

图 1.1.1

• 例 3 证明:

(1)  $A \cup (A \cap B) = A$ ; (2)  $A \setminus B = A \cap B^c$ ;

(3)  $A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$ ; (4)  $B \subseteq A^c \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .

证 证明等式成立,一般是先证左边  $\supseteq$  右边,再证右边  $\supseteq$  左边,从而得到左边 = 右边.

(1)  $\forall x \in A \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B)$ , 所以  $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ .

$\forall x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A$  或  $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ , 所以  $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ . 从而  $A \cup (A \cap B) = A$ .

(2)  $\forall x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A, x \notin B \Rightarrow x \in A$  且  $x \in B^c$ , 所以

$$A \setminus B \subseteq A \cap B^c.$$

$\forall x \in A \cap B^c \Rightarrow x \in A$  且  $x \in B^c \Rightarrow x \in A$  且  $x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$ , 所以  $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$ . 从而  $A \setminus B = A \cap B^c$ .

(3) 必要性 当  $A = B$  时,  $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ .

充分性 用反证法证. 设  $A \setminus B \neq \emptyset$ , 则  $\forall x \in A \setminus B$ , 有  $x \in A \cup B$  且  $x \in A \cap B^c$ , 从而  $x \notin A \cap B$ , 与  $A \cup B = A \cap B$  矛盾, 故必有  $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ .

(4) 必要性 因为  $A^c \cap A = \emptyset$ , 而  $B \subseteq A^c$ , 所以  $B \cap A = \emptyset$ .

充分性 用反证法证. 设有  $x_0 \in B$ , 且  $x_0 \notin A^c$ , 则  $x_0 \in B$  且  $x_0 \in A$ , 显然与  $A \cap B = \emptyset$  矛盾. 故必有  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subseteq A^c$ .

• 例 4 判断下列结论是否成立:

- (1)  $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ ;  
 (2)  $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ ;  
 (3)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ;  
 (4)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

**解** 证明结论不成立,只需举出反例.要证明结论成立,则要证明相互包含或用反证法证明.

(1) 否.如  $A = \{1,2\}, B = \{2,3,4\}, C = \{3,4\}$ .

(2) 否.如  $A = \{1,3,5\}, B = \{3,5\}, C = \{3,5,7\}$ .

(3) 是.  $\forall (x,y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow x \in A, y \in B$  或  $y \in C \Rightarrow (x,y) \in A \times B$  或  $A \times C$ , 即

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C).$$

$\forall (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B$  或  $A \times C \Rightarrow x \in A, y \in B$  或  $y \in C$ , 即

$$(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C).$$

所以  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ .

(4)  $\forall (x,y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow x \in A, y \in B \cap C \Rightarrow x \in A, y \in B$  且  $y \in C \Rightarrow (x,y) \in A \times B$  且  $(x,y) \in A \times C$ , 即

$$A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C).$$

$\forall (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B$  且  $(x,y) \in A \times C \Rightarrow x \in A, y \in B$  且  $y \in C \Rightarrow x \in A, y \in B \cap C$ , 即

$$(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C).$$

所以  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

**例 5** 设有集合  $A, B, C, D$ , 证明:

- (1)  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ ;  
 (2)  $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup C$ ;  
 (3)  $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) \subseteq (A \setminus C) \cup (D \setminus B)$ ;  
 (4)  $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow C \subseteq A$ .

**证** 可以直接证,也可以利用余集来证.

(1)  $x \in (A \setminus B) \cap (C \setminus D)$



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \text{ 且 } x \in C \setminus D \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ 但 } x \notin B \text{ 且 } x \in C \text{ 但 } x \notin D \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ 但 } x \notin B \cup D \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \setminus (B \cup D).
\end{aligned}$$

或  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D)$

$$\begin{aligned}
&= (A \cap B^c) \cap (C \cap D^c) = (A \cap C) \cap (B^c \cap D^c) \\
&= (A \cap C) \cap (B \cup D)^c = (A \cap C) \setminus (B \cup D).
\end{aligned}$$

(2)  $x \in A \setminus (B \setminus C) \Rightarrow x \in A, x \notin B \setminus C$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in A, x \notin B \text{ 或 } x \in A, x \notin B \text{ 但 } x \in C \\
&\Rightarrow x \in A \setminus B \text{ 或 } x \in C \\
&\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup C.
\end{aligned}$$

或  $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C)$

$$\begin{aligned}
&= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \subseteq (A \cap B^c) \cup C \\
&= (A \setminus B) \cup C.
\end{aligned}$$

(3)  $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D)$

$$\begin{aligned}
&= (A \cap B^c) \cap (C \cap D^c)^c = (A \cap B^c) \cap (C^c \cup D) \\
&= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap D) \\
&\subseteq (A \cap C^c) \cup (B^c \cap D) \\
&= (A \setminus C) \cup (D \setminus B).
\end{aligned}$$

(4) 充分性 因为  $(A \setminus B) \cup C = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ , 而  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ , 所以  $A \cap C = C$ , 即  $C \subseteq A$  是等式成立的充分条件.

必要性 若  $C \not\subseteq A$ , 则有  $x \in C$  且  $x \notin A$ , 从而  $x \notin A \setminus B$  且  $x \notin A \cap C$ . 于是  $x \notin (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ , 而  $x \in (A \setminus B) \cup C$ , 从而等式不成立, 引出矛盾.

**例 6** 设  $A, B, C$  是任意集合, 证明:

(1)  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A);$$

(2)  $(A \cap B) \cup C \equiv (A \cup C) \cap (B \cup C).$

**证** 式(1) 是式(2) 的推广.

$$\begin{aligned}
(1) & (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \\
&= (B \cup (A \cap C)) \cap (C \cup A) \\
&= (B \cap (A \cap C)) \cap (A \cap C) \\
&= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C \cap A) \cup (A \cap C \cap C) \\
&= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A). \\
(2) & (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (C \cap C) \\
&= (A \cap B) \cup C.
\end{aligned}$$

• 例 7 设  $p$  为正整数, 且  $p^2$  可被 2 整除, 证明  $p$  也可以被 2 整除.

证 由  $p$  为正整数, 则  $p = 2k$  或  $p = 2k+1, k \in \mathbf{N}$ . 若  $p = 2k+1$ , 则  $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$  不能被 2 整除. 故必有  $p = 2k$ , 即  $p$  可以被 2 整除.

• 例 8 证明: 如果一个数集的上(下)确界存在, 则必唯一.

证 用反证法. 设  $p_1, p_2$  都是数集  $A$  的上确界,  $p_1 \neq p_2$ , 不妨设  $p_1 < p_2$ , 取  $\varepsilon_0 = (p_2 - p_1)/2$ , 则  $\forall x \in A, x \leq p_1 < p_2 - (p_2 - p_1)/2 = p_2 - \varepsilon_0$ , 这与  $p_2$  为  $A$  的上确界矛盾. 故上确界必唯一.

类似可证: 如果下确界存在, 则必唯一.

• 例 9 设  $A \subseteq \mathbf{R}$ , 证明:  $A$  有界  $\Leftrightarrow \exists M > 0$ , 使得  $\forall x \in A$ , 恒有  $|x| \leq M$ .

证 充分性 若  $\forall x \in A, |x| \leq M$ , 则  $A$  必有界,  $M$  即为其一个界, 即  $-M \leq x \leq M$ .

必要性 若  $A$  有界, 即  $\exists l$  和  $L, \forall x \in A$ , 有  $l < x < L$ , 取  $M = \max\{|l|, |L|\}$ , 则有  $|x| \leq M$ .

• 例 10 设  $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ , 求  $\sup A, \inf A$ , 并问  $\min A$  和  $\max A$  是否存在.

解 因为  $\forall n \in \mathbf{N}, n/(n+1) < 1$ , 且  $\forall \varepsilon > 0$ , 要  $|n/(n+1) - 1| < \varepsilon$ ,



只要  $n > 1/\varepsilon - 1$  即可, 故  $\sup A = 1$ .

类似可知  $\inf A = 1/2$ .

因为  $n/(n+1)$  是单调增加的, 只有  $\min A = 1/2$ . 没有  $\max A$ .

• 例 11 设  $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ , 证明:  $\sup A = \inf A \iff A$  是仅由一个元素组成的集.

证 充分性 设  $\sup A = \inf A = a$ , 则  $\forall x \in A$ , 有  $x \leq a$  且  $x \geq a$ , 故必  $x \equiv a$ , 即  $A = \{a\}$ .

必要性 设  $A = \{a\}$ , 则  $\sup A = a, \inf A = a$ , 从而  
$$\sup A = \inf A.$$

• 例 12 设  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , 若它们都是有界集, 证明:  $A \cup B, A \cap B$  也是有界集. 若  $A, B$  均无界,  $A \cup B, A \cap B$  也是无界集吗?

证 因为  $A$  是有界集, 则  $\exists M > 0$ , 使得  $\forall x \in A$ , 有  $|x| \leq M$ . 类似地,  $\exists N > 0$ , 使得  $\forall x \in B$ , 有  $|x| \leq N$ . 于是取  $S = \max\{M, N\}$ , 则  $\forall x \in A \cup B, x \in A$  或  $x \in B$ , 有  $|x| \leq S$ . 类似地,  $\forall x \in A \cap B, x \in A$  且  $x \in B$ , 有  $|x| \leq S$ . 所以  $A \cup B, A \cap B$  为有界集.

若  $A, B$  均无界, 则  $A \cup B$  必无界. 否则, 若  $|x| \leq M, x \in A$  或  $x \in B$ , 则  $A, B$  必有界, 矛盾. 但  $A \cap B$  不一定无界. 如  $A = \{2, 3, 4, \dots\}, B = \{4, 5, 6, \dots\}$ , 则  $A \cap B = \{4, 5, 6, \dots\}$  为有界集.

例 13 设  $f, g$  为  $D$  上的有界函数, 证明:

$$\sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} = \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x).$$

证 按上确界定义,  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D$ , 使得

$$f(x_0) + g(x_0) > \sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} - \varepsilon.$$

又有  $f(x_0) \leq \sup_{x \in D} f(x), g(x_0) \leq \sup_{x \in D} g(x)$ ,

从而  $\sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} - \varepsilon < \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x)$ .

由  $\varepsilon$  的任意性, 得

$$\sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} = \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x).$$

例 14 设  $\{xy\}$  为所有  $xy$  乘积的集合, 其中  $x \in \{x\}, y \in$

$\{y\}$ , 且  $x \geq 0, y \geq 0$ , 证明:

$$(1) \inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}; \quad (2) \sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}.$$

证 (1) 设  $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$ , 由题设知  $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$ , 于是  $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$ , 使得

$$0 < x' < m_1 + \varepsilon, \quad 0 < y' < m_2 + \varepsilon.$$

因为当  $xy \in \{xy\}$  时, 有  $xy \geq m_1 m_2$ , 于是,  $\forall \varepsilon > 0, \exists x'y' \in \{xy\}$ , 使得

$$0 \leq x'y' < (m_1 + \varepsilon)(m_2 + \varepsilon) = m_1 m_2 + \varepsilon_1.$$

由  $\varepsilon(\varepsilon_1)$  的任意性, 得

$$m_1 m_2 = \inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(2) 类似可证, 但要考虑上确界为无穷大和有限值两种情形. 特别是, 若  $\{x\}$  仅含元素 0, 而  $\sup\{y\} = +\infty$ , 则  $\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}$  不成立.

**例 15** 设  $\{-x\}$  为数的集合, 这些数是与  $x \in \{x\}$  符号相反的数. 证明:

$$(1) \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad (2) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

证 (1) 设  $\inf\{-x\} = m_0$ , 则当  $-x \in \{-x\}$  时,  $-x \geq m_0$ . 于是,  $\forall \varepsilon > 0, \exists -x' \in \{-x\}$ , 使得  $-x' < m_0 + \varepsilon$ . 从而知, 当  $x \in \{x\}$  时,  $x \leq -m_0$ . 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in \{x\}$ , 使得  $x' > -m_0 - \varepsilon$ , 即  $-m_0 = \sup\{x\}$  或  $m_0 = -\sup\{x\}$ , 从而  $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$ .

(2) 设  $\sup\{-x\} = M_0$ , 则当  $-x \in \{-x\}$  时,  $-x \leq M_0$ . 于是,  $\forall \varepsilon > 0, \exists -x'' \in \{-x\}$ , 使得  $-x'' < M_0 - \varepsilon$ . 从而知, 当  $x \in \{x\}$  时,  $x > -M_0$ . 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists x'' \in \{x\}$ , 使得  $x'' < -M_0 + \varepsilon$ , 即  $-M_0 = \inf\{x\}$  或  $M_0 = -\inf\{x\}$ , 从而  $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$ .

• **例 16** 证明:  $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c, (\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$ , 其中  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是基本集  $X$  的子集.

证 (1) 设  $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$  非空,  $x \in (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$ , 则  $x \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$ , 从而



$\forall i$ , 都有  $x \notin A_i$ , 即  $x \in A_i^c$ . 由于对一切  $i$  都成立, 所以  $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ , 即  $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c \subset \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ .

反之, 设  $\bigcap_{i=1}^n A_i^c$  非空,  $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ , 则对一切  $i$ ,  $x \in A_i^c$ , 即  $x \notin A_i$ , 所以  $x \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$ , 从而  $x \in (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$ . 即  $\bigcap_{i=1}^n A_i^c \subset (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$ .

综上所述可知  $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ .

(2) 类似可证  $(\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$ .

• 例 17 由非空集合  $X$  的所有子集构成的集合称为  $X$  的幂集, 记作  $2^X$ .

(1) 设  $X = \{a, b, c\}$ , 求  $2^X$ ;

(2) 设  $X$  是由  $n$  个元素组成的有限集, 证明  $2^X$  中含有  $2^n$  个元素.

解 (1)  $2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ .

(2) 因为  $X$  的子集所含元素的个数分别为  $0, 1, 2, \dots, n$  个, 含 0 个元素的子集(空集)有 1 个, 含 1 个元素的子集有  $C_n^1$  个, 含 2 个元素的子集有  $C_n^2$  个,  $\dots$ , 含  $n$  个元素的子集有  $C_n^n$  个, 故  $2^X$  中含有  $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$  个元素.

• 例 18 设  $A$  与  $B$  是任意两个集合, 称集合  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  为  $A$  与  $B$  的对称差, 证明:

- (1)  $A \triangle B = B \triangle A$ ; (2)  $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ ;
- (3)  $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$ ; (4)  $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;
- (5)  $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ ;
- (6)  $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$ .

证 由集合的运算法则直接可证.

(1)  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$ .

(2)  $(A \triangle B) \triangle C = [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \setminus C \cup C \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$   
 $= (A \setminus B) \setminus C \cup (B \setminus A) \setminus C \cup C \setminus (A \setminus B) \cup C \setminus (B \setminus A)$

$$= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus A) \cup (B \setminus C) \\ \cup (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \cup (A \cap B \cap C).$$

结果如图 1.1.2 所示, 类似地, 有

$$A \Delta (B \Delta C)$$

$$= (B \setminus C) \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\ \cup (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (A \cap B \cap C),$$

所以  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .

$$(3) A \Delta (A \cap B)$$

$$= A \setminus (A \cap B) \cup (A \cap B) \setminus A \\ = A \setminus B \cup \emptyset = A \setminus B.$$

$$(4) A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$= [A \setminus (B \cap A)] \cup [B \setminus (B \cap A)] \\ = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

$$(5) A \cap (B \Delta C) = [A \cap (B \setminus C)] \cup [A \cap (C \setminus B)]$$

$$= (A \cap B) \setminus (A \cap C) \cup (A \cap C) \setminus (A \cap B) \\ = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

$$(6) A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow A \setminus B \cup B \setminus A = A \setminus C \cup C \setminus A$$

$$\Leftrightarrow [A \setminus B \cup B \setminus A] \setminus [A \setminus C \cup C \setminus A] = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow B = C.$$

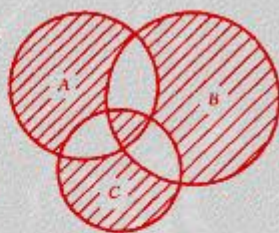


图 1.1.2

**例 19** 设  $A, B \subseteq \mathbf{R}$  是非空有界集, 证明:

$$(1) A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B;$$

$$(2) \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},$$

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\};$$

(3) 如果  $\forall a \in A, \forall b \in B, |a - b| < \epsilon$ , 则

$$|\sup A - \sup B| \leq \epsilon, \quad |\inf A - \inf B| \leq \epsilon.$$

**证** (1)  $\forall x \in A$ , 有  $\inf A \leq x \leq \sup A$ . 因为  $A \subseteq B$ , 所以  $\forall x \in A, \inf B \leq \inf A \leq x \leq \sup A \leq \sup B$ , 即

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

(2) 设  $\sup A = a, \sup B = b$ . 由题(1)知  $a \leq b$ , 即



$$\max\{\sup A, \sup B\} = b,$$

故  $\forall x \in A \cup B$ , 不论  $x \in A$  或  $x \in B$ , 恒有  $x \leq b$ . 又  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists x_0 \in B \subset (A \cup B)$ , 使得  $x_0 > b - \varepsilon$ , 故

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

类似可证  $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$ .

$$(3) \forall a \in A, \inf A \leq a \leq \sup A; \forall b \in B, \inf B \leq b \leq \sup B.$$

由题(1)知  $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$ . 又由  $a, b$  的任意性知

$$|a - b| \leq |\inf B - \sup B| = \varepsilon.$$

于是  $|\sup A - \sup B| \leq |\inf B - \sup B| = \varepsilon$ ,

$$|\inf A - \inf B| \leq |\inf B - \sup B| = \varepsilon.$$

• 例 20 设  $x, y \in \mathbf{R}$ , 称  $\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x - y|$  为  $x$  与  $y$  之间的距离, 证明: 对任意的  $x, y, z \in \mathbf{R}$ , 有

$$(1) \rho(x, y) \geq 0, \text{ 且 } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(2) \rho(x, y) = \rho(y, x); \quad (3) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

证 由定义直接可证.

$$(1) \rho(x, y) = |x - y| \geq 0, \text{ 又 } \rho(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(2) \rho(x, y) = |x - y| = |y - x| = \rho(y, x).$$

$$(3) \rho(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| \\ = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

其几何意义是三角形中两边长之和不小于第三边的长.

例 21 证明:  $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ .

证 因为

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B),$$

即第一个等号成立. 若  $x \in A \cap (A \cup B)$ , 则  $x \in A$  或  $x \in A \cup B$ , 所以  $A \cap (A \cup B) \subset A$ . 若  $x \in A$ , 则  $x \in A \cup B$ , 所以  $x \in A \cap (A \cup B)$ . 从而  $A \subset [A \cap (A \cup B)]$ . 于是

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$$

## 疑难解析

1. 记号  $\in$  与  $\subseteq$  有什么不同?

答 记号  $\in$  表示集合与元素之间的从属关系,  $a \in A$  反映  $a$  是集合  $A$  的一个元素. 记号  $\subseteq$  反映两个集合之间的包含关系,  $A \subseteq B$  反映集合  $A$  被集合  $B$  包含.  $\subseteq$  也可记作  $\subset$ .

$a \in A$  不可以记作  $a \subseteq A$ , 但可以记作  $\{a\} \subseteq A$ , 此时  $\{a\}$  表示只含元素  $a$  的“单元素集”.

2. 怎样区分数集的最大数、最小数与数集的上确界、下确界的区别?

答 一个有上确界的数集不一定有最大数, 一个有下确界的数集不一定有最小数. 因为数集  $A$  的最大(小)数一定属于  $A$ , 而数集  $A$  的上(下)确界可以不属于  $A$ . 如  $(a, b)$  没有最大数与最小数, 但有下确界  $a$ , 上确界  $b$ .

3. 确界存在定理为什么又称为实数的完备性定理? 它有什么实际意义?

答 确界存在定理指出: 任一有上(下)界的非空实数集必有上(下)确界.

确界定理仅在实数集成立. 这是因为, 在不是实数集的情形, 定理不一定成立. 例如

$$S = \{x \mid x^2 < 2, x \in \mathbb{Q}\}, \quad \sup S = \sqrt{2}, \quad \inf S = -\sqrt{2}.$$

事实上,  $\forall x \in S$ , 由  $x^2 < 2$  得  $x < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}$  是  $S$  的一个上界. 又设  $a < \sqrt{2}$ , 由有理数的稠密性知, 在  $(a, \sqrt{2})$  内必有有理数  $a'$ , 使得  $(a')^2 < 2 \Rightarrow a' \in S$ , 但  $a < a' \Rightarrow a$  不是  $S$  的上界, 故依上确界的定义, 有  $\sup S = \sqrt{2}$ . 类似地, 有  $\inf S = -\sqrt{2}$ . 但是, 二者都不在  $\mathbb{Q}$  内.

因此, 实数集的确界存在定理是区别实数集与有理数集的本质属性, 是实数完备性的表现. 即只有实数集才是完备的.

确界存在定理  $\Rightarrow$  单调有界准则  $\Rightarrow$  闭区间套定理  $\Rightarrow$  收敛子列



## 二、函数

1. 设  $A, B$  是两个实数集, 称映射  $f: A \rightarrow B$  为一元函数, 记作

$$f: x \mapsto y = f(x), x \in A.$$

2. 函数的运算.

(1) 四则运算. 设  $f$  与  $g$  是定义域分别为  $D(f)$  与  $D(g)$  的一元函数, 则

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D(f) \cap D(g);$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D(f) \cap D(g);$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), x \in D(f) \cap D(g), g(x) \neq 0.$$

(2) 复合运算.  $\forall x \in A$ , 若  $y = g(u), u = f(x)$ , 则

$$y = \varphi(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)], x \in A$$

称为  $g$  与  $f$  的复合函数.

(3) 逆运算. 设有函数  $f: A \rightarrow B = R(f)$ , 若存在函数  $g: R(f) \rightarrow A$ , 使  $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B$  成立, 则称  $f$  可逆,  $g$  是  $f$  的逆函数或反函数. 由  $f$  求  $f^{-1}$  的运算称为函数的逆运算.

3. 初等函数. 熟悉基本初等函数的基本性质与常用公式, 熟悉初等函数与双曲函数.

## 疑难解析

1. 映射、变换、函数有何联系与区别?

答 映射、变换、函数都是两个集合的元素之间的对应关系的反映. 映射又称为算子, 在不同的数学分支中有不同的惯用名称. 例如, 从非空集  $X$  到数集  $Y$  的映射称为  $X$  上的泛函, 从非空集  $X$  到其自身的映射称为  $X$  上的变换, 从实数集(或其子集)  $X$  到实数集  $Y$  的映射定义为  $X$  上的函数.

2. 复合映射要注意哪些问题?

答 设映射  $g: X \rightarrow Y_1, f: Y_2 \rightarrow Z$ , 则  $g$  与  $f$  能构成复合映射的条件是  $g$  的值域  $R(g) = Y_1$ , 必须包含在  $f$  的定义域  $D(f) = Y_2$  内, 即  $Y_1 \subseteq Y_2$ .

其次,映射  $g$  与  $f$  的复合是有顺序的,即  $f \circ g$  有意义时,  $g \circ f$  不一定有意义;即使  $f \circ g$  与  $g \circ f$  都有意义,复合映射  $f \circ g$  与  $g \circ f$  也不一定相同.

复合函数的情形也是一样.

### 典型例题与习题详解

要求理解映射与函数概念,能利用基本概念证明一些简单命题.

• 例 1 设映射  $f: A \rightarrow B$  是可逆的,证明:它的逆映射是唯一的.

证 用反证法证. 设  $g_1, g_2$  都是  $f$  的逆映射,且  $g_1 \neq g_2$ , 则  $\exists y \in B$ , 使得  $g_1(y) \neq g_2(y)$ . 由  $f \circ g_2(y) = y$  得  $g_1 \circ f \circ g_2(y) = g_1(y)$ . 又由  $g_1 \circ f = I_A$  得  $g_1 \circ f \circ g_2(y) = g_2(y)$ , 故  $g_2(y) = g_1(y)$ . 与假设矛盾. 从而知,逆映射是唯一的.

• 例 2 设  $f$  和  $g$  都是  $\mathbf{R}$  到自身的映射,  $f: x \mapsto x+a, g: x \mapsto x-a, x \in \mathbf{R}$ . 证明:它们互为逆映射.

证 因为  $f, g$  都是一一映射,且  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  
 $f(g(x)) = f(x-a) = x, \quad g(f(x)) = g(x+a) = x$ ,  
所以,  $f$  与  $g$  互为逆映射.

• 例 3 设  $f: x \mapsto x^2+1, x \in \mathbf{R}; g: y \mapsto \sqrt{y}, y \in (0, +\infty)$ . 求  $D(g \circ f), D(f \circ g), g \circ f, f \circ g$ .

解  $D(g \circ f) = \mathbf{R}, \quad g \circ f = \sqrt{x^2+1},$   
 $D(f \circ g) = (0, +\infty), \quad f \circ g = y+1.$

• 例 4 设  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow A$  是任意两个映射,若  $g \circ f = I_A$ , 证明:  $f$  是单射,  $g$  是满射.

证 因为  $f: A \rightarrow B$  且  $g: B \rightarrow A$ , 所以  $R(g) = A$ . 从而  $g$  是满射.



用反证法证  $f$  是单射. 设  $x_1 \neq x_2$  时, 有  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则  $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ . 又因为  $g \circ f = I_A$ , 所以  $x_1 = x_2$ , 与假设矛盾.

• 例 5 设  $P$  是坐标平面  $\mathbf{R}^2$  到  $x$  轴上的投影映射,  $P$  是否单射或满射? 并求  $P^{-1}(P(1,1)), P(P^{-1}(1,0)), P^{-1}(1,0) \cap P^{-1}(3,0)$ .

解  $P$  是满射, 因为  $R(P) = \mathbf{R}$ . 但每个  $x \in \mathbf{R}$  的原像是  $(x, y), y \in (-\infty, +\infty)$ , 所以  $P$  不是单射.

$$P^{-1}(P(1,1)) = \{(1,y) \mid y \in \mathbf{R}\}, \quad P(P^{-1}(1,0)) = (1,0),$$

$$P^{-1}(1,0) \cap P^{-1}(3,0) = \emptyset.$$

• 例 6 设有映射  $f: A \rightarrow B$ , 证明下面论断等价:

(1)  $f: A \rightarrow B$  是单射;

(2) 若  $x_1, x_2 \in A$ , 但  $x_1 \neq x_2$ , 则  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ;

(3) 若  $x_1, x_2 \in A$ , 且  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则  $x_1 = x_2$ .

证 先用反证法证论断(1)  $\Rightarrow$  论断(2). 设当  $x_1 \neq x_2$  时, 有  $f(x_1) = f(x_2)$ , 即  $f(x_1)$  或  $f(x_2)$  有两个不同的原像, 从而与  $f$  为单射矛盾. 所以  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 即论断(1)  $\Rightarrow$  论断(2).

又若论断(2) 成立, 则当  $x_1 \neq x_2$  时, 有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 即  $f$  是单射. 从而论断(1) 与论断(2) 等价.

而论断(2) 与论断(3) 是逆否命题, 所以论断(2) 与论断(3) 等价. 于是, 论断(1), 论断(2), 论断(3) 等价.

• 例 7 下列函数是否相等? 为什么?

$$(1) y = x^2/x \text{ 与 } y = x; \quad (2) y = x \text{ 与 } y = (\sqrt{x})^2;$$

$$(3) y = \sqrt{x^2} \text{ 与 } y = |x|; \quad (4) y = x^2 + 1 \text{ 与 } u = t^2 + 1.$$

解 函数的两个要素是定义域与对应法则, 两个函数相等, 必须定义域与对应法则都相同.

题(1)、题(2) 中的函数都不相等, 因为定义域不相同.

题(3)、题(4) 中的函数都相等, 因为每对函数的定义域与对应法则都相同.

• 例8 设  $y = f(x) = (ax+b)/(cx-a)$ , 证明:  $x = f(y)$ .

证 因为  $y = (ax+b)/(cx-a) \Rightarrow x = (ay+b)/(cy-a)$ ,  
所以  $x = f(y)$ .

例9 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{x} \ln \frac{1-x}{1+x}; \quad (2) y = \frac{1}{\sin x - \cos x};$$

$$(3) y = \sqrt{2+x-x^2} + \arcsin \lg \frac{x}{10};$$

$$(4) f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}, \text{ 求 } f(x) + f(2/x) \text{ 的定义域.}$$

解 对于用解析式表示的函数, 其自然定义域是使解析式有意义的一切实数的集合. 注意, 负数不能开偶次方, 分式的分母不能为零, 对数的真数是正数, 反三角函数取值有限制, 有限个函数四则运算构成的函数是这些函数定义域的交集 (且分母不能为零), 复合函数定义域有限制. 一般利用不等式组求解定义域.

(1) 由  $x \neq 0$  与  $(1-x)/(1+x) > 0$ , 得定义域为  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ .

(2) 由  $\sin x - \cos x \neq 0$ , 得定义域为  $x \neq \pi/4 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

(3) 由  $2+x-x^2 \geq 0$  和  $\left| \lg \frac{x}{10} \right| \leq 1$ , 得定义域为  $[1, 2]$ .

(4) 因为  $f(x)$  的定义域  $D_1$  为  $|x| < 2$ , 所以  $f(2/x)$  应有  $|2/x| < 2 \Rightarrow |x| > 1$ , 即  $f(2/x)$  的定义域  $D_2$  为  $|x| > 1$ . 因此所求定义域  $D = D_1 \cap D_2$  为  $(-2, -1) \cup (1, 2)$ .

例10 由已知关系式求下列函数式  $f(x)$ :

(1)  $f(x)$  是单值函数,  $f(0) = 0$ , 且满足方程

$$f^2(\ln x) + 2xf(\ln x) + x^2 \ln x = 0, \quad 0 < x < e;$$

(2)  $f(x+1/x) = x^2 + 1/x^2 + 3$ ;

(3)  $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$ , 求  $f(\cos x)$ .



解 此类问题常用代换法、拼凑法求解.

(1) 用代换法. 令  $t = \ln x$ , 则  $x = e^t$ , 有

$$f^2(t) + 2e^t f(t) + e^{2t} t = 0,$$

解方程得  $f(t) = e^t(1 \pm \sqrt{1-t})$ . 又由  $f(0) = 0$ , 得

$$f(x) = e^x(1 - \sqrt{1-x}).$$

(2) 用代换法. 令  $t = x + 1/x$ , 则  $t^2 = x^2 + 1/x^2 + 2$ , 故

$$f(t) = x^2 + 1/x^2 + 2 + 1 = t^2 + 1,$$

所以  $f(x) = x^2 + 1$ .

若用拼凑法, 则

$$f(x + 1/x) = (x + 1/x)^2 + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1.$$

(3) 用代换法. 令  $t = \sin \frac{x}{2}$ , 则  $x = 2\arcsin t$ , 故

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(2\arcsin t) + 1 = \cos^2 \arcsin t - \sin^2 \arcsin t + 1 \\ &= 2(1 - \sin^2 \arcsin t) = 2(1 - t^2). \end{aligned}$$

若用拼凑法, 则

$$f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$$

所以  $f(t) = 2(1 - t^2)$ .

从而  $f(\cos x) = 2(1 - \cos^2 x) = 2\sin^2 x$ .

若利用三角函数性质, 可直接得出结果.

$$\begin{aligned} f(\cos x) &= f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = f\left(\sin \frac{\pi - 2x}{2}\right) \\ &= 1 + \cos(\pi - 2x) = 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x. \end{aligned}$$

例 11 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$$

求  $f(f(x)), f(g(x)), g(f(x)), g(g(x))$ .

解 先考察自变量用函数替代时的取值情形, 再得出复合函数的解析表达式.

(1) 因为在  $(-\infty, +\infty)$  内,  $|f(x)| \leq 1$ , 所以

$$f(f(x)) = 1, -\infty < x < +\infty.$$

(2) 因为当  $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$  时,  $|g(x)| \leq 1$ ; 当  $|x| < 1$  或  $|x| > \sqrt{3}$  时,  $|g(x)| > 1$ , 所以

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(3) 因为在  $(-\infty, +\infty)$  内,  $|f(x)| \leq 1$ , 所以  $g(f(x)) = 1 - (f(x))^2$ , 考虑到  $f(x)$  的取值, 得

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1. \end{cases}$$

(4) 因为在  $(-\infty, +\infty)$  内,  $|g(x)| \leq 2$ , 所以  $g(g(x)) = 2 - (g(x))^2$ , 考虑到  $g(x)$  的取值, 得

$$g(g(x)) = \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2, & |x| \leq 2, \\ -2, & |x| > 2. \end{cases}$$

• 例 12 证明下列恒等式:

$$(1) \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y \pm \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y;$$

$$(2) \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y;$$

$$(3) \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad (4) \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh}x \operatorname{ch}x;$$

$$(5) \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x; \quad (6) \operatorname{th} x = \operatorname{sh}x / \operatorname{ch}x.$$

证 只需将  $\operatorname{sh}x = (e^x - e^{-x})/2$ ,  $\operatorname{ch}x = (e^x + e^{-x})/2$  或  $\operatorname{sh}y = (e^y - e^{-y})/2$ ,  $\operatorname{ch}y = (e^y + e^{-y})/2$  代入即可得出.

• 例 13 设有映射  $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$ , 证明:

$$(1) f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X);$$

$$(2) f^{-1}(f(A)) \supseteq A, \text{ 若 } f \text{ 是单射, 则 } f^{-1}(f(A)) = A;$$

$$(3) f(f^{-1}(B)) = B \iff f \text{ 为满射.}$$

证 (1) 因为  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(X)$  是显然的, 又因为

$$B \cap f(X) \subseteq B, f^{-1}(B \cap f(X)) \subseteq f^{-1}(B),$$

所以  $B \cap f(X) \subseteq f(f^{-1}(B)).$



从而  $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ .

(2) 已知  $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ . 若  $f$  是单射, 则  $\forall x \in f^{-1}(f(A))$ ,  $\exists y \in f(A)$ , 使得  $x = f^{-1}(y)$ , 于是  $y = f(x)$ , 即  $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ . 从而  $f^{-1}(f(A)) = A$ .

(3) 必要性是显然的.

充分性 由题(1)知  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ . 又  $\forall y \in B$ , 因为  $f$  为满射, 所以  $\exists x \in f^{-1}(B)$ , 使得  $f(x) = y$ . 故  $y \in f(f^{-1}(B))$ , 即

$$B \subseteq f(f^{-1}(B)).$$

• 例 14 设映射  $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq X$ , 证明:

(1)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ;

(2)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ ;

(3)  $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$ ;

(4) 若  $f$  为单射, 则题(2)、题(3) 两式都变为等式.

解 (1)  $\forall y \in f(A \cup B)$ ,  $\exists x \in (A \cup B)$ , 即  $x \in A$  或  $x \in B$ , 所以  $y \in f(A)$  或  $y \in f(B)$ , 从而  $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ .

$\forall y \in f(A) \cup f(B)$ , 即  $y \in f(A)$  或  $y \in f(B)$ , 所以  $x \in A$  或  $x \in B$ , 即  $x \in (A \cup B)$ . 因此  $y \in f(A \cup B)$ , 从而  $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ . 于是  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

(2)  $\forall y \in f(A \cap B)$ ,  $\exists x \in A \cap B$ , 即  $x \in A$  且  $x \in B$ , 所以  $y \in f(A)$  且  $y \in f(B)$ . 于是  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ .

(3)  $\forall y \in f(A \setminus B)$ ,  $\exists x \in A \setminus B$ , 即  $x \in A$  但  $x \notin B$ , 所以  $y \in f(A)$  但  $y \notin f(B)$ . 于是  $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$ .

(4) 对题(2), 若  $f$  为单射, 则  $\forall y \in f(A) \cap f(B)$ , 有  $y \in f(A)$  且  $y \in f(B)$ . 因此,  $\exists x_1 \in A$ , 使  $f(x_1) = y$ ;  $\exists x_2 \in B$ , 使  $f(x_2) = y$ , 但  $f$  为单射时, 对同一  $y$  必有  $x_1 = x_2$ , 即  $x \in A \cap B$ . 又  $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ , 所以  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

题(3) 类似可证.

例 15 如果  $f: X \rightarrow Y$ , 且  $A \subseteq Y, B \subseteq Y$ , 证明下列等式成立:

(1)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ;

$$(2) f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B);$$

$$(3) f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

证 (1) 设  $x \in f^{-1}(A \cap B)$ , 则  $y \in (A \cap B)$ , 即  $y \in A$  且  $y \in B$ . 若  $x \in f^{-1}(A)$  且  $x \in f^{-1}(B)$ , 则  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ . 从而

$$f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

设  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ , 则  $x \in f^{-1}(A)$  且  $x \in f^{-1}(B)$ . 故  $y \in A$  且  $y \in B$ , 即  $y \in (A \cap B)$ . 于是  $x \in f^{-1}(A \cap B)$ , 从而

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B).$$

所以  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .

(2) 设  $x \in f^{-1}(A \setminus B)$ , 则  $y \in (A \setminus B)$ , 即  $y \in A$  且  $y \notin B$ .

又因为  $x \in f^{-1}(A)$  且  $x \notin f^{-1}(B)$ , 所以

$$x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

从而  $f^{-1}(A \setminus B) \subseteq f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ .

设  $x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ , 则  $x \in f^{-1}(A)$  且  $x \notin f^{-1}(B)$ , 从而  $y \in A$  且  $y \notin B$ , 即  $y \in (A \setminus B)$ , 从而

$$f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \setminus B).$$

所以  $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ .

(3) 设  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ , 则  $y \in (A \cup B)$ , 即  $y \in A$  或  $y \in B$ . 于是  $x \in f^{-1}(A)$  或  $x \in f^{-1}(B)$ , 即  $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ . 从而

$$f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

设  $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ , 则  $x \in f^{-1}(A)$  或  $x \in f^{-1}(B)$ , 即  $y \in A$  或  $y \in B$ , 亦即  $y \in A \cup B$ , 因此  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ . 从而

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B).$$

所以  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

• 例 16 设  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow C$  都是一一映射, 证明:

(1)  $g \circ f$  也是一一映射; (2)  $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1}) \circ (g^{-1})$ .

证 (1) 因为  $f$  是一一映射, 所以  $\forall x \in A$ , 有且仅有  $f(x) \in$



$B$  与其对应. 又由  $g$  是一一映射, 对  $f(x) \in B$ , 有且仅有唯一存在的  $g(f(x))$  与之对应, 所以  $f \circ g$  也是一一映射.

$$(2) \text{ 因为 } g \circ f \circ (f^{-1}) \circ (g^{-1}) = g \circ g^{-1} = I,$$

$$(f^{-1}) \circ (g^{-1}) \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = I,$$

所以  $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1}) \circ (g^{-1})$ .

• 例 17 凡与自然数集  $N_+$  一一对应的集合称为可数无穷集, 简称可数集, 证明:

(1) 正偶数集与正奇数集都是可数集;

(2) 若  $A, B$  都是可数集, 则  $A \cup B$  也是可数集;

(3) 整数集  $Z$  是可数集.

证 (1) 因为从  $N_+$  到正偶数集存在一一映射  $f(n) = 2n$ , 从  $N_+$  到正奇数集存在一一映射  $f(n) = 2n-1$ , 所以正偶数集与正奇数集都是可数集.

(2) 因为  $A$  为可数集, 所以从  $N_+$  到  $A$  存在一一映射  $f(n)$ ; 又  $B$  是可数集, 从  $N_+$  到  $B$  也存在一一映射  $g(n)$ . 故  $\forall y \in A \cup B$ , 当  $y \in A$  时, 有唯一存在的  $f^{-1}(y)$  与之对应; 当  $y \in B$  时, 有唯一存在的  $g^{-1}(y)$  与之对应, 所以  $A \cup B$  也是可数集.

(3) 因为正偶数集与正奇数集为可数集, 则负偶数集、负奇数集也是可数集, 于是由题(2)知, 正、负偶数集与正、负奇数集之并集也是可数集, 即整数集  $Z$  为可数集.

• 例 18 设  $A, B$  是两个集合, 若存在一个从  $A$  到  $B$  上的一一映射  $f$ , 则称  $A$  与  $B$  等势(或有相同的基数), 记作  $A \sim B$ . 证明: 区间  $[0, 1]$  与区间  $[a, b]$  等势, 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ .

证 只需证明存在一个从  $[a, b]$  到  $[0, 1]$  的一一映射, 则  $[0, 1]$  与  $[a, b]$  等势.

取映射  $f: \frac{t-a}{b-a} \mapsto x$ , 使得  $t=a$ , 则  $x=0$ ,  $t=b$ , 则  $x=1$ , 构成从  $[a, b]$  到  $[0, 1]$  的一一映射.

**例 19** 作出满足下列条件的一个映射:

- (1) 从  $[0, 1]$  到整个数轴的单射;
- (2) 从正实数集合  $\mathbf{R}_+$  到实数集合  $\mathbf{R}$  的双射;
- (3) 从  $(-1, 1)$  到  $(-\infty, +\infty)$  的双射.

**解** (1) 作  $f: x \mapsto x$ , 它是从  $[0, 1]$  到整个数轴的单射(不是满射).

(2) 作  $f: x \mapsto \ln x$ , 它是从正实数集合  $\mathbf{R}_+$  到实数集合  $\mathbf{R}$  的双射.

(3) 作  $f: x \mapsto \tan \frac{\pi x}{2}$ , 它是从  $(-1, 1)$  到  $(-\infty, +\infty)$  的一个双射.

### 第三节 数列的极限

#### 知识要点

1. 数列是从  $\mathbf{N}_+$  到  $\mathbf{R}$  的一个映射  $f: n \mapsto f(n), n \in \mathbf{N}_+$ , 也就是定义在  $\mathbf{N}_+$  上的一个函数(通常称为整标函数).

2. 设  $\{a_n\}$  为一数列, 若存在一个常数  $a \in \mathbf{R}$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $N$ , 使得  $\forall n > N$ , 恒有  $|a_n - a| < \varepsilon$ , 则称数列  $\{a_n\}$  存在极限, 并称  $a$  为  $\{a_n\}$  的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

3. 收敛数列具有下列性质:

- (1) 唯一性 收敛数列的极限是唯一的.
- (2) 有界性 收敛数列是有界的.
- (3) 保号性 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a \neq 0$ , 则  $\exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$

时,  $a_n$  与  $a$  同号.

4. 有理运算法则 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则有

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b;$$



- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab$ ;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)/(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = a/b$  ( $b \neq 0$ ).
5. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则有
- (1) **保序性** 若  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $a_n \leq b_n$ , 则  $a \leq b$ ;
- (2) **夹逼原理** 若  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , 且  $a = b$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .
6. **单调有界准则** 单调增加(减少)有上(下)界的数列必定收敛.
7. **闭区间套定理** 任何闭区间套  $\{[a_n, b_n]\}$  必有唯一公共点, 即存在唯一的  $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$ .
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  的充要条件是对于  $\{a_n\}$  的每个子列  $\{a_{n_k}\}$ , 均有
- $$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$
9. **Bolzano-Weierstrass 定理** 有界实数列必有收敛子列.
10. 设  $\{a_n\}$  为一实数列, 且满足下列条件:  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$ , 使得  $\forall m, n > N$ , 恒有  $|a_m - a_n| < \epsilon$ , 则称  $\{a_n\}$  为 Cauchy 数列, 上述条件称为 Cauchy 条件.
- Cauchy 条件也写为:
- $$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{使得 } \forall n > N \text{ 及 } p \in \mathbb{N}_+ \text{ 恒有 } |a_n - a_{n+p}| < \epsilon.$$
11. **Cauchy 收敛原理** 数列  $\{a_n\}$  收敛的充要条件是, 数列是 Cauchy 数列.

### 疑难解析

1. 怎样理解数列极限的  $\epsilon$ - $N$  定义?

**答** 数列极限的  $\epsilon$ - $N$  定义反映了在  $n \rightarrow \infty$  的过程中  $x_n \rightarrow a$  的变化关系, 是一个定量的描述. 应理解以下几点:

(1)  $\epsilon$  的任意性.  $\epsilon$  是用来衡量  $x_n$  与常数  $a$  的接近程度的. 若  $\{x_n\}$  以  $a$  为极限, 则应有

$$|x_n - a| \rightarrow 0,$$

所以 $\epsilon$ 是可以任意选取的无论多么小的正数. 选定 $\epsilon$ 反映对 $x_n$ 与 $a$ 接近程度的要求. 在讨论问题前, $\epsilon$ 可按要求任意选取, 但选定后不再更改, 这就是 $\epsilon$ 是“任意给定”说法的原因.

(2) $N$ 的对应性. 当 $x_n \rightarrow a$ 时, 对于给定的 $\epsilon$ ,  $n$ 要取多大才能保证 $|x_n - a| < \epsilon$ , 这就要求一个量化的指标 $N$ . 当 $n > N$ 时, 必有

$$|x_n - a| < \epsilon,$$

$N$ 用来描述 $n$ 增大的程度, 是与 $\epsilon$ 相对应的, 所以又记作 $N(\epsilon)$ . 但不要理解为 $N$ 是 $\epsilon$ 的函数.

