

前 言

培养基础扎实、勇于创新人才,历来是大学教育的一个重要目标,随着知识经济时代的到来,这一目标显得更加突出,在工科大学教育中,数学课既是基础理论课程,又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用。为适应培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求,我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神,多年来在数学教学改革方面进行了探索,取得一定的成效,在此基础上,编写了这套教材,其中包括《工科数学分析(上下册)》、《线性代数与空间解析几何》、《概率论与数理统计》、《计算方法》、《数学实验》及针对本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生的《工科数学分析(上下册)》、《线性代数与空间解析几何》。这套教材是参照原国家教委 1995 年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求和 1997 年研究生入学考试大纲编写的。为满足不同专业、不同层次学生的需要,这套教材适当增加了部分内容,对学生能力的要求也有所提高。

本教材的编写力求具有以下特色:

1. 将各门课程的内容有机结合、融会贯通,既保证了教学质量的提高,又压缩了教学时数。
2. 重视对学生能力的培养,注意提高学生基本素质。对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入。取材上,精选内容,突出重点,强调应用,注意奠定学生创新能力的基础。
3. 例题和习题丰富,特别是综合性和实际应用性的题较多,有利于学生掌握所学内容,提高分析问题和解决问题的能力。
4. 以简介和附录的形式为学生展望新知识留下窗口,以开阔学生的视野,为进一步拓宽数学知识指出方向。

本教材主要由哈尔滨工业大学数学系各教研室教师编写,东北电力学院、黑龙江科技学院、鞍山师范学院、大庆石油学院等学校的教师参加了部分章节的编写工作,哈尔滨工业大学数学系富景隆、杨克劭、曹彬、戚振开、薛小平五位教授分别审阅了教材的各部分内容,提出了许多宝贵意见。

由于编者水平有限,教材中缺点和疏漏在所难免,恳请读者批评指正。

哈尔滨工业大学工科数学教材编写委员会

2000 年 5 月

第一章 极限与函数

数学分析研究的对象是函数,而极限是研究函数的主要工具。本章要建立极限理论,研究函数的连续性及闭区间上连续函数的性质,所有这些,都是在实数范围内进行的,都是以实数理论作为基础。因此,首先介绍实数系。

1.1 集合与实数系

1.1.1 集合和映射

为了今后学习方便,首先,简要地介绍一般集合论的基本知识。

把具有某种性质的对象的全体,称为**集合**,简称**集**。称组成集合的每个对象为集合的元素。习惯上,用大写字母 A, B, C, \dots 等表示集合,用小写字母 a, b, c, \dots 等表示元素。若元素 a 属于集合 A ,则记为 $a \in A$;否则,记为 $a \notin A$,称 a 不属于 A 。不含任何元素的集合,称为**空集**,记为 Φ 。若 A 仅含有限个元素,则称 A 为**有限集**,或 A 是有限的;否则,称 A 是**无限集**,或 A 是无限的。

若 A 的元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或 B 包含 A ,记为 $A \subset B$,或 $B \supset A$ 。若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$ 。若 $A \subset B$ 且 $A \neq B, A \neq \Phi$,则称 A 是 B 的**真子集**。

若集合 A 是具有某性质 P 的元素所组成,一般地,用

$$A = \{a: a \text{ 具有性质 } P\}$$

表示。

设 A 与 B 是两集合,可以通过下述四种方式,得出四个新的集合:

(1) 并: $A \cup B = \{a: a \in A, \text{ 或 } a \in B\}$;

(2) 交: $A \cap B = \{a: a \in A \text{ 且 } a \in B\}$;

(3) A 与 B 的差: $A \setminus B = \{a: a \in A \text{ 且 } a \notin B\}$;

(4) 在某些理论和应用中,往往仅考虑某一确定集合 X 的元素及其子集 A, B, C, \dots 等,此时, $X \setminus A$ 称为 A 的**补集**,或**余集**,记为 A^c ,即

$$A^c = \{a: a \in X \text{ 且 } a \notin A\}$$

若 $A \cap B \neq \Phi$,则称 A 与 B 有**非空交**。若 $A \neq \Phi$,则称 A 为**非空集**。

【定义 1.1】 设 X 和 Y 是两个非空集。如果有一个对应关系(或法则)存在,对于 X 中的每一元素 x ,有 Y 中惟一的一个元素 y 与之对应,则称给出了一个从 X 到 Y 的**映射** f ,记作 $f: X \rightarrow Y$,并写成 $y = f(x)$,或 $f: x \mapsto y$,表示 f 把 x 映成 y ;称 y 是 x 在映射 f 下的**像**;称 X 是 f 的**定义域**;称集合 $f(X) = \{f(x): x \in X\}$ 为 f 的**值域**。

若 $f: X \rightarrow Y$ 及 $g: Y \rightarrow Z$,则由 $h(x) = g(f(x))$ 所确定的映射 $h: X \rightarrow Z$ 称为 f 和 g 的**复合映射**,以 $h = g \circ f$ 表示之(图 1.1)。

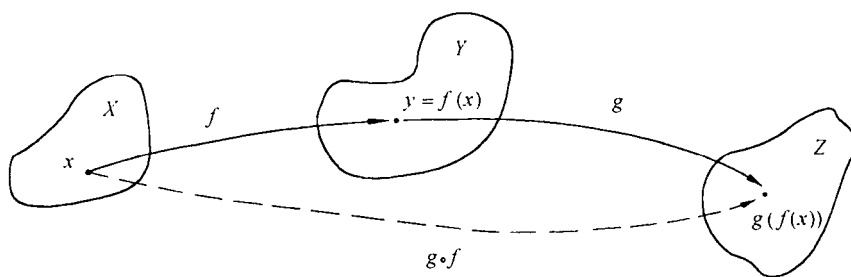


图 1.1

若在上述定义中, X 与 Y 都是数的集合, 则称 f 为从 X 到 Y 的函数, 这便是我们在中学所熟悉的函数的定义; 在复合的情况下, 便是复合函数的定义。

对映射 $f: X \rightarrow Y$, 当 $f(X) = Y$ 时, 称 f 是由 X 到 Y 上的映射或满射; 如果对 X 中所有不同的两元素 x_1, x_2 , 均有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射; 如果 f 是满射又是单射, 则称 f 为 X 到 Y 上的一一对应(图 1.2), 也称 X 与 Y 一一对应。

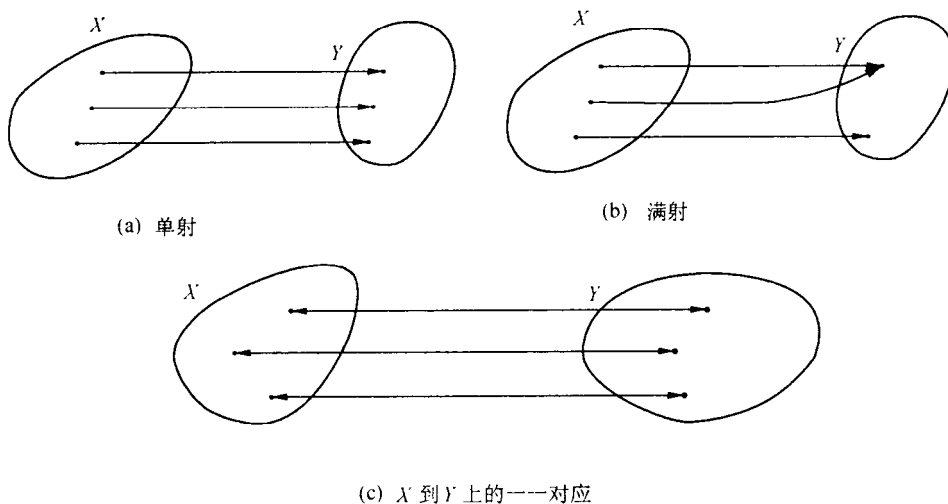


图 1.2

在单射的情况下, 由 f 可导出一个从 $f(X)$ 到 X 的映射, 称为 f 的逆映射, 记为 f^{-1} , 即若 $y = f(x)$, 则 $x = f^{-1}(y)$ 。若 f 是一函数, 则 f^{-1} 便是其反函数。

1.1.2 实数系

以数为元素的集合称为数集。

我们约定: 自然数是指正整数。自然数的集合记为 \mathbf{N} 。整数是指正整数、负整数和零, 整数的集合记为 \mathbf{Z} 。有理数是一切形如 $\frac{P}{q}$ 的数, 其中 $P \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, P$ 与 q 互素。有理数集记为 \mathbf{Q} 。实数是有理数和无理数(无限不循环小数)的统称。实数集又称为实数系, 记为 \mathbf{R} 。

如无特殊指明, 本书所有的数都是实数。

取定了原点、长度单位和方向的直线称为数直线或数轴。每一个实数, 在数轴上有惟一的

点与之对应。反过来,每个数轴上的点,代表了惟一的一个实数。这种对应关系,就有理数来讲,在数轴上很容易建立相应的对应点(有理点);随着对实数理论的逐步阐述,读者会对无理数的对应含义有深入的理解。

今后,我们对实数和数轴上的点不加区别。

实数集区别于许多其它集合的一个显著特点是有序性:任意两个相异的实数 a, b 都可以比较大小, $a < b$ 或 $a > b$; 在数轴上, a 位于 b 的左侧或右侧。

设 $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ 。下述集合是今后经常用到的。

开区间: $(a, b) = \{x: a < x < b\}$

闭区间: $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$

半无穷区间: $(a, \infty) = \{x: x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x: x \geq a\}$

$(-\infty, b) = \{x: x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x: x \leq b\}$

类似地,还有 $[a, b), (a, b]$ 及 $(-\infty, +\infty)$ 。

设 $\delta > 0$, 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x: |x - x_0| < \delta\}$ 为点 x_0 的 δ -邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$, 它是以 x_0 为中心、长为 2δ 的开区间(图 1.3)。有时, 我们不关心 δ 的大小, 常用“邻域”或“ x_0 附近”代替 x_0 的 δ -邻域, 记为 $U(x_0)$ 。

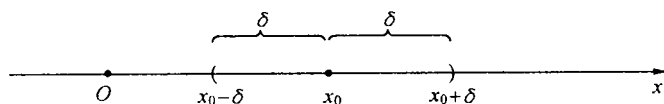


图 1.3

称集合 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x: 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 为 x_0 的去心 δ -邻域, 记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 。

我们知道, 有理数的和、差、积、商仍为有理数(当然 0 不准用作除数), 从而使 \mathbf{Q} 在 \mathbf{R} 中稠密: 任意的 $x_0 \in \mathbf{R}$ 及任意的 $\delta > 0$, 邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 必含一个(因而无数多个)有理数。事实上, 取 $p, q \in \mathbf{Q}$, 使 $p \leq x_0 - \delta, x_0 \leq q$, 则 p 与 q 的算术平均 $(p+q)/2$ 是严格介于 p 与 q 的有理数, 另言之, p 与 q 的二等分点是有理点。若将闭区间 $[p, q]$ 三等分, 则每一等分点都是有理数。如此等分下去, 则总有一个(因而无数多个)等分点落在开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 中。

同理, 无理数也在 \mathbf{R} 中稠密。

【定义 1.2】 对数集 A , 若有常数 $M(m)$, 使得对任意的 $x \in A$, 有

$$x \leq M \quad (x \geq m)$$

则称 A 为有上(下)界, 并称 $M(m)$ 是 A 的一个上(下)界。

既有上界又有下界的数集称为有界数集, 否则称为无界数集。

显然, 若一数集有上(下)界, 则必有无数多个上(下)界。事实上, 凡是大于(小于)上(下)界 $M(m)$ 的数, 都是上(下)界。在数轴上看, 凡是位于 $M(m)$ 右(左)侧的点都是上(下)界。但是, 最小(大)的上(下)界却只能有一个。我们把实数系的这一重要事实表述成一条公理。

【公理】 任何非空的有上界的实数集 A , 必存在最小上界; 称此最小上界为 A 的上确界, 记为 $\sup A$ 。

注意, 公理所说的上确界未必属于 A 。例如, $A = \{x: x \in \mathbf{Q}, x^2 < 2\}$ 是有上界的, 上确界显然是 $\sqrt{2}$, 但 $\sqrt{2} \notin A$ 。

若 A 的上确界属于 A , 则称 A 为上确界可达。此时, 上确界显然便是 A 中最大的数。

显然, $\mu = \sup A$ 等价于:

(1) 对 A 中的每一个 x , 有 $x \leq \mu$;

(2) 对于任意小的正数 ε , 都存在属于 A 的 x_0 , 使 $x_0 > \mu - \varepsilon$ 。

(1) 是说 μ 是 A 的一个上界, (2) 则说 μ 是 A 的最小上界。

关于有下界的数集, 由公理很容易得出下面的结果。

【定理 1.1】 任何有下界的非空实数集 A , 必存在最大下界, 称为 A 的下确界, 记为 $\inf A$ 。

实数 a 的绝对值 $|a|$, 在数轴是点 a 与 0 的距离

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

从绝对值的定义可以直接证明, 对任何 $a, b \in \mathbf{R}$, 有下述三角不等式成立

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a-b|$$

从而也就有

$$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$$

其中 c 是任意的实数。

习 题 1.1

1. 证明下列集合等式

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2. 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{2, 4\}$ 。确定下面的集合

(1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$ (3) $C \setminus A$ (4) A^c

3. 设 $f: x \mapsto x^2 + 1, x \in \mathbf{R}$, $g: y \mapsto \sqrt{y}, y \in (0, +\infty)$ 。试求 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 的定义域, 并求 $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 。

4. 用 \mathbf{R}^2 表示 xy -平面。称映射 $p: (x, y) \mapsto x$ 为 \mathbf{R}^2 到 x 轴的投影, 问 p 是否为单射或满射。

5. 凡与 \mathbf{N} 一一对应的集合称为可数无限集, 简称可数集。证明:

(1) 正偶数集与正奇数集都是可数集;

(2) 整数集 \mathbf{Z} 是可数集。

6. 设 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow C$ 都是到上的一一对应, 证明:

(1) $g \circ f$ 也是到上的一一对应; (2) $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1}) \circ (g^{-1})$ 。

7. 设 $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, 求 $\sup A, \inf A$, 问上、下确界是否可达?
8. 证明: A 为有界数集等价于: 存在 $M > 0$, 使任意 $x \in A$, 有 $|x| \leq M$.
9. 设 $A, B \subset \mathbf{R}$ 是非空有界集, 证明:
若 $A \subset B$, 则 $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.
10. 设 $A \subset \mathbf{R}$ 是非空有界集, 令 $-A = \{x: -x \in A\}$, 则 $\inf A = -\sup(-A)$ 和 $\sup A = -\inf(-A)$.
11. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 证明三角不等式成立:
(1) $|a+b| \leq |a| + |b|$; (2) $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$.

1.2 数列与极限

所谓数列是指按先后顺序列出一数串

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

简记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{a_n\}$. 数列中的每个数称为数列的项, 具有代表性的第 n 项 a_n 称为数列的通项。

数列 $\{a_n\}$ 也可看成映射 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, 其中 $a_n = f(n)$.

我们研究数列, 主要是研究数列的项, 即随着 n 的增大, 看其变化趋势。例如, 考查下列数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \quad (2.1)$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \dots \quad (2.2)$$

$$1, 0, 1, 0, \dots, \frac{1 - (-1)^n}{2}, \dots \quad (2.3)$$

$$1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}, \dots \quad (2.4)$$

数列(2.1)和(2.2)虽然变化的方式很不相同, 随着 n 的增大, 前者从正的方向逐渐变小, 而后者是正负相间地跳动, 但两数列随着 n 的无限增加, 都与常数 0 无限接近。数列(2.3)是 1 与 0 的简单重复, 不会无限接近于任何常数。数列(2.4)随着 n 的增大而越来越大, 因而不会趋近于任何常数。在上述四个数列的分析中, 我们使用了“ n 无限增加”及“与常数无限接近”这些描述性语言, 这只是可以理解却含糊不清的语言。为了在数学上精确刻画, 给出下面的定义。

【定义 2.1】 设 $\{a_n\}$ 为一数列。 a 为一个常数, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \epsilon \quad (2.5)$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛或收敛于 a , 并称 a 为 $\{a_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

不收敛的数列称为发散数列。

数列(2.1)和(2.2)都是收敛数列, 其极限都是 0; 数列(2.3)和(2.4)都是发散数列。

式(2.5)等价于

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad (2.6)$$

在数轴上,这意味着,对于任意的邻域 $\dot{U}(a, \epsilon)$,只可能有有限项(在前 N 项之中)在此邻域之外(图 2.1)。

定义 2.1 用 ϵ 和 N 分别对“无限接近”和“无限增大”的含义给予精确地刻画。习惯上,我们称“ $\epsilon - N$ ”语言。

在应用中,还常常遇到证明数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a 的问题。用“ $\epsilon - N$ ”语言,便应该是:

存在 $\epsilon_0 > 0$, 对于任意大的 $N \in \mathbf{N}$, 总有 $n_N \in \mathbf{N}$, $n_N > N$, 且

$$|a_{n_N} - a| \geq \epsilon_0 \quad (2.7)$$

通过 1.4 节子数列概念的学习,读者会对上述“ $\epsilon - N$ ”语言描述不收敛于 a 有进一步的理解。

为了书写简便,引进两个符号。 \forall 表示“任意”、“全体”或“每一个”; \exists 表示“存在”、“有”。

【例 2.1】 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ 。

【证】 对于 $\forall \epsilon > 0$, 欲使

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

成立,只须 $n > \frac{1}{\epsilon}$ 。取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 这里 $[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数。当 $n > N$ 时,便有

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

由定义 2.1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ 。

【例 2.2】 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$ ($a > 0$)。

【证】 对于 $\forall \epsilon > 0$, 欲使

$$\left| \frac{1}{n^a} - 0 \right| = \frac{1}{n^a} < \epsilon \quad \text{或} \quad n^a > \frac{1}{\epsilon}$$

成立,只须 $n > \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{a}}$ 。取 $N = \left[\left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{a}} \right]$ 。当 $n > N$ 时,有

$$\left| \frac{1}{n^a} - 0 \right| < \epsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0 \quad (a > 0)$$

【例 2.3】 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ 。

【证】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 对于 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

而

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \leq \\ &\quad \left| \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n} \right| + \left| \frac{(a_{N_1+1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| < \end{aligned}$$

$$\left| \frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n} \right| + \frac{n-N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq I + \frac{\varepsilon}{2}$$

其中

$$I = \left| \frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n} \right|$$

欲使 $I < \frac{\varepsilon}{2}$, 只需 $n > \left\lceil \frac{2\{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\}}{\varepsilon} \right\rceil$ 。令

$$N_2 = \left\lceil \left\lceil \frac{2\{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\}}{\varepsilon} \right\rceil \right\rceil$$

取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 这里 $\max \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示括号里 n 个实数的最大一个。当 $n > N$ 时, 有 $I < \frac{\varepsilon}{2}$ 。从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

【例 2.4】 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 。

我们要证的是只要使 n 充分大, 便可使 $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1$ 任意小。现在令 $h_n = \sqrt[n]{n} - 1$ 。于是 $\frac{1}{n} = 1 + h_n$, 从而

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2!}h_n^2 + \cdots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2!}h_n^2$$

注意 $n > 2$ 时, $n-1 > \frac{n}{2}$ 。所以便有

$$n > \frac{n^2}{4}h_n^2$$

亦即

$$h_n < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

这里已经得出了根据 ε 选取 N 的办法。

【证】 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \max \{2, \lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \rceil\}$, 则当 $n > N$ 时, $n > 2$ 且 $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$ 。于是

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = h_n < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

习 题 1.2

1. 以下几种叙述与极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的定义是否等价, 并说明理由:

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $|a_n - a| \leq \varepsilon$ 。

(2) $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq n_k$ 时, 有 $|a_n - a| \leq \frac{1}{k}$ 。

(3) 有无限多个 $\varepsilon > 0$, 对每个 $\varepsilon, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 有 $|a_n - a| \leq \varepsilon$ 。

(4) $\forall \varepsilon > 0$, 有无限多个 a_n , 有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 。

(5) $\forall k \in \mathbb{N}$, 只有有限多个 a_n 位于区间 $(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$ 之外。

(6) $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < b\varepsilon$, 其中 b 是一固定的正数。

2. 证明下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0 \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{2n \cdot (2n+2)} \right] = \frac{1}{4}$$

$$3. \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0.$$

$$4. \text{ 证明若 } |q| < 1, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

$$5. \text{ 证明若 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|, \text{ 反之是否成立, 举例说明.}$$

$$6. \text{ 设数列 } \{a_n\} \text{ 有界, 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$$

$$7. \text{ 设 } 0 < a < 1, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} n a^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a^n = 0.$$

1.3 收敛数列的性质和运算

关于收敛数列的性质, 我们总结为下面的三个定理和一个推论。

【定理 3.1】 (惟一性) 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它的极限是惟一的。

【证】 设有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, 则对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在自然数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

同样, 存在自然数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

取 $N = \max \{N_1, N_2\}$. 当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} |a - b| &\leq |a - a_n| + |a_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

由于 ϵ 的任意性, 必有 $a = b$. 从而数列 $\{a_n\}$ 的极限惟一。

【定理 3.2】 (有界性) 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则数列有界。

【证】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 对于 $\epsilon = 1$, 存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \epsilon = 1$$

从而, 当 $n > N$ 时

$$|a_n| < 1 + |a|$$

取 $M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$, 则

$$|a_n| \leq M \quad n = 1, 2, \dots$$

即数列 $\{a_n\}$ 是有界的。

从定理 3.2 知, 若数列 $\{a_n\}$ 无界, 则该数列必发散。

定理 3.2 的逆命题不成立, 即数列 $\{a_n\}$ 有界, 未必一定收敛。例如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但发散。

【定理 3.3】 (保序性) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 。

(1) 若 $a > b$, 则存在 N , 使当 $n > N$ 时, 有 $a_n > b_n$ 。

(2) 若存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $a_n \geq b_n$, 则 $a \geq b$ 。

【证】 先证(1)。取 $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, 则存在 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \frac{a-b}{2}$, 从而 $a_n > a -$

$\frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$; 同样, 存在 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n - b| < \frac{a-b}{2}$, 从而 $b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$; 取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时

$$a_n > \frac{a+b}{2} > b_n$$

再用反证法证(2)。如果 $a < b$, 则由(1), $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < b_n$, 这与已知矛盾。

注意 在定理 3.3(2)中, 即使 $a_n > b_n$, 也未必有 $a > b$ 。例如数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 和 $\{\frac{1}{n^2}\}$ 。当 $n > 1$ 时, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$, 但两个数列的极限都是 0。

【推论】 (保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则存在 N , 当 $n > N$ 时, a_n 与 a 同号。

【证】 在定理 3.3(1)中, 取 $b=0$, 即得。

关于收敛数列的运算, 我们有下面的定理。

【定理 3.4】 如果数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都收敛, 则它们的和、差、积、商(分母的极限不为 0)的数列也收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (3.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (3.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (\text{这里 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0) \quad (3.3)$$

【证】 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad (3.4)$$

先证式(3.1)。由式(3.4)知, $\forall \epsilon > 0, \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \epsilon$; $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n - b| < \epsilon$ 。取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

即式(3.1)成立。

再证(3.2)。由收敛数列的有界性, 存在常数 $M > 0$, 使

$$|a_n| \leq M \quad n = 1, 2, \dots$$

同理取 $N = \max \{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = \\ &|a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b| \leq \\ &M\epsilon + |b|\epsilon = (M + |b|)\epsilon \end{aligned}$$

即式(3.2)成立。

最后证(3.3)。由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, 对于 $\frac{|b|}{2} > 0$, 存在 N_3 , 当 $n > N_3$ 时, 有

$$|b| - |b_n| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

从而

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}$$

于是

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| < \frac{2}{|b|} \quad (3.5)$$

取 $N = \max \{N_1, N_2, N_3\}$ 。当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{1}{|b_n b|} |a_n b - a b_n| \leq \\
&= \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} [|a_n b - a b| + |a b - a b_n|] = \\
&= \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} [|b| |a_n - a| + |a| |b - b_n|] < \\
&= \frac{2}{b^2} (|b| + |a|) \varepsilon
\end{aligned}$$

在上式推导中,我们用了式(3.5)。

【推论】 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 对于任意常数 c

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (3.6)$$

【证】 只须取 $b_n = c, n = 1, 2, \dots$, 由式(3.2)即得式(3.6)。

【例 3.1】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n + 1}{2n^3 - 5}$ 。

【解】 将分式

$$\frac{3n^3 + n + 1}{2n^3 - 5}$$

的分子、分母同除以 n^3 , 再根据定理 3.4, 有

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n + 1}{2n^3 - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{5}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{5}{n^3})} = \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3}} = \frac{3 + 0 + 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

【例 3.2】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$ 。

【解】 由于 $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})$, 根据定理 3.5, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$$

习 题 1.3

1. 用极限定义证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ($a_n \geq 0$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ 。

2. 下列计算方法是否正确, 为什么?

$$\begin{aligned}
(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}) \dots (1 + \frac{1}{n}) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) \dots \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1
\end{aligned}$$

3. 求下列极限

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a|<1, |b|<1)$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+4n+3}{2n^2+n+1}$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2})$
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} [1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}]$
- (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n})$

1.4 数列收敛的判别定理

到目前为止,我们虽已掌握利用定义 1.3 判定一数列 $\{a_n\}$ 是否收敛的办法,但在许多情况下,还是远远不够的。本节将建立几个判别数列收敛的定理,同时继续 1.2 节的讨论,建立起一套系统的实数理论。

【定理 4.1】 (两边夹定理) 设有三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 如果存在自然 N , 当 $n>N$ 时, 有

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$ 。

【证】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$, 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - l| < \varepsilon$, 即 $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$; $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $|c_n - l| < \varepsilon$, 即 $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$ 。于是当 $n > \max \{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$$

由此得

$$|b_n - l| < \varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$$

【例 4.1】 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0)$ 。

【证】 注意到存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $k > a$ 。从而当 $n > k$ 时

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} \leq$$

$$\frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^{k+1}}{k!} \cdot \frac{1}{n}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{k+1}}{k!} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a^{k+1}}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

于是由定理 4.1, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

【例 4.2】 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$ 。

【证】 当 $a > 1$ 时, 存在 $N > a$ 。从而当 $n > N$ 时

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$$

由 1.2 节例 2.4, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 。再由两边夹定理知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 。

当 $0 < a < 1$ 时, 则 $\frac{1}{a} > 1$ 。因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$ 。注意 $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$$

当 $a=1$ 时, 显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 。

【定义 4.1】 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}) \quad n=1, 2, \dots$$

则称该数列是单调增加(减少); 单调增加和单调减少统称为单调。

【定理 4.2】 (单调有界定理) 单调有界数列必有极限。

【证】 为了确定起见, 不妨设数列 $\{a_n\}$ 单调增加有界, 类似地, 可证单调减少有界的情形。

根据公理, 将数列 $\{a_n\}$ 看做集合, 则上确界必存在, 记为

$$\mu = \sup \{a_n\}$$

这等价于: (1) $\forall n, a_n \leq \mu$, (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N$, 使得 $a_{n_0} > \mu - \varepsilon$ 。由于数列 $\{a_n\}$ 是单调增加的, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\mu - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \mu < \mu + \varepsilon$$

即

$$|a_n - \mu| < \varepsilon$$

也就是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \mu$ 。

【例 4.3】 证明数列 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 收敛。

【证】 首先证明 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 是单调增加数列。由二项式公式

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \\ &\quad \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同样} \quad a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) + \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{n-1}{n+1}) + \\ &\quad \frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{n}{n+1}) \end{aligned}$$

比较 a_n 和 a_{n+1} , 后者多最后一项, 且 a_{n+1} 的前 $n+1$ 项都不小于 a_n 相应的项, 所以 $a_n \leq a_{n+1}, n=1, 2, \dots$ 。

再证 $\{a_n\}$ 有界。在 a_n 的展开式中用 0 代替 $\frac{i}{n}$, 使得

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= 2 + \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

即 $\{a_n\}$ 是有界的, 由定理 4.2, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 存在。

以后, 我们总用 e 来代表 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 。无论是在理论上还是在实用上, e 这个数都有特殊的重要性。可以证明, e 是一个无理数, 一般都取它的五位小数的近似值 2.718 28。以 e 为底的

对数称为自然对数,记为 $\ln x$ 。

【例 4.4】 设 $a_1=4, a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{2}, n=2,3,\cdots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

【解】 注意到

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}+\frac{a_n}{2}-a_n=\frac{2-a_n^2}{2a_n}$$

$$\text{又} \quad \frac{a_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{2}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以

$$a_n \geq \sqrt{2}$$

从而 $a_{n+1}-a_n=(2-a_n^2)/2a_n \leq 0$ 。因而数列 $\{a_n\}$ 单调减少且下方有界,由单调有界定理,极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在,记为 a 。于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{2} \right)$$

得

$$a = \frac{1}{a} + \frac{a}{2}$$

有 $a^2=2, a=\sqrt{2}, a=-\sqrt{2}$ (舍去)。故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

由单调有界定理,很容易得到下述重要的定理。

【定理 4.3】 (闭区间套定理) 设有闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足

$$(1) [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

则存在惟一的点 l 属于所有的 $[a_n, b_n]$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$ 。

【证】 由(1)知,数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界 b_1 , 数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界 a_1 。因此,由定理 4.2, 它们的极限均存在。由(2)

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

设极限为 l 。由单调有界定理的证明知, l 是 $\{a_n\}$ 的上确界, 是 $\{b_n\}$ 的下确界。因此

$$a_n \leq l \leq b_n \quad n=1,2,\cdots$$

即 $l \in [a_n, b_n], n=1,2,\cdots$ 。

若还有 $h \in [a_n, b_n] (\forall n \in \mathbf{N})$, 即 $\forall n, a_n \leq h \leq b_n$ 。由两边夹定理 $l=h$ 。惟一性得证。

注意 定理中关于区间是闭的和区间长度数列的极限是零这两个条件缺一不可。就是说, 如果有一个不成立, 都不能保证定理的结论成立。请读者自行举例说明。

利用闭区间套定理, 可以证明著名的 Bolzano - Weierstrass 定理, 也称为致密性定理。为此, 我们需要引入子数列的概念。

设 $\{a_n\}$ 是一数列, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 是一自然数列, 则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为 $\{a_n\}$ 的子数列, 简称子列, 记作 $\{a_{n_k}\}$ 。例如, 分别由 $\{a_n\}$ 的偶数项和奇数项组成的数列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 都是 $\{a_n\}$ 的子列。

注意 k 表示 a_{n_k} 是子列的第 k 项, 而 n_k 表示 a_{n_k} 是原数列 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项, 因此, $n_k \geq k$; 并且若 $l > k$, 则 $n_l > n_k$ 。理解 k 与 n_k 的关系, 对于理解子列与原数列的关系至关重要, 在许多实际

问题中,也是很有益的。作为例子,我们证明:数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是:它的每一个子列均收敛,且收敛于同一极限。

事实上,若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,设 $\{a_{n_k}\}$ 是其任一子列。对于 $\forall \epsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$ 时,有

$$|a_n - a| < \epsilon$$

由于当 $k > N$ 时,有 $n_k \geq k > N$,所以

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon$$

即 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ 。

反过来,若每一子列均收敛, $\{a_n\}$ 可看做其本身的一个子列,故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

根据这一命题,若数列 $\{a_n\}$ 有一个子列不收敛,则该数列发散;若有两个子列不收敛于同一数,则该数列也发散。例如 $\{(-1)^n\}$ 便是发散数列。

【定理 4.4】 (Bolzano-Weierstrass 定理) 有界数列必有收敛子列。

【证】 若数列 $\{a_n\}$ 只是有限个数的重复,则其中必有一数重复无限次,设此数为 x_0 ,则数列 $\{a_n\}$ 中取 x_0 的项是一子列,此子列收敛于 x_0 。

以下设 $\{a_n\}$ 中有无限多个互不相同的项。

由于数列 $\{a_n\}$ 有界,取 $x_1 < y_1$,使得 $\{a_n\} \subset [x_1, y_1]$,并任取 a_{n_1} 。二等分 $[x_1, y_1]$ 得两个闭子区间,则必有一个,记为 $[x_2, y_2]$,含有 $\{a_n\}$ 中无限个互不相同的项(如果两子区间都是如此,则任选一个)。任取 $a_{n_2} \in [x_2, y_2] \cap \{a_n\}$,使 $n_2 > n_1$ 。如此无限地等分下去,得一闭区间列 $\{[x_k, y_k]\}$ 及子列 $\{a_{n_k}\}$, $a_{n_k} \in [x_k, y_k] \cap \{a_n\}$,由于

$$(1) [x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset \cdots \supset [x_k, y_k] \supset \cdots$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_1 - x_1}{2^{k-1}} = 0$$

满足闭区间套定理的条件,存在 l 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = l$ 。由于

$$x_k \leq a_{n_k} \leq y_k \quad n = 1, 2, \cdots$$

由两边夹定理知, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$ 。

我们知道,收敛数列必有界,而有界数列却未必收敛。Bolzano-Weierstrass 定理告诉我们,有界数列必有收敛子列。在几何上,收敛实质上是向极限点无限密集。对于有界数列而言,可能不会整个数列向某点密集,但一定存在向其密集的子点列。显然,密集是指点与点之间的距离无限变小。收敛数列当 n 充分大以后,点与点之间的距离可以任意小。反过来也是对的,这便是下面著名的准则。

【定理 4.5】 柯西(Cauchy 1787~1857 法国数学家)收敛准则 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,当 $m, n > N$ 时,有

$$|a_m - a_n| < \epsilon \quad (4.1)$$

【证】 必要性 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。则 $\forall \epsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$ 时,有 $|a_n - a| < \epsilon/2$ 。于是当 $n, m > N$ 时,就有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

充分性 首先证 $\{a_n\}$ 是有界的。取 $\epsilon = 1$,由假设存在 N ,使 $n, m > N$ 时, $|a_n - a_m| < 1$ 。特别是 $n > N$ 时, $|a_n - a_{N+1}| < 1$ 。从而

$$|a_n| < |a_{N+1}| + 1 \quad (n > N)$$

令 $M = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1 \}$, 则对一切 n

$$|a_n| \leq M$$

可见 $\{a_n\}$ 有界。

由 Bolzano-Weierstrass 定理 (定理 4.4), $\{a_n\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$ 。设 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ 。以下证明数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 。

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 由假设存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n, m > N_1$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$; 又 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$, 故 $\exists K \in \mathbb{N}$, 当 $k > K$ 时, 有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ 。取 $N = \max \{N_1, K\}$, 当 $n > N$ 时, 有 $n_{N+1} \geq N+1 > N$; 因而

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{N+1}}| + |a_{n_{N+1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

今后, 我们把满足定理 4.5 条件的数列称为 Cauchy 数列或基本数列。于是 Cauchy 收敛准则也可以叙述为: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 该数列为 Cauchy 数列。

如果在式 (4.1) 中, 令 $m = n + p$, 其中 $p \in \mathbb{N}$, 则 Cauchy 收敛准则又可表述为: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 及 $\forall p \in \mathbb{N}$, 有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \quad (4.2)$$

【例 4.5】 对于 $\forall a \in \mathbb{R}$, 记

$$a_n = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} \quad n = 1, 2, \dots$$

求证数列 $\{a_n\}$ 有极限。

【证】 $\forall n, p \in \mathbb{N}$, 当 $n+2 > 2|a|$ 时

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{a^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \frac{a^{n+p}}{(n+p)!} \right| \leq \\ &= \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \left[1 + \frac{|a|}{n+2} + \dots + \frac{|a|^{p-1}}{(n+2)(n+3)\dots(n+p)} \right] < \\ &= \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \left[1 + \frac{|a|}{n+2} + \dots + \frac{|a|^{p-1}}{(n+2)^{p-1}} \right] = \\ &= \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1 - \left(\frac{|a|}{n+2}\right)^p}{1 - \frac{|a|}{n+2}} < \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|a|}{n+2}} \leq \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

由例 4.1 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

因而, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon$$

于是就有

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon$$

【例 4.6】 若 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots$

证明数列 $\{a_n\}$ 是发散的。

【证】 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 则满足 Cauchy 收敛准则的 N 不存在。事实上, 对任意的 N , 取 $n = N + 1, m = 2(N + 1)$, 则 $m > n > N$, 而

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m} > \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m} = \frac{N+1}{2(N+1)} = \frac{1}{2}$$

即 $|a_m - a_n|$ 不永远小于 ε_0 。

定理 4.2~4.5 是关于实数系本身的定理。公理也是这样一个定理。回忆我们的证明顺序: 公理 \Rightarrow 单调有界定理 (4.2) \Rightarrow 闭区间套定理 (4.3) \Rightarrow 致密性定理 (4.4) \Rightarrow Cauchy 收敛准则的充分性定理 (4.5)。事实上, 公理是与这些定理等价的, 这些定理的任何一个成立都蕴含着公理的成立。这便是下面的定理。

【定理 4.6】 定理 4.2~4.5 中任何一个成立, 则公理必成立。

【证】 设 A 是一有上界数集, 我们要证 $\sup A$ 必存在。

任取 $a_1 \in A$ 及 b_1 是 A 的一个上界。二等分闭区间 $[a_1, b_1]$, 则必存在闭子区间, 记为 $[a_2, b_2]$ 满足: b_2 是 A 的一个上界且 $[a_2, b_2] \cap A \neq \emptyset$ (若两个闭子区间都满足此性质, 任取一个)。如此无限地等分下去, 得一闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, $\forall n, b_n$ 是 A 的一个上界且 $[a_n, b_n] \cap A \neq \emptyset$ 。如此所构造的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足定理 4.2~4.5 的每一个定理的条件, 因而极限存在 (用致密性定理时, 需结合习题 1.7), 设 $M = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。以下证明 $M = \sup A$ 。

$\forall x \in A$, 由于 $b_n \geq x$, 由保序性 (定理 3.3(2)), $M \geq x$, 即 M 是 A 的一个上界。

$\forall \varepsilon > 0$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M \end{aligned}$$

取充分大的 n_0 , 使得

$$M - \varepsilon < a_{n_0} < b_{n_0}$$

由于 $[a_{n_0}, b_{n_0}] \cap A \neq \emptyset$, 取 $x_0 \in [a_{n_0}, b_{n_0}] \cap A$, 则 $x_0 > M - \varepsilon$ 。因而 $M = \sup A$ 。

公理及定理 4.2~4.5 所反映的一个共同的事实, 称为实数系的连续性或完备性。在几何上, 反映出数轴上的点是均匀连续分布, 无‘空隙’。这是极限存在理论的基础。而有理数系 \mathbf{Q} 便不具有这一性质。例如, 集合 $A = \{x: x \in \mathbf{Q}, x^2 < 2\}$ 便在有理数中无上确界。事实上, 由于有理数和无理数都在 \mathbf{R} 中稠密, 有理数不能填满任何一点的任何一个 δ -邻域。有理数在数轴上稠密地分布, 却留下无限多的‘空隙’。这些‘空隙’是由无理点填满的, 使得实数轴最终成为无‘空隙’的数直线。

在 1.1 节, 我们指出, 实数系既有序 (大小), 又定义了距离 (两点间的距离)。公理及单调有界定理是利用实数系的序来表述的。有许多集合, 只有距离而没有序, 例如平面点集 \mathbf{R}^2 、空间点集 \mathbf{R}^3 , 深入地学习, 我们还会接触到可定义距离的抽象集合。在此情况下, 为了表达集合的类似 \mathbf{R} 的完备性, 最方便的方式是用 Cauchy 收敛准则的充分性。

习 题 1.4

1. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}) = 0$ 。

2. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 其中 $a_i \geq 0, 1 \leq i \leq k$ 。

3. 设 $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ 。

4. 设 $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \cdots, a_n = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}_{n \text{ 个根号}}}, \cdots$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求极限。

5. 求下列数列的极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \sin^2 n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n})$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1})^n$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n+1}{n+2})^{3n}$

6. 设 $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0$, 且

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$$

证明 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都收敛, 并且极限相同。

7. 设 $\{a_n\}$ 为一单调数列。若它有一个子列收敛, 证明 $\{a_n\}$ 也收敛。

8. 利用 Cauchy 收敛准则证明下列数列的收敛性。

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$, 其中 $|q| < 1, |a_k| \leq M, k = 0, 1, 2, \cdots$

(2) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

(3) $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

(4) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ (提示: 利用不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$)

9. 证明: 若 A 是非空有上界的数集, $\mu = \sup A$, 则存在 A 中的数列 $\{a_n\}$ 收敛于 μ 。若 $\mu \in A$, 则可选数列 $\{a_n\}$ 为单调增加。

10. 证明: 数列 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的极限不存在。

11. 指出下面推理的错误:

$\forall \epsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}$, 因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调下降趋于 0, 所以 $\exists n_0$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\epsilon}{p}$ 。于是, 对

于 10 中的数列

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\sqrt{n+p}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{p}{\sqrt{n}} < p \cdot \frac{\epsilon}{p} = \epsilon$$

由 Cauchy 收敛准则, 数列 $\{x_n\}$ 收敛。

12. 设 $x_n \leq a \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ 。试证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ 。

1.5 函数的极限

本节将讨论比数列极限更重要的极限——函数极限。数列可以看成自然数集 \mathbf{N} 上的函数, 自变量 n 只有一种变化状态, 即 $n \rightarrow \infty$ 。而一般函数的情况要复杂的多, 自变量 x 的变化状态有两大类: x 趋于无穷大和 x 趋向于某点。每一大类又分别有三种不同的情况, 我们首先考虑第一大类的情况。

1.5.1 x 趋于无穷大时函数的极限

x 趋于无穷大的方式有三种: (1) $x \rightarrow +\infty$ (正无穷大); (2) $x \rightarrow -\infty$ (负无穷大); (3) $x \rightarrow \infty$ (无穷大)。我们重点讨论情况(1)。

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有定义, 当 x 无限增大时, 函数 $f(x)$ 是否与某一常数无限接近。为了精确地描述‘无限增大’和‘无限接近’, 与数列极限的定义非常类似, 我们给出下面的定义。

【定义 5.1】 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, b 是常数。若 $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0$, 当 $x > A$ 时, 有

$$|f(x) - b| < \epsilon \quad (5.1)$$

称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时收敛, 或收敛于 b , 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow +\infty)$$

上述定义的几何意义是: $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0$, 使得函数 $y=f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上的图象完全位于以二直线 $y=b \pm \epsilon$ 为边界、宽为 2ϵ 的带形区域(图 5.1)。

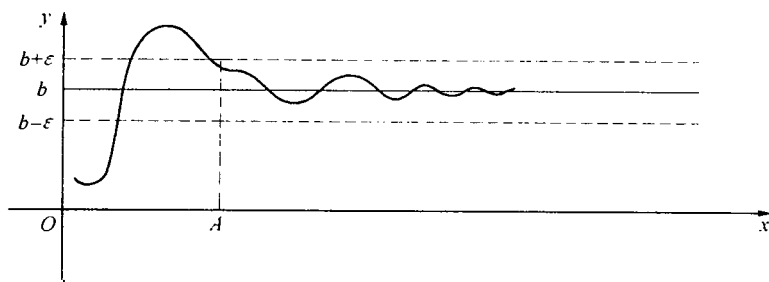


图 5.1

由于 ϵ 的任意性, 曲线 $y=f(x)$ 以直线 $y=b$ 为水平渐近线。

【例 5.1】 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

【证】 要使

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} < \epsilon$$

只须 $x > \frac{1}{\epsilon}$ 。取 $A = \frac{1}{\epsilon}$ 。当 $x > A$ 时, 便有 $\epsilon > \frac{1}{x}$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。

类似于定义 5.1, 关于 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow \infty$, 我们分别有下述两定义。

【定义 5.2】 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上有定义, b 是常数。若 $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0$, 当 $x < -A$ 时, 有

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

称 $y=f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时收敛,或收敛于 b ,记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=b \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow -\infty)$$

【定义 5.3】 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ 上定义, b 是一常数。若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$, 当 $|x| > A$ 时,有

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

称 $y=f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时收敛,或收敛于 b ,记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=b \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow \infty)$$

定义 5.1~5.3 存在如下关系。

【定理 5.1】 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 同时存在且相等。

【证】 必要性显然。

充分性 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_1 > 0$, 当 $x > A_1$ 时,有

$$|f(x)-b|<\varepsilon \quad (5.2)$$

同理, $\exists A_2 > 0$, 当 $x < -A_2$ 时,有

$$|f(x)-b|<\varepsilon \quad (5.3)$$

取 $A = \max \{A_1, A_2\}$, 当 $|x| > A$, 根据式(5.2)和式(5.3),有

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=b$$

1.5.2 x 趋于点 a 时函数 $f(x)$ 的极限

x 趋近于点 x_0 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势问题有诸多实际背景。在学习下一章的时候,读者便会清楚下述例子是引出微分学的典型实例。

【例 5.2】 由物理实验知,自由落体运动规律是 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 求 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 。

【解】 从时刻 t_0 到 t , 落体的平均速度

$$\bar{v}(t) = \frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0} = \frac{1}{2}g(t+t_0) \quad t \neq t_0 \quad (5.4)$$

$\bar{v}(t)$ 是时间 t 的函数, $t=t_0$ 时无定义。平均速度表明这段时间间隔内运动快慢的平均值。显然, 当 t 越接近 t_0 时, 这个平均速度就越接近 t_0 时刻的真实速度。因此, 我们让 t 无限接近 t_0 , 看平均速度 $\bar{v}(t)$ 的变化趋势

$$\bar{v}(t) \rightarrow gt \quad \text{当 } t \rightarrow t_0 \text{ 时}$$

由此得到 $v(t_0) = gt$ 。物理上就是这样定义瞬时速度的。

在上述实例的分析中, 我们又一次使用了当 t 无限接近 t_0 、函数 $\bar{v}(t)$ 无限趋近 $v(t_0)$ 等可以理解但模糊不清的语言, 为了精确地描述其真实含义, 我们用所谓“ $\varepsilon-\delta$ ”语言给出下述的定义。

【定义 5.4】 设函数 $y=f(x)$ 在去心邻域 $\dot{U}(a)$ 内有定义, b 是常数。若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x)-b|<\varepsilon \quad (5.5)$$

则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时收敛, 或收敛于极限 b , 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow a)$$

上述定义的几何意义是: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得函数 $y = f(x)$ 在 $\dot{U}(a, \delta)$ 的图象完全位于以二直线 $y = b \pm \epsilon$ 为边界、宽为 2ϵ 的带形区域(图 5.2)。

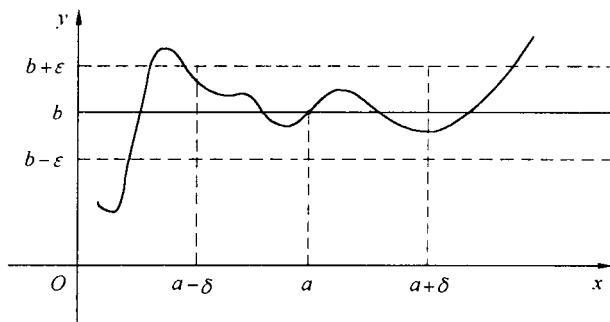


图 5.2

【例 5.3】 试证 $\lim_{n \rightarrow a} x^n = a^n \quad (m \in N)$ 。

【证】 $\forall \epsilon > 0$, 欲使 $|x - a| < 1$ 和

$$\begin{aligned} |x^m - a^m| &= |(x-a)(x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \cdots + a^{m-1})| \leq \\ &|x-a|(|x|^{m-1} + |x|^{m-2} \cdot |a| + \cdots + |a|^{m-1}) < \\ &|x-a|((|a|+1)^{m-1} + |a|(|a|+1)^{m-2} + \cdots + |a|^{m-1}) < \\ &m(|a|+1)^{m-1}|x-a| < \epsilon \end{aligned}$$

只需 $|x-a| < \frac{\epsilon}{m(|a|+1)^{m-1}}$, 故取 $\delta = \min \{1, \frac{\epsilon}{m(|a|+1)^{m-1}}\}$, 其中 \min 表示大括号中的数最小者。当 $|x-a| < \delta$ 时, 便有

$$|x^m - a^m| < \epsilon$$

即 $\lim_{x \rightarrow a} x^m = a^m$ 。

在上述定义 5.5 中, 如果我们仅限于讨论自变量 x 在 a 的一侧的情况, 便分别有函数在点 a 的左、右极限的定义。

【定义 5.5】 函数 $y = f(x)$ 在点 a 的左侧有定义, b 是常数。若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in (a - \delta, a)$ 时, 有

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

则称 $f(x)$ 存在左极限 b , 记作

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \quad \text{或} \quad f(a^-) = b$$

【定义 5.6】 函数 $y = f(x)$ 在点 a 的右侧有定义, b 是常数。若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in (a, a + \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

则称 $f(x)$ 存在右极限 b , 记作

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \quad \text{或} \quad f(a^+) = b$$

关于左、右极限与极限的关系,有如下定理。

【定理 5.2】 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在的充要条件是 $f(a^+)$ 和 $f(a^-)$ 均存在且相等。

【证】 必要性显然。

充分性 设

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $x \in (a - \delta, a)$ 时, 有

$$|f(x) - b| < \epsilon \quad (5.6)$$

同理, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in (a, a + \delta_2)$ 时, 有

$$|f(x) - b| < \epsilon \quad (5.7)$$

取 $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 由式(5.6)和式(5.7), 有

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

从定理 5.2 可知, 若 $f(a^-)$ 和 $f(a^+)$ 中有一个不存在, 或两都存在但不相等, 则当 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 的极限不存在。例如, 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时极限不存在, 这是因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, 左、右极限都存在但不相等。

同数列的极限一样, 在许多实际问题中, 我们需要描述 $f(x)$ 不以 b 为极限。以 $x \rightarrow a$ 为例, ‘ $\epsilon - \delta$ ’ 语言的描述应该是:

$\exists \epsilon_0, \forall \delta > 0$, 总有 $x_\delta \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 使得

$$|f(x_\delta) - b| \geq \epsilon_0 \quad (5.8)$$

在下节我们将用式(5.8)建立数列极限与函数极限的关系——Heine 定理。

习 题 1.5

1. 用极限定义证明

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x} = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

2. 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 不存在。

3. 用左、右极限证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ ($x_0 > 0$)。

1.6 函数极限的性质和收敛准则

上一节给出了六种函数极限

$$\begin{array}{ccc}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) & \lim_{x \rightarrow a} f(x)\end{array}$$

这六种函数极限都具有相同的性质和收敛准则。本节仅就 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 的情形进行讨论。读者不难将相应的定理和证明移到其它五种情形中去。

1.6.1 函数极限的性质

函数极限的性质与数列极限的性质极为相似,而且证明过程也相当一致,为了避免重复和节省篇幅,对于有些定理将只作叙述而不作证明。

【定理 6.1】 (惟一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在,则必惟一。

【定理 6.2】 (局部有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在,则函数 $f(x)$ 在 a 的某一去心邻域有界,

即存在 $M > 0$ 和 $\delta_0 > 0$,当 $x \in \dot{U}(a, \delta_0)$ 时,有

$$|f(x)| \leq M$$

【证】 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,则对于 $\varepsilon_0 = 1, \exists \delta_0 > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时,有

$$|f(x) - b| < 1$$

从而

$$|f(x)| \leq |f(x) - b| + |b| < 1 + |b|$$

令 $M = 1 + |b|$,当 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时,有

$$|f(x)| < M$$

【定理 6.3】 (保序性) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ 。

(1) 若 $b > c$,则 $\exists \delta_0 > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时,有

$$f(x) > g(x)$$

(2) 若 $\exists \delta_0 > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时,有 $f(x) \geq g(x)$,则 $b \geq c$ 。

【推论】 (保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,且 $b \neq 0$,则 $\exists \delta_0 > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时, $f(x)$ 与 b 同号。

【定理 6.4】 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 都存在,则

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)), \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$$

和 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ($\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$)也都存在,且

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

【推论】 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在,则对于任意的常数 c ,有

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

【定理 6.5】 (复合函数极限) 设 $y=f(g(x))$ 是由函数 $y=f(x)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成, 复合函数 $f(g(x))$ 定义在 a 的某一去心邻域 $\dot{U}(a)$ 。若 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=b, \lim_{u \rightarrow b} f(u)=B$, 并且 $\exists \delta_0 > 0, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta_0)$ 都有 $g(x) \neq b$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B \quad (6.1)$$

【证】 由于 $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = B, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$, 当 $0 < |u - b| < \eta$ 时, 有

$$|f(u) - B| < \epsilon$$

又由于 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, 对上述的 $\eta > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|g(x) - b| < \eta$$

所以, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(g(x)) - B| = |f(u) - B| < \epsilon$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$$

式(6.1)通常写成

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow b} f(u) \quad (6.2)$$

并把(6.2)说成是在极限式 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 中作变元替换 $u = g(x)$ 。这在使用上很方便, 但必须检查定理 6.5 的条件是否得到满足。

【例 6.1】 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 3})$ 。

【解】 由于 $(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 3}) = \frac{4x - 3}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + 3}} = \frac{4 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}}$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - \frac{3}{x}) = 4, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x}} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x}} = 1$

由极限的四则运算, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 3}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - \frac{3}{x})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \frac{4}{1 + 1} = 2 \end{aligned}$$

【例 6.2】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8})$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}) = \lim_{x \rightarrow 2} (\frac{x^2 + 2x - 8}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}) =$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{2}$

【例 6.3】 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1, \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \quad (a > 0)$ 。

【证】先证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ 。对于 $\forall \epsilon > 0$, 为使 $|e^x - 1| = e^x - 1 < \epsilon$, 只要 $x < \ln(1 + \epsilon)$ 。取 $\delta = \ln(1 + \epsilon)$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, 有 $|e^x - 1| < \epsilon$ 。因此, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ 。

再证 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$ 。由于 $x \rightarrow 0^-$ 等价于 $-x \rightarrow 0^+$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = \lim_{-x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-x}} = 1$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ 。

用类似的方法可以证明 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ 。又因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} \cdot a^{x-x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0}$$

令 $u = x - x_0$, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $u \rightarrow 0$, 由 (6.2) 知

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{u \rightarrow 0} a^u = a^{x_0}$$

1.6.2 函数极限的判别准则

前面已经给出了数列和函数的极限定义, 形式上看二者之间似乎没有什么联系, 事实上, 这二者是可以互相转化的。

【定理 6.6】(Heine 定理) 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在且等于 b 的充要条件是对于每一 $\dot{U}(a)$ 中的数列 $\{a_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ 。

【证】必要性 已知 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, 则对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - b| < \epsilon \quad (6.3)$$

设 $\{a_n\}$ 是 $\dot{U}(a)$ 中的数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则对上述的 $\delta > 0, \exists n_0$, 当 $n > n_0$ 时, 有 $0 < |a_n - a| < \delta$, 从而由 (6.3) 得

$$|f(a_n) - b| < \epsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$$

充分性 反证法 设当 $x \rightarrow a$ 时函数 $f(x)$ 不以 b 为极限。由 1.5 节的最后一段知: $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0$, 有 $x_\delta \in (a - \delta, a + \delta)$, 满足

$$|f(x_\delta) - b| \geq \epsilon_0$$

于是:

取 $\delta_1 = 1$ 时, $\exists a_1, 0 < |a_1 - a| < 1$, 有 $|f(a_1) - b| \geq \epsilon_0$;

取 $\delta_2 = \frac{1}{2}$ 时, $\exists a_2, 0 < |a_2 - a| < \frac{1}{2}$, 有 $|f(a_2) - b| \geq \epsilon_0$;

\vdots

取 $\delta_n = \frac{1}{n}$ 时, $\exists a_n, 0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$, 有 $|f(a_n) - b| \geq \epsilon_0$ 。

于是得到一个数列 $\{a_n\}, 0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$, 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。但

$$|f(a_n) - b| \geq \epsilon_0 \quad n = 1, 2, \dots$$

因此数列 $\{f(a_n)\}$ 不以 b 为极限, 与假设相矛盾。

从 Heine 定理知, 若存在 $\dot{U}(a)$ 中的数列 $\{a_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不

存在。又若存在 $\dot{U}(a)$ 中的两数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = c, \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = d$, 但 $c \neq d$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 也不存在。

【例 6.4】 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。

【证】 取 $a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, b_n = \frac{1}{2n\pi}, n = 1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 。但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。

【定理 6.7】 (两边夹定理) 如果函数 $f(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 均在 $\dot{U}(a)$ 内有定义, 且当 $x \in \dot{U}(a)$ 时, 有 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 另外, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ 。

【证】 由 Heine 定理, 只须证明对于任一 $\dot{U}(a)$ 中的数列 $\{a_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = b$ 成立。由假设

$$f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n), n = 1, 2, \dots$$

由 Heine 定理及 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = b$, 再由数列的两边夹定理知, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = b$ 。从而再由 Heine 定理知, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ 。

【定理 6.8】 (Cauchy 收敛准则) 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在的充分必要条件是: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon \quad (6.4)$$

【证】 必要性 不妨设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, 则对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - b| < \epsilon/2$$

从而当 $0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| <$$

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

式(6.4)成立。

充分性 假设式(6.4)成立, 我们要证明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。

取 $\dot{U}(a)$ 中数列 $\{a_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则对于定理中的 $\delta > 0$, 存在 n_0 , 当 $m, n > n_0$ 时, 有

$$0 < |a_m - a| < \delta, 0 < |a_n - a| < \delta$$

由式(6.4)知

$$|f(a_m) - f(a_n)| < \epsilon$$

由数列的 Cauchy 收敛准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ 。以下证明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 。取充分大的 k_0 , 使得

$$0 < |a_{k_0} - a| < \delta \quad (6.5)$$

及 $|f(a_{k_0}) - b| < \epsilon \quad (6.6)$

在式(6.4)中令 $x' = x, x'' = a_{k_0}$, 则

$$|f(x) - f(a_{k_0})| = |f(x') - f(x'')| < \epsilon \quad (6.7)$$

由式(6.6)和式(6.7)知, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - b| \leq |f(x) - f(a_{k_0})| + |f(a_{k_0}) - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 。

1.6.3 两个重要极限

下面介绍微积分中两个重要极限, 读者应当牢记并能熟练地运用它们。第一个极限是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (6.8)$$

在证明(6.8)之前, 先证明下面的例题。

【例 6.4】 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 。

【证】 先证明不等式

$$|\sin x| \leq |x| \quad (6.9)$$

此处角度是用弧度制。显然只须证 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形。考虑图 6.1 中所画的单位圆。弦长 $\overline{AB} = 2\sin x$, 弧长 $\widehat{AB} = 2x$ 。而 $\widehat{AB} > \overline{AB}$, 所以 $\sin x < x$ 。亦即式(6.9)成立。由两边夹定理知, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ 。因为 $|\cos x - 1| = 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$, 再由两边夹定理知, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 。

现在我们证明(6.8)。由于 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 只须考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形。考虑图 6.2 中的单位圆。

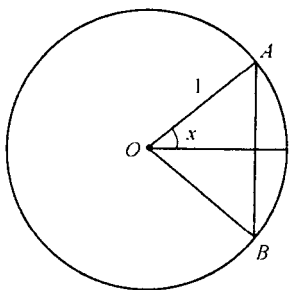


图 6.1

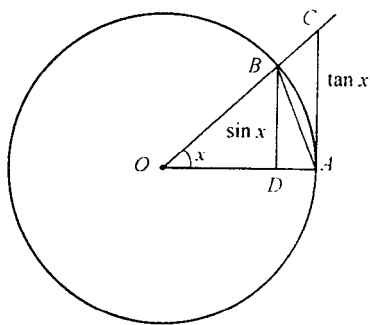


图 6.2

由图可见:

$\triangle AOB$ 面积 $<$ 扇形 AOB 面积 $<$ $\triangle AOC$ 面积。

因而有

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$$

或

$$\sin x < x < \tan x$$

因为 $\sin x > 0$, 在上式中同除以 $\sin x$, 得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{或} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

从而有

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

由例 6.4 及两边夹定理知, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

【例 6.5】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$ 。

$$\text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

下面介绍另一个重要极限。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (6.10)$$

先证 $x \rightarrow +\infty$ 的情形。当 $x > 1$ 时, $[x] \leq x < [x] + 1$ 。于是

$$1 + \frac{1}{1+[x]} < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{[x]}$$

$$\left(1 + \frac{1}{1+[x]}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

从而

$$\text{而} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1+[x]}\right)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{1+[x]}\right)^{[x]+1}}{1 + \frac{1}{1+[x]}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) = e$$

由两边夹定理, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

再证 $x \rightarrow -\infty$ 的情形, 令 $y = -x$, 则当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 有 $y \rightarrow +\infty$ 。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{y})^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y =$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{y-1})^{y-1} (1 + \frac{1}{y-1}) = e$$

于是(6.10)成立。

【例 6.6】 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+1}{2x+3})^x$ 。

$$\text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+1}{2x+3})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{-2}{2x+3})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{-2}{2x+3})^{-\frac{2x+3}{2}} \right]^{\frac{-2x}{2}} = e^{-1}$$

在例 6.6 的最后一个求极限的推导中, 我们使用了这样一个事实: 若 $x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B (B > 0)$, 则

$$[g(x)]^{f(x)} \rightarrow B^A \quad \text{当} \quad x \rightarrow a \quad \text{或} \quad x \rightarrow \infty \quad (6.11)$$

由于

$$[g(x)]^{f(x)} = e^{f(x) \ln g(x)} \quad (6.12)$$

利用复合函数极限定理 6.5 和习题 1.5, 3, $\lim_{x \rightarrow a} \ln g(x) = \ln B$ 。从而 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \ln g(x) = A \ln B$ 。

最后再由定理 6.5 及例 6.3 知

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x) \ln g(x)} = B^A$$

对于 $x \rightarrow \infty$ 时的情形, 可类似地证明。

【例 6.7】 求证 $\lim_{x \rightarrow a} x^\mu = a^\mu$ ($a > 0$)。

【证】 在式(6.11)中, 令 $f(x) = \mu, g(x) = x$ 。由于 μ 是正常数, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$, 由式(6.11)得

$$\lim_{x \rightarrow a} x^\mu = a^\mu$$

习 题 1.6

1. 计算下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

2. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{1}{x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} (1-\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} \right)^{-n}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

3. 称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调增加(减少), 若 $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)。若 $f(x)$ 在 (a, b) 单调增加, 且有界, 则极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在。

4. 写出极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 的 Heine 定理, 并给以证明。

5. 试问 $\lim_{x \rightarrow 3} (5-3x)^{1-x} = (-4)^{-2} = \frac{1}{16}$ 对吗? 为什么?

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求常数 a 。

7. 用两边夹定理证明

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right] = \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0)$$

1.7 无穷小和无穷大

在许多问题中, 仅仅知道函数是否有极限尚不够, 还要知道函数作为一种变量趋于极限的快慢。因为函数 $f(x)$ 以 b 为极限, 等价于函数 $f(x) - b$ 以 0 为极限。所以研究一般变量趋于极限的快慢, 总可以归结为讨论以 0 为极限的变量趋于 0 的快慢。

函数由于自变量的变化状态的不同,有六种极限过程;数列作为一种特殊的函数,也是一种极限过程,为简便起见,下面只讨论 $x \rightarrow a$ 的极限过程,其它情况与其类似。

1.7.1 无穷小

【定义 7.1】 当 $x \rightarrow a$ 时,以 0 为极限的函数 $\alpha(x)$ 称为当 $x \rightarrow a$ 时的无穷小量,简称为无穷小。

【例 7.1】 $(x-a)^2, \sin(x-a)$ 是 $x \rightarrow a$ 时的无穷小;

$\frac{1}{x}, \frac{1}{3x}, \frac{x^2+x+1}{x^3+2}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小。

应当注意,无穷小量是一个变量,不能把它与绝对值很小的常数混为一谈。任何非 0 常数,无论其绝对值如何小,都不是无穷小量。

【定理 7.1】 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 的充要条件是 $f(x) = b + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是一无穷小。

【证】 必要性 由假设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = 0$ 。记 $\alpha(x) = f(x) - b$ 。则 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, 即 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow a$ 时的无穷小, 且 $f(x) = b + \alpha(x)$ 。

充分性 由假设 $f(x) = b + \alpha(x)$, 而 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (b + \alpha(x)) = b$ 。

【定理 7.2】 (1) 两个无穷小之和还是无穷小;

(2) 若 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow a$ 时的无穷小, $\beta(x)$ 在某个 $\dot{U}(a)$ 中有界, 则 $\alpha\beta$ 仍是无穷小。

【证】 (1) 由极限的运算即得。现证(2)。设 $|\beta(x)| \leq M, \forall x \in \dot{U}(a)$, 其中 $M > 0$ 。由于 $\forall x \in \dot{U}(a)$, 有

$$0 \leq |\alpha(x)\beta(x)| \leq M|\alpha(x)|$$

而 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, 由两边夹定理知, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\beta(x) = 0$ 。

1.7.2 无穷大

【定义 7.2】 设函数 $f(x)$ 在 $\dot{U}(a)$ 内有定义, 如果对于 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x)| > M \quad (7.1)$$

则函数 $f(x)$ 为 $x \rightarrow a$ 时的无穷大量, 简称无穷大。有时也称当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限是无穷大, 记作

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow a)$$

将上述定义中的不等式 $|f(x)| > M$ 分别改为

$$f(x) > M \quad \text{与} \quad f(x) < -M$$

则分别称函数 $f(x) (x \rightarrow a)$ 是正无穷大与负无穷大, 并分别记为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a)$$

与 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow a)$

证明函数是无穷大, 其证法与证明函数存在极限相同。

【例 7.2】 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-1} = \infty$ 。

【证】 对于 $\forall M > 0$, 注意到

$$\left| \frac{x+2}{x^2-1} \right| = \left| \frac{x+2}{x+1} \right| \cdot \frac{1}{|x-1|}$$

及 $x \rightarrow 1$, 不妨设 $|x-1| < \frac{1}{2}$, 从而 $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ 。欲使

$$\left| \frac{x+2}{x^2-1} \right| = \left| \frac{x+2}{x+1} \right| \cdot \frac{1}{|x-1|} \geq \frac{2}{\frac{3}{2}+1} \cdot \frac{1}{|x-1|} = \frac{4}{5} \frac{1}{|x-1|} > M$$

成立, 只须 $|x-1| < 4/5M$ 。故取 $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5M} \right\}$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x+2}{x^2-1} \right| > M$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-1} = \infty$$

关于无穷大与无穷小的关系, 有下面命题。

【定理 7.3】 若 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大; 若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小。

【证】 $\forall M > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{M}$ 。由于 $f(x)$ 是无穷小, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M}$$

因而

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$$

即 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大。同理可证, 当 $f(x)$ 是无穷大时, $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小。

由无穷大的定义, 不难证明:

【定理 7.4】 (1) 两个无穷大的乘积是无穷大;

(2) 无穷大和一个局部有界量之和是无穷大。

1.7.3 无穷小(大)的比较

下面研究无穷小量趋近 0 的速度问题。函数 $x, x^2, \sin x$ 和 $\sin^2 x$ 均为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小, 然而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x} = \infty & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 0 \end{aligned}$$

从这些无穷小的比较反映出它们趋近于 0 的速度是很不相同的。这便引出了无穷小量阶的概念。

【定义 7.3】 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷小, 且 $\beta(x) \neq 0$ 。

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k, k \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小, 记作 $\alpha = O(\beta)$; 特别, 当 $k=1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 称 α 比 β 高阶无穷小, 记作 $\alpha = o(\beta)$ 。

(3) 以 $x(x \rightarrow 0)$ 为标准无穷小。若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x^\mu} = k, k \neq 0, \mu$ 是一正常数, 称 $\alpha(x)$ 是关于 x 的 μ

阶无穷小。

例如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}$, 则 $\tan x - \sin x$ 和 $\sin^3 x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的同阶无穷小;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 则 $\sin x \sim x$;

$x, x^2, \dots, x^n, \dots$ 都是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小, 它们的阶一个比一个高;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小。

下面介绍两个关于等价无穷小的结果。

【定理 7.5】 $\alpha \sim \beta$ 的充要条件是 $\alpha - \beta = o(\beta)$ (或 $\beta - \alpha = o(\alpha)$)。

【证】 $\alpha \sim \beta$, 即 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 它等价于 $\lim_{x \rightarrow a} (\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1) = 0$, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = 0$$

【定理 7.6】 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha'}{\beta'} = A$ (或 ∞), 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A \quad (\text{或 } \infty)$$

【证】 因为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta'}{\beta} = 1, \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} (\frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'}) = A \quad (\text{或 } \infty)$$

上述命题表明, 两个无穷小之比的极限可由它们的等价无穷小之比的极限代替, 这给许多极限的运算带来方便。

【例 7.3】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\tan x - \sin x)}{\sin x^4}$ 。

【解】 因为 $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) = \tan x \cdot 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim 2x(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^3}{2}$, 而 $\sin x^4 \sim x^4$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\tan x - \sin x)}{\sin x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^3}{2}}{x^4} = \frac{1}{2}$$

【例 7.4】 问 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ 是 x 的几阶无穷小?

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^\mu(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2})} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^\mu} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$$

可知当 $\mu = 2$ 时, 上述极限为 1, 故函数 $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ 是 x 的二阶无穷小, 且

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \sim x^2$$

由定理 7.5, 若 α 与 β 是等价的, 则 $\alpha = \beta + o(\beta)$ 或 $\beta = \alpha + o(\alpha)$ 。这是一个新的表达式, 在许多问题中, 此表达式是很方便的。例如

$$\sin x = x + o(x), \tan x = x + o(x), 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

【定义 7.4】 设 α 与 β 为两个无穷小, 若 $\alpha = \beta + o(\beta)$, 则称 β 是 α 的主部。

由定理 7.5, 两个等价的无穷小可互为主部。由定义 7.4, α 的值主要由主部 β 的值所决定。这在近似计算或确定 $\alpha(x)$ 的正、负号等许多实际问题中都是很有用的。

【例 7.5】 因为 $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^2} \quad (x \rightarrow +\infty)$, 所以

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

关于无穷大量趋于 ∞ 的速度问题, 读者可以比照无穷小量而引进阶的概念。比照关于无穷小的结果得出关于无穷大的相应的结果。这里不再赘述了, 只给几个例子, 以示之。

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \sim x^n \quad (x \rightarrow \infty)$$

【例 7.6】 当 $x \rightarrow 1$ 时, 求无穷大 $\frac{1}{\sin \pi x}$ 关于 $\frac{1}{x-1}$ 的阶与主部。

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\left(\frac{1}{x-1}\right)^\mu} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^\mu}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^\mu}{\sin[\pi(x-1) + \pi]} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^\mu}{\sin \pi(x-1)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^\mu}{\pi(x-1)} \end{aligned}$$

可见当 $\mu=1$ 时, 上述极限为 $-\frac{1}{\pi}$, 故

$$\frac{1}{\sin \pi x} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

主部是 $-\frac{1}{\pi} \frac{1}{x-1}$ 。

【例 7.7】 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b\right) = 0$, 求 a, b 。

【解】 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax + b\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x}{x+1} - a - \frac{b}{x}\right) = 0$

必有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} - a - \frac{b}{x}\right) = 0$$

从而

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{b}{x}\right) = 1$$

于是, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x - b\right) = 0$$

因而

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{x+1}\right) = -1$$

习 题 1.7

1. 指出下列的无穷小与无穷大

(1) 2^{-x} , 当 $x \rightarrow +\infty$ 时

(2) $\ln x$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时

(3) $\frac{1-x}{x^2-9}$, 当 $x \rightarrow 3$ 时

(4) $\frac{\sin x}{1+\sec x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时

2. 根据无穷小、无穷大的定义证明

(1) $y = x \sin \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷小

(2) $x_n = \frac{n^2}{2n+1}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时为无穷大

3. 函数 $f(x) = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 而当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 是否为无穷大? 为什么?

