

第三章 多维随机变量及其分布

1. 在一箱子中装有 12 只开关, 其中 2 只是次品, 在其中取两次, 每次任取一只, 考虑两种试验: (1) 放回抽样; (2) 不放回抽样. 我们定义随机变量 X, Y 如下:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{若第一次取出的是正品,} \\ 1, & \text{若第一次取出的是次品;} \end{cases}$$
$$Y = \begin{cases} 0, & \text{若第二次取出的是正品,} \\ 1, & \text{若第二次取出的是次品.} \end{cases}$$

试分别就 (1)、(2) 两种情况, 写出 X 和 Y 的联合分布律.

解 (1) 放回抽样. 由教材第一章知第一次第二次取到正品(或次品)的概率相同, 且两次所得的结果相互独立, 即有

$$P\{X=0\}=P\{Y=0\}=\frac{5}{6},$$

$$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{6},$$

且 $P\{X=i, Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\}, i, j=0, 1$, 于是得 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{4}{36},$$

$$P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{5}{36},$$

$$P\{X=1, Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{5}{36},$$

$$P\{X=1, Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{36}.$$

(2) 不放回抽样. 由乘法公式

$$P\{X=i, Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\}, i, j=0, 1,$$

知 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=0, Y=0\}=\frac{9}{11}\times\frac{10}{12}=\frac{45}{66},$$

$$P\{X=0, Y=1\}=\frac{2}{11}\times\frac{10}{12}=\frac{10}{66},$$

$$P\{X=1, Y=0\}=\frac{10}{11}\times\frac{2}{12}=\frac{10}{66},$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{11} \times \frac{2}{12} = \frac{1}{66}.$$

(1)、(2) 两种情况下的 X 和 Y 的联合分布律的表格形式分别为

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

2. (1) 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球, 在其中任取 4 只球. 以 X 表示取到黑球的只数, 以 Y 表示取到红球的只数. 求 X 和 Y 的联合分布律.

(2) 在(1)中求 $P\{X > Y\}$, $P\{Y = 2X\}$, $P\{X + Y = 3\}$, $P\{X < 3 - Y\}$.

解 (1) 按古典概型计算. 自 7 只球中取 4 只, 共有 $\binom{7}{4} = 35$ 种取法. 在 4 只球中, 黑球有 i 只, 红球有 j 只 (剩下 $4 - i - j$ 只为白球) 的取法数为:

$$N\{X=i, Y=j\} = \binom{3}{i} \binom{2}{j} \binom{2}{4-i-j},$$

$$i=0, 1, 2, 3, j=0, 1, 2, i+j \leq 4.$$

于是

$$P\{X=0, Y=2\} = \frac{\binom{3}{0} \binom{2}{2} \binom{2}{2}}{35} = \frac{1}{35}.$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{2}}{35} = \frac{6}{35}.$$

$$P\{X=1, Y=2\} = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{2} \binom{2}{1}}{35} = \frac{6}{35}.$$

$$P\{X=2, Y=0\} = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{0} \binom{2}{2}}{35} = \frac{3}{35}.$$

$$P\{X=2, Y=1\} = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}{35} = \frac{12}{35}.$$

$$P\{X=2, Y=2\} = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{2} \binom{2}{0}}{35} = \frac{3}{35}.$$

$$P\{X=3, Y=0\} = \frac{\binom{3}{3} \binom{2}{0} \binom{2}{1}}{35} = \frac{2}{35}.$$

$$P\{X=3, Y=1\} = \frac{\binom{3}{3} \binom{2}{1} \binom{2}{0}}{35} = \frac{2}{35}.$$

$$\begin{aligned} P\{X=0, Y=0\} &= P\{X=0, Y=1\} = P\{X=1, Y=0\} \\ &= P\{X=3, Y=2\} = 0. \end{aligned}$$

分布律为

Y \ X	X			
	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

$$\begin{aligned} (2) P\{X > Y\} &= P\{X=2, Y=0\} + P\{X=2, Y=1\} \\ &\quad + P\{X=3, Y=0\} + P\{X=3, Y=1\} \\ &= \frac{3}{35} + \frac{12}{35} + \frac{2}{35} + \frac{2}{35} = \frac{19}{35}. \end{aligned}$$

$$P\{Y=2X\} = P\{X=1, Y=2\} = \frac{6}{35}.$$

$$\begin{aligned} P\{X+Y=3\} &= P\{X=1, Y=2\} + P\{X=2, Y=1\} + P\{X=3, Y=0\} \\ &= \frac{6}{35} + \frac{12}{35} + \frac{2}{35} = \frac{20}{35}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X < 3-Y\} &= P\{X+Y < 3\} \\ &= P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=0\} \\ &= \frac{1}{35} + \frac{6}{35} + \frac{3}{35} = \frac{10}{35}. \end{aligned}$$

3. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k .

(2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}$.

(3) 求 $P\{X < 1.5\}$.

(4) 求 $P\{X+Y \leq 4\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$, 得

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_2^4 dy \int_0^2 k(6-x-y) dx = k \int_2^4 \left[(6-y)x - \frac{1}{2}x^2 \right] \Big|_{x=0}^{x=2} dy \\
 &= k \int_2^4 (12-2y-2) dy = k(10y-y^2) \Big|_2^4 = 8k,
 \end{aligned}$$

所以 $k = \frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned}
 (2) P\{X < 1, Y < 3\} &= \int_2^3 dy \int_0^1 \frac{1}{8}(6-x-y) dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_2^3 \left[(6-y)x - \frac{1}{2}x^2 \right] \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\
 &= \frac{1}{8} \int_2^3 \left(\frac{11}{2} - y \right) dy = \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) P\{X < 1.5\} &= \int_2^4 dy \int_0^{1.5} \frac{1}{8}(6-x-y) dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_2^4 \left[(6-y)x - \frac{1}{2}x^2 \right] \Big|_{x=0}^{x=1.5} dy \\
 &= \frac{1}{8} \int_2^4 \left(\frac{63}{8} - \frac{3}{2}y \right) dy = \frac{27}{32}.
 \end{aligned}$$

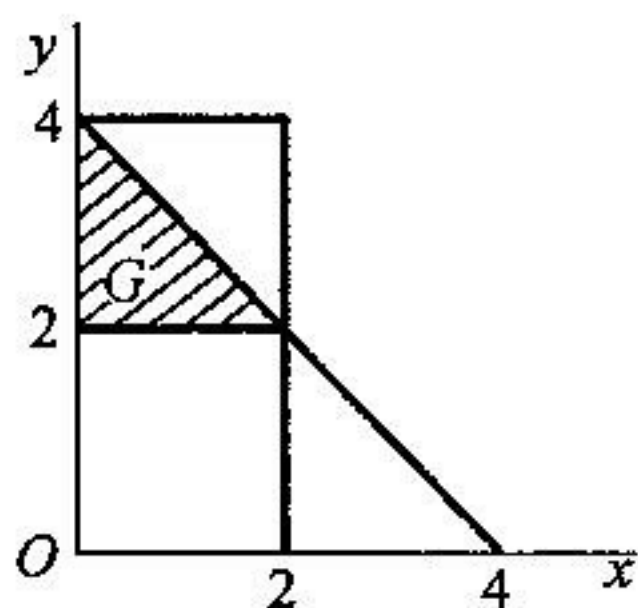
(4) 在 $f(x, y) \neq 0$ 的区域 $R: 0 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4$ 上作直线 $x+y=4$ (如题 3.3 图), 并记

$$G: \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4-x\},$$

则

$$P\{X+Y \leq 4\} = P\{(X, Y) \in G\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_G f(x, y) dx dy \\
 &= \int_2^4 dy \int_0^{4-y} \frac{1}{8}(6-x-y) dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_2^4 \left[(6-y)x - \frac{1}{2}x^2 \right] \Big|_{x=0}^{x=4-y} dy \\
 &= \frac{1}{8} \int_2^4 \left[(6-y)(4-y) - \frac{1}{2}(4-y)^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{8} \int_2^4 \left[2(4-y) + \frac{1}{2}(4-y)^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{8} \left[-(4-y)^2 - \frac{1}{6}(4-y)^3 \right] \Big|_2^4 = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$



题 3.3 图

4. 设 X, Y 都是非负连续型随机变量, 它们相互独立.

$$(1) \text{ 证明 } P\{X < Y\} = \int_0^{\infty} F_X(x) f_Y(x) dx.$$

其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数, $f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度.

(2) 设 X, Y 相互独立, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $P\{X < Y\}$.

