



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

高等数学

第七版 上册

同济大学数学系 编

关于本电子书说明

本人由于一些便利条件，可以帮您提供各种中文电子图书资料，且质量均为清晰的PDF图片格式，方便阅读和携带。文学、法律、计算机、人文、经济、医学、工业、学术等方面的图书，都可以帮您找提供电子版本，500万图书馆资源收藏供你选择。

我的QQ是859109769 佳佳e图书（提供完整版）

高等教育出版社



“十二五”普通高等教

高等数学

第七版 上册

同济大学数学系 编

GAODENG SHUXUE

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是同济大学数学系编的《高等数学》第七版,从整体上说与第六版没有大的变化,内容深广度符合“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,适合高等院校工科类各专业学生使用。

本次修订遵循“坚持改革、不断锤炼、打造精品”的要求,对第六版中个别概念的定义,少量定理、公式的证明及定理的假设条件作了一些重要修改;对全书的文字表达、记号的采用进行了仔细推敲;个别内容的安排作了一些调整,习题配置予以进一步充实、丰富,对少量习题作了更换。所有这些修订都是为了使本书更加完善,更好地满足教学需要。

本书分上、下两册出版,上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容,书末还附有二阶和三阶行列式简介、基本初等函数的图形、几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/同济大学数学系编. -- 7版.
-- 北京:高等教育出版社,2014.7
ISBN 978-7-04-039663-8

I. ①高… II. ①同… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 099713 号

| | | | | | | | |
|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|
| 策划编辑 | 王 强 | 责任编辑 | 蒋 青 | 封面设计 | 王凌波 | 版式设计 | 童 丹 |
| 插图绘制 | 尹文军 | 责任校对 | 孟 玲 | 责任印制 | 朱学忠 | | |

| | | | |
|------|------------------|------|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 印 刷 | 高教社(天津)印务有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 开 本 | 787mm×960mm 1/16 | 版 次 | 1978 年 3 月第 1 版 |
| 印 张 | 28 | | 2014 年 7 月第 7 版 |
| 字 数 | 500 千字 | 印 次 | 2014 年 8 月第 2 次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定 价 | 37.70 元 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | | |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 39663-00

第七版前言

本次修订工作是在遵循“坚持改革、不断锤炼、打造精品”的要求下进行的,修订的内容主要包括以下几个方面:

1. 在与中学数学的衔接上,删去了有关集合的内容,保留了映射与函数,便于在教学时根据实际情况作灵活处理;
2. 关于一些重要概念的定义作了仔细推敲,力求更加准确、没有瑕疵;
3. 在坚持工科数学教学要求的前提下,恰当地处理有关定理的假设条件、严谨性、适用性等问题,使教材进一步完善;
4. 关于语言文字表达以及一些记号的采用,力求用词规范,表达确切,记号采用科学合理;
5. 对于个别内容安排进行了适当调整,并增补少量内容,以便更好地适合教学的需要;
6. 对习题配置进一步充实、丰富,并作了一些必要的调整。

本书已经出到了第七版,在本书每一版的修订过程中都得到了广大关注本书的专家、同仁和读者的关心、帮助和指导。本次修订就吸取了他们对前几版提出的许多宝贵意见和建议,特别是浙江大学蔡燧林教授、北京师范大学李仲来教授、北京航空航天大学李心灿教授和徐兵教授等,他们的意见和建议对本次修订带来了很大帮助,在此谨向他们表示诚挚的谢意。

本次修订工作由同济大学邱伯驹完成。新版中存在的问题,继续欢迎广大专家、同仁和读者给予批评指正。

编 者

二〇一四年一月

第六版前言

本书第六版是在第五版的基础上,遵循以下几条原则进行修订的。

1. 按照精品课程教材的要求,在保持本书第五版优点、特色的前提下,继续坚持改革,反复锤炼,努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果和最高水平,体现创新教学理念,有利于激发学生自主学习,有利于提高学生的综合素质和创新能力。

2. 教材的定位进行适当调整,使得修订后教材深广度的高限与第五版的要求基本保持不变,而低限完全符合非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,以适合当前我国各类高校工科类专业本科教学根据不同的教学要求实施分层次教学的需要。为此,在修订版中,对于超过新的教学基本要求的内容,涉及一节、一目或有标题的内容均采用*号标出,其余的情形则采用异体字排印,有关习题也以*号标出;对于新的教学基本要求中的个别内容,如涉及向量分析的内容,本书第五版中体现不够,在修订时给予适当的补充;对于新的教学基本要求中指明的为某些相关专业选用的基本内容,也以*号标出。

3. 教材的习题配置是教材的重要组成部分,是高等数学课程教学中实现教学要求,提高教学质量的重要环节。修订时努力吸收国内外一些优秀微积分教材在习题配置方面的优点,对本书第五版中的习题作较多的调整,包括增加概念复习题、图形题、应用题、综合题等,习题的总量也适当增加。

4. 根据本书第五版出版以来广大同行和读者在教学实践中的意见和建议,进行局部修订,包括本书上、下册内容的适当调整。修订时,将“微分方程”一章内容移至上册作为第七章,“空间解析几何与向量代数”一章内容移至下册作为第八章。

本版修订工作仍由邱伯驹、骆承钦完成。新版中存在的问题,欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正。

编 者

二〇〇六年七月

第五版前言

本书第五版是在第四版的基础上,根据我们多年的教学改革实践,按照新形势下教材改革的精神,进行全面修订而成的。在修订中,我们保留了原教材的系统和风格及其结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点,同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革举措,使得新版能更适合当前教学的需要,成为适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材。

新版为更好地与中学数学教学相衔接,上册从一般的集合、映射引入函数概念,精简了基本初等函数的基础内容;为有利于培养学生的能力和数学素养,渗透了一些现代数学的思想、语言和方法,适当引用了一些数学记号和逻辑符号,文字作了适当简化;为适应高等数学课程教学学时数减少的情况,在保证《高等数学课程教学基本要求》的前提下,对一些内容作了适当精简和合并;在应用方面,增加了一些微积分在科学技术、经济管理和日常生活等方面的应用性例题和习题。对第四版中存在的个别问题,这次也作了修订。修改较多的部分涉及函数、极限及向量代数等内容。

这次修订中,我系的广大教师提出了许多宝贵的意见和建议,特别是郭镜明教授提供了不少好的建议,我们在此表示诚挚的谢意。

本版修订工作由邱伯驹、骆承钦完成。新版中存在的问题,欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编 者

二〇〇一年十月

第四版前言

关于本书的修订问题,全国高校工科数学课程教学指导委员会曾于 1992 年 5 月的工作会议上进行了讨论,与会代表们希望本书修改后能更加适应大多数院校的需要,这也正是我们的愿望。因此,我们在修订时,对不标 * 号的部分,注意控制其深广度,以期使它尽量符合高等工业院校的《高等数学课程教学基本要求》(后称“基本要求”);同时仍保留标 * 号的内容,这些内容都是超出“基本要求”的,可供对数学要求稍高的专业采用。

兄弟院校的同行,对本书此次修订也提出了不少具体意见,修订时我们都作了认真考虑。在此,我们对课委会及同行们表示衷心的感谢。齐植兰、赵中时、谢树艺三位教授审阅了本书第四版书稿,并提出不少宝贵意见,对此我们表示感谢。

本版在每章末增加了总习题,希望这些总习题在检查学习效果以及复习方面能发挥作用。

本书中用到二、三阶行列式的一些知识,部分读者由于阅读本书前尚未学过这方面的内容,因而产生学习上的困难。为此,本版上册增加了一个附录,用尽可能少的篇幅介绍有关二、三阶行列式的一些简单知识。

本书从第二版起的修订工作均由同济大学承担。第二版修订工作的正文部分由王福楹、邱伯驹完成,习题部分由宣耀焕、郭镜明、黄忠湛、王章炎完成。参加第三版修订工作的有王福楹、邱伯驹、骆承钦、王章炎。参加第四版修订工作的有王福楹、邱伯驹、骆承钦。

编 者

一九九三年十二月

第一版前言

本书分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数,下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论。各章配有习题,书末附有习题答案。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书。

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驹,上海交通大学王嘉善,上海纺织工学院巫锡禾,上海科技大学蔡天亮,上海机械学院王敦珊、周继高,上海铁道学院李鸿祥等同志。

本书由上海海运学院陆子芬教授主审。参加审稿的还有大连工学院刘锡琛,合肥工业大学万迪生、何继文,成都电讯工程学院冯潮清,西北工业大学王德如,浙江大学盛骤、孙玉麟,太原工学院徐永源、张宝玉,上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志。

审稿同志都认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢。

限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,因而教材中一定存在不妥之处,希望广大读者提出批评和指正。

编 者

一九七八年三月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其行为人将承担相应的民事责任和行政责任;构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

短信防伪说明

本图书采用出版物短信防伪系统,用户购书后刮开封底防伪密码涂层,将16位防伪密码发送短信至106695881280,免费查询所购图书真伪。

反盗版短信举报

编辑短信“JB,图书名称,出版社,购买地点”发送至10669588128

短信防伪客服电话

(010)58582300

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站,请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 <http://abook.hep.com.cn/39663>
2. 输入数字课程账号(见封底明码)、密码、验证码
3. 点击“进入课程”
4. 开始课程学习

账号自登录之日起一年内有效,过期作废。

使用本账号如有任何问题,请发邮件至:yangfan@hep.com.cn。

目 录

| | |
|---|----|
| 第一章 函数与极限 | 1 |
| 第一节 映射与函数 | 1 |
| 一、映射(1) 二、函数(3) 习题 1-1(16) | |
| 第二节 数列的极限 | 18 |
| 一、数列极限的定义(18) 二、收敛数列的性质(23) 习题 1-2(26) | |
| 第三节 函数的极限 | 27 |
| 一、函数极限的定义(27) 二、函数极限的性质(32) 习题 1-3(33) | |
| 第四节 无穷小与无穷大 | 34 |
| 一、无穷小(34) 二、无穷大(35) 习题 1-4(37) | |
| 第五节 极限运算法则 | 38 |
| 习题 1-5(45) | |
| 第六节 极限存在准则 两个重要极限 | 45 |
| 习题 1-6(52) | |
| 第七节 无穷小的比较 | 52 |
| 习题 1-7(55) | |
| 第八节 函数的连续性与间断点 | 56 |
| 一、函数的连续性(56) 二、函数的间断点(58) 习题 1-8(61) | |
| 第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性 | 62 |
| 一、连续函数的和、差、积、商的连续性(62) 二、反函数与复合函数的连续性(62) 三、初等函数的连续性(64) 习题 1-9(65) | |
| 第十节 闭区间上连续函数的性质 | 66 |
| 一、有界性与最大值最小值定理(67) 二、零点定理与介值定理(68) | |
| * 三、一致连续性(69) 习题 1-10(70) | |
| 总习题一 | 70 |
| 第二章 导数与微分 | 73 |
| 第一节 导数概念 | 73 |
| 一、引例(73) 二、导数的定义(75) 三、导数的几何意义(80) | |
| 四、函数可导性与连续性的关系(82) 习题 2-1(83) | |
| 第二节 函数的求导法则 | 84 |
| 一、函数的和、差、积、商的求导法则(85) 二、反函数的求导法则(87) | |

| | | |
|------|---------------------------------------|-----|
| | 三、复合函数的求导法则(89) 四、基本求导法则与导数公式(92) | |
| | 习题 2-2(94) | |
| 第三节 | 高阶导数 | 96 |
| | 习题 2-3(100) | |
| 第四节 | 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率 | 101 |
| | 一、隐函数的导数(101) 二、由参数方程所确定的函数的导数(104) | |
| | 三、相关变化率(108) 习题 2-4(108) | |
| 第五节 | 函数的微分 | 110 |
| | 一、微分的定义(110) 二、微分的几何意义(113) 三、基本初等函数的 | |
| | 微分公式与微分运算法则(113) 四、微分在近似计算中的应用(116) | |
| | 习题 2-5(120) | |
| 总习题二 | | 122 |
| 第三章 | 微分中值定理与导数的应用 | 125 |
| 第一节 | 微分中值定理 | 125 |
| | 一、罗尔定理(125) 二、拉格朗日中值定理(126) 三、柯西中值 | |
| | 定理(129) 习题 3-1(132) | |
| 第二节 | 洛必达法则 | 132 |
| | 习题 3-2(137) | |
| 第三节 | 泰勒公式 | 137 |
| | 习题 3-3(143) | |
| 第四节 | 函数的单调性与曲线的凹凸性 | 144 |
| | 一、函数单调性的判定法(144) 二、曲线的凹凸性与拐点(147) | |
| | 习题 3-4(150) | |
| 第五节 | 函数的极值与最大值最小值 | 152 |
| | 一、函数的极值及其求法(152) 二、最大值最小值问题(156) | |
| | 习题 3-5(161) | |
| 第六节 | 函数图形的描绘 | 163 |
| | 习题 3-6(167) | |
| 第七节 | 曲率 | 168 |
| | 一、弧微分(168) 二、曲率及其计算公式(169) 三、曲率圆与曲率 | |
| | 半径(173) 四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线(174) | |
| | 习题 3-7(176) | |
| 第八节 | 方程的近似解 | 177 |
| | 一、二分法(177) 二、切线法(178) 三、割线法(180) | |
| | 习题 3-8(181) | |

| | |
|--|-----|
| 总习题三 | 181 |
| 第四章 不定积分 | 184 |
| 第一节 不定积分的概念与性质 | 184 |
| 一、原函数与不定积分的概念(184) 二、基本积分表(188) 三、不定积分的性质(189) 习题 4-1(192) | |
| 第二节 换元积分法 | 193 |
| 一、第一类换元法(194) 二、第二类换元法(200) 习题 4-2(207) | |
| 第三节 分部积分法 | 208 |
| 习题 4-3(212) | |
| 第四节 有理函数的积分 | 213 |
| 一、有理函数的积分(213) 二、可化为有理函数的积分举例(216) 习题 4-4(218) | |
| 第五节 积分表的使用 | 219 |
| 习题 4-5(221) | |
| 总习题四 | 222 |
| 第五章 定积分 | 224 |
| 第一节 定积分的概念与性质 | 224 |
| 一、定积分问题举例(224) 二、定积分的定义(226) 三、定积分的近似计算(229) 四、定积分的性质(232) 习题 5-1(236) | |
| 第二节 微积分基本公式 | 237 |
| 一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系(237) 二、积分上限的函数及其导数(238) 三、牛顿-莱布尼茨公式(240) 习题 5-2(244) | |
| 第三节 定积分的换元法和分部积分法 | 246 |
| 一、定积分的换元法(246) 二、定积分的分部积分法(252) 习题 5-3(254) | |
| 第四节 反常积分 | 256 |
| 一、无穷限的反常积分(256) 二、无界函数的反常积分(259) 习题 5-4(262) | |
| * 第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数 | 262 |
| 一、无穷限反常积分的审敛法(263) 二、无界函数的反常积分的审敛法(266) 三、 Γ 函数(268) * 习题 5-5(270) | |
| 总习题五 | 270 |
| 第六章 定积分的应用 | 274 |
| 第一节 定积分的元素法 | 274 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 第二节 | 定积分在几何学上的应用 | 276 |
| | 一、平面图形的面积(276) 二、体积(280) 三、平面曲线的弧长(284) | |
| | 习题 6-2(286) | |
| 第三节 | 定积分在物理学上的应用 | 289 |
| | 一、变力沿直线所作的功(289) 二、水压力(291) 三、引力(292) | |
| | 习题 6-3(293) | |
| 总习题六 | | 294 |
| 第七章 | 微分方程 | 297 |
| 第一节 | 微分方程的基本概念 | 297 |
| | 习题 7-1(301) | |
| 第二节 | 可分离变量的微分方程 | 302 |
| | 习题 7-2(308) | |
| 第三节 | 齐次方程 | 308 |
| | 一、齐次方程(308) * 二、可化为齐次的方程(312) 习题 7-3(314) | |
| 第四节 | 一阶线性微分方程..... | 314 |
| | 一、线性方程(314) * 二、伯努利方程(319) 习题 7-4(320) | |
| 第五节 | 可降阶的高阶微分方程 | 321 |
| | 一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程(321) 二、 $y''=f(x,y')$ 型的微分 | |
| | 方程(323) 三、 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程(326) 习题 7-5(328) | |
| 第六节 | 高阶线性微分方程..... | 329 |
| | 一、二阶线性微分方程举例(329) 二、线性微分方程的解的 | |
| | 结构(331) * 三、常数变易法(334) 习题 7-6(337) | |
| 第七节 | 常系数齐次线性微分方程 | 338 |
| | 习题 7-7(346) | |
| 第八节 | 常系数非齐次线性微分方程 | 347 |
| | 一、 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型(348) 二、 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x+$ | |
| | $Q_n(x)\sin \omega x]$ 型(350) 习题 7-8(354) | |
| * 第九节 | 欧拉方程 | 355 |
| | * 习题 7-9(356) | |
| * 第十节 | 常系数线性微分方程组解法举例 | 357 |
| | * 习题 7-10(359) | |
| 总习题七 | | 360 |
| 附录I | 二阶和三阶行列式简介 | 363 |
| 附录II | 基本初等函数的图形 | 368 |
| 附录III | 几种常用的曲线 | 371 |

| | |
|---------------|-----|
| 附录Ⅳ 积分表 | 374 |
| 习题答案与提示 | 385 |

第一章 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学的研究对象则是变动的量.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系,极限方法是研究变量的一种基本方法.本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

第一节 映射与函数

映射是现代数学中的一个基本概念,而函数是微积分的研究对象,也是映射的一种.本节主要介绍映射、函数及有关概念,函数的性质与运算等.

一、映射

1. 映射概念

定义 设 X, Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f ,使得对 X 中每个元素 x ,按法则 f ,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,那么称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f: X \rightarrow Y,$$

其中 y 称为元素 x (在映射 f 下)的像,并记作 $f(x)$,即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y (在映射 f 下)的一个原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f ,即 $D_f = X$; X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

从上述映射的定义中,需要注意的是:

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素:集合 X ,即定义域 $D_f = X$;集合 Y ,即值域的范围: $R_f \subset Y$;对应法则 f ,使对每个 $x \in X$,有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x \in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y \in R_f$,元素 y 的原像不一定是唯一的;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集,即 $R_f \subset Y$,不一定 $R_f = Y$.

例 1 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. 显然, f 是一个映射, f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = \{y | y \geq 0\}$, 它是 \mathbf{R} 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y , 除 $y=0$ 外, 它的原像不是唯一的. 如 $y=4$ 的原像就有 $x=2$ 和 $x=-2$ 两个.

例 2 设 $X = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(x, 0) | |x| \leq 1\}$, $f: X \rightarrow Y$, 对每个 $(x, y) \in X$, 有唯一确定的 $(x, 0) \in Y$ 与之对应. 显然 f 是一个映射, f 的定义域 $D_f = X$, 值域 $R_f = Y$. 在几何上, 这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-1, 1]$ 上.

例 3 设 $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, 对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin x$. f 是一个映射, 其定义域 $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 值域 $R_f = [-1, 1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射, 若 $R_f = Y$, 即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像, 则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射; 若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为 X 到 Y 的单射; 若映射 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 为 一一映射 (或双射).

上面例 1 中的映射, 既非单射, 又非满射; 例 2 中的映射不是单射, 是满射; 例 3 中的映射, 既是单射, 又是满射, 因此是一一映射.

映射又称为算子. 根据集合 X, Y 的不同情形, 在不同的数学分支中, 映射又有不同的惯用名称. 例如, 从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函, 从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换, 从实数集 (或其子集) X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射, 则由定义, 对每个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in X$, 适合 $f(x) = y$. 于是, 我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g , 即

$$g: R_f \rightarrow X,$$

对每个 $y \in R_f$, 规定 $g(y) = x$, 这 x 满足 $f(x) = y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1} , 其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域 $R_{f^{-1}} = X$.