4. 下列函数当 $x \rightarrow \infty$ 时均有极限, 把它分别表示为一个常数与一个当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小之和的形式。

$$(1) y = \frac{x^3}{x^3-1} \quad (2) y = \frac{x^2}{2x^2+1} \quad (3) y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

6. 证明

$$(1) x^3 \sin x = o(x^2) \quad (x \rightarrow 0) \quad (2) \frac{x+2}{x^4+3} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$(3) \sin \frac{2}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (4) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$(5) \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x \quad (x \rightarrow 0) \quad x^n - 1 \sim n(x-1) \quad (x \rightarrow 1)$$

7. 下列运算是否正确? 如有错误, 指出错在何处

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

8. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 试决定下列各无穷小关于 x 的阶, 并写出其幂函数形的主部

$$(1) \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} \quad (x > 0) \quad (2) \sqrt{a+x^3} - \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

$$(3) \ln(1+x) \quad (4) \tan x - \sin x$$

9. 用等价无穷小代换求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\arctan 2x}{\arcsin 3x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^3 \tan x (1 - \cos x)}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x}} (\sqrt[6]{x^5 \sin^5 x})}$$

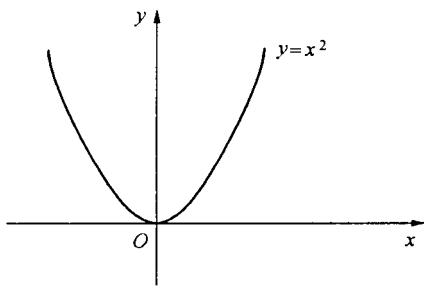
1.8 连续函数

数学分析研究的对象是函数, 连续函数是一类主要的函数, 本节来研究连续函数, 并讨论初等函数的连续性。

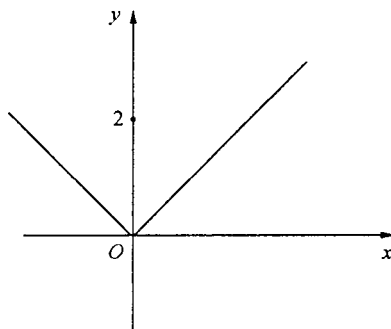
1.8.1 函数的连续与间断

首先观察下例给出的函数及其图象。

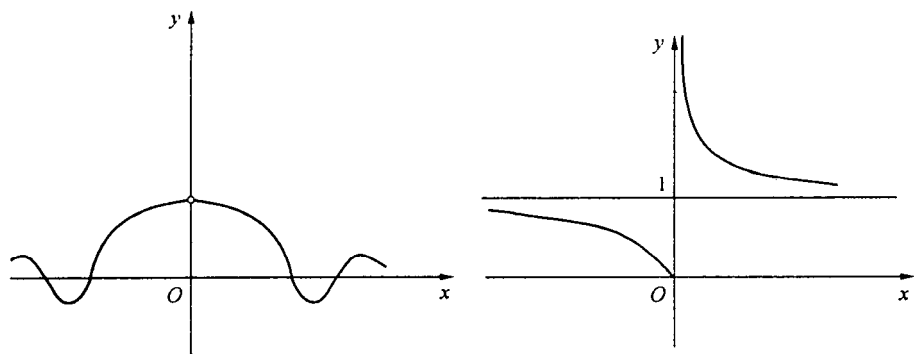
【例 8.1】如图 8.1 所示。



(1) $y = x^2$



(2) $y = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$



$$(3) y = \frac{\sin x}{x} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad (4) y = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

图 8.1

上例中的(2)、(3)及(4)的函数在 $x=0$ 处出现了间断。函数(3)出现间断是由于 $x=0$ 无定义；(4)虽然在 $x=0$ 有定义，但 $x \rightarrow 0$ 时函数的极限不存在；(2)虽然在 $x=0$ 有定义， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在，但极限不等于该点的函数值 2，而(1)中的函数没有出现(2)、(3)和(4)中函数出现的情况，因此其图象便是一条连续的无间断曲线。由此，引出下述定义。

【定义 8.1】 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内定义，若对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点均连续，则称 $f(x)$ 在 I 上连续，记 I 上连续的函数的全体为 $C(I)$ 。

从定义 8.1 可见， $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是：(1) $f(x)$ 在 x_0 处有定义；(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

令 $\Delta x = x - x_0$ ，称 Δx 为自变量 x 在 x_0 的改变量，设

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

称为函数 y 在 x_0 的改变量。显然， $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 。

同左、右极限类似，若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续。若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续。显然， $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是它左、右都连续。

若 $I = [a, b]$ ， $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续应理解为 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续，且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ 及 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ，即在 a 右连续，在 b 左连续。

【例 8.2】 设
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + b & x > 0 \end{cases}$$

问：(1) a, b 为何值时， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在；(2) a, b 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

【解】 (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \sin \frac{1}{x} + b) = b$ ，故 $b=1, a$ 为任意常数时， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在。

(2) 欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 显然应有 $a=b=1$ 。

【定理 8.1】 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}, x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ 。

这是海涅定理的自然结果。

【定义 8.2】 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

由此而知, x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 则: (1) 或者 $f(x)$ 在 x_0 无定义; (2) 或者 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 或者 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ 。

从例 8.1 所给出的函数来看, 间断点是很不一样的。

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。称 x_0 是可去间断点, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在; 称 x_0 是第一类间断点, 若 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 都存在, 但 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$; 称 x_0 是第二类间断点, 若 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$ 至少有一个不存在。

例 8.1 中 $x=0$, (3) 是可去间断点, (2) 是第一类间断点, (4) 是第二类间断点。

1.8.2 初等函数的连续性

【例 8.3】 证明 $y=\sin x \in C(-\infty, +\infty)$ 。

【证】 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 由和差化积公式得

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})\sin \frac{\Delta x}{2}$$

在 1.6.3 的例 6.4 中, 已证 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$, 而 $\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$ 是有界的, 故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

即 $\sin x$ 在 x_0 处连续, 由于 x_0 是任意的, $\sin x \in C(-\infty, +\infty)$ 。

用同样的方法可证 $y=\cos x \in C(-\infty, +\infty)$ 。

下述两定理可根据函数连续的定义及极限的有关性质直接推得。

【定理 8.2】 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 则函数 $f(x) \pm g(x)$ 、 $f(x)g(x)$ 和 $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 均在 x_0 处连续。

【定理 8.3】 设 $y=f(u)$ 、 $u=g(x)$ 构成复合函数 $y=f(g(x))$, 且 $g(x)$ 在 x_0 处连续, $u_0=g(x_0)$, $f(u)$ 在 u_0 处连续, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处连续。

由于 $\sin x$ 与 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 、 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 、 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ 、 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ 均在其定义域内连续。

在 1.6 节的例 6.3 中, 已证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} (a > 0)$ 。因而指数函数 $a^x \in C(-\infty, +\infty)$ 。

在习题 1.5 的 3 中, 读者已证 $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$, 因此, 对数函数 $\log_a x (a > 0)$, 在 $(0, +\infty)$ 内连续。

由于 $y=x \in C(-\infty, +\infty)$, 对 $\forall n \in N$, 函数 $y=x^n \in C(-\infty, +\infty)$ 。因此, 任何多项式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in C(-\infty, +\infty)$ 。

在 1.6 节的例 6.7 中, 已证得 $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\mu = x_0^\mu (x_0 > 0)$, 故幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0, +\infty)$ 连续。留给读者去讨论, 幂函数在其定义域内是连续的。

关于反三角函数的连续性, 我们需要下面的定理。

【定理 8.4】 严格单调连续函数的反函数也是严格单调连续的。

由图 8.2 可见, 定理 8.4 的结论是显然的。我们略去证明。

由定理 8.4 也可得到对数函数

$\log_a x (a > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续。

由于 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调增加且连续, 故它的反函数 $\arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上连续; 同理, 可证明其它的反三角函数在其定义的区间内连续。

以上, 我们已经讨论了所有的基本初等函数在其定义区间是连续的。所谓初等函数是指由上述基本初等函数的有限次四则运算或有限次复合而得的函数, 因而我们有下面的结论。

【定理 8.5】 初等函数在其定义的区间上连续。

在复合函数的连续性定理 8.2 中, 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$, 且 $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) \quad (8.1)$$

式(8.1)常用来求连续函数的极限。

【例 8.4】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$

【例 8.5】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} (a > 0)$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \stackrel{t=a^x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a$

【例 8.6】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} (\mu \in \mathbb{R})$ 。

【解】 令 $t = (1+x)^\mu - 1, \ln(1+t) = \mu \ln(1+x)$ 。由于

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \frac{t}{x} = \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$$

及当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $t \rightarrow 0$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mu \ln(1+x)}{x} = \mu \end{aligned}$$

由例 8.4~8.6 得到三个等价无穷小关系式。当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad (8.2)$$

【例 8.7】 已知 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 求 $a = ?$

【解】 由(8.2), $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{a}{3}x^2$ 。又 $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$, 于是

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a$$

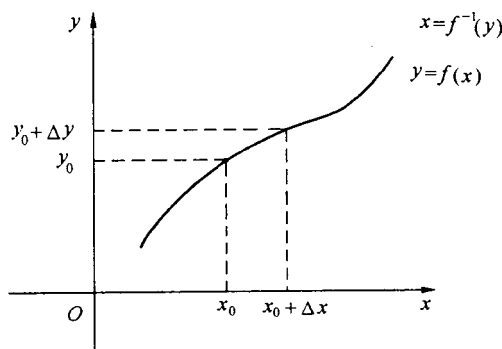


图 8.2

因此

$$a = -\frac{3}{2}$$

习 题 1.8

1. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $|f(x)|$ 也在 x_0 处连续, 逆命题是否成立?

2. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 是单调增加, 则 $f(x)$ 的间断点是第一类的。

3. 求下列函数的连续区间、间断点及其类型, 如果是可去间断点, 如何补充或修改这一点函数的定义使它连续。

$$(1) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} (x > -1) \quad (2) f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4) f(x) = \frac{1}{\ln |x|}$$

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x=0 \\ a & x=0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x>0 \end{cases}$$

试问: (1) a, b 为何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在? (2) a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

5. 设 $f(x) = \frac{e^x - a}{x(x-1)}$ 。若 $x=1$ 是可去间断点, 问 $x=0$ 是哪类间断点? 求出 a 。

6. 若 $f(x)$ 对一切正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 。试证: 只要 $f(x)$ 在某一正实数处连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

* 7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + x + \frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$ 。

8. 证明: 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $f(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U_\delta(x_0)$ 时, 有 $f(x) > 0$ 。

9. 证明: 若 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 则函数

$$F(x) = \max \{f(x), g(x)\} \text{ 与 } G(x) = \min \{f(x), g(x)\}$$

在 $[a, b]$ 上都连续。

* 10. 证明: 若 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且 $f(x)$ 在 0 处连续, 则 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且 $f(x) = ax$, 其中 $a = f(1)$ 是常数。

11. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+a) - \ln a}{x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$$

1.9 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有若干个理想的性质。为比较起见, 先看两个开区间上连续函数的例子。

【例 9.1】 (1) $y = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$; (2) $y = \sin \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ 。两个函数的图象见图 9.1(a)、(b)。

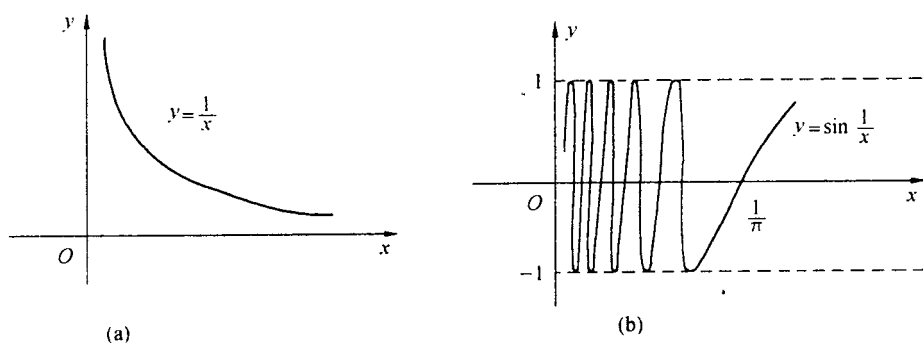


图 9.1

函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不但无界, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 函数值的增大是相当剧烈的。函数值变化的不均匀性在第二个函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 上体现得更清楚, 虽然此时函数有界, 但当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 函数将在 1 与 -1 之间无限次振荡。

本节将证明, 闭区间上的连续函数将是平和的、均匀的。

都是连续函数, 为什么会出现这种差别。让我们先回忆一下 $f(x)$ 在 x_0 处连续的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad (9.1)$$

显然 δ 是依赖于 ϵ 。事实上, δ 还依赖于点 x_0 。 x_0 的不同, δ 也可能不同。因此, $\delta = \delta(\epsilon, x)$ 。例 9.1 的两函数不可能找到公共的 δ , 使之适合于任意 $(0, +\infty)$ 中的点, 甚至 $(0, 1]$ 中的点。这便是两函数不均匀变化的原因。显然, 函数的均匀性是一个重要性质。为此, 引出下面的定义。

【定义 9.1】 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, 当 $\forall x_1, x_2 \in I$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad (9.2)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是一致连续的。

由定义 9.1 可见, 若 $f(x)$ 在 I 上一致连续, 则 $f(x)$ 在 I 上必连续。事实上, 令 $x_0 = x_2$ 和 $x = x_1$, 则式 (9.2) 便成为式 (9.1), 从而 $f(x)$ 在 x_0 处连续。由于 x_0 的任意性, $f(x)$ 在 I 上连续。例 9.1 表明, I 上的连续函数未必在 I 上一致连续。

定义 9.1 用 $\epsilon - \delta$ 语言精确地刻画了函数变化均匀性的真正含义。

【例 9.2】 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a, 1]$ ($0 < a < 1$) 上一致连续。

【证】 $\forall \epsilon > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, 1]$, 要使不等式

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| \leq \frac{1}{a^2} |x_2 - x_1| < \epsilon$$

成立, 只须 $|x_1 - x_2| < a^2 \epsilon$ 。取 $\delta = a^2 \epsilon$, 则 $\forall x_1, x_2 \in [a, 1]$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \leq \frac{1}{a^2} |x_2 - x_1| < \frac{1}{a^2} \delta = \frac{1}{a^2} a^2 \epsilon = \epsilon$$

故 $f(x)$ 在 $[a, 1]$ 上一致连续。

一般地,我们有:

【定理 9.1】 若 $f \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续。

【证】 反证, 若不然, $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in [a, b]$ 且 $|x' - x''| < \delta$, 但

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

于是 $\delta = 1, \exists x'_1, x''_1 \in [a, b], |x'_1 - x''_1| < 1$, 但 $|f(x'_1) - f(x''_1)| \geq \varepsilon_0$

$$\delta = \frac{1}{2}, \exists x'_2, x''_2 \in [a, b], |x'_2 - x''_2| < \frac{1}{2}, \text{ 但 } |f(x'_2) - f(x''_2)| \geq \varepsilon_0$$

\vdots

$$\delta = \frac{1}{n}, \exists x'_n, x''_n \in [a, b], |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \text{ 但 } |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$$

如此得有界数列 $\{x'_n\}, \{x''_n\}$ 。根据 Bolzano-Weierstrass 定理 4.5, $\{x'_n\}$ 必有收敛子列 $\{x'_{n_k}\}$ 。设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = \zeta$ 。由于 $a \leq x'_n \leq b, n = 1, 2, \dots$, 所以 $\zeta \in [a, b]$ 。

注意 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x'_{n_k} - x''_{n_k}) = 0$, 且

$$x''_{n_k} - \zeta = (x''_{n_k} - x'_{n_k}) + (x'_{n_k} - \zeta)$$

所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} x''_{n_k} = \zeta$ 。由于 $f(x)$ 在 ζ 处连续, 于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})] = f(\zeta) - f(\zeta) = 0$$

因此, 对于 $\varepsilon_0 > 0$, 存在充分大的 k , 使 $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon_0$, 这与 $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ 矛盾。

【定理 9.2】 (有界性) 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 即 $\exists M > 0, \forall x \in [a, b]$, 有

$$|f(x)| \leq M$$

【证】 由定理 9.1, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续。对于 $\varepsilon_0 = 1, \exists \delta = \delta(\varepsilon_0), \forall x', x'' \in [a, b]$, 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon_0 = 1 \quad (9.3)$$

把 $[a, b]$ 进行 n 等分, 使 $(b-a)/n < \delta$ 。设分点为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

任取 $x \in [a, b]$, 则存在 $1 \leq i_0 \leq n$, 使得 $x_{i_0-1} \leq x \leq x_{i_0}$ 。所以, 由式 (9.3) 得

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_{i_0})| + |f(x_{i_0}) - f(x_{i_0+1})| + \dots +$$

$$|f(x_{n-1}) - f(x_n)| + |f(x_n)| <$$

$$(n - i_0) + |f(b)| \leq n + |f(b)| = M$$

【定理 9.3】 (最值性) 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 一定在 $[a, b]$ 上能取得最小值 m 和最大值 M , 即 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使 $f(x_1) = m, f(x_2) = M$, 且 $\forall x \in [a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M$$

最值性的几何意义见图 9.2。

【证】 因为 $f(x) \in C[a, b]$, 由定理 9.2, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 从而数集 $E = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ 必有上确界, 记 $M = \sup E$ 。只须证明: $\exists x_2 \in [a, b]$, 使得 $f(x_2) = M$ 。若不然, $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) < M$ 。显然,

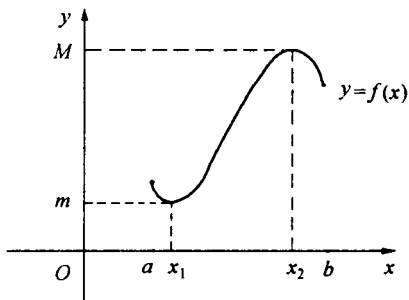


图 9.2

函数 $g(x) = M - f(x) \in C[a, b]$, 且 $M - f(x) > 0$. 于是 $\frac{1}{M - f(x)} \in C[a, b]$. 再由定理 9.2, $\exists K > 0, \forall x \in [a, b]$, 有

$$\frac{1}{M - f(x)} < K \quad \text{或} \quad f(x) < M - \frac{1}{K}$$

这与 M 是数集 E 的上确界矛盾. 于是必存在 $x_2 \in [a, b]$, 使 $f(x_2) = M$.

同理可证 $f(x)$ 能取得最小值 m .

【定理 9.4】 (零点存在性) 若 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists \zeta \in (a, b)$, 使 $f(\zeta) = 0$.

【证】 不妨设 $f(a) < 0, f(b) > 0$. 将 $[a, b]$ 二等分为两个子区间, 若 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, 则 $\zeta = \frac{a+b}{2}$ 即为所求之点. 若 $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, 则它必与 $f(a)$ 或 $f(b)$ 异号, 故此时只有一个子区间, 记为 $[a_1, b_1]$, 满足 $f(a_1)f(b_1) < 0$, 且 $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$. 如此继续等分下去, 可得一闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$, $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

并且 $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$. 根据闭区间套定理 4.4, 存在惟一 $\zeta \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \zeta$. 再根据 $f(x)$ 在 ζ 处的连续性及其极限的保号性, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= f(\zeta) \leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) &= f(\zeta) \geq 0 \end{aligned}$$

所以, 必有 $f(\zeta) = 0$.

【定理 9.5】 (介值性) 设 $f(x) \in C[a, b], f(a) \neq f(b)$, 并且 μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一值, 则 $\exists \zeta \in (a, b)$, 使 $f(\zeta) = \mu$.

【证】 设 $F(x) = f(x) - \mu$, 则 $F(x) \in C[a, b]$, 且 $F(a) = f(a) - \mu$ 与 $F(b) = f(b) - \mu$ 异号, 由定理 9.4, $\exists \zeta \in (a, b)$ 使 $F(\zeta) = 0$, 即 $f(\zeta) = \mu$.

容易看出, 在定理 9.4、9.5 中, 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上还是严格单调的, 那么点 ζ 是惟一的.

【推论】 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则函数 $f(x)$ 能取得介于它的最大值 M 与最小值 m 之间的任一值.

【例 9.3】 证明超越方程 $x - \cos x = 0$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内至少存在一个实根.

【证】 令 $f(x) = x - \cos x$. 则 $f(x) \in C[a, b]$, 并且 $f(0) = -1 < 0, f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$, 由零点定理 1.32, 至少存在一个 $\zeta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $f(\zeta) = 0$, 即 $\zeta - \cos \zeta = 0$.

习 题 1.9

1. 证明方程 $x2^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根.
2. 试证方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根并且它不超过 $a + b$.
3. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 中必有 ζ , 使

$$f(\zeta) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

4. 证明:若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 必有界。

5. 证明函数 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续。

6. 设 $f(x) \in C[0, 2a]$, 且 $f(0) = f(2a)$ 。试证在闭区间 $[0, a]$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = f(\xi + a)$ 。

7. 若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 且 $f[f(x)] = x$, 证明必有一点 ξ , 使 $f(\xi) = \xi$ 。

8. 如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内除有有限个第一类间断点外处处连续, 试证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。

9. 证明:若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz(1832~1903, 德国数学家)条件, 即 $\forall x, y \in I$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

其中 k 是一常数, 则 $f(x)$ 在 I 上一致连续。

10. 求证 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上一致连续的充要条件是 $f(x) \in C(a, b)$, 且 $f(a^+)$ 及 $f(b^-)$ 都存在。

11. 证明:当 n 为奇数时, 方程

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

至少有一个根, 其中 $a_i \in R (i=0, 1, \cdots, n), a_n \neq 0$ 。

第二章 导数与微分

变化是自然界中最普遍的一种现象。在生产实践和科学研究中,常常需要考虑由于自变量的变化所引起的函数的变化情况。归结起来有两个基本问题:第一,函数随自变量变化的速度问题,即函数对自变量的变化率问题;第二,自变量的微小变化导致函数变化多少的问题。这两个基本问题就是本章所要研究的中心内容,导数与微分。

2.1 导数概念

2.1.1 几个实例

导数概念和其它数学概念一样,也是由实际问题的需要而产生的,在历史上,它主要是求变速直线运动的速度与求曲线的切线等问题引出的。

【例 1.1】 变速直线运动的速度问题:一质点作直线运动,已知路程 s 与时间 t 的函数关系 $s = s(t)$,试确定 t_0 时刻的速度 $v(t_0)$ 。

【解】 由物理学知道,当质点作匀速直线运动时,它在任何时刻的速度 v 可以用路程 s 和时间 t 表示

$$v = \frac{s}{t}$$

如果质点作变速直线运动,上述公式只能反映质点走完某一路程的平均速度,而没有反映出在运动过程中变化着的速度。那么如何来确定质点在某一时刻的速度呢?由于变速运动的速度通常是连续变化的,从整体来看,运动是变速的,但是从局部来看,在一段很短的时间内速度变化不大,可以近似看做是匀速的。利用这一思想,可将变速运动的问题化为匀速运动的问题来处理。

现在我们来考察质点在 t_0 时刻的速度,给 t_0 以增量 Δt (Δt 可正可负),从时刻 t_0 到 $t_0 + \Delta t$,质点走过的路程

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$$

从而求得这段时间内的平均速度

$$\bar{v}(t_0, \Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

在指定时刻 t_0 ,平均速度 $\bar{v}(t_0, \Delta t)$ 仅随 Δt 的改变而改变,在 $|\Delta t|$ 很小时,可以认为质点在时间区间 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ (或 $[t_0 - \Delta t, t_0]$) 上非常接近匀速运动,这时,平均速度 $\bar{v}(t_0, \Delta t)$ 就是质点在 t_0 时刻速度 $v(t_0)$ 的近似,显然 $|\Delta t|$ 越小,它的近似程度就越好,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\bar{v}(t_0, \Delta t)$ 就无限接近于 $v(t_0)$,因此定义质点在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

它是路程对时间的变化率。

【例 1.2】 平面曲线的切线问题: 设有一平面曲线 l , 其方程为 $y = f(x)$, $M_0(x_0, f(x_0))$ 为 l 上一点, 求曲线 l 在点 M_0 处的切线的斜率。

【解】 什么是曲线 l 在点 M_0 处的切线呢? 在曲线 l 上任取一个异于 M_0 的点 $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, 过 M_0 、 M 的直线称为曲线 l 的割线, 当点 M 沿曲线 l 趋向于点 M_0 时, 若割线 M_0M 有极限位置 M_0T , 则称直线 M_0T 为曲线 l 在点 M_0 处的切线(图 1.1)。

割线 M_0M 的斜率为

$$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

其中 β 为割线 M_0M 的倾角。

当点 M 沿曲线 l 趋向于 M_0 时, 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\beta \rightarrow \alpha$, 于是切线 M_0T 的斜率 k 为

$$k = \tan \alpha = \lim_{M \rightarrow M_0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

它是曲线上动点的纵坐标对横坐标的变化率。

下面再看两个例子, 它们也归结为求类似的极限。

【例 1.3】 求交流电的电流强度。

【解】 设从某一时刻开始到 t 时刻从导体的某一固定横截面通过的电量为 $q = q(t)$, 则从时刻 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 通过导体的这一横截面的电量为

$$\Delta q = q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)$$

这段时间的平均电流强度为

$$\bar{i}(t_0, \Delta t) = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$$

t_0 时刻的电流强度 $i(t_0)$ 为

$$i(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$$

它是电量对时间的变化率。

【例 1.4】 线密度问题: 设有一细棒, 用 x 表示棒上任一点的坐标, 沿细棒分布的质量是 x 的函数 $m = m(x)$ 。求棒的线密度。

【解】 从点 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 所分布的质量为

$$\Delta m = m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)$$

棒上 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 这一段上的平均密度为

$$\bar{\rho}(x_0, \Delta x) = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 于是棒在点 x_0 处的线密度为

$$\rho(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}$$

它是质量对长度的变化率。

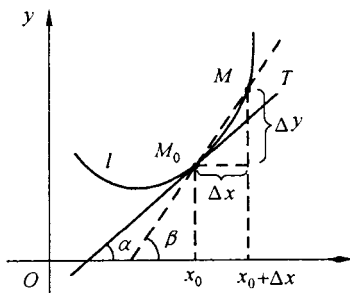


图 1.1

2.1.2 导数的定义

上面列举的几个实例,就其实际意义来说,分别属于各个不同的领域,但解决这些问题时所用的数学方法都是相同的,均归结为:求一个函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 对于它的自变量的增量 Δx 之比在 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

我们把这种形式的极限问题,统一地称为求一函数 $y = f(x)$ 关于其自变量 x 的变化率,这样就产生了导数的概念。

【定义 1.1】 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义,当自变量从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$ 且 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$) 时,函数 $y = f(x)$ 有增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.1)$$

存在,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导(或导数存在或有导数),并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记作 $f'(x_0)$,也可记作 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 、 $y'|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ 。

若记 $x_0 + \Delta x = x$,则 $f(x)$ 在 x_0 点的导数也可写为

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.2)$$

如果用“ $\epsilon - \delta$ ”语言来刻画(1.1)中的极限,导数定义可叙述为 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时,有

$$\left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \epsilon$$

成立。

若极限式(1.1)不存在,就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 不可导或导数不存在,特别当式(1.1)的极限为无穷大(含正、负无穷大)时,有时也说在点 x_0 导数是无穷大,但这时导数不存在。

有了导数的概念,前面的实例可以写成

$$v(t_0) = s'(t_0), \quad k = f'(x_0), \quad i(t_0) = q'(t_0), \quad \rho(t_0) = m'(t_0)$$

在导数定义中,自变量的增量 Δx 的符号不受限制,但有时也需要考虑 Δx 仅为正或仅为负的情形。

【定义 1.2】 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

存在,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点左(右)可导,其极限值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左(右)导数,记作 $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$)。

利用极限与左、右极限的关系,函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等。

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

在研究分段函数分段点处的可导性时,常常要分左、右导数来讨论。

【例 1.5】 求函数 $y = x^3$ 在点 $x = 1$ 处的导数。

【解】 由于

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^3 - 1^3 = \\ &= 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

所以
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2) = 3$$

即 $y = x^3$ 在点 $x = 1$ 处可导,且 $y'|_{x=1} = 3$ 。

【例 1.6】 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 处的可导性。

【解】 因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\sin \frac{1}{\Delta x}$ 的极限不存在,所以该函数在点 $x = 0$ 处不可导。

【例 1.7】 已知 $f'(x_0) = 5$, 求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 - 3\Delta x)}{\Delta x}$ 。

【解】 由已知条件及导数定义

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 - 3\Delta x)}{\Delta x} &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - 3\Delta x)}{\Delta x} \right] &= \\ 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} + 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 3\Delta x)}{-3\Delta x} &= \\ 2f'(x_0) + 3f'(x_0) = 5f'(x_0) = 25\end{aligned}$$

2.1.3 导函数

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都可导,就称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导。这时,对 (a, b) 内每一个点 x 都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值,这样在开区间 (a, b) 内确定了一个新的函数,称为函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 的导函数,记作 $f'(x)$ 、或 y' 、或 $\frac{dy}{dx}$ 、或 $\frac{df}{dx}$ 。

在式(1.1)中把 x_0 换成 x ,即得导函数的定义式

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad x \in (a, b) \quad (1.3)$$

若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 可导,且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 可导。

显然导函数 $f'(x)$ 在 x_0 点的值,就是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的导数,即

$$f'(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)$$

因此人们通常将导函数简称导数。

【例 1.8】 求函数 $y = c$ (c 为常数) 的导数。

【解】
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$(c)' = 0$$

即

【例 1.9】 求幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为任意实数) 的导数。

【解】 当 $x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \\ &= x^{\mu-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu x^{\mu-1} \end{aligned}$$

即

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

上述结果虽然假定 $x \neq 0$, 但当 $x = 0$ 时也可能成立, x 的变动区域依赖于 μ 。

例如

$$(x)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0 < x < +\infty)$$

$$(x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3} \quad (x \neq 0)$$

【例 1.10】 求正弦函数 $y = \sin x$ 与余弦函数 $y = \cos x$ 的导数。

【解】
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

即

$$(\sin x)' = \cos x$$

同样可求得

$$(\cos x)' = -\sin x$$

【例 1.11】 求指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导数。

【解】
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

即

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

特别有

$$(e^x)' = e^x$$

【例 1.12】 求对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导数。

【解】
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

特别有

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

上述几例得到的结果均为初等函数求导公式。

【例 1.13】 设 $x \neq 0$ 时函数 $f(x)$ 有定义, 且当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 恒有

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

又 $f'(1)$ 存在, 试证: 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 存在, 并求 $f'(x)$ 。

【证】 令 $x = y = 1$, 有

$$f(1) = f(1) + f(1)$$

可得 $f(1) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[x(1 + \frac{\Delta x}{x})] - f(x)}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(1)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{f'(1)}{x} \end{aligned}$$

所以当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 可导, 并且 $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ 。

2.1.4 导数的几何意义

由例 1.2 及导数定义, 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 的图形在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率, 即

$$k = \tan \alpha = f'(x_0)$$

其中 α 是切线的倾角(图 1.1)。于是, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

过切点且垂直于切线的直线称为法线。若 $f'(x_0) \neq 0$, 则法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续, 且在 $x = x_0$ 处导数为无穷大, 这时曲线 $y = f(x)$ 的割线以垂直于 x 轴的直线 $x = x_0$ 为极限位置, 即曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x = x_0$ 。例如, 函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

即函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在点 $x = 0$ 处导数为正无穷大, 所以 $x = 0$ 为曲线 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线(图 1.2)。不过导数不存在却存在切线这种情况, 只可能发生在有无穷导数的情形。

【例 1.14】 求曲线 $y = x^2$ (图 1.3) 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程和法线方程。

【解】 由于 $y'|_{x=1} = 2x|_{x=1} = 2$, 所以切线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

即

$$2x - y - 1 = 0$$

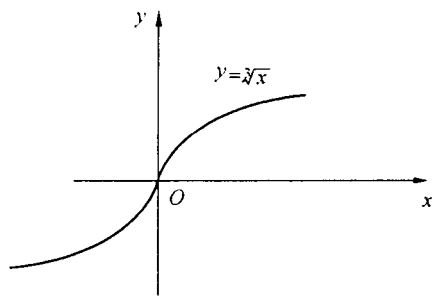


图 1.2

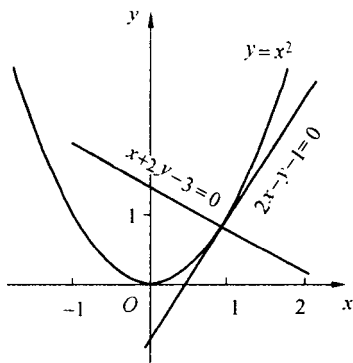


图 1.3

法线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

即

$$x + 2y - 3 = 0$$

【例 1.15】 求证曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上任意一点的切线与坐标轴所围成的三角形面积为一常数。

【解】 在曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上任取一点 $M_0(x_0, \frac{1}{x_0})$, 因

$$y'|_{x=x_0} = -\frac{1}{x^2}|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

所以切线方程为

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$$

令 $x = 0, y_{\text{截}} = \frac{2}{x_0}$; 令 $y = 0, x_{\text{截}} = 2x_0$

因此, 围成的三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2} |x_{\text{截}}| \cdot |y_{\text{截}}| = \frac{1}{2} |2x_0| \cdot \left| \frac{2}{x_0} \right| = 2$$

为一常数。

2.1.5 可导与连续的关系

【定理 1.1】 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导, 则必在点 x_0 连续。

【证】 令 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 因

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

所以 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续。

但定理 1.1 的逆命题不成立, 即函数在一点连续, 函数在该点不一定可导。

【例 1.16】 讨论函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 点的连续性与可导性。

【解】 因

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$$

所以函数在 $x = 0$ 点是连续的。

又由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

所以

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = 1$$

可见 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 这说明函数 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 点不可导. 几何上易知曲线 $y = |x|$ 在点 $(0, 0)$ 处无切线(图 1.4).

【例 1.17】 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq x_0 \\ ax + b & x > x_0 \end{cases}$$

为使 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 应如何选取 a 和 b .

【解】 首先, 函数必须在点 x_0 处连续. 由于

$$f(x_0) = x_0^2, f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} x^2 = x_0^2$$

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (ax + b) = ax_0 + b$$

所以

$$ax_0 + b = x_0^2$$

又因为

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} (x + x_0) = 2x_0$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{ax + b - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a$$

且应有 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, 所以有

$$a = 2x_0, b = -x_0^2$$

即当 $a = 2x_0, b = -x_0^2$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处可导.

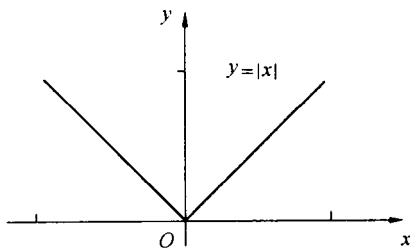


图 1.4

习 题 2.1

1. 设物体绕定轴旋转, 其转角 θ 与时间 t 的函数关系为 $\theta = \theta(t)$, 如果旋转是匀速的, 则称 $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 为旋转的角速度, 如果旋转是非匀速的, 如何定义 t_0 时的角速度?

2. 设质点作直线运动, 已知路程 s 是时间 t 的函数

$$s = 3t^2 + 2t + 1$$

求从 $t = 2$ 到 $t = 2 + \Delta t$ 之间的平均速度, 并求当 $\Delta t = 1, \Delta t = 0.1$ 与 $\Delta t = 0.01$ 的平均速度. 再求在 $t = 2$ 的瞬时速度.

3. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可导, 求下列极限

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} n[f(a) - f(a + \frac{1}{n})]$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+2t) - f(a-t)}{3t} \quad (4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$$

4. 根据导数定义, 求下列函数在 $x = 2$ 处的导数

$$(1) f(x) = \sqrt{x} \quad (2) f(x) = x^2 \sin(x-2)$$

5. 按导数定义,求下列函数的导数

$$(1) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(2) f(x) = \sin 3x$$

6. 讨论下列函数在 $x = 0$ 点的连续性与可导性

$$(1) f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (4) f(x) = |\arctan x|$$

7. 如果 $f(x)$ 为偶函数,且 $f'(0)$ 存在,试证 $f'(0) = 0$ 。

8. 证明:若 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(a)$ 都存在,则函数 $f(x)$ 在 a 点连续。

9. 求曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在点 $(\frac{1}{4}, 2)$ 处的切线方程和法线方程。

10. 问曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 上哪一点的切线与直线 $y = 3x - 1$ 平行?并求出切线方程。

11. 求双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与抛物线 $y = \sqrt{x}$ 的交角。

12. 当 a 为何值时,曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 相切,并求出切点与切线方程。

13. 设 $F(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq 0 \\ ax + b & x > 0 \end{cases}$, 其中 $f(x)$ 在点 x_0 左导数 $f'_-(x_0)$ 存在,要使 $F(x)$ 在

x_0 点可导,问 a 和 b 应取何值。

14. 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,试证 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点可导。

15. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可导, $f(a) \neq 0$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n$ 。

2.2 求导法则与导数基本公式

导数定义虽然在原则上提供了求导数的方法,但用这种方法计算导数往往是困难的。本节介绍一些求导法则,并给出全部基本初等函数的求导公式,利用这些法则和公式,就可以比较方便地进行导数计算。

2.2.1 导数的四则运算法则

【定理 2.1】 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在点 x 处均可导,则函数

$$u(x) \pm v(x) \quad u(x)v(x) \quad \frac{u(x)}{v(x)} \quad (v(x) \neq 0)$$

在同一点 x 处仍可导,且

$$(1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$(2) [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$(3) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

【证】 对应于 x 的增量 Δx , 函数 $u(x), v(x)$ 的增量为

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \quad \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$$

(1) 设 $y = u(x) \pm v(x)$, 则有

$$\begin{aligned}\Delta y &= [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \\ &= \Delta u \pm \Delta v\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x)$$

即函数 $u(x) \pm v(x)$ 在点 x 处也可导, 且

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

这个法则可以推广到任意有限个函数的情形, 例如

$$[u(x) + v(x) - w(x)]' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

(2) 设 $y = u(x)v(x)$, 于是有

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= [u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x)] + \\ &= [u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)] = \\ &= v(x + \Delta x)\Delta u + u(x)\Delta v\end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x + \Delta x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\end{aligned}$$

其中 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$ (因 $v'(x)$ 存在, 故 $v(x)$ 在点 x 处连续)。

即函数 $u(x)v(x)$ 在 x 点可导, 且

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

特别地, 若 $v(x) = c$ (常数), 则

$$[cu(x)]' = cu'(x)$$

也就是说, 常数因子可以从导数运算式中提出来。

积的求导法则也可推广到任意有限个函数之积的情形。例如

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)w(x)]' &= \{[u(x)v(x)]w(x)\}' = \\ &= [u(x)v(x)]'w(x) + [u(x)v(x)]w'(x) = \\ &= [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]w(x) + [u(x)v(x)]w'(x) = \\ &= u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)\end{aligned}$$

(3) 设 $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$ 。由 $v(x)$ 的连续性知, 当 $|\Delta x|$ 充分小时, $v(x + \Delta x) \neq 0$, 于

是

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{[u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x)] - [u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)} =\end{aligned}$$

$$\frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x + \Delta x)v(x)}$$

从而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)v(x)}$$

所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

即函数 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x 处可导, 且

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

【例 2.1】 求函数 $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sin x + 7\cos \frac{\pi}{20}$ 的导数。

【解】 $y' = (2x^{-\frac{1}{2}})' - (3\sin x)' + (7\cos \frac{\pi}{20})' =$

$$2 \cdot (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} - 3\cos x + 0 = -\frac{1}{x\sqrt{x}} - 3\cos x$$

【例 2.2】 $y = 3\cos x \ln x$, 求 y' 。

【解】 $y' = (3\cos x \ln x)' = 3[(\cos x)' \ln x + \cos x (\ln x)'] = 3(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x})$

【例 2.3】 求正切函数 $y = \tan x$ 与余切函数 $y = \cot x$ 的导数。

【解】 $y' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

即 $(\tan x)' = \sec^2 x$

类似地 $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

【例 2.4】 求正割函数 $y = \sec x$ 与余割函数 $y = \csc x$ 的导数。

【解】 $y' = (\frac{1}{\cos x})' = \frac{(1)' \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \cdot \sec x$

即

$$(\sec x)' = \tan x \cdot \sec x$$

类似地

$$(\csc x)' = -\cot x \cdot \csc x$$

【例 2.5】 $y = \frac{\sin x \ln x}{x}$, 求 y' 。

【解】 $y' = \frac{(\sin x \ln x)' x - (\sin x \cdot \ln x)(x)'}{x^2} =$

$$\begin{aligned} & \frac{[(\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)'] - (\sin x \cos x) \cdot 1}{x^2} = \\ & \frac{(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})x - \sin x \cdot \ln x}{x^2} = \\ & \frac{x \cos x \ln x + \sin x - \sin x \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

2.2.2 反函数求导法则

【定理 2.2】 设函数 $x = \varphi(y)$ 在某区间内严格单调连续,在该区间内点 y 处可导,且 $\varphi'(y) \neq 0$,则其反函数 $y = f(x)$ 在 y 的对应点 x 处也可导,且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

【证】 由条件知 $y = f(x)$ 也是严格单调连续的,给 x 以增量 Δx ,当 $\Delta x \neq 0$ 时,显然

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0$$

于是
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

由于当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

即反函数 $y = f(x)$ 可导,且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

这个法则具有明显的几何意义(图 2.1),因为 $x = \varphi(y)$ 与它的反函数 $y = f(x)$ 的图象是同一条曲线,由导数的几何意义,有

$$\varphi'(y) = \tan \beta$$

$$f'(x) = \tan \alpha$$

而 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$$

即
$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

【例 2.6】 求反正弦函数 $y = \arcsin x$ 与反余弦函数 $y = \arccos x$ 的导数

【解】 $y = \arcsin x$ 是 $x = \sin y$ 的反函数,由于 $x = \sin y$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内严格单调增加,可导且

$$(\sin y)' = \cos y > 0$$

所以由定理 2.2,得

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

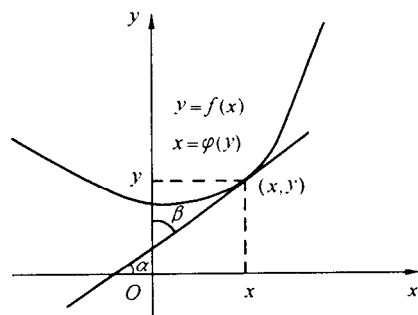


图 2.1

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似地

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

【例 2.7】 求反正切函数 $y = \arctan x$ 与反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 的导数。

【解】 设 $x = \tan y (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ 为直接函数, 则 $y = \arctan x (-\infty < x < +\infty)$

是它的反函数, 函数 $x = \tan y$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内严格单调增加, 可导且

$$(\tan y)' = \sec^2 y > 0$$

因此

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

即

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

类似有

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

到目前为止, 我们已经导出了全部基本初等函数的导数公式, 为便于查找, 将它们列成下表。这些公式以后将经常用到, 请读者务必熟记。

导数基本公式表

- | | |
|---|---|
| (1) $(c)' = 0 \quad (c \in \mathbf{R})$ | (2) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} \quad (\mu \in \mathbf{R})$ |
| (3) $(a^x)' = a^x \ln a$ | (4) $(e^x)' = e^x$ |
| (5) $(\log a^x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | (6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| (7) $(\sin x)' = \cos x$ | (8) $(\cos x)' = -\sin x$ |
| (9) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ | (10) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$ |
| (11) $(\sec x)' = \sec x \tan x$ | (12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ |
| (13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | (14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| (15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | (16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

2.2.3 复合函数求导法则

【定理 2.3】 若函数 $u = \varphi(x)$ 在 x 点可导, 函数 $y = f(u)$ 在对应点 $u(u = \varphi(x))$ 处可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 点可导, 且

$$\{f[\varphi(x)]\}' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

【证】 因为 $y = f(u)$ 在 u 点可导, 所以有

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u)$$

其中 $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$ 。上式中 $\Delta u \neq 0$, 两边同乘以 Δu , 得到

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u \quad (2.1)$$

因为 u 是中间变量, 所以 Δu 有等于零的可能。而当 $\Delta u = 0$ 时, 必有 $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = 0$, 但此时 $\alpha(\Delta u)$ 没有定义。从式(2.1)看, 当 $\Delta u = 0$ 时, $\alpha(\Delta u)$ 定义为任何值式(2.1)都成立, 为简便计, 当 $\Delta u = 0$ 时补充定义 $\alpha(\Delta u) = 0$, 这样, 无论 Δu 是否为零, Δy 都可统一由式(2.1)表达。

用 $\Delta x \neq 0$ 去除式(2.1)两边, 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 这时 $\Delta u \rightarrow 0$, 从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$, 于是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x)$$

即复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 点可导, 且

$$\{f[\varphi(x)]\}' = f'(u)\varphi'(x) = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

定理 2.3 可以推广到任意有限个函数复合的情形。例如, 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$ 均可导, 则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 也可导, 且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = f'(u)\varphi'(v)\psi'(x) = f'[\varphi(\psi(x))]\varphi'[\psi(x)]\psi'(x)$$

这个法则通常形象的称为链导法则。

【例 2.8】 $y = \sin 2x$, 求 y' 。

【解】 将 $y = \sin 2x$ 分解为 $y = \sin u$, $u = 2x$, 由链导法则得

$$y' = (\sin u)' \cdot (2x)' = \cos u \cdot 2 = 2\cos 2x$$

【例 2.9】 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$, 求 y' 。

【解】 将 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$ 分解为 $y = \sqrt[3]{u}$, $u = 1-2x^2$, 则

$$y' = (\sqrt[3]{u})' \cdot (1-2x^2)' = (\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}) \cdot (-4x) =$$

$$\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$$

【例 2.10】 $y = \tan [\ln(1+x^2)]$, 求 y' 。

【解】 将 $y = \tan [\ln(1+x^2)]$ 分解为 $y = \tan u$, $u = \ln v$ 和 $v = 1+x^2$, 则

$$y' = (\tan u)'(\ln v)' \cdot (1+x^2)' =$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{v} \cdot 2x = \frac{2x}{(1+x^2)\cos^2[\ln(1+x^2)]}$$

待熟练掌握了复合函数的分解和求导法则之后, 可以不引入中间变量的记号, 只要认清函数的复合层次, 由外向内, 分解一层, 求导一次, 直到自变量为止。整个求导过程要做到不脱节、不遗漏。

【例 2.11】 $y = \ln |x|$ ($x \neq 0$), 求 y' 。

【解】 当 $x > 0$ 时, $y = \ln x$, 所以 $y' = \frac{1}{x}$ 。

当 $x < 0$ 时, $y = \ln(-x)$, 所以

$$y' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$$

综合上面两种情况有

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

【例 2.12】 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t(1 + \frac{1}{x})^{2x}$, 求 $f'(t)$ 。

【解】 因 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t(1 + \frac{1}{x})^{2x} = te^{2t^2}$

所以

$$f'(t) = (t)'e^{2t^2} + t(e^{2t^2})' = e^{2t^2} + t \cdot e^{2t^2} \cdot (2t^2)' = (4t^2 + 1)e^{2t^2}$$

【例 2.13】 $y = 3^{\sin^2 \frac{1}{x}}$, 求 y' 。

【解】 $y' = (3^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \ln 3) \cdot (\sin^2 \frac{1}{x})' =$

$$(3^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \ln 3) \cdot (2 \sin \frac{1}{x})(\sin \frac{1}{x})' =$$

$$(3^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \ln 3) \cdot (2 \sin \frac{1}{x}) \cdot \cos \frac{1}{x} (\frac{1}{x})' =$$

$$(3^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \ln 3) \cdot (2 \sin \frac{1}{x}) \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) =$$

$$-\frac{\ln 3}{x^2} \cdot \sin \frac{2}{x} \cdot 3^{\sin^2 \frac{1}{x}}$$

【例 2.14】 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 y' 。

【解】 $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})' =$

$$\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot [1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)'] =$$

$$\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

【例 2.15】 已知 $y = f(\frac{3x-2}{3x+2})$, 且 $f'(x) = \arctan x^2$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ 。

【解】 $y' = [f(\frac{3x-2}{3x+2})]' = f'(\frac{3x-2}{3x+2}) \cdot (\frac{3x-2}{3x+2})' =$

$$f'(\frac{3x-2}{3x+2}) \cdot \frac{3(3x+2) - 3(3x-2)}{(3x+2)^2} =$$

$$\arctan\left[\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\right] \cdot \frac{12}{(3x+2)^2}$$

所以 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = (\arctan 1) \cdot 3 = \frac{3\pi}{4}$

注意 $[f(\frac{3x-2}{3x+2})]'$ 与 $f'(\frac{3x-2}{3x+2})$ 是不同的。前者是先将 $u = \frac{3x-2}{3x+2}$ 代入 $f(u)$, 得到

$f(\frac{3x-2}{3x+2})$, 然后对 x 求导, 后者是先将 $f(u)$ 对 u 求导, 得到 $f'(u)$, 然后将 $u = \frac{3x-2}{3x+2}$ 代入。

习 题 2.2

1. 求下列函数的导数

(1) $y = \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x}$

(2) $y = 2\lg x - 3\arctan x$

$$(3)y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x + \lg a \quad (a > 0) \quad (4)y = x \sin x \ln x$$

$$(5)y = x \cdot 10^x$$

$$(6)y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$(7)y = \frac{\arcsin x}{x}$$

$$(8)y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$$

2. 求下列函数的导数

$$(1)y = 2^{\sin 3x}$$

$$(2)y = \cos^2(x^3)$$

$$(3)y = \sin \cos \frac{1}{x}$$

$$(4)y = \cot^3(\sqrt{1+x^2})$$

$$(5)y = (2x^2 - 3)^2 e^x$$

$$(6)y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\ln x}$$

$$(7)y = \sec^2 e^{x^2+1}$$

$$(8)y = e^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$(9)y = (\arcsin \frac{x}{a})^2$$

$$(10)y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

$$(11)y = e^{-x^2} \cos e^{-x^2}$$

$$(12)y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$(13)y = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x$$

$$(14) \frac{1}{\arctan e^{-2x}}$$

$$(15)y = \log_2 \log_3 \log_5 x$$

$$(16)y = \arctan e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}$$

$$(17)y = \arccos \frac{2 + 3 \cos x}{3 + 2 \sin x}$$

$$(18)y = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arccot} \sqrt{\sin x}$$

$$(19)y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$$

$$(20)y = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\arcsin^2(\sqrt{x^2+2x})}$$

3. 求下列函数的导数

$$(1)y = a^{b^x} + x^{a^b} + b^{x^a} \quad (x, a, b > 0, a, b \text{ 为常数})$$

$$(2)y = \lim_{n \rightarrow \infty} x \left(\frac{n+x}{n-x} \right)^n$$

$$(3)y = \begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ e^{-x} \cos 3x & x > 0 \end{cases}$$

4. 若 $f(x) = \sin x$, 求 $f'(a)$, $[f(a)]'$, $f'(2x)$, $[f(2x)]'$ 和 $f'[f(x)]$, $\{f[f(x)]\}'$

5. 设 $f(x)$, $g(x)$ 均可导, 且下列函数有意义, 求它们的导数

$$(1)y = \sqrt[n]{f^2(x) + g^2(x)}$$

$$(2)y = f(\sin^2 x) + g(\cos^2 x)$$

6. 证明: 可导的偶函数的导数是奇函数; 可导的奇函数的导数是偶函数, 并对这个事实给以几何说明。

7. 设 $x = \varphi(y)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数, $\varphi(2) = 1$, 且 $f'(1) = 3$, 求 $\varphi'(2)$ 。

8. n 在什么条件下函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处 (1) 连续; (2) 可导; (3) 导数连续。

9. 设 $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$, $g(x)$ 在 a 点附近有定义, 求 $f'(a)$ 存在的充分必要条件。

2.3 隐函数与参数方程表示的函数的求导法则

2.3.1 隐函数求导法则

因变量 y 已写成自变量 x 的明显表达式的那种函数叫做显函数。例如 $y = x^5 - 2x + 4$, $y = \ln \tan x$ 等都是显函数。常常还会遇到这样的情形:两个变量间的对应关系是由一个方程确定的,函数关系隐含在这个方程中。例如圆的方程 $x^2 + y^2 = 1$ 就确定 x, y 之间的某种函数关系;又如方程 $e^{xy} - x - y = 0$ 也确定 x, y 之间的某种函数关系,这种函数叫做隐函数。

一般地,如果存在一个定义在某区间上的函数 $y = f(x)$,使 $F(x, y) \equiv 0$,则称 $y = f(x)$ 是方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数。

对于方程 $F(x, y) = 0$ 能否确定隐函数,以及隐函数的连续性、可导性问题,目前我们还不能回答,留到多元函数微分学中讨论,这里认为隐函数是存在的,可导的。把一个隐函数化为显函数,叫做隐函数的显式化。例如从 $x^2 + y^2 = 1$ 中解出 y ,可得两个函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1-x^2}$,这就把隐函数化成显函数了。但在许多情况下,隐函数的显式化是很困难的,甚至是不可能的,例如 $e^{xy} - x - y = 0$ 就是这样。

下面举例说明求隐函数导数的一般方法,这种方法无需把隐函数显式化,可直接由方程算出它所确定的隐函数的导数。

【例 3.1】 求方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数。

【解】 方程两边对 x 求导,得

$$(xy)' - (e^x)' + (e^y)' = (0)'$$

注意 y 是 x 的函数,所以 e^y 是 x 的复合函数,于是有

$$x + xy' - e^x + e^y \cdot y' = 0$$

解得

$$y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}$$

【例 3.2】 试证曲线 $x^2 + 2y^2 = 8$ 与曲线 $x^2 = 2\sqrt{2}y$ 在点 $(2, \sqrt{2})$ 处正交(即该点处两条切线:垂直相交)。

【证】 易见点 $(2, \sqrt{2})$ 是两条曲线的交点,下面只需证明两条曲线在该点的切线斜率互为负倒数。

对方程 $x^2 + 2y^2 = 8$ 两边关于 x 求导,得

$$2x + 4yy' = 0$$

解得

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

所以这条曲线在点 $(2, \sqrt{2})$ 处切线的斜率为

$$k_1 = y' \Big|_{(2, \sqrt{2})} = -\frac{x}{2y} \Big|_{(2, \sqrt{2})} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

由 $x^2 = 2\sqrt{2}y$ 得

$$y' = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

所以此曲线在点 $(2, \sqrt{2})$ 的切线斜率为

$$k_2 = y'|_{x=2} = \frac{x}{\sqrt{2}}|_{x=2} = \sqrt{2}$$

故

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

即两曲线在点 $(2, \sqrt{2})$ 处正交。

【例 3.3】 证明曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($0 < x < a$) 上任意一点的切线在两个坐标轴上的截距之和等于 a 。

【证】 设 (x_0, y_0) 是曲线上的任意一点, 对曲线方程两边关于 x 求导得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0$$

解得

$$y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

从而过点 (x_0, y_0) 的切线斜率为

$$k = y'|_{x=x_0} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Big|_{(x_0, y_0)} = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$$

切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$

在 x, y 轴上的截距分别为

$$x_{\text{截}} = x_0 + \sqrt{x_0 y_0}, \quad y_{\text{截}} = y_0 + \sqrt{x_0 y_0}$$

于是

$$\begin{aligned} x_{\text{截}} + y_{\text{截}} &= (x_0 + \sqrt{x_0 y_0}) + (y_0 + \sqrt{x_0 y_0}) = \\ &= (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0})^2 = a \end{aligned}$$

2.3.2 取对数求导法

【例 3.4】 $y = x^{\sin x}$ ($x > 0$), 求 y' 。

这个函数既不是幂函数, 又不是指数函数, 叫做幂指函数。求导时不能直接应用幂函数或指数函数求导公式。下面我们通过取对数的方法将它化为隐函数, 用隐函数求导法求其导数, 这种方法叫做取对数求导法。

【解】 函数两边取对数, 有

$$\ln y = \sin x \ln x$$

两边关于 x 求导, 得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

从而

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

对于一般的幂指函数

$$y = u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$$

两边取对数, 得

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

两边关于 x 求导,得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x)$$

从而有 $y' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x) \right)$

这个结果可以作为幂指函数的求导公式,为便于记忆,将公式写成

$$[u(x)^{v(x)}]' = u(x)^{v(x)} [v(x) \ln u(x)]'$$

【例 3.5】 $y = x^{x^x}$, 求 y' 。

【解】 $y' = x^{x^x} (x^x \ln x)' =$

$$x^{x^x} [(x^x)' \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}] =$$

$$x^{x^x} \cdot [x^x (x \ln x)' \ln x + x^{x-1}] =$$

$$x^{x^x} [x^x (\ln x + 1) \ln x + x^{x-1}]$$

对于含有多个因式相乘、除或带有乘方、开方的函数,利用取对数求导法求导比较方便。

【例 3.6】 $y = (x-1) \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$, 求 y' 。

【解】 取 $|y|$ 的对数,得

$$\ln |y| = \ln |x-1| + \frac{1}{3} \ln |x| + \frac{1}{3} \ln (x^2+1) - \frac{2}{3} \ln |x^2-1|$$

两边关于 x 求导,得

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{x^2-1}$$

于是可得

$$y' = (x-1) \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{4x}{3(x^2-1)} \right)$$

2.3.3 参数方程表示的函数的求导法则

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (3.1)$$

所确定,关于它的求导法则有如下结论。

【定理 3.1】 如果 $x = \varphi(t)$ 、 $y = \psi(t)$ 都有导数, $\varphi'(t) \neq 0$, 且 $x = \varphi(t)$ 有单值连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 则参数方程 (3.1) 确定的函数亦有导数, 且

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

或写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

【证明】 把 $t = \varphi^{-1}(x)$ 代入 $y = \psi(t)$ 得到复合函数 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$, 由复合函数及反函数求导法则, 得

$$y'_x = \psi'[\varphi^{-1}(x)] [\varphi^{-1}(x)]' = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

【例 3.7】 求摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

【解】 由参数方程求导法,得

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (t \neq 2k\pi)$$

摆线上对应于 $t = \frac{\pi}{2}$ 的点是 $(a(\frac{\pi}{2} - 1), a)$ 。在该点处切线的斜率为

$$y'_x|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$

故所求的切线方程为

$$y - a = 1 \cdot [x - a(\frac{\pi}{2} - 1)]$$

即

$$x - y + \frac{4 - \pi}{2}a = 0$$

【例 3.8】 设炮弹的弹头初速度为 v_0 , 沿着地面成 α 角的方向抛射出去, 求在时刻 t_0 弹头运动的速度和方向(忽略空气阻力及风向等因素)。

【解】 如图 3.1, 建立坐标系, 则弹头运动曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

其中 t 为运动时间, 于是弹头的水平分速度为

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

铅直分速度为

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt$$

运动曲线的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha}$$

t_0 时刻弹头运动速度的大小为

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \Big|_{t=t_0} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt_0)^2}$$

弹头运动的方向就是曲线的切线方向。设在 t_0 时刻弹头的运动方向与地面的夹角为 φ , 则有

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{dy}{dx} \Big|_{t=t_0} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha} \Big|_{t=t_0} = \\ &= \tan \alpha - \frac{gt_0}{v_0 \cos \alpha} \\ \varphi &= \arctan \left(\tan \alpha - \frac{gt_0}{v_0 \cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

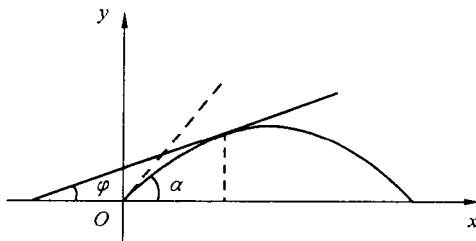


图 3.1

如果变量 x 和 y 都是变量 t 的未知函数, 已知 x 和 y 之间的函数关系及 x 关于 t 的变化率, 求 y 关于 t 的变化率的问题, 称为相关变化率问题。

【例 3.9】 溶液从深为 18 cm 顶直径为 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入直径为 10 cm 的圆柱形筒中, 当溶液在漏斗中深为 12 cm 时, 液面下降速度为 1 cm/min, 问此时圆柱形筒中液面上升的速度是多少?

【解】 设漏斗中原有溶液是 $k \text{ cm}^3$, 漏的过程中, 漏斗内溶液深为 h , 筒内溶液深为 H , 则漏斗内剩余液体为

$$V_{\text{锥}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3$$

此时筒内液体为

$$V_{\text{柱}} = \pi 5^2 H = 25\pi H$$

由于 $V_{\text{锥}} + V_{\text{柱}} = k$, 所以 h, H 之间满足关系

$$\frac{1}{27}\pi h^3 + 25\pi H = k$$

两边关于 t 求导, 得

$$\frac{1}{9}\pi h^2 h' + 25\pi H' = 0$$

$$H' = -\frac{1}{9 \times 25} h^2 h'$$

因此当 $h = 12$ 时, 此时 $h' = -1$ ($h' > 0$ 表示液面上升, $h' < 0$ 表示液面下降), 筒内液面上升速度为

$$H'|_{h=12} = -\frac{1}{9 \times 25} \times 12^2 \times (-1) = 0.64 \text{ cm/min}$$

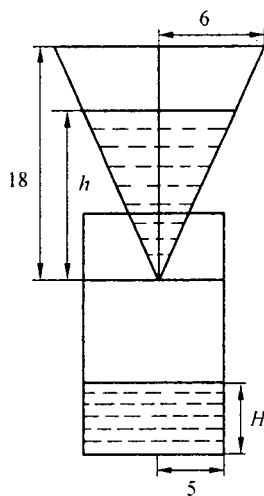


图 3.2

习 题 2.3

1. 求下列方程确定的隐函数的导数或指定点的导数

(1) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

(2) $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $2^x + 2y = 2^{x+y}$

(4) $x - y = \arcsin x \arcsin y$

(5) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$, 求 $y'|_{x=2}$

(6) $\arccos(x+2)^{-\frac{1}{2}} + e^y \sin x = \arctan y$, 求 $y'(0)$

(7) $x^3 - axy + 2ay^2 = 2a^3$, 在 (a, a)

(8) $\sqrt[3]{2x} - \sqrt[8]{y} = 1$, 在 $(4, 1)$

2. 求下列函数的导数或指定点的导数

(1) $y = (\sin x)^{\cos x}$

(2) $y = x(\sin x)^{x^2}$

(3) $y = \sqrt{x \sqrt{1-e^x} \cdot \sin x}$

(4) $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)(x+2)}}$

(5) $y = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, 求 $y'(1)$

(6) $x^y + y^x = 3$, 求 $y'(1)$

3. 求下列参数方程所确定函数的导数 $\frac{dy}{dx}$

(1) $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases}$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = a \sin^3 t \\ y = b \cos^3 t \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^y (\sin t - \cos t) \end{cases}$$

4. 设 $x = f(t) - \pi, y = f(e^{3t} - 1)$, 其中 $f(t)$ 可导, 且 $f'(0) \neq 0$, 求 $y'_x|_{t=0}$.

5. 求曲线 $x^3 + y^3 = 4xy$ 与曲线 $x = \frac{1+t}{t}, y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$ 在交点 $(2, 2)$ 处的交角。

6. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程。证明: 在它的任一点处的切线介于坐标轴间部分的长为一定数。

7. 验证 $x = \frac{1+\ln t}{t^2}, y = \frac{3+2\ln t}{t}$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 满足关系式

$$yy'_x = 2xy'^2_x + 1$$

8. 球的半径以 5 cm/s 的速度匀速增长, 问当球的半径为 50 cm 时, 球的表面积和体积的增长速度是多少?