解 (1) 因 X, Y 为非负的相互独立的随机变量, 故其概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} f_X(x)f_Y(y), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

从而

$$P\{X < Y\} = \iint_G f_X(x)f_Y(y) dx dy,$$

其中 G 为 $x \geq 0, y \geq x$ 界定的区域, 从而

$$\begin{aligned} P\{X < Y\} &= \int_0^\infty \int_0^y f_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_0^\infty f_Y(y) \left[\int_0^y f_X(x) dx \right] dy \\ &= \int_0^\infty f_Y(y) F_X(y) dy \\ &= \int_0^\infty F_X(y) f_Y(y) dy \\ &= \int_0^\infty F_X(x) f_Y(x) dx. \end{aligned}$$

(2) 由(1)

$$\begin{aligned} P\{X < Y\} &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_1 x}) (\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}) dx = \int_0^\infty [\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}] dx \\ &= \left[-e^{-\lambda_2 x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} \right]_0^\infty = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

5. 设随机变量 (X, Y) 具有分布函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

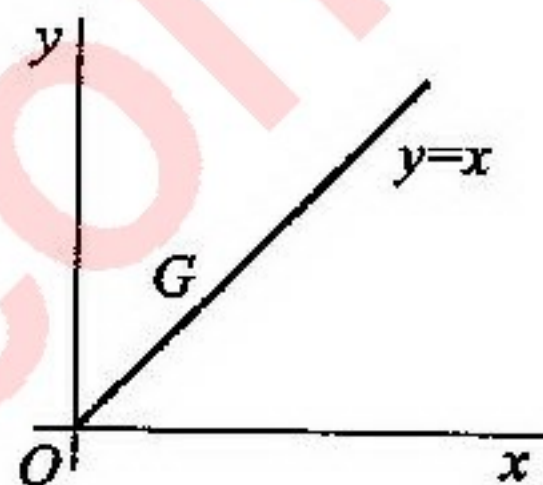
求边缘分布函数.

$$\text{解 } F_X(x) = F(x, \infty) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

6. 将一枚硬币掷 3 次, 以 X 表示前 2 次中出现 H 的次数, 以 Y 表示 3 次中出现 H 的次数. 求 X, Y 的联合分布律以及 (X, Y) 的边缘分布律.

解法(i) 将试验的样本空间及 X, Y 取值的情况列表如下:



题 3.4 图

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X 的值	2	2	1	1	1	1	0	0
Y 的值	3	2	2	2	1	1	1	0

X 所有可能取的值为 $0, 1, 2$; Y 所有可能取的值为 $0, 1, 2, 3$, 由于试验属等可能概型, 容易得到 (X, Y) 取 $(i, j), i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2, 3$ 的概率. 例如

$$P\{X = 1, Y = 2\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P\{X = 2, Y = 3\} = \frac{1}{8},$$

$$P\{X = 1, Y = 3\} = 0.$$

可得 X 和 Y 的联合分布律和 (X, Y) 的边缘分布律如下表所示.

Y \ X	X			$P\{Y = j\}$
	0	1	2	
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X = i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

解法(ii) $X \sim b(2, \frac{1}{2})$, Y 所有可能取的值为 $0, 1, 2, 3$. 而当 $X = i (i = 0, 1, 2)$ 时, Y 取 i 的概率为 $\frac{1}{2}$, Y 取 $i + 1$ 的概率也是 $\frac{1}{2}$, 而取 $i, i + 1$ 以外的值是不可能的(因第三次投掷不是出现 H 就是出现 T), 知 $P\{X = i\} = \binom{2}{i} \frac{1}{4}, i = 0, 1, 2$, 故知

$$\begin{aligned} P\{X = 0, Y = 0\} &= P\{Y = 0 | X = 0\} P\{X = 0\} \\ &= \frac{1}{2} P\{X = 0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X = 0, Y = 1\} &= P\{Y = 1 | X = 0\} P\{X = 0\} \\ &= \frac{1}{2} P\{X = 0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X = 1, Y = 1\} &= P\{Y = 1 | X = 1\} P\{X = 1\} \\ &= \frac{1}{2} P\{X = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=1, Y=2\} &= P\{Y=2|X=1\}P\{X=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X=1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=2, Y=2\} &= P\{Y=2|X=2\}P\{X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X=2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=2, Y=3\} &= P\{Y=3|X=2\}P\{X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X=2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=0, Y=2\} &= P\{X=0, Y=3\} \\ &= P\{X=1, Y=0\} = P\{X=1, Y=3\} \\ &= P\{X=2, Y=0\} = P\{X=2, Y=1\} = 0. \end{aligned}$$

所得 X 和 Y 的联合分布律与解法(i) 相同, 即为上表所示.

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

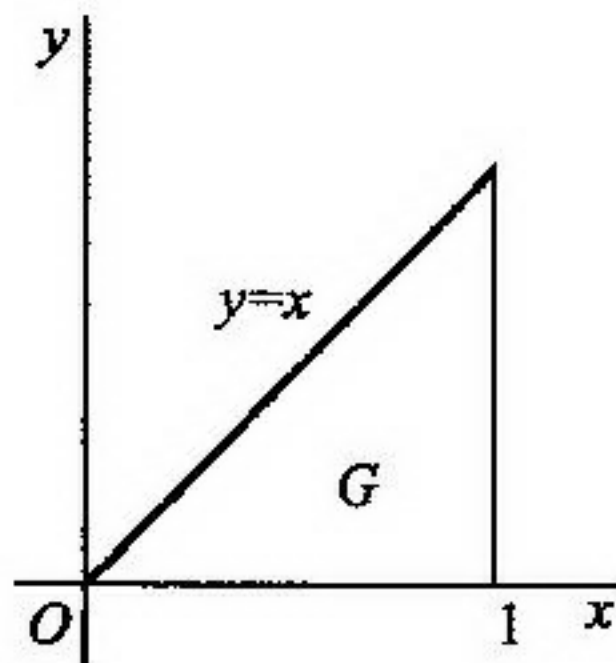
$$f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度.

解 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$ 在区域 $G: \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ 外取零值. 如题 3.7 图有

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\ &= \begin{cases} \int_0^x 4.8y(2-x) dy, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2.4(2-x)x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_y^1 4.8y(2-x) dx, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2.4y(3-4y+y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$



题 3.7 图

注: 在求边缘概率密度时, 需画出 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y) \neq 0$ 的区域, 这对于正确写出所需求的积分的上下限是很有帮助的.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求边缘概率密度.

$$\text{解 } f_X(x) = \begin{cases} \int_x^\infty e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_x^\infty = e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

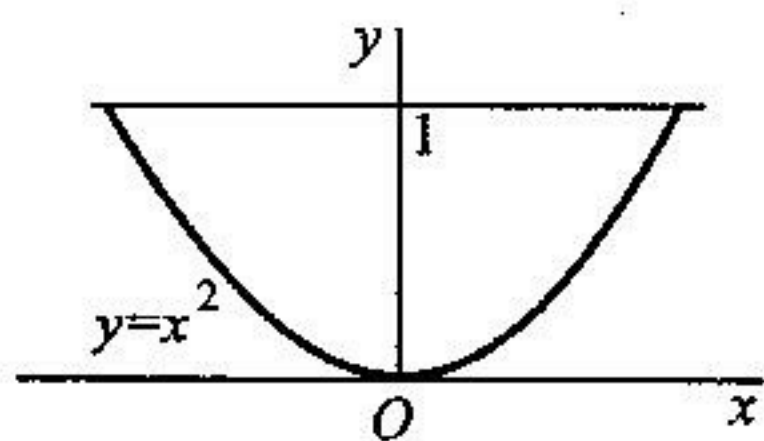
$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2 y, & x^2 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 c .

(2) 求边缘概率密度.

解 (1) 由于(如题 3.9 图)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \iint_{x^2 \leq y \leq 1} cx^2 y dx dy \\ &= c \int_{-1}^1 x^2 dx \int_{x^2}^1 y dy = c \int_{-1}^1 x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^1 dx \\ &= c \int_0^1 x^2 (1 - x^4) dx = \frac{4c}{21}, \end{aligned}$$



题 3.9 图

得 $c = \frac{21}{4}$.

$$\begin{aligned} (2) f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^1 \frac{21}{4} x^2 y dy, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{21}{8} x^2 y^2 \Big|_{x^2}^1 = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{7}{4} x^3 y \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{7}{2} y^{5/2}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

10. 将某一医药公司 8 月份和 9 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y . 据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

$\begin{matrix} \diagdown \\ X \\ \diagup \\ Y \end{matrix}$	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

(1) 求边缘分布律.

(2) 求 8 月份的订单数为 51 时, 9 月份订单数的条件分布律.

解 (1) (X, Y) 关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X = i\} = \sum_{j=51}^{55} P\{X = i, Y = j\}, i = 51, 52, 53, 54, 55.$$

将表中 $X = i$ 那一列的各数字相加, 就得到概率 $P\{X = i\}$, 例如

$$P\{X = 52\} = 0.05 + 0.05 + 0.10 + 0.02 + 0.06 = 0.28.$$

可得 (X, Y) 关于 X 的边缘分布律为

X	51	52	53	54	55
p_k	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13

(X, Y) 关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{Y = j\} = \sum_{i=51}^{55} P\{X = i, Y = j\}, j = 51, 52, 53, 54, 55.$$

将表中 $Y = j$ 那一行的各数字相加, 就得到概率 $P\{Y = j\}$, 例如

$$P\{Y = 53\} = 0.05 + 0.10 + 0.10 + 0.05 + 0.05 = 0.35.$$

可得 (X, Y) 关于 Y 的边缘分布律为

Y	51	52	53	54	55
p_k	0.18	0.15	0.35	0.12	0.20

(2) 所需求的是条件分布律:

$$P\{Y = j | X = 51\}, j = 51, 52, 53, 54, 55.$$

由 $P\{Y = j | X = 51\} = \frac{P\{X = 51, Y = j\}}{P\{X = 51\}}$ 知, 只要将原表中第一行各数除以

$P\{X = 51\} = 0.28$, 即得所求的条件分布律:

$Y = j$	51	52	53	54	55
$P\{Y = j X = 51\}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$

11. 以 X 记某医院一天出生的婴儿的个数, Y 记其中男婴的个数, 设 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X = n, Y = m\} = \frac{e^{-14} (7.14)^m (6.86)^{n-m}}{m! (n-m)!},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

(1) 求边缘分布律.

