

**A First  
Course  
in  
Probability**  
(Ninth Edition)

# 概率论基础教程

(原书第9版)

(美) Sheldon M. Ross 著

童行伟 译

## 关于本电子书说明

本人由于一些便利条件,可以帮您提供各种中文电子图书资料,且质量均为清晰的PDF图片格式,方便阅读和携带。文学、法律、计算机、人文、经济、医学、工业、学术等方面的图书,都可以帮您找提供电子版本,500万图书馆资源收藏供你选择。

我的QQ是859109769 佳佳e图书(提供完整版)



机械工业出版社  
China Machine Press



(原书第9版)

# 概率论基础教程

“这是一本非常优秀的概率论入门教材，是我所见过的最好的一本。”

—— Nhu Nguyen (新墨西哥州立大学)

“本书示例丰富、实用，写作风格清新、流畅，解答详细、准确，是一本通俗易懂的教材……”

—— Robert Bauer (伊利诺伊大学厄巴纳-尚佩恩分校)

本书是经过锤炼的优秀教材，已在世界范围内畅销三十多年。在美国的概率论教材中，本书占有50%以上的市场，被华盛顿大学、斯坦福大学、普度大学、密歇根大学、约翰霍普金斯大学、得克萨斯大学等众多名校采用。国内很多高校也采用这本书作为教材或参考书，如北京大学、清华大学、华东师范大学、浙江大学、武汉大学、中央财经大学和上海财经大学等。

书中通过大量的例子系统介绍了概率论的基础知识及其广泛应用，内容涉及组合分析、条件概率、离散型随机变量、连续型随机变量、随机变量的联合分布、期望的性质、极限定理和模拟等。第9版继续对教材进行微调和优化，做了大量的小修改，还增加了有助于建立概率直觉的例子和练习，使得叙述更加清晰。各章末附有大量的练习，还在书末给出自检习题的全部解答。这本极佳的入门教材，尤其适用于统计学、经管类和工程类专业的学生学习概率论知识。

## 作者简介

Sheldon M. Ross 世界著名的应用概率专家和统计学家，现为南加州大学工业与系统工程系 Epstein 讲座教授。他于1968年在斯坦福大学获得统计学博士学位，在1976年至2004年期间于加州大学伯克利分校任教，其研究领域包括统计模拟、金融工程、应用概率模型、随机动态规划等。Ross 教授创办了《Probability in the Engineering and Informational Sciences》杂志并一直担任主编，他的多种畅销教材均产生了世界性的影响，其中《统计模拟（第5版）》和《随机过程（第2版）》等均由机械工业出版社引进出版。



## A First Course in Probability (Ninth Edition)

PEARSON

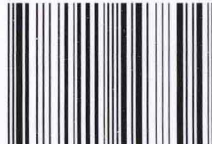
PEARSON

www.pearson.com



上架指导：数学/概率论

ISBN 978-7-111-44789-4



9 787111 447894 >

定价：69.00元

投稿热线：(010) 88379604  
客服热线：(010) 88378991 88361066  
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com  
网上购书：www.china-pub.com  
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

封面设计：杨宇梅



A First  
Course  
in  
Probability  
(Ninth Edition)

# 概率论基础教程

(原书第9版)

(美) Sheldon M. Ross 著

南加州大学

童行伟 梁宝生 译



机械工业出版社  
China Machine Press

## 图书在版编目 (CIP) 数据

概率论基础教程 (原书第 9 版) / (美) 罗斯 (Ross, S. M.) 著; 童行伟, 梁宝生译. —北京: 机械工业出版社, 2014. 1

(华章数学译丛)

书名原文: A First Course in Probability, Ninth Edition

ISBN 978-7-111-44789-4

I. 概… II. ①罗… ②童… ③梁… III. 概率论—教材 IV. O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 272749 号

### 版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号: 图字: 01-2013-3389

Authorized translation from the English language edition, entitled *A First Course in Probability*, 9E, 9780321794772 by Ross, Sheldon M., published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2014, 2010, 2006.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

Chinese simplified language edition published by Pearson Education Asia Ltd., and China Machine Press Copyright © 2014.

本书中文简体字版由 Pearson Education (培生教育出版集团) 授权机械工业出版社在中华人民共和国境内 (不包括中国台湾地区和香港、澳门特别行政区) 独家出版发行, 未经出版者书面许可, 不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

本书封底贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签, 无标签者不得销售。

这本经典的概率论教材通过大量的例子系统介绍了概率论的基础知识及其应用, 主要内容有组合分析、概率论公理、条件概率、离散型随机变量、连续型随机变量、随机变量的联合分布、期望的性质、极限定理和模拟等, 内容丰富, 通俗易懂。各章末附有大量的练习, 分为习题、理论习题和自检习题三大类, 并在书末给出自检习题的全部解答。

本书是概率论的入门书, 适合作为数学、统计学、经济学、生物学、管理学、计算机科学及其他各工专业本科生的教材, 也适合作为研究生和应用工作者的参考书。

机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 明永玲

北京市荣盛彩色印刷有限公司印刷

2014 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm·26.5 印张

标准书号: ISBN 978-7-111-44789-4

定 价: 69.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991 88361066

投稿热线: (010) 88379604

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzsj@hzbook.com



## 译者序

概率论是研究自然科学和社会科学中随机现象的数量规律的数学分支，是研究统计学必不可少的重要工具。概率论的理论和方法已经成为所有科学工作者、工程师、医务人员和企业家等的基本工具。概率论和高等数学一样，已经成为我国高等院校各专业普遍设立的一门基础课。

本书是一本非常有特色的不可多得的好教材，尽管“概率论”的教材非常多，但是能出其右者寥寥。本书不仅介绍了概率理论和方法，而且采用了大量生动的例子来说明这些理论和方法是如何应用在实际生活中的，让读者在获得概率论知识的同时，也体会了概率论的应用魅力。书中侧重介绍概率论中最基本的概念，如概率、条件概率、期望、贝叶斯公式、大数定律、中心极限定理、马尔可夫链等。同时，本书还提供了大量有意义的练习，分为习题、理论习题和自检习题三大类。从习题中，读者也可受益匪浅。本书设定的门槛很低，只要有初等微积分知识的读者，都可以读懂，所以是一本非常好的“概率论”入门书。

本书初版于1976年，经过作者几十年的修改和锤炼，内容得到极大丰富，在美国的概率论教材中市场占有率达到55%。当然，这个数字的准确性我们不能去证明，但是，我们能证明的是，美国的斯坦福大学、华盛顿大学、普度大学、密歇根大学和约翰霍普金斯大学等众多名校都采用这本经典的教材。本书的前几版都曾引进到国内，颇受国内师生的欢迎，对我国的概率论教学产生了广泛的影响，我们相信这个版本也一定会受到国内各界的欢迎。

我们在翻译本书的过程中，参考了第6版和第7版的中译本，在此对这两个版本的译者表示衷心的感谢。北京师范大学数学科学学院的李昕泽、郭菲菲为本书的翻译做了许多深入细致的工作。郭菲菲同学对本书前三章的翻译提出了许多宝贵意见。李昕泽同学参与本书最后三章的翻译工作，并提出了许多建设性意见，对此我们表示衷心的感谢。尽管我们尽力提供优秀的作品，但由于译者的精力和水平有限，难免会存在错漏之处，敬请有识之士指正！

译者

2013年10月

# 前 言

“我们看到，概率论实际上只是将常识归结为计算，它使我们能够用理性的头脑精确地评价凭某种直觉感受到的、往往又不能解释清楚的见解……引人注意的是，概率论这门起源于对机会游戏进行思考的科学，早就应该成为人类知识中最重要的组成部分……生活中那些最重要的问题绝大部分其实只是概率论的问题。”著名的法国数学家和天文学家拉普拉斯侯爵(人称“法国的牛顿”)如是说。尽管许多人认为，这位对概率论的发展作出过重大贡献的著名侯爵说话夸张了一些，但是概率论已经成为几乎所有的科学工作者、工程师、医务人员、法律工作者和企业家们手中的基本工具，这是一个不争的事实。实际上，有见识的人们不再问：“是这样吗？”而是问：“有多大的概率是这样？”

## 一般方法和数学水平

本书是概率论的入门教材，适用于具备初等微积分知识的数学、统计、工程和其他学科(包括计算机科学、生物学、社会科学和管理科学)的学生。本书不仅介绍概率论的数学理论，而且通过大量例子来展示这门学科的广泛应用。

## 内容和课程计划

第1章阐述了组合分析的基本原理，它是计算概率的最有用的工具。

第2章介绍了概率论的公理体系，并且阐明如何应用这些公理进行概率计算。

第3章讨论概率论中极为重要的两个概念，即事件的条件概率和事件的独立性。通过一系列例子说明：当部分信息可利用时，条件概率就会起作用；即使在没有部分信息时，条件概率也可以使概率的计算变得容易。利用“条件”计算概率这一极为重要的技巧还将出现在第7章，在那里我们用它来计算期望。

第4~6章引入随机变量的概念。第4章讨论离散型随机变量，第5章讨论连续型随机变量，第6章讨论随机变量的联合分布。在第4章和第5章中讨论了两个重要概念，即随机变量的期望值和方差，并且对许多常见的随机变量求出了相应的期望值和方差。

第7章进一步讨论了期望值的一些重要性质，书中引入了许多例子，解释如何利用随机变量和的期望等于随机变量期望的和这一重要规律来计算随机变量的期望值。本章中还有几节介绍条件期望(包括它在预测方面的应用)和矩母函数。本章最后一节介绍了多元正态分布，同时给出了来自正态总体的样本均值和样本方差的联合分布的简单证明。

在第8章我们介绍了概率论的主要理论结果。特别地，我们证明了强大数定律和中心极限定理。在强大数定律的证明中，我们假定了随机变量具有有限的四阶矩，因为在这种假定之下，证明非常简单。在中心极限定理的证明中，我们假定了莱维连续性定理成立。在本章中，我们还介绍了若干概率不等式，如马尔可夫不等式、切比雪夫不等式和切尔诺夫界。在本章最后一节，我们给出用有相同期望值的泊松随机变量的相应概率去近似独立



伯努利随机变量和的相关概率的误差界.

第 9 章阐述了一些额外的论题, 如马尔可夫链、泊松过程以及信息编码理论初步. 第 10 章介绍了统计模拟.

与以前的版本一样, 在每章末给出了三组练习题——习题、理论习题和自检习题. 自检习题的全部解答在附录 B 给出, 这部分练习题可以帮助学生检测他们对知识的掌握程度并为考试作准备.

## 第 9 版的特色

第 9 版继续对教材进行微调和优化, 除了大量的小修改使得教材更加清晰外, 本版还包括了很多新的或更新的练习题和正文内容, 内容的选择不仅因为它们本身的趣味性, 更是为了用它们来建立学生对概率的直觉. 第 3 章的例 3h 和例 4k 就是这个目标的最好例证, 例 3h 介绍双胞胎同卵的比例的估计, 例 4k 分析发球和接球游戏.

## 致谢

我要感谢下面这些为了改进本教材而慷慨地与我联系并提出意见的人们: Amir Ardestani(德黑兰理工大学), Joe Blitzstein(哈佛大学), Peter Nuesch(洛桑大学), Joseph Mitchell(纽约州立大学石溪分校), Alan Chambless(精算师), Robert Kriner、Israel David(本-古里安大学), T. Lim(乔治梅森大学), Wei Chen(罗格斯大学), D. Monrad(伊利诺伊大学), W. Rosenberger(乔治梅森大学), E. Ionides(密歇根大学), J. Corvino(拉法叶学院), T. Seppalainen(威斯康星大学), Jack Goldberg(密歇根大学), Sunil Dhar(新泽西理工学院), Vladislav Kargin(斯坦福大学), Marlene Miller、Ahmad Parsian 和 Fritz Scholz(华盛顿大学).

我也要特别感谢第 9 版的审查者: Richard Laugesen(伊利诺伊大学), Stacey Hancock(克拉克大学), Stefan Heinz(怀俄明大学), Brian Thelen(密歇根大学). 准确性的审查者 Keith Friedman(得克萨斯大学奥斯汀分校)和 Stacey Hancock(克拉克大学)非常仔细地审查了书稿内容, 在此也要特别感谢他们.

最后, 我要感谢下面这些审查者提出很有用的评论意见, 其中第 9 版的审查者用星号标记.