9. 靶子沿直线以速度 $v = 10$ m/s 移动, 射击运动员到直线的距离为 50 m, 若靶子从垂足处开始移动 5 m 时, 求射击运动员的枪口转动的角速度。

10. 一个半径为 a 的球渐渐沉入盛有部分水的、半径为 b 的圆柱形容器中 ($a < b$)。如果球以匀速下沉, 证明当球浸没一半时, 容器中水面上升的速率是 $\frac{a^2 c}{b - a^2}$ 。

2.4 高阶导数

如果函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 仍有导数 $[f'(x)]'$, 则称 $[f'(x)]'$ 为函数 $y = f(x)$ 的二阶导数, 记为

$$y'' \quad \text{或} \quad f''(x) \quad \text{或} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{或} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\text{即} \quad f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

类似地, 如果 $f''(x)$ 的导数仍存在, 这个导数就叫做 $y = f(x)$ 的三阶导数, 记作

$$y''' \quad \text{或} \quad f'''(x) \quad \text{或} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{或} \quad \frac{d^3 f}{dx^3}$$

一般地, 如果 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数仍存在, 则称它为 $y = f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$y^{(n)} \quad \text{或} \quad f^{(n)}(x) \quad \text{或} \quad \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{或} \quad \frac{d^n f}{dx^n}$$

$$\text{即} \quad f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

相应地, 把函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的一阶导数。

二阶或二阶以上的导数统称为高阶导数。与一阶导数一样, 高阶导数也有着实际的背景, 例如, 已知物体的运动规律 $s = s(t)$, 则速度 $v(t)$ 是路程函数 $s = s(t)$ 对时间 t 的导数, 即

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

而加速度 $a(t)$ 又是速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的导数, 即

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$$

所以加速度 $a(t)$ 是路程函数 $s = s(t)$ 对时间 t 的二阶导数。

根据高阶导数的定义,求高阶导数就是多次接连地求导数,所以只需按求导法则和基本公式一阶阶地算下去即可,规定用“'”表示导数到三阶为止,四阶导数记为 $y^{(4)}$ 。

【例 4.1】 求三次多项式

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

的四阶导数。

【解】

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

$$y''' = 6a$$

$$y^{(4)} = 0$$

可见, n 次多项式的高于 n 阶的导数必然为零。

【例 4.2】 求 $y = e^{\lambda x}$ (λ 为常数) 的各阶导数。

【解】 $y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}, \dots$

【例 4.3】 求 $y = \sin x$ 的 n 阶导数。

【解】

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$y''' = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

\vdots

$$y^{(n)} = \cos[x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}] = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

即

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

同理有

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

【例 4.4】 $y = \frac{1}{x-a}$, 求 $y^{(n)}$ 。

【解】 $y' = \frac{(-1)}{(x-a)^2}, y'' = \frac{(-1)(-2)}{(x-a)^3}, \dots,$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

若 $u(x), v(x)$ 均有 n 阶导数, 由高阶导数的定义, 不难证明公式

$$(1) [cu(x)]^{(n)} = cu^{(n)}(x) \quad (c \text{ 为常数})$$

$$(2) [u(x) \pm v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$$

【例 4.5】 求 $y = \frac{1}{x^2 - a^2}$ 的 n 阶导数。

【解】

$$y = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

根据上述公式及例 4.4 的结论, 有

$$y^{(n)} = \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) \right]^{(n)} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{1}{x-a} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+a} \right)^{(n)} \right] = \\ & \frac{1}{2a} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}} \right] = \\ & \frac{(-1)^n n!}{2a} \left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right] \end{aligned}$$

对于两个函数 $u(x), v(x)$ 乘积的 n 阶导数, 有如下定理。

【定理 4.1】 若 $u(x), v(x)$ 均存在直到 n 阶的导数, 则

$$\begin{aligned} [u(x)v(x)]^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x) = \\ & u^{(n)}(x)v(x) + nu^{(n-1)}(x)v'(x) + \\ & \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)}(x)v''(x) + \cdots + nu'(x)v^{(n-1)}(x) + u(x)v^{(n)}(x) \end{aligned}$$

其中规定 $u^{(0)}(x) = u(x), v^{(0)}(x) = v(x)$ 。上述公式叫做莱布尼茨 (Leibniz 1646 ~ 1716 德国数学家) 公式。可用数学归纳法证明, 这里从略。

【例 4.6】 求 $y = x^2 \sin x$ 的 100 阶导数。

【解】 由莱布尼茨公式及例 4.3, 得

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= (x^2 \sin x)^{(100)} = \\ & (x^2)(\sin x)^{(100)} + 100(x^2)'(\sin x)^{(99)} + \\ & \frac{100 \times 99}{2!} (x^2)''(\sin x)^{(98)} = \\ & x^2 \sin(x + 100 \cdot \frac{\pi}{2}) + 100 \cdot (2x) \sin(x + 99 \cdot \frac{\pi}{2}) \\ & + \frac{99 \times 100}{2!} \cdot 2 \cdot \sin(x + 98 \cdot \frac{\pi}{2}) = \\ & x^2 \sin x - 200x \cos x - 9900 \sin x \end{aligned}$$

下面举例说明隐函数求高阶导数的方法。

【例 4.7】 已知 $x^2 + xy + y^2 = 4$, 求 y'' 及 $y''|_{x=0}$ 。

【解】 方程两边对 x 求导, 得

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \quad (4.1)$$

解出

$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

将式 (4.1) 两边对 x 求导, 得

$$2 + y' + y' + xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$$

解出

$$y'' = -\frac{2 + 2y' + 2(y')^2}{x + 2y}$$

将 y' 的表达式代入, 可得

$$y'' = -\frac{6(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^3} = -\frac{24}{(x + 2y)^3}$$

令 $x = 0$, 由原方程解得 $y = \pm 2$, 于是有

$$y''|_{x=0} = \left. \frac{-24}{(x+2y)^3} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = -\frac{3}{8}$$

或

$$y''|_{x=0} = \left. \frac{-24}{(x+2y)^3} \right|_{\substack{x=0 \\ y=-2}} = \frac{3}{8}$$

对于参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

如果 $x = \varphi(t)$ 、 $y = \psi(t)$ 是二阶可导函数, 我们可以求由参数方程所确定函数的二阶导数。首先它的一阶导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)}{\varphi'(t)} = \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \end{aligned}$$

这就是求参数方程二阶导数的计算公式。但这个公式不便于记忆, 在求高阶导数时, 只需学会求导方法。例如

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}, \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)}{\frac{dx}{dt}}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

【例 4.8】 设 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ 。

【解】

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{b}{a} \frac{1}{\sin^2 t}}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2} \frac{1}{\sin^3 t} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{b}{a^2} \cdot (-3) \frac{\cos t}{\sin^4 t}}{-a \sin t} = -\frac{3b \cos t}{a^3 \sin^5 t} \end{aligned}$$

最后我们再看两个例题。

【例 4.9】 设 $f(x)$ 是单调函数, $g(y)$ 是它的反函数, 且 $f(1) = 2$, $f'(1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f''(1) = 1$, 求 $g''(2)$ 。

【解】 由反函数求导法则, 有

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ g''(y) &= -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot g'(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \end{aligned}$$

从而

$$g''(2) = -\frac{f''(1)}{[f'(1)]^3} = \frac{-1}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3} = 3\sqrt{3}$$

【例 4.10】 已知 y 是 x 的函数, 满足关系

$$x^2 y'' + x y' = 0$$

而 x 又是 t 的函数 $x = e^t$, 求 y 关于 t 的二阶导数。

【解】 因为

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = e^t \frac{dy}{dx} = x \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(\frac{dy}{dt})}{dx} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dy}{dx} + x \frac{d^2y}{dx^2} \right) e^t = x \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

所以 $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$

习 题 2.4

1. 求下列函数的高阶导数

(1) $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 求 y'' (2) $y = (1 + x^2)\arctan x$, 求 y''

(3) $y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$, 求 y''

(4) $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 y''

(5) $y = \sin^2 x$, 求 $y^{(n)}$ (6) $y = x \ln x$, 求 $y^{(n)}$

(7) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 求 $y^{(n)}$

(8) $y = \frac{2x-1}{(x-1)(x^2-x-2)}$, 求 $y^{(n)}$

(9) $y = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x$, 求 $y^{(27)}|_{x=\pi}$

(10) $y = x^2 e^x$, 求 $y^{(100)}$

2. 求下列隐函数的指定阶的导数

(1) $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, 求 y''

(2) $y = \tan(x + y)$, 求 y'''

(3) $e^{x+y} = xy$, 求 y''_x 和 x''_y

3. 求下列参数方程指定阶的导数

(1) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, 求 y''_x $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, 求 y''_x

(3) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求 y''_x

(4) $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = t f'(t) - f(t) \end{cases}$, 其中 $f(t)$ 具有二阶导数, 且不为零, 求 y''_x

(5) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}$, 求 y'''_x (6) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^m \end{cases}$, 求 $y^{(n)}_x$

4. 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$ 。

5. 设 $u = f[\varphi(x) + y^2]$, 其中 $y = f(x)$ 由方程 $y + e^y = x$ 确定, 且 $f(x)$ 、 $\varphi(x)$ 均有二阶导数, 求 $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ 。

6. 设 $y = |x|^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 试证 $y'' = 6|x|$ 。

7. 设 $f(x)$ 具有各阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 求 $f^{(n)}(x)$ 。

8. 证明函数 $f(x)$ 是 n 次多项式, a 是方程 $f(x) = 0$ 的 $k(k \leq n)$ 重根, 则

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, \text{ 而 } f^{(k)}(a) \neq 0$$

9. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 点存在任意阶导数, 且 $f^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \cdots$

10. 设 $y = y(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有二阶导数, 且满足

$$(1 - x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$$

作变换 $x = \sin t$, 证明这时 y 满足

$$y'' + a^2y = 0$$

2.5 微 分

2.5.1 微分的概念

考察一个具体问题。

一个正方形的金属薄片, 当温度变化时, 其边长由 x_0 改变到 $x_0 + \Delta x$, 此时薄片的面积 A 相应地有一个增量

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

ΔA 由两部分组成, 第一部分是 $2x_0\Delta x$, 它是 Δx 的线性函数, 第二部分是 $(\Delta x)^2$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 它是比 Δx 高阶的无穷小。由于计算 $2x_0\Delta x$ 较方便, 如果用它作为 ΔA 的近似值, 当 $|\Delta x|$ 很小时, 所产生的误差也很小, 所以当 $|\Delta x|$ 很小时, 第一部分是主要的, 第二部分是次要的。如果略去次要部分, 就有近似表达式

$$\Delta A \approx 2x_0\Delta x$$

再例如, 半径为 r 的球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 当半径 r 的增量为 Δr 时, 体积的增量为

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \\ &= 4\pi r^2\Delta r + 4\pi(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3 \end{aligned}$$

ΔV 也由两部分组成, 第一部分 $4\pi r^2\Delta r$ 是 Δr 的线性函数, 第二部分为 $4\pi(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3$, 当 $\Delta r \rightarrow 0$ 时, 它是比 Δr 高阶的无穷小, 当 $|\Delta r|$ 很小时, 略去第二部分, 就有近似式

$$\Delta V \approx 4\pi r^2\Delta r$$

在一般情况下, 对于函数 $y = f(x)$, 当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 函数的增量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

此式看似简单, 实际上用上式计算函数的增量往往是比较困难的。这是因为函数 $f(x)$ 可能是未知的或计算 $f(x_0)$ 、 $f(x_0 + \Delta x)$ 比较困难。那么能不能像前面引入的实例那样, 将 Δy 分成两个部分, 一部分是 Δx 的线性函数, 另一部分是比 Δx 高阶的无穷小, 也就是说, 能否有一个常数 A , 使

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

这样,当 $A \neq 0$ 且 $|\Delta x|$ 很小时,就可以用 $A\Delta x$ 近似代替 Δy ,而计算 $A\Delta x$ 是容易的。

【定义 5.1】 若函数 $y = f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义,在 x_0 点处的增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

与自变量增量 Δx 之间存在关系

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数,则称 $f(x)$ 在 x_0 点可微, $A\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的微分,记作

$$dy|_{x=x_0} = A\Delta x \quad \text{或} \quad df(x)|_{x=x_0} = A\Delta x$$

函数的微分有两个重要特点:(1)微分是自变量增量 Δx 的线性函数;(2)微分与函数增量之差是一个比 Δx 高阶的无穷小量,当 $A \neq 0$ 时, $A\Delta x$ 是 Δy 的线性主部。

下面我们来看一看函数的可微性与可导性之间的关系。

【定理 5.1】 函数 $y = f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义,则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件是它在点 x_0 处可导,且 $A = f'(x_0)$ 。

【证明】 必要性 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微,即

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

A 是与 Δx 无关的常数,上式两边同除 Δx ,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

于是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A$$

即函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导,且 $f'(x_0) = A$ 。

充分性 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导,即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

由极限与无穷小的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

其中 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$,从而

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\alpha(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

由可微的定义知, $f(x)$ 在点 x_0 处可微,且 $dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$ 。

若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上处处可微,称 $y = f(x)$ 在 I 上可微,它在区间 I 上任意一点 x 处的微分为

$$dy = f'(x)\Delta x$$

特别地 $y = x$ 时

$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x$$

即

$$dx = \Delta x$$

这说明自变量的微分与其增量相等,因此函数 $y = f(x)$ 的微分 $dy = f'(x)\Delta x$ 通常写成

$$dy = f'(x)dx$$

由微分公式可得

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

过去 $\frac{dy}{dx}$ 一直作为一个记号来表示导数, 引进微分的概念之后, $\frac{dy}{dx}$ 表示函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 的商, 所以导数又称为微商。

微分的几何意义如图 5.1。

PM 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线, 切线的斜率 $\tan \alpha = f'(x_0)$ 。当横坐标由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 有

$$QN = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$$

$$MN = \tan \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \Delta x = dy$$

这表明, 当曲线上一点 P 的横坐标 x_0 有一个增量 Δx 时, 相应的微分 dy 就是曲线过点 P 的切线 PM 的纵坐标的增量, 图中 QM 表示的是 Δy 与 dy 的差, 它是比 Δx 高阶的无穷小, 随着 $\Delta x \rightarrow 0$, QM 很快趋于零, 用微分 dy 代替增量 Δy , 其实是在 x_0 的局部, 用切线近似地表示曲线。

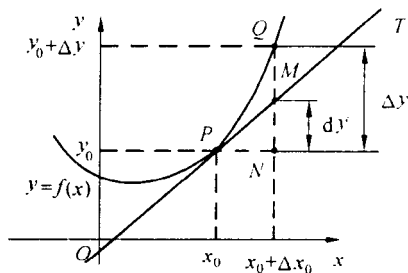


图 5.1

2.5.2 微分基本公式和运算法则

函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 乘以 dx 即可求得函数 $y = f(x)$ 的微分 dy , 所以微分运算和求导运算是类似的, 由导数基本公式和导数的运算法则可相应地得到微分基本公式和微分运算法则。

微分基本公式

- | | |
|--|--|
| (1) $dc = 0 \quad (c \in \mathbf{R})$ | (2) $dx^\mu = \mu x^{\mu-1} dx \quad (\mu \in \mathbf{R})$ |
| (3) $da^x = a^x \ln a dx$ | (4) $d e^x = e^x dx$ |
| (5) $d \log_a x = \frac{dx}{x \ln a}$ | (6) $d \ln x = \frac{dx}{x}$ |
| (7) $d \sin x = \cos x dx$ | (8) $d \cos x = -\sin x dx$ |
| (9) $d \tan x = \sec^2 x dx$ | (10) $d \cot x = -\csc^2 x dx$ |
| (11) $d \sec x = \sec x \tan x dx$ | (12) $d \csc x = -\csc x \cot x dx$ |
| (13) $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | (14) $d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| (15) $d \arctan x = \frac{dx}{1+x^2}$ | (16) $d \operatorname{arccot} x = -\frac{dx}{1+x^2}$ |

【定理 5.2】 微分四则运算法则:

设 $u(x), v(x)$ 均可微, 则

$$(1) d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x)$$

$$(2) d[u(x)v(x)] = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$$

$$d[cu(x)] = cd u(x) \quad (c \text{ 为常数})$$

$$(3) d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$$

这里只证(3)。

【证】

$$\begin{aligned} d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] &= \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' dx = \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} dx = \\ &= \frac{v(x)u'(x)dx - u(x)v'(x)dx}{v^2(x)} = \\ &= \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

复合函数微分法:

设 $y = f(u)$ 是可微的, 当 u 是自变量时, 函数 $y = f(u)$ 的微分

$$dy = f'(u)du$$

如果 u 不是自变量, 而是另一个变量 x 的可微函数 $u = g(x)$ 时, 复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分

$$dy = \{f[g(x)]\}' dx = f'(u) \cdot g'(x) dx = f'(u) du$$

可见, 不管 u 是自变量还是中间变量 (即 u 是另一变量的函数), 函数 $y = f(u)$ 的微分形式均有 $dy = f'(u)du$, 这个性质叫做一阶微分形式的不变性. 而导数则不具有这种性质, 因为当 u 是自变量时, $y = f(u)$ 的导数 $y' = f'(u)$, 当 u 是中间变量 ($u = g(x)$) 时, 则导数为 $y' = f'(u)g'(x)$. 因此, 在谈导数时我们总要指明是对哪一个变量的导数, 而在谈微分时则无需指明是对哪一个变量的微分.

利用 $dy = f'(x)dx$ 这一关系式, 就可以求出函数的微分, 例如, $[\sin(5x+1)]' = 5\cos(5x+1)$, 所以 $d\sin(5x+1) = 5\cos(5x+1)dx$.

下面我们举一些利用微分运算法则来求函数的微分的例子.

【例 5.1】 $y = \frac{\sin 2x}{x^2}$, 求 dy .

【解】 $dy = d\left(\frac{\sin 2x}{x^2}\right) = \frac{x^2 d\sin 2x - \sin 2x dx^2}{x^4}$

在 $\sin 2x$ 中将 $2x$ 看成中间变量 u , 则

$$\begin{aligned} d\sin 2x &= d\sin u = \cos u du = \cos 2x d2x = \\ &= \cos 2x \cdot 2dx = 2\cos 2x dx \end{aligned}$$

最后得到

$$d\frac{\sin 2x}{x^2} = \frac{2(x\cos 2x - \sin 2x)}{x^3} dx$$

类似于复合函数求导, 在求复合函数微分时可以不写出中间变量.

【例 5.2】 $y = e^{\sin^2 x}$, 求 dy .

【解】 $dy = e^{\sin^2 x} d\sin^2 x = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x d\sin x =$

$$e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x dx = e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$$

【例 5.3】 设 $x^2 \sin y + xy^2 = 1$, 求 dy .

【解】 等式两边求微分, 得

$$(\sin y dx^2 + x^2 d\sin y) + (y^2 dx + x dy^2) = d(1)$$

$$2x\sin y dx + x^2\cos y dy + y^2 dx + 2xy dy = 0$$

故有

$$dy = -\frac{2x\sin y + y^2}{x^2\cos y + 2xy} dx$$

【例 5.4】 求一个函数, 使其微分等于 $\frac{dx}{x\cos^2 \ln x}$.

【解】

$$\frac{dx}{x \cos^2 \ln x} = \frac{d \ln x}{\cos^2 \ln x} = d \tan \ln x$$

故函数 $\tan \ln x$ 为所求函数。

2.5.3 微分在近似计算和误差估计中的应用

(1) 近似计算。如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点的导数 $f'(x_0) \neq 0$, 则当 $|\Delta x|$ 充分小时, 可以用微分 dy 来近似计算增量 Δy , 即有

$$\Delta y \approx dy$$

将上式写成

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x \quad (5.1)$$

或

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \quad (5.2)$$

在式(5.2)中令 $x = x_0 + \Delta x$, 则式(5.2)可写成

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5.3)$$

特别, 当 $x_0 = 0$ 时, 有

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \quad (5.4)$$

如果 $f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$ 都容易计算, 就可利用式(5.1)来近似计算 Δy , 利用式(5.2)来近似计算 $f(x_0 + \Delta x)$, 或利用式(5.3)来近似计算 $f(x)$ 。

利用近似公式(5.4)容易得到工程上常用的近似公式。当 $|x|$ 充分小时, 有

$$\sin x \approx x \quad \tan x \approx x \quad e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1+x) \approx x \quad (1+x)^\mu \approx 1 + \mu x \quad (\mu \text{ 为实数})$$

这些公式读者可以自己推证。

【例 5.5】 计算 $\sqrt[3]{995}$ 的近似值。

【解】 $\sqrt[3]{995} = \sqrt[3]{1\,000 - 5} = 10 \sqrt[3]{1 - \frac{5}{1\,000}}$

现在 $\frac{5}{1\,000}$ 很小, 故可用近似公式 $(1+x)^\mu \approx 1 + \mu x$ 处理, 有

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{995} &= 10 \sqrt[3]{1 - \frac{5}{1\,000}} \approx \\ &10 \left[1 - \frac{1}{3} \times \frac{5}{1\,000} \right] \approx 9.983 \end{aligned}$$

【例 5.6】 求 $\tan 31^\circ$ 的近似值。

【解】 把 31° 化为弧度, 得

$$31^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$$

设 $f(x) = \tan x$, 则 $f'(x) = \sec^2 x$ 。取 $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, 则 $f(\frac{\pi}{6})$, $f'(\frac{\pi}{6})$ 都容易计算, 并且 Δx 比较小, 应用近似公式(5.2), 便得

$$\begin{aligned} \tan 31^\circ &= \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \\ &\tan \frac{\pi}{6} + \sec^2 \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \\ &\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.600\,621 \end{aligned}$$

(2) 误差估计。工作中,有些量的数值是通过直接测量或实验得到的。有些量的值是在测试得到的数据的基础上,再通过函数关系的计算得到的。比如圆盘的面积,通常是先测量其直径 D 的值,然后用公式 $S = \frac{1}{4}\pi D^2$ 计算面积值。设未知量 x 的值可由直接观测或实验得到,由于所用仪器的精度有限以及其它的因素,测得的值 x_0 为未知量 x 的近似值,则 $|\Delta x| = |x - x_0|$ 为观测值 x_0 的绝对误差。依据这个有误差的数据 x_0 ,通过关系式 $y = f(x)$ 算出另一个未知量的近似值 $y_0 = f(x_0)$,则 $|\Delta y| = |y - y_0|$ 为 y_0 的绝对误差。由于 x 与 y 均为未知量,所以 Δx 与 Δy 亦为未知量,其精确值是无法求得的。如果能估计 $|\Delta x|$ 的一个较小的上界 δx (即 $|\Delta x| \leq \delta x$, δx 称为 x 的绝对误差限,简称绝对误差),则可利用微分把 $|\Delta y|$ 的一个上界 δy (即 $|\Delta y| \leq \delta y$, 称为 y_0 的绝对误差限,简称绝对误差) 估算出来。

若已知 x_0 的绝对误差(限)为 δx ,一般 δx 很小,则

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x_0)| |\Delta x| \leq |f'(x_0)| \delta x$$

即 y_0 的绝对误差(限) δy 为 $|f'(x_0)| \delta x$, 于是 y_0 的相对误差为

$$\left| \frac{\Delta y}{y_0} \right| \approx \left| \frac{dy}{y_0} \right| \leq \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \delta x$$

$\left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \delta x$ 称为 y_0 的相对误差限,简称相对误差,通常用百分比表示。

【例 5.7】 用游标卡尺测得圆钢直径为 $D = 50.2 \pm 0.05$ mm,利用公式 $S = \frac{\pi}{4} D^2$ 计算圆钢断面面积时,它的绝对误差和相对误差是多少?

【解】 测量的绝对误差 $\delta = 0.05$ mm,由于

$$S' = \frac{\pi}{2} D$$

所以断面面积的绝对误差

$$|\Delta S| \approx |dS| \leq \left. \frac{\pi}{2} D \right|_{D=50.2} \cdot \delta = \frac{\pi}{2} \times 50.2 \times 0.05 \approx 3.94 \text{ mm}^2$$

$$\text{相对误差} \quad \left| \frac{\Delta S}{S} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2} \times 50.2 \times 0.05}{\frac{\pi}{4} \times (50.2)^2} \approx 0.2\%$$

2.5.4 高阶微分

对于函数 $y = f(x)$,类似于高阶导数,我们可以定义高阶微分。函数 $y = f(x)$ 的微分 dy 的微分 $d(dy)$,叫做这个函数的二阶微分,记为 d^2y 或 $d^2f(x)$,即

$$d^2y = d(dy)$$

二阶微分 d^2y 的微分 $d(d^2y)$,叫做 $y = f(x)$ 的三阶微分,记作

$$d^3y = d(d^2y)$$

一般地, $n-1$ 阶微分 $d^{n-1}y$ 的微分,叫做 $y = f(x)$ 的 n 阶微分,记作

$$d^n y = d(d^{n-1}y)$$

函数 $f(x)$ 在 x 点的各阶微分,也记作

$$df(x), d^2f(x), d^3f(x), \dots, d^n f(x)$$

在 x 为自变量时,我们很容易得出各阶微分的表达式,只须注意到 x 的增量就是 x 的微分 dx ,其值与 x 的值无关.因此,在对任何函数的某阶微分继续进行关于 x 的微分运算时, dx 应该看做是常数,于是

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(y'dx) = d(y')dx = y''dx^2 \\ d^3y &= d(d^2y) = d(y''dx^2) = d(y'')dx^2 = y'''dx^3 \\ &\vdots \\ d^n y &= d(d^{n-1}y) = d(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = d(y^{(n-1)})dx^{n-1} = y^{(n)}dx^n \end{aligned}$$

这里 $dx^n = (dx)^n$,由此可得到高阶导数的一种新的解释

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y''', \dots, \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$$

即 $y = f(x)$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$ 是函数 $y = f(x)$ 的 n 阶微分 $d^n y$ 与自变量微分 dx 的 n 次幂 dx^n 的商。

前面已经指出过,对于一阶微分 $dy = f'(u)du$,不论其中的 u 是自变量还是中间变量,这个形式都是不变的,但是,对高阶微分,这个结论是不成立的。

事实上,设 $y = f(u)$ 、 $u = g(x)$,则由一阶微分形式的不变性,有

$$dy = f'(u)du$$

由于 u 已不是自变量,故 du 也不再是固定的了,它依赖于自变量 x ,于是 $du = g'(x)dx$,从而

$$\begin{aligned} d^2y &= d[f'(u)du] = [df'(u)]du + f'(u)d(du) = \\ &= f''(u)du^2 + f'(u)d^2u \end{aligned}$$

把它和 u 为自变量的二阶微分表达式相比较,多出了最后一项。

由此可见,微分形式的不变性这一性质,只对一阶微分成立,而对高阶微分就不成立了,这是高阶微分与一阶微分之间的一个重要区别。

习 题 2.5

1. 求函数 $y = 5x + x^2$ 当 $x = 2$ 和 $\Delta x = 0.001$ 时的增量 Δy 和微分 dy 。

2. “若 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导,则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,该函数在 x_0 点的微分 dy 是 Δx 的同阶无穷小。”这种说法是否正确?为什么?

3. 求下函数的微分

$$(1) y = \frac{x}{1-x} \quad (2) y = x \ln x - x$$

$$(3) y = \tan^2(1 + 2x^2) \quad (4) y = x^{\sin x}$$

$$(5) y = \sin^2 u, u = \ln(3x + 1)$$

$$(6) y = \arctan \frac{u(x)}{v(x)} \quad (u'(x), v'(x) \text{ 均存在})$$

4. 将适当的函数填入括号内,使下列各式成为等式

$$(1) x dx = d(\quad) \quad (2) \frac{1}{x} dx = d(\quad)$$

$$(3) \sin x dx = d(\quad) \quad (4) \sec^2 x dx = d(\quad)$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = d(\quad) \quad (6) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\quad)$$

$$(7) e^{-2x} dx = d(\quad) \quad (8) x^2 e^{-x^3} dx = (\quad) d(-x^3)$$

$$(9) d(\arctan e^{2x}) = (\quad) de^{2x} \quad (10) d(\sin \sqrt{\cos x}) = (\quad) d \cos x$$

5. 求由下列方程所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的微分 dy

(1) $e^{x+y} - xy = 0$

(2) $y = e^{-\frac{x}{x}}$

(3) $\varphi(\sin x) + \sin \varphi(y) = \varphi(x + y)$, 其中 $\varphi(t)$ 处处可导

6. 求由参数方程 $x = 3t^2 + 2t + 3, e^y \sin t - y + 1 = 0$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 的微分 dy 。

7. 设 $x = f(t)\cos t - f'(t)\sin t, y = f(t)\sin t + f'(t)\cos t$, 试证: $(dx)^2 + (dy)^2 = [f(t) + f''(t)]^2 (dt)^2$ ($f''(t)$ 存在)。

8. 利用微分近似计算下列各数(结果取到小数点后第四位, 中间运算均取小数点第五位, 最后结果在第五位上四舍五入)

(1) $\sqrt[3]{998}$

(2) $\cos 59^\circ$

(3) $\ln 0.99$

(4) $e^{1.01}$

9. 测得正方形的边长为 2.4 ± 0.05 m, 求正方形的面积, 并估计绝对误差和相对误差。

10. 有半径为 $R = 100$ cm 及圆心角 $\alpha = 60^\circ$ 的扇形, 若半径 R 增 1 cm; 或角 α 减小 $30'$, 问扇形面积各改变多少?(近似值准确到小数点后两位)

11. 单摆振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, 其中 L 为摆长(以 cm 计), $g = 980$ cm/s² 为重力加速度, 为使周期增大 0.052, 需将 $L = 20$ cm 的摆长改变多少?

12. 证明计算圆面积或球面积时, 当半径的长度有 1% 的相对误差时, 圆面积或球表面积的相对误差为 2%。(注: 球表面面积公式 $S = 4\pi r^2$, r 为球的半径)

13. 求下列函数 y 关于自变量 x 的二阶微分

(1) $y = x \cos 2x$

(2) $xy + y^2 = 1$

第三章 导数应用

在上一章中,我们引进了导数的概念及求导法则,并讨论了导数的几何意义。其实由导数推得的函数性质远不止于此。为了能够进一步应用导数来研究函数的一些性质,本章首先介绍了微分中值定理,这是微分学的理论基础,在这个基础上我们就可以利用导数来研究函数在区间上的变化状态。如函数的单调性、极值、凸凹性、拐点和渐近线等。

3.1 中值定理

【定理 1.1】 洛尔(Rolle 1652~1719 法国数学家)定理 若函数满足条件:

- (1) $f(x) \in C[a, b]$
- (2) $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导
- (3) $f(a) = f(b)$

则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f'(\xi) = 0$$

【证】 由条件(1)知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值 M 及最小值 m 。

现分两种情况讨论:

若 $m = M$, 则对于 (a, b) 上所有 x , $f(x) = m (= M)$, 这时任何一点 $\xi \in (a, b)$, 都有 $f'(\xi) = 0$ 。

若 $m < M$, 由条件(3)知, M 与 m 中至少有一个不等于 $f(a) (= f(b))$ 。不妨设 $M \neq f(a)$, 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ 使得 $f(\xi) = M$ 。我们来证明 $f'(\xi) = 0$ 。

由条件(2)知, $f'(\xi)$ 存在。由于 $f(\xi)$ 为最大值, 所以不论 Δx 为正或为负, 总有

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leq 0$$

当 $\Delta x > 0$ 时, 有

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0$$

由极限的保序性知

$$f'_+(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0$$

同样当 $\Delta x < 0$ 时

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0$$

所以

$$f'_-(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0$$

又

$$f'(\xi) = f'_+(\xi) = f'_-(\xi)$$

故

$$f'(\xi) = 0$$

洛尔定理的几何意义是: 若连续曲线 $y = f(x)$ 的弧 \widehat{AB} 上处处具有切线, 并且两端的纵坐标相等, 则在这弧上至少能找到一点, 使曲线在该点的切线平行于 x 轴(图 1.1)。

应当注意的是洛尔定理的条件(1)、(2)、(3)缺少其中任何一条,都可能使结论不成立。例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \text{ 不满足洛尔定理条件(1),}$$

函数 $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x} (-1 \leq x \leq 1)$ 不满足洛尔定理条件(2), 函数 $f(x) = x (0 \leq x \leq 1)$ 不满足洛尔定理条件(3), 上述三个函数关于洛尔定理的结论均不成立。另外还需注意, 洛尔定理的条件是充分的, 但不是必要的。即一个函数在某一区间上能找到适合定理的点 ξ , 但洛尔定理的条件不一定全部满足。例如, 函数 $f(x) = x^3 (-1 \leq x \leq 1)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内点 $x = 0$ 处有 $f'(0) = 0$, 但该函数不满足洛尔定理条件(3)。

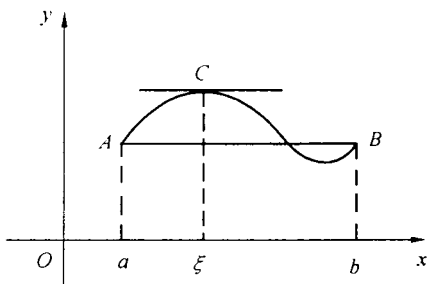


图 1.1

【例 1.1】 设 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ 是满足条件

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \dots + \frac{c_n}{n+1} = 0$$

的实数, 试证在 0 与 1 之间, 方程

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$$

至少有一个实根。

【解】 设 $f(x) = c_0x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 + \dots + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$, 显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且

$$f(0) = 0, f(1) = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \dots + \frac{c_n}{n+1} = 0$$

所以函数 $f(x)$ 满足洛尔定理条件, 故在开区间 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f'(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \dots + c_n\xi^n = 0$$

即方程

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$$

在 0 与 1 之间至少有一个根。

【例 1.2】 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, $f'(x), g'(x)$ 在 (a, b) 内存在, 且 $g'(x) \neq 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

【证】 首先指出对于任意的 $\xi \in (a, b)$, 有 $g(\xi) - g(b) \neq 0$, 若不然, 至少存在一点 $\xi_1 \in (a, b)$, 使得 $g(\xi_1) - g(b) = 0$, 即 $g(\xi_1) = g(b)$, 由洛尔定理, 必存在一点 $\eta \in (\xi_1, b) \subset (a, b)$, 使得 $g'(\eta) = 0$, 与已知矛盾。

设 $F(x) = [f(a) - f(x)][g(x) - g(b)]$, 易知 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, $F(a) = F(b) = 0$, 由洛尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$F'(\xi) = [f(a) - f(\xi)]g'(\xi) - f'(\xi)[g(\xi) - g(b)] = 0$$

于是

$$\frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

【例 1.3】 设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \neq 0, x \in (a, b)$, 且 $f'(x)$ 存在, $f(a) = f(b) = 0$ 。求证: 对于任何实数 α , 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\alpha = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$$

【证】 构造函数

$$F(x) = e^{-\alpha x} f(x)$$

则 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $F'(x) = [-\alpha f(x) + f'(x)]e^{-\alpha x}$ 又 $F(a) = F(b) = 0$, 根据洛尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$F'(\xi) = -\alpha e^{-\alpha \xi} f(\xi) + e^{-\alpha \xi} f'(\xi) = 0$$

于是有

$$\alpha = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$$

【定理 1.2】 拉格朗日 (Lagrange 1736 ~ 1813 法国数学家) 定理 若函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f(x) \in C[a, b]$

(2) $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导

则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (1.1)$$

【证】 如图 1.2, 过 $A(a, f(a))$ 、 $B(b, f(b))$ 两点的弦 AB 的方程为

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

即

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

构造辅助函数 $\varphi(x)$ 是函数 $f(x)$ 与弦的纵坐标的差。

$$\varphi(x) = f(x) - y = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, 由洛尔定理, 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

将公式 (1.1) 写成

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

等式左端是曲线 $y = f(x)$ 上 $A(a, f(a))$ 、 $B(b, f(b))$ 两点的弦的斜率, 右端 $f'(\xi)$ 是过这曲线的弧 \widehat{AB} 上一点 $C(\xi, f(\xi))$ 的切线的斜率 (图 1.2)。拉格朗日定理的几何意义是: 曲线 $y = f(x)$ 上至少能找到一点 $(\xi, f(\xi))$, 使得过这点的切线与曲线两端点连接的弦平行。当弦 AB 平行于 Ox 轴时 (此时有 $f(a) = f(b)$), 便得到洛尔定理, 可见拉格朗日定理是洛尔定理的推广。

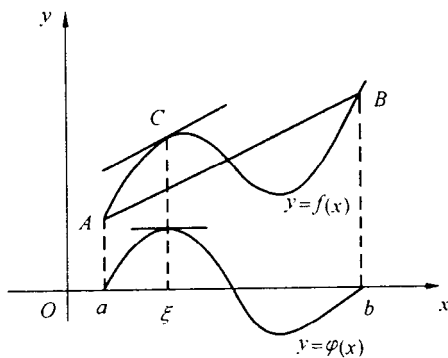


图 1.2

公式 (1.1) 叫做拉格朗日中值公式, 在微分学中占有极重要的地位, 它表明了函数在两点处的函数值与导数间的关系。

显然, 公式 (1.1) 对于 $b < a$ 的情形也成立, 若改用 x 及 $x + \Delta x$ 表示 a 与 b (其中 Δx 可正可负), 由公式 (1.1) 有

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x \quad (1.2)$$

其中 ξ 介于 $x, x + \Delta x$ 之间。由于 ξ 可表为

$$\xi = x + \theta\Delta x \quad (0 < \theta < 1)$$

式(1.2)又可写成

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x \quad (1.3)$$

把上式写为 $\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$, 并与函数增量的表达式 $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ 比较, 可见函数的微分 $dy = f'(x)\Delta x$ 只能作为增量 Δy 的近似表达式, 并且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 误差才趋于零, 而公式(1.3)对任何有限的增量 Δx 均成立, 所以公式(1.3)也叫有限增量公式, 应当注意到, 定理 1.2 只肯定了公式(1.1)、(1.2)中的 ξ 和公式(1.3)中的 θ 存在, 但定理本身并未告诉我们它的准确数值, 尽管如此, 这并不妨害公式在理论方面的重要意义。

与洛尔定理一样, 拉格朗日定理的条件也是充分条件, 并非必要条件。

从定理 1.2 可以引出如下两个重要推论。

【推论 1】 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \equiv 0$, 则

$$f(x) = C \quad x \in (a, b)$$

其中 C 为常数。

【证】 任取 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 应用拉格朗日中值定理, 便有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (\xi \text{ 介与 } x_1, x_2 \text{ 之间})$$

根据假设 $f'(\xi) = 0$, 有

$$f(x_1) = f(x_2)$$

由 x_1, x_2 的任意性, 可得

$$f(x) = C \quad x \in (a, b)$$

【推论 2】 若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) = g'(x), x \in (a, b)$, 则

$$f(x) = g(x) + C \quad (C \text{ 为常数})$$

【证】 因为 $f'(x) = g'(x)$, 所以

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 0$$

由推论 1 有

$$f(x) - g(x) = C$$

即

$$f(x) = g(x) + C$$

【例 1.4】 试证

$$\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{\pi}{4} \quad x \in (-1, 1)$$

【证】 令 $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \end{aligned}$$

由推论 1 知

$$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x = C$$

令 $x = 0$, 得 $C = \frac{\pi}{4}$, 于是

$$\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{\pi}{4}$$

【例 1.5】 试证: 当 $n > 1, 0 < x < y$ 时, 有不等式

$$nx^{n-1}(y-x) < y^n - x^n < ny^{n-1}(y-x)$$

【证】 设 $f(t) = t^n$, 则 $f(t)$ 在区间 $[x, y]$ 上满足拉格朗日定理的条件, 故有

$$y^n - x^n = n\xi^{n-1}(y-x) \quad \xi \in (x, y)$$

因为 $y - x > 0, x < \xi < y$, 所以当 $n > 1$ 时, 有

$$nx^{n-1}(y-x) < y^n - x^n < ny^{n-1}(y-x)$$

【例 1.6】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, $f'(x) \neq 1$, 且 $0 < f(x) < 1$, 试证方程 $f(x) = x$ 在区间 $(0, 1)$ 内有且仅有惟一的一个实根。

【证】 设 $F(x) = f(x) - x$, 显然 $F(x) \in C[0, 1]$, 又 $F(0) = f(0) - 0 > 0, F(1) = f(1) - 1 < 0$, 由零点存在定理知, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使

$$F(\xi) = f(\xi) - \xi = 0$$

即

$$f(\xi) = \xi$$

这说明方程 $f(x) = x$ 的根是存在的。

下面证明惟一性, 若另有一点 $\xi_1 \in (0, 1)$, 不妨设 $\xi < \xi_1$, 使得

$$f(\xi_1) = \xi_1$$

在区间 $[\xi, \xi_1]$ 上, 对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 存在一点 $\eta \in (\xi, \xi_1)$, 使得

$$\xi_1 - \xi = f(\xi_1) - f(\xi) = f'(\eta)(\xi_1 - \xi)$$

从而

$$f'(\eta) = \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi} = 1$$

与已知矛盾。这说明方程的根 ξ 是惟一的。

【例 1.7】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 可导, 且无界, 求证 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内也无界, 但逆命题不成立。

【证】 用反证法, 若 $\exists M > 0$, 使

$$|f'(x)| \leq M \quad x \in (a, b)$$

任意取定一点 $x_0 \in (a, b)$, 对 $\forall x \in (a, b) (x \neq x_0)$, $f(x)$ 在以 x_0, x 为端点的区间上满足拉格朗日定理的条件, 于是

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

从而

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x_0)| + |f'(\xi)| |x - x_0| \leq \\ &|f(x_0)| + M(b - a) \end{aligned}$$

这与 $f(x)$ 在 (a, b) 无界矛盾, 故 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 上无界。

关于逆命题不成立, 可见函数 $y = \sqrt{x}$, 它的导数 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在区间 $(0, 1)$ 上无界, 但函数 $y = \sqrt{x}$ 本身在区间 $(0, 1)$ 上是有界的。

【例 1.8】 若 $f(x)$ 在 $U(a)$ 内连续, 在 $\overset{\circ}{U}(a)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$, 则 $f(x)$ 在 a 点可导且 $f'(a) = l$ 。

【证】 $\forall x \in \dot{U}(a)$, 且 $x > a$, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, x]$ 上满足拉格朗日定理条件, 于是有

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x)$$

其中 ξ_x 介于 a, x 之间, 注意到 $x \rightarrow a$ 时, 有 $\xi_x \rightarrow a$, 得到

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(\xi_x) = l$$

同理可得

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(\xi_x) = l$$

于是 $f(x)$ 在 a 点可导, 且 $f'(a) = l$ 。

【例 1.9】 证明: 若函数 $f(x) \in C[a, b]$, 在区间 (a, b) 内可导, 且为非线性函数, 则存在点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$$

【证】 如图 1.3, 由于 $f(x)$ 是非线性函数, 必存在点 $c \in (a, b)$, 使点 $(c, f(c))$ 不在弦 AB 上, 不妨设点 $(c, f(c))$ 在弦 AB 的下方, 于是有

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

由拉格朗日定理, 存在 $\xi_1 \in (a, c)$, $\xi_2 \in (c, b)$, 使得

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(\xi_2)$$

于是有

$$f'(\xi_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\xi_2)$$

$$\text{当 } f(a) \leq f(b) \text{ 时, 有 } f'(\xi_2) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$$

0, 取 $\xi = \xi_2$, 便有

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$$

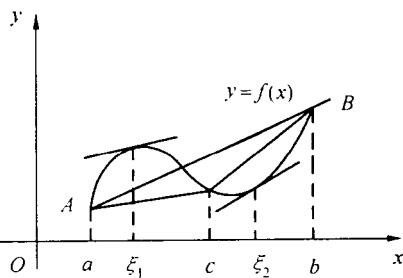


图 1.3

$$\text{当 } f(a) > f(b) \text{ 时, 有 } f'(\xi_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0, \text{ 取 } \xi = \xi_1, \text{ 便有}$$

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$$

上述两种情形都存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$$

【定理 1.3】 柯西定理 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足

(1) $f(x), g(x) \in C[a, b]$

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 并且 $g'(x) \neq 0$

则在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (1.4)$$

【证】 由定理条件知 $g(x)$ 满足拉格朗日定理条件, 于是有

$$g(b) - g(a) = g'(\eta)(b - a) \quad \eta \in (a, b)$$

所以 $g(b) - g(a) \neq 0$, 因此公式(1.4)左端分式有意义。

如果取 $g(x) = x$, 公式(1.4)就是拉格朗日中值公式, 这说明拉格朗日定理是柯西定理的特例。类比拉格朗日定理的证明, 引进辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

则 $\varphi(x) \in C[a, b]$, 在区间 (a, b) 内可导, 且 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, 由洛尔定理, 在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi) = 0$$

因此得到

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

公式(1.4)叫做柯西中值公式, 它的几何意义如下:

设曲线 \widehat{AB} 是由参数方程

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

给出, 端点 A, B 所对应的参数为 $t = a, t = b$, 于是 A, B 两点的坐标为 $A(g(a), f(a)), B(g(b), f(b))$, 故弦 AB 的斜率是

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

另一方面, 曲线上任一点处的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

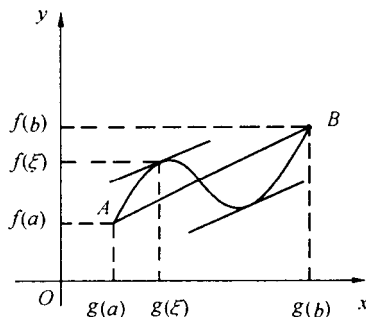


图 1.4

故 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 表示曲线 \widehat{AB} 上 $t = \xi$ 处切线斜率, 所以公式(1.4)表示: 在 \widehat{AB} 上可找到一点, 使曲线在这点的切线平行于连接 A, B 两点的弦(图 1.4)。

【例 1.10】 设函数 $f(x) \in C[x_1, x_2], x_1 \cdot x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 内可导, 试证: 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

【证】 令

$$F(x) = \frac{f(x)}{x}, G(x) = \frac{1}{x}$$

由于 $x_1 x_2 > 0$, 故区间 $[x_1, x_2]$ 不包含原点。于是可知函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 满足柯西定理条件, 由柯西定理知至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$\begin{aligned} \frac{F(x_2) - F(x_1)}{G(x_2) - G(x_1)} &= \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \\ \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} &= \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}} \end{aligned}$$

即

整理得

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

【例 1.11】 设函数 $f(x) \in C[a, b]$, 在区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 试证: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{b-a}{e^b - e^a} e^\xi$$

【证】 对函数 $f(x)$ 与 $g(x) = e^x$ 在 $[a, b]$ 上应用柯西中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\xi)}{e^\xi}$$

再对函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日定理, 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a)$$

于是

$$\frac{f'(\eta)(b-a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\xi)}{e^\xi}$$

即

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{b-a}{e^b - e^a} e^\xi$$

习 题 3.1

1. 验证洛尔定理对下列函数是否成立

(1) $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10 \quad [1, 2]$

(2) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2} \quad [-1, 1]$

2. 下列函数在指定的区间内是否存在点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$, 说明理由

(1) $y = \ln \sin x \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

(2) $y = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| \quad [0, \pi]$

3. 证明多项式 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导函数的根都是实根, 并指出这些根所在的范围。

4. 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有三阶导数, 且 $f(0) = f(1)$, 设 $F(x) = x^3 f(x)$, 则在区间 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ , 使 $F'''(\xi) = 0$

5. 证明: 方程 $x^3 - 3x + C = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内没有两个不同的实根。(提示: 用反证法)

6. 验证下列函数在指定区间上是否满足拉格朗日定理的条件

(1) $f(x) = \arctan x \quad [0, 1]$

(2) $f(x) = \frac{1}{x} \quad [a, b], ab < 0$

7. 证明对函数 $y = px^2 + qx + r$ 应用拉格朗日定理时, 点 ξ 总是位于区间的正中间。

8. 设 $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & 0 \leq |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$, 则在区间 $(0, 2)$ 内适合 $f(2) - f(0) = f'(\xi)(2 - 0)$ 的 ξ 共有几个?

9. 证明: 若函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 0, |f'(x)| < 1$, 则 $|f(x)| < |x|, x \neq 0$ 。

10. 利用拉格朗日定理证明下列不等式

(1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

(2) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x > 0$

$$(3) \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \beta} \leq \tan \alpha - \tan \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\cos^2 \alpha}, 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$(4) e^x > xe, x > 1$$

$$(5) \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} > \frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2}, 0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq \pi$$

$$(6) \frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right], p > 1, n \geq 2$$

11. 对函数 $f(x) = \sin x$ 及 $\varphi(x) = x + \cos x$, 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上验证柯西定理的正确性。

12. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, $a > 0$, 试证存在点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$$

并用此结果证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{\xi} - 1) = \ln \xi, \xi > 0$ 。

13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内有二阶导数, 连结点 $(a, f(a))$ 和点 $(b, f(b))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $(c, f(c))$, 其中 $a < c < b$. 试证方程 $f''(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根。

14. 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f''(x)$ 在开区间 (a, b) 内存在, 若 $f(a) = f(b) = 0$, 且有 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) < 0$, 证明存在点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) > 0$ 。

15. 设 $f(x), g(x)$ 均可导, 证明在 $f(x)$ 的任意两个零点之间, 必有方程 $f'(x) + g'(x)f(x) = 0$ 的实根。

16. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导, 且 $\forall x \in (a, +\infty)$, 有 $|f'(x)| \leq M, M$ 是常数, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

17. 若 $f(x)$ 在 $U(a)$ 内连续, 在 $\dot{U}(a)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$, 则 $f(x)$ 在 a 点可导, 且 $f'(a) = l$ 。

18. 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 都存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。

3.2 洛比达法则

如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时均趋于零或均趋于无穷大, 则极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

的计算, 不能应用“商的极限等于极限的商”这一法则, 这种极限通常叫做未定式, 并分别简记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 。这个问题的有效方法之一是根据柯西定理建立起来的洛比达法则(L'Hospital 1661 ~ 1704 法国数学家)。

3.2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”与“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式

1. “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式

【定理 2.1】 如果

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在邻域 $\dot{U}(a)$ 内有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

(2) 当 $x \in \dot{U}(a)$ 时, $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都存在, 且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (有限或 ∞)

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

【证】 因为极限存在与否和函数在点 a 处有无定义没有关系, 故可规定

$$f(a) = 0, g(a) = 0$$

则条件(1) 便可得出 $f(x), g(x)$ 在 a 点连续. 设 x 为邻域 $\dot{U}(a)$ 内任意一点, 则在区间 $[a, x]$ (或 $[x, a]$) 上函数 $f(x), g(x)$ 满足柯西中值定理条件, 从而有

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi \text{ 介于 } a \text{ 及 } x \text{ 之间})$$

即

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

因为 ξ 介于 x 与 a 之间, 所以当 $x \rightarrow a$ 时, 必有 $\xi \rightarrow a$, 于是由条件(3), 得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

【定理 2.2】 如果

(1) $\exists A > 0$, 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(-\infty, -A) \cup (A, +\infty)$ 内有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

(2) $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(-\infty, -A) \cup (A, +\infty)$ 均可导, 且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (有限或 ∞), 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

【证】 令 $y = \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow \infty$ 等价于 $y \rightarrow 0$, 且

$$\lim_{y \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{y}\right) = 0, \lim_{y \rightarrow 0} g\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

对于 $f\left(\frac{1}{y}\right), g\left(\frac{1}{y}\right)$ 应用定理 2.1, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

定理 2.1 和定理 2.2 中计算极限的法则叫做洛比达法则, 如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 并且 $f'(x), g'(x)$ 仍然满足洛比达法则的条件, 这时可继续运用这个法则。

【例 2.1】 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - x + 1}$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}$

注意 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2}$ 已不是未定式, 不能对它应用洛比达法则, 否则将导致错误的结果。

【例 2.2】 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{\frac{1}{x}} = -\pi$

【例 2.3】 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\sin \frac{1}{x}}$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\sin \frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} = 1$

【例 2.4】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

2° “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型未定式

对于“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式, 也有相应的洛比达法则。

【定理 2.3】 如果

(1) 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在邻域 $\dot{U}(a)$ 内有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

(2) 当 $x \in \dot{U}(a)$ 时, $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在, 且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (有限或 ∞)

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

证明从略。

【定理 2.4】 如果

(1) $\exists A > 0$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, -A) \cup (A, +\infty)$ 上有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

(2) $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(-\infty, -A) \cup (A, +\infty)$ 均可导, 且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (有限或 ∞), 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

证法同定理 2.2, 这里从略。

【例 2.5】 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\mu}$ ($a > 1, \mu > 0$)。

【解】
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\mu} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{\mu x^{\mu-1}} = \frac{1}{\mu \ln a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\mu} = 0$$

【例 2.6】 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x}$ ($a > 1, \mu > 0$)。

【解】 当 $0 < \mu \leq 1$ 时, 由洛比达法则, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x \ln a} = \\ &\frac{\mu}{\ln a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x x^{1-\mu}} = \frac{\mu}{\ln a} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

当 $\mu > 1$ 时, 设 $n = [\mu] + 1$, 连续使用洛比达法则直到 n 次, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x \ln a} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}}{a^x (\ln a)^2} = \dots \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}}{a^x (\ln a)^n} = \\ &\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{(\ln a)^n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x x^{n-\mu}} = 0 \end{aligned}$$

例 2.5 和例 2.6 表明, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $\log_a x, x^\mu, a^x$ ($a > 1, \mu > 0$) 均为无穷大, 但对数函数 $\log_a x$ 增长最慢, 指数函数 a^x 增长最快, 幂函数 x^μ 介于二者之间。

在使用洛比达法则时, 每一步均应检查是否属于 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。对能求出非零极限的因子应先求出其极限, 这样做可以使余下的不定式比较简单, 并注意结合使用其它求极限的方法, 从而使运算更加简捷。

【例 2.7】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x \sin^3 x}$ 。

【解】
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x \sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^4} = \\ &\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \right)^2 = \\ &\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

【例 2.8】 求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{\cos x} \ln |x - a|}{\ln |e^x - e^a|}$ 。

【解】
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{\cos x} \ln |x - a|}{\ln |e^x - e^a|} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\cos x} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln |x - a|}{\ln |e^x - e^a|} =$$

$$e^{\cos a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^a}} = e^{\cos a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{e^x} \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} =$$

$$\frac{e^{\cos a}}{e^a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x}{1} = e^{\cos a}$$

我们还需注意,洛比达法则只是求极限的充分条件,不是必要条件。当导数的比的极限不存在时,不能断定函数的极限不存在,这时不能使用洛比达法则。例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

此时,分子分母的导数比的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

不存在且不为无穷大,但原极限确是存在的

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

3.2.2 其它未定式

除上述两种基本未定式之外,还有 $0 \cdot \infty$ 、 $\infty - \infty$ 、 0^0 、 1^∞ 、 ∞^∞ 等五种类型的未定式,它们都可转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,具体转化步骤如下:

$$(1) 0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \text{ 或 } 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{0}$$

$$(2) \infty - \infty = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} - \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} \cdot \infty} = \frac{0}{0}, \text{ 这里两个无穷大正负号相同。}$$

$$(3) 1^\infty = e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}$$

$$(4) 0^0 = e^{0 \ln 0} = e^{0 \cdot \infty}$$

$$(5) \infty^0 = e^{0 \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$$

后三种情形结果中的 $0 \cdot \infty$ 型可按第一种情形化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。

【例 2.9】 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu \ln x$ ($\mu > 0$)。

【解】

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\mu}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\mu}{x^{\mu+1}}} =$$

$$= -\frac{1}{\mu} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu = 0$$

【例 2.10】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$ 。

【解】

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - (x \cos x)^2}{x^2 \sin^2 x} =$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - (x \cos x)^2}{x^4} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} &= \\ 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

【例 2.11】 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ 。

【解】 为计算简便, 利用函数记号 $e^x = \exp\{x\}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\{x \ln x\} = \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right\} = \\ \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right\} &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)\right\} = e^0 = 1\end{aligned}$$

【例 2.12】 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ 。

$$\begin{aligned}\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left\{\frac{\ln \cot x}{\ln x}\right\} = \\ \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x}\right\} &= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}\right\} = \\ \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\sin x \cos x}\right\} &= \exp\{-1\} = e^{-1}\end{aligned}$$

【例 2.13】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$ 。

$$\begin{aligned}\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left\{x \ln \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)\right\} = \\ \exp\left\{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right\} &= \exp\left\{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2y + \cos y)}{y}\right\} = \\ \exp\left\{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2y - \sin y}{\sin 2y + \cos y}\right\} &= \exp\{2\} = e^2\end{aligned}$$

【例 2.14】 求序列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right]$ 。

【解】 这是 $0 \cdot \infty$ 型未定式, 但序列极限不能直接应用洛比达法则, 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)} \right]}{1} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{1+x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1) \ln(1+x)}{x^2} &= \\ e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} &= -\frac{e}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = -\frac{e}{2}\end{aligned}$$

所求序列极限是上述函数极限当 $x = \frac{1}{n}$ 时的特殊情况, 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[(1 + \frac{1}{n})^n - e] = -\frac{e}{2}$$

习 题 3.2

1. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1})$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$$

$$(11) \lim_{\varphi \rightarrow a} (a^2 - \varphi^2) \tan \frac{\pi \varphi}{2a}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 (\ln x)^2$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x})^{\tan x}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$(15) \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos \frac{x}{m})^m$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 1} (\tan \frac{\pi}{4} x)^{\tan \frac{\pi}{2} x}$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{ax}) \ln(1 + \frac{b}{x}) \quad (a > 0, b \neq 0)$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^{\sin x} - 1) \ln(1 + x)}{x^2 \ln x}$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)^{\frac{2}{x}}}{x}$$

$$(23) \lim_{x \rightarrow 0} (ax + e^{bx})^{\frac{1}{x}} \quad (a, b \text{ 为正常数})$$

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ 存在, 但不能用洛比达法则。

3. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1 + \frac{1}{x})^x}{e} \right]^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ e^{-\frac{1}{2}} & x \leq 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 处的连续性。

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{2}{3}(\cos x - \cos 2x)$ 是 x 的几阶无穷小?

5. 问 c 取何值时, 有极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x+c}{x-c})^x = 4$$

6. 问 a 与 b 取何值, 有极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right) = 0$$

7. 证明: 若 $f''(a)$ 存在, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = f''(a)$$

8. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 具有二阶连续导函数, 且 $g(0) = 1$ 。

(1) 确定 a 的值, 使函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续

(2) 求 $f'(x)$

(3) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性

9. 设 $f(x)$ 具有二阶导数, 在点 $x = 0$ 的去心邻域内 $f(x) \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,

$$f''(0) = 4, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

3.3 泰勒公式

在一切函数类中, 多项式函数是函数类中最简单的函数。能不能把任意一个函数用多项式近似地表示呢? 在微分应用中, 我们已经知道, 若 $f'(x_0)$ 存在, 在 x_0 附近有如下近似公式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

这是用 $x - x_0$ 的一次多项式来近似函数 $f(x)$ 。这种近似给计算带来很大的方便, 不过上述公式也有不足之处: 首先, 其误差仅是比 $x - x_0$ ($x \rightarrow x_0$) 高阶的无穷小, 当实际问题对精度要求较高时, 常常不能满足精度要求; 另外, 公式对误差没有定量的估计。这时, 我们自然要提出, 能否用一个关于 $x - x_0$ 的更高次的多项式近似代替 $f(x)$, 且使误差是比 $x - x_0$ ($x \rightarrow x_0$) 更高阶的无穷小。但是怎样从函数本身得出我们需要的多项式呢?

下面我们考虑一个特殊的问题: 给出一个 n 次多项式

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

我们看多项式 $f(x)$ 的系数 a_0, a_1, \cdots, a_n 和 $f(x)$ 的导数有什么关系?

经过简单的计算, 容易得到

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad \cdots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\text{即 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

一般地任意给定一个函数 $y = f(x)$ (不一定是多项式), 设它在 x_0 点具有直到 n 阶的导数。类比多项式的情形, 我们写出一个多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

在一般情况下 $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 不相等,但是 $P_n(x)$ 能否近似 $f(x)$ 呢?

【定理 3.1】 泰勒定理 (Taylor 1685 ~ 1731 英国数学家) 若函数 $y = f(x)$ 在邻域 $U(x_0)$ 内有直到 $n-1$ 阶导数,且 $f^{(n)}(x_0)$ 存在,则

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n] \quad (3.1)$$

【证】 令 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$,为证公式(3.1),只须证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

显然 $R_n(x)$ 在 $U(x_0)$ 内 $n-1$ 阶可导,所以有

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - [f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n] \\ R'_n(x) &= f'(x) - [f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}] \\ &\vdots \\ R_n^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0)] \end{aligned}$$

于是有

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

可见当 $x \rightarrow x_0$ 时, $R_n(x), R'_n(x), \cdots, R_n^{(n-1)}(x)$ 均为无穷小,连续使用洛比达法则 $n-1$ 次,有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \end{aligned}$$

注意到定理的条件只保证 $R_n^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 点可导,所以上述最后的 $\frac{0}{0}$ 型未定式不满足洛比达法则的条件,不能用洛比达法则计算。我们利用 n 阶导数的定义可得。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right] = \\ &= \frac{1}{n!} [f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)] = 0 \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

即

$$R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$$

定理 3.1 说明用多项式 $P_n(x)$ 近似函数 $f(x)$,误差是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小。我们把多项式 $P_n(x)$ 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 次泰勒多项式,其系数称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒系数, $R_n(x)$ 称为泰勒余项,称 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ 这类余项为皮亚诺(Peano 1858 ~ 1932 意大利数学家)型余项,公式(3.1)称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的带皮亚诺余项的泰勒公式。若在公式(3.1)中令 $x_0 = 0$,得

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

称为马克劳林(Maclaurin 1698 ~ 1746 英国数学家)公式。由于公式的形式简单,故在数学中,特别是在近似计算中是非常重要的。

泰勒定理对从理论上研究函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近的性态是十分有帮助的。但由于它对余项(或误差)只给出定性描述,这又十分不利于估算余项 $R_n(x)$ 的数值。同时由公式(3.1)可知,在 x_0 附近的充分小的范围内,利用多项式 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$ 可以达到令人满意的精度,而在较大的范围内作这种近似的代替,皮亚诺余项甚至于不能给出误差的定性描述。因此,我们还需进一步给出余项 $R_n(x)$ 的定量公式。

【定理 3.2】(泰勒中值公式) 设函数 $f(x)$ 在邻域 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数,则对 $\forall x \in U(x_0)$,有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (3.2)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 介于 x_0 与 x 之间(与 x 有关)

【证】 对函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 $x \in U(x_0)$ 为端点的区间上应用柯西定理,得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

ξ_1 介于 x_0 与 x 之间。

再对函数 $R'_n(x)$ 及 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上应用柯西定理,得

$$\frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n - 0} = \frac{R''_n(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

ξ_2 介于 x_0 与 ξ_1 之间。

这样连续应用柯西定理 $n+1$ 次,得

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R''_n(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}} = \cdots = \\ &= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)} = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(\xi_n-x_0) - 0} = \\ &= \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x_0 与 ξ_n 之间, ξ_n 介于 x_0 与 ξ_{n-1} 之间, \cdots , ξ_1 介于 x_0 与 x 之间,因此 ξ 介于 x_0 与 x 之间。于是有

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

上述余项称为拉格朗日型余项。公式(3.2)称为带拉格朗日型余项的泰勒公式。拉格朗日型余项也可以写成

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

令 $x_0 = 0$,则得到带拉格朗日余项的马克劳林公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ξ 介于 0 与 x 之间。余项 $R_n(x)$ 也可以写成

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

容易看出,当 $n=0$ 时,公式(3.1)是一阶微分公式,公式(3.2)是拉格朗日中值公式。可见,带皮亚诺余项的泰勒公式是一阶微分公式的推广,泰勒中值公式是拉格朗日中值公式的推广。

如果对于 $\forall x \in U(x_0)$, 有 $|f^{(n+1)}(x_0)| \leq M$, 则用泰勒多项式 $P_n(x)$ 近似表示函数 $f(x)$ 的误差为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$

由上式可知,泰勒多项式所取的项数愈多或 $x-x_0$ 的绝对值愈小,则误差也愈小。

下面推导几个常用的初等函数的马克劳林公式。

【例 3.1】 求函数 $f(x) = e^x$ 带有拉格朗日型余项的马克劳林公式

【解】 $f^{(n)}(x) = e^x, n = 1, 2, \dots$

所以有 $f(0) = 1, f^{(n)}(0) = 1 \quad n = 1, 2, \dots$

故所求马克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

于是有 e^x 的近似公式

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

当 $x > 0$ 时,上述公式的误差为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

当 $x \leq 0$ 时,误差由读者自己给出。

取 $x = 1, n = 10$, 得到

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!} \approx 2.718\,281$$

其所产生的误差为

$$|R_{10}(1)| \leq \frac{e}{11!} < \frac{3}{11!} \approx 7.515\,6 \times 10^{-8}$$

【例 3.2】 求 $f(x) = \sin x$ 和 $f(x) = \cos x$ 的带有拉格朗日型余项的马克劳林公式

【解】 $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \quad n = 1, 2, \dots$

所以 $f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{m-1} & n = 2m-1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}$

故 $\sin x$ 的马克劳林公式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}$$

其中余项 $R_{2m} = \frac{\sin[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!} x^{2m+1}$

于是有 $\sin x$ 的近似公式

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

误差为

$$|R_{2m}(x)| = \left| \frac{\sin[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!} x^{2m+1} \right| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

取 $m=1$, 得到近似公式 $\sin x \approx x$, 误差为 $|R_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$, 要使误差不超过 0.001, 那么只要 $|x| < 0.1817$ (约 10°) 即可。

取 $m=2$, 得到近似公式 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, 误差为 $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{120}$, 要使误差不超过 0.001, 只要 $|x| < 0.6544$ (约 37.5°) 即可。

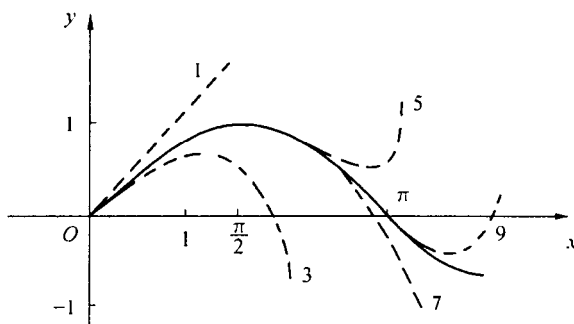


图 3.1

图 3.1 中分别画出了用 1 次、3 次、5 次、7 次和 9 次马克劳林多项式近似 $\sin x$ 的情形。

类似地, 有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \frac{\cos[\theta x + (2m+2)\frac{\pi}{2}]}{(2m+2)!} x^{2m+2} \quad (0 < \theta < 1)$$

【例 3.3】 求 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 点的带有拉格朗日型余项的泰勒公式。

【解】 $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad n=1, 2, \cdots$

所以有 $f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad n=1, 2, \cdots$

于是可得 $\ln(1+x)$ 的马克劳林公式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

【例 3.4】 求 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 按 x 的幂展开的泰勒公式。

【解】 $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad n=1, 2, \cdots$

所以 $f(0) = 1, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1) \quad n=1, 2, \cdots$

于是得到 $(1+x)^\alpha$ 的马克劳林公式

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

当 $\alpha=n$ 时, 由于 $f^{(n+1)}(x) = 0$, 所以有 $R_n(x) = 0$, 于是上面的公式就是牛顿二项式展开。

上述五个基本初等函数的马克劳林公式经常用到, 应该熟记。

【例 3.5】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是 x 的几阶无穷小?

【解】 利用上面导出的马克劳林公式(用皮亚诺余项), 有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

上述第一式中将 x 替换成 $-\frac{x^2}{2}$, 得

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2 + o[(-\frac{x^2}{2})^2]$$

注意到 $o[(-\frac{x^2}{2})^2] = o(x^4)$, $o(x^4) \pm o(x^4) = o(x^4)$, 所以

$$\begin{aligned}\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} &= [1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)] - \\ &[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4)] = \\ &-\frac{x^4}{12} + o(x^4)\end{aligned}$$

可见 $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是 x 的四阶无穷小。

【例 3.6】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \cot x)$ 。

$$\begin{aligned}\text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \cot x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)]}{x^3} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!})x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

这里注意 $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ 。

【例 3.7】 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f^{(4)}(0)$ 和 $f^{(5)}(0)$ 。

$$\text{【解】} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{所以} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4 + o(x^4)$$

又 $x \cdot o(x^4) = o(x^5)$, 所以

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2!4}x^5 + o(x^5)$$

由于 n 阶泰勒展开式是惟一的, 注意到它们的系数和函数的导数间的关系, 有

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0, \quad \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{3}{2! \cdot 4}$$

故

$$f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 45.$$

【例 3.8】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

【证】 对 $\forall x \in (a, b)$, 将函数 $f(x)$ 在点 a 处与点 b 处展成泰勒公式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2 \quad a < \xi_1 < x$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-a) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2 \quad x < \xi_2 < b$$

令 $x = \frac{a+b}{2}$, 又 $f'(a) = f'(b) = 0$, 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

上述两式相减, 移项, 并取绝对值, 得

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{|f''(\xi_2) - f''(\xi_1)|}{2} \leq \\ &\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{|f''(\xi_2)| + |f''(\xi_1)|}{2} \leq \left(\frac{b-a}{2}\right) |f''(\xi)| \end{aligned}$$

其中 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$, 即

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

【例 3.9】 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x \geq x_0$ 上有 n 阶导数, 如果 $f(x_0) = g(x_0), f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0), k = 1, 2, \dots, n-1$, 且

$$f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x) \quad x \geq x_0$$

则当 $x > x_0$ 时, 恒有

$$f(x) < g(x)$$

【证】 设 $F(x) = g(x) - f(x)$, 则

$$F(x_0) = 0, F^{(k)}(x_0) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

故 $F(x)$ 的 $n-1$ 阶泰勒公式为

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \quad x_0 < \xi < x$$

由于

$$F^{(n)}(\xi) = g^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(\xi) > 0$$

所以当 $x > x_0$ 时, $F(x) > 0$, 即

$$f(x) < g(x)$$

习 题 3.3

1. 将下列函数在指定点处展开成泰勒公式(带拉格朗日型余项)

(1) $f(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1$, 在 $x = -1$

(2) $f(x) = \sin x$, 在 $x = \frac{\pi}{4}$, 到六阶

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$, 在 $x = -1$

(4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 在 $x = 1$, 到四阶

(5) $f(x) = e^{-x}$, 在 $x = a$

(6) $f(x) = x^2 \ln x$, 在 $x = 1$

2. 求下列函数的马克劳林公式(带拉格朗日型余项)

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

- (3) $f(x) = xe^x$ (4) $f(x) = \tan x$, 到 5 阶

3. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差

- (1) $\sqrt[3]{30}$ (2) $\sin 18^\circ$

4. 利用泰勒公式求下列极限

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sin x^2}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\tan x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$

5. 确定 a, b , 使 $x - (a + b \cos x) \sin x$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为 x 的五阶无穷小。

6. 设 $f(x)$ 有三阶导数, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是 $x - x_0$ 的二阶无穷小, 问 $f(x)$ 在 x_0 处的

泰勒展开式有何特点? 并求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^2}$ 。

7. 已知函数 $f(x)$ 具有三阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0, f(1) = 0$, 试证在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 0$ 。

8. 设函数 $f(x) \in C[a, b], \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 试证明 $f(x) \geq x$ 。

9. 证明: 若 $\forall x \in (a, b)$, 有 $f''(x) \geq 0$, 且任意 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, 则有不等式

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

(提示: 令 $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, 将 $f(x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 在 x_0 泰勒展开)

3.4 导数在研究函数中的应用

这一节我们将用导数来研究函数的一些几何特性, 如函数的单调性、凸凹性、极值、拐点以及渐近线等, 以帮助我们全面地了解一个函数, 并在此基础上介绍了函数的分析作图法。

3.4.1 函数的单调性

若对区间 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) \leq f(x_2) (f(x_1) \geq f(x_2))$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加(单调减少), 若不等号为严格的, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内严格单调增加(严格单调减少)。

设曲线 $y = f(x)$ 上每一点均有切线, 由图 4.1 可见, 若切线与 x 轴正方向的夹角总是锐角, 即 $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 是严格单调增加的; 若切线与 x 轴正方向的夹角总是钝角, 即 $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 是严格单调减少的。这给我们以启示, 可以用导数来判别函数的单调性, 有如下定理。

【定理 4.1】 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则在区间 I 上, $f(x)$ 严格单调增加(严格单调减少)的充要条件是 $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 且 $f'(x)$ 在 I 的任何子区间上不恒为零($f'(x) = 0$ 的点 x 可以是一些孤立点)。

【证】 必要性 $\forall (x, x + \Delta x) \in I (\Delta x \neq 0)$, 由于 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加, 所以无论 $\Delta x > 0$ 或 $\Delta x < 0$, 均有

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

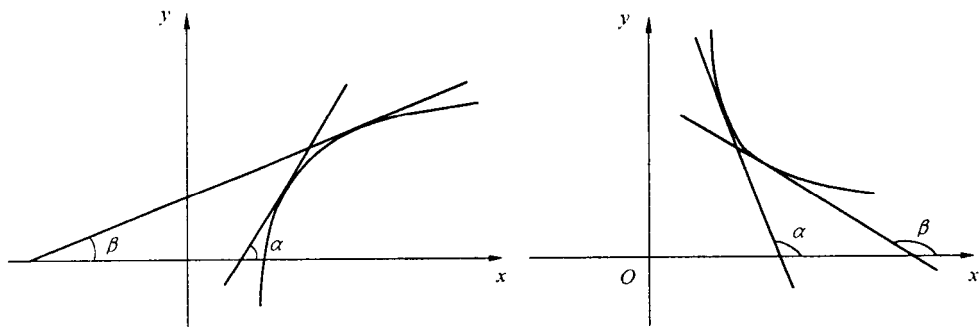


图 4.1

再注意到 $f(x)$ 的可导性, 有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

如果在 I 的某一子区间 I' 上, $f'(x) \equiv 0$, 则在 I' 上 $f(x) \equiv C$, 这与 $f(x)$ 严格单调增加矛盾. 故 $f'(x)$ 在 I 的任何子区间上不恒为零.

充分性 $\forall x_1, x_2 \in I$, 设 $x_1 < x_2$, 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

由于 $f'(x) \geq 0$, 所以

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

这说明 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的, 再来证明

$$f(x_2) - f(x_1) \neq 0$$

若不然, 设 $f(x_1) = f(x_2)$, 因 $f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上是单调增加的连续函数, 所以在区间 (x_1, x_2) 上 $f(x)$ 必为常数, 因此在 (x_1, x_2) 上, $f'(x) \equiv 0$, 矛盾. 所以 $f(x)$ 是严格单调增加的.

同理可证严格单调减少的情形.

【例 4.1】 讨论 $y = \ln x$ 的单调性.

【解】 $y' = \frac{1}{x}$

函数 $y = \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 因为在 $(0, +\infty)$ 上 $y' > 0$, 所以函数 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是严格单调增加的.

【例 4.2】 讨论 $y = x + \sin x$ 的单调性.

【解】 $y' = 1 + \cos x \geq 0$

且使 $y' = 1 + \cos x = 0$ 的点为 $x = (2n + 1)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 是一些孤立点. 所以 $y = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加.

有些函数在其定义区间上未必是单调函数, 但当我们用导数等于零的点去划分函数定义区间后, 在所得到的每个子区间上函数却是单调的, 这样的子区间, 我们称之为函数的单调区间. 如果函数在定义区间上某些点处不可导, 那么划分函数的定义区间的分界点, 还应包括这些导数不存在的点.

【例 4.3】 讨论函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ 的单调增、减区间.

