

习题 1-1

1. 设 $A=(-\infty, -5)\cup(5, +\infty)$, $B=[-10, 3)$, 写出 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty, 3)\cup(5, +\infty)$,

$$A\cap B=[-10, -5),$$

$$A\setminus B=(-\infty, -10)\cup(5, +\infty),$$

$$A\setminus(A\setminus B)=[-10, -5).$$

2. 设 A 、 B 是任意两个集合, 证明对偶律: $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明 因为

$$x\in(A\cap B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A \text{ 或 } x\notin B\Leftrightarrow x\in A^C \text{ 或 } x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C,$$

所以 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f: X\rightarrow Y$, $A\subset X$, $B\subset X$. 证明

$$(1) f(A\cup B)=f(A)\cup f(B);$$

$$(2) f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B).$$

证明 因为

$$\begin{aligned} y\in f(A\cup B) &\Leftrightarrow \exists x\in A\cup B, \text{ 使 } f(x)=y \\ &\Leftrightarrow (\text{因为 } x\in A \text{ 或 } x\in B) \ y\in f(A) \text{ 或 } y\in f(B) \\ &\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B), \end{aligned}$$

所以 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 因为

$$y\in f(A\cap B)\Rightarrow \exists x\in A\cap B, \text{ 使 } f(x)=y\Leftrightarrow (\text{因为 } x\in A \text{ 且 } x\in B) \ y\in f(A) \text{ 且 } y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B),$$

所以 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 设映射 $f: X\rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y\rightarrow X$, 使 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$, 其中 I_X 、 I_Y 分别是 X 、 Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x\in X$, 有 $I_X x=x$; 对于每一个 $y\in Y$, 有 $I_Y y=y$. 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g=f^{-1}$.

证明 因为对于任意的 $y\in Y$, 有 $x=g(y)\in X$, 且 $f(x)=f[g(y)]=I_Y y=y$, 即 Y 中任意元素都是 X 中某元素的像, 所以 f 为 X 到 Y 的满射.

又因为对于任意的 $x_1\neq x_2$, 必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 否则若 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g[f(x_1)]=g[f(x_2)]\Rightarrow x_1=x_2$.

因此 f 既是单射, 又是满射, 即 f 是双射.

对于映射 $g: Y\rightarrow X$, 因为对每个 $y\in Y$, 有 $g(y)=x\in X$, 且满足 $f(x)=f[g(y)]=I_Y y=y$, 按逆映射的定义, g 是 f 的逆映射.

5. 设映射 $f: X\rightarrow Y$, $A\subset X$. 证明:

$$(1) f^{-1}(f(A))\supset A;$$

$$(2) \text{当 } f \text{ 是单射时, 有 } f^{-1}(f(A))=A.$$

证明 (1) 因为 $x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A) \Rightarrow f^{-1}(y) = x \in f^{-1}(f(A))$,
所以 $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(2) 由(1)知 $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

另一方面, 对于任意的 $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow$ 存在 $y \in f(A)$, 使 $f^{-1}(y) = x \Rightarrow f(x) = y$. 因为 $y \in f(A)$ 且 f 是单射, 所以 $x \in A$. 这就证明了 $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 因此 $f^{-1}(f(A)) = A$.

6. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y = \sqrt{3x+2}$;

解 由 $3x+2 \geq 0$ 得 $x > -\frac{2}{3}$. 函数的定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(2) $y = \frac{1}{1-x^2}$;

解 由 $1-x^2 \neq 0$ 得 $x \neq \pm 1$. 函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;

解 由 $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geq 0$ 得函数的定义域 $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

解 由 $4-x^2 > 0$ 得 $|x| < 2$. 函数的定义域为 $(-2, 2)$.

(5) $y = \sin \sqrt{x}$;

解 由 $x \geq 0$ 得函数的定义域 $D = [0, +\infty)$.

(6) $y = \tan(x+1)$;

解 由 $x+1 \neq \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 得函数的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

(7) $y = \arcsin(x-3)$;

解 由 $|x-3| \leq 1$ 得函数的定义域 $D = [2, 4]$.

(8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$;

解 由 $3-x \geq 0$ 且 $x \neq 0$ 得函数的定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, 3)$.

(9) $y = \ln(x+1)$;

解 由 $x+1 > 0$ 得函数的定义域 $D = (-1, +\infty)$.

(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

解 由 $x \neq 0$ 得函数的定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

7. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?



$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x;$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x - 1}.$$

$$(4) f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

解 (1)不同. 因为定义域不同.

(2)不同. 因为对应法则不同, $x < 0$ 时, $g(x) = -x$.

(3)相同. 因为定义域、对应法则均相相同.

(4)不同. 因为定义域不同.

$$8. \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x| & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0 & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}, \text{ 求 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2), \text{ 并作出函数 } y = \varphi(x) \text{ 的图形.}$$

$$\text{解 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = |\sin \frac{\pi}{6}| = \frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = |\sin \frac{\pi}{4}| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = |\sin(-\frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2) = 0.$$

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1);$$

$$(2) y = x + \ln x, (0, +\infty).$$

证明 (1)对于任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, 有 $1 - x_1 > 0, 1 - x_2 > 0$. 因为当 $x_1 < x_2$ 时,

$$y_1 - y_2 = \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0,$$

所以函数 $y = \frac{x}{1-x}$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 内是单调增加的.

(2)对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$y_1 - y_2 = (x_1 + \ln x_1) - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + \ln \frac{x_1}{x_2} < 0,$$

所以函数 $y = x + \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的.

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明 对于 $\forall x_1, x_2 \in (-l, 0)$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$ 且 $-x_1 > -x_2$.

因为 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加且为奇函数, 所以

$$f(-x_2) < f(-x_1), -f(x_2) < -f(x_1), f(x_2) > f(x_1),$$

这就证明了对于 $\forall x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1)设 $F(x)=f(x)+g(x)$. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数, 则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数, 即两个偶函数的和是偶函数.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$ 为奇函数, 即两个奇函数的和是奇函数.

(2)设 $F(x)=f(x) \cdot g(x)$. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数, 则

$$F(-x)=f(-x) \cdot g(-x)=f(x) \cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数, 即两个偶函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x) \cdot g(-x)=[-f(x)][-g(x)]=f(x) \cdot g(x)=F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数, 即两个奇函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$ 是偶函数, 而 $g(x)$ 是奇函数, 则

$$F(-x)=f(-x) \cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x) \cdot g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$ 为奇函数, 即偶函数与奇函数的积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;

(2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x - \cos x + 1$;

(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1)因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2)由 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$ 可见 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数.

(3)因为 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

(4)因为 $f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

(5)由 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$ 可见 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数.

(6)因为 $f(-x)=\frac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y = \cos(x-2)$;

(2) $y = \cos 4x$;

(3) $y = 1 + \sin \pi x$;

(4) $y = x \cos x$;

(5) $y = \sin^2 x$.

解 (1)是周期函数, 周期为 $l=2\pi$.

(2)是周期函数, 周期为 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3)是周期函数, 周期为 $l=2$.

(4)不是周期函数.

(5)是周期函数, 周期为 $l=\pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$;

(2) $y = \frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$);

(4) $y = 2\sin 3x$;

(5) $y = 1 + \ln(x+2)$;

(6) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$.

解 (1)由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 得 $x = y^3 - 1$, 所以 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y = x^3 - 1$.

(2)由 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 得 $x = \frac{1-y}{1+y}$, 所以 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

(3)由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 得 $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$, 所以 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4)由 $y = 2\sin 3x$ 得 $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{y}{2}$, 所以 $y = 2\sin 3x$ 的反函数为 $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$.

(5)由 $y = 1 + \ln(x+2)$ 得 $x = e^{y-1} - 2$, 所以 $y = 1 + \ln(x+2)$ 的反函数为 $y = e^{x-1} - 2$.

(6)由 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 所以 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 先证必要性. 设函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 则存在正数 M , 使 $|f(x)| \leq M$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$. 这就证明了 $f(x)$ 在 X 上有下界 $-M$ 和上界 M .

再证充分性. 设函数 $f(x)$ 在 X 上有下界 K_1 和上界 K_2 , 即 $K_1 \leq f(x) \leq K_2$. 取 $M = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则 $-M \leq K_1 \leq f(x) \leq K_2 \leq M$, 即 $|f(x)| \leq M$.

这就证明了 $f(x)$ 在 X 上有界.

16. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

$$(1) y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2;$$

$$(4) y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1;$$

$$(5) y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1.$$

$$\text{解 } (1) y = \sin^2 x, y_1 = \sin^2 \frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, y_2 = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

$$(2) y = \sin 2x, y_1 = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$(3) y = \sqrt{1+x^2}, y_1 = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}, y_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}.$$

$$(4) y = e^{x^2}, y_1 = e^{0^2} = 1, y_2 = e^{1^2} = e.$$

$$(5) y = e^{2x}, y_1 = e^{2 \cdot 1} = e^2, y_2 = e^{2 \cdot (-1)} = e^{-2}.$$

17. 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

$$(1) f(x^2);$$

$$(2) f(\sin x);$$

$$(3) f(x+a) (a > 0);$$

$$(4) f(x+a) + f(x-a) (a > 0).$$

解 (1) 由 $0 \leq x^2 \leq 1$ 得 $|x| \leq 1$, 所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

(2) 由 $0 \leq \sin x \leq 1$ 得 $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 所以函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

(3) 由 $0 \leq x+a \leq 1$ 得 $-a \leq x \leq 1-a$, 所以函数 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a, 1-a]$.

(4) 由 $0 \leq x+a \leq 1$ 且 $0 \leq x-a \leq 1$ 得: 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $a \leq x \leq 1-a$; 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 无解. 因此当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时

函数的定义域为 $[a, 1-a]$, 当 $a > \frac{1}{2}$ 时函数无意义.

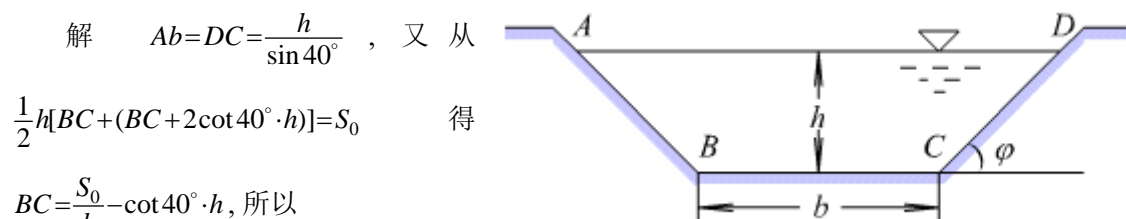
18. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)] = \begin{cases} 1 & |e^x| < 1 \\ 0 & |e^x| = 1, \text{ 即 } f[g(x)] = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases} \\ -1 & |e^x| > 1 \end{cases}$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 & |x| < 1 \\ e^0 & |x| = 1, \text{ 即 } g[f(x)] = \begin{cases} e & |x| < 1 \\ 1 & |x| = 1 \\ e^{-1} & |x| > 1 \end{cases} \\ e^{-1} & |x| > 1 \end{cases}$$

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 $\varphi = 40^\circ$ (图 1-37). 当过水断面 ABCD 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 $L (L = AC + CD + DB)$ 与水深 h 之间的函数关系式, 并说明定义域.

图 1-37



$$L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} h.$$

自变量 h 的取值范围应由不等式组

$$h > 0, \frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h > 0$$

确定, 定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0 \cot 40^\circ}$.

20. 收音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购 1 台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一商行订购了 1000 台, 厂方可获利润多少?

解 (1) 当 $0 \leq x \leq 100$ 时, $p = 90$.

令 $0.01(x_0 - 100) = 90 - 75$, 得 $x_0 = 1600$. 因此当 $x \geq 1600$ 时, $p = 75$.

当 $100 < x < 1600$ 时,

$$p = 90 - (x - 100) \times 0.01 = 91 - 0.01x.$$

综合上述结果得到

$$p = \begin{cases} 90 & 0 \leq x \leq 100 \\ 91 - 0.01x & 100 < x < 1600 \\ 75 & x \geq 1600 \end{cases}.$$

$$(2) P=(p-60)x=\begin{cases} 30x & 0\leq x\leq 100 \\ 31x-0.01x^2 & 100<x<1600 \\ 15x & x\geq 1600 \end{cases}.$$

$$(3) P=31\times 1000-0.01\times 1000^2=21000(\text{元}).$$

习题 1-2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 写出它们的极限:

$$(1) x_n = \frac{1}{2^n};$$

$$(2) x_n = (-1)^n \frac{1}{n};$$

$$(3) x_n = 2 + \frac{1}{n^2};$$

$$(4) x_n = \frac{n-1}{n+1};$$

$$(5) x_n = n(-1)^n.$$

解 (1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$.

(3) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = 2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n^2}) = 2$.

(4) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \rightarrow 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

(5) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = n(-1)^n$ 没有极限.

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n}$. 问 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$ 求出 N , 使当 $n > N$ 时, x_n 与其极限之差的

绝对值小于正数 ε , 当 $\varepsilon = 0.001$ 时, 求出数 N .

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$|x_n - 0| = \frac{|\cos \frac{n\pi}{2}|}{n} \leq \frac{1}{n}. \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ 要使 } |x_n - 0| < \varepsilon, \text{ 只要 } \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ 也就是 } n > \frac{1}{\varepsilon}. \text{ 取 } N = [\frac{1}{\varepsilon}],$$

则 $\forall n > N$, 有 $|x_n - 0| < \varepsilon$.

当 $\varepsilon = 0.001$ 时, $N = [\frac{1}{\varepsilon}] = 1000$.

3. 根据数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0.999 \cdots 9}_{n \uparrow} = 1.$$

(1)分析 要使 $|\frac{1}{n^2} - 0| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, 只须 $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, 即 $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$, 当 $n > N$ 时, 有 $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

(2)分析 要使 $|\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2}| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4n} < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{4n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{4\varepsilon}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{4\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 有 $|\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2}| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

(3)分析 要使 $|\frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1| = \frac{\sqrt{n^2 + a^2} - n}{n} = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2 + a^2} + n)} < \frac{a^2}{n} < \varepsilon$, 只须 $n > \frac{a^2}{\varepsilon}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{a^2}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 有 $|\frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$.

(4)分析 要使 $|0.99 \cdots 9 - 1| = \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon$, 即 $n > 1 + \lg \frac{1}{\varepsilon}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [1 + \lg \frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 有 $|0.99 \cdots 9 - 1| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0.999 \cdots 9}_{n \uparrow} = 1$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有

极限.

证明 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|u_n - a| < \varepsilon$, 从而

$$||u_n| - |a|| \leq |u_n - a| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$.

数列 $\{|x_n|\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限. 例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

证明 因为数列 $\{x_n\}$ 有界, 所以存在 M , 使 $\forall n \in \mathbf{Z}$, 有 $|x_n| \leq M$.

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. 从而当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| \leq M |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

6. 对于数列 $\{x_n\}$ 若 $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k+1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明: $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

证明 因为 $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k+1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists K_1$, 当 $2k > 2K_1$ 时, 有 $|x_{2k} - a| < \varepsilon$;

$\exists K_2$, 当 $2k+1 > 2K_2+1$ 时, 有 $|x_{2k+1} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{2K_1, 2K_2+1\}$, 只要 $n > N$, 就有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 因此 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

习题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^3}{2x+1} = 2.$$

证明 (1) 分析 $|(3x-1)-8| = |3x-9| = 3|x-3|$, 要使 $|(3x-1)-8| < \varepsilon$, 只须 $|x-3| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{3}\varepsilon$, 当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 有 $|(3x-1)-8| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8$.

(2) 分析 $|(5x+2)-12| = |5x-10| = 5|x-2|$, 要使 $|(5x+2)-12| < \varepsilon$, 只须 $|x-2| < \frac{1}{5}\varepsilon$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{5}\varepsilon$, 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 有 $|(5x+2)-12| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12$.

(3) 分析 $\left| \frac{x^2-4}{x+2} - (-4) \right| = \left| \frac{x^2+4x+4}{x+2} \right| = |x+2| = |x-(-2)|$, 要使 $\left| \frac{x^2-4}{x+2} - (-4) \right| < \varepsilon$, 只须 $|x-(-2)| < \varepsilon$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x-(-2)| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{x^2-4}{x+2} - (-4) \right| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$.

(4) 分析 $\left| \frac{1-4x^3}{2x+1} - 2 \right| = |1-2x-2| = 2|x-(-\frac{1}{2})|$, 要使 $\left| \frac{1-4x^3}{2x+1} - 2 \right| < \varepsilon$, 只须 $|x-(-\frac{1}{2})| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, 当 $0 < |x-(-\frac{1}{2})| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{1-4x^3}{2x+1} - 2 \right| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^3}{2x+1} = 2$.

2. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

证明 (1) 分析 $\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1+x^3-x^3}{2x^3} \right| = \frac{1}{2|x|^3}$, 要使 $\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{2|x|^3} < \varepsilon$, 即

$$|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}.$$

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists X = \frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

(2) 分析 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 要使 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$, 即 $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists X = \frac{1}{\varepsilon^2}$, 当 $x > X$ 时, 有 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

3. 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = x^2 \rightarrow 4$. 问 δ 等于多少, 使当 $|x-2| < \delta$ 时, $|y-4| < 0.001$?

解 由于 $x \rightarrow 2, |x-2| \rightarrow 0$, 不妨设 $|x-2| < 1$, 即 $1 < x < 3$. 要使 $|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| < 0.001$, 只要 $|x-2| < \frac{0.001}{5} = 0.0002$, 取 $\delta = 0.0002$, 则当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 就有 $|x^2-4| < 0.001$.

4. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \rightarrow 1$, 问 X 等于多少, 使当 $|x| > X$ 时, $|y-1| < 0.01$?

解 要使 $\left| \frac{x^2-1}{x^2+3} - 1 \right| = \frac{4}{x^2+3} < 0.01$, 只 $|x| > \sqrt{\frac{4}{0.01} - 3} = \sqrt{397}$, $X = \sqrt{397}$.

5. 证明函数 $f(x) = |x|$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限为零.

6. 求 $f(x) = \frac{x}{x}, \varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

证明 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x),$$

所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ 不存在.

7. 证明: 若 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A , 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

证明 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists X_1 > 0$, 使当 $x < -X_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$;

$\exists X_2 > 0$, 使当 $x > X_2$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 则当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

8. 根据极限的定义证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 先证明必要性. 设 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

因此当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 和 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时左右极限都存在并且都等于 A .

再证明充分性. 设 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta_1 > 0$, 使当 $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$;

$\exists \delta_2 > 0$, 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta_2$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ 及 $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, 从而有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

即 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.

9. 试给出 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的局部有界性的定理, 并加以证明.

解 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的局部有界性的定理: 如果 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 则存在 $X > 0$ 及 $M > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| < M$.

证明 设 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$, 则对于 $\varepsilon = 1$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon = 1$. 所以

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

这就是说存在 $X > 0$ 及 $M > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| < M$, 其中 $M = 1 + |A|$.

习题 1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 举例说明之.

解 不一定.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)=2x$, $\beta(x)=3x$ 都是无穷小, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{2}{3}$, $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不是无穷小.

2. 根据定义证明:

(1) $y = \frac{x^2-9}{x+3}$ 当 $x \rightarrow 3$ 时为无穷小;

(2) $y = x \sin \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷小.

证明 (1) 当 $x \neq 3$ 时 $|y| = \left| \frac{x^2-9}{x+3} \right| = |x-3|$. 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 有

$$|y| = \left| \frac{x^2-9}{x+3} \right| = |x-3| < \delta = \varepsilon,$$

所以当 $x \rightarrow 3$ 时 $y = \frac{x^2-9}{x+3}$ 为无穷小.

(2) 当 $x \neq 0$ 时 $|y| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x-0|$. 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x-0| < \delta$ 时, 有

$$|y| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x-0| < \delta = \varepsilon,$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 为无穷小.

3. 根据定义证明: 函数 $y = \frac{1+2x}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件, 能使 $|y| > 10^4$?

证明 分析 $|y| = \left| \frac{1+2x}{x} \right| = \left| 2 + \frac{1}{x} \right| \geq \frac{1}{|x|} - 2$, 要使 $|y| > M$, 只须 $\frac{1}{|x|} - 2 > M$, 即 $|x| < \frac{1}{M+2}$.

证明 因为 $\forall M > 0, \exists \delta = \frac{1}{M+2}$, 使当 $0 < |x-0| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{1+2x}{x} \right| > M$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = \frac{1+2x}{x}$ 是无穷大.

取 $M = 10^4$, 则 $\delta = \frac{1}{10^4+2}$. 当 $0 < |x-0| < \frac{1}{10^4+2}$ 时, $|y| > 10^4$.

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1) 因为 $\frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$, 而当 $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 是无穷小, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x} = 2$.

(2) 因为 $\frac{1-x^2}{1-x} = 1+x (x \neq 1)$, 而当 $x \rightarrow 0$ 时 x 为无穷小, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x} = 1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表:

6. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 这个函数是否为当 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大? 为什么?

解 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

这是因为 $\forall M > 0$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内总能找到这样的 x , 使得 $|y(x)| > M$. 例如

$$y(2k\pi) = 2k\pi \cos 2k\pi = 2k\pi (k=0, 1, 2, \dots),$$

当 k 充分大时, 就有 $|y(2k\pi)| > M$.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $y = x \cos x$ 不是无穷大.

这是因为 $\forall M > 0$, 找不到这样一个时刻 N , 使对一切大于 N 的 x , 都有 $|y(x)| > M$. 例如

$$y(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = (2k\pi + \frac{\pi}{2}) \cos(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 (k=0, 1, 2, \dots),$$

对任何大的 N , 当 k 充分大时, 总有 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} > N$, 但 $|y(x)| = 0 < M$.

7. 证明: 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但这函数不是当 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷大.

证明 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界. 这是因为

$\forall M > 0$, 在 $(0, 1]$ 中总可以找到点 x_k , 使 $y(x_k) > M$. 例如当

$$x_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} (k=0, 1, 2, \dots)$$

时, 有

$$y(x_k) = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

当 k 充分大时, $y(x_k) > M$.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不是无穷大. 这是因为

$\forall M > 0$, 对所有的 $\delta > 0$, 总可以找到这样的点 x_k , 使 $0 < x_k < \delta$, 但 $y(x_k) < M$. 例如可取

$$x_k = \frac{1}{2k\pi} (k=0, 1, 2, \dots),$$

当 k 充分大时, $x_k < \delta$, 但 $y(x_k) = 2k\pi \sin 2k\pi = 0 < M$.

习题 1-5

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x-3};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x-3} = \frac{2^2+5}{2-3} = -9.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^2+1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^2+1} = \frac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2-2x+1}{3x+2} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h};$$

$$\text{解 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2});$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 2.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1} = 0 \text{ (分子次数低于分母次数, 极限为零)}$$

或 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x}{x^4-3x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = 0.$

(9) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$

解 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}.$

(10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2});$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x^2}) = 1 \times 2 = 2.$

(11) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n});$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

(12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2};$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}.$

(13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3};$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} = \frac{1}{5}$ (分子与分母的次数相同, 极限为最高次项系数之比).

或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{3}{n}) = \frac{1}{5}.$

(14) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3});$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1.$

2. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2};$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2} = \frac{0}{16} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2} = \infty.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1};$$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1} = \infty$ (因为分子次数高于分母次数).

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1).$$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1) = \infty$ (因为分子次数高于分母次数).

3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ (当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 是无穷小, 而 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界变量).

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \arctan x = 0$ (当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小, 而 $\arctan x$ 是有界变量).

4. 证明本节定理 3 中的(2).

习题 1-6

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \omega \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{\omega x} = \omega.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} = 3.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$\text{解法一 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2.$$

$$\text{解法二 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2.$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} \quad (x \text{ 为不等于零的常数}).$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cdot x = x.$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}(-1)} = \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}} \right\}^{-1} = e^{-1}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 2} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right]^2 = e^2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2 = e^2.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} \quad (k \text{ 为正整数}).$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{(-x)(-k)} = e^{-k}.$$

3. 根据函数极限的定义, 证明极限存在的准则 I'.

解

4. 利用极限存在准则证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1;$$

$$\text{证明 因为 } 1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n},$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\text{由极限存在准则 I, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1;$$

证明 因为

$$\frac{n^2}{n^2 + n\pi} < n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) < \frac{n^2}{n^2 + \pi},$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n\pi} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + \pi} = 1,$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1.$$

(3) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ 的极限存在;

$$\text{证明 } x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

先证明数列 $\{x_n\}$ 有界. 当 $n=1$ 时 $x_1 = \sqrt{2} < 2$, 假定 $n=k$ 时 $x_k < 2$, 当 $n=k+1$ 时,

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2,$$

所以 $x_n < 2 (n=1, 2, 3, \dots)$, 即数列 $\{x_n\}$ 有界.

再证明数列单调增.

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\frac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n},$$

而 $x_n-2<0$, $x_n+1>0$, 所以 $x_{n+1}-x_n>0$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增.

因为数列 $\{x_n\}$ 单调增加有上界, 所以此数列是有极限的.

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1;$$

证明 当 $|x| \leq 1$ 时, 则有

$$1+x \leq 1+|x| \leq (1+|x|)^n,$$

$$1+x \geq 1-|x| \geq (1-|x|)^n,$$

从而有 $1-|x| \leq \sqrt[n]{1+x} \leq 1+|x|$.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} (1-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+|x|) = 1,$$

根据夹逼准则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

证明 因为 $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$, 所以 $1-x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$.

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$, 根据夹逼准则, 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

习题 1-7

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比, 哪一个高阶无穷小?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x^3}{2x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^2}{2-x} = 0$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2-x^3 是 $2x-x^2$ 的高阶无穷小, 即 $x^2-x^3 = o(2x-x^2)$.

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1-x$ 和 $(1)1-x^3$, $(2)\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x+x^2) = 3$,

所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x$ 和 $1-x^3$ 是同阶的无穷小, 但不是等价无穷小.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) = 1$,

所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是同阶的无穷小, 而且是等价无穷小.

3. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

(1) $\arctan x \sim x$;

(2) $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

证明 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$ (提示: 令 $y = \arctan x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0$),

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n, m 为正整数);

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}$.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n>m \\ \infty & n<m \end{cases}.$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\frac{1}{\cos x} - 1)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}.$

(4) 因为

$$\sin x - \tan x = \tan x (\cos x - 1) = -2 \tan x \sin^2 \frac{x}{2} \sim -2x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}x^3 \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\sqrt[3]{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} \sim \frac{1}{3}x^2 \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\sqrt{1+\sin x} - 1 = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x} + 1} \sim \sin x \sim x \quad (x \rightarrow 0),$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^2 \cdot x} = -3.$

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) $\alpha \sim \alpha$ (自反性);

(2) 若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\beta \sim \alpha$ (对称性);

(3) 若 $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$ (传递性).

证明 (1) $\lim \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, 所以 $\alpha \sim \alpha$;

(2) 若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 从而 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$. 因此 $\beta \sim \alpha$;

(3) 若 $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$, $\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \frac{\beta}{\gamma} \cdot \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$. 因此 $\alpha \sim \gamma$.

习题 1-8

1. 研究下列函数的连续性, 并画出函数的图形:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}.$$

解 (1) 已知多项式函数是连续函数, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 和 $(1, 2]$ 内是连续的.

$$\text{在 } x=1 \text{ 处, 因为 } f(1)=1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 从而函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是连续的.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是连续函数.

(2) 只需考察函数在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处的连续性.

$$\text{在 } x=-1 \text{ 处, 因为 } f(-1)=-1, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1 \neq f(-1), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1 = f(-1), \text{ 所以}$$

函数在 $x=-1$ 处间断, 但右连续.

$$\text{在 } x=1 \text{ 处, 因为 } f(1)=1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = f(1), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 = f(1), \text{ 所以函数在 } x=1 \text{ 处}$$

连续.

综合上述讨论, 函数在 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, +\infty)$ 内连续, 在 $x=-1$ 处间断, 但右连续.

2. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使它连续:

$$(1) y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}, x=1, x=2;$$

$$(2) y = \frac{x}{\tan x}, x=k, x=k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(3) y = \cos^2 \frac{1}{x}, x=0;$$

$$(4) y = \begin{cases} x-1 & x \leq 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}, x=1.$$

$$\text{解 (1) } y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}. \text{ 因为函数在 } x=2 \text{ 和 } x=1 \text{ 处无定义, 所以 } x=2 \text{ 和 } x=1 \text{ 是函数}$$

的间断点.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \infty, \text{ 所以 } x=2 \text{ 是函数的第二类间断点;}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x-2)} = -2$, 所以 $x=1$ 是函数的第一类间断点, 并且是可去间断点. 在 $x=1$ 处,

令 $y=-2$, 则函数在 $x=1$ 处成为连续的.

(2) 函数在点 $x=k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 和 $x=k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 处无定义, 因而这些点都是函数的间断点.

因 $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty (k \neq 0)$, 故 $x=k\pi (k \neq 0)$ 是第二类间断点;

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0 (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $x=0$ 和 $x=k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 是第一类间断点且是可

去间断点.

令 $y|_{x=0}=1$, 则函数在 $x=0$ 处成为连续的;

令 $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y=0$, 则函数在 $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ 处成为连续的.

(3) 因为函数 $y=\cos^2 \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义, 所以 $x=0$ 是函数 $y=\cos^2 \frac{1}{x}$ 的间断点. 又因为

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 \frac{1}{x}$ 不存在, 所以 $x=0$ 是函数的第二类间断点.

(4) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-x) = 2$, 所以 $x=1$ 是函数的第一类不可去间

断点.

3. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

$$\text{解 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x = \begin{cases} -x & |x| > 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ x & |x| < 1 \end{cases}$$

在分段点 $x=-1$ 处, 因为 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$, 所以 $x=-1$ 为函数的

第一类不可去间断点.

在分段点 $x=1$ 处, 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x) = -1$, 所以 $x=1$ 为函数的第一类

不可去间断点.

4. 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0) \neq 0$, 则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \neq 0$.

证明 不妨设 $f(x_0) > 0$. 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$, 由极限的局部保号性定理,

存在 x_0 的某一去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$, 使当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ 时 $f(x) > 0$, 从而当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) > 0$. 这就是说, 则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \neq 0$.

5. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

(1) $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \dots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点, 且它们都是无穷间断点;

(2) $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处不连续, 但 $|f(x)|$ 在 \mathbf{R} 上处处连续;

(3) $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处有定义, 但仅在一处连续.

解 函数 $f(x)=\csc(\pi x)+\csc\frac{\pi}{x}$ 在点 $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \dots$ 处是间断的, 且这些点是函数的无穷间断点.

解(2)函数 $f(x)=\begin{cases} -1 & x \in \mathbf{Q} \\ 1 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上处处不连续, 但 $|f(x)|=1$ 在 \mathbf{R} 上处处连续.

解(3)函数 $f(x)=\begin{cases} x & x \in \mathbf{Q} \\ -x & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上处处有定义, 它只在 $x=0$ 处连续.

习题 1-9

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

解 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内除点 $x=2$ 和 $x=-3$ 外是连续

的, 所以函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty, -3)$ 、 $(-3, 2)$ 、 $(2, +\infty)$.

在函数的连续点 $x=0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$.

在函数的间断点 $x=2$ 和 $x=-3$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x)=\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)(x+1)}{x-2}=-\frac{8}{5}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x)=\min\{f(x), g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证明 已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)=g(x_0)$.

可以验证

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

因此 $\varphi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|],$

$$\psi(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)-|f(x_0)-g(x_0)|].$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|] \\ &= \frac{1}{2}[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)+\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)+|\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)-\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)|] \\ &= \frac{1}{2}[f(x_0)+g(x_0)+|f(x_0)-g(x_0)|]=\varphi(x_0), \end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 也连续.

同理可证明 $\psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2-2x+5};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^3;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}).$$

解 (1) 因为函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, $f(x)$ 在点 $x=0$ 有定义, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{0^2 - 2 \cdot 0 + 5} = \sqrt{5}.$$

(2) 因为函数 $f(x) = (\sin 2x)^3$ 是初等函数, $f(x)$ 在点 $x = \frac{\pi}{4}$ 有定义, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^3 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4})^3 = 1.$$

(3) 因为函数 $f(x) = \ln(2\cos 2x)$ 是初等函数, $f(x)$ 在点 $x = \frac{\pi}{6}$ 有定义, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln(2\cos 2 \cdot \frac{\pi}{6}) = 0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-4}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{5 \cdot 1 - 4} + \sqrt{1}} = 2.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{a+a}{2} \cdot 1 = \cos a.$$

$$\begin{aligned} (7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}})} = 1. \end{aligned}$$

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x}{2}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}) = \ln 1 = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{1}{x})^x \right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 3 \tan^2 x)^{\frac{1}{3 \tan^2 x}} \right]^3 = e^3.$$

$$(5) (\frac{3+x}{6+x})^{\frac{x-1}{2}} = (1 + \frac{-3}{6+x})^{\frac{6+x}{-3} \cdot \frac{-3}{6+x} \cdot \frac{x-1}{2}}. \text{ 因为}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{6+x} \cdot \frac{x-1}{2} = -\frac{3}{2},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\sin^2 x} + 1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x} - 1)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x)(\sqrt{1+\sin^2 x} + 1)}{x \sin^2 x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a+x & x \geq 0 \end{cases}$ 应当如何选择数 a , 使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数?

数?

解 要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 只须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 即只须

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = a.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (a+x) = a$, 所以只须取 $a=1$.

习题 1-10

1. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 设 $f(x)=x^5-3x-1$, 则 $f(x)$ 是闭区间 $[1, 2]$ 上的连续函数.

因为 $f(1)=-3, f(2)=25, f(1)f(2)<0$, 所以由零点定理, 在 $(1, 2)$ 内至少有一点 $\xi (1<\xi<2)$, 使 $f(\xi)=0$, 即 $x=\xi$ 是方程 $x^5-3x=1$ 的介于 1 和 2 之间的根.

因此方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

2. 证明方程 $x=asinx+b$, 其中 $a>0, b>0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

证明 设 $f(x)=asin x+b-x$, 则 $f(x)$ 是 $[0, a+b]$ 上的连续函数.

$$f(0)=b, f(a+b)=a \sin (a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1] \leq 0.$$

若 $f(a+b)=0$, 则说明 $x=a+b$ 就是方程 $x=asinx+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根;

若 $f(a+b)<0$, 则 $f(0)f(a+b)<0$, 由零点定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, a+b)$, 使 $f(\xi)=0$, 这说明 $x=\xi$ 也是方程 $x=asinx+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根.

总之, 方程 $x=asinx+b$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

3. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a, b]$ 上的任意两点 x, y , 恒有 $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$, 其中 L 为正常数, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$. 证明: 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

证明 设 x_0 为 (a, b) 内任意一点. 因为

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} L|x - x_0| = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$,

即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

因此 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

同理可证 $f(x)$ 在点 a 处左连续, 在点 b 处右连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 由零点定理, 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

4. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上至少有一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

证明 显然 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上也连续. 设 M 和 m 分别是 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上的最大值和最小值.

因为 $x_i \in [x_1, x_n] (1 \leq i \leq n)$, 所以有 $m \leq f(x_i) \leq M$, 从而有

$$n \cdot m \leq f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq n \cdot M,$$

$$m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M.$$

由介值定理推论, 在 $[x_1, x_n]$ 上至少有一点 ξ 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

5. 证明: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

证明 令 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 只要 $|x| > X$, 就有

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ 即 } A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

又由于 $f(x)$ 在闭区间 $[-X, X]$ 上连续, 根据有界性定理, 存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, x \in [-X, X]$.

取 $N = \max\{M, |A - \varepsilon|, |A + \varepsilon|\}$, 则 $|f(x)| \leq N, x \in (-\infty, +\infty)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

6. 在什么条件下, (a, b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续?

总习题一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的_____条件. 数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的_____的条件.

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的_____条件.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的_____条件.

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的_____条件.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的_____条件.

(4) $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的_____条件.

解 (1) 必要, 充分.

(2) 必要, 充分.

(3) 必要, 充分.

(4) 充分必要.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$. 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有().

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小; (B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小;

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小; (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$
 $= \ln 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} + \ln 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \ln 2 + \ln 3$ (令 $2^x - 1 = t, 3^x - 1 = u$).

所以 $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小. 故应选 B.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$;

(2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$;

(4) $f(\cos x)$.

解 (1) 由 $0 \leq e^x \leq 1$ 得 $x \leq 0$, 即函数 $f(e^x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

(2) 由 $0 \leq \ln x \leq 1$ 得 $1 \leq x \leq e$, 即函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1, e]$.

(3) 由 $0 \leq \arctan x \leq 1$ 得 $0 \leq x \leq \tan 1$, 即函数 $f(\arctan x)$ 的定义域为 $[0, \tan 1]$.

(4) 由 $0 \leq \cos x \leq 1$ 得 $2n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

即函数 $f(\cos x)$ 的定义域为 $[2n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases},$$

求 $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 因为 $f(x) \geq 0$, 所以 $f[f(x)] = f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases};$

因为 $g(x) \leq 0$, 所以 $g[g(x)] = 0$;

因为 $g(x) \leq 0$, 所以 $f[g(x)] = 0$;

因为 $f(x) \geq 0$, 所以 $g[f(x)] = -f^2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}.$

5. 利用 $y = \sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1) $y = |\sin x|$;

(2) $y = \sin|x|$;

(3) $y = 2\sin \frac{x}{2}$.

6. 把半径为 R 的一圆形铁片, 自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

解 设围成的圆锥的底半径为 r , 高为 h , 依题意有

$$R(2\pi - \alpha) = 2\pi r, \quad r = \frac{R(2\pi - \alpha)}{2\pi},$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2\pi - \alpha)^2}{4\pi^2}} = R \frac{\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}{2\pi}.$$

圆锥的体积为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2(2\pi - \alpha)^2}{4\pi^2} \cdot R \frac{\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}{2\pi} \\ &= \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - \alpha)^2 \cdot \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} \quad (0 < \alpha < 2\pi). \end{aligned}$$

7. 根据函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} - 5| < \varepsilon$, 只需 $|x - 3| < \varepsilon$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当

当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 就有 $|x-3| < \varepsilon$, 即 $|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = 5$.

8. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} (a>0, b>0, c>0);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2} = \infty$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}} \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}} = e.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^3} = \frac{1}{2} \quad (\text{提示: 用等价无穷小换}).$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3} \cdot \frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}$$
 , 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}} = e,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3x} &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} + \frac{c^x - 1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)} + \ln b \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+u)} + \ln c \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+v)} \right] \\ &= \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c) = \ln \sqrt[3]{abc},\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$

提示: 求极限过程中作了变换 $a^x - 1 = t, b^x - 1 = u, c^x - 1 = v.$

(6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1} (\sin x - 1) \tan x},$ 因为

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1}} = e,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - 1) \tan x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (\sin x - 1)}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (\sin^2 x - 1)}{\cos x (\sin x + 1)} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + 1} = 0,\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1.$

9. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ a + x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 应怎样选择数 a ?

解 要使函数连续, 必须使函数在 $x=0$ 处连续.

因为 $f(0) = a, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + x^2) = a, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0,$

所以当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 因此选取 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x-1}} & x > 0 \\ \ln(1+x) & -1 < x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并说明间断点所属类型.

解 因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=1$ 是函数的一个间断点.

因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$ (提示 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$),

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty \text{ (提示 } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{),}$$

所以 $x=1$ 是函数的第二类间断点.

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x+1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e}$,

所以 $x=0$ 也是函数的间断点, 且为第一类间断点.

11. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$.

证明 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$.

12. 证明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

证明 设 $f(x) = \sin x + x + 1$, 则函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续.

因为 $f(-\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{2} + 1 = 2 + \frac{\pi}{2}$, $f(-\frac{\pi}{2}) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$,

所以由零点定理, 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$. 这说明方程 \sin

$x + x + 1 = 0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

13. 如果存在直线 $L: y = kx + b$, 使得当 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$) 时, 曲线 $y = f(x)$ 上的动点 $M(x, y)$ 到直线 L 的距离 $d(M, L) \rightarrow 0$, 则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k \neq 0$ 时, 称 L 为斜渐近线.

(1) 证明: 直线 $L: y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx].$$

(2) 求曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

证明 (1) 仅就 $x \rightarrow \infty$ 的情况进行证明.

按渐近线的定义, $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

必要性: 设 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$,

于是有 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0 \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,

同时有 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0 \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$.

充分性: 如果 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] - b = b - b = 0,$$

因此 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

(2) 因为 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 2,$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - 2x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [(2x-1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 1 = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} - 1 = 1,$$

所以曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y = 2x + 1$.

习题 2-1

(1) $y=x^4$;

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$;

(3) $y=x^{1.6}$;

(4) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=\frac{1}{x^2}$;

(6) $y=x^3\sqrt[5]{x}$;

(7) $y=\frac{x^{23}\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^5}}$;

解 (1) $y'=(x^4)'=4x^{4-1}=4x^3$.

(2) $y'=(\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

(3) $y'=(x^{1.6})'=1.6x^{1.6-1}=1.6x^{0.6}$.

(4) $y'=(\frac{1}{\sqrt{x}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(5) $y'=(\frac{1}{x^2})'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$.

(6) $y'=(x^3\sqrt[5]{x})'=(x^{\frac{16}{5}})'=\frac{16}{5}x^{\frac{16}{5}-1}=\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$.

(7) $y'=(\frac{x^{23}\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^5}})'=(x^{\frac{47}{6}})'=\frac{47}{6}x^{\frac{47}{6}-1}=\frac{47}{6}x^{\frac{41}{6}}$.

8. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ (m), 求这物体在 $t=2$ 秒(s)时的速度.

解 $v=(s)'=3t^2$, $v|_{t=2}=12$ (米/秒).

9. 如果 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(0)$ 存在, 证明 $f'(0)=0$.

证明 当 $f(x)$ 为偶函数时, $f(-x)=f(x)$, 所以

$$f'(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{-x \rightarrow 0} \frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-f'(0),$$

从而有 $2f'(0)=0$, 即 $f'(0)=0$.

10. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率: $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\pi$.

解 因为 $y'=\cos x$, 所以斜率分别为

$$k_1=\cos \frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}, \quad k_2=\cos \pi=-1.$$

11. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程式.

解 $y'=-\sin x$, $y'|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin \frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故在点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 处, 切线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})$,

法线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})$.

12. 求曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线方程.

解 $y'=e^x$, $y'|_{x=0}=1$, 故在(0, 1)处的切线方程为

$$y-1=1 \cdot (x-0), \text{ 即 } y=x+1.$$

13. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点, 作过这两点的割线, 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

$$\text{解 } y'=2x, \text{ 割线斜率为 } k=\frac{y(3)-y(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4.$$

令 $2x=4$, 得 $x=2$.

因此抛物线 $y=x^2$ 上点(2, 4)处的切线平行于这条割线.

14. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $y=|\sin x|$;

$$(2) y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

解 (1) 因为

$$y(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$$

所以函数在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

$$y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

而 $y'_-(0) \neq y'_+(0)$, 所以函数在 $x=0$ 处不可导.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$, 又 $y(0)=0$, 所以函数在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

所以函数在点 $x=0$ 处可导, 且 $y'(0)=0$.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a, b 应取什么值?

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (ax+b) = a+b, f(1)=a+b,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处连续, 必须 $a+b=1$.

又因为当 $a+b=1$ 时

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2, f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{ax+b-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{a(x-1)}{x-1} = a,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处可导, 必须 $a=2$, 此时 $b=-1$.

16. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$, 又 $f'(0)$ 是否存在?

解 因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\rightarrow-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\rightarrow-0}\frac{-x-0}{x}=-1, \quad f'_+(0)=\lim_{x\rightarrow+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\rightarrow+0}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

而 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, 所以 $f'(0)$ 不存在.

17. 已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$ 时, $f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$;

当 $x>0$ 时, $f(x)=x$, $f'(x)=1$;

$$\text{因为 } f'_-(0)=\lim_{x\rightarrow-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\rightarrow-0}\frac{\sin x-0}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\rightarrow+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\rightarrow+0}\frac{x-0}{x}=1, \text{ 所以 } f'(0)=1, \text{ 从而}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}.$$

18. 证明: 双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

解 由 $xy=a^2$ 得 $y=\frac{a^2}{x}$, $k=y'=-\frac{a^2}{x^2}$.

设 (x_0, y_0) 为曲线上任一点, 则过该点的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0).$$

令 $y=0$, 并注意 $x_0 y_0=a^2$, 解得 $x=\frac{y_0 x_0^2}{a^2}+x_0=2x_0$, 为切线在 x 轴上的距.

令 $x=0$, 并注意 $x_0 y_0=a^2$, 解得 $y=\frac{a^2}{x_0}+y_0=2y_0$, 为切线在 y 轴上的距.

此切线与二坐标轴构成的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|2x_0||2y_0|=2|x_0 y_0|=2a^2.$$

习题 2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x; \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

$$\text{解 } (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cdot \cot x.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{4}{x^5} + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12;$$

$$(2) y = 5x^3 - 2^x + 3e^x;$$

$$(3) y = 2\tan x + \sec x - 1;$$

$$(4) y = \sin x \cdot \cos x;$$

$$(5) y = x^2 \ln x;$$

$$(6) y = 3e^x \cos x;$$

$$(7) y = \frac{\ln x}{x};$$

$$(8) y = \frac{e^x}{x^2} + \ln 3;$$

$$(9) y = x^2 \ln x \cos x;$$

$$(10) s = \frac{1 + \sin t}{1 + \cos t};$$

$$\text{解 } (1) y' = \left(\frac{4}{x^5} + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12\right)' = (4x^{-5} + 7x^{-4} - 2x^{-1} + 12)'$$

$$= -20x^{-6} - 28x^{-5} + 2x^{-2} = -\frac{20}{x^6} - \frac{28}{x^5} + \frac{2}{x^2}.$$

$$(2) y' = (5x^3 - 2^x + 3e^x)' = 15x^2 - 2^x \ln 2 + 3e^x.$$

$$(3) y' = (2\tan x + \sec x - 1)' = 2\sec^2 x + \sec x \cdot \tan x = \sec x(2\sec x + \tan x).$$

$$(4) y' = (\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos 2x.$$

$$(5) y' = (x^2 \ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1).$$

$$(6) y' = (3e^x \cos x)' = 3e^x \cdot \cos x + 3e^x \cdot (-\sin x) = 3e^x(\cos x - \sin x).$$

$$(7) y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$(8) y' = \left(\frac{e^x}{x^2} + \ln 3\right)' = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}.$$

$$(9) y' = (x^2 \ln x \cos x)' = 2x \cdot \ln x \cos x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos x + x^2 \ln x \cdot (-\sin x)$$

$$2x \ln x \cos x + x \cos x - x^2 \ln x \sin x.$$

$$(10) s' = \left(\frac{1 + \sin t}{1 + \cos t}\right)' = \frac{\cos t(1 + \cos t) - (1 + \sin t)(-\sin t)}{(1 + \cos t)^2} = \frac{1 + \sin t + \cos t}{(1 + \cos t)^2}.$$

3. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y = \sin x - \cos x$, 求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

(2) $\rho = \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$, 求 $\frac{d\rho}{d\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

(3) $f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}$, 求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解 (1) $y' = \cos x + \sin x$,

$$y'|_{x=\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

(2) $\frac{d\rho}{d\theta} = \sin \theta + \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta + \theta \cos \theta$,

$$\frac{d\rho}{d\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \frac{\pi}{2}).$$

(3) $f'(x) = \frac{3}{(5-x)^2} + \frac{2}{5}x$, $f'(0) = \frac{3}{25}$, $f'(2) = \frac{17}{15}$.

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. 求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$;

(2) 该物体达到最高点的时刻.

解 (1) $v(t) = s'(t) = v_0 - gt$.

(2) 令 $v(t) = 0$, 即 $v_0 - gt = 0$, 得 $t = \frac{v_0}{g}$, 这就是物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线 $y = 2 \sin x + x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y' = 2 \cos x + 2x$, $y'|_{x=0} = 2$, 又当 $x=0$ 时, $y=0$, 所以所求的切线方程为

$$y = 2x,$$

所求的法线方程为

$$y = -\frac{1}{2}x, \text{ 即 } x + 2y = 0.$$

6. 求下列函数的导数:

(1) $y = (2x+5)^4$

(2) $y = \cos(4-3x)$;

(3) $y = e^{-3x^2}$;

(4) $y = \ln(1+x^2)$;

(5) $y = \sin^2 x$;

(6) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;

(7) $y = \tan(x^2)$;

(8) $y = \arctan(e^x)$;

(9) $y = (\arcsin x)^2$;

$$(10) y = \ln \cos x .$$

$$\text{解 (1) } y' = 4(2x+5)^{4-1} \cdot (2x+5)' = 4(2x+5)^3 \cdot 2 = 8(2x+5)^3 .$$

$$(2) y' = -\sin(4-3x) \cdot (4-3x)' = -\sin(4-3x) \cdot (-3) = 3\sin(4-3x) .$$

$$(3) y' = e^{-3x^2} \cdot (-3x^2)' = e^{-3x^2} \cdot (-6x) = -6xe^{-3x^2} .$$

$$(4) y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2} .$$

$$(5) y' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x .$$

$$(6) y' = \left[(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (a^2 - x^2)' = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

$$(7) y' = \sec^2(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \sec^2(x^2) .$$

$$(8) y' = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} .$$

$$(9) y' = 2\arcsin x \cdot (\arcsin x)' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

$$(10) y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x .$$

7. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \arcsin(1-2x);$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x;$$

$$(4) y = \arccos \frac{1}{x};$$

$$(5) y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x};$$

$$(6) y = \frac{\sin 2x}{x};$$

$$(7) y = \arcsin \sqrt{x};$$

$$(8) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2});$$

$$(9) y = \ln(\sec x + \tan x);$$

$$(10) y = \ln(\csc x - \cot x).$$

$$\text{解 (1) } y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} \cdot (1-2x)' = \frac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} .$$

$$(2) y' = \left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right]' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (1-x^2)' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(3) y' = (e^{-\frac{x}{2}})' \cos 3x + e^{-\frac{x}{2}} (\cos 3x)' = e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{x}{2}\right)' \cos 3x + e^{-\frac{x}{2}} (-\sin 3x)(3x)' \\ = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x - 3e^{-\frac{x}{2}} \sin 3x = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} (\cos 3x + 6 \sin 3x).$$

$$(4) y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$(5) y' = \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x) - (1+\ln x) \frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}.$$

$$(6) y' = \frac{\cos 2x \cdot 2 \cdot x - \sin 2x \cdot 1}{x^2} = \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

$$(7) y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot (x+\sqrt{a^2+x^2})' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(a^2+x^2)'\right] \\ = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(2x)\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

$$(9) y' = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot (\sec x + \tan x)' = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \sec x.$$

$$(10) y' = \frac{1}{\csc x - \cot x} \cdot (\csc x - \cot x)' = \frac{-\csc x \cot x + \csc^2 x}{\csc x - \cot x} = \csc x.$$

8. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \left(\arcsin \frac{x}{2} \right)^2;$$

$$(2) y = \ln \tan \frac{x}{2};$$

$$(3) y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$(4) y = e^{\arctan \sqrt{x}};$$

$$(5) y = \sin^n x \cos nx;$$

$$(6) y = \arctan \frac{x+1}{x-1};$$

$$(7) y = \frac{\arcsin x}{\arccos x};$$

$$(8) y = \ln[\ln(\ln x)];$$

$$(9) y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}};$$

$$(10) y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$\text{解 (1) } y' = 2 \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) \cdot \left(\arcsin \frac{x}{2} \right)' = 2 \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)'$$

$$= 2 \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$(2) y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \left(\tan \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \csc x.$$

$$(3) y' = \sqrt{1 + \ln^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln^2 x}} \cdot (1 + \ln^2 x)' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln^2 x}} \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln^2 x}} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln^2 x}}.$$

$$(4) y' = e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot (\arctan \sqrt{x})' = e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\arctan \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

$$(5) y' = n \sin^{n-1} x \cdot (\sin x)' \cdot \cos nx + \sin^n x \cdot (-\sin nx) \cdot (nx)'$$

$$= n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \cdot \cos nx + \sin^n x \cdot (-\sin nx) \cdot n$$

$$= n \sin^{n-1} x \cdot (\cos x \cdot \cos nx - \sin x \cdot \sin nx) = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x.$$

$$(6) y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(7) y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{(\arccos x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\arccos x + \arcsin x}{(\arccos x)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot [\ln(\ln x)]' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}.$$

$$(9) y' = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2}.$$

$$(10) y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}} \cdot (\frac{1-x}{1+x})' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导, 且 $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$, 试求函数 $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ 的导数.

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} \cdot [f^2(x) + g^2(x)]' = \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} \cdot [2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x)] \\ &= \frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}. \end{aligned}$$

10. 设 $f(x)$ 可导, 求下列函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) y = f(x^2);$$

$$(2) y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x).$$

$$\text{解 } (1) y' = f'(x^2) \cdot (x^2)' = f'(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot f'(x^2).$$

$$\begin{aligned} (2) y' &= f'(\sin^2 x) \cdot (\sin^2 x)' + f'(\cos^2 x) \cdot (\cos^2 x)' \\ &= f'(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x + f'(\cos^2 x) \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) \\ &= \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]. \end{aligned}$$

11. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \text{ch}(\text{sh } x);$$

$$(2) y = \text{sh } x \cdot e^{\text{ch } x};$$

$$(3) y = \text{th}(\ln x);$$

$$(4) y = \text{sh}^3 x + \text{ch}^2 x;$$

$$(5) y = \text{th}(1-x^2);$$

$$(6) y = \text{arch}(x^2+1);$$

$$(7) y = \text{arch}(e^{2x});$$

$$(8) y = \arctan(\text{th } x);$$

$$(9) y = \ln \text{ch } x + \frac{1}{2\text{ch}^2 x};$$

$$(10) y = \text{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\text{解 } (1) y' = \text{sh}(\text{sh } x) \cdot (\text{sh } x)' = \text{sh}(\text{sh } x) \cdot \text{ch } x.$$

$$(2) y' = \text{ch } x \cdot e^{\text{ch } x} + \text{sh } x \cdot e^{\text{ch } x} \cdot \text{sh } x = e^{\text{ch } x} (\text{ch } x + \text{sh}^2 x).$$

$$(3) y' = \frac{1}{\text{ch}^2(\ln x)} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \text{ch}^2(\ln x)}.$$

$$(4) y' = 3\text{sh}^2 x \cdot \text{ch } x + 2\text{ch } x \cdot \text{sh } x = \text{sh } x \cdot \text{ch } x \cdot (3\text{sh } x + 2).$$

$$(5) y' = \frac{1}{\text{ch}^2(1-x^2)} \cdot (1-x^2)' = \frac{-2x}{\text{ch}^2(1-x^2)}.$$

$$(6) y' = \frac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)}} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}.$$

$$(7) y' = \frac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}} \cdot (e^{2x})' = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{1+(\operatorname{th} x)^2} \cdot (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\left(1+\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \operatorname{ch}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{1+2\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$(9) y' = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \cdot (\operatorname{ch} x)' - \frac{1}{2\operatorname{ch}^4 x} \cdot (\operatorname{ch}^2 x)' = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{1}{2\operatorname{ch}^4 x} \cdot 2\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch}^2 x - 1)}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x} = \operatorname{th}^3 x.$$

$$(10) y' = 2\operatorname{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left[\operatorname{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]' = 2\operatorname{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

$$= \operatorname{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+1}\right).$$

12. 求下列函数的导数:

$$(1) y = e^{-x}(x^2-2x+3);$$

$$(2) y = \sin^2 x \cdot \sin(x^2);$$

$$(3) y = \left(\arctan \frac{x}{2}\right)^2;$$

$$(4) y = \frac{\ln x}{x^n};$$

$$(5) y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}};$$

$$(6) y = \ln \cos \frac{1}{x};$$

$$(7) y = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}};$$

$$(8) y = \sqrt{x+\sqrt{x}};$$

$$(9) y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2};$$

$$(10) y = \arcsin \frac{2t}{1+t^2}.$$

解 (1) $y' = -e^{-x}(x^2-2x+3) + e^{-x}(2x-2) = e^{-x}(-x^2+4x-5).$

(2) $y' = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin(x^2) + \sin^2 x \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = \sin 2x \cdot \sin(x^2) + 2x \cdot \sin^2 x \cdot \cos(x^2).$

(3) $y' = 2\arctan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{x^2+4} \arctan \frac{x}{2}.$

(4) $y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^n - \ln x \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}.$

(5) $y' = \frac{(e^t + e^{-t})(e^t + e^{-t}) - (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{4e^{2t}}{(e^{2t} + 1)^2}.$

$$(6) y' = \sec \frac{1}{x} \cdot (\cos \frac{1}{x})' = \sec \frac{1}{x} \cdot (-\sin \frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x}.$$

$$(7) y' = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot (-\sin^2 \frac{1}{x})' = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot (-2 \sin \frac{1}{x}) \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{2}{x} \cdot e^{-\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot (x+\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot (1+\frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

$$(9) y' = \arcsin \frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$(10) y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}} \cdot (\frac{2t}{1+t^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}} \cdot \frac{2 \cdot (1+t^2) - 2t \cdot (2t)}{(1+t^2)^2} \\ = \frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}} \cdot \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}.$$

习题 2-3

1. 求函数的二阶导数:

$$(1) y=2x^2+\ln x;$$

$$(2) y=e^{2x-1};$$

$$(3) y=x \cos x;$$

$$(4) y=e^{-t} \sin t;$$

$$(5) y=\sqrt{a^2-x^2};$$

$$(6) y=\ln(1-x^2)$$

$$(7) y=\tan x;$$

$$(8) y=\frac{1}{x^3+1};$$

$$(9) y=(1+x^2)\arctan x;$$

$$(10) y=\frac{e^x}{x};$$

$$(11) y=xe^{x^2};$$

$$(12) y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

解 (1) $y'=4x+\frac{1}{x}$, $y''=4-\frac{1}{x^2}$.

$$(2) y'=e^{2x-1} \cdot 2=2e^{2x-1}, \quad y''=2e^{2x-1} \cdot 2=4e^{2x-1}.$$

$$(3) y=x \cos x; \quad y'=\cos x-x \sin x,$$

$$y''=-\sin x-\sin x-x \cos x=-2\sin x-x \cos x.$$

$$(4) y'=e^{-t} \sin t+e^{-t} \cos t=e^{-t}(\cos x-\sin x)$$

$$y''=-e^{-t}(\cos x-\sin x)+e^{-t}(-\sin x-\cos x)=-2e^{-t} \cos t.$$

$$(5) y'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (a^2-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$(6) y'=\frac{1}{1-x^2} \cdot (1-x^2)'=-\frac{2x}{1-x^2},$$

$$y''=-\frac{2(1-x^2)-2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2}=-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

$$(7) y'=\sec^2 x,$$

$$y''=2\sec x \cdot (\sec x)'=2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x=2\sec^2 x \cdot \tan x.$$

$$(8) y'=\frac{-(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=-\frac{3x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y''=-\frac{6x \cdot (x^3+1)^2-3x^2 \cdot 2(x^3+1) \cdot 3x}{(x^3+1)^4}=\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

$$(9) y'=2x \arctan x+(1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2}=2x \arctan x+1,$$

$$y''=2 \arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

$$(10) y'=\frac{e^x \cdot x-e^x \cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

$$y'' = \frac{[e^x(x-1)+e^x] \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

$$(11) y' = e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot (2x) = e^{x^2}(1+2x^2),$$

$$y'' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (1+2x^2) + e^{x^2} \cdot 4x = 2xe^{x^2}(3+2x^2).$$

$$(12) y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y'' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot (\sqrt{1+x^2})' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2. \text{ 设 } f(x)=(x+10)^6, f'''(2)=?$$

$$\text{解 } f'(x)=6(x+10)^5, f''(x)=30(x+10)^4, f'''(x)=120(x+10)^3,$$

$$f'''(2)=120(2+10)^3=207360.$$

$$3. \text{ 若 } f''(x) \text{ 存在, 求下列函数 } y \text{ 的二阶导数 } \frac{d^2y}{dx^2}:$$

$$(1) y=f(x^2);$$

$$(2) y=\ln[f(x)].$$

$$\text{解 } (1) y' = f'(x^2) \cdot (x^2)' = 2xf'(x^2),$$

$$y'' = 2f'(x^2) + 2x \cdot 2xf'(x^2) = 2f'(x^2) + 4x^2f'(x^2).$$

$$(2) y' = \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

$$y'' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

$$4. \text{ 试从 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} \text{ 导出:}$$

$$(1) \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3};$$

$$(2) \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

$$\text{解 } (1) \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

$$(2) \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y'''(y')^3 - y'' \cdot 3(y')^2 y''}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

$$5. \text{ 已知物体的运动规律为 } s=A\sin\omega t (A, \omega \text{ 是常数}), \text{ 求物体运动的加速度, 并验证:}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

$$\text{解 } \frac{ds}{dt} = A\omega \cos \omega t,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} \text{ 就是物体运动的加速度.}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = -A\omega^2 \sin \omega t + \omega^2 A \sin \omega t = 0.$$

$$6. \text{ 验证函数 } y=C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} (\lambda, C_1, C_2 \text{ 是常数}) \text{ 满足关系式:}$$

$$\begin{aligned}
 & y'' - \lambda^2 y = 0. \\
 \text{解 } & y' = C_1 \lambda e^{\lambda x} - C_2 \lambda e^{-\lambda x}, \\
 & y'' = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}. \\
 & y'' - \lambda^2 y = (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) - \lambda^2 (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) \\
 & \quad = (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) - (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) = 0.
 \end{aligned}$$

7. 验证函数 $y = e^x \sin x$ 满足关系式:

$$\begin{aligned}
 & y'' - 2y' + 2y = 0. \\
 \text{解 } & y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x), \\
 & y'' = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x. \\
 & y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 2e^x (\sin x + \cos x) + 2e^x \sin x \\
 & \quad = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2e^x \sin x = 0.
 \end{aligned}$$

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ (a_1, a_2, \cdots, a_n 都是常数);

(2) $y = \sin^2 x$;

(3) $y = x \ln x$;

(4) $y = x e^x$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 (1) } & y' = nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}, \\
 & y'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 x^{n-3} + (n-2)(n-3)a_2 x^{n-4} + \cdots + a_{n-2}, \\
 & \quad \vdots, \\
 & y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 x^0 = n!.
 \end{aligned}$$

(2) $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$,

$$y'' = 2 \cos 2x = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = 2^2 \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 2^2 \sin(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)} = 2^3 \cos(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = 2^3 \sin(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

\cdots ,

$$y^{(n)} = 2^{n-1} \sin[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}].$$

(3) $y' = \ln x + 1$,

$$y'' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

$$y''' = (-1)x^{-2},$$

$$y^{(4)} = (-1)(-2)x^{-3},$$

\cdots ,

$$y^{(n)} = (-1)(-2)(-3) \cdots (-n+2)x^{-n+1} = (-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

(4) $y' = e^x + x e^x$,

$$y'' = e^x + e^x + x e^x = 2e^x + x e^x,$$

$$y''' = 2e^x + e^x + x e^x = 3e^x + x e^x,$$

\cdots ,

$$y^{(n)} = n e^x + x e^x = e^x (n+x).$$

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$;

(2) $y = x \operatorname{sh} x$, 求 $y^{(100)}$;

(3) $y=x^2\sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 (1) 令 $u=e^x$, $v=\cos x$, 有

$$u'=u''=u'''=u^{(4)}=e^x;$$

$$v'=-\sin x, v''=-\cos x, v'''=\sin x, v^{(4)}=\cos x,$$

所以 $y^{(4)}=u^{(4)}\cdot v+4u'''\cdot v'+6u''\cdot v''+4u'\cdot v''' +u\cdot v^{(4)}$
 $=e^x[\cos x+4(-\sin x)+6(-\cos x)+4\sin x+\cos x]=-4e^x \cos x.$

(2) 令 $u=x$, $v=\operatorname{sh} x$, 则有

$$u'=1, u''=0;$$

$$v'=\operatorname{ch} x, v''=\operatorname{sh} x, \dots, v^{(99)}=\operatorname{ch} x, v^{(100)}=\operatorname{sh} x,$$

所以 $y^{(100)}=u^{(100)}\cdot v+C_{100}^1 u^{(99)}\cdot v'+C_{100}^2 u^{(98)}\cdot v''+\dots+C_{100}^{98} u''\cdot v^{(98)}+C_{100}^{99} u'\cdot v^{(99)}+u\cdot v^{(100)}$

$$=100\operatorname{ch} x+x \operatorname{sh} x.$$

(3) 令 $u=x^2$, $v=\sin 2x$, 则有

$$u'=2x, u''=2, u'''=0;$$

$$v^{(48)}=2^{48}\sin(2x+48\cdot\frac{\pi}{2})=2^{48}\sin 2x,$$

$$v^{(49)}=2^{49}\cos 2x, v^{(50)}=-2^{50}\sin 2x,$$

所以 $y^{(50)}=u^{(50)}\cdot v+C_{50}^1 u^{(49)}\cdot v'+C_{50}^2 u^{(48)}\cdot v''+\dots+C_{50}^{48} u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49} u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$

$$=C_{50}^{48} u''\cdot v^{(48)}+C_{50}^{49} u'\cdot v^{(49)}+u\cdot v^{(50)}$$

$$=\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{28}\sin 2x+50\cdot 2x\cdot 2^{49}\cos 2x+x^2\cdot (-2^{50}\sin 2x)$$

$$=2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x).$$

习题 2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2 - 2xy + 9 = 0$;

(2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

(3) $xy = e^{x+y}$;

(4) $y = 1 - xe^y$.

解 (1) 方程两边求导数得

$$2y y' - 2y - 2x y' = 0,$$

于是 $(y-x)y' = y$,

$$y' = \frac{y}{y-x}.$$

(2) 方程两边求导数得

$$3x^2 + 3y^2 y' - 2ay - 3axy' = 0,$$

于是 $(y^2 - ax)y' = ay - x^2$,

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

(3) 方程两边求导数得

$$y + x y' = e^{x+y} (1 + y'),$$

于是 $(x - e^{x+y})y' = e^{x+y} - y$,

$$y' = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}.$$

(4) 方程两边求导数得

$$y' = -e^y - x e^y y',$$

于是 $(1 + x e^y)y' = -e^y$,

$$y' = -\frac{e^y}{1 + x e^y}.$$

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程.

解 方程两边求导数得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0,$$

于是 $y' = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}},$

在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处 $y' = -1$.

所求切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = -(x - \frac{\sqrt{2}}{4}a), \text{ 即 } x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

所求法线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = (x - \frac{\sqrt{2}}{4}a), \text{ 即 } x-y=0.$$

3. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2 - y^2 = 1$;

(2) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;

(3) $y = \tan(x+y)$;

(4) $y = 1 + xe^y$.

解 (1) 方程两边求导数得

$$2x - 2yy' = 0,$$

$$y' = \frac{x}{y},$$

$$y'' = \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{y - x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

(2) 方程两边求导数得

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0,$$

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

(3) 方程两边求导数得

$$y' = \sec^2(x+y) \cdot (1+y'),$$

$$y' = \frac{\sec^2(x+y)}{1 - \sec^2(x+y)} = \frac{1}{\cos^2(x+y) - 1} = \frac{\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y)}{-\sin^2(x+y)} = -1 - \frac{1}{y^2},$$

$$y'' = \frac{2}{y^3} y' = \frac{2}{y^3} \left(-1 - \frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

(4) 方程两边求导数得

$$y' = e^y + x e^y y',$$

$$y' = \frac{e^y}{1 - x e^y} = \frac{e^y}{1 - (y-1)} = \frac{e^y}{2-y},$$

$$y'' = \frac{e^y y'(2-y) - e^y(-y')}{(2-y)^2} = \frac{e^y(3-y)y'}{(2-y)^2} = \frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;

(2) $y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+2}}}$;

$$(3) y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5};$$

$$(4) y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x}.$$

解 (1) 两边取对数得

$$\ln y = x \ln|x| - x \ln|1+x|,$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - \ln(1+x) - x \cdot \frac{1}{1+x},$$

$$\text{于是 } y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left[\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right].$$

(2) 两边取对数得

$$\ln y = \frac{1}{5} \ln|x-5| - \frac{1}{25} \ln(x^2+2),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-5} - \frac{1}{25} \cdot \frac{2x}{x^2+2},$$

$$\text{于是 } y' = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{x-5}{x^2+2}} = \left[\frac{1}{x-5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2x}{x^2+2}\right].$$

(3) 两边取对数得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x+2) + 4 \ln(3-x) - 5 \ln(x+1),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1},$$

$$\text{于是 } y' = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} \left[\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1}\right]$$

(4) 两边取对数得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln \sin x + \frac{1}{4} \ln(1-e^x),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cot x - \frac{e^x}{4(1-e^x)},$$

$$\text{于是 } y' = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cot x - \frac{e^x}{4(1-e^x)}\right] = \frac{1}{4} \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x} \left[\frac{2}{x} + 2 \cot x + \frac{e^x}{e^x-1}\right].$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \begin{cases} x = at^2; \\ y = bt^2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \theta(1-\sin\theta) \\ y = \theta \cos\theta \end{cases}.$$

$$\text{解 (1)} \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3bt^2}{2at} = \frac{3b}{2a} t.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{\cos\theta - \theta \sin\theta}{1 - \sin\theta - \theta \cos\theta}.$$

6. 已知 $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$ 求当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t},$$

$$\text{当 } t = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2.$$

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

$$(1) \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}, \text{ 在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处};$$

$$(2) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}, \text{ 在 } t=2 \text{ 处}.$$

$$\text{解 } (1) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t}.$$

$$\text{当 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{2}, \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_0 = 0,$$

所求切线方程为

$$y = -2\sqrt{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ 即 } 2\sqrt{2}x + y - 2 = 0;$$

所求法线方程为

$$y = -\frac{1}{-2\sqrt{2}}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ 即 } \sqrt{2}x - 4y - 1 = 0.$$

$$(2) \quad y'_t = \frac{6at(1+t^2) - 3at^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{6at}{(1+t^2)^2}, \quad x'_t = \frac{3a(1+t^2) - 3at \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{3a - 3at^2}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6at}{3a - 3at^2} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$\text{当 } t=2 \text{ 时, } \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 2}{1-2^2} = -\frac{4}{3}, \quad x_0 = \frac{6}{5}a, \quad y_0 = \frac{12}{5}a,$$

所求切线方程为

$$y - \frac{12}{5}a = -\frac{4}{3}(x - \frac{6}{5}a), \text{ 即 } 4x + 3y - 12a = 0;$$

所求法线方程为

$$y - \frac{12}{5}a = \frac{3}{4}(x - \frac{6}{5}a), \text{ 即 } 3x - 4y + 6a = 0.$$

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

- (1) $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2}; \\ y=1-t. \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=b\sin t; \end{cases}$
- (3) $\begin{cases} x=3e^{-t}; \\ y=2e^t; \end{cases}$
- (4) $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$, 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

解 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-1}{t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{t^2}}{t} = \frac{1}{t^3}.$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2e^t}{-3e^{-t}} = -\frac{2}{3}e^{2t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{2}{3} \cdot 2e^{2t}}{-3e^{-t}} = \frac{4}{9}e^{3t}.$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)} = t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{f''(t)}.$

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\frac{d^3y}{dx^3}$:

- (1) $\begin{cases} x=1-t^2; \\ y=t-t^3; \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}.$

解(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{(t-t^3)'}{(1-t^2)'} = \frac{1-3t^2}{-2t},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{1-3t^2}{-2t})'}{-2t} = -\frac{1}{4}(\frac{1}{t^3} + \frac{3}{t}),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-\frac{1}{4}(\frac{1}{t^3} + \frac{3}{t})'}{-2t} = -\frac{3}{8t^5}(1+t^2).$$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2}t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{1}{2}t)'}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{1+t^2}{4t}\right)'}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头,产生同心波纹,若最外一圈波半径的增大率总是 6m/s,问在 2 秒末扰动水面面积的增大率为多少?

解 设波的半径为 r , 对应圆面积为 S , 则 $S=\pi r^2$, 两边同时对 t 求导得

$$S_t' = 2\pi r r'.$$

当 $t=2$ 时, $r=6 \cdot 2=12$, $r'=6$,

故 $S_t'|_{t=2} = 2 \cdot 12 \cdot 6\pi = 144\pi$ (米²/秒).

11. 注水入深 8m 上顶直径 8m 的正圆锥形容器中,其速率为 4m²/min. 当水深为 5m 时,其表面上升的速度为多少?

解 水深为 h 时,水面半径为 $r=\frac{1}{2}h$, 水面面积为 $S=\frac{1}{4}h^2\pi$,

水的体积为 $V=\frac{1}{3}hS=\frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{4}h^2\pi = \frac{\pi}{12}h^3$,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt}.$$

已知 $h=5$ (m), $\frac{dV}{dt}=4$ (m³/min), 因此 $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{4}{25\pi} \cdot 4 = \frac{16}{25\pi}$ (m/min).

12. 溶液自深 18cm 直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中,开始时漏斗中盛满了溶液,已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时,其表面下降的速率为 1cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 设在 t 时刻漏斗中的水深为 y , 圆柱形筒中水深为 h . 于是有

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3} \pi y^2 = 5^2 h.$$

由 $\frac{r}{6} = \frac{y}{18}$, 得 $r = \frac{y}{3}$, 代入上式得

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{3}\right)^2 y = 5^2 h,$$

即 $\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3^3} y^3 = 5^2 h.$

两边对 t 求导得

$$-\frac{1}{3^2} y^2 y_t' = 5^2 h'.$$

当 $y=12$ 时, $y_t'=-1$ 代入上式得

$$h_t' = \frac{-\frac{1}{3^2} \cdot 12^2 \cdot (-1)}{5^2} = \frac{16}{25} \approx 0.64 \text{ (cm/min)}.$$

2-7

1. 已知 $y=x^3-x$, 计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的 Δy 及 dy .

解 $\Delta y|_{x=2, \Delta x=1} = [(2+1)^3 - (2+1)] - (2^3 - 2) = 18,$

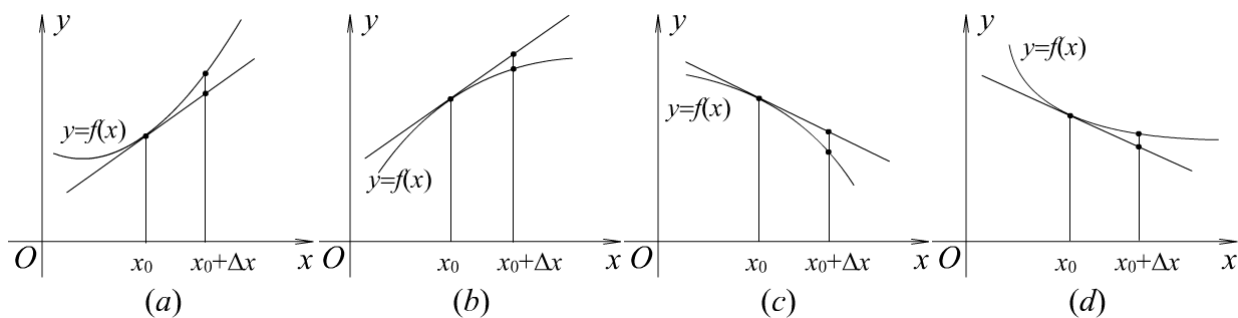
$dy|_{x=2, \Delta x=1} = (3x^2 - 1)\Delta x|_{x=2, \Delta x=1} = 11;$

$\Delta y|_{x=2, \Delta x=0.1} = [(2+0.1)^3 - (2+0.1)] - (2^3 - 2) = 1.161,$

$dy|_{x=2, \Delta x=0.1} = (3x^2 - 1)\Delta x|_{x=2, \Delta x=0.1} = 1.1;$

$\Delta y|_{x=2, \Delta x=0.01} = [(2+0.01)^3 - (2+0.01)] - (2^3 - 2) = 0.110601,$

$dy|_{x=2, \Delta x=0.01} = (3x^2 - 1)\Delta x|_{x=2, \Delta x=0.01} = 0.11.$



2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图所示, 试在图(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 dy 、 Δy 及 $\Delta y - dy$ 并说明其正负.

解 (a) $\Delta y > 0$, $dy > 0$, $\Delta y - dy > 0$.

(b) $\Delta y > 0$, $dy > 0$, $\Delta y - dy < 0$.

(c) $\Delta y < 0$, $dy < 0$, $\Delta y - dy < 0$.

(d) $\Delta y < 0$, $dy < 0$, $\Delta y - dy > 0$.

3. 求下列函数的微分:

(1) $y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x};$

(2) $y = x \sin 2x;$

(3) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$

(4) $y = \ln^2(1-x);$

(5) $y = x^2 e^{2x};$

(6) $y = e^{-x} \cos(3-x);$

(7) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2};$

(8) $y = \tan^2(1+2x^2);$

(9) $y = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2};$

(10) $s = A \sin(\omega t + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数).