(2) 求条件分布律.

(3) 特别, 写出当 $X = 20$ 时, Y 的条件分布律.

解 (1) $P\{X = n\} = \sum_{m=0}^n P\{X = n, Y = m\}$

$$= \sum_{m=0}^n \frac{e^{-14} (7.14)^m (6.86)^{n-m}}{m! (n-m)!}$$

$$= \frac{e^{-14}}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n-m)!} (7.14)^m (6.86)^{n-m}$$

$$= \frac{e^{-14}}{n!} (7.14 + 6.86)^n = \frac{14^n e^{-14}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

$$P\{Y = m\} = \sum_{n=m}^{\infty} P\{X = n, Y = m\}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{e^{-14} (7.14)^m (6.86)^{n-m}}{m! (n-m)!}$$

$$= \frac{e^{-14}}{m!} (7.14)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(6.86)^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{e^{-14}}{m!} (7.14)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6.86)^k}{k!}$$

$$= \frac{e^{-14}}{m!} (7.14)^m e^{6.86} = \frac{(7.14)^m e^{-7.14}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

亦即 $X \sim \pi(14)$, $Y \sim \pi(7.14)$.

(2) 对于 $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$P\{X = n | Y = m\} = \frac{P\{X = n, Y = m\}}{P\{Y = m\}}$$

$$= \frac{e^{-14} (7.14)^m (6.86)^{n-m}}{m! (n-m)!} \bigg/ \frac{(7.14)^m e^{-7.14}}{m!}$$

$$= \frac{(6.86)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-6.86}, \quad n = m, m+1, \dots.$$

对于 $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$P\{Y = m | X = n\} = \frac{P\{X = n, Y = m\}}{P\{X = n\}}$$

$$= \frac{e^{-14} (7.14)^m (6.86)^{n-m}}{m! (n-m)!} \bigg/ \frac{14^n e^{-14}}{n!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{n}{m} \left(\frac{7.14}{14}\right)^m \left(\frac{6.86}{14}\right)^{n-m} \\
 &= \binom{n}{m} (0.51)^m (0.49)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

(3) $X = 20$ 时,

$$P\{Y = m | X = 20\} = \binom{20}{m} (0.51)^m (0.49)^{20-m}, \quad m = 0, 1, \dots, 20.$$

12. 求 §1 例 1 中的条件分布律: $P\{Y = k | X = i\}$.

解 在 §1 例 1 中, 在 X 取为定值 i 之后, Y 是在 $1, 2, \dots, i$ 这 i 个数中等可能地取一个数, 因此, 条件分布律为

$$P\{Y = k | X = i\} = \frac{1}{i}, \quad k = 1, 2, \dots, i.$$

当 $i = 1$ 时, 条件分布律为

$Y = k$	1
$P\{Y = k X = 1\}$	1

当 $i = 2$ 时, 条件分布律为

$Y = k$	1	2
$P\{Y = k X = 2\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

当 $i = 3$ 时, 条件分布律为

$Y = k$	1	2	3
$P\{Y = k X = 3\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

当 $i = 4$ 时, 条件分布律为

$Y = k$	1	2	3	4
$P\{Y = k X = 4\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

13. 在第 9 题中

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$, 特别, 写出当 $Y = \frac{1}{2}$ 时 X 的条件概率密度.

(2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$, 特别, 分别写出当 $X = \frac{1}{3}, X = \frac{1}{2}$ 时 Y 的条件概率密度.

(3) 求条件概率

$$P\left\{Y \geq \frac{1}{4} \mid X = \frac{1}{2}\right\}, \quad P\left\{Y \geq \frac{3}{4} \mid X = \frac{1}{2}\right\}.$$

解 在第 9 题中, 有(如题 3.9 图)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, & x^2 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{x^2}^1 \frac{21}{4}x^2y dy = \frac{21}{8}x^2y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=1} \\ &= \frac{21}{8}x^2(1-x^4), \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4}x^2y dx = \frac{7}{4}x^3y \Big|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} \\ &= \frac{7}{2}y^{5/2}, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{2}y^{5/2}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

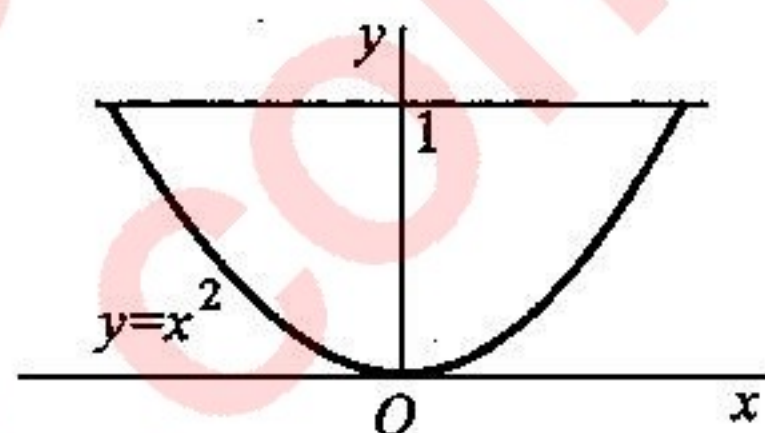
(1) 当 $0 < y \leq 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{(21/4)x^2y}{(7/2)y^{5/2}} = \frac{3}{2}x^2y^{-3/2}, & -\sqrt{y} < x < \sqrt{y}, \\ 0, & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

当 $Y = \frac{1}{2}$ 时的条件概率密度可自上式中令 $y = \frac{1}{2}$ 而得到:

$$f_{X|Y}(x|y = \frac{1}{2}) = \begin{cases} 3\sqrt{2}x^2, & -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0, & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

(2) 当 $-1 < x < 1$ 时,



题 3.9 图

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{(21/4)x^2 y}{(21/8)x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4}, & x^2 < y < 1, \\ 0, & y \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

当 $X = \frac{1}{3}$ 时, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x = \frac{1}{3}) = \begin{cases} \frac{81}{40}y, & \frac{1}{9} < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当 $X = \frac{1}{2}$ 时, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x = \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{32}{15}y, & \frac{1}{4} < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(3) P\{Y \geq \frac{1}{4} | X = \frac{1}{2}\} = \int_{\frac{1}{4}}^1 f_{Y|X}(y | \frac{1}{2}) dy = 1.$$

$$P\{Y \geq \frac{3}{4} | X = \frac{1}{2}\} = \int_{\frac{3}{4}}^1 f_{Y|X}(y | \frac{1}{2}) dy = \frac{7}{15}.$$

14. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

解 如题 3.14 图,

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-x}^x 1 dy = 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

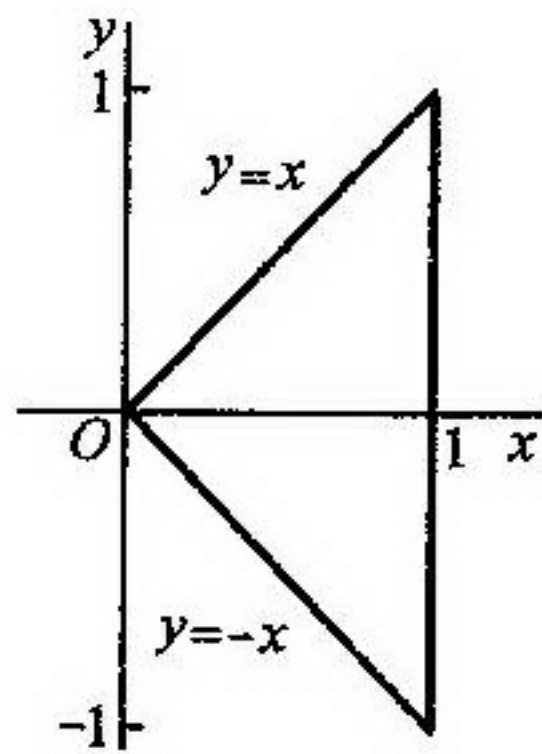
$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 1 dx = 1 - y, & 0 < y < 1, \\ \int_{-y}^1 1 dx = 1 + y, & -1 < y \leq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当 $0 < y < 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{1-y}, & y < x < 1, \\ 0, & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

当 $-1 < y \leq 0$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{1+y}, & -y < x < 1, \\ 0, & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$



题 3.14 图

也可写成

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{|y|}^1 1 \cdot dx = 1 - |y|, & |y| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因此,当 $|y| < 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{1-|y|}, & |y| < x < 1, \\ 0, & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

当 $0 < x < 1$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & |y| < x, \\ 0, & y \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

15. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 当给定 $X = x$ 时, 随机变量 Y 的条件概率密

度为 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x, & 0 < y < \frac{1}{x}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$.

(2) 求边缘密度 $f_Y(y)$, 并画出它的图形.

(3) 求 $P\{X > Y\}$.

