

# 第一章 概率论的基本概念

1. 写出下列随机试验的样本空间  $S$ :

(1) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”,如连续查出了 2 件次品就停止检查,或检查了 4 件产品就停止检查,记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

解 (1) 以  $n$  表示该班的学生数,总成绩的可能取值为  $0, 1, 2, 3, \dots, 100n$ , 所以试验的样本空间为

$$S = \left\{ \frac{i}{n} \mid i = 0, 1, 2, \dots, 100n \right\}.$$

(2) 设在生产第 10 件正品前共生产了  $k$  件不合格品,样本空间为  $S = \{10 + k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$  或写成  $S = \{10, 11, 12, \dots\}$ .

(3) 采用 0 表示检查到一件次品,以 1 表示检查到一件正品,例如 0110 表示第一次与第四次检查到次品,而第二次与第三次检查到的是正品,样本空间可表示为

$$S = \{00, 100, 0100, 0101, 0110, 1100, 1010, 1011, 0111, 1101, 1110, 1111\}.$$

(4) 取一直角坐标系,则有  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ,若取极坐标系,则有  $S = \{(\rho, \theta) \mid \rho < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ .

2. 设  $A, B, C$  为三个事件,用  $A, B, C$  的运算关系表示下列各事件:

(1)  $A$  发生,  $B$  与  $C$  不发生.

(2)  $A$  与  $B$  都发生,而  $C$  不发生.

(3)  $A, B, C$  中至少有一个发生.

(4)  $A, B, C$  都发生.

(5)  $A, B, C$  都不发生.

(6)  $A, B, C$  中不多于一个发生.

(7)  $A, B, C$  中不多于两个发生.

(8)  $A, B, C$  中至少有两个发生.

解 以下分别用  $D_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  表示 (1), (2),  $\dots$ , (8) 中所给出的事件. 注意到一个事件不发生即为它的对立事件发生,例如事件  $A$  不发生即为  $\bar{A}$



发生.

(1)  $A$  发生,  $B$  与  $C$  不发生, 表示  $A, \bar{B}, \bar{C}$  同时发生, 故  $D_1 = A\bar{B}\bar{C}$  或写成  $D_1 = A - B - C$ .

(2)  $A$  与  $B$  都发生而  $C$  不发生, 表示  $A, B, \bar{C}$  同时发生, 故  $D_2 = AB\bar{C}$  或写成  $D_2 = AB - C$ .

(3) 由和事件的含义知, 事件  $A \cup B \cup C$  即表示  $A, B, C$  中至少有一个发生, 故  $D_3 = A \cup B \cup C$ .

也可以这样考虑: 事件“ $A, B, C$  至少有一个发生”是事件“ $A, B, C$  都不发生”的对立事件, 因此,  $D_3 = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ .

也可以这样考虑: 事件“ $A, B, C$  中至少有一个发生”表示三个事件中恰有一个发生或恰有两个发生或三个事件都发生, 因此,  $D_3$  又可写成

$$D_3 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC.$$

(4)  $D_4 = ABC$ .

(5)  $D_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

(6) “ $A, B, C$  中不多于一个发生”表示  $A, B, C$  都不发生或  $A, B, C$  中恰有一个发生, 因此,  $D_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ .

又“ $A, B, C$  中不多于一个发生”表示“ $A, B, C$  中至少有两个不发生”, 亦即  $\bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{C}$  中至少有一个发生, 因此又有  $D_6 = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{B}\bar{C} \cup \bar{C}\bar{A}$ .

又“ $A, B, C$  中不多于一个发生”是事件  $G = “A, B, C$  中至少有两个发生”的对立事件. 而事件  $G$  可写成  $G = AB \cup BC \cup CA$ , 因此又可将  $D_6$  写成

$$D_6 = \overline{AB \cup BC \cup CA} = \overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{CA}.$$

(7) “ $A, B, C$  中不多于两个发生”表示  $A, B, C$  都不发生或  $A, B, C$  中恰有一个发生或  $A, B, C$  中恰有两个发生. 因此,  $D_7 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup ABC$ . 又“ $A, B, C$  中不多于两个发生”表示  $A, B, C$  中至少有一个不发生, 亦即  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  中至少有一个发生, 即有  $D_7 = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ .

又“ $A, B, C$  中不多于两个发生”是事件“ $A, B, C$  三个都发生”的对立事件, 因此又有  $D_7 = \overline{ABC}$ .

(8)  $D_8 = AB \cup BC \cup CA$ , 也可写成  $D_8 = ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C}$ .

注意: (i) 两事件的差可用对立事件来表示, 例如  $A - B = A\bar{B}$ ,  $A - BC = A\bar{B}\bar{C}$ .

(ii) 易犯的错误是, 误将  $\overline{AB}$  与  $\bar{A}\bar{B}$  等同起来, 事实上,  $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \neq \bar{A}\bar{B}$ , 又如  $\overline{ABC} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \neq \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

(iii) 误以为  $S = A \cup B \cup C$ , 事实上,  $S - A \cup B \cup C$  可能不等于  $\emptyset$ , 一般  $S \supset A \cup B \cup C$ .



3. (1) 设  $A, B, C$  是三个事件, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ,  $P(AB) = P(BC) = 0$ ,  $P(AC) = \frac{1}{8}$ , 求  $A, B, C$  至少有一个发生的概率.

(2) 已知  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(C) = \frac{1}{5}$ ,  $P(AB) = \frac{1}{10}$ ,  $P(AC) = \frac{1}{15}$ ,  $P(BC) = \frac{1}{20}$ ,  $P(ABC) = \frac{1}{30}$ , 求  $A \cup B$ ,  $\overline{A}\overline{B}$ ,  $A \cup B \cup C$ ,  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ,  $\overline{A}\overline{B}C$ ,  $\overline{A}\overline{B} \cup C$  的概率.

(3) 已知  $P(A) = \frac{1}{2}$ , (i) 若  $A, B$  互不相容, 求  $P(\overline{A}\overline{B})$ , (ii) 若  $P(AB) = \frac{1}{8}$ , 求  $P(\overline{A}\overline{B})$ .

解 (1)  $P(A \cup B \cup C)$

$$\begin{aligned} &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{5}{8} + P(ABC). \end{aligned}$$

由  $ABC \subset AB$ , 已知  $P(AB) = 0$ , 故  $0 \leq P(ABC) \leq P(AB) = 0$ , 得  $P(ABC) = 0$ . 所求概率为  $P(A \cup B \cup C) = \frac{5}{8}$ .

$$(2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{11}{15}.$$

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{4}{15}.$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{51}{60} = \frac{17}{20}. \end{aligned}$$

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{20}.$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\overline{B}C) &= P(\overline{A}\overline{B}(S - \overline{C})) = P(\overline{A}\overline{B} - \overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A}\overline{B}) - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) \\ &= \frac{4}{15} - \frac{3}{20} = \frac{16-9}{60} = \frac{7}{60}. \end{aligned}$$

记  $p = P(\overline{A}\overline{B} \cup C)$ , 由加法公式

$$p = P(\overline{A}\overline{B}) + P(C) - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} - \frac{7}{60} = \frac{7}{20}.$$

$$(3) (i) P(\overline{A}\overline{B}) = P(A(S - B)) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (ii) P(\overline{A}\overline{B}) &= P(A(S - B)) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$



4. 设  $A, B$  是两个事件

(1) 已知  $A\bar{B}=\bar{A}B$ , 验证  $A=B$ .

(2) 验证事件  $A$  和事件  $B$  恰有一个发生的概率为  $P(A)+P(B)-2P(AB)$ .

解 (1) 假设  $A\bar{B}=\bar{A}B$ , 故有  $(A\bar{B})\cup(AB)=(\bar{A}B)\cup(AB)$ , 从而  $A(\bar{B}\cup B)=(\bar{A}\cup A)B$ , 即  $AS=SB$ , 故有  $A=B$ .

(2)  $A, B$  恰好有一个发生的事件为  $A\bar{B}\cup\bar{A}B$ , 其概率为

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}\cup\bar{A}B) &= P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A(S-B)) + P(B(S-A)) \\ &= P(A-AB) + P(B-AB) = P(A) + P(B) - 2P(AB). \end{aligned}$$

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

(1) 从中任意抽取 5 片, 求其中至少有 2 片是安慰剂的概率.

(2) 从中每次取一片, 作不放回抽样, 求前 3 次都取到安慰剂的概率.

