

第五章 大数定律及中心极限定理

1. 据以往经验,某种电器元件的寿命服从均值为 100 h 的指数分布,现随机地取 16 只,设它们的寿命是相互独立的. 求这 16 只元件的寿命的总和大于 1 920 h 的概率.

解 以 X_i ($i = 1, 2, \dots, 16$) 记第 i 只元件的寿命,以 T 记 16 只元件寿命的总和: $T = \sum_{i=1}^{16} X_i$, 按题设 $E(X_i) = 100, D(X_i) = 100^2$, 由中心极限定理知 $\frac{T - 16 \times 100}{\sqrt{16} \sqrt{100^2}}$ 近似地服从 $N(0, 1)$ 分布, 故所求概率为

$$\begin{aligned} P\{T > 1\,920\} &= 1 - P\{T \leq 1\,920\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{T - 16 \times 100}{\sqrt{16} \sqrt{100^2}} \leq \frac{1\,920 - 16 \times 100}{\sqrt{16} \sqrt{100^2}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{1\,920 - 1\,600}{400}\right) = 1 - \Phi(0.8) \\ &= 1 - 0.788\,1 = 0.211\,9. \end{aligned}$$

2. (1) 一保险公司有 10 000 个汽车投保人, 每个投保人索赔金额的数学期望为 280 美元, 标准差为 800 美元, 求索赔总金额超过 2 700 000 美元的概率.

(2) 一公司有 50 张签约保险单, 各张保险单的索赔金额为 $X_i, i = 1, 2, \dots, 50$ (以千美元计) 服从韦布尔 (Weibull) 分布, 均值 $E(X_i) = 5$, 方差 $D(X_i) = 6$, 求 50 张保险单索赔的合计金额大于 300 的概率 (设各保险单索赔金额是相互独立的).

解 (1) 记第 i 人的索赔金额为 X_i , 则由已知条件

$$E(X_i) = 280, \quad D(X_i) = 800^2.$$

要计算

$$p_1 = P\left(\sum_{i=1}^{10\,000} X_i > 2\,700\,000\right),$$

因各投保人索赔金额是独立的, $n = 10\,000$ 很大. 故由中心极限定理, 近似地有

$$\bar{X} = \frac{1}{10\,000} \sum_{i=1}^{10\,000} X_i \sim N\left(280, \frac{800^2}{100^2}\right),$$

$$\text{故 } p_1 = P(\bar{X} > 270) \approx 1 - \Phi\left(\frac{270 - 280}{8}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{5}{4}\right) = \Phi(1.25) = 0.894\,4.$$

(2) $E(X_i) = 5, D(X_i) = 6, n = 50$. 故

$$\begin{aligned} p &= P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i > 300\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{300 - 50 \times 5}{\sqrt{50 \times 6}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{300}}\right) = 1 - \Phi(2.89) = 0.0019. \end{aligned}$$

这与情况(1)相反.(1)的概率为 0.8944 表明可能性很大,而(2)表明可能性太小了,大约 500 次索赔中出现 > 300 的只有一次.

3. 计算器在进行加法时,将每个加数舍入最靠近它的整数,设所有舍入误差相互独立且在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布.

(1) 将 1500 个数相加,问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少?

(2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90?

解 设第 k 个加数的舍入误差为 $X_k (k = 1, 2, \dots, 1500)$, 已知 X_k 在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布,故知 $E(X_k) = 0, D(X_k) = \frac{1}{12}$.