2. 闭区间套定理有什么意义? 使用它应注意哪些问题?

答 闭区间套定理是关于实数完备性(连续性)的基本定理之一, 与其它基本定理可以相互证明, 具有重要的理论意义.

使用闭区间套定理时要注意: (1) 定理仅在实数集内成立, 因为它是利用仅在实数集上成立的单调有界准则来证明的. (2) 定理的两个条件(闭区间与闭区间长度极限为零)一个也不能缺少. 如 $\{(0, 1/n)\}$ 是一个开区间套, 但没有一个属于它们的公共点.

### 典型例题与习题详解

要求理解数列极限的概念, 能正确叙述数列的极限定义.

• 例1 下列说法能否作为 $a$ 是数列 $\{a_n\}$ 的极限的定义? 为什么?

(1) 对于无穷多个 $\epsilon > 0$ , 存在 $N \in \mathbf{N}_+$ , 当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立;

(2) 对于任给的 $\epsilon > 0$ , 存在 $N \in \mathbf{N}_+$ , 当 $n > N$ 时, 有无穷多项 $a_n$ , 使不等式 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立;

(3) 对于给定的 $\epsilon_0 = 10^{-10}$ , 不等式 $|a_n - a| < 10^{-10}$ 恒成立.

解 三个说法都不能作为极限定义. 因为依极限定义, 要使所给不等式成立, 必须:

(1) 对任意的 $\epsilon$ 而不是某些 $\epsilon$ 都有 $|a_n - a| < \epsilon$ 成立;



(2) 对一切  $n > N$  的  $a_n$  而不是某些  $a_n$  都有  $|a_n - a| < \epsilon$  成立;

(3) 对任意  $\epsilon > 0$  而不是某一  $\epsilon_0 > 0$ , 都有  $|a_n - a| < \epsilon$  成立.

• 例 2 若  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是两个发散数列, 它们的和与积是否发散? 为什么? 若其中一个收敛, 一个发散, 它们的和与积的收敛性又如何?

解  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  都发散时, 它们的和与积不一定发散, 如

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] \right\}, \quad \{b_n\} = \left\{ \frac{1}{2} [1 - (-1)^n] \right\},$$

但  $\{a_n + b_n\} = \{1\}$ , 所以  $\{a_n + b_n\}$  是收敛的. 又如

$$\{a_n\} = \{1 + \cos n\pi\}, \quad \{b_n\} = \{1 - \cos n\pi\},$$

但  $\{a_n b_n\} = \{\sin^2 n\pi\}$ , 故  $\{a_n b_n\}$  是收敛的. 这是因为有理运算法则仅对收敛数列成立.

当一个数列收敛、一个数列发散时, 它们的和一定发散, 但积有可能收敛. 如  $\{a_n\} = \{n\}$  是发散的,  $\{b_n\} = \{1/n\}$  是收敛的, 积  $\{a_n b_n\} = \{1\}$  显然是收敛的.

• 例 3 下列计算方法是否正确? 为什么?

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \cdots \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \cdots \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= 1; \end{aligned}$$

(3) 设  $q > 1$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = a$ , 因为  $q^{n+1} = q^n q$ , 两边取极限得  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = q \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = q a$ , 从而必有  $a = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

解 三个计算方法都不正确. 有理运算法则只在有限项时成立, 而题(1)、题(2)中均为无限项, 所以等式不成立. 题(3)中  $q^{n+1}$

(6) 正确. 因为, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} aa_n = aA$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|aa_n - aA| < \epsilon$ , 即

$$|a| |a_n - A| < \epsilon \Rightarrow |a_n - A| < \epsilon / |a|,$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

• 例 6 用  $\epsilon$ - $N$  定义证明下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n}) = \frac{1}{2}.$$

证 用  $\epsilon$ - $N$  定义证明极限, 就是要  $\forall \epsilon > 0$ , 找到相应的  $N(\epsilon)$ , 若  $N(\epsilon)$  不存在, 则无极限. 一般由  $|a_n - a| < \epsilon$  经变形(放大)得出  $n > N$ .

$$(1) \forall \epsilon > 0, \text{ 由 } \left| \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \epsilon, \text{ 得 } n > \frac{1}{\epsilon}, \text{ 故取 } N = \left[ \frac{1}{\epsilon} \right], \text{ 则当 } n > N \text{ 时, 恒有 } \left| \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - 0 \right| < \epsilon. \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.$$

$$(2) \forall \epsilon > 0, \text{ 由 } \left| (n - \sqrt{n^2 - n}) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \epsilon, \text{ 得 } n > \frac{1}{\epsilon}, \text{ 故取 } N = \left[ \frac{1}{\epsilon} \right], \text{ 则当 } n > N \text{ 时, 恒有 } \left| n - \sqrt{n^2 - n} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon. \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n}) = \frac{1}{2}.$$

• 例 7 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  ( $a > 0$ ), 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ .

证 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 所以  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|a_n - a| < \epsilon$ . 而

$$\left| \sqrt{a_n} - \sqrt{a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \right| < \frac{1}{\sqrt{a}} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{a}},$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ .

• 例 8 设由数列  $\{a_n\}$  的奇数项与偶数项组成的两个子列收敛于同一极限  $a$ , 证明:  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ .

证 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$  知,  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N_1$  时, 恒



有  $|a_{2n} - a| < \epsilon$ ; 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a$ , 则对同一  $\epsilon > 0$ ,  $\exists N_2 \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N_2$  时, 恒有  $|a_{2n+1} - a| < \epsilon$ . 故只需取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 上述两个不等式都成立, 即  $|a_n - a| < \epsilon$ . 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

• 例 9 求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right); \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n});$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[5]{2} \cdots \sqrt[n]{2}; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \sin^2 n};$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+n^3} + \frac{4}{2+n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n+n^3} \right);$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{1+n} \right)^n; \quad (9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n-4} \right)^{n+4}$$

解 利用恒等变形、有理化、夹逼原理求解.

$$\begin{aligned} (1) \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{5n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 6/n + 11/n^2 + 6/n^3}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-2/3)^n}{3 - 2(-2/3)^n} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n(n+1)/2}{n+2} - \frac{n}{2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2(n+2)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}[(\sqrt{n+4})^2 - (\sqrt{n})^2]}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = 2. \end{aligned}$$

$$(5) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/2+1/4+\cdots+1/2^n} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1-0/2^n}{1-1/2}} = 2.$$

$$(6) \text{ 因为 } \sqrt[3]{2} \leq \sqrt[n]{2 + \sin^2 n} \leq \sqrt[3]{3},$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3} = 1$ , 依夹逼原理, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2 + \sin^2 n} = 1$ .

(7) 因为  $1 + 4 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ , 所以

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)} &\leq \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n} \\ &\leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)} = \frac{1}{3},$$

依夹逼原理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$(8) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1 \cdot n/(n+1)} = e.$$

$$(9) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \left( \frac{-1}{n-4} \right) \right]^{-(n-4) \cdot [-(n+4)/(n-4)]} = e^{-1}.$$

• 例 10 判别下列数列的敛散性:

$$(1) a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right);$$

$$(3) a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个}}, \cdots;$$

$$(4) a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!};$$

$$(5) a_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2}.$$

解 (1) 显然,  $\{a_n\}$  是单调增加数列, 且

$$a_n < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3} = \frac{1}{2},$$

所以  $\{a_n\}$  单调增加有上界, 必然收敛.

(2) 显然,  $\{a_n\}$  是单调减少数列, 且  $a_n > 0$ , 所以  $\{a_n\}$  单调减少



有下界,必然收敛.

(3) 显然  $a_1 < a_2$ , 设  $a_{k-1} < a_k$ , 则

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} > \sqrt{2+a_{k-1}} = a_k,$$

所以  $\{a_n\}$  是单调增加数列.

又  $a_1 < \sqrt{2}+1$ , 设  $a_k < \sqrt{2}+1$ , 则

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+\sqrt{2}+1} < \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} < \sqrt{2}+1,$$

所以  $\{a_n\}$  有上界.

依单调有界准则,  $\{a_n\}$  收敛.

(4)  $\{a_n\}$  显然单调增加. 又

$$a_n < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$< 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

所以  $\{a_n\}$  有上界. 依单调有界准则,  $\{a_n\}$  收敛.

(5) 因为

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n} \quad (m > 2), \end{aligned}$$

所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 2} \right\rceil$ , 当  $m > n > N$  时, 必有  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , 即

$|a_m - a_n| < \varepsilon$ , 故依 Cauchy 准则,  $\{a_n\}$  收敛.

• 例 11 证明: Cauchy 数列是有界的.

证 设  $\{a_n\}$  是 Cauchy 数列, 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n, m > N$  时,  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ . 若取  $\varepsilon = 1$ , 则  $\exists N_1 \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N_1$ ,  $m = N_1 + 1$  时, 有  $|x_n - x_{N_1+1}| < 1$ , 所以

$$|x_n| < 1 + |x_{N_1+1}|,$$

取  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_1}|, |x_{N_1+1}| + 1\}$ ,  
 则  $\forall n \in \mathbf{N}_+$ , 都有  $|x_n| \leq M$ , 从而知, Cauchy 数列是有界的.

• 例 12 求下列数列的极限点:

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots;$$

$$(2) a_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n;$$

$$(3) a_n = \frac{n + (-1)^n n}{2} + \frac{1}{n}.$$

解 先考察有几个极限点, 再求出极限点.

(1) 因为  $\frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}$  是不同的通项形式, 所以有两个极限点.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1.$$

(2) 因为  $(-1)^n$  因  $n$  的奇偶而不同, 所以有两个极限点,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + 2 = 5,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) - 2 = 1.$$

(3) 同题(2), 有两个极限点.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

• 例 13 设  $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1-x_n}$ , 证明: 数列  $\{x_n\}$

收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  与  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ .

证 首先证明  $\{x_n\}$  单调有界, 再求极限.

用数学归纳法证. 因为  $x_2 - x_1 = 1 - \sqrt{1-x_1} - x_1 < 0$ , 所以  $x_2 < x_1$ ; 设  $x_k < x_{k-1}$ , 则  $x_{k+1} = 1 - \sqrt{1-x_k} < 1 - \sqrt{1-x_{k-1}} = x_k$ . 知  $\{x_n\}$  单调减少, 又  $x_n > 0$ , 故依单调有界准则, 数列  $\{x_n\}$  收敛.



设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 对  $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$  两边取极限, 得

$$A = 1 - \sqrt{1 - A} \Rightarrow (1 - A)^2 = 1 - A \Rightarrow A = 0 \text{ 或 } A = 1 \text{ (舍去)},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x_n}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

• 例 14 设  $\{a_n\}$  单调增加,  $\{b_n\}$  单调减少,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$ ,

证明:  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  都收敛, 且有相同的极限.

证 由题设知  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ , 故  $\{a_n\}$  单调增加有上界,  $\{b_n\}$  单调减少有下界, 依单调有界准则, 数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  都收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [(b_n - a_n) + a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

例 15 设  $a_1 = \sqrt{1/2}$ ,  $a_n = \sqrt{1/2 + a_{n-1}/2}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a_2 \cdots a_n$ .

解 利用特殊值性质, 设  $\theta = \pi/2$ , 则

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\theta}{2},$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{a_1}{2}} = \sqrt{\left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)/2} = \cos \frac{\theta}{2^2}.$$

设  $a_k = \cos \frac{\theta}{2^k}$ , 则

$$a_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{a_k}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\theta}{2^k}}{2}} = \cos \frac{\theta}{2^{k+1}},$$

故  $a_n = \cos \frac{\theta}{2^n}$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 a_2 \cdots a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \frac{2^n \sin(\theta/2^n)}{2^n \sin(\theta/2^n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \sin(\theta/2^n)} = \sin \theta / \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n} \theta \right] \\
&= \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\sin(\pi/2)}{(\pi/2)} = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

**例 16** 设  $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$  ( $n \geq 2$ ), 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$ .

**解** 已知  $a_1 > 1$ , 设  $a_{n-1} > 1$ , 则

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1}^2 - 1 > 1, \\
a_n^2 - 1 &= (a_n - 1)(a_n + 1) = (2a_{n-1}^2 - 1 - 1)(2a_{n-1}^2 - 1 + 1) \\
&= 2^2 a_{n-1}^2 (a_{n-1}^2 - 1) = 2^4 a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 (a_{n-2}^2 - 1) \\
&= \cdots = 2^{2(n-1)} a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 \cdots a_1^2 (a_1^2 - 1) \\
&= a^{2n+1} a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 \cdots a_1^2 = 2(2^n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1)^2,
\end{aligned}$$

所以 
$$\frac{a_n^2 - 1}{(2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^2} = 2.$$

而 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = 0,$$

故 
$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{(2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - 1}{(2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^2} = 2,
\end{aligned}$$

从而 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = \sqrt{2}.$$

**• 例 17** 判别数列  $\{x_n\}$  的收敛性, 其中

$$\begin{aligned}
x_n &= a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n \\
&(|q| < 1, |a_k| \leq M, k = 0, 1, 2, \cdots).
\end{aligned}$$

**解** 因为, 对于  $m > n$ , 有

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |a_{n+1} q^{n+1} + a_{n+2} q^{n+2} + \cdots + a_m q^m| \\
&\leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+1} + \cdots + |q|^m) \\
&< M |q|^{n+1} \frac{1}{1 - |q|},
\end{aligned}$$



所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N},$  当  $m, n > N$  时,  $|x_m - x_n| < \varepsilon.$

从而, 依 Cauchy 准则, 数列  $(x_n)$  收敛.

• 例 18 求下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 2}{x^n + 2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right];$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2 \sin^2 n + \cos^2 n};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{3n};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 - 1}{n^3 - 2} \right)^{4n^2}.$$

解 (1) 讨论  $x$  取不同值时的极限.

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 2}{x^n + 2} = -\frac{1}{3};$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 2}{x^n + 2} \text{ 不存在};$$

$$\text{当 } |x| < 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 2}{x^n + 2} = -1;$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 2}{x^n + 2} = 1.$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1/3)^n}{1 - (-1/3)} = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \\ &\quad \cdots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 1}{2^2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{3^2} \cdot \cdots \cdot \frac{(n+1)(n-1)}{n} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \text{ 因 } 1 \leq \sqrt[3]{2\sin^2 n + \cos^2 n} = \sqrt[3]{1 + \sin^2 n} \leq \sqrt[3]{2},$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2} = 1$ , 故依夹逼原理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2\sin^2 n + \cos^2 n} = 1$$

$$(5) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{-\frac{(n+2)[-3n/(n+2)]}{1}} = e^{-3}.$$

$$(6) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3-2}\right)^{\frac{(n^3-2) \cdot 4n^3/(n^3-2)}{1}} = e^4.$$

利用重要极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  求极限时应注意其形式特点: 底是 1 与一个无穷小量之和, 而指数为同一无穷小的倒数. 只要将所求的  $x_n$  凑成这一形式, 就可利用重要极限求解.

**例 19** 设  $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ .

**证** 先证  $\{x_n\}$  的单调有界性, 再求极限. 因为

$$(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t})^2 \geq 0 \Rightarrow t + 1/t \geq 2 (t > 0),$$

所以 
$$x_n = \frac{\sqrt{a}}{2} \left( \frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}} \right) \geq \sqrt{a}, \quad n \in \mathbf{N}_+,$$

从而 
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n,$$

即  $\{x_n\}$  单调减少且有下界, 故  $\{x_n\}$  收敛.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则对  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$  两边取极限, 得

$$A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{a}{A}\right) \Rightarrow A^2 = a \Rightarrow A = \pm \sqrt{a} (\text{负值舍去}),$$

得 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

**• 例 20** 证明:

$$(1) \text{ 若 } a_n \rightarrow 0, \text{ 则 } b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$



(2) 若  $a_n \rightarrow a$ , 则  $b_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

证 (1) 可视为题(2) 的特例, 即  $a = 0$ .

(2) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 恒有

$|a_n - a| < \epsilon$ , 于是

$$\begin{aligned} |b_n - a| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} |(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)| \\ &\leq \frac{1}{n} (|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|) \\ &\leq \frac{1}{n} [(|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|) + (n - N)\epsilon]. \end{aligned}$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|) = 0$ ,

从而  $|b_n - a| < \epsilon$ .

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

• 例 21 证明下列数列收敛, 并求其极限:

(1)  $x_n = n^k/a^n$  ( $a > 1, k > 0$ );

(2)  $a_n = \sqrt[n]{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}$  ( $a > 0$ );

(3)  $0 < x_1 < \sqrt{3}, x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ ;

(4)  $a_1 = 1, a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1} + 1}$  ( $n = 2, 3, \cdots$ ).

证 (1) 已知  $a > 1$ , 令  $a = 1 + \lambda$  ( $\lambda > 0$ ), 则

$$a^n = (1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots + \lambda^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2,$$

当  $n > 2$  时, 有  $n-1 > n/2$ , 则

$$a^n > \frac{n^2\lambda^2}{4} = \frac{n^2(a-1)^2}{4}.$$

当  $k \leq 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n n^{-k}} = 0$ ;

当  $k = 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ , 因为

$$0 < \frac{n}{a^n} = \frac{n}{a^n} < \frac{4n}{n^2(a-1)^2} \rightarrow 0;$$

当  $k > 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ . 因为  $a^{1/k} > 1$ ,

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \left[ \frac{n}{(a^{1/k})^n} \right]^k \rightarrow 0.$$

(2) 先证单调有界, 再求极限.

$a_2 > a_1$  是显然的, 设  $a_k > a_{k-1}$ , 则

$$a_{k+1} = \sqrt{a + a_k} > \sqrt{a + a_{k-1}} = a_k,$$

所以  $\{a_n\}$  单调增加. 因为  $a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1$ , 设  $a_k < \sqrt{a} + 1$ , 则

$$a_{k+1} = \sqrt{a + a_k} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a} + 1,$$

从而  $\{a_n\}$  单调增加且有上界, 故  $\{a_n\}$  收敛.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 对  $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$  两边取极限, 得

$$A = \sqrt{a + A} \Rightarrow A = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4a}) \text{ (负值舍去)},$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a})$ .

(3) 先证  $\{x_n\}$  单调有界. 因为  $0 < x_1 < \sqrt{3}$ , 且

$$x_2 = \frac{3(1+x_1)}{3+x_1} = 1 + \frac{2x_1}{3+x_1},$$

所以  $x_2 - \sqrt{3} = \frac{(3-\sqrt{3})(x_1-\sqrt{3})}{3+x_1} < 0$ ,

即  $0 < x_2 < \sqrt{3}$ . 设  $0 < x_k < \sqrt{3}$ , 则

$$x_{k+1} - \sqrt{3} = \frac{(3-\sqrt{3})(x_k-\sqrt{3})}{3+x_k} < 0.$$



即由数学归纳法证得  $\{x_n\}$  单调增加且有上界  $\sqrt{3}$ , 故  $\{x_n\}$  收敛.

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 对  $x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$  两边取极限, 得

$$A = \frac{3(1+A)}{3+A} \Rightarrow A^2 = 3 \Rightarrow A = \pm\sqrt{3} (\text{负值舍去}),$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$ .

(4) 先证  $\{a_{2n-1}\}$  与  $\{a_{2n}\}$  单调有界. 依题意, 有

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{7}{5}, \quad a_4 = \frac{17}{12},$$

显然有  $a_1 < a_3, a_2 > a_4$ , 设  $a_{2k-1} < a_{2k+1}, a_{2k} > a_{2k+2}$ , 则

$$a_{2k+3} = 1 + \frac{1}{1+a_{2k+2}} > 1 + \frac{1}{1+a_{2k}} = a_{2k+1},$$

$$a_{2k+4} = 1 + \frac{1}{1+a_{2k+3}} < 1 + \frac{1}{1+a_{2k+1}} = a_{2k+2},$$

从而知  $\{a_{2n-1}\}$  单调增加,  $\{a_{2n}\}$  单调减少, 且  $1 \leq a_n < 2$ .

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = b$ . 对  $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$  两边取极限,

得

$$\begin{cases} a = 1 + \frac{1}{1+b}, \\ b = 1 + \frac{1}{1+a}, \end{cases} \Rightarrow b = a = \sqrt{2}.$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ .

• 例 22 设  $\{a_n\}$  为一单调增加的数列, 若它有一个子列收敛于  $a$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

证 设  $\{a_n\}$  单调增加, 其子列  $\{a_{n_k}\}$  收敛于  $a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $k > N$  时,  $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ . 令  $N' = n_{N+1}$ . 设  $n > N'$ . 由于  $n_1 < n_2 < \cdots \rightarrow +\infty$ , 故必有  $n_k (k > N)$  使得  $n_k \leq n < n_{k+1}$ , 从而

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon, \quad |a_{n_k} + 1 - a| < \varepsilon.$$

而  $a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_k} + 1$ , 故必有  $|a_n - a| < \varepsilon$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \{a_n\}$  收敛.

例 23 证明(O. Stolz 定理):若存在

$$(1) y_{n+1} > y_n; \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n},$$

则 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

证 (1) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$  (有限数), 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in$

$N_+$ , 当  $n > N$  时, 有  $a - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < a + \varepsilon$ . 于是, 得到一组不等式:

$$\begin{aligned} (y_{N+1} - y_N)(a - \varepsilon) &< x_{N+1} - x_N < (y_{N+1} - y_N)(a + \varepsilon), \\ (y_{N+2} - y_{N+1})(a - \varepsilon) &< x_{N+2} - x_{N+1} < (y_{N+2} - y_{N+1})(a + \varepsilon), \\ &\vdots \\ (y_n - y_{n-1})(a - \varepsilon) &< x_n - x_{n-1} < (y_n - y_{n-1})(a + \varepsilon). \end{aligned}$$

将不等式组中各对应部分相加, 得

$$(y_n - y_N)(a - \varepsilon) < x_n - x_N < (y_n - y_N)(a + \varepsilon),$$

即 
$$\left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right)(a - \varepsilon) < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right)(a + \varepsilon).$$

对于取定的  $\varepsilon$  及相应的  $n$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时  $y \rightarrow +\infty$ , 故

$$a - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq a + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

(2) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$ , 则  $\forall M \in \mathbf{R}, \exists N \in N_+$ , 当  $n > N$

时,  $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > M$ . 与题(1)类似, 可得一不等式组, 经相同步骤后

可得

$$\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} > M \Rightarrow x_n - x_N > M(y_n - y_N).$$



移项后除以  $y_n$ , 得

$$\frac{x_n}{y_n} > M \left( 1 - \frac{y_N}{y_n} \right) + \frac{x_N}{y_n},$$

取  $n \rightarrow \infty$ , 则  $y_n \rightarrow +\infty$ , 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \geq M$ . 由  $M$  的任意性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

(3) 类似可证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = -\infty$  的情形.

**例 24** 证明: 若  $p$  为自然数, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2p}{p+1}.$$

**证** (1) 令  $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ ,  $y_n = n^{p+1}$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots} \\ &= \frac{(1+1/n)^p}{p+1+o(1/n)} \rightarrow \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

故依 O. Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

(2) 令  $x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}$ ,  $y_n = (p+1)n^p$ ,

则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(p+1)(n+1)^p + [n^{p+1} - (n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} \\ &= \frac{p(p+1)/2 \cdot n^{p-1} + \cdots}{p(p+1)n^{p-1} + \cdots} \rightarrow \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

移项后除以  $y_n$ , 得

$$\frac{x_n}{y_n} > M \left( 1 - \frac{y_N}{y_n} \right) + \frac{x_N}{y_n},$$

取  $n \rightarrow \infty$ , 则  $y_n \rightarrow +\infty$ , 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \geqslant M$ . 由  $M$  的任意性, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

(3) 类似可证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = -\infty$  的情形.

**例 24** 证明: 若  $p$  为自然数, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2p}{p+1}.$$

**证** (1) 令  $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ ,  $y_n = n^{p+1}$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots} \\ &= \frac{(1+1/n)^p}{p+1+o(1/n)} \rightarrow \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

故依 O. Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

(2) 令  $x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}$ ,  $y_n = (p+1)n^p$ ,

则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(p+1)(n+1)^p + [n^{p+1} - (n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} \\ &= \frac{p(p+1)/2 \cdot n^{p-1} + \cdots}{p(p+1)n^{p-1} + \cdots} \rightarrow \frac{1}{2}, \end{aligned}$$



故依 O. Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

(3) 令  $x_n = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p$ ,  $y_n = n^{p+1}$ , 则  $y_{n+1} > y_n$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , 且

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots} \\ &= \frac{(2+1/n)^p}{p+1+o(1/n)} \rightarrow \frac{2^p}{p+1}, \end{aligned}$$

故依 O. Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

**例 25** 证明: 数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

收敛.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n \quad (n \rightarrow \infty \text{ 时 } \varepsilon_n \rightarrow 0),$$

$C = 0.577216\cdots$  称为 Euler 数.

**证** 因为  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$  (可对  $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$  取对数证出), 所以

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

从而  $\{x_n\}$  单调减少. 又

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0,$$

于是  $\{x_n\}$  单调减少且有下界, 故  $\{x_n\}$  收敛.

**例 26** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$ .

**解** 令  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ , 则

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$= x_{2n} - x_n = \ln 2n + \varepsilon_{2n} - \ln n - \varepsilon_n = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n.$$

由例 25 知, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\varepsilon_{2n} \rightarrow 0, \varepsilon_n \rightarrow 0$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

**例 27** 设  $x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) (n \geq 3)$ , 利

用闭区间套定理证明  $\{x_n\}$  收敛并求其极限值.

**证** 因为  $x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) (n \geq 3)$ , 故

$$\prod_{i=3}^n (x_i - x_{i-1}) = \prod_{i=3}^n \left[ -\frac{1}{2}(x_{i-1} - x_{i-2}) \right] = \prod_{i=2}^{n-1} \left( -\frac{1}{2} \right) (x_i - x_{i-1}),$$

约去两边相同因子, 得

$$x_n - x_{n-1} = \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-2} (x_2 - x_1) = -\left( \frac{1}{2} \right)^{n-2} (b-a),$$

再求和, 得  $x_n - x_1 = (b-a) \frac{1 - (-1/2)^{n-1}}{1 - (-1/2)}$ .

从而  $x_n = \frac{2}{3}(b-a) \left[ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right] + a$ ,

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b)$ .

• **例 28** 设  $\{a_n\}$  是一 Cauchy 数列, 证明它必有收敛子列, 且它的任一子列也是 Cauchy 数列.

**证** 因为  $\{a_n\}$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则由收敛的充要条件知,



对  $\{a_n\}$  的每个子列  $\{a_{n_k}\}$ , 均有  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ , 即  $\{a_{n_k}\}$  收敛. 依 Cauchy 收敛原理,  $\{a_{n_k}\}$  也是 Cauchy 数列.

• 例 29 设  $A \subseteq \mathbb{R}$  是一个数集,  $a \in \mathbb{R}$ . 若  $a$  的任何去心邻域内都含有  $A$  中的点, 则称  $a$  是集  $A$  的聚点. 证明:

(1)  $a$  是  $A$  的聚点  $\Leftrightarrow$  存在  $A$  中由不同点(数)组成的点列(数列)收敛于  $a$ ;

(2) (聚点原理) 有界无穷实数集至少有一个聚点.

证 (1) 充分性 设  $a$  是  $A$  的聚点, 则对点  $a < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$  与  $c_1 < c_2 < \cdots < c_n < \cdots < a$ , 由聚点定义知, 在  $(c_i, b_i)$  内含有异于  $a$  的  $A$  中的点  $a_i$ , 而  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ .

必要性 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\forall \varepsilon_i > 0, \exists N_i \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N_i$  时, 恒有  $|a_{n_i} - a| < \varepsilon_i$ . 即当取  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_n > \cdots$  时, 在闭区间套  $\{[a - \varepsilon_i, a + \varepsilon_i]\}$  内存在由  $A$  中不同点组成的点列  $\{a_{n_i}\}$  收敛于  $a$ .

(2) 由 Bolzano-Weierstrass 定理知, 在有界无穷实数集中任取一数列, 则为有界实数列, 因而必有收敛子列. 依题(1)知, 收敛子列的收敛点即为聚点.

• 例 30 证明:  $a$  是数列  $\{a_n\}$  的极限点  $\Leftrightarrow a$  的任何邻域内含有  $\{a_n\}$  的无穷多项.

证 充分性 若  $a$  是数列  $\{a_n\}$  的极限点, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 于是在  $a$  的任何  $\delta$  邻域  $(a - \delta, a + \delta)$  内作闭区间套  $\{[a - \varepsilon_i, a + \varepsilon_i]\}$ , 可知在  $a$  的  $\delta$  邻域  $(a - \delta, a + \delta)$  内含有  $\{a_n\}$  的无穷多项.

必要性 若在  $a$  的任何邻域含有  $\{a_n\}$  的无穷多项, 即存在  $\{a_n\}$  的一个有界子列. 于是, 依 Bolzano-Weierstrass 定理, 必有一个收敛子列. 而  $a$  是子列的极限点, 所以  $a$  为  $\{a_n\}$  的极限点.

例 31 证明: 数列  $\{\sin n\}$  不存在极限.

证 用反证法证. 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+2) = a,$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(n+2) - \sin n] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sin 1 \cdot \cos(n+1) = 0$ .

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 0$ ,

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sin n \cos n = 0$ ,

即  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n = 0$ ,

从而  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = 0$ ,

而这是不可能的,所以数列 $\{\sin n\}$ 不存在极限.

## 第四节 函数的极限

### 知识要点

1. 设  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  是任一函数,  $a \in \mathbf{R}$ . 如果存在常数  $a \in \mathbf{R}$ , 它与  $f$  满足如下关系:  $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ , 使得  $\forall x > M$ , 恒有  $|f(x) - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时的极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ .

2. 设  $f: \dot{U}(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$  是任一函数, 如果存在常数  $a \in \mathbf{R}$ , 它与  $f$  满足如下关系:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  且  $x \in \dot{U}(x_0)$  时, 恒有  $|f(x) - a| < \varepsilon$ , 则称  $a$  是  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ .

3. Heine 定理 设  $f: \dot{U}(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$  为一函数, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  的充要条件是: 对于  $\dot{U}(x_0)$  中的任何数列  $\{x_n\}$ , 只要  $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 相应的函数值数列  $\{f(x_n)\}$  都收敛于  $a$ .

4. 唯一性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则必唯一.

5. 局部有界性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处是局部有界的, 即  $\exists M > 0$  与  $\delta > 0$ , 使得  $\forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ , 都有  $|f(x)| \leq M$ .

6. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ .



## 疑难解析

### 1. 怎样理解函数极限的 $\epsilon$ - $\delta$ 定义?

答 函数极限的  $\epsilon$ - $\delta$  定义是  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  情形的极限定义.

$\epsilon$  是用来衡量  $f(x)$  与常数  $a$  的接近程度的, 可以按要求取无论多么小的正数, 但一旦取定后是不可更改的.  $\delta$  是用来衡量自变量  $x$  取值与定值(点)  $x_0$  的接近程度的, 是一个与  $\epsilon$  相应的量. 一般地,  $\epsilon$  越小,  $\delta$  也越小, 但  $\delta$  不是  $\epsilon$  的函数.

$\epsilon$ - $\delta$  定义中强调了  $\dot{U}(x_0)$ , 说明极限只研究  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  的变化趋势, 而不考虑  $x = x_0$  处的情形, 因此突出了  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

### 2. Heine 定理有什么实际意义?

答 Heine 定理建立了函数极限与数列极限之间的联系. 即若有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , 则对  $\dot{U}(x_0)$  中任一数列  $\{x_n\}$ , 只要当  $n \rightarrow \infty$  时有  $x_n \rightarrow x_0$ , 则函数列  $\{f(x_n)\}$  都收敛于  $a$ . 反过来, 若  $\dot{U}(x_0)$  中任一数列  $\{x_n\}$ , 在  $n \rightarrow \infty$  时有  $x_n \rightarrow x_0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ . 这里, 强调任一数列这一条件. 若只有某个或某几个数列在  $n \rightarrow \infty$  时有  $x_n \rightarrow x_0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  不成立.

利用 Heine 定理不仅可以判断某些函数的极限不存在, 还可以将一些求函数极限问题化为求数列极限的相应问题来讨论, 由此带来许多方便.

### 3. 怎样利用两个重要极限求极限?

答 利用两个重要极限求极限, 要注意两个重要极限的形式, 即转化所求极限, 使之凑成重要极限形式, 就可以利用重要极限的结果.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . 其形式特点是: 分母是一个无穷小, 分子是同一无穷小的正弦函数. 因此

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ . 其形式特点是:底是 1 与一个无穷小之和,指数是同一无穷小的倒数. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

例如 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+a}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{x+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 / \left(1 + \frac{b}{x+a}\right)^{x+a} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 / \left(1 + \frac{a}{x+b}\right)^{x+b} \\ &= 1/e^b \cdot 1/e^a = e^{-(a+b)}. \end{aligned}$$

### 典型例题与习题详解

要求正确理解函数极限的  $\epsilon\delta$  定义和  $\epsilon M$  定义,并能运用极限概念说明具体问题.

• 例 1 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , 且  $f(x)$  在  $x_0$  有定义. 在  $x \rightarrow x_0$  的过程中,  $x$  可否取到  $x_0$ ? 是否有  $a = f(x_0)$ ?

解 可以取到  $x_0$ , 但不一定有  $a = f(x_0)$ . 如

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ 2, & x = 2. \end{cases}$$

$x$  可以取到 2, 而且有  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ , 但  $f(2)$  不等于 4.

• 例 2 下列命题是否正确?若正确,给出证明;若不正确,举



出反例.

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  的充要条件是  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - a| = 0$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2$ ;

(3) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = a$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ;

(4) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$  都存在, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  存在;

(5) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$  都存在, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  必存在;

(6) 若在  $x_0$  的某邻域内  $f(x) > 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ , 那么必有  $a > 0$ .

解 (1) 不正确. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

有  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ , 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在.

(2) 正确. 因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f^2(x) - a^2] = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + a] \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - a] = 0,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2$ .

(3) 不正确. 因为  $\{1/n\}$  仅为  $x \rightarrow 0^+$  的一个子列, 而 Heine 定理要求的条件是一切子列. 例如, 当  $x = 1/n$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{2\pi}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n\pi = 0;$$

但当  $x = 2\pi/(2n\pi + \pi/2)$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{2\pi}{2\pi/(2n\pi + \pi/2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + \pi/2) = 1,$$

从而极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{2\pi}{x}$  不存在.

(4) 正确.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \{[f(x) + g(x)] - f(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).\end{aligned}$$

(5) 不正确. 例如

$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin(1/x),$$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  不存在, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0.$$

(6) 不正确. 例如,  $f(x) = (x - x_0)^2$  在  $U(x_0)$  内,  $f(x) > 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

例 3 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan(\pi x/2)$ .

解 用代换法. 令  $u = 1 - x$ , 则  $x \rightarrow 1$  时  $u \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{u \rightarrow 0} u \tan \frac{\pi(1-u)}{2} = \lim_{u \rightarrow 0} u \cot \frac{\pi u}{2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi u}{2} \frac{\pi u/2}{\sin(\pi u/2)} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

• 例 4 证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$$

证 (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists M_1 > 0$ , 当  $x > M_1$  时, 有  $|f(x) - a| < \epsilon$ . 类似地,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ , 则对同一  $\epsilon > 0, \exists M_2 > 0$ , 当  $x < -M_2$  时, 有  $|f(x) - a| < \epsilon$ . 如果有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ , 对同一  $\epsilon > 0, \exists M > 0$ , 当  $|x| > M$  时, 有  $|f(x) - a| < \epsilon$ . 因此, 只需取  $M = \max\{M_1, M_2\}$ , 上述三个不等式同时成立. 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a.$$

(2) 类似于题(1). 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 当  $0 < x - x_0 < \delta_1$  时, 有  $|f(x) - a| < \epsilon$ ; 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ , 对同一



$\epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 当  $0 < x_0 - x < \delta_2$  时, 有  $|f(x) - a| < \epsilon$ . 而如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , 对同一  $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - a| < \epsilon$ . 故只需取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 上述三个不等式都成立. 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$$

• 例 5 证明函数极限的唯一性、局部保号性与局部保序性.

证 证明命题时, 能用极限定义直接证明为最佳. 如直接证明有困难, 可考虑用反证法.

(1) 用反证法证. 设有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , 且  $a \neq b$ . 不妨设  $a < b$ , 则由  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , 取  $\epsilon_0 = (b - a)/2 > 0$ , 则  $\exists \delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时, 使得  $|f(x) - a| < \epsilon_0$ . 类似地, 由  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ , 对同一  $\epsilon_0 > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时, 使得  $|f(x) - b| < \epsilon_0$ . 于是有

$$\begin{aligned} |f(x) - a| < \epsilon_0 &\Rightarrow a - \epsilon_0 < f(x) < a + \epsilon_0 = (a + b)/2, \\ |f(x) - b| < \epsilon_0 &\Rightarrow b - \epsilon_0 > f(x) > b - \epsilon_0 = (a + b)/2. \end{aligned}$$

得出矛盾. 故必  $a = b$ , 即极限唯一.

(2) 不妨设  $a > 0$ , 由  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ , 则  $\forall \epsilon_0 = a/2, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 使得  $|f(x) - a| < \epsilon_0 = a/2$ , 即  $0 < a/2 < a - \epsilon_0 < f(x) < a + \epsilon_0$ , 故命题成立.

(3) 用反证法证. 设当  $f(x) \leq g(x)$  时,  $a \geq b$ , 则  $a - b \geq 0$ . 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = a - b \geq 0$ , 故依局部保号性知,  $f(x) - g(x) \geq 0$ , 即  $f(x) \geq g(x)$  与题设矛盾. 故假设不成立, 必  $a \leq b$ .

• 例 6 下列运算有无错误? 如有错, 错在何处?

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x / \lim_{x \rightarrow 0} x = \frac{0}{0} = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x / \lim_{x \rightarrow +\infty} x = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

解 (1) 有错误. 由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , 因此  $\frac{0}{0}$  是未定式, 不能相约而得出 1.

(2) 有错误.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  不存在. 因为当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\sin x$  在  $-1$  与  $1$  间无穷多次振荡.

(3) 有错误.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  不存在. 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin \frac{1}{x}$  在  $-1$  与  $1$  间无穷多次振荡.

• 例 7 用极限定义证明下列各题:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

证 用极限定义证明, 要分不同情形讨论. 对  $x \rightarrow x_0$  的情形, 要由给定的  $\epsilon$ , 找出相应的  $\delta$ ; 对  $x \rightarrow \infty$  的情形, 要由给定的  $\epsilon$ , 找出相应的  $M$ . 一般来说, 可由  $|f(x) - a| < \epsilon$  经恒等变形, 找出  $|x - x_0| < \delta$  或  $|x| > M$ . 为了简便, 常用放大法; 对较复杂的问题, 要用限值法.

(1)  $\forall \epsilon > 0$ , 要  $|x^2 - 4| = |x+2||x-2| < \epsilon$ . 考虑到  $x \rightarrow -2$ , 可以限定  $|x+2| < 1$ , 于是  $|x-2| < 5$ , 所以

$$|x^2 - 4| < 5|x+2| < \epsilon \Rightarrow |x+2| < \epsilon/5.$$

故  $\forall \epsilon > 0$ , 只需取  $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ , 当  $0 < |x+2| < \delta$  时, 恒有  $|x^2 - 4| < \epsilon$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$ .

(2)  $\forall \epsilon > 0$ , 要  $|\arctan x - \pi/2| < \epsilon$ , 当且仅当  $\pi/2 - \arctan x < \epsilon$ . 对不等式两边取正切, 得

$$\tan(\pi/2 - \arctan x) < \tan \epsilon \Leftrightarrow \cot \arctan x < \tan \epsilon,$$

$$\text{即 } 1/\tan \arctan x < \tan \epsilon \Leftrightarrow 1/x < \tan \epsilon \Leftrightarrow x > \cot \epsilon.$$

故只需取  $M = \cot \epsilon$ , 则当  $x > M$  时, 恒有



从而  $|\arctan x - \pi/2| < \epsilon$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2$ .

(3)  $\forall \epsilon > 0$ , 要  $|\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - 0| < |\sqrt{x}| < \epsilon$ , 只要  $\delta = \epsilon^2$ . 则当  $|x| < \delta$  时, 恒有

$$|\sqrt{x} \sin(1/x) - 0| < \epsilon,$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$ .

(4)  $\forall \epsilon > 0$ , 要

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{2x(x-1) + (x-1)}{2(1+x)} \right| \\ &\leq \frac{2}{2} \frac{|x|+1}{1+x} |x-1| < \epsilon. \end{aligned}$$

考虑到  $x \rightarrow 1$ , 可限定  $0 < |x-1| < 1$ , 则

$$|x| < 2, \quad 2|x|+1 < 5.$$

而  $|x+1| = |x-1+2| > 2 - |x-1| > 2-1=1$ ,

从而  $\left| \frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{2} \right| < \frac{5}{2} |x-1| < \epsilon$ .

故只需取  $\delta = \min\{1, 2\epsilon/5\}$ , 则当  $0 < |x-1| < \delta$  时, 恒有

$$\left| \frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon, \quad \text{即} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

• 例 8 用Heine 定理证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \sin x).$$

证 用Heine 定理证明极限不存在, 只需取两个子列  $\{x_n\}$  和  $\{x'_n\}$ , 使当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x'_n$  和  $x_n \rightarrow 0$  (或  $+\infty$ ), 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$  不相等.

$$(1) \text{ 取 } x_n = \frac{1}{2n\pi}, \text{ 则 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } x_n \rightarrow 0, \text{ 而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_n} = 1;$$

$$\text{取 } x'_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}, \text{ 则 } x'_n \rightarrow 0, \text{ 而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x'_n} = 0.$$

所以依Heine 定理, 极限不存在.

(2) 取  $x_n = 2k\pi + 3\pi/2$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(1 + \sin x_n) = 0;$$

取  $x'_n = 2n\pi$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = +\infty$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n(1 + \sin x'_n) = +\infty.$$

所以依Heine 定理, 极限不存在.

• 例 9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{a+x} - \sqrt{x}) \quad (a \in \mathbf{R});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (m, n \in \mathbf{N}_+);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (m, n \in \mathbf{N}_+);$$

$$(6) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \quad (n \in \mathbf{N}_+, x \text{ 与 } \Delta x \text{ 无关});$$

$$(7) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \quad (x \text{ 与 } \Delta x \text{ 无关});$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad (n \in \mathbf{N}_+).$$

解 先将函数式进行恒等变形, 如消去零因式、有理化因式、展开因式或通分、进行三角恒等变换等, 然后再求极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = -3.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{a+x} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}a}{\sqrt{a+x} + \sqrt{x}} = \frac{a}{2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}{2x} = \sqrt{2}.$$



$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1+nm x + n(n-1)m^2 x^2/2! + \cdots + m^n x^n}{x^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1+mn x + m(m-1)n^2 x^2/2! + \cdots + n^m x^m}{x^2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2} n(n-1)m^2 - \frac{1}{2} m(m-1)n^2 + o(x) \right] \\
 &= mn(n-m)/2.
 \end{aligned}$$

(5) 当  $m=n$  时, 显然极限为 0. 当  $m \neq n$  时, 不妨设  $m < n$ , 且  $m+l=n$  ( $n < m$  类似可证), 则

$$\begin{aligned}
 & \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \\
 &= \frac{m(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) - n(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})} \\
 &= \frac{-l-lx-\cdots-lx^{n-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{n-1}}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})} \\
 &= -\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^{m-1})} \\
 &\quad - \frac{l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^{m-1})},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } & \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \\
 &= -\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)] + l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn} \\
 &= -\frac{ml(l-1)/2 + ln(m+1)/2}{mn} = \frac{m-n}{2},
 \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{m-n}{2}$  (对  $m=n$  也适合).

