

第四章 随机变量的数字特征

1. (1) 在下列句子中随机地取一个单词,以 X 表示取到的单词所包含的字母个数,写出 X 的分布律并求 $E(X)$.

“THE GIRL PUT ON HER BEAUTIFUL RED HAT”.

(2) 在上述句子的 30 个字母中随机地取一个字母, 以 Y 表示取到的字母所在单词所包含的字母数, 写出 Y 的分布律并求 $E(Y)$.

(3) 一人掷骰子, 如得 6 点则掷第 2 次, 此时得分为 $6 +$ 第二次得到的点数; 否则得分为他第一次掷得的点数, 且不能再掷, 求得分 X 的分布律及 $E(X)$.

解 (1) 随机试验属等可能概型. 所给句子共 8 个单词, 其中含 2 个字母, 含 4 个字母, 含 9 个字母的各有一个单词, 另有 5 个单词含 3 个字母, 所以 X 的分布律为

X	2	3	4	9
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

数学期望

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{5}{8} + 4 \times \frac{1}{8} + 9 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{4}.$$

(2) 随机试验属等可能概型, Y 的可能值也是 2, 3, 4, 9. 样本空间 S 由各个字母组成, 共有 30 个样本点, 其中样本点属于 $Y = 2$ 的有 2 个, 属于 $Y = 3$ 的有 15 个, 属于 $Y = 4$ 的有 4 个, 属于 $Y = 9$ 的有 9 个, 所以 Y 的分布律为

Y	2	3	4	9
p_k	$\frac{2}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{9}{30}$

数学期望 $E(Y) = 2 \times \frac{2}{30} + 3 \times \frac{15}{30} + 4 \times \frac{4}{30} + 9 \times \frac{9}{30} = \frac{73}{15}$.

(3) 分布律为

[illegible]

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{36} + 8 \times \frac{1}{36} + 9 \times \frac{1}{36} \\
 &\quad + 10 \times \frac{1}{36} + 11 \times \frac{1}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\
 &= \frac{49}{12}.
 \end{aligned}$$

2. 某产品的次品率为 0.1, 检验员每天检验 4 次. 每次随机地取 10 件产品进行检验, 如发现其中的次品数多于 1, 就去调整设备. 以 X 表示一天中调整设备的次数, 试求 $E(X)$. (设诸产品是否为次品是相互独立的.)

解 先求检验一次, 决定需要调整设备的概率. 设抽检次品件数为 Y , 则 $Y \sim b(10, 0.1)$. 记需调整设备一次的概率为 p , 则

$$\begin{aligned}
 p &= P\{Y > 1\} = 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} \\
 &= 1 - 0.9^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0.9^9 \cdot 0.1 = 0.2639.
 \end{aligned}$$

又因各次检验结果相互独立, 故

$$X \sim b(4, 0.2639).$$

X 的分布律为

X	0	1	2	3	4
p_k	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

于是

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 \times 4p(1-p)^3 + 2 \times 6p^2(1-p)^2 + 3 \times 4p^3(1-p) + 4 \times p^4 \\
 &= 4p = 4 \times 0.2639 = 1.0556.
 \end{aligned}$$

以后将会知道若 $X \sim b(n, p)$, 则 $E(X) = np$.

3. 有 3 只球, 4 个盒子, 盒子的编号为 1, 2, 3, 4. 将球逐个独立地, 随机地放入 4 个盒子中去. 以 X 表示其中至少有一只球的盒子的最小号码 (例如 $X = 3$ 表示第 1 号, 第 2 号盒子是空的, 第 3 个盒子至少有一只球), 试求 $E(X)$.

解法(i) 由于每只球都有 4 种放法, 由乘法原理共有 $4^3 = 64$ 种放法. 其中 3 只球都放在 4 号盒中的放置法仅有 1 种, 从而

$$P\{X = 4\} = \frac{1}{64}.$$

又 $\{X = 3\}$ 表示事件“1, 2 号盒子都是空的, 而 3 号盒子不空”. 因 1, 2 号盒子都空, 球只能放置在 3, 4 号两个盒子中, 共有 2^3 种放置法, 但其中有一种是 3 只球都放在 4 号盒子中, 即 3 号盒子是空的, 这不符合 $X = 3$ 的要求需除去, 故有

$$P\{X = 3\} = \frac{2^3 - 1}{64} = \frac{7}{64}.$$

同理可得

$$P\{X=2\} = \frac{3^3 - 2^3}{64} = \frac{19}{64},$$

$$P\{X=1\} = \frac{4^3 - 3^3}{64} = \frac{37}{64}.$$

因此

$$E(X) = \sum_{k=1}^4 kP\{X=k\} = \frac{25}{16}.$$

注: $P\{X=1\}$ 也可由 $1 - (P\{X=4\} + P\{X=3\} + P\{X=2\})$ 求得.

解法(ii) 以 $A_i (i=1,2,3,4)$ 记事件“第 i 个盒子是空盒”. $\{X=1\}$ 表示事件“第一个盒子中至少有一只球”, 因此 $\{X=1\} = \bar{A}_1$, 故

$$P\{X=1\} = P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{37}{64}.$$

(因第一个盒子为空盒, 3 只球的每一只都只有 3 个盒子可以放, 故 $P(A_1) = (3/4)^3$.)

$\{X=2\}$ 表示事件“第一个盒子为空盒且第二个盒子中至少有一只球”, 因此 $\{X=2\} = A_1 \bar{A}_2$. 故

$$\begin{aligned} P\{X=2\} &= P(A_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_2 | A_1) P(A_1) \\ &= (1 - P(A_2 | A_1)) P(A_1) \\ &= \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{19}{64}. \end{aligned}$$

(因在第一个盒子是空盒的条件下, 第二个盒子也是空盒, 则 3 只球都只有 2 个盒子可以放, 故 $P(A_2 | A_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$.)

类似地,

$$\begin{aligned} P\{X=3\} &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_3 | A_1 A_2) P(A_2 | A_1) P(A_1) \\ &= \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{7}{64}, \end{aligned}$$

$$P\{X=4\} = 1 - \frac{37}{64} - \frac{19}{64} - \frac{7}{64} = \frac{1}{64},$$

因此, $E(X) = \sum_{k=1}^4 kP\{X=k\} = \frac{25}{16}.$

解法(iii) 将球编号. 以 X_1, X_2, X_3 分别记 1 号, 2 号, 3 号球所落入的盒子的号码数. 则 X_1, X_2, X_3 都是随机变量, 记 $X = \min\{X_1, X_2, X_3\}$, 按题意, 本题需要求的是

$$E(X) = E[\min\{X_1, X_2, X_3\}].$$

因 X_1, X_2, X_3 具有相同的分布律

X_j	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

因而 X_1, X_2, X_3 具有相同的分布函数

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq z < 2, \\ \frac{2}{4}, & 2 \leq z < 3, \\ \frac{3}{4}, & 3 \leq z < 4, \\ 1, & z \geq 4. \end{cases}$$

于是 $X = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ 的分布函数为:

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^3$$

$$= \begin{cases} 1 - (1 - 0)^3 = 0, & z < 1, \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{37}{64}, & 1 \leq z < 2, \\ 1 - \left(1 - \frac{2}{4}\right)^3 = \frac{56}{64}, & 2 \leq z < 3, \\ 1 - \left(1 - \frac{3}{4}\right)^3 = \frac{63}{64}, & 3 \leq z < 4, \\ 1 - (1 - 1)^3 = 1, & z \geq 4. \end{cases}$$

$X = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ 的分布律为

X	1	2	3	4
p_k	$\frac{37}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$

得

$$E(X) = \frac{25}{16}.$$

4. (1) 设随机变量 X 的分布律为 $P\left\{X = (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j}\right\} = \frac{2}{3^j}, j = 1, 2, \dots$, 说明 X 的数学期望不存在.

