

高中数学知识点总结

1. 对于集合，一定要抓住集合的代表元素，及元素的“确定性、互异性、无序性”。

如：集合 $A = \{x|y = \lg x\}$ ， $B = \{y|y = \lg x\}$ ， $C = \{(x,y)|y = \lg x\}$ ， A 、 B 、 C

中元素各表示什么？

2. 进行集合的交、并、补运算时，不要忘记集合本身和空集 \emptyset 的特殊情况。

注重借助于数轴和文氏图解集合问题。

空集是一切集合的子集，是一切非空集合的真子集。

如：集合 $A = \{x|x^2 - 2x - 3 = 0\}$ ， $B = \{x|ax = 1\}$

若 $B \subset A$ ，则实数 a 的值构成的集合为 _____

(答： $\left\{-1, 0, \frac{1}{3}\right\}$)

3. 注意下列性质：

(1) 集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的所有子集的个数是 2^n ；

(2) 若 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ ， $A \cup B = B$ ；

(3) 德摩根定律：

$$C_U(A \cup B) = (C_U A) \cap (C_U B), \quad C_U(A \cap B) = (C_U A) \cup (C_U B)$$

4. 你会用补集思想解决问题吗？（排除法、间接法）

如：已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a} < 0$ 的解集为 M ，若 $3 \in M$ 且 $5 \notin M$ ，求实数 a

的取值范围。

$$\begin{aligned} (\because 3 \in M, \therefore \frac{a \cdot 3 - 5}{3^2 - a} < 0 \\ \Rightarrow a \in \left[1, \frac{5}{3}\right) \cup (9, 25) \\ \because 5 \notin M, \therefore \frac{a \cdot 5 - 5}{5^2 - a} \geq 0 \end{aligned}$$

5. 可以判断真假的语句叫做命题，逻辑连接词有“或”(\vee)，“且”(\wedge)和

“非”(\neg)。

若 $p \wedge q$ 为真，当且仅当 p 、 q 均为真

若 $p \vee q$ 为真，当且仅当 p 、 q 至少有一个为真

若 $\neg p$ 为真，当且仅当 p 为假

6. 命题的四种形式及其相互关系是什么？

(互为逆否关系的命题是等价命题。)

原命题与逆否命题同真、同假；逆命题与否命题同真同假。

7. 对映射的概念了解吗？映射 $f: A \rightarrow B$ ，是否注意到 A 中元素的任意性和 B 中与之对应元素的唯一性，哪几种对应能构成映射？

(一对一，多对一，允许 B 中有元素无原象。)

8. 函数的三要素是什么？如何比较两个函数是否相同？

(定义域、对应法则、值域)

9. 求函数的定义域有哪些常见类型？

例：函数 $y = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{\lg(x-3)^2}$ 的定义域是 _____

(答： $(0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$)

10. 如何求复合函数的定义域？

如：函数 $f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$ ， $b > -a > 0$ ，则函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$ 的定义域是 _____。

(答： $[a, -a]$)

11. 求一个函数的解析式或一个函数的反函数时，注明函数的定义域了吗？

如： $f(\sqrt{x+1}) = e^x + x$ ，求 $f(x)$ 。

令 $t = \sqrt{x+1}$ ，则 $t \geq 0$

$$\therefore x = t^2 - 1$$

$$\therefore f(t) = e^{t^2-1} + t^2 - 1$$

$$\therefore f(x) = e^{x^2-1} + x^2 - 1 \quad (x \geq 0)$$

12. 反函数存在的条件是什么？

(一一对应函数)

求反函数的步骤掌握了吗？

(①反解 x ；②互换 x 、 y ；③注明定义域)

如：求函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 的反函数

(答： $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & (x > 1) \\ -\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$)

13. 反函数的性质有哪些？

①互为反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称；

②保存了原来函数的单调性、奇偶性；

③设 $y = f(x)$ 的定义域为 A ，值域为 C ， $a \in A$ ， $b \in C$ ，则 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

$$\therefore f^{-1}[f(a)] = f^{-1}(b) = a, \quad f[f^{-1}(b)] = f(a) = b$$

14. 如何用定义证明函数的单调性？

(取值、作差、判正负)

如何判断复合函数的单调性？

$$(y = f(u), \quad u = \varphi(x), \quad \text{则 } y = f[\varphi(x)])$$

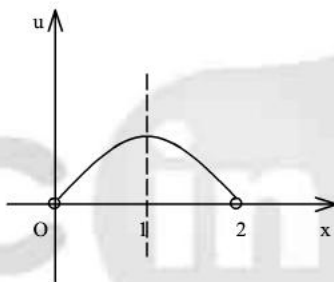
(外层) (内层)

当内、外层函数单调性相同时 $f[\varphi(x)]$ 为增函数，否则 $f[\varphi(x)]$ 为减函数。)

如：求 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x)$ 的单调区间

(设 $u = -x^2 + 2x$, 由 $u > 0$ 则 $0 < x < 2$)

且 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$, $u = -(x-1)^2 + 1$, 如图：



当 $x \in (0, 1]$ 时, $u \uparrow$, 又 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$, $\therefore y \downarrow$

当 $x \in [1, 2)$ 时, $u \downarrow$, 又 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$, $\therefore y \uparrow$

$\therefore \dots$)

15. 如何利用导数判断函数的单调性？

在区间 (a, b) 内, 若总有 $f'(x) \geq 0$ 则 $f(x)$ 为增函数。(在个别点上导数等于

零, 不影响函数的单调性), 反之也对, 若 $f'(x) \leq 0$ 呢?

如：已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = x^3 - ax$ 在 $[1, +\infty)$ 上是单调增函数, 则 a 的最大值是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

$$(\text{令 } f'(x) = 3x^2 - a = 3\left(x + \sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{a}{3}}\right) \geq 0$$

$$\text{则 } x \leq -\sqrt{\frac{a}{3}} \text{ 或 } x \geq \sqrt{\frac{a}{3}}$$

由已知 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数, 则 $\sqrt{\frac{a}{3}} \leq 1$, 即 $a \leq 3$

$\therefore a$ 的最大值为 3)

16. 函数 $f(x)$ 具有奇偶性的必要(非充分)条件是什么?

($f(x)$ 定义域关于原点对称)

若 $f(-x) = -f(x)$ 总成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数 \Leftrightarrow 函数图象关于原点对称

若 $f(-x) = f(x)$ 总成立 $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数 \Leftrightarrow 函数图象关于 y 轴对称

注意如下结论:

(1) 在公共定义域内: 两个奇函数的乘积是偶函数; 两个偶函数的乘积是偶函数; 一个偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数且定义域中有原点, 则 $f(0) = 0$ 。

如: 若 $f(x) = \frac{a \cdot 2^x + a - 2}{2^x + 1}$ 为奇函数, 则实数 $a =$ _____

($\because f(x)$ 为奇函数, $x \in \mathbb{R}$, 又 $0 \in \mathbb{R}$, $\therefore f(0) = 0$)

即 $\frac{a \cdot 2^0 + a - 2}{2^0 + 1} = 0$, $\therefore a = 1$)

又如: $f(x)$ 为定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = \frac{2^x}{4^x + 1}$,

求 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上的解析式。

(令 $x \in (-1, 0)$, 则 $-x \in (0, 1)$, $f(-x) = \frac{2^{-x}}{4^{-x} + 1}$)

又 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(x) = -\frac{2^{-x}}{4^{-x} + 1} = -\frac{2^x}{1 + 4^x}$

又 $f(0) = 0$, $\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{2^x}{4^x + 1} & x \in (-1, 0) \\ 0 & x = 0 \\ \frac{2^x}{4^x + 1} & x \in (0, 1) \end{cases}$

17. 你熟悉周期函数的定义吗?

(若存在实数 T ($T \neq 0$), 在定义域内总有 $f(x+T) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数, T 是一个周期。)

如: 若 $f(x+a) = -f(x)$, 则 _____

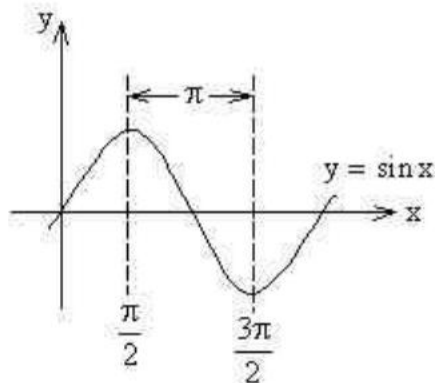
(答: $f(x)$ 是周期函数, $T = 2a$ 为 $f(x)$ 的一个周期)

又如: 若 $f(x)$ 图象有两条对称轴 $x = a$, $x = b$ (\Leftrightarrow)

即 $f(a + x) = f(a - x)$, $f(b + x) = f(b - x)$

则 $f(x)$ 是周期函数, $2|a - b|$ 为一个周期

如:



18. 你掌握常用的图象变换了吗?

$f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象关于 y轴 对称

$f(x)$ 与 $-f(x)$ 的图象关于 x轴 对称

$f(x)$ 与 $-f(-x)$ 的图象关于 原点 对称

$f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图象关于 直线 $y = x$ 对称

$f(x)$ 与 $f(2a - x)$ 的图象关于 直线 $x = a$ 对称

$f(x)$ 与 $-f(2a - x)$ 的图象关于 点 $(a, 0)$ 对称

将 $y = f(x)$ 图象 $\xrightarrow[\text{右移 } a(a>0) \text{ 个单位}]{\text{左移 } a(a>0) \text{ 个单位}}$ $y = f(x + a)$
 $y = f(x - a)$

$\xrightarrow[\text{下移 } b(b>0) \text{ 个单位}]{\text{上移 } b(b>0) \text{ 个单位}}$ $y = f(x + a) + b$
 $y = f(x + a) - b$

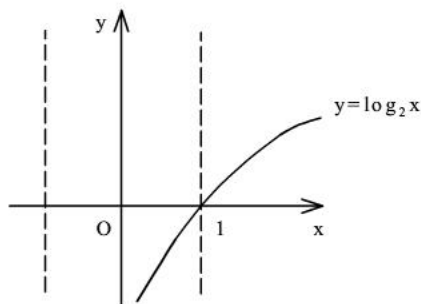
注意如下“翻折”变换:

$f(x) \longrightarrow |f(x)|$

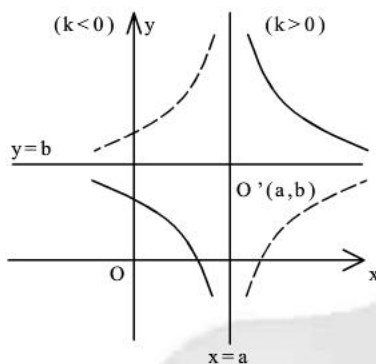
$f(x) \longrightarrow f(|x|)$

如: $f(x) = \log_2(x + 1)$

作出 $y = |\log_2(x + 1)|$ 及 $y = \log_2|x + 1|$ 的图象



19. 你熟练掌握常用函数的图象和性质了吗？



(1) 一次函数： $y = kx + b$ ($k \neq 0$)

(2) 反比例函数： $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 推广为 $y = b + \frac{k}{x - a}$ ($k \neq 0$) 是中心 $O'(a, b)$

的双曲线。

(3) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) $= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 图象为抛物线

顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ，对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$

开口方向： $a > 0$ ，向上，函数 $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$a < 0$ ，向下， $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

应用：① “三个二次”（二次函数、二次方程、二次不等式）的关系——二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$ ， $\Delta > 0$ 时，两根 x_1 、 x_2 为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴

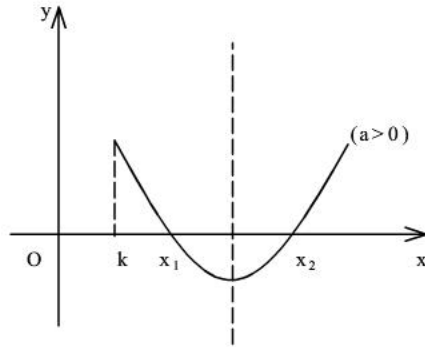
的两个交点，也是二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0) 解集的端点值。

② 求闭区间 $[m, n]$ 上的最值。

③ 求区间定（动），对称轴动（定）的最值问题。

④ 一元二次方程根的分布问题。

如：二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根都大于 $k \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > k \\ f(k) > 0 \end{cases}$

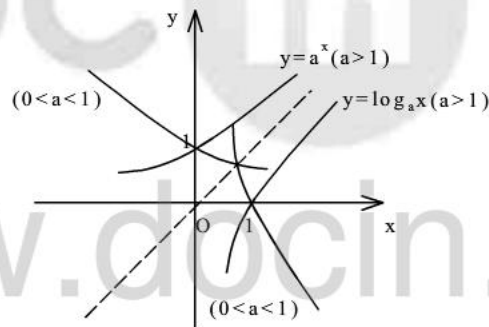


一根大于 k ，一根小于 $k \Leftrightarrow f(k) < 0$

(4) 指数函数： $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

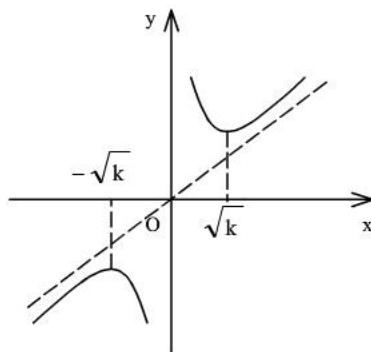
(5) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

由图象记性质！ (注意底数的限定！)



(6) “对勾函数” $y = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$)

利用它的单调性求最值与利用均值不等式求最值的区别是什么？



20. 你在基本运算上常出现错误吗？

指数运算： $a^0 = 1 (a \neq 0)$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p} (a \neq 0)$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a \geq 0)$, $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0)$

对数运算： $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N (M > 0, N > 0)$

$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$, $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$

对数恒等式： $a^{\log_a x} = x$

对数换底公式： $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

21. 如何解抽象函数问题？

(赋值法、结构变换法)

如：(1) $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 证明 $f(x)$ 为奇函数。

(先令 $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ 再令 $y = -x$, ...)