K. B. Athreya(爱荷华州立大学)

Richard Bass(康涅狄格大学)

Robert Bauer(伊利诺伊大学厄巴纳-尚佩恩分校)

Phillip Beckwith(密歇根科技大学)

Arthur Benjamin(哈佛姆德学院)

Geoffrey Berresford(长岛大学)

Baidurya Bhattacharya(特拉华大学)

Howard Bird(圣克劳德州立大学)

Shahar Boneh(丹佛大都会州立学院)

Jean Cadet(纽约州立大学石溪分校)

Steven Chiappari(圣塔克拉拉大学)

Nicolas Christou(加州大学洛杉矶分校)

James Clay(亚利桑那大学图森分校)

- Francis Conlan(圣克拉拉大学)  
 Justin Corvino(拉法叶学院)  
 Jay DeVore(加州州立理工大学圣路易斯奥  
 比斯波分校)  
 Scott Emerson(华盛顿大学)  
 Thomas R. Fischer(德州农工大学)  
 Anant Godbole(密歇根科技大学)  
 Zakkula Govindarajulu(肯塔基大学)  
 Richard Groeneveld(爱荷华州立大学)  
 \* Stacey Hancock(克拉克大学)  
 Mike Hardy(麻省理工学院)  
 Bernard Harris(威斯康星大学)  
 Larry Harris(肯塔基大学)  
 David Heath(康奈尔大学)  
 \* Stefan Heinz(怀俄明大学)  
 Stephen Herschkorn(罗格斯大学)  
 Julia L. Higl(亚利桑那大学)  
 Mark Huber(杜克大学)  
 Edward Ionides(密歇根大学)  
 Anastasia Ivanova(北卡罗来纳大学)  
 Hamid Jafarkhani(加州大学欧文分校)  
 Chuanshu Ji(北卡罗来纳大学教堂山分校)  
 Robert Keener(密歇根大学)  
 \* Richard Laugesen(伊利诺伊大学)  
 Fred Leysieffer(佛罗里达州立大学)  
 Thomas Liggett(加州大学洛杉矶分校)  
 Helmut Mayer(佐治亚大学)  
 Bill McCormick(佐治亚大学)  
 Ian McKeague(佛罗里达州立大学)  
 R. Miller(斯坦福大学)  
 Ditlev Monrad(伊利诺伊大学)  
 Robb J. Muirhead(密歇根大学)  
 Joe Naus(罗格斯大学)  
 Nhu Nguyen(新墨西哥州立大学)  
 Ellen O'Brien(乔治梅森大学)  
 N. U. Prabhu(康奈尔大学)  
 Kathryn Prewitt(亚利桑那州立大学)  
 Jim Propp(威斯康星大学)  
 William F. Rosenberger(乔治梅森大学)  
 Myra Samuels(普度大学)  
 I. R. Savage(耶鲁大学)  
 Art Schwartz(密歇根大学安阿伯分校)  
 Therese Shelton(西南大学)  
 Malcolm Sherman(纽约州立大学奥尔巴尼  
 分校)  
 Murad Taqqu(波士顿大学)  
 \* Brian Thelen(密歇根大学)  
 Eli Upfal(布朗大学)  
 Ed Wheeler(田纳西大学)  
 Allen Webster(布拉德利大学)

S. R.  
 smross@usc.edu



# 目 录

译者序  
前 言

第 1 章 组合分析	1
1.1 引言	1
1.2 计数基本法则	1
1.3 排列	2
1.4 组合	4
1.5 多项式系数	7
1.6 方程的整数解个数	10
第 2 章 概率论公理	19
2.1 引言	19
2.2 样本空间和事件	19
2.3 概率论公理	22
2.4 几个简单命题	24
2.5 等可能结果的样本空间	27
2.6 概率: 连续集函数	36
2.7 概率: 确信程度的度量	39
第 3 章 条件概率和独立性	49
3.1 引言	49
3.2 条件概率	49
3.3 贝叶斯公式	53
3.4 独立事件	63
3.5 $P(\cdot   F)$ 是概率	74
第 4 章 随机变量	98
4.1 随机变量	98
4.2 离散型随机变量	101
4.3 期望	103
4.4 随机变量函数的期望	105
4.5 方差	108
4.6 伯努利随机变量和二项随机变量	109

4.6.1 二项随机变量的性质	113
4.6.2 计算二项分布函数	115
4.7 泊松随机变量	116
4.8 其他离散型概率分布	126
4.8.1 几何随机变量	126
4.8.2 负二项随机变量	127
4.8.3 超几何随机变量	129
4.8.4 $\zeta$ 分布	132
4.9 随机变量和的期望	133
4.10 分布函数的性质	136
第 5 章 连续型随机变量	154
5.1 引言	154
5.2 连续型随机变量的期望和方差	156
5.3 均匀随机变量	159
5.4 正态随机变量	162
5.5 指数随机变量	170
5.6 其他连续型概率分布	175
5.6.1 $\Gamma$ 分布	175
5.6.2 韦布尔分布	176
5.6.3 柯西分布	176
5.6.4 $\beta$ 分布	177
5.7 随机变量函数的分布	178
第 6 章 随机变量的联合分布	192
6.1 联合分布函数	192
6.2 独立随机变量	197
6.3 独立随机变量的和	206
6.3.1 独立同分布均匀随机变量	206
6.3.2 $\Gamma$ 随机变量	207
6.3.3 正态随机变量	209
6.3.4 泊松随机变量和二项随机变量	211
6.4 离散情形下的条件分布	212
6.5 连续情形下的条件分布	214

6.6	次序统计量 .....	218	8.2	切比雪夫不等式及弱大数定律 .....	313
6.7	随机变量函数的联合分布 .....	221	8.3	中心极限定理 .....	315
6.8	可交换随机变量 .....	226	8.4	强大数定律 .....	321
<b>第 7 章</b>	<b>期望的性质 .....</b>	<b>241</b>	8.5	其他不等式 .....	323
7.1	引言 .....	241	8.6	用泊松随机变量逼近独立的伯努利随机变量和的概率误差界 .....	328
7.2	随机变量和的期望 .....	241	<b>第 9 章</b>	<b>概率论的其他课题 .....</b>	<b>335</b>
7.2.1	通过概率方法将期望值作为界 .....	250	9.1	泊松过程 .....	335
7.2.2	关于最大值与最小值的恒等式 .....	252	9.2	马尔可夫链 .....	337
7.3	试验序列中事件发生次数的矩 .....	254	9.3	惊奇、不确定性及熵 .....	341
7.4	随机变量和的协方差、方差及 相关系数 .....	260	9.4	编码定理及熵 .....	343
7.5	条件期望 .....	266	<b>第 10 章</b>	<b>模拟 .....</b>	<b>352</b>
7.5.1	定义 .....	266	10.1	引言 .....	352
7.5.2	通过取条件计算期望 .....	267	10.2	模拟连续型随机变量的一般方法 .....	354
7.5.3	通过取条件计算概率 .....	275	10.2.1	逆变换方法 .....	354
7.5.4	条件方差 .....	278	10.2.2	舍取法 .....	355
7.6	条件期望及预测 .....	279	10.3	模拟离散分布 .....	359
7.7	矩母函数 .....	282	10.4	方差缩减技术 .....	361
7.8	正态随机变量的更多性质 .....	289	10.4.1	利用对偶变量 .....	361
7.8.1	多元正态分布 .....	289	10.4.2	利用“条件” .....	362
7.8.2	样本均值与样本方差的联合分布 .....	291	10.4.3	控制变量 .....	363
7.9	期望的一般定义 .....	292	<b>附录 A</b>	<b>部分习题答案 .....</b>	<b>367</b>
<b>第 8 章</b>	<b>极限定理 .....</b>	<b>313</b>	<b>附录 B</b>	<b>自检习题解答 .....</b>	<b>369</b>
8.1	引言 .....	313	<b>索引 .....</b>	<b>409</b>	



# 第1章 组合分析

## 1.1 引言

首先,我们看一个经典的概率论问题:一个通信系统由  $n$  个天线组成,它们按线性顺序排成一排.只要没有两个相邻的天线都失效,这个系统就能接收到所有进来的信号,此时称这个通信系统是有效的.如果已经知道这  $n$  个天线里恰好有  $m$  个天线是失效的,那么此通信系统仍然有效的概率是多大?例如,设  $n=4$ ,  $m=2$ ,那么共有 6 种可能的系统配置,即

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

其中,1 表示天线有效,0 表示天线失效.可以看出前 3 种排列下通信系统仍然有效,而后 3 种排列下系统将失效,因此,所求的概率应该是  $3/6=1/2$ .对于一般的  $n$  和  $m$  来说,用类似的方法可以计算出系统有效的概率.即先计算使得系统有效的配置方式有多少种,再计算总共有多少种配置方式,两者相除即为所求概率.

从上述讨论可以看出,一个有效的计算事件可能发生结果的数目的方法是非常有用的.事实上,概率论中的很多问题只要通过计算某个事件发生结果的数目就能得以解决.关于计数的数学理论通常称为组合分析(combinatorial analysis).

1

## 1.2 计数基本法则

在本节的讨论中,我们都是以计数基本法则为基础的.简单地说,若一个试验有  $m$  种可能的结果,而另一个试验又有  $n$  种可能的结果,则这两个试验一共有  $mn$  种可能的结果.

### 计数基本法则

假设有两个试验,其中试验 1 有  $m$  种可能的结果,对应于试验 1 的每一个结果,试验 2 有  $n$  种可能的结果,则这两个试验一共有  $mn$  种可能的结果.

**基本法则的证明** 通过列举两个试验所有可能的结果可以证明这个问题,即

$$\begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & \cdots, & (1,n) \\ (2,1), & (2,2), & \cdots, & (2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (m,1), & (m,2), & \cdots, & (m,n) \end{array}$$

其中,  $(i, j)$  表示试验 1 出现第  $i$  种可能的结果,试验 2 出现第  $j$  种可能的结果.因此,所有可能的结果组成一个矩阵,共有  $m$  行  $n$  列,元素的总数为  $m \times n$ ,这样就完成了证明.

**例 2a** 一个小团体由 10 位妇女组成,其中每位妇女又有 3 个孩子.现在要从中选取一位妇女和这位妇女的孩子中的一个作为“年度母亲和年度儿童”,问一共有多少种可能的

选取方式?

**解** 将选择妇女看成试验 1, 而接下来选择这位妇女三个孩子中的一个看作试验 2, 那么根据计数基本法则可知, 一共有  $10 \times 3 = 30$  种可能的选取方式. ■

当有 2 个以上的试验时, 基本法则可以推广.

### 推广的计数基本法则

如果一共有  $r$  个试验, 试验 1 有  $n_1$  种可能的结果, 对应于试验 1 的每一种可能的结果, 试验 2 有  $n_2$  种可能的结果, 对应于前两个试验的每一种可能的结果, 试验 3 有  $n_3$  种可能的结果……那么这  $r$  个试验一共有  $n_1 n_2 \cdots n_r$  种可能的结果.

**例 2b** 一个大学计划委员会由 3 名大一新生、4 名大二学生、5 名大三学生和 2 名大四学生组成, 现在要从中选 4 个人组成一个分委员会, 要求这 4 个人来自不同的年级, 那么可能有多少种不同的分委员会?

**解** 可以把这个问题理解为从每个年级选取一个代表, 从而有 4 个独立的试验, 根据推广的计数基本法则, 一共有  $3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$  种可能的分委员会. ■

**例 2c** 对于 7 位车牌号, 如果要求前 3 位必须是字母, 后 4 位必须是数字, 那么一共有多少种不同的 7 位车牌号?

**解** 根据推广的计数基本法则, 可知答案为  $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175\,760\,000$ . ■

**例 2d** 对于只定义在  $n$  个点上的函数, 如果每个函数的取值只能是 0 或 1, 那么这样的函数共有多少个?

**解** 设这  $n$  个点为  $1, 2, \dots, n$ , 既然对每个点来说,  $f(i)$  的取值只能是 0 或者 1, 那么一共有  $2^n$  个可能的函数. ■

**例 2e** 在例 2c 中, 如果不允许字母或数字重复, 一共有多少种可能的车牌号?

**解** 这种情况下, 一共有  $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78\,624\,000$  种可能的车牌号. ■

## 1.3 排列

随意排列字母  $a, b, c$ , 一共有多少种不同的排列方式? 通过直接列举, 可知一共有 6 种, 即  $abc, acb, bac, bca, cab$  和  $cba$ . 每一种都称为一个排列 (permutation). 因此, 3 个元素一共有 6 种可能的排列方式. 这个结果能通过计数基本法则得到: 在排列中第一个位置可供选择的元素有 3 个, 第二个位置可供选择的元素是剩下的两个元素之一, 第三个位置只能选择剩下的 1 个元素. 因此, 一共有  $3 \times 2 \times 1 = 6$  种可能的排列.