(2) 一盒中装有一只黑球, 一只白球, 作摸球游戏, 规则如下: 一次从盒中随机摸一只球, 若摸到白球, 则游戏结束; 若摸到黑球放回再放入一只黑球, 然后再

从盒中随机地摸一只球. 试说明要游戏结束的摸球次数 X 的数学期望不存在.

解 (1) 因级数

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j} P\left\{X = (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j}\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j} \cdot \frac{2}{3^j} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \end{aligned}$$

不绝对收敛, 按定义 X 的数学期望不存在.

(2) 以 A_k 记事件“第 k 次摸球摸到黑球”, 以 \bar{A}_k 记事件“第 k 次摸球摸到白球”, 以 C_k 表示事件“游戏在第 k 次摸球时结束”, $k = 1, 2, \dots$. 按题意

$$C_k = A_1 A_2 \cdots A_{k-1} \bar{A}_k,$$

$$P(C_k) = P(\bar{A}_k | A_1 A_2 \cdots A_{k-1}) P(A_{k-1} | A_1 A_2 \cdots A_{k-2}) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1).$$

$$P\{X = 1\} = P(\bar{A}_1) = \frac{1}{2},$$

$$P\{X = 2\} = P(A_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_2 | A_1) P(A_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} P\{X = 3\} &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_3 | A_1 A_2) P(A_2 | A_1) P(A_1) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$X = k$ 时, 盒中共 $k+1$ 只球, 其中只有一只是白球, 故

$$\begin{aligned} P\{X = k\} &= P(A_1 \cdots A_{k-1} \bar{A}_k) \\ &= P(\bar{A}_k | A_1 A_2 \cdots A_{k-1}) P(A_{k-1} | A_1 A_2 \cdots A_{k-2}) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1) \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

若 $E(X)$ 存在, 则它应等于 $\sum_{k=1}^{\infty} k P\{X = k\}$. 但

$$\sum_{k=1}^{\infty} k P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty,$$

故 X 的数学期望不存在.

5. 设在某一规定的时间间隔里, 某电气设备用于最大负荷的时间 X (以 min 计) 是一个随机变量, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1500^2} x, & 0 \leq x \leq 1500, \\ \frac{-1}{1500^2} (x - 3000), & 1500 < x \leq 3000, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X)$.

解 按连续型随机变量的数学期望的定义,有

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 xf(x)dx + \int_0^{1500} xf(x)dx \\
 &\quad + \int_{1500}^{3000} xf(x)dx + \int_{3000}^{\infty} xf(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0dx + \int_0^{1500} x \cdot \frac{x}{1500^2}dx \\
 &\quad + \int_{1500}^{3000} x \cdot \frac{-(x-3000)}{1500^2}dx + \int_{3000}^{\infty} x \cdot 0dx \\
 &= \frac{1}{1500^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1500} + \frac{1}{1500^2} \left(3000 \times \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1500}^{3000} \\
 &= 1500(\text{min}).
 \end{aligned}$$

6. (1) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X)$, $E(X^2)$, $E(3X^2 + 5)$.

(2) 设 $X \sim \pi(\lambda)$, 求 $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

解 (1) X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

$$E(X) = (-2) \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2.$$

由关于随机变量函数的数学期望的定理,知

$$E(X^2) = (-2)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 2.8,$$

$$\begin{aligned}
 E(3X^2 + 5) &= [3(-2)^2 + 5] \times 0.4 + [3(0)^2 + 5] \times 0.3 + [3(2^2) + 5] \times 0.3 \\
 &= 13.4.
 \end{aligned}$$

如利用数学期望的性质,则有

$$E(3X^2 + 5) = 3E(X^2) + 5 = 3 \times 2.8 + 5 = 13.4.$$

(2) 因 $X \sim \pi(\lambda)$, 故 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k+1)!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} - 1 \right) \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}).
 \end{aligned}$$

7. (1) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求 (i) $Y = 2X$; (ii) $Y = e^{-2X}$ 的数学期望.

(2) 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且都服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布

(i) 求 $U = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的数学期望, (ii) 求 $V = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的数学期望.

解 (1) 由关于随机变量函数的数学期望的定理, 知

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad E(Y) &= E(2X) = \int_{-\infty}^{\infty} 2xf(x)dx \\
 &= 2 \left(\int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{\infty} xe^{-x} dx \right) \\
 &= 2 \left(-xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \right) = -2e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad E(Y) &= E(e^{-2X}) = \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-3x} dx \\
 &= \frac{-1}{3} e^{-3x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

(2) 因 $X_i \sim U(0, 1), i = 1, 2, \dots, n, X_i$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

因 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 故 $U = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ u^n, & 0 \leq u < 1, \\ 1, & u \geq 1. \end{cases}$$

U 的概率密度为

$$f_U(u) = \begin{cases} nu^{n-1}, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} uf_U(u)du = \int_0^1 u \cdot nu^{n-1}du = n \int_0^1 u^n du = \frac{n}{n+1}.$$

$V = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 0, \\ 1 - (1 - v)^n, & 0 \leq v < 1, \\ 1, & v \geq 1. \end{cases}$$

V 的概率密度为

$$f_V(v) = \begin{cases} n(1 - v)^{n-1}, & 0 < v < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(V) &= \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v) dv = \int_0^1 v n (1 - v)^{n-1} dv \\ &= -v(1 - v)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 (1 - v)^n dv \\ &= -\frac{(1 - v)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

8. 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

Y \ X	X		
	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X), E(Y)$.

(2) 设 $Z = \frac{Y}{X}$, 求 $E(Z)$.

(3) 设 $Z = (X - Y)^2$, 求 $E(Z)$.

解 由关于随机变量函数的数学期望 $E[g(X, Y)]$ 的定理, 得

$$\begin{aligned} (1) \quad E(X) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i p_{ij} \\ &= 1 \cdot (0.2 + 0.1 + 0.1) + 2 \cdot (0.1 + 0 + 0.1) + 3 \cdot (0 + 0.3 + 0.1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 y_j p_{ij} \\ &= (-1) \cdot (0.2 + 0.1 + 0) + 0 \cdot (0.1 + 0 + 0.3) + 1 \cdot (0.1 + 0.1 + 0.1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad E(Z) &= E\left(\frac{Y}{X}\right) \\ &= \frac{-1}{1} P\{X=1, Y=-1\} + \frac{-1}{2} P\{X=2, Y=-1\} \\ &\quad + \frac{-1}{3} P\{X=3, Y=-1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{0}{1}P\{X=1, Y=0\} + \frac{0}{2}P\{X=2, Y=0\} \\
& + \frac{0}{3}P\{X=3, Y=0\} + \frac{1}{1}P\{X=1, Y=1\} \\
& + \frac{1}{2}P\{X=2, Y=1\} + \frac{1}{3}P\{X=3, Y=1\} \\
& = -0.2 - 0.05 + 0.1 + 0.05 + \frac{0.1}{3} = -\frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad E(Z) &= E[(X-Y)^2] = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 (x_i - y_j)^2 p_{ij} \\
&= 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.1 + 4^2 \times 0 + 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0 \\
&\quad + 3^2 \times 0.3 + 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.1 \\
&= 5.
\end{aligned}$$

注: (i) 可先求出边缘分布律, 然后求出 $E(X), E(Y)$.