解 (1) 因为 $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $dy = (-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

(2) 因为 $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x$, 所以 $dy = (\sin 2x + 2x \cos 2x)dx$.

$$(3) \text{ 因为 } y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, \text{ 所以 } dy = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$(4) dy = y' dx = [\ln^2(1-x)]' dx = [2\ln(1-x) \cdot \frac{-1}{(1-x)}] dx = \frac{2}{x-1} \ln(1-x) dx.$$

$$(5) dy = y' dx = (x^2 e^{2x})' dx = (2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x}) dx = 2x(1+x) e^{2x}.$$

$$(6) dy = y' dx = [e^{-x} \cos(3-x)]' dx = [-e^{-x} \cos(3-x) + e^{-x} \sin(3-x)] dx = e^{-x} [\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx.$$

$$(7) dy = y' dx = (\arcsin \sqrt{1-x^2})' dx = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}) dx = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$(8) dy = d \tan^2(1+2x^2) = 2 \tan(1+2x^2) d \tan(1+2x^2) = 2 \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) d(1+2x^2) \\ = 2 \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) \cdot 4x dx = 8x \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) dx.$$

$$(9) dy = d \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2} d(\frac{1-x^2}{1+x^2}) \\ = \frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{4x}{1+x^4} dx.$$

$$(10) dy = d[A \sin(\omega t + \varphi)] = A \cos(\omega t + \varphi) d(\omega t + \varphi) = A \omega \cos(\omega t + \varphi) dx.$$

4. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立:

$$(1) d(\quad) = 2dx;$$

$$(2) d(\quad) = 3x dx;$$

$$(3) d(\quad) = \cos t dt;$$

$$(4) d(\quad) = \sin \omega x dx;$$

$$(5) d(\quad) = \frac{1}{x+1} dx;$$

$$(6) d(\quad) = e^{-2x} dx;$$

$$(7) d(\quad) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(8) d(\quad) = \sec^2 3x dx.$$

$$\text{解 (1) } d(2x+C) = 2dx.$$

$$(2) d(\frac{3}{2}x^2 + C) = 3x dx.$$

$$(3) d(\sin t + C) = \cos t dt.$$

$$(4) d(-\frac{1}{\omega} \cos \omega x + C) = \sin \omega x dx.$$

$$(5) d(\ln(1+x) + C) = \frac{1}{x+1} dx.$$

$$(6) d(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C) = e^{-2x} dx.$$

$$(7) d(2\sqrt{x} + C) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

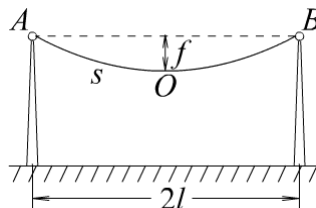
$$(8) d(\frac{1}{3} \tan 3x + C) = \sec^2 3x dx.$$

5. 如图所示的电缆 \widehat{AOB} 的长为 s , 跨度为 $2l$, 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f ,

则电缆长可按下面公式计算:

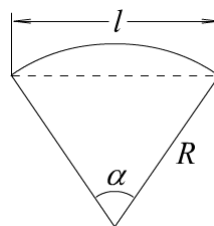
$$s=2l(1+\frac{2f^2}{3l^2}),$$

当 f 变化了 Δf 时, 电缆长的变化约为多少?



解 $\Delta S \approx dS = 2l(1 + \frac{2f^2}{3l^2})' df = \frac{8}{3l} f \Delta f$.

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60^\circ$, 半径 $R=100\text{cm}$ (如图), 如果 R 不变, α 减少 $30'$, 问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变, R 增加 1cm , 问扇形面积大约改变了多少?



解 (1) 扇形面积 $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$,

$$\Delta S \approx dS = (\frac{1}{2} \alpha R^2)'_{\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} R^2 \Delta \alpha.$$

将 $\alpha=60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $R=100$, $\Delta \alpha = -30' = -\frac{\pi}{360}$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot (-\frac{\pi}{360}) \approx -43.63 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

(2) $\Delta S \approx dS = (\frac{1}{2} \alpha R^2)'_R dR = \alpha R \Delta R$.

将 $\alpha=60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $R=100$, $\Delta R=1$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{\pi}{3} \cdot 100 \cdot 1 \approx 104.72 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

7. 计算下列三角函数值的近似值:

(1) $\cos 29^\circ$;

(2) $\tan 136^\circ$.

解 (1) 已知 $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, 当 $f(x) = \cos x$ 时, 有 $\cos(x+\Delta x) \approx \cos x - \sin x \cdot \Delta x$, 所以

$$\cos 29^\circ = \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}) \approx \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot (-\frac{\pi}{180}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.87467.$$

(2) 已知 $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, 当 $f(x) = \tan x$ 时, 有 $\tan(x+\Delta x) \approx \tan x + \sec^2 x \cdot \Delta x$, 所以

$$\tan 136^\circ = \tan(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{180}) \approx \tan \frac{3\pi}{4} + \sec^2 \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = -1 + 2 \cdot \frac{\pi}{180} \approx -0.96509.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值

(1) $\arcsin 0.5002$;

(2) $\arccos 0.4995$.

解 (1) 已知 $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, 当 $f(x) = \arcsin x$ 时, 有

$$\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \Delta x,$$

所以

$$\begin{aligned} \arcsin 0.5002 &= \arcsin(0.5 + 0.0002) \approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} \cdot 0.0002 \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0.0002 \approx 30^\circ 47''. \end{aligned}$$

(2) 已知 $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, 当 $f(x) = \arccos x$ 时, 有

$$\arccos(x+\Delta x) \approx \arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \Delta x,$$

所以

$$\begin{aligned} \arccos 0.4995 &= \arccos(0.5 - 0.0005) \approx \arccos 0.5 - \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} \cdot (-0.0005) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0.0005 \approx 60^\circ 2'. \end{aligned}$$

9. 当 $|x|$ 较小时, 证明下列近似公式:

(1) $\tan x \approx x$ (x 是角的弧度值);

(2) $\ln(1+x) \approx x$;

(3) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$,

并计算 $\tan 45'$ 和 $\ln 1.002$ 的近似值.

(1) 已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0$, $\Delta x = x$, 则有

$$\tan x = \tan(0+x) \approx \tan 0 + \sec^2 0 \cdot x = \sec^2 0 \cdot x = x.$$

(2) 已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = x$, 则有

$$\ln(1+x) \approx \ln 1 + (\ln x)'|_{x=1} \cdot x = x.$$

(3) 已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = x$, 则有

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 + \left(\frac{1}{x}\right)'|_{x=1} \cdot x = 1-x.$$

$$\tan 45' \approx 45' \approx 0.01309;$$

$$\ln(1.002) = \ln(1+0.002) \approx 0.002.$$

10. 计算下列各根式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$;

(2) $\sqrt[6]{65}$.

解 (1) 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则当 $|x|$ 较小时, 有 $f(1+x) \approx f(1) + f'(1)x = 1 + \frac{1}{3}x$,

$$\sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000-4} = 10 \cdot \sqrt[3]{1-\frac{4}{1000}} \approx 10\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1000}\right) \approx 9.987.$$

(2) 设 $f(x) = \sqrt[6]{x}$, 则当 $|x|$ 较小时, 有 $f(1+x) \approx f(1) + f'(1)x = 1 + \frac{1}{6}x$, 于是

$$\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64+1} = 2 \cdot \sqrt[6]{1+\frac{1}{64}} \approx 2(1+\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64}) \approx 2.0052.$$

11. 计算球体体积时, 要求精确度在 2% 以内, 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解 球的体积为 $V = \frac{1}{6}\pi D^3$, $dV = \frac{1}{2}\pi D^2 \cdot \Delta D$, 因为计算球体体积时, 要求精度在 2% 以内, 所以其相对误差不超过 2%, 即要求

$$\left| \frac{dV}{V} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}\pi D^2 \cdot \Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3} \right| = 3 \cdot \left| \frac{\Delta D}{D} \right| \leq 2\%,$$

所以 $\left| \frac{\Delta D}{D} \right| \leq \frac{2}{3}\%,$

也就是测量直径的相对误差不能超过 $\frac{2}{3}\%$.

12. 某厂生产如图所示的扇形板, 半径 $R=200\text{mm}$, 要求中心角 α 为 55° . 产品检验时, 一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α , 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1\text{mm}$, 问此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少?

解 由 $\frac{l}{2} = R \sin \frac{\alpha}{2}$ 得 $\alpha = 2 \arcsin \frac{l}{2R} = 2 \arcsin \frac{l}{400},$

当 $\alpha=55^\circ$ 时, $l = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 400 \sin 27.5^\circ \approx 184.7,$

$$\delta'_\alpha = |\alpha'_l| \cdot \delta_l = \left| 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{l}{400})^2}} \cdot \frac{1}{400} \right| \cdot \delta_l.$$

当 $l=184.7$, $\delta_l=0.1$ 时,

$$\delta_\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{184.7}{400})^2}} \cdot \frac{1}{400} \cdot 0.1 \approx 0.00056 \text{ (弧度)}.$$

总习题二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的_____条件. $f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件.

(2) $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件.

(3) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的_____条件.

解 (1) 充分, 必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是().

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h[f(a+\frac{1}{h}) - f(a)]$ 存在; (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在;

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在; (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在.

解 正确结论是 D.

提示: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (\Delta x = -h).$

3. 设有一根细棒, 取棒的一端作为原点, 棒上任一点的做标 x 为, 于是分布在区间 $[0, x]$ 上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$, 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说, 单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 $\Delta m = m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)$.

在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均线密度为

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

于是, 在点 x_0 处的线密度为

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x} = m'(x_0).$$

4. 根据导数的定义, 求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数.

解 $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$

5. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'(0)$ 及 $f'_+(0)$, 又 $f'(0)$ 是否存在?

(1) $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases};$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

解 (1) 因为 $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x - 0}{x} = 1$,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1,$$

而且 $f'_-(0) = f'_+(0)$, 所以 $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 1$.

$$(2) \text{ 因为 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

而 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 所以 $f'(0)$ 不存在.

6. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

因为极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不导数.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y = \arcsin(\sin x)$;

(2) $y = \arctan \frac{1+x}{1-x}$;

(3) $y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \tan x$;

(4) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y = \sqrt[3]{x} \quad (x > 0)$.

$$\text{解(1)} y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

$$(2) y' = \frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \cdot (\frac{1+x}{1-x})' = \frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(3) y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot (\tan \frac{x}{2})' + \sin x \cdot \ln \tan x - \cos x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)'$$

$$= \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \tan x - \cos x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x = \sin x \cdot \ln \tan x.$$

$$(4) y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot (e^x + \sqrt{1+e^{2x}})' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot (e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

$$(5) \ln y = \frac{1}{x} \ln x, \quad \frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}, \quad y' = \sqrt[x]{x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} (1 - \ln x).$$

8. 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = \cos^2 x \cdot \ln x;$$

$$(2) y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解 (1)} y' = -2 \cos x \sin x \cdot \ln x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{x} = -\sin 2x \cdot \ln x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = -2 \cos 2x \cdot \ln x - \sin 2x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cos x \sin x \cdot \frac{1}{x} - \cos^2 x \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= -2 \cos 2x \cdot \ln x - \frac{2 \sin 2x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

$$(2) y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'' = -\frac{3}{2} (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) = \frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

9. 求下列函数的 n 阶导数:

$$(1) y = \sqrt[m]{1+x};$$

$$(2) y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{解 (1)} y = \sqrt[m]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{m}},$$

$$y' = \frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}, \quad y'' = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}, \quad y''' = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-3}, \dots,$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

$$(2) \quad y = \frac{1-x}{1+x} = -1 + 2(1+x)^{-1},$$

$$y' = 2(-1)(1+x)^{-2}, \quad y'' = 2(-1)(-2)(1+x)^{-3}, \quad y''' = 2(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}, \dots,$$

$$y^{(n)} = 2(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)} = \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

解 方程两边求导得

$$e^y y' + y + xy' = 0, \quad \square\square (1)$$

于是 $y' = -\frac{y}{x+e^y};$

$$y'' = \left(-\frac{y}{x+e^y}\right)' = -\frac{y'(x+e^y) - y(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}. \quad \text{---(2)}$$

当 $x=0$ 时, 由原方程得 $y(0)=1$, 由(1)式得 $y'(0)=-\frac{1}{e}$, 由(2)式得 $y''(0)=\frac{1}{e^2}$.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$(1) \begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}.$$

解 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{(a \sin^3 \theta)'}{(a \cos^3 \theta)'} = \frac{3a \sin^2 \theta \cos \theta}{3a \cos^2 \theta (-\sin \theta)} = -\tan \theta,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\tan \theta)'}{(a \cos^3 \theta)'} = \frac{-\sec^2 \theta}{-3a \cos^2 \theta \sin \theta} = \frac{1}{3a} \sec^4 \theta \cdot \csc \theta.$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\arctan t)'}{[\ln \sqrt{1+t^2}]'} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{1}{t}\right)'}{\left[\ln \sqrt{1+t^2}\right]'} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{t^3}.$$

12. 求曲线 $\begin{cases} x=2e^t \\ y=e^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相的点处的切线方程及法线方程.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{-t})'}{(2e^t)'} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2e^{2t}}.$

当 $t=0$ 时, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}, x=2, y=1.$

所求切线的方程为 $y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-4=0$;

所求法线的方程为 $y-1=2(x-2).$

13. 甲船以 6km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8km/h 的速率向南行驶, 在中午十二点正, 乙船位于甲船之北 16km 处. 问下午一点正两船相离的速率为多少?

解 设从中午十二点开始, 经过 t 小时, 两船之间的距离为 S , 则有

$$S^2 = (16-8t)^2 + (6t)^2,$$

$$2S \frac{dS}{dt} = -16(16-8t) + 72t,$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-16(16-8t) + 72t}{2S}.$$

当 $t=1$ 时, $S=10$,

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=1} = \frac{-128+72}{20} = -2.8 \text{ (km/h)},$$

即下午一点正两船相离的速度为 -2.8km/h .

14. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则有 $f(1+\Delta x) - f(1) \approx f'(1)\Delta x = \frac{1}{3}\Delta x$, 或 $f(1+\Delta x) \approx 1 + \frac{1}{3}\Delta x$ 于是

$$\sqrt[3]{1.02} = \sqrt[3]{1+0.02} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.02 = 1.007.$$

15. 已知单摆的振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 $g=980 \text{ cm/s}^2$, l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20cm, 为使周期 T 增大 0.05s, 摆长约需加长多少?

解 因为 $\Delta T \approx dT = \frac{\pi}{\sqrt{gL}} \cdot \Delta L$,

所以 $\Delta L \approx \frac{0.05\sqrt{gL}}{\pi} \Big|_{L=20} = 2.23 \text{ (cm)},$

即摆长约需加长 2.23cm.

习题 3-1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln \sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上的正确性.

解 因为 $y=\ln \sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上连续, 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 内可导, 且 $y(\frac{\pi}{6})=y(\frac{5\pi}{6})$, 所以由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 使得 $y'(\xi)=\cot \xi=0$.

由 $y'(x)=\cot x=0$ 得 $\frac{\pi}{2} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$.

因此确有 $\xi=\frac{\pi}{2} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 使 $y'(\xi)=\cot \xi=0$.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的正确性.

解 因为 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}=0$.

由 $y'(x)=12x^2-10x+1=0$ 得 $x=\frac{5 \pm \sqrt{13}}{12} \in (0, 1)$.

因此确有 $\xi=\frac{5 \pm \sqrt{13}}{12} \in (0, 1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}$.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

解 因为 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 可导, 且 $F'(x)=1-\sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内不为 0, 所以由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

$$\text{令 } \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}, \text{ 即 } \frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{2}{\pi-2}.$$

化简得 $\sin x = \frac{8}{(\pi-2)^2+4} - 1$. 易证 $0 < \frac{8}{(\pi-2)^2+4} - 1 < 1$, 所以 $\sin x = \frac{8}{(\pi-2)^2+4} - 1$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有

解, 即确实存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

证明 因为函数 $y=px^2+qx+r$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $y(b)-y(a)=y'(\xi)(b-a)$, 即

$$(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)=(2p\xi+q)(b-a).$$

化简上式得

$$p(b-a)(b+a)=2p\xi(b-a),$$

$$\text{故 } \xi = \frac{a+b}{2}.$$

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 由于 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(1)=f(2)=0$, 所以由罗尔定理可知, 存在 $\xi_1 \in (1, 2)$, 使 $f'(\xi_1)=0$. 同理存在 $\xi_2 \in (2, 3)$, 使 $f'(\xi_2)=0$; 存在 $\xi_3 \in (3, 4)$, 使 $f'(\xi_3)=0$. 显然 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 都是方程 $f'(x)=0$ 的根. 注意到方程 $f'(x)=0$ 是三次方程, 它至多能有三个实根, 现已发现它的三个实根, 故它们也就是方程 $f'(x)=0$ 的全部根.

6. 证明恒等式: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$.

证明 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. 因为

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0,$$

所以 $f(x) \equiv C$, 其中 C 是一常数.

因此 $f(x) = f(0) = \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, 即 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

7. 若方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = 0$ 有一个正根 x_0 , 证明方程

$$a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

证明 设 $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x$, 由于 $F(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上连续, 在 $(0, x_0)$ 内可导, 且 $F(0)=F(x_0)=0$, 根据罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, x_0)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即方程

$$a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 证明: 在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ , 使得 $f''(\xi)=0$.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 根据罗尔定理, 至少存在一点 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(\xi_1)=0$. 同理存在一点 $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使 $f'(\xi_2)=0$.

又由于 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上连续, 在 (ξ_1, ξ_2) 内可导, 且 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, 根据罗尔定理, 至少

存在一点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (x_1, x_3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

9. 设 $a > b > 0, n > 1$, 证明:

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

证明 设 $f(x) = x^n$, 则 $f(x)$ 在 $[b, a]$ 上连续, 在 (b, a) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (b, a)$, 使

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b), \text{ 即 } a^n - b^n = n\xi^{n-1}(a-b).$$

因为 $nb^{n-1}(a-b) < n\xi^{n-1}(a-b) < na^{n-1}(a-b)$,

所以 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a > b > 0$, 证明:

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

证明 设 $f(x) = \ln x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[b, a]$ 上连续, 在区间 (b, a) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (b, a)$, 使

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b), \text{ 即 } \ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b).$$

因为 $b < \xi < a$, 所以

$$\frac{1}{a}(a-b) < \ln a - \ln b < \frac{1}{b}(a-b), \text{ 即 } \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

11. 证明下列不等式:

(1) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$;

(2) 当 $x > 1$ 时, $e^x > e \cdot x$.

证明 (1) 设 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \text{ 即 } \arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a),$$

所以 $|\arctan b - \arctan a| = \frac{1}{1+\xi^2}|b-a| \leq |b-a|$, 即 $|\arctan a - \arctan b| \leq |a-b|$.

(2) 设 $f(x) = e^x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[1, x]$ 上连续, 在区间 $(1, x)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (1, x)$, 使

$$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x-1), \text{ 即 } e^x - e = e^\xi(x-1).$$

因为 $\xi > 1$, 所以

$$e^x - e = e^\xi(x-1) > e(x-1), \text{ 即 } e^x > e \cdot x.$$

12. 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个正根.

证明 设 $f(x) = x^5 + x - 1$, 则 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 内的连续函数.

因为 $f(0) = -1, f(1) = 1, f(0)f(1) < 0$, 所以函数在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点, 即 $x^5 + x - 1 = 0$ 至少有一个正根.

假如方程至少有两个正根, 则由罗尔定理, $f'(x)$ 存在零点, 但 $f'(x) = 5x^4 + 1 \neq 0$, 矛盾. 这说

明方程只能有一个正根.

13. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明在 (a, b) 内有一点 ξ , 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

解 设 $\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a),$$

即 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix} = (b-a) \left[\begin{vmatrix} [f(a)]' & f(\xi) \\ [g(a)]' & g(\xi) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix} \right].$

因此 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$

14. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足关系式 $f'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 1$ 则 $f(x) = e^x$.

证明 令 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 内有

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^2}{e^{2x}} = \frac{f(x)e^x - f(x)e^2}{e^{2x}} \equiv 0,$$

所以在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $\varphi(x)$ 为常数.

因此 $\varphi(x) = \varphi(0) = 1$, 从而 $f(x) = e^x$.

15. 设函数 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad (0 < \theta < 1).$$

证明 根据柯西中值定理

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}} \quad (\xi_1 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{n\xi_1^{n-1} - n \cdot 0^{n-1}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}} \quad (\xi_2 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}),$$

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}} = \frac{f''(\xi_2) - f''(0)}{n(n-1)\xi_2^{n-2} - n(n-1) \cdot 0^{n-2}} = \frac{f'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)\xi_3^{n-3}} \quad (\xi_3 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } \xi_2 \text{ 之间}),$$

依次下去可得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1) \cdots 2 \cdot \xi_{n-1}} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(0)}{n(n-1) \cdots 2 \cdot \xi_{n-1} - n(n-1) \cdots 2 \cdot 0} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \quad (\xi_n \text{ 介于 } 0$$

与 ξ_{n-1} 之间),

所以 $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}$

由于 ξ_n 可以表示为 $\xi_n = \theta x$ ($0 < \theta < 1$), 所以 $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$ ($0 < \theta < 1$).

习题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{arc} \cot x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x;$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right);$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x;$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}.$$

$$\text{解 (1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x}{1} = \cos a.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 \cos 3x}{5 \sec^2 5x} = -\frac{3}{5}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{2(\pi - 2x) \cdot (-2)} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{-2} = -\frac{1}{8}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{mx^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\tan 7x} \cdot \sec^2 7x \cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x} \cdot \sec^2 2x \cdot 2} = \frac{7}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\tan 2x}{\tan 7x} = \frac{7}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sec^2 2x \cdot 2}{\sec^2 7x \cdot 7} = 1.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x \cdot 3} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 3x (-\sin 3x) \cdot 3}{2 \cos x (-\sin x)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin 3x}{-\sin x} = 3.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\arccot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{1 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2} = 1.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sec x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \ln(1 + x^2)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x} \quad (\text{注: } \cos x \cdot \ln(1 + x^2) \sim x^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-2 \cos x (-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 2x \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{1} = +\infty \quad (\text{注: 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } t = \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty).$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$(14) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)},$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x + a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1} = a,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)} = e^a.$$

.

$$(15) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \ln x},$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cdot \cot x} = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \ln x} = e^0 = 1.$$

$$(16) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} = e^{-\tan x \ln x},$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow +0} \tan x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\tan x \ln x} = e^0 = 1.$$

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1, \text{ 极限 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} \text{ 是存在的.}$$

但 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ 不存在, 不能用洛必达法则.

3. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 是存在的.

但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在, 不能用洛必达法则.

4. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} [\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ e^{-\frac{1}{2}} & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0) = e^{-\frac{1}{2}}$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = f(0)$,

因为 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} [\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} [\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1]}$,

而 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} [\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$,

所以 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} [\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} [\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1]} = e^{-\frac{1}{2}} = f(0)$.

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

习题 3-3

1. 按 $(x-4)$ 的幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 因为 $f(4)=-56$,

$$f'(4)=(4x^3-15x^2+2x-3)|_{x=4}=21,$$

$$f''(4)=(12x^2-30x+2)|_{x=4}=74,$$

$$f'''(4)=(24x-30)|_{x=4}=66,$$

$$f^{(4)}(4)=24,$$

所以按 $(x-4)$ 的幂展开的多项式为

$$x^4-5x^3+x^2-3x+4$$

$$\begin{aligned} &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4 \\ &= -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4. \end{aligned}$$

2. 应用麦克劳林公式, 按 x 幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解 因为

$$f'(x)=3(x^2-3x+1)^2(2x-3),$$

$$f''(x)=6(x^2-3x+1)(2x-3)^2+6(x^2-3x+1)^2=30(x^2-3x+1)(x^2-3x+2),$$

$$f'''(x)=30(2x-3)(x^2-3x+2)+30(x^2-3x+1)(2x-3)=30(2x-3)(2x^2-6x+3),$$

$$f^{(4)}(x)=60(2x^2-6x+3)+30(2x-3)(4x-6)=360(x^2-3x+2),$$

$$f^{(5)}(x)=360(2x-3),$$

$$f^{(6)}(x)=720;$$

$$f(0)=1, f'(0)=-9, f''(0)=60, f'''(0)=-270, f^{(4)}(0)=720, f^{(5)}(0)=-1080, f^{(6)}(0)=720,$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 \\ &= 1 - 9x + 30x^2 - 45x^3 + 30x^4 - 9x^5 + x^6. \end{aligned}$$

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.

$$\text{解 因为 } f(4)=\sqrt{4}=2, f'(4)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{1}{4}, f''(4)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=4}=-\frac{1}{32},$$

$$f'''(4)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{3}{8\cdot 32}, f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},$$

$$\text{所以 } \sqrt{x} = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{1}{4!} \cdot \frac{15}{16\sqrt{[4+\theta(x-4)]^7}}(x-4)^4 \quad (0 < \theta < 1).$$

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f'(x)=x^{-1}, f''(x)=(-1)x^{-2}, f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$f^{(k)}(2)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k} (k=1, 2, \dots, n+1)$$

所以

$$\begin{aligned}\ln x &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + o[(x-2)^n] \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2 \cdot 2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-2)^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}(x-2)^n + o[(x-2)^n].\end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f(x)=x^{-1}, f'(x)=(-1)x^{-2}, f''(x)=(-1)(-2)x^{-3}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};$$

$$f^{(k)}(-1)=\frac{(-1)^k k!}{(-1)^{k+1}}=-k! (k=1, 2, \dots, n),$$

所以
$$\frac{1}{x}=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$$=-[1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^n]+\frac{(-1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}(x+1)^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

6. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=\sec^2 x,$$

$$f''(x)=2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x=2\sec^2 x \cdot \tan x,$$

$$f'''(x)=4\sec x \cdot \sec x \cdot \tan^2 x + 2\sec^4 x = 4\sec^2 x \cdot \tan^2 x + 2\sec^4 x,$$

$$f^{(4)}(x)=8\sec^2 x \cdot \tan^3 x + 8\sec^4 x \cdot \tan x + 8\sec^4 x \cdot \tan x = \frac{8\sin x(\sin^2 x + 2)}{\cos^5 x};$$

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=2,$$

所以 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\sin(\theta x)[\sin^2(\theta x) + 2]}{3\cos^5(\theta x)}x^4 \quad (0 < \theta < 1).$

7. 求函数 $f(x) = xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + x e^x, \\ f''(x) &= e^x + e^x + x e^x = 2e^x + x e^x, \\ f'''(x) &= 2e^x + e^x + x e^x = 3e^x + x e^x, \dots, \\ f^{(n)}(x) &= ne^x + x e^x; \\ f^{(k)}(0) &= k \quad (k=1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } xe^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

8. 验证当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时, 所产生的误差小于

0.01, 并求 \sqrt{e} 的近似值, 使误差小于 0.01.

解 因为公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 右端为 e^x 的三阶麦克劳林公式, 其余项为

$$R_3(x) = \frac{e^\xi}{4!}x^4,$$

所以当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的误差

$$|R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{4!}x^4 \right| \leq \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 \approx 0.0045 < 0.01.$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \approx 1.645.$$

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$;

(2) $\sin 18^\circ$.

解 (1) 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则 $f(x)$ 在 $x_0 = 27$ 点展开成三阶泰勒公式为

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}}(x-27) + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{2}{9} \cdot 27^{-\frac{5}{3}} \right) (x-27)^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{10}{27}\cdot 27^{-\frac{8}{3}}\right)(x-27)^3+\frac{1}{4!}\cdot\left(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}}\right)(x-27)^4 (\xi \text{ 介于 } 27 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

$$\text{于是} \quad \sqrt[3]{30} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{2}{9} \cdot 27^{-\frac{5}{3}}\right) \cdot 3^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{10}{27} \cdot 27^{-\frac{8}{3}}\right) \cdot 3^3$$

$$\approx 3\left(1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^6} + \frac{5}{3^{10}}\right) \approx 3.10724,$$

其误差为

$$|R_3(30)| = \left| \frac{1}{4!} \cdot \left(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}}\right) \cdot 3^4 \right| < \frac{1}{4!} \cdot \frac{80}{81} \cdot 27^{-\frac{11}{3}} \cdot 3^4 = \frac{80}{4! \cdot 3^{11}} = 1.88 \times 10^{-5}.$$

(2) 已知

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{\sin \xi}{4!}x^4 \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

$$\text{所以} \quad \sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0.3090,$$

其误差为

$$|R_3(\frac{\pi}{10})| = \left| \frac{\sin \xi}{4!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 \right| < \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{4!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 2.03 \times 10^{-4}.$$

10. 利用泰勒公式求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}.$$

$$\text{解} \quad (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} - \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sqrt[3]{1+3t} - \sqrt[4]{1-2t}}{t}.$$

因为 $\sqrt[3]{1+3t} = 1+t+o(t)$, $\sqrt[4]{1-2t} = 1-\frac{1}{2}t+o(t)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3}) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{[1+t+o(t)] - [1-\frac{1}{2}t+o(t)]}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \left[\frac{3}{2} + \frac{o(t)}{t}\right] = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)] - [1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)]}{x^3 [1 + \ln(1-x)^{\frac{1}{x}}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{o(x^4)}{x^3}}{1 + \ln(1-x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1 + e^{-1}} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - [1 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 + o(x^4)]}{[(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)) - (1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + o(x^4))]x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4!}x^4 + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 - \frac{11}{24}x^6 + x^2 \cdot o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4!} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2} - \frac{11}{24}x^2 + \frac{o(x^4)}{x^2}} = \frac{\frac{3}{4!}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{12}.$$

习题 3-4

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 单调性.

解 因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{1}{1+x^2}\leq 0$, 且仅当 $x=0$ 时等号成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少.

2. 判定函数 $f(x)=x+\cos x$ ($0\leq x\leq 2\pi$) 的单调性.

解 因为 $f'(x)=1-\sin x\geq 0$, 所以 $f(x)=x+\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$;

(2) $y=2x+\frac{8}{x}$ ($x>0$);

(3) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;

(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=(x-1)(x+1)^3$;

(6) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ ($a>0$);

(7) $y=x^n e^{-x}$ ($n>0, x\geq 0$);

(8) $y=x+|\sin 2x|$.

解 (1) $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)=0$, 令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$.
列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow		\searrow		\nearrow

可见函数在 $(-\infty, -1]$ 和 $[3, +\infty)$ 内单调增加, 在 $[-1, 3]$ 内单调减少.

(2) $y'=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}=0$, 令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=2, x_2=-2$ (舍去).

因为当 $x>2$ 时, $y>0$; 当 $0<x<2$ 时, $y'<0$, 所以函数在 $(0, 2]$ 内单调减少, 在 $[2, +\infty)$ 内单调增加.

(3) $y'=\frac{-60(2x-1)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}$, 令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$, 不可导点为 $x=0$.

列表得

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	不存在	$-$	0	$+$	0	$-$
y	\searrow		\searrow	0	\nearrow		\searrow

可见函数在 $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{2}]$, $[1, +\infty)$ 内单调减少, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调增加.

(4) 因为 $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$, 所以函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

(5) $y' = (x+1)^3 + 3(x-1)(x+1)^2 = 4(x - \frac{1}{2})(x+1)^2$. 因为当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $y' < 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y' > 0$, 所以函数在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内单调减少, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内单调增加.

(6) $y' = \frac{-(x - \frac{2a}{3})}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}$, 驻点为 $x_1 = \frac{2a}{3}$, 不可导点为 $x_2 = \frac{a}{2}$, $x_3 = a$.

列表得

x	$(-\infty, \frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3})$	$\frac{2a}{3}$	$(\frac{2a}{3}, a)$	a	$(a, +\infty)$
y'	+	不存在	+	0	-	不存在	+
y	↗		↗		↘		↗

可见函数在 $(-\infty, \frac{a}{2})$, $(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3}]$, $(a, +\infty)$ 内单调增加, 在 $[\frac{2a}{3}, a)$ 内单调减少.

(7) $y' = e^{-x} x^{n-1} (n-x)$, 驻点为 $x=n$. 因为当 $0 < x < n$ 时, $y' > 0$; 当 $x > n$ 时, $y' < 0$, 所以函数在 $[0, n]$ 上单调增加, 在 $[n, +\infty)$ 内单调减少.

$$(8) y = \begin{cases} x + \sin 2x & k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x - \sin 2x & k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y' = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x & k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 1 - 2\cos 2x & k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

y' 是以 π 为周期的函数, 在 $[0, \pi]$ 内令 $y'=0$, 得驻点 $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, 不可导点为 $x_3 = \frac{\pi}{2}$.

列表得

x	$(0, \frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{5\pi}{6}, \pi)$
y'	+	0	-	不存在	+	0	-
y	↗		↘		↗		↘

根据函数在 $[0, \pi]$ 上的单调性及 y' 在 $(-\infty, +\infty)$ 的周期性可知函数在 $[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}]$ 上单调增加, 在

$[\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$ 上单调减少($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

4. 证明下列不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$;

(2) 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$;

(3) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$;

(4) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$;

(5) 当 $x > 4$ 时, $2^x > x^2$;

证明 (1) 设 $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x}$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内是连续的. 因为

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{1+x}} > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 从而当 $x > 0$ 时 $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} > 0,$$

也就是 $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$.

(2) 设 $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内是连续的. 因为

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 从而当 $x > 0$ 时 $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} > 0,$$

也就是 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

(3) 设 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内连续,

$$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2 = \frac{(\cos x - 1)[(\cos^2 x - 1) - \cos x]}{\cos^2 x}.$$

因为在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内 $\cos x - 1 < 0$, $\cos^2 x - 1 < 0$, $-\cos x < 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调增

加, 因此当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$\sin x + \tan x - 2x > 0,$$

也就是 $\sin x + \tan x > 2x$.

(4) 设 $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内连续,

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x).$$

因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x$, $\tan x + x > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 因此当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$\tan x - x - \frac{1}{3}x^3 > 0,$$

也就是 $\tan x > x + \frac{1}{3}x^2$.

(5) 设 $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$, 则 $f(x)$ 在 $[4, +\infty)$ 内连续, 因为

$$f'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{\ln 4}{2} - \frac{2}{x} > \frac{\ln e}{2} - \frac{2}{4} = 0,$$

所以当 $x > 4$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 内单调增加.

因此当 $x > 4$ 时, $f(x) > f(4) = 0$, 即 $x \ln 2 - 2 \ln x > 0$, 也就是 $2^x > x^2$.

5. 讨论方程 $\ln x = ax$ (其中 $a > 0$) 有几个实根?

解 设 $f(x) = \ln x - ax$. 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$, 驻点为 $x = \frac{1}{a}$.

因为当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 内单调增加; 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在

$(\frac{1}{a}, +\infty)$ 内单调减少. 又因为当 $x \rightarrow 0$ 及 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以如果 $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1 > 0$, 即

$a < \frac{1}{e}$, 则方程有且仅有两个实根; 如果 $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1 < 0$, 即 $a > \frac{1}{e}$, 则方程没有实根. 如果

$f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1 = 0$, 即 $a = \frac{1}{e}$, 则方程仅有一个实根.

6. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面这个例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

解 单调函数的导函数不一定为单调函数.

例如 $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的, 但其导数不是单调函数. 事实上,

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0,$$

这就说明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. $f''(x) = -\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不保持确定的符号,

故 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的.

7. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=4x-x^2$;

(2) $y=\operatorname{sh} x$;

(3) $y=1+\frac{1}{x} \quad (x>0)$;

(4) $y=x \arctan x$;

解 (1) $y'=4-2x, y''=-2$,

因为 $y''<0$, 所以曲线在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凸的.

(2) $y'=\operatorname{ch} x, y''=\operatorname{sh} x$. 令 $y''=0$, 得 $x=0$.

因为当 $x<0$ 时, $y''=\operatorname{sh} x<0$; 当 $x>0$ 时, $y''=\operatorname{sh} x>0$, 所以曲线在 $(-\infty, 0]$ 内是凸的, 在 $[0, +\infty)$ 内是凹的.

(3) $y'=-\frac{1}{x^2}, y''=\frac{2}{x^3}$.

因为当 $x>0$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(0, +\infty)$ 内是凹的.

(4) $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}, y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}$.

因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $y''>0$, 所以曲线 $y=x \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.

8. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$;

(2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$;

(4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$;

(6) $y=x^4(12\ln x-7)$,

解 (1) $y'=3x^2-10x+3, y''=6x-10$. 令 $y''=0$, 得 $x=\frac{5}{3}$.

因为当 $x<\frac{5}{3}$ 时, $y''<0$; 当 $x>\frac{5}{3}$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(-\infty, \frac{5}{3}]$ 内是凸的, 在 $[\frac{5}{3}, +\infty)$ 内是

凹的, 拐点为 $(\frac{5}{3}, \frac{20}{27})$.

(2) $y'=e^{-x}-xe^{-x}, y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)$. 令 $y''=0$, 得 $x=2$.

因为当 $x<2$ 时, $y''<0$; 当 $x>2$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(-\infty, 2]$ 内是凸的, 在 $[2, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(2, 2e^{-2})$.

(3) $y'=4(x+1)^3+e^x, y''=12(x+1)^2+e^x$.

因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $y''>0$, 所以曲线 $y=(x+1)^4+e^x$ 的在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的, 无拐点.

$$(4) y' = \frac{2x}{x^2+1}, y'' = \frac{2(x^2+1)-2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}. \text{ 令 } y''=0, \text{ 得 } x_1=-1, x_2=1.$$

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	\cap	$\ln 2$ 拐点	\cup	$\ln 2$ 拐点	\cap

可见曲线在 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$ 内是凸的, 在 $[-1, 1]$ 内是凹的, 拐点为 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$.

$$(5) y' = e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}, y'' = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} (1-2x). \text{ 令 } y''=0 \text{ 得 } x = \frac{1}{2}.$$

因为当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$, 所以曲线 $y = e^{\arctan x}$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内是凹的, 在

$[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内是凸的, 拐点是 $(\frac{1}{2}, e^{\arctan \frac{1}{2}})$.

$$(6) y' = 4x^3(12\ln x - 7) + 12x^3, y'' = 144x^2 \cdot \ln x. \text{ 令 } y''=0, \text{ 得 } x=1.$$

因为当 $0 < x < 1$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 所以曲线在 $(0, 1]$ 内是凸的, 在 $[1, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(1, -7)$.

9. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

$$(1) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(2) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(3) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

证明 (1) 设 $f(t) = t^n$, 则 $f'(t) = nt^{n-1}$, $f''(t) = n(n-1)t^{n-2}$. 因为当 $t > 0$ 时, $f''(t) > 0$, 所以曲线 $f(t) = t^n$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是凹的. 由定义, 对任意的 $x > 0, y > 0, x \neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) 设 $f(t) = e^t$, 则 $f'(t) = e^t$, $f''(t) = e^t$. 因为 $f''(t) > 0$, 所以曲线 $f(t) = e^t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的. 由定义, 对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty), x \neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即 $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}} (x \neq y).$

(3) 设 $f(t)=t \ln t$, 则 $f'(t)=\ln t+1$, $f''(t)=\frac{1}{t}$.

因为当 $t>0$ 时, $f''(t)>0$, 所以函数 $f(t)=t \ln t$ 的图形在 $(0, +\infty)$ 内是凹的. 由定义, 对任意的 $x>0, y>0, x \neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即 $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$

10. 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

证明 $y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$, $y''=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}.$

令 $y''=0$, 得 $x_1=-1$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$.

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3}, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\cap	-1	\cup	$\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}$	\cap	$\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}$	\cup

可见拐点为 $(-1, -1)$, $(2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})})$, $(2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})})$. 因为

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4}, \quad \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4},$$

所以这三个拐点在一条直线上.

11. 问 a 、 b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

解 $y'=3ax^2+2bx$, $y''=6ax+2b$. 要使 $(1, 3)$ 成为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 必须 $y(1)=3$ 且 $y''(1)=0$,

即 $a+b=3$ 且 $6a+2b=0$, 解此方程组得 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$.

12. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a 、 b 、 c 、 d , 使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为拐点, 且点 $(-2, 44)$ 在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b$. 依条件有

$$\begin{cases} y(-2)=44 \\ y(1)=-10 \\ y'(-2)=0 \\ y''(1)=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -8a+4b-2c+d=44 \\ a+b+c+d=-10 \\ 12a-4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases}.$$

解之得 $a=1$, $b=-3$, $c=-24$, $d=16$.

13. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y'=4kx^3-12kx$, $y''=12k(x-1)(x+1)$. 令 $y''=0$, 得 $x_1=-1$, $x_2=1$.

因为在 $x_1=-1$ 的两侧 y'' 是异号的, 又当 $x=-1$ 时 $y=4k$, 所以点 $(-1, 4k)$ 是拐点.

因为 $y'(-1)=8k$, 所以过拐点 $(-1, 4k)$ 的法线方程为 $y-4k=-\frac{1}{8k}(x+1)$. 要使法线过原点, 则

$(0, 0)$ 应满足法线方程, 即 $-4k=-\frac{1}{8k}$, $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

同理, 因为在 $x_1=1$ 的两侧 y'' 是异号的, 又当 $x=1$ 时 $y=4k$, 所以点 $(1, 4k)$ 也是拐点.

因为 $y'(1)=-8k$, 所以过拐点 $(1, 4k)$ 的法线方程为 $y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$. 要使法线过原点, 则 $(0,$

$0)$ 应满足法线方程, 即 $-4k=-\frac{1}{8k}$, $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

因此当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时, 该曲线的拐点处的法线通过原点.

14. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

解 不妨设 $f'''(x_0)>0$. 由 $f'''(x)$ 的连续性, 存在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 在此邻域内有 $f'''(x)>0$. 由拉格朗日中值定理, 有

$$f''(x)-f''(x_0)=f'''(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

即 $f''(x)=f'''(\xi)(x-x_0)$.

因为当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f''(x)<0$; 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f''(x)>0$, 所以 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点.

习题 3-5

1. 求函数的极值:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

(2) $y=x-\ln(1+x)$;

(3) $y=-x^4+2x^2$;

(4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(6) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y=e^x \cos x$;

(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;

(10) $y=x+\tan x$.

解 (1)函数的定义为 $(-\infty, +\infty)$, $y'=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x-3)(x+1)$, 驻点为 $x_1=-1$, $x_2=3$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	17 极大值	\searrow	-47 极小值	\nearrow

可见函数在 $x=-1$ 处取得极大值 17, 在 $x=3$ 处取得极小值-47.

(2)函数的定义为 $(-1, +\infty)$, $y'=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$, 驻点为 $x=0$. 因为当 $-1<x<0$ 时, $y'<0$; 当 $x>0$

时, $y'>0$, 所以函数在 $x=0$ 处取得极小值, 极小值为 $y(0)=0$.

(3)函数的定义为 $(-\infty, +\infty)$,

$$y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1), y''=-12x^2+4,$$

令 $y'=0$, 得 $x_1=0, x_2=-1, x_3=1$.

因为 $y''(0)=4>0, y''(-1)=-8<0, y''(1)=-8<0$, 所以 $y(0)=0$ 是函数的极小值, $y(-1)=1$ 和 $y(1)=1$ 是函数的极大值.

(4)函数的定义域为 $(-\infty, 1]$,

$$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}(2\sqrt{1-x}+1)},$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\frac{3}{4}$.

因为当 $x < \frac{3}{4}$ 时, $y' > 0$; 当 $\frac{3}{4} < x < 1$ 时, $y' < 0$, 所以 $y(1) = \frac{5}{4}$ 为函数的极大值.

(5) 函数的定义为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = \frac{-5(x - \frac{12}{5})}{\sqrt{(4+5x^2)^3}}$, 驻点为 $x = \frac{12}{5}$.

因为当 $x < \frac{12}{5}$ 时, $y' > 0$; 当 $x > \frac{12}{5}$ 时, $y' < 0$, 所以函数在 $x = \frac{12}{5}$ 处取得极大值, 极大值为 $y(\frac{12}{5}) = \frac{\sqrt{205}}{10}$.

(6) 函数的定义为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$, 驻点为 $x_1=0, x_2=-2$.

列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	\searrow	$\frac{8}{3}$ 极小值	\nearrow	4 极大值	\searrow

可见函数在 $x=-2$ 处取得极小值 $\frac{8}{3}$, 在 $x=0$ 处取得极大值 4.

(7) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = e^x(\cos x - \sin x), \quad y'' = -e^x \sin x.$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + 2(k+1)\pi$, ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

因为 $y''(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) < 0$, 所以 $y(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) = e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极大值.

因为 $y''[\frac{\pi}{4} + 2(k+1)\pi] > 0$, 所以 $y[\frac{\pi}{4} + 2(k+1)\pi] = -e^{\frac{\pi}{4} + 2(k+1)\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极小值.

(8) 函数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$y' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x).$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=e$.

因为当 $x < e$ 时, $y' > 0$; 当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 所以 $y(e) = e^{\frac{1}{e}}$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

(9)函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = -\frac{2}{3} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}$, 因为 $y' < 0$, 所以函数在 $(-\infty, +\infty)$ 是单调

减少的, 无极值.

(10)函数 $y=x+\operatorname{tg} x$ 的定义域为 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

因为 $y'=1+\sec^2 x > 0$, 所以函数 $f(x)$ 无极值.

2. 试证明: 如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac < 0$, 那么这函数没有极值.

证明 $y'=3ax^2+2bx+c$. 由 $b^2-3ac < 0$, 知 $a \neq 0$. 于是配方得到

$$y'=3ax^2+2bx+c=3a\left(x^2+\frac{2b}{3a}x+\frac{c}{3a}\right)=3a\left(x^2+\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{3ac-b^2}{3a},$$

因 $3ac-b^2 > 0$, 所以当 $a > 0$ 时, $y' > 0$; 当 $a < 0$ 时, $y' < 0$. 因此 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 是单调函数, 没有极值.

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

解 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x, f''(x)=-a\sin x-3\sin x$.

要使函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 必有 $f'(\frac{\pi}{3})=0$, 即 $a \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0, a=2$.

当 $a=2$ 时, $f''(\frac{\pi}{3})=-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. 因此, 当 $a=2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 而且取得

极大值, 极大值为 $f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$.

4. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2, -1 \leq x \leq 4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2, -1 \leq x \leq 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}, -5 \leq x \leq 1$.

解 (1) $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$, 令 $y'=0$, 得 $x_1=0, x_2=1$. 计算函数值得

$$y(-1)=-5, y(0)=0, y(1)=-1, y(4)=80,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(-1)=-5$, 最大值为 $y(4)=80$.

(2) $y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)$, 令 $y'=0$, 得 $x_1=0, x_2=-2$ (舍去), $x_3=2$. 计算函数值得

$$y(-1)=-5, y(0)=2, y(2)=-14, y(3)=11,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(2)=-14$, 最大值为 $y(3)=11$.

(3) $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$, 令 $y'=0$, 得 $x=\frac{3}{4}$. 计算函数值得

$$y(-5)=-5+\sqrt{6}, y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}, y(1)=1,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(-5)=-5+\sqrt{6}$, 最大值为 $y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$.

5. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7(1\leq x\leq 4)$ 在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

解 $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$, 函数 $f(x)$ 在 $1\leq x\leq 4$ 内的驻点为 $x=3$.

比较函数值:

$$f(1)=-29, f(3)=-61, f(4)=-47,$$

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1)=-29$.

6. 问函数 $y=x^2-\frac{54}{x}(x<0)$ 在何处取得最小值?

解 $y'=2x+\frac{54}{x^2}$, 在 $(-\infty, 0)$ 的驻点为 $x=-3$. 因为

$$y''=2-\frac{108}{x^3}, y''(-3)=2+\frac{108}{27}>0,$$

所以函数在 $x=-3$ 处取得极小值. 又因为驻点只有一个, 所以这个极小值也就是最小值, 即函数在 $x=-3$ 处取得最小值, 最小值为 $y(-3)=27$.

7. 问函数 $y=\frac{x}{x^2+1}(x\geq 0)$ 在何处取得最大值?

解 $y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. 函数在 $(0, +\infty)$ 内的驻点为 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时, $y'>0$; 当 $x>1$ 时 $y'<0$, 所以函数在 $x=1$ 处取得极大值. 又因为函数在 $(0, +\infty)$ 内只有一个驻点, 所以此极大值也是函数的最大值, 即函数在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌 20cm 长的墙壁, 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

解 设宽为 x 长为 y , 则 $2x+y=20, y=20-2x$, 于是面积为

$$S=xy=x(20-2x)=20x-2x^2.$$

$$S'=20-4x=4(10-x), S''=-4.$$

令 $S'=0$, 得唯一驻点 $x=10$.

因为 $S''(10)=-4<0$, 所以 $x=10$ 为极大值点, 从而也是最大值点.

当宽为 5 米, 长为 10 米时这间小屋面积最大.

9. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解 由 $V=\pi r^2 h$, 得 $h=V\pi^{-1}r^{-2}$. 于是油罐表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r} \quad (0<r<+\infty),$$

$$S'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}.$$

令 $S'=0$, 得驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

因为 $S''=4\pi+\frac{4V}{r^3}>0$, 所以 S 在驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 处取得极小值, 也就是最小值. 这时相应的

高为 $h=\frac{V}{\pi r_0^2}=2r$. 底直径与高的比为 $2r:h=1:1$.

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图), 截面的面积为 5m^2 , 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?

解 设矩形高为 h , 截面的周长 S , 则 $xh+\frac{1}{2}\cdot(\frac{x}{2})^2\pi=5$, $h=\frac{5}{x}-\frac{\pi}{8}x$.

于是

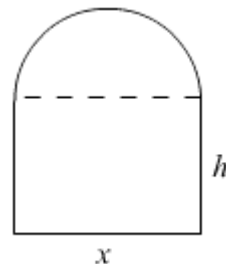
$$S=x+2h+\frac{x\pi}{2}=x+\frac{\pi}{4}x+\frac{10}{x} \quad (0<x<\sqrt{\frac{40}{\pi}}),$$

$$S'=1+\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2}.$$

令 $S'=0$, 得唯一驻点 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$.

因为 $S''=\frac{20}{x^3}>0$, 所以 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点, 同时也是最小值点.

因此底宽为 $x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 时所用的材料最省.



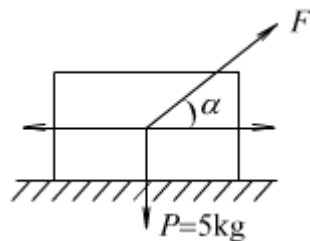
11. 设有重量为 5kg 的物体, 置于水平面上, 受力 F 的作用而开始移动(如图). 设摩擦系数 $\mu=0.25$, 问力 F 与水平线的交角 α 为多少时, 才可使力 F 的大小为最小?

解 由 $F\cos\alpha=(m-F\sin\alpha)\mu$ 得

$$F=\frac{\mu m}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} \quad (0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}),$$

$$F'=\frac{\mu m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)^2},$$

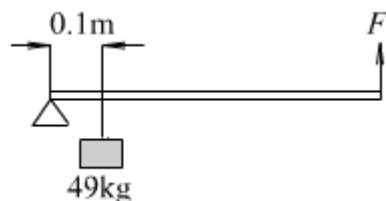
驻点为 $\alpha=\arctan\mu$.



因为 F 的最小值一定在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内取得, 而 F 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内只有一个驻点 $\alpha = \arctan \mu$,

所以 $\alpha = \arctan \mu$ 一定也是 F 的最小值点. 从而当 $\alpha = \arctan 0.25 = 14^\circ$ 时, 力 F 最小.

12. 有一杠杆, 支点在它的一端. 在距支点 0.1m 处挂一重量为 49kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(如图). 如果杠杆的线密度为 5kg/m, 求最省力的杆长?



解 设杆长为 x (m), 加于杠杆一端的力为 F , 则有

$$xF = \frac{1}{2}x \cdot 5x + 49 \cdot 0.1, \text{ 即 } F = \frac{5}{2}x + \frac{4.9}{x} (x > 0).$$

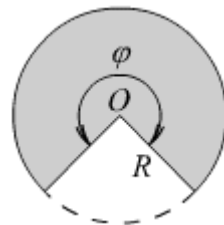
$$F' = \frac{5}{2} - \frac{4.9}{x^2},$$

驻点为 $x=1.4$. 由问题的实际意义知, F 的最小值一定在 $(0, +\infty)$ 内取得, 而 F 在 $(0, +\infty)$ 内只有一个驻点 $x=1.4$, 所以 F 一定在 $x=1.4\text{m}$ 处取得最小值, 即最省力的杆长为 1.4m.

13. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一漏斗(如图), 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时, 做成的漏斗的容积最大?

解 漏斗的底周长 l 、底半径 r 、高 h 分别为

$$l = R \cdot \varphi, \quad r = \frac{R\varphi}{2\pi}, \quad h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}.$$



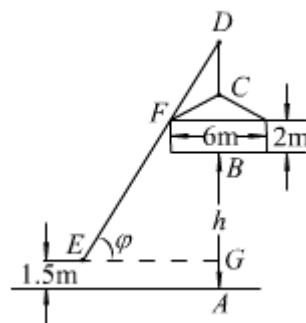
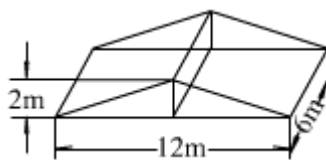
漏斗的容积为

$$V = \frac{1}{3}hr^2\pi = \frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2} \quad (0 < \varphi < 2\pi).$$

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{\varphi(8\pi^2 - 3\varphi^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}}, \quad \text{驻点为 } \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$$

由问题的实际意义, V 一定在 $(0, 2\pi)$ 内取得最大值, 而 V 在 $(0, 2\pi)$ 内只有一个驻点, 所以该驻点一定也是最大值点. 因此当 $\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时, 漏斗的容积最大.

14. 某吊车的车身高为 1.5m, 吊臂长 15m, 现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架, 水平地吊到 6m 高的柱子上去(如图), 问能否吊得上去?



解 设吊臂对地面的倾角为 φ 时, 屋架能够吊到的最大高度为 h . 在直角三角形 $\triangle EDG$ 中

$$15\sin\varphi=(h-1.5)+2+3\tan\varphi,$$

故
$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2},$$

$$h'=15\cos\varphi-\frac{3}{\cos^2\varphi}.$$

令 $h'=0$ 得唯一驻点 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\approx 54^\circ$.

因为 $h''=-15\sin\varphi-\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}<0$, 所以 $\varphi=54^\circ$ 为极大值点, 同时这也是最大值点.

当 $\varphi=54^\circ$ 时, $h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2}\approx 7.5$ m.

所以把此屋最高能水平地吊至 7.5m 高, 现只要求水平地吊到 6m 处, 当然能吊上去.

15. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 试问房租定为多少可获最大收入?

解 房租定为 x 元, 纯收入为 R 元.

当 $x\leq 1000$ 时, $R=50x-50\times 100=50x-5000$, 且当 $x=1000$ 时, 得最大纯收入 45000 元.

当 $x>1000$ 时,

$$R=[50-\frac{1}{5}(x-1000)]\cdot x-[50-\frac{1}{5}(x-1000)]\cdot 100=-\frac{1}{50}x^2+72x-7000,$$

$$R'=-\frac{1}{25}x+72.$$

令 $R'=0$ 得 $(1000, +\infty)$ 内唯一驻点 $x=1800$. 因为 $R''=-\frac{1}{25}<0$, 所以 1800 为极大值点, 同时

也是最大值点. 最大值为 $R=57800$.

因此, 房租定为 1800 元可获最大收入.

习题 3-8

描绘下列函数的图形:

$$1. y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7);$$

解 (1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

$$(2) y' = \frac{1}{5}(4x^3 - 12x + 8) = \frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2, \quad y'' = \frac{4}{5}(3x^2 - 3) = \frac{12}{5}(x+1)(x-1),$$

令 $y'=0$, 得 $x=-2, x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1, x=1$.

(3) 列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-	0	+	+	+	0	+
y''	+	+	+	0	-	0	+
$y=f(x)$	$\searrow \cup$	$-\frac{17}{5}$ 极小值	$\nearrow \cup$	$-\frac{6}{5}$ 拐点	$\nearrow \cap$	2 拐点	$\nearrow \cup$

(4) 作图:

$$2. y = \frac{x}{1+x^2};$$

解 (1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(2) 奇函数, 图形关于原点对称, 故可选讨论 $x \geq 0$ 时函数的图形.

$$(3) y' = \frac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}, \quad y'' = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3},$$

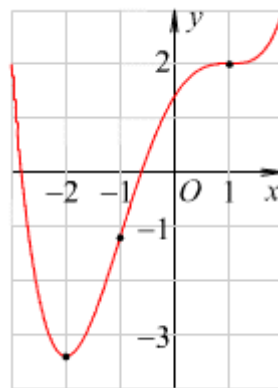
当 $x \geq 0$ 时, 令 $y'=0$, 得 $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=0, x=\sqrt{3}$.

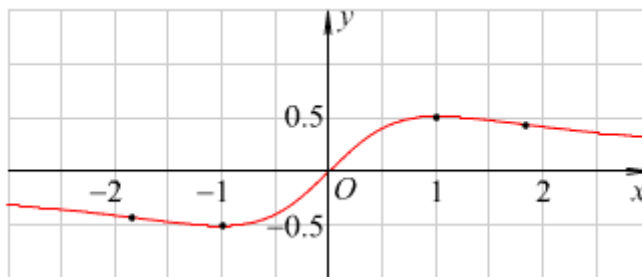
(4) 列表

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	+	0	-	-	-
y''	0	-	-	-	0	+
$y=f(x)$	0 拐点	$\nearrow \cap$	$\frac{1}{2}$ 极大值	$\searrow \cap$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 拐点	$\searrow \cup$

(5) 有水平渐近线 $y=0$;

(6) 作图:





3. $y=e^{-(x-1)^2}$;

解 (1)定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(2) $y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2}$ $y''=4e^{-(x-1)^2}[x-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})][x-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})]$,

令 $y'=0$, 得 $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)列表

x	$(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$	1	$(1, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
$y=f(x)$	$\nearrow \cup$	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	$\nearrow \cap$	1 极大值	$\searrow \cap$	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	$\searrow \cup$

(4)有水平渐近线 $y=0$;

(5)作图:

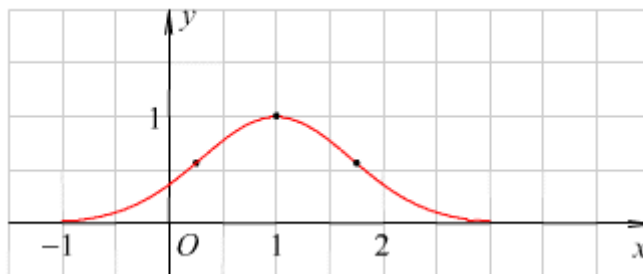
4. $y=x^2+\frac{1}{x}$;

解 (1)定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$;

(2) $y'=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$,

$y''=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^3+1)}{x^3}$,

令 $y'=0$, 得 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1$.



(3)列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	无	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	无	$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$	$\searrow \cup$	0 拐点	$\searrow \cap$	无	$\searrow \cup$	$\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ 极小值	$\nearrow \cup$

(4)有铅直渐近线 $x=0$;

(5)作图:



5. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$

解 (1)定义域为 $x \neq \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

(2)是偶函数, 周期为 2π . 可先作 $[0, \pi]$ 上的图形, 再根据对称性作出 $[-\pi, 0]$ 内的图形, 最后根据周期性作出 $[-\pi, \pi]$ 以外的图形;

(3) $y' = \frac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}, y'' = \frac{\cos x \cdot (3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3 2x},$

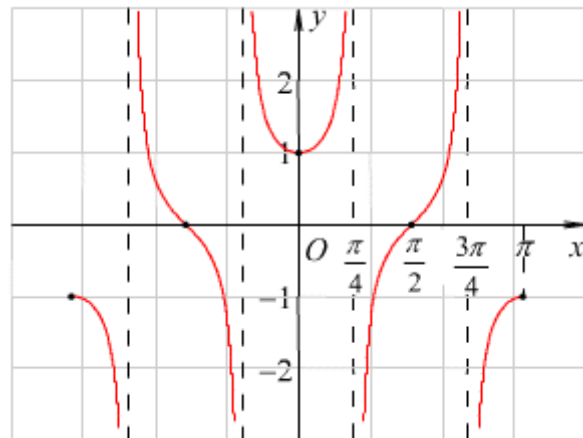
在 $[0, \pi]$ 上, 令 $y'=0$, 得 $x=0, x=\pi$; 令 $y''=0$, 得 $x=\frac{\pi}{2}$.

(4)列表

x	0	$(0, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$	π
y'	0	$+$	无	$+$	$+$	$+$	无	$+$	0
y''	$+$	$+$	无	$-$	0	$+$	无	$-$	$-$
$y=f(x)$	1 极小值	$\nearrow \cup$	无	$\nearrow \cap$	0 拐点	$\nearrow \cup$	无	$\nearrow \cap$	-1 极大值

(5)有铅直渐近线 $x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{3\pi}{4}$;

(6)作图:



习题 3-7

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0, 2)处的曲率.

解 两边对 x 求导数得

$$8x+2yy'=0, \quad y'=-\frac{4x}{y}, \quad y''=-\frac{4y-4xy'}{y^2}.$$

$$y'|_{(0,2)}=0, \quad y''|_{(0,2)}=-2.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|-2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2.$$

2. 求曲线 $y=\ln \sec x$ 在点(x, y)处的曲率及曲率半径.

$$\text{解 } y'=\frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x = \tan x, \quad y''=\sec^2 x.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|\sec^2 x|}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=|\cos x|,$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{|\cos x|}=|\sec x|.$$

3. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

$$\text{解 } y'=2x-4, \quad y''=2.$$

令 $y'=0$, 得顶点的横坐标为 $x=2$.

$$y'|_{x=2}=0, \quad y''|_{x=2}=2.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|2|}{(1+0^2)^{3/2}}=2,$$

曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{1}{2}.$$

4. 求曲线 $x=a \cos^3 t, y=a \sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 处的曲率.

$$\text{解 } y'=\frac{(a \sin^3 t)'}{(a \cos^3 x)'}=-\tan t, \quad y''=\frac{(-\tan x)'}{(a \cos^3 x)'}=\frac{1}{3a \sin t \cdot \cos^4 t}.$$

所求曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\left|\frac{1}{3a \sin t \cdot \cos^4 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}=\left|\frac{1}{3a \sin t \cos^3 t}\right|=\frac{2}{3|a \sin 2t|},$$

$$K \Big|_{t=t_0} = \frac{2}{3|a \sin 2t_0|}.$$

5. 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

解 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}.$

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\rho = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$\rho' = \frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x - (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)}{x^2}.$$

令 $\rho' = 0$, 得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

因为当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho' < 0$; 当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho' > 0$, 所以 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是 ρ 的极小值点, 同时也最小

值点. 当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y = \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此在曲线上点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处曲率半径最小, 最小曲率半径

为 $\rho = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

6. 证明曲线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 在点 (x, y) 处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}.$

解 $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$

在点 (x, y) 处的曲率半径为

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a})^{3/2}}{\left|\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right|} = \frac{(\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a})^{3/2}}{\left|\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right|} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}.$$

7. 一飞机沿抛物线路径 $y = \frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m) 作俯冲飞行, 在坐标原点 O

处飞机的速度为 $v = 200 m/s$ 飞行员体重 $G = 70 Kg$. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y' = \frac{2x}{10000} = \frac{x}{5000}, y'' = \frac{1}{5000}; y'|_{x=0} = 0, y''|_{x=0} = \frac{1}{5000}.$

$$\rho|_{x=0} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+0^2)^{3/2}}{\frac{1}{5000}} = 5000.$$

$$\text{向心力 } F = \frac{mV^2}{\rho} = \frac{70 \times 200^2}{5000} = 560 \text{ (牛顿)}.$$

飞行员离心力及它本身的重量对座椅的压力为

$$79 \times 9.8 + 560 = 1246 \text{ (牛顿)}.$$

8. 汽车连同载重共 5t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6km/h, 桥的跨度为 10m, 拱的矢高为 0.25m. 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

解 如图取直角坐标系, 设抛物线拱桥方程为 $y=ax^2$, 由于抛物线过点(5, 0.25), 代入方程得

$$a = \frac{0.25}{25} = 0.01,$$

于是抛物线方程为 $y=0.01x^2$.

$$y'=0.02x, y''=0.02.$$

$$\rho|_{x=0} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+0^2)^{3/2}}{0.02} = 50.$$

$$\text{向心力为 } F = \frac{mV^2}{\rho} = \frac{5 \times 10^3 \left(\frac{21.6 \times 10^3}{3600} \right)^2}{50} = 3600 \text{ (牛顿)}.$$

因为汽车重为 5 吨, 所以汽车越过桥顶时对桥的压力为

$$5 \times 10^3 \times 9.8 - 3600 = 45400 \text{ (牛顿)}.$$

*9. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 处的曲率圆方程.

*11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

总习题三

1. 填空:

设常数 $k>0$, 函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为_____.

解 应填写 2.

提示: $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$.

在 $(0, +\infty)$ 内, 令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$.

因为 $f''(x)<0$, 所以曲线 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0, +\infty)$ 内是凸的, 且驻点 $x=e$ 一定是最大值点,

最大值为 $f(e)=k>0$.

又因为 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=-\infty$, 所以曲线经过 x 轴两次, 即零点的个数为 2.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为().

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$; (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$; (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

解 选择 B.

提示: 因为 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加, 从而 $f'(1)>f'(x)>f'(0)$.

又由拉格朗日中值定理, 有 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$, 所以

$$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0).$$

3. 列举一个函数 $f(x)$ 满足: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内除某一点外处处可导, 但在 (a, b) 内不存在点 ξ , 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 取 $f(x)=|x|$, $x \in [-1, 1]$.

易知 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 且当 $x>0$ 时 $f'(x)=1$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=-1$; $f'(0)$ 不存在, 即 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上除 $x=0$ 外处处可导.

注意 $f(1)-f(-1)=0$, 所以要使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$ 成立, 即 $f'(\xi)=0$, 是不可能的.

因此在 $(-1, 1)$ 内不存在点 ξ , 使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$.

4. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)=k$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a)-f(x)]$.

解 根据拉格朗日中值公式, $f(x+a)-f(x)=f'(\xi) \cdot a$, ξ 介于 $x+a$ 与 x 之间.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi \rightarrow \infty$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a)-f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\xi) \cdot a = a \lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = ak.$$

5. 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点.

证明 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$, 因为当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调减少. 因此, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至多有一个零点.

6. 设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

证明 设 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0)=F(1)=0$. 由罗尔定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一个点 ξ , 使 $F'(\xi)=0$. 而 $F'(x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $f(a)=0$, 证明存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

证明 设 $F(x)=xf(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $F(0)=F(a)=0$. 由罗尔定理, 在 $(0, a)$ 内至少有一个点 ξ , 使 $F'(\xi)=0$. 而 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$, 所以 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

8. 设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 试利用柯西中值定理, 证明存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

证明 对于 $f(x)$ 和 $\ln x$ 在 $[a, b]$ 上用柯西中值定理, 有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}, \quad \xi \in (a, b),$$

即 $f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}, \quad \xi \in (a, b).$

9. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是可导函数, 且 $|f'(x)| < g'(x)$, 证明: 当 $x > a$ 时, $|f(x)-f(a)| < g(x)-g(a)$.

证明 由条件 $|f'(x)| < g'(x)$ 得知, $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| < 1$, 且有 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 是单调增加的, 当 $x > a$ 时,

$g(x) > g(a)$.

因为 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是可导函数, 所以 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a, x]$ 上连续, 在 (a, x) 内可导, 根据柯西中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, x)$, 使 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

因此, $\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| < 1, |f(x)-f(a)| < g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^x}{1-x+\ln x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}} \right) / n \right]^{nx} \quad (\text{其中 } a_1, a_2, \cdots, a_n > 0).$$

解 (1) $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - x^x)'}{(1 - x + \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^x (\ln x + 1)}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^{x+1} (\ln x + 1)}{1 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^{x+1} (\ln x + 1 + \frac{1}{x}) (\ln x + 1) - x^x}{-1} = 2.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \ln(1+x)]'}{[x \ln(1+x)]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x) \ln(1+x) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctan x)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})},$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctan x)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

$$(4) \text{ 令 } y = [(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}. \text{ 则 } \ln y = nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}) - \ln n], \text{ 因为}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n[\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}) - \ln n]}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}} \cdot (a_1^{\frac{1}{x}} \ln a_1 + a_2^{\frac{1}{x}} \ln a_2 + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}} \ln a_n) \cdot (\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}$$

$$= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n).$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n), \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow \infty} [(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx} = \lim_{x \rightarrow \infty} y = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

11. 证明下列不等式:

(1) 当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$;

(2): 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$.

证明 (1) 令 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

因为 $f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} > \frac{x - \tan x}{x^2} > 0$,

所以在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内 $f(x)$ 为单调增加的. 因此当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时有]

$$\frac{\tan x_1}{x_1} < \frac{\tan x_2}{x_2}, \text{ 即 } \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

(2) 要证 $(1+x)\ln(1+x) > \arctan x$, 即证 $(1+x)\ln(1+x) - \arctan x > 0$.

设 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $f'(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$.

因为当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > 0$, $1 - \frac{1}{1+x^2} > 0$, 所以 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

因此, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0)$, 而 $f(0) = 0$, 从而 $f(x) > 0$, 即 $(1+x)\ln(1+x) - \arctan x > 0$.

12. 设 $f(x) = \begin{cases} x^{2x} & x > 0 \\ x+2 & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的极值.

解 $x=0$ 是函数的间断点.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = 1$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 2x^{2x}(\ln x + 1)$.

令 $f'(x) = 0$, 得函数的驻点 $x = \frac{1}{e}$.

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	2 极大值	\searrow	$e^{-\frac{2}{e}}$ 极小值	\nearrow

函数的极大值为 $f(0) = 2$, 极小值为 $f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{2}{e}}$.

13. 求椭圆 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 上纵坐标最大和最小的点.

解 $2x - y - xy' + 2yy' = 0$, $y' = \frac{2x-y}{x-2y}$. 当 $x = \frac{1}{2}y$ 时, $y' = 0$.

将 $x=\frac{1}{2}y$ 代入椭圆方程, 得 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y^2 + y^2 = 3, y = \pm 2$.

于是得驻点 $x=-1, x=1$. 因为椭圆上纵坐标最大和最小的点一定存在, 且在驻点处取得, 又当 $x=-1$ 时, $y=-2$, 当 $x=1$ 时, $y=2$, 所以纵坐标最大和最小的点分别为 $(1, 2)$ 和 $(-1, -2)$.

14. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

解 令 $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} (x > 0)$, 则

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x,$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x),$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

令 $f'(x) = 0$, 得唯一驻点 $x = e$.

因为当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 所以唯一驻点 $x = e$ 为最大值点.

因此所求最大项为 $\max\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\} = \sqrt[3]{3}$.

15. 曲线弧 $y = \sin x (0 < x < \pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

解 $y' = \cos x, y'' = -\sin x$,

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}{\sin x} (0 < x < \pi),$$

$$\rho' = \frac{\frac{3}{2}(1 + \cos^2 x)^{\frac{1}{2}}(-2\cos x \sin x) \cdot \sin x - (1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}} \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(1 + \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} \cos x (3\sin^2 x + \cos^2 x + 1)}{\sin^2 x}.$$

在 $(0, \pi)$ 内, 令 $\rho' = 0$, 得驻点 $x = \frac{\pi}{2}$.

因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\rho' < 0$; 当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $\rho' > 0$, 所以 $x = \frac{\pi}{2}$ 是 ρ 的极小值点, 同时也是 ρ 的最

小值点, 最小值为 $\rho = \frac{(1 + \cos^2 \frac{\pi}{2})^{3/2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$.

16. 证明方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根. 并求此正根的近似值, 使精确到本世纪末 10^{-3} .

解 设 $f(x) = x^3 - 5x - 2$, 则

$$f'(x)=3x^2-5, f''(x)=6x.$$

当 $x>0$ 时, $f''(x)>0$, 所以在 $(0, +\infty)$ 内曲线是凹的, 又 $f(0)=-2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3-x-2)=+\infty$, 所以在 $(0, +\infty)$ 内方程 $x^3-5x-2=0$ 只能有一个根.
(求根的近似值略)

$$17. \text{ 设 } f''(x_0) \text{ 存在, 证明 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

$$\begin{aligned} \text{证明 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f'(x_0+h)-f'(x_0)]+[f'(x_0)-f'(x_0-h)]}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} + \frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h} \right] = \frac{1}{2} [f''(x_0)+f''(x_0)] = f''(x_0). \end{aligned}$$

18. 设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 证明 $f(x)=o[(x-x_0)^n]$ ($x \rightarrow x_0$).
证明 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0, \end{aligned}$$

所以 $f(x)=o[(x-x_0)^n]$ ($x \rightarrow x_0$).

19. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$. 证明对于 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 及 $0 \leq t \leq 1$, 有 $f[(1-t)x_1+tx_2] \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

证明 设 $(1-t)x_1+tx_2=x_0$. 在 $x=x_0$ 点的一阶泰勒公式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \quad (\text{其中 } \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}).$$

因为 $f''(x) \geq 0$, 所以

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

因此

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0), \quad f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2-x_0).$$

于是有

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq (1-t)[f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0)] + t[f(x_0) + f'(x_0)(x_2-x_0)]$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t)f(x_0) + tf(x_0) + f'(x_0)[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(x_0)[(1-t)x_0 + tx_0] \\
&= f(x_0) + f'(x_0)x_0 - f'(x_0)x_0 \\
&= f(x_0),
\end{aligned}$$

即 $f(x_0) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$,

所以 $f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (0 \leq t \leq 1)$.

20. 试确定常数 a 和 b , 使 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

解 $f(x)$ 是有任意阶导数的, 它的 5 阶麦克劳公式为

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + o(x^5) \\
&= (1-a-b)x + \frac{a+4b}{3!}x^3 + \frac{-a-16b}{5!}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

要使 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小, 就是要使极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1-a-b}{x^4} + \frac{a+4b}{3!x^2} + \frac{-a-16b}{5!} + \frac{o(x^5)}{x^5} \right]$$

存在且不为 0. 为此令

$$\begin{cases} 1-a-b=0 \\ a+4b=0 \end{cases},$$

解之得 $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$.

因为当 $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = \frac{-a-16b}{5!} = \frac{1}{30} \neq 0,$$

所以当 $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ 时, $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

习题 4-1

1. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{1}{x^2} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$(2) \int x\sqrt{x} dx;$$

$$\text{解 } \int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C.$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

$$(4) \int x^2 \sqrt[3]{x} dx;$$

$$\text{解 } \int x^2 \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{1}{\frac{7}{3}+1} x^{\frac{7}{3}+1} + C = \frac{3}{10} x^3 \sqrt[3]{x} + C.$$

$$(5) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{5}{2}+1} x^{-\frac{5}{2}+1} + C = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} + C.$$

$$(6) \int \sqrt[m]{x^n} dx;$$

$$\text{解 } \int \sqrt[m]{x^n} dx = \int x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{1}{\frac{n}{m}+1} x^{\frac{n}{m}+1} + C = \frac{m}{n+m} x^{\frac{m+n}{m}} + C.$$

$$(7) \int 5x^3 dx;$$

$$\text{解 } \int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx = \frac{5}{4} x^4 + C.$$

$$(8) \int (x^2 - 3x + 2) dx;$$

$$\text{解 } \int (x^2 - 3x + 2) dx = \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x + C.$$

$$(9) \int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} \quad (g \text{ 是常数});$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot 2h^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C.$$

$$(10) \int (x-2)^2 dx;$$

$$\text{解} \quad \int (x-2)^2 dx = \int (x^2 - 4x + 4) dx = \int x^2 dx - 4 \int x dx + 4 \int dx = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 4x + C.$$

$$(11) \int (x^2 + 1)^2 dx;$$

$$\text{解} \quad \int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \int x^4 dx + 2 \int x^2 dx + \int dx = \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x + C.$$

$$(12) \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx &= \int (x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3} - 1) dx = \int x^2 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - x + C. \end{aligned}$$

$$(13) \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{解} \quad \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1-2x+x^2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}) dx = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$$

$$(14) \int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx;$$

$$\text{解} \quad \int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int (3x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}) dx = x^3 + \arctan x + C.$$

$$(15) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctan x + C.$$

$$(16) \int (2e^x + \frac{3}{x}) dx;$$

$$\text{解} \quad \int (2e^x + \frac{3}{x}) dx = 2 \int e^x dx + 3 \int \frac{1}{x} dx = 2e^x + 3 \ln|x| + C.$$

$$(17) \int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}) dx;$$

$$\text{解 } \int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}) dx = 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \arctan x - 2 \arcsin x + C.$$

$$(18) \int e^x (1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}) dx;$$

$$\text{解 } \int e^x (1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}) dx = \int (e^x - x^{-\frac{1}{2}}) dx = e^x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$(19) \int 3^x e^x dx;$$

$$\text{解 } \int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C.$$

$$(20) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx = \int [2 - 5(\frac{2}{3})^x] dx = 2x - 5 \frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln \frac{2}{3}} + C = 2x - \frac{5}{\ln 2 - \ln 3} (\frac{2}{3})^x + C.$$

$$(21) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx;$$

$$\text{解 } \int \sec x (\sec x - \tan x) dx = \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx = \tan x - \sec x + C.$$

$$(22) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{解 } \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C.$$

$$(23) \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C.$$

$$(24) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C.$$

$$(25) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cot x - \tan x + C.$$

$$(26) \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx;$$

$$\text{解 } \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{4}}) dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4x^{\frac{1}{4}} + C.$$

2. 一曲线通过点 $(e^2, 3)$, 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

解 设该曲线的方程为 $y=f(x)$, 则由题意得

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\text{所以 } y = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

又因为曲线通过点 $(e^2, 3)$, 所以有 $3 - 2 = 1$

$$3 = f(e^2) = \ln|e^2| + C = 2 + C,$$

$$C = 3 - 2 = 1.$$

于是所求曲线的方程为

$$y = \ln|x| + 1.$$

3. 一物体由静止开始运动, 经 t 秒后的速度是 $3t^2(\text{m/s})$, 问

(1) 在3秒后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完360m需要多少时间?

$$\text{解 设位移函数为 } s=s(t), \text{ 则 } s'=v=3t^2, \quad s=\int 3t^2 dt = t^3 + C.$$

因为当 $t=0$ 时, $s=0$, 所以 $C=0$. 因此位移函数为 $s=t^3$.