【解】 由于 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 和 $x = 3$, 于是:

当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上严格单调增加;

当 $1 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上严格单调减少;

当 $x > 3$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上严格单调增加。

利用单调性还可以证明某些不等式。

【例 4.4】 试证当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x}$ 。

【证】 只须证明 $(1+x)\ln(1+x) \geq \arctan x$

令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$, 当 $x \geq 0$ 时, 有

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

故函数 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时是单调增加的。又 $f(0) = 0$, 所以当 $x \geq 0$ 时, 有

$$f(x) \geq f(0)$$

即 $(1+x)\ln(1+x) - \arctan x \geq 0$

故有 $\ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x}$

【例 4.5】 设函数 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 二阶可导且 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$ 。证明: 对 $\forall x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 > x_1$, 有

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$$

【证】 在 $[0, x_1]$ 和 $[x_2, x_1 + x_2]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x_1) - f(0) = f'(\xi_1)x_1 \quad \xi_1 \in (0, x_1)$$

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) = f'(\xi_2)x_1 \quad \xi_2 \in (x_2, x_1 + x_2)$$

已知 $f''(x) < 0$, 所以 $f'(x)$ 严格单调减少, 故由 $\xi_1 < \xi_2$, 得 $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ 。从而

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) < f(x_1)$$

即 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$

3.4.2 函数的极值

在研究函数图形时, 常会出现“峰”和“谷”(图 4.2), 在峰处的函数值比附近各点的函数值都大, 我们把它叫做函数的极大值; 在谷处的函数值比它附近各点处的函数值都小, 我们把它叫做函数的极小值。以上仅是从几何直观上给出了极大(小)值的概念, 下面我们比较严格地给出极大(小)值的概念以及它们的具体求法。

【定义 4.1】 设 $f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对此邻域内任何一点 $x \neq x_0$, 恒有 $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), 则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的极大(小)值点, $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大(小)值。

极大值点与极小值点统称为极值点, 极大值与极小值统称为极值。

应当注意, 极值是局部概念, 它是和一点附近的函数值相互比较而言的, 极大(小)值不一定是函数的最大(小)值, 甚至不一定大于指定区间上函数的极小值。在一个区间上函数可能有若干个极大值和极小值(图 4.2)。

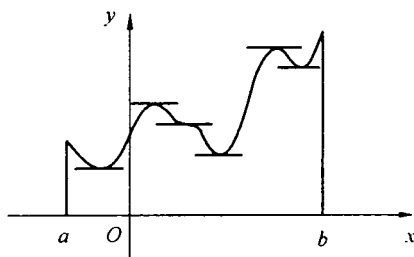


图 4.2

如何求出函数的极值呢?从图 4.2 可以看出,对于可导函数,如果 $f(x)$ 在 x_0 点取得极值,则 $f(x)$ 在 x_0 点有水平切线,即 $f'(x_0) = 0$ 。因而得到下面的定理。

【定理 4.2】 费尔马(Fermat 1601 ~ 1665 法国数学家) 定理 若 $f(x)$ 在 x_0 点取得极值,且 $f'(x_0)$ 存在,则必有

$$f'(x_0) = 0$$

费尔马定理的证明类似于洛尔定理证明,这里从略。

使 $f'(x) = 0$ 的点,叫做函数 $f(x)$ 的驻点。定理 4.2 表明:可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点,但反过来,函数的驻点却不一定是极值点。例如, $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$,但在 $x = 0$ 处并没有极值(图 4.3),所以驻点是极值点的嫌疑点。此外,对于导数不存在的点,函数也可能取得极值。例如, $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, 在 $x = 0$ 导数不存在,但在 $x = 0$ 处函数有极小值 $y|_{x=0} = 0$ (图 4.4)。

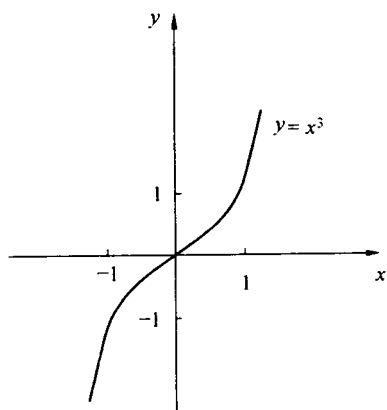


图 4.3

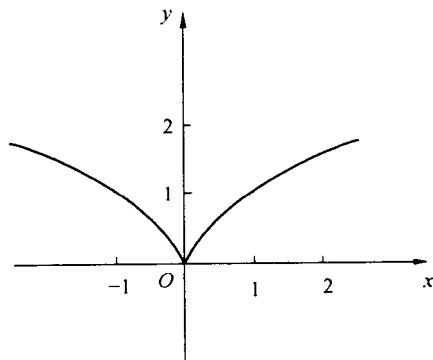


图 4.4

综上所述,驻点或导数不存在的点是极值嫌疑点,此外再无其它嫌疑点,但在这些点处函数是否一定取得极值,还需进一步判断。

【定理 4.3】 (第一充分判别法) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内可微,在 x_0 点连续,若 $\exists \delta > 0$

(1) 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x) > 0 (< 0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0 (> 0)$, 则 $f(x_0)$ 为极大(小)值。

(2) 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x) > 0$ (或 < 0), 则 $f(x_0)$ 不是极值。

【证】 (1) 只证 $f(x_0)$ 为极大值的情况,同理可证 $f(x_0)$ 为极小值的情况。

设 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 且 $x \neq x_0$, 由拉格朗日中值定理,有

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad \xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

当 $x < x_0$ 时, $\xi < x_0$, $f'(\xi) > 0$, 所以有 $f(x) < f(x_0)$; 而当 $x > x_0$ 时, $\xi > x_0$, $f'(\xi) <$

0, 所以有 $f(x) < f(x_0)$ 。总之,对 $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$, 都有 $f(x) < f(x_0)$, 即 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值。

(2) 由函数的单调性判别法知, $f(x)$ 在邻域 $U(x_0, \delta)$ 内单调增加(减少), 所以 $f(x_0)$ 不是

函数 $f(x)$ 的极值。

【例 4.6】 求函数 $f(x) = x^3(x-5)^2$ 的极值。

【解】 $f'(x) = 3x^2(x-5)^2 + 2x^3(x-5) = 5x^2(x-3)(x-5)$

令 $f'(x) = 0$, 得三个驻点 $x = 0, x = 3, x = 5$ 。它们将函数定义域分为四个区间 $(-\infty, 0), (0, 3), (3, 5), (5, +\infty)$ 。检查 $f'(x)$ 的符号变化情况, 为方便计, 列表如下。

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	非极值	↑	极大值	↓	极小值	↑

这里“↑”表示严格单调增加, “↓”表示严格单调减少。

可见, 在点 $x = 0$ 处函数无极值, 在点 $x = 3$ 处函数有极大值 $f(3) = 108$, 在点 $x = 5$ 处函数有极小值 $f(5) = 0$ 。

【例 4.7】 求函数 $f(x) = (x+1)^3(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间及极值。

【解】 $f'(x) = 3(x+1)^2(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x+1)^3(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{(x+1)^2(11x-7)}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1, x = \frac{7}{11}$, 另有导数不存在的点 $x = 1$ 。那么 $x = -1, x = \frac{7}{11}, x = 1$ 这三点为极值嫌疑点。用它们划分定义区间, 列表讨论如下。

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{7}{11})$	$\frac{7}{11}$	$(\frac{7}{11}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	不存在	+
$f(x)$	↑	非极值	↑	极大值	↓	极小值	↑

可见, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{7}{11})$ 及 $(1, +\infty)$ 上严格单调增加; 在 $(\frac{7}{11}, 1)$ 上严格单调减少。 $x = -1$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点; $x = \frac{7}{11}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(\frac{7}{11}) = (\frac{18}{11})^3(\frac{4}{11})^{\frac{2}{3}}$; $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(1) = 0$ 。

【定理 4.4】 (第二充分判别法) 设 $f(x)$ 在 x_0 点有 $f'(x_0) = 0, f''(x_0)$ 存在且 $f''(x_0) \neq 0$, 则

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值;

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值。

【证】 (1) 因 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ 。由二阶导数定义有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

由极限的保序性知, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

于是,当 $x < x_0$ 时,有 $f'(x) > 0$,当 $x > x_0$ 时,有 $f'(x) < 0$ 。根据定理 4.3,可知 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值。

类似可证(2)。

【例 4.8】 求函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的极值。

【解】 $f'(x) = \cos x - \sin x$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$ 。

又

$$f''(x) = -\sin x - \cos x$$

由于

$$f''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0, f''(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0$$

所以 $x = \frac{\pi}{4}$ 为极大值点, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ 为极大值; $x = \frac{5\pi}{4}$ 为极小值点, $f(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$ 为极小值。

【例 4.9】 求参数方程

$$x = \frac{1}{4}(t+1)^2, y = \frac{1}{4}(t-1)^2 \quad t \geq 0$$

所确定的函数 $y = f(x)$ 的极值。

【解】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}(t-1)}{\frac{1}{2}(t+1)} = \frac{t-1}{t+1}$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $t = 1$ 。于是得到驻点 $x = 1$ 。

又

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4}{(t+1)^3}$$

所以

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1} = \left. \frac{4}{(t+1)^3} \right|_{t=1} = \frac{1}{2} > 0$$

于是 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为

$$y|_{x=1} = \frac{1}{4}(t-1)^2 \Big|_{t=1} = 0$$

比较第一充分判别法和第二充分判别法, 不难看出, 当驻点处的二阶导数计算容易且不为零时, 用第二充分判别法比较简便, 但第二充分判别法对函数 $f(x)$ 的要求比第一充分判别法高。例如在极值嫌疑点处导数不存在, 第二充分判别法就无法应用。

若在驻点 x_0 处 $f''(x_0) = 0$, 第二充分判别法就失效了, 下面的定理给出了第二充分判别法的推广形式, 也叫第二充分判别法。

【定理 4.5】 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数, 且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ 若}$$

(1) n 是奇数, 则 x_0 不是函数 $f(x)$ 的极值点。

(2) n 是偶数, 则 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 此时若 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 x_0 是极小值点, $f(x_0)$ 为极小值; 若 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 x_0 是极大值点, $f(x_0)$ 为极大值。

【证】 由泰勒定理, 得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

由所给条件得

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

因为上式第二项为 $(x - x_0)^n$ 的高阶无穷小,所以 $\exists \delta > 0$,当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) - f(x_0)$ 的符号由 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 的符号所决定。

(1) 当 n 为奇数时,由于 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 在 x_0 的左、右侧改变符号,也就是 $f(x) - f(x_0)$ 变号,所以 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点。

(2) 当 n 为偶数时,对 $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$, $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号相同,所以当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x) - f(x_0) > 0$,即 $f(x) > f(x_0)$, $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$,于是可知 x_0 为极小值点, $f(x_0)$ 为极小值;当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时,同样可证 $f(x) < f(x_0)$, $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$,于是可知 x_0 为极大值点, $f(x_0)$ 为极大值。

【例 4.10】 讨论函数 $f(x) = 2\cos x + e^x + e^{-x}$ 的极值。

【解】 $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$

令 $f'(x) = 0$,由观察知 $x = 0$ 为驻点,并且仅有这个驻点(因 $f'(x)$ 严格单调增加)

又

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, f^{(4)}(0) = 4 > 0$$

由推广的第二充分判别法,知 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, $f(0) = 4$ 为极小值。

【例 4.11】 已知 $f(x)$ 在 $U(0)$ 内连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$,求证 $f(0)$ 是极小值。

【证】 依题意可得 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,由于题中没有给出 $f(x)$ 的可导性,所以不能对极限式应用洛比达法则得出 $f'(0) = 2$ 。下面我们用极值的定义来判定。

由极限的保号性, $\exists \delta > 0$,当 $x \in \dot{U}(0, \delta)$ 时,有

$$\frac{f(x)}{1 - \cos x} > 0$$

此时 $1 - \cos x > 0$,所以 $f(x) > 0$,即 $f(x) > f(0)$,这说明 $f(0)$ 为极小值。

3.4.3 函数的最大值与最小值

设 $f(x) \in C[a, b]$,由闭区间上连续函数的性质知,函数 $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上取得最大值与最小值。如果使函数取得最大(小)值的点在区间的内部,则这样的点一定是极值点。此外,函数的最大(小)值还可能在区间的端点 a, b 处取得。因此,求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的方法应该是:在区间 (a, b) 内求出所有使 $f'(x) = 0$ 的点及导数不存在的点 x_1, x_2, \dots, x_k ,然后计算 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), f(a), f(b)$,比较它们的大小,其中最大的就是函数的最大值,最小的就是函数的最小值,相应地可以找到最大值点和最小值点。

【例 4.12】 求函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ 在区间 $[-2, 2]$ (图 4.5)上的最大值与最小值。

【解】

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \frac{2[(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}]}{3x^{\frac{1}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, 导数不存在的点有 $x = 0, x = \pm 1$, 因 $f(x)$ 是偶函数, 所以只需计算

$$f(0) = 1, f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt[3]{4}, f(1) = 1, f(2) = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}$$

比较它们的大小可知, $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值为 $\sqrt[3]{4}$, 最小值为 $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}$ 。

在某些特殊情况下, 求最大值和最小值可以简化, 例如:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加(减少), 则 $f(a)$ 为最小(大)值, $f(b)$ 为最大(小)值。

(2) 若 $f(x) \in C[a, b]$ 在区间 (a, b) 内存在惟一极值点 x_0 , 若 $f(x_0)$ 为极大(小)值, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大(小)值。此类函数称为单峰(谷)函数。

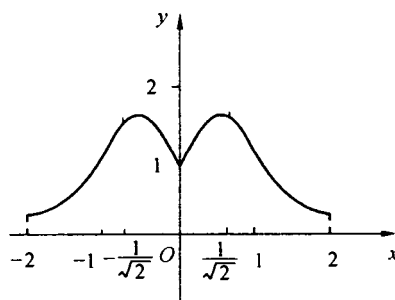


图 4.5

【例 4.13】 将边长为 a 的正方形铁皮于四角处剪去相同的小正方形, 然后折起各边焊成一个容积最大的无盖盒(图 4.6), 问剪去的小正方形的边长应为多少?

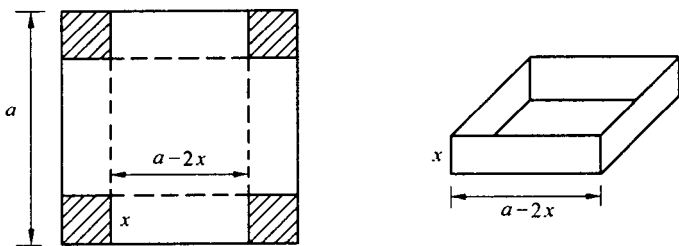


图 4.6

【解】 设剪掉的小正方形边长为 x , 则盒的底边长为 $a - 2x$, 于是盒的容积为

$$V = (a - 2x)^2 x \quad 0 < x < \frac{a}{2}$$

下面求 V 在区间 $(0, \frac{a}{2})$ 内的最大值。因为

$$V' = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x)$$

令 $V' = 0$, 得 $x = \frac{a}{6}, x = \frac{a}{2}$, 所以在区间 $(0, \frac{a}{2})$ 内只有一个极值嫌疑点 $x = \frac{a}{6}$ 。又

$$V''|_{x=\frac{a}{6}} = (-8a + 24x)|_{x=\frac{a}{6}} = -4a < 0$$

故 $x = \frac{a}{6}$ 时, 容积 V 最大, 最大容积为 $V(\frac{a}{6}) = \frac{2a^3}{27}$ 。

利用求函数的最大值和最小值的方法还可以证明一些不等式。前面利用函数单调性证明不等式的方法实际上是这种方法的特殊情况。

【例 4.14】 证明不等式

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha \quad x > 0$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 。

【证】 设 $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, 则

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha$$

令 $f'(x) = 0$, 得惟一驻点 $x = 1$, 又

$$f''(x)|_{x=1} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}|_{x=1} = \alpha(\alpha-1) < 0$$

所以 $f(1) = 1 - \alpha$ 为极大值, 从而是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值, 故

$$f(x) \leq f(1) \quad x > 0$$

即

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha \quad x > 0$$

【例 4.15】 讨论方程 $x \ln x + a = 0$ 有几个实根。

【解】 如图 4.7 连续函数在单调区间的端点处, 若函数值异号, 则在区间内有惟一的零点, 否则无零点。

设 $f(x) = x \ln x + a$, 则题中的问题就是讨论 $f(x)$ 的零点情况。因为

$$f'(x) = \ln x + 1$$

令 $f'(x) = 0$, 得惟一驻点 $x = \frac{1}{e}$ 。当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上严格

单调减少; 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上严格单调增加, 故 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取最小值, 最小值为

$$f(\frac{1}{e}) = a - \frac{1}{e}$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + a) = a \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x + a) = +\infty \end{aligned}$$

所以

- (1) 当 $a > \frac{1}{e}$ 时, 无实根;
- (2) 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 仅有一个实根 $x = \frac{1}{e}$;
- (3) 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 方程有两个实根, 在 $(0, \frac{1}{e})$ 与 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 内各有一个。
- (4) 当 $a \leq 0$ 时, 仅有一个实根, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 内。

3.4.4 函数的凹凸性与拐点

讨论函数的性态, 仅仅知道函数的单调性是不够的。例如, 函数 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上都是严格单调增加的, 并且具有相同的最大值和最小值, 但它们的图形却有明显的不同 (图 4.8), $y = x^2$ 的图象是向下凸的, $y = \sqrt{x}$ 的图象是向上凸的, 我们把函数图象向下凸或向

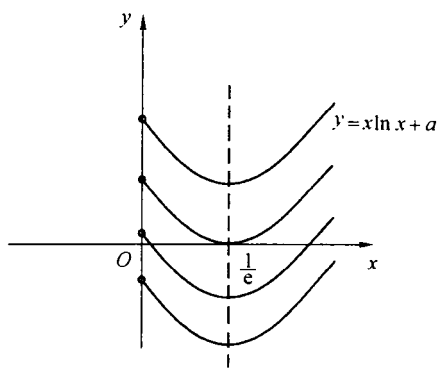


图 4.7

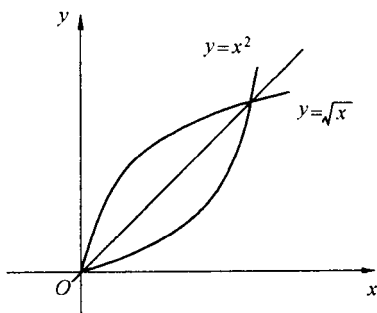


图 4.8

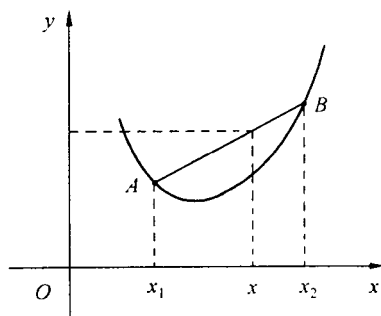


图 4.9

上凸的性质,叫做函数的凸凹性。

下面我们分析一下图象向下凸的函数。

设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上图象向下凸(图 4.9),不难看出,对于 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$,不妨设 $x_1 < x_2$,曲线 $y = f(x)$ 上任意两点 $A(x_1, f(x_1))$ 与 $B(x_2, f(x_2))$ 之间的图象位于弦 AB 的下方,即 $\forall x \in (x_1, x_2)$,函数 $f(x)$ 的值小于或等于弦 AB 在 x 点的函数值。因为弦 AB 的方程为

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

所以,对于 $\forall x \in (x_1, x_2)$ 有

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

整理得

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) \quad (4.1)$$

令 $t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$,则有 $0 < t < 1$,且 $x = tx_1 + (1 - t)x_2$,易得 $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 - t$,所以式(4.1)可以写成

$$f[tx_1 + (1 - t)x_2] \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$$

根据这一结果,我们给出图象向下凸函数的定义。

【定义 4.2】 设 $f(x)$ 在开区间 I 内有定义,若 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0, 1)$,有

$$f[tx_1 + (1 - t)x_2] \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \quad (4.2)$$

称函数 $f(x)$ 在 I 上是凸函数,或 $f(x)$ 在区间 I 是凸的,并称 $f(x)$ 的图象是向下凸的;反之,若有

$$f[tx_1 + (1 - t)x_2] \geq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \quad (4.3)$$

称函数 $f(x)$ 在 I 上是凹函数,或 $f(x)$ 在区间 I 上是凹的,并称 $f(x)$ 的图象是向上凸的。

若在式(4.2)和式(4.3)中 $x_1 \neq x_2$,且不等号为严格的,则称 $f(x)$ 在 I 上是严格凸函数或严格凹函数。

因式(4.1)与式(4.2)等价,所以式(4.1)也可以作为凸函数的定义式。

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凹函数,则函数 $-f(x)$ 就是区间 I 上的凸函数,所以我们只须讨论凸函数。

直接用定义来判断函数的凸凹性是比较困难的。对于可微函数,我们可以利用函数的一阶或二阶导数来判定函数的凸凹性。

【定理 4.6】 若 $f(x)$ 在开区间 I 内可导,则 $f(x)$ 在 I 是凸(凹)函数的充要条件是: $\forall x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 有 $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ ($f'(x_1) \geq f'(x_2)$)。

【证】 只证凸函数情况。

必要性 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2)$, 将式(4.1) 改写为

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

和

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

这两个不等式的几何意义分别如图 4.10 的(a) 和(b) 所示。

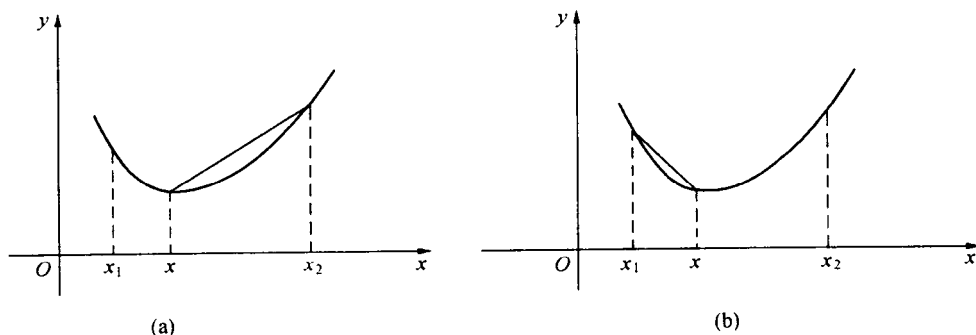


图 4.10

由函数 $f(x)$ 在 I 上的可导性及极限的保序性,得

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

于是有

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

充分性 $\forall x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2)$, 由拉格朗日中值定理,有

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x - x_1), \xi_1 \in (x_1, x)$$

$$f(x_2) - f(x) = f'(\xi_2)(x_2 - x), \xi_2 \in (x, x_2)$$

其中 $\xi_1 < \xi_2$, 于是有

$$f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$$

即

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

改写为

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

可知 $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数。

【推论】 若 $f(x)$ 在 I 上二阶可导, 则:

- (1) 若 $f''(x) > 0, x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上是严格凸函数($f(x)$ 在 I 上严凸);
- (2) 若 $f''(x) < 0, x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上是严格凹函数($f(x)$ 在 I 上严凹)。

【证】 $\forall x \in I$, 由 $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), 知 $f'(x)$ 在区间 I 严格单调增加(减少)。类似于定理 4.6 中充分性的证法, 可以证明 $f(x)$ 在区间 I 上严凸(凹)。

这个推论可判别二阶可导函数的凸凹性。例如, 函数 $f(x) = \ln x$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 可知 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上严凹。

【定理 4.7】 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 可导, $f(x)$ 在 I 是凸(凹)函数的充要条件是曲线 $y = f(x)$ 位于它的任意一点切线的上(下)方。

【证】 仅就凸函数的情形进行证明。

必要性 $\forall x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

于是有

$$f(x) - y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] =$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$[f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0), \quad \xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间。}$$

若 $f(x)$ 在 I 上是凸的, 由定理 4.6 知, $f'(\xi) - f'(x_0)$ 与 $x - x_0$ 同号, 于是对 $\forall x \in I$, 有

$$f(x) \geq y$$

即曲线 $y = f(x)$ 在其上任意一点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线的上方。

充分性 若 $\forall x, x_0 \in I$, 由于曲线 $y = f(x)$ 位于 $(x_0, f(x_0))$ 点切线的上方, 于是有

$$f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

当 $x < x_0$ 时, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \quad (4.4)$$

当 $x > x_0$ 时, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \quad (4.5)$$

$\forall x_1, x_2 \in I$, 不妨设 $\forall x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2)$, 将式(4.4)中 x_0 用 x 替换, x 用 x_1 替换, 得

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq f'(x)$$

将式(4.5)中 x_0 用 x 替换, x 用 x_2 替换, 得

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq f'(x)$$

于是有

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

即

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

故 $f(x)$ 在 I 上是凸函数。

【定义 4.3】 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 且在点 x_0 两侧凸凹性相反, 称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点。

可以证明若 $f''(x)$ 在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 存在, 且 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点, 则

$$f''(x_0) = 0$$

事实上, 因 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点, 所以 $f''(x)$ 在点 x_0 两侧异号。于是 $f'(x)$ 在点 x_0 两侧单调性相反, 故 $f'(x_0)$ 一定是 $f'(x)$ 的一个极值, 由费尔马定理知, $f''(x_0) = 0$ 。

但使 $f''(x_0) = 0$ 的点 x_0 未必使 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。例如函数 $y = x^4$, 在 $x = 0$ 点两侧皆

是凸的,故点 $(0,0)$ 不是拐点。因此 $f''(x_0) = 0$ 是点 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点的必要条件,所以我们求 $f(x)$ 的拐点,只要讨论满足方程 $f''(x) = 0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点即可。至于这些点处函数是否有拐点,还需讨论这些点两侧函数的凹凸性是否改变。

【例 4.16】 讨论 $y = (x-2)^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{9}x^2$ 的凹凸性及拐点。

【解】 $y' = \frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{9}x$

$$y'' = \frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}} - \frac{10}{9} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1 - (x-2)^{\frac{1}{3}}}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}$$

令 $y'' = 0$,得 $x = 3$,另有二阶导数不存在的点 $x = 2$ 。将函数的性态列表如下:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f''(x)$	-	不存在	+	0	-
$f(x)$	∩	拐点 $(2, -\frac{20}{9})$	∪	拐点 $(3, -4)$	∩

其中“∩”表示曲线图象是向上凸的,“∪”表示曲线图象是向下凸的。由表可知,函数在 $(-\infty, 2)$ 和 $(3, +\infty)$ 上是严格凹函数,在 $(2, 3)$ 上是严格凸函数。点 $(2, -\frac{20}{9})$ 与 $(3, -4)$ 皆为拐点。

【例 4.17】 若 $f(x)$ 在区间 I 是凸函数,则有延森(Jensen 1859~1925 丹麦数学家)不等式

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \cdots + q_nf(x_n)$$

其中 $x_i \in I, q_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$,且 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$ 。

【证】 用归纳法证明。

当 $n = 2$ 时,由凸函数定义有

$$f(q_1x + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

其中 $q_1 + q_2 = 1$ 。

假设当 $n = k, q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$ 时,有

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_kx_k) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \cdots + q_kf(x_k)$$

当 $n = k + 1$,且 $q_1 + q_2 + \cdots + q_k + q_{k+1} = 1$ 时,取 $\bar{q}_i = \frac{q_i}{1 - q_{k+1}}, i = 1, 2, \cdots, k$,有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \bar{q}_i &= \frac{1}{1 - q_{k+1}}(q_1 + q_2 + \cdots + q_k) = \\ &= \frac{1}{1 - q_{k+1}} \cdot (1 - q_{k+1}) = 1 \end{aligned}$$

于是,由归纳法假设,有

$$\begin{aligned} &f(q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_{k+1}x_{k+1}) = \\ &f\left[(1 - q_{k+1}) \cdot \frac{q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_kx_k}{1 - q_{k+1}} + q_{k+1}x_{k+1}\right] \leq \\ &(1 - q_{k+1})f\left[\frac{q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_kx_k}{1 - q_{k+1}}\right] + q_{k+1}f(x_{k+1}) \leq \\ &(1 - q_{k+1})\left[\frac{q_1}{1 - q_{k+1}}f(x_1) + \frac{q_2}{1 - q_{k+1}}f(x_2) + \cdots + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{q_k}{1 - q_{k+1}} f(x_k)] + q_{k+1} f(x_{k+1}) = \\ q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_{k+1} f(x_{k+1})$$

由归纳法原理知延森不等式成立。

【例 4.18】 设 $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。证明不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

【证】 设 $f(x) = -\ln x, x > 0$, 显然 $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, 知 $f(x) = -\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是严格凸函数。由延森不等式, 有

$$-\ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq -\frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)$$

及
$$-\ln \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \leq -\frac{1}{n} (\ln \frac{1}{x_1} + \ln \frac{1}{x_2} + \cdots + \ln \frac{1}{x_n})$$

于是
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

即
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

3.4.5 曲线的渐近线

【定义 4.4】 若曲线 C 上的动点 P 沿着 C 无限远离原点, 若动点 P 与某一直线 l 的距离无限地趋于零, 则称直线 l 为曲线 C 的渐近线(图 4.11)。

渐近线有三种类型:

(1) 水平渐近线。若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则称 $y = A$ 是 $y = f(x)$ 的水平渐近线。例如 $y = e^{-x}$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, 所以 $y = 0$ 是 $y = e^{-x}$ 的一条水平渐近线; 又如 $y = \frac{x+3}{x+1}$, 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x+1} = 1$, 所以 $y = 1$ 是 $y = \frac{x+3}{x+1}$ 的一条水平渐近线。

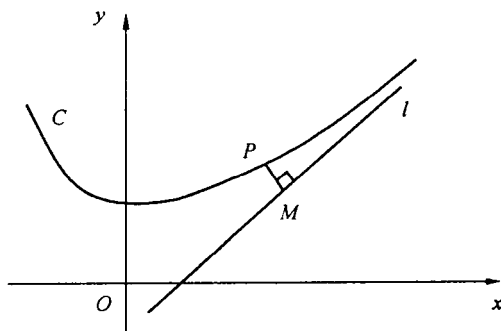


图 4.11

(2) 垂直渐近线。若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 或

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则称 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线。例如 $y = \frac{1}{x-1}$,

由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$, 所以 $x = 1$ 是 $y = \frac{1}{x-1}$ 的一条垂直渐近线, 又如 $y = e^{\frac{1}{x}}$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, 所以 $x = 0$ 是 $y = e^{\frac{1}{x}}$ 的一条垂直渐近线。

$= +\infty$, 所以 $x=0$ 是 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 的一条垂直渐近线。

(3) 斜渐近线。设曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b(k \neq 0)$, 曲线上点 P 到直线的距离(图 4.11)为

$$|PM| = \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1+k^2}}$$

由渐近线的定义知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} |PM| = 0$$

所以有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx - b) = 0 \quad (4.6)$$

于是

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x) - kx - b}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0$$

从而

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} \quad (4.7)$$

将式(4.7)定出的 k 代入式(4.6), 便可求得

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx) \quad (4.8)$$

因此, 要使直线 $y=kx+b$ 为所给曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线, 必须且只须式(4.7)与式(4.8)同时成立。

【例 4.19】 求曲线 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 的渐近线(图 4.12)。

【解】 因为 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1} = \infty$, 所以 $x=-1$ 为 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 的垂直渐近线。

$$\text{由于 } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

所以 $y = x - 1$ 是 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线。

【例 4.20】 求曲线 $y = x \arctan x$ 的渐近线图 4.13。

【解】 无水平和垂直渐近线

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{以及 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{\pi}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1$$

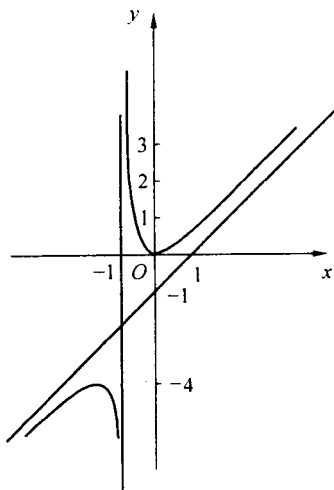


图 4.12

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}x \right) &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} &= \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} &= -1\end{aligned}$$

故曲线 $y = x \arctan x$ 有两条斜渐近线

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1 \quad \text{及} \quad y = \frac{\pi}{2}x - 1$$

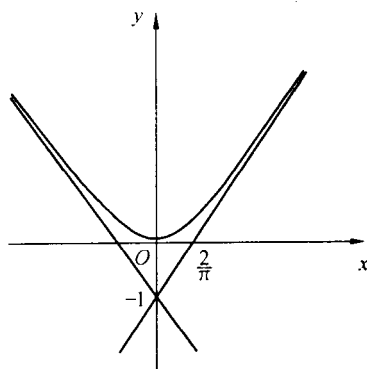


图 4.13

3.4.6 函数的分析作图法

作函数 $y = f(x)$ 的图形,一般应遵循如下步骤:

(1) 讨论函数的基本性质。如确定函数的定义域、值域、间断点以及函数的奇偶性、周期性(利用函数的特性,简化作图)。

(2) 用导数来研究函数的性质。求出 $f'(x) = 0$ 和 $f''(x) = 0$ 在定义域内的全部实根以及使 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的所有点,用这些根和导数不存在的点把函数定义域分成若干小区间,确定在这些小区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号,并由此确定函数的单调区间的凸凹区间、极值和拐点。为方便起见,讨论结果用表格表示。

(3) 求渐近线以及其它变化趋势。

(4) 求出一些特殊点处的函数值,例如与坐标轴的交点、极值点、拐点等。定出图形上相应的点,结合前面的结果,用平滑的曲线连结这些点,画出函数 $y = f(x)$ 的图形。

【例 4.21】 作 $y = (x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形。

【解】 函数 $y = (x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且为非奇偶非周期函数

$$y' = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

令 $y' = 0$, 得 $x = -2, x = 3$

$$y'' = \frac{13x + 6}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = -\frac{6}{13}$ 。

现列表讨论。

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{6}{13})$	$-\frac{6}{13}$	$(-\frac{6}{13}, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	不存在	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	不存在	+	+	+
$f(x)$	↑ ↗	极大值	↓ ↘	拐点	↓ ↘	无定义	↓ ↘	极小值	↑ ↗

极大值 $y|_{x=-2} = \frac{4}{\sqrt{e}}$, 极小值 $y|_{x=3} = 9\sqrt[3]{e}$, 拐点 $(-\frac{6}{13}, \frac{72}{13}e^{\frac{13}{6}})$ 。

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+6)e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, 所以 $x=0$ 是垂直渐近线。

又因为 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+6)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+6)e^{\frac{1}{x}} - x] = 7$$

所以 $y = x + 7$ 为渐近线。

还可知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+6)e^{\frac{1}{x}} = 0$

首先画出渐近线 $x=0$ 及 $y=x+7$, 再画出极值点、拐点等重要点的坐标, 最后根据函数 $y = (x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的性态, 用平滑曲线描出它的图象(图 4.14)。

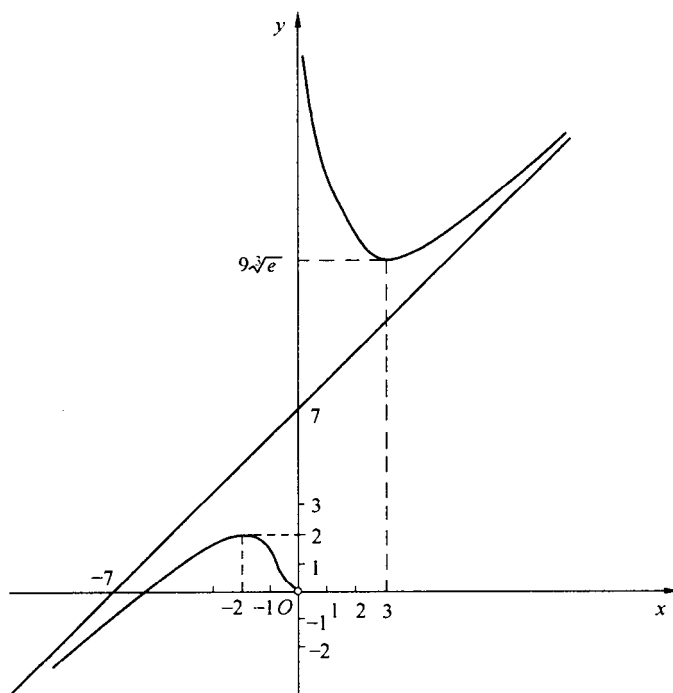


图 4.14

习 题 3.4

1. 确定下列函数的单调区间

- (1) $y = x^4 - 2x^2 - 5$ (2) $y = \sqrt{2x - x^2}$
 (3) $y = x - e^x$ (4) $y = x + |\sin 2x|$

2. 证明下列不等式

- (1) $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0)$
 (2) $\sin x + \tan x > 2x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$
 (3) $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3 \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

$$(4) 2^x > x^2 \quad (x > 4)$$

$$(5) \sin x > \frac{2}{\pi} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

3. 设在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f''(x) > 0, f(0) < 0$, 试证明: 函数 $\frac{f(x)}{x}$ 分别在区间 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 内是单调增加的。

4. 设 $\alpha > \beta > e$, 证明不等式 $\beta^\alpha > \alpha^\beta$ 。

5. 试证方程 $\sin x = x$ 只有一个实根。

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数, 试证若 $f(a) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, a - \frac{f(a)}{k})$ 内有且仅有一个实根。

7. 求下列函数的极值

$$(1) y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7 \quad (2) y = \frac{x}{\ln x}$$

$$(3) y = x + \sqrt{1-x} \quad (4) y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$(5) y = e^{-x} \sin x \quad (6) y = 2e^x + e^{-x}$$

$$(7) y = x^{\frac{1}{x}} \quad (8) y = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}$$

8. 试证明: 如果函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足条件 $b^2 - 3ac < 0$, 那么这个函数没有极值。

9. 问 a 为何值时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取极值, 它是极大还是极小, 并求此极值。

10. 求函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$ 的极值。

11. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值

$$(1) y = x + 2\sqrt{x} \quad [0, 4]$$

$$(2) y = x^5 - 5x^4 + 5x^2 + 1 \quad [-1, 2]$$

$$(3) y = xe^{-x^2}$$

$$(4) y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2} \quad [0, 3]$$

$$(5) y = x \ln x \quad (0, e]$$

12. 设 $0 \leq x \leq 1, p > 1$, 证明不等式

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$$

13. 证明: 当 $x < 1$ 时, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ 。

14. 设有数列: $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$, 求此数列的最大项。

15. 制作一个容积固定的圆柱形大桶, 问高及底圆半径取多大尺寸时, 用料最省?

16. 已知等腰三角形的周长是 $2l$, 问它的腰多长其面积为最大, 并求其最大面积?

17. 试求内接于半径为 R 的球的体积最大的圆柱体的高。

18. 半径为 R 的圆上截去中心角为 α 的扇形, 余下的部分可卷成一圆锥形漏斗, 问 α 取何值时, 漏斗的容积最大?

19. 如图 4.15 所示, 铁路线上 AB 直线段长 100 km, 工厂 C 到铁路路上 A 处的垂直距离 CA 为 20 km. 现要在 AB 上选一点 D , 从 D 向 C 修一条直线公路。已知铁路运输每吨千米与公路运

输每吨千米的运费之比为 3 : 5, 为了使原料从 B 处运到工厂 C 的运费最省, D 应选在何处?

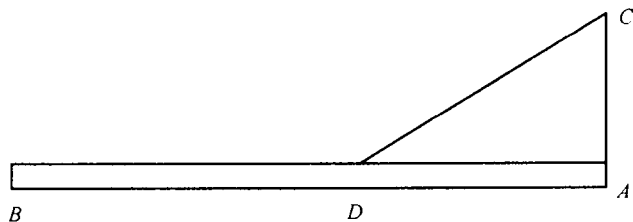


图 4.15

20. 在曲线 $9x^2 + 4y^2 = 72$ 的第一象限部分的图形上找一点 p , 使曲线在 p 点的切线与坐标轴间所围成的面积最小。

21. 方程 $\ln x = ax$ (其中 $a > 0$) 有几个实根?

22. 求下列函数的凸凹区间及拐点

(1) $y = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4$ (2) $y = \ln(x^2 + 1)$

(3) $y = e^{-x} \sin x$ (4) $y = \begin{cases} \ln x - x & x \geq 1 \\ x^2 - 2x & x < 1 \end{cases}$

23. 试证曲线 $y = \frac{x-1}{1+x^2}$ 有三个拐点位于同一直线上。

24. 求曲线 $x = t^2, y = 3t + t^2$ 的拐点。

25. 问 a 及 b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点。

26. 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有三阶连续导数, 且 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, 而 $f'''(x_0) > 0$, 试问点 x_0 是否为极值点? 为什么? 又 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么? 推广一下, 你猜想有什么一般的结论。

27. 求下列曲线的渐近线

(1) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ (2) $y = x + \frac{\ln x}{x}$

(3) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ (4) $y = x - 2\arctan x$

(5) $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$ (6) $y^2(x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1)$

28. 作出下列函数的图形

(1) $y = e^{-\frac{1}{x}}$ (2) $y = xe^{-x}$

(3) $y = \sqrt[3]{x^2} + 2$ (4) $y = x^4 - 2x^2 + 5$

(5) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$ (6) $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

3.5 平面曲线的曲率

3.5.1 弧微分

设函数 $f(x)$ 在区间 I 是连续可微 (即有连续的导数)。在曲线 $y = f(x)$ 上取定一点 $M(x_0, f(x_0))$ 作为计算弧长的起点, 对于曲线上任一点 $P(x, f(x))$, 弧 \widehat{MP} 的长度是 x 的函数 $s =$

$s(x)$ 。并规定:当点 P 在点 M 的右侧($x > x_0$) 时 $s = s(x)$ 为正;当点 P 在 M 的左侧($x < x_0$) 时 $s = s(x)$ 为负。因此弧长 $s(x)$ 是 x 的单调增加函数。

当横坐标由 x 变到 $x + \Delta x$ 时,对应曲线上的点由 P 变到 P' ,弧长增量(即弧 $\widehat{PP'}$ 的长度)

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x)$$

当 P' 与 P 充分接近时,弧 $\widehat{PP'}$ 的长度 Δs 能近似地用弧 $\widehat{PP'}$ 所对应的弦 PP' 的长度 $|PP'|$ 来代替(图 5.1)。且

$$\lim_{P' \rightarrow P} \frac{\Delta s}{|PP'|} = 1$$

因为

$$|PP'|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{|PP'|}\right)^2 \left(\frac{|PP'|}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{|PP'|}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]$$

注意到当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $P' \rightarrow P$,所以上式两端令 $\Delta x \rightarrow 0$,

取极限可得

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + y'^2$$

由此得到弧长微分公式

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (5.1)$$

上式根号前取正号,是因为 $s(x)$ 是 x 的单调增加函数, ds 与 dx 同号。式(5.1)可以写成微分三角关系(勾股关系)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

值得注意的是,弦长 $|PP'|$ 不是 Δx 的线性函数,所以弦长不是弧长的微分。切线段 PT 的有向长才是弧微分(图 5.1)。

若曲线弧是由参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

或极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

给出,且 $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $r(\theta)$ 均有连续导数,则分别有弧长微分公式

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

与

$$ds = \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

3.5.2 曲线的曲率

我们都有这样的经验:当乘火车、汽车转弯时,弯曲越大,离心力就越大;建筑中的梁、车床上的轴等弯曲也极为重要,如果弯曲太厉害,就会造成断裂。如此等等,需要考虑曲线的弯曲程度。那么,如何用数量来描述曲线弯曲程度——即所谓曲率,当然是十分有意义的事。

我们先来看两条曲线,如何比较它们的弯曲程度。

假如两条曲线段(图 5.2)的长度一样,都是 Δs ,但它们的切线变化不同。对第一条曲线来说,在 A 点有一条切线 τ_A 。假设当 A 点沿着曲线连续变动到 B 点,切线 τ_A 也跟着连续变动 B 点的切线 τ_B 。 τ_A 与 τ_B 之间的夹角 $\Delta\varphi$ 就是从 A 到 B 切线转角变化的大小。同样,在第二条曲线段

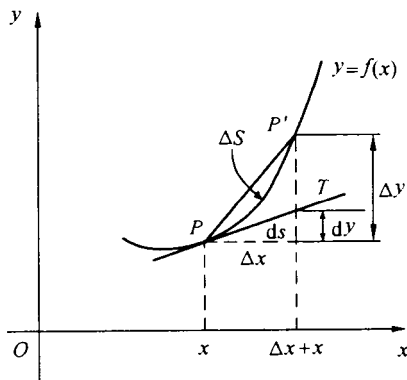


图 5.1

上, $\Delta\varphi_1$ 是从 A' 到 B' 切线方向变化的大小。由图 5.2 可见 $\Delta\varphi_1 < \Delta\varphi_2$, 它表示曲线弧 $\widehat{A'B'}$ 比曲线弧 \widehat{AB} 弯曲的厉害。因此, 角度变化越大, 弯曲越厉害。即 ΔS 一定时弯曲程度与 $\Delta\varphi$ 成正比。

另一方面, 切线方向变化的角度还不能完全地反映曲线的弯曲程度。如图 5.3 所示, 两段圆弧的切线都改变了同一角度, 但可以看出弧长小的弯曲厉害。因此, 改变同一角度, 弧长越小, 弯曲越厉害。即 $\Delta\varphi$ 一定时, 弯曲程度与 ΔS 成反比。

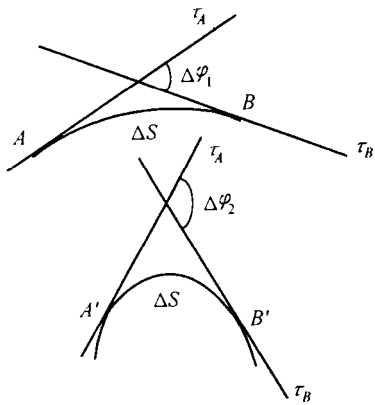


图 5.2

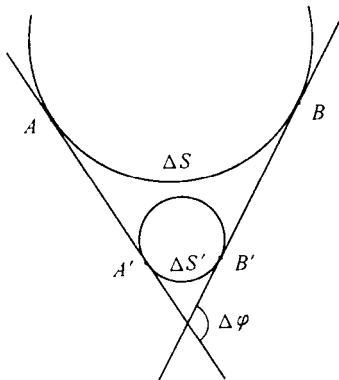


图 5.3

因此, 一段曲线的平均弯曲程度可以用

$$\bar{k} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right|$$

来衡量, 称为曲线段的平均曲率。

如果把 $|\Delta S|$ 取得小一些, 弧段上的平均曲率也就能近似地刻画曲线在点 A 处的弯曲程度。随着点 B 越来越接近 A 点, 弧长 $|\Delta S|$ 越来越小, 平均曲率 $\bar{k} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right|$ 也就越来越近似地刻画出曲线在点 A 处的弯曲程度。因此, 称极限值

$$k = \lim_{B \rightarrow A} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right|$$

为曲线在点 A 处的曲率。曲率 k 刻画了曲线在一点处的弯曲程度。在 $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}$ 存在的条件下, k 可以表示为

$$k = \left| \frac{d\varphi}{dS} \right| \quad (5.2)$$

【例 5.1】 求直线上各点处的曲率。

【解】 因沿着直线的切线方向没有变化, 即 $\Delta\varphi = 0$, 所以平均曲率 $\bar{k} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right| = 0$, 因此

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right| = 0$$

这表示直线上每一点处的曲率皆为 0。与我们直觉认识到的“直线不弯曲”一致。

【例 5.2】 求半径为 R 的圆的曲率。

【解】 如图 5.4, 由于圆周上任意两点 A, B 处的两条切线的转角 $\Delta\varphi$ 等于圆心角 $\angle ADB$, 而圆心角

$$\angle ADB = \frac{\Delta S}{R}$$

所以 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{\frac{\Delta S}{R}}{\Delta S} = \frac{1}{R}$

于是 $k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right| = \frac{1}{R}$

即圆上任意一点的曲率皆为半径的倒数,因而半径越大,曲率越小;半径越小,曲率越大。这再一次印证了曲率确实反映曲线的弯曲程度。

3.5.3 曲率的计算

现在来导出便于实际计算曲率的公式。

设在直角坐标系下曲线方程是 $y = f(x)$, 且 $f(x)$ 具有二阶导数。根据导数的几何意义,有

$$y' = \tan \varphi$$

于是

$$\varphi = \arctan y'$$

因此

$$d\varphi = \frac{1}{1+y'^2} dy' = \frac{y''}{1+y'^2} dx$$

由式(5.1)知, $dS = \sqrt{1+y'^2} dx$, 将 $d\varphi$ 和 dS 代入式(5.2), 就有

$$k = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right| \quad (5.3)$$

如果曲线由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

或极坐标方程

$$r = r(\theta)$$

给出, 且 $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $r(\theta)$ 均二阶可导, 则

$$k = \left| \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'^2_t + y'^2_t)^{\frac{3}{2}}} \right| \quad (5.4)$$

或

$$k = \left| \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \quad (5.5)$$

公式(5.4)与公式(5.5)的证明留给读者。

【例 5.3】 求抛物线 $y = x^2$ 上各点的曲率, 并问哪一点曲率最大。

【解】 $y' = 2x, y'' = 2$ 。所以曲率为

$$k = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{2}{[1+(2x)^2]^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

显然 $x = 0$ 时, 即在点 $(0, 0)$ 处抛物线 $y = x^2$ 的曲率最大, 此时 $k = 2$ 。

【例 5.4】 试求椭圆

$$x = a \cos t, y = b \sin t \quad (a, b > 0)$$

在点 $A(a, 0)$ 处的曲率。

【解】 由于

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{d^2x}{dt^2} = -a \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = b \cos t, \frac{d^2y}{dt^2} = -b \sin t$$

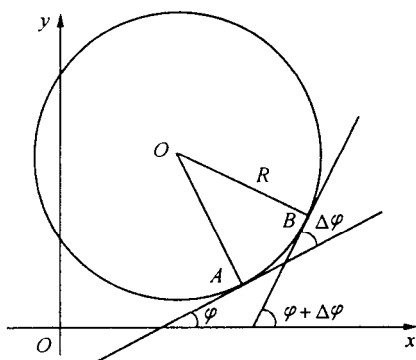


图 5.4

把这些结果代入式(5.4)中,得到椭圆上任一点的曲率

$$k = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

因此,令 $t = 0$,即得到椭圆在点 $A(a, 0)$ 处的曲率

$$k = \frac{a}{b^2}$$

3.5.4 曲率半径与曲率圆

有了曲率的概念和计算公式,曲线上任一点处的弯曲程度可通过一个数表示出来,但是到底弯曲到什么程度还没有一个直观形象。由例 5.2 知,半径为 R 的圆周上任一点处的曲率为半径的倒数 $\frac{1}{R}$ 。故若曲线上某点的曲率为 k ,则曲线在这点处的弯曲程度和以 $\frac{1}{k}$ 为半径的圆周相同。比如,抛物线 $y = x^2$ 在原点的曲率为 2,那么它在该点处的弯曲程度同半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆周一样。

若曲线 C 上的点 A 处的曲率 $k \neq 0$,则称 $\rho = \frac{1}{k}$ 为曲线 C 在点 A 处的曲率半径。

如图 5.5 所示,过曲线上的点 $A(x, y)$,沿着曲线的凹的一侧,在法线上取一点 $P(\alpha, \beta)$,使线段 AP 等于曲线在点 A 处的曲率半径 $\rho = \frac{1}{k}$,然后以 $P(\alpha, \beta)$ 为圆心, ρ 为半径,作一个圆,称之为曲线在点 A 处的曲率圆(或密切圆),点 P 称为曲线在点 A 处的曲率圆心。

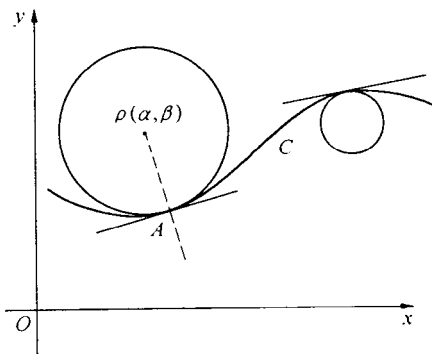


图 5.5

由于曲率圆与曲线 C 在点 A 处有共同的切线、相同的曲率和相同的弯曲方向,所以曲线与曲率圆在点 A 处是充分密切的。当我们要讨论函数 $y = f(x)$ 在某点 x 的性质时,若这个性质只与 x, y, y', y'' (曲率圆与曲线在 A 点处具有相同的一、二阶导数) 有关,那么我们只要讨论在点 x 处的曲率圆的性质,即可看出这个曲线在点 x 处附近的性质。因此,在工程上常常以曲率圆的弧段来近似代替复杂的小曲线段。

现在我们来确定曲线 $C: y = f(x)$ 在点 $A(x, y)$ 处的曲率圆心 $P(\alpha, \beta)$ 的坐标 (α, β) 。

设 $y'' \neq 0$, 因为

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2 \quad (5.6)$$

并且曲线在点 $A(x, y)$ 的切线与曲率圆半径 OA 垂直,所以

$$y' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta} \quad (5.7)$$

将式(5.7)代入式(5.6)中消去 $x - \alpha$, 得

$$(y - \beta)^2 = \frac{\rho^2}{1 + y'^2} = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2}$$

注意到当 $y'' > 0$ 时,曲线是向下凸的,这时 $\beta - y > 0$; 当 $y'' < 0$ 时,曲线是向上凸的,这时 $\beta -$

$y < 0$, 因此, 有

$$\beta - y = \frac{1 + y'^2}{y''}$$

即

$$\beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

再由式(5.7), 有

$$\alpha = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}$$

当点 $A(x, y)$ 沿曲线 C 移动时, 它的曲率圆心 $P(\alpha, \beta)$ 亦将随着移动, 数学上把 $P(\alpha, \beta)$ 的移动轨迹 L 称为曲线 C 的渐屈线, 称曲线 C 为曲线 L 的渐伸线(图 5.6)。所以曲线 $y = f(x)$ 的渐屈线的参数方程为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{cases} \quad (5.8)$$

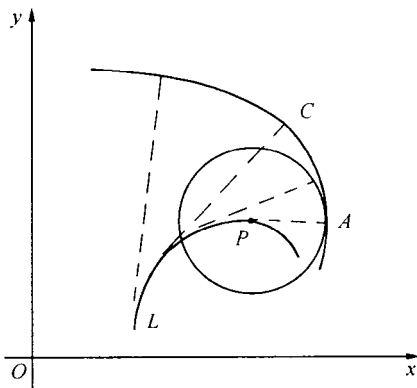


图 5.6

【例 5.5】 求正弦函数 $y = \sin x$ 上点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$

处的曲率半径和曲率圆。

【解】 由于

$$\begin{aligned} y' &= \cos x, y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ y'' &= -\sin x, y''|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1 \end{aligned}$$

所以在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的曲率为

$$k = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|_{(\frac{\pi}{2}, 1)} = \left| \frac{-1}{(1 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = 1$$

在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的曲率半径为

$$\rho = \frac{1}{k} = 1$$

又

$$\begin{cases} \alpha = \left[x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \right]_{(\frac{\pi}{2}, 1)} = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \left[y + \frac{1 + y'^2}{y''} \right]_{(\frac{\pi}{2}, 1)} = 0 \end{cases}$$

即在点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的曲率圆心为 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 。故所求曲率圆的方程为

$$(x - \frac{\pi}{2})^2 + y^2 = 1$$

【例 5.6】 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐屈线。

【解】 $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, y'' = -\frac{b^2}{a^2} \left[\frac{y - x(-\frac{b^2x}{a^2y})}{y^2} \right] = -\frac{b^4}{a^2y^3}$

代入式(5.8), 得

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)\left[1 + \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2\right]}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{a^2 - b^2}{a^4}x^3 \\ \beta = y + \frac{1 + \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{b^2 - a^2}{b^4}y^3 \end{cases}$$

由此解出 x, y , 代入椭圆方程, 即得所求的渐屈线方程

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

它的图形是星形线, 见图 5.7。

此题也可用参数方程求之, 即对

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

有 $y' = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t$

$$y'' = \frac{\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sin^2 t}}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\sin^3 t}$$

代入式(5.8), 得

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{a}(a^2 - b^2)\cos^3 t \\ \beta = -\frac{1}{b}(a^2 - b^2)\sin^3 t \end{cases}$$

消去 t , 也得

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

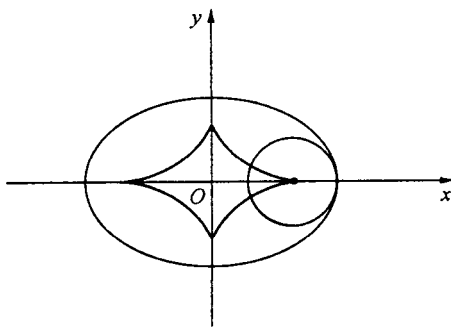


图 5.7

习 题 3.5

1. 求下列曲线在指定点处的曲率和曲率半径。

(1) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 在点 $(0,0)$

(2) $xy = 1$, 在点 $(1,1)$

(3) $x = 3t^2, y = 3t - t^3$, 在 $t = 1$ 对应的点

(4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 在点 $(a,0)$

2. 导出极坐标系下曲线的曲率公式。求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 在任一点 (r, θ) 处的曲率半径。

3. 求曲线 $y = \ln x$ 上曲率最大的点。

4. 求 $y = e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率中心。

5. 求 $y^2 = 4x$ 在原点处的曲率圆。

6. 设 $f(x)$ 具有二阶导数, 证明曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的曲率可以用 $k = \left| \frac{d \sin \alpha}{dx} \right|$ 表示, 其中 α 是曲线在点 P 处切线的倾角。

7. 求摆线 $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 在最高处的曲率, 并求它的渐屈线方程。

第四章 不定积分

微分学中所研究问题的做法是从已知函数 $f(x)$ 出发求其导数 $f'(x)$, 即所谓的微分运算。微分运算的重要意义已经通过列举许多应用给予说明。但是我们也应该看到许多实际问题, 不是要寻找某一函数的导数, 而是恰恰相反, 从已知的某一函数的导数 $f'(x)$ 出发求其本身 $f(x)$, 这便是所谓的积分运算。显然, 积分运算是微分运算的逆运算。另外积分运算也为后面定积分的计算奠定了基础。在这一章里将引入不定积分的概念, 讨论换元积分法和分部积分法。最后研究几类初等函数的积分法。

4.1 不定积分的概念与性质

4.1.1 原函数与不定积分的概念

【例 1.1】 火车快要进站时, 司机就要使它逐渐减速, 到站时火车恰好停下, 假定在减速时, 列车的速度

$$v=v(t)=1-\frac{t}{3} \text{ km/min}$$

那么列车应该在离站台多远的地方开始减速?

【解】 按照上面的减速公式, 若使火车停下来, 此时的速度: $v=0$ 。那么从开始减速到列车完全停下来, 所需要的时间满足方程

$$v=v(t)=1-\frac{t}{3}=0$$

即 $t=3$ 。假设从减速开始的地方算起, t 时刻后, 列车所走路程为 $s=s(t)$ 。于是从开始减速到最后停下来, 列车所走过的路程是 $s=s(3)$ 。另一方面, 根据微分学, 速度是路程函数的导数, 即

$$s'(t)=v(t)$$

可见我们的问题是找一个函数 $s(t)$, 使其导数

$$s'(t)=v(t)=1-\frac{t}{3}$$

并且 $s(0)=0$ 。经验算, 取 $s(t)=t-\frac{t^2}{6}$, 则有

$$s'(t)=1-\frac{t}{3} \quad s(0)=0$$

于是, 有

$$s=s(3)=3-\frac{3^2}{6}=\frac{3}{2} \text{ km}$$

所以列车应该在离站台 1 500 m 处开始减速。

例 1.1 的问题归结为已知一函数 $s(t)$ 的导数

$$s'(t)=v(t)$$

而反过来,求这一函数本身 $s(t)$ 。更一般的我们有如下定义。

【定义 1.1】 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I ,若存在函数 $F(x)$,使得 $\forall x \in I$,有

$$F'(x) = f(x)$$

称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 的一个原函数,简称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数。

根据定义 1.1,例 1.1 中的距离函数 $s(t) = t - \frac{t^2}{6}$ 是速度函数 $v(t) = 1 - \frac{t}{3}$ 的一个原函数;函数 $\sin x$ 是函数 $\cos x$ 的一个原函数;函数 e^x 是它本身的一个原函数。

显然,若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数,则利用导数的运算性质,对于任意常数 $C \in \mathbb{R}$,有

$$[F(x) + C]' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$$

可见函数 $F(x) + C$ 也是函数 $f(x)$ 的一个原函数,由于常数 C 的任意性,所以若函数 $f(x)$ 有原函数,那么它必有无穷多个原函数。

对于原函数,我们面临着两个理论问题需要解决:一个是已知函数的原函数的存在性问题,即已知函数应满足什么样的条件它的原函数存在;另一个是原函数的结构问题,即若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数,由上面讨论知 $f(x)$ 有无穷多个原函数,那么这无穷多个原函数是否仅限于 $F(x) + C$ 这一种形式。

对于前者我们留待下一章证明如下结论:若函数 $f(x)$ 在区间 I 连续,则函数 $f(x)$ 必在区间 I 存在原函数。对于后者我们有:

【定理 1.1】 若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 的一个原函数,则 $f(x)$ 的无穷多个原函数仅限于 $F(x) + C$ 的形式。

【证】 设函数 $\Phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的任意的一个原函数,令

$$\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$$

由假设 $F(x)$ 、 $\Phi(x)$ 均为 $f(x)$ 的原函数, $\forall x \in I$,有

$$\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

从而

$$\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) = C$$

即

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

这说明 $f(x)$ 的任一原函数均可表示为 $F(x) + C$ 的形式。也就是说 $F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数的一般表达式。

【定义 1.2】 若函数 $f(x)$ 在区间 I 有原函数 $F(x)$,则称 $f(x)$ 的所有原函数的一般表达式 $F(x) + C (\forall C \in \mathbb{R})$ 为 $f(x)$ 的不定积分,记作

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1.1)$$

其中“ \int ”称为积分号;“ x ”称为积分变量;“ $f(x)$ ”称为被积函数;“ $f(x)dx$ ”称为被积表达式;“ C ”称为积分常数。

由定义 1.2,一个函数的不定积分,既不是一个数,也不是一个函数,而是一族函数。从几何上看,不定积分是一族平行曲线,这一族曲线在横坐标相同的点 $(x, F(x) + C)$ 处的切线斜率都等于 $f(x)$ (图 1.1)。

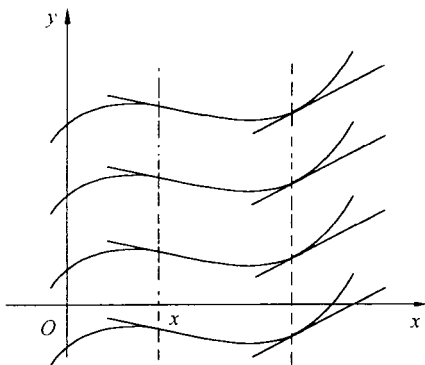


图 1.1

【例 1.2】 根据定义 1.3, 有

$$(1) \int (1 - \frac{t}{3}) dt = t - \frac{t^2}{6} + C$$

$$(2) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(3) \int e^x dx = e^x + C$$

4.1.2 不定积分的性质与基本积分表

已知一个函数 $f(x)$ 而求其不定积分的运算, 称为积分运算。关于积分运算我们有如下性质。

【性质 1.1】 $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ 或 $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$ (1.2)

【证】 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

于是 $\left(\int f(x) dx\right)' = [F(x) + C]' = F'(x) + (C)' = f(x)$

性质 1.1 说明不定积分的导数(微分)等于被积函数(被积表达式)。

【性质 1.2】 $\int F'(x) dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$ (1.3)

【证】 由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的一个原函数, 根据定义 1.2, 有

$$\int F'(x) dx = F(x) + C$$

性质 1.2 说明对一个函数 $F(x)$, 先微分得到 $F'(x) dx$, 再求不定积分等于 $F(x) + C$ 。

总之, 有如加法与减法是互为逆运算, 乘法与除法是互为逆运算, 积分运算与微分运算也是互为逆运算。

利用式(1.3)和基本导数表, 有如下基本积分表。它是积分运算的基础, 初学者必须熟记在心。

基本积分表

$$(1) \int 0 dx = C$$

$$(2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$(3) \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \mu \in R, \mu \neq -1$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \in R^+$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$(5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(8) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(9) \int \tan x \sec x dx = \sec x + C$$

$$(10) \int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$$

$$(11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$(12) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$$

$$(13) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$(14) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

【性质 1.3】 设函数 $f_1(x), f_2(x)$ 在区间 I 有原函数, $\forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}, k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, 则

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx \quad (1.4)$$

【证】 可由微分法直接验证式(1.4), 因为

$$\begin{aligned} [k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx]' &= [k_1 \int f_1(x) dx]' + [k_2 \int f_2(x) dx]' = \\ &= k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx$$

性质 1.3 称为不定积分的线性性质。

如果在式(1.4)中取 $k_1 = k, k_2 = 0; f_1(x) = f(x)$, 则有如下推论。

$$\text{【推论】} \quad \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (1.5)$$

式(1.5)说明被积函数的常数因子可以提到积分号的前面。

通过以上的讨论, 我们已经知道积分运算是微分运算的逆运算。但是不定积分的定义 1.2 并没有给出积分运算的方法。这与导数的定义不同。导数的定义

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

是构造性的。由这个定义人们可以推导出基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数求导的链式法则, 从而初等函数的求导问题得到圆满解决。那么如何进行积分运算呢? 积分运算的基本思想是: 利用积分运算的性质和方法把被积函数化为基本积分表中所具有的函数, 然后利用基本积分表求出被积函数的不定积分。

【例 1.3】 计算 $\int (e^x + 2\cos x) dx$ 。

【解】 由性质 1.3 和基本积分表, 有

$$\begin{aligned} \int (e^x + 2\cos x) dx &= \int e^x dx + 2 \int \cos x dx = \\ &= e^x + 2\sin x + C \end{aligned}$$

【例 1.4】 计算 $\int \frac{(x - x^{\frac{1}{2}})(1 + x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ 。

【解】 由于

$$\frac{(x - x^{\frac{1}{2}})(1 + x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}(x + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - x) = x^{\frac{2}{6}} - x^{\frac{1}{6}}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \int \frac{(x - x^{\frac{1}{2}})(1 + x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{3}}} dx &= \int (x^{\frac{2}{6}} - x^{\frac{1}{6}}) dx = \\ &= \int x^{\frac{2}{6}} dx - \int x^{\frac{1}{6}} dx = \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} - \frac{7}{6} x^{\frac{7}{6}} + C \end{aligned}$$

【例 1.5】 计算 $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)}$ 。

【解】 由于 $1 = (1 + x^2) - x^2$, 所以

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)} = \int \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(1 + x^2)} dx =$$

$$\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

【例 1.6】 计算 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ 。

【解】 利用三角恒等式 $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \int \csc^2 x dx + \int \sec^2 x dx = -\cot x + \tan x + C \end{aligned}$$

【例 1.7】 计算 $\int (10^x + \cot^2 x) dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \int (10^x + \cot^2 x) dx &= \int 10^x dx + \int \cot^2 x dx = \\ &= \frac{10^x}{\ln 10} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \frac{10^x}{\ln 10} + \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \\ &= \frac{10^x}{\ln 10} - \int \csc^2 x dx - \int dx = \frac{10^x}{\ln 10} + \cot x - x + C \end{aligned}$$

习 题 4.1

1. 求一条平面曲线的方程, 该曲线通过点 $A(1, 0)$, 并且曲线上每一点 $P(x, y)$ 处的切线斜率是 $2x - 2$ 。

2. 若曲线 $y = f(x)$ 上点 $P(x, y)$ 处的切线斜率与 x^3 成正比例, 并且曲线通过点 $A(1, 6)$ 和 $B(2, -9)$, 求该曲线方程。

3. 证明 $\ln \tan \frac{x}{2} - \ln |\csc x - \cot x| = a$, 并求该常数 a 。

4. 求下列不定积分

$$(1) \int (\sqrt{x} + 1)^2 dx$$

$$(2) \int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{3}\right)^3 dx$$

$$(3) \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(4) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

$$(5) \int (2^x + 3^x)^2 dx$$

$$(6) \int 3^x e^x dx$$

$$(7) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx$$

$$(8) \int \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

$$(9) \int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$$

$$(10) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$$

$$(11) \int \tan^2 x dx$$

$$(12) \int e^x \left(a^x - \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx, (a > 0)$$

$$(13) \int \frac{\sqrt{x} + x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$$

$$(14) \int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$(15) \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$$

$$(16) \int 3^{2x} e^x dx$$

$$(17) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$(18) \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$(19) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$$

$$(20) \int (\arcsin x + \arccos x) dx$$

5. 试证

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C$$

其中 $a^2 + b^2 \neq 0$, $A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}$, $B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}$ 。

4.2 换元积分法和分部积分法

通过 4.1 节的学习可知,虽然利用积分的运算性质和基本积分表我们可以求出部分函数的不定积分。但是,实际上遇到的积分仅仅依赖于基本积分表还是不够的。例如形式上很简单的不定积分

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

就无法求出。为了求得更广泛函数的不定积分,还需要引进更多的方法与技巧。本节所讲述的换元积分法与分部积分法是求不定积分的最基本、最常用的两种重要方法,读者应熟练掌握。

4.2.1 换元积分法

有一些不定积分,将积分变量进行适当的变换后,就可利用基本积分表求出积分。例如,求不定积分 $\int \cos 2x dx$,如果凑上一个常数因子 2,使成为

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x)$$

令 $2x = u$,则上述右端积分

$$\frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C$$

然后再代回原来的积分变量 x ,就求得原不定积分

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

更一般的,如果函数 $F(u)$ 是函数 $f(u)$ 的一个原函数, $u = \varphi(x)$ 是可微函数,并且复合运算 $f[\varphi(x)]$ 有意义,根据复合函数求导法则

$$\{F[\varphi(x)]\}' = F'[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

及不定积分的定义 1.2,有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C$$

由于

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

从而

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \left(\int f(u) du \right) \Big|_{u=\varphi(x)} \quad (2.1)$$

综上所述,可得如下结论:

【定理 2.1】 (第一换元积分法) 设 $f(u)$ 是连续函数, $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数。又若 $u = \varphi(x)$ 连续可微,并且复合运算 $f[\varphi(x)]$ 有意义,则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \left(\int f(u) du \right) \Big|_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)] + C \quad (2.2)$$

第一换元积分公式(2.2)说明如果一个不定积分 $\int g(x) dx$ 的被积表达式 $g(x) dx$ 能够写成 $f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx$ 的形式,可通过变量代换 $u = \varphi(x)$ 把被积表达式等同于 $f(u) du$,若不定积

分

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

容易求得,那么再将 $u = \varphi(x)$ 代入 $F(u)$ 便求出原不定积分

$$\int g(x)dx = F[\varphi(x)] + C$$

由于第一换元积分法的基本手段就是将被积表达式 $g(x)dx$ 变为 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f[\varphi(x)]d\varphi(x)$ 的形式。也就是把被积函数 $g(x)$ 分解成两个因子的乘积,其中一个因子与 dx 凑成某一函数 $\varphi(x)$ 的微分,而另一因子是 $\varphi(x)$ 的函数 $f[\varphi(x)]$,且经过这样的微分变形后被积表达式 $f[\varphi(x)]d\varphi(x)$ 变为容易积分的形式,所以人们也经常称第一换元积分法为“凑微分法”。凑微分法技巧性强,无一般规律可循,因而不易掌握,初学者只有多做练习,不断总结经验,才能运用自如。

【例 2.1】 利用 $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$ ($a, b \in R, a \neq 0$), 求下列积分

$$(1) \int \sqrt[3]{3x+4}dx = \int (3x+4)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}d(3x+4)$$

令 $u = 3x+4$, 有

$$\int \sqrt[3]{3x+4}dx = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4}u^{\frac{4}{3}} + C$$

再将 $u = 3x+4$ 代入, 有

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}d(\frac{x}{a}) \quad (a > 0)$$

令 $u = \frac{x}{a}$, 有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$$

再将 $u = \frac{x}{a}$ 代入, 有

$$(3) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2[1+(\frac{x}{a})^2]} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}$$

令 $u = \frac{x}{a}$, 有

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a} \arctan u + C$$

再将 $u = \frac{x}{a}$ 代入, 有

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

如果运算比较熟练,为了简化解题步骤,变量代换 $u = \varphi(x)$ 可以不写出来,只需默记在头

脑中就可以了。

【例 2.2】 利用 $x^\mu dx = \frac{1}{a(\mu+1)} d(ax^{\mu+1} + b)$ ($a, b, \mu \in R, a \neq 0, \mu \neq -1$), 求下列积分

$$\begin{aligned} (1) \int (5x^2 + 7)xdx &= \int (5x^2 + 7) \frac{1}{5 \cdot 2} d(5x^2 + 7) = \\ &= \frac{1}{10} \int (5x^2 + 7) d(5x^2 + 7) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} (5x^2 + 7)^2 + C = \\ &= \frac{1}{20} (5x^2 + 7)^2 + C \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int e^{\frac{1}{x}} (-1) d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{1+x} = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} + C$$

$$(4) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \quad (x > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &= - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d\left(\frac{1}{x}\right) = - \int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} d\frac{1}{x} = \\ &= - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} d[(\frac{1}{x})^2] = - \frac{1}{2} \int [1+(\frac{1}{x})^2]^{-\frac{1}{2}} d[1 + \\ &= (\frac{1}{x})^2] = - \frac{1}{2} \cdot 2 [1+(\frac{1}{x})^2]^{\frac{1}{2}} + C = - \sqrt{1+(\frac{1}{x})^2} + C \end{aligned}$$

【例 2.3】 若被积函数 $f(x) = \pm \frac{\phi(x)}{\varphi(x)}$, 利用 $f(x)dx = \pm \frac{\phi(x)}{\varphi(x)}dx = \pm \frac{d\phi(x)}{\varphi(x)}$, 有如下公式

$$\int f(x)dx = \pm \int \frac{\phi(x)}{\varphi(x)}dx = \pm \int \frac{d\phi(x)}{\varphi(x)} = \pm \ln|\varphi(x)| + C$$

求下列积分

$$(1) \int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln |\ln x| + C$$

$$(2) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C$$

$$(3) \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + C$$

以上 3 例都是直接利用“凑微分法”求不定积分。如果进一步把“凑微分法”与不定积分的运算性质结合起来, 就可以利用基本积分表来处理非常广泛的初等函数的积分。

【例 2.4】 将下列被积函数先作代数恒等变形再求其不定积分

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{d(x+a)}{x+a} - \int \frac{d(x-a)}{x-a} \right] = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{dx}{(1+e^x)^2} &= \int \frac{1+e^x - e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{dx}{1+e^x} - \int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \\ &= \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx + \frac{1}{1+e^x} = \int dx - \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} = \end{aligned}$$

$$x - \ln(1 + e^x) + \frac{1}{1 + e^x} + C$$

$$(3) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = \int (1 - \frac{1}{1 + \sin^2 x}) dx = \int dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin^2 x}} dx =$$

$$x + \int \frac{d \cot x}{2 + \cot^2 x} = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{d \cot x}{\sqrt{2}}}{1 + (\frac{\cot x}{\sqrt{2}})^2} =$$

$$x + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan (\frac{\cot x}{\sqrt{2}}) + C$$

【例 2.5】 对于 $\int \sin^n x dx$ 与 $\int \cos^n x dx (n \in N)$ 形式的积分, 当 n 是偶数时, 可利用三角恒等式

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

来降低三角函数的幂. 当 n 是奇数时, 变正(余)弦函数的积分为余(正)弦函数的积分.

$$(1) \int \sin^4 x dx = \int [\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)]^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$\frac{1}{4} [\int dx - 2 \int \cos 2x dx + \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx] =$$

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4} (x - \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x) + C =$$

$$\frac{1}{4} (\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x) + C$$

$$(2) \int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

$$\int \cos x dx - \int \sin^2 x d \sin x = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

【例 2.6】 对于 $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \sin \beta x dx$ 和 $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ 形式的积分, 可利用三角函数的积化和差公式.

$$(1) \int \cos x \cos \sqrt{2} x dx = \frac{1}{2} \int [\cos(1 + \sqrt{2})x + \cos(1 - \sqrt{2})x] dx =$$

$$\frac{1}{2} [\frac{\sin(1 + \sqrt{2})x}{1 + \sqrt{2}} + \frac{\sin(1 - \sqrt{2})x}{1 - \sqrt{2}}] + C$$

$$(2) \int \cos 2x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int [\sin(2 + 3)x - \sin(3 - 2)x] dx =$$

$$\frac{1}{2} (\int \sin 5x dx - \int \sin x dx) = \frac{1}{5} (\cos x - \frac{1}{5} \cos 5x) + C$$

【例 2.7】 根据

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$$

有

$$(1) \int \csc x dx = \int \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} d(\tan \frac{x}{2}) = \ln |\tan \frac{x}{2}| + C = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$(2) \int \sec x dx = \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \ln |\csc(x + \frac{\pi}{2}) - \cot(x + \frac{\pi}{2})| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\begin{aligned} \text{【例 2.8】} \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= 2 \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x} = \\ &= 2 \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} d\sqrt{x} = 2 \int \arcsin \sqrt{x} d \arcsin \sqrt{x} = \\ &= (\arcsin \sqrt{x})^2 + C \end{aligned}$$

以上例子大都采用了初等数学(代数或三角函数)中的运算技巧将被积函数进行适当的变形,然后再进行变量代换.因此在作积分运算时,应该重视有关初等数学知识的灵活运用.