解 (1)  $p = 1 - P(\text{取到的 5 片药片均不是安慰剂})$

$- P(\text{取到的 5 片药片中只有 1 片是安慰剂})$

$$= 1 - \binom{5}{0} \binom{10-5}{5} / \binom{10}{5} - \binom{5}{1} \binom{10-5}{4} / \binom{10}{5} = \frac{113}{126}.$$

$$(2) p = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}.$$

6. 在房间里有 10 个人, 分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章, 任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率.

(2) 求最大号码为 5 的概率.

解  $E$ : 在房间里任选 3 人, 记录其佩戴的纪念章的号码. 10 人中任选 3 人共有  $\binom{10}{3} = 120$  种选法, 此即为样本点的总数. 以  $A$  记事件“最小的号码为 5”, 以  $B$  记事件“最大的号码为 5”.

(1) 因选到的最小号码为 5, 则其中一个号码为 5 且其余两个号码都大于 5, 它们可从 6~10 这 5 个数中选取, 故  $N(A) = \binom{5}{2}$ , 从而

$$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{5}{2} / \binom{10}{3} = \frac{1}{12}.$$

(2) 同理,  $N(B) = \binom{4}{2}$ , 故

$$P(B) = N(B)/N(S) = \binom{4}{2} / \binom{10}{3} = \frac{1}{20}.$$



7. 某油漆公司发出 17 桶油漆, 其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶, 在搬运中所有标签脱落, 交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客, 能按所订颜色如数得到订货的概率是多少?

解  $E$ : 在 17 桶油漆中任取 9 桶给顾客. 以  $A$  表示事件“顾客取到 4 桶白漆、3 桶黑漆与 2 桶红漆”, 则有  $N(S) = \binom{17}{9}$ ,  $N(A) = \binom{10}{4} \binom{4}{3} \binom{3}{2}$ , 故

$$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{10}{4} \binom{4}{3} \binom{3}{2} / \binom{17}{9} = \frac{252}{2431}.$$

8. 在 1 500 件产品中有 400 件次品、1 100 件正品. 任取 200 件.

(1) 求恰有 90 件次品的概率.

(2) 求至少有 2 件次品的概率.

解  $E$ : 从 1 500 件产品中任取 200 件产品. 以  $A$  表示事件“恰有 90 件次品”, 以  $B_i$  表示事件“恰有  $i$  件次品”,  $i=0, 1$ , 以  $C$  表示事件“至少有 2 件次品”.

$$(1) N(S) = \binom{1500}{200},$$

$$N(A) = \binom{400}{90} \binom{1100}{200-90} = \binom{400}{90} \binom{1100}{110},$$

故 
$$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{400}{90} \binom{1100}{110} / \binom{1500}{200}.$$

(2)  $C = S - B_0 - B_1$ , 其中,  $B_0, B_1$  互不相容, 所以

$$\begin{aligned} P(C) &= P(S - B_0 - B_1) = P(S - [B_0 \cup B_1]) \\ &= 1 - P(B_0 \cup B_1) = 1 - P(B_0) - P(B_1). \end{aligned}$$

因

$$N(B_0) = \binom{1100}{200}, \quad N(B_1) = \binom{400}{1} \binom{1100}{199},$$

故

$$P(B_0) = \binom{1100}{200} / \binom{1500}{200}, \quad P(B_1) = \binom{400}{1} \binom{1100}{199} / \binom{1500}{200},$$

因此有

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - \binom{1100}{200} / \binom{1500}{200} - \binom{400}{1} \binom{1100}{199} / \binom{1500}{200} \\ &= 1 - \left[ \binom{1100}{200} + \binom{400}{1} \binom{1100}{199} \right] / \binom{1500}{200}. \end{aligned}$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?



**解**  $E$ : 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 以  $A$  表示事件“所取 4 只鞋子中至少有两只配成一双鞋子”, 则  $\bar{A}$  表示事件“所取 4 只鞋子无配对”. 先计算  $P(\bar{A})$  较为简便. 以下按  $N(\bar{A})$  的不同求法, 列出本题的 3 种解法, 另外还给出一种直接求  $P(A)$  的解法.

**解法(i)** 考虑 4 只鞋子是有次序一只一只取出的. 自 5 双(10 只)鞋子中任取 4 只共有  $10 \times 9 \times 8 \times 7$  种取法,  $N(S) = 10 \times 9 \times 8 \times 7$ . 现在来求  $N(\bar{A})$ . 第一只可以任意取, 共有 10 种取法, 第二只只能在剩下的 9 只中且除去与已取的第一只配对的 8 只鞋子中任取一只, 共 8 种取法. 同理第三只、第四只各有 6 种、4 种取法, 从而  $N(\bar{A}) = 10 \times 8 \times 6 \times 4$ . 故

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - N(\bar{A})/N(S) \\ &= 1 - \frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{13}{21}. \end{aligned}$$

**解法(ii)** 从 10 只鞋子中任取 4 只, 共有  $\binom{10}{4}$  种取法, 即  $N(S) = \binom{10}{4}$ . 为求  $N(\bar{A})$ , 先从 5 双鞋子中任取 4 双共有  $\binom{5}{4}$  种取法, 再自取出的每双鞋子中各取 1 只(在一双中取一只共有 2 种取法), 共有  $2^4$  种取法, 即  $N(\bar{A}) = \binom{5}{4} 2^4$ . 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{5}{4} 2^4}{\binom{10}{4}} = \frac{13}{21}.$$

**解法(iii)** 现在来求  $N(\bar{A})$ . 先从 5 只左脚鞋子中任取  $k$  只( $k=0, 1, 2, 3, 4$ ), 有  $\binom{5}{k}$  种取法, 而剩下的  $4-k$  只鞋子只能从(不能与上述所取的配对的)5- $k$  只右脚鞋子中选取, 即对于每个固定的  $k$ , 有  $\binom{5}{k} \binom{5-k}{4-k}$  种取法. 故

$$N(\bar{A}) = \sum_{k=0}^4 \binom{5}{k} \binom{5-k}{4-k} = 80.$$

故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - N(\bar{A})/N(S) = 1 - \frac{80}{\binom{10}{4}} = \frac{13}{21}.$$

**解法(iv)** 以  $A_i$  表示事件“所取 4 只鞋子中恰能配成  $i$  双”( $i=1, 2$ ), 则  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $A_1 A_2 = \emptyset$ , 故  $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$ . 因  $A_2$  为 4 只恰能配成 2 双,



它可直接从 5 双鞋子中成双地取得, 故  $N(A_2) = \binom{5}{2}$ .  $N(A_1)$  的算法是: 先从 5 双中取 1 双, 共有  $\binom{5}{1}$  种取法, 另外两只能从其他 8 只中取, 共有  $\binom{8}{2}$  种取法, 不过这种取法中将成双的也算在内了, 应去掉. 从而

$$N(A_1) = \binom{5}{1} \left[ \binom{8}{2} - \binom{4}{1} \right] = 120.$$

$N(S)$  仍为解法(ii)中的  $\binom{10}{4} = 210$  种, 故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_2) = \frac{N(A_1)}{N(S)} + \frac{N(A_2)}{N(S)} \\ &= \frac{120 + 10}{210} = \frac{13}{21}. \end{aligned}$$

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母, 从中任意连抽 7 张, 求其排列结果为 ability 的概率.

解法(i)  $E$ : 自 11 个字母中随机地接连抽 7 个字母并依次排列. 将 11 个字母中的两个 b 看成是可分辨的, 两个 i 也看成是可分辨的,  $N(S) = A_{11}^7$ . 以  $A$  记事件“排列结果为 ability”, 则  $N(A) = 4$  (因 b 有两种取法, i 也有两种取法), 因而

$$P(A) = N(A)/N(S) = \frac{4}{A_{11}^7} = 2.4 \times 10^{-6}.$$

解法(ii) 本题也可利用乘法定理来计算. 以  $A_1, B_2, I_3, L_4, I_5, T_6, Y_7$  依次表示取得字母 a, b, i, l, i, t, y 各事件, 则所求概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 B_2 I_3 L_4 I_5 T_6 Y_7) &= P(A_1) P(B_2 | A_1) P(I_3 | A_1 B_2) \\ &\quad \times P(L_4 | A_1 B_2 I_3) P(I_5 | A_1 B_2 I_3 L_4) \\ &\quad \times P(T_6 | A_1 B_2 I_3 L_4 I_5) P(Y_7 | A_1 B_2 I_3 L_4 I_5 T_6) \\ &= \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{A_{11}^7}. \end{aligned}$$

注意, 在解法(i)中仅当将两个 i 看成是可以区分的, 两个 b 看成是可以区分的, 才属于古典概型问题.