(1) 在3秒后物体离开出发点的距离是 $s=s(3)=3^3=27$.

(2) 由 $t^3=360$, 得物体走完360m所需的时间 $t=\sqrt[3]{360} \approx 7.11 \text{ s}$.

4. 证明函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x \text{sh} x$ 和 $e^x \text{ch} x$ 都是 $\frac{e^x}{\text{ch} x - \text{sh} x}$ 的原函数.

证明 $\frac{e^x}{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x} = \frac{e^x}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}.$

因为

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^{2x},$$

所以 $\frac{1}{2}e^{2x}$ 是 $\frac{e^x}{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}$ 的原函数.

因为

$$(e^x \operatorname{sh}x)' = e^x \operatorname{sh}x + e^x \operatorname{ch}x = e^x (\operatorname{sh}x + \operatorname{ch}x) = e^x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = e^{2x},$$

所以 $e^x \operatorname{sh}x$ 是 $\frac{e^x}{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}$ 的原函数.

因为

$$(e^x \operatorname{ch}x)' = e^x \operatorname{ch}x + e^x \operatorname{sh}x = e^x (\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x) = e^x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = e^{2x},$$

所以 $e^x \operatorname{ch}x$ 是 $\frac{e^x}{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}$ 的原函数.

习题 4-2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数, 使等式成立(例如: $dx = \frac{1}{4}d(4x+7)$):

(1) $dx = d(ax)$;

解 $dx = \frac{1}{a} d(ax)$.

(2) $dx = d(7x-3)$;

解 $dx = \frac{1}{7} d(7x-3)$.

(3) $xdx = d(x^2)$;

解 $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$.

(4) $xdx = d(5x^2)$;

解 $xdx = \frac{1}{10} d(5x^2)$.

(5) $xdx = d(1-x^2)$;

解 $xdx = -\frac{1}{2} d(1-x^2)$.

(6) $x^3dx = d(3x^4-2)$;

解 $x^3dx = \frac{1}{12} d(3x^4-2)$.

(7) $e^{2x}dx = d(e^{2x})$;

解 $e^{2x}dx = \frac{1}{2} d(e^{2x})$.

(8) $e^{-\frac{x}{2}}dx = d(1+e^{-\frac{x}{2}})$;

解 $e^{-\frac{x}{2}}dx = -2 d(1+e^{-\frac{x}{2}})$.

(9) $\sin \frac{3}{2}xdx = d(\cos \frac{3}{2}x)$;

解 $\sin \frac{3}{2}xdx = -\frac{2}{3} d(\cos \frac{3}{2}x)$.

(10) $\frac{dx}{x} = d(5\ln|x|)$;

解 $\frac{dx}{x} = \frac{1}{5} d(5\ln|x|)$.

(11) $\frac{dx}{x} = d(3-5\ln|x|)$;

解 $\frac{dx}{x} = -\frac{1}{5} d(3-5\ln|x|).$

(12) $\frac{dx}{1+9x^2} = d(\arctan 3x);$

解 $\frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3} d(\arctan 3x).$

(13) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(1-\arctan x);$

解 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (-1) d(1-\arctan x).$

(14) $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\sqrt{1-x^2}).$

解 $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = (-1) d(\sqrt{1-x^2}).$

2. 求下列不定积分(其中 a, b, ω, φ 均为常数):

(1) $\int e^{5t} dt;$

解 $\int e^{5t} dt = \frac{1}{5} \int e^{5x} d5x = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$

(2) $\int (3-2x)^3 dx;$

解 $\int (3-2x)^3 dx = -\frac{1}{2} \int (3-2x)^3 d(3-2x) = -\frac{1}{8} (3-2x)^4 + C.$

(3) $\int \frac{1}{1-2x} dx;$

解 $\int \frac{1}{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-2x} d(1-2x) = -\frac{1}{2} \ln|1-2x| + C.$

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}};$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}} = -\frac{1}{3} \int (2-3x)^{-\frac{1}{3}} d(2-3x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (2-3x)^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{1}{2} (2-3x)^{\frac{2}{3}} + C.$

(5) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}}) dx;$

解 $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}}) dx = \frac{1}{a} \int \sin ax d(ax) - b \int e^{\frac{x}{b}} d(\frac{x}{b}) = -\frac{1}{a} \cos ax - b e^{\frac{x}{b}} + C.$

(6) $\int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt;$

解 $\int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int \sin \sqrt{t} d\sqrt{t} = -2 \cos \sqrt{t} + C.$

(7) $\int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx;$

解 $\int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx = \int \tan^{10} x d \tan x = \frac{1}{11} \tan^{11} x + C.$

(8) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x};$

解 $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \int \frac{1}{\ln x \ln \ln x} d \ln x = \int \frac{1}{\ln \ln x} d \ln \ln x = \ln |\ln \ln x| + C.$

(9) $\int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

解 $\int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \tan \sqrt{1+x^2} d\sqrt{1+x^2} = \int \frac{\sin \sqrt{1+x^2}}{\cos \sqrt{1+x^2}} d\sqrt{1+x^2}$
 $= -\int \frac{1}{\cos \sqrt{1+x^2}} d \cos \sqrt{1+x^2} = -\ln |\cos \sqrt{1+x^2}| + C.$

(10) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x};$

解 $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = \int \frac{1}{\tan x} d \tan x = \ln |\tan x| + C.$

(11) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx;$

解 $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1}{1 + e^{2x}} d e^x = \arctan e^x + C.$

(12) $\int x e^{-x^2} dx;$

解 $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

$$(13) \int x \cdot \cos(x^2) dx ;$$

$$\text{解 } \int x \cdot \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos(x^2) d(x^2) = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C .$$

$$(14) \int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx ;$$

$$\text{解 } \int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx = -\frac{1}{6} \int (2-3x^2)^{-\frac{1}{2}} d(2-3x^2) = -\frac{1}{3} (2-3x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{2-3x^2} + C .$$

$$(15) \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx ;$$

$$\text{解 } \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx = -\frac{3}{4} \int \frac{1}{1-x^4} d(1-x^4) = -\frac{3}{4} \ln|1-x^4| + C .$$

$$(16) \int \cos^2(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt ;$$

$$\text{解 } \int \cos^2(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{1}{\omega} \int \cos^2(\omega t + \varphi) d \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{1}{3\omega} \cos^3(\omega t + \varphi) + C .$$

$$(17) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx ;$$

$$\text{解 } \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = -\int \cos^{-3} x d \cos x = \frac{1}{2} \cos^{-2} x + C = \frac{1}{2} \sec^2 x + C .$$

$$(18) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx ;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} d(-\cos x + \sin x) \\ &= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x) = \frac{3}{2} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C . \end{aligned}$$

$$(19) \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx ;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}} d(\frac{2}{3}x) + \frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} d(9-4x^2) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} + C . \end{aligned}$$

$$(20) \int \frac{x^3}{9+x^2} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{x^3}{9+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{9+x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int (1 - \frac{9}{9+x^2}) d(x^2) = \frac{1}{2} [x^2 - 9 \ln(9+x^2)] + C.$$

$$(21) \int \frac{1}{2x^2-1} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{1}{2x^2-1} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)} dx = \frac{1}{2} \int (\frac{1}{\sqrt{2}x-1} - \frac{1}{\sqrt{2}x+1}) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2}x-1} d(\sqrt{2}x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2}x+1} d(\sqrt{2}x+1) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}x-1| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}x+1| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}| + C. \end{aligned}$$

$$(22) \int \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx = \frac{1}{3} \int (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}) dx = \frac{1}{3} (\ln|x-2| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{3} \ln|\frac{x-2}{x+1}| + C.$$

$$(23) \int \cos^3 x dx;$$

$$\text{解 } \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x d \sin x = \int (1 - \sin^2 x) d \sin x = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

$$(24) \int \cos^2(\omega t + \varphi) dt;$$

$$\text{解 } \int \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)] dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4\omega} \sin 2(\omega t + \varphi) + C.$$

$$(25) \int \sin 2x \cos 3x dx;$$

$$\text{解 } \int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

$$(26) \int \cos x \cos \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{解 } \int \cos x \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{1}{2}x) dx = \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{1}{2}x + C.$$

$$(27) \int \sin 5x \sin 7x dx;$$

$$\text{解 } \int \sin 5x \sin 7x dx = -\frac{1}{2} \int (\cos 12x - \cos 2x) dx = -\frac{1}{24} \sin 12x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$(28) \int \tan^3 x \sec x dx;$$

$$\text{解 } \int \tan^3 x \sec x dx = \int \tan^2 x \cdot \sec x \tan x dx = \int \tan^2 x d \sec x$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) d \sec x = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C.$$

$$(29) \int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int 10^{2 \arccos x} d \arccos x = - \frac{1}{2} \int 10^{2 \arccos x} d(2 \arccos x) = - \frac{10^{2 \arccos x}}{2 \ln 10} + C.$$

$$(30) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)} d \sqrt{x} = 2 \int \arctan \sqrt{x} d \arctan \sqrt{x} = (\arctan \sqrt{x})^2 + C.$$

$$(31) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{解 } \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{(\arcsin x)^2} d \arcsin x = - \frac{1}{\arcsin x} + C.$$

$$(32) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx;$$

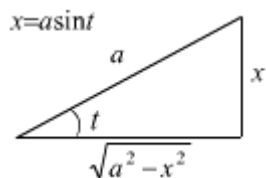
$$\text{解 } \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx = \int \frac{1}{(x \ln x)^2} d(x \ln x) = - \frac{1}{x \ln x} + C.$$

$$(33) \int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} dx &= \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} \cdot \sec^2 x dx = \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} d \tan x \\ &= \int \ln \tan x d \ln \tan x = \frac{1}{2} (\ln \tan x)^2 + C. \end{aligned}$$

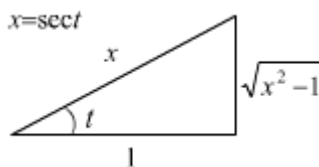
$$(34) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \quad (a > 0);$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &\stackrel{\text{令 } x=a\sin t}{=} \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} a \cos t dt = a^2 \int \sin^2 t dt = a^2 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt, \\ &= \frac{1}{2} a^2 t - \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C. \end{aligned}$$



$$(35) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

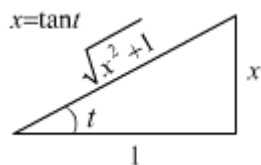
$$\text{解 } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \stackrel{\text{令 } x=\sec t}{=} \int \frac{1}{\sec t \cdot \tan t} \cdot \sec t \tan t dt = \int dt = t + C = \arccos \frac{1}{x} + C.$$



$$\text{或 } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} d\frac{1}{x} = \arccos \frac{1}{x} + C.$$

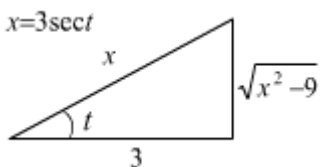
$$(36) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}};$$

$$\text{解 } \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \stackrel{\text{令 } x=\tan t}{=} \int \frac{1}{\sqrt{(\tan^2 t + 1)^3}} d \tan t = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$



$$(37) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx &\stackrel{\text{令 } x=3\sec t}{=} \int \frac{\sqrt{9\sec^2 t-9}}{3\sec t} d(3\sec t) = 3 \int \tan^2 t dt \\ &= 3 \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = 3 \tan t - 3t + C = \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + C. \end{aligned}$$

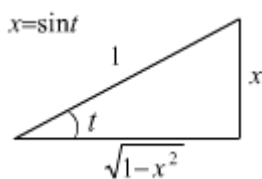


$$(38) \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}};$$

$$\text{解 } \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}} \stackrel{\text{令 } \sqrt{2x}=t}{=} \int \frac{1}{1+t} t dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = t - \ln(1+t) + C = \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C.$$

$$(39) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}};$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}} &\stackrel{\text{令 } x=\sin t}{=} \int \frac{1}{1+\cos t} \cos t dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos t} \right) dt = \int \left(1 - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} \right) dt \\ &= t - \tan \frac{t}{2} + C = t - \frac{\sin t}{1+\cos t} + C = \arcsin x - \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C. \end{aligned}$$

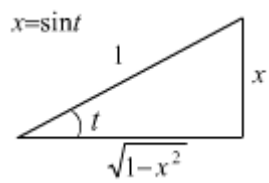


$$(40) \int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解 } \int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}} \stackrel{\text{令 } x=\sin t}{=} \int \frac{1}{\sin t + \cos t} \cdot \cos t dt = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t + \sin t + \cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin t + \cos t} d(\sin t + \cos t) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln |\sin t + \cos t| + C$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{1-x^2} + x| + C .$$



习题 4-3

求下列不定积分:

1. $\int x \sin x dx$;

解 $\int x \sin x dx = -\int x d \cos x = -x \cos x - \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

2. $\int \ln x dx$;

解 $\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

3. $\int \arcsin x dx$;

解 $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x d \arcsin x$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

4. $\int x e^{-x} dx$;

解 $\int x e^{-x} dx = -\int x d e^{-x} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C.$$

5. $\int x^2 \ln x dx$;

解 $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} \int \ln x dx^3 = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 d \ln x$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

6. $\int e^{-x} \cos x dx$;

解 因为

$$\int e^{-x} \cos x dx = \int e^{-x} d \sin x = e^{-x} \sin x - \int \sin x d e^{-x} = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx$$

$$= e^{-x} \sin x - \int e^{-x} d \cos x = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x + \int \cos x d e^{-x}$$

$$=e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx,$$

所以 $\int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}(e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x) + C = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C.$

7. $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx;$

解 因为

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx &= 2 \int e^{-2x} d \cos \frac{x}{2} = 2e^{-2x} \cos \frac{x}{2} - 2 \int \cos \frac{x}{2} de^{-2x} \\ &= 2e^{-2x} \cos \frac{x}{2} + 4 \int e^{-2x} \cos \frac{x}{2} dx = 2e^{-2x} \cos \frac{x}{2} + 8 \int e^{-2x} d \sin \frac{x}{2} \\ &= 2e^{-2x} \cos \frac{x}{2} + 8e^{-2x} \sin \frac{x}{2} - 8 \int \sin \frac{x}{2} de^{-2x} \\ &= 2e^{-2x} \cos \frac{x}{2} + 8e^{-2x} \sin \frac{x}{2} + 16 \int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx, \end{aligned}$$

所以 $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx = -\frac{2}{17}e^{-2x}(\cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2}) + C.$

8. $\int x \cos \frac{x}{2} dx;$

解 $\int x \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int x d \sin \frac{x}{2} = 2x \sin \frac{x}{2} - 2 \int \sin \frac{x}{2} dx = 2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} + C.$

9. $\int x^2 \arctan x dx;$

解 $\begin{aligned} \int x^2 \arctan x dx &= \frac{1}{3} \int \arctan x dx^3 = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx^2 = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx^2 \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$

10. $\int x \tan^2 x dx$

解 $\begin{aligned} \int x \tan^2 x dx &= \int x(\sec^2 x - 1) dx = \int x \sec^2 x dx - \int x dx = -\frac{1}{2}x^2 + \int x d \tan x \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x \tan x - \int \tan x dx = -\frac{1}{2}x^2 + x \tan x + \ln|\cos x| + C. \end{aligned}$

11. $\int x^2 \cos x dx;$

解 $\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \sin x + 2 \int x d \cos x$

$$=x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C .$$

12. $\int t e^{-2t} dt ;$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int t e^{-2t} dt &= -\frac{1}{2} \int t d e^{-2t} = -\frac{1}{2} t e^{-2t} + \frac{1}{2} \int e^{-2t} dt \\ &= -\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} + C = -\frac{1}{2} e^{-2t} \left(t + \frac{1}{2} \right) + C . \end{aligned}$$

13. $\int \ln^2 x dx ;$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \ln^2 x dx &= x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C . \end{aligned}$$

14. $\int x \sin x \cos x dx ;$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \int x d \cos 2x = -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C . \end{aligned}$$

15. $\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx ;$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 (1 + \cos x) dx = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} \int x^2 d \sin x = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \sin x - \int x \sin x dx \\ &= \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \sin x + \int x d \cos x = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \sin x + x \cos x - \int \cos x dx \\ &= \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \sin x + x \cos x - \sin x + C . \end{aligned}$$

16. $\int x \ln(x-1) dx ;$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x \ln(x-1) dx &= \frac{1}{2} \int \ln(x-1) dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x-1} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(x-1) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln(x-1) + C . \end{aligned}$$

17. $\int (x^2-1) \sin 2x dx ;$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int (x^2-1)\sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \int (x^2-1) d \cos 2x = -\frac{1}{2} (x^2-1) \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2-1) \cos 2x + \frac{1}{2} \int x d \sin 2x \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2-1) \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2-1) \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$18. \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx &= -\int \ln^3 x d \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \ln^3 x + \int \frac{1}{x} d \ln^3 x = -\frac{1}{x} \ln^3 x + 3 \int \frac{1}{x^2} \ln^2 x dx \\
 &= -\frac{1}{x} \ln^3 x - 3 \int \ln^2 x d \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \ln^3 x - \frac{3}{x} \ln^2 x + 3 \int \frac{1}{x} d \ln^2 x \\
 &= -\frac{1}{x} \ln^3 x - \frac{3}{x} \ln^2 x + 6 \int \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln^3 x - \frac{3}{x} \ln^2 x - 6 \int \ln x d \frac{1}{x} \\
 &= -\frac{1}{x} \ln^3 x - \frac{3}{x} \ln^2 x - \frac{6}{x} \ln x + 6 \int \frac{1}{x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{x} \ln^3 x - \frac{3}{x} \ln^2 x - \frac{6}{x} \ln x - \frac{6}{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$19. \int e^{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int e^{\sqrt[3]{x}} dx &\stackrel{\text{令 } \sqrt[3]{x}=t}{=} 3 \int t^2 e^t dt = 3 \int t^2 de^t \\
 &= 3t^2 e^t - 6 \int t e^t dt = 3t^2 e^t - 6 \int t de^t \\
 &= 3t^2 e^t - 6te^t + 6 \int e^t dt \\
 &= 3t^2 e^t - 6te^t + 6e^t + C \\
 &= 3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C.
 \end{aligned}$$

$$20. \int \cos \ln x dx;$$

解 因为

$$\begin{aligned}
 \int \cos \ln x dx &= x \cos \ln x + \int x \cdot \sin \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= x \cos \ln x + \int \sin \ln x dx = x \cos \ln x + x \sin \ln x - \int x \cdot \cos \ln x \cdot \frac{1}{x} dx
 \end{aligned}$$

$$=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln xdx,$$

所以 $\int\cos\ln xdx=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$

21. $\int(\arcsin x)^2 dx;$

解 $\int(\arcsin x)^2 dx=x(\arcsin x)^2-\int x\cdot 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin xd\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

22. $\int e^x \sin^2 x dx.$

解 $\int e^x \sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int e^x (1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx,$

而 $\int e^x \cos 2x dx=\int \cos 2x de^x=e^x \cos 2x+2\int e^x \sin 2x dx$

$$=e^x \cos 2x+2\int \sin 2x de^x=e^x \cos 2x+2e^x \sin 2x-4\int e^x \cos 2x dx,$$

$$\int e^x \cos 2x dx=\frac{1}{5}e^x (\cos 2x+2\sin 2x)+C,$$

所以 $\int e^x \sin^2 x dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}e^x (\cos 2x+2\sin 2x)+C.$

习题 4-4

求下列不定积分:

1. $\int \frac{x^3}{x+3} dx;$

解 $\int \frac{x^3}{x+3} dx = \int \frac{x^3+27-27}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)-27}{x+3} dx$
 $= \int (x^2-3x+9) dx - 27 \int \frac{1}{x+3} dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C.$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx;$

解 $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx = \int \frac{1}{x^2+3x-10} d(x^2+3x-10) = \ln|x^2+3x-10| + C.$

3. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx;$

解 $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx = \int (x^2+x+1) dx + \int \frac{x^2+x-8}{x^3-x} dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{8}{x} dx - \int \frac{4}{x+1} dx - \int \frac{3}{x-1} dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 8\ln|x| - 4\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + C.$

4. $\int \frac{3}{x^3+1} dx;$

解 $\int \frac{3}{x^3+1} dx = \int (\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}) dx = \int (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1}) dx$
 $= \ln|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} d(x^2-x+1) + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} d(x-\frac{1}{2})$
 $= \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

5. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)};$

解 $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2} \int (\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+3}) dx$
 $= \frac{1}{2} (\ln|x+2| - 3\ln|x+3| - \ln|x+1|) + C.$

$$6. \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx &= \int \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

$$7. \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx;$$

$$\text{解} \quad \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

$$9. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)} &= \int \left(\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$10. \int \frac{1}{x^4+1} dx;$$

$$\text{解} \quad \int \frac{1}{x^4+1} dx = \int \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\frac{1}{2}(2x + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\frac{1}{2}(2x - \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\int \frac{d(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \int \frac{d(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right] + \frac{1}{4} \left(\int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + C.
\end{aligned}$$

11. $\int \frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx;$

解 $\int \frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx,
\end{aligned}$$

因为

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),$$

而

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{\left[(x + \frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2} dx$$

由递推公式

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \right],$$

得

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx &= \int \frac{1}{\left[(x + \frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2} dx \\
&= -\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} \right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

所以
$$\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

12. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x};$

解
$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \int \frac{1}{4-\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{4\tan^2 x+3} d\tan x$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\tan^2 x + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} d\tan x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan x}{\sqrt{3}} + C.$$

13. $\int \frac{1}{3+\cos x} dx;$

解
$$\int \frac{1}{3+\cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+\cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2} (1+\sec^2 \frac{x}{2})}$$

$$= \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{2+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

或
$$\int \frac{1}{3+\cos x} dx \stackrel{\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{3+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du$$

$$= \int \frac{1}{u^2 + (\sqrt{2})^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

14. $\int \frac{1}{2+\sin x} dx;$

解
$$\int \frac{1}{2+\sin x} dx = \int \frac{dx}{2+2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin^2 \frac{x}{2} (\csc^2 \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2})}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{d(\cot \frac{x}{2})}{\cot^2 \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} + 1} = -\int \frac{d(\cot \frac{x}{2} + \frac{1}{2})}{(\cot \frac{x}{2} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \cot \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{2 + \sin x} dx \stackrel{\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{2 + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du \\
&= \int \frac{1}{u^2 + u + 1} du = \int \frac{1}{(u + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

15. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x};$

解 $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} (1 + \tan \frac{x}{2})} = \int \frac{d(\tan \frac{x}{2})}{1 + \tan \frac{x}{2}} = \ln |\tan \frac{x}{2}| + C.$

或

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \stackrel{\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du \\
&= \int \frac{1}{u+1} du = \ln |u+1| + C = \ln |\tan \frac{x}{2} + 1| + C.
\end{aligned}$$

16. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5};$

解 $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} \stackrel{\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{\frac{4u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1}{3u^2 + 2u + 2} du$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{(u + \frac{1}{3})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{3})^2} du = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3u+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

或
$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} \xrightarrow{\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}} \int \frac{1}{\frac{4u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+u^2} du$$

$$= \int \frac{1}{3u^2 + 2u + 2} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(u + \frac{1}{3})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{3})^2} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3u+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

17. $\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx;$

解
$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx \xrightarrow{\text{令 } \sqrt[3]{x+1} = u} \int \frac{1}{1+u} \cdot 3u^2 du = 3 \int (u-1 + \frac{1}{1+u}) du$$

$$= \frac{3}{2} u^2 - 3u + 3 \ln|1+u| + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{x+1}) + C.$$

18. $\int \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{\sqrt{x} + 1} dx;$

解
$$\int \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{\sqrt{x} + 1} dx = \int [(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + 1] dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + C.$$

19. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx;$

解
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx \xrightarrow{\text{令 } \sqrt{x+1} = u} \int \frac{u-1}{u+1} \cdot 2u du = 2 \int (u-2 + \frac{2}{u+1}) du$$

$$= 2(\frac{1}{2} u^2 - 2u + 2 \ln|u+1|) + C$$

$$= (x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1}+1) + C.$$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$

解
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} \xrightarrow{\text{令 } x = u^4} \int \frac{1}{u^2 + u} \cdot 4u^3 du$$

$$=4\int(u-1+\frac{1}{1+u})du=2u^2-4u+4\ln|1+u|+C$$

$$=2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C.$$

21. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x};$

解 令 $\frac{1-x}{1+x}=u$, 则 $x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx=\frac{-4u}{(1+u^2)^2}du$,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = \int u \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{-4u}{(1+u^2)^2} du = 2 \int (\frac{1}{u^2-1} + \frac{1}{1+u^2}) du$$

$$= \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + 2 \arctan u + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \right| + 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

解 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=u$, 则 $x=\frac{u^3+1}{u^3-1}$, $dx=-\frac{6u^2}{(u^3-1)^2}$, 代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = -\frac{3}{2} \int du = -\frac{3}{2}u + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

总习题四

求下列不定积分(其中 a, b 为常数):

1. $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}};$

解 $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx - \int \frac{1}{e^{2x} - 1} de^x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C.$

2. $\int \frac{x}{(1-x)^3} dx;$

解 $\int \frac{x}{(1-x)^3} dx = -\int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + C.$

3. $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx \ (a > 0);$

解 $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(a^3)^2 - (x^3)^2} d(x^3) = \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{x^3 + a^3}{x^3 - a^3} \right| + C.$

4. $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx;$

解 $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx = \int \frac{1}{x + \sin x} d(x + \sin x) = \ln |x + \sin x| + C.$

5. $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx;$

解 $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx = \int \ln \ln x d \ln x = \ln x \cdot \ln \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \ln \ln x - \ln x + C.$

6. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx;$

解 $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 + \sin^4 x} d \sin x = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + (\sin^2 x)^2} d(\sin^2 x) = \frac{1}{2} \arctan \sin^2 x + C.$

7. $\int \tan^4 x dx;$

解 $\int \tan^4 x dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} d \tan x = \int \tan^2 x \sin^2 x d \tan x$
 $= \int \frac{\tan^4 x}{\tan^2 x + 1} d \tan x = \int \left(\tan^2 x - 1 + \frac{1}{\tan^2 x + 1} \right) d \tan x$
 $= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + \arctan \tan x + c = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + c.$

8. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$

解 $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = -\frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos x) \sin 3x dx$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int \cos 3x \sin 3x dx + \frac{1}{2} \int \cos x \sin 3x dx \\
&= \frac{1}{6} \int \cos 3x d(\cos 3x) + \frac{1}{4} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx \\
&= \frac{1}{12} \cos^2 3x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.
\end{aligned}$$

9. $\int \frac{dx}{x(x^6+4)};$

解 $\int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4} \right) dx = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{24} \ln(x^6+4) + C.$

10. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx (a>0);$

解 $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} du = a \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
 $= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} d\sqrt{x} = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+(\sqrt{x})^2}) + C = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C.$

12. $\int x \cos^2 x dx;$

解 $\int x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (x + x \cos 2x) dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \int x d \sin 2x$
 $= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{4} \int \sin 2x dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.$

13. $\int e^{ax} \cos bxdx;$

解 因为

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \cos bxdx &= \frac{1}{a} \int \cos bxd e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bxd e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bxdx,
\end{aligned}$$

所以
$$\int e^{ax} \cos bx dx = -\frac{a^2}{a^2+b^2} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx \right) + C$$

$$= -\frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$

解
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \xrightarrow{\text{令 } \sqrt{1+e^x}=u} \int \frac{1}{u} d \ln(u^2-1) = 2 \int \frac{1}{u^2-1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du.$$

$$= \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$$

15. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}};$

解
$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \xrightarrow{\text{令 } x=\sec t} \int \frac{1}{\sec^2 t \cdot \tan t} \cdot \sec t \tan t dt = \int \cos t dt = \sin t + C$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

16. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}};$

解
$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}} \xrightarrow{\text{令 } x=a \sin t} \int \frac{1}{(a \cos t)^5} \cdot a \cos t dt$$

$$= \frac{1}{a^4} \int \frac{1}{\cos^4 t} dt = \frac{1}{a^4} \int (\tan^2 t + 1) d \tan t$$

$$= \frac{1}{3a^4} \tan^3 t + \frac{1}{a^4} \tan t + C$$

$$= \frac{1}{3a^4} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} + \frac{1}{a^4} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

17. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}};$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} & \xrightarrow{\text{令 } x=\tan t} \int \frac{1}{\tan^4 t \cdot \sec t} \cdot \sec^2 t dt \\
& = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} d \sin t \\
& = \int \left(\frac{1}{\sin^4 t} - \frac{1}{\sin^2 t} \right) d \sin t = -\frac{1}{3 \sin^3 t} + \frac{1}{\sin t} + C \\
& = -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.
\end{aligned}$$

$$18. \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx ;$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx & \xrightarrow{\text{令 } \sqrt{x}=t} \int t \sin t \cdot 2t dt = 2 \int t^2 \sin t dt \\
& = -2 \int t^2 d \cos t = -2t^2 \cos t + 2 \int \cos t \cdot 2t dt \\
& = -2t^2 \cos t + 4 \int t d \sin t = -2t^2 \cos t + 4t \sin t - 4 \int \sin t dt \\
& = -2t^2 \cos t + 4t \sin t + 4 \cos t + C \\
& = -2x \cos \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 4 \cos \sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

$$19. \int \ln(1+x^2) dx ;$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \ln(1+x^2) dx & = x \ln(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx \\
& = x \ln(1+x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
& = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C.
\end{aligned}$$

$$20. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx ;$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx & = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} d \tan x = \int \left(\tan x - \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} \right) d \tan x \\
& = \frac{1}{2} \tan^2 x - \frac{1}{2} \ln(\tan^2 x + 1) + C.
\end{aligned}$$

$$21. \int \arctan \sqrt{x} dx ;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \arctan \sqrt{x} dx &= x \arctan \sqrt{x} - \int x \cdot \frac{1}{1+x} d\sqrt{x} \\
 &= x \arctan \sqrt{x} - \int (1 - \frac{1}{1+x}) d\sqrt{x} \\
 &= x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C \\
 &= (x+1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$22. \int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx = \int \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \sqrt{2} \int \csc \frac{x}{2} d\frac{x}{2} = \sqrt{2} \ln |\csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}| + C.$$

$$23. \int \frac{x^3}{(1+x^8)^2} dx;$$

$$\text{解 } \int \frac{x^3}{(1+x^8)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1+x^8)^2} dx^4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{1+x^8} + \arctan x^4 \right] + C.$$

提示: 已知递推公式

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} \right].$$

$$24. \int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x^8}{x^8+3x^4+2} dx^4 \stackrel{\text{令 } x^4=t}{=} \frac{1}{4} \int \frac{t^2}{t^2+3t+2} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 - \frac{3t+2}{t^2+3t+2}) dt = \frac{1}{4} \int (1 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t+1}) dt \\
 &= \frac{1}{4} t - \ln|t+2| + \frac{1}{4} \ln|t+1| + C \\
 &= \frac{1}{4} x^4 + \ln \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2} + C.
 \end{aligned}$$

$$25. \int \frac{dx}{16-x^4};$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{dx}{16-x^4} &= \int \frac{1}{(4-x^2)(4+x^2)} dx = \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{4-x^2} + \frac{1}{4+x^2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{32} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

$$26. \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \sec x - x + \tan x + C.
 \end{aligned}$$

$$27. \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{x+\sin x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \\
 &= \int x d \tan \frac{x}{2} + \int \tan \frac{x}{2} dx \\
 &= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} dx + \int \tan \frac{x}{2} dx = x \tan \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

$$28. \int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx &= \int x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x dx - \int e^{\sin x} \cdot \tan x \cdot \sec x dx \\
 &= \int x e^{\sin x} d \sin x - \int e^{\sin x} d \sec x \\
 &= \int x d e^{\sin x} - \sec x \cdot e^{\sin x} + \int \sec x d e^{\sin x} \\
 &= x e^{\sin x} - \int e^{\sin x} dx - \sec x \cdot e^{\sin x} + \int \sec x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x dx \\
 &= x e^{\sin x} - \sec x \cdot e^{\sin x} + C.
 \end{aligned}$$

$$29. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx & \stackrel{\text{令 } x=t^6}{=} \int \frac{t^2}{t^6(t^3+t^2)} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
 & = 6 \ln \frac{t}{t+1} + C = \ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.
 \end{aligned}$$

$$30. \int \frac{dx}{(1+e^x)^2};$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{dx}{(1+e^x)^2} & \stackrel{\text{令 } 1+e^x=t}{=} \int \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt \\
 & = \ln(t-1) - \ln t + \frac{1}{t} + C \\
 & = x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C.
 \end{aligned}$$

$$31. \int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1} dx & = \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-1+e^{-2x}} dx = \int \frac{1}{1+(e^x-e^{-x})^2} d(e^x-e^{-x}) \\
 & = \arctan(e^x-e^{-x}) + C \\
 & = \arctan(2\operatorname{sh}x) + C.
 \end{aligned}$$

$$32. \int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx & = \int \frac{x}{(e^x+1)^2} d(e^x+1) = - \int x d \frac{1}{e^x+1} \\
 & = - \frac{x}{e^x+1} + \int \frac{1}{e^x+1} dx = - \frac{x}{e^x+1} + \int \frac{1}{e^x(e^x+1)} de^x \\
 & = - \frac{x}{e^x+1} + \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1}\right) de^x \\
 & = - \frac{x}{e^x+1} + \ln e^x - \ln(e^x+1) + C \\
 & = \frac{xe^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1) + C.
 \end{aligned}$$

$$33. \int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx &= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x \cdot [\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})]'dx \\
&= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2 \int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2 \int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) d\sqrt{1+x^2} \\
&= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2 \int \sqrt{1+x^2} \cdot [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'dx \\
&= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2 \int dx \\
&= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.
\end{aligned}$$

$$34. \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx;$$

解 因为

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx \stackrel{\text{令 } x=\tan t}{=} \int \frac{1}{\sec^3 t} \cdot \sec^2 t dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int \ln x d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.
\end{aligned}$$

$$35. \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx;$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx &\stackrel{\text{令 } x=\sin t}{=} \int t \cdot \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (t+t \cos 2t) dt \\
&= \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4} \int t \sin 2t = \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4} t \sin 2t - \frac{1}{4} \int \sin 2t dt \\
&= \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4} t \sin 2t + \frac{1}{8} \cos 2t + C \\
&= \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{1}{4} x^2 + C_1.
\end{aligned}$$

$$36. \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int x^2 \arccos x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int x^2 \arccos x d\sqrt{1-x^2} \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot (x^2 \arccos x)' dx \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot (2x \arccos x - x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x + 2 \int x \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x dx - \int x^2 dx \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} \int \arccos x d\sqrt{(1-x^2)^3} \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \arccos x - \frac{2}{3} \int (1-x^2) dx \\
&= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \arccos x - \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} x^3 + C \\
&= -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (x^2+1) \arccos x - \frac{1}{9} x(x^2+6) + C.
\end{aligned}$$

$$37. \int \frac{\cot x}{1+\sin x} dx;$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \frac{\cot x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1}{\sin x(1+\sin x)} d\sin x = \int \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1+\sin x} \right) d\sin x \\
&= \ln|\sin x| - \ln|1+\sin x| + C = -\ln|\csc x + 1| + C.
\end{aligned}$$

$$38. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x};$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} &= -\int \frac{1}{\sin x \cos x} d\cot x = -\int \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} d\cot x = -\int \cot x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} d\cot x \\
&= -\int \left(\frac{1}{\cot x} + \cot x \right) d\cot x = -\ln|\cot x| - \frac{1}{2} \cot^2 x + C = \ln|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1.
\end{aligned}$$

$$39. \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x};$$

$$\text{解 令 } u = \tan \frac{x}{2}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} &= \int \frac{1}{\left(2+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2u}{1+u^2}} du = \int \frac{1+u^2}{(u^2+3)u} du \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{2u}{u^2+3} du + \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln(u^2+3) + \frac{1}{3} \ln|u| + C
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \tan^3 \frac{x}{2} + 3 \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

40. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx;$

解 $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\sin x - \cos x) \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} du = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{2 \sin^2 x - 1} dx + \int \frac{\cos^2 x \sin x}{2 \cos^2 x - 1} dx$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{2 \sin^2 x - 1} d \sin x - \int \frac{\cos^2 x}{2 \cos^2 x - 1} d \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{2 \sin^2 x - 1} \right) d \sin x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 x - 1} \right) d \cos x$$

$$= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\sqrt{2} \sin x + 1} \right| - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \sin x + 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C.$$

习题 5-1

1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y=x^2+1$, 两直线 $x=a$ 、 $x=b(b>a)$ 及横轴所围成的图形的面积.

解 第一步: 在区间 $[a, b]$ 内插入 $n-1$ 个分点 $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), 把区间 $[a, b]$ 分成 n 个长度相等的小区间, 各个小区间的长度为: $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$).

第二步: 在第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$) 上取右端点 $\xi_i = x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, 作和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left[\left(a + \frac{b-a}{n}i \right)^2 + 1 \right] \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \left[a^2 + \frac{2a(b-a)}{n}i + \frac{(b-a)^2}{n^2}i^2 + 1 \right] \\ &= \frac{(b-a)}{n} \left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \right] \\ &= (b-a) \left[a^2 + \frac{a(b-a)(n+1)}{n} + \frac{(b-a)^2(n+1)(2n+1)}{6n^2} + 1 \right]. \end{aligned}$$

第三步: 令 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\} = \frac{b-a}{n}$, 取极限得所求面积

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \left[a^2 + \frac{a(b-a)(n+1)}{n} + \frac{(b-a)^2(n+1)(2n+1)}{6n^2} + 1 \right] \\ &= (b-a) \left[a^2 + a(b-a) + \frac{1}{3}(b-a)^2 + 1 \right] = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a. \end{aligned}$$

2. 利用定积分定义计算下列积分:

(1) $\int_a^b x dx$ ($a < b$);

(2) $\int_0^1 e^x dx$.

解 (1) 取分点为 $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), 则 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 在第 i 个小区间上取右端点 $\xi_i = x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ ($i=1, 2, \dots, n$). 于是

$$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n}i \right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$=(b-a)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} [a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

(2) 取分点为 $x_i = \frac{i}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), 则 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 在第 i 个小区间上取右端点

$\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}} [1 - (e^{\frac{1}{n}})^n]}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} [1 - e]}{n(1 - e^{\frac{1}{n}})} = e - 1. \end{aligned}$$

3. 利用定积分的几何意义, 说明下列等式:

$$(1) \int_0^1 2x dx = 1;$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0;$$

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

解 (1) $\int_0^1 2x dx$ 表示由直线 $y=2x$ 、 x 轴及直线 $x=1$ 所围成的面积, 显然面积为 1.

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 表示由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 、 x 轴及 y 轴所围成的四分之一圆的面积, 即圆

$x^2+y^2=1$ 的面积 $\frac{1}{4}$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

(3) 由于 $y=\sin x$ 为奇函数, 在关于原点的对称区间 $[-\pi, \pi]$ 上与 x 轴所夹的面积代数之和为零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ 表示由曲线 $y=\cos x$ 与 x 轴上 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 一段所围成的图形的面积. 因为 $\cos x$

为偶函数, 所以此图形关于 y 轴对称. 因此图形面积的一半为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$, 即

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

4. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力, 已知闸门上水的压强 p (单位面积上的压力大小) 是水深 h 的函数, 且有 $p=9.8h$ (kN/m^2). 若闸门高 $H=3\text{m}$, 宽 $L=2\text{m}$, 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P .

解 建立坐标系如图. 用分点 $x_i = \frac{H}{n}i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) 将区间 $[0, H]$ 分为 n 分个小区间, 各

小区间的长为 $\Delta x_i = \frac{H}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$).

在第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 闸门相应部分所受的水压力近似为

$$\Delta P_i = 9.8x_i \cdot L \cdot \Delta x_i.$$

闸门所受的水压力为

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 9.8x_i \cdot L \cdot \Delta x_i = 9.8L \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{H}{n} i \cdot \frac{H}{n} = 9.8L \cdot H^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n} = 4.8L \cdot H^2.$$

将 $L=2, H=3$ 代入上式得 $P=88.2$ (千牛).

5. 证明定积分性质:

$$(1) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx;$$

$$(2) \int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

$$\text{证明 } (1) \int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx.$$

$$(2) \int_a^b 1 \cdot dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (b - a) = b - a.$$

6. 估计下列各积分的值:

$$(1) \int_1^4 (x^2 + 1)dx;$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 + \sin^2 x)dx;$$

$$(3) \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx;$$

$$(4) \int_2^0 e^{x^2-x} dx.$$

解 (1) 因为当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $2 \leq x^2 + 1 \leq 17$, 所以

$$2 \cdot (4-1) \leq \int_1^4 (x^2+1)dx \leq 17 \cdot (4-1),$$

即 $6 \leq \int_1^4 (x^2+1)dx \leq 51.$

(2) 因为当 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ 时, $1 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$, 所以

$$1 \cdot \left(\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)dx \leq 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right),$$

即 $\pi \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)dx \leq 2\pi.$

(3) 先求函数 $f(x)=x \arctan x$ 在区间 $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ 上的最大值 M 与最小值 m .

$f'(x)=\arctan x + \frac{x}{1+x^2}$. 因为当 $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{3}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)=x \arctan x$ 在区间 $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ 上单调增加. 于是

$$m=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \quad M=f(\sqrt{3})=\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

因此 $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$

即 $\frac{\pi}{9} \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2\pi}{3}.$

(4) 先求函数 $f(x)=e^{x^2-x}$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值 M 与最小值 m .

$$f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1), \text{ 驻点为 } x=\frac{1}{2}.$$

比较 $f(0)=1, f(2)=e^2, f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$, 得 $m=e^{-\frac{1}{4}}, M=e^2$. 于是

$$e^{-\frac{1}{4}}(2-0) \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq e^2 \cdot (2-0),$$

即 $-2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-x} dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}.$

7. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

(1) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$;

(2) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \not\equiv 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;

(3) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \leq g(x)$, 且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv g(x)$.

证明 (1) 假如 $f(x) \not\equiv 0$, 则必有 $f(x) > 0$. 根据 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续性, 在 $[a, b]$ 上存在一点 x_0 , 使 $f(x_0) > 0$, 且 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值.

再由连续性, 存在 $[c, d] \subset [a, b]$, 且 $x_0 \in [c, d]$, 使当 $x \in [c, d]$ 时, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 于是

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0.$$

这与条件 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 相矛盾. 因此在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

(2) 证法一 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以在 $[a, b]$ 上存在一点 x_0 , 使 $f(x_0) > 0$, 且 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值.

再由连续性, 存在 $[c, d] \subset [a, b]$, 且 $x_0 \in [c, d]$, 使当 $x \in [c, d]$ 时, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. 于是

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0.$$

证法二 因为 $f(x) \geq 0$, 所以 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. 假如 $\int_a^b f(x) dx > 0$ 不成立. 则只有 $\int_a^b f(x) dx = 0$,

根据结论(1), $f(x) \equiv 0$, 矛盾. 因此 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

(3) 令 $F(x) = g(x) - f(x)$, 则在 $[a, b]$ 上 $F(x) \geq 0$ 且

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = 0,$$

由结论(1), 在 $[a, b]$ 上 $F(x) \equiv 0$, 即 $f(x) \equiv g(x)$.

4. 根据定积分的性质及第 7 题的结论, 说明下列积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$?

(2) $\int_1^2 x^2 dx$ 还是 $\int_1^2 x^3 dx$?

(3) $\int_1^2 \ln x dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$?

(4) $\int_0^1 x dx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x) dx$?

(5) $\int_0^1 e^x dx$ 还是 $\int_0^1 (1+x) dx$?

解 (1) 因为当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $x^2 \geq x^3$, 所以 $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$.

又当 $0 < x < 1$ 时, $x^2 > x^3$, 所以 $\int_0^1 x^2 dx > \int_0^1 x^3 dx$.

(2) 因为当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $x^2 \leq x^3$, 所以 $\int_1^2 x^2 dx \leq \int_1^2 x^3 dx$.

又因为当 $1 < x < 2$ 时, $x^2 < x^3$, 所以 $\int_1^2 x^2 dx < \int_1^2 x^3 dx$.

(3) 因为当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $0 \leq \ln x < 1$, $\ln x \geq (\ln x)^2$, 所以 $\int_1^2 \ln x dx \geq \int_1^2 (\ln x)^2 dx$.

又因为当 $1 < x < 2$ 时, $0 < \ln x < 1$, $\ln x > (\ln x)^2$, 所以 $\int_1^2 \ln x dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$.

(4) 因为当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $x \geq \ln(1+x)$, 所以 $\int_0^1 x dx \geq \int_0^1 \ln(1+x) dx$.

又因为当 $0 < x \leq 1$ 时, $x > \ln(1+x)$, 所以 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 \ln(1+x) dx$.

(5) 设 $f(x) = e^x - 1 - x$, 则当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $f'(x) = e^x - 1 > 0$, $f(x) = e^x - 1 - x$ 是单调增加的. 因此当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, 即 $e^x \geq 1 + x$, 所以 $\int_0^1 e^x dx \geq \int_0^1 (1+x) dx$.

又因为当 $0 < x \leq 1$ 时, $e^x > 1 + x$, 所以 $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 (1+x) dx$.

习题 5-2

1. 试求函数 $y = \int_0^x \sin t dt$ 当 $x=0$ 及 $x = \frac{\pi}{4}$ 时的导数.

解 $y' = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt = \sin x$, 当 $x=0$ 时, $y'=\sin 0=0$;

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $y' = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表示式 $x = \int_0^t \sin u du$, $y = \int_0^t \cos u du$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

解 $x'(t)=\sin t$, $y'(t)=\cos t$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \cot t$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所决定的隐函数 y 对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程两对 x 求导得

$$e^y y' + \cos x = 0,$$

于是 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y}$.

4. 当 x 为何值时, 函数 $I(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 有极值?

解 $I'(x) = x e^{-x^2}$, 令 $I'(x)=0$, 得 $x=0$.

因为当 $x<0$ 时, $I'(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $I'(x)>0$,

所以 $x=0$ 是函数 $I(x)$ 的极小值点.

5. 计算下列各导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt;$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi^2 t) dt.$$

$$\text{解 (1)} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \stackrel{\text{令 } x^2 = u}{=} \frac{d}{du} \int_0^u \sqrt{1+t^2} dt \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \sqrt{1+u^2} \cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^4}.$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$$

$$= -\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}} \cdot (x^2)' + \frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}} \cdot (x^3)'$$

$$= -\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} + \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}.$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt = -\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} \cos(\pi t^2) dt + \frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$$

$$= -\cos(\pi \sin^2 x)(\sin x)' + \cos(\pi \cos^2 x)(\cos x)'$$

$$= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) - \sin x \cdot \cos(\pi \cos^2 x)$$

$$= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) - \sin x \cdot \cos(\pi - \pi \sin^2 x)$$

$$= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) + \sin x \cdot \cos(\pi \sin^2 x)$$

$$= (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x).$$

6. 计算下列各定积分:

$$(1) \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx;$$

$$\text{解 } \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx = (x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x) \Big|_0^a = a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a.$$

$$(2) \int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4}) dx;$$

$$\text{解 } \int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4}) dx = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^{-3}) \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 2^{-3}) - \frac{1}{3}(1^3 - 1^{-3}) = 2\frac{5}{8}.$$

$$(3) \int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx &= \int_4^9 (x^{\frac{1}{2}} + x) dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2) \Big|_4^9 \\ &= (\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}9^2) - (\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}4^2) = 45\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$(4) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$$

$$\text{解 } \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

$$(5) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{解 } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2};$$

$$\text{解 } \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^{\sqrt{3}a} = \frac{1}{a} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{a} \arctan 0 = \frac{\pi}{3a}.$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$\text{解 } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$(8) \int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx &= \int_{-1}^0 (3x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}) dx = (x^3 + \arctan x) \Big|_{-1}^0 \\ &= -(-1)^3 - \arctan(-1) = 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$(9) \int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x};$$

$$\text{解} \quad \int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x} = \ln |1+x| \Big|_{-e-1}^{-2} = \ln 1 - \ln e = -1.$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta;$$

$$\text{解} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 \theta - 1) d\theta = (\tan \theta - \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$(11) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{2\pi} |\sin x| dx &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = 4. \end{aligned}$$

$$(12) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{解} \quad \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx = (\frac{1}{2}x^2 + x) \Big|_0^1 + (\frac{1}{6}x^3) \Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

7. 设 k 为正整数. 试证下列各题:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi;$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi .$$

$$\text{证明 (1)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k} \sin k\pi - \frac{1}{k} \sin k(-\pi) = 0 - 0 = 0 .$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k} \cos k\pi + \frac{1}{k} \cos k(-\pi) \\ = -\frac{1}{k} \cos k\pi + \frac{1}{k} \cos k\pi = 0 .$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2k} \sin 2kx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

8. 设 k 及 l 为正整数, 且 $k \neq l$. 试证下列各题:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lxdx = 0 ;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lxdx = 0 ;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lxdx = 0 .$$

$$\text{证明 (1)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+l)x - \sin(k-l)x] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2(k+l)} \cos(k+l)x \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[-\frac{1}{2(k-l)} \cos(k-l)x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 .$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x + \cos(k-l)x] dx$$

$$= \left[\frac{1}{2(k+l)} \sin(k+l)x \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{1}{2(k-l)} \sin(k-l)x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 .$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lxdx = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x - \cos(k-l)x] dx .$$

$$= \left[-\frac{1}{2(k+l)} \sin(k+l)x \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{1}{2(k-l)} \sin(k-l)x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 .$$

9. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot (\int_0^x e^{t^2} dt)'}{x e^{2x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{x e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{x e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + 2x^2} = 2.$$

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, 1] \\ x & x \in [1, 2] \end{cases}$. 求 $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式, 并讨论 $\varphi(x)$ 在 $(0, 2)$ 内的连续性.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3} x^3;$

当 $1 < x \leq 2$ 时, $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x t dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6}.$

因此
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

因为 $\varphi(1) = \frac{1}{3}, \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3},$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 从而在 $(0, 2)$ 内连续.

11. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x < 0 \text{ 或 } x > \pi \end{cases}$. 求 $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式.

解 当 $x < 0$ 时,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 0dt = 0;$$

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t \Big|_0^x = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2};$$

当 $x > \pi$ 时,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x f(t)dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin t dt + \int_\pi^x 0dt = -\frac{1}{2} \cos t \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

因此
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & x \geq \pi \end{cases}.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导且 $f'(x) \leq 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt.$$

证明在 (a, b) 内有 $F'(x) \leq 0$.

证明 根据积分中值定理, 存在 $\xi \in [a, x]$, 使 $\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a)$. 于是有

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t)dt + \frac{1}{x-a} f(x) \\ &= \frac{1}{x-a} f(x) - \frac{1}{(x-a)^2} f(\xi)(x-a) = \frac{1}{x-a} [f(x) - f(\xi)]. \end{aligned}$$

由 $f'(x) \leq 0$ 可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调减少的, 而 $a \leq \xi \leq x$, 所以 $f(x) - f(\xi) \leq 0$. 又在 (a, b) 内, $x-a > 0$, 所以在 (a, b) 内

$$F'(x) = \frac{1}{x-a} [f(x) - f(\xi)] \leq 0.$$

习题 5-2

1. 试求函数 $y = \int_0^x \sin t dt$ 当 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 时的导数.

解 $y' = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt = \sin x$, 当 $x=0$ 时, $y' = \sin 0 = 0$; 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时, $y' = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表示式 $x = \int_0^t \sin u du$, $y = \int_0^t \cos u du$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

解 $x'(t) = \sin t$, $y'(t) = \cos t$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \cot t$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所决定的隐函数 y 对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程两对 x 求导得

$$e^y y' + \cos x = 0,$$

于是 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y}$.

4. 当 x 为何值时, 函数 $I(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 有极值?

解 $I'(x) = x e^{-x^2}$, 令 $I'(x) = 0$, 得 $x=0$. 因为当 $x < 0$ 时, $I'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $I'(x) > 0$, 所以 $x=0$

是函数 $I(x)$ 的极小值点.

5. 计算下列各导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt;$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi^2 t) dt.$$

解 (1) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \stackrel{\text{令 } x^2=u}{=} \frac{d}{du} \int_0^u \sqrt{1+t^2} dt \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2} \cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^4}$.

$$(2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$$

$$= -\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^4}} \cdot (x^2)' + \frac{1}{\sqrt{1+(x^3)^4}} \cdot (x^3)'$$

$$= -\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} + \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}.$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt &= -\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} \cos(\pi t^2) dt + \frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \\ &= -\cos(\pi \sin^2 x)(\sin x)' + \cos(\pi \cos^2 x)(\cos x)' \\ &= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) - \sin x \cdot \cos(\pi \cos^2 x) \\ &= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) - \sin x \cdot \cos(\pi - \pi \sin^2 x) \\ &= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) + \sin x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) \\ &= (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x). \end{aligned}$$

6. 计算下列各定积分:

$$(1) \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx;$$

$$\text{解 } \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx = (x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x)|_0^a = a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a.$$

$$(2) \int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4}) dx;$$

$$\text{解 } \int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4}) dx = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^{-3})|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 2^{-3}) - \frac{1}{3}(1^3 - 1^{-3}) = 2\frac{5}{8}.$$

$$(3) \int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx;$$

$$\text{解 } \int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx = \int_4^9 (x^{\frac{1}{2}} + x) dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2)|_4^9 = (\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}9^2) - (\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}4^2) = 45\frac{1}{6}.$$

$$(4) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$$

$$\text{解 } \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

$$(5) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{解 } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2 + x^2};$$

$$\text{解} \quad \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^{\sqrt{3}a} = \frac{1}{a} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{a} \arctan 0 = \frac{\pi}{3a}.$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$(8) \int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx;$$

$$\text{解} \quad \int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx = \int_{-1}^0 (3x^2 + \frac{1}{x^2+1}) dx = (x^3 + \arctan x) \Big|_{-1}^0 = -(-1)^3 - \arctan(-1) = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

$$(9) \int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x};$$

$$\text{解} \quad \int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_{-e-1}^{-2} = \ln 1 - \ln e = -1.$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta;$$

$$\text{解} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 \theta - 1) d\theta = (\tan \theta - \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$(11) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx;$$

$$\text{解} \quad \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = 4.$$

$$(12) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{解} \quad \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx = (\frac{1}{2}x^2 + x) \Big|_0^1 + (\frac{1}{6}x^3) \Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

7. 设 k 为正整数. 试证下列各题:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi;$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi.$$

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k} \sin k\pi - \frac{1}{k} \sin k(-\pi) = 0 - 0 = 0.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k} \cos k\pi + \frac{1}{k} \cos k(-\pi) = -\frac{1}{k} \cos k\pi + \frac{1}{k} \cos k\pi = 0.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2k} \sin 2kx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

8. 设 k 及 l 为正整数, 且 $k \neq l$. 试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = 0;$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = 0;$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = 0.$

证明 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+l)x - \sin(k-l)x] dx$
 $= \left[-\frac{1}{2(k+l)} \cos(k+l)x \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[-\frac{1}{2(k-l)} \cos(k-l)x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x + \cos(k-l)x] dx$
 $= \left[\frac{1}{2(k+l)} \sin(k+l)x \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{1}{2(k-l)} \sin(k-l)x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x - \cos(k-l)x] dx$
 $= \left[-\frac{1}{2(k+l)} \sin(k+l)x \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[-\frac{1}{2(k-l)} \sin(k-l)x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

9. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}.$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot (\int_0^x e^{t^2} dt)'}{x e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{x e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{x e^{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + 2x^2} = 2.
 \end{aligned}$$

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, 1] \\ x & x \in [1, 2] \end{cases}$. 求 $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式, 并讨论 $\varphi(x)$ 在 $(0, 2)$ 内的

连续性.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3} x^3$;

当 $1 < x \leq 2$ 时, $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x t dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6}$.

因此
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

因为 $\varphi(1) = \frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 从而在 $(0, 2)$ 内连续.

11. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x < 0 \text{ 或 } x > \pi \end{cases}$. 求 $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式.

解 当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 0 dt = 0$;

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t \Big|_0^x = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2}$;

当 $x > \pi$ 时, $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin t dt + \int_\pi^x 0 dt = -\frac{1}{2} \cos t \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 0 = 1$.

因此
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & x \geq \pi \end{cases}.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导且 $f'(x) \leq 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt.$$

证明在 (a, b) 内有 $F'(x) \leq 0$.

证明 根据积分中值定理, 存在 $\xi \in [a, x]$, 使 $\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a)$. 于是有

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t)dt + \frac{1}{x-a} f(x) = -\frac{1}{x-a} f(x) - \frac{1}{(x-a)^2} f(\xi)(x-a) \\ &= -\frac{1}{x-a} [f(x) - f(\xi)]. \end{aligned}$$

由 $f'(x) \leq 0$ 可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调减少的, 而 $a \leq \xi \leq x$, 所以 $f(x) - f(\xi) \leq 0$. 又在 (a, b) 内, $x-a > 0$, 所以在 (a, b) 内

$$F'(x) = -\frac{1}{x-a} [f(x) - f(\xi)] \leq 0.$$

习题 5-3

1. 计算下列定积分:

$$(1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x + \frac{\pi}{3}) dx;$$

$$\text{解 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x + \frac{\pi}{3}) dx = -\cos(x + \frac{\pi}{3}) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$(2) \int_{-2}^1 \frac{dx}{(11+5x)^3};$$

$$\text{解 } \int_{-2}^1 \frac{dx}{(11+5x)^3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{-2} (11+5x)^{-2} \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{10} \cdot 16^{-2} + \frac{1}{10} \cdot 1^{-2} = \frac{51}{512}.$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi;$$

$$\text{解 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d \sin \varphi = -\frac{1}{4} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} \cos^3 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cos^3 0 = \frac{1}{4}.$$

$$(4) \int_0^{\pi} (1 - \sin^3 \theta) d\theta;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^{\pi} (1 - \sin^3 \theta) d\theta &= \int_0^{\pi} d\theta + \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d \cos \theta = \theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta \\ &= \pi + (\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta) \Big|_0^{\pi} = \pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du = \frac{1}{2} u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \sin 2u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx &\stackrel{\text{令 } x=\sqrt{2} \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= (t + \frac{1}{2} \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$(7) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2y^2} dy;$$

$$\text{解 } \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2y^2} dy = \sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-y^2} dy \stackrel{\text{令 } y=2 \sin x}{=} \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos x \cdot 2 \cos x dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=2\sqrt{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2y)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\pi+2).$$

$$(8) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$$

$$\text{解 } \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \xrightarrow{\text{令 } x=\sin t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{\sin^2 t} - 1) dt = (-\cot t - t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$(9) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &\xrightarrow{\text{令 } x=a\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cdot a \cos t \cdot a \cos t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt \\ &= \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^4}{32} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4 \pi}{16}. \end{aligned}$$

$$(10) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}};$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &\xrightarrow{\text{令 } x=\tan t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t \cdot \sec t} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{\sin t} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$(11) \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}};$$

$$\text{解 } \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}} \xrightarrow{\text{令 } \sqrt{5-4x}=u} \frac{1}{8} \int_3^1 (5-u^2) du = -\frac{1}{8} (5u - \frac{1}{3}u^3) \Big|_3^1 = \frac{1}{6}.$$

$$(12) \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$$

$$\text{解 } \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{令 } \sqrt{x}=u} \int_1^2 \frac{1}{1+u} \cdot 2u du = 2 \int_1^2 (1 - \frac{1}{1+u}) du = 2(u - \ln|1+u|) \Big|_1^2 = 2(1 + \ln \frac{2}{3}).$$

$$(13) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1};$$

$$\text{解 } \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1} \xrightarrow{\text{令 } \sqrt{1-x}=u} \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{u-1} \cdot (-2u) du = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{u-1}) du = 2(u + \ln|u-1|) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\ln 2.$$

$$(14) \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}};$$

$$\text{解 } \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{1}{\sqrt{3a^2-x^2}} d(3a^2-x^2) = -\sqrt{3a^2-x^2} \Big|_0^{\sqrt{2}a} = a(\sqrt{3}-1).$$

$$(15) \int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$\text{解 } \int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} d(-\frac{t^2}{2}) = -e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(16) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$$

$$\text{解 } \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} d\ln x = 2\sqrt{1+\ln x} \Big|_1^{e^2} = 2(\sqrt{3}-1).$$

$$(17) \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2};$$

$$\text{解 } \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-2}^0 \frac{1}{1+(x+1)^2} dx = \arctan(x+1) \Big|_{-2}^0 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$(18) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx;$$

$$\text{解 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin^2 x) d\sin x = (\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$(19) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sqrt{1-\cos^2 x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\cos x} (-\sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx = \frac{2}{3} \cos^{\frac{3}{2}} x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \frac{2}{3} \cos^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$(20) \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx.$$

$$\text{解 } \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}.$$

2. 利用函数的奇偶性计算下列积分:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx;$$

解 因为 $x^4 \sin x$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是奇函数, 所以 $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0$.

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) d\theta \\ &= (3\theta + 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$(3) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) \\ &= \frac{2}{3} (\arcsin x)^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{324}. \end{aligned}$$

$$(4) \int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$

解 因为函数 $\frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1}$ 是奇函数, 所以 $\int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = 0$.

3. 证明: $\int_{-a}^a \varphi(x^2) dx = 2 \int_0^a \varphi(x^2) dx$, 其中 $\varphi(u)$ 为连续函数.

证明 因为被积函数 $\varphi(x^2)$ 是 x 的偶函数, 且积分区间 $[-a, a]$ 关于原点对称, 所以有

$$\int_{-a}^a \varphi(x^2) dx = 2 \int_0^a \varphi(x^2) dx.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[-b, b]$ 上连续, 证明 $\int_{-b}^b f(x) dx = \int_{-b}^b f(-x) dx$.

证明 令 $x = -t$, 则 $dx = -dt$, 当 $x = -b$ 时 $t = b$, 当 $x = b$ 时 $t = -b$, 于是

$$\int_{-b}^b f(x) dx = \int_b^{-b} f(-t)(-1) dt = \int_{-b}^b f(-t) dt,$$

而 $\int_{-b}^b f(-t) dt = \int_{-b}^b f(-x) dx,$

所以 $\int_{-b}^b f(x)dx = \int_{-b}^b f(-x)dx$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续., 证明 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

证明 令 $x=a+b-t$, 则 $dx=-dt$, 当 $x=a$ 时 $t=b$, 当 $x=b$ 时 $t=a$, 于是

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-1)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt,$$

而 $\int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx$,

所以 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

6. 证明: $\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2} (x>0)$.

证明 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$, 当 $x=x$ 时 $t=\frac{1}{x}$, 当 $x=1$ 时 $t=1$, 于是

$$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt,$$

而 $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2}dx$,

所以 $\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2}$.

7. 证明: $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$.

证明 令 $1-x=t$, 则 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = -\int_1^0 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$,

即 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$.

8. 证明: $\int_0^\pi \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

证明 $\int_0^\pi \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x dx$,

而 $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x dx \stackrel{\text{令 } x=\pi-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\pi-t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$,

所以 $\int_0^\pi \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

9. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数, 证明 $\int_a^{a+1} f(x)dx$ 的值与 a 无关.

证明 已知 $f(x+l)=f(x)$.

$$\int_a^{a+l} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^l f(x)dx + \int_l^{a+l} f(x)dx = \int_0^l f(x)dx + \int_l^{a+l} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx,$$

而
$$\int_l^{a+l} f(x)dx \xrightarrow{\text{令 } x=t+l} \int_0^a f(t+l)dt = \int_0^a f(x+l)dx = \int_0^a f(x)dx,$$

所以
$$\int_a^{a+l} f(x)dx = \int_0^l f(x)dx.$$

因此 $\int_a^{a+l} f(x)dx$ 的值与 a 无关.

10. 若 $f(t)$ 是连续函数且为奇函数, 证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数; 若 $f(t)$ 是连续函数且为偶函数,

证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

证明 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

若 $f(t)$ 是连续函数且为奇函数, 则 $f(-t) = -f(t)$, 从而

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-1)du = \int_0^x f(u)dx = \int_0^x f(x)dx = F(x),$$

即 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是偶函数.

若 $f(t)$ 是连续函数且为偶函数, 则 $f(-t) = f(t)$, 从而

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-1)du = -\int_0^x f(u)dx = -\int_0^x f(x)dx = -F(x),$$

即 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

11. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 x e^{-x} dx$;

解
$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -\int_0^1 x d e^{-x} = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - 2e^{-1}.$$

(2) $\int_1^e x \ln x dx$;

解
$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} \int_1^e \ln x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_0^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$$

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin \omega t dt$ (ω 为常数);

解
$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t d \cos \omega t = -\frac{1}{\omega} t \cos \omega t \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t dt$$

$$= -\frac{2\pi}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = -\frac{2\pi}{\omega^2}.$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x d \cot x = -x \cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x dx = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$(5) \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_1^4 \ln x d\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^4 - 2 \int_1^4 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 8 \ln 2 - 2 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 8 \ln 2 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 4(2 \ln 2 - 1). \end{aligned}$$

$$(6) \int_0^1 x \arctan x dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d \sin x = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx \\ &= e^{\pi} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d \cos x = e^{\pi} + 2e^{2x} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = e^{\pi} + 2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} (e^{\pi} - 2),$$

于是

$$(8) \int_1^2 x \log_2 x dx;$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_1^2 x \log_2 x dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \log_2 x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \log_2 x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} dx \\ &= 2 - \frac{1}{2 \ln 2} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 = 2 - \frac{3}{4 \ln 2}. \end{aligned}$$

$$(9) \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} x^2 d \sin 2x \\
 &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4} x^3 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot 2x dx \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} x d \cos 2x \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos 2x dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \sin 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$$(10) \int_1^e \sin(\ln x) dx;$$

$$\text{解法一} \quad \int_1^e \sin(\ln x) dx \xrightarrow{\text{令 } \ln x = t} \int_0^1 \sin t \cdot e^t dt.$$

$$\begin{aligned}
 \text{因为} \quad \int_0^1 \sin t \cdot e^t dt &= \int_0^1 \sin t de^t = e^t \sin t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \cos t dt \\
 &= e \cdot \sin 1 - \int_0^1 \cos t de^t = e \cdot \sin 1 - e^t \cos t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \sin t dt \\
 &= e \cdot \sin 1 - e \cdot \cos 1 + 1 - \int_0^1 e^t \sin t dt,
 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \int_0^1 e^t \sin t dt = \frac{1}{2} (e \cdot \sin 1 - e \cdot \cos 1 + 1).$$

$$\text{因此} \quad \int_1^e \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} (e \cdot \sin 1 - e \cdot \cos 1 + 1).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法二} \quad \int_1^e \sin(\ln x) dx &= x \cdot \sin(\ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = e \cdot \sin 1 - \int_1^e \cos(\ln x) dx \\
 &= e \cdot \sin 1 - x \cdot \cos(\ln x) \Big|_1^e + \int_1^e x \cdot \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= e \cdot \sin 1 - e \cdot \cos 1 + 1 - \int_0^e \sin(\ln x) dx,
 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \int_1^e \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} (e \cdot \sin 1 - e \cdot \cos 1 + 1).$$

$$(11) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx;$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx &= -\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = -x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + x \ln x \Big|_1^e + \int_{\frac{1}{e}}^1 dx - \int_1^e dx \\
 &= -\frac{1}{e} + e + (1 - \frac{1}{e}) - (e - 1) = 2(1 - \frac{1}{e}).
 \end{aligned}$$

$$(12) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} dx \quad (m \text{ 为自然数});$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} dx \xrightarrow{\text{令 } x = \sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} t dt.$$

根据递推公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx$,

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} dx = \begin{cases} \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{m-4}{m-3} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & m \text{ 为奇数} \\ \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{m-4}{m-3} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & m \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

(13) $J_m = \int_0^{\pi} x \sin^m x dx$ (m 为自然数).

解 因为

$$\int_0^{\pi} x \sin^m x dx \stackrel{\text{令 } x=\pi-t}{=} \int_{\pi}^0 (\pi-t) \sin^m (\pi-t) (-1) dt = \int_0^{\pi} \pi \sin^m t dt - \int_0^{\pi} t \sin^m t dt,$$

所以 $J_m = \int_0^{\pi} x \sin^m x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^m x dx = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ (用第 8 题结果).

根据递推公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx$,

$$J_m = \begin{cases} \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2} & m \text{ 为偶数} \\ \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-3}{m-2} \cdot \frac{m-5}{m-4} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \pi & m \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

习题 5-7

1. 判别下列各反常积分的收敛性, 如果收敛, 计算反常积分的值:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4};$$

解 因为

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}x^{-3} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

所以反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ 收敛, 且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}$.

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

解 因为 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} - 2 = +\infty$, 所以反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 发散.

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \ (a>0);$$

解 因为

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a},$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛, 且 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$.

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-pt} \operatorname{ch} t dt \ (p>1);$$

解 因为

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \operatorname{ch} t dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [e^{(1-p)t} + e^{-(1+p)t}] dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-p} e^{(1-p)t} - \frac{1}{1+p} e^{-(1+p)t} \right] \Big|_0^{+\infty} = \frac{p}{p^2-1},$$

所以反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \operatorname{ch} t dt$ 收敛, 且 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \operatorname{ch} t dt = \frac{p}{p^2-1}$.

$$(5) \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt \ (p>0, \omega>0);$$

$$\text{解 } \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \int_0^{+\infty} e^{-pt} d \cos \omega t$$

$$= -\frac{1}{\omega} e^{-pt} \cos \omega t \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\omega} \int_0^{+\infty} \cos \omega t \cdot (-pe^{-pt}) dt = \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} d \sin \omega t$$

$$= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega^2} e^{-pt} \sin \omega t \Big|_0^{+\infty} + \frac{p}{\omega^2} \int_0^{+\infty} \sin \omega t \cdot (-pe^{-pt}) dt = \frac{1}{\omega} - \frac{p^2}{\omega^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt,$$

所以 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$$

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \arctan(x+1) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$

(7) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\sqrt{1-x^2}) + 1 = 1.$$

(8) $\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2};$

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点. 因为

$$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(1-x)^2},$$

而 $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \Big|_0^1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty,$

所以反常积分 $\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$ 发散.

(9) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$

解 这是无界函数的反常积分, $x=1$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} = \int_1^2 (\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}) dx = \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x-1} \right] \Big|_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x-1} \right] = 2\frac{2}{3}.$$

(10) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

解 这是无界函数的反常积分, $x=e$ 是被积函数的瑕点.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} d \ln x = \arcsin(\ln x) \Big|_1^e = \lim_{x \rightarrow e^-} \arcsin(\ln x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. 当 k 为何值时, 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 当 k 为何值时, 这反常积分发散? 又当 k

为何值时, 这反常积分取得最小值?

解 当 $k < 1$ 时, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^k} d \ln x = \frac{1}{1-k} (\ln x)^{-k+1} \Big|_2^{+\infty} = +\infty;$

当 $k=1$ 时, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln(\ln x) \Big|_2^{+\infty} = +\infty$;

当 $k>1$ 时, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^k} d \ln x = \frac{1}{1-k} (\ln x)^{-k+1} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{k-1} (\ln 2)^{1-k}$.

因此当 $k>1$ 时, 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛; 当 $k \leq 1$ 时, 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 发散.

当 $k>1$ 时, 令 $f(k) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{k-1} (\ln 2)^{1-k}$, 则

$$f'(k) = -\frac{1}{(k-1)^2} (\ln 2)^{1-k} - \frac{1}{k-1} (\ln 2)^{1-k} \ln \ln 2 = -\frac{(\ln 2)^{1-k} \ln \ln 2}{(k-1)^2} \left(k-1 + \frac{1}{\ln \ln 2}\right).$$

令 $f'(k)=0$ 得唯一驻点 $k=1-\frac{1}{\ln \ln 2}$.

因为当 $1 < k < 1-\frac{1}{\ln \ln 2}$ 时 $f'(k) < 0$, 当 $k > 1-\frac{1}{\ln \ln 2}$ 时 $f'(k) > 0$, 所以 $k=1-\frac{1}{\ln \ln 2}$ 为极小值

点, 同时也是最小值点, 即当 $k=1-\frac{1}{\ln \ln 2}$ 时, 这反常积分取得最小值

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

解 因为

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^n d e^{-x} = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1},$$

所以 $I_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot I_1$.

又因为 $I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x d e^{-x} = -x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$,

所以 $I_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot I_1 = n!$.

总习题五

1. 填空:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上(常义)有界是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的____条件, 而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积____的条件;

解 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上(常义)有界是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的____必要____条件, 而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积____充分____的条件;

(2) 对 $[a, +\infty)$ 上非负、连续的函数 $f(x)$, 它的变上限积分 $\int_a^x f(x)dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的____条件;

解 对 $[a, +\infty)$ 上非负、连续的函数 $f(x)$, 它的变上限积分 $\int_a^x f(x)dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的____充分____条件;

(3) 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定____;

解 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定____收敛____;

(4) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义且 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积, 此时积分 $\int_a^b f(x)dx$ ____存在.

解 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义且 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积, 此时积分 $\int_a^b f(x)dx$ ____不一定____存在.

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}};$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0);$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right] \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} (\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n) - \frac{1}{n} \cdot n \ln n \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(\ln 1 - \ln n) + (\ln 2 - \ln n) + \cdots + (\ln n - \ln n)] \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \cdots + \ln \frac{n}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln x dx \\
 &= (x \ln x) \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = (x \ln x) \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 = -1.
 \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续};$$

$$\text{解法一 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \lim_{\xi \rightarrow a} x f(\xi) = a f(a) \text{ (用的是积分中值定理)}.$$

$$\text{解法二 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x \int_a^x f(t) dt}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt + x f(x)}{1} = a f(a) \text{ (用的是洛必达法}$$

则).

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

3. 下列计算是否正确, 试说明理由:

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_{-1}^1 \frac{d(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2} = \left(-\arctan \frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2};$$

解 计算不正确, 因为 $\frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上不连续.

$$(2) \text{ 因为 } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2+t+1}, \text{ 所以 } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = 0.$$

解 计算不正确, 因为 $\frac{1}{t}$ 在 $[-1, 1]$ 上不连续.

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$$

解 不正确, 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^2} dx \neq \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx.$$

4. 设 $p > 0$, 证明 $\frac{p}{p+1} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1$.

证明 $1 > \frac{1}{1+x^p} = \frac{1+x^p - x^p}{1+x^p} = 1 - \frac{x^p}{1+x^p} > 1 - x^p$. 因为

$$\int_0^1 (1-x^p) dx < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < \int_0^1 dx,$$

而 $\int_0^1 dx = 1$, $\int_0^1 (1-x^p) dx = (x - \frac{x^{p+1}}{p+1})_0^1 = \frac{p}{p+1}$,

所以 $\frac{p}{p+1} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1$.

5. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均连续, 证明:

(1) $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$;

证明 因为 $[f(x) - \lambda g(x)]^2 \geq 0$, 所以 $\lambda^2 g^2(x) - 2\lambda f(x)g(x) + f^2(x) \geq 0$, 从而

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0.$$

上式的左端可视为关于 λ 的二次三项式, 因为此二次三项式大于等于 0, 所以其判别式小于等于 0, 即

$$4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0,$$

亦即 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$.

(2) $\left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$,

证明 $\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\leq \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2[\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}},$$

又 $\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx + 2[\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} = \left([\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} + [\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} \right)^2$,

所以 $\left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

6. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$.

证明 已知有不等式 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$, 在此不等式中, 取

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, $g(x)=\sqrt{f(x)}$, 则有

$$\int_a^b [\sqrt{f(x)}]^2 \cdot dx \cdot \int_a^b \left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right]^2 dx \geq \left[\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx\right]^2,$$

即 $\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$.

7. 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) - \ln(1+\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \left(x \tan \frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} dx + \ln 2 = \frac{\pi}{2} + 2 \ln \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln 2 = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4}+x)}{\cos x} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{4}+x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx.$

令 $\frac{\pi}{4}-x=u$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{4}+x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-u) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx,$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dx = \ln \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \sqrt{2}.$

(3) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;

解 令 $x=a \sin t$, 则

$$\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t}.$$

又令 $t=\frac{\pi}{2}-u$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{\sin u + \cos u},$$

所以
$$\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx;$

解
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2(\sqrt{2} - 1).$$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$

解
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x (\sec^2 x + 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \tan x}{2 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

8. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明 $\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x [\int_0^t f(u)du]dt.$

证明
$$\int_0^x [\int_0^t f(u)du]dt = t \int_0^t f(u)du \Big|_0^x - \int_0^x t d[\int_0^t f(u)du]$$

$$= x \int_0^x f(u)du - \int_0^x t f(t)dt$$

$$= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt = \int_0^x f(t)(x-t)dt.$$

9. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$, $x \in [a, b]$. 证明:

(1) $F'(x) \geq 2$;

(2) 方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a, b) 内有且仅有一个根.