在式(2.1)中,如果 $\varphi(x)$ 连续可微且 $\varphi(x)$ 定号,式(2.1)中左端的不定积分

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F(x) + C$$

容易求得,并且 $x = \varphi^{-1}(u)$ 是 $u = \varphi(x)$ 的反函数,则式(2.1)右端的不定积分

$$\int f(u)du = F[\varphi^{-1}(u)] + C$$

利用这个过程求不定积分的方法,称为第二换元积分法.

第二换元积分法可以确切的叙述如下.

【定理 2.2】 (第二换元积分法) 设 $f(x)$ 是连续函数, $\varphi(t)$ 是连续可微函数,且 $\varphi'(t)$ 定号,复合运算 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 有意义.设 $F(t)$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数,即

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C$$

则

$$\int f(x)dx = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = F[\varphi^{-1}(x)] + C \quad (2.3)$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $\varphi(t)$ 的反函数.

【证】 由定理假设 $\varphi'(t)$ 定号,故函数 $\varphi(t)$ 存在反函数 $\varphi^{-1}(u)$,又

$$\frac{dF(t)}{dt} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \frac{d}{dx} F[\varphi^{-1}(x)] &= \left(\frac{dF(t)}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \left(f[\varphi(t)]\varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} \right) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \\ &= (f[\varphi(t)]) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = f(x) \end{aligned}$$

可见 $F[\varphi^{-1}(x)]$ 是式(2.3)左端不定积分的被积函数的一个原函数,所以式(2.3)成立.

第二换元积分法指出,求式(2.3)左端的不定积分,作变量代换 $x = \varphi(t)$,从而 $f(x) = f[\varphi(t)]$, $dx = \varphi'(t)dt$,于是

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

若上式右端的不定积分

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C \quad (2.4)$$

容易求出,那么再代回原来的变量 $t = \varphi^{-1}(x)$,便求出原不定积分

$$\int f(x)dx = F[\varphi^{-1}(x)] + C$$

由于第二换元积分法的关键在于选择满足定理 2.2 条件的变换 $x = \varphi(t)$,从而使式(2.4)的不定积分容易求出.那么如何选择变换 $x = \varphi(t)$ 呢?这往往与被积函数的形式有关.例如,若被积函数中含有根式,一般选择适当的变换 $x = \varphi(t)$ 来去掉根式,从而使被积函数得到化简,不定积分容易求出.

【例 2.9】 计算 $\int x \sqrt{1+2x} dx$.

【解】 为了去掉被积函数的根式,令 $t = \sqrt{1+2x}$,即作变量代换 $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1), t \geq 0$,则 $dx = t dt$,从而

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1+2x} dx &= \int \frac{1}{2}(t^2 - 1)t \cdot t dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int t^4 dt - \int t^2 dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C = \\ &= \frac{1}{10}(1+2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

【例 2.10】 计算 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \ (a > 0)$.

【解】 令 $x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,则 $t = \arcsin \frac{x}{a}, -a \leq x \leq a$,且 $\sqrt{a^2 - x^2} = a |\cos t| = a \cos t, dx = a \cos t dt$,从而

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a |\cos t| \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C \end{aligned}$$

由图 2.1 知

$$\sin t = \frac{x}{a} \quad \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

【例 2.11】 计算 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \ (a > 0)$.

【解】 令 $x = a \sec t$,当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 时, $x = a \sec t$ 存在反函数 $t = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$.这里仅讨论 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 的情况,同法可讨论 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 的情况.

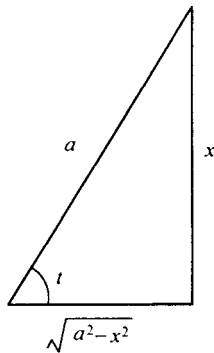


图 2.1

由于 $0 < t < \frac{\pi}{2}$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a|\tan t| = a \tan t$, $dx = a \tan t \sec t dt$, 从而

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{1}{a \tan t} a \tan t \sec t dt = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C'$$

由图 2.2 知 $\sec t = \frac{x}{a}$ $\tan t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$

$$\text{所以 } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C' = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

这里 $C = C' - \ln a$ 。

【例 2.12】 计算 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ ($a > 0$)。

【解】 令 $x = a \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $x = a \tan t$ 存

在反函数。且 $\sqrt{x^2 + a^2} = a|\sec t| = a \sec t$, $dx = a \sec^2 t dt$, 从而

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{1}{a \sec t} \cdot a \sec^2 t dt = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C'$$

由图 2.3 知 $\sec t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$ $\tan t = \frac{x}{a}$

所以

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C' = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

这里 $C = C' - \ln a$ 。

总结例 2.10 ~ 2.12, 有如下规律:

- (1) 若被积函数含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 一般令 $x = a \sin t$ 或 $x = a \cos t$;
- (2) 若被积函数含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 一般令 $x = a \sec t$ 或 $x = a \csc t$;
- (3) 若被积函数含有 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 一般令 $x = a \tan t$ 或 $x = a \cot t$ 。

4.2.2 分部积分法

设 $u(x)$ 与 $v(x)$ 均为 x 的连续可微函数。于是, 由函数乘积的求导公式, 有

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

或 $u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)$

再由不定积分的定义及线性性质, 有

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x)dx &= \int \{[u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)\}dx = \\ &= \int [u(x)v(x)]'dx - \int u'(x)v(x)dx = \end{aligned}$$

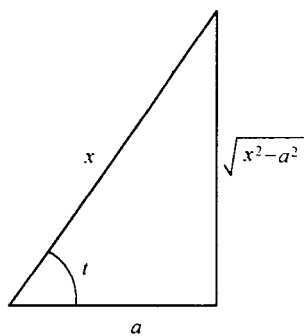


图 2.2

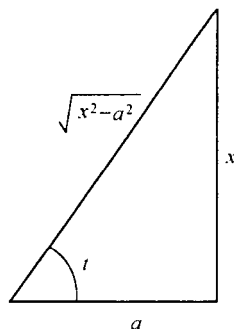


图 2.3

$$u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\text{即} \quad \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad (2.5)$$

$$\text{或} \quad \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \quad (2.6)$$

公式(2.5)或公式(2.6)称为不定积分的分部积分公式。一般地说,利用分部积分公式求不定积分就是追求被积函数形式的转变,把比较难求甚至于无法求出的不定积分 $\int u(x)v'(x)dx$ 转变成容易求的不定积分 $\int u'(x)v(x)dx$,起到化繁为简的作用。

对于给定的不定积分 $\int f(x)dx$ 作分部积分运算,通常要把被积函数 $f(x)$ 分解为两个因子的乘积,这会有多种选择。对两个因子中哪一个选作 $u(x)$ 也会有多种选择。选择不同,效果是不一样的。例如,在积分 $\int x \sin x dx$ 中,若选择 $u(x) = \sin x, v'(x) = x$,则

$$\int x \sin x dx = \int \sin x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$$

并没有达到简化积分计算的目的。若选择 $u(x) = x, v'(x) = \sin x$,则

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x d(-\cos x) = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

由此可见, $u(x)$ 与 $v(x)$ 的选择对于初学者来讲,只有认真总结规律,才能熟练地运用分部积分技巧。

一般来说,在使用分部积分法求不定积分时,若被积函数是幂函数 x^n 与指数函数或三角函数的乘积时,应选择 $u(x) = x^n$;若被积函数是幂函数 x^n 与对数函数或反三角函数的乘积时,应选择 $v'(x) = x^n$ 。

【例 2.13】 计算下列不定积分

$$\begin{aligned} (1) \int x^2 e^x dx &= \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \int x de^x = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int x \sin^2 x dx &= \int x \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \int x d\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x} d \ln x = \\ &= -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} (\ln x + 1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x d \arcsin x = \\ &= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \int (1+6x^2)\arctan x dx &= \int \arctan x d(x+2x^3) = \\
&= (x+2x^3)\arctan x - \int \frac{x+2x^3}{1+x^2} dx = \\
&= (x+2x^3)\arctan x - \int (2x - \frac{x}{1+x^2}) dx = \\
&= (x+2x^3)\arctan x - x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

分部积分法也常用来产生循环现象,然后经代数运算求出不定积分。

【例 2.14】 计算下列不定积分

$$(1) \int \sqrt{x^2+a^2} dx.$$

设 $I = \int \sqrt{x^2+a^2} dx$, 则

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{x^2+a^2} dx = x \sqrt{x^2+a^2} - \int x d \sqrt{x^2+a^2} = \\
&= x \sqrt{x^2+a^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \\
&= x \sqrt{x^2+a^2} - \int (\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}) dx = \\
&= x \sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}
\end{aligned}$$

再由例 2.12, 有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C'$$

故原积分

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

这里 $C = \frac{C'}{2}$ 。

(2) 计算 $\int e^{ax} \sin \beta x dx$ 和 $\int e^{ax} \cos \beta x dx$ 。

$$\begin{aligned}
\text{【解】 } \int e^{ax} \sin \beta x dx &= \int \sin \beta x d(\frac{1}{a}e^{ax}) = \frac{1}{a}(e^{ax} \sin \beta x - \int e^{ax} \cdot \beta \cos \beta x dx) = \\
&= \frac{1}{a}e^{ax} \sin \beta x - \frac{\beta}{a} \int \cos \beta x d(\frac{1}{a}e^{ax}) = \\
&= \frac{1}{a}e^{ax} \sin \beta x - \frac{\beta}{a^2}[e^{ax} \cos \beta x - \int e^{ax} \cdot (-\beta \sin \beta x) dx] = \\
&= \frac{1}{a}e^{ax} \sin \beta x - \frac{\beta}{a^2}e^{ax} \cos \beta x - \frac{\beta^2}{a^2} \int e^{ax} \sin \beta x dx
\end{aligned}$$

移项、整理, 有

$$\int e^{ax} \sin \beta x dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \beta^2} (a \sin \beta x - \beta \cos \beta x) + C$$

同理可得

$$\int e^{ax} \cos \beta x dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \beta^2} (\beta \sin \beta x + a \cos \beta x) + C$$

在含有自然数 n 的不定积分中, 常用分部积分法来建立求不定积分的递推公式。

【例 2.15】 (1) $I_n = \int (\ln x)^n dx$ ($n \in \mathbf{N}$)。

$$\text{【解】 } I_n = \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int x d(\ln x)^n =$$

$$x(\ln x)^n - \int x \cdot n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx =$$

$$x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$$

即

$$I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$$

这就是递推公式。例如 $n=3$ 时,有

$$\int (\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3I_2 = x(\ln x)^3 - 3[x(\ln x)^2 - 2I_1] =$$

$$x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6(x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx) =$$

$$x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + C$$

$$(2) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n \in \mathbf{N}, a > 0).$$

【解】 设 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, 则

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d\left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\right] = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \left[-n \frac{2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\right] dx =$$

$$\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\right] dx =$$

$$\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

从而

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1)I_n \right] \quad (2.7)$$

特别当 $n=1$ 时,有

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

于是利用递推公式(2.7),有

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + I_1 \right) = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \right) =$$

$$\frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + C'$$

这里 $C' = \frac{C}{2a^2}$.

分部积分法与换元积分法有时在同一题中配合使用效果更佳。

【例 2.16】 计算 $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 。

【解】 $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{\arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx =$

$$\int \arcsin x d(\arcsin x) + \int \frac{u}{\sin^2 u \cos u} \cos u du \quad (\text{作变量代换 } x = \sin u) =$$

$$\frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - \int u d \cot u = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - u \cot u + \int \cot u du =$$

$$\frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - u \cot u + \ln |\sin u| + C$$

由图 2.4 知

$$\cot u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

所以
$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \ln|x| + C$$

通过本节的讨论,我们还应在 4.1 节中的基本积分表中再补充如下公式:

基本积分表(补充)

$$(15) \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$(16) \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$(17) \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$(18) \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$(19) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$(20) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(21) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(22) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$(23) \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

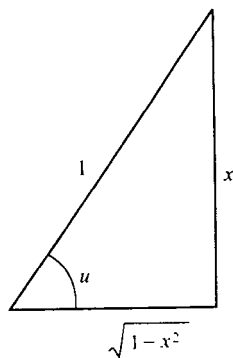


图 2.4

综上所述,我们已经对求不定积分的基本方法进行了全面的讨论。由不定积分的定义知,求不定积分的运算是微分法的逆运算。而第一、二换元积分法对应于复合函数求导的链式法则,分部积分法则是基于乘积函数的求导法则推导出来的。求不定积分的基本思想是:采用各种方法将被积函数化为基本积分表中的被积函数的形式或它们的线性组合。然后利用基本积分表和线性性质求出不定积分。显然,掌握较多的不定积分公式会给求不定积分带来方便,为此人们把一些常用的不定积分公式汇集起来,作成基本积分表。同学们可以利用这个表进行积分运算。但是,无论容量多么大的积分表也不能把所有的不定积分都罗列出来。所以上面介绍的求不定积分各种方法是基本的,作为初学者必须掌握。另外,把不定积分法与微分法相比较,求积分要比求微分困难得多,复杂得多,甚至于有些被积函数很简单,但它们的不定积分却无法积出。例如

$$\int e^{-x^2} dx; \int \frac{\sin x}{x} dx; \int \frac{dx}{\ln x}; \int \sin(x^2) dx, \text{等等。}$$

这说明在初等函数类中,不定积分的运算是不封闭的,即初等函数的原函数不一定是初等函数。今后把被积函数的原函数能用初等函数表示的积分称为积得出的,否则,称为积不出的。

下一节将概括介绍几类积得出的初等函数类。

习 题 4.2

1. 利用换元积分法计算下列不定积分

- | | | |
|---|---|--|
| (1) $\int e^{5x} dx$ | (2) $\int \cos 3x dx$ | (3) $\int \frac{dx}{4-3x}$ |
| (4) $\int \sin(5x+1) dx$ | (5) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$ | (6) $\int \tan 2x dx$ |
| (7) $\int \cos^3 x \sin x dx$ | (8) $\int x \sqrt{x^2+1} dx$ | (9) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$ |
| (10) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ | (11) $\int \frac{\sqrt{\tan x+1}}{\cos^2 x} dx$ | (12) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$ |
| (13) $\int \frac{\cos 2x dx}{(2+3\sin 2x)^3}$ | (14) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ | (15) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ |
| (16) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | (17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ | (18) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ |
| (19) $\int \tan^4 x dx$ | (20) $\int \frac{e^x}{3+4e^x} dx$ | (21) $\int \frac{dx}{9x^2+4}$ |
| (22) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ | (23) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} dx$ | (24) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$ |
| (25) $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx$ | (26) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ | (27) $\int \frac{dx}{x(x^6+4)}$ |
| (28) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$ | | |

2. 利用分部积分法计算下列积分

- | | |
|---|--------------------------------------|
| (1) $\int 3^x \cos x dx$ | (2) $\int x \sin x dx$ |
| (3) $\int x \sin x \cos x dx$ | (4) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ |
| (5) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$ | (6) $\int x \tan^2 x dx$ |
| (7) $\int x^2 e^{3x} dx$ | (8) $\int x 2^{-x} dx$ |
| (9) $\int x^2 \ln x dx$ | (10) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ |
| (11) $\int \arctan x dx$ | (12) $\int x \arcsin x dx$ |
| (13) $\int \sin(\ln x) dx$ | (14) $\int \sin x \ln(\tan x) dx$ |

3. 计算下列不定积分

- | | |
|---|---|
| (1) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$ | (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ |
| (3) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ | (4) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ |
| (5) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ | (6) $\int x^3 \sqrt[3]{1-x} dx$ |
| (7) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$ | (8) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ |

$$(9) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}} \quad (10) \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(11) \int (|1+x| - |1-x|) dx \quad (12) \int e^{-|x|} dx$$

4. 设 $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$, 其中 n 大于 2 的自然数, 试推导出 I_n 的递推公式。

4.3 几类可积的初等函数

4.3.1 有理函数的积分法

称形如

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (3.1)$$

的函数为多项式函数。其中 $a_k \in \mathbf{R}, k = 0, 1, 2, \cdots, n$, 用 $\deg P(x)$ 表示多项式函数 $P(x)$ 的关于变量 x 的次数。

设 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 是任意两个互质的多项式函数, 称形如

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0) \quad (3.2)$$

的函数为有理函数。记作 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 。当 $\deg P(x) < \deg Q(x)$ 时, 称 $R(x)$ 为有理真分式; 当 $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ 时, 称 $R(x)$ 为有理假分式。

显然任何一个有理假分式 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 用多项式函数 $P(x)$ 除以多项式函数 $Q(x)$, 总能将 $R(x)$ 表示成为一个多项式函数与一个有理真分式之和。即

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \tilde{P}(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

其中 $\tilde{P}(x)$ 与 $S(x)$ 均为多项式函数, 且 $\deg S(x) < \deg Q(x)$ 。例如

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = x - \frac{x-1}{x^2 + 1}$$

所以讨论有理函数的积分, 由于多项式函数是可积的, 故只须讨论有理真分式是否可积。

我们首先考虑如下最简分式

$$(1) \frac{A}{x-a} \quad (2) \frac{A}{(x-a)^n}, n = 2, 3, \cdots$$

$$(3) \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (4) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, n = 2, 3, \cdots$$

的积分方法。其中 A, B, p, q 皆为实常数, 二次三项式 $x^2 + px + q$ 不能分解为实一次多项式之积, 即 $p^2 - 4q < 0$ 。

显然

$$(1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$(2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

而

$$(3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{A(x+\frac{p}{2}) + (B-\frac{Ap}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q+\frac{p^2}{4})} dx$$

设 $u = x + \frac{p}{2}, a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= A \int \frac{udu}{u^2+a^2} + (B-\frac{Ap}{2}) \int \frac{du}{u^2+a^2} = \\ &= \frac{A}{2} \ln(u^2+a^2) + \frac{1}{a} (B-\frac{Ap}{2}) \arctan \frac{u}{a} + C = \\ &= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \left[\frac{A(x^2+px+q)'}{2(x^2+px+q)^n} + (B-\frac{Ap}{2}) \frac{1}{(x^2+px+q)^n} \right] dx = \\ &= \frac{A}{2} \frac{1}{1-n} (x^2+px+q)^{1-n} + (B-\frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})]^n} \end{aligned} \quad (3.3)$$

在式(3.3)右端积分中, 令 $u = x + \frac{p}{2}, a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, 有

$$\int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})]^n} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = I_n$$

根据式(2.7), 积分 I_n 有如下递推公式

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}, n=2,3,\dots \quad (3.4)$$

且
$$I_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

从 I_1 出发, 重复应用 I_n 的递推公式(3.4), 再代回原变量 $u = x + \frac{p}{2}$ 及 $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, 即可求出类型(4)的最简分式的不定积分。

关于有理真分式的分解, 我们有如下定理。

【定理 3.1】 设 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 是一个有理真分式, 且分母多项式函数

$$Q(x) = (x-a_1)^{r_1} \cdots (x-a_s)^{r_s} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$$

其中 $a_1, \dots, a_s; p_1, q_1, \dots, p_t, q_t \in \mathbf{R}, p_k^2 - 4q_k < 0, k=1, 2, \dots, t$, 则 $R(x)$ 有下列最简分式分解式

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{A_{r_1}^1}{(x-a_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{A_1^1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{r_t}^t}{(x^2+p_tx+q_t)^{r_t}} + \cdots + \frac{A_1^t}{x^2+p_tx+q_t} + \\ &\quad \frac{B_{l_1}^1x+C_{l_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \\ &\quad \frac{B_{l_t}^tx+C_{l_t}^t}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + \cdots + \frac{B_1^tx+C_1^t}{x^2+p_tx+q_t} \end{aligned}$$

其中 $A_{r_1}^1, \dots, A_1^1; \dots; A_{r_t}^t, \dots, A_1^t; B_{l_1}^1, C_{l_1}^1, \dots, B_1^1, C_1^1; \dots; B_{l_t}^t, C_{l_t}^t, \dots, B_1^t, C_1^t \in \mathbf{R}$ 。

定理 3.1 说明任何有理真分式一定可以分解为若干个最简分式之和, 而上面的讨论展示

了(1)~(4)种类型的最简分式的可积性。从而可知有理函数一定是可积的。

【例 3.1】 把函数

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)}$$

分解为最简分式之和,并求其不定积分。

【解】 由定理 3.1 知,给定函数的最简分式分解式应为

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

消去分母,有

$$x = A(x+3)(x^2+2x+2) + B(x-1)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)(x+3)$$

比较上式两端同次幂系数,有

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 5A + B + 2C + D = 0 \\ 8A - 3C + 2D = 1 \\ 6A - 2B - 3D = 0 \end{cases}$$

解此代数方程,有

$$A = \frac{1}{20}, B = \frac{3}{20}, C = -\frac{1}{5}, D = 0$$

于是
$$\frac{x}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{20} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{20} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{5} \frac{x}{x^2+2x+2}$$

从而
$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)} &= \frac{1}{20} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{20} \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{5} \int \frac{x dx}{x^2+2x+2} = \\ &= \frac{1}{20} \ln|x-1| + \frac{3}{20} \ln|x+3| - \frac{1}{10} \int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} + \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{20} \ln \left| \frac{(x-1)(x+3)^3}{(x^2+2x+2)^2} \right| + \\ &= \frac{1}{5} \arctan(x+1) + C \end{aligned}$$

【例 3.2】 计算 $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} dx$ 。

【解】 设
$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

消去分母,有

$$2x = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1) \quad (3.6)$$

在式(3.6)中令 $x = -1$, 有 $-2 = 4A$, 即 $A = -\frac{1}{2}$; 令 $x = i$, 有 $2i = (Di+E)(i+1) = (D+E)i + (E-D)$, 于是

$$\begin{cases} D+E=2 \\ -D+E=0 \end{cases} \quad D=E=1$$

将 $A = -\frac{1}{2}, D = E = 1$ 代入式(3.6), 并令 $x = 0$, 有

$$0 = -\frac{1}{2} + C + 1, C = -\frac{1}{2}$$

再令 $x = 1$, 有

$$2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + (B - \frac{1}{2}) \cdot 4 + 4, B = \frac{1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \right| - \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + \\ &= \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x + C (\text{利用公式 3.4}) = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+1}{(x+1)^2} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + C \end{aligned}$$

从例 3.1 和例 3.2 可见,用求有理真分式的最简分式分解式的方法求其积分往往很麻烦,况且有些有理函数的分母多项式根本就无法分解因式,所以,当我们求有理函数的积分时,应尽可能地考虑是否有其它更简便的解法。

【例 3.3】 计算 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)}$ 。

【解】 在实数域内,要将 $x^{10}+1$ 分解因式,是相当困难的,故此题不宜用求最简分式分解式的方法来计算,然而

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^{10}+1)} &= \int \frac{x^9}{x^{10}(x^{10}+1)} dx = \frac{1}{10} \int \left(\frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{x^{10}+1} \right) dx^{10} = \\ &= \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+1} + C \end{aligned}$$

4.3.2 三角有理函数的积分法

称由函数 $\sin x, \cos x$ 与常数经过有限次四则运算而成的代数有理式为三角有理函数,记作 $R(\sin x, \cos x)$ 。

由于 $\tan x, \cot x, \sec x$ 与 $\csc x$ 都是由 $\sin x, \cos x$ 与常数所构成,所以六个三角函数有理式都可化为 $R(\sin x, \cos x)$ 的形式。

关于三角有理函数的积分,我们在前面已进行了一些讨论,现总结一下,得到以下规律:

(I) $\int R(\sin x) \cos x dx$, 令 $u = \sin x$;

$\int R(\cos x) \sin x dx$, 令 $u = \cos x$;

$\int R(\tan x) \sec^2 x dx$, 令 $u = \tan x$ 。

【例 3.4】 (1) $\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int \sin^3 x \cos^4 x d\sin x =$
 $\int \sin^3 x (1 - \sin^2 x)^2 d\sin x = \int (\sin^3 x - 2\sin^5 x + \sin^7 x) d\sin x =$
 $\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{3} \sin^6 x + \frac{1}{8} \sin^8 x + C$

$$(2) \int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx = \int (1 + \tan^2 x) d \tan x = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

$$(II) R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$$

由于 $R(\sin x, \cos x) = R(\tan x \cos x, \cos x) = R_1(\tan x, \cos x)$, 且 $R_1(\tan x, -\cos x) = R(\tan x(-\cos x), -\cos x) = R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) = R_1(\tan x, \cos x)$ 知, R_1 必为 $\tan x$ 与 $\cos^2 x$ 的有理函数, 即可设

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\tan x, \cos x) = R_2(\tan x, \cos^2 x)$$

于是, 令 $u = \tan x$, 则 $x = \arctan u$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$, 从而积分

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_2(u, \frac{1}{1+u^2}) \frac{du}{1+u^2}$$

转化为有理函数的积分, 根据上一小节的讨论, 它是可积的。

【例 3.5】 计算 $\int \frac{\cos^2 x}{2 - \sin^2 x} dx$ 。

【解】 令 $u = \tan x$, $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + u^2}$, $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{u^2}{1 + u^2}$, $dx = \frac{du}{1 + u^2}$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x}{2 - \sin^2 x} dx &= \int \frac{\frac{1}{1+u^2}}{2 - \frac{u^2}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{du}{(1+u^2)(2+u^2)} = \\ &= \int \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{2+u^2} \right) du = \arctan u - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \\ &= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

(III) 对任意的三角有理函数 $R(\sin x, \cos x)$, 可作万能代换 $u = \tan \frac{x}{2}$, 将其变为有理函

数, 事实上令 $u = \tan \frac{x}{2}$, $x = 2 \arctan u$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$, 而

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{aligned}$$

于是

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\begin{aligned} \text{【例 3.6】} (1) \int \frac{dx}{1 + 2 \sin x} &\stackrel{u = \tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{1 + 2 \frac{2u}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = \\ &= \int \frac{2du}{u^2 + 4u + 1} = 2 \int \frac{d(u+2)}{(u+2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{u+2-\sqrt{3}}{u+2+\sqrt{3}} \right| + C =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\tan \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}} \right| + C$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)} \stackrel{u=\tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{1}{2 \frac{2u}{u^2+1} (\frac{1-u^2}{1+u^2} + 1)} \frac{2}{1+u^2} du = \frac{1}{4} \int (\frac{1}{u} + u) du =$$

$$\frac{1}{4} (\ln |u| + \frac{u^2}{2}) + C = \frac{1}{4} [\ln |\tan \frac{x}{2}| + \frac{1}{2} (\tan \frac{x}{2})^2] + C$$

4.3.3 某些无理函数的积分法

一些无理函数的不定积分,通过适当的变量代换,可以化为有理函数的不定积分。

$$(1) \int R(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}) dx.$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, m, n \in \mathbf{N}$ 。

设 p 是 m, n 的最小公倍数, 设 $u = \sqrt[p]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$, 则

$$u^p = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, x = \frac{-\delta u^p + \beta}{\gamma u^p - \alpha} = R_1(u)$$

于是
$$\int R(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}) dx = \int R[R_1(u), u^{\frac{p}{m}}, u^{\frac{p}{n}}] R'_1(u) du$$

由于 $R_1(t), R'_1(t)$ 均为有理函数, $\frac{p}{n}, \frac{p}{m} \in \mathbf{N}$, 所以上式右端为有理函数的不定积分。

【例 3.7】 (1)
$$\int \frac{x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{15}{14}}} dx \stackrel{u=x^{\frac{1}{14}}}{=} \int \frac{u^2 + u^7}{u^{16} + u^{15}} 14u^{13} du =$$

$$14 \int \frac{u^5 + 1}{u + 1} du = 14 \int (u^4 - u^3 + u^2 - u + 1) du =$$

$$14 (\frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u) + C =$$

$$\frac{14}{5} x^{\frac{5}{14}} - \frac{7}{2} x^{\frac{2}{7}} + \frac{14}{3} x^{\frac{1}{7}} + 14x^{\frac{1}{14}} + C$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}$$

令 $u = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, 则 $x = \frac{u^3+1}{u^3-1}, dx = \frac{-6u^2}{(u^3-1)^2} du$, 代入原式, 有

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int u \frac{1}{\frac{u^3+1}{u^3-1} + 1} \frac{-6u^2}{(u^3-1)^2} du = -3 \int \frac{du}{u^3-1} =$$

$$\int (\frac{1}{1-u} + \frac{u+2}{u^2+u+1}) du = \ln |u-1| + \frac{1}{2} \int \frac{2u+1}{u^2+u+1} du +$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \int \frac{du}{u^2 + u + 1} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u^2 + u + 1}{(u-1)^2} \right| + \sqrt{3} \arctan \frac{u + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C_1 = \\
\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - u^3}{(u-1)^3} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctan} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C_1 &= \\
\frac{1}{2} \ln \left| \left(1 - \frac{x+1}{x-1}\right) / \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right)^3 \right| + \sqrt{3} \arctan \frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt{3}} + C_1 &= \\
-\frac{3}{2} \ln \left| \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \right| + \sqrt{3} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{1}{2} \right) \right] + C
\end{aligned}$$

其中 $C = C_1 + \frac{\ln 2}{2}$ 。

(II) 某些最简无理函数的不定积分可直接利用基本积分表求。

【例 3.8】 (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{11+6x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{20-(x-3)^2}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(\sqrt{20})^2 - (x-3)^2}} =$
 $\arcsin \frac{x-3}{\sqrt{20}} + C = \arcsin \frac{x-3}{2\sqrt{5}} + C$

(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} -\int \frac{du}{\sqrt{3-2u-u^2}} = -\int \frac{d(u+1)}{\sqrt{2^2-(u+1)^2}} =$
 $-\arcsin \frac{u+1}{2} + C = -\arcsin \frac{x+1}{2x} + C$

(3) $\int \frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x+4}{\sqrt{2x^2+4x+5}} dx - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}} =$
 $\frac{1}{4} \cdot 2(2x^2+4x+5)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{d\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{[\sqrt{2}(x+1)]^2 + (\sqrt{3})^2}} =$
 $\frac{1}{2}(2x^2+4x+5)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2}(x+1) + \sqrt{2x^2+4x+5} \right| + C$

习 题 4.3

1. 计算下列有理函数的不定积分

$$\begin{aligned}
(1) \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx & \quad (2) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
(3) \int \frac{dx}{x(x+1)^2} & \quad (4) \int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx \\
(5) \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2} & \quad (6) \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx \\
(7) \int \frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2} dx
\end{aligned}$$

2. 计算下列三角有理函数的不定积分

$$(1) \int \cos^4 x \sin^3 x dx \quad (2) \int \sin^4 x \cos^4 x dx$$

$$(3) \int \tan^4 x \sec^3 x dx$$

$$(5) \int \sin x \sin 3x dx$$

$$(7) \int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}$$

$$(9) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$$

3. 计算下列无理函数的不定积分

$$(1) \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$$

$$(3) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$$

$$(5) \int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$(7) \int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx$$

$$(9) \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

4. 计算下列不定积分

$$(1) \int \sqrt{1 + \csc x} dx$$

$$(3) \int \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} dx$$

$$(5) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$(7) \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$$

$$(4) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$$

$$(6) \int \cos 4x \cos 7x dx$$

$$(8) \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$$

$$(10) \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$$

$$(2) \int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}} dx$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$$

$$(6) \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$$

$$(8) \int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx$$

$$(10) \int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x \sqrt{1+x+x^2}} dx$$

$$(2) \int \frac{x}{1 - \cos x} dx$$

$$(4) \int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$$

$$(6) \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

$$(8) \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$$

第五章 定 积 分

如前所述,微分学是源于光滑曲线的切线斜率及变速直线运动的瞬时速度的描述。在这一章里,所要研究的定积分则是源于计算平面上封闭曲线所围成的图形的面积而产生的。为了计算这种平面图形的面积,最后归结为计算具有特定结构的和式的极限,而且这种类型的极限也是计算变速直线运动的路程,两个物体之间引力和变力作功等许多实际问题的数学工具。因此,研究这种特定结构和式的极限——定积分,有着普遍意义。在本章中,我们首先通过若干实例来引入定积分的概念,讨论它的性质,进一步揭示微分学与积分学之间的内在联系,给出牛顿-莱布尼兹公式,最后我们要讨论定积分在几何、物理中的应用。

5.1 定积分的概念

5.1.1 举例

【例 1.1】 曲边梯形面积 σ 的计算。

平面上由一条封闭曲线所包围的面积的计算,人们可以在这个图形上画若干条间隔为 1 的互相垂直的直线段(见图 1.1(a)),把整个图形分割成有限个子图形,根据面积具有可加性,所以整个图形的面积等于各子图形面积之和,即可以转化为有限个边长为 1 的正方形的面积与有限个如图 1.1(b) 所示的曲边梯形 $ABCD$ 面积之和。那么如何计算曲边梯形的面积呢?

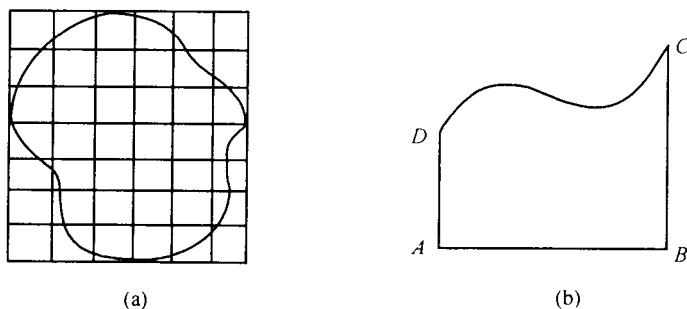


图 1.1

所谓的曲边梯形 $ABCD$,如果按照图 1.2 所示建立坐标系,是指由函数 $y = f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(x) \geq 0$, 直线 $x = a, x = b$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形。度量这个图形面积的困难在于它的一条边是曲边,怎么解决这个问题呢?退一步想,可先求其近似值。例如,将曲边梯形如图 1.2 所示分割成 n 个小曲边梯形,由于 $f(x) \in C[a, b]$, 当自变量 x 在很小范围内变化时,因变量 $f(x)$ 的变化也很小,所以当小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 的长度 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 很小时,在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的小曲边梯形可以近似为小矩形。而曲边梯形 $ABCD$ 的面积也就可以近似地看作有限个这样的小矩形的面积之和。不难想象,按照这种方式,对曲边梯形分割得越细密,近似程度就越

高,为了得到面积精确值,必须利用极限这一工具。现在,我们就按照这种方法来计算曲边梯形的面积 σ 。

在区间 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \quad (x_0 = a, x_n = b)$$

将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{k-1}, x_k], k=1, 2, \cdots, n$, 在分点 x_k 处作垂直于 x 轴的直线: $x = x_k, k=0, 1, 2, \cdots, n$, 将曲边梯形 $ABCD$ 分割成 n 个小曲边梯形。在每一个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上任取一点 ξ_k , 以 $f(\xi_k)$ 为高、以区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 为底做成小矩形, 用它的面积 $f(\xi_k)\Delta x_k$ 近似代替区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的小曲边梯形的面积。于是, 这 n 个小矩形面积之和可以看作曲边梯形 $ABCD$ 面积 σ 的近似值, 即

$$\sigma \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

令 $d = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 则“ $d \rightarrow 0$ ”就完全刻画了对曲边梯形 $ABCD$ 分割无限细密的过程, 此时阶梯形的面积 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ 将无限趋近于曲边梯形的面积 σ 。因此, 有

$$\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

这样我们用一个特定结构的和式的极限表示了曲边梯形的面积。

【例 1.2】 求变力 f 所作的功 W 。

假设力 f 的大小是连续变化的, 力的方向始终保持不变, 质点 m 在力 f 的作用下, 沿着力的方向运动。不妨假定力 f 的方向与 x 轴的正方向同向, 在这种情况下, 求质点 m 从 x 轴上的点 a 运动到点 b ($a < b$) 时, 力 f 所作的功 W (图 1.3)。

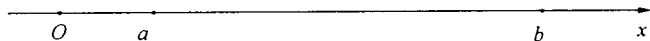


图 1.3

在物理学中, 如果力 f 是常力, 且质点 m 沿着力 f 的方向运动的距离为 l , 则力 f 所作的功 $W = f \cdot l$ 。现在力的大小是不断变化的, 即 $f = f(x) \in C[a, b]$ 。在区间 $[a, b]$ 内任取 $n-1$ 个分点

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \quad (x_0 = a, x_n = b)$$

将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{k-1}, x_k], k=1, 2, \cdots, n$ 。在第 k 个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上。若 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 很小, 则 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上变化不大, 这时变力 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 可近似地看作一个常力 $f(\xi_k)$, 其中 ξ_k 是 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的任意一点。于是, 把质点 m 从点 x_{k-1} 移动到点 x_k 力 f 所作的功近似于 $f(\xi_k)\Delta x_k$ 。从而, 把质点从点 a 移动到点 b , 力 $f = f(x)$ 所作的功

$$W \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

可以想象, 如果将 $[a, b]$ 分割的越细密, 则上式的近似程度就越高, 一旦分割无限细密, 则近似值就转化为精确值。于是, 令 $d = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 则有

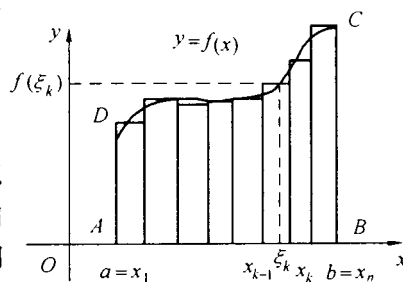


图 1.2

$$W = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

【例 1.3】 求直线上变速运动的路程 l 。

设物体沿某一直线作变速运动,其速度 $v = v(t)$ 是时间 t 的函数,计算从时刻 a 到时刻 b 的运动路程 l 。

在物理学中,对于匀速直线运动,如果知道了运动速度 $v = v_0$ (常数) 和时间 T ,立即可以算出

$$l = v_0 \cdot T$$

对于变速直线运动,当然不能用上述公式求解。我们注意到速度 $v = v(t)$ 虽然随着时间 t 变化而不断变化,但一般它是连续变化的。所以在局部 $[t, t + \Delta t]$ 上能够把变速运动近似于匀速运动。即任取 $\xi \in [t, t + \Delta t]$,可把在 $[t, t + \Delta t]$ 时间段的速度近似于匀速 $v = v(\xi)$ 。于是在这一段时间内所走路程近似于 $v(\xi)\Delta t$ 。现在时间间隔 $[a, b]$ 内任取 $n - 1$ 个分点

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \quad (t_0 = a, t_n = b)$$

将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \cdots, n$, 则物体从时刻 t_{k-1} 到 t_k 所走的路程近似于 $v(\xi_k)\Delta t_k$, 其中 $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k], \Delta t_k = t_k - t_{k-1}, k = 1, 2, \cdots, n$ 。于是物体从时刻 a 到 b 所走过的路程

$$l \approx \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k$$

显然,当 $d = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$ 越小,上式的近似程度就越高,因此,有

$$l = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k$$

虽然上述三个实例的背景不同,但从抽象的数量关系来看,都归结为求某一函数在其定义区间上具有特定结构的和式的极限。这个极限在数学分析及其各种应用中有非常重要的作用,并且这里所介绍的思想、方法,将以不同的变化形式在整个课程中多次重复着。

5.1.2 定积分的概念

下面我们将 5.1.1 节所引入的特定和式的极限以统一的形式叙述如下。

【定义 1.1】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 有定义,在 $[a, b]$ 内任意插入 $n - 1$ 个分点: $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, 且

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

记此分法为 $\Delta, \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \cdots, n$, 作和式

$$S(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

其中 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \xi = \{\xi_k\}$, 设 $d(\Delta) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 若极限

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi) = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

存在,且与分法 Δ 及 ξ 的选取无关,则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积,称此极限值为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分。记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (1.1)$$

这里数“ a ”与“ b ”分别称定积分的下限与上限, $[a, b]$ 称为积分区间, $S(\Delta, \xi)$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,$

$b]$ 上的积分和。

上述定义属于黎曼(Riemann 1826 ~ 1866 德国数学家),他首创的把此定义在一般形式下阐述出来,并研究了它的应用范围。因此,有时也称 $S(\Delta, \xi)$ 为黎曼和,也称定积分为黎曼积分。在区间 $[a, b]$ 上黎曼可积的函数全体所构成的集合,记作 $R[a, b]$ 。

上述定义可以用“ $\epsilon - \delta$ ”语言描述如下:

【定义 1.2】 设 I 为一常数。 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $d(\Delta) < \delta$ 时,有

$$|S(\Delta, \xi) - I| < \epsilon \quad (1.2)$$

在 ξ 的任意选取下皆成立,则称为 I 是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分。记作

$$I = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi) = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

若 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积。

根据定义 1.1 或定义 1.2, 5.1.1 中的三个实例都是定积分。也就是说:

曲边梯形的面积 σ 是函数 $f(x) \geq 0$ 在曲边梯形的底边 $[a, b]$ 上的定积分,即

$$\sigma = \int_a^b f(x) dx$$

变力 $f = f(x)$ 所作的功,就是变力 $f(x)$ 在质点运动区间 $[a, b]$ 上的定积分,即

$$W = \int_a^b f(x) dx$$

物体运动的路程 l 是速度函数 $v(t)$ 在时间间隔 $[a, b]$ 上的定积分,即

$$l = \int_a^b v(t) dt$$

下面我们举两个用定义求定积分的例子。

【例 1.4】 试证 $\int_a^b 1 dx = b - a$ 。

【证】 由于被积函数 $f(x) \equiv 1$, 对于区间 $[a, b]$ 的任意分法

$$\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

及任取的 $\xi = \{\xi_k\} (\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \cdots, n)$, 有积分和

$$\begin{aligned} S(\Delta, \xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \\ &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a \end{aligned}$$

且 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi) = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} (b - a) = b - a$

这里 $d(\Delta) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 即

$$\int_a^b dx = b - a$$

【例 1.5】 试证 $\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$ 。

【证】 对于区间 $[a, b]$ 的任意分法

$$\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

及任取的 $\xi = \{\xi_k\}$, 注意到

$$|S(\Delta, \xi) - (\sin b - \sin a)| = \left| \sum_{k=1}^n \cos \xi_k \Delta x_k - (\sin b - \sin a) \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^n \cos \xi_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n (\sin x_k - \sin x_{k-1}) \right| = \\
& \left| \sum_{k=1}^n \cos \xi_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \cos \xi'_k \Delta x_k \right| \quad (\text{利用微分学中值定理, } \xi'_k \in [x_{k-1}, x_k]) = \\
& \left| \sum_{k=1}^n (\cos \xi_k - \cos \xi'_k) \Delta x_k \right| = \\
& \left| \sum_{k=1}^n (-\sin \xi''_k) (\xi_k - \xi'_k) \Delta x_k \right| \quad (\text{再利用微分学中值定理, } \xi''_k \text{ 介于 } \xi_k \text{ 与 } \xi'_k \text{ 之间}) \leq \\
& \sum_{k=1}^n |\sin \xi''_k| |\xi_k - \xi'_k| |\Delta x_k| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k - \xi'_k| \Delta x_k \leq \\
& \sum_{k=1}^n d(\Delta) \cdot \Delta x_k = d(\Delta)(b-a)
\end{aligned}$$

于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$, 只须 $d(\Delta) < \delta$, 有

$$|S(\Delta, \xi) - (\sin b - \sin a)| \leq \delta(b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

即
$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$$

由例 1.4 和例 1.5 可见, 用定义直接去求定积分是相当复杂、相当困难的。因此, 根据定义去求定积分一般不可取。在后面的讨论中, 我们将看到定积分的计算与求被积函数的原函数联系在一起, 而后者在上一章里作过细致的讨论。

至此我们的首要任务是阐明被积函数定积分(1.1)存在的条件。

5.1.3 函数可积的必要条件

【定理 1.1】 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。

【证】 反证法 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界, 对于 $[a, b]$ 的任意分法

$$\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

则至少存在一个子区间, 不妨设为 $[x_{i-1}, x_i]$, $f(x)$ 在其上无界。对于任取的 $\xi = \{\xi_k\}$, 注意到

$$\begin{aligned}
|S(\Delta, \xi)| &= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| = |f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{k=1}^{i-1} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=i+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k| \geq \\
&|f(\xi_i) \Delta x_i| - (|\sum_{k=1}^{i-1} f(\xi_k) \Delta x_k| + |\sum_{k=i+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k|) = \\
&|f(\xi_i) \Delta x_i| - A
\end{aligned}$$

其中 $A = |\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k| + |\sum_{k=i+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k|$ 。于是对于任意取定的 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ 。因 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上无界, 对于任意给定 $M > 0, \exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 使得

$$|f(\xi_i)| \geq \frac{M+A}{\Delta x_i}$$

可见对于 $[a, b]$ 的任意分法 $\Delta, \exists \xi = \{\xi_k\}$, 使得

$$|S(\Delta, \xi)| \geq |f(\xi_i)| \Delta x_i - A = \frac{M+A}{\Delta x_i} \cdot \Delta x_i - A = M$$

可见积分和 $S(\Delta, \xi)$ 无界, 从而函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积, 此与假设相矛盾。

【例 1.6】 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上不可积。

【证】 将 $[0,1]$ 区间 n 等分,即取分法 $\Delta: x_k = \frac{k}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n$;取 $\xi = \{\xi_k\}$,其中 $\xi_1 = \frac{1}{n^4} \in [0, \frac{1}{n}]$, $\xi_k = \frac{k}{n} \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k = 2, 3, \dots, n$,此时,相应的积分和

$$\begin{aligned} S(\Delta, \xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^4}}} \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}} \frac{1}{n} = \\ &= n + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow \infty \quad (d(\Delta) \rightarrow 0) \end{aligned}$$

故 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi)$ 不存在,从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积。

综上所述,函数在 $[a,b]$ 上无界一定不可积。因此,在以后研究函数的可积性问题中,我们总是预先假定所考虑的函数 $f(x)$ 是有界的,即存在 $m, M \in R$,使

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

然而在 $[a,b]$ 上有界的函数就一定可积吗?回答是否定的。比如狄利在克莱(Dirichlet 1805 ~ 1859 德国数学家)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上有界,对于 $[0,1]$ 的任意分法

$$\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$$

根据有理数和无理数在数轴上的稠密性,在 $[0,1]$ 的每一个子区间上既有有理数,也有无理数。若取 $\xi = \{\xi_k\}$,且 ξ_k 是 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的有理数,则积分和

$$S(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1$$

若取 $\xi' = \{\xi'_k\}$,且 ξ'_k 是 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的无理数,则积分和

$$S(\Delta, \xi') = \sum_{k=1}^n D(\xi'_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

从而 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi) = 1$, $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi') = 0$,根据定义 1.2 知, $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积。

至于函数 $f(x)$ 满足什么条件在区间 $[a,b]$ 上可积,我们将在下一节进一步讨论。

习 题 5.1

1. 根据定积分的定义计算 $\int_1^4 5dx$ 。
2. 有一长度为 l 的细杆,(1) 如果其线密度 $\rho = 2$,求细杆的质量 m ;(2) 如果细杆上各点处密度不同,是到某一端点距离 x 的函数 $\rho = \frac{1 + \cos x}{x^2}$,求细杆的质量。
3. 写出下列各积分的定义式

$$(1) \int_a^b 2dx \quad (2) \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \quad (3) \int_a^b \sin x dx$$

5.2 函数可积准则

在这一节,我们从理论上研究函数可积准则,给出函数在某一区间上可积的充分必要条件,最后验证三类函数的可积性。

5.2.1 达布(Darboux 1842 ~ 1917 法国数学家)和及其性质

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界,对于 $[a, b]$ 的任意分法

$$\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

及任意选取的 $\xi = \{\xi_k\}, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \cdots, n$, 作积分和

$$S(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (2.1)$$

可见积分和(2.1)既与函数 $f(x)$ 及所选择的区间 $[a, b]$ 分法 Δ 有关,又与 ξ 的取法有关,为了便于讨论积分和(2.1),我们还有必要引进两个其它形式的和。记

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \{f(x)\}, M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \{f(x)\}, k = 1, 2, \cdots, n \quad (2.2)$$

由于函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界,这些下、上确界均为有限数,作 $f(x)$ 关于分法 Δ 的如下和式

$$\underline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \bar{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad (2.3)$$

分别称之为函数 $f(x)$ 对于分法 Δ 的达布下和及达布上和,统称为达布和。显然它们都比积分和(2.1)简单,且对给定的函数 $f(x)$,它是由分法 Δ 所唯一确定。我们的目的在于通过达布和来研究一般的积分和(2.1),为此,我们首先介绍一下有关达布和的一些性质。

我们注意到对于区间 $[a, b]$ 的任意分法 $\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 有 $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k, k = 1, 2, \cdots, n$, 相应于 Δ 的所有的积分和与达布和满足不等式

$$\underline{S}(\Delta) \leq S(\Delta, \xi) \leq \bar{S}(\Delta) \quad (2.4)$$

在固定的分法 Δ 下,达布和 $\underline{S}(\Delta)$ 与 $\bar{S}(\Delta)$ 是常数,此时由于 $\xi = \{\xi_k\}$ 的选取的任意性,积分和 $S(\Delta, \xi)$ 却是变化的,但根据式(2.3),我们可选取 $\xi = \{\xi_k\}$, 使 $f(\xi_k)$ 的值与 m_k 或 M_k 任意接近,这就是说,可使积分和 $S(\Delta, \xi)$ 与达布和 $\underline{S}(\Delta)$ 或 $\bar{S}(\Delta)$ 任意接近。因此有如下结论:

【性质 2.1】 在区间 $[a, b]$ 的一个固定分法 Δ 下,达布下和 $\underline{S}(\Delta)$ 与达布上和 $\bar{S}(\Delta)$ 分别是积分和 $S(\Delta, \xi)$ 的下确界与上确界,即

$$\underline{S}(\Delta) = \inf_{\xi} \{S(\Delta, \xi)\}, \bar{S}(\Delta) = \sup_{\xi} \{S(\Delta, \xi)\} \quad (2.5)$$

【证】 下面证明式(2.5)的第一式。

已知 $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \{f(x)\}$, 根据下确界定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 使

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

于是 $m_k \Delta x_k \leq f(\xi_k) \Delta x_k \leq (m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}) \Delta x_k \quad k = 1, 2, \cdots, n$

将上式从 1 加到 n , 有

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k + \varepsilon$$

即

$$\underline{S}(\Delta) \leq S(\Delta, \xi) \leq \underline{S}(\Delta) + \varepsilon$$

从而由下确界定义,知

$$\underline{S}(\Delta) = \inf_{\xi} \{S(\Delta, \xi)\}$$

同理可证式(2.5)的第二式。

【性质 2.2】 在区间 $[a, b]$ 的一个分法 Δ 的基础上增加若干新分点,得到 $[a, b]$ 的一个新分法 Δ' ,则达布下和不减少,达布上和不增加,即

$$\underline{S}(\Delta) \leq \underline{S}(\Delta') \quad \bar{S}(\Delta') \leq \bar{S}(\Delta) \quad (2.6)$$

【证】 我们只须讨论在分法 Δ 的分点中再加进一个分点 x' 的情形。设 x' 加在 x_{k-1} 与 x_k 之间,于是

$$x_{k-1} < x' < x_k$$

显然 $\underline{S}(\Delta)$ 与 $\underline{S}(\Delta')$ 仅在这个地方不同: $\underline{S}(\Delta)$ 中对应于区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 的项是

$$m_k \Delta x_k = m_k (x_k - x_{k-1})$$

而 $\underline{S}(\Delta')$ 中对应于这个区间是两项之和

$$m'_k (x' - x_{k-1}) + m''_k (x_k - x')$$

其中 $m'_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x'} \{f(x)\}$, $m''_k = \inf_{x' \leq x \leq x_k} \{f(x)\}$ 。由于 $[x_{k-1}, x']$ 与 $[x', x_k]$ 都是 $[x_{k-1}, x_k]$ 的子区

间,从而 $m_k \leq m'_k, m_k \leq m''_k$, 于是

$$\begin{aligned} m_k \Delta x_k &= m_k (x_k - x_{k-1}) = m_k (x_k - x') + m_k (x' - x_{k-1}) \leq \\ & m'_k (x_k - x') + m''_k (x' - x_{k-1}) \end{aligned}$$

由此推知 $\underline{S}(\Delta) \leq \underline{S}(\Delta')$ 。达布上和的证明与此类似,这里从略。

【性质 2.3】 对于区间 $[a, b]$ 任意两个分法 Δ 与 Δ' , 则

$$\underline{S}(\Delta) \leq \bar{S}(\Delta') \quad \underline{S}(\Delta') \leq \bar{S}(\Delta) \quad (2.7)$$

即达布下和总不能超过任意一个达布上和。

【证】 将区间 $[a, b]$ 的分法 Δ 与 Δ' 的分点合在一起,得到 $[a, b]$ 的一个新分法 Δ'' 。可以认为 Δ'' 是由 Δ 的分点增加 Δ' 的分点所构成的分法,当然也可以认为 Δ'' 是由 Δ' 的分点增加 Δ 的分点所构成的分法。根据性质 2.2, 有

$$\underline{S}(\Delta) \leq \underline{S}(\Delta'') \quad \bar{S}(\Delta'') \leq \bar{S}(\Delta')$$

又根据式(2.4), 有 $\underline{S}(\Delta'') \leq \bar{S}(\Delta'')$ 。从而

$$\underline{S}(\Delta) \leq \underline{S}(\Delta'') \leq \bar{S}(\Delta'') \leq \bar{S}(\Delta')$$

可见式(2.7)第一式得证,同理可证第二式。

性质 2.3 说明,达布下和的全体构成的集合 $\{\underline{S}(\Delta)\}$ 有上界,例如,以任何一个达布上和 $\bar{S}(\Delta)$ 为上界。由确界存在定理知这个集合 $\{\underline{S}(\Delta)\}$ 有上确界。记之为

$$I_0 = \sup_{\Delta} \{\underline{S}(\Delta)\}$$

另一方面,对于任意的达布上和 $\bar{S}(\Delta)$

$$I_0 \leq \bar{S}(\Delta)$$

可见达布上和的全体构成的集合 $\{\bar{S}(\Delta)\}$ 以 I_0 为一下界,因而它也有下确界,记之为

$$I^0 = \inf_{\Delta} \{\bar{S}(\Delta)\}$$

并且,对于 $[a, b]$ 的任意分法 Δ , 显然有

$$\underline{S}(\Delta) \leq I_0 \leq I^0 \leq \overline{S}(\Delta) \quad (2.8)$$

这里数 I_0 与 I^0 分别称之为达布下积分和达布上积分。

利用达布和的上述性质,我们就可以为有界函数的可积性建立起一个十分简明的判别准则。

5.2.2 函数可积性准则

【定理 2.1】 有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积的充要条件是

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} [\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta)] = 0 \quad (2.9)$$

【证】 必要性 设 $f(x) \in R[a, b]$, 记

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi)$$

则对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对于 $[a, b]$ 的任意分法 Δ 和任取的 $\xi = \{\xi_k\}$, 只要 $d(\Delta) < \delta$, 有

$$|S(\Delta, \xi) - I| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\text{即} \quad I - \frac{\epsilon}{3} < S(\Delta, \xi) < I + \frac{\epsilon}{3} \quad (2.10)$$

设 Δ 是满足 $d(\Delta) < \delta$ 的任一固定分法, 根据性质 2.1, $\underline{S}(\Delta)$ 与 $\overline{S}(\Delta)$ 分别为 $S(\Delta, \xi)$ 的下确界与上确界, 于是由式(2.10), 有

$$|\underline{S}(\Delta) - I| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad |\overline{S}(\Delta) - I| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

从而, 有

$$|\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta)| \leq |\overline{S}(\Delta) - I| + |\underline{S}(\Delta) - I| \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

$$\text{即} \quad \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} [\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta)] = 0$$

充分性 设条件式(2.9)被满足; 于是由式(2.8)立即得到 $I_0 = I^0$, 并且设 $I = I_0 = I^0$, 则

$$\underline{S}(\Delta) \leq I \leq \overline{S}(\Delta)$$

$$\text{又} \quad \underline{S}(\Delta) \leq S(\Delta, \xi) \leq \overline{S}(\Delta)$$

综合以上两式, 得

$$|S(\Delta, \xi) - I| \leq \overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) \rightarrow 0 \quad (d(\Delta) \rightarrow 0)$$

即函数 $f(x) \in R[a, b]$, 且

$$\int_a^b f(x) dx = I$$

定理 2.1 证毕。

如果记 $\omega_k = M_k - m_k$, 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅, 此时

$$\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$$

称 $\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于分法 Δ 的振幅和, 简称为振幅和。于是定理 2.1 又可以叙述为:

【定理 2.2】 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件为

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 0 \quad (2.11)$$

式(2.11)较之式(2.10)形式更简单,使用更方便。

5.2.3 可积函数类

利用 5.2.3 中得到的函数可积性判别准则,我们可以判别几类常见函数是可积的。

【定理 2.3】 如果函数 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x) \in R[a, b]$ 。

【证】 根据在闭区间上连续函数性质, $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对于 $\forall x', x'' \in [a, b]$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

对于 $[a, b]$ 的任意分法 Δ , 只要 $d(\Delta) < \delta$, 注意到 $f(x) \in C[x_{k-1}, x_k]$, $\exists \xi', \xi'' \in [x_{k-1}, x_k]$, 使得 $m_k = f(\xi'_k), M_k = f(\xi''_k)$, 从而有

$$\omega_k = M_k - m_k = f(\xi''_k) - f(\xi'_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

所以

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon$$

即

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 0$$

由定理 2.5 知, $f(x) \in R[a, b]$ 。

如果把定理 2.3 的函数连续性条件稍微放宽一点, 还有如下结论:

【定理 2.4】 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 并且除去有限个间断点外处处连续, 则 $f(x) \in R[a, b]$ 。

【证】 由假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$, 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的振幅 $\omega = \sup_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} - \inf_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} \leq 2M$ 。又已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有有限个间断点, 不妨设有 m 个间断点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ 。对于 $[a, b]$ 的任意分法 $\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, 在其分割成的 n 个小区间 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ 中至多有 $2m$ 个含有间断点, 于是将振幅和分成两部分

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \sum' \omega_k \Delta x_k + \sum'' \omega_k \Delta x_k \quad (2.12)$$

其中 $\sum' \omega_k \Delta x_k$ 是相应于分法 Δ 含有间断点的那些小区间的振幅和, 其项数至多为 $2m$ 项。

$\sum'' \omega_k \Delta x_k$ 是相应于分法 Δ 不含有间断点的那些小区间的振幅和。

因为 $\sum' \omega_k \Delta x_k$ 的项数至多为 $2m$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 且 $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{8mM}$, 当 $d(\Delta) < \delta_1$ 时, 有

$$\sum' \omega_k \Delta x_k \leq \sum' 2M \Delta x_k \leq 2M \cdot 2m \delta_1 < 4mM \cdot \frac{\varepsilon}{8mM} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.13)$$

因为在 $\sum'' \omega_k \Delta x_k$ 对应的那些小区间上 $f(x)$ 连续, 从而必一致连续。故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 当 $d(\Delta) < \delta_2$ 时, $f(x)$ 在这些小区间的振幅都小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 。于是

$$\begin{aligned} \sum'' \omega_k \Delta x_k &< \sum'' \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_k \leq \\ &\frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

综合式(2.12)~(2.14),取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 对于 $[a, b]$ 的任意分法 Δ , 只要 $d(\Delta) < \delta$, 有

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \sum' \omega_k \Delta x_k + \sum'' \omega_k \Delta x_k < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

即

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 0$$

从而 $f(x) \in R[a, b]$ 。

下面我们再介绍一类简单的可积函数, 即单调函数。

【定理 2.5】 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 单调, 则 $f(x) \in R[a, b]$ 。

【证】 不妨设 $f(x)$ 单调增加。若 $f(a) = f(b)$, 则 $f(x) = f(a) = f(b) \in C[a, b]$, 从而由定理 2.6, $f(x) \in R[a, b]$ 。若 $f(a) < f(b)$, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$, 对于满足 $d(\Delta) < \delta$ 的任意分法 Δ , 有

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \delta \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) - f(x_{k-1})] = \delta [f(b) - f(a)] = \epsilon$$

由此即推知 $f(x) \in R[a, b]$ 。

习 题 5.2

1. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 单调增加, 则 $f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(b)(b-a)$ 。

2. 证明: 若函数 $f(x) \in R[a, b]$, 函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上除一点 x_0 外, $f(x) = g(x)$ ($x \neq x_0$), 则 $g(x) \in R[a, b]$, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

3. 证明: 若 $f(x) \in R[a, b]$, 且存在 $C > 0, f(x) \geq C, \forall x \in [a, b]$, 则 $\frac{1}{f(x)} \in R[a, b]$ 。

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 有界, $[a, b]$ 的分法 Δ 加上若干个新分点, 得 $[a, b]$ 的新分法 Δ' , 对应于分法 Δ 与 Δ' 的 $f(x)$ 的振幅和分别表示为 $(\Delta) \sum \omega_k \Delta x_k$ 与 $(\Delta') \sum \omega'_k \Delta x'_k$, 则

$$(\Delta') \sum \omega'_k \Delta x'_k \leq (\Delta) \sum \omega_k \Delta x_k$$

提示: 见本节的性质 2.2。

5. 设函数 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 作 $[a, b]$ 的一种分法 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 使得

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) g(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

其中 $x_{k-1} \leq \xi_k < x_k, x_{k-1} \leq \xi_k < x_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 。

提示: 应用函数的一致连续性。

6. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 有界, 证明振幅的等价形式

$$\sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\} - \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = \sup_{x, y \in [a, b]} \{|f(x) - f(y)|\}$$

5.3 定积分的性质

我们在 5.1、5.2 节的基础上将推导出定积分的以下性质。

在 5.1 节的定积分定义中, 我们假定积分区间 $[a, b]$ 的端点 $a < b$, 这在实际应用上往往带

来诸多不便,现在我们去掉这一限制。

当 $a < b$ 时,区间 $[a, b]$ 表示满足不等式 $a \leq x \leq b$, 并且沿数轴由 a 到 b 的 x 值的全体构成的集合; 当 $a > b$ 时,区间 $[a, b]$ 表示满足不等式 $b \leq x \leq a$, 并且沿数轴由 a 到 b 的 x 值的全体构成的集合。如此定义下的区间统称为有向区间, 简称为区间。事实上, 区间 $[a, b]$ 与区间 $[b, a]$ 作为集合元素是相同的, 但方向相反。

设 $a < b$, 仿照 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分的定义 1.1, 可定义 $f(x)$ 在区间 $[b, a]$ 上的定积分如下:

在区间 $[b, a]$ 由 b 到 a 取任意分法

$$\Delta: x_0 = b > x_1 > x_2 > \cdots > x_n = a$$

任取 $\xi = \{\xi_k\}, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \cdots, n$, 作积分和

$$S(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

若极限 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi)$ 存在, 称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[b, a]$ 上的定积分, 记作

$$\int_b^a f(x) dx = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

如果将 $f(x)$ 在区间 $[b, a]$ 上的积分和与在 $[a, b]$ 上的积分和相比较, 二者之间只相差一个负号。于是得到如下性质:

【性质 3.1】 若函数 $f(x) \in R[a, b]$, 则 $f(x) \in R[b, a]$, 且

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (3.1)$$

另外规定函数 $f(x)$ 在一点处的定积分

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

从几何上看, 上述规定是自然的。因为底边缩成一点 a , 而高为 $f(a)$ 的曲边梯形, 为一直线段, 其面积为零。

下面的讨论中, 积分区间 $[a, b]$ 总是假定 $a < b$, 至于 $a > b$ 的情形, 读者不难自行推出相应结论。

【性质 3.2】 (线性性质) 若函数 $f_1(x), f_2(x) \in R[a, b], \forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, 则函数 $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \in R[a, b]$, 且

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx \quad (3.2)$$

【证】 作函数 $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ 的积分和

$$\sum_{k=1}^n [k_1 f_1(\xi_k) + k_2 f_2(\xi_k)] \Delta x_k = k_1 \sum_{k=1}^n f_1(\xi_k) \Delta x_k + k_2 \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k) \Delta x_k$$

由假设 $f_1(x), f_2(x) \in R[a, b]$, 故 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_1(\xi_k) \Delta x_k$ 与 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k) \Delta x_k$ 存在。于是由极限性质知 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [k_1 f_1(\xi_k) + k_2 f_2(\xi_k)] \Delta x_k$ 存在, 从而 $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \in R[a, b]$, 且

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] = k_1 \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_1(\xi_k) \Delta x_k + k_2 \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k) \Delta x_k$$

$$\text{即} \quad \int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

如果式(3.2)中,令 $f_1(x) = f(x), f_2(x) = 1; k_1 = k, k_2 = 0$, 可得

【推论 1】 若函数 $f(x) \in R[a, b], k \in R$, 则 $kf(x) \in R[a, b]$, 且

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (3.3)$$

【性质 3.3】 (可加性质) 设 I 为一个有限闭区间, $a, b, c \in I$, 若 $f(x)$ 在 I 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b], [a, c], [c, b]$ 均可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (3.4)$$

【证】 利用函数可积充要条件式(2.11), 可以证明 $f(x)$ 在 I 的任一子区间上均可积。

若 $c \in (a, b)$, 则对 $[a, b]$ 的任意分法 Δ , 总有

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S(\Delta, \xi) = \int_a^b f(x)dx \quad (3.5)$$

这时将 c 始终作为分法 Δ 的一个分点, 则

$$S(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{[a, c]} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{[c, b]} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (3.6)$$

这里 $\sum_{[a, c]} f(\xi_k) \Delta x_k$ 与 $\sum_{[c, b]} f(\xi_k) \Delta x_k$ 分别表示相应于分法 Δ 函数 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上的积分和, 由 $f(x) \in R[a, c], f(x) \in R[c, b]$ 及式(3.5)和式(3.6), 有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

若 c 在 $[a, b]$ 之外, 不妨设 $c > b$, 则 $f(x) \in R[a, c]$, 由上面的讨论, 有

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

从而 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

总之不论 a, b, c 在区间 I 的位置如何, 总有式(3.4)成立。

【性质 3.4】 若函数 $f_1(x), f_2(x) \in R[a, b]$, 则乘积函数 $f_1(x)f_2(x) \in R[a, b]$ 。

【证】 对于区间 $[a, b]$ 的任意分法

$$\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

记 $\omega_k(f_1), \omega_k(f_2)$ 和 $\omega_k(f_1 \cdot f_2)$ 分别为 $f_1(x), f_2(x)$ 和 $f_1(x) \cdot f_2(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅, 由函数可积的必要条件, $\exists M_1, M_2 > 0$, 使得

$$|f_1(x)| \leq M_1, |f_2(x)| \leq M_2, x \in [a, b]$$

另一方面, $\forall x', x'' \in [a, b]$, 有

$$|f_1(x')f_2(x') - f_1(x'')f_2(x'')| =$$

$$\begin{aligned} & |[f_1(x') - f_1(x'')]f_2(x') + [f_2(x') - f_2(x'')]f_1(x'')| \leq \\ & |f_2(x')| |f_1(x') - f_1(x'')| + |f_1(x'')| |f_2(x') - f_2(x'')| \leq \\ & M_2 |f_1(x') - f_1(x'')| + M_1 |f_2(x') - f_2(x'')| \end{aligned}$$

于是根据习题 5.2 第 6 题, 有

$$\begin{aligned} \omega_k(f_1 \cdot f_2) &= \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{ |f_1(x')f_2(x') - f_1(x'')f_2(x'')| \} \leq \\ & M_2 \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{ |f_1(x') - f_1(x'')| \} + M_1 \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{ |f_2(x') - f_2(x'')| \} = \\ & M_2 \omega_k(f_1) + M_1 \omega_k(f_2) \end{aligned}$$

从而
$$\sum_{k=1}^n \omega_k(f_1 \cdot f_2) \Delta x_k \leq M_2 \sum_{k=1}^n \omega_k(f_1) \Delta x_k + M_1 \sum_{k=1}^n \omega_k(f_2) \Delta x_k$$

已知 $f_1(x), f_2(x) \in R[a, b]$, 上式右端的两个振幅和趋于 0 ($d(\Delta) \rightarrow 0$), 所以

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(f_1 \cdot f_2) \Delta x_k = 0$$

即 $f_1(x)f_2(x) \in R[a, b]$ 。

【性质 3.5】 (单调性质) 若函数 $f(x), g(x) \in R[a, b]$, 且 $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (3.7)$$

由定积分的定义 1.1 很容易看出性质 5 的正确性。

【推论 2】 若函数 $f(x) \in R[a, b]$, 且 $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (3.8)$$

【推论 3】 若函数 $f(x) \in R[a, b]$, 且 $f(x) \geq 0 (\leq 0), x \in [a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 (\leq 0) \quad (3.9)$$

【性质 3.6】 若函数 $f(x) \in R[a, b]$, 则 $|f(x)| \in R[a, b]$, 且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (3.10)$$

【证】 分别记函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅为 $\omega_k(f)$ 与 $\omega_k(|f|)$, 由于

$$\begin{aligned} \omega_k(|f|) &= \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{ ||f(x')| - |f(x'')|| \} \leq \\ &\sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{ |f(x') - f(x'')| \} = \omega_k(f) \end{aligned}$$

于是
$$0 \leq \sum_{k=1}^n \omega_k(|f|) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \rightarrow 0 \quad (d(\Delta) \rightarrow 0)$$

即 $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(|f|) \Delta x_k = 0$, 所以 $|f(x)| \in R[a, b]$ 。

又注意到, 对任意函数 $f(x)$, 总有

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

再根据性质 3.5, 有

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

可见式(3.6)成立。

【例 3.1】 估计积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$ 。

【解】 设 $f(x) = e^{-x^2}$, 则 $f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0, x \in [0, \frac{1}{2}]$, 故 $f(x)$ 严格单调减少, 故

$$e^{-\frac{1}{4}} = f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0) = 1$$

于是根据推论 3.7, 有

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}$$

【例 3.2】 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积且单调减少, 求证: $\forall a \in (0, 1)$, 有

$$a \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$$

【证】 $\forall a \in (0, 1)$, 由于函数 $f(x)$ 是单调递减的, 有 $f(x) \geq f(a), x \in [0, a]$, 于是根据性质 3.6, 有

$$\int_0^a f(a) dx \leq \int_0^a f(x) dx \quad \text{或} \quad \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \quad (3.11)$$

另一方面 $f(x) \leq f(a), x \in [a, 1]$, 有

$$\int_a^1 f(x) dx \leq \int_a^1 f(a) dx \quad \text{或} \quad \frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx \leq f(a) \quad (3.12)$$

结合式(3.11)和式(3.12), 得

$$\frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx \leq f(a) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{或} \quad a \int_a^1 f(x) dx \leq (1-a) \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx - a \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{或} \quad a \left(\int_0^a f(x) dx + \int_a^1 f(x) dx \right) = \int_0^a f(x) dx$$

再根据定积分的可加性质, 有

$$a \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^a f(x) dx$$

【例 3.3】 设函数 $f(x), g(x) \in R[a, b]$, 求证柯西不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

【证】 $\forall \lambda \in R$, 则函数 $[\lambda f(x) + g(x)]^2 \geq 0, x \in [a, b]$, 根据推论 3.8, 有

$$\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0$$

其判别式

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leq 0$$

$$\text{即} \quad \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

利用柯西不等式(3.13), 可推出如下闵可夫斯基(Minkowski 1861 ~ 1909 德国数学家)不等式

$$\left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

$$\text{事实上} \quad \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2 \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \leq$$

$$\int_a^b f^2(x)dx + 2 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\int_a^b g^2(x)dx = \left[\left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

从而有不等式(3.14)成立。

【性质 3.7】 (积分第一中值定理) 若函数 $f(x) \in C[a, b]$, 函数 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积且不变号, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (3.15)$$

【证】 首先由性质 3.4, 函数乘积 $f(x)g(x) \in R[a, b]$. 不妨设 $g(x) \geq 0$. 记 $m = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}, M = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$, 则

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad x \in [a, b]$$

根据性质 3.5, 有

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \quad (3.16)$$

由性质 3.5 的推论 2, 有 $\int_a^b g(x) dx \geq 0$. 如果这个积分为 0, 由不等式 (3.12) 推知

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

此时, 对任意的 $\xi \in [a, b]$, 均有式 (3.11) 成立; 如果这个积分大于 0, 则对式 (3.12) 两端同除以该积分值以后, 得

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x) dx / \int_a^b g(x) dx \leq M$$

再由闭区间上连续函数的性质, 在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \int_a^b f(x)g(x) dx / \int_a^b g(x) dx$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

特别, 如果 $g(x) = 1$, 由性质 3.7 得:

【推论 4】 若函数 $f(x) \in C[a, b]$, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (3.17)$$

式 (3.13) 通常称为积分中值公式. 对此可作如下几何解释: 若函数 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(x) \geq 0$, 那么如图 3.1 所示, 积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

表示曲线 $y = f(x)$ 下面曲线梯形 $ABCD$ 的面积, 而积分中值公式说明, 它等于同底但高为 $f(\xi)$ 的矩形 $ABEF$ 的面积. $f(\xi)$ 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值.