假设有  $n$  个元素, 那么用上述类似的推理, 可知一共有

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

种不同的排列方式.

这里当  $n$  为正整数时,  $n!$  (读作“ $n$  的阶乘”)等于  $1 \times 2 \times \cdots \times n$ , 同时定义  $0! = 1$ .

**例 3a** 一个有 9 名队员的垒球队可能有多少种不同的击球顺序?

**解** 一共有  $9! = 362\,880$  种可能的击球顺序. ■

**例 3b** 某概率论班共有 6 名男生、4 名女生, 有次测验是根据他们的表现来排名次, 假设没有两个学生成绩一样.

(a) 一共有多少种可能的名次?

(b) 如果限定男生和女生分开排名次, 那么一共有多少种可能的名次?

**解**

(a) 因为每种名次都对应着一个 10 人的排列方式, 所以答案是  $10! = 3\,628\,800$ .

(b) 男生一起排名次有  $6!$  种可能, 女生一起排名次有  $4!$  种可能, 根据计数基本法则, 一共有  $6! \times 4! = 720 \times 24 = 17\,280$  种可能的名次. ■

**例 3c** Jones 女士要把 10 本书放到书架上, 其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书. 现在 Jones 女士想整理她的书, 如果相同学科的所有图书都必须放在一起, 那么一共可能有多少种放法?

**解** 如果最先摆放数学书, 接下来放化学书, 再下来放历史书, 最后放语文书, 那么一共有  $4! \times 3! \times 2! \times 1!$  种排列方式. 而这 4 种学科的顺序一共有  $4!$  种, 因此, 所求答案是  $4! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1! = 6912$ . ■

接下来讨论如果有  $n$  个元素, 其中有些是不可区分的, 那么这种排列数如何计算? 看下面的例子.

**例 3d** 用 6 个字母 PEPPER 进行排列, 一共有多少种不同的排列方式?

**解** 如果 3 个字母 P 和 2 个字母 E 都是可以区分的(标上号), 即  $P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R$ , 那么一共有  $6!$  种排列方式. 然而, 考察其中任一个排列, 比如  $P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R$ , 如果分别将 3 个字母 P 和 2 个字母 E 重排, 那么得到的结果仍然是 PPEPER, 即总共有  $3! \times 2!$  种排列:

$$\begin{array}{ll} P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R & P_1 P_2 E_2 P_3 E_1 R \\ P_1 P_3 E_1 P_2 E_2 R & P_1 P_3 E_2 P_2 E_1 R \\ P_2 P_1 E_1 P_3 E_2 R & P_2 P_1 E_2 P_3 E_1 R \\ P_2 P_3 E_1 P_1 E_2 R & P_2 P_3 E_2 P_1 E_1 R \\ P_3 P_1 E_1 P_2 E_2 R & P_3 P_1 E_2 P_2 E_1 R \\ P_3 P_2 E_1 P_1 E_2 R & P_3 P_2 E_2 P_1 E_1 R \end{array}$$

这些排列都是同一种形式 PPEPER. 因此, 一共有  $6! / (3! \times 2!) = 60$  种不同的排列方式. ■

一般来说, 利用例 3d 同样的推理可知, 对于  $n$  个元素, 如果其中  $n_1$  个元素彼此相同, 另  $n_2$  个彼此相同,  $\dots$ ,  $n_r$  个也彼此相同, 那么一共有

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

种不同的排列方式.

**例 3e** 一个棋类比赛一共有 10 个选手, 其中 4 个来自俄罗斯, 3 个来自美国, 2 个来

自英国,另1个来自巴西.如果比赛结果只记录选手的国籍,那么一共有多少种可能的结果?

**解** 一共有

$$\frac{10!}{4! \times 3! \times 2! \times 1!} = 12\,600$$

种可能的结果.

**例 3f** 将9面小旗排列在一条直线上,其中4面白色、3面红色和2面蓝色,且颜色相同的旗是完全一样的.如果不同的排列方式代表不同的信号,那么这9面旗一共可组成多少种不同的信号?

**解** 一共有

$$\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = 1260$$

种不同的信号.

## 1.4 组合

从 $n$ 个元素当中取 $r$ 个组成一组,一共有多少个不同的组?这也是我们感兴趣的问题.比如,从A, B, C, D和E这5个元素中选取3个组成一组,一共有多少个不同的组?为回答这个问题,可做如下推理:取第一个元素有5种取法,取第2个元素有4种取法,取第三个元素有3种取法,所以,如果考虑选择顺序,那么一共有 $5 \times 4 \times 3$ 种取法.但是,每一个包含3个元素的组(如包含A, B, C的组)都被计算了6次(即如果考虑顺序,所有的排列ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA都被算了一次),所以,组的总数为

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

一般来说,如果考虑顺序,从 $n$ 个元素中取 $r$ 个排成一组,一共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的方式,而每个含 $r$ 个元素的小组都被重复计算了 $r!$ 次.所以,从 $n$ 个元素中取 $r$ 个组成不同组的数目为

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

### 记号与术语

对于 $r \leq n$ ,我们定义 $\binom{n}{r}$ 如下:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

这样 $\binom{n}{r}$ 就表示从 $n$ 个元素中一次取 $r$ 个的可能组合数.  $\ominus$

$\ominus$  按照惯例,定义 $0! = 1$ ,因此, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .当 $i < 0$ 或者 $i > n$ 时,我们也认为 $\binom{n}{i} = 0$ .



因此, 如果不考虑抽取顺序,  $\binom{n}{r}$  就表示从  $n$  个元素中取  $r$  个元素所组成的不同组的数目.

等价地,  $\binom{n}{r}$  就是从一个大小为  $n$  的集合中选出大小为  $r$  的子集的个数. 由  $0!=1$ , 注意

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \times n!} = 1$$

这与前面的解释是一致的, 因为在一个大小为  $n$  的集合里恰好只有一个大小为  $n$  的子集(也就是全集), 而且也恰好只有一个大小为 0 的子集(也就是空集). 一个有用的约定就是: 当  $r > n$  或  $r < 0$  时, 定义  $\binom{n}{r} = 0$ .

**例 4a** 从 20 人当中选 3 人组成委员会, 可能有多少种不同的委员会?

**解** 一共有  $\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$  种可能的委员会. ■

**例 4b** 一个团体共有 12 人, 其中 5 位女士, 7 位男士, 现从中选取 2 位女士和 3 位男士组成一个委员会, 问有多少种不同的委员会? 另外, 如果其中 2 位男士之间有矛盾, 并且拒绝一起工作, 那又有多少种不同的委员会?

**解** 因为有  $\binom{5}{2}$  种方法选取女士, 有  $\binom{7}{3}$  种方法选取男士, 所以根据基本计数法则, 一共有

$$\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 350$$

种可能的委员会.

现在来看, 如果有两位男士拒绝一起工作, 那么选取 3 位男士的  $\binom{7}{3} = 35$  种方法中, 有  $\binom{2}{2} \times \binom{5}{1} = 5$  种同时包含了这两位男士, 所以, 一共有  $35 - 5 = 30$  种选取方法不同时包含那两位有矛盾的男士; 另外, 选取女士的方法仍是  $\binom{5}{2} = 10$  种, 所以, 一共有  $30 \times 10 = 300$  种可能的委员会. ■

**例 4c** 假设在一排  $n$  个天线中, 有  $m$  个是失效的, 另  $n-m$  个是有效的, 并且假设所有有效的天线之间不可区分, 同样, 所有失效的天线之间也不可区分. 问有多少种线性排列方式, 使得任何两个失效的天线都不相邻?

**解** 先将  $n-m$  个有效天线排成一排, 既然没有连续两个失效的, 那么在两个有效天线之间, 必然至多只能放置一个失效的. 即在  $n-m+1$  个可能位置中(见图 1-1 中的插入符号), 选择  $m$  个来放置失效天线. 因此有  $\binom{n-m+1}{m}$  种可能方式确保在两个失效天线之

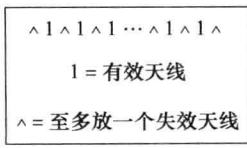


图 1-1 天线的排列

6 间至少存在一个有效天线.

以下是一个非常有用的组合恒等式:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n \quad (4.1)$$

式(4.1)可用分析的方法证明,也可从组合的角度来证明.设想从  $n$  个元素中取  $r$  个,一共有  $\binom{n}{r}$  种取法.从另一个角度来考虑,不妨设这  $n$  个元素里有一个特殊的,记为元素 1,那么取  $r$  个元素就有两种结果,取元素 1 或者不取元素 1.取元素 1 的方法一共有  $\binom{n-1}{r-1}$  种(从  $n-1$  个元素里面取  $r-1$  个);不取元素 1 的方法一共有  $\binom{n-1}{r}$  种(从去掉元素 1 的剩下  $n-1$  个元素中取  $r$  个).两者之和就是从  $n$  个元素里取  $r$  个的方法之和,而从  $n$  个元素中取  $r$  个共有  $\binom{n}{r}$  种方法,所以式(4.1)成立.

值  $\binom{n}{r}$  经常称为二项式系数(binomial coefficient),是因为它们是下面二项式定理中重要的系数.

### 二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (4.2)$$

下面将介绍二项式定理的两种证明方法,其一是数学归纳法,其二是基于组合考虑的证明.

**二项式定理的归纳法证明** 当  $n=1$  时,式(4.2)可化为

$$x+y = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y+x$$

假设式(4.2)对于  $n-1$  成立,那么对于  $n$ ,

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \end{aligned}$$

在前面的求和公式里令  $i=k+1$ ,后面的求和公式里令  $i=k$ ,那么有

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] x^i y^{n-i} + y^n \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} + y^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \end{aligned}$$

其中倒数第二个等式由式(4.1)得到. 根据归纳法, 定理得证. ■

**二项式定理的组合法证明** 考虑乘积

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \cdots (x_n + y_n)$$

它展开后一共包含  $2^n$  个求和项, 每一项都是  $n$  个因子的乘积, 而且每一项都包含因子  $x_i$  或  $y_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 例如,

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2$$

这  $2^n$  个求和项中, 一共有多少项含有  $k$  个  $x_i$  和  $n-k$  个  $y_i$  作为因子? 含有  $k$  个  $x_i$  和  $n-k$  个  $y_i$  的每一项对应了从  $n$  个元素  $x_1, x_2, \dots, x_n$  里取  $k$  个元素构成一组的取法. 因此,

一共有  $\binom{n}{k}$  个这样的项. 这样, 令  $x_i = x$ ,  $y_i = y$ ,  $i=1, \dots, n$ , 可以看出

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

**例 4d** 展开  $(x+y)^3$ .

解

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3 \end{aligned}$$

**例 4e** 一个有  $n$  个元素的集合共有多少子集?

解 含有  $k$  个元素的子集一共有  $\binom{n}{k}$  个, 因此所求答案为

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

8

该结果还可以这样得到: 给该集合里的每个元素都标上 1 或 0, 每种标法都一一对应了一个子集, 例如, 当把所有元素都标为 1 时, 就对应着一个含有所有元素的子集. 因为一共有  $2^n$  种可能的标法, 所以一共有  $2^n$  个子集.

上述结论包含了一个元素都没有的子集(即空集), 所以至少有一个元素的子集一共有  $2^n - 1$  个. ■

## 1.5 多项式系数

在本节中, 我们考虑如下问题: 把  $n$  个不同的元素分成  $r$  组, 每组分别有  $n_1, n_2, \dots, n_r$  个元素, 其中  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ , 一共有多少种不同的分法? 要回答这个问题, 我们注意, 第一组元素有  $\binom{n}{n_1}$  种选取方法, 选定第一组元素后, 只能从剩下的  $n - n_1$  个元素中选第二组元素, 一共有  $\binom{n - n_1}{n_2}$  种取法, 接下来第三组有  $\binom{n - n_1 - n_2}{n_3}$  种取法, 等等. 因此, 根据推广的计数基本法则, 将  $n$  个元素分成  $r$  组可能存在

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r} \\
&= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!n_r!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}
\end{aligned}$$

种分法.