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去, 求杯子中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

解  $E$ : 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去. 易知共有  $4^3$  种放置法. 以  $A_i$  表示事件“杯子中球的最大个数为  $i$ ”,  $i=1, 2, 3$ .

$A_3$  只有当 3 只球放在同一杯子中时才能发生, 有 4 个杯子可以任意选择,



于是  $N(A_3) = \binom{4}{1}$ , 故

$$P(A_3) = N(A_3)/N(S) = \binom{4}{1}/4^3 = \frac{1}{16}.$$

$A_1$  只有当每个杯子最多放一只球时才能发生. 因而  $N(A_1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = A_4^3$ , 故

$$P(A_1) = N(A_1)/N(S) = A_4^3/4^3 = \frac{3}{8}.$$

又  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$ , 且  $A_i A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), 故  $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$ , 从而

$$P(A_2) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = \frac{9}{16}.$$

**12.** 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上, 其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上, 则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

**解** 将部件自 1 到 10 编号.  $E$ : 随机地取铆钉, 使各部件都装 3 只铆钉. 以  $A_i$  表示事件“第  $i$  号部件强度太弱”. 由题设, 仅当 3 只强度太弱的铆钉同时装在第  $i$  号部件上,  $A_i$  才能发生. 由于从 50 只铆钉中任取 3 只装在第  $i$  号部件上共有  $\binom{50}{3}$  种取法, 强度太弱的铆钉仅有 3 只, 它们都装在第  $i$  号部件上, 只有  $\binom{3}{3} = 1$  种取法, 故

$$P(A_i) = 1/\binom{50}{3} = \frac{1}{19\,600}, \quad i = 1, 2, \dots, 10,$$

且知  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  两两互不相容, 因此, 10 个部件中有一个强度太弱的概率为

$$\begin{aligned} p &= P\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}\} \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{10}) \\ &= \frac{10}{19\,600} = \frac{1}{1\,960}. \end{aligned}$$

**13.** 一俱乐部有 5 名一年级学生, 2 名二年级学生, 3 名三年级学生, 2 名四年级学生.

(1) 在其中任选 4 名学生, 求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

(2) 在其中任选 5 名学生, 求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

**解** (1) 共有  $5+2+3+2=12$  名学生, 在其中任选 4 名共有  $\binom{12}{4} = 495$  种



选法,其中每年级各选 1 名的选法有  $\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}=60$  种选法,因此,所求概率为  $p=\frac{60}{495}=\frac{4}{33}$ .

(2) 在 12 名学生中任选 5 名的选法共有  $\binom{12}{5}=792$  种. 在每个年级中有一个年级取 2 名,而其他 3 个年级各取 1 名的取法共有

$$\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}=240(\text{种}).$$

于是所求的概率为

$$p=\frac{240}{792}=\frac{10}{33}.$$

14. (1) 已知  $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\bar{B})=0.5$ , 求条件概率  $P(B|A\cup\bar{B})$ .

(2) 已知  $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$ , 试求  $P(A\cup B)$ .

$$\begin{aligned}\text{解 (1)} \quad P(B|A\cup\bar{B}) &= \frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})} \\ &= \frac{P(AB)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}.\end{aligned}$$

由题设得  $P(A)=1-P(\bar{A})=0.7, P(\bar{B})=1-P(B)=0.6, P(AB)=P(A(S-\bar{B}))=P(A)-P(A\bar{B})=0.2$ , 故

$$P(B|A\cup\bar{B}) = \frac{0.2}{0.7+0.6-0.5} = 0.25.$$

$$(2) \quad P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{12},$$

$$P(B)=P(AB)/P(A|B)=\frac{1}{12}/\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned}\text{故} \quad P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(AB) \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

15. 掷两颗骰子, 已知两颗骰子点数之和为 7, 求其中有一颗为 1 点的概率 (用两种方法).

解  $E$ : 掷两颗骰子, 观察其出现之点数. 以  $A$  记事件“两骰子点数之和为 7”, 以  $B$  记事件“两颗骰子中有一颗出现 1 点”.



解法(i) 按条件概率的定义式:  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$  来求条件概率. 设想两颗骰子是可分辨的, 样本空间为

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\},$$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\},$$

$AB = \{(1,6), (6,1)\}$ . 现在  $N(S) = 36, N(A) = 6, N(AB) = 2$ , 因此

$$P(B|A) = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}.$$

解法(ii) 按条件概率的含义来求  $P(B|A)$ . 样本空间原有 36 个样本点, 现在知道了“A 已经发生”这一信息, 根据这一信息, 不在 A 中的样本点就不可能出现了, 因而试验所有可能结果所成的集合就是 A, 而 A 中共有 6 个可能结果, 其中只有两个结果(1,6)和(6,1)有一颗骰子出现 1 点, 因此

$$P(B|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

16. 据以往资料表明, 某一 3 口之家, 患某种传染病的概率有以下规律:

$$P\{\text{孩子得病}\} = 0.6, P\{\text{母亲得病} | \text{孩子得病}\} = 0.5,$$

$$P\{\text{父亲得病} | \text{母亲及孩子得病}\} = 0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解 以 A 记事件“孩子得病”, 以 B 记事件“母亲得病”, 以 C 记事件“父亲得病”, 按题意需要求  $P(ABC\bar{C})$ . 已知  $P(A) = 0.6, P(B|A) = 0.5, P(C|BA) = 0.4$ , 由乘法定理得

$$\begin{aligned} P(ABC\bar{C}) &= P(\bar{C}BA) = P(\bar{C}|BA)P(BA) \\ &= P(\bar{C}|BA)P(B|A)P(A) \\ &= (1 - P(C|BA))P(B|A)P(A) \\ &= 0.6 \times 0.5 \times 0.6 = 0.18. \end{aligned}$$

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品, 在其中取两次, 每次任取一件, 作不放回抽样. 求下列事件的概率:

- (1) 两件都是正品;
- (2) 两件都是次品;
- (3) 一件是正品, 一件是次品;
- (4) 第二次取出的是次品.

解 E: 在 10 件产品中(其中有 2 件次品)任取两次, 每次取 1 件, 作不放回抽样. 以  $A_i (i=1, 2)$  表示事件“第 i 次抽出的是正品”. 因为是不放回抽样, 所以

$$(1) P(A_1 A_2) = P(A_2 | A_1)P(A_1) = \frac{7}{9} \times \frac{8}{10} = \frac{28}{45}.$$

$$(2) P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{45}.$$



$$\begin{aligned}
 (3) \quad & P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2) \\
 &= P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) \quad (\text{因 } (A_1\bar{A}_2)(\bar{A}_1A_2) = \emptyset) \\
 &= P(\bar{A}_2 | A_1)P(A_1) + P(A_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{8}{10} + \frac{8}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{16}{45}.
 \end{aligned}$$

亦可利用(1)(2)的结果. 因为  $A_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2 \cup A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2 = S$ , 且  $A_1A_2$ ,  $\bar{A}_1\bar{A}_2$ ,  $A_1\bar{A}_2$ ,  $\bar{A}_1A_2$  两两不相容, 故

$$P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2) = 1 - \frac{28}{45} - \frac{1}{45} = \frac{16}{45}.$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & P(\bar{A}_2) = P[(A_1 \cup \bar{A}_1)\bar{A}_2] = P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2) \\
 &= P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2) \\
 &= P(\bar{A}_2 | A_1)P(A_1) + P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字, 因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数, 那么此概率是多少?

解法(i) 以  $A_i$  表示事件“第  $i$  次拨号拨通电话”,  $i=1, 2, 3$ . 以  $A$  表示事件“拨号不超过 3 次拨通电话”, 则有

$$A = A_1 \cup \bar{A}_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3.$$

因  $A_1, \bar{A}_1A_2, \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$  两两互不相容, 且  $P(A_1) = \frac{1}{10}$ ,

$$P(\bar{A}_1A_2) = P(A_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10},$$

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) &= P(A_3 | \bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\
 &= \frac{1}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10},
 \end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1A_2) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) \\
 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.
 \end{aligned}$$

当已知最后一位数是奇数时, 所求概率为

$$p = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

解法(ii) 沿用解法(i)的记号, 知

$$\begin{aligned}
 P(A) &= 1 - P(\text{拨号 3 次都接不通}) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \\
 &= 1 - P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1)
 \end{aligned}$$



$$= 1 - \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{10}.$$

当已知最后一位是奇数时, 所求概率为

$$p = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}.$$

19. (1) 设甲袋中装有  $n$  只白球、 $m$  只红球; 乙袋中装有  $N$  只白球、 $M$  只红球. 今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中, 再从乙袋中任意取一只球. 问取到白球的概率是多少?