【例 3.4】 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$ 在 $(0, 1)$ 可微, 且 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx$, 求证 $\exists \eta \in (0, 1)$, 使得

$$f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$$

【证】 令 $F(x) = xf(x)$, 则 $F(x) \in C[0, 1]$, 由积分中值公式 (3.13), $\exists \xi \in [0, \frac{1}{2}]$, 使得

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} F(x) dx = 2F(\xi) \cdot \frac{1}{2} = F(\xi)$$

又注意到 $F(x) \in C[\xi, 1]$, 在 $(\xi, 1)$ 可导, 且

$$F(\xi) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = f(1) = 1 \cdot f(1) = F(1)$$

由洛尔定理, 至少存在一点 $\eta \in (\xi, 1)$, 使得

$$F'(\eta) = f(\eta) + \eta f'(\eta) = 0$$

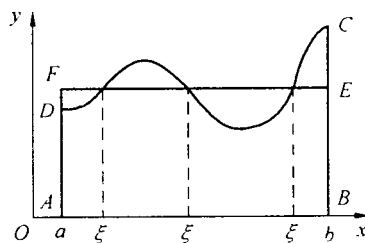


图 3.1

【例 3.5】 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ 。

【证】 设 $f(x) = \frac{1}{1+x} \in C[0,1], g(x) = x^n \in C[0,1]$, 且 $g(x)$ 不变号, 由第一积分中值定理, $\exists \xi \in [0,1]$, 使得

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \frac{1}{n+1}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\xi)(n+1)} = 0$$

【例 3.6】 证明: 若函数 $f(x) \in C[a,b]$, 非负, 且 $\exists x_0 \in [a,b]$, 使 $f(x_0) > 0$, 则

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

【证】 不妨设 $x_0 \in (a,b)$, 由于 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 取 $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0, \exists \delta > 0 ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b))$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$$

即

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \quad x \in U(x_0, \delta)$$

于是由定积分的可加性质(性质 3.4) 和单调性质(性质 3.6), 有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \geqslant \\ &\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} dx = \frac{f(x_0)}{2} \cdot 2\delta = f(x_0) \cdot \delta > 0 \end{aligned}$$

习 题 5.3

1. 比较下列各组积分的大小

(1) $\int_0^1 x^2 dx$ 与 $\int_0^1 x^3 dx$

(2) $\int_1^2 x^2 dx$ 与 $\int_1^2 x^3 dx$

(3) $\int_1^2 \ln x dx$ 与 $\int_1^2 x dx$

(4) $\int_0^\pi \sin x dx$ 与 $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

2. 估计积分值 $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin x}{x} dx$

3. 证明 $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 。

4. 设函数 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ 的充要条件是

$$f(x) \equiv 0 \quad x \in [a,b]$$

5. 设函数 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f(x) > 0$, 求证

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geqslant (b-a)^2$$

6. 设函数 $f(x) \in C[0,1]$, 在 $(0,1)$ 内可导, 且

$$3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$$

求证 $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

7. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

问是否存在 $\xi \in [0, 1]$, 使 $f(\xi) = \int_0^1 f(x) dx$.

8. 估计积分值: $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$.

9. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 满足李普希茨 (Lipschitz 1832 ~ 1903 德国数学家) 条件:
 $\forall x, y \in [0, 1]$ 有

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

其中 M 是常数, 则

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n}$$

(提示: $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx$)

10. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调减少, 则

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{f(0) - f(1)}{n}$$

说明其几何意义 (提示: 见第 9 题提示)。

11. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 $[A, B]$ 上可积, $[a, b] \subset [A, B]$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0$$

此式称为函数 $f(x)$ 积分的连续性. 提示: 将区间 $[a, b]$ n 等分, 当 n 充分大时, 有振幅和

$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$, 其中 ω_k 是 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅. 讨论

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x+h) - f(x)| dx$$

不妨设 $0 < h < \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{|f(x+h) - f(x)|\} \leq \omega_k + \omega_{k+1}$$

5.4 积分上限函数与牛顿-莱布尼兹公式

引入定积分的性质之后, 我们所面临的一个基本问题就是定积分的算法. 前面已看到, 直接用定积分的定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

来计算定积分是非常困难的. 在古代, 也只有极少数像阿基米德 (Archimedes 公元前 287 ~ 212 古希腊数学家、物理学家) 那样罕见的天才, 方能巧妙的用“分割、作和、取极限”的方法解决某些二次曲线及曲面所围成的图形的面积和体积问题, 并且他们关于求积问题的种种结果和方法也都是孤立的. 所以, 人们一直在寻求比较切实可行的、统一的方法来计算定积分. 直到 17 世纪的后叶, 牛顿与莱布尼兹几乎同时发现了定积分与不定积分之间有密切联系, 通过这

一联系就可以用不定积分来计算定积分。这就是所谓的牛顿-莱布尼兹公式。现在我们来介绍这一著名公式。

5.4.1 积分上限函数

如果函数 $f(x) \in C[a, b]$, 根据 5.3 节性质 3.3, 对 $\forall x \in [a, b]$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的子区间 $[a, x]$ 上也可积, 于是有惟一的积分值

$$\int_a^x f(t) dt$$

与 x 相对应。根据函数的定义, 这个积分确定了一个定义在 $[a, b]$ 上的函数, 记作

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

称为积分上限函数。同理也可定义积分下限函数

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt$$

如果 $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ 。从几何上看, 对于 $\forall x \in [a, b]$, 积分上限函数在点 x 的值 $F(x)$ 是区间 $[a, x]$ 上的曲边梯形 $ABEF$ 的面积, 这如图 4.1 所示的阴影部分的面积。

【定理 4.1】 如果函数 $f(x) \in C[a, b]$, 则积分上限函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

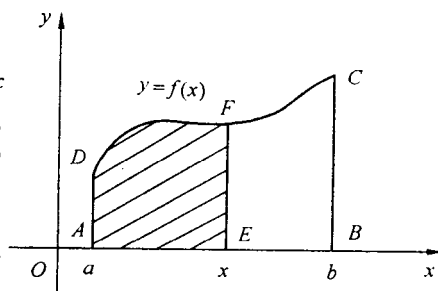


图 4.1

在区间 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$ 。

【证】 对于 $\forall x \in [a, b]$, 设 x 有改变量 Δx , 且 $x + \Delta x \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \end{aligned}$$

根据积分中值公式, 有

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(x + \theta \Delta x) \Delta x \quad 0 < \theta < 1$$

由于函数 $f(x)$ 在点 x 处连续, 得到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \theta \Delta x) = f(x)$$

即
$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad (4.1)$$

定理 4.1 建立了导数与积分之间的联系, 从这个定理还知道, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么积分上限函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数。因而也同时证明了在 4.1 节中引用过但未加以证明的结论: 在区间 $[a, b]$ 上连续的函数恒有原函数存在。

积分上限函数是函数的一种新的表示方法, 讨论数学分析中的某些问题是离不开积分上限函数的。

当然像对其它函数一样,我们也可以讨论积分上限函数的分析运算。

【例 4.1】 求下列函数的导数

$$(1) \int_1^x \ln t dt \quad (2) \int_x^\pi \cos^2 t dt$$

$$(3) \int_a^x x f(t) dt, \text{ 其中 } f(t) \in C[a, b], x \in [a, b]$$

【解】 (1) 由于 $\ln t \in C(0, +\infty)$, 根据定理 4.1, 有

$$\left(\int_1^x \ln t dt \right)' = \ln x$$

$$(2) \text{ 由于 } \int_x^\pi \cos^2 t dt = - \int_\pi^x \cos^2 t dt, \text{ 故}$$

$$\left(\int_x^\pi \cos^2 t dt \right)' = \left(- \int_\pi^x \cos^2 t dt \right)' = - \cos^2 x$$

$$(3) \text{ 由于 } \int_a^x x f(t) dt = x \int_a^x f(t) dt, \text{ 故}$$

$$\left(\int_a^x x f(t) dt \right)' = \left(x \int_a^x f(t) dt \right)' = \int_a^x f(t) dt + x f(x)$$

【例 4.2】 求函数 $F(x) = \int_a^{x^2} e^t dt$ 的导数。

【解】 令 $u = x^2$, 则

$$F(x) = \int_0^u e^t dt = g(u)$$

根据复合函数的求导法则, 有

$$F'(x) = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx} = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

仿照例 4.2 的讨论过程, 不难得出如下结论。

若函数 $f(t)$ 连续, $\varphi(x)$ 可导, 则变上限积分 $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt$ 可导, 且

$$F'(x) = \left(\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' = f[\varphi(x)] \varphi'(x) \quad (4.2)$$

更一般的, 对变上、下限积分 $F(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt$ 求导, 有

$$F'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x) - f[\psi(x)] \psi'(x) \quad (4.3)$$

【例 4.3】 方程

$$\int_0^y e^{t^2} dt + \int_{x^2}^1 \cos \sqrt{t} dt = 0$$

确定 y 是 x 的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

【解】 根据式(4.2), 有

$$e^{y^2} \cdot y' - \cos \sqrt{x^2} (2x) = 0$$

于是

$$y' = 2xe^{-y^2} \cos \sqrt{x^2}$$

【例 4.4】 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2 / \int_0^x e^{2t^2} dt$$

【解】 由洛比达法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2 / \int_0^x e^{2t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2} / e^{2x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \int_0^x e^{t^2} dt / e^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

【例 4.5】 设 $y = f(x) \in C[0,1]$, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 试证: $\exists x_0 \in [0,1]$, 使得在区间 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于区间 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为边的曲边梯形面积(图 4.2)。

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明(1)中的 x_0 是惟一的。

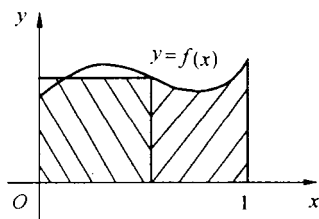


图 4.2

【解】 (1) 设函数

$$F(x) = x \int_x^1 f(t) dt \quad x \in [0,1]$$

则 $F(0) = F(1) = 0$, 且 $F'(x) = \int_x^1 f(t) dt - xf(x)$ 。在 $[0, 1]$ 上对 $F(x)$ 应用洛尔定理, 知至少存在一点 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $F'(x_0) = 0$, 即

$$\int_{x_0}^1 f(t) dt - x_0 f(x_0) = 0$$

或

$$x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(t) dt$$

即 $[0, x_0]$ 上的矩形面积 $x_0 f(x_0)$ 等于 $[x_0, 1]$ 上的曲边梯形面积。

(2) 设函数

$$G(x) = \int_x^1 f(t) dt - xf(x)$$

则

$$\begin{aligned} G'(x) &= -f(x) - f(x) - xf'(x) = -2f(x) - xf'(x) < \\ &= -2f(x) - x \left(-\frac{2f(x)}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

所以函数 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格单调减少, 故使得 $G(x_0) = 0$ 的 x_0 是惟一的。即(1)中的 x_0 是惟一的。

5.4.2 牛顿-莱布尼兹公式

有了上面的准备, 我们容易证明如下极为重要的结果。

【定理 4.2】 (微积分学基本定理) 如果 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4.4)$$

【证】 由定理 1 知, 积分上限函数

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 由于同一函数的任意两个原函数只能相差一个常数, 所以 $G(x) = F(x) + C$ (C 为常数), 即

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

令 $x = a, G(a) = 0$, 故 $C = -F(a)$, 从而

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

再令 $x = b$, 有

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

通常称式(4.4)为牛顿(Newton 1642 ~ 1727 英国数学家、物理学家、天文学家)-莱布尼兹公式。

微积分学基本定理的一个重要意义,在于它给出了计算定积分的统一、简便方法。即计算积分值 $\int_a^b f(x)dx$, 只需先求出 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$, 而 $F(x)$ 在上限 b 、下限 a 处的函数值 $F(b)$ 与 $F(a)$ 的差 $F(b) - F(a)$ 就是定积分值。可见牛顿-莱布尼兹公式把求定积分的问题转化为求被积函数的原函数问题。而如何求原函数我们曾在上一章进行了大量的讨论。

牛顿-莱布尼兹公式进一步揭示了这种讨论的意义所在。

【例 4.6】 计算

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; (2) \int_0^2 (e^x - x)dx; (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

【解】 (1) 已知 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \in C[0,1]$, 则由牛顿-莱布尼兹公式, 得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

(2) 已知 $(e^x - \frac{x^2}{2})' = e^x - x \in C[0,2]$, 故

$$\int_0^2 (e^x - x)dx = (e^x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^2 = (e^2 - \frac{2^2}{2}) - (e^0 - \frac{0^2}{2}) = e^2 - 3$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - 1)$$

【例 4.7】 设

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 5 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

计算 $\int_0^2 f(x)dx$ 。

【解】 由定积分性质 3.4, 有

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \\ &= \int_0^1 2x dx + \int_1^2 5 dx = x^2 \Big|_0^1 + 5x \Big|_1^2 = 6 \end{aligned}$$

【例 4.8】 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ ($a > 0$) 上可微, 且 $f'(x) \in C[0, a]$, $f(0) = 0$, 求证

$$\left| \int_0^a f(x)dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2}$$

其中 $M = \max_{0 \leq x \leq a} \{f'(x)\}$ 。

【证】 在区间 $[0, x]$ ($0 \leq x \leq a$) 上对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x \quad 0 < \xi < x$$

于是 $\left| \int_0^a f(x)dx \right| = \left| \int_0^a f'(\xi)x dx \right| \leq \int_0^a |f'(\xi)|x dx \leq$

$$M \int_0^a x dx = \frac{Ma^2}{2}$$

【例 4.9】 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$$

【解】 设

$$S_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k}{n}\pi}{n+\frac{1}{k}}$$

且

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n}\pi \cdot \frac{1}{n+1} < S_n < \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n}\pi \cdot \frac{1}{n}$$

注意到 $\sin \pi x \in C[0,1]$, 则 $\sin \pi x \in R[0,1]$. 若将区间 $[0,1]$ 进行 n 等分, 则 $\Delta x_k = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$, 取 $\xi_k = \frac{k}{n} \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k=1, 2, \dots, n$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n}\pi \cdot \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \pi \xi_k \cdot \Delta x_k = \int_0^1 \sin \pi x dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n}\pi \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n}\pi \cdot \frac{1}{n} \right) \left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$$

从而由两边夹准则, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{\pi}$$

【例 4.10】 证明: 若 $f(x)$ 连续, 则

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

【证】 令 $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du = x \int_0^x f(u)du - \int_0^x u f(u)du$, 则

$$F'(x) = \int_0^x f(u)du + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(u)du$$

可见 $F(x)$ 是积分上限函数 $\int_0^x f(u)du$ 的一个原函数, 于是由牛顿-莱布尼兹公式, 有

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du = F(x) - F(0)$$

显然 $F(0) = 0$, 故

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

现在我们指出, 在推导牛顿-莱布尼兹公式时, 事实上不要求函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的原函数. 我们可以把牛顿-莱布尼兹公式 (4.4) 在更一般的假定下建立起来.

【定理 4.3】 如果函数 $f(x) \in R[a, b]$, 而在区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $F(x)$, 有 $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$ 或除去有限个点外处处有导数 $f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (4.5)$$

【证】 任取区间 $[a, b]$ 的分法

$$\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

且使不满足式 $F'(x) = f(x)$ 的有限个点总包括在 x_0, x_1, \cdots, x_n 中间, 由于 $F(x) \in C[a, b]$, 有

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] = \\ &= \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \quad (\text{利用拉格朗日中值公式}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

其中 $x_{k-1} < \xi_k < x_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, \cdots, n$. 由于 $f(x) \in R[a, b]$, 则上式中出现的函数 $f(x)$ 的积分和 $S(\Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$, 当 $d(\Delta) (= \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}) \rightarrow 0$ 时, 与 $\xi = \{\xi_k\}$ 的选取无关的存在极限 $\int_a^b f(x)dx$. 因此, 特别地, 保持着常数值 $F(b) - F(a)$ 的这一和数 $S(\Delta, \xi)$ 也收敛于此积分, 即

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

【例 4.11】 计算 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

【解】 虽然 $x \in (-a, a)$ 时, 有

$$\left(\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right)' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

但 $F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$ 在 $x = \pm a$ 处却不可导, 注意到 $F(x) \in C[-a, a]$, 根据定理 4.3, 有

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{\pi a^2}{2}$$

有了牛顿-莱布尼兹公式, 我们可以将连续函数的定积分的计算转化为寻求被积函数的原函数问题, 但切不可认为定积分的计算问题就完全解决了. 因为, 虽然从理论上证实了连续函数一定有原函数, 但求原函数有时是非常困难的, 甚至可能遇到原函数根本就不能用初等函数表示成有限形式的情况. 这时定积分的计算就无法利用牛顿-莱布尼兹公式来实现.

习 题 5.4

1. 用定积分定义求下列定积分

$$(1) \int_0^1 x dx$$

$$(2) \int_a^b x^3 dx \quad (\text{提示: } \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (1+n)^2)$$

$$(3) \int_2^3 \frac{dx}{x^2} \quad (\text{提示: 可取 } \xi_k = \sqrt{x_{k-1} x_k}, k = 1, 2, \cdots, n)$$

2. 证明: 若函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导, 则 $F(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt$ 可导, 并求其导数.

3. 求下列函数的导数

$$(1) \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (x > 0) \quad (2) \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt$$

$$(3) \int_0^{x^2} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt \quad (4) \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$$

$$(5) \sin \left(\int_0^x \frac{dt}{1 + \sin^2 t} \right)$$

4. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cot t dt = 0$ 所确定的隐函数 y 关于 x 的导数。

5. 已知函数 $f(x)$ 连续, 且

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x$$

求 $f(2)$ 。

6. 求由参数方程 $x = \int_0^t u \ln u du$ 、 $y = \int_t^1 u^2 \ln u du$ 所确定的函数 y 关于 x 的导数。

7. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2} dt$$

8. 设对任意 $x > 0$ 、曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在轴上的截距等于 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$,

求 $f(x)$ 的一般表达式。

9. 设函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 且 $f(x) > 0$, 求证

$$\int_0^1 \ln[f(x)] dx \leq \ln \left[\int_0^1 f(x) dx \right]$$

10. 设函数 $f(x)$ 有二阶导数, 且 $f''(x) \geq 0$, $x = u(t) \in C[0, a]$ ($a > 0$), 求证

$$f \left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt \right] \leq \frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt$$

11. 用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分

$$(1) \int_0^3 2x dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$(3) \int_1^0 e^x dx \quad (4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$(5) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (6) \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$$

$$(7) \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx \quad (8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$$

12. 计算定积分

$$(1) \int_1^2 |1-x| \sqrt{(x-4)^2} dx \quad (2) \int_0^1 x|x-a| dx$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$$

13. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1+x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ 。

14. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt \in C[a, b]$ 。

15. 证明:若函数 $f(x)$ 在数轴 R 上连续, 且 $f(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $f(x) \equiv 0$ 。

16. 证明:若函数 $f(x) \in R[a, b]$, 则 $\exists x \in [a, b]$, 使

$$\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt$$

17. 若函数 $f(x) \in C[0, 1]$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, $\int_0^1 xf(x) dx = 1$, 求证: $\exists x_0 \in [0, 1]$, 使得 $|f(x_0)| > 4$ 。

18. 证明:若函数 $f(x) \in C[a, b]$, $\forall x, x_0 \in [a, b]$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(x_0)$$

19. 证明:若函数 $f(x) \in C[0, +\infty]$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = A$$

5.5 定积分的计算

利用牛顿-莱布尼兹计算定积分的关键是求被积函数的不定积分, 而换元积分法和分部积分法是求不定积分的基本方法, 下面我们把这两种方法进一步推广到定积分上去。

5.5.1 定积分的换元积分法

应用换元积分法计算定积分时, 变换过程和求不定积分的换元积分法是一样的。在定积分时, 积分后要换回原来的积分变量。但在定积分利用换元积分法时, 相应的改变积分的上、下限, 不必再换回到原来的积分变量, 可以简化定积分的计算。

【例 5.1】 计算 $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$ 。

【解】 作变量代换 $\sqrt{x} = u$, 即 $x = u^2$, 这时 $dx = 2u du$ 。当 x 从 4 连续增加到 9, u 从 2 连续增加到 3, 即当 $x = 4$ 时, $u = 2$; 当 $x = 9$ 时, $u = 3$ 。因此

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx &= \int_2^3 \frac{t}{1-t} 2t dt = \int_2^3 [-2(1+t) + \frac{2}{1-t}] dt = \\ &= [- (1+t)^2 - 2 \ln |1-t|] \Big|_2^3 = -7 - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

一般定积分的换元积分法叙述如下:

【定理 5.1】 设函数 $f(x) \in C[a, b]$, 若函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 连续可微, 且当 $\alpha \leq t \leq \beta$ 时, $a \leq \varphi(t) \leq b$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (5.1)$$

【证】 由假设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x)$ 必有原函数。不妨设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$ 。根据牛顿-莱布尼兹公式, 有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (5.2)$$

另一方面,由复合函数求导法则及复合函数的连续性,有

$$\{F[\varphi(t)]\}' = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$$

再由牛顿-莱布尼兹公式,有

$$\int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) \quad (5.3)$$

由式(5.2)和式(5.3)知

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

【例 5.2】 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ 。

【解】 令 $u = \sqrt{e^x - 1}$, 即 $x = \ln(1 + u^2)$ 且 $x = 0, u = 0$ 和 $x = \ln 2, u = 1, dx = \frac{2u}{1+u^2} du$, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= \int_0^1 u \frac{2u}{1+u^2} du = 2 \int_0^1 \frac{1+u^2-1}{1+u^2} du = \\ &= 2 \left(\int_0^1 du - \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \right) = 2(u - \arctan u) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

【例 5.3】 计算 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 。

【解】 令 $x = \sec u$, 且 $u = \frac{2\pi}{3}$ 时, $x = -2$; $u = \frac{3\pi}{4}$ 时, $x = -\sqrt{2}$, $dx = \sec u \cdot \tan u du$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2 u - 1} = \sqrt{\tan^2 u} = |\tan u| = -\tan u, u \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$, 于是

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sec u \cdot \tan u}{-\tan u} du = - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \sec u du = \\ &= -\ln|\sec u + \tan u| \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} = \ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

初学者可能会把 $\sqrt{x^2 - 1} = -\tan t \left(t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} \right] \right)$ 的右端误写为 $\tan t$, 这样算出的结果是 $-\ln \left[\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} \right] < 0$ 。其实只须认真观察就可以避免这个错误, 因为被积函数在 $[-2, -\sqrt{2}]$ 上变化时是正的, 所以积分值不可能小于零。

【例 5.4】 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 。

【解】 令 $x = a \sin u$, 当 $u = 0$ 时, $x = 0$; 当 $u = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = a, dx = a \cos u du, u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos u \cdot a \cos u du = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du = \frac{a^2}{2} \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

有时不定积分计算很复杂, 甚至“积不出来”(即不定积分不是初等函数), 但用换元积分法可以把其定积分求出, 请看下例。

【例 5.5】 计算下列定积分

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

【解】 (1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - u$, 则 $x = 0, u = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}, u = 0$. $dx = -du$, 于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin u}{\cos u + \sin u} (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\cos u + \sin u} du$$

从而

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

(2) 令 $x = \frac{\pi}{4} - u$, 则 $x = 0, u = \frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{4}, u = 0$. 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln[1 + \tan(\frac{\pi}{4} - u)] (-du) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{2}{1 + \tan u} du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan u) du \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

【例 5.6】 求证

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad (5.4)$$

并计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos x} dx$.

【证】 令 $x = \pi - u$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \int_{\pi}^0 (\pi - u) f[\sin(\pi - u)] (-du) = \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

由公式(5.4), 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \\ &= -\frac{\pi}{2} \arctan \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

【例 5.7】 证明: 若函数 $f(x) \in R[-a, a]$, 则

(1) 若 $f(-x) = -f(x)$, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

(2) 若 $f(-x) = f(x)$, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$. (5.5)

【证】 由 5.3 节性质 3.3, 知

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (5.6)$$

(1) 若 $f(-x) = -f(x)$, 令 $x = -u$, 积分

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = -\int_0^a f(u) du = -\int_0^a f(x) dx$$

从而根据式(5.6), 有

$$\int_{-a}^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

(2) 若 $f(-x) = f(x)$, 令 $x = -u$, 积分

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx$$

再根据式(5.6), 有

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx$$

【例 5.8】 计算下列积分

$$(1) \int_{-a}^a \ln \frac{1+x}{1-x} dx \quad (0 < a < 1) \quad (2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x}$$

【解】 (1) 记 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 则 $f(-x) = \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln \frac{1-x}{1+x} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$, 故函数 $f(x)$ 是奇函数, 而积分区间是以原点为心的对称区间, 故由例 5.6, 得

$$\int_{-a}^a \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0$$

(2) 设 $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$, 由于定义在与原点对称的区间上的函数总可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和, 即

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f_1(x) + f_2(x)$$

这里 $f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ 为偶函数, $f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ 为奇函数, 由例 5.6

可知, $f_2(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的积分为零。而 $f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\right)$ 为偶函数, 由例 5.6, 得

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x} dx = 2 \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \end{aligned}$$

【例 5.9】 证明 若函数 $f(x)$ 是以 $T(>0)$ 为周期的可积函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad (5.7)$$

【证】 由于

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

对上式的最后一个积分作换元 $x = u + T$, 有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(u+T) du = \int_0^T f(u) du = - \int_a^0 f(x) dx$$

$$\text{于是 } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx - \int_a^0 f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

周期函数的这个积分性质的几何意义是明显的,如图 5.1 所示,在 $[a, a+T]$ 与 $[0, T]$ 上的两块阴影部分的面积是相等的。

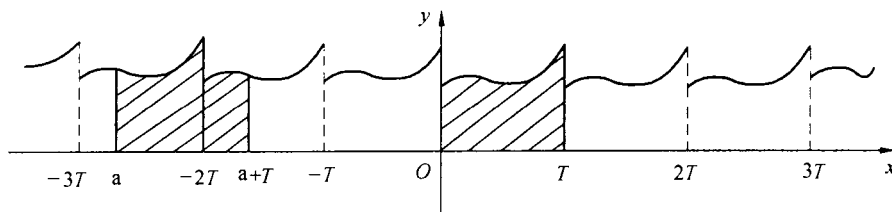


图 5.1

【例 5.10】 若函数 $f(x)$ 是以 $T(>0)$ 为周期的连续函数,求证

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du$$

【证】 $\forall x > T, \exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $nT \leq x < (n+1)T$, 可见 $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 设 $x = y + nT$, 则 $0 \leq y < T$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + y} \int_0^{nT+y} f(u) du = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + y} \left(\int_0^T + \int_T^{2T} + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} + \int_{nT}^{nT+y} \right) f(u) du = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + y} \left(n \int_0^T f(u) du + \int_{nT}^{nT+y} f(u) du \right) = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT + y} \int_0^y f(u) du = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du \end{aligned}$$

【例 5.11】 设函数 $f(x)$ 连续, 且

$$\int_0^x u f(2x-u) du = \frac{1}{2} \arctan x^2$$

已知 $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$.

【解】 令 $t = 2x - u$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^x u f(2x-u) du &= \int_{2x}^x (2x-t) f(t) (-dt) = \\ &= 2x \int_x^{2x} f(t) dt - \int_x^{2x} t f(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{于是 } 2x \int_x^{2x} f(t) dt - \int_x^{2x} t f(t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$$

对上式两端关于 x 求导, 得

$$2 \int_x^{2x} f(u) du + 2x[2f(2x) - f(x)] - 2 \cdot 2xf(2x) + xf(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^4}$$

$$\text{即 } 2 \int_x^{2x} f(u) du = \frac{x}{1+x^4} + xf(x)$$

令 $x = 1$, 得

$$\int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + f(1) \right] = \frac{3}{4}$$

5.5.2 定积分的分部积分法

【定理 5.2】 设函数 $u(x), v(x), u'(x), v'(x) \in C[a, b]$, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \quad (5.8)$$

【证】 由于 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ 及牛顿-莱布尼兹公式, 有

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = u(x)v(x) \Big|_a^b$$

从而根据定积分的线性性质, 有

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

【例 5.12】 计算下列定积分

$$(1) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$$

【解】 (1) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d \sqrt{1-x^2} =$
 $- \sqrt{1-x^2} \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$
 $- \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12} \pi$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d \tan x =$
 $\frac{1}{2} (x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$
 $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$

(3) $\int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = - \int_0^1 x e^x d \frac{1}{1+x} = - \left(\frac{x e^x}{1+x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x+1} d x e^x \right) =$
 $- \frac{e}{2} + \int_0^1 \frac{e^x (1+x)}{1+x} dx = - \frac{e}{2} + \int_0^1 e^x dx =$
 $- \frac{e}{2} + e^x \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$

在实际运算中, 经常将换元积分法与分部积分法结合起来使用。如下例。

【例 5.13】 计算下列不定积分

$$(1) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \quad (2) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$$

【解】 (1) 令 $u = \sqrt{x}$, 则

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 e^u 2u du = 2 \int_0^1 u d e^u =$$

 $2 \left(u e^u \Big|_0^1 - \int_0^1 e^u du \right) = 2(e - e + 1) = 2$

$$\begin{aligned}
(2) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{-2x}(e^{2x}-1)} dx = \int_0^{\ln 2} e^{-x} \sqrt{e^{2x}-1} dx = \\
&= - \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x}-1} de^{-x} = - \left(e^{-x} \sqrt{e^{2x}-1} \Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^{-x} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx \right) = \\
&= - \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = - \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \quad (\text{令 } u = e^x) = \\
&= - \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(u + \sqrt{u^2-1}) \Big|_1^2 = - \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

【例 5.14】 (1) 求证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx (n \in \mathbf{N})$;

(2) 计算 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$;

(3) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$;

(4) 计算 $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$.

【解】 (1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - u$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$\begin{aligned}
(2) I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x = \\
&= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot \cos x dx = \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)
\end{aligned}$$

经整理,得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots$$

而

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

当 n 为奇数时,有

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \dots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \dots \frac{2}{3} I_1 = \\
&= \frac{(n-1)(n-3)\dots 2}{n(n-2)\dots 1} = \frac{(n-1)!!}{n!!}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

当 n 为偶数时,有

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \dots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \dots \frac{1}{2} I_0 = \\
&= \frac{(n-1)(n-3)\dots 1}{n(n-2)\dots 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

(3) 利用(2)中的式(5.10),有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x (1 - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \\
&= \frac{3!!}{4!!} \frac{\pi}{2} - \frac{5!!}{6!!} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{48} \right) = \frac{\pi}{32}
\end{aligned}$$

(4) 令 $x = \sin u$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u \cos^2 u du = \frac{\pi}{32}\end{aligned}$$

【例 5.15】 设函数 $f(x) = \int_x^{x+1} \sin u^2 du$, 求证: 当 $x > 0$ 时

$$|f(x)| < \frac{1}{x}$$

【证】 由于

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{x+1} \sin u^2 du = \int_{x^2}^{(x+1)^2} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \quad (t = u^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{1}{\sqrt{t}} d\cos t = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \right]_{x^2}^{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int_{x^2}^{(x+1)^2} \cos t \cdot t^{-\frac{3}{2}} dt = \\ &= \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} - \frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} t^{-\frac{3}{2}} \cot t dt\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x)| &< \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} t^{-\frac{3}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

习 题 5.5

1. 计算下列定积分

$$(1) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(2) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$(3) \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$$

$$(4) \int_{-2}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$(5) \int_0^{-a} \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \sin x}$$

$$(7) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

2. 计算下面两个定积分时, 能否作题后指定的变换, 为什么?

$$(1) \int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2} dx, x = \cos u$$

$$(2) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}, \tan x = u$$

3. 设 $f(x) \in C(-\infty, \infty)$, $f(x) > 0$, 证明

$$\int_0^1 \ln f(x+u) du = \int_0^x \ln \frac{f(u+1)}{f(u)} du + \int_0^1 \ln f(u) du$$

4. 设 $f(x) \in C(-\infty, \infty)$, 试证函数

$$F(x) = \int_0^1 f(x+t) dt$$

可导, 并求 $F'(x)$ 。

5. 计算下列定积分

$$\begin{aligned}
(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx & \quad (2) \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx \\
(3) \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx & \quad (4) \int_0^1 x^3 e^{2x} dx \\
(5) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx & \quad (6) \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx
\end{aligned}$$

6. 已知 $f(\pi) = 1$, 且 $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 3$, 求 $f(0)$ 。

7. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x \ln x$, 求 $\int_1^{\pi} x f'(x) dx$ 。

8. 求证

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n} \right) \quad n \in N$$

9. 计算下列定积分

$$\begin{aligned}
(1) \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{88} \sin^{99} x dx & \quad (2) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx \\
(3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} & \quad (4) \int_2^3 (|x| + x) e^{|x|} dx \\
(5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos^2 x) \sin^2 x dx & \quad (6) \int_{-2}^3 |x^2 + 2|x| - 3| dx \\
(7) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin^2 x}{\cos^4 x} dx & \quad (8) \int_0^{\pi} \frac{x + \sin x}{1 + \cos^2 x} dx
\end{aligned}$$

10. 设 $f(x) = a \cos x + b \sin x, a, b \in R$, 求证

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = a^2 + b^2$$

11. 计算定积分

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{(x+\frac{1}{x})} dx$$

12. 求连续函数 $f(x)$, 使等式

$$f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \cdot \int_0^1 f^2(x) dx$$

13. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(x) \neq 0, f(a) = f(b) = 0$, 试证

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx < 0$$

14. 证明 $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^m x^n dx = \frac{m!n!}{(m+n-1)!}$, 其中 $m, n \in N$ 。

15. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有直到 $n+1$ 阶连续的导数, 建立带积分型余项的泰勒公式

$$\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \cdots + \\
\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(u) (x-u)^n du \quad x \in U(x_0, \delta)
\end{aligned}$$

16. 应用定积分求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}}, p > 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots [n+(n-1)]}$$

17. 证明:若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上严格单调、连续,其反函数是 $x = f^{-1}(y)$,且 $\alpha = f(a), \beta = f(b)$,则

$$\int_a^\beta f^{-1}(y)dy = b\beta - a\alpha - \int_a^b f(x)dx$$

当函数 $f(x)$ 非负时,说明此等式的几何意义。

18. 证明:若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 有连续导函数,令

$$h = \frac{b-a}{n}, S_n = \sum_{k=1}^n h f(a+kh), I = \int_a^b f(x)dx$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(S_n - I) = \frac{b-a}{2} [f(b) - f(a)]$$

(提示:将 S_n 与 I 分别表为 $S_n = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)dx$ 与 $I = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$,其中 $x_k = a+kh$ 。

$S_n - I = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x_k) - f(x)]dx$,应用微分中值定理,再分别讨论连续函数 $f'(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 的上、下确界,估值计算之)

5.6 定积分的应用

在本章初引入定积分概念时,曾把曲边梯形的面积、变速直线运动的路程表示为积分和的极限,即要用定积分来加以度量。事实上,在科学技术中采用“分割、作和、取极限”的方法去度量实际量得到了广泛的应用。本节意在建立度量实际量的积分表达式的一种常用方法——微元法,然后用微元法去阐述定积分在某些几何、物理问题中的应用。

5.6.1 微元法

众所周知,定积分 $I = \int_a^b f(x)dx$ 是由积分区间 $[a, b]$ 及被积函数 $f(x)$ 所决定的,而定积分对积分区间具有可加性,即如果把积分区间作任意划分

$$\Delta: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

记

$$\Delta I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

把积分值 I 看作是分布在 $[a, b]$ 上的总量, ΔI_k 看作是在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的局部量,由积分性质

$$I = \sum_{k=1}^n \Delta I_k$$

可见总量等于各个子区间上对应的局部量之和。因此,凡要用定积分描述的量都应具有这种基本特征——对积分区间的可加性。

另一方面,若 $f(x) \in C[a, b]$,则积分上限函数 $I(x) = \int_a^x f(u)du$ 关于积分上限 x 的导数 $I'(x) = f(x)$,于是用定积分度量的量

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

在 $[a, b]$ 上的任意标准子区间 $[x, x + \Delta x]$ 上所对应的局部量 ΔI 的近似值 $f(x)\Delta x$ 就是 $I(x)$ 在点 x 处的微分 dI ,即

$$\Delta I \approx f(x)\Delta x = dI \quad (6.1)$$

且 $\Delta I - dI = \Delta I - f(x)\Delta x = o(\Delta x)$ 。所以,用定积分度量的量 I 在 $[x, x + \Delta x]$ 上的局部量 ΔI 所需要的近似值应是(6.1)表示的 Δx 的线性函数 $f(x)\Delta x$,并且与 ΔI 之差为 Δx 的高阶无穷小。通常,把式(6.1)中的局部量 ΔI 的近似值 $dI = f(x)dx$ 称为积分微元。此时总量

$$I = \int_a^b dI = \int_a^b f(x)dx$$

这种建立总量的积分表达式的方法,通常称为微元法。

下面通过一些实例来阐述微元法在某些几何、物理问题中的应用。

5.6.2 定积分在几何问题中的应用

1. 平面图形的面积

下面我们根据不同坐标系下的曲线方程来建立平面图形面积公式。

(1) 直角坐标系下计算平面图形的面积。首先考虑介于两曲线 $y = f(x) (\in C[a, b])$, $y = g(x) (\in C[a, b])$ 及直线 $x = a, x = b$ 所围成的平面图形(图 6.1)的面积 σ 。

由于面积 σ 是非均匀连续分布在区间 $[a, b]$ 上且对区间具有可加性的量,所以面积 σ 可以用定积分来计算。

根据微元法,取 $[a, b]$ 上的标准子区间 $[x, x + \Delta x]$,在其上小曲边梯形 $ABCD$ 的高可近似看成不变的,它的面积 $\Delta\sigma$ 可以用高为 AD 、宽为 Δx 的小矩形的面积近似代替,即

$$\Delta\sigma \approx |f(x) - g(x)|\Delta x = d\sigma$$

于是所求图形的面积

$$\sigma = \int_a^b d\sigma = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \quad (6.1)$$

特别,如果 $g(x) = 0$,由连续函数 $y = f(x)$ 、 x 轴及二直线 $x = a$ 与 $x = b$ 所围成的平面图形(图 6.2)的面积

$$\sigma = \int_a^b |f(x)|dx \quad (6.2)$$

【例 6.1】 求由抛物线 $y = x^2$ 与 $y^2 = x$ 所围成的平面图形(图 6.3)的面积 σ 。

【解】 解联立方程

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

求得交点 $(0, 0)$ 与 $(1, 1)$,由公式(6.1)知此图形的面积

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2|dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)dx = \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

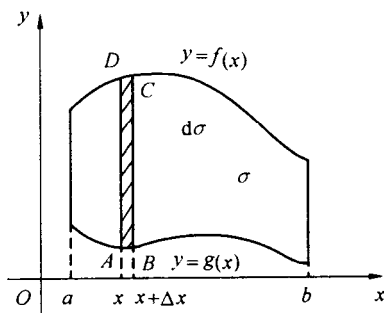


图 6.1

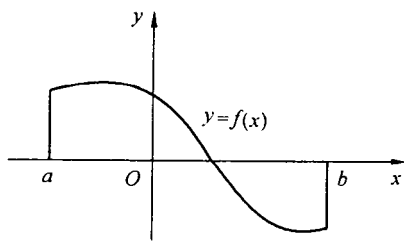


图 6.2

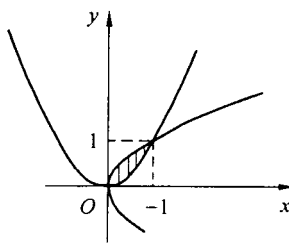


图 6.3

【例 6.2】 求由抛物线 $x = 1 - 2y^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的平面图形(图 6.4) 的面积。

【解】 解联立方程

$$\begin{cases} x = 1 - 2y^2 \\ y = x \end{cases}$$

求得交点 $(-1, -1)$ 和 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。此时,取 y 为积分变量比较方便,相应的积分区间为 $[-1, \frac{1}{2}]$,于是

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |1 - 2y^2 - y| dy = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - y - 2y^2) dy = \\ & \left(y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

【例 6.3】 求 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围图形面积 σ 。

【解】 方程 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 包括两条双曲线 $y = \frac{e}{x}$ 与 $y = \frac{1}{ex}$ 和两条直线 $y = ex$ 与 $y = \frac{x}{e}$ 。它们所围成的平面图形如图 6.5 所示。

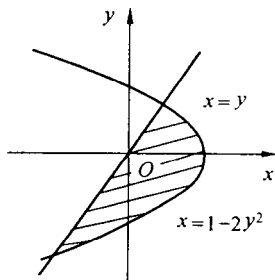


图 6.4

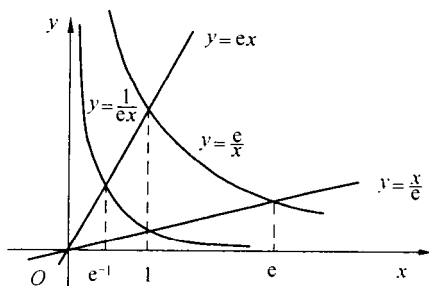


图 6.5

解联立方程组

$$\begin{cases} y = \frac{e}{x} \\ y = \frac{1}{ex} \\ y = ex \\ y = \frac{x}{e} \end{cases}$$

解得交点 $(e^{-1}, 1)$ 、 $(1, e^{-1})$ 、 $(1, e)$ 、 $(e, 1)$, 故所求面积

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_{e^{-1}}^1 \left| ex - \frac{1}{ex} \right| dx + \int_1^e \left| \frac{x}{e} - \frac{e}{x} \right| dx = \\ &= \int_{e^{-1}}^1 (ex - \frac{1}{ex}) dx + \int_1^e (\frac{e}{x} - \frac{x}{e}) dx = e - e^{-1}\end{aligned}$$

【例 6.4】 设 $x \in [a, b]$, $a > 0$, $kx + q \geq \ln x$, 求使

$$I = \int_a^b (kx + q - \ln x) dx$$

最小的 k 与 q 。

【解】 若使积分 I 最小, 此时直线 $y = kx + q$ 应与曲线 $y = \ln x$ 相切, 故 $k = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, 切点坐标为 $(k^{-1}, -\ln k)$, 故切线方程为

$$y = kx - 1 - \ln k \quad (q = -1 - \ln k)$$

从而

$$\begin{aligned}I &= \int_a^b (kx + q - \ln x) dx = \frac{k}{2}(b^2 - a^2) - (1 + \ln k)(b - a) - (b \ln b - a \ln a - b + a) \\ \text{令} \quad \frac{dI}{dk} &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{b - a}{k} = 0\end{aligned}$$

解得驻点 $k = \frac{2}{a+b}$, 此时 $q = \ln \frac{a+b}{2} - 1$, $\frac{d^2 I}{dk^2} = \frac{b-a}{k^2} > 0$, 所以当 $k = \frac{2}{a+b}$, $q = \ln \frac{a+b}{2} - 1$, I 的值最小。

(2) 极坐标系下计算平面图形的面积。设曲线的极坐标方程是 $r = r(\theta)$, 求它与射线 $\theta = \alpha$ 、 $\theta = \beta$ 所围成的曲边扇形(图 6.6)的面积 σ 。其中 $r = r(\theta) \in C[\alpha, \beta]$ 。取极角 θ 为积分变量, 它的变化范围为区间 $[\alpha, \beta]$, 则曲边扇形的面积 σ 可看作是展布在 $[\alpha, \beta]$ 上的量。

根据微元法, 取 $[\alpha, \beta]$ 上的标准子区间 $[\theta, \theta + \Delta\theta]$, 在其上的小曲边扇形 OAB 的面积 $\Delta\sigma$ 可用半径为 $r(\theta)$ 、中心角为 $\Delta\theta$ 的圆扇形面积来近似代替, 即

$$\Delta\sigma \approx \frac{1}{2} r^2(\theta) \Delta\theta = d\sigma$$

于是所求曲边扇形的面积为

$$\sigma = \int_a^b d\sigma = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta \quad (6.3)$$

特别如图 6.7 所示的平面区域的面积

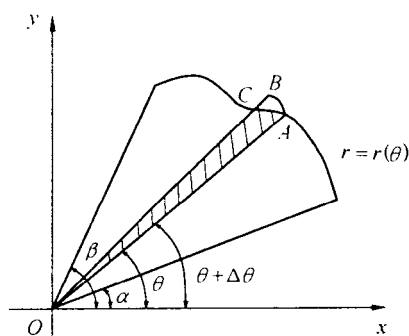


图 6.6

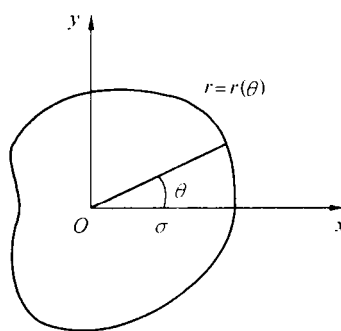


图 6.7

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta \quad (6.4)$$

同理, 设图形是由极坐标方程 $r = r_1(\theta)$, $r = r_2(\theta)$ ($r_2(\theta) > r_1(\theta)$) 确定的二曲线与射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ($\beta > \alpha$) 所围成(图 6.8), 其面积

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta \quad (6.5)$$

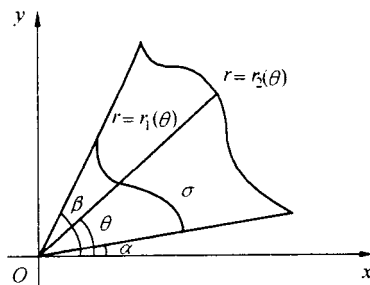


图 6.8

【例 6.5】 求四叶玫瑰线 $r = 4\cos 2\theta$ 所围成的平面图形的面积 σ (图 6.9)。

【解】 由图形的对称性, 所求面积等于第一象限中阴影部分面积的 8 倍。在曲线的这一段上, 对应的 θ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$, 于是由公式(6.3), 有

$$\begin{aligned} \sigma &= 8 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\theta) d\theta \right) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4^2 \cos^2 2\theta d\theta = \\ &= 4^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) d\theta = 4^3 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 8\pi \end{aligned}$$

【例 6.6】 求笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 所围成的平面图形的面积 σ (图 6.10)。

【解】 因为这条曲线无法从所给方程中解出 x 或 y , 表成显函数的形式, 所以不能按照公式(6.1)来计算面积。这就从一个侧面说明了掌握在极坐标系下计算平面图形面积的必要性。

将曲线方程化为极坐标方程, 令 $x = r\cos \theta$, $y = r\sin \theta$, 代入函数方程, 经整理得

$$r = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

于是根据公式(6.3), 有

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [r(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)^2} d\theta = \\ &= \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^4 \theta (1 + \tan^3 \theta)^2} d\theta = \frac{9a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan^3 \theta + 1)}{(1 + \tan^3 \theta)^2} = \\ &= -\frac{3a^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^3 \theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2} \end{aligned}$$

【例 6.7】 求由曲线 $r(1 + \cos \theta) = 3$ 和直线 $r\cos \theta = 1$ 所围成的平面图形的面积 σ (图 6.11)。

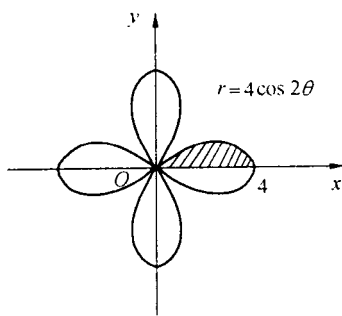


图 6.9

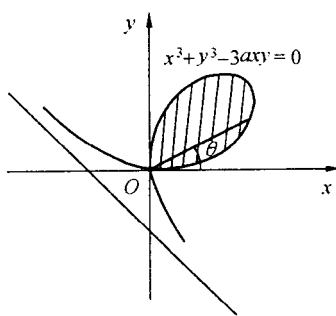


图 6.10

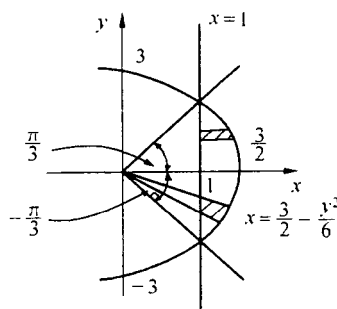


图 6.11

【解】 在直角坐标系下, 令

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

则所给的两条曲线分别为抛物线 $x = \frac{3}{2} - \frac{y^2}{6}$ 和直线 $x = 1$ 。它们的交点是 $(1, -\sqrt{3})$ 和 $(1, \sqrt{3})$ 。因此在直角坐标系下图形的面积

$$\sigma = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2} - \frac{y^2}{6} - 1 \right| dy = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{6} \right) dy = \left(y - \frac{y^3}{9} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

如果仍在极坐标系下计算,此时面积微元

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left[\frac{9}{(1 + \cos \theta)^2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right] d\theta$$

因为两曲线交点为 $(2, -\frac{\pi}{3})$ 和 $(2, \frac{\pi}{3})$, 于是所求面积 σ 可表作

$$\sigma = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{9}{(1 + \cos \theta)^2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{9}{(1 + \cos \theta)^2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right] d\theta$$

这个积分计算起来就复杂多了。可见计算平面图形的面积一般要先画出草图,选择在直角坐标系,还是在极坐标系下的方程来表达边界曲线,目的应该使所得曲线方程简单易于积分运算。

(3) 用参数方程表示的曲线所围成的平面图形面积的计算。如果所给曲线方程为参数形式

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (6.6)$$

其中 $\varphi(t)$ 单调增加,且 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi(t); \psi(t) \in C[\alpha, \beta]$, 则由曲线(6.6)、 x 轴及直线 $x = a, x = b$ 所围成的平面图形面积(图 6.12)

$$\sigma = \int_a^b |\psi(t)| \varphi'(t) dt \quad (6.7)$$

事实上,由条件知,存在反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 因而曲线方程为

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)] \quad a \leq x \leq b$$

所以由公式(6.2)知,该平面图形的面积为

$$\sigma = \int_a^b |\psi(\varphi^{-1}(x))| dx = \int_a^b |\psi(t)| \varphi'(t) dt \quad (6.8)$$

上述公式当 $x = \varphi(t)$ 单调减少时仍成立,这时 $\varphi'(t) \leq 0$, 同时 $\alpha \geq \beta$ 。

【例 6.8】 求旋轮线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$$

与 x 轴所围成图形的面积。

【解】 由公式(6.8),有

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} |\psi(t)| \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) |a(1 - \cos t)| dt = \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2} dt = 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du = \end{aligned}$$

$$16a^2 \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$$

2. 平面曲线的弧长

设起点为 A 、终点为 B 的曲线 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续导数, 即 $y = f(x)$ 的图形——弧 \widehat{AB} 是一条光滑曲线。由于弧长微元

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

从而在 $[a, b]$ 上作定积分, 得到弧 \widehat{AB} 的长度

$$l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (6.9)$$

当弧 \widehat{AB} 由参数方程 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ 表示时, 由式 (6.9) 得

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (6.10)$$

当弧 \widehat{AB} 由极坐标方程 $r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 表示时, 由式 (6.13), 得

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta \quad (6.11)$$

【例 6.9】 求抛物线 $y = x^2$ 由 $x = 0$ 到 $x = \frac{1}{2}$ 一段的弧长。

【解】 因为 $y' = 2x$, 由式 (6.9), 这段曲线弧长是

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du \quad (\text{令 } x = \frac{1}{2} \tan u) \\ &= \frac{1}{2} [\sec u \cdot \tan u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 u \sec u du] = \\ &= \frac{1}{2} [\sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 u) \sec^3 u du] = \frac{1}{2} \sqrt{2} - l + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u du \\ \text{所以 } l &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u du = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} \ln |\sec u + \tan u| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{1}{4} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \end{aligned}$$

【例 6.10】 求曲线 $y^3 = x^2$ 从 $x = -1$ 到 $x = 1$ 一段的弧长 (图 6.14)。

【解】 根据图形的对称性, 所求弧长是第一象限中一段弧长的 2 倍。于是

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y} dy = \\ &= 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{27} (13\sqrt{13} - 8) \end{aligned}$$

【例 6.11】 求旋轮线 (摆线)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$$

的一拱之长。

【解】 因为 $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$, 根据公式 (6.10), 所求弧长。

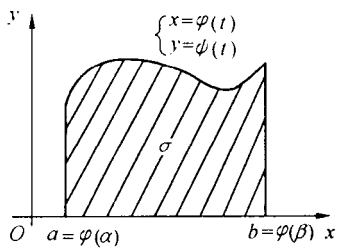


图 6.12

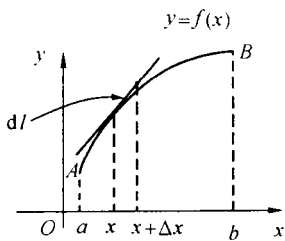


图 6.13

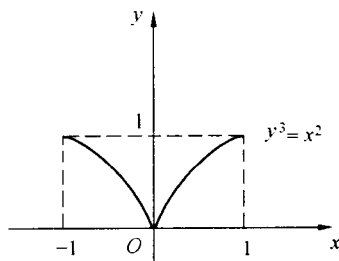


图 6.14

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^{2\pi} [a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a$$

【例 6.12】 求曲线 $\rho = \theta^2$ 从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 这一段的弧长(图 6.15)。

【解】 因为 $\rho' = 2\theta$, 根据公式(6.11), 所求弧长

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2} d\theta =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + \theta^2)^{\frac{1}{2}} d(4 + \theta^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (4 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{8}{3} \left[\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

3. 平行截面面积为已知的空间立体体积

设有位于平面 $x = a$ 和 $x = b$ ($a < b$) 之间的某一空间立体(图 6.16), 它满足如下条件:

(1) $\forall x \in [a, b]$, 过点 $(x, 0)$ 且垂直于 x 轴的平面去截该立体所得截面的面积 $\sigma = \sigma(x)$

已知。

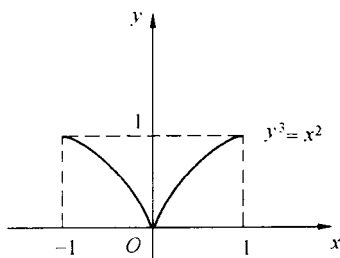


图 6.15

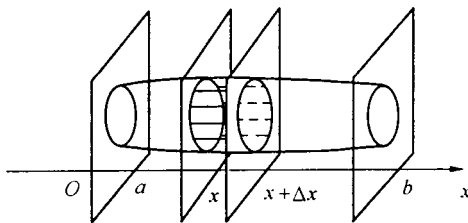


图 6.16

(2) 函数 $\sigma = \sigma(x) \in C[a, b]$ 。

如何求该立体的体积 V 呢?

