公式: $S = \gamma E$ 。式中 S 表示电流; E 表示电动势,即导线两端的电势差; γ 为导线对电流的传导率,其倒数即为电阻。

欧姆定律发现初期,许多物理学家不能正确理解和评价这一发现,欧姆遭到怀疑和尖锐的批评。研究成果被忽视,经济极其困难,使欧姆精神抑郁。直到1841年英国皇家学会授予他最高荣誉的科普利金牌,才引起德国科学界的重视。

欧姆在自己的许多著作里还证明:电阻与导体的长度成正比,与导体的横截面积和传导性成反比;在稳定电流的情况下,电荷不仅在导体的表面上,而且在导体的整个截面上运动。

(2) 古斯塔夫·罗伯特·基尔霍夫

基尔霍夫(1824—1887)在电路设计方面的研究成就:1845年,21岁时他发表了第一篇论文,提出了稳恒电路网络中电流、电压、电阻关系的两条电路定律,即著名的基尔霍夫第一电路定律和基尔霍夫第二电路定律,解决了电器设计中电路方面的难题。后来又研究了电路中电流的流动和分布,从而阐明了电路中两点间的电势差和静电学的电势这两个物理量在量纲和单位上的一致。使基尔霍夫电路定律具有更广泛的意义。直到现在,基尔霍夫电路定律仍然是解决复杂电路问题的重要工具。基尔霍夫被称为“电路求解大师”。



热辐射方面的研究成就:1859年,基尔霍夫做了用火焰烧灼食盐的实验。在对这一实验现象的研究过程中,得出了关于热辐射的定律,后被称为基尔霍夫定律;基尔霍夫根据热平衡理论导出,任何物体对电磁辐射的发射本领和吸收本领的比值与物体特性无关,是波长和温度的普适函数,即与吸收系数成正比。并由此判断:太阳光谱的暗线是太阳大气中元素吸收的结果。这给太阳和恒星成分分析提供了一种重要的方法,天体物理由于应用光谱分析方法而进入了新阶段。1862年,他又进一步得出绝对黑体的概念。他的热辐射定律和绝对黑体概念是开辟20世纪物理学新纪元的关键之一。1900年,M. 普朗克的量子论就发初

于此。

化学研究方面的成就,在海德堡大学期间,他与化学家本生合作创立了光谱化学分析法。把各种元素放在本生灯上灼烧,发出波长一定的一些明线光谱,由此可以极灵敏地判断这种元素的存在。利用这一新方法,他发现了元素铯和铷。科学家利用光谱化学分析法,还发现了铊、碘等多种元素。

基尔霍夫在光学理论方面的贡献是给出了惠更斯—菲涅耳原理的更严格的数学形式。对德国的理论物理学的发展有重大影响。著有《数学物理学讲义》4卷。他还讨论了电信信号沿圆形截面导线的扰动。

(3)戴维南

L. C. 戴维南(Léon Charles Thévenin, 1857年3月30日—1926年9月21日)是法国的电信工程师。他利用欧姆定律来分析复杂电路。

L. C. 戴维南出生于法国莫城,1876年毕业于巴黎综合理工学院。1878年他加入了电信工程军团(即法国 PTT 的前身),最初的任务为架设地底远距离的电报线。1882年成为综合高等学院的讲师,让他对电路测量问题有了浓厚的兴趣。在研究了基尔霍夫电路定律以及欧姆定律后,他发现了著名的戴维南定理,用于计算更为复杂电路上的电流。此外,在担任综合高等学院电信学院的院长后,他也常在校外教授其他的学科,例如在国立巴黎农学院教机械学。1896年他被聘为电信工程学校的校长,1901年成为电信工坊的首席工程师。

戴维南定理:可将任一复杂的集总参数含源线性时不变二端网络等效为一个简单的二端网络的定理。1883年,由法国人 L. C. 戴维南提出。由于1853年德国人 H. L. F. 亥姆霍兹也曾提出过,因而又称亥姆霍兹—戴维南定理。戴维南定理指出:等效二端网络的电动势 E 等于二端网络开路时的电压,它的串联内阻抗等于网络内部各独立源和电容电压、电感电流都为零时,从这二端看向网络的阻抗 Z 。

(4)诺顿

诺顿(Edward Lawry Norton, 1898—1983),美国工程师。诺顿于1926年在贝尔实验室的一个技术报告中提出了戴维南定理的对偶定理——诺顿定理。诺顿1898年生于美国缅因州洛克兰市,1917年至1919年在美国海军服役,1922年取得电机工程系学士学位,1925年取得哥伦比亚大学电机工程系硕士学位。诺顿在贝尔实验室的同事说,诺顿是一位机电天才。除了在贝尔实验室的工作外,当时诺顿还参与了 Victor Co. 的电唱机的设计。由于这些实际工作的需要,激发了诺顿提出他的定理来帮助他设计电唱机。

(5)赫兹

赫兹(全名为 Heinrich Rudolf Hertz, 1857—1894)德国物理学家,他证明了电磁波遵守与光相同的基本定律。他的研究证实了 James Clerk Maxwell 1864年提出的著名理论和对电磁波的预测。赫兹出生在德国汉堡的一个富裕家庭,进入柏林大学学习并在著名物理学家亥姆霍兹指导下取得了博士学位。他成为 Karlsruhe 大学的教授,并开始对电磁波



的研究和探索,他成功地发现并检测到了电磁波。他第一个提出了光是一种电磁能量。他的发现具有划时代意义,它不仅证实了麦克斯韦发现的真理,更重要的是开创了无线电电子技术的新纪元。1877年,赫兹首先发现了分子结构中电子的光电效应。赫兹虽然只活到了37岁,但他对电磁波的发现奠定了无线电、电视、通信系统等方面实际应用的基础,频率的单位(赫兹)就是以他的名字命名的。

(6)亥姆霍兹

H. von (Hermann von Helmholtz, 1821—1894) 德国物理学家、生理学家。1821年10月31日生于柏林的波茨坦。中学毕业后由于经济上的原因未能直截进入大学深造,以毕业后需要在军队服役8年的条件取得公费进入德国柏林的皇家医学科学院学习资格。学习期间,还在柏林大学旁听了许多化学和生理学课程,自修了P. S. M. 拉普拉斯、J. B. 毕奥和D. 伯努利等人的数学著作和I. 康德的哲学著作。1842年获得医学博士学位后,被任命为驻波茨坦驻军军医,1847年他在德国物理学会发表了关于力的守恒讲演,在科学界赢得很大声望,次年担任了柯尼斯堡大学生理学副教授。亥姆霍兹在这次讲演中,第一次以数学方式提出能量守恒定律。主要论点是:①一切科学都可以归结到力学。②强调了牛顿力学和拉格朗日力学在数学上是等价的,因而可以用拉格朗日方法以力所传递的能量或它所做的功来量化力。③所有这种能量是守恒的。1849年,他被聘为柯尼斯堡大学生理学和普通病理学教授。1858年任海德尔堡大学生理学教授。1868年,亥姆霍兹将研究方向转向物理学,1871年接替马格诺斯任柏林大学物理学教授。1873年当选为英国伦敦皇家学会的外国会员,被授予柯普利奖章。1882年受封爵位。在电磁理论方面,他测出电磁感应的传播速度为 314000km/s ,由法拉第电解定律推导出电可能是粒子。由于亥姆霍兹的一系列讲演,麦克斯韦的电磁理论才真正引起欧洲大陆物理学家的注意,并且导致他的学生赫兹于1887年用实验证实电磁波的存在以及取得一系列重大成果。1887年被任命为新成立的柏林夏洛滕堡物理技术学院院长。1894年9月8日在夏洛滕堡逝世。

(7)法拉第

迈克尔·法拉第(Michael Faraday, 1791—1867), 英国著名物理学家、化学家。在化学、电化学、电磁学等领域都做出过杰出贡献。他家境贫寒,未受过系统的正规教育,是著名的自学成才的科学家。生于萨里郡纽因顿一个贫苦铁匠家庭。仅上过几年小学,13岁时在一家书店里当学徒,使他有幸读到许多科学书籍,自学化学和电学,由于他爱好科学研究,专心致志,受到英国化学家戴维的赏识,1815年5月由戴维举荐到皇家研究所任实验室助手,在戴维指导下进行化学研究。1824年1月当选皇家学会会员,1825年2月任皇家研究所实验室主任,1833—1862年任皇家研究所化学教授。1846年荣获伦福德奖章和皇家勋章。在众多领域中做出惊人成就,堪称刻苦勤奋、探索真理、不计个人名利的典范。



(8) 楞次

楞次(Lenz, Heinrich Friedrich Emil)1804年2月24日诞生于爱沙尼亚。16岁以优异成绩考入家乡的道帕特大学。1828年被挑选为俄国圣彼得堡科学院的初级科学助理,1830年被选为圣彼得堡科学院通讯院士,1834年当选为院士。曾长期担任圣彼得堡大学物理数学系主任,后来由教授会选为第一任校长。



楞次在物理学上的主要成就是发现了电磁感应的楞次定律和电热效应的焦耳—楞次定律。

1833年,楞次在圣彼得堡科学院宣读了他的题为“关于用电动力学方法决定感生电流方向”的论文,提出了楞次定律。亥姆霍兹证明楞次定律是电磁现象的能量守恒定律。

在电热方面,1843年楞次在不知道焦耳发现电流热作用定律(1841年)的情况下,独立地发现了这一定律。他用改善实验方法和改用酒精作传热介质,提高了实验的精度。

1831年,楞次基于感应电流的瞬时和类冲击效应,利用冲击法对电磁现象进行了定量研究,确定了线圈中的感应电动势等于每匝线圈中电动势之和,而与所用导线的粗细和种类无关。1838年,楞次还研究了电动机与发电机的转换性,用楞次定律解释了其转换原理。1844年,楞次在研究任意个电动势和电阻的并联时,得出了分路电流的定律,比基尔霍夫发表更普遍的电路定律早了4年。1865年寒假,楞次在意大利罗马中风去世。

楞次定律是一条电磁学的定律,从电磁感应得出感应电动势的方向。感应电流的磁场总是要阻碍引起感应电流的磁通量的变化。

注意:“阻碍”不是“相反”,原磁通量增大时方向相反,原磁通量减小时方向相同;“阻碍”也不是阻止,电路中的磁通量还是变化的。

(9) 麦克斯韦

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦是继法拉第之后集电磁学大成的伟大科学家。1831年11月13日生于苏格兰的爱丁堡。10岁时进入爱丁堡中学学习。14岁就在爱丁堡皇家学会会刊上发表了一篇关于二次曲线作图问题的论文,已显露出出众的才华。1847年进入爱丁堡大学学习数学和物理。1850年转入剑桥大学三一学院数学系学习,1854年以优异的成绩获史密斯奖学金,毕业后留校任职两年。1856年在苏格兰阿伯丁的马里沙耳任自然哲学教授。1860年到伦敦国王学院任自然哲学和天文学教授。1861年当选为伦敦皇家学会会员。1865年春辞去教授职务回到家乡,系统地总结他的关于电磁学的研究成果,完成了电磁场理论的经典巨著《论电和磁》和《电磁学通论》,并于1873年出版,1871年受聘为剑桥大学新设立的卡文迪什试验物理学教授,负责筹建著名的卡文迪什实验室,1874年建成后担任该实验室第一任主任,直到1879年11月5日在剑桥逝世。



1.2 电路分析课程的任务

电类专业的学生毕业后,在工作中将会面临一系列的电路知识的应用问题。

简单的电路如：汽车照明灯(见图 1.1)由蓄电池、开关、聚光灯和导线组成，这将涉及到电路分析课程中的欧姆定律。稍复杂的电路如：汽车点火系统(见图 1.2)由电池、电阻、电感、电容、开关和导线组成，这将涉及到电路分析课程中的二阶电路瞬态响应。更复杂的电路如雷达信号接受系统(见图 1.3)由天线、电阻、电感、电容、混频器和放大器组成，分析该电路必须学习电路分析课程的串联谐振和并联谐振等知识。

电路分析的工作任务是针对给定的电路，将电路某处的待求信号(电压、电流、频率、功率等)与输入信号建立函数关系，这里称输入信号为激励，输出信号为响应。

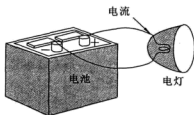


图 1.1 车灯电路

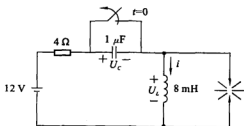


图 1.2 汽车点火系统

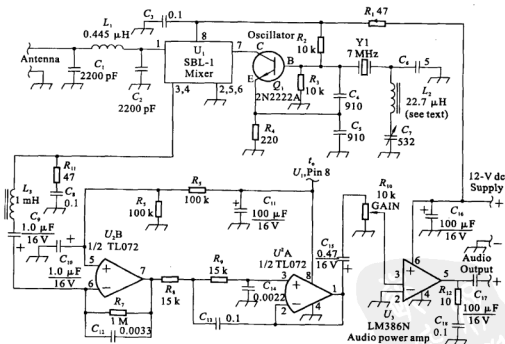


图 1.3 雷达信号接受器电路

本课程特指线性电路，对线性电路的分析包括电阻电路分析、时域分析和频域分析三大类。第一类主要包括节点分析、网孔分析、叠加原理、电源变换、戴维南定理、诺顿定理以及几个串、并联元件的替代方法，该类电路的特点是所分析的结果和时间无关。第二类涉及电

感元件和电容元件,这两个元件的电压—电流关系是由积分或微分关系定义的。分析这两种元件得到的结果都是时间的函数。当元件较多时,采用第二类分析方法比较麻烦,为了比较容易和直接分析含有电容或电感的电路,运用数学中的欧拉变换公式,可以将复杂的微分—积分方程变成代数方程,于是出现了第三类电路分析方法——频域分析方法。



第2章 基本元件和基本概念

2.1 电流和电压

2.1.1 电流

带电粒子的规则运动形成电流,电流的大小取决于电荷量的变化。电流是在特定位置、净的正电荷沿特定方向流经该位置的瞬时速率,单位为安培(A)。

$$i = \frac{dq}{dt}$$

对电流必须用两项内容进行定义:一是数值,二是方向,见图 2.1。对于一条线路上的电流,数值为正的电流向右流动与数值为负的电流向左流动其意义是一致的,见图 2.2。



图 2.1 电流的定义

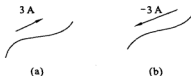


图 2.2 相同电流的两种表示法

在电路分析过程中,对于复杂电路,某一支路的电流的真实方向有时难以确定,为了方便,引入电流参考方向的概念。在分析电路之前,先任意假设各支路电流的方向,该方向称为参考方向。若电流求解的结果为正,说明实际方向与参考方向一致;若电流求解的结果为负,说明实际方向与假设的参考方向相反。

【例 2.1】 电子从左向右产生 1 mA 电流,请确定 I_1 和 I_2 ,见图 2.3。



图 2.3

解 $I_1 = -1 \text{ mA}$, $I_2 = +1 \text{ mA}$

2.1.2 电压

电路中 a, b 两点的电位之差即为两点之间的电压 U_{ab} ,见图 2.4。电压的单位为伏特(V)。

在电路分析中,有时要正确判断任意两点的电压高低也是很困难的,为了方便,也像电流一样,引入电压参考方向的概念。规定电位真正降低的方向为电压的实际方向,正极性点为“+”,负极性点为“-”,电压的方向从“+”指向“-”。因此,电压也用两项内容来定义:



图 2.4 电压的定义

一是极性,二是数值。数值为5 V、上端极性为正、下端极性为负的电压与数值为-5 V、上端极性为负、下端极性为正的电压的意义相同,见图2.5。

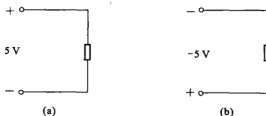


图 2.5 相同电压的两种表示方法

对假设电压参考方向的电路进行分析,若计算结果 U_{ab} 为正,说明原来的假设正确,与实际情况相同,若计算结果 U_{ab} 为负,说明原来的假设与实际情况相反。

【例 2.2】 对于图 2.6 中的元件, $u_1 = 17 \text{ V}$, 求 u_2 。

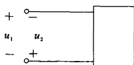


图 2.6

解 $u_2 = -u_1 = -17 \text{ V}$ 。

2.2 电阻元件

电路中最简单、最常用的元件是二端电阻元件,实际使用的电阻分为碳膜电阻、金属膜电阻、线绕电阻等。实际电阻器的特性,一般可以用 $v-i$ 平面上的一条曲线来确定。

电阻值不随电阻上电压或电流的变化而改变的电阻,称为线性电阻。阻值不随时间 t 变化的线性电阻,称为线性时不变电阻。

1827 年,德国科学家发表论文,描述了电流和电压测量的最初结果,从数学上建立了电流和电压之间的关系,其结果被称为“欧姆定律”。

欧姆定律指出:导体材料上的电压与流过这一材料的电流成正比。

$$u = Ri \quad (2-1)$$

比例常数 R 称为电阻,电阻的单位记为“ Ω ”,读作欧姆。

电阻元件的电路模型见图 2.7。

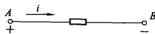


图 2.7 电阻元件的电路模型

用 $i-u$ 坐标画出这一方程的图形,图形是通过原点的一条直线,方程(2-1)是线性方程,见图 2.8。

必须指出,线性电阻是一个理想化电路元件,它只是物理元件的数学模型,这种物理元件的电压—电流比率只有在电流、电压或功率的一定范围内保持常数,本节只涉及线性电阻内容。

非线性电阻的电阻值与温度等因素有关,它们的存在使电路变得复杂,但不能认为非线性电阻是有害元件,有时非线性元件的存在可以改善电路的性能,如用作过流保护的保险丝和用作电压调节的稳压二极管。

电阻的倒数称为电导,用符号 G 表示。

$$G = \frac{1}{R} \quad (2-2)$$

在国际单位制中,电导的单位为西门子,简称西(S)。电阻和电导是从正、反两个方面表示同一材料对电流抵抗能力的两个电路参数,用电导来表示电流和电压之间关系时,欧姆定律形式改写为

$$i = Gu \quad (2-3)$$

【例 2.3】 电阻为 2Ω , 在 $u-i$ 坐标上和 $i-u$ 坐标上画出直线关系。

解 电阻 $R = 2\Omega$, $u = Ri = 2i$, 直线关系见图 2.9。

$G = \frac{1}{R} = 0.5$, $i = Gu = 0.5u$, 直线关系见图 2.10。

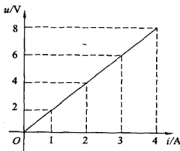


图 2.9 2Ω 电阻的电压—电流关系

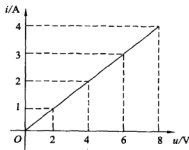


图 2.10 0.5 S 电导的电流—电压关系

2.3 电感元件

2.3.1 电感元件的电压与电流关系

19 世纪 30 年代(1831 年),英国实验物理学家迈克尔·法拉第发现,变化的磁场使附近的电路产生电压,该电压与产生磁场的电流随时间的变化率成正比,这一比例系数就是电感系数,用 L 表示,所以对电感的定义为

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (2-4)$$

u 和 i 都是时间的函数,当电流不变时,电感两端电压等于零,所以电感对于直流是短路的。

电感的符号如图 2.11 所示,单位是亨利(H)。

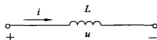


图 2.11 电感的符号和电流—电压规定

对于具体电感线圈,其电感量

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

式中, μ 是磁导率, N 是线圈的匝数, A 是线圈的截面积, l 是线圈的长度。

由式(2-4)可知,若要让电流 i 出现突然的变化,需要施加非常大的电压,这在实际中不可能达到,所以电感的电流不能够突变。当外界电源突然被中断,则在电感线路的开关处将产生电压,汽车的点火系统正是利用这一原理设计的。

2.3.2 电压—电流的积分关系

由电感的定义

$$u = L \frac{di}{dt}$$

可得

$$\begin{aligned} di &= \frac{1}{L} u dt \\ i(t) &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u dt + i(t_0) \end{aligned} \quad (2-5)$$

【例 2.4】 一个 2 H 电感两端电压为 $6\cos 5t$ V, 如果 $i\left(t = -\frac{\pi}{2}\right) = 1$ A, 求电感电流。

解

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t 6\cos 5t dt + i(t_0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \sin 5t - \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \sin 5(t_0) + i(t_0) \\ &= 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin 5t_0 + i(t_0) \end{aligned}$$

将 $t_0 = -\frac{\pi}{2}$ 代入后, $i(t_0) = 1$, 于是有

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin(-2.5\pi) + 1 \\ &= 0.6 \sin 5t + 1.6 \end{aligned}$$

2.4 电 容 元 件

2.4.1 电容元件的电压—电流关系

一个二端元件,如果在任意时刻 t , 其电荷 $q(t)$ 与电压 $u(t)$ 的关系能用 q - u 平面的曲线描述,该元件称为电容元件,用大写字母 C 表示。

$$q = Cu \quad (2-6)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (2-7)$$

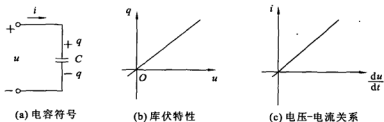


图 2.12 电容的电参数关系

对于具体的电容,它是一个能聚集电荷的元件,其电容量

$$C = \frac{\epsilon A}{\delta} \quad (2-8)$$

式中, ϵ 为介电常数, A 为电容两极板重叠面积, δ 为两极板之间的距离。

由式(2-8)可知,当电压不变时, $\frac{du}{dt} = 0$, 则 $i = 0$, 所以电容对直流开路。要使电容两端电压发生突然的改变,需要非常大的电流,实际上这是不可能的,所以电容上的电压不可能突然改变。

2.4.2 电压—电流之间的积分关系

对式(2-8)积分,可以将电容的电压用电流表示为

$$i = C \frac{du}{dt} \quad du = \frac{1}{C} i dt \quad (2-9)$$

对时间从 t_0 到 t 进行积分

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + u(t_0) \quad (2-10)$$

【例 2.5】 电流为图 2.13(a) 所示的曲线,求相应的电容电压。

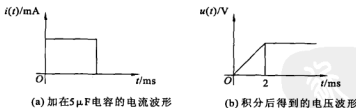


图 2.13

解

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0) \\ &= \frac{1}{5 \times 10^{-6}} \int_0^t 20 \times 10^{-3} dt + u(0) \\ &= 400t \quad (0 \leq t \leq 2 \text{ ms}) \end{aligned}$$

2.5 功 率

2.5.1 功率定义

单位时间做的功称为功率。在电路问题中涉及的功率是电场力做功的速率,功率的数学表达式为

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

dW 为 dt 时间内电场力所做的功。功率的单位为瓦特(W), $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ 。

根据物理学的知识,将单位正电荷从一点移到另一点电场力所做的功为电压,即

$$u(t) = \frac{dW}{dq}$$

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \frac{dW(t)}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u(t) \cdot i(t)$$

对于直流电,用大写字母表示为

$$P = UI$$

2.5.2 关联参考方向

若电压极性 a 点为高电位, b 点为低电位,电流的参考方向为从 a 点流向 b 点,所设的电压、电流参考方向为参考方向关联,见图 2.14(a),反之则为参考方向非关联。见图 2.14(b)

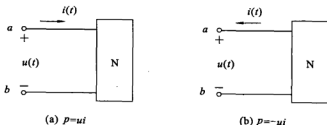


图 2.14 关联参考方向图解

2.5.3 功率平衡

电路中既有电阻等元件,又有电源元件。有的元件功率为正,吸收功率;有的元件功率为负,提供功率。根据功率平衡概念,必有:吸收功率之和等于提供功率之和。该结论可以用于求解电路的功率问题,或对计算值进行验证。

【例 2.6】 如图 2.15 所示,已知 $u_1 = 1 \text{ V}$, $u_2 = 1 \text{ V}$, $u_3 = 2 \text{ V}$, $i = 1 \text{ A}$,求各元件吸收功率 P_1 、 P_2 、 P_3 。

解 $P_1 = u_1 i = 1 \times 1 = 1 \text{ W}$

(参考方向关联)

$P_2 = u_2 i = 1 \times 1 = 1 \text{ W}$

(参考方向关联)



图 2.15

$$P_3 = -u_3 i = -2 \times 1 = -2 \text{ W}$$

(参考方向非关联)

$P_1 + P_2 + P_3 = 0$, 表明提供的功率与吸收的功率相等。

2.6 独立电源和受控电源

实际电路发挥作用需要由电源提供能量, 这些电源包括干电池和稳压电源。它们可以独立提供能量, 称为独立电源。

而晶体管的集电极电流、场效应管的漏极电压、变压器的输出电压等, 它们受电路某处电流或电压支配, 其大小随控制点的参数变化而变化, 因此称之为受控电源。

2.6.1 独立电压源

(1) 理想电压源

理想电压源的特点是: 两端的电压与流过的电流大小无关, 其符号见图 2.16。

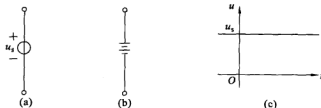


图 2.16 电源符号

(a) 直流稳压电源; (b) 电池符号; (c) 电压源外部特征

独立电压源是理想电源, 其内阻等于零。实际电源在规定的电流范围内, 可以近似认为是理想的电压源, 其精度足够满足工程要求。

流过独立电压源的电流由它和外电路共同决定, 电流可以从不同的方向流过电源。

(2) 实际电压源

实际的电压源都有自身的内阻值。实际的电压源可用一个理想的电压源 u_s 串一个电阻 R_s 作为电路模型, 见图 2.17, i 的数值将随 R_L 变化。

【例 2.7】在如图 2.17 所示电路中, $u_s = 10 \text{ V}$, $R_s = 0.01 \Omega$, $R_L = 1 \text{ k}\Omega$, 计算流过电压源的电流 i 。若 i 的相对变化率为 1%, 求 R_L 的变化范围。

$$\text{解 } i = \frac{u_s}{R_s + R_L} = \frac{10}{0.01 + 1000} = 0.0099999 \text{ A}$$

若 $\frac{\Delta i}{i} = 1\%$, 即 $\frac{i_1 - i}{i} = 1\%$, 有 $i_1 = i(1 \pm 1\%)$

$$i_1' = i(1 + 1\%) = 0.0099999(1 + 0.01) = 0.010098999 \text{ A}$$

$$i_1'' = i(1 - 1\%) = 0.0099999(1 - 0.01) = 0.00989 \text{ A}$$

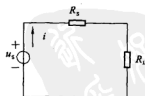


图 2.17 实际电压源电路模型

$$\frac{u_s}{R_s + R'_L} = \frac{10}{0.01 + R'_L} = 0.010098999, \text{ 可得 } R'_L = 990 \Omega$$

$$\frac{u_s}{R_s + R''_L} = \frac{10}{0.01 + R''_L} = 0.00989, \text{ 可得 } R''_L = 1011 \Omega$$

所以当 R_L 在 $990 \sim 1011 \Omega$ 波动时, 电流在 1% 误差范围内变化。

2.6.2 独立电流源

(1) 理想电流源

理想电流源的特征是: 流出电流源的电流值与电源两端的电压无关, 其符号见图 2.18(a)。

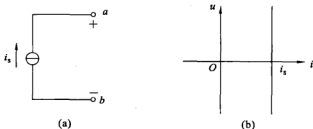


图 2.18 电流源符号

理想电源的内阻为 ∞ 。实际电流源在规定的电压范围内可以看成是理想的电流源, 其精度足够满足工程要求。

电流源两端的电压由它和外电路共同决定, 其两端电压极性可以互换, 它可以提供能量, 也可以接受能量。

(2) 实际电流源

实际电流源的阻值都不是 ∞ 。可以用一个理想的电流源并联一个电阻作为电路模型, 见图 2.19。两端电压值将随负载 R_L 变化而变化。

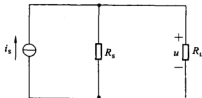


图 2.19 实际电流源电路模型

【例 2.8】 如图 2.19 所示电路中, 电流源的 i_s 为 0.1 A , R_s 为 $10 \text{ k}\Omega$, 当负载 R_L 为 100Ω 时, 求其两端的电压值。若要求电压波动 $< 1\%$, 求负载 R_L 的变化范围。

解 由欧姆定律可得

$$u = i_{R_s} R_s = i_{R_L} R_L$$

又

$$i_s = i_{R_s} + i_{R_L}$$

得到

$$i_{R_L} = \frac{i_s R_s}{R_s + R_L} = \frac{0.1 \times 10 \times 10^3}{10 \times 10^3 + 100} = 0.099 \text{ A}$$

$$u = I_{R_L} R_L = \frac{i_s R_s}{R_s + R_L} \times R_L = 0.099 \times 100 = 9.9 \text{ V}$$

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{u_1 - u}{u} = 1\%, \text{ 即 } u_1 = u(1 \pm 0.01)$$

$$u'_1 = (1 + 0.01)u = 1.01u = 1.01 \times 9.9 = 9.999 \text{ V}$$

$$u_1'' = (1 - 0.01)u = 0.99u = 0.99 \times 9.9 = 9.8 \text{ V}$$

设 $u_1 = \frac{i_s R_s}{R_s + R_L} \times R_L$, 于是得到

$$R_L = \frac{R_s}{\frac{i_s R_s - u_1}{u_1}} = \frac{R_s u_1}{i_s R_s - u_1} = \frac{10 \times 10^3 u_1}{0.1 \times 10 \times 10^3 - u_1}$$

当 $u_1 = u_1' = 9.999 \text{ V}$ 时

$$R_L = R_L' = \frac{10 \times 10^3 \times 9.999}{0.1 \times 10 \times 10^3 - 9.999} = 100.1 \Omega$$

当 $u_1 = u_1'' = 9.8 \text{ V}$ 时

$$R_L = R_L'' = \frac{10 \times 10^3 \times 9.8}{0.1 \times 10 \times 10^3 - 9.8} = 98.97 \Omega$$

所以, 当负载 R_L 值在 $98.97 \sim 100.1 \Omega$ 之间变化时, 电流源的端电压在 $\pm 1\%$ 范围内波动。

2.6.3 受控电源

在电路中会遇到另一种类型的电源元件, 它们的数值受电路中某一支路上的电压或电流控制, 当控制源的数值改变时, 这些电源的电参数发生相应的变化, 这一类电源称为受控源。因为它们不是独立不变的, 所以也称为非独立电源。电路中具有这种性质的电源共有 4 种, 即: 电压控制电压源 (VCVS)、电压控制电流源 (VCCS)、电流控制电流源 (CCCS)、电流控制电压源 (CCVS)。

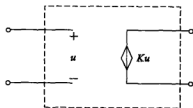


图 2.20 VCVS 模型

K —比例常数

(1) 电压控制电压源 (VCVS)

电压控制电压源的模型 (VCVS) 如图 2.20 所示。

【例 2.9】在图 2.21 所示电路中, 已知 $u_2 = 3 \text{ V}$, 求 u_L 。

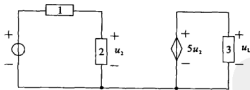


图 2.21 含有 VCVS 的电路

解 由电路图可知该电源为 VCVS, $u_2 = 3 \text{ V}$, 所以

$$5u_2 = 5 \times 3 = 15 \text{ V}$$

即: 元件 3 上电压 $u_L = 5u_2 = 15 \text{ V}$ 。

(2) 电压控制电流源 (VCCS)

电压控制电流源 (VCCS) 模型如图 2.22 所示。

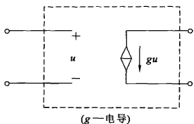


图 2.22 VCCS 模型

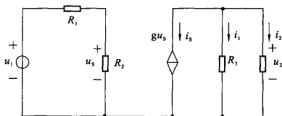


图 2.23 含 VCCS 的实际电路

【例 2.10】 如图 2.23 所示电路中, 含有 VCCS, g 为电导, 求输出电压 u_2 。

解 这是场效应管(FET)放大器的电路模型, 受控电流源 gu_3 受到电压 u_3 的控制。由电流相等可得

$$\frac{u_1}{R_1 + R_2} = \frac{u_3}{R_2}, \quad u_3 = \frac{u_1}{R_1 + R_2} R_2$$

由于 $-gu_3 = i_1 + i_2$, 又因 $i_1 = \frac{u_2}{R_3}$, $i_2 = \frac{u_2}{R_L}$, 将 u_3 、 i_1 和 i_2 代入上式可得

$$-g \left(\frac{u_1}{R_1 + R_2} R_2 \right) = \frac{u_2}{R_3} + \frac{u_2}{R_L}$$

整理后得到

$$u_2 = - \frac{g R_2 R_3 R_L}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_L)} u_1$$

(3) 电流控制电流源(CCCS)

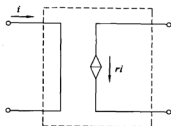


图 2.24 CCCS 模型

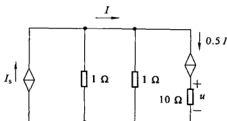


图 2.25 含 CCCS 的实际电路

【例 2.11】 在图 2.25 所示电路中, $u = 10\text{ V}$, 求 I_s 。

解 由受控源可知, $0.5I = \frac{u}{10}$, $I = \frac{u}{0.5 \times 10} = \frac{10}{5} = 2\text{ A}$

右边 1Ω 上的电流 $I_{1\Omega} = I - 0.5I = 0.5I = 0.5 \times 2 = 1\text{ A}$

1Ω 上的电压 $= 1 \times 1 = 1\text{ V}$, 所以左边 1Ω 上的电压也等于 1 V , 从而得出左边 1Ω 上的电流等于 1 A 。

因此

$$I_s = 1 + I = 1 + 2 = 3\text{ A}$$

(4) 电流控制电压源(CCVS)

电流控制电压源(CCVS)模型如图 2.26 所示。

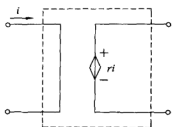


图 2.26 CCVS 模型

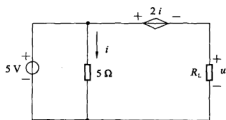


图 2.27 含 CCVS 的实际电路

【例 2.12】 如图 2.27 所示电路中含有 CCVS, 求电压 u 。

解 流过 5Ω 的电流 $i = \frac{5}{5} = 1\text{ A}$

受控源的电压值 $= 2i = 2 \times 1 = 2\text{ V}$

由于单个电荷沿 5Ω 支路到电路右下角做的功与沿受控源和 R_L 到右下角做的功相等, 于是有

$$u_{5\Omega} \times 1 = 2i \times 1 + u \times 1$$

$$5 \times 1 = 2 \times 1 + u$$

$$u = 3\text{ V}$$

解得

2.7 与后续课程的关系

常用的实用电阻器有: 金属膜电阻器、炭膜电阻器、线绕电阻器以及电炉、白炽灯等。

常用的电容器有云母电容器、瓷介电容器、薄膜电容器以及电解电容器等, 这几种电容器应用在工作频率不高的电路中时, 都可以视为理想电容元件。电解电容由于漏电和介质损耗较大, 它的电阻性质一般不可忽略。

实际电感器是用导线绕制成的, 导线都具有一定的电阻, 但作为电感元件, 一般只考虑它的磁效应, 而忽略它的能耗。需要考虑损耗时用电感元件与电阻元件的串联表示实际电感器。

理想电压源内阻为零, 端电压不随负载变化; 理想电流源内阻为无穷大, 输出电流不随负载变化。但实际电源内阻既不可能为无穷大, 也不可能为零。当负载变化时, 它们的端电压或输出电流也总会有所变化。实际电压源的等效串联内阻越小越好; 实际电流源的等效并联内阻越大越好。在后续课程中, 各类实际电源(含信号源)都可等效为实际的电压源模型或电流源模型来分析和计算。

受控源也是从某些电路元件中抽象出来的。例如半导体晶体管可用相应的受控源作为电路模型。图 2.28 给出了 NPN 型晶体管的电路符号及其 CCCS 受控源的低频电路模型, 图中 β 为三极管共射电流放大倍数。

在高频电路中, 石英晶体谐振器(也称石英振子)是一个重要的高频部件, 它广泛用于频率稳定性高的振荡器中, 也用作高性能的窄带滤波器和鉴频器。石英晶体谐振器是天然或人工生成的石英晶体(俗称水晶, 是一种化学成分为 SiO_2 、两端呈角锥的六棱柱结晶体)切片制成。

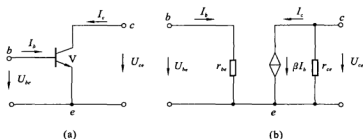


图 2.28 NPN 型晶体三极管电路符号及 CCCS 受控源的电路模型

(a) NPN 型晶体三极管电路符号; (b) CCCS 受控源的电路模型

石英晶体谐振器可用基本电路元件——电容、电感、电阻来等效地表示,其等效电路与符号如图 2.29 所示。

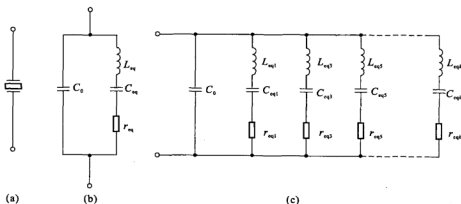


图 2.29 石英晶体谐振器等效电路与符号

(a) 电路符号; (b) 谐振频率附近的等效电路; (c) 包括泛音在内的等效电路

图中, C_0 为金属板及支架构成的电容, 约 $1 \sim 10 \text{ pF}$; C_{eq} 为压电谐振等效电容, 约 $10^{-4} \sim 10^{-1} \text{ pF}$; L_{eq} 为压电谐振等效电感, 约 $10^{-3} \sim 10^2 \text{ H}$; r_{eq} 为摩擦损耗电阻, 约几十到几百欧姆。

后续课程中, 全部电路元器件、组件都可以等效成由基本电路元件组成的电路来分析和计算, 使实际电路变得简单并便于研究与计算。

2.8 设备实用电路举例——家装电线规格选择

因为电流流动会产生热量, 不同材料类型通过电流后产生的热量大小也不同, 主要取决于其电阻的大小, 由电阻的计算公式: $R = \rho \frac{l}{A}$ 可知, 电阻大小跟电线的材料、长度和截面积有关, 如果已经选定家装电线的材料和长度, 则电线的规格就取决于截面积的大小。

2.8.1 电线平方数

电线的规格在国际上常用的有三个标准: 分别是美制 (AWG)、英制 (SWG) 和我国的国标

(CWG),几平方是国家标准规定的的一个标称值,是用户根据电线电缆的负荷来选择电线电缆。电线平方数是装修水电施工中的一个口头用语,常说的几平方电线是没加单位,即平方毫米。

电线的平方数实际上标的是电线的横截面积,即电线圆形横截面的面积,单位为平方毫米。一般来说,经验载电量是当电网电压为 220 V 时,每平方电线的经验载电量在 1 kW 左右。每平方毫米铜线可以载电 1 ~ 1.5 kW,每平方毫米铝线可载电 0.6 ~ 1 kW。因此,功率为 1 kW 的电器只需用一平方的铜线就足够了。具体到电流,短距送电时一般铜线每平方毫米可载 5 A 的电流。

2.8.2 电线规格

家庭用电源线宜采用 BVV2×2.5 和 BVV2×1.5 型号的电线。BVV 是国家标准代号,为铜质护套线。BVV2×2.5 和 BVV2×1.5 分别代表 2 芯 2.5 mm² 和 2 芯 1.5 mm² 的铜质电线。一般情况下,BVV2×2.5 作主线、干线,BVV2×1.5 作单个电器(如普通灯管)支线、开关线。单向空调专线用 BVV2×4 铜质电线,另配专用地线。

购买电线,首先看成卷的电线包装牌上有没有中国电工产品认证委员会的“长城标志”和生产许可证号,再看电线外层塑料皮是否色泽鲜亮、质地细密,用打火机点燃应无明火。非正规产品使用再生塑料,色泽暗淡、质地疏松、能点燃并产生明火。其次看长度、比价格。BVV2×2.5 电线每卷的长度是 100±5 m。正规产品电线使用精红紫铜,外层光亮,质地稍软。非正规产品铜质偏黑而发硬,属再生杂铜,电阻率高,导电性能差,发热量大而不安全。

家庭装修离不开电线,电线虽小,责任重大。好多火灾是由于电线线路老化,配置不合理,或者使用电线质量低劣造成的。因此,消费者在购买电线时一定要仔细鉴别,防患于未然。目前,市场上的电线品种多、规格多、价格乱,消费者挑选时难度很大。单就家庭装修中常用的 2.5 mm² 和 4 mm² 两种铜芯线的价格而言,同样规格的一盘线,因为厂家不同,价格可相差 20% ~ 30%。至于质量优劣,长度是否达标,消费者更是难以判定。据电线行业业内人士透露,电线之所以价格差异巨大,是由于生产过程中所用原材料不同造成的。生产电线的主要原材料是电解铜、绝缘材料和护套料。目前原材料市场上电解铜每 1000kg 在两万元左右,而回收的杂铜每 1000kg 价格只有 1.5 万元左右;绝缘材料和护套料的优质产品价格每 1000kg 在 8000 ~ 8500 元,而残次品的价格每 1000kg 只需 4000 ~ 5000 元。另外,长度不足,绝缘体含胶量不够,也是造成价格差异的重要原因。每盘线长度,优等品是 100 m,而次品只有 90 m 左右;绝缘体含胶量优等品占 35% ~ 40%,而残次品只有 15%。通过对比,消费者不难看出成品电线销售价格存在差异是材质上存在差别所致。

2.8.3 举例说明

(1) 每台计算机耗电为 200 ~ 300 W(1 ~ 1.5 A),那么 10 台计算机就需要一条 2.5 mm² 的铜芯电线供电,否则可能引发火灾。

(2) 大 3 匹空调耗电约为 3000 W(约 14 A),那么 1 台空调就需要单独的一条 2.5 mm² 的铜芯电线供电。

(3) 现在的住房进户线一般选用的是 4 mm² 的铜线,因此,同时开启的家用电器不得超过 25 A(即 5500 W),有人将房屋内的电线更换成 6 mm² 的铜线是徒劳的。

(4) 耗电量比较大的家用电器有:空调 5 A(1.2 匹),电热水器 10 A,微波炉 4 A,电饭煲

4 A, 洗碗机 8 A, 带烘干功能的洗衣机 10 A, 电开水器 4 A。在电源引起的火灾事故中, 有 90% 是由于接头发热造成的, 因此, 所有的接头均要焊接, 不能焊接的接触器件 5~10 年必须更换(比如插座、空气开关等)。

(5) 2.5 mm^2 的铜线允许使用的最大功率是 5500 W; 4 mm^2 的铜线允许使用的最大功率是 8000 W; 6 mm^2 的铜线允许使用的最大功率是 9000 W。

2.8.4 已知家电的用电功率计算用线规格

家庭电线规格的选用, 应根据家用电器的总功率来计算, 然后根据不同规格电线的最大载流能力来选取合适的电线电缆。所需载流能力计算应根据下列公式:

$$I_{\max} = k \frac{W}{U}$$

式中 I_{\max} ——为线路需要的最大电流容量, 单位 A;

W ——家用电能总功率, 单位 W;

U ——家用额定电压, 单位 V;

k ——过电压的安全系数, 数值一般取 1.2~1.3。

现在装修都用铜线, 铝线基本被淘汰。下面以铜线为例列出一些常用 BV(单胶铜芯电线)、BVV(双胶铜芯电线)、BVVB(平行线) 型电线在空气中的最大载流量。

表 2.1 常用铜线截面积对应三种芯线允许的载流量

铜线标称截面积(mm^2)	允许载流量(A)		
	单芯电缆	二芯电缆	三芯电缆
1.5	23	20	18
2.5	30	25	21
4	39	33	28
6	50	43	36
10	69	59	51

根据载流能力公式计算出家庭用电的最大需求电流, 然后根据表 2.1 中不同截面的电线所能承受的最大载流能力来选取恰当的电线。如家用总功率为 5000 W, 额定电压为 220 V, 根据上式计算得电流值为 27.24~29.51 A, 经与上表核对, 选用 2.5 mm^2 的铜线较为合适。

习 题

- 一只标有额定电压 20 V、额定功率 1 W 的灯泡, 现接在 10 V 的电源上使用, 其阻值为 (), 实际电流为 (), 实际消耗的功率为 ()。
- 实际电源与理想电源的本质区别在于前者的外特性受 () 的影响, 而后者无此问题。
- 实际电压源的电路模型是 () 与电阻的 () 组合。
- 实际电流源的电路模型是 () 与电阻的 () 组合。
- 某电路中有 a、b、c 三节点, 已知 $U_{ab} = 8 \text{ V}$, $U_{bc} = 5 \text{ V}$ 。若取 a 点为参考点, 则 $U_b = ()$, $U_c = ()$ 。

()；若取 b 点为参考点，则 $U_a = ()$ ， $U_c = ()$ 。

2.6 若 a, b, c 三点的电位分别为 3 V 、 2 V 、 -2 V ，则电压 U_{ab} 为 $()\text{ V}$ ， U_{ac} 为 $()\text{ V}$ 。若改以 c 点为参考点，则电位 U_c 变为 $()\text{ V}$ ，电位 U_a 为 $()\text{ V}$ 。

2.7 任何具有两个线端的电路称为 $()$ 。若电路中有电源存在，则该电路称为 $()$ ，它可以简化成一个 $()$ 和 $()$ 串联的等效电源。

2.8 在满足一定的条件下，换路一瞬间，电感 $()$ 不能突变，电容 $()$ 不能突变。

2.9 在题图所示电路中， 6 V 电压源产生的功率为 $()\text{ W}$ ， 1 A 电流源产生的功率为 $()\text{ W}$ 。

2.10 下列说法正确的是 $()$ 。

(A) 电位随着参考点(零电位点)数值的不同选择而变化

(B) 电位差随着参考点数值的不同选择而变化

(C) 电路上两点的电位很高，则其间电压也很大

(D) 电路上两点的电位很低，则其间电压也很小

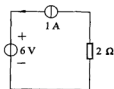
2.11 在题图所示电路中，电压 u 等于 $()$ 。

(A) -3 V

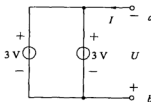
(B) 3 V

(C) 6 V

(D) -6 V



题 2.9 图



题 2.11 图

2.12 变压器铭牌上标明 $220/36\text{ V}$ 、 300 VA ，下面哪一种规格的电灯接在此变压器二次绕组电路中能正常工作 $。()$

(A) 36 V 、 500 W

(B) 36 V 、 60 W

(C) 12 V 、 60 W

(D) 220 V 、 25 W

2.13 用 110 V 直流电压输送 22 kW 功率时，线路电流为 200 A 。若经论证允许，则同一线路用 220 V 直流电压输送相同功率时，电流为 $()\text{ A}$ 。

(A) 400

(B) 10

(C) 100

(D) 20

2.14 若把电路中原来电位为 3 V 的一点改选为参考点，则电路中各点电位比原来 $()$ 。

(A) 升高

(B) 降低

(C) 升高或降低

(D) 不变

2.15 当一个元件两端电压的实际方向与通过它的电流实际方向一致时，该元件是 $()$ 功率的。

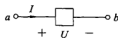
2.16 设电路的电压与电流参考方向如题图所示，已知 $U < 0$ ， $I > 0$ ，则电压与电流的实际方向为 $()$ 。

(A) a 点为高电位，电流由 a 至 b

(B) a 点为高电位，电流由 b 至 a

(C) b 点为高电位，电流由 a 至 b

(D) b 点为高电位，电流由 b 至 a



题 2.16 图

2.17 一个理想独立电流源的基本特性是 $()$ 。

(A) 其输出电流与端电压无关；端电压可为任意值，取决于外电路

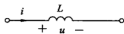
(B) 其输出电流与端电压有关;端电压不为任意值,取决于电流源

(C) 其输出电流与端电压无关;端电压必定与电流方向一致

(D) 其输出电流与端电压有关;端电压未必与电流方向一致

2.18 如题图所示,正弦电流通过电感元件时,下列关系中正确的是()。

- (A) $\dot{U} = j\omega L \dot{I}$ (B) $u = j\omega L i$ (C) $\dot{U} = L \frac{d\dot{I}}{dt}$ (D) $U = j\omega L I$



题 2.18 图

2.19 电感是()元件。

- (A) 耗能 (B) 储能 (C) 整流 (D) 有源

2.20 用 110 V 直流电压输送 22 kW 功率时,线路电流为 200 A。若经论证允许,则同一线路用 220 V 直流电压输送相同功率时,电流为()A。

- (A) 400 (B) 10 (C) 100 (D) 20

第3章 电压和电流定律

3.1 节点、支路和回路

3.1.1 节点

两个或两个以上元件的连接点为节点,图3.1所示电路中的节点有6个,即: a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 。

3.1.2 支路

一个元件或若干个元件串联,流过相同电流的一个电路分支称为支路,图3.1所示电路中的 ab 、 bc 、 cd 、 de 、 ef 、 fa 、 be 等都是支路,共有7条支路。

3.1.3 回路

电路中任一闭合路径称为回路,图3.1所示电路中的回路有 $abefa$ 、 $bcdeb$ 、 $abcdefa$ 三个回路。

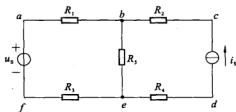


图3.1 具有6个节点、7条支路和3个回路的电路

3.2 基尔霍夫电流定律

1845年,21岁的德国人吉斯塔夫·罗伯特·基尔霍夫发表论文,提出电路网络中的电流、电压和电阻关系的两个电路定律,这两个定律揭示了电路的基本特性,第一个为基尔霍夫电流定律(KCL),简单表述为:流入任何节点的电流的代数和等于零,即

$$\sum i_{\lambda} = 0 \quad (3-1)$$

另外两种等价的表达为:流出任何节点的电流的代数和等于零,即

$$\sum i_{\text{出}} = 0 \quad (3-2)$$

流入任何节点的电流之和等于流出该节点的电流之和,即

$$\sum i_{\lambda} = \sum i_{\text{出}} \quad (3-3)$$

在实际解题过程中,描述不太正规但比较适用的表达为

$$\sum \text{电流源流入节点的电流} = \sum \text{经电阻流出节点的电流} \quad (3-4)$$

【例 3.1】用 KCL 求图 3.2 所示电路中的电流 i_2 , 已知 $i_1 = 2 \text{ A}$ 。

解 已知电流源电流为 3 A , $i_1 = 2 \text{ A}$ 。

由 KCL 可得

$$i_1 + i_2 = 3$$

$$i_2 = 3 - i_1 = 3 - 2 = 1 \text{ A}$$

所以

$$i_2 = 1 \text{ A}$$



图 3.2

【例 3.2】图 3.3 所示电路中含有 CCCS, 求端口的输入电阻 R_i 。

解 在左上节点处应用 KCL 可得

$$I = I_1 + I_2$$

在外回路应用 KVL (见 3.3 节内容) 可得

$$-u - rI + R_2 I_2 + R_3 I_2 = 0$$

$$u = (R_2 + R_3) I_2 - rI$$

又

$$u = R_1 I_1$$

$$R_1 I_1 = (R_2 + R_3) I_2 - rI$$

$$R_1 (I - I_2) = (R_2 + R_3) I_2 - rI$$

简化得

$$I = \left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{r + R_1} \right) I_2$$

由 $u = R_1 I_1$ 得到

$$\begin{aligned} u &= R_1 (I - I_2) \\ &= R_1 \left[\left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{r + R_1} \right) I_2 - I_2 \right] \\ &= R_1 \left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{r + R_1} - 1 \right) I_2 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} R_i = \frac{u}{I} &= \frac{R_1 \left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{r + R_1} - 1 \right) I_2}{\left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{r + R_1} \right) I_2} \\ &= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 - r R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

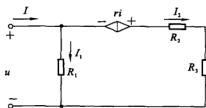


图 3.3

3.3 基尔霍夫电压定律

基尔霍夫提出的第二个定律是电压定律(KVL), 简单表述为: 沿任何闭合回路的电压

的代数和等于零,即

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0 \quad (3-5)$$

应该遵循的规则是:沿回路巡行时,如果箭头首先与电压的负极性相遇,则该电压在等式中取负号,反之取正号。如果遇到电阻,电阻元件上已标出电流参考方向,巡行箭头与所标电流参考方向一致时,电阻上电压为 $+Ri$,反之为 $-Ri$ 。

【例 3.3】在图 3.4 所示电路中,已知 $U_R = 18 \text{ V}$,求电阻 R 的值。

解 由欧姆定律可得

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{18}{R}$$

在上节点应用 KCL 可得

$$5 = I_1 + I_R$$

$$I_1 = 5 - I_R = 5 - \frac{18}{R}$$

在右回路应用 KVL 可得

$$U_R + 4I_R - 6I_1 = 0$$

将 I_R 、 U_R 、 I_1 代入上式

$$18 + 4 \times \frac{18}{R} - 6 \times \left(5 - \frac{18}{R}\right) = 0$$

解出

$$R = 15 \Omega$$

【例 3.4】计算图 3.5 所示电路中的电流值。

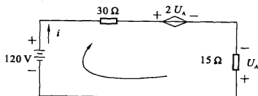


图 3.5

解 应用 KVL 可得

$$-120 + 30i + 2U_A - U_A = 0$$

$$U_A = -15i$$

$$-120 + 30i + 2(-15i) - (-15i) = 0$$

$$i = 8 \text{ A}$$

3.4 电源的串联和并联

电路中经常出现若干个电源,若能做到将这些电源合并,将大大减少求解的方程数,从而减小求解的难度。经常的做法是,将串联的电压源用一个等效的电压源代替,其电压值是

被合并的电源的代数和,将并联的电流源用一个等效的电流源代替,其电流值是被合并的电流源的代数和。

3.4.1 电压源的串联

图 3.6(a) 是三个电压源的串联,求其代数和后可等效为一个电压源,见图 3.6(b)。图 3.7(a) 将电压源进行了错误的连接,其正确的连接形式如图 3.7(b) 所示。

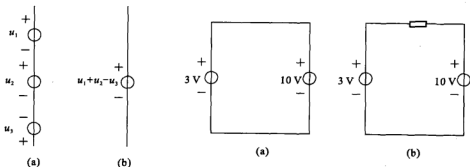


图 3.7

图 3.6 用等效电压源代替 3 个电压源

(a) 错误的电压源连接; (b) 正确的电压源连接

【例 3.5】 求图 3.8(a) 所示电路中的电流 i 。

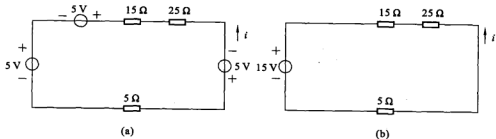


图 3.8

解 首先将三个电压源合并,电路改画成图 3.8(b) 所示的形式。

应用 KVL 可得

$$-15 - 15i - 25i - 5i = 0$$

$$i = -\frac{1}{3} \text{ A}$$

3.4.2 电流源的并联

图 3.9(a) 是三个电流源的并联电路,求其代数和后可等效为一个电流源,见图 3.9(b)。

图 3.10(a) 将电流源进行了错误的连接,其正确连接方式如图 3.10(b) 所示。

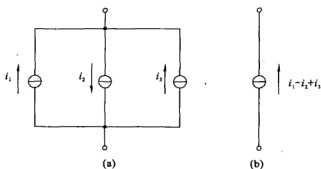


图 3.9 用等效电流源(b)代替三个电流源(a)

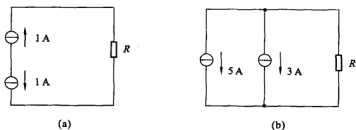


图 3.10

(a) 错误的电流源连接; (b) 正确的电流源连接

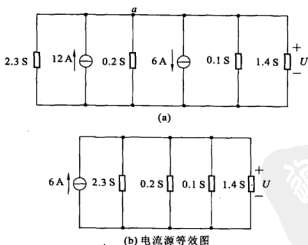
【例 3.6】 求图 3.11(a) 所示电路中的电压 U 。

图 3.11

解 在图 3.11(a) 的节点 a 应用 KCL

$$(2.3U - 12 + 0.2U + 6 + 0.1U + 1.4U) = 0$$

$$(2.3 + 0.2 + 0.1 + 1.4)U - (12 - 6) = 0$$

$$(2.3 + 0.2 + 0.1 + 1.4)U - 6 = 0$$

上式与等效图 3.11(b)相对应,因此

$$U = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ V}$$

3.5 电阻的串联和并联及 \triangle -Y 转换

用一个等效电阻代替复杂的电阻组合,将为分析复杂电路带来方便,而不影响电路中电流、电压和功率数值的求解。

3.5.1 电阻的串联

对于图 3.12(a) 所示的电路,应用 KVL 可得

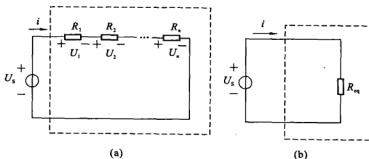


图 3.12

(a) n 个电阻的串联组合; (b) 等效电阻

$$U_s = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

再应用欧姆定律可得

$$\begin{aligned} U_s &= R_1 i + R_2 i + \cdots + R_n i \\ &= (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) i \\ &= R_{eq} i \end{aligned} \quad (3-6)$$

由以上公式推导结果可知, R_1, R_2, \dots, R_n 个电阻的串联值可以用一个 R_{eq} 来代替, 而 $u-i$ 关系不会改变。

3.5.2 电阻的并联

对于图 3.13(a) 所示的电路,应用 KCL 可得

$$i_s = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

再应用欧姆定律可得

$$\begin{aligned} i_s &= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots + \frac{U}{R_n} \\ &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \right) U \\ &= \frac{1}{R_{eq}} U \end{aligned}$$

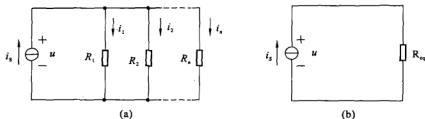


图 3.13

(a) n 个电阻的并联组合; (b) 等效电阻

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

$$i_s = G_{eq}U$$

或

因此,由 R_1, R_2, \dots, R_n 并联的电阻组合,可以用一个 R_{eq} 来代替,而 $u-i$ 的关系不变。

注意,并联电路的等效电阻计算分两步进行:先将各电阻的电导值相加得到总电导,再取总电导的倒数为总电阻。

3.5.3 电阻的混联

既存在电阻串联,又存在电阻并联的电路被称为混联电路,也称为串-并联电路。为了便于分析,应该将能够串联合并的电阻进行合并,将能够进行并联合并的电阻进行合并。

图 3.14 电路中存在三类电阻, R_2 和 R_3 是并联连接; R_1 和 R_6 是串联连接; R_4, R_5, R_6, R_7 相互之间不存在串联关系,也不存在并联关系。

判断混联电路的串并联方法:

(1) 看电路结构特点,若电阻首尾相连则为串联;首首尾尾相连则为并联。

(2) 看电压电流关系,流经两个电阻是同一个电流,这两个电阻串联;两个电阻承受的是同一个电压,这两个电阻并联。

(3) 对原图暂时无法判断时,可将原图进行变形处理。如左边支路扭到右边,下面的电路翻到上面,弯曲的支路拉直等,处理后再进行串联或并联电阻的识别。

【例 3.7】求图 3.15 所示电路中 ab 端的等效电阻。

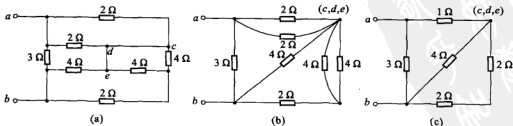


图 3.15

解 将原图中短路线 cde 集中到一点, 电路变为图 3.15(b) 所示, 求 $2//2, 4//4$; 电路变为图 3.15(c) 所示, 进而可以方便地求出 R_{eq} 。

$$R_{eq} = R_{ab} = [(2+2)//4+1]/3 = 1.5 \Omega$$

3.5.4 电阻的 Y- Δ 转换

对于上述内容中提到的既不可能进行串联, 又不可能进行并联的电阻, 可以采用 Y- Δ 转换后再进行串联或并联等效来简化电路, Y 型电路见图 3.16(a), Δ 型电路见图 3.16(b)。

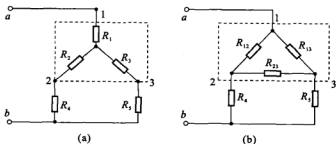


图 3.16

$\Delta \rightarrow Y$ 转换时新的电阻值为

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_3 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

Y $\rightarrow \Delta$ 转换时新的电阻值为

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1}$$

$$R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_2}$$

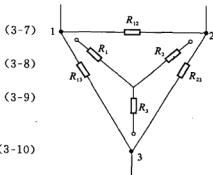


图 3.17

以上 6 个电阻可以在图 3.17 中找到位置。

【例 3.8】求图 3.18 中的电流 I 。

解 应用 $\Delta \rightarrow Y$ 转换, 求出 Y 型电路中新的电阻值。

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{9 \times 9}{9 + 9 + 9} = \frac{81}{27} = 3 \Omega$$

$R_1 \sim R_3$ 的位置与图 3.16(a) 对应。

电路中的等效电阻为 $R_{eq} = (3+9)/(3+3)+3 = 7 \Omega$

因此

$$I = \frac{U_s}{R_{eq}} = \frac{21}{7} = 3 \text{ A}$$

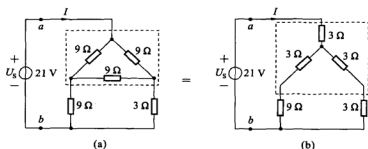


图 3.18

3.6 电感的串联和并联

3.6.1 电感的串联

将电压源 U_s 加在 n 个电感的串联组合上, 见图 3.19(a), 求解等效电路 L_{eq} 。

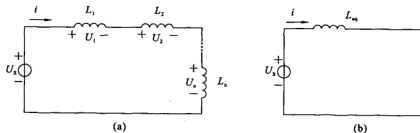


图 3.19

(a) n 个电感串联; (b) 等效电路

对图 3.19(a) 应用 KVL 可得

$$\begin{aligned}
 U_s &= U_1 + U_2 + \cdots + U_n \\
 &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_n \frac{di}{dt} \\
 &= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \frac{di}{dt} \\
 &= L_{eq} \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$

图 3.19(b) 所示等效电感为 $L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ 。

3.6.2 电感的并联

对图 3.20 所示具有 n 个并联电感的电路, 应用基尔霍夫电流定律, 总电流 i_s 必须等于各支路电流之和。

由 KCL 可得



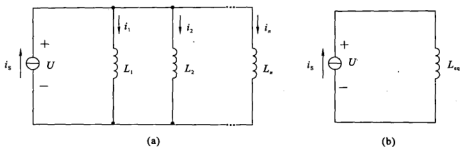


图 3.20

(a) n 个电感的并联; (b) 等效电路

$$\begin{aligned}
 i_s &= i_1 + i_2 + \cdots + i_n \\
 &= \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t u dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t u dt + i_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t u dt + i_n(t_0) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \int_{t_0}^t u dt + \sum_{i=1}^n i_i(t_0) \\
 &= \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t u dt + i_s(t_0) \quad [i_s(t_0) \text{ 是 } t_0 \text{ 时各支路电流和}]
 \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$

3.7 电容的串联和并联

3.7.1 电容的串联

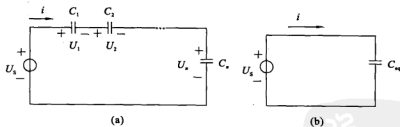
将电压源加在 n 个串联电容的组合上, 见图 3.21。

图 3.21

(a) n 个电容的串联; (b) 等效电阻

应用 KVL 可得

$$\begin{aligned}
 U_s &= \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{C_i} \int_{t_0}^t i dt + U_i(t_0) \right] \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right) \int_{t_0}^t i dt + \sum_{i=1}^n U_i(t_0)
 \end{aligned}$$

$U_S(t_0)$ 等于 t_0 时各电容的电压之和。

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

当 $n = 2$ 时, $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

3.7.2 电容的并联

对图 3.22 所示的具有 n 个电容并联的电路, 见图 3.22。应用 KCL 可得

$$\begin{aligned} i_S &= i_1 + i_2 + \cdots + i_n \\ &= C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + \cdots + C_n \frac{du}{dt} + \sum_{i=1}^n i_i(t_0) \\ &= (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \frac{du}{dt} + \sum_{i=1}^n i_i(t_0) \\ &= C_{eq} \frac{du}{dt} + i_S(t_0) \end{aligned}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

当 $n = 2$ 时, $C_{eq} = C_1 + C_2$ 。

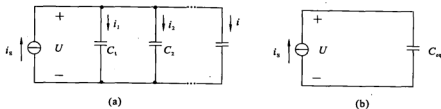


图 3.22

(a) n 个电容的并联; (b) 等效电路

3.8 分流和分压

3.8.1 分流公式

让一个总电流流过两个并联的电阻, 用欧姆定律可以求出 i_1 或 i_2 的值。

图 3.23 所示电路中电阻的电压为

$$U = i(R_1 // R_2)$$

R_2 两端的电压为 $U = i_2 R_2$

所以 $i(R_1 // R_2) = i_2 R_2$

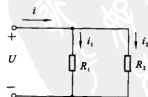


图 3.23 分流电路

$$\begin{aligned}
 i_2 &= i \frac{R_1 // R_2}{R_2} = i \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_2} \\
 &= \frac{i R_1}{R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$

同理可得

$$i_1 = \frac{i R_2}{R_1 + R_2} \quad (3-13)$$

当多个电阻并联时,将其余支路电阻合并成一个等效电阻,该等效电阻与所求支路电流的支路电阻组成并联关系,利用上述分流公式求支路电流。

3.8.2 分压公式

分压是指用总电压来表示多个串联电阻上某一个电阻的电压。

对于图 3.24 所示电路,应用 KVL 和欧姆定律可得

$$U = U_1 + U_2 = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

于是
$$i = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

而
$$U_2 = iR_2$$

所以
$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 \quad (3-14)$$

同理可得
$$U_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_1$$

【例 3.9】求图 3.25 所示电路的电压 U 和电流 i_1 。

解 3Ω 和 6Ω 电阻并联值为

$$3//6 = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\Omega$$

1Ω 电阻上的电压为

$$U = \frac{3}{1+2} \times 1 = 1\text{V}$$

设流出电压源的总电流为 i , 则

$$i = \frac{3}{1+3//6} = 1\text{A}$$

由分流公式可得

$$i_1 = \frac{i}{3+6} \times 6 = \frac{2}{3}\text{A}$$

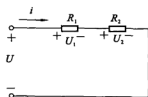


图 3.24 分压电路

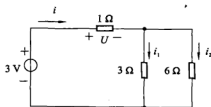


图 3.25

3.9 与后续课程的关系

基尔霍夫电流定律、电压定律贯穿于后续电类专业课程,是电路分析和计算的基础。例如,实用电工、模拟电子线路、数字电子线路、工厂供配电技术等课程。

模拟电子线路课程中,将图 3.26 所示的晶体三极管看成广义节点。针对图 3.26(a) 利用基尔霍夫电流定律有

$$I_e = I_c + I_b$$

针对图 3.26(b) 利用基尔霍夫电压定律有

$$U_{be} = I_b r_{be}, \quad U_{ce} = -I_c r_{ce}$$

将基尔霍夫电压定律应用于求解低频放大电路的参数见例 3.10。

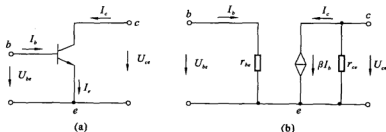


图 3.26 晶体管及微变等效

(a) 晶体管电路符号; (b) 晶体管微变等效电路

【例 3.10】 在图 3.27 所示电路中, $\beta = 50$, $U_{be} = 0.7 \text{ V}$, 试求静态工作点参数 I_{BQ} 、 I_{CQ} 、 U_{ceQ} 的值。

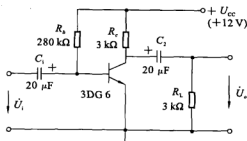


图 3.27 三极管基本放大电路

解 对电源 U_{CC} 、 R_b 、三极管 3DG6 发射结至地组成的回路, 由基尔霍夫电压定律有

$$I_{BQ} R_b + U_{beQ} = U_{CC}$$

$$I_{BQ} = \frac{U_{CC} - 0.7}{R_b} = \frac{12 - 0.7}{280 \times 10^3} \approx 0.04 \text{ mA} = 40 \mu\text{A}$$

由三极管特性有

$$I_{CQ} = \beta I_{BQ} = 50 \times 0.04 \times 10^{-3} = 2 \text{ mA}$$

对电源 U_{CC} 、 R_c 、三极管 3DG6 集电结至地组成的回路, 由基尔霍夫电压定律有

$$U_{ceQ} = U_{CC} - I_{CQ} R_c = 12 - 2 \times 3 = 6 \text{ V}$$

3.10 设备实用电路举例——基尔霍夫定律在电器故障诊断中的运用

电器维修是电类专业的最基本应用,也是本学科最具实用价值的方面。每个爱好此专业的人,平时必定会做些维修方面的工作,最常见的就是修理自己身边的电器。

有些同学说：“我才大学一、二年级，专业知识还不懂，怎么去维修呢？”其实，许多日常的维修工作并不需要很高深的理论，只要具备基本知识即可胜任有余。例如，一台收录机全无反应（用交流供电时），用直流电（电池）接上一试，正常工作。这么一试，便可知交流电源供电电路部分有故障。再用万用表一量，变压器开路了。换上新品，通电试机，一切正常。事实上，由于科技的进步，制造水平的不断提高，产品质量也不断提高，电器发生严重故障的机会已经很小，大量的都是使用不当而引起的系统故障、接触不良、保险丝熔断等小毛病，有些根本不用修，调几下就可以复原。

学习了基尔霍夫定律知识，我们就可以运用于故障维修现场。例如，电风扇是一种最实际的空气调节器，在下乡维修活动中，修理量最大的也是电风扇。如此看来，熟悉电风扇的结构、电路和维修就有一定必要了。家用电风扇的电路图如图 3.28 所示。

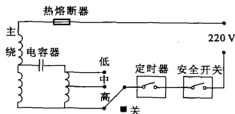


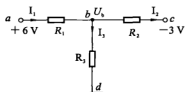
图 3.28 家用电风扇电路图

电风扇电路中的电容为无极性电容，作用是将单相交流电转为二相，以产生二相旋转磁场，使转子转动，同时还可以加大启动转矩。

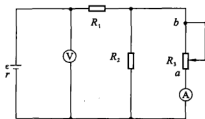
电风扇故障一般是通电后不转。检查时，先把电风扇竖起（不可横放，以免安全开关打开），测插头电阻，一般为 $600 \sim 900 \Omega$ 。若有电阻，则无断路或电机烧坏。不能转的原因有可能是防尘措施不好，且没加润滑油，使风扇转子太紧不能启动；或者是用于启动的无极性电容损坏，只需更换即可。若无电阻，则可用万用表分别测量电源输入端、安全开关、定时器、换挡开关、电机、热熔断器两端的电压，如果发现其中的换挡开关、熔断器、定时器、安全开关等器件两端电压为 220 V 则可能就是此器件损坏。由基尔霍夫电压定律可知，在此回路中只有输入电源为 220 V 和电机两端电压为 220 V ，其余器件在接通两端都无电压。