用另一种方法也可以得到这个结果: 考虑  $n$  个值  $1, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, r, \dots, r$ , 其中对于  $i=1, \dots, r$ ,  $i$  出现  $n_i$  次. 这些值的每个排列对应于按如下方式将  $n$  个元素分成  $r$  组的一种分法: 令排列  $i_1, i_2, \dots, i_r$  对应于第 1 项归到组  $i_1$  中, 第 2 项归到组  $i_2$  中, 以此类推. 例如, 若  $n=8$  且  $n_1=4, n_2=3, n_3=1$ , 则排列  $1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1$  对应于将第 1, 2, 6, 8 项归到第一组, 第 3, 5, 7 项归到第二组, 第 4 项归到第三组. 因为每个排列产生一种分法并且每个可能的分法是从相同的排列中得到的, 所以将  $n$  个元素分成大小为  $n_1, n_2, \dots, n_r$  这样不同  $r$  组的分法数量, 与  $n$  个值中  $n_1$  相同,  $n_2$  相同,  $\dots, n_r$  相同的排列数是相等的, 正如 1.3 节中所示, 这等于  $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ .

#### 记号

如果  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ , 则定义  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$  为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

因此,  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$  表示把  $n$  个不同的元素分成大小分别为  $n_1, n_2, \dots, n_r$  的  $r$  个不同组的组合数.

**例 5a** 某个小城的警察局有 10 名警察, 其中 5 名警察需要在街道巡逻, 2 名警察需要在局里值班, 另外 3 名留在局里待命. 问把 10 名警察分成这样的 3 组共有多少种不同分法?

**解** 一共有  $10!/(5! \times 2! \times 3!) = 2520$  种分法. ■

**例 5b** 将 10 个小孩平均分成 A, B 两队分别去参加两场不同的比赛, 一共有多少种分法?

**解** 一共有  $10!/(5! \times 5!) = 252$  种分法. ■

**例 5c** 把 10 个孩子平均分成两组进行篮球比赛, 一共有多少种分法?

**解** 这个问题与例 5b 的不同之处在于分成的两组是不用考虑顺序的. 也就是说, 这里没有 A, B 两组之分, 仅仅分成各自为 5 人的两组, 故所求答案为  $\frac{10!/(5! \times 5!)}{2!} = 126$ . ■

下面的定理是二项式定理的推广, 其证明留作习题.



## 多项式定理

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r): \\ n_1 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

上式的求和号是对满足  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$  的所有非负整数向量  $(n_1, n_2, \dots, n_r)$  求和.

$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$  也称为多项式系数(multinomial coefficient).

10

**例 5d** 在第一轮淘汰赛中有  $n=2^m$  名选手, 这  $n$  名选手被分成  $n/2$  组, 每组都要相互比赛. 每一场比赛的败者将被淘汰而胜者将晋级下一轮, 这个过程持续到只有一名选手留下. 假设我们有一场淘汰赛, 其中有 8 名选手.

(a) 第一轮之后有多少种可能的结果?(如一种结果是 1 赢了 2, 3 赢了 4, 5 赢了 6, 7 赢了 8.)

(b) 这场淘汰赛有多少种可能的结果, 其中每个结果包含了所有轮次的完整信息?

**解** 一种确定第一轮比赛后可能的结果数的方法是首先确定那轮的可能的分组数. 注意, 将 8 名选手分成第一组、第二组、第三组和第四组共有  $\binom{8}{2, 2, 2, 2} = 8!/2^4$  种方法. 当这 4 组没有顺序的差别时, 可能的分组方法是  $8!/(2^4 \times 4!)$  种. 对每一组来说, 一场比赛的胜者有两种可能的选择, 所以一轮比赛结束有  $(8! \times 2^4)/(2^4 \times 4!) = 8!/4!$  种可能的结果. [另一种方法是注意 4 名胜者的可能的选择有  $\binom{8}{4}$  种, 而对于每种选择来说, 这里有 4!

种方法来给 4 名胜者和 4 名败者配对, 所以可以得出第一轮比赛之后有  $4! \times \binom{8}{4} = 8!/4!$  种可能的结果.]

类似地, 对于第一轮结束后的每个结果, 第二轮有  $4!/2!$  种可能的结果, 然后对于前两轮的结果, 第三轮有  $2!/1!$  种可能的结果. 再根据推广的计数基本法则可以得到这次淘汰赛有  $(8!/4!) \times (4!/2!) \times (2!/1!) = 8!$  种可能的结果. 事实上, 由同样的论证方式可以得出, 当淘汰赛有  $n=2^m$  名选手时会有  $n!$  种可能的结果.

知道上述的结果后, 提出下面这个更加直接的结论就不困难了. 在淘汰赛可能的结果的集合和  $1, \dots, n$  的所有排列的集合之间存在着一个一一对应. 要得到这样一个对应, 需要把所有淘汰赛结果的选手进行如下排序: 将淘汰赛的冠军排为第 1 名, 将最终轮的败者排为第 2 名. 对倒数第二轮中的两个败者, 将输给第 1 名的选手排为第 3 名, 将输给第 2 名的选手排为第 4 名. 对倒数第三轮中的四个败者, 将输给第 1 名的选手排为第 5 名, 将输给第 2 名的选手排为第 6 名, 将输给第 3 名的选手排为第 7 名, 将输给第 4 名的选手排为第 8 名. 按照这种方法给每名选手排名次. (一种更简洁的描述是将淘汰赛的胜者排为第 1 名, 其余选手的排名按照输的那轮的比赛次数  $2^k$  次加上打败他的选手的排名得到,  $k=0, \dots, m-1$ .) 在这种方法下, 淘汰赛的结果可以用排列  $i_1, i_2, \dots, i_n$  表示, 其中  $i_j$  是

被排名为第  $j$  的选手. 因为不同的淘汰赛结果导致不同的排列, 而且每个淘汰赛的结果对应一个排列, 于是得出结论: 淘汰赛的可能结果数与  $1, \dots, n$  的排列数相同. ■

### 例 5e

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= \binom{2}{2,0,0} x_1^2 x_2^0 x_3^0 + \binom{2}{0,2,0} x_1^0 x_2^2 x_3^0 + \binom{2}{0,0,2} x_1^0 x_2^0 x_3^2 \\ &\quad + \binom{2}{1,1,0} x_1^1 x_2^1 x_3^0 + \binom{2}{1,0,1} x_1^1 x_2^0 x_3^1 + \binom{2}{0,1,1} x_1^0 x_2^1 x_3^1 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3\end{aligned}$$

## \* 1.6 方程的整数解个数<sup>⊖</sup>

一个人去 Ticonderoga 湖钓鱼, 湖中共有 4 种不同的鱼: 鳟鱼、鲈鱼、鲑鱼和竹荚鱼. 如果将这次钓鱼之旅的结果定为钓到每种类型的鱼的数量, 那么计算在总共钓到 10 条鱼的情况下有多少种不同的结果. 首先我们可以用向量  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  来定义钓鱼之旅的结果, 其中  $x_1$  表示鳟鱼的数量,  $x_2$  表示鲈鱼的数量,  $x_3$  表示鲑鱼的数量,  $x_4$  表示竹荚鱼的数量. 因此, 可能的结果数就是和为 10 的非负向量  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  的个数.

更一般地, 如果我们假设有  $r$  种鱼且一共钓到  $n$  条鱼, 那么可能的结果数就是满足

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad (6.1)$$

的非负整数向量  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  的个数. 要计算这个数, 我们要先考虑符合上述条件的正整数向量  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  的个数. 为此, 假设有  $n$  个连续的数值 0 排成一行:

$$0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0$$

注意, 从  $n-1$  个相邻的 0 的间隔中选出  $r-1$  个间隔 (见图 1-2) 的每一种选择对应式 (6.1) 的一个正数解, 使得  $x_1$  等于第一个被选择的间隔之前的 0 的个数,  $x_2$  等于第一个和第二个被选择的间隔之间的 0 的个数,  $\dots$ ,  $x_r$  等于最后一个被选的间隔后面的 0 的个数.

$$0 \wedge 0 \wedge 0 \wedge \dots \wedge 0 \wedge 0$$

$n$  个对象 0

在间隔  $\wedge$  处选择  $r-1$  个

例如, 如果  $n=8$ ,  $r=3$ , 那么 (选择用点表示) 选择

$$0.0000.0000$$

图 1-2 正数解的个数

对应解  $x_1=1$ ,  $x_2=4$ ,  $x_3=3$ . 式 (6.1) 的正数解以一对一的方式对应于从  $n-1$  个间隔中选择  $r-1$  个间隔的结果, 由此得出不同的正数解的个数等于从  $n-1$  个间隔里选择  $r-1$  的方法个数. 于是, 我们得到如下命题.

**命题 6.1** 共有  $\binom{n-1}{r-1}$  个不同的正整数向量  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  满足

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad x_i > 0, i = 1, \dots, r$$

为了得到非负整数解 (而不是正整数解) 的个数, 注意,  $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$  的非负整数解个数与  $y_1 + y_2 + \dots + y_r = n+r$  的正整数解个数是相同的 (令  $y_i = x_i + 1$ ,  $i = 1, \dots, r$ ). 因此, 利用命题 6.1, 可得到如下命题.

⊖ 本书中打 \* 号表示这些内容可以选学.

**命题 6.2** 共有  $\binom{n+r-1}{r-1}$  个不同的非负整数向量  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  满足

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

因此, 由命题 6.2 可得, 在 Ticonderoga 湖共钓到 10 条鱼的情况下总共有  $\binom{13}{3} = 286$  种可能的结果.

**例 6a** 方程  $x_1 + x_2 = 3$  共有多少组不同的非负整数解?

**解** 一共有  $\binom{3+2-1}{2-1} = 4$  组解:  $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ . ■

**例 6b** 一位投资者有 2 万美元可投资到 4 个项目上, 且每种投资必须是 1000 美元的整数倍. 如果要求将 2 万美元全部投资, 一共有多少种可行的投资方法? 如果不要求将钱全部投资呢?

**解** 如果令  $x_i (i=1, 2, 3, 4)$  分别表示 4 个项目的投资额(单位: 千美元), 那么, 4 个项目的投资额就是方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_i \geq 0$$

的非负整数解. 因此, 根据命题 6.2, 一共有  $\binom{23}{3} = 1771$  种可能的投资方式. 如果并不需要将钱全部投资, 那么假设  $x_5$  表示剩余资金, 一种投资策略就对应了如下方程的一个非负整数解:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

再由命题 6.2 知, 存在  $\binom{24}{4} = 10\,626$  种可能的投资策略. ■

13

**例 6c** 在  $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$  的展开式中, 一共有多少项?

**解**

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$$

其中, 求和针对所有满足  $n_1 + \dots + n_r = n$  的非负整数  $(n_1, \dots, n_r)$ . 因此, 根据命题 6.2, 一共有  $\binom{n+r-1}{r-1}$  项. ■

**例 6d** 再来讨论例 4c, 有  $n$  个天线, 其中  $m$  个是不可分辨的失效天线, 另  $n-m$  个天线也是不可分辨但却有效的. 现在要求出排成一行且没有相邻两个失效天线的可能排列数. 为此, 设想  $m$  个失效的天线排成一行, 现找出放  $n-m$  个有效天线的位置. 如果是排成了如下方式:

$$x_1 \ 0 \ x_2 \ 0 \ \dots \ x_m \ 0 \ x_{m+1}$$

其中  $x_1 \geq 0$  是放在最左边的有效天线数,  $x_i > 0 (i=2, \dots, m)$  是放在第  $i-1$  个失效天线和第  $i$  个失效天线之间的有效天线数,  $x_{m+1} \geq 0$  是放在最右边的有效天线数. 这样的配置意味着任两个失效天线之间都至少有一个有效天线, 因此, 满足条件的可能的结果数是下列方程的向量解的个数:

$$x_1 + \dots + x_{m+1} = n - m \quad x_1 \geq 0, x_{m+1} \geq 0, x_i > 0, i = 2, \dots, m$$

令  $y_1 = x_1 + 1$ ,  $y_i = x_i$  ( $i = 2, \dots, m$ ),  $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$ , 可以看出这个数等同于以下方程的正整数向量解的个数:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{m+1} = n - m + 2$$

由命题 6.1 知, 一共有  $\binom{n-m+1}{m}$  种这样的配置方式, 这与例 4c 的结果一致.

现在来考虑每两个失效天线之间至少有 2 个有效天线这种情况的排列数, 根据上述同样的推理可知, 结果为如下方程的向量解的个数:

$$x_1 + \dots + x_{m+1} = n - m \quad x_1 \geq 0, x_{m+1} \geq 0, x_i \geq 2, i = 2, \dots, m$$

令  $y_1 = x_1 + 1$ ,  $y_i = x_i - 1$  ( $i = 2, \dots, m$ ),  $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$ , 可以看出这个数等同于以下方程的正整数向量解的个数:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{m+1} = n - 2m + 3$$

14

因此, 由命题 6.1 可知, 一共有  $\binom{n-2m+2}{m}$  种配置方式. ■

## 小结

计数基本法则阐述了如下事实: 如果一个试验分成两个阶段, 第一个阶段有  $n$  种可能的结果, 每种结果又对应于第二个阶段的  $m$  种可能的结果, 那么该试验一共有  $nm$  种可能的结果.