按上述定义, 只有单射才存在逆映射. 所以, 在例 1、例 2、例 3 中, 只有例 3 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1} , 这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$, 值域 $R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

设有两个映射

$$g: X \rightarrow Y_1, \quad f: Y_2 \rightarrow Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$, 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则, 它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然, 这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射, 这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射, 记作 $f \circ g$, 即

$$f \circ g: X \rightarrow Z, \quad (f \circ g)(x) = f[g(x)], \quad x \in X.$$

由复合映射的定义可知, 映射 g 和 f 构成复合映射的条件是: g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内, 即 $R_g \subset D_f$. 否则, 不能构成复合映射. 由此可以知道, 映射 g 和 f 的复合是有顺序的, $f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义, 复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

例 4 设有映射 $g: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \sin x$, 映射 $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, 对每个 $u \in [-1, 1]$, $f(u) = \sqrt{1-u^2}$, 则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, 有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|.$$

二、函数

1. 函数的概念

定义 设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 按对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

需要指出, 按照上述定义, 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的: 前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则, 而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便, 习惯上常用记号“ $f(x), x \in D$ ”或“ $y = f(x), x \in D$ ”来表示定义在 D 上的函数, 这时应理解为由它所确定的函数 f .

表示函数的记号是可以任意选取的, 除了常用的 f 外, 还可用其他的英文字母或希腊字母, 如“ g ”“ F ”“ φ ”等. 相应地, 函数可记作 $y = g(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数, 即把函数记作 $y =$

$y(x)$. 但在同一个问题中, 讨论到几个不同的函数时, 为了表示区别, 需用不同的记号来表示它们.

函数是从实数集到实数集的映射, 其值域总在 \mathbf{R} 内, 因此构成函数的要素是: 定义域 D_f 及对应法则 f . 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数就是相同的, 否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定: 一种是对有实际背景的函数, 根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如, 在自由落体运动中, 设物体下落的时间为 t , 下落的距离为 s , 开始下落的时刻 $t=0$, 落地的时刻 $t=T$, 则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2, t \in [0, T].$$

这个函数的定义域就是区间 $[0, T]$; 另一种是抽象地用算式表达的函数, 通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合, 这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下, 一般的用算式表达的函数可用“ $y = f(x)$ ”表达, 而不必再表出 D_f . 例如, 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$, 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$.

表示函数的主要方法有三种: 表格法、图形法、解析法(公式法), 这在中学里大家已经熟悉. 其中, 用图形法表示函数是基于函数图形的概念, 即坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x), x \in D$ 的图形(图 1-1). 图中的 R_f 表示函数 $y = f(x)$ 的值域.

下面举几个函数的例子.

例 5 函数

$$y = 2$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{2\}$, 它的图形是一条平行于 x 轴的直线, 如图 1-2 所示.

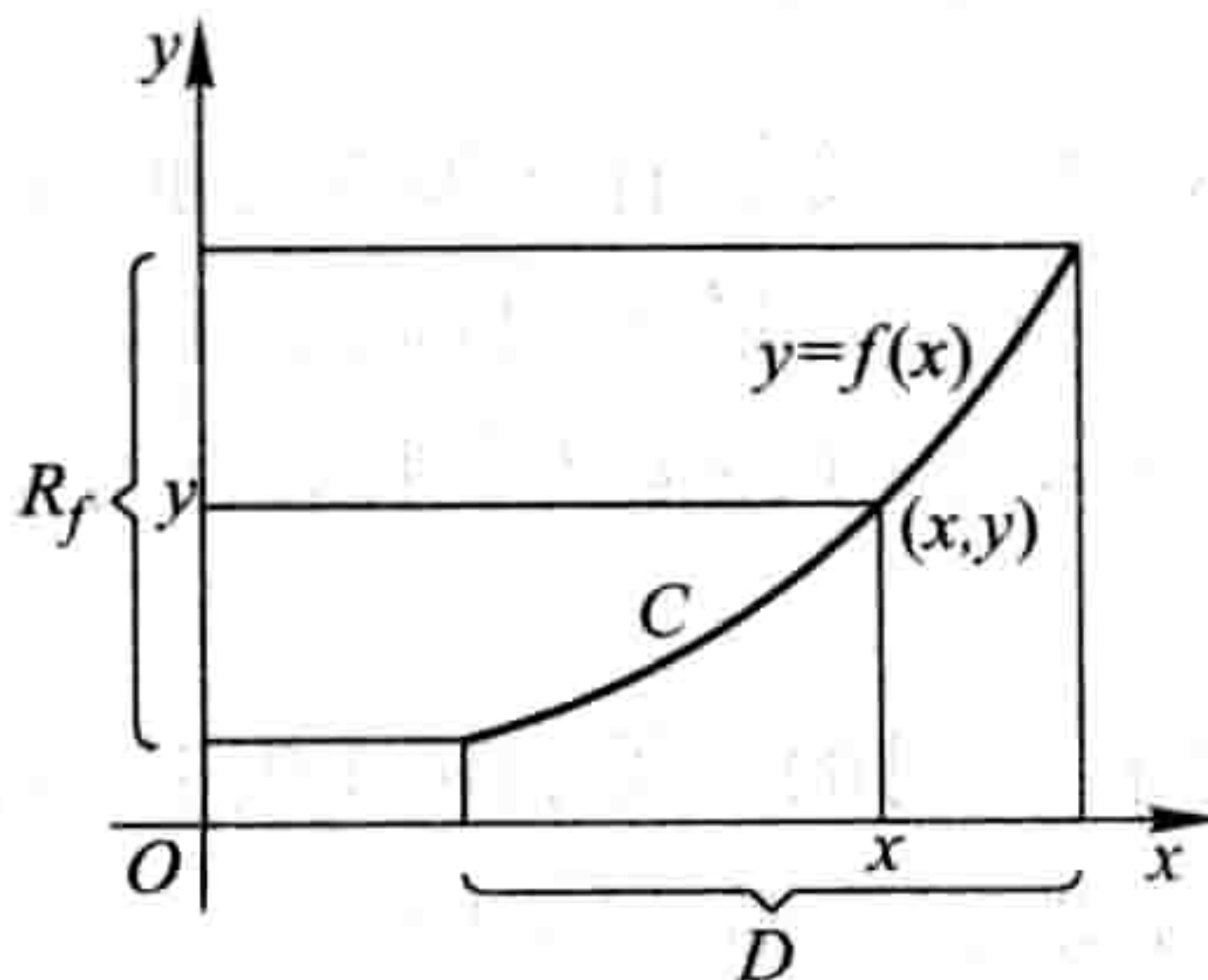


图 1-1

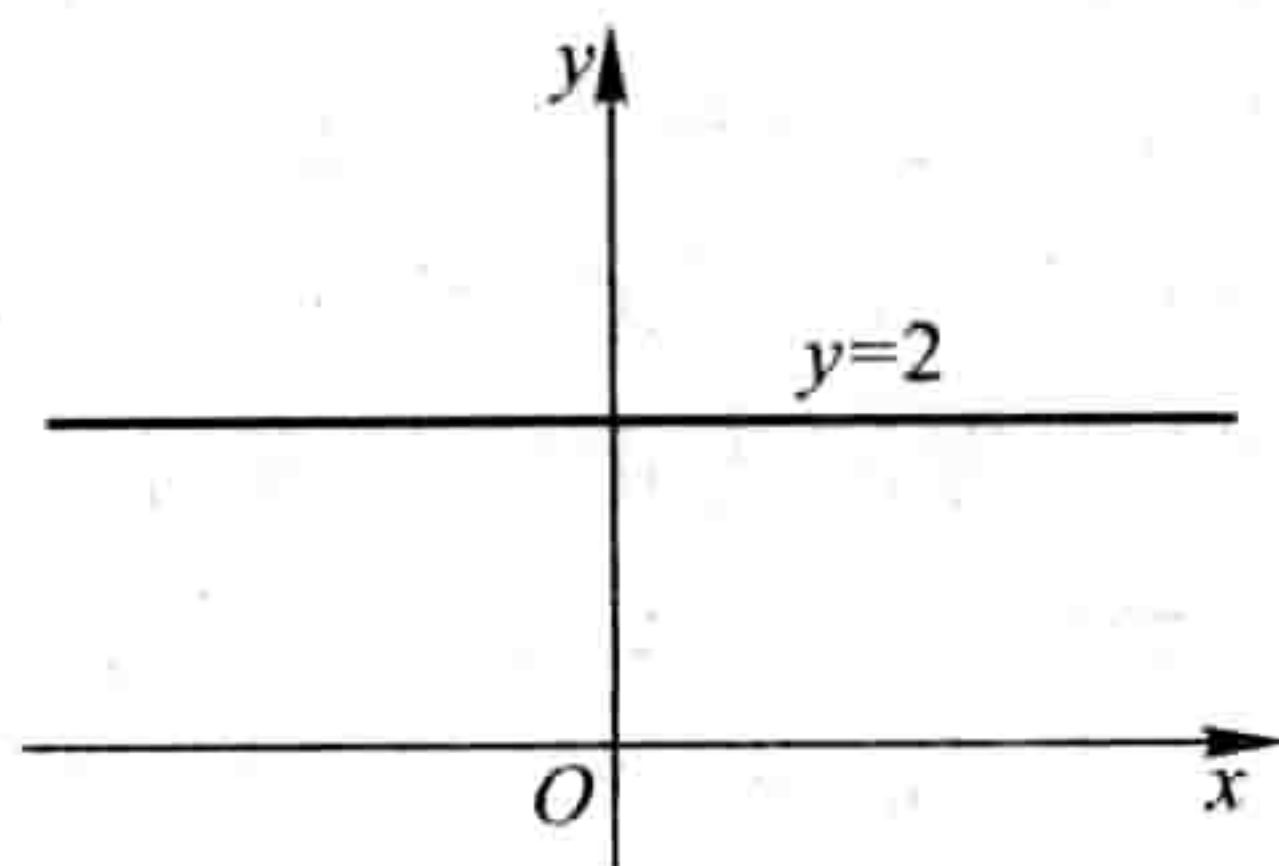


图 1-2

例 6 函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 它的图形如图 1-3 所示. 这函数称为绝对值函数.

例 7 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1-4 所示. 对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

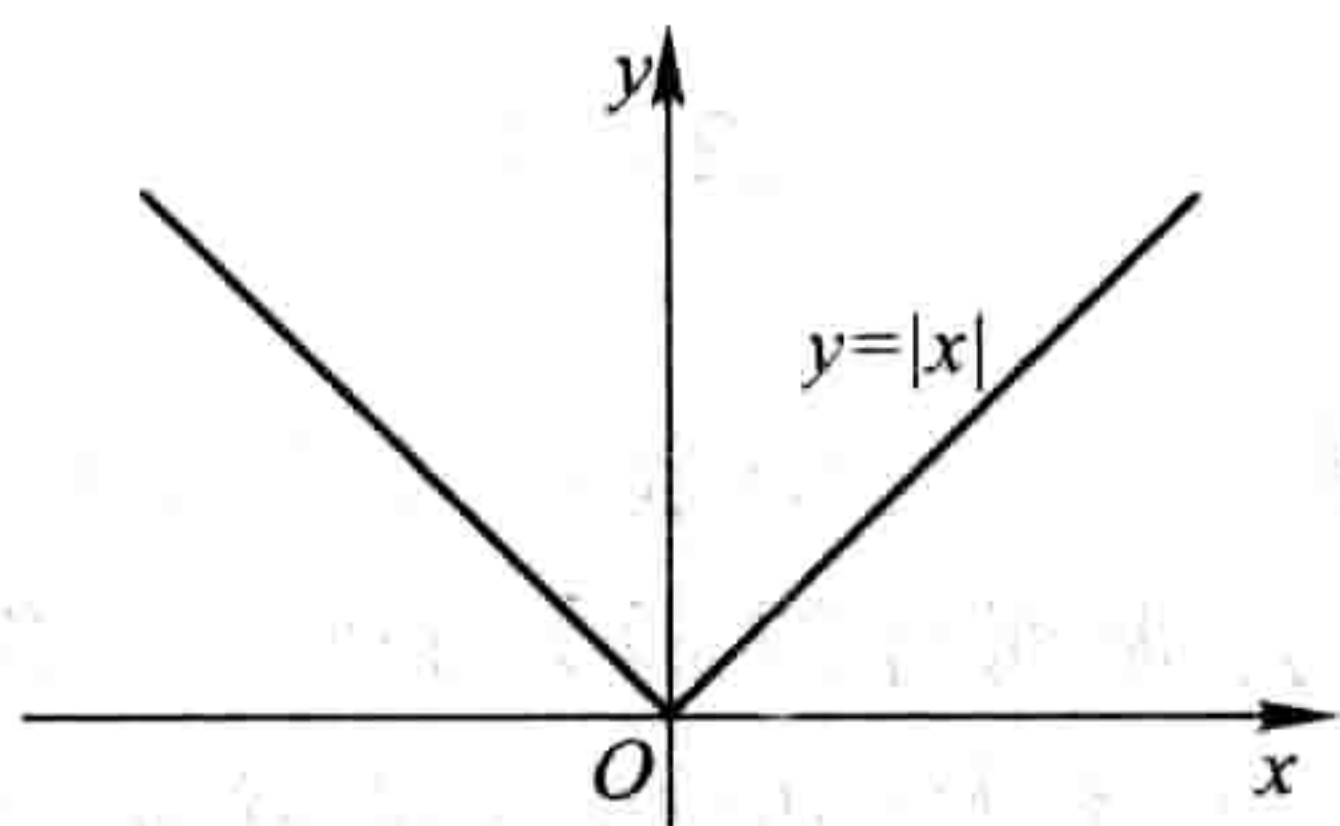


图 1-3

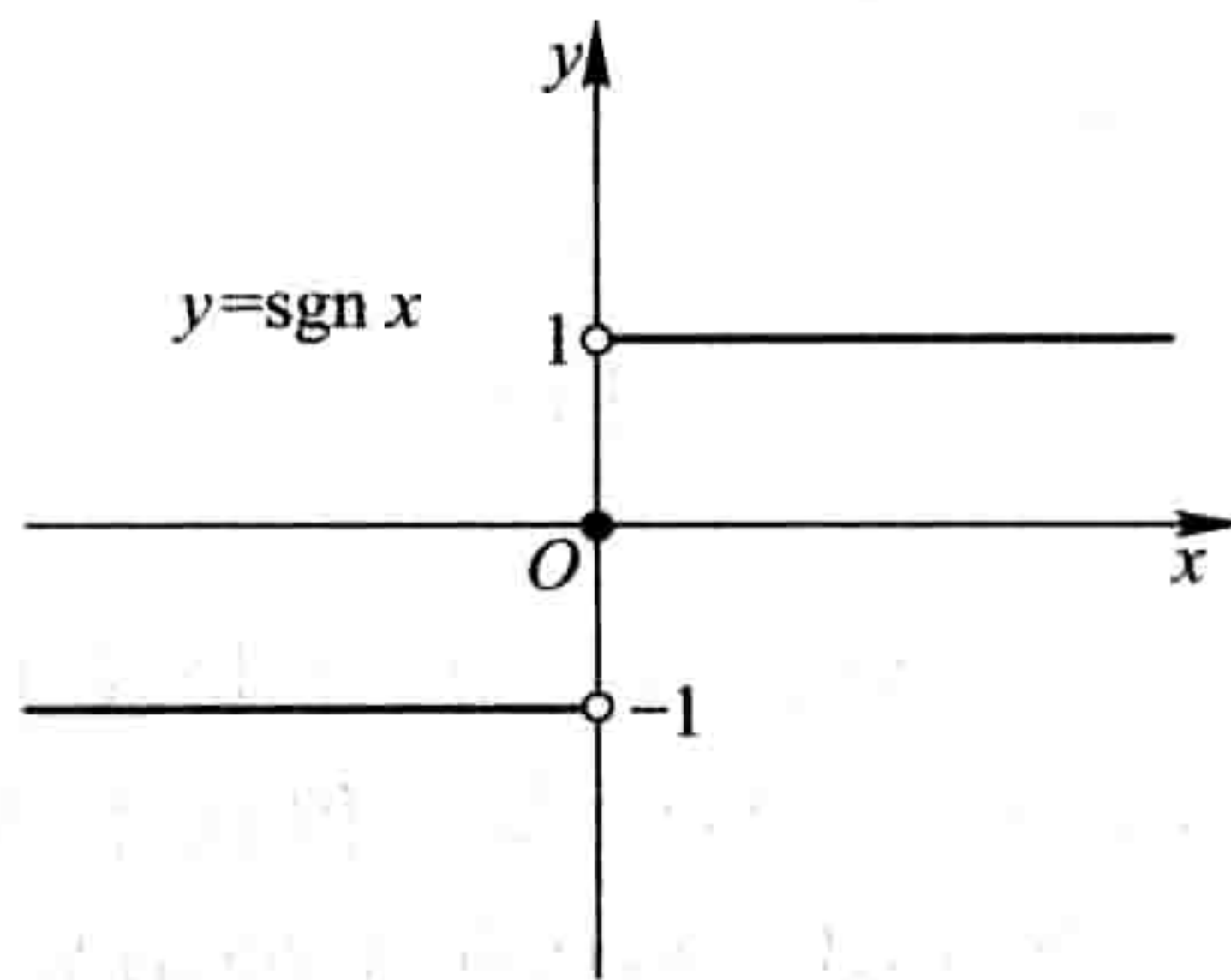


图 1-4

例 8 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$.

例如, $\left[\frac{5}{7}\right] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-1] = -1$, $[-3.5] = -4$. 把 x 看作变量, 则函数

$$y = [x]$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-5 所示, 这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处, 图形发生跳跃, 跃度为 1. 这函数称为取整函数.

在例 6 和例 7 中看到, 有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数, 通常称为分段函数.

例 9 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D = [0, +\infty)$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, 对应的函数值

$f(x) = 2\sqrt{x}$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x) = 1+x$. 例如, $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, 所以

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $1 \in [0, 1]$, 所以 $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$; $3 \in (1, +\infty)$, 所以 $f(3) = 1+3 = 4$. 这函数的图形如图 1-6 所示.