(1) 记 $X = \sum_{k=1}^{1500} X_k$, 由中心极限定理,当 n 充分大时有近似公式

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{1500} X_k - 1500 \times 0}{\sqrt{1500} \sqrt{1/12}} \leq x\right\} \approx \Phi(x).$$

于是

$$\begin{aligned} P\{|X| > 15\} &= 1 - P\{|X| \leq 15\} = 1 - P\{-15 \leq X \leq 15\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{-15 - 0}{\sqrt{1500} \sqrt{1/12}} \leq \frac{X - 0}{\sqrt{1500} \sqrt{1/12}} \leq \frac{15 - 0}{\sqrt{1500} \sqrt{1/12}}\right\} \\ &\approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{1500} \sqrt{1/12}}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{1500} \sqrt{1/12}}\right)\right] \\ &= 1 - \left[2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{1500/12}}\right) - 1\right] = 1 - [2\Phi(1.342) - 1] \\ &= 2[1 - 0.9099] = 0.1802. \end{aligned}$$

即误差总和的绝对值超过 15 的概率近似地为 0.1802.

(2) 设最多有 n 个数相加,使误差总和 $Y = \sum_{k=1}^n X_k$ 符合要求,即要确定 n ,使

$$P\{|Y| < 10\} \geq 0.90.$$

由中心极限定理,当 n 充分大时有近似公式

$$P\left\{\frac{Y - 0}{\sqrt{n} \sqrt{1/12}} \leq x\right\} \approx \Phi(x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是} \quad P\{|Y| < 10\} &= P\{-10 < Y < 10\} \\
 &= P\left\{\frac{-10}{\sqrt{n} \sqrt{1/12}} < \frac{Y}{\sqrt{n} \sqrt{1/12}} < \frac{10}{\sqrt{n} \sqrt{1/12}}\right\} \\
 &\approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1.
 \end{aligned}$$

$$\text{因而 } n \text{ 需满足} \quad 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \geq 0.90,$$

$$\text{亦即 } n \text{ 需满足} \quad \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.645),$$

$$\text{即 } n \text{ 应满足} \quad \frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.645,$$

$$\text{由此得} \quad n \leq 443.45.$$

因 n 为正整数, 因而所求的 n 为 443. 故最多只能有 443 个数加在一起, 才能使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90.

4. 设各零件的重量都是随机变量, 它们相互独立, 且服从相同的分布, 其数学期望为 0.5 kg, 均方差为 0.1 kg, 问 5 000 个零件的总重量超过 2 510 kg 的概率是多少?

解 以 X_i ($i = 1, 2, \dots, 5\,000$) 记第 i 个零件的重量, 以 W 记 5 000 个零件的总重量: $W = \sum_{i=1}^{5\,000} X_i$. 按题设 $E(X_i) = 0.5$, $D(X_i) = 0.1^2$, 由中心极限定理, 可知 $\frac{W - 5\,000 \times 0.5}{\sqrt{5\,000 \times 0.1}}$ 近似地服从 $N(0, 1)$ 分布, 故所求概率为

$$\begin{aligned}
 P\{W > 2510\} &= 1 - P\{W \leq 2510\} \\
 &= 1 - P\left\{\frac{W - 5\,000 \times 0.5}{\sqrt{5\,000 \times 0.1}} \leq \frac{2\,510 - 5\,000 \times 0.5}{\sqrt{5\,000 \times 0.1}}\right\} \\
 &\approx 1 - \Phi\left(\frac{2\,510 - 5\,000 \times 0.5}{\sqrt{5\,000 \times 0.1}}\right) = 1 - \Phi(\sqrt{2}) \\
 &= 1 - 0.9213 = 0.0787.
 \end{aligned}$$

5. 有一批建筑房屋用的木柱, 其中 80% 的长度不小于 3 m, 现从这批木柱中随机地取 100 根, 求其中至少有 30 根短于 3 m 的概率.