(2) $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 证明 $f(x)$ 是偶函数。

(先令 $x = y = -t \Rightarrow f[(-t)(-t)] = f(t \cdot t)$)

$\therefore f(-t) + f(-t) = f(t) + f(t)$

$\therefore f(-t) = f(t) \dots \dots$

(3) 证明单调性： $f(x_2) = f[(x_2 - x_1) + x_1] = \dots$

22. 掌握求函数值域的常用方法了吗？

(二次函数法(配方法), 反函数法, 换元法, 均值定理法, 判别式法, 利用函数单调性法, 导数法等。)

如求下列函数的最值:

$$(1) y = 2x - 3 + \sqrt{13 - 4x}$$

$$(2) y = \frac{2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 3}$$

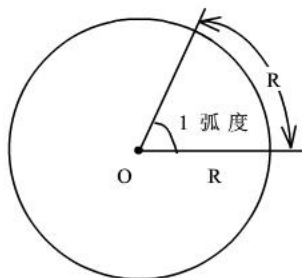
$$(3) x > 3, y = \frac{2x^2}{x-3}$$

$$(4) y = x + 4 + \sqrt{9 - x^2} \text{ (设 } x = 3 \cos \theta, \theta \in [0, \pi])$$

$$(5) y = 4x + \frac{9}{x}, x \in (0, 1]$$

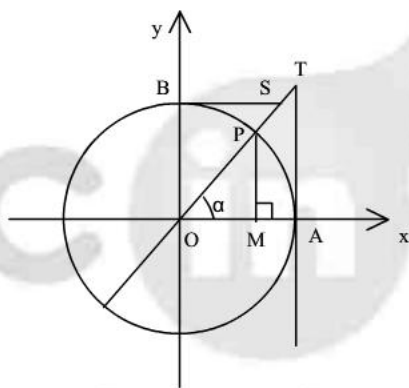
23. 你记得弧度的定义吗？能写出圆心角为 α ，半径为 R 的弧长公式和扇形面积公式吗？

$$(l = |\alpha| \cdot R, S_{\text{扇}} = \frac{1}{2} l \cdot R = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot R^2)$$



24. 熟记三角函数的定义，单位圆中三角函数线的定义

$$\sin \alpha = MP, \cos \alpha = OM, \tan \alpha = AT$$

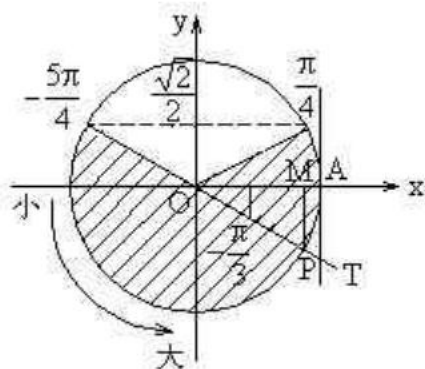


如：若 $-\frac{\pi}{8} < \theta < 0$ ，则 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\tan \theta$ 的大小顺序是 _____

又如：求函数 $y = \sqrt{1 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ 的定义域和值域。

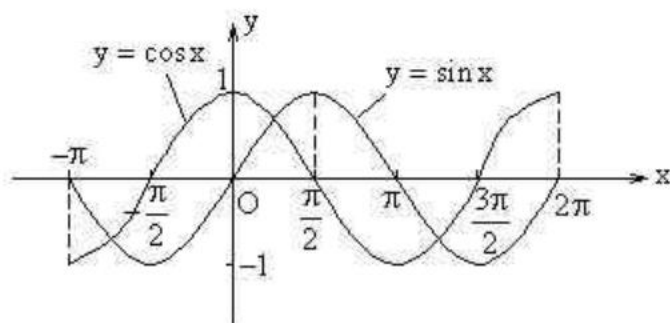
$$(\because 1 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \sqrt{2} \sin x \geq 0)$$

$$\therefore \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 如图:}$$

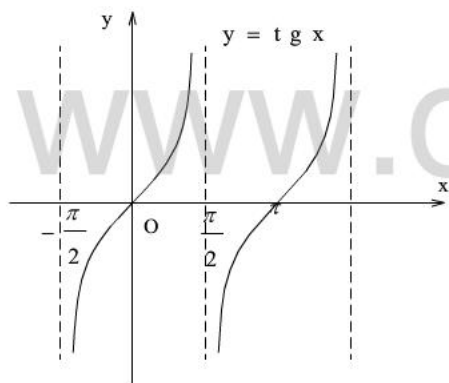


$$\therefore 2k\pi - \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1+\sqrt{2}}$$

25. 你能迅速画出正弦、余弦、正切函数的图象吗？并由图象写出单调区间、对称点、对称轴吗？



$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1$$



$$\text{对称点为 } \left(k\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \sin x \text{ 的增区间为 } \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{减区间为 } \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{图象的对称点为 } (k\pi, 0), \quad \text{对称轴为 } x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$y = \cos x$ 的增区间为 $[2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbb{Z})$

减区间为 $[2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi] (k \in \mathbb{Z})$

图象的对称点为 $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right)$, 对称轴为 $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$y = \tan x$ 的增区间为 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) k \in \mathbb{Z}$

26. 正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象和性质要熟记。〔或 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 〕

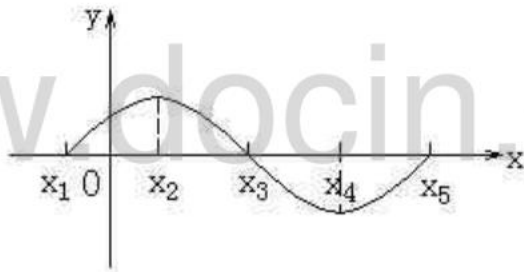
(1) 振幅 $|A|$, 周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$

若 $f(x_0) = \pm A$, 则 $x = x_0$ 为对称轴。

若 $f(x_0) = 0$, 则 $(x_0, 0)$ 为对称点, 反之也对。

(2) 五点作图: 令 $\omega x + \varphi$ 依次为 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, 求出 x 与 y , 依点 (x, y) 作图象。

(3) 根据图象求解析式。(求 A 、 ω 、 φ 值)



如图列出 $\begin{cases} \omega(x_1) + \varphi = 0 \\ \omega(x_2) + \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

解条件组求 ω 、 φ 值

Δ 正切型函数 $y = A \tan(\omega x + \varphi)$, $T = \frac{\pi}{|\omega|}$

27. 在三角函数中求一个角时要注意两个方面——先求出某一个三角函数值, 再判定角的范围。

如: $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, 求 x 值。

$$\left(\because \pi < x < \frac{3\pi}{2}, \therefore \frac{7\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{3}, \therefore x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{4}, \therefore x = \frac{13}{12}\pi \right)$$

28. 在解含有正、余弦函数的问题时，你注意（到）运用函数的有界性了吗？

如：函数 $y = \sin x + \sin|x|$ 的值域是 _____

$$(x \geq 0 \text{ 时}, y = 2 \sin x \in [-2, 2], x < 0 \text{ 时}, y = 0, \therefore y \in [-2, 2])$$

29. 熟练掌握三角函数图象变换了吗？

（平移变换、伸缩变换）

平移公式：

$$(1) \text{ 点 } P(x, y) \xrightarrow[\text{平移至}]{\vec{a}=(h, k)} P'(x', y'), \text{ 则 } \begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases}$$

$$(2) \text{ 曲线 } f(x, y) = 0 \text{ 沿向量 } \vec{a} = (h, k) \text{ 平移后的方程为 } f(x - h, y - k) = 0$$

如：函数 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ 的图象经过怎样的变换才能得到 $y = \sin x$ 的

图象？

$$\begin{aligned} & \left(y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \xrightarrow{\text{横坐标伸长到原来的2倍}} y = 2 \sin\left[2\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{\pi}{4}\right] - 1 \right. \\ & \left. = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \xrightarrow{\text{左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位}} y = 2 \sin x - 1 \xrightarrow{\text{上平移1个单位}} y = 2 \sin x \right. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{纵坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}\text{倍}} y = \sin x$$

30. 熟练掌握同角三角函数关系和诱导公式了吗？

$$\begin{aligned} & \text{如：} 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = \tan \alpha \cdot \cot \alpha = \cos \alpha \cdot \sec \alpha = \tan \frac{\pi}{4} \\ & = \sin \frac{\pi}{2} = \cos 0 = \cdots \cdots \text{称为1的代换。} \end{aligned}$$

“ $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ”化为 α 的三角函数——“奇变，偶不变，符号看象限”，

“奇”、“偶”指 k 取奇、偶数。

$$\text{如：} \cos \frac{9\pi}{4} + \tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \sin(21\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{又如：函数 } y = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha}, \text{ 则 } y \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}$$

A. 正值或负值 B. 负值 C. 非负值 D. 正值

$$\left(y = \frac{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha (\cos \alpha + 1)}{\cos^2 \alpha (\sin \alpha + 1)} > 0, \because \alpha \neq 0 \right)$$

31. 熟练掌握两角和、差、倍、降幂公式及其逆向应用了吗？

理解公式之间的联系：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \xrightarrow{\text{令 } \alpha = \beta} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \xrightarrow{\text{令 } \alpha = \beta} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\downarrow$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\downarrow$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

应用以上公式对三角函数式化简。（化简要求：项数最少、函数种类最少，分母中不含三角函数，能求值，尽可能求值。）

具体方法：

(1) 角的变换：如 $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$, $\frac{\alpha + \beta}{2} = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) \dots$

(2) 名的变换：化弦或化切

(3) 次数的变换：升、降幂公式

(4) 形的变换：统一函数形式，注意运用代数运算。

如：已知 $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos 2\alpha} = 1$, $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{2}{3}$, 求 $\tan(\beta - 2\alpha)$ 的值。

(由已知得： $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} = 1$, $\therefore \tan \alpha = \frac{1}{2}$)

又 $\tan(\beta - \alpha) = \frac{2}{3}$

$$\therefore \tan(\beta - 2\alpha) = \tan[(\beta - \alpha) - \alpha] = \frac{\tan(\beta - \alpha) - \tan \alpha}{1 + \tan(\beta - \alpha) \cdot \tan \alpha} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

32. 正、余弦定理的各种表达形式你还记得吗？如何实现边、角转化，而解斜三角形？

$$\text{余弦定理： } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

（应用：已知两边一夹角求第三边；已知三边求角。）

$$\text{正弦定理： } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C$$

$$\because A + B + C = \pi, \therefore A + B = \pi - C$$

$$\therefore \sin(A + B) = \sin C, \sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{如 } \Delta ABC \text{ 中, } 2 \sin^2 \frac{A + B}{2} + \cos 2C = 1$$

（1）求角 C；

$$\text{（2）若 } a^2 = b^2 + \frac{c^2}{2}, \text{ 求 } \cos 2A - \cos 2B \text{ 的值。}$$

$$\text{（（1）由已知式得： } 1 - \cos(A + B) + 2 \cos^2 C - 1 = 1$$

$$\text{又 } A + B = \pi - C, \therefore 2 \cos^2 C + \cos C - 1 = 0$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2} \text{ 或 } \cos C = -1 \text{（舍）}$$

$$\text{又 } 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{（2）由正弦定理及 } a^2 = b^2 + \frac{1}{2}c^2 \text{ 得：}$$

$$2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B = \sin^2 C = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$$

$$1 - \cos 2A - 1 + \cos 2B = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos 2A - \cos 2B = -\frac{3}{4}$$

33. 用反三角函数表示角时要注意角的范围。

$$\text{反正弦： } \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], x \in [-1, 1]$$

$$\text{反余弦： } \arccos x \in [0, \pi], x \in [-1, 1]$$

反正切： $\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), (x \in \mathbb{R})$

34. 不等式的性质有哪些？

$$(1) \ a > b, \begin{cases} c > 0 \Rightarrow ac > bc \\ c < 0 \Rightarrow ac < bc \end{cases}$$

$$(2) \ a > b, \ c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

$$(3) \ a > b > 0, \ c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$$

$$(4) \ a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \ a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$(5) \ a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n, \ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

$$(6) \ |x| < a \ (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a, \ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a$$

如：若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ ，则下列结论不正确的是（ ）

A. $a^2 < b^2$

B. $ab < b^2$

C. $|a| + |b| > |a + b|$

D. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

答案：C

35. 利用均值不等式：

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \ (a, b \in \mathbb{R}^+); \ a + b \geq 2\sqrt{ab}; \ ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ 求最值时，你是否注}$$

意到“ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ”且“等号成立”时的条件，积 (ab) 或和 $(a+b)$ 其中之一为定

值？（一正、二定、三相等）

注意如下结论：

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \ (a, b \in \mathbb{R}_+)$$

当且仅当 $a = b$ 时等号成立。

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \ (a, b \in \mathbb{R})$$

当且仅当 $a = b = c$ 时取等号。

$a > b > 0, \ m > 0, \ n > 0$ ，则

$$\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} < 1 < \frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$$

如：若 $x > 0$ ， $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值为 _____

$$\left(\text{设 } y = 2 - \left(3x + \frac{4}{x} \right) \leq 2 - 2\sqrt{12} = 2 - 4\sqrt{3} \right)$$

当且仅当 $3x = \frac{4}{x}$ ，又 $x > 0$ ， $\therefore x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时， $y_{\max} = 2 - 4\sqrt{3}$

又如： $x + 2y = 1$ ，则 $2^x + 4^y$ 的最小值为 _____

$$\left(\because 2^x + 2^{2y} \geq 2\sqrt{2^{x+2y}} = 2\sqrt{2^1}, \therefore \text{最小值为 } 2\sqrt{2} \right)$$

36. 不等式证明的基本方法都掌握了吗？

（比较法、分析法、综合法、数学归纳法等）

并注意简单放缩法的应用。

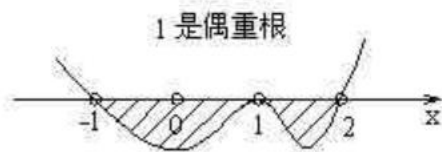
如：证明 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \right) \\ & = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ & = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

37. 解分式不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} > a$ ($a \neq 0$) 的一般步骤是什么？

（移项通分，分子分母因式分解， x 的系数变为 1，穿轴法解得结果。）

38. 用“穿轴法”解高次不等式——“奇穿，偶切”，从最大根的右上方开始



$$\text{如：} (x+1)(x-1)^2(x-2)^3 < 0$$

39. 解含有参数的不等式要注意对字母参数的讨论

如：对数或指数的底分 $a > 1$ 或 $0 < a < 1$ 讨论

40. 对含有两个绝对值的不等式如何去解？

（找零点，分段讨论，去掉绝对值符号，最后取各段的并集。）

例如：解不等式 $|x-3| - |x+1| < 1$

(解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$)

41. 会用不等式 $|a|-|b| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$ 证明较简单的不等问题

如：设 $f(x) = x^2 - x + 13$ ，实数 a 满足 $|x - a| < 1$

求证： $|f(x) - f(a)| < 2(|a| + 1)$

证明： $|f(x) - f(a)| = |(x^2 - x + 13) - (a^2 - a + 13)|$

$$= |(x - a)(x + a - 1)| (\because |x - a| < 1)$$

$$= |x - a| |x + a - 1| < |x + a - 1|$$

$$\leq |x| + |a| + 1$$

又 $|x| - |a| \leq |x - a| < 1$ ， $\therefore |x| < |a| + 1$

$$\therefore |f(x) - f(a)| < 2|a| + 2 = 2(|a| + 1)$$

(按不等号方向放缩)

42. 不等式恒成立问题，常用的处理方式是什么？(可转化为最值问题，或“ \triangle ”问题)

如： $a < f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a < f(x)$ 的最小值

$a > f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a > f(x)$ 的最大值

$a > f(x)$ 能成立 $\Leftrightarrow a > f(x)$ 的最小值

例如：对于一切实数 x ，若 $|x - 3| + |x + 2| > a$ 恒成立，则 a 的取值范围是 _____

(设 $u = |x - 3| + |x + 2|$ ，它表示数轴上到两定点 -2 和 3 距离之和

$$u_{\min} = 3 - (-2) = 5, \therefore 5 > a, \text{ 即 } a < 5$$

或者： $|x - 3| + |x + 2| \geq |(x - 3) - (x + 2)| = 5, \therefore a < 5$)

43. 等差数列的定义与性质

定义： $a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数)， $a_n = a_1 + (n - 1)d$

等差中项： x, A, y 成等差数列 $\Leftrightarrow 2A = x + y$

$$\text{前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

性质： $\{a_n\}$ 是等差数列

(1) 若 $m + n = p + q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$;

(2) 数列 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$, $\{ka_n + b\}$ 仍为等差数列;

S_n , $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n} \cdots \cdots$ 仍为等差数列;

(3) 若三个数成等差数列, 可设为 $a - d$, a , $a + d$;

(4) 若 a_n , b_n 是等差数列 S_n , T_n 为前 n 项和, 则 $\frac{a_m}{b_m} = \frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$;

(5) $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow S_n = an^2 + bn$ (a , b 为常数, 是关于 n 的常数项为 0 的二次函数)

S_n 的最值可求二次函数 $S_n = an^2 + bn$ 的最值; 或者求出 $\{a_n\}$ 中的正、负分界项, 即:

当 $a_1 > 0$, $d < 0$, 解不等式组 $\begin{cases} a_n \geq 0 \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$ 可得 S_n 达到最大值时的 n 值。

当 $a_1 < 0$, $d > 0$, 由 $\begin{cases} a_n \leq 0 \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$ 可得 S_n 达到最小值时的 n 值。

如: 等差数列 $\{a_n\}$, $S_n = 18$, $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 3$, $S_3 = 1$, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$

(由 $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 3 \Rightarrow 3a_{n-1} = 3$, $\therefore a_{n-1} = 1$

又 $S_3 = \frac{(a_1 + a_3)}{2} \cdot 3 = 3a_2 = 1$, $\therefore a_2 = \frac{1}{3}$

$$\therefore S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_2 + a_{n-1}) \cdot n}{2} = \frac{\left(\frac{1}{3} + 1\right)n}{2} = 18$$

$\therefore n = 27$)

44. 等比数列的定义与性质

定义: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (q 为常数, $q \neq 0$), $a_n = a_1 q^{n-1}$

等比中项: x 、 G 、 y 成等比数列 $\Rightarrow G^2 = xy$, 或 $G = \pm \sqrt{xy}$

$$\text{前 } n \text{ 项和: } S_n = \begin{cases} na_1 & (q = 1) \\ \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} & (q \neq 1) \end{cases} \quad (\text{要注意!})$$

性质: $\{a_n\}$ 是等比数列

(1) 若 $m + n = p + q$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

(2) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n} \dots$ 仍为等比数列

45. 由 S_n 求 a_n 时应注意什么?