证明 (1) $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2.$

(2) 因为 $f(x) > 0$, $a < b$, 所以

$$F(a)=\int_b^a \frac{dt}{f(t)} < 0, \quad F(b)=\int_a^b f(t)dt > 0,$$

由介值定理知 $F(x)=0$ 在 (a, b) 内有根. 又 $F''(x) \geq 2$, 所以在 (a, b) 内仅有一个根.

$$10. \text{ 设 } f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x} & x < 0 \end{cases}, \text{ 求 } \int_0^2 f(x-1)dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^2 f(x-1)dx &\stackrel{\text{令 } x-1=t}{=} \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^t} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int_{-1}^0 \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = -\ln(e^{-t}+1) \Big|_{-1}^0 + \ln(1+t) \Big|_0^1 = \ln(1+e). \end{aligned}$$

11. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且不变号. 证明至少存在一点 $x \in [a, b]$, 使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (\text{积分第值定理}).$$

证明 若 $g(x)=0$, 则结论题然成立.

若 $g(x) \neq 0$, 因为 $g(x)$ 不变号, 不妨设 $g(x) > 0$.

因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m 即

$$m \leq f(x) \leq M,$$

因此有 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$.

根据定积分的性质, 有

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx,$$

$$\text{或 } m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 根据介值定理, 至少存在一点 $x \in (a, b)$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi),$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

$$*12.(1) \text{ 证明: } \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx, (n > 1)$$

$$\text{证明 } \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-1} d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}[(x^{n-1}e^{-x^2})|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(x^{n-1})]$$

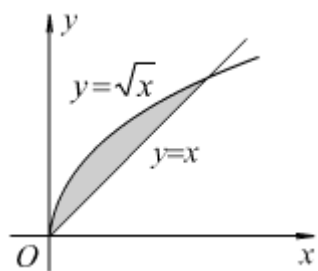
$$= \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx (n > 1)$$

$$(2) \text{ 证明 } \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) (n \in N)$$

习题 6-2

1. 求图 6-21 中各画斜线部分的面积:

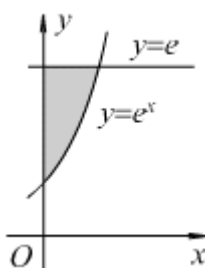
(1)



解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为 $[0, 1]$. 所求的面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(2)



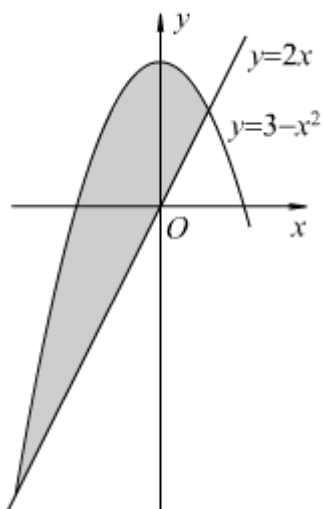
解法一 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为 $[0, 1]$. 所求的面积为

$$A = \int_0^1 (e - e^x) dx = (ex - e^x) \Big|_0^1 = 1,$$

解法二 画斜线部分在 y 轴上的投影区间为 $[1, e]$. 所求的面积为

$$A = \int_1^e \ln y dy = y \ln y \Big|_1^e - \int_1^e dy = e - (e - 1) = 1.$$

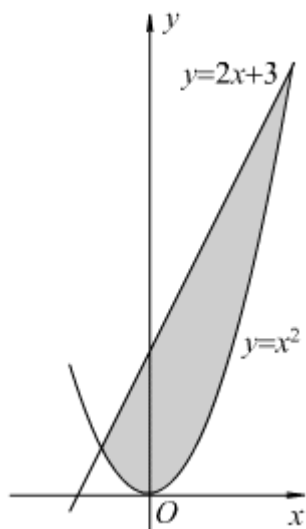
(3)



解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为 $[-3, 1]$. 所求的面积为

$$A = \int_{-3}^1 [(3-x^2)-2x]dx = \frac{32}{3}.$$

(4)



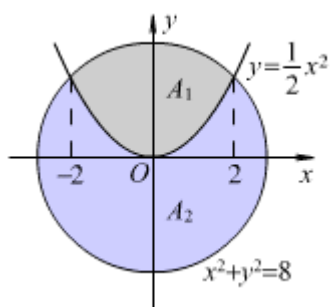
解 画斜线部分在 x 轴上的投影区间为 $[-1, 3]$. 所求的面积为

$$A = \int_{-1}^3 (2x+3-x^2)dx = (x^2+3x-\frac{1}{3}x^3)|_{-1}^3 = \frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$ (两部分都要计算);

解:

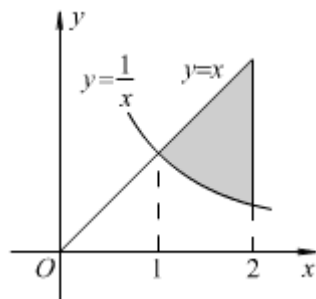


$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \int_0^2 (\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2)dx = 2 \int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx - \int_0^2 x^2dx = 2 \int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx - \frac{8}{3} \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$A_2 = (2\sqrt{2})^2 \pi - S_1 = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

(2) $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$;

解:

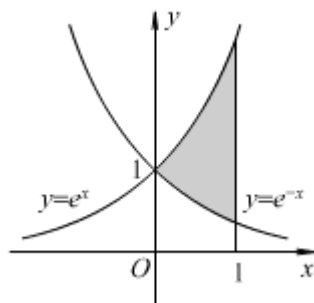


所求的面积为

$$A = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

(3) $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 与直线 $x=1$;

解:

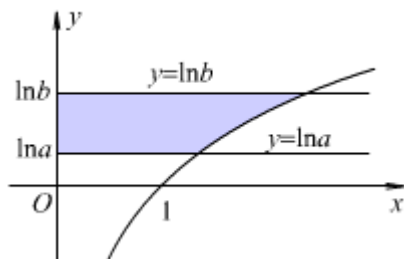


所求的面积为

$$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + \frac{1}{e} - 2.$$

(4) $y=\ln x$, y 轴与直线 $y=\ln a$, $y=\ln b$ ($b>a>0$).

解

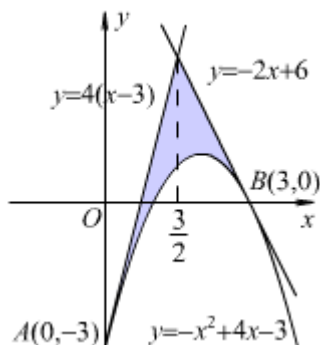


所求的面积为

$$A = \int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy = e^y \Big|_{\ln a}^{\ln b} = b - a$$

3. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及其在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

解:



$$y' = -2x + 4.$$

过点 $(0, -3)$ 处的切线的斜率为 4, 切线方程为 $y = 4(x - 3)$.

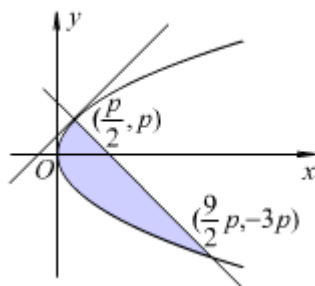
过点 $(3, 0)$ 处的切线的斜率为 -2, 切线方程为 $y = -2x + 6$.

两切线的交点为 $(\frac{3}{2}, 3)$, 所求的面积为

$$A = \int_0^{\frac{3}{2}} [4x - 3 - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 [-2x + 6 - (-x^2 + 4x - 3)] dx = \frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成的图形的面积.

解



$$2y \cdot y' = 2p.$$

在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处, $y' = \frac{p}{y} \Big|_{(\frac{p}{2}, p)} = 1$, 法线的斜率 $k = -1$,

法线的方程为 $y - p = -(x - \frac{p}{2})$, 即 $x = \frac{3p}{2} - y$.

求得法线与抛物线的两个交点为 $(\frac{p}{2}, p)$ 和 $(\frac{9}{2}p, -3p)$.

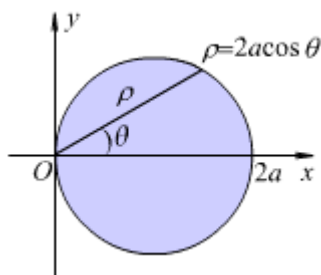
法线与抛物线所围成的图形的面积为

$$A = \int_{-3p}^p (\frac{3p}{2} - y - \frac{y^2}{2p}) dy = (\frac{3p}{2}y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6p}y^3) \Big|_{-3p}^p = \frac{16}{3}p^2.$$

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积;

(1) $\rho = 2a \cos \theta$;

解:

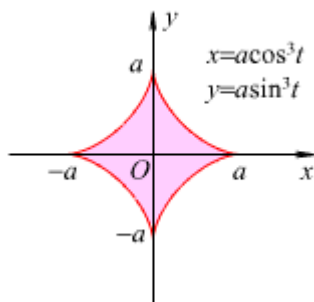


所求的面积为

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2a \cos \theta)^2 d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \pi a^2.$$

(2) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;

解

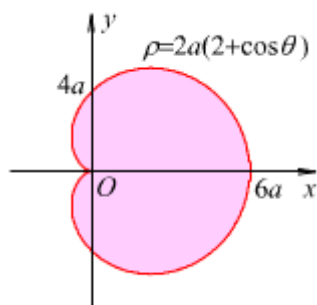


所求的面积为

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a \sin^3 t) d(a \cos^3 t) = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^2 t \sin^4 t dt \\ &= 12a^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt \right] = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

$$(3) \rho = 2a(2 + \cos \theta)$$

解

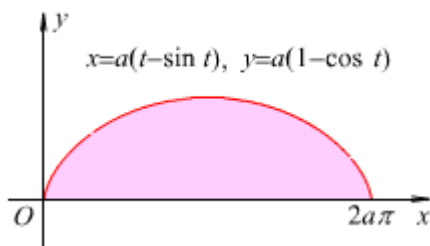


所求的面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [2a(2 + \cos \theta)]^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} (4 + 4\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 18\pi a^2.$$

6. 求由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与横轴 所围成的图形的面积.

解:

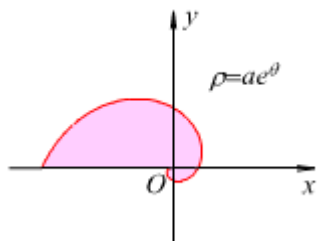


所求的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2a\pi} y dx = \int_0^{2a} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2a} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= a^2 \int_0^{2a} (1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos t}{2}) dt = 3a^2\pi. \end{aligned}$$

7. 求对数螺线 $\rho = ae^\theta$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) 及射线 $\theta = \pi$ 所围成的图形面积.

解



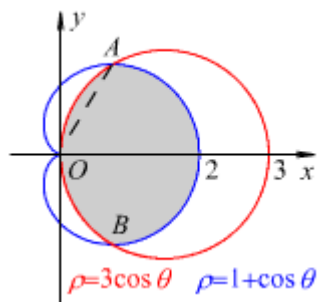
所求的面积为

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (ae^{\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\theta} d\theta = \frac{a^2}{4} (e^{2\pi} - e^{-2\pi}).$$

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积.

(1) $\rho = 3\cos\theta$ 及 $\rho = 1 + \cos\theta$

解

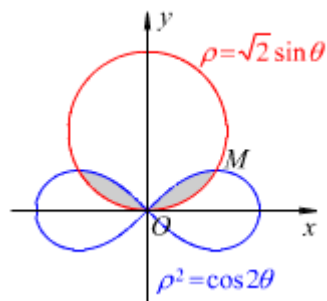


曲线 $\rho = 3\cos\theta$ 与 $\rho = 1 + \cos\theta$ 交点的极坐标为 $A(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3})$, $B(\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{3})$. 由对称性, 所求的面积为

$$A = 2[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2 d\theta] = \frac{5}{4}\pi.$$

(2) $\rho = \sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2 = \cos 2\theta$.

解



曲线 $\rho = \sqrt{2}\sin\theta$ 与 $\rho^2 = \cos 2\theta$ 的交点 M 的极坐标为 $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6})$. 所求的面积为

$$A = 2[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sqrt{2}\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta] = \frac{\pi}{6} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

9. 求位于曲线 $y=e^x$ 下方, 该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

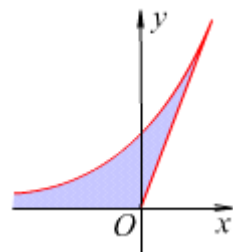
解 设直线 $y=kx$ 与曲线 $y=e^x$ 相切于 $A(x_0, y_0)$ 点, 则有

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 \\ y_0 = e^{x_0} \\ y'(x_0) = e^{x_0} = k \end{cases},$$

求得 $x_0=1, y_0=e, k=e$.

所求面积为

$$\int_0^e \left(\frac{1}{e} y - \ln y \right) dy = \frac{1}{2e} y^2 \Big|_0^e - y \ln y \Big|_0^e + \int_0^e y \cdot \frac{1}{y} dy = \frac{e}{2}.$$



10. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形的面积的最小值.

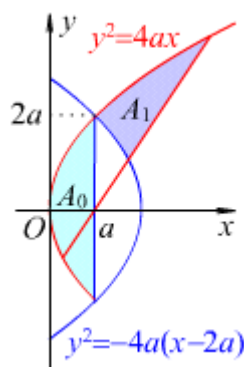
解 设弦的倾角为 α . 由图可以看出, 抛物线与过焦点的弦所围成的图形的面积为

$$A = A_0 + A_1.$$

显然当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, $A_1=0$; 当 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, $A_1>0$.

因此, 抛物线与过焦点的弦所围成的图形的面积的最小值为

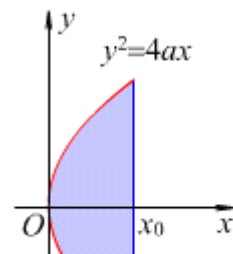
$$A_0 = 2 \int_0^a \sqrt{2ax} dx = \frac{8}{3} \sqrt{a} \sqrt{x^3} \Big|_0^a = \frac{8}{3} a^2.$$



11. 把抛物线 $y^2=4ax$ 及直线 $x=x_0 (x_0>0)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

解 所得旋转体的体积为

$$V = \int_0^{x_0} \pi y^2 dx = \int_0^{x_0} \pi 4ax dx = 2a\pi x^2 \Big|_0^{x_0} = 2a\pi x_0^2.$$

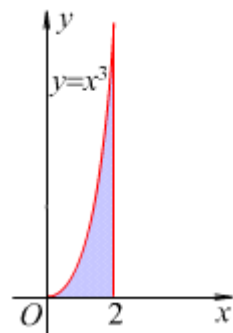


12. 由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形, 分别绕 x 轴及 y 轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

解 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_x = \int_0^2 \pi y^2 dx = \int_0^2 \pi x^6 dx = \frac{1}{7} \pi x^7 \Big|_0^2 = \frac{128}{7} \pi.$$

绕 y 轴旋转所得旋转体的体积为

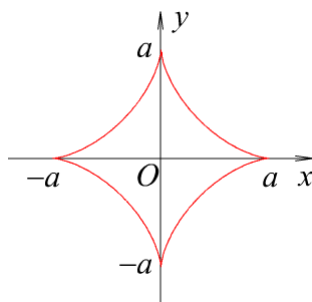


$$\begin{aligned}
 V_y &= 2^2 \cdot \pi \cdot 8 - \int_0^8 \pi x^2 dy = 32\pi - \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy \\
 &= 32\pi - \frac{3}{5} \pi \sqrt[3]{y^5} \Big|_0^8 = \frac{64}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

13. 把星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 所围成的图形, 绕 x 轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

解 由对称性, 所求旋转体的体积为

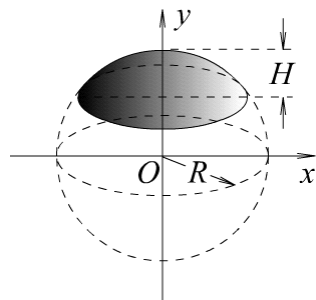
$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx \\
 &= 2\pi \int_0^a (a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2) dx = \frac{32}{105} \pi a^3.
 \end{aligned}$$



14. 用积分方法证明图中球缺的体积为

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{证明 } V &= \int_{R-H}^R \pi x^2(y) dy = \pi \int_{R-H}^R (R^2 - y^2) dy \\
 &= \pi \left(R^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{R-H}^R = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).
 \end{aligned}$$



15. 求下列已知曲线所围成的图形, 按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y = x^2$, $x = y^2$, 绕 y 轴;

$$\text{解 } V = \pi \int_0^1 y dy - \pi \int_0^1 (y^2)^2 dy = \pi \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{5} y^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{10} \pi.$$

(2) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x=0$, $x=a$, $y=0$, 绕 x 轴;

$$\text{解 } V = \int_0^a \pi y^2(x) dx = \pi \int_0^a a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx \stackrel{\text{令 } x=au}{=} \pi a^3 \int_0^1 \operatorname{ch}^2 u du$$

$$= \frac{\pi a^3}{4} \int_0^1 (e^{2u} + 2 + e^{-2u}) du = \frac{\pi a^3}{4} \left(\frac{1}{2} e^{2u} + 2u - \frac{1}{2} e^{-2u} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi a^3}{4} (2 + \text{sh} 2).$$

(3) $x^2 + (y-5)^2 = 16$, 绕 x 轴.

$$\text{解 } V = \pi \int_{-4}^4 (5 + \sqrt{16 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-4}^4 (5 - \sqrt{16 - x^2})^2 dx$$

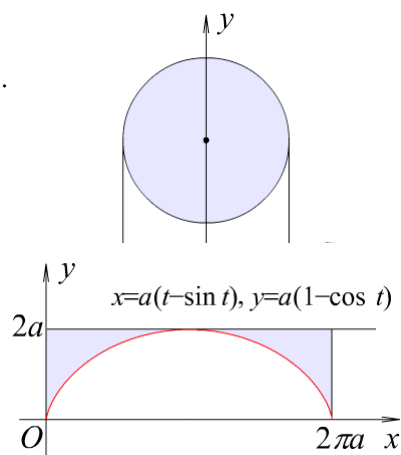
$$= 40 \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx = 160\pi^2.$$

(4) 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱, $y=0$, 绕直线 $y=2a$.

$$\text{解 } V = \pi \int_0^{2a\pi} (2a)^2 dx - \pi \int_0^{2a\pi} (2a - y)^2 dy$$

$$= 8a^3\pi^2 - \pi \int_0^{2\pi} [a(1 + \cos t)^2]^2 da(t - \sin t)$$

$$= 8a^3\pi^2 - a^3\pi \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) \sin^2 t dt = 7a^3\pi^2.$$



16. 求圆盘 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 绕 $x = -b$ ($b > a > 0$) 旋转所成旋转体的体积.

$$\text{解 } V = \pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - y^2})^2 dy - \pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - y^2})^2 dy$$

$$= 8b\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = 2a^2b\pi^2.$$

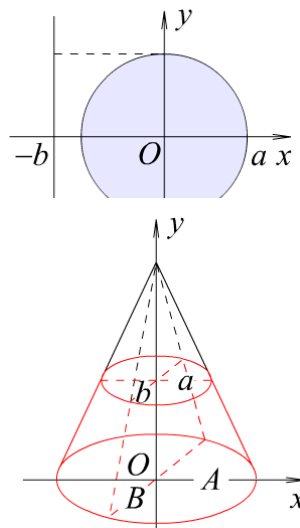
17. 设有一截锥体, 其高为 h , 上、下底均为椭圆, 椭圆的轴长分别为 $2a$ 、 $2b$ 和 $2A$ 、 $2B$, 求这截锥体的体积.

解 建立坐标系如图. 过 y 轴上 y 点作垂直于 y 轴的平面, 则平面与截锥体的截面为椭圆, 易得其长短半轴分别为

$$A - \frac{A-a}{h}y, \quad B - \frac{B-b}{h}y.$$

$$\text{截面的面积为 } \left(A - \frac{A-a}{h}y\right) \cdot \left(B - \frac{B-b}{h}y\right) \pi.$$

于是截锥体的体积为



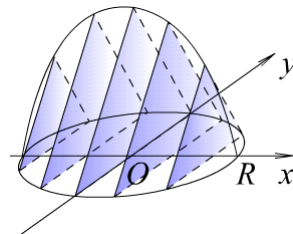
$$V = \int_0^h \left(A - \frac{A-a}{h}y\right) \cdot \left(B - \frac{B-b}{h}y\right) \pi dy = \frac{1}{6} \pi h [2(ab+AB) + aB + bA].$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆, 而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积.

解 设过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$, 由已知条件知, 它是边长为 $\sqrt{R^2 - x^2}$ 的等边三角形的面积, 其值为

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (R^2 - x^2),$$

所以
$$V = \int_{-R}^R \frac{\sqrt{3}}{4} (R^2 - x^2) dx = \frac{4\sqrt{3}}{3} R^3.$$



19. 证明 由平面图形 $0 \leq a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

证明 如图, 在 x 处取一宽为 dx 的小曲边梯形, 小曲边梯形绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积近似为 $2\pi x \cdot f(x) dx$, 这就是体积元素, 即

$$dV = 2\pi x \cdot f(x) dx,$$

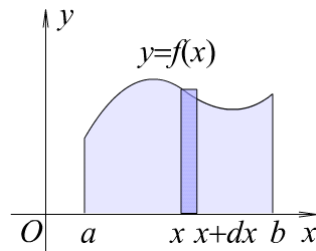
于是平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

20. 利用题 19 和结论, 计算曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = -2\pi \int_0^\pi x d \cos x = 2\pi (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^\pi = 2\pi^2.$$



21. 计算曲线 $y = \ln x$ 上相应于 $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

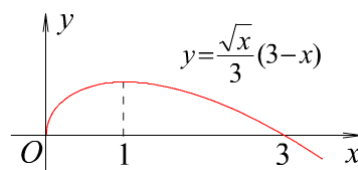
$$\text{解 } s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx,$$

令 $\sqrt{1+x^2} = t$, 即 $x = \sqrt{t^2 - 1}$, 则

$$s = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{1}{t^2-1} dt = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

22. 计算曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1 \leq x \leq 3$ 的一段

弧的长度.



解 $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$,

$$y'^2 = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}),$$

所求弧长为

$$s = \frac{1}{2} \int_1^3 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \frac{1}{2} (\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) \Big|_1^3 = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}.$$

23. 计算半立方抛物线 $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2 = \frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

解 由 $\begin{cases} y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3 \\ y^2 = \frac{x}{3} \end{cases}$ 得两曲线的交点的坐标为 $(2, \frac{\sqrt{6}}{3})$, $(2, -\frac{\sqrt{6}}{3})$.

所求弧长为 $s = 2 \int_1^2 \sqrt{1+y'^2} dx$.

因为

$$2yy' = 2(x-1)^2, \quad y' = \frac{(x-1)^2}{y}, \quad y'^2 = \frac{(x-1)^4}{y^2} = \frac{(x-1)^4}{\frac{2}{3}(x-1)^3} = \frac{3}{2}(x-1).$$

所以

$$s = 2 \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{3}{2}(x-1)} dx = \frac{2}{3\sqrt{2}} \int_1^2 \sqrt{3x-1} d(3x-1) = \frac{8}{9} [(\frac{5}{2})^{\frac{3}{2}} - 1].$$

24. 计算抛物线 $y^2 = 2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x, y)$ 的弧长.

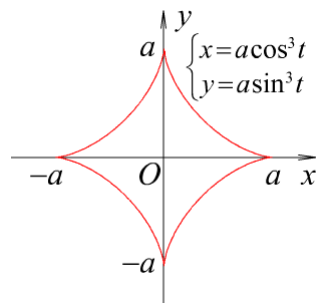
解 $s = \int_0^y \sqrt{1+x'^2(y)} dy = \int_0^y \sqrt{1+(\frac{y}{p})^2} dy = \frac{1}{p} \int_0^y \sqrt{p^2 + y^2} dy$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \left[\frac{y}{2} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p^2}{2} \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2}) \right] \Big|_0^y \\
&= \frac{y}{2p} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.
\end{aligned}$$

25. 计算星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 的全长.

解 用参数方程的弧长公式.

$$\begin{aligned}
s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[3a \cos^2 t \cdot (-\sin t)]^2 + [3a \sin^2 t \cdot \cos t]^2} dt \\
&= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 6a.
\end{aligned}$$



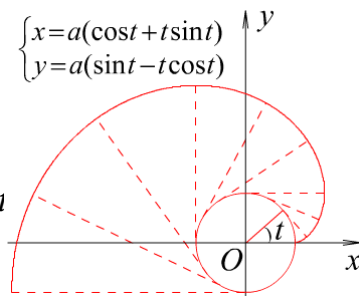
26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直, 使细线与圆周始终相切, 细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线, 它的方程为

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

计算这曲线上相应于 t 从 0 变到 π 的一段弧的长度.

解 由参数方程弧长公式

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{(a t \cos t)^2 + (a t \sin t)^2} dt \\
&= a \int_0^{\pi} t dt = \frac{a}{2} \pi^2.
\end{aligned}$$



27. 在摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1:3 的点的坐标.

解 设 t 从 0 变化到 t_0 时摆线第一拱上对应的弧长为 $s(t_0)$, 则

$$\begin{aligned}
s(t_0) &= \int_0^{t_0} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{t_0} \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + [a \sin t]^2} dt \\
&= 2a \int_0^{t_0} \sin \frac{t}{2} dt = 4a(1 - \cos \frac{t_0}{2}).
\end{aligned}$$

当 $t_0 = 2\pi$ 时, 得第一拱弧长 $s(2\pi) = 8a$. 为求分摆线第一拱为 1:3 的点为 $A(x, y)$, 令

$$4a(1 - \cos \frac{t_0}{2}) = 2a,$$

解得 $t_0 = \frac{2\pi}{3}$, 因而分点的坐标为:

$$\text{横坐标 } x = a(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3}) = (\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})a,$$

$$\text{纵坐标 } y = a(1 - \cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}a,$$

故所求分点的坐标为 $(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})a, \frac{3}{2}a$.

28. 求对数螺线 $\rho = e^{a\theta}$ 相应于自 $\theta=0$ 到 $\theta=\varphi$ 的一段弧长.

解 用极坐标的弧长公式.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\varphi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta = \int_0^\varphi \sqrt{(e^{a\theta})^2 + (ae^{a\theta})^2} d\theta \\ &= \int_0^\varphi \sqrt{1+a^2} e^{a\theta} d\theta = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} (e^{a\theta} - 1). \end{aligned}$$

29. 求曲线 $\rho\theta=1$ 相应于自 $\theta = \frac{3}{4}$ 至 $\theta = \frac{4}{3}$ 的一段弧长.

解 按极坐标公式可得所求的弧长

$$\begin{aligned} s &= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \sqrt{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\theta^2}\right)^2} d\theta \\ &= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\theta^2} \sqrt{1+\theta^2} d\theta = \frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

30. 求心形线 $\rho=a(1+\cos \theta)$ 的全长.

解 用极坐标的弧长公式.

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta = 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta \\ &= 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a. \end{aligned}$$

习题 6-3

1. 由实验知道, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力 F (单位: N) 与伸长量 s (单位: cm) 成正比, 即 $F=ks$ (k 为比例常数). 如果把弹簧由原长拉伸 $6cm$, 计算所作的功.

解 将弹簧一端固定于 A , 另一端在自由长度时的点 O 为坐标原点, 建立坐标系. 功元素为 $dW=ksds$, 所求功为

$$W = \int_0^6 ksds = \frac{1}{2}ks^2 \Big|_0^6 = 18k \text{ (牛} \cdot \text{厘米)}.$$

2. 直径为 $20cm$ 、高 $80cm$ 的圆柱体内充满压强为 $10N/cm^2$ 的蒸汽. 设温度保持不变, 要使蒸汽体积缩小一半, 问需要作多少功?

解 由玻-马定律知:

$$PV = k = 10 \cdot (\pi 10^2 \cdot 80) = 80000\pi.$$

设蒸汽在圆柱体内变化时底面积不变, 高度减小 x 厘米时压强为 $P(x)$ 牛/厘米², 则

$$P(x) \cdot [(\pi 10^2)(80-x)] = 80000\pi, \quad P(x) = \frac{800}{80-x}.$$

功元素为 $dW = (\pi \cdot 10^2)P(x)dx$,

所求功为

$$W = \int_0^{40} (\pi \cdot 10^2) \cdot \frac{800}{80-x} dx = 80000\pi \int_0^{40} \frac{1}{80-x} dx = 800\pi \ln 2 \text{ (J)}.$$

3. (1)证明: 把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W = \frac{mgRh}{R+h},$$

其中 g 是地面上的重力加速度, R 是地球的半径;

(2)一颗人造地球卫星的质量为 $173kg$, 在高于地面 $630km$ 处进入轨道. 问把这颗卫星从地面送到 630 的高空处, 克服地球引力要作多少功? 已知 $g=9.8m/s^2$, 地球半径 $R=6370km$.

证明 (1)取地球中心为坐标原点, 把质量为 m 的物体升高的功元素为

$$dW = \frac{kMm}{y^2} dy,$$

所求的功为

$$W = \int_R^{R+h} \frac{kMm}{y^2} dy = k \cdot \frac{mMh}{R(R+h)}.$$

$$(2) W = 6.67 \times 10^{-11} \cdot \frac{173 \times 5.98 \times 10^{24} \times 630 \times 10^3}{6370 \times 10^3 (6370 + 630) \times 10^3} = 9.75 \times 10^5 \text{ (kJ)}.$$

4. 一物体按规律 $x = ct^3$ 作直线运动, 媒质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时, 克服媒质阻力所作的功.

解 因为 $x = ct^3$, 所以

$$v = x'(t) = 3cx^2, \text{ 阻力 } f = -kv^2 = -9kc^2t^4. \text{ 而 } t = \left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}}, \text{ 所以}$$

$$f(x) = -9kc^2 \left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{4}{3}} = -9kc^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}.$$

功元素 $dW = -f(x)dx$, 所求之功为

$$W = \int_0^a [-f(x)]dx = \int_0^a 9kc^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} dx = 9kc^{\frac{2}{3}} \int_0^a x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{27}{7} kc^{\frac{2}{3}} a^{\frac{7}{3}}.$$

5. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在击第一次时, 将铁钉击入木板 1cm. 如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入多少?

解 设锤击第二次时铁钉又击入 h cm, 因木板对铁钉的阻力 f 与铁钉击入木板的深度 x (cm)成正比, 即 $f=kx$, 功元素 $dW=f dx=kx dx$, 击第一次做功为

$$W_1 = \int_0^1 kx dx = \frac{1}{2}k,$$

击第二次做功为

$$W_2 = \int_1^{1+h} kx dx = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h).$$

因为 $W_1 = W_2$, 所以有

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h),$$

解得 $h = \sqrt{2} - 1$ (cm).

6. 设一锥形贮水池, 深 15m, 口径 20m, 盛满水, 今以唧筒将水吸尽, 问要作多少功?

解 在水深 x 处, 水平截面半径为 $r=10-\frac{2}{3}x$, 功元素为

$$dW = x \cdot \pi r^2 dx = \pi x (10 - \frac{2}{3}x)^2 dx,$$

所求功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{15} \pi x (10 - \frac{2}{3}x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{15} (100x - 40x^2 + \frac{4}{9}x^3) dx \end{aligned}$$

$$= 1875 (\text{吨米}) = 57785.7 (\text{kJ}).$$

7. 有一闸门, 它的形状和尺寸如图, 水面超过门顶 2m. 求闸门上所受的水压力.

解 建立 x 轴, 方向向下, 原点在水面.

水压力元素为

$$dP = 1 \cdot x \cdot 2dx = 2x dx,$$

闸门上所受的水压力为

$$P = 2 \int_2^5 x dx = x^2 \Big|_2^5 = 21 (\text{吨}) = 205.8 (\text{kN}).$$

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体, 尺寸如图所示. 当水箱装满水时, 计算水箱的一个端面所受的压力.

解 建立坐标系如图, 则椭圆的方程为

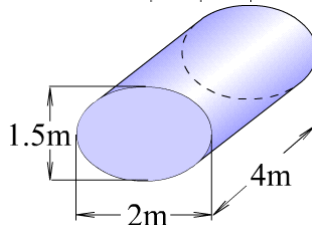
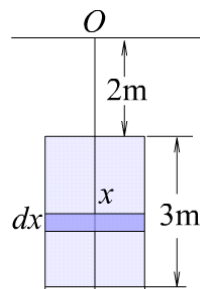
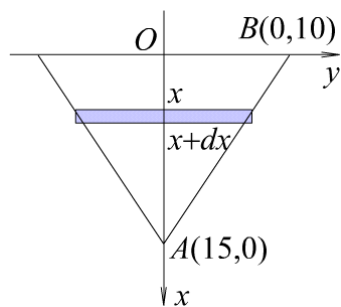
$$\frac{(x - \frac{3}{4})^2}{(\frac{3}{4})^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1.$$

压力元素为

$$dP = 1 \cdot x \cdot 2y(x) dx = x \cdot \frac{8}{3} \sqrt{(\frac{3}{4})^2 - (x - \frac{3}{4})^2} dx,$$

所求压力为

$$P = \int_0^{\frac{3}{2}} x \cdot \frac{8}{3} \sqrt{(\frac{3}{4})^2 - (x - \frac{3}{4})^2} dx = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} (1 + \sin t) \cdot \frac{3}{4} \cos t \cdot \frac{3}{4} \cos t dt$$



$$= \frac{9}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dx = \frac{9}{16} \pi \text{ (吨)} = 17.3 \text{ (kN)}.$$

(提示: 积分中所作的变换为 $x - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \sin t$)

9. 有一等腰梯形闸门, 它的两条底边各长 10m 和 6m, 高为 20m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

解 建立坐标系如图. 直线 AB 的方程为

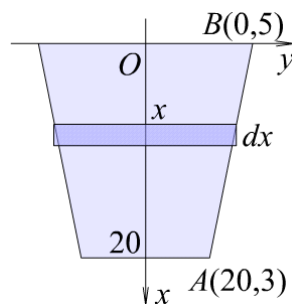
$$y = 5 - \frac{1}{10}x,$$

压力元素为

$$dP = 1 \cdot x \cdot 2y(x)dx = x \cdot (10 - \frac{1}{5}x)dx,$$

所求压力为

$$P = \int_0^{20} x \cdot (10 - \frac{1}{5}x)dx = 1467 \text{ (吨)} = 14388 \text{ (千牛)}.$$



10. 一底为 8cm、高为 6cm 的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3cm, 试求它每面所受的压力.

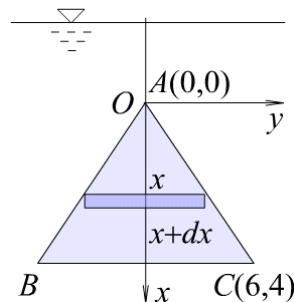
解 建立坐标系如图.

腰 AC 的方程为 $y = \frac{2}{3}x$, 压力元素为

$$dP = (x+3) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot dx = \frac{4}{3}x(x+3)dx,$$

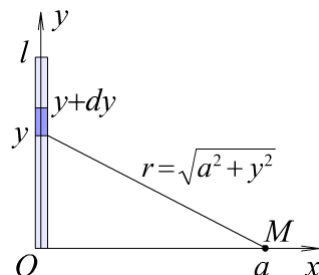
所求压力为

$$P = \int_0^6 \frac{4}{3}x(x+3)dx = \frac{4}{3}(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2)\Big|_0^6 = 168 \text{ (克)} = 1.65 \text{ (牛)}.$$



11. 设有一长度为 l 、线密度为 μ 的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M , 试求这细棒对质点 M 的引力.

解 建立坐标系如图. 在细直棒上取一小段 dy , 引力元素为



$$dF = G \cdot \frac{m\mu dy}{a^2 + y^2} = \frac{Gm\mu}{a^2 + y^2} dy,$$

dF 在 x 轴方向和 y 轴方向上的分力分别为

$$dF_x = -\frac{a}{r} dF, \quad dF_y = \frac{y}{r} dF.$$

$$F_x = \int_0^l \left(-\frac{a}{r} \cdot \frac{Gm\mu}{a^2 + y^2}\right) dy = -aGm\mu \int_0^l \frac{1}{(a^2 + y^2)\sqrt{a^2 + y^2}} dy = -\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2 + l^2}},$$

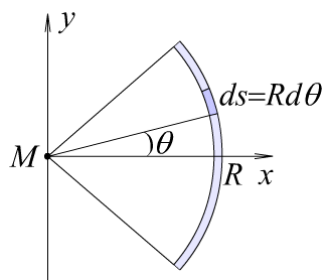
$$F_y = \int_0^l \frac{y}{r} \cdot \frac{Gm\mu}{a^2 + y^2} dy = Gm\mu \int_0^l \frac{1}{(a^2 + y^2)\sqrt{a^2 + y^2}} dy = Gm\mu \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}}\right).$$

12. 设有一半径为 R 、中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 μ 。在圆心处有一质量为 m 的质点 F 。试求这细棒对质点 M 的引力。

解 根据对称性, $F_y=0$ 。

$$\begin{aligned} dF_x &= \frac{G \cdot m \cdot \mu ds}{R^2} \cdot \cos\theta \\ &= \frac{Gm\mu(Rd\theta)}{R^2} \cdot \cos\theta = \frac{Gm\mu}{R} \cos\theta d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{Gm\mu}{R} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{2Gm\mu}{R} \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2Gm\mu}{R} \sin\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$



引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R} \sin\frac{\varphi}{2}$ ，方向自 M 点起指向圆弧中点。

总 习 题 六

1. 一金属棒长 $3m$, 离棒左端 xm 处的线密度为 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

(kg/m). 问 x 为何值时, $[0, x]$ 一段的质量为全棒质量的一半?

解 x 应满足 $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt$.

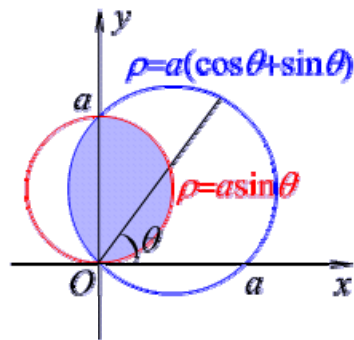
因为 $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = [2\sqrt{t+1}]_0^x = 2\sqrt{x+1} - 2$, $\frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}} dt = \frac{1}{2} [2\sqrt{t+1}]_0^3 = 1$,

所以 $2\sqrt{x+1} - 2 = 1$,

$$x = \frac{5}{4} \text{ (m)}.$$

2. 求由曲线 $\rho = a \sin \theta$, $\rho = a(\cos \theta + \sin \theta)$ ($a > 0$) 所围图形公共部分的面积.

$$\begin{aligned} \text{解 } S &= \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} a^2 (\cos \theta + \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{\pi a^2}{8} + \frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin 2\theta) d\theta = \frac{\pi - 1}{4} a^2. \end{aligned}$$



3. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0, 0)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $y \geq 0$. 试确定 a 、 b 、 c 的值, 使得抛物线

$y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$,

且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解 因为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0, 0)$, 所以 $c=0$, 从而

$$y = ax^2 + bx.$$

抛物线 $y = ax^2 + bx$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为

$$S = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.$$

$$\text{令 } \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{4}{9}, \text{ 得 } b = \frac{8-6a}{9}.$$

该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left(\frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} \right)$$

$$= \pi \left[\frac{a^2}{5} + \frac{1}{3} \left(\frac{8-6a}{9} \right)^2 + \frac{a}{2} \left(\frac{8-6a}{9} \right) \right].$$

$$\text{令 } \frac{dV}{da} = \pi \left[\frac{2a}{5} + \frac{12}{3} \cdot \frac{6a-8}{81} + \frac{1}{18} (8-12a) \right] = 0, \text{ 得 } a = -\frac{5}{3}, \text{ 于是 } b=2.$$

4. 求由曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x=4$, x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 所求旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_0^4 x \cdot x^{\frac{3}{2}} dx = 2\pi \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^4 = \frac{512}{7} \pi.$$

5. 求圆盘 $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

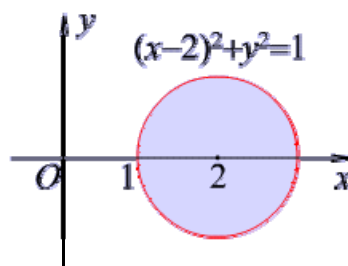
$$\text{解 } V = 2 \cdot 2\pi \int_1^3 x \cdot \sqrt{1-(x-2)^2} dx$$

$$\underline{\underline{\text{令 } x-2=\sin t}} \quad 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin t) \cos^2 t dt = 4\pi^2.$$

6. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2 + y^2 = 3$ 所需截下的有限

部分的弧长.

$$\text{解 由 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \text{ 解得抛物线与圆的两个交点为 } (-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, 1), \text{ 于是所求的}$$



弧长为

$$s = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} dx = 2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

7. 半径为 r 的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的比重与水相同, 现将球从水中取出, 需作多少功?

解 建立坐标系如图. 将球从水中取出时, 球的各点上升的高度均为 $2r$. 在 x 处取一厚度为 dx 的薄片, 在将球从水中取出的过程中, 薄片在水下上升的高度为 $r+x$, 在水上上升的高度为 $r-x$. 在水下对薄片所做的功为零, 在水上对薄片所做的功为

$$dW = g\pi(r-x)(r^2-x^2)dx,$$

对球所做的功为

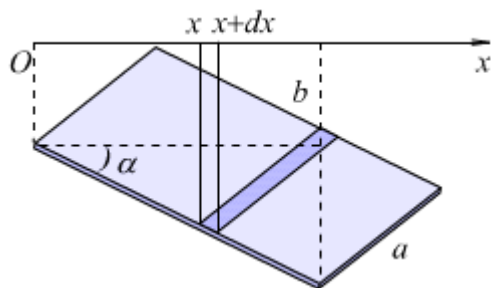
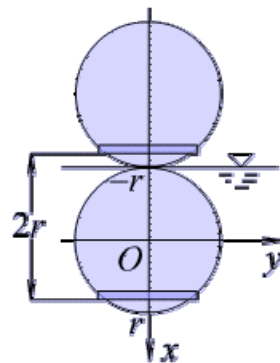
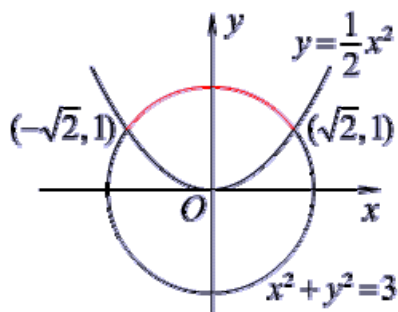
$$W = g\pi \int_{-r}^r (r-x)(r^2-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi r^2 g.$$

8. 边长为 a 和 b 的矩形薄板, 与液面成 α 角斜沉于液体中, 长边平行于液面而位于深 h 处, 设 $a > b$, 液体的比重为 ρ , 试求薄板每面所受的壓力.

解 在水面上建立 x 轴, 使长边与 x 轴在同一垂面上, 长边的上端点与原点对应. 长边在 x 轴上的投影区间为 $[0, b\cos\alpha]$, 在 x 处 x 轴到薄板的距离为 $h+x\tan\alpha$. 压力元素为

$$dP = \rho g \cdot (h+x\tan\alpha) \cdot a \cdot \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{\rho g a}{\cos\alpha} (h+x\tan\alpha) dx,$$

薄板各面所受到的压力为



$$P = \frac{\rho g a}{\cos \alpha} \int_0^{b \cos \alpha} (h + x \tan \alpha) dx = \frac{1}{2} \rho g a b (2h + b \sin \alpha).$$

9. 设星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方, 在原点 O 处有一单位质点, 求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

解 取弧微分 ds 为质点, 则其质量为

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^3 ds = \sqrt{(x^2 + y^2)^3} ds,$$

$$\text{其中 } ds = \sqrt{[(a \cos^3 t)']^2 + [(a \sin^3 t)']^2} dt = 3a \sin t \cos t dt.$$

设所求的引力在 x 轴、 y 轴上的投影分别为 F_x 、 F_y , 则有

$$F_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds = 3Ga^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = \frac{3}{5} Ga^2,$$

$$F_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)^3}}{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds = 3Ga^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^4 t dt = \frac{3}{5} Ga^2,$$

所以 $\mathbf{F} = (\frac{3}{5} Ga^2, \frac{3}{5} Ga^2)$.

习题 7-1

1. 设 $u=a-b+2c$, $v=-a+3b-c$. 试用 a 、 b 、 c 表示 $2u-3v$.

解 $2u-3v=2(a-b+2c)-3(-a+3b-c)=2a-2b+4c+3a-9b+3c=5a-11b+7c$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明这是平行四边形.

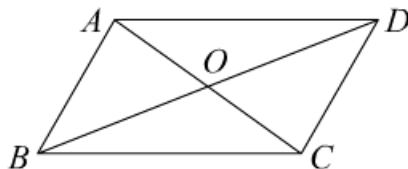
证明 $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$; $\vec{DC}=\vec{OC}-\vec{OD}$,

而 $\vec{OC}=-\vec{OA}$, $\vec{OD}=-\vec{OB}$,

所以 $\vec{DC}=-\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OB}-\vec{OA}=-\vec{AB}$.

这说明四边形 $ABCD$ 的对边 $AB=CD$ 且 $AB\parallel CD$,

从而四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 , 再把各分点与点 A 连接.

试以 $\vec{AB}=\vec{c}$ 、 $\vec{BC}=\vec{a}$ 表示向量 $\vec{D_1A}$ 、 $\vec{D_2A}$ 、 $\vec{D_3A}$ 、

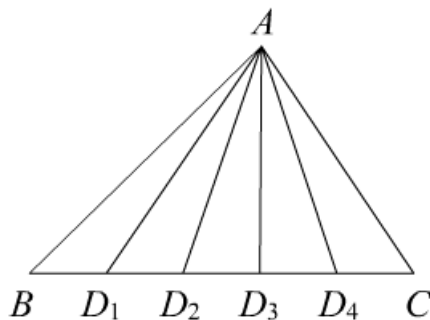
$\vec{D_4A}$.

解 $\vec{D_1A}=\vec{BA}-\vec{BD_1}=-\vec{c}-\frac{1}{5}\vec{a}$,

$\vec{D_2A}=\vec{BA}-\vec{BD_2}=-\vec{c}-\frac{2}{5}\vec{a}$,

$\vec{D_3A}=\vec{BA}-\vec{BD_3}=-\vec{c}-\frac{3}{5}\vec{a}$,

$\vec{D_4A}=\vec{BA}-\vec{BD_4}=-\vec{c}-\frac{4}{5}\vec{a}$.



4. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\vec{M_1M_2}$ 及 $-2\vec{M_1M_2}$.

解 $\vec{M_1M_2}=(1, -1, 0)-(0, 1, 2)=(1, -2, -2)$, $-2\vec{M_1M_2}=-2(1, -2, -2)=(-2, 4, 4)$.

5. 求平行于向量 $\vec{a}=(6, 7, -6)$ 的单位向量.

解 $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$,

平行于向量 $\vec{a}=(6, 7, -6)$ 的单位向量为 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11})$ 或 $-\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=(-\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11})$.

6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

$A(1, -2, 3)$; $B(2, 3, -4)$; $C(2, -3, -4)$; $D(-2, -3, 1)$.

解 A 在第四卦限, B 在第五卦限, C 在第八卦限, D 在第三卦限.

7. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$A(3, 4, 0); B(0, 4, 3); C(3, 0, 0); D(0, -1, 0)$.

解 在 xOy 面上, 的点的坐标为 $(x, y, 0)$; 在 yOz 面上, 的点的坐标为 $(0, y, z)$; 在 zOx 面上, 的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

在 x 轴上, 的点的坐标为 $(x, 0, 0)$; 在 y 轴上, 的点的坐标为 $(0, y, 0)$, 在 z 轴上, 的点的坐标为 $(0, 0, z)$.

A 在 xOy 面上, B 在 yOz 面上, C 在 x 轴上, D 在 y 轴上.

8. 求点 (a, b, c) 关于 (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 点 (a, b, c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a, b, -c)$; 点 (a, b, c) 关于 yOz 面的对称点为 $(-a, b, c)$; 点 (a, b, c) 关于 zOx 面的对称点为 $(a, -b, c)$.

(2) 点 (a, b, c) 关于 x 轴的对称点为 $(a, -b, -c)$; 点 (a, b, c) 关于 y 轴的对称点为 $(-a, b, -c)$; 点 (a, b, c) 关于 z 轴的对称点为 $(-a, -b, c)$.

(3) 点 (a, b, c) 关于坐标原点的对称点为 $(-a, -b, -c)$.

9. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 在 xOy 面、 yOz 面和 zOx 面上, 垂足的坐标分别为 $(x_0, y_0, 0)$ 、 $(0, y_0, z_0)$ 和 $(x_0, 0, z_0)$.

在 x 轴、 y 轴和 z 轴上, 垂足的坐标分别为 $(x_0, 0, 0)$, $(0, y_0, 0)$ 和 $(0, 0, z_0)$.

10. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 在所作的平行于 z 轴的直线上, 点的坐标为 (x_0, y_0, z) ; 在所作的平行于 xOy 面的平面上, 点的坐标为 (x, y, z_0) .

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

解 因为底面的对角线的长为 $\sqrt{2}a$, 所以立方体各顶点的坐标分别为

$$\begin{aligned} &(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0), \\ &(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a), (\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a). \end{aligned}$$

12. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离就是点 $(4, -3, 5)$ 与点 $(4, 0, 0)$ 之间的距离, 即

$$d_x = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

点 M 到 y 轴的距离就是点 $(4, -3, 5)$ 与点 $(0, -3, 0)$ 之间的距离, 即

$$d_y = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

点 M 到 z 轴的距离就是点 $(4, -3, 5)$ 与点 $(0, 0, 5)$ 之间的距离, 即

$$d_z = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

13. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 设所求的点为 $P(0, y, z)$ 与 A 、 B 、 C 等距离, 则

$$|\vec{PA}|^2 = 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2,$$

$$|\vec{PB}|^2 = 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2,$$

$$|\vec{PC}|^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2.$$

由题意, 有

$$|\vec{PA}|^2 = |\vec{PB}|^2 = |\vec{PC}|^2,$$

即
$$\begin{cases} 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \\ 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

解之得 $y=1, z=-2$, 故所求点为 $(0, 1, -2)$.

14. 试证明以三点 $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角直角三角形.

解 因为

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7,$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7,$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = 7\sqrt{2},$$

所以 $|\vec{BC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2$, $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$.

因此 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$. 计算向量 $\vec{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\vec{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, \sqrt{2}, 1);$

$$|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2;$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{2};$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{3\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

16. 设向量的方向余弦分别满足 (1) $\cos \alpha = 0$; (2) $\cos \beta = 1$; (3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, 问这些向量与

坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1)当 $\cos\alpha=0$ 时, 向量垂直于 x 轴, 或者说是平行于 yOz 面.

(2)当 $\cos\beta=1$ 时, 向量的方向与 y 轴的正向一致, 垂直于 zOx 面.

(3)当 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 时, 向量垂直于 x 轴和 y 轴, 平行于 z 轴, 垂直于 xOy 面.

17. 设向量 \mathbf{r} 的模是 4, 它与轴 u 的夹角是 60° , 求 \mathbf{r} 在轴 u 上的投影.

解 $\text{Pr}_{j_u}\mathbf{r}=|\mathbf{r}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 , 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解 设点 A 的坐标为 (x, y, z) . 由已知得

$$\begin{cases} 2-x=4 \\ -1-y=-4, \\ 7-z=7 \end{cases}$$

解得 $x=-2, y=3, z=0$. 点 A 的坐标为 $A(-2, 3, 0)$.

19. 设 $\mathbf{m}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+8\mathbf{k}$, $\mathbf{n}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-7\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{p}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. 求向量 $\mathbf{a}=4\mathbf{m}+3\mathbf{n}-\mathbf{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 因为 $\mathbf{a}=4\mathbf{m}+3\mathbf{n}-\mathbf{p}=4(3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+8\mathbf{k})+3(2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-7\mathbf{k})-(5\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k})=13\mathbf{i}+7\mathbf{j}+15\mathbf{k}$,
所以 $\mathbf{a}=4\mathbf{m}+3\mathbf{n}-\mathbf{p}$ 在 x 轴上的投影为 13, 在 y 轴上的分向量 $7\mathbf{j}$.

习题 7-2

1. 设 $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, 求(1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$; (2) $(-2\mathbf{a})\cdot 3\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{a}\times 2\mathbf{b}$; (3) \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 夹角的余弦.

解 (1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3\times 1+(-1)\times 2+(-2)\times (-1)=3$,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}+7\mathbf{k}.$$

$$(2)(-2\mathbf{a})\cdot 3\mathbf{b}=-6\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-6\times 3=-18,$$

$$\mathbf{a}\times 2\mathbf{b}=2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=2(5\mathbf{i}+\mathbf{j}+7\mathbf{k})=10\mathbf{i}+2\mathbf{j}+14\mathbf{k}.$$

$$(3)\cos(\hat{\mathbf{a}},\hat{\mathbf{b}})=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 为单位向量, 且满足 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 求 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$.

解 因为 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 所以 $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=0$,

即 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=0$,

于是 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})=-\frac{1}{2}(1+1+1)=-\frac{3}{2}.$

3. 已知 $M_1(1, -1, 2)$ 、 $M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1, 3+1, 1-2)=(2, 4, -1)$, $\overrightarrow{M_2M_3}=(3-3, 1-3, 3-1)=(0, -2, 2)$.

$$\mathbf{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=6\mathbf{i}-4\mathbf{j}-4\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{n}|=\sqrt{36+16+16}=2\sqrt{17},$$

$$\mathbf{e}=\pm\frac{1}{2\sqrt{17}}(6\mathbf{i}-4\mathbf{j}-4\mathbf{k})=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) \text{ 为所求向量.}$$

4. 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3, 1, 8)$ 沿直线称动到点 $M_2(1, 4, 2)$, 计算重力所作的功(长度单位为 m , 重力方向为 z 轴负方向).

解 $\mathbf{F}=(0, 0, -100\times 9.8)=(0, 0, -980)$, $\mathbf{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(1-3, 4-1, 2-8)=(-2, 3, -6)$.

$$W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}=(0, 0, -980)\cdot(-2, 3, -6)=5880(\text{焦耳}).$$

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 \mathbf{F}_1

作用着; 在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 \mathbf{F}_2 作用着. 问 θ_1 、 θ_2 、 x_1 、 x_2 、 $|\mathbf{F}_1|$ 、 $|\mathbf{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

解 因为有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零, 再注意到对力矩正负的

规定可得,使杠杆保持平衡的条件为

$$x_1|F_1|\sin\theta_1 - x_2|F_2|\sin\theta_2 = 0,$$

即

$$x_1|F_1|\sin\theta_1 = x_2|F_2|\sin\theta_2.$$

6. 求向量 $\mathbf{a}=(4, -3, 4)$ 在向量 $\mathbf{b}=(2, 2, 1)$ 上的投影.

解

$$\text{Pr } \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{|\mathbf{b}|} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} (4, -3, 4) \cdot (2, 2, 1) = \frac{1}{3} (4 \times 2 - 3 \times 2 + 4 \times 1) = 2.$$

7. 设 $\mathbf{a}=(3, 5, -2)$, $\mathbf{b}=(2, 1, 4)$, 问 λ 与 μ 有怎样的关系, 能使得 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ 与 z 轴垂直?

解 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=(3\lambda+2\mu, 5\lambda+\mu, -2\lambda+4\mu)$,

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \text{ 与 } z \text{ 轴垂} \Leftrightarrow \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \perp \mathbf{k}$$

$$\Leftrightarrow (3\lambda+2\mu, 5\lambda+\mu, -2\lambda+4\mu) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

即 $-2\lambda+4\mu=0$, 所以 $\lambda=2\mu$. 当 $\lambda=2\mu$ 时, $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 设 AB 是圆 O 的直径, C 点在圆周上, 则 $\vec{OB} = -\vec{OA}$, $|\vec{OC}| = |\vec{OA}|$.

$$\text{因为 } \vec{AC} \cdot \vec{BC} = (\vec{OC} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = (\vec{OC} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} + \vec{OA}) = |\vec{OC}|^2 - |\vec{OA}|^2 = 0,$$

所以 $\vec{AC} \perp \vec{BC}$, $\angle C = 90^\circ$.

9. 设已知向量 $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{c}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$, 计算: (1) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$; (2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{b}+\mathbf{c})$; (3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

解 (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 1 + (-3) \times (-1) + 1 \times 3 = 8$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 2 \times 1 + (-3) \times (-2) = 8$,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = 8\mathbf{c} - 8\mathbf{b} = 8(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 8[(\mathbf{i}-2\mathbf{j}) - (\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})] = -8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}.$$

$$(2) \mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

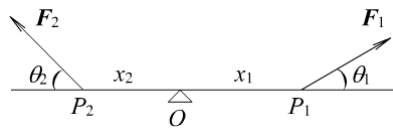
$$(3) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -8 \times 1 + (-5) \times (-2) + 1 \times 0 = 2.$$

10. 已知 $\vec{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\vec{OB} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

解 根据向量积的几何意义, $|\vec{OA} \times \vec{OB}|$ 表示以 \vec{OA} 和 \vec{OB} 为邻边的平行四边形的面积, 于是 $\triangle OAB$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}|.$$



$$\text{因为 } \vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19},$$

所以三角形 $\triangle OAB$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \frac{1}{2} \sqrt{19}.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中 a_1 、 a_2 、 a_3 、 b_1 、 b_2 、 b_3 为任意实数, 并指出等号成立的条件.

解 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|,$$

$$\text{于是 } \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中当 $\cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = 1$ 时, 即 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 平行是等号成立.

习题 7-3

1. 一动点与两定点(2, 3, 1)和(4, 5, 6)等距离, 求这动点的轨迹方程.

解 设动点为 $M(x, y, z)$, 依题意有

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2,$$

即 $4x+4y+10z-63=0$.

2. 建立以点(1, 3, -2)为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解 球的半径 $R=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$,

球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14,$$

即 $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$.

3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

解 由已知方程得

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2+2z+1)=1+4+1,$$

即 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=(\sqrt{6})^2$,

所以此方程表示以(1, -2, -1)为球心, 以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点(2, 3, 4)的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面的方程, 它表示怎样曲面?

解 设点 (x, y, z) 满足题意, 依题意有

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得

$$(x+\frac{2}{3})^2+(y+1)^2+(z+\frac{4}{3})^2=\frac{116}{9},$$

它表示以 $(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3})$ 为球心, 以 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

5. 将 zOx 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 将方程中的 z 换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 得旋转曲面的方程 $y^2+z^2=5x$.

6. 将 zOx 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 将方程中的 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 得旋转曲面的方程 $x^2+y^2+z^2=9$.

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 双曲线绕 x 轴旋转而得的旋转曲面的方程为

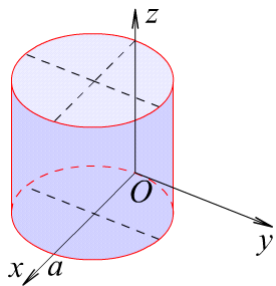
$$4x^2 - 9y^2 - 9z^2 = 36.$$

双曲线绕 y 轴旋转而得的旋转曲面的方程为

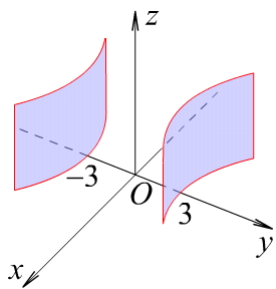
$$4x^2 + 4z^2 - 9y^2 = 36.$$

8. 画出下列方程所表示的曲面:

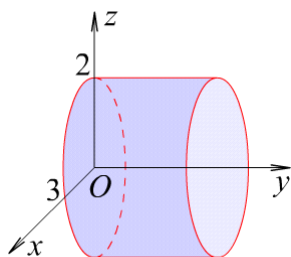
(1) $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2;$



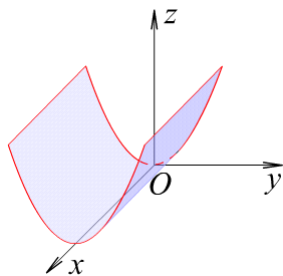
(2) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$



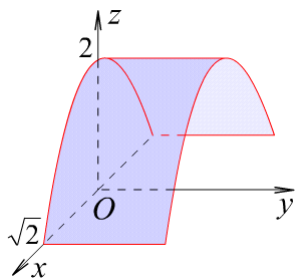
(3) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1;$



(4) $y^2 - z = 0$;



(5) $z = 2 - x^2$.



9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

(1) $x=2$;

解 在平面解析几何中, $x=2$ 表示平行于 y 轴的一条直线; 在空间解析几何中, $x=2$ 表示一张平行于 yOz 面的平面.

(2) $y=x+1$;

解 在平面解析几何中, $y=x+1$ 表示一条斜率是 1, 在 y 轴上的截距也是 1 的直线; 在空间解析几何中, $y=x+1$ 表示一张平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2 + y^2 = 4$;

解 在平面解析几何中, $x^2 + y^2 = 4$ 表示中心在原点, 半径是 2 的圆; 在空间解析几何中, $x^2 + y^2 = 4$ 表示母线平行于 z 轴, 准线为 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆柱面.

(4) $x^2 - y^2 = 1$.

解 在平面解析几何中, $x^2 - y^2 = 1$ 表示双曲线; 在空间解析几何中, $x^2 - y^2 = 1$ 表示母线平行于 z 轴的双曲面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$;

解 这是 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的, 或是 zOx 面上的椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的.

$$(2) x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1;$$

解 这是 xOy 面上的双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴旋转一周而形成的, 或是 yOz 面上的双曲线 $-\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周而形成的.

$$(3) x^2 - y^2 - z^2 = 1;$$

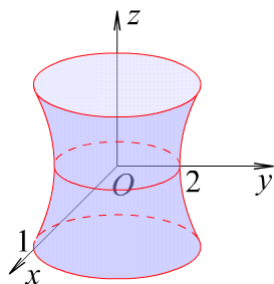
解 这是 xOy 面上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的, 或是 zOx 面上的双曲线 $x^2 - z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的.

$$(4) (z-a)^2 = x^2 + y^2.$$

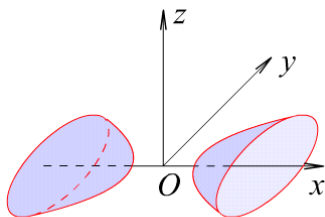
解 这是 zOx 面上的曲线 $(z-a)^2 = x^2$ 绕 z 轴旋转一周而形成的, 或是 yOz 面上的曲线 $(z-a)^2 = y^2$ 绕 z 轴旋转一周而形成的.

11. 画出下列方程所表示的曲面:

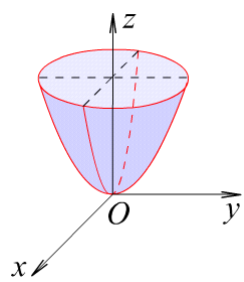
$$(1) 4x^2 + y^2 - z^2 = 4;$$



$$(2) x^2 - y^2 - 4z^2 = 4;$$

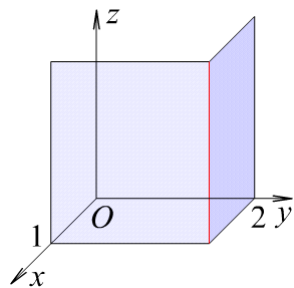


$$(3) \frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$



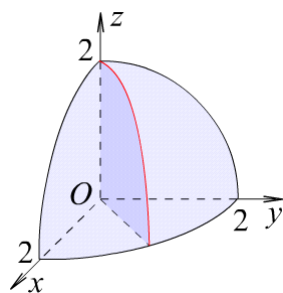
习题 7-4

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

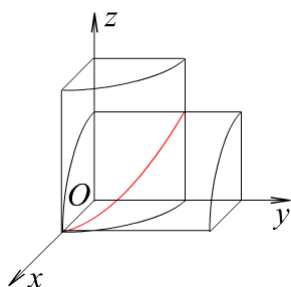


$$(1) \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x-y=0 \end{cases};$$



$$(3) \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2+z^2=a^2 \end{cases}.$$



2. 指出下方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

$$(1) \begin{cases} y=5x+1 \\ y=2x-3 \end{cases};$$

解 在平面解析几何中, $\begin{cases} y=5x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$ 表示直线 $y=5x+1$ 与 $y=2x-3$ 的交点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{3})$; 在空间解析几何中, $\begin{cases} y=5x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$ 表示平面 $y=5x+1$ 与 $y=2x-3$ 的交线, 它表示过点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{3}, 0)$, 并且行于 z 轴.

$$(2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y=3 \end{cases}.$$

解 在平面解析几何中, $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y=3 \end{cases}$ 表示椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与其切线 $y=3$ 的交点 $(0, 3)$; 在空间解析几何中, $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y=3 \end{cases}$ 表示椭圆柱面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与其切平面 $y=3$ 的交线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解 把方程组中的 x 消去得方程 $3y^2-z^2=16$, 这就是母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

把方程组中的 y 消去得方程 $3x^2+2z^2=16$, 这就是母线平行于 y 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解 由 $x+z=1$ 得 $z=1-x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$ 得方程 $2x^2-2x+y^2=8$, 这是母线平行于 z 轴, 准线为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线的柱面方程, 于是所求的投影方程为

$$\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8 \\ z=0 \end{cases}.$$

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=x \end{cases};$$

解 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$ 得 $2x^2+z^2=9$, 即 $\frac{x^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$.

令 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t$, 则 $z=3\sin t$.

故所求参数方程为

$$x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \quad y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \quad z=3\sin t.$$

$$(2) \begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4 \\ z=0 \end{cases}.$$

解 将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ 得 $(x-1)^2+y^2=3$.

令 $x=1+\sqrt{3}\cos t$, 则 $y=\sqrt{3}\sin t$,

于是所求参数方程为

$$x=1+\sqrt{3}\cos t, \quad y=\sqrt{3}\sin t, \quad z=0.$$

6. 求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 由前两个方程得 $x^2+y^2=a^2$, 于是螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}.$$

由第三个方程得 $\theta=\frac{z}{b}$ 代入第一个方程得

$$\frac{x}{a}=\cos\frac{z}{b}, \quad \text{即 } z=b\arccos\frac{x}{a},$$

于是螺旋线在 zOx 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases} z=b\arccos\frac{x}{a} \\ y=0 \end{cases}.$$

由第三个方程得 $\theta=\frac{z}{b}$ 代入第二个方程得

$$\frac{y}{a}=\sin\frac{z}{b}, \quad \text{即 } z=b\arcsin\frac{y}{a},$$

于是螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases} x=0 \\ z=b\arcsin\frac{y}{a} \end{cases}.$$

7. 求上半球 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$ 的公共部分在 xOy 面和 zOx 面上的投影.

解 圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax$ 在 xOy 面上的投影为 $x^2 + y^2 \leq ax$, 它含在半球 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 在 xOy 面上的投影 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 内, 所以半球与圆柱体的公共部分在 xOy 面上的投影为 $x^2 + y^2 \leq ax$.

为求半球与圆柱体的公共部分在 zOx 面上的投影, 由圆柱面方程 $x^2 + y^2 = ax$ 得 $y^2 = ax - x^2$, 代入半球面方程 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 得 $z = \sqrt{a^2 - ax} (0 \leq x \leq a)$, 于是半球与圆柱体的公共部分在 zOx 面上的投影为

$$0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - ax} (0 \leq x \leq a), \text{ 即 } z^2 + ax \leq a^2, 0 \leq x \leq a, z \geq 0.$$

8. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 在三坐标面上的投影.

解 令 $z=4$ 得 $x^2 + y^2 = 4$, 于是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 在 xOy 面上的投影为 $x^2 + y^2 \leq 4$.

令 $x=0$ 得 $z=y^2$, 于是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 在 yOz 面上的投影为 $y^2 \leq z \leq 4$.

令 $y=0$ 得 $z=x^2$, 于是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 在 zOx 面上的投影为 $x^2 \leq z \leq 4$.

习题 7-5

1. 求过点(3, 0, -1)且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解 所求平面的法线向量为 $\mathbf{n}=(3, -7, 5)$, 所求平面的方程为

$$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0, \text{ 即 } 3x-7y+5z-4=0.$$

2. 求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 所求平面的法线向量为 $\mathbf{n}=(2, 9, -6)$, 所求平面的方程为

$$2(x-2)+9(y-9)-6(z-6)=0, \text{ 即 } 2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过(1, 1, -1)、(-2, -2, 2)、(1, -1, 2)三点的平面方程.

解 $\mathbf{n}_1=(1, -1, 2)-(1, 1, -1)=(0, -2, 3)$, $\mathbf{n}_2=(1, -1, 2)-(-2, -2, 2)=(3, 1, 0)$, 所求平面的法线向量为

$$\mathbf{n}=\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k},$$

所求平面的方程为

$$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0, \text{ 即 } x-3y-2z=0.$$

4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:

(1) $x=0$;

解 $x=0$ 是 yOz 平面.

(2) $3y-1=0$;

解 $3y-1=0$ 是垂直于 y 轴的平面, 它通过 y 轴上的点 $(0, \frac{1}{3}, 0)$.

(3) $2x-3y-6=0$;

解 $2x-3y-6=0$ 是平行于 z 轴的平面, 它在 x 轴、 y 轴上的截距分别是 3 和 -2.

(4) $x-\sqrt{3}y=0$;

解 $x-\sqrt{3}y=0$ 是通过 z 轴的平面, 它在 xOy 面上的投影的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(5) $y+z=1$;

解 $y+z=1$ 是平行于 x 轴的平面, 它在 y 轴、 z 轴上的截距均为 1.

(6) $x-2z=0$;

解 $x-2z=0$ 是通过 y 轴的平面.

(7) $6x+5-z=0$.

解 $6x+5-z=0$ 是通过原点的平面.

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解 此平面的法线向量为 $\mathbf{n}=(2, -2, 1)$.

此平面与 yOz 面的夹角的余弦为

$$\cos \alpha = \cos(\hat{n}, \hat{i}) = \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{i}}{|\mathbf{n}| \cdot |\hat{i}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3};$$

此平面与 zOx 面的夹角的余弦为

$$\cos \beta = \cos(\hat{n}, \hat{j}) = \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{j}}{|\mathbf{n}| \cdot |\hat{j}|} = \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3};$$

此平面与 xOy 面的夹角的余弦为

$$\cos \gamma = \cos(\hat{n}, \hat{k}) = \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{k}}{|\mathbf{n}| \cdot |\hat{k}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

6. 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ 和 $\mathbf{b} = (1, -1, 0)$, 试求这平面方程.

解 所求平面的法线向量可取为

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k},$$

所求平面的方程为

$$(x-1) + (y-0) - 3(z+1) = 0, \text{ 即 } x + y - 3z - 4 = 0.$$

7. 求三平面 $x+3y+z=1$, $2x-y-z=0$, $-x+2y+2z=3$ 的交点.

解 解线性方程组

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y-z=0 \\ -x+2y+2z=3 \end{cases}$$

得 $x=1$, $y=-1$, $z=3$. 三个平面的交点的坐标为 $(1, -1, 3)$.

8. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 zOx 面且经过点 $(2, -5, 3)$;

解 所求平面的法线向量为 $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, 于是所求的平面为

$$0 \cdot (x-2) - 5(y+5) + 0 \cdot (z-3) = 0, \text{ 即 } y = -5.$$

(2) 通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$;

解 所求平面可设为 $Ax + By = 0$.

因为点 $(-3, 1, -2)$ 在此平面上, 所以

$$-3A + B = 0,$$

将 $B=3A$ 代入所设方程得

$$Ax + 3Ay = 0,$$

所以所求的平面的方程为

$$x + 3y = 0,$$

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$.

解 所求平面的法线向量可设为 $\mathbf{n} = (0, b, c)$. 因为点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$ 都在所求平面上,

所以向量 $\mathbf{n}_1=(5, 1, 7)-(4, 0, -2)=(1, 1, 9)$ 与 \mathbf{n} 是垂直的, 即

$$b+9c=0, b=-9c,$$

于是 $\mathbf{n}=(0, -9c, c)=-c(0, 9, -1)$.

所求平面的方程为

$$9(y-0)-(z+2)=0, \text{ 即 } 9y-z-2=0.$$

9. 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解 点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离为

$$d=\frac{|1+2\times 2+2\times 1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1.$$

习题 7-6

1. 求过点(4, -1, 3)且平行于直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$ 的直线方程.

解 所求直线的方向向量为 $s=(2, 1, 5)$, 所求的直线方程为

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点 $M_1(3, -2, 1)$ 和 $M_2(-1, 0, 2)$ 的直线方程.

解 所求直线的方向向量为 $s=(-1, 0, 2)-(3, -2, 1)=(-4, 2, 1)$, 所求的直线方程为

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$.

解 平面 $x-y+z=1$ 和 $2x+y+z=4$ 的法线向量为 $n_1=(1, -1, 1)$, $n_2=(2, 1, 1)$, 所求直线的方向向量为

$$s=n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + j + 3k.$$

在方程组 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 中, 令 $y=0$, 得 $\begin{cases} x+z=1 \\ 2x+z=4 \end{cases}$, 解得 $x=3, z=-2$. 于是点(3, 0, -2)为所求直线上的点.

所求直线的对称式方程为

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3};$$

参数方程为

$$x=3-2t, y=t, z=-2+3t.$$

4. 求过点(2, 0, -3)且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

解 所求平面的法线向量 n 可取为直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 的方向向量, 即

$$n=(1, -2, 4) \times (3, 5, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -16i + 14j + 11k.$$

所平面的方程为

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0, \text{ 即 } 16x-14y-11z-65=0.$$

5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0 \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦.

解 直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0 \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的方向向量分别为

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3i + 4j - k, \quad s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 10i - 5j + 10k.$$

两直线之间的夹角的余弦为

$$\cos(s_1, s_2) = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| \cdot |s_2|} = \frac{3 \times 10 + 4 \times (-5) + (-1) \times 10}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2}} = 0.$$

6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

解 直线 $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 的方向向量分别为

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3i + j + 5k, \quad s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -9i - 3j - 15k.$$

因为 $s_2 = -3s_1$, 所以这两个直线是平行的.

7. 求过点(0, 2, 4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解 因为两平面的法线向量 $n_1=(1, 0, 2)$ 与 $n_2=(0, 1, -3)$ 不平行, 所以两平面相交于一直线, 此直线的方向向量可作为所求直线的方向向量 s , 即

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2i + 3j + k.$$

所求直线的方程为

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}.$$

8. 求过点(3, 1, -2)且通过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

解 所求平面的法线向量与直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的方向向量 $s_1=(5, 2, 1)$ 垂直. 因为点(3, 1, -2)和(4, -3, 0)都在所求的平面上, 所以所求平面的法线向量与向量 $s_2=(4, -3, 0)-(3, 1, -2)=(1, -4, 2)$ 也是垂直的. 因此所求平面的法线向量可取为

$$n = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 8i - 9j - 22k.$$

所求平面的方程为

$$8(x-3) - 9(y-1) - 22(z+2) = 0, \text{ 即 } 8x - 9y - 22z - 59 = 0.$$

9. 求直线 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解 直线 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 的方向向量为

$$\mathbf{s}=(1,1,3)\times(1,-1,-1)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}=2(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}),$$

平面 $x-y-z+1=0$ 的法线向量为 $\mathbf{n}=(1,-1,-1)$.

因为

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}=2\times 1+4\times(-1)+(-2)\times(-1)=0,$$

所以 $\mathbf{s}\perp\mathbf{n}$, 从而直线 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角为 0 .

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

$$(1) \frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3} \text{ 和 } 4x-2y-2z=3;$$

解 所给直线的方向向量为 $\mathbf{s}=(-2,-7,3)$, 所给平面的法线向量为 $\mathbf{n}=(4,-2,-2)$.

因为 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}=(-2)\times 4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)=0$, 所以 $\mathbf{s}\perp\mathbf{n}$, 从而所给直线与所给平面平行. 又因为直线上的点 $(-3,-4,0)$ 不满足平面方程 $4x-2y-2z=3$, 所以所给直线不在所给平面上.

$$(2) \frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7} \text{ 和 } 3x-2y+7z=8;$$

解 所给直线的方向向量为 $\mathbf{s}=(3,-2,7)$, 所给平面的法线向量为 $\mathbf{n}=(3,-2,7)$.

因为 $\mathbf{s}=\mathbf{n}$, 所以所给直线与所给平面是垂直的.

$$(3) \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4} \text{ 和 } x+y+z=3.$$

解 所给直线的方向向量为 $\mathbf{s}=(3,1,-4)$, 所给平面的法线向量为 $\mathbf{n}=(1,1,1)$.

因为 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}=3\times 1+1\times 1+(-4)\times 1=0$, 所以 $\mathbf{s}\perp\mathbf{n}$, 从而所给直线与所给平面平行. 又因为直线上的点 $(2,-2,3)$ 满足平面方程 $x+y+z=3$, 所以所给直线在所给平面上.

11. 求过点 $(1,2,1)$ 而与两直线

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

解 直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 的方向向量为

$$\mathbf{s}_1=(1,2,-1)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k},$$

直线 $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 的方向向量为

$$s_1 = (2, -1, 1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

所求平面的法线向量可取为

$$\mathbf{n} = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

所求平面的方程为

$$-(x-1) + (y-2) - (z-1) = 0, \text{ 即 } x - y + z = 0.$$

12. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影.

解 平面的法线向量为 $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$. 过点 $(-1, 2, 0)$ 并且垂直于已知平面的直线方程为

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

将此方程化为参数方程 $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = -t$, 代入平面方程 $x + 2y - z + 1 = 0$ 中, 得

$$(-1+t) + 2(2+2t) - (-t) + 1 = 0,$$

解得 $t = -\frac{2}{3}$. 再将 $t = -\frac{2}{3}$ 代入直线的参数方程, 得 $x = -\frac{5}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$. 于是点 $(-1, 2, 0)$ 在

平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影为点 $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

13. 求点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 的距离.