习 题

- 3.1 基尔霍夫定律描述的是电路()规律。
- 3.2 一根粗细均匀的电阻丝，阻值为 25Ω ，将其等分成五段，然后并联使用，则其等效电阻是()。
(A) $1/25 \Omega$ (B) $1/5 \Omega$ (C) 1Ω (D) 5Ω
- 3.3 如图所示电路， a, b, c, d 表示 4 个节点， $R_1 = 2 \Omega, R_2 = 6 \Omega, R_3 = 6 \Omega$ ，求电压 U_a 。
- 3.4 如题图所示，当滑线变阻器滑动触点向 b 端移动时下列说法正确的是()。
(A) 伏特表 V 的读数增大，安培表 A 的读数减小
(B) 伏特表 V 和安培表 A 的读数都增大
(C) 伏特表 V 和安培表 A 的读数都减小
(D) 伏特表 V 的读数减小，安培表 A 的读数增大

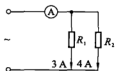


题 3.3 图

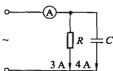


题 3.4 图

3.5 如题图所示, 电流表读数等于 1 A 的是()。



(a)



(b)



(c)

题 3.5 图

(A) 图(a)

(B) 图(b)

(C) 图(c)

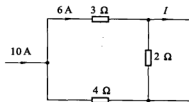
3.6 电路如题图所示, 电流 I 等于()。

(A) 3 A

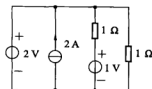
(B) 5 A

(C) 6 A

(D) 7 A

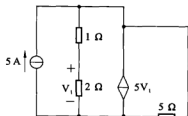


题 3.6 图



题 3.7 图

3.8 求题图中 5 Ω 电阻吸收的功率。



题 3.8 图

第 4 章 基本节点和网孔分析

4.1 节点分析

节点分析法是基于 KCL 的一种求解电路中节点处电压的有效方法。由图 4.1(a) 所示电路中有三个节点,其中所求电压值为 U_1 和 U_2 ,每增加一个节点将增加一个未知量, n 个节点需建立 $n-1$ 个方程,可求 $n-1$ 个电压值,每个节点都应用 KCL 建立一个方程。建立方程时指定一个节点为参考节点,其电位值设定为 0 V ,设 0 V 是相对其他节点而言的。

设定参考节点的原则是:连接支路和最多的节点为参考节点,习惯上则将电路最下端的节点定为参考节点,如图 4.1(a) 中的 3 被设计为参考节点。

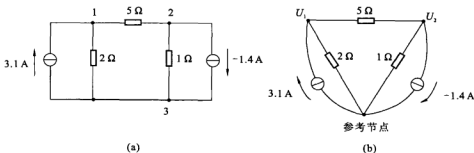


图 4.1

(a) 具有三个节点的电路;(b) 重画电路突出电流源和参考节点

节点 1 相对于参考节点的电压被定义为 U_1 ,节点 2 相对于参考节点的电压被定义为 U_2 ,这两个电压可以用来表达任何一个元件之间的电压。

如图 4.1(a) 中 3.1 A 电流源、 $2\ \Omega$ 电阻的电压可以用 $U_1 - U_3 = U_1$ 来表达; $1\ \Omega$ 电阻两端的电压可以用 $U_2 - U_3 = U_2$ 来表达; $5\ \Omega$ 电阻两端的电压可以用 $U_1 - U_2$ 来表达。

对图 4.1(b) 中节点 1 应用 KCL 可得

$$\frac{U_1}{2} + \frac{U_1 - U_2}{5} = 3.1 \quad (4-1)$$

对图 4.1(b) 中节点 2 应用 KCL 可得

$$\frac{U_2}{1} + \frac{U_2 - U_1}{5} = -(-1.4) \quad (4-2)$$

由式(4-1)和式(4-2),解出 $U_1 = 5\text{ V}$, $U_2 = 2\text{ V}$; $5\ \Omega$ 两端的电压 $U_{5\Omega} = U_1 - U_2 = 5 - 2 = 3\text{ V}$ 。

【例 4.1】 求图 4.2 所示电路中的节点电压。

对节点 1 列出 KCL 方程,应用式(3-2) 可得

$$-8 - 3 = \frac{U_1 - U_2}{3} + \frac{U_1 - U_3}{4} \quad (4-3)$$

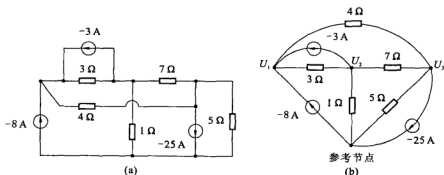


图 4.2

同理,对节点 2 列出 KCL 方程,即

$$-(-3) = \frac{U_2 - U_1}{3} + \frac{U_2}{1} + \frac{U_2 - U_3}{7} \quad (4-4)$$

对节点 3 列出 KCL 方程,即

$$-(-25) = \frac{U_3}{5} + \frac{U_3 - U_2}{7} + \frac{U_3 - U_1}{4} \quad (4-5)$$

将式(4-3)、式(4-4)、式(4-5)简化后,采用消元法或代入法或克莱姆法则,解出 U_1 、 U_2 、 U_3 的值分别为 5.142 V、7.736 V、46.32 V。

【例 4.2】 求图 4.3 所示的电路中的 U_1 和 U_x 。

解 在上节点列出 KCL 方程,即

$$15 = \frac{U_1 - U_2}{1} + \frac{U_1 - U_3}{2} \quad (4-6)$$

在中间节点列出 KCL 方程,即

$$3U_x = \frac{U_2 - U_1}{1} + \frac{U_2 - U_3}{2} \quad (4-7)$$

$$U_3 = 0 \quad U_2 - U_3 = U_x$$

$$\text{解出 } U_1 = \frac{50}{7} \text{ V}, U_x = -\frac{30}{7} \text{ V}$$

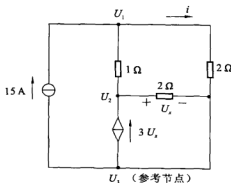


图 4.3

4.2 支路带有电压源的节点分析

当电路某支路上存在独立电压源或受控电压源时,可以采用超节点分析方法以简化计算。

对于图 4.4 所示电路,节点 1 和节点 2 之间存在一个 2 V 恒压源。从恒压源的定义可知,流经该 2 V 电压源的电流可以是任何值,因此不能直接写出经过 2 V 电压源从节点 1 流向节点 2 的电流,只能再假设一个电流参数未知量,从而增加了解题的难度。

对超节点分析方法归纳如下:

(1) 当支路上存在电压源时,可建立超节点。

(2) 以电压源两端的两个节点为界,用虚线将节点、电压源、电压源所在支路上的元件包围起来,构成超节点。

(3) 流入超节点的电流等于流出超节点的电流。

(4) 用超节点分析方法比节点分析方法减少一个节点方程,减少的方程用电压源所在回路中建立的 KVL 方程(电压源的电压与节点电压之间的关系)取代,以满足解 n 个未知数需要 n 个方程式的要求。

(5) 超节点上各处电压等于零。

【例 4.3】 求图 4.4 所示电路中的节点 1 和节点 2 的电压。

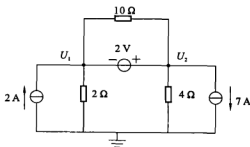


图 4.4 支路中含有电压源的电路

解法一 采用节点分析方法

设经电压源从 1 流向 2 的电流为 i_{12} , 在节点 1 应用 KCL 可得

$$2 = i_{12} + \frac{U_1 - U_2}{10} + \frac{U_1}{2} \quad (4-8)$$

在节点 2 应用 KCL 可得

$$7 = -\frac{U_2}{4} + i_{12} + \frac{U_1 - U_2}{10} \quad (4-9)$$

在中间下方回路应用 KCL 可得

$$\begin{aligned} -U_1 - 2 + U_2 &= 0 \\ U_2 &= 2 + U_1 \end{aligned} \quad (4-10)$$

由式(4-8)可得

$$i_{12} = 2 - \frac{U_1}{2} + \frac{U_2 - U_1}{10}$$

由式(4-9)可得

$$i_{12} = 7 + \frac{U_2}{4} + \frac{U_2 - U_1}{10}$$

以上两式相等,所以

$$2 - \frac{U_1}{2} + \frac{U_2 - U_1}{10} = 7 + \frac{U_2}{4} + \frac{U_2 - U_1}{10}$$

将式(4-10)代入上式,解出

$$U_1 = -\frac{22}{3} = -7.333 \text{ V}$$

进一步解出

$$U_2 = -5.333 \text{ V}$$

解法二 采用超节点分析方法

将图 4.4 上部分元件用虚线包围形成超节点, 见图 4.5, 其中超节点包括 2 V 电压源、节点 1、节点 2 和 10 Ω 电阻。

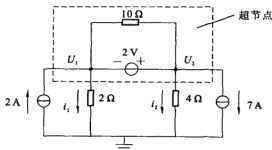


图 4.5

对超节点应用 KCL 可得

$$2 = i_1 + i_2 + 7$$

式中电流可用节点电压表示, 即

$$i_1 = \frac{U_1 - 0}{2}, \quad i_2 = \frac{U_2 - 0}{4}$$

$$2 = \frac{U_1 - 0}{2} + \frac{U_2 - 0}{4} + 7$$

$$8 = 2U_1 + U_2 + 28$$

$$U_2 = -20 - 2U_1$$

(4-11)

对方下中间回路应用 KCL 可得

$$-U_1 - 2 + U_2 = 0, \quad U_2 = 2 + U_1$$

(4-12)

联立式(4-11) 和式(4-12) 得出

$$U_1 = -7.333 \text{ V}, \quad U_2 = -5.333 \text{ V}$$

* 10 Ω 电阻位于超节点内, 所以该电阻两端无电压。

【例 4.4】 确定图 4.6 所示电路中各节点电压。

解 该电路中存在两个电压源, 其中一个为电压控制电压源 (VCVS), 设计两个超节点如图 4.6 中虚线所示。

列出节点 2 的 KCL 方程和包含受控电压源的超节点 KCL 方程, 就可将所有节点包括在内, 其他条件依靠电压源和节点电压之间的关系来获得。

在节点 2 可得

$$\frac{U_2 - U_1}{0.5} + \frac{U_2 - U_3}{2} = 14 \quad (4-13)$$

在由节点 3 和节点 4 形成的超节点可得

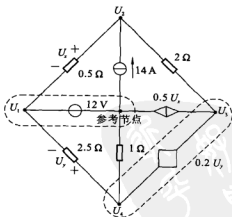


图 4.6

$$0.5U_x = \frac{U_3 - U_2}{2} + \frac{U_4}{1} + \frac{U_4 - U_1}{2.5} \quad (4-14)$$

建立电源和节点电压之间的关系如下

$$U_3 - U_4 = 0.2U_y \quad (4-15)$$

$$0.2U_y = 0.2(U_4 - U_1) \quad (4-16)$$

$$U_1 = -12 \text{ V} \quad (4-17)$$

最后用指定的变量表示受控电流源,即

$$0.5U_x = 0.5(U_2 - U_1) \quad (4-18)$$

在一般节点分析中,5个节点需要4个KCL方程,但是通过超节点只需要两个方程,因为组成两个独立的超节点,每个超节点可写出一个KVL方程。两个受控电源未受节点电压控制,可写出两个额外的方程。

$$\text{由式(4-13)可得} \quad -2U_1 + 2.5U_2 - 0.5U_3 = 14$$

$$\text{由式(4-14)可得} \quad 0.1U_1 - U_2 + 0.5U_3 + 1.4U_4 = 0$$

$$\text{由式(4-17)可得} \quad U_1 = -12$$

$$\text{由式(4-16)可得} \quad 0.2U_1 + U_3 - 1.2U_4 = 0$$

$$\text{求解得到} \quad U_1 = -12 \text{ V}, \quad U_2 = -4 \text{ V}, \quad U_3 = 0 \text{ V}, \quad U_4 = -2 \text{ V}$$

4.3 网孔分析

上述的节点分析方法是一种通用的方法,可以用于任何电路。遇到复杂电路时,节点分析法计算工作量太大。为了减少方程数、简化方程表达形式,现在提供另外一种分析方法,即网孔分析方法。这种方法适用于大多数情况,但局限于平面电路网络。

为了方便后面的分析,先对以下两个术语给出定义:

网孔:未包括任何其他回路的回路称为网孔。

网孔电流:假设每个网孔里有一电流沿着构成该网孔的各支路循环流动,该电流称为网孔电流。

对图 4.7(a) 所示电路标出 i_1, i_2, i_3 , 然后画出网孔电流 i_a, i_b , 见图 4.7(b)。

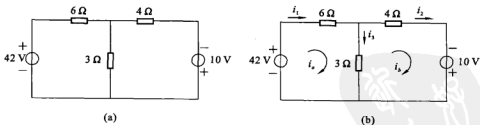


图 4.7

(a) 有两个网孔的电路; (b) 标有网孔电流的电路

对左网孔应用 KVL 可得

$$-42 + 6i_1 + 3i_3 = 0 \quad (4-19)$$

对右网孔应用 KVL 可得

$$3i_3 + 4i_2 - 10 = 0 \quad (4-20)$$

在两网孔共同的边界支路上,支路电流 = 网孔电流之差。流过 3Ω 电阻的电流 i_3 是网孔电流 i_a 和 i_b 的差,即

$$i_3 = i_a - i_b$$

由图 4.7(b) 可知,在非共同的边界支路上,网孔电流 = 支路电流,

在 6Ω 电阻处: $i_a = i_1$

在 4Ω 电阻处: $i_b = i_2$

所以,如果非共同边界支路上存在电流源时,网孔电流可直接用该电流源的电流值表示。

由上述三等式得到

$$i_3 = i_1 - i_2 \quad (4-21)$$

将式(4-21)代入式(4-19)和式(4-20)得到

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

解出

$$i_1 = 6\text{ A}, \quad i_2 = 4\text{ A}$$

【例 4.5】求图 4.8 所示电路中的电流 i_1 。

解 电流 i_1 为右网孔电流,也是流过 2Ω 电阻和 3 V 电压源的电流;电流 i_2 为左网孔电流,流过中间 4Ω 的电流为 i_1 与 i_2 的差。

对左网孔应用 KVL 可得

$$-5 - 4i + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0$$

对右网孔应用 KVL 可得

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0$$

因为

$$i = i_1$$

所以求解得到 $i_1 = -250\text{ mA}$, $i_2 = 375\text{ mA}$

【例 4.6】求图 4.9(a) 所示电路中电阻 R 消耗的功率。

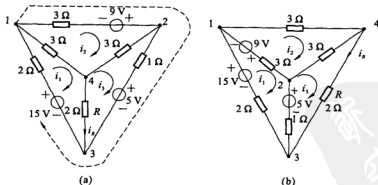


图 4.9

解 本题并不要求出所有支路电流,只需要求出 R 上的电流就可以得到功率值。若按图 4.9(a) 设网孔电流,需要解出 i_1 、 i_3 两个网孔电流才能求出 R 上的电流,因 $i_R = i_1 - i_3$ 。

若电路作伸缩扭动变形,变图 4.9(a) 为图 4.9(b)(注意节点 2、4 的位置变化)。

按图 4.9(b) 设网孔电流 i_1 、 i_2 、 i_3 , 使所求支路电流 i_R 恰为网孔 C 的网孔电流。

分别在左、上、右网孔应用 KVL 可得

$$\begin{aligned} 6i_1 - 3i_2 - i_3 &= 19 \\ -3i_1 + 9i_2 - 3i_3 &= -9 \\ -i_1 - 3i_2 + 6i_3 &= 5 \end{aligned}$$

将中间的方程化简后,重写出三个方程如下

$$\begin{aligned} 6i_1 - 3i_2 - i_3 &= 19 \\ -i_1 + 3i_2 - i_3 &= -3 \\ -i_1 - 3i_2 + 6i_3 &= 5 \end{aligned}$$

根据克莱姆法则有

$$\begin{aligned} \Delta_G &= \begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 63 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 6 & -3 & 19 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 126 \\ i_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \frac{126}{63} = 2 \text{ A} \\ i_R &= i_3 \end{aligned}$$

计算得出电阻 R 上的功率 $P_R = Ri_R^2 = 2 \times 2^2 = 8 \text{ W}$ 。

4.4 支路上带有电流源的网孔分析

当电路中的两个网孔之间的支路上存在独立或受控电流源时,可以采用超网孔分析方法以简化计算。

对于图 4.10(a) 所示电路,网孔 1 和网孔 3 的共同支路上存在一个 7 A 电流源,从恒流源的定义可知,7 A 电流源两端的电压可以是任意值,这样在各网孔建立对应的 KVL 方程时,不能直接写出该元件两端的电压值,只能对其设一个假定值,从而增加了解题的难度。

对超网孔分析方法归纳如下:

- (1) 如果电路中包含有两个网孔共享的电流源,则应该用这两个网孔组成一个新网孔。
- (2) 列出电路每个网孔的和超网孔的 KVL 方程,用网孔电流和欧姆定律表达电阻上的电压值。
- (3) 如果电流源位于网孔的非共同支路上,电流源所在的网孔方程不必列出,可以直接得到网孔电流。
- (4) 对于电路中所包含的受控源,用合适的网孔电流表示除网孔电流以外的未知电压和电流。

(5) 求解方程组得到网孔电流。

【例 4.7】 求解图 4.10(a) 所示电路中三个网孔电流。

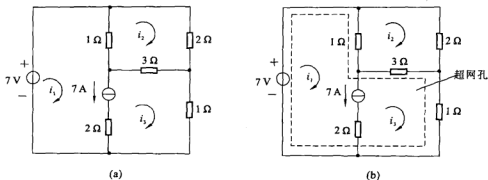


图 4.10

(a) 共同支路上存在电流源的电路; (b) 由包含电流源的两个网孔组成超网孔

解法一 采用网孔分析法, 各网孔建立 KCL 方程可得

$$\text{网孔 1:} \quad -7 + (i_1 - i_2) + U_{7A} + 2(i_1 - i_3) = 0$$

$$\text{网孔 2:} \quad (i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

$$\text{网孔 3:} \quad 2(i_3 - i_1) - U_{7A} + 3(i_3 - i_2) + i_3 = 0$$

在中间节点应用 KCL 可得

$$i_1 + (i_2 - i_3) = 7$$

以上四个方程式中共有四个未知数 i_1 、 i_2 、 i_3 和 U_{7A} , 用克莱姆法则解出 $i_1 = 9 \text{ A}$, $i_2 = 2.5 \text{ A}$, $i_3 = 2 \text{ A}$, $U_{7A} = -13.5 \text{ A}$ 。

解法二 超网孔分析法

对图 4.10(a) 创建一个超网孔, 超网孔包含网孔 1 和网孔 2, 如图 4.10(b)。

对超网孔应用 KVL 可得

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

对网孔 2 应用 KVL 可得

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

独立电流源与假定的网孔电流的关系为

$$i_1 - i_3 = 7$$

联立以上三式, 解出

$$i_1 = 9 \text{ A}, \quad i_2 = 2.5 \text{ A}, \quad i_3 = 2 \text{ A}$$

【例 4.8】 如图 4.11(a) 所示, 有一 VCCS 位于两网孔共有支路上, 求网孔电流 i_1 、 i_2 和 U_x 。

解 在网孔 1 和网孔 2 之间有一个 VCCS, 需要建立一个超网孔如图 4.11(b) 所示, 该网孔包含电流源以及与之串联的 2Ω 电阻。

应用 KVL 可得

$$-20 + 6i_1 + 10i_2 + 4i_2 = 0$$

$$i_1 = i_2 + 2U_x$$

$$U_x = 4i_2$$

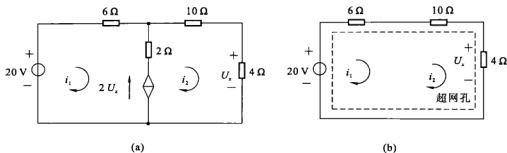


图 4.11

以上三个方程包含三个未知数,由此解出

$$i_1 = 2.646 \text{ A}$$

$$i_2 = 0.294 \text{ A}$$

$$U_x = 1.176 \text{ V}$$

4.5 与后续课程的关系

网孔分析法和节点分析法可应用于模拟电路、数字电路、实用电工技术、电气控制技术等后续课程中,是工程实践中分析复杂电路常用的方法。

当电路支路数较多,网孔数或节点数较少时,网孔分析法和节点分析法是解复杂电路的主要方法,但网孔分析法只适用于平面网络,节点分析法则无此限制,因此,节点分析法更具有普遍意义。

下面举例用节点分析法解运放电路。

【例 4.9】图 4.12 所示运放电路中,输入端无一接地,试求输出电压 u_o 与输入电压 u_s 之间的关系。

解 该电路共有 4 个独立节点,对节点 2、4 的节点方程为

$$(G_1 + G_2)u_2 - G_1u_1 - G_2u_3 = 0$$

$$(G_3 + G_4)u_4 - G_3u_3 = 0$$

列方程时,用到了运放输入电流为零的特点,否则,在方程中需增添输入电流项。

上式中有

$$u_2 = u_4$$

$$u_1 = u_3$$

故得

$$(G_1 + G_2)u_2 - G_2u_3 = G_1u_3$$

$$(G_3 + G_4)u_2 - G_3u_3 = 0$$

可解得

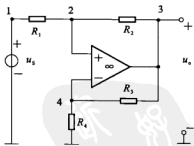


图 4.12

$$u_0 = u_3 = \frac{G_1 G_4 + G_1 G_3}{G_1 G_3 - G_2 G_4} u_s = \frac{R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_2 R_4 - R_1 R_3} u_s$$

4.6 实用电路举例

4.6.1 实用电路参数计算

节点分析法和网孔分析法都是进行电路分析的重要方法,节点分析法是基于基尔霍夫电流定律(KCL),运用节点分析方法可以对各种不同的电路建立方程。网孔分析法是基于基尔霍夫电压定律(KVL)。两种方法在很多场合下都可以使用,但由于元件的排列和类型不同,其中的一种方法往往比另一种具有明显优势。

在进行实际电路的维修或测量电压、电流前,一般都需要预先通过电路中的已知参数估算出测量值,这样可以避免在测量时出现不必要的麻烦,例如在用万用表进行支路电流测量时,必须先调好万用表的量程,如果随意测量则可能因为电路中实际电流过大而烧坏万用表或实际电流太小而造成测量误差。因此,电路中的电压、电流计算是进行实验测量前必须完成的工作。而节点分析法和网孔分析法正是为这种预测提供了重要的分析手段。

节点分析法可以直接给出节点电压,而网孔分析法则直接给出电流。举例说明在一个实际电路中如何通过网孔分析法计算电路中各支路的电流值,如图 4.13 所示。

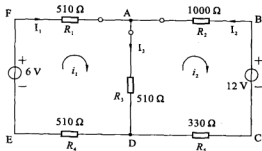


图 4.13 包含两个网孔的实验电路图

从图 4.13 可以发现,此电路包含了左右两个网孔,电路中要求出 I_1 、 I_2 、 I_3 电流值,因此运用网孔分析法较为简便,设网孔的电流建立方向都是顺时针方向,则对于左边的网孔应用 KVL 可得

$$-6 + 510i_1 + 510(i_1 - i_2) + 510i_1 = 0$$

而对于右边的网孔应用 KVL 可得

$$100i_2 + 12 + 330i_2 - 510(i_1 - i_2) = 0$$

联立以上两个方程解得

$$i_1 = 1.999 \text{ mA}, \quad i_2 = -5.988 \text{ mA}$$

由此得

$$I_1 = 1.999 \text{ mA}, \quad I_2 = 5.988 \text{ mA}, \quad I_3 = I_1 + I_2 = 7.987 \text{ mA}$$

4.6.2 实际应用电路的误差分析

利用节点分析法和网孔分析法计算电路参数是一种理论计算,但是在实际操作中不免会引入各种各样的误差,从而造成测量结果与计算结果的不一致。例图 4.13 电路在电路原理实验箱进行实验,实验中就将引入的误差有:

(1) 实验箱中就算是紧密的电阻元件都有 1% 的误差,如 $1000\ \Omega$ 的电阻误差有 $10\ \Omega$,从而直接造成结果偏差。

(2) 实验箱中的电源并不是理想的电源,电源的实际输出会产生 1% 的波动。

(3) 插接线引起的接触电阻误差,因为线路的连接,如万用表与测试点的连接可能会产生接触电阻,从而造成接触误差。

以上是在进行实际电路测量中经常遇到的问题。虽然节点分析法和网孔分析法只是一种理论计算,却能为我们提供正确的理论依据,使我们能够了解实际测量的结果,从而在实际电路应用时能够尽量减少误差。

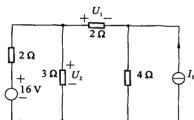
习 题

4.1 在题图所示电路中,欲使支路电压之比 $\frac{U_1}{U_2} = 2$,试确定电流源 I_s 之值。

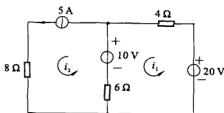
4.2 用网孔分析法分析题图所示电路。

(1) 用观察法直接列出网孔方程,并求解得到网孔电流 i_1 和 i_2 。

(2) 计算 $6\ \Omega$ 电阻吸收的功率。

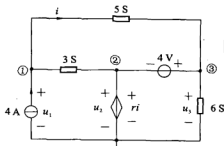


题 4.1 图



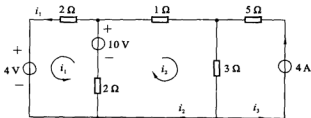
题 4.2 图

4.3 列出题图所示电路的节点方程,计算出三个节点电压(图中 $r = 1\ \Omega$)。



题 4.3 图

4.4 用网孔分析法计算题图所示电路中的网孔电流 i_1 和 i_2 。



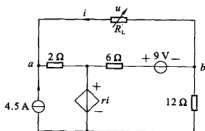
题 4.4 图

4.5 电路如题图所示,其中 $r = 12\ \Omega$ 。

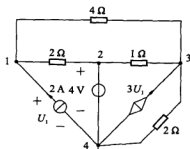
(1) 计算 R_L 为何值时,电压 u 等于 5 V。

(2) 计算 R_L 为何值时,电压 u 等于 10 V。

4.6 电路如题图所示,用节点分析法求 4 Ω 电阻的功率。



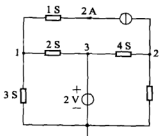
题 4.5 图



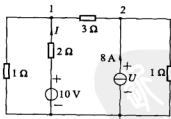
题 4.6 图

4.7 求题图所示电路中节点 1 的节点方程。

4.8 用节点分析法求题图所示电路中的 U 和 I 。



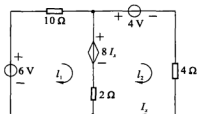
题 4.7 图



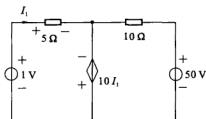
题 4.8 图

4.9 用网孔分析法求题图所示电路中的 I_x 。

4.10 电路如题图所示,求各支路电流和各电源的功率。

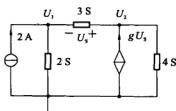


题 4.9 图

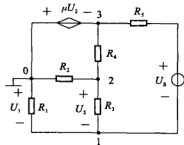


题 4.10 图

- 4.11 如题图所示,已知节点电压方程 $\begin{cases} 5U_1 - 3U_2 = 2 \text{ A} \\ -U_1 + 5U_2 = 0 \end{cases}$,求 VCCS 的控制系数。
- 4.12 题图所示电路中, $U_s = 5 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 1 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $\mu = 2$,试求电压 U_1 。



题 4.11 图



题 4.12 图

第 5 章 常用电路分析方法

对于简单电路某一点进行参数计算,可以采用欧姆定律、KCL、KVL 来完成。对于复杂电路则应首先进行简化,再分析和计算。下面介绍几种电路的等效方法以简化电路。

5.1 电源变换

将一个电压源串联一个电阻的电路转变成一个电流源并联一个电阻的电路,或者相反,这一过程称为电源变换。

要点:

- (1) 变换电路的目的是使节点分析和网孔分析更简单。
- (2) 电源变换后,电阻值没有改变,但已不是同一个电阻,因此原电路中与电阻有关的电压和电流已经消失,变换前后两个电路只有外部等效。
- (3) 与受控源相关的电阻不能包括在变换电路中,因为该电路的电压或电流影响到受控源的输出。
- (4) 变换时,电流源的箭头对应电压源的“+”端。

5.1.1 实际电压源的负载特性

在第 2 章中,已经给出了实际电压源的等效电路,下面重画该电路并给出电路中负载的外部伏安特性,见图 5.1。

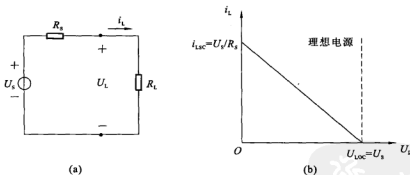


图 5.1
(a) 实际电压源; (b) 负载伏安特性

图 5.1(a) 用一个理想电压源 U_s 串联一个 R_s 来代表实际的电压源,电阻 R_s 是电压源的内阻,或输出电阻。要认识到 R_s 并不是一个分立的元件,而是为了说明问题而人为设计的,目的是证明负载变化时,回路中的电流会改变。

由 KVL 写出 U_L 与 i_L 的关系为

$$U_L = U_s - R_s i_L \quad (5-1)$$

负载短路时, $U_L = 0$, 则 $i_L = i_{LSC} = \frac{U_S}{R_S}$ (5-2)

负载开路时, $i_L = 0$, 则 $U_L = U_{LOC} = U_S$ (5-3)

在 $i_L \sim U_L$ 坐标上, $(0, \frac{U_S}{R_S})$ 和 $(U_S, 0)$ 构成直线, 这两个值是直线与坐标轴的截点。

将一个 12 V 电池串联一个 1Ω 电阻与负载相连, 可以清晰得到负载的定量伏安关系, 见图 5.2。

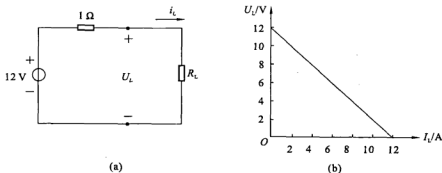


图 5.2

(a) 12 V 电压源与负载串联; (b) 负载的伏安特性

5.1.2 实际电流源的负载特性

在第2章中, 已经给出了实际电流源的等效电路, 下面重画该电路并给出电路中负载的伏安特性, 见图 5.3。

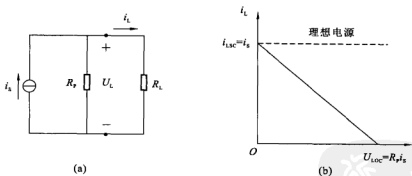


图 5.3

(a) 实际电流源; (b) 负载伏安特性

图 5.3(a) 中用一个理想电流源并联一个电阻来表示实际的电流源, 由 KCL 可得

$$i_L = i_S - \frac{U_L}{R_P} \quad (5-4)$$

负载短路时, $U_L = 0$, 则

$$i_{LSC} = i_S \quad (5-5)$$

负载开路时, $i_L = 0$, 则

$$U_{LOC} = i_S \cdot R_P \quad (5-6)$$

针对图 5.4(a) 所示电路, 观察定量的负载伏安关系, 见图 5.4(b)。

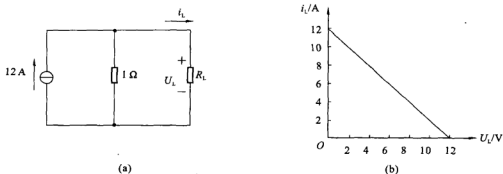


图 5.4

(a) 12 A 电流源与负载并联; (b) 负载的伏安特性

5.1.3 实际电源的等效

两种电源接有相同的负载 R_L , 无论 R_L 数值为多少, 如果两个电源产生的 U_L 和 i_L 相同, 则称这两个电源等效。在 $R_L = \infty$ 时, 等效电源提供了相同的开路电压; 当 $R_L = 0$ 时, 两种电源提供了相同的短路电流。

考虑图 5.1 所示实际电压源 U_s 和电阻 R_L , 通过分析得到流过 R_L 的电流为

$$i_L = \frac{U_s}{R_s + R_L} \quad (5-7)$$

考虑图 5.3 所示实际电流源 i_s 和电阻 R_L , 通过分析得到流过 R_L 的电流为

$$i_L = \frac{i_s}{R_p + R_L} R_p \quad (5-8)$$

若让两个电路等效, 必须让式(5-7)等于式(5-8)。两等式左边相等, 等式右边也应该相等。分母相等, 要求 $R_p = R_s$; 分子相等, 要求 $U_s = i_s \cdot R_p$ 。

所以, 将电压源转换成电流源时, $R_p = R_s$, 即有

$$i_s = \frac{U_s}{R_s} \quad (5-9)$$

将电流源转换成电压源时, $R_s = R_p$, 即有

$$U_s = i_s \cdot R_p \quad (5-10)$$

【例 5.1】 将图 5.5 所示的电压源变成电流源。

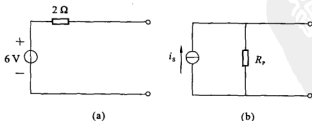


图 5.5

解 根据式(5-9)可得

电流源 $i_s = \frac{U_s}{R_s} = \frac{6}{2} = 3 \text{ A}$, 并联电阻 $R_p = R_s = 2 \Omega$ 。

【例 5.2】应用电源变换求图 5.6(a) 所示电路的 U_x 。

解 在电路左边部分进行电压源向电流源的变换; 在电路上面部分进行电流源向电压源的变换, 得到图 5.6(b)。

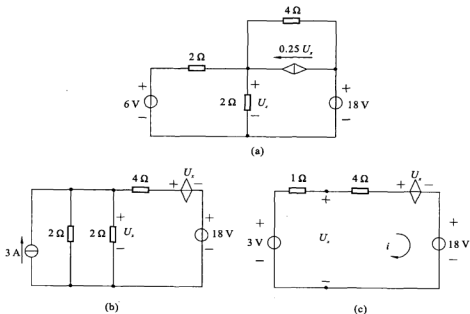


图 5.6

将图 5.6(b) 中两个 2Ω 电阻并联, 并联后 U_x 不改变, 再将并联后得到的 1Ω 电阻与 3 A 电流源进行向电压源的转换, 得到图 5.6(c)。

对图 5.6(c) 所示回路应用 KVL 可得

$$-3 + 5i + U_x + 18 = 0 \quad (5-11)$$

对 3 V 电源、 1Ω 电阻和 U_x 应用 KVL 可得

$$-3 + 1i + U_x = 0 \quad (5-12)$$

将式(5-12)代入式(5-11)可得

$$15 + 5i + 3 - i = 0, \quad i = -4.5 \text{ A}$$

再对 U_x 、 4Ω 电阻、VCVS、 18 V 电源组成的回路应用 KVL 可得

$$-U_x + 4i + U_x + 18 = 0$$

又

$$i = -4.5 \text{ A}$$

于是解出

$$U_x = 7.5 \text{ V}$$

5.2 叠加原理

5.2.1 叠加原理的定义和要点

定义:含有多个独立电源的电路中的响应,可以通过求各个独立源单独作用所得结果的代数和来得到。

要点:

- (1) 被分析电路必须是线性电路。
- (2) 某电源单独作用时,其他电源置零,即电压源短路,电流源开路。
- (3) 因为受控源受其他支路电流和电压控制,故受控源都要保留,即不置零。
- (4) 功率与 I^2 有关,故为非线性,不能应用叠加原理。

5.2.2 叠加原理的证明

在图 5.7 所示电路中,含有两个电流源 i_a 和 i_b ,称为激励函数,电流在节点处产生的电压被称为响应函数,两节点处的节点方程为

$$0.7U_1 - 0.2U_2 = i_a \quad (5-13)$$

$$-0.2U_1 + 1.2U_2 = i_b \quad (5-14)$$

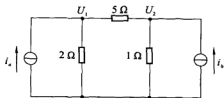


图 5.7 包含两个独立电流源的电路

步骤一:设 $i_{a1} = 0$ A, $i_{b1} = 1.4$ A, 然后测得两节点电压为 U_{1x} 和 U_{2x} , 因此

$$0.7U_{1x} - 0.2U_{2x} = 0 \quad (5-15)$$

$$0.2U_{1x} + 1.2U_{2x} = 1.4 \quad (5-16)$$

步骤二:设 $i_{a2} = 3.1$ A, $i_{b2} = 0$ A, 然后测得两节点电压为 U_{1y} 和 U_{2y} , 因此

$$0.7U_{1y} - 0.2U_{2y} = 3.1 \quad (5-17)$$

$$-0.2U_{1y} + 1.2U_{2y} = 0 \quad (5-18)$$

叠加式(5-15)和式(5-17)得

$$0.7(U_{1x} + U_{1y}) - 0.2(U_{2x} + U_{2y}) = 0 + 3.1 \quad (5-19)$$

叠加式(5-16)和式(5-18)得

$$-0.2(U_{1x} + U_{1y}) + 1.2(U_{2x} + U_{2y}) = 1.4 + 0 \quad (5-20)$$

对比式(4-1)、式(4-2)和式(5-19)、式(5-20)可得

$$U_{1x} + U_{1y} = U_1, \quad U_{2x} + U_{2y} = U_2$$

结果:求解式(5-19)和式(5-20)得出的 $U_{1x} + U_{1y}$ 的值必定等于 U_1 , 求解得出的 $U_{2x} + U_{2y}$

的值必定等于 U_z , 而 U_1 和 U_z 是第4章介绍的两个电源同时作用的结果。

【例 5.3】 对图 5.8 所示电路, 用网孔分析法求 i_x 。

解 对左网孔应用 KVL 可得

$$-3 + 6i + 9i_x = 0$$

$$i_x = i + i_s = i + 2$$

联立二式可得

$$-3 + 6i + 9(i + 2) = 0$$

解得 $i = -1 \text{ A}$

因此 $i_x = i + 2 = -1 + 2 = 1 \text{ A}$

【例 5.4】 对图 5.8 所示电路, 利用叠加原理求 i_x 。

解 电压源单独作用时, 将电流源置零, 电压源在 9Ω 支路上产生的电流为 i_x' , 则

$$i_x' = \frac{3}{6+9} = 0.2 \text{ A}$$

电流源单独作用时, 将电压源置零, 电流源在 9Ω 支路上产生的电流为 i_x'' , 则

$$i_x'' = \frac{2}{6+9} \times 6 = 0.8 \text{ A}$$

完整的电流为 $i_x = i_x' + i_x'' = 0.2 + 0.8 = 1 \text{ A}$

【例 5.5】 利用叠加原理求图 5.9 所示电路中的电流 i_0 。

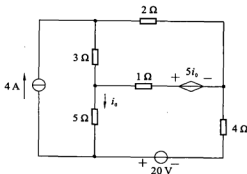


图 5.9

解 电路中有两个独立电源, 分别单独作用, 电流源产生 i_0' , 电压源产生 i_0'' 。受控源应保留, 电压源作用时, 受控源的电压为 $5i_0'$; 电流源单独作用时, 受控源的电压为 $5i_0''$ 。

当电流源作用时, 20 V 电压源置零, 画出对应的电路见图 5.10(a), 应用网孔分析法。

对网孔 1: $i_1 = 4 \text{ A}$ (5-21)

对网孔 2: $-3i_1 + 6i_2 - 1i_3 - 5i_0' = 0$ (5-22)

对网孔 3: $-5i_1 - 1i_2 + 10i_3 + 5i_0' = 0$ (5-23)

在节点 0: $i_3 = i_1 - i_0' = 4 - i_0'$ (5-24)

将式(5-21)、式(5-22)代入式(5-23)、式(5-24), 得到以下两个等式, 即

$$3i_2 - 2i_0' = 8$$

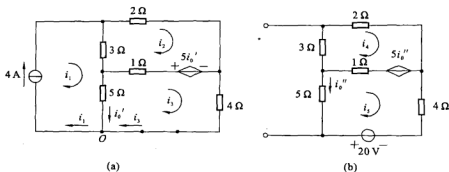


图 5.10

(a) 求 i_o' 电路; (b) 求 i_o'' 电路

$$i_2 + 5i_o' = 20$$

解出

$$i_o' = \frac{52}{17} \text{ A}$$

当电压源作用时,将 4 A 电流源置零,画出对应的电路见图 5.10(b),应用网孔分析法。

$$\text{对网孔 4:} \quad 6i_4 - i_5 - 5i_o'' = 0 \quad (5-25)$$

$$\text{对网孔 5:} \quad -i_4 + 10i_5 - 20 + 5i_o'' = 0 \quad (5-26)$$

因为 $i_5 = -i_o''$,代入式(5-25)和式(5-26)可得

$$6i_4 - 4i_o'' = 0$$

$$i_4 + 5i_o'' = -20$$

解得

$$i_o'' = -\frac{60}{17} \text{ A}$$

结果为

$$i_o = i_o' + i_o'' = \frac{52}{17} - \frac{60}{17} = -\frac{8}{17} \approx -0.4706 \text{ A}$$

5.3 戴维南和诺顿等效电路

电路分析的目的,往往只是求电路中某一支路或负载处的电流或电压,而不需要对其余的部分给予太多的关注,若将电路经过变换,其结果与图 2.17 或图 2.19 相一致,就可以按最简单的方法求出负载的电流、电压和功率。将复杂电路变为图 2.17 所示电路的方法称为戴维南等效定理;将复杂电路变为图 2.19 所示电路的方法称为诺顿等效定理。

5.3.1 戴维南等效电路

戴维南定理:一个含有独立源、受控源、电阻的复杂电路,见图 5.11(a),可以用一个理想电压源 U_{oc} 与一个电阻 R_{oc} 串联替代,见图 5.11(b)。 U_{oc} 是该电路的开路电压, R_{oc} 是该电路中各独立源置零(理想电压源短路,理想电流源开路,保留受控源)时,电路两个输出端子之间的等效电阻。

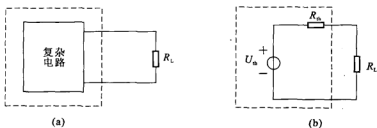


图 5.11

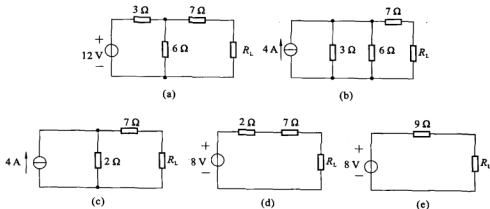
(a) 连接 R_L 的复杂电路; (b) 连接 R_L 的戴维南等效电路**【例 5.6】** 将图 5.12(a) 所示电路变成戴维南等效电路。**解法一** 该电路可以通过连续电源变换获得结果, 见图 5.12。

图 5.12

(a) 电路图; (b) ~ (d) 复杂电路简化步骤; (e) 戴维南等效电路

解法二 利用戴维南定理。求开路电压 U_{OC} :

$$U_{th} = U_{OC}$$

求等效电阻 R_{th} :

将 12 V 独立电压源置零, 复杂电路两输出端子的等效电阻 $R_{th} = 7 + 3 // 6 = 9 \Omega$, 将 U_{th} 和 R_{th} 的值和 R_L 一起构成图 5.11(b) 所示电路, 结果与电源变换所得结果一致。

求等效电阻 R_{th} 往往比求开路电压困难得多, 下面介绍四种方法:

- (1) 电阻串联、并联或混联
- (2) 外加电压法

在第(1)种方法无效的情况下, 对已将复杂电路电源置零的两个输出端口施加 1 V 电压, 就会产生端电流, 等效电阻 $R_{th} = U_0 / i_0$ 。

(3) 外加电流法

在第(1)种方法无效的情况下,对已将复杂电路电源置零的两个输出端口的一端置入 1 A 电流,两输出端口就会产生电压,等效电阻 $R_{th} = U_o / i_o$ 。

(4) 开路电压和短路电流法(适用于含有受控源的电路)

求开路电压 U_{oc} 如前所述。短路电流 i_{sc} 的求解过程是:保留电路中所有电源,包括受控源,将两输出端口短路,求出沿短路线流动的电流, i_{sc} 流动方向与 U_{oc} 的电压方向一致(若 U_{oc} 的正极性为 a , 负极性为 b , 则 i_{sc} 从 a 流向 b) , 等效电阻为

$$R_{th} = \frac{U_{oc}}{i_{sc}} \quad (5-27)$$



图 5.13 开路电压和短路电流法

【例 5.7】求图 5.14 所示电路中的 R_{th} 。

解 求 R_{th} 时,要求将电路中所有独立电源置零,在输出 a, b 端施加 1 V 电压后,形成 3 个网孔,若求出了 i_3 , 因 $i_3 = -i$, 则利用 $R_{th} = \frac{U_o}{i_o}$, 可得到 R_{th} , 改画图 5.14 为图 5.15。

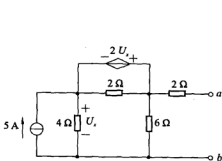
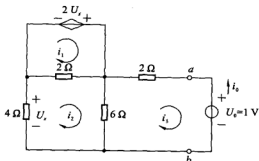


图 5.14

图 5.15 外加电压法求 R_{th} 的电路

对网孔 1 应用 KVL 可得

$$-2U_x + 2(i_1 - i_2) = 0$$

$$U_x = i_1 - i_2$$

而

$$-4i_1 = U_x = i_1 - i_2$$

于是可得

$$i_1 = -3i_2$$

(5-28)

对网孔 2 和网孔 3 应用 KVL 可得

$$4i_2 + 2(i_2 - i_1) + 6(i_2 - i_3) = 0$$

(5-29)

$$6(i_3 - i_2) + 2i_3 + 1 = 0$$

(5-30)

联立式(5-28)、式(5-29)和式(5-30)解得

$$i_3 = -\frac{1}{6} \text{ A}$$

所以

$$i = -i_3 = \frac{1}{6} \text{ A}$$

因此

$$R_{th} = \frac{U_o}{i_o} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \Omega$$

【例 5.8】求图 5.16(a) 所示电路的等效电路。

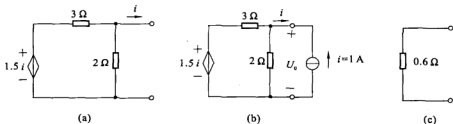


图 5.16

(a) 电路图; (b) 外加电流法求 R_{th} 的电路; (c) 等效电路

解 右端输出端口处在开路状态, $i = 0$, 所以受控源 $1.5i = 1.5 \times 0 = 0$, 2Ω 电阻两端没有电压, 因此 $U_{OC} = 0$, $U_{th} = U_{OC} = 0$ 。

根据外加电流法, 在输出端口加 1 A 电流源 i_o , 将产生端口电压 U_o , 在 2Ω 上方节点处应用 KCL 可得

$$\frac{U_o - 1.5i}{3} + \frac{U_o}{2} = 1$$

又

$$i = -i_o = -1$$

于是解出

$$U_o = 0.6 \text{ V}$$

因此

$$R_{th} = \frac{U_o}{i_o} = \frac{0.6}{1} = 0.6 \Omega$$

【例 5.9】确定图 5.17(a) 所示电路的戴维南等效电路。

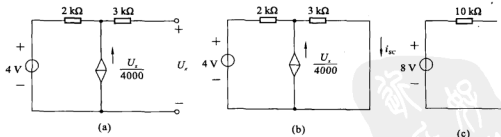


图 5.17

解 图 5.17(a) 中的 U_x 即为开路电压, 对 4 V 电源、 $2 \text{ k}\Omega$ 电阻、 $3 \text{ k}\Omega$ 电阻和 U_x 回路应用 KVL ($3 \text{ k}\Omega$ 上无电流, $\frac{U_x}{4000}$ 流向 $2 \text{ k}\Omega$ 电阻) 可得

$$-4 + 2 \times 10^3 \times \frac{U_x}{4000} + 3 \times 10^3 \times 0 + U_x = 0$$

$$U_x = 8 \text{ V} = U_{OC} = U_{th}$$

将输出端短路, 见图 5.17(b), $U_x = 0$, 则 $\frac{U_x}{4000} = 0$, 所以

$$i_{sc} = \frac{4}{(2+3) \times 10^3} = 0.8 \text{ mA}$$

$$R_{th} = \frac{U_{OC}}{i_{sc}} = \frac{8}{0.8 \times 10^{-3}} = 10 \text{ k}\Omega$$

将 U_{th} 与 R_{th} 串联构成戴维南等效电路, 见图 5.17(c)。

5.3.2 诺顿等效电路

对于任一线性电路, 可将其划分为一个复杂电路与一个负载相连, 见图 5.18(a)。当把负载用一根短路线替代后, 沿短路线流动的短路电流 i_{sc} 称为诺顿等效电流 I_N , 见图 5.18(b)。

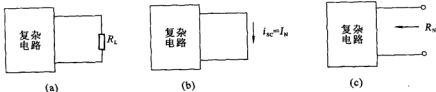


图 5.18

将负载与复杂电路断开, 复杂电路含有受控源时, 其控制量必须出现在同一电路中, 求出的复杂电路的电阻为诺顿等效电阻 R_N , 见图 5.18(c), R_N 的计算方法与戴维南电路的 R_{th} 计算方法相同。

将所求的 I_N 和 R_N 并联的电路称为诺顿等效电路。

诺顿定理的证明非常简单, 因为任何线性有源二端网络都可以等效为戴维南电源。通过电源转换, 该戴维南电源又可以变换为诺顿电源, 故诺顿定理只是戴维南定理的一种推论形式。

【例 5.10】应用诺顿定理, 求图 5.19 中 a, b 两端的等效电阻 R_N 和短路电流 I_N 。

解 首先求 R_N 。

令电路中独立电压源为零, 4Ω 电阻两端无电压, 则 $i_x = 0$, 受控源 $2i_x = 2 \times 0 = 0$ 。电路中只有 5Ω 电阻, 所以 a, b 两端的电阻为

$$R_N = 5 \Omega$$

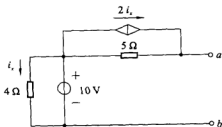


图 5.19

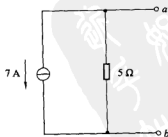


图 5.20 图 5.19 的诺顿等效电路

接下来求 I_N 。

将 ab 两端短接, $4\ \Omega$ 上电流 $i_x = \frac{10}{4} = 2.5\text{ A}$ 。

在节点 a 应用 KCL, 流入节点 a 的电流等于 $\frac{10}{5} + 2i_x$, 流出节点 a 的电流等于 i_{sc} , 于是有

$$\frac{10}{5} + 2i_x = i_{sc}$$

代入 i_x 的值可得

$$i_{sc} = \frac{10}{5} + 2 \times 2.5 = 7\text{ A}$$

$$I_N = i_{sc} = 7\text{ A}$$

画出诺顿等效电路, 见图 5.20。

5.4 最大功率传输

在许多情况下, 电路的设计是为了向负载提供功率, 并要求该功率得到最大。当负载不同时, 功率会发生变化。对于已给定的供电网络, 有必要判断负载为何值时才能得到最大功率以及计算该功率的数值。

由戴维南定理可知, 一个线性复杂电路可以等效为一个理想电压源与一个电阻串联组成的回路。

最大功率定理: 负载电阻与电路的戴维南等效电阻相等时, 该负载可从电源获得最大功率。

重画戴维南等效电路图如图 5.21, 电源传输给负载 R_L 的电流为 i_L , 传输给负载 R_L 的功率为

$$P_L = i_L^2 R_L = \left(\frac{U_{th}}{R_{th} + R_L} \right)^2 R_L \quad (5-31)$$

式中, P_L 是 R_L 的函数, 求 P_L 对 R_L 的导数并令导数等于零, 可以得出对应的 R_L 的值, 该值使 R_L 获得来自电源的最大功率。

$$\begin{aligned} \frac{dP_L}{dR_L} &= U_{th}^2 \left[\frac{(R_{th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{th} + R_L)}{(R_{th} + R_L)^4} \right] \\ &= U_{th}^2 \left[\frac{R_{th} + R_L - 2R_L}{(R_{th} + R_L)^3} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{dP_L}{dR_L} = 0, \text{ 则}$$

$$R_{th} + R_L - 2R_L = 0$$

于是得到

$$R_{th} = R_L \quad (5-32)$$

将式(5-32)代入式(5-31)可得

$$P_{Lmax} = \left(\frac{U_{th}}{R_{th} + R_L} \right)^2 R_L = \frac{U_{th}^2}{4R_{th}} \quad (5-33)$$

P_L 与 R_L 的对应关系见图 5.22。

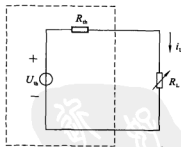


图 5.21 戴维南等效电路

进一步地分析:

(1) 对已给定复杂电路, 先求出戴维南等效电路, 再确定 R_L 。

(2) $R_L = R_{th}$ 时, 负载获得最大功率, 是在电压源和等效电阻已确定的情况下推证的, 此时负载获得了最大功率, 但电源的能量浪费了 50%。在通信领域, 为了获得尽量清晰有效的信号, 可以容许能量的消耗。

(3) 在电力输送领域, 为了避免大量能源的浪费, 不必采用最大功率定理, 当电源一定, 负载一定时, 内阻应尽量小。从 P_L 表达式容易看出, U_{th} 一定, R_L 一定, R_{th} 为零时, P_L 最大。

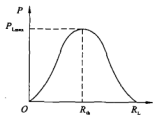


图 5.22 功率随负载变化曲线

【例 5.11】在图 5.23 中, 若负载 R_L 可以任意改变, 问负载为何值时获得的功率最大, 并求 P_{Lmax} 。

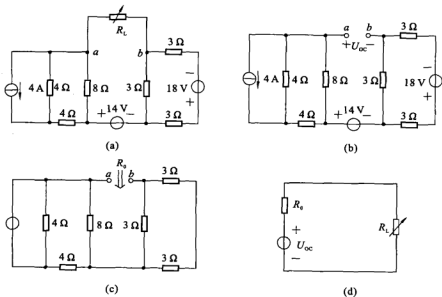


图 5.23

解 将电路中除负载外的其余部分变成戴维南等效电路。

(1) 求 U_{oc} 。

从 a 、 b 处断开 R_L , 设 U_{oc} 如图 5.23(b) 所示。在 4 A 电流源所在局部电路中应用分流公式, 在 18 V 电压源所在局部电路中应用串联分压公式, 然后在 14 V 电压源所在局部电路中应用 KVL, 可得

$$U_{oc} = -\frac{4}{4+4+8} \times 4 \times 8 + 14 + \frac{3}{3+3+3} \times 18 = 12 \text{ V}$$

$$U_{oc} = U_{th}$$

(2) 求 R_{th} 。

令图 5.23(b) 中各独立源为零, 得图 5.23(c), 则有

$$R_{th} = (4 + 4) // 8 + 3 // (3 + 3) = 6 \Omega$$

画出戴维南等效电路, 接上负载 R_L , 见图 5.23(d)。当负载 $R_L = R_{th} = 6 \Omega$ 时获得最大功率, 即

$$P_{Lmax} = \frac{U_{th}^2}{4R_{th}} = \frac{12^2}{4 \times 6} = 6 \text{ W}$$

【例 5.12】 图 5.24 所示电路为共射极双极性晶体管放大器的模型, 选择负载电阻, 使从放大器传输给该负载的功率最大, 并计算实际吸收的功率。

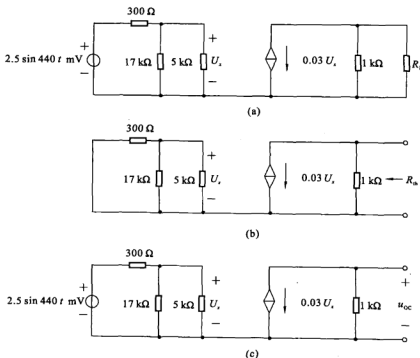


图 5.24

解 (1) 求 R_{th} 。

将 R_L 移去, 将独立电源短路, 见图 5.24(b)。

因为 $U_x = 0$, $0.03U_x = 0.03 \times 0 = 0$, 受控源开路, 因此可得

$$R_{th} = 1 \text{ k}\Omega$$

(2) 求 U_{th} , 见图 5.24(c)。

将 R_L 移走, 则有

$$U_x = (2.5 \times 10^{-3} \sin 440t) \left[\frac{(17 \times 10^3) // (5 \times 10^3)}{300 + (17 \times 10^3) // (5 \times 10^3)} \right]$$

$$U_{oc} = -0.03U_x \times 1000$$

将 U_x 代入上式计算可得

$$U_{oc} = -69.6 \sin 440t \text{ mV}$$

$$U_{th} = U_{oc}$$

因此,电阻值为 $1\text{ k}\Omega$ 的 R_L 吸收的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{th}^2}{4R_{th}} = 1.211 \sin^2 440t \mu\text{W}$$

5.5 与后续课程的关系

后续课程中,各类实际电源(含信号源)都可等效为实际的电压源模型或实际的电流源模型来分析和计算。究竟采用哪种模型要根据实际分析和计算的需要,两种模型可方便转换。

利用电阻 Δ -Y 转换可将某些类型的复杂电路转化成较为简单的串并联电路,三相交流电路中电源部分的三相绕组的连接和三相负载的连接也采用 Δ -Y 转换方法,计算时可互相转换。

叠加原理是线性电路分析和计算基础,特别针对多个电源(信号源)共同作用的电路分析时,它的理论分析意义非凡;等效是分析复杂电路的重要方法,能把复杂电路简单化,在模拟电子线路、数字电子线路等后续课程中,戴维南等效电路和诺顿等效电路在电路分析中有很多应用;数字电子技术中 TTL 门电路的电气特性分析,分析多级电路时,常用戴维南等效电路和诺顿等效电路的思想理解前后级的关系。最大功率传输定理在低频电路和高频电路中都有应用,特别在高频电路中意义非凡,因高频电路中电路匹配与否、工作状态等直接关系到电路特性。例如:叠加原理应用于模拟电子线路的小信号放大(微变等效)的分析。

图 5.25 所示为最基本的共射放大电路,图中有待放大的信号源(一般认为是交流成分组成的信息),有使三极管处于放大状态的直流电源。两个电源一同加入到一个电路中,电路作何响应,常用叠加定理来分析它。

放大电路有两种工作状态,即静态和动态。

(1) 静态工作情况分析

在图 5.25 所示电路中,当 $U_s = 0$ 时,放大电路中只在直流电源单独作用下,没有交流成分,称为静态工作状态,这时耦合电容 C_1 、 C_2 视为开路,直流通路如图 5.26(a) 所示。其中基极电流 I_b 、集电极电流 I_c 及集电极、发射极间电压 U_{ce} 只有直流成分,无交流输出,用 I_{bQ} 、 I_{cQ} 、 U_{ceQ} 表示。它们在三极管特性曲线上所确定的点称为静态工作点,用 Q 表示,如图 5.26(b) 所示。

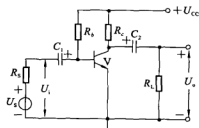


图 5.25 基本共射放大电路

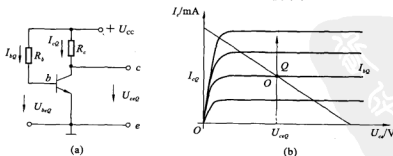


图 5.26 静态工作情况

(a) 直流通路; (b) 静态工作点

(2) 动态工作情况分析

在对放大电路的分析中,我们主要关心的是交流参数,在分析电路时,一般用交流通路来研究交流量及放大电路的动态性能。所谓交流通路,就是交流电流流通的途径,在画法上遵循两条原则,即

原则一:将原理图中的耦合电容 C_1 、 C_2 视为短路。

原则二:电源 U_{CC} 的内阻很小,对交流信号视为短路。图 5.26 所示的交流通路如图 5.27 所示。

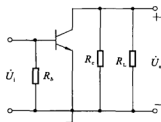


图 5.27 放大电路的交流通路

放大电路的实际工作状态是电路中直流电源加入,输入端又加上交流信号,此时称放大电路的工作状态为动态。此时电路中既有直流成分,亦有交流成分,各极的电流和电压都是在静态值的基础上再叠加交流分量,如图 5.28 所示。用叠加定理理解为:直流给放大电路合适的工作点,待放大的信号在此工作点上被放大。图中 U_b 、 U_e 、 I_b 、 I_e 为交直流量。

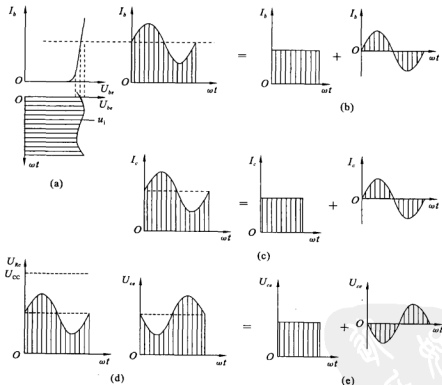


图 5.28 放大电路的各极间波形图

5.6 实用电路举例

5.6.1 叠加原理在实验电路中的电压、电流计算

叠加原理是分析线性电路的最基本方法之一,它反映了线性电路的两个基本性质,即叠加性和比例性。其内容为:在线性电路中,当有多个独立电源共同作用时,则任一支路的电流(或电压)等于各个独立电源分别单独作用时,在该支路中所产生的电流(或电压)的代数和。

在应用叠加原理时,要注意以下几点:

① 当某一个电源单独作用时,其他电源则“不作用”。对这些不作用的电源应该怎样处理呢?凡是电压源,应令其电压值为零,将电压源短路;凡是电流源,应令其电流值为零,将电流源开路,但是它们的电阻应保留在电路中。

② 当原电路中各支路电流的参考方向确定后,在求各分电流的代数和时,各支路中分电流的参考方向与原电路中对应该支路电流的参考方向一致者,取正值;相反者,取负值。

③ 叠加原理只适用线性电路,而不能用于分析非线性电路。

④ 叠加原理只能用来分析和计算电流和电压,不能用来计算功率。因为功率与电流、电压的关系不是线性关系,而是平方关系。

下面举例说明在一个实验电路中如何通过叠加原理计算电路中各支路的电流和电压值。如图 5.29 所示。

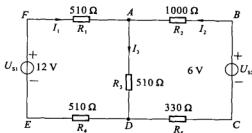


图 5.29 叠加原理实验电路图

从图 5.29 可知,电路中包含两个电压源,依据电路叠加原理,可以让其中一个电源单独作用,另一个电源则不作用,将电压源短路。假设先让 U_{S1} 电压源先单独作用,则 U_{S2} 电压源短路,计算出各项的值,然后反之,再计算出各项的值,于是可得表 5.1 数据。

表 5.1 叠加原理实验电路计算数据

测量项目	U_{S1} (V)	U_{S2} (V)	I_1 (mA)	I_2 (mA)	I_3 (mA)	U_{AB} (V)	U_{CD} (V)	U_{AD} (V)	U_{DE} (V)	U_{FA} (V)
U_{S1} 单独作用	12	0	8.64	-2.39	6.25	2.39	0.79	3.19	4.41	4.41
U_{S2} 单独作用	0	6	-1.2	3.59	2.393	-3.59	-1.18	2.91	-0.61	-0.61
U_{S1} 与 U_{S2} 共同作用	12	6	7.44	1.2	8.64	1.2	-0.4	4.41	3.79	3.79

$$I_1' = \frac{12}{R_1 + R_3 / (R_2 + R_5) + R_4} = \frac{12}{1388.6} = 8.64 \text{ mA}, \quad I_1'' = -1.197 \text{ mA}$$

$$I_2' = -I_1' \frac{510}{1330 + 510} = -2.39 \text{ mA}, \quad I_2'' = 3.59 \text{ mA}$$

$$I_3' = I_1' - 2.39 = 6.25 \text{ mA}, \quad I_3'' = 2.393 \text{ mA}$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 7.44 \text{ mA}; \quad I_2 = I_2' + I_2'' = 1.2 \text{ mA}; \quad I_3 = I_3' + I_3'' = 8.64 \text{ mA}$$

由以上各电流值可以分别计算出元件端电压值。

如果把图 5.29 中的电阻 R_5 改为二极管, 则刚才的叠加原理就不适合电路计算, 因为二极管是属于非线性器件, 当电源是 12 V 独立作用时跟电源是 6 V 时, 电路中二极管的等效电阻是不同的, 这样计算出来的值是不能进行叠加的。因此, 叠加原理适合应用在线性电路中。

5.6.2 戴维南定理的应用计算

1883 年, 法国人 L. C. 戴维南提出: 一个有电压源、电流源及电阻构成的二端网络, 可以用一个电压源 U_{oc} 和一个电阻 R_{th} 的串联等效电路来等效。 U_{oc} 等于该二端网络开路时的开路电压; R_{th} 称为戴维南等效电阻, 其值是从二端网络的端口进去, 该网络中所有电压源及电流源为零值时的等效电阻。电压源 U_{oc} 和电阻 R_{th} 组成的支路叫戴维南等效电路。

应用戴维南定理必须注意:

① 戴维南定理只对外电路等效, 对内电路不等效。也就是说, 不可用该定理求出等效电源电动势和内阻之后, 又返回来求原电路(即有源二端网络内部电路)的电流和功率。

② 应用戴维南定理进行分析和计算时, 如果待求支路的有源二端网络仍为复杂电路, 可再次运用戴维南定理, 直至成为简单电路。

③ 戴维南定理只适用于线性的有源二端网络。如果有源二端网络中含有非线性元件时, 则不能应用戴维南定理求解。

惠斯通电桥(又称单臂电桥)是一种可以精确测量电阻的仪器。图 5.30 所示是一个通用的惠斯通电桥。电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 叫做电桥的四个臂, G 为检流计, 用以检查它所在的支路有无电流。当 G 无电流通过时, 称电桥达到平衡。平衡时, 四个臂的阻值满足一个简单的关系, 即 $R_1 R_4 = R_2 R_3$, 利用这一关系就可测量电桥电阻。

惠斯通电桥电路如图 5.30 所示, 各臂电阻及电源电动势均可任意值, 为讨论方便, 忽略电源内阻。首先将如图 5.30 所示的惠斯通电路改画成如图 5.31 所示

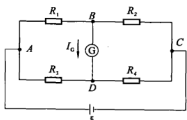


图 5.30 惠斯通电桥

的电路, 根据戴维南定理, 图 5.31 所示的惠斯通电路的等效电路如图 5.32 所示, 在图 5.32 中的 e_{oc} 等于图 5.31 中有源二端网络 N 的开路电压, R_{eq} 等于图 5.30 中有源二端网络 N 的除源网络的等效电阻。现在计算图 5.31 中有源二端网络 N 的开路电压, 由图 5.31 可知

$$U = U_{bc} + U_{cd} \quad (5-34)$$

因为开路时, R_1 与 R_3 电流相等, R_2 与 R_4 电流相等, 故

$$U_{bc} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \epsilon \quad (5-35)$$

$$U_{cd} = \frac{R_4}{R_2 + R_4} \epsilon \quad (5-36)$$

将式(5-35)、式(5-36)代入式(5-34)得

$$\varepsilon_{eq} = U = \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right) \varepsilon = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \varepsilon$$

再计算图 5.31 中有源二端网络 N 的除源网络电阻可得

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

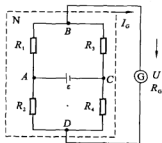


图 5.31 电桥电路的改画

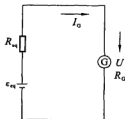


图 5.32 惠斯通电桥等效电路

由图 5.32 所示电路可知,通过电流计的电流为

$$I_G = \frac{\varepsilon_{eq}}{R_{eq} + R_G} \quad (5-37)$$

将式(5-35)、式(5-36)代入式(5-37)得

$$I_G = \frac{\varepsilon_{eq}}{R_{eq} + R_G} = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) \varepsilon}{R_1 R_2 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3) + R_G (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \quad (5-38)$$

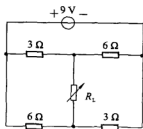
由上式可知

当 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ 时, $I_G = 0$; 反之, 当 $I_G = 0$ 时, 式(5-37)成立, 可见式(5-37)是惠斯通电桥

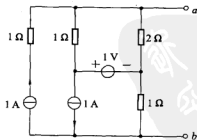
平衡的充分必要条件。

习 题

- 5.1 计算题图所示电路中负载电阻获得的最大功率。
- 5.2 求题图所示网络 ab 二端间的戴维南等效电路。



题 5.1 图

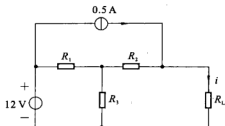


题 5.2 图

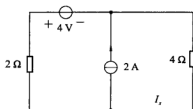
- 5.3 已知 $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 12\Omega$, $R_L = 4\Omega$, 利用戴维南定理, 求该电阻上的电流 i , 并画出

中间过程等效电路图。

5.4 电路如题图所示,求 I_x 。

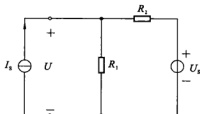


题 5.3 图



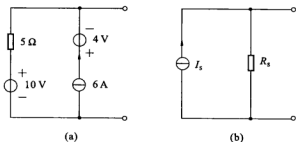
题 5.4 图

5.5 题图所示直流电路中,用叠加定理求电压 U 。



题 5.5 图

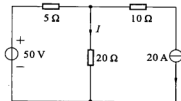
5.6 若题图(a)的等效电路如题图(b)所示,则其中 I_s 为() A, R_s 为() Ω 。



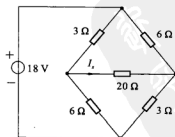
题 5.6 图

5.7 电路如题图所示,求电流 I 。

5.8 电路如题图所示,试求 I_x 。



题 5.7 图



题 5.8 图

第 6 章 一阶电路的时域分析

6.1 激励函数

电路分析中的激励函数是数学中的奇异函数或开关函数,它们具有开关量的特性,是对物理现象中的开关的近似。了解它们有助于对后面的 RL 和 RC 电路响应问题的分析。

6.1.1 单位阶跃函数

单位阶跃函数用 $u(t)$ 表示,当 t 是负值时, $u(t) = 0$; 当 t 是正值时, $u(t) = 1$ 。在 $t = 0$ 的点,从 0^- 到 0^+ 的无穷小的时间区域, $u(t)$ 从 0 突然变为 1,见图 6.1。单位阶跃函数的定义为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (6-1)$$

(6-2)

当改变 $u(t)$ 括号里的内容为 $t - t_0$,则函数变为 $u(t - t_0)$,称为延迟单位阶跃函数,波形见图 6.2 所示,其定义为

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (6-3)$$

(6-4)

