三导丛书

高等数学
（同济·第四版）
导教·导学·导考
（下册）
（第2版）

符丽珍　刘克轩　肖亚兰
王雪芳　杨月茜　陆　全　编

西北工业大学出版社

解题能力。

五、课后习题全解　对同济大学数学教研室编的《高等数学》（第四版）的课后习题（含各章总习题）全部做了详细解答。因篇幅所限，对超出教学基本要求的标*号的内容，仅对欧拉方程一节的习题作了解答。

本书从指导课程教学、学习和考试、考研的角度，通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的习题的解答，揭示了高等数学的解题方法，解题规律和解题技巧。这对于提高读者分析问题的能力、理解基本概念和理论、开拓解题思路、全面增强数学素质，会收到良好的效果。对于课后习题，希望读者在学习过程中先独立思考，自己动手解题，然后再对照检查，不要依赖于解答。

全书共分上、下两册，分别由符丽珍（编写第一至三章）、刘克轩（编写第四至六章）、肖亚兰（编写第七章）、王雪芳（编写第八、九章）、杨月茜（编写第十、十一章）、陆全（编写第十二章）分工执笔编写，由符丽珍负责统稿。

由于水平有限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2001年3月

于西北工业大学

目　录

下　册

第八章　多元函数微分法及其应用

一、重要内容提要

（一）基本概念

1. 二元函数

定义域和对应关系是二元函数 $z=f(x,y)$ 的两要素．其定义域为平面上的点集．

2. 极限

函数 $z=f(x,y)$ 的极限为 A，是指点 (x,y) 以任何方式，沿任意路径趋于点 (x_0,y_0) 时，均有 $f(x,y)$ 趋于常数 A，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$.

3. 连续

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续必须满足：(1) 在 $U(x_0,y_0)$ 内有定义；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 存在；(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$．三个条件缺一不可．否则，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续．

（二）偏导数

1. 定义与计算

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时，只要把 $z=f(x,y)$ 中的 y 暂时看做常量，而对 x 求导；求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时，暂时把 x 看作常量，而对 y 求导．

2. 高阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

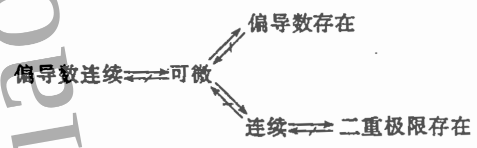
如果二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，则在 D 内恒有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

（三）全微分

1. 定义与计算

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，仅与 (x_0,y_0) 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的全微分 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y$. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$.

2. 二元函数连续、偏导数存在与可微的关系



3. 方向导数与梯度

(1) 方向导数：$u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 沿着方向 L 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 α,β,γ 是方向 L 的方向角.

(2) 梯度：函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处的梯度为

$$\mathbf{grad} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$

（四）多元复合函数的导数

1. 多元复合函数的求导法则（链式法则）

若 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

2. 几种推广情形

(1) 若 $z=f(u,v,w)$，而 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=w(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

(2) 若 $z=f(u,x,y)$，而 $u=\varphi(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

注意：这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不同，$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把复合函数 $f[\varphi(x,y),x,y]$ 中的 y 看做不变，对 x 求偏导数；而 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把 $f(u,x,y)$ 中的 u,y 看做不变，对 x 求偏导数. $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别.

(3) 设 $z=f(u,v,w)$，而 $u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，$w=w(t)$，则复合函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$ 只是一个自变量 t 的函数，这个复合函数对 t 的导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 称为全导数，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$$

注意：$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 的区别.

（五）隐函数求导法

通常有以下三种方法：

（1）方程两边同时对自变量求导，然后解出所需的导数或偏导数．由于因变量是自变量的函数，在此法中要用到链式法则．

（2）公式法．设 $z = f(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的隐函数，且 $F_z \neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

（3）微分法．利用一阶全微分形式的不变性，方程两边同时求全微分，可以求出所需偏导数或导数．

（六）微分法在几何上的应用

1．空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$，则在曲线 Γ 上点 (x_0, y_0, z_0) 的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

其中 $x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), z_0 = \omega(t_0)$.

2．空间曲面的切平面与法线

（1）设曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z) = 0$，则在曲面 Σ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程为
$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

（2）设曲面 Σ 的方程为 $z = f(x,y)$，则在 Σ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

法线方程为
$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

（七）多元函数极值问题

1．函数 $z = f(x,y)$ 取得极值的必要条件

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则 $f_x(x_0,y_0) = 0, f_y(x_0,y_0) = 0$.

2．二元函数极值存在的充分条件

设函数 $z = f(x,y)$ 在 $U(x_0,y_0)$ 内有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0) = 0, f_y(x_0,y_0) = 0$，令 $f_{xx}(x_0,y_0) = A, f_{xy}(x_0,y_0) = B, f_{yy}(x_0,y_0) = C$，则

（1）$AC - B^2 > 0$ 时有极值，且当 $A < 0$ 时有极大值，$A > 0$ 时有极小值；

（2）$AC - B^2 < 0$ 时没有极值；

（3）$AC - B^2 = 0$ 时可能有极值，也可能无极值．

3．二元函数 $z = f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下极值的求法

（1）降元法：从条件方程 $\varphi(x,y) = 0$ 中解出 $y = y(x)$，代入 $z = f(x,y)$，即化为一元函数的无条件极值问题．

（2）拉格朗日乘数法：作 $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$（$\lambda$ 为参数），再从方程组 $F_x = f_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0$，$F_y = f_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0$，$\varphi(x,y) = 0$ 中解出 x, y，就是可能极值点．

二、重点知识结构图

多元函数微分法及其应用
- 基本概念（区域、定义、极限、连续）
- 偏导数（定义、计算、高阶偏导数）
- 全微分（定义、计算、必要条件、充分条件、方向导数、梯度）
- 多元复合函数的导数（链式法则、全导数）
- 隐函数求导法（一个方程、方程组）
- 微分法在几何上的应用
  - 空间曲线的切线与法平面
  - 空间曲面的切平面与法线
- 多元函数极值问题
  - 必要条件，充分条件
  - 无条件极值问题
  - 拉格朗日乘数法

三、常考题型及考研典型题精解

例 8-1 (1) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，试问在(0,0)处 $f(x,y)$ 是否连续?偏导数是否存在?

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，试问在(0,0)处 $f(x,y)$ 的偏导数是否存在?是否可微?

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y=kx\to0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，其值随 k 而变，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在(0,0)点不连续．

但
$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$$
$$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0$$

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x}=0$，同理 $f_y(0,0)=0$．

但是 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\mathrm{d}y]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在．因此 $f(x,y)$ 在(0,0)点处的偏导数存在，但不可微．

例 8-2 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x^2+y^2-z^2=4\end{cases}$ 在点(2,1,1)处的切线与 y 轴的夹角余弦．

解 令
$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$$
$$G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4$$
$$J=\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 2y & -2z\end{vmatrix}=-8yz,\quad J\big|_{(2,1,1)}=-8$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}2x & 2z\\ 2x & -2z\end{vmatrix}=-\frac{1}{J}(-8xz)\Big|_{(2,1,1)}=-2$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}2y & 2x\\ 2y & 2x\end{vmatrix}=0$$

故切线的方向向量为 $s=\{1,-2,0\}$．

又 y 轴的方向向量为 $k=\{0,1,0\}$，$\|s\|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$，则切线与 y 轴的夹角余弦 $\cos\beta=\dfrac{s\cdot k}{\|s\|\,\|k\|}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$．

例 8-3 求曲线 $x=t^2,y=\dfrac{8}{\sqrt{t}},z=4\sqrt{t}$ 在点(16,4,8)处的法平面方程和切线方程．

$t=4$

解
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{8}{2}t^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{\sqrt{t}}$$

在点(16,4,8)处对应的参数 $t=4$，故法向量为 $\{8,-\frac{1}{2},1\}$，可取法向量为 $\{16,-1,2\}$，则法平面方程为
$$16(x-16)-(y-4)+2(z-8)=0$$
即
$$16x-y+2z=268$$
切线方程为
$$\frac{x-16}{16}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-8}{2}$$

例 8-4(1999 考研) 设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$．

解法 1 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 两端对 x 求导数得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x+y)+xf'(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\tag{1}$$

由 $F_x+F_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$ 解出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-F_x-F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{F_y}$，代入式(1)有
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+xf'(1-\frac{F_x+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{F_y})$$
由此式解出
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{fF_y+xf'F_y-xF_xf'}{F_y+xf'F_z}$$

解法 2
$$\mathrm{d}z=f\mathrm{d}x+x\mathrm{d}f=f\mathrm{d}x+xf'(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)\tag{2}$$
由
$$\mathrm{d}F=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z=0$$

解出 $$\mathrm{d}y = \frac{-F_z\mathrm{d}z - F_x\mathrm{d}x}{F_y}$$

代入式(2)得 $$\mathrm{d}z = f\mathrm{d}x + xf'\left(\mathrm{d}x + \frac{-F_z\mathrm{d}z - F_x\mathrm{d}x}{F_y}\right)$$

由此解得 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{fF_y + xF_yf' - F_xxf'}{F_y + xf'F_z}$$

例 8-5(2000 考研) 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有连续二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + \frac{1}{y}f_2' - \frac{y}{x^2}g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f_1' + y\left[f_{11}''\cdot x + f_{12}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right] + \left(-\frac{1}{y^2}f_2'\right) +$$
$$\frac{1}{y}\left(f_{21}''\cdot x + f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right) - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^2}g''\cdot\frac{1}{x} =$$
$$f_1' - \frac{1}{y^2}f_2' + xyf_{11}'' - \frac{x}{y^3}f_{22}'' - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''$$

例 8-6(2001 考研) 设 $z = f(x,y)$ 在点(1,1)处可微，且 $f(1,1) = 1$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 3$，$\varphi(x) = f(x, f(x,x))$，求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi^3(x))\big|_{x=1}$.

解 $$\varphi(1) = f(1, f(1,1)) = f(1,1) = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi^3(x)) = 3\varphi^2(x)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = 3\varphi^2(x)\{f_1'(x, f(x,x)) + f_2'(x, f(x,x))\cdot[f_1'(x,x) + f_2'(x,x)]\}$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi^3(x))\big|_{(1,1)} = 3\{f_1'(1, f(1,1)) + f_2'(1, f(1,1))\cdot[f_1'(1,1) + f_2'(1,1)]\} = 3\{f_1'(1,1) + f_2'(1,1)\cdot[f_1'(1,1) + f_2'(1,1)]\} = 3\{2 + 3[2+3]\} = 51$$

例 8-7(2003 考研) 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$，又 $g(x,y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 设 $u = xy, v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v},\qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v}$$

故 $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = x^2 + y^2$$

例 8-8 在曲面 $z^2 = 2(x-1)^2 + (y-1)^2(z>0)$ 上求点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，使得 P_1 到原点 O 的距离为最短，并且证明该曲面在点 P_1 处的法线与向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 平行.

解 目标函数为 $f = d^2 = x^2 + y^2 + z^2$，约束条件为 $z^2 = 2(x-1)^2 + (y-1)^2$，化为无条件极值为

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2(x-1)^2 + (y-1)^2 \quad (x,y)\in R^2$$

$$\begin{cases} f_x = 2x + 4(x-1) = 0 \\ f_y = 2y + 2(y-1) = 0 \end{cases}\quad \text{解出惟一驻点}\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

代入曲面方程得 $z_1 = \frac{\sqrt{17}}{6}$(舍去负值).

$A = f_{xx}(x_1,y_1) = 6, B = f_{xy}(x_1,y_1) = 0, C = f_{yy}(x_1,y_1) = 4$，因为 $AC - B^2 = 24 > 0$，且 $A > 0$，所以在点 $P_1\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{17}}{6}\right)$ 处取得最短距离 $d = \frac{\sqrt{42}}{6}$.

或由题意，原点 O 到上半椭圆 $z^2 = 2(x-1)^2 + (y-1)^2(z>0)$ 存在最小距离，所以 $f(x,y)$ 在惟一驻点处达到最小值.

令 $$F(x,y,z) = 2(x-1)^2 + (y-1)^2 - z^2$$

所以 $$F_x(P_1) = -\frac{4}{3},\quad F_y(P_1) = -1$$

$$F_z(P_1) = \frac{-\sqrt{17}}{3},\quad \overrightarrow{OP_1} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{17}}{6}\right\}$$

曲面在点 P_1 处法向量 $\boldsymbol{n} = -2\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{17}}{6}\right\} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{OP_1}$.

例 8-9 在椭球面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 的第一卦限上求一点，使椭球面在该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小.

解 设 (x_0,y_0,z_0) 是椭球面第一卦限部分上的点，则切平面方程为

$$x_0x+y_0y+\frac{1}{4}z_0z=1$$

设目标函数为 $$f=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}$$

约束条件为 $$x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2-1=0$$

令 $$F=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}+\frac{16}{z_0^2}+\lambda(x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2-1)$$

由

$$\begin{cases}F_{x_0}=-\frac{2}{x_0^3}+2\lambda x_0=0\\ F_{y_0}=-\frac{2}{y_0^3}+2\lambda y_0=0\\ F_{z_0}=-\frac{32}{z_0^3}+\frac{\lambda}{2}z_0=0\\ x_0^2+y_0^2+\frac{1}{4}z_0^2=1\end{cases}$$

解之得 $$x_0=y_0=\frac{1}{2},z_0=\sqrt{2}.$$

由实际问题知 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2})$ 为所求点.

例 8-10(2000 考研) 假定某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别为 $P_1=18-2Q_1$，$P_2=12-Q_2$，其中 P_1 和 P_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位:万元/吨)，Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量，单位:吨)，并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即

$$Q=Q_1+Q_2$$

(1) 如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润.

(2) 如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小.

解 (1) 总利润函数

$$L=R-C=P_1Q_1+P_2Q_2-(2Q+5)=$$
$$-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5$$

令 $L'_{Q_1}=-4Q_1+16=0$，$L'_{Q_2}=-2Q_2+10=0$，解得 $Q_1=4$，$Q_2=5$，则 $P_1=10$(万元/吨)，$P_2=7$(万元/吨). 由于驻点惟一，根据问题的实际意义，故最大值必在驻点达到，最大利润为 $L=52$(万元).

(2) 若实行价格无差别策略，则 $P_1=P_2$，于是有约束条件：$2Q_1-Q_2=6$. 构造拉格朗日函数

$$F(Q_1,Q_2)=-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5+\lambda(2Q_1-Q_2-6)$$

令 $$\begin{cases}F_{Q_1}=-4Q_1+16+2\lambda=0\\ F_{Q_2}=-2Q_2+10-\lambda=0\\ 2Q_1-Q_2-6=0\end{cases}$$

解得 $Q_1=5$，$Q_2=4$，$\lambda=2$，则 $P_1=P_2=8$，最大利润

$$L=-2\times5^2-4^2+16\times5+10\times4-5=49(\text{万元})$$

由上述可知，企业实行差别定价所得总利润要大于统一价格的总利润.

例 8-11(2002 考研) 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 平面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点，也就是说，需在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点，试确定攀登起点的位置.

解 (1) 由梯度的几何意义知 $h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度

$$\mathbf{grad}h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)i+(x_0-2y_0)j$$

方向的方向导数最大，方向导数的最大值为该梯度的模，所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$$

(2) 令 $$f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$$

由题意，只需求 $f(x,y)$ 在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点.

令　$L(x,y)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$

则
$$\begin{cases}L_x'=10x-8y+\lambda(y-2x)=0 & (1)\\ L_y'=10y-8x+\lambda(x-2y)=0 & (2)\\ 75-x^2-y^2+xy=0 & (3)\end{cases}$$

式(1)与式(2)相加可得$(x+y)(2-\lambda)=0$,从而得$y=-x$或$\lambda=2$.

若$\lambda=2$,则由式(1)得$y=x$,再由式(3)得$x=\pm5\sqrt{3}$, $y=\pm5\sqrt{3}$.

若$y=-x$,则由式(3)得$x=\pm5$, $y=\mp5$.

于是得到4个可能的极值点$M_1(5,-5)$,$M_2(-5,5)$,$M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$,$M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$.

由　$f(M_1)=f(M_2)=450$, $f(M_3)=f(M_4)=150$

故$M_1(5,-5)$或$M_2(-5,5)$可作为攀岩的起点.

四、学习效果两级测试题

(一)基础知识测试题及答案

1. 填空题

(1) 函数$z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域为______.

(答案:$D=\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant0,x^2+y^2<1\}$)

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=$______.　(答案:0)

(3) 设$f(x,y)$在点(x,y)处偏导数存在,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=$______

(答案:$2f_x(a,b)$)

(4) 函数$u=xy^2+z^3-xyz$在点$P_0(0,1,2)$沿方向$l=\{1,\sqrt{2},1\}$的方向导数$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=$______.　(答案:$\dfrac{11}{2}$)

(5) $z=f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$,点$M_1(1,1)$,$M_2(-1,-1)$是$f(x,y)$的驻点,则点______是$f(x,y)$的极小值点.

(答案:(1,1),(−1,−1))

2. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) & x^2+y^2\neq0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,问在点(0,0)处:

(1) $f(x,y)$是否连续?(2)是否可微?均说明原因.

(答案:(1)连续;(2)不可微)

3. 设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,求$f_x(x,1)$,$(x>0)$.(答案:1)

4. 设$z=f(x,y)$是由$z-x-y+xe^{z-y-x}=0$确定,求dz.

(答案:$dz=\dfrac{1+xe^{z-y-x}-e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$)

5. 设$u=e^{x-2y}+\dfrac{1}{t}$,其中$x=\sin t,y=t^3$,求$\dfrac{du}{dt}$.

(答案:$e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)-\dfrac{1}{t^2}$)

6. 设$u=yf(x+y,x^2y)$,其中f具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$,$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

(答案:$yf_1'+2xy^2f_2'$;$f_1'+4xyf_2'+yf_{11}''+(x^2y+2xy^2)f_{12}''+2x^3y^2f_{22}''$)

7. 求曲线$L:\begin{cases}x=\int_0^t e^u\cos u\,du\\ y=2\sin t+\cos t\\ z=1+e^{3t}\end{cases}$在$t=0$处的切线和法平面方程.

(答案:$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$;$x+2y+3z-8=0$)

8. 在旋转椭球面$\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$上求距平面$3x+4y+12z=288$最近点和最远点.　(答案:最近点$(9,\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8})$,最远点$(-9,-\dfrac{1}{8},-\dfrac{3}{8})$)

9. 证明曲面$\Phi(x-az,y-bz)=0$上任意一点的切平面与直线$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$平行.($a,b$为常数)

(二)考研训练模拟题及答案

(1) 设$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$,若当$y=1$时,$z=x$,则函数$z=z(x,y)$的表达式为______.

(答案:$\sqrt{y}+x-1$)

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} =$ ______. （答案：0）

(3) 函数 $u=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{xyz}$，则 $\mathrm{grad}u(-1,3,-3)=$ ______.

（答案：$\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{10}},-\dfrac{1}{27\sqrt{10}},\dfrac{\sqrt{10}}{27}\right\}$）

(4) 设 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $\mathrm{d}f(1,1,1)=$ ______. （答案：$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$）

(5) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为______.

（答案：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$）

2. 选择题

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续；

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在．

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q，则有

(A) ②⇒③⇒① (B) ③⇒②⇒①

(C) ③⇒④⇒① (D) ③⇒①⇒④ （答案：A）

(2) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是（ ）.

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零．

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零．

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零．

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在． （答案：A）

3. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处：

(1) 偏导数是否存在？(2) 偏导数是否连续？(3) 是否可微？

（答案：$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，偏导数不连续，$\mathrm{d}z=0$）

4. 设 $u=yf(x+y,x^2y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

（答案：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf_1'+2xy^2f_2'$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_1'+4xyf_2'+yf_{11}''+(x^2y+2xy^2)f_{12}''+2x^3y^2f_{22}''$）

5. 设 $z=x^2yf(xy,g(x,y))$，$y=\varphi(x)$，其中 f,g,φ 均可微，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

（答案：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x\varphi(x)f+x^2\varphi'(x)f+x^2\varphi(x)[f_1'(\varphi(x)+x\varphi'(x))+$

$f_2'(\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}\varphi'(x))]$）

6. 求函数 $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在 $(1,-1,0)$ 处的梯度和最大方向导数．（答案：$\mathrm{grad}u(1,-1,0)=\left\{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\dfrac{1}{2\sqrt{2}},0\right\}$，$\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{1}{2}$）

7. 平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切，求 λ 值．

（答案：± 2）

8. 平面 $2x-y-2z-4=0$ 截曲面 $z=10-x^2-y^2$ 成上、下两部分，求在上面部分曲面上的点到平面的最大距离． （答案：$\dfrac{197}{24}$）

9. 证明函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值，但无极小值．

五、课后习题全解

习题 8－1

1. 已知 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解 $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\dfrac{tx}{ty}=$

$t^2(x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y})=t^2f(x,y)$

2. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$

证 右边 $=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)=$

$$\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v=$$
$$\ln x\cdot(\ln u+\ln v)+\ln y\cdot(\ln u+\ln v)=$$
$$(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=$$
$$F(xy,uv)=\text{左边}$$

3. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解 $$f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$$

4. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$； (2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$； (4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 要使 $\ln(y^2-2x+1)$ 有意义，必须 $y^2-2x+1>0$，即
$$D=\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$$

(2) 函数的定义域必须同时满足下列两个条件 $\begin{cases}x+y>0\\x-y>0\end{cases}$，由此解得 $x>|y|$，所以 $D=\{(x,y)\mid x>|y|\}$.

(3) 函数的定义域必须满足 $y\geqslant 0$，且 $x-\sqrt{y}\geqslant 0$，故
$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$$

(4) 由 $\begin{cases}x\geqslant 0\\y-x>0\\x^2+y^2<1\end{cases}$ 得 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y>x,x^2+y^2<1\}$.

(5) 由 $\begin{cases}R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0\\x^2+y^2+z^2-r^2>0\end{cases}$ 得 $D=\{(x,y,z)\}\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

(6) $D=\{(x,y,z)\}\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2\neq 0\}$.

5. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$； (4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$； (6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解 (1) 由于点(0,1)是函数 $f(x,y)=\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$ 的连续点，所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=f(0,1)=\frac{1-0}{0^2+1^2}=1$$

(2) 由于点(1,0)是 $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的连续点，又
$$f(1,0)=\frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2$$
所以
$$\lim_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2$$

(3) $$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{2^2-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}$$

(4) $$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)}=$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy+1-1}=$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2$$

(5) $$\lim_{\substack{x\to 2\\y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to 2\\y\to 0}}\frac{x\sin(xy)}{(xy)}=2$$

(6) $$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{2}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,\frac{2}{e^{x^2y^2}}=$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\,\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{e^{x^2y^2}}=$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}=0$$

6. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

解 (1) 当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋向于点 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋向于点 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{-y}=-1$. 因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

(2) 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋向于点 $P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1$$

而令点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 趋向于点 $P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{x}{2}\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}}{\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1}=0$$

可见，当点 $P(x,y)$ 沿着两种特定的方式趋向于点 $P_0(0,0)$ 时，虽然各自的极限都存在，但不相等(注意，即使相等也不能断定极限存在)，因此原极限不存在.

7. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

解 当分母 $y^2-2x=0$ 时，函数无意义. 故函数的间断点是

$$\{(x,y)\mid y^2-2x=0\}$$

8. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证 因为 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

又

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=0$$

由夹逼原理，即可得证.

习题 8-2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$；　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；　　(6) $z=(1+xy)^y$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$

(2) $\dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\right)=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2}$

$\dfrac{\partial s}{\partial v}=\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\right)=\dfrac{1}{u}-\dfrac{u}{v^2}$

(3) $z=\sqrt{\ln x+\ln y}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x+\ln y}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x+\ln y}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln xy}}$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y=$

$y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$

由对称性知：　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y\cdot\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}=\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$

$\ln z=y\ln(1+xy)$，　$\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\ln(1+xy)+y\cdot\dfrac{x}{1+xy}$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$$

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{(\frac{y}{z}-1)}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$

$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot(-\frac{y}{z^2})=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

证 $\frac{\partial T}{\partial l}=\pi\frac{1}{\sqrt{lg}}$， $\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\sqrt{l}(-\frac{1}{2}g^{-\frac{3}{2}})=-\pi\frac{\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}$

所以 $$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=l\frac{\pi}{\sqrt{lg}}-g\pi\frac{\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}=\pi\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}-\pi\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}=0$$

3. 设 $z=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}\frac{1}{x^2}=\frac{z}{x^2}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}(\frac{1}{y^2})=\frac{z}{y^2}$

所以 $$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\frac{z}{x^2}+y^2\frac{z}{y^2}=2z$$

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解法 1 $f_x(x,y)=1+\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\frac{1}{y}$， $f_x(x,1)=1$.

解法 2 $f(x,1)=x$，所以 $f_x(x,1)=1$.

5. 曲线 $\begin{cases}z=\frac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$，$\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(2,4,5)}=1$，因为 $\tan\alpha=1$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$； (2) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(3) $z=y^x$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$， $\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y^2}{x^2})}(\frac{1}{x})=\frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{x^2+y^2})=\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$， $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\cdot\ln^2 y$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解 $f_x=y^2+2xz$， $f_y=2xy+z^2$， $f_z=2yz+x^2$， $f_{xz}=2z$

$f_{xx}=2x$， $f_{yz}=2z$， $f_{zz}=2y$， $f_{zzx}=0$

所以 $f_{xx}(0,0,1)=2$，$f_{xz}(1,0,2)=2$，$f_{yz}(0,-1,0)=0$，$f_{zzx}(2,0,1)=0$

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$，$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+\frac{xy}{xy}=\ln(xy)+1$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x}$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x})=0$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy)+1)=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y}$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)=-\frac{1}{y^2}$$

9. 验证：

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证 (1) $\frac{\partial y}{\partial t}=e^{-kn^2t}\cdot(-kn^2)\sin nx=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cdot\cos nx,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx$$

因为
$$k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx$$

所以
$$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(2) $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\frac{x}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$

由函数关于自变量的对称性有：

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

所以
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}=\frac{3r^2-r^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

习题 8-3

1. 求下列函数的全微分：

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$；　　(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$；

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(4) $u=x^{yz}$.

解 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$

所以
$$dz=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy$$

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$

所以
$$dz=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}dx+\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}dy=-\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}dx-dy\right)$$

(3) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

所以
$$dz=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy=$$
$$-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy)$$

(4) 因为$\frac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$

所以
$$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1$, $y=2$ 时的全微分

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$

所以
$$dz\Big|_{(1,2)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}dy=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$$

3. 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 因为

$$\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x},\quad dz=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$$

$y\cdot(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

$-\frac{y}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$

所以当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时

$$\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119$$

$$dz=-\frac{1}{4}\times 0.1+\frac{1}{2}\times(-0.2)=-0.125$$

4. 求函数 $z=e^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

解 因为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=ye^{xy}\Delta x+xe^{xy}\Delta y=e^{xy}(y\Delta x+x\Delta y)$，所以当 $x=1,y=1.\ \Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时，$dz=e(0.15+0.1)=0.25e.$

习题 8-4

1. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y, v=x-y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2u\times1+2v\times1=$$
$$2(u+v)=2(x+y+x-y)=4x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\times1+2v\times(-1)=$$
$$2(u-v)=2(x+y-x+y)=4y$$

2. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\frac{x}{y}, v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot(\frac{1}{y})+\frac{u^2}{v}\cdot3=$$
$$\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v(-\frac{x}{y^2})+\frac{u^2}{v}(-2)=$$
$$-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$$

3. 设 $z=e^{x-2y}$ 而 $x=\sin t, y=t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=e^{x-2y}\cdot\cos t-2e^{x-2y}\cdot(3t^2)=$$
$$e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$$

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t, y=4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\times3-$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\times12t^2=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$$

5. 设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=e^x$，求 $\frac{dz}{dx}$.

解 $$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+(xy)^2}+\frac{x}{1+(xy)^2}\cdot e^x=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2y^2}$$

6. 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x, z=\cos x$，求 $\frac{du}{dx}$.

解 $$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}=$$
$$\frac{1}{a^2+1}[a\cdot e^{ax}(y-z)+e^{ax}\cdot a\cos x+e^{ax}\cdot(-1)\cdot(-\sin x)]=$$
$$\frac{e^{ax}}{a^2+1}[a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x]=e^{ax}\sin x$$

7. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v, y=u-v$，验证 $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

证 $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2}(-1)=\frac{y+x}{x^2+y^2}$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{2(u-v)}{(u+v)^2+(u-v)^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$$

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

(1) $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$； (2) $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$；

(3) $u=f(x,xy,xyz)$.

解 (1) $$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot2x+f_2'(ye^{xy})=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'(-2y)+f_2'(e^{xy}x)=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\frac{1}{y}+f_2'\cdot0=\frac{1}{y}f_1'$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'(-\frac{x}{y^2})+f_2'(\frac{1}{z})=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2'$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_2'(-\frac{y}{z^2})=-\frac{y}{z^2}f_2'$$

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\times1+f_2'y+f_3'yz=f_1'+yf_2'+yzf_3'$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'x+f_3'xz=xf_2'+xzf_3'$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_3'xy = xyf_3'$$

9. 设 $z = xy + xF(u)$，而 $u = \dfrac{y}{x}$，$F(u)$ 为可导函数，证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

证 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + F(u) + xF'(u)(-\dfrac{y}{x^2}) = y + F(u) - \dfrac{y}{x}F'(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + xF'(u)(\frac{1}{x}) = x + F'(u)$$

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + xF(u) - yF'(u) + xy + yF'(u) =$

$$xy + xF(u) + xy = z + xy$$

10. 设 $z = \dfrac{y}{f(x^2 - y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

证 令 $u = x^2 - y^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-yf'(u)\cdot 2x}{f^2(u)} = \dfrac{-2xyf'(u)}{f^2(u)}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) - yf'(u)\cdot(-2y)}{f^2(u)} = \frac{f(u) + 2y^2 f'(u)}{f^2(u)}$$

所以 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-2yf'(u)}{f^2(u)} + \dfrac{f(u) + 2y^2 f'(u)}{yf^2(u)} =$

$$\frac{1}{yf(u)} = \frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{f(u)} = \frac{z}{y^2}$$

11. 设 $z = f(x^2 + y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u = x^2 + y^2$，则 $z = f(u)$，记 $f' = f'(u)$，$f'' = f''(u)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'\cdot 2x = 2xf'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 2xf''\frac{\partial u}{\partial x} = 2f' + 4x^2 f''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xf') = 2xf''\frac{\partial u}{\partial y} = 4xyf''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 2yf''\frac{\partial u}{\partial y} = 2f' + 4y^2 f''$$

12. 求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）：

(1) $z = f(xy, y)$；　　(2) $z = f(x, \dfrac{x}{y})$；

(3) $z = f(xy^2, x^2 y)$；　　(4) $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1'\cdot y = yf_1'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f_1'\cdot x + f_2' = xf_1' + f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 f_{11}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_1' + yf_{11}''x + yf_{12}'' = f_1' + xyf_{11}'' + yf_{12}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 f_{11}'' + xf_{12}'' + f_{21}''x + f_{22}'' = x^2 f_{11}'' + 2xf_{12}'' + f_{22}''$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1' + \dfrac{1}{y}f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{11}'' + \frac{1}{y}f_{12}'' + \frac{1}{y}(f_{21}'' + \frac{1}{y}f_{22}'') = f_{11}'' + \frac{2}{y}f_{12}'' + \frac{1}{y^2}f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(f_1' + \frac{1}{y}f_2') = f_{12}''(-\frac{x}{y^2}) - \frac{1}{y^2}f_2' + \frac{1}{y}f_{22}''(-\frac{x}{y^2}) =$$

$$-\frac{x}{y^2}(f_{12}'' + \frac{1}{y}f_{22}'') - \frac{1}{y^2}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}f_2' - \frac{x}{y^2}f_{22}''(-\frac{x}{y^2}) = \frac{2x}{y^3}f_2' + \frac{x^2}{y^4}f_{22}''$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 f_1' + 2xyf_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xyf_1' + x^2 f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2[f_{11}''\cdot y^2 + f_{12}''\cdot 2xy] + 2yf_2' + 2xy[f_{21}''y^2 + f_{22}''\cdot 2xy] =$$

$$2yf_2' + y^4 f_{11}'' + 4xy^3 f_{12}'' + 4x^2y^2 f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 f_1' + 2xyf_2') = 2yf_1' + y^2[f_{11}''2xy + f_{12}''x^2] +$$

$$2xf_2' + 2xy[f_{21}''\cdot 2xy + f_{22}''\cdot x^2] =$$

$$2yf_1' + 2xf_2' + 2xy^3 f_{11}'' + 2x^3 yf_{22}'' + 5x^2y^2 f_{12}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2xyf_1' + x^2 f_2') = 2xf_1' + 2xy[f_{11}''2xy + f_{12}''x^2] +$$

$$x^2[f_{21}''2xy + f_{22}''x^2] = 2xf_1' + 4x^2y^2 f_{11}'' + 4x^3yf_{12}'' + x^4 f_{22}''$$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1'\cos x + f_3'e^{x+y} = \cos x f_1' + e^{x+y}f_3'$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin y f_2'+e^{x+y}f_3'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x f_1'+\cos x[f_{11}''\cos x+f_{13}'e^{x+y}]+e^{x+y}f_3'+$$
$$e^{x+y}[f_{31}'\cos x+f_{33}''\cdot e^{x+y}]=$$
$$e^{x+y}f_3'-\sin x f_1'+\cos^2 x f_{11}''+2e^{x+y}\cos x f_{13}''+e^{2(x+y)}f_{33}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\cos x f_1'+e^{x+y}f_3')=$$
$$\cos x(f_{12}''(-\sin y)+f_{13}''e^{x+y})+e^{x+y}f_3'+$$
$$e^{x+y}(f_{32}''(-\sin y)+f_{33}''e^{x+y})=$$
$$e^{x+y}f_3'-\cos x\sin y f_{12}''+e^{x+y}\cos x f_{13}''-$$
$$e^{x+y}\sin y f_{32}''+e^{2(x+y)}f_{33}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-\sin y f_2'+e^{x+y}f_3')=$$
$$-\cos y f_2'+e^{x+y}f_3'-\sin y[f_{22}''(-\sin y)+f_{23}''e^{x+y}]+$$
$$e^{x+y}[f_{32}''(-\sin y)+e^{x+y}f_{33}'']=$$
$$e^{x+y}f_3'-\cos y f_2'+\sin^2 y f_{22}''-2e^{x+y}\sin y f_{23}''+e^{2(x+y)}f_{33}''$$

13. 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，而

$$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},\quad y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2}$$

证明 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial s})^2+(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

证 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$$

所以 $(\frac{\partial u}{\partial s})^2+(\frac{\partial u}{\partial t})^2=(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y})^2=$

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$$

又因为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s})=\frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y})=$$

$$\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}]+\frac{\sqrt{3}}{2}[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}]=$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}]+\frac{\sqrt{3}}{2}[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]=$$
$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y})=$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t})+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t})=$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}[-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}]+\frac{1}{2}[-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]=$$
$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

所以 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

习题 8-5

1. 设 $\sin y+e^x-xy^2=0$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 设 $$F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$$

因为 $$F_x=e^x-y^2,\quad F_y=\cos y-2xy$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}$$

2. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x}$

因为 $$F_x=\frac{2x}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$F_y=\frac{2y}{2(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{1}{x})=\frac{y-x}{x^2+y^2}$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}$$

3. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $$F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$$

因为 $$F_x=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}},\quad F_y=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}},\quad F_z=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$$

4. 设$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{x}{z}-\ln z+\ln y$$

因为 $$F_x=\frac{1}{z},\quad F_y=\frac{1}{y},\quad F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}=-\frac{x+z}{z^2}$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-\frac{1}{z}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z}{x+z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-\frac{1}{y}}{-\frac{x+z}{z^2}}=\frac{z^2}{y(x+z)}$$

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

证 设 $$F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$$

因为 $$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1$$
$$F_y=4\cos(x+2y-3z)-2=2F_x$$

$$F_z=-6\cos(x+2y-3z)+3=-3(2\cos(x+2y-3z)-1)=-3F_x$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

故 $$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

6. 设 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，证明$\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

证 因为 $$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

所以 $$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1$$

7. 设 $\varphi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明由方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$.

证 设 $$\varphi=\varphi(u,v),\quad u=cx-az,\quad v=cy-bz$$

$$\varphi_x=\varphi_u\frac{\partial u}{\partial x}=c\varphi_u,\quad \varphi_y=\varphi_v\frac{\partial v}{\partial y}=c\varphi_v$$

$$\varphi_z=\varphi_u\frac{\partial u}{\partial z}+\varphi_v\frac{\partial v}{\partial z}=-a\varphi_u-b\varphi_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_z}=\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi_y}{\varphi_z}=\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$$

因此 $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v}+b\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}=c$$

8. 设 $e^z-xyz=0$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x,y,z)=e^z-xyz$，则

$$F_x=-yz,\quad F_z=e^z-xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(e^z-xy)-yz\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(e^z-xy)^2}=$$

$$\frac{y^2z-yz\left(e^z\frac{yz}{e^z-xy}-y\right)}{(e^z-xy)^2}=$$

$$\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$$

9. 设 $z^3-3xyz=a^3$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则

$$F_x=-3yz,\quad F_y=-3xz,\quad F_z=3z^2-3xy$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^2-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=$$

$$\frac{\left(y\frac{\partial z}{\partial y}+z\right)(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{(z^2-xy)^2}=$$

$$\frac{\left(y\frac{xz}{z^2-xy}+z\right)(z^2-xy)-yz\left(2z\cdot\frac{xz}{z^2-xy}-x\right)}{(z^2-xy)^2}=$$

$$\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数：

(1) 设 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$；

(2) 设 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$，求 $\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz}$；

(3) 设 $\begin{cases}u=f(ux,v+y)\\v=g(u-x,v^2y)\end{cases}$，其中 f,g 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$；

(4) 设 $\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\y=e^u-u\cos v\end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1) 方程组等价于 $\begin{cases}y^2-z=-x^2\\2y^2+3z^2=20-x^2\end{cases}$，方程两边分别对 x 求导得

$$\begin{cases}2y\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=-2x\\4y\frac{dy}{dx}+6z\frac{dz}{dx}=-2x\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2y\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=-2x\\2y\frac{dy}{dx}+3z\frac{dz}{dx}=-x\end{cases}$$

在 $D=\begin{vmatrix}2y&-1\\2y&3z\end{vmatrix}=6yz+2y\neq0$ 的条件下

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}-2x&-1\\-x&3z\end{vmatrix}}{D}=\frac{-6xz-x}{6yz+2y}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}2y&-2x\\2y&-x\end{vmatrix}}{D}=\frac{2xy}{6yz+2y}=\frac{x}{3z+1}$$

(2) 将方程两边分别对 z 求导，注意到 $x=x(z),y=y(z)$，移项后得

$$\begin{cases}\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}=-1\\2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}=-2z\end{cases}$$

在 $D=\begin{vmatrix}1&1\\2x&2y\end{vmatrix}=2(y-x)\neq0$ 的条件下

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\begin{vmatrix}-1&1\\-2z&2y\end{vmatrix}}{2(y-x)}=\frac{-2y+2z}{2(y-x)}=\frac{y-z}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{\begin{vmatrix}1&-1\\2x&-2z\end{vmatrix}}{2(y-x)}=\frac{-2z+2x}{2(y-x)}=\frac{z-x}{x-y}$$

(3) 四个变量两个方程，因此方程组可以确定两个二元隐函数：$u=u(x,y),v=v(x,y)$，方程两边对 x 求偏导，得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(u+x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2'\frac{\partial v}{\partial x}\\\frac{\partial v}{\partial x}=g_1'\left(\frac{\partial u}{\partial x}-1\right)+g_2'\cdot2vy\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

移项后得

$$\begin{cases}(xf_1'-1)\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\frac{\partial v}{\partial x}=-uf_1'\\g_1'\frac{\partial u}{\partial x}+(2yvg_2'-1)\frac{\partial v}{\partial x}=g_1'\end{cases}$$

在 $D=\begin{vmatrix}xf_1'-1&f_2'\\g_1'&2yvg_2'-1\end{vmatrix}=(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'\neq0$ 的条件下

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-uf_1'&f_2'\\g_1'&2yvg_2'-1\end{vmatrix}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}xf_1'-1&-uf_1'\\g_1'&g_1'\end{vmatrix}=\frac{g_1'(xf_1'-1+uf_1')}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}$$

(4) $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是已知函数的反函数，令

$$F(x,y,u,v)=x-e^u-u\sin v$$

$$G(x,y,u,v) = y - e^u + u\cos v$$

则 $\quad F_x = 1,\quad F_y = 0,\quad F_u = -e^u - \sin v,\quad F_v = -u\cos v$

$\quad G_x = 0,\quad G_y = 1,\quad G_u = -e^u + \cos v,\quad G_v = -u\sin v$

在 $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -e^u - \sin v & -u\cos v \\ -e^u + \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u \neq 0$ 的条件下

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & -u\cos v \\ 0 & -u\sin v \end{vmatrix} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 0 & -u\cos v \\ 1 & -u\sin v \end{vmatrix} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -e^u - \sin v & 1 \\ -e^u + \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -e^u - \sin v & 0 \\ -e^u + \cos v & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sin v + e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$$

11. 设 $y = f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t) = 0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数，试证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial t}}$$

证 由方程组 $\begin{cases} y = f(x,t) \\ F(x,y,t) = 0 \end{cases}$ 可以确定两个一元隐函数 $\begin{cases} y = y(x) \\ t = t(x) \end{cases}$，方程两边分别对 x 求导，移项可得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$$

在 $D = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 的条件下

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

习题 8－6

1. 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切线及法平面方程．

解 因为 $x'_t = 1 - \cos t, y'_t = \sin t, z'_t = 2\cos\frac{t}{2}$，而点 $(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$ 所对应的参数 $t = \frac{\pi}{2}$，曲线上在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切向量 $\boldsymbol{T} = \{1, 1, \sqrt{2}\}$，所求给定点处的切线方程为

$$\frac{x - \frac{\pi}{2} + 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

法平面方程为

$$(x - \frac{\pi}{2} + 1) + (y - 1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0$$

即
$$x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4$$

2. 求曲线 $x = \frac{t}{1+t}, y = \frac{1+t}{t}, z = t^2$ 在对应于 $t = 1$ 的点处的切线及法平面方程．

解 $x'_t = \dfrac{1}{(1+t)^2},\quad y'_t = \dfrac{-1}{t^2},\quad z'_t = 2t,\quad t = 1$ 所对应的曲线上的点为 $p_0(\frac{1}{2}, 2, 1)$，过 p_0 点的切向量为 $\boldsymbol{T} = \{\frac{1}{4}, -1, 2\}$，切线方程为

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{2}$$

即
$$\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8}$$

过 p_0 点的法平面方程为

$$\frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) - (y - 2) + 2(z - 1) = 0.$$

即
$$2x - 8y + 16z - 1 = 0$$

3. 求曲线 $y^2=2mx, z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线及法平面方程．

解 曲线可看成参数为 x 的参数方程．将 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 两边分别对 x 求导

$$2y\frac{dy}{dx}=2m,\quad 2z\frac{dz}{dx}=-1$$

有
$$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{y},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2z}$$

因此曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 的切向量为

$$T=\{1,\frac{m}{y_0},-\frac{1}{2z_0}\}$$

切线方程为
$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}$$

法平面方程为

$$(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0$$

4. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程．

解 曲线方程可以确定两个一元隐函数 $y=y(x), z=z(x)$，为求 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$，

令
$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3x,\quad G(x,y,z)=2x-3y+5z-4$$

则
$$F_x=2x-3,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z$$
$$G_x=2,\quad G_y=-3,\quad G_z=5$$

因为
$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y & 2z\\-3 & 5\end{vmatrix}=10y+6z$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=-\frac{1}{10y+6z}\begin{vmatrix}2x-3 & 2z\\2 & 5\end{vmatrix}=$$
$$-\frac{5(2x-3)-4z}{10y+6z}=-\frac{10x-4z-15}{10y+6z}$$
$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}2y & 2x-3\\-3 & 2\end{vmatrix}=$$
$$-\frac{6x+4y-9}{10y+6z}$$

有
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1,1)}=\frac{9}{16},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{16}$$

于是曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{9}{16}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{16}}$$

即
$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面方程为
$$(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)-\frac{1}{16}(z-1)=0$$

即
$$16x+9y-z-24=0$$

5. 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 $x'_t=1, y'_t=2t, z'_t=3t^2$，设切线的切向量为 $T=\{1,2t,3t^2\}$；已知平面的法向量为 $n=\{1,2,1\}$，由于切线平行于平面，所以 $T\cdot n=0$ 即 $1+4t+3t^2=0$，解得 $t=-1$ 和 $t=-\frac{1}{3}$，由此得所求点的坐标为 $(-1,1,-1)$ 和 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$.

6. 求曲面 $e^z-z-xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程．

解 令
$$F(x,y,z)=e^z-z-xy-3$$
$$F_x=-y,\quad F_y=-x,\quad F_z=e^z-1$$

则所求平面的法向量为 $n=\{F_x,F_y,F_z\}_{(2,1,0)}=\{-1,-2,0\}$，在点 $(2,1,0)$ 的切平面方程为

$$(x-2)+2(y-1)=0$$

即
$$x+2y-4=0$$

法线向量为
$$\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}\\z=0\end{cases}$$

7. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面及法线方程．

解 令
$$F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$$

则
$$F_x=2ax,\quad F_y=2by,\quad F_z=2cz$$

在点 (x_0,y_0,z_0) 处法向量为 $\{2ax_0,2by_0,2cz_0\}$，可取法向量

$$n = \{ax_0, by_0, cz_0\}$$

所求切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0$$

即

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1$$

亦即

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}$$

8. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$，$n=\{F_x,F_y,F_z\}=\{2x,4y,2z\}$，且平面的法向量为 $\{1,-1,2\}$，由于已知平面与所求切平面平行，故有

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2}=t$$

因此有

$$x=\frac{1}{2}t,\quad y=-\frac{1}{4}t,\quad z=t$$

代入椭球面方程得

$$(\frac{1}{2}t)^2+2(-\frac{1}{4}t)^2+t^2=1$$

解得 $t=\pm\sqrt{\frac{8}{11}}$. 当 $t=\sqrt{\frac{8}{11}}$ 时，切点坐标为 $x_0=\sqrt{\frac{2}{11}}$，$y_0=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$，$z_0=2\sqrt{\frac{2}{11}}$，过该点的切平面方程为

$$(x-\sqrt{\frac{2}{11}})-(y+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}})+2(z-2\sqrt{\frac{2}{11}})=0$$

即

$$x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$$

当 $t=-\sqrt{\frac{8}{11}}$ 时，切点坐标为 $x_0=-\sqrt{\frac{2}{11}}$，$y_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$，$z_0=-2\sqrt{\frac{2}{11}}$，切平面方程为

$$(x+\sqrt{\frac{2}{11}})-(y-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}})+2(z+2\sqrt{\frac{2}{11}})=0$$

即

$$x-y+2z=-\sqrt{\frac{11}{2}}$$

9. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$，则 $F_x=6x$，$F_y=2y$，$F_z=2z$. 在点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面的法向量为 $n=\{-6,-4,6\}$，而 xOy 面的法向量为 $n_1=\{0,0,1\}$，则切平面与 xOy 面的夹角的余弦为

$$\cos r=\frac{n\cdot n_1}{\|n\|\,\|n_1\|}=\frac{6}{\sqrt{(-6)^2+(-4)^2+6^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{88}}=\frac{3}{\sqrt{22}}$$

即

$$\cos r=\frac{3}{\sqrt{22}}$$

10. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证 设

$$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$$

则

$$n=\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right\}$$

在曲面上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$$

化为截距式，得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1$$

故截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\sqrt{a}=a$$

习题 8-7

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

解 设从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向 l 与 x 轴正向的夹角为 α，则

$$\tan\alpha=\frac{(2+\sqrt{3})-2}{2-1}=\sqrt{3}$$

所以

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由于 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2x\,|_{(1,2)} = 2,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}\,|_{(1,2)} = 2y\,|_{(1,2)} = 4$

因此所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2\cos\frac{\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} + 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$$

2. 求函数 $z = \ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上点(1,2) 处，沿着抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数．

解 由 $y^2 = 4x$ 两边对 x 求导得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{2}{y}\right|_{(1,2)} = 1$$

则 $\tan\alpha = 1,\quad \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

有 $\cos\alpha = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

又因为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \left.\dfrac{1}{x+y}\right|_{(1,2)} = \dfrac{1}{3},\quad \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\dfrac{1}{x+y}\right|_{(1,2)} = \dfrac{1}{3}$

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)} = \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\dfrac{\pi}{4}\right|_{(1,2)} =$

$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3. 求函数 $z = 1 - (\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2})$ 在这点 $(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在这点的内法线方向的方向导数．

解 设 x 轴正向到题设的内法线方向的转角为 θ，它是第三象限的角．将方程 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 两边对 x 求导，得 $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

在点 $(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 处曲线的切线斜率为

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{b}{a}$$

法线的斜率为 $\tan\theta = -\dfrac{1}{k} = \dfrac{a}{b}$

所以 $\cos\theta = -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x}{a^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{b^2}$

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})} = -\dfrac{2}{a^2}\dfrac{a}{\sqrt{2}}(-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) -$

$$\frac{2}{b^2}\frac{b}{\sqrt{2}}(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}) =$$

$$\frac{\sqrt{2}b}{a\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\sqrt{2}a}{b\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

4. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点(1,1,2) 处沿方向角为 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}, \beta = \dfrac{\pi}{4}$，$r = \dfrac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数．

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2 - yz,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy - xz$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - xy$$

在点(1,1,2) 处有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 11$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)} = (-1)\cos\frac{\pi}{3} + 11\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 5$$

5. 求函数 $u = xyz$ 在点(5,1,2) 处沿从点(5,1,2) 到点(9,4,14) 的方向的方向导数．

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yz,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = xz,\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = xy$

在点(5,1,2) 处，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 10, \dfrac{\partial u}{\partial z} = 5$，从点(5,1,2) 到点(9,4,14) 的方向 $l = \{4,3,12\}$，其方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = \frac{4}{13},\quad \cos\beta = \frac{3}{13},\quad \cos\gamma = \frac{12}{13}$$

所以 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(5,1,2)} = 2\times\dfrac{4}{13} + 10\times\dfrac{3}{13} + 5\times\dfrac{12}{13} = \dfrac{98}{13}$

6. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上点(1,1,1) 处，沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向) 的方向导数．

解 $x'_t = 1, y'_t = 2t, z'_t = 3t^2$，在点(1,1,1) 对应着的参数 $t = 1$，曲线在

(1,1,1) 点的切线的正方向为 $l=\{1,2,3\}$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

又因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=2y,\frac{\partial u}{\partial z}=2z$，在点(1,1,1)处，$\frac{\partial u}{\partial x}=2,\frac{\partial u}{\partial y}=2,\frac{\partial u}{\partial z}=2$，所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{2\times 2}{\sqrt{14}}+\frac{2\times 3}{\sqrt{14}}=$$

$$\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}$$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处沿曲线在该点的外法线方向的方向导数.