(ii) 在(3)中可先算出 $Z = (X-Y)^2$ 的分布律

Z	0	1	4	9
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

然后求得 $E(Z) = \sum_{k=1}^4 z_k p_k = 5$.

9. (1) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

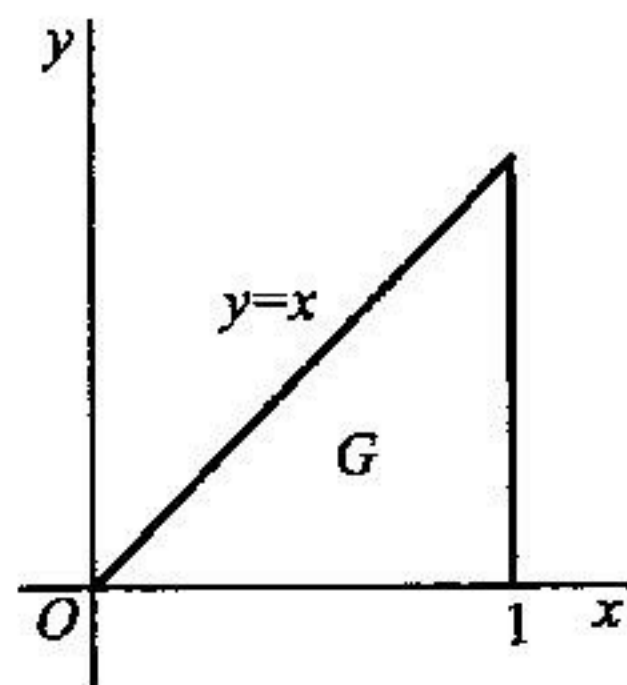
$$f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), E(XY), E(X^2 + Y^2)$.

(2) 设随机变量 X, Y 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(y+x/y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), E(XY)$.



题 4.9 图

解 (1) 各数学期望均可按照 $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ 计算. 因 $f(x, y)$ 仅在有限区域 $G: \{(x, y) | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ 内不为零, 故各数学期望均化为 G (如题 4.9 图) 上相应积分的计算.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy = \iint_G x \cdot 12y^2 dx dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^x 12xy^2 dy = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

$$E(Y) = \iint_G y \cdot 12y^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x 12y^3 dy = \frac{3}{5}.$$

$$E(XY) = \iint_G xy \cdot 12y^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x 12xy^3 dy = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} E(X^2 + Y^2) &= \iint_G (x^2 + y^2) 12y^2 dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x 12(x^2 y^2 + y^4) dy = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x}{y} e^{-(y+\frac{x}{y})} dx dy \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-y} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x/y} d\left(-\frac{x}{y}\right) \right] dy \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-y} \left[x e^{-x/y} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x/y} dx \right] dy = \int_0^{\infty} e^{-y} y dy = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(y+x/y)} dx dy = \int_0^{\infty} e^{-y} \int_0^{\infty} e^{-x/y} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} [-ye^{-x/y}]_0^{\infty} dy = \int_0^{\infty} e^{-y} y dy = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(y+x/y)} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x/y} dx \right] dy. \end{aligned}$$

而 $\int_0^{\infty} x e^{-x/y} dx = -y \int_0^{\infty} x e^{-x/y} d\left(-\frac{x}{y}\right) = y^2,$

故 $E(XY) = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \Gamma(3)^{\text{①}} = 2.$

10. (1) 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$ 且 X, Y 相互独立. 求 $E\left(\frac{X^2}{X^2 + Y^2}\right).$

(2) 一飞机进行空投物资作业, 设目标点为原点 $O(0, 0)$, 物资着陆点为 (X, Y) , X, Y 相互独立, 且设 $X \sim N(0, \sigma^2), Y \sim N(0, \sigma^2)$, 求原点到点 (X, Y) 间距离的数学期望.

解 (1) 由对称性知

$$E\left(\frac{X^2}{X^2 + Y^2}\right) = E\left(\frac{Y^2}{X^2 + Y^2}\right).$$

① Γ 函数: $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, a > 0$, 它具有性质: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), a > 0, \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$

$\sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! (n \text{ 为正整数}).$

而

$$E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right) + E\left(\frac{Y^2}{X^2+Y^2}\right) = E(1) = 1,$$

故

$$E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

(2) 记原点到点 (X, Y) 的距离为 $R, R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, 由题设 (X, Y) 的密度函数为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty. \end{aligned}$$

$$E(R) = E(\sqrt{X^2 + Y^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)} dx dy.$$

采用极坐标

$$\begin{aligned} E(R) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} r dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} r^2 e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr \\ &= - \int_0^{\infty} r d(e^{-r^2/(2\sigma^2)}) = - r e^{-r^2/(2\sigma^2)} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr \right) \sqrt{2\pi}\sigma \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2\pi}\sigma = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

11. 一工厂生产的某种设备的寿命 X (以年计)服从指数分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

工厂规定, 出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换. 若工厂售出一台设备赢利 100 元, 调换一台设备厂方需花费 300 元. 试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

解 一台设备在一年内调换的概率为

$$p = P\{X < 1\} = \int_0^1 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = -e^{-x/4} \Big|_0^1 = 1 - e^{-1/4}.$$

以 Y 记工厂售出一台设备的净赢利值, 则 Y 具有分布律

Y	100	100 - 300
p_k	$e^{-1/4}$	$1 - e^{-1/4}$

故有

$$\begin{aligned} E(Y) &= 100 \times e^{-1/4} - 200(1 - e^{-1/4}) \\ &= 300e^{-1/4} - 200 = 33.64(\text{元}). \end{aligned}$$

12. 某车间生产的圆盘直径在区间 (a, b) 服从均匀分布, 试求圆盘面积的数学期望.

解 设圆盘直径为 X , 按题设 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

故圆盘面积 $A = \frac{1}{4}\pi X^2$ 的数学期望为

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{4}\pi X^2\right) &= \int_a^b \frac{1}{4}\pi x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{\pi}{12(b-a)} x^3 \Big|_a^b \\ &= \frac{\pi}{12}(b^2 + ab + a^2). \end{aligned}$$

13. 设电压(以 V 计) $X \sim N(0, 9)$. 将电压施加于一检波器, 其输出电压为 $Y = 5X^2$, 求输出电压 Y 的均值.

解 由 $X \sim N(0, 9)$, 即有 $E(X) = 0, D(X) = 9$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(5X^2) = 5E(X^2) = 5\{D(X) + [E(X)]^2\} \\ &= 5(9 + 0) = 45(\text{V}). \end{aligned}$$

另法 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/18}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(5X^2) = 5E(X^2) = 5 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{3\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/18} dx \\ &= \frac{5 \times 9}{3\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-x^2/18} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/18} dx \right) \\ &= \frac{45}{3\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/18} dx = 45 \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= 45 \times 1 = 45(\text{V}). \end{aligned}$$

14. 设随机变量 X_1, X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1) 求 $E(X_1 + X_2), E(2X_1 - 3X_2^2)$.