对以上两种函数给出一个统一的判断标准,即括号中内容小于 0,函数值为 0;括号中内容大于 0,函数值为 1。

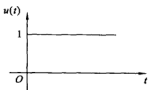


图 6.1 单位阶跃函数

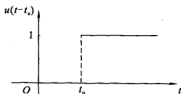


图 6.2 延迟单位阶跃函数

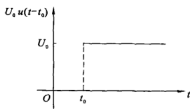


图 6.3 用单位阶跃函数来设计电压源

应用单位阶跃函数可以表达电路中电压或电流的突然改变,如图 6.3 所示。例如,借助单位阶跃函数设计新的函数值 $u(t) = U_0 u(t - t_0)$,该函数的定义为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ U_0, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (6-5)$$

$$(6-6)$$

用电路来表达该电压函数见图 6.4。

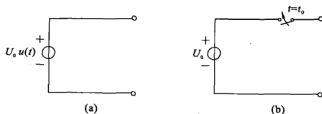


图 6.4

(a) 电压源 $U_0 u(t)$; (b) 等效电路

6.1.2 单位阶跃函数的应用

将单位阶跃函数相加、相减或将其与别的函数相乘,可以获得许多有价值的新函数。

应用一 用两个单位阶跃函数叠加合成新的激励信号。

将 $u(t-t_1)$ 和 $u(t-t_2)$ 组合 ($t_2 > t_1$)

$$f(t) = U_0 [u(t-t_1) - u(t-t_2)] \quad (t_2 > t_1)$$

该函数图形见图 6.5(a)

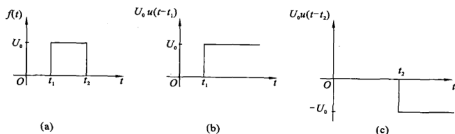


图 6.5

(a) 新函数; (b) $U_0 u(t-t_1)$; (c) $U_0 u(t-t_2)$

很明显,图 6.5(a) 是由图 6.5(b) 和图 6.5(c) 叠加而成。

应用二 在某一时间段向控制对象发出正弦信号。

设计一个单位阶跃函数 $u(t-t_0)$, 当 $t > t_0$ 时函数值为 1; 另设计一个单位阶跃函数 $u(t-t_1)$, $t_1 = t_0 + 7 \times 10^{-8}$, 将两个函数反接串联于电路, 则电路在 t_0 时导通, 在 $t_0 + 7 \times 10^{-8}$ 时关断。

$$\begin{aligned} f_1(t) &= u(t-t_0) - u(t-t_1) \\ &= u(t-t_0) - u(t-t_0 - 7 \times 10^{-8}) \end{aligned}$$

当 $t > t_0$ 时, 第一项为 1, 第二项为 0, $f_1(t)$ 为 1。

当 $t < t_0$ 时, 第一项为 0, 第二项为 0, $f_1(t)$ 为 0。

当 $t > t_0 + 7 \times 10^{-8}$ 时, 第一项为 1, 第二项为 -1, $f_1(t)$ 为 0。

若在图 6.6 中串接一个正弦电压源 $U_m \sin \omega t$, $\omega = 295 \text{ Mrad/s}$, $f = 47 \text{ MHz}$, 则电路的输出函数为

$$f_2(t) = U_m [u(t - t_0) - u(t - t_0 - 7 \times 10^{-8})] \sin 295 \times 10^6 t$$

其函数图形见图 6.7。

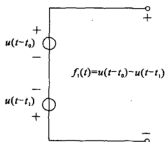


图 6.6 在某时间段开通的电路

图 6.7 一个 47 MHz 的射频脉冲

6.1.3 单位冲激函数

单位冲激函数亦称狄拉克(Dirac) δ 函数, 或脉冲函数、冲击函数、 δ 函数。该函数是对单位阶跃函数求导数而得到, 对其表述如下:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \text{不确定}, & t = 0 \end{cases} \quad (6-7)$$

$$(6-8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

单位冲激函数的图形如图 6.8 所示。

单位冲激函数可以看成图 6.8(b) 所示矩形脉冲函数在 $\Delta \rightarrow 0$ 时的极限, 由于维持面积 = 1 不变, 当宽度 Δ 变小时, 高度 $1/\Delta$ 变大, 当 $\Delta \rightarrow 0, \Delta \neq 0$ 时, $\delta(t) \rightarrow \infty$, 具有冲激的性质。

单位延时冲激函数(图 6.9) 定义为

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (6-9)$$

$$(6-10)$$

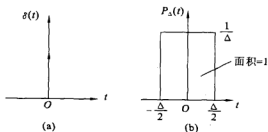


图 6.8 单位冲激函数图形

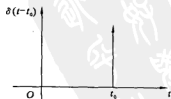


图 6.9 单位延时冲激函数

6.1.4 冲激函数的筛分性

除了原点, 对于所有的 t , $\delta(t) = 0$ 。所以, 对于除了 $t = 0$ 外的所有 t , 积分 $f(t)\delta(t) = 0$; 而在 $t = 0$ 处, $f(t) = f(0)$, 所以 $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ 。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = f(0) \times 1 = f(0) \quad (6-11)$$

同理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (6-12)$$

该式的意义是, 利用冲激函数可以得到函数 $f(t)$ 在冲激时刻的函数值, 这一性质称为冲激函数的筛分性, 见图 6.10。

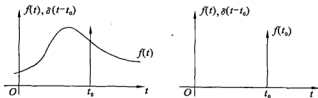


图 6.10 冲激函数的筛分性

6.1.5 单位斜坡函数

对于单位阶跃函数进行积分可以得到单位斜坡函数, 用 $r(t)$ 表示。

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(t)dt = tu(t) \quad (6-13)$$

于是有

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t > 0 \end{cases} \quad (6-14)$$

$$(6-15)$$

t 为负值时, 单位斜坡函数为 0; t 取正值时, 单位斜坡函数的斜率为 1。 $r(t-t_0)$ 为滞后的单位斜坡函数, $r(t+t_0)$ 为超前的单位斜坡函数, 三种函数见图 6.11。

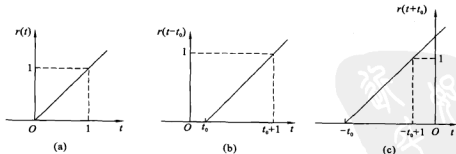


图 6.11

(a) 单位斜坡函数; (b) 滞后的单位斜坡函数; (c) 超前的单位斜坡函数

【例 6.1】 已知信号 $g(t)$, 用阶跃函数和斜坡函数表达该函数。

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t < 0 \\ -2, & 0 < t < 1 \\ 2t - 4, & t > 0 \end{cases}$$

解 当 $t < 0$ 时, $g(t) = 3u(-t)$ 。

当 $0 < t < 1$ 时, $g(t) = -2[u(t) - u(t-1)]$ 。

当 $t > 1$ 时, $g(t) = (2t-4)u(t-1)$ 。

因此, 在 t 的所有区间, 有

$$\begin{aligned} g(t) &= 3u(-t) - 2[u(t) - u(t-1)] + (2t-4)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + (2t-4+2)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2(t-1)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2r(t-1) \end{aligned}$$

用 $1-u(t)$ 替代 $u(-t)$ 以适应学习习惯, 可得

$$\begin{aligned} g(t) &= 3[1-u(t)] - 2u(t) + 2r(t-1) \\ &= 3 - 5u(t) + 2r(t-1) \end{aligned}$$

因此, 信号 $g(t)$ 成为了阶跃函数和斜坡函数的函数。

6.2 零输入 RL 电路

零输入电路是 $t=0$ 之前, 电路中已存在电源, 在 $t=0^+$ 时, 电源被撤销, RL 回路中无电源。但由于 L 中储存有能量, 存在着 $i(0) \neq 0$ 的情况, 当 $t>0$ 后, $i(t)$ 将根据 RL 回路自身的特性变化, 分析零输入电路就是寻找这种变化。

6.2.1 串联 RL 零输入电路

开关在 $-\infty \sim 0^-$ 期间与 1 相连, 电流源的电流 I_0 流过 R 和 L 。

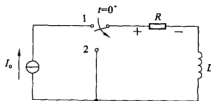


图 6.12 一阶串联 RL 零输入电路

在 $t=0^+$ 时, 开关切换与 2 相连, 电流源被切断, 回路中只剩下 R 和 L , 电感上的初始电流值为 I_0 。由于电感上的电流不能突变, 存在换路定律, 即

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \quad (6-16)$$

根据 KVL 可得

$$u_R + u_L = Ri_L + L \frac{di_L}{dt} \approx 0$$

利用分离变量法可得

$$\frac{di_L}{i_L} + \frac{R}{L}dt = 0$$

对上式进行积分,积分限对应关系为

$$t = 0, \quad i_L = I_0; \quad t = t, \quad i_L = i_L(t)$$

$$\int_{I_0}^{i_L(t)} \frac{di_L}{i_L} + \frac{R}{L} \int_0^t dt = 0$$

$$\ln i_L \Big|_{I_0}^{i_L(t)} + \frac{R}{L}(t-0) = 0$$

$$\frac{i_L}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

响应为

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = \frac{L}{R}, \text{称为时间常数,单位为秒}) \quad (6-17)$$

于是可得

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -\frac{L}{\tau} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_R = Ri_R = Ri_L = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

6.2.2 并联 RL 零输入电路

如图 6.13 所示,开关在 $-\infty \sim 0^-$ 期间与 1 相连,电感对直流短路,流过 L 的电流为 I_0 。

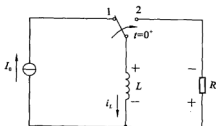


图 6.13 一阶并联 RL 零输入电路

在 $t = 0^+$ 时,开关切换与 2 相连,电流源被切断,回路中只剩下 R 和 L ,电感上初始电流为 I_0 ,由换路定律可得

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_0$$

根据 KVL 可得

$$u_L + Ri_L = 0 \quad (t > 0)$$

由

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

得到

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

$$\frac{di_L}{i_L} + \frac{R}{L}dt = 0$$



同前所述内容完全相同,响应为

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = \frac{L}{R})$$

于是可得 $u_L = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, $u_R = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

对比可知,串联 RL 和并联 RL 的零输入响应完全一致。

【例 6.2】求图 6.14 所示电路中电感电压 u_L 。

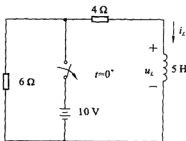


图 6.14

解 $t = 0^-$, 10 V 电压加在 4Ω 电阻上,产生电流值为 $\frac{10}{4} = 2.5$ A;

$t = 0^+$, 10 V 电压源被切断,电感在 $t = 0^+$ 时的电流 $i_L(0^+) = I_0 = 2.5$ A。

时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5}{6+4} = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ s}$$

应用式(6-16)可得

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 2.5 e^{-\frac{t}{0.5}} = 2.5 e^{-2t} \text{ A}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = 5[-2 \times 2.5 e^{-2t}] = -25 e^{-2t} \text{ V}$$

6.2.3 指数响应特性

由于

$$i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

对 t 求导数可得

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{i_L}{I_0} \right) \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$

曲线在 $t = 0$ 时的切线方程的特征点坐标有 $t = 0, \frac{i_L}{I_0} = 1$ 。

所以得到 $\frac{i_L}{I_0} = -\frac{1}{\tau} t + 1$ (在 $t = 0$ 处的切线方程)

(6-18)

令 $\frac{i_L}{I_0} = 0$, 得 $t = \tau$, 切线与横坐标相交。

τ 的意义是, 切线沿 $i_L \sim t$ 曲线初始斜率构成的直线衰减到零所用的时间, 是该切线在横坐标上的截距, 将 $t = \tau$ 代入 $i_L \sim t$ 的关系式(6-17)得, $i_L/I_0 = 0.368$, 见图 6.15。进一步

计算得出 $t = 3\tau$ 时, $i_L/I_0 = 0.95$; $t = 5\tau$ 时, $i_L/I_0 = 0.994$ 。

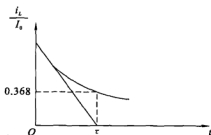


图 6.15 一阶 RL 电路零输入响应曲线

6.3 零输入 RC 电路

6.3.1 串联 RC 零输入电路

串联 RC 零输入电路图如图 6.16 所示。

在 $t = -\infty \sim 0^-$ 期间, 开关接 1, U_0 电源对 C 充电直至 $u_C = U_0$ 。

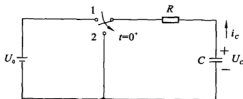


图 6.16 一阶串联 RC 零输入电路

在 $t = 0^+$ 时, 开关接 2, 电压源 U_0 被切断, 回路中只剩下 R 和 C , 电容上初始电压为 U_0 , 从 $t > 0$ 后经 R 放电, 由 KVL 可得

$$-Ri_C + u_C = 0$$

i_C 和 u_C 为非关联参考方向, 所以有 $i_C = -C \frac{du_C}{dt}$, 将此式代入上式可得

$$-R\left(-C \frac{du_C}{dt}\right) + u_C = 0$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{du_C}{u_C} + \frac{dt}{RC} = 0$$

采用分离变量法, 积分限为 $t = 0, u_C = U_0$; $t = t, u_C = u_C(t)$ 。

$$\int_{U_0}^{u_C(t)} \frac{du_C}{u_C} + \int_0^t \frac{dt}{RC} = 0$$

$$\ln u_C \Big|_{U_0}^{u_C(t)} + \frac{1}{RC}t = 0$$

$$\begin{aligned}\ln u_C(t) - \ln U_0 + \frac{1}{RC}t &= 0 \\ \ln \frac{u_C(t)}{U_0} &= -\frac{1}{RC}t \\ u_C(t) &= U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\tau = RC)\end{aligned}\quad (6-19)$$

于是得出

$$\begin{aligned}i_C(t) &= -C \frac{du_C(t)}{dt} = -C \left(-\frac{1}{\tau}\right) U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{R} U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ u_R(t) &= Ri_C(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\end{aligned}$$

6.3.2 并联 RC 零输入电路

在 $t = -\infty \sim 0^-$ 期间, 开关接 1, 电源 U_0 对 C 充电直至 $u_C = U_0$, $t = 0^+$ 时, 开关接 2, 见图 6.17。电源 U_0 被切断, 回路中只剩下 R 和 C , 电容 C 上的初始电压值为 U_0 。

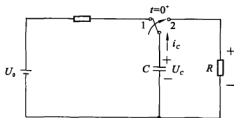


图 6.17 一阶并联 RC 零输入电路

$t > 0$ 后, 电容上电压经 R 放电, 由 KVL 可得

$$-u_C + Ri_L = 0$$

i_C 和 u_C 为非关联参考方向, 所以有 $i_C = -C \frac{du_C}{dt}$, 将此式代入上式可得

$$-u_C + R \left(-C \frac{du_C}{dt}\right) = 0$$

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0$$

对比串联 RC 零输入电路, 微分方程相同, 具有完全一致的解, 即

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

【例 6.3】 电路如图 6.18(a) 所示, 已知 $R_1 = 9 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 8 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$, $t = 0^+$ 时开关打开, 求 $u_{ab}(t)$, $t \geq 0$ 。

解 $t = 0^-$ 时, $u_C(0^-) = 10 \text{ V}$, $i_C(0^-) = 0$; $t = 0^+$ 时, 由换路定律 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10 \text{ V}$ 。先求 $u_C(t)$, $t \geq 0$ 。

cd 端右边网络等效电阻为

$$R_{cd} = \frac{(4+8) \times (3+1)}{(4+8) + (3+1)} + 9 = 12 \Omega$$

进而求得

$$\tau = R_{cd}C = 12 \times 1 = 12 \text{ s}$$

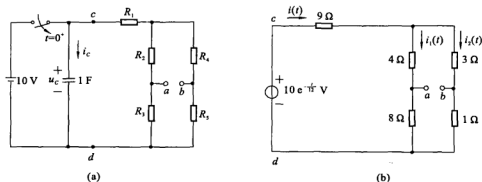


图 6.18

(a) 电路图; (b) 用电压源置换电容后得到的电阻电路, $t \geq 0$

因此, 电容上电压为

$$u_c(t) = u_c(0)e^{-\frac{t}{12}} = 10e^{-\frac{t}{12}} \text{ V}$$

用电压为 $u_c(t)$ 的电压源置换电容, 得

$$i(t) = \frac{10e^{-\frac{t}{12}}}{12} = \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{12}} \text{ A}$$

用分流公式求出

$$i_1(t) = \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{12}} \left(\frac{4}{12+4} \right) = \frac{5}{24}e^{-\frac{t}{12}} \text{ A}$$

$$i_2(t) = \frac{5}{6}e^{-\frac{t}{12}} \left(\frac{12}{12+4} \right) = \frac{15}{24}e^{-\frac{t}{12}} \text{ A}$$

结果为

$$u_{ab}(t) = -4i_1(t) + 3i_2(t) = \frac{25}{24}e^{-\frac{t}{12}} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

6.4 零状态 RL 电路

6.4.1 串联 RL 零状态电路

零状态指电路开关合上之前, 电感 L 中未储藏能量, $i_L(0) = 0$ 。本节研究的是 $t = 0^+$ 时, 将一个奇异信号加在串联的 RL 两端, 考察 L 处的电流变化规律, 见图 6.19。

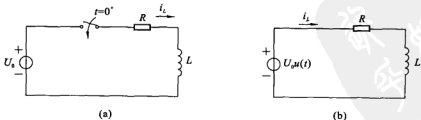


图 6.19

(a) 一阶串联 RL 零状态电路; (b) 用函数表示电源的等效电路

对电路图 6.19(b) 应用 KVL 可得

$$-U_0 u(t) + Ri_L + u_L = 0$$

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = U_0 u(t)$$

在 $t < 0$ 的期间, $i_L = 0$; 在 $t > 0$ 的期间, $u(t) = 1$ 。

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = U_0 \quad (t > 0)$$

分离变量后可得

$$\frac{L di_L}{U_0 - Ri_L} = dt$$

$$-\frac{L}{R} \frac{d(U_0 - Ri_L)}{U_0 - Ri_L} = dt$$

$$-\frac{L}{R} \int_0^t \frac{d(U_0 - Ri_L)}{U_0 - Ri_L} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{L}{R} \ln(U_0 - Ri_L) \Big|_0^t = t$$

$$\ln(U_0 - Ri_L) - \ln U_0 = -\frac{t}{\frac{L}{R}} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\ln \frac{U_0 - Ri_L}{U_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{U_0 - Ri_L}{U_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}, i_L = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

对所有时间, 有

$$i_L = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) \quad (6-20)$$

6.4.2 并联 RL 零状态电路

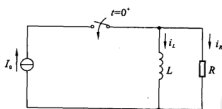


图 6.20 一阶并联 RL 零状态电路

在 $t = -\infty \sim 0^-$ 期间, 开关断开, RL 回路无电流。 $t = 0^+$ 时, 开关合上, I_0 流向 R 支路和 L 支路, 在电路上节点应用 KCL 可得

$$i_R + i_L = I_0$$

$$i_R = \frac{u_R}{R}, u_R = u_L = L \frac{di_L}{dt}, \text{代入上式可得}$$

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_0$$

令 $\tau = \frac{L}{R}$, $\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I_0}{\tau}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{I_0 - i_L}{\tau} \\ \tau \frac{di_L}{I_0 - i_L} &= dt \\ -\tau \frac{d(I_0 - i_L)}{I_0 - i_L} &= dt \\ -\tau \int_0^t \frac{d(I_0 - i_L)}{I_0 - i_L} &= \int_0^t dt \\ -\tau \ln(I_0 - i_L) \Big|_0^t &= t \\ i_L &= I_0 - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t > 0 \end{aligned}$$

对所有时间, 有

$$i_L = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t) \quad (6-21)$$

6.4.3 指数响应特性

根据式(6-21) 可得

$$\frac{di_L/I_0}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$t = 0$ 时, 有 $\frac{di_L/I_0}{dt} = \frac{1}{\tau}$, 在 $t = 0$ 处建立曲线的切线方程, 即

$$\frac{i_L}{I_0} = \frac{1}{\tau}t + k$$

$t = 0$ 时, $i_L = 0$, 所以 $k = 0$, 于是有

$$\frac{i_L}{I_0} = \frac{1}{\tau}t$$

因此, 当 $i_L = I_0$ 时, $t = \tau$, 即开关合上时间达到 τ 秒时, 切线的函数值达到最大值 I_0 。

6.4.4 一阶并联 RL 电路的冲激响应

当电路为零状态, 电流源是单位冲激函数时, 电路发生的相应变化称为冲激响应。

对图 6.21 所示电路, 求电感电流即为求冲激响应。

首先给出电流源为单位阶跃函数时, 电路的响应为

$$i_L = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$$



图 6.21 冲激响应 i_L' 和 u_L'

根据冲激函数的来源,若改电流源为单位冲激函数 $\delta(t)$, 电路的响应为

$$i_L' = \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt}[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)] = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\delta(t)$$

而

$$(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\delta(t) = (1 - e^{-\frac{0}{\tau}})\delta(t) = 0$$

电感电流为

$$i_L' = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

于是可求出 t 时刻的电感电压为

$$\begin{aligned} U_L'(t) &= L \frac{di_L'}{dt} = R[-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \delta(t)] \\ &= R[-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) + \delta(t)] \end{aligned}$$

i_L' 和 u_L' 与 t 的曲线关系见图 6.22。

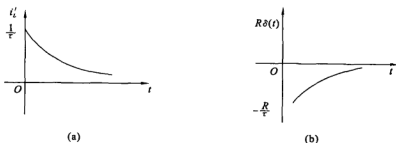


图 6.22

(a) 冲激响应的电感电流曲线; (b) 冲激响应的电感电压曲线

【例 6.4】 图 6.23(a) 所示电路在 $t = 0^+$ 时开关闭合, 求 $i_L(t)$ 和 $i(t)$, $t \geq 0$ 。

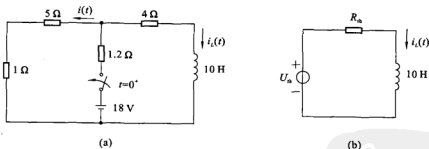


图 6.23

解 先求 $i_L(t)$, 为此可应用戴维南定理将图 6.23(a) 变换为图 6.23(b) 所示电路。

其中

$$U_{th} = U_{DC} = 18 \times \frac{6}{7.2} = 15 \text{ V}$$

$$R_{th} = (1.2//6) + 4 = 5 \Omega$$

故得

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = 10/5 = 2 \text{ s}$$

又 $i_L(\infty) = U_{th}/R = 3 \text{ A}$, 求 $i_L(\infty)$ 时电感相当于短路。

电感电流从0上升到3 A,采用式(6-20)可得

$$i_L(t) = 3(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ A} \quad t \geq 0$$

接下来求 i_L , 对图 6.23(a) 左网孔建立网孔方程, 按顺时针巡回, 则有

$$-(1 + 5 + 1.2)i(t) - 1.2i_L(t) + 18 = 0$$

$$7.2i(t) + 1.2i_L(t) = 18$$

解出

$$i(t) = \frac{18 - 1.2i_L(t)}{7.2}$$

代入 $i_L(t)$ 可得

$$i(t) = 2 + 0.5e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A}$$

6.5 零状态 RC 电路

6.5.1 串联 RC 零状态电路

$t = -\infty \sim 0^-$ 期间, 图 6.24 所示电路开关断开, 电容上未储存能量, 无电压, $u_C(0) = 0$ 。

$t = 0^+$ 时, 电压源发出的电流经 R 对 C 充电, 应用

KVL 可得

$$-U_0 + Ri_C + u_C = 0 \quad (i_C \text{ 和 } u_C \text{ 都是与时间有关的参数})$$

$$Ri_C + u_C = U_0$$

由 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ (i_C 和 u_C 为参考方向关联) 可得

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0$$

令 $\tau = RC$, $\tau \frac{du_C}{dt} = U_0 - u_C$, 则有

$$-\tau \frac{d(U_0 - u_C)}{U_0 - u_C} = dt$$

$$-\tau \int_0^{u_C(t)} \frac{d(U_0 - u_C)}{U_0 - u_C} = \int_0^t dt$$

$$-\tau \ln(U_0 - u_C) \Big|_0^{u_C(t)} = t$$

$$-\tau [\ln(U_0 - u_C(t)) - \ln U_0] = t$$

$$\ln \frac{U_0 - u_C(t)}{U_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{U_0 - u_C(t)}{U_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$$

对所有时间, 有

$$u_C(t) = (U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t)$$

6.5.2 并联 RC 零状态电路

在 $t = -\infty \sim 0^-$ 期间, 图 6.25 所示电路的开关断开, RC 回路中未储存能量。 $t = 0^+$ 时,

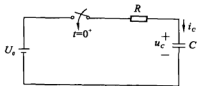


图 6.24 一阶串联 RC 零状态电路

开关闭合, 电流开始经 R 和 C 两支路流动, 在电路上端应用 KCL 可得

$$i_R + i_C = I_0 \quad (i_R \text{ 和 } i_C \text{ 变化, } I_0 \text{ 不变})$$

$$i_R = \frac{u_R}{R}, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (u_R = u_C)$$

$$\frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt} = I_0$$

$$C \frac{du_C}{dt} = I_0 - \frac{u_C}{R}$$

$$-RC \frac{d\left(I_0 - \frac{u_C}{R}\right)}{I_0 - \frac{u_C}{R}} = dt$$

$$-\tau \int_0^{u_C(t)} \frac{d\left(I_0 - \frac{u_C}{R}\right)}{I_0 - \frac{u_C}{R}} = \int_0^t dt$$

$$-\tau [\ln\left(I_0 - \frac{u_C(t)}{R}\right) - \ln I_0] = t$$

$$\ln \frac{I_0 - \frac{u_C(t)}{R}}{I_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{u_C(t)}{R} = I_0 - I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = RI_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\text{或} \quad u_C(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad U_0 = I_0 R, \quad t > 0$$

6.5.3 一阶串联 RC 电路的冲激响应

图 6.26 所示电路为零状态, 电压源为单位冲激函数, 电路的响应为 $u_C(t)$, 求冲激响应。

先求出电压源为单位阶跃函数 $u(t)$ 时, 电路的响应为 $u_C(t)$ 。

$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t), \quad \tau = RC$$

改电压源为单位冲击函数 $\delta(t)$, 电路的响应为 $u'_C(t)$, 则

$$u'_C(t) = \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

于是可求出 t 时刻的电容电流 i'_C 为

$$\begin{aligned} i'_C &= C \frac{du'_C(t)}{dt} = C \left[-\frac{1}{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) + \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \delta(t) \right] \\ &= \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \delta(t) \right] \end{aligned}$$

$t \neq 0$ 时, $\delta(t) = 0$; $t = 0$ 时, $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1$, 因此

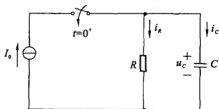


图 6.25 一阶并联 RC 零状态电路

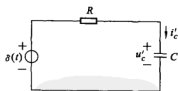


图 6.26 冲激响应 u'_C 和 i'_C

$$i'_C = \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) + \delta(t) \right]$$

u'_C 和 i'_C 与 t 的曲线见图 6.27。

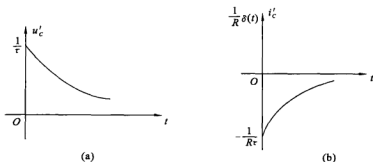


图 6.27

(a) 冲激响应 u'_C 波形; (b) 冲激响应 i'_C 波形

6.6 完全响应电路

6.6.1 非齐次微分方程求解方法

由 6.4.1 串联 RL 零状态电路已经得出电路的 KVL 方程为

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = U_0 u(t)$$

对阶跃函数电压的响应为

$$i_L = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t), \quad t > 0$$

下面用另一种方法得到同样的阶跃响应方程式, 根据非齐次微分方程求解方法, 微分方程的解由两项组成, 即特解 + 通解。

$$i_L = i_{Lf} + i_{Ln}$$

通解 i_{Ln} 的表达形式为 $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, 与零输入电路的响应形式相同; 特解 i_{Lf} 的形式与微分方程等式右边项的形式相同。若右边项为 U_0 , i_{Lf} 应为常数, 该特解可看成 $t \rightarrow \infty$ 时的 i_L 的值, 即 $\frac{U_0}{R}$ 。

$$i_L = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

代入初始条件 $t = 0$ 时, $i_L = 0$, 可得

$$A = -\frac{U_0}{R}$$

$$i_L = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t > 0$$

或

$$i_L = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$



以上过程和结果说明,求解非齐次微分方程可以通过求通解、特解、二者相加再利用初始条件求出系数来得到电路的响应。

6.6.2 完全响应及三要素法

零输入电路指 $t = -\infty \sim 0^-$ 期间有电源作用, $t > 0^+$ 后电源被切断; 零状态电路指 $t = -\infty \sim 0^-$ 期间无电源作用, $t = 0^+$ 或 $t = 0^+ \sim \infty$ 期间有电源作用; 完全响应指电路在所有时间范围均有电源作用, 如图 6.28 所示。

$t = 0^-, u_C = U_1$ (开关接 1)。

$t = 0^+$, 开关接 2, 根据 KVL 可得

$$-U_2 + Ri_C + u_C = 0$$

$$Ri_C + u_C = U_2$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_2$$

非齐次方程的解为特解 + 通解。

电路响应为 $u_C(t)$, 即

$$u_C = u_{Cf} + u_{Cn}$$

u_{Cn} 是齐次方程的解, $Ri_C + u_C = 0, u_{Cn} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

u_{Cf} 是特解, 其形式与微分方程右边常数项相同。

设 $u_{Cf} = C$, 将 C 代入微分方程得到

$$C = U_2$$

所以

$$u_C = U_2 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$t = 0$ 时, $u_C = U_1$, 由方程得到

$$A = U_1 - U_2$$

因此

$$u_C = U_2 + (U_1 - U_2)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

下面用叠加原理证明 $i_L = i_{Ln} + i_{Lf}$ 。

证: 在 $t = -\infty \sim 0^-$ 期间, 图 6.29 中电压源 U_1 对 R, L 作用, 流过 L 的电流为 $\frac{U_1}{R}$; $t >$

0^+ 时, 该电流从最大值 $\frac{U_0}{R}$ 逐渐衰减, 变化规律为 $\frac{U_1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

$t = 0^+$ 时, 开关接 2, 电压源 U_2 接入电路, 这时电路中的电流 i_L 实际上受两个电源作用, 一个是 $\frac{U_1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$, 另一个是 U_2 , 应用叠加原理可得

$$i_L = i_L' + i_L''$$

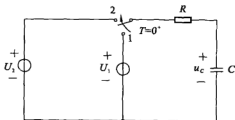


图 6.28 RC 串联完全响应电路

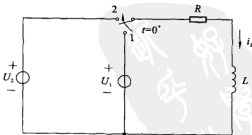


图 6.29 RL 串联完全响应电路

根据叠加原理的应用方法,将每个电源独立作用,当一个电源作用时,其他电源置零。

第一步,让 $\frac{U_1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ 作用,将 U_2 置零,于是

$$i_L' = \frac{U_1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

第二步,让 U_2 作用,将 $\frac{U_1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ 置零,于是

$$i_L'' = \left(\frac{U_2}{R} - \frac{U_2}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

将两个电源分别作用产生的响应相加可得

$$\begin{aligned} i_L &= i_L' + i_L'' \\ &= \frac{U_1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \left(\frac{U_2}{R} - \frac{U_2}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ &= \frac{U_2}{R} + \left(\frac{U_1}{R} - \frac{U_2}{R} \right)e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

更简便的方法:

由 $i_L = i_{Lf} + i_{Ls}$ (i_{Lf} 是 $t \rightarrow \infty$ 时的 i_L) 可得

$$\begin{aligned} i_{Lf} &= \frac{U_2}{R} \\ i_{Ls} &= Ae^{-\frac{t}{\tau}} \\ i_L &= \frac{U_2}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

由初始条件 $t = 0$ 时, $i_L = \frac{U_1}{R}$, 所以

$$A = \left(\frac{U_1}{R} - \frac{U_2}{R} \right)$$

因此

$$i_L = \frac{U_2}{R} + \left(\frac{U_1}{R} - \frac{U_2}{R} \right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

与用叠加原理证明的结果一致。

由以上内容,可以用一个统一的方程来表达一阶电路的完全响应,即

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中, $f(\infty)$ 、 $f(0^+)$ 、 τ 称为三要素,只要求出了这三个要素的值, $f(t)$ 就被确定了,三要素法是求解一阶电路响应的快速、准确的方法。

【例 6.5】 求图 6.30 所示电路中 $i(t)$ 的表达式。

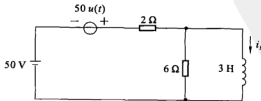


图 6.30

解 电路包括一个直流电压源和一个阶跃电压源。

$$R_{eq}' = 2//6 = 1.5 \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}'} = \frac{3}{1.5} = 2 \text{ s}$$

由于

$$i_L = i_{Lf} + i_{Ln}$$

$$i_{Ln} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_{Lf} \text{ 是 } t \rightarrow \infty \text{ 时的电流, } i_{Lf} = \frac{100}{2} = 50 \text{ A.}$$

$$\text{所以 } i_L = 50 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$t = 0$ 时, 流过 L 的电流为 25 A, 即

$$25 = 50 + A, \quad A = -25$$

因此

$$i_L = 50 - 25e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A, } t > 0$$

考虑到

$i_L = 25 \text{ A, } t < 0$, 完整的表达式为

$$i_L = 25 + 25(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t) \text{ A} \quad (\text{其波形见图 6.31})$$

【例 6.6】用三要素法求例 6.5 中的 i_L 。

解 三要素的表达式为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(t)$ 用 $i_L(t)$ 表示, 可得

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(\infty) = (50 + 50)/2 = 50 \text{ A}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{50}{2} = 25 \text{ A}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}'} = \frac{3}{2//6} = 2 \text{ s}$$

$$i_L(t) = 50 + [25 - 50]e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A}$$

$$= 50 - 25e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A, } t > 0$$

结果与微分方程求解一致。

【例 6.7】含受控源电路如图 6.32(a) 所示, $t < 0$ 时, 开关与 b 相连, 电路已稳定。 $t = 0^+$ 时, 开关与 a 相连, 求 $t \geq 0$ 时的电压 $u_C(t)$ 和电流 $i(t)$ 。

解 (1) 化简电路。

为简化计算, 将电路中含受控源部分用戴维南电路等效, 如图 6.32(b) 所示, 由 KVL 得

$$(2 + 6)i' + 4i' = 12$$

解得 $i' = 1 \text{ A}$

因此, 开路电压为

$$u_{OC} = 6i' + 4i' = 10i' = 10 \text{ V}$$

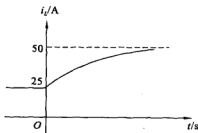


图 6.31 图 6.29 所示电路的响应曲线

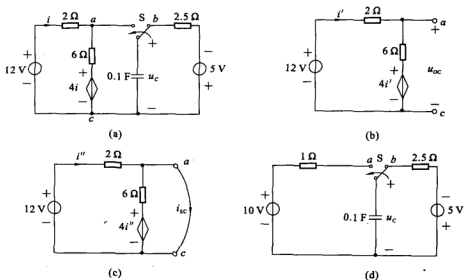


图 6.32

将图 6.32(b) 中 a, c 端短接并设 i_{sc} 如图 6.32(c) 所示。

由于
$$i'' = \frac{12}{2} = 6 \text{ A}$$

所以
$$i_{sc} = i'' + \frac{4i''}{6} = 6 + 4 = 10 \text{ A}$$

等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{u_{OC}}{i_{sc}} = \frac{10}{10} = 1 \Omega$$

画出原电路的等效电路如图 6.32(d) 所示。

(2) 计算电压 $u_C(t)$ 。

由图 6.32(d) 分别得出

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = -5 \text{ V}$$

$$u_C(\infty) = 10 \text{ V}$$

$$\tau = R_{eq}C = 1 \times 0.1 = 0.1 \text{ s}$$

利用三要素法可得

$$u_C(t) = 10 + (-5 - 10)e^{-10t} = 10 - 15e^{-10t} \text{ V}, \quad t > 0$$

(3) 求电流 $i(t)$ 。

回到原电路图 6.32(a), 有

$$i(t) = \frac{12 - u_C(t)}{2} = 1 + 7.5e^{-10t} \text{ A}, \quad t > 0$$

画出 u_C, i 的波形如图 6.33 所示。

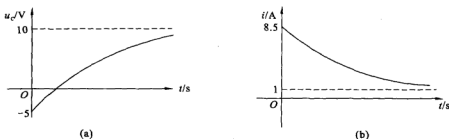


图 6.33 图 6.32(a) 所示电路的响应曲线

6.7 与后续课程的关系

线性动态电路的完全响应是由来自电源的输入和来自初始状态输入分别作用时所产生的响应的代数和,也就是说,完全响应为零输入响应和零状态响应之和。这一结论来源于线性电路的叠加性而又为动态电路所独有,称为线性动态电路的叠加定理。

电路的完全响应也可以从另一种观点进行分析,分解为固有响应(暂态响应)和强制响应(稳态响应),暂态响应的变化方式由电路本身所确定,与输入无关;稳态响应的变化方式与输入形式相同。

线性动态电路在换路后,通常要经过一段过渡时期才能进入稳态。把完全响应分解成暂态响应和稳态响应,正是为了反映这两种工作状态,把完全响应分解成零输入响应和零状态响应则是着眼于电路中的因果关系。

完全响应电路常用三要素(初始值、稳态值和时间常数)法来求解,这样可不必求解微分方程。

在后续课程中,凡碰到有电路换路情况,用以上理论作分析和计算是有效的。现举一个在数字电路中用三要素法求解延时时间的例子。

【例 6.8】 用 555 定时器组成的开机延时电路(555 作施密特触发器)如图 6.34 所示,若给定 $C = 25 \mu\text{F}$, $R = 91 \text{ k}\Omega$, $U_{\text{CC}} = 12 \text{ V}$,试计算常闭开关 S 断开以后经过多长的延迟时间 U_o 才能变为高电平。

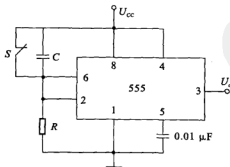


图 6.34 555 定时器组成的开机延时电路

解 常闭开关 S 闭合时, 2、6 脚输入高电平 U_{CC} , 输出为低电平, S 断开后, 电阻 R 上的电压下降, 降至 2、6 脚为 $U_{T-} = \frac{1}{3}U_{CC}$, 输出变为高电平。延迟时间 T_D 等于从 S 断开瞬间到电阻 R 上的电压降至 $U_{T-} = \frac{1}{3}U_{CC}$ 的时间, 电容上的初始值 $u_C(0)$, 稳态值 $u_C(\infty)$, 经时间 T_D 时的值 $u_{th} = \frac{2}{3}U_{CC}$ 。

$$\begin{aligned} T_D &= RC \ln \frac{u_C(\infty) - u_C(0)}{u_C(\infty) - u_{th}} = RC \ln \frac{U_{CC} - 0}{U_{CC} - \frac{2}{3}U_{CC}} \\ &= RC \ln 3 = 1.1RC = 1.1 \times 91 \times 10^3 \times 25 \times 10^{-6} \\ &= 2.5 \text{ s} \end{aligned}$$

6.8 实用电路举例

实际动态电路中, 由于开关的接通和断开, 线路的短接或开断, 元件参数值的改变等, 都将引起电路由一种工作状态到另一种工作状态的转变, 由于电路中存在储能元件, 这种转变通常不可能瞬时完成, 需要一段时间。它可以用积分微分方程来描述。能用一阶常微分方程来描述的电路就是一阶电路。

6.8.1 一阶电路的应用

(1) 延时器

电路如图 6.35 所示。工作时, 按下 S_1 、 S_2 后, 整流电源对 C_2 充电, C_2 两端的电压迅速达到电源电压值。同时, 电源经 R 为 VT1、VT2 组成的复合管提供基极偏流, 使复合管导通, 继电器 K 吸合, 其触点 K_{1-1} 闭合与 S_1 一起为电器 RL 提供交流电源, S_1 、 S_2 松开时 RL 仍能正常工作; 但 S_1 、 S_2 松开后, 电容 C_2 经 R 、复合管放电, 使复合管保持导通状态, 以维持 RL 的正常工作; 随着时间的延迟, C_2 上的电压不足以维持复合管的导通, K 便释放, 电器 RL 上的电源就被自动切断, 从而达到了自动关机的目的。延时时间的长短由 C_2 和 R 的时间常数决定, 改变 C_2 或 R 的数值可以改变延时时间的长短(按图中数值延时约 7 min), 加大 C_2 或 R 的数值, 延时时间变长, 反之时间变短。这种电路适用于走道上会自动熄灭的照明灯。

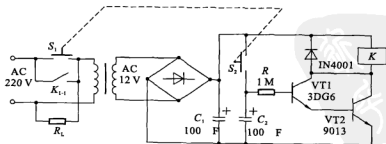


图 6.35 延时开关电路图

(2) 避雷器

① 避雷器的作用。避雷器是与电器设备并接的一种过电压保护设备,其作用是限制电器设备绝缘上的过电压,保护其绝缘免受损伤或击穿。

② 避雷器的电路组成如图 6.36 所示。

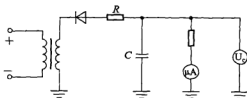


图 6.36 测量避雷器电导电流电路

③ 避雷器的工作原理。变压器高压侧经整流硅堆输出的电压是半波整流电压,其正半周时,经电阻 R 对电容 C 充电。负半周时电容 C 经 R 放电,但由于 C 较大,电荷逸出很少。下一个正半周时, C 又通过 R 充电,使两端的电压维持原来的数值,这样就保证避雷器两端的电压波动很小。

(3) 日光灯

日光灯其实是 RL 电路,如图 6.37 所示。镇流器是绕在铁芯上的线圈,自感系数很大;启辉器由封在玻璃泡中的静触片和 U 形动触片组成,玻璃泡中充有氖气。在两个触片间加上一定的电压时,氖气导电,发光、发热。动触片是用粘合在一起的双层金属片制成的,受热后两层金属膨胀不同,动触片稍稍伸开一些,和静触片接触。启辉器不再发光,这时双金属片冷却,动触片形状复原,两个触点重新分开。

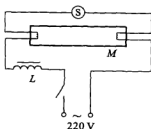


图 6.37 日光灯电路

开关闭合后电压通过日光灯的灯丝加在启辉器的两端,启辉器如上所述发热—触点接触—冷却—触点断开。在触点断开的瞬间,镇流器 L 中的电流急剧减小,产生很高的感应电动势。感应电动势和电源电压叠加起来加在灯管两端的灯丝上,把灯管点燃。实际使用的启辉器中常有一个电容器并联在氖泡的两端,它能使两个触片在分离时不产生火花,以免烧坏触点,同时还能减轻对附近无线设备的干扰,没有电容器时启辉器也能工作。

6.8.2 一阶电路的危害及预防措施

以下先从理论上分析一阶电路的危害。如图 6.38 所示,开关在 $t = 0$ 时打开,此时流过电感器的电流为

$$i(0) = \frac{E}{R_1}$$

经计算可知,开关两端电压为

$$U_K(0) = E \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

由上式可知,若 $R_2 \gg R_1$,则开关在打开的瞬间,其

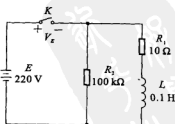


图 6.38 日光灯元件参数

两端的电压会高出电源电压 E 许多倍,即有一个很高的冲击电压,例如,假定 $E = 220 \text{ V}$, $L = 0.1 \text{ H}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, 则

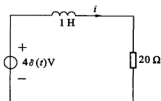
$$U_K(0) = E \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = 220 \left(1 + \frac{100000}{10} \right) = 2.2 \times 10^6 \text{ V}$$

这样高的电压,在 K 打开的瞬间开关两端会引起强烈的电弧,电路中 R_2 两端也将出现高电压,可能使电气设备损坏。尖峰值达 6000 V ,持续时间从万分之一秒至百分之一秒 / 周期 (10 ms) 的电压,这主要是由于雷击、电弧入电、静态放电或大型电气设备的开关操作而产生。

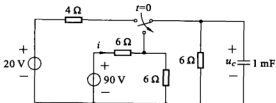
在炼钢厂、轧钢厂或者大量使用晶闸管设备、电火花设备、电力机车等地方,这种尖峰干扰非常厉害。其幅度大的可达数百伏甚至上千伏,而脉宽一般为 μs 数量级。雷电也常以尖峰脉冲方式入侵。尖峰脉冲幅度很大时,会破坏工控机开关电源输入滤波器、整流器,甚至主振管。再加之其频谱很宽,也会窜入计算机造成干扰。

习 题

- 6.1 一阶动态电路是指含有()个动态元件的动态电路。
 6.2 一阶电路的时间常数取决于()。
 (A) 电路的结构 (B) 外施激励
 (C) 电路的结构和参数 (D) 电路的参数
 6.3 如题图所示电路的冲激响应 $i(t)$ 为()A。
 6.4 题图所示电路原来已经稳定, $t = 0$ 时开关转换,求 $t > 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ 和电流 $i(t)$ 。

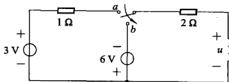


题 6.3 图



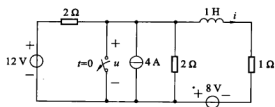
题 6.4 图

- 6.5 电路如题图所示,当 $t = 0$ 时开关由接 a 改为接 b ,求 $u(t)$, $t \geq 0$ 。

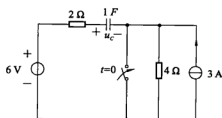


题 6.5 图

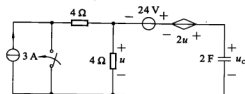
- 6.6 题图所示电路原来已经稳定, $t = 0$ 时断开开关,求 $t > 0$ 的电感电流 $i(t)$ 和电压 $u(t)$ 。
 6.7 题图所示电路原已稳定,当 $t = 0$ 时闭合开关,求 $t > 0$ 的电容电压 $u_C(t)$ 。
 6.8 含受控源电路如题图所示,当 $t = 0$ 时开关闭合,求 $u_C(t)$, $t \geq 0$ 。



题 6.6 图



题 6.7 图



题 6.8 图

第 7 章 二阶电路的时域分析

电路中电阻、电感、电容三种元件同时存在时,表达其特征的数学模型称为二阶微分方程。

7.1 串联 RLC 零输入电路

在第 6 章中已提到,求解一阶微分方程,利用了一个初始条件,将 $t=0$ 时 $f(0)$ 的值代入方程求出系数。对于二阶微分方程,出现了两个未知系数,求解这两个未知系数需要用两个初始条件,即 $t=0$ 时 $f(t)$ 的值 $f(0)$; $t=0$ 时 $\frac{df(t)}{dt}$ 的值 $\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$ 。

图 7.1 所示电路在 $t=-\infty \sim 0^-$ 有电源存在,电感和电容中储存有能量,本节希望得到 t 从 $0^+ \sim \infty$ 期间,电路中电流 i_L 与时间 t 的关系。

对回路应用 KVL 可得

$$u_R + u_C + u_L = 0$$
$$Ri_L + \frac{1}{C} \int i_L dt + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

对方程求导可得

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{C} = 0$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$$

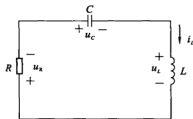


图 7.1 串联 RLC 电路

由于回路中已无电源,电流 i_L 将随时间延长而衰减,在第 6 章已得到一阶电路衰减的规律为 $I_0 e^{-t/\tau}$ 。设二阶零输入电路的方程解为

$$i_L = Ae^s \quad (7-1)$$

将其代入数学模型,能够解出 A 和 S ,则 Ae^s 就是方程的解,或者说 Ae^s 就是电感电流从 $0^+ \sim \infty$ 的变化规律。

将 Ae^s 代入微分方程得到

$$As^2 e^s + \frac{AR}{L} s e^s + \frac{A}{LC} e^s = 0$$

$$Ae^s (s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}) = 0$$

A 是应该求的,不可能为 0, e^s 只能当 $t \rightarrow \infty$ 时才能为 0。

所以必须是

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

由求根公式可得

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

s 由 R, L, C 的值决定, 称为电路的固有频率。

令 $\alpha = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (α 称为奈培频率, ω_0 称为谐振频率) 可得

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7-2)$$

将 $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ 和 $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, 代入式(7-1)后可得到两个方程的解为

$$i_1 = A_1 e^{s_1 t}, \quad i_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

下一步要解决 α 和 ω_0 的数值相对大小与解的具体表达形式的问题。

(1) 若 $\alpha > \omega_0$, 称为过阻尼响应, 则

$$i_L(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (7-3)$$

(2) 若 $\alpha = \omega_0$, 称为临界阻尼响应, 则

$$i_L(t) = (A_1 + A_2 t) e^{s t} \quad (7-4)$$

(3) 若 $\alpha < \omega_0$, 称为欠阻尼响应, 则

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (7-5)$$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ 称为本征谐振频率或自由振荡角频率。系数 A_1, A_2 或 B_1, B_2 由 $t = 0$ 时

$i(t) \Big|_{t=0}$ 的值和 $\frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0}$ 的值求得。

【例 7.1】 如图 7.1 所示 RLC 串联电路, 已知 $u_C(0) = 4 \text{ V}, R = 600 \, \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 20 \, \mu\text{F}, i_L(0^-) = 0$, 求 $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 。

解 $\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{600}{2 \times 1} = 300, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1 \times 20 \times 10^{-6}}} = \frac{10^3}{\sqrt{20}} = 223$

$\alpha > \omega_0$ 属过阻尼响应, 方程解的形式为

$$i_L(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -300 + \sqrt{300^2 - 223^2} = -300 + 200 = -100$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -300 - \sqrt{300^2 - 223^2} = -300 - 200 = -500$$

$$i_L(t) = A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-500t} \quad (7-6)$$

先由初始条件 $t = 0$ 时, $i_L(t) \Big|_{t=0} = 0$, 所以

$$A_1 + A_2 = 0 \quad (7-7)$$

再求 $\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0}$ 的值, 得到另一个与 A_1 和 A_2 有关的方程。

由于参考方向非关联, $u_L = -L \frac{di_L}{dt}, \frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{L} u_L(t) \Big|_{t=0}$, 应用 KVL 可得

$$u_R + u_C + u_L = 0, \quad u_L = -u_C - u_R$$

因 $t = 0$ 时, 电路无电流, 所以

$$u_R = 0, \quad u_L = -u_C, \quad u_L(0) = -u_C(0) = -4$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{L} u_L(t) \Big|_{t=0} = -\frac{1}{1} (-4) = 4$$

由已得到的中间公式 $i_L(t) = A_1 e^{-100t} + A_2 e^{-500t}$ 可得

$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = -100A_1 - 500A_2 \quad (7-8)$$

两式对比可得

$$-100A_1 - 500A_2 = 4 \quad (7-9)$$

联立式(7-7)和式(7-9)可解得

$$A_1 = 0.01, \quad A_2 = -0.01$$

电路的零输入响应为

$$\begin{aligned} i_L(t) &= 0.01e^{-100t} - 0.01e^{-500t} \\ u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t) dt \\ &= \frac{10^6}{20} \int_0^t 0.01(e^{-100\tau} - e^{-500\tau}) d\tau \\ &= -5e^{-100t} + e^{-500t} \text{ V} \end{aligned}$$

【例 7.2】 在图 7.1 所示电路中, $R = 1 \Omega$, $L = \frac{1}{4} \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $u_C(0) = -1 \text{ V}$, $i_L(0) = 0$, 求 $i_L(t)$, $t \geq 0$ 。

解 电路的固有频率为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} = -2$$

$s_1 = s_2 = s$, 电路处于临界阻尼状态, 方程解的表达式为

$$i_L(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}$$

先由初始条件 $t = 0$ 时, $i_L = 0$, 所以 $A_1 = 0$ 。

再求 $\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 的值, 得到另一个与 A_1 和 A_2 有关的方程。

由电感的定义可得

$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{L} u_L(0) = \frac{1}{L} (-u_R - u_C) = \frac{-(-1)}{\frac{1}{4}} = 4 \quad (7-10)$$

由电路响应的数学模型式(7-4)可得

$$\begin{aligned} \frac{di_L(t)}{dt} &= A_1 e^{st} + A_2 e^{st} + A_2 s e^{st} \\ \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} &= sA_1 + A_2 \end{aligned} \quad (7-11)$$

对比式(7-10)和式(7-11)得

$$sA_1 + A_2 = 4 \quad (7-12)$$

已知 $A_1 = 0$, 故 $A_2 = 4$ 。于是得

$$i_L(t) = 4te^{-2t}$$

【例 7.3】 在图 7.1 中, $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $u_C(0) = 1 \text{ V}$, $i_L(0) = 1 \text{ A}$, 求零输入响应 $i_L(t)$ 。

解 电路固有频率为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\omega_d = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 固有频率是共轭复数, 响应具有振荡性, 采用电路响应数学模型式(7-5)可得

$$i_L(t) = e^{-\sigma t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

先由初始条件 $t = 0$ 时, $i_L(0) = 1$, 可得

$$B_1 = 1$$

再由 $\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 的值, 得到另一个与 B_1 和 B_2 有关的方程。

$t = 0$ 时, 由 $u_L = L \frac{di_L(t)}{dt}$ 可得

$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{L} u_L = \frac{1}{L} (-u_R - u_C) = \frac{-Ri - u_C}{L} = \frac{-1 \times 1 - 1}{1} = -2 \quad (7-13)$$

对电路响应的数学模型式(7-5)求导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{di_L(t)}{dt} &= -\sigma e^{-\sigma t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) + e^{-\sigma t} (-B_1 \omega_d \sin \omega_d t + B_2 \omega_d \cos \omega_d t) \\ \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} &= -\sigma B_1 + B_2 \omega_d \end{aligned} \quad (7-14)$$

对比式(7-13)和式(7-14)可得

$$-\sigma B_1 + B_2 \omega_d = -2$$

将 σ, ω_d, B_1 代入上式计算可得

$$B_2 = -\sqrt{3}$$

因此

$$\begin{aligned} i_L(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \\ &= 2e^{-\frac{1}{2}t} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \\ &= 2e^{-\frac{1}{2}t} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

【例 7.4】求图 7.2 所示电路中的 $\alpha, \omega_0, i(0^+), \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+}, i(12 \text{ ms})$ 。

解 $\alpha = \frac{R}{2L} = 100 \text{ s}^{-1}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 223.6 \text{ rad/s}$$

$\alpha < \omega_0$, 为欠阻尼响应, 则

$$t < 0, \quad u(-t) = 1 \text{ A}$$

电容对直流断路, $i = u(-t) = 1 \text{ A}$ 。

$$i(0^+) = i(0^-) = 1 \text{ A}$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 100 \times 1 = 100 \text{ V}$$

$$u_L(0^+) = u_C(0^+) - 100i(0) = 100 - 100 = 0$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_L = 0, \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = 0$$

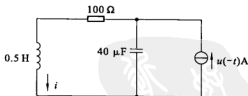


图 7.2

$$i(t) = e^{-100t}(B_1 \cos 200t + B_2 \sin 200t)$$

$i(0) = 1$, 所以 $B_1 = 1$ 。

$$\frac{di}{dt} = e^{-100t}(-200B_1 \sin 200t + 200B_2 \cos 200t) - 100e^{-100t}(B_1 \cos 200t + B_2 \sin 200t)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = 200B_2 - 100B_1 = 0$$

将 $B_1 = 1$ 代入上式可得 $B_2 = 0.5$ 。于是

$$i(t) = e^{-100t}(\cos 200t + 0.5 \sin 200t)$$

$$i(12 \text{ ms}) = -120.4 \text{ mA}$$

7.2 并联 RLC 零输入电路

对图 7.3 所示电路的顶部节点应用 KCL 可得

$$i_R + i_L + i_C = 0$$

$$\frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} = 0$$

对时间求导并整理得到

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} u = 0$$

与串联 RLC 零输入电路相同, 设微分方程的解为 Ae^s , 代入微分方程可得

$$CA s^2 e^s + \frac{1}{R} A s e^s + \frac{1}{L} A e^s = 0$$

$$A e^s \left(C s^2 + \frac{1}{R} s + \frac{1}{L} \right) = 0$$

令 $C s^2 + \frac{1}{R} s + \frac{1}{L} = 0$, 根据求根公式可得

$$S_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

令 $\alpha = \frac{1}{2RC}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 则

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

由以上内容可知, 并联 RLC 零输入电路的固有频率表达式与串联 RLC 零输入电路的相似, 其中 ω_0 是相同的, 但 α 不同。随 α 和 ω_0 变化时, 电路存在三种不同类型的响应形式。

(1) 若 $\alpha > \omega_0$ 称为过阻尼响应, 则

$$u(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \quad (7-15)$$

(2) 若 $\alpha = \omega_0$, 称为临界阻尼响应, 则

$$u(t) = (A_1 + A_2 t) e^{\alpha t} \quad (7-16)$$

(3) 若 $\alpha < \omega_0$, 称为欠阻尼响应, 则

$$u(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (7-17)$$

s_1, s_2, α 和 ω_0, ω_d 可以根据 R, L, C 的参数经计算得到; A_1, A_2 或 B_1, B_2 将由 $t = 0$ 时, $u(t)|_{t=0}$

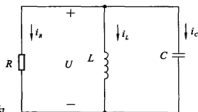


图 7.3 并联 RLC 电路

的值和 $\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 的值求得。

【例 7.5】如图 7.3 所示电路中, $u(0) = 5 \text{ V}$, $i(0) = 0$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 10 \text{ mF}$, $R = 1.923 \Omega$, 求 $u(t)$, $t > 0$ 。

$$\text{解 } \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = 26$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10 \times 10^{-3}}} = 10$$

$\alpha > \omega_0$, 为过阻尼响应, 利用式(7-15) 计算。

根据已求得的 α 、 ω_0 的值, 可求出 $s_1 = -2$, $s_2 = -50$, 代入式(7-15) 可得

$$u(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-50t}$$

先利用初始条件

$$u(0) = A_1 + A_2 = 5 \quad (7-18)$$

再利用 $\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 的值得到另一个与 A_1 和 A_2 有关的方程。

$$\frac{du}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 50A_2 e^{-50t}, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = -2A_1 - 50A_2 \quad (7-19)$$

由 $\frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} = 0$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{u}{RC} - \frac{1}{LC} \int u dt = \frac{-u - R \frac{1}{L} \int u dt}{RC} = -\frac{u + Ri}{RC} \\ \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} &= -\frac{u(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = -260 \end{aligned} \quad (7-20)$$

由式(7-19) 和式(7-20) 得到

$$-2A_1 - 50A_2 = -260 \quad (7-21)$$

联立式(7-18) 和式(7-21) 可解得

$$A_1 = -0.2083, \quad A_2 = 5.208$$

因此, $u(t) = -0.2083e^{-2t} + 5.208e^{-50t} \text{ V}$, 响应曲线见图 7.4。

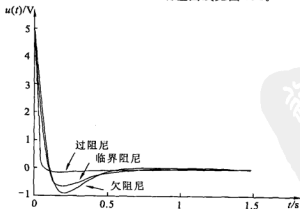


图 7.4 三种阻尼的电路响应

【例 7.6】 $R = 5 \Omega$, 相应其他参数与例 7.5 一致, 求 $u(t), t > 0$ 。

解
$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 5 \times 10 \times 10^{-3}} = 10$$

$$\omega_0 = 10$$

$\alpha = \omega_0$, 为临界阻尼响应, 利用式(7-16) 计算。

根据已求得的 α, ω_0 的值, 可求出 $s_1 = s_2 = -10$ 代入式(7-16) 可得

$$u(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-10t}$$

先利用初始条件

$$u(0) = A_1 = 5 \quad (7-22)$$

再利用 $\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 的值得到另一个与 A_1 和 A_2 有关的方程。

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (-10A_1 - 10A_2 + A_2) e^{-10t} \\ \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} &= -10A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (7-23)$$

与例 7.5 相似, 有

$$\left. \frac{du(0)}{dt} = -\frac{u(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{5 \times 10 \times 10^{-3}} = -100 \quad (7-24)$$

对比式(7-23) 和式(7-24) 可得

$$-100 = -10A_1 + A_2 \quad (7-25)$$

联立式(7-22) 和式(7-25) 可解得

$$A_1 = 5, \quad A_2 = -50$$

因此

$$u(t) = (5 - 50t) e^{-10t} \text{ V}$$

响应曲线见图 7.4。

【例 7.7】 $R = 6.25 \Omega$, 相应其他参数同例 7.6 一致, 求 $u(t), t > 0$ 。

解
$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 6.25 \times 10 \times 10^{-3}} = 8$$

$$\omega_0 = 10$$

$\alpha < \omega_0$, 为欠阻尼响应, 利用式(7-17) 计算。根据已求得的 α, ω_0 的值可得

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -8 \pm j6$$

将上式代入式(7-17) 可得

$$u(t) = e^{-8t} (B_1 \cos 6t + B_2 \sin 6t)$$

先利用初始条件

$$u(0) = B_1 = 5 \quad (7-26)$$

再利用 $\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 的值得到另一个与 B_1 和 B_2 有关的方程。

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (-8B_1 \cos 6t - 8B_2 \sin 6t - 6B_1 \sin 6t + 6B_2 \cos 6t) e^{-8t} \\ \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} &= -8B_1 + 6B_2 \end{aligned} \quad (7-27)$$

又

$$\frac{du(0)}{dt} = -\frac{u(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{6.25 \times 10 \times 10^{-3}} = -80 \quad (7-28)$$

对比式(7-27)和式(7-28)得出

$$-80 = -8B_1 + 6B_2 \quad (7-29)$$

联立式(7-26)和式(7-29)解得

$$B_1 = 5, \quad B_2 = -6.667$$

因此

$$u(t) = e^{-8t}(5\cos 6t - 6.667\sin 6t)$$

响应曲线见图 7.4。

7.3 无损耗 LC 电路

图 7.5 所示电路相当于 $R = \infty$ 时的并联 RLC

零输入电路, 由于 $\alpha = \frac{1}{2RC} = 0$, 所以 $e^{-\alpha t} = 1$, 所得响应只剩下正弦信号项。

在 $t = -\infty \sim 0^-$ 期间, 电流 $i_L = -\frac{1}{6}$ A。

电感处在短路状态, $u(0) = 0$ V。

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times \frac{1}{36}}} = 3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_0 = 3 \text{ rad/s}$$

$$u(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t) = B_1 \cos 3t + B_2 \sin 3t$$

先利用初始条件

$$u(0) = B_1 = 0 \quad (7-30)$$

再利用 $\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 的值得到另一个与 B_1 和 B_2 有关的方程。

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -3B_1 \sin 3t + 3B_2 \cos 3t \\ \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} &= 3B_2 \end{aligned} \quad (7-31)$$

又

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{i_C(0)}{C} = -\frac{i_L(0)}{C} = -\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{36}} = 6 \quad (7-32)$$

对比式(7-31)和式(7-32)得到 $3B_2 = 6$, 所以 $B_2 = 2$ 。

因此

$$u(t) = 2\sin 3t$$

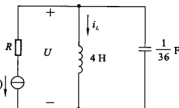


图 7.5 无损耗 LC 回路

7.4 串联RLC电路的零状态响应

用一个直流电源突然加在未储存能源的串联RLC电路的两端,电路中电参数变化的规律,称为串联RLC电路的零状态响应。

在图7.6所示电路中应用KVL可得

$$-U_s + Ri + L \frac{di}{dt} + u_c = 0$$

根据电容的定义可得

$$i = C \frac{du_c}{dt}$$

联立上二式可得

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{C}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = \frac{U_s}{LC}$$

当等式右边等于0时,微分方程的解为零输入响应,由前一节内容可知,该解有三种形式,即:过阻尼响应、临界阻尼响应和欠阻尼响应。

- (1) $\alpha > \omega_0$, $u_c(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}$, 过阻尼响应;
- (2) $\alpha = \omega_0$, $u_c(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$, 临界阻尼响应;
- (3) $\alpha < \omega_0$, $u_c(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$, 欠阻尼响应。

以上均是微分方程的通解,由于等式右边存在常数项,微分方程还存在特解,特解的形式与微分方程右边项的形式相同。令特解为C,代入等式左边得到

$$\frac{C}{LC} = \frac{U_s}{LC}$$

所以

$$C = U_s$$

因此得到串联RLC电路的零状态响应的三种表达形式,即

- (1) $\alpha > \omega_0$, $u_c(t) = U_s + A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}$, 过阻尼响应;
- (2) $\alpha = \omega_0$, $u_c(t) = U_s + (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$, 临界阻尼响应;
- (3) $\alpha < \omega_0$, $u_c(t) = U_s + e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$, 欠阻尼响应。

求解系数 A_1 、 A_2 或 B_1 、 B_2 的方法与零输入响应完全相同。

【例7.8】 如图7.6所示电路中, $R = 5 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 0.25 \text{ F}$, $U_s = 24 \text{ V}$, $i(0) = 0$, $u_c(0) = 0$, 求 $u_c(t)$, $t > 0$ 。

解 $\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \times 1} = 2.5$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 0.25}} = 2$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

$\alpha > \omega_0$, 利用式 $u_c(t) = U_s + A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t}$, 代入各数值得

$$u_c(t) = 24 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

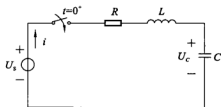


图 7.6 串联RLC电路

先利用初始条件 $u_C(0) = 24 + A_1 + A_2 = 0$, 可得

$$A_1 + A_2 = -24 \quad (7-33)$$

再利用 $\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 的值得到另一个与 A_1 和 A_2 有关的方程。

$$\begin{aligned} \frac{du_C(t)}{dt} &= -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t} \\ \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} &= -A_1 - 4A_2 \end{aligned} \quad (7-34)$$

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = 0 \quad (7-35)$$

由式(7-34)和式(7-35)得到

$$-A_1 - 4A_2 = 0 \quad (7-36)$$

联立式(7-33)和式(7-36)解出

$$A_1 = -32, \quad A_2 = 8$$

因此

$$u_C(t) = 24 + (-32e^{-t} + 8e^{-4t})$$

7.5 并联 RLC 电路的零状态响应

如图 7.7 所示电路中, $t = -\infty \sim 0^-$ 期间, 电流源 I_S 被短路。 $t = 0^+$ 时, 电流 I_S 流向并联 RLC 电路, 在顶部节点应用 KCL 可得

$$\frac{u}{R} + i_L + C \frac{du}{dt} = I_S$$

将 $u = L \frac{di_L}{dt}$ 代入上式可得

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} = I_S$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{I_S}{LC}$$

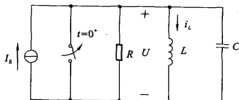


图 7.7 并联 RLC 电路

同串联 RLC 电路的零状态响应相似, 有三种方式, 即

- (1) $\alpha > \omega_0$, $i_L(t) = I_S + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$, 过阻尼响应;
- (2) $\alpha = \omega_0$, $i_L(t) = I_S + (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$, 临界阻尼响应;
- (3) $\alpha < \omega_0$, $i_L(t) = I_S + e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$, 欠阻尼响应。

【例 7.9】求图 7.8 所示电路中的 i_L 。

解 由图知 $t < 0$ 时, $i_L = 0$ 。与并联 RLC 电路比较, $R = \infty$ 。

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$



图 7.8

$\alpha < \omega_0$, 为欠阻尼响应。

利用公式 $i_L = I_s + e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$, 代入各数据可得

$$i_L = 20 + (B_1 \cos t + B_2 \sin t)$$

先利用初始条件 $i_L(0) = 20 + B_1 = 0$, 可得

$$B_1 = -20 \quad (7-37)$$

再利用 $\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0}$ 求与 B_1 和 B_2 有关的另一公式。

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -B_1 \sin t + B_2 \cos t \quad \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = B_2 \quad (7-38)$$

$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = 0 \quad (7-39)$$

联立式(7-38)和式(7-39)可得

$$B_2 = 0$$

因此

$$i_L(t) = 20 - 20 \cos t = 20(1 - \cos t)$$

7.6 RLC 电路的完全响应

电路在 $t < 0$ 时接有电压源 U_1 , $t > 0$ 后电路的电压源变为 U_2 , $U_1 \neq U_2$ 。电路的响应是零输入响应和零状态响应的综合反映。

【例 7.10】如图 7.9 所示电路, 设 $R = 1.923 \, \Omega$, $L = 1 \, \text{H}$, $C = 10 \, \text{mF}$, $U_1 = 1 \, \text{V}$, $U_2 = 2 \, \text{V}$, 求 $i_L(t)$, $t > 0$ 。

解 $i_L(0^-) = \frac{1}{1.923} = 0.52 \, \text{A}$, 电感对直流短路, $u(0) = 0$ 。

$t > 0$, 开关接 U_2 , 利用电源变换, 得图 7.10 所示电路。

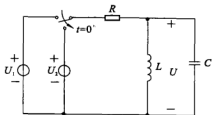


图 7.9 完全响应 RLC 电路

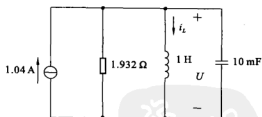


图 7.10 $t > 0$ 时的等效电路

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = 26$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10 \times 10^{-3}}} = 10$$

$\alpha > \omega_0$, 为过阻尼响应, 则

$$s_1 = -2, \quad s_2 = -50$$

$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= I_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\
 &= 1.04 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-50t}
 \end{aligned}$$

先利用初始条件 $i_L(0) = 1.04 + A_1 + A_2 = 0.52 \text{ A}$ 可得

$$A_1 + A_2 = -0.52 \quad (7-40)$$

再利用 $\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0}$ 的值求与 A_1 和 A_2 有关的另一个方程式。

$$\begin{aligned}
 \frac{di_L(t)}{dt} &= -2A_1 e^{-2t} - 50A_2 e^{-50t} \\
 \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} &= -2A_1 - 50A_2
 \end{aligned} \quad (7-41)$$

$$u_C(0) = u_L(0) = L \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1(-2A_1 - 50A_2) = 0$$

所以

$$-2A_1 - 50A_2 = 0 \quad (7-42)$$

联立式(7-40)和式(7-42)得

$$A_1 = -54.25, \quad A_2 = 2.17$$

因此

$$i_L(t) = 1.04 + (-54.25e^{-2t} + 2.17e^{-50t})$$

7.7 与后续课程的关系

含电感和电容的二阶电路,与一阶电路不同,这类电路的响应可能出现振荡的形式,LC 电路的零输入响应应具有正弦振荡的形式,这很重要,因为现实生活中我们所用的工业交流电是正弦振荡形式,很多实用信号也用正弦信号或看成各种不同频率的正弦信号叠加。

二阶电路对信号的响应情况有三种:过阻尼响应、临界阻尼响应和欠阻尼响应。后续课程中,将根据不同需求设计电路的状态,继而分析电路特性。

在自动控制中,被控量的变化要设计为具有自平衡能力,所以控制系统若为二阶电路,电路应该设计为过阻尼状态,而非临界或欠阻尼状态。

用 LC 组成的二阶电路产生正弦波振荡信号时,电路应该设计为临界阻尼状态。LC 组成的二阶电路用作选频、滤波时,电路按临界阻尼状态来分析计算,这在高频、通信领域广泛应用。