解 $\mathbf{grad}u(x_0,y_0,z_0)=i+j+k$，令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z$$

球面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的外法线的方向向量为

$$n=\left.\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j+\frac{\partial F}{\partial z}k\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=2x_0i+2y_0j+2z_0k$$

单位法向量为

$$e=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}i+\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}j+\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}k$$

又因为 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$，所以 $e=x_0i+y_0j+z_0k$，则

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathbf{grad}u(x_0,y_0,z_0)\cdot e=x_0+y_0+z_0$$

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}f(1,1,1)$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-2,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=6z-6$

在点(0,0,0)处，$\frac{\partial f}{\partial x}=3,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial f}{\partial z}=-6$，所以

$$\mathbf{grad}f(0,0,0)=3i-2j-6k$$

在点(1,1,1)处，$\frac{\partial f}{\partial x}=6,\frac{\partial f}{\partial y}=3,\frac{\partial f}{\partial z}=0$，所以 $\mathbf{grad}f(1,1,1)=6i+3j$.

9. 设 u,v 都是 x,y,z 的函数，u,v 的各偏导数都存在且连续，证明

(1) $\mathbf{grad}(u+v)=\mathbf{grad}u+\mathbf{grad}v$;

(2) $\mathbf{grad}(uv)=v\,\mathbf{grad}u+u\,\mathbf{grad}v$;

(3) $\mathbf{grad}(u^2)=2u\mathbf{grad}u$.

证 (1) $\mathbf{grad}(u+v)=\frac{\partial(u+v)}{\partial x}i+\frac{\partial(u+v)}{\partial y}j+\frac{\partial(u+v)}{\partial z}k=$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)i+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)j+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)k=$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}i+\frac{\partial v}{\partial y}j+\frac{\partial v}{\partial z}k\right)=$$

$$\mathbf{grad}u+\mathbf{grad}v$$

(2) $\mathbf{grad}(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}i+\frac{\partial(uv)}{\partial y}j+\frac{\partial(uv)}{\partial z}k=$

$$\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)i+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)j+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)k=$$

$$v\left(\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}i+\frac{\partial v}{\partial y}j+\frac{\partial v}{\partial z}k\right)=$$

$$v\,\mathbf{grad}u+u\,\mathbf{grad}v$$

(3) $\mathbf{grad}(u^2)=\frac{\partial(u^2)}{\partial x}i+\frac{\partial(u^2)}{\partial y}j+\frac{\partial(u^2)}{\partial z}k=$

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}i+2u\frac{\partial u}{\partial y}j+2u\frac{\partial u}{\partial z}k=$$

$$2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k\right)=2u\,\mathbf{grad}u$$

10. 问函数 $u=xy^2z$ 在 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求此方向导数的最大值.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xyz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy^2$

所以 $\mathbf{grad}f(1,-1,2)=2i-4j+k$

是方向导数取得最大值的方向，此方向导数的最大值为

$$|\mathbf{grad}u|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}$$

习题 8-8

1. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解 由方程组 $\begin{cases}f_x(x,y)=4-2x=0\\ f_y(x,y)=-4-2y=0\end{cases}$ 求得驻点为 $(2,-2)$，由于

$A = f_{xx}(2,-2) = -2 < 0, B = f_{xy}(2,-2) = 0, C = f_{yy}(2,-2) = -2$

故$AC - B^2 = 4 > 0$，

所以函数 $f(x,y)$ 在点$(2,-2)$处取得极大值，极大值为 $f(2,-2) = 8$.

2. 求函数 $f(x,y) = (6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

解 由方程组 $\begin{cases} f_x(x,y) = (6-2x)(4y-y^2) = 0 \\ f_y(x,y) = (6x-x^2)(4-2y) = 0 \end{cases}$

解得 $x=3, y=0, y=4$ 和 $x=0, x=6, y=2$，可得驻点为：$(0,0),(0,4),(3,2),(6,0),(6,4)$. 又因为

$$f_{xx}(x,y) = -2(4y-y^2)$$
$$f_{xy}(x,y) = 4(3-x)(2-y)$$
$$f_{yy}(x,y) = -2(6x-x^2)$$

在点$(0,0)$处：$A = f_{xx} = 0, B = f_{xy} = 24, C = f_{yy} = 0$，由于 $AC - B^2 = -24^2 < 0$，故 $f(0,0)$ 不是极值.

在点$(0,4)$处：$A = f_{xx} = 0, B = f_{xy} = -24, C = f_{yy} = 0$，由于 $AC - B^2 = -24^2 < 0$，故 $f(0,4)$ 不是极值.

在点$(3,2)$处：$A = -8, B = 0, C = -18$，由于 $AC - B^2 = 144 > 0$，又 $A < 0$，故 $f(3,2) = 36$ 为极大值.

在点$(6,0)$处：$A = 0, B = -24, C = 0$，由于 $AC - B^2 = -24^2 < 0$，故$f(6,0)$不是极值.

在点$(6,4)$处：$A = 0, B = 24, C = 0$，由于 $AC - B^2 = -24^2 < 0$，故$f(6,4)$不是极值.

3. 求函数 $f(x,y) = e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

解 由方程组 $\begin{cases} f_x(x,y) = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1) = 0 \\ f_y(x,y) = e^{2x}(2y+2) = 0 \end{cases}$

可解得驻点$(\frac{1}{2},-1)$，在点$(\frac{1}{2},-1)$处

$$A = f_{xx}(\frac{1}{2},-1) = 4e^{2x}(x+y^2+2y+1)\Big|_{(\frac{1}{2},-1)} = 2e > 0$$

$$B = f_{xy}(\frac{1}{2},-1) = 4e^{2x}(y+1)\Big|_{(\frac{1}{2},-1)} = 0$$

$$C = f_{yy}(x,y) = 2e^{2x}\Big|_{(\frac{1}{2},-1)} = 2e$$

因为 $AC - B^2 = 4e^2 > 0$，所以 $f(\frac{1}{2},-1) = \frac{-e}{2}$ 为函数的极小值.

4. 求函数 $z = xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解 由条件 $x+y=1$ 得 $y=1-x$，将其代入 $z=xy$，问题就转化为求函数 $z = x(1-x)$ 的无条件极值. 因为$\frac{dz}{dx} = 1-2x, \frac{d^2z}{dx^2} = -2$，令$\frac{dz}{dx} = 0$得驻点 $x = \frac{1}{2}$. 又因为$\frac{d^2z}{dx^2} < 0$，所以 $x = \frac{1}{2}$ 为极大值点，且极大值为 $z = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. 因此函数 $z = xy$ 在条件 $x+y=1$ 下在点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$处取得极大值$\frac{1}{4}$.

5. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边分别为 x,y，则周长 $S = x+y+l(0<x<l, 0<y<l)$，问题为求周长 $S = x+y+l$ 在条件 $x^2+y^2=l^2$ 下的条件极值问题. 作辅助函数

$$F(x,y) = x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2)$$

由 $\begin{cases} F_x = 1+2x\lambda = 0 \\ F_y = 1+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = l^2 \end{cases}$

解得 $x = y = -\frac{1}{2\lambda}$，代入 $x^2+y^2=l^2$ 得 $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2l}$，于是得 $x = y = \frac{l}{\sqrt{2}}$，由于驻点$(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{l}{\sqrt{2}})$惟一，因此，当两直角边长均为$\frac{l}{\sqrt{2}}$时，周长最长.

6. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小?

解 设水池的长、宽、高分别为 x,y,z，则目标函数(水池的表面积)为 $S = xy+2xz+2yz(x>0,y>0,z>0)$，由于水池的容积为定值 k，即$xyz = k$，问题为在条件 $xyz = k$ 下，求面积 $S = xy+2xz+2yz$ 的最小值.

作辅助函数 $F(x,y,z) = xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-k)$，由

$$\begin{cases} F_x = y+2z+\lambda yz = 0 \\ F_y = x+2z+\lambda xz = 0 \\ F_z = 2x+2y+\lambda xy = 0 \\ xyz-k = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = y = \sqrt[3]{2k} \\ z = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k} \\ \lambda = -\sqrt[3]{\dfrac{32}{k}} \end{cases}.$$

由于驻点$(\sqrt[3]{2k},\sqrt[3]{2k},\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k})$惟一，根据问题的实际意义，当水池的长、宽都是$\sqrt[3]{2k}$，而高为$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$时，表面积最小．

7. 在平面xOy上求一点，使它到$x=0,y=0$及$x+2y-16=0$三直线的距离平方之和为最小．

解　设所求点的坐标为(x,y)，则此点到$x=0$的距离为$|y|$，到$y=0$的距离为$|x|$，到$x+2y-16=0$的距离为$\dfrac{|x+2y-16|}{\sqrt{1+2^2}}$，则所求距离平方之和为

$$z = x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16) = 0 \end{cases}$$

即由$\begin{cases} 3x+y-8=0 \\ 2x+9y-32=0 \end{cases}$，可解得$\begin{cases} x=\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{16}{5} \end{cases}$，因为$(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$是惟一的驻点，根据问题的实际意义可得，点$(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$到三直线的距离的平方之和为最小．

8. 将周长为$2p$的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积为最大？

解　设矩形的一边长为x，则另一边长为$(p-x)$，假设矩形绕长为$(p-x)$的一边旋转，则旋转圆柱体的体积为$V=\pi x^2(p-x)(0<x<p)$.

由$\dfrac{dv}{dx}=2\pi x(p-x)+\pi x^2(-1)=\pi x(2p-3x)=0$，在$(0,p)$内的惟一驻点为$x=\dfrac{2}{3}p$，根据问题的实际意义可知，当矩形的边长为$\dfrac{2p}{3}$和$\dfrac{p}{3}$时，绕短边旋转所得圆柱体体积最大．

9. 求内接于半径为a的球且有最大体积的长方体．

解　设球面方程为$x^2+y^2+z^2=a^2$，(x,y,z)是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点，则这长方体的长、宽、高分别为$2x,2y,2z$，体积为

$$V = 8xyz$$

问题为求体积$V=8xyz$在条件$x^2+y^2+z^2=a^2$下的最大值．

令
$$F(x,y,z) = 8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$$

有
$$\begin{cases} F_x = 8yz+2\lambda x = 0 & (1) \\ F_y = 8xz+2\lambda y = 0 & (2) \\ F_z = 8xy+2\lambda z = 0 & (3) \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 & (4) \end{cases}$$

由式(1)，(2)，(3)解得$x=y=z=-\dfrac{\lambda}{4}$，代入方程(4)得$\lambda=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}a$，所以$x=y=z=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，因为驻点$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$惟一，根据问题的实际意义，最大长方体必定存在，所以当长、宽、高都为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$时，长方体体积最大．

10. 抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离．

解　设椭圆上任一点为(x,y,z)，则原点到该点的距离平方为$d^2=x^2+y^2+z^2$，由于点在椭圆上，则同时满足$z=x^2+y^2$和$x+y+z=1$这两个方程．

令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1)$

有
$$\begin{cases} F_x = 2x-2\lambda_1 x+\lambda_2 = 0 & (1) \\ F_y = 2y-2\lambda y+\lambda_2 = 0 & (2) \\ F_z = 2z+\lambda_1+\lambda_2 = 0 & (3) \\ z = x^2+y^2 & (4) \\ x+y+z = 1 & (5) \end{cases}$$

由式(1)和式(2)求得$x=y$，代入式(4)和式(5)可解得$\begin{cases} z=2x^2 \\ z=1-2x \end{cases}$，于是有$2x^2+2x-1=0$，由此解得$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，则$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，$z=2\mp\sqrt{3}$. 得到两个驻点

$$p_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right),\ p_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$$

在 p_1 点：$d_1^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2-\sqrt{3})^2=9-5\sqrt{3}$

$$d_1=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$$

在 p_2 点：$d_2^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2+\sqrt{3})^2=9+5\sqrt{3}$

$$d_2=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$$

根据问题的实际意义，距离的最大值与最小值一定存在，所以 $d_1=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ 为最短距离，$d_2=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ 为最长距离．

总习题八

1. 在"充分"、"必要"和"充分必要"三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的充分条件，$f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的必要条件．

(2) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的必要条件．$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的充分条件．

(3) $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的充分条件．

(4) 函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的充分条件．

2. 求函数 $f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域，并求 $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to 0}} f(x,y)$．

解　由 $4x-y^2\geqslant 0$ 及 $0<1-x^2-y^2\neq 1$ 得函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1, y^2\leqslant 4x\}$．因为点 $(\frac{1}{2},0)\in D$，所以

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}\bigg|_{(\frac{1}{2},0)}=\frac{\sqrt{2}}{\ln\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\ln 3-\ln 4}$$

3. 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在．

证　当点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0$$

当点 (x,y) 沿曲线 $y^2=x$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y^2=x\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

由于点 (x,y) 沿不同路径趋于点 $(0,0)$ 时，极限值不同（即使相同，极限也可能不存在），因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在．

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$．

解　当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

所以

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

5. 求下列函数的一阶和二阶偏导数：

(1) $\ln(x+y^2)$；　　(2) $z=x^y$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-1}{(x+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+y^2)-2y\cdot 2y}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=\frac{-2y}{(x+y^2)^2}$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x)$$

6. 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,\Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(x^2-y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2}=\frac{-(y^3+x^2y)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(x^2-y^2)-xy(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\frac{x^3+xy^2}{(x^2-y^2)^2}$$

因
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=-\frac{5}{9},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\frac{10}{9}$$

所以当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,\Delta y=0.03$ 时

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=-\frac{5}{9}\times 0.01+\frac{10}{9}\times 0.03=0.03$$

$$\Delta z=\frac{(2.01)\times(1.03)}{(2.01)^2-(1.03)^2}-\frac{2}{3}=0.02$$

7. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分.

证 因为 $0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)^{3/2}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$

而
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0=f(0,0)$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

因为
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的偏导数存在.

由于 $\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x\to 0}}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{(2(\Delta x)^2)^2}=\frac{1}{4}\neq 0$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微分.

8. 设 $u=x^y$，而 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 都是可微函数，求 $\dfrac{du}{dt}$.

解 $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=yx^{y-1}\cdot\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t)$

9. 设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，而 $u=\eta-\zeta,v=\zeta-\xi,w=\xi-\eta$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial\xi},\dfrac{\partial z}{\partial\eta},\dfrac{\partial z}{\partial\zeta}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\xi}=-\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\zeta}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

10. 设 $z=f(u,x,y),u=xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\frac{\partial u}{\partial x}+f'_x=e^yf'_u+f'_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^yf'_u+f'_x)=e^yf'_u+e^y(xe^yf''_{uu}+f''_{uy})+$$

$$f''_{xu}xe^y+f''_{xy}=xe^{2y}f''_{uu}+e^yf''_{uy}+xe^yf''_{xu}+f''_{xy}+e^yf'_u$$

11. 设 $x=e^u\cos v,y=e^u\sin v,z=uv$. 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}$$

对方程 $e^u\cos v=x$ 与 $e^u\sin v=y$ 两边分别对 x 求导得
$$\begin{cases}e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}=1\\ e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

由此解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-u}(v\cos v-u\sin v)$$

对方程 $e^u\cos v=x$ 与 $e^u\sin v=y$ 两边分别对 y 求导得
$$\begin{cases}e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1\end{cases}$$

由此解得
$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\sin v,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{-u}\cos v$$

因此
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(v\sin v+u\cos v)$$

12. 求螺旋线 $x=a\cos\theta,y=a\sin\theta,z=b\theta$ 在点$(a,0,0)$处的切线及法平面方程.

解 $x'_\theta=-a\sin\theta,\quad y'_\theta=a\cos\theta,\quad z'_\theta=b$

在点$(a,0,0)$处对应的参数 $\theta=0$,所以
$$x'_\theta|_{\theta=0}=0,\quad y'_\theta|_{\theta=0}=a,\quad z'_\theta|_{\theta=0}=b$$

故在点$(a,0,0)$处的切线为$\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z}{b}$,即
$$\begin{cases}x=a\\ by-az=0\end{cases}$$

在点$(a,0,0)$处的法平面为 $a(y-0)+b(z-0)=0$,即$ay+bz=0$.

13. 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$,并写出这法线的方程.

解 设所求点为 $p_0(x_0,y_0,z_0)$,则曲面在该点的法向量 $\boldsymbol{n}=\{y_0,x_0,-1\}$,已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{1,3,1\}$,由于 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面,所以 $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{n}_1$. 故
$$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}$$

所以 $x_0=-3,y_0=-1,z_0=x_0y_0=3$,故所求点为$(-3,-1,3)$,所求法线方程为
$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$$

14. 设 x 轴正向到方向 l 的转角为 φ,求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$,在点$(1,1)$沿方向 l 的方向导数,并分别确定转角 φ,使这导数有(1)最大值,(2)最小值,(3)等于 0.

解 根据已知条件可知 l 的方向余弦为$\{\cos\varphi,\sin\varphi\}$,因为
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1$$

所以在点$(1,1)$,$\dfrac{\partial f}{\partial l}=1\times\cos\varphi+1\times\sin\varphi=\cos\varphi+\sin\varphi=\sqrt{2}\sin(\varphi+\dfrac{\pi}{4})$,则:

(1) 当 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 时,方向导数最大,其最大值为$\sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$ 时,方向导数最小,其最小值为 $-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\varphi=\dfrac{3}{4}\pi$ 及$\dfrac{7}{4}\pi$ 时,方向导数为 0.

15. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处的外法线方向 $\boldsymbol{n}=\left\{\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\right\}$,其方向余弦
$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{x_0}{a^2}}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}},\quad \cos\beta=\frac{\dfrac{y_0}{b^2}}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{z_0}{c^2}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$$

在点 M_0 处的方向向量为 $\boldsymbol{l}=\{2x_0,2y_0,2z_0\}$，所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}(2x_0\frac{x_0}{a^2}+2y_0\frac{y_0}{b^2}+2z_0\frac{z_0}{c^2}) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$$

16. 求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设所求点为 $M_0(x,y,z)$，该点到 xOy 平面的距离为 r，则 $r=|z|$，即 $r^2=z^2$，于是问题变为求函数 z^2 在条件 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 下的最小值问题. 作辅助函数

$$F(x,y,z)=z^2+\lambda_1(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$$

由方程组

$$\begin{cases} F_x=\frac{\lambda_1}{3}+2\lambda_2 x=0 \\ F_y=\frac{\lambda_1}{4}+2\lambda_2 y=0 \\ F_z=2z+\frac{\lambda_1}{5}=0 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

解得

$$x=\frac{4}{5},\quad y=\frac{3}{5},\quad z=\frac{35}{12}$$

根据问题的实际意义，可得 $M_0(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$ 为所求点.

17. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点，并求此最小体积.

解 设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，令

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

$$F_x=\frac{2x}{a^2},\quad F_y=\frac{2y}{b^2},\quad F_z=\frac{2z}{c^2}$$

则过 M_0 的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

切平面在三个坐标轴上的截距分别为

$$X=\frac{a^2}{x_0},\quad Y=\frac{b^2}{y_0},\quad Z=\frac{c^2}{z_0}$$

因为切平面与三坐标所围的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$$

问题为在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下求函数 $V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$ 的最小值. 为简单，先求函数 $u=xyz$ 的最大值，为此作辅助函数

$$G(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$$

由

$$\begin{cases} G_x=yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0 \\ G_y=xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0 \\ G_z=xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

解得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

由于驻点 $M_0(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$ 惟一，根据问题的实际意义，所求切点为 $(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$，且最小体积 $V=\frac{(\sqrt{3})^3}{6}\frac{a^2b^2c^2}{abc}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

第九章　重积分

一、重要内容提要

(一) 重积分的概念

1. 定义

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

重积分的值取决于被积函数和积分区域，与积分变量的记号无关．

2. 几何与物理意义

当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以 D 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体体积，或表示面密度为 $f(x,y)$ 的平面薄片 D 的质量．当 $f(x,y,z)>0$ 时，$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 表示体密度为 $f(x,y,z)$ 的空间体 Ω 的质量．

3. 性质

重积分具有与定积分类似的线性性质、对区域的可加性、积分不等式及积分中值定理．

(二) 重积分的计算

重积分计算的基本方法是化为累次积分．

1. 二重积分

(1) 直角坐标系下二重积分的计算：

(i) 若 D 为 X 型区域，即 D 为 $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x)\end{cases}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

(ii) 若 D 为 Y 型区域，即 D 为 $\begin{cases} c\leqslant y\leqslant d \\ \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y)\end{cases}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(iii) 若 D 既是 X 型区域又是 Y 型区域，则

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(2) 极坐标系下二重积分的计算：

(i) 若极点在域 D 内，D 为 $\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta)\end{cases}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

(ii) 若极点在边界曲线上，D 为 $\begin{cases} \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta \\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta)\end{cases}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

(iii) 若极点在 D 的边界曲线外，D 为 $\begin{cases} \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta \\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\end{cases}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

2. 三重积分

(1) 直角坐标系下三重积分的计算法：

体积元素 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y) \\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x) \\ a\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

则
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

(2) 柱面坐标系下三重积分的计算法：

体积元素 $\mathrm{d}v=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，

$$\Omega:\begin{cases}z_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(r,\theta)\\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\end{cases}$$

则 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

(3) 球面坐标系下三重积分的计算法：

体积元素 $\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$，

$$\Omega:\begin{cases}r_1(\varphi,\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi,\theta)\\ \varphi_1(\theta)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\theta)\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\end{cases}$$

则 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

3. 重积分计算中的注意事项

(1) 画草图：一般先要画出积分域的草图，以利于选择积分次序和确定积分限.

(2) 选坐标系：选择适当的坐标系以使计算简便，坐标系的选取既与积分区域的形状有关，又与被积函数有关. 对于二重积分，当积分区域为圆域、环域、扇域或与圆域有关的区域，而被积函数为 $f(x^2+y^2)$，$f(xy)$，$f(\frac{y}{x})$ 等形式时，宜选极坐标系，其余可考虑选直角坐标系. 对于三重积分，当积分域在坐标面上的投影是圆域或与圆域有关的区域，而被积函数中含有 x^2+y^2 的因子，宜选柱面坐标；若 Ω 的边界曲面与球面有关，而被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$ 的因子，宜选用球面坐标系，其余可选用直角坐标系.

(3) 选积分次序：选择积分次序的原则是：

(i) 首先要使两个积分能积出来，这是主要的.

(ii) 积分区域划分得尽量简单.

在极坐标系中，一般选"先 r 后 θ"的积分次序，在球坐标系中一般选"先 r，再 φ 后 θ"的积分次序，在柱坐标系中一般选"先 z，再 r 后 θ"的积分次序.

化为累次积分后，最后作积分的积分上、下限必为常数；先作积分的积分上、下限，是后积分变量的函数，或者为常数；下限小于上限.

(4) 利用对称性：利用对称性简化计算，必须同时考虑积分域的对称性和被积函数的奇偶性.

(5) 分区域计算：当被积函数中出现绝对值记号，或含有算术根问题，在脱掉绝对值记号时，要考虑被积函数在不同部分区域中的正负号，利用重积分对于积分区域的可加性，分区域计算或利用对称性简化运算.

(三) 重积分的应用

与定积分的应用一样，在重积分的应用中也是采用元素法，将所求量表达成重积分.

二、重点知识结构图

重积分
- 概念(定义，可积的充分条件，几何与物理意义)
- 性质(线性性质；对区域的可加性，积分不等式，估值定理，中值定理)
- 计算
  - 二重积分(直角坐标系，极坐标系)
  - 三重积分(直角坐标系，柱坐标系，球坐标系)
- 应用(面积、体积、质量，曲面的面积，重心，转动惯量，引力)

三、常考题型及考研典型题精解

例 9-1 利用二重积分的性质，估计积分 $I=\iint\limits_D(x+y+10)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成.

解 令 $f(x,y)=x+y+10$，关键是求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值. 在 D 内部，$f_x=1$，$f_y=1$，因此 $f(x,y)$ 在 D 内部无驻点，最值点一定在边界上取得. 作

$$F(x,y)=x+y+10+\lambda(x^2+y^2-4)$$

由方程组 $$\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0\\ F_y=1+2\lambda y=0\\ x^2+y^2-4=0\end{cases}$$

解得驻点为$(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，比较可得最小值 $m=10-2\sqrt{2}$，最大值为 $M=10+2\sqrt{2}$，而 D 的面积为 4π，由估值定理得 $8\pi(5-\sqrt{2})\leqslant I\leqslant 8\pi(5+\sqrt{2})$.

例 9-2 用二重积分计算立体 Ω 的体积 V，其中 Ω 由平面 $z=0$，$y=x$，

$y=x+a, y=a$, $y=2a$ 和 $z=3x+2y$ 所围成($a>0$).

解 $$V=\iint_{\Omega}(3x+2y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(3x+2y)\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^{2a}(5ay-\frac{3}{2}a^2)\mathrm{d}y=6a^3$$

例 9-3 (1999 考研) 计算二重积分 $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=-2$, $y=2, y=0$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

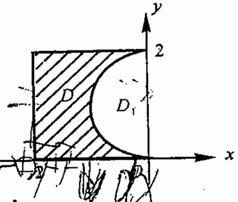


图 9-1

解 区域 D 和 D_1 如图 9-1 所示,有

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y=4$$

在极坐标系下,有 $D_1=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi\}$,因此

$$\iint_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{8}{12}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2})\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$$

于是 $$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4-\frac{\pi}{2}$$

例 9-4 设 $f(x,y)$ 在积分域上连续,更换二次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序.

解 由已知的积分上、下限,可知积分区域 D 为

$$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\ 1-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 3-y\end{cases}$$

画出草图如图 9-2 所示,则

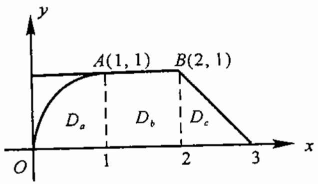


图 9-2

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+$$

$$\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y$$

例 9-5 计算二重积分 $I=\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分区域 D 是由 $0\leqslant y\leqslant 2$ 和 $|x|\leqslant 1$ 确定.

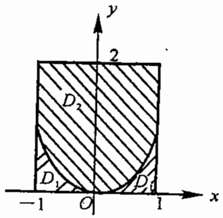


图 9-3

解 由于绝对值号内的函数在 D 内变号,即当 $y\geqslant x^2$ 时,$y-x^2\geqslant 0$;$y<x^2$ 时,$y-x^2<0$,因此用曲线 $y=x^2$ 将 D 分为 D_1 和 D_2 两部分,如图 9-3 所示.

$$I=\iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y+$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y=$$

$$\int_{-1}^{1}\left[-\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$$

例 9-6(2002 考研) (1) 计算二重积分 $\iint_D e^{\max(x^2,y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解 设 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\}$, $D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, x\leqslant y\leqslant 1\}$,则

$$\iint_D e^{\max(x^2,y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}e^{\max(x^2,y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}e^{\max(x^2,y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_{D_1}e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y e^{y^2}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 ye^{y^2}\mathrm{d}y=e-1$$

(2) 设闭区域 D: $x^2+y^2\leqslant y$, $x\geqslant 0$. $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数. 且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

求 $f(x,y)$.

解 设$\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = A$，则$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A$，在上式两边求区域 D 上的二重积分，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8A}{\pi}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

从而
$$A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A$$

所以
$$2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=$$
$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

故
$$A=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

于是
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

例 9-7 计算$I=\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}v$，其中 Ω 由曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$及$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$围成.

解法 1 利用柱面坐标系，把 Ω 的边界曲面化为$z=\sqrt{R^2-r^2}$，$z=R-\sqrt{R^2-r^2}$，它们的交线在 xOy 平面上的投影方程为$\begin{cases}r=\frac{\sqrt{3}}{2}R\\ z=0\end{cases}$，于是

$$I=\iiint\limits_\Omega z^2 r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}r\mathrm{d}r\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2\mathrm{d}z=$$
$$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}r[(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-(R-\sqrt{R^2-r^2})^3]\mathrm{d}r=$$
$$-\frac{2\pi}{3}[\frac{2}{5}(R^2-r^2)^{\frac{5}{2}}+2R^3r^2-\frac{3}{4}Rr^4+$$
$$R(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}]\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}=\frac{59}{480}\pi R^5$$

解法 2 利用球面坐标，把 Ω 的边界化为球面坐标，得：$r=R$，$r=2R\cos\varphi$，它们的交线为圆$\begin{cases}r=R\\ \varphi=\frac{\pi}{3}\end{cases}$，则

$$I=\iiint\limits_\Omega r^2\cos^2\varphi\ r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta=$$
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\ \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r=$$
$$\frac{2\pi}{5}R^5(-\frac{1}{3}\cos^3\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{2\pi}{5}(2R)^5(-\frac{1}{8}\cos^8\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{59}{480}\pi R^5$$

解法 3 利用“先二后一”的方法，用平行于 xOy 的平面横截区域 Ω，得

$$D_z=\begin{cases}\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-(z-R)^2\} & 0\leqslant z\leqslant\frac{R}{2}\\ \{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-z^2\} & \frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R\end{cases}$$

故
$$I=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}\sigma+\int_{\frac{R}{2}}^R z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}\sigma=$$
$$\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\pi[R^2-(z-R)^2]\mathrm{d}z+\int_{\frac{R}{2}}^R z^2\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z=$$
$$\pi[(\frac{2R}{4}z^4-\frac{1}{5}z^5)\Big|_0^{\frac{R}{2}}+(\frac{R^2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5)\Big|_{\frac{R}{2}}^R]=\frac{59}{480}\pi R^5$$

例 9-8(2000 考研) 设有一半径为 R 的球体，p_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 p_0 的距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)，求球体的重心位置.

解 记所考虑的球体为 Ω，以 Ω 的球心为原点 O，射线 Op_0 为正 x 轴，建立直角坐标系，则点 p_0 的坐标为$(R,0,0)$，球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

体密度为
$$\mu(x,y,z)=k[(x-R)^2+y^2+z^2]$$

设 Ω 的重心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性

$$\bar{y}=0,\quad \bar{z}=0$$
$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega xk[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega k[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}$$

而
$$\iiint\limits_\Omega[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_\Omega R^2\mathrm{d}v=$$
$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5=$$

$$\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint_\Omega x[(x-R)^2+y^2+z^2]dv=-2R\iiint_\Omega x^2 dv=$$
$$-\frac{2}{3}R\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dv=$$
$$-\frac{2}{3}R\cdot\frac{4}{5}\pi R^5=-\frac{8}{15}\pi R^6$$

故 $\bar{x}=-\frac{R}{4}$. 因此，球体 Ω 的重心坐标为 $(-\frac{R}{4},0,0)$.

例 9-9 (2001 考研) 设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米，时间单位为小时)，已知体积减少的速率与侧面积成比例(比例系数 0.9)，问高度为 130 cm 的雪堆全部融化需多少小时？

解 记 V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}dz\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}dxdy=$$
$$\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]dz=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S=\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}dxdy=$$
$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\frac{1}{h(t)}[h^2(t)+16r^2]^{\frac{1}{2}}rdr=$$
$$\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}[h^2(t)+16r^2]^{\frac{1}{2}}rdr=\frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

由题意知
$$\frac{dv}{dt}=-0.9S$$

所以
$$\frac{dh(t)}{dt}=-\frac{13}{10}$$

因此
$$h(t)=-\frac{13}{10}t+C$$

由 $h(0)=130$ 得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$，令 $h(t)\to 0$，得 $t=100$ h.

因此，高度为 130 cm 的雪堆全部融化所需时间为 100 h.

例 9-10(2003 考研) 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dV}{\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t}f(x^2)dx}$$

其中，$\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

解 (1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr}$$

$$F'(t)=2\frac{tf(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)rdr}{[\int_0^t f(r^2)rdr]^2}$$

所以在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$，故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

(2) 证 因为

$$G(t)=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr}$$

要证明 $t>0$ 时 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，只需证明 $t>0$ 时，

$$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$$

即
$$\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-[\int_0^t f(r^2)rdr]^2>0$$

令
$$g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-[\int_0^t f(r^2)rdr]^2$$

故
$$g(0)=0$$

则
$$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0$$

$g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加.

因为 $g(t)$ 在 $t=0$ 处连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)=0$，所以当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

四、学习效果两级测试题

(一) 基础知识测试题及答案

1. 填空题

(1) 交换二次积分的积分次序$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx =$ ______.

(答案:$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$)

(2) 积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值等于______. (答案:$\frac{1}{2}(1-e^{-4})$)

(3) 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$,则$\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy =$ ______.

(答案:$\frac{\pi}{4}R^4(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$)

(4) 已知 Ω 由平面 $x=0,y=0,z=0,x+2y+z=1$ 所围,按先 z 后 y 再 x 的积分次序将 $I=\iiint\limits_\Omega x\,dxdydz$ 化为累次积分,则 $I=$ ______.

(答案:$\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_0^{1-x-2y} x\,dz$)

(5) 设 Ω 是由球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成,则三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ 在球面坐标系下的三次积分表达式为______.

(答案:$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}} f(r^2)r^2\sin\varphi\, dr$)

2. 设 D 是矩形域$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$,试利用二重积分的性质估计 $I=\iint\limits_D(x+xy-x^2-y^2)dxdy$ 的值. (答案:$-8\leqslant I\leqslant\frac{2}{3}$)

3. 计算 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx$. (答案:$I=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}$)

4. 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{1-\sin^2(x+y)}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\}$. (答案:$I=\pi-2$)

5. 计算$\iiint\limits_\Omega |xyz|dv$,其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围成的区域. (答案:$\frac{16}{3}$)

6. 应用三重积分计算由平面 $x=0,y=0,z=2$ 及 $z=x+y$ 所围成的四面体的体积. (答案:$\frac{4}{3}$)

7. 设有一个边长为 a 和 b 的矩形薄片,其每点的面密度与其它的一个顶点之间的距离平方成正比,求该薄片的重心坐标.

(答案:$\bar{x}=\frac{3a^3+2ab^2}{4(a^2+b^2)},\bar{y}=\frac{3b^2+2a^2b}{4(a^2+b^2)}$)

8. 设 m,n 为正整数,且其中至少有一个是奇数,证明:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy=0.$$

(二) 考研训练模拟题及答案

1. 填空题

(1) 改变积分次序$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx =$ ______.

(答案:$\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$)

(2) 设 $f(x,y)=\begin{cases} ky(1-x) & (x,y)\in D \\ 0 & 其它\end{cases}$,其中 D 为由直线 $y=x,y=0$ 及 $x=1$ 所围成的平面区域,则使$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=1$ 的 $k=$ ______.

(答案:24)

(3) 二次积分$\int_0^1 dx\int_x^1 x\sin y^3 dy =$ ______. (答案:$\frac{1}{6}(1-\cos 1)$)

(4) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} |xy|dxdy =$ ______. (答案:$\frac{1}{6}$)

(5) 圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 2Rx(R>0)$ 夹在抛物面 $x^2+y^2=2Rz$ 和 xOy 平面之间立体的体积 $V=$ ______. (答案:$\frac{3}{4}\pi R^3$)

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y & 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x\}$. （答案：$\frac{49}{20}$）

3. 求 $I=\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^3,y=1,x=-1$ 所围的区域，f 是连续函数. （答案：$-\frac{2}{5}$）

4. 计算 $\iiint\limits_\Omega \frac{1}{(1+x+y)^3}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由平面 $x+y+z=1,x=0,y=0$ 及 $z=0$ 所围成的空间域. （答案：$\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$）

5. 计算 $\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成的空间域. （答案：$\frac{\pi}{20}$）

6. 求 $\iiint\limits_\Omega z(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面和平面 $z=4$ 所围成的立体. （答案：$\frac{256}{3}\pi$）

7. 求由 $y^2=ax$ 及直线 $x=a(a>0)$ 所围成的均匀薄片（面密度 μ 为常数）对直线 $y=-a$ 的转动惯量. （答案：$\frac{8}{5}\mu a^4$）

8. 设 $f(t)$ 为连续函数，求证：

$$\iint\limits_D f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t$$

其中积分区域 $D:|x|\leqslant\frac{A}{2},|y|\leqslant\frac{A}{2}$，常数 $A>0$.

五、课后习题全解

习题 9－1

1. 设有一平面薄片（不计其厚度），占有 xOy 面上的闭区域 D，薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷，且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q.

解 平面薄板上全部电荷为

$$Q=\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

2. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$，其中 D_1 是矩形闭区域：$-1\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 2$；又 $I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$，其中 D_2 是矩形闭区域：$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$，试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 设 D_3 是矩形闭区域：$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$；而 D_2 是矩形闭区域：$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$.

因为被积函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^3$ 既是 y 的偶函数，又是 x 的偶函数，积分区域 D_1 关于 y 轴对称，D_3 关于 y 轴对称，于是有

$$I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma=$$

$$2[2\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma]=4\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma=4I_2$$

3. 利用二重积分定义证明：

(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$（其中 σ 为 D 的面积）；

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$（其中 k 为常数）；

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

其中 $D=D_1\cup D_2$，D_1,D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证 由二重积分的定义知

$$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 为第 i 个小区域的面积.

(1) 因为 $g(x,y)=1$，所以 $g(\zeta_i,\eta_i)=1$

故
$$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}1\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=\sigma$$

(2) 因为 $g(x,y)=kf(x,y)$，所以

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}kf(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}k\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=$$

$$k(\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i)=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

(3) 把 D 中 D_1 与 D_2 的分界线作为一条分割曲线，将 D_1 任意分割成 n_1 个小区域，$D_1=\sum\limits_{i=1}^{n_1}\Delta\sigma_i$，将 D_2 任意分割成 $(n-n_1)$ 个区域，则 $D_2=\sum\limits_{i=n_1+1}^{n}\Delta\sigma_i$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=$$

$$\lim_{\lambda\to 0}(\sum_{i=1}^{n_1}f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\sum_{i=n_1+1}^{n}f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i)=$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_1}f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=n_1+1}^{n}f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=$$

$$\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

4. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$；

(4) $\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是矩形闭区域：$3\leqslant x\leqslant 5$，$0\leqslant y\leqslant 1$.

解 (1) 在区域 D 中，$x+y\leqslant 1$，所以 $(x+y)^3\leqslant(x+y)^2$，依二重积分的性质 5，可得

$$\iint_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$$

(2) 若两被积函数相等，有 $(x+y)^2=(x+y)^3$，即有 $x+y=0$ 或 $x+y=1$，因为圆心 $(2,1)$ 到直线 $x+y=1$ 的距离 $d=\dfrac{|2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，故圆心到直线 $x+y=1$ 上其它点的距离大于 $\sqrt{2}$，因此圆域 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\leqslant 2$. 位于 $x+y\geqslant 1$ 的半平面内，由 $x+y\geqslant 1$ 可知：$(x+y)^2\leqslant(x+y)^3$，由性质 5 得

$$\iint_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$$

(3) 经过顶点 $(1,1)$ 和 $(2,0)$ 的直线方程为 $x+y=2$，由于区域 D 由直线 $x=1$，$x+y=2$ 及 x 轴所围成，因此 D 在直线 $x+y=2$ 的下方. 因此区域 D 中的点满足 $x+y\leqslant 2$，$x\geqslant 1$，$y\geqslant 0$，因此，$0\leqslant\ln(x+y)\leqslant 1$，于是 $[\ln(x+y)]^2\leqslant\ln(x+y)$，所以

$$\iint_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D[\ln(x+y)]\mathrm{d}\sigma$$

(4) 在区域 D 上有 $x+y>\mathrm{e}$，所以 $\ln(x+y)>1$，因此 $[\ln(x+y)]<[\ln(x+y)]^2$，因而有

$$\iint_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma>\iint_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$$

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值：

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是矩形闭区域：$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$；

(2) $I=\iint\limits_D\sin^2x\sin^2y\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是矩形闭区域：$0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi$；

(3) $I=\iint\limits_D(x+y+1)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是矩形闭区域：$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$；

(4) $I=\iint\limits_D(x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆形闭区域：$x^2+y^2\leqslant 4$.

解 在区域 D 上，$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$，所以 $\sigma=1$，且 $0\leqslant xy\leqslant 1$，$0\leqslant x+y\leqslant 2$，由此可得 $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$，所以

$$0=\iint_D 0\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D 2\mathrm{d}\sigma=2\sigma=2$$

(2) 在区域 D 上，$0\leqslant\sin^2x\leqslant 1$，$0\leqslant\sin^2y\leqslant 1$，$\sigma=\pi^2$，所以

$$0\leqslant\sin^2x\sin^2y\leqslant 1$$

因此

$$0=\iint_D 0\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D\sin^2x\sin^2y\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D 1\mathrm{d}\sigma=\sigma=\pi^2$$

即 $$0 \leqslant \iint_D \sin^2 x \sin^2 y \mathrm{d}\sigma \leqslant \pi^2$$

(3) 在区域 D 上，$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, \sigma = 2$，且 $1 \leqslant x+y+1 \leqslant 1+2+1=4$，因此

$$2 = \iint_D 1\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D 4\mathrm{d}\sigma = 4\times 2 = 8$$

所以 $$2 \leqslant \iint_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma \leqslant 8$$

(4) 在 D 中，$0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$，所以

$$\sigma = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

$$9 \leqslant x^2+4y^2+9 \leqslant 4(x^2+y^2)+9 \leqslant 4\times 4+9 = 25$$

所以 $$36\pi \leqslant \iint_D 9\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D 25\mathrm{d}\sigma \leqslant 100\pi$$

即 $$36\pi \leqslant \iint_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma \leqslant 100\pi$$

习题 9-2(1)

1. 计算下列二重积分：

(1) $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是矩形闭区域：$|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$；

(2) $\iint_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域；

(3) $\iint_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是矩形闭区域：$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$；

(4) $\iint_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$，$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭域.