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots + \Delta x^n - x^n]
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}\Delta x/2 + \cdots + \Delta x^{n-1}]$$

$$= nx^{n-1}.$$

$$(7) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x.$$

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1} = \frac{1}{n}.$$

• 例 10 利用两个重要极限求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow n\pi} \frac{\sin x}{x - n\pi} \quad (n \in \mathbf{N}_+); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{1/x};$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad (8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3^n}\right)^{3^n}.$$

解 按疑难解析 3 求解.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x} \cos 2x = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{2(x/2)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow n\pi} \frac{\sin x}{x - n\pi} = \lim_{t \rightarrow x - n\pi} \frac{(-1)^n \sin t}{t} = (-1)^n.$$



$$(4) \tan \frac{\pi}{2}x = \cot\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \frac{\pi}{2}(x-1),$$

令  $t = x - 1$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi t/2)}{\sin(\pi t/2)} \frac{\pi t/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(-\frac{2}{x}\right)\right]^{-\frac{3}{2} \left(\frac{-2}{x}, 3x\right)} = e^{-2}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-2x)]^{-1/2x, (-2)} = e^{-2}.$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \pi = \pi.$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2/3^n)^{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2/3^n)^{3^n/2 \cdot 2} = e^2.$$

**例 11** 利用重要极限求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x}, \quad a > 0, b > 0, c > 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$$

**解** (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 - t}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a$ , 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right) \right]^{1/\left( \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right) \cdot \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{1-x} \right)} \\ &= e^{(\ln a + \ln b + \ln c)/3} = \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

由此可以推出

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad (a_i > 0).$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+a}} \cdot \frac{(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{x+b}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{[1+b/(x+a)]^{x+a}} \frac{1}{[1+a/(x+b)]^{x+b}}$$

$$= 1/e^b \cdot 1/e^a = e^{-(a+b)}.$$

**例 12** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$ .

**解** 因为函数中含有绝对值符号, 且分母中含  $x$ , 所以对  $x \rightarrow 0$ , 要用左、右极限讨论.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2e^{-4/x} + e^{-3/x}}{e^{-4/x} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= 0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} - \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= 2 - 1 = 1,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1$ .

**例 13** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$ .

**解** 先有理化, 再利用重要极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x}}{(1-\cos x)/x^2 + x\sin x/x^2}$$

$$= \frac{2}{1/2+1} = \frac{4}{3}.$$

**例 14** 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x}$ ,  $a > 0, a \neq 1$ .

**解** 对形如  $f(x)^{g(x)}$  形式 (又称幂指函数) 函数求极限, 可考虑用取对数后变形的办法.

令  $f(x) = \left( \frac{1}{x} \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x}$ , 则对  $a > 1, x > 0$ , 有



$$\ln f(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(a-1)}{x} + \frac{\ln(a^x-1)}{x}.$$

因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a-1)}{x} = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a^x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(1-a^{-x})}{x} + \ln a \right] = \ln a,$$

所以, 当  $a > 1$  时, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{1}{x} \frac{a^x-1}{a-1} \right)^{1/x} = \ln a,$$

而当  $0 < a < 1, x > 0$  时, 有

$$\ln f(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(1-a)}{x} + \frac{\ln(1-a^x)}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1-a^x)}{x} = 0,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{1}{x} \frac{a^x-1}{a-1} \right)^{1/x} = 0.$

从而  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} a, & a > 1, \\ 1, & 0 < a < 1. \end{cases}$

• 例 15 讨论下列函数的极限是否存在:

(1)  $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}, x \rightarrow 0;$

(2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ (1+x)^{1/x}, & x > 0, \end{cases} x \rightarrow 0;$

(3)  $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty.$

解 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e,$$

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = 0$ , 极限存在.

• 例 16 用夹逼原理证明  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$ , “[ ]” 表示取整.

证  $\forall x \neq 0$ ,  $\frac{1}{x} - 1 \leq \left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ . 而当  $x > 0$  时,  
 $1 - x < x \left[ \frac{1}{x} \right] \leq 1$ ; 当  $x < 0$  时,  $1 \leq x \left[ \frac{1}{x} \right] \leq 1 - x$ . 从而  
 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x) = 1$ , 于是, 依夹逼原理, 有  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$ .

• 例 17 证明: Dirichlet 函数  $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$  在任何  
 $x \in \mathbf{R}$  处的极限都不存在.

证 由实数的稠密性知, 对任一有理点  $a$ , 都有以  $a$  为极限的  
一无理点列  $\{x_n\}$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n \rightarrow a$  而  $f(x_n) = 0$ . 从而由  
Heine 定理知, 在有理点  $a$  处极限不存在.

同样, 对一无理点  $b$ , 也有以  $b$  为极限的有理点列  $\{y_n\}$ , 使得当  
 $n \rightarrow \infty$  时,  $y_n \rightarrow b$ , 而  $f(y_n) = 1$ , 所以在无理点  $b$  处极限也不存在.

综上可知, 在任何  $x \in \mathbf{R}$  处的极限都不存在.

• 例 18 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是周期函数, 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ , 则  $f(x) \equiv a$ .

证 用反证法证. 设  $f(x) \neq a$ , 则可设在点  $x_0$  处,  $f(x_0) = b \neq a$ , 从而可构造一点列  $\{x_n\}$ ,  $x_n = x_0 + nT$  ( $T$  为  $f$  的周期), 于是有  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = b$  这与  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  矛盾, 所以必有  $f(x) \equiv a$ .

• 例 19 设  $[a, b]$  是一个有限闭区间, 如果  $\forall x_0 \in [a, b]$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在. 证明:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

证 用反证法证. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界, 则存在数列  $\{x_k\}$   
 $\subseteq [a, b]$ , 使得当  $k \rightarrow \infty$  时,  $f(x_k) \rightarrow \infty$ . 这时, 必有子列  $\{x_{k_i}\} \subseteq$   
 $\{x_k\}$ , 使得当  $x_{k_i} \rightarrow x_0$ , 且有  $f(x_{k_i}) \rightarrow \infty$ . 与题设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在矛



盾.从而知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

• 例 20 设  $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  是无界函数, 证明:  $\exists \{x_k\} \subseteq [a, b]$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty$ .

证 因为  $f$  是无界函数, 则  $\forall M > 0$ , 至少有一点  $x_0$  存在, 使得  $f(x_0) > M$ . 不妨取  $M_1 = 1$ , 于是必有  $x_1$  存在, 使得  $f(x_1) > 1$ ; 再取  $M_2 = 2$ , 于是必有  $x_2$  存在, 使得  $f(x_2) > 2$ . …… 如此继续, 可得到一个序列  $\{x_k\}$ , 使得  $f(x_k) > k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). 于是  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty$ .

• 例 21 设  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ , 使得  $\forall x_1, x_2 > M$ , 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ .

证 充分性 取数列  $\{x_n\}$  与  $\{x_m\}$ , 使得对于  $x_n > M, x_m > M$ , 有  $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$ , 则数列  $\{f(x_n)\}$  极限存在. 不妨设  $f(x_n) \rightarrow a'$ , 当  $x > M$  时, 有  $|f(x) - f(x_n)| < \epsilon$ . 若令  $n \rightarrow \infty$ , 则有  $|f(x) - a'| < \epsilon$ , 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.

必要性 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ , 使得当  $x > M$  时, 有  $|f(x) - a| < \epsilon/2$ . 取  $x_1, x_2 > M$ , 则有

$$|f(x_1) - a| < \epsilon/2, \quad |f(x_2) - a| < \epsilon/2.$$

从而  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - a| + |f(x_2) - a| < \epsilon$ .

• 例 22 设  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  是单调增加函数, 证明下面三个命题是等价的:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在;
- (2)  $\{f(n)\}$  是收敛数列;
- (3)  $f$  在  $[0, +\infty)$  上有上界.

证 因为  $f$  是单调增加函数, 依命题(3),  $f$  在  $[0, +\infty)$  上有上界, 则依单调有界准则,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在; 又由 Heine 定理, 数列  $\{f(n)\}$  收敛, 即由命题(3)  $\Rightarrow$  命题(1)  $\Rightarrow$  命题(2).

又若命题(2) 成立, 则  $\{f(n)\}$  是收敛数列. 因为  $f$  单调增加, 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = a$ , 即  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 有

$|f(n) - a| < \varepsilon$ , 从而  $\{f(n)\}$  有界. 由此知  $f$  在  $[0, +\infty)$  上有界, 于是依单调有界准则,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 即由命题(2)  $\Rightarrow$  命题(3)  $\Rightarrow$  命题(1).

**例 23** 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b$ , 证明:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = a^b.$$

**证** 设  $\varphi(x) = v(x) \ln u(x)$ , 则由题设得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln u(x) = \ln a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b \ln a,$$

从而  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\varphi(x)} = e^{b \ln a} = a^b.$

公式  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$  称为幂指函数求极限公式.

## 第五节 无穷小量与无穷大量

### 知识要点

1. 当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 以零为极限的函数  $\alpha(x)$  称为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小量, 简称为无穷小. 规定数 0 为无穷小量.

2.  $\lim f(x) = a$  的充要条件是  $f(x) = a + \alpha(x)$ , 其中  $\alpha(x)$  是一个无穷小量.

3. 对自变量在相同趋势下的无穷小量, 有如下性质:

- (1) 有限个无穷小量的代数和是无穷小量;
- (2) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

4. 设  $\alpha(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量,  $f$  在  $x_0$  处是局部有界函数, 则  $\alpha(x)f(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量. 特别地,  $C\alpha(x)$  ( $C$  为常数) 是  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量.

5. 设  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  都是无穷小量, 且  $\beta(x) \neq 0$ .

- (1) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的高阶无穷小, 记作



$\alpha(x) = o(\beta(x))$ ;

(2) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$  ( $c \neq 0$ ), 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是同阶无穷小;

(3) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是等价无穷小, 记作  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;

(4) 若  $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c$  ( $c \neq 0, k > 0$ ), 则称  $\alpha(x)$  是关于  $\beta(x)$  的  $k$  阶无穷小.

6. 常用的等价无穷小有: 当  $x \rightarrow 0$  时,

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x),$$

$$1 - \cos x \sim x^2/2, \quad (1+x)^n \sim 1+nx,$$

$$\tan x - \sin x \sim x^3/2, \quad x - \sin x \sim x^3/6, \quad \tan x - x \sim x^3/3.$$

7. 设  $\alpha(x), \beta(x), \bar{\alpha}(x)$  与  $\bar{\beta}(x)$  都是无穷小, 若  $\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x)$ ,  $\beta(x) \sim \bar{\beta}(x)$ , 且  $\lim \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$  存在, 则  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  也存在, 且

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}.$$

8. 假设  $f: \overset{\circ}{U}(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$  是一个函数, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则称函数  $f(x)$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷大量, 简称无穷大.

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则称直线  $x = x_0$  是曲线  $y = f(x)$  的垂直渐近线; 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ , 则称  $y = a$  是曲线  $y = f(x)$  的水平渐近线.

9. 如果  $f(x)$  是无穷小量, 且  $f(x) \neq 0$ , 则在同一变化过程中,  $1/f(x)$  是无穷大量; 反之也成立.

有限个无穷大量之积仍是无穷大量.

无穷大量与有界量之和是无穷大量.

### 疑难解析

1. 怎样理解无穷小量和无穷大量?

**答** 无穷小量与无穷大量都是变量. 无穷小量是以零为极限的变量, 在自变量的变化过程中, 它的绝对值可以变得小于任何事先给定的无论多小的正数, 只有数 0 是唯一规定为无穷小量的常数. 无穷大量也是在自变量的变化过程中, 它的绝对值可以变得大于任何事先给定的无论多大的正数. 所以, 谈论无穷大量与无穷小量时必须指出是在自变量的什么趋向下.

2. 无穷小量等价代换时要注意哪些问题?

**答** 利用无穷小量的等价代换可以使求极限的计算变得简单易行. 但要注意的是, 当出现无穷小量的相互叠加(代数和)时, 不能进行代换, 必须分离后才能代换. 例如

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} & \text{不能代换为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3}, \text{ 只能} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x^2/2}{x^2} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. 怎样理解无穷小量的阶?

**答** 在自变量的同一趋向下, 不同的无穷小量趋于零的速度有所不同. 无穷小量的阶就是对它们收敛于零的速度快慢作出的一种判断. 但是, 并不是任何两个无穷小量都可以进行比较的. 如  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin(1/x)$  是无穷小量, 但它没有阶. 事实上, 若其阶为  $\alpha$ , 则  $\alpha \leq 1$ . 当  $\alpha < 1$  时  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} / x^\alpha = 0$ ; 而当  $\alpha = 1$  时  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} / x$  不存在, 都与无穷小量阶的定义相矛盾.

### 典型例题与习题详解

要求理解无穷小量与无穷大量的概念, 能运用等阶无穷小代换求极限.

• 例 1 下列说法是否正确? 为什么?



- (1) 无穷小量是很小很小的数,无穷大量是很大很大的数;  
 (2) 无穷小量就是数 0;  
 (3) 数 0 是无穷小量;  
 (4) 无穷大量一定是无界变量;  
 (5) 无界变量也一定是无穷大量;  
 (6) 无穷大量与有界量的乘积是无穷大量;  
 (7) 无限多个无穷小量之和仍为无穷小量.

解 (1) 不正确. 无穷小量(除数 0 外)与无穷大量都是变量. 在自变量的变化过程中,无穷小量的绝对值可以变得小于任何事先给定的无论多小的正数,无穷大量的绝对值可以变得大于任何事先给定的无论多大的正数.

(2) 不正确. 无穷小量是以零为极限的变量.

(3) 正确. 数 0 规定为无穷小量.

(4) 正确. 因为  $\lim f(x) = \infty$ , 所以  $|f(x)| \geq M$ .

(5) 不正确. 无穷大量是一个变化趋向,而无界变量不是变化趋向,只是一个数值界限. 如  $y = x \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  无界,但  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cos x \neq \infty$ .

(6) 不正确. 无穷大量与有界量的乘积可能出现  $0 \cdot \infty$  的不定式情形.

如  $x \rightarrow \infty$  时,  $x$  是无穷大量,  $\sin \frac{1}{x}$  是有界量,而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = 1.$$

(7) 不正确. 如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)/2}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

• 例 2 下列运算是否正确?如有错误,请指出错在何处.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

解 (1) 错误. 分子中含有无穷小量的代数和时, 不能用等价无穷小代换. 请参看疑难解析 2.

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^2 \sin \frac{1}{x}$  是与  $\sin(x^2 \sin \frac{1}{x})$  等价的无穷小量, 且分子只有一个因式, 所以计算是正确的.

• 例 3 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列函数哪些是  $x$  的高阶无穷小? 哪些是  $x$  的同阶无穷小? 哪些是  $x$  的低阶无穷小? 并指出无穷小的阶数.

(1)  $x^4 + \sin 2x, x \in \mathbf{R};$

(2)  $\sqrt{x(1-x)}, x \in (0, 1);$

(3)  $\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}(1-x), x \in \mathbf{R};$

(4)  $2x \cos x \sqrt[3]{\tan^2 x}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

(5)  $\csc x - \cot x, x \in (0, \pi).$

解 (1) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + \sin 2x}{x} = 2$ , 所以  $x^4 + \sin 2x$  是  $x$  的同阶无穷小, 阶数是 1.

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{x}} = 1$ , 所以  $\sqrt{x(1-x)}$  是  $x$  的低阶无穷小, 阶数是  $1/2$ .

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x} = 1$ , 所以

$\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}(1-x)$  是  $x$  的等价无穷小.

(4) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x \sqrt[3]{\tan^2 x}}{x x^{2/3}} = 2$ , 所以  $2x \cos x \sqrt[3]{\tan^2 x}$  是  $x$  的



高阶无穷小,阶数是  $5/3$ .

$$(5) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}, \text{ 所}$$

以  $\csc x - \cot x$  是  $x$  的同阶无穷小.

• 例 4 证明下列关系式:

$$(1) \arcsin x = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(2) \arctan x = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(3) \sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}x + o(x) \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(4) \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x} \sim \frac{1}{4}x^3 \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(5) \sqrt{x} + \sqrt{1+\sqrt{x}} \sim \sqrt{x} \quad (x \rightarrow \infty);$$

$$(6) \sin \frac{1}{x} = O(1) \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(7) x + x \sin x = o(x^2) \quad (x \rightarrow \infty);$$

$$(8) x \arctan \frac{1}{x} = O(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

证 有时需进行变量代换或者函数有理化后才能进行求极限计算.

$$(1) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \stackrel{t = \arcsin x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1, \text{ 所以}$$
$$\arcsin x = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{t = \arctan x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1, \text{ 所以}$$
$$\arctan x = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

$$(3) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}}{1+x/n} \stackrel{t = \sqrt[n]{1+x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{1-1/n+t^n/n} = 1, \text{ 所以}$$
$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x).$$

$$(4) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3/4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(\tan x - \sin x)}{x^3(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1 - \cos x)}{2x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x^2/2}{x^2} = 1,$$

所以  $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x} \sim x^3/4 \ (x \rightarrow 0)$ ,

$$(5) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\sqrt{1/x^2}+\sqrt{1/x^3}}$$

$= 1$ , 所以

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x} \ (x \rightarrow +\infty).$$

(6) 因为  $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ , 所以  $\sin \frac{1}{x} = O(1)$ .

(7) 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+x\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\sin x}{x} = 0$ , 所以

$$x + \sin x = o(x^2) \ (x \rightarrow \infty).$$

(8) 因为  $\left| \frac{x \arctan(1/x)}{x} \right| = \left| \arctan \frac{1}{x} \right| < \frac{\pi}{2}$ . 所以

$$x \arctan \frac{1}{x} = O(x) \ (x \rightarrow 0).$$

• 例 5 利用无穷小的等价代换求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2(1 - \cos^2 x)}{3x^3 + 4\tan^2 x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin^2 x} - 1}{x \tan x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \tan x}{\sin 2x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x^2} - 1)}{\tan x - \sin x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x}) \tan x}{(1 - \cos x)^{3/2}}.$$

**解** 当分式的分子或分母是无穷小的叠加(代数和)时,要先进行恒等变形,化为因式乘积形式后才能进行无穷小代换.



$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2(1 - \cos^2 x)}{3x^3 + 4\tan^2 x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2\sin^2 x}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 2\sin^2 x/x^2}{3x + 4\tan^2 x/x^2} \\ = \frac{5 - 2}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}{x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + (\sin^2 x)/2 - 1}{x \sin x / \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \tan x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1 + \tan x} - 1)(\sqrt{1 + x^2} - 1)}{\tan x - \sin x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{x}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cos x}{\sin x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{6x \cdot x^2/2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x}) \tan x}{(1 - \cos x)^{3/2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{(x^2/2)^{3/2} (1 + \sqrt{\cos x}) \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 \cdot x}{2x^3/2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

例 6 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt[3]{1 + k/n^3} - 1); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{ka}{n^2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{k/n^2} - 1), \quad a > 1.$$

解 (1) 因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ , 且  $\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^3}} \sim 1 + \frac{k}{3n^2}$ , 所以

以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3n^2} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(2) 因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{ka}{n^2} \rightarrow 0$ , 且  $\sin \frac{ka}{n^2} \sim \frac{ka}{n^2}$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{ka}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ka}{n^2} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{a}{2}.$$

(3) 因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ , 且  $a^{k/n^2} - 1 \sim \frac{k}{n^2} \ln a$ , 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{k/n^2} - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k \ln a}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \ln a \\ &= \frac{1}{2} \ln a.\end{aligned}$$

**例 7** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\tan x - \sin x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (a^{1/x} - a^{1/(x+1)}).$$

**解** (1)  $\frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\tan x - \sin x} = e^{\sin x} \cdot \frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{\tan x - \sin x}$ . 当  $x \rightarrow 0$  时,  
 $\tan x - \sin x \sim x^3/2$ , 即  $\tan x - \sin x \rightarrow 0$ , 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{\tan x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \frac{e^{\tan x - \sin x} - 1}{\tan x - \sin x} \\ &= e^0 \times 1 = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (a^{1/x} - a^{1/(x+1)}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 a^{1/(x+1)} (a^{1/[x(x+1)]} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} a^{1/(x+1)} \frac{a^{1/[x(x+1)]} - 1}{1/x(x+1)} \cdot \frac{1}{(x+1)/x} \\ &= a^0 \ln a \times 1 = \ln a.\end{aligned}$$

**例 8** 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$  是  $x \sin^n x$  的高阶无穷小, 而  $x \sin^n x$  是  $e^{x^2} - 1$  的高阶无穷小, 则正整数  $n$  等于

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.



**解** 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim x^2/2$ ,  $\ln(1+x^2) \sim x^2$ ,  
 $x \sin^n x \sim x^{n+1}$ ,  $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ . 从而

$$(1 - \cos x) \ln(1+x^2) \sim x^4/2, \quad e^{x^2} - 1 \sim x^2 \Rightarrow n = 2.$$

**例 9** 用等价无穷小计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos(1/x)}{(1 + \cos x) \ln(1+x)};$$

$$(3) \text{ 若 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}.$$

**解** (1) 因为

$$\arctan x - x \sim -x^3/3, \quad \ln(1+2x^3) \sim 2x^3 \quad (x \rightarrow 0),$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/3}{2x^3} = -\frac{1}{6}.$$

(2) 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x) \sim x$ . 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos(1/x)}{(1 + \cos x) \ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3\sin x}{2x} + \frac{x^2 \cos(1/x)}{2x} \right] \\ &= \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(3) 经恒等变形, 有

$$\begin{aligned} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} &= \frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3} \\ &= \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \frac{6 + f(x)}{x^2}, \end{aligned}$$

因为  $\sin 6x - 6x \sim (6x)^3/3! \quad (x \rightarrow 0)$ , 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(6x)^3/3!}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} \\ &= -36 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

故由题设知 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 0 - (-36) = 36.$$

• 例 10 设  $P$  是曲线  $y = f(x)$  上的动点, 若点  $P$  沿该曲线无限远离坐标原点时, 它到某定直线  $L$  的距离趋于 0, 则称  $L$  为曲线  $y = f(x)$  的渐近线. 若直线  $L$  的斜率  $k \neq 0$  时, 称  $L$  为斜渐近线.

(1) 证明: 直线  $y = kx + b$  为曲线  $y = f(x)$  的斜(或水平)渐近线的充分必要条件为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx];$$

(2) 求函数  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$  ( $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ) 的斜渐近线方程.

证 (1) 设曲线  $y = f(x)$  的渐近线方程为  $y = kx + b$ , 则  $f(x)$  上点  $P(x, y)$  到渐近线的距离为  $d = \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1+k^2}}$ . 由

渐近线的定义知  $d \rightarrow 0$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - kx - b|}{\sqrt{1+k^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0,$$

$$\text{即} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\text{所以} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x(x+1)} = 1 = k,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{x+1} = -1, \end{aligned}$$

所以, 渐近线的方程为  $y = x - 1$ .

• 例 11 确定  $a, b, c$  的值, 使下列极限等式成立:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax + b) = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c - \sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2} = 0.$$

解 (1) 由极限为零知,  $a > 0$ . 又经恒等变形得



$$\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax+b}{\sqrt{x^2-x+1}+ax-b} = \frac{(1-a^2)x^2+(2ab-1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax-b} \rightarrow 0,$$

所以  $1-a^2=0$ ,  $2ab-1=0$ , 故  $a=1, b=1/2$ .

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2} = 0, \text{ 所以}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}] = 0.$$

又由  $c-2=0 \Rightarrow c=2$ , 可得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x^2-1)}{(x-1)^2} = -a.$$

经恒等变形得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b(x-1)+(1-x^2)/(2+\sqrt{x^2+3})}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b-(1+x)/(2+\sqrt{x^2+3})}{x-1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 1} \left( b - \frac{1+x}{2+\sqrt{x^2+3}} \right) = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/2-(1+x)/(2+\sqrt{x^2+3})}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{2(x-1)(2+\sqrt{x^2+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3}{2(2+\sqrt{x^2+3})(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\ &= -\frac{3}{16} = -a, \end{aligned}$$

$$\text{得 } a = \frac{3}{16}.$$

• 例 12 设  $f, g: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是两个函数, 且  $\forall x \in A, f(x) > 0$ , 则称形如  $f(x)^{g(x)}$  的函数为幂指函数. 若  $\lim f(x) = 1$ ,  $\lim g(x) = \infty$ , 则称极限  $\lim f(x)^{g(x)}$  属于  $1^\infty$  型不定式. 对于这类

不定式,一般利用等式  $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$  转化为讨论  $0 \cdot \infty$  型不定式  $g(x)\ln f(x)$  的极限问题.

(1) 设  $g_1(x) \sim g_2(x)$ , 证明: 若  $\lim f(x)^{g_1(x)}$  存在, 则  $\lim f(x)^{g_2(x)} = \lim f(x)^{g_1(x)}$ ;

(2) 假定  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ , 即对数函数  $y = \ln x$  是连续的(见第六节), 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$ .

(3) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{1/x}$  和  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ .

证 (1) 若  $\lim f(x)^{g_1(x)}$  存在, 即  $\lim e^{g_1(x)\ln f(x)}$  存在. 亦即  $\lim g_1(x)\ln f(x)$  存在. 故依等价无穷小代换, 有

$$\lim g_1(x)\ln f(x) = \lim g_2(x)\ln f(x),$$

即  $\lim e^{g_1(x)\ln f(x)} = \lim e^{g_2(x)\ln f(x)},$

所以  $\lim f(x)^{g_1(x)} = \lim f(x)^{g_2(x)}.$

(2) 令  $f(x)^{g(x)} = y$ , 则  $\ln y = g(x)\ln f(x)$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\ln f(x),$$

即  $\ln \lim_{x \rightarrow x_0} y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \ln a = \ln a^b,$

从而  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b.$

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1 - \sin x)}$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} \cdot \frac{\ln(1 - \sin x)}{-\sin x} = -1 \times 1 = -1,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{1/x} = e^{-1}.$

又因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln \cos \frac{1}{x}}$ , 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \cos \frac{1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \ln \cos t}{t^2} \quad (t = 1/x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} \cdot \frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{\cos t - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2/2}{t^2} \times 1 = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$



所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{-1/2}.$$

## 第六节 连续函数

### 知识要点

1. 连续性 设有函数  $f: U(x_0) \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , 若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f$  在  $x_0$  处连续.

若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ), 则称  $f$  在  $x_0$  左连续(右连续).

函数  $f$  在  $x_0$  处连续  $\Leftrightarrow f$  在  $x_0$  处既左连续又右连续.

若  $f$  在定义区间  $I$  上处处连续, 则称  $f$  为该区间上的连续函数, 记作  $C(I)$ . 初等函数在其定义区间上是连续的.

2. 设  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  是严格单调增加(减少)的连续函数, 则其反函数  $f^{-1}$  在区间  $[f(a), f(b)]$  ( $[f(b), f(a)]$ ) 上也是连续的.

3. 使函数  $f$  不连续的点  $x_0$  称为  $f$  的间断点. 函数的间断点分为两类: 左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点(又分为可去间断点与跳跃间断点), 不是第一类间断点的间断点称为第二类间断点(又分为无穷间断点与振荡间断点).

4. 闭区间上连续函数的性质.

(1) 有界性 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上有界.

(2) 最大最小值定理 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上一定能取得它的最大值与最小值, 即至少存在两点  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 使得

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}, \quad f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}.$$

(3) 零点存在定理 设  $f \in C[a, b]$ , 若  $f(a)f(b) < 0$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

(4) 介值定理 设  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a) \neq f(b)$ , 且  $\mu$  为介于  $f(a)$  与  $f(b)$  之间的任一值, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \mu$ .

推论 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  能在  $[a, b]$  上取得介于它的最大值  $M$  与最小值  $m$  之间的任一值.

5. 一致连续函数 设  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  为任一函数, 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 当  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 恒有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ , 则称  $f$  是区间  $I$  上的一致连续函数, 其中  $\delta$  仅与  $\epsilon$  有关, 而与  $x$  无关.

6. Cantor 定理 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上一致连续.

7. 压缩映射 若映射  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足不等式  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ , 其中  $x, y \in \mathbf{R}, 0 < k < 1$ , 则称  $f$  为压缩映射.

8. 压缩映射原理 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是一个压缩映射, 则  $f$  在  $\mathbf{R}$  上有唯一的不动点.

### 疑难解析

1. 怎样证明函数的连续性?

答 要证明函数  $f$  在区间  $I$  上连续, 只要证明  $\forall x_0 \in I$ , 有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  即可. 可以有以下方法.

(1) 利用定义证明:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ;

(2) 利用左、右极限证明:  $f(x_0 + 0) = f(x_0) = f(x_0 - 0)$ ;

(3) 利用序列语言证明:  $\forall \{x_n\} \rightarrow x_0$  有  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ;

(4) 利用邻域语言证明:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得

$$f[(x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \subset (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon);$$

(5) 利用连续函数的运算性质, 连续函数与连续函数经过有限次四则运算与复合运算后仍然是连续的.

2. 在区间上函数  $f$  连续与一致连续有什么不同?

答 区间上函数的连续与一致连续有很大差异, 表现为:  $\forall \epsilon > 0$ , 若  $f$  是连续函数, 则相应的  $\delta$  不仅与  $\epsilon$  有关, 还与  $x$  有关; 而  $f$



一致连续时,  $\delta$  只与  $\epsilon$  有关. 也就是说, 对于一致连续函数, 在  $\epsilon$  给定后, 函数  $\forall x \in I$ , 存在一个共同的  $\delta$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

$f$  在区间  $I$  上一致连续是函数的整体性质, 可由此推出  $f$  在  $I$  上每一点都连续的局部性质.

### 典型例题与习题详解

要求理解连续函数概念, 了解连续函数的基本性质与间断点的分类, 会利用它们来讨论函数的连续性, 求函数的间断点并进行分类.

• 例 1 证明: 函数  $f$  在  $x_0$  处连续  $\iff f$  在  $x_0$  处既左连续又右连续.

证 充分性 设  $f$  在  $x_0$  处既左连续又右连续, 则  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$ , 当有  $x_0 - x < \delta_1$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ; 对于同一  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_2 > 0$ , 当有  $x - x_0 < \delta_2$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . 因而, 取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则上述两不等式同时成立. 即  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 只要  $|x - x_0| < \delta$ , 恒有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , 从而  $f(x)$  在  $x_0$  处连续.

必要性 设  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . 所以,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 不论  $x_0 - x < \delta$  还是  $x - x_0 < \delta$  时, 都有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . 即  $f(x)$  在  $x_0$  处既左连续又右连续.

• 例 2 两个在  $x_0$  处不连续的函数之和在  $x_0$  处是否一定不连续? 若其中一个在  $x_0$  处连续, 一个在  $x_0$  处不连续, 则它们的和在  $x_0$  处是否一定不连续?

解 两个在  $x_0$  处不连续函数之和有可能连续. 如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

在  $x=0$  处,  $f(x)$  与  $g(x)$  均不连续, 但  $f(x)+g(x)$  在  $x=0$  处连续.

若  $f(x)$  在  $x_0$  处连续,  $g(x)$  在  $x_0$  处不连续, 则  $f(x)+g(x)$  在  $x_0$  处一定不连续. 否则, 由  $g(x) = [f(x)+g(x)] - f(x)$ , 得  $g(x)$  在  $x_0$  处连续, 与假设矛盾.

• 例 3 证明: 若  $f$  连续, 则  $|f|$  也连续. 逆命题成立吗?

证 若  $f$  连续, 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x-x_0| < \delta$  时, 恒有  $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$ , 由

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

所以  $|f|$  连续.

逆命题不成立, 如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$|f(x)| \equiv 1$  处处连续, 但  $f(x)$  在  $x=0$  处不连续.

• 例 4 设  $f, g \in C[a, b]$ , 记  $\varphi(x) = \min_{x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}$ ,  $\psi(x) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}$ , 证明:  $\varphi, \psi \in C[a, b]$ .

证 因为

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \min_{x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\} \\ &= \frac{1}{2} [f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \max_{x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\} \\ &= \frac{1}{2} [f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|], \end{aligned}$$

而  $f, g \in C[a, b]$ , 则

$$f+g \in C[a, b], \quad |f-g| \in C[a, b],$$

从而  $\varphi, \psi \in C[a, b]$ .

• 例 5 设函数  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上满足 Lipschitz 条件:  $\exists M > 0$ , 使得  $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ ,



证明:  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续.

证  $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ , 设

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|,$$

则  $\forall \varepsilon > 0$ , 在取  $\delta = \varepsilon/M$  时, 只要  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

从而知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续.

• 例 6 证明: 函数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  在  $x_0 \in I$  处连续  $\Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

证 由题设知,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则依 Heine 定理

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall x_n \in I, x_n \rightarrow x_0,$$

有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

• 例 7 证明: 定义在区间  $I$  上的严格单调增加(减少)函数  $f$  的反函数  $f^{-1}$  必定存在, 且也是严格单调增加(减少)的.

证 设  $f$  在区间  $I$  上严格单调增加(减少), 则若  $x_1 < x_2$ , 必有  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ), 是从  $D(f)$  到  $R(f)$  的一一映射, 所以  $f^{-1}$  存在. 又  $f^{-1}(f(x)) = x$ , 故当  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) < f(x_2)$ ) 时, 必有  $x_1 < x_2$ , 所以  $f^{-1}$  是严格单调增加(减少)的.

• 例 8 设函数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  在  $x_0 \in I$  连续, 且  $f(x_0) > 0$ , 证明: 存在  $x_0$  的一个邻域, 在该邻域内,  $f(x) \geq q > 0$ .

证 因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ , 故可取  $\varepsilon_0 = f(x_0)/2 > 0$ ,

则  $\forall \varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0,$$

即  $f(x_0) + \varepsilon_0 > f(x) > f(x_0) - \varepsilon_0 = f(x_0)/2 = \varepsilon_0 > 0$ .

• 例 9 讨论下列函数在指定点处的连续性, 若是间断点, 说明它们的类型.

(1)  $f(x) = \sqrt{x}$ , 在  $x = 1, x = 0$ ;

(2)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ , 在  $x = 2$ ;

(3)  $f(x) = 2^{1/(x-3)}$ , 在  $x = 3$ ;

(4)  $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$  在  $x = 0$ .

解 (1) 因为  $f(x) = \sqrt{x}$  在点  $x = 1$  与  $x = 0$  的左、右极限存在且相等, 所以  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $x = 1$  与  $x = 0$  均连续.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4},$$

但  $f(x)$  在  $x = 2$  处无定义, 所以  $f(x)$  在  $x = 2$  处间断,  $x = 2$  是可去间断点.

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2^{1/(x-3)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} 2^{1/(x-3)} = +\infty,$$

所以  $f(x)$  在  $x = 3$  处间断,  $x = 3$  是第二类间断点.

(4) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1,$$

所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处间断,  $x = 0$  是跳跃间断点.

• 例 10 讨论下列函数的连续性. 若有间断点, 说明间断点的类型.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ x^2 - 1, & x \geq 0; \end{cases} \quad (2) f(x) = e^{x+1/x};$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0; \end{cases} \quad (4) f(x) = \frac{x}{\ln x};$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2-1}, & x < 0, \\ (x^2-1)/\cos \frac{\pi}{2}x, & x \geq 0. \end{cases}$$

解 (1) 因为



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处间断,  $x = 0$  是跳跃间断点. 在其余点,  $f(x)$  是初等函数, 处处连续.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x+1/x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x+1/x} = 0,$$

所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处间断, 是第二类间断点(无穷间断点), 在其余点处处连续.

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0 \neq f(0) = 2$ , 所以  $x = 0$  是可去间断点. 在其余点,  $f(x)$  连续.

(4) 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\ln x} = \infty$ , 所以  $x = 1$  是  $f(x)$  的无穷间断点. 在  $x > 0$  的其余点,  $f(x)$  连续.

(5) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x^2 - 1} = -\sin 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{\cos(\pi x/2)} = -1,$$

所以  $x = 0$  是  $f(x)$  的跳跃间断点.

因为  $x = -1$  时  $f(x)$  无定义,  $x \rightarrow -1$  时  $f(x)$  在  $-1$  与  $1$  间振荡, 所以  $x = -1$  是第二类间断点.

因为  $x = 1$  时  $f(x)$  无定义, 作代换  $t = x - 1$ , 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\cos(\pi x/2)} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1+t)^2 - 1}{\cos(\pi/2 + \pi t/2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{t^2 + 2t}{-\sin(\pi t/2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{\pi t/2}{\sin(\pi t/2)} \cdot \frac{t^2 + 2t}{\pi t/2} = -\frac{4}{\pi}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{\cos(\pi x/2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1+t)^2 - 1}{\cos(\pi/2 + \pi t/2)} = -\frac{4}{\pi},$$

所以  $x = 1$  是  $f(x)$  的可去间断点.

因为  $x = 2k+1$  时  $f(x)$  无定义, 且  $\lim_{x \rightarrow 2k+1} f(x) = +\infty$ , 所以

$x = 2k+1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 是  $f(x)$  的第二类间断点.

由上可知, 讨论函数连续性的过程是, 首先找出这些函数无定义的点或分界点, 再来研究函数在这些点的极限, 然后确定是否是间断点及间断点的类型.

• 例 11 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x}{\sqrt{x} + \ln x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot x - \frac{e^{2x}}{\sin x} \right); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

解 利用连续函数性质和无穷小代换等方法求极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x}{\sqrt{x} + \ln x} = \frac{\arctan 1}{\sqrt{1} + \ln 1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot x - \frac{e^{2x}}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 - (e^{2x} - 1)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2/2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{1/(\cos x - 1) \cdot (\cos x - 1)/x^2} \\ &= e^{-1/2}. \end{aligned}$$

• 例 12 证明:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0};$$

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = \alpha x_0^{\alpha-1} \quad (x_0 > 0, \alpha \in \mathbf{R}).$$

证 利用等价无穷小代换可证.

$$(1) \text{原式} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \times 1 = e^{x_0}.$$



$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_0^n \frac{(1 + \Delta x/x_0)^n - 1}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_0^n \frac{1 + n\Delta x/x_0 - 1}{\Delta x} = x_0^n \frac{n}{x_0} = nx_0^{n-1}.
 \end{aligned}$$

• 例 13 试确定常数  $a, b$ , 使下列函数在  $x = 0$  处连续:

$$(1) f(x) = \begin{cases} a+x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x < 0, \\ a + \sqrt{x}, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ \frac{1}{bx} \ln(1-3x), & x < 0. \end{cases}$$

解 因为  $x=0$  是下列分段函数的分界点, 所以可用左、右极限相等来求  $a, b$ .

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (a+x) = a = f(0), \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0,
 \end{aligned}$$

故  $a = 0$ .

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + \sqrt{x}) = a = f(0),
 \end{aligned}$$

故  $a = -\pi/2$ .

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{bx} \ln(1-3x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x}{bx} = -\frac{3}{b}, \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin ax}{x} = a, \quad f(0) = 2,
 \end{aligned}$$

故  $a = 2, \quad b = -3/2$ .

• 例 14 证明下列各题:

(1) 方程  $x^{2^x} = 1$  在  $(0, 1)$  内至少有一个根;

(2) 方程  $x^5 - 3x - 1 = 0$  在  $(1, 2.7)$  内至少有一个根;

(3) 设  $f \in C[a, b]$ , 若  $f$  在  $[a, b]$  上恒不为 0, 则  $f$  在  $[a, b]$  上恒为正(或负);

(4) 方程  $\sin x + x + 1 = 0$  在  $[-\pi/2, \pi/2]$  上至少有一个根.

证 利用零点存在定理来证.

(1) 令  $f(x) = x^{2^x} - 1$ , 则  $f(0) = -1 < 0, f(1) = 2 - 1 = 1 > 0$ , 所以  $f(0) f(1) < 0$ , 依零点存在定理, 方程  $x^{2^x} = 1$  在  $(0, 1)$  内至少有一个根.

(2) 令  $f(x) = x^5 - 3x - 1$ , 则  $f(1) = -3 < 0, f(2.7) = 2.7^5 - 8.1 - 1 > 0$ , 所以  $f(1) f(2.7) < 0$ , 依零点存在定理, 方程  $x^5 - 3x - 1 = 0$  在  $(1, 2.7)$  内至少有一个根.

(3) 用反证法证. 设  $f$  在  $[a, b]$  上不恒为正(负类似可证), 则至少有  $c, d \in [a, b]$ , 使得  $f(c) > 0, f(d) < 0$ . 于是, 由  $f(x)$  在  $[c, d]$  上的连续性, 依零点存在定理, 在  $[c, d]$  上至少有一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = 0$ , 与假设矛盾, 故  $f$  在  $[a, b]$  上恒为正.

(4) 令  $f(x) = \sin x + x + 1$ , 则  $f(-\pi/2) = -\pi/2 < 0, f(\pi/2) = 2 + \pi/2 > 0$ , 所以  $f(-\pi/2) f(\pi/2) < 0$ , 依零点存在定理, 方程  $\sin x + x + 1 = 0$  在  $[-\pi/2, \pi/2]$  上至少有一个根.

• 例 15 用介值定理证明: 当  $n$  为奇数时, 方程  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$  至少有一个根, 其中  $a_i \in \mathbf{R}$  为常数 ( $i = 0, 1, \cdots, n$ ),  $a_n \neq 0$ .

证 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 其中  $n$  为奇数. 由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

知, 存在  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$ , 则依根的存在定理, 在  $(x_2, x_1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ . 即当  $n$  为奇数时, 方程  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$  至少有一个根.

• 例 16 证明: 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  能在  $[a, b]$  上取得介于它



的最大值  $M$  与最小值  $m$  之间的任一值.

**证** 设  $f(x_1) = M, f(x_2) = m$ , 并设  $x_2 < x_1$ ,  $C$  为  $M$  与  $m$  之间的任一值. 作函数  $\varphi(x) = f(x) - C$ , 则  $\varphi(x_1) = M - C > 0$ ,  $\varphi(x_2) = m - C < 0$ , 即  $\varphi(x_1)\varphi(x_2) < 0$ . 于是, 依零点存在定理, 至少有一点  $\xi \in (x_2, x_1)$ , 使得  $\varphi(\xi) = 0$ . 即至少有一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(x) = C$ .

• **例 17** 设函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足可加性, 即对任何  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , 并且  $f$  在  $x = 0$  处连续, 证明:  $f$  在  $\mathbf{R}$  上连续.

**证** 因为  $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ , 依可加性, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x - x_0 + x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x - x_0) + f(x_0)] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x - x_0) + f(x_0) = f(0) + f(x_0).\end{aligned}$$

又  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , 令  $x_1 = x_2 = 0$ , 得  $f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 即  $f$  在  $\mathbf{R}$  上连续.

• **例 18** 设  $f \in C[a, +\infty)$ , 并且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 证明:  $f$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

**证** 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 可设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists M_1 > 0$ , 当  $x > M_1$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 即  $|f(x)| < |A| + \epsilon$ . 又在  $[a, M_1]$  上,  $f(x)$  是连续的, 所以依有界性定理,  $|f(x)| \leq M_2$ . 故取  $M = \max\{M_2, |A| + \epsilon\}$ , 则在  $[0, +\infty)$  上,  $|f(x)| \leq M$ .

• **例 19** 设  $f \in C[a, b]$ , 并且  $f(a+0)$  与  $f(b-0)$  存在 (包括有无穷极限) 且异号, 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

**证** 设  $f(a+0) = c, f(b-0) = d$ , 且  $cd < 0$ . 则对于  $\epsilon_1 = \frac{c}{2}, \exists \delta_1 > 0$ , 当  $0 < x - a < \delta_1$  时, 有  $\frac{c}{2} < f(x) < \frac{3}{2}c$ ; 对于  $\epsilon_2 = \frac{d}{2}, \forall \delta_2 > 0$ , 当  $0 < b - x < \delta_2$  时,  $\frac{3}{2}d < f(x) < \frac{d}{2}$ . 所以, 取  $X_1$

$\in (a, a+\delta_1), X_2 \in (b-\delta_2, b)$ , 则  $f(X_1)f(X_2) < 0$ , 依零点存在定理, 有  $\xi \in [X_1, X_2]$ , 即存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

对  $c < 0, d > 0$  情形类似可证.

• 例 20 设  $f \in C[a, b]$ , 并且  $\forall x \in [a, b], \exists y \in [a, b]$ , 使得  $f(y) = \frac{1}{2} |f(x)|$ . 证明: 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

证 构造函数列  $f(x_n) = \frac{1}{2^n} |f(a)|$ , 其中  $x_n \in [a, b]$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |f(a)| = 0.$$

又  $f(x) \in C[a, b]$ , 所以必存在  $\xi$ , 使得  $x_n \rightarrow \xi \in [a, b]$ , 从而  $f(\xi) = 0$ .

例 21 设  $f \in C[a, b], \{x_n\} \subseteq [a, b]$  是任一数列. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbf{R}$ , 证明: 方程  $f(x) = A$  在  $[a, b]$  上必有一个根.

证 因为  $\{x_n\} \subseteq [a, b]$ , 故必存在  $\{x_n\}$  的一个子列  $\{x_{n_k}\}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in [a, b]$ . 又由  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ . 即当  $n_k > N$  时, 有  $|f(x_{n_k}) - A| < \varepsilon$ , 故  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A$ , 又  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, x_0 \in [a, b]$ , 且  $f(x) \in C[a, b]$ , 所以  $f(x_0) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A$ . 即  $x_0$  是  $f(x) = A$  在  $[a, b]$  内的一个根.

• 例 22 设  $f \in C(-\infty, +\infty)$ , 且  $f$  是奇函数, 证明: 方程  $f(x) = 0$  至少有一个根. 若  $f$  是严格单调的, 则  $x = 0$  是它的唯一根.

证 设  $f$  是奇函数, 则  $f(x) = -f(-x)$ , 从而  $f(x)f(-x) = -f^2(x)$ . 当  $f(x) = 0$  时,  $x$  是其根; 当  $f(x) \neq 0$  时,  $f(x)f(-x) < 0$ . 故在  $[-x, x]$  上至少存在一个  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ , 即  $f(x) = 0$  至少有一个根.