解 按题意, 可认为 100 根木柱是从为数甚多的木柱中抽取得到的, 因而可当作放回抽样来看待. 将检查一根木柱看它是否短于 3 m 看成是一次试验, 检查 100 根木柱相当于做 100 重伯努利试验. 以 X 记被抽取的 100 根木柱中长度短于 3 m 的根数, 则 $X \sim b(100, 0.2)$. 于是由教材第五章 §2 定理三得

$$P\{X \geq 30\} = P\{30 \leq X < \infty\}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left\{\frac{30-100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}} \leq \frac{X-100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}} < \frac{\infty-100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}\right\} \\
 &\approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right) \\
 &= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062.
 \end{aligned}$$

本题也可以这样做,引入随机变量:

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{若第 } k \text{ 根木柱短于 } 3 \text{ m}, \\ 0, & \text{若第 } k \text{ 根木柱不短于 } 3 \text{ m}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, 100.$$

于是 $E(X_k) = 0.2, D(X_k) = 0.2 \times 0.8$. 以 X 表示 100 根木柱中短于 3 m 的根

数,则 $X = \sum_{k=1}^{100} X_k$. 由中心极限定理有

$$\begin{aligned}
 P\{X \geq 30\} &= P\{30 \leq X < \infty\} \\
 &= P\left\{\frac{30-100 \times 0.2}{\sqrt{100} \sqrt{0.2 \times 0.8}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - 100 \times 0.2}{\sqrt{100} \sqrt{0.2 \times 0.8}} < \frac{\infty-100 \times 0.2}{\sqrt{100} \sqrt{0.2 \times 0.8}}\right\} \\
 &\approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right) = 1 - \Phi(2.5) = 0.0062.
 \end{aligned}$$

6. 一工人修理一台机器需两个阶段,第一阶段所需时间(小时)服从均值为 0.2 的指数分布,第二阶段服从均值为 0.3 的指数分布,且与第一阶段独立. 现有 20 台机器需要修理,求他在 8 小时内完成的概率.

解 设修理第 i ($i = 1, 2, \dots, 20$) 台机器,第一阶段耗时 X_i ,第二阶段为 Y_i , 则共耗时 $Z_i = X_i + Y_i$, 今已知 $E(X_i) = 0.2, E(Y_i) = 0.3$, 故 $E(Z_i) = 0.5$. $D(Z_i) = D(X_i) + D(Y_i) = 0.2^2 + 0.3^2 = 0.13$. 20 台机器需要修理的时间可认为近似服从正态分布, 即有

$$\sum_{i=1}^{20} Z_i \sim N(20 \times 0.5, 20 \times 0.13) = N(10, 2.6).$$

$$\begin{aligned}
 \text{所求概率 } p &= P\left(\sum_{i=1}^{20} Z_i \leq 8\right) \approx \Phi\left(\frac{8-20 \times 0.5}{\sqrt{20 \times 0.13}}\right) \\
 &= \Phi\left(-\frac{2}{1.6125}\right) = \Phi(-1.24) = 0.1075,
 \end{aligned}$$

即不大可能在 8 小时内完成全部工作.

7. 一食品店有三种蛋糕出售,由于售出哪一种蛋糕是随机的,因而售出一只蛋糕的价格是一个随机变量,它取 1 元、1.2 元、1.5 元各个值的概率分别为 0.3、0.2、0.5. 若售出 300 只蛋糕.

(1) 求收入至少 400 元的概率;

(2) 求售出价格为 1.2 元的蛋糕多于 60 只的概率.

解 设第 i 只蛋糕的价格为 $X_i, i = 1, 2, \dots, 300$, 则 X_i 有分布律为

X_i	1	1.2	1.5
p_k	0.3	0.2	0.5

由此得

$$E(X_i) = 1 \times 0.3 + 1.2 \times 0.2 + 1.5 \times 0.5 = 1.29,$$

$$E(X_i^2) = 1^2 \times 0.3 + 1.2^2 \times 0.2 + 1.5^2 \times 0.5 = 1.713,$$

故
$$D(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = 0.0489.$$

(1) 以 X 表示这天的总收入, 则 $X = \sum_{i=1}^{300} X_i$, 由中心极限定理得

$$\begin{aligned} P\{X \geq 400\} &= P\{400 \leq X < \infty\} \\ &= P\left\{\frac{400 - 300 \times 1.29}{\sqrt{300} \sqrt{0.0489}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{300} X_i - 300 \times 1.29}{\sqrt{300} \sqrt{0.0489}}\right. \\ &\quad \left. < \frac{\infty - 300 \times 1.29}{\sqrt{300} \sqrt{0.0489}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(3.39) = 1 - 0.9997 = 0.0003. \end{aligned}$$

