

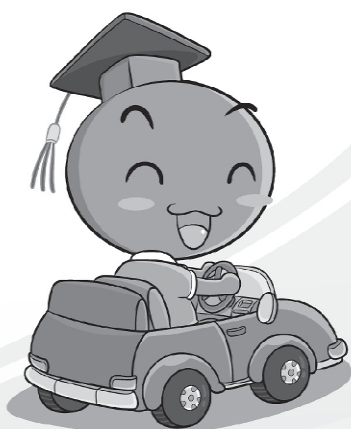
★新概念奥林匹克数学丛书★

高思教育
www.gaosiedu.com

高思学校 Gao Si Education

徐鸣皋 主编

竞赛数学导引



6年级

丛书编撰团队主要成员介绍

Gaosi Team



徐鸣皋

高思学校校长。北京市人大附中仁华学校（原华罗庚数学学校）创始成员，学科带头人，数学主教练，北京市著名的超常教育专家，从事超常儿童的教育和培养二十多年，形成了一套独特有效的思想、理念、方法以及特色，每年均有众多学生在各类、各级数学竞赛中获取优异成绩。除本书外，还担任了《仁华学校奥林匹克数学课本》副主编，《高思学校竞赛数学课本》主编。



邹瑾

北京大学数学科学学院学士、硕士，12年中小学竞赛数学教学经验。北京市“数学解题能力展示活动”命题组成员，全国中学生数理化学科能力展示活动命题组成员，华罗庚金杯少年数学精英邀请赛命题组成员，北京市CMO（全国高中数学联赛）集训队教练。邹老师曾获得IMO（国际数学奥林匹克竞赛）金牌，并连续两年名列IMO中国国家队第一名，因此保送北大数学科学学院；在大学期间参加美国大学生数学建模竞赛，并夺得一等奖。



谢健钢

北京大学数学科学学院学士、硕士。美国加州大学伯克利分校数学博士。第35届IMO国际数学奥林匹克满分金牌。曾任仁华学校思维能力测试命题组组长，多年IMO国家集训队教练，国家队选拔命题组成员。1994年开始组织人员进行仁华学校的教学教研活动，1997年至1999年组织编写了仁华学校教材——《仁华学校数学思维训练导引》，是该书的第一作者。



须结成

高思学校执行校长。北京大学数学科学学院学士、硕士，15年中小学竞赛数学教学经验，曾在仁华学校等北京市著名培训学校长期执教，荣获2009年“海淀区优秀教育工作者”奖，2008年“北京金牌教师”奖。须老师善于引导学生看透复杂数学问题的简单本质，激发学生进行创造性的发挥。除本书外，还是《仁华学校数学思维训练导引》主要编写者，《高思学校竞赛数学课本》主编。



杨笑山

北京大学数学科学学院学士、力学与工程科学系硕士，10年中小学竞赛数学教学经验，曾在北京各大培训机构任教多年，并于2009年被评为“海淀区优秀教育工作者”。杨老师擅长以浅显的语言来讲解复杂的数学问题，在学生和家长中拥有众多“粉丝”。杨老师在学生时代曾获得1998年全国中学生物理竞赛二等奖，1999年全国高中生数学建模竞赛一等奖。



李川

北京大学物理学院学士、软件学院硕士，10年中小学竞赛数学教学经验，曾在仁华学校等北京市著名培训学校任教多年，2009年被评为“北京市海淀区优秀教师”。曾获得1997年全国初中数学联赛一等奖，1998年全国高中数学联赛一等奖，1999年全国中学生物理竞赛一等奖，入选全国物理奥林匹克冬令营，并保送北大物理学院。



汪岩

吉林大学数学系毕业，10年中小学竞赛数学教学经验。汪老师长期执教于北京市仁华学校，被家长和学生誉为最“善解人意”的老师。她善于把知识框架串联起来，以通俗易懂的方式进行细致独到的讲解，能够让看似枯燥刻板的数学知识变得易于理解和吸收。



池恒

毕业于北京大学力学与工程科学系，7年竞赛数学教学经验，一直在仁华及北京各著名培训学校任教，2009年被评为“北京市海淀区优秀教育工作者”。在学生时代，获2003年全国高中数学联赛一等奖，以优异的成绩考入北大。



贺涛

毕业于北京大学数学科学学院，5年中小学竞赛数学教学经验，长期在仁华学校等北京市著名培训学校任教，其认真负责的态度和对教学近乎完美的追求，获得了家长的一致赞赏。贺老师在学生时代曾获得2001年、2002年两届高中数学联赛一等奖，并入选2002年全国数学奥林匹克冬令营，保送北大数学科学学院。大学阶段，他还在数学建模竞赛及ACM计算机编程能力竞赛中多次获奖。



郭建任

北京大学数学科学学院学士，5年中小学竞赛数学教学经验，长期执教于北京各大培训学校。在他手中几乎没有解不出的数学题，并经常提出令人拍案叫绝的奇思妙想，因此被同行与学生尊封为“郭大侠”。2000年全国初中数学联赛满分，2002、2003连续两年获全国高中数学联赛一等奖，入选中国国家集训队，并因此保送北大数学科学学院。



胡佳亮

北京大学生命科学学院学士，5年中小学竞赛数学教学经验，曾任教于仁华学校等北京市著名培训机构。他博学多才，在理科的各个领域都有所涉猎，在学生时代曾一口气获得三个全国一等奖：2003年全国高中数学联赛一等奖、信息学联赛一等奖、化学竞赛一等奖，并进入化学奥林匹克冬令营，保送北大生命科学学院。



雪雯雯

毕业于北京大学物理学院，5年小学竞赛数学教学经验，是一位极富爱心的老师，曾任北京大学爱心社助残组负责人，会使用手语和阅读盲文。因为其活泼而有亲和力的授课方式，她的课堂具有让孩子们爱上数学的魔力。还擅长用形象、生动的词语进行归纳总结，便于学生对知识进行理解和记忆。



王立强

毕业于北京理工大学光电工程系，5年小学竞赛数学教学经验，是一位极具创意、又有责任心的老师。他上课风趣幽默，善于用语言调动学生的积极性，鼓励他们自主思考，深得学生喜爱。在本套《课本》的编写过程中，被同事誉为“故事大王”，很多有趣而贴切的漫画故事正是出自王老师之手。



刘婧

北京大学数学科学学院学士，5年竞赛数学教学经验，曾在北京市各大培训机构任教。她关注每一个学生，并经常以自己的学习经历来鼓励每个孩子，让他们做得更好。她在学生时代是一名品学兼优的学生，高考成绩中数学、物理均是全省前几名，其中物理取得了满分。



王坤

北京大学数学科学学院毕业，10年中小学竞赛数学教学经验，高思尖子班资深教师。其高超精湛的解题技巧则让学生为之叹服，被誉为最有“个人魅力”的老师。王老师在学生时代曾是1999年全国数学高中联赛一等奖获得者，国家集训队第7名，并因此保送北大数学科学学院。



刘喆

北京大学数学科学学院学士、硕士，13年竞赛数学教学经验，在加入高思学校之前曾长期任教于北京市各大培训学校。刘老师在学生时代曾获得全国高中数学联赛黑龙江省第2名，入选1993年全国数学奥林匹克冬令营；同年获得全国中学生物理竞赛一等奖，全国中学生化学竞赛二等奖。



路行

北京大学数学科学学院学士、硕士，5年竞赛数学教学经验，曾在多所大型培训机构任教。路老师在2002年获得全国高中数学联赛全省第1名，并入选2003年全国数学奥林匹克冬令营，保送北大数学科学学院；同年，他还获得全国中学生物理竞赛全省第4名。



温鑫

北京大学工学院学士、硕士。2003年获全国高中数学联赛二等奖，全国中学生物理竞赛一等奖。大学期间获得北京市物理竞赛二等奖，北京大学“江泽涵杯”数学建模大赛一等奖，连年荣获北京大学三好学生、优秀学生干部。高思教育小学数学总监。



胡晓军

毕业于北京大学数学科学学院，8年中小学竞赛数学教学经验，曾在仁华学校等北京市著名培训学校任教。胡老师在学生时代是一路拿着金牌和一等奖走来的：1995年获第五届华杯赛金牌，1996、1997连续两年获全国初中数学联赛一等奖，1999、2000连续两年获全国高中数学联赛一等奖，并入选国家集训队，因竞赛成绩优异保送北大数学科学学院。

高思 度想 决创 定造 视未 野来



林 杰

毕业于北京大学地球与空间科学学院。小学阶段曾获得奥数竞赛满分，初中曾获全国中学生数学竞赛三等奖、物理竞赛三等奖、化学竞赛三等奖，高中获全国中学生英语能力竞赛一等奖、全国中学生物理竞赛省三等奖。北京五子棋高校邀请赛无禁组个人第二名。现任高思学校小学数学超常教育研究中心主管。