解 (1) 因 $f(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$,

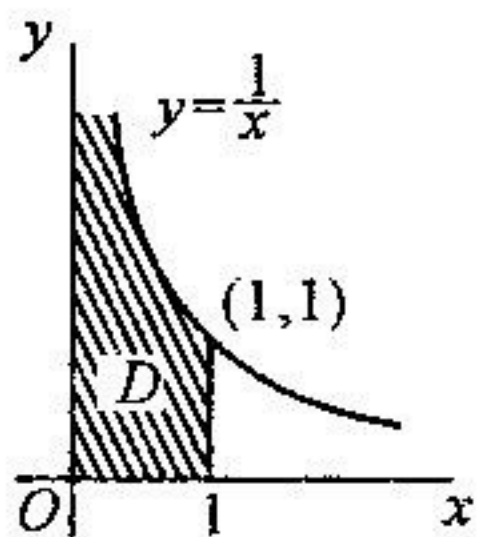
今 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

故 $f(x,y) = \begin{cases} x, & 0 < y < \frac{1}{x}, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

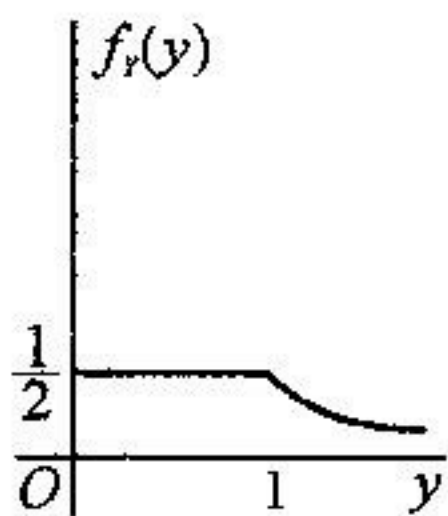
$f(x,y)$ 仅在区域 $D: \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{x}\}$ 上不等于零, 如题 3.15

图 1.

(2) 如题 3.15 图 2 有,



题 3.15 图 1



题 3.15 图 2

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, & 0 < y < 1, \\ \int_0^{1/y} x dx = \frac{1}{2y^2}, & 1 \leq y < \infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

即

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2y^2}, & 1 \leq y < \infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(3) P\{X > Y\} = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 x dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - y^2) dy = \frac{1}{3}.$$

16. (1) 问第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立?

(2) 问第 14 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立(需说明理由)?

解 (1) 在放回抽样时, X 和 Y 的联合分布律与边缘分布律如下表:

Y \ X	X		$P\{Y = j\}$
	0	1	
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$P\{X = i\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

由于

$$P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{25}{36} = P\{X = 0\}P\{Y = 0\},$$

$$P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{5}{36} = P\{X = 0\}P\{Y = 1\},$$

$$P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{5}{36} = P\{X = 1\}P\{Y = 0\},$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{36} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\},$$

故 X 与 Y 相互独立.

不放回抽样时, X 和 Y 的联合分布律与边缘分布律如下表:

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	0	1	$P\{Y=j\}$
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{6}$
$P\{X=i\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

由于 $P\{X=0, Y=0\} = \frac{15}{22} \neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$, 即知 X 和 Y 不是相互独立的.

(2) 在第 14 题中有(见第 14 题解答):

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

而

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

在区域 $G: \{(x, y) \mid |y| < x, 0 < x < 1\}$ 上 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 与 Y 不是相互独立的.

17. (1) 设随机变量 (X, Y) 具有分布函数

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha})y, & x \geq 0, 0 \leq y \leq 1, \\ 1 - e^{-\alpha}, & x \geq 0, y > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

证明 X, Y 相互独立.

(2) 设随机变量 (X, Y) 具有分布律

$$P\{X=x, Y=y\} = p^2(1-p)^{x+y-2}, \quad 0 < p < 1, x, y \text{ 均为正整数},$$

问 X, Y 是否相互独立.

解 (1) $F_X(x) = F(x, \infty) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因为对于所有的 x, y 都有 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, 故 X, Y 相互独立.

$$(2) P\{X=x\} = \sum_{y=1}^{\infty} p^2(1-p)^{x+y-2} = p^2(1-p)^{x-1} \sum_{y=1}^{\infty} (1-p)^{y-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= p^2(1-p)^{x-1} \frac{1}{1-(1-p)} \\
 &= p(1-p)^{x-1}, x=1,2,\dots, \text{其中 } 0 < p < 1.
 \end{aligned}$$

同理

$$P\{Y=y\} = p(1-p)^{y-1}, y=1,2,\dots, \text{其中 } 0 < p < 1.$$

因为对于所有正整数 x, y 都有

$$P\{X=x, Y=y\} = P\{X=x\}P\{Y=y\},$$

故 X, Y 相互独立.

18. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度.

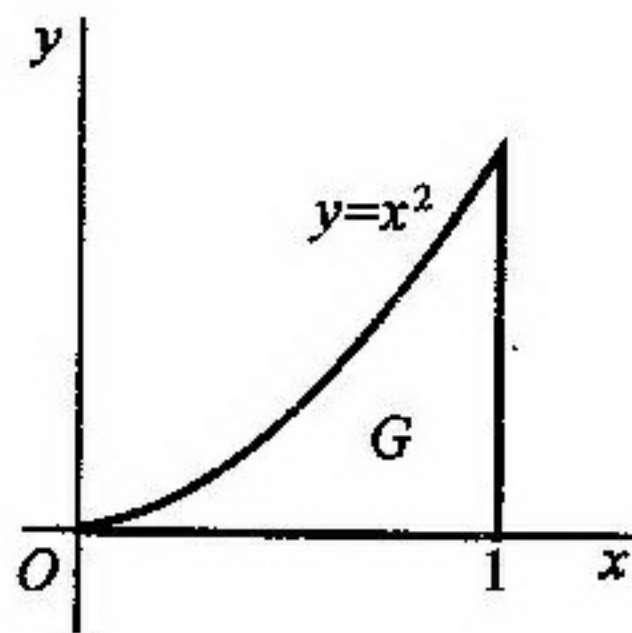
(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2 + 2Xa + Y = 0$, 试求 a 有实根的概率.

解 (1) 因 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

且 X 和 Y 相互独立, 故 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & 0 < x < 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



题 3.18 图

(2) a 的二次方程 $a^2 + 2Xa + Y = 0$ 有实根的充要条件为判别式 $\Delta = 4X^2 - 4Y \geq 0$, 亦即

$$X^2 \geq Y.$$

而

$$P\{X^2 \geq Y\} = P\{(X, Y) \in G\},$$

其中 G 由曲线 $y = x^2, y = 0, x = 1$ 所围成(如题 3.18 图), 即有

$$\begin{aligned}
 P\{X^2 \geq Y\} &= \iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{1}{2}e^{-y/2} dy \\
 &= \int_0^1 [-e^{-y/2}]_0^{x^2} dx = \int_0^1 [1 - e^{-x^2/2}] dx \\
 &= 1 - \int_0^1 e^{-x^2/2} dx = 1 - \sqrt{2\pi}[\Phi(1) - \Phi(0)] \\
 &= 1 - \sqrt{2\pi}(0.8413 - 0.5) = 0.1445.
 \end{aligned}$$

19. 进行打靶, 设弹着点 $A(X, Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立, 且都服从 $N(0, 1)$ 分布, 规定

点 A 落在区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 得 2 分;

点 A 落在 $D_2 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ 得 1 分;

点 A 落在 $D_3 = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 4\}$ 得 0 分.

以 Z 记打靶的得分. 写出 X, Y 的联合概率密度, 并求 Z 的分布律.

解 由题设知 X, Y 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \quad -\infty < y < \infty,$$

且知 X 和 Y 相互独立, 故 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

$$P\{(X, Y) \in D_1\} = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$$

$$\xrightarrow{\text{用极坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{2\pi} [-e^{-r^2/2}] \Big|_0^1 = 1 - e^{-1/2},$$

$$P\{(X, Y) \in D_2\} = \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr$$

$$= -e^{-r^2/2} \Big|_1^2 = e^{-1/2} - e^{-2},$$

$$P\{(X, Y) \in D_3\} = 1 - (1 - e^{-1/2}) - (e^{-1/2} - e^{-2}) = e^{-2},$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1	2
p_k	e^{-2}	$e^{-1/2} - e^{-2}$	$1 - e^{-1/2}$

20. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0, \mu > 0$ 是常数. 引入随机变量

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{当 } X \leq Y, \\ 0, & \text{当 } X > Y. \end{cases}$$

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y)$.

(2) 求 Z 的分布律和分布函数.

解 由于 X 和 Y 相互独立, (X, Y) 的概率密度 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 即有

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 当 $y > 0$ 时, 有

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) P\{X \leq Y\} &= \iint_{G: x \leq y} f(x, y) dx dy = \int_0^\infty dx \int_x^\infty \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} dy \\ &= \int_0^\infty [-\lambda e^{-\lambda x - \mu y}] \Big|_{y=x}^{y=\infty} dx \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\mu)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \end{aligned}$$

而

$$P\{X > Y\} = 1 - P\{X \leq Y\} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1
p_k	$\frac{\mu}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu}, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

21. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

分别求 (1) $Z = X + Y$, (2) $Z = XY$ 的概率密度.