(2) 以 Y 记 300 只蛋糕中售价为 1.2 元的蛋糕的只数, 于是 $Y \sim b(300, 0.2)$. $E(Y) = 300 \times 0.2, D(Y) = 300 \times 0.2 \times 0.8$, 由棣莫弗-拉普拉斯定理得

$$\begin{aligned} P\{Y > 60\} &= 1 - P\{Y \leq 60\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{Y - 300 \times 0.2}{\sqrt{300 \times 0.2 \times 0.8}} \leq \frac{60 - 300 \times 0.2}{\sqrt{300 \times 0.2 \times 0.8}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{60 - 300 \times 0.2}{\sqrt{300 \times 0.2 \times 0.8}}\right) = 1 - \Phi(0) = 0.5. \end{aligned}$$

8. 一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成, 在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10. 为了使整个系统起作用, 至少必须有 85 个部件正常工作, 求整个系统起作用的概率.

解 将观察一个部件是否正常工作看成是一次试验, 由于各部件是否正常工作是相互独立的, 因而观察 100 个部件是否正常工作是做 100 重伯努利试验, 以 X 表示 100 个部件中正常工作的部件数, 则 $X \sim b(100, 0.9)$, 按题意需求概率 $P\{X \geq 85\}$, 由棣莫弗-拉普拉斯定理知 $\frac{X - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}}$ 近似地服从标准正态

分布 $N(0, 1)$, 故所求概率为

$$\begin{aligned}
 P\{X \geq 85\} &= P\{85 \leq X < \infty\} \\
 &= P\left\{\frac{85 - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}} \leq \frac{X - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}}\right. \\
 &\quad \left. \leq \frac{\infty - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}}\right\} \\
 &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = 0.9525.
 \end{aligned}$$

9. 已知在某十字路口,一周事故发生数的数学期望为 2.2,标准差为 1.4.

(1) 以 \bar{X} 表示一年(以 52 周计)此十字路口事故发生数的算术平均,试用中心极限定理求 \bar{X} 的近似分布,并求 $P\{\bar{X} < 2\}$.

(2) 求一年事故发生数小于 100 的概率.

解 (1) $E(\bar{X}) = E(X) = 2.2$,

$$D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{52} = \frac{1.4^2}{52},$$

由中心极限定理,可认为 $\bar{X} \sim N(2.2, 1.4^2/52)$.

$$\begin{aligned}
 P\{\bar{X} < 2\} &= \Phi\left(\frac{2 - 2.2}{1.4/\sqrt{52}}\right) = \Phi\left(\frac{-0.2 \times \sqrt{52}}{1.4}\right) = \Phi(-1.030) \\
 &= 1 - \Phi(1.030) = 1 - 0.8485 = 0.1515.
 \end{aligned}$$

(2) 一年 52 周,设每周事故发生数为 X_1, X_2, \dots, X_{52} . 则需计算 $p = P\left\{\sum_{i=1}^{52} X_i < 100\right\}$, 即 $P\{52\bar{X} < 100\}$. 用中心极限定理可知所求概率为

$$\begin{aligned}
 p &= P\{52\bar{X} < 100\} = P\left\{\bar{X} < \frac{100}{52}\right\} \approx \Phi\left[\frac{\left(\frac{100}{52} - 2.2\right)\sqrt{52}}{1.4}\right] \\
 &= \Phi(-1.426) = 1 - 0.9230 = 0.0770.
 \end{aligned}$$

10. 某种小汽车氧化氮的排放量的数学期望为 0.9 g/km, 标准差为 1.9 g/km, 某汽车公司有这种小汽车 100 辆, 以 \bar{X} 表示这些车辆氧化氮排放量的算术平均, 问当 L 为何值时 $\bar{X} > L$ 的概率不超过 0.01.