李 杰

北京大学元培学院金融数学专业学士，有多年小学奥数教学经验。08年以陕西省理科第二名的成绩进入北京大学元培学院，并获得新生二等奖学金，主攻金融数学专业。荣获新浪教育第三届全国课外教育五星金牌教师称号。教学中极具亲和力，善于激发学生的学习热情。



朱书迪

北京科技大学计算机系学士，曾获得小学奥数竞赛全省最高分，大学期间获美国大学生数学建模竞赛（MCM）一等奖。曾带队完成“国家大学生创新性实验计划”的项目。教法灵活，针对学生自身特点，采用独特的方式进行知识、方法的补充，获得了学生和家长的高度认可。



胡羽辰

北京科技大学数学与应用数学和金融工程专业双学士学位。荣获首届高思五星金牌教师称号、获得首届高思板书设计大赛一等奖。现任高思学校小学数学教研三年级组主管。善于调动学生兴趣，注重基础和方法。



王文东

毕业于北京大学生命科学学院，本科期间一直兼职从小学到高中的教学辅导工作，深受学生敬爱。高中期间，曾在同一届全国联赛中获物理一等奖、数学二等奖、物理三等奖，理科知识基础扎实。善于从实际出发，引导学生独立思考，在教学过程中注重培养学生良好的学习习惯。



杨 亮

从小喜欢钻研，尤其痴迷数学。曾获得两届“希望杯”金牌，全国高中数学联赛二等奖。多年的数学训练造就了敏锐的思维触角，严谨的学术作风和天马行空的想象力。对小学奥数体系非常熟悉，常有独到的见解。上课富于激情，用自己对数学的热爱感染学生，引导学生进入数学的殿堂。



杨玉越

北京大学数学科学学院数学与应用数学学士，2008年开始从事竞赛数学的教学，现任高思学校小学数学教研高年级主管。课堂气氛紧凑而活跃授课知识体系完整。采用灵活的教学方法、根据不同学生的基础，确定不同的切入点，使学生易于掌握。



范 媛

北京化工大学生命科学与技术学院硕士，中小学多次参加数学竞赛并获奖。大学阶段被评为北京市三好学生，优秀志愿者。多次获得“人民奖学金”。课上富有激情，激发学生学习兴趣；鼓励和引导学生独立思考，养成良好的学习习惯。



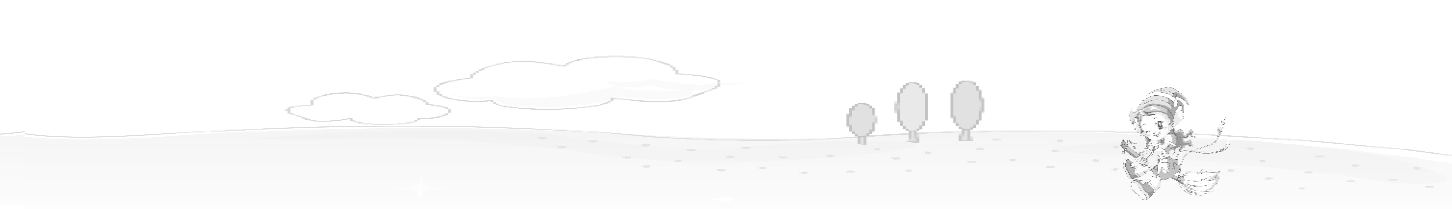
张 勇

北京师范大学物理系学士，2000年曾获得高中物理竞赛省二等奖，小学阶段获得奥林匹克竞赛市一等奖。现任高思学校小升初负责人。始终从学生兴趣点出发，由生活到理论，以具体为例介绍抽象，使学生变被动为主动的学习。擅长引导学生一题多解，举一反三，启发学生的独立思考能力。



汤 辉

毕业于北京航空航天大学，软件工程专业。初中曾获数学竞赛省三等奖，物理竞赛省二等奖；高中曾获化学竞赛省二等奖，物理竞赛省三等奖；教学过程中，与同学们相处非常融洽，能够考虑不同层次接受知识能力的不同，寻找合适的讲解方法，深入浅出讲解知识点，深受学生和家长的一致好评。



前言

——对《新概念奥林匹克数学丛书》的一些说明

本丛书目前由两部分组成：一是《高思学校竞赛数学导引》(以下简称《导引》)，二是《高思学校竞赛数学课本》(以下简称《课本》)。

第一部分 《导引》

在编写本丛书的过程中，我们通过大量调研，比较了已有的各类竞赛数学教材，搜集了近20年来国内外小学数学竞赛试题，总结归纳出了一套完善的知识体系。再结合高思学校数学尖子班多年的教学实践，我们将这套知识体系搭建为一个包含“横向”和“纵向”两个维度的架构(如下表所示)。

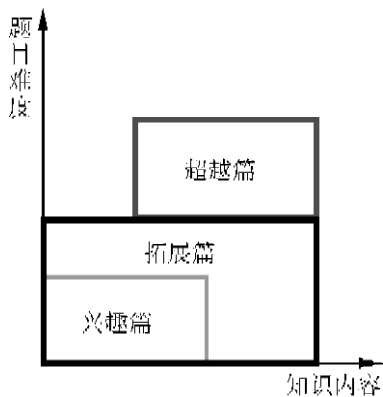
	计算	几何	应用题	计数	数论	数字谜	组合数学
小学3年级	✓	✓	✓	✓	—	✓	✓
小学4年级	✓	✓	✓	✓	—	✓	✓
小学5年级	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
小学6年级	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

其中，横向分为七大专题，计算、几何、应用题、计数、数论、数字谜以及组合数学；而纵向则按照学生接受能力和校内课程进度，将七大专题分配到3、4、5、6四个年级中——这就形成了一套循序渐进的学习计划和教学大纲。

《导引》就是按照上述安排构建的一套计划大纲，每年级一册，每册24讲，共96讲。每讲开头都有一段内容概述，阐述本讲知识要点，然后通过近40道例题来体现这些知识。这些例题又被划分为“兴趣篇”、“拓展篇”和“超越篇”三个部分，这三部分在知识内容与题目难度上的关系如右图所示。

兴趣篇主要面向在学校学有余力的学生，希望通过

《导引》每讲的
内容、难度架构图





一些略有难度的问题,激发他们进一步思考数学问题的兴趣,因此对知识内容和题目难度都有所控制;拓展篇则包含了竞赛数学完整^①的知识体系,目的是让数学能力突出的学生接受系统化训练,其难度符合大多数竞赛的要求;超越篇的读者群体则定位于有数学天赋,已接受过系统化训练,且具有较深厚竞赛数学功底的学生,这里给他们提出了更高的要求,更大的挑战,激励他们进一步探索和思考。

所以,超越篇的学习必须以拓展篇为基础,但拓展篇的学习并不一定要以兴趣篇为铺垫,因为两者都是从零起步,只是拓展篇包含更完整的知识体系,具有更大的难度而已,究竟从哪一篇学起取决于学生的具体情况。

另外,所有题目的详细解答都集中放置在书后。学生在使用时可以先不受干扰地独立进行思考,当遇到困难时再求助于解答。

第二部分 《课本》

《课本》直接以《导引》中拓展篇的题目为例题,每个年级分为上、下两册,每册 20 讲。它将《导引》所规定的教学内容以图文并茂的形式完整^②呈现出来,在表现形式上更具亲和力,在篇章结构上更宜于课堂教学。

《课本》中的每一讲都包含 7 大模块:开篇漫画、课文、例题(分析)、练习、思考题、知识点汇总以及作业。其中开篇漫画用一个有趣的小故事引入课文;课文则详细讲解本讲所涉及的知识点;例题是这些知识的具体运用;练习则与例题配套,采取一例一练的形式,可在讲完例题后让学生练习;思考题是与本讲内容有关的一道难题,供学有余力的学生使用;知识点汇总用简明扼要的语言帮助孩子梳理本讲知识;作业用于课后巩固复习。

为了使《课本》中每一讲的知识容量符合实际课堂要求,我们在使用《导引》拓展篇的例题时做了适当调整。通常是把一讲例题拆分开来,分两次课进行讲授。因此,虽然在《导引》中每个年级只有 24 讲,但在《课本》中却有 40 讲。

另外,《课本》中每一讲全部例题、练习、思考题以及作业的答案与解答,都可以在随书附赠的《答案详解》中找到。

在本丛书的编写和修订过程中,我们一直本着认真负责和精益求精的态度开展工作,主观上尽了最大努力,但由于水平和经验有限,难免出现一些不足和疏漏。因此我们竭诚欢迎并殷切期盼各位读者对本书提出批评和建议。