解 记所需求的概率密度函数为 $f_z(z)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

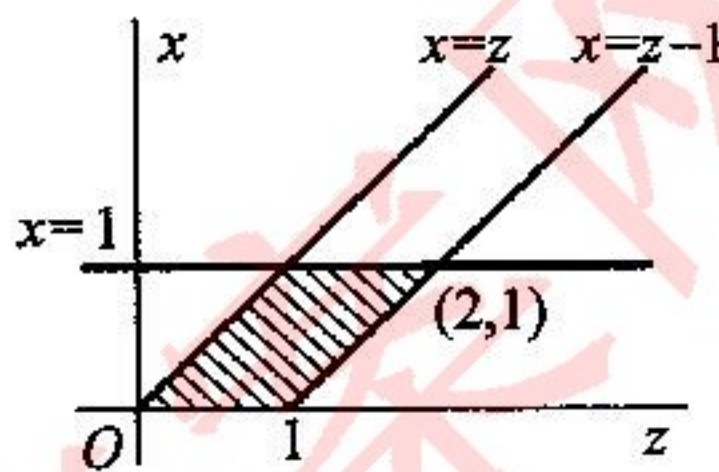
(1) $Z = X + Y$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx. \quad (*_1)$$

仅当被积函数 $f(x, z-x) \neq 0$ 时, $f_z(z) \neq 0$. 我们先找出使 $f(x, z-x) \neq 0$ 的 x, z 的变化范围. 从而可定出 $(*)_1$ 中积分(相对于不同 z 的值)的积分限, 算出这一积分就可以了.

易知, 仅当 $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < z-x < 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ z-1 < x < z, \end{cases}$ 时, $(*)_1$ 的被积函数不等于零,

参考题 3.21 图 1, 即得



题 3.21 图 1

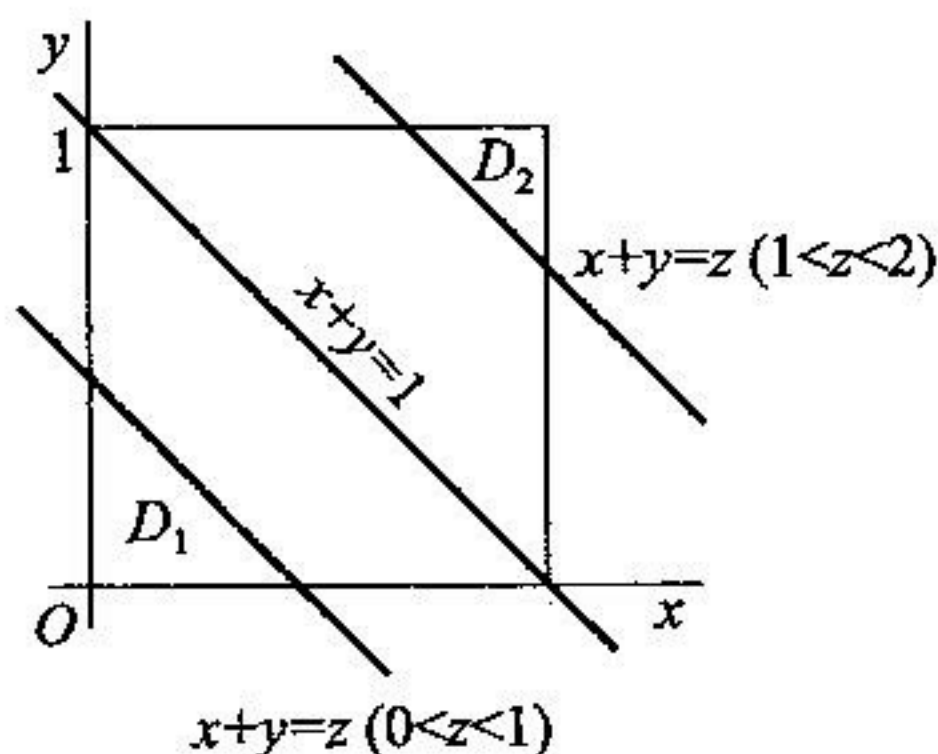
$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_0^z [x + (z-x)] dx, & 0 < z < 1, \\ \int_{z-1}^1 [x + (z-x)] dx, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

即

$$f_z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 < z < 1, \\ 2z - z^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

本题也可利用分布函数来求 $f_z(z)$, 如下所示.

记 $Z = X + Y$ 的分布函数为 $F_z(z)$, 参考题 3.21 图 2 知



题 3.21 图 2

当 $z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$.

当 $0 < z < 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} \\ &= \iint_{D_1} (x+y) dx dy \\ &= \int_0^z dy \int_0^{z-y} (x+y) dx \\ &= \frac{1}{3} z^3. \end{aligned}$$

当 $1 \leq z < 2$ 时, 因 $f(x, y)$ 只在矩形区域上 $\neq 0$, 故

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = 1 - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \\ &= 1 - \int_{z-1}^1 dy \int_{z-y}^1 (x+y) dx = -\frac{1}{3} + z^2 - \frac{1}{3} z^3. \end{aligned}$$

当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = 1$.

故 $Z = X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{3} z^3, & 0 < z < 1, \\ -\frac{1}{3} + z^2 - \frac{1}{3} z^3, & 1 \leq z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$$

由此知 $Z = X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 < z < 1, \\ 2z - z^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) $Z = XY$

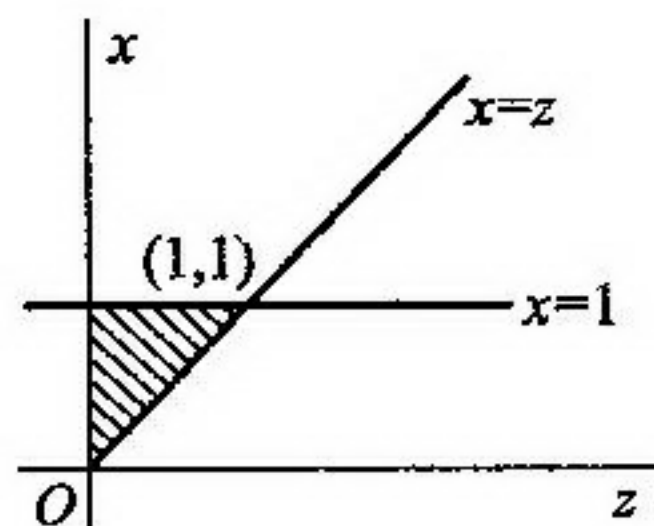
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx.$$

易知仅当

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \frac{z}{x} < 1, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < z < x, \end{cases}$$

时, 上述积分的被积函数不等于零, 如题 3.21 图 3, 即得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx$$



题 3.21 图 3

$$= \begin{cases} \int_z^1 \frac{1}{x} (x + \frac{z}{x}) dx, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

得

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2(1-z), & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

22. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解法(i) 利用公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy,$$

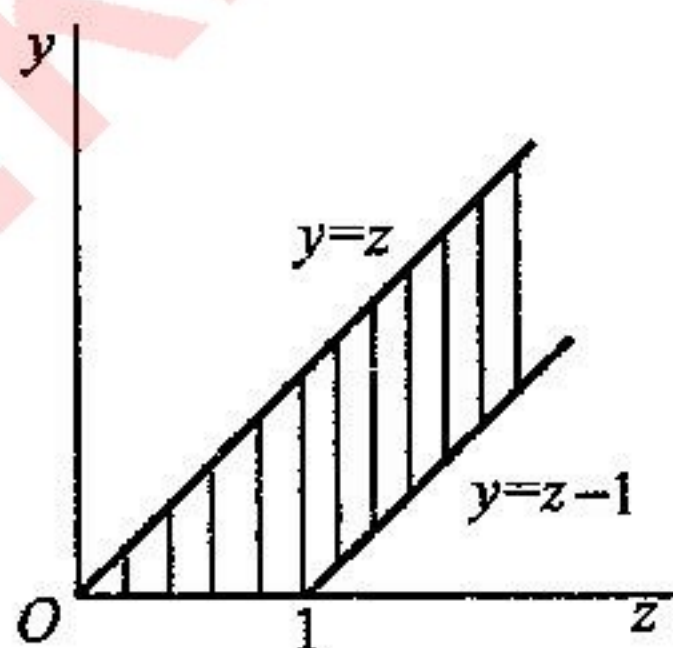
按函数 f_X, f_Y 的定义知, 仅当

$$\begin{cases} 0 \leq z-y \leq 1, \\ y > 0, \end{cases}$$

即

$$z-1 \leq y \leq z, y > 0$$

时, 上述积分的被积函数才不等于 0, 如题 3.22 图 1 知



题 3.22 图 1

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_0^z 1 \cdot e^{-y}dy, & 0 < z < 1, \\ \int_{z-1}^z f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{z-1}^z 1 \cdot e^{-y}dy, & z \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

即有

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ (e-1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