解 设以 X_i ($i = 1, 2, \dots, 100$) 表示第 i 辆小汽车氧化氮的排放量, 则

$$\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

由已知条件 $E(X_i) = 0.9, D(X_i) = 1.9^2$ 得

$$E(\bar{X}) = 0.9, \quad D(\bar{X}) = \frac{1.9^2}{100}.$$

各辆汽车氧化氮的排放量相互独立, 故可认为近似地有

$$\bar{X} \sim N\left(0.9, \frac{1.9^2}{100}\right).$$

需要计算的是满足

$$P\{\bar{X} > L\} \leq 0.01$$

的最小值 L . 由中心极限定理

$$P\{\bar{X} > L\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 0.9}{0.19} > \frac{L - 0.9}{0.19}\right\} \leq 0.01.$$

L 应为满足

$$1 - \Phi\left(\frac{L - 0.9}{0.19}\right) \leq 0.01$$

的最小值, 即

$$\Phi\left(\frac{L - 0.9}{0.19}\right) \geq 0.99 = \Phi(2.33),$$

即

$$\frac{L - 0.9}{0.19} \geq 2.33,$$

故

$$L \geq 0.9 + 0.19 \times 2.33 = 1.3427,$$

应取 $L = 1.3427 \text{ g/km}$.

11. 随机地选取两组学生, 每组 80 人, 分别在两个实验室里测量某种化合物的 pH. 各人测量的结果是随机变量, 它们相互独立, 服从同一分布, 数学期望为 5, 方差为 0.3, 以 \bar{X}, \bar{Y} 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均.

(1) 求 $P\{4.9 < \bar{X} < 5.1\}$.

(2) 求 $P\{-0.1 < \bar{X} - \bar{Y} < 0.1\}$.

解 由题设 $E(\bar{X}) = 5, D(\bar{X}) = D(\bar{Y}) = 0.3/80$.

(1) 由中心极限定理知 \bar{X} 近似服从 $N(5, 0.3/80)$, 故

$$\begin{aligned} & P\{4.9 < \bar{X} < 5.1\} \\ &= P\left\{\frac{4.9 - 5}{\sqrt{0.3/80}} < \frac{\bar{X} - 5}{\sqrt{0.3/80}} < \frac{5.1 - 5}{\sqrt{0.3/80}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{5.1 - 5}{\sqrt{0.3/80}}\right) - \Phi\left(\frac{4.9 - 5}{\sqrt{0.3/80}}\right) \\ &= 2\Phi(1.63) - 1 = 2 \times 0.9484 - 1 = 0.8968. \end{aligned}$$

(2) 因 $E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = 0, D(\bar{X} - \bar{Y}) = D(\bar{X}) + D(\bar{Y}) = 0.3/40$, 由中心极限定理

$$P\{-0.1 < \bar{X} - \bar{Y} < 0.1\}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left\{\frac{-0.1-0}{\sqrt{0.3/40}} < \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-0}{\sqrt{0.3/40}} < \frac{0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\right\} \\
 &\approx \Phi\left(\frac{0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\right) \\
 &= 2\Phi(1.15) - 1 = 2 \times 0.8749 - 1 = 0.7498.
 \end{aligned}$$

12. 一公寓有 200 户住户, 一户住户拥有汽车辆数 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	0.1	0.6	0.3

问需要多少车位, 才能使每辆汽车都具有一个车位的概率至少为 0.95.

解 设需要车位数为 n , 且设第 i ($i=1, 2, \dots, 200$) 户有车辆数为 X_i , 则由 X_i 的分布律知

$$E(X_i) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2,$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.6 + 2^2 \times 0.3 = 1.8,$$

故 $D(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = 1.8 - 1.2^2 = 0.36$.