解 (1) 积分区域 D 既是 X 型的，又是 Y 型的，可用不等式表示为

$$D: \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

所以 $$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}y =$$

$$\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^{1}(2x^2+\frac{2}{3})\mathrm{d}x =$$

$$\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\frac{2}{3}[1-(-1)]+\frac{2}{3}[1-(-1)] = \frac{8}{3}$$

(2) 积分区域 D 既是 X 型的，又是 Y 型的. 按 X 型计算，D 可用不等式表示为 $\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 2-x \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$，于是

$$\iint_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(3x+2y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}\mathrm{d}x = \int_0^2(4+2x-2x^2)\mathrm{d}x =$$

$$4x+x^2-\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{20}{3}$$

(3) $$\iint_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^1\left[x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4\right]_0^1\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1(x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4})\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1$$

(4) 积分区域 D 由直线 $y=0, x=\pi$ 及 $y=x$ 围成，D 可用不等式表示为：$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant x \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$，因此

$$\iint_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi x\mathrm{d}x\int_0^x\cos(x+y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\pi x\Big[\sin(x+y)\Big]_0^x\mathrm{d}x = \int_0^\pi x(\sin 2x-\sin x)\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^\pi x\sin 2x\mathrm{d}x - \int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^\pi x\mathrm{d}(-\frac{1}{2}\cos 2x)+\int_0^\pi x\mathrm{d}\cos x =$$

$$-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos 2x\mathrm{d}x+x\cos x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi+\pi(-1)-\sin x\Big|_0^\pi=-\frac{3}{2}\pi$$

2. 画出积分区域，并计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$；$y=x^2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域；

(3) $\iint\limits_D e^{x+y}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $|x|+|y|\leqslant 1$ 所确定的闭区域；

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=2, y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

解 (1) 积分区域 D 如图 9-4 所示，将 D 用不等式表示为

$$\begin{cases}x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

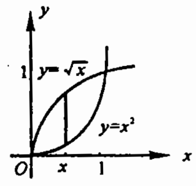


图 9-4

所以

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}x\sqrt{y}\mathrm{d}y=\int_0^1 x\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1 x\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1(x^{\frac{7}{4}}-x^4)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{2}{3}\left[\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{2}{3}\left(\frac{11}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{55}$$

(2) 如图 9-5 所示，积分区域 D 可用不等式表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2}\\-2\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$$

因此

$$\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma=\int_{-2}^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}xy^2\mathrm{d}x=\int_{-2}^2 y^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y=$$

$$\int_{-2}^2\left(2y^2-\frac{1}{2}y^4\right)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{10}y^5\Big|_{-2}^2=\frac{64}{15}$$

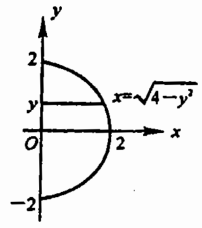


图 9-5

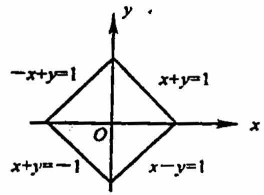


图 9-6

(3) 如图 9-6 所示，$D=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1:\begin{cases}-1-x\leqslant y\leqslant 1+x\\-1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}x-1\leqslant y\leqslant 1-x\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$\iint\limits_D e^{x+y}\mathrm{d}\sigma$

所以

$$\iint\limits_D e^{x+y}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}e^{x+y}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}e^{x+y}\mathrm{d}\sigma=$$

$\int_0^1 dx\int_1^{1-x} e^{x+y}dy$

$$\int_{-1}^0 e^x\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}e^y\mathrm{d}y+\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}e^y\mathrm{d}y=$$

$\int_0^1 dx\int_1^{1-x} e^x\cdot e^y dy$

$$\int_{-1}^0 e^x\left[e^y\right]_{-1-x}^{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^1 e^x\left[e^y\right]_{x-1}^{1-x}\mathrm{d}x=$$

$$\int_{-1}^0 e^x(e^{1+x}-e^{-1-x})\mathrm{d}x+\int_0^1 e^x(e^{1-x}-e^{x-1})\mathrm{d}x=$$

$$\int_{-1}^0(e^{2x+1}-e^{-1})\mathrm{d}x+\int_0^1(e-e^{2x-1})\mathrm{d}x=$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2x+1}-e^{-1}x\right]_{-1}^0+\left[ex-\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1=e-e^{-1}$$

(4) 如图 9-7 所示，积分区域 D 为 Y 型域，可用不等式表示为

$$\begin{cases}\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant y\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$$

所以

$$\iint\limits_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^y(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^2\left[\frac{1}{3}x^3+y^2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{y}{2}}^{y}=$$

$$\int_0^2\left[\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right]dy=$$

$$\frac{19}{24}\times\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{8}y^3\Big|_0^2=\frac{13}{6}$$

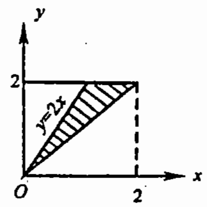


图 9-7

3. 如果二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的被积函数$f(x,y)$是两个函数$f_1(x)$及$f_2(y)$的乘积，即$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$，积分区域$D$为$a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$，证明这个二重积分等于两个单积分的乘积，即

$$\iint\limits_D f_1(x)f_2(y)dxdy=\left[\int_a^b f_1(x)dx\right]\left[\int_c^d f_2(y)dy\right]$$

证 $$\iint\limits_D f_1(x)f_2(y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f_1(x)f_2(y)dy=$$

$$\int_a^b f_1(x)\left[\int_c^d f_2(y)dy\right]dx$$

因为$\int_c^d f_2(y)dy$为常数，可将其从括号中提出来，于是

$$\iint\limits_D f_1(x)f_2(y)dxdy=\left[\int_c^d f_2(y)dy\right]\left[\int_a^b f_1(x)dx\right]$$

即

$$\iint\limits_D f_1(x)f_2(y)dxdy=\left[\int_a^b f_1(x)dx\right]\left[\int_c^d f_2(y)dy\right]$$

4. 化二重积分$I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$为二次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分），其中积分区域D是：

(1) 由直线$y=x$及抛物线$y^2=4x$所围成的闭区域；

(2) 由x轴及半圆周$x^2+y^2=r^2(y\geqslant 0)$所围成的闭区域；

(3) 由直线$y=x,x=2$及双曲线$y=\dfrac{1}{x}(x>0)$所围成的闭区域；

(4) 环形闭区域$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解 (1) 如图 9-8 所示，先将D看做X型区域，则

$$D:\begin{cases}x\leqslant y\leqslant\sqrt{4x}\\0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

则可将I化为先对y后对x的积分

$$I=\int_0^4 dx\int_x^{\sqrt{4x}}f(x,y)dy$$

再将D看做Y型区域，则

$$D:\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}\leqslant x\leqslant y\\0\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

则 $$I=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)dx$$

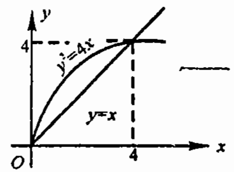


图 9-8

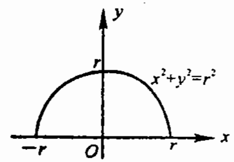


图 9-9

(2) 如图 9-9 所示，先将D看做X型区域，将I化为先对y后对x的积分，得

$$I=\int_{-r}^{r}dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)dy$$

再将D看做Y型区域，则

$$D:\begin{cases}-\sqrt{r^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{r^2-y^2}\\0\leqslant y\leqslant r\end{cases}$$

将I化为先对x后对y的积分得

$$I=\int_0^r dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}f(x,y)dx$$

(3) $y=x$与$y=\dfrac{1}{x}$的交点为$(1,1)$，$y=x$与$x=2$的交点为$(2,2)$，$y=\dfrac{1}{x}$与$x=2$的交点为$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，如图 9-10 所示，得

$$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(x,y)dy$$

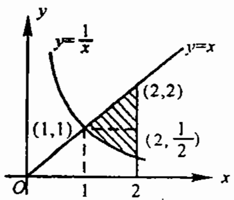


图 9-10

或
$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$$

(4) 用直线 $x=-1,x=1$ 可将积分区域 D 分成四部分，分别记做 D_1,D_2,D_3,D_4，如图 9-11 所示.

$$I=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_4}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$$
$$\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+$$
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

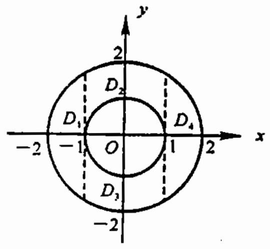


图 9-11

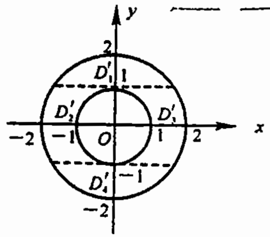


图 9-12

用直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 可将积分区域 D 分成四部分，分别记做 D'_1,D'_2,D'_3,D'_4. 如图 9-12 所示.

$$I=\iint_{D'_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D'_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D'_3}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D'_4}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$$
$$\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+$$
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

5. 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，其中 D 是由直线 $y=x,y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 所围成的闭区域，证明

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

证　积分区域如图 9-13 所示，先将 D 看做 X 型区域，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y$$

再将 D 看做 Y 型区域，有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

所以
$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

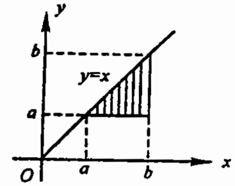


图 9-13

6. 改换下列二次积分的积分次序

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(4) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(5) $\int_1^e\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$；　(6) $\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解　(1) 由二次积分限可得积分域 D 为 Y 型区域，即

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant y\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

如图 9-14 所示，将 D 看做 X 型区域，则有

$$\begin{cases}x\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

所以
$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

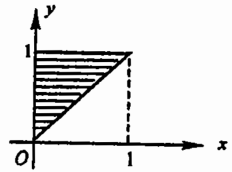


图 9-14

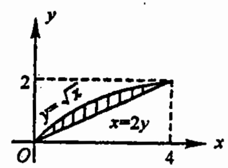


图 9-15

(2) 积分区域 D 为 Y 型区域，即

$$\begin{cases}y^2\leqslant x\leqslant 2y\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$$

如图 9-15 所示，将 D 看做 X 型区域，即有

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

所以 $$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$$

(3) 积分区域 D 为 Y 型区域，即

$$\begin{cases} -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2} \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

如图 9-16 所示，将 D 看做 X 型区域，有

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

所以 $$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

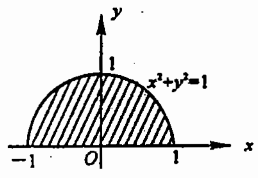


图 9-16

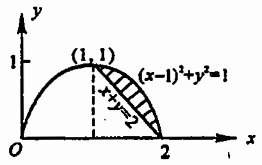


图 9-17

(4) 由 $\begin{cases} 2-x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2} \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$，可知积分区域 D 如图 9-17 所示，则将 D 看做 Y 型区域，有

$$D: \begin{cases} 2-y \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{1-y^2} \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

所以

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dx = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

(5) 由 $\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \ln x \\ 1 \leqslant x \leqslant e \end{cases}$ 知积分区域 D 如图 9-18 所示. 再将 D 看做 Y 型区域，有

$$D: \begin{cases} e^y \leqslant x \leqslant e \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

所以 $$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dx = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y)dx$$

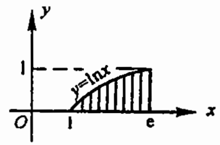


图 9-18

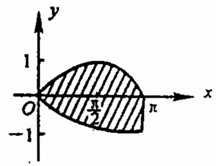


图 9-19

(6) 由 $\begin{cases} -\sin\dfrac{x}{2} \leqslant y \leqslant \sin x \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$，可知积分区域 D 如图 9-19 所示. 再将 D 看做 Y 型区域，可表示为 $D = D_1 \cup D_2$，其中

$$D_1: \begin{cases} -2\arcsin y \leqslant x \leqslant \pi \\ -1 \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}, \quad D_2: \begin{cases} \arcsin y \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin y \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

所以 $$\int_0^\pi dx \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$，$y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度 $\rho(x,y) = x^2+y^2$，求该薄片的质量.

解 $$M = \iint_D \rho(x,y)d\sigma = \iint_D (x^2+y^2)d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2+y^2)dx =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + y^2x\right]_y^{2-y} dy =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{3}(2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3}y^3\right]dy =$$

$$\left[-\frac{1}{12}(2-y)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{7}{12}y^4\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

8. 计算由四个平面 $x=0$，$y=0$，$x=1$，$y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 由二重积分的几何意义知所求立体的体积为以 xOy 面上的 D：

$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$为底，以平面 $z=6-2x-3y$ 为顶的柱体的体积. 即

$$V=\iint_D(6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(6-2x-3y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^1\left[6y-2xy-\frac{3}{2}y^2\right]_0^1\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1(\frac{9}{2}-2x)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}x-x^2\Big|_0^1=\frac{7}{2}$$

9. 求由平面 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解　所求体积为以 D：$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1-x\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$为底，以曲面 $z=6-x^2-y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积，所以

$$V=\iint_D(6-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^1\left[6y-x^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1\left[6-6x-x^2+x^3-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]\mathrm{d}x=$$

$$\left[6x-3x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1=\frac{17}{6}$$

10. 求曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解　由$\begin{cases}z=x^2+2y^2\\z=6-2x^2-y^2\end{cases}$消去 z，得投影柱面方程 $x^2+y^2=2$，因此所求立体在 xOy 平面上的投影区域为$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2\\z=0\end{cases}$，由于积分区域关于 x 轴及 y 轴都对称，且被积函数 $f(x,y)=(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)=6-3x^2-3y^2$ 既是 x 的偶函数，又是 y 的偶函数，令 D_1 为$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant\sqrt{2-x^2}\\0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\end{cases}$，则所求体积为

$$V=\iint_D(6-3x^2-3y^2)\mathrm{d}\sigma=4\iint_{D_1}(6-3x^2-3y^2)\mathrm{d}\sigma=$$

$$12\iint_{D_1}(2-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=12\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(2-x^2-y^2)\mathrm{d}y=$$

$$12\int_0^{\sqrt{2}}\left[(2-x^2)y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x=$$

$$8\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{(2-x^2)^3}\mathrm{d}x$$

令 $x=\sqrt{2}\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$，当 $x=0$ 时，$\theta=0$，当 $x=\sqrt{2}$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，于是

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}\cos^3\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=32\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=6\pi$$

习题 9-2(2)

1. 画出积分区域，把积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 D 是：

(1) $x^2+y^2\leqslant a^2\quad(a>0)$；

(2) $x^2+y^2\leqslant 2x$；

(3) $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$，其中 $0<a<b$；

(4) $0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1$.

解　(1) 积分区域 D 如图 9-20 所示.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

(2) 积分区域如图 9-21 所示.

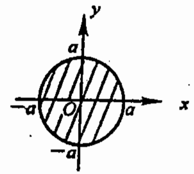


图　9-20

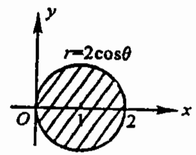


图　9-21

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

(3) 积分区域如图 9-22 所示.

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

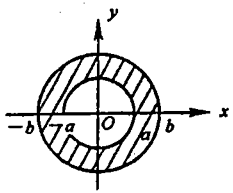


图 9-22

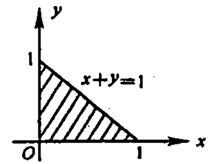


图 9-23

(4) 积分区域如图 9-23 所示. 直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为

$$r\cos\theta + r\sin\theta = 1$$

即
$$r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

所以
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

2. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分：

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy$； (2) $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(x,y) dy$；

(3) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$； (4) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy$.

解 (1) 积分区域为 D：$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$，如图 9-24 所示. 用直线 $y = x$ 将区域 D 分成两部分，$D = D_1 \cup D_2$，其中

$$D_1: \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant \sec\theta \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant \csc\theta \\ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

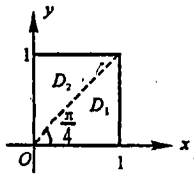


图 9-24

所以

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

(2) 积分区域如图 9-25 所示，直线 $x = 2$ 的极坐标方程为 $r\cos\theta = 2$，即 $r = 2\sec\theta$；直线 $y = x$ 的极坐标方程为 $r\sin\theta = r\cos\theta$，即 $\tan\theta = 1$，故 $\theta = \frac{\pi}{4}$；直线 $y = \sqrt{3}x$ 的极坐标方程为 $r\sin\theta = \sqrt{3} r\cos\theta$，即 $\tan\theta = \sqrt{3}$，$\theta = \frac{\pi}{3}$. 在极坐标下 D 为

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\sec\theta \end{cases}$$

因此
$$\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2\sec\theta} f(r) r dr$$

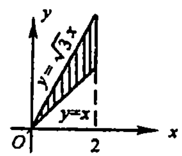


图 9-25

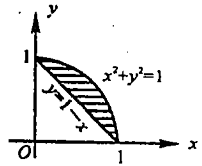


图 9-26

(3) 积分区域如图 9-26 所示. 直线 $y = 1 - x$ 的极坐标方程为

$$r\sin\theta = 1 - r\cos\theta$$

即
$$r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

则
$$D: \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

于是
$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

(4) 积分区域 D 如图 9-27 所示. 直线 $x = 1$ 的极坐标方程为 $r = \sec\theta$；抛

物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为

$$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$$

即 $$r=\sec\theta\tan\theta$$

直线 $y=x(x\geqslant 0)$ 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

故 $$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\\ \sec\theta\tan\theta\leqslant r\leqslant\sec\theta\end{cases}$$

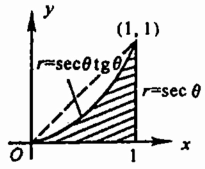


图 9-27

因此

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta\tan\theta}^{\sec\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

3. 把下列积分化为极坐标形式,并计算积分值:

(1) $\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy$; (2) $\int_0^a dx\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy$;

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$; (4) $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx$.

解 (1) 由 $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant\sqrt{2ax-x^2}\\ 0\leqslant x\leqslant 2a\end{cases}$,可画出积分区域如图 9-28 所示. 因为上半圆 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 的极坐标方程为

$$r=2a\cos\theta$$

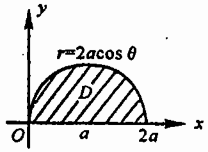


图 9-28

在极坐标下 $$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta\end{cases}$$

所以

$$\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\cdot rdr=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\theta d\theta=$$

$$4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=$$

$$4a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi a^4$$

(2) 由 $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant x\\ 0\leqslant x\leqslant a\end{cases}$ 可画出积分区域如图 9-29 所示,显然 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$;直线 $x=a$ 的极坐标方程为 $r\cos\theta=a$,即 $r=a\sec\theta$,于是

$$0\leqslant r\leqslant a\sec\theta$$

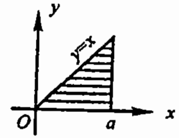


图 9-29

则 $$\int_0^a dx\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sec\theta}r\cdot rdr=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^3}{3}\sec^3\theta d\theta=$$

$$\frac{a^3}{6}\left[\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$\frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$$

(3) 由 $\begin{cases}x^2\leqslant y\leqslant x\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 可画出积分区域如图 9-30 所示,抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程为

$$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$$

即 $$r=\sec\theta\tan\theta$$

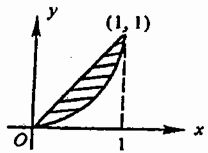


图 9-30

则 $$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0\leqslant r\leqslant\sec\theta\tan\theta\end{cases}$$

于是 $$\int_0^1 dx\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta}r^{-1}rdr=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\tan\theta d\theta=\left[\sec\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$$

(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-y^2}\\ 0\leqslant y\leqslant a\end{cases}$ 可画出积分区域如图 9-31 所示,在极坐标系下

$$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant r\leqslant a\end{cases}$$

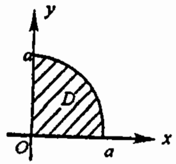


图 9-31

于是 $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx=$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a=\frac{\pi}{8}a^4$$

4. 利用极坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma=\iint\limits_D e^{r^2}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{r^2}rdr=$

$$2\pi\int_0^{2\pi}e^{r^2}\times\frac{1}{2}d(r^2)=\pi e^{r^2}\Big|_0^2=\pi(e^4-1)$$

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\ln(1+r^2)rdr=$

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+r^2)d(1+r^2)=$$

$$\frac{\pi}{4}\left[(1+r^2)\ln(1+r^2)\Big|_0^1-\int_0^1 2rdr\right]=$$

$$\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$$

(3) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}d\sigma=\iint\limits_D \theta rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 rdr=\dfrac{3}{64}\pi^2$

5. 选用适当的坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}d\sigma$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a$ $(a>0)$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是圆环形闭区域：$a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$.

解 (1) 积分区域如图 9-32 所示，宜用直角坐标计算.

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^x\frac{1}{y^2}dy=\int_1^2(-x+x^3)dx=$$

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x^4\Big|_1^2=\frac{9}{4}$$

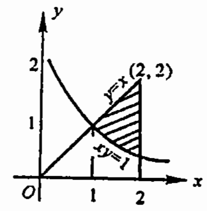


图 9-32

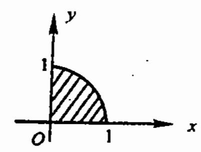


图 9-33

(2) 积分区域如图 9-33 所示，用极坐标计算简单.

$$\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma=\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{(1-r^2)r}{\sqrt{1-r^4}}dr=$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dr^2}{\sqrt{1-r^4}}+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{d(1-r^4)}{\sqrt{1-r^4}}\right]=$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\arcsin r^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}(1-r^4)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1\right]=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$$

(3) 积分区域如图 9-34 所示，宜用直角坐标.

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^y(x^2+y^2)dx=$$

$$\int_a^{3a}(2ay^2-a^2y+\frac{a^3}{3})dy=14a^4$$

(4) 积分区域如图 9-35 所示，宜用极坐标计算.

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma = \iint\limits_D r\cdot r dr d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^2 dr = \frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)$$

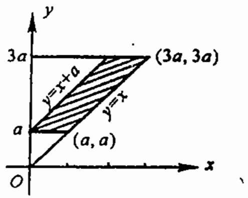


图 9-34

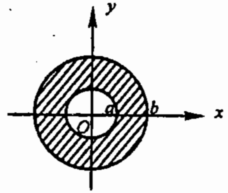


图 9-35

6. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由螺线 $r=2\theta$ 上一段弧 $(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成，它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求这薄片的质量.

解 积分区域如图 9-36 所示，则

$$M = \iint\limits_D \rho(x,\ y)\,d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} r^2\cdot r dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}$$

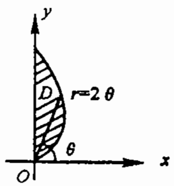


图 9-36

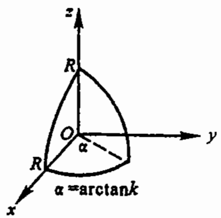


图 9-37

7. 求由平面 $y=0, y=kx(k>0), z=0$ 以及球心在原点，半径为 R 的上半球所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 如图 9-37 所示，

$$V = \iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{R^2-r^2}\, r dr d\theta =$$

$$\int_0^{\arctan k} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\, r dr =$$

$$\arctan k\cdot\left[-\frac{1}{2}\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,d(R^2-r^2)\right] =$$

$$\arctan k\cdot\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{R^3}{3}\arctan k$$

8. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 如图 9-38 所示，

$$V = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,d\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^2 r dr =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4\theta d\theta =$$

$$\frac{1}{2}a^4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{32}a^4$$

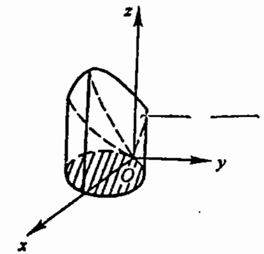


图 9-38

习题 9-3

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部那部分面积.

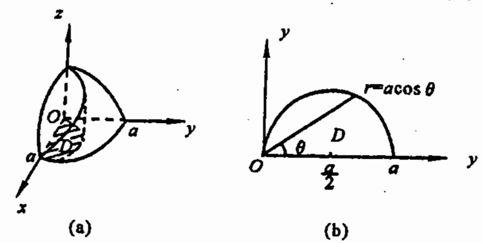


图 9-39

解 如图 9-39 所示，上半球面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

由于
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

得
$$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

由对称性得

$$A = 4\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$4a\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r =$$

$$-4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} a(\sin\theta-1)\mathrm{d}\theta = 2a^2(\pi-2)$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解 由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 解得投影柱面为 $x^2+y^2=2x$,因此所求曲面在 x Oy 面上的投影区域 D 为 $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 2x \\ z=0 \end{cases}$. 如图 9-40 所示.

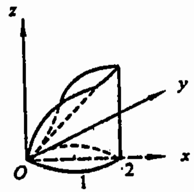


图 9-40

由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 得

$$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2} =$$

$$(1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

所以 $A = \iint_D \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}r\mathrm{d}r =$

$$4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi$$

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的体积的表面积.

解 由对称性可知,所围立体的表面积等于第一卦限中位于圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上的部分的面积的 16 倍,如图 9-41 所示,由 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 得

$$A = 16\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$16\iint_D \sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}})^2+0^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$16\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

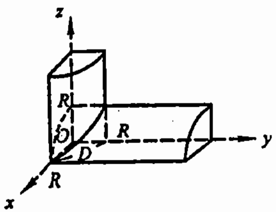


图 9-41

$$16\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y =$$

$$16\int_0^R R\mathrm{d}x = 16R^2$$

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下,求均匀薄片的重心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0$;

(3) D 是介于两个圆 $r=a\cos\theta$, $r=b\cos\theta(0<a<b)$ 之间的闭区域.

解 (1) 积分区域 D 可用不等式表示为: $\begin{cases} 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2px} \\ 0\leqslant x\leqslant x_0 \end{cases}$,则 D 的质量

$$M = \iint_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\rho\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^{x_0}\rho\sqrt{2px}\mathrm{d}x = \frac{2\rho}{3}\sqrt{2px_0^3}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_D \rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\rho}{M}\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}x\mathrm{d}y = \frac{\rho}{M}\int_0^{x_0}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{3}{2\sqrt{2px_0^3}}\sqrt{2p}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{x_0} = \frac{3}{5}x_0$$

$$\bar{y} = \frac{\rho}{M}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\rho}{M}\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y = \frac{3}{8}y_0$$

所求重心为 $(\frac{3}{5}x_0, \frac{3}{8}y_0)$.

(2) 积分区域可用不等式表示为: $\begin{cases} 0\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ -a\leqslant x\leqslant a \end{cases}$. 由对称性知

$$\bar{x}=0,\quad M=\frac{\rho}{2}\pi ab$$

$$M_x = \iint_D \rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}y\mathrm{d}y =$$

$$\rho\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x = \frac{\rho b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\rho ab^2$$

所以

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{2}{3}\rho ab^2}{\frac{\rho}{2}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}$$

故所求重心为$(0,\frac{4b}{3\pi})$.

(3) 积分区域如图 9-42 所示，由对称性可知 $\bar{y}=0$.

$$M=\iint_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}r\mathrm{d}r=$$

$$\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b^2-a^2)\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{\pi\rho}{4}(b^2-a^2)$$

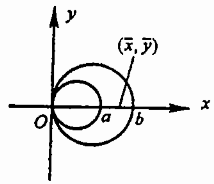


图 9-42

$$M_y=\iint_D \rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r=$$

$$\frac{2}{3}\rho(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{2}{3}\rho(b^3-a^3)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\rho}{8}(b^3-a^3)$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}$$

故所求重心为$(\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},0)$.

5. 设平面薄片所占区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点 (x,y) 处的面密度 $\rho(x,y)=x^2y$，求该薄片的重心.

解　积分区域如图 9-43 所示.

$$M=\iint_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}x^2y\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1(x^4-x^6)\mathrm{d}x=\frac{1}{35}$$

$$M_y=\iint_D x\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}x^3y\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1(x^5-x^7)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$

$$M_x=\iint_D y\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}x^2y^2\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1(x^5-x^8)\mathrm{d}x=\frac{1}{54}$$

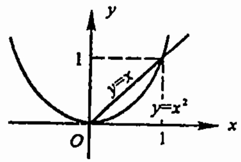


图 9-43

所以
$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{35}{48},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{35}{54}$$

所求重心为$(\frac{35}{48},\frac{35}{54})$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片，腰长为 a，各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方，求这薄片的重心.

解　如图 9-44 所示建立坐标系，由对称性可知：$\bar{x}=\bar{y}$，$\rho=x^2+y^2$，则

$$M=\iint_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^a[ax^2+(-x^3)+\frac{1}{3}(a-x)^3]\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{6}a^4$$

$$M_y=\iint_D \rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^a x[ax^2+(-x^3)+\frac{1}{3}(a-x)^3]\mathrm{d}x=\frac{1}{15}a^5$$

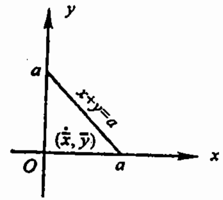


图 9-44

故薄片的重心坐标为：$\bar{x}=\bar{y}=\dfrac{\frac{1}{15}a^5}{\frac{1}{6}a^4}=\frac{2}{5}a$，即$(\frac{2a}{5},\frac{2a}{5})$.

7. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下，求指定的转动惯量：

(1) $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，求 I_y；

(2) D 由抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 和直线 $x=2$ 所围成，求 I_x 和 I_y；

(3) D 为矩形闭区域：$0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$，求 I_x 和 I_y.

解　(1) 令 $x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$，在此变换下$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$，积分域 D 可用不等式表示为：$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant 1\end{cases}$，故

$$I_y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D a^2r^2\cos^2\theta\cdot abr\cdot\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$a^3b\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1r^3\mathrm{d}r=$$

$$\frac{a^3b}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\pi a^3b$$

(2) $I_x=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{\frac{x^3}{2}}}y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{27}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{72}{5}$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^2x^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{\frac{x^3}{2}}}\mathrm{d}y=\frac{6}{\sqrt{2}}\int_0^2x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{96}{7}$$

(3) $I_x=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b y^2\mathrm{d}y=a\frac{b^3}{3}=\frac{ab^3}{3}$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b x^2\mathrm{d}y=\int_0^a bx^2\mathrm{d}x=\frac{a^3b}{3}$$

8. 已知均匀矩形板(面密度为常量ρ)的长和宽分别为b与h,计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解　取形心为原点,建立坐标系如图 9-45 所示.

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y^2\rho\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\rho bh^3$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}x^2\rho\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\rho hb^3$$

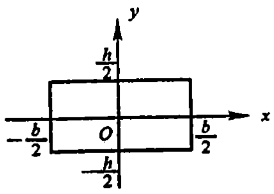


图 9-45

9. 求面密度为常量ρ的半圆环形薄片:$\sqrt{R_1^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{R_2^2-y^2}$,$z=0$对于$z$轴上点$M_0(0,0,a)(a>0)$处单位质量的质点的引力$F$.

解　建立坐标系如图 9-46 所示.

$$F_x=G\iint\limits_D\frac{\rho x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma=$$

$$G\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho r\cos\theta}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}r\mathrm{d}r=$$

$$G\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r=$$

$$2G\rho\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r$$

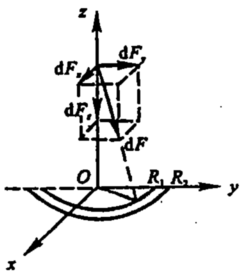


图 9-46

令$r=a\tan t$,则$\mathrm{d}r=a\sec^2t\mathrm{d}t$.

$$F_x=2G\rho\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t=$$

$$2G\rho\Big[\ln|\sec t+\tan t|-\sin t\Big]_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}=$$

$$2G\rho\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)$$

$$F_z=-Ga\iint\limits_D\frac{\rho\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=-Ga\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\left.\frac{\pi Ga\rho}{(r^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right|_{R_1}^{R_2}=$$

$$\pi Ga\rho\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)$$

由于积分区域关于x轴对称,因此沿y轴方向的分力互相抵消,$F_y=0$.

所求引力为

$$F=\left\{2\rho G\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right),\ 0,\pi Ga\rho\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)\right\}$$

习题 9-4

1. 化三重积分$I=\iiint\limits_{(\Omega)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$为三次积分,其中积分区域$\Omega$分别是:

(1) 由双曲抛物面$xy=z$及平面$x+y-1=0,z=0$所围成的闭区域;
(2) 由曲面$z=x^2+y^2$及平面$z=1$所围成的闭区域;
(3) 由曲面$z=x^2+2y^2$及平面$z=2-x^2$所围成的闭区域;
(4) 由曲面$cz=xy(c>0)$,$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,$z=0$所围成的在第一卦限内的闭区域.

解　(1) 作闭区域Ω如图 9-47 所示,用不等式表示为

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant xy\\0\leqslant y\leqslant 1-x,\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

所以
$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$$

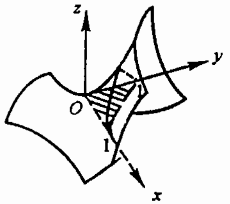


图 9-47

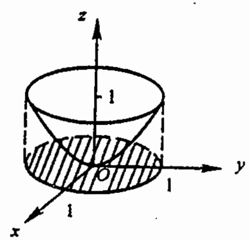


图 9-48

(2) 作闭区域 Ω 如图 9-48 所示，Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$，

$$\Omega:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

则
$$I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)dz$$

(3) 由 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=2-x^2\end{cases}$ 消去 z，得投影柱面为 $x^2+y^2=1$，所以 Ω 在 xOy 面的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$. 如图 9-49 所示，Ω 用不等式表示为：

$$\Omega:\begin{cases}x+2y^2\leqslant z\leqslant 2-x^2\\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

故
$$I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz$$

(4) 闭区域 Ω 的上边界曲面为 $cz=xy$，下边界曲面为 $z=0$，如图 9-50 所示.

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant \dfrac{xy}{c}\\ 0\leqslant y\leqslant \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\\ 0\leqslant x\leqslant a\end{cases}$$

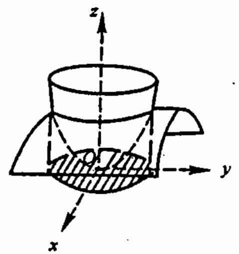


图 9-49

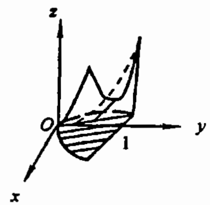


图 9-50

$$I=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_0^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)dz$$

2. 设有一物体，占有空间闭区域：$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量.

解 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho dxdydz=\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1(x+y+z)dz=$

$$\int_0^1dx\int_0^1(x+y+\frac{1}{2})dy=\int_0^1(x+1)dx=\frac{3}{2}$$

3. 如果三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$ 的被积函数 $f(x,y,z)$ 是三个函数 $f_1(x)$、$f_2(y)$、$f_3(z)$ 的乘积，即 $f(x,y,z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$，积分区域 Ω 为 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, l\leqslant z\leqslant m$，证明这个三重积分等于三个单积分的乘积，即

$$\iiint\limits_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)dxdydz=\int_a^bf_1(x)dx\int_c^df_2(y)dy\int_l^mf_3(z)dz$$

证 $\iiint\limits_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)dxdydz=$

$$\int_a^b[\int_c^d(\int_l^mf_1(x)f_2(y)f_3(z)dz)dy]dx=$$

$$\int_a^b[\int_c^d(f_1(x)f_2(y))(\int_l^mf_3(z)dz)dy]dx=$$

$$\int_a^b[(f_1(x)\int_l^mf_3(z)dz)\int_c^d(f_2(y)dy)]dx=$$

$$(\int_l^mf_3(z)dz)(\int_c^d(f_2(y)dy)\int_a^bf_1(x)dx=$$

$$\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z$$

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x,x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

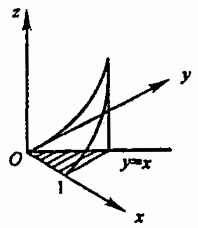


图 9-51

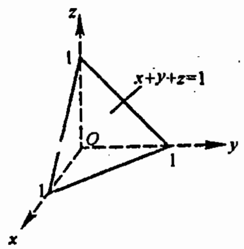


图 9-52

解 积分区域如图 9-51 所示，

$$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy} z^3\mathrm{d}z=$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x\int_0^x y^6\mathrm{d}y=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x=\frac{1}{364}$$

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 积分区域如图 9-52 所示，

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{-2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}\right]\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^1\left[\frac{1}{-2(1+x+y)}-\frac{1}{8}y\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1\left[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x\right]\mathrm{d}x=$$

C $$\left[\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{2}(\ln2-\frac{5}{8})$$

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 积分区域如图 9-53 所示，

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\mathrm{d}z=$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^1\left[-\frac{1}{8}x(1-x^2-y^2)^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1\frac{1}{8}x(1-x^2)^2\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{1}{48}(1-x^2)^3\Big|_0^1=\frac{1}{48}$$

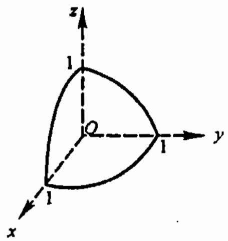


图 9-53

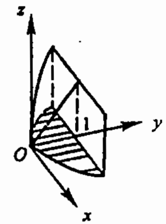


图 9-54

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $z=0,z=y,y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 积分区域如图 9-54 所示，

$$\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y\int_0^y z\mathrm{d}z=$$

$$\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\frac{1}{2}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\int_{-1}^1 x(1-x^6)\mathrm{d}x=0$$

8. 计算 $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h$ $(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

解　积分区域如图 9-55 所示，当 $0\leqslant z\leqslant h$ 时，平行圆域 D_z 的半径为：$\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{R}{h}z$，面积为：$\dfrac{\pi}{h^2}R^2z^2$.

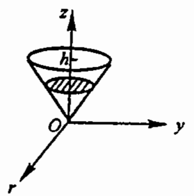


图　9-55

$$\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^h\frac{\pi}{h^2}R^2z^3\mathrm{d}z=$$

$$\frac{\pi}{h^2}R^2\cdot\left[\frac{1}{4}z^4\right]_0^h=\frac{\pi R^2h^2}{4}$$

习题 9-5

1. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解　(1) 积分区域如图 9-56 所示，由 $\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2}\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 消去 z，得投影柱面为 $x^2+y^2=1$，因此闭区域 Ω 在 xOy 面上的投影区域为：$x^2+y^2\leqslant1$.

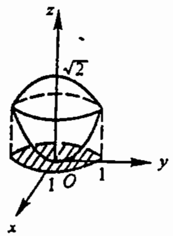


图　9-56

$$\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}z\mathrm{d}z=$$

$$2\pi\int_0^1\frac{1}{2}r(2-r^2-r^4)\mathrm{d}r=$$

$$\pi\int_0^1(2r-r^3-r^5)\mathrm{d}r=\frac{7}{12}\pi$$

(2) 由 $\begin{cases}x^2+y^2=2z\\ z=2\end{cases}$ 得闭区域 Ω 在 xOy 面的投影区域为：$x^2+y^2\leqslant4$. 如图 9-57 所示.

$$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{2}r^2}^2\mathrm{d}z=$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(2r^3-\frac{1}{2}r^5\right)\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\left[\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{12}r^6\right]_0^2=\frac{16}{3}\pi$$

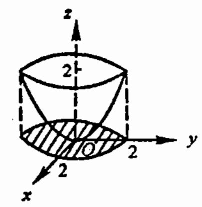


图　9-57

2. 利用球面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$，$x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

解　(1) $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1=\frac{4}{5}\pi$$

(2) 积分区域如图 9-58 所示，在球坐标系下，Ω 可用不等式表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant2\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}\\ 0\leqslant r\leqslant2a\cos\varphi\end{cases}$$

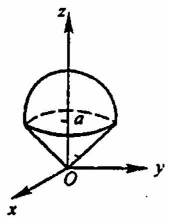


图　9-58

$$\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega r\cos\varphi\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\times\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi=$$

$$8\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi=-\frac{8\pi}{6}a^4\cos^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{6}\pi a^4$$

3. 选用适当的坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega xy\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1,z=0,x=0,y=0$

所围成的第一卦限内的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv$，其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A$，$z\geqslant 0$ 所确定.

解 (1) 积分区域如图 9-59 所示，宜用直角坐标或柱面坐标计算.

$$\iiint\limits_{\Omega}xy\,dv=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\,dy\int_0^1 dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\,dy=$$

$$\int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2}\right)dx=\frac{1}{8}$$

在柱坐标系下

$$\iiint\limits_{\Omega}xy\,dv=\iiint\limits_{\Omega}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr\int_0^1 dz=\frac{1}{8}$$

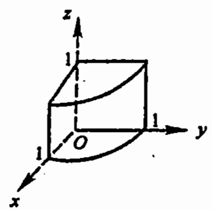


图 9-59

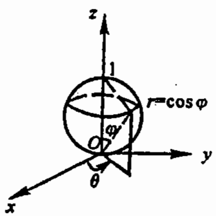


图 9-60

(2) 宜用球面坐标计算，如图 9-60 所示，Ω 可用不等式表示为

$$\begin{cases}0\leqslant r\leqslant\cos\varphi\\0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi\,dr=$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi=$$

$$-\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{5}\cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}$$

(3) 宜用柱面坐标计算，如图 9-61 所示. 由 $\begin{cases}4z^2=25(x^2+y^2)\\z=5\end{cases}$ 得，投影柱面：$x^2+y^2=4$，因此 Ω 在 xOy 面上的投影域为 $x^2+y^2\leqslant 4$，且 Ω 可用不等式表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant 2\\\frac{5}{2}r\leqslant z\leqslant 5\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3\,dr\int_{\frac{5}{2}r}^5 dz=2\pi\int_0^2 r^3\left(5-\frac{5}{2}r\right)dr=$$

$$2\pi\left[\frac{5}{4}r^4-\frac{1}{2}r^5\right]_0^2=8\pi$$

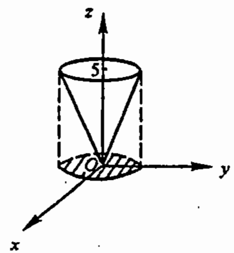


图 9-61

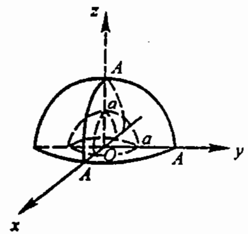


图 9-62

(4) 宜用球面坐标计算，如图 9-62 所示. 积分区域 Ω 可用不等式表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\\a\leqslant r\leqslant A\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^4\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\frac{2}{3}\left[\frac{1}{5}r^5\Big|_a^A\right]=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5)$$

4. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积：

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

(2) $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$（含有 z 轴的部分）；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$；

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 (1) 积分区域 Ω 如图 9-63 所示.

由 $\begin{cases}z=6-x^2-y^2\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ 解得：$x^2+y^2=4$，Ω 在 xOy 面的投影域为 $x^2+y^2\leqslant 4$；宜用柱面坐标计算，用不等式将 Ω 表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant 2\\ r\leqslant z\leqslant 6-r^2\end{cases}$$

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_r^{6-r^2}\mathrm{d}z=$$

$$2\pi\int_0^2 r(6-r^2-r)\mathrm{d}r=2\pi\left[3r^2-\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\right]_0^2=\frac{32}{3}\pi$$

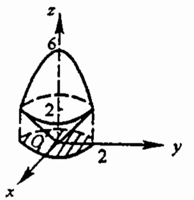


图 9-63

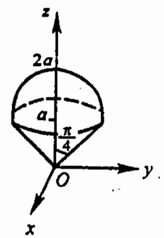


图 9-64

(2) 宜用球面坐标计算. 如图 9-64 所示，Ω 可用不等式表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi\end{cases}$$

则 $$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}a^3\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{16}{3}\pi a^3\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi a^3$$

(3) 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 解得在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$. 积分区域如图 9-65 所示，宜用柱坐标计算. Ω 可用不等式表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant 1\\ r^2\leqslant z\leqslant r\end{cases}$$

则 $$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{r}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 r(r-r^2)\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\left[\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{\pi}{6}$$

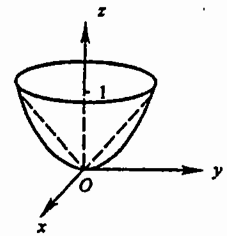


图 9-65

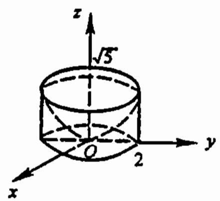


图 9-66

(4) 由 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 和 $x^2+y^2=4z$ 解得在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 4$，如图 9-66 所示，宜用柱面坐标计算. 积分区域可用不等式表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant 2\\ \dfrac{r^2}{4}\leqslant z\leqslant\sqrt{5-r^2}\end{cases}$$

则 $$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}}\mathrm{d}z=$$

$$2\pi\int_0^2 r(\sqrt{5-r^2}-\frac{1}{4}r^2)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^2 r\sqrt{5-r^2}\mathrm{d}r-\frac{\pi}{2}\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\left[-\frac{1}{3}(5-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2-\frac{\pi}{8}r^4\Big|_0^2=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4)$$

5. 球心在原点,半径为 R 的球体,在其上的任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比,求这球体的质量.

解 由于 $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,积分区域为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,宜用球面坐标计算.

$$M=\iiint_{(\Omega)}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R kr\cdot r^2\mathrm{d}r=$$

$$2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi}\cdot\frac{k}{4}[r^4]_0^R=k\pi R^4$$

6. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的重心(设密度 $\rho=1$):

(1) $z^2=x^2+y^2,z=1$;

(2) $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2},z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (A>a>0),z=0$;

(3) $z=x^2+y^2,x+y=a,x=0,y=0,z=0$.

解 (1) 积分区域 Ω 如图 9-67 所示. 由对称性知重心在 z 轴上,故 $\bar{x}=\bar{y}=0$,Ω 为圆锥体,半径为 1,高为 1,$V=\frac{1}{3}\pi$,质量 $M=\rho V=\frac{1}{3}\pi(\rho=1)$,在柱面坐标下.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 z\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{2M}\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=$$

$$\frac{\pi}{M}\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{M}\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{3}{4}$$

故所围立体的重心为$(0,0,\frac{3}{4})$.

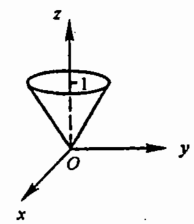


图 9-67

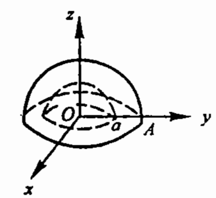


图 9-68

(2) 如图 9-68 所示,由对称性知,重心在 z 轴上,因此 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 所围立体的质量为 $M=\rho V=\frac{2}{3}\pi(A^3-a^3)$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}\rho z\mathrm{d}v=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}1\cdot r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^3\mathrm{d}r=$$

$$\frac{1}{M}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{1}{4}r^4\right]_a^A=\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}$$

故所围立体的重心为$\left(0,0,\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}\right)$.

(3) 如图 9-69 所示,宜用直角坐标计算,由于所围立体关于 $y=x$ 对称. 故 $\bar{x}=\bar{y}$.

$$M=\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}v=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=$$

$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^a[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3]\mathrm{d}x=$$

$$\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{12}(a-x)^4\right]_0^a=\frac{1}{6}a^4$$

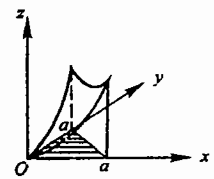


图 9-69

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}\rho x\mathrm{d}v=\frac{1}{M}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=$$

$$\frac{1}{M}\int_0^a x[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3]\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{1}{15}a^5\right)=\frac{\frac{1}{15}a^5}{\frac{1}{6}a^4}=\frac{2}{5}a$$

$$\bar{y}=\bar{x}=\frac{2}{5}a$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z\,dv=\frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{x^2+y^2}z\,dz=$$

$$\frac{1}{2M}\int_0^a dx\int_0^{a-x}(x^4+2x^2y^2+y^4)dy=$$

$$\frac{1}{2M}\int_0^a\left[x^4(a-x)+\frac{2}{3}x^2(a-x)^3+\frac{1}{5}(a-x)^5\right]dx=$$

$$\frac{1}{2M}\frac{7}{90}a^6=\frac{1}{2\times\frac{1}{6}a^4}\frac{7}{90}a^6=\frac{7}{30}a^2$$

故所求立体的重心为$\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$.

7. 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 内,各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方,试求这球体的重心.

解 宜用球面坐标计算.密度为 $\rho=x^2+y^2+z^2=r^2$,由对称性,重心在 z 轴上,故 $\bar{x}=\bar{y}=0$,在球面坐标下,球面 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 为 $r\leqslant 2R\cos\varphi$.

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2dr=$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\frac{32}{5}R^5\cos^5\varphi\,d\varphi=$$

$$-\frac{64}{5}\pi R^5\left[\frac{1}{6}\cos^6\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z\,dv=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5dr=$$

$$\frac{2\pi}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{64}{6}R^6\sin\varphi\cos^7\varphi\,d\varphi=$$

$$\frac{1}{M}\cdot\frac{64}{3}\pi R^6\left[-\frac{1}{8}\cos^8\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{8}{3}\pi R^6}{\frac{32}{15}\pi R^5}=\frac{5}{4}R$$

所以球体的重心为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

8. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$, $|x|=a$, $|y|=a$ 所围成的.

(1) 求物体的体积;

(2) 求物体的重心;

(3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

解 Ω 如图 9-70 所示.

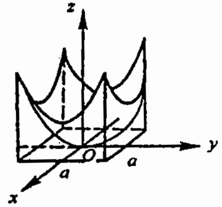


图 9-70

(1) 由对称性可知

$$V=4\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}dz=$$

$$4\int_0^a dx\int_0^a(x^2+y^2)dy=$$

$$4\int_0^a\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)dx=$$

$$4\left(\frac{a^4}{3}+\frac{a^4}{3}\right)=\frac{8}{3}a^4$$

(2) 由对称性知重心在 z 轴上,$\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z\,dV=\frac{\rho}{\rho V}\iiint\limits_{\Omega}z\,dV=\frac{4}{V}\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}z\,dz=$$

$$\frac{2}{V}\int_0^a dx\int_0^a(x^4+2x^2y^2+y^4)dy=$$

$$\frac{2}{V}\int_0^a\left(ax^4+\frac{2}{3}a^3x^2+\frac{a^5}{5}\right)dx=$$

$$\frac{2}{V}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{5}\right)a^6=\frac{7}{15}a^2$$

物体的重心是$\left(0,0,\frac{7}{15}a^2\right)$.

(3) $$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x^2+y^2)dV=4\rho\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)dz=$$

$$4\rho\int_0^a dx\int_0^a(x^4+2x^2y^4)dy=4\rho\frac{28}{45}a^6=\frac{112}{45}\rho a^6$$

9. 求半径为 a,高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度为 $\rho=1$).

解 如图 9-71 所示建立坐标系,宜用柱面坐标计算.

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho\,dv=\iiint\limits_{\Omega}r^3\,dr\,d\theta\,dz=$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr\int_0^h dz =$$

$$2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a\cdot h = \frac{1}{2}\pi h a^4$$

10. 求均匀柱体：$x^2+y^2\leqslant R^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 对于位于点 $M_0(0,0,a)(a>h)$ 处的单位质量的质点的引力.

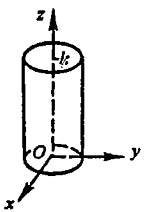


图 9-71

解 由柱体的对称性可知，沿 x 轴与 y 轴方向的分力互相抵消，故 $F_x=F_y=0$，而

$$F_z = -\iiint_\Omega \rho G\frac{a-z}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{\frac{3}{2}}}dv =$$

$$-\rho G\int_0^h(a-z)dz\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{dxdy}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$-\rho G\int_0^h(a-z)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{rdr}{[r^2+(a-z)^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$-2\pi\rho G\int_0^h(a-z)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]dz =$$

$$-2\pi\rho G\int_0^h\left[1-\frac{a-z}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]dz =$$

$$-2\pi\rho G\left[z+\sqrt{R^2+(a-z)^2}\right]_0^h =$$

$$-2\pi\rho G\left[h+\sqrt{R^2+(a-h)^2}-\sqrt{R^2+a^2}\right]$$

总习题九

1. 计算下列二重积分：

(1) $\iint_D(1+x)\sin y\,d\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域.

(2) $\iint_D(x^2-y^2)d\sigma$，其中 D 是闭区域：$0\leqslant y\leqslant \sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$.

(3) $\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域.

(4) $\iint_D(y^2+3x-6y+9)d\sigma$，其中 D 是闭区域：$x^2+y^2\leqslant R^2$.

解 (1) 通过点 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 的直线方程为 $y=x+1$，积分区域 D 可用

不等式表示为 $0\leqslant y\leqslant x+1, 0\leqslant x\leqslant 1$. 于是

$$\iint_D(1+x)\sin y\,d\sigma = \int_0^1(1+x)dx\int_0^{1+x}\sin y\,dy =$$

$$\int_0^1(1+x)[1-\cos(1+x)]dx =$$

$$\int_0^1(1+x)dx-\int_0^1(1+x)\cos(1+x)dx =$$

$$\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\Big[(1+x)\sin(1+x)+\cos(1+x)\Big]_0^1 =$$

$$\frac{3}{2}-2\sin2+\sin1-\cos2+\cos1$$

(2) $$\iint_D(x^2-y^2)d\sigma = \int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)dy =$$

$$\int_0^\pi(x^2\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x)dx =$$

$$\Big[-x^2\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi 2x\cos x dx+\frac{1}{3}\int_0^\pi\sin^2x\,d\cos x =$$

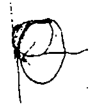
$$\pi^2+\Big[2x\sin x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi 2\sin x dx+\frac{1}{3}\int_0^\pi(1-\cos^2x)d\cos x =$$

$$\pi^2+\Big[2\cos x\Big]_0^\pi+\frac{1}{3}\left[\cos x-\frac{1}{3}\cos^3x\right]_0^\pi =$$

$$\pi^2-\frac{40}{9}$$

$(x-\frac{R}{2})^2+y^2=\frac{R^2}{4}$

(3) 用极坐标计算，在极坐标系中圆 $x^2+y^2=Rx$ 的极坐标方程为 $r=R\cos\theta$，积分区域 D 可用不等式表示成 $\begin{cases}0\leqslant r\leqslant R\cos\theta\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$.