为了便于搜集各位读者对本丛书的意见和建议,我们在高思学校的官方网站(bbs.gaosiedu.com)中开辟了一个专区,欢迎大家前来发表意见和看法。我们同时也会在网站上及时发布相应的勘误信息,及时回答大家的疑问,便于大家更好地使用本丛书。

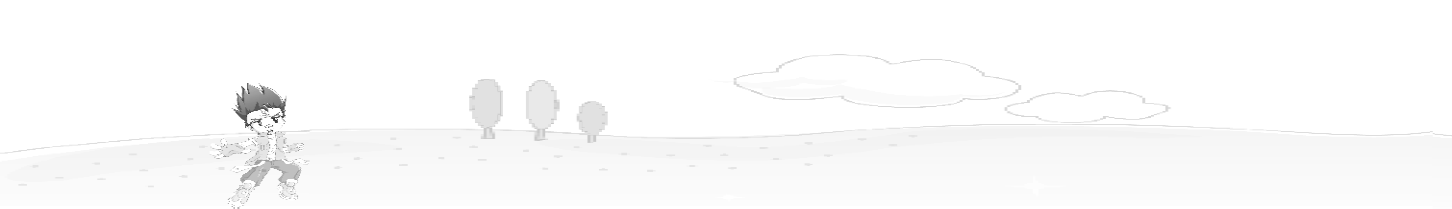
杨笑山 李川 汪岩 池恒

2013 年 12 月



目 录

第 1 讲	分数数列计算 (计算问题第 13 讲) 1 (答 161)
第 2 讲	计算综合二 (计算问题第 14 讲) 6 (答 165)
第 3 讲	比例解应用题 (应用题第 22 讲) 13 (答 170)
第 4 讲	方程解应用题 (应用题第 23 讲) 20 (答 175)
第 5 讲	浓度问题与经济问题 (应用题第 24 讲) 27 (答 182)
第 6 讲	逻辑推理二 (组合问题第 9 讲) 34 (答 187)
第 7 讲	最值问题二 (组合问题第 10 讲) 42 (答 195)
第 8 讲	不定方程 (应用题第 25 讲) 48 (答 200)
第 9 讲	立体几何 (几何问题第 9 讲) 54 (答 205)
第 10 讲	几何综合一 (几何问题第 10 讲) 61 (答 213)
第 11 讲	几何综合二 (几何问题第 11 讲) 68 (答 221)



第 12 讲	计数综合三 (计数问题第 9 讲) 75 (答 226)
第 13 讲	计数综合四 (计数问题第 10 讲) 80 (答 233)
第 14 讲	行程问题六 (应用题第 26 讲) 86 (答 239)
第 15 讲	数论综合一 (数论问题第 5 讲) 93 (答 246)
第 16 讲	数字谜综合二 (数字谜问题第 11 讲) 99 (答 251)
第 17 讲	应用题综合一 (应用题第 27 讲) 106 (答 262)
第 18 讲	应用题综合二 (应用题第 28 讲) 114 (答 267)
第 19 讲	进位制与取整符号 (数论问题第 6 讲) 121 (答 276)
第 20 讲	数论综合二 (数论问题第 7 讲) 126 (答 280)
第 21 讲	数论综合三 (数论问题第 8 讲) 132 (答 284)
第 22 讲	构造论证二 (组合问题第 11 讲) 137 (答 289)
第 23 讲	概率初步 (计数问题第 11 讲) 144 (答 295)
第 24 讲	数学家的故事 151
	参考答案 161



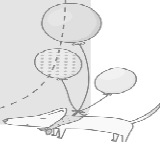



第1讲 分数数列计算



内容概述

建立抵消的思想,特别是灵活运用裂项的方法
求解一些分数数列的计算问题.



典型问题



兴趣篇

1. ★ 计算下列各个算式,并想一想计算结果的分子、分母各有什么规律.

(1) $\frac{1}{9} - \frac{1}{10}$; (2) $\frac{1}{11} - \frac{1}{13}$; (3) $\frac{1}{97} - \frac{1}{103}$.

2. ★ 计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10}$.

3. ★ 计算: $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2}{97 \times 99}$.

4. ★★ 计算: $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \cdots + \frac{1}{98 \times 100}$.



5. ★★ 计算: $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$.

6. ★★ 计算: $\frac{5+6}{5 \times 6} - \frac{6+7}{6 \times 7} + \frac{7+8}{7 \times 8} - \frac{8+9}{8 \times 9} + \frac{9+10}{9 \times 10}$.

7. ★★ 计算: $\frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90}$.

8. ★★ 计算: $\frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{2}{98 \times 99 \times 100}$.

9. ★★ 计算: $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \cdots + \frac{209}{210} + \frac{239}{240}$.

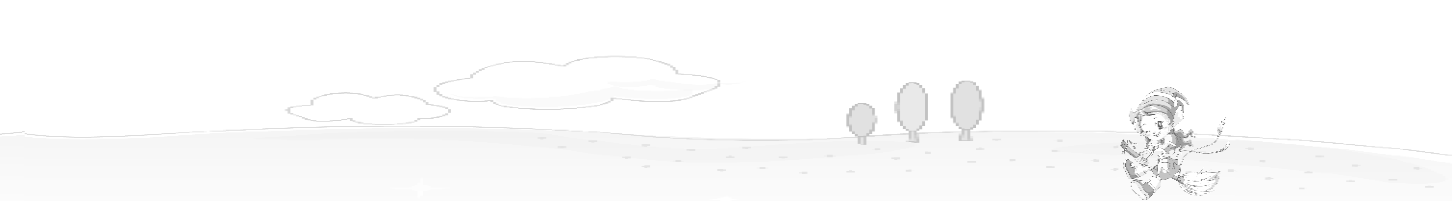
10. ★★ 计算: $(1 - \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times \cdots \times (1 - \frac{1}{9}) \times (1 + \frac{1}{9})$.



拓展篇

1. ★ 在方框中填入适当的一位数,使等式成立.

(1) $\frac{1}{30} = \frac{1}{\square} - \frac{1}{\square}$; (2) $\frac{2}{35} = \frac{1}{\square} - \frac{1}{\square}$; (3) $\frac{11}{28} = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square}$.



2. ★ 计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots + \frac{1}{2007 \times 2008}$.

3. ★ 计算: $\frac{3}{2 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{3}{8 \times 11} + \frac{3}{11 \times 14} + \cdots + \frac{3}{98 \times 101}$.

4. ★★ 计算: $\frac{4}{1 \times 3} - \frac{8}{3 \times 5} + \frac{12}{5 \times 7} - \frac{16}{7 \times 9} + \frac{20}{9 \times 11} - \frac{24}{11 \times 13}$.

5. ★★ 计算: $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{130} + \cdots + \frac{1}{9700}$.

6. ★★ 计算: (1) $1 \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{12} + 7 \frac{1}{20} + 9 \frac{1}{30} + 11 \frac{1}{42} + 13 \frac{1}{56} + 15 \frac{1}{72} + 17 \frac{1}{90}$;

(2) $\frac{4}{1 \times 3} + \frac{6}{2 \times 4} - \frac{8}{3 \times 5} - \frac{10}{4 \times 6} + \frac{12}{5 \times 7} + \frac{14}{6 \times 8} - \frac{16}{7 \times 9} - \frac{18}{8 \times 10} + \frac{20}{9 \times 11} + \cdots + \frac{76}{37 \times 39} + \frac{78}{38 \times 40} - \frac{80}{39 \times 41} - \frac{82}{40 \times 42}$.

7. ★★★ 计算: $1 + \frac{2}{1 \times (1+2)} + \frac{3}{(1+2) \times (1+2+3)} + \frac{4}{(1+2+3) \times (1+2+3+4)} + \cdots + \frac{10}{(1+2+\cdots+9) \times (1+2+\cdots+9+10)}$.

8. ★★ 计算: $\frac{3}{2} + \frac{11}{6} + \frac{23}{12} + \frac{39}{20} + \cdots + \frac{759}{380} + \frac{839}{420}$.



9. ★★ 计算: $\frac{2 \times 3}{1 \times 4} + \frac{5 \times 6}{4 \times 7} + \frac{8 \times 9}{7 \times 10} + \cdots + \frac{98 \times 99}{97 \times 100}$.

10. ★★ 计算: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} + \frac{1}{2+4+6+8} + \cdots + \frac{1}{2+4+6+\cdots+20}$.

11. ★★ 计算: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{48 \times 49 \times 50}$.

12. ★★ 计算: $\frac{4}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{6}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{11}{8 \times 9 \times 10}$.

13. ★★ 计算: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{99^2}\right)$.

14. ★★ 计算: $\left(1 + \frac{1}{1 \times 3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2 \times 4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3 \times 5}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{2007 \times 2009}\right)$.