(2) 第一只盒子装有 5 只红球, 4 只白球; 第二只盒子装有 4 只红球, 5 只白球. 先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去, 然后从第二盒中任取一只球. 求取到白球的概率.

解法(i) (1)  $E$ : 从甲袋任取一球放入乙袋(此为试验  $E_1$ ), 再从乙袋任取一球观察其颜色(此为试验  $E_2$ ). 试验  $E$  是由  $E_1$  和  $E_2$  合成的. 以  $R$  表示事件“从甲袋取得的是红球”, 以  $W$  表示事件“从乙袋取得的是白球”, 即有

$$W = SW = (R \cup \bar{R})W = RW \cup \bar{R}W, (RW)(\bar{R}W) = \emptyset.$$

于是

$$\begin{aligned} P(W) &= P(RW) + P(\bar{R}W) \\ &= P(W|R)P(R) + P(W|\bar{R})P(\bar{R}). \end{aligned}$$

而

$$P(R) = \frac{m}{n+m}, \quad P(\bar{R}) = \frac{n}{n+m}.$$

在计算  $P(W|R)$ ,  $P(W|\bar{R})$  时, 注意在试验  $E_2$  中, 乙袋球数为  $N+M+1$  只; 在求  $P(W|R)$  时, 乙袋白球数为  $N$ , 但在求  $P(W|\bar{R})$  时, 乙袋白球数为  $N+1$ , 故

$$\begin{aligned} P(W) &= \frac{N}{N+M+1} \frac{m}{n+m} + \frac{N+1}{N+M+1} \frac{n}{n+m} \\ &= \frac{n + N(n+m)}{(n+m)(N+M+1)}. \end{aligned}$$

(2)  $E$ : 从第一盒中任取 2 只球放入第二盒( $E_1$ ), 再从第二盒任取一球观察其颜色( $E_2$ ). 以  $R_i$  ( $i=0, 1, 2$ ) 表示事件“从第一盒中取得的球中有  $i$  只是红球”, 以  $W$  表示事件“从第二盒取得一球是白球”. 由于  $R_0, R_1, R_2$  两两互不相容, 且  $R_0 \cup R_1 \cup R_2 = S$ , 故

$$W = SW = (R_0 \cup R_1 \cup R_2)W = R_0W + R_1W + R_2W.$$

从而

$$\begin{aligned} P(W) &= P(R_0W) + P(R_1W) + P(R_2W) \\ &= P(W|R_0)P(R_0) + P(W|R_1)P(R_1) + P(W|R_2)P(R_2). \end{aligned}$$

而



$$P(R_0) = \binom{4}{2} / \binom{9}{2} = \frac{1}{6}, \quad P(R_2) = \binom{5}{2} / \binom{9}{2} = \frac{5}{18},$$

$$P(R_1) = 1 - P(R_0) - P(R_2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{18} = \frac{10}{18}.$$

并注意到,在试验  $E_2$  中第二盒球的个数为 11,故

$$P(W|R_0) = \frac{7}{11}, P(W|R_1) = \frac{6}{11}, P(W|R_2) = \frac{5}{11},$$

所以

$$P(W) = \frac{7}{11} \times \frac{1}{6} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{18} + \frac{5}{11} \times \frac{5}{18} = \frac{53}{99}.$$

解法(ii) (1) 以  $A$  表示事件“最后取到的是白球”,以  $B$  表示事件“最后取到的是甲袋中的球”,因

$$A = SA = (B \cup \bar{B})A = BA \cup \bar{B}A, \quad (BA)(\bar{B}A) = \emptyset,$$

于是

$$\begin{aligned} P(A) &= P(BA) + P(\bar{B}A) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}). \end{aligned}$$

而

$$P(B) = \frac{1}{N+M+1}, \quad P(\bar{B}) = \frac{N+M}{N+M+1}$$

(这是因为最后是从乙袋中取球的,此时乙袋中共有  $N+M+1$  只球,其中只有一只是甲袋中的球).

$$\text{又有 } P(A|B) = \frac{n}{n+m}, P(A|\bar{B}) = \frac{N}{M+N},$$

故

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n}{n+m} \frac{1}{N+M+1} + \frac{N}{N+M} \frac{N+M}{N+M+1} \\ &= \frac{n + N(n+m)}{(n+m)(N+M+1)}. \end{aligned}$$

(2) 以  $A$  表示事件“最后取到的是白球”,以  $B$  表示事件“最后取到的是甲袋中的球”,因

$$A = SA = (B \cup \bar{B})A = BA \cup \bar{B}A, \quad (BA)(\bar{B}A) = \emptyset$$

得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{2}{11} + \frac{5}{9} \times \frac{9}{11} = \frac{53}{99}. \end{aligned}$$

20. 某种产品的商标为“MAXAM”,其中有 2 个字母脱落,有人捡起随意放回,求放回后仍为“MAXAM”的概率.



解 以  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  依次表示事件“脱落 M、M”, “脱落 A、A”, “脱落 M、A”, “脱落 X、A”, “脱落 X、M”, 以  $G$  表示事件“放回后仍为 MAXAM”, 所需求的是  $P(G)$ . 可知  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  两两不相容, 且  $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 = S$ . 已知

$$P(H_1) = \binom{2}{2} / \binom{5}{2} = \frac{1}{10}, \quad P(H_2) = \binom{2}{2} / \binom{5}{2} = \frac{1}{10},$$

$$P(H_3) = \binom{2}{1} \binom{2}{1} / \binom{5}{2} = \frac{4}{10}, \quad P(H_4) = \binom{1}{1} \binom{2}{1} / \binom{5}{2} = \frac{2}{10},$$

$$P(H_5) = \binom{1}{1} \binom{2}{1} / \binom{5}{2} = \frac{2}{10},$$

而

$$P(G|H_1) = P(G|H_2) = 1,$$

$$P(G|H_3) = P(G|H_4) = P(G|H_5) = \frac{1}{2}.$$

由全概率公式得

$$P(G) = \sum_{i=1}^5 P(G|H_i)P(H_i) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}.$$

21. 已知男子有 5% 是色盲患者, 女子有 0.25% 是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人, 恰好是色盲者, 问此人是男性的概率是多少?

解 以  $A$  表示事件“选出的是男性”, 则  $\bar{A}$  表示事件“选出的是女性”, 以  $H$  表示事件“选出的人患色盲”, 则  $\bar{H}$  表示“选出的人不患色盲”. 由题设  $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ ,  $P(H|A) = 0.05$ ,  $P(H|\bar{A}) = 0.0025$ , 所需求的概率是  $P(A|H)$ . 由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned} P(A|H) &= \frac{P(AH)}{P(H)} = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H|A)P(A) + P(H|\bar{A})P(\bar{A})} \\ &= \frac{0.05 \times \frac{1}{2}}{0.05 \times \frac{1}{2} + 0.0025 \times \frac{1}{2}} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21}. \end{aligned}$$

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为  $p$ , 若第一次及格则第二次及格的概率也为  $p$ ; 若第一次不及格则第二次及格的概率为  $\frac{p}{2}$ .

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格, 求他取得该资格的概率.

(2) 若已知他第二次已经及格, 求他第一次及格的概率.

解  $E$ : 一学生接连参加一门课程的两次考试. 以  $A_i$  表示事件“第  $i$  次考试及格”,  $i=1, 2$ ; 以  $A$  表示“他能取得某种资格”.



(1) 按题意  $A = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2$ . 因  $A_1 \cap (\bar{A}_1 A_2) = \emptyset$ , 且由已知条件:

$$P(A_1) = p, \quad P(\bar{A}_1) = 1 - p,$$

$$P(A_2 | A_1) = p, \quad P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{p}{2},$$

故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup \bar{A}_1 A_2) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) \\ &= p + P(A_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1) = p + \frac{p}{2}(1 - p) \\ &= \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}p^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(A_1 | A_2) &= \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)} \\ &= \frac{P(A_2 | A_1) P(A_1)}{P(A_2 | A_1) P(A_1) + P(A_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_1)} \\ &= \frac{p \times p}{p \times p + \frac{p}{2}(1 - p)} = \frac{2p}{p + 1}. \end{aligned}$$

23. 将两信息分别编码为  $A$  和  $B$  传送出去, 接收站收到时,  $A$  被误收作  $B$  的概率为 0.02, 而  $B$  被误收作  $A$  的概率为 0.01. 信息  $A$  与信息  $B$  传送的频繁程度为 2 : 1. 若接收站收到的信息是  $A$ , 问原发信息是  $A$  的概率是多少?