于是

$$\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma = \iint_D\sqrt{R^2-r^2}\,r dr d\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r dr =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,d(R^2-r^2) =$$

$$-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta}d\theta =$$

$R^2-R^2\cos\theta-R^2$

$$\frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1-|\sin^3\theta|]d\theta=$$

$$\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-\sin^3\theta]d\theta=$$

$$\frac{2R^3}{3}[\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}]=\frac{1}{9}(3\pi-4)R^3$$

（4）用极坐标计算.

$$\iint_D(y^2+3x-6y+9)d\sigma=$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R(r^2\sin^2\theta+3r\cos\theta-6r\sin\theta+9)rdr=$$

$$\int_0^{2\pi}[\frac{R^4}{4}\sin^2\theta+R^3\cos\theta-2R^3\sin\theta+\frac{9}{2}R^2]d\theta=$$

$$\frac{R^4}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos2\theta)d\theta+\left[R^3\sin\theta+2R^3\cos\theta+\frac{9}{2}R^2\theta\right]_0^{2\pi}=$$

$$\frac{R^4}{8}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}+9\pi R^2=\frac{\pi}{4}R^4+9\pi R^2$$

2. 交换下列二次积分的次序：

（1）$\int_0^4dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)dx$.

（2）$\int_0^1dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_0^3dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$.

（3）$\int_0^1dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.

解　（1）Y 型积分区域 D 为：$0\leqslant y\leqslant4,-\sqrt{4-y}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}(y-4)$. 由曲线 $x=-\sqrt{4-y}$ 和 $x=\frac{1}{2}(y-4)$ 的交点为 $(-2,0),(0,4)$. 据此可画出积分区域如图 9-72 所示，将 D 看做 X 型区域，用不等式可以表示成：$-2\leqslant x\leqslant0$，$2x+4\leqslant y\leqslant-x^2+4$，则

$$\int_0^4dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)dx=\int_{-2}^0dx\int_{2x+4}^{-x^2+4}f(x,y)dy$$

（2）积分区域 $D=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant1\\0\leqslant x\leqslant2y\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}1\leqslant y\leqslant3\\0\leqslant x\leqslant3-y\end{cases}$$

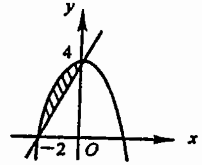


图　9-72

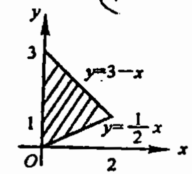


图　9-73

据此可画出积分区域如图 9-73 所示. 将 D 看做 X 型区域，D 可表示为

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant2\\\frac{1}{2}x\leqslant y\leqslant3-x\end{cases}$$

故　$$\int_0^1dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx=\int_0^2dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x}f(x,y)dy$$

（3）积分区域为

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant1\\\sqrt{x}\leqslant y\leqslant1+\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

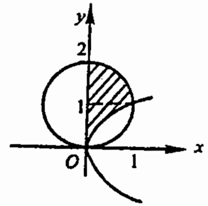


图　9-74

曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=1+\sqrt{1-x^2}$ 也可以表示为 $y^2=x$ 和 $x^2+(y-1)^2=1$. 积分区域 D 如图 9-74 所示. 所以，将 D 看做 Y 型区域，可用不等式表示为

$$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant1\\0\leqslant x\leqslant y^2\end{cases},\quad\begin{cases}1\leqslant y\leqslant2\\0\leqslant x\leqslant\sqrt{2y-y^2}\end{cases}$$

则 $$\int_0^1dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\int_0^1dy\int_0^{y^2}f(x,y)dx+\int_1^2dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx$$

3. 证明 $\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\int_0^a(a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx$.

证　利用二次积分的交换积分次序证明. 由二次积分限 $0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant x\leqslant y$ 画出积分域 D 如图 9-75 所示，将 D 看做 X 型区域，可表示为 $0\leqslant x\leqslant a$，$x\leqslant y\leqslant a$，则

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy=\int_0^a(a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx$$

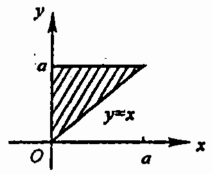


图 9-75

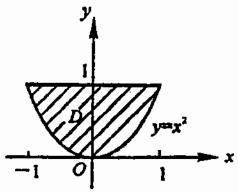


图 9-76

4. 把积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$表示为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 D 是 $x^2\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1$.

解 积分区域 D 如图 9-76 所示，$y=x^2$ 与 $y=1$ 的极坐标方程分别为：$r=\tan\theta\sec\theta$ 和 $r=\csc\theta$，由 $y=x^2$ 与 $y=1$ 的交点(1,1)和点(−1,1)可得交点处的极角分别为 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+$$
$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

5. 把积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$化为三次积分，其中积分区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$ 及平面 $y=1,z=0$ 所围成的闭区域.

解 积分闭区域 Ω 如图 9-77 所示，用不等式表示为 $-1\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant x^2+y^2$，则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

6. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是两个球：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz(R>0)$ 的公共部分.

(2) $\iiint\limits_\Omega \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

(3) $\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

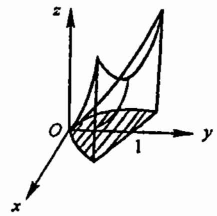


图 9-77

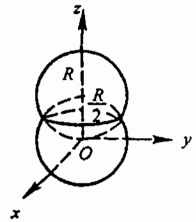


图 9-78

解 (1) 积分区域如图 9-78 所示，用"先二后一"法计算，当 $0\leqslant z\leqslant\frac{R}{2}$ 时，平行圆域 D_z 可表为$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2\}$，其面积为 $\pi(2Rz-z^2)$；当 $\frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R$ 时，平行圆域 D_z 可表示为$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-z^2\}$，其面积为 $\pi(R^2-z^2)$.

$$\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^R z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\pi\int_0^{\frac{R}{2}}z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_{\frac{R}{2}}^R z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z=$$
$$\pi\left[\frac{R}{2}z^4-\frac{1}{5}z^5\right]_0^{\frac{R}{2}}+\pi\left[\frac{R^2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5\right]_{\frac{R}{2}}^R=\frac{59}{480}\pi R^5$$

(2) 用球面坐标计算：

$$\iiint\limits_\Omega\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega\frac{r^3\ln(r^2+1)\sin\varphi\cos\varphi}{r^2+1}\mathrm{d}r=$$
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r^3\ln(r^2+1)}{r^2+1}\mathrm{d}r=$$
$$2\pi\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^\pi\int_0^1\frac{r^3\ln(r^2+1)}{r^2+1}\mathrm{d}r=0$$

(3) 积分区域如图 9-79 所示，用柱坐标计算.

曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转所成的曲面方程为 $y^2+z^2=2x$，该曲面与平面 x

$=5$ 消去 x,得投影柱面方程为 $y^2+z^2=10$,Ω 在 yOz 面上的投影域为 $y^2+z^2\leqslant 10$,曲面 $y^2+z^2=2x$ 的柱面坐标方程为 $x=\frac{r^2}{2}$,则

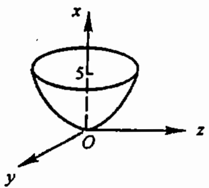


图 9-79

$$\iiint_\Omega (y^2+z^2)\mathrm{d}v=\iiint_\Omega r^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}r^3\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^5\mathrm{d}x=$$
$$2\pi\int_0^{\sqrt{10}}(5r^3-\frac{1}{2}r^5)\mathrm{d}r=\frac{250}{3}\pi$$

7. 求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被坐标面所割出的有限部分的面积.

解 如图 9-80 所示,平面方程为

$$z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c}{b}$$

所求平面在 xOy 面上的投影区域是以 a,b 为直角边的直角三角形,其面积为 $\sigma=\frac{ab}{2}$.

$$A=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\iint_D\sqrt{1+(-\frac{c}{a})^2+(\frac{-c}{b})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\frac{1}{ab}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^{\frac{1}{2}}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\frac{1}{ab}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}ab=$$
$$\frac{1}{2}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^{\frac{1}{2}}$$

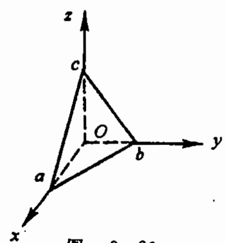


图 9-80

8. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上,要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片,为了使整个均匀薄片的重心恰好落在圆心上,问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 如图 9-81 所示选择坐标系,设半圆形的半径为 R,所求矩形另一边的长度为 H,面密度 $\rho=1$,由对称性可知 $\bar{x}=0$. 由于整个均匀薄片的重心恰好落在圆心上,因此半圆形薄片 D_1 的 M_{x_1} 与矩形薄片 D_2 的 M_{x_2} 之和等于零.

$$M_{x_1}=\iint_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\sin\theta\mathrm{d}r=$$
$$\left[-\cos\theta\right]_0^\pi\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R=\frac{2}{3}R^3$$
$$M_{x_2}=\iint_{D_2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-R}^R\mathrm{d}x\int_{-H}^0 y\mathrm{d}y=-RH^2$$

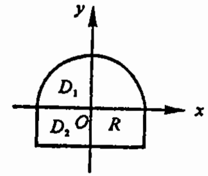


图 9-81

依 $M_{x_1}+M_{x_2}=0$,即 $\frac{2}{3}R^3-RH^2=0$,得

$$H=\sqrt{\frac{2}{3}}R$$

故接上去的均匀薄片另一边的长度应为 $\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

9. 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 ρ)对于直线 $y=-1$ 的转动惯量.

解 如图 9-82 所示.

$$I=\iint_D\rho(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1(y+1)^2\mathrm{d}y=$$
$$\frac{\rho}{3}\int_{-1}^1\left[(y+1)^3\right]_{x^2}^1\mathrm{d}x=\frac{2\rho}{3}\int_0^1(-x^6-3x^4-3x^2+7)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{2\rho}{3}\left[-\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5-x^3+7x\right]_0^1=\frac{368}{105}\rho$$

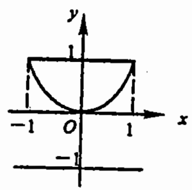


图 9-82

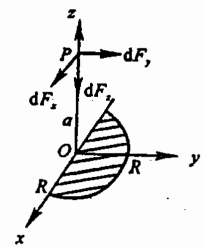


图 9-83

10. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片,占有平面区域:$x^2+y^2\leqslant R^2$,$y\geqslant 0$,过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质量点 P,$OP=a$,求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 如图 9-84 所示建立坐标系. 薄片的面密度 $\rho=\dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\dfrac{2M}{\pi R^2}$，由于薄片关于 y 轴对称，故 $F_x=0$.

$$F_y=G\iint\limits_D\frac{m\rho y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma=m\rho G\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R\frac{r^2\sin\theta}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dr=$$

$$2m\rho G\int_0^R\frac{r^2}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dr\xlongequal{令 r=a\tan t}$$

$$2m\rho G\int_0^{\arctan\frac{R}{a}}(\sec t-\cos t)dt=$$

$$2m\rho G\Big[\ln(\sec t+\tan t)-\sin t\Big]_0^{\arctan\frac{R}{a}}=$$

$$2m\rho G\left[\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right]=$$

$$\frac{4GmM}{\pi R^2}\left[\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right]$$

$$F_z=-G\iint\limits_D\frac{m\rho a}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma=-m\rho Ga\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R\frac{r}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dr=$$

$$-\pi m\rho Ga\left[-(r^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R=$$

$$-\frac{2GmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

故所求引力为

$$F=\left\{0,\frac{4GmM}{\pi R^2}\left[\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right],-\frac{2GmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)\right\}$$

第十章　曲线积分与曲面积分

一、重要内容提要

(一) 曲线积分

1. 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i$$

2. 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)

$$\int_L P(x,y)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\zeta_i,\eta_i)\Delta x_i$$

$$\int_L Q(x,y)dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\zeta_i,\eta_i)\Delta y_i$$

3. 两类曲线积分的性质及关系

(1) 有类似于二重积分的线性性及可加性.

(2) $\int_{\widehat{AB}}f(x,y)ds=\int_{\widehat{BA}}f(x,y)ds$

$\int_{\widehat{AB}}Pdx+Qdy=-\int_{\widehat{BA}}Pdx+Qdy$

(3) $\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为有向曲线 L 上点 (x,y) 处的切向量的方向余弦.

4. 两类曲线积分的计算法

(1) 设曲线 L 由 $x=\varphi(t),y=\psi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\qquad(\alpha<\beta)$$

(2) 若 $\widehat{AB}$ 由 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 确定，起点 A 对应 $t=\alpha$，终点 B 对应 $t=\beta$，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

5. 格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的闭曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

这里 L 是 D 的取正向的整个边界曲线.

（二）曲面积分

1. 对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\Delta S_i$$

2. 对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P_i(\Delta S_i)_{yz} + Q_i(\Delta S_i)_{zx} + R_i(\Delta S_i)_{xy}]$$

3. 两类曲面积分的性质与关系

（1）类似于重积分.

（2）$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{-\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$

$$\iint_{-\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（3）$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦。

4. 两类曲面积分的计算法

Σ 由 $z = z(x,y)$ 给出，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如 Σ 取上侧，则取正号；如 Σ 取下侧，则取负号、

曲面 Σ 由 $x = x(y,z)$，$y = y(x,z)$ 给出，也有相应的公式.

5. 高斯公式

设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

6. 斯托克斯公式

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，函数 P,Q,R 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

7. 场论初步

设有向量场 $A(x,y,z) = Pi + Qj + Rk$，则向量场 A 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量（或流量）为

$$\iint_\Sigma A\cdot n\mathrm{d}S = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S =$$

$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $n = \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位法向量.

向量场 A 的散度为

$$\mathrm{div}A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

向量场 A 的旋度为

$$\mathrm{rot}A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

向量场 A 沿闭曲线 Γ 的环流量为

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\oint_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}s$$

$\boldsymbol{t}$ 是曲线 Γ 上点 (x,y,z) 处的单位切向量.

二、重点知识结构图

- 曲线积分
  - 第一类曲线积分
    - 定义
    - 性质(可积性、线性性、可加性)
    - 计算方法(用参数方程化为定积分)
    - 物理应用(质量、重心、引力)
  - 第二类曲线积分
    - 定义
    - 性质(可积性、线性性、可加性、方向性)
    - 计算方法(化为定积分)
    - 格林公式(平面曲线积分)
      - 积分与路经无关
      - 全微分求积
    - 斯托克斯公式(空间曲线积分)
    - 物理应用
      - 变力沿曲线作功
      - 场沿曲线的环流量
- 曲面积分
  - 第一类曲面积分
    - 定义
    - 性质(可积性、线性性、可加性)
    - 计算方法(用投影法化为二重积分)
    - 物理应用(质量、重心、引力)
  - 第二类曲面积分
    - 定义
    - 性质(可积性、线性性、可加性、方向性)
    - 计算方法(用投影法化为二重积分)
    - 高斯公式
    - 物理应用(场穿过曲面指定侧的通量)

三、常考题型及考研典型题精解

例 10-1 (1998 考研)设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,其周长为 a,则 $\oint_L(2xy+$

$3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\underline{12a}$.

解 因当 $(x,y)\in L$ 时,$3x^2+4y^2=12$,故

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L(2xy+12)\mathrm{d}s=$$

$$2\oint_L xy\mathrm{d}s+12\oint_L\mathrm{d}s=12a \qquad (对称性)$$

例 10-2 计算 $I=\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$,$L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$,直线 $y=-x$ 及 x 轴在第二象限内所围的扇形的边界.

解 由图 10-1 知,L 是由直线段 $\overline{OC}$,圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 及 $\overline{DO}$ 组成,故

$$I=\int_{\overline{OC}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{\overset{\frown}{CD}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{\overline{DO}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$$

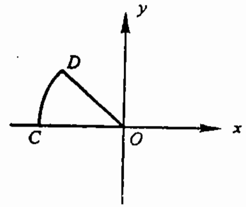


图 10-1

$$\int_{\overline{OC}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s\xlongequal{y=0}\int_{-a}^{0}\mathrm{e}^{\sqrt{(-x)^2+0}}\sqrt{1+0}\,\mathrm{d}x=$$

$$\int_{-a}^{0}\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1$$

圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的方程为 $x=a\cos t,y=a\sin t,(\frac{3}{4}\pi\leqslant t\leqslant\pi)$,于是

$$\int_{\overset{\frown}{CD}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\mathrm{e}^a a\,\mathrm{d}t=a\mathrm{e}^a(\pi-\frac{3}{4}\pi)=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a$$

$$\int_{\overline{DO}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s\xlongequal{y=-x}\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0}\mathrm{e}^{\sqrt{2}|x|}\sqrt{2}\mathrm{d}x=$$

$$\sqrt{2}\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1$$

所以

$$I=2\mathrm{e}^a+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a-2$$

例 10-3 计算 $I=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 为曲线 $y=1-|1-x|(0\leqslant x\leqslant 2)$ 上从点 $A(2,0)$,经点 $B(1,1)$ 到点 $O(0,0)$ 的折线段.

解 由题设知,L 由直线段 $\overline{AB}$ 及 $\overline{BO}$ 组成,且 $\overline{AB}:y=2-x$,起点 A 对应参数值 $x=2$,终点 B 对应 $x=1$. $\overline{BO}:y=x$,起点 B 对应参数值 $x=1$,终点 O 对应 $x=0$. 则有

$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BO}}=$$

$$\int_2^1\{[x^2+(2-x)^2]+[x^2-(2-x)^2](-1)\}dx+$$

$$\int_1^0[(x^2+x^2)+(x^2-x^2)]dx=$$

$$2\int_2^1(2-x)^2dx+2\int_1^0 x^2dx=-\frac{4}{3}$$

例 10-4(1999 考研) 求 $I=\int_L[(e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解法 1 添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直线段 L_1.

$$I=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}$$

由格林公式，前一积分

$$I_1=\iint_D(b-a)dxdy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)$$

$$I_2=\int_{L_1}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy=$$

$$\int_0^{2a}(-bx)dx=-2a^2b$$

从而

$$I=I_1-I_2=(\frac{\pi}{2}+2)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$$

解法 2 $I=\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy-\int_L b(x+y)dx+axdy$

前一积分与路径无关，所以

$$\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$$

对后一积分，取 L 的参数方程：$\begin{cases}x=a+a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ t 从 0 到 π，则

$$\int_L b(x+y)dx+axdy=$$

$$\int_0^{\pi}(-a^2b\sin t-a^2b\sin t\cos t-a^2b\sin^2t+a^3\cos t+a^3\cos^2t)dt=$$

$$-2a^2b-\frac{1}{2}\pi a^2b+\frac{1}{2}\pi a^3$$

从而

$$I=(\frac{\pi}{2}+2)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$$

例 10-5(1998 考研) 确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda i-x^2(x^4+y^2)^\lambda j$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

解 令 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$，$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}$$

若 $A=Pi+Qj$ 是 u 的梯度，则 $P=\frac{\partial u}{\partial x}$，$Q=\frac{\partial u}{\partial y}$. 从而 u 具有二阶连续偏导数.

则 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x,y)\in D=\{(x,y)\mid x>0,y\in R\}$$

即 $$4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1)=0$$

解之得 $\lambda=-1$. 于是，在右半平面内任取一点，例如取点 $(1,0)$ 作为积分路径的起点，则

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xydx-x^2dx}{x^4+y^2}+C=$$

$$\int_1^x\frac{2x\times0}{x^4+y^2}dx-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}dy+C=-\arctan\frac{y}{x^2}+C$$

例 10-6(2000 考研) 计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周($R>1$)，取逆时针方向.

解 $P(x,y)=\frac{-y}{4x^2+y^2}$，$\qquad Q(x,y)=\frac{x}{4x^2+y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

因为 $R>1$，积分曲线所围成的区域含点 $(0,0)$，P,Q 在该点不具有连续的偏导数，故不能直接使用格林公式，需要将点 $(0,0)$ 去掉，为此作足够小的椭圆曲线

$$C:\begin{cases}x=\frac{\delta}{2}\cos\theta\\ y=\delta\sin\theta\end{cases}\quad (\theta\in[0,2\pi]，C\text{ 取逆时针方向})$$

于是有 $$\oint_{L+C^-}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0\qquad (C^-\text{ 表示 }C\text{ 的负方向})$$

即得

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}\delta^2}{\delta^2}\mathrm{d}\theta = \pi$$

注：若本题中条件为 $R \neq 1$，则需要分 $R > 1$ 和 $R < 1$ 两种情况讨论. 由于 $R < 1$ 时，积分曲线所围成的区域在右半平面为单连通域，$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续且相等，且 L 为封闭的正向曲线，则 $I = 0$.

例 10－7(2003 考研)　已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界．试证：

(1) $\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y - y e^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^2$.

证法 1　(1) 左边 $= \int_0^{\pi} \pi e^{\sin y}\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0} \pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x} + e^{-\sin x})\mathrm{d}x$

$$右边 = \int_0^{\pi} \pi e^{-\sin y}\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0} \pi e^{\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x} + e^{-\sin x})\mathrm{d}x$$

所以
$$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y - y e^{\sin x}\mathrm{d}x$$

(2) 由于
$$e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geqslant 2$$

故由(1)得 $\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x} + e^{-\sin x})\mathrm{d}x \geqslant 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}x = 2\pi^2$

证法 2　(1) 由格林公式得

$$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma$$

$$\oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y - y e^{\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})\mathrm{d}\sigma$$

因为 D 关于 $y = x$ 对称，所以

$$\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})\mathrm{d}\sigma$$

故
$$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y - y e^{\sin x}\mathrm{d}x$$

(2) 由(1)知

$$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma =$$

$$\iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint_D 2\mathrm{d}\sigma = 2\pi^2$$

例 10－8(1994 考研)　计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R, z = -R(R > 0)$ 所围立体表面的外侧.

解　设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 依次为 Σ 的上、下底和圆柱面部分，则

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma_2} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

记 Σ_1, Σ_2 在 xOy 面上的投影域为 D_{xy}，则

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{D_{xy}} \frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} - \iint_{D_{xy}} \frac{(-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

在 Σ_3 上
$$\iint_{\Sigma_3} \frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

记 Σ_3 在 yOz 面上的投影域为 D_{yz}，因 Σ_3 前侧：$x = \sqrt{R^2-y^2}$，后侧：$x = -\sqrt{R^2-y^2}$，故需分成两部分，则

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2} - \iint_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2} = \frac{\pi^2}{2}R$$

所以，原积分 $= \frac{\pi^2}{2}R$.

例 10－9(1996 考研)　计算 $I = \iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leqslant z \leqslant 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

解　设 Σ_1 表示法向量指向 z 轴负向的有向平面 $z = 1 (x^2 + y^2 \leqslant 1)$，$D$ 为 Σ_1 在 xOy 面上的投影区域，则

$$\iint_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = -\pi$$

设 Ω 表示由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间区域，则由高斯公式知

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint_{\Omega}(2+1)\mathrm{d}x = -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 \mathrm{d}z =$$

$$-6\pi\int_0^1 (r - r^3)\mathrm{d}r = -\frac{3}{2}\pi$$

因此 $$I=-\frac{3}{2}\pi-(-\pi)=-\frac{\pi}{2}$$

例 10-10(1998考研) 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,($a>0$ 为常数).

解 $I=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

补充平面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\ z=0\end{cases}$,其法向量与 z 轴正向相反,则

$$I=\frac{1}{a}[\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]=$$

$$\frac{1}{a}[-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)\mathrm{d}V+\iint\limits_{D}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]=$$

$$\frac{1}{a}[-3a\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi a^3-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z\mathrm{d}z+a^2\cdot\pi a^2]=$$

$$-\frac{\pi}{2}a^3$$

例 10-11(2001考研) 计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴正向看去,L 为逆时针方向.

解 记 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧,D 为 Σ 在 xOy 面上的投影.由斯托克斯公式得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S\xlongequal{\text{由两类曲面积分的关系 }\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$-2\iint\limits_{D}(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{由对称性}}-12\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24$$

例 10-12 求矢量场 $A=(2x^3yz+y^xz^y)i-(x^2y^2z+x^zz^x)j-(x^2yz^2+x^yy^x)k$ 的散度 $\mathrm{div}A$ 在点 $M(1,1,2)$ 处沿 $l=2i+2j-k$ 方向的方向导数,并求 $\mathrm{div}A$ 在点 M 处的方向导数的最大值.

解 令 $u=\mathrm{div}A=6x^2yz-2x^2yz-2x^2yz=2x^2yz$

因 $l=\{2,2,-1\}$,所以 $l^\circ=\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=8,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=4,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=2$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=8\times\frac{2}{3}+4\times\frac{2}{3}+2\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{3}$$

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}A)=8i+4j+2k$$

故 $\mathrm{div}A$ 在点 M 处方向导数的最大值即为梯度的模,

$$|\mathrm{grad}(\mathrm{div}A)|=\sqrt{8^2+4^2+2^2}=2\sqrt{21}$$

四、学习效果两级测试题

(一) 基础知识测试题及答案

1. 计算 $I=\int_L xyz\mathrm{d}s$,其中 L 为螺线:$x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0<a<b)$. (答案:$-\frac{\pi}{2}a^2b\sqrt{a^2+b^2}$)

2. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L\frac{(3x+2y)\mathrm{d}x-(x-4y)\mathrm{d}y}{4x^2+9y^2}$,其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的逆时针方向; (答案:$-\frac{\pi}{2}$)

(2) $\int_L 2y^3\mathrm{d}x+(x^4+6y^2x)\mathrm{d}y$,其中 L 由点 $A(1,0)$ 经曲线 $x^4+y^4=1$ 在第一象限部分到点 $B(0,1)$. (答案:$\frac{4}{5}$)

3. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $1\leqslant z\leqslant 2$ 之间的部分; (答案:$2\sqrt{2}\pi e(e-1)$)

(2) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧; (答案:$-\frac{\pi}{3}h^3$)

4. 计算 $I=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧. （答案：$-2\pi a^2$）

5. 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma}zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1,x=0,y=0,z=0$ 所围立体的表面外侧. （答案：$\frac{1}{8}$）

6. 证明表达式 $[(x+y+1)e^x-e^y]\mathrm{d}x+[e^x-(x+y+1)e^y]\mathrm{d}y$ 是全微分式，并求其原函数. （答案：$(x+y)(e^x-e^y)+C$）

7. 设 $A=\{4xz,yz^2,x^2+2yz^2-1\}$，计算 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}A)$. （答案：0）

（二）考研训练模拟题及答案

1. 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ____. （答案：π）

2. 选择题

(1) 若 L 是由 $y^2=2(x+2)$ 及 $x=2$ 所围区域的边界，L 的方向为顺时针，则 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$（　）.

(A) π　(B) 0　(C) -2π　(D) 2π　（答案：C）

(2) 曲面 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧，则 $\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=$（　）.

(A) $\frac{16}{3}\pi R^4$　(B) $4\pi R^4$　(C) $\frac{4}{3}\pi R^4$　(D) $2\pi R^4$　（答案：B）

3. 设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$（$k>0$ 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离）. 质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$，求在此运动过程中点 A 对质点 M 的引力所作的功. （答案：$k(1-\frac{1}{\sqrt{5}})$）

4. 计算曲线积分 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 为

(1) 正向曲线 $|x|+|y|=1$；

(2) 正向曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. （答案：π；0）

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面（$y>0$）内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d)，记

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值. （答案：$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$）

6. 计算 $\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}s$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=x+2,z=0$ 所围的空间体的表面. （答案：π）

7. 计算 $\iint_{\Sigma}(2z^2+xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=1$，被平面 $y+z=1$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧. （答案：$-\frac{\pi}{4}$）

8. 计算 $I=\oint_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$，从 z 轴正向往 z 轴负向看，Γ 的方向是顺时针的.

（答案：-2π）

五、课后习题全解

习题 10-1

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L. 在点 (x,y) 处它的线密度为 $\rho(x,y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达：

(1) 这曲线弧对 x 轴、y 轴的转动惯量 I_x,I_y；

(2) 这曲线弧的重心坐标 $\bar{x},\bar{y}$.

解　(1) 点 (x,y) 到 x 轴、y 轴的距离分别为 $|y|$ 和 $|x|$，于是

$$\mathrm{d}I_x=\rho(x,y)\mathrm{d}s\cdot y^2$$

$$\mathrm{d}I_y=\rho(x,y)\mathrm{d}s\cdot x^2$$

故

$$I_x=\int_Ly^2\rho(x,y)\mathrm{d}s,\quad I_y=\int_Lx^2\rho(x,y)\mathrm{d}s$$

(2) 静矩元素 $dM_x = \rho(x,y)y\mathrm{d}s, dM_y = \rho(x,y)x\mathrm{d}s$.

故
$$M_x = \int_L \rho(x,y)y\mathrm{d}s, \quad M_y = \int_L \rho(x,y)x\mathrm{d}s$$

而质量
$$M = \int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s$$

所以
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s}$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明：如果曲线弧 L 分为两段光滑曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

证 把 L_1 和 L_2 的分界点作为一个分点，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i =$$
$$\sum_{i=1}^{n_1} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i + \sum_{i=1}^{n_2} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i$$

令 $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \to 0 (i = 1,2,\cdots n)$，对上式两边取极限，有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_1} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_2} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i$$

得
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n \mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x = a\cos t, y = a\sin t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$；

(2) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段；

(3) $\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为直线 $y = x$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域的整个边界；

(4) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2 = a^2$，直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x = \mathrm{e}^t\cos t, y = \mathrm{e}^t\sin t, z = \mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧；

(6) $\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$，其中 Γ 为折线 $ABCD$，这里 A,B,C,D 依次为点 $(0,0,0)$，$(0,0,2)$，$(1,0,2)$，$(1,3,2)$；

(7) $\int_L y^2\mathrm{d}s$，其中 L 为摆线的一拱 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$；

(8) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

解 (1) 原式 $= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\mathrm{d}t =$

$$\int_0^{2\pi} a^{2n+1}\mathrm{d}t = 2\pi a^{2n+1}$$

(2) 直线方程为 $x+y = 1$，则

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s = \int_L \mathrm{d}s = \sqrt{2}$$

(3) $y = x$ 与 $y = x^2$ 的交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$，记 $L_1: y = x (0 \leqslant x \leqslant 1)$；$L_2: y = x^2 (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

则
$$\oint_L x\mathrm{d}s = \int_{L_1} x\mathrm{d}s + \int_{L_2} x\mathrm{d}s = \int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x =$$
$$\sqrt{2}\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{5}-1}{12}$$

(4) $y = x$ 与 $x^2+y^2 = a^2$ 的交点为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$，记

$L_1: y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$

$L_2: y = x \quad (0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}a)$

$L_3: y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\frac{\sqrt{2}a}{2} \leqslant x \leqslant a)$

则
原式 $= \int_{L_1} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s + \int_{L_2} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s + \int_{L_3} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s =$

$$\int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx +$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^a e^a\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}})^2}dx =$$

$$e^a - 1 + e^a - 1 + ae^a\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$2(e^a-1) + ae^a(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = e^a(2+\frac{\pi}{4}a) - 2$$

(5) 原式 $= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t}+e^{2t}}\sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2 + e^{2t}}dt =$

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{3}e^t}{2e^{2t}}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}(-e^{-t})\Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$$

(6) 线段$\overline{AB}$: $x=0, y=0, z=t(0\leqslant t\leqslant 2)$, $ds = \sqrt{0+0+1^2}dt = dt$

线段$\overline{BC}$: $x=t, y=0, z=2(0\leqslant t\leqslant 1)$, $ds = dt$

线段$\overline{CD}$: $x=1, y=t, z=2(0\leqslant t\leqslant 3)$, $ds = dt$

故 原式 $= \int_0^2 0dt + \int_0^1 0dt + \int_0^3 1\times t\times 2dt = t^2\Big|_0^3 = 9$

(7) $ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + (a\sin t)^2}dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}dt$

原式 $= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos)^2 \cdot a\sqrt{2(1-\cos t)}dt =$

$$a^3\int_0^{2\pi}\sqrt{2}(2\sin^2\frac{t}{2})^{\frac{5}{2}}dt \xrightarrow{令 u = \frac{t}{2}}$$

$$16a^3\int_0^\pi \sin^5 u du =$$

$$-16a^3\int_0^\pi (1-\cos^2 u)^2 d\cos u = \frac{256}{15}a^3$$

(8) $ds = \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2}dt = atdt$

原式 $= \int_0^{2\pi} a^2[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2]atdt =$

$$a^3\int_0^{2\pi}(1+t^2)tdt = 2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$$

4. 求半径为 a，中心角为 2φ 的均匀圆弧(线密度 $\rho = 1$) 的重心.

解 取扇形的平分线为 x 轴，顶点为坐标原点，则由对称性和 $\rho = 1$，知 $\bar{y} = 0$，而

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{2\varphi a}\int_L xds = \frac{1}{2\varphi a}\int_{-\varphi}^{\varphi} a\cos\theta a d\theta = \frac{a}{\varphi}\sin\varphi$$

故重心在扇形的对称轴上且与圆心距离$\frac{a\sin\varphi}{\varphi}$处.

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = kt$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，它的线密度 $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. 求：

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z；

(2) 它的重心.

解 $\rho = x^2+y^2+z^2 = a^2+k^2t^2$

$$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + k^2}dt = \sqrt{a^2+k^2}dt$$

(1) $I_z = \int_\Gamma \rho(x,y,z)(x^2+y^2)ds =$

$$\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cdot a^2\cdot\sqrt{a^2+k^2}dt =$$

$$a^2\sqrt{a^2+k^2}(a^2t+\frac{k^2}{3}t^3)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(2a^2+\frac{8}{3}k^2\pi^2)$$

(2) $M = \int_\Gamma \rho ds = \int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt =$

$$\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4k^2\pi^2)$$

$$M_x = \int_\Gamma x\rho ds = \int_0^{2\pi} a\cos t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt =$$

$$a^3\sqrt{a^2+k^2}\sin t\Big|_0^{2\pi} + ak^2\sqrt{a^2+k^2}[t^2\sin t\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} t\sin tdt] =$$

$$0 + ak^2\sqrt{a^2+k^2}[2t\cos t\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\cos tdt] =$$

$$4\pi ak^2\sqrt{a^2+k^2}$$

所以 $\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}$

同理 $M_y = \int_\Gamma y\rho ds = \int_0^{2\pi} a\sin t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt =$

$$-4\pi^2k^2a\sqrt{a^2+k^2}$$

$$M_z = \int_\Gamma z\rho ds = \int_0^{2\pi} kt(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt =$$

$$2\pi^2 k\sqrt{a^2+k^2}(a^2+2\pi^2k^2)$$

$$\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}$$

$$\bar{z}=\frac{M_z}{M}=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}$$

习题 10-2

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段，证明：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=0$$

证　因 $\Delta x_i\in(x=a)$ 垂直于 x 轴，从而 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=a-a=0$，所以

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\zeta_i,\eta_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}0=0$$

2. 设 L 为 xOy 内 x 轴上从点 $(a,0)$ 到点 $(b,0)$ 的直线段，证明：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x$$

证　在 x 轴上，$\eta_i=0$，所以

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\zeta_i,0)\Delta x_i=\int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分：

(1) $\int_L(x^2-y^2)\mathrm{d}x$，其 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧；

(2) $\oint_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行)；

(3) $\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x=R\cos t, y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧；

(4) $\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行)；

(5) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧；

(6) $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线；

(7) $\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里的 A,B,C 依次为点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$；

(8) $\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解　(1) $\int_L(x^2-y^2)\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-x^4)\mathrm{d}x=$

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2=-\frac{56}{15}$$

(2) $L=L_1+L_2$，其中 $L_1: y=0, x$ 从 $0\to 2a$，$L_2: y=\sqrt{a^2-(x-a)^2}$，$x$ 从 $2a\to 0$.

则 $\oint_L xy\mathrm{d}x=\int_0^{2a}x\times 0\mathrm{d}x+$

$$\int_{2a}^{0}x\sqrt{a^2-(x-a)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=a+a\sin t}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(a+a\sin t)a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=$$

$$-a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t+\cos^2 t\sin t)\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}a^3$$

(3) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[R\sin t(-R\sin t)+R\cos t\cdot R\cos t]\mathrm{d}t=$

$$R^2\left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t\right)=$$

$$R^2\left(-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=0$$

(4) 该圆的参数方程为：$x=a\cos t, y=a\sin t$，t 从 $0\to 2\pi$.

原式 $=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2}[a(\cos t+\sin t)(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)a\cos t]\mathrm{d}t=$

$$-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi$$

(5) 原式 $=\int_0^{\pi}[k^3\theta^2+a\sin\theta(-a\sin\theta)-a\cos\theta\cdot a\cos\theta]\mathrm{d}\theta=$

$$\int_0^{\pi}[k^3\theta^2-a^2]\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}k^3\pi^3-a^2\pi$$

(6) 由已知两点所确定的直线的方向向量 $S=\{1,2,3\}$，直线的参数方程：$x=1+t,y=1+2t,z=1+3t$（t 从 $0\to1$）. 故

$$原式=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)]\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^1(6+14t)\mathrm{d}t=13$$

(7) $\overline{AB}:L_1:y=1-x,x$ 从 $1\to0$；$\overline{BC}:L_2:z=1-y,y$ 从 $1\to0$；$\overline{CA}:L_3:x=1-z,z$ 从 $1\to0$.

$$原式=\int_{L_1}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+\int_{L_2}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+\int_{L_3}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=$$
$$\int_1^0\mathrm{d}x-\mathrm{d}(1-x)+\int_1^0-\mathrm{d}y-y\mathrm{d}(1-y)+\int_1^0\mathrm{d}(1-z)=$$
$$2\int_1^0\mathrm{d}x-\int_1^0(1+y)\mathrm{d}y+\int_1^0\mathrm{d}z=-2+\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}$$

(8) $$原式=\int_{-1}^1[(x^2-2x^3)+2x(x^4-2x^3)]\mathrm{d}x=$$
$$\int_{-1}^1(2x^5-4x^4-2x^3+x^2)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}$$

4. 计算 $\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 是：

(1) 抛物线 $y^2=x$ 上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧；

(2) 从点(1,1)到点(4,2)的直线段；

(3) 先沿直线从点(1,1)到点(1,2)，然后再沿直线到点(4,2)的折线；

(4) 曲线 $x=2t^2+t+1,y=t^2+1$ 上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧.

解 (1) L 为 $x=y^2$（y 从 $1\to2$）.

$$原式=\int_1^2[(y^2+y)2y+(y-y^2)]\mathrm{d}y=$$
$$\int_1^2(2y^3+y^2+y)\mathrm{d}y=\frac{34}{3}$$

(2) 过点(1,1),(4,2)的直线方程为 $x=3y-2$. 故

$$原式=\int_1^2[(3y-2+y)3+y-3y+2]\mathrm{d}y=\int_1^2(10y-4)\mathrm{d}y=11$$

(3) 从点(1,1)到(1,2)的直线段为 $x=1,y$ 从 $1\to2$，又从点(1,2)到(4,2)的直线段为 $y=2,x$ 从 $1\to4$，所以

$$原式=\int_1^2(y-1)\mathrm{d}y+\int_1^4(x+2)\mathrm{d}x=14$$

(4) 当 $x=1,y=1$ 时 $t=0$；$x=4,y=2$ 时，$t=1$. 故

$$原式=\int_0^1[(3t^2+t+2)(4t+1)+(-t^2-t)2t]\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)\mathrm{d}t=\frac{32}{3}$$

注：本题所给的曲线积分与积分路径有关.

5. 一力场由沿横轴正方向的常力 $\boldsymbol{F}$ 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$，记 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$，则功

$$W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L|\boldsymbol{F}|\mathrm{d}x=|\boldsymbol{F}|\int_R^0\mathrm{d}x=-|\boldsymbol{F}|R$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致，求质量为 m 的质点从位置 (x_1,y_1,z_1) 沿直线移到 (x_2,y_2,z_2) 重力所作的功.

解 $\boldsymbol{F}=\{0,0,mg\}$. g 为重力加速度，记 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$，$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则功

$$W=\int_{\overline{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{z_1}^{z_2}mg\mathrm{d}z=mg(z_2-z_1)$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为：

(1) 在 xOy 面内沿直线从点(0,0)到点(1,1)；

(2) 沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0,0)到点(1,1)；

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点(0,0)到点(1,1).

解 (1) 过点(0,0),(1,1)的直线 $y=x$，故方向余弦：$\cos\alpha=\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)+Q(x,y)]\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}s$$

(2) 由 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y_x'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$，得

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\quad \cos\beta=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

所以 $$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_L \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}[P(x,y)+2xQ(x,y)]\mathrm{d}s$$

(3) $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2_x}\mathrm{d}x = \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}\mathrm{d}x$,则

$$\cos\alpha = \sqrt{2x-x^2},\quad \cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{1-(2x-x^2)} = 1-x$$

所以 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y =$

$$\int_L [\sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]\mathrm{d}s$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧,把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化为对弧长的曲线积分.

解　曲线 Γ 在任一点处的切向量 $t=\{1,2t,3t^2\}=\{1,2x,3y\}$,则

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}},\quad \cos\gamma = \frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}$$

所以 $$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = \int_\Gamma \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s$$

习题 10-3

1. 计算下列曲线积分,并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_L (2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线;

(2) $\oint_L (x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$,其中 L 是四个顶点分别为(0,0),(2,0),(2,2)和(0,2)的正方形区域的正向边界.

解　(1) $P=2xy-x^2, Q=x+y^2, \frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在由 L 所围的平面闭区域 D 内连续,L 由两段光滑曲线组成,故此曲线积分满足格林公式的条件,从而有

$$原式 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(1-2x)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2-2x^{\frac{3}{2}}+2x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{30}$$

注:直接计算此曲线积分 $\oint_L = \int_{L_1}+\int_{L_2} = \frac{1}{30}$,可知格林公式对本题是成立的.

(2) 设 D 是由题设四点所围正方形区域,它由四段光滑曲线组成. $P=x^2-xy^3, Q=y^2-2xy, \frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上连续,故此曲线积分满足格林公式的条件,从而有

$$原式 = \iint_D(-2y+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2(3xy^2-2y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^2(8x-4)\mathrm{d}x = 8$$

2. 利用曲线积分,求下列曲线所围成图形的面积:

(1) 星形线 $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t$;

(2) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$;

(3) 圆 $x^2+y^2=2ax$.

解　利用公式 $A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 计算.

(1) $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3t\cdot 3a\sin^2t\cos t - a\sin^3t(-3a\cos^2t\sin t)]\mathrm{d}t =$

$$\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2t\cos^2t\mathrm{d}t = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t =$$

$$\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2$$

(2) 椭圆的参数方程为 $x=4\cos t, y=3\sin t$, t 从 $0\to 2\pi$.

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4\cos t\cdot 3\cos t-3\sin t(-4\sin t)\mathrm{d}t] =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}12\mathrm{d}t = 6\times 2\pi = 12\pi$$

(3) 圆的参数方程为 $x=r\cos\theta=2a\cos\theta\cdot\cos\theta=2a\cos^2\theta, y=r\sin\theta=2a\cos\theta\cdot\sin\theta=a\sin 2\theta$($t$ 从 $-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$),所以

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2a\cos^2\theta\cdot 2a\cos 2\theta + a\sin 2\theta 4a\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta =$$

$$2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\sin^2\theta\cos^2\theta]\mathrm{d}\theta =$$

$$4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta + \cos^2\theta - \cos^4\theta)\mathrm{d}\theta =$$

$$4a^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \pi a^2$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向为逆时针方向.

解 因点(0,0)为奇点，故在 L 包围的区域 D 内作顺时针方向的小圆周 $L_1: x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \varepsilon$ 充分小)，在 L 与 L_1 包围的区域 D_1 上，由

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

和格林公式，有

$$\oint_{L+L_1}\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

所以

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \oint_{L_1^-}\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta - \varepsilon^2\cos^2\theta}{2\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta = -\pi$$

4. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值：

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x + (6x^2y - 3xy^2)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y$.

解 (1) 因 $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关.

故

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)} = \int_{(1,1)}^{(2,1)} + \int_{(2,1)}^{(2,3)} =$$

$$\int_1^2(x+1)\mathrm{d}x + \int_1^3(2-y)\mathrm{d}y = \frac{5}{2}$$

(2) 因
$$(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x + (6x^2y - 3xy^2)\mathrm{d}y =$$
$$(6xy^2\mathrm{d}x + 6x^2y\mathrm{d}y) - (y^3\mathrm{d}x - 3xy^2\mathrm{d}y) =$$
$$\mathrm{d}(3x^2y^2) - \mathrm{d}(xy^3) = \mathrm{d}(3x^2y^2 - xy^3)$$

故积分式是函数 $u(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3$.的全微分，从而题设曲线积分与路径无关，且

$$\text{原式} = (3x^2y^2 - xy^3)\Big|_{(1,2)}^{(3,4)} = 236$$

(3) $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 4y^3 = \frac{\partial Q}{\partial x}$，先求原函数

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} = \int_0^x(0+3)\mathrm{d}x + \int_0^y(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y =$$

$$3x + x^2y - xy^4\text{（也可用凑微分得出）}$$

所以，原式 $= (3x + x^2y - xy^4)\Big|_{(1,0)}^{(2,1)} = 5.$

5. 利用格林公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L(2x-y+4)\mathrm{d}x + (3x+5y-6)\mathrm{d}y$，其中 L 为三顶点分别为(0,0)、(3,0)和(3,2)的三角形正向边界；

(2) $\oint_L(x^2y\cos x + 2xy\sin x - y^2e^x)\mathrm{d}x + (x^2\sin x - 2ye^x)\mathrm{d}y$，其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(a>0)$；

(3) $\int_L(2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点(0,0)到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧；

(4) $\int_L(x^2-y)\mathrm{d}x - (x+\sin^2y)\mathrm{d}y$，其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点(0,0)到点(1,1)的一段弧.

解 (1) 原式 $= \iint_D(3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\times\frac{1}{2}\times 3\times 2 = 12$

(2) 原式 $= \iint_D(2x\sin x + x^2\cos x - 2ye^x - x^2\cos x - 2x\sin x + 2ye^x)\mathrm{d}\sigma =$

$$\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

(3) 记 D 为曲线 L，$x=\frac{\pi}{2}$ 及 $y=0$ 所围的闭区域，则

$$原式 = -\iint_D(-2y\cos x + 6xy^2 - 6xy^2 + 2y\cos x)dxdy -$$

$$\int_1^0(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2)dy - 0 =$$

$$0 + (y - y^2 + \frac{1}{4}\pi^2y^3)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

(4) 记曲线 L 与 $x=1, y=0$ 所围闭区域为 D，则

$$原式 = -\iint_D(-1+1)dxdy - \int_1^0 -(1+\sin^2 y)dy - \int_1^0 x^2dx =$$

$$0 + (y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin 2y)\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\sin 2 - \frac{7}{6}$$

6. 验证下列 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x,y)$：

(1) $(x+2y)dx+(2x+y)dy$；

(2) $2xydx+x^2dy$；

(3) $4\sin x\sin 3y\cos xdx - 3\cos 3y\cos 2xdy$；

(4) $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$；

(5) $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$.

解 (1) 因 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故

$$原式 = du(x,y) = (xdx+ydy)+2(ydx+xdy) =$$

$$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)+2d(xy) = d[2xy+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]$$

所以
$$u(x,y) = 2xy+\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

(2) 因

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

故

$$原式 = d(x^2y),\quad u(x,y) = x^2y$$

(3) 直接凑微分可验证 $Pdx+Qdy = du$，又因原式 $= d(-\sin 3y\cos 2x)$，所以 $u(x,y) = -\sin 3y\cos 2x$.

(4) $原式 = (3x^2ydx+x^3dy)+(8xy^2dx+8x^2ydy)+12ye^ydy =$

$$d(x^3y)+4d(x^2y^2)+12d\int yde^y \xrightarrow{分部积分}$$

$$d(x^3y+4x^2y^2+12ye^y-12e^y)$$

故
$$u(x,y) = x^3y+4x^2y^2+12e^y(y-1)$$

(5) $原式 = (2x\cos ydx - x^2\sin ydy)+(y^2\cos xdx+2y\sin xdy) =$

$$d(x^2\cos y)+d(y^2\sin x) = d(x^2\cos y+y^2\sin x)$$

所以
$$u(x,y) = x^2\cos y+y^2\sin x$$

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X = x+y^2, Y = 2xy-8$，这变力确定了一个力场，证明质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关.