$n$  个元素一共有  $n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  种可能的排列方式. 特别地, 定义  $0! = 1$ .

令

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

其中  $0 \leq i \leq n$ , 否则等于 0. 此式表明了从  $n$  个元素中选取  $i$  个元素组的所有可能的组数. 因其在二项式定理中的突出地位, 它也常称为二项式系数, 二项式定理是说

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

对于任意和为  $n$  的非负整数  $n_1, \dots, n_r$ ,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

它等于把  $n$  个元素分成互不重叠的  $r$  部分且各个部分的元素个数分别是  $n_1, n_2, \dots, n_r$  的分法数. 这些数称为多项式系数.

## 习题

- 1.1 (a) 前 2 位为字母, 后 5 位为数字的 7 位汽车牌照一共多少种?  
(b) 在上述条件下, 如果不允许字母和数字重复又有多少种?
- 1.2 掷一枚骰子 4 次, 一共有多少种结果序列? 例如, 如果第一次为 3, 第二次为 4, 第三次为 3, 第四次为 1, 那么结果就是“3, 4, 3, 1”.
- 1.3 把 20 份不同的工作分派给 20 个工人, 每个工人一份工作, 问有多少种可能的分派方式?



- 1.4 约翰、吉姆、杰伊和杰克组成一个有 4 种乐器的乐队，如果每个人都会演奏这 4 种乐器，问可以有多少种不同的组合？如果约翰和吉姆会演奏这 4 种乐器，而杰伊和杰克分别只会弹钢琴及打鼓，那么又有多少种不同的组合？
- 1.5 一直以来，美国和加拿大的电话区号都由 3 位数字组成。第一位是 2~9 之间的任一数字；第二位是 0 或者 1；第三位是 1~9 之间的任一数字，问一共有多少种可能的区号？以 4 开头的区号一共有多少种可能？
- 1.6 有个熟知的童谣：
- 我出发去圣-艾弗斯，  
路上碰见一个人，  
带着他 7 个老婆，  
每个老婆挎着 7 个包，  
每个包里装着 7 只猫，  
每只猫生了 7 只小猫，  
数数看，我到底看到了多少只小猫？
- 1.7 (a) 3 个男孩和 3 个女孩坐在一排，一共有多少种坐法？  
(b) 如果男孩和女孩分别坐在一起，一共有多少种坐法？  
(c) 如果只要求男孩坐在一起，一共有多少种坐法？  
(d) 如果相邻的座位上必须坐异性，一共有多少种坐法？
- 1.8 以下单词的字母可以有多少种排列方式？  
(a) Fluke; (b) Propose; (c) Mississippi; (d) Arrange.
- 1.9 一个孩子有 12 块积木，其中 6 块黑色、4 块红色、1 块白色和 1 块蓝色。孩子想把这些积木排成一行，一共有多少种排法？
- 1.10 8 人坐在一排，一共有多少种坐法，如果  
(a) 没什么限制；(b) A 和 B 必须坐在一起；  
(c) 一共 4 个男人，4 个女人，且任何两个男人不能坐在一起，任何两个女人也不能坐在一起；  
(d) 共有 5 个男人，且他们必须坐在一起；(e) 有 4 对夫妇，每对夫妇必须坐在一起。
- 1.11 要把 3 本小说、2 本数学书和 1 本化学书摆放到书架上，一共有多少种摆放方法？  
(a) 书可以以任何顺序；(b) 要求数学书必须放一起，小说必须放一起；  
(c) 小说必须放一起，其他书无所谓。
- 1.12 某个班级有 30 名学生，有 5 个不同的奖项(成绩奖和组织奖等)要颁发，一共有多少种不同的颁奖方式？  
(a) 一个学生可以得多个奖项。(b) 每个学生最多只能得 1 个奖项。
- 1.13 有 20 个人，每人都要与其他人握一次手，一共要握多少次手？
- 1.14 从一副牌的 52 张中任意抽取 5 张，一共有多少种抽取结果？
- 1.15 一个舞蹈班有 22 名学生，10 女 12 男，要挑选 5 男 5 女然后配对，一共有多少种配法？
- 1.16 某学生从 6 本数学书、7 本科学书和 4 本经济学书里卖掉 2 本，他有多少种选择？如果  
(a) 两本书同一科目；(b) 两本书不同科目。
- 1.17 有 7 件不同的礼物要分给 10 个孩子，如果每个孩子最多只能拿 1 件礼物，一共有多少种分法？
- 1.18 有 5 名共和党人、6 名民主党人和 4 名无党派人士，要从中分别选取 2 名共和党人、2 名民主党人和 3 名无党派人士组成一个 7 人委员会。一共有多少种选取结果？

- 1.19 从8女6男里选择3女3男组成委员会,一共有多少种选取结果?  
 (a) 其中有两个男人拒绝同时进入委员会; (b) 其中有两个女人拒绝同时进入委员会;  
 (c) 其中有一男一女拒绝同时进入委员会.

- 1.20 某人有8个朋友,他打算邀请其中5人参加聚会,  
 (a) 如果有某两人长期不和,不能同时参加聚会,他有多少种邀请方案?  
 (b) 如果有某两人只能同时被邀请,一共有多少种邀请方案?

- 1.21 如图1-3所示,从标有A的地方出发,每一步只能向上或者向右移动,问移动到B一共有多少种移动方式?

提示:从A到B需向右4步,向上3步.

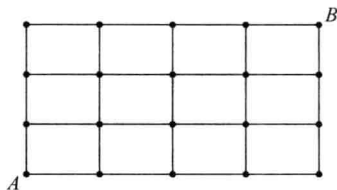


图 1-3

- 1.22 在习题1.21中,如果要求必须经过标有圆圈的点(见图1-4),一共有多少种移动方式?

- 1.23 某从事睡梦研究的心理学实验室有3个房间,每个房里有2张床.现要安排3对双胞胎进行睡梦实验研究,要求每对双胞胎必须安排在同一间房的床上,一共有多少种安排方法?

- 1.24 展开  $(3x^2 + y)^5$ .

- 1.25 桥牌比赛中有4个选手,每人分到13张牌,一共有多少种分法?

- 1.26 展开  $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4$ .

- 1.27 把12个人分成3个委员会,各委员会分别有3人、4人和5人,一共有多少种方法?

- 1.28 把8个老师分配到4所学校,一共有多少种分法?如果要求每个学校必须接收2个老师呢?

- 1.29 一共10个举重选手参加比赛,其中3名美国选手、4名俄罗斯选手、2名中国选手和1名加拿大选手.如果成绩只记录每个选手的国籍,一共有多少种可能的结果?如果美国选手有1名在总成绩前三名,另两名在总成绩的最后三名中,那么一共有多少种可能的结果?

- 1.30 有分别来自俄国、法国、英国和美国等10个国家的代表坐在一排,如果法国代表和英国代表必须坐在一起,而俄国代表和美国代表不能坐在一起,一共有多少种坐法?

- \* 1.31 8块相同的黑板分给4所学校,一共有多少种分法?如果要求每所学校至少分到1块黑板呢?

- \* 1.32 电梯载着8个人(不包括电梯工)自底层启动,到顶层6楼后,乘客已全部下完.如果电梯工只注意每层楼出去的人数,那么他能看到多少种离开电梯的方式?如果8个乘客中有5个男人和3个女人,而电梯工又只注意出去人的性别,问题的答案又是多少?

- \* 1.33 有2万美元要投资到4个项目上,每份投资必须是1000美元的整数倍,且每个项目如果有投资的话,最少投资额分别为2000, 2000, 3000和4000美元,一共有多少种可行的投资方法,如果:

(a) 每个项目都要投资; (b) 至少投资其中3个项目.

- \* 1.34 假设一个湖中共有5种鱼,现从中捕到了10条鱼.

(a) 如果每种鱼都有捕到,那么有多少种可能的不同结果?

(b) 如果有3条鱼是鳊鱼,那么有多少种可能的不同结果?

(c) 如果至少有2条鱼是鳊鱼,那么有多少种可能的不同结果?

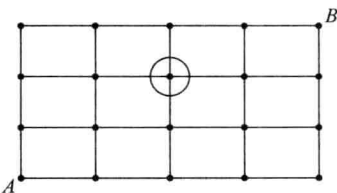


图 1-4

## 理论习题

- 1.1 证明推广的计数基本法则.

- 1.2 做两个试验,第一个试验有  $m$  种结果.对应其第  $i$  个结果,第二个试验有  $n_i$  种结果,  $i=1, 2, \dots$ ,

$m$ . 问这两个试验一共多少种可能的结果?

1.3 从  $n$  个元素里取  $r$  个, 如考虑抽取次序的话有多少种取法?

1.4 有  $n$  个球, 其中  $r$  个黑球,  $n-r$  个白球, 把它们排成一排, 用组合学知识解释共有  $\binom{n}{r}$  种排列方式.

1.5 计算形如  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的向量的个数, 其中  $x_i$  等于 0 或者 1, 且

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq k$$

1.6 有多少个这样的向量  $(x_1, \dots, x_k)$ , 其中  $x_i$  是正整数, 且满足  $1 \leq x_i \leq n$  和  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ ?

1.7 用分析的方法证明式 (4.1).

1.8 证明

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0} \binom{m}{r} + \binom{n}{1} \binom{m}{r-1} + \dots + \binom{n}{r} \binom{m}{0}$$

提示: 设有  $n$  个男人和  $m$  个女人, 从中挑选  $r$  人组成一组, 一共有多少个不同的组?

1.9 利用理论习题 1.8 的结论证明:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

1.10 从  $n$  个人中选取  $k$  个人组成一个委员会,  $k \leq n$ , 其中一人被任命为主席.

(a) 考虑先选出  $k$  个人, 然后任命其中一人为主席, 说明一共有  $\binom{n}{k} k$  种可能的选择.

(b) 考虑先选出  $k-1$  个人, 其中没有主席, 然后再在剩下的  $n-k+1$  个人中选一人为主席, 说明一共有  $\binom{n}{k-1} (n-k+1)$  种可能的选择.

(c) 考虑先选出主席, 然后再选出其他委员会成员, 说明一共有  $n \binom{n-1}{k-1}$  种可能的选择.

(d) 总结 (a)、(b)、(c), 得出

$$k \binom{n}{k} = (n-k+1) \binom{n}{k-1} = n \binom{n-1}{k-1}$$

(e) 利用  $\binom{m}{r}$  的阶乘定义证明 (d) 中的恒等式.

17

1.11 以下是著名的费马组合恒等式:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i-1}{k-1} \quad n \geq k$$

试从组合的角度(不用计算)来验证该恒等式.

提示: 考虑从  $1, 2, \dots, n$  的集合, 以  $i$  为最大值的含有  $k$  个元素的子集一共有多少个?

1.12 考虑如下组合恒等式:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

(a) 试从组合的角度解释上式, 可考虑从  $n$  个人中挑选若干人组成委员会并在其中选定一名主席的可能方式的两种计算方法.

提示:

(i) 如果选择  $k$  个人组成委员会并选定一名主席, 一共有多少种方法?

(ii) 先选好主席, 然后再选择其他成员, 一共有多少种选法?

(b) 证明以下等式对  $n=1, 2, 3, 4, 5$  都成立:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 = 2^{n-2} n(n+1)$$

为了从组合的角度证明上式, 指出上式的两边都等于如下的可能选择方式: 考虑有  $n$  个人, 从中选择若干人组成一个委员会, 并选定一名主席和一名秘书(有可能是同一人).

提示:

- (i) 如果委员会一共有  $k$  个人, 一共有多少种选择方式?
- (ii) 如果主席和秘书为同一人, 一共有多少种选择方式?
- (iii) 如果主席和秘书为不同的人, 一共有多少种选择方式?

(c) 证明:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3} n^2 (n+3)$$

1.13 证明: 对于  $n>0$ , 有

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

提示: 利用二项式定理.

1.14 从  $n$  个人里选择  $j$  个人组成委员会, 再从这个委员会里选择  $i(i \leq j)$  个人组成分委员会.

(a) 通过用两种方法分别计算委员会和分委员会的可能选择数来导出组合恒等式. 其中, 第一种方法是先选择  $j$  人组成委员会, 再从中选择  $i$  人组成分委员会. 第二种方法是先选择  $i$  人组成分委员会, 再补充  $j-i$  人组成委员会.