超越篇

1. ★★ 计算: $\frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \times 3} + \cdots + \frac{18^2 + 19^2}{18 \times 19} + \frac{19^2 + 20^2}{19 \times 20}$.



2. **★★** 计算: $\frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{4^2+1}{4^2-1} + \cdots + \frac{18^2+1}{18^2-1} + \frac{20^2+1}{20^2-1}$.

3. **★★** 已知算式 $(1 + \frac{2}{3}) \times (2 + \frac{4}{5}) \times \cdots \times (8 + \frac{16}{17}) \times (9 + \frac{18}{19})$ 的结果是一个整数,那么它的末两位数字是多少?

4. **★★★** 计算: $\frac{3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{7}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{37}{18 \times 19 \times 20}$.

5. **★★★** 计算: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!}$ (最后结果可以用阶乘表示).

6. **★★★** 已知 $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{64^2}$, 请比较 A 和 B 的大小.

7. **★★** 计算: $\frac{3! \times 1}{3} + \frac{4! \times 2}{3^2} + \frac{5! \times 3}{3^3} + \cdots + \frac{102! \times 100}{3^{100}}$ (结果可以用阶乘和乘方表示).

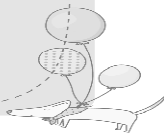
8. **★★★** 计算: $\frac{100}{97} + \frac{100 \times 99}{97 \times 96} + \frac{100 \times 99 \times 98}{97 \times 96 \times 95} + \cdots + \frac{100 \times 99 \times 98 \times \cdots \times 5 \times 4}{97 \times 96 \times 95 \times \cdots \times 2 \times 1}$.



第2讲 计算综合二

内容概述

综合性较强的计算问题.



典型问题



兴趣篇

1. ★★ 计算: $\frac{1}{3} \times \left(4.3 \times 3 \frac{3}{5} - 3.6 + 6.7 \div \frac{5}{18} \right) - \left(1.23 \div 13 \frac{2}{3} - 5 - 0.09 \right).$

2. ★★ 要使等式 $15.6 \div \left[2 \frac{2}{3} \times (1.625 + \square) - 1 \frac{1}{10} \right] - \frac{4}{15} \div \frac{2}{3} = 3 \frac{3}{5}$ 成立, 方格内应填入多少?

3. ★★ 计算: $\frac{\frac{7}{8} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{20} + 5 \frac{3}{5} \times \frac{1}{80}} \div 2 \frac{1}{2}.$



4. ★★ 计算: $\frac{1950 + \frac{1}{2002}}{2002 + \frac{1}{1950}} - \frac{2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{3.5}$.

5. ★★ 计算下列繁分数:

(1) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$; (2) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$; (3) $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1987}}}$.

6. ★★ 算式 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ 的计算结果, 小数点后第 2008 位是数字几?

7. ★★ 定义运算符号“ Δ ”满足: $a\Delta b = \frac{a+b}{a \times b}$. 计算下列各式:

(1) $100\Delta 102$; (2) $(3\Delta 4)\Delta 5$; (3) $\frac{(1\Delta 2)\Delta 3}{1\Delta (2\Delta 3)}$.

8. ★★ 已知 $333\frac{111}{112} : \square = 37 : \frac{54+55+56+57+58}{4+5+6+7+8}$, 那么方框所代表的数是什么?

9. ★★ 计算: $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 19 \times 20$.

10. ★★ 我们规定: $\Delta n = n \times (n+1)$, 比如: $\Delta 1 = 1 \times 2$, $\Delta 2 = 2 \times 3$, $\Delta 3 = 3 \times 4$. 请问:

- (1) 如果要使等式 $\frac{1}{\Delta 1} + \frac{1}{\Delta 2} + \frac{1}{\Delta 3} + \cdots + \frac{1}{\Delta 99} = \frac{\square}{\Delta 100}$ 成立, 那么方框内应填入什么数?
- (2) 计算: $\Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \cdots + \Delta 100$.



拓展篇

1. ★★ 计算: $(3.85 \div \frac{5}{18} + 12.3 \times 1\frac{4}{5}) \div 3\frac{1}{4}$.

2. ★★ 计算: $\frac{\frac{7}{18} \times 4\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{13\frac{1}{3} - 3\frac{3}{4} \div \frac{5}{16}} \div 2\frac{7}{8}$.

3. ★★ 计算: $\frac{19\frac{5}{9} + 3\frac{9}{10} - 5.22}{19\frac{5}{9} - 6\frac{27}{50} + 5.22} \div (\frac{1993 \times 0.4}{1995 \times 0.5} + \frac{1.6}{1995})$.

4. ★★ 我们规定:符号“○”表示选择两数中较大数的运算,例如: $3.5 \bigcirc 2.9 = 2.9 \bigcirc 3.5 = 3.5$.

符号“△”表示选择两数中较小数的运算,例如: $3.5 \triangle 2.9 = 2.9 \triangle 3.5 = 2.9$.

请计算: $\frac{(0.625 \triangle \frac{23}{33}) \times (\frac{155}{384} \bigcirc 0.4)}{(\frac{1}{3} \bigcirc 0.3) + (\frac{235}{104} \triangle 2.25)}$.

5. ★★ 如图 2-1, 每一条线段的长度规定为它的端点上两数之和, 图中 6 条线段的长度总和是多少?

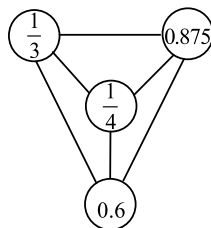


图 2-1



6. $\star\star$ 计算: $\left(\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975}\right) \times \left(\frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531}\right) - \left(\frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975} + \frac{135}{531}\right) \times \left(\frac{579}{357} + \frac{753}{975}\right).$

7. $\star\star$ 算式 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right) \times 2004$ 计算结果的小数点后第 2004 位数字是多少?

8. $\star\star$ 古埃及人计算圆形面积的方法是:将直径减去直径的 $\frac{1}{9}$, 然后再平方. 由此看来, 古埃及人认为圆周率 π 等于多少? (结果精确到小数点后两位数字)

9. $\star\star$ (1) 将下面这个繁分数化为最简真分数:

$$\frac{\frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}}{}$$

(2) 若下面的等式成立, x 应该等于多少?

$$\frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x + \frac{1}{4}}}}}{} = \frac{8}{11}.$$

10. $\star\star$ 已知符号“ $*$ ”表示一种运算, 它的含义是: $a * b = \frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+1)(b+A)}$, 已知 $2 * 3 = \frac{1}{4}$, 那么:

(1) A 等于多少?

(2) 计算: $(1 * 2) + (3 * 4) + (5 * 6) + \cdots + (99 * 100).$



11. **★★** 已知 $A = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots + \frac{1}{1999 \times 2000}$, $B = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{1999}$, 比较 A 和 B 的大小, 并计算出它们的差.

12. **★★** 计算: $1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \cdots + 29 \times 31$.

13. **★★★** 根据图 2-2 中 5 个图形的变化规律, 求第 99 个图形中所有圆圈(实心圆圈与空心圆圈)的个数.

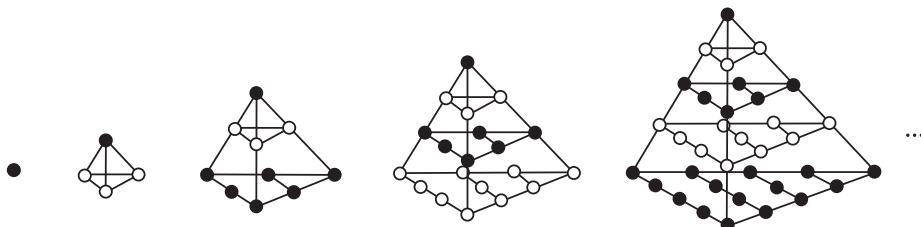


图 2-2

14. **★★★** 定义: $a_n = \frac{\frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{1}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$.

(1) 求出 a_1 、 a_2 、 a_{100} 、 a_{200} 的大小;

(2) 计算: $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \frac{4}{a_4} + \cdots + \frac{100}{a_{100}}$.



超越篇

1. ★★ 计算: $1\frac{4}{17} \times \left(2\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) - \frac{6\frac{6}{7} - 3\frac{9}{13}}{3\frac{3}{7} - 2\frac{2}{11}} \times \frac{13}{33} + \frac{17 + \frac{11}{12}}{1 - \frac{4}{21}}.$

2. ★★ 真分数 $\frac{a}{27}$ 化为小数后, 如果小数点后连续 2004 个数字之和是 8684, 那么 a 可能等于多少?

3. ★★ 定义运算“ Ω ”满足: ① $a\Omega 1 = a$, ② $a\Omega n = 2 \times [a\Omega(n-1)] + a$. 已知 $m\Omega 4 = 30$. 请问:

- (1) m 等于多少?
- (2) $m\Omega 8$ 等于多少?