取任意小区间 $[x, x + \Delta x] (\subset [a, b])$, 用 ΔV 表示介于 x 与 $x + \Delta x$ 之间的薄片体积, 近似地看作底面积为 $\sigma(x)$ 、高为 Δx 的扁柱体, 那么得到

$$\Delta V \approx \sigma(x) \Delta x = dV$$

于是根据微元法, 所求立体体积

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b \sigma(x) dx \quad (6.12)$$

【例 6.13】 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积 V (图 6.17)。

【解】 用垂直于 x 轴的平面截椭球面而得到的截痕为一椭圆。它在 yOz 平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1$$

其面积 $\sigma(x) = \pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc (1 - \frac{x^2}{a^2})$

于是, 根据公式(6.12), 所求椭球的体积

$$V = \int_{-a}^a \sigma(x) dx = \int_{-a}^a \pi bc (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = \frac{4}{3} \pi abc$$

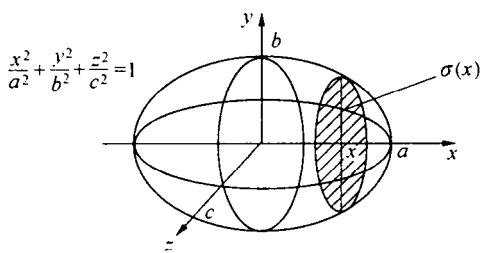


图 6.17

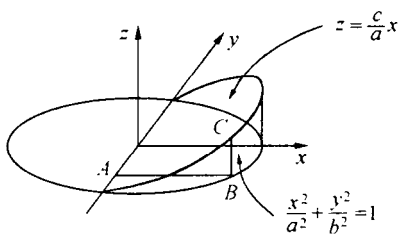


图 6.18

【例 6.14】 求圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 及平面 $z = \frac{c}{a}x, z = 0$ 所围成的立体体积 V (图 6.18)。

【解】 如图 6.18 所示, $\forall y \in [-b, b]$, 过点 $(0, y, 0)$ 作垂直于 y 轴的平面截立体, 截痕是 $Rt\triangle ABC$, 其面积

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot \frac{c}{a} x = \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{ac}{2} (1 - \frac{y^2}{b^2}) \end{aligned}$$

于是, 所求立体体积

$$V = \int_{-b}^b \sigma(y) dy = \frac{ac}{2} \int_{-b}^b (1 - \frac{y^2}{b^2}) dy = \frac{2}{3} abc$$

利用公式(6.12), 我们可以计算旋转体体积。所谓的旋转体是由曲线 $y = f(x) \in C[a, b]$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形 $ABCD$ 绕 x 轴旋转一周所形成的空间立体(图 6.19)。已知任何一个垂直于 x 轴的平面与这个旋转体相交的截面面积

$$\sigma(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$$

根据公式(6.12), 得到旋转体的体积

$$V = \int_a^b \sigma(x) dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (6.13)$$

同样的曲边梯形 $ABCD$ 绕 y 轴旋转的旋转体(图 6.20) 体积 V 又该如何求呢? 当然可以取 y 为自变量, 利用公式(6.13) 来计算。然而, 更为简便的方法是把这个旋转体的体积看作是圆

柱形薄壳体积和的极限(图 6.20)。这时仍把 x 取作自变量, 在任意小区间 $[x, x + \Delta x] (\subset [a, b])$ 上的小曲边梯形绕 y 轴旋转形成的圆柱形薄壳的体积

$$\Delta V \approx 2\pi xy \Delta x = 2\pi x f(x) \Delta x = dV$$

于是旋转体的体积

$$V = \int_a^b dV = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (6.14)$$

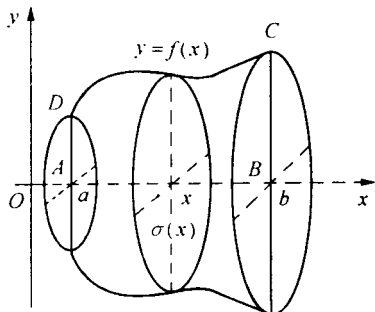


图 6.19

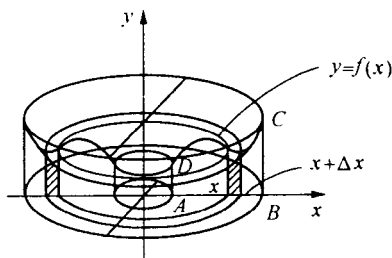


图 6.20

【例 6.15】 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积 V 。

【解】 曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 在 x 轴的截距为 1, 根据式(6.13), 有

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 y^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = 2\pi \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^2) dx = \frac{32}{105} \pi a^3 \end{aligned}$$

【例 6.16】 求由曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 及 $x = 0, y = 0$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体体积 V 。

【解】 根据公式(6.14), 有

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a xy dx = 2\pi \int_0^a xb(1 - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 2\pi \int_0^a -\frac{a^2}{2} b(1 - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} d(1 - \frac{x^2}{a^2}) = -\frac{2}{3} \pi a^2 b(1 - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2}{3} \pi a^2 b \end{aligned}$$

4. 旋转体的侧面积

将平面光滑曲线 $y = f(x) (\geq 0)$ 及直线 $x = a, x = b$ 和 $y = 0$ 所围成的曲边梯形 $ABCD$ 绕 x 轴旋转一周得到旋转体(图 6.21), 求其侧面积 σ 。

任取小区间 $[x, x + \Delta x] (\subset [a, b])$, 过点 x 与点 $x + \Delta x$ 作垂直于 x 轴的平面, 截下旋转体侧面的一个小薄片, 其长度近似于半径为 $y = f(x)$ 的圆周长, 宽度近似于弧微分 dl , 于是小薄片侧面的面积

$$\Delta \sigma \approx 2\pi y dl = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = d\sigma$$

于是旋转体的侧面积

$$\sigma = \int_a^b d\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (6.15)$$

如果曲线由参数方程

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

表示,则旋转体的侧面积

$$\sigma = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (6.16)$$

如果曲线由极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

表示,则旋转体的侧面积

$$\sigma = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta) |\sin \theta| \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta \quad (6.17)$$

【例 6.17】 求圆 $x^2 + (y-b)^2 \leq a^2$ ($0 < a < b$) 绕 x 轴旋转所得的旋转体的表面积 σ 。

【解】 如图 6.22 所示,旋转体表面积 σ 是上、下半圆绕 x 轴旋转的侧面积之和,而上、下半圆的方程分别为

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2} \text{ 与 } y = b - \sqrt{a^2 - x^2} \quad -a \leq x \leq a$$

且它们的导数分别为

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ 与 } y' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad -a \leq x \leq a$$

于是,根据式(6.15),有

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + 2\pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &4\pi ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi ab \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = 4\pi^2 ab \end{aligned}$$

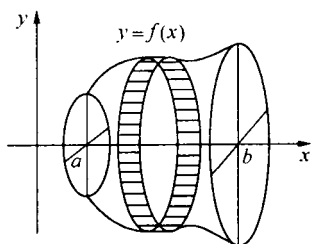


图 6.21

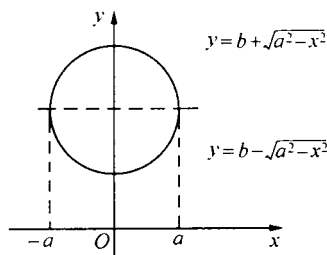


图 6.22

【例 6.18】 求由椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ ($a > b$) 绕 x 轴旋转而成的旋转体侧面积 σ 。

【解】 由于只需要椭圆在上半平面的弧段就可以经旋转得到原旋转面,因此参数 t 的变化范围是 $[0, \pi]$ 。这样,根据式(6.16),所求旋转体的侧面积

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_0^{\pi} b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &2\pi b \int_1^{-1} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} (-du) = 2\pi b \int_{-1}^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du = \quad (\text{令 } u = \cos t) \\ &4\pi b \int_0^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du = 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - k^2 u^2} du \end{aligned}$$

其中 $k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ 称为椭圆离心率。再令 $x = ku$, 则

$$\sigma = \frac{4\pi ab}{k} \int_0^k \sqrt{1-x^2} dx = \frac{2\pi ab}{k} [x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \arcsin x] \Big|_0^k = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{k} \arcsin k$$

5.6.3 定积分在物理问题中的应用

1. 引力问题

设有两个相距为 r 的质点, 其质量分别为 m_1 和 m_2 , 根据万有引力定律, 这两个质点间的引力为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (G \text{ 为引力常数}) \quad (6.18)$$

对于两个物体之间的引力, 一般说来是不能用定积分来计算的, 但是对一些简单情形, 还是可以用定积分来计算的。

【例 6.19】 设有一质量均匀分布、长为 l 、总质量为 M 的细直杆, 在杆的所在直线上距杆的一端为 a 处有一质量为 m 的质点, 试求杆对该质点的引力 F 。

【解】 如图 6.23 所示选取坐标系, 任取小区间 $[x, x + \Delta x] (\subset [0, l])$, 把在 x 到 $x + \Delta x$ 之间的小段杆可以看作是质点, 其质量为 $\frac{M}{l} \Delta x$, 由公式 (6.18), 小段杆对质点的引力

$$\Delta F \approx G \frac{m \frac{M}{l} \Delta x}{(l + a - x)^2} = dF$$

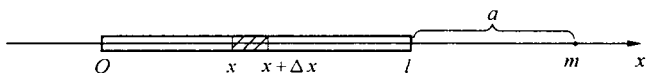


图 6.23

根据微元法, 整个杆子对该质点的引力为

$$F = \int_0^l dF = \frac{GmM}{l} \int_0^l \frac{dx}{(l+a-x)^2} = \frac{GmM}{l} \frac{1}{l+a-x} \Big|_0^l = \frac{GmM}{l} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right) = \frac{GmM}{a(l+a)}$$

2. 液体的压力

根据巴斯卡 (Pascal 1623 ~ 1662 法国数学家、物理学家) 定律, 一个密封体内, 在液深为 h 处的一块水平放置面积为 σ 的平板所受的压力为

$$p = \rho h \sigma \quad (6.19)$$

其中 ρ 是液体的比重。

如果平板垂直放置在液体中, 那么, 在液体深度的不同处的压强也就不同, 因而平板一侧所受的液体压力就不能用上述方法计算, 下面讨论它的计算方法。

如图 6.24 所示建立坐标系, 使得 y 轴恰好放在流体的液面上, x 轴正向铅直向下。设平板是由曲线 $y = f(x) \in C[a, b]$ 及直线 $x = a$, $x = b$ 及 $y = 0$ 所围成的曲边梯形 $ABCD$, 任取小区间 $[x, x + \Delta x] (\subset [a, b])$, 平板在 x 与 $x + \Delta x$ 之间的小窄条的面积

$$\Delta \sigma \approx f(x) \Delta x$$

根据巴斯卡定律式(6.19),小窄条所受到的压力

$$\Delta p \approx \rho x \Delta \sigma = \rho x f(x) \Delta x = d p$$

于是整个平板所受的旁压力

$$p = \int_a^b d p = \rho \int_a^b x f(x) d x \quad (6.20)$$

【例 6.20】 一水坝中有一个等腰三角形的闸门,该闸门铅直插入水中,它的底边与水平面平齐。已知三角形底边长为 a 米,高为 β 米,求这闸门所受到的水压力。

【解】 如图 6.25 所示选取坐标系,根据闸门关于 x 轴的对称性,闸门所受到的总压力等于闸门在第一象限部分所受压力的 2 倍。由于线段 AB 的方程为

$$y = \frac{a}{2\beta}(\beta - x) \quad 0 \leq x \leq \beta$$

根据式(6.20),该闸门所受的水压力

$$p = 2 \cdot \rho \int_0^\beta x y d x = 2\rho \int_0^\beta x \frac{a}{2\beta}(\beta - x) d x = \rho \frac{a\beta^2}{6}$$

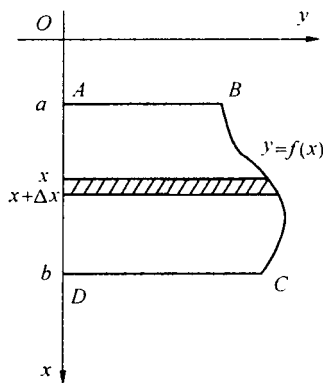


图 6.24

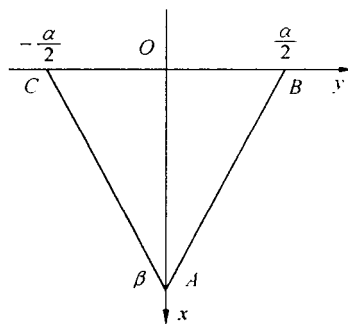


图 6.25

3. 功的计算

设有一物体在变力(方向始终保持不变)作用下,沿直线由点 a 运动到点 b ,下面用微元法求出变力 $F(x)$ 所作的功 W 。

如图 6.26 所示,任取一个小区间 $[x, x + \Delta x] (\subset [a, b])$,则物体在力 $F(x)$ 的作用下,由点 x 移动到点 $x + \Delta x$,力 $F(x)$ 所作的功为

$$\Delta W \approx F(x) \Delta x = dW$$

于是力 $F(x)$ 将物体由点 a 移动到点 b 所作的功为

$$W = \int_a^b dW = \int_a^b F(x) d x \quad (6.21)$$

【例 6.21】 修建大桥的桥墩时,要先下圆柱形围堰,并抽尽其中的水以便施工,已知圆柱的直径为 D m,水深为 H m,围堰高出水面 H_0 m,求抽尽水所需的功。

【解】 如图 6.27 所示, x 轴取圆柱形围堰的对称轴,正方向铅直向下,原点取在围堰口的圆心。考察距离围堰顶部距离为 x 到 $x + \Delta x$ 的薄水层。这层水的质量为

$$dF = \rho\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\Delta x$$

将这一层水抽出围堰所作的功

$$\Delta W \approx dF \cdot x = \rho\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\Delta x \cdot x = dW$$

于是所求的功

$$W = \int_{H_0}^{H_0+H} dW = \rho\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \int_{H_0}^{H_0+H} x dx = \frac{\rho\pi D^2 x^2}{4 \cdot 2} \Big|_{H_0}^{H_0+H} = \frac{\pi\rho D^2}{8} H(2H_0 + H)$$

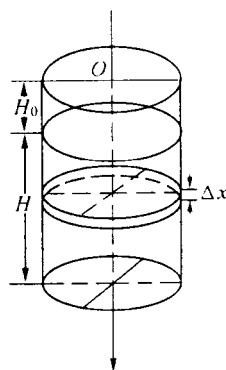


图 6.27

4. 平均值

众所周知, 离散变量 $a_k (\geq 0), k = 1, 2, \dots, n$ 的算术平均值为

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

下面把这个定义推广到区间 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 上去。

【定义 6.1】 设函数 $f(x) \in C[a, b]$, 取分法

$$\Delta: x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n} < \dots < x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$$

将区间 $[a, b]$ n 等分。任取 $\xi = \{\xi_k\}, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, n$, 称

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (6.22)$$

为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值。

【例 6.22】 某物体以速度 $v = \frac{g}{2l}t^2$ 运动, 求在时间区间 $[0, 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}]$ 内的平均速度 \bar{v} (g 是重力加速度)。

【解】 依题意, 平均速度 \bar{v} 即为速度函数 $v = \frac{g}{2l}t^2$ 在 $[0, 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}]$ 的平均值。于是根据公式 (6.22), 有

$$\bar{v} = (2\pi\sqrt{\frac{l}{g}})^{-1} \int_0^{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \frac{g}{2l}t^2 dt = (2\pi\sqrt{\frac{l}{g}})^{-1} \frac{g}{6l}t^3 \Big|_0^{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{2\pi^2}{3}$$

【例 6.23】 计算正弦交流电的平均功率和电流有效值。

【解】 设正弦交流电的电流强度 $I = I_0 \sin \omega t$, I_0 是电流的峰值, ω 是圆频率, 周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 正弦交流电的平均功率等于它在一个周期内所作的功被周期 T 所除。由于电流是变化的, 故不能直接用直流电的功率公式 $P = I^2 R$ (R 为电阻) 去计算。交流电流 I 在 $[t, t + \Delta t]$ 时间段内可以近似看作直流电流

$$I \approx I_0 \sin \omega t$$

在这段时间内作功

$$\Delta W \approx (I_0 \sin \omega t)^2 R \Delta t = dW$$

于是, 平均功率

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T dW = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t R dt =$$

$$\frac{I_0^2 R \omega}{2\pi} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt =$$

$$\frac{I_0^2 R \omega}{4\pi} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^T = \frac{I_0^2 R}{2} = \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 R$$

此时,把上式与电功率公式作比较,发现 $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ 相当于电功率公式里的电流,所以常称 $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ 为正弦交流电的电流有效值。记作

$$I_{\text{有效}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_0$$

或用积分表示为

$$I_{\text{有效}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt}$$

习 题 5.6

1. 求下列平面曲线所围成的区域的面积

(1) $2y = x^2$ 与 $x = y - 4$

(2) $y = \sin x, y = \cos x, x = -\frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{\pi}{4}$

(3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x = 0$ 和 $y = 0$

(4) $y(x^2 + a^2) = a^3, x^2 = 2ay (a > 0)$

(5) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

(6) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t \quad (a > 0)$

(7) $x = 2a \cos t - a \cos 2t, y = 2a \sin t - a \sin 2t$

(8) $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$

(9) $r = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0)$

(10) $r = a \sin 2\theta \quad (a > 0)$

2. 求由抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 与它在点 $A(0, -3)$ 与点 $B(3, 0)$ 的切线所围成的区域面积。

3. 求下列曲线的弧长

(1) $y^2 = x^3$, 由 $x = 0$ 到 $x = 1$

(2) $y = \ln x$, 由 $x = \sqrt{3}$ 到 $x = \sqrt{8}$

(3) $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$

(4) $r = a\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi (a > 0)$

(5) $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ 的全长 ($a > 0$)

4. 求柱面 $x^2 + z^2 = a^2$ 与 $y^2 + z^2 = a^2$ 围成的体积 (图 6.28 仅是第一象限的部分)。

5. 求下列曲线围成的区域绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

(1) $y = x^3, x = 2, y = 0$

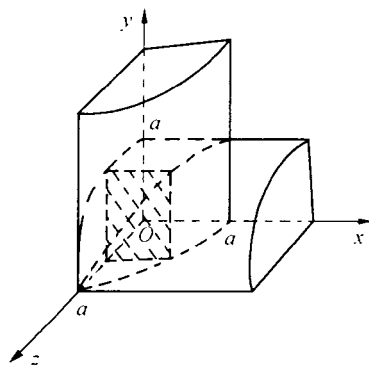


图 6.28

(2) $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$

(3) $y = x^2, y = \sqrt{x}$

6. 求下列曲线绕指定轴旋转所成旋转体的侧面积

(1) $y^2 = x, 0 \leq x \leq b$, 绕 x 轴

(2) $y = \tan x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 绕 x 轴

(3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 绕 x 轴

7. 求曲线 $y = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, 绕 x 轴和 y 轴旋转所成曲面的侧面积。

8. 如果 1 kg 的力能使弹簧伸长 1 cm, 现在要使弹簧伸长 10 cm, 问需要花费多大的功?(提示: 应用虎克定律)

9. 直径为 20 cm、长为 80 cm 的圆柱被压力为 10 kg/cm^2 的蒸汽充满, 如果气体的温度不变, 要使气体的体积减少一半, 问需花费多大的功?

10. 有内半径为 10 m 的半球容器, 其中盛满水, 欲将水抽尽, 求所作的功?

11. 一矩形垂直水面浸在水中, 其底 8 m, 高 12 m, 上沿与水面平行, 并距水面 5 m, 求矩形板一侧所受的水压力。

12. 已知正弦交流电经全波整流后, 得出输出电压 $U_{\text{out}} = \sqrt{2} |\sin \omega t|$, 求其在 $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ 内的平均值。

13. 当某商品销售量为 x 时, 边际收入(即总收入的变化率) $C'(x) = 200 - \frac{x}{50}$, 求销售量为 2 000 时的平均单位收入。

14. 修建江桥的桥墩时, 先要下围堰, 并抽尽其中的水以便施工, 已知围堰的直径为 200 m, 水深 27 m, 围堰高出水面 3 m, 问抽尽其中的水, 需要做多少功?(设水的密度为 10^4 N/cm^3)

15. 我国第一颗人造地球卫星, 质量 173 kg, 离地面 $6.3 \times 10^5 \text{ m}$ 进入轨道, 问把这颗卫星从地面送入 $6.3 \times 10^5 \text{ m}$ 的高空处, 克服地球引力要做多少功? 已知地球半径为 $6.3 \times 10^5 \text{ m}$, 引力常数 $G = 6.2 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, 地球质量 $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ 。

16. 某实验反应堆的水池水深 8 m, 在其底部侧壁上有一个 1 m^2 的通道, 供实验品出入, 求通道挡板上的水压力。

17. 设有半径为 R 的半圆弧, 其线密度为常数 ρ , 在这半圆弧的圆心处置一质量为 m 的质点, 求圆弧对质点的引力。

18. 设有两个带电棒位于同一条直线上, 相距为 d , 甲棒长为 l_1 , 电荷非均匀分布, 电荷线密度 ρ_1 与左端的距离成正比; 乙棒位于甲棒右边, 棒长为 l_2 , 电荷均匀分布, 其线密度为 ρ_2 , 求两个带电细棒间的作用力。

5.7 广义积分

众所周知, 定积分是积分和的极限, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

如果被积函数 $f(x)$ 无界或积分区间是无穷区间时, 这样定义的积分就没有意义了。然而在许

多理论问题和应用问题中,常出现积分区间是无穷的,或者被积函数是无界的,这就需把定积分进一步推广到这种情形——即所谓的广义积分。本节将给出广义积分的定义并研究它们的性质。

5.7.1 无穷区间上的广义积分

【例 7.1】 在一个由带电量为 Q 的点电荷形成的电场中,求与该点电荷相距为 a 处的电位 V_a 。

【解】 由电学知识可知,与该点电荷相距为 a 处的电位等于点 a 处的单位正电荷移至无穷远处电场力所作的功。如图 7.1 所示选择坐标系,根据库仑定律,电场在点 x 处的电场力

$$F(x) = k \frac{Q \cdot 1}{x^2} \quad k \text{ 为常数}$$

于是该点电荷由点 a 移至点 b , 电场力所作的功

$$W_b = \int_a^b F(x) dx = kQ \int_a^b \frac{dx}{x^2} = kQ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$V_a = \lim_{b \rightarrow +\infty} W_b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b F(x) dx = \frac{kQ}{a}$$

这里我们把电位 V_a 表示成一个定积分

$\int_a^b F(x) dx$ 当积分上限 b 趋向于无穷大时的极

限。可以把它看作是电场力函数 $F(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的积分。

【例 7.2】 在地球表面垂直向上发射火箭,若要使火箭永远离开地球引力场所需要的初速度称为第二宇宙速度,求第二宇宙速度 v_0 。

【解】 如图 7.2 所示选择坐标系。我们不考虑空气的阻力,只考虑地球引力的作用,因此从地球表面飞到无限远处物体对引力场所作的功应该等于在发射物体时,它所具有的动能。于是,设地球半径为 R , 质量为 M , 火箭的质量为 m 。根据万有引力定律,火箭从地面到距地面的距离为 x 处所受到的引力为

$$f(x) = \frac{GMm}{(R+x)^2}$$

注意到 $x=0$ 时, $f(0) = mg$, 故 $mg = \frac{GMm}{R^2}$, $GM = gR^2$, 于是

$$f(x) = \frac{R^2 mg}{(R+x)^2}$$

从而火箭从地面上升到高度 h 时, 地球引力所作的功为

$$W_h = \int_0^h f(x) dx = \int_0^h \frac{R^2 mg}{(R+x)^2} dx = mg \frac{Rh}{R+h}$$

由于要求火箭永远离开地球引力场, 即令 $h \rightarrow +\infty$, 有

$$W = \lim_{h \rightarrow +\infty} W_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h f(x) dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h \frac{R^2 mg}{(R+x)^2} dx = mgR$$

它应该等于从地球表面发射时, 物体具有的动能, 即

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2$$

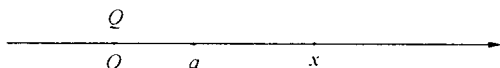


图 7.1

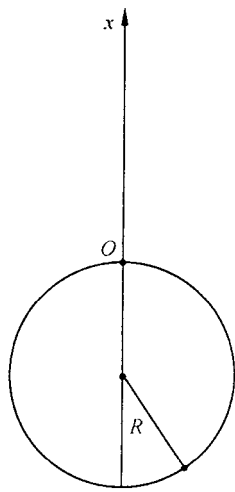


图 7.2

由此得

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 6\,378\,000} \text{ m/s} \approx 11.19 \text{ km/s}$$

这里我们也把功 W 表示成引力函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[0, +\infty)$ 上的积分。

更一般的,我们有如下无穷区间上的广义积分定义。

【定义 7.1】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有定义, $\forall b > a, f(x) \in R[a, b]$, 规定 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的广义积分为

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (7.1)$$

若式(7.1)的极限存在,则称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛,否则称之为发散。

类似也可以定义另外两种无穷区间的广义积分

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (7.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x) dx + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_c^a f(x) dx \quad (7.3)$$

在式(7.3)中, c 为任一实数, a 与 b 是相互独立地趋向于 $-\infty$ 和 $+\infty$, 右端两个极限有一个不存在,称左端的广义积分发散。

【例 7.3】 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性。

【解】 当 $p > 1$ 时,有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^b = \frac{1}{p-1}$$

当 $p = 1$ 时,有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$$

当 $p < 1$ 时,有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^b = \infty$$

综上所述,积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 当 $p \leq 1$ 时发散;当 $p > 1$ 时收敛,且此时

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$$

根据无穷区间上的广义积分定义,收敛积分有如下性质:

【性质 7.1】 若 $f(x) \in C[a, +\infty]$, 且 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [F(b) - F(a)] = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty} \quad (7.4)$$

这里 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 。

【性质 7.2】 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \forall c \in (a, +\infty)$ (7.5)

【性质 7.3】 $\forall k_1, k_2 \in R$, 有

$$\int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_a^{+\infty} f_1(x) dx + k_2 \int_a^{+\infty} f_2(x) dx \quad (7.6)$$

【性质 7.4】 分部积分法成立,即

$$\int_a^{+\infty} u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x) v(x) dx \quad (7.7)$$

【性质 7.5】 换元积分法成立,即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (x = \varphi(t)) \quad (7.8)$$

【例 7.4】 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ 。

【解】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx =$

$$\arctan x \Big|_{-\infty}^0 - \arctan x \Big|_0^{+\infty} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

【例 7.5】 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3}$ 。

【解】 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[(x+1)^2+2^2]^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[u^2+2^2]^3} = (\text{令 } u = x+1)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{32} \cos^4 t dt = \quad (\text{令 } u = 2 \tan t)$$

$$\frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{256}$$

【例 7.6】 求证 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ 与实数 α 无关。

【证】 根据式(7.5),有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \quad (7.9)$$

而

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_{+\infty}^1 \frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt =$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} dt = \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx$$

代入式(7.9),再根据式(7.6),有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} &= \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1+x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_1^{+\infty} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

【例 7.7】 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin^2 3x dx$ ($p > 0$)。

【解】 $\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin^2 3x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-px} (1 - \cos 6x) dx =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-px} dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-px} \cos 6x dx = \\ &= -\frac{1}{2p} e^{-px} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-px} \cos 6x dx = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-px} \cos 6x dx \quad (7.10)$$

根据分部积分公式,有

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos 6x dx = -\frac{1}{p} (e^{-px} \cos 6x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-px} 6 \sin 6x dx) =$$

$$\frac{1}{p} - \frac{6}{p} \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin 6x dx = \frac{1}{p} + \frac{6}{p^2} (e^{-px} \sin 6x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-px} 6 \cos 6x dx) = \frac{1}{p} - \frac{6^2}{p^2} \int_0^{+\infty} e^{-px} \cos 6x dx$$

于是,得

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cos 6x dx = \frac{p}{p^2 + 6^2}$$

代入式(7.6),得

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin^2 3x dx = \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2 + 6^2)} = \frac{18}{p(p^2 + 36)}$$

5.7.2 无界函数的广义积分

5.7.1 中讨论了无穷区间上的广义积分,现在我们考虑无界函数的广义积分。

【例 7.8】 如图 7.3 所示,设有一热电子 p 于 $t=0$ 时从位于原点处的发射体 A 上射出,然后沿水平方向飞向位于 $x=b$ 处的吸引体 B 上,已知在 p 的每时刻 t 、飞行速度 v 与飞行距离 x 的平方根成正比,亦即

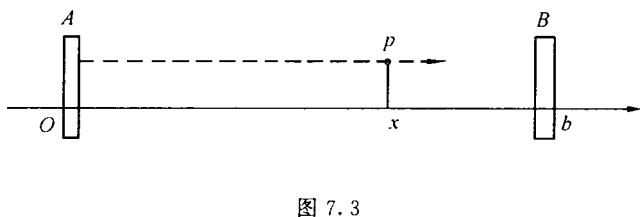


图 7.3

$$\frac{dx}{dt} = k \sqrt{x} \quad (7.11)$$

其中 $k = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$, 这里 m, e 表示热电子 p 的质量与电荷; V 表示 A, B 间的电位差。试用积分求出 p 从 A 到 B 的飞行时间 T 。

【解】 由式(7.11),得

$$dt = \frac{1}{k \sqrt{x}} dx$$

从而所求时间 T 应为

$$T = \int_0^T dt = \int_0^b \frac{dx}{k \sqrt{x}} \quad (7.12)$$

但式(7.12)中的积分已经不能按通常的定积分来理解,因为被积函数 $f(x) = \frac{1}{k \sqrt{x}}$ 在 $x=0$ 附近无界。不过,如果把积分区间改短一些,例如来考虑 $[\epsilon, b]$ ($0 < \epsilon < b$) 上的积分,则积分

$$\int_{\epsilon}^b \frac{dx}{k \sqrt{x}} = \frac{2}{k} \sqrt{x} \Big|_{\epsilon}^b = \frac{2}{k} (\sqrt{b} - \sqrt{\epsilon})$$

就是通常的定积分。不仅如此,当 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 时,还有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^b \frac{dx}{k \sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{2}{k} (\sqrt{b} - \sqrt{\epsilon}) = \frac{2 \sqrt{b}}{k}$$

这使我们想到以这个极限作为 $\int_0^b \frac{dx}{k \sqrt{x}}$ 的定义,从而

$$T = \int_0^b \frac{dx}{k \sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^b \frac{dx}{k \sqrt{x}} = \frac{2 \sqrt{b}}{k}$$

实验证明,所求时间 T 的这个答案是对的。这个例子启发我们引入以下定义:

【定义 7.2】 设函数 $f(x)$ 在点 a 附近无界,且 $\forall \epsilon > 0, f(x) \in R[a + \epsilon, b]$, 规定无界函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的广义积分为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx \quad (7.13)$$

若式(7.13)的极限存在,则称 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛,否则称之为发散。

类似也可以定义另外两种无界函数的广义积分:

若函数 $f(x)$ 在点 b 附近无界,规定

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx \quad (7.14)$$

若函数 $f(x)$ 在点 a 与点 b 附近都无界, $a < c < b$, 规定

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon_1}^c f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_c^{b-\epsilon_2} f(x) dx \quad (7.15)$$

式(7.15)右端的两个极限有一个不存在就说左端的广义积分是发散的。

对于无界函数的广义积分也有类似于性质 7.1 ~ 7.5 的结果,这里不一一列举。

【例 7.9】 当 $q > 0$ 时,讨论广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$ 的敛散性。

【解】 当 $q > 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x^q}$ 在 $x = 0$ 附近无界,它在 $(0, 1]$ 上的积分是无界函数的广义积分,且

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx = \left. \frac{1}{1-q} x^{1-q} \right|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & 0 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$$

当 $q = 1$ 时,有

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = +\infty$$

综上所述,积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ 当 $q < 1$ 时收敛,且此时

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{1-q}$$

当 $q \geq 1$ 时,积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ 发散。

【例 7.10】 计算下列无界函数的广义积分

$$(1) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0) \quad (2) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad (3) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\text{【解】} (1) \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2 \left(\sqrt{x} \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) = (\text{利用分部积分法})$$

$$0 - 4 \sqrt{x} \Big|_0^1 = -4$$

$$(3) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan u} \sec u \cdot \tan u du = (\text{令 } x = \sec u)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2 + \sqrt{3})$$

【例 7.11】 计算 $\int_0^1 x \arcsin 2\sqrt{x(1-x)} dx$ 。

【解】 这个积分是通常的定积分,但在下面的计算过程中却变成无界函数的广义积分。

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arcsin 2\sqrt{x(1-x)} dx &= \frac{x^2}{2} \arcsin 2\sqrt{x(1-x)} \Big|_0^1 - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}} \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{|1-2x|} \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^2 - x^2}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d[x(1-x)]}{\sqrt{x(1-x)}} = \\ &\quad \sqrt{x(1-x)} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

习 题 5.7

判断下列广义积分的敛散性,收敛时求出其值。

- (1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$
- (2) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$
- (3) $\int_1^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n \in N)$
- (4) 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$
- (5) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$
- (6) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$
- (7) $\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$
- (8) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$
- (9) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$
- (10) $\int_0^2 \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

第六章 微分方程

数学分析中研究的函数,是反映客观事物的运动过程中量与量之间的一种关系,利用函数关系可以对客观事物作定量分析。但在大量的实际问题中遇到稍为复杂的一些运动过程时,反映运动规律的量与量之间的函数关系往往不能直接找出来,却比较容易地建立这些变量和它们的导数或微分间的关系式,数学上称之为微分方程,对它进行研究确定出未知函数的过程就是解微分方程。微分方程是数学的重要分支之一,是数学科学理论联系实际的一个重要途径。本章主要介绍微分方程的一些基本概念和若干类常用的微分方程的解法,这是我们解决实际问题的必要工具。

6.1 微分方程的基本概念

先通过两个例子来理解微分方程的基本概念。

【例 1.1】 设某曲线 $y = f(x)$ 上各点切线的斜率等于该点横坐标的 2 倍且过点 $(1, 2)$, 求此曲线。

【解】 依题意知, 设 $M(x, y)$ 表示曲线上任一点, 有

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (1.1)$$

即

$$dy = 2x dx$$

积分得

$$y = x^2 + C \quad (1.2)$$

其中 C 为任意常数。式 (1.2) 就是满足方程 (1.1) 的所有曲线的方程, 可见满足方程 (1.1) 的曲线有无穷多, 是一族曲线 (图 1.1)。

由于所求曲线还要通过点 $(1, 2)$, 即

$$y|_{x=1} = 2 \quad (1.3)$$

故 $C = 1$, 于是

$$y = x^2 + 1 \quad (1.4)$$

为所求曲线的方程。

【例 1.2】 设质量为 m 的质点, 只受重力的作用而自由下落, 其运动规律记为 $s = s(t)$, $v = \frac{ds}{dt}$ 为运动速度, 且

$$s|_{t=0} = s_0, v|_{t=0} = v_0 \quad (1.5)$$

求运动规律 $s = s(t)$ 。

【解】 由牛顿第二定律, 知

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg$$

即

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \quad (1.6)$$

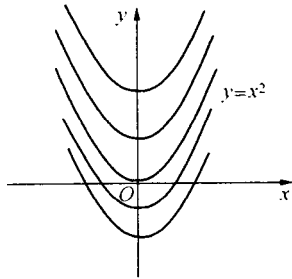


图 1.1

亦即

$$\frac{dv}{dt} = g$$

积分得

$$v = gt + C_1 \quad (1.7)$$

即

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1$$

再积分,得

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (1.8)$$

由式(1.5)、(1.7)得, $C_1 = v_0$, 即

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$$

再由式(1.5)、(1.8)得, $C_2 = s_0$, 于是

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \quad (1.9)$$

此即所求运动方程,若 $v_0 = 0, s_0 = 0$, 则式(1.9)变为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

这就是初速为零,并从 s 轴原点处下落的自由落体运动规律。

【定义 1.1】 含有未知函数的导数或微分的,联系着变量、未知函数及其导数或微分的关系式称之为微分方程。

未知函数仅依赖于一个自变量的微分方程称之为常微分方程。未知函数依赖多个自变量的微分方程称之为偏微分方程。本章仅讨论常微分方程,以后简称此类方程为微分方程。如式(1.1)和式(1.6)均为微分方程。

微分方程中所含未知函数或微分的最高阶数称为微分方程的阶。如式(1.1)是一阶微分方程,式(1.6)是二阶微分方程,一般 n 阶微分方程记为

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.10)$$

【定义 1.2】 若有函数 $y = \varphi(x)$ 代入式(1.10)满足,即

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] = 0$$

则称函数 $y = \varphi(x)$ 为方程(1.10)的解。

n 阶微分方程(1.10)的解中若含有 n 个彼此相互独立的任意常数 C_1, C_2, \dots, C_n , 即

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (1.11)$$

则称式(1.11)为 n 阶微分方程(1.10)的通解。如式(1.2)是微分方程(1.1)的通解,式(1.8)是微分方程(1.6)的通解。

微分方程的解的几何图形是平面上的曲线,称之为积分曲线,其通解的几何图形是一族积分曲线(例如见图 1.1)。

微分方程只反映实际问题中变量应服从的一般规律,所以它们的解一般来说有无穷多个(通解)。为了确定微分方程的一个特定的解,我们通常给出这个解所必需满足的条件,这就是

* 所谓“解中含有 n 个彼此相互独立的任意常数”是指:该解经任何恒等变形也不能把其所含有的 n 个任意常数合并成少于 n 个。例如 $y = C_1x + C_2$ 中的两个任意常数是彼此相互独立的,而 $y = C_1\cos x + C_22\cos x$ 中的两个任意常数 C_1, C_2 就不是彼此独立的,因为

$y = C_1\cos x + C_22\cos x = (C_1 + 2C_2)\cos x = C\cos x$
实际上只有一个任意常数 $C (= C_1 + 2C_2)$ 。

所谓的定解条件,常见的定解条件是初始条件. n 阶微分方程(1.10)的初始条件是指如下 n 个条件

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (1.12)$$

求微分方程满足定解条件的解,就是所谓的定解问题,当定解条件为初始条件时,相应的定解问题就称为初值问题或柯西问题。本章主要讨论初值问题。

我们把 n 阶微分方程(1.10)的满足初始条件(1.12)的解称之为(1.10)的特解。显然初始条件不同,对应的特解也不同。一般来说,特解可以通过初始条件的限制,从通解中确定任意常数而得到。例如,在例1.1中,含有一个任意常数 C 的解

$$y = x^2 + C \quad (1.13)$$

就是一阶微分方程(1.1)的解,而

$$y = x^2 + 1 \quad (1.14)$$

就是满足初始条件

$$y|_{x=1} = 2 \quad (1.15)$$

的特解。特解(1.4)可以在通解(1.2)中令 $C = 1$ 而得到。

由后面的讨论可见,微分方程的通解未必是它的全部解。如果微分方程有不包含在通解中的解,称之为微分方程的奇解。

求微分方程解的过程,称为解微分方程。

习 题 6.1

1. 求下列曲线族满足的微分方程

$$(1) y = Cx + C^2$$

$$(2) xy = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$(3) (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$$

$$(4) x = \frac{1}{t} + C, y = \frac{1}{t} - t$$

2. 试验证下列函数均为方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解,这里 $\omega > 0$ 是常数。

$$(1) y = \cos \omega x$$

$$(2) y = C_1 \cos \omega x \quad (C_1 \text{ 是任意常数})$$

$$(3) y = \sin \omega x$$

$$(4) y = C_2 \sin \omega x \quad (C_2 \text{ 是任意常数})$$

$$(5) y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数})$$

$$(6) y = A \sin(\omega x + B) \quad (A, B \text{ 是任意常数})$$

3. 求下列初值问题的解

$$(1) \begin{cases} y' = \sin x \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y'' = 6x \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2 \end{cases}$$

6.2 几类一阶微分方程的解法

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2.1)$$

对于一般的一阶微分方程是没有统一的初等解法的。本节目的在于介绍几类能用初等解法的方程类型及求解的方法,虽然这些类型是很有限的,但它们却反映了后继课程中出现的微分方程的相当部分。因此,掌握这些类型方程的解法还是有实际意义的。

6.2.1 变量可分离的一阶微分方程

若一阶微分方程可以写成

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (2.2)$$

的形式,其中等式的每一端总是一个变量的函数与这个变量微分的乘积,则称这个方程(2.2)是变量可分离的微分方程。

解变量可分离的微分方程的过程。

(1) 分离变量,即把方程化为式(2.2)的形式;

(2) 将式(2.2)两边积分

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C^* \quad (2.3)$$

其中 C 是任意常数。由式(2.3)确定函数 $y = \varphi(x, C)$ 就是变量可分离方程的解。这种求解的过程称为分离变量法。

【例 2.1】 求微分方程

$$\sqrt{1-x^2}dy = \sqrt{1-y^2}dx$$

的全部解。

【解】 原方程为变量可分离方程。首先分离变量,有

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

积分得 $\arcsin y = \arcsin x + C_1$ (C_1 为任意常数)

或 $y = x \sqrt{1-C^2} + C \sqrt{1-x^2}$ ($C = \sin C_1$)

此即原方程的通解,又 $y = \pm 1$ 也是原方程的解,但它不在通解中,故是原方程的奇解,通解与奇解合起来是该方程的全部解。

【例 2.2】 已知函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) + xf'(-x) = x \quad (2.4)$$

求函数 $y = f(x)$ 。

【解】 在原式中,令 $x = -x$,得

$$f'(-x) - xf'(x) = -x$$

两端同乘以 $-x$,得

$$-xf'(-x) + x^2f'(x) = x^2 \quad (2.5)$$

于是式(2.4) + 式(2.5),得

$$f'(x) + x^2f'(x) = x + x^2 \quad \text{或} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{x + x^2}{1 + x^2}$$

可见函数 $f(x)$ 满足变量可分离微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + x^2}{1 + x^2}$$

分离变量

$$dy = \frac{x + x^2}{1 + x^2}dx$$

* 本章中约定不定积分仅表示被积函数的一个原函数。

积分得

$$y = f(x) = \int \frac{x+x^2}{1+x^2} dx + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + x - \arctan x + C$$

为所求函数。

【例 2.3】 设容器内盛有 100 L 盐溶液,其中含有净盐 10 kg。今以每分钟 3 L 的速度注入清水,稀释溶液。同时以每分钟 2 L 的速度放出盐溶液。容器内有搅拌器搅拌,使溶液浓度随时各处都均匀,问 1 h 后容器中还有多少净盐?

【解】 设 t min 后容器内溶液含有净盐 $x = x(t)$ kg。这时容器内的溶液为

$$100 + 3t - 2t = 100 + t \text{ L}$$

其浓度为

$$\frac{x}{100+t}$$

由于浓度是连续变化的,在时间间隔 $[t, t + \Delta t]$ 内放出盐溶液 $2\Delta t$ L,容器内净盐改变量

$$\Delta x \approx -\frac{x}{100+t} \cdot 2\Delta t$$

从而净盐微元

$$dx = -\frac{2x}{100+t} dt \quad (2.6)$$

这就是函数 $x = x(t)$ 应满足的微分方程。 $x(t)$ 满足的初始条件是

$$x|_{t=0} = 10 \quad (2.7)$$

将方程(2.6)分离变量,有

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{100+t}$$

积分得

$$\ln x = -2\ln(100+t) + C$$

代入初始条件(2.7)得,初值问题的解为

$$\ln x = -2[\ln(100+t) - \ln 100] + \ln 10$$

或

$$x = \frac{10^5}{(100+t)^2} \text{ kg}$$

因此,1 h 后容器内还有净盐

$$x|_{t=60} = \frac{10^5}{160^2} \approx 3.91 \text{ kg}$$

【例 2.4】 求解微分方程

$$(x^2 - y^2 - 2y)dx + (x^2 - y^2 + 2x)dy = 0$$

【解】 令 $u = x + y, v = x - y$, 则原方程化为

$$uvdu + vdu - udv = 0$$

或

$$(u+1)vdu - udv = 0$$

分离变量,有

$$\frac{u+1}{u} du = \frac{dv}{v}$$

积分得

$$u + \ln|u| = \ln|v| + C_1 \quad (C_1 \text{ 为任意常数})$$

或 $\frac{u}{v} = Ce^{-u} \quad (C = \pm e^{C_1})$

故原方程有通解

$$\frac{x+y}{x-y} = Ce^{-(x+y)}.$$

另外 $y = \pm x$ 也是该微分方程的解, 且为奇解。

由例 2.4 可见, 利用变量代换的方法可以简化为可解类型的微分方程, 从而达到求解的目的。变量代换是求解微分方程常用手段之一, 应该引起足够的重视。

6.2.2 齐次微分方程

若一阶微分方程可以写成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.8)$$

的形式, 其中等式右端是一个变量 $\frac{y}{x}$ 的函数, 则称这个方程 (2.8) 是齐次微分方程。

令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 于是 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入式 (2.8), 得

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

若 $\varphi(u) - u \neq 0$, 上式可分离变量, 得

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

若记 $\psi(u) = \int \frac{du}{\varphi(u) - u}$, 则微分方程 (2.8) 的通解为

$$x = Ce^{\psi(\frac{y}{x})}$$

若 u_0 是 $\varphi(u) - u = 0$ 的一个解, 则 $y = u_0 x$ 是微分方程 (2.8) 的一个奇解。

【例 2.5】 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \quad (2.9)$$

【解】 微分方程 (2.9) 是齐次微分方程, 令 $u = \frac{y}{x}$, 并代入式 (2.9) 中, 得

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$$

积分并化简得 (2.9) 的通解

$$y = x(\ln|x| + C)^2$$

当 $u = 0$ (即 $y = 0$) 时, 显然 $y = 0$ 是微分方程 (2.9) 的奇解。

【例 2.6】 求如下初值问题

$$\begin{cases} x^2 y' + xy = y^2 \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$$

的解。

【解】 将原方程变形为

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$$

可见其为齐次微分方程, 令 $u = \frac{y}{x}$, 有

$$xu' + u = u^2 - u \quad \text{或} \quad xu' = u^2 - 2u$$

分离变量, 得

$$\frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{dx}{x}$$

积分得

$$\frac{1}{2}[\ln|u-2| - \ln|u|] = \ln|x| + C_1 \quad \text{或} \quad \frac{u-2}{u} = Cx^2 \quad (C = \pm e^{2C_1})$$

即

$$\frac{y-2x}{y} = Cx^2$$

由 $y|_{x=1} = 1$ 得, $C = -1$, 即得所求的特解为

$$\frac{y-2x}{y} = -x^2 \quad \text{或} \quad y = \frac{2x}{1+x^2}$$

【例 2.7】 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y} \tan \frac{y^2}{x} \quad (2.10)$$

【解】 微分方程(2.10)不是齐次微分方程, 若以 $2y$ 乘以(2.10)的两端, 并令 $z = y^2$, 得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + \tan \frac{z}{x} \quad (2.11)$$

显见式(2.11)是齐次微分方程, 再令 $u = \frac{z}{x}$, 代入式(2.11), 得

$$x \frac{du}{dx} = \tan u$$

积分得

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + C_1 \quad \text{或} \quad \sin u = Cx \quad (C = \pm e^{C_1})$$

于是原方程(2.10)有通解

$$y^2 = x \arcsin Cx$$

若 $\tan u = 0$, 则 $u = 0$, 从而 $y = 0$ 为方程(2.10)的奇解。

【例 2.8】 设河宽为 a , 两岸码头 O, A 垂直相对, OA 为 x 轴上线段, y 轴为水流方向, 流速为 v_1 (常数), 船自码头 A 以速度 $v_2 (> v_1)$ 开往码头 O , v_2 的方向始终指向 O 点, 大小保持不变, 求航线方程及横渡一次所需时间。

【解】 如图 2.1 所示, 曲线 $y = f(x)$ 表示船的航线, 船自点 A 开动时计算时间, 经 t s 到航线 $y = f(x)$ 上的点 $M(x, y)$, 此时船的航速 v 的水平分速度 $\frac{dx}{dt}$ 与垂直分速度 $\frac{dy}{dt}$ 分别为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -v_2 \sin \theta \\ \frac{dy}{dt} = v_1 - v_2 \cos \theta \end{cases}$$

相除, 得微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_1}{v_2} \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta$$

由于 $\cot \theta = \frac{y}{x}$ (图 2.1), 记 $k = \frac{v_1}{v_2} (< 1)$, 代入上式, 得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - k\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ y|_{x=a} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 代入式(2.12), 得

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -k \frac{dx}{x}$$

解得 $\ln|u + \sqrt{1+u^2}| = \ln \frac{C_1}{|x|^k}$

其中 $C_1 > 0$ 为任意常数, 从而

$$u + \sqrt{1+u^2} = \frac{C}{x^k} \quad (C = \pm C_1)$$

即 $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{C}{x^k}$

亦即 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{C}{x^{k-1}}$

将 $y|_{x=a} = 0$ 代入, 得 $C = a^k$, 故初值问题的解为

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a^k}{x^{k-1}}$$

化简得

$$y = f(x) = \frac{a}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{1-k} - \left(\frac{x}{a} \right)^{1+k} \right]$$

为所求航线方程。又由于

$$\csc \theta = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} + \left(\frac{x}{a}\right)^k \right]^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} + \left(\frac{x}{a}\right)^k \right]$$

$$dt = -\frac{1}{v_2} \csc \theta dx = -\frac{1}{2v_2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} + \left(\frac{x}{a}\right)^k \right] dx$$

设横渡一次所需时间为 T , 于是

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_a^0 -\frac{1}{2v_2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} + \left(\frac{x}{a}\right)^k \right] dx = \\ &= \frac{a}{2v_2} \int_0^a \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} + \left(\frac{x}{a}\right)^k \right] d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{v_2(1-k^2)} = \frac{av_2}{v_2^2 - v_1^2} \end{aligned}$$

【例 2.9】 讨论形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right) \quad (2.13)$$

的一阶微分方程的求解, 其中 $a_1, b_1, C_1; a_2, b_2, C_2$ 为常数。

【解】 分三种情形来讨论:

(1) $C_1 = C_2 = 0$ 的情形。

此时方程(2.13)是齐次方程, 事实上, 有

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

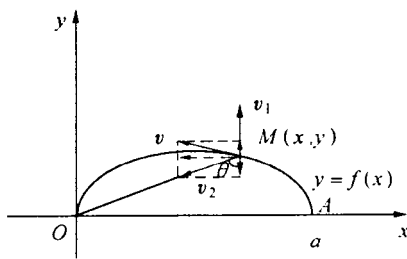


图 2.1

因此,只需作变量代换 $u = \frac{y}{x}$, 则方程就化为变量可分离方程。

(2) 二阶行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ 的情形。

设此比值为 k , 即 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$, 令 $u = a_2x + b_2y$, 有

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right) = f\left[\frac{k(a_2x + b_2y) + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right] = f\left(\frac{ku + C_1}{u + C_2}\right) = \varphi(u)$$

则方程(2.13)化为

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2\varphi(u)$$

这是变量可分离方程。

(3) 二阶行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 及 $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ 的情形。

此时方程(2.13)右端项中的分式 $\frac{a_1x + b_1y + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}$ 的分子、分母都是 x, y 的一次式, 因此

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + C_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

代表 xOy 平面上两条相交直线, 设交点为 (α, β) 。

显然, $\alpha \neq 0$ 或 $\beta \neq 0$, 否则若 $\alpha = \beta = 0$, 即交点为坐标原点, 必有 $C_1 = C_2 = 0$, 这是情形(1)。从几何上知道要将所考虑的情形(3)化为情形(1), 只需进行坐标平移, 将坐标原点 $(0, 0)$ 移至 (α, β) 即可。所以, 令

$$x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta$$

其中 ξ, η 为新变量, 则

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right) = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + C_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + C_2}\right) = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)$$

及 $\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$, 从而方程(2.13)化为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)$$

此为情形(1)。

综上所述, 方程(2.13)是可解的。

【例 2.10】 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y + 3}$$

【解】 解方程组

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

得 $x = 1, y = 2$ 。令

$$x = \zeta + 1, y = \eta + 2$$

代入原方程, 则有

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}$$

再令 $u = \frac{\eta}{\xi}$, 代入上述方程, 得

$$u + \xi \frac{du}{d\xi} = \frac{1-u}{1+u} \quad \text{或} \quad \frac{(1+u)du}{1-2u-u^2} = \frac{d\xi}{\xi}$$

两边积分, 得

$$-\ln|u^2 + 2u - 1| = \ln \xi^2 + C_1 \quad \text{或} \quad \xi^2(u^2 + 2u - 1) = C_2 \quad (C_2 = \pm e^{-C_1})$$

代回原变量, 得

$$\eta^2 + 2\eta\xi - \xi^2 = C_2$$

$$(y-2)^2 + 2(y-2)(x-1) - (x-1)^2 = C_2$$

由此得原方程的通解为

$$y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = C$$

其中 C 为任意常数。

6.2.3 一阶线性微分方程

若一阶微分方程可以写成

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.14)$$

的形式, 则称(2.14)为一阶非齐次线性微分方程。

若 $Q(x) = 0$, 式(2.14)变为

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (2.15)$$

的形式, 则称(2.15)为一阶齐次线性微分方程, 其通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (2.16)$$

其中 C 为任意常数。

我们现在讨论一阶非齐次线性方程(2.14)的通解的求法。

由于方程(2.15)是方程(2.14)的特殊情形。那么二者的通解应该有一定的联系。我们试图利用方程(2.15)的通解(2.16)的形式去求方程(2.14)的通解。因此我们设想: 把式(2.16)中的任意常数 C 变易为 x 的待定函数 $C(x)$, 使之满足(2.14), 从而求出 $C(x)$ 。为此, 令

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (2.17)$$

为(2.14)的解, 代入式(2.14), 得

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

从而得

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

积分之, 求得

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

于是方程(2.14)的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) \quad (2.18)$$

此即为方程(2.14)的通解。

这种将常数变易为待定函数的方法,通常称之为常数变易法。这种方法我们在以后也会用到。

【例 2.11】 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

【解】 原方程为一阶非齐次线性方程,且 $P(x) = -\frac{2}{x+1}$, $Q(x) = (x+1)^{\frac{5}{2}}$,代入式(2.18),得原方程的通解

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{2}{x+1} dx} \left(\int (x+1)^{\frac{5}{2}} e^{-\int \frac{2}{x+1} dx} dx + C \right) = \\ &= (x+1)^2 \left(\int (x+1)^{\frac{5}{2}} (x+1)^{-2} dx + C \right) = \\ &= C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

【例 2.12】 设曲线 Γ 位于 xOy 平面的第一象限内, Γ 上任一点 $M(x, y)$ 处的切线与 y 轴总相交,交点记 A ,已知 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$,且 Γ 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,求 Γ 的方程。

【解】 设 (X, Y) 为过曲线 Γ 上的点 $M(x, y)$ 处切线 MA 的流动坐标,则切线 MA 的方程为

$$Y - y = y'(X - x)$$

令 $X = 0$,则 $Y = y - xy'$,故点 A 的坐标为 $(0, y - xy')$ 。由 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$,即

$$|y - xy'| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y+xy')^2}$$

化简后,得

$$2yy' - \frac{y^2}{x} = -x \quad (2.19)$$

令 $z = y^2$,得

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -x$$

代入通解公式(2.18),有

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int (-x)e^{-\int \frac{1}{x} dx} + C \right) = \\ &= x(-x + C) = -x^2 + Cx \end{aligned}$$

即微分方程(2.19)有通解

$$y^2 = Cx - x^2$$

由于所求曲线在第一象限内,故

$$y = \sqrt{Cx - x^2}$$

且该曲线过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,代入得 $C = 3$,于是所求曲线方程为

$$y = \sqrt{3x - x^2} \quad (0 < x < 3)$$

【例 2.13】 求微分方程

$$(y^2 - 6x)dy - 2ydx = 0 \quad (2.20)$$

的通解。

【解】 在微分方程(2.20)中,将 y 看作是 x 的函数,显然它关于 y 不是线性的,但若将它改写为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{y}{2}$$

则它关于 x 是一阶非齐次线性方程,代入通解公式(2.13),得

$$x = e^{-\int \frac{3}{y} dy} \left(\int \frac{y}{2} e^{\int \frac{3}{y} dy} dy + C \right) = \frac{1}{y^3} \left(\frac{1}{2} \int y^4 dy + C \right) = \frac{C}{y^3} + \frac{y^2}{10}$$

6.2.4 贝努里(Bernoulli 1654 ~ 1705 瑞士数学家) 方程

若一阶微方程可以写成

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1) \quad (2.21)$$

的形式,则式(2.21)称为贝努里方程。

利用变量代换可将方程(2.21)化为线性方程。事实上,令 $z = y^{1-\alpha}$,将贝努里方程(2.21)化为一阶非齐次线性方程

$$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x) \quad (2.22)$$

可按上面介绍的方法求方程(2.22)的解,然后代回原来的变量,便得到贝努里方程(2.21)的解。

【例 2.14】 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

的通解。

【解】 这是 $\alpha = \frac{1}{2}$ 的贝努里方程,令 $z = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$,则方程化为

$$\frac{dz}{dx} - (1 - \frac{1}{2}) \frac{4}{x}z = (1 - \frac{1}{2})x \quad \text{或} \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$$

其通解为

$$z = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int \frac{x}{2} e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C \right)$$

故原方程的通解为

$$y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C \right)^2$$

习 题 6.2

1. 求解下列微分方程

(1) $ydx + (x^2y^2 + x^2)dy = 0$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sec^2 \frac{y}{x}$

(3) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2x+3y}$

$$(4) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = \sin x$$

$$(5) (2x + y + 1)dx + (x + 3y + 2)dy = 0$$

$$(6) \frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}y = e^x x^n \quad (n \text{ 为常数})$$

$$(7) \frac{ds}{dx} = -s \cos t + \frac{1}{2} \sin 2t$$

2. 求下列微分方程的通解

$$(1) (y^2 - 1)dx + (y^2 - y + 2x)dy = 0$$

$$(2) (2xy - y + 2x)dx + (x^2 - x)dy = 0$$

$$(3) x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$$

$$(5) (xy^2 + y)dx + xdy = 0$$

3. 设 y_1, y_2 为 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的任意两个不同的解, 证明它们服从关系

$$y_2 = y_1(1 + Ce^{-\int \frac{Q(x)}{y_1} dx})$$

4. 设有微分方程 $y' - 2y = \varphi(x)$, 其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

试求在 $(-\infty, \infty)$ 内连续函数 $y = y(x)$, 使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足所给方程, 且满足条件 $y(0) = 0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 是连续, 若由曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = 1$ 、 $x = t (> 1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一圈所成的旋转体体积为

$$v(t) = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)]$$

试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 的解。

6. 设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + P(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=0.2} = 0$ 的特解。

7. 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x) = \int_0^{3x} f(\frac{t}{3}) dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$ 。

8. 求一曲线, 使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的部分。

6.3 高阶微分方程的几种可降阶类型

n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

当 $n = 2, 3, \dots$ 时, 称方程 (3.1) 为高阶微分方程。一般的高阶微分方程没有普遍的解法, 求解高阶微分方程的基本原则是降阶, 利用变换把高阶方程的求解问题化为较低阶的方程来求解。因为一般来说, 低阶方程的求解会比求解高阶方程方便些。本节主要介绍几种可降阶的方程类型。

6.3.1 $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ 型的方程

对于

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \quad (3.2)$$

型的方程,通过 n 次积分求得(3.2)的通解为

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \cdots \int dx}_{n\text{次}} f(x) dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \cdots + C_{n-1} x + C_n \quad (3.3)$$

若初始条件是

$$y|_{x=x_0} = y'|_{x=x_0} = y''|_{x=x_0} = \cdots = y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0$$

则方程(3.2)满足这组初始条件的初值问题的解为

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t dt \cdots \int_{x_0}^t}_{n\text{次}} f(t) dt \quad (3.4)$$

【例 3.1】 求微分方程

$$y''' = \sin x - \cos x$$

的通解。

【解】 对于原方程的两端依次积分,得

$$y'' = -\cos x - \sin x + C_1$$

$$y' = -\sin x + \cos x + C_1 x + C_2$$

将上式两端再积分,得原方程通解为

$$y = \cos x + \sin x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

【例 3.2】 求解下列初值问题

$$\begin{cases} y''' = \frac{\ln x}{x^2} \\ y|_{x=1} = 0, y'|_{x=1} = 1, y''|_{x=1} = 2 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

【解】 对于方程(3.5)两端依次积分,并应用初始条件(3.6),得

$$y''|_1^x = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \quad \text{或} \quad y'' = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 3$$

$$y'|_1^x = \int_1^x (3 - \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}) dt = 3x - 3 - \frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x$$

或

$$y' = 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x - 2$$

$$y|_1^x = \int_1^x (3t - \frac{(\ln t)^2}{2} - \ln t - 2) dt =$$

$$\frac{3}{2} x^2 - \frac{x}{2} (\ln x)^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

经整理,得初值问题的解为

$$y = \frac{3}{2} x^2 - \frac{x}{2} (\ln x)^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

【例 3.3】 质量为 m 的质点受力 $F = F(t)$ 的作用,沿 x 轴作直线运动。已知 $F(0) = F_0$, $F(T) = 0$, 随时间的增大, $F(t)$ 匀速减小。 $t = 0$ 时,质点静止于原点,求质点在时间区间 $[0, T]$ 上的运动规律。

【解】 设 $x = x(t)$ 表示质点在 t 时刻的位置。由经典力学的牛顿第二定律得运动规律

$x = x(t)$ 所满足的方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t)$$

由于力 $F(t)$ 随时间 t 的增大而匀速地减小及 $F(0) = F_0$, 故令

$$F(t) = F_0 - kt$$

其中 $k > 0$ 为待定常数, 由于 $F(T) = 0$, 故 $k = \frac{F_0}{T}$, 于是

$$F(t) = F_0(1 - \frac{t}{T}) \quad 0 \leq t \leq T$$

因此 $x = x(t)$ 是如下初值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_0}{m}(1 - \frac{t}{T}) \\ x|_{t=0} = 0, \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解。因此积分两次, 并代入初始条件, 得

$$x = \int_0^t dt \int_0^t \frac{F_0}{m}(1 - \frac{t}{T}) dt = \frac{F_0}{m} \int_0^t (t - \frac{t^2}{2T}) dt = \frac{F_0}{m} (\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T})$$

为所求的质点运动规律。

6.3.2 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ 型方程

$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ 型方程中不显含 $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ ($k \in \mathbf{N}$), 若令 $y^{(k)} = z$, 则原方程降阶为关于 z 的 $n - k$ 阶方程

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

若能够求得上述方程的通解为 $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, 即

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

此为 6.3.1 型微分方程, 再经过 k 次积分, 得

$$y = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

为原方程的通解。

【例 3.4】 求微分方程

$$\frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

的通解。

【解】 令 $z = \frac{d^4 y}{dx^4}$, 则原方程降阶为

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = 0$$

这是一阶齐次线性方程, 其通解为

$$z = \bar{C}_1 e^{\int \frac{1}{x} dx} = \bar{C}_1 x$$

即 $\frac{d^4 y}{dx^4} = \bar{C}_1 x$, 于是

$$\begin{aligned} y &= \frac{\bar{C}_1}{5!} x^5 + \frac{\bar{C}_2}{3!} x^3 + \frac{\bar{C}_3}{2!} x^2 + C_4 x + C_5 = \\ &C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 \end{aligned}$$

为原方程的通解。

【例 3.5】 求解初值问题

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3 \end{cases}$$

【解】 令 $z = y'$, 则原方程化为

$$(1+x^2)z' = 2xz$$

此为变量可分离的方程, 由分离变量法解得

$$z = C_1(1+x^2)$$

即

$$y' = C_1(1+x^2)$$

由初始条件 $y'|_{x=0} = 3$, 得 $C_1 = 3$, 所以

$$y' = 3(1+x^2)$$

两端同时积分一次, 有

$$y = 3x + x^3 + C_2$$

再由初始条件 $y|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$, 故原初值问题的解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

【例 3.6】 设有一均匀柔软无伸缩性的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而自然下垂, 试求该绳索在平衡状态时的曲线方程 $y = f(x)$ (图 3.1)。

【解】 如图 3.1 所示选取坐标系。点 C 为该绳索的最低点, 显然过点 C 处的曲线 $y = f(x)$ 的切线平行于 x 轴。

任取绳索异于点 C 的点 D , 下面进行 C 与 D 之间的弧 \widehat{CD} 的受力分析: 设弧 \widehat{CD} 的长为 l , 并设单位长的绳索质量为 ρ , 则 \widehat{CD} 所受重力为 ρl ; 另外 \widehat{CD} 还受到两个张力, 在点 C 处的张力沿水平方向, 其大小记为 T_1 ; 在点 D 处的张力沿过 D 点的切线方向, 其大小记为 T_2 , 记张力 T_2 的方向与水平线之间的夹角为 θ , 则根据平衡条件, 有

$$T_2 \sin \theta = \rho l, T_2 \cos \theta = T_1$$

两式相除, 得

$$\tan \theta = \frac{1}{a} l \quad (a = \frac{T_1}{\rho})$$

由于 $y' = \tan \theta$, 故

$$y' = \frac{1}{a} l$$

两边对 x 求导, 并利用弧微分公式 $dl = \sqrt{1+y'^2}dx$, 便得到绳索曲线所满足的微分方程

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1+y'^2}$$

记由原点 O 到点 C 的长 $\overline{OC} = a$, 则曲线 $y = f(x)$ 为满足初始条件

$$y|_{x=0} = a, y'|_{x=0} = 0$$

所以原问题转化为如下初值问题

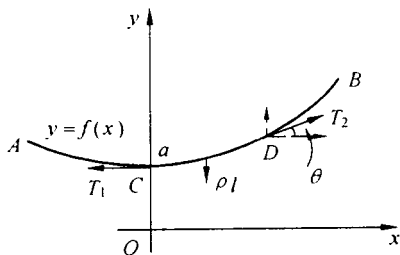


图 3.1

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2} \\ y|_{x=0} = a, y'|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

下面求解问题(3.7)。由于方程中不含 y , 令 $z = y'$, 则原方程降阶为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + z^2}$$

分离变量并积分, 得

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = \frac{x}{a} + C_1$$

由初始条件 $z|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$, 代入上式, 得 $C_1 = 0$, 故

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{\frac{x}{a}}$$

从而

$$z - \sqrt{1 + z^2} = \frac{-1}{z + \sqrt{1 + z^2}} = -e^{-\frac{x}{a}}$$

于是

$$z = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$$

从而

$$y' = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$$

积分, 得

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + C_2$$

再由初始条件 $y|_{x=0} = a$, 得 $C_2 = 0$, 从而求得绳索曲线方程为

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

例 3.6 是历史上一个著名的数学问题。最初在 1690 年由詹姆士·贝努里首先提出来, 最后由约翰·贝努里解决。莱布尼兹把曲线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 定名为悬链线。它在工程中有广泛的应用。

6.3.3 $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ 型方程

$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ 型方程的特点是不显含自变量 x 。这时, 总可以利用变量代换 $y' = z$, 使方程降低一阶。事实上, 令 $y' = z$, 则

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(z \frac{dz}{dy}\right)}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} + z \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx} =$$

$$\frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dy} + z \frac{d^2 z}{dy^2} \frac{dy}{dx} = z \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2}$$

⋮

代入原方程中, 可将原 n 阶微分方程化为 z 关于 y 的 $n-1$ 阶微分方程。若能求得其通解

$$z = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

即

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

再分离变量后积分, 即可求得原方程的通解。

【例 3.7】求微分方程

$$y'' + y = 0$$

的通解。

【解】 令 $y' = z$, 则 $y'' = z \frac{dz}{dy}$, 代入原方程, 得

$$z \frac{dz}{dy} + y = 0$$

积分, 得

$$z^2 + y^2 = a^2 \quad (a \text{ 为任意常数})$$

解出 z , 得

$$z = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{a^2 - y^2}$$

或

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm dx$$

再积分, 得

$$\arcsin \frac{y}{a} = \pm x + b \quad (b \text{ 为任意常数})$$

于是

$$y = a \sin(b \pm x)$$

或

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

【例 3.8】 设地球质量为 M , 万有引力常数为 G , 地球半径为 R , 今有一质量为 m 的火箭, 由地面以初速度 $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ 垂直向上发射, 试求火箭高度 x 与时间 t 的关系。

【解】 如图 3.2 所示建立坐标系。火箭升到距地面高度为 x 时, 它所受到的地心引力为

$$F(t) = -\frac{GMm}{(R+x)^2}$$

由牛顿第二定律并且忽略空气阻力, 有如下关系

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{GMm}{(R+x)^2}$$

又 $x = x(t)$ 满足初始条件: $x(0) = 0, x'(0) = v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, 可见原问题为求如下初值问题

$$\begin{cases} x'' = -\frac{GM}{(R+x)^2} \\ x|_{t=0} = 0, x'|_{t=0} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{cases}$$

的解。于是, 令 $v = x'$, 则原方程化为

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(R+x)^2}$$

积分, 得

$$v^2 = \frac{2GM}{R+x} + C_1$$

代入初始条件, $v_0 = x'|_{t=0} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, 得 $C_1 = 0$, 于是

$$v^2 = \frac{2GM}{R+x} \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{R+x}}$$

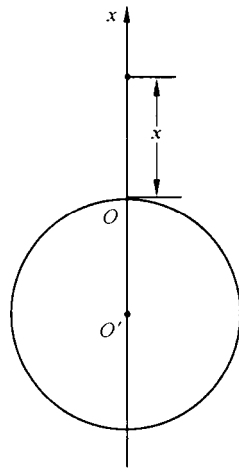


图 3.2

再积分,得

$$\frac{2}{3}(R+x)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2GM}t + C_2$$

再代入初始条件 $x(0) = x|_{t=0} = 0$, 得 $C_2 = \frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}$, 求得火箭高度 x 与时间 t 的关系

$$\frac{2}{3}(R+x)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2GM}t + \frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}$$

【例 3.9】 求微分方程

$$yy'' - y'^2 = 0$$

的通解。

【解】 先将两端同乘以因子 $\frac{1}{y^2}$, 则原方程化为

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0$$

故积分, 得 $y' = C_1 y$, 此为一阶齐次线性微分方程, 再积分, 得原方程的通解

$$y = C_2 e^{\int C_1 dx} = C_2 e^{C_1 x}$$

习 题 6.3

1. 解下列微分方程

$$(1) y'' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(2) xy'' = \ln x$$

$$(3) 4y' + y'' = 4xy''$$

$$(4) y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0$$

$$(5) yy'' - (y')^2 = y^2 y'$$

$$(6) 3(y'')^2 - y' y''' = 0$$

2. 解初值问题

$$(1) \begin{cases} (1+x^2)y'' = 1 \\ y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y'' = 3\sqrt{y} \\ y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2 \end{cases}$$

3. 求解下列微分方程

$$(1) x^2 yy'' + (xy' - y)^2 = 0 \quad (\text{提示: 令 } y = xz)$$

$$(2) x(yy'' + y'^2) + 3yy' = 2x^3 \quad (\text{提示: 令 } y^2 = z)$$

4. 在上半平面求一条向下凸的曲线, 其上任一点 $M(x, y)$ 处的曲率, 等于此曲线在该点的法线段 MQ 长度值的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行。

5. 敌方导弹 A 沿 y 轴正向, 以常速 v 飞行, 经过点 $(0, 0)$ 时, 我方设在点 $(16, 0)$ 处的导弹 B 起飞追及, 导弹 B 飞行速度的方向始终指向 A, 速度的大小为 $2v$, 求导弹 B 的追踪曲线和导弹 A 被击中点。

6.4 n 阶线性微分方程及其解的结构

线性微分方程在常微分方程理论及其应用中的一类非常重要的方程。这是因为它的理论发展比较完整,同时在自然科学与工程技术中都有着极其广泛的应用。本节主要介绍线性微分方程的概念,讨论它的解的结构。

6.4.1 两个实例

【例 4.1】 机械振动问题

生产实践中很多的机械振动问题都归结为弹性振动的研究。下面介绍弹簧振动的一个典型例子。

设有一弹性系数为 C 而自然长度为 l 的弹簧竖直悬挂着,它的上端固定,下端悬挂一质量为 m 的物体,物体受到一垂直干扰力 $f = f_1(t)$,求物体的运动规律所满足的微分方程。

【解】 如图 4.1 所示,取通过悬挂点的直线为 x 轴,向下方向为正。原点取在系统的平衡位置。为确定物体的运动规律,先分析它在位置 $x = x(t)$ 处的受力情况。

(1) 弹簧弹性力 f_0 ,依虎克定律

$$f_0 = -C(\delta + x)$$

其中 δ 为弹簧在物体的重力作用下的伸长量。

(2) 物体所受到的重力 $P = mg$ 。

(3) 介质的阻力 R 与物体运动速度成正比,与运动方向相反

$$R = -\mu v = -\mu \frac{dx}{dt}$$

其中 μ 为常数,称为阻尼系数。

(4) 垂直干扰力

$$f = f_1(t)。$$

因此,这时物体所受到的合外力

$$F = f_0 + P + R + f = -C(\delta + x) + mg - \mu \frac{dx}{dt} + f_1(t)$$

再由牛顿第二定律,得方程

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -C(\delta + x) + mg - \mu \frac{dx}{dt} + f_1(t)$$

由于在系统的平衡位置处,弹性力 $f_0 = -C\delta$ 与重力 $P = mg$ 平衡,故有 $-C\delta + mg = 0$,于是上述方程可写成

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + Cx = f_1(t) \quad (4.1)$$

若记 $\frac{\mu}{m} = 2n$, $\frac{C}{m} = k^2$, $\frac{f_1(t)}{m} = f(t)$,则方程(4.1)可改写成

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = f(t) \quad (4.2)$$

这就是该物体在外力 $f(t)$ 的作用下运动规律 $x = x(t)$ 所满足的微分方程,故称之为阻尼强迫振动微分方程。

如果物体振动过程中,未受到外力的干扰,即 $f(t) = 0$,则运动微分方程

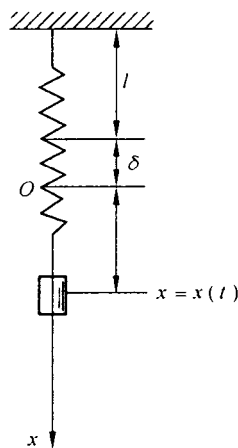


图 4.1

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \quad (4.3)$$

称为自由振动微分方程。

实验表明,在一定的初始条件下,物体将在平衡位置附近振动。为了研究物体振动的规律,我们就必须研究方程(4.2)、(4.3)的解法及解的性质。

【例 4.2】 电振荡问题。

在许多电路中,我们能见到图 4.2 形式的回路。它由四个电子元件组成,即电源(设其电动势为 E)、电阻 R 、电感 L 以及电容器 C 。其电容量也用 C 表示。它所贮藏的电荷量为 q 。这时电容器的两个极板分别带着等量但符号相反的电荷,极板间的电位差等于

$$E_C = \frac{1}{C}q$$

此外,当电路中流过交流电时,根据电流定义,有

$$i = \frac{dq}{dt}$$

根据基尔霍夫(KirChhoff)第二定律,在闭合回路中全部元件的电压的代数和等于零,即

$$E - Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C}q = 0$$

整理后,得

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E \quad (4.4)$$

注意到 $\frac{dq}{dt} = i$, 式(4.4)可写成

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E \quad (4.5)$$

于是,得到了关于电荷量 q 的方程。

如果(4.4)两端对于 t 求导数,并假设 E 是常量(直流电压),则可得关于电流的方程

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \quad (4.6)$$

实验表明,在一定条件下,上述回路中的电流会产生周期的振荡,因此通常把上述回路称为电振荡回路。为了研究电振荡的规律,就要来研究方程(4.6)的求解方法及解的性质。

不难发现,不论是方程(4.2)和(4.3),还是方程(4.5)和(4.6),它们都有一个共同的特点,这就是在这些方程中所出现的未知函数及其导数的次数都是一次的,因此,这些方程称为线性微分方程。

更一般的,形如

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \varphi(x) \quad (4.7)$$

的方程,称为 n 阶非齐次线性微分方程。

若 $a_0(x) \neq 0$, 用 $a_0(x)$ 去除式(4.7)两端,便可得

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x) \quad (4.8)$$

其中 $P_k(x) = \frac{a_k(x)}{a_0(x)}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, $f(x) = \frac{\varphi(x)}{a_0(x)}$ 。若 $f(x) \equiv 0$, 得形如

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0 \quad (4.9)$$

的方程,称为 n 阶齐次线性微分方程。

以后,为了简单起见,我们仅讨论形如(4.8)和(4.9)的线性微分方程。

6.4.2 n 阶线性微分方程通解的结构

【定理 4.1】 (存在惟一性定理) 若函数 $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), f(x) \in C[a, b]$, 则对于 $\forall x_0 \in [a, b]$, 初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x) \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

有定义在区间 $[a, b]$ 上的惟一解 $y = y(x)$ 。

证明从略。

为了便于讨论,引进算子

$$L \triangleq \frac{d^n}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + P_n(x)$$

则方程(4.8)和(4.9)可分别简记为

$$L[y] = f(x) \quad (4.10)$$

和

$$L[y] = 0 \quad (4.11)$$

【定理 4.2】 (线性性质) 若 y_1, y_2 是微分方程(4.11)的解, 则它们的线性组合

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

也是方程(4.11)的解。其中 C_1, C_2 是任意常数。

【证】 由算子 L 的线性性质及 $L[y_1] = 0$ 和 $L[y_2] = 0$, 有

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] = 0$$

可知函数 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是方程(4.11)的解。

根据定理 4.2, 若 y_1, y_2, \dots, y_n 是(4.11)的 n 个解, 则含有 n 个任意常数 C_1, C_2, \dots, C_n 的函数

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (4.12)$$

仍是(4.11)的解, 那么这个解是否就是方程(4.11)的通解呢? 这关键看这 n 个任意常数 C_1, C_2, \dots, C_n 是否彼此相互独立, 为了能够作出判断, 我们引入函数组在已知区间上线性相关和线性无关的概念。

【定义 4.1】 函数组 y_1, y_2, \dots, y_n 称为在区间 I 上是线性相关的, 如果存在一组不全为零的常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0 \quad (4.13)$$

在 I 上恒成立。反之, 如果只有当 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 时, 才能使(4.13)在 I 上恒成立, 则称函数组 y_1, y_2, \dots, y_n 在 I 上线性无关。

【例 4.3】 函数 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是线性相关的; 函数 $1, x, x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是线性无关的。