(b) 利用(a)证明组合恒等式:

$$\sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} 2^{n-i} \quad i \leq n$$

(c) 利用(a)和理论习题 1.13 证明:

$$\sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} (-1)^{n-j} = 0 \quad i < n$$

1.15 令  $H_k(n)$  为向量  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  的数目, 其中  $x_i$  是正整数且满足  $1 \leq x_i \leq n$  及  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ .

(a) 不用任何计算, 证明:

$$H_1(n) = n$$

$$H_k(n) = \sum_{j=1}^n H_{k-1}(j) \quad k > 1$$

提示: 如果  $x_k = j$ , 那么一共有多少向量?

(b) 利用上述递推公式计算  $H_3(5)$ .

提示: 先计算  $H_2(n)$ ,  $n=1, 2, 3, 4, 5$ .

1.16 有  $n$  个选手参加比赛, 最后排定成绩, 并且允许选手排名相同. 即可以按成绩排名将选手分成组, 成绩最好的为第一组, 成绩其次的为第二组, 等等. 用  $N(n)$  表示不同结果的可能数, 比如  $N(2)=3$ , 因为在一个只有 2 名选手参加的比赛中, 比赛结果一共有 3 种: 第一个选手获第一, 第二个选手获第一, 两个选手并列第一.

(a) 列出所有  $n=3$  时的可能结果;

(b) 令  $N(0)=1$ , 不用任何计算, 证明:

$$N(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} N(n-i)$$



提示：共有  $i$  个选手并列最后一名，一共有多少种结果？

(c) 证明：(b) 中的公式等价于

$$N(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} N(i)$$

(d) 利用上述递推公式，求出  $N(3)$  和  $N(4)$ 。

1.17 从组合的角度解释  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ 。

1.18 证明：

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_r} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_r} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_r-1}$$

提示：利用证明式(4.1)的类似方法。

1.19 证明多项式定理。

\* 1.20 将  $n$  个相同的球放到  $r$  个坛子里，要求第  $i$  个坛子至少有  $m_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) 个球，一共有多少种放

法？假设  $n \geq \sum_{i=1}^r m_i$ 。

\* 1.21 证明：方程

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

正好有  $\binom{r}{k} \binom{n-1}{n-r+k}$  个解，其中恰好有  $k$  个  $x_i$  为 0。

\* 1.22 考虑  $n$  元函数  $f(x_1, \dots, x_n)$ ， $f$  一共有多少个  $r$  阶偏导数？

\* 1.23 求向量  $(x_1, \dots, x_n)$  的数目，其中  $x_i$  为非负整数且满足

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k$$

## 自检习题

1.1 字母 A, B, C, D, E, F 一共有多少种排列方式，如果

(a) A 和 B 必须在一起；(b) A 在 B 之前；(c) A 在 B 之前，B 在 C 之前；

(d) A 在 B 之前，C 在 D 之前；(e) A 和 B 必须在一起，C 和 D 也必须在一起；(f) E 不在最后。

1.2 如果 4 个美国人、3 个法国人和 3 个英国人坐在一排，要求相同国籍的人必须坐在一起，那么一共有多少种坐法？

1.3 从有 10 个人的俱乐部中分别选 1 名总裁、1 名财务和 1 名秘书，一共有多少种选法，如果

(a) 没有任何限制；(b) A 和 B 不能同时被选；(c) C 和 D 要么同时被选，要么同时不被选；

(d) E 必须被选；(e) F 被选中的话，必须担任总裁。

1.4 在一次考试中，学生应从 10 道考题中选择 7 道回答，一共有多少种选法？如果规定必须在前 5 道中至少选 3 道，那么有多少种选法？

1.5 某人将 7 件礼物分给他的 3 个孩子，其中老大得 3 件，其余两人分别得 2 件，一共有多少分法？

1.6 一个 7 位汽车牌照中有 3 位是字母，4 位是数字，如果允许字母或数字重复且位置没有任何限制，一共有多少种可能的牌照号？

1.7 从组合的角度解释下列恒等式：

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

1.8 考虑一个  $n$  位数, 每位数字都是  $0, 1, \dots, 9$  中的一个, 一共有多少个这样的数? 如果

(a) 没有连续的相同的两个数字; (b)  $0$  出现  $i$  次,  $i=0, \dots, n$ .

1.9 考虑 3 个班级, 每个班级有  $n$  名学生, 从这  $3n$  名学生中选 3 人.

(a) 一共有多少种选法?

(b) 如果 3 人来自相同的班级, 一共有多少种选法?

(c) 如果有 2 人来自相同的班级, 另 1 人来自其他班级, 一共有多少种选法?

(d) 3 人分别来自不同的班级, 一共有多少种选法?

(e) 利用(a)到(d)的结果, 写出一个组合恒等式.

1.10 由整数  $1, 2, \dots, 9$  组成的 5 位数一共有多少? 要求每一个数中不容许有数字重复多于 2 次(如 41434 是不容许的).

1.11 从 10 对已婚人士中选出 6 人组成一组, 其中不容许包含任何一对夫妇. (a) 有多少种选择? (b) 如果这 6 个人里必须包含 3 男 3 女, 有多少种选择?

1.12 从 7 个男人和 8 个女人中选取 6 人组成委员会. 如果要求至少 3 个女人、2 个男人, 一共有多少种选取方法?

\* 1.13 一个艺术品收藏拍卖会共有 15 件艺术品要拍卖, 其中 4 件达利的、5 件凡高的和 6 件毕加索的. 共有 5 位艺术品收藏家买下了这批艺术品. 而某记者只记载了每位收藏家得到的达利、凡高和毕加索作品的数量, 问销售记录能有多少种不同的结果?

\* 1.14 计算向量  $(x_1, \dots, x_n)$  的个数, 这里要求  $x_i$  是正整数, 且

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k$$

其中  $k \geq n$ .

1.15  $n$  名学生参加保险精算师考试, 公榜结果只列出那些通过考试的学生名单, 并且按照他们的分数由高到低进行排序, 例如, 公榜结果为 "Brown, Cho" 意味着只有 Brown 和 Cho 通过了考试, 而且 Brown 的分数比 Cho 的高, 如果没有相同的分数, 那么公布的考试结果一共有多少种情况?

1.16 从集合  $S = \{1, 2, \dots, 20\}$  中选 4 个元素组成子集, 并且  $1, 2, 3, 4, 5$  中至少有一个被选中, 一共有多少个不同的子集?

1.17 给出下列恒等式的分析证明:

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2} \quad 1 \leq k \leq n$$

并给出该恒等式的组合解释.

1.18 在某一个社区里, 有 3 个家庭是由 1 个家长和 1 个孩子组成, 3 个家庭是由 1 个家长和 2 个孩子组成, 5 个家庭是由 2 个家长和 1 个孩子组成, 7 个家庭是由 2 个家长和 2 个孩子组成, 6 个家庭是由 2 个家长和 3 个孩子组成. 如果来自同样家庭的 1 个家长和 1 个孩子将要被选, 会有多少种不同的选择?

1.19 如果对数字和字母所放的位置没有限制, 由不重复的 5 个字母和 3 个数字组成的 8 位汽车牌照有多少种可能的结果? 如果三个数字是连续的呢?

1.20 证明等式

$$\sum_{x_1 + \dots + x_r = n, x_i \geq 0} \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_r!} = r^n$$

先证明当  $n=3, r=2$  时等式成立, 然后再证明对任意的  $n$  和  $r$  等式总是成立的. (求和是对所有  $r$  个非负整数值之和是  $n$  的向量进行的.) 提示: 在字母表中由前  $r$  个字母组成的  $n$  字母序列有多少种? 在字母表中使用了字母  $i$  总共  $x_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) 次, 这样组成的  $n$  字母序列有多少种?

## 第2章 概率论公理

### 2.1 引言

本章介绍事件的概率的概念, 然后展示在某些特定情形下计算概率的方法. 然而在引入概率的概念之前, 我们需要学习更基本的概念, 即试验的样本空间和事件.

### 2.2 样本空间和事件

考虑一个试验, 其结果是不可肯定地预测的. 当然, 尽管在试验之前无法得知结果, 但是假设所有可能结果的集合是已知的. 所有可能的结果构成的集合, 称为该试验的样本空间(sample space), 并记为  $S$ . 以下是样本空间的一些例子.

1. 若试验是考察新生婴儿的性别, 那么所有可能结果的集合

$$S = \{g, b\}$$

就是一个样本空间, 其中  $g$  表示“女孩”,  $b$  表示“男孩”.

2. 若试验是赛马比赛, 一共有 7 匹马参赛, 这 7 匹马分别标以 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 那么所有可能的比赛结果的集合

$$S = \{(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \text{ 的所有 } 7! \text{ 种排列}\}$$

就是一个样本空间. 如  $(2, 3, 1, 6, 5, 4, 7)$  就表示 2 号马跑第一, 3 号马跑第二, 接下来是 1 号马, 等等.

3. 若试验是掷两枚硬币, 考察哪一面朝上, 那么样本空间一共包含如下四种结果:

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

21

其中  $(H, H)$  表示两枚硬币都是正面朝上;  $(H, T)$  表示第一枚硬币正面朝上, 第二枚反面朝上;  $(T, H)$  表示第一枚硬币反面朝上, 第二枚正面朝上;  $(T, T)$  表示两枚硬币都是反面朝上.

4. 若试验是掷两枚骰子, 考察两枚骰子的点数, 那么样本空间包含 36 种结果:

$$S = \{(i, j); i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

其中,  $(i, j)$  表示第一个骰子的点数是  $i$ , 第二个骰子的点数是  $j$ .

5. 若试验是考察一个晶体管的寿命(小时), 那么样本空间是所有的非负实数, 即

$$S = \{x; 0 \leq x < \infty\}$$

样本空间的任一子集  $E$  称为事件(event), 事件就是由试验的某些可能结果组成的一个集合. 如果试验的结果包含在  $E$  里面, 那么就称事件  $E$  发生了. 以下是事件的一些例子.

在前面的例 1 中, 令  $E = \{g\}$ , 那么  $E$  就表示事件“婴儿是个女孩”, 类似地,  $F = \{b\}$  就表示事件“婴儿是个男孩”.

在例 2 中, 如果

$$E = \{\text{所有以 } 3 \text{ 开头的排列}\}$$

那么  $E$  就表示事件“3号马获得了第一名”.

在例3中, 如果  $E = \{(H, H), (H, T)\}$ , 那么  $E$  就表示事件“第一枚硬币正面朝上”.

在例4中, 如果  $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ , 那么  $E$  就表示“两个骰子的点数之和为7”这一事件.

在例5中, 如果  $E = \{x: 0 \leq x \leq 5\}$ , 那么  $E$  就表示“晶体管的寿命不超过5个小时”这一事件.

对于同一个样本空间  $S$  的任意两个事件  $E$  和  $F$ , 定义一个新的事件  $E \cup F$ , 它由以下结果组成: 这些结果或在  $E$  中, 或在  $F$  中, 或既在  $E$  中也在  $F$  中. 也就是说, 如果事件  $E$  或者事件  $F$  中有一个发生, 那么  $E \cup F$  就发生. 例如, 在例1中, 如果  $E = \{g\}$  表示新生儿是女孩,  $F = \{b\}$  表示新生儿是男孩, 那么

$$E \cup F = \{g, b\}$$

即  $E \cup F$  与整个样本空间  $S$  是一致的. 在例3中, 如果  $E = \{(H, H), (H, T)\}$  表示第一枚硬币是正面朝上,  $F = \{(T, H)\}$  表示第一枚硬币反面朝上且第二枚硬币正面朝上, 那么

$$E \cup F = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$$

因此,  $E \cup F$  意味着“至少有一枚硬币正面朝上”.

事件  $E \cup F$  称为事件  $E$  和事件  $F$  的并(union).

类似地, 对于任意两个事件  $E$  和  $F$ , 还可以定义  $EF$ , 称为  $E$  和  $F$  的交(intersection), 它由  $E$  和  $F$  的公共元素组成. 即事件  $EF$  (有时也记为  $E \cap F$ ) 发生当且仅当  $E$  和  $F$  同时发生. 比如在例3中, 事件  $E = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$  表示“至少有一枚硬币正面朝上”, 而  $F = \{(H, T), (T, H), (T, T)\}$  表示“至少有一枚硬币反面朝上”, 那么

$$EF = \{(H, T), (T, H)\}$$

就表示“恰好一枚硬币正面朝上和一枚硬币反面朝上”. 在例4中, 事件  $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$  表示两个骰子的点数之和为7, 而  $F = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$  表示两个骰子的点数之和为6, 那么  $EF$  不包含任何试验结果, 因此它也不可能发生. 类似这样的事件, 称为不可能事件, 记为  $\emptyset$  (即  $\emptyset$  是不包含任何结果的事件). 如果  $EF = \emptyset$ , 则称  $E$  和  $F$  是互不相容的(mutually exclusive).