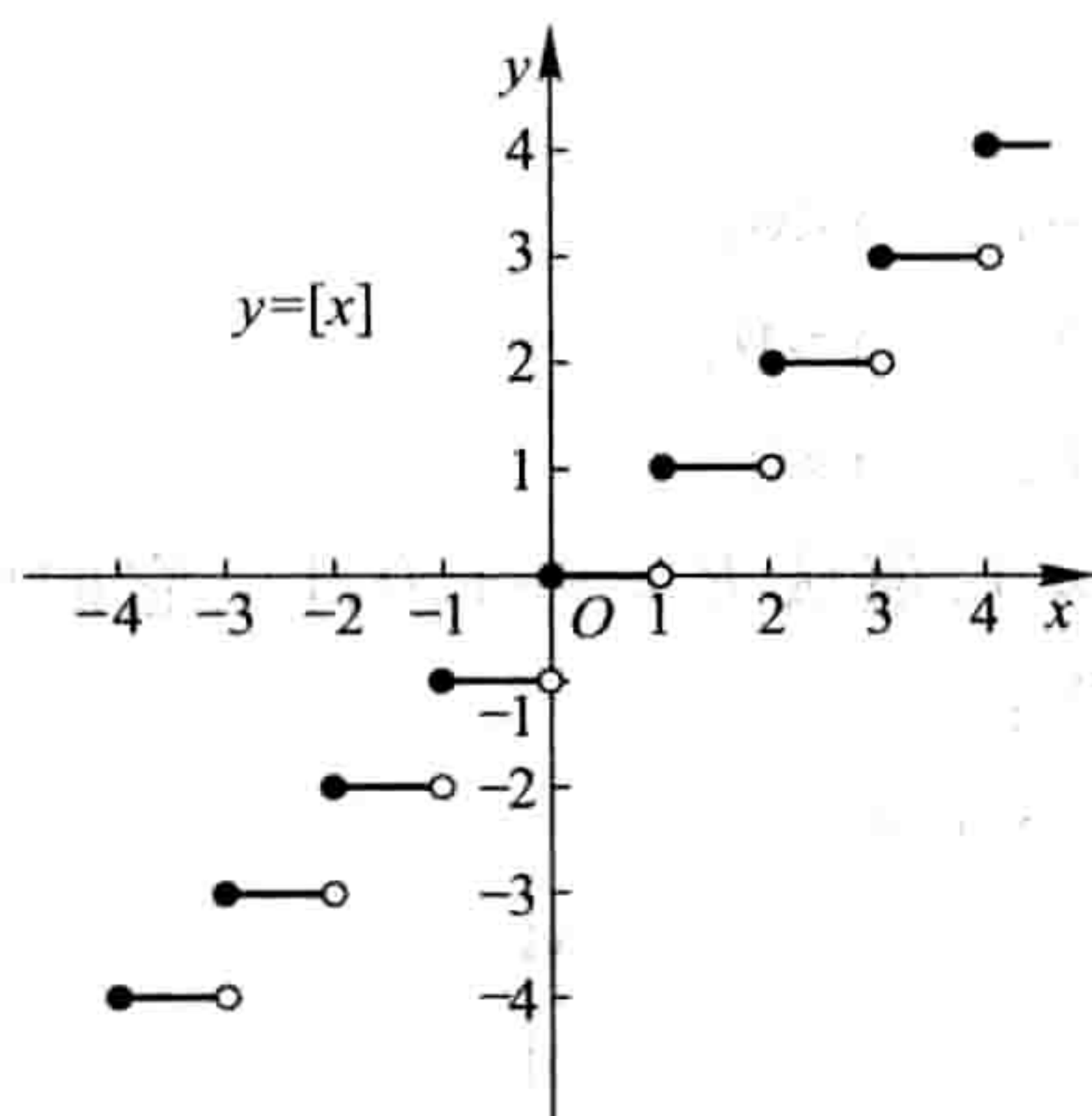


图 1-5

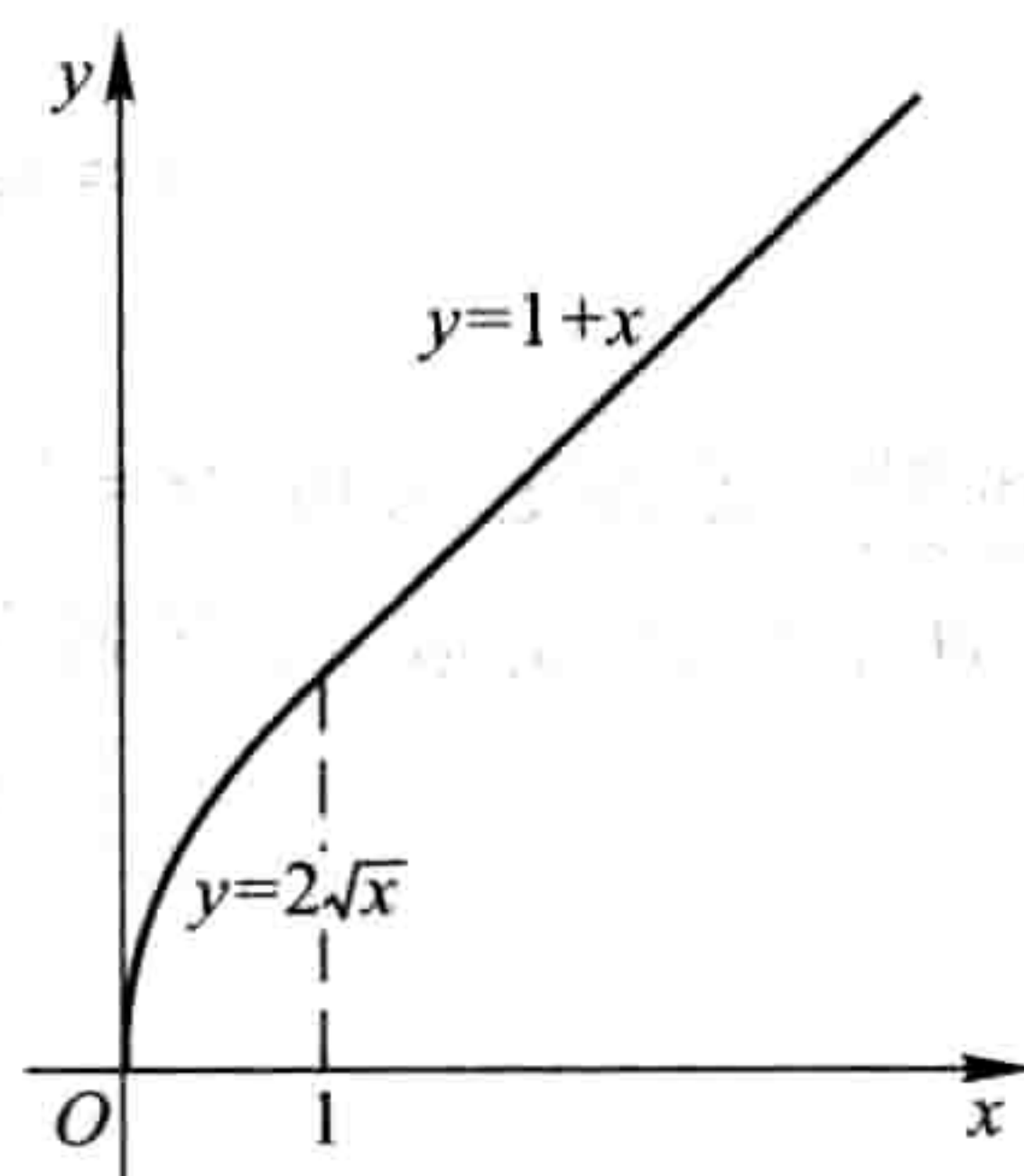


图 1-6

用几个式子来表示一个(不是几个!)函数, 不仅与函数定义并无矛盾, 而且有现实意义. 在自然科学和工程技术中, 经常会遇到分段函数的情形. 例如在等温过程中, 气体压强 p 与体积 V 的函数关系, 当 V 不太小时依从玻意耳(Boyle)定律; 当 V 相当小时, 函数关系就要用范德瓦耳斯(van der Waals)方程来表示, 即

$$p = \begin{cases} \frac{\gamma}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}, & \beta < V < V_0, \\ \frac{k}{V}, & V \geq V_0, \end{cases}$$

其中 k, α, β, γ 都是常量.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在数 K_1 , 使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2 , 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界, 而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X

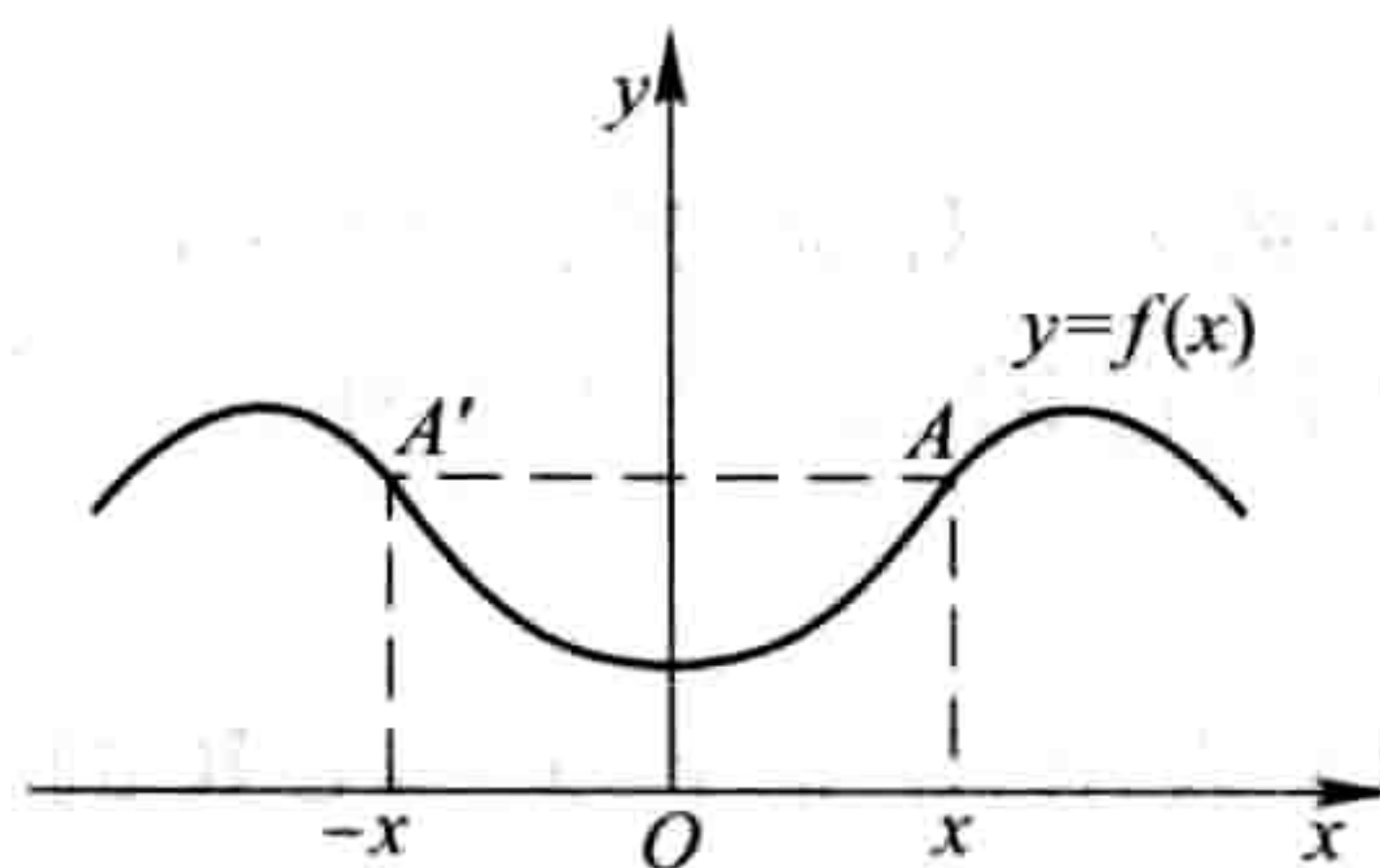


图 1-11

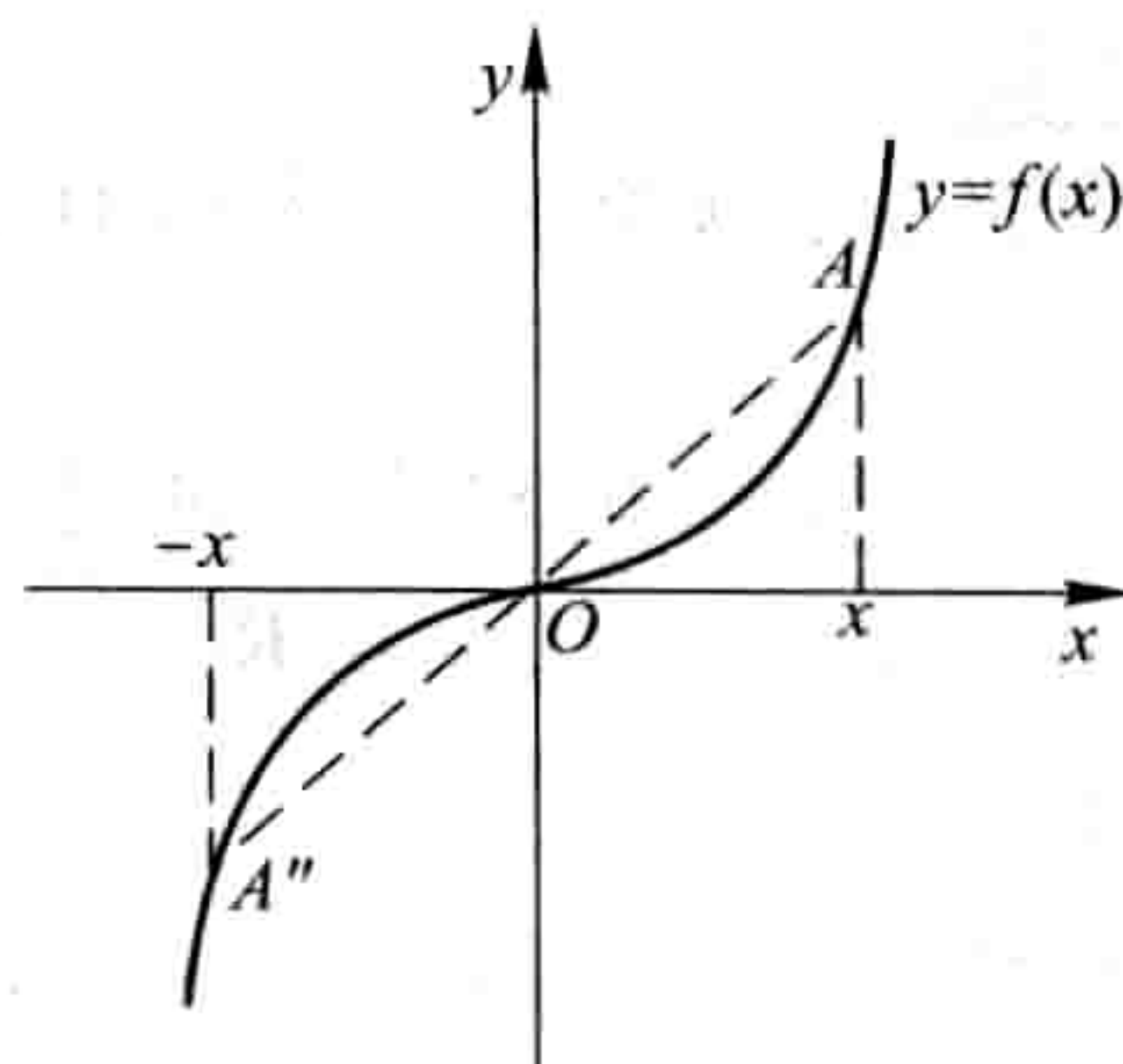


图 1-12

(4) **函数的周期性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且

$$f(x+l) = f(x)$$

恒成立, 那么称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $\sin x, \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

图 1-13 表示周期为 l 的一个周期函数. 在每个长度为 l 的区间上, 函数图形有相同的形状.

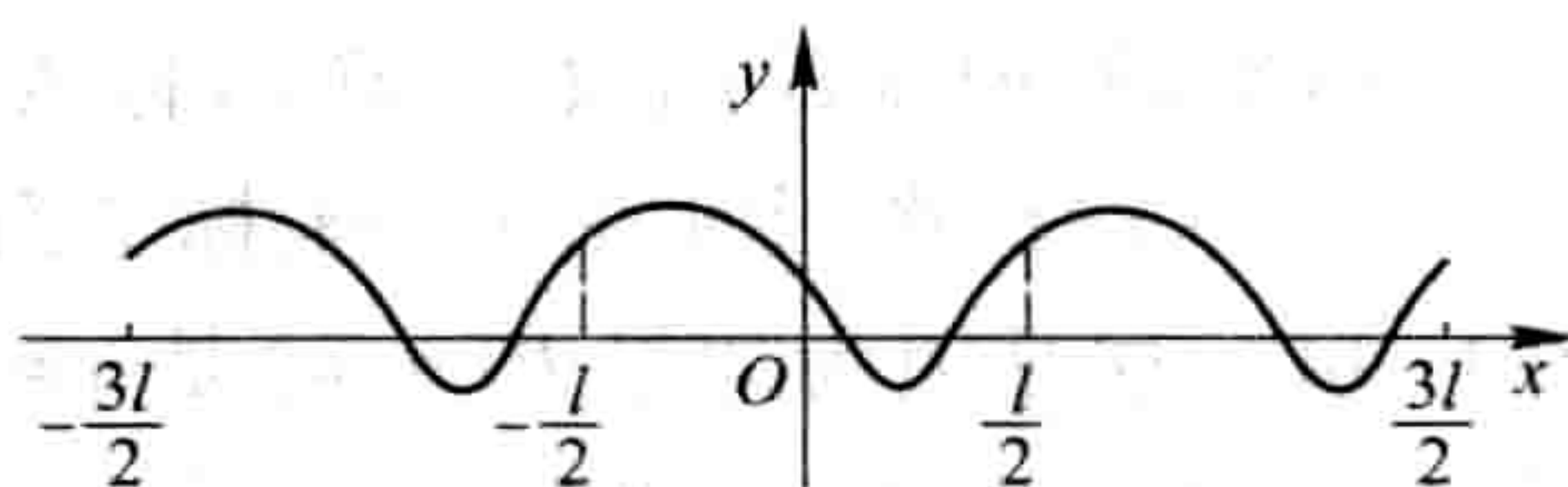


图 1-13

并非每个周期函数都有最小正周期, 下面的函数就属于这种情形.

例 10 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^c. \end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数, 任何正有理数 r 都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数, 所以它没有最小正周期.

3. 反函数与复合函数

作为逆映射的特例, 我们有以下反函数的概念.

设函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$, 称此映射 f^{-1} 为函

数 f 的反函数.

按此定义, 对每个 $y \in f(D)$, 有唯一的 $x \in D$, 使得 $f(x) = y$, 于是有

$$f^{-1}(y) = x.$$

这就是说, 反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.

例如, 函数 $y = x^3, x \in \mathbf{R}$ 是单射, 所以它的反函数存在, 其反函数为 $x = y^{\frac{1}{3}}, y \in \mathbf{R}$.

由于习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 于是 $y = x^3, x \in \mathbf{R}$ 的反函数通常写作 $y = x^{\frac{1}{3}}, x \in \mathbf{R}$.

一般地, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.

若 f 是定义在 D 上的单调函数, 则 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射, 于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在, 而且容易证明 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调函数. 事实上, 不妨设 f 在 D 上单调增加, 现在来证明 f^{-1} 在 $f(D)$ 上也是单调增加的.

任取 $y_1, y_2 \in f(D)$, 且 $y_1 < y_2$. 按函数 f 的定义, 对 y_1 , 在 D 内存在唯一的原像 x_1 , 使得 $f(x_1) = y_1$, 于是 $f^{-1}(y_1) = x_1$; 对 y_2 , 在 D 内存在唯一的原像 x_2 , 使得 $f(x_2) = y_2$, 于是 $f^{-1}(y_2) = x_2$.

如果 $x_1 > x_2$, 则由 $f(x)$ 单调增加, 必有 $y_1 > y_2$; 如果 $x_1 = x_2$, 则显然有 $y_1 = y_2$. 这两种情形都与假设 $y_1 < y_2$ 不符, 故必有 $x_1 < x_2$, 即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. 这就证明了 f^{-1} 在 $f(D)$ 上是单调增加的.

相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数. 把直接函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上, 这两个图形关于直线 $y = x$ 是对称的 (图 1-14). 这是因为如果 $P(a, b)$ 是 $y = f(x)$ 图形上的点, 则有 $b = f(a)$. 按反函数的定义, 有 $a = f^{-1}(b)$, 故 $Q(b, a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点; 反之, 若 $Q(b, a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点, 则 $P(a, b)$ 是 $y = f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a, b)$ 与 $Q(b, a)$ 是关于直线 $y = x$ 对称的.