4. ★★★ 已知 $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100}$, $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{96}{97} \times \frac{98}{99}$, $C = \frac{1}{10}$. 请比较 A 、 B 、 C 三个数的大小.

5. ★★★ 求下列两个算式结果的整数部分:

(1) $\frac{11 \times 66 + 12 \times 67 + 13 \times 68 + 14 \times 69 + 15 \times 70}{11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 + 14 \times 68 + 15 \times 69} \times 100;$

(2) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{29^2}}.$



6. ★★★ 定义运算: $a \oplus b = a + b - \frac{a \times b}{2008}$. 请问:

(1) 定义的运算是否满足交换律?

(2) 请根据定义计算下面两个算式:

① $2009 \oplus (2009 \times 2008)$;

② $\underbrace{2009 \oplus \cdots \oplus 2009}_{2009 \text{ 个 } 2009} \oplus 2008 \oplus \underbrace{(2009 \times 2008) \oplus \cdots \oplus (2009 \times 2008)}_{2008 \text{ 个 } 2009 \times 2008}$.

(3) 计算 $\underbrace{2009 \oplus \cdots \oplus 2009}_{2009 \text{ 个 } 2009} \oplus (2 \times 2008) \oplus \underbrace{(2009 \times 2008) \oplus \cdots \oplus (2009 \times 2008)}_{2008 \text{ 个 } 2009 \times 2008}$ 的大小.

7. ★★★ 计算:

$$24 \times \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{24 \times 25} \right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2 + 2^2} + \frac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2} + \cdots + \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + 12^2} \right).$$

8. ★★★ 计算: $\left(\frac{1}{2008} \right)^2 + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} \right)^2 + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 \right).$

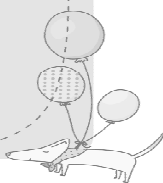


第3讲 比例解应用题



内容概述

涉及两个或多个量之间比例的应用题. 熟练掌握比的转化和运算; 对条件较多的应用题, 学会通过列表的方法逐步分析求解; 了解正比例与反比例的概念, 掌握行程问题和工程问题中的正反比例关系.



典型问题



兴趣篇

1. ★★ 圆珠笔和铅笔的价格比是 $4:3$, 20 支圆珠笔和 21 支铅笔共用 71.5 元. 请问: 圆珠笔的单价是每支多少元?

2. ★★ 已知甲比乙小 5, 甲数的 $\frac{3}{4}$ 等于乙数的 $\frac{2}{3}$, 请问: 甲数是多少?

3. ★★ 一段路程分为上坡和下坡两段, 这两段的长度之比是 $4:3$. 已知墨莫在上坡时每小时走 3 千米, 下坡时每小时走 4.5 千米. 如果墨莫走完全程用了半小时, 请问: 这段路程一共有多少千米?



4. ★★ 加工一个零件,甲要 2 分钟,乙要 3 分钟,丙要 4 分钟. 现有 1170 个零件,甲、乙、丙三人各加工多少个零件,才能使得他们同时完成任务?

5. ★★ 有两块重量相同的铜锌合金. 第一块合金中铜与锌的重量比是 $2:5$, 第二块合金中铜与锌的重量比是 $1:3$. 现在把这两块合金合铸成一块大的. 求合铸所成的合金中铜与锌的重量之比.

6. ★★ 已知甲、乙、丙三个班总人数的比为 $3:4:2$, 甲班男、女生人数的比为 $5:4$, 丙班男、女生人数的比为 $2:1$, 而且三个班所有男生和所有女生人数的比为 $13:14$. 请问:

(1) 乙班男、女生人数的比是多少?

(2) 如果甲班男生比乙班女生少 12 人, 那么甲、乙、丙三个班各有多少人?

7. ★★ 甲、乙两包糖的重量比是 $5:3$, 如果从甲包取出 10 克放入乙包后, 甲、乙两包糖的重量比变为 $7:5$. 请问: 这两包糖重量的总和是多少克?

8. ★★ 小明从甲地到乙地, 去时每小时走 5 千米, 回来时每小时走 7 千米, 来回共用了 4 小时. 问: 小明去时用了多长时间?

9. ★★ 小高从家去学校, 平时总是 7:50 到校. 有一天他起晚了, 结果晚出发了 10 分钟. 为了不至于迟到, 他将速度提高了五分之一, 跑步前往学校, 最后在 7:55 到校. 请问: 小高这天是几点出发的?



10. ★★ 康师傅加工一批零件,加工 720 个之后,他的工作效率提高了 20%,结果提前 4 天完成任务;如果康师傅从一开始就把工作效率提高 12.5%,那么也可以提前 4 天完成任务.问:这批零件共有多少个?



拓展篇

1. ★★ 萱萱和卡莉娅共折了 100 只千纸鹤.折完后,萱萱将自己所折千纸鹤的 $\frac{1}{6}$ 给了卡莉娅,这时卡莉娅的千纸鹤数量变为萱萱的 $\frac{1}{3}$,那么卡莉娅折了多少只千纸鹤?

2. ★★ 学校组织体检,收费标准如下:老师每人 3 元,女生每人 2 元,男生每人 1 元.已知老师和女生的人数比为 2 : 9,女生和男生的人数比为 3 : 7,共收体检费 945 元.那么老师、女生和男生各有多少人?

3. ★★ 徐福记的巧克力糖每 6 块包成一小袋,水果糖每 15 块包成一大袋.现有巧克力糖和水果糖各若干袋,而且巧克力糖比水果糖多 30 袋.如果巧克力糖的总块数与水果糖的总块数之比为 7 : 10,那么它们各有多少块?

4. ★★ 甲、乙、丙三人合买一台电视机.甲付的钱数等于乙付的钱数的 2 倍,也等于丙付的钱数的 3 倍.已知甲比丙多付了 680 元,请问:

- (1) 甲、乙、丙三人所付的钱数之比是多少?
- (2) 这台电视机售价多少元?

参考答案

第1讲 分数数列计算

兴趣篇

1 (1) $\frac{1}{90}$ (2) $\frac{2}{143}$ (3) $\frac{6}{9991}$

解答 观察发现计算结果的分子是原两个分母的差，
计算结果的分母是原两个分母的乘积。

2 $\frac{9}{10}$

解答 原式 $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$
 $= 1 - \frac{1}{10}$
 $= \frac{9}{10}$

3 $\frac{98}{99}$

解答 原式 $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99}$
 $= 1 - \frac{1}{99}$
 $= \frac{98}{99}$

4 $\frac{49}{200}$

解答 原式 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{100} \right)$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{49}{100}$
 $= \frac{49}{200}$

5 $\frac{2}{5}$

解答 原式 $= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{9 \times 10}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$
 $= \frac{2}{5}$

6 $\frac{3}{10}$

解答 原式 $= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} -$
 $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$
 $= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} -$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

7 $1 \frac{1}{10}$

解答 原式 $= \frac{1+2}{1 \times 2} - \frac{2+3}{2 \times 3} + \frac{3+4}{3 \times 4} - \frac{4+5}{4 \times 5} +$
 $\frac{5+6}{5 \times 6} - \frac{6+7}{6 \times 7} + \frac{7+8}{7 \times 8} - \frac{8+9}{8 \times 9} +$
 $\frac{9+10}{9 \times 10}$
 $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} -$
 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} +$
 $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$
 $= 1 + \frac{1}{10}$
 $= 1 \frac{1}{10}$

8 $\frac{4949}{9900}$

解答 原式 $= \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \dots +$
 $\frac{1}{98 \times 99} - \frac{1}{99 \times 100}$
 $= \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{99 \times 100}$
 $= \frac{4949}{9900}$

9 $14 \frac{1}{16}$

解答 原式 $= 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{12} + \dots + 1 - \frac{1}{210}$
 $+ 1 - \frac{1}{240}$
 $= 1 - \frac{1}{1 \times 2} + 1 - \frac{1}{2 \times 3} + 1 - \frac{1}{3 \times 4} + \dots$
 $+ 1 - \frac{1}{15 \times 16}$
 $= 15 - \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{15 \times 16} \right)$
 $= 15 - \left(1 - \frac{1}{16} \right)$



$$= 14 \frac{1}{16}.$$

10 $\frac{5}{9}$

解答 原式 $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{9}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{10}{9}$
 $= \frac{5}{9}.$

拓展篇

1 (1) 5, 6 (2) 5, 7 (3) 4, 7

解答

$$(1) \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6};$$

$$(2) \frac{2}{35} = \frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7};$$

$$(3) \frac{11}{28} = \frac{4+7}{4 \times 7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}.$$

2 $\frac{2007}{2008}$

解答 原式 $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008}$
 $= 1 - \frac{1}{2008}$
 $= \frac{2007}{2008}.$