若  $f$  是严格单调的, 可用反证法证明  $f(x) = 0$  只有唯一根  $x = 0$ . 设  $x_1 \neq 0$  也是  $f(x) = 0$  的根, 则  $f(x_1) = 0, f(-x_1) = 0$ , 当  $x \neq 0$  时,  $x_1 \neq -x_1$ ; 从而  $f(x_1) = f(-x_1)$  显然与  $f(x)$  严格单调矛盾. 所以,  $f(x) = 0$  只有唯一根  $x = 0$ .

• 例 23 证明: 若  $a_n > |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$ , 则方程  $a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a_0 = 0$  在  $(0, 2\pi)$  内至少有  $2n$  个根.

证 考虑到  $\cos x$  的取值特点, 利用零点存在定理证明. 令

$$f(x) = a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a_0,$$

因为, 取  $x = 2k\pi/n$ , 有  $f(2k\pi/n) > 0$  ( $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ ); 取  $x = 2k\pi/n + \pi/n$ , 有  $f(2k\pi/n + \pi/n) < 0$  ( $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ ). 所以,  $f(x)$  在  $(2k\pi/n, 2k\pi/n + \pi/n)$  内至少有  $n$  个根; 在  $(2k\pi + \pi)/n, (2k+2)\pi/n$  内至少有  $n$  个根, 从而在  $(0, 2\pi)$  内至少有  $2n$  个根.

• 例 24 证明: 若  $f$  在有限区间  $I$  上一致连续, 则  $f$  在  $I$  上有界.

证 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续, 则对  $\epsilon_0 = 1 > 0, \exists \delta_0 > 0$ , 当  $x \in (a, b) \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$  时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 \Rightarrow f(x) \leq |f(x_0)| + 1.$$

利用  $\delta_0$  把  $(a, b)$  分为  $n$  个小区间, 分点为  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 使得  $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) < \delta_0$ . 取  $M = \max_{1 \leq k \leq n-1} \{f(x_k) + 1\}$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , 则  $x$  必落在其中某个小区间上, 于是

$$|f(x) - f(x_k)| < 1 \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

$$\text{或} \quad |f(x) - f(x_{k-1})| < 1 \quad (2 \leq k \leq n),$$

$$\text{故} \quad |f(x)| \leq M.$$

例 25 证明: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且函数值集合也是  $[a, b]$ , 则至少存在一点  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ , 即至少有一个不动点  $x_0$ .

证 令  $F(x) = f(x) - x$ , 则  $F(x)$  也在  $[a, b]$  上连续. 若  $F(a) = f(a) - a = 0$  或  $F(b) = f(b) - b = 0$ , 则  $x_0 = a$  或  $x_0 =$

$b$ , 于是结论成立.

若  $F(a) \neq 0, F(b) \neq 0$ , 则有  $F(a) = f(a) - a > 0$  和  $F(b) = f(b) - b < 0$  (否则  $f(a) - a < 0 \Rightarrow f(a) < a, f(b) - b > 0 \Rightarrow f(b) > b$ , 与函数值集合为  $[a, b]$  矛盾). 依零点存在定理,  $\exists x_0 \in (a, b)$ , 使得  $F(x_0) = 0$  即  $f(x_0) = x_0$ . 于是, 至少存在一点  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

**例 26** 证明: 在区间  $(a, b)$  内的有限个一致连续函数的和与乘积在  $(a, b)$  内仍然一致连续.

**证** 只需证两个函数的情形, 就可推广到有限个函数情形.

(1) 设  $f(x), g(x)$  都在  $(a, b)$  内一致连续, 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 使得对任何  $x', x'' \in (a, b)$ , 当  $|x' - x''| < \delta_1$  时, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon/2.$$

对  $\forall$  同一  $\epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 使得对任何  $x', x'' \in (a, b)$ , 当  $|x' - x''| < \delta_2$  时, 就有

$$|g(x') - g(x'')| < \epsilon/2.$$

因此, 若取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $|x' - x''| < \delta$  时, 恒有

$$\begin{aligned} & |[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| \\ & \leq |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

即  $f(x) + g(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续.

(2) 设  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续, 则  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  内有界(例 24 结论), 即

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq L \quad (L > 0, M > 0)$$

则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in (a, b)$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时, 恒有  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon/(2M), |g(x') - g(x'')| < \epsilon/(2L)$ , 所以

$$\begin{aligned} & |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ & = |[f(x') - f(x'')]g(x') + f(x'')[g(x') - g(x'')]| \\ & < \epsilon/(2M) \cdot M + \epsilon/(2L) \cdot L = \epsilon, \end{aligned}$$

所以  $f(x)g(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续.

**例 27** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $a < c < d < b$ , 证明: 对任意



正数  $p$  和  $q$ , 至少有一  $\xi \in [c, d]$ , 使得

$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi).$$

证 因为  $[c, d] \subseteq [a, b]$ , 所以  $f(x)$  在  $[c, d]$  上连续, 故在  $[c, d]$  上有最大值  $M$  与最小值  $m$ , 使得

$$m \leq f(c) \leq M, \quad m \leq f(d) \leq M.$$

因为  $p > 0, q > 0$ , 所以  $pm \leq pf(c) \leq pM, qm \leq qf(d) \leq qM$ , 将两个不等式对应项相加, 得

$$(p+q)m \leq pf(c) + qf(d) \leq (p+q)M.$$

依介值定理推论, 在  $[c, d]$  上至少有一  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q},$$

所以  $pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi).$

### 综合练习题

设有一对新出生的兔子, 两个月之后成年, 从第三个月开始, 每个月产一对小兔, 且新生的每对小兔也在出生两个月之后成年, 第三个月开始每月生一对小兔. 假定出生的兔子均无死亡, (1) 一年后共有几对兔子? (2)  $n$  个月之后有多少对兔子? (3) 若  $n$  个月之后有  $F_n$  对兔子, 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$  (题中所讲的一对兔子均是雌雄异性的).

说明: 该问题是意大利数学家 Fibonacci 于 13 世纪初 (1202 年) 研究兔子繁殖过程中数量变化规律时提出来的, 其中的数列  $F_n$  被后人称为 Fibonacci 数列. 有趣的是, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

正是“黄金分割”数, 在优选法及许多领域得到很多新的应用.

解 图 1.7.1 表示兔子的繁殖过程与规律. 图中“○”表示未成熟小兔, “●”表示成熟兔子, 将结果列表, 得

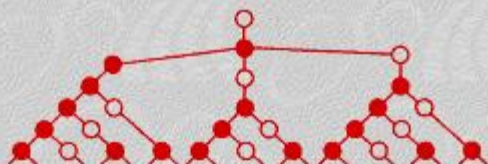


图 1.7.1

月 数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
兔子对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

将表中第二行数字记为数列  $\{F_n\}$  ( $n$  表示月数), 则  $\{F_n\}: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ . 可以看出  $\{F_n\}$  的各项间有关系式

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

对应递推关系  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , 构造特征方程  $x^2 = x + 1$ , 可以解得特征根

$$x_1 = (1 + \sqrt{5})/2, \quad x_2 = (1 - \sqrt{5})/2,$$

则 
$$F_n = C_1[(1 + \sqrt{5})/2]^n + C_2[(1 - \sqrt{5})/2]^n.$$

将  $n = 1, 2$  代入, 由

$$\begin{cases} F_1 = C_1(1 + \sqrt{5})/2 + C_2(1 - \sqrt{5})/2 = 1, \\ F_2 = C_1(1 + \sqrt{5})^2/2^2 + C_2(1 - \sqrt{5})^2/2^2 = 1 \end{cases}$$

确定  $C_1 = 1/\sqrt{5}, C_2 = -1/\sqrt{5}$ , 从而

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

用数学归纳法可以证明  $F_n$  的正确性.

$$n = 1 \text{ 时, } F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right] = 1 \text{ 成立.}$$

$$\text{设 } n = k \text{ 时, } F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \text{ 成立.}$$



于是,  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].
 \end{aligned}$$

故 (1) 一年后的兔子数为  $F_{13} = 233$  (对).

(2)  $n$  个月后的兔子数为

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ (对)}.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left[ 1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left[ 1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right]} \\
 &= \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$y - y_0 = \frac{1}{-f'(x_0)}(x - x_0).$$

6. 若函数  $f: U(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$  在  $x_0$  处可导, 则该函数必在  $x_0$  处连续. 但若  $f$  在某点连续, 则  $f$  在该点不一定可导.

### 疑难解析

1. 函数  $f$  在  $x_0$  处连续但不可导有哪些情形?

答 函数  $f$  在  $x_0$  处连续是  $f$  在  $x_0$  处可导的必要条件,  $f$  在  $x_0$  处连续但不可导有以下几种情形:

(1) 左、右导数存在但不相等, 例如

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1, \\ 2x, & x \geq 1, \end{cases}$$

有  $f'_-(1) = 1, f'_+(1) = 2.$

(2) 左、右导数至少有一个不存在. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

有  $f'_-(0) = 0, f'_+(0)$  不存在.

(3) 左、右导数至少有一个为  $\infty$ . 例如  $y = 1/\sqrt[3]{x}$ , 有

$$f'_-(0) = -\infty, f'_+(0) = \infty.$$

2.  $f'_+(x_0)$  与  $f'(x_0+0)$  有何区别?

答  $f'_+(x_0)$  表示函数  $f$  在  $x_0$  处的右导数, 而  $f'(x_0+0)$  表示导函数  $f'$  在  $x_0$  处的右极限, 也表示  $f'$  在  $x_0$  处右连续.

它们不一定同时存在.

### 典型例题与习题详解

要求深刻理解导数的基本概念, 了解函数在一点连续与可导的关系, 能用导数基本概念解决一些简单问题.

• 例 1 用导数定义求下列函数的导数:



$$(1) f(x) = \cos x; \quad (2) f(x) = \ln x;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \text{求 } f'(0);$$

$$(4) f(x) = x|x|, \text{求 } f'(0).$$

**解** 即用极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  求  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \\ &= -\sin x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\Delta x/x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{x/\Delta x \cdot 1/x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$(3) f(0) = 0, \text{而}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin(1/\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

所以  $f'(0) = 0$ .

$$(4) f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\Delta x = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0,$$

所以  $f'(0) = 0$ .

• 例 2 已知  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 求下列极限:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0) \right];$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{x - x_0}.$$

解 利用极限定义  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  的形式性求解.

$$(1) \text{原式} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[x_0 + (-\Delta x)] - f(x_0)}{-\Delta x} \times (-1) = -f'(x_0).$$

$$(2) \text{原式} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x_0 + (-h)] - f(x_0)}{(-h)} \\ = f'(x_0) + f'(x_0) = 2f'(x_0).$$

$$(3) \text{原式} = \lim_{1/n \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 1/n) - f(x_0)}{1/n} = f'(x_0),$$

$$(4) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 f(x) - x_0 f(x_0) + x_0 f(x_0) - x f(x_0)}{x - x_0} \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ x_0 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right] \\ = x_0 f'(x_0) - f(x_0).$$

• 例 3 设  $f$  是偶函数, 且  $f'(0)$  存在, 证明  $f'(0) = 0$ .

证 因为  $f(x)$  是偶函数,  $f(x) = f(-x)$ , 所以

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 - \Delta x) - f(0)}{-\Delta x} (-1) \\ = -f'(0).$$

从而有  $f'(0) = -f'(0) \Rightarrow f'(0) = 0$ .

• 例 4 设函数  $\varphi$  在  $x = a$  处连续,  $f(x) = (x - a)\varphi(x)$ , 证明: 函数  $f$  在  $x = a$  处可导. 若  $g(x) = |x - a| \varphi(x)$ , 函数  $g$  在  $x = a$  处可导吗?

证 因为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \varphi(a + \Delta x) - 0 \cdot \varphi(a)}{\Delta x}$$



$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a),$$

所以  $f$  在  $x = a$  处可导, 且  $f'(a) = \varphi(a)$ . 又

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| \varphi(a + \Delta x) - 0 \varphi(a)}{\Delta x},$$

则 
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} = \varphi(a),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} = -\varphi(a),$$

所以, 当  $\varphi(a) = 0$  时,  $g(x)$  在  $x = a$  处可导, 且  $g'(a) = \varphi(a)$ ; 当  $\varphi(a) \neq 0$  时,  $g(x)$  在  $x = a$  处不可导.

• 例 5 讨论函数的左、右可导与左、右连续的关系.

证 设  $f'_+(x)$  存在, 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  存在, 于是

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'_+(x) + o(\Delta x),$$

即 
$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'_+(x)\Delta x + o(\Delta x)\Delta x,$$

其中  $o(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0^+} 0$ . 上式在  $\Delta x = 0$  与  $\Delta x \neq 0$  时均成立, 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0,$$

即  $f(x)$  在  $x$  处右连续.

类似可证  $f(x)$  在  $x$  处左可导时必左连续.

反之, 不一定成立. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

由 
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0 = f(0)$$

知,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 即在  $x = 0$  左、右连续. 但是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$$

不存在, 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导, 即在  $x = 0$  处左、右不可导.

• 例 6 曲线  $y = x^{3/2}$  上哪一点的切线与直线  $y = 3x - 1$  平

行?

答 曲线  $y = x^{3/2}$  上任一点切线的斜率为  $k = y' = 3x^{1/2}/2$ .  
所以有

$$3x^{1/2}/2 = 3 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 8,$$

从而满足题意的点为  $(4, 8)$ .

• 例 7 试确定常数  $a, b$  的值, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

在  $x = 1$  处连续且可导.

$$\begin{aligned} \text{解 因为 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b, \end{aligned}$$

所以, 由  $f(x)$  在  $x = 1$  处连续, 得  $a + b = 1$ . 又

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(ax + b) - 1}{x - 1} = a,$$

所以, 由  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导, 得  $a = 2$ . 于是

$$a = 2, \quad b = -1.$$

• 例 8 已知  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$  求  $f'_+(0), f'_-(0)$ , 问

$f'(0)$  是否存在.

$$\text{解 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = 0, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x - 0}{x} = -1,$$

故由  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$  知,  $f'(0)$  不存在.

• 例 9 设物体绕定轴旋转, 转角  $\theta$  是时间  $t$  的函数  $\theta = \theta(t)$ .  
若旋转是非匀速的, 试确定物体在  $t_0$  时刻的角速度.

解 设物体转动的角速度为  $\omega$ , 则有

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)}{\Delta t},$$



于是  $\omega(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)}{\Delta t} = \theta'(t_0).$

• 例 10 设质点在力的作用下所作的功  $W = f(t)$ , 若功  $W$  随时间  $t$  的变化是非均匀的, 试求  $t_0$  时刻的瞬时功率.

解 由例 9 一样, 由变化率概念知

$$P(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0).$$

• 例 11 证明: 双曲线  $xy = 1$  上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形面积都等于 2.

证 如图 2.1.1 所示, 设  $(x_0, y_0)$  为双曲线  $xy = 1$  上任一点. 因为  $y = 1/x$ ,  $y'(x_0) = -1/x_0^2$ , 所以过点  $(x_0, y_0)$  的切线方程为

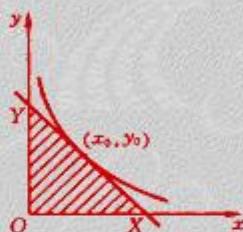


图 2.1.1

$$y - y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0),$$

切线与  $x$  轴交于  $X = x_0 + x_0^2 y_0 = 2x_0$ , 与  $y$  轴交于  $Y = y_0 + 1/x_0$ , 所以, 三角形面积

$$A = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2} \times 2x_0(y_0 + 1/x_0) = x_0 y_0 + 1 = 2.$$

• 例 12 设有可导函数  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , 若  $\forall x \in (a, b)$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , 则  $\forall x \in (a, b)$ ,  $f'(x) \leq g'(x)$ , 对吗?

解 不对. 因为  $f'(x)$  与  $g'(x)$  反映的是函数值  $f(x)$  与  $g(x)$  随  $x$  变化的快慢程度, 与函数值大小无关, 所以

$$f(x) \leq g(x) \not\Rightarrow f'(x) \leq g'(x).$$

例如, 在  $(1, +\infty)$  内, 令  $f(x) = 2 - 1/x$ , 则  $f(x)$  单调增加, 令  $g(x) = 2 + 1/x$ , 则  $g(x)$  单调减少, 且  $f(x) \leq g(x)$ . 但  $f'(x) = 1/x^2 > 0$ ,  $g'(x) = -1/x^2 < 0$ .  $f'(x) \geq g'(x)$ .

例 13 证明函数  $f(x)$  与  $|f(x)|$  的可导性有如下关系:

(1)  $f(x)$  在  $x_0$  处可导,  $|f(x)|$  在  $x_0$  处不一定可导; 若  $f(x_0)$

$\neq 0$ , 则  $|f(x)|$  在  $x_0$  处可导;

(2)  $|f(x)|$  在  $x_0$  处可导,  $f(x)$  在  $x_0$  处也不一定可导; 若  $f(x_0) \neq 0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处仍不可导.

证 可举反例说明, 若正面证明要依据定理.

(1) 考虑函数  $f(x) = x$ , 显然  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 但  $|f(x)| = |x|$  在  $x = 0$  处不可导.

若  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且  $f(x_0) \neq 0$ , 则  $|f(x)|$  在  $x_0$  处可导. 因为, 设  $f(x_0) > 0$ , 则由连续函数的保号性知, 存在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 使得  $f(x)$  在邻域内恒为正, 从而  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $|f(x)| = f(x)$ , 故  $|f(x)|$  在  $x_0$  处可导. 对  $f(x_0) < 0$  的情形类似可证.

(2) 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ -1, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$ , 显然  $|f(x)|$  在任何点都可导, 且  $|f(x)| = 1$ ,  $|f'(x)| = 0$ ; 虽然  $f(x_0) \neq 0$ , 但  $f(x)$  在  $x_0$  处不可导.

例 14 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a) = f(b)$ , 且在  $(a, b)$  内有连续的右导数

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'_+(\xi) = 0$ .

证 若  $f(x) \equiv \text{常数}$ , 则结论显然成立.

设  $f(x) \neq \text{常数}$ . 由于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 必在  $[a, b]$  上取得最大值  $M$  和最小值  $m$ , 则由题设知,  $M$  与  $m$  至少有一个在  $(a, b)$  内取得. 设  $\eta \in (a, b)$ ,  $f(\eta) = M$  ( $f(\eta) = m$  可类似讨论), 于是

$$f'_+(\eta) = \lim_{x \rightarrow \eta^+} \frac{f(x) - f(\eta)}{x - \eta} \leq 0.$$

在  $[a, \eta]$  内任取一点  $c$ , 由  $f$  在  $[c, \eta]$  上连续知,  $f$  在  $[c, \eta]$  上某一点  $\eta$  达到最小值, 使得

$$f'_+(\eta) = \lim_{x \rightarrow \eta^+} \frac{f(x) - f(\eta)}{x - \eta} \geq 0 \quad (a < \eta < b).$$

于是, 由



$f'_+(\eta) \leq 0, f'_+(\eta) \geq 0, \eta, \eta \in (a, b)$   
 知存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'_+(\xi) = 0$ .

• 例 15 若函数  $f$  在  $x = 0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 证明:  $f$  在  $x = 0$  处可导.

证 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , 所以  $f(0) = 0$ .  
 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0),$$

从而知  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导 (即导数存在).

• 例 16 设  $f$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的函数,  $f(x) \neq 0$ ,  $f'(0) = 1$ , 且  $\forall x, y \in (-\infty, +\infty), f(x+y) = f(x)f(y)$ . 证明:  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且  $f'(x) = f(x)$ .

证 由导数定义和  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x}, \end{aligned}$$

由  $f(x+0) = f(x)f(0), f(x) \neq 0 \Rightarrow f(0) = 1$

得  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x - 0} = f'(0) = 1,$

从而  $f'(x) = f(x) \times 1 = f(x)$ .

例 17 设函数  $f(x)$  在  $x = a$  处可导,  $f(a) \neq 0$ , 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(a+1/n)}{f(a)} \right]^n$ .

证 令  $y = \left[ \frac{f(a+1/n)}{f(a)} \right]^n = \exp\{n[\ln f(a+1/n) - \ln f(a)]\}$

所以 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} y = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[ \frac{\ln f(a+1/n) - \ln f(a)}{1/n} \right]$   
 $= \exp [\ln f(a)]' = \exp [f'(a)/f(a)].$

• 例 18 设曲线  $y = f(x)$  在原点与  $y = \sin x$  相切, 试求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \sqrt{f(2/n)}$ .

解 因为曲线  $y = f(x)$  在原点与  $y = \sin x$  相切, 所以  $f(0) = \sin 0 = 0$ ,  $f'(0) = \cos x|_{x=0} = 1$ ,  
而  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \sqrt{f(2/n)} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{f(2/n)}{2/n}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{f(2/n) - f(0)}{2/n - 0}}$   
 $= \sqrt{2} \sqrt{f'(0)} = \sqrt{2}.$

• 例 19 设  $n \in \mathbb{N}_+$ , 试讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处的连续性与可导性及  $f'(x)$  在  $x = 0$  处的连续性.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin(1/x)$ , 所以当  $n \geq 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ , 函数在  $x = 0$  处连续.

又因为  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \sin(1/x)}{x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin(1/x),$

所以当  $n \geq 2$  时,  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin(1/x) = 0$ ; 当  $n = 1$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

因为  $n \geq 2$  时,  $f(x)$  可导, 且

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \sin(1/x) - x^{n-2} \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

所以, 当  $n \geq 3$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [nx^{n-1} \sin(1/x) - x^{n-2} \cos(1/x)] = 0,$$

即  $f'(x)$  在  $x = 0$  处连续.

综上所述, 当  $n \geq 1$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续; 当  $n \geq 2$  时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导; 当  $n \geq 3$  时,  $f'(x)$  在  $x = 0$  处连续.

例 20 设  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 求  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{1 - \cos(h^2)}$ .

解 利用导数定义与等价无穷小代换求解.



$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^4) - f(x_0)}{1 - \cos(h^2)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^4) - f(x_0)}{h^4/2} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^4) - f(x_0)}{h^4} = 2f'(x_0).\end{aligned}$$

**例 21** 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处满足 Lipschitz 条件

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|^a \quad (M \text{ 为常数}),$$

证明:  $f(x)$  在  $x_0$  处可导; 若  $a = 1$ ,  $f'(x_0)$  可能不存在.

证 若  $a > 1$ , 则有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M |x - x_0|^{a-1},$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = 0,$$

即 
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

若  $a = 1$ , 设  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ , 显然  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导, 但仍然有

$$|f(x) - f(0)| = |x| \leq 2|x - 0|^1.$$

• **例 22** 设  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  是任一函数,  $x_0 \in I$ . 证明  $f$  在  $x_0$  处可导的充要条件是: 存在一个函数  $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得

$$(1) f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \forall x \in I;$$

$$(2) \varphi \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续}.$$

此时,  $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ .

证 必要性 若  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在. 令 
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0) & x = x_0, \end{cases}$$

于是  $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad x \neq x_0.$

依导数定义知, 上式当  $x = x_0$  时亦成立, 且  $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ .

充分性 若  $\forall x \in I$ , 有  $\varphi(x)$  使得

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0),$$

且  $\varphi(x)$  在  $x_0$  处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

所以,  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且  $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ .

• 例 23 证明: Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

在  $(-\infty, +\infty)$  的任一点  $x$  处都不可导.

证 由第一章第四节例 17 知, Dirichlet 函数  $D(x)$  在任何  $x \in \mathbf{R}$  处的极限都不存在, 因此  $D(x)$  在任何  $x \in \mathbf{R}$  处不连续, 所以  $D(x)$  在任何  $x \in \mathbf{R}$  处都不可导.

例 24 设函数  $f, g, h: U(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$  满足下列条件:

(1)  $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$ ,  $f'(x_0) = g'(x_0)$ ;

(2)  $\forall x \in U(x_0)$ ,  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ .

证明: 函数  $h$  在  $x_0$  处可导, 并且  $h'(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0)$ .

证 由题设条件得

$$f(x) - f(x_0) \leq h(x) - h(x_0) \leq g(x) - g(x_0).$$

于是, 当  $x > x_0$  时, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0};$$

当  $x < x_0$  时, 有

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

又因为  $f'(x_0) = g'(x_0)$ ,

$$\text{即} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

$$\text{所以} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = g'(x_0),$$



即  $h(x)$  在  $x_0$  处可导, 且  $h'(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0)$ .

**例 25**  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上恒正且连续可微,  $f(0) = 1$ , 证明:  
 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{1/x} = e^{f'(0)}$ .

**证** 因为  $[f(x)]^{1/x} = e^{1/x \cdot \ln f(x)}$ ,

$$\begin{aligned}\text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x) - \ln f(0)}{x - 0} \\ &= [\ln f(x)]' \big|_{x=0} = f'(0),\end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{1/x} = e^{f'(0)}$ .

## 第二节 求导的基本法则

### 知识要点

**1. 导数的有理运算法则** 设函数  $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$  都在  $x \in I$  可导, 则它们的和、差、积、商都在  $x$  处可导, 且

$$(1) (u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2) (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

**2. 复合函数的求导法则** 设函数  $u = g(x)$  在  $x$  处可导, 函数  $y = f(u)$  在对应的  $u$  处可导, 则复合函数  $y = f(g(x))$  在  $x$  处可导, 且

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

**3. 反函数的求导法则** 设区间  $I$  上的严格单调连续函数  $x = f(y)$  在点  $y$  处可导, 且  $f'(y) \neq 0$ , 则它的反函数  $y = f^{-1}(x)$  在对应的点  $x$  处可导, 且

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}.$$

4. 可导的初等函数的导数仍为初等函数.

5. 二阶或二阶以上的导数统称为高阶导数. 一般, 若  $f$  的  $n-1$  阶导数  $f^{(n-1)}: I \rightarrow \mathbf{R}$  在  $x \in I$  可导, 则称  $f$  在  $x$  处  $n$  阶可导, 其  $n$  阶导数记作

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

设函数  $u, v$  是  $n$  阶可导的, 则  $\alpha u + \beta v$  与  $uv$  也是  $n$  阶可导的, 且有

(1) 线性性质

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R};$$

(2) Leibniz 公式

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \\ &= u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}. \end{aligned}$$

6. 设  $y = f(x)$  是由方程  $F(x, y) = 0$  所确定的隐函数, 则依复合函数的链式法则, 将等式  $F(x, f(x)) \equiv 0$  两边对  $x$  求导, 即得隐函数的导数.

7. 设由参数方程  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$  确定  $y$  为  $x$  的函数, 有

(1) 若函数  $x = x(t)$  与  $y = y(t)$  在  $(a, \beta)$  内可导, 且  $\dot{x}(t) \neq 0$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ;

(2) 若  $x = x(t)$  与  $y = y(t)$  二阶可导, 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3}.$$

### 疑难解析

1. 对数求导法与隐函数求导法有何关系? 怎样利用对数求导法求函数的导数?



答 对给定的函数式两边取自然对数后再求导的方法称为对数求导法.一般地,取对数后出现一个隐函数( $y$  是  $x$  的隐函数)方程,再用隐函数求导法求出  $\frac{dy}{dx}$ ,因此,对数求导法与隐函数求导法是密切相关的.

对数求导法的基本步骤是:

- 1) 对  $y = f(x)$  两边取绝对值后,再取自然对数;
- 2) 将得到的等式两边对自变量  $x$  求导;
- 3) 从求导后的等式中解出  $y'$ .

要注意的是,求导过程中要把  $y$  视作  $x$  的隐函数求导.对数求导法特别适合于对幂指函数、若干个因式的乘积以及根式函数的求导.

2. 什么是相关变化率问题?怎样解决相关变化率问题?

答 若在某变化过程中,变量  $x$  与  $y$  都随另一变量  $t$  变化,从而变量  $x$  与  $y$  之间又存在着相互依赖关系,则它们的变化率  $\dot{x}(t)$  与  $\dot{y}(t)$  也存在相互联系.研究这两个变化率之间关系的问题称为相关变化率问题.

解决相关变化率问题的基本步骤是:

- 1) 建立变量  $x$  与  $y$  之间的关系式  $F(x, y) = 0$ ;
- 2) 用链式法则将关系式两边对  $t$  求导;
- 3) 从求导后等式中解出所要求的变化率.

### 典型例题与习题详解

要求熟练掌握和运用求导基本法则、复合函数链式法则、反函数求导法则、隐函数求导法、对数求导法进行求导计算,能运用相关变化率解一些简单的应用问题.要求读者能牢记一些常用的基本导数公式.

• 例 1 求下列函数的导数:

$$\begin{aligned}
 (1) y &= \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x}); & (2) y &= 3e^x \cos x; \\
 (3) y &= a^x(x^2-3x+1) \ (a>0); & (4) y &= \tan x \sec x; \\
 (5) y &= \frac{1}{1+x+x^2} + \ln 3; & (6) S &= \frac{1+\sin t}{1+\cos t}; \\
 (7) y &= \frac{10^x-1}{10^x+1}; & (8) y &= \frac{2\csc x}{1+x^2}; \\
 (9) y &= \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}; & (10) y &= \frac{1+\cos x}{\sqrt[3]{x^2}} + \ln \sqrt{x}; \\
 (11) y &= \frac{1}{\sin x \cos x}; & (12) y &= \frac{e^x \sec x + 1}{x^2 \log_e(1/\sqrt[3]{x})} \ (a>0).
 \end{aligned}$$

**解** 在求导前,先观察函数是否能化简;若能化简,化简后再运用求导法则求导.

$$\begin{aligned}
 (1) y' &= (2x^{1/3} + x^{5/6})' = \frac{2}{3}x^{-2/3} + \frac{5}{6}x^{-1/6}. \\
 (2) y' &= 3e^x \cos x - 3e^x \sin x = 3e^x(\cos x - \sin x). \\
 (3) y' &= a^x \ln a(x^2 - 3x + 1) + a^x(2x - 3) \\
 &= a^x[x^2 \ln a + x(2 - 3 \ln a) + \ln a - 3]. \\
 (4) y' &= \sec^3 x + \tan^2 x \sec x. \\
 (5) y' &= -\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}. \\
 (6) S' &= \frac{\cos t(1+\cos t) + (1+\sin t)\sin t}{(1+\cos t)^2} = \frac{1+\sin t+\cos t}{(1+\cos t)^2}. \\
 (7) y' &= \left(1 - \frac{2}{10^x+1}\right)' = \frac{2 \times 10^x \ln 10}{(10^x+1)^2}. \\
 (8) y' &= 2 \frac{-\csc x \cot x(1+x^2) - 2x \csc x}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{-2\csc x[2x + (1+x^2)\cot x]}{(1+x^2)^2}. \\
 (9) y' &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} (x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'
 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$$

$$= \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$(10) y' = \frac{-\csc^2 x x^{2/3} - 2x^{-1/3}(1+\cot x)/3}{x^{4/3}} + \frac{1}{2x}.$$

$$(11) y' = \left( \frac{2}{\sin 2x} \right)' = (2\csc 2x)' = -4\csc 2x \cot 2x.$$

$$(12) y' = \left( -3 \frac{e^x \sec x + 1}{x^2 \log_a x} \right)' \\ = -3 \left[ e^x (\sec x + \tan x \sec x) x^2 \log_a x \right. \\ \left. - (e^x \sec x + 1)(2x \log_a x + x/\ln a) \right] / (x^4 \log_a^2 x).$$

• 例 2 求下列函数的导数:

$$(1) y = (2x+3)^5;$$

$$(2) y = e^{ax} \sin(ax + \beta) \quad (a, \beta, \omega \in \mathbb{R});$$

$$(3) y = \ln(x^2 + \cos x); \quad (4) y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$(5) y = (\arccos \frac{1}{x})^2; \quad (6) y = \arctan(1-2x)^2;$$

$$(7) y = \operatorname{arccot} \sqrt{x^2-1}; \quad (8) y = \ln(\csc x - \cot x);$$

$$(9) y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad (10) y = \sqrt[3]{x} e^{\sin(1/x)};$$

$$(11) y = \ln \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x}; \quad (12) y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}};$$

$$(13) y = x^{a^2} + a^{x^2} + a^{a^x} \quad (a > 0);$$

$$(14) y = x + x^x + x^{x^x}.$$

解 求复合函数的导数, 要注意复合函数的分解, 然后用链式法则逐层求导.

$$(1) y' = 5(2x+3)^4 (2x+3)' = 10(2x+3)^4.$$

$$(2) y' = e^{ax} (ax)' \sin(ax + \beta) + e^{ax} \cos(ax + \beta) \cdot (ax + \beta)' \\ = e^{ax} [a \sin(ax + \beta) + a \cos(ax + \beta)].$$

$$(3) y' = \frac{(x^2 + \cos x)'}{x^2 + \cos x} = \frac{2x - \sin x}{x^2 + \cos x}.$$

$$(4) y' = \frac{1}{3} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-2/3} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)' \\ = \frac{1}{3} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-2/3} \frac{2}{1-x^2} = \frac{-2}{3(x^2-1)} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$(5) y' = 2 \arccos \frac{1}{x} \cdot \left( \arccos \frac{1}{x} \right)' = 2 \arccos \frac{1}{x} \frac{-1}{\sqrt{1-1/x^2}} \left( \frac{1}{x} \right)' \\ = 2 \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \arccos \frac{1}{x}.$$

$$(6) y' = \frac{[(1-2x)^2]'}{1+[(1-2x)^2]^2} = \frac{-4(1-2x)}{1+(1-2x)^4}.$$

$$(7) y' = \frac{-(\sqrt{x^2-1})'}{1+(\sqrt{x^2-1})^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$(8) y' = \frac{(\csc x - \cot x)'}{\csc x - \cot x} = \frac{-\csc x \cot x + \csc^2 x}{\csc x - \cot x} = \csc x.$$

$$(9) y' = 1 \left| \sqrt{1 - \left( \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2} \right| \cdot \left( \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' \\ = \sqrt{\frac{1+x}{2x}} \cdot 1 \left| \left( 2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \cdot \left( \frac{1-x}{1+x} \right)' \right| \\ = \frac{-1}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{2x}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

$$(10) y' = \frac{1}{3} x^{-2/3} e^{\sin(1/x)} + x^{1/3} e^{\sin(1/x)} \left( \sin \frac{1}{x} \right)' \\ = \frac{1}{3} x^{-2/3} e^{\sin(1/x)} + x^{1/3} e^{\sin(1/x)} \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ = e^{\sin(1/x)} \left( \frac{1}{3} e^{-2/3} - x^{-5/3} \cos \frac{1}{x} \right).$$



$$\begin{aligned}
 (11) y' &= \frac{(\sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x})'}{\sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x}} \\
 &= \frac{1}{2x \sin x \sqrt{1-e^x}} (x \sin x \sqrt{1-e^x})' \\
 &= \frac{(\sin x + x \cos x) \sqrt{1-e^x} - x \sin x e^x / (\sqrt{1-e^x} \times 2)}{2x \sin x \sqrt{1-e^x}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x} + \cot x + \frac{e^x}{2(e^x - 1)} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (12) y' &= \left[ \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{2x} \right]' = \left( \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right)' \\
 &= \frac{x^2 / \sqrt{1-x^2} - (1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (13) y' &= a^x x^{a^x-1} + a^x \ln a \cdot (x^a)' + a^{a^x} \ln a \cdot (a^x)' \\
 &= a^x x^{a^x-1} + x^{a^x-1} a^{a^x+1} \ln a + a^{a^x+x} \ln^2 a \quad (a > 0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \text{ 因为 } (x^x)' &= (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \\
 &= e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (1 + \ln x), \\
 (x^{x^x})' &= (e^{x^x \ln x})' = e^{x^x \ln x} (x^x \ln x)' \\
 &= x^{x^x} [(x^x)' \ln x + x^x (\ln x)'] \\
 &= x^{x^x} [x^x (\ln x + \ln^2 x) + x^{x-1}],
 \end{aligned}$$

所以  $y' = 1 + x^x (\ln x + 1) + x^{x^x} x^x (\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}) \quad (x > 0)$ .

• 例 3 已知  $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$ ,  $f'(x) = \arctan x^2$ , 求  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ .

解 因为  $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$ , 所以

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)' = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) \cdot \frac{12}{(3x+2)^2} \\
 &= \frac{12}{(3x+2)^2} \arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2,
 \end{aligned}$$

所以  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 3 \arctan 1 = \frac{3}{4} \pi$ .

• 例 4 设有分段函数  $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq x_0, \\ \psi(x), & x < x_0, \end{cases}$  函数  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  均可导, 问  $f'(x) = \begin{cases} \varphi'(x), & x \geq x_0, \\ \psi'(x), & x < x_0, \end{cases}$  是否成立.

解 不一定成立. 因为  $f(x)$  在分界点是否可导要用定义来验证. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -\sin x, & x < 0, \end{cases}$$

有  $f'_-(0) = -1, f'_+(0) = 1$ , 所以  $f'(0)$  不存在.

• 例 5 求下列函数的导数 ( $f, g$  是可导函数):

$$(1) y = f(x^2); \quad (2) y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)};$$

$$(3) y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x); \quad (4) y = f(e^x) e^{f(x)};$$

$$(5) y = \begin{cases} 1-x, & -\infty < x < 1, \\ (1-x)(2-x), & 1 \leq x \leq 2, \\ -(2-x), & 2 < x < +\infty; \end{cases}$$

$$(6) y = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解 题(1)至题(4)是抽象函数, 其导数仍可用抽象函数表示; 题(5)、题(6)是分段函数, 要特别注意函数在分界点的可导性.

$$(1) y' = f'(x^2)(x^2)' = 2xf'(x^2).$$

$$(2) y' = 1/(2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}) \cdot (f^2(x) + g^2(x))' \\ = [f(x)f'(x) + g(x)g'(x)]/\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}.$$

$$(3) y' = f'(\sin^2 x)(\sin^2 x)' + f'(\cos^2 x)(\cos^2 x)' \\ = f'(\sin^2 x)\sin 2x - f'(\cos^2 x)\sin 2x \\ = \sin 2x \cdot [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)].$$



$$\begin{aligned}(4) y' &= f'(e^x)(e^x)'e^{g(x)} + f(e^x)e^{g(x)}g'(x) \\ &= e^{g(x)}[e^x f'(e^x) + f(e^x)g'(x)].\end{aligned}$$

(5) 在  $x=1$  处,

$$f'_-(1) = -1,$$

$$f'_+(1) = [(1-x)(2-x)]' \big|_{x=1} = -1,$$

所以

$$f'(1) = -1.$$

在  $x=2$  处,

$$f'_-(2) = [(-x)(2-x)]' \big|_{x=2} = 1,$$

$$f'_+(2) = 1,$$

所以

$$f'(2) = 1.$$

故

$$y' = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 1, \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

(6) 在  $x=0$  处,

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0,$$

所以  $f'(0)$  不存在. 于是

$$y' = \begin{cases} \frac{1+e^{1/x}(1+1/x)}{(1+e^{1/x})^2}, & x \neq 0, \\ \text{不存在}, & x = 0. \end{cases}$$

• 例6 确定  $a, b, c, d$  的值, 使曲线  $y_1 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$  与  $y_2 = 11x - 5$  在点  $(1, 6)$  相切, 经过点  $(-1, 8)$  并在点  $(0, 3)$  处有一水平的切线.

解 因为  $y_1' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = y_2' = 11$ , 且曲线经过点  $(1, 6)$  和  $(-1, 8)$ , 并过点  $(0, 3)$ , 所以得方程组

$$\begin{cases} 4a + 3b + 2c = 11 & (\text{由曲线与直线相切}), \\ a + b + c + d = 6 & (\text{由曲线过点}(1, 6)), \\ a - b + c + d = 8 & (\text{由曲线过点}(-1, 8)), \\ d = 3 & (\text{由曲线过点}(0, 3)). \end{cases}$$

解方程组得  $a = 3, b = -1, c = 1, d = 3$ .

**例 7** 证明:双曲线  $xy = a$  上任一点处的切线介于两坐标轴的一段被切点所平分.

**证** 如图 2.2.1,  $P(x_0, y_0)$  为双曲线  $xy = a$  上任一点, 过点  $P$  的切线与两坐标轴分别交于点  $A, B$ . 因为切线斜率  $k = y'(x_0) = -a/x_0^2$ , 所以切线方程为

$$y - y_0 = -a(x - x_0)/(x_0^2),$$

从而切线与两坐标轴交于  $A(2x_0, 0), B(0, 2y_0)$ . 于是

$$|P_0A| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = |P_0B| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

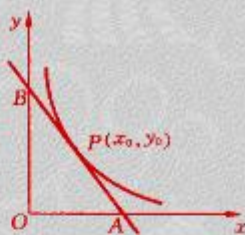


图 2.2.1

• **例 8** 求下列函数指定阶的导数:

(1)  $f(x) = e^x \cos x$ , 求  $f^{(4)}(x)$ ;

(2)  $f(x) = x \operatorname{sh} x$ , 求  $f^{(100)}(x)$ ;

(3)  $f(x) = x^2 \sin x$ , 求  $f^{(50)}(x)$ ;

(4)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解** 运用 Leibniz 公式求高阶导数时, 要注意某些因式所能求导的次数, 以减小计算量. 还要善于归纳高阶导数的通项公式及对求导函数进行分解.

$$\begin{aligned} (1) f^{(4)}(x) &= (e^x)^{(4)} \cos x + C_4^1 (e^x)^{(3)} (\cos x)' + C_4^2 (e^x)^{(2)} (\cos x)'' \\ &\quad + C_4^3 (e^x)' (\cos x)^{(3)} + C_4^4 e^x (\cos x)^{(4)} \\ &= e^x \cos x - 4e^x \sin x - 6e^x \cos x + 4e^x \sin x + e^x \cos x \\ &= -4e^x \cos x. \end{aligned}$$

(2)  $x$  只能求导一次, 所以

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= (\operatorname{sh} x)^{(100)} x + C_{100}^1 (\operatorname{sh} x)^{99} (x)' \\ &= x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

(3)  $x^2$  只能求导两次, 所以

$$f^{(50)}(x) = (\sin 2x)^{(50)} x^2 + C_{50}^1 (\sin 2x)^{(48)} (x^2)'$$



$$\begin{aligned}
& + C_{50}^{50} (\sin 2x)^{(48)} (x^2)^n \\
& = 2^{50} x^2 \sin(2x + 25\pi) + 50 \times 2^{49} \sin(2x + 49\pi/2) \\
& \quad \times 2x + 1225 \times 2^{48} \sin(2x + 24\pi) \times 2 \\
& = 2^{49} (-2x^2 \sin 2x + 100x \cos 2x + 1225 \sin 2x).
\end{aligned}$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

$$\begin{aligned}
\text{故 } f^{(n)}(x) &= \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} \\
&= (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].
\end{aligned}$$

• 例 9 证明下列函数的  $n$  阶导数公式:

$$(1) \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, & n=1, \\ \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, & n \geq 2, \end{cases}$$

$$(2) [(x^2-1)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 n! (x+1)^{n-k} (x-1)^k.$$

$$\text{解 } (1) \text{ 因为 } \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = (x-1)' + \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2},$$

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)} = (x-1)^{(n)} + \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\text{故 } \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, & n=1, \\ \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, & n \geq 2. \end{cases}$$

(2) 因为  $(x^2-1)^n = (x+1)^n (x-1)^n$ , 依 Leibniz 公式, 有

$$\begin{aligned}
[(x^2-1)^n]^{(n)} &= [(x+1)^n (x-1)^n]^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k [(x+1)^n]^{(k)} [(x-1)]^{(n-k)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n C_n^k [n(n-1)\cdots(n-k+1)(x+1)^{n-k}] \\
&\quad \cdot [n(n-1)\cdots(n-(n-k-1))(x-1)^k] \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!n!}{(n-k)!k!} (x+1)^{n-k} (x-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 n! (x+1)^{n-k} (x-1)^k.
\end{aligned}$$

• 例 10 设  $f(x) = 3x^3 + x^2 |x|$ , 试求使  $f^{(n)}(0)$  存在的最高阶数  $n$ .

解 因为

$$f(x) = 3x^3 + x^2 |x| = \begin{cases} 4x^3, & x \geq 0, \\ 2x^3, & x < 0, \end{cases}$$

$$\text{有 } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{x} = 0, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^3}{x} = 0,$$

$$\text{所以 } f'(0) = 0.$$

$$\text{又由 } f'(x) = \begin{cases} 12x^2, & x \geq 0, \\ 6x^2, & x < 0, \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 24x, & x \geq 0, \\ 12x, & x < 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } f''(0) = 0, \quad f''_+(0) = 24, \quad f''_-(0) = 12,$$

所以  $f''(0)$  不存在, 即  $f^{(n)}(0)$  存在的最高阶数  $n = 2$ .