复合函数是复合映射的一种特例, 按照通常函数的记号, 复合函数的概念可如下表述:

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g , 且其值域 $R_g \subset D_f$, 则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D_g$$

称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数, 它的定义域为 D_g , 变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数, 即按“先 g 后 f ”的次序复合的函数, 通常

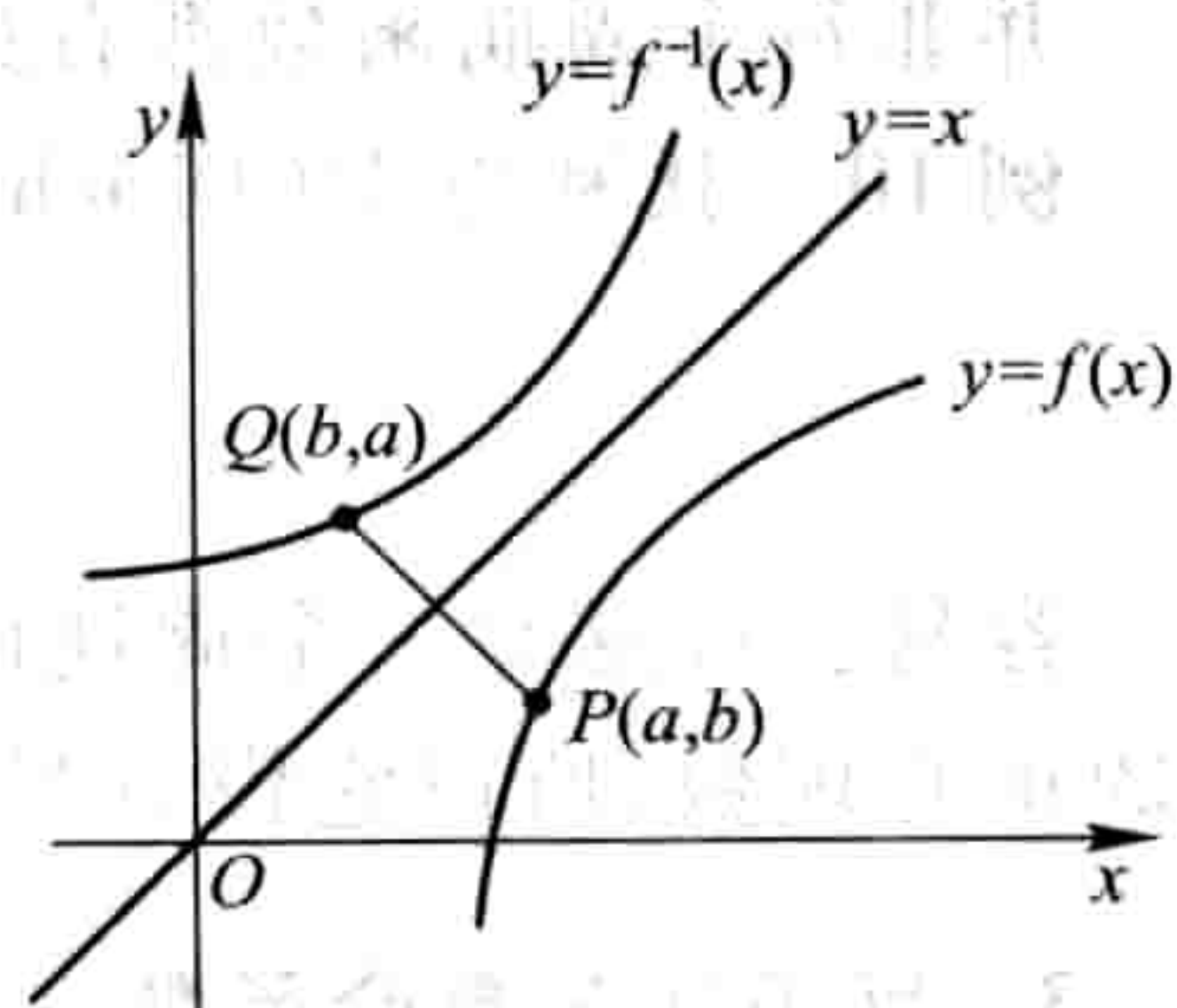


图 1-14

上的一个下界. 如果存在正数 M , 使得

$$|f(x)| \leq M$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界; 这就是说, 如果对于任何正数 M , 总存在 $x_1 \in X$, 使 $|f(x_1)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, 就函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内来说, 数 1 是它的一个上界, 数 -1 是它的一个下界 (当然, 大于 1 的任何数也是它的上界, 小于 -1 的任何数也是它的下界). 又

$$|\sin x| \leq 1$$

对任一实数 x 都成立, 故函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. 这里 $M = 1$ (当然也可取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)| \leq M$ 对任一实数 x 都成立).

又如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内没有上界, 但下有界, 例如 1 就是它的一个下界. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为不存在这样的正数 M , 使 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$ 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立. 但是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的, 例如可取 $M = 1$ 而使 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 对于一切 $x \in (1, 2)$ 都成立.

容易证明, 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

(2) 函数的单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的 (图 1-7); 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的 (图 1-8). 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的; 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x) = x^2$ 不是单调的 (图 1-9).

又例如, 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的 (图 1-10).

(3) 函数的奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$,

$$f(-x) = f(x)$$

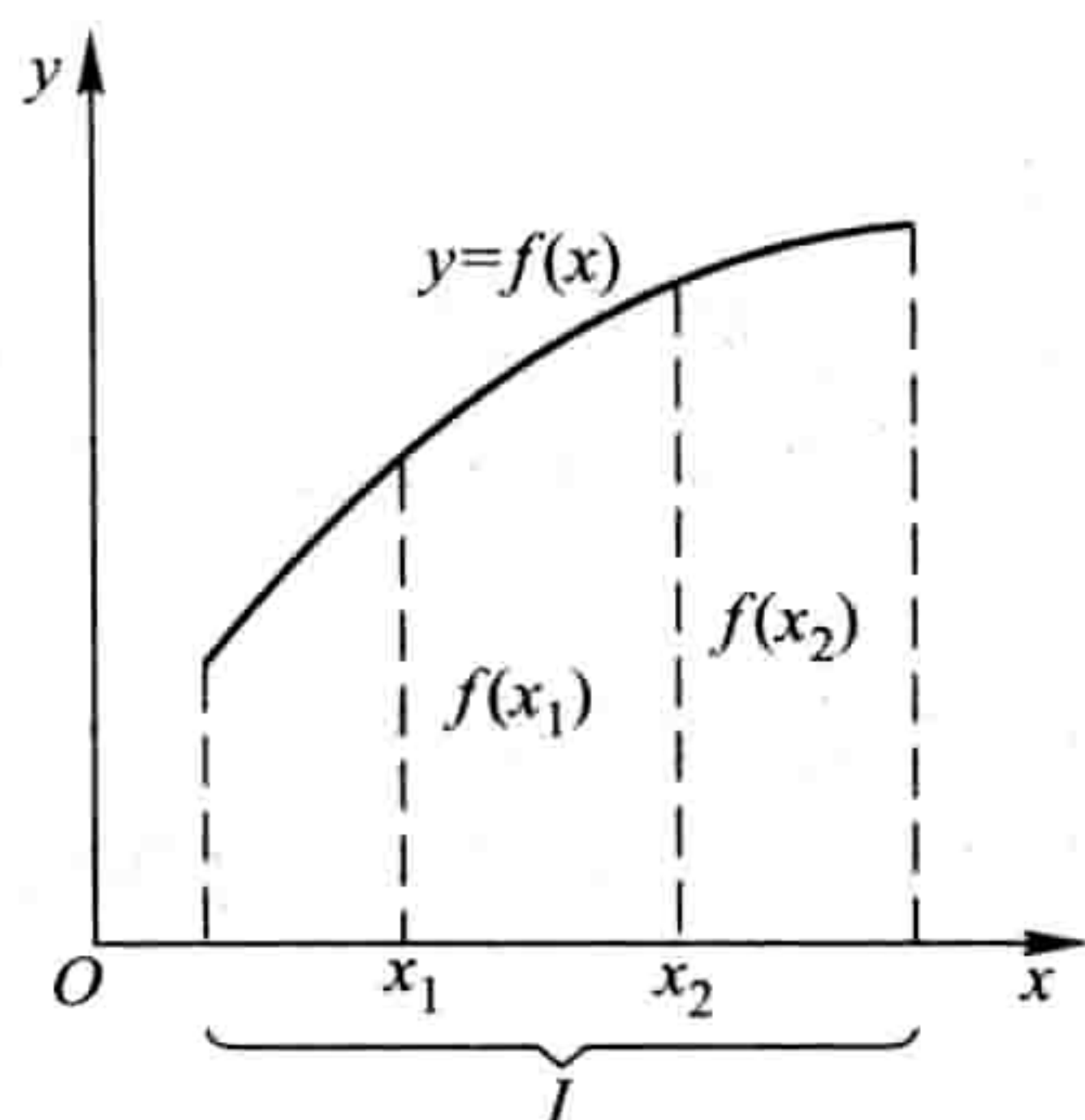


图 1-7

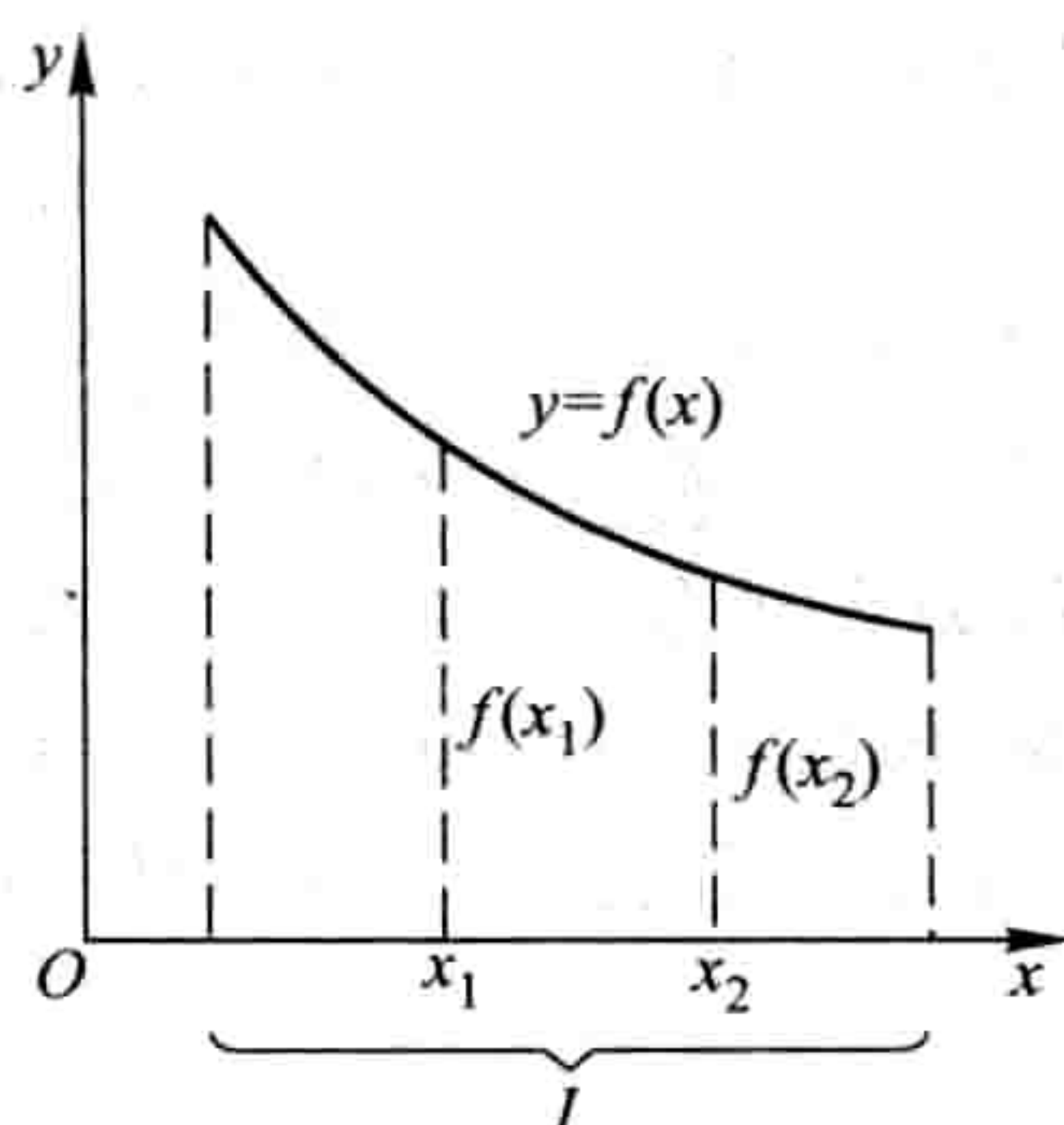


图 1-8

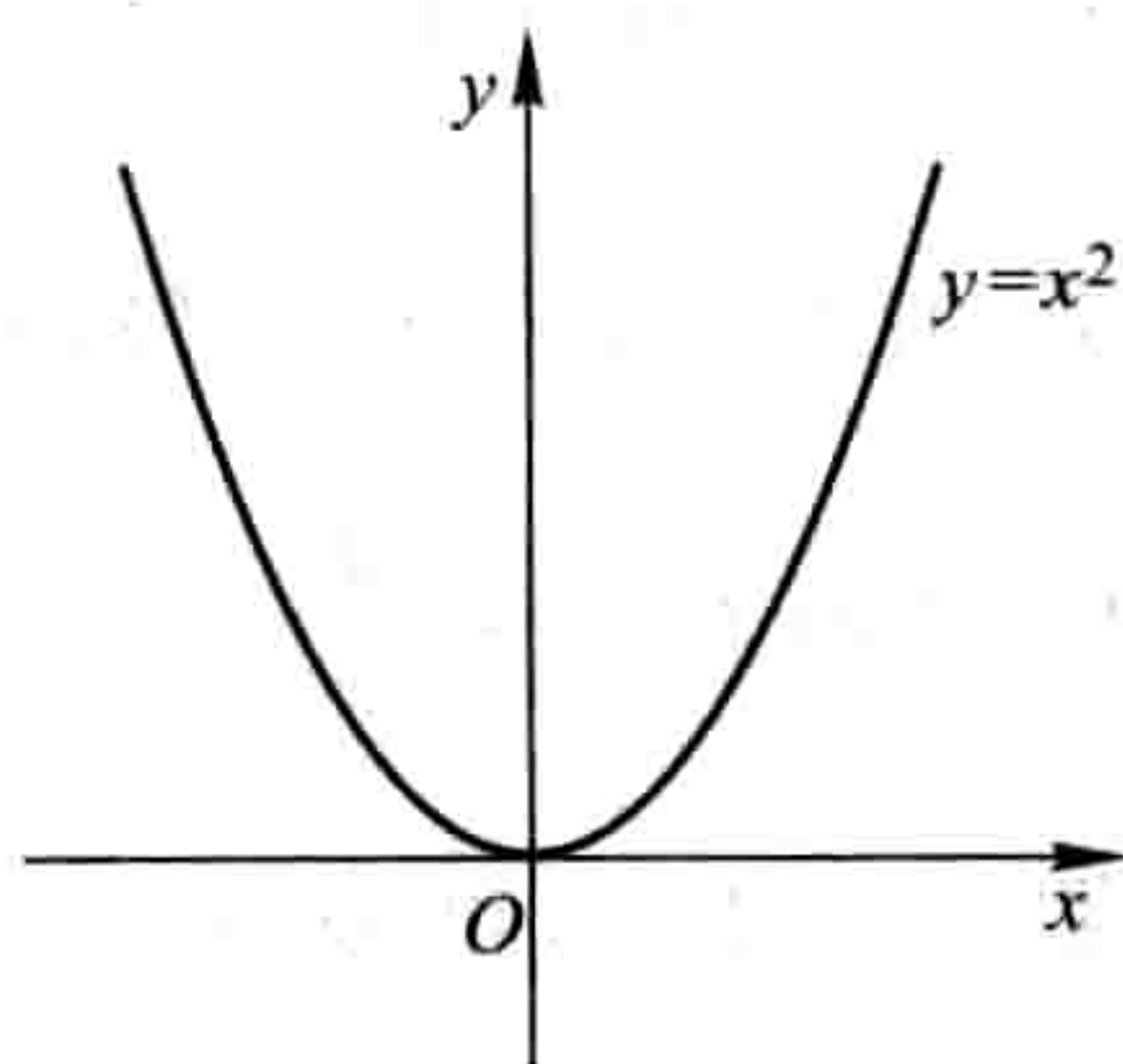


图 1-9

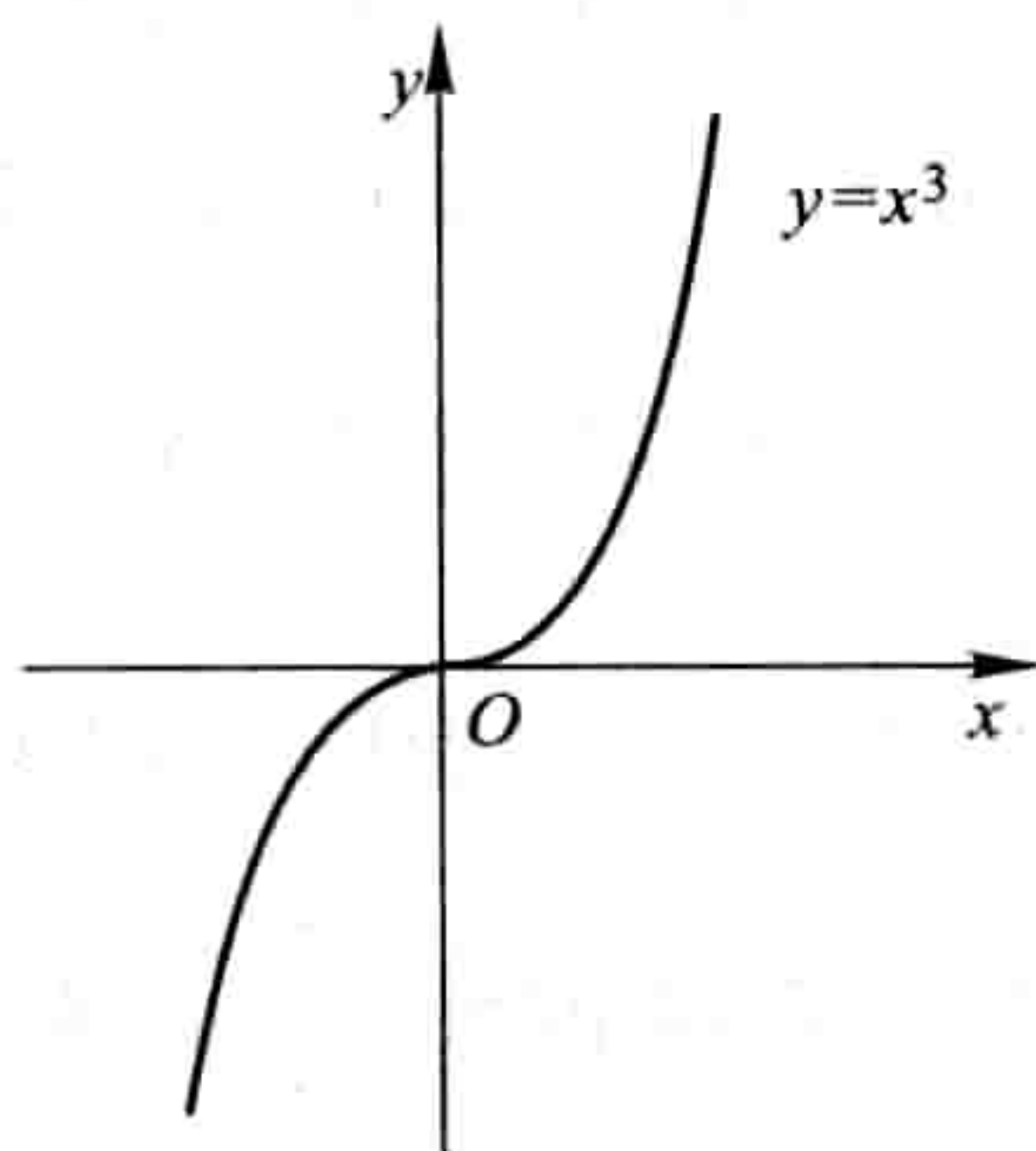


图 1-10

恒成立,那么称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$,

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立,那么称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, $f(x) = x^2$ 是偶函数, 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. 又例如, $f(x) = x^3$ 是奇函数, 因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的. 因为若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点, 那么与它关于 y 轴对称的点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上(图 1-11).

奇函数的图形关于原点对称的. 因为若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点, 那么与它关于原点对称的点 $A''(-x, -f(x))$ 也在图形上(图 1-12).

函数 $y = \sin x$ 是奇函数. 函数 $y = \cos x$ 是偶函数. 函数 $y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数, 也非偶函数.

记为 $f \circ g$, 即

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

与复合映射一样, g 与 f 能构成复合函数 $f \circ g$ 的条件是: 函数 g 的值域 R_g 必须包含于函数 f 的定义域 D_f , 即 $R_g \subset D_f$. 否则, 不能构成复合函数. 例如, $y = f(u) = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, $u = g(x) = \sin x$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $g(\mathbf{R}) \subset [-1, 1]$, 故 g 与 f 可构成复合函数.

$$y = \arcsin \sin x, x \in \mathbf{R};$$

又如, $y = f(u) = \sqrt{u}$ 的定义域为 $D_f = [0, +\infty)$, $u = g(x) = \tan x$ 的值域为 $R_g = (-\infty, +\infty)$, 显然 $R_g \not\subset D_f$, 故 g 与 f 不能构成复合函数. 但是, 如果将函数 g 限制在它的定义域的一个子集 $D = \left\{ x \mid k\pi \leq x < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$ 上, 令 $g^*(x) = \tan x, x \in D$, 那么 $R_{g^*} = g^*(D) \subset D_f$, g^* 与 f 就可以构成复合函数

$$(f \circ g^*)(x) = \sqrt{\tan x}, x \in D.$$

习惯上为了简便起见, 仍称函数 $\sqrt{\tan x}$ 是由函数 $u = \tan x$ 与函数 $y = \sqrt{u}$ 构成的复合函数. 这里函数 $u = \tan x$ 应理解成: $u = \tan x, x \in D$. 以后, 我们采取这种习惯说法. 例如, 我们称函数 $u = x + 1$ 与函数 $y = \ln u$ 构成复合函数 $\ln(x + 1)$, 它的定义域不是 $u = x + 1$ 的自然定义域 \mathbf{R} , 而是 \mathbf{R} 的一个子集 $D = (-1, +\infty)$.