(2) 又设 X_1, X_2 相互独立, 求 $E(X_1 X_2)$.

解 若 X 服从以 θ 为参数的指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx$, 令 $u = x/\theta$, 得到

$$E(X) = \theta \int_0^{\infty} ue^{-u} du = \theta \Gamma(2) = \theta \Gamma(1) = \theta,$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx \\ &= \theta^2 \int_0^{\infty} u^2 e^{-u} du = \theta^2 \Gamma(3) \quad (\text{其中 } u = \frac{x}{\theta}) \\ &= \theta^2 \cdot 2\Gamma(2) = \theta^2 \cdot 2\Gamma(1) = 2\theta^2, \end{aligned}$$

故 $E(X_1) = \frac{1}{2}, E(X_2) = \frac{1}{4}, E(X_2^2) = 2(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$, 于是

(1) 由数学期望的性质, 有

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{3}{4},$$

$$E(2X_1 - 3X_2^2) = 2E(X_1) - 3E(X_2^2) = \frac{5}{8}.$$

(2) 因 X_1, X_2 相互独立, 由数学期望的性质, 有

$$E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

15. 将 n 只球(1 ~ n 号) 随机地放进 n 个盒子(1 ~ n 号) 中去, 一个盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中, 称为一个配对. 记 X 为总的配对数, 求 $E(X)$.

解 引入随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 号球装入第 } i \text{ 号盒子中,} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 号球未装入第 } i \text{ 号盒子中,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则总的配对数 X 可表示成

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

显然

$$P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

X_i 的分布律为

X_i	0	1
p_k	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

即有 $E(X_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$, 于是

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = 1. \end{aligned}$$

16. 若有 n 把看上去样子相同的钥匙, 其中只有一把能打开门上的锁, 用它们去试开门上的锁. 设取到每只钥匙是等可能的. 若每把钥匙试开一次后除去, 试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望.

(1) 写出 X 的分布律.

(2) 不写出 X 的分布律.

解 (1) 以 $A_k (k=1, 2, \dots, n)$ 表示事件“第 k 次试开是成功的”. $\{X=k\}$ 表示前 $k-1$ 次所取的钥匙均未能打开门, 而第 k 次所取的钥匙能将门打开. 即有

$$\begin{aligned} P\{X=k\} &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1} A_k) \\ &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1}) P(A_k | \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1}) \\ &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-2}) P(\bar{A}_{k-1} | \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-2}) P(A_k | \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1}) \\ &= \cdots \\ &= P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \cdots P(A_k | \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1}) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

X 的分布律为

$$P\{X=k\} = \frac{1}{n}, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

故

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n k P\{X=k\} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

(2) 引入随机变量 X_k 如下:

$$X_1 = 1,$$

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{前 } k-1 \text{ 次试开均未成功,} \\ 0, & \text{前 } k-1 \text{ 次中有一次试开成功, } k=2, 3, \dots, n, \end{cases}$$

则

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

沿用(1)中的记号, 则有

$$E(X_1) = 1,$$

$$\begin{aligned} E(X_k) &= 1 \times P\{X_k=1\} = 1 \times P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-1}) \\ &= P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_{k-1} | \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{k-2}) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} = \frac{n-k+1}{n}, \end{aligned}$$

$$k = 2, 3, \dots, n.$$

故有

$$E(X) = 1 + \sum_{k=2}^n E(X_k) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n-k+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

17. 设 X 为随机变量, C 是常数, 证明 $D(X) < E[(X-C)^2]$, 对于 $C \neq E(X)$. (由于 $D(X) = E[[X-E(X)]^2]$, 上式表明 $E[(X-C)^2]$ 当 $C = E(X)$ 时取到最小值.)

$$\begin{aligned} \text{证 } E[(X-C)^2] &= E(X^2 - 2CX + C^2) = E(X^2) - 2CE(X) + C^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 + \{[E(X)]^2 - 2CE(X) + C^2\} \\ &= D(X) + (E(X) - C)^2 \geq D(X). \end{aligned}$$

等号仅当 $C = E(X)$ 时成立.

18. 设随机变量 X 服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\sigma > 0$ 是常数. 求 $E(X)$, $D(X)$.

$$\text{解 } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx.$$

令 $u = x^2/(2\sigma^2)$, 得到

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{2}\sigma \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = \sqrt{2}\sigma \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\sigma \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma. \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx.$$

令 $u = x^2/(2\sigma^2)$, 得到

$$E(X^2) = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} u e^{-u} du = 2\sigma^2 \Gamma(2) = 2\sigma^2,$$

故

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2.$$

19. 设随机变量 X 服从 Γ 分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

^① 参见 96 页注.

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 是常数. 求 $E(X), D(X)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\ &\stackrel{\text{令 } u=x/\beta}{=} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha} e^{-u} du = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \alpha \Gamma(\alpha) = \alpha\beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\ &\stackrel{\text{令 } u=x/\beta}{=} \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha+1} e^{-u} du = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2) \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\beta^2.\end{aligned}$$

$$D(X) = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2.$$

20. 设随机变量 X 服从几何分布, 其分布律为

$$P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1}, \quad k=1, 2, \dots,$$

其中 $0 < p < 1$ 是常数. 求 $E(X), D(X)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP\{X=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} \\ &= p \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = p \frac{1}{[1-(1-p)]^2} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

这是因为

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots, \quad |x| < 1,$$

两边对 x 求导, 就有

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + kx^{k-1} + \dots, \quad |x| < 1. \quad (\text{A})$$

$$\text{又 } E[X(X+1)] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)P\{X=n\} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)(1-p)^{n-1}.$$

将上述(A)式两边关于 x 求导, 就有

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + \dots + (k-1) \cdot kx^{k-2} + \dots, \quad |x| < 1,$$

由此知

$$E[X(X+1)] = p \frac{2}{[1-(1-p)]^3} = \frac{2}{p^2}$$

故

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X(X+1) - X] - [E(X)]^2$$

$$= E[X(X+1)] - E(X) - [E(X)]^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

21. 设长方形的长(以 m 计) $X \sim U(0, 2)$, 已知长方形的周长(以 m 计) 为 20. 求长方形面积 A 的数学期望和方差.

解 长方形的长为 X , 周长为 20, 所以它的面积 A 为

$$A = X(10 - X).$$

现在 $X \sim U(0, 2)$, X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

所以

$$E(A) = E[X(10 - X)] = \int_0^2 x(10 - x) \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$= \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{26}{3} = 8.67,$$

$$E(A^2) = E[X^2(10 - X)^2] = \int_0^2 x^2(10 - x)^2 \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (100x^2 - 20x^3 + x^4) dx = \frac{1448}{15} = 96.53,$$

$$D(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{1448}{15} - \left(\frac{26}{3} \right)^2 = 21.42.$$

22. (1) 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 且有 $E(X_i) = i, D(X_i) = 5 - i, i = 1, 2, 3, 4$. 设 $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4$. 求 $E(Y), D(Y)$.