解 直线 $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 的方向向量为

$$\mathbf{s} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

过点 P 且与已知直线垂直的平面的方程为

$$-3(y+1) - 3(z-2) = 0, \text{ 即 } y + z - 1 = 0.$$

解线性方程组

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0, \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

得 $x = 1, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{3}{2}$.

点 $P(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 的距离就是点 $P(3, -1, 2)$ 与点 $(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 间的距离,

即 $d = \sqrt{(3-1)^2 + (-1+\frac{1}{2})^2 + (2-\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$

14. 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线的方向向量为 s , 试证: 点 M_0 到直线 L 的距离

$$d = \frac{|\vec{M_0M} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

解 设点 M_0 到直线 L 的距离为 d , L 的方向向量 $s = \vec{MN}$, 根据向量积的几何意义, 以 $\vec{M_0M}$ 和 \vec{MN} 为邻边的平行四边形的面积为

$$|\vec{M_0M} \times \vec{MN}| = |\vec{M_0M} \times \vec{s}|,$$

又以 $\vec{M_0M}$ 和 \vec{MN} 为邻边的平行四边形的面积为 $d \cdot |\vec{MN}| = d \cdot |\vec{s}|$. 因此

$$d \cdot |\vec{s}| = |\vec{M_0M} \times \vec{s}|, \quad d = \frac{|\vec{M_0M} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

15. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解 过直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$(2+3\lambda)x + (-4-\lambda)y + (1-2\lambda)z - 9\lambda = 0.$$

为在平面束中找出与已知平面垂直的平面, 令 $(4-1, 1) \cdot (2+3\lambda, -4-\lambda, 1-2\lambda) = 0$, 即

$$4 \cdot (2+3\lambda) + (-1) \cdot (-4-\lambda) + 1 \cdot (1-2\lambda) = 0.$$

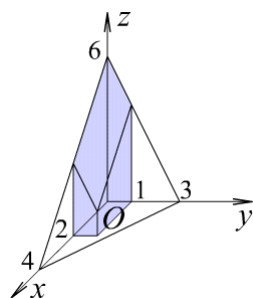
解之得 $\lambda = -\frac{13}{11}$. 将 $\lambda = -\frac{13}{11}$ 代入平面束方程中, 得

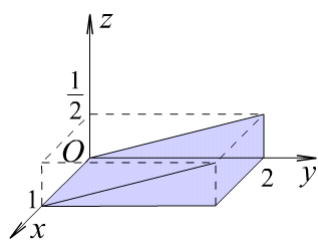
$$17x + 31y - 37z - 117 = 0.$$

故投影直线的方程为 $\begin{cases} 4x-y+z=1 \\ 17x+31y-37z-117=0 \end{cases}$.

16. 画出下列各曲面所围成的立体图形:

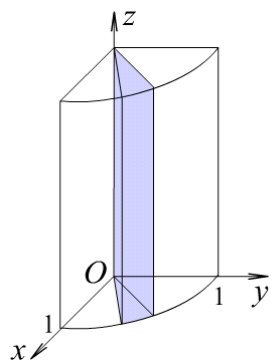
(1) $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0$;



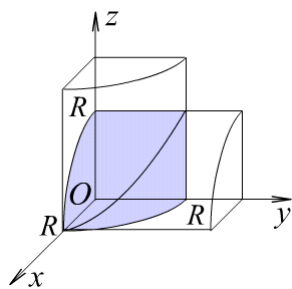


(2) $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\frac{y}{4}$;

(3) $z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$ (在第一卦限内);



(4) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$ (在第一卦限内).



总习题七

1. 填空

(1) 设在坐标系 $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z) , 则在 $[A; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$

坐标系中, 点 M 的坐标为_____, 向量 \vec{OM} 的坐标为_____.

解 $M(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\vec{OM}=(x, y, z)$.

提示: 自由向量与起点无关, 它在某一向量上的投影不会因起点的位置的不同而改变.

(2) 设数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为 0, 使 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个向量是_____的.

解 共面.

(3) 设 $\mathbf{a}=(2, 1, 2)$, $\mathbf{b}=(4, -1, 10)$, $\mathbf{c}=\mathbf{b}-\lambda \mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $\lambda=_____$.

解 3.

提示: 因为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$.

又因为由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}) = 2 \times 4 + 1 \times (-1) + 2 \times 10 - \lambda(2^2 + 1^2 + 2^2) = 27 - 9\lambda$, 所以 $\lambda = 3$.

(4) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 都是单位向量, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = _____$.

解 $-\frac{3}{2}$.

提示: 因为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 所以 $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$,

即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$,

于是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = -\frac{1}{2}(1+1+1) = -\frac{3}{2}$.

(5) 设 $|\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=4, |\mathbf{c}|=5$, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| = _____$.

解 36.

提示: $\mathbf{c} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 3\mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}| = 3|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 3|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36.$$

2. 在 y 轴上求与点 $A(1, -3, 7)$ 和点 $B(5, 7, -5)$ 等距离的点.

解 设所求点为 $M(0, y, 0)$, 则有

$$1^2 + (y+3)^2 + 7^2 = 5^2 + (y-7)^2 + (-5)^2,$$

即 $(y+3)^2 = (y-7)^2$,

解得 $y=2$, 所求的点为 $M(0, 2, 0)$.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 2, -1)$ 、 $B(5, -4, 7)$ 和 $C(-1, 1, 2)$, 求从顶点 C 所引中线的长度.

解 线段 AB 的中点的坐标为 $(\frac{3+5}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{-1+7}{2}) = (4, -1, 3)$. 所求中线的长度为

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{30}.$$

4. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\vec{BC}=\mathbf{a}$ 、 $\vec{CA}=\mathbf{b}$ 、 $\vec{AB}=\mathbf{c}$, 三边中点依次为 D 、 E 、 F , 试用向量 \mathbf{a} 、

\vec{b} 、 \vec{c} 表示 \vec{AD} 、 \vec{BE} 、 \vec{CF} ，并证明

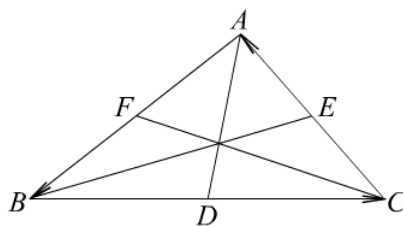
$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}.$$

解 $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a},$

$$\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\vec{CF} = \vec{CA} + \vec{AF} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{3}{2}(-\vec{c} + \vec{c}) = \vec{0}$$



5. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半。

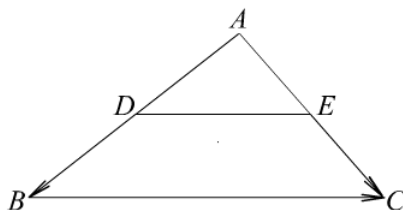
证明 设 D, E 分别为 AB, AC 的中点，则有

$$\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}),$$

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AB},$$

所以 $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{BC},$

从而 $DE \parallel BC$ ，且 $|DE| = \frac{1}{2}|BC|$ 。



6. 设 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ， $\vec{a} = (3, -5, 8)$ ， $\vec{b} = (-1, 1, z)$ ，求 z 。

解 $\vec{a} + \vec{b} = (2, -4, 8+z)$ ， $\vec{a} - \vec{b} = (4, -6, 8-z)$ 。因为 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，所以

$$\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (8+z)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + (8-z)^2},$$

解得 $z=1$ 。

7. 设 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ， $|\vec{b}| = 1$ ， $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ ，求向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角。

解 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 + 1 + 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 7,$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 1.$$

设向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角为 θ ，则

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{3-1}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

8. 设 $a+3b \perp 7a-5b$, $a-4b \perp 7a-2b$, 求 (\hat{a}, \hat{b}) .

解 因为 $a+3b \perp 7a-5b$, $a-4b \perp 7a-2b$,
所以 $(a+3b) \cdot (7a-5b) = 0$, $(a-4b) \cdot (7a-2b) = 0$,
即 $7|a|^2 + 16a \cdot b - 15|b|^2 = 0$, $7|a|^2 - 30a \cdot b + 8|b|^2 = 0$,
又以上两式可得

$$|a| = |b| = \sqrt{2} \sqrt{a \cdot b},$$

于是 $\cos(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{2}$, $(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\pi}{3}$.

9. 设 $a = (2, -1, -2)$, $b = (1, 1, z)$, 问 z 为何值时 (\hat{a}, \hat{b}) 最小? 并求出此最小值.

解 $\cos(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$.

因为当 $0 < (\hat{a}, \hat{b}) < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos(\hat{a}, \hat{b})$ 为单调减函数. 求 (\hat{a}, \hat{b}) 的最小值也就是求 $f(z) = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$ 的最大值.

令 $f'(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}} = 0$, 得 $z = -4$.

当 $z = -4$ 时, $\cos(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $(\hat{a}, \hat{b})_{\min} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

10. 设 $|a| = 4$, $|b| = 3$, $(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\pi}{6}$, 求以 $a+2b$ 和 $a-3b$ 为边的平行四边形的面积.

解 $(a+2b) \times (a-3b) = -3a \times b + 2b \times a = 5b \times a$.

以 $a+2b$ 和 $a-3b$ 为边的平行四边形的面积为

$$|(a+2b) \times (a-3b)| = 5|b \times a| = 5|b| \cdot |a| \sin(\hat{a}, \hat{b}) = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 30.$$

11. 设 $a = (2, -3, 1)$, $b = (1, -2, 3)$, $c = (2, 1, 2)$, 向量 r 满足 $r \perp a$, $r \perp b$, $\text{Prj}_c r = 14$, 求 r .

解 设 $r = (x, y, z)$.

因为 $r \perp a$, $r \perp b$, 所以 $r \cdot a = 0$, $r \cdot b = 0$, 即

$$2x - 3y + z = 0, \quad x - 2y + 3z = 0.$$

又因为 $\text{Prj}_c r = 14$, 所以 $r \cdot \frac{1}{|c|} c = 14$, 即

$$2x + y + 2z = 42.$$

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ 2x+y+2z=42 \end{cases},$$

得 $x=14, y=10, z=2$, 所以 $\mathbf{r}=(14, 10, 2)$.

另解 因为 $\mathbf{r} \perp \mathbf{a}, \mathbf{r} \perp \mathbf{b}$, 所以 \mathbf{r} 与 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 平行, 故可设 $\mathbf{r} = \lambda(7, 5, 1)$.

又因为 $\text{Prj}_{\mathbf{c}} \mathbf{r} = 14$, 所以 $\mathbf{r} \cdot \frac{1}{|\mathbf{c}|} \mathbf{c} = 14, \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 42$, 即

$$\lambda(7 \times 2 + 5 \times 1 + 1 \times 2) = 42, \lambda = 2,$$

所以 $\mathbf{r} = (14, 10, 2)$.

12. 设 $\mathbf{a} = (-1, 3, 2), \mathbf{b} = (2, -3, -4), \mathbf{c} = (-3, 12, 6)$, 证明三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 并用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示 \mathbf{c} .

证明 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件是 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. 因为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{k},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-6) \times (-3) + 0 \times 12 + (-3) \times 6 = 0,$$

所以向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面.

设 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$, 则有

$$(-\lambda + 2\mu, 3\lambda - 3\mu, 2\lambda - 4\mu) = (-3, 12, 6),$$

即有方程组

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = -3 \\ 3\lambda - 3\mu = 12 \\ 2\lambda - 4\mu = 6 \end{cases},$$

解之得 $\lambda = 5, \mu = 1$, 所以 $\mathbf{c} = 5\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

13. 已知动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹方程.

解 根据题意, 有

$$|z| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2},$$

$$\text{或 } z^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2,$$

化简得

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4(z-1),$$

这就是点 M 的轨迹方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

$$(1) z = 2(x^2 + y^2);$$

解 旋转曲面的一条母线为 zOx 面上的曲线 $z = 2x^2$, 旋转轴为 z 轴.

$$(2) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1;$$

解 旋转曲面的一条母线为 xOy 面上的曲线 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$, 旋转轴为 y 轴.

$$(3) z^2 = 3(x^2 + y^2);$$

解 旋转曲面的一条母线为 yOz 面上的曲线 $z = \sqrt{3}y$, 旋转轴为 z 轴.

$$(4) x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

解 旋转曲面的一条母线为 xOy 面上的曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 旋转轴为 x 轴.

15. 求通过点 $A(3, 0, 0)$ 和 $B(0, 0, 1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

解 设所求平面的法线向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

$\vec{BA} = (3, 0, -1)$, xOy 面的法线向量为 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

按要求有 $\mathbf{n} \cdot \vec{BA} = 0$, $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{k}|} = \cos \frac{\pi}{3}$,

$$\text{即} \quad \begin{cases} 3a - c = 0 \\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \end{cases},$$

解之得 $c = 3a$, $b = \pm\sqrt{26}a$. 于是所求的平面的方程为

$$(x-3) \pm \sqrt{26}y + 3z = 0,$$

即 $x + \sqrt{26}y + 3z = 3$, 或 $x - \sqrt{26}y + 3z = 3$.

16. 设一平面垂直于平面 $z=0$, 并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线, 求此平面方程.

解 直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的方向向量为 $\mathbf{s} = (0, 1, -1) \times (1, 0, 0) = (0, -1, -1)$.

设点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线交于点 (x_0, y_0, z_0) . 因为点 (x_0, y_0, z_0) 在直线

$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 上, 所以 $(x_0, y_0, z_0)=(0, y_0, y_0+1)$. 于是, 垂线的方向向量为

$$s_1=(-1, y_0+1, y_0).$$

显然有 $s \cdot s_1=0$, 即

$$-y_0-1-y_0=0, \quad y_0=-\frac{1}{2}.$$

从而 $s_1=(-1, y_0+1, y_0)=(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

所求平面的法线向量可取为

$$n=k \times s_1=k \times (-i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k) = -\frac{1}{2}i - j,$$

所求平面的方程为

$$-\frac{1}{2}(x-1)-(y+1)=0, \quad \text{即 } x+2y+1=0$$

17. 求过点 $(-1, 0, 4)$, 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

解 过点 $(-1, 0, 4)$, 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$ 的平面的方程为

$$3(x+1)-4(y-0)+(z-4)=0, \quad \text{即 } 3x-4y+z-1=0.$$

将直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 化为参数方程 $x=-1+t, y=3+t, z=2t$, 代入平面方程 $3x-4y+z-1=0$,

得

$$3(-1+t)-4(3+t)+2t-1=0,$$

解得 $t=16$. 于是平面 $3x-4y+z-1=0$ 与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 的交点的坐标为 $(15, 19, 32)$, 这也

是所求直线与已知直线的交点的坐标.

所求直线的方向向量为

$$s=(15, 19, 32)-(-1, 0, 4)=(16, 19, 28),$$

所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

18. 已知点 $A(1, 0, 0)$ 及点 $B(0, 2, 1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

解 设所求的点为 $C(0, 0, z)$, 则 $\vec{AC}=(-1, 0, z)$, $\vec{BC}=(0, -2, z-1)$.

$$\text{因为 } \vec{AC} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & z \\ 0 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 2zi + (z-1)j + 2k,$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4z^2 + (z-1)^2 + 4}.$$

$$\text{令 } \frac{dS}{dz} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8z + 2(z-1)}{\sqrt{4z^2 + (z-1)^2 + 4}} = 0, \text{ 得 } z = \frac{1}{5}, \text{ 所求点为 } C(0, 0, \frac{1}{5}).$$

19. 求曲线 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x^2 + y^2 = x + y \\ z = 0 \end{cases}.$$

在 zOx 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} z = (x-1)^2 + (\pm\sqrt{2-x^2-z}-1)^2 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

在 yOz 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} z = (\pm\sqrt{2-y^2-z}-1)^2 + (y-1)^2 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2y^2 + 2yz + z^2 - 4y - 3z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

20. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 锥面与柱面交线在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} 2x = x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases},$$

所以, 立体在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}.$

锥面与柱面交线在 yOz 面上的投影为

$$\begin{cases} z = \sqrt{(\frac{1}{2}z^2)^2 + y^2} \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (\frac{z^2}{2} - 2)^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases},$$

所以, 立体在 yOz 面上的投影为 $\begin{cases} (\frac{z^2}{2} - 2)^2 + y^2 \leq 1 \\ x = 0 \end{cases}.$

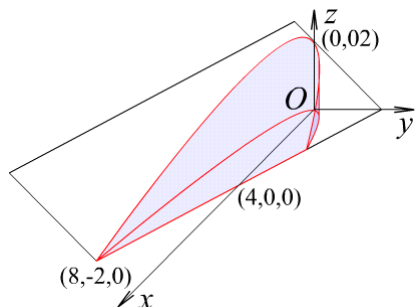
锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 与平面 $y=0$ 的交线为

$$\begin{cases} z = |x| \\ y = 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} z = \sqrt{2x} \\ y = 0 \end{cases},$$

所以, 立体在 zOx 面上的投影为

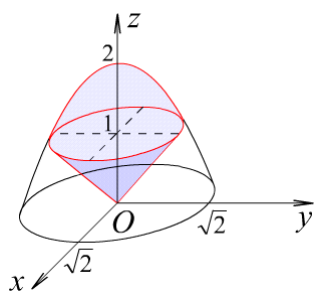
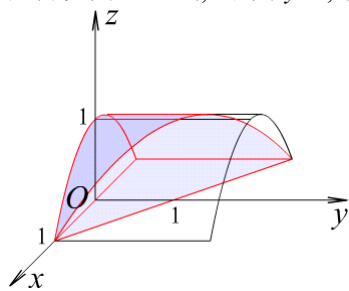
$$\begin{cases} x \leq z \leq \sqrt{2x} \\ y=0 \end{cases}.$$

21. 画出下列各曲面所围立体的图形:



(1) 抛物柱面 $2y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}=1$;

(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$, 平面 $y=0$, $z=0$ 及 $x+y=1$;



(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$;

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$, 柱面 $y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $x=1$.

习题 8-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

$$(1)\{(x, y)|x \neq 0, y \neq 0\};$$

解 开集, 无界集, 导集为 \mathbf{R}^2 , 边界为 $\{(x, y)|x=0 \text{ 或 } y=0\}$.

$$(2)\{(x, y)|1 < x^2 + y^2 \leq 4\};$$

解 既非开集, 又非闭集, 有界集, 导集为 $\{(x, y)|1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 边界为 $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1 \text{ 或 } x^2 + y^2 = 4\}$.

$$(3)\{(x, y)|y > x^2\};$$

解 开集, 区域, 无界集, 导集为 $\{(x, y)|y \geq x^2\}$, 边界为 $\{(x, y)|y = x^2\}$.

$$(4)\{(x, y)|x^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x, y)|x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}.$$

解 闭集, 有界集, 导集与集合本身相同, 边界为 $\{(x, y)|x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y)|x^2 + (y-2)^2 = 4\}$.

2. 已知函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 试求 $f(tx, ty)$.

$$\text{解 } f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx) \cdot (ty) \cdot \left(\tan \frac{tx}{ty}\right)$$

$$= t^2 \left(x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y} \right) = t^2 f(x, y).$$

3. 试证函数 $F(x, y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式:

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

证明 $F(xy, uv) = \ln((x, y) \cdot \ln(uv))$

$$= (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v)$$

$$= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v$$

$$= F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

4. 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

$$\text{解 } f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} \\ = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$$

5. 求下列各函数的定义域:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1);$$

解 要使函数有意义, 必须 $y^2-2x+1>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)|y^2-2x+1>0\}$.

$$(2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}};$$

解 要使函数有意义, 必须 $x+y>0, x-y>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)|x+y>0, x-y>0\}$.

$$(3) z = \sqrt{x-\sqrt{y}};$$

解 要使函数有意义, 必须 $y\geq 0, x-\sqrt{y}\geq 0$ 即 $x\geq \sqrt{y}$, 于是有 $x\geq 0$ 且 $x^2\geq y$,
故函数定义域为 $D=\{(x, y)|x\geq 0, y\geq 0, x^2\geq y\}$.

$$(4) z = \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}};$$

解 要使函数有意义, 必须 $y-x>0, x\geq 0, 1-x^2-y^2>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y)|y-x>0, x\geq 0, x^2+y^2<1\}$.

$$(5) u = \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}} \quad (R>r>0);$$

解 要使函数有意义, 必须 $R^2-x^2-y^2-z^2\geq 0$ 且 $x^2+y^2+z^2-r^2>0$,
故函数的定义域为 $D=\{(x, y, z)|r^2<x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$.

$$(6) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

解 要使函数有意义, 必须 $x^2+y^2\neq 0$, 且 $|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}|\leq 1$ 即 $z^2\leq x^2+y^2$,

故函数定义域为 $D=\{(x, y, z)|z^2\leq x^2+y^2, x^2+y^2\neq 0\}$.

6. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{(x,y)\rightarrow(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2};$$

$$\text{解} \quad \lim_{(x,y)\rightarrow(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}} = \ln 2.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{(2+\sqrt{xy+4})} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2. \end{aligned}$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(xy)}{y};$$

$$\text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2.$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{e^{x^2y^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1} = 0. \end{aligned}$$

7. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y};$$

证明 如果动点 $p(x, y)$ 沿 $y=0$ 趋向 $(0, 0)$,

$$\text{则} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1;$$

如果动点 $p(x, y)$ 沿 $x=0$ 趋向 $(0, 0)$,

$$\text{则} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-y} = -1.$$

因此, 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在.

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

证明 如果动点 $p(x, y)$ 沿 $y=x$ 趋于 $(0, 0)$,

$$\text{则} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1;$$

如果动点 $p(x, y)$ 沿 $y=2x$ 趋向 $(0, 0)$,

$$\text{则} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=2x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4}{4x^4 + x^2} = 0.$$

因此, 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ 不存在.

8. 函数 $z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 在何处间断?

解 因为当 $y^2 - 2x = 0$ 时, 函数无意义,

所以在 $y^2 - 2x = 0$ 处, 函数 $z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 间断.

$$9. \text{ 证明 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

证明 因为 $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$

所以 $0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0.$

因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

证明 因为 $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, 故 $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| = \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon$, 当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时恒有

$$|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon,$$

所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

10. 设 $F(x, y) = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续, 证明: 对任意 $y_0 \in \mathbf{R}$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

证明 由题设知, $f(x)$ 在 x_0 处连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

作 (x_0, y_0) 的邻域 $U((x_0, y_0), \delta)$, 显然当 $(x, y) \in U((x_0, y_0), \delta)$ 时, $|x - x_0| < \delta$, 从而

$$|F(x, y) - F(x_0, y_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

所以 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

又因为 y_0 是任意的, 所以对任意 $y_0 \in \mathbf{R}$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

习题 8-2

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^3y - y^3x;$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2.$$

$$(2) s = \frac{u^2 + v^2}{uv};$$

$$\text{解 } \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right) = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right) = -\frac{u}{v^2} + \frac{1}{u}.$$

$$(3) z = \sqrt{\ln(xy)};$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\ln x + \ln y}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln x + \ln y}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}.$$

$$\text{同理 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

$$(4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy);$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot y = y[\cos(xy) - \sin(2xy)]$$

根据对称性可知

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x[\cos(xy) - \sin(2xy)].$$

$$(5) z = \ln \tan \frac{x}{y};$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y}.$$

$$(6) z = (1+xy)^y;$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = y(1+xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1+xy)^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \ln(1+xy)} = e^{y \ln(1+xy)} [\ln(1+xy) + y \cdot \frac{x}{1+xy}]$$

$$=(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}].$$

$$(7) u=x^{\frac{y}{z}};$$

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\ln x \cdot \frac{1}{z}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\ln x(-\frac{y}{z^2})=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}} \cdot \ln x.$$

$$(8) u=\arctan(x-y)^z;$$

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

$$2. \text{ 设 } T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ 试证 } l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0.$$

$$\text{解 因为 } \frac{\partial T}{\partial l}=\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{g \cdot l}}, \quad \frac{\partial T}{\partial g}=2\pi \cdot \sqrt{l}(-\frac{1}{2}) \cdot g^{-\frac{3}{2}}=-\pi \cdot \frac{\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}, \text{ 所以}$$

$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}-\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}=0.$$

$$3. \text{ 设 } z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}, \text{ 求证 } x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

$$\text{解 因为 } \frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y^2}, \text{ 所以}$$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z$$

$$4. \text{ 设 } f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ 求 } f_x(x,1).$$

解 因为 $f(x, 1) = x + (1-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1}} = x$, 所以 $f_x(x, 1) = \frac{d}{dx}f(x, 1) = 1$.

5. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与正向 x 轴所成的倾角是多少?

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,4,5)} = 1 = \tan \alpha,$$

$$\text{故 } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

6. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$(1) z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2;$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4y^3 - 8x^2y) = -16xy.$$

$$(2) z = \arctan \frac{y}{x};$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$(3) z = y^x.$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \ln^2 y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^x \ln y) = xy^{x-1} \ln y + y^x \cdot \frac{1}{y} = y^{x-1}(x \ln y + 1).$$

7. 设 $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$, 求 $f_{xx}(0, 0, 1), f_{xz}(1, 0, 2), f_{yz}(0, -1, 0)$ 及 $f_{zzx}(2, 0, 1)$.

解 因为 $f_x = y^2 + 2xz, f_{xx} = 2z, f_{xz} = 2x,$

$$f_y = 2xy + z^2, f_{yz} = 2z,$$

$$f_z = 2yz + x^2, f_{zz} = 2y, f_{zxx} = 0,$$

所以 $f_{xx}(0, 0, 1) = 2, f_{xz}(1, 0, 2) = 2,$

$$f_{yz}(0, -1, 0) = 0, f_{zzx}(2, 0, 1) = 0.$$

8. 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

(1) $y = e^{-kn^2 t} \sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

证明 因为 $\frac{\partial y}{\partial t} = e^{-kn^2 t} \cdot \sin nx \cdot (-kn^2) = -kn^2 e^{-kn^2 t} \cdot \sin nx,$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ne^{-kn^2 t} \cos nx, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -n^2 e^{-kn^2 t} \sin nx,$$

$$k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -kn^2 e^{-kn^2 t} \sin nx,$$

所以 $\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$

证明 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$,

由对称性知

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2-y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2-z^2}{r^3},$$

因此
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} &= \frac{r^2-x^2}{r^3} + \frac{r^2-y^2}{r^3} + \frac{r^2-z^2}{r^3} \\ &= \frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3} = \frac{3r^2-r^2}{r^3} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

习题 8-3

1. 求下列函数的全微分:

$$(1) z = xy + \frac{x}{y};$$

$$\text{解 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (y + \frac{1}{y})dx + (x - \frac{x}{y^2})dy.$$

$$(2) z = e^{\frac{y}{x}};$$

$$\text{解 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} dx + \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} dy.$$

$$(3) z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{解 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} y (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\text{所以 } dz = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (ydx - xdy).$$

$$(4) u = x^{yz}.$$

$$\text{解 因为 } \frac{\partial u}{\partial x} = yz \cdot x^{yz-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx^{yz} \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = yx^{yz} \ln x,$$

$$\text{所以 } du = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz$$

2. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x=1, y=2$ 时的全微分.

$$\text{解 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1, y=2} = \frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=1, y=2} = \frac{2}{3},$$

所以 $dz\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy$.

3. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 因为 $\Delta z = \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} - \frac{y}{x}$, $dz = -\frac{y}{x^2}\Delta x + \frac{1}{x}\Delta y$,

所以, 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时,

$$\Delta z = \frac{1+(-0.2)}{2+0.1} - \frac{1}{2} = -0.119,$$

$$dz = -\frac{1}{4} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times (-0.2) = -0.125.$$

4. 求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时的全微分.

解 因为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = ye^{xy}\Delta x + xe^{xy}\Delta y$

所以, 当 $x=1, y=1, \Delta x=0.15, \Delta y=0.1$ 时,

$$dz = e \cdot 0.15 + e \cdot 0.1 = 0.25e$$

*5. 计算 $\sqrt{(102)^3 + (1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z = \sqrt{x^3 + y^3}$, 由于

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3 + (y+\Delta y)^3} \approx \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3x^2\Delta x + 3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3 + y^3}},$$

所以取 $x=1, y=2, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.03$ 可得

$$\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx \sqrt{1+2^3} + \frac{3 \cdot 0.02 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}} = 2.95.$$

*6. 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值 ($\ln 2 = 0.693$).

解 设 $z = x^y$, 由于

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y,$$

所以取 $x=2, y=1, \Delta x=-0.03, \Delta y=0.05$ 可得

$$(1.97)^{1.05} \approx 2 - 0.03 + 2\ln 2 \cdot 0.05 + 1.97 + 0.0693 \approx 2.093.$$

*7. 已知边长为 $x=6\text{m}$ 与 $y=8\text{m}$ 的矩形, 如果 x 边增加 5cm 而 y 边减少 10cm ,

问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\Delta z \approx dz = \frac{dz}{dx} \Delta x + \frac{dz}{dy} \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x\Delta x + y\Delta y),$$

当 $x=6, y=8, \Delta x=0.05, \Delta y=-0.1$ 时,

$$\Delta z \approx \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}} (6 \cdot 0.05 - 8 \cdot 0.1) = -0.05.$$

这个矩形的对角线大约减少 5cm.

*8. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1cm, 内高为 20cm, 内半径为 4 厘米, 求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为 $V=\pi R^2 h$,

$$\Delta V \approx dV = 2\pi R h \Delta R + \pi R^2 \Delta h,$$

当 $R=4, h=20, \Delta R=\Delta h=0.1$ 时,

$$\Delta V \approx 2 \times 3.14 \times 4 \times 20 \times 0.1 + 3.14 \times 4^2 \times 0.1 \approx 55.3 (\text{cm}^3)$$

这个容器外壳的体积大约是 55.3cm^3 .

*9. 设有直角三角形, 测得其两腰的长分别为 $7 \pm 0.1 \text{cm}$ 和 $24 \pm 0.1 \text{cm}$, 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边的长度分别为 x 和 y , 则斜边的长度为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|\Delta z| \approx |dz| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} (x|\Delta x| + y|\Delta y|).$$

令 $x=7, y=24, |\Delta x| \leq 0.1, |\Delta y| \leq 0.1$, 则得斜边长度 z 的绝对误差约为

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}} (7 \cdot 0.1 + 24 \cdot 0.1) = 0.124 \text{ cm}.$$

*10. 测得一块三角形土地的两边长分别为 $63 \pm 0.1 \text{m}$ 和 $78 \pm 0.1 \text{m}$, 这两边的夹角为 $60^\circ \pm 1^\circ$, 试求三角形面积的近似值, 并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长为 x 和 y , 它们的夹角 z , 为则三角形面积为 $s = \frac{1}{2} xy \sin z$.

$$dS = \frac{1}{2} y \sin z dx + \frac{1}{2} x \sin z dy + \frac{1}{2} xy \cos z dz$$

$$|\Delta S| \approx |dS| \leq \frac{1}{2} y \sin z |dx| + \frac{1}{2} x \sin z |dy| + \frac{1}{2} xy \cos z |dz|.$$

令 $x=63, y=78, z=\frac{\pi}{3}, |dx|=0.1, |dy|=0.1, dz=\frac{\pi}{180}$, 则

$$\delta s \approx \frac{78}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{63}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \frac{63 \times 78}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{180} = 27.55,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 78 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2127.82,$$

$$\frac{\delta s}{S} = \frac{27.55}{2127.82} = 1.29\%, \text{ 所以三角形面积的近似值为 } 2127.82 \text{ m}^2, \text{ 绝对误差为}$$

27.55 m^2 , 相对误差为 1.29% .

*11. 利用全微分证明: 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

证明 设 $u=x+y$, 则

$$|\Delta u| \approx |du| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right| = |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|.$$

所以两数之和的绝对误差 $|\Delta u|$ 等于它们各自的绝对误差 $|\Delta x|$ 与 $|\Delta y|$ 的和.

*12. 利用全微分证明: 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和; 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

证明 设 $u=xy, v=\frac{x}{y}$, 则 $\Delta u \approx du = ydx + xdy$,

$$\Delta v \approx dv = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

由此可得相对误差;

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right| \approx \left| \frac{du}{u} \right| = \left| \frac{ydx + xdy}{xy} \right| = \left| \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \right| \leq \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|;$$

$$\left| \frac{\Delta v}{v} \right| = \left| \frac{dv}{v} \right| = \left| \frac{ydx - xdy}{y^2 \cdot \frac{x}{y}} \right| = \left| \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right| \leq \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|.$$

习题 8-4

1. 设 $z=u^2-v^2$, 而 $u=x+y, v=x-y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot 1 = 2(u+v) = 4x, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot (-1) = 2(u-v) = 4y.\end{aligned}$$

2. 设 $z=u^2 \ln v$, 而 $u=\frac{x}{y}, v=3x-2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3 = \frac{2x}{y^2} \ln(3x-2y) + \frac{3x^2}{(3x-2y)y^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2) = -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.\end{aligned}$$

3. 设 $z=e^{x-2y}$, 而 $x=\sin t, y=t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cos t + e^{x-2y} \cdot (-2) \cdot 3t^2 \\ &= e^{x-2y} (\cos t - 6t^2) = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).\end{aligned}$$

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$, 而 $x+3t, y=4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 3 + \frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 12t^2 \\ &= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.\end{aligned}$$

5. 设 $z=\arctan(xy)$, 而 $y=e^x$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

$$\text{解 } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2 y^2} + \frac{x}{1+x^2 y^2} \cdot e^x = \frac{e^x(1+x)}{1+x^2 e^{2x}}.$$

6. 设 $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y = a \sin x, z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1} + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot a \cos x - \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot (-\sin x) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a^2 \sin x - a \cos x + a \cos x + \sin x) = e^{ax} \sin x. \end{aligned}$$

7. 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 而 $x = u+v, y = u-v$, 验证 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$.

$$\begin{aligned} \text{证明 } \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot (-1) \\ &= \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{u-v}{u^2+v^2}. \end{aligned}$$

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

(1) $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$;

解 将两个中间变量按顺序编为 1, 2 号,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} + f'_2 \cdot \frac{\partial(e^{xy})}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} + f'_2 \cdot \frac{\partial(e^{xy})}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2.$$

(2) $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$;

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{1}{y}f'_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}\right) = -\frac{x}{y^2}f'_1 + \frac{1}{z}f'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{y}\right) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right) = -\frac{y}{z^2}f'_2.$$

(3) $u = f(x, xy, xyz)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz = xf'_2 + xzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'_3 \cdot xy = xyf'_3.$$

9. 设 $z=xy+xF(u)$, 而 $u=\frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明 $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

证明 $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x[y + F(u) + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial x}] + y[x + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial y}]$

$$= x[y + F(u) - \frac{y}{x} F'(u)] + y[x + F'(u)]$$

$$= xy + xF(u) + xy = z + xy.$$

10. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证 $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

证明 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y \cdot f' \cdot 2x}{f^2(u)} = \frac{-2xyf'}{f^2(u)},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) - y \cdot f' \cdot (-2y)}{f^2(u)} = \frac{1}{f(u)} + \frac{-2y^2 f'}{f^2(u)},$$

所以 $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yf'}{f^2 u} + \frac{2yf'}{f^2 u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{f(u)} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{z}{y^2}.$

11. 设 $z=f(x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$, 则 $z=f(u)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2yf',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2f' + 4x^2 f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 2yf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2f' + 4yf''.$$

12. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数):

(1) $z=f(xy, y)$;

解 令 $u=xy$, $v=y$, 则 $z=f(u, v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 0 = y \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1 = x \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

因为 $f(u, v)$ 是 u 和 v 的函数, 所以 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 也是 u 和 v 的函数, 从而 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 是以 u 和 v 为中间变量的 x 和 y 的函数.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial f}{\partial u} \right) = y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \\ &= y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 0 \right) = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial f}{\partial u} \right) = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} + y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} + y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 1 \right) = \frac{\partial f}{\partial u} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 1 \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot 1$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

$$(2) z=f(x, \frac{x}{y});$$

解 令 $u=x$, $v=\frac{x}{y}$, 则 $z=f(u, v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}.$$

因为 $f(u, v)$ 是 u 和 v 的函数, 所以 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 也是 u 和 v 的函数, 从而 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}$ 是以 u 和 v 为中间变量的 x 和 y 的函数.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u})+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{1}{y}(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{2}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial u})+\frac{d}{dy}(\frac{1}{y})\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^3}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{x}{y^2})\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$= \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{y^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{x^2}{y^4} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

(3) $z=f(xy^2, x^2y)$;

解 $z_x=f_1' \cdot y^2+f_2' \cdot 2xy=y^2 f_1'+2xy f_2'$,

$$z_y=f_1' \cdot 2xy+f_2' \cdot x^2=2xy f_1'+x^2 f_2';$$

$$z_{xx}=y^2[f_{11}'' \cdot y^2+f_{12}'' \cdot 2xy]+2y f_2''+2xy[f_{21}'' \cdot y^2+f_{22}'' \cdot 2xy]$$

$$=y^4 f_{11}''+2xy^3 f_{12}''+2y f_2''+2xy^3 f_{21}''+4x^2 y^2 f_{22}''$$

$$=y^4 f_{11}''+4xy^3 f_{12}''+2y f_2''+4x^2 y^2 f_{22}'' ,$$

$$z_{xy}=2y f_1'+y^2[f_{11}'' \cdot 2xy+f_{12}'' \cdot x^2]+2x f_2'+2xy[f_{21}'' \cdot 2xy+f_{22}'' \cdot x^2]$$

$$=2y f_1'+2xy^3 f_{11}''+x^2 y^2 f_{12}''+2x f_2'+4x^2 y^2 f_{21}''+2x^3 y f_{22}''$$

$$=2y f_1'+2xy^3 f_{11}''+5x^2 y^2 f_{12}''+2x f_2'+2x^3 y f_{22}'' ,$$

$$z_{yy}=2x f_1'+2xy[f_{11}'' \cdot 2xy+f_{12}'' \cdot x^2]+x^2[f_{21}'' \cdot 2xy+f_{22}'' \cdot x^2]$$

$$=2x f_1'+4x^2 y^2 f_{11}''+2x^3 y f_{12}''+2x^3 y f_{21}''+x^4 f_{22}''$$

$$=2x f_1'+4x^2 y^2 f_{11}''+4x^3 y f_{12}''+x^4 f_{22}''.$$

(4) $z=f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$.

解 $z_x=f_1' \cdot \cos x+f_3' \cdot e^{x+y}=\cos x f_1'+e^{x+y} f_3'$,

$$z_y=f_2' \cdot (-\sin y)+f_3' \cdot e^{x+y}=-\sin y f_2'+e^{x+y} f_3' ,$$

$$z_{xx}=-\sin x f_1'+\cos x \cdot (f_{11}'' \cdot \cos x+f_{13}'' \cdot e^{x+y})+e^{x+y} f_3'+e^{x+y}(f_{31}'' \cdot \cos x+f_{33}'' \cdot e^{x+y})$$

$$=-\sin x f_1'+\cos^2 x f_{11}''+e^{x+y} \cos x f_{13}''+e^{x+y} f_3'+e^{x+y} \cos x f_{31}''+e^{2(x+y)} f_{33}''$$

$$=-\sin x f_1'+\cos^2 x f_{11}''+2e^{x+y} \cos x f_{13}''+e^{x+y} f_3'+e^{2(x+y)} f_{33}'' ,$$

$$z_{xy}=\cos x[f_{12}'' \cdot (-\sin y)+f_{13}'' \cdot e^{x+y}]+e^{x+y} f_3'+e^{x+y}[f_{32}'' \cdot (-\sin y)+f_{33}'' \cdot e^{x+y}]$$

$$=-\sin y \cos x f_{12}''+e^{x+y} \cos x f_{13}''+e^{x+y} f_3'-e^{x+y} \sin y f_{32}''+e^{2(x+y)} f_{33}''$$

$$=-\sin y \cos x f_{12}''+e^{x+y} \cos x f_{13}''+e^{x+y} f_3'-e^{x+y} \sin y f_{32}''+e^{2(x+y)} f_{33}'' ,$$

$$z_{yy}=-\cos y f_2'-\sin y[f_{22}'' \cdot (-\sin y)+f_{23}'' \cdot e^{x+y}]+e^{x+y} f_3'+e^{x+y}[f_{32}'' \cdot (-\sin y)+f_{33}'' \cdot e^{x+y}]$$

$$=-\cos y f_2'+\sin^2 y f_{22}''-e^{x+y} \sin y f_{23}''+e^{x+y} f_3'-e^{x+y} \sin y f_{32}''+f_{33}'' \cdot e^{2(x+y)}$$

$$=-\cos y f_2'+\sin^2 y f_{22}''-2e^{x+y} \sin y f_{23}''+e^{x+y} f_3'+f_{33}'' \cdot e^{2(x+y)}.$$

13. 设 $u=f(x, y)$ 的所有二阶偏导数连续, 而 $x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2}$,

证明 $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial s})^2+(\frac{\partial u}{\partial t})^2$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

证明 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

习题 8-5

1. 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$, 则 $F_x = e^x - y^2$, $F_y = \cos y - 2xy$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy} = \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}.$$

2. 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$, 则

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2}) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y - x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{x + y}{x - y}.$$

3. 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = x + 2y + z - 2\sqrt{xyz}$, 则

$$F_x = 1 - \frac{yz}{\sqrt{xyz}}, \quad F_y = 2 - \frac{xz}{\sqrt{xyz}}, \quad F_z = 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

4. 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$,

解 令 $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$F_x = \frac{1}{z}, \quad F_y = -\frac{1}{\frac{z}{y}} \cdot (-\frac{z}{y^2}) = \frac{1}{y}, \quad F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{\frac{z}{y}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x + z}{z^2},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{z^2}{y(x+z)}.$

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

证明 设 $F(x, y, z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z$, 则

$$F_x = 2\cos(x+2y-3z) - 1,$$

$$F_y = 2\cos(x+2y-3z) \cdot 2 - 2 = 2F_x,$$

$$F_z = 2\cos(x+2y-3z) \cdot (-3) + 3 = -3F_x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_x}{-3F_x} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2F_x}{-3F_x} = \frac{2}{3},$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$

6. 设 $x=x(y, z), y=y(x, z), z=z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数, 证明 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$

解 因为

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},$$

所以 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \cdot \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$

7. 设 $\varphi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\varphi(cx-az, cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x, y)$ 满足

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

证明 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi_u \cdot c}{-\varphi_u \cdot a - \varphi_v \cdot b} = \frac{c \varphi_u}{a \varphi_u + b \varphi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi_v \cdot c}{-\varphi_u \cdot a - \varphi_v \cdot b} = \frac{c \varphi_v}{a \varphi_u + b \varphi_v},$$

所以 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{c \varphi_u}{a \varphi_u + b \varphi_v} + b \frac{c \varphi_v}{a \varphi_u + b \varphi_v} = c$.

8. 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x, y, z) = e^z - xyz$, 则

$$F_x = -yz, F_z = e^z - xy, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} (e^z - xy) - yz (e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y)}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{y^2 z + (ye^z - xy^2 - yze^z) \frac{yz}{e^z - xy}}{(e^z - xy)^2} = \frac{2y^2 ze^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

9. 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz}{z^2 - xy} \right)$$

$$= \frac{(z + y \frac{\partial z}{\partial y})(z^2 - xy) - yz(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{(z + y \frac{xz}{z^2 - xy}) \cdot (z^2 - xy) - yz(2z \frac{xz}{z^2 - xy} - x)}{(z^2 - xy)^2}$$

$$= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2 y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$;

解 视 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 方程两边对 x 求导得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx} \\ 2x+4y\frac{dy}{dx}+6z\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2y\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=-2x \\ 2y\frac{dy}{dx}+3z\frac{dz}{dx}=-x \end{cases}.$$

解方程组得

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{x}{3z+1}.$$

(2) 设 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$, 求 $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$;

解 视 $x=x(z)$, $y=y(z)$, 方程两边对 z 求导得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0 \\ 2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}+2z=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}=-1 \\ 2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}=-2z \end{cases}.$$

解方程组得

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{y-z}{x-y}, \quad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{z-x}{x-y}.$$

(3) 设 $\begin{cases} u=f(ux, v+y) \\ v=g(u-x, v^2y) \end{cases}$, 其中 f, g 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$;

解 视 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, 方程两边对 x 求偏导得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=f'_1(u+x\frac{\partial u}{\partial x})+f'_2\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=g'_1(\frac{\partial u}{\partial x}-1)+2g'_2\cdot yv\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (xf'_1-1)\frac{\partial u}{\partial x}+f'_2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-uf'_1 \\ g'_1\frac{\partial u}{\partial x}+(2yvg'_2-1)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=g'_1 \end{cases}.$$

解之得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-uf'_1(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g'_1(xf'_1+uf'_1-1)}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}.$$

(4) 设 $\begin{cases} x=e^u+u\sin v \\ y=e^u-u\cos v \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解 视 $u=u(x, y), v=v(x, y)$, 方程两边微分得

$$\begin{cases} dx=e^u du+\sin v du+u\cos v dv \\ dy=e^u du-\cos v du+u\sin v dv \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (e^u+\sin v)du+u\cos v dv=dx \\ (e^u-\cos v)du+u\sin v dv=dy \end{cases},$$

从中解出 du, dv 得

$$du=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}dx+\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}dy,$$

$$dv=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}dx+\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}dy,$$

从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin v+e^u}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

11. 设 $y=f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t)=0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数, 试证明:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证明 由方程组 $\begin{cases} y=f(x, t) \\ F(x, y, t)=0 \end{cases}$ 可确定两个一元隐函数 $\begin{cases} y=y(x) \\ t=t(x) \end{cases}$, 方

程两边对 x 求导可得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx} \\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dx}=0 \end{cases},$$

移项得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \end{cases},$$

$$\text{在 } D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \text{ 的条件下}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

习题 8-6

1. 求曲线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切线及法平面方程.

解 $x'(t)=1-\cos t$, $y'(t)=\sin t$, $z'(t)=2\cos\frac{t}{2}$.

因为点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 所对应的参数为 $t=\frac{\pi}{2}$, 故在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处的切向量为 $\mathbf{T}=(1, 1, \sqrt{2})$.

因此在点 $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ 处, 切线方程为

$$\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1 \cdot (x - \frac{\pi}{2} + 1) + 1 \cdot (y - 1) + \sqrt{2} \cdot (z - 2\sqrt{2}) = 0, \text{ 即 } x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4.$$

2. 求曲线 $x=\frac{t}{1+t}$, $y=\frac{1+t}{t}$, $z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的切线及法平面方程.

解 $x'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}$, $y'(t)=-\frac{1}{t^2}$, $z'(t)=2t$.

在 $t=1$ 所对应的点处, 切向量 $\mathbf{T}=(\frac{1}{4}, -1, 2)$, $t=1$ 所对应的点为 $(\frac{1}{2}, 2, 1)$, 所以在 $t=1$ 所对应的点处, 切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}, \text{ 即 } \frac{x-\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{8};$$

法平面方程为

$$\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}) - (y-2) + 2(z-1) = 0, \text{ 即 } 2x-8y+16z-1=0.$$

3. 求曲线 $y^2=2mx$, $z^2=m-x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程的参数为 x , 将方程 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 的两边对 x 求导, 得

$$2y \frac{dy}{dx} = 2m, \quad 2z \frac{dz}{dx} = -1,$$

所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2z}.$

曲线在点 (x_0, y_0, z_0) 的切向量为 $\mathbf{T} = (1, \frac{m}{y_0}, -\frac{1}{2z_0})$, 所求的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}} = \frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}},$$

法平面方程为

$$(x-x_0) + \frac{m}{y_0}(y-y_0) - \frac{1}{2z_0}(z-z_0) = 0.$$

4. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程的参数为 x , 对 x 求导得,

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} - 3 = 0 \\ 2 - 3 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = -2x + 3 \\ 3 \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dz}{dx} = 2 \end{cases}.$$

解此方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x - 4z - 15}{-10y - 6z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{6x + 4y - 9}{-10y - 6z}.$$

因为 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1,1)} = \frac{9}{16}, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{16}$, 所以 $\mathbf{T} = (1, \frac{9}{16}, \frac{1}{16})$.

所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\frac{9}{16}} = \frac{z-1}{-\frac{1}{16}}, \quad \text{即} \quad \frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$(x-1) + \frac{9}{16}(y-1) - \frac{1}{16}(z-1) = 0, \quad \text{即} \quad 16x + 9y - z - 24 = 0.$$

5. 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点, 使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 已知平面的法线向量为 $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$.

因为 $x'=1, y'=2t, z'=3t^2$, 所以参数 t 对应的点处的切向量为 $\mathbf{T} = (1, 2t, 3t^2)$.

又因为切线与已知平面平行, 所以

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ 即 } 1+4t+3t^2=0,$$

解得 $t=-1$, $t=-\frac{1}{3}$. 于是所求点的坐标为 $(-1, 1, -1)$ 和 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$.

6. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = e^z - z + xy - 3$, 则

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z)|_{(2, 1, 0)} = (y, x, e^z - 1)|_{(2, 1, 0)} = (1, 2, 0),$$

点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为

$$1 \cdot (x-2) + 2(y-1) + 0 \cdot (z-0) = 0, \text{ 即 } x+2y-4=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{0}.$$

7. 求曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$, 则

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2ax, 2by, 2cz) = (ax, by, cz).$$

在点 (x_0, y_0, z_0) 处, 法向量为 (ax_0, by_0, cz_0) , 故切平面方程为

$$ax_0(x-x_0) + by_0(y-y_0) + cz_0(z-z_0) = 0,$$

即 $ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2,$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}.$$

8. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x, y, z)=x^2+2y^2+z^2-1$, 则

$$\mathbf{n}=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 4y, 2z)=2(x, 2y, z).$$

已知切平面的法向量为 $(1, -1, 2)$. 因为已知平面与所求切平面平行, 所以

$$\frac{x}{1}=\frac{2y}{-1}=\frac{z}{2}, \text{ 即 } x=\frac{1}{2}z, \quad y=-\frac{1}{4}z,$$

代入椭球面方程得

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\left(-\frac{z}{4}\right)^2+z^2=1,$$

$$\text{解得 } z=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}, \text{ 则 } x=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}, \quad y=\mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

$$\text{所以切点坐标为 } \left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

所求切平面方程为

$$(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}})-(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}})+2(z\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}})=0,$$

$$\text{即 } x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

9. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 xOy 面的法向量为 $\mathbf{n}_1=(0, 0, 1)$.

令 $F(x, y, z)=3x^2+y^2+z^2-16$, 则点 $(-1, -2, 3)$ 处的法向量为

$$\mathbf{n}_2=(F_x, F_y, F_z)|_{(-1, -2, 3)}=(6x, 2y, 2z)|_{(-1, -2, 3)}=(-6, -4, 6).$$

点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+4^2+6^2}}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

10. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ ($a>0$) 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

证明 设 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$, 则 $\boldsymbol{n} = (\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}})$.

在曲面上任取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0) = 0,$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}.$$

化为截距式, 得
$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a.$$

习题 8-7

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处沿从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数

解 因为从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2+\sqrt{3})$ 的向量为 $\boldsymbol{l}=(1, \sqrt{3})$, 故

$$\boldsymbol{e}_l = \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta).$$

又因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2x|_{(1,2)} = 2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 2y|_{(1,2)} = 4,$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1, 2)$ 处, 沿这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解 方程 $y^2=4x$ 两边对 x 求导得 $2yy'=4$, 解得 $y'=\frac{2}{y}$.

在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1, 2)$ 处, 切线的斜率为 $y'(1)=1$, 切向量为 $\boldsymbol{l}=(1, 1)$, 单位切向量为 $\boldsymbol{e}_l = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

又因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{x+y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{x+y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3},$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法

线方向的方向导数.

解 令 $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, 则 $F_x = \frac{2x}{a^2}$, $F_y = \frac{2y}{b^2}$.

从而点 (x, y) 处的法向量为

$$\mathbf{n} = \pm(F_x, F_y) = \pm\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right).$$

在 $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ 处的内法向量为

$$\mathbf{n} = -\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{b}\right),$$

单位内法向量为

$$\mathbf{e}_n = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta).$$

又因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = \frac{2x}{a^2}\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = \frac{2y}{b^2}\bigg|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{b},$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\sqrt{2}}{b} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{ab} \sqrt{a^2+b^2}.$$

4. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$

的方向的方向导数.

解 因为方向向量为 $\mathbf{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, 又因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(1,1,2)} = (y^2 - yz)\bigg|_{(1,1,2)} = -1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(1,1,2)} = (2xy - xz)\bigg|_{(1,1,2)} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(1,1,2)} = (3z^2 - xy)\bigg|_{(1,1,2)} = 11,$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 11 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

5. 求函数 $u=xyz$ 在点(5,1,2)处沿从点(5, 1, 2)到点(9, 4, 14)的方向的方向导数.

解 因为 $\mathbf{l}=(9-5, 4-1, 14-2)=(4, 3, 12)$, $\mathbf{e}_l=\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}=(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13})$, 并且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)}=yz|_{(5,1,2)}=2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)}=xz|_{(5,1,2)}=10, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)}=xy|_{(5,1,2)}=5,$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=2\cdot\frac{4}{13}+10\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1, 1, 1)处, 沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导.

解 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1, 1, 1)对应的参数为 $t=1$, 在点(1, 1, 1)的切线正方向为

$$\mathbf{l}=(1, 2t, 3t^2)|_{t=1}=(1, 2, 3), \quad \mathbf{e}_l=\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}=(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}),$$

又 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2x|_{(1,1,1)}=2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2y|_{(1,1,1)}=2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2z|_{(1,1,1)}=2,$

所以 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{(1,1,1)}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}.$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-1$, 则球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的外法向量为

$$\mathbf{n}=(F_x, F_y, F_z)|_{(x_0, y_0, z_0)}=(2x_0, 2y_0, 2z_0),$$

$$\mathbf{e}_n=\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=(x_0, y_0, z_0)=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

又 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1,$

所以 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=1\cdot x_0+1\cdot y_0+1\cdot z_0=x_0+y_0+z_0.$

8. 设 $f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$, 求 $\text{grad } f(0, 0, 0)$ 及 $\text{grad } f(1, 1, 1)$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+3, \frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-2, \frac{\partial f}{\partial z}=6z-6.$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,0,0)}=3, \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,0,0)}=-2, \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{(0,0,0)}=-6,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,1,1)}=6, \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,1,1)}=3, \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{(0,1,1)}=0,$$

所以 $\text{grad } f(0, 0, 0)=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k},$

$$\text{grad } f(1, 1, 1)=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}.$$

9. 设 u, v 都是 x, y, z 的函数, u, v 的各偏导数都存在且连续, 证明

(1) $\text{grad}(u+v)=\text{grad } u+\text{grad } v;$

$$\begin{aligned}\text{解 } \text{grad}(u+v) &= \frac{\partial(u+v)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(u+v)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(u+v)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\ &= \text{grad } u + \text{grad } v.\end{aligned}$$

(2) $\text{grad } (uv)=v\text{grad } u+u\text{grad } v;$

$$\begin{aligned}\text{解 } \text{grad}(uv) &= \frac{\partial(uv)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(uv)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \left(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(v\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\ &= v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\ &= v\text{grad } u + u\text{grad } v.\end{aligned}$$

(3) $\text{grad } (u^2)=2u\text{grad } u.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \text{grad}(u^2) &= \frac{\partial u^2}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u^2}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u^2}{\partial z}\mathbf{k} = 2u\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + 2u\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + 2u\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= 2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right) = 2u\text{grad } u.\end{aligned}$$

10. 问函数 $u=xy^2z$ 在点 $p(1, -1, 2)$ 处沿什么方向的方向导数最大? 并求此方向导数的最大值.

解 $\mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = y^2 z \mathbf{i} + 2xy z \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k} ,$

$$\mathbf{grad} u(1, -1, 2) = (y^2 z \mathbf{i} + 2xy z \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k}) \Big|_{(1, -1, 2)} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k} .$$

$\mathbf{grad} u(1, -1, 2)$ 为方向导数最大的方向, 最大方向导数为

$$|\mathbf{grad} u(1, -1, 2)| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21} .$$

习题 8-8

1. 求函数 $f(x, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 4 - 2x = 0 \\ f_y(x, y) = -4 - 2y = 0 \end{cases}$, 求得驻点为 $(2, -2)$, 由于

$A = f_{xx}(2, -2) = -2 < 0$, $B = f_{xy}(2, -2) = 0$, $C = f_{yy}(2, -2) = -2$, $AC - B^2 > 0$,
所以在点 $(2, -2)$ 处, 函数取得极大值, 极大值为

$$f(2, -2) = 8.$$

2. 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = (6 - 2x)(4y - y^2) = 0 \\ f_y(x, y) = (6x - x^2)(4 - 2y) = 0 \end{cases}$,

$$\text{得 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}.$$

因此驻点为 $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 2)$, $(6, 0)$, $(6, 4)$.

函数的二阶偏导数为

$$f_{xx}(x, y) = -2(4y - y^2), f_{xy}(x, y) = 4(3 - x)(2 - y), f_{yy}(x, y) = -2(6x - x^2).$$

在点 $(0, 0)$ 处, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 24$, $f_{yy} = 0$, $AC - B^2 = -24^2 < 0$, 所以 $f(0, 0)$ 不是极值;

在点 $(0, 4)$ 处, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -24$, $f_{yy} = 0$, $AC - B^2 = -24^2 < 0$, 所以 $f(0, 4)$ 不是极值;

在点 $(3, 2)$ 处, $f_{xx} = -8$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = -18$, $AC - B^2 = 8 \times 18 > 0$, 又 $A < 0$, 所以 $f(3, 2) = 36$ 是函数的极大值;

在点 $(6, 0)$ 处, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -24$, $f_{yy} = 0$, $AC - B^2 = -24^2 > 0$, 所以 $f(6, 0)$ 不是极值;

在点 $(6, 4)$ 处, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 24$, $f_{yy} = 0$, $AC - B^2 = -24^2 > 0$, 所以 $f(6, 4)$ 不是极值.

综上所述, 函数只有一个极值, 这个极值是极大值 $f(3, 2) = 36$.

3. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ f_y(x, y) = e^{2x}(2y + 2) = 0 \end{cases}$, 得驻点 $(\frac{1}{2}, -1)$.

$$A = f_{xx}(x, y) = 4e^{2x}(x + y^2 + 2y + 1), B = f_{xy}(x, y) = 4e^{2x}(y + 1), C = f_{yy}(x, y) = 2e^{2x}.$$

因为在点 $(\frac{1}{2}, -1)$ 处, $A = 2e > 0$, $B = 0$, $C = 2e$, $AC - B^2 = 4e^2 > 0$,

所以函数在点 $(\frac{1}{2}, -1)$ 处取得极小值, 极小值为 $f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$.

4. 求函数 $z = xy$ 在适合附加条件 $x + y = 1$ 下的极大值.

解 条件 $x+y=1$ 可表示为 $y=1-x$, 代入 $z=xy$, 于是问题化为 $z=x(1-x)$ 的无条件极值问题.

$$\frac{dz}{dx}=1-2x, \quad \frac{d^2z}{dx^2}=-2.$$

令 $\frac{dz}{dx}=0$, 得驻点 $x=\frac{1}{2}$. 因为 $\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0$, 所以 $x=\frac{1}{2}$ 为极大值点, 极大值为 $z=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

5. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 求有最大周界的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x, y , 则周长

$$S=x+y+l(0<x<l, 0<y<l).$$

因此, 本题是在 $x^2+y^2=l^2$ 下的条件极值问题, 作函数

$$F(x, y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} F_x=1+2\lambda x=0 \\ F_y=1+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=l^2 \end{cases}, \text{ 得唯一可能的极值点 } x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}.$$

根据问题性质可知这种最大周界的直角三角形一定存在, 所以斜边之长为 l 的一切直角三角形中, 周界最大的是等腰直角三角形.

6. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸方可使表面积最小.

解 设水池的长为 x , 宽为 y , 高为 z , 则水池的表面积为

$$S=xy+2xz+2yz(x>0, y>0, z>0).$$

本题是在条件 $xyz=k$ 下, 求 S 的最大值.

作函数 $F(x, y, z)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-k)$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} F_x=y+2z+\lambda yz=0 \\ F_y=x+2z+\lambda xz=0 \\ F_z=2x+2y+\lambda xy=0 \\ xyz=k \end{cases},$$

得唯一可能的极值点 $(\sqrt[3]{2k}, \sqrt[3]{2k}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k})$.

由问题本身可知 S 一定有最小值, 所以表面积最小的水池的长和宽都应为

$\sqrt[3]{2k}$. 高为 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

7. 在平面 xOy 上求一点, 使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线距离平方之和为最小.

解 设所求点的坐标为 (x, y) , 则此点到 $x=0$ 的距离为 $|y|$, 到 $y=0$ 的距离为 $|x|$, 到 $x+2y-16=0$ 的距离为 $\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{1+2^2}}$, 而距离平方之和为

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x+2y-16) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x+2y-16) = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 3x+y-8=0 \\ 2x+9y-32=0 \end{cases}.$$

得唯一的驻点 $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$, 根据问题的性质可知, 到三直线的距离平方之和最小的点一定存在, 故 $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$ 即为所求.

8. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体, 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边为 x , 则另一边为 $(p-x)$, 假设矩形绕 $p-x$ 旋转, 则旋转所成圆柱体的体积为 $V=\pi x^2(p-x)$.

$$\text{由 } \frac{dV}{dx} = 2\pi x(p-x) - \pi x^2 = \pi x(2p-3x) = 0, \text{ 求得唯一驻点 } x = \frac{2}{3}p.$$

由于驻点唯一, 由题意又可知这种圆柱体一定有最大值, 所以当矩形的边长为 $\frac{2p}{3}$ 和 $\frac{p}{3}$ 时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

9. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$, (x, y, z) 是它的各面平行于坐标面的内接长方体在第一卦限内的一个顶点, 则此长方体的长宽高分别为 $2x, 2y, 2z$, 体积为

$$V=2x \cdot 2y \cdot 2z=8xyz.$$

$$\text{令 } F(x, y, z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2).$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} F_x = 8yz + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 8xz + 2\lambda y = 0 \\ F_z = 8xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 4yz + \lambda x = 0 \\ 4xz + \lambda y = 0 \\ 4xy + \lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases},$$

得唯一驻点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$.

由题意可知这种长方体必有最大体积, 所以当长方体的长、宽、高都为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ 时其体积最大.

10. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆, 求原点到这椭圆的最长与最短距离.

解 设椭圆上点的坐标 (x, y, z) , 则原点到椭圆上这一点的距离平方为 $d^2=x^2+y^2+z^2$, 其中 x, y, z 要同时满足 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$.

令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1)$.

$$\text{解方程组} \begin{cases} F_x = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ F_y = 2y - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ F_z = 2z + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

得驻点 $x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, $z=2\mp\sqrt{3}$. 它们是可能的两个极值点, 由题意这种距离的最大值和最小值一定存在, 所以距离的最大值和最小值在两点处取得, 因为在驻点处

$$d^2=x^2+y^2+z^2=2(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2})^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp5\sqrt{3},$$

所以 $d_1=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ 为最长距离; $d_2=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ 为最短距离.

总习题八

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是 $f(x, y)$ 在该点连续的_____条件, $f(x, y)$ 在点连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件.

解 充分; 必要.

(2) $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件, $z=$

$f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的_____条件.

解 必要; 充分.

(3) $z=f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x, y) 存在且连续是 $f(x, y)$ 在该点可微分的_____条件.

解 充分.

(4) 函数 $z=f(x, y)$ 的两个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏

导数在 D 内相等的_____条件.

解 充分.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0)=3, f_y(0, 0)=-1$, 则有_____.

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx-dy$.

(B) 曲面 $z=f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个法向量为 $(3, -1, 1)$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(1, 0, 3)$.

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的一个切向量为 $(3, 0, 1)$.

解 (C).

3. 求函数 $f(x, y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域, 并求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x, y)$.

解 函数的定义域为 $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leq 4x\}$

因为 $(\frac{1}{2}, 0) \in D$, 故由初等函数在定义域内的连续性有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} \bigg|_{(\frac{1}{2}, 0)} = \frac{\sqrt{2}}{\ln \frac{3}{4}}.$$

4. 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

解 因为 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^2} = 0,$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2},$$

所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5. 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, 求 $f_x(x,y), f_y(x,y)$.

解 当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2} \right) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2 \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

因此 $f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases},$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z = \ln(x + y^2)$;

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2(x + y^2) - 4y^2}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x + y^2} \right) = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}$$

(2) $z = x^y$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x).$$

7. 求函数 $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ 当 $x=2, y=1, \Delta x=0.001, \Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z = \frac{(2.01) \times (1.03)}{(2.01)^2 - (1.03)^2} - \frac{2}{3} = 0.02.$

因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(y^3 + x^2 y)}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3 + xy^2}{(x^2 - y^2)^2},$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} = -\frac{5}{9}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} = \frac{10}{9},$$

所以 $dz\Big|_{\substack{x=2, \Delta x=0.01 \\ y=1, \Delta y=0.03}} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)}\Delta y = 0.03$.

$$8. \text{ 设 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, \text{ 证明 } f(x, y) \text{ 在点 } (0, 0) \text{ 处连续且偏导数存在,}$$

但不可微分.

$$\text{证明 因为 } 0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ 且 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

所以 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 即 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续.

$$\text{因为 } f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的偏导数存在.

$$\text{因为 } \Delta z - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \Delta x = \Delta y}} \frac{\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^{3/2}} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微分.

$$9. \text{ 设 } u = x^y, \text{ 而 } x = \varphi(t), y = \psi(t) \text{ 都是可微函数, 求 } \frac{du}{dt}.$$

$$\text{解 } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = yx^{y-1}\varphi'(t) + x^y \ln x \cdot \psi'(t).$$

$$10. \text{ 设 } z = f(u, v, w) \text{ 具有连续偏导数, 而 } u = \eta - \xi, v = \zeta - \xi, w = x - \eta, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}.$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设 $z=f(u, x, y)$, $u=xe^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f'_x = e^y f'_u + f'_x,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^y f'_u + f'_x) = e^y f'_u + e^y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (f'_u) + \frac{\partial}{\partial y} (f'_x)$$

$$= e^y f'_u + e^y (f''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{uy}) + (f''_{xu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{xy})$$

$$= e^y f'_u + e^y (xe^y f''_{uu} + f''_{uy}) + (xe^y f''_{xu} + f''_{xy})$$

$$= e^y f'_u + xe^{2y} f''_{uu} + e^y f''_{uy} + xe^y f''_{xu} + f''_{xy}.$$

12. 设 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$, $z=uv$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x},$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}.$$

而由 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$ 得

$$\begin{cases} dx = e^u \cos v du - e^u \sin v dv \\ dy = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \end{cases}$$

解得 $du = e^{-u} \cos v dx + e^{-u} \sin v dy$, $dv = -e^{-u} \sin v dx + e^{-u} \cos v dy$,

从而 $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v$.

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v e^{-u} \cos v + u (-e^{-u} \sin v) = e^{-u} (v \cos v - u \sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v e^{-u} \sin v + u e^{-u} \cos v = e^{-u} (v \sin v + u \cos v).$$

另解 由 $x=e^u \cos v$, $y=e^u \sin v$ 得

$$\begin{cases} dx = e^u \cos v du - e^u \sin v dv \\ dy = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \end{cases}$$

解得 $du = e^{-u} \cos v dx + e^{-u} \sin v dy$, $dv = -e^{-u} \sin v dx + e^{-u} \cos v dy$.

又由 $z=uv$ 得

$$\begin{aligned} dz &= v du + u dv \\ &= v(e^{-u} \cos v dx + e^{-u} \sin v dy) + u(-e^{-u} \sin v dx + e^{-u} \cos v dy) \\ &= e^{-u}(v \cos v - u \sin v) dx + e^{-u}(v \sin v + u \cos v) dy, \end{aligned}$$

从而 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-u}(v \cos v - u \sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-u}(v \sin v + u \cos v)$.

13. 求螺旋线 $x=a \cos \theta$, $y=a \sin \theta$, $z=b \theta$ 在点 $(a, 0, 0)$ 处的切线及法平面方程.

解 点 $(a, 0, 0)$ 对应的参数为 $\theta=0$, 所以点 $(a, 0, 0)$ 处的切向量为

$$\mathbf{T} = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta} \right) \Big|_{\theta=0} = (-a \sin \theta, a \cos \theta, b) \Big|_{\theta=0} = (0, a, b),$$

所求的切线方程为

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b},$$

法平面方程为

$$a(y-0)+b(z-0)=0, \text{ 即 } ay+bz=0.$$

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$, 并写出这法线的方程.

解 已知平面的法线向量为 $\mathbf{n}_0=(1, 3, 1)$.

设所求的点为 (x_0, y_0, z_0) , 则曲面在该点的法向量为 $\mathbf{n}=(y_0, x_0, -1)$. 由题意知

$$\mathbf{n} // \mathbf{n}_0, \text{ 即 } \frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1},$$

于是 $x_0=-3$, $y_0=-1$, $z_0=x_0 y_0=3$,

即所求点为 $(-3, -1, 3)$, 法线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\mathbf{e}_l=(\cos \theta, \sin \theta)$, 求函数 $f(x, y)=x^2-xy-y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 l 的方向导数, 并分别确定角 θ , 使这导数有(1)最大值, (2)最小值, (3)等于 0.

解 由题意知 l 方向的单位向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta)=(\cos\theta, \sin\theta)$, 即方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\theta, \cos\beta=\sin\theta$.

因为

$$f_x(1, 1)=(2x-y)|_{(1, 1)}=1,$$

$$f_y(1, 1)=(-x+2y)|_{(1, 1)}=1,$$

所以在点 $(1, 1)$ 沿方向 l 的方向导数为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,1)} = f_x(1, 1)\cos\alpha + f_y(1, 1)\cos\beta = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}).$$

因此

(1) 当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数最大, 其最大值为 $\sqrt{2}$;

(2) 当 $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ 时, 方向导数最小, 其最小值为 $-\sqrt{2}$;

(3) 当 $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{7\pi}{4}$ 时, 方向导数为 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处有外法向量为 $\mathbf{n} = (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2})$, 其单位向量为

$$\mathbf{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}).$$

因为

$$u_x(x_0, y_0, z_0)=2x_0, u_y(x_0, y_0, z_0)=2y_0, u_z(x_0, y_0, z_0)=2z_0,$$

所以, 所求方向导数为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} &= u_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + u_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + u_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} (2x_0 \cdot \frac{x_0}{a^2} + 2y_0 \cdot \frac{y_0}{b^2} + 2z_0 \cdot \frac{z_0}{c^2}) = \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \end{aligned}$$

17. 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设 $M(x, y, z)$ 为平面和柱面的交线上的一点, 则 M 到 xOy 平面的距离为 $d(x, y, z) = |z|$.

问题在于求函数 $f(x, y, z) = |z|^2 = z^2$ 在约束条件 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最不值.

作辅助函数:

$$F(x, y, z) = z^2 + \lambda\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1\right) + \mu(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \frac{\lambda}{5} = 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

解方程组得

$$x = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{3}{5}, \quad z = \frac{35}{12}.$$

因为可能的极值点只有 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12})$ 这一个, 所以这个点就是所求之点.

18. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小, 求这切平面的切点, 并求此最小体积.

解 令 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, 则

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z = \frac{2z}{c^2}.$$

椭球面上点 $M(x, y, z)$ 处的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0, \quad \text{即 } \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

切平面在三个坐标轴上的截距分别为

$$X_0 = \frac{a^2}{x}, \quad Y_0 = \frac{b^2}{y}, \quad Z_0 = \frac{c^2}{z}.$$

切平面与三个坐标面所围的四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz}.$$

现将问题化为求函数 $V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{xyz}$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 下的最小值的问题, 或求

函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 下的最大值的问题.

作辅助函数 $F(x, y, z) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases},$$

解方程组得

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是, 所求切点为 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$, 此时最小体积为 $V = \frac{\sqrt{3}}{2} abc$.

习题 9-1

1. 设有一平面薄板(不计其厚度), 占有 xOy 面上的闭区域 D , 薄板上分布有密度为 $\mu = \mu(x, y)$ 的电荷, 且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表达该板上全部电荷 Q .

解 板上的全部电荷应等于电荷的面密度 $\mu(x, y)$ 在该板所占闭区域 D 上的二重积分

$$Q = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

2. 设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$;

又 $I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中 $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 的关系.

解 I_1 表示由曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 与平面 $x = \pm 1, y = \pm 2$ 以及 $z = 0$ 围成的立体 V 的体积. I_2 表示由曲面 $z = (x^2 + y^2)^3$ 与平面 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$ 以及 $z = 0$ 围成的立体 V_1 的体积.

显然立体 V 关于 yOz 面、 xOz 面对称, 因此 V_1 是 V 位于第一卦限中的部分, 故

$$V = 4V_1, \text{ 即 } I_1 = 4I_2.$$

3. 利用二重积分的定义证明:

(1) $\iint_D d\sigma = \sigma$ (其中 σ 为 D 的面积);

证明 由二重积分的定义可知,

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域的面积.

此处 $f(x, y) = 1$, 因而 $f(\xi, \eta) = 1$, 所以

$$\iint_D d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \sigma.$$

$$(2) \iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (\text{其中 } k \text{ 为常数});$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \iint_D kf(x, y) d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \\ &= k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = k \iint_D f(x, y) d\sigma. \end{aligned}$$

$$(3) \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma,$$

其中 $D=D_1 \cup D_2$, D_1 、 D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证明 将 D_1 和 D_2 分别任意分为 n_1 和 n_2 个小闭区域 $\Delta\sigma_{i_1}$ 和 $\Delta\sigma_{i_2}$,

$n_1+n_2=n$, 作和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i_1=1}^{n_1} f(\xi_{i_1}, \eta_{i_1}) \Delta\sigma_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{n_2} f(\xi_{i_2}, \eta_{i_2}) \Delta\sigma_{i_2}.$$

令各 $\Delta\sigma_{i_1}$ 和 $\Delta\sigma_{i_2}$ 的直径中最大值分别为 λ_1 和 λ_2 , 又 $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, 则有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i_1=1}^{n_1} f(\xi_{i_1}, \eta_{i_1}) \Delta\sigma_{i_1} + \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i_2=1}^{n_2} f(\xi_{i_2}, \eta_{i_2}) \Delta\sigma_{i_2},$$

$$\text{即} \quad \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

4. 根据二重积分的性质, 比较下列积分大小:

$$(1) \iint_D (x+y)^2 d\sigma \text{ 与 } \iint_D (x+y)^3 d\sigma \quad \text{其中积分区域 } D \text{ 是由 } x \text{ 轴, } y \text{ 轴与直线}$$

$x+y=1$ 所围成;

解 区域 D 为: $D=\{(x, y)|0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\}$, 因此当 $(x, y) \in D$ 时, 有 $(x+y)^3 \leq (x+y)^2$, 从而

$$\iint_D (x+y)^3 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

$$(2) \iint_D (x+y)^2 d\sigma \text{ 与 } \iint_D (x+y)^3 d\sigma \quad \text{其中积分区域 } D \text{ 是由圆周 } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

所围成;

解 区域 D 如图所示, 由于 D 位于直线 $x+y=1$ 的上方, 所以当 $(x, y) \in D$ 时, $x+y \geq 1$, 从而 $(x+y)^3 \geq (x+y)^2$, 因而

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma.$$

(3) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 其中 D 是三角形闭区域, 三角顶点分别为 $(1, 0)$,

$(1, 1)$, $(2, 0)$;

解 区域 D 如图所示, 显然当 $(x, y) \in D$ 时, $1 \leq x+y \leq 2$, 从而 $0 \leq \ln(x+y) \leq 1$, 故有

$$[\ln(x+y)]^2 \leq \ln(x+y),$$

因而 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geq \iint_D \ln(x+y) d\sigma$.

(4) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 其中 $D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$.

解 区域 D 如图所示, 显然 D 位于直线 $x+y=e$ 的上方, 故当 $(x, y) \in D$ 时, $x+y \geq e$, 从而

$$\ln(x+y) \geq 1,$$

因而 $[\ln(x+y)]^2 \geq \ln(x+y)$,

故 $\iint_D \ln(x+y) d\sigma \leq \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$.

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

解 因为在区域 D 上 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 所以

$$0 \leq xy \leq 1, 0 \leq x+y \leq 2,$$

进一步可得

$$0 \leq xy(x+y) \leq 2,$$

于是 $\iint_D 0 d\sigma \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq \iint_D 2 d\sigma$,

即 $0 \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq 2$.

$$(2) I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\};$$

解 因为 $0 \leq \sin^2 x \leq 1, 0 \leq \sin^2 y \leq 1$, 所以 $0 \leq \sin^2 x \sin^2 y \leq 1$. 于是可得

$$\iint_D 0 d\sigma \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \iint_D 1 d\sigma,$$

即
$$0 \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \pi^2.$$

$$(3) I = \iint_D (x+y+1) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\};$$

解 因为在区域 D 上, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, 所以 $1 \leq x+y+1 \leq 4$, 于是可得

$$\iint_D d\sigma \leq \iint_D (x+y+1) d\sigma \leq \iint_D 4 d\sigma,$$

即
$$2 \leq \iint_D (x+y+1) d\sigma \leq 8.$$

$$(4) I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

解 在 D 上, 因为 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 所以

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 4(x^2 + y^2) + 9 \leq 25.$$

于是
$$\iint_D 9 d\sigma \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq \iint_D 25 d\sigma,$$

$$9\pi \cdot 2^2 \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 25 \cdot \pi \cdot 2^2,$$

即
$$36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi.$$

习题 9-2

1. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\};$$

解 积分区域可表示为 $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 [x^2 y + \frac{1}{3} y^3]_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^2 + \frac{2}{3}) dx = [\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x]_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D (3x + 2y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由两坐标轴及直线 } x + y = 2 \text{ 所围成的闭区域:}$$

解 积分区域可表示为 $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 2y) d\sigma &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x + 2y) dy = \int_0^2 [3xy + y^2]_0^{2-x} dx \\ &= \int_0^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = [4x + x^2 - \frac{2}{3} x^3]_0^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$(3) \iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^2) d\sigma &= \int_0^1 dy \int_0^1 (x^3 + 3x^2 y + y^2) dx = \int_0^1 [\frac{x^4}{4} + x^3 y + y^3 x]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (\frac{1}{4} + y + y^3) dy = [\frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$(4) \iint_D x \cos(x + y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是顶点分别为 } (0, 0), (\pi, 0), \text{ 和 } (\pi, \pi) \text{ 的三角形闭区}$$

域.