有时, 也会遇到两个以上函数所构成的复合函数, 只要它们顺次满足构成复合函数的条件. 例如, 函数 $y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2}$ 可构成复合函数 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, 这里 u 及 v 都是中间变量, 复合函数的定义域是 $D = \{x \mid 2k\pi < x \leq (2k + 1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 而不是 $v = \frac{x}{2}$ 的自然定义域 \mathbf{R} , D 是 \mathbf{R} 的一个非空子集.

4. 函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域依次为 $D_f, D_g, D = D_f \cap D_g \neq \emptyset$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

$$\text{和(差)} f \pm g: (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D;$$

$$\text{积 } f \cdot g: (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D;$$

$$\text{商 } \frac{f}{g}: \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0, x \in D\}.$$

例 11 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明必存在 $(-l, l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$, 使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

证 先分析如下:假若这样的 $g(x), h(x)$ 存在,使得

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad (1-1)$$

且

$$g(-x) = g(x), h(-x) = -h(x).$$

于是有

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \quad (1-2)$$

利用(1-1)、(1-2)式,就可作出 $g(x), h(x)$. 这就启发我们作如下证明:

作

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

则

$$g(x) + h(x) = f(x),$$

$$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x),$$

$$h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -h(x).$$

证毕.

5. 初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数:

幂函数: $y = x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$ 是常数),

指数函数: $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$),

对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, 特别当 $a = e$ ^① 时, 记为 $y = \ln x$),

三角函数: 如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等,

反三角函数: 如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数. 例如

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad y = \sin^2 x, \quad y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$$

等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

应用上常遇到以 e 为底的指数函数 $y = e^x$ 和 $y = e^{-x}$ 所产生的双曲函数以及它们的反函数——反双曲函数. 它们的定义如下:

① e 是一个无理数, 这个数的意义见本章第六节.

$$\text{双曲正弦} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\text{双曲余弦} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\text{双曲正切} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

这三个双曲函数的简单性态如下:

双曲正弦的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,它是奇函数,它的图形通过原点且关于原点对称.在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内它是单调增加的.当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$,在第三象限内接近于曲线 $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ (图 1-15).

双曲余弦的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,它是偶函数,它的图形通过点 $(0, 1)$ 且关于 y 轴对称.在区间 $(-\infty, 0)$ 内它是单调减少的.在区间 $(0, +\infty)$ 内它是单调增加的. $\operatorname{ch} 0 = 1$ 是这函数的最小值.当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$,在第二象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (图 1-15).

双曲正切的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,它是奇函数,它的图形通过原点且关于原点对称.在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内它是单调增加的.它的图形夹在水平直线 $y=1$ 及 $y=-1$ 之间,且当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近于直线 $y=1$,而在第三象限内接近于直线 $y=-1$ (图 1-16).

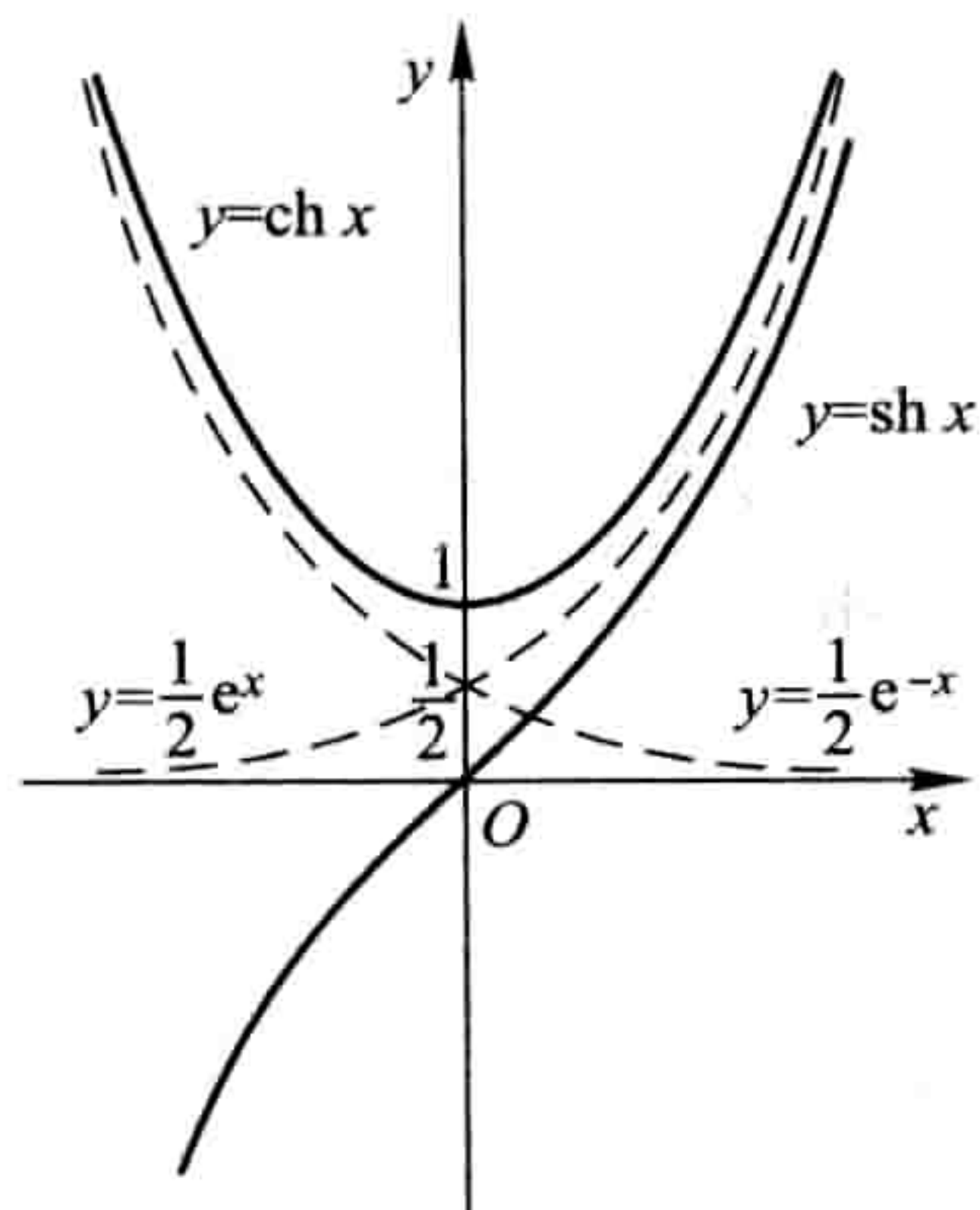


图 1-15

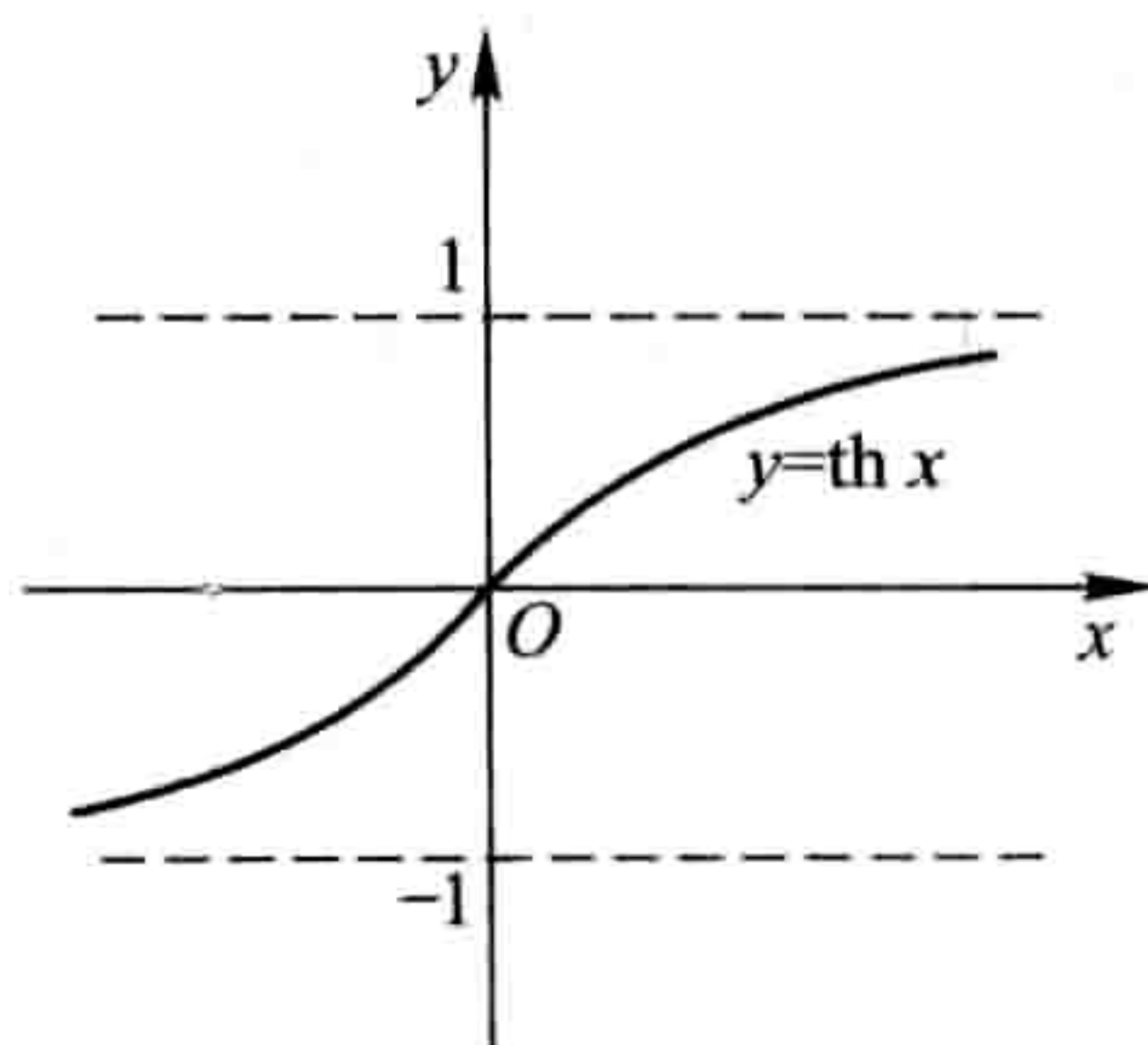


图 1-16

根据双曲函数的定义,可证下列四个公式:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad (1-3)$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad (1-4)$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad (1-5)$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \quad (1-6)$$

我们来证明公式(1-3),其他三个公式读者可自行证明.由定义,得

$$\begin{aligned} & \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y). \end{aligned}$$

由以上几个公式可以导出其他一些公式,例如:

在公式(1-6)中令 $x=y$,并注意到 $\operatorname{ch} 0 = 1$,得

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad (1-7)$$

在公式(1-3)中令 $x=y$,得

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad (1-8)$$

在公式(1-5)中令 $x=y$,得

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \quad (1-9)$$

以上关于双曲函数的公式(1-3)至(1-9)与三角函数的有关公式相类似,把它们对比可帮助记忆.

双曲函数 $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ ($x \geq 0$), $y = \operatorname{th} x$ 的反函数依次记为

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsh} x$,

反双曲余弦 $y = \operatorname{arch} x$,

反双曲正切 $y = \operatorname{arth} x$.

这些反双曲函数都可通过自然对数函数来表示,分别讨论如下:

先讨论双曲正弦 $y = \operatorname{sh} x$ 的反函数.由 $x = \operatorname{sh} y$,有

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

令 $u = e^y$,则由上式有

$$u^2 - 2xu - 1 = 0.$$

这是关于 u 的一个二次方程,它的根为

$$u = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

因 $u = e^y > 0$,故上式根号前应取正号,于是

$$u = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

由于 $y = \ln u$, 故得反双曲正弦

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

函数 $y = \operatorname{arsh} x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是奇函数, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内为单调增加. 由 $y = \operatorname{sh} x$ 的图形, 根据反函数的作图法, 可得 $y = \operatorname{arsh} x$ 的图形如图 1-17 所示.

下面讨论双曲余弦 $y = \operatorname{ch} x (x \geq 0)$ 的反函数.

由 $x = \operatorname{ch} y (y \geq 0)$, 有

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad y \geq 0.$$

由此得 $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$, 故

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

上式中 x 的值必须满足条件 $x \geq 1$, 而其中平方根前的符号由于 $y \geq 0$ 应取正. 故

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

上述双曲余弦 $y = \operatorname{ch} x (x \geq 0)$ 的反函数称为反双曲余弦的主值, 记作 $y = \operatorname{arch} x$, 即

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

这样规定的函数 $y = \operatorname{arch} x$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, 它在区间 $[1, +\infty)$ 上是单调增加的 (图 1-18).

类似地, 可得反双曲正切

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

这函数的定义域为开区间 $(-1, 1)$, 它在开区间 $(-1, 1)$ 内是单调增加的奇函数. 它的图形关于原点对称 (图 1-19).