解 以  $D$  表示事件“将信息  $A$  传递出去”, 则  $\bar{D}$  表示事件“将信息  $B$  传递出去”, 以  $R$  表示“接收到信息  $A$ ”, 则  $\bar{R}$  表示事件“接收到信息  $B$ ”, 按题意需求概率  $P(D | R)$ . 已知  $P(\bar{R} | D) = 0.02$ ,  $P(R | \bar{D}) = 0.01$ , 且有  $P(D)/P(\bar{D}) = 2$ , 由于  $P(D) + P(\bar{D}) = 1$ , 得知  $P(D) = \frac{2}{3}$ ,  $P(\bar{D}) = \frac{1}{3}$ . 由贝叶斯公式得到

$$\begin{aligned} P(D | R) &= \frac{P(DR)}{P(R)} = \frac{P(R | D)P(D)}{P(R | D)P(D) + P(R | \bar{D})P(\bar{D})} \\ &= \frac{(1 - 0.02) \times \frac{2}{3}}{(1 - 0.02) \times \frac{2}{3} + 0.01 \times \frac{1}{3}} = \frac{196}{197}. \end{aligned}$$

24. 有两箱同种类的零件, 第一箱装 50 只, 其中 10 只一等品; 第二箱装 30 只, 其中 18 只一等品. 今从两箱中任挑出一箱, 然后从该箱中取零件两次, 每次任取一只, 作不放回抽样. 求

(1) 第一次取到的零件是一等品的概率.

(2) 在第一次取到的零件是一等品的条件下, 第二次取到的也是一等品的概率.

解 以  $H$  表示事件“从第一箱中取零件”, 则  $\bar{H}$  表示事件“从第二箱中取零



件”.由已知条件  $P(H) = P(\bar{H}) = \frac{1}{2}$ . 又以  $A_i$  表示事件“第  $i$  次从箱中(不放回抽样)取得的是一等品”,  $i=1, 2$ .

(1) 由条件  $P(A_1 | H) = \frac{1}{5}$ ,  $P(A_1 | \bar{H}) = \frac{3}{5}$ , 故

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 | H)P(H) + P(A_1 | \bar{H})P(\bar{H}) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

(2) 需要求的是  $P(A_2 | A_1)$ . 因  $P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)}$ , 而

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_2 | H)P(H) + P(A_1 A_2 | \bar{H})P(\bar{H})$$

由条件概率的含义,  $P(A_1 A_2 | H)$  表示在第一箱中取两次, 每次取一只零件, 作不放回抽样, 且两次都取得一等品的概率. 因第一箱共有 50 只零件, 其中有 10 只一等品, 故有  $P(A_1 A_2 | H) = \frac{10}{50} \times \frac{9}{49}$ . 同理,  $P(A_1 A_2 | \bar{H}) = \frac{18}{30} \times \frac{17}{29}$ , 故有

$$\begin{aligned} P(A_2 | A_1) &= \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \\ &= \frac{1}{P(A_1)} [P(A_1 A_2 | H)P(H) + P(A_1 A_2 | \bar{H})P(\bar{H})] \\ &= \frac{5}{2} \left( \frac{10}{50} \times \frac{9}{49} \times \frac{1}{2} + \frac{18}{30} \times \frac{17}{29} \times \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{9}{49} + \frac{51}{29} \right) = 0.4856. \end{aligned}$$

25. 某人下午 5:00 下班, 他所积累的资料表明:

到家时间	5:35~5:39	5:40~5:44	5:45~5:49	5:50~5:54	迟于 5:54
乘地铁的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车, 结果他是 5:47 到家的. 试求他是乘地铁回家的概率.

解 以  $H$  表示事件“乘地铁回家”, 则  $\bar{H}$  表示事件“乘汽车回家”. 因到家时间为 5:47, 它属于区间 5:45~5:49, 以  $T$  记“到家时间在 5:45~5:49 之间”, 则需要求的是概率  $P(H | T)$ . 已知  $P(T | H) = 0.45$ ,  $P(T | \bar{H}) = 0.20$ , 又因他是由掷硬币决定乘地铁还是乘汽车, 因此,  $P(H) = P(\bar{H}) = 0.5$ . 由贝叶斯公式得

$$P(H | T) = \frac{P(HT)}{P(T)} = \frac{P(T | H)P(H)}{P(T | H)P(H) + P(T | \bar{H})P(\bar{H})}$$



$$= \frac{0.45 \times 0.5}{0.45 \times 0.5 + 0.20 \times 0.5} = \frac{9}{13}.$$

26. 病树的主人外出, 委托邻居浇水, 设已知如果不浇水, 树死去的概率为 0.8. 若浇水则树死去的概率为 0.15. 有 0.9 的把握确定邻居会记得浇水.

(1) 求主人回来树还活着的概率.

(2) 若主人回来树已死去, 求邻居忘记浇水的概率.

解 (1) 记  $A$  为事件“树还活着”, 记  $W$  为事件“邻居记得给树浇水”, 即有

$$P(W)=0.9, \quad P(\bar{W})=0.1, \quad P(A|W)=0.85, \quad P(A|\bar{W})=0.2,$$

$$P(A)=P(A|W)P(W)+P(A|\bar{W})P(\bar{W})$$

$$=0.85 \times 0.9 + 0.2 \times 0.1 = 0.785.$$

$$(2) P(\bar{W}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|\bar{W})P(\bar{W})}{P(\bar{A})} = \frac{[1-P(A|\bar{W})]P(\bar{W})}{1-P(A)}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.1}{0.215} = 0.372.$$

27. 设本题涉及的事件均有意义. 设  $A, B$  都是事件.

(1) 已知  $P(A) > 0$ , 证明  $P(AB|A) \geq P(AB|A \cup B)$ .

(2) 若  $P(A|B) = 1$ , 证明  $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$ .

(3) 若设  $C$  也是事件, 且有  $P(A|C) \geq P(B|C), P(A|\bar{C}) \geq P(B|\bar{C})$ , 证明  $P(A) \geq P(B)$ .

证 (1) 若  $P(A) > 0$ , 要证  $P(AB|A) \geq P(AB|A \cup B)$ .

上式左边等于  $P(AB)/P(A)$ , 上式右边等于  $P(AB)/P(A \cup B)$ .

因为  $A \cup B \supset A, P(A \cup B) \geq P(A)$ , 故有右  $\leq$  左.

$$(2) \text{ 由 } P(A|B) = 1 \text{ 得 } \frac{P(AB)}{P(B)} = 1,$$

$$\text{即} \quad P(AB) = P(B). \quad (*_1)$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } P(\bar{B}|\bar{A}) &= P(\bar{A}\bar{B})/P(\bar{A}) = P(\overline{A \cup B})/P(\bar{A}) = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(A)}. \end{aligned}$$

由  $(*_1)$  式得到

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{1 - P(A)}{1 - P(A)} = 1.$$

(3) 由假设  $P(A|C) \geq P(B|C)$ , 即

$$P(AC) \geq P(BC). \quad (*_2)$$

同样由  $P(A|\bar{C}) \geq P(B|\bar{C})$  就有

$$P(A\bar{C}) \geq P(B\bar{C}). \quad (*_3)$$



由 $(*)_3$ 式

$$P(A(S-C)) \geq P(B(S-C)),$$

得  $P(A) - P(AC) \geq P(B) - P(BC),$

或  $P(A) - P(B) \geq P(AC) - P(BC),$

由 $(*)_2$ 式, 得知

$$P(A) - P(B) \geq 0, \text{ 即 } P(A) \geq P(B).$$

**28.** 有两种花籽, 发芽率分别为 0.8, 0.9, 从中各取一颗, 设各花籽是否发芽相互独立. 求

(1) 这两颗花籽都能发芽的概率.

(2) 至少有一颗能发芽的概率.

(3) 恰有一颗能发芽的概率.