解 积分区域可表示为 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos(x + y) d\sigma &= \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x + y) dy = \int_0^\pi x [\sin(x + y)]_0^x dx \\ &= \int_0^\pi x (\sin 2x - \sin x) dx = - \int_0^\pi x d(\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x) \\ &= -x(\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi (\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x) dx = -\frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. 于是

$$\iint_D x\sqrt{y}d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy = \int_0^1 x \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3} x^4 \right) dx = \frac{6}{55}.$$

(2) $\iint_D xy^2d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y) | -2 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2d\sigma &= \int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2dx = \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^2 (2y^2 - \frac{1}{2} y^4) dy = \left[\frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{10} y^5 \right]_{-2}^2 = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

(3) $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y) | |x|+|y| \leq 1\}$;

解 积分区域图如, 并且

$$D=\{(x, y) | -1 \leq x \leq 0, -x-1 \leq y \leq x+1\} \cup \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq -x+1\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y}d\sigma &= \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy \\ &= \int_{-1}^0 e^x [e^y]_{-x-1}^{x+1} dx + \int_0^1 e^x [e^y]_{x-1}^{-x+1} dy = \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1}) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} - e^{-1} x \right]_{-1}^0 + \left[ex - \frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_0^1 = e - e^{-1}. \end{aligned}$$

(4) $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, \frac{1}{2}y \leq x \leq y\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2+y^2-x) dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{y}{2}}^y dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积,

即 $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, 积分区域 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$$

证明 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx,$

而 $\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy,$

故 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b \left[f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy \right] dx.$

由于 $\int_c^d f_2(y) dy$ 的值是一常数, 因而可提到积分号的外面, 于是得

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$$

4. 化二重积分 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ 为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, x \leq y \leq 2\sqrt{x}\}, \text{ 或 } D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{4}y^2 \leq x \leq y\},$$

所以 $I = \int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy$ 或 $I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x, y) dx.$

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2 (y \geq 0)$ 所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)| -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}\},$$

$$\text{或 } D=\{(x, y)| 0 \leq y \leq r, -\sqrt{r^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2-y^2}\},$$

$$\text{所以 } I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y) dy, \text{ 或 } I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

(3)由直线 $y=x$, $x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}$ ($x>0$)所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)| 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\},$$

$$\text{或 } D=\{(x, y)| \frac{1}{2} \leq y \leq 1, -\frac{1}{y} \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y)| 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2\},$$

$$\text{所以 } I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy, \text{ 或 } I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{-\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

(4)环形闭区域 $\{(x, y)| 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

解 如图所示, 用直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4 . 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma \\ &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \\ &\quad + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \end{aligned}$$

用直线 $y=1$, 和 $y=-1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4 ,

如图所示. 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma \\
 &= \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \\
 &\quad + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx
 \end{aligned}$$

5. 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x, y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 围成的闭区域,

证明: $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$

证明 积分区域如图所示, 并且积分区域可表示为

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}, \text{ 或 } D = \{(x, y) | a \leq y \leq b, y \leq x \leq b\}.$$

于是 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy, \text{ 或 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$

因此 $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$

6. 改换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$

解 由根据积分限可得积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, 如图. 因为积分区域还可以表示为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$, 所以

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

(2) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$

解 由根据积分限可得积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq x\leq 4, \frac{x}{2}\leq y\leq \sqrt{x}\}$, 所以

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq \sqrt{1-y^2}\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|-1\leq x\leq 1, 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}$, 所以

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\leq x\leq 2, 2-x\leq y\leq \sqrt{2x-x^2}\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, 2-y\leq x\leq 1+\sqrt{1-y^2}\}$, 所以

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(5) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\leq x\leq e, 0\leq y\leq \ln x\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, e^y\leq x\leq e\}$, 所以

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$$

$$(6) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy \text{ (其中 } a\geq 0\text{)}.$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\leq x\leq \pi, -\sin \frac{x}{2}\leq y\leq \sin x\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为

$$D=\{(x, y)|-1\leq y\leq 0, -2\arcsin y\leq x\leq \pi\}$$

$$\cup \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y\},$$

所以
$$\int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^\pi f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

解 如图, 该薄片的质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3} y^3 \right] dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 四个平面所围成的立体如图, 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6-2x-3y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (6-2x-3y) dy \\ &= \int_0^1 \left[6y - 2xy - \frac{3}{2} y^2 \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 立体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, 所求立体的体积为以曲面 $z=6-x^2-y^2$ 为顶, 以区域 D 为底的曲顶柱体的体积, 即

$$V = \iint_D (6-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy = \frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$, 即 $x^2+y^2=2$, 故立体在 xOy 面

上的投影区域为 $x^2+y^2 \leq 2$, 因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称, 并且被积函数关于 x, y 都是偶函数, 所以

$$V = \iint_D [(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)] d\sigma = \iint_D (6-3x^2-3y^2) d\sigma$$

$$=12\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2-x^2-y^2)dy = 8\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(2-x^2)^3} dx = 6\pi.$$

11. 画出积分区域, 把积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中

积分区域 D 是:

(1) $\{(x,y) | x^2+y^2 \leq a^2\} (a>0)$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

(2) $\{(x,y) | x^2+y^2 \leq 2x\}$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2\cos \theta\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

(3) $\{(x,y) | a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$, 其中 $0 < a < b$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, a \leq \rho \leq b\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

(4) $\{(x,y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$.

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec \theta\} \cup \{(\rho, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \csc \theta\},$$

所以
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \rho \leq 2 \sec \theta\},$$

所示
$$\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy = \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma = \iint_D f(\rho) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2 \sec \theta} f(\rho) \rho d\rho.$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq \rho \leq 1\},$$

所以
$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \sec \theta \tan \theta \leq \rho \leq \sec \theta\},$$

所以
$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec\theta \tan\theta}^{\sec\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2a \cos\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy &= \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq a \sec\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy &= \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec\theta} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{a^3}{6} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec\theta \tan\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy &= \iint_D \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta \tan\theta} \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta \tan\theta d\theta = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx.$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq a\}$, 所以

$$\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx = \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{8} a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\rho\leq 2\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma &= \iint_D e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (e^4 - 1) = \pi(e^4 - 1).\end{aligned}$$

(2) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq 1\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma &= \iint_D \ln(1+\rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (2\ln 2 - 1) = \frac{1}{4} (2\ln 2 - 1).\end{aligned}$$

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的

第一象限内的闭区域.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq \frac{\pi}{4}, 1\leq\rho\leq 2\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma &= \iint_D \arctan(\tan \theta) \cdot \rho d\rho d\theta = \iint_D \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \theta \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3\pi^3}{64}.\end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2, \frac{1}{x}\leq y\leq x\}$, 所以

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限

内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq \rho\leq 1\}$, 所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma = \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

(3) $\iint_D (x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域;

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|a\leq y\leq 3a, y-a\leq x\leq y\}$, 所以

$$\iint_D (x^2+y^2) d\sigma = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2+y^2) dx = \int_a^{3a} (2ay^2 - a^2y + \frac{1}{3}a^3) dy = 14a^4.$$

(4) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)|a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\}$.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq 2\pi, a\leq \rho\leq b\}$, 所以

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^2 dr = \frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $(0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2})$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解 区域如图所示. 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq \rho\leq 2\theta\}$, 所以所求质量

$$M = \iint_D \mu(x,y) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0, y=kx(k>0), z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 此立体在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)|0\leq \theta\leq \arctan k, 0\leq \rho\leq R\}$.

$$V = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\arctan k} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{3} R^3 \arctan k .$$

18. 计算以 xOy 平面上圆域 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 曲顶柱体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leq ax\}$.

在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq a\cos\theta\}$, 所以

$$V = \iint_{x^2+y^2\leq ax} (x^2+y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{a^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{32} a^4 \pi .$$

习题 9-2

1. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\};$$

解 积分区域可表示为 $D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 [x^2 y + \frac{1}{3} y^3]_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^2 + \frac{2}{3}) dx = [\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x]_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D (3x + 2y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由两坐标轴及直线 } x + y = 2 \text{ 所围成的闭区域:}$$

解 积分区域可表示为 $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 2y) d\sigma &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x + 2y) dy = \int_0^2 [3xy + y^2]_0^{2-x} dx \\ &= \int_0^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = [4x + x^2 - \frac{2}{3} x^3]_0^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$(3) \iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^2) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_D (x^3 + 3x^2 y + y^2) d\sigma &= \int_0^1 dy \int_0^1 (x^3 + 3x^2 y + y^2) dx = \int_0^1 [\frac{x^4}{4} + x^3 y + y^3 x]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (\frac{1}{4} + y + y^3) dy = [\frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$(4) \iint_D x \cos(x + y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是顶点分别为 } (0, 0), (\pi, 0), \text{ 和 } (\pi, \pi) \text{ 的三角形闭区}$$

域.

解 积分区域可表示为 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq x$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos(x + y) d\sigma &= \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x + y) dy = \int_0^\pi x [\sin(x + y)]_0^x dx \\ &= \int_0^\pi x (\sin 2x - \sin x) dx = -\int_0^\pi x d(\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x) \\ &= -x(\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi (\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x) dx = -\frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

(1) $\iint_D x\sqrt{y}d\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ 所围成的闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| 0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq \sqrt{x}\}$. 于是

$$\iint_D x\sqrt{y}d\sigma = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}dy = \int_0^1 x \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{3} x^4 \right) dx = \frac{6}{55}.$$

(2) $\iint_D xy^2d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| -2\leq y\leq 2, 0\leq x\leq \sqrt{4-y^2}\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2d\sigma &= \int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^2dx = \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^2 (2y^2 - \frac{1}{2} y^4) dy = \left[\frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{10} y^5 \right]_{-2}^2 = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

(3) $\iint_D e^{x+y}d\sigma$, 其中 $D=\{(x, y)| |x|+|y|\leq 1\}$;

解 积分区域图如, 并且

$$D=\{(x, y)| -1\leq x\leq 0, -x-1\leq y\leq x+1\} \cup \{(x, y)| 0\leq x\leq 1, x-1\leq y\leq -x+1\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y}d\sigma &= \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy \\ &= \int_{-1}^0 e^x [e^y]_{-x-1}^{x+1} dx + \int_0^1 e^x [e^y]_{x-1}^{-x+1} dy = \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1}) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} - e^{-1} x \right]_{-1}^0 + \left[ex - \frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_0^1 = e - e^{-1}. \end{aligned}$$

(4) $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$, $y=x$ 及 $y=2x$ 轴所围成的闭区域.

解 积分区域图如, 并且 $D=\{(x, y)| 0\leq y\leq 2, \frac{1}{2}y\leq x\leq y\}$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2+y^2-x) dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{y}{2}}^y dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$

的乘积, 即 $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, 积分区域 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$$

证明 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx,$

而 $\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy,$

故 $\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b \left[f_1(x) \int_c^d f_2(y) dy \right] dx.$

由于 $\int_c^d f_2(y) dy$ 的值是一常数, 因而可提到积分号的外面, 于是得

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \left[\int_c^d f_2(y) dy \right].$$

4. 化二重积分 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ 为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分), 其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, x \leq y \leq 2\sqrt{x}\}, \text{ 或 } D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{4}y^2 \leq x \leq y\},$$

所以 $I = \int_0^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy$ 或 $I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x, y) dx.$

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2 (y \geq 0)$ 所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)| -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}\},$$

$$\text{或 } D=\{(x, y)| 0 \leq y \leq r, -\sqrt{r^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2-y^2}\},$$

$$\text{所以 } I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y) dy, \text{ 或 } I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

(3)由直线 $y=x$, $x=2$ 及双曲线 $y=\frac{1}{x}$ ($x>0$)所围成的闭区域;

解 积分区域如图所示, 并且

$$D=\{(x, y)| 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\},$$

$$\text{或 } D=\{(x, y)| \frac{1}{2} \leq y \leq 1, -\frac{1}{y} \leq x \leq 2\} \cup \{(x, y)| 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2\},$$

$$\text{所以 } I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy, \text{ 或 } I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{-\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

(4)环形闭区域 $\{(x, y)| 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

解 如图所示, 用直线 $x=-1$ 和 $x=1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4 . 于是

$$I = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma$$

$$= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

$$+ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

用直线 $y=1$, 和 $y=-1$ 可将积分区域 D 分成四部分, 分别记做 D_1, D_2, D_3, D_4 ,

如图所示. 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_4} f(x, y) d\sigma \\
 &= \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \\
 &\quad + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx
 \end{aligned}$$

5. 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 其中 D 是由直线 $y=x, y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 围成的闭区域,

证明: $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$

证明 积分区域如图所示, 并且积分区域可表示为

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}, \text{ 或 } D = \{(x, y) | a \leq y \leq b, y \leq x \leq b\}.$$

于是 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy, \text{ 或 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$

因此 $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$

6. 改换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$

解 由根据积分限可得积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, 如图. 因为积分区域还可以表示为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$, 所以

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

(2) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$

解 由根据积分限可得积分区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2y\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq x\leq 4, \frac{x}{2}\leq y\leq \sqrt{x}\}$, 所以

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq \sqrt{1-y^2}\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|-1\leq x\leq 1, 0\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}$, 所以

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\leq x\leq 2, 2-x\leq y\leq \sqrt{2x-x^2}\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, 2-y\leq x\leq 1+\sqrt{1-y^2}\}$, 所以

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(5) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|1\leq x\leq e, 0\leq y\leq \ln x\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为 $D=\{(x, y)|0\leq y\leq 1, e^y\leq x\leq e\}$, 所以

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$$

$$(6) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy \text{ (其中 } a\geq 0).$$

解 由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x, y)|0\leq x\leq \pi, -\sin \frac{x}{2}\leq y\leq \sin x\}$, 如图.

因为积分区域还可以表示为

$$D=\{(x, y)|-1\leq y\leq 0, -2\arcsin y\leq x\leq \pi\}$$

$$\cup \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y\},$$

所以
$$\int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^\pi f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度为 $\mu(x, y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

解 如图, 该薄片的质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3} y^3 \right] dy = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 四个平面所围成的立体如图, 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6-2x-3y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (6-2x-3y) dy \\ &= \int_0^1 \left[6y - 2xy - \frac{3}{2} y^2 \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

9. 求由平面 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 立体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, 所求立体的体积为以曲面 $z=6-x^2-y^2$ 为顶, 以区域 D 为底的曲顶柱体的体积, 即

$$V = \iint_D (6-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy = \frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z , 得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$, 即 $x^2+y^2=2$, 故立体在 xOy 面

上的投影区域为 $x^2+y^2 \leq 2$, 因为积分区域关于 x 及 y 轴均对称, 并且被积函数关于 x, y 都是偶函数, 所以

$$V = \iint_D [(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)] d\sigma = \iint_D (6-3x^2-3y^2) d\sigma$$

$$=12\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2-x^2-y^2)dy = 8\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{(2-x^2)^3} dx = 6\pi.$$

11. 画出积分区域, 把积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中

积分区域 D 是:

(1) $\{(x,y) | x^2+y^2 \leq a^2\} (a>0)$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

(2) $\{(x,y) | x^2+y^2 \leq 2x\}$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2\cos \theta\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

(3) $\{(x,y) | a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$, 其中 $0 < a < b$;

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, a \leq \rho \leq b\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

(4) $\{(x,y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$.

解 积分区域 D 如图. 因为 $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$;

解 积分区域 D 如图所示. 因为

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec \theta\} \cup \{(\rho, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \csc \theta\},$$

所以
$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \rho \leq 2 \sec \theta\},$$

所示
$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy &= \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma = \iint_D f(\rho) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2 \sec \theta} f(\rho) \rho d\rho. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq \rho \leq 1\},$$

所以
$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy &= \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

解 积分区域 D 如图所示, 并且

$$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \sec \theta \tan \theta \leq \rho \leq \sec \theta\},$$

所以
$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sec\theta \tan\theta}^{\sec\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2a \cos\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2) dy &= \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq a \sec\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy &= \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec\theta} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{a^3}{6} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sec\theta \tan\theta\}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy &= \iint_D \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta \tan\theta} \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta \tan\theta d\theta = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx.$$

解 积分区域 D 如图所示. 因为 $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq a\}$, 所以

$$\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx = \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{8} a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\rho\leq 2\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma &= \iint_D e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2} (e^4 - 1) = \pi(e^4 - 1).\end{aligned}$$

(2) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限

内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq 1\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma &= \iint_D \ln(1+\rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (2\ln 2 - 1) = \frac{1}{4} (2\ln 2 - 1).\end{aligned}$$

(3) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$, $y=x$ 所围成的

第一象限内的闭区域.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq\theta\leq \frac{\pi}{4}, 1\leq\rho\leq 2\}$, 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma &= \iint_D \arctan(\tan \theta) \cdot \rho d\rho d\theta = \iint_D \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \theta \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3\pi^3}{64}.\end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域.

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2, \frac{1}{x}\leq y\leq x\}$, 所以

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限

内的闭区域;

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq \rho\leq 1\}$, 所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma = \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho = \frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

(3) $\iint_D (x^2+y^2) d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域;

解 因为积分区域可表示为 $D=\{(x,y)|a\leq y\leq 3a, y-a\leq x\leq y\}$, 所以

$$\iint_D (x^2+y^2) d\sigma = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2+y^2) dx = \int_a^{3a} (2ay^2 - a^2y + \frac{1}{3}a^3) dy = 14a^4.$$

(4) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)|a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\}$.

解 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq 2\pi, a\leq \rho\leq b\}$, 所以

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^2 dr = \frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $(0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2})$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成, 它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解 区域如图所示. 在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|0\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}, 0\leq \rho\leq 2\theta\}$, 所以所求质量

$$M = \iint_D \mu(x,y) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0, y=kx(k>0), z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 此立体在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)|0\leq \theta\leq \arctan k, 0\leq \rho\leq R\}$.

$$V = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\arctan k} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{3} R^3 \arctan k .$$

18. 计算以 xOy 平面上圆域 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解 曲顶柱体在 xOy 面上的投影区域为 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leq ax\}$.

在极坐标下 $D=\{(\rho, \theta)|-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq a\cos\theta\}$, 所以

$$V = \iint_{x^2+y^2\leq ax} (x^2+y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{a^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{32} a^4 \pi .$$

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是:

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是 $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是 $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2-x^2, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是 $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$

提示: 曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+y^2=1$.

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a\},$$

于是 $I = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{\frac{xy}{c}} f(x, y, z) dz.$

提示: 区域 Ω 的上边界曲面为曲面 $cz=xy$, 下边界曲面为平面 $z=0$.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x+y+z$, 计算该物体的质量.

$$\text{解 } M = \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y+\frac{1}{2}) dy$$

$$= \int_0^1 [xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y]_0^1 dx = \int_0^1 (x+1) dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 的被积函数 $f(x, y, z)$ 是三个函数 $f_1(x)$ 、

$f_2(y)$ 、 $f_3(z)$ 的乘积, 即 $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, 积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

$$\text{证明 } \iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_l^m f_1(x) f_2(y) f_3(z) dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d (f_1(x) f_2(y) \int_l^m f_3(z) dz) dy \right] dx = \int_a^b \left[(f_1(x) \int_l^m f_3(z) dz) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) f_1(x) \right] dx = \left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \int_a^b f_1(x) dx$$

$$= \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z=xy$, 与平面 $y=x$, $x=1$ 和 $z=0$ 所围

成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\text{于是 } \iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{xy} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^5 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.$$

5. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的四

面体.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).\end{aligned}$$

提示:
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{-2(1+x+y)^2} \right]_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{-2(1+x+y)} - \frac{1}{8}y \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).\end{aligned}$$

6. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$$

于是
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy (1-x^2-y^2) dy = \int_0^1 \frac{1}{8} x (1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0$, $z=y$, $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 \frac{1}{2} y^2 dy$$
$$= \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) dx = 0.$$

8. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z=h (R>0, h>0)$ 所

围成的闭区域.

解 当 $0 \leq z \leq h$ 时, 过 $(0, 0, z)$ 作平行于 xOy 面的平面, 截得立体 Ω 的截面为圆 D_z : $x^2 + y^2 = (\frac{R}{h} z)^2$, 故 D_z 的半径为 $\frac{R}{h} z$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$, 于是

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \sqrt{2-\rho^2},$$

于是
$$\iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \rho(2-\rho^2-\rho^4) d\rho$$
$$= \pi \int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^5) d\rho = \frac{7}{12} \pi.$$

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5) d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\theta = \frac{16}{3} \pi.$$

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1,$$

于是 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} r^4 \cdot \sin \varphi dr d\varphi d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{5} \pi.$$

(2) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是 $\iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{1}{4} (2a \cos \varphi)^4 d\varphi$$

$$= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{7}{6} \pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第

一卦限内的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1,$$

于是 $\iiint_{\Omega} xy dv = \iiint_{\Omega} \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta dz$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz = \frac{1}{8}.$$

别解: 用直角坐标计算

$$\iiint_{\Omega} xy dv = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^1 dz = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

(2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \varphi,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cdot r^2 \sin \varphi dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{4} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{10}.$$

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区

域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{5}{2} \rho \leq z \leq 5,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3 \left(5 - \frac{5}{2}\rho\right) d\rho = 8\pi.$$

(4) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $0 < a \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq A, z \geq 0$ 所确

定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq A,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv = \iiint_{\Omega} (r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5).$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \rho \leq z \leq 6-\rho^2,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{32}{3}\pi.$$

(2) $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$ (含有 z 轴的部分);

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi a^3.$$

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \rho,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{1}{4}\rho^2 \leq z \leq \sqrt{5-\rho^2},$$

$$\text{于是 } V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}} dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho(\sqrt{5-\rho^2} - \frac{\rho^2}{4}) d\rho = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

13. 球心在坐标原点、半径为 R 的球体，在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比，求这球体的质量.

解 密度函数为 $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq R,$$

$$\text{于是 } M = \iiint_{\Omega} k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R kr \cdot r^2 dr = k\pi R^4.$$

习题 9-3

1. 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分, 其中积分区域 Ω 分别是:

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$$

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2-x^2, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是
$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

提示: 曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+y^2=1$.

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 曲积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}, 0 \leq x \leq a\},$$

于是
$$I = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\frac{xy}{c}} f(x, y, z) dz.$$

提示: 区域 Ω 的上边界曲面为曲面 $cz=xy$, 下边界曲面为平面 $z=0$.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z) = x+y+z$, 计算该物体的质量.

解
$$M = \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y+\frac{1}{2}) dy$$

$$= \int_0^1 [xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y]_0^1 dx = \int_0^1 (x+1) dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 的被积函数 $f(x, y, z)$ 是三个函数 $f_1(x)$ 、

$f_2(y)$ 、 $f_3(z)$ 的乘积, 即 $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, 积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

$$\text{证明 } \iiint_{\Omega} f_1(x) f_2(y) f_3(z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_l^m f_1(x) f_2(y) f_3(z) dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d (f_1(x) f_2(y) \int_l^m f_3(z) dz) dy \right] dx = \int_a^b \left[(f_1(x) \int_l^m f_3(z) dz) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) f_1(x) \right] dx = \left(\int_l^m f_3(z) dz \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \int_a^b f_1(x) dx$$

$$= \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy \int_l^m f_3(z) dz.$$

4. 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z=xy$, 与平面 $y=x$, $x=1$ 和 $z=0$ 所

围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\text{于是 } \iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{xy} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^5 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.$$

5. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四

面体.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\text{于是 } \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\
&= \frac{1}{2} (\ln 2 - \frac{5}{8}).
\end{aligned}$$

提示:
$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right] dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{-2(1+x+y)} - \frac{1}{8}y \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}x \right] dx \\
&= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \frac{5}{8}).
\end{aligned}$$

6. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在

第一卦限内的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$$

于是
$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2) dy = \int_0^1 \frac{1}{8} x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0$, $z=y$, $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所

围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \iiint_{\Omega} xz dx dy dz &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z dz = \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 \frac{1}{2} y^2 dy \\ &= \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) dx = 0.\end{aligned}$$

8. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h (R > 0, h > 0)$

所围成的闭区域.

解 当 $0 \leq z \leq h$ 时, 过 $(0, 0, z)$ 作平行于 xOy 面的平面, 截得立体 Ω 的截面为圆 D_z : $x^2 + y^2 = (\frac{R}{h} z)^2$, 故 D_z 的半径为 $\frac{R}{h} z$, 面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$, 于是

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2},$$

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2 - \rho^2}} z dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho \\ &= \pi \int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^5) d\rho = \frac{7}{12} \pi.\end{aligned}$$

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2,$$

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^5) d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\theta = \frac{16}{3}\pi.\end{aligned}$$

10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由球面 } x^2+y^2+z^2=1 \text{ 所围成的闭区域.}$$

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq 1,$$

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)dv &= \iiint_{\Omega} r^4 \cdot \sin\varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{5}\pi.\end{aligned}$$

$$(2) \iiint_{\Omega} z dv, \text{ 其中闭区域 } \Omega \text{ 由不等式 } x^2+y^2+(z-a)^2 \leq a^2, x^2+y^2 \leq z^2 \text{ 所确定.}$$

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos\varphi,$$

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos\varphi \cdot \frac{1}{4} (2a \cos\varphi)^4 d\varphi \\ &= 8\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cos^5\varphi d\varphi = \frac{7}{6}\pi a^4.\end{aligned}$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} xy dv, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为柱面 } x^2+y^2=1 \text{ 及平面 } z=1, z=0, x=0, y=0 \text{ 所围成的在第}$$

一卦限内的闭区域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} xy dv = \iiint_{\Omega} \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz = \frac{1}{8}.$$

别解: 用直角坐标计算

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xy dv &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^1 dz = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \varphi,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cdot r^2 \sin \varphi dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{4} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{10}.$$

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区

域;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{5}{2} \rho \leq z \leq 5,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3 \left(5 - \frac{5}{2} \rho \right) d\rho = 8\pi.$$

(4) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中闭区域 Ω 由不等式 $0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A$, $z \geq 0$ 所确定.

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq A,$$

于是
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} (r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5).$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \rho \leq z \leq 6 - \rho^2,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 (6\rho - \rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{32}{3}\pi.$$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 及 $x^2 + y^2 = z^2$ (含有 z 轴的部分);

解 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi,$$

于是
$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi a^3.$$

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$;

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq \rho,$$

$$\text{于是 } V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

$$(4) z = \sqrt{5-x^2-y^2} \text{ 及 } x^2+y^2=4z.$$

解 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2, \frac{1}{4}\rho^2 \leq z \leq \sqrt{5-\rho^2},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho(\sqrt{5-\rho^2} - \frac{\rho^2}{4}) d\rho = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4). \end{aligned}$$

13. 球心在原点、半径为 R 的球体, 在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比, 求这球体的质量.

$$\text{解 密度函数为 } \rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq r \leq R,$$

$$\text{于是 } M = \iiint_{\Omega} k\sqrt{x^2+y^2+z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R kr \cdot r^2 dr = k\pi R^4.$$

习题 9-4

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解 位于柱面内的部分球面有两块, 其面积是相同的.

$$\text{由曲面方程 } z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \text{ 得 } \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } A &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho d\rho = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - a \sin \theta) d\theta = 2a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下的部分的曲面的面积.

解 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z^2=2x$ 两式消 z 得 $x^2+y^2=2x$, 于是所求曲面在 xOy 面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2 \leq 2x$.

$$\text{由曲面方程 } \sqrt{x^2+y^2} \text{ 得 } \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\text{于是 } A = \iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \sqrt{2} \iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} dxdy = \sqrt{2}\pi.$$

3. 求底面半径相同的两个直交柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解 设 A_1 为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 相应于区域 $D: x^2+y^2 \leq R^2$ 上的面积. 则所求表面积为 $A=4A_1$.

$$\begin{aligned} A &= 4 \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = 4 \iint_D \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2+0^2} dxdy \\ &= 4 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} dxdy = 4R \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} dy = 8R \int_{-R}^R dx = 16R^2. \end{aligned}$$

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下, 求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

解 令密度为 $\mu=1$.

因为区域 D 可表示为 $0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq \sqrt{2px}$, 所以

$$A = \iint_D dx dy = \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2px_0^3},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} x dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} x \sqrt{2px} dx = \frac{3}{5} x_0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \frac{1}{A} \int_0^{x_0} p x dx = \frac{3}{8} y_0,$$

所求质心为 $(\frac{3}{5}x_0, \frac{3}{8}y_0)$

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}$;

解 令密度为 $\mu=1$. 因为闭区域 D 对称于 y 轴, 所以 $\bar{x}=0$.

$$A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \pi ab \text{ (椭圆的面积)},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}} y dy = \frac{1}{A} \cdot \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4b}{3\pi},$$

所求质心为 $(0, \frac{4b}{3\pi})$.

(3) D 是介于两个圆 $r=a\cos\theta, r=b\cos\theta (0 < a < b)$ 之间的闭区域.

解 令密度为 $\mu=1$. 由对称性可知 $\bar{y}=0$.

$$A = \iint_D dx dy = \pi(\frac{b}{2})^2 - \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2) \text{ (两圆面积的差)},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{2}{A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta} r \cos\theta \cdot r \cdot dr = \frac{a^2 + b^2 + ab}{2(a+b)},$$

所求质心是 $(\frac{a^2 + b^2 + ab}{2(a+b)}, 0)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成, 它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y)=x^2y$, 求该薄片的质心.

$$\text{解 } M = \iint_D \mu(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (x^4 - x^6) dx = \frac{1}{35}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^3 y dy = \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{1}{2} (x^5 - x^7) dx = \frac{35}{48},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y^2 dy = \frac{1}{M} \int_0^1 \frac{1}{3} (x^5 - x^8) dx = \frac{35}{54},$$

质心坐标为 $(\frac{35}{48}, \frac{35}{54})$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为 a , 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.

解 建立坐标系, 使薄片在第一象限, 且直角边在坐标轴上. 薄片上点 (x, y) 处的函数为 $\mu = x^2 + y^2$. 由对称性可知 $\bar{x} = \bar{y}$.

$$M = \iint_D \mu(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{6} a^4,$$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \frac{1}{M} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy = \frac{2}{5} a,$$

薄片的质心坐标为 $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围成立体的质心(设密度 $\rho=1$):

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z=1$;

解 由对称性可知, 重心在 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \frac{1}{3} \pi \text{ (圆锥的体积)},$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 z dz = \frac{3}{4},$$

所求立体的质心为 $(0, 0, \frac{3}{4})$.

(2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (A > a > 0), z=0$;

解 由对称性可知, 重心在 z 轴上, 故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \frac{2}{3}\pi A^3 - \frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi(A^3 - a^3) \text{ (两个半球体体积的差),}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi d\theta = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^A r^3 dr = \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)},$$

所求立体的质心为 $(0, 0, \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)})$.

$$(3) z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^a [x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3] dx = \frac{1}{6}a^4, \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dv = \frac{1}{V} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{\frac{1}{15}a^5}{\frac{1}{6}a^4} = \frac{2}{5}a,$$

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz = \frac{7}{30}a^2,$$

所以立体的重心为 $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2)$.

8. 设球体占有闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$, 它在内部各点的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方, 试求这球体的质心.

解 球体密度为 $\rho = x^2 + y^2 + z^2$. 由对称性可知质心在 z 轴上, 即 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

在球面坐标下 Ω 可表示为: $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2R \cos \varphi$, 于是

$$M = \iiint_{\Omega} \rho dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 \cdot r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} R^5 \sin \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{32}{15} \pi R^5,$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^5 dr \\ &= \frac{2\pi}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{6} R^6 \sin \varphi \cos^7 \varphi d\varphi = \frac{\frac{8}{3} \pi R^6}{\frac{32}{15} \pi R^5} = \frac{5}{4} R,\end{aligned}$$

故球体的质心为 $(0, 0, \frac{5}{4}R)$.

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下, 求指定的转动惯量:

(1) $D = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, 求 I_y ;

解 积分区域 D 可表示为

$$-a \leq x \leq a, -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

于是
$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy = \frac{2b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^3 b.$$

提示:
$$\int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{x = a \sin t}{=} \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{8} a^4.$$

(2) D 由抛物线 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 与直线 $x=2$ 所围成, 求 I_x 和 I_y ;

解 积分区域可表示为

$$0 \leq x \leq 2, -3\sqrt{x/2} \leq y \leq 3\sqrt{x/2},$$

于是
$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^2 dx \int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}} y^2 dy = \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{27}{2\sqrt{2}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{72}{5},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 x^2 dx \int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}} dy = \frac{6}{\sqrt{2}} \int_0^2 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{96}{7}.$$

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, 求 I_x 和 I_y .

$$\text{解 } I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = a \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{ab^3}{3},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \frac{1}{3} a^3 \cdot b = \frac{a^3 b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h , 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 取形心为原点, 取两旋转轴为坐标轴, 建立坐标系.

$$I_x = \iint_D y^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} \mu b h^3,$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy = \frac{1}{12} \mu h b^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$, $|x|=a$, $|y|=a$ 所围成,

(1)求物体的体积;

解 由对称可知

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy = 4 \int_0^a (ax^2 + \frac{a^3}{3}) dx = \frac{8}{3} a^4. \end{aligned}$$

(2)求物体的质心;

解 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv = \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} z dz \\ &= \frac{2}{V} \int_0^a dx \int_0^a (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{2}{V} \int_0^a (ax^4 + \frac{2}{3} a^3 x^2 + \frac{a^5}{5}) dx = \frac{7}{15} a^2. \end{aligned}$$

(3)求物体关于 z 轴的转动惯量.

$$\begin{aligned}\text{解 } I_z &= \iiint_{\Omega} \rho(x^2+y^2)dv = 4\rho \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} (x^2+y^2)dz \\ &= 4\rho \int_0^a dx \int_0^a (x^4+2x^2y^2+y^4)dy = 4\rho \frac{28}{45}a^6 = \frac{112}{45}\rho a^6.\end{aligned}$$

12. 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度 $\rho=1$).

解 建立坐标系, 使圆柱体的底面在 xOy 面上, z 轴通过圆柱体的轴心. 用柱面坐标计算.

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\rho dv = \iiint_{\Omega} r^3 dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr \int_0^h dz = \frac{1}{2}\pi ha^4.$$

13. 设面密度为常量 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x, y, 0)|R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2, x \geq 0\}$, 求它对位于 z 轴上点 $M_0(0, 0, a)(a>0)$ 处单位质量的质点的引力 F .

解 引力 $F=(F_x, F_y, F_z)$, 由对称性, $F_y=0$, 而

$$\begin{aligned}F_x &= G \iint_D \frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} d\sigma \\ &= G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} \cdot \rho d\rho \\ &= 2G\mu \left[\ln \frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}} \right], \\ F_z &= -Ga \iint_D \frac{\mu d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} = -Ga\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} \\ &= \pi Ga\mu \left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}} \right].\end{aligned}$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ , 占有闭区域 $\Omega=\{(x, y, z)|x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, 求它对于位于点 $M_0(0, 0, a)(a>h)$ 处单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性可知, 沿 x 轴与 y 轴方向的分力互相抵消, 故 $F_x=F_y=0$,

而

$$\begin{aligned} F_z &= \iiint_{\Omega} G\rho \frac{a-z}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}} dv \\ &= G\rho \int_0^h (a-z) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}} \\ &= G\rho \int_0^h (a-z) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{rdr}{[r^2+(a-z)^2]^{3/2}} \\ &= 2\pi G\rho \int_0^h (a-z) \left[\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}} \right] dz \\ &= 2\pi G\rho [h + \sqrt{R^2+(a-h)^2} - \sqrt{R^2+a^2}]. \end{aligned}$$

总习题九

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论:

(1) 设有空间闭区域

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

则有_____.

$$(A) \iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv; (B) \iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv;$$

$$(C) \iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv; (D) \iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$$

解 (C).

提示: $f(x, y, z) = x$ 是关于 x 的奇函数, 它在关于 yOz 平面对称的区域 Ω_1 上的三重积分为零, 而在 Ω_2 上的三重积分不为零, 所以(A)是错的. 类似地, (B)和(D)也是错的.

$f(x, y, z) = z$ 是关于 x 和 y 的偶函数, 它关于 yOz 平面和 zOx 面都对称的区域 Ω_1 上的三重积分可以化为 Ω_1 在第一卦部分 Ω_2 上的三重积分的四倍.

(2) 设有平面闭区域 $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$, 则

$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(A) 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy; (B) 2 \iint_{D_1} xy dx dy; (C) 4 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy; (D) 0.$$

解 (A).

2. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (1+x) \sin y d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为(0, 0), (1, 0), (1, 2)和(0, 1)的梯形闭区域;

解 积分区域可表示为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x+1\}$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (1+x) \sin y d\sigma &= \int_0^1 (1+x) dx \int_0^{x+1} \sin y dy = \int_0^1 (1+x) [1 - \cos(x+1)] dx \\ &= \frac{3}{2} + \cos 1 + \sin 1 - \cos 2 - 2 \sin 2. \end{aligned}$$

(2) $\iint_D (x^2 - y^2) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$;

$$\begin{aligned}\text{解 } \iint_D (x^2 - y^2) d\sigma &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (x^2 - y^2) dy = \int_0^\pi (x^2 \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x) dx \\ &= \pi^2 - \frac{40}{9}.\end{aligned}$$

$$(3) \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是圆周 } x^2 + y^2 = Rx \text{ 所围成的闭区域};$$

解 在极坐标下积分区域 D 可表示为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq R \cos \theta,$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma &= \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{R^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta = \frac{2R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{1}{9} (3\pi - 4) R^3.\end{aligned}$$

$$(4) \iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

解 因为积分区域 D 关于 x 轴、 y 轴对称, 所以

$$\iint_D 3x d\sigma = \iint_D 6y d\sigma = 0.$$

$$\iint_D 9 d\sigma = 9 \iint_D d\sigma = 9\pi R^2.$$

$$\text{因为 } \iint_D y^2 d\sigma = \iint_D x^2 d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } \iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma &= 9\pi R^2 + \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= 9\pi R^2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \cdot \rho d\rho = 9\pi R^2 + \frac{\pi}{4} R^4.\end{aligned}$$

3. 交换下列二次积分的次序:

$$(1) \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx;$$

解 积分区域为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, -\sqrt{4-y} \leq x \leq \frac{1}{2}(y-4)\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 0, 2x+4 \leq y \leq -x^2+4\},$$

$$\text{所以 } \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx = \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{-x^2+4} f(x, y) dy.$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx;$$

解 积分区域为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\} \cup \{(x, y) | 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 3-y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x \leq y \leq 3-x\},$$

$$\text{所以 } \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

解 积分区域为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1+\sqrt{1-x^2}\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\} \cup \{(x, y) | 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}\},$$

$$\text{所以 } \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

4. 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

证明 积分区域为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\},$$

所以 $\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a dx \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) dy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$

5. 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$

解 在极坐标下积分区域可表示为 $D = D_1 + D_2 + D_3,$

其中 $D_1: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta,$

$D_2: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \csc \theta,$

$D_3: \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta,$

所以 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

6. 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为三次积分, 其中积分区域 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2, y = x^2$

及平面 $y=1, z=0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega: 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1,$$

所以 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$

7. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0)$ 的公共部分;

解 两球面的公共部分在 xOy 面上的投影 $x^2 + y^2 \leq (\frac{\sqrt{3}}{2} R)^2,$

在柱面坐标下积分区域可表示为

$$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R, R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \leq z \leq R\sqrt{R^2 - \rho^2},$$

所以
$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2 \rho dz$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \frac{1}{3} [(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - (R - \sqrt{R^2 - \rho^2})^3] \rho d\rho = \frac{59}{480} \pi R^5.$$

(2)
$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$$
, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

解 因为积分区域 Ω 关于 xOy 面对称, 而被积函数为关于 z 的奇函数,

所以
$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv = 0.$$

(3)
$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$$
, 其中 Ω 是由 xOy 面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$

所围成的闭区域.

解 曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面的方程为 $y^2 + z^2 = 2x$. 由曲面 $y^2 + z^2 = 2x$ 和平面 $x=5$ 所围成的闭区域 Ω 在 yOz 面上的投影区域为

$$D_{yz}: y^2 + z^2 \leq (\sqrt{10})^2,$$

在柱面坐标下此区域又可表示为

$$D_{yz}: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{10}, \frac{1}{2}\rho^2 \leq x \leq 5,$$

所以
$$\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{10}} d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^5 \rho^2 \cdot \rho dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{10}} \rho^3 (5 - \frac{1}{2}\rho^2) d\rho = \frac{250}{3} \pi.$$

8. 求平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面的方程可写为 $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$, 所割部分在 xOy 面上的投影区域为

$$D = \{(x, y) | \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

于是
$$A = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dx dy$$

$$= \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} \iint_D dx dy = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}.$$

9. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设所求矩形另一边的长度为 H , 建立坐标系, 使半圆的直径在 x 轴上, 圆心在原点. 不妨设密度为 $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

由对称性及已知条件可知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 即

$$\iint_D y dx dy = 0,$$

从而
$$\int_{-R}^R dx \int_{-H}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dy = 0,$$

即
$$\int_{-R}^R \frac{1}{2} [(R^2 - x^2) - H^2] dx = 0,$$

亦即
$$R^3 - \frac{1}{3} R^2 - R H^2 = 0,$$

从而
$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

因此, 接上去的均匀矩形薄片另一边的长度为 $\sqrt{\frac{2}{3}} R$.

10. 求由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成的均匀薄片(面密度为常数 μ) 对于直线 $y = -1$ 的转动惯量.

解 抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成区域可表示为

$$D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\},$$

所求转动惯量为

$$I = \iint_D \mu(y+1)^2 dx dy = \mu \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y+1)^2 dy = \frac{1}{3} \mu \int_{-1}^1 [8 - (x^2+1)^3] dx = \frac{368}{105} \mu.$$

11. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片, 占有平面闭域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$, 过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P , $OP = a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 设 P 点的坐标为 $(0, 0, a)$. 薄片的面密度为 $\mu = \frac{M}{\frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{2M}{\pi R^2}$.

设所求引力为 $\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)$.

由于薄片关于 y 轴对称, 所以引力在 x 轴上的分量 $F_x=0$, 而

$$\begin{aligned} F_y &= G \iint_D \frac{m\mu y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} d\sigma = m\mu G \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho^2 \sin \theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= m\mu G \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} d\rho = 2m\mu G \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= \frac{4GmM}{\pi R^2} \left(\ln \frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a} - \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}} \right), \\ F_z &= -G \iint_D \frac{m\mu a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} d\sigma = -m\mu Ga \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} d\rho \\ &= -\pi m\mu Ga \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} d\rho = -\frac{2GmM}{R^2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}} \right). \end{aligned}$$

习题 10-1

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L , 在点 (x, y) 处它的线密度为 $\mu(x, y)$, 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x, I_y ;

(2) 这曲线弧的重心坐标 \bar{x}, \bar{y} .

解 在曲线弧 L 上任取一长度很短的小弧段 ds (它的长度也记做 ds), 设 (x, y) 为小弧段 ds 上任一点.

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量元素分别为

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) ds, dI_y = x^2 \mu(x, y) ds.$$

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) ds, I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) ds.$$

曲线 L 对于 x 轴和 y 轴的静矩元素分别为

$$dM_x = y \mu(x, y) ds, dM_y = x \mu(x, y) ds.$$

曲线 L 的重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}, \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明: 如果曲线弧 L 分为两段光滑曲线 L_1 和 L_2 , 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$$

证明 划分 L , 使得 L_1 和 L_2 的连接点永远作为一个分点, 则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \rightarrow 0$, 上式两边同时取极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

即得 $\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t (0\leq t\leq 2\pi)$;

$$\begin{aligned}\text{解 } \oint_L (x^2+y^2)^n ds &= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^{2n+1} dt = 2\pi a^{2n+1}.\end{aligned}$$

(2) $\int_L (x+y)ds$, 其中 L 为连接(1, 0)及(0, 1)两点的直线段;

解 L 的方程为 $y=1-x (0\leq x\leq 1)$;

$$\int_L (x+y)ds = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+[(1-x)']^2} dx = \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

(3) $\oint_L xdx$, 其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

解 $L_1: y=x^2 (0\leq x\leq 1), L_2: y=x (0\leq x\leq 1)$.

$$\begin{aligned}\oint_L xdx &= \int_{L_1} xdx + \int_{L_2} xdx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1+[(x^2)']^2} dx + \int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2} dx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2} dx + \int_0^1 \sqrt{2} x dx = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

(4) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

解 $L=L_1+L_2+L_3$, 其中

$$L_1: x=x, y=0 (0\leq x\leq a),$$

$$L_2: x=a\cos t, y=a\sin t \quad (0\leq t\leq \frac{\pi}{4}),$$

$$L_3: x=x, y=x \quad (0\leq x\leq \frac{\sqrt{2}}{2}a),$$

因而 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds + \int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds,$

$$\begin{aligned}&= \int_0^a e^x \sqrt{1^2+0^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} dt + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{1^2+1^2} dx \\ &= e^a(2+\frac{\pi}{4}a)-2.\end{aligned}$$

(5) $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, 其中 Γ 为曲线 $x=e^t \cos t, y=e^t \sin t, z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

$$\begin{aligned} \text{解 } ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t}} dt = \sqrt{3} e^t dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds &= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} \sqrt{3} e^t dt \\ &= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t} dt = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t}\right]_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

(6) $\int_{\Gamma} x^2 y z ds$, 其中 Γ 为折线 $ABCD$, 这里 A, B, C, D 依次为点 $(0, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 2)$ 、 $(1, 0, 2)$ 、 $(1, 3, 2)$;

解 $\Gamma = AB + BC + CD$, 其中

$$AB: x=0, y=0, z=t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$BC: x=t, y=0, z=2 \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$CD: x=1, y=t, z=2 \quad (0 \leq t \leq 3),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_{\Gamma} x^2 y z ds &= \int_{AB} x^2 y z ds + \int_{BC} x^2 y z ds + \int_{CD} x^2 y z ds \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 0 dt + \int_0^3 2t \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} dt = 9. \end{aligned}$$

(7) $\int_L y^2 ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$;

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_L y^2 ds &= \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 \sqrt{[a(t-\sin t)]'^2 + [a(1-\cos t)]'^2} dt \\ &= \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sqrt{1-\cos t} dt = \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

(8) $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 为曲线 $x=a(\cos t + t \sin t), y=a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(a(-\sin t + 1 + t \cos t))^2 + (a(\cos t - 1 - t \sin t))^2} dt = at dt \\ \int_L (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} [a^2 (\cos t + t \sin t)^2 + a^2 (\sin t - t \cos t)^2] at dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} a^3(1+t^2)tdt = 2\pi^2 a^3(1+2\pi^2).$$

4. 求半径为 a , 中心角为 2φ 的均匀圆弧(线密度 $\mu=1$) 的重心.

解 建立坐标系如图 10-4 所示, 由对称性可知 $\bar{y}=0$, 又

$$\bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{2\varphi a} \int_L x ds = \frac{1}{2\varphi a} \int_{-\varphi}^{\varphi} a \cos \theta \cdot a d\theta = \frac{a \sin \varphi}{\varphi},$$

所以圆弧的重心为 $(\frac{a \sin \varphi}{\varphi}, 0)$

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a \cos t, y=a \sin t, z=kt$, 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 它的线密度 $\rho(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$, 求:

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z ; (2) 它的重心.

解 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{a^2 + k^2} dt$.

$$\begin{aligned} (1) I_z &= \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt = \frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) M &= \int_L \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_L x(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \cos t (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{M} \int_L y(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \sin t (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{-6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_L z(x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} kt (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{3\pi k (a^2 + 2\pi^2 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \end{aligned}$$

故重心坐标为 $(\frac{6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, -\frac{6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}, \frac{3\pi k (a^2 + 2\pi^2 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2})$.

习题 10-2

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段, 证明: $\int_L P(x,y)dx=0$.

证明 设 L 是直线 $x=a$ 上由 (a, b_1) 到 (a, b_2) 的一段,
则 $L: x=a, y=t, t$ 从 b_1 变到 b_2 . 于是

$$\int_L P(x,y)dx = \int_{b_1}^{b_2} P(a,t) \left(\frac{da}{dt}\right) dt = \int_{b_1}^{b_2} P(a,t) \cdot 0 dt = 0.$$

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a, 0)$ 到 $(b, 0)$ 的一段直线,

证明 $\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(x,0)dx$.

证明 $L: x=x, y=0, t$ 从 a 变到 b , 所以

$$\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(x,0)(x)'dx = \int_a^b P(x,0)dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x^2 - y^2)dx$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$

的一段弧;

解 $L: y=x^2, x$ 从 0 变到 2, 所以

$$\int_L (x^2 - y^2)dx = \int_0^2 (x^2 - x^4)dx = -\frac{56}{15}.$$

(2) $\oint_L xydx$, 其中 L 为圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a>0)$ 及 x 轴所围成的在第

一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

解 $L=L_1+L_2$, 其中

$L_1: x=a+a\cos t, y=a\sin t, t$ 从 0 变到 π ,

$L_2: x=x, y=0, x$ 从 0 变到 $2a$,

因此 $\oint_L xydx = \int_{L_1} xydx + \int_{L_2} xydx$

$$= \int_0^\pi a(1+\cos t)a\sin t(a+a\cos t)'dt + \int_0^{2a} 0dx$$

$$= -a^3 \left(\int_0^\pi \sin^2 t dt + \int_0^\pi \sin^2 t d \sin t \right) = -\frac{\pi}{2} a^3.$$

(3) $\int_L ydx + xdy$, 其中 L 为圆周 $x=R\cos t, y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到

$\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_L ydx + xdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [R\sin t(-R\sin t) + R\cos t R\cos t]dt \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = 0.\end{aligned}$$

(4) $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (按逆时针方向绕行);

解 圆周的参数方程为: $x = a\cos t, y = a\sin t, t$ 从 0 变到 2π , 所以

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)(a\cos t)]dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} -a^2 dt = -2\pi.\end{aligned}$$

(5) $\int_{\Gamma} x^2 dx + z dy - y dz$, 其中 Γ 为曲线 $x = k\theta, y = a\cos\theta, z = a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_{\Gamma} x^2 dx + z dy - y dz &= \int_0^{\pi} [(k\theta)^2 k + a\sin\theta(-a\sin\theta) - a\cos\theta a\cos\theta]d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (k^3\theta^2 - a^2)d\theta = \frac{1}{3}\pi^3 k^3 - \pi a^2.\end{aligned}$$

(6) $\int_{\Gamma} x dx + y dy + (x+y-1)dz$, 其中 Γ 是从点(1, 1, 1)到点(2, 3, 4)的一段直线;

解 Γ 的参数方程为 $x=1+t, y=1+2t, z=1+3t, t$ 从 0 变到 1.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} x dx + y dy + (x+y-1)dz &= \int_0^1 [(1+t) + 2(1+2t) + 3(1+t+1+2t-1)]dt \\ &= \int_0^1 (6+14t)dt = 13.\end{aligned}$$

(7) $\oint_{\Gamma} dx - dy + y dz$, 其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$, 这里的 A, B, C

依次为点(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);

解 $\Gamma = AB + BC + CA$, 其中

AB : $x=x, y=1-x, z=0, x$ 从 1 变到 0,

BC : $x=0, y=1-z, z=z, z$ 从 0 变到 1,

CA: $x=x, y=0, z=1-x, x$ 从 0 变到 1,

故
$$\oint_{\Gamma} dx-dy+yz = \int_{AB} dx-dy+yz + \int_{BC} dx-dy+yz + \int_{CA} dx-dy+yz$$
$$= \int_0^1 [1-(1-x)']dx + \int_0^1 [-(1-z)' + (1-z)]dt + \int_0^1 dx = \frac{1}{2}.$$

(8) $\int_L (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从 $(-1, 1)$

到 $(1, 1)$ 的一段弧.

解 $L: x=x, y=x^2, x$ 从 -1 变到 1 , 故

$$\begin{aligned} & \int_L (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy \\ &= \int_{-1}^1 [(x^2-2x^3) + (x^4-2x^3)2x]dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2-4x^4)dx = -\frac{14}{15} \end{aligned}$$

4. 计算 $\int_L (x+y)dx + (y-x)dy$, 其中 L 是:

(1) 抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(1, 1)$ 到点 $(4, 2)$ 的一段弧;

解 $L: x=y^2, y=y, y$ 从 1 变到 2 , 故

$$\begin{aligned} & \int_L (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_1^2 [(y^2+y) \cdot 2y + (y-y^2) \cdot 1]dy = \frac{34}{3}. \end{aligned}$$

(2) 从点 $(1, 1)$ 到点 $(4, 2)$ 的直线段;

解 $L: x=3y-2, y=y, y$ 从 1 变到 2 , 故

$$\begin{aligned} & \int_L (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_1^2 [(3y-2+y) \cdot y + (y-3y+2) \cdot 1]dy = 11 \end{aligned}$$

(3) 先沿直线从点 $(1, 1)$ 到 $(1, 2)$, 然后再沿直线到点 $(4, 2)$ 的折线;

解 $L=L_1+L_2$, 其中

$L_1: x=1, y=y, y$ 从 1 变到 2 ,

$L_2: x=x, y=2, x$ 从 1 变到 4 ,

故
$$\begin{aligned} & \int_L (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_{L_1} (x+y)dx + (y-x)dy + \int_{L_2} (x+y)dx + (y-x)dy \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 (y-1)dy + \int_1^4 (x+2)dx = 14.$$

(4)沿曲线 $x=2t^2+t+1$, $y=t^2+1$ 上从点(1, 1)到(4, 2)的一段弧.

解 L : $x=2t^2+t+1$, $y=t^2+1$, t 从 0 变到 1, 故

$$\begin{aligned} & \int_L (x+y)dx + (y-x)dy \\ &= \int_0^1 [(3t^2+t+2)(4t+1) + (-t^2-t) \cdot 2t]dt = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

5. 一力场由沿横轴正方向的常力 \mathbf{F} 所构成, 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段时场力所作的功.

解 已知场力为 $\mathbf{F}=(|\mathbf{F}|, 0)$, 曲线 L 的参数方程为

$$x=R \cos \theta, y=R \sin \theta,$$

θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$, 于是场力所作的功为

$$W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L |\mathbf{F}| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\mathbf{F}| \cdot (-R \sin \theta) d\theta = -|\mathbf{F}| R.$$

6. 设 z 轴与力方向一致, 求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移到 (x_2, y_2, z_2) 时重力作的功.

解 已知 $\mathbf{F}=(0, 0, mg)$. 设 Γ 为从 (x_1, y_1, z_1) 到 (x_2, y_2, z_2) 的直线, 则重力所作的功为

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} 0dx + 0dy + mgdz = mg \int_{z_1}^{z_2} dz = mg(z_2 - z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 化成对弧长的曲线积分, 其中 L 为:

(1)在 xOy 面内沿直线从点(0, 0)到(1, 1);

解 L 的方向余弦 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

故 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$\begin{aligned} &= \int_L [P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta]ds \\ &= \int_L \frac{P(x, y) + Q(x, y)}{\sqrt{2}} ds. \end{aligned}$$

(2)沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0, 0)到(1, 1);

解 曲线 L 上点 (x, y) 处的切向量为 $\tau=(1, 2x)$, 单位切向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta)=e_{\tau}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right),$$

故

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_L [P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta]ds \\ &= \int_L \frac{P(x, y) + 2xQ(x, y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds. \end{aligned}$$

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$.

解 L 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$, 其上任一点的切向量为

$$\tau=(1, \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}),$$

单位切向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta)=e_{\tau}=(\sqrt{2x-x^2}, 1-x),$$

故

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_L [P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta]ds \\ &= \int_L [\sqrt{2x-x^2}P(x, y) + (1-x)Q(x, y)]ds. \end{aligned}$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧, 把对坐标的曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化成对弧长的曲线积分.

解 曲线 Γ 上任一点的切向量为

$$\tau=(1, 2t, 3t^2)=(1, 2x, 3y),$$

单位切向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)=e_{\tau}=\frac{1}{\sqrt{1+2x^2+9y^2}}(1, 2x, 3y),$$

$$\begin{aligned} & \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} [P\cos \alpha + Q\cos \beta + R\cos \gamma]ds \\ &= \int_L \frac{P + 2xQ + 3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}ds. \end{aligned}$$

习题 10-3

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性:

(1) $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 及 $y^2 = x$ 所围

成的区域的正向边界曲线;

解 $L = L_1 + L_2$, 故

$$\begin{aligned} & \oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= \int_{L_1} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy + \int_{L_2} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= \int_0^1 [(2x^3 - x^2) + (x + x^4)2x]dx + \int_1^0 [(2y^3 - y^4)2y + (y^2 + y^2)]dy \\ &= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2)dx - \int_0^1 (-2y^5 + 4y^4 + 2y^2)dy = \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (1 - 2x) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (1 - 2x) dx \\ &= \int_0^1 (y^{\frac{1}{2}} - y - y^2 + y^4) dy = \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

所以
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

(2) $\oint_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 L 是四个顶点分别为(0, 0)、

(2, 0)、(2, 2)、和(0, 2)的正方形区域的正向边界.

解 $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, 故

$$\begin{aligned} & \oint_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\ &= \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} \right) (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\ &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 (y^2 - 4y)dy + \int_2^0 (x^2 - 8x)dx + \int_2^0 y^2 dy \\ &= \int_0^2 8x dx + \int_0^2 -4y dy = 8, \end{aligned}$$

而
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-2y + 3xy^2) dx dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy = \int_0^2 (8x - 4) dx = 8,$$

所以 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$

2. 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;

$$\begin{aligned} \text{解 } A &= \oint_L -y dx = \int_0^{2\pi} -a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt \\ &= 3a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

(2) 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$;

解 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 的参数方程为

$$x = 4 \cos \theta, y = 3 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4 \cos \theta \cdot 3 \cos \theta - 3 \sin \theta \cdot (-4 \sin \theta)] d\theta \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta = 12\pi. \end{aligned}$$

(3) 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$.

解 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 的参数方程为 $x = a + a \cos \theta, y = a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned} \text{故 } A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(1 + \cos \theta) \cdot a \cos \theta - a \sin \theta \cdot (-a \sin \theta)] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) d\theta = \pi a^2. \end{aligned}$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, L 的方向为逆时针方向.

解 $P = \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$, $Q = \frac{-x}{2(x^2 + y^2)}$. 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

在 L 内作逆时针方向的 ε 小圆周

$$l: x = \varepsilon \cos \theta, y = \varepsilon \sin \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

在以 L 和 l 为边界的闭区域 D_ε 上利用格林公式得

$$\oint_{L+l^-} Pdx + Qdy = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

即
$$\oint_L Pdx + Qdy = -\oint_{l^-} Pdx + Qdy = \oint_l Pdx + Qdy.$$

因此
$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} = \oint_l \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} = \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon^2 \sin^2 \theta - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}{2\varepsilon^2} d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = -\pi.$$

4. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy;$

解 $P = x+y$, $Q = x-y$, 显然 P 、 Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 而且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

故在整个 xOy 面内, 积分与路径无关.

取 L 为点 $(1, 1)$ 到 $(2, 3)$ 的直线 $y = 2x - 1$, x 从 1 变到 2, 则

$$\begin{aligned} \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy &= \int_1^2 [(3x-1) + 2(1-x)]dx \\ &= \int_1^2 (1+x)dx = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy;$

解 $P=6xy^2-y^3$, $Q=6x^2y-3xy^2$, 显然 P 、 Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2$, 故积分与路径无关, 取路径 $(1, 2) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (3, 4)$ 的折线, 则

$$\begin{aligned} & \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2-y^3)dx + (6x^2y-3xy^2)dy \\ &= \int_2^4 6y-3y^2 dy + \int_1^3 (96x-64)dx = 236. \end{aligned}$$

$$(3) \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)dx + (x^2-4xy^3)dy.$$

解 $P=2xy-y^4+3$, $Q=x^2-4xy^3$, 显然 P 、 Q 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数, 并且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3$, 所以在整个 xOy 面内积分与路径无关, 选取路径为从 $(1, 0) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 1)$ 的折线, 则

$$\begin{aligned} & \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)dx + (x^2-4xy^3)dy \\ &= \int_0^1 (1-4y^3)dy + \int_1^2 2(x+1)dx = 5. \end{aligned}$$

5. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

$$(1) \oint_L (2x-y+4)dx + (5y+3x-6)dy, \text{ 其中 } L \text{ 为三顶点分别为 } (0, 0)、$$

$(3, 0)$ 和 $(3, 2)$ 的三角形正向边界;

解 L 所围区域 D 如图所示, $P=2x-y+4$, $Q=5y+3x-6$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 - (-1) = 4,$$

故由格林公式, 得

$$\begin{aligned} \oint_L (2x-y+4)dx + (5y+3x-6)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_D 4 dxdy = 12. \end{aligned}$$

$$(2) \oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy, \text{ 其中 } L \text{ 为正}$$

向星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a>0)$;

解 $P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x$, $Q=x^2\sin x-2ye^x$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x)-(2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x)=0,$$

由格林公式

$$\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy \\ =\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

(3) $\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$, 其中 L 为在抛物线

$2x=\pi y^2$ 上由点 $(0, 0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧;

解 $P=2xy^3-y^2\cos x$, $Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(-2y\cos x+6xy^2)-(6xy^2-2y\cos x)=0,$$

所以由格林公式

$$\int_{L+OA+OB} Pdx+Qdy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

其中 L 、 OA 、 OB 、及 D 如图所示.

$$\text{故 } \int_L Pdx+Qdy=\int_{OA+AB} Pdx+Qdy \\ =\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx+\int_0^1 (1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2)dy=\frac{\pi^2}{4}.$$

(4) $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$, 其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由

点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.

解 $P=x^2-y$, $Q=-x-\sin^2 y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1-(-1)=0$,

由格林公式有

$$\int_{L+AB+BO} Pdx+Qdy=-\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

其中 L 、 AB 、 BO 及 D 如图所示.

$$\begin{aligned}\text{故} \quad \int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy &= \int_{BA+OB} (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy \\ &= \int_0^1 -(1 + \sin^2 y)dy + \int_0^1 x^2 dx = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4}\sin 2.\end{aligned}$$

6. 验证下列 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求这样的 $u(x, y)$:

$$(1) (x+2y)dx + (2x+y)dy;$$

证明 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 面内的函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+2y)dx + (2x+y)dy + C = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + C.$$

$$(2) 2xydx + x^2dy;$$

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 面内的函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2xydx + x^2dy + C = \int_0^y 0dy + \int_0^x 2xydx + C = x^2y + C.$$

$$(3) 4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy$$

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6\cos 3y \sin 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} 4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy + C \\ &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y -3\cos 3y \cos 2x dy + C = -\cos 2x \sin 3y + C.\end{aligned}$$

$$(4) (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$$

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某个定义在整个 xOy 平面内的函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy + C \\ &= \int_0^y 12ye^y dy + \int_0^x (3x^2y + 8xy^2)dx + C\end{aligned}$$

$$=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y)+C.$$

$$(5) (2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$$

解 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是

某个函数 $u(x,y)$ 的全微分

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y\sin x - x^2\sin y) dy + C \\ &= y^2\sin x + x^2\cos y + C. \end{aligned}$$

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$, $Y=2xy-8$, 这变力确定了一个力场, 证明质点在此场内移动时, 场力所做的功与路径无关.

解 场力所作的功为 $W = \int_{\Gamma} (x+y^2)dx + (2xy-8)dy$.

由于 $\frac{\partial Y}{\partial x} = 2y = \frac{\partial X}{\partial y}$, 故以上曲线积分与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

习题 10-4

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ , 在点 (x, y, z) 处它的面密度为 $\mu(x, y, z)$, 用对面积的曲面积分表达这曲面对于 x 轴的转动惯量.

解. 假设 $\mu(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上连续, 应用元素法, 在曲面 Σ 上任意一点 (x, y, z) 处取包含该点的一直径很小的曲面块 dS (它的面积也记做 dS), 则对于 x 轴的转动惯量元素为

$$dI_x = (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS,$$

对于 x 轴的转动惯量为

$$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证明 划分 Σ_1 为 m 部分, $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_m$;

划分 Σ_2 为 n 部分, $\Delta S_{m+1}, \Delta S_{m+2}, \dots, \Delta S_{m+n}$,

则 $\Delta S_1, \dots, \Delta S_m, \Delta S_{m+1}, \dots, \Delta S_{m+n}$ 为 Σ 的一个划分, 并且

$$\sum_{i=1}^{m+n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i.$$

令 $\lambda_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \{\Delta S_i\}$, $\lambda_2 = \max_{m+1 \leq i \leq m+n} \{\Delta S_i\}$, $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 则当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$ 与二重积分有什么关系?

解 Σ 的方程为 $z=0, (x, y) \in D$,

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = dxdy,$$

故 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z)dxdy.$

4. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$, 其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部

分, $f(x, y, z)$ 分别如下:

$$(1) f(x, y, z) = 1;$$

$$\text{解 } \Sigma: z = 2 - (x^2 + y^2), D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2,$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$

$$(2) f(x, y, z) = x^2 + y^2;$$

$$\text{解 } \Sigma: z = 2 - (x^2 + y^2), D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2,$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{149}{30} \pi. \end{aligned}$$

$$(3) f(x, y, z) = 3z.$$

$$\text{解 } \Sigma: z = 2 - (x^2 + y^2), D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2,$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{xy}} 3[2 - (x^2 + y^2)] \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 6\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{111}{10} \pi. \end{aligned}$$

5. 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是:

(1) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

解 将 Σ 分解为 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, 其中

$$\Sigma_1: z = 1, D_1: x^2 + y^2 \leq 1, dS = dx dy;$$

$$\Sigma_2: z = \sqrt{x^2 + y^2}, D_2: x^2 + y^2 \leq 1, dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS \\
&= \iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr + \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \pi.
\end{aligned}$$

提示: $dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$

(2) 锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的部分.

解 $\Sigma: z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}, D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 3,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 2 dx dy,$$

因而 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) 2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^2 2r dr = 9\pi.$

提示: $dS = \sqrt{1 + \left[\frac{6x}{2\sqrt{3}(x^2 + y^2)}\right]^2 + \left[\frac{6y}{2\sqrt{3}(x^2 + y^2)}\right]^2} dx dy = 2 dx dy.$

6. 计算下面对面积的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一象限中的部分;

解 $\Sigma: z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y, D_{xy}: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - \frac{3}{2}x,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy,$$

$$\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS = \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_{D_{xy}} dx dy = 4\sqrt{61}.$$

(2) $\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS$, 其中 Σ 为平面 $2x + 2y + z = 6$ 在第一象限中的部分;

解 $\Sigma: z = 6 - 2x - 2y, D_{xy}: 0 \leq y \leq 3 - x, 0 \leq x \leq 3,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = 3dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS = \iint_{D_{xy}} (2xy - 2x^2 - x + 6 - 2x - 2y) 3dxdy$$

$$= 3 \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (6 - 3x - 2x^2 + 2xy - 2y) dy = 3 \int_0^3 (3x^3 - 10x^2 + 9) dx = -\frac{27}{4}.$$

(3) $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上 $z \geq h$ ($0 < h < a$) 的部分;

解 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{D_{xy}} (x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} a dxdy = a |D_{xy}| = \pi a (a^2 - h^2) \text{ (根据区域的对称性及函数的奇偶性).}$$

提示: $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$

(4) $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分.

解 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}, D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2ax, dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy,$

$$\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} [xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}] dxdy$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} [r^2 \sin\theta \cos\theta + r^2 (\cos\theta + \sin\theta)] r dr$$

$$= 4\sqrt{2}a^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin\theta \cos^5\theta + \cos^5\theta + \sin\theta \cos^4\theta) d\theta = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

提示: $dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} dxdy.$

7. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 此壳的面密度为 $\mu = z$.

解 $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

故 $M = \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} r^2 \sqrt{1 + r^2} r dr = \frac{2\pi}{15} (6\sqrt{3} + 1).$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 对于 z 轴的转动惯量.

解 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

$$I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mu_0 dS = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mu_0 \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= a\mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - y^2}} dr = \frac{4}{3} \pi \mu_0 a^4.$$

提示: $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$

习题 10-5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式:

$$\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dydz = \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dydz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dydz.$$

解 证明把 Σ 分成 n 块小曲面 ΔS_i (ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积), ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$, (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点, λ 是各小块曲面的直径的最大值, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dydz \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \pm P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] (\Delta S_i)_{yz} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \\ &= \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dydz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dydz. \end{aligned}$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时, 曲面积分 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$

与二重积分有什么关系?

解 因为 $\Sigma: z=0, (x, y) \in D_{xy}$, 故

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z) dx dy,$$

当 Σ 取的是上侧时为正号, Σ 取的是下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy$ 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半部分的下侧;

解 Σ 的方程为 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq R^2$, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r dr \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r^5 dr = \frac{2}{105} \pi R^7.$$

(2) $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx$, 其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z=0$ 及

$z=3$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧;

解 Σ 在 xOy 面的投影为零, 故 $\iint_{\Sigma} z dx dy = 0$.

Σ 可表示为 $x = \sqrt{1-y^2}$, $(y, z) \in D_{yz} = \{(y, z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$, 故

$$\iint_{\Sigma} x dy dz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2} dy dz = \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 3 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

Σ 可表示为 $y = \sqrt{1-x^2}$, $(z, x) \in D_{zx} = \{(z, x) | 0 \leq z \leq 3, 0 \leq x \leq 1\}$, 故

$$\iint_{\Sigma} y dz dx = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1-x^2} dz dx = \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 3 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

因此 $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx = 2(3 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx) = 6 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \pi$.

解法二 Σ 前侧的法向量为 $\mathbf{n} = (2x, 2y, 0)$, 单位法向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x, y, 0),$$

由两种曲面积分之间的关系,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx &= \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} (x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) dS = \iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dS = \iint_{\Sigma} dS = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

提示: $\iint_{\Sigma} dS$ 表示曲面的面积.

(3) $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$, 其中

$f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧;

解 曲面 Σ 可表示为 $z = 1 - x + y$, $(x, y) \in D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - 1\}$,

Σ 上侧的法向量为 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$, 单位法向量为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

由两类曲面积分之间的联系可得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dydz + [2f(x, y, z) + y] dzdx + [f(x, y, z) + z] dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} [(f+x)\cos\alpha + (2f+y)\cos\beta + (f+z)\cos\gamma] dS \\ &= \iint_{\Sigma} (f+x) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (2f+y) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (f+z) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x-y+z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} dxdy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(4) $\oiint_{\Sigma} xz dxdy + xy dydz + yz dzdx$, 其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$, 其中

$$\Sigma_1: x=0, D_{yz}: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-y,$$

$$\Sigma_2: y=0, D_{zx}: 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1-z,$$

$$\Sigma_3: z=0, D_{xy}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x,$$

$$\Sigma_4: z=1-x-y, D_{xy}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x,$$

于是 $\oiint_{\Sigma} xz dxdy = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4} = 0 + 0 + 0 + \iint_{\Sigma_4} xz dxdy$

$$= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y) dxdy = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{1}{24}.$$

由积分变元的轮换对称性可知

$$\oiint_{\Sigma} xy dydz = \oiint_{\Sigma} yz dzdx = \frac{1}{24}.$$

因此 $\oiint_{\Sigma} xz dxdy + xy dydz + yz dzdx = 3 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$

解 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$, 其中 Σ_1 、 Σ_2 、 Σ_3 是位于坐标面上的三块;

Σ_4 : $z=1-x-y$, D_{xy} : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$.

显然在 Σ_1 、 Σ_2 、 Σ_3 上的曲面积分均为零, 于是

$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx \\ &= \iint_{\Sigma_4} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx \\ &= \iint_{\Sigma_4} (xy \cos \alpha + yz \cos \beta + xz \cos \gamma) dS \\ &= \sqrt{3} \iint_{\Sigma_4} (xy + yz + xz) dS = 3 \iint_{D_{xy}} [xy + (x+y)(1-x-y)] dx dy = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. 把对坐标的曲面积分

$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$ 化成对面积的曲面积分:

(1) Σ 为平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧;

解 令 $F(x, y, z) = 3x+2y+2\sqrt{3}z-6$, Σ 上侧的法向量为:

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (3, 2, 2\sqrt{3}),$$

单位法向量为

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{5}(3, 2, 2\sqrt{3}),$$

于是

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{1}{5} (3P + 2Q + 2\sqrt{3}R) dS. \end{aligned}$$

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 令 $F(x, y, z) = z+x^2+y^2-8$, Σ 上侧的法向量

$$n=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 2y, 1),$$

单位法向量为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x, 2y, 1),$$

于是

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy \\ &= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2xP + 2yQ + R)dS. \end{aligned}$$

10-6

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

$$(1) \oint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为平面 } x=0, y=0, z=0, x=a,$$

$y=a, z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

解 由高斯公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z) dv \\ &= 6 \iiint_{\Omega} x dv = 6 \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a dz = 3a^4 \text{ (这里用了对称性).} \end{aligned}$$

$$(2) \oint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为球面 } x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ 的外侧;}$$

解 由高斯公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2) dv \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr = \frac{12}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

$$(3) \oint_{\Sigma} xz^2 dydz + (x^2y - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy, \text{ 其中 } \Sigma \text{ 为上半球体}$$

$x^2+y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧;

解 由高斯公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2) dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 r^2 \sin \varphi dr = \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

$$(4) \oint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy \text{ 其中 } \Sigma \text{ 介于 } z=0 \text{ 和 } z=3 \text{ 之间的圆柱体}$$

$x^2+y^2 \leq 9$ 的整个表面的外侧;

解 由高斯公式

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} 3dv = 81\pi.$$

$$(5) \oiint_{\Sigma} 4xzdydz - y^2dzdx + yzdx dy, \text{其中}\Sigma\text{为平面 } x=0, y=0, z=0, x=1,$$

$y=1, z=1$ 所围成的立体的全表面的外侧.

解 由高斯公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dv \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (4z - y) dz = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. 求下列向量 A 穿过曲面 Σ 流向指定侧的流量:

(1) $A = yzi + xzj + xyk$, Σ 为圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的全表面, 流向外侧;

解 $P = yz, Q = xz, R = xy$,

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_{\Sigma} yzdydz + xzdzdx + xydx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0. \end{aligned}$$

(2) $A = (2x - z)i + x^2y j - xz^2 k$, Σ 为立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$,

的全表面, 流向外侧;

解 $P = 2x - z, Q = x^2y, R = -xz^2$,

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} (2 + x^2 - 2xz) dv \\ &= \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (2 + x^2 - 2xz) dz = a^3 \left(2 - \frac{a^2}{6} \right). \end{aligned}$$

(3) $A = (2x + 3z)i - (xz + y)j + (y^2 + 2z)k$, Σ 是以点 $(3, -1, 2)$ 为球心,

半径 $R = 3$ 的球面, 流向外侧.

解 $P = 2x + 3z, Q = -(xz + y), R = y^2 + 2z$,

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} (2-1+2) dv = \iiint_{\Omega} 3 dv = 108\pi.$$

3. 求下列向量 A 的散度:

$$(1) A = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k};$$

$$\text{解 } P = x^2 + yz, Q = y^2 + xz, R = z^2 + xy,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z).$$

$$(2) A = e^{xy}\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} + \cos(xz^2)\mathbf{k};$$

$$\text{解 } P = e^{xy}, Q = \cos(xy), R = \cos(xz^2),$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ye^{xy} - x \sin xy - 2xz \sin(xz^2).$$

$$(3) A = y^2 z \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + xz \mathbf{k};$$

$$\text{解 } P = y^2, Q = xy, R = xz,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + x + x = 2x.$$

4. 设 $u(x, y, z)$ 、 $v(x, y, z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x, y, z)$ 、 $v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx dy dz = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中 Σ 是空间闭区间 Ω 的整个边界曲面, 这个公式叫作格林第二公式.

证明 由第一格林公式(见书中例 3)知

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) dx dy dz \\ &= \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz, \\ & \iiint_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

$$= \oint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

将上面两个式子相减, 即得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left[u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] dx dy dz \\ &= \oint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

5. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上, 大小等于这物体所排开的液体的重力.

证明 取液面为 xOy 面, z 轴沿铅直向下, 设液体的密度为 ρ , 在物体表面 Σ 上取元素 dS 上一点, 并设 Σ 在点 (x, y, z) 处的外法线的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则 dS 所受液体的压力在坐标轴 x, y, z 上的分量分别为

$$-\rho z \cos \alpha dS, -\rho z \cos \beta dS, -\rho z \cos \gamma dS,$$

Σ 所受的压力利用高斯公式进行计算得

$$\begin{aligned} F_x &= \oint_{\Sigma} -\rho z \cos \alpha dS = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0, \\ F_y &= \oint_{\Sigma} -\rho z \cos \beta dS = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0, \\ F_z &= \oint_{\Sigma} -\rho z \cos \gamma dS = \iiint_{\Omega} -\rho dv = -\rho \iiint_{\Omega} dv = -\rho |\Omega|, \end{aligned}$$

其中 $|\Omega|$ 为物体的体积. 因此在液体中的物体所受液体的压力的合力, 其方向铅直向上, 大小等于这物体所排开的液体所受的重力, 即阿基米德原理得证.