($n = 1$ 时, $a_1 = S_1$, $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$)

46. 你熟悉求数列通项公式的常用方法吗?

例如: (1) 求差(商)法

如: $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \dots + \frac{1}{2^n}a_n = 2n + 5 \quad <1>$

解: $n = 1$ 时, $\frac{1}{2}a_1 = 2 \times 1 + 5, \therefore a_1 = 14$

$n \geq 2$ 时, $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1} = 2n - 1 + 5 \quad <2>$

$<1> - <2>$ 得: $\frac{1}{2^n}a_n = 2$

$\therefore a_n = 2^{n+1}$

$\therefore a_n = \begin{cases} 14 & (n = 1) \\ 2^{n+1} & (n \geq 2) \end{cases}$

[练习]

数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n + S_{n+1} = \frac{5}{3}a_{n+1}$, $a_1 = 4$, 求 a_n

(注意到 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 代入得: $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 4$)

又 $S_1 = 4$, $\therefore \{S_n\}$ 是等比数列, $S_n = 4^n$

$n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \dots = 3 \cdot 4^{n-1}$

(2) 叠乘法

例如: 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$, 求 a_n

解: $\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots \frac{n-1}{n}, \therefore \frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}$

$$\text{又 } a_1 = 3, \therefore a_n = \frac{3}{n}$$

(3) 等差型递推公式

由 $a_n - a_{n-1} = f(n)$, $a_1 = a_0$, 求 a_n , 用迭加法

$$\left. \begin{array}{l} n \geq 2 \text{ 时, } a_2 - a_1 = f(2) \\ a_3 - a_2 = f(3) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_n - a_{n-1} = f(n) \end{array} \right\} \text{两边相加, 得:}$$

$$a_n - a_1 = f(2) + f(3) + \dots \dots + f(n)$$

$$\therefore a_n = a_0 + f(2) + f(3) + \dots \dots + f(n)$$

[练习]

数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 求 a_n

$$(a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1))$$

(4) 等比型递推公式

$$a_n = ca_{n-1} + d \text{ (c、d为常数, } c \neq 0, c \neq 1, d \neq 0)$$

可转化为等比数列, 设 $a_n + x = c(a_{n-1} + x)$

$$\Rightarrow a_n = ca_{n-1} + (c-1)x$$

$$\text{令 } (c-1)x = d, \therefore x = \frac{d}{c-1}$$

$\therefore \left\{a_n + \frac{d}{c-1}\right\}$ 是首项为 $a_1 + \frac{d}{c-1}$, c 为公比的等比数列

$$\therefore a_n + \frac{d}{c-1} = \left(a_1 + \frac{d}{c-1}\right) \cdot c^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \left(a_1 + \frac{d}{c-1}\right) c^{n-1} - \frac{d}{c-1}$$

[练习]

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 9$, $3a_{n+1} + a_n = 4$, 求 a_n

$$(a_n = 8\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 1)$$

(5) 倒数法

例如： $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$ ，求 a_n

由已知得： $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 为等差数列， $\frac{1}{a_1} = 1$ ，公差为 $\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n+1)$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n+1}$$

47. 你熟悉求数列前 n 项和的常用方法吗？

例如：（1）裂项法：把数列各项拆成两项或多项之和，使之出现成对互为相反数的项。

如： $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，求 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$

解：由 $\frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{a_k(a_k + d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) (d \neq 0)$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

[练习]

求和： $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

($a_n = \cdots = \cdots$ ， $S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$)

（2）错位相减法：

若 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列，求数列 $\{a_n b_n\}$ （差比数列）前 n 项

和，可由 $S_n - qS_n$ 求 S_n ，其中 q 为 $\{b_n\}$ 的公比。

$$\text{如: } S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \quad < 1 >$$

$$x \cdot S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n \quad < 2 >$$

$$< 1 > - < 2 > : (1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - nx^n$$

$$x \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

$$x = 1 \text{ 时, } S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(3) 倒序相加法: 把数列的各项顺序倒写, 再与原来顺序的数列相加。

$$\left. \begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \end{array} \right\} \text{相加}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_1 + a_n) \cdots$$

[练习]

$$\text{已知 } f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \text{ 则 } f(1) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\text{由 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 1 \right)$$

$$\therefore \text{原式} = f(1) + \left[f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \left[f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) \right] + \left[f(4) + f\left(\frac{1}{4}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 = 3\frac{1}{2}$$

48. 你知道储蓄、贷款问题吗?

△零存整取储蓄(单利)本利和计算模型:

若每期存入本金 p 元, 每期利率为 r , n 期后, 本利和为:

$$S_n = p(1+r) + p(1+2r) + \cdots + p(1+nr) = p \left[n + \frac{n(n+1)}{2} r \right] \cdots \cdots \text{等差问题}$$

△若按复利, 如贷款问题——按揭贷款的每期还款计算模型(按揭贷款——分期等额归还本息的借款种类)

若贷款(向银行借款) p 元, 采用分期等额还款方式, 从借款日算起, 一期(如一年)后为第一次还款日, 如此下去, 第 n 次还清。如果每期利率为 r (按复利), 那么每期应还 x 元, 满足

$$p(1+r)^n = x(1+r)^{n-1} + x(1+r)^{n-2} + \cdots + x(1+r) + x$$

$$= x \left[\frac{1 - (1+r)^n}{1 - (1+r)} \right] = x \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\therefore x = \frac{pr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

p——贷款数, r——利率, n——还款期数

49. 解排列、组合问题的依据是: 分类相加, 分步相乘, 有序排列, 无序组合。

(1) 分类计数原理: $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

(m_i 为各类办法中的方法数)

分步计数原理: $N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$

(m_i 为各步骤中的方法数)

(2) 排列: 从 n 个不同元素中, 任取 m ($m \leq n$) 个元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列, 所有排列的个数记为 A_n^m .

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (m \leq n)$$

规定: $0! = 1$

(3) 组合: 从 n 个不同元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素并组成一组, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合, 所有组合个数记为 C_n^m .

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

规定: $C_n^0 = 1$

(4) 组合数性质:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m, \quad C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

50. 解排列与组合问题的规律是:

相邻问题捆绑法; 相间隔问题插空法; 定位问题优先法; 多元问题分类法; 至多至少问题间接法; 相同元素分组可采用隔板法, 数量不大时可以逐一排出结果。

如: 学号为 1, 2, 3, 4 的四名学生的考试成绩

$$x_i \in \{89, 90, 91, 92, 93\}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \text{ 且满足 } x_1 < x_2 \leq x_3 < x_4,$$

则这四位同学考试成绩的所有可能情况是 ()

A. 24 B. 15 C. 12 D. 10

解析: 可分成两类:

(1) 中间两个分数不相等,

$$\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ x_1 & < x_2 & < x_3 & < x_4 \end{array}$$

有 $C_5^4 = 5$ (种)

(2) 中间两个分数相等

$$x_1 < x_2 = x_3 < x_4$$

相同两数分别取 90, 91, 92, 对应的排列可以数出来, 分别有 3, 4, 3 种, \therefore 有 10 种。

\therefore 共有 $5+10=15$ (种) 情况

51. 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$$

二项展开式的通项公式: $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ ($r = 0, 1, \cdots, n$)

C_n^r 为二项式系数 (区别于该项的系数)

性质:

$$(1) \text{ 对称性: } C_n^r = C_n^{n-r} \quad (r = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

$$(2) \text{ 系数和: } C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$$

(3) 最值: n 为偶数时, $n+1$ 为奇数, 中间一项的二项式系数最大且为第 $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ 项, 二项式系数为 $C_n^{\frac{n}{2}}$; n 为奇数时, $(n+1)$ 为偶数, 中间两项的二项式

系数最大即第 $\frac{n+1}{2}$ 项及第 $\frac{n+1}{2}+1$ 项, 其二项式系数为 $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$

如: 在二项式 $(x-1)^{11}$ 的展开式中, 系数最小的项系数为 _____ (用数字表示)

$$(\because n=11)$$

\therefore 共有 12 项, 中间两项系数的绝对值最大, 且为第 $\frac{12}{2} = 6$ 或第 7 项

由 $C_{11}^r x^{11-r} (-1)^r$, \therefore 取 $r=5$ 即第 6 项系数为负值为最小:

$$-C_{11}^6 = -C_{11}^5 = -426$$

又如: $(1-2x)^{2004} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2004} x^{2004} \quad (x \in \mathbb{R})$, 则

$$(a_0 + a_1) + (a_0 + a_2) + (a_0 + a_3) + \cdots + (a_0 + a_{2004}) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{用数字作答})$$

(令 $x = 0$, 得: $a_0 = 1$)

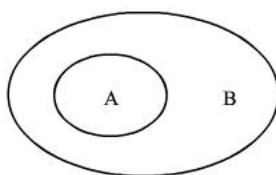
令 $x = 1$, 得: $a_0 + a_2 + \cdots + a_{2004} = 1$

$$\therefore \text{原式} = 2003a_0 + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{2004}) = 2003 \times 1 + 1 = 2004$$

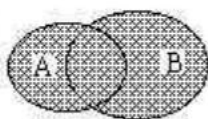
52. 你对随机事件之间的关系熟悉吗?

(1) 必然事件 Ω , $P(\Omega) = 1$, 不可能事件 ϕ , $P(\phi) = 0$

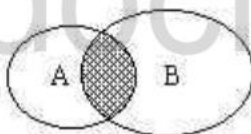
(2) 包含关系: $A \subset B$, “A发生必导致B发生”称B包含A。



(3) 事件的和 (并): $A + B$ 或 $A \cup B$ “A与B至少有一个发生”叫做A与B的和 (并)。

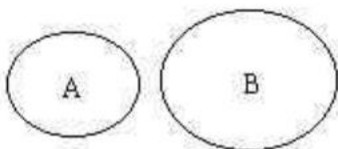


(4) 事件的积 (交): $A \cdot B$ 或 $A \cap B$ “A与B同时发生”叫做A与B的积。



(5) 互斥事件 (互不相容事件): “A与B不能同时发生”叫做A、B互斥。

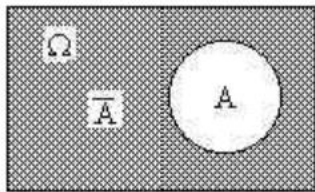
$$A \cdot B = \phi$$



(6) 对立事件 (互逆事件):

“A不发生”叫做A发生的对立 (逆) 事件, \bar{A}

$$A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \phi$$



(7) 独立事件：A 发生与否对 B 发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

A 与 B 独立，A 与 \bar{B} ， \bar{A} 与 B， \bar{A} 与 \bar{B} 也相互独立。

53. 对某一事件概率的求法：

分清所求的是：(1) 等可能事件的概率（常采用排列组合的方法，即

$$P(A) = \frac{\text{A 包含的等可能结果}}{\text{一次试验的等可能结果的总数}} = \frac{m}{n}$$

(2) 若 A、B 互斥，则 $P(A + B) = P(A) + P(B)$

(3) 若 A、B 相互独立，则 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

(4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(5) 如果在一次试验中 A 发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中 A 恰好发生

k 次的概率： $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

如：设 10 件产品中有 4 件次品，6 件正品，求下列事件的概率。

(1) 从中任取 2 件都是次品；

$$\left(P_1 = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15} \right)$$

(2) 从中任取 5 件恰有 2 件次品；

$$\left(P_2 = \frac{C_4^2 C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{10}{21} \right)$$

(3) 从中有放回地任取 3 件至少有 2 件次品；

解析：有放回地抽取 3 次（每次抽 1 件）， $\therefore n=10^3$

而至少有 2 件次品为“恰有 2 次品”和“三件都是次品”

$$\therefore m = C_3^2 \cdot 4^2 6^1 + 4^3$$

$$\therefore P_3 = \frac{C_3^2 \cdot 4^2 \cdot 6 + 4^3}{10^3} = \frac{44}{125}$$

(4) 从中依次取 5 件恰有 2 件次品。

解析： \because 一件一件抽取（有顺序）

$$\therefore n = A_{10}^5, \quad m = C_4^2 A_5^2 A_6^3$$

$$\therefore P_4 = \frac{C_4^2 A_5^2 A_6^3}{A_{10}^5} = \frac{10}{21}$$

分清(1)、(2)是组合问题，(3)是可重复排列问题，(4)是无重复排列问题。

54. 抽样方法主要有：简单随机抽样(抽签法、随机数表法)常用于总体个数较少时，它的特征是从总体中逐个抽取；系统抽样，常用于总体个数较多时，它的主要特征是均衡成若干部分，每部分只取一个；分层抽样，主要特征是分层按比例抽样，主要用于总体中有明显差异，它们的共同特征是每个个体被抽到的概率相等，体现了抽样的客观性和平等性。

55. 对总体分布的估计——用样本的频率作为总体的概率，用样本的期望(平均值)和方差去估计总体的期望和方差。

要熟悉样本频率直方图的作法：

(1) 算数据极差($x_{\max} - x_{\min}$)；

(2) 决定组距和组数；

(3) 决定分点；

(4) 列频率分布表；

(5) 画频率直方图。

其中，频率 = 小长方形的面积 = 组距 \times $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$

样本平均值： $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

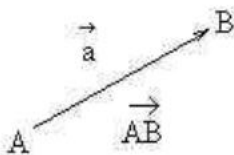
样本方差： $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$