**解** 以  $A, B$  分别表示事件第一颗、第二颗花籽能发芽, 即有  $P(A) = 0.8, P(B) = 0.9.$

(1) 由  $A, B$  相互独立, 得两颗花籽都能发芽的概率为

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.9 = 0.72.$$

(2) 至少有一颗花籽能发芽的概率, 即事件  $A \cup B$  的概率为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8 + 0.9 - 0.72 = 0.98.$$

(3) 恰有一颗花籽能发芽的概率, 即为事件  $A\bar{B} \cup \bar{A}B$  的概率, 由第 4 题(2)得

$$\begin{aligned} P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) &= P(A) + P(B) - 2P(AB) = 0.8 + 0.9 - 2P(AB) \\ &= 0.8 + 0.9 - 2P(A)P(B) = 1.7 - 2 \times 0.72 = 0.26. \end{aligned}$$

**29.** 根据报导美国人血型的分布近似地为: A 型为 37%, O 型为 44%, B 型为 13%, AB 型为 6%. 夫妻拥有的血型是相互独立的.

(1) B 型的人只有输入 B、O 两种血型才安全. 若妻为 B 型, 夫为何种血型未知, 求夫是妻的安全输血者的概率.

(2) 随机地取一对夫妇, 求妻为 B 型夫为 A 型的概率.

(3) 随机地取一对夫妇, 求其中一人为 A 型, 另一人为 B 型的概率.

(4) 随机地取一对夫妇, 求其中至少有一人是 O 型的概率.

**解** (1) 由题意知夫血型应为 B、O 才为安全输血者. 因两种血型互不相容, 故所求概率为

$$p_1 = 0.44 + 0.13 = 0.57.$$

(2) 因夫妻拥有血型相互独立, 于是所求概率为

$$p_2 = 0.13 \times 0.37 = 0.0481.$$

(3)  $p_3 = 2 \times 0.37 \times 0.13 = 0.0962.$

(4) 有三种可能, 即夫为 O, 妻为非 O; 妻为 O, 夫为非 O; 夫妻均为 O.

$$p_4 = 2 \times 0.44 \times (1 - 0.44) + 0.44 \times 0.44 = 0.6864.$$



30. (1) 给出事件  $A, B$  的例子, 使得

(i)  $P(A|B) < P(A)$ , (ii)  $P(A|B) = P(A)$ , (iii)  $P(A|B) > P(A)$ .

(2) 设事件  $A, B, C$  相互独立, 证明 (i)  $C$  与  $AB$  相互独立. (ii)  $C$  与  $A \cup B$  相互独立.

(3) 设事件  $A$  的概率  $P(A) = 0$ , 证明对于任意另一事件  $B$ , 有  $A, B$  相互独立.

(4) 证明事件  $A, B$  相互独立的充要条件是  $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ .

解 (1) 举例

(i) 设试验为将骰子掷一次, 事件  $A$  为“出现偶数点”,  $B$  为“出现奇数点”, 则  $P(A|B) = 0, P(A) = \frac{1}{2}$ , 故  $P(A|B) < P(A)$ .

(ii) 设试验为将骰子掷一次,  $A$  同上,  $B$  为“掷出点数  $\geq 1$ ”, 则  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 而  $P(A) = \frac{1}{2}$ , 故  $P(A|B) = P(A)$ .

(iii) 设试验为将骰子掷一次,  $A$  同上,  $B$  为“掷出点数  $\geq 4$ ”, 则  $P(A|B) = \frac{2}{3}$ , 而  $P(A) = \frac{1}{2}$ , 故  $P(A|B) > P(A)$ .

(2) 因  $A, B, C$  相互独立, 故  $P(AB) = P(A)P(B), P(BC) = P(B)P(C), P(CA) = P(C)P(A), P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ , 从而

(i)  $P(C(AB)) = P(CAB) = P(C)P(A)P(B) = P(C)P(AB)$ , 这表示  $C$  与  $AB$  相互独立.

(ii)  $P(C(A \cup B)) = P(CA \cup CB) = P(CA) + P(CB) - P(CAB)$   
 $= P(C)P(A) + P(C)P(B) - P(C)P(A)P(B)$   
 $= P(C)[P(A) + P(B) - P(AB)] = P(C)P(A \cup B)$ ,  
 这表示  $C$  与  $A \cup B$  相互独立.

(3) 因  $AB \subset A$ , 故若  $P(A) = 0$ , 则

$$0 \leq P(AB) \leq P(A).$$

从而  $P(AB) = 0 = P(B) \cdot 0 = P(B) \cdot P(A)$ ,

按定义,  $A, B$  相互独立.

(4) 必要性. 设  $A, B$  相互独立, 则  $A, \bar{B}$  也相互独立, 从而知  $P(A|B) = P(A), P(A|\bar{B}) = P(A)$ , 故  $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ .

充分性. 设  $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ , 按定义此式即表示

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}.$$

由比例的性质得

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB) + P(A\bar{B})}{P(B) + P(\bar{B})} = \frac{P(A(B \cup \bar{B}))}{1} = P(A).$$



即  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 即  $A, B$  相互独立.

31. 设事件  $A, B$  的概率均大于零, 说明以下的叙述(1) 必然对. (2) 必然错. (3) 可能对. 并说明理由.

(1) 若  $A$  与  $B$  互不相容, 则它们相互独立.

(2) 若  $A$  与  $B$  相互独立, 则它们互不相容.

(3)  $P(A) = P(B) = 0.6$ , 且  $A, B$  互不相容.

(4)  $P(A) = P(B) = 0.6$ , 且  $A, B$  相互独立.

解 (1) 必然错. 因若  $A, B$  互不相容, 则  $0 = P(AB) \neq P(A)P(B)$ .

(2) 必然错. 因若  $A, B$  相互独立, 则  $P(AB) = P(A)P(B) > 0$ .

(3) 必然错. 因若  $A, B$  互不相容, 则  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1.2$ , 这是不对的.

(4) 可能对.

32. 有一种检验艾滋病毒的检验法, 其结果有概率 0.005 报道为假阳性. (即不带艾滋病毒者, 经此检验法有 0.005 的概率被认为带艾滋病毒). 今有 140 名不带艾滋病毒的正常人全部接受此种检验, 被报导至少有一人带艾滋病毒的概率为多少?

解 在本题中, 这 140 人检查结果是相互独立的, 这一假定是合理的, 将人编号, 第  $i$  号人检验结果以  $A_i$  表示正常, 则  $\bar{A}_i$  表示被报道为带艾滋病毒者, 由题意知  $P(\bar{A}_i) = 0.005$ , 从而  $P(A_i) = 1 - 0.005 = 0.995$ . 于是 140 人经检验至少有一人被报道呈阳性概率为

$$p = P(\text{至少有一人呈阳性}) = 1 - P(\text{无人为阳性})$$

$$= 1 - P\left(\prod_{i=1}^{140} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{140} P(A_i) = 1 - 0.995^{140}.$$

由  $140 \lg 0.995 = \lg 0.4957$ , 得

$$p = 1 - 0.4957 = 0.5043.$$

这说明, 即使无人带艾滋病毒, 这样的检验法认为 140 人中至少有一人带艾滋病毒的概率大于  $\frac{1}{2}$ .

33. 盒中有编号为 1, 2, 3, 4 的 4 只球, 随机地自盒中取一只球, 事件  $A$  为“取得的是 1 号或 2 号球”, 事件  $B$  为“取得的是 1 号或 3 号球”, 事件  $C$  为“取得的是 1 号或 4 号球”验证:

$$P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C),$$

但  $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$ ,

即事件  $A, B, C$  两两独立, 但  $A, B, C$  不是相互独立的.

证 以  $A_i (i=1, 2, 3, 4)$  表示取到第  $i$  号球, 则



$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4},$$

又  $A = A_1 \cup A_2, B = A_1 \cup A_3, C = A_1 \cup A_4$ , 且  $A_1, A_2, A_3, A_4$  两两互不相容, 故有