证
$$W = \int_L(x+y^2)dx+(2xy-8)dy$$

因 $\dfrac{\partial X}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$，故上述曲线积分的值，即功 W 的值与路径无关.

习题 10－4

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ，在点 (x,y,z) 处它的面密度为 $\rho(x,y,z)$，用对面积的曲面积分表达这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解 点 (x,y,z) 到 x 轴的距离 $r = \sqrt{y^2+z^2}$. 转动惯量元素 $dI_x = (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$.

所以
$$I_x = \iint_\Sigma(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)dS + \iint_{\Sigma_2}f(x,y,z)dS$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证 由于 $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$ 与对曲面的分法无关，取 Σ_1 与 Σ_2 的交线为分割的一条曲线. 设 $n = n_1+n_2$，则

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n_1} f(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\Delta S_i + \sum_{i=1}^{n_2} f(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\Delta S_i$$

令 $\lambda = \max\{d_i\}$ 取极限（$i = 1,2,\cdots,n$；d_i 是 ΔS_i 的直径），则有

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\Delta S_i =$$

$$\lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{i=1}^{n_1} f(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\Delta S_i + \lim_{\lambda_2\to 0}\sum_{i=1}^{n_2} f(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\Delta S_i =$$

$$\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

其中 λ_1,λ_2 分别是对 Σ_1,Σ_2 分割下 ΔS_i 的最大直径.

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 与二重积分有什么关系？

答 记 $\Sigma = D_{xy}$，因在 xOy 面内，$z=0$，于是曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 变成了平面区域 D_{xy} 上的二重积分，即有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,0)\mathrm{d}\sigma$$

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为抛物面 $z = 2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，$f(x,y,z)$ 分别如下：

(1) $f(x,y,z) = 1$；　　(2) $f(x,y,z) = x^2+y^2$；

(3) $f(x,y,z) = 3z$.

解 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 2(z=0)$；

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(1) $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r =$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{8}(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+4r^2) = \frac{13}{3}\pi$$

(2) 原式 $= \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2}}[(1+4r^2)-1]\frac{1}{4}(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{8}\mathrm{d}(1+4r^2) =$$

$$\frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{5}(1+4r^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{149}{30}\pi$$

(3) 原式 $= \iint_{D_{xy}} 3(2-x^2-y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}} 3(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r =$$

$$3\left[2\pi\int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r - \frac{149}{30}\pi\right] \xlongequal{\text{由(2),(1)}}$$

$$6\times\frac{13}{3}\pi - 3\times\frac{149}{30}\pi = \frac{111}{10}\pi$$

5. 计算 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是：

(1) 锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面；

(2) 锥面 $z^2 = 3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

解 (1) Σ 由 Σ_1（锥面）及 Σ_2（底面一圆域）组成，对于

$$\Sigma_1: \mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Sigma_2: \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Σ_1 及 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$；则

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} =$$

$$\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$(\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$$

(2) Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 3(z=0)$；

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{3x}{\sqrt{3(x^2+y^2)}}\right)^2+\left(\frac{3y}{\sqrt{3(x^2+y^2)}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故　原式 $= \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}} r^2 r\mathrm{d}r = 9\pi$

6. 计算下列对面积的曲面积分：

(1) $\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分；

(2) $\iint_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h(0<h<a)$ 的部分;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 (1)Σ 在 xOy 面上的投影为三角形区域

$$D_{xy}:0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 3(1-\frac{x}{2})$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(-2)^2+(-\frac{4}{3})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 原式 $=\iint\limits_{D_{xy}}[4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3})+2x+\frac{4}{3}y]\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$\frac{4}{3}\sqrt{61}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$\frac{4}{3}\sqrt{61}\times\frac{1}{2}\times 2\times 3=4\sqrt{61}$

(2) Σ 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}:0\leqslant x\leqslant 3,0\leqslant y\leqslant 3-x$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 原式 $=\iint\limits_{D_{xy}}(2xy-2x^2-x+6-2x-2y)\times 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$3\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}(2xy-2y-2x^2-3x+6)\mathrm{d}y=$

$3\int_0^3(3x^3-10x^2+9)\mathrm{d}x=-\frac{27}{4}$

(3) Σ 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}:x^3+y^2\leqslant a^2-h^2$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 原式 $=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}(r\cos\theta+r\sin\theta+\sqrt{a^2-r^2})\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r=$

$a\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r+$

$a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}r\mathrm{d}r=\pi a(a^2-h^2)$

(4) Σ 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 2ax$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故 原式 $=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}[r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\sin\theta+\cos\theta)]r\mathrm{d}r=$

$\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\frac{1}{4}(2a\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta\xlongequal{\text{利用奇偶性}}$

$2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=8\sqrt{2}a^4\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$

7. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量,此壳的面密度的大小为 $\rho=z$.

解 抛物面壳 Σ 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 2$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=$

$\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}r\mathrm{d}r\xlongequal{\text{令}r^2=t}$

$\pi\int_0^2 t\sqrt{1+t}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$

8. 求面密度为 ρ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动

惯量.

解 $dI_z = (x^2+y^2)\rho_0 dS$

$$dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = \frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

所以 $I_z = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\rho_0 dS =$

$$\rho_0\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$\rho_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr = 2\pi a\rho_0\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\frac{1}{2}dr^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$$

习题 10－5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式：

$$\iint\limits_\Sigma[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]dydz = \iint\limits_\Sigma P_1(x,y,z)dydz \pm \iint\limits_\Sigma P_2(x,y,z)dydz$$

证 任意分割 Σ，取点 $(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\in\Delta S_i$，则

$$\text{左端} = \lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[P_1(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)\pm P_2(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)](\Delta S_i)_{yz} =$$

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n P_1(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)(\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n P_2(\zeta_i,\eta_i,\xi_i)(\Delta S_i)_{yz} =$$

$$\iint\limits_\Sigma P_1(x,y,z)dydz \pm \iint\limits_\Sigma P_2(x,y,z)dydz$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint\limits_\Sigma R(x,y,z)dxdy$ 与二重积分有什么关系？

答 此时 Σ 为 xOy 面内的闭区域 D_{xy}，$z=0$，有

$$\iint\limits_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,0)dxdy$$

当 Σ 取上侧时取正号；当 Σ 取下侧时取负号. 由此可见，当 Σ 为 D_{xy} 时，第二类曲面积分便成了二重积分.

3. 计算下列对坐标的曲面积分：

(1) $\iint\limits_\Sigma x^2y^2z\,dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧；

(2) $\iint\limits_\Sigma z\,dxdy + x\,dydz + y\,dzdx$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧；

(3) $\iint\limits_\Sigma[f(x,y,z)+x]dydz + [2f(x,y,z)+y]dzdx + [f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧；

(4) $\oiint\limits_\Sigma xz\,dxdy + xy\,dydz + yz\,dzdx$，其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 (1) 原式 $= -\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy =$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2\theta}{8}d\theta\int_0^R r^4\sqrt{R^2-r^2}\left[-\frac{1}{2}d(R^2-r^2)\right] =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta\left[-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}r^4(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R + \right.$$

$$\left.\frac{1}{3}\int_0^R(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}dr^4\right] = \frac{2\pi}{105}R^7$$

(2) 该柱面与 xOy 面垂直，故 $\iint\limits_\Sigma z\,dxdy=0$，将 Σ 分别向 yOz 面与 zOx 面投影，得

$$D_{yz}:0\leqslant y\leqslant1,0\leqslant z\leqslant3 \qquad D_{zx}:0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant z\leqslant3$$

原式 $= \iint\limits_\Sigma x\,dydz + \iint\limits_\Sigma y\,dzdx =$

$$\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,dydz + \iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\,dzdx =$$

$$\int_0^1 dy\int_0^3\sqrt{1-y^2}\,dz + \int_0^1 dx\int_0^3\sqrt{1-x^2}\,dz =$$

$$2\times3\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = 6\times\frac{1}{4}\times\pi = \frac{3}{2}\pi$$

(3) 先转化为对面积的曲面积分消去 $f(x,y,z)$，再进行计算. Σ 的法向量 $n=\{1,-1,1\}$，单位化 $n^0=\{\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

故 原式 $=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}[(f(x,y,z)+x)-(2f(x,y,z)+y)+(f(x,y,z)+z)]\mathrm{d}S=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}1\mathrm{d}S=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+1^2+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

(4) Σ 为封闭曲面，由四部分组成. 现分片计算.

在 Σ_1 上，$z=0$，所以 $\iint\limits_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y=0$；

又因 Σ_1 垂直 yOz 面，故 $\iint\limits_{\Sigma_1}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

从而
$$\iint\limits_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

在 Σ_2 上 $x=0$，故 $\iint\limits_{\Sigma_2}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$；

在 Σ_3 上 $y=0$，故 $\iint\limits_{\Sigma_3}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$；

在 Σ_4 上，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$，故

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$$

所以 原式 $=0+0+0+\iint\limits_{\Sigma_4}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$

$$\iint\limits_{D_{xy}}x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{zx}}(1-x-z)z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+$$

$$\iint\limits_{D_{yz}}(1-y-z)y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iint\limits_{D_{xy}}(x-x^2-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x-x^2-xy)\mathrm{d}y=$$

$$3\int_0^1(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分，其中：

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的上侧；

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (1) 平面 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{3,2,2\sqrt{3}\}$，

所以
$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{2}{5},\quad \cos\gamma=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$原式=\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{3}{5}P(x,y,z)+\frac{2}{5}Q(x,y,z)+\frac{2\sqrt{3}}{5}R(x,y,z)\right]\mathrm{d}S$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$，又 Σ 取上侧，故取其法向量 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y,1\}$，则

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\quad \cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

$$原式=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2xP(x,y,z)+2yQ(x,y,z)+R(x,y,z)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\mathrm{d}S$$

习题 10－6

1. 利用高斯公式计算曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为平面 $x=0,y=0,z=0,x=a,y=a,z=a$ 所围成的立方体的表面的外侧；

(2) $\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球体 $x^2+y^2\leqslant a^2,0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧；

(4) $\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的整个表面的外侧；

(5) $\oiint\limits_{\Sigma}4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x=$

$1, y=1, z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

解 (1) 原式 $= \iiint_\Omega (2x+2y+2z)\mathrm{d}V =$

$$2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (x+y+z)\mathrm{d}z = 6\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z = 3a^4$$

(2) 原式 $= \iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r =$

$$3\times 2\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^\pi \frac{1}{5}r^5\Big|_0^a = \frac{12}{5}\pi a^5$$

(3) 原式 $= \iiint_\Omega (z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r =$

$$2\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5}r^5\Big|_0^a = \frac{2}{5}\pi a^5$$

(4) 原式 $= \iiint_\Omega (1+1+1)\mathrm{d}V = 3\iiint_\Omega \mathrm{d}V = 3\times\pi 3^2\times 3 = 81\pi$

(5) 原式 $= \iiint_\Omega (4z-2y+y)\mathrm{d}V = \iiint_\Omega (4z-y)\mathrm{d}V =$

$$4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z - \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z = \frac{3}{2}$$

2. 求下列向量 A 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量：

(1) $A = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为圆柱 $x^2+y^2 \leqslant a^2 (0\leqslant z\leqslant h)$ 的全表面，流向外侧；

(2) $A = (2x-z)\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} - xz^2\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$ 的全表面，流向外侧；

(3) $A = (2x+3z)\boldsymbol{i} - (xz+y)\boldsymbol{j} + (y^2+2z)\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心，半径 $R=3$ 的球面，流向外侧.

解 (1) $\Phi = \oiint_\Sigma yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega (0+0+0)\mathrm{d}V = 0$

(2) $\Phi = \oiint_\Sigma (2x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x - xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$\iiint_\Omega (2+x^2-2xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$2\iiint_\Omega \mathrm{d}V + \int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a\mathrm{d}z\int_0^a x^2\mathrm{d}x - 2\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z =$$

$$2a^3 + \frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{2} = 2a^3 - \frac{a^5}{6}$$

(3) $\Phi = \oiint_\Sigma (2x+3z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (xz+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$\iiint_\Omega (2-1+2)\mathrm{d}V = 3\iiint_\Omega \mathrm{d}V = 3\times\frac{4}{3}\pi\times 3^3 = 108\pi$$

3. 求下列向量场 A 的散度：

(1) $A = (x^2+yz)\boldsymbol{i} + (y^2+xz)\boldsymbol{j} + (z^2+xy)\boldsymbol{k}$；

(2) $A = e^{xy}\boldsymbol{i} + \cos(xy)\boldsymbol{j} + \cos(xz^2)\boldsymbol{k}$；

(3) $A = y^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$.

解 (1) $\mathrm{div}A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2(x+y+z)$

(2) $\mathrm{div}A = ye^{xy} - x\sin(xy) - 2xz\sin(xz^2)$

(3) $\mathrm{div}A = 0 + x + x = 2x$

4. 设 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上具有二阶连续偏导数的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数.

证明：

$$\iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面，这个公式叫做格林第二公式.

证明 由教材 P208 例 3 知

$$\iiint_\Omega u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S -$$

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

同理

$$\iiint_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S -$$

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

以上两式相减即得证.

5. 利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证　取液面为 xOy 面，z 轴铅直向上，设液体密度为 ρ，在物体表面 Σ 上取面积元素 dS，任取 $M(x,y,z)\in dS$，M 处 Σ 的外法线方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则面积元素 dS（看做一点）所受液体的压力（浮力）F 在三坐标轴上的分力元素分别为：

$$z\rho dS\cos\alpha,\quad \rho z dS\cos\beta,\quad \rho z dS\cos\gamma$$

故 Σ 所受总压力的各分力为上述各分力元素在 Σ 上的曲面积分，用高斯公式可得：

$$F_x=\oint\!\!\!\oint_\Sigma \rho z\cos\alpha dS=\oint\!\!\!\oint_\Sigma \rho z dydz=\iiint_\Omega 0dV=0$$

$$F_y=\oint\!\!\!\oint_\Sigma \rho z\cos\beta dS=\oint\!\!\!\oint_\Sigma \rho z dzdx=\iiint_\Omega 0dV=0$$

$$F_z=\oint\!\!\!\oint_\Sigma \rho z\cos\gamma dS=\oint\!\!\!\oint_\Sigma \rho z dxdy=\rho\iiint_\Omega dV=\rho\cdot V(V\text{ 为 }\Omega\text{ 的体积})$$

所以
$$F=\rho Vk$$

习题 10－7

1. 利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，若从 x 轴正向看去，这圆周是取逆时针的方向；

(2) $\oint_\Gamma (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1(a>0,b>0)$，若从 x 轴正向看去，这椭圆是取逆时针方向；

(3) $\oint_\Gamma 3ydx-xzdy+yz^2dz$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2z$，$z=2$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向；

(4) $\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9$，$z=0$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向.

解　(1) 记 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 被 Γ 所围部分上侧，Σ 的方向向量 $n^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\}$.

故
$$\text{原式}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y&z&x\end{vmatrix}dS=$$
$$\iint_\Sigma\left(-\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}\right)dS=-\sqrt3\iint_\Sigma dS=-\sqrt3\pi a^2$$

其中 Γ 所围圆的半径为 a.

(2) Σ 为平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ 被 Γ 所围部分上侧，Σ 的单位法向量 $n^0=\{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\}$.

故
$$\text{原式}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}&0&\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y-z&z-x&x-y\end{vmatrix}dS=$$
$$\iint_\Sigma\left(\frac{-2b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{-2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)dS=-\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_\Sigma dS=$$
$$-2\frac{(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\pi\sqrt{a^2+b^2}\times a=-2\pi a(a+b)$$

如图 10－2 所示，椭圆截面的短半轴长为 a，长半轴长为 $\sqrt{a^2+b^2}$，从而面积为 $\pi a\sqrt{a^2+b^2}$.

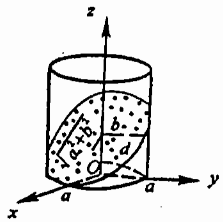


图　10－2

(3) 记 Σ 为平面 $z=2$ 上被 Γ 所围部分的上侧，Σ 的法向量 $n^0=\{0,0,1\}$.

$$\text{原式}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}0&0&1\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 3y&-xz&yz^2\end{vmatrix}dS=$$
$$\iint_\Sigma(-z-3)dS=-\iint_{D_{xy}}(2+3)dxdy=$$
$$-5\times\pi\times 2^2=-20\pi$$

(4) 原式 $=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z \end{vmatrix}=$

$$\iint\limits_{\Sigma}(3-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=9\pi$$

其中 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 9$.

2. 求下列向量场 A 的旋度:

(1) $A=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$;

(2) $A=(z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$;

(3) $A=x^2\sin y\boldsymbol{i}+y^2\sin(xz)\boldsymbol{j}+xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$.

解 (1) $\mathrm{rot}A=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$

(2) $\mathrm{rot}A=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -z+x\cos y & 0 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$

(3) $\mathrm{rot}A=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}=$

$[x\sin(\cos z)-xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i}-y\sin(\cos z)\boldsymbol{j}+$

$[xy^2\cos(xz)-x^2\cos y]\boldsymbol{k}$

3. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}A\cdot n\mathrm{d}S$ 化为曲线积分,并计算积分值,其中 A,Σ 及 n 分别如下:

(1) $A=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$,$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧,n 是 Σ 的单位法向量;

(2) $A=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$,$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 2$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面,n 是 Σ 的单位法向量.

解 (1) 为方便,该 Σ 看做是由 xOy 面上的单位圆 $\Gamma:x^2+y^2=1$ 张成的,

并取逆时针方向,则 Γ:

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta\quad(0\text{ 从 }\theta\to 2\pi)$$

由斯托克斯公式有

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}A\cdot n\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=$$

$$\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z=$$

$$\int_0^{2\pi}[\sin^2\theta(-\sin\theta)+\cos^2\theta\sin\theta+0]\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_{2\pi}^{0}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta=$$

$$\int_{2\pi}^{0}(1-2\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta=0$$

(2) 设该 Σ 是由底面在 xOy 面上正方形:$0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2$ 所张成,Γ 取逆时针方向. 则有

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}A\cdot n\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y-xz\mathrm{d}z=$$

$$\oint_{\Gamma}(y-0)\mathrm{d}x+0\xrightarrow{\text{由格林公式}}$$

$$\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}-\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4$$

4. 求下列向量场 A 沿闭曲线 Γ(从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向)的环流量:

(1) $A=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$($C$ 为常数),Γ 为圆周 $x^2+y^2=1,z=0$;

(2) $A=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$,其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$,$z=0$.

解 (1) Γ 是 xOy 面上的正向圆周:

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta\quad(0\text{ 从 }\theta\to 2\pi)$$

环量 $\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z=$

$$\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta+\cos^2\theta+0)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

(2) Γ 是 xOy 面上的正向圆周:$x^2+y^2=4$,即

$$x=2\cos\theta,\quad y=2\sin\theta\quad(0\text{ 从 }\theta\to 2\pi)$$

故 $\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\oint_\Gamma(x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z=$

$$\int_0^{2\pi}[2\cos\theta(-2\sin\theta)+8\cos^3\theta\cdot 2\cos\theta+0]\mathrm{d}\theta=$$

$$-2\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta+16\int_0^{2\pi}(\frac{1+\cos 2\theta}{2})^2\mathrm{d}\theta=$$

$$4\int_0^{2\pi}(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2})\mathrm{d}\theta=$$

$$8\pi+4\pi=12\pi$$

5. 证明 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{rot}\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\boldsymbol{b}$.

证 设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x+b_x&a_y+b_y&a_z+b_z\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\mathbf{rot}\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\boldsymbol{b}$$

6. 设 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)$.

解 $$\mathbf{grad}u=\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z})\boldsymbol{i}+(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z})\boldsymbol{j}+(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})\boldsymbol{k}=0$$

总习题十

1. 填空：

(1) 第二类曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成第一类曲线积分是______，其

中 α,β,γ 为有向曲线弧 Γ 上点 (x,y,z) 处的______的方向角.

（答案：$\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；切向量）

(2) 第二类曲面积分 $\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成第一类曲面积分是______，其中 α,β,γ 为有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的______的方向角.

（答案：$\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；法向量）

2. 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$；

(2) $\int_\Gamma z\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x=t\cos t,y=t\sin t,z=t\quad(0\leqslant t\leqslant t_0)$；

(3) $\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧；

(4) $\int_\Gamma(y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧；

(5) $\int_L(e^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-2)\mathrm{d}y$，其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2,y\geqslant 0$，沿逆时针方向；

(6) $\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z$，其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得的截痕，从 z 轴的正向看去，沿逆时针方向.

解 (1) $L:r=a\cos\theta\ (-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta$$

$$原式=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\cdot a\mathrm{d}\theta=2a^2$$

(2) $\int_\Gamma z\mathrm{d}s=\int_0^{t_0}t\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t=$

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0}=\frac{(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}}{3}$$

(3) 原式 $= \int_0^{2\pi}\{[2a - a(1-\cos t)]\cdot a(1-\cos t) +$

$$a(t-\sin t)\cdot a\sin t\}\mathrm{d}t = a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\mathrm{d}t = -2\pi a^2$$

(4) 原式 $= \int_0^1 [(t^4 - t^6)\times 1 + 2t^2t^3 2t - t^2 3t^2]\mathrm{d}t =$

$$\int_0^1 (3t^6 - t^4)\mathrm{d}t = \frac{1}{35}$$

(5) 加上 $L_1: y = 0$, x 由 0 到 $2a$ 使 $L + L_1$ 封闭，而 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$

故 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L+L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$\iint_D (e^x\cos y - e^x\cos y + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^2$$

(6) $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & xyz \end{vmatrix} = \iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

其中 Σ 是 $y = z$ 上以 Γ 为边界的椭圆，Σ 侧与 Γ 正向符合右手法则. 又 Σ 在 yOz 面上的投影为一线段，故 $\iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D: x^2 + 2z^2 \leqslant 1$，且 Σ 的正侧方向与 y 轴成钝角.

$$-\iint_\Sigma yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_D z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{1}{2}r\cos^2\theta\frac{1}{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^3}{2\sqrt{2}}\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi$$

其中 $z = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta$, $x = r\sin\theta$

故原式 $= \frac{\sqrt{2}}{16}\pi$.

3. 计算下列曲面积分：

(1) $\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的圆柱面

$x^2 + y^2 = R^2$；

(2) $\iint_\Sigma (y^2 - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2 - x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}(0 \leqslant z \leqslant h)$ 的外侧；

(3) $\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧；

(4) $\iint_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中 Σ 为曲面 $1 - \frac{z}{5} = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9}(z \geqslant 0)$ 的上侧；

(5) $\iint_\Sigma xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 的外侧.

解　(1) Σ 在 yOz 面上投影域 $D_{yz}: -R \leqslant y \leqslant R, 0 \leqslant z \leqslant H$，由 $x^2 + y^2 = R^2$. 得 $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$，即 Σ 由前侧 Σ_1 及后侧 Σ_2 组成.

所以　原式 $= \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S =$

$$\iint_{D_{yz}}\frac{1}{(-\sqrt{R^2-y^2})^2+y^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z +$$

$$\iint_{D_{yz}}\frac{1}{(\sqrt{R^2-y^2})^2+y^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$2R\int_{-R}^R\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-y^2}}\int_0^H\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2} = 2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

(2) 补充 $\Sigma_1: z = h$ 取上侧，使其与 Σ 组成封闭曲面，则

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2 - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2 - x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iiint_\Omega (0+0+0)\mathrm{d}V = 0$$

故　原式 $= -\iint_{\Sigma_1}(y^2 - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2 - x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$-\iint_{D_{xy}}(x^2 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h(r^2\cos^2\theta - r\sin\theta)r\mathrm{d}r =$$

$$-\frac{1}{4}h^4\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta + \frac{h^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{4}h^4$$

注：此题还可直接计算.

(3) 补充 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\leqslant R^2$，取下侧，而

$$\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

所以

$$原式=\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iiint_\Omega (1+1+1)\mathrm{d}V=3\times\frac{2}{3}\pi R^3=2\pi R^3$$

(4) 补充 $\Sigma_1: z=0, \frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\leqslant 1$，取下侧，而

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=0$$

所以 $\quad 原式=\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=$

$$\iiint_\Omega\left[\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right]\mathrm{d}V=0$$

(5) Σ 是球面在第 Ⅰ、Ⅴ 象限部分的外侧，Σ 在 xOy 平面上投影 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$，故

$$原式=\iint_{\Sigma_上} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_下} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\sin\theta\sqrt{1-r^2}r\mathrm{d}r\xlongequal{r=\sin t}$$

$$2\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{2}{15}$$

4. 证明 $\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在整 xOy 平面除去 $y=0$ 的负半轴及原点的开区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

证 $\quad P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处都无意义，整个 xOy 面除 y 的负半轴及原点外的开区域 G 是单连通域，因在 G 内

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

所以存在 $u(x,y)$，使

$$\mathrm{d}u=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=$$

$$\int_1^x\frac{x}{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

5. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $F=-\frac{k}{r^2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场，其中 k 为常数. $r=\sqrt{x^2+y^2}$，证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

证 $\quad$ 力 F 所作功

$$W=\int_L-\frac{kx}{r^2}\mathrm{d}x-\frac{ky}{r^2}\mathrm{d}y,\ P=\frac{-kx}{x^2+y^2},\ Q=\frac{-ky}{x^2+y^2}$$

因当 $x>0$ 时，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故场力所作功 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关.

6. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的重心的坐标.

解 $\quad$ 设面密度为 ρ，曲面在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant a^2$，重心 (x,y,z). 由对称性可知 $\bar{x}=\bar{y}=0$，

$$M=\iint_\Sigma\rho\mathrm{d}S=\rho\iint_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\rho a\int_0^a\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}(a-r^2)=2\pi\rho a^2$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint_\Sigma\rho z\mathrm{d}S=$$

$$\frac{1}{2\pi a^2}\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{2}$$

故所求重心的坐标为 $(0,0,\frac{a}{2})$.

7. 设 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数，分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明：

(1) $\displaystyle\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(\mathbf{grad}u\cdot\mathbf{grad}v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$

(2) $\displaystyle\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}\right)-v\frac{\partial u}{\partial n})\mathrm{d}s$

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$，$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u，v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数，符号 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，称为二维拉普拉斯算子.

证 (1) 如图 10-3 所示，设 $\boldsymbol{n}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$，则 $\cos\alpha=\sin\tau$，$\cos\beta=\sin\alpha=-\cos\tau$，于是

$$\cos\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}y,\quad \cos\beta\mathrm{d}s=-\cos\tau\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x$$

$$\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_L v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_L v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{由格林公式}}$$

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D(\mathbf{grad}u\cdot\mathbf{grad}v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

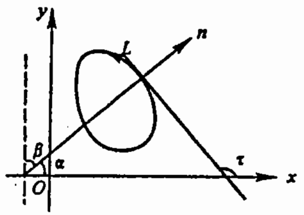


图 10-3

故

$$\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(\mathbf{grad}u\cdot\mathbf{grad}v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s\qquad(*)_1$$

(2) 由(1)的结论中 u，v 互换有：

$$\iint_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(\mathbf{grad}v\cdot\mathbf{grad}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s\qquad(*)_2$$

$(*)_2-(*)_1$ 有 $\displaystyle\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$

8. 求向量 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 通过区域 $\Omega:0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1,0\leqslant z\leqslant1$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解 $\displaystyle\Phi=\oiint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$$\iiint_\Omega(1+1+1)\mathrm{d}v=3\iiint_\Omega\mathrm{d}v=3$$

9. 求力 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，从 z 轴正向看去，沿顺时针方向.

解 $\displaystyle W=\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\left(\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}\right)y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$

而 L_1 为 xOz 平面上线段：$z+x=1$，$y=0$ 则 $\mathrm{d}y=0$.

故
$$\int_{L_1}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1(1-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}$$

L_2 为 xOy 平面上线段：$y+z=1$，$x=0$ 则 $\mathrm{d}x=0$.

$$\int_{L_2}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1(1-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

L_3 为 xOy 平面上线段：$x+y=1$，$z=0$ 则 $\mathrm{d}z=0$.

$$\int_{L_3}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

所以
$$W=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

第十一章 无穷级数

一、重要内容提要

(一) 常数项级数的概念和性质

1. 常数项级数的概念

称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为(常数项)无穷级数，$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 称做该级数的(前 n 项)部分和，若 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则称无穷级数收敛，记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$；否则称其发散.

2. 级数的基本性质

(1) 当常数 $k \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 同敛散.

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$.

(3) 在级数中去掉、加上或改变有限项，级数的敛散性不变.

(4) 收敛级数加括号后所成级数仍收敛，且其和不变.

(5) 级数收敛的必要条件：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.(其逆不成立)

等价命题：若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(二) 正项级数及其审敛法

1. 正项级数收敛的充分必要条件

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

2. 比较审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，满足 $u_n \leqslant v_n$，则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

3. 比较审敛法的极限形式

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho\ (0 < \rho < +\infty)$，则它们同敛散；$\rho = 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；$\rho = \infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4. 比值审敛法

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则当 $\rho < 1$ 时级数收敛，$\rho > 1$ 时级数发散；$\rho = 1$ 时判别法失效.

5. 根值审敛法

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则当 $\rho < 1$ 时级数收敛，$\rho > 1$ 时级数发散；$\rho = 1$ 时判别法失效.

(三) 任意项级数及其审敛法

1. 交错级数

莱布尼兹定理：若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n\ (u_n > 0)$ 满足条件：$u_n \geqslant u_{n+1}$ $(n = 1,2\cdots)$，$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则交错级数收敛，且其和 $s \leqslant u_1$，其余项 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

2. 绝对收敛与条件收敛

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发

散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

（四）幂级数

1. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (x\in I) \qquad (1)$$

称为定义在区间 I 上的函数项级数.

若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称点 x_0 为函数项级数(1)的收敛点，否则称发散点，收敛点的全体称为级数(1)的收敛域.

设 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项和，若在收敛域内每一点 x，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)$，则称 $s(x)$ 为级数(1)的和函数.

2. 幂级数及其收敛性

形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数称为 $(x-x_0)$ 的幂级数；特别当 $x_0=0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为 x 的幂级数.

阿贝尔定理：如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 时收敛，则适合不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 该幂级数绝对收敛；反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0$ 时发散，则适合不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 该幂级数发散.

对于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho(\rho\neq 0)$，则收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$，特别当 $\rho=0$ 时，则 $R=+\infty$；当 $\rho=+\infty$ 时，则 $R=0$.

3. 幂级数的运算

两个幂级数可在它们收敛区间的公共部分上进行加、减、乘、除四则运算.

4. 幂级数的和函数的分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，则在 $(-R,R)$ 内：

(1) 和函数 $s(x)$ 是连续函数.

(2) $s(x)$ 可导，且 $s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$.

(3) $s(x)$ 可积，且 $\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

（五）函数展开成幂级数

函数展开成幂级数有直接展开法和间接展开法之分，直接展开法是利用泰勒定理，先计算泰勒系数并写出泰勒级数，然后证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 于是可得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

并须注明收敛域. 间接展开法就是利用已有的展开式和级数的四则运算及分析运算将所给函数展开成幂级数.

（六）傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的三角级数，称为 $f(x)$ 的傅里叶级数，其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots)$$

二、重点知识结构图

- 无穷级数
  - 常数项级数
    - 定义
      - 级数、部分和、交错级数、正项级数、一般项级数
      - 收敛、余项、条件收敛、绝对收敛
    - 性质
      - 有限项改变不影响敛散性
      - $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 收敛
      - 加括号性
      - 必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$
    - 审敛法
      - 正项级数
        - 定义法、比较审敛法（包括极限形式）比值审敛法、根值审敛法
      - 交错级数：莱布尼兹判别法
      - 一般项级数：利用正项级数 $\Rightarrow$ 绝对收敛
  - 函数项级数与幂级数
    - 定义：函数项级数、收敛域、和函数、收敛半径
    - 性质
      - 幂级数：加、减、乘、除四则运算
      - 和函数：连续性、可微性、可积性
    - 泰勒级数
      - 定义
      - 惟一性：$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
      - 展开条件、展开步骤、展开方法
  - 傅里叶级数
    - 定义：正交系、傅氏系数、傅氏级数
    - 收敛定理：狄利克雷定理
    - 傅氏展开
      - 在对称区间$[-\pi,\pi]$上展开
      - 在对称区间$[-l,l]$上展开
      - 在半区间$[0,l]$上展开
      - 奇偶函数展开

三、常考题型及考研典型题精解

例 11-1 判断下列各级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{2n^3-1}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$.

解 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，即存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $\sqrt[n]{n}>1$，故

$$u_n=\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}=\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}>\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^n}=v_n$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^n}=1\neq 0$$

故由级数收敛的必要条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，从而由比较审敛法知原级数发散.

(2) 因

$$0\leqslant u_n=\frac{\ln n}{2n^3-1}<\frac{n}{2n^3-1}=v_n$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2n^3-1}=\frac{1}{2}$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，故知原级数收敛.

(3)
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln n}{n}\cdot\ln n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n}$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n}=0$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=0<1$，所以原级数收敛.

(4) 因为 $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sin[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n)]=$

$$(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ 为交错级数.

当 n 充分大时，$0<\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\frac{\pi}{2}$，而正弦函数 $\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调增大，故有

$$u_n=\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}>u_{n+1}=\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{(n+1)^2+a^2}+(n+1)}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=0$，由莱布尼兹判别法知该级数收敛.

例 11－2(1997 考研)　设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})(n=1,2,\cdots)$ 证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；　　(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

证　(1) 因　$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0$$

故 $\{a_n\}$ 递减且有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(2) 由(1)知　$0\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leqslant a_n-a_{n+1}$

记
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$ 存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛.

因此由比较审敛法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

例 11－3(1998 考研)　设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 是否收敛？并说明收敛理由.

解　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 收敛.

理由：由于正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记这个极限值为 a，则 $a\geqslant 0$，若 $a=0$，则由莱布尼兹定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 收敛，与题设矛盾，故 $a>0$，于是 $\frac{1}{a_n+1}<\frac{1}{a+1}<1$，从而 $(\frac{1}{a_n+1})^n<(\frac{1}{a+1})^n$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a+1})^n$ 是公比为 $\frac{1}{a+1}$ 的几何级数，故收敛. 因此由比较法知原级数收敛.

例 11－4(1996 考研)　设 $a_n>0,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；常数 $\lambda\in(0,\frac{\pi}{2})$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}=$ ______.

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；

(C) 发散；　　(D) 敛散性与 λ 相关.

解
$$\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{\lambda}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda\sin\frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n}\cos\frac{\lambda}{n}}=\lambda$$

故 $n\tan\frac{\lambda}{n}$ 有界. 即存在 $M>0$，使 $\left|n\tan\frac{\lambda}{n}\right|\leqslant M$. 从而

$$\left|n\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}\right|\leqslant Ma_{2n}$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ma_{2n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nn\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}$ 绝对收敛，选(A).

例 11－5(1999 考研)　设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nx\,dx$.

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

解　此题为一综合题目，首先考虑利用定积分的换元法将 a_n 或 a_n+a_{n+2} 表达出来，然后再考虑相应级数的和及敛散性.

(1) 因为 $\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nx(1+\tan^2x)dx=$

$$\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,dx \xlongequal{\tan x = t}$$

$$\frac{1}{n}\int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n(n+1)}$$

于是 $$s_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}(a_i + a_{i+2}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \lim_{n\to\infty}s_n = 1$$

(2) 因为 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx \xlongequal{\tan x = t} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt < \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$

所以 $$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}$$

由 $\lambda+1>1$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

例 11-6(1994 考研) 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

证 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 及 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内具有二阶连续导数推知,$f(0)=0, f'(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内的一阶泰勒展开式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 = \frac{1}{2}f''(\theta x)x^2 \qquad (0<\theta<1)$$

再由题设,$f''(x)$ 在属于该邻域内包含原点的一小闭区间上连续,故必存在 $M>0$,使 $|f''(x)|\leqslant M$,于是 $|f(x)|\leqslant\frac{M}{2}x^2$,令 $x=\frac{1}{n}$,当 n 充分大时,有

$$\left|f(\frac{1}{n})\right| \leqslant \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

例 11-7(1996 考研) 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解 设 $s(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1} \qquad (|x|<1)$

则 $$s(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})x^n$$

其中 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1} = x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (x\neq0,\text{注意 } n \text{ 从 } 3 \text{ 开始})$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n})' = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \qquad (|x|<1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \int_0^x\frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)$$

从而 $$s(x) = -\frac{x}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x}[-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}] =$$

$$\frac{2+x}{4} + \frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x) \quad (|x|<1\text{ 且 }x\neq0)$$

所以 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n} = s(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln2$$

例 11-8 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处( ).

(A) 条件收敛; (B) 绝对收敛;

(C) 发散; (D) 收敛性不能确定.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 收敛区间的中心为 $x-1=0$,即 $x=1$,又该级数在 $x=-1$ 处收敛,于是,由阿贝尔定理知,级数应在 $|x-1|<|-1-1|=2$ 即 $-1<x<3$ 内绝对收敛.故此级数在 $x=2$ 处绝对收敛,应选(B).

例 11-9(1997 考研) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为______.

解 设 $y=x-1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}na_ny^{n+1} = y^2\sum_{n=1}^{\infty}na_ny^{n-1} = y^2(\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n)'$$

上述过程成立的充要条件是 $|y|<3$ 即 $-3<x-1<3$,故 $-2<x<4$.从而收敛区间为 $(-2,4)$.

例 11-10 设 $f(x) = \begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$,求 $f^{(n)}(0) \quad (n=1,2,\cdots)$.

解 因为 $x=0$ 为分段函数的分界点，若直接用导数定义求 $f^{(n)}(0)$，计算将十分繁琐，为此考虑通过 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式，求出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶导函数值. 因为

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

所以 $$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots \qquad (x\neq 0)$$

又当 $x=0$ 时 $\frac{\sin x}{x}$ 无意义，但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，上式右端的幂级数当 $x=0$ 时的和也为 1，则

$$f(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

故 $$f^{(2n-1)}(0)=0$$

$$f^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

例 11-11 将 $f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)(x\neq 0)$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的和.

解 $$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$$

则 $$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right)=$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} \qquad (x\neq 0)$$

令 $x=1$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=f(1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\Big|_{x=1}=\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}\Big|_{x=1}=1$$

例 11-12(2000 考研) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[3^n+(-2)^n]}{[(3^{n+1}+(-2)^{n+1}]}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}，故 R=3.$$

当 $x=3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}$ 发散.

当 $x=-3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

故收敛区间为 $[-3,3)$.

例 11-13(2001 考研) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解 因 $$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad x\in(-1,1)$$

故 $$\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad x\in[-1,1]$$

于是 $$\left(\frac{1}{x}+x\right)\arctan x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n} \qquad x\in[-1,1] \quad x\neq 0$$

又当 $x=0$ 时，$\left(\frac{1}{x}+x\right)\arctan x$ 无意义，但 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{x}\arctan x\right)=1$，上幂级数当 $x=0$ 时，和也为 1，则

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n} \qquad x\in[-1,1]$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

例 11-14(2003 考研) 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 因 $$f'(x)=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n} \qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

又 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，所以

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

因级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\right]=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

又由 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

例 11-15 设函数 $f(x)=x^2, 0\leqslant x<1$，而 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x,(n=1,2,3\cdots)$．则 $s(-\dfrac{1}{2})$ 等于(　　)．

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

解　由系数 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ 的形式可知，正弦级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 应为函数 $f(x)=x^2\quad x\in[0,1)$，进行奇延拓所展开的傅里叶级数，故

$$s(x)=\begin{cases}-x^2 & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x^2 & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

$s(x)$ 在 $x=\dfrac{-1}{2}$ 处连续，故 $s(-\dfrac{1}{2})=-(-\dfrac{1}{2})^2=-\dfrac{1}{4}$．选(B)．

四、学习效果两级测试题

(一) 基础知识测试题及答案

1. 判断下列级数的敛散性．

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+2n^3-1}+n}$．

(答案：(1) 发散；(2)，(3) 收敛)

2. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 都收敛．

3. 求下列幂级数的收敛区间．

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\ln(1+n)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{2n-1}}x^{2n-1}$．

(答案：(1)$(-3,3]$；、(2)$[4,6)$；　(3)$(-1,1)$)

4. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^nn!}x^n$ 在收敛区域内的和函数．

(答案：$e^{\frac{x}{2}}(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+1)$，$x\in R$)

5. 求 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}+\cdots$ 的和．　(答案：2)

6. 将下列函数展开为 x 的幂级数：

(1) $f(x)=\ln(1+x+x^2)$　(答案：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{n}$，$-1\leqslant x<1$)

(2) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$．

(答案：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n+1}x^{4n+1}$，$-1<x<1$)

7. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数．

(答案：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n$，$-6<x<-2$)

8. 将 $f(x)=\begin{cases}x+1 & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ x & -\pi<x<0\end{cases}$ 展开成傅里叶级数．

(答案：$\dfrac{\pi-1}{2}+\dfrac{2(\pi+1)}{\pi}\sin x-\dfrac{2}{2}\sin 2x+\dfrac{2(\pi+1)}{3\pi}\sin 3x-\dfrac{2}{4}\sin 4x+\cdots$

$-\pi<x<\pi$)

(二) 考研训练模拟题及答案

1. 判断下列级数的敛散性．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}(a>0)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}2^n}$；

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

（答案：(1)$0<a<\mathrm{e}$时收敛，$a\geqslant\mathrm{e}$时发散；(2) 收敛；(3) 收敛）

2. 判别级数$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$的敛散性.　（答案：发散）

3. 判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin(\frac{1}{n})$的敛散性.　（答案：发散）

4.(1) 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$的收敛区间为__________.　（答案：$(-3,3]$）

(2) 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)3^n}$的收敛区间为__________.　（答案：$[-2,4)$）

5. 将下列函数展开为x的幂级数.

(1) $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$；

(2) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$.

（答案：(1)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)2n}$) $|x|\leqslant1$；

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{n}$，　$-1<x\leqslant1$）

6. 设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$当$n>1$时有$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，且$a_0=4,a_1=1$，求级数的和.　（答案：$\frac{1}{2}(5\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x})$）

7. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$的和.　（答案：3）

五、课后习题全解

习题 11-1

1. 写出下列各级数的前五项：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解 (1) $1+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{5}{17}+\frac{3}{13}+\cdots$

(2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{5}{16}+\frac{105}{384}+\frac{945}{3\,840}+\cdots$

(3) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots$

(4) $1+\frac{2}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$

2. 写出下列级数的一般项：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$；

(3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$；

(4) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

解 (1) $u_n=\frac{1}{2n-1}$　　(2) $u_n=(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$

(3) $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{(2n)!!}$　　(4) $u_n=(-1)^{n+1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$

3. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

解 (1) $S_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$

所以$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$，级数发散.

(2) $S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=$

$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$

所以级数收敛于$\frac{1}{2}$.

(3) $S_n=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}$

又 $\sin\frac{k\pi}{6}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[\cos(2k-1)\frac{\pi}{12}-\cos(2k+1)\frac{\pi}{12}],k=1,2,\cdots,n$

则 $S_n=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12})+(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12})+\cdots+$

$(\cos(2n-1)\frac{\pi}{12}-\cos(2n+1)\frac{\pi}{12})]=$

$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[\cos\frac{\pi}{12}-\cos(2n+1)\frac{\pi}{12}]$

当$n\to\infty$时,$\cos(2n+1)\frac{\pi}{12}$是振荡的,其极限不存在,所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,原级数发散.

4. 判别下列级数的收敛性:

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots+\frac{3^n}{2^n}+\cdots$;

(5) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$.

解 (1) 该级数为公比$q=-\frac{8}{9}$的几何级数,且$|q|<1$,故该级数收敛于

$\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}=\frac{-\frac{8}{9}}{1+\frac{8}{9}}=-\frac{8}{17}$.

(2) 因$u_n=\frac{1}{3n}$,而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,则该级数发散.

(3) 因$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=1\neq0$,故该级数发散.

(4) 因公比$q=\frac{3}{2}>1$,故该级数发散.

(5) 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$,故原级数收敛.

习题 11-2

1. 用比较审敛法或极限审敛法判别下列级数的收敛性:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\quad(a>0)$.

解 (1) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以原级数发散.

(2) 因$u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以原级数发散.

(3) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=1$, 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故原级数收敛.

(4) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,故原级数收敛.

(5) 当 $a \leqslant 1$ 时，$u_n = \dfrac{1}{1+a^n} \geqslant \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \not\to 0(n \to \infty)$ 故此时级数发散；

当 $a > 1$ 时，$\dfrac{1}{a} < 1, u_n = \dfrac{1}{1+a^n} < \dfrac{1}{a^n}$，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{a})^n$ 收敛，故原级数收敛．

2. 用比值审敛法判别下列级数的收敛性：

(1) $\dfrac{3}{1\cdot 2} + \dfrac{3^2}{2\cdot 2^2} + \dfrac{3^3}{3\cdot 2^3} + \cdots + \dfrac{3^n}{n\cdot 2^n} + \cdots$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \Big/ \dfrac{3^n}{n2^n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{3}{2} > 1$$

由比值法知原级数发散.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \Big/ \dfrac{n^2}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{3} < 1$

由比值法知原级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \dfrac{2^n n!}{n^n} =$

$$\lim_{n\to\infty}\left[2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right] = \frac{2}{e} < 1$$

所以该级数收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}} \Big/ n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2^{n+2}} \Big/ \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} < 1$

所以该级数收敛.

3. 用根值审敛法判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$ 其中 $a_n \to a(n\to\infty)$，a_n, b, a 均为正数.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{n}{2n+1})^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1$

所以该级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$

所以该级数收敛．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}} =$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n})\ln\frac{n}{3n-1}} = e^{2\ln\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3})^2 < 1$$

所以该级数收敛．

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{b}{a_n})^n} = \dfrac{b}{a}$，所以当 $b<a$ 时，即 $\dfrac{b}{a}<1$，级数收敛；

当 $b>a$ 时，即 $\dfrac{b}{a}>1$，级数发散；

当 $b=a$ 时，即 $\dfrac{b}{a}=1$，用此法不能审敛.

4. 判别下列级数的收敛性：

(1) $\dfrac{3}{4} + 2(\dfrac{3}{4})^2 + 3(\dfrac{3}{4})^3 + \cdots + n(\dfrac{3}{4})^n + \cdots$；

(2) $\dfrac{1^4}{1!} + \dfrac{2^4}{2!} + \dfrac{3^4}{3!} + \cdots + \dfrac{n^4}{n!} + \cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$；

(5) $\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} + \cdots$；

(6) $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{2a+b} + \cdots + \dfrac{1}{na+b} + \cdots (a>0, b>0)$.

解 (1) 用比值法或根值法均可，因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{3}{4})^{n+1}}{n(\frac{3}{4})^n} = \frac{3}{4} < 1$$

所以该级数收敛.

(2) 因通项中含有阶乘与乘方,宜用比值法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}\Big/\frac{n^4}{n!}\right]=0<1$$

所以原级数收敛.

(3) 因 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}\Big/\frac{1}{n}=1$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,知原级数发散.

(4) 因 $$u_n=2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\leqslant(\frac{2}{3})^n\pi$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi(\frac{2}{3})^n$ 收敛,故原级数收敛.

(5) 因 $$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1\neq0$$

所以原级数发散.

(6) 因 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{na+b}\Big/\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{na+b}=\frac{1}{a}$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,知原级数发散.

5. 判断下列级数是否收敛?如果是收敛的,是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$;

(4) $\frac{1}{\ln2}-\frac{1}{\ln3}+\frac{1}{\ln4}-\frac{1}{\ln5}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

解 (1) 各项取绝对值得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 为 $p=\frac{1}{2}<1$ 的 p-级数发散;但 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,所以该级数收敛,是条件收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^n}\Big/\frac{n}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{3}<1$

所以原级数绝对收敛.

(3) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2})^n$ 为收敛的几何级数,故原级数为绝对收敛.

(4) 对绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$,因 $u_n=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{n+1}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散;又 $u_n=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{\ln(2+n)}=u_{n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,所以原级数收敛,即为条件收敛.

(5) 对绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}$,因为

$$|u_n|=\frac{2^{n^2}}{n!}=\frac{(2^n)^n}{n!}=\frac{[(1+1)^n]^n}{n!}>\frac{(1+n)^n}{n!}>\frac{n^n}{n!}=\frac{n\cdot n\cdots n}{n(n-1)\cdots1}>1$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq0$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$. 故原级数发散.

习题 11-3

1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(2) $1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n^2}+\cdots$;

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot4}+\frac{x^3}{2\cdot4\cdot6}+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$;

(4) $\frac{x}{1\cdot3}+\frac{x^2}{2\cdot3^2}+\frac{x^3}{3\cdot3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot3^n}+\cdots$;

(5) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$，收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 发散，当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 也发散. 故收敛区间为 $(-1,1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}\Big/\dfrac{1}{n^2} = 1$，故 $R=1$.