若利用公式

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx,$$

知仅当

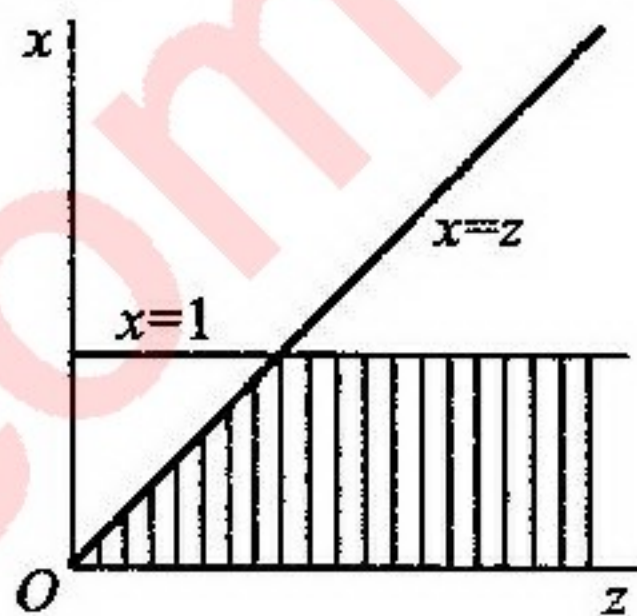
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ z-x > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x < z \end{cases}$$

时,上述积分的被积函数才不会等于 0,如题 3.22 图 2 知

$$f_z(z) = \begin{cases} \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^z e^{-(z-x)} dx, & 0 < z < 1, \\ \int_0^1 f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^1 e^{-(z-x)} dx, & z \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

即有

$$f_z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ (e-1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



题 3.22 图 2

解法(ii) 先求出 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_z(z)$,然后将 $F_z(z)$ 关于 z 求导从而得到 $f_z(z)$.

X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

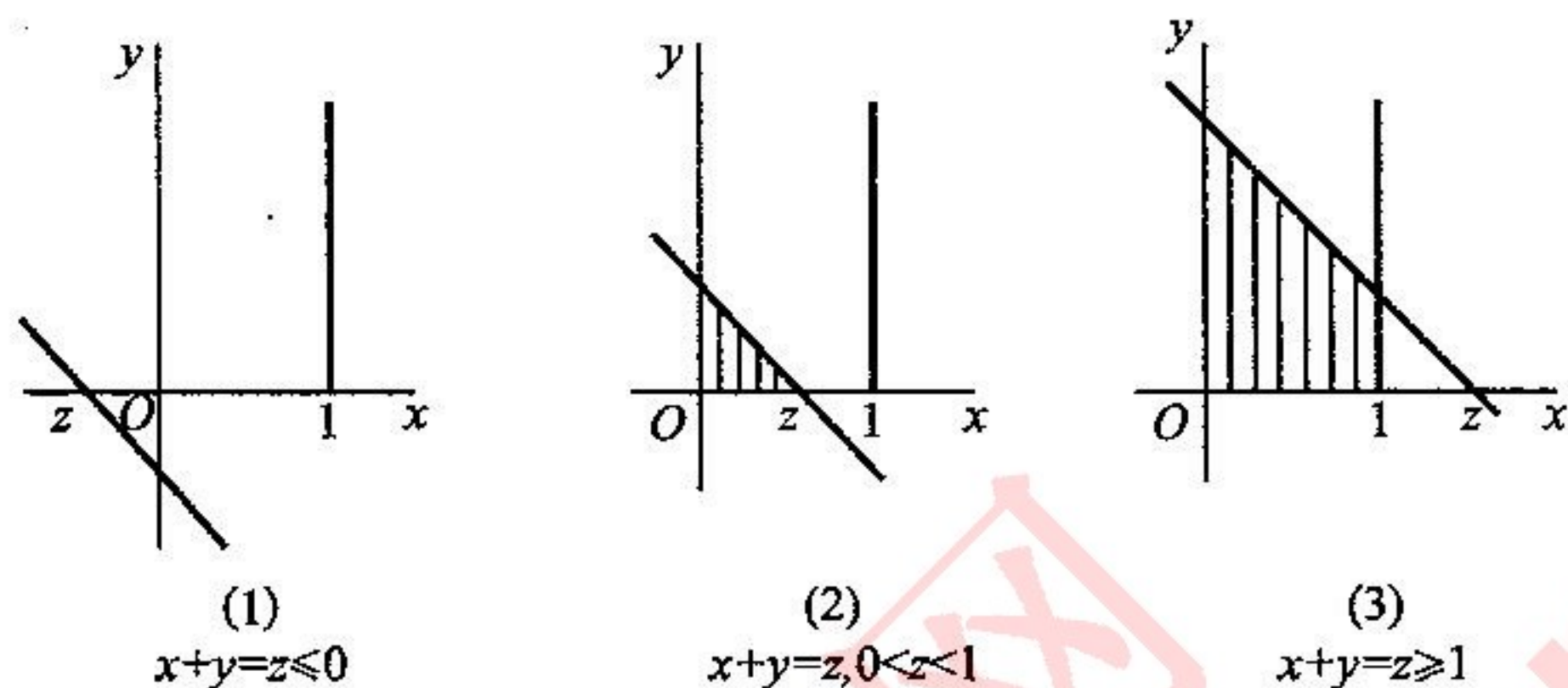
如果 $x+y \leq z$,那么 $y \leq z-x$,这就表明区域 $G: \{(x,y) | x+y \leq z\}$ 位于直线 $x+y=z$ 的下方.现就 z 的不同大小,画出区域 $G: \{(x,y) | x+y \leq z\}$ 与 $f(x,y) \neq 0$ 的区域 $D: \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, y > 0\}$ 的公共部分(有阴影线的部分)如题 3.22 图 3 所示.

当 $z \leq 0$ 时,如题 3.22 图 3(1),有

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} \\ &= \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy = \iint_{x+y \leq z} 0 dx dy = 0, \end{aligned}$$

当 $0 < z < 1$ 时,如题 3.22 图 3(2),有

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy \\ &= \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = \int_0^z [1 - e^{-(z-x)}] dx = z - 1 + e^{-z}, \end{aligned}$$



题 3.22 图 3

当 $z \geq 1$ 时, 如题 3.22 图 3(3), 有

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = \int_0^1 [1 - e^{-(z-x)}] dx = 1 - e^{-z+1} + e^{-z},
 \end{aligned}$$

得

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ z - 1 + e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ 1 - e^{-z+1} + e^{-z}, & z \geq 1. \end{cases}$$

将 $F_Z(z)$ 关于 z 求导数, 得到 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ (e - 1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

23. 某种商品一周的需求量是一个随机变量, 其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的. 求(1) 两周, (2) 三周的需求量的概率密度.

解 设某种商品在第 i 周的需求量为 X_i ($i = 1, 2, 3$), 由题设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 并且有

$$f_{X_i}(t) = f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

(1) 记两周的需求量为 Z , 即 $Z = X_1 + X_2$, 则 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx.$$

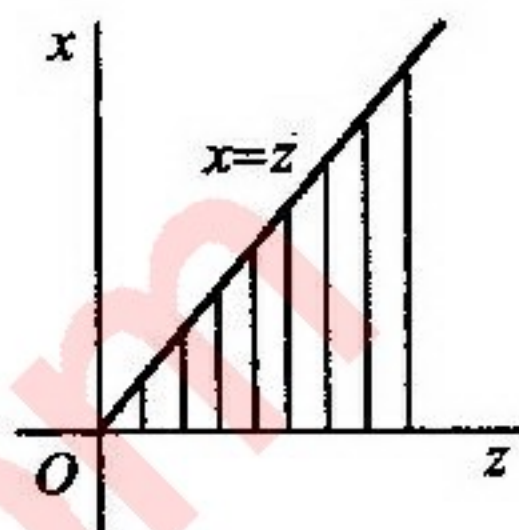
由 $f(t)$ 的定义, 知仅当

$$\begin{cases} x > 0, \\ z - x > 0, \end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < z \end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零,

于是(参见题 3.23 图) Z 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \begin{cases} \int_0^z f(x)f(z-x)dx, & z > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}dx, & z > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-z} \int_0^z (xz - x^2)dx = \frac{z^3 e^{-z}}{3!}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$



题 3.23 图

(2) 记三周的需求量为 W , 即 $W = Z + X_3$, 因 X_1, X_2, X_3 相互独立, 故 $Z = X_1 + X_2$ 与 X_3 相互独立, 从而 W 的概率密度为

$$f_W(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x)f_{X_3}(u-x)dx.$$

由上述 $f_Z(z)$ 及 $f(t)$ 的定义, 知仅当

$$\begin{cases} x > 0, \\ u - x > 0, \end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < u \end{cases}$$

时, 上述积分的被积函数不等于零, 于是 W 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_W(u) &= \begin{cases} \int_0^u f_Z(x)f_{X_3}(u-x)dx, & u > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^u \frac{x^3 e^{-x}}{3!} (u-x)e^{-(u-x)}dx, & u > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{e^{-u}}{3!} \int_0^u (x^3 u - x^4)dx = \frac{u^5 e^{-u}}{5!}, & u > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

注: 本题中我们假设第一周的需求量为 X_1 , 第二周的需求量为 X_2 . 两周的需求量为 $X_1 + X_2$, 注意到, X_1, X_2 是相互独立的随机变量, 虽然它们具有相同的分布, 但它们的取值是相互独立的, 因而两周的需求量不能写成 $2X$, 而必须写成 $X_1 + X_2$.

24. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否相互独立?