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

另外,  $AB = A_1, AC = A_1, BC = A_1, ABC = A_1$ , 故

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = P(A_1) = \frac{1}{4}.$$

从而有

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B),$$

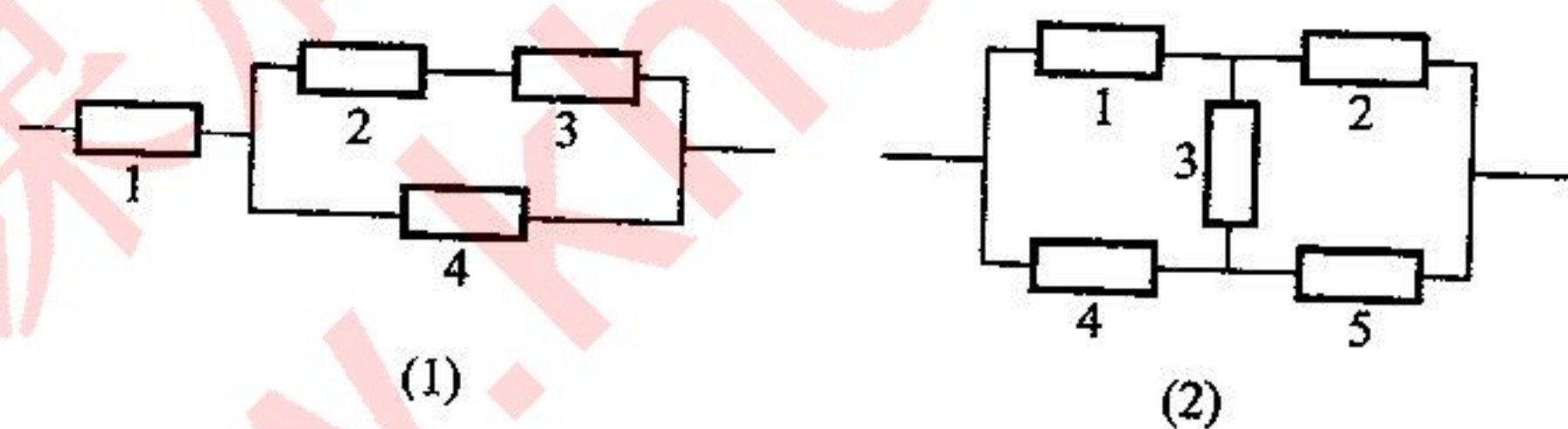
$$P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(C),$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(B)P(C),$$

但  $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$ .

34. 试分别求以下两个系统的可靠性:

(1) 设有 4 个独立工作的元件 1, 2, 3, 4. 它们的可靠性分别为  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , 将它们按题 1.34 图 1(1) 的方式连接(称为并串联系统);



题 1.34 图 1

(2) 设有 5 个独立工作的元件 1, 2, 3, 4, 5. 它们的可靠性均为  $p$ , 将它们按题 1.34 图 1(2) 的方式连接(称为桥式系统).

解 (1) 以  $A_i$  表示事件“第  $i$  只元件正常工作”,  $i=1, 2, 3, 4$ , 以  $A$  表示“系统正常工作”, 已知各元件是否正常工作相互独立, 且有  $P(A_i) = p_i (i=1, 2, 3, 4)$ . 由图知

$$A = A_1[(A_2A_3) \cup A_4] = A_1A_2A_3 \cup A_1A_4.$$

由加法公式及各元件工作的独立性得到

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_4) - P[(A_1A_2A_3) \cap (A_1A_4)] \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= p_1p_2p_3 + p_1p_4 - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= p_1(p_4 + p_2p_3 - p_2p_3p_4). \end{aligned}$$



(2) 以  $A_i$  表示事件“第  $i$  只元件正常工作”,  $i=1, 2, 3, 4, 5$ , 以  $A$  表示“系统正常工作”, 已知各元件是否正常工作相互独立, 且有  $P(A_i) = p$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ).

**解法(i) (路径穷举法)** 根据系统逻辑框图(题 1.34 图 1(2)), 将所有能使系统正常工作的路径一一列出, 再利用概率的加法定理和乘法定理来计算系统的可靠性  $P(A)$ . 由图知使桥式系统正常工作的路径有下列 4 条: 12, 45, 135, 432. 以  $B_j$  记事件第  $j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) 条路径正常工作, 即有

$$B_1 = A_1 A_2, B_2 = A_4 A_5, B_3 = A_1 A_3 A_5, B_4 = A_4 A_3 A_2,$$

于是得系统的可靠性为

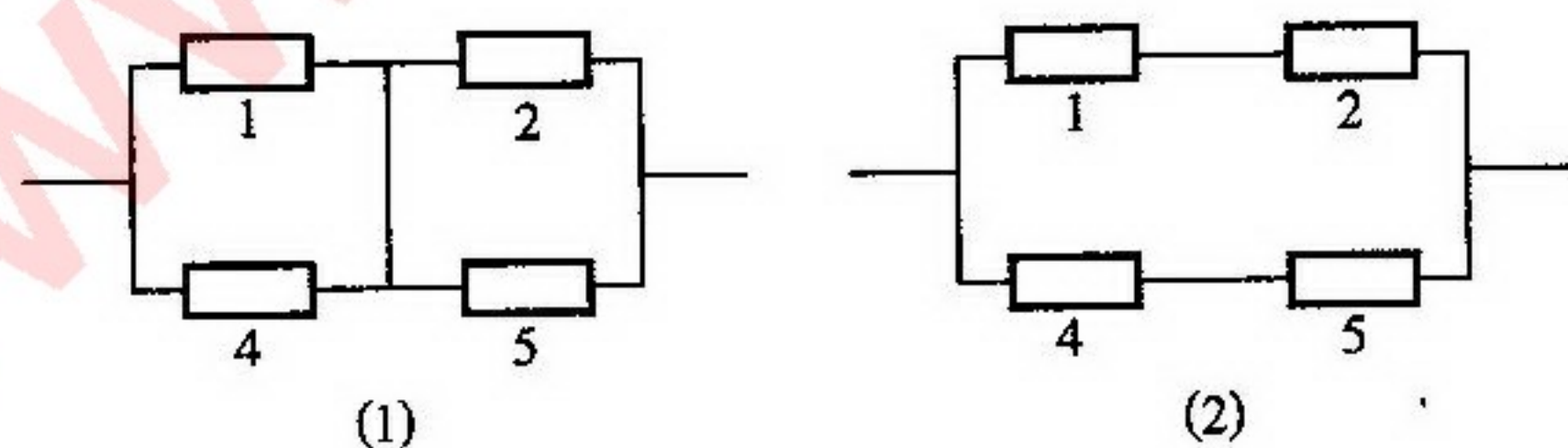
$$P(A) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^4 P(B_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P(B_i B_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} P(B_i B_j B_k) - P(B_1 B_2 B_3 B_4) \\ &= P(A_1 A_2) + P(A_4 A_5) + P(A_1 A_3 A_5) + P(A_4 A_3 A_2) - P(A_1 A_2 A_4 A_5) \\ &\quad - P(A_1 A_2 A_3 A_5) - P(A_1 A_2 A_3 A_4) - P(A_1 A_3 A_4 A_5) \\ &\quad - P(A_2 A_3 A_4 A_5) - P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) \\ &\quad + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) \\ &\quad - P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) \\ &= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5. \end{aligned}$$

**解法(ii) (全概率公式法)** 按元件 3 处于正常工作与失效两种状态, 将原系统简化为典型的并串联和串并联系统, 再用全概率公式:

$$P(A) = P(A|A_3)P(A_3) + P(A|\bar{A}_3)P(\bar{A}_3)$$

来计算原系统的可靠性.



题 1.34 图 2

当元件 3 正常工作时, 系统简化成如题 1.34 图 2(1) 所示, 当元件 3 失效时, 系统简化成如题 1.34 图 2(2) 所示. 因此

$$P(A|A_3) = P[(A_1 \cup A_4)(A_2 \cup A_5)],$$

$$P(A|\bar{A}_3) = P(A_1 A_2 \cup A_4 A_5).$$

$$\text{故 } P(A) = P[(A_1 \cup A_4)(A_2 \cup A_5)]P(A_3) + P(A_1 A_2 \cup A_4 A_5)P(\bar{A}_3).$$

注意到



$$P(A_1 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_4) - P(A_1 A_4) = 2p - p^2.$$

同样

$$P(A_2 \cup A_5) = 2p - p^2.$$

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \cup A_4 A_5) &= P(A_1)P(A_2) + P(A_4)P(A_5) \\ &\quad - P(A_1)P(A_2)P(A_4)P(A_5) \\ &= 2p^2 - p^4. \end{aligned}$$

即得原系统的可靠性为

$$\begin{aligned} P(A) &= (2p - p^2)^2 p + (2p^2 - p^4)(1 - p) \\ &= 2p^3 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5. \end{aligned}$$

注意:本题易犯的错误是在使用概率的加法公式时,没有注意两事件不是不相容的,例如在(1)中应有  $P(A_1 A_2 A_3 \cup A_1 A_4) = P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_4) - P(A_1 A_2 A_3 A_4)$ ,而错误地将最后一项  $P(A_1 A_2 A_3 A_4)$  漏了.

35. 如果一危险情况  $C$  发生时,一电路闭合并发出警报,我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性. 在  $C$  发生时这些开关每一个都应闭合,且若至少一个开关闭合了,警报就发出. 如果两个这样的开关并联连接,它们每个具有 0.96 的可靠性(即在情况  $C$  发生时闭合的概率),问这时系统的可靠性(即电路闭合的概率)是多少? 如果需要有一个可靠性至少为 0.999 9 的系统,则至少需要用多少只开关并联? 设各开关闭合与否是相互独立的.