当 $x=1$ 时，$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，当 $x=-1$ 时，$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故收敛区间为 $[-1,1]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\Big/\dfrac{1}{2^n n!} = 0$，故 $R=+\infty$.

所以收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)3^{n+1}}\Big/\dfrac{1}{n3^n} = \dfrac{1}{3}$，故 $R=3$.

当 $x=3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，当 $x=-3$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

故收敛区间是 $[-3,3)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\Big/\dfrac{2^n}{n^2+1} = 2$，故 $R=\dfrac{1}{2}$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ 收敛，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ 也收敛.

故收敛区间为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$.

(6) 此幂级数缺少偶次项，上述公式不能直接应用，故对其绝对值级数用比值法.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big/\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| = x^2$$

当 $x^2<1$ 即 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，级数发散.

而 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，$x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 也收敛，故收敛区间为 $[-1,1]$.

(7) 同(6)也为缺项的幂级数，可用上述方法，也可用如下代换法求解：

令 $y=x^2$，则原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}y^{n-1}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{2n-1}{2^n} = \dfrac{1}{2}$，所以 $-2<y<2$，则 $0\leqslant x^2<2$. 故 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2}$ 发散. 故原级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) 令 $y=x-5$，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}y^n$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$，故 $R=1$.

当 $y=1$，即 $x-5=1$，$x=6$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

当 $y=-1$，即 $x-5=-1$，$x=4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

故原级数的收敛区间是 $[4,6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$；

(3) $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

解 (1) 在 $(-1,1)$ 内，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$，则

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{x}{1-x}$$

故 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$

(2) 在 $(-1,1)$ 内，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$，则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}x^4 = \frac{x^4}{1-x^4}$$

又因 $S(0)=0$，故

$$S(x) = S(0)+\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^x\left(-1+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\arctan x - x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1)$$

(3) 在$(-1,1)$内，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$$

而 $S(0)=0$，故

$$\text{原式}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(|x|<1)$$

习题 11-4

1\. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

解 任意 $x_0\in R$，$f^{(n)}(x_0)=\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})\quad(n\in N)$

所以 $\cos x$ 的泰勒级数为

$$\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

而
$$|R_n(x)|=\left|\frac{\cos[x_0+\theta(x-x_0)+\frac{n+1}{2}\pi]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1)$$

对 $\forall x\in R$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{|x-x_0|^n}{n!}\right|=0<1$$

故级数收敛，由级数收敛的必要条件知 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$.

故由夹逼准则知 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$，从而 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 所以

$$\cos x=\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

$x\in R$

此题还可用利用教材 P270 例 3 的展开式，令 $x=t-t_0$ 便为泰勒级数.

2\. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$； (2) $\ln(a+x)\quad(a>0)$；

(3) a^x； (4) $\sin^2x$；

(5) $(1+x)\ln(1+x)$； (6) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 $\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right]=$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{x^n}{n!}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(x\in R)$$

(2) $\ln(a+x)=\ln[a\cdot(1+\frac{x}{a})]=\ln a+\ln(1+\frac{x}{a})=$

$$\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}$$

$$(-1<\frac{x}{a}\leqslant1\quad\text{即}\quad -a<x\leqslant a)$$

(3) $a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n\quad(-\infty<x<\infty)$

(4) $\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}=$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\quad(x\in R)$$

(5) $(1+x)\ln(1+x)=\ln(1+x)+x\ln(1+x)=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=$$

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}=$$

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}]x^{n+1}=$$

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}\quad(-1<x\leqslant1)$$

(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \qquad (m = -\dfrac{1}{2})$

$$x\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^4 + \cdots\right.$$

$$\left.\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^{2n} + \cdots\right] =$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1} =$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

3. 将下列函数展开成$(x-1)$的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\sqrt{x^3}$；　　(2) $\lg x$.

解　(1) $\sqrt{x^3} = [1+(x-1)]^{\frac{3}{2}} = \qquad (m = \dfrac{3}{2})$

$$1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots +$$

$$\frac{1}{n!}\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)\cdots(\frac{3}{2}-n+1)(x-1)^n + \cdots =$$

$$1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+2}(n+2)!}\cdot$$

$$(x-1)^{n+2} =$$

$$1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3\cdot(2n)!}{2^{2n+2}n!(n+2)!}(x-1)^{n+2}$$

$$(-1 \leqslant x-1 \leqslant 1 \text{ 即 } 0 \leqslant x \leqslant 2)$$

(2) $\lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)] =$

$$\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} =$$

$$\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} \quad (-1 < x-1 \leqslant 1 \text{ 即 } 0 < x \leqslant 2)$$

4. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成$(x+\dfrac{\pi}{3})$的幂级数.

解　$\cos x = \cos\left[(x+\dfrac{\pi}{3}) - \dfrac{\pi}{3}\right] =$

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3} + \sin(x+\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3} =$$

$$\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3}) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!} + \sqrt{3}\frac{(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \quad (x \in R)$$

5. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 展开成$(x-3)$的幂级数.

解　$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3+x-3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x-3}{3}} =$

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}(x-3)^n$$

$$(-1 < \frac{x-3}{3} < 1 \text{ 即 } 0 < x < 6)$$

6. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成$(x+4)$的幂级数.

解　$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} =$

$$\frac{1}{-3+(x+4)} - \frac{1}{-2+(x+4)} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

其中 $-1 < \dfrac{x+4}{2} < 1$ 且 $-1 < \dfrac{x+4}{3} < 1$，故收敛区间为$(-6,-2)$.

习题 11-5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值：

(1) ln3(误差不超过 0.000 1);

(2) $\sqrt{e}$(误差不超过 0.001);

(3) $\sqrt[9]{522}$(误差不超过 0.000 01);

(4) $\cos 2^\circ$(误差不超过 0.000 1).

解 (1) 由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1]$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in[-1,1)$$

两式相减,得 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad x\in(-1,1)$.

令 $\frac{1+x}{1-x}=3$,得 $x=\frac{1}{2}\in(-1,1)$. 故

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\cdots\right)$$

$$|r_n|=2\left[\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}}+\cdots\right]=$$

$$2\cdot\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}\left[1+\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots\right]<$$

$$\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)=$$

$$\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}}$$

试算 $|r_6|<\frac{1}{3\times 13\times 2^{10}}\approx 0.000\,025$ 故取 $n=6$, $|r_n|<10^{-4}$. 从而

$$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}\right)=$$
$$1.098\,58\approx 1.098\,6$$

(2) 由 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\qquad(x\in R)$

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!2^2}+\cdots+\frac{1}{n!2^n}+\cdots$$

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!2^{n+2}}+\cdots=$$

$$\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left[1+\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots\right]<$$

$$\frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right]=$$

$$\frac{1}{(n+1)!3\cdot 2^{n-1}}$$

取 $n=4$,有 $r_4<\frac{1}{3\cdot 5!2^3}\approx 0.000\,3<10^{-3}$.

故
$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!2^2}+\frac{1}{3!2^3}+\frac{1}{4!2^4}\approx 1.648$$

(3) $\sqrt[9]{522}=\sqrt[9]{2^9+10}=2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}=$

$$2\left[1+\frac{1}{9}\times\frac{10}{2^9}+\frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{9}-1)}{2!}\left(\frac{10}{2^9}\right)^2+\cdots+\frac{\frac{1}{9}\times(\frac{1}{9}-1)\cdots(\frac{1}{9}-n+1)}{n!}\left(\frac{10}{2^9}\right)^n+\cdots\right]$$

交错级数 $|r_n|<u_{n+1}$,而 $\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{17}{9}\cdot\frac{10^3}{2^{27}}=0.000\,000\,23$

故 $|r_3|<0.000\,001$. 所以

$$\sqrt[9]{522}\approx 2(1+0.002\,170-0.000\,019)\approx 2.004\,32$$

(4) $\cos 2^\circ=\cos\frac{\pi}{90}=$

$$1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n!)}\left(\frac{\pi}{90}\right)^n+\cdots$$

因 $\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4\approx 6.186\times 10^{-8}$,所以 $|r_2|<10^{-7}$. 故

$$\cos 2^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\approx 0.999\,4$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$(误差不超过 0.000 1);

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$(误差不超过 0.001)

解

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}(1-x^4+x^8-\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots)dx=$

$$\left(x-\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\cdots\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9-\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}+\cdots$$

因 $|r_n|<u_{n+1}$，而 $\frac{1}{13}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\approx 0.000\ 009$. 所以

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-0.006\ 25+0.000\ 28\approx 0.494\ 03$$

(2) 由 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$

得 $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\quad(|x|<1)$

$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\left[1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right]dx=$

$$\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\cdots\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{20}+\cdots$$

由于 $\frac{1}{49}\times\frac{1}{2^7}\approx 0.000\ 2$，所以对以上交错级数只取前三项.

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx\approx 0.5-0.0139+0.0013\approx 0.487$$

3. 将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解法 1 利用两个级数的柯西乘法展开：

$e^x\cos x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)=$

$$1+x+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}\right)x^3+\left(\frac{2}{4!}-\frac{1}{2!2!}\right)x^4+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

解法 2 利用欧拉公式展开：

$e^x(\cos x+i\sin x)=e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n(\sqrt{2})^n=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

所以 $f(x)=e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}x^n}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty)$

习题 11－7

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：

(1) $f(x)=3x^2+1\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$；

(2) $f(x)=e^{2x}\quad(-\pi\leqslant x<\pi)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}bx & -\pi\leqslant x<0\\ ax & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ （a,b 为常数，且 $a>b>0$）.

解 (1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=\frac{2}{\pi}(x^3+x)\Big|_0^{\pi}=2(\pi^2+1)$；

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx=$

$$\frac{2}{n\pi}\left\{\left[(3x^2+1)\sin nx\right]\Big|_0^{\pi}-6\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx\right\}=$$

$$\frac{12}{n^2\pi}\left[(x\cos nx)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=(-1)^n\frac{12}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx\,dx=0\quad(n=1,2,\cdots)$

又 $f(x)=3x^2+1$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上连续，且 $f(-\pi+0)=f(\pi-0)=3\pi^2+1$，故

$$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\quad(-\infty<x<+\infty)$$

(2) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nx\,dx=$

$$\frac{1}{2\pi}\left[e^{2x}\cos n\pi\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin n\pi dx\right]=$$

$$\frac{(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{2\pi}+\frac{n}{4\pi}\left[(e^{2x}\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nx\,dx\right]$$

移项得 $$a_n=\frac{2(-1)^n}{n^2+4}\frac{(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{\pi}\quad(n=1,2,\cdots)$$

同理 $$b_n=\frac{n(-1)^{n+1}}{n^2+4}\frac{(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{\pi}\quad(n=1,2,\cdots)$$

又 $f(x)=e^{2x}$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上连续，$f(-\pi+0)=e^{-2\pi}$，$f(\pi-0)=e^{2\pi}$，所以

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right]$$

$$(x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

在间断点处，级数收敛于 $\frac{1}{2}(e^{2\pi}+e^{-2\pi})$.

(3) $$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}bx\,dx+\int_{0}^{\pi}ax\,dx\right)=\frac{\pi}{2}(a-b)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}ax\cos nx\,dx\right)=$$

$$\frac{6}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{0}+\frac{a}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{0}^{\pi}=$$

$$\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}bx\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}ax\sin nx\,dx\right)=$$

$$\frac{6}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{0}+\frac{a}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{0}^{\pi}=$$

$$(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

又 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上连续，$f(-\pi+0)=-b\pi$，$f(\pi-0)=a\pi$，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n}\sin nx\right\}$$

$$(x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

在间断点处，级数收敛于 $\frac{\pi}{2}(a-b)$.

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}e^x & -\pi\leqslant x<0\\ 1 & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$.

解 对 $f(x)$ 进行周期延拓.

(1) $f(x)$ 为奇函数，从而 $a_n=0\ (n=0,1,2,3,\cdots)$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx\,dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)x\right]dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{3}\right)\pi}{n-\frac{1}{3}}-\frac{\sin\left(\frac{1}{3}+n\right)\pi}{n+\frac{1}{3}}\right]=$$

$$\frac{6}{\pi}\left[\frac{-\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-1}-\frac{\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n+1}\right]=$$

$$(-1)^{n+1}\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$f(x)$ 满足收敛定理条件，所以

$$2\sin\frac{x}{3}=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin n\pi}{9n^2-1}\qquad(-\pi<x<\pi)$$

在 $x=\pm\pi$ 处，级数收敛于 0.

(2) $$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\,dx+\int_0^{\pi}dx\right)=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi})+1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nx\,dx+\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{e^x}{1+n^2}(n\sin nx+\cos nx)\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right\}=$$

$$\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-n+(-1)^nne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\quad(n=1,2,\cdots)$$

$f(x)$ 满足收敛定理条件，所以

$$f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{1+n^2}\cos n\pi+\left[\frac{(-1)^nne^{-\pi}-n}{1+n^2}+\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\right]\sin nx\right\}\quad x\in(-\pi,\pi)$$

当 $x=\pm\pi$ 时，级数收敛于 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$.

3. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，证明 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\cdots)$$

证 由以 T 为周期的周期函数 $\varphi(x)$ 的性质 $\int_a^{a+T}\varphi(x)dx$ 的值与 a 无关，可知若 $\varphi(x)$ 以 2π 为周期，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=\int_{-\pi+\pi}^{\pi+\pi}\varphi(x)dx=\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx$$

本题中的 $f(x),\sin nx,\cos nx$ 均以 2π 为周期，从而 $f(x),f(x)\cos nx,f(x)\sin nx$ 也以 2π 为周期，所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\cdots)$$

习题 11－8

1. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数.

解 因 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0\ (n=1\ 2,\ \cdots)$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\frac{1}{2}+n)x+\cos(\frac{1}{2}-n)x\right]dx=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\frac{1}{2}+n)x}{\frac{1}{2}+n}+\frac{\sin(\frac{1}{2}-n)x}{\frac{1}{2}-n}\right]_0^{\pi}=$$

$$(-1)^n\frac{2}{n}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1})=$$

$$(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

当 $n=0$ 时，$a_0=\frac{4}{\pi}$，又 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，所以

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{4n^2-1}\quad x\in[-\pi,\pi]$$

2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2}\\ x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 因 $f(x)$ 为奇函数，所以 $a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\,dx\right]=$$

$$\frac{2}{\pi}(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}(-1)^n$$

$f(x)$ 满足收敛定理条件，所以

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n}\right)\sin n\pi$$

$$(x\neq(2n+1)\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

在间断点处，级数收敛于 0.

3. 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

解 对 $f(x)$ 进行奇延拓，则 $a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi-x}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

所以

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\quad x\in(0,\pi]$$

在 $x=0$ 处，傅里叶级数收敛于 0.

4. 将函数 $f(x)=2x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 先求正弦级数，为此对 $f(x)$ 进行奇延拓，则 $a_n = 0(n = 0,1,2,\cdots)$. 而

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2 \sin nx\,dx = -\frac{4}{\pi}\left[\left(\frac{x^2}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} - 2\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right] =$$

$$(-1)^{n+1}\frac{4\pi}{n} + \frac{8}{n^2\pi}\left[(x\sin nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right] =$$

$$\frac{4}{\pi}\left[-\frac{2}{n^3} + (-1)^n\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\right] \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

故 $$2x^2 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n^3} + (-1)^n\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\right]\sin nx \quad x \in [0,\pi)$$

在 $x = \pi$ 处，右边级数收敛于 π^2.

(2) 再求余弦级数，为此对 $f(x)$ 进行偶延拓，则 $b_n = 0\ (n = 1,2,\cdots)$，而

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2\,dx = \frac{4}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x^2\cos nx\,dx =$$

$$\frac{4}{\pi}\left[\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{n}\,d\cos nx\right] =$$

$$(-1)^n\frac{8}{n^2} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

故 $$2x^3 = \frac{2}{3}\pi^2 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad x \in [0,\pi]$$

5. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，证明：

(1) 如果 $f(x-\pi) = -f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0\quad (k = 1,2,\cdots)$；

(2) 如果 $f(x-\pi) = f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0\ (k = 0, 1,2,\cdots)$.

证 (1) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx - \int_0^{\pi} f(x-\pi)\,dx\right] \xlongequal{令 u = x-\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{0} f(u)\,du\right] = 0$$

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2kx\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2kx\,dx - \int_0^{\pi} f(x-\pi)\cos 2kx\,dx\right] \xlongequal{令 u = x-\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2kx\,dx - \int_{-\pi}^{0} f(u)\cos(2ku + 2k\pi)\,du\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 2kx\,dx - \int_{-\pi}^{0} f(u)\cos 2ku\,du\right] = 0$$

同理 $b_{2k} = 0$.

(2) 若 $f(x-\pi) = f(x)$，令 $u = x - \pi$，则

$$a_{2k+1} = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2k+1)x\,dx + \int_0^{\pi} f(x-\pi)\cos(2k+1)x\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2k+1)x\,dx + \right.$$

$$\left.\int_{-\pi}^{0} f(u)\cos[(2k+1)\pi + (2k+1)u]\,du\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x)\cos(2k+1)x - f(x)\cos(2k+1)x]\,dx = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k+1)x\,dx + \int_0^{\pi} f(x-\pi)\sin(2k+1)x\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k+1)x\,dx + \right.$$

$$\left.\int_{-\pi}^{0} f(u)\sin[(2k+1)\pi + (2k+1)u]\,du\right\} = 0$$

习题 11-9

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）：

(1) $f(x) = 1 - x^2 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}\right)$

(2) $$f(x) = \begin{cases} x & -1 \leqslant x < 0 \\ 1 & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases}$$

(3) $$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & -3 \leqslant x < 0 \\ 1 & 0 \leqslant x < 3 \end{cases}$$

解

(1) $a_0 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{11}{6}$

$$a_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x =$$

$$4\left[\left(\frac{1-x^2}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{4n^2\pi^2}\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}\cos 2n\pi x\right]=$$

$$-\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(x\cos 2n\pi x)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\right]=$$

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2\pi^2} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n = 0(n = 1, 2, \cdots)$，又 $f(x)$ 满足收敛条件，所以

$$f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 2n\pi x \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}$

$$a_n = \int_{-1}^{0} x\cos n\pi x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi x\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos n\pi x\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n] + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} x\sin n\pi x\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}}\sin n\pi x\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^{1}\sin n\pi x\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

故 $f(x) = -\dfrac{1}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} + \dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right]\cos n\pi x + \right.$

$$\left.\frac{1}{n\pi}\left(1 - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x\right\} \quad \left(x \neq 2k, 2k+\frac{1}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$$

在间断点 $x = 2k$ 处，级数收敛于 $\dfrac{1}{2}$；在 $x = 2k + \dfrac{1}{2}$ 处，级数收敛于 0.

(3) $a_0 = \dfrac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x + \int_0^3\mathrm{d}x\right] = -1$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{n\pi}\left[(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_{-3}^{0} -$$

$$\frac{2}{n\pi}\int_{-3}^{0}\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3 =$$

$$\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n] \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x = \frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

故 $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\dfrac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1}\dfrac{6}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{3}\right\}$

$$(x \neq 3(2k+1); k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

在间断点处，级数收敛于 -2.

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

(1) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2} \\ l - x, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$；

(2) $f(x) = x^2 (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

解 (1) 先求正弦级数，为此对 $f(x)$ 进行奇延拓，则

$$a_n = 0(n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right]=$$

$$\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

故 $$f(x) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

再求余弦级数，为此对 $f(x)$ 进行偶延拓，则 $b_n = 0$ $(n = 1,2,\cdots)$，

$$a_0 = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\mathrm{d}x\right] = \frac{l}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right]=$$

$$\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right] \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

故 $f(x)=\dfrac{l}{4}+\dfrac{2l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[2\cos\dfrac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right]\cos\dfrac{n\pi x}{l}\quad (x\in[0,l])$

(2) 先求正弦级数，为此对 $f(x)$ 进行奇延拓，则 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$，而

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{n^3\pi^3[(-1)^n-1]}\quad (n=1,2,\cdots)$$

故 $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\quad (x\in[0,2))$

在 $x=2$ 处，级数收敛于 0.

再求余弦级数，为此对 $f(x)$ 进行偶延拓，则 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$，而

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$$

$$a_n=\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n16}{n^2\pi^2}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

故 $$f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\quad (x\in[0,2])$$

总习题十一

1. 填空：

(1) 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是它收敛的必要条件，不是它收敛的充分条件.

(2) 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件.

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 必定发散.

2. 判别下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$； (4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^{10}n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^S}\quad (a>0,S>0)$.

解 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

(2) 因 $u_n=\dfrac{(n!)^2}{2n^2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{n!}{n})^2=\dfrac{1}{2}[(n-1)!]^2\not\to 0\quad (n\to\infty)$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2n^2}$ 发散.

(3) $$0<\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\frac{n}{2^n}$$

由比值法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛.

(4) $u_n=\dfrac{1}{\ln^{10}n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln^{10}n}$

利用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln^{10}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{10\ln^9x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10\ln^9x}=\cdots=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{10!}=+\infty$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^{10}n}$ 发散.

(5) (i) 当 $0<a<1$ 时，$0<\dfrac{a^n}{n^S}\leqslant a^n$.

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^S}$ 收敛.

(ii) 当 $a>1$ 时，对 $\forall S>0$，$\exists$ 正整数 N，使 $N\geqslant S$.

$$\frac{a^n}{n^S}\geqslant\frac{a^n}{n^N}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^N}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^N}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{Nx^{N-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{N(N-1)x^{N-2}}=$$

$$\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^N}{N!}=+\infty$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^N}$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^S}$ 发散.

(iii) 当 $a=1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^S}$，当 $S>1$ 时收敛，当 $S\leqslant 1$ 时发散.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也收敛，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$，于是由极限定义，对于 $\forall\varepsilon=1$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$u_n+v_n<1$，从而 $(u_n+v_n)^2\leqslant(u_n+v_n)$，由正项级数比较审敛法，所以 $\sum_{n=N}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否也收敛？试说明理由.

答 不一定，如 $u_n\geqslant 0, v_n\geqslant 0$，则回答是肯定的，对一般项级数则不一定.

如

$$u_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}},\quad v_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，但却有

$$\frac{v_n}{u_n}=\frac{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}}\to 1\qquad(n\to\infty)$$

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

解

(1) (i) 当 $p>1$ 时，因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 绝对收敛.

(ii) 当 $0<p\leqslant 1$ 时，由莱布尼兹定理知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 条件收敛.

(iii) 当 $p\leqslant 0$ 时，由于 $\frac{1}{n^p}\not\to 0\quad(n\to\infty)$，故原级数发散.

(2) 因

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|\leqslant\frac{1}{\pi^{n+1}}\quad\left(0<\frac{1}{\pi}<1\right)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$ 收敛，故原级数绝对收敛.

(3)

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 的前 n 项部分和 $S_n=\ln(n+1)\to+\infty$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right|$ 发散.

令 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=-\frac{1}{x(x+1)}<0$.

当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递减，故有

$$\ln\frac{(n+1)+1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=0$$

由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛，且为条件收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\Big/\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛，故原级数绝对收敛.

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}\right]$.

解 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 看做是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的前 n 项部分和 S_n，若能

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 收敛，则可知 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$.

设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，则数列$\{x_n\}$单调增加并且有界，同时有 $(1+\frac{1}{n})^n<e$，

于是
$$\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}<\frac{1}{3^n}e^n=(\frac{e}{3})^n$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e}{3})^n$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 收敛. 所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}=0$$

(2) $$[2^{\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{1}{9}}\times\cdots\times(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]=\prod_{k=1}^{n}(2^k)^{\frac{1}{3^k}}=\prod_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{3^k}}=2^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}$$

而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{3})^n=\frac{x}{3-x}\qquad(|x|<3)$$

从而
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{3^n}=\left(\frac{x}{3-x}\right)'=\frac{3}{(3-x)^2}\qquad(|x|<3)$$

令 $x=1$，则
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{1}{9}}\times 8^{\frac{1}{27}}\times\cdots\times(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]=2^{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}=2^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}$$

7. 求下列幂级数的收敛区间：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}x^n$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

解 (1) $$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}\cdot\frac{n}{n+1}=5$$

故 $R=\frac{1}{5}$.

当 $x=\frac{1}{5}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$发散.

当 $x=-\frac{1}{5}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}\left(-\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$收敛.

故所求收敛区间为$[-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n|}=e|x|$$

当 $e|x|<1$，即 $|x|<\frac{1}{e}$ 时，原级数绝对收敛.

当 $|x|\geqslant\frac{1}{e}$ 时，由于
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{n})^n x\right]^n\neq 0$$
(因 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n x=ex$，而 $|ex|\geqslant 1$)

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$ 发散. 则所求的收敛区间为$(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

(3) 令 $y=x+1$，则原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}ny^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}ny^n$ 的收敛半径为 1. 收敛区域间为 $-1<y<1$，故原级数的收敛区间为$(-2,0)$.

(4) 因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{2(n+1)}\Big/\frac{n}{2^n}x^{2n}\right|=\frac{1}{2}x^2$，所以当 $|x|<\sqrt{2}$ 时，级数收敛；而当 $|x|>\sqrt{2}$ 时，级数发散.

当 $x=\sqrt{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(\sqrt{2})^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}n$ 也发散.

故所求收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

8. 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解 (1) 在$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$内，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$

则
$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{x}{2-x^2}$$

所以 $$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\qquad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

(2) 在$(-1,1)$内，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，则 $S(0)=0$，

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2}$$

所以 $$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$$

又因 $S(1)$ 及 $S(-1)$ 均有意义，且 $S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\arctan x=\frac{\pi}{4}$，$S(-1)=-\frac{\pi}{4}$，

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\arctan x\quad(x\in[-1,1])$$

(3) 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛区间为$(0,2)$故在$(0,2)$内设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}$$

对 $\forall x\in(0,2)$，则

$$\int_1^x\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{x-1}{2-x}$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}=\left(\frac{x-1}{2-x}\right)'=\frac{1}{(2-x)^2}$$

于是 $$S(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2}\qquad x\in(0,2)$$

(4) 在$(-1,1)$内设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$，则

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$[xS(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$[xS(x)]''=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

从而 $$[xS(x)]'=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$$

$$xS(x)=\int_0^x[-\ln(1-x)dx]=x+(1-x)\ln(1-x)$$

$$x\in(-1,1)$$

所以当 $x\neq0$ 时，$S(x)=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$，$x\in(-1,1)$，且 $x\neq0$，

从而所求和函数

$$S(x)=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & x\in(-1,1)\text{ 且 }x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

9. 求下列数项级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$.

解

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}=$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

由 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，知 $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$，故所给级数的和为 $2e$.

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1+1}{2(2n+1)!}=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=$$
$$\frac{1}{2}(\cos1+\sin1)$$

(在 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式中令 $x=1$ 即可.)

10. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(2) $\frac{1}{(2-x)^2}$.

解 (1) $$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=$$
$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2n\cdot n!}x^{2n}=$$
$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\quad(x\in[-1,1])$$

所以

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\quad (x\in[-1,1])$$

(2) $$\int_1^x \frac{1}{(2-x)^2}dx=\frac{1}{2-x}-1=$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-1=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-1=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}-1\quad (x\in(-2,2))$$

所以

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}-1\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}\quad (x\in(-2,2))$$

11. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-\pi,0]\\ e^x & x\in[0,\pi)\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x dx=\frac{e^{\pi}-1}{\pi}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,dx=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}e^x\sin nx+\frac{1}{n^2}e^x\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,dx$$

移项整理得

$$a_n=\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin nx\,dx=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}e^x\cos nx+\frac{1}{n^2}e^x\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}e^x\sin nx\,dx$$

移项整理得

$$b_n=\frac{n[1-(-1)^n e^{\pi}]}{(n^2+1)\pi}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

故

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx+\frac{n[1-(-1)^n e^{\pi}]}{n^2+1}\sin nx\right\}$$

$$(-\infty<x<+\infty,且\ x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当 $x=k\pi$ 时，级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(0+0)]=\frac{1}{2}$$

12. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant h\\ 0 & h<x\leqslant\pi\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

(1) 对 $f(x)$ 进行奇延拓，从而 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^h\sin nx\,dx+0\right]=$$

$$\frac{2}{n\pi}-\frac{2\cos nh}{n\pi}\quad (n=1,2,\cdots)$$

故 $$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx\quad (x\in(0,h)\cup(h,\pi))$$

当 $x=h,x=0$ 时，级数分别收敛于$\frac{1}{2}$ 及 0，当 $x=\pi$ 时，级数收敛于 0.

(2) 对 $f(x)$ 进行偶延拓，则 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$；

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^h dx=\frac{2}{\pi}h$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin nh\quad (n=1,2,\cdots)$$

故 $$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx\quad (x\in[0,h)\cup(h,\pi])$$

当 $x=h$ 时，级数收敛于$\frac{1}{2}$.

第十二章 微分方程

一、重要内容提要

(一)一阶微分方程

1. 可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

分离变量 $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$. 积分得通解

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$$

2. 齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $u=\frac{y}{x}$,则 $x\frac{du}{dx}+u=\varphi(u)$. 分离变量并积分得通解

$$\left.\int\frac{du}{\varphi(u)-u}\right|_{u=\frac{y}{x}}=\int\frac{dx}{x}+C$$

3. 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

4. 伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}\quad(\alpha\neq 0,1)$$

设 $z=y^{1-\alpha}$,化为一阶线性微分方程

$$\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$$

5. 全微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\quad\left(\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

通解为

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$$

(二)可降阶的高阶微分方程

1. 直接积分型

$y^{(n)}=f(x)$,积分 n 次即可得通解.

2. 不显含 y 型

$$y''=f(x,y')\xrightarrow{\text{设 } y'=p}\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

3. 不显含 x 型

$$y''=f(y,y')\xrightarrow[y''=\frac{dp}{dy}p]{\text{设 } y'=p}p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

(三)二阶线性微分方程通解结构

1. 齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0\qquad(*)$$

通解为

$Y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$　　($y_1(x),y_2(x)$:(*)的线性无关特解)

2. 非齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)\qquad(**)$$

通解为

$y=Y+y^*$　　(Y:(*)的通解,y^*:(**)的特解)

二、重点知识结构图

微分方程
- 一阶微分方程
  - 可分离变量方程、齐次方程
  - 一阶线性方程、伯努利方程
  - 全微分方程
- 可降阶方程
  - 直接积分型：$y^{(n)} = f(x)$
  - 不显含 y 型：$y'' = f(x,y')$
  - 不显含 x 型：$y'' = f(y,y')$
- 二阶常系数线性方程
  - 齐次：$y'' + py' + qy = 0$
  - 非齐次：$y'' + py' + qy = f(x)$

三、常考题型及考研典型题精解

例 12-1　求解下列微分方程：

(1) $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$；

(2) $x\ln x\mathrm{d}y + (y - \ln x)\mathrm{d}x = 0$；

(3) $x^2y' + xy = y^2, y(1) = 1$；

(4) $(3x^2 + 2xe^{-y})\mathrm{d}x + (3y^2 - x^2e^{-y})\mathrm{d}y = 0$；

(5) $y' = \frac{y^2}{y^2 + 2xy - x}$.

解　(1) 利用两角和、两角差公式，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$$

分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{2\sin\frac{y}{2}} = -\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$，积分得

$$\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right| = C - 2\sin\frac{x}{2}\qquad (y \neq 2n\pi)$$

易知 $y = 2n\pi(n = 0, \pm1, \cdots)$ 也是原方程的解.

(2) 将方程标准化：$y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{x}$，属一阶线性方程. 通解为

$$y = e^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\left[\int \frac{1}{x}e^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}}\mathrm{d}x + C\right] = \frac{1}{\ln x}\left[\frac{1}{2}\ln^2 x + C\right]$$

(3) **解法 1**　$y' = (\frac{y}{x})^2 - \frac{y}{x}$，属齐次方程.

令 $u = \frac{y}{x}$ 有 $u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2 - u$.

分离变量并积分　$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2 - 2u} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，得

$$\frac{1}{2}[\ln(u-2) - \ln u] = \ln x + \frac{1}{2}\ln C$$

即 $\frac{u-2}{u} = Cx^2$. 由 $x = 1$ 时，$y = 1, u = 1$，得 $C = -1$. 将 $u = \frac{y}{x}$ 代入得所求特解为 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解法 2　属伯努利方程. 令 $z = y^{-1}$. 方程化为

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2}$$

解得

$$z = x\left[\int -\frac{\mathrm{d}x}{x^3} + C\right] = \frac{1}{2x} + Cx$$

即 $y = \frac{2x}{1+2Cx^2}$. 由 $y(1) = 1$，得 $C = \frac{1}{2}$，故 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

(4) 因 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xe^{-y} = \frac{\partial P}{\partial y}$，属全微分方程.

通解为

$$\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x + \int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y = C$$

$$\int_0^x (3x^2 + 2x)\mathrm{d}x + \int_0^y (3y^2 - x^2e^{-y})\mathrm{d}y = C$$

即

$$x^3 + y^3 + x^2e^{-y} = C$$

(5) 初看方程，不属于常见的几种可解方程. 若将 x 看做 y 的函数，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y^2 + 2xy - x}{y^2}$$

即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1-2y}{y^2}x = 1$　(属一阶线性微分方程).

通解为

$$x = e^{-\int\frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\left[\int e^{\int\frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right] = y^2e^{\frac{1}{y}}\left(\int\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}y + C\right) = y^2 + Cy^2e^{\frac{1}{y}}$$

例 12-2　求解下列方程：

(1) 求方程 $xy''=y'\ln y'$ 的通解；

(2) 求 $yy''=2(y'^2-y')$ 的满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=2$ 的特解．

解　(1)（不显含 y）令 $p=y'$，则原方程化为 $xp'=p\ln p$.

当 $p\neq 1$ 时，可改写为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p\ln p}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$\ln|\ln p|=\ln|x|+\ln|C_1|$$

即 $y'=p=e^{C_1x}$. 故原方程通解为 $y=\dfrac{1}{C_1}e^{C_1x}+C_2$.

当 $p=1$ 时，可得解 $y=x+C_3$，但它不是通解．

(2)（不显含 x）令 $p=y'$，则原方程可化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(p^2-p)$$

当 $p\neq 0$ 时，$y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(p-1)$，$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p-1}=\int\frac{2\mathrm{d}y}{y}$，解得 $p-1=C_1y^2$.

由 $p=y'$ 及 $y'(0)=2$，$y(0)=1$，可得 $C_1=1$，方程化为 $y'=1+y^2$，通解为 $y=\tan(x+C_2)$. 再由 $y(0)=1$，得 $C_2=\dfrac{\pi}{4}$. 故所求特解为

$$y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

注：(2) 中方程 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(p^2-p)$ 还有两个特解，即 $p=0$ 与 $p=1$，但都不满足初始条件 $y'(0)=p(0)=2$.

例 12-3(1996 考研)　求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解．

解法 1　属二阶常系数非齐次线性方程．

$$r^2+r=0,\quad r_1=0,\quad r_2=-1$$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^{-x}$.

设非齐次方程的特解为 $y^*=x(ax^2+bx+c)$. 代入原方程解得

$$a=\frac{1}{3},\quad b=-1,\quad c=2$$

故原方程通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+(\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x)$.

解法 2　（不显含 y）令 $p=y'$，原方程化为 $p'+p=x^2$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=e^{-x}\left[\int x^2e^x\mathrm{d}x+C_0\right]=e^{-x}[x^2e^x-2xe^x+2e^x+C_0]$$

$$y=\int(x^2-2x+2+C_0e^{-x})\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}$$

解法 3　原方程化为 $(y'+y)'=x^2$，两边积分得

$$y'+y=\frac{x^3}{3}+C_0\quad（一阶线性方程）$$

$$y=e^{-x}\left[\int(\frac{x^3}{3}+C_0)e^x\mathrm{d}x+C_2\right]=$$

$$e^{-x}\left[\frac{1}{3}(x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x)+C_0e^x+C_2\right]=$$

$$\frac{x^3}{3}-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}$$

例 12-4(2003 考研)　设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数．

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解．

解　(1) 由反函数导数公式知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$$

得

$$y'\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1$$

两端对 x 求导数，得

$$y''\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+(y')^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=0$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y''\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}{(y')^2}=\frac{-y''}{(y')^3}$$

代入原微分方程得

$$y''-y=\sin x \qquad (*)$$

(2) 方程(*)对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

设方程(*)的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x$$

代入方程（*），解得 $A=0$，$B=-\frac{1}{2}$，从而特解

$$y^*=-\frac{1}{2}\sin x$$

故微分方程 $y''-y=\sin x$ 的通解为

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$$

再由 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1$，$C_2=-1$.

从而所求初值问题的解为 $y(x)=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$.

例 12－5　设曲线积分 $\int_L[f'(x)+2f(x)+e^x]ydx+f'(x)dy$ 与路径无关，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，试计算积分值

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[f'(x)+2f(x)+e^x]ydx+f'(x)dy$$

解　积分与路径无关的充要条件是 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 由此得

$$f'(x)+2f(x)+e^x=f''(x)\quad（二阶常系数非齐次线性方程）$$

$f^*(x)=-\frac{e^x}{2}$ 为一个特解，对应齐次方程的通解为 $F(x)=ae^{2x}+be^{-x}$，故原方程通解为

$$f(x)=ae^{2x}+be^{-x}-\frac{e^x}{2}$$

再由 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 得 $a=\frac{2}{3}$，$b=-\frac{1}{6}$，故

$$f(x)=\frac{2}{3}e^{2x}-\frac{1}{6}e^{-x}-\frac{e^x}{2}$$

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}Pdx+Qdy=[\int_{(0,0)}^{(1,0)}+\int_{(1,0)}^{(1,1)}]Pdx+Qdy=$$

$$\int_0^1(\frac{4}{3}e^2+\frac{e^{-1}}{6}-\frac{e}{2})dy=\frac{4}{3}e^2+\frac{1}{6}e^{-1}-\frac{e}{2}$$

例 12－6(1997 考研)　设函数 $f(t)$ 在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

求 $f(t)$.

解　显然 $f(0)=1$，由于

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t}f(\frac{r}{2})rdr=$$

$$2\pi\int_0^{2t}rf(\frac{r}{2})dr$$

于是

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}rf(\frac{r}{2})dr$$

$$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)\quad（一阶线性方程）$$

通解为

$$f(t)=e^{\int 8\pi tdt}[\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{-\int 8\pi tdt}dt+C]=(4\pi t^2+C)e^{4\pi t^2}$$

由 $f(0)=1$，得 $C=1$，故 $f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$.

例 12－7(1994 考研)　设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，且$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$为全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解　方程为全微分方程的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 即

$$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy,\ f''(x)+f(x)=x^2$$

这是二阶常系数非齐次线性微分方程，通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$$

由 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，得 $C_1=2$，$C_2=1$.

故

$$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$$

原全微分方程为

$$[xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2y]dx+[-2\sin x+\cos x+2x+x^2y]dy=0$$

分项组合

$$xy^2dx+x^2ydy+d[(-2\sin x+\cos x)y]+2(xdy+ydx)=0$$

$$d[\frac{1}{2}x^2y^2+(-2\sin x+\cos x)y+2xy]=0$$

通解为

$$\frac{x^2y^2}{2}+(-2\sin x+\cos x)y+2xy=C$$

例 12－8　求解下列方程：

(1) $x\frac{dy}{dx}+x+\sin(x+y)=0$；

(2) $x^2e^yy'+xe^y=1$；

(3) $x+yy'=\tan x(\sqrt{x^2+y^2}-1)$；

(4) $(xy+y+\sin y)dx+(x+\cos y)dy=0$.

解 (1) 原方程可改写成 $x\dfrac{d(x+y)}{dx}+\sin(x+y)=0$.

令 $u=x+y$,则方程化为 $x\dfrac{du}{dx}+\sin u=0,\dfrac{du}{\sin u}=-\dfrac{dx}{x}$.

积分得
$$\ln(\csc u-\cot u)=-\ln x+\ln C$$

将 $u=x+y$ 代入并化简得通解 $\dfrac{1-\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\dfrac{C}{x}$.

(2) 方程化为
$$x^2\frac{de^y}{dx}+xe^y=1$$

令 $u=e^y$,则原方程化为线性方程 $x^2\dfrac{du}{dx}+xu=1$,将方程标准化
$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=\frac{1}{x^2}$$

解得
$$u=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{dx}{x}}dx+C\right]=\frac{1}{x}(\ln x+C)$$

通解为
$$xe^y=\ln x+C$$

(3) 原方程可改写成 $\dfrac{1}{2}\dfrac{d(x^2+y^2)}{dx}=\tan x(\sqrt{x^2+y^2}-1)$.

令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $u^2=x^2+y^2$, $2udu=d(x^2+y^2)$.

方程化为
$$u\frac{du}{dx}=\tan x(u-1)$$
$$\int\frac{udu}{u-1}=\int\tan x dx$$

解得
$$u+\ln(u-1)+\ln\cos x=C$$

通解为
$$\sqrt{x^2+y^2}+\ln(\sqrt{x^2+y^2}-1)+\ln\cos x=C$$

(4) 因 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1\neq\dfrac{\partial P}{\partial y}=x+1+\cos y$,所给方程不是全微分方程,但分项组合,利用“凑微分”的方法,可以将原方程化为全微分方程.
$$(ydx+xdy)+\cos ydy+(xy+\sin y)dx=0$$
$$d(xy+\sin y)+(xy+\sin y)dx=0$$
$$\frac{d(xy+\sin y)}{(xy+\sin y)}=-dx$$
$$\ln(xy+\sin y)=-x+\ln C$$

通解为
$$xy+\sin y=Ce^{-x}$$

例 12-9(1995 考研) 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限,L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交,交点记为 A. 已知 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$,且 L 过点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$,求 L 的方程.

解 设点 M 的坐标为 (x,y),则切线 MA 的方程为
$$Y-y=y'(X-x)$$

令 $X=0$,则 $Y=y-xy'$,故点 A 的坐标为 $(0,y-xy')$.

由 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$,有
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2}=|y-xy'|$$

即
$$2yy'-\frac{y^2}{x}=-x$$

令 $z=y^2$,得 $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=-x$ (一阶线性方程).
$$z=e^{\int\frac{dx}{x}}\left[-\int xe^{-\int\frac{dx}{x}}dx+C\right]=x(-x+C)$$

即
$$y^2=-x^2+Cx,y=\sqrt{Cx-x^2}\quad(\text{第一象限})$$

再由 $y(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$,得 $C=3$. 故所求曲线方程为
$$y=\sqrt{3x-x^2}\quad(0<x<3)$$

例 12-10(1993 考研) 设二阶常系数线性微分方程
$$y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$$
的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$. 试确定常数 α,β,γ,并求该方程的通解.

解法 1 由特解知原方程的特征根为 1 和 2. 因此特征方程为 $(r-1)(r-2)=0,r^2-3r+2=0$. 于是 $\alpha=-3,\beta=2$. 为确定 γ,将 $y_1=xe^x$ 代入原方程
$$(x+2)e^x-3(x+1)e^x+2xe^x=\gamma e^x$$

得
$$\gamma=-1$$

原方程通解为
$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$$

解法 2 将 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 代入原方程得
$$(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(3+2\alpha+\beta)e^x+(1+\alpha+\beta)xe^x=\gamma e^x$$

比较同类项系数
$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$$

解得 $\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1$. 故原方程为 $y''-3y'+2y=-e^x$. 易求得对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. 又知一特解,故原方程通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+[e^{2x}+(1+x)e^x]$$

即

$$y=C_3e^x+C_4e^{2x}+xe^x$$

四、学习效果两级测试题

(一) 基础知识测试题及答案

1. 微分方程 $y''-6y'+8y=e^x+e^{2x}$ 的一特解应具有形式(　　).

(A)ae^x+be^{2x};　　(B)ae^x+bxe^{2x};

(C)axe^x+be^{2x};　　(D)axe^x+bxe^{2x}.　　(答案:B)

2. 以 $y=2e^x\cos 3x$ 为一个特解的二阶常系数齐次线性微分方程为________.　　(答案:$y''-2y'+10y=0$)

3. 已知 $y_1=x^2,y_2=x+x^2,y_3=e^x+x^2$ 都是方程

$$(x-1)y''-xy'+y=-x^2+2x-2$$

的解,则此方程的通解为________.　　(答案:$y=C_1x+C_2e^x+x^2$)

4. $y'=\dfrac{y}{x+y^3}$ 的通解为________.　　(答案:$x=\dfrac{y^3}{2}+Cy$)

5. 求方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解.　　(答案:$y=-\ln\cos(x+C_1)+C_2$)

6. 函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=1$,且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$$

求导数 $f'(x)$.　　(答案:$-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$)

7. 求初值问题

$$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0 \quad (x>0)\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$$

的解.　　(答案:$y=\dfrac{x^2-1}{2}$)

8. 设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1),B(1,0)$ 的一段连续曲线,$M(x,y)$ 为该曲线上任意一点,点 C 为 M 在 x 轴上的投影,O 为坐标原点. 若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$,求 $f(x)$ 的表达式.　　(答案:$f(x)=(x-1)^2$)

9. 若函数 $f(x),g(x)$ 满足下列条件

$$f'(x)=g(x),f(x)=-g'(x),f(0)=0,g(x)\neq 0$$

求由曲线 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与直线 $y=0,x=\dfrac{\pi}{4}$ 所围成图形的面积 A.

(答案:$f(x)=C\sin x,A=\dfrac{\ln 2}{2}$)

10. 设 $\Phi(x)$ 具有二阶连续导数,且 $\Phi(0)=0,\Phi'(0)=1$,求函数 $u=u(x,y)$ 使

$$du=y[e^x-\Phi(x)]dx+[\Phi'(x)-2\Phi(x)]dy$$

(答案:$\Phi(x)=(x+\dfrac{x^2}{2})e^x,u=(1-\dfrac{x^2}{2})e^xy+C$)

(二) 考研训练模拟题及答案

1. 具有特解 $y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是

(A)$y'''-y''-y'+y=0$;　　(B)$y'''+y''-y'-y=0$;

(C)$y'''-6y''+11y'-6y=0$;　　(D)$y'''-2y''-y'+2y=0$.

(答案:B)

2. $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

(答案:$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\dfrac{x}{4}e^{2x}$)

3. 求微分方程 $y'=\dfrac{\cos y}{\cos y\sin 2y-x\sin y}$ 的通解.

(答案:$x=C\cos y-2\cos^2y$)

4. 设 $\int_0^x[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}]dt=xy(x)$,且 $y|_{x=1}=0$,求函数 $y(x)$.

(答案:$y=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$)

5. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=e^{2x}z$,求函数 $f(u)$.　　(答案:$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$)

6. 求 $y^2y''+1=0$ 的积分曲线方程，使积分曲线通过点 $(0,\frac{1}{2})$，且在该点处切线的斜率为 2.

（答案：$y^3=\frac{1}{2}(3x+\frac{1}{2})^2$）

7. 试确定常数 k，使微分方程

$$\frac{x}{y}(x^2+y^2)^k dx+[1-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^k]dy=0$$

在半平面 $y>0$ 上是全微分方程，并求其通解.

（答案：$k=-\frac{1}{2}$，$\sqrt{x^2+y^2}+y^2=Cy$）

8. 已知函数 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数，L 为不过 y 轴的任一闭曲线，且曲线积分

$$\oint_L [x\varphi'(x)+\varphi(x)-x]\frac{y}{x^2}dx-\varphi'(x)dy=0$$

试求函数 $\varphi(x)$.

（答案：$\varphi(x)=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+\frac{x}{2}$）

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1,x=t$ $(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$v(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

（答案：$y=x-x^3y$）

10. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0，OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0，M 点两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

（答案：$r=\csc(\frac{\pi}{6}\pm\theta)$ 即 $x\pm\sqrt{3}y=2$）

五、课后习题全解

习题 12-1

1. 试说出下列各微分方程的阶数：

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$；

(2) $x^2y''-xy'+y=0$；

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$；

(4) $(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$；

(5) $L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$；

(6) $\frac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

解 (1) 一阶； (2) 二阶； (3) 三阶； (4) 一阶； (5) 二阶； (6) 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

(1) $xy'=2y$，$y=5x^2$；

(2) $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0$，$y=x^2e^x$；

(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$，$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

解 (1) 因为 $y'=10x$，代入方程得

$$xy'-2y=x\cdot 10x-2\times 5x^2=0$$

所以 $y=5x^2$ 是方程 $xy'=2y$ 的解.

(2) 因为 $y'=3\cos x+4\sin x$，$y''=-3\sin x+4\cos x$，代入方程得

$$y''+y=(-3\sin x+4\cos x)+(3\sin x-4\cos x)=0$$

所以 $y=3\sin x-4\cos x$ 是方程的解.

(3) 因为 $y'=e^x(x^2+2x)$，$y''=e^x(x^2+4x+2)$，代入方程得

$$y''-2y'+y=e^x(x^2+4x+2)-2e^x(x^2+2x)+x^2e^x=2e^x\neq 0$$

所以 $y=x^2e^x$ 不是方程的解.