如：从10名女生与5名男生中选6名学生参加比赛，如果按性别分层随机抽样，则组成此参赛队的概率为_____。

$$\left(\frac{C_{10}^4 C_5^2}{C_{15}^6} \right)$$

56. 你对向量的有关概念清楚吗？

(1) 向量——既有大小又有方向的量。



(2) 向量的模——有向线段的长度， $|\vec{a}|$

(3) 单位向量 $|\vec{a}_0| = 1$, $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

(4) 零向量 $\vec{0}$, $|\vec{0}| = 0$

(5) 相等的向量 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{长度相等} \\ \text{方向相同} \end{cases} \vec{a} = \vec{b}$

中国特级教师高考复习方法指导〈数学复习版〉

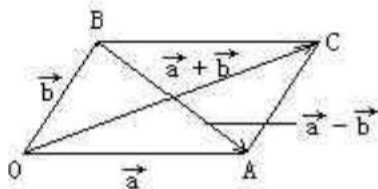
在此规定下向量可以在平面（或空间）平行移动而不改变。

（6）并线向量（平行向量）——方向相同或相反的向量。

规定零向量与任意向量平行。

$\vec{b} \parallel \vec{a} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ , 使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

（7）向量的加、减法如图：



$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$$

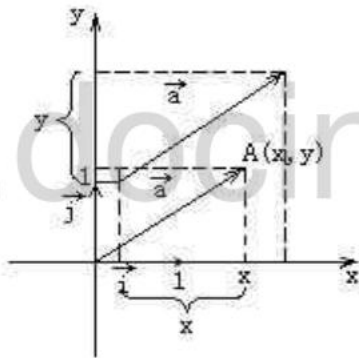
$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$

（8）平面向量基本定理（向量的分解定理）

\vec{e}_1, \vec{e}_2 是平面内的两个不共线向量, \vec{a} 为该平面任一向量, 则存在唯一

实数对 λ_1, λ_2 , 使得 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$, \vec{e}_1, \vec{e}_2 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

（9）向量的坐标表示



\vec{i}, \vec{j} 是一对互相垂直的单位向量, 则有且只有一对实数 x, y , 使得

$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j}$, 称 (x, y) 为向量 \vec{a} 的坐标, 记作: $\vec{a} = (x, y)$, 即为向量的坐标表示。

$$\text{设 } \vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$$

$$\text{则 } \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

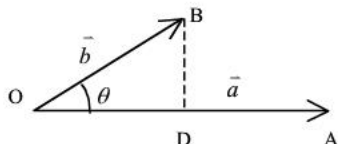
则 $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, A、B 两点间距离公式

57. 平面向量的数量积

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$ 叫做向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的数量积 (或内积)。

θ 为向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角, $\theta \in [0, \pi]$



数量积的几何意义:

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 等于 $|\vec{a}|$ 与 \vec{b} 在 \vec{a} 的方向上的射影 $|\vec{b}| \cos \theta$ 的乘积。

(2) 数量积的运算法则

① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

② $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$

注意: 数量积不满足结合律 $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

(3) 重要性质: 设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$

① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

② $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ 或 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$\Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \quad (\vec{b} \neq 0, \lambda \text{ 惟一确定})$

$\Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

③ $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2, |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

④ $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

[练习]

(1) 已知正方形 ABCD, 边长为 1, $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, 则

$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $2\sqrt{2}$

(2) 若向量 $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (4, x)$, 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时 \vec{a} 与 \vec{b} 共线且方向相同

答案: 2

(3) 已知 \vec{a} 、 \vec{b} 均为单位向量, 它们的夹角为 60° , 那么 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $\sqrt{13}$

58. 线段的定比分点

设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 分点 $P(x, y)$, 设 P_1 、 P_2 是直线 l 上两点, P 点在

l 上且不同于 P_1 、 P_2 , 若存在一实数 λ , 使 $\vec{P_1P} = \lambda \vec{PP_2}$, 则 λ 叫做 P 分有向线段

P_1P_2 所成的比 ($\lambda > 0$, P 在线段 P_1P_2 内, $\lambda < 0$, P 在 P_1P_2 外), 且

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}, \text{ P 为 } P_1P_2 \text{ 中点时, } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

如: $\triangle ABC$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$

则 $\triangle ABC$ 重心 G 的坐标是 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

※. 你能分清三角形的重心、垂心、外心、内心及其性质吗?

59. 立体几何中平行、垂直关系证明的思路清楚吗?

平行垂直的证明主要利用线面关系的转化:

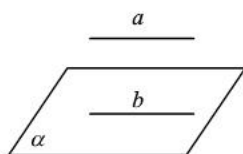
线 \parallel 线 \longleftrightarrow 线 \parallel 面 \longleftrightarrow 面 \parallel 面

— 判定 \rightarrow 线 \perp 线 \longleftrightarrow 线 \perp 面 \longleftrightarrow 面 \perp 面 \leftarrow 性质 —

线 \parallel 线 \longleftrightarrow 线 \perp 面 \longleftrightarrow 面 \parallel 面

线面平行的判定:

$a \parallel b$, $b \subset \text{面 } \alpha$, $a \not\subset \alpha \Rightarrow a \parallel \text{面 } \alpha$



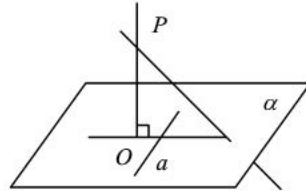
线面平行的性质:

$a \parallel \text{面 } \alpha$, $\alpha \subset \text{面 } \beta$, $\alpha \cap \beta = b \Rightarrow a \parallel b$

三垂线定理（及逆定理）：

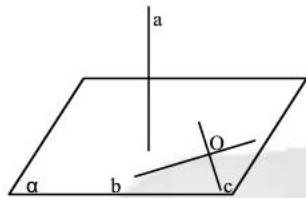
$PA \perp$ 面 α ， AO 为 PO 在 α 内射影， $a \subset$ 面 α ，则

$$a \perp OA \Rightarrow a \perp PO; a \perp PO \Rightarrow a \perp AO$$



线面垂直：

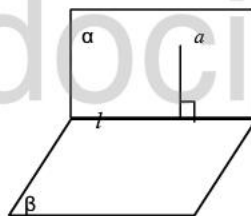
$$a \perp b, a \perp c, b, c \subset \alpha, b \cap c = O \Rightarrow a \perp \alpha$$



面面垂直：

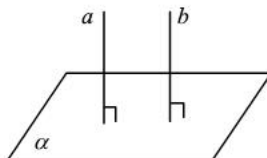
$$a \perp \text{面 } \alpha, a \subset \text{面 } \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

$$\text{面 } \alpha \perp \text{面 } \beta, \alpha \cap \beta = l, a \subset \alpha, a \perp l \Rightarrow a \perp \beta$$



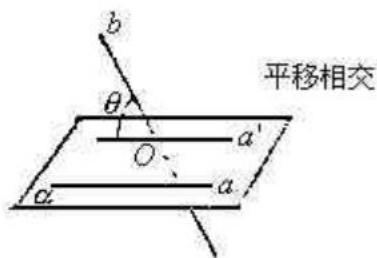
$$a \perp \text{面 } \alpha, b \perp \text{面 } \alpha \Rightarrow a \parallel b$$

$$\text{面 } \alpha \perp a, \text{面 } \beta \perp a \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$



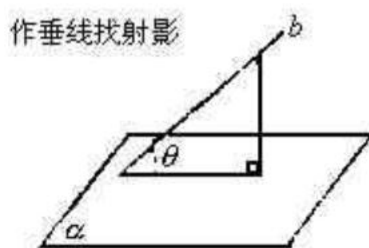
60. 三类角的定义及求法

(1) 异面直线所成的角 θ ， $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$

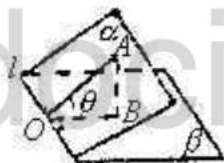
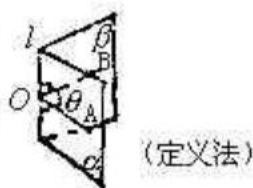


(2) 直线与平面所成的角 θ ， $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$\theta = 0^\circ$ 时， $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$



(3) 二面角：二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角 θ ， $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$



(三垂线定理法：A $\in\alpha$ 作或证 $AB \perp \beta$ 于 B，作 $BO \perp$ 棱于 O，连 AO，则 $AO \perp$ 棱 l ， $\therefore \angle AOB$ 为所求。)

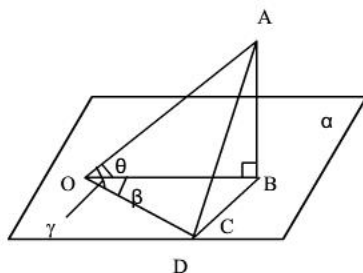
三类角的求法：

- ①找出或作出有关的角。
- ②证明其符合定义，并指出所求作的角。
- ③计算大小（解直角三角形，或用余弦定理）。

[练习]

(1) 如图，OA 为 α 的斜线 OB 为其在 α 内射影，OC 为 α 内过 O 点任一直线。

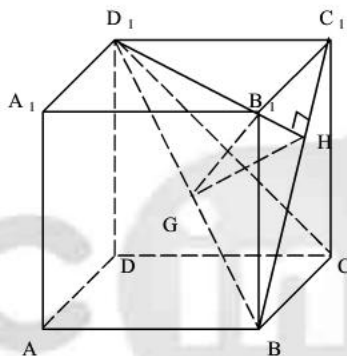
证明： $\cos \gamma = \cos \theta \cdot \cos \beta$



(θ 为线面成角, $\angle AOC = \gamma$, $\angle BOC = \beta$)

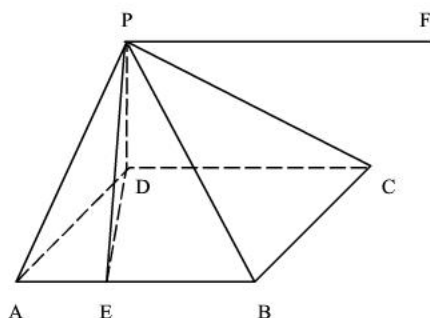
(2) 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中对角线 $BD_1=8$, BD_1 与侧面 B_1BCC_1 所成的角为 30° 。

- ①求 BD_1 和底面 $ABCD$ 所成的角;
- ②求异面直线 BD_1 和 AD 所成的角;
- ③求二面角 $C_1-BD_1-B_1$ 的大小。



(① $\arcsin \frac{3}{4}$; ② 60° ; ③ $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$)

(3) 如图 $ABCD$ 为菱形, $\angle DAB=60^\circ$, $PD \perp$ 面 $ABCD$, 且 $PD=AD$, 求面 PAB 与面 PCD 所成的锐二面角的大小。



($\because AB \parallel DC$, P 为面 PAB 与面 PCD 的公共点, 作 $PF \parallel AB$, 则 PF 为面 PCD 与面 PAB 的交线……)

61. 空间有几种距离? 如何求距离?

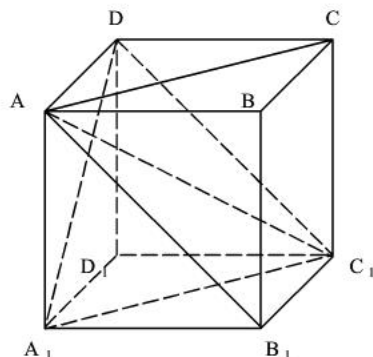
点与点, 点与线, 点与面, 线与线, 线与面, 面与面间距离。

将空间距离转化为两点的距离, 构造三角形, 解三角形求线段的长(如: 三垂线定理法, 或者用等积转化法)。

如: 正方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 棱长为 a , 则:

(1) 点 C 到面 AB_1C_1 的距离为 _____;

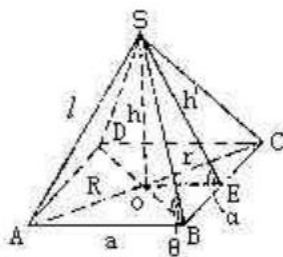
- (2) 点 B 到面 ACB_1 的距离为_____；
 (3) 直线 A_1D_1 到面 AB_1C_1 的距离为_____；
 (4) 面 AB_1C 与面 A_1DC_1 的距离为_____；
 (5) 点 B 到直线 A_1C_1 的距离为_____。



62. 你是否准确理解正棱柱、正棱锥的定义并掌握它们的性质？

正棱柱——底面为正多边形的直棱柱

正棱锥——底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面的中心。



正棱锥的计算集中在四个直角三角形中：

$Rt\triangle SOB$, $Rt\triangle SOE$, $Rt\triangle BOE$ 和 $Rt\triangle SBE$

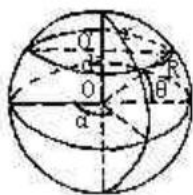
它们各包含哪些元素？

$$S_{\text{正棱锥侧}} = \frac{1}{2} C \cdot h' \quad (C \text{——底面周长, } h' \text{ 为斜高})$$

$$V_{\text{锥}} = \frac{1}{3} \text{底面积} \times \text{高}$$

63. 球有哪些性质？

- (1) 球心和截面圆心的连线垂直于截面 $r = \sqrt{R^2 - d^2}$
 (2) 球面上两点的距离是经过这两点的大圆的劣弧长。为此，要找球心角！
 (3) 如图， θ 为纬度角，它是线面成角； α 为经度角，它是面面成角。



$$(4) S_{\text{球}} = 4\pi R^2, V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

中国特级教师高考复习方法指导〈数学复习版〉

(5) 球内接长方体的对角线是球的直径。正四面体的外接球半径 R 与内切球半径 r 之比为 $R:r=3:1$ 。

如：一正四面体的棱长均为 $\sqrt{2}$ ，四个顶点都在同一球面上，则此球的表面积为 ()

- A. 3π B. 4π C. $3\sqrt{3}\pi$ D. 6π

答案：A

64. 熟记下列公式了吗？

(1) l 直线的倾斜角 $\alpha \in [0, \pi)$, $k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}, x_1 \neq x_2 \right)$

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 是 l 上两点，直线 l 的方向向量 $\vec{a} = (1, k)$

(2) 直线方程：

点斜式： $y - y_0 = k(x - x_0)$ (k 存在)

斜截式： $y = kx + b$

截距式： $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

一般式： $Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为零)

(3) 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(4) l_1 到 l_2 的到角公式： $\tan \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2}$

l_1 与 l_2 的夹角公式： $\tan \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2} \right|$

65. 如何判断两直线平行、垂直？

$$\left. \begin{array}{l} A_1 B_2 = A_2 B_1 \\ A_1 C_2 \neq A_2 C_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2$$

$k_1 = k_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_2$ (反之不一定成立)

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow l_1 \perp l_2$$

66. 怎样判断直线 l 与圆 C 的位置关系？

圆心到直线的距离与圆的半径比较。

直线与圆相交时，注意利用圆的“垂径定理”。

67. 怎样判断直线与圆锥曲线的位置?