(2) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(720, 30^2), Y \sim N(640, 25^2)$, 求 $Z_1 = 2X + Y, Z_2 = X - Y$ 的分布, 并求概率 $P\{X > Y\}, P\{X + Y > 1400\}$.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad E(Y) &= E\left(2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4\right) \\ &= 2E(X_1) - E(X_2) + 3E(X_3) - \frac{1}{2}E(X_4) \\ &= 2 \times 1 - 2 + 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 4 = 7. \end{aligned}$$

因 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 故有

$$\begin{aligned} D(Y) &= D\left(2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4\right) \\ &= 4D(X_1) + D(X_2) + 9D(X_3) + \frac{1}{4}D(X_4) \\ &= 4 \times 4 + 3 + 9 \times 2 + \frac{1}{4} \times 1 = 37.25. \end{aligned}$$

(2) 因 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(720, 30^2), Y \sim N(640, 25^2)$, 故 $Z_1 = 2X + Y, Z_2 = X - Y$ 均服从正态分布, 且

$$E(Z_1) = E(2X + Y) = 2E(X) + E(Y)$$

$$= 2 \times 720 + 640 = 2080,$$

$$D(Z_1) = D(2X + Y) = 4D(X) + D(Y)$$

$$= 4 \times 30^2 + 25^2 = 4225,$$

$$E(Z_2) = E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

$$= 720 - 640 = 80,$$

$$D(Z_2) = D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

$$= 30^2 + 25^2 = 1525,$$

故有 $Z_1 \sim N(2080, 4225), Z_2 \sim N(80, 1525).$

$$P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = P\{Z_2 > 0\}$$

$$= 1 - P\{Z_2 \leq 0\} = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 80}{\sqrt{1525}}\right)$$

$$= \Phi(2.0486) = 0.9798.$$

又 $X + Y \sim N(E(X) + E(Y), D(X) + D(Y)),$

即 $X + Y \sim N(1360, 1525).$

故

$$P\{X + Y > 1400\} = 1 - P\{X + Y \leq 1400\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1400 - 1360}{\sqrt{1525}}\right) = 1 - \Phi(1.02)$$

$$= 1 - 0.8461 = 0.1539.$$

23. 五家商店联营, 它们每两周售出的某种农产品的数量(以 kg 计)分别为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 . 已知 $X_1 \sim N(200, 225), X_2 \sim N(240, 240), X_3 \sim N(180, 225), X_4 \sim N(260, 265), X_5 \sim N(320, 270), X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ 相互独立.

(1) 求五家商店两周的总销售量的均值和方差.

(2) 商店每隔两周进货一次, 为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99, 问商店的仓库应至少储存多少千克该产品?

解 以 Y 记五家商店该种产品的总销售量, 即 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.

(1) 按题设 $X_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 相互独立且均服从正态分布, 即有

$$E(Y) = \sum_{i=1}^5 E(X_i) = 200 + 240 + 180 + 260 + 320 = 1200,$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^5 D(Y_i) = 225 + 240 + 225 + 265 + 270 = 1\,225.$$

(2) 设仓库应至少储存 n kg 该产品, 才能使该产品不脱销的概率大于 0.99, 按题意, n 应满足条件

$$P\{Y \leq n\} > 0.99.$$

由于 $Y \sim N(1\,200, 35^2)$, 故有

$$P\{Y \leq n\} = P\left\{\frac{Y - 1\,200}{35} \leq \frac{n - 1\,200}{35}\right\} = \Phi\left(\frac{n - 1\,200}{35}\right),$$

因而上述不等式即为

$$\Phi\left(\frac{n - 1\,200}{35}\right) > 0.99 = \Phi(2.33),$$

从而 $\frac{n - 1\,200}{35} > 2.33$, 故应有

$$n > 1\,200 + 2.33 \times 35 = 1\,281.55,$$

即需取 $n = 1\,282$ kg.

24. 卡车装运水泥, 设每袋水泥重量 X (以 kg 计) 服从 $N(50, 2.5^2)$, 问至多装多少袋水泥使总重量超过 2 000 的概率不大于 0.05.

解 设至多能装运 n 袋水泥, 各袋水泥的重量分别为 X_1, X_2, \dots, X_n , 则

$$X_i \sim N(50, 2.5^2), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

故卡车所装运水泥的总重量为

$$W = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

按题意 n 需满足

$$P\{W > 2\,000\} \leq 0.05.$$

对于像这样的实际问题, 认为 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立是适宜的, 此时

$$E(W) = 50n, \quad D(W) = 2.5^2 n,$$

于是

$$W \sim N(50n, 2.5^2 n).$$

从而

$$P\{W > 2\,000\} = 1 - \Phi\left(\frac{2\,000 - 50n}{2.5\sqrt{n}}\right),$$

即 n 应满足

$$\Phi\left(\frac{2\,000 - 50n}{2.5\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.645).$$

故应有

$$\frac{2\,000 - 50n}{2.5\sqrt{n}} \geq 1.645,$$

解得

$$\sqrt{n} \leq 6.283\,6,$$

从而

$$n \leq 39.483.$$

故 n 至多取 39, 即该卡车至多能装运 39 袋水泥, 方能保证超过 2 000 kg 的概率不

大于 0.05.

(在这里我们指出,若设 $W = nX$, 其中 $X \sim N(50, 2.5^2)$ 而去求出 $n \approx 37$, 那就犯错误了, 为什么?)

25. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布.

(1) 求 $E(XY), E(X/Y), E[\ln(XY)], E[|Y - X|]$.

(2) 以 X, Y 为边长作一长方形, 以 A, C 分别表示长方形的面积和周长, 求 A 和 C 的相关系数.

解 (1) X, Y 的概率密度都是

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$E\left[\frac{X}{Y}\right]$ 不存在 (因 $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{y} dx dy$ 发散).

$$\begin{aligned} E[\ln(XY)] &= \int_0^1 \int_0^1 (\ln x + \ln y) dx dy \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 (\ln x) dx dy \\ &= -2. \end{aligned}$$

$$E(|Y - X|)$$

$$= \iint_D |y - x| dx dy \quad (\text{如题 4.25 图 } D = D_1 \cup D_2)$$

$$= 2 \iint_{D_1} (y - x) dx dy = 2 \int_0^1 \int_x^1 (y - x) dy dx = \frac{1}{3}.$$

$$(2) A = XY, C = 2(X + Y),$$

$$\text{Cov}(A, C) = E(AC) - E(A)E(C).$$

$$AC = 2X^2Y + 2XY^2,$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = D(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

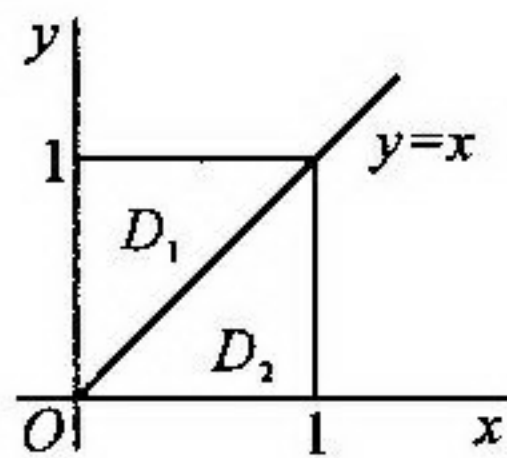
$$E(AC) = 2E(X^2Y) + 2E(XY^2)$$

$$= 2E(X^2)E(Y) + 2E(X)E(Y^2)$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Cov}(A, C) = E(AC) - E(A)E(C)$$

$$= \frac{2}{3} - [E(X)E(Y) \times 2(E(X) + E(Y))]$$



题 4.25 图

$$= \frac{2}{3} - \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} D(A) &= E(X^2 Y^2) - [E(X)E(Y)]^2 = E(X^2)E(Y^2) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}. \end{aligned}$$

$$D(C) = D(2X + 2Y) = D(2X) + D(2Y) = 4 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