• 例 11 求由下列方程所确定的隐函数的导数:

$$(1) x^3 + y^3 - 3xy = 0, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}; \quad (2) xy = e^{x+y}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx};$$

$$(3) y = \sin(x+y), \text{ 求 } \frac{d^2y}{dx^2}; \quad (4) y = 1 + xe^y, \text{ 求 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}.$$

解 注意, 隐函数的导数仍可用隐函数表示, 不必化为显函数.

(1) 方程两边同时对  $x$  求导, 得

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0,$$

$$\text{即 } (y^2 - x)y' = y - x^2 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

(2) 方程两边同时对  $x$  求导, 得



$$y + xy' = e^{1+y}(1+y') \Rightarrow y' = \frac{y(1-x)}{x(y-1)}.$$

(3) 方程两边同时对  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x+y) \cdot (1+y') \Rightarrow y' = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}, \\ y'' &= (y')' = \frac{-\sin(x+y)(1+y')[1-\cos(x+y)]}{[1-\cos(x+y)]^2} \\ &\quad - \frac{\cos(x+y)\sin(x+y) \cdot (1+y')}{[1-\cos(x+y)]^2} \\ &= -\frac{\sin(x+y)(1+y')}{[1-\cos(x+y)]^2} = -\frac{y}{[1-\cos(x+y)]^3}. \end{aligned}$$

(4) 方程两边同时对  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned} y' &= e^y(1+xy') \Rightarrow y' = \frac{e^y}{1-xe^y} \Big|_{x=0} = e^y, \\ y'' &= (y')' = e^y \cdot y'(1+xy') + e^y(y' + xy'') \Big|_{x=0} = 2e^{2y}, \\ \text{由 } y &= 1 + xe^y \Rightarrow y(0) = 1, \\ \text{所以 } \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 2e^2. \end{aligned}$$

• 例 12 对给定的函数两边取自然对数后再求导的方法称为对数求导法. 例如, 对函数  $y = 2^x \sin x \sqrt{1+x^2}$  两边取自然对数, 得

$$\ln |y| = x \ln 2 + \ln |\sin x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

由此方程确定了  $y$  是  $x$  的隐函数, 应用隐函数求导法, 得

$$\frac{y'}{y} = \ln 2 + \cot x + \frac{x}{1+x^2},$$

$$\text{即 } y' = y(\ln 2 + \cot x + \frac{x}{1+x^2})$$

$$= 2^x \sin x \sqrt{1+x^2} (\ln 2 + \cot x + \frac{x}{1+x^2}).$$

试用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{(3-x)^4 \sqrt{x+2}}{(x+1)^5}; \quad (2) y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+2}}};$$

$$(3)y = x^{\sin x}; \quad (4)y = (\tan 2x)^{\cot(x/2)}.$$

**解** 先对等式两边取对数,再求导数.

$$(1)\ln|y| = 4\ln|3-x| + \frac{1}{2}\ln|x+2| - 5\ln|x+1|,$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{4}{3-x} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{5}{x+1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(3-x)^4 \sqrt{x+2}}{(x+1)^5} \left[ \frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1} \right].$$

$$(2)\ln|y| = \frac{1}{5}[\ln|x-5| - \frac{1}{3}\ln(x^2+2)],$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{x-5} - \frac{2x}{3(x^2+2)} \right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\frac{x-5}{x^2+2}} \left( \frac{1}{x-5} - \frac{2x}{3(x^2+2)} \right).$$

$$(3)\ln|y| = \sin x \ln x,$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y' = x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

$$(4)\ln|y| = \cot \frac{x}{2} \ln \tan 2x,$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2} \csc^2 \frac{x}{2} \ln \tan 2x + \cot \frac{x}{2} \frac{2 \sec^2 2x}{\tan 2x}$$

$$\Rightarrow y' = (\tan 2x)^{\cot(x/2)} \left( -\frac{1}{2} \csc^2 \frac{x}{2} \ln \tan 2x + 2 \cot \frac{x}{2} \frac{\sec^2 2x}{\tan 2x} \right).$$

**例 13** 设  $x > 0$  时,可导函数  $f(x)$  满足

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x},$$

求  $f'(x)$ .

**解** 等式两边对  $x$  求导,得

$$f'(x) + 2f'(x) \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-3}{x^2}. \quad \textcircled{1}$$

对等式作代换  $x = \frac{1}{t}$ , 得  $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3x$ , 再求导,得



$$-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)+2f'(x)=3, \quad ②$$

$$② \times 2 - ①, \text{得} \quad f'(x) = 2 + 1/x^2.$$

**例 14** 求下列函数的导数:

$$(1) y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x; \quad (2) y = \sin x^{\cos x} + x^x;$$

$$(3) y = \left(\frac{b}{a}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{a}{x}\right)^b \quad (a > 0, b > 0).$$

**解** 用对数求导法求解.

$$(1) \ln |y| = x[\ln x - \ln(1+x)],$$

$$\frac{y'}{y} = [\ln x - \ln(1+x)] + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{x}{1+x}\right).$$

$$(2) \text{ 令 } y = y_1 + y_2, y_1 = \sin x^{\cos x}, y_2 = x^x, \text{ 则}$$

$$\ln |y_1| = \cos x \ln \sin x,$$

$$\frac{y'_1}{y_1} = -\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\Rightarrow y'_1 = \sin x^{\cos x} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x \right);$$

$$\ln |y_2| = x \ln x,$$

$$\frac{y'_2}{y_2} = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x \Rightarrow y'_2 = x^x (1 + \ln x).$$

$$\text{故} \quad y' = \sin x^{\cos x} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x \right) + x^x (1 + \ln x).$$

$$(3) \ln |y| = x \ln \frac{b}{a} + a \ln \frac{b}{x} + b \ln \frac{a}{x}$$

$$= x \ln \frac{b}{a} + a \ln b - a \ln x + b \ln a - b \ln x,$$

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{b}{a} - \frac{a}{x} - \frac{b}{x} \Rightarrow y' = \left(\frac{b}{a}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{a}{x}\right)^b \left(\ln \frac{b}{a} - \frac{a+b}{x}\right).$$

**例 15** 求下列函数的导数:

$$(1) f(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ \operatorname{sh} 3x & \operatorname{ch} 3x \end{vmatrix};$$

$$(2) f(x) = \begin{vmatrix} \frac{x}{1+x} & x^2 \\ \tan x & \arcsin(x-1) \end{vmatrix}.$$

解 对矩阵的各元素求导数.

$$(1) f'(x) = \begin{vmatrix} (\sin 2x)' & (\cos 2x)' \\ (\operatorname{sh} 3x)' & (\operatorname{ch} 3x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos 2x & -2\sin 2x \\ 3\operatorname{ch} 3x & 3\operatorname{sh} 3x \end{vmatrix}.$$

$$(2) f'(x) = \begin{vmatrix} \left(\frac{x}{1+x}\right)' & (x^2)' \\ (\tan x)' & [\arcsin(x-1)]' \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \frac{1}{(1+x)^2} & 2x \\ \sec^2 x & \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \end{vmatrix}.$$

• 例 16 求下列参数方程所确定函数的导数:

$$(1) \begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}; \quad (2) \begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\pi/3};$$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx} \Big|_{t=2}; \quad (4) \begin{cases} x = 3e^{-t}, \\ y = 2e^t, \end{cases} \text{ 求 } \frac{d^2y}{dx^2};$$

$$(5) \begin{cases} x = f(t), \\ y = tf(t) - f(t), \end{cases} \text{ 求 } \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ 其中 } f'(t) \text{ 存在, 且 } f'(t) \text{ 不为零.}$$

解 (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t \cos t}{-3a\cos^2 t \sin t} = -\tan t.$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t},$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\pi/3} = \frac{1/2 - \sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2 + 1/2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 2.$$



$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6at(1+t^2) - 3at^3 \cdot 2t}{2a(1+t^2) - 2at \cdot 2t} = \frac{3t}{1-t^2},$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = \frac{6}{-3} = -2.$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2e^t}{-3e^{-t}} = -\frac{2}{3}e^{2t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{dt}{dx} = -\frac{4}{3}e^{2t} \frac{1}{-3e^{-t}} = \frac{4}{9}e^{3t} = \frac{12}{x^3}.$$

$$(5) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{f(t) + tf'(t) - f'(t)}{f'(t)} = \frac{f(t)}{f'(t)} + t - 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left[ \frac{(f'(t))^2 - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} + 1 \right] \cdot \frac{1}{f'(t)} \\ &= \frac{2[f'(t)]^2 - f(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}. \end{aligned}$$

参数方程确定函数的导数仍可用参数方程表示,不要求化为显函数形式.

• 例 17 设曲线  $\Gamma$  由极坐标方程  $r = r(\theta)$  所确定,试求该曲线上任一点的切线斜率,并将所得公式用于求心形线  $r = a(1 - \cos\theta)$  ( $a > 0$ ) 上任一点的斜率.

解 由题设,  $\Gamma$  的极坐标方程为  $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases}$  故

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}.$$

所以,心形线  $r = a(1 - \cos\theta)$  上任一点的斜率为

$$k = \frac{a\sin\theta\sin\theta + a(1 - \cos\theta)\cos\theta}{a\sin\theta\cos\theta - a(1 - \cos\theta)\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos\theta - \cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta}.$$

• 例 18 求曲线  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  ( $a > 0$ ) 在点  $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$  处的切线方程和法线方程,证明:在它的任一点处的切线介于坐标轴间部分的长度为一常量.

解 方程  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  两边对  $x$  求导,得

$$\frac{2}{3}(x^{-1/3} + y^{-1/3}y') = 0,$$

故  $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{3/3}, y'\big|_{(\frac{a}{4}, \frac{a}{4})} = -1,$

所以, 曲线上所给点的切线方程和法线方程分别为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}a\right) \Rightarrow y + x = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = x - \frac{\sqrt{2}}{4}a \Rightarrow y - x = 0.$$

由曲线上任一点  $(x_0, y_0)$  处的切线方程  $y - y_0 = -(y_0/x_0)^{1/3}(x - x_0)$ , 得切线与两坐标轴的交点分别为  $A(0, a^{2/3}y_0^{1/3})$  和  $B(a^{2/3}x_0^{1/3}, 0)$ . 故介于两坐标轴间切线的长度

$$L = (a^{2/3}x_0^{1/3})^2 + (a^{2/3}y_0^{1/3})^2 = a^{4/3}a^{2/3} = a^2.$$

• 例 19 落在平静水面上的石头使水面上产生同心波纹, 若最外一圈波半径的增大率为  $6 \text{ m/s}$ , 问在  $2 \text{ s}$  末被扰动水面面积的增大率为多少.

解 依题意知,  $r = 6t$ , 同心波纹面积

$$A = \pi r^2 = 36\pi t^2.$$

$$\text{增大率 } \frac{dA}{dt} = (36\pi t^2)' = 72\pi t, \quad \frac{dA}{dt}\bigg|_{t=2} = 144\pi.$$

即  $2 \text{ s}$  末被扰动水面面积的增大率为  $144\pi \text{ m}^2/\text{s}$ .

• 例 20 如图 2.2.2 所示, 在中午  $12:00$ , 甲船以  $6 \text{ km/h}$  的速率向东行驶, 乙船在甲船之北  $16 \text{ km}$  处以  $8 \text{ km/h}$  的速率向南行驶, 求下午  $1:00$  时两船相离的速率.

解 在  $t$  时刻两船相邻的距离

$$s = \sqrt{(16 - 8t)^2 + (6t)^2}.$$

故相离的速率

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(16 - 8t)(-8) + 2(6t)6}{2\sqrt{(16 - 8t)^2 + (6t)^2}},$$

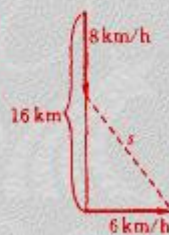


图 2.2.2



所求速率  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=1} = -2.8 \text{ (km/h)}.$

• 例 21 当油船破裂时,有体积为  $V$  的石油漏入海中,假定石油在海面上以厚度均匀的圆形扩散开来. 已知油层的厚度随时间的变化率为  $h(t) = k/\sqrt{t} \ (t > 0)$ , 试求油层向外扩散的速率.

解 因为  $\pi r^2 = \frac{V}{h(t)} = \frac{V}{k} \sqrt{t}$ , 所以  $r = \left(\frac{V}{k\pi}\right)^{1/2} t^{1/4}$ . 则油层向外扩散的速率

$$\frac{dr}{dt} = \left[ \left(\frac{V}{k\pi}\right)^{1/2} t^{1/4} \right]' = \frac{1}{4} \left(\frac{V}{k\pi}\right)^{1/2} t^{-3/4}.$$

例 22 一个开窗子的机构是由一些刚性细杆做成的,如图 2.2.3 所示. 其中  $S$  为滑块,设  $\overline{AO} = 3 \text{ cm}$ ,  $\overline{AS} = 4 \text{ cm}$ , 求滑块的垂直速度  $\frac{dx}{dt}$  与  $\theta$  的角速度  $\frac{d\theta}{dt}$  之间的关系.

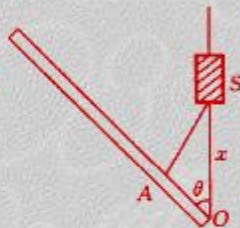


图 2.2.3

解 由余弦定理知,  
 $\overline{AS}^2 = \overline{AO}^2 + x^2 - 2x \cdot \overline{AO} \cdot \cos\theta,$   
 即有  $16 = 9 + x^2 - 6x\cos\theta.$

两边对  $x$  求导,得

$$2x \frac{dx}{dt} - 6 \frac{dx}{dt} \cos\theta + 6x \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

从而  $\frac{dx}{dt}$  与  $\frac{d\theta}{dt}$  之间有关系式

$$(x - 3\cos\theta) \frac{dx}{dt} + 3x\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

例 23 求下列函数的反函数的存在域,并求它们的导数:

(1)  $y = x + \ln x$ ; (2)  $y = x + e^x$ ; (3)  $y = \operatorname{sh} x$ .

解 (1)  $y = x + \ln x$  严格单调,反函数单值连续,存在域  $(-\infty, +\infty)$ . 故有

$$y' = 1 + \frac{1}{x} > 0 \ (x > 0) \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} = \frac{x}{x+1}.$$

(2)  $y = x + e^x$  严格单调, 反函数单值连续, 存在域  $(-\infty, +\infty)$ . 故有

$$y' = 1 + e^x \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 - x + y}.$$

(3)  $y = \operatorname{sh} x$  严格单调, 反函数单调连续, 存在域  $(-\infty, +\infty)$ ,

则  $y' = \operatorname{ch} x \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$

• 例 24 设  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$  ( $a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n$ ), 且  $|f(x)| \leq |\sin x|$ , 证明:

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

证 由  $f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + na_n \cos nx$ , 得

$$f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n.$$

又 
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n,$$

所以 
$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right|$$

$$\leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1,$$

即 
$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

• 例 25 设函数  $\varphi: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  是二阶可导函数, 选择  $a, b, c$ , 使

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \leq x_0, \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

在  $\mathbf{R}$  上二阶可导.

解 要  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上二阶可导, 必须  $f(x), f'(x)$  在  $\mathbf{R}$  上连续, 故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow c = \varphi(x_0),$$

又 
$$f'(x) = \begin{cases} \varphi'(x), & x < x_0, \\ 2a(x - x_0) + b, & x > x_0, \end{cases}$$



且 
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0),$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c - \varphi(x_0)}{x - x_0} = b.$$

故  $f'(x_0)$  存在  $\Rightarrow b = \varphi'(x_0)$ , 且

$$f'(x) = \begin{cases} \varphi'(x), & x \leq x_0, \\ 2a(x-x_0) + \varphi'(x_0), & x > x_0. \end{cases}$$

又 
$$f''_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{x - x_0} = \varphi''(x_0),$$

$$f''_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{2a(x-x_0) + \varphi'(x_0) - \varphi'(x_0)}{x - x_0} = 2a,$$

故  $f''(x_0)$  存在  $\Rightarrow a = \frac{1}{2}\varphi''(x_0)$ . 综上可得

$$a = \frac{1}{2}\varphi''(x_0), \quad b = \varphi'(x_0), \quad c = \varphi(x_0).$$

• 例 26 确定  $a, b$  的值, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \cos ax)/x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \ln(b + x^2), & x > 0 \end{cases}$$

在  $(-\infty, +\infty)$  内处处可导, 并求它的导函数.

解 因为  $f'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内处处可导, 所以, 由

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos ax)/x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a^2 x^2/2}{x^2} = \frac{a^2}{2},$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} \ln(b + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(b + x^2)}{x^2}$$

存在可推得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(b + x^2) = 0 \quad \text{即} \quad b = 1.$$

因为 
$$f'_-(0) = f'_+(0),$$

所以 
$$1 = a^2/2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

综上可得

$$a = \pm\sqrt{2}, b = 1,$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x\sin\sqrt{2}x - 1 + \cos\sqrt{2}x}{x^2}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{2x^2 - (1+x^2)\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}, & x > 0. \end{cases}$$

• 例 27 如果函数  $u = \varphi(x)$  在  $x_0$  处可导, 而  $y = f(u)$  在  $u_0 = \varphi(x_0)$  处可导, 那么复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在  $x_0$  处可导. 问: 下列三种情况是否成立? 为什么?

(1) 如果  $u = \varphi(x)$  在  $x_0$  处不可导, 而  $y = f(u)$  在  $u_0 = \varphi(x_0)$  处可导, 那么复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在  $x_0$  处一定不可导;

(2) 如果  $u = \varphi(x)$  在  $x_0$  处可导, 而  $y = f(u)$  在  $u_0 = \varphi(x_0)$  处不可导, 那么复合函数  $f[\varphi(x)]$  在  $x_0$  处一定不可导;

(3) 如果  $u = \varphi(x)$  在  $u$  处不可导,  $y = f(u)$  在  $u_0 = \varphi(x_0)$  处也不可导, 那么复合函数  $f[\varphi(x)]$  在  $x_0$  处一定不可导.

解 (1) 不成立. 例如,  $y = u^2$  在  $u_0 = 0$  处可导,  $u = \varphi(x) = |x|$  在  $x_0 = 0$  处不可导, 且  $u_0 = u(0) = 0$ . 可是  $y = f[\varphi(x)] = |x|^2 = x^2$  在  $x_0 = 0$  处可导.

(2) 不成立. 例如  $u(x) = \sin^2 x$  在  $x = 0$  处可导,  $y = f(u) = |u|$  在  $u_0 = \sin^2 0 = 0$  处不可导, 可是  $y = f[\varphi(x)] = |\sin^2 x| = \sin^2 x$  在  $x = 0$  处可导.

(3) 不成立. 例如  $u = \varphi(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处不可导,  $y = f(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ u, & u > 0 \end{cases}$  在  $u = 0$  处也不可导, 但  $y = f[\varphi(x)] = 0$  在  $x = 0$  处可导.

• 例 28 已知  $f(x)$  有任意阶导数, 且  $f'(x) = [f(x)]^2$ , 试求  $f^{(n)}(x)$  ( $n > 2$ ).

解 用数学归纳法求解.



$$f'(x) = [f(x)]^2,$$

$$f''(x) = ([f(x)]^2)' = 2f(x)f'(x) = 2![f(x)]^3,$$

$$f'''(x) = ([f(x)]^3)' = 2 \times 3[f(x)]^2 f'(x) = 3![f(x)]^4,$$

设  $f^{(n-1)}(x) = (n-1)![f(x)]^n,$

则  $f^{(n)}(x) = ((n-1)![f(x)]^n)' = n![f(x)]^{n-1} f'(x)$   
 $= n![f(x)]^{n+1}.$

• 例 29 设  $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$ , 求  $f'(0)$  及  $f^{(n+1)}(x)$ .

解 由题设知

$$f(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + (-1)^n n! x,$$

$$f'(x) = (n+1)x^n + a_1 n x^{n-1} + \cdots + (-1)^n n!,$$

所以  $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!, \quad f'(0) = (-1)^n n!.$

• 例 30 设  $f(x) = \arctan x$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

解  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)f'(x) = 1,$

依 Leibniz 公式, 有

$$f^{(n)}(x)(1+x^2) + C_{n-1}^1 f^{(n-1)}(x) \times 2x + C_{n-2}^2 f^{(n-2)}(x) \times 2 = 0,$$

故  $f^{(n)}(0) + C_{n-2}^2 f^{(n-2)}(0) \times 2 = 0,$

即  $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0). \quad \textcircled{1}$

由  $f'(0) = 1, f''(0) = 0$ , 经递推关系式 ① 得

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!.$$

• 例 31 利用恒等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$$

求出表示和式

$$S_n = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对恒等式两边取对数, 得

$$\ln \left| \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right| = \ln |\sin x| - \ln \left| 2^n \sin \frac{x}{2^n} \right|,$$

对数等式两边对  $x$  求导, 得

$$-\left(\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}\right) = \cot x - \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n},$$

$$\text{即 } S_n = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x.$$

• 例 32 设  $n$  次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n,$$

其中  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 证明:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_n(x_0) + p'_n(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} p''_n(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} p_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

证 令  $x = x_0$ , 由  $n$  次多项式  $p_n(x)$  得

$$p_n(x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = p_n(x_0).$$

$$\text{又 } p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$\text{则 } p'_n(x_0) = a_1 \Rightarrow a_1 = p'_n(x_0),$$

如此继续, 得

$$a_2 = \frac{1}{2!} p''_n(x_0), \cdots, a_n = \frac{1}{n!} p_n^{(n)}(x_0).$$

$$\text{于是 } p_n(x) = p_n(x_0) + p'_n(x_0)(x-x_0)$$

$$+ \frac{1}{2!} p''_n(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} p_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

例 33 设周期  $T=4$  的函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1,$$

求曲线  $y = f(x)$  在点  $(5, f(5))$  处切线的斜率.

解 因为周期函数的导数仍为周期函数, 且周期不变, 所以

$f'(5) = f'(1)$ . 由于



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = \frac{1}{2} f'(1) = 1,\end{aligned}$$

故  $f'(5) = f'(1) = 2$ .

**例 34** 设  $f(x)$  是周期  $T = 5$  的连续函数,它在  $x = 0$  的某邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + o(x),$$

其中  $o(x)$  当  $x \rightarrow 0$  时是  $x$  的高阶无穷小,且  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导,求曲线  $y = f(x)$  在点  $(6, f(6))$  处的切线方程.

**解** 对关系式两边取  $x \rightarrow 0$  时的极限,得

$$f(1) - 3f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{8x}{x} + \frac{o(x)}{x} \right] = 8.$$

因为  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sim \sin x$ , 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x} \\ &= \lim_{\sin x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - f(1)}{\sin x} + 3 \lim_{\sin x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \sin x) - f(1)}{-\sin x} \\ &= f'(1) + 3f'(1) = 8,\end{aligned}$$

从而  $f'(1) = 2$ , 且  $f'(6) = f'(1) = 2$ .

于是,曲线  $y = f(x)$  在  $(6, f(6))$  处的切线方程为

$$y - f(6) = f'(6)(x - 6) \Rightarrow y = 2(x - 6),$$

即  $2x - y - 12 = 0$ .

### 第三节 微 分

#### 知识要点

1. 设有函数  $f: U(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$ , 若存在一个关于  $\Delta x$  的线性函数

$L(\Delta x) = a\Delta x$  ( $a \in \mathbf{R}$  为与  $\Delta x$  无关的常数), 使

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a\Delta x + o(\Delta x),$$

则称  $f$  在  $x_0$  处可微,  $a\Delta x$  称为  $f$  在  $x_0$  处的微分, 记作  $df(x) = a\Delta x$ .

2. 函数  $f: U(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$  在  $x_0$  处可微的充要条件是  $f$  在  $x_0$  处可导, 且  $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ .

3. 函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处的微分在几何上表示曲线  $y = f(x)$  在对应点  $P$  处切线的纵坐标改变量.

4. 微分的有理运算法则如下:

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(uv) = vdu + u dv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

5. 设函数  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ , 则复合函数  $y = f(g(x))$ , 无论  $u$  是自变量还是另一个变量的函数, 函数  $y = f(u)$  的微分都有同一形式

$$dy = f'(u)du.$$

这一性质称为一阶微分形式不变性.

6. 若函数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}^n$   $n$  阶可导, 则定义  $f$  在  $I$  上的  $n$  阶微分为

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

7. 在  $x_0$  的很小的邻域内, 可以利用近似等式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

来近似计算  $f(x)$  的值.

### 疑难解析

1. 函数  $f$  在一点可导与可微有什么区别?

答 从理论上讲, 函数在一点可导与可微互为充要条件,  $n$  阶可导与  $n$  阶可微也同理. 但从实际意义与几何上看, 它们的区别表现在:

(1) 导数是函数增量  $\Delta y$  与自变量增量  $\Delta x$  之比  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  当  $\Delta x \rightarrow 0$  时



的极限,反映函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的变化率;而微分反映函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的增量的线性主部,是自变量增量  $\Delta x$  的线性函数.

(2) 在几何上,导数  $f'(x_0)$  表现为曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处切线的斜率,而微分  $dy = f'(x_0)(x - x_0)$  是曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线在区间  $(x_0, x_0 + \Delta x)$  上纵坐标的增量.

(3) 导数主要用于函数性质的理论研究与应用问题变化率的讨论,而微分主要用来进行近似计算与误差估计.

2. 为什么二阶微分不再具有形式不变性?

答 对于复合函数  $y = f(u), u = g(x)$ ,一阶微分不论  $u$  是自变量还是中间变量,都有

$$dy = f'(u)du.$$

函数的这种性质称为一阶微分形式不变性.但是二阶微分因为对  $dy = f'(u)du$  两边求微分,得

$$d^2y = d[f'(u)]du + f'(u)d(du) = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2u.$$

一般地,因为  $u$  是中间变量,而  $d^2u \neq 0$ ,所以不再有  $d^2y = f''(u)(du)^2$ .

### 典型例题与习题详解

要求理解微分的概念、函数可导与可微的联系与区别,能用微分计算函数的近似值.

• 例 1 设有一正方形  $ABCD$ ,边长为  $x$ ,面积为  $y$ ,如图 2.3.1 所示.

(1) 当边长由  $x$  增加到  $x + \Delta x$  时,正方形面积  $y$  所增加的量  $\Delta y = ?$  这个量  $\Delta y$  在图形上表示哪块面积?

(2)  $\Delta y$  的线性部分是什么?这个线性部分在图形上表示什么?

(3)  $\Delta y$  与这个线性部分相差多少?这个差在图形上表示什么?它是不是  $\Delta x$  的高阶无穷小?

(4) 面积  $y$  的微分  $dy = ?$  在图形上表示什么?

解 (1)  $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$ , 在图形上表示阴影部分的面积.

(2)  $\Delta y$  的线性部分是  $2x\Delta x$ , 在图形上表示为阴影中斜格部分面积.

(3)  $\Delta y$  与其线性部分之差是  $\Delta x^2$ , 在图形上表示为阴影中网格部分面积, 是  $\Delta x$  的高阶无穷小.

(4) 微分  $dy = 2x\Delta x$ , 在图形上表示阴影中斜格部分面积.

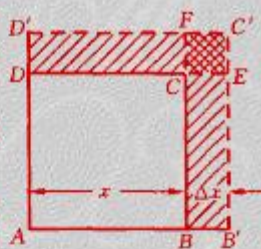


图 2.3.1

• 例 2 求下列函数的微分:

(1)  $y = x \sin 2x$ ;

(2)  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ;

(3)  $y = e^{-x} \cos(3 - x)$ ;

(4)  $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ ;

(5)  $y = \tan^2(1 + 2x^2)$ ;

(6)  $y = \arctan \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ ;

(7)  $y = \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 + x}}$ ;

(8)  $y = x^{\sin x}$ .

解 求一阶微分有两种方法, 一种是先求出导数  $y'$ , 再写出  $dy = y' dx$ ; 另一种是用微分形式不变性直接求出.

(1)  $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x$ , 故  $dy = (\sin 2x + 2x \cos 2x) dx$ .

(2)  $y' = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$ , 故  $dy = \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$ .

(3)  $y' = -e^{-x} \cos(3 - x) + e^{-x} \sin(3 - x)$ ,

故  $dy = e^{-x} [\sin(3 - x) - \cos(3 - x)] dx$ .

(4)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ , 故  $dy = \frac{-x}{|x| \sqrt{1 - x^2}} dx$ .

(5)  $y' = 2 \tan(1 + 2x^2) \sec^2(1 + 2x^2) \cdot 4x$ ,

故  $dy = 8x \tan(1 + 2x^2) \sec^2(1 + 2x^2) dx$ .



$$(6) y' = \frac{-2x}{x^4+1}, \text{故 } dy = \frac{-2x}{x^4+1} dx.$$

$$(7) y' = \frac{1}{3} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{-2/3} = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2},$$

$$\text{故 } dy = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{2}{3(x^2-1)} dx.$$

$$(8) y' = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \\ = x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right),$$

$$\text{故 } dy = x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) dx.$$

**例 3** 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立.

$$(1) d(\quad) = ax^{a-1} dx \quad (a \in \mathbf{R}); \quad (2) d(\quad) = -\sin x dx;$$

$$(3) d(\quad) = e^{-2x} dx; \quad (4) d(\quad) = \sec^2 3x dx;$$

$$(5) d(\quad) = \frac{dx}{x^2+a^2} \quad (a \in \mathbf{R}); \quad (6) d(\quad) = \frac{dx}{3x+1};$$

$$(7) d(\quad) = xe^{x^2} dx; \quad (8) d(\quad) = \frac{\ln|x|}{x} dx.$$

**解** 填入括号内的函数分别为: (1)  $x^a + C$ ; (2)  $\cos x + C$ ;

$$(3)  $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ ; (4)  $\frac{1}{3}\tan 3x + C$ ; (5)  $\frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$ , 当  $a \neq 0$$$

$$\text{时};  $-\frac{1}{x} + C$ , 当  $a = 0$  时; (6)  $\frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$ ; (7)  $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ ;$$

$$(8) \frac{1}{2}\ln^2|x| + C.$$

注意, 因为  $dC = 0$ , 所以各题答案均应有  $C$ .

**• 例 4** 计算下列函数的近似值:

$$(1) \cos 29^\circ; \quad (2) \tan 136^\circ;$$

$$(3) \sqrt{25.4}; \quad (4) \arcsin 0.5002;$$

$$(5) \ln 1.01; \quad (6) \sqrt{\frac{(2.037)^2 - 1}{(2.037)^2 + 1}}.$$

**解** 先根据题意确定函数  $f(x)$  和  $x_0$  以及  $\Delta x$ , 然后根据  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$  进行计算.

$$(1) f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{6}, \Delta x = 29^\circ - 30^\circ = -\frac{\pi}{180}, \text{故}$$

$$\cos 29^\circ \approx \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360} \approx 0.8747.$$

$$(2) f(x) = \tan x, x_0 = \frac{3}{4}\pi, \Delta x = \frac{\pi}{180}, \text{故}$$

$$\tan 136^\circ \approx \tan \frac{3}{4}\pi + \sec^2 \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{\pi}{180} = -1 + 2 \frac{\pi}{180} \approx -0.965.$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 25, \Delta x = 0.4, \text{故}$$

$$\sqrt{25.4} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \times 0.4 = 5 + 0.04 = 5.04.$$

$$(4) f(x) = \arcsin x, x_0 = 0.5, \Delta x = 0.0002, \text{故}$$

$$\begin{aligned} \arcsin 0.5002 &\approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-1/4}} \times 0.0002 \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{0.0004}{\sqrt{3}} \approx 0.5238. \end{aligned}$$

$$(5) f(x) = \ln x, x_0 = 1, \Delta x = 0.01, \text{故}$$

$$\ln 1.1 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \times 0.01 = 0.01.$$

$$(6) f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}, x_0 = 2, \Delta x = 0.037, \text{因为}$$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad f'(2) = \sqrt{\frac{5}{3}} \times \frac{4}{25},$$

$$\text{故 } \sqrt{\frac{(2.037)^2-1}{(2.037)^2+1}} \approx \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}} \times \frac{4}{25} \times 0.037 \approx 0.78214.$$

**例 5** 如图 2.3.2 所示, 一透镜的凸面半径是  $R$ , 口径是  $2H, H \ll R$ , 厚度是  $\delta$ .

(1) 证明:  $\delta \approx \frac{H^2}{2R}$ ;



(2) 设  $H = 25 \text{ mm}$ ,  $R = 100 \text{ mm}$ , 求  $\delta$  的近似值;

(3) 设  $R = 150 \text{ mm}$ ,  $\delta = 3 \text{ mm}$ , 求  $H$  的近似值.

解 (1) 由几何知识可知  $\delta = R - \sqrt{R^2 - H^2} = R - R\sqrt{1 - (H/R)^2}$ , 其中  $(H/R)^2$  很小, 依  $x \rightarrow 0$  时, 有  $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$ , 得

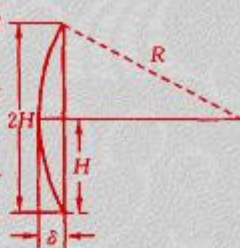


图 2.3.2

$$1 \sqrt{1 - (H/R)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(-H^2/R^2) = 1 - H^2/(2R^2),$$

所以  $\delta \approx R - R[1 - H^2/(2R^2)] = H^2/(2R)$ .

$$(2) \delta \approx \frac{(25)^2}{2 \times 100} = \frac{25}{8} = 3.125 \text{ (mm)}.$$

$$(3) H \approx \sqrt{2R\delta} = \sqrt{300 \times 3} = 30 \text{ (mm)}.$$

例 6 有一批半径为  $1 \text{ cm}$  的球, 为了降低球面的粗糙度, 要镀上一层铜, 厚度为  $0.01 \text{ cm}$ . 试估计每只球要用多少克的铜 (铜的密度是  $8.9 \text{ g/cm}^3$ ).

解 先求镀铜后球体积的增量 (即铜的体积), 再计算其质量.

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{4}{3}[\pi(1+0.01)^3 - \pi 1^3] \approx \frac{4}{3}\pi + 4\pi \times 0.01 - \frac{4}{3}\pi \\ &\approx 0.04\pi, \end{aligned}$$

故  $m \approx 0.04\pi \times 8.9 = 1.118 \text{ (g)}.$

例 7 钟摆摆动的周期  $T$  与摆长  $l$  的关系是  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , 其中  $g$  是重力加速度. 现有一只挂钟, 当钟摆长为  $10 \text{ cm}$  时走得很准确. 由于摆长没有校正好, 长了  $0.01 \text{ cm}$ , 问这只钟每天慢多少秒.

解  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , 取  $l_0 = 10$ ,  $\Delta l = 0.01$ , 则

$$\begin{aligned} T_l &\approx 2\pi\sqrt{10/g} + 2\pi/\sqrt{g} \times 1/(2\sqrt{10}) \times 0.01 \\ &= 2\pi\sqrt{10/g}(1 + 0.01/20). \end{aligned}$$

故此钟一个周期慢  $0.01/20 = 0.0005 \text{ (s)}$ , 所以一天慢

$$0.0005 \times 3600 \times 24 = 43.2 \text{ (s)}.$$

**例 8** 求由方程  $e^{xy} - xy = 0$  所确定隐函数  $y = f(x)$  的微分  $dy$ .

**解**  $e^{xy} - xy = 0$  两边对  $x$  求导, 得

$$e^{xy}(1+y') - (y+xy') = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - e^{xy}}{e^{xy} - x}.$$

所以 
$$dy = y' dx = \frac{y - e^{xy}}{e^{xy} - x} dx.$$

**• 例 9** 求由参数方程  $x = 3t^2 + 2t + 3, e^y \sin t - y + 1 = 0$  所确定的函数  $y = f(x)$  的微分  $dy$ .

**解**  $x'_t = 6t + 2$ , 将  $e^y \sin t - y + 1 = 0$  两边对  $t$  求导, 得

$$e^y y'_t \sin t + e^y \cos t - y'_t = 0 \Rightarrow y'_t = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t},$$

所以 
$$dy = \frac{y'_t}{x'_t} dx = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t} \cdot \frac{1}{6t + 2} dx.$$

**• 例 10** 求下列函数  $y$  关于自变量  $x$  的二阶微分:

(1)  $y = \frac{\sin x}{x};$  (2)  $xy + y^2 = 1.$

**解** (1) 因为  $y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ , 所以

$$dy = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx.$$

于是

$$d^2 y = \left( \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx \right)' dx = \frac{(2 - x^2) \sin x - 2x \cos x}{x^3} dx^2.$$

(2) 将  $xy + y^2 = 1$  两边对  $x$  求导, 得

$$y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x + 2y},$$

故 
$$dy = -\frac{y}{x + 2y} dx.$$



$$\begin{aligned} d^2y &= \left(-\frac{y}{x+2y}dx\right)'dx = \frac{-y'(x+2y)+y(1+2y')}{(x+2y)^2}dx dx \\ &= \frac{y-xy'}{(x+2y)^2}dx^2 = \frac{2}{(x+2y)^3}dx^2. \end{aligned}$$

**例 11** 有人说:“若  $y=f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 该函数在  $x_0$  点的微分  $dy$  是  $\Delta x$  的同阶无穷小.” 这种说法是否正确? 为什么?

**解** 因为, 若  $y=f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处可微, 且  $dy=f'(x_0)\Delta x$ . 因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta x} = f'(x_0).$$

即知, 当  $f'(x_0)=0$  时,  $f(x)$  在  $x_0$  的微分  $dy$  是  $\Delta x$  的高阶无穷小, 所以这种说法不正确.

• **例 12** 证明: 函数  $f: V(x_0) \rightarrow \mathbf{R}$  在  $x_0$  处可微(可导)的充要条件是存在一个关于  $\Delta x$  的线性函数  $L(\Delta x)=a\Delta x$ , 使得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|} = 0.$$

**证** 必要性 设  $f(x)$  在  $x_0$  处可微, 则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+o(\Delta x) \quad (a \in \mathbf{R}).$$

取  $L(\Delta x)=a\Delta x$ , 则有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

充分性 设存在  $L(\Delta x)=a\Delta x$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 使得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)|}{|\Delta x|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-L(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

依有极限的函数与极限的关系, 有

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - L(\Delta x) &= o(\Delta x), \\ \text{所以 } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= L(\Delta x) + o(\Delta x) \\ &= a\Delta x + o(\Delta x). \end{aligned}$$

**例 13** 设函数值相应于自变量的增量

$$\Delta f(x_0) = 2\sin(x - x_0) + (\sqrt[3]{1 + (x - x_0)^2} - 1)\varphi(x - x_0),$$

$$\text{其中 } \varphi(x - x_0) = \begin{cases} \ln |x - x_0|, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0, \end{cases} \text{ 求 } df(x_0).$$

**解** 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{2\sin(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{\sqrt[3]{1 + (x - x_0)^2} - 1}{x - x_0} \ln |x - x_0| \right] \\ &= 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + h^2} - 1}{h} \ln |h| = 2, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } df(x_0) = 2dx.$$

**例 14** 设  $y = \frac{x-a}{1-ax}$  ( $|a| < 1$ ), 证明: 当  $|x| < 1$  时,

$$\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{1-x^2},$$

**证** 对方程  $y = \frac{x-a}{1-ax}$  两边微分, 得

$$dy = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2} dx.$$

$$\text{因为 } 1-y^2 = 1 - \left( \frac{x-a}{1-ax} \right)^2 = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2} (1-x^2),$$

$$\text{即 } \frac{1-a^2}{(1-ax)^2} = \frac{1-y^2}{1-x^2},$$

$$\text{所以 } dy = \frac{1-y^2}{1-x^2} dx \Rightarrow \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{1-x^2}.$$



$g'(x) \neq 0$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

6. L'Hospital 法则 设函数  $f, g$  在区间  $(x_0, x_0 + \delta)$  (其中  $\delta > 0$ ) 内满足下列条件:

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$ ,

(2)  $f, g$  在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内可导, 且  $g'(x) \neq 0$ ,

(3)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$  ( $a$  为有限实数或无穷大),

则 
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$

对于当  $x \rightarrow x_0^-$ ,  $x \rightarrow x_0$ ,  $x \rightarrow \infty (\pm\infty)$  等情形, 也有类似的结论.

7. 设  $f, g$  在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内满足 L'Hospital 法则中的条件(2)与(3), 条件(1)改为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \infty,$$

则有同样的结论成立.

以上第 6、第 7 是关于  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  型不定式, 可用 L'Hospital 法则求极限. 对  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$  型的不定式可通过恒等变形、通分与取对数等方法转化为  $\frac{0}{0}$  与  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式, 再利用 L'Hospital 法则.

### 疑难解析

1. 三个中值定理之间有什么联系? 它们的几何意义是什么?

答 可以认为, Lagrange 中值定理是 Cauchy 中值定理的特例, Rolle 定理又是 Lagrange 中值定理的特例. 事实上, 在 Cauchy 中值定理中令  $g(x) = x$ , 就得到 Lagrange 中值定理, 在 Lagrange

中值定理中令  $f(a) = f(b)$  就得到 Rolle 定理. 在数学史上, 是由 Rolle 定理  $\Rightarrow$  Lagrange 中值定理  $\Rightarrow$  Cauchy 中值定理的.

Rolle 定理的几何意义是: 满足定理条件的函数  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内的曲线上至少存在一条水平切线. Lagrange 中值定理的几何意义是: 满足定理条件的函数  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内的曲线上至少存在一点  $(\xi, f(\xi))$ , 曲线在该点的切线平行曲线两端点的连线. Cauchy 中值定理的几何意义是: 满足定理条件的由  $u = g(x)$ ,  $v = f(x)$  所确定的曲线上至少有一点, 曲线在该点的切线平行两端点连线. 在 Rolle 定理中, 因为  $f(a) = f(b)$ , 所以两端点连线也是水平的. 从而, 三个中值定理的几何意义是共同的: 满足定理条件的函数在区间内的曲线上至少有一点的切线平行于曲线在区间上两端点的连线.

2. 利用 L'Hospital 法则求极限时应注意哪些问题?

答 (1) 首先要确定所求极限是否是  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式. 如是  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, 0^\infty$  型不定式, 要先转化为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式, 才能使用 L'Hospital 法则. 若不是  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式, 则不能使用 L'Hospital 法则.

(2) 所讨论极限验证是否满足 L'Hospital 法则的条件, 一般只验证前两个条件(通过观察验证, 不必写出). 第三个条件通过计算结果才能验证, 所以不必先验证.

(3) 当  $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不能求出, 但仍为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式且满足定理条件时, 可继续使用 L'Hospital 法则, 并可多次使用.

当  $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不能求出, 且不是不定式时, 极限不一定不存在, 可考虑用其它方法试求. 如

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\tan x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \dots,$$



反复循环,得不出结果.改用其它方法

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{\tan x} \xrightarrow{\text{化简}} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\sin x} = 1.$$

(4) 在使用 L'Hospital 法则之前或之中,要注意化简函数,并与其它求极限方法配合使用,使计算更为简捷.如

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right) &\xrightarrow{\text{L'}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \cos 3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sin 3x} \\ &\xrightarrow{\text{等价无穷小}} 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{3x} = 3 \times \frac{1}{3} = 1. \end{aligned}$$

(5) L'Hospital 法则是计算不定式极限的一种方式,但不是唯一的,也不一定是最简捷的.对于具体求极限计算只有认真考察,才能选定最为简单易行的方法.

### 典型例题与习题详解

要求理解三个中值定理,学会应用中值定理证明定理、证明等式与不等式、证明极限与连续性、证明函数的零点.在解题时,要学会分析问题的条件,确定应用哪个定理;在缺少条件时努力创造条件,使能应用定理.证明时,可以直接证明.一是验证问题满足某个定理条件,再利用定理结论证明所需结果;二是引入辅助函数(通常是将待证结论通过移项、变形、拼凑重组得出),再验证其符合某个定理条件,由定理结论证明待证结果.证明比较困难时,可选择反证法,假设待证命题的逆命题成立,由题给条件进行推演导出矛盾,从而原命题成立.

• 例 1 下列函数在给定的区间上是否满足 Rolle 定理中的条件?如果满足,求出定理中的  $\xi$ ;如果不满足, $\xi$  是否一定不存在?

$$(1) f(x) = \frac{3}{2x^2 + 1}, [-1, 1]; \quad (2) f(x) = 2 - |x|, [-2, 2];$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0, \\ -x^2 + 2x + 1, & 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

解 (1) 因为  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续,在  $(-1, 1)$  内可导,且

$f(-1) = f(1) = 1$ , 所以满足定理条件.

由  $f'(x) = -\frac{6x}{(1+x^2)^2}$  知,  $\xi = 0$ .

(2) 因为  $f(x) = 2 - |x|$  在  $x = 0$  处不可导, 所以不满足定理条件. 又由于

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0, \\ \text{不存在}, & x = 0, \\ -1, & 0 < x \leq 2, \end{cases}$$

所以定理中的  $\xi$  不存在.