习题 10-7

1. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 若从 z 轴

的正向看去, 这圆周取逆时针方向;

解 设 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 上 Γ 所围成的部分, 则 Σ 上侧的单位法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} (-\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma) dS = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = -\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

提示: $\iint_{\Sigma} dS$ 表示 Σ 的面积, Σ 是半径为 a 的圆.

(2) $\oint_{\Gamma} (y-z)dz + (z-x)dy + (x-y)dx$, 其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$

($a>0, b>0$), 若从 x 轴正向看去, 这椭圆取逆时针方向;

解 设 Σ 为平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ 上 Γ 所围成的部分, 则 Σ 上侧的单位法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} (-2\cos\alpha - 2\cos\beta - 2\cos\gamma) dS = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{\Sigma} dS \\ &= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} dxdy = \frac{-2(a+b)}{a} \iint_{D_{xy}} dxdy = -2\pi a(a+b). \end{aligned}$$

提示: Σ (即 $z=b-\frac{b}{a}x$) 的面积元素为 $dS=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}dxdy=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy$.

(3) $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2=2z, z=2$, 若从 z 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

解 设 Σ 为平面 $z=2$ 上 Γ 所围成的部分的上侧, 则

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2+x)dydz - (z+3)dxdy = -5\pi \times 2^2 = -20\pi.\end{aligned}$$

(4) $\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=9, z=0$, 若从 z 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 设 Σ 为 xOy 面上的圆 $x^2+y^2 \leq 9$ 的上侧, 则

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_{\Sigma} dxdy = \iint_{D_{xy}} dxdy = 9\pi.\end{aligned}$$

2. 求下列向量场 A 的旋度:

(1) $A=(2z-3y)\mathbf{i}+(3x-z)\mathbf{j}+(-2x)\mathbf{k}$;

$$\text{解 } \text{rot} A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

(2) $A=(\sin y)\mathbf{i}-(z-x\cos y)\mathbf{k}$;

$$\text{解 } \text{rot} A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

$$(3) \mathbf{A} = x^2 \sin y \mathbf{i} + y^2 \sin(xz) \mathbf{j} + xy \sin(\cos z) \mathbf{k}.$$

$$\text{解 } \text{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 \sin y & y^2 \sin(xz) & xy \sin(\cos z) \end{vmatrix}$$

$$= [x \sin(\cos z) - xy^2 \cos(xz)] \mathbf{i} - y \sin(\cos z) \mathbf{j} + [y^2 z \cos(xz) - x^2 \cos y] \mathbf{k}.$$

3. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ 化为曲线积分, 并计算积分值,

其中 \mathbf{A} 、 Σ 及 \mathbf{n} 分别如下:

(1) $\mathbf{A} = y^2 \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, 的上侧, \mathbf{n} 是 Σ 的单位法向量;

解 设 Σ 的边界 $\Gamma: x^2+y^2=1, z=0$, 取逆时针方向, 其参数方程为

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 0 (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

由托斯公式

$$\iint_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [\sin^2 \theta (-\sin \theta) + \cos^2 \theta \sin \theta] d\theta = 0.$$

(2) $\mathbf{A} = (y-z) \mathbf{i} + yz \mathbf{j} - xz \mathbf{k}$, Σ 为立方体 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面, \mathbf{n} 是 Σ 的单位法向量.

$$\text{解 } \iint_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

$$= \oint_{\Gamma} (y-x) dx + yz dy + (-xz) dz = \oint_{\Gamma} y dx = \int_2^0 2 dx = -4.$$

4. 求下列向量场 \mathbf{A} 沿闭曲线 Γ (从 z 轴正向看依逆时针方向) 的环流量:

(1) $\mathbf{A} = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + c \mathbf{k}$ (c 为常量), Γ 为圆周 $x^2+y^2=1, z=0$;

$$\begin{aligned} \text{解 } \oint_L -y dx + x dy + c dz &= \int_0^{2\pi} [(-\sin \theta)((-\sin \theta) + \cos \theta \cos \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{A} = (x-z) \mathbf{i} + (x^3+yz) \mathbf{j} - 3xy^2 \mathbf{k}$, 其中 Γ 为圆周 $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}, z=0$.

解 有向闭曲线 Γ 的参数方程为 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, z=0(0\leq\theta\leq 2\pi)$.

向量场 \mathbf{A} 沿闭曲线 Γ 的环流量为

$$\begin{aligned}\oint_L Pdx+Qdy+Rdz &= \oint_L (x-z)dx+(x^2+yz)dy-3xy^2dz \\ &= \int_0^{2\pi} [2\cos\theta(-2\sin\theta)+8\cos^3\theta 2\cos\theta]d\theta = 12\pi.\end{aligned}$$

5. 证明 $\mathbf{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{rot} \mathbf{a}+\mathbf{rot} \mathbf{b}$.

解 令 $\mathbf{a}=P_1(x, y, z)\mathbf{i}+Q_1(x, y, z)\mathbf{j}+R_1(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\mathbf{b}=P_2(x, y, z)\mathbf{i}+Q_2(x, y, z)\mathbf{j}+R_2(x, y, z)\mathbf{k},$$

由行列式的性质, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1+P_2 & Q_1+Q_2 & R_1+R_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} = \mathbf{rot} \mathbf{a} + \mathbf{rot} \mathbf{b}.\end{aligned}$$

6. 设 $u=u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} u)$

解 因为 $\mathbf{grad} u=u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k}$, 故

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = (u_{zy}-u_{yz})\mathbf{i}+(u_{zx}-u_{xz})\mathbf{j}+(u_{yx}-u_{xy})\mathbf{k}=0.$$

*7. 证明:

$$(1) \nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \nabla(uv) &= \frac{\partial(uv)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial(uv)}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\ &= v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}\right)=u\nabla v+v\nabla u.\end{aligned}$$

$$(2) \Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \Delta(uv) &= \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2} = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right) = u \Delta v + v \Delta u + 2 \nabla u \cdot \nabla v.\end{aligned}$$

$$(3) \nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$$

$$\text{解} \quad B = P_2 i + Q_2 j + R_2 k,$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (A \times B) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial(Q_1 R_2 - Q_2 R_1)}{\partial x} - \frac{\partial(P_1 R_2 - P_2 R_1)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1 Q_2 - P_2 Q_1)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial Q_1}{\partial x} R_2 + Q_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial Q_2}{\partial x} R_1 - Q_2 \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x} R_2 - P_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial P_2}{\partial y} R_1 + P_2 \frac{\partial R_1}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} Q_2 + P_1 \frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial P_2}{\partial z} Q_1 - P_2 \frac{\partial Q_1}{\partial z} \\ &= R_2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) + R_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial x} \right) \\ &\quad + Q_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + P_1 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + P_2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) &= \begin{vmatrix} P_2 & Q_2 & R_2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} \\ &= P_2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + R_2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \\ &\quad - P_1 \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \right) - R_1 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\text{所以 } \nabla \times (A \times B) = B \times (\nabla \times A) - A \times (\nabla \times B)$$

$$(4) \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

$$\text{解} \quad \text{令 } A = P i + Q j + R k, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times A &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \\
\text{从而 } \nabla \times (\nabla \times A) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial^2 y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) i + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) j \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right) k \\
&= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) i - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) i \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \right) j - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) j \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) k - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) k \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot A) i + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot A) j + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot A) k \right] \\
&\quad - [\nabla^2 P i + \nabla^2 Q j + \nabla^2 R k] = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A
\end{aligned}$$

命题地证

总习题十

1. 填空:

(1) 第二类曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 化成第一类曲线积分是_____, 其中 α 、 β 、 γ 为有向曲线弧 Γ 上点 (x, y, z) 处的_____的方向角.

解 $\int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$, 切向量.

(2) 第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$ 化成第一类曲面积分是_____, 其中

α 、 β 、 γ 为有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的_____的方向角.

解 $\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$, 法向量.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设曲面 Σ 是上半球面: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$, 曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分, 则有_____.

$$(A) \iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS; (B) \iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS;$$

$$(C) \iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS; (D) \iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS.$$

解 (C).

3. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$;

解 L 的参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta$, $y = \frac{a}{2} \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 故

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \oint_L \sqrt{ax} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{ax(\theta)} \cdot \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} \cdot d\theta = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi} |\cos t| dt = a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t dt \right) = 2a^2 \text{ (这里令 } t = \frac{\theta}{2} \text{)}. \end{aligned}$$

(2) $\int_{\Gamma} z ds$, 其中 Γ 为曲线 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$);

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_{\Gamma} z ds &= \int_0^{t_0} t \cdot \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{t_0} \sqrt{2+t^2} dt = \frac{\sqrt{(2+t_0^2)^3} - 2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

(3) $\int_L (2a-y)dx + xdy$, 其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_L (2a-y)dx + xdy &= \int_0^{2\pi} [(2a-a+a\cos t) \cdot a(1-\cos t) + a(t-\sin t) \cdot a\sin t] dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = -2\pi a^2.\end{aligned}$$

(4) $\int_{\Gamma} (y^2-z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, 其中 Γ 是曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧;

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_{\Gamma} (y^2-z^2)dx + 2yzdy - x^2dz &= \int_0^1 [(t^4-t^6) \cdot 1 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt \\ &= \int_0^1 (-2t^4 + 3t^6) dt = \frac{1}{35}.\end{aligned}$$

(5) $\int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy$, 其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, 沿逆时针方向;

$$\text{解 这里 } P=e^x \sin y - 2y, Q=e^x \cos y - 2, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - e^x \cos y + 2 = 2.$$

令 L_1 为 x 轴上由原点到 $(2a, 0)$ 点的有向直线段, D 为 L 和 L_1 所围成的区域, 则由格林公式

$$\begin{aligned}\oint_{L+L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \iint_D dx dy = \pi a^2, \\ \int_L (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy &= \pi a^2 - \int_{L_1} (e^x \sin y - 2y)dx + (e^x \cos y - 2)dy \\ &= \pi a^2 - \int_0^{2a} 0 dx = \pi a^2.\end{aligned}$$

(6) $\oint_{\Gamma} xyz dz$, 其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所得的截痕, 从 z 轴的正向看去,

沿逆时针方向.

解 曲线 Γ 的一般方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=z \end{cases}$, 其参数方程为

$$x=\cos t, y=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t, z=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

于是
$$\oint_{\Gamma} xyz dz = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cos t dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi.$$

4. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 Σ 是界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$;

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

$$\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}, D_{xy}: -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H, dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dy dz;$$

$$\Sigma_2: x=-\sqrt{R^2-y^2}, D_{xy}: -R \leq y \leq R, 0 \leq z \leq H, dS = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dy dz,$$

于是
$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} + \iint_{\Sigma_2} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= 2 \iint_{D_{xy}} \frac{1}{R^2+z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}} dy dz = 2R \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}} dy \int_0^H \frac{1}{R^2+z^2} dz$$

$$= 2\pi \arctan \frac{H}{R}.$$

(2) $\iint_{\Sigma} (y^2-z) dy dz + (z^2-x) dz dx + (x^2-y) dx dy$, 其中 Σ 为锥面

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ ($0 \leq z \leq h$) 的外侧;

解 这里 $P=y^2-z, Q=z^2-x, R=x^2-y, \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

设 Σ_1 为 $z=h(x^2+y^2 \leq h^2)$ 的上侧, Ω 为由 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯公式

$$\iiint_{\Sigma+\Sigma_1} (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = 0,$$

而
$$\iint_{\Sigma_1} (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy = \iint_{\Sigma_1} (x^2-y)dxdy$$

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2-y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h (r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{4} h^4,$$

所以
$$\iint_{\Sigma} (y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy = -\frac{\pi}{4} h^4.$$

(3) $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, 其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;

解 设 Σ_1 为 xOy 面上圆域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 的下侧, Ω 为由 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯公式得

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \\ &= \iiint_{\Omega} 3dv = 3\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) = 2\pi R^3, \end{aligned}$$

而
$$\iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_{\Sigma_1} z dxdy = \iint_{D_{xy}} 0 dxdy = 0 = 0,$$

所以
$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = 2\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3.$$

(4) $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, 其中 Σ 为曲面 $1 - \frac{z}{5} = \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9}$ ($z \geq 0$) 的上侧;

解 这里 $P = \frac{x}{r^3}$, $Q = \frac{y}{r^3}$, $R = \frac{z}{r^3}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3xz}{r^5},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

设 Σ_1 为 $z=0$ ($\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} \leq 1$) 的下侧, Ω 是由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间区域, 则由高斯

公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{xdydz+yzdx+zxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = 0,$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{xdydz+yzdx+zxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} &= - \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz+yzdx+zxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{0}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} dxdy = 0. \end{aligned}$$

(5) $\iint_{\Sigma} xyz dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 的外侧.

解 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, 其中

Σ_1 是 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ($x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$) 的上侧;

Σ_2 是 $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ ($x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$) 的下侧,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz dxdy &= \iint_{\Sigma_1} xyz dxdy + \iint_{\Sigma_2} xyz dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) dxdy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \rho^3 d\rho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho^3 d\rho = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

5. 证明 $\frac{xdx+yd y}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的

的全微分, 并求出一个这样的二元函数.

解 这里 $P=\frac{x}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{y}{x^2+y^2}$. 显然, 区域 G 是单连通的, P 和 Q 在 G 内具有一阶

连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $\frac{xdx+yd y}{x^2+y^2}$ 在开区域 G 内是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分.

$$u(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{xdx+yd y}{x^2+y^2} = \int_1^x \frac{1}{x} dx + \int_0^y \frac{y}{x^2+y^2} dy = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + C.$$

6. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $F=-\frac{k}{\rho^3}(xi+yj)$ 构成力场, 其中 k 为常数, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

解 场力沿路径 L 所作的功为

$$W = \int_L -\frac{kx}{\rho^3} dx - \frac{ky}{\rho^3} dy.$$

令 $P=-\frac{kx}{\rho^3}$, $Q=-\frac{ky}{\rho^3}$. 因为 P 和 Q 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续的偏导数, 并

且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3k}{\rho^5} xy = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以上述曲线积分所路径无关, 即力场所作的功与路径无关.

7. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

解 这里 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x, y) \in D_{xy}=\{(x, y)|x^2+y^2 \leq a^2\}$.

设曲面 Σ 的面密度为 $\rho=1$, 由曲面的对称性可知, $\bar{x}=\bar{y}=0$. 因为

$$\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = a \iint_{D_{xy}} dxdy = \pi a^3,$$

$$\iint_{\Sigma} dS = \frac{1}{2} \cdot 4\pi a^2 = 2\pi a^2,$$

所以 $\bar{z} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}.$

因此该曲面的质心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

8. 设 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

$$(1) \iint_D v \Delta u dxdy = - \iint_D (\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v) dxdy + \int_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds;$$

$$(2) \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dxdy = \int_L (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u 、 v 沿 L 的外法线向量 \mathbf{n} 的方向导数, 符号 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维

拉普拉斯算子.

证明 设 L 上的单位切向量为 $\mathbf{T}=(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 则 $\mathbf{n}=(\sin \alpha, -\cos \alpha)$.

$$\begin{aligned} (1) \int_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_L v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \right) ds = \int_L \left[-v \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + v \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right] ds \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dxdy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + \iint_D v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy \end{aligned}$$

$$= \iint_D \mathbf{grad} v \cdot \mathbf{grad} u dx dy + \iint_D v \Delta u dx dy,$$

所以 $\iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D (\mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v) dx dy + \int_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds.$

$$\begin{aligned} (2) \int_L (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds &= \int_L [u (\frac{\partial v}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial v}{\partial y} \cos \alpha) - v (\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha)] dx dy \\ &= \int_L [(-u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}) \cos \alpha + (u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}) \sin \alpha] dx dy \\ &= \iint_D [\frac{\partial}{\partial x} (u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (-u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y})] dx dy \\ &= \iint_D (\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) dx dy \\ &= \iint_D [u (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) - v (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})] dx dy = \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy. \end{aligned}$$

9. 求向量 $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解 设 Σ 为区域 Ω 的边界曲面的外侧, 则通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dv \\ &= \iiint_{\Omega} 3 dv = 3. \end{aligned}$$

10. 求力 $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功, 其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去, 沿顺时针方向.

解 设 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦部分的下侧, 则力场沿其边界 L (顺时针方向) 所作的功为

$$W = \oint_L y dx + z dy + x dz.$$

曲面 Σ 的单位法向量为 $\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 由斯托克斯公式有

$$\begin{aligned}
W &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (-1-1-1) dS = \sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

习题 11-1

1. 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2};$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} = \frac{1+1}{1+1^2} + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{1+5}{1+5^2} + \cdots .$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} = 1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{26} + \frac{6}{37} + \cdots .$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n};$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots .$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{15}{48} + \frac{105}{384} + \frac{945}{3840} + \cdots .$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n};$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots .$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625} + \frac{1}{3125} - \cdots .$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \cdots .$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2}{4} + \frac{6}{27} + \frac{24}{256} + \frac{120}{3125} + \cdots .$$

2. 写出下列级数的一般项:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots ;$$

解 一般项为 $u_n = \frac{1}{2n-1}$.

$$(2) \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots ;$$

解 一般项为 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$.

$$(3) \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots ;$$

解 一般项为 $u_n = \frac{x^{\frac{n}{2}}}{2n!}$.

$$(4) \frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{5} + \frac{a^4}{7} - \frac{a^5}{9} + \cdots .$$

解 一般项为 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{a^{n+1}}{2n+1}$.

3. 根据级数收敛与发散的判定定义判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

解 因为

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以级数发散.

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots ;$$

解 因为

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以级数收敛.

$$(3) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{6} + \cdots \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots .$$

$$\begin{aligned} \text{解 } s_n &= \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{6} + \cdots \sin \frac{n\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} (2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{6} + 2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + 2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{n\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} [(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{3\pi}{12}) + (\cos \frac{3\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}) + \cdots + (\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi)] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} (\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{2n+1}{12}\pi). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{2n+1}{12}\pi$ 不存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 因而该级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots ;$$

解 这是一个等比级数, 公比为 $q = -\frac{8}{9}$, 于是 $|q| = \frac{8}{9} < 1$, 所以此级数收敛.

$$(2) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots ;$$

解 此级数是发散的, 这是因为如此级数收敛, 则级数

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 3(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots)$$

也收敛, 矛盾.

$$(3) \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots ;$$

解 因为级数的一般项 $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{3}} = 3^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \neq 0 (n \rightarrow \infty)$,

所以由级数收敛的必要条件可知, 此级数发散.

$$(4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots + \frac{3^n}{2^n} + \cdots ;$$

解 这是一个等比级数, 公比 $q = \frac{3}{2} > 1$, 所以此级数发散.

$$(5) (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}) + \cdots + (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \cdots .$$

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 都是收敛的等比级数, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots$$

是收敛的.

习题 11-2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} + \cdots;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故所给级数发散.

$$(2) 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots;$$

解 因为 $u_n = \frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{n+n^2} = \frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

$$(3) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 5n + 4} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

故所给级数收敛.

$$(4) \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{2^3} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = \pi$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛,

故所给级数收敛.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} (a > 0).$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} = l = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & a = 1 \\ 1 & a > 1 \end{cases},$$

而当 $a > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 收敛, 当 $0 < a \leq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 发散,

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 当 $a > 1$ 时收敛, 当 $0 < a \leq 1$ 时发散.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \cdots + \frac{3^n}{n \cdot 2^n} + \cdots;$$

解 级数的一般项为 $u_n = \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{3}{2} > 1,$$

所以级数发散.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1,$

所以级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1,$

所以级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1,$

所以级数收敛.

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, 所以级数收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, 所以级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1};$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(3-\frac{1}{n}\right)^{2-\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{2-\frac{1}{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3^2 \cdot e^3} < 1,$$

所以级数收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty), a_n, b, a \text{ 均为正数.}$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$,

所以当 $b < a$ 时级数收敛, 当 $b > a$ 时级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots;$$

解 这里 $u_n = n\left(\frac{3}{4}\right)^n$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1,$$

所以级数收敛.

$$(2) \frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots;$$

解 这里 $u_n = \frac{n^4}{n!}$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 0 < 1,$$

所以级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n(n+2)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \sin \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \cdot \frac{\pi}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1$,

所以级数收敛.

$$(5) \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \cdots;$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1 \neq 0$,

所以级数发散.

$$(6) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} + \cdots (a > 0, b > 0).$$

解 因为 $u_n = \frac{1}{na+b} > \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

故所给级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛? 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots;$$

解 这是一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, 其中 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

因为显然 $u_n \geq u_{n+1}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以此级数是收敛的.

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 $p < 1$ 的 p 级数, 是发散的,

所以原级数是条件收敛的.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}} = \frac{1}{3} < 1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$ 是收敛的,

从而原级数收敛, 并且绝对收敛.

$$(3) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots;$$

解 这是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$.

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$ 是收敛的, 所以原级数也收敛, 并且绝对收敛.

$$(4) \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots;$$

解 这是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$, 其中 $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$.

因为 $u_n \geq u_{n+1}$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 所以此级数是收敛的.

又因为 $\frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n+1}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散, 从而原级数是条件收敛的.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

解 级数的一般项为 $u_n = (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n)}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{2^n}{n-1} \cdot \frac{2^n}{n-2} \cdots \frac{2^n}{3} \cdot \frac{2^n}{2} \cdot \frac{2^n}{1} = \infty$,

所以级数发散.

习题 11-3

1. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径为 $R=1$.

因为当 $x=1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 是发散的;

当 $x=-1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, 也是发散的,

所以收敛域为 $(-1, 1)$.

(2) $1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n \frac{x^n}{n^2}+\cdots$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, 故收敛半径为 $R=1$.

因为当 $x=1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$, 是收敛的; 当 $x=-1$ 时, 幂级数成为 $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

也是收敛的, 所以收敛域为 $[-1, 1]$.

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2 \cdot 4}+\frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6}+\cdots+\frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}+\cdots$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, 故收敛半径为 $R=+\infty$, 收敛域为

$(-\infty, +\infty)$.

(4) $\frac{x}{1 \cdot 3}+\frac{x^2}{2 \cdot 3^2}+\frac{x^3}{3 \cdot 3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n \cdot 3^n}+\cdots$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$, 故收敛半径为 $R=3$.

因为当 $x=3$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 是发散的; 当 $x=-3$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, 也是

收敛的, 所以收敛域为 $[-3, 3)$.

$$(5) \frac{2}{2}x + \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{2^3}{10}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n^2+1}x^n + \cdots;$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 2, \text{ 故收敛半径为 } R = \frac{1}{2}.$$

因为当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, 是收敛的; 当 $x = -1$ 时, 幂级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}, \text{ 也是收敛的, 所以收敛域为 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\text{解 这里级数的一般项为 } u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{x^{2n+1}} \right| = x^2, \text{ 由比值审敛法, 当 } x^2 < 1, \text{ 即 } |x| < 1 \text{ 时, 幂级数}$$

绝对收敛; 当 $x^2 > 1$, 即 $|x| > 1$ 时, 幂级数发散, 故收敛半径为 $R = 1$.

$$\text{因为当 } x = 1 \text{ 时, 幂级数成为 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}, \text{ 是收敛的; 当 } x = -1 \text{ 时, 幂级数成为}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}, \text{ 也是收敛的, 所以收敛域为 } [-1, 1].$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2};$$

$$\text{解 这里级数的一般项为 } u_n = \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}.$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}} \right| = \frac{1}{2} x^2, \text{ 由比值审敛法, 当 } \frac{1}{2} x^2 < 1, \text{ 即}$$

$|x| < \sqrt{2}$ 时, 幂级数绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} x^2 > 1$, 即 $|x| > \sqrt{2}$ 时, 幂级数发散, 故收敛半径为

$$R=\sqrt{2}.$$

因为当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$, 是发散的, 所以收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, 故收敛半径为 $R=1$, 即当 $-1 < x-5 < 1$ 时级数收敛, 当

$|x-5| > 1$ 时级数发散.

因为当 $x-5=-1$, 即 $x=4$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 是收敛的; 当 $x-5=1$, 即 $x=6$ 时, 幂

级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, 是发散的, 所以收敛域为 $[4, 6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分, 求下列级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1};$$

解 设和函数为 $S(x)$, 即 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$S(x) = \left[\int_0^x S(x) dx \right]' = \left[\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} dx \right]' = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx \right]'$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right]' = \left[\frac{1}{1-x} - 1 \right]' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1).$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$$

解 设和函数为 $S(x)$, 即 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, 则

$$\begin{aligned}
S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right]' dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} dx \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{1-x^4} - 1 \right) dx = \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x \quad (-1 < x < 1).
\end{aligned}$$

提示: 由 $\int_0^x S'(x) dx = S(x) - S(0)$ 得 $S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x) dx$.

$$(3) \quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$$

解 设和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,$$

则
$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right]' dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

提示: 由 $\int_0^x S'(x) dx = S(x) - S(0)$ 得 $S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x) dx$.

习题 11-4

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数, 并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

解 $f^{(n)}(x)=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \quad (n=1, 2, \cdots),$

$$f^{(n)}(x_0)=\cos(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}) \quad (n=1, 2, \cdots),$$

从而得 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

$$\text{因为 } |R_n(x)|=\frac{\cos[x_0+\theta(x-x_0)+\frac{n+1}{2}\pi]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\leq\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0\leq\theta\leq 1),$$

而级数 $\sum_{n\rightarrow\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 总是收敛的, 故 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而 $\lim_{n\rightarrow\infty}|R_n(x)|=0$.

$$\text{因此 } f(x)=\cos x_0+\cos(x_0+\frac{\pi}{2})(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+\cdots, x\in(-\infty, +\infty).$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

(1) $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$

解 因为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty, +\infty),$$

所以 $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty, +\infty),$

故 $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in(-\infty, +\infty).$

(2) $\ln(a+x)$ ($a>0$);

解 因为 $\ln(a+x) = \ln a \ln(1+\frac{x}{a}) = \ln a + \ln(1+\frac{x}{a})$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1),$$

所以 $\ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} = \ln a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}} \quad (-a < x \leq a).$

(3) a^x ;

解 因为 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

所以 $a^x = e^{x \ln a} = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

(4) $\sin^2 x$;

解 因为 $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

所以 $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in (-\infty, +\infty).$

(5) $(1+x)\ln(1+x)$;

解 因为 $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1)$,

所以 $(1+x)\ln(1+x) = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n}$$
$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] x^{n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1} \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$(6) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{解 因为 } \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$\text{所以 } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot (2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

$$(1) \sqrt{x^3};$$

解 因为

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

$$\text{所以 } \sqrt{x^3} = [1 + (x-1)]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1) \cdots (\frac{3}{2}-n+1)}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

$$(-1 < x-1 < 1),$$

$$\text{即 } \sqrt{x^3} = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3 \cdot 1}{2^2 \cdot 2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdots (5-2n)}{2^n \cdot n!}(x-1)^n + \cdots$$

$$(0 < x < 2).$$

上术级数当 $x=0$ 和 $x=2$ 时都是收敛的, 所以展开式成立的区间是 $[0, 2]$.

$$(2) \lg x.$$

$$\text{解 } \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln[1 + (x-1)] = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad (-1 < x-1 \leq 1),$$

$$\text{即 } \lg x = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad (0 < x \leq 2).$$

4. 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 $(x + \frac{\pi}{3})$ 的幂级数.

$$\text{解 } \cos x = \cos[(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{3}] = \cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi}{3} + \sin(x + \frac{\pi}{3}) \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x + \frac{\pi}{3}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x + \frac{\pi}{3})^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x + \frac{\pi}{3})^{2n+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} (x + \frac{\pi}{3})^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} (x + \frac{\pi}{3})^{2n+1} \right] (-\infty < x < +\infty).
\end{aligned}$$

5. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

$$\text{解 } \frac{1}{x} = \frac{1}{3+x-3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{3}\right)^n \quad (-1 < \frac{x-3}{3} < 1),$$

$$\text{即 } \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{3}\right)^n \quad (0 < x < 6).$$

6. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

$$\text{解 } f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

$$\text{而 } \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-3+(x+4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x+4}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n \quad (|\frac{x+4}{3}| < 1),$$

$$\text{即 } \frac{1}{x+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}} \quad (-7 < x < -1);$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+(x+4)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n \quad (|\frac{x+4}{2}| < 1),$$

$$\text{即 } \frac{1}{x+2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}} \quad (-6 < x < -2).$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+4)^n \quad (-6 < x < -2).$$

习题 11-5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1) $\ln 3$ (误差不超过 0.0001);

$$\text{解 } \ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + \cdots\right) \quad (-1 < x < 1),$$

$$\ln 3 = \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}} + \cdots\right).$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |r_n| &= 2\left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 2^{2n+3}} + \cdots\right] \\ &= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left[1 + \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}{(2n+3) \cdot 2^{2n+3}} + \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}{(2n+5) \cdot 2^{2n+5}} + \cdots\right] \\ &< \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) = \frac{1}{3(2n-1)2^{2n-2}}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } |r_5| < \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 2^8} \approx 0.00012, \quad |r_5| < \frac{1}{3 \cdot 13 \cdot 2^{10}} \approx 0.00003.$$

因而取 $n=6$, 此时

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{2^{11}}\right) \approx 1.0986.$$

(2) \sqrt{e} (误差不超过 0.001);

$$\text{解 } e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } r_n &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!2^n} \left[1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots\right] \\ &< \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3 \cdot n!2^{n-2}}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } r_4 = \frac{1}{3 \cdot 5!2^3} \approx 0.0003.$$

因此取 $n=4$ 得

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \approx 1.648.$$

(3) $\sqrt[3]{522}$ (误差不超过 0.00001);

$$\text{解 } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{522} &= 2(1 + \frac{10}{2^9})^{1/9} \\ &= 2[1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{8}{9^2 \cdot 2!} \cdot (\frac{10}{2^9})^2 + \frac{8 \cdot 17}{3^2 \cdot 3!} \cdot (\frac{10}{2^9})^3 - \cdots].\end{aligned}$$

$$\text{由于 } \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} \approx 0.002170, \quad \frac{8}{9^2 \cdot 2!} \cdot (\frac{10}{2^9})^2 \approx 0.000019,$$

$$\text{故 } \sqrt[3]{522} = 2(1 + 0.002170 - 0.000019) \approx 2.00430.$$

(4) $\cos 2^\circ$ (误差不超过 0.0001).

$$\text{解 } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos 2^\circ = \cos \frac{\pi}{90} = 1 - \frac{1}{2!} \cdot (\frac{\pi}{90})^2 + \frac{1}{4!} \cdot (\frac{\pi}{90})^4 - \frac{1}{6!} \cdot (\frac{\pi}{90})^6 + \cdots.$$

$$\text{由于 } \frac{1}{2!} \cdot (\frac{\pi}{90})^2 \approx 6 \times 10^{-4}, \quad \frac{1}{4!} \cdot (\frac{\pi}{90})^4 \approx 10^{-8},$$

$$\text{故 } \cos 2^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot (\frac{\pi}{90})^2 \approx 1 - 0.0006 = 0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

(1) $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx$ (误差不超过 0.0001);

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx &= \int_0^{0.5} [1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots + (-1)^n x^{4n} + \cdots] dx \\ &= (x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{13}x^{13} + \cdots) \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} + \cdots.\end{aligned}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0.00625, \quad \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \approx 0.00028, \quad \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} \approx 0.000009,$$

所以 $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \approx 0.4940$.

(2) $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$ (误差不超过 0.0001).

解 $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots (-1 < x < 1)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^{0.5} [1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n} + \cdots] dx \\ &= (x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{25}x^5 - \frac{1}{49}x^7 + \cdots) \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} + \cdots \end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} \approx 0.0139$, $\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0.0013$, $\frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} \approx 0.0002$,

所以 $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0.487$.

3. 将函数 $e^x \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$,

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= e^x \cdot \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}[e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} x^n \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{n!} x^n. \end{aligned}$$

因为 $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

所以 $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} [e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}] = 2^{\frac{n}{2}} (2\cos\frac{n\pi}{4}) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$.

因此 $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}}{n!} x^n (-\infty < x < +\infty)$.

习题 11-7

1. 下列周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为:

$$(1) f(x) = 3x^2 + 1 \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

解 因为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) dx = 2(\pi^2 + 1),$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \cos n\pi x dx = (-1)^n \frac{12}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \sin n\pi x dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$(2) f(x) = e^{2x} \quad (-\pi \leq x < \pi);$$

解 因为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cos n\pi x dx = \frac{2(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin n\pi x dx = -\frac{n(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} (2\cos nx - n\sin nx) \right]$$

$$(x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} bx & -\pi \leq x < 0 \\ ax & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (a, b \text{ 为常数, 且 } a > b > 0).$$

解 因为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} axdx = \frac{\pi}{2}(a-b), \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bx \cos nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ax \cos nxdx \\ &= \frac{b-a}{n^2\pi} [1 - (-1)^n] \quad (n=1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 bx \sin nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} ax \sin nxdx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{a+b}{n} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{4}(a-b) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1 - (-1)^n](b-a)}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n} \sin nx \right\}$$

$$(x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数:

$$(1) f(x) = 2\sin \frac{x}{3} \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

解 将 $f(x)$ 拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中连续, 在 $x=\pm\pi$ 间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-) + F(-\pi^+)] \neq f(-\pi), \quad \frac{1}{2}[F(\pi^-) + F(\pi^+)] \neq f(\pi),$$

故 $F(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$ 处 $F(x)$ 的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

因为 $2\sin \frac{x}{3} \quad (-\pi < x < \pi)$ 是奇函数, 所以 $a_n=0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2\sin \frac{x}{3} \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\frac{1}{3}-n)x - \cos(\frac{1}{3}+n)x] dx$$

$$=(-1)^{n+1} \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{n}{9n^2-1} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{9n^2-1} \quad (-\pi < x < \pi).$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^x & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

解 将 $f(x)$ 拓广为周期函数 $F(x)$, 则 $F(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中连续, 在 $x=\pm\pi$ 间断, 且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)] \neq f(-\pi), \quad \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)] \neq f(\pi),$$

故 $F(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 中收敛于 $f(x)$, 而在 $x=\pm\pi$ 处 $F(x)$ 的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x dx + \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 e^x \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2} + \frac{1-(-1)^n}{n} \right\} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } f(x) &= \frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi} \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2} \cos nx + \left[\frac{-n+(-1)^n n e^{-\pi}}{1+n^2} + \frac{1-(-1)^n}{n} \right] \sin nx \right\} \end{aligned}$$

$$(-\pi < x < \pi).$$

3. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 证明 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

证明 我们知道, 若 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数, 则

$$\int_a^{a+l} f(x) dx \text{ 的值与 } a \text{ 无关, 且 } \int_a^{a+l} f(x) dx = \int_0^l f(x) dx,$$

因为 $f(x)$, $\cos nx$, $\sin nx$ 均为以 2π 为周期的函数, 所以 $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ 均为以 2π 为周期的函数, 从而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

同理 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots).$

4. 将函数 $f(x) = \cos \frac{x}{2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ 展开成傅里叶级数:

解 因为 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ 为偶函数, 故 $b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$, 而

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\frac{1}{2}-n)x - \cos(\frac{1}{2}+n)x] dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2-1} \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

由于 $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 所以

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2-1} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

5. 设 $f(x)$ 的周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式这

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases},$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 故 $a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin nx dx \right]$$

$$= -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

又 $f(x)$ 的间断点为 $x=(2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 所以

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin nx \quad (x \neq (2n+1)\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

6. 将函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成正弦级数.

解 作奇延拓得 $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases},$$

再周期延拓 $F(x)$ 到 $(-\infty, +\infty)$, 则当 $x \in (0, \pi]$ 时 $F(x)=f(x)$, $F(0)=0 \neq \frac{\pi}{2} = f(0)$.

因为 $a_n=0 (n=0, 1, 2, \dots)$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x-\pi}{2} \sin nx dx = \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \quad (0 < x \leq \pi),$$

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

7. 将函数 $f(x)=2x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 对 $f(x)$ 作奇延拓, 则 $a_n=0 (n=0, 1, 2, \dots)$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \sin nx dx = \frac{4}{\pi} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right] \quad (n=1, 2, \dots),$$

故正弦级数为

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) - \frac{2}{n^3} \right] \sin nx \quad (0 \leq x < \pi),$$

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

对 $f(x)$ 作偶延拓, 则 $b_n=0 (n=1, 2, \dots)$, 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 dx = \frac{4}{3} \pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{8}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故余弦级数为

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

8. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 证明

(1) 如果 $f(x-\pi) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0, a_{2k}=0, b_{2k}=0 (k=1, 2, \dots)$;

解 因为

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \stackrel{\text{令 } t = \pi + x}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\pi) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = -a_0,$$

所以 $a_0=0$.

因为

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2kx dx \stackrel{\text{令 } t = \pi + x}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\pi) \cos 2k(t-\pi) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos 2ktdt = -a_{2k}, \end{aligned}$$

所以 $a_{2k}=0$.

同理 $b_{2k}=0 (k=1, 2, \dots)$.

(2) 如果 $f(x-\pi) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0, b_{2k+1}=0 (k=1, 2, \dots)$.

解 因为

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2k+1)x dx \\ &\stackrel{\text{令 } t = \pi + x}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\pi) \cos(2k+1)(t-\pi) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(2k+1)tdt = -a_{2k+1}, \end{aligned}$$

所以 $a_{2k+1}=0 (k=1, 2, \dots)$.

同理 $b_{2k+1}=0 (k=1, 2, \dots)$.

习题 11-8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表达式):

$$(1) f(x)=1-x^2 \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right);$$

解 因为 $f(x)=1-x^2$ 为偶函数, 所以 $b_n=0 (n=1, 2, \dots)$, 而

$$a_0 = \frac{2}{1/2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) dx = \frac{11}{6},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1/2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) \cos \frac{n\pi x}{1/2} dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) \cos 2n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2} \quad (n=1, 2, \dots), \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 所以

$$f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos 2n\pi x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases};$$

$$\text{解 } a_n = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 dx = -\frac{1}{2},$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^0 x \cos n\pi x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos n\pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos n\pi x dx$$

$$= \frac{1}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^0 x \sin n\pi x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sin n\pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin n\pi x dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \quad (n=1, 2, \dots).$$

而在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x)$ 的间断点为 $x=2k, 2k+\frac{1}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\text{故 } f(x) = -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \right] \cos n\pi x + \frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \sin n\pi x \right\}$$

$$(x \neq 2k, x \neq 2k + \frac{1}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & -3 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 3 \end{cases}.$$

$$\text{解 } a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) dx + \int_0^3 dx \right] = -1,$$

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right]$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] (n=1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x+1) \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right]$$

$$= \frac{6}{n\pi} (-1)^n (n=1, 2, \dots),$$

而在 $(-\infty, +\infty)$ 上, $f(x)$ 的间断点为

$$x=3(2k+1), k=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\text{故 } f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right\},$$

$$(x \neq 3(2k+1), k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l-x & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases};$$

解 正弦级数:

对 $f(x)$ 进行奇延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0=0 (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \frac{4l}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} (n=1, 2, \dots)$$

故
$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{l}, x \in [0, l].$$

余弦级数:

对 $f(x)$ 进行偶延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0 = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) dx \right] = \frac{l}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

$$= \frac{2l}{n^2 \pi^2} [2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n] \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故
$$f(x) = \frac{l}{4} + \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{l}, x \in [0, l].$$

(2) $f(x) = x^2 (0 \leq x \leq 2).$

解 正弦级数:

对 $f(x)$ 进行奇延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0 = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1],$$

故
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^3 \pi^2} \right\} \sin \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2).$$

余弦级数:

对 $f(x)$ 进行偶延拓, 则函数的傅氏系数为

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = (-1)^n \frac{16}{(n\pi)^2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故

$$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 16}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2].$$

总习题十一

1. 填空:

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是它收敛的_____条件, 不是它收敛的_____条件;

解 必要; 充分.

(2) 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的_____条件;

解 充分必要.

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定_____; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 必定_____.

解 收敛; 发散.

2. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{\sqrt{n}}}}$;

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{n}{\sqrt{n}}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{\sqrt{n}} - 1}} = 1,$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由比较审敛法知, 级数发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$;

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{2(n+1)^2} \cdot \frac{2n^2}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty,$$

故由比值审敛法知, 级数发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$;

解 因为

$$\frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} < \frac{n}{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} < 1$$

所以由根值审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛; 由比较审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n};$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{u_n}{1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = \infty,$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由比较审敛法知, 原级数发散.

$$\text{提示: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^{10} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{10 \ln^9 x \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^9 x} = \cdots = \frac{1}{10!} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{10!} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} \quad (a > 0, s > 0).$$

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{(\sqrt[n]{n})^s} = a,$$

故由根值审敛法知, 当 $a < 1$ 时级数收敛, 当 $a > 1$ 时级数发散.

当 $a=1$ 时, 原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, 这是 $p=s$ 的 p -级数, 当 $s > 1$ 时级数收敛, 当 $s \leq 1$ 时级数发散.

3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 与收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2 + 2u_n v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + 2v_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^2}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$,

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + 2u_nv_n)$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(u_n^2 + 2u_nv_n) + v_n^2] = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$$

也是收敛的.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$, 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛? 试说明理由.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 不一定收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 否则未必.

例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1) \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}]$ 发散, 并且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{(-1) \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p};$$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{n^p}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 是 p 级数. 故当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 是收敛的, 当 $p \leq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

发散. 因此当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 是交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件, 因而收敛, 这时是条件收敛的.

当 $p \leq 0$ 时, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \neq 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 发散.

综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 当 $p \leq 0$ 时发散.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}};$$

解 因为 $|(-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}| \leq \frac{1}{\pi^{n+1}}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{n+1}}$ 收敛, 故由比较审敛法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}| \text{ 收敛, 从而原级数绝对收敛.}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n};$$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^n \ln \frac{n+1}{n}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{n})^n = \ln e = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故由

比较审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \ln \frac{n+1}{n}|$ 发散, 即原级数不是绝对收敛的.

另一方面, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 是交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件, 所以该级数收敛,

从而原级数条件收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

解 令 $u_n = (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

故由比值审敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}|$ 收敛, 从而原级数绝对收敛.

6. 求下列级限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} (1 + \frac{1}{k})^{k^2};$$

解 显然 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} (1 + \frac{1}{k})^{k^2}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ 的前 n 项部分和.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} < 1$, 所以由根值审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ 收敛

, 从而部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛.

$$\text{因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} (1 + \frac{1}{k})^{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot s_n = 0.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}}].$$

$$\text{解 } 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}}.$$

显然 $s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的前 n 项部分和.

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \text{ 则 } S(x) = [\int_0^x S(x) dx]' = [\sum_{n=1}^{\infty} x^n]' = [\frac{1}{1-x} - 1]' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n (\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{1}{3} S(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{3}{4}$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}}] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{s_n} = 2^{\frac{3}{4}}.$$

7. 求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n;$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3(\frac{3}{5})^n + 5}{(\frac{3}{5})^n + 1} = 5, \text{ 所以收敛半径为 } R = \frac{1}{5}.$$

因为当 $x = \frac{1}{5}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1 \right]$, 是发散的;

当 $x = -\frac{1}{5}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1 \right]$, 是收敛的,

所以幂级数的收敛域为 $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n;$$

解 $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |x| = e|x|$, 由根值审敛法, 当 $e|x| < 1$, 即 $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ 时, 幂级数收敛; 当 $e|x| > 1$, 时幂级数发散.

当 $x = -\frac{1}{e}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n$;

当 $x = \frac{1}{e}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{n}) - n} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$,

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ 均发散, 从而收敛域为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n;$$

解 $u_n = n(x+1)^n$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x+1| = |x+1|,$$

根据比值审敛法, 当 $|x+1|<1$, 即 $-2<x<0$ 时, 幂级数收敛; 当 $|x+1|>1$ 时, 幂级数发散.

又当 $x=0$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 是发散的; 当 $x=-2$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, 也是发散的,

所以幂级数的收敛域为 $(-2, 0)$.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}.$$

解 $u_n = \frac{n}{2^n} x^{2n}$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} \cdot x^2 = \frac{1}{2} x^2,$$

根据比值审敛法, 当 $\frac{1}{2} x^2 < 1$, 即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时, 幂级数收敛; 当 $\frac{1}{2} x^2 > 1$ 时, 幂级数发散.

又当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 是发散的, 所以收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

8. 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)};$$

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \left[\int_0^x S(x) dx \right]' = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} \right]' = \left[\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^{n-1} \right]' \\ &= \left[\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} \right]' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} \quad \left(\frac{x^2}{2} < 1 \right), \end{aligned}$$

即
$$S(x) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}).$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1};$$

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad (x^2 < 1).$$

因为当 $x = \pm 1$ 时, 幂级数收敛, 所以有

$$S(x)=\arctan x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n ;$$

解 设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} = (x-1) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \right]' \\ &= (x-1) \left[(x-1) \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n-1} \right]' = (x-1) \left[\frac{x-1}{1-(x-1)} \right]' = \frac{x-1}{(2-x)^2} \quad (|x-1| < 1), \end{aligned}$$

即
$$S(x) = \frac{x-1}{(2-x)^2} \quad (0 < x < 2).$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

解 易知幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

设幂级数的和函数为 $S(x)$, 则当 $x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n dx = \frac{1}{x} \int_0^x \left[\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} dx \right] dx \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \left[\int_0^x \frac{1}{1-x} dx \right] dx = -\frac{1}{x} \int_0^x \ln(1-x) dx \\ &= -\frac{1}{x} [x \ln(1-x) - x - \ln(1-x)] \\ &= 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \end{aligned}$$

又显然 $S(0)=0$, 因此

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

9. 求下列数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!};$$

$$\text{解 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)+n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}.$$

因为 $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, 两边求导得 $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$, 再求导得 $e^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^{n-2}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = x^2 e^x + e^x,$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1) = 2e.$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}.$$

$$\text{解 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \sin 1.$$

提示: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} x^{2n}.$

10. 将下列函数展开成 x 的幂级数:

$$(1) \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$\text{解 } \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \int_0^x [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' dx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx,$$

因为 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, |x| \leq 1,$

故 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} (-1 \leq x \leq 1).$

$$(2) \frac{1}{(2-x)^2}.$$

$$\text{解 } \frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

11. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ e^x & x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

$$\text{解 } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} - n^2 a_n,$$

$$\text{即 } a_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{(n^2 + 1)\pi} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx \\ &= (-n) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = -n a_n \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{(n^2 + 1)\pi} (\cos nx - n \sin x)$$

$$(-\infty < x < +\infty \text{ 且 } x \neq n\pi, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

12. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq h \\ 0 & h < x \leq \pi \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 若将函数进行奇延拓, 则傅里叶系数为

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h \sin nx dx = \frac{2(1 - \cos nh)}{n\pi}.$$

因此, 函数展开成正弦级数为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nx, \quad x \in (0, h) \cup (h, \pi),$$

当 $x=h$ 时, $f(h)=\frac{1}{2}$.

若将函数进行偶延拓, 则傅里叶系数为

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h dx = \frac{2h}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h \cos nx dx = \frac{2 \sin nh}{n\pi} (n=1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 (n=1, 2, \dots),$$

因此, 函数展开成余弦级数为

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \cos nx, \quad x \in [0, h) \cup (h, \pi),$$

当 $x=h$ 时, $f(h)=\frac{1}{2}$.

习题 12-1

1. 试说出下列各微分方程的阶数:

(1) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$;

解 一阶.

(2) $x^2y' - xy' + y = 0$;

解 一阶.

(3) $xy''' + 2y' + x^2y = 0$;

解 三阶.

(4) $(7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0$;

解 一阶.

(5) $L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$;

解 二阶.

(6) $\frac{d\rho}{d\theta} + \rho = \sin^2 \theta$.

解 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

(1) $xy' = 2y$, $y = 5x^2$;

解 $y' = 10x$.

因为 $xy' = 10x^2 = 2(5x^2) = 2y$, 所以 $y = 5x^2$ 是所给微分方程的解.

(2) $y' + y = 0$, $y = 3\sin x - 4\cos x$;

解 $y' = 3\cos x + 4\sin x$.

因为 $y' + y = 3\cos x + 4\sin x + 3\sin x - 4\cos x = 7\sin x - \cos x \neq 0$,

所以 $y = 3\sin x - 4\cos x$ 不是所给微分方程的解.

(3) $y'' - 2y' + y = 0$, $y = x^2e^x$;

解 $y' = 2xe^x + x^2e^x$, $y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$.

因为 $y'' - 2y' + y = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x - 2(2xe^x + x^2e^x) + x^2e^x = 2e^x \neq 0$,

所以 $y = x^2e^x$ 不是所给微分方程的解.

(4) $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2y = 0$, $y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x}$.

解 $y' = C_1\lambda_1e^{\lambda_1x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2x}$, $y'' = C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1x} + C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2x}$.

因为 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y$

$$= C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}) + \lambda_1\lambda_2(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}) \\ = 0,$$

所以 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 是所给微分方程的解.

3. 在下列各题中, 验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解:

(1) $(x-2y)y' = 2x-y, x^2-xy+y^2=C;$

解 将 $x^2-xy+y^2=C$ 的两边对 x 求导得

$$2x-y-xy'+2y y'=0,$$

即 $(x-2y)y'=2x-y,$

所以由 $x^2-xy+y^2=C$ 所确定的函数是所给微分方程的解.

(2) $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0, y=\ln(xy).$

解 将 $y=\ln(xy)$ 的两边对 x 求导得

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} y', \text{ 即 } y' = \frac{y}{xy-x}.$$

再次求导得

$$y'' = \frac{y'(xy-x) - y(y+xy'-1)}{(xy-x)^2} = \frac{-xy' - y^2 + y}{(xy-x)^2} = \frac{1}{xy-x} \cdot \left(-\frac{x}{y} y'^2 - yy' + y'\right).$$

注意到由 $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} y'$ 可得 $\frac{x}{y} y' = xy' - 1$, 所以

$$y'' = \frac{1}{xy-x} \cdot [-(xy'-1)y' - yy' + y'] = \frac{1}{xy-x} \cdot (-xy'^2 - yy' + 2y'),$$

从而 $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0,$

即由 $y=\ln(xy)$ 所确定的函数是所给微分方程的解.

4. 在下列各题中, 确定函数关系式中所含的参数, 使函数满足所给的初始条件:

(1) $x^2-y^2=C, y|_{x=0}=5;$

解 由 $y|_{x=0}=0$ 得 $0^2-5^2=C, C=-25$, 故 $x^2-y^2=-25$.

(2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1;$

解 $y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}.$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 得

$$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2+C_1=1 \end{cases},$$

解之得 $C_1=0, C_2=1$, 故 $y=xe^{2x}$.

$$(3)y=C_1\sin(x-C_2), y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=0.$$

解 $y'=C_1\cos(x-C_2)$.

由 $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=0$ 得

$$\begin{cases} C_1\sin(\pi-C_2)=1 \\ C_1\cos(\pi-C_2)=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} C_1\sin C_2=1 \\ -C_1\cos C_2=0 \end{cases},$$

解之得 $C_1=1, C_2=\frac{\pi}{2}$, 故 $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$, 即 $y=-\cos x$.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点 (x, y) 处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

解 设曲线为 $y=y(x)$, 则曲线上点 (x, y) 处的切线斜率为 y' , 由条件 $y'=x^2$, 这便是所求微分方程.

(2) 曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 设曲线为 $y=y(x)$, 则曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线斜率为 $-\frac{1}{y'}$, 由条件第 PQ 中点的横

坐标为 0, 所以 Q 点的坐标为 $(-x, 0)$, 从而有

$$\frac{y-0}{x+(-x)} = -\frac{1}{y'}, \text{ 即 } yy'+2x=0.$$

6. 用微分方程表示一物理命题: 某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比, 所温度的平方成反比.

解 $\frac{dP}{dT} = k \frac{P}{T^2}$, 其中 k 为比例系数.

习题 12-2

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy' - y \ln y = 0$;

解 分离变量得

$$\frac{1}{y \ln y} dy = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y \ln y} dy = \int \frac{1}{x} dx,$$

即 $\ln(\ln y) = \ln x + \ln C$,

故通解为 $y = e^{Cx}$.

(2) $3x^2 + 5x - 5y' = 0$;

解 分离变量得

$$5dy = (3x^2 + 5x)dx,$$

两边积分得

$$\int 5dy = \int (3x^2 + 5x)dx,$$

即 $5y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1$,

故通解为 $y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$, 其中 $C = \frac{1}{5}C_1$ 为任意常数.

(3) $\sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2}$;

解 分离变量得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

两边积分得

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

即 $\arcsin y = \arcsin x + C$,

故通解为 $y = \sin(\arcsin x + C)$.

(4) $y' - xy' = a(y^2 + y')$;

解 方程变形为 $(1-x-a)y' = ay^2$,

分离变量得

$$\frac{1}{y^2} dy = \frac{a}{1-a-x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{a}{1-a-x} dx,$$

即 $-\frac{1}{y} = -a \ln(1-a-x) - C_1,$

故通解为 $y = \frac{1}{C + a \ln(1-a-x)},$ 其中 $C = aC_1$ 为任意常数.

(5) $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0;$

解 分离变量得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y} y = -\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} y = -\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx,$$

即 $\ln(\tan y) = -\ln(\tan x) + \ln C,$

故通解为 $\tan x \tan y = C.$

(6) $\frac{dy}{dx} = 10^{x+y};$

解 分离变量得

$$10^{-y} dy = 10^x dx,$$

两边积分得

$$\int 10^{-y} dy = \int 10^x dx,$$

即 $-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{C}{\ln 10},$

或 $10^{-y} = 10^x + C,$

故通解为 $y = -\lg(C - 10^x).$

(7) $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0;$

解 方程变形为 $e^y(e^x + 1)dy = e^x(1 - e^y)dx,$

分离变量得

$$\frac{e^y}{1 - e^y} dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{e^y}{1-e^y} dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

即 $-\ln(e^y) = \ln(e^x+1) - \ln C,$

故通解为 $(e^x+1)(e^y-1)=C.$

$$(8) \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy = 0;$$

解 分离变量得

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy = -\frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

即 $\ln(\sin y) = -\ln(\sin x) + \ln C,$

故通解为 $\sin x \sin y = C.$

$$(9) (y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0;$$

解 分离变量得

$$(y+1)^2 dy = -x^3 dx,$$

两边积分得

$$\int (y+1)^2 dy = -\int x^3 dx,$$

$$\text{即 } \frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C_1,$$

故通解为 $4(y+1)^3 + 3x^4 = C$ ($C=12C_1$).

$$(10) y dx + (x^2 - 4x) dy = 0.$$

解 分离变量得

$$\frac{4}{y} dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right) dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{4}{y} dy = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right) dx,$$

即 $\ln y^4 = \ln x - \ln(4-x) + \ln C,$

故通解为 $y^4(4-x) = Cx.$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) y' = e^{2x-y}, y|_{x=0} = 0;$$

解 分离变量得

$$e^y dy = e^{2x} dx,$$

两边积分得

$$\int e^y dy = \int e^{2x} dx,$$

即 $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$

或 $y = \ln(\frac{1}{2}e^{2x} + C).$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $\ln(\frac{1}{2} + C) = 0, C = \frac{1}{2},$

所以特解 $y = \ln(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}).$

(2) $\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$

解 分离变量得

$$\tan y dy = \tan x dx,$$

两边积分得

$$\int \tan y dy = \int \tan x dx,$$

即 $-\ln(\cos y) = -\ln(\cos x) - \ln C,$

或 $\cos y = C \cos x.$

由 $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$ 得 $\cos \frac{\pi}{4} = C \cos 0 = C, C = \frac{1}{\sqrt{2}},$

所以特解为 $\sqrt{2} \cos y = \cos x.$

(3) $y' \sin x = y \ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e;$

解 分离变量得

$$\frac{1}{y \ln y} dy = \frac{1}{\sin x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y \ln y} dy = \int \frac{1}{\sin x} dx,$$

即 $\ln(\ln y) = \ln(\tan \frac{x}{2}) + \ln C,$

或 $y = e^{C \tan \frac{x}{2}}.$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 得 $e = e^{C \tan \frac{\pi}{4}}, C = 1,$

所以特解为 $y = e^{\tan \frac{x}{2}}$.

$$(4) \cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0, \quad y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$$

解 分离变量得

$$-\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

两边积分得

$$-\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx,$$

$$\text{即} \quad \ln |\cos y| = \ln(e^x + 1) + \ln |C|,$$

$$\text{或} \quad \cos y = C(e^x + 1).$$

$$\text{由 } y|_{x=0} = \frac{\pi}{4} \text{ 得 } \cos \frac{\pi}{4} = C(e^{\frac{\pi}{4}} + 1), \quad C = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以特解为 } \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^x + 1).$$

$$(5) x dy + 2y dx = 0, \quad y|_{x=2} = 1.$$

解 分离变量得

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{2}{x} dx,$$

两边积分得

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{2}{x} dx,$$

$$\text{即} \quad \ln y = -2 \ln x + \ln C,$$

$$\text{或} \quad y = Cx^{-2}.$$

$$\text{由 } y|_{x=2} = 1 \text{ 得 } C \cdot 2^{-2} = 1, \quad C = 4,$$

$$\text{所以特解为 } y = \frac{4}{x^2}.$$

3. 有一盛满了水的圆锥形漏漏斗, 高为 10cm, 顶角为 60° , 漏斗下面有面积为 0.5cm^2 的孔, 求水面高度变化的规律及流完所需的时间.

解 设 t 时该已流出的水的体积为 V , 高度为 x , 则由水力学有

$$\frac{dV}{dt} = 0.62 \times 0.5 \times \sqrt{(2 \times 980)x}, \quad \text{即 } dV = 0.62 \times 0.5 \times \sqrt{(2 \times 980)x} dt.$$

$$\text{又因为 } r = x \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$\text{故} \quad V = -\pi r^2 dx = -\frac{\pi}{3} x^2 dx,$$

$$\text{从而} \quad 0.62 \times 0.5 \times \sqrt{(2 \times 980)x} dt = -\frac{\pi}{3} x^2 dx,$$

$$\text{即} \quad dt = \frac{\pi}{3 \times 0.62 \times 0.5 \sqrt{2 \times 980}} x^{\frac{3}{2}} dx,$$

$$\text{因此} \quad t = \frac{-2\pi}{3 \times 0.62 \times 0.5 \sqrt{2 \times 980}} x^{\frac{5}{2}} + C.$$

$$\text{又因为当 } t=0 \text{ 时, } x=10, \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{3 \times 5 \times 0.62 \times 0.5 \sqrt{2 \times 980}} 10^{\frac{5}{2}},$$

故水从小孔流出的规律为

$$t = \frac{2\pi}{3 \times 5 \times 0.62 \times 0.5 \sqrt{2 \times 980}} (10^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}}) = -0.0305 x^{\frac{5}{2}} + 9.645.$$

令 $x=0$, 得水流完所需时间约为 10s.

4. 质量为 1g(克)的质点受外力作用作直线运动, 这外力和时间成正比, 和质点运动的速度成反比. 在 $t=10s$ 时, 速度等于 50cm/s, 外力为 $4g \text{ cm/s}^2$, 问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少?

解 已知 $F = k \frac{t}{v}$, 并且法 $t=10s$ 时, $v=50\text{cm/s}$, $F=4g \text{ cm/s}^2$, 故 $4 = k \frac{10}{50}$, 从而 $k=20$, 因

$$\text{此 } F = 20 \frac{t}{v}.$$

又由牛顿定律, $F=ma$, 即 $1 \cdot \frac{dv}{dt} = 20 \frac{t}{v}$, 故 $v \, dv = 20t \, dt$. 这就是速度与时间应满足的微分方程. 解之得

$$\frac{1}{2} v^2 = 10t^2 + C, \text{ 即 } v = \sqrt{20t^2 + 2C}.$$

由初始条件有 $\frac{1}{2} \times 50^2 = 10 \times 10^2 + C$, $C=250$. 因此

$$v = \sqrt{20t^2 + 500}.$$

当 $t=60s$ 时, $v = \sqrt{20 \times 60^2 + 500} = 269.3\text{cm/s}$.

5. 镭的衰变有如下的规律: 镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知, 镭经过 1600 年后, 只余原始量 R_0 的一半. 试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

解 由题设知,

$$\frac{dR}{dt} = -\lambda R, \text{ 即 } \frac{dR}{R} = -\lambda dt,$$

两边积分得

$$\ln R = -\lambda t + C_1,$$

从而 $R = Ce^{-\lambda t}$ ($C = e^{C_1}$).

因为当 $t=0$ 时, $R=R_0$, 故 $R_0 = Ce^0 = C$, 即 $R = R_0 e^{-\lambda t}$.

又由于当 $t=1600$ 时, $R = \frac{1}{2}R_0$, 故 $\frac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-1600\lambda}$, 从而 $\lambda = \frac{\ln 2}{1600}$.

因此 $R = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600}t} = R_0 e^{-0.000433t}$.

6. 一曲线通过点(2, 3), 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 求这曲线方程.

解 设切点为 $P(x, y)$, 则切线在 x 轴, y 轴的截距分别为 $2x, 2y$, 切线斜率为

$$\frac{2y-0}{0-2x} = -\frac{y}{x},$$

故曲线满足微分方程: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, 即 $\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$,

从而 $\ln y + \ln x = \ln C$, $xy = C$.

因为曲线经过点(2, 3), 所以 $C = 2 \times 3 = 6$, 曲线方程为 $xy = 6$.

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a , 船行方向始终与河岸垂直, 又设河宽为 h , 河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

解 建立坐标系如图. 设 t 时刻船的位置为 (x, y) , 此时水速为 $v = \frac{dx}{dt} = ky(h-y)$, 故

$$dx = ky(h-y)dt.$$

又由已知, $y = at$, 代入上式得

$$dx = kat(h-at)dt,$$

积分得

$$x = \frac{1}{2}kaht^2 - \frac{1}{3}ka^2t^3 + C.$$

由初始条件 $x|_{t=0} = 0$, 得 $C = 0$, 故 $x = \frac{1}{2}kaht^2 - \frac{1}{3}ka^2t^3$.

因此船运动路线的函数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}kaht^2-\frac{1}{3}ka^2t^3, \\ y=ay \end{cases},$$

从而一般方程为 $x=\frac{k}{a}(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3)$.

习题 12-3

1. 求下列齐次方程的通解:

$$(1) xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0;$$

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$.

令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = u + \sqrt{u^2 - 1}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) = \ln x + \ln C, \text{ 即 } u + \sqrt{u^2 - 1} = Cx,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx, \text{ 即 } y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2.$$

$$(2) x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x};$$

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = u \ln u, \text{ 即 } \frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C, \text{ 即 } u = e^{Cx+1},$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y = xe^{Cx+1}.$$

$$(3) (x^2 + y^2)dx - xydy = 0;$$

解 这是齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则原方程化为

$$(x^2 + x^2 u^2)dx - x^2 u(udx + xdu) = 0, \text{ 即 } udu = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$u^2 = \ln x^2 + C,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2 = x^2(\ln x^2 + C).$$

$$(4)(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0;$$

解 这是齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则原方程化为

$$(x^3 + x^3u^3)dx - 3x^3u^2(udx + xdu) = 0, \text{ 即 } \frac{3u^2}{1-2u^3}du = \frac{1}{x}dx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2u^3) = \ln x + \ln C, \text{ 即 } 2u^3 = 1 - \frac{C}{x^2},$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$x^3 - 2y^3 = Cx.$$

$$(5)(2x\operatorname{sh}\frac{y}{x} + 3y\operatorname{ch}\frac{y}{x})dx - 3x\operatorname{ch}\frac{y}{x}dy = 0;$$

解 原方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\operatorname{th}\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2}{3}\operatorname{th}u + u, \text{ 即 } \frac{3\operatorname{ch}u}{\operatorname{sh}u}du = \frac{2}{x}dx,$$

两边积分得

$$3\ln(\operatorname{sh}u) = 2\ln x + \ln C, \text{ 即 } \operatorname{sh}^3u = Cx^2,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$\operatorname{sh}^2\frac{y}{x} = Cx^2.$$

$$(6)(1 + 2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0.$$

解 原方程变为 $\frac{dx}{dy} = \frac{2(\frac{x}{y} - 1)e^{\frac{x}{y}}}{1 + 2e^{\frac{x}{y}}}.$

令 $u = \frac{x}{y}$, 则原方程化为

$$u + y \frac{du}{dy} = \frac{2(u-1)e^u}{1+2e^u}, \text{ 即 } y \frac{du}{dy} = -\frac{u+2e^u}{1+2e^u},$$

分离变量得

$$\frac{1+2e^u}{u+2e^u} du = -\frac{1}{y} dy,$$

两边积分得

$$\ln(u+2e^u) = -\ln y + \ln C, \text{ 即 } y(u+2e^u) = C,$$

将 $u = \frac{x}{y}$ 代入上式得原方程的通解

$$y\left(\frac{x}{y} + 2e^{\frac{x}{y}}\right) = C, \text{ 即 } x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y|_{x=0} = 1;$$

解 这是齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则原方程化为

$$(x^2u^2 - 3x^2)(udx + xdu) + 2x^2udx = 0,$$

$$\text{即 } \frac{u^2 - 3}{u - u^3} du = \frac{1}{x} dx, \text{ 或 } \left(-\frac{3}{u} + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1}\right) du = \frac{1}{x} dx$$

两边积分得

$$-3\ln|u| + \ln|u+1| + \ln|u-1| = \ln|x| + \ln|C|, \text{ 即 } u^2 - 1 = Cxu^3,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2 - x^2 = Cy^3.$$

由 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C=1$, 故所求特解为 $y^2 - x^2 = y^3$.

$$(2) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y|_{x=1} = 2;$$

解 令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + u, \text{ 即 } udu = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln x + C,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$y^2 = 2x^2(\ln x + C).$$

由 $y|_{x=1}=2$ 得 $C=2$, 故所求特解为 $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$.

$$(3)(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0, y|_{x=1}=1.$$

解 这是齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则原方程化为

$$(x^2 + 2x^2u - x^2u^2)dx + (x^2u^2 + 2x^2u - x^2)(udx + xdu) = 0,$$

即
$$\frac{u^2 + 2u - 1}{u^3 + u^2 + u + 1} du = -\frac{1}{x} dx,$$

或
$$\left(\frac{1}{u+1} - \frac{2u}{u^2+1}\right) du = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分得

$$\ln|u+1| - \ln(u^2+1) = \ln|x| + \ln|C|, \text{ 即 } u+1 = Cx(u^2+1),$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得原方程的通解

$$x+y = C(x^2+y^2).$$

由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C=1$, 故所求特解为 $x+y = (x^2+y^2)$.

3. 设有连结 $O(0, 0)$ 和 $A(1, 1)$ 的一段向上凸的曲线弧 \widehat{OA} , 对于 \widehat{OA} 上任一点 $P(x, y)$,

曲线弧 \widehat{OP} 与直线段 \overline{OP} 所围图形的面积为 x^2 , 求曲线弧 \widehat{OA} 的方程.

解 设曲线弧 \widehat{OA} 的方程为 $y=y(x)$. 由题意得

$$\int_0^x y(x) dx - \frac{1}{2} xy(x) = x^2,$$

两边求导得

$$y(x) - \frac{1}{2} y(x) - \frac{1}{2} xy'(x) = 2x,$$

即
$$y' = \frac{y}{x} - 4.$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则有

$$u + x \frac{du}{dx} = u - 4, \text{ 即 } \frac{1}{u} du = -\frac{4}{x} dx,$$

两边积分得

$$u = -4 \ln x + C.$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得方程的通解

$$y = -4x \ln x + Cx.$$

由于 $A(1, 1)$ 在曲线上, 即 $y(1) = 1$, 因而 $C = 1$, 从而所求方程为 $y = -4x \ln x + x$.

习题 12-4

1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = e^{-x};$$

$$\text{解 } y = e^{-\int dx} (\int e^{-x} \cdot e^{\int dx} dx + C) = e^{-x} (\int e^{-x} \cdot e^x dx + C) = e^{-x} (x + C).$$

$$(2) xy' + y = x^2 + 3x + 2;$$

$$\text{解 原方程变为 } y' + \frac{1}{x}y = x + 3 + \frac{2}{x}.$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} [\int (x + 3 + \frac{2}{x}) \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C] \\ &= \frac{1}{x} [\int (x + 3 + \frac{2}{x}) x dx + C] = \frac{1}{x} [\int (x^2 + 3x + 2) dx + C] \\ &= \frac{1}{x} (\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

$$(3) y' + y \cos x = e^{-\sin x};$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= e^{-\int \cos x dx} (\int e^{-\sin x} \cdot e^{\int \cos x dx} dx + C) \\ &= e^{-\sin x} (\int e^{-\sin x} \cdot e^{\sin x} dx + C) = e^{-\sin x} (x + C). \end{aligned}$$

$$(4) y' + y \tan x = \sin 2x;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= e^{-\int \tan x dx} (\int \sin 2x \cdot e^{\int \tan x dx} dx + C) \\ &= e^{\ln \cos x} (\int \sin 2x \cdot e^{-\ln \cos x} dx + C) \\ &= \cos x (\int 2 \sin x \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} dx + C) \\ &= \cos x (-2 \cos x + C) = C \cos x - 2 \cos^2 x. \end{aligned}$$

$$(5) (x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0;$$

$$\text{解 原方程变形为 } y' + \frac{2x}{x^2 - 1}y = \frac{\cos x}{x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx} (\int \frac{\cos x}{x^2 - 1} \cdot e^{\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx} dx + C) \\ &= \frac{1}{x^2 - 1} [\int \frac{\cos x}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1) dx + C] = \frac{1}{x^2 - 1} (\sin x + C). \end{aligned}$$

$$(6) \frac{d\rho}{d\theta} + 3\rho = 2;$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \rho &= e^{-\int 3d\theta} (\int 2 \cdot e^{\int 3d\theta} d\theta + C) \\ &= e^{-3\theta} (\int 2e^{3\theta} d\theta + C) \\ &= e^{-3\theta} (\frac{2}{3}e^{3\theta} + C) = \frac{2}{3} + Ce^{-3\theta}.\end{aligned}$$

$$(7) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x;$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y &= e^{-\int 2xdx} (\int 4x \cdot e^{\int 2xdx} dx + C) \\ &= e^{-x^2} (\int 4x \cdot e^{x^2} dx + C) \\ &= e^{-x^2} (2e^{x^2} + C) = 2 + Ce^{-x^2}.\end{aligned}$$

$$(8) y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0;$$

$$\begin{aligned}\text{解 原方程变形为 } \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y} x &= \frac{1}{y} . \\ x &= e^{-\int \frac{1}{y \ln y} dy} (\int \frac{1}{y} \cdot e^{\int \frac{1}{y \ln y} dy} dy + C) \\ &= \frac{1}{\ln y} (\int \frac{1}{y} \cdot \ln y dy + C) \\ &= \frac{1}{\ln y} (\frac{1}{2} \ln^2 y + C) = \frac{1}{2} \ln y + \frac{C}{\ln y} .\end{aligned}$$

$$(9) (x-2) \frac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3;$$

$$\begin{aligned}\text{解 原方程变形为 } \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x-2} y &= 2(x-2)^2 . \\ y &= e^{\int \frac{1}{x-2} dx} [\int 2(x-2)^2 \cdot e^{-\int \frac{1}{x-2} dx} dx + C] \\ &= (x-2) [\int 2(x-2)^2 \cdot \frac{1}{x-2} dx + C] \\ &= (x-2) [(x-2)^2 + C] = (x-2)^3 + C(x-2).\end{aligned}$$

$$(10) (y^2 - 6x) \frac{dy}{dx} + 2y = 0 .$$

解 原方程变形为 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y$.

$$\begin{aligned}x &= e^{\int \frac{3}{y} dy} \left[\int \left(-\frac{1}{2}y\right) \cdot e^{-\int \frac{3}{y} dy} dy + C \right] \\&= y^3 \left(-\frac{1}{2} \int y \cdot \frac{1}{y^3} dy + C\right) \\&= y^3 \left(\frac{1}{2y} + C\right) = \frac{1}{2}y^2 + Cy^3.\end{aligned}$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \sec x$, $y|_{x=0}=0$;

解 $y = e^{\int \tan x dx} \left(\int \sec x \cdot e^{-\int \tan x dx} dx + C \right)$

$$= \frac{1}{\cos x} \left(\int \sec x \cdot \cos x dx + C \right) = \frac{1}{\cos x} (x + C).$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=0$, 故所求特解为 $y=x\sec x$.

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$, $y|_{x=\pi}=1$;

解 $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$

$$= \frac{1}{x} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot x dx + C \right) = \frac{1}{x} (-\cos x + C).$$

由 $y|_{x=\pi}=1$, 得 $C=\pi-1$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$.

(3) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$;

解 $y = e^{-\int \cot x dx} \left(\int 5e^{\cos x} \cdot e^{\int \cot x dx} dx + C \right)$

$$= \frac{1}{\sin x} \left(\int 5e^{\cos x} \cdot \sin x dx + C \right) = \frac{1}{\sin x} (-5e^{\cos x} + C).$$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$, 得 $C=1$, 故所求特解为 $y=\frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x}+1)$.

(4) $\frac{dy}{dx} + 3y = 8$, $y|_{x=0}=2$;

解 $y = e^{-\int 3dx} (\int 8 \cdot e^{\int 3dx} dx + C)$

$$= e^{-3x} (8 \int e^{3x} dx + C) = e^{-3x} (\frac{8}{3} e^{3x} + C) = \frac{8}{3} + C e^{-3x}.$$

由 $y|_{x=0}=2$, 得 $C = -\frac{2}{3}$, 故所求特解为 $y = \frac{2}{3}(4 - e^{-3x})$.

(5) $\frac{dy}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3} y = 1, y|_{x=1}=0.$

解 $y = e^{-\int \frac{2-3x^2}{x^3} dx} (\int 1 \cdot e^{\int \frac{2-3x^2}{x^3} dx} dx + C)$

$$= x^3 e^{\frac{1}{x^2}} (\int \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} dx + C) = x^3 e^{\frac{1}{x^2}} (\frac{1}{2} e^{\frac{1}{x^2}} + C).$$

由 $y|_{x=1}=0$, 得 $C = -\frac{1}{2e}$, 故所求特解为 $y = \frac{1}{2} x^3 (1 - e^{\frac{1}{x^2}-1})$.

3. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x+y$.

解 由题意知 $y' = 2x+y$, 并且 $y|_{x=0}=0$.

由通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{\int dx} (\int 2xe^{-\int dx} dx + C) = e^x (2 \int xe^{-x} dx + C) \\ &= e^x (-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C) = Ce^x - 2x - 2. \end{aligned}$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=2$, 故所求曲线的方程为 $y=2(e^x-x-1)$.

4. 设有一质量为 m 的质点作直线运动, 从速度等于零的时刻起, 有一个与运动方向一至、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它, 此外还受一与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

解 由牛顿定律 $F=ma$, 得 $m \frac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v$, 即 $\frac{dv}{dt} + \frac{k_2}{m} v = \frac{k_1}{m} t$.

由通解公式得

$$\begin{aligned} v &= e^{-\int \frac{k_2}{m} dt} (\int \frac{k_1}{m} t e^{\int \frac{k_2}{m} dt} dt + C) = e^{-\frac{k_2}{m} t} (\int \frac{k_1}{m} t \cdot e^{\frac{k_2}{m} t} dt + C) \\ &= e^{-\frac{k_2}{m} t} (\frac{k_1}{k_2} t e^{\frac{k_2}{m} t} - \frac{k_1 m}{k_2^2} e^{\frac{k_2}{m} t} + C). \end{aligned}$$

由题意, 当 $t=0$ 时 $v=0$, 于是得 $C=\frac{k_1 m}{k_2^2}$. 因此

$$v=e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1 m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_1 m}{k_2^2}\right)$$

即
$$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1 m}{k_2^2}(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}).$$

5. 设有一个由电阻 $R=10\Omega$ 、电感 $L=2\text{h}$ (亨)和电源电压 $E=20\sin 5t$ V(伏)串联组成的电路. 开关 K 合上后, 电路中有电源通过. 求电流 i 与时间 t 的函数关系.

解 由回路电压定律知

$$20\sin 5t-2\frac{di}{dt}-10i=0, \text{ 即 } \frac{di}{dt}+5i=10\sin 5t.$$

由通解公式得

$$i=e^{-\int 5dt}\left(\int 10\sin 5t\cdot e^{\int 5dt}dt+C\right)=\sin 5t-\cos 5t+Ce^{-5t}.$$

因为当 $t=0$ 时 $i=0$, 所以 $C=1$. 因此

$$i=\sin 5t-\cos 5t+e^{-5t}=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin\left(5t-\frac{\pi}{4}\right) \text{ (A)}.$$

6. 设曲 $\int_L yf(x)dx+[2xf(x)-x^2]dy$ 在右半平面($x>0$)内与路径无关, 其中 $f(x)$ 可导, 且 $f(1)=1$, 求 $f(x)$.