(4) 因为
$$y'=C_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2x}$$
$$y''=C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x}$$

代入方程得

$$\begin{aligned}&y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=\\&(C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x})-(\lambda_1+\lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2x})+\\&\lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x})=\\&[C_1\lambda_1^2-(\lambda_1+\lambda_2)C_1\lambda_1+\lambda_1\lambda_2C_1]e^{\lambda_1x}+\\&[C_2\lambda_2^2-(\lambda_1+\lambda_2)C_2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2C_2]e^{\lambda_2x}=0\end{aligned}$$

所以 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 是方程的解．

3. 在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解：

(1) $(x-2y)y' = 2x - y, x^2 - xy + y^2 = C$；

(2) $(xy-x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0, y = \ln(xy)$.

解 (1) 等式 $x^2 - xy + y^2 = C$ 两边关于 x 求导数，得

$$2x - (y + xy') + 2yy' = 0, \quad y' = \frac{2x-y}{x-2y}$$

代入方程，得

$$(x-2y)y' - 2x + y = (x-2y)\frac{2x-y}{x-2y} - 2x + y = 0$$

所以 $x^2 - xy + y^2 = C$ 所确定的函数是所给微分方程的解．

(2) 等式 $y = \ln(xy)$ 两边关于 x 求导数，得

$$y' = \frac{y + xy'}{xy}, \quad y' = \frac{y}{xy - x}$$

$$y'' = \frac{y'(xy-x) - y(y+xy'-1)}{(xy-x)^2}$$

代入方程；并整理得

$$(xy-x)\frac{y'(xy-x) - y(y+xy'-1)}{(xy-x)^2} + x\left(\frac{y}{xy-x}\right)^2 + y\left(\frac{y}{xy-x}\right) - 2\left(\frac{y}{xy-x}\right) = 0$$

所以由 $y = \ln(xy)$ 确定的函数是所给微分方程的解．

4. 在下列各题中，确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初始条件：

(1) $x^2 - y^2 = C, y|_{x=0} = 5$；

(2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$；

(3) $y = C_1 \sin(x - C_2), y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 0$.

解 (1) 由 $y|_{x=0} = 5$，得 $C = -25$，故 $x^2 - y^2 = -25$，即 $y^2 - x^2 = 25$.

(2) $y' = C_2 e^{2x} + (C_1 + C_2 x)2e^{2x} = e^{2x}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x)$

由 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 得

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ 1 = 2C_1 + C_2 \end{cases}$$

解得 $C_1 = 0, C_2 = 1$，　故 $y = xe^{2x}$.

(3) $y' = C_1\cos(x - C_2)$，由 $y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 0$，得

$$\begin{cases} 1 = C_1\sin(\pi - C_2) \\ 0 = C_1\cos(\pi - C_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} 1 = C_1\sin C_2 \\ 0 = C_1\cos C_2 \end{cases}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = \frac{\pi}{2}$. 故 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线在点 (x,y) 处的切线的斜率等于该点横坐标的平方；

(2) 曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分．

解 (1) 设曲线方程为 $y = y(x)$，则曲线在点 (x,y) 处的斜率为 y'. 由题设条件知 $y' = x^2$，这就是曲线所满足的微分方程．

(2) 设曲线方程为 $y = y(x)$，如图12-1所示，则曲线在点 $P(x,y)$ 处法线的斜率为 $-\frac{1}{y'}$，法线的方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

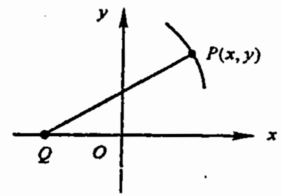


图 12-1

由题设条件知，法线上点 Q 的坐标为 $(-x,0)$，代入法线方程，得

$$-y = \frac{-1}{y'}(-x - x)$$

即 $yy' + 2x = 0$，这正是所求的微分方程．

6. 用微分方程表示一物理命题：某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比，与温度的平方成反比．

解 根据导数的意义，气压 P 对于温度 T 的变化率为 $\frac{dP}{dT}$. 由题设条件知

$$\frac{dP}{dT} = k\frac{P}{T^2} \quad (k\text{：比例系数})$$

这就是所求的微分方程．

习题 12-2

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy' - y\ln y = 0$；

(2) $3x^2+5x-5y'=0$；

(3) $\sqrt{1-x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}$；

(4) $y'-xy'=a(y^2+y')$；

(5) $\sec^2 x\tan y\,dx+\sec^2 y\tan x\,dy=0$；

(6) $\dfrac{dy}{dx}=10^{x+y}$；

(7) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$；

(8) $\cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy=0$；

(9) $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}+x^3=0$；

(10) $ydx+(x^2-4x)dy=0$.

解 (1) 分离变量并积分，得

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{x}$$

求积分

$$\ln\ln y=\ln x+\ln C,\quad \ln\ln y=\ln(Cx)$$

整理得通解 $\qquad y=e^{Cx}$

(2) 分离变量并积分

$$\int dy=\int(\frac{3}{5}x^2+x)dx$$

得通解 $\qquad y=\dfrac{x^3}{5}+\dfrac{x^2}{2}+C$

(3) 分离变量 $\qquad \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

积分

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

得通解 $\qquad \arcsin y=\arcsin x+C$

(4) 分离变量 $\qquad -\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{a}{x+a-1}dx$

积分

$$\int-\frac{dy}{y^2}=\int\frac{a}{x+a-1}dx$$

得通解 $\qquad \dfrac{1}{y}=a\ln|x+a-1|+C$

(5) 分离变量 $\qquad \dfrac{\sec^2 x}{\tan x}dx=-\dfrac{\sec^2 y}{\tan y}dy$，

积分 $\qquad \displaystyle\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=-\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy$

得 $\qquad \ln\tan x=-\ln\tan y+\ln C$

整理得通解 $\qquad \tan x\tan y=C$

(6) 分离变量并积分

$$\int\frac{dy}{10^y}=\int 10^x dx$$

得 $\qquad -\dfrac{10^{-y}}{\ln 10}=\dfrac{10^x}{\ln 10}-\dfrac{C}{\ln 10}$

整理得通解 $\qquad 10^{-y}+10^x=C$

(7) 分离变量并积分

$$\int\frac{-e^y}{e^y-1}dy=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

得 $\qquad -\ln|e^y-1|=\ln|e^x+1|-\ln C$

$$\ln[(e^y-1)(e^x+1)]=\ln C$$

故通解为 $\qquad (e^y-1)(e^x+1)=C$

(8) 分离变量 $\dfrac{\cos y}{\sin y}dy=-\dfrac{\cos x}{\sin x}dx$，积分

$$\int\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

得 $\qquad \ln\sin y=-\ln\sin x+\ln C$

$$\ln(\sin y\cdot\sin x)=\ln C$$

故通解为 $\qquad \sin y\sin x=C$

(9) $\qquad (y+1)^2dy=-x^3dx$

积分 $\qquad \displaystyle\int(y+1)^2dy=-\int x^3dx$

$$\frac{(y+1)^3}{3}=-\frac{x^4}{4}+C_1$$

故通解为 $\qquad 4(y+1)^3+3x^4=C$ （其中 $C=12C_1$）

(10) 分离变量并积分

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{4x-x^2}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \frac{1}{4}\int(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-4})dx$$

$$\ln y = \frac{1}{4}[\ln x - \ln(x-4)] + \frac{1}{4}\ln C$$

$$\ln(y^4) = \ln\frac{Cx}{x-4}$$

故通解为
$$y^4 = \frac{Cx}{x-4}$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y' = e^{2x-y}$, $y|_{x=0} = 0$;

(2) $\cos x\sin y dy = \cos y\sin x dx$, $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$;

(3) $y'\sin x = y\ln y$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$;

(4) $\cos y dx + (1+e^{-x})\sin y dy = 0$, $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$;

(5) $xdy + 2ydx = 0$, $y|_{x=2} = 1$.

解 (1) 分离变量并积分

$$\int e^y dy = \int e^{2x}dx$$

得通解
$$e^y = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

当 $x = 0$ 时，$y = 0$，代入上式得 $C = \frac{1}{2}$，故所求特解为

$$e^y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$$

(2) 分离变量并积分

$$\int \tan y dy = \int \tan x dx$$

得
$$-\ln\cos y = -\ln\cos x - \ln C$$
$$\cos y = C\cos x$$

当 $x = 0$ 时，$y = \frac{\pi}{4}$，代入上式得 $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 故所求特解为

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

(3) 分离变量并积分

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

得
$$\ln\ln y = \ln|\csc x - \cot x| + \ln C$$
$$\ln y = C(\csc x - \cot x)$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$y = e$，代入上式得 $C = 1$，故所求特解为

$$\ln y = \csc x - \cot x \quad 即 \quad \ln y = \tan\frac{x}{2}$$

(4) 分离变量并积分

$$\int \tan y dy = -\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

得
$$-\ln\cos y = -\ln(e^x+1) - \ln C$$
$$\cos y = C(e^x+1)$$

当 $x = 0$ 时，$y = \frac{\pi}{4}$，代入上式得 $C = \frac{\sqrt{2}}{4}$，故所求特解为

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^x+1)$$

(5)
$$\frac{dy}{y} + \frac{2dx}{x} = 0$$

$$\int\frac{dy}{y} + \int\frac{2dx}{x} = 0$$

$$\ln y + 2\ln x = \ln C, \quad x^2y = C$$

当 $x = 2$ 时，$y = 1$. 代入上式得 $C = 4$，故所求特解为 $x^2y = 4$.

3. 有一盛满了水的圆锥形漏斗，高为 10 cm，顶角为 60°，漏斗下面有面积为 0.5 cm² 的孔，求水面高度变化的规律及流完所需的时间.

解 如图 12-2 所示，由水力学可知，水从孔口流出的流量(即通过孔口横截面的水的体积 V 对时间 t 的变化率)为

$$\frac{dV}{dt} = 0.62S\sqrt{2gh}$$

其中 0.62 为流量系数，孔截面面积 $S = 0.5$ cm²，故

$$dV = 0.62S\sqrt{2gh}dt \qquad (*)$$

又因 $\frac{r}{h} = \frac{R}{10} = \frac{10\tan 30^\circ}{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{1}{\sqrt{3}}h$. 所以

$$dV = -\pi r^2 dh = -\frac{\pi h^2}{3}dh \qquad (**)$$

由式(*),(**)得

$$0.62S\sqrt{2g}\sqrt{h}\,dt=-\frac{\pi}{3}h^2dh$$

$$dt=-\frac{\pi}{0.62\times 3S\sqrt{2g}}h^{\frac{3}{2}}dh$$

$$t=-\frac{2\pi}{0.62\times 15S\sqrt{2g}}h^{\frac{5}{2}}+C$$

当 $t=0$ 时，$h=10$，代人上式得

$$C=\frac{2\pi}{0.62\times 15S\sqrt{2g}}10^{\frac{5}{2}}$$

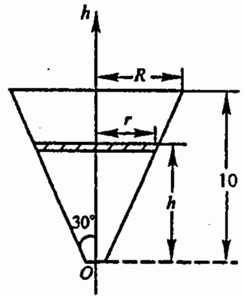


图 12-2

故水从小孔流出的规律为

$$t=\frac{2\pi}{0.62\times 15S\sqrt{2g}}(10^{\frac{5}{2}}-h^{\frac{5}{2}})$$

将 $S=0.5,g=980$ 代人得

$$t=0.030\,5(10^{\frac{5}{2}}-h^{\frac{5}{2}})=-0.030\,5h^{\frac{5}{2}}+9.645$$

令 $h=0$，得 $t_0\approx 10$ s. 即水流完所需的时间约为 10 s.

4. 质量为 1g(克)的质点受外力作用作直线运动. 这外力和时间成正比，和质点运动的速度成反比. 在 $t=10$s 时，速度等于 50 cm/s，外力为4 g·cm/s²，问从运动开始经过了 1 分钟后的速度是多少?

解　由题设知，外力 $F=k\dfrac{t}{v}$. 当 $t=10$ s 时，$v=50$ cm/s，$F=4$ g·cm/s². 于是 $4=k\dfrac{10}{50}$，$k=20$，$F=20\dfrac{t}{v}$.

又 $F=m\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dt}$，因此

$$\frac{dv}{dt}=20\frac{t}{v}$$

$$vdv=20\,tdt,\quad \int vdv=\int 20\,tdt$$

$$\frac{v^2}{2}=10t^2+C$$

当 $t=10$ s 时，$v=50$ cm/s，代人上式得 $C=250$. 因此

$$v^2=20t^2+500$$

当 $t=60$ s 时，$v=\sqrt{20\times 60^2+500}=\sqrt{72\,500}\approx 269.3$ cm/s.

5. 镭的衰变有如下的规律：镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知，镭经过 1 600 年后，只余原始量 R_0 的一半. 试求镭的 R 与时间 t 的函数关系.

解　由于镭的衰变速度 $\dfrac{dR}{dt}$ 与其含量 R 成正比，可得微分方程

$$\frac{dR}{dt}=-kR\quad(k>0)$$

$$\frac{dR}{R}=-kdt,\quad \int\frac{dR}{R}=-k\int dt$$

$$\ln R=-kt+\ln C,\quad R=Ce^{-kt}$$

当 $t=0$ 时，$R=R_0$，得 $C=R_0$，$R=R_0e^{-kt}$.

当 $t=1\,600$ 时，$R=\dfrac{R_0}{2}$，得

$$\frac{R_0}{2}=R_0e^{-1\,600k},\quad k=\frac{\ln 2}{1\,600}=0.000\,433$$

故镭含量 R 随时间 t 变化的规律为

$$R=R_0e^{-0.000\,433t}\quad(\text{时间以年为单位})$$

6. 一曲线通过点(2,3)，它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分，求这曲线方程.

解　设切点为 $P(x,y)$，如图 12-3 所示. 由于切线段被切点平分，故切线在 x 轴，y 轴的截距分别为 $2x,2y$. 切线斜率为

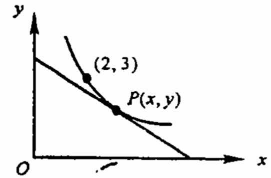


图 12-3

$$\tan\alpha=-\frac{y}{x}\quad 即\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x},\quad \ln y=-\ln x+\ln C$$

解得 $xy=C$.

由曲线过点(2,3)，可得 $C=6$，故所求曲线方程为

$$xy=6$$

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a，船行方向始终与河岸垂直. 又设河宽为 h，河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k)，求小船的航行路线.

解　建立坐标系如图 12-4 所示，点 (x,y) 为船的位置.

依题意，水速

$$v=\frac{dx}{dt}=ky(h-y)$$

将 $y=at$ 代入，得

$$dx=kat(h-at)dt$$

积分得　$x=\frac{k}{2}aht^2-\frac{ka^2}{3}t^3+C$

当 $t=0$ 时，$x=0$，得 $C=0$。将 $C=0$，$t=\frac{y}{a}$ 代入，得小船航行路线

$$x=\frac{k}{a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)$$

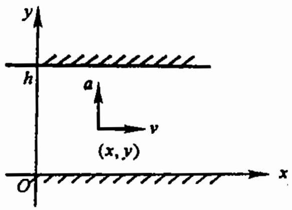


图　12-4

习题 12-3

1. 求下列齐次方程的通解：

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$；

(2) $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$；

(3) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$；

(4) $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$；

(5) $(2x\operatorname{sh}\frac{y}{x}+3y\operatorname{ch}\frac{y}{x})dx-3x\operatorname{ch}\frac{y}{x}dy=0$；

(6) $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$.

解　(1)　$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，于是原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{u^2-1}$$

分离变量并积分

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\int\frac{dx}{x}$$

得

$$\ln(u+\sqrt{u^2-1})=\ln x+\ln C$$

$$u+\sqrt{u^2-1}=Cx$$

代入 $u=\frac{y}{x}$，得

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}=Cx$$

故通解为　$$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$$

(2)　$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x},\quad \ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C$$

$$\ln u-1=Cx$$

代入 $u=\frac{y}{x}$，得通解 $\ln\frac{y}{x}-1=Cx$.

(3)　$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+u$$

$$\int udu=\int\frac{dx}{x},\quad \frac{u^2}{2}=\ln x+\ln C$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入，得 $\frac{y^2}{2x^2}=\ln(Cx)$.

通解为　$$y^2=2x^2\ln(Cx)$$

(4)　$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right)$$

设 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^2}+u\right)$$

$$\int\frac{3u^2du}{2u^3-1}=-\int\frac{dx}{x},\quad \frac{1}{2}\ln(2u^3-1)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln C$$

$$2u^3-1=\frac{C}{x^2}$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入，整理得通解

$$2y^3-x^3=Cx$$

(5)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\text{th}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2}{3}\text{th}u+u$$

$$\frac{3du}{2\text{th}u}=\frac{dx}{x},\quad \frac{3}{2}\int\frac{e^u+e^{-u}}{e^u-e^{-u}}du=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{3}{2}\ln(e^u-e^{-u})=\ln x+\ln C_1$$

$$(e^u-e^{-u})^{\frac{3}{2}}=C_1x$$

$$Cx^2=\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^3=\text{sh}^3u$$

通解为
$$\text{sh}^3\frac{y}{x}=Cx^2$$

(6) 原方程化为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(\frac{x}{y}-1)2e^{\frac{x}{y}}}{1+2e^{\frac{x}{y}}}$$

令 $u=\frac{x}{y}$，则 $x=yu$，$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，代入上述方程得

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{(u-1)2e^u}{1+2e^u}$$

$$y\frac{du}{dy}=-\frac{u+2e^u}{1+2e^u},\quad \int\frac{1+2e^u}{u+2e^u}du=-\int\frac{dy}{y}$$

$$\ln(u+2e^u)=-\ln y+\ln C,\quad y(u+2e^u)=C$$

将 $u=\frac{x}{y}$ 代入得 $y(\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}})=C$，即 $x+2ye^{\frac{x}{y}}=C$.

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解：

(1) $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0, y|_{x=0}=1$；

(2) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}, y|_{x=1}=2$；

(3) $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0, y|_{x=1}=1$.

解 (1)
$$\frac{dx}{dy}=\frac{3}{2}\frac{x}{y}-\frac{y}{2x}$$

令 $u=\frac{x}{y}$，则 $x=yu$，$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，原方程化为

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{3}{2}u-\frac{1}{2u}$$

$$\int\frac{2udu}{u^2-1}=\int\frac{dy}{y},\quad \ln(u^2-1)=\ln y+\ln C$$

$$u^2-1=Cy$$

将 $u=\frac{x}{y}$ 代入整理得 $x^2-y^2=Cy^3$.

当 $x=0$ 时，$y=1$，代入得 $C=-1$，故所求特解为

$$y^3=y^2-x^2$$

(2) 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+u,\quad \int udu=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln x+C$$

代入 $u=\frac{y}{x}$，整理得 $y^2=2x^2(\ln x+C)$.

由 $y|_{x=1}=2$，得 $C=2$. 故所求特解为

$$y^2=2x^2(\ln x+2)$$

(3)
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+2xy-y^2}{y^2+2xy-x^2}=\frac{(\frac{y}{x})^2-2(\frac{y}{x})-1}{(\frac{y}{x})^2+2(\frac{y}{x})-1}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}$$

$$\ln x=-\int\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}du$$

而
$$-\int\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}du=-\int\frac{u^2+2u-1}{(u+1)(u^2+1)}du=$$

$$\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)du=$$

$$\ln(u+1)-\ln(u^2+1)+\ln C=$$
$$\ln[C\frac{u+1}{u^2+1}]$$

所以 $x=C\frac{u+1}{u^2+1}$,即$\frac{x^2+y^2}{x+y}=C$.

由 $y|_{x=1}=1$,得 $C=1$. 故所求特解为

$$x+y=x^2+y^2$$

3. 设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧$\overset{\frown}{OA}$. 对于$\overset{\frown}{OA}$上任一点 $P(x,y)$,曲线弧$\overset{\frown}{OP}$与直线段$\overline{OP}$所围图形的面积为 x^2,求曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程.

解 设$\overset{\frown}{OA}$弧的方程为 $y=y(x)$. 依题意,图 12-5 中阴影部分的面积为

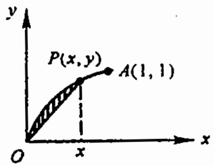


图 12-5

$$\int_0^x y(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}xy=x^2$$

两边关于 x 求导数,得

$$y(x)-\frac{1}{2}(y+xy')=2x$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-4+\frac{y}{x}$$

设 $u=\frac{y}{x}$,以上方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-4+u$$
$$\int\mathrm{d}u=-4\int\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad u=-4\ln x+C$$

代入 $u=\frac{y}{x}$,$y=-4x\ln x+Cx$.

由 $y|_{x=1}=1$,得 $C=1$. 故所求方程为

$$y=-4x\ln x+x.$$

习题 12-4

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=e^{-x}$;

(2) $xy'+y=x^2+3x+2$;

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$;

(4) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

(5) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$;

(6) $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+3\rho=2$;

(7) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x$;

(8) $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$;

(9) $(x-2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2(x-2)^3$;

(10) $(y^2-6x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$.

解

(1) $y=e^{-\int\mathrm{d}x}[\int e^{-x}e^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=$

$$e^{-x}[\int e^{-x}e^{x}\mathrm{d}x+C]=e^{-x}(x+C).$$

(2) $y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x}$

$$y=e^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}[\int(x+3+\frac{2}{x})e^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x+C]=$$
$$e^{-\ln x}[\int(x+3+\frac{2}{x})x\mathrm{d}x+C]=$$
$$\frac{1}{x}[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x+C]=\frac{x^2}{3}+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$$

(3) $y=e^{-\int\cos x\mathrm{d}x}[\int e^{-\sin x}e^{\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=$

$$e^{-\sin x}[\int\mathrm{d}x+C]=e^{-\sin x}[x+C]$$

(4) $y=e^{-\int\tan x\mathrm{d}x}[\int\sin 2x e^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=$

$$e^{\ln\cos x}[\int\sin 2x e^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C]=$$
$$\cos x[\int\sin 2x\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x+C]=\cos x[-2\cos x+C]$$

(5) $y' + \frac{2x}{x^2-1}y = \frac{\cos x}{x^2-1}$

$$y = e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left[\int \frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx + C\right] =$$

$$e^{-\ln(x^2-1)}\left[\int \frac{\cos x}{x^2-1}(x^2-1)dx + C\right] = \frac{1}{x^2-1}[\sin x + C]$$

(6) $\rho = e^{-\int 3d\theta}\left[\int 2e^{\int 3d\theta}d\theta + C\right] = e^{-3\theta}\left[\int 2e^{3\theta}d\theta + C\right] =$

$$e^{-3\theta}\left[\frac{2}{3}e^{3\theta} + C\right] = \frac{2}{3} + Ce^{-3\theta}$$

(7) $y = e^{-\int 2xdx}\left[\int 4xe^{\int 2xdx}dx + C\right] = e^{-x^2}\left[\int 4xe^{x^2}dx + C\right] =$

$$e^{-x^2}[2e^{x^2} + C] = \underline{2 + Ce^{-x^2}}$$

(8) $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$

$$x = e^{-\int\frac{dy}{y\ln y}}\left[\int \frac{1}{y}e^{\int\frac{dy}{y\ln y}}dy + C\right] = e^{-\ln\ln y}\left[\int \frac{1}{y}e^{\ln\ln y}dy + C\right] =$$

$$\frac{1}{\ln y}\left[\int \frac{1}{y}\ln y dy + C\right] =$$

$$\frac{1}{\ln y}\left[\frac{\ln^2 y}{2} + C\right] = \frac{\ln y}{2} + \frac{C}{\ln y}$$

(9) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$

$$y = e^{\int\frac{dx}{x-2}}\left[\int 2(x-2)^2 e^{-\int\frac{dx}{x-2}}dx + C\right] =$$

$$e^{\ln(x-2)}\left[\int 2(x-2)^2 e^{-\ln(x-2)}dx + C\right] = (x-2)[(x-2)^2 + C]$$

(10) $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$

$$x = e^{\int\frac{3}{y}dy}\left[\int -\frac{y}{2}e^{-\int\frac{3}{y}dy}dy + C\right] = e^{3\ln y}\left[\int -\frac{y}{2}e^{-3\ln y}dy + C\right] =$$

$$y^3\left[-\frac{1}{2}\int y\frac{1}{y^3}dy + C\right] = y^3\left[\frac{1}{2y} + C\right] = Cy^3 + \frac{y^2}{2}$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $\frac{dy}{dx} - y\tan x = \sec x$, $y|_{x=0} = 0$;

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$, $y|_{x=\pi} = 1$;

(3) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4$;

(4) $\frac{dy}{dx} + 3y = 8$, $y|_{x=0} = 2$;

(5) $\frac{dy}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3}y = 1$, $y|_{x=1} = 0$.

解

(1) $y = e^{\int\tan x dx}\left[\int \sec x e^{-\int\tan x dx}dx + C\right] =$

$$e^{-\ln\cos x}\left[\int \sec x e^{\ln\cos x}dx + C\right] = \frac{1}{\cos x}[x + C]$$

由 $y|_{x=0} = 0$，得 $C = 0$. 故所求特解为

$$y = \frac{x}{\cos x}$$

(2) $y = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int \frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{dx}{x}}dx + C\right] = e^{-\ln x}\left[\int \frac{\sin x}{x}x dx + C\right] =$

$$\frac{1}{x}[-\cos x + C]$$

由 $y|_{x=\pi} = 1$，得 $C = \pi - 1$. 故所求特解为

$$y = \frac{1}{x}[\pi - 1 - \cos x]$$

(3) $y = e^{-\int\cot x dx}\left[\int 5e^{\cos x}e^{\int\cot x dx}dx + C\right] = e^{-\ln\sin x}\left[5\int e^{\cos x}e^{\ln\sin x}dx + C\right] =$

$$\frac{1}{\sin x}[-5e^{\cos x} + C]$$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4$，得 $C = 1$. 故所求特解为

$$y = \frac{1}{\sin x}(1 - 5e^{\cos x})$$

(4) $y = e^{-\int 3dx}\left[\int 8e^{\int 3dx}dx + C\right] = e^{-3x}\left[8\int e^{3x}dx + C\right] = e^{-3x}\left[\frac{8}{3}e^{3x} + C\right]$

由 $y|_{x=0} = 2$，得 $C = -\frac{2}{3}$. 故所求特解为

$$y = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}e^{-3x}$$

(5) $y = e^{-\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx}\left[\int e^{\int\frac{2-3x^2}{x^3}dx}dx + C\right] = e^{x^{-2}+3\ln x}\left[\int e^{-\frac{1}{x^2}-3\ln x}dx + C\right] =$

$$x^3e^{x^{-2}}\left[\int\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}dx+C\right]=x^3e^{x^{-2}}\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+C\right]=$$

$$\frac{x^3}{2}+Cx^3e^{x^{-2}}$$

由 $y|_{x=1}=0$,得 $C=-\frac{1}{2e}$,故所求特解为

$$2y=x^3-x^3e^{\frac{1}{x^2}-1}$$

3. 求一曲线的方程,这曲线通过原点,并且它在点(x,y)处的切线斜率等于 $2x+y$.

解 设曲线的方程为 $y=y(x)$. 由题意

$$\frac{dy}{dx}=2x+y,\quad \frac{dy}{dx}-y=2x$$

$$y=e^{\int dx}\left[\int 2xe^{-\int dx}dx+C\right]=e^x\left[\int 2xe^{-x}dx+C\right]=$$

$$e^x\left[-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx+C\right]=$$

$$e^x\left[-2xe^{-x}-2e^{-x}+C\right]$$

又曲线过原点,即 $y|_{x=0}=0$,可得 $C=2$,故所求曲线的方程为

$$y=2(e^x-1-x)$$

4. 设有一质量为 m 的质点作直线运动. 从速度等于零的时刻起,有一个与运动方向一致,大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它,此外还受一与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用,求质点运动的速度与时间的函数关系.

解 设质点的速度为 $v=v(t)$. 质点受到力 $F=k_1t-k_2v$ 的作用. 根据牛顿第二定律

$$m\frac{dv}{dt}=k_1t-k_2v,\quad \frac{dv}{dt}+\frac{k_2}{m}v=\frac{k_1}{m}t$$

$$v=e^{-\int\frac{k_2}{m}dt}\left[\int\frac{k_1}{m}te^{\int\frac{k_2}{m}dt}dt+C\right]=e^{-\frac{k_2}{m}t}\left[\int\frac{k_1}{m}te^{\frac{k_2}{m}t}dt+C\right]=$$

$$e^{-\frac{k_2}{m}t}\left[\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+C\right]$$

由 $v|_{t=0}=0$,得 $C=\frac{k_1m}{k_2^2}$,故

$$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2^2}(1-e^{-\frac{k_2}{m}t})$$

5. 设有一个由电阻 $R=10\Omega$,电感 $L=2$ H(亨)和电源电压 $E=20\sin5t$ V(伏)串联组成的电路. 开关 K 合上后,电路中有电流通过,求电流 i 与时间 t 的函数关系.

解 由电学知,电感电动势为 $-L\frac{di}{dt}$. 由基尔霍夫回路电压定律

$$E-L\frac{di}{dt}-iR=0,\quad 20\sin5t-2\frac{di}{dt}-10i=0$$

$$\frac{di}{dt}+5i=10\sin5t$$

解得 $i=\sin5t-\cos5t+Ce^{-5t}$.

由 $i|_{t=0}=0$,得 $C=1$,故

$$i=\sin5t-\cos5t+e^{-5t}=$$

$$e^{-5t}+\sqrt{2}\sin(5t-\frac{\pi}{4})(A)$$

6. 设曲线积分 $\int_L yf(x)dx+[2xf(x)-x^2]dy$ 在右半平面$(x>0)$内与路径无关,其中 $f(x)$ 可导,且 $f(1)=1$. 求 $f(x)$.

解 依题意 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\quad(x>0)$

即

$$2f(x)+2xf'(x)-2x=f(x)$$

$$f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=1$$

$$f(x)=e^{-\int\frac{dx}{2x}}\left[\int e^{\int\frac{dx}{2x}}dx+C\right]=e^{-\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\sqrt{x}dx+C\right]=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

由 $f(1)=1$,得 $C=\frac{1}{3}$,故 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3\sqrt{x}}$.

7. 求下列伯努利方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;

(2) $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$;

(3) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{3}=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$;

(4) $\frac{dy}{dx}-y=xy^5$;

(5) $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$.

解 (1) 令 $z=y^{1-2}=\frac{1}{y}$,则原方程化为

$$\frac{dz}{dx}-z=\sin x-\cos x$$

解得 $z=Ce^x-\sin x$,即 $\frac{1}{y}=Ce^x-\sin x$.

(2) 令 $z=y^{1-2}=\frac{1}{y}$,代入原方程,得

$$\frac{dz}{dx}+3xz=-x$$

解得 $z=-\frac{1}{3}+Ce^{-\frac{3}{2}x^2}$,即 $\frac{1}{y}+\frac{1}{3}=Ce^{-\frac{3}{2}x^2}$

(3) 令 $z=y^{1-4}=y^{-3}$,则原方程化为

$$\frac{dz}{dx}-z=2x-1$$

解得 $z=Ce^x-2x-1$. 即 $\frac{1}{y^3}=Ce^x-2x-1$.

(4) 令 $z=y^{1-5}=y^{-4}$,代入原方程得

$$\frac{dz}{dx}+4z=-4x$$

解得 $z=Ce^{-4x}-x+\frac{1}{4}$. 即 $\frac{1}{y^4}=Ce^{-4x}-x+\frac{1}{4}$.

(5) $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=y^3(1+\ln x)$

令 $z=y^{1-3}=y^{-2}$,原方程化为

$$\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=-2(1+\ln x)$$

解得 $z=\frac{C}{x^2}-\frac{2}{3}x\ln x-\frac{4}{9}x$,即 $\frac{1}{y^2}=\frac{C}{x^2}-\frac{2}{3}x\ln x-\frac{4}{9}x$.

8. 验证形如 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 的微分方程,可经变量代换 $v=xy$ 化为可分离变量的方程,并求其通解.

解 原方程化为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{yf(xy)}{xg(xy)}$. 令 $v=xy$,则 $y=\frac{v}{x}$,$\frac{dy}{dx}=\frac{v'}{x}-\frac{v}{x^2}$. 代入以上方程得

$$\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x^2}v=-\frac{v}{x^2}\frac{f(v)}{g(v)}$$

分离变量
$$\frac{g(v)dv}{v(g(v)-f(v))}=\frac{dx}{x}$$

积分得
$$\ln x+\int\frac{g(v)dv}{v(f(v)-g(v))}=C$$

求出积分,并代入 $v=xy$,可得原方程的通解.

9. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程,然后求出通解:

(1) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$;

(3) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$;

(4) $y'=y^2+2(\sin x-1)y+\sin^2x-2\sin x-\cos x+1$;

(5) $y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0$.

解 (1) 设 $u=x+y$,则 $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$,代入方程得

$$\frac{du}{dx}-1=u^2$$

$$\int\frac{du}{1+u^2}=\int dx$$

$$\arctan u=x+C,\quad u=\tan(x+C)$$

即
$$x+y=\tan(x+C)$$

(2) 令 $u=x-y$,则 $\frac{du}{dx}=1-\frac{dy}{dx}$. 原方程化为

$$1-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}+1$$

解得 $\frac{u^2}{2}=-x+\frac{C}{2}$,即 $(x-y)^2=-2x+C$.

(3) 原方程化为 $(xy)'_x=\frac{xy}{x}\ln(xy)$. 设 $u=xy$,则 $\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}\ln u$.

分离变量并积分
$$\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}$$

解得 $\ln u=Cx$. 即 $xy=e^{Cx}$.

(4) $y'=y^2+2(\sin x-1)y+(\sin x-1)^2-\cos x$

$$y'=(y+\sin x-1)^2-\cos x$$

令 $u=y+\sin x-1$，则 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dy}{dx}+\cos x$. 原方程化为

$$\frac{du}{dx}-\cos x=u^2-\cos x$$

解得 $\dfrac{1}{u}=C-x$. 即 $y=1-\sin x+\dfrac{1}{C-x}$.

(5) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y(1+xy)}{x(1+xy+x^2y^2)}$. 令 $u=xy$，则 $y=\dfrac{u}{x}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{u'}{x}-\dfrac{u}{x^2}$，原方程化为

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2}=-\frac{\frac{u}{x^2}(1+u)}{1+u+u^2}$$

分离变量并积分

$$\int\frac{1+u+u^2}{u^3}du=\int\frac{dx}{x}$$

得 $\dfrac{1+2u}{-2u^2}=\ln\dfrac{C_1x}{u}$. $u=xy$ 代入得

$$1+2xy=2x^2y^2(\ln y+C)$$

习题 12-5

1. 判别下列方程中哪些是全微分方程，并求全微分方程的通解：

(1) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$;

(2) $(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=0$;

(3) $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$;

(4) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

(5) $(x^2-y)dx-xdy=0$;

(6) $y(x-2y)dx-x^2dy=0$;

(7) $(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$;

(8) $(x^2+y^2)dx+xydy=0$.

解 (1) 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12xy$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以此方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy=$$

$$\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y(6x^2y+4y^3)dy=$$

$$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3$$

故通解为

$$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C$$

(2) 因 $Q_x=-2(x+y)=P_y$，原方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x a^2dx+\int_0^y-(x+y)^2dy=$$

$$a^2x+\frac{x^3}{3}-\frac{(x+y)^3}{3}=$$

$$a^2x-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}$$

故通解为

$$a^2x-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}=C$$

(3) 因 $Q_x=e^y=P_y$，此方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x dx+\int_0^y(xe^y-2y)dy=xe^y-y^2$$

故通解为

$$xe^y-y^2=C$$

(4) 方程化为

$$(-y\sin x+\sin y)dx+(x\cos y+\cos x)dy=0$$

因为 $Q_x=\cos y-\sin x=P_y$，所以方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x 0dx+\int_0^y(x\cos y+\cos x)dy=$$

$$x\sin y+y\cos x$$

故通解为

$$x\sin y+y\cos x=C$$

(5) 因 $Q_x=-1=P_y$，此方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_0^x x^2dx+\int_0^y-xdy=\frac{x^3}{3}-xy$$

故通解为

$$\frac{x^3}{3}-xy=C$$

(6) 因 $Q_x=-2x$，$P_y=x-4y$. $Q_x\neq P_y$，故此方程不是全微分方程.

(7) 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial\rho}=2e^{2\theta}=\dfrac{\partial P}{\partial\theta}$，所以此方程为全微分方程.

$$u(\rho,\theta)=\int_0^\rho P(\rho,0)d\rho+\int_0^\theta Q$$

$$\int_0^{\rho} 2\mathrm{d}\rho + \int_0^{\theta} 2\rho e^{2\theta}\mathrm{d}\theta =$$

$$\rho + \rho e^{2\theta}$$

故通解为
$$\rho + \rho e^{2\theta} = C$$

(8) 因 $Q_x = y, P_y = 2y, Q_x \neq P_y$，故此方程不是全微分方程．

2. 利用观察法求出下列方程的积分因子，并求其通解：

(1) $(x+y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y) = \mathrm{d}x+\mathrm{d}y$；

(2) $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + y^2 x\mathrm{d}x = 0$；

(3) $y^2(x-3y)\mathrm{d}x + (1-3y^2x)\mathrm{d}y = 0$；

(4) $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = (x^2+y^2)\mathrm{d}x$；

(5) $(x-y^2)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0$；

(6) $2y\mathrm{d}x - 3xy^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$.

解 (1) 用 $\frac{1}{x+y}$ 乘以方程两边：

$$\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y},\quad \mathrm{d}(x-y) = \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y}$$

通解为
$$x - y - \ln(x+y) = C$$

故 $\frac{1}{x+y}$ 是积分因子．

(2) 用 $\frac{1}{y^2}$ 乘以方程两边：

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} + x\mathrm{d}x = 0$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

故通解为 $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$，$\frac{1}{y^2}$ 是积分因子．

(3) 用 $\frac{1}{y^2}$ 乘以方程两边：

$$x\mathrm{d}x - 3y\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{y^2} - 3x\mathrm{d}y = 0$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2} - 3xy - \frac{1}{y}\right) = 0$$

故 $\frac{x^2}{2} - 3xy - \frac{1}{y} = C$ 为通解，$\frac{1}{y^2}$ 为积分因子．

(4) 用 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 乘以方程两边：

$$\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}x,\quad \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} = \mathrm{d}x$$

通解为 $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - x = C$，$\frac{1}{x^2+y^2}$ 为积分因子．

(5) 用 $\frac{1}{x^2}$ 乘以方程两边：

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{x\mathrm{d}y^2 - y^2\mathrm{d}x}{x^2} = 0,\quad \mathrm{d}\left(\ln x + \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

通解为 $\ln x + \frac{y^2}{x} = C$. 积分因子为 $\frac{1}{x^2}$.

(6) 方程两边乘以 $\frac{x}{y^2}$，$\frac{y\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}y}{y^2} - 3x^2\mathrm{d}x = 0$，$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y} - x^3\right) = 0$.

故 $\frac{x^2}{y} - x^3 = C$ 为通解，$\frac{x}{y^2}$ 为积分因子．

3. 验证 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是微分方程

$$yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$$

的积分因子，并求下列方程的通解：

(1) $y(x^2y^2+2)\mathrm{d}x + x(2-2x^2y^2)\mathrm{d}y = 0$；

(2) $y(2xy+1)\mathrm{d}x + x(1+2xy-x^3y^3)\mathrm{d}y = 0$.

解 对于方程

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}[yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y] = 0 \qquad (*)$$

$$Q_x = \left[\frac{g(xy)}{y[f(xy)-g(xy)]}\right]_x' = \left\{\frac{f(xy)g'(xy) - f'(xy)g(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2}\right\}$$

$$P_y = \left[\frac{f(xy)}{x[f(xy)-g(xy)]}\right]_y' = \left\{\frac{f(xy)g'(xy) - f'(xy)g(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2}\right\}$$

$Q_x = P_y$，故 $(*)$ 为全微分方程，$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是方程 $yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = 0$ 的积分因子．

(1) 这里 $f(xy) = x^2y^2+2, g(xy) = 2-2x^2y^2$，因此

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]} = \frac{1}{3x^3y^3}$$

是方程的积分因子，于是

$$\frac{y(x^2y^2+2)}{3x^3y^3}dx+\frac{x(2-2x^2y^2)}{3x^3y^3}dy=0$$

为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,1)dx+\int_1^y Q(x,y)dy=$$

$$\int_1^x \frac{x^2+2}{3x^3}dx+\int_1^y \frac{2-2x^2y^2}{3x^2y^3}dy=$$

$$\frac{1}{3}\left(\ln\frac{x}{y^2}+1-\frac{1}{x^2y^2}\right)$$

故通解为
$$\ln\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x^2y^2}=\ln C$$

即
$$x=Cy^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}$$

(2) 这里 $f(xy)=2xy+1, g(xy)=1+2xy-x^3y^3$, 因此

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{x^4y^4}$$

是方程的积分因子. 于是

$$\frac{y(2xy+1)}{x^4y^4}dx+\frac{x(1+2xy-x^3y^3)}{x^4y^4}dy=0$$

是全微分方程.

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,1)dx+\int_1^y Q(x,y)dy=$$

$$\int_1^x \frac{2x+1}{x^4}dx+\int_1^y \frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4}dy=$$

$$\left[-x^{-2}+\frac{x-3}{-3}\right]_1^x+\left[\frac{1}{x^3}\frac{y^{-3}}{-3}+\frac{2}{x^2}\frac{y^{-2}}{-2}-\ln y\right]_1^y=$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1+3xy}{x^3y^3}+3\ln y\right)+\frac{4}{3}$$

故通解为
$$\frac{1+3xy}{x^3y^3}+3\ln y=C$$

4. 证明 $\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})$ 是微分方程 $xdy-ydx=0$ 的一个积分因子.

证 对于方程

$y'-f(x)y=x$

$$\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})(xdy-ydx)=0$$

$\frac{dy}{dx}-f(x)y=x$

$$Q_x=\left[\frac{1}{x}f(\frac{y}{x})\right]_x'=-\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})+\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})\frac{-y}{x^2}$$

$dy-f(x)y\,dx=x\,dx$

$$P_y=\left[\frac{-y}{x^2}f(\frac{y}{x})\right]_y'=\frac{-1}{x^2}f(\frac{y}{x})+\frac{-y}{x^2}f'(\frac{y}{x})\frac{1}{x}$$

$Q_x=P_y$, 因此$\frac{1}{x^2}f(\frac{y}{x})$ 是原方程的一个积分因子.

习题 12-7

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $y''=x+\sin x$; (2) $y'''=xe^x$;

(3) $y''=\frac{1}{1+x^2}$; (4) $y''=1+y'^2$;

(5) $y''=y'+x$; (6) $xy''+y'=0$;

(7) $yy''+1=y'^2$; (8) $y^3y''-1=0$;

(9) $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$; (10) $y''=(y')^3+y'$.

解 (1) $y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1$

$$y=\int(\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1)dx=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$$

(2) $y''=\int xe^xdx=e^x(x-1)+C_1$

$$y'=\int[e^x(x-1)+C_1]dx=e^x(x-2)+C_1x+C_2$$

$$y=\int[e^x(x-2)+C_1x+C_2]dx=$$

$$e^x(x-3)+C_1x^2+C_2x+C_3$$

(3) $y'=\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C_1$

$$y=\int[\arctan x+C_1]dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$$

(4) 令 $y'=p$, 则 $y''=p'$. 原方程化为 $p'=1+p^2$. 解得

$$\arctan p=x+C_1$$

$$\frac{dy}{dx}=p=\tan(x+C_1)$$

通解为
$$y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$$

(5) 令 $y'=p$, 则 $y''=p'$. 代入原方程, 得 $p'=p+x$.

解得 $$\frac{dy}{dx}=p=-1-x+C_1e^x$$

通解为 $y=\int(-1-x+C_1e^x)dx$，即 $y=-x-\frac{x^2}{2}+C_1e^x+C_2$.

(6) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$. 原方程化为 $xp'+p=0$.

解得 $$\frac{dy}{dx}=p=\frac{C_1}{x}$$

通解为 $$y=C_1\ln x+C_2$$

(7) 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$. 代入原方程，得

$$y\frac{dp}{dy}p+1=p^2,\quad \int\frac{pdp}{p^2-1}=\int\frac{dy}{y}$$

当 $|y'|=|p|>1$ 时，$\frac{1}{2}\ln(p^2-1)=\ln y+\ln C_1$.

$$p^2-1=(C_1y)^2,\quad \frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{(C_1y)^2+1}$$

解得 $$\operatorname{arsh}(C_1y)=\pm C_1x+C_2,\quad y=\frac{1}{C_1}\operatorname{sh}(C_2\pm C_1x).$$

当 $|y'|=|p|<1$ 时

$$\frac{1}{2}\ln(1-p^2)=\ln y+\ln C_1,\quad 1-p^2=(C_1y)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{1-(C_1y)^2}$$

解得 $$y=\frac{1}{C_1}\sin(C_2+C_1x)$$

(8) 设 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$. 原方程化为

$$y^3\frac{dp}{dy}p-1=0$$

解得 $$\frac{dy}{dx}=p=\pm\frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y}$$

通解为 $$x=\pm\frac{1}{C_1}(C_1y^2-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{C_2}{C_1}$$

即 $$(C_1x+C_2)^2=C_1y^2-1$$

(9) 设 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$. 代入原方程

$$\frac{dp}{dy}p=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

解得 $$\frac{dy}{dx}=p=\pm2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\quad x+C_2=\pm\int\frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}$$

而 $$\int\frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=\int\frac{(\sqrt{y}C_1)-C_1}{2\sqrt{y}\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}dy=$$

$$\int\frac{(\sqrt{y}+C_1)-C_1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}d(\sqrt{y}+C_1)=$$

$$\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{1}{2}}$$

通解为 $$x+C_2=\pm\left[\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{1}{2}}\right]$$

(10) 设 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$ 原方程化为

$$\frac{dp}{dy}p=p^3+p$$

解得 $$\arctan p=y-C_1$$

$$\frac{dy}{dx}=p=\tan(y-C_1)$$

通解为 $$x+C_2=\ln|\sin(y-C_1)|$$

即 $$y=\arcsin(Ce^x)+C_1\qquad(C=e^{C_2})$$

2. 求下列各微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y^3y''+1=0$，$y|_{x=1}=1$，$y'|_{x=1}=0$；

(2) $y''-ay'^2=0$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=-1$；

(3) $y'''=e^{ax}$，$y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$；

(4) $y''=e^{2y}$，$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$；

(5) $y''=3\sqrt{y}$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$；

(6) $y''+(y')^2=1$，$y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$.

解 (1) 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$. 原方程化为 $y^3\frac{dp}{dy}p+1=0$.

解得 $$p^2=y^{-2}+C_1$$

当 $x=1$ 时，$y=1$，$p=y'=0$. 得 $C_1=-1$，于是

$$\frac{dy}{dx}=p=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

解得
$$\pm x+C_2=-\sqrt{1-y^2}$$
当 $x=1$ 时，$y=1$，得 $C_2=\mp 1$. 于是 $\pm(x-1)=-\sqrt{1-y^2}$.

即
$$y=\sqrt{2x-x^2}$$

（2）设 $y'=p$，则 $y''=p'$. 原方程化为 $p'-ap^2=0$，解得 $-\frac{1}{p}=ax+C_1$.
当 $x=0$ 时，$p=y'=-1$，得 $C_1=1$. 于是
$$\frac{dy}{dx}=p=-\frac{1}{ax+1}$$
$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2$$
由 $y|_{x=0}=0$，得 $C_2=0$. 故所求特解为
$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$$
另可令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$ … （略）.