(3) 因为  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续, 所以  $f(x)$  在  $[-2, 3]$  中不满足定理条件. 但

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0, \\ \text{不存在}, & x = 0, \\ -2x + 2, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

在  $x = 1$  处有  $f'(1) = 0$ , 即存在  $\xi = 1$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

所以说, Rolle 定理的条件是充分的, 但不一定是必要的. 事实上, 题(3)中的函数  $f(x)$  在  $[-2, 3]$  的子区间  $[1/2, 3/2]$  上满足 Rolle 定理条件,  $f(1/2) = f(3/2) = 7/4$ .

• 例 2 证明: 对函数  $f(x) = px^2 + qx + r$  在某区间上应用 Lagrange 中值定理时所求得的点  $\xi$  是区间的中点, 其中  $p, q$  与  $r$  是常数,  $p \neq 0$ .

证 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上满足 Lagrange 中值定理条件, 有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

而  $f(b) - f(a) = p(b^2 - a^2) + q(b - a),$

$$f'(\xi) = 2p\xi + q,$$

即  $p(b^2 - a^2) + q(b - a) = (2p\xi + q)(b - a).$

得出  $2p\xi = p(b + a) \Rightarrow \xi = (b + a)/2,$

所以,  $\xi$  是区间  $[a, b]$  的中点.

• 例 3 能否用下面的方法证明 Cauchy 定理? 为什么?



对  $f, g$  分别应用 Lagrange 中值定理, 得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

解 不能. 对  $f, g$  分别应用 Lagrange 中值定理所得到的  $\xi$  并不一定相同, 而 Cauchy 中值定理中的  $\xi$  是相同的.

• 例 4 设  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ , 问方程  $f'(x) = 0$  有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 因为  $f(x)$  是四次多项式, 所以  $f'(x)$  是三次多项式, 至多有三个实根. 又

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0,$$

由 Rolle 定理知, 在区间  $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$  内  $f'(x) = 0$  各至少有一个实根, 从而知  $f'(x) = 0$  有三个实根, 分别位于  $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$  内.

• 例 5 设  $a_i \in \mathbf{R} (i = 0, 1, \dots, n)$ , 并且满足

$$a_0 + a_1/2 + a_2/3 + \dots + a_n/(n+1) = 0,$$

证明: 方程  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

证 作辅助函数

$$F(x) = a_0x + a_1x^2/2 + a_2x^3/3 + \dots + a_nx^{n+1}/(n+1),$$

则  $F(0) = 0, F(1) = a_0 + a_1/2 + a_2/3 + \dots + a_n/(n+1) = 0$ ,

又  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 则依 Rolle 定理知, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ . 而

$$F'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

从而知方程  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个根  $\xi$ .

• 例 6 设函数  $y = f(x)$  二阶可导, 且  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ , 其中  $x_1 < x_2 < x_3$ , 证明: 至少存在一点  $\xi \in (x_1, x_3)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

证 本题证明中需两次应用 Rolle 定理.

因为  $f(x)$  二阶可导, 且  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ , 则在  $[x_1, x_2]$  和  $[x_2, x_3]$  上分别应用 Rolle 定理, 知至少有  $\eta_1 \in (x_1, x_2), \eta_2 \in (x_2, x_3)$ , 使得  $f'(\eta_1) = 0, f'(\eta_2) = 0$ . 又  $f'(x)$  在  $[\eta_1, \eta_2]$  上满足 Rolle 定理条件, 所以至少存在一  $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subseteq (x_1, x_3)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

• 例 7 设  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 并且  $\forall x \in (a, b), f'(x) = g'(x)$ , 证明: 在  $[a, b]$  上,

$$f(x) = g(x) + C \quad (C \in \mathbf{R} \text{ 是常数}).$$

证 作辅助函数  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则由题设条件知,  $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ . 于是,  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  (设  $x_1 < x_2$ ), 函数  $F(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上满足 Lagrange 中值定理条件, 有

$$F(x_1) - F(x_2) = F'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

故由  $x_1, x_2$  的任意性知,  $F(x) \equiv C$ . 即在  $[a, b]$  上,

$$f(x) = g(x) + C \quad (C \in \mathbf{R} \text{ 是常数})$$

• 例 8 证明: 在闭区间  $[-1, 1]$  上,

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

证 令  $F(x) = \arcsin x + \arccos x$ , 则  $F(x)$  在  $[-1, 1]$  上满足 Lagrange 中值定理条件, 且

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

依 Lagrange 中值定理推论 1 知,  $F(x) = C$ .

不妨取  $x = 0$ , 代入  $F(x)$  得,  $C = F(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \pi/2$ . 所以, 在  $[-1, 1]$  上,

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

• 例 9 设  $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$  可微,  $f(0) = 0, |f'(x)| \leq 1$ , 证明: 在  $(-1, 1)$  内,  $|f(x)| < 1$ .

证 引入函数  $g(x) = x$ , 则  $f(x), g(x)$  在  $[x, 0]$  或  $[0, x]$  上满足 Cauchy 中值定理条件 ( $x \in (-1, 1)$ ), 故

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{1} = f'(\xi).$$



因为  $g(x) = x, f(0) = 0, g(0) = 0,$

所以  $|\frac{f(x)}{x}| = |f'(\xi)| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |x| \leq 1.$

**例 10** 证明下列不等式:

(1)  $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|;$

(2)  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (a > b > 0);$

(3)  $e^x > xe \quad (x > 1).$

**证** 首先要设定函数,再确定区间,然后利用中值定理进行证明.有时还要进行讨论.

(1) 设  $f(x) = \arctan x$ , 区间为  $[x, y]$ .

当  $x = y$  时,显然有  $|\arctan x - \arctan y| = |x - y|.$

当  $x \neq y$  时,可设  $x < y$  ( $x > y$  类似可证),在  $[x, y]$  上应用 Lagrange 中值定理,有

$$\arctan y - \arctan x = \frac{1}{1+\xi^2}(y-x).$$

所以  $|\arctan y - \arctan x| = \frac{1}{1+\xi^2} |y-x| \leq |y-x|,$

即  $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$

(2) 设  $f(x) = \ln x$  ( $x > 0$ ), 区间为  $[b, a]$ . 在  $[b, a]$  上应用 Lagrange 中值定理,可得

$$\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(b-a),$$

因为  $1/a < 1/\xi < 1/b$ , 所以

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

(3) 设  $f(x) = e^x$ , 区间为  $[1, x]$ . 在  $[1, x]$  上应用 Lagrange 中值定理,得

$$e^x - e = e^\xi(x-1) = xe^\xi - e^\xi.$$

因为  $e < e^\xi < e^x$ , 所以  $e^x - e > xe^\xi - e$ , 即

$$e^x > xe \quad (x > 1).$$

• 例 11 设  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  是可导函数, 且  $g' \neq 0$ , 证明: 存在  $c \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(a) - f(c)}{g(c) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

证 引入辅助函数

$$F(x) = f(a)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(b)$$

(因为所证等式可写为  $f(a)g'(c) - f(c)g'(c) - f'(c)g(c) + g(b)f'(c)$ , 恰好是  $F(x)$  在点  $c$  的导数), 由题设条件知  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续且可导, 又  $F(a) = F(b) = f(a)g(b)$ , 满足 Rolle 定理条件, 故至少有一  $c \in (a, b)$ , 使  $F'(c) = 0$ . 因为

$$F'(x) = f(a)g'(x) - f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + f'(x)g(b),$$

所以

$$\begin{aligned} f(a)g'(c) - f'(c)g(c) - f(c)g'(c) + f'(c)g(b) &= 0 \\ \Rightarrow [f(a) - f(c)]g'(c) &= [g(c) - g(b)]f'(c) \\ \Rightarrow \frac{f(a) - f(c)}{g(c) - g(b)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (g'(c) \neq 0). \end{aligned}$$

• 例 12 证明方程  $x^5 + x - 1 = 0$  有唯一正根.

证 令  $f(x) = x^5 + x - 1$ , 取区间  $[0, 1]$ , 则  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $f(0) = -1, f(1) = 1$ . 依零点存在定理, 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = 0$ , 即方程  $x^5 + x - 1 = 0$  存在正根.

用反证法证明正根的唯一性. 设还有  $x_1 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_1) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $[x_0, x_1]$  或  $[x_1, x_0]$  上满足 Rolle 定理条件, 于是至少有一  $\xi \in (x_0, x_1)$  或  $(x_1, x_0)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ , 即  $5\xi^4 + 1 = 0$ . 而这是不可能的, 故  $x^5 + x - 1 = 0$  只有唯一的正根.

例 13 在下列求极限的过程中都应用了 L' Hospital 法则, 解法有无错误?

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1} = 0;$$



$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin x + x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x + 1}{1}, \text{ 极限不存在;}$$

在;

(3) 设  $f$  在  $x_0$  处二阶可导, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h))}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h))}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h) + f''(x_0 - h))}{2} = f''(x_0). \end{aligned}$$

**解** 三题解法都有错误.

(1) 原式不是  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型不定式, 不能使用 L'Hospital 法则.

(2) 用其它方法可求出极限, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 0 + 1 = 1.$$

(3) 原式只能使用一次 L'Hospital 法则, 然后用导数定义求极限, 即

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h))}{h^2} \\ & \stackrel{\text{L'}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h))}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{-h} \right] \\ &= \frac{1}{2} [f''(x_0) + f''(x_0)] = f''(x_0). \end{aligned}$$

• 例 14 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 1/x)}{\arctan x - \pi/2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (\cot^2 x - 1/x^2);$$

$$\begin{aligned}
 (5) \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \ln \frac{1+x}{1-x}; & \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}; \\
 (7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}; & \quad (8) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}; \\
 (9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}; & \quad (10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x}; \\
 (11) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}.
 \end{aligned}$$

**解** 本例各小题均可用L'Hospital法则求解. 求解前先观察是否 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式,若是其它型不定式,要先化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式;再考察是否满足法则的条件(1)、(2),然后使用L'Hospital法则.

$$(1) \text{原式} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

其实也可用等价无穷小求解,即

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1 + 1 = 2.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{原式} & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin x \cdot [-4(\pi - 2x)]} \\
 & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} -\frac{1}{4} \frac{\sin x}{-2\sin x + (\pi - 2x)\cos x} = -\frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{原式} & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1/x^2}{(1+1/x) \cdot 1/(1+x^2)} \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1+x^2}{x+x^2} = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{原式} (\infty - \infty) & \stackrel{\text{通分}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cot^2 x - 1}{x^2} \left( \frac{0}{0} \right) \\
 & \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cot^2 x - x^2 2 \cot x \csc^2 x}{2x} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} (\cot^2 x - x \cot x \csc x) \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x - x \cos x}{\sin^3 x}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos x \sin x - x)}{x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{x^3} \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{3x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{3x^2} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

可见,解题过程中的化简是十分必要的.

$$\begin{aligned}
(5) \text{ 原式 } (0 \cdot \infty) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1+x)/(1-x)]}{\tan x} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \\
&\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)/(1+x) \cdot 2/(1-x)^2}{\sec^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/(1-x^2)}{\sec^2 x} = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \text{ 原式 } &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 \cos^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) \text{ 原式 } (\infty^0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\tan x \ln x}, \text{ 因为} \\
&\quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x \quad (0 \cdot \infty) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\csc^2 x} \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0.
\end{aligned}$$

所以 原式  $= e^{-0} = 1$ .

$$\begin{aligned}
(8) \text{ 原式 } (1^\infty) &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} e^{\tan 2x \ln \tan x}, \text{ 因为} \\
&\quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \tan 2x \ln \tan x \quad (\infty \cdot 0) \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \tan x}{\cot 2x} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x}{-\tan x \cdot 2\csc^2 2x} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin^2 2x}{\cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} (-\sin 2x) = -1.
\end{aligned}$$

所以 原式 =  $e^{-1}$ .

(9) 原式  $(1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2 \cdot \ln(\sin x/x)}$ . 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x/x)}{x^2} \quad \left( \frac{0}{0} \right) \\ & \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x \cos x - \sin x)/x^2}{2x \sin x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} \quad \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3} \\ & \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{6x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

所以 原式 =  $e^{-1/6}$ .

(10) 原式  $\xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(1+x)^{1/x}]^x}{1}$  (用对数求导法)

$$\begin{aligned} & = -\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \left[ -\frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)} \right] \\ & = -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x) \cdot (1+x)}{x^2(1+x)} \\ & = -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \\ & \xrightarrow{L'} -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} \\ & = \frac{e}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

(11) 原式  $(1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{(1+x)^{1/x}}{e}}$ . 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1+x)^{1/x}/e]}{x} \quad \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+x)]/x - 1}{x} \\ & \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x) - 1}{2x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以 原式 =  $e^{-1/2}$ .

• 例 15 试用三种方法求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ .



**解 解法 1** 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \left( \cos \frac{1}{n} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\cos(1/n) - 1} n^2 [\cos(1/n) - 1]}$ .

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \cos \frac{1}{n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \right)^2 \right] = -\frac{1}{2}$ .

所以 原式  $= e^{-1/2}$ .

**解法 2** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{t = 1/x} \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t)^{1/t^2}$   
 $= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{1}{t^2} \ln \cos t},$

因为  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{2t \cos t} = -\frac{1}{2},$

所以 原式  $= e^{-1/2}.$

**解法 3** 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \right)^{n^2}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \left( -2 \sin^2 \frac{1}{2n} \right) \right]^{-1 / (2 \sin^2 \frac{1}{2n}) + (-2n^2) \cdot \sin^2 \frac{1}{2n}},$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 \sin^2 \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(1/2n)}{2 \cdot (1/2n)^2} = \frac{1}{2},$

所以 原式  $= e^{-1/2}.$

• 例 16 试确定常数  $a, b$ , 使极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + a \cos 2x + b \cos 4x}{x^4}$$

存在, 并求出它的值.

**解** 因为极限存在, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + a \cos 2x + b \cos 4x) = 0$ , 即  $1 + a + b = 0$ .

又由 L'Hospital 法则, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a \sin 2x - 4b \sin 4x}{4x^3} \left( \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4a \cos 2x - 16b \cos 4x}{12x^2}, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} 4a \cos 2x - 16b \cos 4x = 0 \Rightarrow 4a - 16b = 0.$

解

$$\begin{cases} 1+a+b=0, \\ 4a-16b=0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a=-4/3, \\ b=1/3, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{故 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4a \cos 2x - 16b \cos 4x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x + 8b \sin 4x}{3x} \\ &= \frac{a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} + \frac{8}{3} b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \frac{2}{3}a + \frac{32}{3}b \\ &= -\frac{8}{9} + \frac{32}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

• 例 17 设函数  $f$  具有一阶连续导数,  $f''(0)$  存在, 且  $f'(0)$

$$= 0, f(0) = 0, g(x) = \begin{cases} f(x)/x, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 确定  $a$ , 使得  $g(x)$  处处连续;

(2) 对以上所确定的  $a$ , 证明  $g(x)$  具有一阶连续导数.

解 (1) 因为  $g(x)$  处处连续, 则  $g(x)$  在  $x=0$  处连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0 = g(0) = a,$$

所以

$$a = 0.$$

$$(2) \text{ 因为 } g(x) = \begin{cases} f(x)/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)/x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \stackrel{1'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2(x - 0)} = \frac{1}{2} f''(0), \end{aligned}$$

即

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} [x f'(x) - f(x)], & x \neq 0, \\ \frac{1}{2} f''(0), & x = 0. \end{cases}$$



显然,  $g'(x)$  在  $x \neq 0$  处连续, 在  $x = 0$  处有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \\ &= f''(0) - \frac{1}{2}f''(0) = \frac{1}{2}f''(0) = g'(0).\end{aligned}$$

所以  $g(x)$  具有一阶连续偏导数.

**例 18** 能否对以下极限使用 L'Hospital 法则:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}.$$

**解** (1) 不能. 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \stackrel{L'}{=} \dots,$$

如此循环不止, 得不出结果. 但是, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1.$$

(2) 不能. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$

不存在. 但有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

**例 19** 设  $y = f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ , 求函数的渐近线.

**解** 设渐近线方程为  $y = kx + b$ , 则

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 / \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = \frac{1}{e},$$

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{1}{(1+1/x)^x} - \frac{1}{e} \right] \\ &= \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = \frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{e - (1+t)^{1/t}}{t} \right] \\ &= \frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} (1+t)^{1/t} \left[ \frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right]\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}$$

$$\stackrel{L'}{=} -\frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(1+t)}{2t+3t^2} = \frac{1}{2e},$$

因此,渐近线方程为  $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$ .

**例 20** 设  $f(x) = \begin{cases} 1/x - 1/(e^x - 1), & x \neq 0, \\ 1/2 & x = 0, \end{cases}$  研究  $f(x)$  在  $x = 0$  处的可微性.

**解** 本例也就是研究是否存在极限

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x - 1/(e^x - 1) - 1/2}{x}. \quad \textcircled{1}$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x(e^x - 1)} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{2[e^x(1+x) - 1]}$$

$$\stackrel{L'}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-xe^x}{2e^x + xe^x} = 0,$$

所以式 ① 是  $\frac{0}{0}$  型不定式,可用 L'Hospital 法则求解,即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x - 1/(e^x - 1) - 1/2}{x}$$

$$\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x^2(e^x - 1)} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 1 - e^x - xe^x}{4x(e^x - 1) + 2x^2e^x}$$

$$\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-xe^x}{4(e^x - 1) + e^x(8x + 2x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x(x+1)}{(12 + 12x + 2x^2)e^x} = -\frac{1}{12},$$

即  $f'(0) = -\frac{1}{12}$ , 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处可微.

**例 21** 设函数  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(1) = 0$ . 证明: 存在点  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得



$$nf(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0.$$

证 引入辅助函数  $F(x) = x^n f(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $F(0) = F(1) = 0$ , 满足 Rolle 定理条件, 故存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $F'(x_0) = 0$ , 即

$$nx_0^{n-1} f(x_0) + x_0^n f'(x_0) = 0,$$

从而  $nf(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0$ .

• 例 22 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可微, 且  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明:  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists c \in (a, b)$ , 使得  $f'(c) = \lambda f(c)$ .

证 引入辅助函数  $F(x) = e^{-\lambda x} f(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $F(a) = F(b) = 0$ , 满足 Rolle 定理条件, 故存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $F'(c) = 0$ , 即

$$e^{-\lambda c} f'(c) - \lambda e^{-\lambda c} f(c) = 0,$$

从而  $f'(c) = \lambda f(c)$ .

例 23 设  $f$  在  $[a, b]$  上可微, 且  $a$  与  $b$  同号, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$(1) \quad 2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi);$$

$$(2) \quad f(b) - f(a) = \xi \left( \ln \frac{b}{a} \right) f'(\xi).$$

证 要先将待证等式变形, 观察是否需要引入辅助函数, 确定辅助函数后进行证明.

(1) 原式化为  $\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$ , 可知需引入辅助函数  $g(x) = x^2$ , 并在  $[a, b]$  上对  $f(x), g(x)$  应用 Cauchy 中值定理.

因为  $f(x), g(x)$  满足 Cauchy 中值定理条件, 故

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即  $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$ .

(2) 原式化为  $\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi}$ , 可知需引入辅助函数  $g(x) = \ln |x|$ , 并在  $[a, b]$  上对  $f(x), g(x)$  应用 Cauchy 中值定理.

因为  $f(x), g(x)$  满足Cauchy 中值定理条件, 故

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln|b|-\ln|a|} = \frac{f'(\xi)}{1/\xi} = \xi f'(\xi),$$

即 
$$f(b)-f(a) = \xi \left( \ln \frac{b}{a} \right) f'(\xi).$$

**例 24** 设  $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x-2 & 3x-2 \\ 1 & x-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ ,

使得  $f'(\xi) = 0$ .

**证** 因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且

$$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

所以  $f(x)$  满足Rolle 定理条件, 故存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

**例 25** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(1) = 0$ . 证明: 至少有一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f'(\xi) = -f(\xi)/\xi.$$

**证** 将待证结论改写为  $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$ , 可以观察到  $\xi$  是  $xf(x)$  的导函数方程  $xf'(x) + f(x) = 0$  的根. 故引入辅助函数  $F(x) = xf(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $F(0) = F(1) = 0$ , 满足Rolle 定理条件, 所以存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = -f(\xi)/\xi.$$

**例 26** 设  $f'(x) = \lambda f(x)$  ( $\lambda$  为常数),  $x \in \mathbf{R}$ , 证明  $f(x)$  为指数函数.

**证**  $\forall x \neq 0, x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x)e^{-\lambda x}$  在以  $x$  和 0 为端点的区间上满足Lagrange 中值定理条件, 于是

$$f(x)e^{-\lambda x} - f(0)e^{-\lambda 0} = [f'(\xi)e^{-\lambda \xi} - \lambda f(\xi)e^{-\lambda \xi}]x,$$

因为  $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$ , 所以有  $f(x)e^{-\lambda x} = f(0)$ , 即

$$f(x) = ae^{\lambda x} (a = f(0), x \in \mathbf{R}).$$



此式在  $x=0$  时亦成立.

**例 27** 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 已知  $f(0)=1, f(1)=1$ , 证明:  $\forall a, b > 0, \exists \xi, \eta \in (0,1)$ , 且  $\xi \neq \eta$ , 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

**证** 因为  $a, b > 0$ , 所以  $0 < \frac{a}{a+b} < 1$ . 又  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 由介值定理知,  $\exists t \in (0,1)$ , 使得  $f(t) = \frac{a}{a+b}$ .

在区间  $[0,t]$  和  $[t,1]$  上分别对  $f(x)$  应用 Lagrange 中值定理, 有

$$f(t) - f(0) = f'(\xi)(t-0), \quad \xi \in (0,t),$$

$$f(1) - f(t) = f'(\eta)(1-t), \quad \eta \in (t,1).$$

由此可得

$$t = \frac{f(t) - f(0)}{f'(\xi)} = \frac{a/(a+b)}{f'(\xi)}, \quad 1-t = \frac{f(1) - f(t)}{f'(\eta)} = \frac{b/(a+b)}{f'(\eta)}.$$

两式相加, 得

$$1 = \frac{a}{(a+b)f'(\xi)} + \frac{b}{(a+b)f'(\eta)},$$

即 
$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

**例 28** 设  $f(x), g(x), h(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 在  $(a,b)$  内可导, 证明: 存在  $\xi \in (a,b)$ , 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

**证** 引入辅助函数

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix},$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 依行列式的性质知,  $F(a) = F(b) = 0$ , 所以  $F(x)$  满足 Rolle 定理条件, 故存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

当  $h(x) \equiv 1$  时, 即可推出 Cauchy 中值定理的结果; 当  $g(x) = x$ ,  $h(x) \equiv 1$  时, 即可推出 Lagrange 中值定理的结果.

• 例 29 证明不等式:  $\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$ .

证 令  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [64, 66]$ , 显然  $f(x)$  满足 Lagrange 中值定理条件, 所以

$$\frac{f(66) - f(64)}{66 - 64} = f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi \in (64, 66),$$

即 
$$\frac{1}{\sqrt{66}} \leq \sqrt{66} - 8 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} < \frac{1}{\sqrt{64}} < \frac{1}{8},$$

故 
$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}.$$

• 例 30 设  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  二阶可微,  $f(0) = f(1)$ ,  $f'(1) = 1$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) = 2$ .

证 引入辅助函数  $F(x) = f(x) - x^2$ , 则  $F(x)$  显然满足 Lagrange 中值定理的条件, 所以存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得

$$F'(x_0) = F(1) - F(0) = -1.$$

又 
$$F'(1) = [f'(x) - 2x] \big|_{x=1} = f'(1) - 2 = -1,$$

所以  $F'(x) = f'(x) - 2x$  在  $[x_0, 1]$  上满足 Rolle 定理条件, 故存在  $\xi \in (x_0, 1) \subseteq (0, 1)$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ , 即

$$f''(\xi) - 2 = 0 \Rightarrow f''(\xi) = 2.$$

• 例 31 设  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得



$$\left| \begin{matrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{matrix} \right| = (b-a) \left| \begin{matrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{matrix} \right|.$$

证 令  $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上满足

Lagrange 中值定理条件, 故存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a),$$

即 
$$\left| \begin{matrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{matrix} \right| = (b-a) \left| \begin{matrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{matrix} \right|.$$

• 例 32 设  $f$  在  $x$  的某邻域内  $n$  阶可导,  $f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ , 试用 Cauchy 定理证明:

$$f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta x) x^n, \quad \theta \in (0, 1).$$

证 引入函数  $g(x) = x^n$ , 则  $f(x), g(x)$  在  $[0, x]$  上满足 Cauchy 中值定理条件, 故

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} &= \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{g'(\xi_1) - g'(0)} = \frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} \\ &= \cdots = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - g^{(n-1)}(0)} \\ &= \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}, \end{aligned}$$

式中  $\xi_n = \theta x \in (0, x), 0 < \theta < 1$ .

即 
$$f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta x) \cdot x^n.$$

• 例 33 设抛物线  $y = -x^2 + Bx + C$  与  $x$  轴有两个交点  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ). 函数  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 并且曲线  $y = f(x)$  与  $y = -x^2 + Bx + C$  在  $(a, b)$  内有一个交点. 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = -2$ .

证 设  $y = f(x)$  与  $y = -x^2 + Bx + C$  在  $(a, b)$  内交于  $x = x_0$ . 引入辅助函数  $F(x) = f(x) + x^2 - Bx - C$ , 则由题设条件知  $F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$ , 从而  $F(x)$  在  $[a, x_0]$  与  $[x_0, b]$  上均满

足 Rolle 定理条件,故存在  $\xi_1 < \xi_2 < 0$ ,使得  $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ .

由上所得即知,  $F'(x) = f'(x) + 2x - B$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上满足 Rolle 定理条件,故存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$ ,使得  $F''(\xi) = 0$ ,即  $f''(\xi) = -2$ .

• 例 34 设  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可微,  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f'_+(a)f'_-(b) > 0$ , 则方程  $f'(x) = 0$  在  $(a, b)$  内至少有一个根.

证 由于  $f'_+(a)f'_-(b) > 0$ ,不妨设  $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0$ ,故

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow \exists x_1 > a, \text{使 } f(x_1) > f(a) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0 \Rightarrow \exists x_2 < b, \text{使 } f(x_2) < f(b) = 0.$$

由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可微知,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,即  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上连续. 于是,依零点存在定理,存在  $x_0 \in (x_1, x_2)$ ,使得  $f(x_0) = 0$ . 从而在  $[a, x_0]$  与  $[x_0, b]$  上应用 Rolle 定理,可知存在  $\xi_1 \in (a, x_0), \xi_2 \in (x_0, b)$ ,使得  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ .

又  $f'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上满足 Rolle 定理条件,故存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (a, b)$ ,使得  $f''(\xi) = 0$ ,即方程  $f''(x) = 0$  在  $(a, b)$  内至少有一个根.

• 例 35 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续,在  $(a, b)$  内可导,  $a \geq 0$ ,证明: 存在  $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ ,使得

$$f'(x_1) = (b+a) \frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ab + a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

证 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上满足 Lagrange 中值定理条件,故存在  $x_1 \in (a, b)$ ,使得

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad ①$$

又令  $g(x) = x^2, h(x) = x^3$ ,对  $f(x)$  与  $g(x), f(x)$  与  $h(x)$  分别在  $[a, b]$  上运用 Cauchy 中值定理,得  $x_2, x_3 \in (a, b)$ ,使得



$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}, \quad \text{即} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2},$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{f'(x_3)}{g'(x_3)}, \quad \text{即} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2},$$

$$\text{即有} \quad \begin{cases} (b+a) \frac{f'(x_2)}{2x_2} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, & \text{②} \\ (b^2+ab+b^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. & \text{③} \end{cases}$$

由式①、②、③得知, 存在  $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ , 使得

$$f(x_1) = (b+a) \frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2+ab+a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

**例 36** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $ab > 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{ab}{b-a} \left| \begin{array}{cc} b & a \\ f(a) & f(b) \end{array} \right| = \xi^2 [f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

**证** 将欲证等式变形为

$$\frac{bf(b)-af(a)}{-1/b+1/a} = \frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{1/\xi^2},$$

可知需引入辅助函数  $F(x) = xf(x)$ ,  $G(x) = -1/x$ . 因为  $F(x)$ ,  $G(x)$  在  $[a, b]$  上满足 Cauchy 中值定理条件, 故

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{bf(b)-af(a)}{-1/b+1/a} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{1/\xi^2},$$

$$\text{即} \quad \frac{ab}{a-b} \left| \begin{array}{cc} b & a \\ f(a) & f(b) \end{array} \right| = \xi^2 [f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

## 第五节 Taylor 定理

### 知识要点

1. **Taylor 定理** 设  $f$  在  $x_0$  处  $n$  阶可微, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n). \quad ①$$

式中,  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$  称为函数  $f$  在  $x_0$  处的  $n$  次 Taylor 多项式, 其系数称为  $f$  在  $x_0$  处的 Taylor 系数. 式 ① 称为  $f$  在  $x_0$  处的带 Peano 余项的 Taylor 公式.  $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$  称为  $f$  的 Peano 余项.

2. 设函数  $f$  在区间  $I$  上  $n+1$  阶可导,  $x_0 \in I$ , 则对任何  $x \in I$ , 在  $x$  与  $x_0$  之间至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \quad ②$$

式 ② 称为  $f$  在  $x_0$  的邻域内带 Lagrange 余项的  $n$  阶 Taylor 公式.

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$  称为 Lagrange 型余项.

当  $x_0 = 0$  时, 式 ② 成为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in (0, 1). \quad ③$$

它常被称为 Maclaurin 公式.

3. 常用的几个 Maclaurin 公式如下:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1} + o(x^{2m}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + o(x^{2m}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n),$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots$$



$$+ \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n),$$

### 疑难解析

Taylor 公式有什么实际意义?

答 Taylor 公式的实际意义是, 用一个  $n$  次多项式来逼近函数, 用于函数值的近似计算、极限计算、等式或不等式的证明. Taylor 多项式具有形式简单、易于计算等优点.

Taylor 公式由  $f(x)$  的  $n$  次 Taylor 多项式与余项  $R_n(x)$  组成. Taylor 多项式可以利用函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的各阶导数直接写出, 而余项  $R_n(x)$  则有定性的与定量的两类. Peano 余项  $o((x-x_0)^n)$  是定性的, 表示余项是比  $(x-x_0)^n$  高阶的无穷小, 常用于理论研究或形式表示. Lagrange 余项  $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$  是定量的, 一般用于函数值的计算与函数性态的研究.

### 典型例题与习题详解

要求掌握函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的 Taylor 公式的构造方法, 学会应用 Taylor 公式进行近似计算, 极限计算, 证明等式与不等式.

• 例 1 设  $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 3$ , 写出它在  $x_0 = 1$  处的三阶 Taylor 公式.

解 由

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 3, \quad f'(x) = 6x^2 - 2x + 1,$$

$$f''(x) = 12x - 2, \quad f'''(x) = 12$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad P_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3. \end{aligned}$$

• 例 2 写出下列函数的 Maclaurin 公式:

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-x}; \quad (2) f(x) = \ln(1-x);$$

$$(2) f(x) = \operatorname{ch} x; \quad (4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

**解** 求函数的Maclaurin公式有两种方法.一种是直接法,依Taylor定理,求出各阶导数,依公式写出.二是间接法,将函数拼凑重组、变形代换,化为已知Maclaurin公式的函数形式,然后套用公式写出.

(1)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$ . 所以,  $f(x)$  的Maclaurin公式为

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+2}} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

(2)  $f(x) = \ln(1-x) = \ln[1+(-x)]$ , 利用  $\ln(1+x)$  的Maclaurin公式即得

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\theta x)^{n+1}},$$

$$0 < \theta < 1.$$

(3) 因为

$$f(x) = \operatorname{ch}(x), \quad f^{(2k)}(x) = \operatorname{ch}(x),$$

$$f^{(2k+1)}(x) = \operatorname{sh}(x) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$\text{所以} \quad f^{(2k)}(0) = 1, \quad f^{(2k+1)}(0) = 0,$$

从而

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\operatorname{sh} \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = [1+(-2x)]^{-1/2}, \text{ 利用 } (1+x)^r \text{ 的}$$

Maclaurin公式即得

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 + x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{3 \cdot 5}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n$$



$$+ \frac{(2n+1)!!}{(n+1)! \sqrt{(1-2\theta x)^{2n+3}}} x^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

• 例3 求下列函数在指定点处带Piano余项的Taylor公式:

$$(1) f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -1; \quad (2) f(x) = \ln x, x_0 = 1;$$

$$(3) f(x) = e^{2x}, x_0 = 1; \quad (4) f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

解 先求出  $f^{(n)}(x)$  和  $f^{(n)}(x_0)$ , 再依Taylor定理写出Taylor公式.

$$(1) f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad f^{(n)}(-1) = -n!,$$

$$\text{故 } \frac{1}{x} = -[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^n] + o((x+1)^n) \\ (x \rightarrow -1),$$

$$(2) f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} (n-1)!,$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)!,$$

$$\text{故 } \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots \\ + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + o((x-1)^n) \quad (x \rightarrow 1).$$

$$(3) f'(x) = 2e^{2x}, \quad f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}, \quad f^{(n)}(1) = 2^n e^2,$$

$$\text{故 } e^{2x} = e^2 [1 + 2(x-1) + \frac{2^2}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{2^n}{n!}(x-1)^n] \\ + o((x-1)^n) \quad (x \rightarrow 1),$$

$$(4) f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} (-1)^k \sqrt{2}/2, & n = 2k, \\ (-1)^k \sqrt{2}/2, & n = 2k+1, \end{cases}$$

$$\text{故 } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right]$$

$$+ \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} \Big] \\ + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right) \left(x \rightarrow \frac{\pi}{4}\right)$$

• 例 4 证明: 当  $0 < x \leq 1/2$  时, 按公式

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

计算  $e^x$  的近似值时所产生的误差小于 0.01, 并求  $\sqrt{e}$  的近似值, 使误差小于 0.01.

证 因为

$$R_3(x) = \frac{1}{4!} e^{\xi} x^4, 0 < x < 1/2, 0 < \xi < x,$$

所以, 误差

$$\left| \frac{1}{4!} e^{\xi} x^4 \right| \leq \frac{1}{4!} e^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \frac{e}{24 \times 16} \approx 0.0073 < 0.01,$$

而 
$$e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} \approx 1.65.$$

依上所证, 误差  $|R_3(x)| < 0.01$ .

• 例 5 应用三阶 Taylor 公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

(1)  $\sqrt[3]{30}$ ; (2)  $\sin 18^\circ$ .

解 选择适当的函数形式, 并确定  $x_0$ , 利用函数的三阶 Taylor 多项式和余项来计算与估计.

(1)  $\sqrt[3]{30} = 3\left(1 + \frac{3}{27}\right)^{1/3} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{1/3}$ , 利用  $(1+x)^\alpha$  的

Taylor 公式, 得

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{30} &\approx 3\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{3!}x^3\right)_{x=1/9} \\ &= 3\left(1 + \frac{1}{27} - \frac{1}{27^2} + \frac{1}{27^3} \times \frac{5}{3}\right) \approx 3.1072. \end{aligned}$$



$$|R_3(x)| < \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{8}{3} \times \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{9}\right)^4 = \frac{80}{27^4 \times 4!} < 0.0001.$$

(2)  $\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10}$ . 利用  $\sin x$  的 Taylor 公式, 得

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0.3090,$$

$$|R_3(x)| < \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 < 10^{-4}.$$

• 例 6 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sin x^2}.$$

解 利用 Taylor 公式求极限时, 一般地, 将极限式中除常数与多项式以外的函数展开为带 Peano 余项的 Taylor 公式, 通过运算后求出极限 (通常只要三阶或四阶 Taylor 公式).

$$(1) \text{ 由 } e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{和 } \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),$$

$$\text{得 } e^x \sin x = (1+x)x - \frac{1}{3!}x^3(1+x) + \frac{1}{2!}x^3 + o(x^3),$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/3! + x^3/2! + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 } e^{1/x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

和  $\sqrt{x^6+1} = (1+x^6)^{1/2} = x^3 + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right),$

得 
$$\begin{aligned} & \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{1/x} - \sqrt{1+x^6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{12x} + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{1/x} - \sqrt{1+x^6} \right] = \frac{1}{6}.$

(3) 由  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

得  $x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}.$

(4) 由  $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + 1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4/8 + o(x^4)}{x^2 x^2} = -\frac{1}{8}.$

• 例7 设  $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}.$

解 因为 
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + o(x^2) \\ &= x + x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$

• 例8 设函数  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$  在  $[0, 2]$  上二阶可导, 并且满足  $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1$ , 证明: 在  $[0, 2]$  上必有  $|f'(x)| \leq 2$ .

证  $\forall x \in [0, 2]$ , 将  $f(2), f(0)$  表示为  $x$  处的 Taylor 公式, 即

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{1}{2} f''(t_1)(2-x)^2, t_1 \in (x, 2),$$



$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{1}{2}f''(t_2)(-x)^2, t_2 \in [0, x],$$

所以

$$f(2) - f(0) = 2f'(x) - \frac{1}{2}x^2f''(t_2) - \frac{1}{2}(2-x)^2f''(t_1).$$

由题设  $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1$ , 有

$$\begin{aligned} 2|f'(x)| &\leq |f(2)| + |f(0)| + \frac{1}{2}x^2|f''(t_2)| \\ &\quad + \frac{1}{2}(2-x)^2|f''(t_1)| \\ &\leq 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2]. \end{aligned}$$

设  $g(x) = 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2]$ , 可知  $g(x)$  在  $x=0$  与  $x=2$  处取得最大值, 即  $g(0) = 4 = g(2)$ . 于是

$$2|f'(x)| \leq 4 \Rightarrow |f'(x)| \leq 2.$$

• 例 9 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  二阶可导, 并且  $|f(x)| < k_0, |f''(x)| < k_2, k_0, k_2$  为常数.

(1) 写出  $f(x+h)$  与  $f(x-h)$  的 Taylor 展开式 ( $h > 0$ );

(2) 证明:  $\forall h > 0, |f'(x)| \leq \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2}k_2$ ;

(3) 求  $\varphi(h) = \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2}k_2$  在  $(0, +\infty)$  上的最小值;

(4) 证明:  $k_1 \leq \sqrt{2k_0k_2}$ , 其中  $k_1 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)|$ .

解 (1) 由 Taylor 定理, 得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x+\theta_1h)h^2, 0 < \theta_1 < 1,$$

$$\begin{aligned} f(x-h) &= f(x) + f'(x)(-h) + \frac{1}{2!}f''(x-\theta_2h)(-h)^2, \\ &\hspace{15em} 0 < \theta_2 < 1. \end{aligned}$$

(2)  $f(x+h) - f(x-h)$

$$= 2f'(x)h + \frac{1}{2!}[f''(x+\theta_1h) - f''(x-\theta_2h)]h^2$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad f'(x) &= \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] \\ &\quad + \frac{1}{4}[f''(x-\theta_2h) - f''(x+\theta_1h)]h. \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad |f'(x)| \leq \frac{k_0}{h} + \frac{h}{2}k_2.$$

(3) 因为  $\varphi'(h) = -k_0/h^2 + k_2/2$ , 令  $\varphi'(h) = 0$ , 得

$$h_0 = \sqrt{2k_0/k_2}.$$

由  $\varphi''(h) = 2k_0/h^3 > 0$  知,  $h_0$  是  $\varphi(h)$  的最小值点, 且

$$\min \varphi(h) = \varphi(h_0) = \sqrt{2k_0k_2}.$$

(4) 由题(2)知

$$|f'(x)| \leq k_0/h + hk_2/2 = \varphi(h) \quad (h > 0),$$

$$\text{所以} \quad k_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq \varphi(h),$$

$$\text{即} \quad k_1 \leq \min \varphi(h) = \sqrt{2k_0k_2}.$$

• 例 10 设  $f \in C^{(3)}[0, 1]$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f'(\frac{1}{2}) = 0$ ,

证明: 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $|f''(\xi)| \geq 24$ .

证 将  $f(x)$  在  $x = \frac{1+0}{2}$  展开为 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned} f(0) &= f\left(\frac{1}{2}\right) - f'\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\left(\frac{1}{2}\right)^3, \\ &\quad \xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

因为  $f'(\frac{1}{2}) = 0$ , 所以



$$|f(1) - f(0)| \leq \frac{1}{6} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

$$\text{令 } f''(\xi) = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\},$$

$$\text{则 } |f(1) - f(0)| \leq \frac{1}{24} |f''(\xi)|.$$

将  $f(0) = 1, f(1) = 2$  代入即得  $|f''(\xi)| \geq 24$ .

• 例 11 设函数  $f$  在  $x = 0$  的某邻域内有二阶导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{1/x} = e^3.$$

试求  $f(0), f'(0), f''(0)$  及  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{1/x}$ .

解 在  $x = 0$  的邻域内展开  $f(x)$ , 得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(\theta x) x^2, \quad 0 < \theta < 1.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{1/x} = e^3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right] = 1.$$

$$\text{并有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( x + \frac{f(x)}{x} \right) / x \right] = 3,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(0)}{x} + f'(0) + \frac{f''(\theta x)}{2} x \right] = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = 0, f'(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{f''(\theta x)}{2} \right] = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f''(\theta x) = 4 \Rightarrow f''(0) = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{1/x} &= \exp\{\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)/x^2]\} \\ &= \exp\{\lim_{x \rightarrow 0} [f''(\theta x)x^2/(2x^2)]\} = e^2. \end{aligned}$$

例 12 设  $f \in C^{(2)}[0, 1]$  且  $f(0) = f(1) = 0$ , 又设  $\exists A > 0$ :

$$|f''(x)| \leq A, \quad \forall x \in (0, 1). \text{ 证明: } |f'(x)| \leq \frac{A}{2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

证 由 Taylor 公式, 有

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x)^2,$$

$$0 < \xi_1 < x \leq 1,$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2,$$

$$0 \leq x < \xi_2 < 1,$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2/2],$$

$$0 < x < 1,$$

$$\text{从而 } |f'(x)| \leq \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1), \quad 0 \leq x < 1.$$

当  $0 \leq x < 1$  时,  $0 \leq 2x^2 - 2x + 1 \leq 1$ , 故

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

**例 13** 设  $f(x)$  是  $n$  次多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0),$$

且  $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(m)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(m+1)}(x_0) \neq 0$  ( $m \leq n-1$ ).

试证:  $x = x_0$  是方程  $f(x) = 0$  的  $m+1$  重根.

**证**  $f(x)$  在  $x = x_0$  处的 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= (x-x_0)^{m+1} \left[ \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} + \frac{f^{(m+2)}(x_0)}{(m+2)!}(x-x_0) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-m-1} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{记 } g(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-m-1},$$

则  $g(x_0) \neq 0$ .

由  $f(x) = (x-x_0)^{m+1}g(x)$  知,  $x_0$  是  $f(x)$  的  $m+1$  重根.

**例 14** 设在  $[1, +\infty)$  上处处有  $f''(x) < 0$ , 且  $f(1) = 2$ ,



$f'(1) = -3$ . 证明: 在  $(1, +\infty)$  上,  $f(x) = 0$  仅有一实根.

证  $f(x)$  在  $x=1$  处的二阶 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2 \\ &= 2 - 3(x-1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2. \end{aligned}$$

由于  $f''(\xi) \leq 0$ , 故当  $x_0$  充分大时, 必有  $f(x_0) < 0$ .

对  $f(x)$  在  $[1, x_0]$  上应用零点存在定理, 即存在  $\xi \in (1, x_0) \subseteq (1, +\infty)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ , 从而知  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  内有一实根.

又  $f''(x) < 0$ , 所以  $f'(x)$  在  $(1, +\infty)$  内单调减少, 从而  $f'(x) \leq f'(1) = -3 < 0$ , 可知  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  内单调减少. 因此,  $f(x) = 0$  在  $(1, +\infty)$  内仅有一实根.

例 15 利用 Taylor 公式证明:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

证 设  $f(x) = x^2$ , 则  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2 > 0$ . 所以

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

$$\text{即} \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

$$\text{则} \quad x = a \Rightarrow a^2 \geq x_0^2 + f'(x_0)(a-x_0),$$

$$x = b \Rightarrow b^2 \geq x_0^2 + f'(x_0)(b-x_0),$$

$$x = c \Rightarrow c^2 \geq x_0^2 + f'(x_0)(c-x_0),$$

$$\text{即有} \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 3x_0^2 + 2x_0(a+b+c) - 6x_0^2.$$

取  $x_0 = \frac{a+b+c}{3}$ , 则  $x_0$  在  $a, b, c$  之间, 故

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3x_0^2 = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

$$\text{即} \quad \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

例 16 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$ .