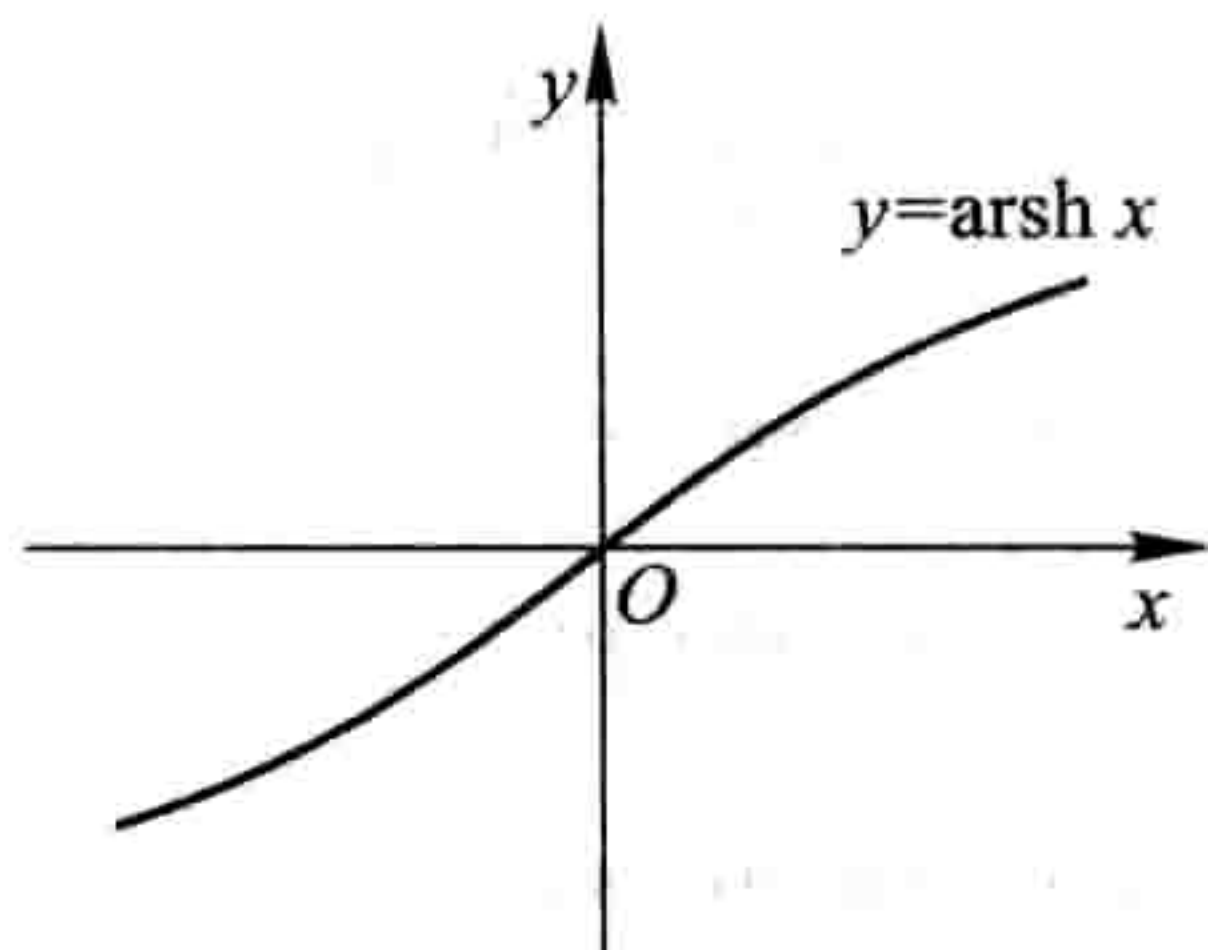


图 1-17

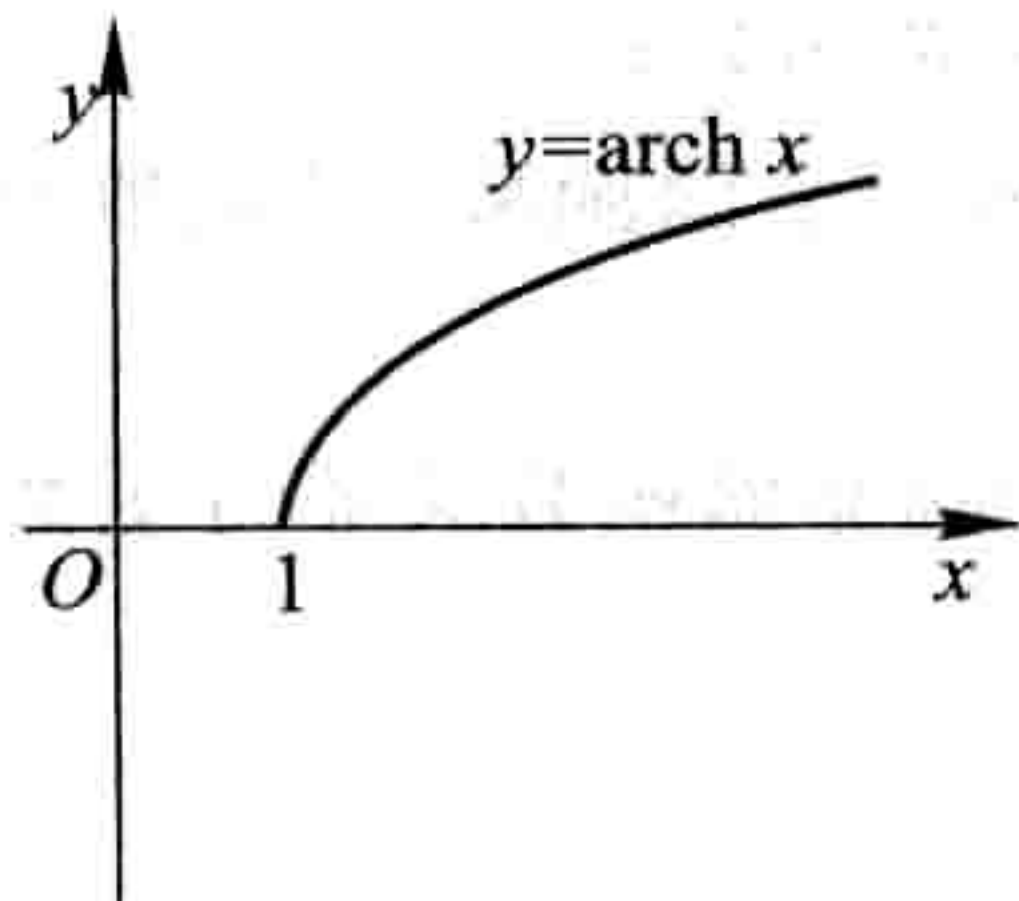


图 1-18

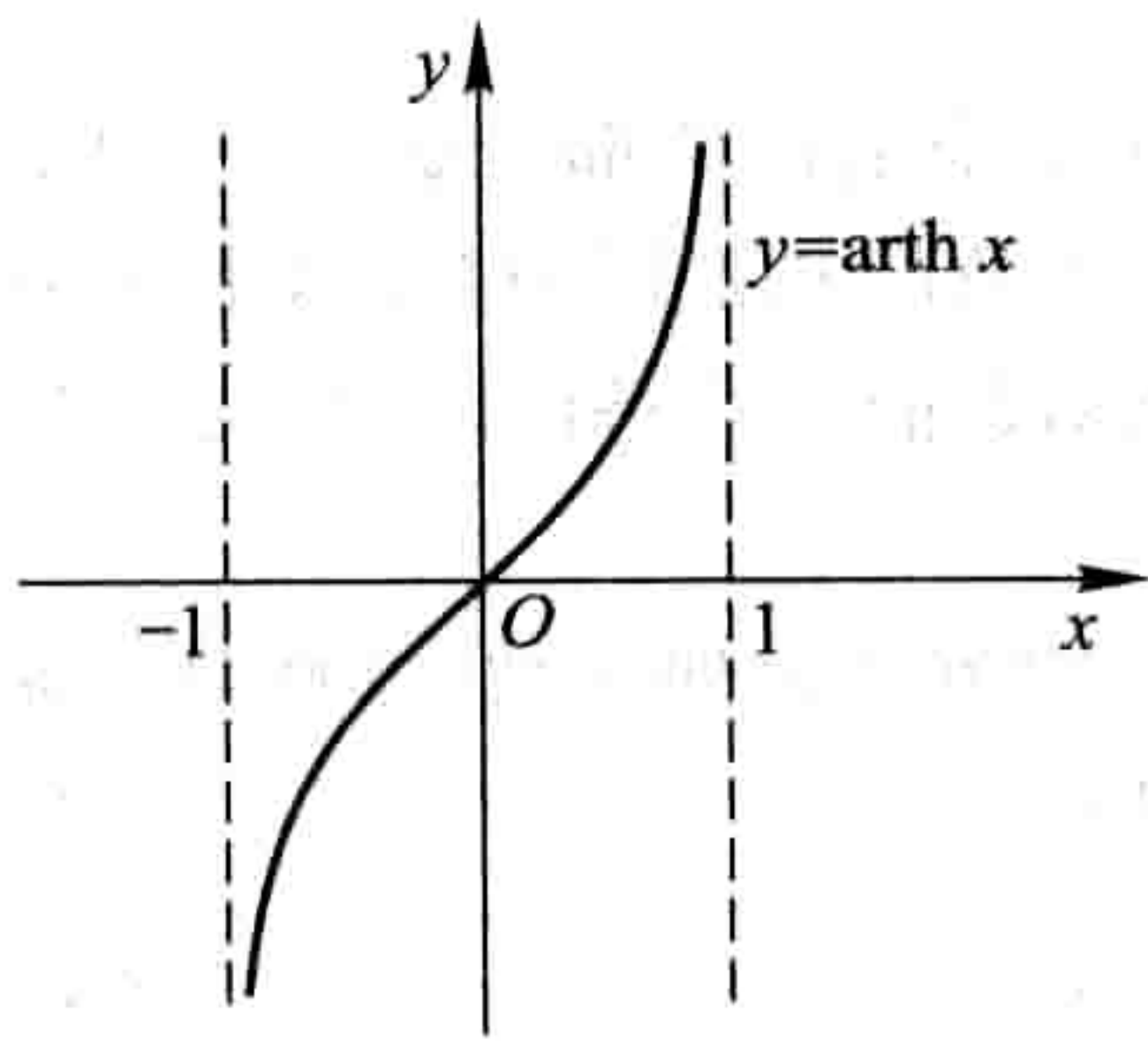


图 1-19

习 题 1-1

1. 求下列函数的自然定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x+1);$$

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x;$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1};$$

$$(4) f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

3. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, \quad (-\infty, 1);$$

$$(2) y = x + \ln x, \quad (0, +\infty).$$

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非偶函数又非奇函数?

$$(1) y = x^2(1-x^2);$$

$$(2) y = 3x^2 - x^3;$$

$$(3) y = \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$(4) y = x(x-1)(x+1);$$

$$(5) y = \sin x - \cos x + 1;$$

$$(6) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

8. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y = \cos(x-2)$; (2) $y = \cos 4x$;

(3) $y = 1 + \sin \pi x$; (4) $y = x \cos x$;

(5) $y = \sin^2 x$.

9. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$;

(2) $y = \frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$;

(4) $y = 2 \sin 3x \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y = 1 + \ln(x+2)$;

(6) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

11. 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}$;

(2) $y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}$;

(3) $y = \sqrt{u}, u = 1+x^2, x_1 = 1, x_2 = 2$;

(4) $y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1$;

(5) $y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;

(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a) \quad (a > 0)$;

(4) $f(x+a) + f(x-a) \quad (a > 0)$.

13. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 $\varphi = 40^\circ$ (图 1-20). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 L ($L = AB + BC + CD$) 与水深 h 之间的函数关系式, 并指明其定义域.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x+y=t \quad (t \geq 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积, 试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

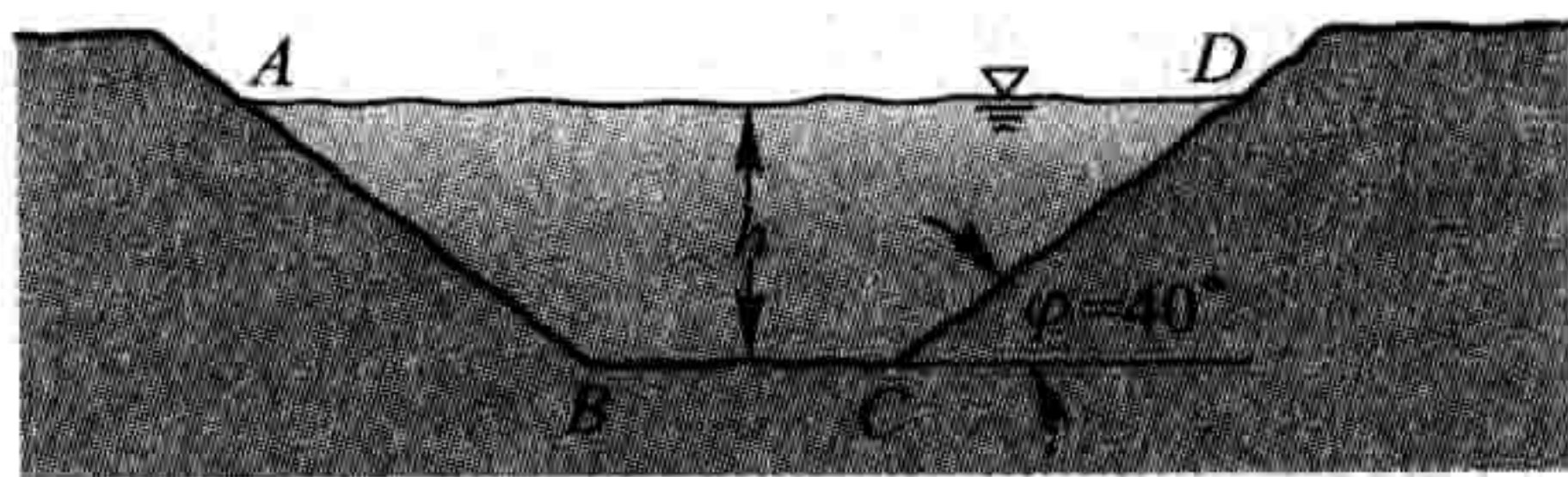


图 1-20

16. 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式, 并求

(1) 90°F 的等价摄氏温度和 -5°C 的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的? 如果存在,那么该温度值是多少?

17. 已知 $Rt\triangle ABC$ 中,直角边 AC 、 BC 的长度分别为 20、15,动点 P 从 C 出发,沿三角形边界按 $C \rightarrow B \rightarrow A$ 方向移动;动点 Q 从 C 出发,沿三角形边界按 $C \rightarrow A \rightarrow B$ 方向移动,移动到两动点相遇时为止,且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x , $\triangle CPQ$ 的面积为 y ,试求 y 与 x 之间的函数关系.

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据^①以及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

| 年份 | 人口数/百万 | 年增长率/% |
|------|--------|--------|
| 2008 | 6708.2 | 1.166 |
| 2009 | 6786.4 | 1.140 |
| 2010 | 6863.8 | 1.121 |
| 2011 | 6940.7 | 1.107 |
| 2012 | 7017.5 | 1.107 |
| 2013 | 7095.2 | |

第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

极限概念是在探求某些实际问题的精确解答过程中产生的. 例如,我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术,就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆,首先作内接正六边形,把它的面积记为 A_1 ;再作内接正十二边形,其面积记为 A_2 ;再作内接正二十四边形,其面积记为 A_3 ;如此下去,每次边数加倍,一般地,把内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n ($n \in \mathbf{N}_+$). 这样,就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots,$$

它们构成一列有次序的数. 当 n 越大,内接正多边形与圆的差别就越小,从而以

^① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.

A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 但是无论 n 取得如何大, 只要 n 取定了, A_n 终究只是多边形的面积, 而还不是圆的面积. 因此, 设想 n 无限增大 (记为 $n \rightarrow \infty$, 读作 n 趋于无穷大), 即内接正多边形的边数无限增加, 在这个过程中, 内接正多边形无限接近于圆, 同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值, 这个确定的数值就理解为圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数 (所谓数列) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限. 在圆面积问题中我们看到, 正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积.

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法, 已成为高等数学中的一种基本方法, 因此有必要作进一步的阐明.

先说明数列的概念. 如果按照某一法则, 对每个 $n \in \mathbf{N}_+$, 对应着一个确定的实数 x_n , 这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

就叫做数列, 简记为数列 $\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫做数列的项, 第 n 项 x_n 叫做数列的一般项 (或通项). 例如:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots; \\ & 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots; \\ & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots; \\ & 1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots; \\ & 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots \end{aligned}$$

都是数列的例子, 它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1}, \quad 2^n, \quad \frac{1}{2^n}, \quad (-1)^{n+1}, \quad \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}.$$

在几何上, 数列 $\{x_n\}$ 可看作数轴上的一个动点, 它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ (图1-21).

数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数

$$x_n = f(n), \quad n \in \mathbf{N}_+.$$

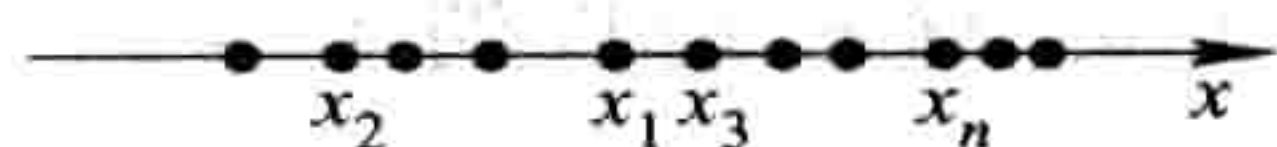


图 1-21

当自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \dots$ 一切正整数时, 对应的函数值就排列成数列 $\{x_n\}$.

对于我们要讨论的问题来说, 重要的是: 当 n 无限增大时 (即 $n \rightarrow \infty$ 时), 对应的 $x_n = f(n)$ 是否能无限接近于某个确定的数值? 如果能够的话, 这个数值等于多少?

我们对数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots \quad (2-1)$$

进行分析. 在这数列中,

$$x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

我们知道, 两个数 a 与 b 之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值 $|b-a|$ 来度量 (在数轴上 $|b-a|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离), $|b-a|$ 越小, a 与 b 就越接近.

就数列 (2-1) 来说, 因为

$$|x_n - 1| = \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

由此可见, 当 n 越来越大时, $\frac{1}{n}$ 越来越小, 从而 x_n 就越来越接近于 1. 因为只要 n

足够大, $|x_n - 1|$ 即 $\frac{1}{n}$ 可以小于任意给定的正数, 所以说, 当 n 无限增大时, x_n 无限

接近于 1. 例如, 给定 $\frac{1}{100}$, 欲使 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, 只要 $n > 100$, 即从第 101 项起, 都能使不等式

$$|x_n - 1| < \frac{1}{100}$$

成立. 同样地, 如果给定 $\frac{1}{10\,000}$, 那么从第 10\,001 项起, 都能使不等式

$$|x_n - 1| < \frac{1}{10\,000}$$

成立. 一般地, 不论给定的正数 ε 多么小, 总存在着一个正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

都成立. 这就是数列 $x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 当 $n \rightarrow \infty$ 时无限接近于 1 这件

事的实质. 这样的个数 1, 叫做数列 $x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限.

一般地, 有如下数列极限的定义:

定义 设 $\{x_n\}$ 为一数列, 如果存在常数 a , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立,那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果不存在这样的常数 a ,就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限,或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的,习惯上也说 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

上面定义中正数 ε 可以任意给定是很重要的,因为只有这样,不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思.此外还应注意:定义中的正整数 N 是与任意给定的正数 ε 有关的,它随着 ε 的给定而选定.

我们给“数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a ”一个几何解释:

将常数 a 及数列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来,再在数轴上作点 a 的 ε 邻域即开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (图 1-22).

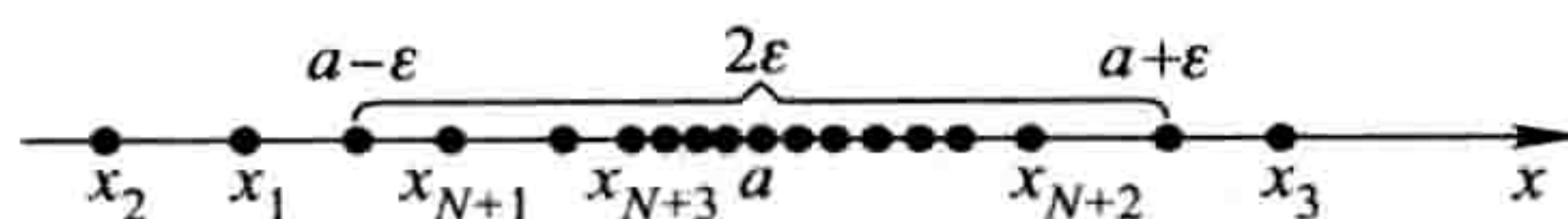


图 1-22

因不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

与不等式

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

等价,所以当 $n > N$ 时,所有的点 x_n 都落在开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内,而只有有限个(至多只有 N 个)在这区间以外.

为了表达方便,引入记号“ \forall ”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”,记号“ \exists ”表示“存在”.于是,“对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ”写成“ $\forall \varepsilon > 0$ ”,“存在正整数 N ”写成“ \exists 正整数 N ”,数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义可表达为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

数列极限的定义并未直接提供如何去求数列的极限,以后要讲极限的求法,而现在只先举几个说明极限概念的例子.

例 1 证明数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

的极限是 1.

$$\text{证 } |x_n - a| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n},$$

$\forall \varepsilon > 0$, 为了使 $|x_n - a| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

这个 $\frac{1}{\varepsilon}$ 是一个确定的实数, 而对于任何一个实数都有无穷多个大于它的正整数

存在, 所以, 任取一个大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数作为 N , 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1.$$

例 2 已知 $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限是 0.

$$\text{证 } |x_n - a| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$ 为了使 $|x_n - a| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

这个 $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 是一个确定的实数, 大于 $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 的正整数有无穷多个存在, 任取其中一个作为

N , 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0.$$

注意 在利用数列极限的定义来论证某个数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限时, 重要的是对于任意给定的正数 ε , 要能够指出定义中所说的这种正整数 N 确实存在. 如果知道 $|x_n - a|$ 小于某个量 (这个量与 n 存在函数关系), 那么当这个量小于 ε 时, $|x_n - a| < \varepsilon$ 当然也成立. 若令这个量小于 ε 能推出符合定义要求的正整数 N 必定存在, 就可采用这种方法. 例 2 便是这样做的. 当然, 在利用极限定义证明极限时, 如果能具体找出一个满足定义要求的正整数 N , 那么也就证明了这种 N 的

存在. 在例 2 中, 若设 $\varepsilon < 1$, 就可取 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right]$. 在以后的证明中, 多采取这种找出一个符合定义要求的正整数 N 的方法.

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列

$$1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$$

的极限是 0.

证 $\forall \varepsilon > 0$ (设 $\varepsilon < 1$), 因为

$$|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1},$$

要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要

$$|q|^{n-1} < \varepsilon.$$

取自然对数, 得 $(n-1) \ln |q| < \ln \varepsilon$. 因 $|q| < 1$, $\ln |q| < 0$, 故

$$n > 1 + \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}.$$

取 $N = \left[1 + \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^{n-1} - 0| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0.$$

二、收敛数列的性质

下面四个定理都是有关收敛数列的性质.

定理 1 (极限的唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

证 用反证法. 假设同时有 $x_n \rightarrow a$ 及 $x_n \rightarrow b$, 且 $a < b$. 取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故 \exists 正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2} \quad (2-2)$$

都成立. 同理, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 故 \exists 正整数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 不等式

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2} \quad (2-3)$$

都成立. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ (这式子表示 N 是 N_1 和 N_2 中较大的那个数), 则当 $n > N$ 时, (2-2) 式及 (2-3) 式会同时成立, 但由 (2-2) 式有 $x_n < \frac{a+b}{2}$, 由 (2-3) 式有 $x_n > \frac{a+b}{2}$, 这是不可能的. 这矛盾证明了本定理的断言.

例 4 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) 是发散的.

证 如果这数列收敛, 根据定理 1 它有唯一的极限, 设极限为 a , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 按数列极限的定义, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ 成立; 即当 $n > N$ 时, x_n 都在开区间 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 内. 但这是不可能的, 因为 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 无休止地一再重复取得 1 和 -1 这两个数, 而这两个数不可能同时属于长度为 1 的开区间 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 内. 因此这数列发散.

由函数有界性的概念可得以下的数列有界性概念.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在正数 M , 使得对于一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \leq M,$$

那么称数列 $\{x_n\}$ 是有界的; 如果这样的正数 M 不存在, 就说数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

例如, 数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) 是有界的, 因为可取 $M=1$, 而使

$$\left| \frac{n}{n+1} \right| \leq 1$$

对于一切正整数 n 都成立.

数列 $x_n = 2^n$ ($n=1, 2, \dots$) 是无界的, 因为当 n 无限增加时, 2^n 可超过任何正数.

数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在某个闭区间 $[-M, M]$ 上.

定理 2 (收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

证 因为数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 根据数列极限的定义, 对于 $\varepsilon = 1$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < 1$$

都成立. 于是, 当 $n > N$ 时,

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$, 那么数列 $\{x_n\}$ 中的一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \leq M.$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据上述定理, 如果数列 $\{x_n\}$ 无界, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定发散. 但是, 如果数列 $\{x_n\}$ 有界, 却不能断定数列 $\{x_n\}$ 一定收敛, 例如数列

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

有界, 但例 4 证明了这数列是发散的. 所以数列有界是数列收敛的必要条件, 但

不是充分条件.

定理 3 (收敛数列的保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

证 就 $a > 0$ 的情形证明. 由数列极限的定义, 对 $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

从而

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

推论 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

证 设数列 $\{x_n\}$ 从第 N_1 项起, 即当 $n > N_1$ 时有 $x_n \geq 0$. 现在用反证法证明. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < 0$, 则由定理 3 知, \exists 正整数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 有 $x_n < 0$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 按假定有 $x_n \geq 0$, 按定理 3 有 $x_n < 0$, 这引起矛盾. 所以必有 $a \geq 0$.

数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \leq 0$ 的情形, 可以类似地证明.

最后, 介绍子数列的概念以及关于收敛数列与其子数列间关系的一个定理.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序, 这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列 (或子列).

设在数列 $\{x_n\}$ 中, 第一次抽取 x_{n_1} , 第二次在 x_{n_1} 后抽取 x_{n_2} , 第三次在 x_{n_2} 后抽取 x_{n_3} , \dots , 这样无休止地抽取下去, 得到一个数列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots,$$

这个数列 $\{x_{n_k}\}$ 就是数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列.

注意 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中, 一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项. 显然, $n_k \geq k$.

*** 定理 4 (收敛数列与其子数列间的关系)** 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a .

证 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故 $\forall \varepsilon > 0$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立.

取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时, $n_k > n_K = n_N \geq N$. 于是 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. 证毕.