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} dy \\ &= \frac{1}{2}(x+y)(-e^{-(x+y)}) \Big|_{y=0}^{y=\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy \\ &= \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-(x+y)} \Big|_{y=0}^{y=\infty} = \frac{x+1}{2}e^{-x}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

故 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

同理, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{2}e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$, 所以 X, Y 不相互独立.

(2) 由教材第三章公式(5.1)可得 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 为

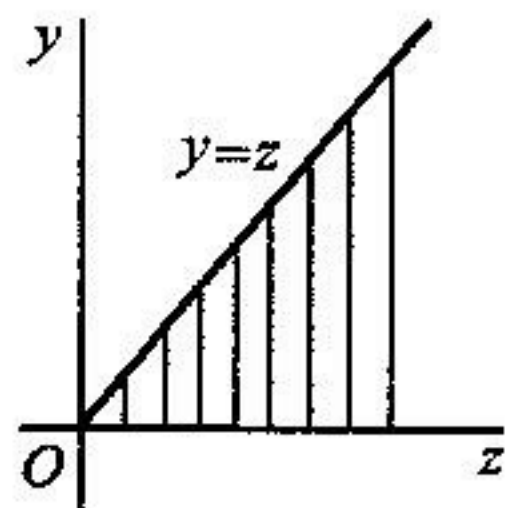
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) dy,$$

上述被积函数仅当

$$\begin{cases} z-y > 0, \\ y > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y < z, \\ y > 0 \end{cases}$$

时才不会等于 0, 由题 3.24 图得

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \begin{cases} \int_0^z f(z-y, y) dy, & z > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^z \frac{1}{2}(z-y+y)e^{-(z-y+y)} dy, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$



题 3.24 图

即有

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^z ze^{-z} dy = \frac{1}{2}z^2e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

25. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且具有相同的分布, 它们概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x}, & x > 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 由卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx,$$

现在 $f_X(x) = \begin{cases} e^{1-x}, & x > 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

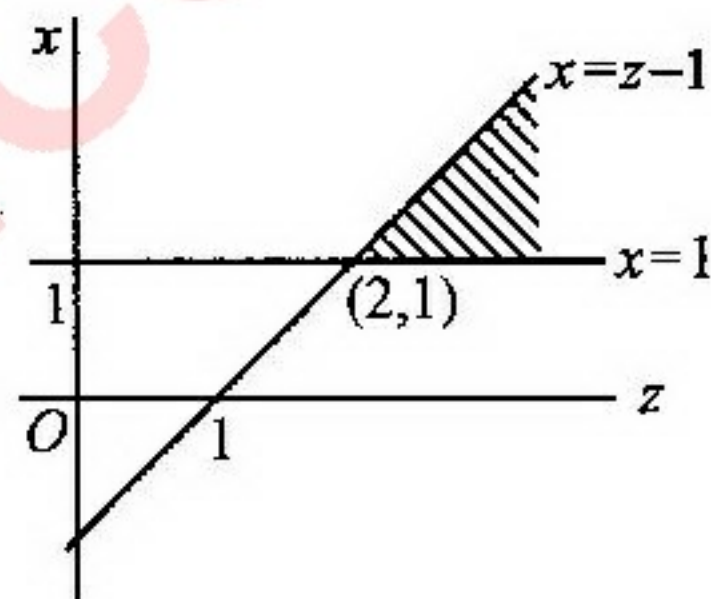
$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{1-y}, & y > 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

仅当 $\begin{cases} x > 1, \\ z-x > 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x > 1, \\ x < z-1 \end{cases}$

时, 上述积分的被积函数不等于零, 由题 3.25 图即得

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_1^{z-1} e^{1-x} e^{1-(z-x)} dx = \int_1^{z-1} e^{2-z} dx, & z > 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

得 $f_Z(z) = \begin{cases} e^{2-z}(z-2), & z > 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$



题 3.25 图

26. 设随机变量 X, Y 相互独立, 它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $Z = \frac{Y}{X}$ 的概率密度.

解 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

由公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx,$

仅当 $\begin{cases} x > 0, \\ xz > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x > 0, \\ z > 0 \end{cases}$ 时, 上述积分的被积函数不等于零, 于是当 $z > 0$

时有

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} x e^{-x} e^{-xz} dx = \int_0^{\infty} x e^{-x(z+1)} dx = \frac{1}{(z+1)^2}.$$

当 $z \leq 0$ 时 $f_Z(z) = 0$, 即

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z+1)^2}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

27. 设随机变量 X, Y 相互独立, 它们都在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布. A 是以 X, Y 为边长的矩形的面积, 求 A 的概率密度.

解 X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

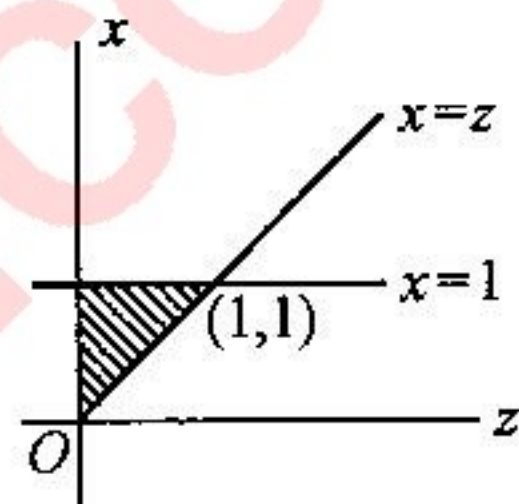
面积 $A = XY$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x}) dx, \end{aligned}$$

仅当 $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \frac{z}{x} < 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x > z > 0 \end{cases}$

时上述积分的被积函数不等于零, 由题 3.27 图得

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_z^1 \frac{1}{x} dx = -\ln z, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



题 3.27 图

28. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 它们都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$. 试验证随机变量 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z \geq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们称 Z 服从参数为 σ ($\sigma > 0$) 的瑞利(Rayleigh)分布.

证 先来求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$, 由于 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \geq 0$, 知当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$. 当 $z \geq 0$ 时有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z\} \\ &= P\{X^2 + Y^2 \leq z^2\} = \iint_{x^2 + y^2 \leq z^2} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq z^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2 + y^2)/(2\sigma^2)} dx dy \\ &\quad \xrightarrow{\text{用极坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} r dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} [-e^{-r^2/(2\sigma^2)}] \Big|_0^z = 1 - e^{-z^2/(2\sigma^2)}. \end{aligned}$$

将 $F_Z(z)$ 关于 z 求导数, 得 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

29. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 试确定常数 b .

(2) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(3) 求函数 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数.

解 (1) 由

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^1 be^{-(x+y)} dy dx \\ &= b \left[\int_0^{\infty} e^{-y} dy \right] \left[\int_0^1 e^{-x} dx \right] = b(1 - e^{-1}), \end{aligned}$$

得

$$b = \frac{1}{1 - e^{-1}}.$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-y} dy = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^1 e^{-x} e^{-y} dx = e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 由(2)知 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 故 X, Y 相互独立. 分别记 $U = \max\{X, Y\}$, X 和 Y 的分布函数为 $F_U(u), F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则有

$$F_U(u) = F_X(u)F_Y(u). \quad (\text{A})$$

由(2)知

$$\begin{aligned} F_X(u) &= \int_{-\infty}^u f_X(x) dx = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \int_0^u \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}} dx, & 0 \leq u < 1, \\ 1, & u \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \frac{1 - e^{-u}}{1 - e^{-1}}, & 0 \leq u < 1, \\ 1, & u \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$F_Y(u) = \int_{-\infty}^u f_Y(y) dy = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \int_0^u e^{-y} dy, & u \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & u < 0, \\ 1 - e^{-u}, & u \geq 0. \end{cases}$$

将 $F_X(u), F_Y(u)$ 的表达式代入(A)式, 得到 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \frac{(1 - e^{-u})^2}{1 - e^{-1}}, & 0 \leq u < 1, \\ 1 - e^{-u}, & u \geq 1. \end{cases}$$

30. 设某种型号的电子元件的寿命(以小时计)近似地服从正态分布 $N(160, 20^2)$, 随机地选取 4 只, 求其中没有一只寿命小于 180 的概率.

解 以 $X_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 记所选取的第 i 只元件的寿命, 由题设一只元件寿命小于 180 小时的概率为

$$P\{X_i \leq 180\} = P\left\{\frac{X_i - 160}{20} \leq \frac{180 - 160}{20}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{180 - 160}{20}\right) = \Phi(1) = 0.8413.$$

可认为 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 故选取的 4 只元件没有一只寿命小于 180 小时的概率为

$$\prod_{i=1}^4 [1 - P\{X_i \leq 180\}] = (1 - 0.8413)^4 = 0.00063.$$

31. 对某种电子装置的输出测量了 5 次, 得到结果为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 . 设它们是相互独立的随机变量且都服从参数 $\sigma = 2$ 的瑞利分布.

(1) 求 $Z = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ 的分布函数;

(2) 求 $P\{Z > 4\}$.