解 因为当 $x>0$ 时, 所给积分与路径无关, 所以

$$\frac{\partial}{\partial y}[yf(x)]=\frac{\partial}{\partial x}[2xf(x)-x^2],$$

即
$$f(x)=2f(x)+2xf'(x)-2x,$$

或
$$f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=1.$$

因此
$$f(x)=e^{-\int \frac{1}{2x}dx}\left(\int 1\cdot e^{\int \frac{1}{2x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int \sqrt{x}dx+C\right)=\frac{2}{3}x+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

由 $f(1)=1$ 可得 $C=\frac{1}{3}$, 故 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3\sqrt{x}}.$

7. 求下列伯努利方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x);$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = \cos x - \sin x, \text{ 即 } \frac{d(y^{-1})}{dx} - y^{-1} = \sin x - \cos x.$$

$$\begin{aligned} y^{-1} &= e^{\int dx} \left[\int (\sin x - \cos x) \cdot e^{-\int dx} dx + C \right] \\ &= e^{-x} \left[\int (\cos x - \sin x) e^x dx + C \right] = Ce^x - \sin x, \end{aligned}$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y} = Ce^x - \sin x$.

$$(2) \frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2;$$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - 3x \frac{1}{y} = x, \text{ 即 } \frac{d(y^{-1})}{dx} + 3xy^{-1} = -x.$$

$$\begin{aligned} y^{-1} &= e^{-\int 3xdx} \left[\int (-x) \cdot e^{\int 3xdx} dx + C \right] \\ &= e^{-\frac{3}{2}x^2} \left(-\int x e^{\frac{3}{2}x^2} dx + C \right) \\ &= e^{-\frac{3}{2}x^2} \left(-\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}x^2} + C \right) = Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y} = Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{3}$.

$$(3) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4;$$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3} \frac{1}{y^3} = \frac{1}{3}(1-2x), \text{ 即 } \frac{d(y^{-3})}{dx} - y^{-3} = 2x-1.$$

$$\begin{aligned} y^{-3} &= e^{\int dx} \left[\int (2x-1) e^{-\int dx} dx + C \right] \\ &= e^x \left[\int (2x-1) e^{-x} dx + C \right] = -2x-1 + Ce^x, \end{aligned}$$

原方程的通解为 $\frac{1}{y^3} = Ce^x - 2x - 1$.

$$(4) \frac{dy}{dx} - y = xy^5;$$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^5} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^4} = x, \text{ 即 } \frac{d(y^{-4})}{dx} + 4y^{-4} = -4x.$$

$$y^{-4} = e^{-\int 4dx} [\int (-4x) \cdot e^{\int 4dx} dx + C]$$

$$= e^{-4} (-4 \int x e^{4x} dx + C)$$

$$= -x + \frac{1}{4} + C e^{-4x},$$

$$\text{原方程的通解为 } \frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + C e^{-4x}.$$

$$(5) xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0.$$

解 原方程可变形为

$$\frac{1}{y^3} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = (1 + \ln x), \text{ 即 } \frac{d(y^{-2})}{dx} + \frac{2}{x} y^{-2} = -2(1 + \ln x).$$

$$y^{-2} = e^{-\int \frac{2}{x} dx} [-2 \int (1 + \ln x) \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C]$$

$$= \frac{1}{x^2} [-2 \int (1 + \ln x) x^2 dx + C]$$

$$= \frac{C}{x^2} - \frac{2}{3} x \ln x - \frac{4}{9} x,$$

$$\text{原方程的通解为 } \frac{1}{y^2} = \frac{C}{x^2} - \frac{2}{3} x \ln x - \frac{4}{9} x.$$

8. 验证形如 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 的微分方程, 可经变量代换 $v = xy$ 化为可分离变量的方程, 并求其通解.

解 原方程可变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-yf(xy)}{xg(xy)}.$$

在代换 $v = xy$ 下原方程化为

$$\frac{x \frac{dv}{dx} - v}{x^2} = -\frac{vf(v)}{x^2 g(v)},$$

即 $\frac{g(v)}{v[g(v)-f(v)]}du = \frac{1}{x}dx,$

积分得 $\int \frac{g(v)}{v[g(v)-f(v)]}du = \ln x + C,$

对上式求出积分后, 将 $v=xy$ 代回, 即得通解.

9. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程, 然后求出通解:

(1) $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2;$

解 令 $u=x+y$, 则原方程化为

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2, \text{ 即 } dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

两边积分得

$$x = \arctan u + C.$$

将 $u=x+y$ 代入上式得原方程的通解

$$x = \arctan(x+y) + C, \text{ 即 } y = -x + \tan(x-C).$$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1;$

解 令 $u=x-y$, 则原方程化为

$$1 - \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + 1, \text{ 即 } dx = -u du.$$

两边积分得

$$x = -\frac{1}{2}u^2 + C_1.$$

将 $u=x-y$ 代入上式得原方程的通解

$$x = -\frac{1}{2}(x-y)^2 + C_1, \text{ 即 } (x-y)^2 = -2x + C (C=2C_1).$$

(3) $xy' + y = y(\ln x + \ln y);$

解 令 $u=xy$, 则原方程化为

$$x\left(\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2}\right) + \frac{u}{x} = \frac{u}{x}\ln u, \text{ 即 } \frac{1}{x}dx = \frac{1}{u\ln u}du.$$

两边积分得

$$\ln x + \ln C = \ln \ln u, \text{ 即 } u = e^{Cx}.$$

将 $u=xy$ 代入上式得原方程的通解

$$xy = e^{Cx}, \text{ 即 } y = \frac{1}{x}e^{Cx}.$$

(4) $y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1;$

解 原方程变形为

$$y'=(y+\sin x-1)^2-\cos x.$$

令 $u=y+\sin x-1$, 则原方程化为

$$\frac{du}{dx}-\cos x=u^2-\cos x, \text{ 即 } \frac{1}{u^2}du=dx.$$

两边积分得

$$-\frac{1}{u}=x+C.$$

将 $u=y+\sin x-1$ 代入上式得原方程的通解

$$-\frac{1}{y+\sin x-1}=x+C, \text{ 即 } y=1-\sin x-\frac{1}{x+C}.$$

$$(5)y(xy+1)dx+x(1+xy+x^2y^2)dy=0.$$

解 原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(xy+1)}{x(1+xy+x^2y^2)}.$$

令 $u=xy$, 则原方程化为

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2}=-\frac{u(u+1)}{x^2(1+u+u^2)}, \text{ 即 } \frac{1}{x}\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{x^2(1+u+u^2)}.$$

分离变量得

$$\frac{1}{x}dx=(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u})du.$$

两边积分得

$$\ln x+C_1=-\frac{1}{2u^2}-\frac{1}{u}+\ln u.$$

将 $u=xy$ 代入上式得原方程的通解

$$\ln x+C_1=-\frac{1}{2x^2y^2}-\frac{1}{xy}+\ln xy,$$

$$\text{即 } 2x^2y^2\ln y-2xy-1=Cx^2y^2(C=2C_1).$$

习题 12-5

1. 判别下列方程中哪些是全微分方程, 并求全微分方程的通解:

$$(1)(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0;$$

解 这里 $P=3x^2+6xy^2$, $Q=6x^2y+4y^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (6x^2 y + 4y^2) dy = C,$$

即
$$x^3 + 3x^2 y^2 + \frac{4}{3} y^3 = C.$$

$$(2)(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2 dy=0;$$

解 这里 $P=a^2-2xy-y^2$, $Q=-(x+y)^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x a^2 dx - \int_0^y (x+y)^2 dy = C,$$

即
$$a^2 x - x^2 y - xy^2 = C.$$

$$(3)e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0;$$

解 这里 $P=e^y$, $Q=xe^y-2y$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x e^0 dx + \int_0^y (xe^y - 2y) dy = C,$$

即
$$xe^y - y^2 = C.$$

$$(4)(x \cos y + \cos x)y' - y \sin x + \sin y = 0;$$

解 原方程变形为 $(x \cos y + \cos x)dy - (y \sin x + \sin y)dx = 0$.

这里 $P=-(y \sin x + \sin y)$, $Q=x \cos y + \cos x$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \sin x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x 0dx + \int_0^y (x\cos y + \cos x)dy = C,$$

即 $x\sin y + y\cos x = C$.

解

$$(5)(x^2 - y)dx - xdy = 0;$$

解 这里 $P = x^2 - y$, $Q = -x$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^x x^2 dx - \int_0^y x dy = C,$$

即 $\frac{1}{3}x^3 - xy = C$.

$$(6)y(x - 2y)dx - x^2 dy = 0;$$

解 这里 $P = y(x - 2y)$, $Q = -x^2$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x - 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x,$$

所以此方程不是全微分方程.

$$(7)(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta = 0;$$

解 这里 $P = 1 + e^{2\theta}$, $Q = 2\rho e^{2\theta}$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{2\theta} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以此方程是全微分方程, 其通解为

$$\int_0^\rho 2d\rho + \int_0^\theta 2\rho e^{2\theta}d\theta = C,$$

即 $\rho(e^{2\theta} + 1) = C$.

$$(8)(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$$

解 这里 $P = x^2 + y^2$, $Q = xy$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y,$$

所以此方程不是全微分方程.

2. 利用观察法求出下列方程的积分因子, 并求其通解:

$$(1)(x+y)(dx-dy)=dx+dy;$$

解 方程两边同时乘以 $\frac{1}{x+y}$ 得

$$dx-dy=\frac{dx+dy}{x+y}, \text{ 即 } d(x-y)=d\ln(x+y),$$

所以 $\frac{1}{x+y}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$x-y=\ln(x+y)+C.$$

$$(2)ydx-xdy+y^2xdx=0;$$

解 方程两边同时乘以 $\frac{1}{y^2}$ 得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0, \text{ 即 } d\left(\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{x^2}{2}\right)=0,$$

所以 $\frac{1}{y^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C.$$

$$(3)y^2(x-3y)dx+(1-3y^2x)dy=0;$$

解 原方程变形为

$$xy^2dx-3y^3dx+dy-3x^2dy=0,$$

两边同时乘以 $\frac{1}{y^2}$ 并整理得

$$xdx+\frac{dy}{y^2}-(3ydx+3xdy)=0, \text{ 即 } d\left(\frac{x^2}{2}\right)-d\left(\frac{1}{y}\right)-3d(xy)=0,$$

所以 $\frac{1}{y^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{y}-3xy=C.$$

$$(4)xdx+ydy=(x^2+y^2)dx;$$

解 方程两边同时乘以 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 得

$$\frac{xdx+yd y}{x^2+y^2}-dx=0, \text{ 即 } d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]-dx=0,$$

所以 $\frac{1}{x^2+y^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$x^2+y^2=Ce^{2x}.$$

$$(5)(x-y^2)dx+2xydy=0;$$

解 原方程变形为

$$xdx-y^2dx+2xydy=0,$$

两边同时乘以 $\frac{1}{x^2}$ 得

$$\frac{dx}{x}+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0, \text{ 即 } d(\ln x)+d\left(\frac{y^2}{x}\right)=0,$$

所以 $\frac{1}{x^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\ln x+\frac{y^2}{x}=C, \text{ 即 } x\ln x+y^2=Cx.$$

$$(6)2ydx-3xy^2dx-xdy=0.$$

解 方程两边同时乘以 x 得

$$2xydx-x^2dy-3x^2y^2dx=0, \text{ 即 } yd(x^2)-x^2dy-3x^2y^2dx=0,$$

再除以 y^2 得

$$\frac{yd(x^2)-x^2dy}{y^2}-3x^2dx=0, \text{ 即 } d\left(\frac{x^2}{y}-x^3\right)=0$$

所以 $\frac{x}{y^2}$ 为原方程的一个积分因子, 并且原方程的通解为

$$\frac{x^2}{y}-x^3=0.$$

3. 验证 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是微分方程 $yf(xy)dx+yg(xy)dy=0$ 的积分因子, 并求下列方程

的通解:

解 方程两边乘以 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 得

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}[yf(xy)dx+g(xy)dy]=0,$$

这里 $P=\frac{f(xy)}{x[f(xy)-g(xy)]}$, $Q=\frac{g(xy)}{y[f(xy)-g(xy)]}$.

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{f(xy)g'(xy)-f'(xy)g(xy)}{[f(xy)-g(xy)]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

所以 $\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ 是原方程的一个积分因子.

$$(1)y(x^2y^2+2)dx+x(2-2x^2y^2)dy=0;$$

解 这里 $f(xy)=x^2y^2+2$, $g(xy)=2-2x^2y^2$, 所以

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{3x^3y^3}$$

是方程的一个积分因子. 方程两边同乘以 $\frac{1}{3x^3y^3}$ 得全微分方程

$$\frac{x^2+2}{3x^3y^2}dx+\frac{2-x^2y^2}{3x^2y^3}dy=0,$$

其通解为

$$\int_1^x \frac{x^2+2}{3x^3}dx+\int_1^y \frac{2-x^2y^2}{3x^2y^3}dy=C,$$

即 $\frac{1}{3}(\ln x-\ln y^2+1-\frac{1}{x^2y^2})=C$, 或 $x=Cy^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}$.

$$(2)y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0.$$

解 这里 $f(xy)=2xy+1$, $g(xy)=1+2xy-x^3y^3$, 所以

$$\frac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}=\frac{1}{x^4y^4}$$

是方程的一个积分因子. 方程两边同乘以 $\frac{1}{x^4y^4}$ 得全微分方程

$$\frac{2xy+1}{x^4y^3}dx+\frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4}dy=0,$$

其通解为

$$\int_1^x \frac{2x+1}{x^4} dx + \int_1^y \frac{1+2xy-x^3y^3}{x^3y^4} dy = C,$$

即 $\frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{3x^3y^3} + \ln|y| = C.$

4. 用积分因子法解下列一阶线性方程:

(1) $xy' + 2y = 4\ln x;$

解 原方程变为 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x}\ln x$, 其积分因子为

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2,$$

在方程 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x}\ln x$ 的两边乘以 x^2 得

$$x^2y' + 2xy = 4x \ln x, \text{ 即 } (x^2y)' = 4x \ln x,$$

两边积分得

$$x^2y = \int 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C,$$

原方程的通解为 $y = 2\ln x - 1 + \frac{C}{x^2}.$

(2) $y' - \tan x \cdot y = x.$

解 积分因子为 $\mu(x) = e^{-\int \tan x dx} = \cos x,$

在方程的两边乘以 $\cos x$ 得

$$\cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = x \cos x, \text{ 即 } (\cos x \cdot y)' = x \cos x,$$

两边积分得

$$\cos x \cdot y = \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C,$$

方程的通解为 $y = x \tan x + 1 + \frac{C}{\cos x}.$

习题 12-6

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $y''=x+\sin x$;

解 $y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1$,

$$y=\int(\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1)dx=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2.$$

(2) $y'''=xe^x$;

解 $y''=\int xe^x dx=xe^x-e^x+2C_1$,

$$y'=\int(xe^x-e^x+2C_1)dx=xe^x-2e^x+2C_1x+C_2,$$

$$y=\int(xe^x-2e^x+2C_1x+C_2)dx=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3,$$

原方程的通解为

$$y=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

(3) $y''=\frac{1}{1+x^2}$;

解 $y'=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C_1$

$$y=\int(\arctan x+C_1)dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx+C_1x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2,$$

原方程的通解为

$$y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_1x+C_2.$$

(4) $y''=1+y'^2$;

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$$p'=1+p^2, \text{ 即 } \frac{1}{1+p^2}dp=dx,$$

两边积分得

$$\arctan p=x+C_1, \text{ 即 } y'=p=\tan(x+C_1),$$

$$y = \int \tan(x+C_1)dx = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2,$$

原方程的通解为

$$y = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2.$$

$$(5)y''=y'+x;$$

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$$p'-p=x,$$

由一阶线性非齐次方程的通解公式得

$$p = e^{\int dx} (\int x \cdot e^{-\int dx} dx + C_1) = e^x (\int x e^{-x} dx + C_1) = C_1 e^x - x - 1,$$

$$\text{即 } y' = C_1 e^x - x - 1,$$

$$\text{于是 } y = \int (C_1 e^x - x - 1) dx = C_1 e^x - \frac{1}{2} x^2 - x + C_2,$$

原方程的通解为

$$y = C_1 e^x - \frac{1}{2} x^2 - x + C_2.$$

$$(6)xy''+y'=0;$$

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$$x p' + p = 0, \text{ 即 } p' + \frac{1}{x} p = 0,$$

由一阶线性齐次方程的通解公式得

$$p = C_1 e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C_1 e^{-\ln x} = \frac{C_1}{x},$$

$$\text{即 } y' = \frac{C_1}{x},$$

$$\text{于是 } y = \int \frac{C_1}{x} dx = C_1 \ln x + C_2,$$

原方程的通解为

$$y = C_1 \ln x + C_2.$$

$$(7)yy''+y'=y'^2;$$

解 令 $p=y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$yp \frac{dp}{dy} + 1 = p^2, \text{ 即 } \frac{p}{p^2-1} dp = \frac{1}{y} dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln|p^2-1|=\ln|y|+\ln|C_1|, \text{ 即 } p^2-1\pm C_1^2y^2.$$

当 $|y'|=|p|>1$ 时, 方程变为

$$y'=\pm\sqrt{1+C_1^2y^2}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{1+(C_1y)^2}}dy=\pm dx,$$

两边积分得

$$\operatorname{arcsh}(C_1y)=\pm C_1x+C_2,$$

即原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\operatorname{sh}(C_2\pm C_1x).$$

当 $|y'|=|p|<1$ 时, 方程变为

$$y'=\pm\sqrt{1-C_1^2y^2}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{1-(C_1y)^2}}dy=\pm dx,$$

两边积分得

$$\arcsin(C_1y)=\pm C_1x+C_2,$$

即原方程的通解为

$$y=\frac{1}{C_1}\sin(C_2\pm C_1x).$$

$$(8)y^3y''-1=0;$$

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$y^3p\frac{dp}{dy}-1=0, \text{ 即 } pdp=y^{-3}dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}y^{-2}+\frac{1}{2}C_1, \text{ 即 } p^2=-y^{-2}+C_1,$$

故 $y'=\pm\sqrt{C_1-y^{-2}}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{C_1-y^{-2}}}dy=\pm dx,$

两边积分得

$$\sqrt{C_1y^2-1}=\pm(C_1x+C_2),$$

即原方程的通解为

$$C_1y^2=(C_1x+C_2)^2.$$

$$(9) y'' = \frac{1}{\sqrt{y}};$$

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}, \text{ 即 } p dp = \frac{1}{\sqrt{y}} dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2} p^2 = 2\sqrt{y} + 2C_1, \text{ 即 } p^2 = 4\sqrt{y} + 4C_1,$$

故 $y' = \pm 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$, 即 $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} dy = \pm dx,$

两边积分得原方程的通

$$x = \pm \left[\frac{2}{3} (\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1 \sqrt{\sqrt{y} + C_1} \right] + C_2.$$

$$(10) y'' = y'^3 + y'.$$

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy} = p^3 + p, \text{ 即 } p \left[\frac{dp}{dy} - (1 + p^2) \right] = 0.$$

由 $p=0$ 得 $y=C$, 这是原方程的一个解.

由 $\frac{dp}{dy} - (1 + p^2) = 0$ 得

$$\arctan p = y - C_1, \text{ 即 } y' = p = \tan(y - C_1),$$

从而 $x + C_2 = \int \frac{1}{\tan(y - C_1)} dy = \ln \sin(y - C_1),$

故原方程的通解为

$$y = \arcsin e^{x+C_2} + C_1.$$

2. 求下列各微分方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) y^3 y'' + 1 = 0, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0;$$

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$y^3 p \frac{dp}{dy} + 1 = 0, \text{ 即 } p dp = -\frac{1}{y^3} dy,$$

两边积分得

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \text{ 即 } y' = \pm \frac{\sqrt{1+C_1 y^2}}{y}.$$

$$\text{由 } y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0 \text{ 得 } C_1=-1, \text{ 从而 } y' = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

分离变量得

$$\pm \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = dx,$$

两边积分得

$$\pm \sqrt{1-y^2} = x + C_2, \text{ 即 } y = \pm \sqrt{1-(x+C_2)^2}.$$

$$\text{由 } y|_{x=1}=1 \text{ 得 } C_2=-1, y = \sqrt{1-(x-1)^2}, \text{ 从而原方程的通解为}$$

$$y = \sqrt{2x-x^2}.$$

$$(2) y'' - ay'^2 = 0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-1;$$

解 令 $p=y'$, 则原方程化为

$$\frac{dp}{dx} - ap^2 = 0, \text{ 即 } \frac{1}{p^2} dp = a dx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{p} = ax + C_1, \text{ 即 } y' = -\frac{1}{ax+C_1}.$$

$$\text{由 } y'|_{x=0}=-1 \text{ 得 } C_1=1, y' = -\frac{1}{ax+1}, \text{ 两边积分得}$$

$$y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1) + C_2.$$

$$\text{由 } y|_{x=0}=0 \text{ 得 } C_2=0, \text{ 故所求特解为 } y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1).$$

$$(3) y''' = e^{ax}, y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0;$$

$$\text{解 } y'' = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C_1.$$

由 $y''|_{x=1}=0$ 得 $C_1 = -\frac{1}{a}e^a$.

$$y' = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}e^a \right) dx = \frac{1}{a^2}e^{ax} - \frac{1}{a}e^a x + C_2.$$

由 $y'|_{x=1}=0$ 得 $C_2 = \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a^2}e^a$.

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{1}{a^2}e^{ax} - \frac{1}{a}e^a x + \frac{1}{a}e^a - \frac{1}{a^2}e^a \right) dx \\ &= \frac{1}{a^3}e^{ax} - \frac{1}{2a}e^a x^2 + \frac{1}{a}e^a x - \frac{1}{a^2}e^a x + C_3. \end{aligned}$$

由 $y|_{x=1}=0$ 得 $C_3 = \frac{1}{a^2}e^a - \frac{1}{a}e^a + \frac{1}{2a}e^a - \frac{1}{a^3}e^a$, 故所求特解为

$$y = \frac{e^{ax}}{a^3} - \frac{e^a x^2}{2a} + \frac{e^a (a-1)x}{a^2} - \frac{e^a (2a-a^2-2)}{2a^3}.$$

(4) $y''=e^{2y}$, $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}=e^{2y}, \text{ 即 } pdp=e^{2y}dy,$$

积分得

$$p^2=e^{2y}+C_1, \text{ 即 } y'=\pm\sqrt{e^{2y}+C_1}.$$

由 $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=-1$, 故 $y'=\pm\sqrt{e^{2y}-1}$, 从而

$$\frac{1}{\sqrt{e^{2y}-1}}dy=\pm dx,$$

积分得

$$-\arcsin e^{-y}=\pm x+C_2.$$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=-\frac{\pi}{2}$, 故

$$e^{-y}=\sin\left(\mp x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,$$

从而所求特解为 $y=-\ln\cos x$.

(5) $y''=3\sqrt{y}$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p \frac{dp}{dy} = 3\sqrt{y}, \text{ 即 } p dp = 3\sqrt{y} dy,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2} p^2 = 2y^{\frac{3}{2}} + 2C_1, \text{ 即 } y' = \pm 2\sqrt{y^{\frac{3}{2}} + C_1}.$$

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 得 $C_1=0$, $y' = 2y^{\frac{3}{4}}$, 从而 $y^{-\frac{3}{4}} dy = 2dx$,

两边积分得

$$4y^{\frac{1}{4}} = 2x + C_2, \text{ 即 } y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}C_2)^4.$$

由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=4$, 故原方程的特解为 $y = (\frac{1}{2}x + 1)^4$.

(6) $y'' + y'^2 = 1, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$.

解 令 $p=y'$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$p \frac{dp}{dy} + p^2 = 1, \text{ 即 } \frac{dp^2}{dy} + 2p^2 = 2,$$

于是 $p^2 = e^{-\int 2dy} (\int 2 \cdot e^{\int 2dy} dy + C_1) = C_1 e^{-2y} + 1,$

即 $y' = \pm \sqrt{C_1 e^{-2y} + 1}.$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=-1$, $y' = \pm \sqrt{1 - e^{-2y}}.$

故 $\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2y}}} dy = \pm dx,$

两边积分得

$$\ln(e^y + \sqrt{e^{2y} - 1}) = \pm x + C_2.$$

由 $y|_{x=0}=0$ 得 $C_2=0$, $\ln(e^y + \sqrt{e^{2y} - 1}) = \pm x,$

从而得原方程的特解 $y = \ln \cosh x$.

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 相切的积分曲线.

解 $y' = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2.$$

由题意得 $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

由 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$, 再由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$, 因此所求曲线为

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + 1.$$

4. 设有一质量为 m 的物体, 在空中由静止开始下落, 如果空气阻力为 $R=c^2v^2$ (其中 c 为常数, v 为物体运动的速度), 试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 以 $t=0$ 对应的物体位置为原点, 垂直向下的直线为 s 正轴, 建立坐标系.

由题设得

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg - c^2v^2 \\ s|_{t=0} = v|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

将方程分离变量得

$$\frac{mdv}{mg - c^2v^2} = dt,$$

两边积分得

$$\ln \left| \frac{cv + \sqrt{mg}}{cv - \sqrt{mg}} \right| = kt + C_1 \quad (\text{其中 } k = \frac{2c\sqrt{g}}{\sqrt{m}})$$

由 $v|_{t=0}=0$ 得 $C_1=0$, $\ln \left| \frac{cv + \sqrt{mg}}{cv - \sqrt{mg}} \right| = kt$, 即 $\frac{cv + \sqrt{mg}}{cv - \sqrt{mg}} = e^{kt}$.

因为 $mg > c^2v^2$, 故 $cv + \sqrt{mg} = (\sqrt{mg} - cv)e^{kt}$, 即

$$cv(1 + e^{kt}) = \sqrt{mg}(1 - e^{kt}),$$

或
$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\sqrt{mg}}{c} \cdot \frac{1 - e^{kt}}{1 + e^{kt}},$$

分离变量并积分得

$$s = -\frac{\sqrt{mg}}{ck} \ln \frac{1 + e^{-kt}}{1 + e^{kt}} + C_2.$$

由 $s|_{t=0}=0$ 得 $C_2=0$, 故所求函数关系为

$$s=-\frac{\sqrt{mg}}{ck}\ln\frac{1+e^{-kt}}{1+e^{kt}}, \text{ 即 } s=\frac{m}{c^2}\ln\text{ch}(c\sqrt{\frac{g}{m}}t) .$$

习题 12-7

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1) x, x^2 ;

解 因为 $\frac{x^2}{x} = x$ 不恒为常数, 所以 x, x^2 是线性无关的.

(2) $x, 2x$;

解 因为 $\frac{2x}{x} = 2$, 所以 $x, 2x$ 是线性相关的.

(3) $e^{2x}, 3e^{2x}$;

解 因为 $\frac{3e^{2x}}{e^{2x}} = 3$, 所以 $e^{2x}, 3e^{2x}$ 是线性相关的.

(4) e^{-x}, e^x ;

解 因为 $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ 不恒为常数, 所以 e^{-x}, e^x 是线性无关的.

(5) $\cos 2x, \sin 2x$;

解 因为 $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$ 不恒为常数, 所以 $\cos 2x, \sin 2x$ 是线性无关的.

(6) $e^{x^2}, 2xe^{x^2}$;

解 因为 $\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}} = 2x$ 不恒为常数, 所以 $e^{x^2}, 2xe^{x^2}$ 是线性无关的.

(7) $\sin 2x, \cos x \cdot \sin x$;

解 因为 $\frac{\sin 2x}{\cos x \sin x} = 2$, 所以 $\sin 2x, \cos x \cdot \sin x$ 是线性相关的.

(8) $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$;

解 因为 $\frac{e^x \sin 2x}{e^x \cos 2x} = \tan 2x$ 不恒为常数, 所以 $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$ 是

线性无关的.

(9) $\ln x, x \ln x$;

解 因为 $\frac{x \ln x}{\ln x} = x$ 不恒为常数, 所以 $\ln x, x \ln x$ 是线性无关的.

(10) $e^{ax}, e^{bx} (a \neq b)$.

解 因为 $\frac{e^{bx}}{e^{ax}} = e^{(b-a)x}$ 不恒为常数, 所以 e^{ax}, e^{bx} 是线性无关的.

2. 验证 $y_1=\cos ax$ 及 $y_2=\sin ax$ 都是方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的解, 并写出该方程的通解.

解 因为

$$y_1''+\omega^2 y_1=-\omega^2 \cos ax+\omega^2 \cos ax=0,$$

$$y_2''+\omega^2 y_2=-\omega^2 \sin ax+\omega^2 \sin ax=0,$$

并且 $\frac{y_1}{y_2}=\cot ax$ 不恒为常数, 所以 $y_1=\cos ax$ 与 $y_2=\sin ax$ 是方程的

线性无关解, 从而方程的通解为 $y=C_1 \cos ax+C_2 \sin ax$.

提示: $y_1'=-\omega \sin ax, y_1''=-\omega^2 \cos ax; y_2'=\omega \cos ax, y_2''=-\omega^2 \sin ax$.

3. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解, 并写出该方程的通解.

解 因为

$$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-4x \cdot 2xe^{x^2}+(4x^2-2) \cdot e^{x^2}=0,$$

$$y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}-4x \cdot (e^{x^2}+2x^2e^{x^2})+(4x^2-2) \cdot xe^{x^2}=0,$$

并且 $\frac{y_2}{y_1}=x$ 不恒为常数, 所以 $y_1=e^{x^2}$ 与 $y_2=2xe^{x^2}$ 是方程的线性无关解,

从而方程的通解为 $y=C_1e^{x^2}+C_22xe^{x^2}$.

提示: $y_1'=2xe^{x^2}, y_1''=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2};$

$$y_2'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}, y_2''=6xe^{x^2}+4x^3e^{x^2}.$$

4. 验证:

(1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ (C_1, C_2 是任意常数)是方程

$$y''-3y'+2y=e^{5x}$$

的通解;

解 令 $y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y^*=\frac{1}{12}e^{5x}$. 因为

$$y_1''-3y_1'+2y_1'=e^x-3e^x+2e^x=0,$$

$$y_2''-3y_2'+2y_2'=4e^{2x}-3(2e^{2x}+2e^{2x})=0,$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=e^x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的线性无关解, 从而 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$y^{*''}-3y^{*'}+2y^*=\frac{25}{12}e^{5x}-3\cdot\frac{5}{12}e^{5x}+2\cdot\frac{1}{12}e^{5x}=e^{5x},$$

所以 y^* 是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的特解.

因此 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解.

$$(2) y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x) \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数})$$

是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解;

解 令 $y_1=\cos 3x, y_2=\sin 3x, y^*=\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$. 因为

$$y_1''+9y_1=-9\cos 3x+9\cos 3x=0,$$

$$y_2''+9y_2=-9\sin 3x+9\sin 3x=0,$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=\tan 3x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $y''+9y=0$ 的线性无关解, 从而 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$y^{*''}+9y^*=\frac{1}{32}(-9\sin x-4x\cos x)+9\cdot\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)=x\cos x,$$

所以 y^* 是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的特解.

因此 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$ 是方程 $y''+9y=x\cos x$ 的通解.

(3) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$ (C_1 、 C_2 是任意常数) 是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解;

解 令 $y_1=x^2$, $y_2=x^2\ln x$. 因为

$$x^2y_1''-3xy_1'+4y_1=x^2\cdot 2-3x\cdot 2x+4\cdot x^2=0,$$

$$x^2y_2''-3xy_2'+4y_2=x^2\cdot (2\ln x+3)-3x\cdot (2x\ln x+x)+4\cdot x^2\ln x=0,$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=\ln x$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的线性

无关解, 从而 $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$ 是方程的通解.

$$(4) y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x \quad (C_1、C_2 \text{ 是任意常数}) \text{ 是方程}$$

$$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$$

的通解;

解 令 $y_1=x^5$, $y_2=\frac{1}{x}$, $y^*=-\frac{x^2}{9}\ln x$. 因为

$$x^2y_1''-3xy_1'-5y_1=x^2\cdot 20x^3-3x\cdot 5x^4-5\cdot x^5=0,$$

$$x^2y_2''-3xy_2'-5y_2=x^2\cdot \frac{2}{x^3}-3x\cdot (-\frac{1}{x^2})-5\cdot \frac{1}{x}=0,$$

且 $\frac{y_1}{y_2}=x^6$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的

线性无关解, 从而 $Y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$x^2y^{*''}-3xy^{*'}-5y^*$$

$$=x^2\cdot (-\frac{2}{9}\ln x-\frac{1}{3})-3x\cdot (-\frac{2x}{9}\ln x-\frac{x}{9})-5\cdot (-\frac{x^2}{9}\ln x)=x^2\ln x,$$

所以 y^* 是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的特解.

因此 $y=C_1x^5+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$ 是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解.

$$(5) y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2} \quad (C_1、C_2 \text{ 是任意常数}) \text{ 是方程}$$

$$xy''+2y'-xy=e^x$$

的通解;

解 令 $y_1 = \frac{1}{x}e^x$, $y_2 = \frac{1}{x}e^{-x}$, $y^* = \frac{e^x}{2}$. 因为

$$xy_1'' + 2y_1' - xy_1 = x \cdot \left(\frac{2e^x}{x^3} - \frac{2e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{e^x}{x^2} + \frac{e^x}{x} \right) - x \cdot \frac{e^x}{x} = 0,$$

$$xy_2'' + 2y_2' - xy_2 = x \cdot \left(\frac{2e^{-x}}{x^3} + \frac{2e^{-x}}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} \right) - x \cdot \frac{e^{-x}}{x} = 0,$$

且 $\frac{y_1}{y_2} = e^{2x}$ 不恒为常数, 所以 y_1 与 y_2 是齐次方程 $xy'' + 2y' - xy = 0$ 的

线性无关解, 从而 $Y = \frac{1}{x}(C_1e^x + C_2e^{-x})$ 是齐次方程的通解.

又因为

$$xy^{*''} + 2y^{*'} - xy^* = x \cdot \frac{e^x}{2} + 2 \cdot \frac{e^x}{2} - x \cdot \frac{e^x}{2} = e^x,$$

所以 y^* 是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的特解.

因此 $y = \frac{1}{x}(C_1e^x + C_2e^{-x}) + \frac{e^x}{2}$ 是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解.

(6) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - x^2$ (C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 是任意常数) 是方程 $y^{(4)} - y = x^2$ 的通解.

解 令 $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$, $y^* = -x^2$. 因为

$$y_1^{(4)} - y_1 = e^x - e^x = 0,$$

$$y_2^{(4)} - y_2 = e^{-x} - e^{-x} = 0,$$

$$y_3^{(4)} - y_3 = \cos x - \cos x = 0,$$

$$y_4^{(4)} - y_4 = \sin x - \sin x = 0,$$

并且

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

所以 $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$ 是方程 $y^{(4)} - y = 0$ 的线性无关解,

从而 $Y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$ 是方程的通解.

又因为

$$y^{*(4)} - y^* = 0 - (-x^2) = x^2,$$

所以 $y^* = -x^2$ 是方程 $y^{(4)} - y = x^2$ 的特解.

因此 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2$ 是方程 $y^{(4)} - y = x^2$ 的通解.

提示:

$$\text{令 } k_1 e^x + k_2 e^{-x} + k_3 \cos x + k_4 \sin x = 0,$$

$$\text{则 } k_1 e^x - k_2 e^{-x} - k_3 \sin x + k_4 \cos x = 0,$$

$$k_1 e^x + k_2 e^{-x} - k_3 \cos x - k_4 \sin x = 0,$$

$$k_1 e^x + k_2 e^{-x} + k_3 \sin x - k_4 \cos x = 0.$$

上术等式构成的齐次线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

所以方程组只有零解, 即 $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = \cos x, y_4 = \sin x$ 线性无关.

习题 12-8

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''+y'-2y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+r-2=0, \text{ 即 } (r+2)(r-1)=0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=-2$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

(2) $y''-4y'=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r=0, \text{ 即 } r(r-4)=0,$$

其根为 $r_1=0, r_2=4$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}.$$

(3) $y''+y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r_1=i, r_2=-i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(4) $y''+6y'+13y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+6r+13=0,$$

其根为 $r_1=-3-2i, r_2=-3+2i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(5) $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$4r^2-20r+25=0, \text{ 即 } (2r-5)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=\frac{5}{2}$, 故微分方程的通解为

$$x=C_1e^{\frac{5}{2}t}+C_2xe^{\frac{5}{2}t}, \text{ 即 } x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}.$$

(6) $y''-4y'+5y=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+5=0,$$

其根为 $r_1=2-i, r_2=2+i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

$$(7)y^{(4)}-y=0;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^4-1=0, \text{ 即 } (r-1)(r+1)(r^2+1)=0$$

其根为 $r_1=1, r_2=-1, r_3=i, r_4=-i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

$$(8)y^{(4)}+2y''+y=0;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^4+r^2+1=0, \text{ 即 } (r^2+1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=i, r_3=r_4=-i$, 故微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

$$(9)y^{(4)}-2y'''+y''=0;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^4-2r^3+r^2=0, \text{ 即 } r^2(r-1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=0, r_3=r_4=1$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x.$$

$$(10)y^{(4)}+5y''-36=0.$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^4+5r^2-36=0,$$

其根为 $r_1=2, r_2=-2, r_3=3i, r_4=-3i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$$

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

$$(1)y''-4y'+3y=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+3=0, \text{ 即 } (r-1)(r-3)=0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=3$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

由 $y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ C_1 + 3C_2 = 10 \end{cases},$$

解之得 $C_1=4, C_2=2$. 因此所求特解为

$$y=4e^x+2e^{3x}.$$

(2) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$;

解 微分方程的特征方程为

$$4r^2+4r+1=0, \text{ 即 } (2r+1)^2=0,$$

其根为 $r_1=r_2=-\frac{1}{2}$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x).$$

由 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$, 得

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ -\frac{1}{2}C_1 + C_2 = 0 \end{cases},$$

解之得 $C_1=2, C_2=1$. 因此所求特解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(2+x).$$

(3) $y''-3y'-4y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-3r-4=0, \text{ 即 } (r-4)(r+1)=0,$$

其根为 $r_1=-1, r_2=4$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}.$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + 4C_2 = -5 \end{cases},$$

解之得 $C_1=1, C_2=-1$. 因此所求特解为

$$y=e^{-x}-e^{4x}.$$

(4) $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+4r+29=0,$$

其根为 $r_{1,2}=-2\pm 5i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x).$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C_1=0$, $y=C_2e^{-2x}\sin 5x$.

由 $y'|_{x=0}=15$, 得 $C_2=3$.

因此所求特解为 $y=3e^{-2x}\sin 5x$.

$$(5)y''+25y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=5;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+25=0,$$

其根为 $r_{1,2}=\pm 5i$, 故微分方程的通解为

$$y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x.$$

由 $y|_{x=0}=2$, 得 $C_1=2$, $y=2\cos 5x+C_2\sin 5x$.

由 $y'|_{x=0}=5$, 得 $C_2=1$.

因此所求特解为 $y=2\cos 5x+\sin 5x$.

$$(6)y''-4y'+13y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=3.$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+13=0,$$

其根为 $r_{1,2}=2\pm 3i$, 故微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C_1=0$, $y=C_2e^{2x}\sin 3x$.

由 $y'|_{x=0}=3$, 得 $C_2=1$.

因此所求特解为 $y=e^{2x}\sin 3x$.

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动, 开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0 , 在运动过程中, 它受到一个力的作用, 这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1>0$)而方向与初速一至. 又介质的阻力与速度成正比(比例系数 $k_2>0$). 求反映这质点的运动规律的函数.

解 设数轴为 x 轴, v_0 方向为正轴方向. 由题意得微分方程

$$x''=k_1x-k_2x', \text{ 即 } x''+k_2x'-k_1x=0,$$

其初始条件为 $x|_{t=0}=0, x'|_{t=0}=v_0$.

微分方程的特征方程为

$$r^2 + k_2 r - k_1 = 0,$$

其根为 $r_1 = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}$, $r_2 = \frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}$, 故微分方程的通解为

$$x = C_1 e^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t}.$$

由 $x|_{t=0}=0$, $x'|_{t=0}=v_0$, 得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = v_0 \end{cases}$, 解之得

$$C_1 = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}, \quad C_2 = -\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}.$$

因此质点的运动规律为

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} \left(e^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} - e^{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} \right).$$

4. 在如图所示的电路中先将开关 K 拨向 A , 达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B , 求电压 $u_c(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E=20V$, $C=0.5 \times 10^{-6}F$ (法), $L=0.1H$ (亨), $R=2000\Omega$.

解 由回路电压定律得

$$E = L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} - Ri = 0.$$

由于 $q = Cu_c$, 故 $i = \frac{dq}{dt} = Cu'_c$, $\frac{di}{dt} = Cu''_c$, 所以

$$-LCu''_c - u_c - RCu'_c = 0, \text{ 即 } u''_c + \frac{R}{L}u'_c + \frac{1}{LC}u_c = 0.$$

已知 $\frac{R}{L} = \frac{2000}{0.1} = 2 \times 10^4$, $\frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1 \times 0.5 \times 10^{-6}} = \frac{1}{5} \times 10^8$, 故

$$u''_c + 2 \times 10^4 u'_c + \frac{1}{5} \times 10^8 u_c = 0.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2 + 2 \times 10^4 r + \frac{1}{5} \times 10^8 = 0,$$

其根为 $r_1 = -1.9 \times 10^4$, $r_2 = -10^3$, 故微分方程的通解为

$$u_c = C_1 e^{-1.9 \times 10^4 t} + C_2 e^{-10^3 t}.$$

由初始条件 $t=0$ 时, $u_c=20$, $u_c'=0$ 可得 $C_1 = -\frac{10}{9}$, $C_2 = \frac{190}{9}$.

因此所求电压为

$$u_c(t) = \frac{10}{9}(19e^{-10^3 t} - e^{-1.9 \times 10^4 t}) \text{ (V)}.$$

所求电流为

$$i(t) = \frac{19}{18} \times 10^{-2}(e^{-1.9 \times 10^4 t} - e^{-10^3 t}) \text{ (A)}.$$

5. 设圆柱形浮筒, 直径为 0.5m, 铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2s, 求浮筒的质量.

解 设 ρ 为水的密度, S 为浮筒的横截面积, D 为浮筒的直径, 且设压下的位移为 x (如图所示), 则

$$f = -\rho g S \cdot x.$$

又 $f = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$, 因而

$$-\rho g S \cdot x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \text{ 即 } m \frac{d^2 x}{dt^2} + \rho g S x = 0.$$

微分方程的特征方程为 $mr^2 + \rho g S = 0$, 其根为

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} i,$$

故微分方程的通解为

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} t,$$

即 $x = A \sin(\sqrt{\frac{\rho g S}{m}} t + \varphi).$

由此得浮筒的振动的频率为 $\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}.$

因为周期为 $T=2$, 故 $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}=2$, $m=\frac{\rho g S}{\pi^2}$.

由 $\rho=1000\text{kg/m}^3$, $g=9.8\text{m/s}^2$, $D=0.5\text{m}$, 得

$$m=\frac{\rho g S}{\pi^2}=\frac{1000\times 9.8\times 0.5^2}{4\pi}=195\text{kg}.$$

习题 12-9

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $2y'' + y' - y = 2e^x$;

解 微分方程的特征方程为

$$2r^2 + r - 1 = 0,$$

其根为 $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = -1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}.$$

因为 $f(x) = 2e^x$, $\lambda = 1$ 不是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^* = Ae^x,$$

代入原方程得

$$2Ae^x + Ae^x - Ae^x = 2e^x,$$

解得 $A = 1$, 从而 $y^* = e^x$.

因此, 原方程的通解为

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} + e^x.$$

(2) $y'' + a^2 y = e^x$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2 + a^2 = 0,$$

其根为 $r = \pm ai$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

因为 $f(x) = e^x$, $\lambda = 1$ 不是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^* = Ae^x,$$

代入原方程得

$$Ae^x + a^2 Ae^x = e^x,$$

解得 $A = \frac{1}{1+a^2}$, 从而 $y^* = \frac{e^x}{1+a^2}$.

因此, 原方程的通解为

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{1+a^2}.$$

(3) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$;

解 微分方程的特征方程为

$$2r^2 + 5r = 0,$$

其根为 $r_1=0$, $r_2=-\frac{5}{2}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

因为 $f(x)=5x^2-2x-1$, $\lambda=0$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=x(Ax^2+Bx+C),$$

代入原方程并整理得

$$15Ax^2+(12A+10B)x+(4B+5C)=5x^2-2x-1,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{3}{5}$, $C=\frac{7}{25}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

$$(4)y''+3y'+2y=3xe^{-x};$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+3r+2=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=-2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

因为 $f(x)=3xe^{-x}$, $\lambda=-1$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=x(Ax+B)e^{-x},$$

代入原方程并整理得

$$2Ax+(2A+B)=3x,$$

比较系数得 $A=\frac{3}{2}$, $B=-3$, 从而 $y^*=e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x).$$

$$(5)y''-2y'+5y=e^x\sin 2x;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0,$$

其根为 $r_{1,2}=1\pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

因为 $f(x)=e^x\sin 2x$, $\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的根,
故原方程的特解设为

$$y^*=xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

代入原方程得

$$e^x[4B\cos 2x-4A\sin 2x]=e^x\sin 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{4}$, $B=0$, 从而 $y^*=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

$$(6)y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x};$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-6r+9=0,$$

其根为 $r_1=r_2=3$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=e^{3x}(C_1+C_2x).$$

因为 $f(x)=(x+1)e^{3x}$, $\lambda=3$ 是特征方程的重根,

故原方程的特解设为

$$y^*=x^2e^{3x}(Ax+B),$$

代入原方程得

$$e^{3x}(6Ax+2B)=e^{3x}(x+1),$$

比较系数得 $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{2}$, 从而 $y^*=e^{3x}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)$.

因此, 原方程的通解为

$$y=e^{3x}(C_1+C_2x)+e^{3x}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2).$$

$$(7)y''+5y'+4y=3-2x;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+5r+4=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=-4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}.$$

因为 $f(x)=3-2x=(3-2x)e^{0x}$, $\lambda=0$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ax+B,$$

代入原方程得

$$4Ax+(5A+4B)=-2x+3,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{11}{8}$, 从而 $y^*=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}.$$

$$(8)y''+4y=x\cos x;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+4=0,$$

其根为 $r=\pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

因为 $f(x)=x\cos x=e^{0x}(x\cdot\cos x+0\cdot\sin x)$, $\lambda+i\omega=i$ 不是特征方程的根, 故原方程的特解设为

$$y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x,$$

代入原方程得

$$(3Ax+3B+2C)\cos x+(3Cx-2A+3D)\sin x=x\cos x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{3}$, $B=0$, $C=0$, $D=\frac{2}{9}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x.$$

$$(9)y''+y=e^x+\cos x;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中 $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=\cos x$, 而

方程 $y''+y=e^x$ 具有 Ae^x 形式的特解;

方程 $y''+y=\cos x$ 具有 $x(B\cos x+C\sin x)$ 形式的特解,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^x+x(B\cos x+C\sin x),$$

代入原方程得

$$2Ae^x+2C\cos x-2B\sin x=e^x+\cos x,$$

比较系数得 $A=\frac{1}{2}$, $B=0$, $C=\frac{1}{2}$, 从而 $y^*=\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x.$$

$$(10)y''-y=\sin^2 x.$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为 $r_1=-1$, $r_2=1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

因为 $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, 而

方程 $y''-y=\frac{1}{2}$ 的特解为常数 A ;

方程 $y''-y=-\frac{1}{2}\cos 2x$ 具有 $B\cos 2x+C\sin 2x$ 形式的特解,

故原方程的特解设为

$$y^*=A+B\cos 2x+C\sin 2x,$$

代入原方程得

$$-A-5B\cos 2x-5C\sin 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,$$

比较系数得 $A=-\frac{1}{2}, B=\frac{1}{10}, C=0$, 从而 $y^*=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{1}{10}\cos 2x-\frac{1}{2}.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初始条件的特解:

(1) $y''+y+\sin x=0, y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2+1=0,$$

其根为 $r=\pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为 $f(x)=-\sin 2x=e^{0x}(0\cdot\cos 2x-\sin 2x)$, $\lambda+i\omega=i$ 是特征方程的根, 故原方程的特解设为

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x,$$

代入原方程得

$$-3A\cos 2x-3B\sin 2x=-\sin 2x,$$

解得 $A=0, B=\frac{1}{3}$, 从而 $y^*=\frac{1}{3}\sin 2x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

由 $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=1$ 得 $C_1=-1, C_2=-\frac{1}{3}$,

故满足初始条件的特解为

$$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

(2) $y''-3y'+2y=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$;

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-3r+2=0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

容易看出 $y^*=\frac{5}{2}$ 为非齐次方程的一个特解,

故原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 得

$$\begin{cases} C_1+C_2+\frac{5}{2}=1, \\ C_1+2C_2=2 \end{cases},$$

解之得 $C_1=-5, C_2=\frac{7}{2}$. 因此满足初始条件的特解为

$$y=-5e^x+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}.$$

$$(3)y''-10y'+9y=e^{2x}, y|_{x=0}=\frac{6}{7}, y'|_{x=0}=\frac{33}{7};$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-10r+9=0,$$

其根为 $r_1=1, r_2=9$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{9x}.$$

因为 $f(x)=e^{2x}, \lambda=2$ 不是特征方程的根,

故原方程的特解设为

$$y^*=Ae^{2x},$$

代入原方程得

$$(4A-20A+9A)e^{2x}=e^{2x},$$

解得 $A=-\frac{1}{7}$, 从而 $y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

由 $y|_{x=0}=\frac{6}{7}, y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

因此满足初始条件的特解为

$$y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

$$(4)y''-y=4xe^x, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1;$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-1=0,$$

其根为 $r_1=-1, r_2=1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

因为 $f(x)=4xe^x, \lambda=1$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=xe^x(Ax+B),$$

代入原方程得

$$(4Ax+2A+2B)e^x=4xe^x,$$

比较系数得 $A=1, B=-1$, 从而 $y^*=xe^x(x-1)$.

因此, 原方程的通解为

$$y^*=C_1e^{-x}+C_2e^x+xe^x(x-1).$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-C_2-1=1 \end{cases},$$

解之得 $C_1=1, C_2=-1$. 因此满足初始条件的特解为

$$y=e^{-x}-e^x+xe^x(x-1).$$

$$(5)y''-4y'=5, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0.$$

解 微分方程的特征方程为

$$r^2-4r=0,$$

其根为 $r_1=0, r_2=4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{4x}.$$

因为 $f(x)=5=5e^{0 \cdot x}, \lambda=0$ 是特征方程的单根,
故原方程的特解设为

$$y^*=Ax,$$

代入原方程得

$$-4A=5, A=-\frac{5}{4},$$

从而 $y^*=-\frac{5}{4}x$.

因此, 原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{4x}-\frac{5}{4}x.$$

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=\frac{11}{16}, C_2=\frac{5}{16}$.

因此满足初始条件的特解为

$$y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16}e^{4x} - \frac{5}{4}x.$$

3. 大炮以仰角 α 、初速度 v_0 发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线.

解 取炮口为原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 铅直向上为 y 轴, 弹道运动的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = -g, \\ \frac{dx}{dt} = 0 \end{cases},$$

且满足初始条件

$$\begin{cases} y|_{t=0} = 0, y'|_{t=0} = v_0 \sin \alpha \\ x|_{t=0} = 0, x'|_{t=0} = v_0 \cos \alpha \end{cases}.$$

易得满足方程和初始条件的解(弹道曲线)为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

4. 在 R 、 L 、 C 含源串联电路中, 电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E=20V$, $C=0.2\mu F$ (微法), $L=0.1H$ (亨), $R=1000\Omega$, 试求合上开关 K 后电流 $i(t)$ 及电压 $u_c(t)$.

解 (1)列方程. 由回路定律可知

$$L \cdot C \cdot u_c'' + R \cdot C \cdot u_c' + u_c = E,$$

即
$$u_c'' + \frac{R}{L} u_c' + \frac{1}{LC} u_c = \frac{E}{LC},$$

且当 $t=0$ 时, $u_c=0$, $u_c'=0$.

已知 $R=1000\Omega$, $L=0.1H$, $C=0.2\mu F$, 故

$$\frac{R}{L} = \frac{1000}{0.1} = 10^4,$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1 \times 0.2 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^7,$$

$$\frac{E}{LC} = 5 \times 10^7 E = 5 \times 10^7 \times 20 = 10^9.$$

因此微分方程为 $u_c'' + 10^4 u_c' + 5 \times 10^7 u_c = 10^9$.

(2)解方程. 微分方程的特征方程为 $r^2 + 10^4 r + 5 \cdot 10^7 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = -5 \times 10^3 \pm 5 \times 10^3 i$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$u_c = e^{-5 \times 10^3 t} [C_1 \cos(5 \times 10^3 t) + C_2 \sin(5 \times 10^3 t)].$$

由观察法易知 $y^*=20$ 为非齐次方程的一个特解.

因此非齐次方程的通解为

$$u_c = e^{-5 \times 10^3 t} [C_1 \cos(5 \times 10^3 t) + C_2 \sin(5 \times 10^3 t)] + 20.$$

由 $t=0$ 时, $u_c=0$, $u'_c=0$, 得 $C_1=-20$, $C_2=-20$. 因此

$$u_c = 20 - 20e^{-5 \times 10^3 t} [\cos(5 \times 10^3 t) + \sin(5 \times 10^3 t)] \text{ (V)},$$

$$i(t) = Cu'_c = 0.2 \times 10^{-6} u'_c = 4 \times 10^{-2} e^{-5 \times 10^3 t} \sin(5 \times 10^3 t) \text{ (A)}.$$

5. 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8m 另一端离开钉子 12m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需的时间:

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;

解 设在时刻 t 时, 链条上较长的一段垂下 x m, 且设链条的密度为 ρ , 则向下拉链条下滑的作用力

$$F = x\rho g - (20-x)\rho g = 2\rho g(x-10).$$

由牛顿第二定律, 有

$$20\rho x'' = 2\rho g(x-10), \text{ 即 } x'' - \frac{g}{10}x = -g.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2 - \frac{g}{10} = 0,$$

其根为 $r_1 = -\sqrt{\frac{g}{10}}$, $r_2 = \sqrt{\frac{g}{10}}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$x = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}.$$

由观察法易知 $x^*=10$ 为非齐次方程的一个特解, 故通解为

$$x = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10.$$

由 $x(0)=12$ 及 $x'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=1$. 因此特解为

$$x = e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10.$$

当 $x=20$, 即链条完全滑下来时有 $e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} = 10$,

解之得所需时间

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln(5+2\sqrt{6}) \text{ s}.$$

(2)若摩擦力为 1m 长的链条的重量.

解 此时向下拉链条的作用力变为

$$F=x\rho g-(20-x)\rho g-1\rho g=2\rho gx-21\rho g$$

由牛顿第二定律, 有

$$20\rho x''=2\rho gx-21\rho g, \text{ 即 } x''-\frac{g}{10}x=-1.05g.$$

微分方程的通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10.5.$$

由 $x(0)=12$ 及 $x'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\frac{3}{4}$. 因此特解为

$$x=\frac{3}{4}(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t})+10.5.$$

当 $x=20$, 即链条完全滑下来时有 $\frac{3}{4}(e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t})=9.5$,

解之得所需时间

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln\left(\frac{19}{3} + \frac{4\sqrt{22}}{3}\right) \text{ s}.$$

6. 设函数 $\varphi(x)$ 连续, 且满足

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x \int_0^x \varphi(t)dt,$$

求 $\varphi(x)$.

解 等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t)dt,$$

再求导得微分方程

$$\varphi''(x) = e^x - \varphi(x), \text{ 即 } \varphi''(x) + \varphi(x) = e^x.$$

微分方程的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0,$$

其根为 $r_{1,2} = \pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$\varphi = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

易知 $\varphi^* = \frac{1}{2}e^x$ 是非齐次方程的一个特解,

故非齐次方程的通解为

$$\varphi = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x.$$

由所给等式知 $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=1$, 由此得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

因此

$$\varphi = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x).$$

习题 12-11

1. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

(1) $y' - xy - x = 1$;

解 设方程的解为 $y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - a_0 x - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - x = 1,$$

即 $(a_1 - 1) + (2a_2 - a_0 - 1)x + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)a_{n+2} - a_n]x^{n+1} = 0.$

可见 $a_1 - 1 = 0, 2a_2 - a_0 - 1 = 0, (n+2)a_{n+2} - a_n = 0 (n=1, 2, \dots),$

于是 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1+a_0}{2}, a_3 = \frac{1}{3!!}, a_4 = \frac{1+a_0}{4!!}, \dots,$

$$a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)!!}, a_{2k} = \frac{1+a_0}{(2k)!!}, \dots$$

所以
$$\begin{aligned} y &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2k-1)!!} x^{2k-1} + \frac{1+a_0}{(2k)!!} x^{2k} \right] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!!} x^{2k-1} + (1+a_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k \\ &= -1 + (1+a_0)e^{\frac{x^2}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!!} x^{2k-1}, \end{aligned}$$

即原方程的通解为 $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!!} x^{2k-1}.$

(2) $y'' + xy' + y = 0$;

解 设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即
$$a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n]x^n = 0,$$

于是
$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0, a_3 = -\frac{1}{3}a_1, \dots, a_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}a_1, a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!!}a_0, \dots$$

所以
$$y = a_0 + a_1x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k a_0}{(2k)!!} x^{2k} + \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!!} x^{2k+1} \right]$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!!} \left(-\frac{x^2}{2} \right)^k + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k-1}$$

$$= a_0 e^{-\frac{x^2}{2}} + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k-1},$$

即原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k-1}.$$

(3) $xy'' - (x+m)y' + my = 0$ (m 为自然数);

解 设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (x+m) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即
$$m(a_0 - a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n-m)a_{n+1} - (n-m)a_n]x^n = 0.$$

可见 $(a_0 - a_1)m = 0, (n-m)[(n+1)a_{n+1} - a_n] = 0 \ (n \neq m),$

于是
$$a_0 = a_1, a_n = \frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)} \ (n \geq m+2), a_n = \frac{1}{n!} a_1 \ (n \leq m).$$

所以
$$y = a_0 + \sum_{n=1}^m \frac{a_0}{n!} x^n + a_{m+1} x^{m+1} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)} x^n$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} + a_{m+1} x^{m+1} + (m+1)! a_{m+1} \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= a_0 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} + (m+1)! a_{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= a_0 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} + (m+1)! a_{m+1} (e^x - \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!}) \\
&= (m+1)! a_{m+1} e^x + [a_0 - (m+1)! a_{m+1}] \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

即原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!} \quad (\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

$$(4) (1-x)y' = x^2 - y;$$

解 设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$\text{即} \quad a_1 + a_0 + 2a_2 x + (3a_3 - a_2 - 1)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - na_n + a_n] x^n = 0.$$

$$\text{可见} \quad a_1 + a_0 = 0, \quad 2a_2 = 0, \quad 3a_3 - a_2 - 1 = 0, \quad (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n = 0 (n \geq 3),$$

$$\text{于是} \quad a_1 = -a_0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1} = \frac{2}{n(n-1)} (n \geq 4).$$

因此原方程的通解为

$$y = C(1-x) + \frac{1}{3}x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n \quad (C = a_0 \text{ 为任意常数}).$$

$$(5) (x+1)y' = x^2 - 2x + y.$$

解 设方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 代入方程得

$$(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-2x+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

$$\text{即} \quad -a_0+a_1+2(1+a_2)x+(a_2+3a_3-1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}[(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}]x^n=0.$$

$$\text{于是} \quad a_1=a_0, a_2=-1, a_3=\frac{2}{3}, a_n=-\frac{n-2}{n}a_{n-1}=(-1)^{n-3}\frac{4}{n(n-1)}(n\geq 4).$$

因此原方程的通解为

$$y=C(1+x)-x^2+\frac{2}{3}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-3}\frac{4}{n(n-1)}x^n \quad (C=a_0 \text{ 为任意常数}).$$

2. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的解:

$$(1)y'=y^2+x^3, \quad y|_{x=0}=\frac{1}{2};$$

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $y=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n)^2+x^3,$$

$$\text{即} \quad a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+(a_2^2+2a_1a_3)x^4+\cdots.$$

比较两边同次幂的系数得

$$a_1=\frac{1}{4}, \quad 2a_2=a_1, \quad 3a_3=a_2+a_1^2, \quad 4a_4=a_3+2a_1a_2+1, \cdots,$$

$$\text{于是} \quad a_1=\frac{1}{4}, \quad a_2=\frac{1}{8}, \quad a_3=\frac{1}{16}, \quad a_4=\frac{9}{32}, \cdots.$$

因此所求特解为

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots.$$

$$(2)(1-x)y'+y=1+x, \quad y|_{x=0}=0;$$

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 代入方程得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

即
$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数得

$$a_1=1, \quad a_2=\frac{1}{2}, \quad a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n(n-1)} \quad (n\geq 3).$$

因此所求特解为

$$y=x+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n.$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ 的和函数为 $(1-x)\ln(1-x)+x$, 所以特解还可以写成

$$y=2x+(1-x)\ln(1-x)+x.$$

(3) $\frac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0, \quad x|_{t=0}=a, \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0}=0.$

解 根据初始条件, 可设方程的解为 $x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n.$

将 $x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$ 和 $\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ 代

入方程得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}+(a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}=0.$$

将级数展开、整理合并同次项, 并比较系数得

$$a_0=a, \quad a_1=0, \quad a_2=-\frac{a}{2!}, \quad a_3=0, \quad a_4=\frac{2a}{4!},$$

$$a_5=0, \quad a_6=-\frac{9a}{6!}, \quad a_7=0, \quad a_8=\frac{55a}{8!}, \dots$$

故所求特解为

$$x=a(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8+\dots).$$

总习题十二

1. 填空:

(1) $xy''' + 2x^2y'^2 + x^3y = x^4 + 1$ 是_____阶微分方程;

解 是 3 阶微分方程.

(2) 若 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 是全微分方程, 则函数 M 、 N 应满足_____;

解 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

(3) 与积分方程 $y = \int_{x_0}^x f(x, y)dx$ 等价的微分方程初值问题是_____;

解 方程两边对 x 求导得 $y' = f(x, y)$. 显然当 $x = x_0$ 时, $y = 0$.

因此与积分方程等价的微分方程初值问题是

$$y' = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = 0.$$

(4) 已知 $y=1$ 、 $y=x$ 、 $y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为_____.

解 容易证明非齐次线性微分方程的任意两个解的差是对应齐次线性微分方程的解. 因此 $y_1 = x - 1$ 和 $y_2 = x^2 - 1$ 都是对应齐次线性微分方程的解. 显然 y_1 与 y_2 是线性无关. 所以非齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1(x-1) + C_2(x^2-1) + 1.$$

2. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程:

(1) $(x+C)^2 + y^2 = 1$ (其中 C 为任意常数);

解 将等式变形

$$x + C = \pm \sqrt{1 - y^2},$$

两边对 x 求导得

$$1 = \pm \frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}},$$

从而 $1 - y^2 = y^2 y'^2$, 即所求微分方程为 $y^2(1 + y'^2) = 1$.

(2) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ (其中 C_1 、 C_2 为任意常数).

解 两边对 x 求导得

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} = y + C_2 e^{2x},$$

即 $y' = y + C_2 e^{2x}, \dots (1)$

再求导得

$$y'' = y' + 2C_2 e^{2x}. \dots (2)$$

(2)-(1)×2 得

$$y'' - 2y' = y' - 2y,$$

即所求微分方程为 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy' + y = 2\sqrt{xy}$;

解 将方程变形为

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2x}\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ 即 } (\sqrt{y})' + \frac{1}{2x}\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

其通解为

$$\sqrt{y} = e^{-\int \frac{1}{2x} dx} \left(\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\int \frac{1}{2x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{\sqrt{x}}(x + C),$$

即原方程的通解为 $y = \frac{(x+C)^2}{x}$.

(2) $xy' \ln x + y = ax(\ln x + 1)$;

解 将方程变形为

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = a \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right),$$

其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} \left[\int a \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right) e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{\ln x} (ax \ln x + C),$$

即原方程的通解为 $y = ax + \frac{C}{\ln x}$.

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(\ln y - x)}$;

解 将方程变形为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y} x = \frac{2 \ln y}{y},$$

其通解为

$$x = e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{2 \ln y}{y} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) = \frac{1}{y^2} (y^2 \ln y - \frac{1}{2} y^2 + C),$$

即原方程的通解为 $x = \ln y - \frac{1}{2} + \frac{C}{y^2}$.

$$(4) \frac{dy}{dx} + xy - x^3 y^3 = 0;$$

解 将方程变形为

$$\frac{1}{y^3} \frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3, \text{ 即 } \frac{d(y^{-2})}{dx} - 2xy^{-2} = -2x^3,$$

其通解为

$$y^{-2} = e^{\int 2xdx} \left[\int (-2x^3) e^{-\int 2xdx} dx + C \right] = e^{x^2} (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C),$$

即原方程的通解为 $y^{-2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1$.

$$(5) xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0;$$

解 因为

$$\begin{aligned} xdx + ydy &= d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right), \\ \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\arctan \frac{x}{y}\right), \end{aligned}$$

所以原方程可写成

$$d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \arctan \frac{x}{y}\right) = 0,$$

从而原方程的通解为

$$x^2 + y^2 + 2\arctan \frac{x}{y} = C.$$

$$(6) yy'' - y'^2 - 1 = 0;$$

解 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0,$$

或
$$\frac{d(p^2)}{dy} - \frac{2}{y} p^2 = \frac{2}{y},$$

其通解为

$$p^2 = e^{\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{2}{y} e^{-\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) = y^2 (-y^{-2} + C) = Cy^2 - 1.$$

于是 $y' = \pm \sqrt{Cy^2 - 1}$, 即 $\frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \pm dx \ (C = C_1^2),$

积分得

$$\ln(C_1 y + \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}) = \pm x + C_2,$$

化简得原方程的通解 $y = \frac{1}{C_1} \operatorname{ch}(\pm x + C_2).$

$$(7) y'' + 2y' + 5y = \sin 2x;$$

解 齐次方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$,
其根为 $r_{1,2} = -1 \pm 2i$.

因为 $f(x) = \sin 2x$, $\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征方程的根,
所以非齐次方程的特解应设为

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x,$$

代入原方程得

$$(A + 2B) \cos 2x + (B - 4A) \sin 2x = \sin 2x,$$

比较系数得 $A = -\frac{4}{17}$, $B = \frac{1}{17}$, $y^* = -\frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x.$

因此原方程的通解为

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x.$$

$$(8) y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4);$$

解 齐次方程 $y''' + y'' - 2y' = 0$ 的特征方程为 $r^3 + r^2 - 2r = 0$,
其根为 $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2$.

齐次方程 $y''' + y'' - 2y' = 0$ 的通解为 $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$.

原方程中 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 其中 $f_1(x) = x e^x, f_2(x) = 4x$.

对于方程 $y''' + y'' - 2y' = x e^x$, 因为 $\lambda = 1$ 是特征方程的根, 故其特解可设为

$$y_1^* = x(Ax + B)e^x,$$

代入 $y''' + y'' - 2y' = x e^x$ 得

$$(6Ax + 8A + 3B)e^x = x e^x,$$

比较系数得 $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{4}{9}$, 故 $y_1^* = x(\frac{1}{6}x - \frac{4}{9})e^x$.

对于方程 $y''' + y'' - 2y' = 4x$, 因为 $\lambda = 0$ 是特征方程的根, 故其特解可设为

$$y_2^* = x(Cx + D),$$

代入 $y''' + y'' - 2y' = 4x$ 得

$$-4Cx + 2C - 2D = 4x,$$

比较系数得 $C = -1, D = -1$, 故 $y_2^* = x(-x - 1)$.

因此原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} + (\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x)e^x - x^2 - x.$$

$$(9) (y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0;$$

解 将原方程变形为

$$x \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y} x^2 = -y^3, \text{ 或 } \frac{d(x^2)}{dy} - \frac{6}{y} x^2 = -2y^3,$$

其通解为

$$x^2 = e^{\int \frac{6}{y} dy} [\int (-2y^3) e^{-\int \frac{6}{y} dy} dy + C] = y^6 (y^{-2} + C),$$

即原方程的通解为 $x^2 = y^4 + Cy^6$.

$$(10) y' + x = \sqrt{x^2 + y}.$$

解 令 $u = \sqrt{x^2 + y}$, 则 $y = u^2 - x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2u \frac{du}{dx} - 2x$, 故原方程化为

$$2u \frac{du}{dx} - x = u, \text{ 即 } \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{u} \right) + \frac{1}{2}.$$

这是齐次方程, 因此令 $\frac{u}{x} = z$, 则 $u = xz$, $\frac{du}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$, 则上述齐次方程化为

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2}, \text{ 即 } x \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \left(2z - \frac{1}{z} - 1 \right),$$

分离变量得

$$\frac{z dz}{2z^2 - z - 1} = -\frac{1}{2} \frac{dx}{x},$$

积分得 $\frac{1}{6} \ln(2z^3 - 3z^2 + 1) = -\frac{1}{2} \ln x + C_1$,

即 $2z^3 - 3z^2 + 1 = Cx^{-3} (C = e^{6C_1})$.

将 $z = \frac{u}{x}$ 代入上式得

$$2u^3 - 3xu^2 + x^3 = C,$$

再代入 $u = \sqrt{x^2 + y}$, 得原方程的通解 $2\sqrt{(x^2 + y)^3} - 2x^3 - 3xy = C$.

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0$, $x=1$ 时 $y=1$;

解 原方程变形为

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} x = -\frac{2}{y^3} x^2,$$

即 $x^{-2} \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} x^{-1} = -\frac{2}{y^3},$

或 $\frac{d(x^{-1})}{dy} + \frac{2}{y} x^{-1} = \frac{2}{y^3},$

其通解为

$$x^{-1} = e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{2}{y^3} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) = \frac{1}{y^2} (2 \ln y + C),$$

即原方程的通解为

$$y^2 = x(2 \ln y + C).$$

由 $y|_{x=1}=1$, 得 $C=1$. 故满足所给初始条件的特解为 $y^2=x(2\ln y+1)$.

(2) $y''-ay'^2=0$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=-1$;

解 令 $y'=p$, 则原方程化为

$$\frac{dp}{dx}-ap^2=0.$$

分离变量得

$$\frac{dp}{p^2}=adx,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{p}=ax+C_1, \text{ 即 } y'=-\frac{1}{ax+C_1}.$$

代入初始条件 $y'(0)=-1$ 得 $C_1=1$,

故
$$y'=-\frac{1}{ax+1}.$$

方程两边积分得

$$y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2.$$

代入初始条件 $y(0)=0$ 得 $C_2=0$.

因此满足所给初始条件的特解为 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$.

(3) $2y''-\sin 2y=0$, $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=1$;

解 令 $y'=p$, 则原方程化为

$$2p\frac{dp}{dy}-\sin 2y=0.$$

分离变量得

$$2pdp=\sin 2ydy,$$

两边积分得

$$p^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+C_1.$$

代入初始条件 $y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$,

因而 $y'^2=-\frac{1}{2}\cos 2y+\frac{1}{2}=\sin^2 y$,

即 $y'=\sin y$.

分离变量得

$$\frac{dy}{\sin y}=dx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos y}{1+\cos y}=x+C_2.$$

代入初始条件 $y(0)=\frac{\pi}{2}$ 得 $C_2=0$.

因此满足所给初始条件的特解为 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos y}{1+\cos y}$.

(4) $y''+2y'+y=\cos x$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=\frac{3}{2}$.

解 齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+2r+1=0,$$

其根为 $r_{1,2}=-1$.

齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

因为 $f(x)=\cos x$, $\lambda+wi=i$ 不是特征方程的根, 所以非齐次方程的特解应设为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入原方程得

$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x,$$

比较系数得 $A=0$, $B=\frac{1}{2}$. 故 $y^*=\frac{1}{2}\sin x$. 从而原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x.$$

将初始条件代入通解得

$$\begin{cases} C_1=0 \\ -C_1+C_2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{cases},$$

解之得 $C_1=0$, $C_2=1$.

因此满足所给初始条件的特解为 $y = xe^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$.

5. 已知某曲线经过点(1, 1), 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求它的方程.

解 设点(x, y)为曲线上任一点, 则曲线在该点的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

其在纵轴上的截距为 $y - xy'$, 因此由已知有

$$y - xy' = x, \text{ 即 } y' - \frac{1}{x}y = -1.$$

这是一个一阶线性方程, 其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[\int (-1)e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x(-\ln x + C),$$

即方程的通解为 $y = x(C - \ln x)$.

由于曲线过点(1, 1), 所以 $C = 1$.

因此所求曲线的方程为 $y = x(1 - \ln x)$.

6. 已知某车间的容积为 $30 \times 30 \times 6 \text{ m}^3$, 其中的空气含 0.12% 的 CO_2 (以容积计算). 现以含 CO_2 0.04% 的新鲜空气输入, 问每分钟应输入多少, 才能在 30min 后使车间空气中 CO_2 的含量不超过 0.06%? (假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后, 以相同的流量排出).

解 设每分钟应输入的空气为 $a \text{ m}^3$, t 时刻车间中 CO_2 的浓度为 $x(t)$, 则车间中 CO_2 的含量 (以体积计算) 在 t 时刻经过 dt min 的改变量为

$$30 \times 30 \times 6 dx = 0.0004adt - axdt,$$

分离变量得

$$\frac{1}{x - 0.0004} dx = -\frac{a}{5400} dt,$$

由于 $x > 0.0004$, 故两边积分得

$$\ln(x - 0.0004) = -\frac{a}{5400}t + \ln C,$$

即
$$x = 0.0004 + Ce^{-\frac{a}{5400}t}.$$

由于开始时车间中的空气含 0.12% 的 CO_2 , 即当 $t = 0$ 时, $x = 0.0012$, 代入上式

得 $C = 0.0008$. 因此 $x = 0.0004 + 0.0008e^{-\frac{a}{5400}t}$.

$$\text{由上式得 } a = -\frac{5400}{t} \ln \frac{x-0.004}{0.0008}.$$

由于要求 30min 后车间中 CO_2 的含量不超过 0.06%，即当 $t=30$ 时， $x \leq 0.0006$ ，将 $t=30$ ， $x=0.0006$ 代入上式得 $a=180 \ln 4 \approx 250$ 。

因为 $x' = -\frac{0.0008}{5400} e^{-\frac{a}{5400}t} < 0$ ，所以 x 是 a 的减函数，考试当 $a \geq 250$ 时可保证

$x \leq 0.0006$ 。

因此每分钟输入新鲜空气的量不得小于 250m^3 。

7. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x) \cos x + 2 \int_0^x \varphi(t) \sin t dt = x + 1,$$

求 $\varphi(x)$ 。

解 在等式两边对 x 求导得

$$\varphi'(x) \cos x - \varphi(x) \sin x + 2\varphi(x) \sin x = 1,$$

即 $\varphi'(x) + \tan x \varphi(x) = \sec x$ 。

这是一个一阶线性方程，其通解为

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + C \right) \\ &= \cos x (\tan x + C) = \sin x + C \cos x. \end{aligned}$$

在已知等式中，令 $x=0$ 得 $\varphi(0)=1$ ，代入通解得 $C=1$ 。故 $\varphi(x)=\sin x + \cos x$ 。

8. 设函数 $u=f(r)$ ， $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $r>0$ 内满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

其中 $f(r)$ 二阶可导，且 $f(1)=f'(1)=1$ 。试将拉普拉斯方程化为以 r 为自变量的常微分方程，并求 $f(r)$ 。

$$\text{解 因为 } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\text{所以 } \frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} f'(r),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r-x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} f'(r) + \frac{x}{r} f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r^2-x^2}{r^3} f'(r) + \frac{x^2}{r^2} f'(r).$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{r^2-y^2}{r^3} f'(r) + \frac{y^2}{r^2} f'(r), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{r^2-z^2}{r^3} f'(r) + \frac{z^2}{r^2} f'(r).$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3} f'(r) + \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} f'(r) \\ &= \frac{2r^2}{r^3} f'(r) + f'(r) = \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2}. \end{aligned}$$

因此拉普拉斯方程化为

$$\frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \frac{d^2 u}{dr^2} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0.$$

令 $\frac{du}{dr} = p(r)$, 则以上方程进一步变成

$$\frac{2}{r} p + \frac{dp}{dr} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{dp}{dr} + \frac{2}{r} p = 0,$$

其通解为

$$p = C_1 e^{-\int \frac{2}{r} dr} = \frac{C_1}{r^2}, \quad \text{即} \quad \frac{du}{dr} = \frac{C_1}{r^2}.$$

由于 $f'(1)=1$, 即 $r=1$ 时 $\frac{du}{dr}=1$, 所以 $C_1=1$, $\frac{du}{dr} = \frac{1}{r^2}$.

在方程 $\frac{du}{dr} = \frac{1}{r^2}$ 的两边积分得

$$u = -\frac{1}{r} + C_2.$$

又由于 $f(1)=1$, 即 $r=1$ 时 $u=1$, 所以 $C_2=2$,

从而 $u = -\frac{1}{r} + 2$, 即 $f(r) = -\frac{1}{r} + 2$.

9. 设 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解, 令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明:

(1) $W(x)$ 满足方程 $W' + p(x)W = 0$;

证明 因为 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$ 都是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解,

所以 $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$, $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$,

$$\begin{aligned}\text{从而 } W' + p(x)W &= (y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2') + p(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) \\ &= y_1[y_2'' + p(x)y_2'] - y_2[y_1'' + p(x)y_1'] \\ &= y_1[-q(x)y_2] - y_2[-q(x)y_1] \\ &= 0,\end{aligned}$$

即 $W(x)$ 满足方程 $W' + p(x)W = 0$.

$$(2) W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}.$$

证明 已知 $W(x)$ 满足方程

$$W' + p(x)W = 0,$$

分离变量得

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx.$$

将上式两边在 $[x_0, x]$ 上积分, 得

$$\ln W(x) - \ln W(x_0) = -\int_{x_0}^x p(t)dt,$$

即

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}.$$

8464223