用类似的方式可以定义两个以上事件的并和交. 设  $E_1, E_2, \dots$  是一系列事件, 这些事件的并记为  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , 它表示至少包含在某一个  $E_n$  中的所有结果所构成的事件. 同样, 这些

事件的交记为  $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ , 它表示包含在所有  $E_n$  中的所有结果构成的事件.

最后, 对于任意事件  $E$ , 可以定义  $E$  的补, 记为  $E^c$ , 它表示包含在样本空间中但不包含在  $E$  中的所有结果构成的事件. 即  $E^c$  发生当且仅当  $E$  不发生. 在例4中, 如果

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

那么当两个骰子的点数之和不等于7时,  $E^c$  发生. 注意, 样本空间  $S$  的补  $S^c = \emptyset$ .

对于任意两个事件  $E$  和  $F$ , 如果  $E$  中的所有结果都在  $F$  中, 那么称  $E$  包含于  $F$  或者  $E$  是  $F$  的子集, 记为  $E \subset F$  (或者  $F \supset E$ , 有时候称  $F$  是  $E$  的一个超集). 因此, 如果  $E \subset F$ ,

那么  $E$  发生就表示  $F$  也发生. 如果  $E \subset F$  和  $F \subset E$ , 那么称  $E$  和  $F$  是相等的, 记为  $E = F$ .

维恩图(Venn Diagram)是一种用来阐述事件之间的逻辑关系的非常实用的几何表示方法. 样本空间  $S$  用一个大的矩形表示, 意即它包含了所有可能结果, 事件  $E, F, G, \dots$  用包含在矩形之内的一一个个小圆表示, 所关心的事件可以用相应的阴影区域表示. 比如, 在图 2-1 的 3 个维恩图中, 阴影部分分别表示  $E \cup F$ ,  $EF$  和  $E^c$ . 图 2-2 表示  $E \subset F$ .

23

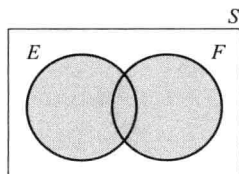
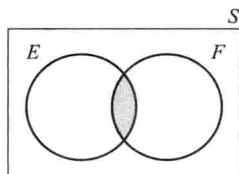
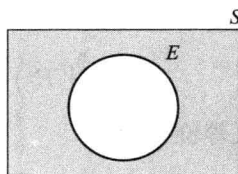
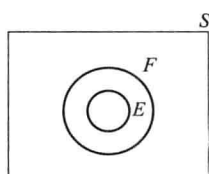
a) 阴影区域:  $E \cup F$ b) 阴影区域:  $EF$ c) 阴影区域:  $E^c$ 

图 2-1 维恩图

图 2-2  $E \subset F$ 

事件的并、交和补遵循类似于代数学里的一些运算法则, 例如,

交换律:  $E \cup F = F \cup E$

$EF = FE$

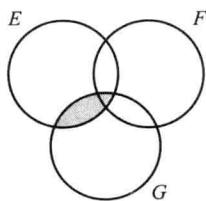
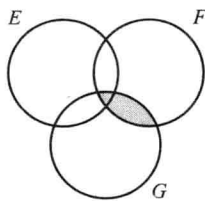
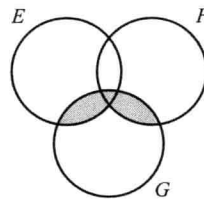
结合律:  $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$

$(EF)G = E(FG)$

分配律:  $(E \cup F)G = EG \cup FG$

$EF \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$

上述关系可以通过以下方式证明: 先证明等式左边的事件中的任一结果必然包含于等式右边的事件中, 再证明等式右边的事件中的任一结果也包含于等式左边的事件中. 另一种证明方法就是利用维恩图, 比如图 2-3 就表示了分配律.

a) 阴影区域:  $EG$ b) 阴影区域:  $FG$ c) 阴影区域:  $(E \cup F)G$ 图 2-3  $(E \cup F)G = EG \cup FG$ 

24

下面关于事件的并、交和补这三个基本运算之间的重要的关系式称为德摩根律(De Morgan law):

$$\left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c \quad \left( \bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c$$

例如, 对于事件  $E$  和  $F$ , 德摩根律表明  $(E \cup F)^c = E^c F^c$  和  $(EF)^c = E^c \cup F^c$ . 通过维恩图可以很容易地得到这个结果(见理论习题 7).

对于一般的  $n$ , 为了证明德摩根律, 首先假设  $x$  是  $\left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c$  里的一个元素, 那么  $x$  不包含于  $\bigcup_{i=1}^n E_i$ , 这就意味着  $x$  并不包含于任一个事件  $E_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 所以对任意  $i (i=1,$

2, ..., n) 来说,  $x$  就包含于  $E_i^c$ , 即  $x$  包含于  $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$ . 另一方面, 假设  $x$  包含于  $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$ , 那么对任一  $i (i=1, 2, \dots, n)$ ,  $x$  包含于  $E_i^c$ , 这就意味着  $x$  不属于任何  $E_i$ , 所以  $x$  不包含于  $\bigcup_{i=1}^n E_i$ , 即  $x$  包含于  $\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^c$ . 这样就证明了德摩根律的第一条.

现证明德摩根律的第二条, 由第一条定律可知

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^n (E_i^c)^c$$

这样, 由  $(E^c)^c = E$ , 上式等价于

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i$$

对两边取补运算, 就得到所要的结果, 即

$$\bigcup_{i=1}^n E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right)^c$$

## 2.3 概率论公理

一种定义事件发生概率的方法是利用事件发生的相对频率. 定义如下: 假设有一个样本空间为  $S$  的试验, 它在相同的条件下可重复进行. 对于样本空间  $S$  中的事件  $E$ , 记  $n(E)$  为  $n$  次重复试验中事件  $E$  发生的次数. 那么, 该事件发生的概率  $P(E)$  就定义如下:

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n}$$

即定义概率  $P(E)$  为  $E$  发生的次数占试验总次数的比例的极限, 也即  $E$  发生频率的极限.

虽然上述定义很直观, 而且大多读者也一直这么认为, 但它却有很严重的缺陷: 怎么就知道  $n(E)/n$  会收敛到一个固定的常数, 而且如果进行另一次重复试验, 它也会收敛到这个相同的常数? 例如, 设想进行这样的试验: 重复掷一枚硬币  $n$  次, 怎么能保证在  $n$  次试验中正面朝上的比例会随着  $n$  的增大而收敛于某个常数? 而且, 即使它确实收敛于某个数, 又如何保证, 进行另一次同样的重复试验, 正面朝上的比例也会趋于同样的值?

用相对频率来定义概率的支持者常常如下回答上述问题: 他们认为  $n(E)/n$  趋于某常数极限值是整个系统的一个假设, 或者说一个公理(axiom). 但是, 这个假设似乎异常复杂, 因为, 尽管事实上需要假定频率的极限是存在的, 但是这却不是一个最基本、最简单的假设. 同时, 这样的假设也不一定被所有人认同. 事实上, 先假定一些更简单、更显而易见的关于概率的公理, 然后去证明频率在某种意义上趋于一个常数极限不是更合情合理吗? 这也正是本书采纳的现代概率论公理化方法. 特别地, 我们假定对于样本空间中的任意事件  $E$ , 都存在一个值  $P(E)$  (指的就是事件  $E$  的概率), 并假定这些概率值符合一系列公理. 读者一定会认可这些与我们对概率的直觉认识相一致的公理.

假设某个试验的样本空间为  $S$ , 对应于其中任一事件  $E$ , 定义一个数  $P(E)$ , 它满足如下 3 个公理.

### 概率的三个公理

公理 1

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

公理 2

$$P(S) = 1$$

公理 3 对任一列互不相容的事件  $E_1, E_2, \dots$  (即如果  $i \neq j$ , 则  $E_i E_j = \emptyset$ ), 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

我们把满足以上 3 条公理的  $P(E)$  称为事件  $E$  的概率.

26

公理 1 说明, 任何事件  $E$  的概率在 0 到 1 之间. 公理 2 说明,  $S$  作为必然发生的事件, 其概率定义为 1. 公理 3 说明对任意一列互不相容事件, 至少有一事件发生的概率等于各事件发生的概率之和.

设  $E_1, E_2, \dots$  为一特殊的事件序列, 其中  $E_1 = S, E_i = \emptyset (i > 1)$ , 那么, 因为各个事件互不相容, 且  $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ . 由公理 3 可以得到

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

这就说明

$$P(\emptyset) = 0$$

即空事件发生的概率为 0.

注意, 对于有限个互不相容事件的序列  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) \quad (3.1)$$

为证明这个结论, 只需在公理 3 中令所有  $E_i (i > n)$  为空事件即可. 当样本空间为有限集时, 公理 3 与式 (3.1) 是等价的, 但当样本空间是无限集时, 公理 3 的推广就是必要的.

**例 3a** 如果试验是掷一枚硬币, 记正面朝上的事件为  $H$ , 反面朝上的事件为  $T$ . 假设两个事件是等可能的, 那么

$$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$$

另外, 如果这个硬币是有偏的, 而且正面朝上的机会是反面朝上机会的 2 倍, 那么

$$P(\{H\}) = \frac{2}{3} \quad P(\{T\}) = \frac{1}{3}$$

**例 3b** 如果掷一枚骰子, 其 6 个面等可能地出现, 那么, 就有  $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6$ . 从公理 3 可知出现偶数面朝上的概率为

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$$



设  $P(E)$  是定义在样本空间中的事件上的集函数, 若它满足上述 3 个公理, 则  $P(E)$  就是事件  $E$  的概率. 这一定义是现代概率论的数学基础. 我们希望读者会认为这些公理很自然, 而且与对概率的直觉概念(即概率是与机会和随机性有关的知识)很吻合. 进一步, 利用这些公理可以证明, 随着试验的不断重复, 事件  $E$  发生的频率以概率 1 趋近  $P(E)$ . 这就是第 8 章将要介绍的强大数定律. 另外, 2.7 节还将介绍概率的另一种解释, 即概率可作为确信程度的度量.

**技术注释** 在定义中, 我们假定概率  $P(E)$  是针对样本空间中的所有事件  $E$  定义的, 事实上, 如果样本空间是不可数集, 那么  $P(E)$  仅仅针对那些所谓可测的事件进行定义. 但是, 这并不是概率论的缺陷, 因为现实中没有不可测事件.

## 2.4 几个简单命题

本节我们证明几个有关概率的简单命题. 首先注意  $E$  和  $E^c$  总是互不相容的, 而且  $E \cup E^c = S$ , 因此由公理 2 和公理 3 可以得到

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

等价地, 我们有命题 4.1.

**命题 4.1**

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

命题 4.1 说明, 一个事件不发生的概率, 等于 1 减去它发生的概率. 比如, 掷一枚硬币, 若正面朝上的概率是  $3/8$ , 那么反面朝上的概率一定是  $1 - 3/8 = 5/8$ .

下面的命题指出了如果事件  $E$  包含于事件  $F$ , 那么  $E$  发生的概率必然不大于  $F$  发生概率.

**命题 4.2** 如果  $E \subset F$ , 那么  $P(E) \leq P(F)$ .

**证明** 因为  $E \subset F$ , 所以可将  $F$  表示为

$$F = E \cup E^c F$$

这样,  $E$  和  $E^c F$  是互不相容的, 由公理 3 可得

$$P(F) = P(E) + P(E^c F)$$

由于  $P(E^c F) \geq 0$ , 因此  $P(E) \leq P(F)$ . □

命题 4.2 告诉我们, 例如, 掷一枚骰子, 出现 1 的概率肯定小于等于出现奇数的概率. 下一命题借助两事件的概率给出了它们的并的概率与交的概率之间的关系.

**命题 4.3**

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

**证明** 首先注意  $E \cup F$  可以表示为两个互不相容事件  $E$  和  $E^c F$  的并, 因此根据公理 3 可知

$$P(E \cup F) = P(E \cup E^c F) = P(E) + P(E^c F)$$

另外, 由于  $F = EF \cup E^c F$ , 再利用公理 3 也可以得到

$$P(F) = P(EF) + P(E^c F)$$

或等价地,

$$P(E^c F) = P(F) - P(EF)$$

将它代入前面关于  $P(E \cup F)$  的表达式, 就完成了证明. □

命题 4.3 也可以利用维恩图来证明, 见图 2-4.