联立方程组 \Rightarrow 关于 x (或 y) 的一元二次方程 \Rightarrow “ Δ ”

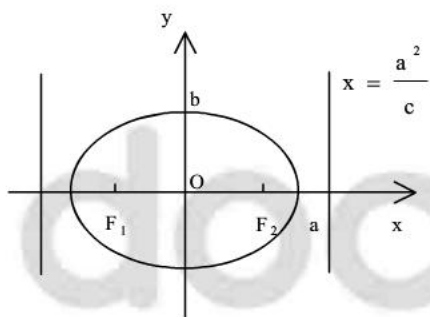
$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相交; $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 相切; $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 相离

68. 分清圆锥曲线的定义

$$\text{第一定义} \begin{cases} \text{椭圆} \Leftrightarrow |PF_1| + |PF_2| = 2a, & 2a > 2c = |F_1F_2| \\ \text{双曲线} \Leftrightarrow \left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a, & 2a < 2c = |F_1F_2| \\ \text{抛物线} \Leftrightarrow |PF| = |PK| \end{cases}$$

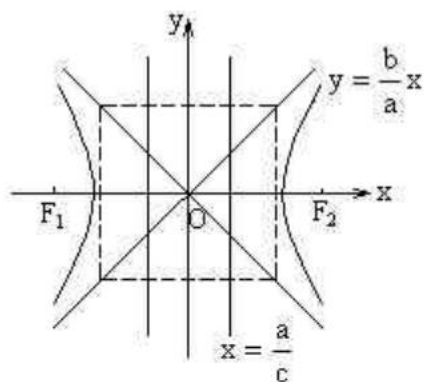
$$\text{第二定义: } e = \frac{|PF|}{|PK|} = \frac{c}{a}$$

$0 < e < 1 \Leftrightarrow$ 椭圆; $e > 1 \Leftrightarrow$ 双曲线; $e = 1 \Leftrightarrow$ 抛物线



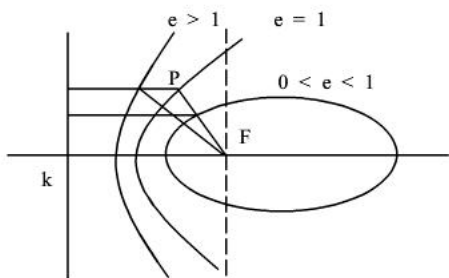
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

$$(a^2 = b^2 + c^2)$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(c^2 = a^2 + b^2)$$



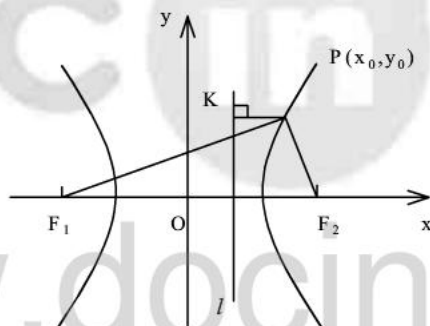
69. 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有相同焦点的双曲线系为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda \ (\lambda \neq 0)$

70. 在圆锥曲线与直线联立求解时，消元后得到的方程，要注意其二次项系数是否为零？ $\Delta \geq 0$ 的限制。（求交点，弦长，中点，斜率，对称存在性问题都在 $\Delta \geq 0$ 下进行。）

$$\begin{aligned} \text{弦长公式 } |P_1P_2| &= \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} \\ &= \sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2]} \end{aligned}$$

71. 会用定义求圆锥曲线的焦半径吗？

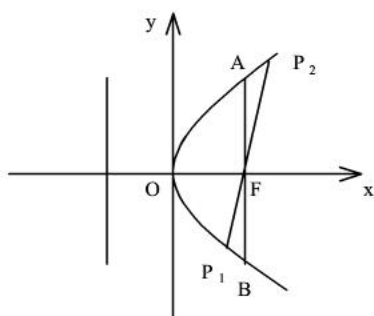
如：



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{|PF_2|}{|PK|} = e, \quad |PF_2| = e \left(x_0 - \frac{a^2}{c} \right) = ex_0 - a$$

$$|PF_1| = ex_0 + a$$



$$y^2 = 2px (p > 0)$$

通径是抛物线的所有焦点弦中最短者；以焦点弦为直径的圆与准线相切。

72. 有关中点弦问题可考虑用“代点法”。

如：椭圆 $mx^2 + ny^2 = 1$ 与直线 $y = 1 - x$ 交于 M、N 两点，原点与 MN 中点连

线的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则 $\frac{m}{n}$ 的值为 _____

答案： $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

73. 如何求解“对称”问题？

(1) 证明曲线 C: $F(x, y) = 0$ 关于点 M(a, b) 成中心对称，设 A(x, y) 为曲线 C 上任意一点，设 A'(x', y') 为 A 关于点 M 的对称点。

$$\left(\text{由 } a = \frac{x + x'}{2}, b = \frac{y + y'}{2} \Rightarrow x' = 2a - x, y' = 2b - y \right)$$

只要证明 A'(2a - x, 2b - y) 也在曲线 C 上，即 $f(x') = y'$

$$(2) \text{ 点 A、A' 关于直线 } l \text{ 对称} \Leftrightarrow \begin{cases} AA' \perp l \\ AA' \text{ 中点在 } l \text{ 上} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_{AA'} \cdot k_l = -1 \\ AA' \text{ 中点坐标满足 } l \text{ 方程} \end{cases}$$

74. 圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)

75. 求轨迹方程的常用方法有哪些？注意讨论范围。

(直接法、定义法、转移法、参数法)

76. 对线性规划问题：作出可行域，作出以目标函数为截距的直线，在可行域内平移直线，求出目标函数的最值。

高中数学常用公式及常用结论

1. 元素与集合的关系

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin C_U A, x \in C_U A \Leftrightarrow x \notin A.$$

2. 德摩根公式

$$C_U(A \cap B) = C_U A \cup C_U B, C_U(A \cup B) = C_U A \cap C_U B.$$

3. 包含关系

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow C_U B \subseteq C_U A$$

$$\Leftrightarrow A \cap C_U B = \emptyset \Leftrightarrow C_U A \cup B = C_U A$$

4. 容斥原理

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B),$$

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

5. 集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的子集个数共有 2^n 个; 真子集有 $2^n - 1$ 个; 非空子集有 $2^n - 1$ 个; 非空的真子集有 $2^n - 2$ 个.

6. 二次函数的解析式的三种形式

(1) 一般式 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$;

(2) 顶点式 $f(x) = a(x - h)^2 + k (a \neq 0)$;

(3) 零点式 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0)$.

7. 解连不等式 $N < f(x) < M$ 常有以下转化形式

$$N < f(x) < M \Leftrightarrow [f(x) - M][f(x) - N] < 0$$

$$\Leftrightarrow \left| f(x) - \frac{M+N}{2} \right| < \frac{M-N}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x)-N}{M-f(x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-N} > \frac{1}{M-N}.$$

8. 方程 $f(x) = 0$ 在 (k_1, k_2) 上有且只有一个实根, 与 $f(k_1)f(k_2) < 0$ 不等价, 前者是后者的一个必要而不是充分条件. 特别地, 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有且只有一个实根在

(k_1, k_2) 内, 等价于 $f(k_1)f(k_2) < 0$, 或 $f(k_1) = 0$ 且 $k_1 < -\frac{b}{2a} < \frac{k_1 + k_2}{2}$, 或 $f(k_2) = 0$ 且 $\frac{k_1 + k_2}{2} < -\frac{b}{2a} < k_2$.

9. 闭区间上的二次函数的最值

二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 在闭区间 $[p, q]$ 上的最值只能在 $x = -\frac{b}{2a}$ 处及区间的两端点处取得, 具体如下:

(1) 当 $a > 0$ 时, 若 $x = -\frac{b}{2a} \in [p, q]$, 则 $f(x)_{\min} = f(-\frac{b}{2a})$, $f(x)_{\max} = \max\{f(p), f(q)\}$;

$x = -\frac{b}{2a} \notin [p, q]$, $f(x)_{\max} = \max\{f(p), f(q)\}$, $f(x)_{\min} = \min\{f(p), f(q)\}$.

(2) 当 $a < 0$ 时, 若 $x = -\frac{b}{2a} \in [p, q]$, 则 $f(x)_{\max} = f(-\frac{b}{2a})$, $f(x)_{\min} = \min\{f(p), f(q)\}$; 若

$x = -\frac{b}{2a} \notin [p, q]$, 则 $f(x)_{\max} = \max\{f(p), f(q)\}$, $f(x)_{\min} = \min\{f(p), f(q)\}$.

10. 一元二次方程的实根分布

依据: 若 $f(m)f(n) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在区间 (m, n) 内至少有一个实根.

设 $f(x) = x^2 + px + q$, 则

(1) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(m, +\infty)$ 内有根的充要条件为 $f(m) = 0$ 或 $\begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ -\frac{p}{2} > m \end{cases}$;

(2) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 (m, n) 内有根的充要条件为 $f(m)f(n) < 0$ 或 $\begin{cases} f(m) > 0 \\ f(n) > 0 \\ p^2 - 4q \geq 0 \\ m < -\frac{p}{2} < n \end{cases}$

或 $\begin{cases} f(m) = 0 \\ af(n) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(n) = 0 \\ af(m) > 0 \end{cases}$;

(3) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(-\infty, n)$ 内有根的充要条件为 $f(m) < 0$ 或 $\begin{cases} p^2 - 4q \geq 0 \\ -\frac{p}{2} < m \end{cases}$.

11. 定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1) 在给定区间 $(-\infty, +\infty)$ 的子区间 L (形如 $[\alpha, \beta]$, $(-\infty, \beta]$, $[\alpha, +\infty)$ 不同) 上含参数的二次不等式 $f(x, t) \geq 0$ (t 为参数) 恒成立的充要条件是 $f(x, t)_{\min} \geq 0 (x \notin L)$.

(2) 在给定区间 $(-\infty, +\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x, t) \geq 0$ (t 为参数) 恒成立的充要条件是 $f(x, t)_{\max} \leq 0 (x \notin L)$.

(3) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c > 0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ c > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$.

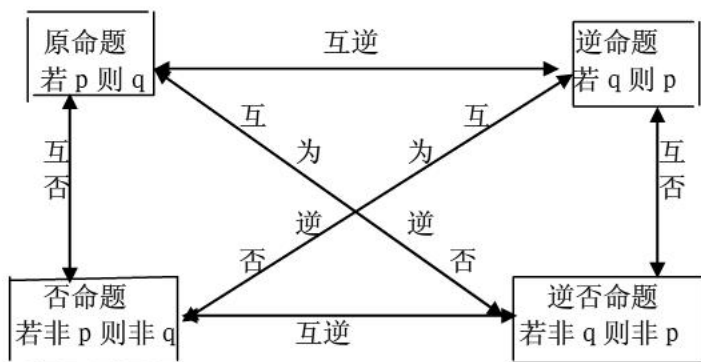
12. 真值表

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

13. 常见结论的否定形式

原结论	反设词	原结论	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有 $(n-1)$ 个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有 $(n+1)$ 个
对所有 x , 成立	存在某 x , 不成立	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
对任何 x , 不成立	存在某 x , 成立	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

14. 四种命题的相互关系



15. 充要条件

(1) 充分条件: 若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 充分条件.

(2) 必要条件: 若 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 必要条件.

(3) 充要条件: 若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 充要条件.

注: 如果甲是乙的充分条件, 则乙是甲的必要条件; 反之亦然.

16. 函数的单调性

(1) 设 $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$ 那么

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是增函数};$$

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是减函数}.$$

(2) 设函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导, 如果 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为增函数; 如果 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 为减函数.

17. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数, 则在公共定义域内, 和函数 $f(x) + g(x)$ 也是减函数; 如果函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 在其对应的定义域上都是减函数, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 是增函数.

18. 奇偶函数的图象特征

奇函数的图象关于原点对称, 偶函数的图象关于 y 轴对称; 反过来, 如果一个函数的图象关于原点对称, 那么这个函数是奇函数; 如果一个函数的图象关于 y 轴对称, 那么这个函数是偶函数.

19. 若函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x + a) = f(-x - a)$; 若函数 $y = f(x + a)$ 是偶函数, 则 $f(x + a) = f(-x + a)$.

20. 对于函数 $y = f(x) (x \in R)$, $f(x + a) = f(b - x)$ 恒成立, 则函数 $f(x)$ 的对称轴是函数 $x = \frac{a + b}{2}$; 两个函数 $y = f(x + a)$ 与 $y = f(b - x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a + b}{2}$ 对称.

21. 若 $f(x) = -f(-x + a)$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a}{2}, 0)$ 对称; 若 $f(x) = -f(x + a)$, 则函数 $y = f(x)$ 为周期为 $2a$ 的周期函数.

22. 多项式函数 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow P(x)$ 的偶次项(即奇数项)的系数全为零.

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow P(x)$ 的奇次项(即偶数项)的系数全为零.

23. 函数 $y = f(x)$ 的图象的对称性

(1) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a + x) = f(a - x)$

$$\Leftrightarrow f(2a - x) = f(x).$$

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+mx) = f(b-mx)$

$$\Leftrightarrow f(a+b-mx) = f(mx).$$

24. 两个函数图象的对称性

(1) 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(-x)$ 的图象关于直线 $x = 0$ (即 y 轴) 对称.

(2) 函数 $y = f(mx-a)$ 与函数 $y = f(b-mx)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2m}$ 对称.

(3) 函数 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

25. 若将函数 $y = f(x)$ 的图象右移 a 、上移 b 个单位, 得到函数 $y = f(x-a) + b$ 的图象; 若将曲线 $f(x, y) = 0$ 的图象右移 a 、上移 b 个单位, 得到曲线 $f(x-a, y-b) = 0$ 的图象.

26. 互为反函数的两个函数的关系

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a.$$

27. 若函数 $y = f(kx+b)$ 存在反函数, 则其反函数为 $y = \frac{1}{k}[f^{-1}(x) - b]$, 并不是

$y = [f^{-1}(kx+b)]$, 而函数 $y = [f^{-1}(kx+b)]$ 是 $y = \frac{1}{k}[f(x) - b]$ 的反函数.

28. 几个常见的函数方程

(1) 正比例函数 $f(x) = cx$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(1) = c$.

(2) 指数函数 $f(x) = a^x$, $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f(1) = a \neq 0$.

(3) 对数函数 $f(x) = \log_a x$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(a) = 1 (a > 0, a \neq 1)$.

(4) 幂函数 $f(x) = x^\alpha$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $f'(1) = \alpha$.

(5) 余弦函数 $f(x) = \cos x$, 正弦函数 $g(x) = \sin x$, $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$,

$$f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1.$$

29. 几个函数方程的周期 (约定 $a > 0$)

(1) $f(x) = f(x+a)$, 则 $f(x)$ 的周期 $T=a$;

(2) $f(x) = f(x+a) = 0$,

$$\text{或 } f(x+a) = \frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0),$$

$$\text{或 } f(x+a) = -\frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0),$$

$$\text{或 } \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} = f(x+a), (f(x) \in [0, 1]), \text{ 则 } f(x) \text{ 的周期 } T=2a;$$

(3) $f(x) = 1 - \frac{1}{f(x+a)} (f(x) \neq 0)$, 则 $f(x)$ 的周期 $T=3a$;

(4) $f(x_1 + x_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{1 - f(x_1)f(x_2)}$ 且 $f(a) = 1 (f(x_1) \cdot f(x_2) \neq 1, 0 < |x_1 - x_2| < 2a)$, 则

$f(x)$ 的周期 $T=4a$;

(5) $f(x) + f(x+a) + f(x+2a)f(x+3a) + f(x+4a)$

$= f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$, 则 $f(x)$ 的周期 $T=5a$;

(6) $f(x+a) = f(x) - f(x+a)$, 则 $f(x)$ 的周期 $T=6a$.