证 由Taylor 公式, 在  $x_0 = 0$  展开  $e$ , 有

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta_n}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} e^{\theta_{n+1}}, \quad 0 < \theta_{n+1} < 1.$$

两式相减, 得

$$\frac{1}{(n+1)!} e^{\theta_n} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} e^{\theta_{n+1}}$$

或

$$e^{\theta_n} = 1 + \frac{1}{n+2} e^{\theta_{n+1}}.$$

因  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\theta_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} e^{\theta_{n+1}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0,$

故  $2\pi en! = 2\pi \left[ 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta_n} \right] n!$   
 $= 2\pi k + \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n}, \quad k = n! \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right),$

则  $n \sin(2\pi en!) = n \sin \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n}$   
 $= 2\pi \frac{n}{n+1} e^{\theta_n} \sin \left( \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n} \right) / \left( \frac{2\pi}{n+1} e^{\theta_n} \right),$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi.$

例 17 确定常数  $\lambda$  和  $\mu$ , 使下列等式成立:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu) = 0.$$

解 因为有Taylor 展开式

$$\sqrt[3]{1-1/x^3} = 1 - 1/(3x^3) + o(1/x^3),$$

故  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu)$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} x (-\sqrt[3]{1-1/x^3} - \lambda - \mu/x)$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} x [-1 + 1/(3x^3) - \lambda - \mu/x + o(1/x^3)]$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} [(-1-\lambda) - \mu/x + 1/(3x^3) + o(1/x^3)].$



要使极限为 0, 应有  $(-1-\lambda)=0, \mu=0$ , 从而  $\lambda=-1, \mu=0$ .

**例 18** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ , 证明:  
 $\forall x_1, x_2 \in [x_1, x_2]$ , 且  $x_1 < x_2$ , 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

**证** 满足待证不等式的函数也称为凸函数(其图形是凸的), 此不等式一般用 Lagrange 中值定理证明. 这里用 Taylor 公式来证.

将  $f(x)$  在  $x_0 = (x_1+x_2)/2$  处依 Taylor 公式展开, 得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

式中,  $\xi$  在  $x$  与  $x_0$  之间. 又

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x_0)^2, \\ &\quad x_1 < \xi < x_0, \\ f(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_2-x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x_0)^2, \\ &\quad x_0 < \xi < x_2, \end{aligned}$$

两式相加后除以 2, 并考虑  $x_1-x_0 = -(x_2-x_0)$ , 得

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = f(x_0) + \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{4}\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2.$$

因为  $f''(x) > 0$ , 所以  $\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{4} > 0$ , 从而

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

## 第六节 函数性态的研究

### 知识要点

1. 设  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  在  $I$  上连续, 在  $I$  内可导, 则下述命题成立:

(1)  $f$  在  $I$  上单调增加(减少)的充要条件是在  $I$  内  $f' \geq 0$  ( $f' \leq 0$ );

(2) 若在  $I$  内  $f' > 0$  ( $< 0$ ), 则  $f$  在  $I$  上严格单调增加(减少).

2. 设  $f$  在  $x_0$  处可导, 则  $f$  在  $x_0$  处取得极值的必要条件是  $f'(x_0) = 0$ . 使  $f'(x) = 0$  的点称为  $f$  的驻点.

3. 设  $f$  在  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  内可导, 并且  $f'(x_0) = 0$ .

(1) 若  $x < x_0$  时  $f'(x) \geq 0$ ,  $x > x_0$  时  $f'(x) \leq 0$ , 则  $f$  在  $x_0$  处取得极大值;

(2) 若  $x < x_0$  时  $f'(x) \leq 0$ ,  $x > x_0$  时  $f'(x) \geq 0$ , 则  $f$  在  $x_0$  处取得极小值;

(3) 若  $f'(x)$  在  $x_0$  的左、右两侧同号, 则  $f$  在  $x_0$  处不取得极值.

4. 设  $f$  在  $x_0$  处二阶可导, 并且  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) \neq 0$ , 则当  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ) 时,  $f$  在  $x_0$  处取得极小(大)值.

5. 设  $f$  在  $x_0$  处  $n$  ( $n \geq 2$ ) 阶可导, 并且  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ , 而  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ .

(1) 当  $n$  为偶数时,  $x_0$  必为极值点. 若  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小值点; 若  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大值点.

(2) 当  $n$  为奇数时,  $x_0$  不是极值点.

6. 在科学领域与实际问题中提出的一定条件下用料最省、成本最低、时间最短、效益最高等问题被称为最优化问题, 它可以归结为求一个目标函数的最大值与最小值问题.

7. 设  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ , 若  $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$ , 不等式  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$  成立, 则称  $f$  为  $I$  上的凸函数. 若  $\forall \lambda \in (0, 1), x_1 \neq x_2$ , 不等式  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$  成立, 则称  $f$  为  $I$  上的严格凸函数. 若上述两式中不等号反向, 则称  $f$  为  $I$  上的凹函数与严格凹函数.

$f$  是严格凹的  $\Leftrightarrow -f$  是严格凸的 (本书中的下凸在其它教材中也称为上凹).



8. 设  $f$  在区间  $I$  上可微, 则下列命题等价:

- (1)  $f$  在  $I$  上是凸的;
- (2)  $\forall x_1, x_2 \in I, f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ ;
- (3)  $f'$  在  $I$  上单调增加.

9. 设  $f$  在  $I$  上可微, 则下列命题等价:

- (1)  $f$  在  $I$  上是严格凸的;
- (2)  $\forall x_1, x_2 \in I, x_2 \neq x_1, f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ ;
- (3)  $f$  在  $I$  上严格单调增加.

**推论** 设  $f$  在  $I$  上二阶可微, 则

- (1)  $f$  是  $I$  上凸函数的充要条件是  $f'' \geq 0$ ;
- (2) 若在  $I$  上  $f'' > 0$ , 则  $f$  在  $I$  上严格凸.

10.  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  是  $I$  上凸函数的充要条件为对于任何  $x_i \in I$  及

$\lambda_i \in [0, 1] \ (i = 1, 2, \dots, n)$ , 并且  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad ①$$

不等式 ① 称为 Jensen 不等式. 可以证明

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}. \quad ②$$

不等式 ② 称为 Cauchy-Schwarz 不等式.

11. 设函数  $f$  在定义区间  $I$  内的点  $x_0$  处连续. 若存在  $\delta > 0$ , 使曲线  $y = f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0]$  上向下(上)凸, 在  $[x_0, x_0 + \delta)$  上向上(下)凸, 则称  $(x_0, f(x_0))$  为该曲线的一个拐点.

### 疑难解析

1. 函数  $f(x)$  在区间内的单调性与函数  $f(x)$  在区间内的导数有什么关系? 要注意哪些问题?

**答** 若函数  $f$  在  $I$  上连续, 在  $I$  上可导, 则: (1)  $f$  在  $I$  上单调增加(减少)的充要条件是在  $I$  内  $f' \geq 0$  ( $f' \leq 0$ ); (2) 若在  $I$  内  $f'$

$> 0$  ( $f' < 0$ ), 则  $f$  在  $I$  上严格单调增加 (减少).

这里,  $f$  在  $I$  内连续和可导两个条件一个也不可少. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

在  $(0, 1)$  内  $f'(x) = 1 > 0$ , 当  $x \in (0, 1)$  时, 虽然  $x < 1$ , 但有  $f(x) > f(1)$ . 所以在  $(a, b)$  内  $f'(x) > 0$ , 不能得出  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加, 还要求  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续. 反过来, 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加且可导, 也不一定有  $f'(x) > 0$ . 例如  $f(x) = x^3$  在  $(-1, 1)$  单调增加且可导, 但  $f'(x)|_{x=0} = 0$ . 因此, 应允许  $f'(x)$  在个别点 (或有限个点) 上等于零.

同时还应该注意: 单调函数的导函数不一定单调; 函数的导函数单调, 函数不一定单调. 例如,  $y = x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加, 但  $y' = 3x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  上不是单调函数;  $y = x^2$  的导函数  $y' = 2x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加, 但  $y = x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  上不单调.

2. 极值与最值问题有何区别? 具体问题中怎样处理最值问题?

答 对于一个定义在区间  $I$  上的函数而言, 极值是函数的局部性质, 最值是函数的整体性质. 函数的极值可以有多个, 而最大值与最小值一定是唯一的. 最大值与最小值可能是极大值与极小值, 也可能不是.

(1) 求极值的步骤是:

- 1) 求出  $f$  在讨论区间内的所有驻点和不可导点;
- 2) 考察  $f'$  在各驻点和不可导点左右符号的变化, 由正到负是极大值点, 由负到正是极小值点, 不变不是极值点;
- 3) 若  $f''$  存在, 也可以考察  $f''$  在各驻点处的符号, 若  $f'' > 0$  是极大值点, 则  $f'' < 0$  是极小值点;
- 4) 求出极值.

(2) 求最值要复杂一些, 大体可以这样处理:



1) 若  $f \in C[a, b]$ , 则比较所有极值与区间两端的函数值, 最大者为最大值, 最小者为最小值;

2) 若  $f$  是  $[a, b]$  上的单调函数, 则最大值与最小值一定在  $[a, b]$  的端点上取得;

3) 若  $f$  在  $(a, b)$  内连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则在  $(a, b)$  内一定有最大值或最小值. 若  $f$  在  $(a, b)$  内只有唯一的驻点  $x_0$ , 则  $x_0$  是极大(小)值点, 必是  $f$  的最大(小)值点.

4) 对实际(应用)问题, 若目标函数在区间(问题范围)内只有唯一驻点, 且实际问题必有最大(小)值, 则该驻点必为最大(小)值点.

### 典型例题与习题详解

对于区间上的函数, 要会判定函数的单调性, 能划分函数的单调区间, 这些一般可以由函数导函数的符号来判定与划分. 更重要的是用单调性来证明不等式, 往往需要引入辅助函数, 由辅助函数的单调性推出不等式.

• 例 1 单调可微函数的导函数仍为单调可微函数, 对吗?

解 请看本节疑难解析 1.

• 例 2 证明: 设  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  在  $I$  上连续, 在  $I$  内可导, 若在  $I$  内  $f' > 0$  ( $f' < 0$ ), 则  $f$  在  $I$  上严格单调增加(减少).

证  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 设  $x_1 < x_2$ , 依 Lagrange 中值定理, 存在  $x_1 < \xi < x_2$ , 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

若在  $I$  内  $f'(x) > 0$ , 则

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1),$$

即  $f(x)$  在  $I$  上严格单调增加. 若在  $I$  内  $f'(x) < 0$ , 则

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1),$$

即  $f(x)$  在  $I$  上严格单调减少.

• 例 3 求下列函数的单调区间:

• 180 •

$$(1) y = 2x + \frac{8}{x} \quad (x > 0); \quad (2) y = 2x^2 - \ln x;$$

$$(3) y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}; \quad (4) y = x + |\sin 2x|.$$

解 求  $y$  的导数  $y'$ , 再由  $y'$  在区间内的符号来确定与划分函数的单调区间.

$$(1) y' = 2 - 8/x^2, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x_0 = \pm 2 (\text{负值舍去}).$$

在  $(0, 2)$  内,  $y' < 0$ ,  $y = 2x + 8/x$  单调减少;

在  $(2, +\infty)$  内,  $y' > 0$ ,  $y = 2x + 8/x$  单调增加.

$$(2) y' = 4x - 1/x, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x_0 = \pm 1/2 (\text{负值舍去}).$$

在  $(0, 1/2)$  内,  $y' < 0$ ,  $y = 2x^2 - \ln x$  单调减少;

在  $(1/2, +\infty)$  内,  $y' > 0$ ,  $y = 2x^2 - \ln x$  单调增加.

$$(3) y' = \frac{-10(12x^2 - 18x + 6)}{(4x^3 - 9x^2 + 6x)^2}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x_0 = 1, \frac{1}{2}.$$

在  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1/2)$ ,  $(1, +\infty)$  内  $y' < 0$ ,

$$y = 10/(4x^3 - 9x^2 + 6x)$$

单调减少. 注意, 因为  $x = 0$  时, 分母为零, 函数无意义, 所以单调区间中不含点 0.

在  $(1/2, 1)$  内  $y' > 0$ ,  $y = 10/(4x^3 - 9x^2 + 6x)$  单调增加.

(4) 将函数化为分段函数

$$y = \begin{cases} x + \sin 2x, & k\pi \leq x \leq k\pi + \pi/2, \\ x - \sin 2x, & k\pi + \pi/2 < x < (k+1)\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{则 } y' = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x, & k\pi < x < k\pi + \pi/2, \\ 1 - 2\cos 2x, & k\pi + \pi/2 < x < (k+1)\pi, \end{cases}$$

令  $y' = 0$ , 得  $x_0 = k\pi + \pi/3$  或  $x_0 = k\pi + 5\pi/6$ .

在  $(k\pi, k\pi + \pi/3)$  与  $(k\pi + \pi/2, k\pi + 5\pi/6)$  内,  $y' > 0$ ,  
 $y = x + \sin 2x$  单调增加,  $k \in \mathbb{Z}$ .

在  $(k\pi + \pi/3, k\pi + \pi/2)$  与  $(k\pi + 5\pi/6, (k+1)\pi)$  内,  $y' < 0$ ,  
 $y = x + \sin 2x$  单调减少,  $k \in \mathbb{Z}$ .

例 4 确定下列函数的单调区间:



$$(1) y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7;$$

$$(2) y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \quad (a > 0).$$

解 (1) 由  $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x+1)(x-3)$ ,  
令  $y' = 0$ , 得  $x_0 = -1, 3$ . 分区间讨论:

在  $(-\infty, -1)$  与  $(3, +\infty)$  内,  $y' > 0$ ,  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$  单调增加.

在  $(-1, 3)$  内,  $y' < 0$ ,  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$  单调减少.

$$(2) y' = \frac{-6(x-2a/3)}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}. \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x_1 = \frac{2}{3}a; \text{ 在点}$$

$x_2 = a/2, x_3 = a, y'$  不存在. 分区间讨论:

在  $(-\infty, a/2)$  内,  $y' > 0$ , 函数单调增加;

在  $(a/2, 2a/3)$  内,  $y' > 0$ , 函数单调增加;

在  $(2a/3, a)$  内,  $y' < 0$ , 函数单调减少;

在  $(a, +\infty)$  内,  $y' > 0$ , 函数单调增加.

• 例 5 证明下列不等式:

$$(1) \arctan x \leq x \quad (x \geq 0);$$

$$(2) \ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x} \quad (x \geq 0);$$

$$(3) 2x/\pi < \sin x < x \quad (0 < x < \pi/2);$$

$$(4) e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 0).$$

证 利用单调性证明不等式, 一般是将不等式的一边移到另一边, 构成一个辅助函数  $f(x)$ , 使不等式一边为零, 由  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) 确定  $f(x)$  的单调性, 再根据  $f(x)$  在区间端点(某一个)的值证明不等式.

(1) 令  $f(x) = x - \arctan x$ , 则  $f(0) = 0$ , 且

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0,$$

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加, 从而

$$f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow x \geq \arctan x.$$

(2) 令  $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$ , 则  $f(0) = 0$ , 且

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0,$$

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加, 从而

$$f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+x) \geq \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(3) 令  $f(x) = \sin x/x$ , 则在  $(0, \pi/2)$  内

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \tan x).$$

因为  $\tan x > x + x^3/3 > 0$  (由  $\tan x$  的 Taylor 公式), 所以  $f'(x) < 0$ , 即  $f(x)$  在  $(0, \pi/2)$  单调减少, 有

$$f(0) > f(x) > f(\pi/2) \quad \left( f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right),$$

即

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x.$$

(4) 令  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ , 则有  $f(0) = 0$ , 且

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1), \quad f'(0) = 0.$$

又  $f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 4x^2e^{x^2} > 0 \ (x \neq 0)$ ,

所以  $f''(x)$  单调增加, 从而  $f'(x) > f'(0) = 0$ , 即  $f(x)$  单调增加, 故

$$e^{x^2} - x^2 - 1 > 0 \Rightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}.$$

**例 6** 证明下列不等式:

(1) 设  $x > 0$ , 有  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ ;

(2) 设  $x > 0, x \neq 1$ , 有  $0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$ ;

(3)  $e^x > \pi^x$ , 并证  $2^x > x^2$ .

**证** (1) 设不等式成立, 两边取对数, 得

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$



于是证题设不等式化为证上述不等式. 令  $\frac{1}{x} = t$ , 得

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t \quad (t > 0).$$

证  $\ln(1+t) < t$ , 即证  $1+t < e^t$ . 令  $f(t) = e^t - 1 - t$ , 则在  $(0, +\infty)$  内  $f'(t) = e^t - 1 > 0$ , 所以  $f(t)$  单调增加, 即

$$f(t) = e^t - 1 - t > f(0) = 0 \Rightarrow e^t > 1+t.$$

再证  $\ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$ , 令

$$g(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t},$$

则在  $(0, +\infty)$  内

$$g'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} > 0.$$

所以  $g(t)$  单调增加, 即

$$g(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} > g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+t) > \frac{t}{1+t}.$$

综合即得  $\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t \quad (t > 0)$ ,

将  $t = \frac{1}{x}$  代入, 得

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

即  $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad (x > 0)$ .

(2) 当  $x \in (0, 1)$  时,  $x^2 - 1 < 0$ ,  $\ln x < 0$ ,  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0$ ;

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $x^2 - 1 > 0$ ,  $\ln x > 0$ ,  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0$ . 所以, 当  $x$

$> 0$  且  $x \neq 1$  时,  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0$  成立.

当  $0 < x < 1$  时,

于是证题设不等式化为证上述不等式, 令  $\frac{1}{x} = t$ , 得

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t \quad (t > 0).$$

证  $\ln(1+t) < t$ , 即证  $1+t < e^t$ . 令  $f(t) = e^t - 1 - t$ , 则在  $(0, +\infty)$  内  $f'(t) = e^t - 1 > 0$ , 所以  $f(t)$  单调增加, 即

$$f(t) = e^t - 1 - t > f(0) = 0 \Rightarrow e^t > 1+t.$$

再证  $\ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$ , 令

$$g(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t},$$

则在  $(0, +\infty)$  内

$$g'(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} > 0,$$

所以  $g(t)$  单调增加, 即

$$g(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} > g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+t) > \frac{t}{1+t}.$$

综合即得  $\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t \quad (t > 0),$

将  $t = \frac{1}{x}$  代入, 得

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

即  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad (x > 0).$

(2) 当  $x \in (0, 1)$  时,  $x^2 - 1 < 0, \ln x < 0, \frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0$ ;

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $x^2 - 1 > 0, \ln x > 0, \frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0$ . 所以, 当  $x$

$> 0$  且  $x \neq 1$  时,  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} > 0$  成立.

当  $0 < x < 1$  时,



$$\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \ln x > \frac{x^2 - 1}{x}.$$

故令  $f(x) = 2 \ln x - \frac{x^2 - 1}{x} = 2 \ln x - x + \frac{1}{x},$

则  $f'(x) = -\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 < 0,$

即  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调减少, 有

$$f(x) = 2 \ln x - \frac{x^2 - 1}{x} > \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0,$$

从而  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$  成立.

当  $x > 1$  时, 用同样方法可证  $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}.$

综上即知,  $0 < \frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$  成立.

(3) 对  $e^* > \pi^*$  考虑一般情形  $a^b > b^a$  (设  $a > 1, b > 1$ ), 对不等式两边取对数, 得等价不等式  $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}.$

引入辅助函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \begin{cases} < 0, & x > e, \\ > 0, & x < e, \end{cases}$$

也可以考虑引入  $f(x) = x - e \ln x$  来讨论  $e^* > \pi^*.$

(1) 因为  $f'(x)$  在  $(e, +\infty)$  内小于零, 所以  $f(x)$  单调减少, 有

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Rightarrow e^* > \pi^*.$$

(2) 取  $x = 4 > e$ , 可知  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  单调减少, 因此

$$\frac{\ln 2}{2} > \frac{\ln x}{x} \Rightarrow x \ln 2 > 2 \ln x \Rightarrow 2^x > x^2 \quad (x > 4).$$

(3) 由  $f'(x)$  在  $x = e$  两侧符号由正变负, 可知  $f(x)$  在  $x = e$  处取得极大值, 故当且仅当  $x = y = e$  时, 有  $x^y = y^x.$

事实上, 要证  $a^b > b^a$ , 可转化为: (1)  $a^b - b^a > 0$ ; (2)  $b \ln a -$

$a \ln b > 0$ ; (3)  $a^b/b^a > 1$ . 从中选择一个最易确定  $f'(x)$  符号的函数  $f(x)$ .

• 例 7 求下列函数的极值:

$$(1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 21; \quad (2) f(x) = \frac{x}{1+x^2};$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}; \quad (4) f(x) = |x+1|;$$

$$(5) f(x) = \left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}; \quad (6) f(x) = |x| e^{|x-1|}.$$

解 先求  $f(x)$  的导数  $f'(x)$ , 解出驻点与导数不存在的点; 再讨论这些点两侧  $f'(x)$  的符号或者  $f''(x)$  在这些点的符号, 确定极值点; 最后求出极值. 讨论中可利用表格简化解题过程.

(1)  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$ , 解得驻点  $x = -1, x = 2$ . 列表讨论如下:

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$2$	$(0, +\infty)$
$y'$	$+$ ↗	极大	$-$ ↘	极小	$+$ ↗

故  $f(x)$  在  $x = -1$  处取得极大值 28, 在  $x = 2$  处取得极小值 1.

也可用二阶导数判别法求解. 因为

$$f''(x) = 12x - 6, \quad f''(-1) = -18 < 0, \quad f''(2) = 18 > 0,$$

所以  $f(-1) = 28$  为极大值,  $f(2) = 1$  为极小值.

$$(2) f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \text{ 解得驻点 } x = \pm 1, \text{ 列表讨论如下:}$$

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y'$	$-$ ↘	极小	$+$ ↗	极大	$-$ ↘

故  $f(x)$  在  $x = -1$  处取得极小值  $-1/2$ , 在  $x = 1$  处取得极大值  $1/2$ .

$$(3) f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)/2. \text{ 解得驻点 } x = 0, x = 2. \text{ 又 } f''(x)$$



$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2)/2$ , 有

$$f''(0) = 1 > 0, \quad f''(2) = -e^{-2} < 0.$$

故  $f(x)$  在  $x = 0$  处取得极小值 0, 在  $x = 2$  处取得极大值  $2e^{-2}$ .

$$(4) \text{ 因为 } f(x) = \begin{cases} x+1, & x > -1, \\ 0, & x = -1 \\ -x-1, & x < -1, \end{cases} \text{ 所以, 不存在 } f'(x) = 0$$

的点.  $x = -1$  是不可导点, 且  $f'(x)$  在  $x = -1$  两侧由负变正, 故  $f(x)$  在  $x = -1$  取得极小值 0.

$$(5) f'(x) = -x^n e^{-x}/n!, \text{ 解得驻点 } x = 0.$$

当  $n$  为奇数时, 在  $(-\infty, 0)$ ,  $f'(x) > 0$ , 在  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处取得极大值 1.

当  $n$  为偶数时, 在  $(-\infty, +\infty)$  上,  $f'(x) \leq 0$ . 故  $f(x)$  无极值.

$$(6) \text{ 因为 } f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ xe^{x-1}, & 0 < x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ xe^{1-x}, & x > 1. \end{cases}$$

显然,  $f(x)$  在  $x = 0$  和  $x = 1$  处不可导, 又当  $x < 0$  时,  $f'(x) = e^{x-1}(-1-x)$ , 所以有驻点  $x = -1$ . 列表讨论如下:

$x$	$(-\infty, -1]$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y'$	$+$ ↗	极大	$-$ ↘	极小	$+$ ↗	极大	$-$ ↘

故  $f(x)$  在  $x = -1$  处取得极大值  $e^{-2}$ , 在  $x = 0$  处取得极小值 0, 在  $x = 1$  处取得极大值 1.

• 例 8  $a$  为何值时, 函数  $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$  在  $x = \frac{\pi}{3}$

处取得极值? 是极大值还是极小值? 并求出此极值.

解  $f'(x) = a \cos x + \cos 3x$ , 由  $f'(\pi/3) = 0$  解出  $a = 2$ , 又

$$f''(x) = -2\sin x - 3\sin 3x \Rightarrow f''(\pi/3) = -\sqrt{3} < 0,$$

所以  $x = \pi/3$  是  $f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$  的极大值点, 极大值

$$f(\pi/3) = \sqrt{3}.$$

• 例 9 求下列函数的单调区间与极值:

$$(1) f(x) = x - \ln(1+x^2); \quad (2) f(x) = x^{2/3} - \sqrt[3]{x^2-1};$$

$$(3) f(x) = \frac{(x+1)^{2/3}}{x-1};$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ \cos x - 1, & -\pi \leq x < 0, \\ -(x+2+\pi), & x < -\pi. \end{cases}$$

解 求  $f'(x)$ , 若  $f'(x)$  在定义区间内不变号, 则单调无极值. 若  $f'(x)$  在定义区间内变号, 则定义区间要划分为单调区间, 单调区间的分界点 ( $f'(x) = 0$  或  $f'(x)$  不存在) 可能为极值点.

(1)  $f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$ ,  $f(x)$  在定义域  $(-\infty, +\infty)$  内单调, 无极值.

$$(2) f'(x) = \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \right], \text{ 解得驻点 } x = \pm 1/\sqrt{2}.$$

又  $x = 0$  是  $f(x)$  不可导点, 列表讨论如下:

$x$	$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$-1/\sqrt{2}$	$(-1/\sqrt{2}, 0)$	0	$(0, 1/\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$(1/\sqrt{2}, +\infty)$
$y'$	$+$	极大	$-$	极小	$+$	极大	$-$

故  $f(x)$  在  $(-\infty, -1/\sqrt{2})$  和  $(0, 1/\sqrt{2})$  内单调增加, 在  $(-1/\sqrt{2}, 0)$  和  $(1/\sqrt{2}, +\infty)$  内单调减少. 在  $x = \pm 1/\sqrt{2}$  处取得极大值  $\sqrt[3]{4}$ , 在  $x = 0$  处取得极小值 1.

$$(3) f'(x) = \frac{-x/3 - 5/3}{(x-1)^2(x+1)^{1/3}}, \text{ 解得驻点 } x = -5. \text{ 又 } f(x)$$

在点  $x = \pm 1$  不可导, 列表讨论如下:



$x$	$(-\infty, -5)$	$-5$	$(-5, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y'$	$-\searrow$	极小	$+\nearrow$	极大	$-\searrow$	无	$-\searrow$

故  $f(x)$  在  $(-5, -1)$  内单调增加, 在  $(-\infty, -5)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  内单调减少. 在  $x = -1$  处取得极大值 0, 在  $x = -5$  处取得极小值  $-4^{2/3}/6$ .

$$(4) \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 0, \\ -\sin x, & -\pi < x < 0, \\ \text{不存在}, & x = -\pi, \\ -1, & x < -\pi, \end{cases}$$

所以,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\pi)$  内单调减少, 在  $(-\pi, +\infty)$  内单调增加, 在  $x = -\pi$  处取得极小值  $-2$ .

• 例 10 求下列函数在给定区间上的最大值与最小值:

$$(1) f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \in [0, 4];$$

$$(2) f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right];$$

$$(3) f(x) = x + \sqrt{1-x}, \quad x \in [-5, 1];$$

$$(4) f(x) = \max\{x^2, (1-x)^2\}, \quad x \in [0, 1].$$

解 求出  $f'(x)$ , 解得驻点和不可导点, 比较这些点及端点的函数值, 确定最大值、最小值.

$$(1) f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \text{ 可知 } f(x) \text{ 在 } [0, 4] \text{ 上单调增加. 故}$$

$$f(4) = \frac{3}{5} \text{ 为最大值, } f(0) = -1 \text{ 为最小值.}$$

$$(2) f'(x) = 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^2 x \sin x \\ = 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x),$$

解得驻点  $x = \pi/4, \pi/2$ . 故  $f(\pi/2) = 1$  为最大值,  $f(3\pi/4) = 0$  为

最小值.

(3)  $f'(x) = 1 - 1/(2\sqrt{1-x})$ , 解得驻点  $x = 3/4$ . 故  $f(3/4) = 5/4$  为最大值,  $f(-5) = \sqrt{6} - 5$  为最小值.

(4) 因为  $f(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ x^2, & 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$   
 所以  $f'(x) = \begin{cases} -2(1-x), & 0 \leq x < 1/2, \\ \text{不存在}, & x = 1/2, \\ 2x, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$

列表讨论如下:

$x$	0		1/2		1
$y'$		$-\searrow$	不存在	$+\nearrow$	
$y$	1		1/4		1

故  $f(x)$  在  $x=0$  和  $1$  处取得最大值  $1$ , 在  $x=1/2$  处取得最小值  $1/4$ .

• 例 11 证明下列不等式:

(1)  $e^x \leq \frac{1}{1-x}, x \in (-\infty, 1);$

(2)  $|3x - x^3| \leq 2, x \in [-2, 2];$

(3)  $x^x \geq e^{-1/e}, x \in (0, +\infty).$

证 一般利用不等式两边构造一个辅助函数  $F(x)$ , 讨论  $F(x)$  的单调性、极值、最值, 从而实现不等式的证明.

(1) 令  $F(x) = e^x(1-x) - 1$ , 因为  $F'(x) = -xe^x$ , 所以  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  内单调增加, 在  $(0, +\infty)$  内单调减少, 故

$$F(x) \leq F(0) = 0 \Rightarrow e^x(1-x) - 1 \leq 0 \Rightarrow e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

(2) 令  $f(x) = 3x - x^3$ , 因为  $f'(x) = 3(1-x^2)$ , 解得驻点  $x = \pm 1$ . 比较  $f(-2) = 2, f(-1) = -2, f(1) = 2, f(2) = -2$ , 知  $f(x)$  的最大值为  $2$ , 最小值为  $-2$ , 即有  $-2 \leq f(x) \leq 2$ , 从而



$$|3x - x^3| \leq 2, x \in [-2, 2].$$

(3) 令  $F(x) = x^x$ , 因为  $F'(x) = x^x(1 + \ln x)$ , 解得驻点  $x = e^{-1}$ . 又因为在  $(0, e^{-1})$  内,  $F'(x) < 0$ , 在  $(e^{-1}, +\infty)$  内,  $F'(x) > 0$ , 故  $F(x)$  在  $x = e^{-1}$  处取得最小值  $(e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e}$ , 即

$$x^x > e^{-1/e}, x \in (0, +\infty).$$

**例 12** 求下列函数的最大值或最小值:

(1)  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  在  $[-10, 10]$  上的最大值与最小值;

(2)  $f(x) = nx(1-x)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 在  $[0, 1]$  上的最大值  $M_n$ , 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ .

**解** (1)  $f'(x) = (2x-3)\operatorname{sgn}(x^2-3x+2)$ ,  $x \neq 1, x \neq 2$ . 解得驻点  $x = 3/2$ . 比较  $f(3/2), f(1), f(2), f(-10), f(10)$  知,  $f(x)$  的最大值为  $f(-10) = 132$ , 最小值为  $f(1) = f(2) = 0$ .

(2)  $f'(x) = n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1}$ , 解得驻点  $x = \frac{1}{n+1}$ ,

比较  $f(\frac{1}{n+1}), f(0), f(1)$  知,  $f(x)$  的最大值

$$M_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{-1}{n+1}\right)\right]^{-(n+1)(-1)} = e^{-1}.$$

**例 13** 某铁路隧道的截面拟建成矩形加半圆的形状(图 2.6.1), 截面积为  $A$ . 问: 底宽为多少时, 才能使建造所用的材料最省?

**解** 因为  $A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi x^2}{8}$ , 所以  $y = \frac{A}{x} - \frac{\pi}{8}x$ . 当周长最短时, 所用

材料最省, 故设周长函数为  $L(x)$ , 则

$$\begin{aligned} L(x) &= x + \pi x/2 + 2(A/x - \pi x/8) \\ &= x + 2A/x + \pi x/4. \end{aligned}$$

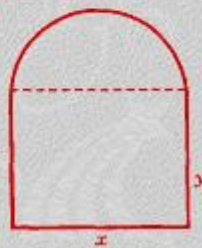


图 2.6.1

可由  $L'(x) = 1 - 2A/x^2 + \pi/4$  解得驻点  $x_0 = 2\sqrt{2A/(4+\pi)}$ . 因为驻点唯一, 而实际问题必有最小值, 从而知当底宽  $x = 2\sqrt{2A/(4+\pi)}$  时材料最省.

• 例 14 甲、乙两户共用一台变压器, 变压器设在输电干线何处时, 所需输电线最短?

解 如图 2.6.2 所示, 设变压器所在 C 处距 A 处为  $x$  (单位: km), 则所需电线长度

$$L(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1.5^2 + (3-x)^2},$$

$$\begin{aligned} \text{且} \quad L'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{-(3-x)}{\sqrt{1.5^2 + (3-x)^2}} \\ &= \sin\alpha - \sin\beta, \end{aligned}$$

解得驻点  $\alpha_1 = \alpha_2 \quad (\alpha_1, \alpha_2 < \pi/2)$ .

因为  $\tan\alpha = x, \quad \tan\beta = (3-x)/1.5$ ,

所以  $x = (3-x)/1.5 \Rightarrow x = 1.2$  (km).

从而知变压器设在离点 A 1.2 km 处时所需电线最短.

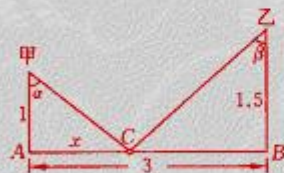


图 2.6.2

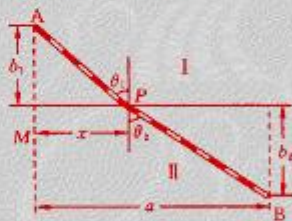


图 2.6.3

• 例 15 在 A、B 两城市间铺设铁路, 如果两城市间为两种地质区, 分界线为直线 (图 2.6.3), 在区域 I 内铁路造价为  $C_1$  (单位: 元/km), 在区域 II 内铁路造价为  $C_2$  (单位: 元/km), A、B 与直线的垂直距离分别为  $b_1$  与  $b_2$  (单位: km), A、B 间的水平距离为  $a$  (单位: km), 点 P 选在何处造价最低?

解 设点 P 选在离点 M  $x$  处, 则铁路的总造价



$$S(x) = C_1 \sqrt{b_1^2 + x^2} + C_2 \sqrt{b_2^2 + (a-x)^2},$$

$$\begin{aligned} \text{且} \quad S'(x) &= C_1 \frac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} - C_2 \frac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}} \\ &= C_1 \sin \theta_1 - C_2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

$$\text{因} \quad S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

从而知点  $P$  应选在使  $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{C_1}{C_2}$  处才能使造价最低.

• 例 16 设某银行中的总存款量与银行付给存户利率的平方成正比, 若银行以 20% 的年利率把总存款的 90% 贷出, 它给存户支付的年利率定为多少时才能获得最大利润?

解 设银行付给存户利率为  $x$ , 则依题意, 银行的利润函数

$$R(x) = 0.2 \times 0.9 \times kx^2 - kx^3 \quad (k \text{ 为比例系数}).$$

由  $R'(x) = 0.36kx - 3kx^2$  解得唯一驻点  $x = 0.12$ , 从而知, 当银行付给存户利率为 12% 时才能获取最大利润.

• 例 17 已知轮船的燃料费与速度的立方成正比, 当速度  $v = 10 \text{ km/h}$  时, 每小时的燃料费为 80 元, 又其它费用每小时需 480 元. 问轮船的速度多大时, 才能使 20 km 航程的总费用最少? 此时每小时的总费用等于多少?

解 依题意, 燃料费  $C_f = kv^3$ , 则由  $80 = k10^3$  得  $k = 0.08$ . 设 20 km 航程的总费用为

$$C(v) = \frac{20}{v} \times 480 + 0.08v^3 \frac{20}{v}.$$

$$\text{由} \quad C'(v) = 0.16v \times 20 - 9600 \frac{1}{v^2} = 0$$

解得唯一驻点  $v = 10\sqrt[3]{3}$ , 故是最小值点. 从而知每小时的总费用

$$C = 480 + 0.08 \times 10^3 \times 3 = 720 \text{ (元)}.$$

• 例 18 曲线  $y = 4 - x^2$  与  $y = 2x + 1$  相交于  $A, B$  两点,  $C$  为弧段  $\widehat{AB}$  上的一点 (图 2.6.4), 点  $C$  在何处时  $\triangle ABC$  面积最大? 并求此最大面积.

**解** 联立曲线与直线方程,解得交点为  $A(1,3), B(-3,-5)$ . 设曲线弧  $\widehat{AB}$  上点  $C$  的坐标为  $(x, 4-x^2)$ , 其中  $-3 < x < 1$ . 由点  $C$  到直线  $\overline{AB}$  的距离

$$\begin{aligned} d &= \frac{|4-x^2-2x-1|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|x^2+2x-3|}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

又  $|\overline{AB}| = \sqrt{(1+3)^2 + (3+5)^2} = 4\sqrt{5}$ .

于是  $\triangle ABC$  面积

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times |x^2+2x-3|/\sqrt{5} \\ &= 2|x^2+2x-3|, \end{aligned}$$

即  $A^2 = 4(x^2+2x-3)^2 \Rightarrow (A^2)' = 8(x^2+2x-3)(2x+2)$ .

解得唯一驻点  $x = -1$  (在  $(-3, 1)$  内). 由实际问题意义知选  $C$  在点  $(-1, 3)$  时,  $\triangle ABC$  有最大面积, 最大面积为

$$A = 2|x^2+2x-3|_{x=-1} = 8.$$

• **例 19** 用仪器测量某零件长度  $n$  次, 得到  $n$  个略有差别的

数:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 证明: 用算术平均值  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$  作为该零件的长度  $x$  的近似值, 能使

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \dots + (x-a_n)^2$$

达到最小.

**证** 由  $f'(x) = 2 \sum_{i=1}^n (x-a_i) = 2nx - 2 \sum_{i=1}^n a_i$ , 解得驻点  $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ . 因为驻点唯一, 又  $f''(x) = 2n > 0$ , 所以  $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$

是极小值点, 即  $f(x)$  的最小值点. 故取  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$  时,  $f(x)$  达到最小.

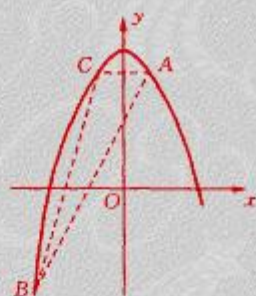


图 2.6.4



• 例 20 证明:  $f(x) = x \arctan x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 与  $g(x) = x \ln x$  ( $x > 0$ ) 都是凸函数.

证 证明一个函数是凸函数, 可以依定义来证, 也可以用其多个等价命题中的一个来证, 视具体的函数而定.

$$(1) \quad f(x) = x \arctan x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\text{则 } f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0.$$

依等价命题:  $f''(x) > 0$ , 则  $f$  在  $I$  上严格凸, 可知  $f(x)$  为  $(-\infty, +\infty)$  上的凸函数.

$$(2) \quad g(x) = x \ln x \quad (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = 1 + \ln x, \quad g''(x) = \frac{1}{x} > 0,$$

依等价命题:  $f''(x) > 0$ , 则  $f$  在  $I$  上严格凸, 可知  $g(x)$  ( $x > 0$ ) 为凸函数.

• 例 21 求下列曲线的凸凹区间与拐点:

$$(1) f(x) = x^3(1-x); \quad (2) f(x) = x + \sin x;$$

$$(3) f(x) = \frac{x}{1+x^2}; \quad (4) f(x) = \ln(1+x^2).$$

解 先求  $f'(x)$  和  $f''(x)$ , 解出使  $f''(x) = 0$  或  $f''(x)$  不存在的点, 将定义区间划分. 讨论各小区间上  $f''(x)$  的符号,  $f'' > 0$  时上凸,  $f'' < 0$  时上凹. 用列表方式讨论比较简单、明白.

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 - 4x^3, \quad f''(x) = 6x - 12x^2.$$

由  $f''(x) = 0$ , 解得  $x = 0$  和  $x = 1/2$ . 列表讨论如下:

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1/2)$	1/2	$(1/2, +\infty)$
$y''$	$- \sim$	拐点	$+ \sim$	拐点	$- \sim$

在  $(-\infty, 0)$ ,  $(1/2, +\infty)$  内  $f(x)$  上凹, 在  $(0, 1/2)$  内  $f(x)$  上凸.  $(0, 0)$  和  $(1/2, 1/16)$  为拐点.

$$(2) \quad f'(x) = 1 + \cos x, \quad f''(x) = -\sin x.$$

由  $f''(x) = 0$  解得  $x = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). 列表讨论如下:

$x$	$(2k\pi - \pi, 2k\pi)$	$2k\pi$	$(2k\pi, 2k\pi + \pi)$	$2k\pi + \pi$	$(2k\pi + \pi, 2(k+1)\pi)$
$y''$	$+$ $\cap$	拐点	$-$ $\cup$	拐点	$+$ $\cap$

在  $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$  与  $(2k\pi + \pi, 2(k+1)\pi)$  内  $f(x)$  上凸, 在  $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$  内  $f(x)$  上凹. 点  $(k\pi, k\pi)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 为拐点.

$$(3) \quad f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

由  $f''(x) = 0$  解得  $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$ . 列表讨论如下:

$x$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$0$	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$y''$	$-$ $\cup$	拐点	$+$ $\cap$	拐点	$-$ $\cup$	拐点	$+$ $\cap$

知在  $(-\infty, -\sqrt{3})$ ,  $(0, \sqrt{3})$  内,  $f(x)$  上凹; 在  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, +\infty)$  内,  $f(x)$  上凸. 点  $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4), (0, 0), (\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$  为拐点.

$$(4) \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

由  $f''(x) = 0$  解得  $x = \pm 1$ . 列表讨论如下:

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$y''$	$-$ $\cup$	拐点	$+$ $\cap$	拐点	$-$ $\cup$

在  $(-\infty, -1), (1, +\infty)$  内  $f(x)$  上凹, 在  $(-1, 1)$  内  $f(x)$  上凸. 点  $(-1, \ln 2), (1, \ln 2)$  为拐点.

**例 22**  $a, b$  为何值时, 点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点?

**解**  $y' = 3ax^2 + 2bx$ ,  $y'' = 6ax + 2b$ . 由  $y'' = 0$  解得  $x_0 = -b/(3a)$ . 由  $a \neq 0$  知, 在  $x_0 = -b/(3a)$  的邻域内,  $y''$  在  $x_0$  两侧异号, 所以  $(-b/(3a), 2b^3/(27a^2))$  为曲线的拐点. 解方程组

$$\begin{cases} -b/(3a) = 1, \\ 2b^3/(27a^2) = 3, \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} a = -3/2, \\ b = 9/2. \end{cases}$$



• 例 23 设  $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \pi$ , 证明:

$$\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) > \frac{1}{n}(\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n).$$

证 令  $f(x) = -\sin x$  ( $0 < x < \pi$ ),

则  $f'(x) = -\cos x$ ,  $f''(x) = \sin x > 0$ .

从而知  $f(x)$  为凸函数. 依 Jensen 不等式, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) < \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)],$$

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) > \frac{1}{n}(\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n).$$

• 例 24 利用  $f(x) = -\ln x$  ( $x > 0$ ) 是凸函数(因而  $\ln x$  为凹函数), 证明:

(1)  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$  (其中  $x_i > 0$ ,

$\lambda_i > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ );

(2) 当  $x_i > 0$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

证 因为  $f(x) = -\ln x$  ( $x > 0$ ) 是凸函数, 所以 Jensen 不

等式成立, 有  $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ .

$$\begin{aligned} (1) & -\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \\ & \leq -(\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n) \\ & = -\ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}), \end{aligned}$$

即  $\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n})$ .

由  $\ln x$  的单调增加性知

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

(2) 在题(1)中取  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1/n$ , 则有

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

因为  $f(x) = -\ln x$  为凸函数,  $x_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 所以  $1/x_i > 0$ , 故依 Jensen 不等式, 得

$$f\left(\frac{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{1}{x_1}\right) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{x_n}\right) \right],$$

$$\text{则 } -\ln \frac{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n}{n} \leq -\frac{1}{n} \left( \ln \frac{1}{x_1} + \ln \frac{1}{x_2} + \dots + \ln \frac{1}{x_n} \right),$$

$$\text{即 } \ln \frac{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n}{n} \geq \ln \left( \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^{1/n}.$$

依对数函数的单调增加性, 知

$$\frac{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}},$$

$$\text{即 } \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

综上所述知

$$\frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

**例 25** 设函数  $f$  在  $x_0$  处  $n$  ( $n \geq 2$ ) 阶可导, 并且  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ , 而  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . 证明:

(1) 当  $n$  为偶数时,  $x_0$  必为极值点. 若  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小值点; 若  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大值点.

(2) 当  $n$  为奇数时,  $x_0$  不是极值点.

**证** 因为  $f(x)$  在  $x_0$  处存在  $n$  阶导数, 则在  $x_0$  的邻域  $U(x_0, \delta)$  内, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

由题设条件知

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

$$\text{从而 } f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n}.$$

所以  $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$  与  $f^{(n)}(x_0)$  同号.