故 $\rho_{AC} = \frac{\text{Cov}(A, C)}{\sqrt{D(A)D(C)}} = \frac{1}{6} / \sqrt{\frac{7}{144} \times \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{7}}.$

26. (1) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且有 $X_1 \sim b\left(4, \frac{1}{2}\right), X_2 \sim b\left(6, \frac{1}{3}\right), X_3 \sim b\left(6, \frac{1}{3}\right)$, 求 $P\{X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 5\}, E(X_1 X_2 X_3), E(X_1 - X_2), E(X_1 - 2X_2).$

(2) 设 X, Y 是随机变量, 且有 $E(X) = 3, E(Y) = 1, D(X) = 4, D(Y) = 9$, 令 $Z = 5X - Y + 15$, 分别在下列 3 种情况下求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

(i) X, Y 相互独立, (ii) X, Y 不相关, (iii) X 与 Y 的相关系数为 0.25.

解 (1) $P\{X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 5\}$
 $= P\{X_1 = 2\}P\{X_2 = 2\}P\{X_3 = 5\}.$

因 $P\{X_1 = 2\} = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4,$

$$P\{X_2 = 2\} = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{6-2} = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4,$$

$$P\{X_3 = 5\} = \binom{6}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{6-5} = \binom{6}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right),$$

故 $P\{X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 5\} = P\{X_1 = 2\} \cdot P\{X_2 = 2\} \cdot P\{X_3 = 5\}$
 $= 0.00203$

$$E(X_1 X_2 X_3) = E(X_1)E(X_2)E(X_3) = \left(4 \times \frac{1}{2}\right) \left(6 \times \frac{1}{3}\right) \left(6 \times \frac{1}{3}\right) = 8.$$

$$E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 2 - 2 = 0.$$

$$E(X_1 - 2X_2) = E(X_1) - 2E(X_2) = -2.$$

(2) 对于 $E(Z)$, 在 (i), (ii), (iii) 三种情况下都有

$$E(Z) = E(5X - Y + 15) = 5E(X) - E(Y) + 15 = 15 - 1 + 15 = 29.$$

对于 $D(Z)$, (i) X, Y 独立, 则

$$D(5X - Y + 15) = D(5X - Y) = D(5X) + D(-Y) = 25D(X) + D(Y)$$

$$= 25 \times 4 + 9 = 109.$$

(ii) X, Y 不相关, 即 $\text{Cov}(X, Y) = 0$,

$$D(Z) = 109.$$

(iii) $\rho_{XY} = 0.25$, 则

$$\text{Cov}(X, Y) = \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} \rho_{XY} = 2 \times 3 \times 0.25 = 1.5,$$

$$\begin{aligned} D(5X - Y + 15) &= D(5X - Y) = 25D(X) + D(Y) - 10\text{Cov}(X, Y) \\ &= 100 + 9 - 10 \times 1.5 = 94. \end{aligned}$$

27. 下列各对随机变量 X 和 Y , 问哪几对是相互独立的? 哪几对是不相关的.

(1) $X \sim U(0, 1), Y = X^2$.

(2) $X \sim U(-1, 1), Y = X^2$.

(3) $X = \cos V, Y = \sin V, V \sim U(0, 2\pi)$.

若 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$,

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(5) f(x, y) = \begin{cases} 2y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

解 (1) $E(X) = \frac{1}{2}, E(Y) = E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$

$$E(XY) = E(X^3) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \neq 0.$$

故 X, Y 不相互独立, 也不是不相关的.

$$(2) E(X) = 0, E(Y) = E(X^2) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$E(XY) = E(X^3) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^3 dx = 0.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0.$$

故 X, Y 不相互独立, 但不相关.

$$(3) E(X) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos v dv = 0,$$

$$E(Y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin v dv = 0,$$

$$E(XY) = E(\sin V \cos V) = \frac{1}{2} E(\sin 2V) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin 2v dv = 0,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times 0 = 0,$$

故 X, Y 不相互独立, 但不相关.

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 (x + y) dy = x + \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$f(x, y)$ 与 $f_X(x)f_Y(y)$ 在平面上不几乎处处相等, X, Y 不相互独立.

$$E(X) = \int_0^1 x(x + \frac{1}{2}) dx = \frac{7}{12}, \quad E(Y) = \frac{7}{12},$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) dx dy = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \neq 0.$$

故 X, Y 不是不相关的, 因而一定也是不相互独立的.

$$(5) f(x, y) = \begin{cases} 2y, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 对于任意 x, y 成立.

故 X, Y 相互独立, 因此 X, Y 也是不相关的.

28. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的, 但 X 和 Y 不是相互独立的.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x}{\pi} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx = 0. \end{aligned}$$

$$\text{同样} \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{y}{\pi} dx dy = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{xy}{\pi} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 y dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx = 0, \end{aligned}$$

从而

$$E(XY) = E(X)E(Y),$$

这表明 X, Y 是不相关的. 又

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

同样

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$, 故 X, Y 不是相互独立的.

29. 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

Y \ X	X		
	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证 X 和 Y 是不相关的, 但 X 和 Y 不是相互独立的.

证 先求出边缘分布律如下:

X	-1	0	1
p_k	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Y	-1	0	1
p_k	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

易见 $P\{X=0, Y=0\} = 0 \neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$, 故 X, Y 不是相互独立的. 又知 X, Y 具有相同的分布律, 且有

$$E(X) = E(Y) = (-1) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0.$$

又 $E(XY)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 x_i y_j p_{ij} \\ &= (-1)(-1) \times \frac{1}{8} + (-1) \times 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times (-1) \times \frac{1}{8} + 1 \times 1 \times \frac{1}{8} \\ &= 0, \end{aligned}$$

即有 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 故 X, Y 是不相关的.

30. 设 A 和 B 是试验 E 的两个事件, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 并定义随机变量 X, Y 如下:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 发生,} \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } B \text{ 发生,} \\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

证明若 $\rho_{XY} = 0$, 则 X 和 Y 必定相互独立.

解 X, Y 的分布律分别为

X	0	1
p_k	$P(\bar{A})$	$P(A)$

Y	0	1
p_k	$P(\bar{B})$	$P(B)$

由 X, Y 的定义, XY 只能取 0, 1 两个值, 且

$$P\{XY = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = P(AB),$$

于是得 XY 的分布律为

XY	0	1
p_k	$1 - P(AB)$	$P(AB)$

即得 $E(X) = P(A), E(Y) = P(B), E(XY) = P(AB)$.