解 以  $A_i$  表示事件“第  $i$  只开关闭合”,  $i=1, 2, \dots, n$ . 已知  $P(A_i)=0.96$ , 由此可得两只这样的开关并联而电路闭合的概率为(注意各开关闭合与否是相互独立的)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= 2 \times 0.96 - 0.96^2 = 0.9984. \end{aligned}$$

设需要  $n$  只这样的开关并联,此时系统可靠性  $R = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$ , 注意到

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n},$$

且由  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的独立性推得  $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$  也相互独立. 故

$$\begin{aligned} R &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) = 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_n}) = 1 - (1 - 0.96)^n. \end{aligned}$$

要使  $R \geq 0.9999$ , 即使  $1 - 0.04^n \geq 0.9999$ , 亦即使  $0.0001 \geq 0.04^n$ . 故应有

$$n \geq \frac{\lg 0.0001}{\lg 0.04} = \frac{4}{\lg 25} = \frac{4}{1.3979} = 2.86.$$

因  $n$  为整数,故应有  $n \geq 3$ , 即至少要用 3 只开关并联.



36. 三人独立地去破译一份密码, 已知各人能译出的概率分别为  $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ . 问三人中至少有一人能译出此密码的概率是多少?

解 以  $A_i$  表示事件“第  $i$  人能译出密码”,  $i=1, 2, 3$ . 已知  $P(A_1) = \frac{1}{5}$ ,  $P(A_2) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A_3) = \frac{1}{4}$ , 则至少有一人能译出密码的概率为

$$\begin{aligned} p &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3). \end{aligned}$$

由独立性即得

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

也可以这样做, 因  $A_1, A_2, A_3$  相互独立, 知  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$  也相互独立, 即有

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

37. 设第一只盒子中装有 3 只蓝球, 2 只绿球, 2 只白球; 第二只盒子中装有 2 只蓝球, 3 只绿球, 4 只白球. 独立地分别在两只盒子中各取一只球.

(1) 求至少有一只蓝球的概率.

(2) 求有一只蓝球一只白球的概率.

(3) 已知至少有一只蓝球, 求有一只蓝球一只白球的概率.

解 以  $B_i$  记事件“从第  $i$  只盒子中取得一只蓝球”, 以  $W_i$  记事件“从第  $i$  只盒子中取得一只白球”,  $i=1, 2$ . 由题设在不同盒子中取球是相互独立的.

(1) 即需求  $P(B_1 \cup B_2)$ . 利用对立事件来求较方便, 即有

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= 1 - P(\overline{B_1 \cup B_2}) = 1 - P(\bar{B}_1 \bar{B}_2) \\ &= 1 - P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2) = 1 - \frac{4}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

(2) 即需求事件  $B_1 W_2 \cup B_2 W_1$  的概率, 注意到  $B_1, W_1$  是互不相容的, 即  $B_1 W_1 = \emptyset$ , 因而  $(B_1 W_2)(B_2 W_1) = \emptyset$ , 故有

$$\begin{aligned} P(B_1 W_2 \cup B_2 W_1) &= P(B_1 W_2) + P(B_2 W_1) \\ &= P(B_1)P(W_2) + P(B_2)P(W_1) \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{7} = \frac{16}{63}. \end{aligned}$$

(3) 即需求条件概率  $p = P(B_1 W_2 \cup B_2 W_1 | B_1 \cup B_2)$ . 因  $(B_1 W_2 \cup B_2 W_1) \subset$



$B_1 \cup B_2$ , 故有

$$\begin{aligned} p &= P[(B_1 W_2 \cup B_2 W_1)(B_1 \cup B_2)] / P(B_1 \cup B_2) \\ &= P(B_1 W_2 \cup B_2 W_1) / P(B_1 \cup B_2) = \frac{16}{35}. \end{aligned}$$

38. 袋中装有  $m$  枚正品硬币、 $n$  枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽), 在袋中任取一枚, 将它投掷  $r$  次, 已知每次都得到国徽. 问这枚硬币是正品的概率为多少?

解 以  $T$  记事件“将硬币投掷  $r$  次每次都出现国徽”, 以  $A$  记事件“所取到的是正品”, 由题设  $P(A) = \frac{m}{m+n}$ ,  $P(\bar{A}) = \frac{n}{m+n}$ ,  $P(T|A) = \frac{1}{2^r}$ ,  $P(T|\bar{A}) = 1$ , 需要求的是概率  $P(A|T)$ . 由贝叶斯公式, 所求概率为

$$\begin{aligned} P(A|T) &= \frac{P(AT)}{P(T)} = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A) + P(T|\bar{A})P(\bar{A})} \\ &= \left( \frac{1}{2^r} \times \frac{m}{m+n} \right) / \left( \frac{1}{2^r} \times \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} \right) \\ &= \frac{m}{m + 2^r n}. \end{aligned}$$

39. 设根据以往记录的数据分析, 某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种: 损坏 2%(这一事件记为  $A_1$ ), 损坏 10%(事件  $A_2$ ), 损坏 90%(事件  $A_3$ ), 且知  $P(A_1) = 0.8$ ,  $P(A_2) = 0.15$ ,  $P(A_3) = 0.05$ . 现在从已被运输的物品中随机地取 3 件, 发现这 3 件都是好的(这一事件记为  $B$ ). 试求  $P(A_1|B)$ ,  $P(A_2|B)$ ,  $P(A_3|B)$ (这里设物品件数很多, 取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率).

解 在被运输的物品中, 随机取 3 件, 相当于在物品中抽取 3 次, 每次取一件, 作不放回抽样. 又根据题中说明抽取一件后, 不影响取后一件是否为好品的概率, 已知当  $A_1$  发生时, 一件产品是好品的概率为  $1 - 2\% = 0.98$ , 从而随机取 3 件, 它们都是好品的概率为  $0.98^3$ , 即

$$P(B|A_1) = 0.98^3,$$

同样

$$P(B|A_2) = 0.9^3, \quad P(B|A_3) = 0.1^3.$$

又知

$$P(A_1) = 0.8, \quad P(A_2) = 0.15, \quad P(A_3) = 0.05.$$

现在  $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , 且  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$ , 由教材第一章 §5 的页下注知道此时全概率公式、贝叶斯公式都能够应用, 由贝叶斯公式得到



$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)}$$

$$= \frac{0.98^3 \times 0.8}{0.8624} = 0.8731,$$

$$P(A_2|B) = \frac{0.9^3 \times 0.15}{0.8624} = 0.1268,$$

$$P(A_3|B) = \frac{0.1^3 \times 0.05}{0.8624} = 0.0001.$$

40. 将 A、B、C 三个字母之一输入信道, 输出为原字母的概率为  $\alpha$ , 而输出为其他一字母的概率都是  $\frac{1-\alpha}{2}$ . 今将字母串 AAAA, BBBB, CCCC 之一输入信道, 输入 AAAA, BBBB, CCCC 的概率分别为  $p_1, p_2, p_3$  ( $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ), 已知输出为 ABCA, 问输入的是 AAAA 的概率是多少? (设信道传输各个字母的工作是相互独立的.)

解 以  $A_1, B_1, C_1$  分别表示事件“输入 AAAA”、“输入 BBBB”、“输入 CCCC”, 以  $D$  表示事件“输出 ABCA”. 因事件  $A_1, B_1, C_1$  两两互不相容, 且有  $P(A_1 \cup B_1 \cup C_1) = P(A_1) + P(B_1) + P(C_1) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$ , 因此全概率公式和贝叶斯公式可以使用(参见教材第一章 §5 的页下注). 由贝叶斯公式有

$$P(A_1|D) = \frac{P(A_1 D)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(D|A_1)p_1}{P(D|A_1)p_1 + P(D|B_1)p_2 + P(D|C_1)p_3}.$$

在输入为 AAAA(即事件  $A_1$ ) 输出为 ABCA(即事件  $D$ ) 时, 有两个字母为原字母, 另两字母为其他字母, 所以

$$P(D|A_1) = \alpha^2 \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^2.$$

同理,  $P(D|B_1) = P(D|C_1) = \alpha \left( \frac{1-\alpha}{2} \right)^3$ . 代入上式并注意到  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ , 得到

$$P(A_1|D) = \frac{2\alpha p_1}{(3\alpha - 1)p_1 + 1 - \alpha}.$$