（3）$y''=\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C_1$. 由 $y''|_{x=1}=0$，得 $C_1=-\frac{e^a}{a}$.
$$y''=\frac{e^{ax}}{a}-\frac{e^a}{a},\quad y'=\int\left(\frac{e^{ax}}{a}-\frac{e^a}{a}\right)dx=\frac{e^{ax}}{a^2}-\frac{e^a}{a}x+C_2$$
由 $y'|_{x=1}=0$，得 $C_2=\frac{e^a}{a}-\frac{e^a}{a^2}$. 于是
$$y'=\frac{e^{ax}}{a^2}-\frac{e^a}{a}x+\frac{e^a}{a}-\frac{e^a}{a^2}$$
$$y=\int\left(\frac{e^{ax}}{a^2}-\frac{e^a}{a}x+\frac{e^a}{a}-\frac{e^a}{a^2}\right)dx=$$
$$\frac{e^{ax}}{a^3}-\frac{e^a}{2a}x^2+\frac{e^a}{a}x-\frac{e^a}{a^2}x+C_3$$
由 $y'|_{x=1}=0$，得 $C_3=\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$，所以
$$y=\frac{e^{ax}}{a^3}-\frac{e^a}{2a}x^2+\frac{e^a}{a^2}(a-1)x+\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$$

（4）令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$，原方程化为
$$\frac{dp}{dy}p=e^{2y}$$
解得
$$p^2=e^{2y}+C_1$$

由 $x=0$ 时，$y=0$，$y'=0$，得 $C_1=-1$. 于是
$$\frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{e^{2y}-1},\quad \int\frac{e^{-y}dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm\int dx$$
$$\arcsin e^{-y}=\mp x+C_2$$
由 $y|_{x=0}=0$，得 $\sin C=1$，$C=\frac{\pi}{2}$. 于是 $e^{-y}=\sin(\mp x+\frac{\pi}{2})$，$e^{-y}=\cos x$.
所求特解为
$$y=\ln\sec x$$

（5）令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$，原方程化为
$$\frac{dp}{dy}p=3\sqrt{y}$$
解得
$$p^2=4y^{\frac{3}{2}}+C_1$$
当 $x=0$ 时，$y=1$，$p=y'=2$，得 $C_1=0$. 于是
$$\frac{dy}{dx}=p=2y^{\frac{3}{4}}\quad（取＋号）$$
解得
$$4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2$$
当 $x=0$ 时，$y=1$，得 $C_2=4$. 故
$$y=\left(\frac{x}{2}+1\right)^4$$

（6）令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$，原方程化为
$$\frac{dp}{dy}p+p^2=1$$
积分
$$\int\frac{-2p}{1-p^2}dp=-2\int dy$$
得
$$\ln(1-p^2)=-2y+C_1$$
由 $y'|_{x=0}=p|_{x=0}=0$，得 $C_1=0$，$\frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}$.
积分
$$\int\frac{e^y}{\sqrt{e^{2y}-1}}dy=\pm\int dx$$
得
$$\operatorname{arch}e^y=\pm x+C_2$$
再由 $y|_{x=0}=0$，得 $C_2=0$（因 $1=\operatorname{ch}C_2=\frac{e^{C_2}+e^{-C_2}}{2}$）. 于是 $e^y=\operatorname{ch}x$. 所求特解为 $y=\ln\operatorname{ch}x$.

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解 由 $y''=x$,得

$$y'=\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$y=\int(\frac{x^2}{2}+C_1)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

由 $x=0$ 时,$y=1,y'=\frac{1}{2}$,得 $C_1=\frac{1}{2},C_2=1$,故所求曲线为

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+1$$

4. 设有一质量为 m 的物体,在空中由静止开始下落,如果空气阻力为 $R=c^2v^2$(其中 c 为常数,v 为物体运动的速度),试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 依题意

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-c^2v^2 \\ s(0)=0,v(0)=0 \end{cases}$$

$$\int\frac{m\mathrm{d}v}{mg-c^2v^2}=\int\mathrm{d}t$$

即 $$t+C_1=\int\frac{m\mathrm{d}v}{mg-c^2v^2}=$$

$$m\frac{1}{2\sqrt{mg}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{mg}+cv}+\frac{1}{\sqrt{mg}-cv}\right)\mathrm{d}v=$$

$$\frac{\sqrt{m}}{2c\sqrt{g}}\ln\left(\frac{\sqrt{mg}+cv}{\sqrt{mg}-cv}\right)$$

由 $t=0$ 时,$v=0$,得 $C_1=0$. 整理得

$$\frac{\sqrt{mg}+cv}{\sqrt{mg}-cv}=\exp\left[\frac{2c\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t\right]\xlongequal{\text{记}}e^{2at}\quad\left(a\triangleq c\sqrt{\frac{g}{m}}\right)$$

解得 $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=\frac{\sqrt{mg}}{c}\frac{e^{at}-e^{-at}}{e^{at}+e^{-at}}=\frac{\sqrt{mg}}{c}\mathrm{th}(at)$$

因此 $$s=\frac{\sqrt{mg}}{c}\int\mathrm{th}(at)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{mg}}{c}\cdot\frac{1}{a}\ln\mathrm{ch}(at)+c_2=$$

$$\frac{m}{c^2}\ln\mathrm{ch}(at)+c_2$$

由 $s(0)=0$,得 $c_2=0$. 故

$$s=\frac{m}{c^2}\ln\mathrm{ch}(at)=\frac{m}{c^2}\ln\mathrm{ch}\left(c\sqrt{\frac{g}{m}}t\right)$$

习题 12－8

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1) x,x^2;　　(2) $x,2x$;

(3) $e^{2x},3e^{2x}$;　　(4) e^{-x},e^x;

(5) $\cos2x,\sin2x$;　　(6) e^{x^2},xe^{x^2};

(7) $\sin2x,\cos x\sin x$;　　(8) $e^x\cos2x,e^x\sin2x$;

(9) $\ln x,x\ln x$;　　(10) $e^{ax},e^{bx}(a\neq b)$.

解 (略) 线性无关的函数组有:(1),(4),(5),(6),(8),(9),(10),其余的线性相关.

2. 验证 $y_1=\cos\omega x$ 及 $y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2y=0$ 的解,并写出该方程的通解.

解 $y_1'=-\omega\sin\omega x$, $y_1''=-\omega^2\cos\omega x$

$$y_1''+\omega^2y_1=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cos\omega x\equiv0$$

故 y_1 是方程的解.

同理 $$y_2''=-\omega^2\sin\omega x$$

$$y_2''+\omega^2y_2=-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\sin\omega x\equiv0$$

即 y_2 也是方程的解.

又 $\frac{y_2}{y_1}=\tan\omega x\neq$ 常数,即 y_1,y_2 线性无关,故方程的通解为

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$$

3. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解,并写出该方程的通解.

解 $$y_1'=2xe^{x^2},\quad y_1''=2(1+2x^2)e^{x^2}$$

$$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=$$

$$2(1+2x^2)e^{x^2}-4x\cdot2xe^{x^2}+(4x^2-2)e^{x^2}\equiv0$$

$y''+y=e^x\cos x$　　$y''+y=e^x$

即 y_1 是方程的解．同理可验证 y_2 是方程的解．又 $\frac{y_2}{y_1}=x\neq$ 常数，y_1 与 y_2 线性无关．故原方程的通解为

$$y=C_1e^{x^2}+C_2xe^{x^2}$$

4. 验证：

(1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$（$C_1,C_2$ 是任意常数）是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解；

(2) $y=C_1\cos3x+C_2\sin3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$（$C_1,C_2$ 是任意常数）是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解；

(3) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$（C_1,C_2 是任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解；

(4) $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$（$C_1,C_2$ 是任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解；

(5) $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$（$C_1,C_2$ 是任意常数）是方程 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的通解．

解 (1) 设 $y_1=e^x,y_2=e^{2x},y^*=\frac{e^{5x}}{12}$.

由于 $y_1=y_1'=y_1''=e^x$，$y_1''-3y_1'+2y_1\equiv0$，故 y_1 是对应线性齐次方程的解，类似可证 y_2 亦然．又 $\frac{y_2}{y_1}=e^x\neq$ 常数，y_1 与 y_2 线性无关，故 y_1,y_2 是对应线性齐次方程的两个线性无关解．对于 y^*，$y^{*\prime}=\frac{5e^{5x}}{12}$，$y^{*\prime\prime}=\frac{25e^{5x}}{12}$ 有

$$y^{*\prime\prime}-3y^{*\prime}+2y^*=\frac{25}{12}e^{5x}-3\times\frac{5}{12}e^{5x}+2\times\frac{e^{5x}}{12}=e^{5x}$$

即 y^* 为线性非齐次方程的特解．

故

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{e^{5x}}{12}$$

是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解．

(2)～(5)（略）．

习题 12－9

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''+y'-2y=0$；　(2) $y''-4y'=0$；

(3) $y''+y=0$；　(4) $y''+6y'+13y=0$；

(5) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$；　(6) $y''-4y'+5y=0$；

(7) $y^{(4)}-y=0$；　(8) $y^{(4)}+2y''+y=0$；

(9) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$；　(10) $y^{(4)}+5y''-36y=0$.

解 (1) $r^2+r-2=0,\quad r_1=-2,\quad r_2=1$

通解为
$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$$

(3) $r^2+1=0,\quad r_{1,2}=\pm i$

通解为
$$y=e^{0\cdot x}(C_1\cos x+C_2\sin x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

(5) $4r^2-20r+25=0,\quad r_1=r_2=\frac{5}{2}$

通解为
$$x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$$

(7) $r^4-1=0,\quad r_{1,2}=\pm1,\quad r_{3,4}=\pm i$

通解为
$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

(9) $r^4-2r^3+r^2=0,\quad r_1=r_2=0,\quad r_3=r_4=1$

通解为
$$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$$

答 (2) $y=C_1+C_2e^{4x}$；

(4) $y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$；

(6) $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$；

(8) $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$；

(10) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos3x+C_4\sin3x$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y''-4y'+3y=0,y|_{x=0}=6,y'|_{x=0}=10$；

(2) $4y''+4y'+y=0,y|_{x=0}=2,y'|_{x=0}=0$；

(3) $y''-3y'-4y=0,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=-5$；

(4) $y''+4y'+29y=0,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=15$；

(5) $y''+25y=0,y|_{x=0}=2,y'|_{x=0}=5$；

(6) $y''+4y'+13y=0,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=3$.

解 (2) $4r^2+4r+1=0,\quad r_1=r_2=-\frac{1}{2}$

通解为
$$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}}$$

由 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2-\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{2}x\right]\Big|_{x=0}=0$，得

$$\begin{cases}2=C_1\\0=C_2-\dfrac{C_1}{2}\end{cases}\quad (C_1=2,\ C_2=1)$$

故所求特解为 $y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$.

(3) $r^2-3r-4=0,\quad r_1=-1,\quad r_2=4$

通解为 $$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=(-C_1e^{-x}+4C_2e^{4x})|_{x=0}=-5$，得

$$\begin{cases}0=C_1+C_2\\-5=-C_1+4C_2\end{cases}\quad (C_1=1,\ C_2=-1)$$

所求特解为 $y=e^{-x}-e^{4x}$.

(4) $r^2+4r+29=0,\quad r_{1,2}=-2\pm 5i$

通解为 $$y=e^{-2x}[C_1\cos 5x+C_2\sin 5x]$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=e^{-2x}[(-5C_1\sin 5x+5C_2\cos 5x)-2(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)]|_{x=0}=15$，得

$$\begin{cases}0=C_1\\15=5C_2-2C_1\end{cases}\quad (C_1=0,\ C_2=3)$$

所求特解为 $y=e^{-2x}3\sin 5x$

答 (1) $y=4e^x+2e^{2x}$；

(5) $y=2\cos 5x+\sin 5x$；

(6) $y=e^{2x}\sin 3x$.

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动，开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0，在运动过程中，它受到一个力的作用，这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1>0$) 而方向与初速一致．又介质的阻力与速度成正比(比例系数 $k_2>0$)，求反映这质点的运动规律的函数．

解 设数轴为 x 轴．依题意，质点受力为 $F=k_1x-k_2x'$，根据牛顿第二定律

$$x''=k_1x-k_2x'$$

$$\begin{cases}x''+k_2x'-k_1x=0\\x(0)=0, x'(0)=v_0\end{cases}$$

解特征方程 $r^2+k_2r-k_1=0$，得

$$r_{1,2}=\frac{-k_2\pm\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}$$

故通解为

$$x=C_1\exp\left\{\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t\right\}+C_2\exp\left\{\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t\right\}$$

由 $x(0)=0, x'(0)=v_0$，得

$$C_1=-\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}},\quad C_2=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}$$

故质点运动规律函数为

$$x=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}\left[\exp\left(\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t\right)-\exp\left(\frac{-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}t\right)\right]$$

4. 在(教材 P387) 图 12-7 所示的电路中先将开关 K 拨向 A，达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B，求电压 $u_C(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E=20$ V(伏)，$C=0.5\times10^{-6}$ F(法)，$L=0.1$ H(亨)，$R=2\ 000\ \Omega$.

解 $t=0$ 时，撤去外电源，$u_C(0)=E=20, i(0)=0$. 由电学知识，

$$i=\frac{dq}{dt},\quad u_C=\frac{q}{C},\quad E_L=-L\frac{di}{dt}\quad (q=q(t)\text{：电量})$$

根据基尔霍夫回路电压定律，得

$$-L\frac{di}{dt}-Ri-\frac{q}{C}=0$$

即 $$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

而 $$\frac{R}{L}=\frac{2\ 000}{0.1}=2\times10^4$$

$$\frac{1}{LC}=\frac{1}{0.1\times0.5\times10^{-6}}=\frac{1}{5}\times10^8$$

所以

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\times10^4\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{5}\times10^8u_C=0$$

解特征方程

$$r^2+2\times10^4r+\frac{1}{5}\times10^8=0,\quad r_1\approx-1.9\times10^4,\quad r_2\approx-10^3$$

$$u_C=C_1e^{-1.9\times10^4t}+C_2e^{-10^3t}$$

$$u_C'=-1.9\times10^4C_1e^{-1.9\times10^4t}-10^3C_2e^{-10^3t}$$

由 $t=0$ 时，$u_C=E=20$，$u_C'=\frac{i}{C}=0$，得 $C_1=-\frac{10}{9}$，$C_2=\frac{190}{9}$.

故 $$u_C(t)=\frac{10}{9}(19e^{-10^3t}-e^{-1.9\times10^4t})\ (\mathrm{V})$$

$$i(t)=Cu_C'=\frac{19}{18}\times10^{-2}(e^{-1.9\times10^4t}-e^{-10^3t})\ (\mathrm{A})$$

5. 设圆柱形浮筒，直径为 0.5 m，铅直放在水中，当稍微向下压后突然放开，浮筒在水中上下振动的周期为 2s，求浮筒的质量.

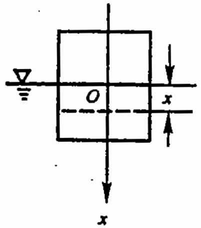


图 12-6

解 设 ρ 为水的密度，s 为浮筒横截面的面积.

当浮筒下移 x 时，受浮力

$$f=-\rho gsx$$

根据牛顿第二定律

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\rho gsx$$

解特征方程 $r^2+\frac{\rho gs}{m}=0$，得

$$r_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{\rho gs}{m}}$$

故通解为

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{\rho gs}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{\rho gs}{m}}t=$$

$$A\sin\left(\sqrt{\frac{\rho gs}{m}}t+\varphi\right)$$

于是 $\omega=\sqrt{\frac{\rho gs}{m}}$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gs}}$. 又 $T=2$，解得 $m=\frac{\rho gs}{\pi^2}$.

已知 $\rho=1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，直径 $D=0.5$ m. 故

$$m=\frac{\rho gs}{\pi^2}=\frac{\rho gD^2}{4\pi}=\frac{1\,000\times9.8\times0.5^2}{4\pi}=195\ \mathrm{kg}$$

习题 12-10

1. 求下列各微分方程的通解：

(1) $2y''+y'-y=2e^x$；　(2) $y''+a^2y=e^x$；

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$；　(4) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$；

(5) $y''-2y'+5y=e^x\sin2x$；　(6) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$；

(7) $y''+5y'+4y=3-2x$；　(8) $y''+4y=x\cos x$；

(9) $y''+y=e^x+\cos x$；　(10) $y''-y=\sin^2x$.

解 (4) 特征方程为 $r^2+3r+2=0$，$r_1=-2$，$r_2=-1$，对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$$

由于 $f(x)=3xe^{-x}$，$\lambda=-1$ 是特征方程的单根，可设

$$y^*=x(Ax+B)e^{-x}$$

则 $$y^{*\prime}=-e^{-x}[Ax^2+(B-2A)x-B]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{-x}[Ax^2+(B-4A)x+(2A-2B)]$$

代入原方程，得

$$[2Ax+(2A+B)]e^{-x}=3xe^{-x}$$

消去 e^{-x}，比较系数得 $A=\frac{3}{2}$，$B=-3$. $y^*=e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$.

故原方程通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$$

(5) $r^2-2r+5=0$，$r_1=1\pm2i$. 对应齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$$

因为 $f(x)=e^x\sin2x$，$\lambda=1$，$\omega=2$，$\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的单根，可设

$$y^*=xe^x(A\cos2x+B\sin2x)$$

则 $$y^{*\prime}=e^x\{[(A+2B)x+A]\cos2x+[(B-2A)x+B]\sin2x)\}$$

$$y^{*\prime\prime}=e^x\{[(4B-3A)x+2(A+2B)]\cos2x+$$
$$[-(4A+3B)x+(2B-4A)]\sin2x\}$$

代入原方程，整理得

$$e^x[4B\cos2x-4A\sin2x]=e^x\sin2x$$

消去 e^x，比较系数得 $A=-\frac{1}{4}$，$B=0$，$y^*=-\frac{x}{4}e^x\cos2x$. 故通解为

$$y=e^{x}[C_1\cos2x+C_2\sin2x]-\frac{x}{4}e^{x}\cos2x$$

(6) $r^2-6r+9=0, r_1=r_2=3$,对应齐次方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{3x}$$

由于 $f(x)=(x+1)e^{3x}$, $\lambda=3$ 是特征方程的二重根,可设

$$y^*=x^2(Ax+B)e^{3x}$$

则
$$y^{*\prime}=[3Ax^3+(3A+3B)x^2+2Bx]e^{3x}$$
$$y^{*\prime\prime}=[9Ax^3+(15A+9B)x^2+(6A+12B)x+2B]e^{3x}$$

代入原方程,得

$$(6Ax+2B)e^{3x}=(x+1)e^{3x}$$

消去 e^{3x},比较系数得 $A=\frac{1}{6}, B=\frac{1}{2}$, $y^*=\frac{x^2}{6}(x+3)e^{3x}$. 故通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{x^3}{6}(x+3)e^{3x}$$

(8) $r^2+4=0, r_{1,2}=\pm2i$,对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$$

由于 $f(x)=x\cos x$, $\lambda=0$, $\omega=1$, $\lambda+i\omega=i$ 不是特征方程的根,可设

$$y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$$

则
$$y^{*\prime}=(Cx+A+D)\cos x+(C-B-Ax)\sin x$$
$$y^{*\prime\prime}=(2C-B-Ax)\cos x+(-2A-B-Cx)\sin x$$

代入原方程,得

$$(3Ax+3B+2C)\cos x+(3Cx+3D-2A)\sin x=x\cos x$$

比较系数得 $A=\frac{1}{3},\quad B=0,\quad C=0,\quad D=\frac{2}{9}$

$$y^*=\frac{x}{3}\cos x+\frac{2}{9}\sin x$$

故通解为

$$y=C_1\cos2x+C_2\sin2x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$$

(9) $r^2+1=0, r_{1,2}=\pm i$. 对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

由于 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=e^{x}+\cos x$,对于 $f_1(x)=e^{x}$, $\lambda=1$ 不是特征方程的根,可设 $y_1^*=Ae^{x}$. 对于 $f_2(x)=\cos x$, $\lambda=0$, $\omega=1$, $\lambda+i\omega=i$ 是特

征方程的单根,可设 $y_2^*=x(B\cos x+C\sin x)$.

将 y_1^* 和 y_2^* 分别代入方程 $y''+y=e^{x}$ 和 $y''+y=\cos x$.

比较系数解得 $y_1^*=\frac{e^{x}}{2}$, $y_2^*=\frac{x}{2}\sin x$. 原方程特解为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{e^{x}}{2}+\frac{x}{2}\sin x$$

故通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^{x}}{2}+\frac{x}{2}\sin x$$

(10) $r^2-1=0, r_{1,2}=\pm1$,对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$$

由于 $f(x)=\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2x$,对于 $f_1(x)=\frac{1}{2}$,设 $y_1^*=A$,对于 $f_2(x)=-\frac{1}{2}\cos2x$,设 $y_2^*=B\cos2x+C\sin2x$. 将 y_1^*, y_2^* 分别代入方程 $y''-y=\frac{1}{2}$, $y''-y=-\frac{1}{2}\cos2x$. 求得 $y_1^*=-\frac{1}{2}$, $y_2^*=\frac{\cos2x}{10}$,故特解为 $y^*=-\frac{1}{2}+\frac{\cos2x}{10}$,通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}-\frac{1}{2}+\frac{\cos2x}{10}$$

答 (1) $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^{x}$;

(2) $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^{x}}{1+a^2}$;

(3) $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$;

(7) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+\frac{11}{8}-\frac{1}{2}x$.

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解:

(1) $y''+y+\sin2x=0, y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$;

(2) $y''-3y'+2y=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$;

(3) $y''-10y'+9y=e^{2x}, y|_{x=0}=\frac{6}{7}, y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$;

(4) $y''-y=4xe^{x}, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$;

(5) $y''-4y'=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$.

解 (1) $r^2+1=0, r_{1,2}=\pm i$，对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

因 $f(x)=-\sin 2x, \lambda+i\omega=2i$ 不是根，可设 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$。代入原方程可得 $A=0, B=\frac{1}{3}, y^*=\frac{1}{3}\sin 2x$.

故通解为
$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$$

再由 $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$，得 $C_1=-1, C_2=-\frac{1}{3}$. 所求特解为

$$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$$

(4) $r^2-1=0, r=\pm 1$，对应齐次方程通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x$$

因 $f(x)=4xe^x, \lambda=1$ 是单根，可设 $y^*=x(Ax+B)e^x$. 代入方程可得 $A=1, B=-1, y^*=(x^2-x)e^x$. 通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^x+(x^2-x)e^x$$

再由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$，，得 $C_1=-1, C_2=1$，故所求特解为

$$y=e^x-e^{-x}+(x^2-x)e^x$$

(5) $r^2-4r=0, r_1=0, r_2=4$，对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{4x}$$

由于 $f(x)=5, \lambda=0$ 是单根，设 $y^*=Ax$. 代入方程得 $y^*=-\frac{5}{4}x$. 通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}-\frac{5}{4}x$$

再由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$，得 $C_1=\frac{11}{16}, C_2=\frac{5}{16}$，故所求特解为

$$y=\frac{11}{16}+\frac{5}{16}e^{4x}-\frac{5}{4}x$$

答 (2) $y=-5e^x+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}$;

(3) $y=\frac{1}{2}(e^{9x}+e^x)-\frac{1}{7}e^{2x}$.

3. 大炮以仰角 α，初速 v_0 发射炮弹，若不计空气阻力，求弹道曲线.

解 建立坐标系如图 12-7. 设炮弹坐标为 (x,y). 依题意，$x=v_0\cos\alpha\cdot t$. 坐标 y 满足方程：

$$\begin{cases} y''(t)=-g \\ y(0)=0, \quad y'(0)=v_0\sin\alpha \end{cases}$$

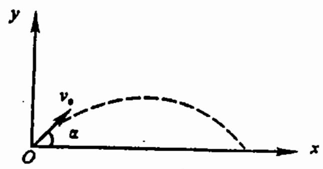


图 12-7

$$y'=-gt+C_1$$

$$y=\frac{-g}{2}t^2+C_1t+C_2$$

由 $y(0)=0, y'(0)=v_0\sin\alpha$，得

$C_1=v_0\sin\alpha, \quad C_2=0, \quad y=\frac{-g}{2}t^2+v_0\sin\alpha\cdot t$

弹道曲线为

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t \\ y=\frac{-g}{2}t^2+v_0\sin\alpha\cdot t. \end{cases}$$

4. 在 R,L,C 含源串联电路中，电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E=20\text{V}, C=0.2\ \mu\text{F}$(微法)，$L=0.1\ \text{H}$(亨)，$R=1\,000\ \Omega$，试求合上开关 K 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_C(t)$.

解 (参见教材 P368 例 2)

$$LCu_C''+RCu_C'+u_C=E, \quad u_C''+\frac{R}{L}u_C'+\frac{1}{LC}u_C=\frac{E}{LC}$$

$$\frac{R}{L}=\frac{1\,000}{0.1}=10^4, \quad \frac{1}{LC}=\frac{1}{0.02}\times 10^6=5\times 10^7, \quad \frac{E}{LC}=10^9$$

$$u_C''+10^4u_C'+5\times 10^7u_C=10^9$$

解得 $\quad u_C(t)=e^{-5\,000t}[C_1\cos(5\,000t)+C_2\sin(5\,000t)]+20$

$$i(t)=Cu_C'=5\,000Ce^{-5\,000t}[(C_2-C_1)\cos(5\,000t)-(C_1+C_2)\sin(5\,000t)]$$

由 $u_C(0)=0, i(0)=0$，得

$$C_1=C_2=-20$$

所以

$$u_C(t)=20-20e^{-5\,000t}[\cos(5\,000t)+\sin(5\,000t)]\text{(V)}$$

$$i(t)=40\times 5\,000\times 0.2\times 10^{-6}e^{-5\,000t}\sin(5\,000t)=$$
$$4\times 10^{-2}e^{-5\,000t}\sin(5\,000t)\ \text{(A)}$$

5. 一链条悬挂在一钉子上，起动时一端离开钉子 8 m，另一端离开钉子 12 m，分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间：

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力；

(2) 若摩擦力为链条 1 m 长的重量.

解 (1) 设 t 时刻链条较长一端长度为 x，链条线密度为 ρ，则链条受力为

$$f = x\rho g - (20 - x)\rho g = 2\rho g(x - 10)$$

由牛顿第二定律

$$20\rho x'' = 2\rho g(x - 10), \quad x'' - \frac{g}{10}x = -g$$

可求得上式之解为

$$x = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10$$

由 $t = 0$ 时，$x = 12$，$x' = 0$，得 $C_1 = C_2 = 1$. 于是

$$x = e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10$$

令 $x = 20$，由上式可解得

$$e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5 + 2\sqrt{6})\ \mathrm{s}$$

即为所求.

(2) 链条受力为

$$f = x\rho g - (20 - x)\rho g - \rho g = \rho g(2x - 21)$$

根据牛顿定律

$$20\rho x'' = \rho g(2x - 21), \quad x'' - \frac{g}{10}x = -1.05g$$

解得
$$x = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10.5$$

由 $x(0) = 12$，$x'(0) = 0$，得 $C_1 = C_2 = \frac{3}{4}$. 于是

$$x = \frac{3}{4}e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + \frac{3}{4}e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10.5$$

令 $x = 20$，解得

$$e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} = \frac{19 + 4\sqrt{22}}{3}$$

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(\frac{19 + 4\sqrt{22}}{3}\right)\ \mathrm{s}$$

6. 设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)\,dt - x\int_0^x \varphi(t)\,dt$$

求 $\varphi(x)$.

解 方程两边对 x 求导数，得

$$\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t)\,dt \qquad (*)$$

再求导数，得

$$\varphi''(x) = e^x - \varphi(x), \quad \varphi''(x) + \varphi(x) = e^x$$

在原方程和（*）式中令 $x = 0$，得 $\varphi(0) = 1$，$\varphi'(0) = 1$，所以

$$\begin{cases} \varphi''(x + \varphi(x) = e^x \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1 \end{cases}$$

解得
$$\varphi(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{e^x}{2}$$

由 $\varphi(0) = 1$，$\varphi'(0) = 1$，得 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. 故

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$$

*习题 12-11

求下列欧拉方程的通解：

1. $x^2y'' + xy' - y = 0$；
2. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$；
3. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$；
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2\ln x$；
5. $x^2y'' + xy' - 4y = x^3$；
6. $x^2y'' - xy' + 4y = x\sin(\ln x)$；
7. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2\ln x$；
8. $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2\ln x + 3x$.

解 以上均为欧拉方程，设 $x = e^t$，则 $t = \ln x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

代入原方程,得

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-y=0, y=C_1e^{-t}+C_2e^t=\dfrac{C_1}{x}+C_2x$

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=2e^t$

$$y=(C_1+C_2t)e^t+t^2e^t=(C_1+C_2\ln x)x+x\ln^2 x$$

3. $\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$

$$y=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{-2t}=C_1x+C_2x\ln x+\frac{C_3}{x^2}$$

4. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=t^2-2t$

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}=C_1x+C_2x^2+\frac{\ln^2 x}{2}+\frac{\ln x}{2}+\frac{1}{4}$$

5. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4y=e^{3t}$

$$y=C_1e^{-2t}+C_2e^{2t}+\frac{1}{5}e^{3t}=C_1\frac{1}{x^2}+C_2x^2+\frac{x^3}{5}$$

6. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+4y=e^t\sin t$

$$y=e^t[C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t]+\frac{1}{2}e^t\sin t=$$

$$x[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)]+\frac{x}{2}\sin(\ln x)$$

7. $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}+4y=e^t+te^{2t}$

$$y=(C_1+C_2t)e^{2t}+e^t+\frac{t^3}{6}e^{2t}=$$

$$(C_1+C_2\ln x)x^2+x+\frac{x^2}{6}\ln^3 x$$

8. $\dfrac{d^3y}{dt^3}-3\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}-2y=te^{2t}+3e^t$

$r^3-3r^2+4r-2=0. r_1=1, r_{2,3}=1\pm i$

对应齐次方程的通解为

$$y=C_1e^t+e^t[C_2\cos t+C_3\sin t]$$

因为 $f(t)=te^{2t}+3e^t$,对于 $f_1(t)=te^{2t}$,可求得 $y_1^*=\dfrac{t-2}{2}e^{2t}$;对于 $f_2(t)$

$=3e^t$,可求得 $y_2^*=3te^t$,故特解为 $y^*=\dfrac{t-2}{2}e^{2t}+3te^t$. 原方程的通解为

$$y=C_1e^t+e^t[C_2\cos t+C_3\sin t]+\frac{t-2}{2}e^{2t}+3te^t=$$

$$C_1x+x[C_2\cos(\ln x)+C_3\sin(\ln x)]+\frac{x^2}{2}(\ln x-2)+3x\ln x$$

习题 12-12

1. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

(1) $y'-xy-x=1$;

(2) $y''+xy'+y=0$;

(3) $xy''-(x+m)y'+my=0$(m 为自然数);

(4) $(1-x)y'=x^2-y$;

(5) $(x+1)y'=x^2-2x+y$.

解 (1) 设 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$,则

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

代入原方程,得

$$(a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)-$$
$$x(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)-x=1$$
$$a_1+(2a_2-a_0)x+(3a_3-a_1)x^2+\cdots+$$
$$(na_n-a_{n-2})x^{n-1}+\cdots=1+x$$

比较系数,得

$$a_1=1,\quad a_3=\frac{1}{3},\quad a_5=\frac{1}{3\times5},\quad\cdots,\quad a_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)!!},$$

$a_{2n}=\dfrac{1+a_0}{(2n)!!}\quad(n=1,2,\cdots)$

$$y=a_0+x+\frac{1+a_0}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1+a_0}{2\times4}x^4+\frac{1}{3\times5}x^5+\cdots=$$

$$Ce^{\frac{x^2}{2}}+(-1+x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}+\cdots)$$

$$(C=a_0+1)$$

(3) 设 $y_1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则 $y_1'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,$y_1''=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$.

代入方程,得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-m\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

即 $m(a_0-a_1)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)na_{n+1}-na_n-m(n+1)a_{n+1}+ma_n]x^n=0$

$$m(a_0-a_1)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-a_n](n-m)x^n=0$$

比较系数，得

$$m(a_0-a_1)=0,\quad [(n+1)a_{n+1}-a_n](n-m)=0$$

即 $a_1=a_0,\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot a_{n-1}=$$

$$\frac{1}{(n+1)n(n-1)}a_{n-2}=\cdots=$$

$$\frac{1}{(n+1)!}a_1=\frac{1}{(n+1)!}a_0$$

取 $a_0=1$，则 $a_n=\dfrac{1}{n!}\quad(n=0,1,\cdots)$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$$

下面利用常数变易法求一个与 y_1 线性无关的特解 y_2.

设 $y_2=uy_1=e^xu(u=u(x)$ 待定)，代入原方程可得

$$x(u''+2u'+u)e^x-(x+m)(u'+u)e^x+mue^x=0$$

$$xu''+(x-m)u'=0$$

令 $p=u'$，则

$$p'=\frac{m-x}{x}p$$

$$\frac{du}{dx}=p=x^me^{-x}$$

$$u=\int x^me^{-x}dx\xlongequal{\text{记}}I_m$$

利用分部积分法

$$I_m=-x^me^{-x}+mI_{m-1},\quad I_0=-e^{-x}$$

$y_2=e^xI_m=-x^m+me^xI_{m-1}=$

$$-x^m+me^x(-x^{m-1}e^{-x}+(m-1)I_{m-2})=\cdots=$$

$$-x^m-mx^{m-1}-m(m-1)x^{m-2}-\cdots-m(m-1)\cdots2x-m!=$$

$$-m!\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}x^k$$

故原方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^x+C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\quad(C=-m!C_2)$$

(5) 设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则 $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^2-2x$$

$$(a_1-a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}]x^n=x^2-2x$$

比较系数得

$a_1-a_0=0,\quad 2a_2=-2,\quad a_2+3a_3=1$

$(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}=0\quad(n=3,4,\cdots)$

$a_1=a_0$(任意)，$a_2=-1,\quad a_3=\dfrac{2}{3},\quad a_{n+1}=-\dfrac{n-1}{n+1}a_n\quad(n=3,4,\cdots)$

于是 $a_4=-\dfrac{1}{3},\quad a_5=\dfrac{1}{5},\quad a_6=\dfrac{-2}{15},\cdots$

故通解为

$$y=C+Cx-x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{15}x^6+\cdots\quad(C\text{:任意})$$

答 (2) $y=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\left[x-\dfrac{x^3}{1\times3}+\dfrac{x^5}{1\times3\times5}-\cdots+\right.$

$$\left.(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{1\times3\times5\cdots(2n-1)}+\cdots\right];$$

(4) $y=C(1-x)+x^3\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{10}x^2+\cdots+\right.$

$$\left.\frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n+\cdots\right]$$

2. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=y^2+x^3,\ y|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$;

(2) $(1-x)y'+y=1+x,\quad y|_{x=0}=0$;

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0,\ x|_{t=0}=a,\ \dfrac{dx}{dt}|_{t=0}=0.$

解 (1) 由于 $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$，可设方程的解为

$$y=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

则 $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$. 代入原方程，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^3+\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2=$$

$$x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+[a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+(a_2^2+2a_1a_3)x^4+\cdots]$$

比较系数，得

$$a_1=\frac{1}{4},\quad 2a_2=a_1,\quad 3a_3=a_2+a_1^2,\quad 4a_4=1+a_3+2a_1a_2,\cdots$$

$$a_1=\frac{1}{4},\quad a_2=\frac{1}{8},\quad a_3=\frac{1}{16},\quad a_4=\frac{9}{32},\cdots$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots$$

(2) 由于 $y|_{x=0}=0$，可设方程的解为

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\quad (a_0=0)$$

则 $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，代入原方程，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x$$

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n]x^n=1+x$$

比较系数，得 $a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{(n-1)}{n+1}a_n\quad (n\geqslant 2)$

$$a_3=\frac{1}{2\times 3},\quad \cdots,\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)n},\cdots$$

$$y=x+\frac{1}{1\times 2}x^2+\frac{1}{2\times 3}x^3+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}+\cdots$$

答 (3) $x=a(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8-\cdots)$

总习题十二

1. 求以 $(x+C)^2+y^2=1$ 为通解的微分方程(其中 C 为任意常数).

解 方程两边对 x 求导数

$$2(x+C)+2yy'=0,(x+C)^2=y^2y'^2$$

消去 $(x+C)^2$，得 $y^2(y'^2+1)=1$，即为所求.

2. 求以 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 为通解的微分方程(其中 C_1,C_2 为任意常数).

解 $$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x},y''=C_1e^x+4C_2e^{2x}$$

于是

$$\begin{cases}y'-y=C_2e^{2x}\\ y''-y'=2C_2e^{2x}\end{cases}$$

消去 C_2e^{2x}，得 $y''-3y'+2y=0$. 即为所求.

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$；　(2) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$；

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2(\ln y-x)}$；　(4) $\frac{dy}{dx}+xy-x^3y^3=0$；

(5) $xdx+ydy+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$；　(6) $yy''-y'^2-1=0$；

(7) $y''+2y'+5y=\sin 2x$；　(8) $y'''+y''-2y'=x(e^x+4)$；

(9) $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$；　(10) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

解 (1) 原方程化为 $\frac{d}{dx}(xy)=2\sqrt{xy}$. 令 $u=xy$，得

$$u'=2\sqrt{u}$$

解得

$$\sqrt{u}=x+C$$

即

$$\sqrt{xy}=x+C$$

(2) 原方程化为

$$y'+\frac{1}{x\ln x}y=a\frac{\ln x+1}{\ln x}$$

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x\ln x}}\left[\int a\frac{\ln x+1}{\ln x}e^{\int\frac{dx}{x\ln x}}dx+C\right]=$$

$$e^{-\ln\ln x}\left[a\int\frac{\ln x+1}{\ln x}e^{\ln\ln x}dx+C\right]=$$

$$\frac{1}{\ln x}[ax\ln x+C]$$

通解为
$$y=\frac{C}{\ln x}+ax$$

(3) 原方程化为

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2x}{y}=\frac{2\ln y}{y}$$

$$x=e^{-2\int\frac{dy}{y}}\left(\int\frac{2\ln y}{y}e^{2\int\frac{dy}{y}}dy+C\right)=$$

$$\frac{1}{y^2}\left(\int 2y\ln y dy+C\right)=$$

$$\frac{1}{y^2}\left[y^2\left(\ln y-\frac{1}{2}\right)+C\right]$$

通解为
$$x=\frac{C}{y^2}+\ln y-\frac{1}{2}$$

(4) 令 $z=y^{1-3}=y^{-2}$，则 $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$，代入原方程

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$$

$$z=e^{\int 2x dx}\left(-2\int x^3 e^{\int -2x dx}dx+C\right)=$$

$$e^{x^2}\left(-2\int x^3 e^{-x^2}dx+C\right)=$$

$$e^{x^2}[e^{-x^2}(1+x^2)+C]$$

通解为
$$\frac{1}{y^2}=Ce^{x^2}+1+x^2$$

(5) 原方程化为

$$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=\frac{xdy-ydx}{x^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$d(x^2+y^2)=2\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$d(x^2+y^2)=2d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$

通解为
$$x^2+y^2-2\arctan\frac{y}{x}=C$$

(6) 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}p$. 代入原方程

$$y\frac{dp}{dy}p-p^2-1=0$$

积分 $\int\frac{pdp}{1+p^2}=\int\frac{dy}{y}$，得

$$\frac{dy}{dx}=p=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}$$

解得
$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right|=\pm x+C_2$$

$$\operatorname{arch}(C_1y)=\pm C_1x+C_1C_2$$

通解为
$$y=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x+C)$$

(7) $r^2+2r+5=0$，$r_{1,2}=-1\pm 2i$，对应齐次方程的通解为

$$Y=e^{-x}[C_1\cos 2x+C_2\sin 2x]$$

设 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$ ($\lambda+i\omega=2i$ 不是特征根)，代入原方程，得

$$y^*=-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x$$

故通解为

$$y=e^{-x}[C_1\cos 2x+C_2\sin 2x]-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x$$

(8) 答 $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}+\left(\frac{x^2}{6}-\frac{4}{9}x\right)e^x-x^2-x$.

(9) 原方程化为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y^3}{x}$$

令 $z=x^{1-(-1)}=x^2$，则 $\frac{dz}{dy}=2x\frac{dx}{dy}$，代入原方程

$$\frac{dz}{dy}-\frac{6}{y}z=-2y^3$$

$$z=e^{\int\frac{6}{y}dy}\left[\int -2y^3e^{-\int\frac{6}{y}dy}dy+C\right]=$$

$$y^6\left[-2\int y^{-3}dy+C\right]=$$

$$y^6[y^{-2}+C]$$

通解为
$$x^2=y^4+Cy^6$$

(10) 令 $u=\sqrt{x^2+y}$，则 $2u\dfrac{du}{dx}=2x+\dfrac{dy}{dx}$，代入原方程，得

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{u}+1\right)$$

再令 $v=\dfrac{u}{x}$，则 $\dfrac{du}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$，代入方程，得

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}+1\right),\quad \int\frac{v\,dv}{2v^2-v-1}=-\int\frac{dx}{2x}$$

而

$$\int\frac{v\,dv}{2v^2-v-1}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{2v+1}+\frac{1}{v-1}\right)dv=$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln|2v+1|+\ln|v-1|\right]=$$

$$\frac{1}{6}\ln|2v^3-3v^2+1|$$

因此

$$\frac{1}{6}\ln|2v^3-3v^2+1|=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{6}\ln C$$

$$2v^3-3v^2+1=\frac{C}{x^3}$$

将 $v=\dfrac{u}{x}$ 代入，得 $2u^3-3xu^2+x^3=C$，再将 $u=\sqrt{x^2+y}$ 代入，整理得

$$(x^2+y^2)^{3/2}=x^3+\frac{3}{2}xy+C$$

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$，$x=1$ 时，$y=1$；

(2) $y''-ay'^2=0$，$x=0$ 时，$y=0$，$y'=-1$；

(3) $2y''-\sin 2y=0$，$x=0$ 时，$y=\dfrac{\pi}{2}$，$y'=1$；

(4) $y''+2y'+y=\cos x$，$x=0$ 时，$y=0$，$y'=\dfrac{3}{2}$.

解 (1)

$$\frac{dx}{dy}-2\frac{x}{y}=-\frac{2x^2}{y^3}$$

令 $z=x^{1-2}=x^{-1}$，则 $\dfrac{dz}{dy}=-x^{-2}\dfrac{dx}{dy}$. 代入方程

$$\frac{dz}{dy}+\frac{2}{y}z=\frac{2}{y^3}$$

$$z=e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left[\int\frac{2}{y^3}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy+C\right]=$$

$$\frac{1}{y^2}\left[\int\frac{2}{y^3}y^2dy+C\right]=$$

$$\frac{1}{y^2}[2\ln y+C]$$

通解为

$$x=\frac{y^2}{2\ln y+C}$$

由 $y|_{x=1}=1$，得 $C=1$. 故所求解为 $y^2=x(2\ln y+1)$.

(2) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入方程，得 $p'=ap^2$.

解得

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{1}{-ax+C_1}$$

由 $y'|_{x=0}=-1$，得 $C_1=-1$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{ax+1}$.

解得

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2$$

由 $y|_{x=0}=0$，得 $C_2=0$. 故所求解为

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$$

(3) 令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{dp}{dy}p$. 代入原方程

$$2\frac{dp}{dy}p=\sin 2y,\quad p^2=-\frac{\cos 2y}{2}+C_1$$

由 $p|_{x=0}=y'\Big|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{2}}}=1$，得 $C_1=\dfrac{1}{2}$，$p^2=\sin^2y$，$\dfrac{dy}{dx}=p=\sin y$

解得

$$\ln|\csc y-\cot y|=x+C_2$$

由 $x=0$ 时，$y=\dfrac{\pi}{2}$，得 $C_2=0$. $x=\ln|\csc y-\cot y|=\ln\left|\tan\dfrac{y}{2}\right|$，故所求特解为 $y=2\arctan e^x$.

(4) $r^2+2r+1=0$，$r_1=r_2=-1$，对应齐次方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{-x}$$

设 $y^*=A\cos x+B\sin x$（因 $\lambda+i\omega=i$ 不是特征根）. 代入原方程，得

$$y^*=\frac{\sin x}{2}$$

故通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=\frac{3}{2}$，得 $C_1=0, C_2=1$. 故所求特解为

$$y=xe^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$$

5. 已知某曲线经过点(1,1)，它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求它的方程.

解　设曲线方程为 $y=y(x)$. 曲线上点 (x,y) 处切线的方程为：

$$Y-y=y'(x)(X-x)$$

令 $X=0$，得 y 截距 $Y=-xy'+y$.

由题意　$$-xy'+y=x,\quad y'-\frac{y}{x}=-1$$

$$y=e^{\int\frac{dx}{x}}[-\int e^{-\int\frac{dx}{x}}dx+C]=$$

$$x[-\int\frac{1}{x}dx+C]=$$

$$x[-\ln x+C]$$

由 $x=1$ 时 $y=1$，得 $C=1$. 故所求曲线的方程为

$$y=x(1-\ln x)$$

6. 已知某车间的容积为 30m×30m×6m，其中的空气含 0.12% 的 CO_2（以容积计算）. 现以含 CO_2 0.04% 的新鲜空气输入，问每分钟应输入多少，才能在 30 min 后使车间空气中 CO_2 的含量不超过 0.06%?（假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后，以相同的流量排出.）

解　设每分钟输入 a cm³ 含 CO_2 0.04% 的新鲜空气，t 时刻车间含 CO_2 浓度为 $x(t)$. 则 dt 时间内 CO_2 含量的改变为

$$5\,400\,dx=0.000\,4a\,dt-ax\,dt$$

$$\int\frac{dx}{0.000\,4-x}=\int\frac{a\,dt}{5\,400}$$

解得 $x=0.000\,4+Ce^{\frac{-a}{5\,400}t}$.

当 $t=0$ 时，$x=0.001\,2$，得 $C=0.000\,8$，因此

$$x=0.000\,4+0.000\,8e^{\frac{-a}{5\,400}t}$$

当 $t=30$ 时，$x=0.000\,6$，得

$$a=\frac{5\,400}{30}\ln\frac{0.000\,8}{0.000\,2}=180\ln4\approx250\ (\text{m}^3)$$

由于 $x=x(t)$ 是 t 的递减函数，当每分钟输入量 $a\geqslant250$ m³ 时，车间内含 CO_2 浓度 $x\leqslant0.000\,6=0.06\%$.

7. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\,dt=x+1$$

求 $\varphi(x)$.

解　方程两边对 x 求导数，得

$$\varphi'(x)\cos x+\varphi(x)\sin x=1,\quad \varphi'(x)+\tan x\varphi(x)=\sec x$$

$$\varphi(x)=e^{-\int\tan x dx}[\int\sec x e^{\int\tan x dx}dx+C]=$$

$$\cos x[\int\sec x\frac{1}{\cos x}dx+C]=$$

$$\cos x[\tan x+C]$$

又 $\varphi(0)=1$，得 $C=1$. 所以 $\varphi(x)=\sin x+\cos x$.

8. 设函数 $u=f(r), r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯方程.

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

其中 $f(r)$ 二阶可导，且 $f(1)=f'(1)=1$. 试将拉普拉斯方程化为以 r 为自变量的常微分方程，并求 $f(r)$.

解　$$u_x=f'(r)r'_x=f'(r)\frac{x}{r}$$

$$u_{xx}=f''(r)(\frac{x}{r})^2+f'(r)\frac{r-x\frac{x}{r}}{r^2}=$$

$$f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\frac{1}{r}-f'(r)\frac{x^2}{r^3}$$

类似地　$$u_{yy}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{1}{r}-f'(r)\frac{y^2}{r^3}$$

$$u_{zz}=f''(r)\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\frac{1}{r}-f'(r)\frac{z^2}{r^3}$$

代入原方程，得

$$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$$

令 $p=f'(r)$，则 $f''(r)=p'$，代入上式，得

$$p'+\frac{2}{r}p=0$$

解得 $f'(r) = p = \frac{C_1}{r^2}$，由 $f'(1) = 1$，得

$$C_1 = 1,\quad f'(r) = \frac{1}{r^2}$$

解得 $f(r) = -\frac{1}{r} + C_2$，由 $f(1) = 1$，得 $C_2 = 2$. 故 $f(r) = 2 - \frac{1}{r}$.

9. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解，令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

证明：(1) $W(x)$ 满足方程 $W' + p(x)W = 0$；

(2) $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$.

证 (1) $W' = (y_1'y_2' + y_1y_2'') - (y_1''y_2 + y_1'y_2') = y_1y_2'' - y_1''y_2$

$$\begin{aligned} W' + p(x)W &= (y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = \\ &y_1[y''_2 + p(x)y_2'] - y_2[y_1'' + p(x)y_1'] = \\ &y_1[-q(x)y_2] - y_2[-q(x)y_1] = 0 \end{aligned}$$

所以 $W(x)$ 满足方程 $W' + p(x)W = 0$.

(2) 由 $W' + p(x)W = 0$，得

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dW}{W} = -\int_{x_0}^{x} p(t)dt$$

$$\ln W(x) - \ln W(x_0) = -\int_{x_0}^{x} p(t)dt$$

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

*10. 求下列欧拉方程的通解：

(1) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$；　(2) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$.

解 设 $x = e^t$，则 $t = \ln x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x},\qquad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2},\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

代入原方程，得

(1) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$，$r^2 + 2r + 1 = 0$，$r_1 = r_2 = -1$

通解为

$$y = (C_1 + C_2t)e^{-t} = (C_1 + C_2\ln x)\frac{1}{x}$$

(2) $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = e^t$，$r^2 - 5r + 6 = 0$，$r_1 = 2, r_2 = 3$，对应齐次方程的通解为

$$Y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

设 $y^* = Ae^t$ （因 $\lambda = 1$ 不是特征根），代入原方程，得 $A = \frac{1}{2}$，$y^* = \frac{e^t}{2}$.

故通解为

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + \frac{e^t}{2} = C_1x^2 + C_2x^3 + \frac{x}{2}$$