将  $E \cup F$  分成 3 个互不相容的部分, 如图 2-5 所示. 第 I 部分表示的是所有属于  $E$  但不属于  $F$  的点(即  $EF^c$ ), 第 II 部分表示所有既属于  $E$  也属于  $F$  的点(即  $EF$ ), 第 III 部分表示所有属于  $F$  但不属于  $E$  的点(即  $E^cF$ ).

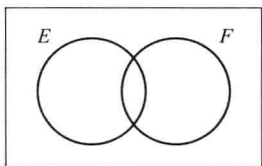


图 2-4 维恩图

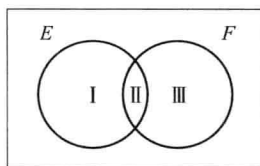


图 2-5 维恩图

从图 2-5 可以看出,

$$E \cup F = I \cup II \cup III \quad E = I \cup II \quad F = II \cup III$$

由于 I, II, III 是互不相容的, 由公理 3 可得

$$P(E \cup F) = P(I) + P(II) + P(III)$$

$$P(E) = P(I) + P(II)$$

$$P(F) = P(II) + P(III)$$

由以上就可以得出

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(II)$$

又因为  $II = EF$ , 所以命题 4.3 得以证明.

**例 4a** J 在度假时随身携带了两本书. 她喜欢第一本书的概率为 0.5, 喜欢另外一本的概率为 0.4, 两本书都喜欢的概率为 0.3, 问两本书她都不喜欢的概率是多大?

29

**解** 令  $B_i$  表示她喜欢第  $i$  本书 ( $i=1, 2$ ), 那么她至少喜欢一本书的概率为

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$$

因为两本书都不喜欢的对立事件是至少喜欢一本书, 所以

$$P(B_1^c B_2^c) = P((B_1 \cup B_2)^c) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = 0.4$$

我们还可以计算三个事件  $E, F, G$  之中至少有一个发生的概率, 即

$$P(E \cup F \cup G) = P[(E \cup F) \cup G]$$

由命题 4.3 可知上式等于

$$P(E \cup F) + P(G) - P[(E \cup F)G]$$

由分配律可知  $(E \cup F)G = EG \cup FG$ , 因此由上述等式可得

$$\begin{aligned} P(E \cup F \cup G) &= P(E) + P(F) - P(EF) + P(G) - P(EG \cup FG) \\ &= P(E) + P(F) - P(EF) + P(G) - P(EG) - P(FG) + P(EGFG) \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P(EF) - P(EG) - P(FG) + P(EFG) \end{aligned}$$

下面的命题, 也称为容斥恒等式(inclusion-exclusion identity), 可由数学归纳法证明.

**命题 4.4**

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \cdots +$$

$$(-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_r}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \cdots E_n)$$

其中,  $\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_r})$  表示对一切下标集合  $\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$  所对应的值求和, 和项一共包含  $\binom{n}{r}$  项.

换言之,  $n$  个事件并的概率, 等于这些事件的独自发生的概率之和, 减去两个事件同时发生的概率之和, 再加上三个事件同时发生的概率之和……

**注释** 1. 现在我们来直观解释一下命题 4.4 的含义, 首先注意, 如果样本空间中的某个结果不属于任意的  $E_i$ , 那么等式两边都不应该有它的概率. 现在假设某个结果正好包含在  $m$  个  $E_i$  里面 (其中  $m > 0$ ), 那么因为它属于  $\bigcup_i E_i$ , 所以它的概率在  $P(\bigcup_i E_i)$  中只计算一次. 而且, 因为这个结果也包含于形如  $E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots,$

$E_{i_k}$  这样的  $\binom{m}{k}$  个子集中, 在命题 4.4 中等式的右边, 这个结果的概率被计算了

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots \pm \binom{m}{m}$$

次. 因此, 对于  $m > 0$ , 我们必须证明

$$1 = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots \pm \binom{m}{m}$$

然而, 因为  $1 = \binom{m}{0}$ , 上式等价于

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i = 0$$

而这是二项式定理的结果, 因为

$$0 = (-1+1)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i (1)^{m-i}$$

2. 以下式子是容斥恒等式更简明的写法:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} P(E_{i_1} \cdots E_{i_r})$$

3. 在容斥恒等式中, 右边如果只取前一项, 那么得到事件并的概率的一个上界; 如果取前两项, 那么得到事件并的概率的一个下界; 取前 3 项, 得到一个上界; 取前 4 项, 得到一个下界, 以此类推. 也就是说, 对于事件  $E_1, \cdots, E_n$ , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i) \quad (4.1)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{j < i} P(E_i E_j) \quad (4.2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{j<i} P(E_i E_j) + \sum_{k<j<i} P(E_i E_j E_k) \quad (4.3)$$

等等. 为了证明这些不等式, 先注意恒等式

$$\bigcup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup E_1^c E_2 \cup E_1^c E_2^c E_3 \cup \cdots \cup E_1^c \cdots E_{n-1}^c E_n$$

即  $E_i$  中至少有一个发生, 相当于  $E_1$  发生, 或者  $E_1$  不发生但是  $E_2$  发生, 或者  $E_1$  和  $E_2$  都不发生但  $E_3$  发生, 等等. 因为上式的右边是一系列互不相容事件的并, 所以

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) &= P(E_1) + P(E_1^c E_2) + P(E_1^c E_2^c E_3) + \cdots + P(E_1^c \cdots E_{n-1}^c E_n) \\ &= P(E_1) + \sum_{i=2}^n P(E_1^c \cdots E_{i-1}^c E_i) \end{aligned} \quad (4.4)$$

31

令  $B_i = E_1^c \cdots E_{i-1}^c = \left(\bigcup_{j<i} E_j\right)^c$  表示前  $i-1$  个事件都不发生, 利用恒等式

$$P(E_i) = P(B_i E_i) + P(B_i^c E_i)$$

可证明

$$P(E_i) = P(E_1^c \cdots E_{i-1}^c E_i) + P\left(E_i \bigcup_{j<i} E_j\right)$$

或等价地,

$$P(E_1^c \cdots E_{i-1}^c E_i) = P(E_i) - P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right)$$

将此代入式(4.4)可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_i P(E_i) - \sum_i P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right) \quad (4.5)$$

因为概率总是非负的, 所以由式(4.5)便可直接得到不等式(4.1). 现在, 固定  $i$ ,

将不等式(4.1)应用到  $P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right)$  可得

$$P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right) \leq \sum_{j<i} P(E_i E_j)$$

此式结合式(4.5), 又可得出不等式(4.2). 类似地, 固定  $i$ , 将不等式(4.2)应用到  $P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right)$ , 可得到

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right) &\geq \sum_{j<i} P(E_i E_j) - \sum_{k<j<i} P(E_i E_j E_k) \\ &= \sum_{j<i} P(E_i E_j) - \sum_{k<j<i} P(E_i E_j E_k) \end{aligned}$$

由上式和式(4.5), 便可得到不等式(4.3). 其他的不等式都可以通过固定  $i$  并将不等式(4.3)应用到  $P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right)$  得到.

## 2.5 等可能结果的样本空间

在很多试验中, 一个很自然的假设是, 样本空间中的所有结果发生的可能性都是一样

的. 即考虑一个试验, 其样本空间  $S$  是有限集, 不妨设为  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ , 那么就经常会自然地假设

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{N\})$$

结合公理 2 和公理 3, 上式意味着(为什么?)

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

再利用公理 3 就可以得到, 对任何事件  $E$ ,

$$P(E) = \frac{E \text{ 中的结果数}}{S \text{ 中的结果数}}$$

换言之, 如果假定一次试验的所有结果都是等可能发生的, 那么任何事件  $E$  发生的概率等于  $E$  中所含有的结果数占样本空间中的所有结果数的比例.

32

**例 5a** 如果掷两枚骰子, 那么朝上那一面数字之和为 7 的概率是多少?

**解** 我们假设所有的 36 种可能结果都是等可能地发生的, 这样, 就有 6 种可能的结果满足数字之和等于 7, 即  $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ . 因此, 两枚骰子点数之和为 7 的概率应该是  $6/36 = 1/6$ . ■

**例 5b** 一个碗里面一共有 6 个白球, 5 个黑球, 随机地从里面取出 3 个球, 那么恰好取出 1 个白球 2 个黑球的概率是多少?

**解** 首先考虑取球是有顺序的, 样本空间一共包含  $11 \times 10 \times 9 = 990$  种结果. 现在考虑事件“取出 1 个白球, 2 个黑球”所包含的可能结果: 第一个球是白色的, 后两个球是黑色的一共有  $6 \times 5 \times 4 = 120$  种; 第一个球是黑色的, 第二个球是白色的, 第三个球又是黑色的一共有  $5 \times 6 \times 4 = 120$  种; 前两个球是黑色的, 第三个球是白色的一共有  $5 \times 4 \times 6 = 120$  种. “随机取”意味着样本空间的结果都是等可能地发生的, 因此所求概率为

$$\frac{120 + 120 + 120}{990} = \frac{4}{11}$$

这个问题也可以认为取球是没有顺序的, 从这个角度看, 样本空间一共存在  $\binom{11}{3} = 165$  种结果. 当然, 这 165 种结果也是等可能的. 与事件“1 个白球, 2 个黑球”相关的结果有  $\binom{6}{1}\binom{5}{2}$  种, 因此, 取出 1 个白球和 2 个黑球的概率为

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11}$$

这个结果同前面的答案是一致的. ■

当一个试验是从  $n$  个物品的集合中随机选取  $k$  个物品时, 我们可以灵活地认为选取物品是有顺序的也可以认为是没有顺序的. 在前一种情况下, 我们假设在剩下的物品中进行新的一次选取是等可能的. 在后一种情况下, 假设所有  $\binom{n}{k}$  种  $k$  个物品组成集合的方法是

等可能的. 例如, 随机从 10 对夫妻中选取 5 个人, 求这 5 个人互相没有关系的概率  $P(N)$ . (即 5 人中任何两人都不是夫妻.) 如果认为样本空间是 5 个被选取的人组成的集合, 则共有  $\binom{20}{5}$  种等可能的结果. 其中任何两人都不是夫妻的结果可以认为是 6 步试验的结果: 第一步是 10 对夫妻中的 5 对夫妻被选出; 接下来的 5 步是这 5 对夫妻中的每一对都有一个人被选出. 这样, 就有  $\binom{10}{5} \times 2^5$  种可能的结果, 可以得出要求的概率

33

$$P(N) = \frac{\binom{10}{5} \times 2^5}{\binom{20}{5}}.$$

相反, 可以有顺序地选取 5 个个体. 在这种情况下, 有  $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16$  种等可能的结果, 其中选取 5 个互相没有关系的个体的结果有  $20 \times 18 \times 16 \times 14 \times 12$  种, 则要求的概率是

$$P(N) = \frac{20 \times 18 \times 16 \times 14 \times 12}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}$$

上述两种方法得到的  $P(N)$  是相同的, 读者可以自行证明.

**例 5c** 需要从 6 个男人和 9 个女人中选取 5 人组成委员会, 如果选取是随机的, 那么委员会由 3 个男人和 2 个女人组成的概率有多大?

**解** 随机选取意味着所有  $\binom{15}{5}$  种组合的选择是等可能的, 而与事件“3 男 2 女”相关的结果有  $\binom{6}{3} \binom{9}{2}$  种, 因此所求事件的概率为

$$\frac{\binom{6}{3} \binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001} \quad \blacksquare$$

**例 5d** 一个坛子里共有  $n$  个球, 其中一个做了标记. 如果依次从中随机取出  $k$  个球, 那么做了标记的球被取出来的概率有多大?

**解** 从  $n$  个球中选取  $k$  个球, 一共有  $\binom{n}{k}$  种选取方法, 每一种选取方法都是等可能的. 与事件“做标记的球被取出”相关的选法共有  $\binom{1}{1} \binom{n-1}{k-1}$  种, 因此

$$P(\{\text{做标记的球被取出}\}) = \frac{\binom{1}{1} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$$

也可以这样求解: 设  $k$  个球是顺序地被取出的, 用  $A_i$  表示做标记的球在第  $i$  次被取出 ( $i = 1, \dots, k$ ). 既然所有的球在第  $i$  次被抽取的概率是一样的, 那么  $P(A_i) = 1/n$ . 而这些事件是彼此互不相容的, 因此,