由定理 4 可知,如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限,那么数列 $\{x_n\}$ 是发散的. 例如,例 4 中的数列

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

的子数列 $\{x_{2k-1}\}$ 收敛于 1, 而子数列 $\{x_{2k}\}$ 收敛于 -1, 因此数列 $x_n = (-1)^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 是发散的. 同时这个例子也说明, 一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

习 题 1-2

1. 下列各题中, 哪些数列收敛, 哪些数列发散? 对收敛数列, 通过观察 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 写出它们的极限:

(1) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\};$

(2) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\};$

(3) $\left\{2 + \frac{1}{n^2}\right\};$

(4) $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\};$

(5) $\{n(-1)^n\};$

(6) $\left\{\frac{2^n-1}{3^n}\right\};$

(7) $\left\{n - \frac{1}{n}\right\};$

(8) $\left\{[(-1)^n + 1] \frac{n+1}{n}\right\}.$

2. (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件?

(2) 无界数列是否一定发散?

(3) 有界数列是否一定收敛?

3. 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a 的定义, 哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 试说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $x_n - a < \varepsilon$ 成立;

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有无穷多项 x_n , 使不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立;

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < c\varepsilon$ 成立, 其中 c 为某个正常数;

(4) 对于任意给定的 $m \in \mathbf{N}_+$, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \frac{1}{m}$ 成立.

* 4. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$. 问 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$ 求出 N , 使当 $n > N$ 时, x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε . 当 $\varepsilon = 0.001$ 时, 求出数 N .

* 5. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0;$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1;$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0.999 \cdots 9}_{n \text{ 个}} = 1.$

* 6. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

* 7. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

* 8. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明: $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

第三节 函数的极限

一、函数极限的定义

因为数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为 n 的函数: $x_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}_+$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a , 就是: 当自变量 n 取正整数而无限增大 (即 $n \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值 $f(n)$ 无限接近于确定的数 a . 把数列极限概念中的函数为 $f(n)$ 而自变量的变化过程为 $n \rightarrow \infty$ 等特殊性撇开, 这样可以引出函数极限的一般概念: 在自变量的某个变化过程中, 如果对应的函数值无限接近于某个确定的数, 那么这个确定的数就叫做在这一变化过程中函数的极限. 这个极限是与自变量的变化过程密切相关的, 由于自变量的变化过程不同, 函数的极限就表现为不同的形式. 数列极限看作函数 $f(n)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 这里自变量的变化过程是 $n \rightarrow \infty$. 下面讲述自变量的变化过程为其他情形时函数 $f(x)$ 的极限, 主要研究两种情形:

(1) 自变量 x 任意地接近于有限值 x_0 或者说趋于有限值 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0$) 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

(2) 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大即趋于无穷大 (记作 $x \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形.

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

现在考虑自变量 x 的变化过程为 $x \rightarrow x_0$. 如果在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A , 那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限. 当然, 这里我们首先假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域^①内是有定义的.

在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A , 就是 $|f(x) - A|$ 能任意小. 如数列极限概念所述, $|f(x) - A|$ 能任意小这件事可以用 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 来表达, 其中 ε 是任意给定的正数. 因为函数值 $f(x)$ 无限接近于 A 是在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中实现的, 所以对于任意给定的正数 ε , 只要求充分接近于 x_0 的 x 所对应的函数值

① 以 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0)$; 在 $U(x_0)$ 中去掉中心 x_0 后, 称为点 x_0 的去心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0)$.

$f(x)$ 满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$; 而充分接近于 x_0 的 x 可表达为 $0 < |x - x_0| < \delta$, 其中 δ 是某个正数. 从几何上看, 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x 的全体, 就是点 x_0 的去心 δ 邻域^①, 而邻域半径 δ 则体现了 x 接近 x_0 的程度.

通过以上分析, 我们给出 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限的定义如下:

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow x_0).$$

我们指出, 定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$, 所以 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限, 与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系.

定义 1 可以简单地表述为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限为 A 的几何解释如下: 任意给定一正数 ε , 作平行于 x 轴的两条直线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$, 界于这两条直线之间是一横条区域. 根据定义, 对于给定的 ε , 存在着点 x_0 的一个 δ 邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 当 $y = f(x)$ 的图形上的点的横坐标 x 在邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内, 但 $x \neq x_0$ 时, 这些点的纵坐标 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

或

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

亦即这些点落在上面所作的横条区域内 (图 1-23).

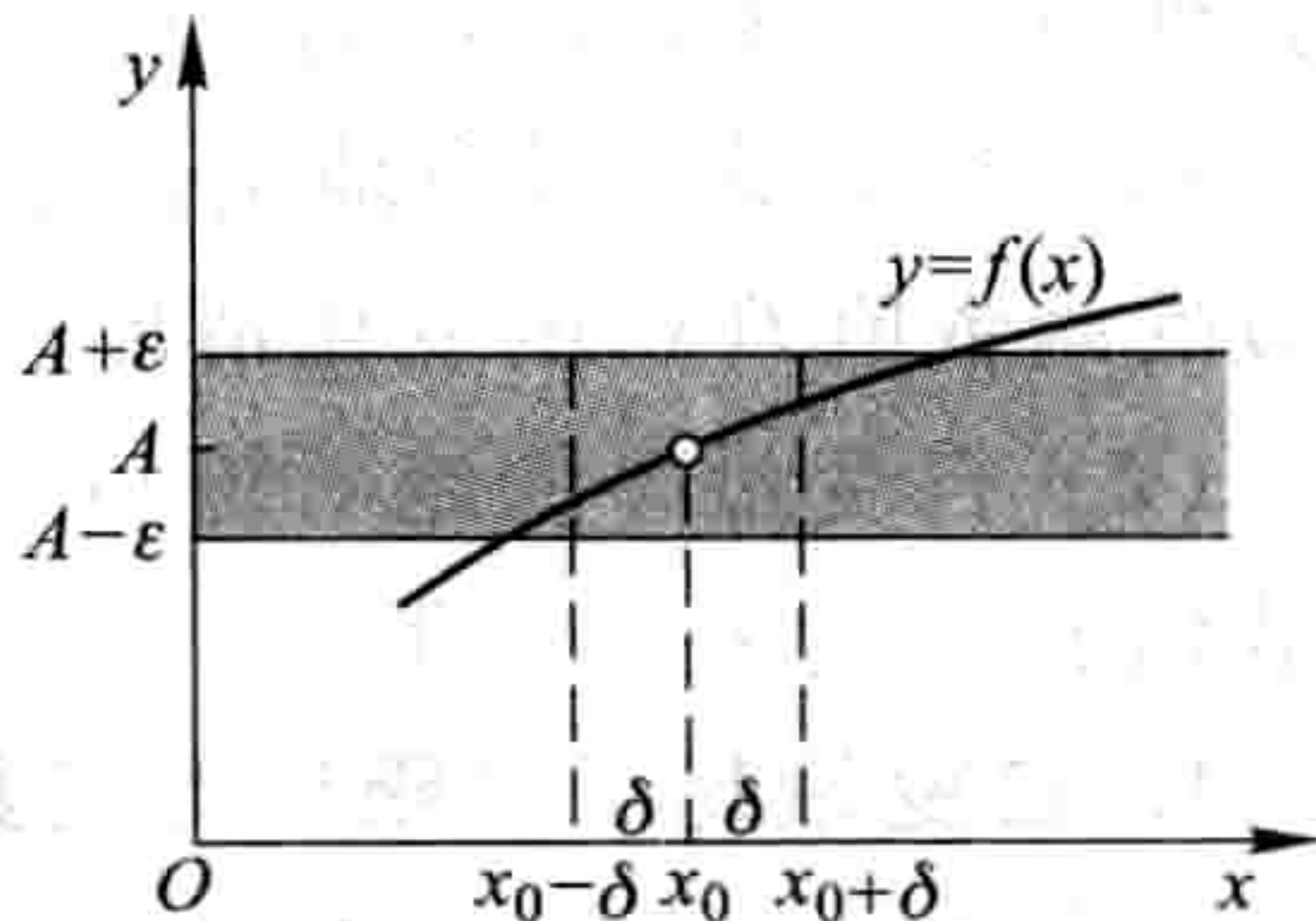


图 1-23

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, 此处 c 为一常数.

证 这里 $|f(x) - A| = |c - c| = 0$, 因此

$\forall \varepsilon > 0$, 可任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 能使不等式

$$|f(x) - A| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

成立. 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

^① 设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 点 x_0 的去心 δ 邻域记作 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, δ 称为邻域半径.

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证 这里 $|f(x) - A| = |x - x_0|$, 因此 $\forall \varepsilon > 0$, 总可取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ 时, 能使不等式 $|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$ 成立. 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1$.

证 由于

$$|f(x) - A| = |(2x - 1) - 1| = 2|x - 1|,$$

为了使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以, $\forall \varepsilon > 0$, 可取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 则当 x 适合不等式

$$0 < |x - 1| < \delta$$

时, 对应的函数值 $f(x)$ 就满足不等式

$$|f(x) - 1| = |(2x - 1) - 1| < \varepsilon.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1.$$

例 4 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

证 这里, 函数在点 $x = 1$ 是没有定义的, 但是函数当 $x \rightarrow 1$ 时的极限存在或不存在与它并无关系. 事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 将不等式

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

约去非零因子 $x - 1$ 后, 就化为

$$|x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon,$$

因此, 只要取 $\delta = \varepsilon$, 那么当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 就有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

例 5 证明: 当 $x_0 > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 因为

$$|f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0|,$$

要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0} \varepsilon$ 且 $x \geq 0$, 而 $x \geq 0$ 可用 $|x - x_0| \leq x_0$ 保证, 因此取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0} \varepsilon\}$ (这式子表示, δ 是 x_0 和 $\sqrt{x_0} \varepsilon$ 两个数中较小的那个数), 则当 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 \sqrt{x} 就满足不等式

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

上述 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限概念中, x 是既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0 的. 但有时只能或只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^-$) 的情形, 或 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^+$) 的情形. 在 $x \rightarrow x_0^-$ 的情形, x 在 x_0 的左侧, $x < x_0$. 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

类似地, 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 < x < x_0 + \delta$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

根据 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义以及左极限和右极限的定义, 容易证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在并且相等, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+).$$

因此, 即使 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在, 若不相等, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 也不存在.

例 6 设

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$$

证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

证 仿例 3 可证当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的左极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1,$$

而右极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1,$$

因为左极限和右极限存在但不相等, 所以

$$19. \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1+\sqrt[3]{1+x}| + C.$$

$$20. \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

$$21. x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{1+x}+1) + C.$$

$$22. 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) + C.$$

$$23. \ln \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \right| + 2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C \quad \text{或} \quad \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \arcsin x + C.$$

$$24. -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

习题 4-5 (第 221 页)

$$1. \frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-9}| + C.$$

$$2. \frac{1}{2}\arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

$$3. \ln[(x-2)+\sqrt{5-4x+x^2}] + C.$$

$$4. \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9} + \frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9}) + C.$$

$$5. \frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}| + C.$$

$$6. \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

$$7. \left(\frac{x^2}{2}-1\right)\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2} + C.$$

$$8. \frac{x}{18(9+x^2)} + \frac{1}{54}\arctan \frac{x}{3} + C.$$

$$9. -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$10. -\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x + 3\cos 3x) + C.$$

$$11. -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$12. x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$$

$$13. -\frac{1}{x} - \ln\left|\frac{1-x}{x}\right| + C.$$

$$14. 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C.$$

$$15. \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

$$16. \arccos \frac{1}{|x|} + C.$$

$$17. \frac{1}{9} \left(\ln|2+3x| + \frac{2}{2+3x} \right) + C.$$

$$18. \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5\cos^3 x \sin x}{24} + \frac{5}{32}(2x + \sin 2x) + C.$$

$$19. \frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-2}| + C.$$

$$20. \frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - \sqrt{7}} \right| + C.$$

$$21. \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2\arctan\sqrt{2x-1} + C.$$

$$22. \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$23. \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}} \right| + C.$$

$$24. -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

$$25. \frac{1}{12}x^3 - \frac{25}{16}x + \frac{125}{32}\arctan \frac{2x}{5} + C.$$

总习题四(第 222 页)

$$1. (1) \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C; \quad (2) \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan \frac{x-3}{2} + C.$$

$$2. (1) (B); \quad (2) (C).$$

$$3. x^2 \cos x - 4x \sin x - 6 \cos x + C.$$

$$4. (1) \frac{1}{2} \ln \frac{|e^x-1|}{e^x+1} + C;$$

$$(2) \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} + C;$$

$$(3) \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{a^3+x^3}{a^3-x^3} \right| + C;$$

- (4) $\ln|x+\sin x|+C$;
- (5) $\ln x(\ln \ln x-1)+C$;
- (6) $\frac{1}{2}\arctan \sin^2 x+C$;
- (7) $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$;
- (8) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 4x-\cos 2x\right)+C$;
- (9) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$;
- (10) $a\arcsin \frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$;
- (11) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(x+1)}\right|+C$;
- (12) $\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$;
- (13) $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+C$;
- (14) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$;
- (15) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;
- (16) $\frac{1}{3a^4}\left[\frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\right]+C$;
- (17) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$;
- (18) $(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C$;
- (19) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$;
- (20) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$;
- (21) $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$;
- (22) $\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right|-\left|\cot\frac{x}{2}\right|\right)+C$;
- (23) $\frac{x^4}{8(1+x^8)}+\frac{1}{8}\arctan x^4+C$;

$$(24) \frac{x^4}{4} + \ln \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^4+2} + C;$$

$$(25) \frac{1}{32} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + C;$$

$$(26) \frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + x + C \text{ 或 } \sec x + x - \tan x + C;$$

$$(27) x \tan \frac{x}{2} + C;$$

$$(28) e^{\sin x} (x - \sec x) + C;$$

$$(29) \ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C;$$

$$(30) \frac{1}{1+e^x} + \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C;$$

$$(31) \arctan(e^x - e^{-x}) + C;$$

$$(32) \frac{x e^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x) + C;$$

$$(33) x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C;$$

$$(34) \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$$

$$(35) \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + C;$$

$$(36) -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (x^2+2) \arccos x - \frac{1}{9} x (x^2+6) + C;$$

$$(37) -\ln |\csc x + 1| + C;$$

$$(38) \ln |\tan x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + C;$$

$$(39) \frac{1}{3} \ln(2+\cos x) - \frac{1}{2} \ln(1+\cos x) + \frac{1}{6} \ln(1-\cos x) + C;$$

$$(40) \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan(x/2) - 1 + \sqrt{2}}{\tan(x/2) - 1 - \sqrt{2}} \right| + C.$$

第 五 章

习题 5-1 (第 236 页)

* 1. $\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a.$

* 2. (1) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2);$ (2) $e - 1.$

3. 略.

4. (1) $\frac{1}{2}t^2;$ (2) 21; (3) $\frac{5}{2};$ (4) $\frac{9\pi}{2}.$

5. $a = 0, b = 1.$

6. $\ln 2 \approx 0.693 1.$

7. (1) 6; (2) -2; (3) -3; (4) 5.

8. 88.2 kN.

9. 略.

10. (1) $6 \leq \int_1^4 (x^2 + 1) dx \leq 51;$ (2) $\pi \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx \leq 2\pi;$

(3) $\frac{\pi}{9} \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2}{3}\pi;$ (4) $-2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-x} dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}.$

11. 提示: 设 $\int_0^1 f(x) dx = a,$ 有 $\int_0^1 [f(x) - a]^2 dx \geq 0.$

12. 略.

13. (1) $\int_0^1 x^2 dx$ 较大; (2) $\int_1^2 x^3 dx$ 较大; (3) $\int_1^2 \ln x dx$ 较大;

(4) $\int_0^1 x dx$ 较大; (5) $\int_0^1 e^x dx$ 较大.

习题 5-2 (第 244 页)

1. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2. $\cot t.$

3. $\frac{\cos x}{\sin x - 1}.$

4. 当 $x = 0$ 时.

5. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$; (2) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$;

(3) $(\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x)$.

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. (C).

8. (1) $a\left(a^2 - \frac{a}{2} + 1\right)$; (2) $\frac{21}{8}$; (3) $\frac{271}{6}$; (4) $\frac{\pi}{6}$; (5) $\frac{\pi}{3}$;

(6) $\frac{\pi}{3a}$; (7) $\frac{\pi}{6}$; (8) $\frac{\pi}{4} + 1$; (9) -1 ; (10) $1 - \frac{\pi}{4}$; (11) 4 ;

(12) $\frac{8}{3}$.

9. 略.

10. 提示:应用三角学中的积化和差公式.

11. (1) 1 ; (2) 2 .

12. $\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3, & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}, & x \in [1, 2], \end{cases}$ $\Phi(x)$ 在 $(0, 2)$ 内连续.

13. $\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$

14. 略.

15. 1 .

16. 1 .

习题 5-3 (第 254 页)

1. (1) 0 ; (2) $\frac{51}{512}$; (3) $\frac{1}{4}$; (4) $\pi - \frac{4}{3}$;

(5) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$; (6) $\frac{\pi}{2}$; (7) $\sqrt{2}(\pi + 2)$; (8) $1 - \frac{\pi}{4}$;

(9) $\frac{\pi}{16}a^4$; (10) $\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$; (11) $\frac{1}{6}$; (12) $2 + 2\ln \frac{2}{3}$;

(13) $1 - 2\ln 2$; (14) $(\sqrt{3} - 1)a$; (15) $1 - e^{-\frac{1}{2}}$; (16) $2(\sqrt{3} - 1)$;

$$(17) \frac{\pi}{2}; \quad (18) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \quad (19) 0; \quad (20) \frac{3}{2}\pi; \quad (21) \frac{\pi^3}{324};$$

$$(22) 0; \quad (23) \frac{2}{3}; \quad (24) \frac{4}{3}; \quad (25) 2\sqrt{2}; \quad (26) 4.$$

2—6. 略.

$$7. (1) 1 - \frac{2}{e}; \quad (2) \frac{1}{4}(e^2 + 1); \quad (3) -\frac{2\pi}{\omega^2}; \quad (4) \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2};$$

$$(5) 4(2\ln 2 - 1); \quad (6) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}; \quad (7) \frac{1}{5}(e^\pi - 2); \quad (8) 2 - \frac{3}{4\ln 2};$$

$$(9) \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}; \quad (10) \frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1); \quad (11) 2\left(1 - \frac{1}{e}\right);$$

$$(12) \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \text{ 为奇数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m+1)}, & m \text{ 为偶数;} \end{cases}$$

$$(13) J_m = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot m} \cdot \frac{\pi^2}{2}, & m \text{ 为偶数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot m} \pi, & m \text{ 为大于 1 的奇数,} \end{cases}$$

$$J_1 = \pi.$$

习题 5-4 (第 262 页)

$$1. (1) \frac{1}{3}; \quad (2) \text{发散}; \quad (3) \frac{1}{a}; \quad (4) \frac{\pi}{4}; \quad (5) \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$(6) \pi; \quad (7) 1; \quad (8) \text{发散}; \quad (9) \frac{8}{3}; \quad (10) \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \text{当 } k > 1 \text{ 时收敛于 } \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}; \text{当 } k \leq 1 \text{ 时发散; 当 } k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2} \text{ 时取得}$$

最小值.

$$3. n!.$$

$$4. -1.$$

* 习题 5-5 (第 270 页)

$$1. (1) \text{收敛}; \quad (2) \text{收敛}; \quad (3) \text{收敛}; \quad (4) \text{发散}; \\ (5) \text{收敛}; \quad (6) \text{发散}; \quad (7) \text{收敛}; \quad (8) \text{收敛}.$$

2. 略.

3. (1) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), n>0$; (2) $\Gamma(p+1), p>-1$;

(3) $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), \frac{m+1}{n}>0$.

4—5. 略.

总习题五(第 270 页)

1. (1) 必要, 充分; (2) 充分必要; * (3) 收敛; (4) 不一定;
(5) $xf(-x^2)$.

2. (1) (B); (2) (A).

3. (1) 表示曲线 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ 和直线 $x=a$ 、 $x=b$ 所围图形的面积;
(2) 表示曲线 $y=f(x)$ 和直线 $y=0$ 、 $x=a$ 、 $x=b$ 所围曲边梯形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积;

(3) 表示 $[t_1, t_2]$ 这段时间内流入水池的水量;

(4) 表示 $[T_1, T_2]$ 这段时期内该国人口增加的数量;

(5) 表示该公司经营该种产品自第 1001 件至第 2000 件所得利润.

* 4. (1) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; (2) $\frac{1}{p+1}$.

5. (1) $af(a)$; (2) $\frac{\pi^2}{4}$.

6—7. 略.

8. 提示: $1-x^p < \frac{1}{1+x^p} < 1$.