30. 分数指数幂

$$(1) a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } n > 1).$$

$$(2) a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } n > 1).$$

31. 根式的性质

$$(1) (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$(2) \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } \sqrt[n]{a^n} = a;$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

32. 有理指数幂的运算性质

$$(1) a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (a > 0, r, s \in \mathbb{Q}).$$

$$(2) (a^r)^s = a^{rs} \quad (a > 0, r, s \in \mathbb{Q}).$$

$$(3) (ab)^r = a^r b^r \quad (a > 0, b > 0, r \in \mathbb{Q}).$$

注: 若 $a > 0$, p 是一个无理数, 则 a^p 表示一个确定的实数. 上述有理指数幂的运算性质, 对于无理数指数幂都适用.

33. 指数式与对数式的互化式

$$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N \quad (a > 0, a \neq 1, N > 0).$$

34. 对数的换底公式

$$\log_a N = \frac{\log_m N}{\log_m a} \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1, m > 0, \text{ 且 } m \neq 1, N > 0).$$

$$\text{推论 } \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1, m, n > 0, \text{ 且 } m \neq 1, n \neq 1, N > 0).$$

35. 对数的四则运算法则

若 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$, 则

$$(1) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M \quad (n \in \mathbb{R}).$$

36. 设函数 $f(x) = \log_m(ax^2 + bx + c) (a \neq 0)$, 记 $\Delta = b^2 - 4ac$. 若 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 则 $a > 0$, 且 $\Delta < 0$; 若 $f(x)$ 的值域为 \mathbb{R} , 则 $a > 0$, 且 $\Delta \geq 0$. 对于 $a = 0$ 的情形, 需要单独检验.

37. 对数换底不等式及其推广

若 $a > 0, b > 0, x > 0, x \neq \frac{1}{a}$, 则函数 $y = \log_{ax}(bx)$

(1) 当 $a > b$ 时, 在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $y = \log_{ax}(bx)$ 为增函数.

(2) 当 $a < b$ 时, 在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $y = \log_{ax}(bx)$ 为减函数.

推论: 设 $n > m > 1, p > 0, a > 0$, 且 $a \neq 1$, 则

$$(1) \log_{m+p}(n+p) < \log_m n.$$

$$(2) \log_a m \log_a n < \log_a^2 \frac{m+n}{2}.$$

38. 平均增长率的问题

如果原来产值的基础数为 N ，平均增长率为 p ，则对于时间 x 的总产值 y ，有

$$y = N(1+p)^x.$$

39. 数列的同项公式与前 n 项的和的关系

$$a_n = \begin{cases} s_1, & n=1 \\ s_n - s_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases} \quad (\text{数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项的和为 } s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

40. 等差数列的通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$

其前 n 项和公式为

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \\ &= \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{1}{2}d)n. \end{aligned}$$

41. 等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$

其前 n 项的和公式为

$$s_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}$$

$$\text{或 } s_n = \begin{cases} \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}.$$

42. 等比差数列 $\{a_n\}$: $a_{n+1} = qa_n + d, a_1 = b (q \neq 0)$ 的通项公式为

$$a_n = \begin{cases} b + (n-1)d, & q = 1 \\ \frac{bq^n + (d-b)q^{n-1} - d}{q-1}, & q \neq 1 \end{cases};$$

其前 n 项和公式为

$$s_n = \begin{cases} nb + n(n-1)d, & (q=1) \\ (b - \frac{d}{1-q}) \frac{1-q^n}{q-1} + \frac{d}{1-q}n, & (q \neq 1) \end{cases}.$$

43. 分期付款(按揭贷款)

$$\text{每次还款 } x = \frac{ab(1+b)^n}{(1+b)^n - 1} \text{ 元 (贷款 } a \text{ 元, } n \text{ 次还清, 每期利率为 } b).$$

44. 常见三角不等式

$$(1) \text{ 若 } x \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 则 } \sin x < x < \tan x.$$

(2) 若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $1 < \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.

(3) $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$.

45. 同角三角函数的基本关系式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \tan \theta \cdot \cot \theta = 1.$$

46. 正弦、余弦的诱导公式

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin \alpha, & (n \text{ 为偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \alpha, & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \alpha, & (n \text{ 为偶数}) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \alpha, & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

47. 和角与差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (\text{平方正弦公式});$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$ (辅助角 φ 所在象限由点 (a, b) 的象限决定, $\tan \varphi = \frac{b}{a}$).

48. 二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

49. 三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = 4 \sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right).$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 4 \cos \theta \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right).$$

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \tan \theta \tan\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right).$$

50. 三角函数的周期公式

函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbb{R}$ 及函数 $y = \cos(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbb{R}$ (A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0$, $\omega > 0$) 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$; 函数 $y = \tan(\omega x + \varphi)$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0$, $\omega > 0$) 的周期 $T = \frac{\pi}{\omega}$.

51. 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

52. 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

53. 面积定理

$$(1) S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \quad (h_a, h_b, h_c \text{ 分别表示 } a, b, c \text{ 边上的高}).$$

$$(2) S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B.$$

$$(3) S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \sqrt{(|OA| \cdot |OB|)^2 - (OA \cdot OB)^2}.$$

54. 三角形内角和定理

在 $\triangle ABC$ 中, 有 $A + B + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi - (A + B)$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2C = 2\pi - 2(A+B).$$

55. 简单的三角方程的通解

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = k\pi + (-1)^k \arcsin a \quad (k \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1).$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \arccos a \quad (k \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1).$$

$$\tan x = a \Rightarrow x = k\pi + \arctan a \quad (k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}).$$

特别地, 有

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha = k\pi + (-1)^k \beta \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \pm \beta \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\tan \alpha = \tan \beta \Rightarrow \alpha = k\pi + \beta \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

56. 最简单的三角不等式及其解集

$$\sin x > a \quad (|a| \leq 1) \Leftrightarrow x \in (2k\pi + \arcsin a, 2k\pi + \pi - \arcsin a), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x < a \quad (|a| \leq 1) \Leftrightarrow x \in (2k\pi - \pi - \arcsin a, 2k\pi + \arcsin a), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x > a \quad (|a| \leq 1) \Leftrightarrow x \in (2k\pi - \arccos a, 2k\pi + \arccos a), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x < a \quad (|a| \leq 1) \Leftrightarrow x \in (2k\pi + \arccos a, 2k\pi + 2\pi - \arccos a), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan x > a \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow x \in (k\pi + \arctan a, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan x < a \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \arctan a), k \in \mathbb{Z}.$$

57. 实数与向量的积的运算律

设 λ, μ 为实数, 那么

$$(1) \text{ 结合律: } \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a;$$

$$(2) \text{ 第一分配律: } (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$(3) \text{ 第二分配律: } \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b.$$

58. 向量的数量积的运算律:

$$(1) a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{交换律});$$

$$(2) (\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = \lambda a \cdot b = a \cdot (\lambda b);$$

$$(3) (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

59. 平面向量基本定理

如果 e_1, e_2 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任一向量, 有且

只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使得 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.

不共线的向量 e_1, e_2 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

60. 向量平行的坐标表示

设 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 且 $b \neq 0$, 则 $a \parallel b (b \neq 0) \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

53. a 与 b 的数量积(或内积)

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta.$$

61. $a \cdot b$ 的几何意义

数量积 $a \cdot b$ 等于 a 的长度 $|a|$ 与 b 在 a 的方向上的投影 $|b| \cos \theta$ 的乘积.

62. 平面向量的坐标运算

(1) 设 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 则 $a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

(2) 设 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 则 $a - b = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

(3) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

(4) 设 $a = (x, y), \lambda \in R$, 则 $\lambda a = (\lambda x, \lambda y)$.

(5) 设 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 则 $a \cdot b = (x_1 x_2 + y_1 y_2)$.

63. 两向量的夹角公式

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)).$$

64. 平面两点间的距离公式

$$d_{A,B} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)).$$

65. 向量的平行与垂直

设 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 且 $b \neq 0$, 则

$$a \parallel b \Leftrightarrow b = \lambda a \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

$$a \perp b (a \neq 0) \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$

66. 线段的定比分公式

设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, $P(x, y)$ 是线段 $P_1 P_2$ 的分点, λ 是实数, 且 $\overrightarrow{P_1 P} = \lambda \overrightarrow{P P_2}$, 则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{OP_2}}{1 + \lambda}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OP_1} + (1 - t) \overrightarrow{OP_2} \quad (t = \frac{1}{1 + \lambda}).$$

67. 三角形的重心坐标公式

$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则 $\triangle ABC$ 的重心的坐

标是 $G(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$.

68. 点的平移公式

$$\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - h \\ y = y' - k \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'}.$$

注: 图形 F 上的任意一点 $P(x, y)$ 在平移后图形 F' 上的对应点为 $P'(x', y')$, 且 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 (h, k) .

69. “按向量平移”的几个结论

(1) 点 $P(x, y)$ 按向量 $a=(h, k)$ 平移后得到点 $P'(x+h, y+k)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象 C 按向量 $a=(h, k)$ 平移后得到图象 C' , 则 C' 的函数解析式为 $y=f(x-h)+k$.

(3) 图象 C' 按向量 $a=(h, k)$ 平移后得到图象 C , 若 C 的解析式 $y=f(x)$, 则 C' 的函数解析式为 $y=f(x+h)-k$.

(4) 曲线 $C: f(x, y)=0$ 按向量 $a=(h, k)$ 平移后得到图象 C' , 则 C' 的方程为 $f(x-h, y-k)=0$.

(5) 向量 $m=(x, y)$ 按向量 $a=(h, k)$ 平移后得到的向量仍然为 $m=(x, y)$.

70. 三角形五“心”向量形式的充要条件

设 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 角 A, B, C 所对边长分别为 a, b, c , 则

(1) O 为 $\triangle ABC$ 的外心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2$.

(2) O 为 $\triangle ABC$ 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

(3) O 为 $\triangle ABC$ 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$.

(4) O 为 $\triangle ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

(5) O 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的旁心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA} = b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$.

71. 常用不等式:

(1) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当且仅当 $a=b$ 时取 “=” 号).

(2) $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时取 “=” 号).

(3) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

(4) 柯西不等式

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(5) $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

72. 极值定理

已知 x, y 都是正数, 则有

(1) 若积 xy 是定值 p , 则当 $x=y$ 时和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$;

(2) 若和 $x+y$ 是定值 s , 则当 $x=y$ 时积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$.

推广 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 则有 $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 2xy$

(1) 若积 xy 是定值, 则当 $|x-y|$ 最大时, $|x+y|$ 最大;

当 $|x-y|$ 最小时, $|x+y|$ 最小.

(2) 若和 $|x+y|$ 是定值, 则当 $|x-y|$ 最大时, $|xy|$ 最小;

当 $|x-y|$ 最小时, $|xy|$ 最大.

73. 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0) ($a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$), 如果 a 与 $ax^2 + bx + c$ 同号, 则其解集在两根之外; 如果 a 与 $ax^2 + bx + c$ 异号, 则其解集在两根之间. 简言之: 同号两根之外, 异号两根之间.

$x_1 < x < x_2 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2) < 0 (x_1 < x_2)$;

$x < x_1$, 或 $x > x_2 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2) > 0 (x_1 < x_2)$.

74. 含有绝对值的不等式

当 $a > 0$ 时, 有

$|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$.

$$|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a.$$

75. 无理不等式

$$(1) \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}.$$

$$(2) \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}.$$

$$(3) \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}.$$

76. 指数不等式与对数不等式

(1) 当 $a > 1$ 时,

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x);$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}.$$

(2) 当 $0 < a < 1$ 时,

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x);$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}.$$

77. 斜率公式

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)).$$

78. 直线的五种方程

(1) 点斜式 $y - y_1 = k(x - x_1)$ (直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1)$, 且斜率为 k).

(2) 斜截式 $y = kx + b$ (b 为直线 l 在 y 轴上的截距).

(3) 两点式 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ ($y_1 \neq y_2$) ($P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ($x_1 \neq x_2$)).

(4) 截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (a, b 分别为直线的横、纵截距, $a, b \neq 0$)

(5) 一般式 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0).

79. 两条直线的平行和垂直

(1) 若 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$

① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$;

② $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

(2) 若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 且 A_1, A_2, B_1, B_2 都不为零,

① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

$$② l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0;$$

80. 夹角公式

$$(1) \tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|.$$

$$(l_1: y = k_1 x + b_1, l_2: y = k_2 x + b_2, k_1 k_2 \neq -1)$$

$$(2) \tan \alpha = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|.$$

$$(l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, A_1 A_2 + B_1 B_2 \neq 0).$$

直线 $l_1 \perp l_2$ 时, 直线 l_1 与 l_2 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$.

81. l_1 到 l_2 的角公式

$$(1) \tan \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

$$(l_1: y = k_1 x + b_1, l_2: y = k_2 x + b_2, k_1 k_2 \neq -1)$$

$$(2) \tan \alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

$$(l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, A_1 A_2 + B_1 B_2 \neq 0).$$

直线 $l_1 \perp l_2$ 时, 直线 l_1 到 l_2 的角是 $\frac{\pi}{2}$.

82. 四种常用直线系方程

(1) 定点直线系方程: 经过定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线系方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ (除直线 $x = x_0$), 其中 k 是待定的系数; 经过定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线系方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, 其中 A, B 是待定的系数.

(2) 共点直线系方程: 经过两直线 $l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ 的交点的直线系方程为 $(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$ (除 l_2), 其中 λ 是待定的系数.

(3) 平行直线系方程: 直线 $y = kx + b$ 中当斜率 k 一定而 b 变动时, 表示平行直线系方程. 与直线 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线系方程是 $Ax + By + \lambda = 0$ ($\lambda \neq 0$), λ 是参变量.

(4) 垂直直线系方程: 与直线 $Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0, B \neq 0$) 垂直的直线系方程是 $Bx - Ay + \lambda = 0$, λ 是参变量.

83. 点到直线的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ (点 } P(x_0, y_0), \text{ 直线 } l: Ax + By + C = 0 \text{)}.$$

84. $Ax + By + C > 0$ 或 < 0 所表示的平面区域

设直线 $l: Ax + By + C = 0$, 则 $Ax + By + C > 0$ 或 < 0 所表示的平面区域是:

若 $B \neq 0$, 当 B 与 $Ax + By + C$ 同号时, 表示直线 l 的上方的区域; 当 B 与 $Ax + By + C$ 异号时, 表示直线 l 的下方的区域. 简言之, 同号在上, 异号在下.

若 $B = 0$, 当 A 与 $Ax + By + C$ 同号时, 表示直线 l 的右方的区域; 当 A 与 $Ax + By + C$ 异号时, 表示直线 l 的左方的区域. 简言之, 同号在右, 异号在左.

85. $(A_1 x + B_1 y + C_1)(A_2 x + B_2 y + C_2) > 0$ 或 < 0 所表示的平面区域

设曲线 $C: (A_1 x + B_1 y + C_1)(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$ ($A_1 A_2 B_1 B_2 \neq 0$), 则

$(A_1 x + B_1 y + C_1)(A_2 x + B_2 y + C_2) > 0$ 或 < 0 所表示的平面区域是:

$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) > 0$ 所表示的平面区域上下两部分;

$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) < 0$ 所表示的平面区域上下两部分.

86. 圆的四种方程

(1) 圆的标准方程 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

(2) 圆的一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$).

(3) 圆的参数方程 $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$.

(4) 圆的直径式方程 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ (圆的直径的端点是 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$).