由假设 $\rho_{XY} = 0$, 得 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 即

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

故知 A 与 B 相互独立. 从而知 A 与 \bar{B} 、 \bar{A} 与 B 、 \bar{A} 与 \bar{B} 也相互独立, 于是

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P(AB) = P(A)P(B) = P\{X = 1\}P\{Y = 1\},$$

$$P\{X = 1, Y = 0\} = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P\{X = 1\}P\{Y = 0\},$$

$$P\{X = 0, Y = 1\} = P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = P\{X = 0\}P\{Y = 1\},$$

$$P\{X = 0, Y = 0\} = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = P\{X = 0\}P\{Y = 0\},$$

故 X, Y 相互独立.

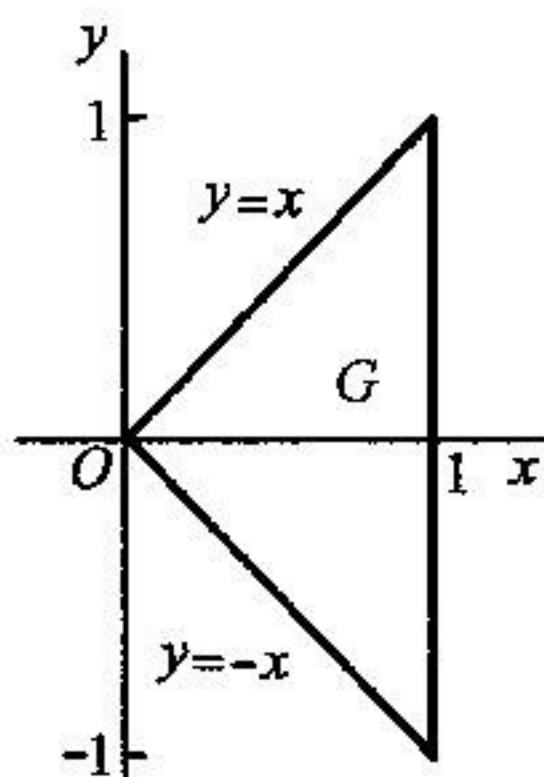
31. 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), \text{Cov}(X, Y)$.

解 注意到 $f(x, y)$ 只在区域 $G: \{(x, y) \mid |y| < x, 0 < x < 1\}$ (题 4.31 图) 上不等于零, 故有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = \iint_G x dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_{-x}^x x dy = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$



题 4.31 图

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy = \iint_G y dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x y dy = 0,$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy = \iint_G xy dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x xy dy = 0,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

32. 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), \text{Cov}(X, Y), \rho_{XY}, D(X+Y)$.

解 注意到 $f(x, y)$ 只在区域 $G: \{(x, y) | 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$ 上不等于零, 故有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{x}{8}(x+y) dy \\ &= \int_0^2 \frac{x}{8} \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^2 dx = \int_0^2 \frac{x}{4}(x+1) dx = \frac{7}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{x^2}{8}(x+y) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 x^2 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^2 (x^3 + x^2) dx = \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{xy}{8}(x+y) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{4x}{3} \right) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

由 x, y 在 $f(x, y)$ 的表达式中的对称性 (即在表达式 $f(x, y)$ 中将 x 和 y 互换, 表达式不变), 得知

$$E(Y) = E(X) = \frac{7}{6}, \quad E(Y^2) = E(X^2) = \frac{5}{3},$$

$$\text{且有 } D(Y) = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{5}{3} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}.$$

$$\text{而 } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{3} - \frac{49}{36} = -\frac{1}{36},$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{-1}{11},$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{5}{9}.$$

33. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且设 X, Y 相互独立, 试求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数 (其中 α, β 是不为零的常数).

$$\begin{aligned}
 \text{解法(i)} \quad \text{Cov}(Z_1, Z_2) &= \text{Cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y) \\
 &= \alpha^2 \text{Cov}(X, X) - \alpha\beta \text{Cov}(X, Y) + \alpha\beta \text{Cov}(Y, X) - \beta^2 \text{Cov}(Y, Y) \\
 &= \alpha^2 D(X) - \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{而} \quad D(Z_1) &= D(\alpha X + \beta Y) \\
 &= \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) + 2\text{Cov}(\alpha X, \beta Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2, \\
 D(Z_2) &= D(\alpha X - \beta Y) \\
 &= \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) - 2\text{Cov}(\alpha X, \beta Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2,
 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \rho_{Z_1 Z_2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

解法(ii)

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(Z_1, Z_2) &= E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) \\
 &= E(\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2) - [\alpha E(X) + \beta E(Y)][\alpha E(X) - \beta E(Y)] \\
 &= \alpha^2 E(X^2) - \beta^2 E(Y^2) - \{\alpha^2 [E(X)]^2 - \beta^2 [E(Y)]^2\} \\
 &= \alpha^2 \{E(X^2) - [E(X)]^2\} - \beta^2 \{E(Y^2) - [E(Y)]^2\} \\
 &= \alpha^2 D(X) - \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2.
 \end{aligned}$$

$$D(Z_1) = D(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2,$$

$$D(Z_2) = D(\alpha X - \beta Y) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2,$$

$$\text{故} \quad \rho_{Z_1 Z_2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

34. (1) 设随机变量 $W = (aX + 3Y)^2$, $E(X) = E(Y) = 0$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 16$, $\rho_{XY} = -0.5$. 求常数 a 使 $E(W)$ 为最小, 并求 $E(W)$ 的最小值.

(2) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且有 $D(X) = \sigma_X^2$, $D(Y) = \sigma_Y^2$. 证明当 $a^2 = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2$ 时, 随机变量 $W = X - aY$ 与 $V = X + aY$ 相互独立.

$$\text{解} \quad (1) \quad E(W) = E[(aX + 3Y)^2] = a^2 E(X^2) + 6aE(XY) + 9E(Y^2),$$

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 4,$$

$$E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2 = 16,$$

$$E(XY) = \text{Cov}(X, Y) + E(X)E(Y) = \rho_{XY} \sqrt{D(X)D(Y)} = -4,$$

$$\text{故} \quad E(W) = 4a^2 - 24a + 144 = 4(a - 3)^2 + 108,$$

故当 $a = 3$ 时 $E(W)$ 取最小值, $\min\{E(W)\} = 108$.

(2) 因为 (X, Y) 是二维正态变量, 而 W 与 V 分别是 X, Y 的线性组合, 故由 n 维正态随机变量的性质 3° 知 (W, V) 也是二维正态变量. 现在 $a^2 = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2$, 故知有

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(W, V) &= \text{Cov}(X - aY, X + aY) \\
 &= \text{Cov}(X, X) - a^2 \text{Cov}(Y, Y) = \sigma_X^2 - a^2 \sigma_Y^2 = 0,
 \end{aligned}$$

即知 W 与 V 不相关. 又因 (W, V) 是二维正态变量, 故知 W 与 V 是相互独立的.

35. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 $X \sim N(0, 3), Y \sim N(0, 4)$, 相关系数 $\rho_{XY} = -\frac{1}{4}$, 试写出 X 和 Y 的联合概率密度.

解 因 $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 2, \rho = -\frac{1}{4}$, 故 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi\sqrt{1-1/16}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-1/16)}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{4\sqrt{3}} + \frac{y^2}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}\pi} \exp\left[\frac{-8}{15}\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{4\sqrt{3}} + \frac{y^2}{4}\right)\right]. \end{aligned}$$

36. 已知正常男性成人血液中, 每一毫升白细胞数平均是 7 300, 均方差是 700. 利用切比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5 200 ~ 9 400 之间的概率 p .