9. 提示: (1) 对任意实数 t ,

$$\int_a^b f^2(x) dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g^2(x) dx \geq 0;$$

(2) 利用柯西-施瓦茨不等式.

10. 提示: 利用柯西-施瓦茨不等式.

11. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{\pi}{8}\ln 2$, 提示: 令 $x = \frac{\pi}{4} - u$; (3) $\frac{\pi}{4}$; (4) $2(\sqrt{2}-1)$;

(5) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; (6) $\frac{\pi}{2}$; (7) $\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$; (8) $e^{-2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^{-1}\right)$;

$$(9) \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}); \quad (10) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & \text{当 } x < -1, \\ x, & \text{当 } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

12—13. 略.

14. $1 + \ln(1 + e^{-1})$.

15—*16. 略.

*17. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛, 提示: 先分部积分, 再判别;
(4) 收敛.

*18. (1) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$, 提示: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$;

(2) $\frac{\pi}{4}$, 提示: 令 $x = \frac{1}{t}$.

第 六 章

习题 6-2 (第 286 页)

1. (1) $\frac{1}{6}$; (2) 1; (3) $\frac{32}{3}$; (4) $\frac{32}{3}$.

2. (1) $2\pi + \frac{4}{3}, 6\pi - \frac{4}{3}$; (2) $\frac{3}{2} - \ln 2$; (3) $e + \frac{1}{e} - 2$; (4) $b - a$.

3. $\frac{9}{4}$.

4. $\frac{16}{3}p^2$.

5. (1) πa^2 ; (2) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (3) $18\pi a^2$.

6. $3\pi a^2$.

7. $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi} - e^{-2\pi})$.

8. (1) $\frac{5}{4}\pi$; (2) $\frac{\pi}{6} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{e}{2}$.

10. $\frac{8}{3}a^2$.

11. 当 $p = -\frac{4}{5}$ 、 $q = 3$ 时, A 达到最大值 $\frac{225}{32}$.

12. $\frac{128}{7}\pi, \frac{64}{5}\pi$.

13. $\frac{32}{105}\pi a^3$.

14. 略.

15. (1) $\frac{3}{10}\pi$; (2) $\frac{\pi^3}{4} - 2\pi$; (3) $160\pi^2$; (4) $7\pi^2 a^3$.

16. $2\pi^2 a^2 b$.

17. $\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA]$.

18. $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$.

19. 略.

20. $2\pi^2$.

21. (1) $V_1 = \frac{4\pi}{5}(32-a^5), V_2 = \pi a^4$;

(2) 当 $a = 1$ 时, $V_1 + V_2$ 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

22. $1 + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}$.

23. $\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

24. $\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2}\ln \frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

25. $6a$.

26. $\frac{a}{2}\pi^2$.

27. $\left(\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a, \frac{3}{2}a\right)$.

28. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi} - 1)$.

29. $\ln \frac{3}{2} + \frac{5}{12}$.

30. $8a$.

习题 6-3 (第 293 页)

1. $0.18k \text{ J}$.
2. $800\pi \ln 2 \text{ J}$.
3. (1) 略; (2) $9.72 \times 10^5 \text{ kJ}$.
4. $\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$ (其中 k 为比例常数).
5. $(\sqrt{2}-1) \text{ cm}$.
6. $57\,697.5 \text{ kJ}$.
7. 205.8 kN .
8. 17.3 kN .
9. $14\,373 \text{ kN}$.
10. 1.65 N .
11. 取 y 轴通过细直棒, 则

$$F_y = Gm\mu \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}} \right), F_z = -\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}}.$$

12. 引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R} \sin \frac{\varphi}{2}$, 方向为 M 指向圆弧的中点.

总习题六 (第 294 页)

1. (1) $\frac{37}{12}$; (2) $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$.
2. (1) (A); (2) (D).
3. $\frac{5}{4} \text{ m}$.
4. $\frac{\pi-1}{4}a^2$.
5. $x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y}{2}}$ 或 $y = \frac{32}{9}x^2$ ($x \geq 0$).
6. $a = -\frac{5}{3}, b = 2, c = 0$.
7. (1) $\frac{1}{2}e-1$; (2) $\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$.

8. $\frac{512}{7}\pi$.

9. $4\pi^2$.

10. $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

11. $\frac{4}{3}\pi r^4 g$.

12. $\frac{1}{2}\rho g a b(2h + b \sin \alpha)$.

13. $F_x = \frac{3}{5}Ga^2, F_y = \frac{3}{5}Ga^2$.

14. (1) $\sqrt{1+r+r^2} a \text{ m}$; (2) $\frac{1}{\sqrt{1-r}} a \text{ m}$.

第 七 章

习题 7-1 (第 301 页)

1. (1) 一阶; (2) 二阶; (3) 三阶; (4) 一阶; (5) 二阶; (6) 一阶.

2. (1) 是; (2) 是; (3) 不是; (4) 是.

3. 略.

4. (1) $y^2 - x^2 = 25$; (2) $y = xe^{2x}$; (3) $y = -\cos x$.5. (1) $y' = x^2$; (2) $yy' + 2x = 0$.6. $\frac{dp}{dT} = k \frac{p}{T^2}$, k 为比例系数.

7. 6 小时.

习题 7-2 (第 308 页)

1. (1) $y = e^{Cx}$; (2) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + C$;

(3) $\arcsin y = \arcsin x + C$; (4) $\frac{1}{y} = a \ln |x+a-1| + C$;

(5) $\tan x \tan y = C$; (6) $10^{-y} + 10^x = C$;

(7) $(e^x + 1)(e^y - 1) = C$; (8) $\sin x \sin y = C$;

(9) $3x^4 + 4(y+1)^3 = C$; (10) $(x-4)y^4 = Cx$.

2. (1) $e^y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$; (2) $\cos x - \sqrt{2} \cos y = 0$;

(3) $\ln y = \tan \frac{x}{2}$; (4) $(1 + e^x) \sec y = 2\sqrt{2}$; (5) $x^2 y = 4$.

3. $t = -0.0305 h^{\frac{5}{2}} + 9.64$, 水流完所需的时间约为 10 s.

4. $v = \sqrt{72500} \approx 269.3$ (cm/s).

5. $R = R_0 e^{-0.000433t}$, 时间以年为单位.

6. $xy = 6$.

7. 取 O 为原点, 河岸朝顺水方向为 x 轴, y 轴指向对岸, 则所求航线为

$$x = \frac{k}{a} \left(\frac{h}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right).$$

习题 7-3 (第314页)

1. (1) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$ ($x > 0$), $y - \sqrt{y^2 - x^2} = C$ ($x < 0$);

(2) $\ln \frac{y}{x} = Cx + 1$;

(3) $y^2 = x^2(2\ln|x| + C)$; (4) $x^3 - 2y^3 = Cx$;

(5) $x^2 = C \sin^3 \frac{y}{x}$; (6) $x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$.

2. (1) $y^3 = y^2 - x^2$; (2) $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$; (3) $\frac{x+y}{x^2+y^2} = 1$.

3. $y = x(1 - 4\ln x)$.

* 4. (1) $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C$;

(2) $\ln [4y^2 + (x-1)^2] + \arctan \frac{2y}{x-1} = C$;

(3) $(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = C$;

(4) $x + 3y + 2\ln|x+y-2| = C$.

习题 7-4 (第320页)

1. (1) $y = e^{-x}(x+C)$; (2) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{C}{x}$;

(3) $y = (x+C)e^{-\sin x}$; (4) $y = C \cos x - 2 \cos^2 x$;

(5) $y = \frac{\sin x + C}{x^2 - 1}$; (6) $3\rho = 2 + Ce^{-3\theta}$;

(7) $y = 2 + Ce^{-x^2}$; (8) $2x \ln y = \ln^2 y + C$;

(9) $y = (x-2)^3 + C(x-2)$; (10) $x = Cy^3 + \frac{1}{2}y^2$.

2. (1) $y = \frac{x}{\cos x}$; (2) $y = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}$;
 (3) $y \sin x + 5e^{\cos x} = 1$; (4) $y = \frac{2}{3}(4 - e^{-3x})$;
 (5) $2y = x^3 - x^3 e^{x^2-1}$.
 3. $y = 2(e^x - x - 1)$.
 4. $v = \frac{k_1}{k_2}t - \frac{k_1 m}{k_2^2}(1 - e^{-\frac{k_2}{m}t})$.
 5. $i = e^{-5t} + \sqrt{2} \sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right)$ A.
 6. $\ln |x| + \int \frac{g(v) dv}{v[f(v) - g(v)]} = C$, 求出后将 $v = xy$ 代回, 得通解.
 7. (1) $y = -x + \tan(x + C)$; (2) $(x - y)^2 = -2x + C$;
 (3) $y = \frac{1}{x}e^{Cx}$; (4) $y = 1 - \sin x - \frac{1}{x + C}$;
 (5) $2x^2 y^2 \ln |y| - 2xy - 1 = Cx^2 y^2$.
 * 8. (1) $\frac{1}{y} = -\sin x + Ce^x$; (2) $\frac{3}{2}x^2 + \ln \left|1 + \frac{3}{y}\right| = C$;
 (3) $\frac{1}{y^3} = Ce^x - 1 - 2x$; (4) $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$;
 (5) $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3 \left(\frac{2}{3} + \ln x\right) + C$.

习题 7-5 (第328页)

1. (1) $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1 x + C_2$;
 (2) $y = (x - 3)e^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$;
 (3) $y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2$;
 (4) $y = -\ln |\cos(x + C_1)| + C_2$;
 (5) $y = C_1 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2$;
 (6) $y = C_1 \ln |x| + C_2$;
 (7) $y^3 = C_1 x + C_2$;
 (8) $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$;
 (9) $x + C_2 = \pm \left[\frac{2}{3}(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1 \sqrt{y} + C_1 \right]$;
 (10) $y = \arcsin(C_2 e^x) + C_1$.

2. (1) $y = \sqrt{2x-x^2}$; (2) $y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1)$;
 (3) $y = \frac{1}{a^3} e^{ax} - \frac{e^a}{2a} x^2 + \frac{e^a}{a^2} (a-1)x + \frac{e^a}{2a^3} (2a-a^2-2)$;
 (4) $y = \ln \sec x$; (5) $y = \left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$; (6) $y = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2$.
 3. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + 1$.
 4. $s = \frac{mg}{c} \left(t + \frac{m}{c} e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{m}{c} \right)$.

习题 7-6 (第337页)

1. (1) 线性无关; (2) 线性相关; (3) 线性相关;
 (4) 线性无关; (5) 线性无关; (6) 线性无关;
 (7) 线性相关; (8) 线性无关; (9) 线性无关;
 (10) 线性无关.
 2. $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$.
 3. $y = (C_1 + C_2 x) e^{x^2}$.
 4. 略.
 * 5. $y = C_1 e^x + C_2 (2x+1)$.
 * 6. $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^3$.
 * 7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln |\cos x|$.
 * 8. $y = C_1 x + C_2 x \ln |x| + \frac{1}{2} x \ln^2 |x|$.

习题 7-7 (第346页)

1. (1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$; (2) $y = C_1 + C_2 e^{4x}$;
 (3) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; (4) $y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;
 (5) $x = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{5}{2}t}$; (6) $y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;
 (7) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$;
 (8) $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$;
 (9) $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x$;
 (10) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
 2. (1) $y = 4e^x + 2e^{3x}$; (2) $y = (2+x) e^{-\frac{x}{2}}$; (3) $y = e^{-x} - e^{4x}$;
 (4) $y = 3e^{-2x} \sin 5x$; (5) $y = 2 \cos 5x + \sin 5x$; (6) $y = e^{2x} \sin 3x$.

$$3. x = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} (1 - e^{-\sqrt{k_2^2 + 4k_1} t}) e^{(-\frac{k_2}{2} + \frac{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}) t}.$$

$$4. u_C(t) = \frac{10}{9} (19e^{-10^3 t} - e^{-1.9 \times 10^4 t}) \text{ V}; \quad i(t) = \frac{19}{18} \times 10^{-2} (-e^{-10^3 t} + e^{-1.9 \times 10^4 t}) \text{ A}.$$

$$5. M = 195 \text{ kg}.$$

习题 7-8 (第 354 页)

$$1. (1) y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x} + e^x;$$

$$(2) y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{1+a^2};$$

$$(3) y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x;$$

$$(4) y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x \right) e^{-x};$$

$$(5) y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4} x e^x \cos 2x;$$

$$(6) y = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{3} x + 1 \right) e^{3x};$$

$$(7) y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{11}{8} - \frac{1}{2} x;$$

$$(8) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} x \cos x + \frac{2}{9} \sin x;$$

$$(9) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{e^x}{2} + \frac{x}{2} \sin x;$$

$$(10) y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x, \text{ 提示: } \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x).$$

$$2. (1) y = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x;$$

$$(2) y = -5e^x + \frac{7}{2} e^{2x} + \frac{5}{2};$$

$$(3) y = \frac{1}{2} (e^{9x} + e^x) - \frac{1}{7} e^{2x};$$

$$(4) y = e^x - e^{-x} + e^x (x^2 - x);$$

$$(5) y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16} e^{4x} - \frac{5}{4} x.$$

3. 取炮口为原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 铅直向上为 y 轴建立直角坐标系, 弹道曲线为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

4. $u_c(t) = 20 - 20e^{-5 \times 10^3 t} [\cos(5 \times 10^3 t) + \sin(5 \times 10^3 t)] \text{ V};$

$i(t) = 4 \times 10^{-2} e^{-5 \times 10^3 t} \sin(5 \times 10^3 t) \text{ A},$

提示: 电路方程参见第六节例 2.

5. (1) $t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln(5 + 2\sqrt{6}) \text{ s};$ (2) $t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln\left(\frac{19 + 4\sqrt{22}}{3}\right) \text{ s}.$

6. $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x).$

* 习题 7-9 (第 356 页)

1. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$

2. $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + x \ln^2|x|.$

3. $y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + C_3 x^{-2}.$

4. $y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}(\ln^2 x + \ln x) + \frac{1}{4}.$

5. $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + \frac{1}{5} x^3.$

6. $y = x[C_1 \cos(\sqrt{3} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{3} \ln x)] + \frac{1}{2} x \sin(\ln x).$

7. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + x + \frac{1}{6} x^2 \ln^3 x.$

8. $y = C_1 x + x[C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)] + \frac{1}{2} x^2 (\ln x - 2) + 3x \ln x.$

* 习题 7-10 (第 359 页)

1. (1) $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 3 + C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t; \end{cases}$

$$(4) \begin{cases} x = C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} + \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}, \\ y = (-4-\sqrt{15})C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} - (4-\sqrt{15})C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} - \frac{e^t}{11} - \frac{7}{6}e^{2t}; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = \frac{C_1 - 3C_2}{5} \sin t - \frac{3C_1 + C_2}{5} \cos t - t^2 + t + 3, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 - 3t - 4; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{8 \sin t + \cos t}{65}, \\ y = -\frac{4}{3}C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{61 \sin t - 33 \cos t}{130}. \end{cases}$$

$$2. (1) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = e^t, \\ y = 4e^t; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = 2 \cos t - 4 \sin t - \frac{1}{2}e^t, \\ y = 14 \sin t - 2 \cos t + 2e^t; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = 4 \cos t + 3 \sin t - 2e^{-2t} - 2e^{-t} \sin t, \\ y = \sin t - 2 \cos t + 2e^{-t} \cos t; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x = \frac{12}{17}e^{-\frac{7}{5}t} + \frac{5}{17}e^{2t} + \frac{3}{7}t - \frac{1}{49}, \\ y = \frac{18}{17}e^{-\frac{7}{5}t} - \frac{1}{17}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{7}t - \frac{26}{49}. \end{cases}$$

总习题七(第 360 页)

$$1. (1) 3; \quad (2) y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right);$$

$$(3) y' = f(x, y), \quad y \Big|_{x=x_0} = 0; \quad (4) y = C_1(x-1) + C_2(x^2-1) + 1.$$

$$2. (1) (B); \quad (2) (B).$$

$$3. (1) y^2(y'^2 + 1) = 1; \quad (2) y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$4. (1) x - \sqrt{xy} = C; \quad (2) y = ax + \frac{C}{\ln x};$$

$$(3) x = Cy^{-2} + \ln y - \frac{1}{2}; \quad (4) y^{-2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1;$$

$$(5) y = \ln |\cos(x + C_1)| + C_2; \quad (6) y = \frac{1}{2C_1} (e^{C_1 x + C_2} + e^{-C_1 x - C_2});$$

$$(7) y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x;$$

$$(8) y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} + \left(\frac{1}{6} x^2 - \frac{4}{9} x \right) e^x - x^2 - x;$$

$$* (9) x^2 = C y^6 + y^4;$$

$$(10) \sqrt{(x^2 + y)^3} = x^3 + \frac{3}{2} xy + C.$$

$$* 5. (1) x(1 + 2 \ln y) - y^2 = 0; \quad (2) y = -\frac{1}{a} \ln(ax + 1);$$

$$(3) y = 2 \arctan e^x; \quad (4) y = x e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x.$$

$$6. y = x - x \ln x.$$

$$7. \text{约 } 250 \text{ m}^3.$$

$$8. \varphi(x) = \cos x + \sin x.$$

$$9. \varphi(x) = \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1}.$$

$$10. \text{略.}$$

$$* 11. (1) y = \frac{1}{x} (C_1 + C_2 \ln |x|); \quad (2) y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2} x.$$

$$* 12. (1) \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + \frac{1}{2} t, \\ y = -(C_1 + C_2 + C_2 t) e^{-t} - \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t} - \frac{1}{6} e^t, \\ y = C_4 e^{-t} - C_1 + C_3 e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t. \end{cases}$$

2008年度普通高等教育精品教材

本书第三版获1997年普通高等学校
国家级教学成果一等奖

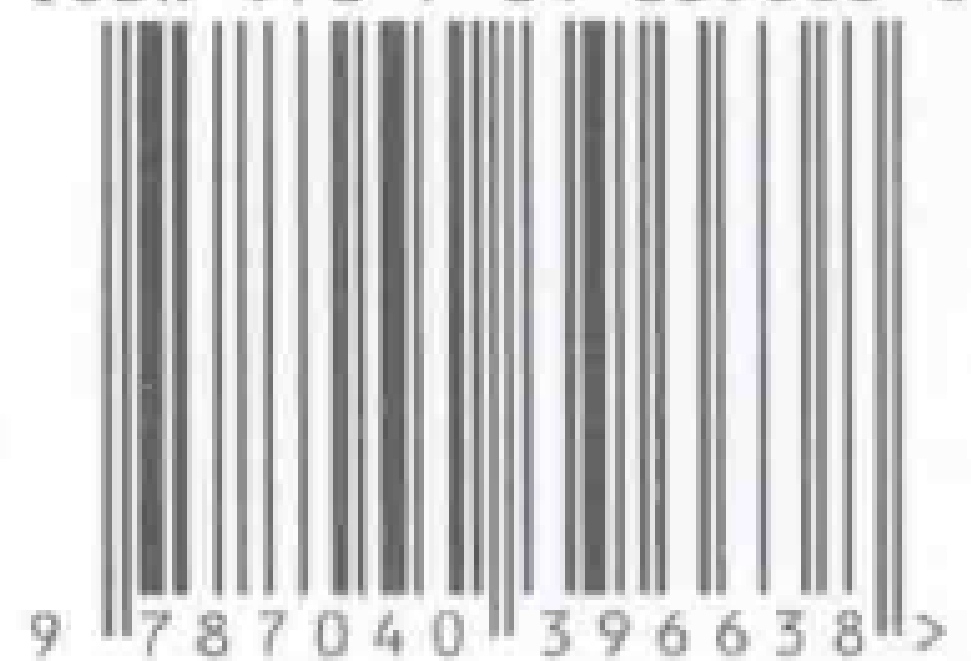
- | | |
|---|---------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 高等数学 第七版 上册 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 高等数学 第七版 下册 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济·第七版 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 高等数学习题全解指南 上册 同济·第七版 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 高等数学习题全解指南 下册 同济·第七版 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 工程数学——线性代数 第六版 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济·第六版 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 工程数学——概率统计简明教程 第二版 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解 第二版 | 同济大学数学系 |
| <input type="checkbox"/> 工程数学——新编统计学 | 同济大学数学系 |



数字课程网站

网址: <http://abook.hep.com.cn/39663>
<http://abook.hep.edu.cn/39663>

ISBN 978-7-04-039663-8



定价 37.70 元