实用电工中,图 7.11 所示为电火花加工器的原理电路,为了达到重复间歇放电加热,电路必须设计为处于欠阻尼状态,例如 $R = 50 \Omega$ 、 $L = 0.06 \text{ H}$ 、 $C = 1 \mu\text{F}$ 。

若 $u_C(0_-) = 0$ 、 $i(0_-) = 0$,开关 S 在 $t = 0$ 时闭合,电容被充电。当电容电压到达工作电极和金属工件间隙的击穿电压时,间隙处即产生电火花,电容通过间隙放电,然后电源再次对电容充电(通过控制开关 S 达到),重复上述过程。由于电火花的温度一般可达 10000°C ,足使工件局部熔化,从而对工件进行加工。

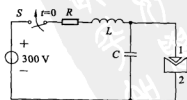


图 7.11 电火花加工器的原理电路

7.8 实用电路举例——无线话筒的基本原理与制作

在交流电路中,电阻值和频率无关,RLC串联电路的电流与电阻电压同相位;电容具有“通高频、阻低频”的特性;电感具有“通低频、阻高频”的特性。

RLC串联电路具有特殊的幅频特性和相频特性,有选频和滤波作用。

(1) RLC 串联谐振

RLC串联电路中,当信号的频率 f 为谐振频率 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$,即感抗与容抗相等($\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$)时,电路的阻抗有最小值($Z = R$),电流有最大值 $I_0 = \frac{U_s}{|Z|} = \frac{U_s}{R}$,电路为纯电阻,这种现象称为RLC串联谐振。

(2) RLC 串联电路的幅频特性曲线

RLC串联回路电流 I 与电源的频率 f ($\omega = 2\pi f$)有关,RLC串联电路的 I - f 的关系曲线称为RLC串联电路的幅频特性曲线,如图7.12所示。

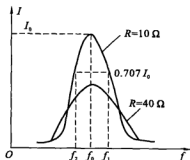


图 7.12 RLC 串联幅频曲线

(3) 应用实例——无线话筒的制作

① 电路工作原理

图7.13是调频无线话筒的电路图。

驻极体话筒将声音转变为音频电流,加在由晶体管V、线圈L和电容器 C_1 组成的高频振荡器上,形成调频信号由天线发射到空间。在10 m范围内,由具有调频广播波段(FM波段)的收音机接收,经扬声器还原成原来的声音,实现声音的无线传播。

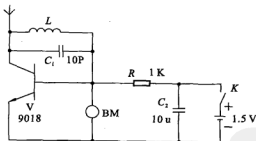


图 7.13 无线话筒电路图

② 空心线圈L的制作

L是空心电感线圈,用0.5 mm的漆包线在圆珠笔芯上密绕10圈。用小刀将线圈两端刮去漆皮后镀锡,可点上一些石蜡油固定线圈,然后抽出圆珠笔芯,形成空心线圈(如图7.14),线圈电感量约为 $31.3 \mu\text{H}$ 。

由计算公式可计算出理想情况下的无线话筒发射频率:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{31.3 \times 10^{-18}}} = 90 \text{ MHz}$$

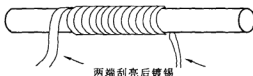


图 7.14 空心线圈制作图

③ 电路的调试

- 先检查印刷电路板和焊接情况，应无短路和虚、假焊现象，然后可接通电源。
- 用万用表直流电压挡测量晶体管 V 基极发射极间电压，应为 0.7 伏左右。若将线圈 L 两端短路，电压应有一定变化，说明电路已经振荡。
- 打开收音机，拉出收音机天线，波段开关置于 FM 波段，(频率范围为 88 ~ 108 MHz) 将无线话筒天线搭在收音机上。
- 慢慢转动收音机调谐旋钮，同时对话筒吹气或讲话，调到收音机收到信号声为止。若收音机在调谐范围内收不到信号，可拉伸或压缩线圈 L，改变其宽度，再仔细调谐收音机直至收音机收到清晰的信号。然后逐渐拉开无线话筒和收音机间的距离，直到距离在 8 ~ 10 m 时，仍能收到清晰信号为止。注意在调试中无线话筒发射频率应避开调频波段内的广播电台的频率。
- 将无线话筒印刷板装入机壳。机壳可以自制，也可采用圆筒形的塑料包装瓶。开关应露在壳外，便于使用(见图 7.15)。

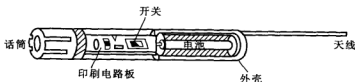


图 7.15 无线话筒装配图

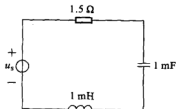
习 题

7.1 题图所示 RLC 电路的零输入响应属于()。

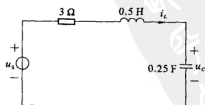
- 过阻尼情况(固有频率为不相等负实数)
- 欠阻尼情况(固有频率为共轭复数)
- 临界阻尼情况(固有频率为相等负实数)
- 等幅振荡情况(固有频率为共轭虚数)

7.2 题图所示 RLC 串联电路，已知 $u_C(0) = 4 \text{ V}$, $i_L(0) = 2 \text{ A}$ ，则电容电压的零输入响应为()。

- $u_C(t) = (12e^{-2t} - 8e^{-4t}) \text{ V}$
- $u_C(t) = (6e^{-2t} - 4e^{-4t}) \text{ V}$
- $u_C(t) = (4e^{-t} - 6e^{-3t}) \text{ V}$
- $u_C(t) = (8e^{-t} - 12e^{-3t}) \text{ V}$

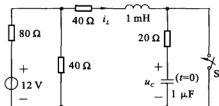


题 7.1 图



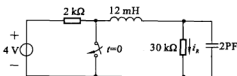
题 7.2 图

- 7.3 题图所示各电路换路前已达稳态, 试求 $i_L(0^+)$ 、 $u_C(0^+)$ 、 $\frac{di_L}{dt}\bigg|_{0^+}$ 和 $\frac{du_C}{dt}\bigg|_{0^+}$ 。



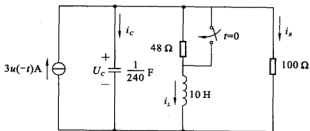
题 7.3 图

- 7.4 当 $t = 0$ 时, 题图所示电路可以简化成 RLC 并联电路, 求对所有时间有效的电阻电流 i_R 的表达式。



题 7.4 图

- 7.5 对于题图所示电路, 求 $i_L(t)$ 。



题 7.5 图

第 8 章 正弦稳态响应

8.1 正弦波的特性

按正弦规律变化的电压或电流均可称为正弦信号,它是时间的函数,由于 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 具有完全相同的曲线形态,所以正弦信号既可以是正弦函数,也可以是余弦函数。电路分析过程中常用 $\cos\omega t$ 来表达激励信号或电路某处的响应。

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta) \quad (8-1)$$

式中 U_m ——振幅,一个周期内电压最大值;
 ω ——角频率,单位时间正弦量变化的弧度数;
 θ ——初相位, $t = 0$ 时的瞬时相位角。

$$\begin{aligned} \theta = 0, u(t) &= U_m \cos\omega t \\ &= U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{见图 8.2 曲线 1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = -\frac{\pi}{2}, u(t) &= U_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= U_m \sin\omega t \quad (\text{见图 8.2 曲线 2}) \end{aligned}$$

定义: f ——周期数 / 秒,因每周期的弧度为 2π ,所以 $2\pi f$ 是每秒的弧度数;

ω ——弧度 / 秒,所以 $\omega = 2\pi f$ 。

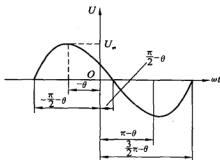


图 8.1 有初相位的余弦函数的波形

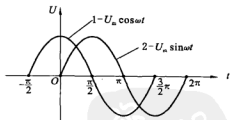


图 2 初相位为 0 的正弦函数波形和余弦函数波形

从图 8.1 和图 8.2 可知, ωt 变化 2π , 曲线变化了一个周期, $\omega t = 2\pi$ 时的 t 用周期符号 T 表示, 即 $\omega T = 2\pi$, 同乘上 f 可得

$$\omega T f = 2\pi f$$

因

$$\omega = 2\pi f$$

所以

$$T = \frac{1}{f}$$

式(8-1)可改写为

$$u(t) = U_m \cos(2\pi ft + \theta) \quad (8-2)$$

$$u(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) \quad (8-3)$$

【例 8.1】 已知函数为 $u(t) = 12\cos(50t + 10^\circ)$, 求幅度 U_m 、相位角 θ 、周期 T 和频率 f 。

解 $U_m = 12, \theta = 10^\circ, \omega = 50$, 所以周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = 0.1257 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 7.958 \text{ Hz}$$

在电路分析过程中,需要对两个信号进行滞后或超前的判断,这时应做到以下几点,才能作出比较。

- (1) 将两个信号写成余弦函数形式;
- (2) 将两个信号同时写成正幅度形式;
- (3) 两个信号应具有相同的频率;
- (4) 相位差限制在 180° 以内。

例如,比较图 8.2 所示两个信号, $\omega t = 0$ 时,曲线 1 已处在最大值 U_m ,而曲线 2 的函数值等于零,曲线 2 在 $\omega t = \frac{\pi}{2}$ 时才能到达最大值 U_m ,说明曲线 1 超前曲线 2 的相位为 $\frac{\pi}{2}$ 弧度,因此 $\cos\omega t$ 超前 $\sin\omega t$ 。

【例 8.2】 同频率正弦电压、电流分别为

$$u(t) = 20\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ V}$$

$$i(t) = 5\sin(\omega t + 40^\circ) \text{ mA}$$

求相位差,并说明两正弦量相位超前、滞后情况。

解

$$i(t) = 5\cos(\omega t + 40^\circ - 90^\circ) \text{ mA}$$

$$= 5\cos(\omega t - 50^\circ) \text{ mA}$$

$$u(t) = 20\cos(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$$

$$\theta_u = 60^\circ, \quad \theta_i = -50^\circ$$

相位差为

$$\theta_u - \theta_i = 60^\circ - (-50^\circ) = 110^\circ$$

所以,电压 $u(t)$ 超前电流 $i(t)$ 的相位角为 110° 。

8.2 电路对正弦激励的零状态响应

在掌握了正弦信号的数学特征的基础上,下一步要解决的问题是,将正弦信号作为电路的激励电源接入电路,考察电路对该信号的响应,这里关心的是稳态响应,在正弦激励下的稳态响应是指响应曲线呈周期性的变化,但频率和幅度不变化。

对于图 8.3 所示串联 RL 电路,有

$$u_s(t) = U_m \cos \omega t$$

在 $t = -\infty \sim 0$ 期间接入电路, 根据 KVL 可得

$$-U_s + Ri + U_L = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_m \cos \omega t \quad (8-4)$$

根据正弦信号特征和电感元件的电流-电压关系, 设流过的电流为

$$i = A \cos(\omega t - \theta) \quad (8-5)$$

式中 A ——待定系数。

对电流求导数, 即

$$\frac{di}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \theta) \quad (8-6)$$

将式(8-5)和式(8-6)代入式(8-4)可得

$$RA \cos(\omega t - \theta) + L[-\omega A \sin(\omega t - \theta)] = U_m \cos \omega t$$

利用辅助角的三角函数公式

$$a \sin \alpha \pm b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha \pm \tan^{-1} \frac{b}{a})$$

将上二式对比可得

$$b = RA, \quad a = -\omega LA, \quad \alpha = \omega t - \theta$$

将公式变化为

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} A \sin\left(\omega t - \theta + \tan^{-1} \frac{R}{-\omega L}\right) = U_m \cos \omega t \quad (8-7)$$

其中

$$\sin\left(\omega t - \theta + \tan^{-1} \frac{R}{-\omega L}\right)$$

$$= \sin\left(\omega t - \theta - \tan^{-1} \frac{R}{\omega L}\right) = \cos\left(\omega t - \theta - \cot^{-1} \frac{\omega L}{R} - \frac{\pi}{2}\right)$$

将其代入式(8-7)可得

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} A \cos\left(\omega t - \theta - \cot^{-1} \frac{\omega L}{R} - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos \omega t$$

要使等式成立, 必须有

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} A = U_m \quad (8-8)$$

和

$$\omega t - \theta - \cot^{-1} \frac{\omega L}{R} - \frac{\pi}{2} = \omega t \quad (8-9)$$

由式(8-8)得

$$A = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

由式(8-9)得

$$\cot^{-1} \frac{\omega L}{R} = -\theta - \frac{\pi}{2}$$

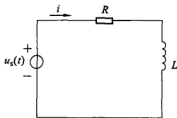


图 8.3 求零状态响应的串联 RL 电路

$$\cot\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\omega L}{R}$$

$$-\cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\omega L}{R}$$

$$-(-\tan\theta) = \frac{\omega L}{R}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

得到结果

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \quad (8-10)$$

由式(8-10)可知,响应的幅度与激励信号的幅度成正比,当 R 、 L 或 ω 增大时,响应的幅度减小。回路的阻抗呈 RL 串联形式时,回路的电流滞后于激励电压 θ 角,若 $R=0$,响应电流滞后激励电压 90° 。

该计算式具有普遍的意义,若回路是复杂电路,通过戴维南等效变换,使之成为图 8.3 所示电路,所求电流可以直接用式(8-10)计算。

【例 8.3】求图 8.4(a) 所示电路中的电流 i_L 。

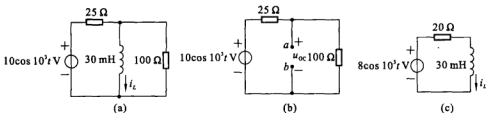


图 8.4

解 该电路不是一个单回路电路,需要进行戴维南等效变换。

开路电压为

$$U_{oc} = (10\cos 10^3 t) \frac{100}{100 + 25} = 8\cos 10^3 t \text{ V} = U_{th}$$

等效内阻为

$$R_{th} = \frac{25 \times 100}{25 + 100} = 20 \Omega$$

得到形式如图 8.3 所示的串联 RL 电路,应用式(8-10) 可得

$$i_L = \frac{8}{\sqrt{20^2 + (10^3 \times 30 \times 10^{-3})^2}} \cos(10^3 t - \tan^{-1} \frac{30}{20}) = 222 \cos(10^3 t - 56.3^\circ) \text{ mA}$$

8.3 复激励函数

上一节讨论问题时反复采用了三角函数变换,当电路变为复杂时,采用三角函数变换求解电路中的响应很麻烦。若将求解响应的方法由三角函数变换改为代数运算,将使电路分析工作大大简化,数学中的欧拉公式为此提供了方便。

将 $U_m \cos \omega t$ 作为激励信号施加于电路输入端, 在电路某处产生响应 $I_m \cos(\omega t + \theta)$, 见图 8.5。

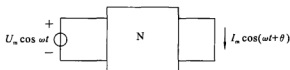


图 8.5 实激励函数产生实响应函数

假设有一个虚激励信号 $jU_m \sin \omega t$ 也施加于电路输入端, 在电路某处产生响应 $jI_m \sin(\omega t + \theta)$, 见图 8.6。

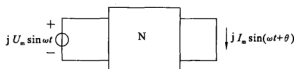


图 8.6 虚激励函数产生虚响应函数

根据叠加原理, 激励信号为

$$U_m \cos \omega t + jU_m \sin \omega t \quad (8-11)$$

则响应函数为

$$I_m \cos(\omega t + \theta) + jI_m \sin(\omega t + \theta) \quad (8-12)$$

根据欧拉公式, 激励信号可写成

$$U_m e^{j\omega t} \quad (8-13)$$

响应函数可写成

$$I_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (8-14)$$

复激励信号及响应函数见图 8.7。

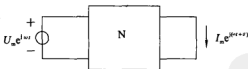


图 8.7 复激励信号产生复响应

在具体分析电路时, 对于已知的激励信号, 将该信号经三角函数变换为余弦函数, 该函数为复激励信号的实部, 然后用复激励信号代入微分方程进行运算, 于是微分方程变成容易处理的代数方程。

对于图 8.3 所示电路, 接入电路的实电源为 $U_m \cos \omega t$ 。

$$\cos \omega t = \operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\} \quad (8-15)$$

复激励信号为

$$U_m e^{j\omega t} \quad (8-16)$$

复响应表示成幅度 I_m 和相角 θ 待定的形式, 即

$$I_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (8-17)$$

根据 KVL 可得

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_s$$

代入电流和电压的复数表达式,得

$$RI_m e^{j(\omega t + \theta)} + L \frac{d}{dt} [I_m e^{j(\omega t + \theta)}] = U_m e^{j\omega t}$$

求导后得出如下代数方程

$$RI_m e^{j(\omega t + \theta)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t + \theta)} = U_m e^{j\omega t}$$

等式两边同除以公因子 $e^{j\omega t}$, 公式简化为

$$RI_m e^{j\theta} + j\omega L I_m e^{j\theta} = U_m$$

进一步整理可得

$$I_m e^{j\theta} = \frac{U_m}{R + j\omega L}$$

利用复数运算方法,将等式左边和右边变成相同的形式以便求出 I_m 和 θ 的值

$$I_m e^{j\theta} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(-\tan^{-1} \frac{\omega L}{R})} \quad (8-18)$$

得到结果为

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (8-19)$$

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (8-20)$$

继续将结果用余弦函数表示,将式(8-16)两端同乘 $e^{j\omega t}$, 则

$$I_m e^{j(\omega t + \theta)} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R})}$$

取等式右边的实部,即

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

上式与式(8-10)完全一致。

【例 8.4】 $R = 500 \, \Omega$, $L = 95 \, \text{mH}$, 串联相接, 激励电压 $U_s = 4.6 \cos(3000t + 29.7^\circ)$ V, 求复电流。

解

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + 29.7^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \\ &= \frac{4.6}{\sqrt{500^2 + 3000^2 \times 0.095^2}} \cos\left(3000t + 29.7^\circ - \tan^{-1} \frac{3000 \times 0.095}{500}\right) \\ &= \frac{4.6}{575.5} \cos(3000t + 29.7^\circ - 29.7^\circ) \\ &= 0.008 \cos 3000t \\ &= \operatorname{Re}\{0.008 e^{j3000t}\} \end{aligned}$$

可得复电流为

$$i = 0.008 e^{j3000t} \, \text{A}$$

8.4 相 量

8.4.1 相量的概念

为了方便地对正弦函数和余弦函数进行分析,找出电路中的响应,引入一个新的术语——相量,相量是表示正弦信号的幅度和相位的复数,相量法是进行正弦稳态分析的一种简便而有效的方法。

由欧拉恒等式有

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos\theta + j\sin\theta & (8-21) \\ \cos\theta &= \operatorname{Re}\{e^{j\theta}\}, \quad \operatorname{Re} \text{—— 实部} \\ \sin\theta &= \operatorname{Im}\{e^{j\theta}\}, \quad \operatorname{Im} \text{—— 虚部} \end{aligned}$$

对于已知函数

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

所以

$$u(t) = \operatorname{Re}\{U_m e^{j(\omega t + \theta)}\} = \operatorname{Re}\{U_m e^{j\omega t} e^{j\theta}\} = \operatorname{Re}\{\dot{U} e^{j\omega t}\}$$

$$\dot{U} = U_m e^{j\theta} = U_m \angle \theta$$

若给定正弦函数 $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$, 应该先换成余弦函数, 即

$$u(t) = U_m \cos\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

解出相量为

$$\dot{U} = U_m \angle \theta - \frac{\pi}{2}$$

对于例 8.4 给定的时域电压和求出的时域电流, 可用相量表达式, 即

$$\dot{U} = U_m e^{j\theta} = 4.6 \angle 29.7^\circ$$

$$\dot{I} = I_m e^{j(\theta - \tan^{-1} \frac{1}{2})} = I_m e^{j\theta'} = 0.008 \angle 0^\circ$$

将 $u(t)$ 变为 \dot{U} 的过程可以称为从时域到频域的相量变换, 如

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta) \quad (\text{三角函数})$$

$$u(t) = \operatorname{Re}\{U_m e^{j(\omega t + \theta)}\} \quad (\text{复激励函数})$$

$$\dot{U} = U_m e^{j\theta} \quad (\text{相量指数形式})$$

$$\dot{U} = U_m \angle \theta \quad (\text{相量极坐标形式})$$

以上三步给出了其变化过程, 若已经充分理解其内部关系, 可以仅用一步写出相量的极坐标形式或相量的指数形式。需要说明的是, 变为相量形式是为了方便分析和计算, 当计算完毕以后, 需要将结果还原到时域表达式, 不要忘记了 ωt 的存在。

【例 8.5】 将时域电压 $u(t) = 100 \cos(4000t - 30^\circ)$ V 变为频域电压。

解 $\dot{U} = 100 \angle -30^\circ$ V

将时域函数变为频域相量时, 注意都应该统一到具有正振幅余弦函数的状态, 几种变化情况如下:

(1) 若给定

$$u(t) = 5\sin(100\pi t + 30^\circ)$$

应变为

$$\begin{aligned} u(t) &= 5\cos(100\pi t + 30^\circ - 90^\circ) \\ &= 5\cos(100\pi t - 60^\circ) \end{aligned}$$

$$\dot{U} = 5\angle -60^\circ$$

(2) 若给定

$$u(t) = -5\sin(100\pi t + 30^\circ)$$

应变为

$$\begin{aligned} u(t) &= 5\cos(100\pi t + 30^\circ + 90^\circ) \\ &= 5\cos(100\pi t + 120^\circ) \end{aligned}$$

$$\dot{U} = 5\angle 120^\circ$$

(3) 若给定

$$u(t) = -5\cos(100t + 30^\circ)$$

应变为

$$\begin{aligned} u(t) &= 5\cos(100t + 30^\circ + 180^\circ) \\ &= 5\cos(100t - 150^\circ) \end{aligned}$$

$$\dot{U} = 5\angle -150^\circ$$

8.4.2 三种相量相互变换

相量可分为三种形式,直角坐标形式、指数形式和极坐标形式。

$\dot{U} = a + jb$ 直角坐标形式, a 是 U_m 在实轴上的投影, b 是 U_m 在虚轴上的投影;

$\dot{U} = U_m e^{j\theta}$ 指数形式;

$\dot{U} = U_m \angle \theta$ 极坐标形式。

(1) 直角坐标形式转换为指数形式

$$U_m = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

(2) 指数形式转换为直角坐标形式

$$U_m e^{j\theta} = U_m (\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$a = U_m \cos\theta, \quad b = U_m \sin\theta$$

(3) 指数形式与极坐标形式互换

将 $e^{j\theta}$ 用 \angle 代替,或将 \angle 用 $e^{j\theta}$ 代替即可。

【例 8.6】 将相量 $3 + j4$ 由直角坐标形式变为指数形式和极坐标形式。

解 $\dot{U} = \sqrt{3^2 + 4^2} e^{j(\tan^{-1} \frac{4}{3})} = 5e^{j53.1^\circ} = 5\angle 53.1^\circ$

【例 8.7】 将相量 $2\angle 45^\circ$ 由极坐标形式变为直角坐标形式。

解 由欧拉公式可得

$$\begin{aligned} 2\angle 45^\circ &= 2e^{j45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} + j\sqrt{2} \end{aligned}$$

8.4.3 电路中元件的电压与电流的相量关系

从第2章关于电感元件和电容元件的分析中得知,对于电感元件,电压与电流对时间的导数成正比;对电容元件,电流与电压对时间的导数成正比。若能够将导数关系转换成为代数运算关系,分析起来就容易得多。

(1) 电阻

若流过电阻的电流为正弦交流信号,即 $i = I_m \cos(\omega t + \theta)$,由欧姆定律知,电阻两端的电压 $U = Ri = RI_m \cos(\omega t + \theta)$,其相量形式为

$$\dot{U} = R\dot{I} = RI_m \angle \theta \quad (8-22)$$

因此,电阻两端的电压和电流同相位,见图 8.8(c)。

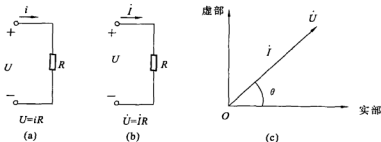


图 8.8 电阻上的电流与电压的相量关系

(2) 电感

若流过电感的电流 $i = I_m \cos(\omega t + \theta)$,由第2章中的结论得到,电感两端的电压为

$$U = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \theta)$$

因 $-\sin(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta + 90^\circ)$,所以

$$U = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta + 90^\circ)$$

其相量形式为

$$\dot{U} = \omega L I_m e^{j(\theta+90^\circ)} = \omega L I_m e^{j\theta} \cdot e^{j90^\circ} = j\omega L I_m e^{j\theta}$$

(由欧拉公式展开 $e^{j90^\circ} = j$)

结果为

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I} \quad (8-23)$$

上述内容说明,电压的幅值为 $\omega L I_m$,相位为 $\theta + 90^\circ$,因此电压与电流不同相,电流滞后电压 90° ,见图 8.9(c)。

(3) 电容

若电容两端的电压为 $U = U_m \cos(\omega t + \theta)$,由第2章中的结论得出,流过电容的电流为

$$i = C \frac{du}{dt} = -\omega C U_m \sin(\omega t + \theta)$$

与电感的推导相似,得到

$$i = \omega C U_m \cos(\omega t + \theta + 90^\circ)$$

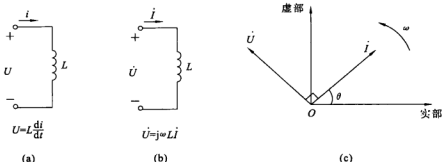


图 8.9 电感上的电流与电压的相量关系

其相量形式为

$$\dot{I} = \omega C U_m e^{j(\theta + 90^\circ)} = \omega C U_m e^{j\theta} e^{j90^\circ} = j\omega C U_m e^{j\theta}$$

结果为

$$\dot{I} = j\omega C \dot{U} \quad (8-24)$$

上述内容说明, 电流的幅值为 $\omega C U_m$, 相位为 $\theta + 90^\circ$, 电流与电压不同相, 电压滞后电流 90° , 见图 8.10(c)。

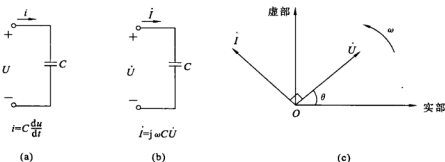


图 8.10 电容上的电流与电压的相量关系

三个元件的电流 - 电压关系见表 8.1。

表 8.1 时域伏安表达式和频率伏安表达式的比较

时域	频域
$U = Ri$	$\dot{U} = R \dot{i}$
$U = L \frac{di}{dt}$	$\dot{U} = j\omega L \dot{i} = jX_L \dot{i}$
$i = C \frac{dU}{dt}$	$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C} \dot{i} = -jX_C \dot{i}$

注: $X_L = \omega L$, 称为感抗; $X_C = \frac{1}{\omega C}$, 称为容抗。

【例 8.8】电压 $U = 12\cos(60t + 45^\circ)$ 施加到 0.1 H 电感两端时,求通过该电感的稳态电流。

解 由题知 $\omega = 60$, 电压的相量形式为 $12\angle 45^\circ$, $L = 0.1 \text{ H}$, 利用表 8.1 中电感的计算式, $\dot{U} = j\omega L \dot{I}$, 所以

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \frac{12\angle 45^\circ}{j60 \times 0.1} = \frac{12\angle 45^\circ}{\angle 90^\circ \times 60 \times 0.1} = \frac{12\angle 45^\circ}{6\angle 90^\circ} = 2\angle -45^\circ$$

因此稳态电流为

$$i(t) = 2\cos(60t - 45^\circ)$$

【例 8.9】电压 $u = 6\cos(100t - 30^\circ)$ 施加到 $50 \mu\text{F}$ 电容两端,求流过电容的电流。

解 由题知 $\omega = 100$, 电压的相量形式为 $6\angle -30^\circ$, $C = 50 \times 10^{-6} \text{ F}$ 。

利用表 8.1 中电容的计算式, $\dot{U} = \frac{\dot{I}}{j\omega C}$, 所以

$$\begin{aligned}\dot{I} &= j\omega C \dot{U} = j100 \times 50 \times 10^{-6} \times 6\angle -30^\circ \\ &= \angle 90^\circ \times 3 \times 10^{-2} \angle -30^\circ \\ &= 3 \times 10^{-2} \angle 90^\circ - 30^\circ \\ &= 0.03\angle 60^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

因此稳态电流为

$$i(t) = 30\cos(100t + 60^\circ) \text{ mA}$$

8.5 阻抗与导纳

8.5.1 阻抗

一个无源二端正弦稳态网络,其电压和电流的极性如图 8.11 所示,若两端点存在总阻抗 Z ,则存在与欧姆定律相似的关系为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

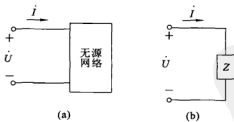


图 8.11 用 Z 表示无源网络的等效阻抗

在欧姆定律中,电压与电流的比值为电阻,单位为欧姆(Ω),这里 Z 的单位也为欧姆(Ω),一般是复数形式。

若电压的相量形式为 $\dot{U} = U_m \angle \theta_u$; 电流的相量形式为 $\dot{I} = I_m \angle \theta_i$, 则

$$Z = \frac{U_m \angle \theta_u}{I_m \angle \theta_i} = |Z| \angle \theta_u - \theta_i = |Z| \angle \theta_z$$

式中 $|Z|$ —— 阻抗的模;

θ_z —— 阻抗角。

当网络中的元件种类和排列变化, 阻抗的值将发生变化。

(1) 单个元件 R

阻抗: $Z = R$

(2) 单个元件 L

阻抗: $Z = j\omega L = jX_L$ ($X_L = \omega L$, 称为感抗)

(3) 单个元件 C

阻抗: $Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C$ ($X_C = \frac{1}{\omega C}$, 称为容抗)

(4) 一个元件 R 串联一个元件 L

阻抗: $Z = R + j\omega L$

(5) 一个元件 R 串联一个元件 C

阻抗: $Z = R - j\frac{1}{\omega C}$

(6) 三个元件 R 、 L 、 C 串联

阻抗: $Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$

(X 称为电抗)

以上内容说明, 阻抗 Z 由复数构成, 紧接在 j 后面的内容统称为电抗, 电抗是感抗和容抗的综合值。

【例 8.10】 求图 8.12 所示网络的等效阻抗。

解 $X_L = \omega L = 10^3 \times 1 \times 10^{-3} = 100 \Omega$

$$jX_L = j100$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 100 \Omega$$

$$-jX_C = -j100 \Omega$$

电感所在支路上的阻抗: $Z_1 = j100 \Omega$

电容所在支路上的阻抗: $Z_2 = (100 - j100) \Omega$

网络的等效阻抗:

$$Z_{\text{eq}} = 50 + Z_1 // Z_2 = 50 + \frac{j100(100 - j100)}{j100 + 100 - j100} = (150 + j100) \Omega$$

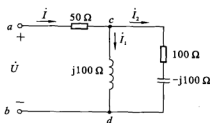


图 8.12

8.5.2 导纳

一个无源二端正弦稳态网络, 其电流和电压的极性如图 8.11 所示, 流入二端网络的电流与端电压的相量比称为该网络的导纳 Y , 单位为西门子(S)。

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \quad (8-25)$$

由电流与电压之间的关系, 导纳与阻抗互为倒数关系, 即

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (8-26)$$

Y 一般也是复数, 若电流 $\dot{i} = I_m \angle \theta_i$, $\dot{U} = U_m \angle \theta_u$ 。

$$Y = \frac{I_m \angle \theta_i}{U_m \angle \theta_u} = |Y| \angle \theta_i - \theta_u = |Y| \angle \theta_Y$$

$|Y|$ 是导纳 Y 的模; θ_Y 是导纳 Y 的导纳角。

当网络中元件种类和排列变化时, 导纳值将发生相应的变化。

(1) 单个元件 R

$$\text{导纳: } Y = \frac{1}{R}$$

(2) 单个元件 L

$$\text{导纳: } Y = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jB_L \quad (B_L = \frac{1}{\omega L}, \text{称为感纳})$$

(3) 单个元件 C

$$\text{导纳: } Y = j\omega C = jB_C \quad (B_C = \omega C, \text{称为容纳})$$

(4) 三个元件 R 、 L 、 C 并联

$$\begin{aligned} \text{导纳: } Y &= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB \end{aligned} \quad (8-27)$$

式中, G 为电导; B 为电纳。 $B > 0$ 时的导纳称为容性导纳; $B < 0$ 时的导纳称为感性导纳。

若三个元件串联, 先求出阻抗, 再用 $Y = \frac{1}{Z}$ 求出导纳。

【例 8.11】 已知图 8.13 所示正弦稳态电路的 $\omega = 100 \text{ rad/s}$, 求 ab 端等效阻抗 Z 。

解法一 先用导纳计算, 再求阻抗。

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ S}$$

$$B_C = \omega C = 100 \times 200 \times 10^{-6} = 0.02 \text{ S}$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{100 \times 1} = 0.01 \text{ S}$$

$$\begin{aligned} Y &= G + jB = G + j(B_C - B_L) \\ &= 0.01 + j(0.02 - 0.01) \\ &= (0.01 + j0.01) \text{ S} \end{aligned}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0.01 + j0.01} = (50 - j50) = 50\sqrt{2} \angle -45^\circ \Omega$$

解法二 直接求阻抗 Z 。

$$X_L = \omega L = 100 \times 1 = 100 \Omega, \quad Z_L = j\omega L = j100 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \times 200 \times 10^{-6}} = 50 \Omega, \quad Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j50 \Omega$$

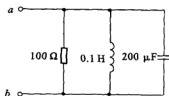


图 8.13

$$Z_L // Z_C = \frac{j100(-j50)}{j100 - j50} = -j100 \Omega$$

$$Z = \frac{100 \times Z_L // Z_C}{100 + Z_L // Z_C} = \frac{100 \times (-j100)}{100 + (-j100)} = 50 - j50 = 50\sqrt{2} \angle -45^\circ \Omega$$

8.5.3 阻抗和导纳的计算

阻抗和导纳的计算采用复数的计算规则,因此除了以上所述内容之外,掌握如下技巧对计算十分重要。

(1) 复数运算

$$j^2 = -1, \quad \frac{1}{j} = -j, \quad j = e^{j90^\circ}, \quad jb = 0 + jb, \quad a = a + j0$$

$$\dot{A} = a_1 + jb_1 = |A| \angle \theta_1, \quad A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \theta_1 = \tan^{-1} \frac{b_1}{a_1}$$

$$\dot{B} = a_2 + jb_2 = |B| \angle \theta_2, \quad B = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{b_2}{a_2}$$

$$\dot{A} \pm \dot{B} = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$\dot{A} \cdot \dot{B} = |A| \angle \theta_1 \cdot |B| \angle \theta_2 = |A| |B| \angle \theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{|A| \angle \theta_1}{|B| \angle \theta_2} = \frac{|A|}{|B|} \angle \theta_1 - \theta_2$$

(2) 混合形式的运算

① 直角坐标形式与极坐标形式相加

$$\begin{aligned} 3 + j4 + 5 \angle 36.87^\circ &= 3 + j4 + 5(\cos 36.87^\circ + j\sin 36.87^\circ) \\ &= 3 + j4 + 4 + j3 = 7 + j7 \end{aligned}$$

② 直角坐标形式与极坐标形式相除

$$\frac{3 + j4}{5 \angle 36.87^\circ} = \frac{5 \angle 53.1^\circ}{5 \angle 36.87^\circ} = 1 \angle 16.23^\circ$$

(3) 直角坐标形式与直角坐标形式相除

$$\frac{3 + j4}{4 + j3} = \frac{5 \angle 53.1^\circ}{5 \angle 36.87^\circ} = 1 \angle 16.23^\circ$$

$$\text{或 } \frac{3 + j4}{4 + j3} \cdot \frac{4 - j3}{4 - j3} = \frac{12 - j9 + j16 + 12}{16 + 9} = \frac{24 + j7}{25} = 0.96 + j0.28 = 1 \angle 16.23^\circ$$

8.6 用阻抗和导纳表示的电路分析

8.6.1 频域中的基尔霍夫定律

在时域中,回路的电压降之和等于零,即

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0$$

每个电压分量用余弦函数表示为

$$U_{m1} \cos(\omega t + \theta_1) + U_{m2} \cos(\omega t + \theta_2) + \cdots + U_{mn} \cos(\omega t + \theta_n) = 0$$

$$\text{或 } \operatorname{Re}\{U_{m1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t}\} + \operatorname{Re}\{U_{m2} e^{j\theta_2} e^{j\omega t}\} + \cdots + \operatorname{Re}\{U_{mn} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}\} = 0$$

$$\operatorname{Re}\{U_{m1}e^{j\omega t} + U_{m2}e^{j\omega t} + \cdots + U_{mn}e^{j\omega t}\}e^{j\omega t} = 0$$

$$\operatorname{Re}\{\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_n\}e^{j\omega t} = 0$$

因 $e^{j\omega t} \neq 0$, 所以

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_n = 0$$

对于 8.2 节中图 8.3 所示电路, 利用 KVL 写出相量形式, 即

$$-\dot{U}_s + \dot{U}_R + \dot{U}_L = 0$$

$$R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = \dot{U}_s$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L}$$

设电压源幅度为 U_m , 相位角为 0, 得

$$\dot{I} = \frac{U_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$$

用 8.5.3 节所述的混合形式计算方法, 即

$$\dot{I} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

电流滞后电压的相位角与 R 有关, 当 $R = 0$ 时, $-\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} = -90^\circ$, 则电流滞后电压

90° 。 $R \neq 0$ 时, 电流与电压的相位角在 $0 \sim -90^\circ$ 之间。

该结果与 8.2 节中所得结果完全一致, 但运算过程简单得多。

将图 8.3 中的 L 换成 C , 利用 KVL 的相量形式可得

$$-\dot{U}_s + \dot{U}_R + \dot{U}_C = 0$$

$$\dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{U}_s$$

$$R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{U}_s$$

仍设电压源幅度为 U_m , 相角为 0, 得

$$\dot{I} = \frac{U_m \angle 0^\circ}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \angle \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC}$$

电流超前电压的相位角与 R 有关, $R = 0$ 时, $\tan^{-1} \frac{1}{\omega RC} = 90^\circ$, 说明电流超前电压 90° 。当

$R \neq 0$ 时, 电流超前电压的相位角为 $0 \sim 90^\circ$ 之间。

按照类似的方法, 可以用电流相量来表达基尔霍夫电流定律, 设有 i_1, i_2, \cdots, i_n 支电流流入或流出某一网络, 应有 $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0$, 若 \dot{I}_1 是 i_1 的相量, \dot{I}_2 是 i_2 的相量, 如此类推, 应有

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_n = 0$$

【例 8.12】 求图 8.14 所示电路的相量电流 \dot{I} 和总阻抗 Z 。

解 电感所在支路的阻抗为

$$Z_1 = 3 + j4 = 5 \angle 53.1^\circ \Omega$$

电容所在支路的阻抗为

$$Z_2 = 4 - j3 = 5 \angle -36.9^\circ \Omega$$

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{25 \angle 0^\circ}{5 \angle 53.1^\circ} = 5 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{25 \angle 0^\circ}{5 \angle -36.9^\circ} = 5 \angle 36.9^\circ \text{ A}$$

根据 KCL 可知,总电流为

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = (5 \angle -53.1^\circ + 5 \angle 36.9^\circ) \text{ A} = (3 - j4 + 4 + j3) \text{ A} \\ &= (7 - j1) \text{ A} = 7.07 \angle -8.1^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

总阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{i} = \frac{25 \angle 0^\circ}{7.07 \angle -8.1^\circ} = 3.54 \angle 8.1^\circ \Omega$$

由上述内容可知,一旦在频域采用相量分析方法,则 KVL 和 KCL、阻抗计算、节点和网孔分析、叠加原理和电源变换就会像直流信号的分析 and 计算一样简单。

8.6.2 用相量和阻抗表示的混联电路分析

【例 8.13】 已知图 8.15(a) 所示电路 $U_s(t) = 120\sqrt{2}\cos(10^3t) \text{ V}$, 求电流 i_{ab} 。

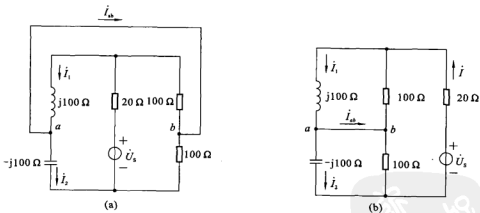


图 8.15

解 将图 8.15(a) 改画成图 8.15(b) 的形式。

由 L 、 C 和两个 100Ω 电阻构成的等效阻抗为

$$Z = \frac{100 \times j100}{100 + j100} + \frac{100 \times (-j100)}{100 + (-j100)} = 100 \Omega$$

电源电流为

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_s}{20 + Z} = \frac{120 \angle 0^\circ}{20 + 100} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

根据分流定理可得

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{i}}{100 + j100} \times 100 = \frac{100}{100 + j100} \times 1 \angle 0^\circ = (0.5 - j0.5) \text{ A}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{i}_1}{100 - j100} \times 100 = \frac{100}{100 - j100} \times 1 \angle 0^\circ = (0.5 + j0.5) \text{ A}$$

$$\dot{i}_{ab} = \dot{i}_1 - \dot{i}_2 = (0.5 - j0.5) - (0.5 + j0.5) = 1 \angle -90^\circ \text{ A}$$

所以

$$i_{ab}(t) = \sqrt{2} \cos(10^3 t - 90^\circ) \text{ A}$$

8.6.3 用相量和阻抗表示的电路节点分析

【例 8.14】 求图 8.16 所示电路的时域节点电压 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 。

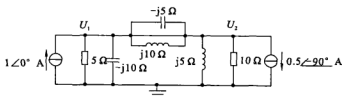


图 8.16

解 对左边节点应用 KCL 可得

$$\frac{\dot{U}_1}{5} + \frac{\dot{U}_1}{-j10} + \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{-j5} + \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{j10} = 1 \angle 0^\circ = 1 + j0$$

对右边节点应用 KCL 可得

$$\frac{\dot{U}_2 - \dot{U}_1}{-j5} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{U}_1}{j10} + \frac{\dot{U}_2}{j5} + \frac{\dot{U}_2}{10} = -(0.5 \angle -90^\circ) = j0.5$$

化简上述二式可得

$$\begin{aligned} (0.2 + j0.2) \dot{U}_1 - j0.1 \dot{U}_2 &= 1 \\ -j0.1 \dot{U}_1 + (0.1 - j0.1) \dot{U}_2 &= j0.5 \end{aligned}$$

求解方程得到

$$\dot{U}_1 = 1 - j2 \text{ V}, \quad \dot{U}_2 = -2 + j4 \text{ V}$$

极坐标形式为

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 2.24 \angle -63.4^\circ \\ \dot{U}_2 &= 4.47 \angle 116.6^\circ \end{aligned}$$

时域形式为

$$u_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4^\circ)$$

$$u_2(t) = 4.47\cos(\omega t + 116.6^\circ)$$

8.6.4 用相量和阻抗表示的电路网孔分析

【例 8.15】 求如图 8.17 所示电路中的电流 i_c 。

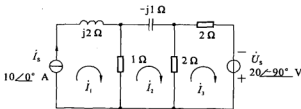


图 8.17

解 非公共支路上有一电流源 i_s , 所以三个回路只需列两个网孔方程。

中间网孔: $(1 + 2 - j1) \dot{I}_2 - 1 \times 10\angle 0^\circ - 2 \dot{I}_3 = 0$

右边网孔: $-2 \dot{I}_2 + (2 + 2) \dot{I}_3 = 20\angle -90^\circ$

化简为

$$(3 - j1) \dot{I}_2 - 2 \dot{I}_3 = 10$$

$$-2 \dot{I}_2 + 4 \dot{I}_3 = -j20$$

由于

$$\dot{I}_3 = \frac{2 \dot{I}_2 - j20}{4} = 0.5 \dot{I}_2 - j5$$

故有

$$(3 - j1) \dot{I}_2 - \dot{I}_2 + j10 = 10$$

解出

$$\dot{I}_2 = \frac{10 - j10}{2 - j1} \text{ A} = \frac{10\sqrt{2}\angle -45^\circ}{2.24\angle -26.6^\circ} = 6.3\angle -18.4^\circ \text{ A}$$

电容上的电流为

$$i_c = i_2 = 6.3\sqrt{2}\cos(\omega t - 18.4^\circ) \text{ A}$$

8.6.5 用相量和阻抗表示的电路叠加原理和戴维南定理

【例 8.16】 求图 8.18 所示电路中的电流 i_c 。

解 (1) 将 a 、 b 断开待求支路, 设开路电压 \dot{U}_{oc} 如图 8.18(b) 所示, 电流为

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_{s1} - \dot{U}_{s2}}{5 + j5 + 5 - j5} = \frac{10 - 10\angle 60^\circ}{10} = 1\angle -60^\circ \text{ A}$$

开路电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_{oc} &= (5 - j5) \dot{i} - \dot{U}_{s2} \\ &= [(5 - j5) \times 1\angle -60^\circ + 10\angle 60^\circ] \\ &= 3.66\angle 30^\circ \text{ V} = \dot{U}_{th} \end{aligned}$$

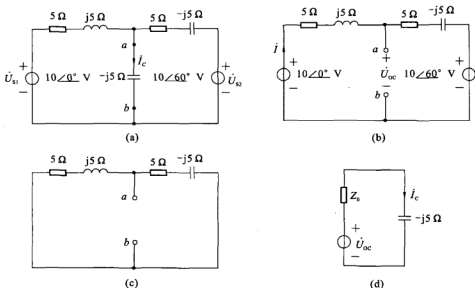


图 8.18

(2) 将图 8.18(b) 中各电压源短路变为图 8.18(c), 则得

$$Z_{th} = \frac{(5 + j5)(5 - j5)}{5 + j5 + 5 - j5} = 5 \Omega$$

(3) 画出戴维南等效电源, 接上待求支路, 如图 8.18(d) 所示, 则

$$i_c = \frac{\dot{U}_{th}}{5 - j5} = \frac{3.66 \angle 30^\circ}{5 - j5} = 0.52 \angle 75^\circ \text{ A}$$

8.7 相 量 图

8.7.1 两相量电压相加

设一相量电压 $\dot{U}_1 = 6 + j8$, 其极坐标形式为 $10 \angle 53.1^\circ$, 另一相量电压 $\dot{U}_2 = 3 - j4$, 其极坐标形式为 $5 \angle -53.1^\circ$, 两电压以及二者之和在复平面上都可以反映出来, 见图 8.19(a), 图 8.19(b) 是 U_1 与导纳 $Y = 1 + j1 \text{ S}$ 的乘积。

有如下两种方法可以得到两电压之和。

(1) 计算法

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6 + j8 + 3 - j4 = 9 + j4$$

在实轴上取 9, 在虚轴上取 4, 画 9 的垂直线和 4 的水平线, 两线的交点为 \dot{U} 的所在位置。

(2) 作图法

从 \dot{U}_2 点画 \dot{U}_1 线段的平行线, 从 \dot{U}_1 点画 \dot{U}_2 线段的平行线, 两条平行线的交点为 \dot{U} 的顶点所在位置。

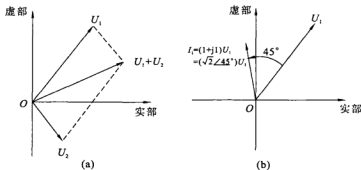


图 8.19 电压的相量图

8.7.2 RLC 串联电路

在 RLC 串联电路中,各元件上的电流一致,但每个元件上的电压值和相位角不同。在 R 元件上,电压和电流同相;在 L 元件上,电压超前电流 90° ;在 C 元件处,电压滞后电流 90° ,电压的相位角与电容的电压相位角刚好相差 180° ,见图 8.20(b)。

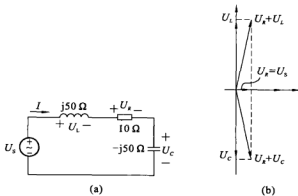


图 8.20 RLC 串联电路及相量图

8.7.3 RLC 并联电路

在 RLC 并联电路中,各元件两端的电压一致,流过 R 元件的电流与电压同相位,流过 L 的电流和电压之间存在相位差,电流滞后电压 90° ;流过 C 的电流与电压之间存在相位差,电流超前电压 90° ,L 处的电流与 C 处的电流刚好相差 180° ,见图 8.21。

8.7.4 混联电路

如图 8.22 所示混联电路由电容与电阻并联后再与电感串联而成,设 \dot{I}_L 与 \dot{U} 同相。

由图 8.22(a) 可知,电感电压 \dot{U}_L 加上电阻电压 \dot{U}_R 等于总电压 \dot{U} ,所以这三个电压的相量组成了一个闭合的三角形。 \dot{I}_L 与 \dot{U} 同相,而 \dot{U}_L 与 \dot{I}_L 相位差为 90° ,所以 \dot{U}_L 与 \dot{U} 应垂直。

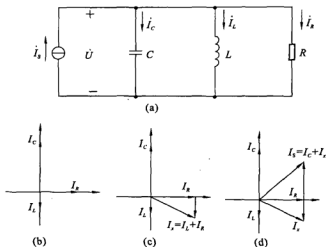


图 8.21 RLC 并联电路相量图

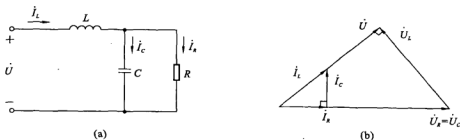


图 8.22 混联电路及相量

由 \dot{I}_R 与 \dot{U}_R 同相, \dot{I}_C 与 \dot{I}_R 垂直, $\dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R$, 所以三个元件上的电流组成闭合三角形。三个电压相量与三个电流的相量见图 8.22(b)。

8.8 与后续课程的关系

运用相量、阻抗及导纳的概念, 正弦稳态电路的计算可以仿照电阻电路的处理方法来进行。这样, 从数学角度讲, 是从三角函数和微分方程的计算问题转为较为简单的复数(代数)问题。实际工程分析正弦稳态电路时, 可以省略列微分方程的步骤, 同时还能利用电阻电路的分析方法进行分析, 电阻电路中的公式、定理形式可以类比到正弦稳态电路中。相量、阻抗及导纳概念的引入对正弦稳态的分析理论的发展起着重要的作用, 相量法的应用条件是正弦稳态线性电路中, 信号源加入到电路中, 电路的电流电压响应频率不变。基于这一点, 对电路的电流电压的分析和计算, 可以暂时不计算频率, 利用较为简捷的数学工具——相量法, 解决实际问题。

例如, 高频放大电路的计算用导纳 Y 参数; 对正弦交流电及信号(正弦信号或等效成正

弦交流信号的叠加)的计算,均用相量法。模拟电子线路中放大器交流参数 A_u 、 r_i 、 r_o 的计算用相量图及对应的相量法对电路作分析和计算。

【例 8.17】在图 8.23(a) 所示电路中, $\beta = 50$, $U_{be} = 0.7 \text{ V}$, $I_{EQ} = 2 \text{ mA}$, 试计算低频放大电路的动态指标: 电压放大倍数 A_u 、输入电阻 r_i 、输出电阻 r_o 的值。

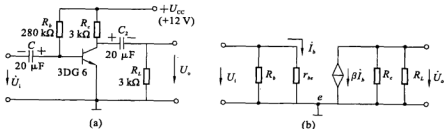


图 8.23 用微变等效相量模型图求动态指标

(a) 低频放大电路原理图; (b) 微变等效相量模型图

解 画出微变等效相量模型图如图 8.23(b) 所示。

(1) 计算输入电阻

$$\begin{aligned} r_{be} &= 300 + \frac{(\beta + 1)26(\text{mV})}{I_{EQ}} = 300 + \frac{51 \times 26(\text{mV})}{2(\text{mA})} \\ &= 963 \Omega \approx 0.96 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

(2) 计算动态指标

$$\begin{aligned} A_u &= \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i} = \frac{-\beta R'_L}{r_{be}} = \frac{-50 \times (3//3)(\text{k}\Omega)}{0.96(\text{k}\Omega)} = -78.1 \\ r_i &= R_b // r_{be} \approx r_{be} = 0.96 \text{ k}\Omega \\ r_o &\approx R_c = 3 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

8.9 实用电路举例——日光灯电路及其功率因数的改善

(1) 在单相正弦交流电路中,用交流电流表测得各支路中的电流值,用交流电压表测得回路各元件两端的电压值,它们之间的关系满足相量形式的基尔霍夫定律,即

$$\sum i = 0$$

和

$$\sum \dot{U} = 0$$

(2) 如图 8.24(a) 所示的 RC 串联电路,在正弦稳态信号 \dot{U} 的激励下, \dot{U}_R 与 \dot{U}_C 保持有 90° 的相位差,即当阻值 R 改变时, \dot{U}_R 的相量轨迹是一个半圆, \dot{U}_R 、 \dot{U}_C 与 \dot{U} 三者形成一个直角形的电压三角形见图 8.24(b)。 R 值改变时,可改变 θ 角的大小,从而达到移相的目的。

(3) 电力系统中的负载大部分是感性负载,其功率因数较低,为提高电源的利用率和减少供电线路的损耗,往往采用在感性负载两端并联电容器的方法,来进行无功补偿,以提高

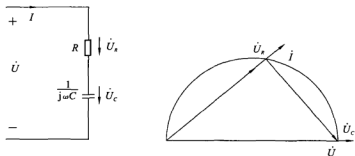


图 8.24

线路的功率因数。日光灯电路为感性负载,其功率因数一般在 $0.3 \sim 0.4$ 之间,利用日光灯电路来模拟实际的感性负载可以观察交流电路的各种现象。

(4) 日光灯的工作原理

如图 8.25 所示,日光灯电路由荧光灯管、镇流器和启辉器三部分组成。

① 灯管:日光灯管是一根玻璃管,它的内壁均匀地涂有一层薄薄的荧光粉,灯管两端各有一个阳极和一根灯丝。灯丝由钨丝制成,其作用是发射电子。阳极是两根镍丝,焊在灯丝上,与灯丝具有相同的电位,其主要作用是当它具有正电位时吸收部分电子,以减少电子对灯丝的撞击。此外,它还具有帮助灯管点燃的作用。灯管内还充有惰性气体(如氖气)与水银蒸汽。由于有水银蒸汽,当管内产生辉光放电时,就会放射紫外线。这些紫外线照射到荧光粉上就会发出可见光。

② 镇流器:它是绕在硅钢片铁芯上的电感线圈,在电路上与灯管相串联。其作用为:在日光灯启动时,产生足够的自感电势,使灯管内的气体放电;在日光灯正常工作时,限制灯管电流。不同功率的灯管应配以相应的镇流器。

③ 启辉器:它是一个小型的辉光管,管内充有惰性气体,并装有两个电极:一个是固定电极,一个是倒 U 形的可动电极,两电极上都焊接有触头。倒 U 形可动电极由热膨胀系数不同的两种金属片制成。

点燃过程:日光灯管、镇流器和启辉器的连接电路如图 8.25 所示。刚接通电源时,灯管内气体尚未放电,电源电压全部加在启辉器上,使它产生辉光放电并发热,倒 U 形的金属片受热膨胀,由于内层金属的热膨胀系数大,双金属片受热后趋于伸直,使金属片上的触点闭合,将电路接通。电流通过灯管两端的灯丝,灯丝受热后发射电子,而当启辉器的触点闭合后,两电极间的电压降为零,辉光放电停止,双金属片经冷却后恢复原来位置,两触点重新分开。为了避免启辉器断开时产生火花,将触点烧毁,通常在两电极间并联一只极小的电容器。

在双金属片冷却后触点断开瞬间,镇流器两端产生相当高的自感电势,这个自感电势与电源电压一起加到灯管两端,使灯管发生弧光放电,弧光放电所放射的紫外线照射到灯管的荧光粉上,就发出可见光。

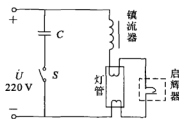


图 8.25 日光灯电路

灯管点亮后,较高的电压降落在镇流器上,灯管电压只有 100 V 左右,这个较低的电压不足以使启辉器放电,因此,它的触点不能闭合。这时,日光灯电路因有镇流器的存在形成一个功率因数很低的感性电路。日光灯电路的等效电路如图 8.26 所示。

(5) 日光灯电路原理分析

日光灯电路可以看成 R 、 L 串联的感性电路,以电流

\dot{I}_L 为参考相量,则电压、电流关系为

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I}(r + jX_L + R) = \dot{I}_Z$$

其相量图如图 8.27 所示。

(6) 功率因数的提高

如果负载功率因数低(日光灯电路的功率因数在 0.3 ~ 0.4 之间),一是电源利用率不高,二是供电线路损耗加大,因此供电部门规定,当负载(或单位供电)的功率因数低于 0.85 时,必须对其进行改善和提高。

提高功率因数的方法,除改善负载本身的工作状态、设计合理外,由于工业负载基本都是感性负载,因此常用的方法是在负载两端并联电容器组,补偿无功功率,以提高线路的功率因数。功率因数提高的原理如图 8.28 所示。

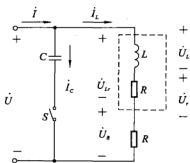


图 8.26 日光灯等效电路

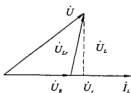


图 8.27 日光灯电路相量图

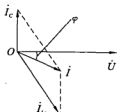
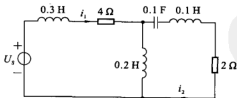


图 8.28 提高功率因数相量图

习 题

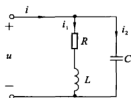
- 8.1 在题图所示正弦电流电路中,已知 $u_3(t) = 16\sqrt{2}\cos(10t)$ V,求电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。



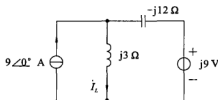
题 8.1 图

- 8.2 在题图所示正弦交流电路中, $R = 12 \Omega$, $\omega L = 9 \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 25 \Omega$, $u = 150\sqrt{2}\cos\omega t$ V,求 i_1 、 i_2 、 i 及电路功率 P 。

8.3 题图所示正弦交流电路,试用叠加定理求图中电流 \dot{I}_L 。



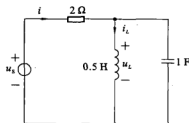
题 8.2 图



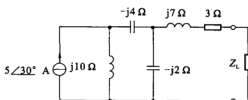
题 8.3 图

8.4 在题图所示电路中,电流 $i_L(t) = \sqrt{2}\cos(2t)$ A,求稳态电流 $i(t)$ 。

8.5 试求题图所示电路中负载阻抗 Z_L 为何值时获得的功率最大,并求出此最大功率。



题 8.4 图

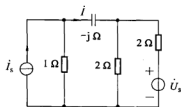


题 8.5 图

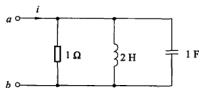
8.6 在题图所示电路中,电压源 $\dot{U}_s = j20$ V,电流源 $\dot{I}_s = 10\angle 0^\circ$ A,求 \dot{I} 。

8.7 题图所示电路中 $i(t) = 10\cos(0.5t)$ A,则单口网络相量模型的等效阻抗等于()。

- (A) $(0.8 + j0.4) \Omega$ (B) $(0.8 - j0.4) \Omega$
(C) $(1 - j0.5) \Omega$ (D) $(1 + j0.5) \Omega$



题 8.6 图



题 8.7 图

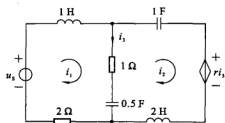
8.8 题图所示电路工作于正弦稳态,已知 $u_S(t) = 8\sqrt{2}\cos(2t + 60^\circ)$ V, $r = 2 \Omega$ 。

- (1) 画出电路的相量模型;
(2) 列出相量模型的网孔方程,并加以整理。

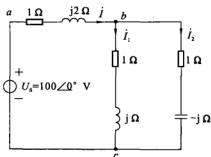
8.9 电路相量模型如题图所示,试求 \dot{I} 、 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 ,并分别画出电流相量图。

8.10 设两电流分别为 $i_1 = 5\cos(\pi t + \frac{3\pi}{4})$ A, $i_2 = 4\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})$ A,则 i_1 对 i_2 的相位差为()。

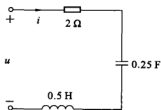
- (A) 超前 $\frac{\pi}{4}$ rad (B) 滞后 $\frac{3\pi}{4}$ rad



题 8.8 图



题 8.9 图

(C) 滞后 $\frac{\pi}{4}$ rad(D) 超前 $\frac{3\pi}{4}$ rad8.11 题图所示电路中, $i(t) = 10\sqrt{2}\cos 4t\text{ A}$, 则单口网络相量模型的等效导纳等于()。(A) $(0.4 + j0.2)\text{ S}$ (B) $(2 + j1)\text{ S}$ (C) $(0.4 - j0.2)\text{ S}$ (D) $(2 - j1)\text{ S}$ 

题 8.11 图

第 9 章 交流电路的功率分析

9.1 瞬时功率

一个二端网络,该网络可以由许多无源元件构成,也可以由一个电阻,或一个电感、一个电容构成,该网络所消耗的功率是电压与电流的乘积,即

$$p(t) = u(t)i(t) \text{ W} \quad (9-1)$$

即瞬时功率是与时间有关的参数。

设网络两端的电压为 $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u)$; 流过该网络的电流为 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, 则

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \theta_u) \cos(\omega t + \theta_i)$$

利用三角公式可得

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t + \theta_u) \cos(\omega t + \theta_i) \\ &= \frac{1}{2} [\cos((\omega t + \theta_u) - (\omega t + \theta_i)) + \cos((\omega t + \theta_u) + (\omega t + \theta_i))] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\theta_u - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)] \end{aligned}$$

所以

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\theta_u - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)] \quad (9-2)$$

9.1.1 电阻的瞬时功率

电阻上的电压和电流同相位, 即 $\theta_u = \theta_i = \theta$, 所以式(9-2)变为

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos 0^\circ + \cos(2\omega t + 2\theta)] \quad (9-3)$$

功率由两部分构成, 第一部分为直流分量, 第二部分为交流分量, 其频率是电源频率的 2 倍, 见图 9.1。

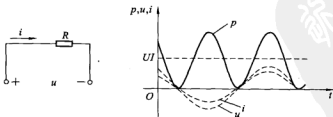


图 9.1 电阻元件的瞬时功率波形

电流和电压同时为正,或同时为负,所以电阻上的功率任何时间都为正,电阻始终是消耗功率的。

9.1.2 电感上的瞬时功率

电感上的电流与电压的相位相差 90° ,即

$$\theta_u - \theta_i = 90^\circ$$

式(9-2)中第一部分等于零,则

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)$$

又因 $\theta_i = \theta_u - 90^\circ$,所以

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + 2\theta_u - 90^\circ) \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m \sin(2\omega t + 2\theta_u) \end{aligned} \quad (9-4)$$

与电阻不同的是,电感上没有功率的直流分量,它是角频率比电源大一倍的正弦函数。

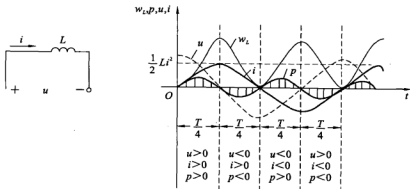


图 9.2 电感上的瞬时功率波形

9.1.3 电容上的瞬时功率

电容上的电压与电流之间相位相差 90° , $\theta_u - \theta_i = -90^\circ$, 式(9-2)中第一部分也等于零。

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)$$

又因

$$\theta_i = \theta_u + 90^\circ$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + 2\theta_u + 90^\circ) \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m \sin(2\omega t + 2\theta_u) \end{aligned} \quad (9-5)$$

与电容相似的是,电容的瞬时功率也是角频率比电源大一倍的正弦函数,与电感不同的是,电容瞬时功率的波形与电感的瞬时功率波形相反。

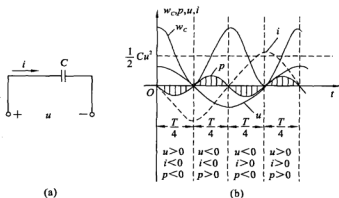


图 9.3 电容上的瞬时功率波形

9.1.4 二端网络的功率

二端网络 N 的端口电压为 $u(t)$, 端口电流为 $i(t)$, 其参考方向关联。
设

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

同样可以得出

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{1}{2}U_m I_m [\cos(\theta_u - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)]$$

由于网络中包括元件 R, L 和 C , 所以一般情况下, $\theta_u \neq \theta_i$, θ_u 与 θ_i 的相位差 $\neq 90^\circ$, 所以二端网络功率瞬时波形与单一元件的不同, 见图 9.4。

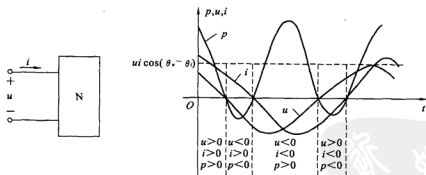


图 9.4 二端网络功率的瞬时波形

由于 L, C 上的功率瞬时波形与时间轴具有对称性, 所以仅含 L 和 C 的网络并不消耗功率, 即从外部吸收的功率与对外界供出的功率相抵消, 若网络中有电阻存在, 该网络吸收的功率大于对外界供出的功率。

【例 9.1】 给定时域电压 $u = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ V, 阻抗 $Z = 2\angle 60^\circ$ 上的相量电压 $\dot{U} = 4\angle 0^\circ$ V, 求阻抗上的瞬时功率。

解 相量电流为

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = 2\angle -60^\circ$$

时域电流为

$$i(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t - 60^\circ\right) \text{ A}$$

瞬时功率为

$$p(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t - 60^\circ\right) = 2 + 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t - 60^\circ\right) \text{ W}$$

将 $u(t)$ 、 $i(t)$ 、 $p(t)$ 画在同一时间坐标上, 很容易看出 $p(t)$ 的周期, 在电压和电流过零时对应瞬时功率均等于零, 见图 9.5。

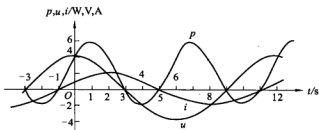


图 9.5

9.2 平均功率 P

瞬时功率在一周期内的平均值为平均功率, 也称为有用功率, 常用电器所标注的功率都是平均功率。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

电源波形不同时, 即使幅度相同, 但平均功率不相同。

例如锯齿波在电阻上的平均功率为 $\frac{1}{3} I_m^2 R$, 正弦波在电阻上的平均功率为 $\frac{1}{2} I_m^2 R$ 。

9.2.1 R、L、C 上的平均功率

由式(9-2)可得

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\theta_u - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)]$$

观察上述公式可知, 第二部分是与时间有关的余弦函数, 具有周期性, 周期为 $\frac{T}{2}$, T 是电压和电流的周期, 不是功率的周期。余弦函数在一个周期内的均值等于零, 所以计算时不必

考虑第二部分,公式可以简化为

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i)$$

该公式得到的值是常数,常数在一个周期内积分求得的均值等于其本身,因此

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) \quad (9-6)$$

对于电阻,电压的相位角 θ_u 与电流的相位角相等,即

$$P_R = \frac{1}{2} U_m I_m \cos 0^\circ = \frac{1}{2} U_m I_m$$

稍作变换可得

$$P_R = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R} = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

对于电感,电压超前电流相位 90° , $\theta_u - \theta_i = 90^\circ$, 则

$$P_L = \frac{1}{2} U_m I_m \cos 90^\circ = 0 \quad (9-7)$$

电感吸收的平均功率等于零,或者说电感不消耗能量。

对于电容,电压滞后电流相位 90° , $\theta_u - \theta_i = -90^\circ$, 则

$$P_C = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(-90^\circ) = 0 \quad (9-8)$$

电容吸收的平均功率等于零,或者说电容也不消耗能量。

【例 9.2】 电路如图 9.6 所示,求电源提供的平均功率和电阻吸收的平均功率。

解 流过回路的电流为

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{5\angle 30^\circ}{4-j2} = \frac{5\angle 30^\circ}{4.772\angle -26.57^\circ} \\ &= 1.118\angle 56.57^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

电源提供的平均功率为

$$\begin{aligned} P_S &= \frac{1}{2} (5)(1.118) \cos(30^\circ - 56.57^\circ) \\ &= 2.5 \text{ W} \end{aligned}$$

电阻两端电压为

$$U_R = 4I_R = 4 \times 1.118\angle 56.57^\circ = 4.472\angle 56.57^\circ \text{ V}$$

电阻吸收的平均功率为

$$P_R = \frac{1}{2} (4.472)(1.118) = 2.5 \text{ W}$$

因此,电阻消耗的功率与电源提供的功率相等,按照能量守恒原理,电容不吸收功率。

【例 9.3】 电路如图 9.7 所示,求 3 个元件 R 、 L 和 C 吸收的平均功率和两个激励电源提供的平均功率。

由上述知识容易得到, $j2\ \Omega$ 电感元件和 $-j2\ \Omega$ 电容元件吸收的功率等于零。

由网孔分析方法容易得到网孔电流为

$$\dot{i}_1 = 5 - j10 = 11.18\angle -63.43^\circ \text{ A}$$

$$\dot{i}_2 = 5 - j5 = 7.071\angle -45^\circ \text{ A}$$

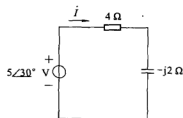


图 9.6

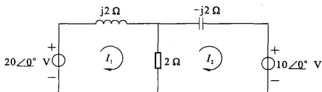


图 9.7

所以流过 2Ω 电阻的电流为

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = -j5 = 5\angle-90^\circ \text{ A}$$

2Ω 电阻吸收的功率为

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} 5^2 \times 2 = 25 \text{ W}$$

左边电压源吸收的功率为

$$\begin{aligned} P_{\text{左}} &= -\frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) \\ &= -\frac{1}{2} \times 20 \times 11.18 \cos[0^\circ - (-63.43^\circ)] \\ &= -50 \text{ W} \end{aligned}$$

右边电压源吸收的功率为

$$P_{\text{右}} = \frac{1}{2} \times 10 \times 7.071 \times \cos[0^\circ - (-45^\circ)] = 25 \text{ W}$$

以上结果表明,电阻吸收的功率加上右边电压源吸收的功率等于左边电压源提供的功率。

9.2.2 最大功率传输

(1) 共轭匹配条件

一个二端网络中,含有由独立电源和若干个 R 、 L 、 C 元件和负载 Z_L ,为了使 Z_L 获得最大功率,先将除 Z_L 外的所有元件进行戴维南等效变换,如图 9.8 所示。

在图 9.8 中, $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$, $Z_L = R_L + jX_L$ 。

最大功率传输定理: 一个串有阻抗 Z_{th} 的独立电压源与阻抗 Z_L 相连,当负载阻抗 Z_L 等于 Z_{th} 的复共轭(即 $Z_L = Z_{th}^*$)时,电源提供给负载阻抗 Z_L 的平均功率最大。

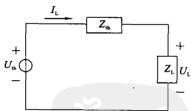


图 9.8

$$Z_L = R_L + jX_L = R_{th} - jX_{th}$$

所以

$$R_L = R_{th}, \quad X_L = -X_{th}$$

最大功率为

(9-9)

$$P_{\max} = \frac{U_{\text{th}}^2}{4R_{\text{th}}} \quad (9-10)$$

在传输最大功率时,电路的功率仅为 50%,即

$$\eta = \frac{I^2 R_L}{I^2 (R_L + R_L)^2} = 50\% \quad (9-11)$$

【例 9.4】 串联电路由正弦电压源 $3\cos(100t - 3^\circ)$ V、500 Ω 电阻、30 mH 电感以及一个未知阻抗组成。若已知激励源向未知阻抗提供的是最大平均功率,求该未知阻抗的值。

解 画出电路如图 9.9 所示,每个元件电参数以复数表示,容易得到 $3\angle -3^\circ$ 与 U_{th} 对应, R_{th} 与 500 Ω 对应, $X_{\text{th}} = j3 \Omega$ 对应,即 $Z_{\text{th}} = 500 + j3$,所以

$$Z_{\text{L}} = Z_{\text{th}}^* = 500 - j3 \Omega$$

因此,未知阻抗由 500 Ω 的电阻和 $-j3 \Omega$ 电容串联构成,由 $\omega = 100 \text{ rad/s}$,求得电容为 3.333 mF。

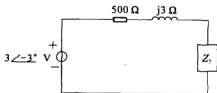


图 9.9

(2) 模值匹配条件

设戴维南等效电源的内阻 $Z_{\text{th}} = R_{\text{th}} + jX_{\text{th}} = \sqrt{R_{\text{th}}^2 + X_{\text{th}}^2} \angle \theta_{\text{th}}$, 负载阻抗 $Z_{\text{L}} = R_{\text{L}} + jX_{\text{L}} = \sqrt{R_{\text{L}}^2 + X_{\text{L}}^2} \angle \theta_{\text{L}}$, 若限制 $\angle \theta_{\text{L}}$ 不变, 只能改变 $\sqrt{R_{\text{L}}^2 + X_{\text{L}}^2}$ 的值, 则使

$$\sqrt{R_{\text{L}}^2 + X_{\text{L}}^2} = \sqrt{R_{\text{th}}^2 + X_{\text{th}}^2} \quad (9-12)$$

负载 Z_{L} 可以获得最大功率, 该等式称为模值匹配条件。

实际电路中, 往往遇到负载是纯电阻, 而电源内阻为复阻抗的情况, 这时可应用模值匹配方法, 使负载获得最大功率。

$$R_{\text{L}} = \sqrt{R_{\text{th}}^2 + X_{\text{th}}^2} \quad (9-13)$$

最大功率为

$$P_{\text{Lmax}} = \frac{U_{\text{th}}^2}{(R_{\text{th}} + \sqrt{R_{\text{th}}^2 + X_{\text{th}}^2})^2} \sqrt{R_{\text{th}}^2 + X_{\text{th}}^2} \quad (9-14)$$

【例 9.5】 如图 9.10(a) 所示电路中, R 和 L 为电源内部损耗电阻和电感, 已知 $R = 5 \Omega$, $L = 50 \mu\text{H}$, $u_{\text{S}}(t) = 10\sqrt{2}\cos(10^5 t)$ V。

① 求负载电阻 $R_{\text{L}} = 5 \Omega$ 时, 电阻消耗的功率;

② 若 R_{L} 可以改变, 问 R_{L} 等于多少时能获得最大功率, 最大功率等于多少?