因共有 200 户, 各户占有车位数相互独立, 从而近似地有

$$\sum_{i=1}^{200} X_i \sim N(200 \times 1.2, 200 \times 0.36).$$

今要求车位数 n 满足

$$0.95 \leq P\left(\sum_{i=1}^{200} X_i \leq n\right),$$

由正态近似知, 上式中 n 应满足

$$0.95 \leq \Phi\left(\frac{n - 200 \times 1.2}{\sqrt{200 \times 0.36}}\right) = \Phi\left(\frac{n - 240}{\sqrt{72}}\right),$$

因 $0.95 = \Phi(1.645)$, 从而由 $\Phi(x)$ 的单调性知

$$\frac{n - 240}{\sqrt{72}} \geq 1.645,$$

故 $n \geq 240 + 1.645 \times \sqrt{72} = 253.96$. 由此知至少需 254 个车位.

13. 某种电子器件的寿命(小时)具有数学期望 μ (未知), 方差 $\sigma^2 = 400$. 为了估计 μ , 随机地取 n 只这种器件, 在时刻 $t=0$ 投入测试(测试是相互独立的)直到失效, 测得其寿命为 X_1, X_2, \dots, X_n , 以 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 作为 μ 的估计, 为使

$P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} \geq 0.95$, 问 n 至少为多少?

解 由教材第五章 §2 定理一可知, 当 n 充分大时,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{\text{近似地}}{\sim} N(0,1),$$

即

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{\text{近似地}}{\sim} N(0,1).$$

由题设 $D(X_i) = 400$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 即有 $\sigma = \sqrt{400}$, 于是 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{400}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{20/\sqrt{n}}$

近似地服从 $N(0,1)$ 分布, 即有

$$\begin{aligned} P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} &= P\{-1 < \bar{X} - \mu < 1\} \\ &= P\left\{\frac{-1}{20/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{20/\sqrt{n}} < \frac{1}{20/\sqrt{n}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{20/\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right) - 1. \end{aligned}$$

现在要求 $P\{|\bar{X} - \mu| < 1\} \geq 0.95$, 即要求

$$2\Phi\left(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right) - 1 \geq 0.95,$$

亦即要求

$$\Phi\left(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96),$$

故需要

$$\frac{1}{20/\sqrt{n}} \geq 1.96,$$

即 $n \geq (20 \times 1.96)^2 = 1536.64$.

因 n 为正整数, 故 n 至少为 1537.

14. 某药厂断言, 该厂生产的某种药品对于医治一种疑难血液病的治愈率为 0.8, 医院任意抽查 100 个服用此药品的病人, 若其中多于 75 人治愈, 就接受此断言, 否则就拒绝此断言.

(1) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8, 问接受这一断言的概率是多少?

(2) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率为 0.7, 问接受这一断言的概率是多少?

解 由药厂断言来看 100 人中治愈人数 $X \sim b(100, 0.8)$.

(1) 在治愈率与实际情况相符合条件下, 接受药厂断言的概率即为 $P(X >$

75). 由中心极限定理知近似地有 $X \sim N(100 \times 0.8, 100 \times 0.8 \times 0.2) = N(80, 4^2)$, 于是

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X > 75) \approx 1 - \Phi\left(\frac{75 - 80}{4}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{5}{4}\right) \\ &= \Phi(1.25) = 0.8944. \end{aligned}$$

(2) 若实际上治疗率为 0.7, 即 $X \sim b(100, 0.7)$, 则治愈人数 X 近似地服从正态分布, 即有

$$X \sim N(100 \times 0.7, 100 \times 0.7 \times 0.3).$$

所求概率

$$\begin{aligned} p_2 &= P(X > 75) \approx 1 - \Phi\left(\frac{75 - 100 \times 0.7}{\sqrt{100 \times 0.7 \times 0.3}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{21}}\right) = 1 - \Phi(1.09) \\ &= 1 - 0.8621 = 0.1379. \end{aligned}$$