3 $\frac{99}{202}$

解答 原式 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{101}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{101}$
 $= \frac{99}{202}.$

4 $\frac{12}{13}$

解答 原式 $= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$
 $+ \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$
 $= 1 - \frac{1}{13}$
 $= \frac{12}{13}.$

5 $\frac{33}{100}$

解答

$$\text{原式} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{100} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{99}{100}$$

$$= \frac{33}{100}.$$

6 (1) $81 \frac{9}{10}$ (2) $1 \frac{389}{861}$

解答 (1) 原式 $= 1 + 3 + \dots + 17 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{90}$

$$= 81 + 1 - \frac{1}{10}$$

$$= 81 \frac{9}{10}.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{4}{1 \times 3} - \frac{8}{3 \times 5} + \dots + \frac{76}{37 \times 39} -$$

$$\frac{80}{39 \times 41} + \frac{6}{2 \times 4} - \frac{10}{4 \times 6} + \dots +$$

$$\frac{78}{38 \times 40} - \frac{82}{40 \times 42}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{37} + \frac{1}{39} -$$

$$\frac{1}{39} - \frac{1}{41} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots +$$

$$\frac{1}{38} + \frac{1}{40} - \frac{1}{40} - \frac{1}{42}$$

$$= 1 - \frac{1}{41} + \frac{1}{2} - \frac{1}{42}$$

$$= 1 \frac{389}{861}.$$

7 $1 \frac{54}{55}$

解答 原式 $= 1 + 1 - \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2+3} + \dots$

$$+ \frac{1}{1+2+\dots+9} - \frac{1}{1+2+\dots+10}$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{1+2+\dots+10}$$

$$= 1 \frac{54}{55}.$$

8 $39 \frac{1}{21}$

解答 原式 $= 2 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{6} + \dots + 2 - \frac{1}{420}$

$$= 2 - \frac{1}{1 \times 2} + 2 - \frac{1}{2 \times 3} + \dots + 2 - \frac{1}{20 \times 21}$$

$$= 40 - \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{20 \times 21} \right)$$

$$= 40 - \left(1 - \frac{1}{21} \right)$$

$$= 39 \frac{1}{21}.$$

9 $33\frac{33}{50}$

解答

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 1 + \frac{2}{1 \times 4} + 1 + \frac{2}{4 \times 7} + \cdots + 1 + \frac{2}{97 \times 100} \\ &= 33 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right) \\ &= 33 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{100} \right) \\ &= 33\frac{33}{50}.\end{aligned}$$

10 $\frac{10}{11}$

$$\begin{aligned}\text{解答 原式} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{10 \times 11} \\ &= 1 - \frac{1}{11} \\ &= \frac{10}{11}.\end{aligned}$$

11 $\frac{306}{1225}$

$$\begin{aligned}\text{解答 原式} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{48 \times 49} - \frac{1}{49 \times 50} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{48 \times 49} - \frac{1}{49 \times 50} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{49 \times 50} \right) \\ &= \frac{306}{1225}.\end{aligned}$$

12 $1\frac{2}{15}$

解答

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1+3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1+4}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1+10}{8 \times 9 \times 10} \\ &= \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{8 \times 9 \times 10} + \\ &\quad \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{8 \times 9} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8 \times 9} - \frac{1}{9 \times 10} \right) + 1 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{9 \times 10} \right) + 1 - \frac{1}{9} \\ &= 1\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

13 $\frac{50}{99}$

解答 原式 = $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{99}\right) \left(1 + \frac{1}{99}\right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{98}{99} \times \frac{100}{99} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{100}{99} \\ &= \frac{50}{99}.\end{aligned}$$

14 $1\frac{2007}{2009}$

$$\begin{aligned}\text{解答 原式} &= \frac{1 \times 3 + 1}{1 \times 3} \times \frac{2 \times 4 + 1}{2 \times 4} \times \frac{3 \times 5 + 1}{3 \times 5} \\ &\quad \times \cdots \times \frac{2007 \times 2009 + 1}{2007 \times 2009} \\ &= \frac{2^2}{1 \times 3} \times \frac{3^2}{2 \times 4} \times \frac{4^2}{3 \times 5} \times \cdots \times \frac{2008^2}{2007 \times 2009} \\ &= \frac{2^{\cancel{2}}}{1 \times \cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}^2}{\cancel{2} \times \cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{3} \times \cancel{5}} \times \cdots \times \frac{2008^{\cancel{2}}}{\cancel{2007} \times \cancel{2009}} \\ &= 2 \times \frac{2008}{2009} \\ &= 1\frac{2007}{2009}.\end{aligned}$$

超越篇

1 $38\frac{19}{20}$

解答 算式中的分母是裂项计算的最基本形式,但分子比较复杂,我们可以从前几项找找规律:

$$\begin{aligned}\frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2} &= \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}, \quad \frac{2^2 + 3^2}{2 \times 3} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}, \quad \frac{3^2 + 4^2}{3 \times 4} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

我们发现一个规律:每一项减去2后,分子就变成了1.

$$\text{再来试试最后一项: } \frac{19^2 + 20^2}{19 \times 20} = \frac{761}{380} = 2\frac{1}{380},$$

也满足这个规律.这是为什么呢?

观察每一项的分子和分母,我们发现分子的每个加数都与分母大小接近,可以做如下变形:

$$\begin{aligned}\frac{19^2 + 20^2}{19 \times 20} &= \frac{19 \times (20 - 1) + 20 \times (19 + 1)}{19 \times 20} \\ &= \frac{19 \times 20 \times 2 + (20 - 19)}{19 \times 20}\end{aligned}$$



$$= 2 + \frac{1}{19 \times 20}.$$

算式中的每一项都能像上面一样进行变形.
所以:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2 \frac{1}{1 \times 2} + 2 \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + 2 \frac{1}{19 \times 20} \\ &= 2 \times 19 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20} \\ &= 38 + 1 - \frac{1}{20} \\ &= 38 \frac{19}{20}.\end{aligned}$$

2 10 $\frac{20}{21}$

$$\begin{aligned}\text{解答 原式} &= \frac{1 \times 3 + 2}{1 \times 3} + \frac{3 \times 5 + 2}{3 \times 5} + \cdots + \\ &\quad \frac{17 \times 19 + 2}{17 \times 19} + \frac{19 \times 20 + 2}{19 \times 21} \\ &= 1 + \frac{2}{1 \times 3} + 1 + \frac{2}{3 \times 5} + \cdots + 1 + \\ &\quad \frac{2}{17 \times 19} + 1 + \frac{2}{19 \times 21} \\ &= 10 + \left(\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{17 \times 19} + \frac{2}{19 \times 21} \right) \\ &= 10 + 1 - \frac{1}{21} \\ &= 10 \frac{20}{21}.\end{aligned}$$

3 60

$$\begin{aligned}\text{解答 原式} &= \frac{5}{3} \times \frac{14}{5} \times \frac{27}{7} \times \cdots \times \frac{152}{17} \times \frac{189}{19} \\ &= \frac{1}{3} \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 21 \\ &= 362\,880 \times 7, \\ \text{所以末两位是 } &60.\end{aligned}$$

4 1 $\frac{113}{760}$

$$\begin{aligned}\text{解答 原式} &= \frac{1+2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2+3}{2 \times 3 \times 4} + \frac{3+4}{3 \times 4 \times 5} + \cdots \\ &\quad + \frac{18+19}{18 \times 19 \times 20} \\ &= \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \\ &\quad \frac{3}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{18}{18 \times 19 \times 20} + \\ &\quad \frac{19}{18 \times 19 \times 20} \\ &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 4} + \cdots +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{19 \times 20} + \frac{1}{18 \times 20} \\ &= \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20} \right) + \\ &\quad \left(\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \cdots + \frac{1}{18 \times 20} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \\ &= 1 \frac{113}{760}.\end{aligned}$$

5 $1 - \frac{1}{100!}$

$$\begin{aligned}\text{解答 原式} &= \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \cdots + \frac{100-1}{100!} \\ &= \left(\frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \cdots + \frac{100}{100!} \right) - \\ &\quad \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{100!} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{99!} \right) - \\ &\quad \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{100!} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{100!}.\end{aligned}$$

6 $A > B$

$$\begin{aligned}\text{解答 } B &< \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} + \cdots + \frac{1}{63 \times 64} \\ &= \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{63} - \frac{1}{64} \\ &= \frac{1}{8},\end{aligned}$$

所以 $A > B$.