【定义 4.2】 设函数组 y_1, y_2, \dots, y_n 中的每一个函数均有 $n-1$ 阶导数, 称行列式

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

为已知函数组的朗斯基(Wronsky 1775 ~ 1853 波兰数学家)行列式。

【定理 4.3】 设函数 y_1, y_2, \dots, y_n 是方程(4.11) 在区间 $[a, b]$ 上的 n 个解, 则

(1) y_1, y_2, \dots, y_n 在 $[a, b]$ 上线性相关的充要条件是朗斯基行列式 $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv 0, x \in [a, b]$ 。

(2) y_1, y_2, \dots, y_n 在 $[a, b]$ 上线性无关的充要条件是朗斯基行列式 $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0, x \in [a, b]$ 。

【证】 我们只需证明(1) 和(2) 的必要性。在此基础上利用反证法, 充分性是显然的。

首先证明(1) 的必要性: 由假设知, 存在不全为零的常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n \equiv 0 \quad x \in [a, b]$$

依次求导, 得

$$k_1 y_1' + k_2 y_2' + \dots + k_n y_n' \equiv 0$$

\vdots

$$k_1 y_1^{(n-1)} + k_2 y_2^{(n-1)} + \dots + k_n y_n^{(n-1)} \equiv 0$$

如果把上面 n 个式子看做是关于 k_1, k_2, \dots, k_n 的一个齐次线性方程组, 则 k_1, k_2, \dots, k_n 是它的一组非零解。所以, 它的系数行列式 $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] \equiv 0$ 。

下面再证明(2) 的必要性: 反证法, 若结论不成立, 则 $\exists x_0 \in [a, b]$, 使

$$W(x_0) = W[y_1, y_2, \dots, y_n]|_{x=x_0} = 0$$

考虑关于 k_1, k_2, \dots, k_n 的齐线性方程组

$$\begin{cases} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) + \dots + k_n y_n(x_0) = 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) + \dots + k_n y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + k_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + k_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

因为方程组(4.14) 的系数行列式 $W(x_0) = 0$, 故方程(4.14) 有非零解, 不妨设 $k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*$ 是(4.14) 的一组非零解。由定理 4.2, 知函数

$$y = k_1^* y_1 + k_2^* y_2 + \dots + k_n^* y_n$$

是方程(4.11) 的解, 并由(4.14) 知它满足初始条件

$$y|_{x=x_0} = y'|_{x=x_0} = \dots = y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0$$

由定理 4.1, 知 $y = y(x) \equiv 0$, 即存在不全为零的常数 $k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*$, 使得

$$k_1^* y_1 + k_2^* y_2 + \dots + k_n^* y_n \equiv 0 \quad x \in [a, b]$$

亦即函数组 y_1, y_2, \dots, y_n 在 $[a, b]$ 上线性相关, 此与假设相矛盾, 故 $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0, x \in [a, b]$ 。

下面我们进行高阶线性方程(4.10) 和(4.11) 的解的结构讨论。

【定理 4.4】 n 阶齐次线性方程(4.11) 必有 n 个线性无关解。

【证】 根据定理 4.1 知, 方程(4.11) 分别满足下列初值条件

$$y|_{x=x_0} = 1, y'|_{x=x_0} = 0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0$$

$$y|_{x=x_0} = 0, y'|_{x=x_0} = 1, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0$$

\vdots

$$y|_{x=x_0} = 0, y'|_{x=x_0} = 0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 1$$

的解是存在且惟一的, 不妨设 y_1, y_2, \dots, y_n , 且它们的朗斯基行列在 $x = x_0$ 的值

$$W(x_0) = W[y_1, y_2, \dots, y_n]|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \cdots & y'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

由定理 4.3 知, y_1, y_2, \dots, y_n 是方程 (4.11) 的 n 个线性无关解。

【定理 4.5】 如果 y_1, y_2, \dots, y_n 是方程 (4.11) 的 n 个线性无关解, 则它们的线性组合

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \quad (4.15)$$

是方程 (4.11) 的通解, 其中 C_1, C_2, \dots, C_n 为任意常数。

【证】 由定理 4.2 知, 式 (4.15) 是方程 (4.11) 的解, 故只须证明对方程 (4.11) 的任意一个解 $y = y(x)$, 均存在一组常数 $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$, 使得

$$y(x) = C_1^* y_1(x) + C_2^* y_2(x) + \cdots + C_n^* y_n(x)$$

记函数 $y = y(x)$ 在 $x = x_0$ 时的初始条件为

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

作方程组

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \cdots + C_n y'_n(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (4.16)$$

由于方程组 (4.16) 的系数行列式是方程 (4.11) 的 n 个线性无关解的朗斯基行列式在 $x = x_0$ 的值 $W(x_0)$ 。根据定理 4.3, $W(x_0) \neq 0$ 。再根据克拉默 (Gramer 1704 ~ 1752 瑞士数学家) 法则, 方程组 (4.16) 存在惟一解, 记之为 $C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*$ 。构造函数

$$\tilde{y}(x) = C_1^* y_1 + C_2^* y_2 + \cdots + C_n^* y_n \quad (4.17)$$

下面来证明 $y(x) \equiv \tilde{y}(x)$ 。事实上, 首先因为 (4.17) 是方程 (4.11) 的解, 其次, 由于

$$\tilde{y}(x_0) = y_0, \tilde{y}'(x_0) = y'_0, \dots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

表明 $y(x)$ 与 $\tilde{y}(x)$ 满足相同的初始条件, 根据定理 4.1, $y(x) = \tilde{y}(x)$, 即

$$y(x) = C_1^* y_1 + C_2^* y_2 + \cdots + C_n^* y_n$$

定理 4.5 证毕。

定理 4.4 表明, 方程 (4.11) 一定存在 n 个线性无关的解, 我们称之为方程 (4.11) 的基本解组。而定理 4.5 则表明, 方程 (4.11) 的通解可表为它的基本解组的线性组合。

求方程 (4.11) 的基本解组并不是件容易的事, 也没有统一的方法。但对于二阶齐线性变系数微分方程

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (4.18)$$

若已知它的一个非零解 $y_1(x)$, 则另一与之线性无关的特解 $y_2(x)$ 可由下面的公式

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{y_1^2} dx \quad (4.19)$$

求出。事实上, 令

$$y_2 = C(x)y_1 \quad (4.20)$$

代入式(4.18),有

$$y_1 C''(x) + [2y_1' + P_1(x)y_1]C'(x) = 0$$

分离变量,得

$$\frac{C''(x)}{C'(x)} = -\frac{2y_1' + P_1(x)y_1}{y_1}$$

积分,得

$$C'(x) = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x) dx}$$

再积分,得

$$C(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x) dx} dx$$

代入式(4.20),即得式(4.19),从而方程(4.18)有通解

$$y(x) = y_1(C_1 + C_2 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P_1(x) dx} dx) \quad (4.21)$$

【例 4.4】 求微分方程

$$(1-t^2) \frac{d^2 x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + 2x = 0 \quad (4.22)$$

的通解。

【解】 根据观察法,知 $x_1 = t$ 为(4.22)的一个特解。由公式(4.19)可得与 $x_1 = t$ 线性无关的(4.22)的另一特解。

$$x_2 = t \int \frac{1}{t^2} e^{\int \frac{2t}{1-t^2} dt} dt = t \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = -1 + \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$$

故(4.22)的通解为

$$x = C_1 t + C_2 \left(-1 + \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right)$$

【例 4.5】 求微分方程

$$(x+2)y'' - (2x+5)y' + 2y = 0 \quad (4.23)$$

的通解。

【解】 根据观察法,知 $y_1 = e^{2x}$ 是方程(4.23)的一个特解。设方程(4.23)有形如

$$y_2 = C(x)y_1(x) = C(x)e^{2x}$$

的解。代入方程(4.23),有

$$(x+2)C''(x) + (2x+3)C'(x) = 0$$

或

$$\frac{C''(x)}{C'(x)} = -2 + \frac{1}{x+2}$$

积分,得

$$\ln C'(x) = -2x + \ln(x+2) \quad \text{或} \quad C'(x) = (x+2)e^{-2x}$$

再积分,得

$$C(x) = -\frac{1}{4}(2x+5)e^{-2x}$$

于是方程(4.23)的通解为

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 (2x+5)$$

下面讨论 n 阶非齐次线性微分方程(4.10)的通解的结构。

在讨论一阶非齐次线性微分方程时,我们得到一个重要结论:一阶非齐次线性微分方程的通解等于它所对应的齐次线性方程的通解与它本身的一个特解之和。对于 n 阶齐次线性方程,这个结论仍成立。

【定理 4.6】 n 阶非齐次线性微分方程(4.10)的通解等于它所对应的 n 阶齐次线性微分方程(4.11)的通解与它本身的一个特解之和。

【证】 设 y 是(4.11)的通解, y^* 是(4.11)的一个特解,首先,我们来证明 $y + y^*$ 是(4.10)的解,实际上,由于 L -算子的线性性质,有

$$L[y + y^*] = L[y] + L[y^*]$$

以及

$$L[y^*] \equiv f(x), L[y] \equiv 0$$

故有

$$L[y + y^*] \equiv f(x)$$

即 $y + y^*$ 是(4.10)的解。

其次我们来证明,对于(4.10)的任一特解 \tilde{y} ,有 $\tilde{y} = \bar{y} + y^*$,其中 \bar{y} 是(4.11)的某一特解。这也就相当去证明 $\bar{y} = \tilde{y} - y^*$ 是(4.11)的一个解,事实上

$$L[\bar{y}] = L[\tilde{y} - y^*] = L[\tilde{y} + (-y^*)] = L[\tilde{y}] + L[-y^*] =$$

$$L[\tilde{y}] - L[y^*] \equiv f(x) - f(x) \equiv 0$$

上式表明,(4.10)的任一解 \tilde{y} 一定可表为(4.10)的一个特解 y^* 与(4.11)的某一解 \bar{y} 之和。换句话说,(4.10)的任一解均包含在(4.10)的特解 y^* 与(4.11)的通解 y 的和 $y + y^*$ 之中。从而本定理得证。

根据定理 4.6,可知若 y_1, y_2, \dots, y_n 是(4.11)的 n 个线性无关解, y^* 是(4.10)的一个特解,则(4.10)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y^* \quad (4.24)$$

【例 4.6】 求微分方程

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad (4.25)$$

的通解。

【解】 原方程所对应的齐线性方程为

$$y'' + y = 0 \quad (4.26)$$

易于验证函数 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ 是(4.26)的两个线性无关解,故它的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

现在利用常数变易法,求原方程(4.26)的一个特解。设(4.24)有形如

$$y^* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

的一个特解。由于

$$y^{*'} = C_1'(x) \cos x - C_1(x) \sin x + C_2'(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

令

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \quad (4.27)$$

得

$$y^{*'} = -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \quad (4.28)$$

此时

$$y^{*''} = -C_1'(x) \sin x - C_1(x) \cos x + C_2'(x) \cos x - C_2(x) \sin x \quad (4.29)$$

将式(4.28)和式(4.29)代入原方程(4.25),得

$$y^{*''} + y^* = -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

将上述方程与方程(4.27)联立,得方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

解上述方程组

$$C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad C_2'(x) = 1$$

积分,得

$$C_1(x) = \ln|\cos x|, \quad C_2(x) = x$$

从而得原方程(4.25)的一个特解

$$y^* = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

根据定理 4.6 知,原方程(4.25)的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

【定理 4.7】 (叠加原理) 设函数 y_1, y_2 依次是方程

$$L[y] = f_1(x)$$

$$L[y] = f_2(x)$$

的解,则 $y_1 + y_2$ 是方程

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

的解。

习 题 6.4

1. 证明下列函数组线性无关

(1) e^x, xe^x, x^2e^x

(2) $e^{2x}, \sin x, \cos x$

2. 验证 $y_1 = x - 1, y_2 = x^2 - x + 1$ 是方程

$$(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = 0$$

的基本解组,并写出其通解。

3. 证明齐次线性方程

$$a(x)y'' + b(x)y' + C(x)y = 0$$

(1) 当 $b(x) + xC(x) = 0$ 时,有解 $y = x$

(2) 当 $a(x) + b(x) + C(x) = 0$ 时,有解 $y = e^x$

(3) 当 $a(x) - b(x) + C(x) = 0$ 时,有解 $y = e^{-x}$

利用这三个结果求解下列方程

(1) $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$

(2) $y'' - y = 0$

(3) $y'' + \frac{x}{1+x}y' - \frac{1}{1+x}y = 0$

的通解。

4. 已知 $x(2 - x)y'' + 2(1 - x)y' + 2y = 0$ 的一个特解为 $y_1 = 1 - x$,求其通解。

5. 已知一阶齐次线性微分方程

$$y'' + y' - y = 0$$

的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, 求二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + y' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

的通解。

6.5 n 阶常系数线性微分方程的解法

从 6.4 节已经知道, 欲求非齐次线性方程 (4.10) 的通解, 只要求出其所对应的齐次线性方程 (4.11) 的通解及其本身的一个特解就可以了。至于如何求出齐次线性方程 (4.11) 的通解, 根据齐次线性方程通解的结构, 只需求出它的 n 个线性无关的解——基本解组。再根据定理 4.4, 齐次线性微分方程的基本解组一定存在。但在一般的情况下, 并非总能具体求出。即使能求出, 计算也较为复杂。但是, 当齐次方程的系数 $a_k(x)$ 皆为实常数时, 求它的基本组解的问题却可以化成一个代数问题——求多项式的根。同样, 当 $a_k(x)$ 皆为实常数时, 求非齐次线性方程的特解, 如果方程的非齐次项 $f(x)$ 是较为常见的简单函数, 如指数函数、正、余弦函数以及多项式函数等等, 我们还有较为简单的方法求出。这就是本节后面将要介绍的待定系数法。

形如

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (5.1)$$

的方程, 其中 $a_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n$, 称为 n 阶常系数非齐次线性微分方程。如果 $f(x) \equiv 0$, 即

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (5.2)$$

称为 n 阶常系数齐次线性微分方程, 也称 (5.2) 是 (5.1) 所对应的齐次线性方程。

6.5.1 n 阶常系数齐次线性微分方程解法

首先考虑简单的一阶方程

$$y' + ay = 0 \quad (5.3)$$

其中 a 是常数, 根据观察法, 不难得出它有特解

$$y = e^{-ax}$$

比较方程 (5.2) 和 (5.3), 它们都是常系数齐次线性微分方程。因此, 我们猜想方程 (5.2) 也有形如

$$y = e^{\lambda x} \quad (5.4)$$

的解, 其中 λ 是待定常数。为了确定出使 (5.4) 是 (5.2) 的解的 λ , 先形式上将 (5.4) 看做 (5.2) 的解, 将它代入 (5.2) 之中, 得

$$L[e^{\lambda x}] = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x} \quad (5.5)$$

其中

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

称为方程 (5.2) 的特征多项式。显然, 由式 (5.5) 可知, 函数 (5.4) 是方程 (5.2) 的解的充要条件是

$$P(\lambda) = 0 \quad (5.6)$$

即 λ 应该是方程 (5.6) 的根。方程 (5.6) 称为 (5.2) 的特征方程, (5.6) 的根称为 (5.2) 的特征根。也就是说, 函数 (5.4) 是方程 (5.2) 的解的充要条件是 λ 是特征根。因此, 求齐次线性方程 (5.2) 的解的问题, 便归结为代数问题——求方程 (5.2) 的特征方程 (5.6) 的根。

下面分两种情形讨论。

(1) 特征根互异. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是特征方程(5.6)的 n 个彼此不相等的根, 这时, 依上述讨论, 方程(5.2)有 n 个特解

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x} \quad (5.7)$$

下面定理证明了上述 n 个特解是(5.2)的基本解组。

【定理 5.1】 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是(5.6) n 个彼此不相等的根, 则函数组(5.7)是方程(5.2)的基本解组。

【证】 事实上, 只需证明方程(5.2)的这 n 个特解(5.7)是线性无关即可。这是由于这个函数的朗斯基行列式

$$W(x) = W[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

而最后一个行列式是著名的范德蒙(Vandermonde 1735 ~ 1796 法国数学家)行列式, 它等于 $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$ 。由于假设当 $i \neq j$ 时, $\lambda_i \neq \lambda_j$ 。故此行列式不等于零, 从而 $W(x) \neq 0$, 于是根据定理 4.5 知, 解组(5.7)线性无关, 此即是所要证明的。

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为实数, 则(5.7)是方程(5.2)的 n 个线性无关的实值解, 而方程(5.2)的通解可表示为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (5.8)$$

其中 C_1, C_2, \dots, C_n 为 n 个任意常数。

如果特征方程(5.6)有复根, 则因方程的系数是实常数, 复根将成对共轭地出现。即如果 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 是一特征根, 则 $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是特征根, 于是方程(5.2)有一对复值解

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} &= e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ e^{\lambda_2 x} &= e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x &= \frac{1}{2} (e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}) \\ e^{\alpha x} \sin \beta x &= \frac{1}{2i} (e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) \end{aligned}$$

及算子 L 的线性性质, 得

$$\begin{aligned} L[e^{\alpha x} \cos \beta x] &= \frac{1}{2} \{L[e^{\lambda_1 x}] + L[e^{\lambda_2 x}]\} = 0 \\ L[e^{\alpha x} \sin \beta x] &= \frac{1}{2i} \{L[e^{\lambda_1 x}] - L[e^{\lambda_2 x}]\} = 0 \end{aligned}$$

可见, 对应于特征方程(5.6)的一对共轭复根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$, 我们可求得方程(5.2)的实值解

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x$$

于是可用 $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ 去换 $e^{(\alpha + i\beta)x}, e^{(\alpha - i\beta)x}$ 这两个特解。因此, 设特征方程(5.6)有特征根

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1} = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \lambda_{p+q} = \alpha_q + i\beta_q, \bar{\lambda}_{p+1} = \alpha_1 - i\beta_1, \dots, \bar{\lambda}_{p+q} = \alpha_q - i\beta_q$$

这里 $p + 2q = n$, 则方程(5.2)有通解

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_p e^{\lambda_p x} + C_{p+1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + C'_{p+1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + \cdots + C_{p+q} e^{\alpha_q x} \cos \beta_q x + C'_{p+q} e^{\alpha_q x} \sin \beta_q x \quad (5.9)$$

其中 $C_1, \dots, C_p, C_{p+1}, C'_{p+1}, \dots, C_{p+q}, C'_{p+q}$ 为 n 个任意常数。

【例 5.1】 求微分方程

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

的通解。

【解】 原方程有特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

有两个相异的实根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$, 则原方程有通解

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

【例 5.2】 求微分方程

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$$

的通解。

【解】 原方程的特征方程为

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

其特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 + 3i, \bar{\lambda}_2 = 2 - 3i$, 故原方程有通解

$$y = C_1 e^{-x} + e^{2x} (C_2 \cos 3x + C'_2 \sin 3x)$$

(2) 特征根有重根的情形。设特征方程(5.6)有 k 重根 $\lambda = \lambda_1$, 则

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \cdots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0$$

先设 $\lambda_1 = 0$, 即特征方程有因子 λ^k , 于是

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0$$

即特征方程的形状为

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k} \lambda^k = 0$$

而对应的方程(5.2)为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-k} y^{(k)} = 0$$

显然它有 k 个线性无关解 $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$ 。这说明特征方程的 k 重零根对应于方程(5.2)的 k 个线性无关解 $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$ 。

如果这个 k 重根 $\lambda = \lambda_1 \neq 0$, 作变量代换 $y = ze^{\lambda_1 x}$, 注意到

$$y^{(k)} = (ze^{\lambda_1 x})^{(k)} = e^{\lambda_1 x} [z^{(k)} + k\lambda_1 z^{(k-1)} + \frac{k(k-1)}{2} \lambda_1^2 z^{(k-2)} + \cdots + \lambda_1^k z]$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n$, 代入方程(5.2), 将其化为

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} z' + b_n z = 0 \quad (5.10)$$

其中 b_1, b_2, \dots, b_n 仍为常数。

因为方程(5.2)的解 $y = e^{\lambda x}$ 与方程(5.10)的解 $z = e^{\mu x}$ 之间有关系 $y = ze^{\lambda_1 x}$ 或 $e^{\lambda x} = e^{\mu x} e^{\lambda_1 x} = e^{(\mu + \lambda_1)x}$, 故 $\lambda = \mu + \lambda_1$, 因而特征方程(5.6)的根 $\lambda = \lambda_1$ 对应于(5.10)的特征方程

$$\mu^n + b_1 \mu^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \mu + b_n = 0 \quad (5.11)$$

的根 $\mu = \mu_1 = 0$, 而且可进一步证明它们的重数也相同。这样, 问题就化为前面讨论过的情形了。

如前所述, 方程(5.11)的 m_1 重根 $\mu_1 = 0$ 对应于方程(5.10)的 m_1 个解 $1, x, x^2, \dots, x^{m_1-1}$,

因而,对应于特征方程(5.6)的 m_1 重根 λ_1 ,方程(5.2)有 m_1 个解

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} \quad (5.12)$$

同样,假设特征方程(5.6)的其它相异根 $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r$ 的重数依次为 m_2, m_3, \dots, m_r ; ($m_k \geq 1$, 单根 λ_j 相当于 $k_j = 1$), 而且 $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$, 与上面同理, 则方程(5.2)对应的有解

$$\begin{cases} e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ e^{\lambda_r x}, xe^{\lambda_r x}, \dots, x^{m_r-1}e^{\lambda_r x} \end{cases} \quad (5.13)$$

可以进一步证明(5.12)和(5.13)全体的 n 个解构成(5.2)的基本解组。因此,方程(5.2)的通解为

$$\begin{aligned} y = & C_1^1 e^{\lambda_1 x} + C_2^1 x e^{\lambda_1 x} + \dots + C_{m_1}^1 x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x} + \\ & C_1^2 e^{\lambda_2 x} + C_2^2 x e^{\lambda_2 x} + \dots + C_{m_2}^2 x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x} + \\ & \vdots \\ & C_1^r e^{\lambda_r x} + C_2^r x e^{\lambda_r x} + \dots + C_{m_r}^r x^{m_r-1} e^{\lambda_r x} \end{aligned}$$

对于特征方程(5.6)有复重根的情形,譬如假设 $\lambda = \alpha + i\beta$ 是 k 重特征根,则 $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ 也是 k 重特征根,与(1)中同样情形类似处理,我们也可得到方程(5.2)的 $2k$ 个实值解

$$\begin{aligned} & e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ & e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

【例 5.3】 求微分方程

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

的通解。

【解】 原方程的特征方程为

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

其特征值 $\lambda = -1$ 为三重根,故原方程的通解为

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$$

【例 5.4】 求微分方程

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

的通解。

【解】 原方程的特征方程为

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

其特征值 $\lambda = \pm i$ 为二重根,故原方程有通解

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$$

【例 5.5】 求微分方程

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$$

的通解。

【解】 原方程的特征方程为

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

其特征根 $\lambda = 2$ 是二重根, $\lambda = \pm i$ 是一对共轭单复根。故原方程的通解为

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

6.5.2 n 阶常系数非齐次线性微分方程解法

n 阶常系数非齐次线性微分方程(5.1)的解法,在6.5.1中齐次线性微分方程通解的讨论基础上,根据解的结构定理4.6,只需讨论(5.1)的特解 y^* 的求法,而 y^* 与右端函数 $f(x)$ 密切相关,这里仅就 $f(x)$ 的以下三种情形进行讨论,这里所使用的求 y^* 的方法称为待定系数法,其优点是根据 $f(x)$ 可预知 y^* 的形式,但有时计算较为复杂。

类型 I $f(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$

设上式中的 $b_k \in \mathbf{R}, k = 0, 1, 2, \cdots, m, b_0 \neq 0$ 。

(1) 若方程(5.1)中, $a_n \neq 0$, 可设方程(5.1)有形如

$$y^* = B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m \quad (5.14)$$

的特解,代入方程(5.1),并比较 x 的同次幂的系数,得到 B_0, B_1, \cdots, B_m 必须满足的方程

$$\begin{cases} B_0a_n = b_0 \\ B_1a_n + mB_0a_{n-1} = b_1 \\ B_2a_n + (m-1)B_1a_{n-1} + m(m-1)B_0a_{n-2} = b_2 \\ \vdots \\ B_ma_n + \cdots = b_m \end{cases} \quad (5.15)$$

注意到 $a_n \neq 0$, 式(5.14)中的待定常数 B_0, B_1, \cdots, B_m 可以从方程组(5.15)惟一地逐项求得

$$\begin{cases} B_0 = \frac{b_0}{a_n} \\ B_1 = \frac{1}{a_n}(b_1 - mB_0a_{n-1}) = \frac{b_1}{a_n} - \frac{mb_0a_{n-1}}{a_n^2} \\ \vdots \end{cases}$$

(2) 若方程(5.1)中, $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0, a_{n-k} \neq 0$, 此时, 方程(5.1)为

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-k}y^{(k)} = f(x) \quad (5.16)$$

令 $z = y^{(k)}$, 则

$$z^{(n-k)} + a_1z^{(n-k-1)} + \cdots + a_{n-k}z = f(x) \quad (5.17)$$

由于 $a_{n-k} \neq 0$, 由(1)知(5.17)有形如 $z^* = C_0x^m + C_1x^{m-1} + \cdots + C_m$ 的特解, 因而方程(5.16)有特解 y^* 满足

$$(y^*)^{(k)} = z^* = C_0x^m + C_1x^{m-1} + \cdots + C_m$$

这表明 y^* 是 x 的 $m+k$ 次多项式, 其中 x 的幂次 $\leq k-1$ 的次的系数是任意常数。但因我们只需求一个特解就够了。故可取这些系数均为零, 于是, 可设方程(5.1)有形如

$$y^* = x^k(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_m) \quad (5.18)$$

的特解, 这里 B_0, B_1, \cdots, B_m 为待定的常数。可采用(1)中同样方法而求得。

类型 II $f(x) = e^{\lambda x}(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m)$

设上式中的 $\lambda, b_k \in \mathbf{R}, k = 0, 1, 2, \cdots, m$, 且 $\lambda \neq 0$ 。

此时作变量代换 $y = ze^{\lambda x}$, 将方程(5.1)化为

$$z^{(n)} + A_1z^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1}z + A_nz = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m \quad (5.19)$$

这里 A_1, A_2, \cdots, A_n 都是实常数。微分方程(5.19)的特征方程是

$$\mu^n + A_1\mu^{n-1} + \cdots + A_{n-1}\mu + A_n = 0 \quad (5.20)$$

我们曾在6.5.1中讨论过, 并且知道方程(5.1)的特征方程的根 λ 对应于方程(5.19)的特

征方程的零根,并且重数也相同。因此,利用类型 I 中的结果有如下结论:

在 λ 不是方程(5.1)的特征方程(5.6)的根的情形,此时, $\mu = 0$ 不是方程(5.19)的特征方程(5.20)的根,于是 $A_n \neq 0$, 方程(5.19)为特解

$$z^* = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m$$

从而方程(5.1)有特解

$$y^* = z^* e^{\lambda x} = (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m) e^{\lambda x} \quad (5.21)$$

在 λ 是特征方程(5.6)的 k 重根的情形,此时, $\mu = 0$ 是特征方程(5.20)的 k 重根,于是 $A_n = A_{n-1} = \cdots = A_{n-k+1} = 0, A_{n-k} \neq 0$, 方程(5.19)有特解

$$z^* = x^k (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m)$$

从而方程(5.1)有特解

$$y^* = x^k (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m) e^{\lambda x} \quad (5.22)$$

类型 III $f(x) = e^{\alpha x} [A_m(x) \cos \beta x + B_m(x) \sin \beta x]$

设上式中的 $A_m(x)$ 与 $B_m(x)$ 是 x 的次数不高于 m 的实系数多项式,但二者至少有一个的次数为 m 。

注意到在类型 II 的讨论过程,易知当 λ 不是实数而是复数时,相应的结论仍然成立。另一方面 $f(x)$ 可以表示为如下指数形式

$$f(x) = \frac{A_m(x) - iB_m(x)}{2} e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{A_m(x) + iB_m(x)}{2} e^{(\alpha-i\beta)x}$$

则根据非齐次线性方程的叠加原理(定理 4.7),直接利用类型 II 中的结论,当 $\lambda = \alpha + i\beta$ 是方程(5.1)的 k 重特征根时,可知非齐次线性方程(5.1)有形如

$$\begin{aligned} y^* &= x^k \tilde{A}_m(x) e^{(\alpha+i\beta)x} + x^k \tilde{B}_m(x) e^{(\alpha-i\beta)x} = \\ &= x^k \{ [\tilde{A}_m(x) + \tilde{B}_m(x)] \cos \beta x + i [\tilde{A}_m(x) - \tilde{B}_m(x)] \sin \beta x \} e^{\alpha x} = \\ &= x^k [P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x] e^{\alpha x} \end{aligned} \quad (5.23)$$

特解,其中 $P_m(x) = \tilde{A}_m(x) + \tilde{B}_m(x), Q_m(x) = i[\tilde{A}_m(x) - \tilde{B}_m(x)]$ 。由于多项式 $A_m(x) + iB_m(x)$ 和 $A_m(x) - iB_m(x)$ 都是 m 次的,且互为共轭的,由此可推知多项式 $\tilde{A}_m(x)$ 和 $\tilde{B}_m(x)$ 也是 m 次的,同时也是互为共轭的,因此 $P_m(x)$ 和 $Q_m(x)$ 均为 m 次多项式,且系数为实的。

【例 5.6】 求微分方程

$$y'' + y = e^{3x}(x-2) \quad (5.24)$$

的通解。

【解】 微分方程(5.24)所对应的齐次线性方程的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

因为 $\lambda = 3$ 不是特征根,根据式(5.21),方程(5.24)的特解可设为

$$y^* = (b_0 x + b_1) e^{3x}$$

代入(5.24),得

$$e^{3x}(10b_0 x + 10b_1 + 6b_0) = e^{3x}(x-2)$$

上式两端约去 e^{3x} 后并比较同次幂项的系数,得

$$b_0 = \frac{1}{10} \quad b_1 = -\frac{13}{50}$$

于是原方程(5.24)的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{3x} \left(\frac{1}{10}x - \frac{13}{50} \right)$$

【例 5.7】 求微分方程

$$y'' - y = (x^2 - 1)e^x \quad (5.25)$$

的通解。

【解】 微分方程(5.25)所对应的齐次线性方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

因为 $\lambda = 1$ 是特征方程的单根, 根据公式(5.22), 方程(5.25)的特解可设为

$$y^* = x(b_0 x^2 + b_1 x + b_2)e^x$$

代入(5.25), 得

$$e^x [6b_0 x^2 + (4b_1 + 6b_0)x + 2b_1 + 2b_2] = e^x (x^2 - 1)$$

上式两端约去 e^x 后并比较同次幂的系数得

$$b_0 = \frac{1}{6} \quad b_1 = -\frac{1}{4} \quad b_2 = -\frac{1}{4}$$

于是方程(5.25)的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \right) e^x$$

【例 5.8】 求微分方程

$$y'' + y' - 2y = e^x (\cos x - 7 \sin x) \quad (5.26)$$

的通解。

【解】 微分方程(5.26)所对应的齐次线性方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

因为 $\lambda = \alpha + i\beta = 1 \pm i$ 不是特征根, 根据公式(5.23), 方程(5.26)的特解可设为

$$y^* = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

代入(5.26), 由于

$$y^* = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

$$y^{*'} = e^x [(A + B) \cos x + (B - A) \sin x]$$

$$y^{*''} = e^x (2B \cos x - 2A \sin x)$$

$$\text{得 } y^{*''} + y^{*'} - 2y^* = e^x (2B \cos x - 2A \sin x) + e^x [(A + B) \cos x + (B - A) \sin x] -$$

$$2e^x [A \cos x + B \sin x] = e^x (\cos x - 7 \sin x)$$

故

$$(3B - A) \cos x - (B + 3A) \sin x = \cos x - 7 \sin x$$

比较上式两端的 $\cos x, \sin x$ 的系数, 得

$$3B - A = 1, -B - 3A = -7$$

因此 $A = 2, B = 1$, 故

$$y^* = e^x (2 \cos x + \sin x)$$

于是原方程(5.26)的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (2 \cos x + \sin x) e^x$$

对于类型 III 的特殊情形

$$f(x) = A_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{或} \quad f(x) = B_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

可用另一种更简便的方法——所谓的复数法求解。下面举例说明。

【例 5.9】 求微分方程

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x \quad (5.27)$$

的通解。

【解】 微分方程(5.27)所对应的齐次线性方程的通解为

$$Y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$$

为求非齐次线性方程的一个特解,我们先求方程

$$y'' + 4y' + 4y = e^{2ix} \quad (5.28)$$

的特解。此方程属于类型 II,而 $\lambda = 2i$ 不是特征根,故可设方程(5.28)有形如

$$\tilde{y} = B_0 e^{2ix}$$

的特解,代入方程(5.28),得

$$e^{2ix}(8iB_0) = e^{2ix}$$

约去 e^{2ix} ,得 $B_0 = -\frac{i}{8}$, $\tilde{y} = -\frac{i}{8}e^{2ix} = \frac{1}{8}\sin 2x - i\frac{1}{8}\cos 2x$,由于 \tilde{y} 是方程(5.28)的解,即

$$\tilde{y}'' + 4\tilde{y}' + 4\tilde{y} = e^{2ix}$$

$$\text{或 } (\operatorname{Re}\{\tilde{y}\})'' + 4(\operatorname{Re}\{\tilde{y}\})' + 4\operatorname{Re}\{\tilde{y}\} + i[\operatorname{Im}\{\tilde{y}\}]'' + 4(\operatorname{Im}\{\tilde{y}\})' + 4\operatorname{Im}\{\tilde{y}\}] = \cos 2x + i\sin 2x$$

比较上式的实、虚部,得

$$(\operatorname{Re}\{\tilde{y}\})'' + 4(\operatorname{Re}\{\tilde{y}\})' + 4\operatorname{Re}\{\tilde{y}\} = \cos 2x$$

可知 \tilde{y} 的实部 $y^* = \operatorname{Re}\{\tilde{y}\} = \frac{1}{8}\sin 2x$ 是原方程(5.27)的一个特解,于是原方程的通解为

$$y = Y + y^* = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{8}\sin 2x$$

【例 5.10】 求微分方程

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2 \quad (5.29)$$

的通解。

【解】 原方程(5.29)所对应的齐次线性方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$$

因为原方程右端由两项组成,根据叠加原理(定理 4.9),可先分别求下述二方程

$$y'' - 6y' + 5y = -3e^x \quad (5.30)$$

和

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 \quad (5.31)$$

的特解,这两个特解之和即为原方程(5.29)的通解。方程(5.30)有形如

$$y_1^* = A x e^x$$

的特解,代入(5.30),解出 $A = \frac{3}{4}$,故 $y_1^* = \frac{3}{4}x e^x$ 。对于方程(5.31)有形如

$$y_2^* = B_0 x^2 + B_1 x + B_2$$

的特解,代入(5.31),解出 $B_0 = 1, B_1 = \frac{12}{5}, B_2 = \frac{62}{25}$,故 $y_2^* = x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$ 。因此

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{3}{4}x e^x + x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{62}{25}$$

为原方程(5.29)的一个特解,故其通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \frac{3}{4} x e^x + x^2 + \frac{12}{5} x + \frac{62}{25}$$

6.5.3 欧拉(Euler 1707 ~ 1783 瑞士数学家) 方程

形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (5.32)$$

的方程称为欧拉方程, 其中 $a_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n$ 。

根据此类方程的特点, 可以通过变量代换 $x = e^t$ 化为常系数线性微分方程求解。然后再令 $t = \ln x$, 代入所求解中, 即得原方程(5.32)的解。

事实上, 作自变量代换

$$x = e^t, t = \ln x$$

可得

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

$$y''' = \frac{1}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \right)$$

\vdots

将上述关系代入原方程(5.32), 就得到常系数线性方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = f(e^t)$$

其中 $b_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n$ 。

【例 5.11】 求微分方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2 \quad (5.33)$$

的通解。

【解】 方程(5.33)为欧拉方程。令 $x = e^t$, 代入(5.33), 得关于 t 的常系数线性微分方程

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} = 3e^{2t} \quad (5.34)$$

(5.34) 所对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{3t} + C_3 e^{-t}$$

由于 $\lambda = 2$ 不是特征根, 故(5.34)有形如

$$y^* = A e^{2t}$$

的特解。代入(5.34), 解得 $A = -\frac{1}{2}$, 故 $y^* = -\frac{1}{2} e^{2t}$ 。再代回原自变量, 得(5.34)的通解为

$$y = C_1 + C_2 x^3 + \frac{C_3}{x} - \frac{1}{2} x^2$$

习 题 6.5

1. 求下列微分方程的通解

(1) $y'' + y' - 2y = 0$

(2) $y'' - 4y' = 0$

(3) $y'' + 4y = 0$

(4) $y'' + y' + 2y = 0$

(5) $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = 0$

(6) $y^{(4)} + y = 0$

2. 求下列初值问题的解

$$(1) \begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y'' + 4y' + 29y = 0 \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

3. 求下列微分方程的特解

$$(1) y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$$

$$(2) x^{(4)} - 2x'' + x = t^2 - 3$$

$$(3) y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$$

$$(4) x'' - 2x' + 3x = e^{-t} \cos t$$

$$(5) y'' - 2y' + 4y = (x+2)e^{3x}$$

$$(6) y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$$

$$(7) y'' - 4y' + 4y = 8x^2 + e^{2x} + \sin 2x$$

4. 求下列微分方程的通解

$$(1) x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0$$

$$(2) t^2 x'' - tx' + 2x = t \ln t$$

$$(3) x^2 y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$$

5. 求下列初值问题的解

$$(1) \begin{cases} y'' + 9y = 6e^{3x} \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^{(4)} + x = 2e^t \\ x|_{x=0} = 1, x'|_{x=0} = 1, x''|_{x=0} = 1, x'''|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

6.6 n 阶常系数线性微分方程组的求解

在一过程中,有时出现一个自变量的多个未知函数,它们共同满足一组含有它们的导数或微分的方程,方程的个数与未知函数个数一致,称为一个微分方程组。例如

$$\begin{cases} x' + y' + x = t \\ y'' - x'' + 4x' + 5y = \ln t \end{cases} \quad (6.1)$$

又如,已知在空间运动的质点 $M(x, y, z)$ 的速度 v 与时间 t 及点的坐标 (x, y, z) 的关系为

$$\begin{cases} v_x = f_1(t, x, y, z) \\ v_y = f_2(t, x, y, z) \\ v_z = f_3(t, x, y, z) \end{cases}$$

且质点在时刻 t_0 经过点 (x_0, y_0, z_0) , 求该质点的运动轨迹。

这个问题其实就是求微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z) \end{cases} \quad (6.2)$$

的满足初始条件

$$x|_{t=t_0} = x_0, y|_{t=t_0} = y_0, z|_{t=t_0} = z_0$$

的函数

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (6.3)$$

出现在方程组中各未知函数的最高阶导数的阶数之和称为它的阶。如方程组(6.1)是四阶的,(6.2)是三阶的。满足微分方程的一组函数称为一个解。如函数组(6.3)是方程组(6.2)的一个解。微分方程组的通解中应含有它的阶数相同个数的任意常数。

如果方程组中出现的未知函数及其导数都是一次幂的,称为线性微分方程组,否则称为非线性微分方程组,特别当线性方程组的系数都是常数时,称为常系数线性微分方程组,如方程(6.1)。线性方程组有类似于6.4中讨论过的线性微分方程的解的性质及解的结构,本节不再作重复讨论。常系数线性方程组与6.5中的常系数线性方程一样有简便的求解法,本节仅通过举例说明解方程组的消元法和矩阵法。其它解法可参阅任何一本常微分方程的基础教材。

6.6.1 常系数线性微分方程的消元法

【例 6.1】 求常系数齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases} \quad (6.4)$$

的通解。

【解】 由式(6.4)的第一个方程,得

$$y = x' - 2x \quad (6.5)$$

将其代入式(6.4)的第二个方程,并整理,得 $x = x(t)$ 的二阶常系数齐次线性微分方程

$$x'' - 4x' + 3x = 0$$

其通解为

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$

代入式(6.5),得

$$y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$

于是原方程组(6.4)的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t} \end{cases}$$

【例 6.2】 求常系数齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = 2y - z \end{cases} \quad (6.6)$$

的通解。

【解】 为了消去未知函数 y ,由(6.6)的第二个方程,得

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} + z \right) \quad (6.7)$$

对式(6.7)两端关于 x 求导,得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} \right) \quad (6.8)$$

将式(6.7)、(6.8)代入式(6.6)并化简,得

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - 2 \frac{dz}{dx} + z = 0$$

其通解为

$$z = (C_1 + C_2x)e^x \quad (6.9)$$

再把式(6.9)代入式(6.7),就得原方程(6.6)的通解为

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(2C_1 + C_2 + 2C_2x)e^x \\ z = (C_1 + C_2x)e^x \end{cases}$$

【例 6.3】 求常系数非齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} y'' + z' - y - z = 1 \\ z'' + y' + y + z = x \end{cases} \quad (6.10)$$

$$(6.11)$$

的通解。

【解】 将方程(6.11)两端求导,得

$$z''' + y'' + y' + z' = 1 \quad (6.12)$$

式(6.12) - (6.11),得

$$z''' - z'' + y'' - y + z' - z = 1 - x \quad (6.13)$$

式(6.13) - (6.10),得

$$z''' - z'' = -x \quad (6.14)$$

微分方程(6.14)有通解

$$z = (C_1 + C_2x) + C_3e^x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \quad (6.15)$$

将式(6.15)代入式(6.11),得

$$y' + y = -2C_3e^x - (1 + C_1) - C_2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \quad (6.16)$$

微分方程(6.16)有通解

$$y = -1 - C_1 + C_2 - C_2x - C_3e^x + C_4e^{-x} - \frac{x^2}{6}$$

于是原方程有通解

$$\begin{cases} y = -1 - C_1 + C_2 - C_2x - C_3e^x + C_4e^{-x} - \frac{x^2}{6} \\ z = (C_1 + C_2x) + C_3e^x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

【例 6.4】 求常系数非齐次线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} + y = -x \\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dz}{dx} + 3y - z = e^{2x} \end{cases} \quad (6.17)$$

$$(6.18)$$

的通解。

【解】 先把式(6.17)与式(6.18)关于 x 再求导一次,有

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -1 \\ \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 2e^{2x} \end{cases}$$

下式减上式,便有

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 2e^{2x} + 1$$

再从式(6.17)中解出 $\frac{dz}{dx}$,代入上式并化简,得

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 2e^{2x} + x + 1$$

解此三阶常系数非齐次线性微分方程,可求得其通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{2}{5} e^{2x} - x - 2 \quad (6.19)$$

因为式(6.19)中已出现三个任意常数 C_1, C_2, C_3 ,不便再用上面的方法求 z 。为求 z , (6.17) - (6.18),得

$$z = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y - x - e^{2x}$$

亦即有

$$z = 2C_1 e^x + (C_2 - C_3) \cos x + (C_2 + C_3) \sin x + \frac{3}{5} e^{2x} - 3x - 3$$

所以原方程组有通解

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{2}{5} e^{2x} - x - 2 \\ z = 2C_1 e^x + (C_2 - C_3) \cos x + (C_2 + C_3) \sin x + \frac{3}{5} e^{2x} - 3x - 3 \end{cases}$$

【例 6.5】 求初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - z = \cos^2 x \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} - y = \sin^2 x \end{cases} \quad (6.21)$$

$$\begin{cases} y|_{x=0} = \frac{1}{2}, z|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

的解。

【解】 将(6.20) + (6.21),得

$$\frac{d}{dx}(y + z) = (y + z) + 1 \quad (6.23)$$

将(6.20) - (6.21),得

$$\frac{d}{dx}(y - z) = -(y - z) + \cos 2x \quad (6.24)$$

方程(6.23)中,视 $y + z$ 为未知函数,则为一阶线性方程,可解得其通解为

$$y + z = C_1 e^x - 1 \quad (6.25)$$

方程(6.24)中,视 $y - z$ 为未知函数,同样为一阶线性方程,可解得其通解为

$$y - z = C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} (2 \sin 2x + \cos 2x) \quad (6.26)$$

由(6.25)和(6.26),解出原方程组的通解为

$$\begin{cases} y = \frac{C_1}{2} e^x + \frac{C_2}{2} e^{-x} + \frac{1}{10} (2 \sin 2x + \cos 2x) - \frac{1}{2} \\ z = \frac{C_1}{2} e^x - \frac{C_2}{2} e^{-x} - \frac{1}{10} (2 \sin 2x + \cos 2x) - \frac{1}{2} \end{cases}$$

在上式中代入初始条件(6.22),得初值问题的解为

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}e^x + \frac{3}{20}e^{-x} + \frac{1}{10}(2\sin 2x + \cos 2x) - \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{4}e^x - \frac{3}{20}e^{-x} - \frac{1}{10}(2\sin 2x + \cos 2x) - \frac{1}{2} \end{cases}$$

上面的解法类似于解代数方程组的消元法。它的基本思路是通过消元把微分方程组化为一个未知函数的高阶微分方程来求解,故也称之为消元法。显然,只有方程的未知函数的个数不是很多,且方程组的阶数不是很高的情况下,消元法才是行之有效的。

6.6.2 常系数线性方程的矩阵解法

形如

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \quad (6.27)$$

的 n 阶常系数线性微分方程。如果令

$$y' = y_1, y'' = y_2, \cdots, y^{(n-1)} = y_{n-1} \quad (6.28)$$

则可将(6.27)化为形如

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y' = y_2 \\ \vdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y'_{n-1} = -a_n y - a_{n-1} y_1 - \cdots - a_1 y_{n-1} + f(x) \end{cases}$$

的 n 阶线性微分方程组,它是以 y, y_1, \cdots, y_{n-1} 为未知函数。其中 y 就是方程(6.27)的解。对于一般的常系数线性微分方程组中的方程采用上述方法,总可以把方程组化为只出现未知函数一阶导数的方程组。即形如

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (6.29)$$

的(标准) n 阶常系数线性微分方程组。式(6.29)的通解是含有 n 个独立的任意常数的函数组

$$y_k = y_k(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

(6.29)的初始条件为

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^0, y_2|_{x=x_0} = y_2^0, \cdots, y_n|_{x=x_0} = y_n^0 \quad (6.30)$$

其中 $y_k^0, k = 1, 2, \cdots, n$ 为给定常数。

如果用矩阵式向量表示,令

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; y(x_0) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{x=x_0}; y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

并规定矩阵式向量的导数或积分是对它们的每个元素而言,则(6.29)和(6.30)构成的初值问题可简记为

$$\begin{cases} y' = Ay + f(x) \\ y(x_0) = y^0 \end{cases} \quad (6.31)$$

$$(6.32)$$

当 $f(x) \neq 0$ 时, 称(6.31) 为 n 阶(标准的) 常系数非齐次线性微分方程组; 当 $f(x) \equiv 0$, 则(6.31) 化为

$$y' = Ay \quad (6.33)$$

称为 n 阶(标准的) 常系数齐次线性微分方程组。

根据线性方程组解的结构及常数变易法, 为了求非齐次线性方程组(6.31) 和齐次线性方程组(6.33) 的通解, 只要能求到方程组(6.33) 的基本解组就可以了。

根据方程组(6.33) 的特点, 设想(6.33) 有形如

$$y = Te^{\lambda x} \quad (6.34)$$

的解, 其中 λ 是待定常数, $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T$ 是待定的非零常向量。将(6.34) 代入方程(6.33) 得

$$T\lambda e^{\lambda x} = ATe^{\lambda x}$$

消去 $e^{\lambda x}$, 得

$$(A - \lambda E_n)T = 0 \quad \text{或} \quad AT = \lambda T \quad (6.35)$$

E_n 是单位矩阵。(6.35) 是齐次线性代数方程, 有非零解的充要条件是

$$|A - \lambda E_n| = 0 \quad (6.36)$$

由此可知, 向量函数(6.34) 是(6.33) 的解的充要条件是 λ 为系数矩阵 A 的特征值, T 是与 λ 相对应的特征向量。方程(6.36) 也称为方程(6.33) 的特征方程。

当特征方程(6.36) 有 n 个互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 时, 我们有如下结论。

【定理 6.1】 如果方程(6.33) 的特征方程(6.36) 有 n 个互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 而 T_1, T_2, \dots, T_n 为各根所对应的特征向量, 则

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} T_1, y_2(x) = e^{\lambda_2 x} T_2, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x} T_n$$

为方程(6.33) 的一个基本解组。

【例 6.6】 求常系数齐次线性微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases} \quad (6.37)$$

的通解。

【解】 (6.37) 的特征方程是

$$\det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

它的特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ 。先求 $\lambda_1 = 2$ 所对应的特征向量 $T_1 = (t_1, t_2, t_3)^T$, 它应满足方程组

$$(A - \lambda_1 E_3)T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = 0$$

即

$$\begin{cases} t_1 - t_2 + t_3 = 0 \\ -t_1 + 3t_2 - t_3 = 0 \\ t_1 - t_2 + t_3 = 0 \end{cases}$$

可解得

$$t_1 = -t_3 \quad t_2 = 0$$

取一组非零解,例如令 $t_3 = -1$, 有 $T_1 = (1, 0, -1)^T$. 用类似方法可求得对应于特征根 $\lambda_2 = 3$ 、 $\lambda_3 = 6$ 的特征向量分别为 $T_2 = (1, 1, 1)^T$, $T_3 = (1, -2, 1)^T$, 根据定理 6.1, 方程 (6.37) 有基本解组

$$w_1 = e^{2t}T_1 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{bmatrix}; w_2 = e^{3t}T_2 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}; w_3 = e^{6t}T_3 = \begin{bmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{bmatrix}$$

所以方程 (6.37) 的通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 = C_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \\ y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t} \\ z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \end{cases}$$

【例 6.7】 求方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 - y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \\ \frac{dy_3}{dx} = 3y_1 + y_3 \end{cases} \quad (6.38)$$

的通解。

【解】 方程 (6.38) 的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$, 相应的特征向量分别为 $T_1 = (0, 1, -1)^T, T_2 = (2i, 1, 3)^T, T_3 = (-2i, 1, 3)^T$, 故基本解组为

$$y_1^* = e^x T_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \\ -e^x \end{bmatrix}; y_2^* = e^{(1+2i)x} T_2 = \begin{bmatrix} e^x(-2\sin 2x + 2i\cos 2x) \\ e^x(\cos 2x + i\sin 2x) \\ 3e^x(\cos 2x + i\sin 2x) \end{bmatrix}$$

$$y_3^* = e^{(1-2i)x} T_3 = \begin{bmatrix} e^x(-2\sin 2x - 2i\cos 2x) \\ e^x(\cos 2x - i\sin 2x) \\ 3e^x(\cos 2x - i\sin 2x) \end{bmatrix}$$

因为方程组(6.38)是实系数的,我们希望能够找到实的基本解组。事实上,这里只需取 $y_1 = y_1^*$, $y_2 = \frac{1}{2}(y_2^* + y_3^*)$, $y_3 = \frac{1}{2i}(y_2^* - y_3^*)$, 且它们为(6.38)的线性无关解。故(6.38)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \\ -e^x \end{bmatrix} + C_2 e^x \begin{bmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{bmatrix} + C_3 e^x \begin{bmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases} y_1 = e^x(-2C_2\sin 2x + 2C_3\cos 2x) \\ y_2 = e^x(C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x) \\ y_3 = e^x(-C_1 + 3C_2\cos 2x + 3C_3\sin 2x) \end{cases}$$

当特征方程(6.36)有重根时,我们有如下结论。

【定理 6.2】 如果方程(6.33)的特征方程(6.36)的根 $\lambda = \lambda_k$ 是 n_k 重的,则(6.33)存在 n_k 个形如

$$y_k = \begin{bmatrix} P_{1k}(x) \\ P_{2k}(x) \\ \vdots \\ P_{nk}(x) \end{bmatrix} e^{\lambda_k x} = P_k(x) e^{\lambda_k x} \quad k = 1, 2, \dots, n_k \quad (6.39)$$

的线性无关解,其中 $P_k(x) = (P_{1k}(x), P_{2k}(x), \dots, P_{nk}(x))^T$, $P_{ik}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为 x 的次数不高于 $n_k - 1$ 的多项式。设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是(6.33)的全部特征根,其重数分别为 n_1, n_2, \dots, n_s ($n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$)。取遍所有的 λ_k , 形如(6.39)的 n 个解构成(6.33)的基本解组。

这个定理的证明需要用到较为深入的代数知识,讨论颇为复杂,故这里证明从略。但就确定基本解组方法进一步的说明如下。

将(6.39)代入式(6.33),得

$$[P'_k(x) + \lambda_k P_k(x)] e^{\lambda_k x} = A P_k(x) e^{\lambda_k x}$$

消去 $e^{\lambda_k x}$ 并移项,得

$$(A - \lambda_k E_n) P_k(x) = P'_k(x)$$

由这恒等式可得到关于 $P_{ik}(x)$ 的待定系数的 $n \times n_k$ 个等式,但是,注意到上式右端的次数比左端要低一次,且 λ_k 是 A 的 n_k 重特征根。由代数知识可知 $P_k(x)$ 的 $n \times n_k$ 个系数中有 n_k 个可任意取。如果设这 n_k 个系数为 C_1, C_2, \dots, C_{n_k} , 依次令

$$C_1 = 1, C_2 = 0, \dots, C_{n_k} = 0$$

$$C_1 = 0, C_2 = 1, \dots, C_{n_k} = 0$$

$$\vdots$$

$$C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_{n_k} = 1$$

就得到(6.33)的 n_k 个线性无关解。

当取遍所有的特征值 λ_k ($k = 1, 2, \dots, s$) 时,就得到(6.33)的 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$ 个线性无关解,从而得到(6.33)的一个基本解组。

【例 6.8】 解方程组

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} y \quad (6.40)$$

的通解。

【解】 方程组(6.39)的特征方程

$$\det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

得特征根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ (二重根)。求得与 $\lambda = 2$ 相对应的特征向量为 $T_1 = (1, 1, 1)^T$, 因此微分方程组(6.39)有一个解为

$$y_1 = T_1 e^{2x} = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$

对于二重根 $\lambda_2 = -1$, 设

$$y = \begin{bmatrix} t_{11}x + t_{12} \\ t_{21}x + t_{22} \\ t_{31}x + t_{32} \end{bmatrix} e^{-x}$$

是方程组(6.39)的解, 代入式(6.39), 得

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} e^{-x} - \begin{bmatrix} t_{11}x + t_{12} \\ t_{21}x + t_{22} \\ t_{31}x + t_{32} \end{bmatrix} e^{-x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}x + t_{12} \\ t_{21}x + t_{22} \\ t_{31}x + t_{32} \end{bmatrix} e^{-x}$$

消去 e^{-x} 并整理, 得

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} t_{11}x + t_{12} \\ t_{21}x + t_{22} \\ t_{31}x + t_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} (t_{11} + t_{21} + t_{31})x + (t_{12} + t_{22} + t_{32}) \\ (t_{11} + t_{21} + t_{31})x + (t_{12} + t_{22} + t_{32}) \\ (t_{11} + t_{21} + t_{31})x + (t_{12} + t_{22} + t_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}$$

比较 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{cases} t_{11} + t_{21} + t_{31} = 0 \\ t_{12} + t_{22} + t_{32} = t_{11} \\ t_{12} + t_{22} + t_{32} = t_{21} \\ t_{12} + t_{22} + t_{32} = t_{31} \end{cases}$$

解得 $t_{11} = t_{21} = t_{31} = 0, t_{12} + t_{22} + t_{32} = 0$ 或 $t_{32} = -(t_{12} + t_{22})$, 令 $t_{12} = 1, t_{22} = 0$, 得到方程组(6.39)的解

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x}$$

再令 $t_{12} = 0, t_{22} = 1$, 得到方程组(6.39)的解

$$y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x}$$

而 y_1, y_2, y_3 构成方程组 (6.38) 的基本解组, 故它的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = \begin{bmatrix} C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \\ C_1 e^{2x} + C_3 e^{-x} \\ C_1 e^{2x} - (C_2 + C_3) e^{-x} \end{bmatrix}$$

下面再举一例说明求非齐次线性方程 (6.31) 的一个特解的常数变易法。

【例 6.9】 求方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + 3z + 5x \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 2z + 8e^x \end{cases} \quad (6.41)$$

的通解。

【解】 方程组 (6.40) 的特征方程

$$\det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

特征根是 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$ 。易于求得方程 (6.40) 所对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + 3z \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 2z \end{cases} \quad (6.42)$$

的一个基本解组。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix}$$

故 (6.42) 的通解为

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix}$$

根据常系数变易法, 求 (6.41) 的形如

$$\begin{bmatrix} y^* \\ z^* \end{bmatrix} = C_1(x) \begin{bmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{bmatrix} + C_2(x) \begin{bmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

的特解, 其中 $C_1(x), C_2(x)$ 是待定函数。

将式 (6.43) 代入式 (6.41), 得

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{5x} + C_2'(x)e^{-x} = 5x \\ C_1'(x)e^{5x} - C_2'(x)e^{-x} = 8e^x \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{5}{2}xe^{-5x} + 4e^{-4x} \\ C_2'(x) = \frac{5}{2}xe^x - 4e^{2x} \end{cases}$$

积分, 得

$$\begin{cases} C_1(x) = (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{10})e^{-5x} - e^{-4x} \\ C_2(x) = (\frac{5}{2}x - \frac{5}{2})e^x - 2e^{2x} \end{cases} \quad (6.44)$$

将式(6.43)代入式(6.42)中,得方程(6.40)的一个特解

$$\begin{bmatrix} y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{10})e^{-5x} - e^{-4x} \\ e^{5x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2}(x-1)e^x - 2e^{2x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - \frac{13}{5} - 3e^x \\ -3x + \frac{12}{5} + e^x \end{bmatrix}$$

故原方程组(6.40)的通解为

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} + 2x - \frac{13}{5} - 3e^x \\ C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x} - 3x + \frac{12}{5} + e^x \end{bmatrix}$$

习 题 6.6

1. 求下列非齐次线性微分方程组的通解

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z \\ \frac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = my + nz \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = ny + mz \end{cases} \quad (0 < m < n)$$

$$(4) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)z \\ \frac{dz}{dx} = q(x)y + p(x)z \end{cases} \quad (\text{这里 } p(x), q(x) \text{ 均为连续函数})$$

2. 求下列非齐次线性微分方程的通解

$$(1) \begin{cases} y' - y - z = 2\cos 2x \\ z' - 3y + z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + y + 3 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y - 3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y' = 2y - 5z - \sin x \\ z' = y - 2z + x \end{cases} \quad (4) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + 3z + 5x \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 2z + 8e^x \end{cases}$$

3. 求下列初值问题的解

$$(1) \begin{cases} y' + z' = 0 \\ y' - z' = 1 \\ y|_{x=0} = 1, z|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y'' + 3y' + 2y + z' + z = 0 \\ y' + 2y + z' - z = 0 \\ y|_{x=0} = 1, y|_{x=0} = -1, z|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

6.7 正规形一阶微分方程组初步

在 6.5 节和 6.6 节中,我们较为详尽地研究线性方程(组)解的结构及常系数线性方程(组)的解法。本节就更一般的形如

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (7.1)$$

的正规形一阶微分方程组的解法作初步的讨论。

6.7.1 正规形一阶微分方程组的首次积分及应用。

【例 7.1】 求微分方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{z} \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{x}{y} \end{cases} \quad (7.3)$$

的通解。

【解】 将式(7.2)左右两端分别除以式(7.3)左右两端,得

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y}{z} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

积分,得

$$\frac{y}{z} = C_1$$

再将 $y = C_1 z$ 代入式(7.3),得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{C_1 z} \quad \text{或} \quad C_1 z dz = x dx$$

积分,得

$$C_1 z^2 = x^2 + C_2$$

即

$$yz - x^2 = C_2$$

于是,得到由式(7.2)和式(7.3)所构成的方程的隐式通解

$$\begin{cases} \frac{y}{z} = C_1 \\ yz - x^2 = C_2 \end{cases} \quad (7.4)$$

的隐式通解 $y = y(x), z = z(x)$ 。

如果记(7.4)左端的两个函数为

$$F_1(x, y, z) = \frac{y}{z} \quad (7.5)$$

$$F_2(x, y, z) = yz - x^2$$

由于式(7.4)是原方程组的通解,所以,将方程组的任一解 $y = y(x), z = z(x)$ 代入式(7.5)中,则

$$F_1[x, y(x), z(x)] \equiv \frac{y(x)}{z(x)} \equiv C_1$$

$$F_2[x, y(x), z(x)] \equiv y(x)z(x) - x^2 \equiv C_2$$

此时,称 $F_1 = C_1, F_2 = C_2$ 是方程(7.2)和(7.3)构成的方程组的首次积分。这个事实推广到一般的方程组(7.1),有如下的定义。

【定义 7.1】 如果方程组(7.1)的任一解 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 代入函数 $F(x, y_1, \dots, y_n)$ 中,使

$$F[x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \equiv C$$

其中 C 为实常数,则方程 $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$ 称为方程组(7.1)的一个首次积分。

如果我们能够求出方程组(7.1)的 k 个首次积分 F_1, F_2, \dots, F_k , 并且从下列方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n) = C_1 \\ F_2(x, y_1, \dots, y_n) = C_2 \\ \vdots \\ F_k(x, y_1, \dots, y_n) = C_k \end{cases} \quad (7.6)$$

中能够解出未知函数 y_1, y_2, \dots, y_n 中的某 k 个函数,不妨设解出 y_1, \dots, y_k , 即

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, y_{k+1}, \dots, y_n, C_1, \dots, C_k) \\ y_2 = \varphi_2(x, y_{k+1}, \dots, y_n, C_1, \dots, C_k) \\ \vdots \\ y_k = \varphi_k(x, y_{k+1}, \dots, y_n, C_1, \dots, C_k) \end{cases}$$

代入(7.1)的后 $(n-k)$ 个方程式中,就得到了只含有 $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n$ 等 $n-k$ 个未知函数的微分方程组了。此时解这个方程组显然要比解原方程组(7.1)要简化一些。

【例 7.2】 解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z^2}{x^2} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{yz}{x^2} \end{cases} \quad (7.7)$$

$$(7.8)$$

【解】 将式(7.7)两端分别除以式(7.8)的两端,得

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y} \quad \text{或} \quad ydy = zdz$$

积分,得

$$z^2 = y^2 + C_1$$

于是得到原方程组的一个首次积分 $F_1 = z^2 - y^2 = C_1$, 解出 $z^2 = y^2 + C_1$ 代入式(7.7), 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + C_1}{x^2}$$

分离变量并积分,得

$$-\frac{1}{x} = \int \frac{dy}{y^2 + C_1} + C_2$$

于是原方程组的通解为

$$\begin{cases} z^2 = y^2 + C_1 \\ -\frac{1}{x} = \int \frac{dy}{y^2 + C_1} + C_2 \end{cases}$$

【例 7.3】 求解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 - y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 - y_1 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1 - y_2 \end{cases} \quad (7.9)$$

【解】 将(7.9)的三个方程两端分别相加,有

$$\frac{d(y_1 + y_2 + y_3)}{dx} = 0$$

积分,得到原方程组(7.9)的一个首次积分

$$F_1(x, y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3 = C_1$$

其次,用 y_1, y_2, y_3 分别乘以(7.9)的第一、二、三方程的两端后再相加,得

$$y_1 \frac{dy_1}{dx} + y_2 \frac{dy_2}{dx} + y_3 \frac{dy_3}{dx} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{d(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}{dx} = 0$$

再积分,又得到原方程组的第二个首次积分

$$F_2(x, y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2$$

由方程组

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = C_1 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2 \end{cases}$$

解得

$$y_1 - y_2 = \pm \sqrt{2C_2 - 2y_3^2 - (C_1 - y_3)^2}$$

代入方程组(7.9)的第三式,得到只含有未知函数 $y_3 = y_3(x)$ 的微分方程了。如求得 $y_3 = y_3(x)$,再从上面的关系式中求出函数 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ 。

6.7.2 利用微分方程组的对称形式求首次积分

将微分方程组(7.1)写成如下的对称形式

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1} \quad (7.10)$$

为了把各个变量看成是“平等”的,并简化标号,经化简之后,不妨把式(7.10)改写成

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \quad (7.11)$$

的形式。利用式(7.11)求首次积分的优点在于可以利用比例的许多性质,如合比定理与分比定理等。

【例 7.4】 求微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x+y}{yz} \end{cases} \quad (7.12)$$

的通解。

【解】 将(7.12)写成对称形式,得

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{x+y}$$

由前一等式,有

$$xdx = ydy$$

积分,得到一个首次积分

$$F_1(x, y, z) = x^2 - y^2 = C_1$$

再利用合比定理,有

$$\frac{d(x+y)}{z(x+y)} = \frac{dz}{x+y} \quad \text{即} \quad zdz = d(x+y)$$

再积分,又得到一个首次积分

$$F_2(x, y, z) = x + y - \frac{z^2}{2} = C_2$$

从而原方程组(7.12)的通解为

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ x + y - \frac{z^2}{2} = C_2 \end{cases}$$

【例 7.5】 求解微分方程组

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} \quad (7.13)$$

的通解。

【解】 由方程组(7.13)的后一等式,有

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

积分,得到一个首次积分

$$F_1(x, y, z) = \frac{y}{z} = C_1$$

再利用合比定理,有

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy} \quad \text{或} \quad \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}$$

再积分,得

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln C_2 y$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2 y \quad \text{或} \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2$$

于是又得到一个首次积分

$$F_2(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2$$

从而原方程组的通解为

$$\begin{cases} \frac{y}{z} = C_1 \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2 \end{cases}$$

习 题 6.7

1. 求下列方程组的首次积分及通解

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z^2}{y} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y^2}{z} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y} \end{cases}$$

$$(3) \frac{dx}{z(y-x)} = \frac{dy}{z(y+x)} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

$$(4) \frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

$$(5) \frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$$

$$(6) \frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{x-y} = \frac{zdz}{y^2-2xy-x^2}$$

$$(7) \frac{dx}{x^2+y^2+yz} = \frac{dy}{x^2+y^2-xz} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

本书常用符号

“ \triangleq ”表示定义

$(a, b) \triangleq \{x | a < x < b\}$ 称为开区间

$[a, b] \triangleq \{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间

$(a, b] \triangleq \{x | a < x \leq b\}$ 称为半开区间

$[a, b) \triangleq \{x | a \leq x < b\}$ 称为半开区间

$(a, +\infty) \triangleq \{x | a < x < +\infty\}$ 称为右半无穷区间

$(-\infty, b) \triangleq \{x | -\infty < x < b\}$ 称为左半无穷区间

$[a, +\infty) \triangleq \{x | a \leq x < +\infty\}$ 称为右半无穷闭区间

$(-\infty, b] \triangleq \{x | -\infty < x \leq b\}$ 称为左半无穷闭区间

$(-\infty, +\infty) \triangleq \{x | -\infty < x < +\infty\}$ 称为无穷区间

$U(a, \delta) \triangleq \{x | |x - a| < \delta\}$ 称为 a 的 δ -邻域

$\dot{U}(a, \delta) \triangleq \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为 a 的去心 δ -邻域

$U(a)$ 表示 a 的某一邻域

$\dot{U}(a)$ 表示 a 的某一去心邻域

“ Φ ”表示“空集”

“ \cup ”表示“并集”

“ \cap ”表示“交集”

\mathbf{N} 表示自然数集

\mathbf{Z} 表示整数集

\mathbf{Q} 表示有理数集

\mathbf{R} 表示实数集

\mathbf{R}^+ 表示正实数集

“ \in ”表示“属于”

“ \notin ”表示“不属于”

“ \subseteq ”表示“包含”

“ \Rightarrow ”表示“推出”或“蕴涵”或“若……,则……”

“ \Leftrightarrow ”表示“充分必要”或“等价”或“当且仅当”

“ \forall ”表示“任意”或“任意一个”

“ \exists ”表示“存在”或“能找到”

“max”表示“最大”(它是 maximum 的缩写)

“min”表示“最小”(它是 minimum 的缩写)

“inf”表示“下确界”(它是 infimum 的缩写)

“sup”表示“上确界”(它是 supremum 的缩写)

$n! \triangleq n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 (n \in \mathbf{N})$

$0! \triangleq 1$

$(2n-1)!! \triangleq (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$

$(2n)!! \triangleq (2n) \cdot (2n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2$

$[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数

例如 $[-0.5] = -1, [3] = 3, [7.8] = 7$

$C[a, b]$ 表示在区间 $[a, b]$ 上连续函数的全体

$C(I)$ 表示在区间 I 上连续函数的全体

$R[a, b]$ 表示在区间 $[a, b]$ 上黎曼可积函数的全体

编者的话

从1994年起,哈尔滨工业大学开始招收优秀高中生进行本科、硕士连读。这是培养高质量人才的一种卓有成效的途径。大学数学教学如何适应这种情况是一种迫在眉睫、值得研究的问题。这几年来数学系的许多教师进行了积极的探索和尝试。本教材是在杨克劭、包革军等人编写的校内讲义《高等数学》、《工科数学分析》的基础上,结合编者多年从事数学分析教学的经验编写而成的。

世纪之交,科学技术的发展日新月异。从培养21世纪高质量人才的角度来看,把数学教学仅仅当做“为专业课程提供数学工具”的做法,显然达不到培养基础知识扎实、知识面广博、能迅速适应社会发展的高素质人才的目的。有必要实现“提供工具”到“提高大学生数学素质”的转变。为此,数学教学体系和内容也应相应地作出调整和更新。这也是编者把《高等数学》更名为《工科数学分析》的动力之一。我们在编写这本教材时,将其难易程度定位于数学与应用教学专业的数学分析和工科专业的高等数学之间。在不降低传统工科高等数学的基本概念、基本运算要求的同时,对于数学分析的基本理论有较为严谨的阐述,以期学生通过同名课程的学习,除了具有动手计算的能力外,还能养成正确演绎推理的习惯,在归纳、联想和抽象思维能力方面有较大的提高。本书编写,作者力求语言通顺、概念清楚、论证严谨、计算准确,使其通俗易懂,方便学习。

参加本书编写的人员有:张传义(第一章)、张彪(第二、三章)、包革军(第四、五、六章)。全书由包革军统稿。

杨克劭教授在繁重的教学工作中抽空审阅了全书,提出了许多宝贵意见,为本书增色不少;哈尔滨工业大学出版社唐余勇总编辑、黄菊英编审大力支持、辛勤运作,使本书尽快与读者见面。在此一并表示感谢。

本书可作为本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生工科数学分析课的教材,也可作为报考硕士研究生的复习参考书。

受编者水平和经验所限,书中的缺点和疏漏在所难免,恳请同行专家及广大读者批评指正。

编者

2000年1月于哈尔滨工业大学