解 参数 $\sigma = 2$ 的瑞利分布, 其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} e^{-x^2/8}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设其分布函数为 $F_X(x)$. 则当 $x < 0$ 时, $F_X(x) = 0$, 当 $x \geq 0$ 时有

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{x}{4} e^{-x^2/8} dx = -e^{-x^2/8} \Big|_0^x = 1 - e^{-x^2/8}.$$

即有

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/8}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(1) 因 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立, 且都服从参数 $\sigma = 2$ 的瑞利分布, 故 $Z = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = [F_X(z)]^5 = \begin{cases} (1 - e^{-z^2/8})^5, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) P\{Z > 4\} &= 1 - P\{Z \leq 4\} = 1 - F_Z(4) \\ &= 1 - (1 - e^{-2})^5 = 0.5167. \end{aligned}$$

32. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且服从同一分布, 试证明:

$$P\{a < \min\{X, Y\} \leq b\} = [P\{X > a\}]^2 - [P\{X > b\}]^2 \quad (a \leq b).$$

证 由题设 X 和 Y 相互独立, 且服从同一分布, 以 $F(x)$ 记它们的分布函数, 又记 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为 $F_N(z)$, 则

$$F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^2,$$

于是

$$P\{a < \min\{X, Y\} \leq b\} = F_N(b) - F_N(a) = [1 - F(a)]^2 - [1 - F(b)]^2.$$

因

$$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a),$$

$$P\{X > b\} = 1 - P\{X \leq b\} = 1 - F(b),$$

从而

$$P\{a < \min\{X, Y\} \leq b\} = [P\{X > a\}]^2 - [P\{X > b\}]^2.$$

33. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 其分布律分别为

$$P\{X = k\} = p(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$P\{Y = r\} = q(r), \quad r = 0, 1, 2, \dots.$$

证明随机变量 $Z = X + Y$ 的分布律为

$$P\{Z = i\} = \sum_{k=0}^i p(k)q(i-k), \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$

证 随机变量 $Z = X + Y$ 的取值范围为 $0, 1, 2, \dots$. 对于非负整数 i , $\{Z = i\} = \{X + Y = i\}$ 可按下列方式分解为若干个两两互不相容的事件之和:

$$\begin{aligned} \{Z = i\} &= \{X + Y = i\} \\ &= \{X = 0, Y = i\} \cup \{X = 1, Y = i-1\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{X = k, Y = i-k\} \cup \dots \cup \{X = i, Y = 0\}. \end{aligned}$$

又由 X, Y 的独立性知

$$\begin{aligned} P\{X = k, Y = i-k\} &= P\{X = k\}P\{Y = i-k\} \\ &= p(k)q(i-k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, i. \end{aligned}$$

因此

$$P\{Z = i\} = P\left\{\bigcup_{k=0}^i \{X = k, Y = i-k\}\right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^i P\{X=k, Y=i-k\} \\
 &= \sum_{k=0}^i p(k)q(i-k), \quad i=0,1,2,\dots.
 \end{aligned}$$

34. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, $X \sim \pi(\lambda_1), Y \sim \pi(\lambda_2)$. 证明

$$Z = X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2).$$

证 因 $X \sim \pi(\lambda_1), Y \sim \pi(\lambda_2)$, 故

$$p(k) = P\{X=k\} = \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots,$$

$$q(k) = P\{Y=k\} = \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots.$$

而 $Z = X + Y$ 可能取的值为 $0, 1, 2, \dots$, 且 X, Y 相互独立. 由 33 题得

$$\begin{aligned}
 P\{Z=i\} &= \sum_{k=0}^i \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{i-k}}{k!(i-k)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} \sum_{k=0}^i \frac{i!}{k!(i-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{i-k} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{i-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} (\lambda_1 + \lambda_2)^i \\
 &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^i e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!}, \quad i=0,1,2,\dots,
 \end{aligned}$$

即 $Z \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$.

35. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, $X \sim b(n_1, p), Y \sim b(n_2, p)$. 证明

$$Z = X + Y \sim b(n_1 + n_2, p).$$

证 因 $X \sim b(n_1, p), Y \sim b(n_2, p)$, 故

$$p(k) = P\{X=k\} = \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k}, \quad k=0,1,2,\dots,n_1,$$

$$q(k) = P\{Y=k\} = \binom{n_2}{k} p^k (1-p)^{n_2-k}, \quad k=0,1,2,\dots,n_2.$$

而 $Z = X + Y$ 可能取的值为 $0, 1, 2, \dots, n_1 + n_2$, 且 X, Y 相互独立, 由 33 题得

$$\begin{aligned}
 P\{Z=i\} &= \sum_{k=0}^i \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{i-k} p^{i-k} (1-p)^{n_2-i+k} \\
 &= \left[\sum_{k=0}^i \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{i-k} \right] p^i (1-p)^{n_1+n_2-i},
 \end{aligned}$$

$$i=0,1,2,\dots,n_1+n_2.$$

又

$$[p + (1-p)]^{n_1+n_2} = [p + (1-p)]^{n_1} [p + (1-p)]^{n_2}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \right] \left[\sum_{s=0}^{n_2} \binom{n_2}{s} p^s (1-p)^{n_2-s} \right].$$

比较上式两边展开式中 $p^i (1-p)^{n_1+n_2-i}$ 这一项的系数, 知

$$\binom{n_1+n_2}{i} = \sum_{k=0}^i \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{i-k},$$

从而

$$P\{Z=i\} = \binom{n_1+n_2}{i} p^i (1-p)^{n_1+n_2-i}, \quad i=0,1,2,\dots,n_1+n_2.$$

即

$$Z \sim b(n_1+n_2, p).$$

36. 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求 $P\{X=2|Y=2\}, P\{Y=3|X=0\}$.

(2) 求 $V = \max\{X, Y\}$ 的分布律.

(3) 求 $U = \min\{X, Y\}$ 的分布律.

(4) 求 $W = X+Y$ 的分布律.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad P\{Y=2\} &= \sum_{i=0}^5 P\{X=i, Y=2\} \\ &= 0.01 + 0.03 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.06 \\ &= 0.25, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X=0\} &= \sum_{j=0}^3 P\{X=0, Y=j\} \\ &= 0.00 + 0.01 + 0.01 + 0.01 = 0.03, \end{aligned}$$

故有

$$P\{X=2|Y=2\} = \frac{P\{X=2, Y=2\}}{P\{Y=2\}} = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5},$$

$$P\{Y=3|X=0\} = \frac{P\{X=0, Y=3\}}{P\{X=0\}} = \frac{0.01}{0.03} = \frac{1}{3}.$$

(2) $V = \max\{X, Y\}$ 所有可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$$\begin{aligned} \{V=i\} &= \{\max\{X, Y\} = i\} \\ &= \{X=i, Y < i\} \cup \{X=i, Y=i\} \cup \{X < i, Y=i\}. \end{aligned}$$

上式右边三项两两互不相容,故有

$$\begin{aligned} P\{V=i\} &= P\{\max\{X,Y\}=i\} \\ &= P\{X=i, Y<i\} + P\{X=i, Y=i\} + P\{X<i, Y=i\}, \end{aligned}$$

例如

$$\begin{aligned} P\{V=2\} &= P\{X=2, Y=0\} + P\{X=2, Y=1\} \\ &\quad + P\{X=2, Y=2\} + P\{X=0, Y=2\} \\ &\quad + P\{X=1, Y=2\} \\ &= 0.03 + 0.04 + 0.05 + 0.01 + 0.03 = 0.16, \\ P\{V=5\} &= P\{X=5, Y=0\} + P\{X=5, Y=1\} \\ &\quad + P\{X=5, Y=2\} + P\{X=5, Y=3\} \\ &= 0.09 + 0.08 + 0.06 + 0.05 = 0.28. \end{aligned}$$

即有分布律:

$V = \max\{X, Y\}$	0	1	2	3	4	5
p_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(3) $U = \min\{X, Y\}$ 所有可能的取值为 0, 1, 2, 3.

$$\begin{aligned} \{U=i\} &= \{\min\{X, Y\}=i\} \\ &= \{X=i, Y>i\} \cup \{X=i, Y=i\} \cup \{X>i, Y=i\}, \end{aligned}$$

$$P\{U=i\} = P\{X=i, Y>i\} + P\{X=i, Y=i\} + P\{X>i, Y=i\}.$$

例如

$$\begin{aligned} P\{U=2\} &= P\{X=2, Y=3\} + P\{X=2, Y=2\} \\ &\quad + P\{X=3, Y=2\} + P\{X=4, Y=2\} \\ &\quad + P\{X=5, Y=2\} \\ &= 0.04 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.06 = 0.25, \end{aligned}$$

即有

$U = \min\{X, Y\}$	0	1	2	3
p_k	0.28	0.30	0.25	0.17

(4) $W = X + Y$ 所有可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

$$\{W=i\} = \{X+Y=i\} = \bigcup_{k=0}^i \{X=k, Y=i-k\},$$

$$P\{W=i\} = \sum_{k=0}^i P\{X=k, Y=i-k\}.$$

例如

$$\begin{aligned}P\{W=2\} &= P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=0\} \\&= 0.01 + 0.02 + 0.03 = 0.06,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{W=5\} &= P\{X=0, Y=5\} + P\{X=1, Y=4\} \\&\quad + P\{X=2, Y=3\} + P\{X=3, Y=2\} \\&\quad + P\{X=4, Y=1\} + P\{X=5, Y=0\} \\&= 0 + 0 + 0.04 + 0.05 + 0.06 + 0.09 = 0.24,\end{aligned}$$

即有分布律

$W = X + Y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05