③ 若 R_{L} 可以改变, 并在 R_{L} 两端并联一电容 C , 问 R_{L} 和 C 各等于多少时, R_{L} 能获得最大功率, 求出该最大功率。

解 电源内阻抗为

$$Z_{\text{S}} = R + jX_{\text{L}} = (5 + j10^5 \times 50 \times 10^{-6}) = (5 + j5) \Omega$$

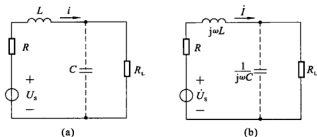


图 9.10

电压源相量为

$$\dot{U}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

① $R_L = 5 \Omega$, 则

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_s}{Z_s + R_L} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 + j5 + 5} = 0.89 \angle -26.6^\circ \text{ A}$$

R_L 消耗的功率为

$$P_L = R_L I^2 = 5 \times 0.89^2 = 3.96 \text{ W}$$

(2) 负载 $R_L = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ 时获得最大功率(模值匹配)

$$R_L = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7.07 \Omega$$

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_s}{Z_s + R_L} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 + j5 + 7.07} = 0.766 \angle -22.5^\circ \text{ A}$$

R_L 消耗的功率为

$$P_L = R_L I^2 = 7.07 \times 0.766^2 = 4.15 \text{ W}$$

③ R_L 两端并联电容之后, 负载导纳为

$$Y_L = \frac{1}{R_L} + j\omega C$$

电源内导纳为

$$Y_s = \frac{1}{Z_s} = \frac{1}{5 + j5} = (0.1 - j0.1) \text{ S}$$

则 $Y_L = Y_s^* = (0.1 + j0.1) \text{ S}$ 为共轭匹配条件, 于是

$$\frac{1}{R_L} + j\omega C = (0.1 + j0.1) \text{ S}$$

$$R_L = \frac{1}{0.1} = 10 \Omega$$

$$C = \frac{0.1}{\omega} = 1 \mu\text{F}$$

R_L 获得的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{\dot{U}_s^2}{4R_s} = \frac{10^2}{4 \times 5} = 5 \text{ W}$$

9.3 电流和电压的有效值

有效值指电压源向电阻提供的功率有效值的度量,若周期性的交流电流在电阻上产生的平均功率与一个直流电流在电阻上产生的功率相等,该直流电流就是交流电流的有效值。日常采用仪表对居民用电参数的测量结果都是有效值。

在图 9.11(a) 中,电阻 R 消耗的平均功率为

$$P = I^2 R$$

在 T 时间消耗的能量为

$$W = P \cdot T = I^2 RT$$

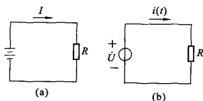


图 9.11

在图 9.11(b) 中,电阻 R 消耗的瞬时功率为

$$p(t) = i^2(t)R$$

在 T 时间消耗的能量为

$$W' = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T i^2(t) R dt$$

令 $W = W'$, 则

$$I^2 RT = \int_0^T i^2(t) R dt$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

认定 I 就是 $i(t)$ 的有效值,用 I 表示,所以 $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$ 。

由公式可知,有效值又称方均根值 rms。

对于正弦函数:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m$$

对于锯齿波:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{3}} = 0.577 I_m$$

同理,可以求出电压的有效值表达式为

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

对于正弦函数:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707U_m$$

对于锯齿波:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{3}} = 0.577U_m$$

【例 9.6】 求图 9.12 所示波形的有效值及 $2\ \Omega$ 电阻吸收的功率。

解 该波形周期 $T = 4$, 表达整个周期的电流函数为

$$i(t) = \begin{cases} 5t\ \text{A}, & 0 < t < 2 \\ -10\ \text{A}, & 2 < t < 4 \end{cases}$$

电流有效值为

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left[\int_0^2 (5t)^2 dt + \int_2^4 (-10)^2 dt \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(25 \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 + 100t \Big|_2^4 \right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{200}{3} + 200 \right)} \\ &= 8.165\ \text{A} \end{aligned}$$

$2\ \Omega$ 电阻吸收的功率为

$$P = I^2 R = 8.165^2 \times 2 = 133.3\ \text{W}$$

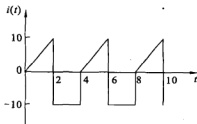


图 9.12

9.4 视在功率和功率因数

当正弦交流电压加在网络两端, 正弦交流电流流过该网络时, 网络所吸收的平均功率为

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) = UI \cos(\theta_u - \theta_i)$$

9.4.1 视在功率(VA)

对于直流而言, 网络吸收的功率 $P = UI$ 。对于交流而言, 若网络是电阻, 因电流与电压之间无相位差, 即 $\theta_u = \theta_i$, 则负载吸收的功率为 $P = UI$ (U 和 I 都是有效值)。若网络是电抗性的, $\theta_u \neq \theta_i$, 则网络吸收的功率不等于 UI , 这里赋予 UI 一个新的术语, 视在功率 S , 单位为伏安(VA)。

$$S = UI \quad (9-15)$$

进而可得

$$P = S \cos(\theta_u - \theta_i) \quad (9-16)$$

不论网络中是否存在独立电源,均可用上式计算平均功率。由于 $\cos(\theta_u - \theta_i)$ 不可能大于 1, 所以平均功率永远不能大于视在功率。

当网络中不含独立电源时,可等效为阻抗 Z , 电压与电流的相位差等于阻抗角 θ_z , 即

$$\theta_z = \theta_u - \theta_i$$

此时阻抗吸收的功率为

$$P = S \cos \theta_z$$

$\cos \theta_z$ 称为功率因数 PF, θ_z 为功率因数角 ($0 < \theta_z < 1$)。

9.4.2 无功功率(VAR)

当电压和电流的相位差 $(\theta_u - \theta_i)$ 为 0 时, 功率因数为 1, 电源提供的能量全部被负载吸收, 当电压与电流之间有相位差时, 功率因数 $\neq 1$, 电路中发生了能量互换, 出现无功功率 Q 。

$$Q = UI \sin(\theta_u - \theta_i) = S \sin(\theta_u - \theta_i) = S \sin \theta_z \quad (9-17)$$

无功功率引起的问题有以下两种情况。

(1) 发电设备的容量不能充分利用

发电机(或变压器)提供的容量由额定电压和额定电流的乘积来表征, 称为额定视在功率, 它是电源能够提供的最大平均功率。

若负载的功率因数角(阻抗角)为零, 功率因数 $\text{PF} = \cos \theta_z = 1$, 此时, 发电机在额定状态下发出的功率全部转化为负载上的有用功率 P ; 若 $\cos \theta_z < 1$, 负载上的平均功率将减小, 发电机提供的一部分功率没有用于负载, 出现了无功功率。无功功率越大, 电路中能量互换的规模越大, 发电机发出的能量不能充分利用, 该部分能量在发电机与负载之间互换。

如: 容量为 1000 kVA 的发电机, 当 $\cos \theta_z = 1$ 时, 可以发出 1000 kW 的有用功率, 当 $\cos \theta_z = 0.7$ 时, 只能发出 700 kW 的有用功率。

(2) 增加线路和发电机绕组的功率损失

当发电机的电压和输出功率一定时, 电流 I 与功率因数成反比。线路和发电机绕组上的功率损失 ΔP 与 $\cos \theta_z$ 的平方成反比。

$$\Delta P = I^2 r = \left(\frac{P}{U \cos \theta_z} \right)^2 r$$

式中 r —— 发电机绕组和线路的电阻。

【例 9.7】 计算图 9.13 所示电路中每一个负载所获得的功率, 电源提供的视在功率以及组合负载的功率因数。

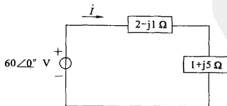


图 9.13

解 已知电源电压和所有的阻抗值,有

$$\dot{i} = \frac{60 \angle 0^\circ}{(2 - j1) + (1 + j5)} = \frac{6 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 12 \angle -53.13^\circ \text{ A}$$

由于

$$P = UI \cos(\theta_u - \theta_i) = S \cos(\theta_u - \theta_i)$$

$$S = UI$$

所以,阻抗 $2 - j1 \Omega$ 的平均功率为

$$P_k = I^2 \times 2 = 12^2 \times 2 = 288 \text{ W}$$

阻抗 $1 + j5 \Omega$ 的平均功率为

$$P_F = I^2 \times 1 = 12^2 \times 1 = 144 \text{ W}$$

$$S = 60 \times 12 = 720 \text{ VA}$$

$$P = 5 \cos(\theta_u - \theta_i) = 720 \cos[0^\circ - (-53.13^\circ)] = 432 \text{ W}$$

$$\text{PF} = \frac{P}{S} = \frac{432}{720} = 0.6$$

组合负载的功率因数也可由两个负载的阻抗值来获得,即

$$(2 - j1) + (1 + j5) = 3 + j4 = 5 \angle 53.1^\circ$$

9.5 复功率

为了方便分析和计算,工程上常常应用功率三角形来表示视在功率、有功功率和无功功率的关系。

由 $P = S \cos \theta_z$ 知, P 和 S 之间存在夹角 θ_z , P 和 S 的关系见图 9.14。按照复数的概念可得

$$S = P + jQ \quad (9-18)$$

$$= UI \cos(\theta_u - \theta_i) + jUI \sin(\theta_u - \theta_i)$$

$$= UI [\cos(\theta_u - \theta_i) + j \sin(\theta_u - \theta_i)]$$

$$= UI e^{j(\theta_u - \theta_i)}$$

$$= U e^{j\theta_u} \cdot I e^{j(-\theta_i)}$$

$$= \dot{U} \dot{I}^* \quad (\dot{I}^* \text{ 与 } I \text{ 共轭})$$

(9-19)

相关的物理量见表 9.1。

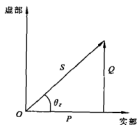


图 9.14 功率三角形

表 9.1 与复功率有关的物理量

物理量	符号	公式	单位
平均功率	P	$U_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi)$	瓦(W)
无功功率	Q	$U_{eff} I_{eff} \sin(\theta - \phi)$	乏(VAR)
复功率	S	$P + jQ$ $U_{eff} I_{eff} \angle \theta - \phi$ $U_{eff} I_{eff}^*$	伏安(VA)
视在功率	$ S $	$U_{eff} I_{eff}$	伏安(VA)

【例 9.8】如图 9.15 所示电路中, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 16 \Omega$, $X_L = 8 \Omega$, $X_C = -12 \Omega$, $\dot{U} = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$ 。求该电路的平均功率 P 、无功功率 Q 、视在功率 S 和功率因数 PF 。

解 R_1 与 L 串联支路的阻抗为

$$Z_1 = R_1 + jX_L = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ \Omega$$

R_2 与 C 串联支路的阻抗为

$$Z_2 = R_2 + jX_C = 16 - j12 = 20 \angle -36.9^\circ \Omega$$

由复数形式的欧姆定律可得

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{20 \angle 0^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = 2 \angle -53.1^\circ = (1.2 - j1.6) \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{20 \angle 0^\circ}{20 \angle -36.9^\circ} = 1 \angle 36.9^\circ = (0.8 + j0.6) \text{ A}$$

由 KCL 可得

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (1.2 - j1.6 + 0.8 + j0.6) \\ &= 2 - j1 = 2.24 \angle -26.6^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

复功率为

$$S = \dot{U} \dot{I}^* = 20 \angle 0^\circ \times 2.24 \angle 26.6^\circ = 44.8 \angle 26.6^\circ = (40 + j20) \text{ VA}$$

因此

$$P = 40 \text{ W}, \quad Q = 20 \text{ VAR}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{40^2 + 20^2} = 44.8 \text{ VA}$$

功率因数

$$\text{PF} = \cos 26.6^\circ = 0.89$$

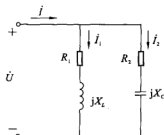


图 9.15

9.6 功率因数的提高

电气设备大多为电感性的负载,如异步电动机,其功率因数为 $0.7 \sim 0.9$ 。负载阻抗 $Z = R + jX_L$,如 R 和 L 已定,阻抗角 θ_Z 就定了,功率因数就有具体的值。将 $R + jX_L$ 直接与电源相连,供电系统的功率因数就与实际负载的功率因数相等,当负载的功率因数比较低时,电源设备的容量得不到充分利用,而且线路上的电损耗增加。

提高功率因数的方法,是将电容与电感性负载并联,见图 9.16(a)。

由于所加电压和负载参数没有改变,所以负载电流 $\dot{I}_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ 和负载的功率因数 $\cos \theta_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ 均未变化,但电压 \dot{U} 和线路电流 \dot{I} 之间的相位差变小,即 $\cos \theta_2$ 变大,所以提高功率因数,是指提高电源或电网的功率因数,而不是指提高某个电感性负载的功率因数。

若电容值取得适当,可以使 $\theta_2 = 0$;若电容过大,线路电流反而会超前电压, θ_2 又出现,但角度相反。

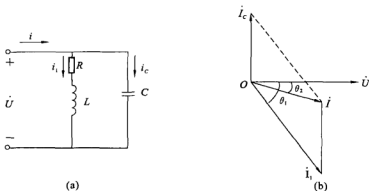


图 9.16 电容与电感性负载并联

将电容与电感性负载并联后,负载与电源之间的能量互换量减少,电感性负载所需的无功功率,全部或大部分由电容量器提供,能量在电容和电容之间互相转换,因而发电机的容量得到充分利用。由图 9.16(b) 可知,并联电容器后,线路电流由 \dot{I}_1 减少为 \dot{I} ,线路上电的损耗减少。

【例 9.9】 一电感性负载,其平均功率 $P = 10 \text{ kW}$,功率因数 $\cos\theta_1 = 0.6$,接在电压 $U = 200 \text{ V}$ 电源上,电源频率 $f = 50 \text{ Hz}$ 。如果将功率因数提高到 $\cos\theta = 0.95$,求与负载并联的电容器的电容值和电容器并联前后的线路电流。

解 计算并联电容器的电容值,可以从图 9.15(b) 的相量图导出一个公式,即

$$\begin{aligned} I_C &= I_1 \sin\theta_1 - I \sin\theta_2 \\ &= \left(\frac{P}{U \cos\theta_1} \right) \sin\theta_1 - \left(\frac{P}{U \cos\theta_2} \right) \sin\theta_2 \\ &= \frac{P}{U} (\tan\theta_1 - \tan\theta_2) \end{aligned}$$

又因

$$I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C$$

所以

$$U\omega C = \frac{P}{U} (\tan\theta_1 - \tan\theta_2)$$

因此得

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan\theta_1 - \tan\theta_2)$$

当 $\cos\theta_1 = 0.6$ 时, $\theta_1 = 53^\circ$; 当 $\cos\theta_2 = 0.95$ 时, $\theta_2 = 18^\circ$ 。

所需电容值为

$$C = \frac{10 \times 10^3}{2\pi \times 50 \times 220^2} (\tan 53^\circ - \tan 18^\circ) = 656 \mu\text{F}$$

电容器并联前的线路电流(总电流)为

$$I_1 = \frac{P}{U \cos\theta_1} = \frac{10 \times 10^3}{220 \times 0.6} = 75.8 \text{ A}$$

电容器并联后的线路电流为

$$I = \frac{P}{U \cos\theta_2} = \frac{10 \times 10^3}{220 \times 0.95} = 47.8 \text{ A}$$

结果表明,并联电容器后线路电流大幅度减小。

9.7 与后续课程的关系

瞬时功率大小随时间变化,瞬时功率有正有负,但它的正负表示网络能量的流动方向,正表示网络吸收功率,负表示网络送出功率。瞬时功率不方便表述正弦交流电的功率大小,所以用平均功率(有功功率)表示,后续课程中,实际电工技术中,交流电的功率均为有功功率,民用电度表读数均为有功功率;电抗分量虽不消耗电能,但与电源间有能量往返关系,无功功率表明电源(外电路)与阻抗的电抗分量间能量往返的规模。电气设备是按照一定的额定电压和额定电流值来设计和使用的,在使用时,如电压、电流超过额定值,设备可能遭到损坏,所以视在功率反映设备容量,对于电气设备实际提供或吸收多少平均功率,则要看负载的功率因数是多少。复功率的引入主要说明复功率守恒,无太大的计算意义。

用有效值表示交流电流和电压的大小,有效值为方均根值,后续课程中,实际电工技术中,交流电的电压、电流大小均为有效值,如仪表读数为有效值。

实用电工技术(供配电技术):用合适电容补偿,补偿实际供电应用的感性负载,使电路的功率因数提高,例如中型工厂供电系统如图 9.17 所示。图中高压配电所有两条 10 kV 的电源进线,分别接在高压配电所的两段母线上,形成单母线分段制。一条电源进线供电,另一条电源进线作为备用。图中并联电容器都是用来补偿无功功率以提高感性电路的功率因数。

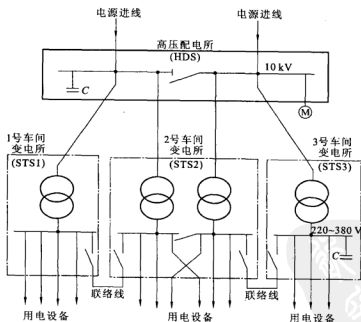


图 9.17 中型工厂供电系统简图

多数实际用电设备为感性负载,如表 9.2 所示,提高功率因数的主要方法是采用并联电容器或同步补偿机。

表 9.2 常用用电设备组的功率因数

用电设备组	功率因数 $\cos\theta$
大批生产的金属冷加工机床电动机	0.5
通风机、水泵、空压机及电动发电机组电动机	0.8
实验室用的小型电热设备(电阻炉、干燥箱等)	1.0
生产厂房及办公室、阅览室、实验室照明	1.0
宿舍(生活区)照明	1.0
点焊机、缝焊机	0.7

提高功率因数的意义:(1)充分利用电气设备的容量;(2)功率因数大时,线损小,线路电压降小,电能传输效率高,供电质量高。

9.8 实用电路举例

9.8.1 无功补偿对节能降耗的重要作用

电网中的电力负荷如电动机、变压器等,大部分属于感性负荷,在运行过程中需要向这些设备提供相应的无功功率。在电网中安装并联电容器等无功补偿设备以后,可以提供感性电抗所消耗的无功功率,减少了电网电源向感性负荷提供由线路输送的无功功率。由于减少了无功功率在电网中的流动,因此可以降低线路和变压器因输送无功功率造成的电能损耗,提高功率因数,达到节能降耗的目的。

电网功率因数是指电网中的视在功率供给有功功率的消耗所占百分数。在电网的运行中,我们所希望的是功率因数越高越好,如能做到这一点,则电路中的视在功率将大部分用来供给有功功率,以减少无功功率的消耗。功率因数的高低,对于电力系统发、供、用电设备的充分利用,有着显著的影响。适当提高功率因数,不但可以减少无功功率在电网上的流动,改善电压质量,降低中低压电网的供电损耗,充分的发挥发、供电设备的生产能力,而且可以提高用户用电设备的工作效率,减少用户的电能损耗,为用户本身节约电能。因此,做好无功补偿工作,提高各级电网的功率因数,降低电网的电能损耗,其社会效益及经济效益都会是非常显著的。

9.8.2 无功补偿对提高功率因数、降低电能损耗的作用

有功功率、无功功率、视在功率之间的关系如图 9.18 所示。

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, θ 角为功率因数角,它的余弦($\cos\theta$)是有功率与视在功率之比即 $\cos\theta = P/S$ 称作功率因数。

由功率三角形可以看出,在有功功率一定的情况下,用电功率因数 $\cos\theta$ 越小,则所需的无功功率越大。如果无功功率不是由电容器提供,则必须由输电系统供给,为满足用电的要求,供电线路和变压器的容量需要增大。这样,不仅增加供电投资、降低设备利用率,

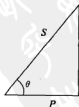


图 9.18 功率三角形

也将增加线路损耗。为此,国家供用电规则规定:无功电力应就地平衡,用户应在提高用电自然功率因数的基础上,设计和装设无功补偿设备,并做到随其负荷和电压变动及时投入或切除,防止无功倒送。还规定用户的功率因数应达到相应的标准,否则供电部门可以拒绝供电。因此,无论对供电部门还是用电部门,对无功功率进行自动补偿以提高功率因数,防止无功倒送,从而节约电能,提高运行质量都具有非常重要的意义。

无功补偿的基本原理是把具有容性功率负荷的装置与感性功率负荷并联接在同一电路,能量在两种负荷之间相互交换。这样,感性负荷所需要的无功功率可由容性负荷输出的无功功率补偿。

9.8.3 无功补偿对节能降耗的重要作用实例分析

电容器安装容量的选择,可根据使用目的的不同,按改善功率因数,提高运行电压和降低线路损耗等因素来确定。

按改善功率因数确定补偿容量的方法简便、明确,为国内外所通用。根据功率补偿图中功率之间的向量关系,可以求出无功补偿容量 Q_C 。

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P \cdot \tan\theta_1 - P \cdot \tan\theta_2$$

$$Q_C = P \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{(\cos\theta_1)^2} - 1} - \sqrt{\frac{1}{(\cos\theta_2)^2} - 1} \right) \text{ (kVAR)}$$

式中 P ——最大负荷月的平均有功功率, kW;

$\tan\theta_1$ 、 $\tan\theta_2$ ——补偿前后功率因数角的正切值;

$\cos\theta_1$ 、 $\cos\theta_2$ ——补偿前后功率因数数值。

下面举几个实例加以分析。

110 kV 洪续变电站正常运行方式为一台 50 MVA 变压器运行, 10 kV 侧有功负荷为 12 MW, 无功负荷为 6 MVAR, 10 kV 侧功率因数为 0.89, 因一期工程没有安装电容器组, 所以功率因数偏低。根据这种情况, 列入了专项节能降耗资金, 装设了一组 4800 kVAR 的电容器组。将电容器组投入运行后, 无功功率负荷得到了充分的补偿, 补偿后的功率因数 $\cos\theta_2$ 为

$$\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \cos\left(\arctan \frac{Q_1 - Q_C}{P}\right) \\ &= \cos\left(\arctan \frac{6000 - 4800}{12000}\right) \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

由于功率因数的提高, 使功率损耗下降了不少, 现计算如下。

功率因数从 $\cos\theta_1$ 提高到 $\cos\theta_2$, 有功负载损耗降低百分率为

$$\begin{aligned} \Delta P\% &= \left(1 - \frac{\cos\theta_1^2}{\cos\theta_2^2}\right) \times 100 \\ &= \left(1 - \frac{0.89^2}{0.99^2}\right) \times 100 \\ &= 19.18\% \end{aligned}$$

由此看来, 投入了 4800 kVAR 的电容器组后, 使功率因数提高了 10%, 而使洪续变电站有功负载损耗降低了 19.18%, 每年可降低电能损耗约 900000 kWh, 经济效益非常显著。

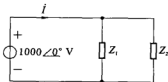
习 题

9.1 为了描述电感元件与电源进行能量交换的(),定义无功功率 $Q_L = ()$,它的单位采用()。

9.2 正弦交流电路处于谐振状态时,电路总无功功率为(),电源只向电路提供()功率。

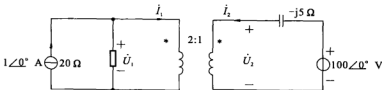
9.3 一台 25 kVA 的发电机,除供给 14 kW 功率因数 $\cos\theta = 0.8$ 的电动机用电外,还能供给()盏 100 W 的灯泡用电。

9.4 题图所示正弦稳态电路中,一个感性负载 Z_1 和一个容性负载 Z_2 并联,已知 Z_1 消耗的功率为 $P_1 = 64 \text{ kW}$,功率因数为 $\cos\theta_1 = 0.8$, Z_2 消耗的功率为 $P_2 = 36 \text{ kW}$,功率因数为 $\cos\theta_2 = 0.6$,试求电流 \dot{I} ,并作出相量图。



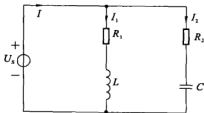
题 9.4 图

9.5 试求题图所示正弦稳态电路中的电压相量 \dot{U}_1 与 \dot{U}_2 ,并求电流源发出的复功率。



题 9.5 图

9.6 题图所示电路, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $X_L = j1 \Omega$, $X_C = -j3 \Omega$, $\dot{U}_S = 10\angle 0^\circ \text{ V}$ 。求: (1) 各元件吸收的功率; (2) 电源供给的功率。



题 9.6 图

9.7 某负载阻抗 $Z = 2 + j2 \Omega$ 与 $i_S(t) = 5\sqrt{2}\cos 2t \text{ A}$ 的电流源相连,试求电源提供给该网络的视在功率、网络吸收的有功功率、无功功率、功率因数和复功率。

9.8 若某电路的复功率 $S = 5000 + j4000 \text{ VA}$,则其功率因数应为()。

第 10 章 三相电路

10.1 三相电源

本章以前涉及的内容都是单相电路。

三相电源由三个同频、等幅及相位角各相差 120° 的正弦交流电源组成。实际上,电力系统的供电方式绝大多数属于三相制,日常用电取自三相电源中的一相。

三相电源的优点:

- (1) 发电方面:比单相电源提高功率 50%;
- (2) 输电方面:比单相电源节省金属材料 25%;
- (3) 用电设备:工作稳定性比单相电源供电时好。

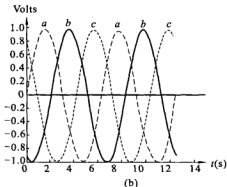
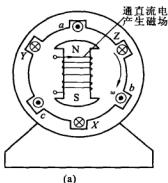


图 10.1

10.1.1 发电机结构

三相电源来源于三相发电机,由图 10.1(a) 可以看出,发电机由转子或定子组成。转子是可以转动的部件,材料为锻钢件。转子上绕有线圈,通以直流电后,轴子周围形成磁场,转子两端产生 N-S 极。定子是固定的部件,由硅钢片叠加制成,定子凹槽处嵌有三个绕组 aX 、 bY 、 cZ ,每一组称为一相。从剖面图看,电流垂直于纸面从 X 、 Y 和 Z 处流入,从 a 、 b 和 c 处流出。

a 、 b 、 c 称为始端, X 、 Y 、 Z 称为末端,三组线圈在安装位置上相差 120° ,由此确定三个相的信号相位相差 120° 。

当与转子同轴装配的叶轮受水力冲击或受气流冲击时,转子将以角速度 ω 顺时针转动。当 N 极与 a 处重合后,继续转动而离开 a 的瞬间,穿过 aX 线圈的 $\frac{d\phi}{dt}$ 最大,磁通从 N 极穿过 aX 线圈到 S 极,在 aX 线圈产生感生电流,按照右手螺旋法则和电磁感应原理,拇指的方向

与转子磁通方向相反,四指的指向为感生电流的方向,所以电流重垂直于纸面从 a 流出,从 X 流出, aX 此时出现最大的输出电压。

同理,当 N 极到达 b 处和 c 处时, bY 和 cZ 线圈先后出现最大输出电压。三个相的输出电压最大值出现时的相位差相差 120° ,当 N 极与 X, Y, Z 处重合时,三个线圈依次出现最大负电压,转子转一圈共 360° ,所以转子转一圈,每一相变化了一个周期,每一个线圈相当于一个独立的单相交流电源。

因转子顺时针旋转, bY 线圈的输出电压滞后 aX 线圈 120° , cZ 线圈的输出电压滞后 bY 线圈 120° ,三个相电压的波形见图 10.1(b)。

设 aX 线圈的电压为

$$\dot{U}_{ax} = U_m \cos(\omega t + 0^\circ) \quad (10-1)$$

bX 线圈的电压为

$$\dot{U}_{by} = U_m \cos(\omega t - 120^\circ) \quad (10-2)$$

cZ 线圈的电压为

$$\dot{U}_{cz} = U_m \cos(\omega t - 240^\circ) = U_m \cos(\omega t + 120^\circ) \quad (10-3)$$

10.1.2 双下标符号

在讨论三相电路时用双下标符号来表达两点之间的电压比较方便。以 \dot{U}_{ab} 为例,该符号表示 a 点相对于 b 点的电位差,或者说是 a 点的电位减 b 点的电位。该电压为相量,可以用箭头表示,该箭头从 b 点指向 a 点,箭杆的长度等于电压数值的大小,箭杆与水平线的夹角为 \dot{U}_{ab} 的相位角。

如图 10.2 所示,其中

$$U_a = 4 \cos \omega t$$

$$U_b = 3 \cos(\omega t - 90^\circ)$$

两电压的相量极坐标形式为

$$\dot{U}_a = 4 \angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_b = 3 \angle -90^\circ$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_{ao} + \dot{U}_{ob} = \dot{U}_{ao} - \dot{U}_{bo} = \dot{U}_a - \dot{U}_b \\ &= 4 \angle 0^\circ - 3 \angle -90^\circ \\ &= 4 - 3[\cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ)] \\ &= 4 + j3 \\ &= 5 \angle 36.87^\circ \end{aligned}$$

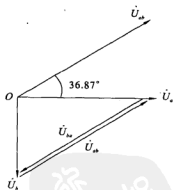


图 10.2

由图 10.2 可知, \dot{U}_{ao} 的画法为:从 O 点画一箭头指到 a ; \dot{U}_{bo} 的画法是:画一箭头从 O 点指向 b ; \dot{U}_{ab} 的画法是:画一箭头从 b 点指向 a 点。然后将该线段平移至原点处,可以更清晰地看出 \dot{U}_{ab} 与 \dot{U}_a 的相对关系。 \dot{U}_{ab} 的电压幅度为 5,超前 \dot{U}_a 相位角为 36.87° 。

$$\dot{U}_{ba} = \dot{U}_b - \dot{U}_a = 3 \angle -90^\circ - 4 \angle 0^\circ = -(4 \angle 0^\circ - 3 \angle -90^\circ) = -\dot{U}_{ab}$$

在图 10.2 中, \dot{U}_{bc} 与 \dot{U}_{ab} 的箭头等长但反向。

三相系统中电压的表达式如图 10.3 所示。

$$\dot{U}_m = U_m \angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_n = U_m \angle -120^\circ$$

$$\dot{U}_o = U_m \angle +120^\circ$$

用双下标的确定方法为

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ab} &= \dot{U}_m + \dot{U}_n = \dot{U}_m - \dot{U}_o \\ &= U_m \angle 0^\circ - U_m \angle -120^\circ \\ &= U_m - U_m [\cos(-120^\circ) + j\sin(-120^\circ)] \\ &= \sqrt{3}U_m \angle 30^\circ\end{aligned}$$

相量 \dot{U}_{ab} 如图 10.4 所示。

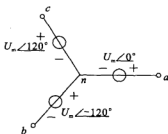


图 10.3 三相电源的绕组参数

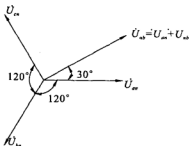


图 10.4 相电压和线电压的相量图

10.1.3 两类三相电源

(1) 星形(Y形)连接三相电源

发电机三个绕组中每一个绕组的输出电压为相电压,用 U_F 表示。通常三个绕组的电压值(最大值或有效值)是相等的,称为对称,即

$$U_m = U_n = U_o = U_F \quad (10-4)$$

相与相之间的电压为线电压,用 U_L 表示。前面所述的 \dot{U}_{ab} 就是 a 相和 b 相之间的线电压,另外两个线电压为 \dot{U}_{bc} 和 \dot{U}_{ca} ,对称状态下,有

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{ca} = U_L \quad (10-5)$$

三个相电压之和等于零,见图 10.5。三个线电压之和也等于零,因此受电压驱动的电动机等旋转机构转动部分总的离心力等于零,所以三相电源具有使装置运行稳定的优点。

用复数计算可证明三个相量之和等于零。

因为

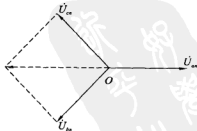


图 10.5 三个相量之和等于零

$$\dot{U}_m = U_m \angle 0^\circ = U_m \quad (10-6)$$

$$\dot{U}_n = U_m \angle -120^\circ = \frac{U_m}{2}(-1 - j\sqrt{3}) \quad (10-7)$$

$$\dot{U}_m = U_m \angle +120^\circ = \frac{U_m}{2}(-1 + j\sqrt{3}) \quad (10-8)$$

所以

$$\dot{U}_m + \dot{U}_n + \dot{U}_m = \frac{1}{2}U_m(2 - 1 - 1 - j\sqrt{3} + j\sqrt{3}) = 0$$

三个相电压的瞬时值相加其结果等于零,即

$$\begin{aligned} u_a + u_b + u_c &= U_m \cos \omega t + U_m \cos(\omega t - 120^\circ) + U_m \cos(\omega t + 120^\circ) \\ &= U_m \left[\cos \omega t + 2 \cos \frac{(\omega t - 120^\circ + \omega t + 120^\circ)}{2} \cos \frac{(\omega t - 120^\circ - \omega t + 120^\circ)}{2} \right] \\ &= U_m [\cos \omega t + 2 \cos \omega t (-\cos 60^\circ)] \\ &= U_m \left(\cos \omega t - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \omega t \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) 三角形(△)连接的三相电源

将发电机三个定子绕组始末端顺次相连,即X与b、Y与c、Z与a相连接,组成一个闭合的回路,然后从三个连接点引出三根线,构成△连接,见图10.6。由图知,线电压与相电压相等,即

$$U_L = U_P$$

三个相电压相量代数和等于零,见图10.7。

$$\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c = 0 \quad (10-9)$$

从a、b、c引出端线,从端线流出的电流为线电流 \dot{I}_a 、 \dot{I}_b 、 \dot{I}_c ,在每一相电源中流动的电流为相电流 \dot{I}_{ab} 、 \dot{I}_{bc} 、 \dot{I}_{ca} ,这里相电流不等于线电流。

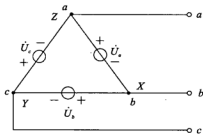


图 10.6 三相电源的△形连接

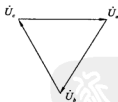


图 10.7 三相电源△形连接的相量图

三相电源进行△形连接时,应严格保证每相的始端与另一相的末端相接,否则三个相电压复数代数和(或相量和)不为零,闭合回路内将会产生极大的电流,造成严重后果。例如将图10.6中c相绕组的c和Z反过来,见图10.8,即Z与Y相连接,c与a相连接,闭合回路中的电压代数和为 $\dot{U}_a + \dot{U}_b - \dot{U}_c = U_m(1 + e^{-j120^\circ} - e^{j120^\circ}) = 2U_m \angle -60^\circ = -2\dot{U}_c$,见图10.9。

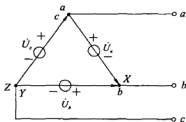


图 10.8

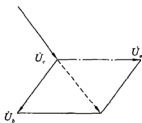


图 10.9

由于发电机绕组本身阻抗很小,闭合回路中将出现很大的电流,会烧坏发电机。

10.2 电源与负载连接

10.2.1 三相 Y-Y 形接法

将三个负载接成 Y 形,然后与 Y 形电源相连,电源的中性点与三个负载的连接点相连,该连接方法称为 Y-Y 连接,见图 10.10。

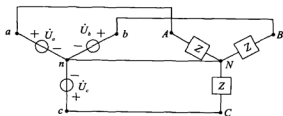


图 10.10 电源和负载 Y-Y 形接法

由图可知,每个负载上的电压为电源的相电压,因此流过负载的电流为每相的相电压除以对应的负载 \$Z_P\$,容易求得

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_P} = \dot{I}_P \quad (\text{相电流等于线电流}) \quad (10-10)$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_P} = \frac{\dot{U}_m \angle -120^\circ}{Z_P} = \dot{I}_m \angle -120^\circ = \dot{I}_P \angle -120^\circ \quad (10-11)$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_P} = \frac{\dot{U}_m \angle +120^\circ}{Z_P} = \dot{I}_m \angle +120^\circ = \dot{I}_P \angle +120^\circ \quad (10-12)$$

由上面三个公式可知,如果三个负载是平衡的,相电流将呈现对称分布,因此线电流自然也是对称分布。

首先求出一相的电压和电流相量,包括 \$\dot{U}_m\$、\$\dot{U}_{ab}\$、\$\dot{I}_m\$、\$\dot{I}_{aA}\$,其他的两个相的电压和电流相量按相位相差 \$120^\circ\$ 分布的规律依次画出即可,见图 10.11。

由式(10-10)~式(10-12)可得

$$\dot{I}_m + \dot{I}_m + \dot{I}_m = \dot{I}_P (1 + \angle -120^\circ + \angle +120^\circ) = 0 \quad (10-13)$$

在对称的三相电路星形连接中,中线内是没有电流的,相当于开路。若将中线取消,也不影响正常工作,这时,无中线的接法称为三相三线制。

与此对应的是:在对称的三相电路星形连接中,电源中性点电位 \dot{U}_n 和负载中性点电位 \dot{U}_N 之间电位相等,即 $\dot{U}_{nN} = 0$,重画 Y-Y 连接电路,并画出变形后的电路以便于分析,见图 10.12。

将图 10.12(b) 经过电源变换成图 10.13(a) 形式。

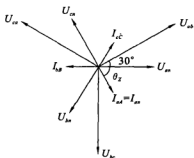


图 10.11 图 10.10 所示电路的相量图

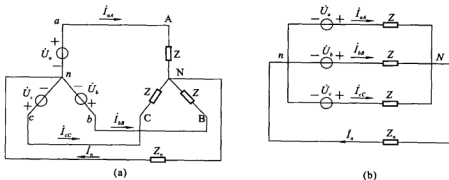


图 10.12 三相负载星形连接图

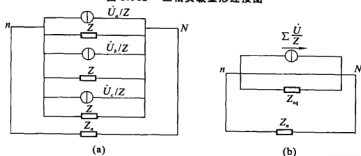


图 10.13 经电源变换后的星形连接图

将图 10.13(a) 所有电流源求和并将 3 个阻抗等效后得到图 10.13(b), 令 $\dot{U}_{nN} \cdot \sum Y = \sum i$, 有

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\sum i}{\sum Y} = \frac{\frac{\dot{U}_a}{Z} + \frac{\dot{U}_b}{Z} + \frac{\dot{U}_c}{Z}}{\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_n}} = \frac{\frac{1}{Z}(\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c)}{\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_n}}$$

由式(10-9)可知 $\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c = 0$, 因此

$$\dot{U}_{nN} = 0 \quad (10-14)$$

由以上内容得出如下结论:

(1) Y-Y 连接电路中, 电感负载状态下, 相电流滞后相电压, 但相位角不能确定, 该角度随负载阻抗而改变, 该角度又称为阻抗角, $\theta_z = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$, 当 L, R 变化时, θ_z 随之变化。

(2) 对称电路状态下, $\dot{I}_{an} + \dot{I}_{bn} + \dot{I}_{cn} = 0, \dot{U}_{nN} = 0$, 即中线上无电流。

【例 10.1】如图 10.14 所示电路, 求整个电路的电流和电压, 并求负载消耗的功率。

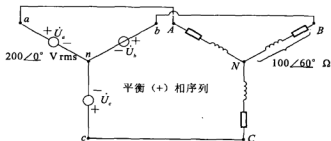


图 10.14 Y-Y 形接法的对称三相三线系统

解 三个相电压为

$$\dot{U}_{an} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_{bn} = 200 \angle -120^\circ, \quad \dot{U}_{cn} = 200 \angle -240^\circ$$

线电压等于 $200\sqrt{3} = 346 \text{ V}$, 由图 10.11 可知线电压超前相电压 30° , 求得

$$\dot{U}_{ab} = 346 \angle 30^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_{bc} = 346 \angle -90^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_{ca} = 346 \angle -210^\circ$$

线电流为

$$\dot{I}_{aA} = \dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{an}}{Z} = \frac{200 \angle 0^\circ}{100 \angle 60^\circ} = 2 \angle -60^\circ \text{ A}$$

由于是对称分布三相系统, 容易求出其他线电流。

$$\dot{I}_{bB} = 2 \angle -60^\circ - 120^\circ = 2 \angle -180^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{cC} = 2 \angle -60^\circ - 240^\circ = 2 \angle -300^\circ \text{ A}$$

A 相吸收的功率为

$$P_{AN} = 200(2) \cos(0^\circ + 60^\circ) = 200 \text{ W}$$

因此, 三相负载吸收的功率 $= 3 \times 200 = 600 \text{ W}$

画出各相量如图 10.15 所示。

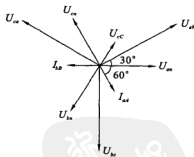


图 10.15 例 10.1 所求参数相量图

10.2.2 三相 Y-Δ 接法

负载的另一种常用连接方法为 Δ 连接。这种方法不需要中线。由图 10.16 可以看出每相负载两端与三相 Y 形电源的线电压相连接, 根据电源与负载的连接关系有

$$\text{线电压: } U_L = |\dot{U}_{ab}| = |\dot{U}_{bc}| = |\dot{U}_{ca}|$$

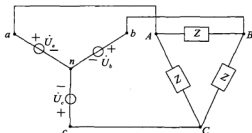


图 10.16 电源和负载 Y-Δ 形接法

相电压:

$$U_P = |\dot{U}_{ab}| = |\dot{U}_{bc}| = |\dot{U}_{ca}|$$

$$U_L = \sqrt{3}U_P$$

(10-15)

$$\dot{U}_{ab} = \sqrt{3}U_P \angle 30^\circ$$

相电流:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z}, \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z}, \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{ca}}{Z}, \quad (\text{如图 11.17 所示})$$

线电流 \dot{I}_{aA} 通过在 A 点应用 KCL 求出。由图 10.18 有

$$\dot{I}_{AB} = \dot{I}_{aA} + \dot{I}_{CA}$$

$$\dot{I}_{aA} = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}$$

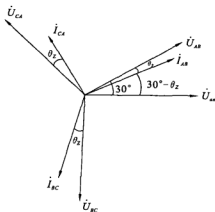


图 10.17 对称相电流

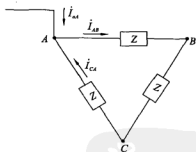


图 10.18 Δ 形负载的电流流向

在相量图上很容易得出 $\dot{I}_{aA} = \sqrt{3} \dot{I}_{AB}$, 见图 10.19, 所以

$$\dot{I}_L = \sqrt{3} \dot{I}_P$$

(10-16)

由图 10.17 可知

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_{an} \angle 30^\circ$$

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z} = \frac{U_m \angle 30^\circ}{Z} = I_m \angle 30^\circ - \theta_Z \quad (\theta_Z \text{ 由负载决定})$$

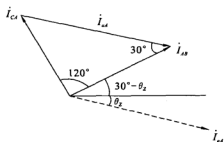


图 10.19 与图 10.18 对应的相量图

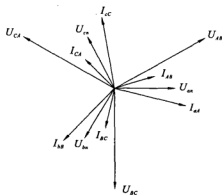


图 10.20 Y-Δ 形接法的相量图

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z} = \frac{U_m \angle +150^\circ}{Z} = I_m \angle 150^\circ - \theta_Z$$

由图 10.19 可知

$$\begin{aligned} \dot{I}_{aA} &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = I_m e^{j(30^\circ - \theta_Z)} - I_m e^{j(150^\circ - \theta_Z)} \\ &= I_m e^{j(-\theta_Z)} (e^{j30^\circ} - e^{j150^\circ}) = \sqrt{3} I_m e^{j(-\theta_Z)} = \sqrt{3} I_m \angle -\theta_Z \end{aligned}$$

由图 10.20 可知,电源相电压 \dot{U}_{AB} 超前电源相电压 30° ;负载相电流 \dot{I}_{AB} 滞后线电压(等于负载相电压)的相位角为 θ_Z , θ_Z 的值由负载的 R 和 L 决定;线电流 \dot{I}_{aA} 滞后电源相电压相位角为 θ_Z 以及滞后 \dot{I}_{AB} 相位角为 30° 。

10.2.3 其他的电源—负载接法

(1) Δ-Y 接法

将 Δ 形电源与 Y 形负载连接起来的接法称为 Δ-Y 接法,见图 10.21。

求解负载的电压和电流可以采用两种方法,第一种是将 Δ 形电源变换成 Y 形电源,然后用 Y-Y 接法的计算公式求解;第二种是根据网孔分析法求出负载的电压和电流。

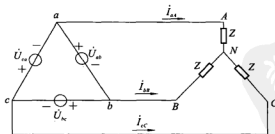


图 10.21 电源和负载 Δ-Y 接法

第一种方法:

从 10.1.3 所述 Y 形电源的相量关系可知

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{an} + \dot{U}_{nb} = \dot{U}_{an} - \dot{U}_{bn}$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{bn} + \dot{U}_{nc} = \dot{U}_{bn} - \dot{U}_{cn}$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{cn} + \dot{U}_{na} = \dot{U}_{cn} - \dot{U}_{an}$$

各相量之间的关系见图 10.22, 由图中相量可知

$$\dot{U}_{ab} = \sqrt{3}\dot{U}_{an}\angle 30^\circ$$

$$\dot{U}_{bc} = \sqrt{3}\dot{U}_{bn}\angle 30^\circ$$

$$\dot{U}_{ca} = \sqrt{3}\dot{U}_{cn}\angle 30^\circ$$

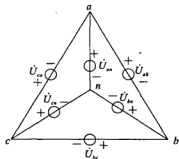


图 10.22 Δ 形电源变换为 Y 形电源

$$\dot{U}_{an} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ = \frac{U_P}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ \quad (U_P \text{ 是电源相电压})$$

$$\dot{U}_{bn} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ = \frac{U_P}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ - 120^\circ = \frac{U_P}{\sqrt{3}}\angle -150^\circ$$

$$\dot{U}_{cn} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ = \frac{U_P}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ - 120^\circ - 120^\circ = \frac{U_P}{\sqrt{3}}\angle 90^\circ$$

以下的任务是用图 10.22 所示的 Y 形电源与 Y 形负载相连接后 (见图 10.23), 按 10.2.1 所述计算公式求解负载电压、负载电流和功率。

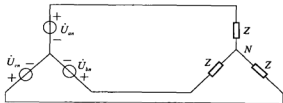


图 10.23 新的电源和负载 Y-Y 接法

(2) Δ - Δ 接法

将 Δ 形电源与 Δ 形负载连接起来的接法称为 Δ - Δ 接法, 见图 10.24。

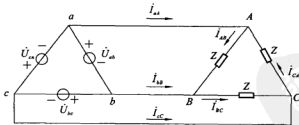


图 10.24 电源和负载 Δ - Δ 接法

Δ 形电源中, 有

$$\dot{U}_{ab} = V_P\angle 0^\circ, \quad \dot{U}_{bc} = V_P\angle -120^\circ, \quad \dot{U}_{ca} = V_P\angle 120^\circ$$

每相电源均加在一相负载上, 即

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB}, \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC}, \quad \dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA}$$

因此,相电流为

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z}, \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z}, \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z}$$

在节点 A、B、C 各点运用 KCL 得到三个线电流分别为

$$\dot{I}_{aA} = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \quad \dot{I}_{bB} = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}, \quad \dot{I}_{cC} = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$$

如前所述,其结果为

$$I_L = \sqrt{3} I_P$$

四种接法的相量值见表 10.1。

表 10.1 四种电源负载接法的电压和电流相量

连接类型	相电压 / 相电流	线电压 / 线电流
Y-Y	$U_m = U_P \angle 0^\circ$ $U_{bm} = U_P \angle -120^\circ$ $U_{cm} = U_P \angle +120^\circ$	$U_{ab} = \sqrt{3} U_P \angle 30^\circ$ $U_{bc} = U_{ab} \angle -120^\circ$ $U_{ca} = U_{ab} \angle +120^\circ$ $I_a = U_m / Z_Y$ $I_b = I_a \angle -120^\circ$ $I_c = I_a \angle +120^\circ$
Y-Δ	$U_m = U_P \angle 0^\circ$ $U_{bm} = U_P \angle -120^\circ$ $U_{cm} = U_P \angle +120^\circ$ $I_{AB} = U_{AB} / Z_\Delta$ $I_{BC} = U_{BC} / Z_\Delta$ $I_{CA} = U_{CA} / Z_\Delta$	$U_{ab} = U_{AB} = \sqrt{3} U_P \angle 30^\circ$ $U_{bc} = U_{BC} = U_{ab} \angle -120^\circ$ $U_{ca} = U_{CA} = U_{ab} \angle +120^\circ$ $I_a = I_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ$ $I_b = I_a \angle -120^\circ$ $I_c = I_a \angle +120^\circ$
Δ-Δ	$U_{ab} = U_P \angle 0^\circ$ $U_{bc} = U_P \angle -120^\circ$ $U_{ca} = U_P \angle +120^\circ$ $I_{AB} = U_{ab} / Z_\Delta$ $I_{BC} = U_{bc} / Z_\Delta$ $I_{CA} = U_{ca} / Z_\Delta$	$I_a = I_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ$ $I_b = I_a \angle -120^\circ$ $I_c = I_a \angle +120^\circ$
Δ-Y	$U_{ab} = U_P \angle 0^\circ$ $U_{bc} = U_P \angle -120^\circ$ $U_{ca} = U_P \angle +120^\circ$	$I_a = \frac{U_P \angle -30^\circ}{\sqrt{3} Z_Y}$ $I_b = I_a \angle -120^\circ$ $I_c = I_a \angle +120^\circ$

注:规定正向序列。

10.2.4 Y-Y 形接法和 Y-△ 形接法的电路总功率

计算总功率的过程是对每一相负载的功率进行计算后,将三个相的功率相加而得到。对于对称负载,可以先计算一相的功率后,再乘 3 倍得到总功率。

(1) Y-Y 接法的总功率

一相负载上的功率为

$$\begin{aligned} P &= U_P I_P \cos \theta_Z \\ U_P &= \frac{U_L}{\sqrt{3}}, \quad I_P = I_L \\ P &= \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_Z \\ P_{\Sigma} &= 3P = 3 \frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_Z = \sqrt{3} U_L I_L \cos \theta_Z \end{aligned} \quad (10-17)$$

(2) Y-△ 接法的总功率

一相负载上的功率为

$$\begin{aligned} P &= U_P I_P \cos \theta_Z \\ U_P &= U_L, \quad I_P = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \\ P &= U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta_Z \\ P_{\Sigma} &= 3P = 3U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta_Z = \sqrt{3} U_L I_L \cos \theta_Z \end{aligned}$$

由以上证明的结果可知,两种接法负载总功率的计算公式形式完全相同,但两者之间的线电流是不同的,Y-△ 接法的线电流是 Y-Y 接法的 3 倍。

【例 10.2】 对称三相三线制的线电压为 380 V,每相负载阻抗为 $Z = 10 \angle 53.1^\circ \Omega$,求负载 Y 形连接和 △ 形连接时的电流和三相功率。

解 正弦稳态电路中,如不加以说明,电流和电压的大小都是指有效值。

(1) 负载为 Y 形连接时,电路如图 10.25(a) 所示。

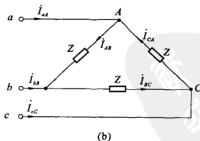
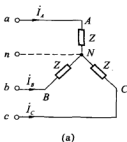


图 10.25

相电压的有效值为

$$U_P = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

设电源中性点与负载中性点用短路线连接, 负载 A 相的相电压为

$$\dot{U}_A = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

则

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = 22 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

根据对称关系可知另外两个相的电流为

$$\dot{I}_B = 22 \angle -53.1^\circ - 120^\circ = 22 \angle -173.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = 22 \angle -53.1^\circ + 120^\circ = 22 \angle 66.9^\circ \text{ A}$$

三相负载总功率为

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \theta_z = \sqrt{3} \times 380 \times 22 \times \cos 53.1^\circ = 8688 \text{ W}$$

(2) 负载为 Δ 形连接时, 电路如图 10.25(b) 所示, 设每相负载电压为

$$\dot{U}_{AB} = 380 \angle 0^\circ \text{ V}$$

则

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z} = \frac{380 \angle 0^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = 38 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

根据对称关系可知另外两个相的电流为

$$\dot{I}_{BC} = 38 \angle -173.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CA} = 38 \angle 66.9^\circ \text{ A}$$

线电流由图 12.20 相量图可知

$$\dot{I}_{aA} = \sqrt{3} I_P \angle -\theta_z - 30^\circ = \sqrt{3} I_P \angle -83.1^\circ \text{ A}$$

由对称关系有

$$\dot{I}_{bB} = \sqrt{3} I_P \angle -203.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{cC} = \sqrt{3} I_P \angle 36.9^\circ \text{ A}$$

三相负载总功率为

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \theta_z = \sqrt{3} \times 380 \times \sqrt{3} \times 38 \cos 53.1^\circ = 26064 \text{ W}$$

结果表明, 在线电压相同的情况下, 负载由 Y 形接法改为 Δ 形接法后, 相电流增加到原来的 $\sqrt{3}$ 倍, 线电流增加到原来的 3 倍, 后者的功率是前者的 3 倍。

10.3 负载不对称的三相电路

不对称的三相系统分为两类。一类是各相电源电压在幅度上不相等或在相位上分布不均匀。另一类是负载阻抗的模或阻抗角不一致。结果是: 每相负载上电压幅度不相等, 电流幅度不相等, 电源中性点与负载中性点之间有电位差, 中性点位移使负载工作状态没有独立性。

对于不对称三相系统, 经常采用网孔分析方法和节点分析方法。由于生产厂商都极力保

证发电机的质量,所以一般情况下电源是对称的,所以仅就第二类情况进行分析。

10.3.1 不对称 Y-Y 接法

有中线时,如果每相负载阻抗不相同,其结果是,每相负载上的电压是对称的,但负载电流不同, $\dot{U}_{Nn} \neq 0$ 。

【例 10.3】 图 10.26 所示电路为一有中线的不对称 Y-Y 连接的三相电路。假设中线阻抗为零, $R_A = R_B = 48.4 \, \Omega$, $R_C = 242 \, \Omega$, 电源是对称的, 相电压为 220 V, 试求电流 \dot{I}_{aA} 、 \dot{I}_{bB} 、 \dot{I}_{cC} 和中线电流 \dot{I}_{Nn} 。

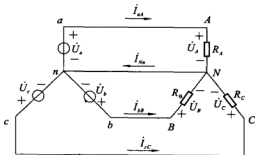


图 10.26

解 由于有中线,而中线阻抗为零,则

$$\dot{U}_A = \dot{U}_a = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_b = 220 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_c = 220 \angle 120^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_{aA} = \frac{\dot{U}_A}{R_A} = \frac{220 \angle 0^\circ}{48.4} = 4.55 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{bB} = \frac{\dot{U}_B}{R_B} = \frac{220 \angle -120^\circ}{48.4} = 4.55 \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{cC} = \frac{\dot{U}_C}{R_C} = \frac{220 \angle 120^\circ}{242} = 0.91 \angle 120^\circ \text{ A}$$

在 N 点应用 KCL, 可得

$$\begin{aligned} \dot{I}_{Nn} &= \dot{I}_{aA} + \dot{I}_{bB} + \dot{I}_{cC} \\ &= 4.55 \angle 0^\circ + 4.55 \angle -120^\circ + 0.91 \angle 120^\circ \\ &= 3.64 \angle -60^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

由本例可知, 不对称 Y 形负载三相电路有中线存在, 且中线阻抗可以忽略时, 负载的相电压还是对称的, 但各相电流不同, 中线电流也不为零。

无中线时, 除了各负载上电流不相同外, 各负载两端的电压也不相同, 这一点在下例中可得到证明。

【例 10.4】 若例 10.3 中的中线断开, 其他条件不变, 重求负载相电压。

解 在图 10.26 中, 将 $n-N$ 视为开路, 按图 10.13 的电路变换, 可列出方程式

$$\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right) \dot{U}_{Nn} = \frac{\dot{U}_A}{R_A} + \frac{\dot{U}_B}{R_B} + \frac{\dot{U}_C}{R_C}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{U}_{Nn} &= \frac{\frac{\dot{U}_A}{R_A} + \frac{\dot{U}_B}{R_B} + \frac{\dot{U}_C}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} \\ &= \frac{\frac{220 \angle 0^\circ}{48.1} + \frac{220 \angle -120^\circ}{48.1} + \frac{220 \angle 120^\circ}{242}}{\frac{1}{48.2} + \frac{1}{48.2} + \frac{1}{242}} \\ &= -80 \angle 120^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\dot{U}_A = \dot{U}_a - \dot{U}_{Nn} = 220 \angle 0^\circ + 80 \angle 120^\circ = 192 \angle 21.2^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_b - \dot{U}_{Nn} = 220 \angle -120^\circ + 80 \angle 120^\circ = 192 \angle -14.1^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_c - \dot{U}_{Nn} = 220 \angle 120^\circ + 80 \angle 120^\circ = 300 \angle 120^\circ \text{ V}$$

由本例可知, 不对称 Y 形负载无中线时, 负载的电压不再是对称的, 出现有的电压高, 有的电压低的现象, 这可能使有的负载因电压高于额定值而损坏, 有的负载因电压低于额定值而不能正常工作。

为了使负载能够正常工作, 应使负载尽可能对称; 保证中线的连接, 在负载出现不对称情况时, 每相负载的电压能够维持一致。

不对称三相电路总功率计算过程: 求出每一相负载的电压和电流, 接着依次计算每一相的功率, 将三相的负载功率相加为总功率。

【例 10.5】 如图 10.27 所示不对称 Y-Y 三相电路, 负载 $Z_1 = 10 \angle 30^\circ \Omega$, $Z_2 = 20 \angle 60^\circ \Omega$, $Z_3 = 15 \angle -45^\circ \Omega$, 线电压有效值为 440 V, 求: (1) 线电流; (2) 负载中点 N 和电源中点 n 之间的电压 U_{Nn} 。

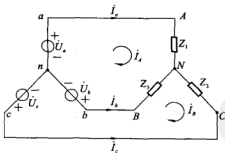


图 10.27

解 设网孔电流 \dot{I}_A 和 \dot{I}_B 如图 10.27 所示, 网孔方程为

$$(Z_1 + Z_2) \dot{I}_A - Z_2 \dot{I}_B = \dot{U}_a - \dot{U}_b$$

$$-Z_2 \dot{I}_A + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_B = \dot{U}_b - \dot{U}_c$$

于是

$$\dot{U}_a - \dot{U}_b = 254 - 254 \angle 120^\circ = 381 - j220$$

$$\dot{U}_b - \dot{U}_c = 254 \angle 120^\circ - 254 \angle -120^\circ = j440$$

$$Z_1 = 10 \angle 30^\circ = 8.66 + j5 \, \Omega$$

$$Z_2 = 20 \angle 60^\circ = 10 + j17.32 \, \Omega$$

$$Z_3 = 15 \angle -45^\circ = 10.61 - j10.61 \, \Omega$$

代入网孔方程,可得

$$(18.66 + j22.32) \dot{I}_A - (10 + j17.32) \dot{I}_B = 381 - j220$$

$$-(10 + j17.32) \dot{I}_A + (20.61 + j6.71) \dot{I}_B = j440$$

解得

$$\dot{I}_A = 6.01 \angle 26.25^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_B = 25.8 \angle 71.06^\circ \text{ A}$$

线电流

$$\dot{I}_a = \dot{I}_A = 6.01 \angle 26.25^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_B - \dot{I}_A = 25.8 \angle 71.06^\circ - 6.01 \angle 26.25^\circ = 21.95 \angle 82.2^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_c = -\dot{I}_B = 25.8 \angle -108.94^\circ \text{ A}$$

负载中点 N 至电源中点 n 之间的电压为

$$\dot{U}_{nN} = \dot{U}_a - \dot{U}_{aN} = \dot{U}_a - Z_1 \dot{I}_a = 254 \angle 0^\circ - 10 \angle 30^\circ \times 6.01 \angle 26.25^\circ$$

$$= 254 \angle 0^\circ - 60.1 \angle 56.25^\circ$$

$$= 254 - (33.39 + j49.97) = 220.61 - j49.97$$

$$= 226.2 \angle -12.75^\circ \text{ V}$$

10.4 三相电路的功率测量

10.4.1 瓦特表的用法

瓦特表有四个接线端子,电压线圈上的“+、-”端子和电流线圈的“+、-”端子。当电压的两个接线端子与被测电路的两条线的电压正确相接,电流的接线端子正确串入所测线路中时,指针偏转,指针所指的数字为负载的功率值。

瓦特表的电压端子通到仪表内的磁场线圈,被测电路的电压越高,磁场线圈中的电流越大,产生的磁感应强度 B 越高,即 $B \propto U$ 。瓦特表的电流端子接到仪表内的指针转动线圈,当电流流过指针所在转轴上的线圈时,受磁场作用,指针所在转轴上的线圈产生了电磁力矩。

$$M \propto B \cdot I \propto U \cdot I \propto P$$

因此指针转动的角度反映了功率的大小。

10.4.2 三相功率的三种测量方法

三相电路功率测量内容包括平均功率、无功功率、电能(电度)及功率因数的测量,这里只讨论三相电路的有功功率的测量,分为一表法、二表法和三表法。

(1) 一表法

用于测量单相功率和对称三相四线制的三相电路的功率,其测量线路见图10.28(a)、

(b)。瓦特计测的是其中任一相的功率(如 A 相),瓦特计的电流线圈与 A 相的负载串联,电压线圈与 A 相负载并联(即跨接在 A 和 N 两点之间),A 相负载的平均功率为

$$P_A = U_P I_P \cos \theta_Z$$

三相的功率是将测得的单相功率乘以 3 得到。

(2) 二表法

二表法适用于三相三线制的对称或不对称的三相电路,两个瓦特表的电压线圈无“*”标记的端子接在第三个相线上,如图 10.28(d)、(e)。两个表的读数之和为三相电路的总功率。

(3) 三表法

三表法适用于三相四线制电路,如图 10.28(c) 所示,分别将三只瓦特计接入 A 相、B 相和 C 相,测得的功率相加得到总功率。

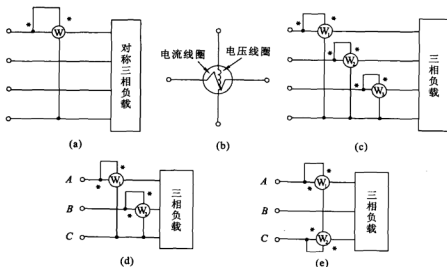


图 10.28 测量三相功率的三种方法

一表法和三表法容易理解,对于二表法给出如下证明:

瓦特表 1 测量 ab 之间负载的功率 P_1 , 即

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{ab} I_{aA} \cos(\theta_Z + 30^\circ) \\ &= U_L I_L \cos(\theta_Z + 30^\circ) \quad (\text{见图 10.29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= U_{ac} I_{cC} \cos[90^\circ - (120^\circ - \theta_Z)] \\ &= U_L I_L \cos(\theta_Z - 30^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{总功率 } P &= P_1 + P_2 \\ &= U_L I_L [\cos(\theta_Z + 30^\circ) + \cos(\theta_Z - 30^\circ)] \\ &= U_L I_L [\cos\theta_Z \cos 30^\circ - \sin\theta_Z \sin 30^\circ + \\ &\quad (\cos\theta_Z \cos 30^\circ + \sin\theta_Z \sin 30^\circ)] \\ &= U_L I_L 2 \cos\theta_Z \cos 30^\circ \\ &= \sqrt{3} U_L I_L \cos\theta_Z \end{aligned}$$

该结果与对称 Y-Y 连接电路负载总功率计算公式完

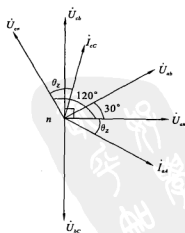


图 10.29

全一致,证明二表法是正确的。

10.5 与后续课程的关系

在后续的实用电工技术(供电技术)、电机与电力拖动、电气控制技术、工厂供电等课程中,要较多地用到三相电的知识。

三相电不是三个单相电的简单相加,而实用的三相电是指对称三相电、三相电路的电源和负载应作正确的Y- Δ 联接,三相电路才能正常工作,也才能发挥三相电的优势。

目前,交流电在动力方面的应用,几乎都是属于三相制。这是由于三相制在发电、输电和用电方面都有许多优点。

在输送功率相同、电压相同、距离相同、功率因数和线路损耗相等的情况下,采用三相输电比用单相输电大大节省输电用铜(铝)量。

单相电动机的瞬时功率是随时间交变的,时大时小,三相电动机的转矩变化,会使电动机产生振动和噪声,功率越大,振动和噪声越大;但对称三相电路的总瞬时功率是恒定的,因而三相电动机能产生恒定的转矩,三相电动机比同容量的单相电动机性能好,工作稳定可靠,振动和噪声小。

三相电动机比同容量的单相电动机结构简单,性能好,工作可靠,造价低。实际中,除了适应只有单相电源的场合以外,500 W以上的电动机,绝大多数都是三相的。

在三相四线制供电系统中,各相负载设计时应尽可能达平衡,三相负载越平衡,中性线电流越小,三相负载达平衡时,中性线电流为0,这时可以不用中线,成为三相三线制。多数情况下,中性线电流比各相负载电流小,可选取用中性线导线较相线导线截面小,这样减少输电用铜(铝)量。但在三相四线制供电负载不平衡时,中性线十分重要,有中性线才能保证各相负载得到预想的额定工作电压,为此,对中性线有如下要求:

(1) 中性线上不能装熔断器,中性线不能单独装开关;

(2) 中性线应有足够的机械强度且阻抗要小。

实用中,要注意电源的连接方式和负载连接方式的搭配问题,若三相负载采用Y连接,电源的连接方式是Y连接,这时每相负载相电压等于电源相电压(即电源线电压的 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍);若三相负载采用 Δ 连接,电源可能是Y也可能是 Δ 连接,每相负载相电压等于三相电源线电压。实用电工中,一般给出电源的线电压即可,可不给出电源的连接方式,三相负载采用Y还是 Δ 连接,是由每相负载的额定电压与电源的线电压的关系而定,负载相电压等于电源线电压的 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍时,负载必须选用Y连接;负载相电压等于电源线电压时,负载必须选用 Δ 连接。

10.6 实用电路举例

10.6.1 三相负荷的不平衡

低压电网三相负荷失衡的原因可能是:各相负荷看上去比较接近,各相电流也较相近,

但中性线电流却很大,甚至超过最大相电流,这是因为三相负荷的性质不同所引起的。如某三相四线供电线路,测得相电压 $U_A = U_B = U_C = 220 \text{ V}$, $I_A = I_B = 4 \text{ A}$, $I_C = 3.2 \text{ A}$, $I_N = 4.2 \text{ A}$ 。

为了验证 I_N 的值,测得各相负荷的相位 $|\phi_A| = |\phi_B| = 40^\circ$, $\phi_C = 0^\circ$, 则 Z_A 和 Z_B 中必有一相为感性,一相为容性。设 Z_A 为感性, Z_B 为容性,向量图如图 10.30 所示。

$$|I_A + I_B| = 2\cos 20^\circ I_A = 7.5 \text{ A}$$

则 $I_N = |I_A + I_B + I_C| = 4.3 \text{ A}$, 理论计算和仪表测量结果基本吻合,说明中性线电流大是因三相负荷的性质不同所引起。