7 $\frac{103!}{3^{100}} - 6$

解答 本题是含有阶乘的裂项.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{3! \times (4-3)}{3} + \frac{4! \times (5-3)}{3^2} + \frac{5! \times (6-3)}{3^3} \\ &\quad + \cdots + \frac{102! \times (103-3)}{3^{100}} \\ &= \frac{4!}{3} - 3! + \frac{5!}{3^2} - \frac{4!}{3} + \frac{6!}{3^3} - \frac{5!}{3^2} + \cdots + \\ &\quad \frac{103!}{3^{100}} - \frac{102!}{3^{99}} \\ &= \frac{103!}{3^{100}} - 3! \\ &= \frac{103!}{3^{100}} - 6.\end{aligned}$$

8 242 500

解答 观察发现后面的式子都可以约分,如最后一个约成 $\frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1}$, 往前的约成 $\frac{100 \times 99 \times 98}{4 \times 3 \times 2}$,

$\frac{100 \times 99 \times 98}{5 \times 4 \times 3}$, 已经可以很明显地看出规律了, 分子

都是 $100 \times 99 \times 98$, 分母是有规律的, 而且可以分数裂项, 所以把最前面的几个的分子也变成 $100 \times 99 \times 98$ 即可.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{100 \times 99 \times 98}{99 \times 98 \times 97} + \frac{100 \times 99 \times 98}{98 \times 97 \times 96} + \dots + \\ &\quad \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 100 \times 99 \times 98 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{98 \times 99} \right) \\ &= 100 \times 99 \times 98 \times \frac{1}{2} \times \frac{98 \times 99 - 2}{1 \times 2 \times 98 \times 99} \\ &= \frac{1}{4} \times 100 \times (98 \times 100 - 98 - 2) \\ &= 242\,500. \end{aligned}$$

第2讲 计算综合二 兴趣篇

1 17

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad \text{原式} &= \frac{1}{3} \times \left(4.3 \times \frac{18}{5} - \frac{18}{5} + 6.7 \times \frac{18}{5} \right) - \\ &\quad \left(1.23 \times \frac{3}{41} - 5 - 0.09 \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{18}{5} \times (4.3 - 1 + 6.7) - (0.03 \times \\ &\quad 3 - 5 - 0.09) \\ &= 12 + 5 \\ &= 17. \end{aligned}$$

2 $\frac{1}{4}$

解答 一步步倒推即可.

$$\begin{aligned} 15.6 \div \left[2 \frac{2}{3} \times (1.625 + \square) - 1 \frac{1}{10} \right] - \frac{4}{15} \div \\ \frac{2}{3} &= 3 \frac{3}{5}, \\ 15.6 \div \left[2 \frac{2}{3} \times (1.625 + \square) - 1 \frac{1}{10} \right] &= \\ 3 \frac{3}{5} + \frac{4}{15} \times \frac{3}{2}, \\ 2 \frac{2}{3} \times (1.625 + \square) - 1 \frac{1}{10} &= 15.6 \div 4, \\ 2 \frac{2}{3} \times (1.625 + \square) &= 3.9 + 1.1, \\ 1.625 + \square &= 5 \times \frac{3}{8}, \\ \square &= \frac{15}{8} - \frac{13}{8}, \end{aligned}$$

$$\square = \frac{1}{4}.$$

3 $2 \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad \text{原式} &= \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{20} + \frac{28}{5} \times \frac{1}{80}} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{20} + \frac{7}{5} \times \frac{1}{20}} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{5}{8} \times 10 \times \frac{2}{5} = 2 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4 $\frac{6}{11}$

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad \text{原式} &= \frac{\frac{1950 \times 2002 + 1}{2002}}{\frac{2002 \times 1950 + 1}{1950}} - \frac{\frac{5}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{7}{2}} \\ &= \frac{1950}{2002} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{13 \times 150}{13 \times 11 \times 7 \times 2} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{75 - 33}{11 \times 7} \\ &= \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

5 (1) $1 \frac{3}{7}$ (2) $1 \frac{13}{30}$ (3) $\frac{1987}{3973}$

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad (1) \text{原式} &= 1 + \frac{1}{7} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7} = 1 \frac{3}{7}. \\ (2) \text{原式} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30} = 1 \frac{13}{30}. \\ (3) \text{原式} &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1986}{1987}}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1987}{1986}} \\ &= 1 - \frac{1986}{1986 + 1987} = \frac{1987}{3973}. \end{aligned}$$

6 9

解答 考虑到 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{1}{10}$ 都是位数很少的有限小数, 只用计算 $\frac{1}{7} + \frac{1}{9}$. 计算结果是 $0.\dot{2}5396\dot{8}$, 而 2008 除以 6 余 4, 所以小数点后第 2008 位是数字 9.

7 (1) $\frac{101}{5100}$ (2) $1\frac{32}{35}$ (3) $\frac{5}{11}$

解答 (1) 原式 = $\frac{100+102}{100 \times 102} = \frac{101}{5100}$.

(2) 原式 = $\left(\frac{3+4}{3 \times 4}\right) \Delta 5 = \frac{7}{12} \Delta 5 = \frac{\frac{7}{12} + 5}{\frac{7}{12} \times 5}$

= $\frac{67}{12} \times \frac{12}{35} = \frac{67}{35} = 1\frac{32}{35}$.

(3) 原式 = $\frac{\frac{1+2}{1 \times 2} \Delta 3}{1 \Delta \left(\frac{2+3}{2 \times 3}\right)} = \frac{\frac{3}{2} \Delta 3}{1 \Delta \frac{5}{6}} = \frac{\frac{\frac{3}{2} + 3}{\frac{3}{2} \times 3}}{1 \times \frac{5}{6}}$

= $\frac{\frac{9}{2} \times \frac{2}{9}}{\frac{11}{6} \times \frac{6}{5}} = \frac{5}{11}$.

8 $84\frac{1}{4}$

解答 将原式慢慢化简,再利用比例的内项积等于外项积即可得到答案:

$37 \times 9\frac{3}{112} : \square = 37 : \frac{56}{6},$

$9\frac{3}{112} : \square = 1 : \frac{28}{3},$

$\square \times 1 = \frac{28}{3} \times \frac{1011}{112},$

$\square = \frac{337}{4},$

$\square = 84\frac{1}{4}.$

9 2660

解答 典型的整数裂项,原式 = $\frac{1}{3} \times 19 \times 20 \times 21 = 2660$.

10 (1) 9999 (2) 343 400

解答 (1) $\frac{1}{\Delta 1} + \frac{1}{\Delta 2} + \frac{1}{\Delta 3} + \cdots + \frac{1}{\Delta 99}$

= $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} = \frac{99}{100}$

= $\frac{99 \times 101}{100 \times 101} = \frac{9999}{\Delta 100},$

所以方框内应填入 9999.

(2) $\Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \cdots + \Delta 100$

= $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 100 \times 101$

= $\frac{1}{3} \times 100 \times 101 \times 102$

= 343 400.

拓展篇

1 $11\frac{1}{13}$

解答 原式 = $\left(3.85 \times \frac{18}{5} + 12.3 \times \frac{9}{5}\right) \times \frac{4}{13}$

= $\left(7.7 \times \frac{9}{5} + 12.3 \times \frac{9}{5}\right) \times \frac{4}{13}$

= $20 \times \frac{9}{5} \times \frac{4}{13}$

= $\frac{144}{13} = 11\frac{1}{13}.$

2 $\frac{1}{2}$

解答 原式 = $\frac{\frac{7}{18} \times \frac{8}{2} + \frac{1}{6}}{\frac{40}{3} - \frac{15}{4} \times \frac{16}{8}} \times \frac{8}{23}$

= $\frac{\frac{7}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{40}{3} - 12} \times \frac{8}{23}$

= $\frac{\frac{23}{12}}{\frac{4}{3}} \times \frac{8}{23} = \frac{23}{12} \times \frac{8}{4} \times \frac{8}{23}$

= $\frac{1}{2}.$

3 $1\frac{1}{4}$

解答 因为 $\frac{19\frac{5}{9} + 3\frac{9}{10} - 5.22}{19\frac{5}{9} - 6\frac{27}{50} + 5.22}$

= $\frac{19\frac{5}{9} + 3.9 - 5.22}{19\frac{5}{9} - 6.54 + 5.22}$

= $\frac{19\frac{5}{9} - 1.32}{19\frac{5}{9} - 1.32} = 1,$

及 $\frac{1993 \times 0.4}{1995 \times 0.5} + \frac{1.6}{1995}$

= $\frac{1993 \times 0.4 \times 2}{1995 \times 0.5 \times 2} + \frac{1.6}{1995}$

= $\frac{1993 \times 0.8}{1995} + \frac{2 \times 0.8}{1995} = \frac{1993 + 2}{1995} \times 0.8$

= 0.8,

所以,原式 = $1 \div 0.8 = 1.25 = 1\frac{1}{4}.$

4 $\frac{25}{256}$

解答 原式 = $\frac{\frac{5}{8} \times \frac{155}{384}}{\frac{1}{3} + 2.25} = \frac{5}{8} \times \frac{155}{384} \times \frac{12}{31} = \frac{25}{256}$.