解 以 X 表示每毫升含白细胞数, 由题设

$$E(X) = \mu = 7\,300, \quad \sqrt{D(X)} = \sigma = 700$$

而概率

$$\begin{aligned} p &= P\{5\,200 < X < 9\,400\} \\ &= P\{-2\,100 < X - 7\,300 < 2\,100\} \\ &= P\{|X - 7\,300| < 2\,100\}. \end{aligned}$$

在切比雪夫不等式

$$P\{|X - \mu| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

中, 取 $\epsilon = 2\,100$, 此时 $1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = 1 - \frac{700^2}{2\,100^2} = \frac{8}{9}$, 即知

$$p = P\{|X - 7\,300| < 2\,100\} \geq \frac{8}{9}.$$

37. 对于两个随机变量 V, W , 若 $E(V^2), E(W^2)$ 存在, 证明

$$[E(VW)]^2 \leq E(V^2)E(W^2). \quad (\text{A})$$

这一不等式称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式.

证 若 $E(V^2) = 0$, 则 $P\{V = 0\} = 1$ (因 $E(V^2) = D(V) + (E(V))^2 = 0$, 得 $D(V) = 0$ 且 $E(V) = 0$, 由方差性质 4° 即得 $P\{V = 0\} = 1$). 由此 $P\{VW = 0\} = 1$, 因此, $E(VW) = 0$, 此时不等式(A)得证. 同样对于 $E(W^2) = 0$ 时, 不等式(A)也成立. 以下设 $E(V^2) > 0, E(W^2) > 0$. 考虑实变量 t 的函数:

$$q(t) = E[(V + tW)^2] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2E(W^2).$$

因为对于任意 $t, E[(V + tW)^2] \geq 0, E(W^2) > 0$, 故二次三项式 $q(t)$ 的判别式:

$$\Delta = 4[E(VW)]^2 - 4E(V^2)E(W^2) \leq 0,$$

即有

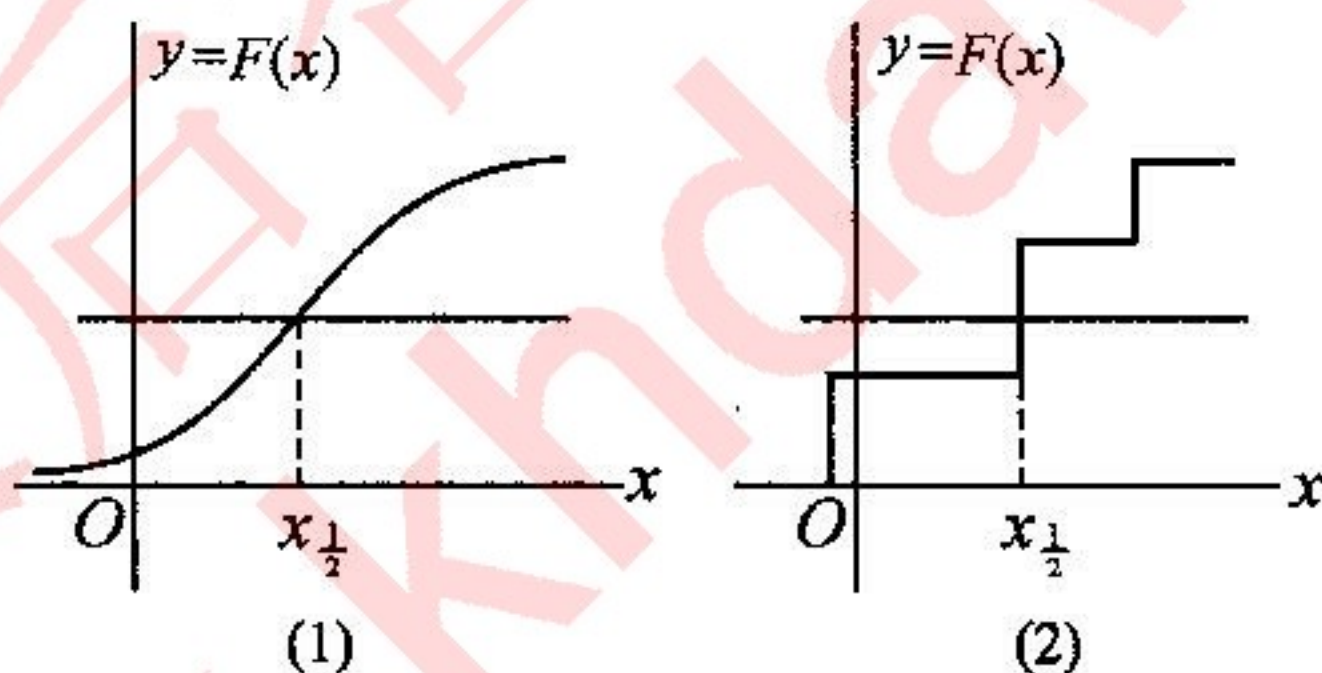
$$[E(VW)]^2 \leq E(V^2)E(W^2).$$

38. 中位数.

对于任意随机变量 X , 满足以下两式

$$P\{X \leq x\} \geq \frac{1}{2}, \quad P\{X \geq x\} \leq \frac{1}{2}$$

的 x 称为 X 的中位数, 记为 $x_{\frac{1}{2}}$ 或 M . 它是反映集中位置的一个数字特征. 中位数总是存在, 但可以不唯一. 画出 X 的分布函数 $F(x)$ 的图. 如果 $F(x)$ 连续, 那么 $x_{\frac{1}{2}}$ 是方程 $F(x) = \frac{1}{2}$ 的解 (如题 4.38 图(1)), 如果 $F(x)$ 有跳跃点 (见题 4.38 图(2)), 用垂直于横轴的线段联结后, 得一连续曲线, 它与直线 $y = \frac{1}{2}$ 的交点的横坐标即为 $x_{\frac{1}{2}}$. 由于交点可以不唯一, 故可以有許多 $x_{\frac{1}{2}}$.



题 4.38 图

(1) 设 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求 X 的中位数 M .

(2) 设 X 服从柯西分布, 其概率密度为

$$f(x) = \frac{b}{\pi[(x-a)^2 + b^2]}, \quad b > 0.$$

试求 X 的中位数 M .

解 设 $F(x)$ 为分布函数.

(1) M 应满足 $F(M) = \frac{1}{2}$.

$$\text{即 } \frac{1}{2} = F(M) = P\{X \leq M\} = \int_0^M 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_0^M = 1 - e^{-2M},$$

$$\text{故 } e^{-2M} = \frac{1}{2}, \quad e^{2M} = 2,$$

得 $M = \frac{1}{2} \ln 2$.

此即为所求的中位数.

(2) 由

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= F(M) = P\{X \leq M\} = \int_{-\infty}^M \frac{b}{\pi[(x-a)^2 + b^2]} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x-a}{b} \Big|_{-\infty}^M = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{M-a}{b} + \frac{1}{2},\end{aligned}$$

得 $M-a=0$, 即知中位数 $M=a$.

另外, 易知 X 的概率密度函数 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=a$ 是对称的, 即知

$$P\{X \leq a\} = \int_{-\infty}^a f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

故中位数为 $M=a$.