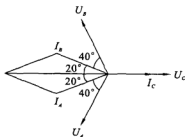


图 10.30 感性三相负荷不平衡向量图

10.6.2 三相负荷不平衡对用户的影响

三相负荷不平衡,一相或两相负载偏大,必将增大线路中的电压降,降低电能质量,影响用户的电器使用。变压器烧毁、线路烧断、开关设备烧坏,影响用户供电,轻则带来不便,重则造成较大的经济损失,如停电造成养殖的动植物死亡,或不能按合同供货被惩罚等。中性线烧断还可能造成用户大量低压电器被烧毁。

习 题

10.1 三相四线制供电线路可以提供两种电压,火线与零线之间的电压叫做(),火线与火线之间的电压叫做()。

10.2 如果三相对称负载连接成三角形,已知连接在每相负载电路中的电流表的读数为 10 A ,则线电流用电表测定其读数为()。

- (A) 10 A (B) $10\sqrt{3} \text{ A}$ (C) $10/\sqrt{3} \text{ A}$ (D) $10\sqrt{3}\cos 29^\circ \text{ A}$

10.3 如题图所示的对称三相负载,已知线电压 $U_l = 380 \text{ V}$,负载阻抗 $Z = 6 + j8 \Omega$,求各项负载电流和负载总功率。

10.4 在对称三相四线制供电线路上,每相上连接相同的灯泡且正常发光,当中性线断开时,将会出现()。

- (A) 三个灯泡都变暗
(B) 三个灯泡都因过亮而烧坏
(C) 仍然能正常发光

10.5 如果三相对称负载连接成三角形,已知连接在每相负载电路中的电流表的读数为 5 A ,则线电流用电表测定其读数为()。

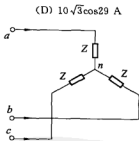
- (A) 5 A (B) $5\sqrt{3} \text{ A}$
(C) $5/\sqrt{3} \text{ A}$ (D) $5\sqrt{3}\cos 29^\circ \text{ A}$

10.6 如题图所示的 Y-Y 联接对称三相电路中,原来电流表的读数为 1 A ,后因 A 线断路(即 S 打开),则电流表的读数变为()。

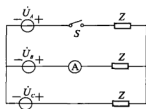
- (A) 1 A (B) $\sqrt{3}/4 \text{ A}$ (C) $\sqrt{3}/2 \text{ A}$ (D) 0.5 A

10.7 题图所示三相电路中,开关 S 断开时线电流为 2 A ,开关 S 闭合后 I_A 为()。

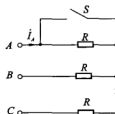
- (A) 6 A (B) 4 A (C) $\sqrt{10} \text{ A}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ A}$



题 10.3 图



题 10.6 图



题 10.7 图

10.8 与对称三相电源相接的星形对称负载总功率为 10 kW, 线电流为 10 A, 若改为三角形连接, 则总功率为()kW, 线电流为()A。

10.9 对称三相负载作星形连接接至线电压为 380 V 的对称三相电压源, 线电流为 2 A。若将负载改为三角形连接后接至线电压为 220 V 的对称三相电压源, 线电流为() A。

第 11 章 磁耦合电路

在第 2 章关于电感元件的介绍中提到,当交流电流流过电感元件时,电感元件两端的电压值与流过元件的电流变化率成正比,即: $u_1 = L \frac{di_1}{dt}$, 比例系数 L 为电感(也称自感)。当一个电感元件由于交流电流作用产生交变磁通,而该磁通作用于另一电感线圈时,后者两端将出现电压,实质上,这一电压也是因 $\frac{di_1}{dt}$ 引起,即: $u_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt}$, 下标意味着线圈 1 对线圈 2 的作用,比例系数 M_{21} 称为互感,用以和自感相区别。互感是一个电感在另一个电感中产生电压的能力,在电工、电子技术领域中,互感器和变压器的应用非常广泛,掌握这一部分内容具有重要意义。

11.1 互感与耦合

11.1.1 互感

由自感量的计算公式 $L = \frac{N^2 \mu S}{l}$ 可知,自感只与具体结构、材料和线圈匝数的平方有关。而互感的计算公式为 $M = k \frac{N_1 N_2 \mu S}{l}$, 与具体结构、材料和两线圈匝数的乘积有关。所以互感与自感具有相同的计算单位——亨利(H)。可以证明:

$$M_{21} = M_{12} = M$$

在电路图中, M 的表示方法为双箭头,见图 11.1。

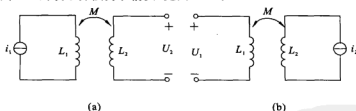


图 11.1 两线圈互感耦合

(a) 流过 L_1 的电流在 L_2 上产生开路电压 U_2 ; (b) 流过 L_2 的电流在 L_1 上产生开路电压 U_1

由图 11.1(a) 可得

$$u_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (11-1)$$

由图 11.1(b) 可得

$$u_1(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (11-2)$$

M 均为正值,电压的正负取决于瞬时电流是增加还是减少, M 的大小与 L_1 、 L_2 和相对位置有关,耦合系数 K 用于表达互感和自感的关系。

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (11-3)$$

11.1.2 同名端规则

在圆柱体上绕着线圈 1 和线圈 2,线圈 1 上的电流随着时间增加,根据导线绕向并按照右手螺旋法则可知,磁通 Φ_1 的方向自上而下。线圈 2 上也有电流流过,按照右手螺旋法则可知,磁通 Φ_2 的方向自上而下。规定线圈 1 和线圈 2 的上端点为同名端,即:电流 1 在线圈 1 中产生的磁通与电流 2 在线圈 2 中产生的磁通方向一致时,两电流流入的端点为同名端,用“•”表示。

以上内容是在知道结构时作出的分析和得出的结论,实际情况下很难知道电感的线圈绕向,因此往往通过实测来进行判断。测量电路见图 11.2。

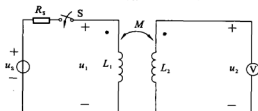


图 11.2 测量同名端的电路

图中 u_s 和 R_s 串联表示直流电源,用开关与组成互感器的 L_1 相连, L_2 与高内阻直流电压表相连,开关从开启到闭合的瞬间,观察电压表的指针偏转方向,若指针正向偏转,说明 L_1 上端和 L_2 上端是同名端,上端电压极性为正,否则 L_1 上端和 L_2 下端是同名端。

同名端规则:从一线圈同名端流入的电流在另一线圈同名端产生的电压的极性为正。或:从一线圈同名端流出的电流在另一线圈同名端产生的电压的极性为负。

几种电流流向及对应的互感电压极性见图 11.3。

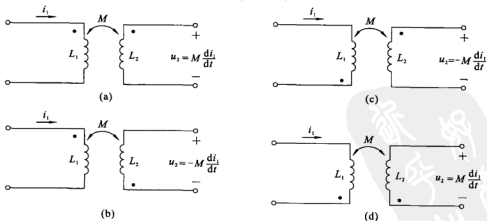


图 11.3 互感电压极性与同名端的对应关系

- 【例 11.1】在如图 11.4 所示电路中, (1) 当 $i_1 = 0$ 和 $i_2 = 5\sin 45t$ A 时, 确定 u_1 的值;
 (2) 当 $i_1 = -8e^{-t}$ A 和 $i_2 = 0$ 时, 确定电压 u_2 的值。

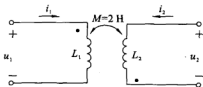


图 11.4

解 (1) 因为电流 i_2 从右边线圈的非同名端流入, 从而在左边线圈感应产生的电压的正极在非同名端, 因此开路输出电压为

$$u_1 = -2 \times 45 \times 5 \cos 45t = -450 \cos 45t \text{ V}$$

这是右边线圈电流 i_2 产生的时变磁通量在左边线圈产生的电压, 由于左边线圈没有电流, 所以自感对电压 u_1 没有贡献。

(2) 同名端有电流流入, 但 u_2 的正参考极性位于非同名端, 因此

$$u_2 = (-2) \times (-145) \times (-8e^{-t}) = -16 e^{-t} \text{ V}$$

11.1.3 互感电压与自感电压的组合

通常情况下, 每一个线圈上的电流都不等于零, 每一个线圈上产生的互感电压源于另一个线圈上流过的电流。该互感电压与自感电压无关, 但是却叠加在自感电压上。即 L_1 上的电感电压 $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$, 设电流 i_1 和电流 i_2 都是从同名端流入线圈, 图 11.5(a) 所示电路中 L_1 两端的电压为

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (11-4)$$

同理, L_2 两端的电压为

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (11-5)$$

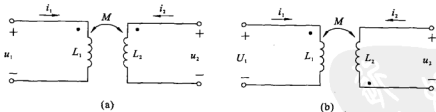


图 11.5 互感电压与自感电压的组合

图 11.5(b) 所示电路中 L_1 两端的电压为

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (11-6)$$

同理, L_2 两端的电压为

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (11-7)$$

11.1.4 耦合电感的串联与并联

(1) 耦合电感的串联

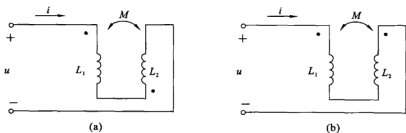


图 11.6 耦合电感的串联

耦合电感的顺接串联: 电流从两个电感的同名端流入, 每个电感中的磁场处于增强状态。由 KVL 可得

$$u = u_{L_1} + u_{L_2} = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} \right)$$

串联状态下, $i_1 = i_2 = i$, 且 $M_{12} = M_{21} = M$, 所以

$$u = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

耦合电感的顺接串联时的等效电感为

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M \quad (11-8)$$

耦合电感的反接串联: 电流从两个电感的异名端流入, 每个电感中的磁场处于削弱状态。由 KVL 可得

$$u = u_{L_1} + u_{L_2} = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} \right) + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{21} \frac{di_1}{dt} \right)$$

串联状态下, $i_1 = i_2 = i$, 且 $M_{12} = M_{21} = M$, 所以

$$u = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

耦合电感的反接串联时的等效电感为

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \quad (11-9)$$

(2) 耦合电感的并联

① 耦合电感的同名端并联

将 L_1 和 L_2 的同名端连接, 见图 11.7(a), 应用网孔分析方法得到

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - L_1 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} = u \quad (11-10)$$

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (11-11)$$

从式(11-10)中提取 $\frac{di_2}{dt}$ 并带入式(11-11), 得到

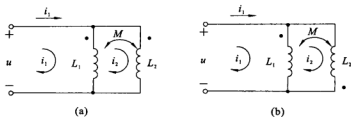


图 11.7 耦合电感的并联

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di_1}{dt} = L_{eq} \frac{di_1}{dt} \quad (11-12)$$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

② 耦合电感的异名端并联

将 L_1 和 L_2 的异名端连接, 见图 11.7(b), 应用网孔分析法得到

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - L_1 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = u \quad (11-13)$$

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (11-14)$$

由式(11-13)可得

$$u - L_1 \frac{di_1}{dt} = -(L_1 + M) \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{L_1 \frac{di_1}{dt} - u}{L_1 + M}$$

将 $\frac{di_2}{dt}$ 代入式(11-14)可得

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{L_1 \frac{di_1}{dt} - u}{L_1 + M} = 0$$

$$-(L_1 + M) \frac{di_1}{dt} + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{L_1 \frac{di_1}{dt} - u}{L_1 + M} = 0$$

$$u = \frac{-(L_1 + M)^2 + (L_1 + L_2 + 2M)L_1}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di_1}{dt}$$

$$= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di_1}{dt}$$

$$= L_{eq} \frac{di_1}{dt}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \quad (11-15)$$

11.2 空心变压器

空心变压器也称线性变压器,是由两个互相耦合线圈组成的四端器件,可用于无线电广播和电视设备,工作频率在射频段或更高频率波段,其电路见图 11.8。

图 11.8 中有两个网孔电流,第一个网孔包括激励源和 L_1 ,称为初级,第二个网孔包括负载和 L_2 ,称为次级,两个电阻分别表示初级和次级线圈的导线电阻以及各种损耗。

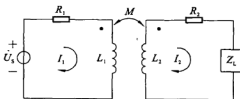


图 11.8 空心变压器的电路模型

11.2.1 反射阻抗及电流

根据相量法和假设网孔电流的方向,可以写出左、右网孔的 KVL 方程,即

$$(R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_s \quad (11-16)$$

$$-j\omega M \dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L) \dot{I}_2 = 0 \quad (11-17)$$

用 Z_{11} 表示左边网孔的阻抗,用 Z_{22} 表示右边网孔的阻抗,则

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1, \quad Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L$$

$$Z_{11} \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_s \quad (11-18)$$

$$-j\omega M \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 = 0 \quad (11-19)$$

将式(11-19)中的 \dot{I}_1 代表 \dot{I}_2 ,然后代入式(11-18),得到等效输入阻抗,即

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + Z_R \quad (11-20)$$

式中 Z_R ——反射阻抗, $Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}$ 。

等效输入阻抗 Z_{in} = 初级线圈阻抗 + 次级线圈和负载反射到初级线圈的阻抗。

对反射阻抗 Z_R 进行有理化,得到

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \quad (11-21)$$

Z_R 展开后的第一项为正值,反射阻抗使等效阻抗中的电阻部分(实部)增加,第二项说明次级回路中负载如果是感性的,反射到初级后成为容性的;如果负载是容性的,反射到初级后变为感性的。

从网孔方程可以求出初级回路电流 \dot{I}_1 和次级回路电流 \dot{I}_2 ,即

$$i_1 = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2} \dot{U}_s = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}} = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + Z_R} = \frac{\dot{U}_s}{Z_{in}} \quad (11-22)$$

$$i_2 = \frac{j\omega M}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2} \dot{U}_s \quad (11-23)$$

联立式(11-22)与式(11-23)后解得

$$i_2 = \frac{j\omega M}{Z_{22}} i_1 \quad (11-24)$$

【例 11.2】如图 11.9 所示电路中, $U_s = 10\sqrt{2}\cos 10t$ V, 求电流 i_1 、 i_2 和 1.6Ω 负载电阻吸收的功率。

解 将图 11.9(a) 中各参数改写为相量和阻抗形式, 重画图如图 11.9(b) 所示。

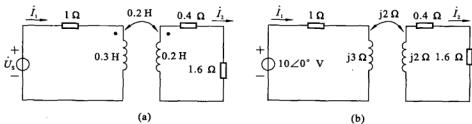


图 11.9

$$\begin{aligned} \text{反射阻抗为} \quad Z_R &= \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{10^2 \times 0.2^2}{(0.4 + 1.6) + j10 \times 0.2} \\ &= \frac{2^2}{2 + j2} = 1 - j1 \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{输入阻抗为} \quad Z_{in} &= Z_{11} + Z_R = (1 + j3) + (1 - j1) = 2 + j2 \Omega \\ \text{初级电流为} \end{aligned}$$

$$i_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{in}} = \frac{10\sqrt{2} \angle 0^\circ}{2 + j2} = 5 \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = \frac{j2 \times 5 \angle -45^\circ}{2 + j2} = j2.5\sqrt{2} \angle -90^\circ = 2.5\sqrt{2} \text{ A}$$

电流的时域表达式

$$i_1(t) = 5\cos(10t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.5\sqrt{2}\cos(10t) \text{ A}$$

1.6Ω 负载吸收的平均功率为

$$P_L = I_L^2 R_L = \left(\frac{2.5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 1.6 = 10 \text{ W}$$

11.2.2 去耦等效电路

(1) T 形去耦等效

式(11-4)和式(11-5)给出的电感 L_1 和电感 L_2 两端的电压分别为

$$U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad U_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

在第一个方程式右边加上 $-M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$, 等式仍然成立, 在第二个方程式右边加上 $-M \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$, 等式仍然成立, 于是

$$\begin{aligned} U_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \\ &= (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) \\ &= (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \end{aligned} \quad (11-25)$$

$$\begin{aligned} U_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ &= (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) \\ &= (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \end{aligned} \quad (11-26)$$

根据式(11-25)和式(11-26)画出的电路见图 11.10。

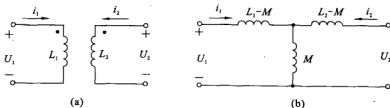


图 11.10 空心变压器以及同名端为共端的 T 形等效电路

由于等效后所画的电路为 T 形, 以上等效方法称为 T 形等效, 全称为同名端相连的 T 形去耦等效。

若图 11.10(a) 中某一电感的同名端的位置发生改变, 则式(11-25)和式(11-26)中的 M 用 $-M$ 代入, 得到

$$U_1 = (L_1 + M) \frac{di_1}{dt} - M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \quad (11-27)$$

$$U_2 = (L_2 + M) \frac{di_2}{dt} - M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} \quad (11-28)$$

与式(11-27)和式(11-28)对应的电路见图 11.11。

由于等效后将空心变压器的异名端连接起来, 该方法称为异名端为共端的 T 形去耦等效。

【例 11.3】 求如图 11.12 所示的空心变压器的 T 形等效电路, 证明其正确性。

解 由图 11.12(a) 可知, 两个电感的同名端都位于上端点, 是同名端为共端的结构, 根据已知 L_1 、 L_2 和 M 的数值, 画出 T 形等效电路, $L_1 - M = -10 \text{ mH}$ 位于左上支路, $L_2 - M =$

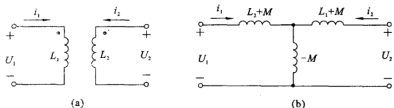


图 11.11 空心变压器以及异名端为共端的 T 形等效电路

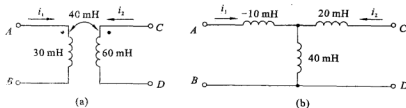


图 11.12

20 mH 位于右上支路,中间支路中的 $M = 40$ mH,见图 11.12(b)。

为了证明这两个电路是等效的,对两电路的输入端加上相同的激励电压 $U_{AB} = 10\cos 100t$ V,则在图 11.12(a) 电路中,有

$$i_1 = \frac{1}{30 \times 10^{-3}} \int 10\cos(100t) dt = 3.33\sin 100t \text{ A}$$

$$U_{CD} = M \frac{di_1}{dt} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100\cos 100t = 13.33\cos 100t \text{ V}$$

在图 11.12(b) 所示 T 形电路中,有

$$i_1 = \frac{1}{(-10 + 40) \times 10^{-3}} \int 10\cos(100t) dt = 3.33\sin 100t \text{ A}$$

$$U_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100\cos 100t = 13.33\cos 100t \text{ V}$$

证明两个电路等效。

(2) π 型去耦等效

将空心变压器去耦等效的另一种方法称为 π 形等效电路,该等效方法不常用,这里给出等效后的新电感值 L_A 、 L_B 和 L_C 。 π 形去耦等效电路见图 11.13,图中 L_1 、 L_2 为图 11.11(a) 所示电感。

【例 11.4】某变压器如图 11.12(a) 所示,求其 π 形等效电路。

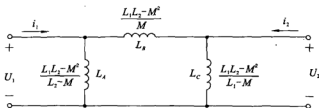
解 由于 $L_1 L_2 - M^2$ 是三种新电感值的公共项,所以先求出该值。

$$30 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} - (40 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ H}^2$$

因此求得

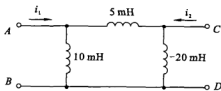
$$L_A = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{(L_2 - M)} = \frac{2 \times 10^{-4}}{20 \times 10^{-3}} = 10 \text{ mH}$$

$$L_B = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{M} = 5 \text{ mH}$$

图 11.13 π 形等效电路

$$L_C = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{(L_1 - M)} = -20 \text{ mH}$$

画出 π 形等效电路, 如图 11.14 所示。

图 11.14 与图 11.11(a) 对应的 π 形等效电路

检查结果, 设 $U_{AB} = 10\cos 100t \text{ V}$, CD 间开路, 利用分压定理得出开路输出电压

$$U_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}} 10\cos 100t = 13.33\cos 100t \text{ V}$$

计算结果与例 11.3 相同, 说明图 11.14 与图 11.11(a) 和图 11.11(b) 所示电路在电性上是等效的。

11.3 理想变压器

当变压器两电感由高磁导率的材料联系起来后, 变压器的两个电感处于极端的耦合状态, 耦合系数 $K = 1$, L_1 和 L_2 处于无穷大, $M = \sqrt{L_1 L_2}$ 也处于无穷大, 磁路中无损耗, 称处于这种状态的变压器为理想变压器。实际的变压器在制造时选用磁导率尽量高的材料、叠层及完善的磁屏蔽措施, 对实际变压器的计算可以采用理想变压器的公式。

11.3.1 匝数比和反射阻抗

由物理学可知, 线圈的自感与线圈的匝数的平方成正比。

$$L_1 \propto N_1^2, L_2 \propto N_2^2, \frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

令该比值为 n^2

有

$$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}$$

式中, n 称为线圈匝数比。

将理想变压器的次级与负载相连,见图 11.15,可写出图中网孔方程为

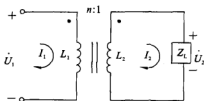


图 11.15 连接负载的理想变压器

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \quad (11-30)$$

$$-j\omega M \dot{I}_1 + (Z_L + j\omega L_2) \dot{I}_2 = 0 \quad (11-31)$$

将式(11-30)、式(11-31)与式(11-16)、式(11-17)相比较, R_1 和 R_2 被忽略,这是因为 L_1 和 L_2 被视为 ∞ 。

联立式(11-31)和式(11-30)可求得

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \dot{I}_1$$

$$\begin{aligned} Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} &= j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \\ &= j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{Z_L + j\omega L_2} \end{aligned}$$

对于理想变压器,耦合系数 $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$, 即 $L_1 L_2 = M^2$ 。

因 $L_2 = \frac{L_1}{n^2}$, 则

$$\begin{aligned} Z_{in} &= j\omega L_1 + \frac{\omega^2 \frac{L_1^2}{n^2}}{Z_L + j\omega \frac{L_1}{n^2}} \\ &= \frac{j\omega L_1 \left(Z_L + j\omega \frac{L_1}{n^2} \right) + \omega^2 \frac{L_1^2}{n^2}}{Z_L + j\omega \frac{L_1}{n^2}} \\ &= \frac{j\omega L_1 Z_L - \omega^2 \frac{L_1^2}{n^2} + \omega^2 \frac{L_1^2}{n^2}}{Z_L + j\omega \frac{L_1}{n^2}} \\ &= \frac{j\omega L_1 Z_L}{Z_L + j\omega \frac{L_1}{n^2}} \end{aligned}$$

因 $L_1 \rightarrow \infty$, $Z_L + j\omega \frac{L_1}{n^2} \approx j\omega \frac{L_1}{n^2}$

所以

$$Z_{in} = \frac{Z_L}{\frac{1}{n^2}} = n^2 Z_L \quad (11-32)$$

由上述内容得出如下结论:

(1) 将理想变压器的负载反射到初级回路, 反射阻抗等于负载的阻抗的 n^2 倍, 如果 $N_1 > N_2$, 则反射阻抗将增大, 反之将减小。当用反射阻抗进行初级回路的电参数计算时, L_1 的阻抗不再考虑。

(2) 与空心变压器有反射阻抗有区别, 理想变压器的反射阻抗只考虑阻抗的大小, 不改变阻抗的性质, 即: 感性阻抗折合到初级回路后的阻抗仍为感性阻抗, 容性阻抗折合到初级回路后仍为容性阻抗。

(3) 当负载短路时, $Z_L = 0, Z_{in} = n^2 Z_L = 0$; 负载开路时, $Z_L = \infty, Z_{in} = n^2 Z_L = \infty$ 。

(4) 当负载阻抗很大时, 理想变压器的数学模型无效。

【例 11.5】 功率放大器要求扬声器具有 4000Ω 的阻抗才能获得最大功率, 现有一阻抗只有 8Ω 的扬声器, 求理想变压器的匝数比。

解 因 $Z_{in} = n^2 Z_L$, 代入相应数值可得

$$4000 = n^2 \times 8$$

$$n = \sqrt{\frac{4000}{8}} = 22.4$$

11.3.2 电流变换

由式(11-31)可推导出

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2}$$

设 $j\omega L_2 \gg Z_L$, 则

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n$$

$$i_2 = n i_1 \quad (11-33)$$

当 $N_1 > N_2, n > 1$, 则 $i_2 > i_1$, 所以匝数少的线圈流过的电流大。初级电流 i_1 流入初级线圈同名端时, 次级电流 i_2 从次级线圈同名端流出。

在例 11.5 中, 若有 50 mA 电流 i_1 流过初级线圈, 由匝数比求得次级线圈电流为

$$i_2 = n i_1 = 22.4 \times 50 = 1120 \text{ mA} = 1.12 \text{ A}$$

扬声器的功率为: $1.12^2 \times 8 = 10 \text{ W}$

功率放大器提供的功率为: $0.05^2 \times 4000 = 10 \text{ W}$

由上述内容得出如下结论:

(1) 初级线圈中的电流与次级线圈中的电流之比与匝数比有关, 匝数少的线圈中流过的电流大。

(2) 与互感器或空心变压器不同,理想变压器是既不消耗能量,又不储存能量的电路元件。

(3) 当初级电流从同名端流入时,在次级线圈产生的电流从同名端流出,证明过程见附录。

11.3.3 电压变换

根据图 11.15,有

$$\dot{U}_2 = i_2 Z_L$$

以及

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{in} = I_1 n^2 Z_L$$

于是可得

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$$

又因

$$\dot{I}_2 = n \dot{I}_1$$

所以

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{n} \text{ 或 } \dot{U}_2 = \frac{1}{n} \dot{U}_1 \quad (11-34)$$

当 $N_2 > N_1$ 时, $\frac{1}{n} > 1$, $\dot{U}_2 > \dot{U}_1$, 匝数多的线圈电压高。

由上述内容得出如下结论:

(1) 初级线圈电压与次级线圈电压之比与匝数比有关,匝数越多的线圈两端的电压值越高。

(2) 电源电压正极加在初级线圈的同名端,在次级线圈产生的电压的正极性位于同名端。

【例 11.6】 在如图 11.16 所示电路中,求:(1) 电源电流 \dot{I}_1 ; (2) 输出电压 \dot{U}_o ; (3) 电源提供的复功率。

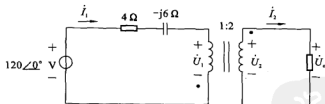


图 11.16

解 (1) $20\ \Omega$ 负载阻抗反射到初级回路的反射阻抗为

$$Z_R = n^2 \times 20 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 20 = 5\ \Omega$$

有反射阻抗时,初级回路的总阻抗为

$$Z_{in} = 4 - j6 + Z_R = 4 - j6 + 5 = 9 - j6 = 10.82 \angle -33.69^\circ\ \Omega$$

$$\text{初级电流 } \dot{I}_1 = \frac{120 \angle 0^\circ}{10.82 \angle -33.69^\circ} = 11.09 \angle 33.69^\circ \text{ A}$$

(2) 对照图 11.15, 初级线圈的同名端位置颠倒, 所以

$$\begin{aligned}\dot{I}_2 &= -n \dot{I}_1 = -5.545 \angle 33.69^\circ \text{ A} \\ \dot{U}_o &= 20 \dot{I}_2 = 20 \times (-5.545 \angle 33.69^\circ) = -110.9 \angle 33.69^\circ \\ &= 110.9 \angle (33.69^\circ + 180^\circ) \\ &= 110.9 \angle 213.69^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

(3) 电源提供的复功率为

$$S = \dot{U}_s \dot{I}_1^* = (120 \angle 0^\circ)(11.09 \angle -33.69^\circ) = 1330.8 \angle -33.69^\circ \text{ VA}$$

11.4 等效电路

理想变压器的特性使得对其进行简化成为可能, 简化结果消除了变压器的存在。戴维南定理有助于这种简化。简化形式分两种, 一种是将初级电源和阻抗折合到次级, 两个回路变成一个回路; 另一种是将次级阻抗折合到初级, 也只留下一个回路。

设初级回路的电源电压为 U_{s1} , 阻抗 Z_1 , 次级阻抗为 Z_2 , 见图 11.17。

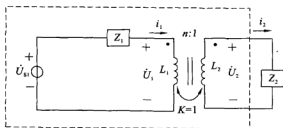


图 11.17 完整的变压器电路

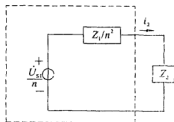


图 11.18 初级已折合到次级后的等效电路

11.4.1 初级电路反射到次级电路

用初级电路反射到次级电路的方法使求解电压 \dot{U}_2 和电流 \dot{I}_2 变得容易。

(1) 求开路电压 U_{2OC}

将负载 Z_2 开路, $i_2 = 0$, 于是 $i_1 = 0$ 。

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{s1}, \quad U_{2OC} = \frac{\dot{U}_1}{n} = \frac{\dot{U}_{s1}}{n}$$

(2) 求等效电阻

将 \dot{U}_{s1} 置零, 从 L_2 向左看过去的阻抗为 $\frac{Z_1}{n^2}$, 图 11.17 中虚线包围的电路与图 11.18 中虚线包围的电路等效。

11.4.2 次级电路反射到初级电路

用次级电路反射到初级电路的方法使求解电流 i_1 变得容易。

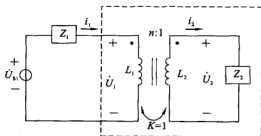


图 11.19 完整的变压器电路

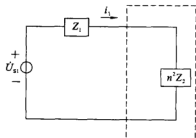


图 11.20 次级已折合到初级后的等效电路

(1) 求开路电压 U_{10c}

在 L_1 两端开路后 \dot{U}_{s1} 被切断, $U_1 = 0$, 则 $U_2 = 0$, 所以 $\dot{U}_{10c} = 0$ 。

(2) 求等效阻抗

将 Z_2 折合到初级线圈后的阻抗为 $n^2 Z_2$, 图 11.19 中虚线包围的电路与图 11.20 中虚线包围的电路等效。

【例 11.7】某电路如图 11.21 所示, 求: (1) 确定取代变压器和次级电路的等效电路; (2) 确定取代变压器和初级电路的等效电路。

解 (1) 由图 11.21 可知

$\dot{U}_{s1} = 50 \text{ V}$, $n = \frac{1}{10}$, 将负载电阻折合

到初级电路的反射阻抗为

$$n^2 Z_2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times 10000 = 100 \Omega$$

画出等效电路见图 11.22(a)。

(2) 将图 11.18 和图 11.21 进行对比, 得出

$$\frac{\dot{U}_{s1}}{n} = -\frac{50}{\frac{1}{10}} = -500 \text{ V} \quad (\text{取负号是由于次级线圈同名端位于下端})$$

$$\frac{Z_1}{n^2} = \frac{100}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 10000 \Omega = 10 \text{ k}\Omega$$

画出等效电路见图 11.22(b)。

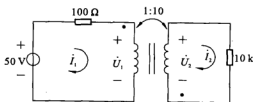


图 11.21

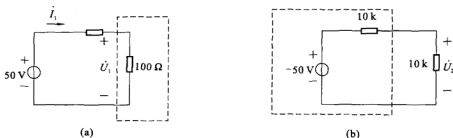


图 11.22 图 11.21 所示电路的简化

(a) 对变压器和次级电路进行戴维南等效的结果; (b) 对变压器和初级电路进行戴维南等效的结果。

11.5 与后续课程的关系

耦合电感和理想变压器是两种不同的电路元件,它们和以前所学过的受控源同属耦合元件。这两种元件是构成实际变压器电路模型的必不可少的元件。虽然在满足一定条件下,耦合电感可以具有理想变压器的伏安关系,但是,这两种元件的性质是不同的,耦合电感是记忆元件,而理想变压器是非记忆元件;耦合电感是储能元件,而理想变压器则不储能也不耗能。目前,理想变压器虽然要通过电磁感应现象来近似实现,但从理论上说,并非是实现的唯一途径。

耦合电感是耦合线圈的电路模型,耦合电感应用三个参数 L_1 、 L_2 和 M 来表征。实用中要注意同名端的定义及其表示方法。耦合线圈间的串联和并联,线圈间的互感可以在电路中添加电压源来等效。

变压器是电工电子技术中经常用到的器件。理想变压器是从实际变压器中抽象出来的,它的电路模型与耦合电感元件的符号相同,但它唯一的参数只是一个称之为变比或匝比的常数 n ,而不是 L_1 、 L_2 和 M 等参数。

理想变压器可以起到改变电压及改变电流大小的作用,还同时具备改变电阻大小的作用。在实际电工电子技术中,变压器有空心变压器和铁芯变压器,分别用在不同场合,对其做计算分析时常看成具有理想变压器的变压、变流和阻抗变换特性,但伴随有一定损耗。在电子技术中可利用理想变压器的阻抗变换特性来实现最大功率匹配,也可改变元件参数,使之符合设计要求。下面举一例说明。

某调谐放大器的并联谐振电路的谐振频率为 10 MHz,电路已算得其参数为 $L = 36.2 \mu\text{H}$, $C = 7 \text{ pF}$, 并联谐振回路损耗不计,放大器负载电阻 $R_L = 20 \Omega$ 且不可调,如图 11.23(a) 所示。但要使调谐放大器工作在具有较大功率和效率时的负载电阻(最佳负载电阻 R_L) 是 320Ω , 可利用的全耦合自耦合变压器如图 11.23(b) 所示,把 20Ω 负载电阻变成放大器所要的 320Ω , 全耦合自耦合变压器线圈的匝数比 $n = \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_{12}}{N_{12}} = \sqrt{\frac{20}{320}} = \frac{1}{4}$ (有时匝数比 n 用 $\frac{N_2}{N_1}$ 表示)。

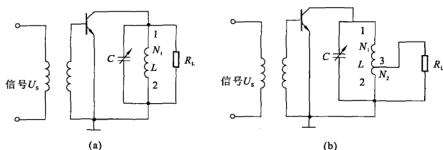


图 11.23 调谐放大器

实用电工电子技术中,很多电气器件利用了耦合电感和理想变压器这两种电路元件,例如,电磁铁、接触器、继电器等。电磁式和磁电式的电工仪表中也大量使用这两种耦合元件。例如,电流互感器。

电流互感器(英文缩写为CT)的文字标识符号为TA。其主要功能:(1)使仪表、继电器、二次设备与主电路绝缘;(2)扩大仪表、继电器等二次设备的应用范围。

电流互感器等效线路图如图 11.24 所示。电流互感器一次绕组导线很粗,匝数很少,二次绕组匝数多导线细。依据理想变压器的电流比与匝数比成反比原理,由 I_2 可推导出 I_1 的近似值。之所以只是近似值,是因为此时的变压器只是实际的铁心变压器,初级线圈匝数少,电感量不够大(离无穷大还差较远)。

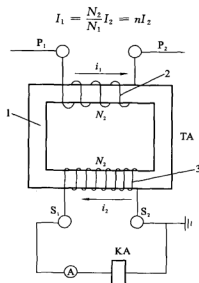
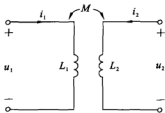
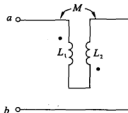


图 11.24 电流互感器

1—铁心;2—一次绕组;3—二次绕组



题 11.3 图

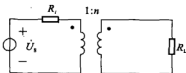


题 11.4 图

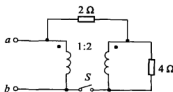
11.5 在题图所示电路中,若要 R_L 获得最大功率, n 需为()。

- (A) $\sqrt{\frac{R_L}{R_1}}$ (B) $\frac{R_L}{R_1}$ (C) $\sqrt{\frac{R_1}{R_L}}$ (D) $\left(\frac{R_L}{R_1}\right)^2$

11.6 题图所示正弦稳态电路,试求:(1) 开关 S 断开时的复阻抗 Z_{ab} ;(2) 开关 S 闭合时的复阻抗 Z'_{ab} 。



题 11.5 图



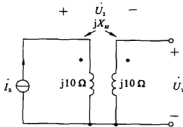
题 11.6 图

11.7 电路如题图所示,耦合因数 $K = 1$, $I_s = 1\angle 0^\circ$ A, 则 \dot{U}_1 与 \dot{U}_2 分别为()。

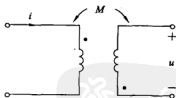
- (A) $j10$ V 与 $j20$ V (B) $j10$ V 与 0 V
(C) $-j10$ V 与 $j20$ V (D) $-j10$ V 与 $-j20$ V

11.8 如题图所示耦合电感,已知 $M = 10^{-3}$ H, $i(t) = 10\sin(100t)$ A, $i_2(t) = 0$, 则电压 $u(t)$ 为()。

- (A) $\cos(100t)$ V (B) $-\cos(100t)$ V
(C) $0.1\sin(100t)$ V (D) $-0.1\sin(100t)$ V



题 11.7 图



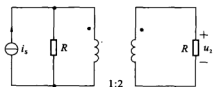
题 11.8 图

11.9 在题图所示含理想变压器电阻电路中,输出电压 u_2 与激励电流 i_s 的关系可表示为()。

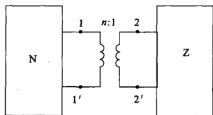
- (A) $u_2 = 2Ri_s$ (B) $u_2 = 4Ri_s$ (C) $u_2 = \frac{2}{5}Ri_s$ (D) $u_2 = -\frac{2}{3}Ri_s$

11.10 理想变压器的初级接含源二端网络 N , 次级接负载阻抗 Z , 电路如题图所示, 将 Z 折合成初级后所求出的电流及平均功率与实际负载 Z 的电流及平均功率的关系是()。

- (A) 电流相同, 功率相同 (B) 电流相同, 功率不同
(C) 电流不同, 功率相同 (D) 电流不同, 功率不同

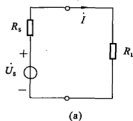


题 11.9 图

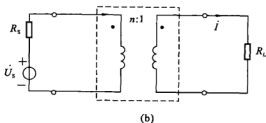


题 11.10 图

11.11 在题图所示的电路中, \dot{U}_s 、 \dot{I}_s 分别为某晶体管收音机低频功放电路的等效电源和输出电阻, 扬声器(负载)的阻抗为 R_L , 已知 $\dot{U}_s = 6\angle 0^\circ$, $R_s = 72\Omega$, 求: (1) 功放电路直接与负载相连时负载吸收的功率; (2) 若以理想变压器为中间环节, 为使负载能获得最大功率, 则应选择匝比 n 为多少? 负载上获得的最大功率为多少?



(a)



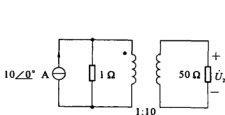
(b)

题 11.11 图

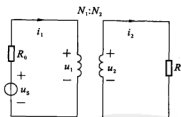
11.12 电路如题图所示, 试求电压 \dot{U}_2 。

11.13 在题图所示电路中, 变压器的匝比 $n = \frac{N_1}{N_2} = 4$, $U_s = 18\text{ V}$, $R_0 = 200\Omega$, 负载 $R = 10\Omega$, 试求:

(1) 负载 R 折合到原边的等效电阻 R' ; (2) 电流 I_1 和 I_2 , 电压 U_1 和 U_2 ; (3) 负载得到的平均功率 P 。

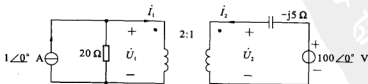


题 11.12 图



题 11.13 图

11.14 题图所示正弦稳态电路, 试求电压相量 \dot{U}_1 与 \dot{U}_2 , 并求电流源发出的复功率。



题 11.14 图

第 12 章 频率响应

在进行正弦稳态分析时,已知电感的感抗与电流的频率有关,频率越高感抗越大;电容的容抗则与频率成反比关系。所以当正弦电流作用于某一网络时,网络中某一元件处的电压和电流值将随电流频率的变化而变化。由于电子元件分布可以变化,在网络的不同位置,某处的电压(或电流)可能比激励电源的电压(或电流)小得多。另一种情况是,网络某处的电压(或电流)可以大于电源的电压(或电流)。前一种情况说明该频率导致元件产生较大的阻抗,后一种情况说明该频率使某一局部的阻抗变小直至为零,电路处在谐振状态。

因此对于有应用价值的某频率信号,通过设计相应的电路,使该电路的阻抗小,信号容易通过,同时对其他频率的信号具有较大的阻抗,阻止这些频率的信号通过(消除干扰信号)。

12.1 网络函数

网络函数用 $H(\omega)$ 表示,用“O”下标表示响应相量,用“S”下标表示激励相量。定义网络函数的电路见图 12.1。

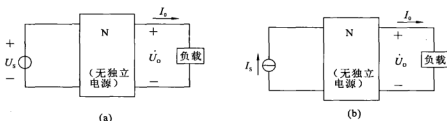


图 12.1 定义网络函数所使用的电路

$$H(\omega) = \frac{\text{响应相量(电压或电流)}}{\text{激励相量(电压或电流)}}$$

网络函数的表达形式有四种:转移电压比,转移电流比,转移阻抗,转移导纳。

在图 12.1(a) 所示情况下:

$$\text{转移电压比} = \frac{\dot{U}_o(\omega)}{\dot{U}_s(\omega)} \quad (12-1)$$

$$\text{转移导纳} = \frac{\dot{I}_o(\omega)}{\dot{U}_s(\omega)} \quad (12-2)$$

在图 12.1(b) 所示情况下:

$$\text{转移电流比} = \frac{\dot{I}_o(\omega)}{\dot{I}_s(\omega)} \quad (12-3)$$

$$\text{转移阻抗} = \frac{\dot{U}_o}{\dot{I}_s} \quad (12-4)$$

为了分析方便,分子统一用 $N(\omega)$ 表示,分母统一用 $D(\omega)$ 表示, N 和 D 分别是英文的分子和分母的第一个字母。

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (12-5)$$

$H(\omega)$ 是复数,用 $|H(\omega)|$ 表示其幅度,用 $\angle H$ 表示相位角,所以

$$H(\omega) = |H(\omega)| \angle H$$

零点和极点:令多项式 $N(\omega) = 0$,或 $H(\omega) = 0$,求出方程所有的根 Z_1, Z_2, \dots, Z_n ,称为 $H(\omega)$ 的零点;令多项式 $D(\omega) = 0$,或令 $H(\omega)$ 具有最大值或者工程上规定的值,求出方程所有的根 P_1, P_2, \dots, P_n ,称为 $H(\omega)$ 的极点。

在零点和极点的频率称为临界频率,对零点和极点的把握,有利于抓住函数的重要特征,迅速地对问题作出解答。

12.1.1 一阶 RC 低通电路

在图 12.2 中, \dot{U}_s 为激励相量, \dot{U}_o 为响应相量,转移电压比为网络函数,即

$$H(\omega) = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_s} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (12-6)$$

在解题过程中,用 S 代替 $j\omega$,在结果表达中再用 $j\omega$ 替换 S ,即

$$H(S) = \frac{1}{1 + SRC} = \frac{1/RC}{S + 1/RC} \quad (12-7)$$

当 $S \rightarrow \infty$,函数中幅度趋于零,表示 $H(S)$ 存在 $S = \infty$ 的零点;当 $S \rightarrow 0$ 时函数最大值为 1。从公式分母看,函数存在一个单极点,工程上认为该函数从 $1 \rightarrow 0$ 时,存在一个临界频率, $|H(\omega)|$ 由 1 下降到 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时的 ω 为转角频率(亦称截止频率 ω_c)。

$$\text{令} \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

若 $R = 500 \, \Omega$, $C = 2 \, \text{nF}$, $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,求得 $\omega_c = 159 \, \text{kHz}$ 。

【例 12.1】 在图 12.2 中, $R = 1 \, \text{k}\Omega$, $C = 1 \, \mu\text{F}$, $\omega = 10^3 \, \text{rad/s}$, $\dot{U}_s = (10 + 10\cos\omega t + 10\cos 2\omega t + 10\cos 3\omega t) \, \text{V}$,求 $\dot{U}_o(t)$ 。

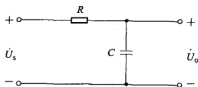


图 12.2 RC 低通电路

解 对于不同的频率,有

$$H(0) = 1$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j1} = 0.707 \angle -45^\circ$$

$$H(j2\omega) = \frac{1}{1+j2\omega RC} = \frac{1}{1+j2} = 0.447 \angle -63.4^\circ$$

$$H(j3\omega) = \frac{1}{1+j3\omega RC} = \frac{1}{1+j3} = 0.316 \angle -71.6^\circ$$

输入相量为

$$\dot{U}_s(0) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_s(\omega) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_s(2\omega) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_s(3\omega) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

对应各频率的响应相量分别为

$$\dot{U}_o(0) = H(0) \dot{U}_s(0) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_o(\omega) = H(\omega) \dot{U}_s(\omega) = 7.07 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_o(2\omega) = H(2\omega) \dot{U}_s(2\omega) = 4.47 \angle -63.4^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_o(3\omega) = H(3\omega) \dot{U}_s(3\omega) = 3.16 \angle -71.6^\circ \text{ V}$$

电路总响应为

$$U_o(t) = [10 + 7.07\cos(\omega t - 45^\circ) + 4.47\cos(2\omega t - 63.4^\circ) + 3.16\cos(3\omega t - 71.6^\circ)] \text{ V}$$

12.1.2 一阶 RC 高通电路

由图 12.3 可知, \dot{U}_s 为激励相量, \dot{U}_o 为响应相量, 转移电压比为网络函数, 即

$$H(\omega) = \frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_s} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (12-8)$$

$$H(S) = \frac{RCS}{1 + RCS} \quad (12-9)$$

在 $S = 0$ 时有一个零点, 在 $S \rightarrow \infty$ 时, $H(S) = 1$, 说明函数还存在一个极点。工程上认为 $|H(\omega)|$ 由 1 下降到 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时的 ω 为转角频率 (或截止频率 ω_c)。

令

$$\left| \frac{j\omega_c RC}{1 + j\omega_c RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

解出

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

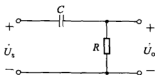


图 12.3 RC 高通电路

若希望转角频率 $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi(3000) = 18.85 \text{ krad/s}$, 选定 $R = 4.7 \text{ k}\Omega$, C 应该为 11.29 nF 。

12.1.3 RLC 二阶带通电路

由图 12.4 可知, \dot{U}_s 为激励相量, \dot{U}_o 为响应相量, 转移电压比为网络函数, 即

$$H(\omega) = \frac{j\omega RC}{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1} \quad (12-10)$$

$$H(S) = \frac{SRC}{S^2 LC + SRC + 1} \quad (12-11)$$

当 $S \rightarrow 0$ 时: $|H(S)| = 0$

当 $S \rightarrow \infty$ 时: $|H(S)| = 0$

函数在 $S = 0 \sim \infty$ 区间存在 3 个临界频率, 两个零点和一个极点。

用式(12-10) 演算得到

$$|H(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 L^2 C^2) + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (12-12)$$

令 $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 得到两个截止频率 ω_c , 即

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (12-13)$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (12-14)$$

12.1.4 RLC 二阶带阻电路

由图 12.5 可知, \dot{U}_s 为激励相量, \dot{U}_o 为响应相量, 转移电压比为网络函数, 即

$$H(\omega) = \frac{(j\omega)^2 RLC + R}{(j\omega)^2 LC + j\omega L + R} \quad (12-15)$$

$$H(S) = \frac{S^2 RLC + R}{S^2 LC + SL + R} \quad (12-16)$$

$S \rightarrow 0, H(S) \rightarrow 1; S \rightarrow \infty, H(S) \rightarrow 1$ 。

函数在 $S = 0 \sim \infty$ 区间存在 3 个临界频率, 两个极点和一个零点。

$$\text{令 } |H(\omega)| = \frac{R(1 - \omega^2 LC)}{\sqrt{(R - \omega^2 LC)^2 + (\omega LC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

已知 L, C , 可求出截止频率 ω_c 。

令分子为零, $1 - \omega^2 LC = 0$, 即

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

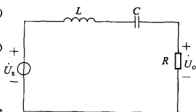


图 12.4 RLC 带通电路

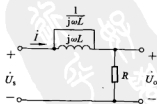


图 12.5 RLC 带阻电路

对于已知的 L, C , 可求出零点。

当 $R = 500 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C = 22 \text{ pF}$ 时, 则

$$\omega_0 = 6.7 \times 10^6 \text{ rad/s}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2 \times 10^6 \text{ Hz} = 2 \text{ MHz}$$

上截止频率为 14.583 MHz , 下截止频率为 0.78953 MHz 。

12.2 谐振电路

在 RLC 三种元件构成的正弦稳态电路中, 通常情况下, 电流和电压之间存在相位差, 电源的电流有时滞后电源电压, 有时则相反。前一种情况对应于感性电路, 后一种情况对应于容性电路。若电路中感抗值等于容抗值, 则电抗值等于零, 电阻呈纯阻性, 此时电流与电压相位差等于零, 电路此时处在谐振状态。

由于电路谐振时产生的响应幅度最大, 所以利用谐振现象可以向负载提供所需的高电压或大电流。

12.2.1 并联谐振电路

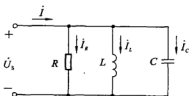
(1) 谐振频率和品质因数

在图 12.6 所示电路中, 由 RLC 并联组成的电路的导纳为

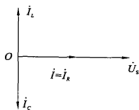
$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (12-17)$$

当电路为电阻性时, 该电路出现谐振, 要求虚部等于零, 即

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$



(a)



(b)

图 12.6 并联谐振电路

可得到

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

这里给出两个新的术语, 特征阻抗 ρ 和品质因数 Q , ρ 用于谐振时的感抗或容抗来计算。

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12-18)$$

Q 表示谐振程度的大小,即

$$Q = \frac{i_L}{i} = \frac{i_C}{i} \quad (12-19)$$

$$Q_0 = \frac{\frac{\dot{U}_s}{\omega_0 C}}{\frac{\dot{U}_s}{R}} = \frac{\frac{\dot{U}_s}{\omega_0 L}}{\frac{\dot{U}_s}{R}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC = \frac{R}{\rho} \quad (12-20)$$

选择适当的 R, C 的值 (R 值尽量大), 使 $Q_0 \gg 1$, 谐振回路中的电流远大于端电流。因此并联谐振电路能够将端电流放大, 故称并联谐振电路为电流谐振电路。

【例 12.2】 在图 12.6(a) 所示电路中, 已知 $R = 50 \Omega, L = 16 \text{ mH}, C = 40 \mu\text{F}, \dot{U}_s = 20 \text{ V}$, 电路处在谐振状态, 求: (1) 谐振角频率 ω_0 ; (2) $\dot{I}_R, \dot{I}_L, \dot{I}_C, \dot{I}$; (3) 品质因数 Q_0 。

解 (1) 谐振角频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{16 \times 10^{-3} \times 40 \times 10^{-6}}} = 1250 \text{ rad/s}$$

(2) 并联谐振时, L, C 并联电路相当于开路, 故

$$\dot{I} = \dot{I}_R = \frac{\dot{U}_s}{R} = \frac{20}{50} = 0.4 \text{ A}$$

并联谐振时, 通过 L, C 的电流相等, 故

$$\dot{I}_C = \dot{I}_L = \frac{\dot{U}_s}{\omega_0 L} = \frac{20}{1250 \times 16 \times 10^{-3}} = 1 \text{ A}$$

(3) 品质因数为

$$Q_0 = \frac{\dot{I}_L}{\dot{I}} = \frac{1}{0.4} = 2.5 \text{ 或 } Q_0 = \frac{R}{\rho} = \frac{50}{1250 \times 16 \times 10^{-3}} = 2.5$$

【例 12.3】 在如图 12.7 所示电路中, $R = 5 \Omega, L = 0.5 \text{ mH}, C = 0.002 \mu\text{F}$, 问该电路的 Q 值及发生谐振时的角频率 ω_0 。

解 该电路的等效导纳为

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right] \end{aligned}$$

若该电路发生谐振, 虚部应为零, 即

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0$$

解得

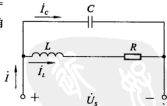


图 12.7

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{0.5 \times 10^{-3} \times 0.002 \times 10^{-6}} - \frac{5^2}{(0.002 \times 10^{-6})^2}} = 10^4 \text{ rad/s}$$

品质因数为

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10^4 \times 0.5 \times 10^{-3}}{5} = 100$$

(2) 谐振幅度和截止频率

电路处在并联谐振时, 导纳最小, $Y_0 = \frac{1}{R} = G$, 电源电流 I 一定时, 输出电压 $U_0 = I/G =$

$I \cdot R$ 。在 $\omega = \omega_0$ 处, 具有最大的谐振电压和谐振电流, 由 $Q_0 = \frac{\dot{I}_L}{\dot{I}} = \frac{\dot{I}_C}{\dot{I}}$, 所以 $\dot{I}_L = \dot{I}_C = Q_0 \dot{I}$ 。

【例 12.4】在图 12.6 所示电路中, 已知 $R = 50 \Omega$, $L = 40 \text{ mH}$, $C = 10.5 \mu\text{F}$, $\dot{U}_s = 120 \text{ V}$ 。求谐振频率 f_0 , 谐振时总电流 \dot{I} 以及 \dot{I}_R , \dot{I}_L , \dot{I}_C 。

解 该电路为并联谐振电路, 则

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{40 \times 10^{-3} \times 10.5 \times 10^{-6}}} = 246 \text{ Hz}$$

$$\dot{I}_R = \dot{I} = Y\dot{U}_s = \frac{\dot{U}_s}{R} = \frac{120}{50} = 2.4 \text{ A}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{40 \times 10^{-3}}{10.5 \times 10^{-6}}} = 62 \Omega$$

$$Q_0 = \frac{\rho}{R} = \frac{62}{50} = 1.24$$

$$\dot{I}_L = \dot{I}_C = Q_0 \dot{I} = 1.24 \times 2.4 = 2.98 \text{ A}$$

以上求出的谐振幅值说明, 串联谐振时流过电感和电容的电流比电源电流大。求并联谐振的截止频率需要列出网络函数, 再经计算来求出。

若取 R 两端电压为响应相量, 转移阻抗为网络函数, 根据图 12.6, 有

$$H(\omega) = \frac{\dot{U}_O}{\dot{I}_s} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \quad (12-21)$$

$$H(S) = \frac{1}{\frac{1}{R} + SC + \frac{1}{SL}} \quad (12-22)$$

在 $S = 0$ 和 $S = \infty$ 时, $H(S) = 0$, 在 $S = 0 \sim \infty$ 之间有极点存在。

再由(12-21)可得

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega_0 C \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ &= \frac{R}{1 + j\omega_0 RC \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{R}{1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (12-23)$$

在 $\omega = \omega_0$ 处, 有极大值 $|H(\omega)| = R$, 于是

$$\dot{U}_0 = \dot{I}_s \cdot R$$

当工作频率偏离 ω_0 时, Q_0 越大, $|H(\omega)|$ 越小, 说明偏离 ω_0 时信号的幅度下降, 电路选频性得以证明。

若以流过 L 的电流为响应相量, 转移电压比为网络函数, 即

$$H(\omega) = \frac{\dot{I}_L}{\dot{I}_s} = \frac{\frac{\dot{U}_0}{j\omega L}}{\dot{U}_0 \left[\frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]}$$

$$= \frac{1}{j\omega L \left(\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)}$$

$$= \frac{1}{j \frac{\omega L}{R} \left[1 + \left(j\omega RC + \frac{R}{j\omega L} \right) \right]}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + j \frac{1}{Q_0}}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{1}{Q_0} \right)^2}} \quad (12-24)$$

当 $\omega = \omega_0$ 时, $|H(\omega)| = Q_0$, $\dot{I}_L = Q_0 \dot{I}_s$ 。

因此, 谐振时, 电感电流是电源电流的 Q_0 倍。

谐振幅度下降到最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍时, 对应的频率为截止频率。

令 $|H(\omega)| = \frac{Q_0}{\sqrt{2}}$, 则

$$\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{1}{Q_0} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{Q_0}$$

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{1}{Q_0} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{Q_0} \right)^2$$

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{Q_0}$$

$$\omega^2 \pm \frac{1}{Q_0} \omega_0 \omega - \omega_0^2 = 0$$



$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{\pm \frac{1}{Q_0} \omega_0 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{Q_0} \omega_0\right)^2 + 4\omega_0^2}}{2} \\
 &= \pm \frac{1}{2Q_0} \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2 + 1} \\
 &= \omega_0 \left[\pm \frac{1}{2Q_0} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2 + 1} \right]
 \end{aligned}$$

舍去无意义的负根,截止频率为 ω_1 和 ω_2 ,即

$$\omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} - \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (12-25)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} + \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (\omega_2 > \omega_1) \quad (12-26)$$

带宽为

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} \text{ rad/s 或 } \frac{f_0}{Q_0} \text{ Hz} \quad (12-27)$$

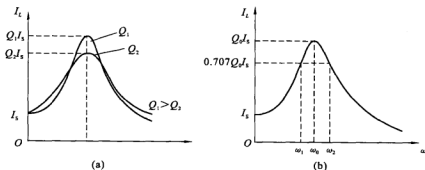


图 12.8 并联电路谐振曲线

【例 12.5】在图 12.9 所示电路中,已知 $L = 20 \text{ mH}$, $C = 80 \text{ pF}$, $R = 250 \text{ k}\Omega$,求该电路并联谐振频率 f_0 ,品质因数 Q_0 和频带宽度 B 。

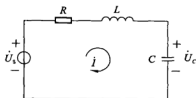


图 12.9 串联谐振电路

解
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^{-12}}} = 126 \text{ kHz}$$

由式(12-20)可得

$$Q_0 = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 250 \times 10^3 \sqrt{\frac{80 \times 10^{-12}}{20 \times 10^{-3}}} = 15.8$$

$$B = \frac{f_0}{Q_0} = \frac{126 \times 10^3}{15.8} = 7.97 \times 10^3 \text{ Hz}$$

12.2.2 串联谐振电路

在图 12.9 所示的电路中, R 、 L 、 C 三个元件组成串联电路, 该电路的总阻抗为

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \quad (12-28)$$

(1) 谐振频率和品质因数

当回路为纯电阻性时, 电源电流与电压同相, 则称电路处于谐振状态, 实现谐振的途径有两种, 一是改变电源频率, 二是调节电感 L 或电容 C 。

令式(12-16)中的虚部等于零, 则

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

特征阻抗为

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

品质因数可用电感的电压和电阻的电压之比表达, 也可用电容的电压和电阻的电压之比表达, 即

$$Q = \frac{\omega L \dot{I}}{R \dot{I}} = \frac{\omega L}{R} \quad \text{或} \quad Q = \frac{\frac{1}{\omega C} \dot{I}}{R \dot{I}} = \frac{1}{\omega RC}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \quad (12-29)$$

(2) 谐振幅度与截止频率

电路谐振时, 回路阻抗 $Z_0 = R$, 于是回路的电流为

$$I_0 = \frac{\dot{U}_s}{Z_0} = \frac{\dot{U}_s}{R}$$

\dot{I}_0 具有极大值, 且与 \dot{U}_s 同相。

电阻 R 的电压为

$$\dot{U}_R = \dot{U}_s$$

电容的电压为

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \dot{I}_0 = -j \frac{1}{\omega_0 C} \frac{\dot{U}_s}{R} = -jQ_0 \dot{U}_s \quad (12-30)$$

电感的电压为

$$\dot{U}_L = j\omega_0 L \dot{I}_0 = j\omega_0 L \frac{\dot{U}_s}{R} = jQ_0 \dot{U}_s \quad (12-31)$$

谐振时,电容上的电压与电感上的电压大小相等,相位相反。若电路被设计为高 Q 状态,电感或电容上的电压可以达到电源电压的几十至几百倍,故称串联谐振电路为电压谐振电路。

【例 12.6】在图 12.9 所示电路中,已知 $L = 50 \mu\text{F}$, $C = 200 \text{ pF}$, 回路的品质因数 $Q = 50$, 电源电压有效值 $\dot{U}_s = 1 \text{ mV}$ 。试求电路的谐振频率 f_0 , 谐振时电路电流有效值 I_0 , 电容的电压有效值 U_{C0} 。

$$\text{解 } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{50 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^{-12}}} = 1.59 \times 10^5 \text{ Hz}$$

由式(12-29)可得

$$R = \frac{\sqrt{L/C}}{Q_0} = \frac{1}{50} \sqrt{\frac{50 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-12}}} = 10 \Omega$$

谐振时的电流有效值为

$$I_0 = \frac{U_s}{R} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ mA}$$

由式(12-30)可得

$$U_{C0} = Q_0 U_s = 50 \times 1 = 50 \text{ mV}$$

以上求出的结果说明,串联谐振时,电容两端的电压比电源电压大。求串联谐振时的截止频率需要列出网络函数,再经计算求出。

若以 R 上的电压为响应相量,转移电压比为网络函数,即

$$H(\omega) = \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_s} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}$$

串联谐振时,有

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \\ H(\omega) &= \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \\ |H(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \end{aligned} \quad (12-32)$$

在 $\omega = \omega_0$ 处, R 的电压与电源电压相同,在 $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,可以求出 ω_1 和 ω_2 上、下两个截止频率。由此得出:在电阻上获得的电压最大值与电源相等,故电压未被放大。

若以电感电压为响应相量,转移电压比为网络函数,即

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_s} = \frac{j\omega L}{j\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} = \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{j\omega L}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} = \frac{R}{j\omega L\left[1 + j\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\frac{R}{j\omega_0 L} \left[1 + j \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \frac{1}{\frac{R}{j\omega_0 L} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - j \frac{R}{\omega_0 L}} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - j \frac{1}{Q_0}} \\
 |H(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{1}{Q_0} \right)^2}} \quad (12-33)
 \end{aligned}$$

$\omega = \omega_0$ 时, $|H(\omega)| = Q_0$, $\dot{U}_L = Q_0 \dot{U}_S$, 电源电压在电感两端被放大到 Q_0 倍。

求解上、下截止频率及频率宽度的计算公式与并联谐振相同。

需要进一步说明的是, 若以电容两端电压为响应相量, 所求结果与电感电压的结果相同, 解题可用同一公式。

【例 12.7】 在图 12.10 所示电路中, 已知 $u_s = 22\sqrt{2}\cos 314t$, $R = 12\ \Omega$, $L = 210\ \text{mH}$, $C = 64\ \mu\text{F}$, 求 i , u_R , u_L , u_C 。

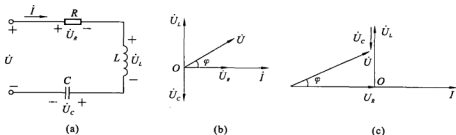


图 12.10 RLC 串联电路

解 因为 $X_L = \omega L = 314 \times 210 \times 10^{-3} = 65.94\ \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 64 \times 10^{-6}} = 49.76\ \Omega$$

所以

$$Z = R + jX = R + j(X_L - X_C) = 12 + j16.18 = 20.14 \angle 53.14^\circ\ \Omega$$

电压相量形式为 $22 \angle 0^\circ$, 可求回路电流相量, 即

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{22 \angle 0^\circ}{20.14 \angle 53.14^\circ} = 1.09 \angle -53.44^\circ$$

$$\dot{U}_R = R \dot{i} = 12 \times 1.09 \angle -53.44^\circ = 13.11 \angle -53.44^\circ$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{i} = jX_L \dot{i} = j65.94 \times 1.09 \angle -53.44^\circ = 71.8 \angle 35.56^\circ$$

$$\dot{U}_C = -jX_C \dot{i} = -j49.76 \times 1.09 \angle -53.44^\circ = 54.24 \angle -143.44^\circ$$

则

$$i = 1.09 \sqrt{2} \cos(314t - 53.44^\circ)\ \text{A}$$

$$u_R = 13.11 \sqrt{2} \cos(314t - 53.44^\circ)\ \text{A}$$

$$u_L = 71.8\sqrt{2}\cos(314t + 35.56^\circ) \text{ A}$$

$$u_C = 54.24\sqrt{2}\cos(314t - 143.44^\circ) \text{ A}$$

【例 12.8】 在图 12.11 所示电路中, $L = 1 \text{ mH}$, 电感线圈的 $Q_L = 200$, $C = 160 \text{ pF}$, 电源电压 $U_s = 10 \text{ mV}$, 电源内阻为 R_s , 信号源的频率等于回路的谐振频率。求: (1) 若电源内阻 $R_s = 0$, 求电源的角频率及电容两端的电压有效值 U_{C0} ; (2) 若电源内阻 $R_s = 10 \Omega$, 求 U_{C0} 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10^{-3} \times 160 \times 10^{-12}}} \\ &= 2.5 \times 10^6 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

因回路谐振, 又 $R_s = 0$, 此时电路 Q 值等于 Q_L , 所以

$$U_{C0} = QU_s = 200 \times 10 \times 10^{-3} = 2 \text{ V}$$

(2) 电源内阻 $R_s = 10 \Omega$, 回路总损耗电阻为 $R = R_s + r_L$, 所以, 此情况下的回路品质因数 Q 不等于电感线圈的品质因数 Q_L 。

$$r_L = \frac{\omega_0 L}{Q_L} = \frac{2.5 \times 10^6 \times 1 \times 10^{-3}}{200} = 12.5 \Omega$$

回路的品质因数为

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2.5 \times 10^6 \times 1 \times 10^{-3}}{12.5 + 10} = 111$$

此时电容上电压有效值为

$$U_{C0} = QU_s = 111 \times 10 \times 10^{-3} = 1.11 \text{ V}$$

结果表明, 电源内阻对回路的谐振的影响很大, 本例中考虑电源内阻后谐振电压比原来降低了近一半。

12.2.3 实用 rL - C 并联谐振电路

在工程中经常遇到的并联谐振电路如图 12.12 所示。其中 r 是并联 LC 回路的总损耗电阻, 考虑 r 后的并联回路两端导纳为

$$\begin{aligned} Y &= j\omega C + \frac{1}{r + j\omega L} \\ &= \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2}\right) \quad (12-34) \end{aligned}$$

回路谐振要求电流与电压同相位, 虚部必须等于零, 即

$$\omega C - \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{Cr^2}{L}} \quad (12-35)$$

根据式(12-34), 虚部为零时有

$$Y = Y_0 = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2}$$

通常, 在工程实际中, $\omega L \gg r$, 则

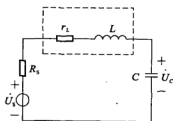


图 12.11

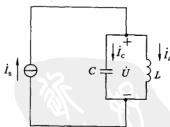


图 12.12 实际的并联谐振电路

$$Y_0 = \frac{r}{\omega^2 L^2} = \frac{Cr}{L} \quad (Y_0 \text{ 为纯电导}) \quad (12-36)$$

若换算成阻抗,即

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \frac{L}{Cr} \quad (12-37)$$

$\frac{L}{Cr}$ 是实数,意义与 RLC 并联电路的 R 相当,故称 $\frac{L}{Cr} = R_0$ 。

RLC 并联的 Q_0 可以推出 rL - C 实用电路的 Q_0 的表达式为

$$Q_0 = \frac{R_0}{\omega_0 L} = \frac{L/Cr}{\omega_0 r} = \frac{L}{\omega_0 LCr} = \frac{1}{\omega_0 rC} = \frac{\omega_0 L}{r} \quad (12-38)$$

【例 12.9】在图 12.13 所示电路中,已知 $\dot{U}_s = 100 \angle 0^\circ$, 该电路谐振,求电路的 \dot{U}_0 和 \dot{I}_C 。

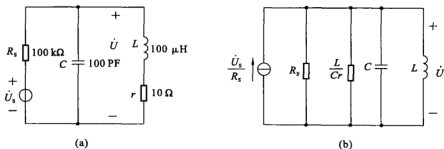


图 12.13

解 首先画出图 12.13(a) 的等效电路,如图 12.13(b) 所示,根据图 12.13(b) 可得

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-6} \times 100 \times 10^{-12}}} = 10^7 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 L = 10^7 \times 100 \times 10^{-6} \Omega = 1 \text{ k}\Omega$$

谐振阻抗为

$$Z_0 = R_0 = \frac{L}{Cr} = \frac{100 \times 10^{-6}}{100 \times 10^{-12} \times 10} = 100 \text{ k}\Omega$$

考虑到电源内阻 R_s 的影响后,等效的谐振阻抗为

$$R' = \frac{R_0 R_s}{R_0 + R_s} = 50 \text{ k}\Omega$$

由于

$$I_s = \frac{U_s}{R_s} = \frac{100}{100} = 1 \text{ mA}$$

故谐振时电压为

$$U_0 = I_s R' = 1 \times 50 = 50 \text{ V}$$

电容支路的电流为

$$I_C = \omega_0 C U_0 = 10^7 \times 100 \times 10^{-12} \times 50 = 0.05 \text{ A} = 50 \text{ mA}$$

或者,考虑到电源内阻后,电路的等效品质因数为

$$Q'_0 = \frac{R'}{\omega_0 L} = \frac{50}{1} = 50$$

同样可以求得

$$I_C = Q'_s I_s = 50 \times 1 = 50 \text{ mA}$$

表 12.1 串、并联谐振电路参数计算公式

类型	RLC 串联谐振电路	RLC 并联谐振电路	rL-C 实用并联谐振电路
电路模型			
谐振条件	$X = X_L - X_C = 0$ $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$	$B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$	$B = B_C - B_L = 0$ $\omega C - \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} = 0$
谐振角频率或频率	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{G^2}{L}}$ 当 $r \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
特性阻抗	$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$
品质因数	$Q = \frac{\rho}{R}$	$Q = \frac{1}{G\rho}$	$Q = \frac{\rho}{r}$
谐振阻抗	$Z_0 = R$	$Z_0 = R(Y_0 = G)$	$Z_0 = \frac{L}{Cr}$
通频带	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ 或 $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ 或 $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ 或 $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$
谐振特性	<p>电压、电流同相, 电路呈电阻性</p> <p>阻抗最小, $Z_0 = Z_{\min} = R$, U_s 一定时, 电流最大, $I_0 = I_{\max} = U_s/R$</p> <p>电压谐振</p> <p>$\dot{U}_s = \dot{U}_s$ $\dot{U}_{L0} = jQ\dot{U}_s$ $\dot{U}_{C0} = -jQ\dot{U}_s$</p>	<p>电压、电流同相, 电路呈电阻性</p> <p>导纳最小, $Y_0 = Y_{\min} = G$, I_s 一定时, 输出电压最大, $U_0 = U_{\max} = I_s/G$</p> <p>电流谐振</p> <p>$\dot{i}_{C0} = \dot{i}_s$ $\dot{i}_{L0} = jQ\dot{i}_s$ $\dot{i}_{C0} = -jQ\dot{i}_s$</p>	<p>电压、电流同相, 电路呈电阻性</p> <p>导纳最小, $Y_0 = Y_{\min} = G$, I_s 一定时, 输出电压最大, $U_0 = U_{\max} = I_s/G$</p> <p>电流谐振</p> <p>$\dot{i}_{n0} = \dot{i}_s$ $\dot{i}_{C0} = jQ\dot{i}_s$ $\dot{i}_{L0} = -jQ\dot{i}_s$</p>

12.3 与后续课程的关系

并联谐振和串联谐振可看成是 RLC 二阶电路中的感抗等于容抗, 即总电抗为 0 时的特殊工作状态。描述 RLC 二阶电路幅频特性的主要参数是谐振频率、上限截止频率、下限截止频率、通频带 (0.707 带宽或称 3 dB 带宽)、品质因数 Q (Q 越大, 选择性越好, 单级 RLC 电路的串联或并联的通频带与品质因数是—对矛盾的量, 与实际上要求两者都要较大不相符, 所以应用上有它们的局限性。改进办法是采用双调谐回路、参差调谐回路等。

通过研究 RLC 二阶电路频率特性, 了解谐振点特性, 更要认识到电路的响应情况是与频率有关的, 也可以说电路对信号频率有选择性。利用 RLC 电路可以实现对不同信号选择、滤除或抑制等作用。

例如, 高频通信利用串并联谐振特性选频、滤波。在高频谐振功率放大电路中, 如图 12.14 所示, 为了追求电路的高效率、大功率输出, 电路状态设置在效率较高的非线性丙类工作状态, 这时待放大的信号经放大后已失真, 除信号频率 f_s 外, 还有信号的各次谐波成份 nf_s (n 为正整数), 这时直接把放大的信号输出到负载是不行的。对除了基波频率外还含有各次谐波成分的信号加 LC 并联谐振回路用于信号选频, 设计并联谐振回路频率 f_0 等于信号基波频率 f_s , 选频后的信号即为原信号频率信号 f_s , 再输出到负载, 这样解决了信号失真问题。但在低频功率放大电路中, 此方法不凑巧, 因低频信号一般无窄带特性 (信号带宽远小于中心频率)。一般来说, 只有信号具有窄带特性才可能利用谐振特性来选频, 高频通信用的射频信号一般具有此特性。

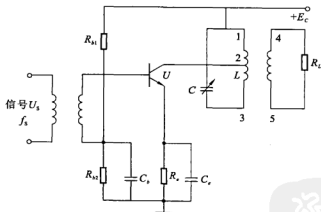


图 12.14 高频谐振功率放大电路

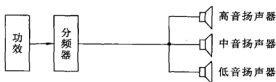
采用变压器耦合输出方式实现阻抗匹配, 负载与放大器之间有一定的隔离度。

波特图采用对数坐标来画幅频特性曲线和相频特性曲线, 这样做的好处是可表达的频率和幅度范围大, 即扩大视野, 与实际工程应用较相符。特性曲线有可能折线近似 (即作线性化处理), 易于作出, 实际中普遍采用。在幅频特性曲线的波特图中, 纵坐标为输出输入电压比或电流比, 且为对数式, 单位是 dB。

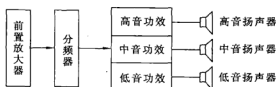
12.4 实用电路举例

12.4.1 三分频扬声器系统

扬声器系统的分频器分为前级分频和功率分频两类。前级分频是前级电路中由电子元件产生的分频,再由各自的功放分别驱动高、中、低音扬声器系统,如图 12.15(a) 所示,属于小信号有源分频。而功率分频则是由电感、电容、电阻元件构成的位于功放与扬声器之间的无源分频电路,如图 12.15(b) 所示。



(a) 功率分频结构框图



(b) 前级电子分频结构框图

图 12.15 音频分频系统结构框图

采用功率分频的扬声器系统结构简单、成本低,而且又能获得很高的放音质量,因而在现代高保真放音系统中应用最为普遍。其性能的好坏与扬声器的各项指标以及分频电路、电感元件的性能、精度有密不可分的关系,精确计算电感参数便是成功的关键。

12.4.2 对分频器电路、元件的要求

- (1) 电路中电感元件直流电阻、电感值误差越小越好。为使频响曲线平坦,最好使用空心电感。
- (2) 电路中电容元件损耗尽可能小。最好使用音频专用金属化聚丙烯电容。
- (3) 使各扬声器单元分配到较平坦的信号功率,且起到保护高频扬声器的作用。
- (4) 各频道分频组合传输功率特性应满足图 12.16 所示特性曲线的要求(P_0 为最大值, P_1 为对应分频点 f_1 、 f_2 的值)。分频点处的功率与功率最大值之间幅度应满足 $P_1 = (0.3 \sim 0.5)P_0$ 的范围。
- (5) 整个频段内损耗平坦,基本不出现“高峰”和“深谷”。

12.4.3 分频电感电容参数值的计算

下面以三分频分频器为例说明其参数的计算,如图 12.17 所示。

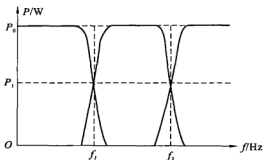


图 12.16 三分频器组合传输功率特性

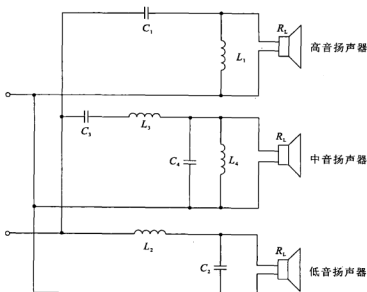


图 12.17 三分频电路原理图

(1) 计算分频电感 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 和分频电容 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 。

为了得到理想的频谱特性曲线,理论计算时可取: $C_1 = C_4$, $C_3 = C_2$, $L_1 = L_3$, $L_4 = L_2$, 分频点频率为 f_1 、 f_2 (见图 12.16), 则分频点 $\omega_1 = 2\pi f_1$, $\omega_2 = 2\pi f_2$, 并设想高、中、低音扬声器阻抗均相同且为 R_L , 每倍频程衰减 12 dB, 则

$$C_3 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_1 R_L}; \quad C_1 = C_4 = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_2 R_L}$$

$$L_2 = L_4 = \frac{\sqrt{2}R_L}{\omega_1}; \quad L_1 = L_3 = \frac{\sqrt{2}R_L}{\omega_2}$$

(2) 实验修正 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 、 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 的值。

为精确起见,可用实验方法稍微调整 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 、 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 的值,以满足设计曲线 (见图 12.16) 的要求。即通过实验描绘频响曲线,从而得到 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 、 L_1 、 L_2 、

L_3 、 L_4 的最佳值。如果没有实验条件,这一步也可不做。求出电容电感的值后就可计算电感值了。

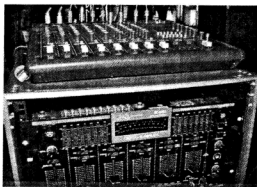


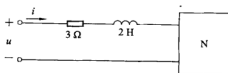
图 12.18 音响调音台与均衡器

习 题

12.1 在 RLC 串联电路中,当总电流与总电压同相时,下列关系式正确的是()。

- (A) $\omega L^2 C = 1$ (B) $\omega LC = 1$ (C) $\omega^2 LC = 1$ (D) $\omega LC^2 = 1$

12.2 在题图所示电路中, $u = 30\sin\omega t$ V, $i = 5\sin\omega t$ A, $\omega = 100$ rad/s, 则无源二端网络 N 可看作 $R =$ () Ω 与 $C =$ () F 串联。

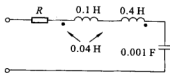


题 12.2 图

12.3 RLC 串联电路,当频率 $f = f_0 =$ (), 电路发生谐振,当 $f > f_0$ 时电路呈()性,当 $f < f_0$ 时电路呈()性。

12.4 题图所示串联电路的谐振角频率为(), 互感元件的耦合系数为()。

- (A) 48.8 rad/s, 0.2 (B) 41.52 rad/s, 1 (C) 20.8 rad/s, 0.08 (D) 24.4 rad/s, 0.1



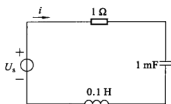
题 12.4 图

12.5 题图所示谐振电路的品质因数为()。

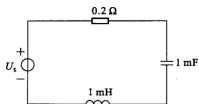
- (A) 10 (B) 20 (C) 30

(D) 40

12.6 题图所示 RLC 串联谐振电路的通频带为()。



题 12.5 图



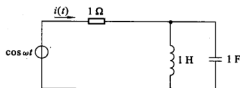
题 12.6 图

(A) 100 rad/s

(B) 200 rad/s

(C) 400 rad/s

(D) 500 rad/s

12.7 电路如题图所示,问频率 ω 为多大时,稳态电流 $i(t)$ 为零?