5 $6\frac{7}{40}$

解答 观察发现,求这 6 条线段的长度和的时候,每个端点上的数字都被加了三次,所以长度总和是

$$\begin{aligned} & 3 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 0.6 + 0.875 \right) \\ &= 3 \times \left(\frac{40}{120} + \frac{30}{120} + \frac{72}{120} + \frac{105}{120} \right) \\ &= 3 \times \frac{247}{120} = \frac{247}{40} = 6\frac{7}{40}. \end{aligned}$$

6 1

解答 设 $a = \frac{531}{135} + \frac{579}{357} + \frac{753}{975}$, $b = \frac{579}{357} + \frac{753}{975}$, 于是有:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a \times \left(b + \frac{135}{531} \right) - \left(a + \frac{135}{531} \right) \times b \\ &= \left(ab + \frac{135}{531}a \right) - \left(ab + \frac{135}{531}b \right) \\ &= \frac{135}{531}(a - b) = \frac{135}{531} \times \frac{531}{135} = 1. \end{aligned}$$

7 5

解答 算式可化为:

$$\frac{1}{2} \times 2004 + \frac{1}{3} \times 2004 + \dots + \frac{1}{12} \times 2004 + \frac{1}{13} \times 2004.$$

其中 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{12}$ 乘以 2004 的结果都是整数, $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{10}$ 乘以 2004 的结果都只有 1 位小数, 这些结果都不会影响计算结果的第 2004 位数字. 所以可以把这些项去掉, 算式变为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7} \times 2004 + \frac{1}{9} \times 2004 + \frac{1}{11} \times 2004 + \frac{1}{13} \times 2004 \\ &= \frac{2002}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1998}{9} + \frac{6}{9} + \frac{2002}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2002}{13} + \frac{2}{13}. \end{aligned}$$

所以结果的小数部分等于算式 $\frac{2}{7} + \frac{6}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13}$ 的小数部分.

$$\begin{aligned} & \text{由于 } \frac{2}{7} + \frac{6}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2 \times 143 + 2 \times 91 + 2 \times 77}{1001} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{622}{1001} = \frac{666\ 666 + 621\ 378}{999\ 999} \end{aligned}$$

$$= 1\frac{288\ 045}{999\ 999} = 1.\dot{2}88\ 04\dot{5},$$

它的小数点后第 2004 位上的数是 5. (或者把这 4 个分数都化成循环小数, 再列竖式相加也可轻松解决).

8 3.16

解答 假设半径为 r , 那么直径为 $2r$. 直径减去直径的 $\frac{1}{9}$, 然后再平方, 得到的是 $\left(\frac{8}{9} \times 2r\right)^2 = \frac{256}{81}r^2$, 所以古埃及人认为圆周率 π 等于 $\frac{256}{81}$, 约等于 3.16.

9 (1) $\frac{30}{157}$ (2) $1\frac{1}{4}$

解答 (1) 原式 = $\frac{1}{5 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} = \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{30}{7}}} = \frac{1}{5 + \frac{7}{30}} = \frac{157}{30}$

$$= \frac{30}{157}.$$

(2) 原方程两边同时取倒数, 得:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x + \frac{1}{4}}} = \frac{11}{8}, \text{ 即 } \frac{1}{2 + \frac{1}{x + \frac{1}{4}}} = \frac{3}{8};$$

将其两边同时取倒数得: $2 + \frac{1}{x + \frac{1}{4}} = \frac{8}{3}$, 即

$$\frac{1}{x + \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}; \text{ 将其两边同时取倒数得: } x + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}, \text{ 即 } x = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

10 (1) 1 (2) $\frac{100}{101}$

解答 (1) 因为 $2 \times 3 = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{(2+1)(3+A)}$, 依题意有 $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{(2+1)(3+A)} = \frac{1}{4}$, 解方程得 $A=1$.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{99 \times 100} + \frac{1}{100 \times 101} \right) \\ &= \frac{100}{101}. \end{aligned}$$

11 B 比 A 大 $\frac{1}{2000}$

解答 $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000}$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} -$$



$$\begin{aligned}
 & 2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2000} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} - \\
 & \quad \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1000} \right) \\
 &= \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000},
 \end{aligned}$$

很明显看出 B 比 A 大 $\frac{1}{2000}$.

12 4945

解答 典型的整数裂项.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 1 \times 3 + \frac{1}{6} (29 \times 31 \times 33 - 1 \times 3 \times 5) \\
 &= 4945.
 \end{aligned}$$

13 166 650

解答 注意到第 n 层的圆圈数的和为 $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, 所以第 99 个图形中所有圆圈的个数是

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{99 \times 100}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 99 \times 100 \times 101 \\
 &= 166\,650.
 \end{aligned}$$

$$\text{14 (1) } a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, a_{100} = \frac{1}{10\,100}, a_{200} = \frac{1}{40\,200} \quad \text{(2) 25 840 850}$$

解答 (1) 先将 a_n 化简, $a_n = \frac{\frac{1}{n}}{2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}}$

$$= \frac{1}{n(n+1)}, \text{ 所以直接代入通项公式可得 } a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{1}{6}, a_{100} = \frac{1}{10\,100}, a_{200} = \frac{1}{40\,200}.$$

(2) 注意到 $\frac{n}{a_n} = n \times n \times (n+1) = n^3 + n^2$, 所以

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3) + (1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2) \\
 &= \frac{100^2 \times 101^2}{4} + \frac{100 \times 101 \times 201}{6} \\
 &= 25\,840\,850.
 \end{aligned}$$

超越篇

1 23 $\frac{1}{2}$

解答 原式 $= \frac{21}{17} \times \frac{23}{12} - \frac{3}{1} \times \frac{15}{91} \times \frac{13}{33} + \frac{215}{12} \times \frac{17}{21}$

$$= \frac{7 \times 23}{68} - \frac{288}{91} \times \frac{77}{96} \times \frac{13}{33} + \frac{215}{12} \times \frac{21}{17}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{7 \times 23}{68} - 1 + \frac{7 \times 215}{68} \\
 &= \frac{7 \times 238}{68} - 1 \\
 &= \frac{49}{2} - 1 \\
 &= 23 \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

2 4、13 或 22

解答 很明显能看出若这个分数约分成最简分数 $\frac{b}{9}$ 或 $\frac{c}{3}$, 是不符合题意的. 由于 $\frac{a}{27} = \frac{37a}{999}$, 所以分母为 27 的最简真分数是三位循环小数, 恰好 2004 是 3 的倍数, 所以 8684 是 $2004 \div 3 = 668$ 个循环节的数字的和, 那么 1 个循环节的数字和是 $8684 \div 668 = 13$. 注意到一个数和它的数字和除以 9 的余数是相同的, 所以, $37a \equiv a \equiv 4 \pmod{9}$, 所以符合条件的 a 为 4、13、22.

3 (1) 2 (2) 510

解答 (1) 依题意得: $m\Omega 1 = m$, $m\Omega 2 = 2 \times (m\Omega 1) + m = 3m$, $m\Omega 3 = 2 \times (m\Omega 2) + m = 7m$, $m\Omega 4 = 2 \times (m\Omega 3) + m = 15m$, 又 $m\Omega 4 = 30$, 所以 $m = 2$.

(2) 以此类推, $m\Omega 5 = 2 \times (m\Omega 4) + m = 31m$, $m\Omega 6 = 2 \times (m\Omega 5) + m = 63m$, $m\Omega 7 = 2 \times (m\Omega 6) + m = 127m$, $m\Omega 8 = 2 \times (m\Omega 7) + m = 255m = 510$.

当然, 其实做完第一问就可以猜想出 $m\Omega n = (2^n - 1)m$. 或者注意到 $m\Omega n + m = 2[m\Omega(n-1)] + 2m = 2[m\Omega(n-1) + m]$, 所以 $m\Omega 8 + m = 2^7(m\Omega 1 + m) = 256m$, 则 $m\Omega 8 = 255m$.

本题拓展一下就相当于求递推数列 $a_n = 2a_{n-1} + m$, $a_1 = m$ 的通项公式.

4 $A < C < B$

解答 注意到 $A \times B = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{97}{98} \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$, 且 $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{98}{99} \times \frac{100}{101} = \frac{100}{101} B < B$.

所以 $A^2 < AB = \frac{1}{100}$, 即 $A < \frac{1}{10}$; 同理, $B^2 >$

$AB = \frac{1}{100}$, 即 $B > \frac{1}{10}$.

综上, $A < C < B$.

5 (1) 101 (2) 4

解答 (1) 设 $A = 11 \times 65 + 12 \times 66 + 13 \times 67 +$