87. 圆系方程

(1) 过点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 的圆系方程是

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + \lambda[(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2)] = 0$$

$\Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + \lambda(ax + by + c) = 0$, 其中 $ax + by + c = 0$ 是直线 AB 的方程, λ 是待定的系数.

(2) 过直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的交点的圆系方程是 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(Ax + By + C) = 0$, λ 是待定的系数.

(3) 过圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 的交点的圆系方程是 $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$, λ 是待定的系数.

88. 点与圆的位置关系

点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的位置关系有三种

若 $d = \sqrt{(a - x_0)^2 + (b - y_0)^2}$, 则

$d > r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆外; $d = r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上; $d < r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内.

89. 直线与圆的位置关系

直线 $Ax + By + C = 0$ 与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的位置关系有三种:

$d > r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta < 0$;

$d = r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta = 0$;

$d < r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

$$\text{其中 } d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

90. 两圆位置关系的判定方法

设两圆圆心分别为 O_1, O_2 , 半径分别为 r_1, r_2 , $|O_1O_2| = d$

$d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外离 \Leftrightarrow 4 条公切线 ;

$d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外切 \Leftrightarrow 3 条公切线 ;

$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 相交 \Leftrightarrow 2 条公切线 ;

$d = |r_1 - r_2| \Leftrightarrow$ 内切 \Leftrightarrow 1 条公切线 ;

$0 < d < |r_1 - r_2| \Leftrightarrow$ 内含 \Leftrightarrow 无公切线 .

91. 圆的切线方程

(1) 已知圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

①若已知切点 (x_0, y_0) 在圆上, 则切线只有一条, 其方程是

$$x_0x + y_0y + \frac{D(x_0 + x)}{2} + \frac{E(y_0 + y)}{2} + F = 0.$$

当 (x_0, y_0) 圆外时, $x_0x + y_0y + \frac{D(x_0 + x)}{2} + \frac{E(y_0 + y)}{2} + F = 0$ 表示过两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点的切线方程可设为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 再利用相切条件求 k , 这时必有两切线, 注意不要漏掉平行于 y 轴的切线.

③斜率为 k 的切线方程可设为 $y = kx + b$, 再利用相切条件求 b , 必有两切线.

(2) 已知圆 $x^2 + y^2 = r^2$.

①过圆上的 $P_0(x_0, y_0)$ 点的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$;

②斜率为 k 的圆的切线方程为 $y = kx \pm r\sqrt{1+k^2}$.

92. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$.

93. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 焦半径公式

$$|PF_1| = e(x + \frac{a^2}{c}), \quad |PF_2| = e(\frac{a^2}{c} - x).$$

94. 椭圆的内外部

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$.

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.

95. 椭圆的切线方程

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

(2) 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

96. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦半径公式

$$|PF_1| = |e(x + \frac{a^2}{c})|, \quad |PF_2| = |e(\frac{a^2}{c} - x)|.$$

97. 双曲线的内外部

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1$.

98. 双曲线的方程与渐近线方程的关系

(1) 若双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ 渐近线方程: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$.

(2) 若渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$.

(3) 若双曲线与 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有公共渐近线, 可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ ($\lambda > 0$, 焦点在 x 轴上, $\lambda < 0$, 焦点在 y 轴上).

99. 双曲线的切线方程

(1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

(2) 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

(3) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $A^2 a^2 - B^2 b^2 = C^2$.

100. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦半径公式

抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦半径 $|CF| = x_0 + \frac{p}{2}$.

过焦点弦长 $|CD| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2} = x_1 + x_2 + p$.

101. 抛物线 $y^2 = 2px$ 上的动点可设为 $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0)$ 或 $P(2pt^2, 2pt)$ 或 $P(x, \sqrt{2px})$, 其中 $y_0^2 = 2px_0$.

102. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} (a \neq 0)$ 的图象是抛物线: (1) 顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$; (2) 焦点的坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a})$; (3) 准线方程是 $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$.

103. 抛物线的内外部

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow y^2 < 2px (p > 0)$.

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow y^2 > 2px (p > 0)$.

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = -2px (p > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow y^2 < -2px (p > 0)$.

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = -2px (p > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow y^2 > -2px (p > 0)$.

(3) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow x^2 < 2py (p > 0)$.

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow x^2 > 2py (p > 0)$.

(4) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = -2py (p > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow x^2 < -2py (p > 0)$.

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $x^2 = -2py (p > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow x^2 > -2py (p > 0)$.

104. 抛物线的切线方程

(1) 抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $y_0 y = p(x + x_0)$.

(2) 过抛物线 $y^2 = 2px$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0 y = p(x + x_0)$.

(3) 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $pB^2 = 2AC$.

105. 两个常见的曲线系方程

(1) 过曲线 $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ 的交点的曲线系方程是

$$f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0 \quad (\lambda \text{ 为参数}).$$

(2) 共焦点的有心圆锥曲线系方程 $\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$, 其中 $k < \max\{a^2, b^2\}$. 当 $k > \min\{a^2, b^2\}$ 时, 表示椭圆; 当 $\min\{a^2, b^2\} < k < \max\{a^2, b^2\}$ 时, 表示双曲线.

106. 直线与圆锥曲线相交的弦长公式 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 或

$$|AB| = \sqrt{(1 + k^2)(x_2 - x_1)^2} = |x_1 - x_2| \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = |y_1 - y_2| \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \quad (\text{弦端点}$$

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由方程 $\begin{cases} y = kx + b \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ 消去 y 得到 $ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta > 0$, α 为直线

AB 的倾斜角, k 为直线的斜率).

107. 圆锥曲线的两类对称问题

(1) 曲线 $F(x, y) = 0$ 关于点 $P(x_0, y_0)$ 成中心对称的曲线是 $F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$.

(2) 曲线 $F(x, y) = 0$ 关于直线 $Ax + By + C = 0$ 成轴对称的曲线是

$$F\left(x - \frac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}, y - \frac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}\right) = 0.$$

108. “四线”一方程

对于一般的二次曲线 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, 用 $x_0 x$ 代 x^2 , 用 $y_0 y$ 代 y^2 ,

用 $\frac{x_0 y + xy_0}{2}$ 代 xy , 用 $\frac{x_0 + x}{2}$ 代 x , 用 $\frac{y_0 + y}{2}$ 代 y 即得方程

$$Ax_0 x + B \cdot \frac{x_0 y + xy_0}{2} + Cy_0 y + D \cdot \frac{x_0 + x}{2} + E \cdot \frac{y_0 + y}{2} + F = 0, \text{ 曲线的切线, 切点弦, 中点弦, 弦中点方程均是此方程得到.}$$

109. 证明直线与直线的平行的思考途径

- (1) 转化为判定共面二直线无交点;
- (2) 转化为二直线同与第三条直线平行;
- (3) 转化为线面平行;
- (4) 转化为线面垂直;
- (5) 转化为面面平行.

110. 证明直线与平面的平行的思考途径

- (1) 转化为直线与平面无公共点;
- (2) 转化为线线平行;
- (3) 转化为面面平行.

111. 证明平面与平面平行的思考途径

- (1) 转化为判定二平面无公共点;
- (2) 转化为线面平行;
- (3) 转化为线面垂直.

112. 证明直线与直线的垂直的思考途径

- (1) 转化为相交垂直;
- (2) 转化为线面垂直;
- (3) 转化为线与另一线的射影垂直;

(4) 转化为线与形成射影的斜线垂直.

113. 证明直线与平面垂直的思考途径

- (1) 转化为该直线与平面内任一直线垂直;
- (2) 转化为该直线与平面内相交二直线垂直;
- (3) 转化为该直线与平面的一条垂线平行;
- (4) 转化为该直线垂直于另一个平行平面;
- (5) 转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直.

114. 证明平面与平面的垂直的思考途径

- (1) 转化为判断二面角是直二面角;
- (2) 转化为线面垂直.

115. 空间向量的加法与数乘向量运算的运算律

- (1) 加法交换律: $a+b=b+a$.
- (2) 加法结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
- (3) 数乘分配律: $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$.

116. 平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广

始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和, 等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量.

117. 共线向量定理

对空间任意两个向量 a 、 $b(b \neq 0)$, $a \parallel b \Leftrightarrow$ 存在实数 λ 使 $a=\lambda b$.

P 、 A 、 B 三点共线 $\Leftrightarrow AP \parallel AB \Leftrightarrow AP = tAB \Leftrightarrow OP = (1-t)OA + tOB$.

$AB \parallel CD \Leftrightarrow AB$ 、 CD 共线且 AB 、 CD 不共线 $\Leftrightarrow AB = tCD$ 且 AB 、 CD 不共线.

118. 共面向量定理

向量 p 与两个不共线的向量 a 、 b 共面的 \Leftrightarrow 存在实数对 x, y , 使 $p = ax + by$.

推论 空间一点 P 位于平面 MAB 内的 \Leftrightarrow 存在有序实数对 x, y , 使 $MP = xMA + yMB$, 或对空间任一定点 O , 有序实数对 x, y , 使 $OP = OM + xMA + yMB$.

119. 对空间任一点 O 和不共线的三点 A 、 B 、 C , 满足 $OP = xOA + yOB + zOC$ ($x+y+z=k$), 则当 $k=1$ 时, 对于空间任一点 O , 总有 P 、 A 、 B 、 C 四点共面; 当 $k \neq 1$ 时, 若 $O \in$ 平面 ABC , 则 P 、 A 、 B 、 C 四点共面; 若 $O \notin$ 平面 ABC , 则 P 、 A 、 B 、 C 四点不共面.

A 、 B 、 C 、 D 四点共面 $\Leftrightarrow AD$ 与 AB 、 AC 共面 $\Leftrightarrow AD = xAB + yAC \Leftrightarrow OD = (1-x-y)OA + xOB + yOC$ ($O \notin$ 平面 ABC).

120. 空间向量基本定理

如果三个向量 a 、 b 、 c 不共面, 那么对空间任一向量 p , 存在一个唯一的有序实数组 x, y, z , 使 $p=xa+yb+zc$.

推论 设 O 、 A 、 B 、 C 是不共面的四点, 则对空间任一点 P , 都存在唯一的三个有序实数 x, y, z , 使 $OP = xOA + yOB + zOC$.

121. 射影公式

已知向量 $AB=a$ 和轴 l , e 是 l 上与 l 同方向的单位向量. 作 A 点在 l 上的射影 A' , 作 B 点在 l 上的射影 B' , 则

$$A'B' = |AB| \cos \langle a, e \rangle = a \cdot e$$

122. 向量的直角坐标运算

设 $a=(a_1, a_2, a_3)$, $b=(b_1, b_2, b_3)$ 则

- (1) $a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$;
- (2) $a-b=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$;
- (3) $\lambda a=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$);

$$(4) a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

123. 设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

124. 空间的线线平行或垂直

设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} (\lambda \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases};$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

125. 夹角公式

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

推论 $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$, 此即三维柯西不等式.

126. 四面体的对棱所成的角

四面体 $ABCD$ 中, AC 与 BD 所成的角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + DA^2)|}{2 AC \cdot BD}.$$

127. 异面直线所成角

$$\cos \theta = |\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$$

$$= \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

(其中 θ ($0^\circ < \theta \leq 90^\circ$) 为异面直线 a, b 所成角, \vec{a}, \vec{b} 分别表示异面直线 a, b 的方向向量)

128. 直线 AB 与平面所成角

$$\beta = \arcsin \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{m}|}{|\vec{AB}| |\vec{m}|} \quad (\vec{m} \text{ 为平面 } \alpha \text{ 的法向量}).$$

129. 若 $\triangle ABC$ 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ , 另两边 AC, BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1, θ_2 , A, B 为 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 = (\sin^2 A + \sin^2 B) \sin^2 \theta.$$

特别地, 当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 有

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 = \sin^2 \theta.$$

130. 若 $\triangle ABC$ 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ , 另两边 AC, BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1, θ_2 , A', B' 为 $\triangle ABO$ 的两个内角, 则

$$\tan^2 \theta_1 + \tan^2 \theta_2 = (\sin^2 A' + \sin^2 B') \tan^2 \theta.$$

特别地, 当 $\angle AOB = 90^\circ$ 时, 有

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 = \sin^2 \theta.$$

131. 二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角

$$\theta = \arccos \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \text{ 或 } \pi - \arccos \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \quad (\vec{m}, \vec{n} \text{ 为平面 } \alpha, \beta \text{ 的法向量}).$$

132. 三余弦定理

设 AC 是 α 内的任一条直线, 且 $BC \perp AC$, 垂足为 C , 又设 AO 与 AB 所成的角为 θ_1 , AB 与 AC 所成的角为 θ_2 , AO 与 AC 所成的角为 θ . 则 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2$.

133. 三射线定理

若夹在平面角为 φ 的二面角间的线段与二面角的两个半平面所成的角是 θ_1, θ_2 , 与二面角的棱所成的角是 θ , 则有 $\sin^2 \varphi \sin^2 \theta = \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi$;

$|\theta_1 - \theta_2| \leq \varphi \leq 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$ (当且仅当 $\theta = 90^\circ$ 时等号成立).

134. 空间两点间的距离公式

若 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$d_{A,B} = |\vec{AB}| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

135. 点 Q 到直线 l 距离

$h = \frac{1}{|\vec{a}|} \sqrt{(|\vec{a}| |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ (点 P 在直线 l 上, 直线 l 的方向向量 $\vec{a} = \vec{PA}$, 向量 $\vec{b} = \vec{PQ}$).

136. 异面直线间的距离

$d = \frac{|\vec{CD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ (l_1, l_2 是两异面直线, 其公垂向量为 \vec{n} , C, D 分别是 l_1, l_2 上任一点, d 为 l_1, l_2 间的距离).

137. 点 B 到平面 α 的距离

$$d = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (\vec{n} \text{ 为平面 } \alpha \text{ 的法向量, } \vec{AB} \text{ 是经过面 } \alpha \text{ 的一条斜线, } A \in \alpha).$$

138. 异面直线上两点距离公式

$$d = \sqrt{h^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}.$$

$$d = \sqrt{h^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos \langle \vec{EA'}, \vec{AF} \rangle}.$$

$$d = \sqrt{h^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos \varphi} \quad (\varphi = \angle E - \angle AA' - F).$$

(两条异面直线 a, b 所成的角为 θ , 其公垂线段 AA' 的长度为 h . 在直线 a, b 上分别取两点 E, F , $AA' = m, AF = n, EF = d$).

139. 三个向量的平方公式

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + 2|\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cos \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle$$

140. 长度为 l 的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为 l_1, l_2, l_3 , 夹角分别为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 则有

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \Leftrightarrow \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3 = 2.$$

(立体几何中长方体对角线长的公式是其特例).

141. 面积射影定理

$$S = \frac{S'}{\cos \theta}.$$

中国特级教师高考复习方法指导〈数学复习版〉

(平面多边形及其射影的面积分别是 S 、 S' ，它们所在平面所成锐二面角的为 θ)。

142. 斜棱柱的直截面

已知斜棱柱的侧棱长是 l ，侧面积和体积分别是 $S_{\text{斜棱柱侧}}$ 和 $V_{\text{斜棱柱}}$ ，它的直截面的周长和面积分别是 c_1 和 S_1 ，则

$$\textcircled{1} S_{\text{斜棱柱侧}} = c_1 l.$$

$$\textcircled{2} V_{\text{斜棱柱}} = S_1 l.$$

143. 作截面的依据

三个平面两两相交，有三条交线，则这三条交线交于一点或互相平行。

144. 棱锥的平行截面的性质

如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比（对应角相等，对应边对应成比例的多边形是相似多边形，相似多边形面积的比等于对应边的比的平方）；相应小棱锥与小棱锥的侧面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比。

145. 欧拉定理(欧拉公式)

$V + F - E = 2$ (简单多面体的顶点数 V 、棱数 E 和面数 F)。

(1) E = 各面多边形边数和的一半. 特别地, 若每个面的边数为 n 的多边形, 则面数 F 与棱数 E 的关系: $E = \frac{1}{2} n F$;

(2) 若每个顶点引出的棱数为 m ，则顶点数 V 与棱数 E 的关系: $E = \frac{1}{2} m V$.