题 12.7 图

第 13 章 双口网络

实际应用的电路中包括许多电子元件。从激励电源开始,逐步分析、计算直至得到输出端的电压、电流是一件非常烦琐的工作。如果将输入端和输出端之间的所有元件构成的电路看成一个网络,不管网络内部的元件参数和结构如何,只要用一组方程表达网络的外部特征,就很容易从激励电源的值得到输出端口的电参数值,该方法称为黑箱方法。这种有两个端口的网络称为双口网络,网络的模型见图 13.1。

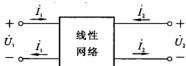


图 13.1 双口网络模型

输入端的电压和电流分别为 \dot{U}_1 和 \dot{I}_1 , 输出端的电压和电流分别为 \dot{U}_2 和 \dot{I}_2 , 规定: 上端电流取流入网络, 下端电流取流出网络, 各端口流入的电流与流出的电流相等。

13.1 导纳参数

由于该网络为线性, 视 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 为自变量, \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 为因变量。 \dot{I}_1 由 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 两个分量叠加而成; \dot{I}_2 也由 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 叠加而成(见图 13.2), 于是

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \quad (13-1)$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \quad (13-2)$$



图 13.2 电压激励的双口网络

当 $Y_{11} \sim Y_{22}$ 四个参数被解出, 该网络的特性就可以确定了。四个参数均具有导纳的单位(S), 故称其为导纳参数, 也称 Y 参数。只要给出 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 , 解方程就可以得到 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。

根据式(13-1)和式(13-2), 若 $\dot{U}_2 = 0, Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}$, 所以

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad (13-3)$$

同样可得 $Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}$, 所以

$$Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad (13-4)$$

若 $\dot{U}_1 = 0, Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}$, 所以

$$Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} \quad (13-5)$$

同样可得

$$Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} \quad (13-6)$$

从式(13-3) ~ 式(13-6)可知,每个参数都是将电压 \dot{U}_1 或电压 \dot{U}_2 短路后求出的(参见图 13.3),所以又称其为短路导纳参数。

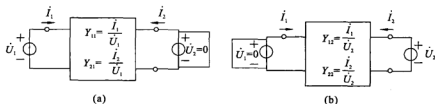


图 13.3 求解 Y 参数

(a) 求 Y_{11} 和 Y_{21} ; (b) 求 Y_{12} 和 Y_{22}

【例 13.1】 图 13.4(a) 是一个 π 型电阻网络,求该网络的四个导纳参数。

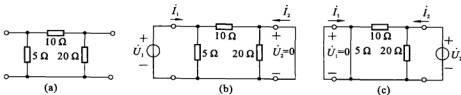


图 13.4 求解 π 型电路的 Y 参数

(a) π 型网络; (b) 求 Y_{11} 和 Y_{21} ; (c) 求 Y_{12} 和 Y_{22}

解 应用式(13-3) ~ 式(13-6)能够很容易地将四个参数求出。

先求 Y_{11} , 将输出端短路后[图 13.4(b)], 求出 \dot{I}_1 和 \dot{U}_1 的比值。即令 $\dot{U}_1 = 1 \text{ V}$, 则 $Y_{11} = \dot{I}_1$, 于是

$$\dot{I}_1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) \dot{U}_1 = 0.3 \dot{U}_1 = 0.3$$

因此

$$Y_{11} = 0.3 \text{ S}$$

再求 Y_{12} , 将输入端短路[图 13.4(c)]并在输出端接上 1 V 电压, 这时, 流入电流流过短路线且 $\dot{I}_1 = \frac{1}{10} \text{ A}$, 因此

$$Y_{12} = -0.1 \text{ S}$$

采用类似的方法可得到

$$Y_{21} = -0.1 \text{ S}, \quad Y_{22} = 0.15 \text{ S}$$

因此, 描述该双口网络的导纳参数形式的方程为

$$\dot{I}_1 = 0.3 \dot{U}_1 - 0.1 \dot{U}_2 \quad (13-7)$$

$$\dot{I}_2 = -0.1 \dot{U}_1 + 0.15 \dot{U}_2 \quad (13-8)$$

Y 参数可用矩阵形式表示为

$$[Y] = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix} S$$

这两个方程式与节点分析法求出的方程式完全一致。

【例 13.2】求如图 13.5 所示双口网络的导纳参数。

解 设左右两端加上电流分别为 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 的电流源, 以公共负极为参考节点, 应用节点分析法, 列出节点方程为

$$\left(\frac{1}{10} + j\frac{1}{5}\right)\dot{U}_1 - \frac{1}{10}\dot{U}_2 = \dot{I}_1$$

$$-\frac{1}{10}\dot{U}_1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j10}\right)\dot{U}_2 = \dot{I}_2 - 0.05\dot{U}_2$$

两节点与 \dot{U}_2 之间存在的关系为

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2$$

联立上三式解得

$$\dot{I}_1 = (0.1 + j0.2)\dot{U}_1 - 0.1\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = -0.05\dot{U}_1 + (0.05 - j0.1)\dot{U}_2$$

于是得到

$$Y_{11} = 0.1 + j0.2, \quad Y_{12} = -0.1, \quad Y_{21} = -0.05, \quad Y_{22} = 0.05 - j0.1$$

写成 Y 的矩阵形式, 即

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1 + j0.2 & -0.1 \\ -0.05 & 0.05 - j0.1 \end{bmatrix} S$$

【例 13.3】为了进一步说明导纳参数的意义, 在图 13.4(a) 两端加上电源和负载, 如图 13.6 所示, 求网络两端口电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。

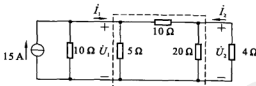


图 13.6

解 利用式(13-7)和式(13-8)组成的方程组, 在图 13.4(a) 的两个端口分别接上单端口网络, 即在输入端接一个实际电流源, 输出端与一电阻性负载相连。

将 KCL 应用于输入端, 则有

$$\dot{I}_1 = 15 - 0.1\dot{U}_1 \quad (13-9)$$

在输出端应用欧姆定律可得

$$\dot{I}_2 = -0.25\dot{U}_2 \quad (13-10)$$

将 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 代入式(13-7)和式(13-8)可得

$$15 - 0.1\dot{U}_1 = 0.3\dot{U}_1 - 0.1\dot{U}_2$$

$$-0.25\dot{U}_2 = -0.1\dot{U}_1 + 0.15\dot{U}_2$$

进一步计算得到

$$15 = 0.4\dot{U}_1 - 0.1\dot{U}_2$$

$$0 = -0.1\dot{U}_1 + 0.4\dot{U}_2$$

联之上二式解得

$$\dot{U}_1 = 40 \text{ V}, \quad \dot{U}_2 = 10 \text{ V}$$

将 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 代入式(13-9)和式(13-10)得出输入端电流和输出端电流,即

$$\dot{I}_1 = 11 \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = -2.5 \text{ A}$$

解题过程表明,当已知网络的导纳参数后,赋予该网络输入端确定的电压,不必再对网络内部情况进行分析,根据参数方程就可以算出 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 以及负载上的电压 \dot{U}_2 。

用 Y 参数很容易将 Y 形电阻网络和 \triangle 形电阻网络的等效计算公式推导出来。

无源线性网络的 Y 参数中,存在 $Y_{12} = Y_{21}$ 的关系。如果网络中存在受控源,四个参数也能被求出,但通常情况下, $Y_{12} \neq Y_{21}$ 。

除了 Y 参数,基于待分析网络的多样性,对于具有不同特性的双口网络,需要采用与之相吻合的某一参数,使网络的求解变得简便,下面介绍其他三种参数。

13.2 阻抗参数

对于无源线性网络,若以电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 为自变量, \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 为因变量,由 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 的分量叠加可以得到 \dot{U}_1 ,由 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 的分量叠加也可得到 \dot{U}_2 (见图 13.7),于是

$$\dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 \quad (13-11)$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 \quad (13-12)$$

当 $Z_{11} \sim Z_{22}$ 四个参数被解出来后,该网络的特性就可以决定了。该四个参数具有阻抗的单位(Ω),故称其为阻抗参数,也称 Z 参数。只要给出了 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 ,解方程式(13-11)和(13-12)就能够得到 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 。

根据式(13-11)和式(13-12),若 $\dot{I}_2 = 0$, $Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$,即

$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad (13-13)$$

同样可得

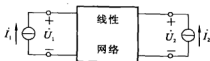


图 13.7 电流激励的双口网络

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{i_2=0} \quad (13-14)$$

若 $\dot{I}_1 = 0$, $Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}$, 即

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{i_1=0} \quad (13-15)$$

同样可得

$$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{i_1=0} \quad (13-16)$$

从式(13-13)~式(13-16)可知,每个参数都是将 \dot{I}_1 或 \dot{I}_2 置零后求得(参见图 13.8),所以又称其为开路阻抗参数。



图 13.8 求解 Z 参数

Z 参数与 Y 参数存在互换关系,这种关系可以应用克莱姆法则得出。将式(13-11)和式(13-12)看成二元一次方程组,应用克莱姆法则,有

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_1 & Z_{12} \\ \dot{U}_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \left(\frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \right) \dot{U}_1 - \left(\frac{Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \right) \dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{U}_1 \\ Z_{21} & \dot{U}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \left(-\frac{Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \right) \dot{U}_1 + \left(\frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \right) \dot{U}_2$$

与式(13-1)和式(13-2)对照后得出

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta_Z}, \quad Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}$$

$$Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z}, \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$$

上面四个式子表达出阻抗参数与导纳参数的互换关系,本章要涉及的四种参数均可实现两两之间的互换,见表 13.1。

表 13.1 四种主要网络参数之间的转换关系

矩阵	用 Z 参数表示	用 Y 参数表示	用 H 参数表示	用 A 参数表示
$[Z]$	$Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{Y_{12}}{\Delta Y} \quad \frac{Y_{11}}{\Delta Y}$ $-\frac{Y_{21}}{\Delta Y} \quad \frac{Y_{22}}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta H}{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $-\frac{H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \frac{\Delta A}{A_{21}}$ $\frac{1}{A_{21}} \quad \frac{A_{22}}{A_{21}}$
$[Y]$	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z} \quad -\frac{Z_{12}}{\Delta Z}$ $-\frac{Z_{21}}{\Delta Z} \quad \frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	$Y_{11} \quad Y_{12}$ $Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{1}{H_{11}} \quad -\frac{H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{\Delta H}{H_{11}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}} \quad -\frac{\Delta A}{A_{12}}$ $-\frac{1}{A_{12}} \quad \frac{A_{11}}{A_{12}}$
$[H]$	$\frac{\Delta Z}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad -\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{\Delta Y}{Y_{11}}$	$H_{11} \quad H_{12}$ $H_{21} \quad H_{22}$	$\frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \frac{\Delta A}{A_{22}}$ $-\frac{1}{A_{22}} \quad \frac{A_{21}}{A_{22}}$
$[A]$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{\Delta Z}{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \quad -\frac{1}{Y_{21}}$ $-\frac{\Delta Y}{Y_{21}} \quad -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{\Delta H}{H_{21}} \quad -\frac{H_{11}}{H_{21}}$ $-\frac{H_{22}}{H_{21}} \quad -\frac{1}{H_{21}}$	$A_{11} \quad A_{12}$ $A_{21} \quad A_{22}$

注: $\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$, $\Delta H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}$, $\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$, $\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$

【例 13.4】求图 13.9(a) 所示电路的阻抗参数。

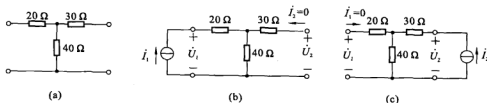


图 13.9

解 求 Z_{11} : $Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{(20+40) \dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 60 \Omega$ [见图 13.9(b)]

求 Z_{21} : $Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{40 \dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 40 \Omega$ [见图 13.9(b)]

求 Z_{12} : $Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{40 \dot{I}_2}{\dot{I}_2} = 40 \Omega$ [见图 13.9(c)]

求 Z_{22} : $Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{(30+40) \dot{I}_2}{\dot{I}_2} = 70 \Omega$ [见图 13.9(c)]

Z 参数的矩阵形式为

$$[Z] = \begin{bmatrix} 60 & 40 \\ 40 & 70 \end{bmatrix} \Omega$$

【例 13.5】如图 13.10(a) 所示网络为晶体管的一种 T 形等效模型, 求其 Z 参数。

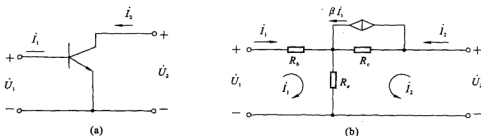


图 13.10

解 由图 13.10(b) 可列网孔方程, 即

$$\dot{U}_1 = (R_b + R_e) \dot{I}_1 + R_e \dot{I}_2$$

$$R_e \dot{I}_1 + (R_e + R_c) \dot{I}_2 = \dot{U}_2 + \beta R_c \dot{I}_1$$

重排以上方程可得

$$\dot{U}_1 = (R_b + R_e) \dot{I}_1 + R_e \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = (R_e - \beta R_c) \dot{I}_1 + (R_e + R_c) \dot{I}_2$$

把上述二式与式(13-11)和式(13-12)进行对照, 可得

$$Z_{11} = R_b + R_e, \quad Z_{12} = R_e$$

$$Z_{21} = R_e - \beta R_c, \quad Z_{22} = R_e + R_c$$

Z 参数的矩阵形式为

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_b + R_e & R_e \\ R_e - \beta R_c & R_e + R_c \end{bmatrix}$$

13.3 混合参数

在网络输出阻抗很大的情况下, 若要测量 \dot{U}_2 , 同时又要 \dot{I}_2 开路, 是一件困难的事情。因此, 有时 Z 参数中的 Z_{21} 难以确定。这时, 有必要选择其他类型的参数, 如通过输出端的短路电流 \dot{I}_2 来确定。这就是混合参数, 自变量是 \dot{I}_1 和 \dot{U}_2 , 因变量是 \dot{U}_1 和 \dot{I}_2 , 于是

$$\dot{U}_1 = H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2 \quad (13-17)$$

$$\dot{I}_2 = H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2 \quad (13-18)$$

若将式(13-17)和式(13-18)改写为

$$\dot{I}_1 = g_{11} \dot{U}_1 + g_{12} \dot{I}_2 \quad (13-19)$$

$$\dot{U}_2 = g_{21} \dot{U}_1 + g_{22} \dot{I}_2 \quad (13-20)$$

则网络参数的名称为逆混合参数, 于是在式(13-19)和式(13-20)中, 若 $\dot{I}_2 = 0$, 则

$$g_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}, \text{所以}$$

$$g_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad (13-21)$$

$$g_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}, \text{所以}$$

$$g_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad (13-22)$$

$$\text{若 } \dot{U}_1 = 0, \text{则 } g_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}, \text{所以}$$

$$g_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} \quad (13-23)$$

$$g_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}, \text{所以}$$

$$g_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} \quad (13-24)$$

以上各参数中存在的单位有阻抗 Ω , 导纳 S 以及常数项, 故称混合参数, 也称 H 参数, 只要给出 \dot{U}_1 和 \dot{I}_2 , \dot{I}_1 和 \dot{U}_2 的值就可以求出。

对于混合参数, 根据式(13-17) 和式(13-18), 若 $\dot{U}_2 = 0$, 则

$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}, \text{所以}$$

$$H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad (13-25)$$

$$H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}, \text{所以}$$

$$H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad (13-26)$$

$$\text{若 } \dot{I}_1 = 0, \text{则 } H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}, \text{所以}$$

$$H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \quad (13-27)$$

$$H_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}, \text{所以}$$



$$H_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{i_1=0} \quad (13-28)$$

【例 13.6】求图 13.11(a) 所示双口网络中的混合参数。

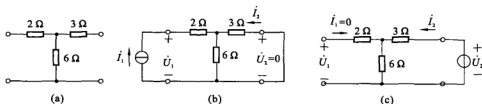


图 13.11

解 (1) 求 H_{11} 。将输出端短路, 在输入端加电流源 \dot{I}_1 , 见图 13.11(b), 有

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 (2 + 3//6) = 4 \dot{I}_1$$

因此
$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = 4 \Omega$$

(2) 求 H_{21} 。见图 13.11(b), 由分流原理可得

$$-\dot{I}_2 = \frac{6}{6+3} \dot{I}_1 = \frac{2}{3} \dot{I}_1$$

因此
$$H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -\frac{2}{3}$$

(3) 求 H_{12} 。将输入端开路, 在输出端加电压 \dot{U}_2 , 见图 13.11(c), 由分压原理可得

$$\dot{U}_1 = \frac{6}{6+3} \dot{U}_2 = \frac{2}{3} \dot{U}_2$$

因此
$$H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{2}{3}$$

(4) 求 H_{22} 。见图 13.11(c)。 $\dot{U}_2 = (3+6) \dot{I}_2 = 9 \dot{I}_2$

因此
$$H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = \frac{1}{9} \text{ S}$$

H 参数的矩阵形式为

$$[H] = \begin{bmatrix} 4 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

【例 13.7】如图 13.12 所示网络, 已知 $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$, 求网络的 H 参数。

解

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{R_1} \right) R_2 + 2\dot{U}_2 \\ &= \dot{I}_1 R_2 - \frac{\dot{U}_1}{R_1} R_2 + 2\dot{U}_2 \end{aligned}$$

$$= \dot{i}_1 - \dot{U}_1 + 2\dot{U}_2$$

即

$$2\dot{U}_1 = \dot{i}_1 + 2\dot{U}_2$$

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{2} \dot{i}_1 + \dot{U}_2$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_2 - 2\dot{U}_1}{R_2} = \frac{\dot{U}_2 - 2\dot{U}_2}{1} = -\dot{U}_2$$

将结果与式(13-17)和式(13-18)对照可得

$$H_{11} = \frac{1}{2}, \quad H_{12} = 1$$

$$H_{21} = 0, \quad H_{22} = -1$$

H 参数的矩阵形式为

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【例 13.8】如图 13.13 所示的电路为晶体管在小信号工作条件下的简化等效电路,求该双口网络的 H 参数,并求其参数方程。

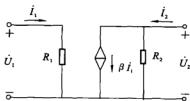


图 13.13

解 该题可由 H 参数的意义直接求解。

$$H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = R_1, \quad H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{i}_1=0} = 0$$

$$H_{21} = \left. \frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \beta, \quad H_{22} = \left. \frac{\dot{i}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{i}_1=0} = \frac{1}{R_2}$$

H 参数的矩阵形式为

$$[H] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ \beta & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

13.4 传输函数

若网络涉及的是从输入端接收信号,然后从输出端将经过变化的信号传给下一级电路,用传输参数(亦称为 A 参数或 t 参数)比较方便。对已定的输出电压 \dot{U}_2 和电流 \dot{i}_2 ,要确定 \dot{U}_1 和 \dot{i}_1 ,应有

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}(-\dot{I}_2) \quad (13-29)$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}(-\dot{I}_2) \quad (13-30)$$

式中用 $-\dot{I}_2$ 而不是用 \dot{I}_2 , 是因为已规定 \dot{I}_2 的参考方向指向网络, 而用传输函数求解问题时, 以电流从网络流出比较方便, 见图 13.14。

当 $A_{11} \sim A_{22}$ 四个参数被测出后, 该网络的特性就可以确定了。对于已知的 \dot{U}_2 和 \dot{I}_2 值, 将其代入式 (13-29) 和式 (13-30), 就可以求出需要在输入端口施加的 \dot{U}_1 和 \dot{I}_1 。



图 13.14 A 参数网络模型

根据式 (13-29) 和式 (13-30), 若 $\dot{I}_2 = 0$, 则 $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = A_{11}$, 所以

$$A_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad (13-31)$$

若 $\dot{I}_2 = 0$, 则 $\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = A_{21}$, 所以

$$A_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad (13-32)$$

若 $\dot{U}_2 = 0$, 则 $\frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} = A_{12}$, 所以

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} = A_{12} \quad (13-33)$$

若 $\dot{U}_2 = 0$, 则 $\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} = A_{22}$, 所以

$$A_{22} = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} = A_{22} \quad (13-34)$$

理想变压器的特性是对传输参数很好的证明。

当匝数比 $\frac{N_1}{N_2} = n$ 时, 理想变压器的 $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n$, 故 $A_{11} = n$;

理想变压器的 $\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\frac{1}{n}$, 即 $\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} = \frac{1}{n}$, 故 $A_{22} = \frac{1}{n}$;

当 $\dot{I}_2 = 0$ 时, $\dot{I}_1 = 0$, 故 $A_{12} = 0$;

当 $\dot{U}_2 = 0$ 时, $\dot{U}_1 = 0$, 故 $A_{21} = 0$ 。

理想变压器的传输参数的矩阵形式为

$$[A] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

【例 13.9】如图 13.15 所示的 RC 网络, 求其传输参数矩阵。

解 $A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{i_2=0} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}}$

$$= 1 + j\omega RC$$

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_2=0} = \frac{R \dot{I}_1}{\dot{I}_1} = R$$

$$A_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{\dot{I}_1}{\frac{1}{j\omega C} \dot{I}_1} = j\omega C$$

$$A_{22} = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = 1$$

A 参数的矩阵形式为

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$$

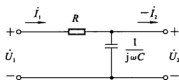


图 13.15

13.5 双口网络组合

在对一个复杂的网络进行分析和设计时, 可以将该网络分解为若干个子网络, 求解出每个子网络的参数矩阵, 再将它们组合起来, 获得所要求的结果。这样做将使分析工作简化, 对于学习后续课程如模拟电子技术等是很有帮助的。因此有必要掌握双口网络的组合方法。

组合方法分为级联、串联、并联、串 - 并联、并 - 串联等, 见表 13.2。

表 13.2 双口网络组合方式

连接方式	电路图	参数矩阵方程
级联		$A = A_1 A_2$
串联		$Z = Z_1 + Z_2$

续表 13.2

连接方式	电路图	参数矩阵方程
并联		$Y = Y_a + Y_b$
串-并联		$H = H_a + H_b$
并-串联		$G = G_a + G_b$

13.5.1 双口网络的级联

对于存在级联关系的电路,用传输参数的组合方式比较方便。级联示意图见图 13.16,图中可见前后两个网络 N_1 和 N_2 ,两个网络的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} \dot{U}_2' \\ -\dot{I}_2' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_1'' \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

由于 $\dot{U}_2' = \dot{U}_1''$, $-\dot{I}_2' = \dot{I}_1''$, 则

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = A_1 \cdot A_2 \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

式中,矩阵 $A = A_1 \cdot A_2$ 。即总网络 N 的 A 矩阵等于级联组合的各子网络 A 矩阵的乘积。

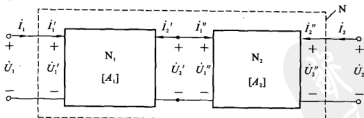


图 13.16 双口网络的级联

【例 13.10】 求图 13.17 所示级联网络的 A 参数。

解 根据式(13-31) ~ 式(13-34) 求出网络 1 和网络 2 的传输参数为

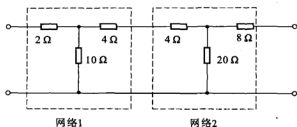


图 13.17

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \Omega \\ 0.1 \text{ S} & 1.4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \Omega \\ 0.05 \text{ S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

级联网络总的传输参数为

$$A = A_1 \cdot A_2$$

即

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \\ 0.05 & 1.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.2 \times 1.2 + 6.8 \times 0.05 & 1.2 \times 13.6 + 6.8 \times 1.4 \\ 0.1 \times 1.2 + 1.4 \times 0.05 & 0.1 \times 13.6 + 1.4 \times 1.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.78 & 25.84 \Omega \\ 0.19 \text{ S} & 3.32 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

列出网络参数方程,即

$$\dot{U}_1 = 1.78\dot{U}_2 + 25.84(-\dot{I}_2)$$

$$\dot{I}_1 = 0.19\dot{U}_2 + 3.32(-\dot{I}_2)$$

13.5.2 双口网络的串联

当网络可以由两个子网络串联而成时,应用 Z 参数求解比较方便。若子网络 1 和子网络 2 在输入端形成串联,在输出端也形成串联,就称两个子网络为串联组合。

如图 13.18 所示, I_1 将流过网络 1 的输入端和网络 2 的输入端,所以网络 1 和网络 2 在输入端串联;同理,在输出端,二者也串联,所以两个子网络为串联组合。

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2$$

统一表示为

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2$$

两个子网络的输入端电流一致,即

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}$$

$$\dot{U} = (Z_1 + Z_2) \dot{I} = Z \dot{I}$$

因此

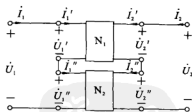


图 13.18 双口网络的串联

$$Z_{11} = Z_{111} + Z_{112} \quad (\text{下标的第三个数字指的是子网络名})$$

$$Z_{12} = Z_{121} + Z_{122}$$

$$Z_{21} = Z_{211} + Z_{212}$$

$$Z_{22} = Z_{221} + Z_{222}$$

【例 13.11】 求图 13.19 所示电路中的 $\frac{\dot{U}_2}{U_s}$ 。

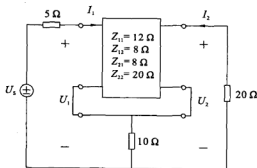


图 13.19

解 由图可知,该网络由两个子网络串联而成,上一个子网络的 Z_1 参数可知,需求出下一个子网络的 Z_2 参数。根据 Z 参数的标准方程可得

$$Z_{112} = Z_{122} = Z_{212} = Z_{222} = 10$$

总的阻抗参数的矩阵形式为

$$[Z] = [Z_1] + [Z_2] = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix}$$

代入参数方程式得

$$\dot{U}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 = 22 \dot{I}_1 + 18 \dot{I}_2 \quad (13-35)$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 = 18 \dot{I}_1 + 30 \dot{I}_2 \quad (13-36)$$

在输入端: $\dot{U}_1 = U_s - 5 \dot{I}_1 \quad (13-37)$

在输出端: $\dot{U}_2 = -20 \dot{I}_2 \quad (13-38)$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_2}{20} \quad (13-38)$$

将式(13-37)和式(13-38)代入式(13-35)可得

$$\dot{U}_s - 5 \dot{I}_1 = 22 \dot{I}_1 - \frac{18}{20} \dot{U}_2$$

$$\dot{U}_s = 27 \dot{I}_1 - 0.9 \dot{U}_2 \quad (13-39)$$

将式(13-38)代入式(13-36)得

$$\dot{U}_2 = 18 \dot{I}_1 - \frac{30}{20} \dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = \frac{2.5}{18} \dot{U}_2 \quad (13-40)$$

将式(13-40)代入式(13-39)得

$$\dot{U}_s = 27 \times \frac{2.5}{18} \dot{U}_2 - 0.9 \dot{U}_2 = 2.85 \dot{U}_2$$

因此

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s} = \frac{1}{2.85} = 0.3509$$

双口网络的串联组合可用于判别后续模拟电子技术课程的电路——运算放大器的电流串联负反馈。

13.5.3 双口网络的并联

当网络可以由两个子网络并联而成时,应用Y参数来求解比较方便。两个子网络的同性质端点对应相连接,满足 $\dot{U}_1 = \dot{U}_1' = \dot{U}_1''$; $\dot{U}_2 = \dot{U}_2' = \dot{U}_2''$, 则称这两个子网络并联。

根据图 13.20, 由 KCL 可得

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' + \dot{I}_1''$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2''$$

所以

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{bmatrix} = Y' \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{U}_2' \end{bmatrix} + Y'' \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{bmatrix}$$

$$Y = Y' + Y''$$

所分析网络的Y参数等于子网络1和子网络2的Y参数之和。

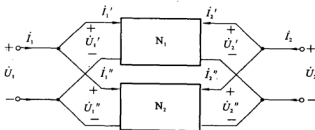


图 13.20 双口网络的并联

【例 13.12】求如图 13.21 所示双口网络的Y参数。

解 设上部子网络为 N_1 , 下部子网络为 N_2 , 两子网络为并联组成。

应用例 13.1 的求解方法, 得子网络 1 的Y参数, 即

$$Y_{121} = -j4 = Y_{211}$$

$$Y_{111} = 2 + j4$$

$$Y_{221} = 3 + j4$$

于是, 子网络 1 的Y参数矩阵为

$$[Y_1] = \begin{bmatrix} 2 + j4 & -j4 \\ -j4 & 3 + j4 \end{bmatrix} \text{ S}$$

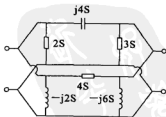


图 13.21

同理,得出子网络 2 的 Y 参数为

$$Y_{122} = -4 = Y_{212}, \quad Y_{112} = 4 - j2, \quad Y_{222} = 4 - j6$$

于是,子网络 2 的 Y 参数矩阵为

$$[Y_2] = \begin{bmatrix} 4 - j2 & -4 \\ -4 & 4 - j6 \end{bmatrix}$$

总的 Y 参数矩阵为

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] = \begin{bmatrix} 6 + j2 & -4 - j4 \\ -4 - j4 & 7 - j2 \end{bmatrix} S$$

双口网络的并联组合可用于判别后续模拟电子技术课程中的电路——运算放大器的电压并联负反馈。

13.5.4 双口网络的串-并联

对于如图 13.22 所示的具有串-并联特点的网络,应用 H 参数进行分析比较方便。

因为

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}'_2, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2$$

所以

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = H' \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} + H'' \begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix}$$

又因

$$\dot{I}'_1 = \dot{I}''_1 = \dot{I}_1$$

所以

$$\dot{U}'_2 = \dot{U}''_2 = \dot{U}_2$$

$$H' \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} + H'' \begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = [H' + H''] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

总的混合参数的矩阵形式为

$$[H] = [H'] + [H'']$$

对电压串联负反馈的运算放大器电路,可以用双口网络的串-并联组合进行确切的说明,其电路模型及经变换而成的双口网络串-并联组合见图 13.23。或者说,对于某运算放大器的反馈形式进行判别时,将其电路的形式换为图 13.23(c) 时,就可判定该运算放大器的反馈形式为电压串联负反馈。

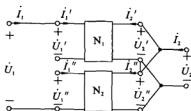
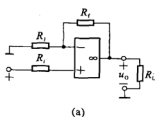
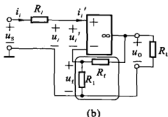


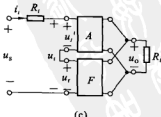
图 13.22 双口网络的串-并联



(a)



(b)



(c)

图 13.23 电压串联负反馈对应双口网络串-并联组合

13.5.5 双口网络的并-串联

对于如图 13.24 所示的具有并-串联特点的双口网络,采用 G 参数进行分析比较方便。因为

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' + \dot{I}_1'', \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_2' + \dot{U}_2''$$

所以

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{U}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{bmatrix} = G' \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} + G'' \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{bmatrix}$$

又因

$$\dot{U}_1' = \dot{U}_1'' = \dot{U}_1, \quad \dot{I}_2' = \dot{I}_2'' = \dot{I}_2$$

所以

$$G' \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix} + G'' \begin{bmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{bmatrix} = (G' + G'') \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

逆混合参数的矩阵形式为

$$[G] = [G'] + [G'']$$

对于电流并联负反馈的运算放大器电路,可以用双口网络的并-串联组合进行确切的说明,其电路模型及经变换而成的双口网络并-串联组合见图 13.25。或者说,对于某运算放大器的反馈形式进行判别时,将其电路形式变换为图 13.25(c) 时,就可判定该运算放大器的反馈形式为电流并联负反馈。

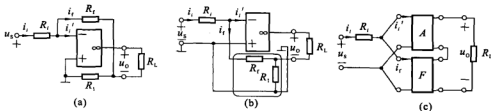


图 13.25 电流并联负反馈对应双口并-串联组合

13.6 与后续课程的关系

双口网络可以用六组可能的参数来表征,其中最常用的是 Z 参数、 Y 参数、 H 参数和传输参数,根据不同的情况,可以选取一种更为合适的参数。 Z 参数和 Y 参数是最基本的参数,可以认为是单口网络输入阻抗和输入导纳的延伸,常用于理论探讨和基本定理的推导中。 H 参数广泛用于低频晶体管电路的分析问题中,对晶体管来说, H 参数最容易测量,且具有明显的物理意义。在涉及双口网络的传输问题时则采用传输参数最为方便。

下面举一个 Y 参数的工程实例:晶体三极管高频等效电路。晶体三极管是抽象器件,分析时把它等效成基本电路元件,把晶体三极管从应用电路中分解出来,看成双口网络,如图 13.26 所示。晶体三极管在高频等效时要考虑三极管各极间电容,其物理等效如图 13.27 所示。直接用物理等效电路分析计算放大器性能指标很不方便,因电路既串联又并联的混联结

构。实际中常采用导纳 Y 参数等效电路,如图 13.28 所示。

在图 13.28 中,各 Y 参数情况如下:

$$Y_{re} = \frac{\dot{I}_b}{\dot{U}_{ce}} \Big|_{\dot{U}_{be}=0}, \quad Y_{ie} = \frac{\dot{I}_b}{\dot{U}_{be}} \Big|_{\dot{U}_{ce}=0}$$

$$Y_{oe} = \frac{\dot{I}_c}{\dot{U}_{ce}} \Big|_{\dot{U}_{be}=0}, \quad Y_{ie} = \frac{\dot{I}_c}{\dot{U}_{be}} \Big|_{\dot{U}_{ce}=0}$$

Y_{ie} 是输出端交流短路时的输入导纳; Y_{oe} 是输入端交流短路时的输出导纳; Y_{ie} 是输出端交流短路时的正向传输导纳; Y_{re} 是输入端交流短路时的反向传输导纳。可以得到晶体管 Y 参数等效电路的 Y 参数方程(VAR),即

$$\dot{I}_b = Y_{ie}\dot{U}_b + Y_{re}\dot{U}_c$$

$$\dot{I}_c = Y_{ie}\dot{U}_b + Y_{oe}\dot{U}_c$$

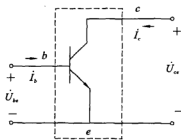


图 13.26 晶体管的双口网络

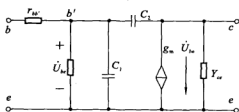


图 13.27 晶体三极管物理等效电路

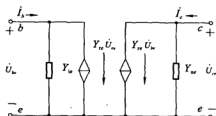


图 13.28 晶体三极管 Y 参数等效电路

实际上, Y_{ie} 由电导和电容组成,可表达成

$$Y_{ie} = g_{ie} + j\omega C_{ie}$$

Y_{ie} 反映了晶体管放大器输入电压对输入电流的控制作用。其中 g_{ie} 、 C_{ie} 分别表示晶体管的输入电导和输入电容。

Y_{oe} 由电导和电容组成,可表达成

$$Y_{oe} = g_{oe} + j\omega C_{oe}$$

Y_{oe} 反映了晶体管输出电压对输出电流的作用。其中, g_{oe} 、 C_{oe} 分别称为晶体管的输出电导和输出电容。根据以上分析,并由晶体管的 Y 参数的网络方程,可得晶体管 Y 参数工程计算用等效电路如图 13.29 所示。

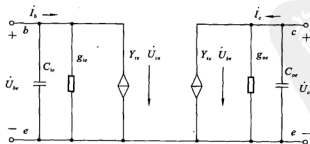


图 13.29 晶体管 Y 参数工程计算用等效电路

在实际电路问题中,双口网络往往是电路中的一部分,可能以“黑箱”形式出现,内部情况可以不管,只要掌握它的 VAR,就能对电路进行分析。这是对电路进行分解、把复杂的大网络化成一个个单口和双口网络的好处,而且若双口网络是非线性电路,也可分解后得到其 VAR 或其他参数。

13.7 实用电路举例——无源滤波器

采用线性无源元件(电阻、电感、电容)构造的滤波电路是双端口网络中很重要的一类电路。而滤波器是一种选择装置,它对输入信号进行加工和处理,从中选出某些特定的信号作为输出信号。电滤波器的任务是对输入信号进行选频加权传输。

电滤波器是 Campbell 和 Wagner 在第一次世界大战期间各自独立发明的,当时直接应用于长途载波电话等通信系统。电滤波器主要由无源元件 R 、 L 、 C 构成,称为无源滤波器。

滤波器的输出与输入关系通常用电压转移函数 $H(s)$ 来描述,电压转移函数又称为电压增益函数,其定义为

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$$

式中, $U_o(s)$ 、 $U_i(s)$ 分别为输出、输入电压的拉氏变换。在正弦稳态情况下, $s = j\omega$, 电压转移函数可写成

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_o(j\omega)}{\dot{U}_i(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

式中, $|H(j\omega)|$ 表示输出与输入的幅值比,称为幅值函数或增益函数,它与频率的关系称为幅频特性; $\phi(\omega)$ 表示输出与输入的相位差,称为相位函数,它与频率的关系称为相频特性。幅频特性与相频特性统称滤波器的频率响应。滤波器的幅频特性很容易用实验方法测定。

滤波器按幅频特性的不同,可分为低通、高通、带通、带阻和全通滤波电路等几种,图 13.30 给出了低通、高通、带通和带阻滤波电路的典型幅频特性。

低通滤波电路的幅频响应如图 13.30(a) 所示,图中 $|H(j\omega)|$ 为增益的幅值, K 为增益常数。由图可知,它的功能是通过从零到某一截止频率 ω_c 的低频信号,而对大于 ω_c 的所有频率则衰减,因此其带宽 $B = \omega_c$ 。

高通滤波电路的幅频响应如图 13.30(b) 所示。由图可以看到,在 $0 < \omega < \omega_c$ 范围内的频率为阻带,高于 ω_c 的频率为通带。

带通滤波电路的幅频响应如图 13.30(c) 所示。图中 ω_{c1} 为下截止频率, ω_{c2} 为上截止频率, ω_0 为中心频率。由图可知,它有两个阻带: $0 < \omega < \omega_{c1}$ 和 $\omega > \omega_{c2}$, 因此带宽 $B = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ 。

带阻滤波电路的幅频响应如图 13.30(d) 所示。由图可知,它有两个通带: $0 < \omega < \omega_{c1}$ 及 $\omega > \omega_{c2}$ 和一个阻带 $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$ 。因此它的功能是衰减 ω_{c1} 到 ω_{c2} 间的信号。通带 $\omega > \omega_{c2}$ 也是有限的。

带阻滤波电路阻带中点所在的频率 ω_z 叫零点频率。

二阶低通、高通、带通和带阻滤波器的电压转移函数分别为

$$H(s) = \frac{K\omega_p^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)s + \omega_p^2} \quad (\text{低通})$$

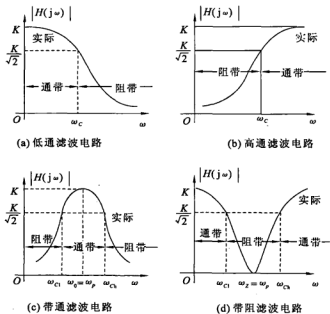


图 13.30 各种滤波电路的幅频响应

$$H(s) = \frac{Ks^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)s + \omega_p^2} \quad (\text{高通})$$

$$H(s) = \frac{K\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)s}{s^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)s + \omega_p^2} \quad (\text{带通})$$

$$H(s) = \frac{K(s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + \left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)s + \omega_p^2} \quad (\text{带阻})$$

式中, K 、 ω_p 、 ω_z 和 Q_p 分别称为增益常数、极点频率、零点频率和极偶品质因数。正弦稳态时的电压转移函数可分别写成

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + j \frac{1}{Q_p} \frac{\omega}{\omega_p}} \quad (\text{低通})$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - j \frac{1}{Q_p} \frac{\omega_p}{\omega}} \quad (\text{高通})$$

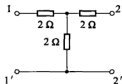
$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + jQ_p \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)} \quad (\text{带通})$$

$$H(j\omega) = \frac{K(\omega_z^2 - \omega^2)}{(\omega_p^2 - \omega^2) + j \frac{\omega_p}{Q_p} \omega} \quad (\text{带阻})$$

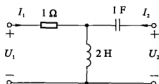
习 题

13.1 求题图所示双口网络的 Z 参数矩阵。

13.2 题图所示双口网络工作于正弦稳态,角频率为 1 rad/s ,求相量模型的端口电压电流关系方程。



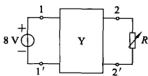
题 13.1 图



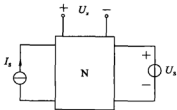
题 13.2 图

13.3 电路如题图所示,已知二端口网络的 Y 参数为 $Y = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ S}$,若在该网络的 $1-1'$ 端口接上 8 V 的电压源,在 $2-2'$ 端口接上电阻 R 。试求:(1) R 为多大时,能获得最大功率?(2) 此时最大功率为多少?电源发出的功率为多少?

13.4 电路如题图所示, N 为线性含源网络,已知当 $i_s = 8 \text{ A}$, $U_s = 12 \text{ V}$ 时,响应 $U_x = 80 \text{ V}$; 当 $i_s = -8 \text{ A}$, $U_s = 4 \text{ V}$ 时,响应 $U_x = 0 \text{ V}$; 当 $i_s = 0 \text{ A}$, $U_s = 0 \text{ V}$ 时,响应 $U_x = -40 \text{ V}$ 。求当 $i_s = 10 \text{ A}$, $U_s = 20 \text{ V}$ 时,响应 U_x 为多少?



题 13.3 图



题 13.4 图

第 14 章 其他电路定理和公式

本章将进一步讨论电路理论中的一些重要电路定理。深入理解这些定理,对学习和掌握电路理论的知识点以及对进一步学习后续课程有重要的作用。

14.1 $2b$ 方程法

对于一个有 b 条支路、 n 个节点的电路,当选择支路电流、支路电压变量列写方程时,则有 $2b$ 个未知变量,为此必须建立 $2b$ 个方程。其一般方法是根据来自元件的约束关系(VCR)和来自电路的约束关系(KCL、KVL),建立以所选择电路变量为未知量的方程组,从而求解出未知量。其方法如下:

- (1) 由元件的 VCR,建立 b 条支路的电压、电流关系方程;
- (2) 由 KCL 可列出 $(n-1)$ 个相互独立的电流方程;
- (3) 由 KVL 可列出 $(b-n+1)$ 个相互独立的电压方程。

如图 14.1 所示电路,求各支路电流与电压。

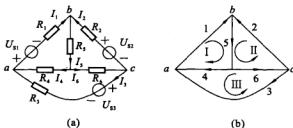


图 14.1 $2b$ 法示例

设各支路电流参考方向如图 14.1(a) 所示,支路电压参考方向与支路电流参考方向关联,省略不标。图 14.1(b) 为图 14.1(a) 的拓扑线图,网孔的绕行方向如图所示。选 a 、 b 、 c 节点为独立节点,流出节点的电流为“+”,流入节点的电流为“-”,则由 KCL 可列出方程为

$$\left. \begin{aligned} a \text{ 节点: } & I_1 - I_3 - I_4 = 0 \\ b \text{ 节点: } & -I_1 - I_2 + I_5 = 0 \\ c \text{ 节点: } & I_2 + I_3 - I_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-1)$$

由 KVL 可列出方程为

$$\left. \begin{aligned} \text{网孔 I: } & U_1 + U_5 + U_4 = 0 \\ \text{网孔 II: } & U_2 + U_5 + U_6 = 0 \\ \text{网孔 III: } & -U_3 + U_4 - U_6 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-2)$$

根据各支路元件的 VAR 关系,可列出各支路的电压、电流关系方程为

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= R_1 I_1 - U_{S1} \\ U_2 &= R_2 I_2 - U_{S2} \\ U_3 &= R_3 I_3 + U_{S3} \\ U_4 &= R_4 I_4 \\ U_5 &= R_5 I_5 \\ U_6 &= R_6 I_6 \end{aligned} \right\} \quad (14-3)$$

联立式(14-1)、(14-2)、(14-3)表示的方程组(共有 $2b = 12$ 个方程),就可求解出各支路电压、电流。

从概念上说,2b 法是其他电路分析方法的基础,其求解过程概念清晰,结果直观、明了。但该方法的缺点也很突出,若求解的电路支路数较多时,手工计算 2b 个联立方程过程复杂,工作量大。因此该方法适合于计算机辅助电路分析。

14.2 齐次定理

线性电路除具有叠加性外,另一重要的特性就是齐次性(又称比例性或均匀性)。因此,在线性电路中,把该性质总结为另一重要的定理——齐次定理。

齐次定理: 当一个激励源(独立电压源或独立电流源)作用于线性电路时,其任意支路的响应(电流或电压)与该激励源成正比。

由叠加原理可知,线性电路中任一支路的响应,都可看成是各独立激励源单独作用时,在该支路中产生响应的代数和。因此,一个具有 m 个网孔的线性电路,其任一支路的电流(如 i_1),可表示为

$$i_1 = k_1 u_{S1} + k_2 u_{S2} + \cdots + k_m u_{Sm} \quad (14-4)$$

式中, k_1, k_2, \cdots, k_m 是与电路结构、元件参数及线性受控源有关的常数。

由式(14-4)不难看出齐次定理的正确性。若 m 个网孔的线性电路只有一个电压激励源 u_{S1} , 其他电压激励源为 0, 则任一支路的电流(如 i_1) 为

$$i_1 = k_1 u_{S1} \quad (14-5)$$

由上式不难看出,若激励源 u_{S1} 增大 k 倍, i_1 也增大 k 倍。

【例 14.1】 图 14.2 所示为梯形电阻网络,求电流 i_1 。

解 本例可采用电阻串并联等效先求出 i_5 , 然后再逐次求得 i_4, i_3, i_2, i_1 , 也可采用网孔分析法或节点电位法求解。本例利用线性电路的齐次性,采用设定 i_1 逆推激励源 u_{S5} 数值,求出 i_1 和 u_{S5} 间的比例系数 k_1 后应用式(14-5)得到所求的电流 i_1 。

设 $i_1 = 1 \text{ A}$, 则由 VCR、KVL、KCL 可得

$$u_o = (2+1)i_1 = 3 \times 1 = 3 \text{ V}$$

$$i_2 = \frac{u_o}{1} = \frac{3}{1} = 3 \text{ A}$$

$$i_3 = i_1 + i_2 = 1 + 3 = 4 \text{ A}$$

$$u_5 = 2i_3 + u_o = 2 \times 4 + 3 = 11 \text{ V}$$

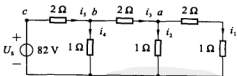


图 14.2

$$i_4 = \frac{u_5}{1} = 11 \text{ V}$$

$$i_5 = i_3 + i_4 = 4 + 11 = 15 \text{ A}$$

$$u_c = 2i_5 + u_6 = 2 \times 15 + 11 = 41 \text{ V}$$

则此时有

$$u_s = u_c = 41 \text{ V}$$

故得

$$k_1 = \frac{i_1}{u_s} = \frac{1}{41} \text{ S}$$

所以, 当 $u_s = 82 \text{ V}$ 时, 电流 $i_1 = k_1 u_s = \frac{1}{41} \times 82 = 2 \text{ A}$ 。

14.3 置换(替代)定理

置换定理也称替代定理, 其内容为: 在具有唯一解的电路中, 若已知某支路 k 的电压 u_k , 电流 i_k , 且该支路与电路中其他支路无耦合, 则无论该支路是由什么元件组成的, 都可以用下列任何一个元件置换。

- (1) 电压等于 u_k 的理想电压源;
- (2) 电流等于 i_k 的理想电流源;
- (3) 阻值为 u_k/i_k 的电阻 (u_k 与 i_k 为关联参考方向)。

置换后该电路其他部分的电压、电流保持不变, 如图 14.3 所示。

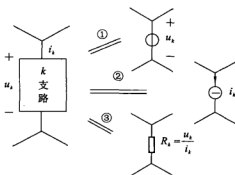


图 14.3 置换定理示意图

【例 14.2】 图 14.4(a) 所示电路, 已知电压 $u = 6 \text{ V}$, 求电阻 R 。

解 根据置换定理, 电阻 R 用 6 V 的电压源置换, 并设参考节点 a , 如图 14.4(b) 所示。则 a 点的节点方程为

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)u_a - \frac{12}{4} - \frac{6}{6} = 0$$

所以

$$u_a = 8 \text{ V}$$

由 KVL 可得

$$6i + 6 = u_a$$

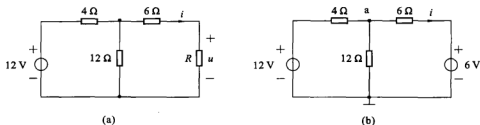


图 14.4

$$i = \frac{8-6}{6} = \frac{1}{3} \text{ A}$$

故得

$$R = \frac{u}{i} = 18 \Omega$$

14.4 特勒根定理

特勒根定理是在基尔霍夫定理的基础上发展起来的一条重要的网络定理。与基尔霍夫定理一样,特勒根定理与电路元件的性质无关,因而能普遍适用于任何集中参数电路。

14.4.1 特勒根功率定理

若某一电路的有向线图如图 14.5 所示,令图中所示的各支路电压、电流分别为 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 和 $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$; 并以节点 ① 为电位参考点,其余三个节点对该点的电压(即相应各节点的电位)分别为 v_1, v_2, v_3 。则在任何瞬时 t , 各支路吸收功率的代数和为

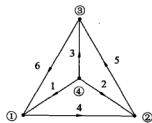


图 14.5 某一电路的有向线图

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 + u_6 i_6 \quad (14-6)$$

根据 KVL, 可写出

$$\begin{aligned} u_1 &= -v_1, & u_2 &= -v_2, & u_3 &= -v_3, \\ u_4 &= v_1 - v_2, & u_5 &= v_2 - v_3, & u_6 &= v_3 - v_1 \end{aligned} \quad (14-7)$$

将式(14-7)所示各支路电压与各节点电位之间的关系代入式(14-6),经整理后可得

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = v_1(-i_1 + i_4 - i_6) + v_2(-i_2 - i_4 + i_5) + v_3(-i_3 - i_5 + i_6)$$

而根据 KCL, 对于节点 ①、②、③, 又有

$$\left. \begin{aligned} -i_1 + i_4 - i_6 &= 0 \\ -i_2 - i_4 + i_5 &= 0 \\ -i_3 - i_5 + i_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-8)$$

以此代入上式,便可得到

$$\sum_{k=1}^6 u_k i_k = 0 \quad (14-9)$$

将这一结论推广到任一具有 $n+1$ 个节点、 b 条支路的电路,则有

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0 \quad (14-10)$$

这就是特勒根功率定理的数学表达式。该定理表明,在任意电路中,在任何瞬时 t ,各支路吸收功率的代数和恒等于零,也就是说,电路中各独立源供给功率的总和,等于其余各支路吸收功率的总和。

14.4.2 特勒根似功率定理

设有两个由不同性质的二端元件组成的电路 N 和 \hat{N} ,两电路各元件间的联接情况以及相应支路的参考方向均相同,即二者的有向图完全相同,如图 14.5 所示。令电路 N 的各支路电压、电流分别为 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 和 $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$; 电路 \hat{N} 的各支路电压、电流分别为 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4, \hat{u}_5, \hat{u}_6$ 和 $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3, \hat{i}_4, \hat{i}_5, \hat{i}_6$ 。并以节点 ④ 为电位参考点,其余三个节点的电位分别为 v_1, v_2, v_3 和 $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$, 则

$$\sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k = u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + u_3 \hat{i}_3 + u_4 \hat{i}_4 + u_5 \hat{i}_5 + u_6 \hat{i}_6 \quad (14-11)$$

对电路 N , 根据 KVL, 可写出式(14-7)。将该式所示各支路电压与各节点电位之间的关系代入式(14-11), 经整理后可得

$$\sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k = v_1 (-\hat{i}_1 + \hat{i}_4 - \hat{i}_6) + v_2 (-\hat{i}_2 - \hat{i}_4 + \hat{i}_5) + v_3 (-\hat{i}_3 - \hat{i}_5 + \hat{i}_6)$$

而根据 KCL, 对电路 \hat{N} 的节点 ①、②、③, 又有

$$\left. \begin{aligned} -\hat{i}_1 + \hat{i}_4 - \hat{i}_6 &= 0 \\ -\hat{i}_2 - \hat{i}_4 + \hat{i}_5 &= 0 \\ -\hat{i}_3 - \hat{i}_5 + \hat{i}_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-12)$$

以此代入上式, 便可得到

$$\sum_{k=1}^6 u_k \hat{i}_k = 0 \quad (14-13a)$$

同理可得

$$\sum_{k=1}^6 i_k \hat{u}_k = 0 \quad (14-13b)$$

将以上结论推广到任意两个具有 $n+1$ 个节点、 b 条支路的电路 N 和 \hat{N} , 当它们所含二端元件的性质各异, 但有向图完全相同时, 则有

$$\sum_{k=1}^b i_k \hat{u}_k = 0 \text{ 和 } \sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0 \quad (14-14)$$

这就是特勒根似功率定理的数学表达式。该定理表明, 在有向图相同的任意两个电路中, 在任何瞬时 t , 任一电路的支路电压与另一电路相应支路电流的乘积的代数和恒等于零。

注: 特勒根似功率定理仅仅表明了有向图相同电路的似功率必须遵循的数学关系。该定理要求 u (或 \hat{u}) 和 i (或 \hat{i}) 应分别满足 KVL 和 KCL。

14.5 互易定理

在线性无源电路中,若只有一个独立电源作用,则在一定的激励与响应的定义(电压源激励时,响应是电流;电流源激励时,响应是电压)下,二者的位置互易后,响应与激励的比值不变。

根据激励和响应是电压或是电流,互易定理有三种形式,下面分别叙述。

14.5.1 互易定理的第一种形式

图14.6(a)所示电路N在方框内部仅含线性电阻,不含任何独立电源和受控源。接在端子1-1'的支路1为电压源 u_s ,接在端子2-2'的支路2为短路,其中的电流为 i_2 ,它是电路中唯一的激励(即 u_s)产生的响应。如果把激励和响应位置互换,如图14.6(b)中的 \hat{N} ,此时接于2-2'的支路2为电压源 \hat{u}_s ,而响应则是接于1-1'支路1中的短路电流 \hat{i}_1 。假设把图(a)和(b)中的电压源置零,则除N和 \hat{N} 的内部完全相同外,接于1-1'和2-2'的两个支路均为短路。就是说,在激励和响应互换位置的前后,如果把电压源置零,则电路保持不变。

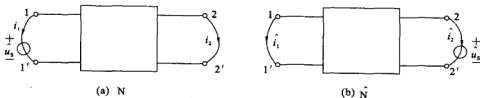


图14.6 互易定理的第一种形式

对于图14.6(a)、(b)应用特勒根定理,有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b u_k \hat{i}_k = 0$$

$$\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^b \hat{u}_k i_k = 0$$

式中取和符号遍及方框内所有支路,并规定所有支路中电流和电压都取关联参考方向。

由于方框内部仅为线性电阻,故 $u_k = R_k i_k$, $\hat{u}_k = R_k \hat{i}_k$ ($k=3, \dots, b$),将它们分别代入上式后有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b R_k i_k \hat{i}_k = 0$$

$$\hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^b R_k \hat{i}_k i_k = 0$$

故有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 \quad (14-15)$$

对图14.6(a), $u_1 = u_s$, $u_2 = 0$;对图14.6(b), $\hat{u}_1 = 0$, $\hat{u}_2 = \hat{u}_s$,代入上式得

$$u_S \hat{i}_1 = \hat{u}_S i_2$$

即

$$\frac{i_2}{u_S} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{u}_S}$$

如果 $u_S \hat{i}_1 = \hat{u}_S i_2$, 则 $i_2 = \hat{i}_1$ 。这就是互易定理的第一种形式, 即对一个仅含线性电阻的电路, 在单一电压源激励而响应为电流时, 当激励和响应互换位置时, 将不改变同一激励产生的响应。

14.5.2 互易定理的第二种形式

在图 14.7(a) 中, 接在 $1-1'$ 的支路 1 为电流源 i_S , 接在 $2-2'$ 的支路 2 为开路, 它的电压为 u_2 。如把激励和响应互换位置, 如图 14.7(b), 此时接于 $2-2'$ 的支路 2 为电流源 \hat{i}_S , 接于 $1-1'$ 的支路 1 为开路, 其电压为 \hat{u}_1 。假设把电流源置零, 则图(a) 和图(b) 的两个电路完全相同。

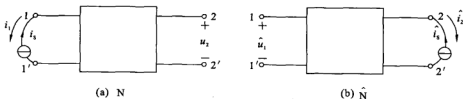


图 14.7 互易定理的第二种形式

对图 14.7(a)、(b) 应用特勒根定理, 不难得出与式(14-15) 相同的关系式, 即

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

代入 $i_1 = -i_S, i_2 = 0, \hat{i}_1 = 0, \hat{i}_2 = -\hat{i}_S$, 有

$$u_2 \hat{i}_S = \hat{u}_1 i_S$$

如果 $i_S = \hat{i}_S$, 则 $u_2 = \hat{u}_1$ 。这就是互易定理的第二种形式。

14.5.3 互易定理的第三种形式

在图 14.8(a) 中, 接在 $1-1'$ 的支路 1 为电流源 i_S , 接在 $2-2'$ 的支路 2 为短路, 其电流为 i_2 。如果把激励改为电压源 \hat{u}_S , 且接于 $2-2'$, $1-1'$ 为开路, 其电压为 \hat{u}_1 , 见图 14.8(b)。假设把电流源和电压源置零, 不难看出激励和响应互换位置后, 电路保持不变。

对图 14.8(a)、(b) 应用特勒根定理, 有

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

代入 $i_1 = -i_S, u_2 = 0, \hat{i}_1 = 0, \hat{u}_2 = \hat{u}_S$, 得到

$$-\hat{u}_1 i_S + \hat{u}_S i_2 = 0$$

即

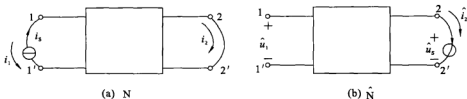


图 14.8 互易定理的第三种形式

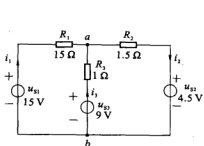
$$\frac{i_2}{i_s} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_s}$$

如果在数值上 $i_s = \hat{u}_s$, 则有 $i_2 = \hat{u}_1$, 其中 i_2 和 i_s 以及 \hat{u}_1 和 \hat{u}_s 都分别取同样的单位。这就是互易定理的第三种形式。

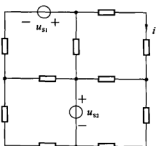
习 题

14.1 题图所示电路, 用 2b 法求各支路电流、电压 U_{ab} 及各电源产生的功率。

14.2 题图所示电路, (1) 若 $u_{S1} = 60 \text{ V}$, $u_{S2} = 0$ 时, $i = 14 \text{ A}$, 则当 $u_{S1} = 45 \text{ V}$, $u_{S2} = 0$ 时, 求 i ; (2) 若 $u_{S1} = 0$, $u_{S2} = 25 \text{ V}$ 时, $i = 2 \text{ A}$, 则当 $u_{S1} = 0$, $u_{S2} = 75 \text{ V}$ 时, 求 i ; (3) 若 $u_{S1} = 100 \text{ V}$, $u_{S2} = 100 \text{ V}$, 求 i 。

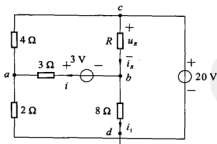


题 14.1 图



题 14.2 图

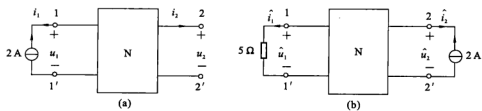
14.3 题图所示电路, 已知电压 $u_{ab} = 0$, 用置换定理求电阻 R 。



题 14.3 图

14.4 题图所示电路, N 为由电阻组成的网络, 已知当端口 $1-1'$ 接 2 A 电流源时, $u_1 = 10 \text{ V}$, $u_2 = 5 \text{ V}$, 如图(a)所示; 若将该电流源移至 $2-2'$ 端口, 而 $1-1'$ 端口接 5Ω 电阻 R , 如图(b)所示, 试求此时流

过 R 的电流。



题 14.4 图

第 15 章 PSpice 软件应用

15.1 PSpice 软件的简介

根据实际电路(或系统)建立模型,通过对模型的计算机分析、研究和试验以达到研制和开发实际电路(或系统)的目的,这一过程,称为计算机仿真(Simulation)的高效、高精度、高经济性和高可靠性,因此倍受业界喜爱。在设计或分析各类开关电源时,计算机仿真起了重要的作用。数字仿真手段可用以检验设计的系统是否满足性能要求。应用数字仿真可以减少电路实验的工作,与电路实验相比,计算机仿真所需时间要少得多,并可以更全面、更完整地进行,以期改进设计质量。目前流行的许多著名软件如 PSpice、Icspice 等,它们各自有其本身的特点。而随着 Windows 的全面普及,PSpice 推出了 Windows 版本,用户不用像 DOS 版本那样输入数据网表文件,而是图形化,只需选择相应的元器件的图标代号,然后使用线连接就可以自动生成数据网表文件,整个过程变得直观简单。因此它已广泛应用于电力电子电路(或系统)的分析中。

用于模拟电路仿真的 Spice(Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)软件于 1972 年由美国加州大学伯克利分校的计算机辅助设计小组利用 FORTRAN 语言开发而成,主要用于大规模集成电路的计算机辅助设计。Spice 的正式实用版 Spice 2G 在 1975 年正式推出,但是该程序的运行环境至少为小型机。1985 年,加州大学伯克利分校用 C 语言对 Spice 软件进行了改写,1988 年 Spice 被定为美国国家工业标准。与此同时,各种以 Spice 为核心的商用模拟电路仿真软件,在 Spice 的基础上做了大量实用化工作,从而使 Spice 成为最为流行的电子电路仿真软件。

PSpice 则是由美国 MicroSim 公司在 Spice 2G 版本的基础上升级并用于 PC 机上的 Spice 版本,其中采用自由格式语言的 5.0 版本自 20 世纪 80 年代以来在我国得到广泛应用,并且从 6.0 版本开始引入图形界面。1998 年,著名的 EDA 商业软件开发商 OrCAD 公司与 MicroSim 公司正式合并,自此 MicroSim 公司的 PSpice 产品正式并入 OrCAD 公司的商业 EDA 系统中。目前,OrCAD 公司已正式推出了 OrCAD PSpice Release 9.0,与传统的 Spice 软件相比,PSpice 9.0 在三大方面实现了重大变革:第一,在对模拟电路进行直流、交流和瞬态等基本电路特性分析的基础上,实现了蒙特卡罗分析、最坏情况分析以及优化设计等较为复杂的电路特性分析;第二,不但能够对模拟电路进行,而且能够对数字电路、数/模混合电路进行仿真;第三,集成度大大提高,电路图绘制完成后可直接进行电路仿真,并且可以随时分析观察仿真结果。