146. 球的半径是 R ，则

$$\text{其体积 } V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$\text{其表面积 } S = 4 \pi R^2.$$

147. 球的组合体

(1) 球与长方体的组合体:

长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长。

(2) 球与正方体的组合体:

正方体的内切球的直径是正方体的棱长，正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长，正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长。

(3) 球与正四面体的组合体:

棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12} a$ ，外接球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4} a$.

148. 柱体、锥体的体积

$$V_{\text{柱体}} = \frac{1}{3} S h \quad (S \text{ 是柱体的底面积、} h \text{ 是柱体的高}).$$

$$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3} S h \quad (S \text{ 是锥体的底面积、} h \text{ 是锥体的高}).$$

149. 分类计数原理(加法原理)

$$N = m_1 + m_2 + \cdots \cdots m_n.$$

150. 分步计数原理(乘法原理)

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \cdots m_n.$$

151. 排列数公式

$$A_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (n, m \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } m \leq n).$$

注: 规定 $0! = 1$.

152. 排列恒等式

- (1) $A_n^m = (n - m + 1) A_n^{m-1}$;
- (2) $A_n^m = \frac{n}{n - m} A_{n-1}^m$;
- (3) $A_n^m = n A_{n-1}^{m-1}$;
- (4) $n A_n^n = A_{n+1}^{n+1} - A_n^n$;
- (5) $A_{n+1}^m = A_n^m + m A_n^{m-1}$.
- (6) $1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots = (n + 1)! - 1$.

153. 组合数公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \quad (n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}, \text{ 且 } m \leq n).$$

154. 组合数的两个性质

- (1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;
- (2) $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$.

注: 规定 $C_n^0 = 1$.

155. 组合恒等式

- (1) $C_n^m = \frac{n-m+1}{m} C_n^{m-1}$;
- (2) $C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m$;
- (3) $C_n^m = \frac{n}{m} C_{n-1}^{m-1}$;
- (4) $\sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n$;
- (5) $C_n^r + C_n^{r+1} + C_n^{r+2} + \cdots + C_n^n = C_{n+1}^{r+1}$.
- (6) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n = 2^n$.
- (7) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$.
- (8) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$.
- (9) $C_m^r C_n^0 + C_m^{r-1} C_n^1 + \cdots + C_m^0 C_n^r = C_{m+n}^r$.
- (10) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

156. 排列数与组合数的关系

$$A_n^m = m! \cdot C_n^m.$$

157. 单条件排列

以下各条的大前提是从 n 个元素中取 m 个元素的排列.

(1) “在位”与“不在位”

①某(特)元必在某位有 A_{n-1}^{m-1} 种; ②某(特)元不在某位有 $A_n^m - A_{n-1}^{m-1}$ (补集思想)
 $= A_{n-1}^1 A_{n-1}^{m-1}$ (着眼位置) $= A_{n-1}^m + A_{m-1}^1 A_{n-1}^{m-1}$ (着眼元素) 种.

(2) 紧贴与插空(即相邻与不相邻)

中国特级教师高考复习方法指导〈数学复习版〉

①定位紧贴: $k(k \leq m \leq n)$ 个元在固定位的排列有 $A_k^k A_{n-k}^{m-k}$ 种.

②浮动紧贴: n 个元素的全排列把 k 个元排在一起的排法有 $A_{n-k+1}^{n-k+1} A_k^k$ 种.注: 此类问题常用捆绑法;

③插空: 两组元素分别有 k, h 个 ($k \leq h+1$), 把它们合在一起作全排列, k 的一组互不能挨近的所有排列数有 $A_h^h A_{h+1}^k$ 种.

(3) 两组元素各相同的插空

m 个大球 n 个小球排成一列, 小球必分开, 问有多少种排法?

当 $n > m+1$ 时, 无解; 当 $n \leq m+1$ 时, 有 $\frac{A_{m+1}^n}{A_n^n} = C_{m+1}^n$ 种排法.

(4) 两组相同元素的排列: 两组元素有 m 个和 n 个, 各组元素分别相同的排列数为 C_{m+n}^n .

158. 分配问题

(1) (平均分组有归属问题) 将相异的 m, n 个物件等分给 m 个人, 各得 n 件, 其分配方法数共有 $N = C_{mn}^n \cdot C_{mn-n}^n \cdot C_{mn-2n}^n \cdots C_{2n}^n \cdot C_n^n = \frac{(mn)!}{(n!)^m}$.

(2) (平均分组无归属问题) 将相异的 $m \cdot n$ 个物体等分为无记号或无顺序的 m 堆, 其分配方法数共有

$$N = \frac{C_{mn}^n \cdot C_{mn-n}^n \cdot C_{mn-2n}^n \cdots C_{2n}^n \cdot C_n^n}{m!} = \frac{(mn)!}{m!(n!)^m}.$$

(3) (非平均分组有归属问题) 将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分给 m 个人, 物件必须被分完, 分别得到 n_1, n_2, \cdots, n_m 件, 且 n_1, n_2, \cdots, n_m 这 m 个数彼此不相等, 则其分配方法数共有 $N = C_P^{n_1} \cdot C_{P-n_1}^{n_2} \cdots C_{n_m}^{n_m} \cdot m! = \frac{P!m!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$.

(4) (非完全平均分组有归属问题) 将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分给 m 个人, 物件必须被分完, 分别得到 n_1, n_2, \cdots, n_m 件, 且 n_1, n_2, \cdots, n_m 这 m 个数中分别有 a, b, c, \cdots 个相等, 则其分配方法数有 $N = \frac{C_P^{n_1} \cdot C_{P-n_1}^{n_2} \cdots C_{n_m}^{n_m} \cdot m!}{a!b!c!\cdots} = \frac{P!m!}{n_1!n_2!\cdots n_m!(a!b!c!\cdots)}$.

(5) (非平均分组无归属问题) 将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分为任意的 n_1, n_2, \cdots, n_m 件无记号的 m 堆, 且 n_1, n_2, \cdots, n_m 这 m 个数彼此不相等, 则其分配方法数有 $N = \frac{P!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$.

(6) (非完全平均分组无归属问题) 将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分为任意的 n_1, n_2, \cdots, n_m 件无记号的 m 堆, 且 n_1, n_2, \cdots, n_m 这 m 个数中分别有 a, b, c, \cdots 个相等, 则其分配方法数有 $N = \frac{P!}{n_1!n_2!\cdots n_m!(a!b!c!\cdots)}$.

(7) (限定分组有归属问题) 将相异的 $p(p=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分给甲、乙、丙、 \cdots 等 m 个人, 物体必须被分完, 如果指定甲得 n_1 件, 乙得 n_2 件, 丙得 n_3 件, \cdots 时, 则无论 n_1, n_2, \cdots, n_m 等 m 个数是否全相异或不全相异其分配方法数恒有

$$N = C_p^{n_1} \cdot C_{p-n_1}^{n_2} \cdots C_{n_m}^{n_m} = \frac{p!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

159. “错位问题” 及其推广

贝努利装错笺问题:信 n 封信与 n 个信封全部错位的组合数为

$$f(n) = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right].$$

推广: n 个元素与 n 个位置,其中至少有 m 个元素错位的不同组合总数为

$$\begin{aligned} f(n, m) &= n! - C_m^1 (n-1)! + C_m^2 (n-2)! - C_m^3 (n-3)! + C_m^4 (n-4)! \\ &\quad - \cdots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} (n-m+1)! \\ &= n! \left[1 - \frac{C_m^1}{A_n^1} + \frac{C_m^2}{A_n^2} - \frac{C_m^3}{A_n^3} + \frac{C_m^4}{A_n^4} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{C_m^{m-1}}{A_n^{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

160. 不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 的解的个数

(1) 方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$) 的正整数解有 C_{m-1}^{n-1} 个.

(2) 方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$) 的非负整数解有 C_{n+m-1}^{n-1} 个.

(3) 方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$) 满足条件 $x_i \geq k$ ($k \in \mathbb{N}^*, 2 \leq i \leq n-1$) 的非负整数解有 $C_{m+1-(n-2)(k-1)}^{n-1}$ 个.

(4) 方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$) 满足条件 $x_i \leq k$ ($k \in \mathbb{N}^*, 2 \leq i \leq n-1$) 的正整数解有 $C_{n+m-1}^{n-1} - C_{n-2}^1 C_{m+n-2}^{n-1} + C_{n-2}^2 C_{m+n-2}^{n-1} - \cdots + (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} C_{m+1-(n-2)k}^{n-1}$ 个.

161. 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n;$$

二项展开式的通项公式

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n).$$

162. 等可能性事件的概率

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

163. 互斥事件 A, B 分别发生的概率的和

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

164. n 个互斥事件分别发生的概率的和

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

165. 独立事件 A, B 同时发生的概率

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

166. n 个独立事件同时发生的概率

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n).$$

167. n 次独立重复试验中某事件恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}.$$

168. 离散型随机变量的分布列的两个性质

$$(1) P_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$(2) P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1.$$

169. 数学期望

$$E\xi = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n.$$

170. 数学期望的性质

$$(1) E(a\xi + b) = aE(\xi) + b.$$

$$(2) \text{若 } \xi \sim B(n, p), \text{ 则 } E\xi = np.$$

(3) 若 ξ 服从几何分布, 且 $P(\xi = k) = g(k, p) = q^{k-1}p$, 则 $E\xi = \frac{1}{p}$.

171. 方差

$$D\xi = (x_1 - E\xi)^2 \cdot p_1 + (x_2 - E\xi)^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - E\xi)^2 \cdot p_n + \cdots$$

172. 标准差

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.$$

173. 方差的性质

$$(1) D(a\xi + b) = a^2 D\xi;$$

$$(2) \text{若 } \xi \sim B(n, p), \text{ 则 } D\xi = np(1-p).$$

$$(3) \text{若 } \xi \text{ 服从几何分布, 且 } P(\xi = k) = g(k, p) = q^{k-1}p, \text{ 则 } D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

174. 方差与期望的关系

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

175. 正态分布密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, +\infty), \text{ 式中的实数 } \mu, \sigma (\sigma > 0) \text{ 是参数, 分别表}$$

示个体的平均数与标准差.

176. 标准正态分布密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in (-\infty, +\infty).$$

177. 对于 $N(\mu, \sigma^2)$, 取值小于 x 的概率

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

$$P(x_1 < x_0 < x_2) = P(x < x_2) - P(x < x_1)$$

$$= F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

178. 回归直线方程

$$y = a + bx, \text{ 其中 } \begin{cases} b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ a = \bar{y} - b\bar{x} \end{cases}$$

179. 相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}.$$

$|r| \leq 1$, 且 $|r|$ 越接近于 1, 相关程度越大; $|r|$ 越接近于 0, 相关程度越小.

180. 特殊数列的极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{不存在} & |q| < 1 \text{ 或 } q = -1 \end{cases}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0 & (k < t) \\ \frac{a_t}{b_t} & (k = t) \\ \text{不存在} & (k > t) \end{cases}.$$

$$(3) S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \quad (S \text{ 无穷等比数列 } \{a_1 q^{n-1}\} \text{ (} |q| < 1 \text{) 的和}).$$

181. 函数的极限定理

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$$

182. 函数的夹逼性定理

如果函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在点 x_0 的附近满足:

$$(1) g(x) \leq f(x) \leq h(x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \quad (\text{常数}),$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

本定理对于单侧极限和 $x \rightarrow \infty$ 的情况仍然成立.

183. 几个常用极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad (|a| < 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}.$$

184. 两个重要的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (e=2.718281845\cdots).$$

185. 函数极限的四则运算法则

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

186. 数列极限的四则运算法则

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a \quad (c \text{ 是常数}).$$

187. $f(x)$ 在 x_0 处的导数 (或变化率或微商)

$$f'(x_0) = y' \Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

188. 瞬时速度

$$v = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

189. 瞬时加速度

$$a = v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

190. $f(x)$ 在 (a, b) 的导数

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

191. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数是曲线 $y = f(x)$ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率

$f'(x_0)$, 相应的切线方程是 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

192. 几种常见函数的导数

$$(1) C' = 0 \quad (C \text{ 为常数}).$$

$$(2) (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Q}).$$

$$(3) (\sin x)' = \cos x.$$

$$(4) (\cos x)' = -\sin x.$$

$$(5) (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

$$(6) (e^x)' = e^x; \quad (a^x)' = a^x \ln a.$$

193. 导数的运算法则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$(2) (uv)' = u'v + uv'.$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

194. 复合函数的求导法则

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u'_x = \varphi'(x)$, 函数 $y = f(u)$ 在点 x 处的对应点 U 处有导数 $y'_u = f'(u)$, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 处有导数, 且 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, 或写作 $f'_x(\varphi(x)) = f'(u) \varphi'(x)$.

195. 常用的近似计算公式 (当 $|x|$ 充分小时)

$$(1) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x; \quad \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x;$$

$$(2) (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x;$$

$$(3) e^x \approx 1 + x;$$

(4) $l_n(1+x) \approx x$;

(5) $\sin x \approx x$ (x 为弧度);

(6) $\tan x \approx x$ (x 为弧度);

(7) $\arctan x \approx x$ (x 为弧度)

196. 判别 $f(x_0)$ 是极大(小)值的方法

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时,

(1) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值;

(2) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) < 0$, 右侧 $f'(x) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值.

197. 复数的相等

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d. (a, b, c, d \in R)$$

198. 复数 $z=a+bi$ 的模(或绝对值)

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

199. 复数的四则运算法则

$$(1) (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$

$$(2) (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$

$$(3) (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i;$$

$$(4) (a+bi) \div (c+di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i (c+di \neq 0).$$

200. 复数的乘法的运算律

对于任何 $z_1, z_2, z_3 \in C$, 有

$$\text{交换律: } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

$$\text{结合律: } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

$$\text{分配律: } z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

201. 复平面上的两点间的距离公式

$$d=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (z_1=x_1+y_1i, z_2=x_2+y_2i).$$

202. 向量的垂直

非零复数 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$, 则

$$\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2} \Leftrightarrow \overline{z_1} \cdot z_2 \text{ 的实部为零} \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} \text{ 为纯虚数} \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow ac+bd=0 \Leftrightarrow z_1=\lambda iz_2 \quad (\lambda \text{ 为非零实数}).$$

203. 实系数一元二次方程的解

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,

$$\textcircled{1} \text{ 若 } \Delta=b^2-4ac>0, \text{ 则 } x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } \Delta=b^2-4ac=0, \text{ 则 } x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

$\textcircled{3} \text{ 若 } \Delta=b^2-4ac<0$, 它在实数集 R 内没有实数根; 在复数集 C 内有且仅有两个共轭

$$\text{复数根 } x=\frac{-b \pm \sqrt{-(b^2-4ac)i}}{2a} \quad (b^2-4ac<0).$$