PSpice 软件具有强大的电路图绘制功能、电路模拟仿真功能、图形后处理功能和元器件

符号制作功能,以图形方式输入,自动进行电路检查,生成网表,模拟和计算电路。它的用途非常广泛,不仅可以用于电路分析和优化设计,还可用于电子线路、电路和信号与系统等课程的计算机辅助教学。与印制版设计软件配合使用,还可实现电子设计自动化。被公认是通用电路模拟程序中最优秀的软件,具有广阔的应用前景。

15.2 PSpice 的组成和应用范围

15.2.1 PSpice 的组成

以 PSpice for Windows 为例,它是一个名为 MicroSim Eval 8.0 的软件包。该软件包主要包括 Schematics、PSpice、Probe、StmEd(Stimulus Editor)、Parts、PSpice Optimizer 等。

(1) Schematics 是一个电路模拟器。它可以直接绘制电路原理图,自动生成电路描述文件,或打开已有的文件,修改电路原理图;可以对元件进行修改和编辑;可以调用电路分析程序进行分析,并可调用图形后处理程序(Probe)观察分析结果。它是集 PSpice、Probe、StmEd 和 PSpice Optimizer 于一体,是一个功能强大的集成环境。

(2) PSpice 是一个数据处理器。它可以对在 Schematics 中所绘制的电路进行模拟分析,运算出结果并自动生成输出文件和数据文件。

(3) Probe 是图形后处理器,相当于一个示波器。它可以将 PSpice 运算的结果在屏幕上显示或从打印设备打印出来。模拟结果还可以接受由基本参量组成的任意表达式。

(4) StmEd 是产生信号源的工具。它在设定各种激励信号时非常方便直观,而且容易查对。

(5) Parts 是对器件建模的工具。它可以半自动地将来自厂家的器件数据信息或用户自定义的器件数据转换为 PSpice 中所用的模拟数据,并提供它们之间的关系曲线及相互作用,确定元件的精确度。

(6) PSpice Optimizer 是优化设置工具。它可以根据用户指定的参数、性能指标和全局函数,对电路进行优化设计。

15.2.2 PSpice 的应用范围

(1) PSpice 用于模拟电路、数字电路及数模混合电路的分析及电路优化设计

① 制作实际电路之前,仿真该电路的电性能,如计算直流工作点(Bias Point Detail),进行直流扫描(DC Sweep)与交流扫描(AC Sweep),显示检测点的电压、电流波形等。

② 估计元器件变化(Parametric)对电路造成的影响。

③ 分析一些较难测量的电路特性,如进行噪声(Noise)、频谱(Fourier)、器件灵敏度(Sensitivity)、温度(Temperature)分析等。

④ 优化设计。所谓电路优化设计,是指在电路的性能已经基本满足设计功能和指标的基础上,为了使电路的某些性能更为理想,在一定的约束条件下,对电路的某些参数进行调整,直到电路的性能达到要求为止。

(2) 调用 PSpice Optimizer 模块对电路进行优化设计的基本条件

① 若电路通过了 PSpice 的模拟,相当于电路除了某些性能不够理想外,已经具备了所要求的基本功能,没有大的问题。

② 电路中至少有一个元器件为可变的值,并且其值的变化与优化设计的目标性能有关。在优化时,一定要将约束条件(如功耗)和目标参数(如延迟时间)用节点电压和支路电流信号表示。

③ 存在一定的算法,使得优化设计的性能能够成为以电路中的某些参数为变量的函数,这样 PSpice 才能通过对参数变化进行分析来达到衡量性能好坏的目的。

当电路的功能已经大致完成,但仍需要对一些指标进行优化,这时调用 PSpice Optimizer 来完成优化过程是相当方便的。如果用户能够观察出具体是什么因素影响了电路的某项性能,从而知道调节哪些参数可使该性能更加理想;那么,应用 PSpice Optimizer 对该电路进行调整也是完全合适的。需要强调的是,PSpice Optimizer 的自动化设计程度也是相对的,如果所设计的电路距离它的基本功能还相差甚远的话,用 PSpice Optimizer 来进行优化设计是很难达到理想效果的。同时它不能创建电路,不能对电路中的敏感元素进行优化设计。

(3) PSpice 的分析功能

PSpice 的分析功能主要体现在以下几方面:

- ① 直流分析;
- ② 交流扫描分析(AC Sweep);
- ③ 瞬态分析(Transient);
- ④ 蒙特卡罗分析(Monte Carlo)和最坏情况分析(Worst Case);
- ⑤ 温度特性分析(Temperature)和数字电路分析(Digital Setup)。

分析功能在以后章节做更详细的介绍。

15.3 PSpice 软件的使用

15.3.1 PSpice 简介

PSpice 是(Popular Simulation Program with Intergrated Circuit Emphasis)侧重于集成电路的通用模拟程序的简称。它是美国加州大学伯克利分校于 1972 年开发的电路仿真程序,后由伯克利本人改进为著名的 Spice2 电路模拟器发展而来的。

1984 年,美国仙童公司(MicroSim)推出 PSpice 版本用在 PC 机上作电路设计和仿真。随着 PC 机的发展,PSpice 不断完善,已发展到 9.2 版本。它分为工业版(Production Version)和教学版(Evaluation Version)。这些版本能在 PC 机上完成中、大规模电路设计,进行模拟电路分析、数字电路分析、模拟—数字混合电路分析(Mixed Analog/Digital Simulation)。由于 PSpice Windows 版本采用图形输入方式进行仿真分析,便于不甚精通计算机的电路设计者快速进入计算机应用领域。

PSpice 的集成环境如表 15.1 所示。

表 15.1 PSpice 集成环境

(1) Schematics	绘制编辑原理电路图,确定和修改元器件模拟参数、确定分析类型,调用 PSpice 分析电路,调用 Probe 显示打印分析结果。
(2) PSpice A/D	电路仿真分析程序,可完成直流工作点分析、直流转移特性分析、直流小信号传输函数分析、交流小信号分析及噪声分析、瞬态分析、傅立叶分析、直流灵敏度分析、蒙特卡罗 (MC) 分析、最坏情况的统计分析及取模混合电路的仿真分析。
(3) Probe	图形后处理程序,对输出波形进行各种处理,并能显示电路中各种变量对变量的规定运算,如显示、打印、拷贝、 x 轴 y 轴坐标变换、图形颜色、频率曲线、频谱分析等,功能强大。
(4) Parts	模型参数提取程序,是一个从器件特性中直接提取模型参数的软件包,可依照用户给出元件的特性或参数的初值自动使用曲线拟合等优化算法得到参数的最优解。
(5) Lib	为 PSpice 提供了一个丰富元件库,以 *.lib 的文件形式存放在 lib 目录中,可直接调用,详见其主要元件库。
(6) PSpice Optimize	电路设计优化程序。
(7) MicroSim	PC Boards 印刷电路板图编辑。

主要元件库:

digital.lib	数字器件库	xtal.lib	晶体振荡管
bipolar.lib	双极性三极管	thyristr.lib	可控硅器件
diode.lib	二极管	anlg-brn	美:模拟器件公司
jfet.lib	单结晶体管	burr-hrn.lib	美:巴尔-布朗公司
linear.lib	通用集成运算放大器	harris.lib	美:哈里斯半导体公司
magnetic.lib	磁感元件库	lin-tech.lib	美:线性技术公司
misc.lib	压控电容电感	tex-inst.lib	美:塔克萨仪器公司
opto.lib	其他器件	pwrhjt.lib	功率 BJT 管
pwrmos.lib	功率 MOS 管		

15.3.2 Schematics 功能简介

PSpice 利用软件包内 Schematics 程序提供电路图形编辑环境。双击 PSpice 程序组的 Schematics 进入编辑环境,如图 15.1 所示。

在电路编辑窗口上方有 11 个下拉式菜单,单击不同的菜单,会弹出各自的子菜单,单击相应的子命令,可以完成编辑电路,设置分析电路的类型和运行仿真程序,观测仿真结果等工作。

除了下拉菜单方式选取命令以外, Schematics 还提供一种图标工具栏的快捷方式选取命令。这种方式可以通过在 View 下拉菜单的 Toolbar 命令中设置。Toolbar 将所有

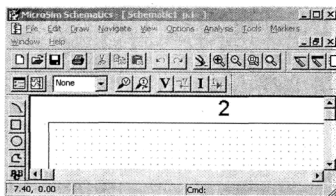









图 15.1 实验电路编辑

命令分为四组图标工具栏,即标准工具栏,绘制电路图工具栏,仿真计算工具栏和注释画图工具栏。单击图表式工具栏内相应的图标,可以完成与下拉式菜单中某些选项相同的工作。

标准工具栏中各图标所表示的命令含义与通用的 Windows 程序具有相同的意义,这里不再赘述。

注释画图工具栏提供绘制及插入非电气性质图标的快捷方式,各图表所代表的命令列于表 15.2 中。

表 15.2 注释画图工具栏

图标	名称	功能
	弧线	在编辑区画弧线
	矩形框	在编辑区画矩形框
	圆	在编辑区画圆
	折线	在编辑区画折线
	文本	在编辑区写入文本
	文本框	在编辑区画文本框
	图片	在编辑区插入图片

绘制电路图工具栏,提供提取电路元件,绘制编辑电路图的快捷方式,各图标所代表的命令列于表 15.3 中。

仿真计算工具栏,提供设置分析类型,运行仿真程序,观察输出结果等快捷方式,各图标所代表的命令列于表 15.4 中。

表 15.3 绘制电路图工具栏















图标	名称	功能
	线	画元件的连接导线
	总线	画电子模块间的数据线
	元件框	画电子模块外框
	取新元件	提取新元件
	取元件	从最近提取的元件列表框中提取元件
	元件属性	定义、修改元件的属性
	元件符号	创建、修改元件符号

表 15.4 仿真计算工具栏

图标	名称	功能
	设置分析类型	在激活 Schematics 窗口的情况下设置分析类型
	仿真运算	开始仿真运算当前已编辑完的电路
	标识颜色	在下拉菜单中选定当前标识的颜色
	节点电压标识符	放置节点电压标识符于仿真电路的节点上,在 Probe 运行后,给出该节点电压的波形曲线
	电流标识符	放置电流标识符于仿真电路的支路上,在 Probe 运行后,给出该支路电流的波形曲线
	显示电压	显示偏置电压
	显示电流	显示偏置电流

15.3.3 电路图的绘制

(1) 先开启[Schematic],点选[Draw/Get New Part],或单击工具栏上的取元件图标,即可打开如图 15.2 所示的对话框。该对话框列出了全局符号库中的所有符号。可以在 Part Name 文本框中键入需要的元件符号,对于不熟悉的元件也可以通过符号名列表的滚动条浏览。单击[Advanced]按钮可以选择是否显示符号图形。

(2) 找到所需的电路符号后,单击该符号,则该符号的名称便显示在 Part Name 文本框中,同时 Description 文本框中出现一行文字,说明该符号的含义。单击[Place]可取出元件但不关闭对话框;单击[Place&Close]取出并关闭对话框;也可双击符号名列表中某一符号将其取出。

(3) 取出电路符号后,鼠标将自动指向符号的某一个端子,连成电路后,该端子代表符号的正节点,因此该端子又称为符号的正端子。水平摆放时,通常使正端子在左侧;垂直时,

正端子在上。因此,在摆放符号前通常需将符号旋转一个角度。在执行[Edit/Rotate]菜单命令或[Ctrl+R]可以将符号逆时针旋转 90° ,执行[Edit/Flip]菜单命令或[Ctrl+F]可将其沿垂直方向对折。

(4) 取出符号后,单击绘图工作区中的某一点,按一下鼠标左键,符号将沿该点摆放一次。可多次摆放,单击右键结束。

(5) 摆好后,选中相应的符号(为红色)可对其进行各种操作,如拖动、删除、拷贝及旋转等,也可同时选择多个符号(按住[Shift]键)。

(6) PSpice 有两种连线方式:水平和垂直折线连接,斜线连接。采用哪种方式取决于直角连线开关的设置情况。

① 利用连线工具[Draw Wire]画导线。

② 点选画线工具后,即可看到一个画笔状的图标。将画笔移到起始端,按鼠标左键,开始引线,要转弯时可按一下鼠标左键,画笔移到终点后再按一下鼠标左键,完成接线。继续画线,直到全部完成后,按鼠标右键结束画线。

③ 可以双击任何一段导线,即会出现 LABEL 的对话框,可以给这条线段一个名称,在模拟时很有用。

④ 及时保存电路图。

(7) 标识元件符号,输入元件参数值。当从元件库中选取元件到电路图编辑区时,各元件都有一个默认的元素标识符号,双击默认的元素标识符号,弹出元件符号的属性对话框,可以改变对话框内默认的元素符号为自定义的元素符号。

(8) 根据电路分析需要,在图中加入特殊用途符号和注释文字。

(9) 做完上述几步工作后,可以把编辑好的电路图命名存盘。

15.3.4 Analysis 菜单分析

Analysis 是 Schematics 的一个重要的下拉式菜单,通过它可实现对所编辑的电路进行电路规则检查、创建网表、设置电路分析类型、调用仿真运算程序和输出图形后处理程序等。

(1) 电路规则检查(Electrical Rule Check)

检查当前编辑完成的电路是否违反电路规则,如悬浮的节点,重复的编号等。若无错误,在编辑窗口下方显示"REC complete"的字样;如发现错误,则弹出错误表,给出错误信息,需要重新修改编辑电路,检查电路。

(2) 设置电路分析类型

这是仿真运算前最重要的一项工作,它包含很多内容。单击 Setup 会弹出如图 15.3 所示对话框。这里只介绍与电路仿真实验有关的四个设置项。

① AC Sweep 设置项

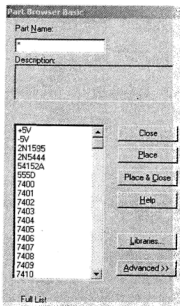


图 15.2 基本元件浏览对话框

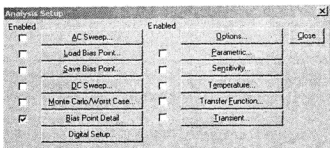


图 15.3 Setup 对话框

AC Sweep 设置当前电路为交流扫描分析, 点击 AC Sweep 设置项前面的选择框, 框中显示已经选中, 单击 AC Sweep 设置项, 可以弹出交流扫描分析的详细设置对话框, 其中 AC Sweep Type 提供了三种不同的 AC 扫描方式, 选中 Linear 表示线形扫描; Sweep Parameters 要求设置扫描参数; Total Pts 表示扫描点数; Start Freq, End Freq 分别表示交流分析的开始频率和结束频率, 单位缺省为“Hz”; 在进行单频率正弦稳态分析时, Start Freq 和 End Freq 需要设置为同一个频率, 扫描点数设置为 1。

② DC Sweep 设置项

DC Sweep 设置当前电路为直流扫描分析, 表示在一定范围内, 对电压源, 电流源, 模型参数等进行扫描。单击 DC Sweep 可以弹出直流扫描分析的详细设置对话框, 其中 Swept Var. Type 要求选定扫描变量类型; Name 要求输入扫描变量名; Sweep Type 为扫描方式, 选中 Linear 表示线性扫描; Start Value 表示扫描变量开始值; End Value 表示扫描变量结束值; Increment 对应线性扫描时扫描变量的增量。

③ Parametric 设置项

Parametric 设置参数扫描分析, 给出参数变化对电路特性的影响。单击 Parametric 弹出参数扫描分析设置对话框, 其设置与直流扫描分析的设置相类似, 这里不再赘述。

④ Transient 设置项

Transient 设置当前电路为动态扫描分析和傅立叶分析。单击 Transient 弹出此类分析设置对话框, 对于动态分析的设置是打印步长 Print Step, 动态分析结束时间 Final Time, 打印输出的开始时间 No-Print Delay 等。对于傅立叶分析有设置傅立叶分析 Enable Fourier, 基频设置 Center Frequency, 谐波项数 Number of Harmonics, 输出变量 Output Vars 等项。

(3) 调用仿真运算程序和输出图形后处理程序

单击 Simulate 或相对应的图标, 开始执行对当前电路图的仿真计算, 如果在此之前没有做电路规则检查、创建网表, 则在调用 Simulate 后, 将自动进行这些分析创建工作。如果分析中遇到错误, 则自动停止分析, 给出当前错误信息, 或提示查看输出文件。

调用输出图形后处理程序, 可以采用两种方式。一种是仿真程序运行完毕后, 自动进行图形后处理, 通过单击 Analysis-Probe Setup 弹出对话框, 设定 Automatically run Probe after Simulation 实现; 另一种方式是在 Probe Setup 对话框中设定 Do not Auto-Probe, 仿真计算结束后, 通过单击 Run Probe 进行图形后处理工作。

15.3.5 输出方式的设置

PSpice 仿真程序的输出有两种形式:离散形式的数值输出和图形方式的波形输出。设置输出的方式有两种:一种是在电路图编辑的同时,设定输出标记;另一种是在运行完仿真计算程序后,调用 Probe 图形后处理程序,确定输出某些电路量的波形。

(1) 数值输出

设置直流电路量的输出,可以在库文件 Special. slb 中取出 IPROB 电流表,将其串联到待测电流的支路中;取出 ViewPoint 节点电位标识符,将其放置在待测节点电位的节点处。当仿真程序运行后,电流表旁即出现该支路的电流值,节点电位标识符上方显示该节点的电位值。如观察电路中所有节点的电位和支路电流,最简洁的方法是单击仿真计算工具栏内的 V 和 I 图标,图标按下时,显示电位或电流的数值,单击所显示的数值,将在电路图中明确对应的节点或支路电流的实际方向。图标抬起时,显示的数据消失。

设置交流稳态电路和动态电路数据形式的输出,必须在仿真计算之前完成。可以从库文件 Special. slb 中取出具有不同功能的打印机标识符。如 VPrint1 标识符用于获取节点电位,需将其放置到待测节点上;VPrint2 标识符用于获取支路电压,需与待测支路并联;IPrint 用于获取支路电流,需与待测支路串联。按以上不同功能,设置不同的输出标识符,确定各标识符的输出属性。当仿真程序运行后,单击 Analysis-Examine Output 命令,即可获取数据形式的输出文件。

(2) 图形形式的输出

图形形式的输出是由 Probe 图形后处理程序实现的。有两种设定输出的方式,一种是在编辑电路的同时,单击仿真计算工具栏内的电压图标,在相应的节点设定节点电压标识,单击电流图标,设置元件端子电流标识,也可以单击 Markers 下拉菜单设置支路电压标识符,一旦调用 Probe 程序,凡设置了标识的电压、电流,均可给出相应的波形输出。另一种是在调用 Probe 程序进入其图形输出编辑环境以后,单击相应图标弹出添加仿真曲线对话框,该对话框的左边是仿真输出列表框,右边是对输出变量可进行各种运算的运算符列表框。选中要输出的仿真波形的变量,或适当的计算,单击 OK 键,就可以显示出所选中变量或经过设定运算的输出波形。

15.3.6 PSpice 的几种分析功能

PSpice 的分析功能主要体现在以下几方面:

(1) 直流分析

直流分析包括电路的直流工作点分析(Bias Point Detail),直流小信号传递函数值分析(Transfer Function),直流扫描分析(DC Sweep),直流小信号灵敏度分析(Sensitivity)。在进行直流工作点分析时,电路中的电感全部短路,电容全部开路,分析结果包括电路每一节点的电压值和在此工作点下的有源器件模型参数值。这些结果以文本文件形式输出。

直流小信号传递函数值是电路在直流小信号下的输出变量与输入变量的比值,输入电阻和输出电阻也作为直流解析的一部分被计算出来。进行此项分析时,电路中不能有隔直电容。分析结果以文本形式输出。

直流扫描分析可作出各种直流转移特性曲线。输出变量可以是某节点电压或某节点电

流,输入变量可以是独立电压源、独立电流源、温度、元器件模型参数和通用(Global)参数(在电路中用户可以自定义的参数)。

直流小信号灵敏度分析是分析电路各元器件参数变化时,对电路特性的影响程度。灵敏度分析结果以归一化的灵敏度值和相对灵敏度形式给出,并以文本形式输出。

(2) 交流扫描分析(AC Sweep)

交流扫描分析包括频率响应分析和噪声分析。PSpice进行交流分析前,先计算电路的静态工作点,决定电路中所有非线性器件的交流小信号模型参数,然后在用户所指定的频率范围内对电路进行仿真分析。

频率响应分析能够分析传递函数的幅频响应和相频响应,亦即可以得到电压增益、电流增益、互阻增益、互导增益、输入阻抗、输出阻抗的频率响应。分析结果均以曲线形式输出。

PSpice用于噪声分析时,可计算出每个频率点上的输出噪声电平以及等效的输入噪声电平,噪声电平都以噪声带宽的平方根进行归一化。

(3) 瞬态分析(Transient)

瞬态分析即时域分析,包括电路对不同信号的瞬态响应,时域波形经过快速傅里叶变换(FFT)后,可得到频谱图。通过瞬态分析,也可以得到数字电路时序波形。

另外,PSpice可以对电路的输出进行傅里叶分析,得到时域响应的傅里叶分量(直流分量、各次谐波分量、非线性谐波失真系数等)。这些结果以文本形式输出。

(4) 蒙特卡罗分析(Monte Carlo)和最坏情况分析(Worst Case)

蒙特卡罗分析是分析电路元器件参数在各自的容差(容许误差)范围内,以某种分布规律随机变化时电路特性的变化情况,这些特性包括直流、交流或瞬态特性。

最坏情况分析与蒙特卡罗分析都属于统计分析,所不同的是,蒙特卡罗分析是在同一次仿真分析中,参数按指定的统计规律同时发生随机变化;而最坏情况分析则是在最后一次分析时,使各个参数同时按容差范围内各自的最大变化量改变,以得到最坏情况下的电路特性。

15.3.7 PSpice 电路仿真讲解与实例

举例:在图15.4所示电路中,当电阻 R_L 的阻值以 $10\ \Omega$ 为间隔,从 $1\ \Omega$ 线性增大到 $1\ \text{k}\Omega$ 时,分析电阻 R_1 上的电压变化情况。

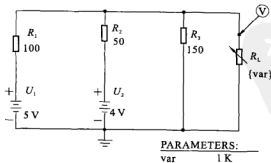


图 15.4

目的:通过本例的介绍,了解如何运用 PSpice 软件绘制电路图,初步掌握符号参数、分析类型的设置,并会从 Probe 窗口看输出结果。

实验步骤:

(1) 绘制电路原理图

从符号库中提取元器件符号或端口符号,先开启[Schematic],点选[Draw/Get New Part],或单击工具栏上的取元件图标,即可打开取元件对话框。该对话框列出了全局符号库中的所有符号。可以在 Part Name 文本框中键入需要的元件符号,对于不熟悉的元件也可以通过符号名列表的滚动条浏览。单击[Basic]按钮可以选择是否显示符号图形。找到所需的电路符号后,单击该符号,则该符号的名称便显示在 Part Name 文本框中,同时,Description 文本框中出现一行文字,说明该符号的含义。单击[Place]可取出元件但不关闭对话框;单击[Place&Close]取出并关闭对话框;也可双击符号名列表中某一符号将其取出。

在本例中不仅需要取出三个电阻、两个直流电压源和一个接地端,还要取出符号 PARAM 将电阻的阻值定义为全局变量,因本例是一个以电阻阻值为扫描变量的例子。

① 摆放元件

参见 15.3.3 电路图的绘制中(3)~(5)条内容。

② 连线

参见 15.3.3 中第(6)条内容。

③ 定义或修改元器件符号及导线属性

下面以 R_1 为例,介绍两种修改符号属性值的方法。

方法一:利用电阻 R_1 的属性表修改其值。

a. 双击 R_1 符号,打开 R_1 属性表,如图 15.5 所示。

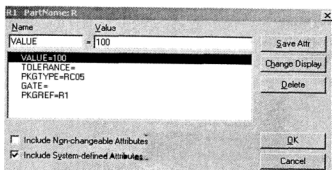


图 15.5 电阻 R_1 的属性表

b. 单击属性项 VALUE = 1 k,属性名 VALUE 和值 1 k 分别出现在 Name 和 Value 文本框中。

c. 将 Value 文本框中 1 k 改为 100,并单击[Save Attr],保存新属性。单击[OK]确认退出。

方法二:单独修改 R_1 的各属性值。

a. 单击 R_1 的编号,打开如图 15.6 所示符号参考编号对话框。

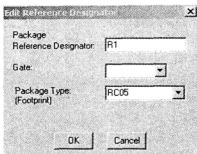


图 15.6 符号参考编号对话框

- b. 将对话框中的 R_1 改为所需的编号,并按[OK]。
- c. 用同样的方法,双击电阻 R_1 的阻值 1 k,可以将阻值改为 100。

按上述方法修改其他符号。在修改 PARAM 的属性表中,代表 R_L 阻值的变量名 var 定义为 PARAM 的一个参数名,即 NAME1 = var,阻值定义为 1k 的相应参数值,即 VALUE1 = 1 k。一个 PARAM 符号最多可以定义三个全局变量。

定义各符号的参数后,最终的电路图如图 15.4 所示。在电路中,电阻的阻值是变化的,注意要将变量名 var 加大括号。

- ④ 根据电路分析需要,在图中加入特殊用途符号和注释文字。
- ⑤ 命名存盘。

(2) 设定要模拟的内容

执行[Analysis/Setup]菜单命令,进入分析类型对话框。本例是一个以电阻的阻值为扫描变量的例子,所以要用到 DC Sweep。进入 DC Sweep 设置窗口后,选 Global Parameter(全局参数)和 Linear(线性扫描),在 Name 文本框后第一格内写入全局参数名 var,将 Start Value(扫描初值)设为 1,End Value(扫描终值)设为 1k,Increment(扫描步长)设为 10。单击[OK]结束操作。

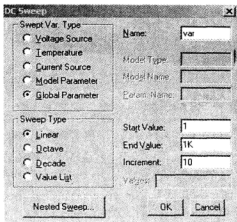


图 15.7 分析类型对话框

(3) 执行模拟(仿真计算)

当一切设置完之后,便可以启动分析程序[PSpice]对电路进行分析。选择 Analysis → Simulate,或单击常用工具栏中相应的按钮,或按快捷键 F11,可以启动(自动建立电路网络表(Analysis → Create Netlist),自动进行电路检查(Analysis → Electrical Rule Check))。

在分析过程中,会显示其运行窗口。如在电路中发现错误,会在运行中用红色文字显示。选择 Analysis → Examine Output 可查看错误原因。

若在 Analysis → Probe Setup... 中选定 Automatically Run Probe After Simulation,在分析无误后自动进入 Probe 图形后处理器,显示观察波形。

(4) 显示波形

Probe 是 PSpice 对分析结果进行波形处理、显示和打印的有效工具,Probe 可以给出波形各点的精确数据,可以迅速找到波形的极大、极小值点及其他特殊点,给波形加标注,按所需添加坐标设置,还可以保存波形显示屏幕等。它有被称为“软件示波器”。

有两种方法启动 Probe 程序,即:

① 在 [Schematics] 中,Analysis → Probe Setup → Auto-run Option 设置为 Automatically... 时,选择 Analysis → Simulate 进行仿真分析后会自动调用 Probe 程序;

② 在 [Schematics] 中,选择 Analysis → Run Probe。

有两种方法可以查看变量波形,即:

① 利用 Probe 中的波形跟踪命令 Add Trace 输入待观测的变量名或变量的函数名来查看。在 Probe 窗口,选择 Trace → Add,可以打开波形跟踪对话框。单击变量名列表中的某变量名,使该变量名出现在 Trace Command 中,单击[OK],该变量的波形将出现在窗口中;

② 在电路中添加各输出标识来查看。在 [Schematics] 中,可以取出电压观测标识,将其加在电路的某节点上,在分析结束后在 Probe 窗口会显示该节点电压波形。

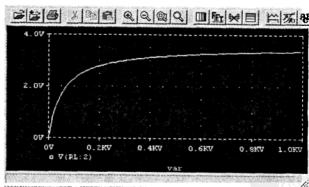


图 15.8 Probe 图形窗口输出的图形

在本例中结束分析程序后,将自动进入 Probe 窗口,显示结果如图 15.8 所示。由图我们可以看出,当 R_L 的阻值变化时其电压的变化曲线。

点选 [Tools/Cursor...] 可以打开游标工具,可以读取曲线上的值,即各电阻值所对应的电压值。游标有两个,一个是由较密的点构成的十字线,另一个点较疏。此外,它还可以找最大/最小值,最大斜率点。

对于电路设计而言,在还没有建立起硬件电路之前,PSpice可以帮助我们运行和分析我们的电路设计,从而帮助我们发现电路的设计是否合理,是否需要变更,最终得到一个合理优化的电路设计方案。它就像一块带有各种元件的软件面包板,在上面可以搭接各种电路,并且可以调试和测试这些电路,最奇妙的是做这些工作无需接触任何硬件,这样可以节省大量的时间和资金。

15.3.8 几种电路的仿真分析

15.3.8.1 直流电路的仿真分析

(1) 实验目的

了解电路计算机仿真软件 PSpice 的工作流程,学会用 PSpice 编辑电路,设置分析类型和分析输出方式,进行电路的仿真分析。

(2) 实验任务

① 应用 PSpice 求解如图 15.9 所示电路各节点电压和支路电流。

② 在 $0 \sim 12\text{ V}$ 范围内,调节电压源 U_1 的源电压,观察负载电阻 R_L 的电流变化,总结负载电阻的电流与电压源 U_1 之间的关系。

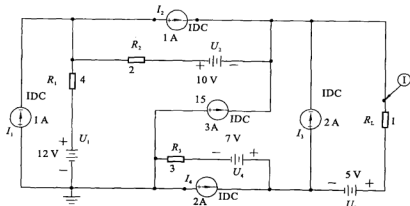


图 15.9 电路原理图

(3) 实验步骤

① 如图 15.9 所示,在 PSpice 的 Schematics 环境下编辑电路。取出元件,摆放到合适的位置,画导线连接电路,注意电压源、电流源的正负极不能放反,电路图连接完毕,再给每个元件输入各自的名字和参数,输入方法在上一节中有详细介绍。注意:每一个电路图中都必须设置接地符号表示零节点。编辑完电路图后命名存盘。

② 单击 Analysis → Electrical Rule Check 对电路做电路规则检查。常见的错误有:节点重复编号,元件名称属性重复,出现零电阻回路,有悬浮节点和无零参考点等。若出现电路规则错误,将给出错误信息,并告知不能成功创建电路网表。如果出现错误,则需要重新修改编辑电路,重新进行电路规则检测,直到没有错误为止,然后进行仿真计算工作。

③ 单击 Analysis → Simulate 或仿真运算的图标,调用 PSpice A/D 程序对当前电路仿真计

算。仿真中,观察各节点的电压,可单击仿真计算工具栏中显示电压的图标,观察各支路电流,可单击仿真计算工具栏中显示电流的图标。点击显示电压、显示电流的图标后,各节点电压、支路电流就会显示在电路图中。单击电路图中显示的电压,就会在电路图上显示出是哪个节点上的电压,单击电路图上显示的电流,就会显示出是哪段支路上的电流,并且指明电流的方向。

④ 为了完成实验要求的任务,还需要对所编辑的电路做直流分析设置。设置直流扫描分析类型如图 15.10 所示。其中扫描变量为电压源,扫描变量名为 U_1 ,起始扫描点为 0,终止扫描点为 12,扫描变量增量为 1,扫描类型为线形。

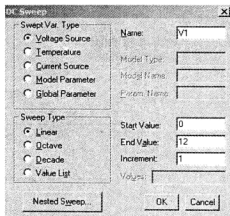


图 15.10 DC 扫描设置

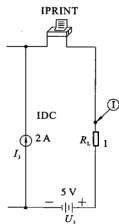


图 15.11 放置输出标识

⑤ 设置输出方式。单击支路电流标识符,并拖动到如图 15.11 所示电路的 R_L 支路,以获取支路电流与电压源的关系曲线。从 Special 库取 IPrint 打印机与 R_L 串联,以获取支路电流与电压源关系的数值输出。其中 IPrint 的属性设置中设置 $DC = I(R_L)$,其余属性缺省不设。输出设置如图 15.10 所示。

⑥ 设置仿真计算完成后,将自动调用图形后处理程序,运行仿真程序,输出波形如图 15.12 所示。

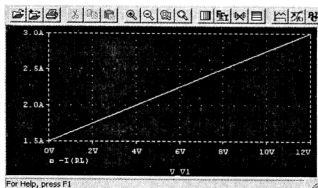


图 15.12 Probe 图形窗口输出的图形

数值输出如图 15.13 所示。

仿真计算结果分析:负载 R_L 的电流与电压源 U_1 的关系为线形关系,即

$$I(R_L) = 1.5 + 1.2 \cdot U_1 / 12$$

最大电流为 3.0 A,最小电流为 1.5 A。

15.3.8.2 一阶动态电路的仿真分析

(1) 实验目的

① 掌握应用 PSpice 编辑动态电路,设置动态元件的初始条件,设置周期激励的属性及对动态电路仿真分析的方法。

② 理解一阶 RC 电路在方波激励下逐步实现稳态充放电的过程。

(2) 实验任务

分析 RC 串联电路在方波激励下的全响应。

(3) 实验步骤

① 如图 15.14 所示,在 PSpice 的 Schematics 环境下编辑电路。取出元件,摆放到合适的位置,画导线连接电路,电路图连接完毕,再给每个元件输入各自的名字和参数。其中方波电源是 Source.slb 库中的 VPULSE 电源。对 VPULSE 的属性设置如图 15.15 所示,各属性的意义列于表 15.5 中。

V_V1	[V_PRINT1]
0.000E+00	1.500E+00
1.000E+00	1.625E+00
2.000E+00	1.750E+00
3.000E+00	1.875E+00
4.000E+00	2.000E+00
5.000E+00	2.125E+00
6.000E+00	2.250E+00
7.000E+00	2.375E+00
8.000E+00	2.500E+00
9.000E+00	2.625E+00
1.000E+01	2.750E+00
1.100E+01	2.875E+00
1.200E+01	3.000E+00

图 15.13 数值输出结果

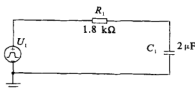


图 15.14 实验原理电路图

表 15.5 方波电源属性意义

属性	意义	属性	意义
V ₁	方波低电平	TF	方波下降沿时间
V ₂	方波高电平	PW	方波高电平宽度
TD	第一方波上升时间	PER	方波周期
TR	方波上升沿时间		

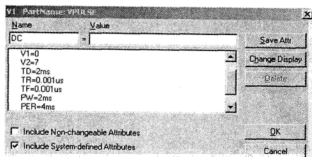


图 15.15 VPULSE 的属性设置

编辑完电路图后命名存盘。

② 单击 Analysis → Electrical Rule Check 对电路做电路规则检查。注意有无悬浮节点和零参考点等。如果出现错误,则重新修改编辑电路,重新进行电路规则检查,直到没有错误为止,然后进行下一步工作。

③ 单击 Analysis → Setup 对所编辑的电路进行动态扫描分析。动态分析的设置包括打印步长 Print Step、动态分析结束时间 Final Time、打印输出的开始时间 No-Print Delay 等。在本实验中,设置打印步长 Print Step 为 2 ms,动态分析结束时间 Final Time 为 40 ms。

④ 设置输出方式:为了观察电容电压的充放电过程与方波激励的关系,设置两个节点电压标识符以获取方波激励和电容电压的波形,设置打印电压标识符 VPrint 以获取电容电压的数值输出。

⑤ 设置仿真计算完成后,将自动调用图形后处理程序,运行仿真程序,输出波形如图 15.16 所示。

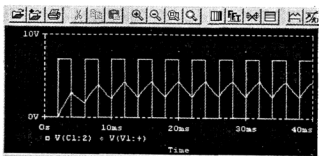


图 15.16 Probe 图形窗口输出的图形

从输出波形可见,电容的工作过程是连续的充放电过程,开始电容放电,达到最小值,当第一个方波脉冲开始以后,经历了一个逐渐的“爬坡过程”,最后输出成稳定的状态,产生一个近似的三角波,其最大值为 4.450 V,最小值为 2.550 V。

15.3.8.3 二阶动态电路的仿真分析

(1) 实验目的

进一步学习在 PSpice 仿真软件中绘制电路图,应用 PSpice 编辑动态电路,掌握激励符号的参数配置、分析类型的设置以及对动态电路进行仿真分析的方法。

(2) 实验任务

仿真如图 15.17 的二阶电路,观察 RLC 串联电路的方波响应,其中 $f = 1 \text{ kHz}$, $R = 5 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 0.022 \text{ }\mu\text{F}$ 。改变电阻 R 值,观察电路在欠阻尼、过阻尼和临界阻尼时 U_C 波形的变化。

(3) 实验步骤

① 如图 15.17 所示电路,在 PSpice 的 Schematics 环境下编辑电路。取出电阻 R_1 、电感 L_1 、电容 C_1 、接地端 EGND、PARAM 符号以及信号源 U_1 为脉冲型电压源 VPULSE。把元件放在所需位置,画导线连接电路,电路图连接完毕,再给每个元件输入各自的名字和参数。其中脉冲型电压源 VPULSE 的参数为 U_1 (起始电压) 为 0 V, U_2 (峰值电压) 为 5 V, TR (上升

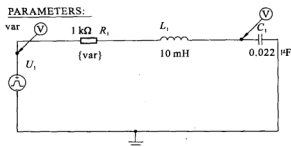


图 15.17 实验原理电路图

时间) 为 $1\ \mu\text{s}$, TF(下降时间) 为 $1\ \mu\text{s}$, PW(脉冲宽度) 为 $500\ \mu\text{s}$, PER(周期) 为 $1\ \text{ms}$ 。为了观察 U_1 及 C_1 的波形, 要设置两个节点电压标识符指向 U_1 及 C_1 。然后将编辑好的电路命名存盘。

② Analysis \rightarrow Electrical Rule Check 对电路做电路规则检查。注意有无悬浮节点和零参考点等。如果出现错误, 则重新修改编辑电路, 重新进行电路规则检查, 直到没有错误为止, 然后进行下一步工作。

③ 单击 Analysis \rightarrow Setup 对所编辑的电路进行分析类型的设置。在本例中, 要进行时域分析即瞬态分析(Transient) 和参数扫描分析(Parametric)。在 Transient 设置中, 将其打印步长 Print Step 设为 $20\ \text{ns}$, 动态分析结束时间 Final Time 设为 $1\ \text{ms}$ 。在 Parametric 中, 扫描变量仍为全局变量 var, 可以选择线性扫描, 线性扫描的起点设为 $1\ \text{P}$, 终点为 $5\ \text{K}$, 步长为 500 。

④ 设置仿真计算完成后, 将自动调用图形后处理程序, 运行仿真程序, 输出波形如图 15.18 所示。可以观测到电路在欠阻尼、过阻尼和临界阻尼时 U_C 波形的变化。

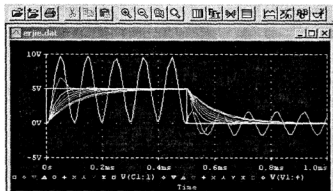


图 15.18 Probe 图形窗口输出的图形

15.3.8.4 正弦稳态电路的仿真分析

(1) 实验目的

掌握应用 PSpice 编辑正弦稳态电流电路, 设置分析类型以及有关仿真实验的方法。

(2) 实验任务

实验电路如图 15.19, 其中 U_1 是一个可变频、调幅的正弦电压源, 该电源经过一个双口网络, 带动 RC 并联负载。观察当电源的幅值和频率为多少时, 负载可以获得最大值为 5 V 的电压。

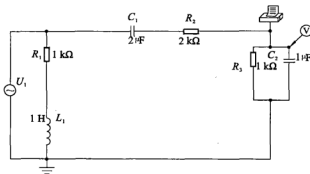


图 15.19 实验原理电路图

(3) 实验步骤

① 如图 15.19 所示, 在 PSpice 的 Schematics 环境下编辑电路。取出元件, 摆放到合适的位置, 画导线连接电路, 电路图连接完毕, 再给每个元件分别赋值。先设电源电压的幅值为 1V。为了观察实验结果的数值输出和波形, 还要在双口网络的上端口设置 VPrint1, 在电容的上方节点设置电压标识符。

② 单击 Analysis → Electrical Rule Check 对电路做电路规则检查。注意有无悬浮节点和零参考点等。如果出现错误, 则重新修改编辑电路, 重新进行电路规则检查, 直到没有错误为止, 然后进行下一步工作。

③ 单击 Analysis → Setup 对所编辑的电路进行分析类型的设置。在本例中, 可以设置当前电路为交流扫描分析。设置为线形扫描, 扫描点数为 30, 开始频率为 30 Hz, 结束频率为 150 Hz。设置完成, 可以对编辑的电路进行仿真计算。

④ 设置仿真计算完成后, 将自动调用图形后处理程序, 运行仿真程序, 输出波形如图 15.20 所示。

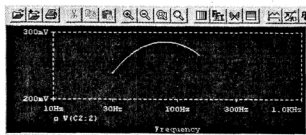


图 15.20 Probe 图形窗口输出的图形

Probe 工具栏内有一组用于曲线分析的图标, 利用它们分析负载电压的输出曲线, 可以得到在频率为 80 Hz 时, 负载获得最大电压, 电压值为 285.714 mV。

⑤ 根据齐次定理,将电压源的幅值扩大 17.50 倍 ($5\text{ V}/285.714\text{ mV} = 17.50$),即设置电源电压值为 17.50 V,可在负载获得幅值为 5 V 的最大电压。此时,负载输出电压与频率关系如图 15.21 所示。

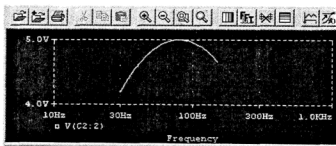


图 15.21 Probe 图形窗口输出的图形

15.3.8.5 谐振电路的仿真分析

(1) 实验目的

掌握应用 PSpice 仿真研究电路频率特性和谐振现象的方法,理解谐振电路的选频特性与通带宽的关系,了解耦合谐振增加带宽的原理。

(2) 实验任务

测试如图 15.22 所示 RLC 串联电路的幅频特性,确定其通带宽,如果通带宽小于 40 kHz,试采用耦合谐振的方式改进电路,使其通带宽满足设计要求。

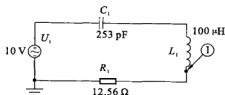


图 15.22 实验原理电路图

(3) 实验步骤

① 如图 15.22 所示,在 PSpice 的 Schematics 环境下编辑电路。取出元件,摆放到合适的位置,画导线连接电路,电路图连接完毕,再给每个元件分别赋值。为了观察实验结果的输出波形,还要在电路中设置支路电流标识符。

② 单击 Analysis → Electrical Rule Check 对电路做电路规则检查。注意有无悬浮节点和零参考点等。如果出现错误,则重新修改编辑电路,重新进行电路规则检查,直到没有错误为止,然后进行下一步工作。

③ 单击 Analysis → Setup 对所编辑的电路进行分析类型的设置。本例可以设置当前电路为交流扫描分析。设置为线形扫描,扫描点数为 100,开始频率为 450kHz,结束频率为 1500kHz。设置完成,可以对编辑的电路进行仿真计算。

④ 设置仿真计算完成后,将自动调用图形后处理程序,运行仿真程序,输出波形如图 15.23 所示。

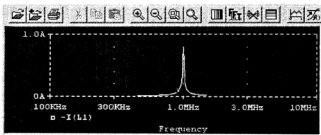


图 15.23 Probe 图形窗口输出的图形

由图 15.23 可知,电路的谐振频率为 1 MHz,通带宽小于 40 kHz,不满足设计要求,改进后的电路如图 15.24 所示。

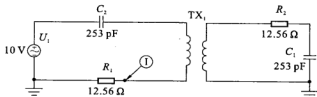


图 15.24 改进后的电路图

⑤ 按照上述步骤连接电路,其中耦合电感的参数设置为: $L_1 = 100 \mu\text{H}$, $L_2 = 100 \mu\text{H}$, 耦合系数 $\text{COUPLE} = 0.022$ 。然后进行电路规则检查,再对编辑好的电路进行仿真计算,自动调用图形后处理程序,可以得到如图 15.25 所示的波形。

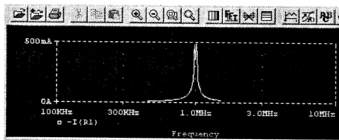


图 15.25 Probe 图形窗口输出的图形

分析测试的输出曲线可以得出,所设计的耦合谐振电路的谐振频率仍然为 1MHz,可是通带宽却增加到 40kHz 以上,满足了设计的要求。

15.3.8.6 含有运放的直流电路的仿真分析

(1) 实验目的

掌握应用 PSpice 软件编辑含有运放电路的方法,根据实验要求,设置分析类型和分析输出方式,进行电路的仿真分析。

(2) 实验任务

- ① 应用 PSpice 求解如图 15.26 所示电路中 R_1 、 R_2 的电流和运放的输出电压。
- ② 在 0 ~ 4 V 范围内,调节电压源 U_1 的源电压,观察运放输出电压 U_o 的变化,总结运

放输出电压 U_{n2} 与源电压 U_1 之间的关系,确定该电路电压比(U_{n2}/U_1)的线形工作区。

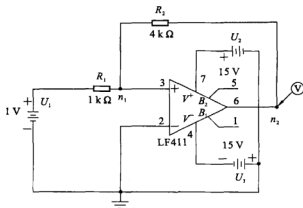


图 15.26 实验原理电路图

(3) 实验步骤

① 如图 15.26 所示,在 PSpice 的 Schematics 环境下编辑电路。取出元件,摆放到合适的位置,画导线连接电路,电路图连接完毕,再给每个元件分别赋值。其中运放在 Analog.slb 库中选取 LF411。注意维持运放正常工作所需要的两个偏置电源的正负极。为了观察实验结果的输出波形,还要在电路中设置节点电压标识符。

② 单击 Analysis → Electrical Rule Check 对电路做电路规则检查。注意有无悬浮节点和零参考点等。如果出现错误,则重新修改编辑电路,重新进行电路规则检查,直到没有错误为止。

③ 单击 Analysis → Setup 对所编辑的电路进行分析类型的设置。本例可以设置当前电路为直流扫描分析,扫描变量类型选 Voltage Source,扫描变量名为 U_1 ,选中线形扫描,扫描变量开始值为 0 V,扫描变量结束值为 4 V,线形扫描时扫描变量的增量为 1 V。

④ 仿真运算后,单击仿真工具栏里的显示电压和显示电流,结果表明,当 U_1 为 1 V 时, U_{n2} 为 -4 V, I_{R1} 和 I_{R2} 的值都为 1 mA。

⑤ 设置仿真计算完成后,将自动调用图形后处理程序,运行仿真程序,输出波形如图 15.27 所示。

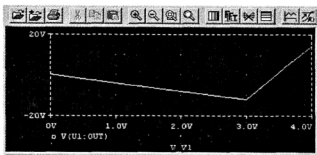


图 15.27 Probe 图形窗口输出的图形

由输出波形可知,当输入电压源的电压小于 3 V 时,该电路为反向输出比例器,输出电压 U_{n2} 与输入电压成正比。

习题参考答案

第 2 章

- 2.1 $400\ \Omega, 0.025\ \text{A}, 0.25\ \text{W}$
- 2.2 内阻
- 2.3 理想电压源, 串联
- 2.4 理想电流源, 并联
- 2.5 $-8\ \text{V}, -5\ \text{V}, 8\ \text{V}, 3\ \text{V}$
- 2.6 $1\ \text{V}, -5\ \text{V}, 5\ \text{V}, 4\ \text{V}$
- 2.7 二端网络, 有源二端网络, 理想电压源, 电阻
- 2.8 电流, 电压
- 2.9 $-6\ \text{W}, 8\ \text{W}$
- 2.10 (A)
- 2.11 (A)
- 2.12 (B)
- 2.13 (C)
- 2.14 (B)
- 2.15 吸收功率
- 2.16 (C)
- 2.17 (A)
- 2.18 (A)
- 2.19 (B)
- 2.20 (C)

第 3 章

- 3.1 整体的基本
- 3.2 (C)
- 3.3 $3\ \text{V}$
- 3.4 (A)
- 3.5 (C)
- 3.6 (D)
- 3.7 $P_{1\text{V}} = -1\ \text{W}, P_{2\text{V}} = 2\ \text{W}$
- 3.8 $638\ \text{mW}$

第 4 章

- 4.1 $I_s = -84\ \text{A}$



4.2 (1) $i_1 = 4 \text{ A}, i_2 = 5 \text{ A}$

(2) 6Ω 电阻上的功率为: $P = 6 \text{ W}$

4.3 $U_1 = -2 \text{ V}, U_2 = -5 \text{ V}, U_3 = -1 \text{ V}$

4.4 $i_1 = -1 \text{ A}, i_2 = 5 \text{ A}$

4.5 当 $R_L = 5 \Omega$ 时, 电压 u 等于 5 V , 当 $R_L = 20 \Omega$ 时, 电压 u 等于 10 V 。

4.6 $P_{4\Omega} = 64 \text{ W}$

4.7 $5U_1 = 6$

4.8 $U = 7 \text{ V}, I = 3 \text{ A}$

4.9 $I_x = 3 \text{ A}$

4.10 $I_1 = -0.2 \text{ A}, I_2 = -4.8 \text{ A}, P_{1\text{V}} = 0.2 \text{ W}$, 吸收, $P_{50\text{V}} = -240 \text{ W}$, 提供,
 $P_{1\text{V受控源}} = 9.2 \text{ W}$, 吸收

4.11 2 S

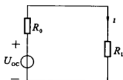
4.12 $U_1 = 3.75 \text{ V}$

第 5 章

5.1 $P_{\max} = \frac{9}{16} \text{ W}$

5.2 $U_{\text{OC}} = \frac{4}{3} \text{ V}, R_0 = \frac{5}{3} \Omega$

5.3 $i = \frac{U_{\text{OC}}}{R_0 + R_L} = \frac{12}{8+4} = 1 \text{ A}$



5.4 $I_x = 0$

5.5 $U = \frac{U_S + I_S R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_1$

5.6 $8 \text{ A}; 5 \Omega$

5.7 $I = -2 \text{ A}$

5.8 $I_x = 0.25 \text{ A}$

第 6 章

6.1 1

6.2 (C)

6.3 $4e^{-20t} \text{ e}(t)$

6.4 根据三要素法: $u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 30 - 18e^{-500t} \text{ V}, t > 0$
 $i(t) = i(\infty) + [i(0^+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 10 + 3e^{-500t} \text{ A}, t > 0$

6.5 $u(t) = -L \frac{di_L(t)}{dt} = -0.5 \times 4 \times (-4)e^{-4t} = 8e^{-4t} \text{ V}, t > 0$

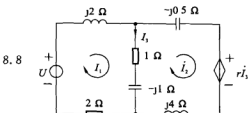
- 6.6 $u(t) = u(\infty) + [u(0^+) - u(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = -3 - 3e^{-2t} \text{ V}, t > 0$
 $i(t) = i(\infty) + [i(0^+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 5 + 3e^{-2t} \text{ A}, t > 0$
- 6.7 $u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 6 - 12e^{-0.5t} \text{ V}, t > 0$
- 6.8 $u_C(t) = 24 + 36e^{-t/12} \text{ V}, t \geq 0$

第7章

- 7.1 (B)
- 7.2 (A)
- 7.3 $i_L(0^+) = 0; u_C(0^+) = 4 \text{ V}$
 $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -2 \times 10^5 \text{ V/s}$
 $\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0^+} = 4000 \text{ A/s}$
- 7.4 $i_R = 125 \mu\text{A}, t < 0$
 $i_R = 161.3e^{-3.063 \times 10^6 t} - 36.34e^{-13.6 \times 10^6 t} \mu\text{A}, t > 0$
- 7.5 $i_L(t) = e^{-1.2t}(2.027 \cos 4.75t + 2.561 \sin 4.75t) \text{ A}$

第8章

- 8.1 $i_1(t) = 1.5 \cos(10t - 45^\circ) \text{ A}$
 $i_2(t) = 0.75\sqrt{2} \cos 10t \text{ A}$
- 8.2 $i_1 = 10\sqrt{2} \cos(\omega t - 36.9^\circ) \text{ A}$
 $i_2 = 6\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$
 $i = 8\sqrt{2} \cos \omega t \text{ A}$
 $P = UI \cos \varphi = 1200 \text{ W}$
- 8.3 $\dot{I}_L = \dot{I}_L' + \dot{I}_L'' = 11 \angle 0^\circ \text{ A}$
- 8.4 $i(t) = -\sqrt{2} \cos 2t \text{ A}$
- 8.5 $Z_L = 3 - j4 \Omega; P_{L_{\max}} = 52.083 \text{ W}$
- 8.6 $\dot{I} = 6.325 \angle -18.4^\circ$
- 8.7 (A)



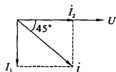
$$\begin{cases} (3+j1)\dot{I}_1 - (1-j1)\dot{I}_2 = 8\angle 60^\circ \\ -(1-j1)\dot{I}_1 + (1+j2.5)\dot{I}_2 = -2\dot{I}_3 \\ \dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3+j1)\dot{I}_1 - (1-j1)\dot{I}_2 = 8\angle 60^\circ \\ (1+j1)\dot{I}_1 + (-1+j2.5)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$8.9 \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z} = 25\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{1-j}{(1+j)+(1-j)} \dot{I} = 25\angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1+j}{(1+j)+(1-j)} \dot{I} = 25\angle 0^\circ \text{ A}$$



$$8.10 \quad (\text{C})$$

$$8.11 \quad (\text{C})$$

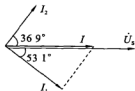
第 9 章

$$9.1 \quad \text{规模, UI, 乏}$$

$$9.2 \quad 0, \text{有功}$$

$$9.3 \quad 86$$

$$9.4 \quad \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (64 - j48) + (36 + j48) = 100\angle 0^\circ \text{ A}$$



$$9.5 \quad \dot{U}_1 = 1 \times [20/(-j20)] = 20\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_2 = 40\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$S_{IS} = 80 + j80 \text{ VA}$$

$$9.6 \quad P_{R_1} = I_1^2 R_1 = 40 \text{ W}$$

$$Q_L = I_1^2 X_L = 20 \text{ VAR}$$

$$P_{R_2} = I_2^2 R_2 = 10 \text{ W}$$

$$Q_C = I_2^2 (-X_C) = -30 \text{ VAR}$$

$$S = \dot{U}_s \dot{I}^* = (10 + j0)(5 - j1) = 50 - j10 \text{ VA}$$

$$9.7 \quad \text{视在功率 } S = UI_s = 10\sqrt{2} \times 5 = 50\sqrt{2} \text{ VA}$$

$$\text{有功功率 } P = UI_s \cos\varphi = 10\sqrt{2} \times 5 \cos(45^\circ) = 50 \text{ W}$$

$$\text{无功功率 } Q = UI_s \sin\varphi = 10\sqrt{2} \times 5 \sin(45^\circ) = 50 \text{ VAR}$$

$$\text{功率因数 } \cos\varphi = \cos 45^\circ = 0.707$$

复功率 $S = P + jQ = (50 + j50) \text{ VA}$

9.8 0.781(感性)

第 10 章

10.1 相电压, 线电压

10.2 (B)

$$10.3 \quad \dot{I}_s = \frac{\dot{U}_{s'n}}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{6 + j8} = 22 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_b = 22 \angle -173.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_c = 22 \angle 66.9^\circ \text{ A}$$

A 相负载吸收的功率

$$P_s = U_s I_s \cos \theta_Z = 220 \times 22 \cos 53.1^\circ = 2904 \text{ W}$$

负载吸收的总功率

$$P = 3P_s = 8712 \text{ W}$$

10.4 (C)

10.5 (B)

10.6 (C)

10.7 (A)

10.8 30 kW; 30 A

10.9 $2\sqrt{3} \text{ A}$

第 11 章

11.1 1, 无限大

11.2 0.8; 3

11.3 (C)

11.4 (A)

11.5 (A)

11.6 (1) $Z_{ab} = 1 \Omega$

(2) $Z'_{ab} = -1 \Omega$

11.7 (B)

11.8 (B)

11.9 (C)

11.10 (C)

11.11 (1) $P = 45 \text{ mW}$

(2) $n = 3; P_{L\max} = 125 \text{ mW}$

11.12 $\dot{U}_2 = 33.3 \angle 0^\circ \text{ V}$

11.13 (1) $R'_L = 12.5 \Omega$

(2) $I_1 = 50 \text{ mA}; I_2 = nI_1 = 4 \times 50 = 200 \text{ mA}$



$$U_1 = nU_2 = 4 \times 2 = 8 \text{ V}; U_2 = RI_2 = 10 \times 0.2 = 2 \text{ V}$$

$$\text{负载得到的平均功率 } P = U_2 I_2 = 8 \times 0.2 = 1.6 \text{ W}$$

$$11.14 \quad \dot{U}_1 = 80\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_2 = 40\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$S_{\text{IS}} = 80 + \text{j}80 \text{ VA}$$

第 12 章

$$12.1 \quad (\text{C})$$

$$12.2 \quad 3 \Omega; 5 \times 10^{-5} \text{ F}$$

$$12.3 \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \text{感性; 容性}$$

$$12.4 \quad (\text{A})$$

$$12.5 \quad (\text{A})$$

$$12.6 \quad (\text{C})$$

$$12.7 \quad \omega = 1 \text{ rad/s}$$

第 13 章

$$13.1 \quad Z = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$13.2 \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = (1 + \text{j}2) \dot{I}_1 + \text{j}2 \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \text{j}2 \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$13.3 \quad (1) R_{\text{eq}} = 2 \Omega$$

$$(2) \text{电阻上吸收的功率为 } P_R = 2 \text{ W}$$

$$\text{电压源发出的功率为 } P_S = 60 \text{ W}$$

$$13.4 \quad U_x = 160 \text{ V}$$

第 14 章

$$14.1 \quad i_1 = 0.5 \text{ A}, i_2 = 2 \text{ A}, i_3 = 1.5 \text{ A}, U_{ab} = 7.5 \text{ V}, P_{\text{SI}} = 7.5 \text{ W}, P_{\text{SZ}} = -9 \text{ W}, P_{\text{SS}} = 13.5 \text{ W}$$

$$14.2 \quad (1) i = 10.5 \text{ A}; (2) i = 6 \text{ A}; (3) i = 31.3 \text{ A}$$

$$14.3 \quad R = 6 \Omega$$

$$14.4 \quad \dot{i}_1 = 0.5 \text{ A}$$



附录

附录 A Y-△ 转换

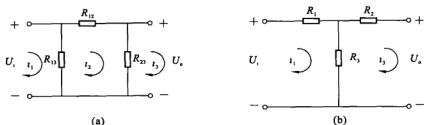


图 A.1 Y-△ 转换网孔分析法

(a) 已标出的 △ 形网络; (b) 已标出的 Y 形网络

由图 A.1(a) 列出方程

$$R_{13} i_1 - R_{12} i_2 = U_1 \quad (\text{A-1})$$

$$-R_{13} i_1 + (R_{13} + R_{12} + R_{23}) i_2 - R_{23} i_3 = 0 \quad (\text{A-2})$$

$$-R_{23} i_2 + R_{23} i_3 = -U_0 \quad (\text{A-3})$$

由图 A.1(b) 列出方程

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_3 = -U_1 \quad (\text{A-4})$$

$$R_3 i_1 + (R_3 + R_2) i_3 = -U_0 \quad (\text{A-5})$$

利用式(A-2) 将式(A-1) 和式(A-3) 中的 i_2 消去, 得到

$$\left(R_{13} - \frac{R_{13}^2}{R_{13} + R_{12} + R_{23}} \right) i_1 - \frac{R_{13} R_{23}}{R_{13} + R_{12} + R_{23}} i_3 = U_1 \quad (\text{A-6})$$

$$-\frac{R_{13} R_{23}}{R_{13} + R_{12} + R_{23}} i_1 + \left(R_{23} - \frac{R_{23}^2}{R_{13} + R_{12} + R_{23}} \right) i_3 = -U_0 \quad (\text{A-7})$$

比较式(A-4) 和式(A-6), 可以看出

$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{13} + R_{12} + R_{23}} \quad (\text{A-8})$$

和

$$R_1 + R_3 = \left(R_{13} - \frac{R_{13}^2}{R_{13} + R_{12} + R_{23}} \right)$$

将 R_3 代入上式, 解出

$$R_1 = \frac{R_{13} R_{12}}{R_{13} + R_{12} + R_{23}} \quad (\text{A-9})$$

比较式(A-5) 和式(A-7), 可以看出

$$R_3 + R_2 = R_{23} - \frac{R_{23}^2}{R_{13} + R_{12} + R_{23}}$$

将 R_3 的表达式代入上式, 解出

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{13} + R_{12} + R_{23}} \quad (\text{A-10})$$

根据式(A-8) ~ 式(A-10) 可解出 R_{14} 、 R_{12} 、 R_{23} 。

将式(A-9) 与式(A-8) 相除, 可得

$$\frac{R_1}{R_1} = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{13}R_{12}} = \frac{R_{23}}{R_{12}}$$

即

$$R_{12} = \frac{R_1 R_{23}}{R_{13}} \quad (\text{A-11})$$

将式(A-10) 与式(A-8) 相除, 可得

$$\frac{R_2}{R_2} = \frac{R_{13}R_{24}}{R_{12}R_{23}} = \frac{R_{13}}{R_{12}}$$

即

$$R_{12} = \frac{R_2 R_{13}}{R_{13}} \quad (\text{A-12})$$

联立式(A-11) 和式(A-12), 可解得

$$R_{13} = \frac{R_1 R_{23}}{R_2} \quad (\text{A-13})$$

将式(A-11) 和式(A-13) 代入式(A-8), 可得

$$R_3 = \frac{\frac{R_1 R_{23}}{R_2} \cdot R_{23}}{\frac{R_1 R_{23}}{R_2} + \frac{R_1 R_{23}}{R_2} + R_{24}}$$

解得

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} \quad (\text{A-14})$$

按照上述方法, 可解得

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} \quad (\text{A-15})$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} \quad (\text{A-16})$$



附录 B 克莱姆法则的应用

解多元线性方程组,应用克莱姆法则可以避免代入方法和消元方法因复杂而出现的错误。

对于下列方程组:

$$\begin{cases} 7U_1 - 3U_2 - 4U_3 = -11 \\ -3U_1 + 6U_2 - 2U_3 = 3 \\ -4U_1 - 2U_2 + 11U_3 = 25 \end{cases}$$

由方程系数组成的行列式为

$$\begin{aligned} \Delta_G &= \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix} \\ &= 7 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 7 \times (62) + 3 \times (-41) - 4 \times (30) \\ &= 191 \end{aligned}$$

求 U_1 时,用等式右边常数替换 U_1 前面的系数,然后求出替换后行列式的值。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 191$$

同理可求得

$$\Delta_2 = 382$$

$$\Delta_3 = 573$$

$$U_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} = \frac{191}{191} = 1 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} = \frac{382}{191} = 2 \text{ V}$$

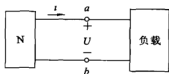
$$U_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \frac{573}{191} = 3 \text{ V}$$



附录 C 戴维南定理证明

图 C.1 为线性有源二端电路 N 与负载相连, 设负载上电流为 i , 电压为 U 。根据置换定理, 对于网络 N 而言, 用一个电流源将负载置换后, 对 N 中的参数没有影响, 置换后的电路见图 C.2(a)。由叠加原理, 电压 U 可分为两部分, 写为

$$U = U' + U'' \quad (\text{C-1})$$

图 C.1 二端电路 N 接负载电路

式中, U' 是 N 内所有独立源共同作用时在端子间产生的电压即两端钮的开路电压, 见图 C.2(b)。 U'' 是 N 内所有独立源为零, 仅由电压源 i 作用在两端钮间产生的电压, 如图 C.2(c) 所示。

$$U' = U_{oc} \quad (\text{C-2})$$

将 N_0 二端电路看成等效电阻 R_0 , 且 U'' 与 i 对 R_0 参考方向非关联, 由欧姆定律可得

$$U'' = -R_0 i \quad (\text{C-3})$$

将 U' 和 U'' 代入式(C-1) 得到

$$U = U_{oc} - R_0 i \quad (\text{C-4})$$

根据式(C-4) 画出电路模型如图 C.3 所示, 证明戴维南定理是正确的。

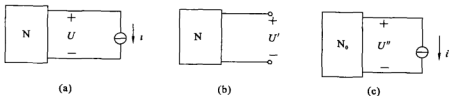


图 C.2 证明戴维南定理用图

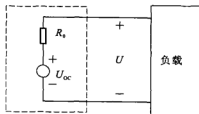


图 C.3



附录 D 二阶电路响应 u_C 或 i_L 的三种表达式

在第 7 章中,已设方程的解为 $u = Ae^s$,代入无源并联 RLC 电路的二阶微分方程得到

$$\begin{aligned} Ae^s \left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} \right) &= 0 \\ Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} &= 0 \\ s_{1,2} &= -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ \alpha &= \frac{1}{2RC}, \quad \omega_0 = \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

由于存在两个根,故方程的解由两项组成。

(1) $\alpha > \omega_0$ 时

在 $\alpha > \omega_0$ 的情况下,二阶微分方程有两个不等的实根,即

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 e^{s_1 t} \\ u_2 &= A_2 e^{s_2 t} \end{aligned}$$

两个根均满足第 7 章所叙的微分方程,即

$$\begin{aligned} C \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{L} u_1 &= 0 \\ C \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L} u_2 &= 0 \end{aligned}$$

把两个方程加起来合并同类项,得到

$$C \frac{d^2 (u_1 + u_2)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d(u_1 + u_2)}{dt} + \frac{1}{L} (u_1 + u_2) = 0$$

两个解的和也是方程的解,于是自由响应的一般表达式为

$$u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

(2) $\alpha = \omega_0$ 时

在 $\alpha = \omega_0$ 的情况下,二阶微分方程有两个相等的实根,即

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\alpha \\ u(t) &= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = (A_1 + A_2) e^{s_1 t} = A_3 e^{s_1 t} \end{aligned}$$

出现上述情况与实际相矛盾,因为上式无法满足 $u(0)$ 和 $i(0)$ 的初始条件,根据数学知识,此时令

$$u(t) = e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2)$$

式中包括两个常数,符合对解的要求。

(3) $\alpha < \omega_0$ 时

在 $\alpha < \omega_0$ 的情况下,二阶微分方程有一对共轭复根,即

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\text{令 } \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\omega_d \quad (\omega_d \text{ 称为本征谐振频率})$$

$$\begin{aligned}
 u(t) &= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\
 &= A_1 e^{(-\sigma + j\omega_d)t} + A_2 e^{(-\sigma - j\omega_d)t} \\
 &= e^{-\sigma t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \\
 &= e^{-\sigma t} \left(A_1 \frac{1}{2} e^{j\omega_d t} + A_1 \frac{1}{2} e^{-j\omega_d t} + A_2 \frac{1}{2} e^{-j\omega_d t} + A_2 \frac{1}{2} e^{j\omega_d t} \right)
 \end{aligned}$$

在括号中加入 $A_1 \frac{1}{2} e^{-j\omega_d t} + A_2 \frac{1}{2} e^{j\omega_d t} - A_1 \frac{1}{2} e^{-j\omega_d t} - A_2 \frac{1}{2} e^{j\omega_d t}$ 等式不变, 即

$$\begin{aligned}
 u(t) &= e^{-\sigma t} \left[(A_1 + A_2) \frac{1}{2} e^{j\omega_d t} + (A_1 + A_2) \frac{1}{2} e^{-j\omega_d t} + (A_1 - A_2) \frac{1}{2} e^{j\omega_d t} - (A_1 - A_2) \frac{1}{2} e^{-j\omega_d t} \right] \\
 &= e^{-\sigma t} \left[(A_1 + A_2) \frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2} + j(A_1 - A_2) \frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2} \right] \\
 &= e^{-\sigma t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t - j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t] \\
 &= e^{-\sigma t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)
 \end{aligned}$$

对于无源串联 RLC 电路的二阶微分方程, 求解的 i_L 表达式具有相同的形式, 只是式中

$$\alpha = \frac{R}{2L}.$$



附录 E 变压器次级线圈电流的方向

根据变压器的 T 形网络(图 E. 1), 列出该电路的微分方程。

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (\text{E-1})$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (\text{E-2})$$

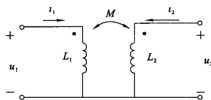


图 E. 1

电感完全耦合时, $M^2 = L_1 L_2$, 因此

$$u_1 = \frac{M}{L_2} u_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} u_2 = n u_2$$

用 L_1 去除式(E-1) 的两边, 得到初级电流和次级电流的关系, 即

$$\frac{u_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{n} \frac{di_2}{dt}$$

理想变压器 L_1 为无穷大, 于是

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{n} \frac{di_2}{dt}$$

积分得

$$i_1 = -\frac{1}{n} i_2, \quad i_2 = -n i_1$$

当 i_1 为正, 与设计方向一致时, i_2 为负值, 实际方向与设计方向相反, 所以电流 i_2 从次级线圈同名端向外流出。

主要参考文献

- [1] [美]海特 Hayt, W. H. 工程电路分析(第7版). 周玲玲, 蒋乐天译. 北京: 电子工业出版社, 2006.
- [2] Charles K. Alexander 著. 高歌改编. 电路基础(第3版). 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [3] 王震宇主编. 电路分析. 北京: 科学出版社, 2006.
- [4] 燕庆明主编. 电路分析教程. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [5] 张永瑞主编. 电路分析基础(第三版). 西安: 西安电子科技大学出版社, 2006.
- [6] 李培芳主编. 电路分析基础. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [7] 康巨珍, 康晓明主编. 电路分析学习指导. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [8] 李瀚荪编. 电路分析(第三版)上、中、下册. 北京: 高等教育出版社, 1992.
- [9] 华成英, 童诗白编. 模拟电子技术基础(第四版). 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [10] 阎石编. 数字电子技术基础(第五版). 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [11] 曾兴雯, 刘乃安, 陈健编. 高频电路原理与分析(第四版). 西安: 西安电子科技大学出版社, 2006.
- [12] 刘介才编. 工厂供电(第4版). 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [13] 陈景谦主编. 电工技术. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [14] 任振辉, 刘增良, 刘军编. 电气控制技术. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [15] 邵裕森, 戴先中编. 过程控制工程(第2版). 北京: 机械工业出版社, 2003.
- [16] 邱关源主编. 电路(第4版). 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [17] 沈元隆, 刘陈编. 电路分析. 北京: 人民邮电出版社, 2001.
- [18] 李于凡, 王定中编. 电路分析. 广州: 华南理工大学出版社, 2000.

新
知
识
PDG