(1) 当  $n$  为偶数时,  $f(x) - f(x_0)$  与  $f^{(n)}(x_0)$  同号, 即  $x_0$  为  $f(x)$  的极值点. 当  $f^{(n)}(x_0) > 0$  时,  $f(x) > f(x_0)$ ,  $x_0$  是极小值点; 当  $f^{(n)}(x_0) < 0$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ,  $x_0$  是极大值点.

(2) 当  $n$  为奇数时,  $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$  与  $f^{(n)}(x_0)$  同号. 设

$f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则  $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0$ . 于是, 当  $x > x_0$  时, 有  $f(x) >$

$f(x_0)$ ; 当  $x < x_0$  时, 有  $f(x) < f(x_0)$ . 故  $x_0$  不是  $f(x)$  的极值点.

类似可证  $f^{(n)}(x_0) < 0$  的情形. 故当  $n$  为奇数时,  $x_0$  不是极值点.

此题所用的方法又称函数极值的 Maclaurin 判别法.

• 例 26 证明下列不等式:

(1)  $1 + x/2 > \sqrt{1+x} \quad (x > 0);$

(2)  $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0);$

(3)  $\sin x + \tan x > 2x \quad (0 < x < \pi/2);$

(4)  $\frac{|a+b|}{\pi+|a+b|} \leq \frac{|a|}{\pi+|a|} + \frac{|b|}{\pi+|b|} \quad (a, b \in \mathbf{R});$

(5)  $(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2 \quad (x > 0).$

证 一般地, 利用等式两边作辅助函数  $F(x)$ , 然后讨论  $F(x)$  的单调性, 借助区间端点函数值确定  $F(x)$  的符号来证明不等式.

(1) 令  $F(x) = 1 + x/2 - \sqrt{1+x}$ , 则

$$F'(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}} > 0,$$

因此  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调增加. 因为  $f(0) = 0$ , 所以  $F(x) > F(0) = 0$ , 即

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}.$$

所以  $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$  与  $f^{(n)}(x_0)$  同号.

(1) 当  $n$  为偶数时,  $f(x)-f(x_0)$  与  $f^{(n)}(x_0)$  同号, 即  $x_0$  为  $f(x)$  的极值点. 当  $f^{(n)}(x_0) > 0$  时,  $f(x) > f(x_0)$ ,  $x_0$  是极小值点; 当  $f^{(n)}(x_0) < 0$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ,  $x_0$  是极大值点.

(2) 当  $n$  为奇数时,  $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$  与  $f^{(n)}(x_0)$  同号. 设  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则  $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} > 0$ . 于是, 当  $x > x_0$  时, 有  $f(x) >$

$f(x_0)$ ; 当  $x < x_0$  时, 有  $f(x) < f(x_0)$ . 故  $x_0$  不是  $f(x)$  的极值点.

类似可证  $f^{(n)}(x_0) < 0$  的情形. 故当  $n$  为奇数时,  $x_0$  不是极值点.

此题所用的方法又称函数极值的 Maclaurin 判别法.

• 例 26 证明下列不等式:

$$(1) 1+x/2 > \sqrt{1+x} \quad (x > 0);$$

$$(2) 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0);$$

$$(3) \sin x + \tan x > 2x \quad (0 < x < \pi/2);$$

$$(4) \frac{|a+b|}{\pi+|a+b|} \leq \frac{|a|}{\pi+|a|} + \frac{|b|}{\pi+|b|} \quad (a, b \in \mathbf{R});$$

$$(5) (x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2 \quad (x > 0).$$

证 一般地, 利用等式两边作辅助函数  $F(x)$ , 然后讨论  $F(x)$  的单调性, 借助区间端点函数值确定  $F(x)$  的符号来证明不等式.

$$(1) \text{ 令 } F(x) = 1+x/2 - \sqrt{1+x}, \text{ 则}$$

$$F'(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}} > 0,$$

因此  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调增加. 因为  $f(0) = 0$ , 所以  $F(x) > F(0) = 0$ , 即



$$1+x/2-\sqrt{1+x}>0\Rightarrow 1+x/2>\sqrt{1+x}.$$

(2) 令  $F(x) = 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ , 则

$$F'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) > 0 \quad (x > 0).$$

所以  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上严格单调增加. 而  $F(0) = 0$ , 故  $F(x) > F(0) = 0$ , 即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2} > 0$$

$$\Rightarrow 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0).$$

(3) 令  $F(x) = \sin x + \tan x - 2x$ , 则

$$F'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2,$$

$$F''(x) = 2\sec^2 x \tan x - \sin x = \frac{\sin x(2 - \cos^3 x)}{\cos^3 x} > 0,$$

所以  $F'(x)$  单调增加. 于是  $F'(x) > F'(0) = 0$ , 知  $F(x)$  单调增加, 从而  $F(x) > F(0) = 0$ , 即

$$\sin x + \tan x - 2x > 0 \Rightarrow \sin x + \tan x > 2x \quad (0 < x < \pi/2).$$

(4) 令  $F(x) = \frac{x}{\pi+x}$ , 则

$$F'(x) = \frac{\pi}{(\pi+x)^2} > 0,$$

所以  $F(x)$  单调增加.

又  $|a+b| \leq |a|+|b|$ , 令  $x_1 = |a+b|$ ,  $x_2 = |a|+|b|$ ,

则  $F(x_1) < F(x_2)$ , 即

$$\frac{|a+b|}{\pi+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{\pi+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{\pi+|a|} + \frac{|b|}{\pi+|b|} \quad (a, b \in \mathbf{R}).$$

(5) 令  $F(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$ , 则

$$F'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0,$$

所以  $F(x)$  单调增加. 又  $F(1) = 0$ , 故在  $(0, 1)$  内  $F(x) < 0$ , 在  $(1, +\infty)$  内  $F(x) > 0$ . 于是在  $(0, 1)$  内,

$$\ln x - \frac{x-1}{x+1} < 0 \Rightarrow (x+1)\ln x < x-1.$$

因为  $(x-1) < 0$ , 上式两边乘以  $(x-1)$ , 得

$$(x^2-1)\ln x > (x-1)^2.$$

在  $(1, +\infty)$  内,

$$\ln x - \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow (x+1)\ln x > x-1.$$

因为  $(x-1) > 0$ , 上式两边乘以  $(x-1)$ , 得

$$(x^2-1)\ln x > (x-1)^2.$$

从而, 当  $x > 0$  时,  $(x^2-1)\ln x > (x-1)^2$ .

• 例 27 证明: 方程  $\sin x = x$  只有一个实根.

证 当  $|x| > 1$  时, 方程无解. 当  $|x| \leq 1$  时, 引入辅助函数  $F(x) = x - \sin x$ , 则  $F'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ , 所以  $f(x)$  单调增加. 而

$$F(-1) = -1 + \sin 1 < 0, \quad F(1) = 1 - \sin 1 > 0,$$

依零点定理,  $F(x)$  在  $(-1, 1)$  内至少有一个零点. 考虑到单调性, 可知  $F(x)$  只有一个零点, 即方程  $\sin x = x$  只有一个实根.

• 例 28 设  $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq \pi$ , 证明:

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} > \frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2}.$$

证 令  $F(x) = \sin x$ , 则  $F'(x) = \cos x$ . 在  $[x_1, x_2]$  与  $[x_2, x_3]$  上分别应用 Lagrange 中值定理, 得

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \cos \xi_1, \quad \frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2} = \cos \xi_2,$$

其中  $0 \leq x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 \leq \pi$ , 而  $\cos x$  在  $[0, \pi]$  上单调减少, 所以  $\cos \xi_1 > \cos \xi_2$ , 故

$$\frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} > \frac{\sin x_3 - \sin x_2}{x_3 - x_2}.$$

• 例 29 设  $f(x) = (x-x_0)^n g(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ ,  $g(x)$  在  $x_0$  处连续, 且  $g(x_0) \neq 0$ .  $f(x)$  在  $x_0$  处有无极值?

解 利用  $g(x)$  的连续性来讨论.



因为  $g(x_0) \neq 0$ , 所以在  $U(x_0, \delta)$  内,  $g(x) \neq 0$ . 不妨设  $g(x) > 0$ , 则  $\forall x \in U(x_0, \delta)$ , 当  $n$  为偶数时

$$f(x) = (x - x_0)^n g(x) > 0 = f(x_0),$$

从而知  $x_0$  为  $f(x)$  的极小值点; 当  $n$  为奇数时,  $(x - x_0)^n$  在  $x_0$  两侧异号, 即  $f(x)$  在  $x_0$  两侧异号, 从而知  $x_0$  不是  $f(x)$  的极值点.

类似可证, 若  $g(x) < 0$ , 则  $n$  为偶数时,  $x_0$  是  $f(x)$  的极大值点; 当  $n$  为奇数时,  $x_0$  不是  $f(x)$  的极值点.

综上所述可知, 当  $n$  为奇数时,  $x_0$  不是  $f(x)$  的极值点; 当  $n$  为偶数时, 若  $g(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  是  $f(x)$  的极小值点, 若  $g(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  是  $f(x)$  的极大值点.

• 例 30 求半径为  $R$  的球的外切正圆锥的最小体积.

证 如图 2.6.5 所示, 三角形为等腰三角形, 设半顶角为  $\theta$ , 底半径为  $x$ , 高为  $h$ , 则

$$\frac{R}{h - R} = \sin \theta,$$

$$\frac{x}{h} = \tan \theta \Rightarrow h = R + \frac{R}{\sin \theta}.$$

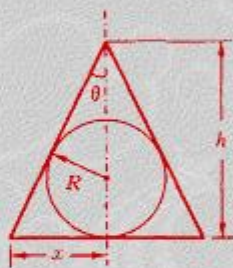


图 2.6.5

$$\text{故 } V = \frac{1}{3} \pi x^2 h = \frac{\pi}{3} R^3 \left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right)^3 \tan^2 \theta,$$

$$V' = \frac{\pi R^3 (1 + \sin \theta)^2 [3 \cos^2 \theta \sin \theta - (1 + \sin \theta)(\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta)]}{\sin^2 \theta \cos^4 \theta}.$$

令  $V' = 0$ , 因为  $0 < \theta < \pi/2$ , 且  $1 + \sin \theta \neq 0$ ,  $\cos \theta \neq 0$ , 所以

$$3 \cos^2 \theta \sin \theta = (1 + \sin \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

$$\text{化为 } 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta = 1 - 3 \sin^2 \theta + \sin \theta - 3 \sin^3 \theta,$$

$$\text{即 } 3 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 = 0.$$

$$\text{解得 } \sin \theta = 1/3, \quad \sin \theta = -1 (\text{舍去}),$$

即得唯一驻点  $\theta = \arcsin(1/3)$ , 且  $\tan \theta = 1/\sqrt{8}$ . 故

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 h = \frac{\pi}{3} R^3 \left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right)^3 \tan^2 \theta$$

$$= \frac{\pi}{3} R^3 \times 4^3 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{3} \pi R^3.$$

• 例 31 证明: (1) 设  $f, g$  都是  $I$  上的凸函数, 则  $\alpha f + \beta g$  也是  $I$  上的凸函数, 其中  $\alpha$  与  $\beta$  为正常数;

(2) 设  $f, g$  是  $I$  上的非负凸函数, 并且  $f$  与  $g$  在  $I$  上同是单调增加(减少)的, 则  $f_g$  是  $I$  上的凸函数;

(3) 设  $f: I_1 \rightarrow I_2$  与  $g: I_2 \rightarrow \mathbf{R}$  都是凸函数, 并且  $g$  单调增加, 则  $g \circ f$  是  $I_1$  上的凸函数.

证 (1) 依凸函数定义,  $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0, 1)$  有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2).$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \alpha f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] + \beta g[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \\ \leq \lambda[\alpha f(x_1) + \beta g(x_1)] + (1-\lambda)[\alpha f(x_2) + \beta g(x_2)]. \end{aligned}$$

故  $\alpha f + \beta g$  也是凸函数( $\alpha, \beta$  是正常数).

(2) 已知  $f(x) > 0, g(x) > 0$ . 设  $f, g$  同在  $I$  上单调增加, 则  $f' > 0, g' > 0$ . 于是  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 设  $x_2 > x_1$ , 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$g(x_2) \geq g(x_1) + g'(x_1)(x_2 - x_1).$$

$$\text{因为 } (fg)' = f'g + fg',$$

所以

$$\begin{aligned} f(x_2)g(x_2) &\geq f(x_1)g(x_1) + f'(x_1)g(x_1)(x_2 - x_1) \\ &\quad + f(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1) \\ &\quad + f'(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

式中  $f'(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1)^2 \geq 0$ , 从而

$$\begin{aligned} f(x_2)g(x_2) \\ \geq f(x_1)g(x_1) + [f'(x_1)g(x_1) + f(x_1)g'(x_1)](x_2 - x_1). \end{aligned}$$

依凸函数的等价命题知,  $fg$  在  $I$  上是凸的.

类似可证, 当  $f, g$  都在  $I$  上单调减少时的情形.

(3) 由  $f$  是  $I_1$  上凸函数知,  $\forall x_1, x_2 \in I_1, \forall \lambda \in (0, 1)$ , 有



$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

由  $g$  在  $I_2$  上单调增加,有

$$g(f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \leq g(\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)). \quad ①$$

又由  $g$  是  $I_2 \rightarrow \mathbf{R}$  上凸函数,得

$$g(\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)) \leq \lambda g(f(x_1)) + (1-\lambda)g(f(x_2)). \quad ②$$

综合式 ①、②,得

$$(g \circ f)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda(g \circ f)(x_1) + (1-\lambda)(g \circ f)(x_2).$$

所以依凸函数定义,知  $g \circ f$  是  $I_1$  上的凸函数.

**例 32** 设某产品的成本函数为  $C = aq^2 + bq + c$ , 需求函数为  $q = (d - p)/e$ , 其中  $C$  为成本,  $q$  为需求量(即产量),  $p$  为单价;  $a, b, c, d, e$  都是正的常数, 且  $d > b$ . 求使利润最大的产量及最大的利润.

**解** 因为  $p = d - eq$ , 所以利润函数为

$$\begin{aligned} R(q) &= pq - C = (d - eq)q - aq^2 - bq - C \\ &= -(e + a)q^2 + (d - b)q - C, \end{aligned}$$

故 
$$R'(q) = -2(e + a)q + (d - b).$$

由  $R'(q) = 0$  解得唯一驻点  $q = \frac{d-b}{2(a+e)}.$

又  $R''(q) = -2(a + e) < 0$ , 所以, 当  $q = \frac{d-b}{2(a+e)}$  时, 产品有最大利润, 最大利润为

$$R\left(\frac{d-b}{2(a+e)}\right) = \frac{(d-b)^2}{4(a+e)} - C.$$

**• 例 33** 一平底从动杆圆弧凸轮机构如图 2.6.6, 当偏心轮以角速度  $\omega$  绕点  $O$  旋转时, 从动杆上升的距离  $h = e(1 - \cos\theta)$ , 其中  $e$  为偏心距, 转角  $\theta = \omega t$ . 试求:

(1)  $h(\theta)$  的最大值和最小值;

(2) 转角  $\theta$  为多少时, 从动杆速度最大?  $\theta$  为多少时, 从动杆速度最小?

(3)  $\theta$  为多少时, 从动杆加速度最大?  $\theta$  为多少时, 从动杆加速

度最小?

解 (1) 因为  $h'(\theta) = e \sin \theta$ , 令  $h'(\theta) = 0$ , 解得驻点为  $\theta = 2k\pi$  或  $(2k+1)\pi$ . 又  $h''(\theta) = e \cos \theta$ , 则

$$h''(2k\pi) = e > 0 \Rightarrow \min h(\theta) = h(2k\pi) = 0,$$

$$h''(2k\pi + \pi) = -e < 0 \Rightarrow \max h(\theta) = h(2k\pi + \pi) = 2e.$$

(2) 因为  $h(\omega t) = e(1 - \cos \omega t)$ ,

$$\text{则 } v(t) = \frac{dh(\omega t)}{dt} = \omega e \sin \omega t = \omega e \sin \theta = v(\theta).$$

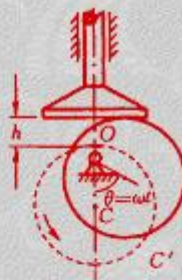


图 2.6.6

显然, 当  $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  时,  $|v(t)| = 0$ , 从动杆速度最小; 当  $\theta = \pi/2$  和  $\theta = 3\pi/2$  时,  $|v(t)| = \omega e$ , 从动杆速度最大.

(3)  $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \omega^2 e \cos \omega t = \omega^2 e \cos \theta = a(\theta)$ , 显然, 当  $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  时,  $|a(t)| = \omega^2 e$ , 从动杆加速度最大; 当  $\theta = \pi/2$  和  $\theta = 3\pi/2$  时,  $|a(t)| = 0$ , 从动杆加速度最小.

• 例 34 有人说“若  $f'(x_0) > 0$ , 则在  $x_0$  处存在某邻域, 在此邻域内  $f(x)$  单调增加”. 这种说法正确吗? 如果正确, 请给出证明; 如果不正确, 请举例说明并给出正确结论.

解 不正确. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$\text{则有 } f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin(1/x) - 2 \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

当  $x = 1/(2k+1)\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时,

$$f'(x) = 1 + 4 \sin(2k+1)\pi / (2k+1)\pi - 2 \cos(2k+1)\pi = 1 + 2 > 0,$$

当  $x = 1/(2k\pi)$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  时,

$$f'(x) = 1 + (4 \sin 2k\pi) / (2k\pi) - 2 \cos 2k\pi = 1 - 2 < 0.$$



即在原点的任一邻域内,  $f'(x)$  在有的点取正值, 有的点取负值,  $f'(x)$  不连续, 所以  $f(x)$  不单调.

正确的说法是: 若  $f'(x)$  连续, 且  $f'(x_0) > 0$ , 则在  $x_0$  处存在某邻域, 在此邻域内  $f(x)$  单调增加.

**例 35** 就  $k$  的不同取值情况, 确定方程  $x - \frac{\pi}{2} \sin x = k$  在开区间  $(0, \pi/2)$  内根的个数, 并给以证明.

**证** 令  $f(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin x$ , 讨论曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = k$  在  $(0, \pi/2)$  内交点的个数.

因为  $f(x)$  在  $[0, \pi/2]$  上连续,  $f'(x) = 1 - (\pi \cos x)/2$ , 由  $f'(x) = 0$  解得驻点  $x_0 = \arccos(2/\pi) \in (0, \pi/2)$ .

又  $f''(x_0) = (\pi \sin x_0)/2 > 0$ , 所以  $x_0$  是  $f(x)$  在  $(0, \pi/2)$  内的极小值点, 又是最小值点.  $f(x)$  在  $(0, \pi/2)$  内的最小值为

$$y_0 = x_0 - \frac{\pi}{2} \sin x_0,$$

而  $f(x)$  在  $[0, \pi/2]$  上最大值为  $f(0) = f(\pi/2) = 0$ . 所以

$$x_0 - \frac{\pi}{2} \sin x_0 < f(x) < 0 \quad (0 < x < \pi/2).$$

因而: (1) 当  $k < y_0$  或  $k \geq 0$  时, 方程在  $(0, \pi/2)$  内无根;

(2) 当  $k = y_0$  时, 方程在  $(0, \pi/2)$  有一个根;

(3) 当  $k \in (y_0, 0)$  时, 方程在  $(0, x_0)$  与  $(x_0, \pi/2)$  内各有一个根, 故在  $(0, \pi/2)$  内有两个根.

**例 36** 设  $a, b, x, y$  皆为正数, 证明:

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}.$$

**证** 设  $f(x) = x \ln x \quad (x > 0)$ ,

则  $f'(x) = 1 + \ln x, \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ ,

故  $f(x)$  为凸函数, 所以

$$\frac{x+y}{a+b} \ln \frac{x+y}{a+b} \leq \frac{x}{a+b} \ln \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a+b} \ln \frac{y}{a+b},$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b} &\leq x \ln \frac{x}{a+b} + y \ln \frac{y}{a+b} \\ &\leq x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b}. \end{aligned}$$

**例 37** 利用函数的凹凸性,证明不等式

$$(1) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1;$$

$$(2) \frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}}, x \neq y.$$

**证** (1) 令  $f(t) = t^n$ , 则

$$f'(t) = nt^{n-1}, \quad f''(t) = n(n-1)t^{n-2}.$$

当  $n > 1$  时, 在  $(0, +\infty)$  内  $f''(t) > 0$ , 所以  $f(t)$  为凸函数, 有

$$f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) < \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2),$$

取  $t_1 = x, t_2 = y, \lambda = 1/2$ , 即得

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) 令  $f(t) = e^t$ , 则  $f'(t) = e^t, f''(t) = e^t > 0$ , 所以  $f(t)$  为凸函数. 取  $t_1 = x, t_2 = y, \lambda = 1/2$ , 得

$$\frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}}, \quad x \neq y.$$

### 综合练习题

• 1. 最优生产周期问题 设某工厂既是生产型的又是销售型的, 它的任务是把进来的原料加工成产品, 再销售出去. 为保证生产就必须库存一定数量的原料, 为保证销售就必须库存一定数量的产品. 设该工厂生产线运转时生产速率为  $K$  (常数), 产品销售速率为  $r$  ( $r < K$ ), 每开动一次生产线的成本为  $C$ , 每件产品单位时间的储存费为  $S_1$ , 生产一件产品所需原料单位时间的储存费为  $S_2$ . 工厂的一个生产周期是指从开始生产起到所生产的产品全部



销售完所需要的时间. 试分别就下列情形讨论如何确定一个最优生产周期  $T$ , 使得在单位时间内生产的总费用  $W$  最少.

(1) 仓库只存放产品不存放原料, 在这种情况下, 开始一段时间内工厂边生产边销售, 到某时刻  $t$  只销售不生产, 直至库存量  $Q$  减少为零;

(2) 仓库既存放产品又存放原料, 并且一个周期生产所需的原料在开始生产时就一次备足;

(3) 仓库既存放产品又存放原料, 并且开始生产时就一次备足  $p$  个周期生产所需的原料.

解 (1) 依题意, 仓库内库存量  $Q$  随时间  $t$  的变化规律为

$$\frac{dQ}{dt} = \begin{cases} K-r, & t < t_1, \\ -r, & t > t_1, \end{cases}$$

如图 2.7.1 所示. 建立模型讨论  $W$  的最小值问题, 可以解得

$$T_{\min} = \sqrt{C/B}, \quad W_{\min} = 2\sqrt{BC},$$

其中

$$B = Sr(K-r)/(2K).$$

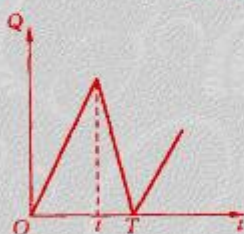


图 2.7.1

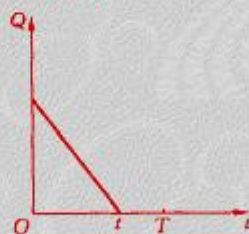


图 2.7.2

(2) 仓库内原料库存量随  $t$  变化规律如图 2.7.2 所示. 建立模型讨论  $W$  的最小值问题, 可以解得

$$T_{\min} = \sqrt{C/B_1}, \quad B_1 = B + S_2 r^2 / (2K).$$

(3) 仓库内的原料库存量  $Q$  随  $t$  变化规律如图 2.7.3 所示. 建立模型讨论  $W$  的最小值问题, 当  $S_1 \leq S_2$  时, 则  $T_{\min}$  尽可能大, 即  $P=1$ ; 当

$$S_1 > S_2 \text{ 时, } T_{\min} = \sqrt{2CK/[r(K-r)(S_1 - S_2)]}.$$



图 2.7.3

• 2. 在圆桶状的炮弹筒内要装填三块相同的截面为椭圆的直立药柱, 为使装填药量尽可能的多, 应如何设计药柱截面的尺寸?

解 将圆分三个相等的扇形, 则只需讨论扇形中最大截面积的内切椭圆.

取坐标系如图 2.7.4 所示, 扇形对称于  $y$  轴, 半顶角为  $\pi/3$ .

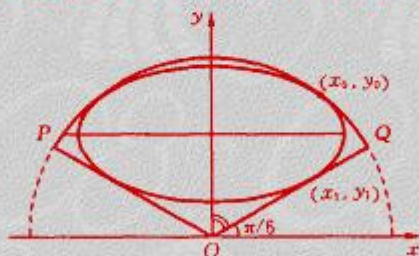


图 2.7.4

设椭圆的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{b^2} = 1$ , 椭圆与圆  $x^2 + y^2 = R^2$  相切, 与直线  $y = \sqrt{3}x/3$  与  $y = -\sqrt{3}x/3$  相切. 设椭圆与圆切于  $(x_0, y_0)$ , 则有



$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = R^2, \\ x_0^2/a^2 + (y_0 - c)^2/b^2 = 1, \\ -\frac{b^2 x_0}{a^2(y_0 - c)} = -\frac{x_0}{y_0} \text{ (由两曲线切线斜率相等)}. \end{cases} \quad ①$$

又设椭圆与直线  $y = \sqrt{3}x/3$  切于  $(x_1, y_1)$ , 则有

$$\begin{cases} x_1^2/a^2 + (y_1 - c)^2/b^2 = 1 \\ y_1 = \sqrt{3}x_1/3 \\ -\frac{b^2 x_1}{a^2(y_1 - c)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (由曲线切线与直线斜率相等)}. \end{cases} \quad ②$$

由式 ① 消去  $x_0, y_0$ , 得

$$a^2 b^2 - a^4 - b^2 R^2 + a^2 R^2 = a^2 c^2, \quad ③$$

由式 ② 消去  $x_1, y_1$ , 得

$$3c^2 = 3b^2 + a^2, \quad ④$$

由式 ③、④ 消去  $c$ , 得

$$b^2 = a^2 \left(1 - \frac{4a^2}{3R^2}\right). \quad ⑤$$

由  $A = \pi ab$ , 求  $A^2 = \pi^2 a^2 b^2$  的最大值, 显然  $A$  与  $A^2$  有相同的最大值点. 令  $a^2 = x$ , 则

$$A^2 = \pi^2 a^2 b^2 = \pi^2 x \cdot x \left(1 - \frac{4x}{3R^2}\right) = \pi^2 x^2 - \frac{4\pi^2 x^3}{3R^2}.$$

有  $(A^2)'_x = 2\pi^2 x - 4\pi^2 x^2/R^2$ ,

令  $(A^2)' = 0$ , 得  $x = 0, \quad x = R^2/2$ .

代入式 ⑤、④, 得

$$a^2 = R^2/2, \quad b^2 = R^2/6, \quad c = R/\sqrt{3}.$$

此时  $(A^2)''_x < 0$ , 故椭圆面积有最大面积. 所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{R^2/2} + \frac{(y - R/\sqrt{3})^2}{R^2/6} = 1.$$

它与圆周  $x^2 + y^2 = R^2$  切于  $(x_0, y_0) = (\pm R, \pm \sqrt{3}R/2)$ , 与扇形两直边分别切于  $(\pm R/2, R/(2\sqrt{3}))$ .

### 第三章 一元函数积分学及其应用

#### 第一节 定积分的概念、存在条件与性质

##### 知识要点

1. 设函数  $f$  定义在区间  $[a, b]$  上, 在  $[a, b]$  上任意插入  $n-1$  个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

把  $[a, b]$  分割成  $n$  个子区间, 第  $k$  个子区间的长度为  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \cdots, n$ . 任取  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , 作乘积  $f(\xi_k)\Delta x_k$ , 再作和式  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ . 如果无论区间  $[a, b]$  怎样划分及点  $\xi_k$  怎样选取, 当  $d = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$  时, 该和式都趋于同一常数, 则称函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上可积, 且称此常数为  $f$  在区间  $[a, b]$  上的定积分,

记作  $\int_a^b f(x)dx$ , 即  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ .

2. 定积分的几何意义 如果在  $[a, b]$  上,  $f(x) \geq 0$ , 则定积分  $\int_a^b f(x)dx$  的值等于以  $f(x)$  为曲边的曲边梯形面积; 若  $f(x) \leq 0$ , 则定积分  $\int_a^b f(x)dx$  的值等于以  $f(x)$  为曲边的曲边梯形面积的负值; 当  $f(x)$  变号时, 定积分  $\int_a^b f(x)dx$  的值等于各曲边梯形面积的代数和.

3. 函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上可积的必要条件是  $f$  在  $[a, b]$  上有界.

4. 设函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上有界, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积的充要



条件是:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $d < \delta$  时,  $\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$ .

$\omega_k = M_k - m_k$  是  $f$  在区间  $[x_{k-1}, x_k]$  上的振幅.  $M_k$  与  $m_k$  分别为  $f$  在  $[x_{k-1}, x_k]$  上的上、下确界.

5. 若  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

6. 若  $f$  在区间  $[a, b]$  上只有有限个第一类间断点或者在  $[a, b]$  上单调, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

7. 定积分有如下重要性质:

(1) 设  $f, g \in \mathcal{R}[a, b], \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , 则  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$ , 且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(2) 设  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ , 且  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

设  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , 且  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

其中  $M, m$  是常数.

(3) 设  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , 则  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ , 且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(4) 设  $I$  是一个有限区间,  $a, b, c \in I$ . 若  $f$  在  $I$  上可积, 则  $f$  在  $I$  的任一子区间上可积, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(5) 设  $f \in C[a, b], g \in \mathcal{R}[a, b]$ , 且  $g$  在  $[a, b]$  上不变号, 则至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

设  $f \in C[a, b]$ , 则至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

8. 称  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  为函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上的积分中值或积分均值, 是有限个数的算术平均值概念对连续函数的推广.

9. 规定:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$$

### 疑难解析

1. 定积分定义中为何取  $d \rightarrow 0$ , 而不取  $n \rightarrow \infty$ ? 为什么要强调分割与  $\xi_k$  选取的任意性?

答 (1) 因为  $d = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\}$ , 表示所有子区间长度的最大值,

当  $d \rightarrow 0$  时,  $n$  必然趋于无穷大, 此时  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$  的极限值才等于精确值. 而  $n \rightarrow \infty$ , 仅表示分点个数无限增加, 即有可能只在某个子区间内无限增加, 所以不能保证每个子区间的长度都趋于零, 则  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$  不可能趋于精确值.

之所以要求  $\xi_k$  的选取与分割的任意, 是因为在不同的分割下与  $\xi_k$  的不同选取时其和式可能会有不同的形式. 但只要当  $d \rightarrow 0$  时, 这些和式的极限是唯一确定的, 则定积分一定存在. 从而也给证明定积分不存在指出了一条途径, 即如果对某两种不同的分割或  $\xi_k$  的两种不同选取, 和式在  $d \rightarrow 0$  时有不同的极限, 则  $f$  在区间上不可积.

2. 定积分中值定理有何意义? 它还有什么其它形式?

答 教材中所述的定积分中值定理又称定积分第一中值定理, 当  $g(x) = 1$  时, 有  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ .

其几何意义是: 若  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在  $[a, b]$  上的曲边梯形面积等于与该曲边梯形同底、以  $f(\xi)$  为高的矩形面积 (见图 3.1.1(a)).



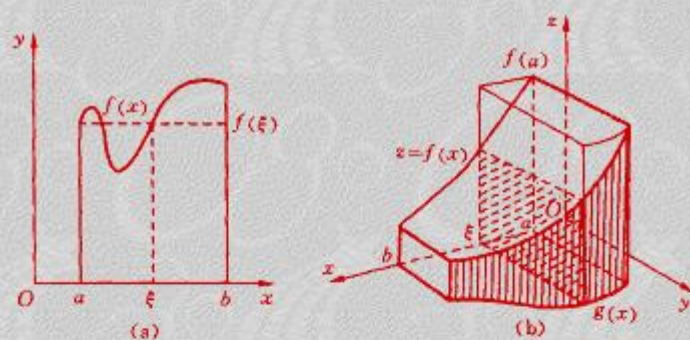


图 3.1.1

定积分中值定理的另一形式(称为定积分第二中值定理)是:  
若在区间 $[a, b]$ 上,  $f$  为非负单调减少函数,  $g$  为可积函数, 则存在  
 $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx.$$

其几何意义是:  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  表示一个空间曲顶柱体的体积. 该柱体以  $Oxy$  平面上曲边梯形  $0 \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b$  为底面, 以空间曲面  $z=f(x)$  为曲顶.  $f(x)g(x)$  恰好就是正交于  $x$  轴的长方形截面面积. 而  $f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx$  也是一个柱体的体积, 且以  $Oxy$  平面上曲边梯形  $0 \leq y \leq g(x), a \leq x \leq \xi$  为底面, 以  $z=f(a)$  的平面为顶. 定理表示存在  $\xi \in [a, b]$ , 使两个柱体体积恰好相等(见图 3.1.1(b)).

### 典型例题与习题详解

用定积分定义计算定积分, 首先是判断函数  $f(x)$  在给定区间  $[a, b]$  上是否可积. 若可积, 则定积分  $\int_a^b f(x)dx$  与  $[a, b]$  的分法及

点  $\xi_k$  的取法无关,一般可采用等分区间及取  $\xi_k$  为第  $k$  个子区间右(左)端点的方法来计算.

• 例 1 用定积分定义求下列积分的值:

$$(1) \int_0^1 x dx; \quad (2) \int_0^1 e^x dx.$$

解 (1) 因为  $x \in C[0,1]$ , 所以  $f \in \mathcal{R}[0,1]$ . 等分  $[0,1]$  为  $n$  个子区间, 并取  $\xi_k$  为第  $k$  个小区间的右端点, 则

$$f(\xi_k) \Delta x_k = k/n \cdot 1/n.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \int_0^1 x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2)  $e^x \in C[0,1]$ , 故  $f \in \mathcal{R}[0,1]$ . 等分  $[0,1]$  为  $n$  个子区间, 并取  $\xi_k$  为第  $k$  个子区间右端点, 则  $f(\xi_k) \Delta x_k = e^{k/n} \cdot 1/n$ . 于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{e^{k/n}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} [1 - (e^{1/n})^n]}{(1 - e^{1/n})n} = e - 1. \end{aligned}$$

• 例 2 设有一直的金属丝位于  $x$  轴上从  $x=0$  到  $x=a$  处, 其上各点  $x$  处的密度与  $x$  成正比, 比例系数为  $k$ , 求该金属丝的质量.

解 首先确定被积函数为  $f(x) = kx$ , 积分区间为  $[0, a]$ , 显然  $f(x)$  在  $[0, a]$  上可积.  $n$  等分区间  $[0, a]$ , 则  $\Delta x_i = a/n$ ; 取第  $i$  个子区间右端点为  $\xi_i$ , 则  $f(\xi_i) = ika/n$ . 于是, 由定积分定义知, 金属丝质量

$$\begin{aligned} m &= \int_0^a kx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{ka^2 i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} ka^2 \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} ka^2. \end{aligned}$$

• 例 3 放置于坐标原点的一个带电量为  $Q$  的点电荷形成一个静电场. 在电场力的作用下, 另一个带电量为  $q$  的点电荷沿  $x$  轴从  $x=a$  移动到  $x=b$  处, 试用积分式表达该电场力所作的功.



**解** 由库仑定律,带电量为  $Q$  的点电荷与带电荷为  $q$  的点电荷之间的作用力为  $F(x) = K \frac{Qq}{x^2}$ , 式中  $x$  为两点电荷之间的距离.

取  $F(x)$  为被积函数, 区间  $[a, b]$  为积分区间, 则  $n$  等分区间  $[a, b]$ , 得  $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ ,  $F(x)$  在第  $k$  个子区间上所作的功

$$\Delta W_k \approx F(\xi_k) \Delta x_k = KQq/\xi_k^2 \cdot \Delta x_k.$$

从而, 该电场力所作的功

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n KQq/\xi_k^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b K \frac{Qq}{x^2} dx.$$

• 例 4 水库的一个矩形闸门直立于水中, 设其高为  $H$ , 宽为  $L$ , 当水面与闸门顶部相齐时, 写出该闸门所受到的水压力的积分表达式.

**解** 因为水的压强为  $gx$ , 取积分区间为  $[0, H]$  时,  $n$  等分区间  $[0, H]$ , 则第  $k$  个小区间  $[x_{k-1}, x_k]$  上所受到的水压力等于水的压强与受压面积之积, 即

$$\Delta F_k \approx gxLH/n = g\xi_k L \Delta x_k,$$

所以, 由定积分定义, 该闸门所受到的水压力

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n gL\xi_k \Delta x_k = gL \int_0^H x dx.$$

• 例 5 设  $f \in \mathcal{R}[-a, a]$ , 根据定积分的几何意义说明:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f \text{ 为奇函数,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

**解**  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ ,  $\left| \int_{-a}^0 f(x) dx \right|$  与  $\left| \int_0^a f(x) dx \right|$  分别表示在区间  $[-a, 0]$  与  $[0, a]$  上以  $f(x)$  为曲边的曲边梯形面积, 显然它们是相等的. 所以, 当  $f(x)$  为奇函数时,  $\int_{-a}^0 f(x) dx$  与  $\int_0^a f(x) dx$  绝对值相等, 符号相反; 当  $f(x)$  为偶

函数时,  $\int_{-a}^0 f(x)dx$  与  $\int_0^a f(x)dx$  绝对值相等, 符号相同. 从而

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & f \text{ 是奇函数,} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & f \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

• 例 6 设  $f$  是周期为  $T$  的周期函数, 且在任一有限区间上可积, 根据定积分的几何意义说明:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

其中  $a$  为任一常数.

解 由周期函数的图形特征知, 在任意一个周期长度的区间上, 以  $f$  为曲边的曲边梯形面积是相等的, 所以

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

• 例 7 设  $f \in C[a, b]$ , 试说明任意改变  $f$  在有限个点上的值不影响它的可积性和积分  $\int_a^b f(x)dx$  的值.

解 设改变  $f$  在有限个点上的值后的函数为  $f^*$ , 则这些点是  $f^*$  的可去间断点, 因而  $f^*$  仍然可积 (依知识要点 6). 将积分  $\int_a^b f^*(x)dx$  以这些点为分点表示为有限个积分之和, 则由于函数在一点处的积分为零, 从而

$$\int_a^b f^*(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

• 例 8 设  $f, g \in C[a, b]$ .

(1) 如果在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 且  $f(x) \not\equiv 0$ , 证明:  $\int_a^b f(x)dx > 0$ ;

(2) 如果在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 且  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , 证明:  $f(x) \equiv 0$ ;

(3) 如果在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq g(x)$ , 且  $f(x) \not\equiv g(x)$ , 证明:  $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$ .



证 利用定积分性质来证.

(1) 因为  $f \in C[a, b]$ , 且  $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$  且  $f(x) \neq 0$ , 故可设存在点  $x_0 \in [a, b]$ , 有  $f(x_0) > 0$ . 依连续函数的保号性,  $\exists \delta > 0$ , 在  $U(x_0, \delta)$  内  $f(x) > 0$ , 因此

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx = f(\xi) 2\delta > 0, \quad \xi \in U(x_0, \delta).\end{aligned}$$

(2) 用反证法证. 设存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) \neq 0$ , 则依题(1), 有  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , 与假设矛盾. 所以,  $f(x) = 0$ .

(3) 引入辅助函数  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 则在  $[a, b]$  上  $F(x) \geq 0$ , 且  $F(x) \neq 0$ , 依题(1), 有  $\int_a^b F(x) dx > 0$ , 即

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x) dx &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx > 0 \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &> \int_a^b g(x) dx.\end{aligned}$$

• 例 9 判别下列积分的大小:

(1)  $\int_0^1 e^x dx$  和  $\int_0^1 e^{x^2} dx$ ; (2)  $\int_1^2 2\sqrt{x} dx$  和  $\int_1^2 \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx$ ;

(3)  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$  和  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$ .

解 利用定积分的单调性求解. 若  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ , 且  $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

(1) 在  $[0, 1]$  上,  $e^x \geq e^{x^2}$  且  $e^x \neq e^{x^2}$ , 所以  $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 e^{x^2} dx$ .

(2) 令  $F(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$ , 则

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{3/2} - 1}{x^2}.$$

在 $[1, 2]$ 上,  $F'(x) > 0$ , 且  $F(1) = 0$ , 所以在 $[1, 2]$ 上,

$$F(x) > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x},$$

从而  $\int_1^2 2\sqrt{x} dx > \int_1^2 (3 - \frac{1}{x}) dx$ .

$$(3) \text{ 令 } F(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x)/(1+x^2) - \arctan x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x^2(1+x) + (1+x^2)\arctan x}{(1+x)^2(1+x^2)} > 0, \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

而  $F(0) = 0$ , 所以

$$F(x) > 0 \Rightarrow \ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x},$$

故  $\int_0^1 \ln(1+x) dx > \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$ .

• 例 10 证明下列不等式:

$$(1) 1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e; \quad (2) 84 < \int_{-6}^8 \sqrt{100-x^2} dx < 140.$$

证 在 $[a, b]$ 上,  $m \leq f(x) \leq M$ , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(1) 在 $[0, 1]$ 上,  $1 \leq e^{x^2} \leq e$ , 所以  $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$ .

(2) 在 $[-6, 8]$ 上,  $6 \leq \sqrt{100-x^2} \leq 10$ , 所以

$$84 = 6 \times 14 \leq \int_{-6}^8 \sqrt{100-x^2} dx \leq 10 \times 14 = 140.$$

• 例 11 函数  $f$  在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$

$> 0$ , 当  $d(d = \max \Delta x_k) < \delta$  时,  $\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$ . 证明: 若有界函数  $f$  在有限区间  $I$  上可积, 则  $f$  在  $I$  的任一子区间上也可积.

证 设  $[c, d] \subseteq I$ , 将  $[c, d]$  任意分割为  $m$  个子区间, 由于这  $m$



个子区间是  $I$  的任一分割的一部分, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k &= \sum_{k \in I \setminus [c, d]} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k \in [c, d]} \omega_k \Delta x_k \\ &\geq \sum_{k \in [c, d]} \omega_k \Delta x_k \quad (m < n).\end{aligned}$$

所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta^* = \delta > 0$ , 当  $d < \delta$  时, 有  $\sum_{k \in [c, d]} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$ , 即  $f$  在  $I$  的任一子区间上也可积.

**例 12** 用定积分定义计算下列积分:

$$(1) \int_0^x \cos t dt; \quad (2) \int_a^b x^m dx \quad (0 < a < b, m \neq -1).$$

**解** (1)  $n$  等分区间  $[0, x]$ , 则  $\Delta x = x/n, \xi_k = kx/n$ , 则

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos t dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx/n) \cdot x/n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \frac{\sin(x/2) \cos[(n-1)x/2n]}{\sin(x/2n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{2} \cos\left(\frac{n-1}{2n}x\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{n} / \sin \frac{x}{2n}\right) \\ &= \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \times 2 = \sin x.\end{aligned}$$

(2) 取  $q = \sqrt[n]{b/a}$ , 则有等比级数

$$a < aq < aq^2 < \cdots < aq^{n-1} < aq^n = b.$$

取  $\xi_k = aq^k$  为子区间右端点, 则  $\Delta x_k = aq^{k+1} - aq^k$ , 故

$$\begin{aligned}\int_a^b x^m dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (aq^k)^m (aq^{k+1} - aq^k) \\ &= a^{m+1} (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} q^{(m+1)k} \\ &= a^{m+1} (q-1) \frac{q^{n(m+1)} - 1}{q^{m+1} - 1} = (b^{m+1} - a^{m+1}) \frac{q-1}{q^{m+1} - 1}.\end{aligned}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} q = 1$ , 所以

$$\int_a^b x^m dx = (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q-1}{q^{m+1} - 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^n + q^{n-1} + \cdots + 1} \\
 &= (b^{m+1} - a^{m+1}) / (m+1).
 \end{aligned}$$

**例 13** 设  $f \in C[a, b]$ , 且  $\int_a^b f(x)x^m dx = 0$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), 则  $f(x) \equiv 0$  或在  $(a, b)$  上至少  $n$  次变号.

**证** 若  $f(x) \equiv 0$ , 则  $\int_a^b f(x)x^n dx = 0$  成立.

若  $f(x) \not\equiv 0$ , 用反证法证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至少  $n$  次变号. 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内至多  $n-1$  次变号, 则必存在  $k$  个分点  $\{x_k\}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ), 使得  $f(x)$  在各个区间  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, b)$  上不恒为零, 且不变号, 但在相邻的两个区间上不同号, 从而  $f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$  在  $(a, b)$  上符号一致. 依题设有

$$\int_a^b f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k) dx = 0.$$

则由例 8 题(2)知, 应有

$$f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0,$$

与假设矛盾. 故  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少  $n$  次变号.

**• 例 14** 设函数  $f$  与  $g$  在任一有限区间上可积.

(1) 如果  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ , 那么  $f$  与  $g$  在  $[a, b]$  上是否相等?

(2) 如果在任一子区间  $[a, b]$  上都有  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ , 那么  $f$  是否恒等于  $g$ ?

(3) 如果题(2)中的  $f$  与  $g$  都是连续函数, 那么又有怎样的结论?

**解** (1) 不一定相等. 如  $\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$ , 但  $\sin x \neq \cos x$ , 即  $f(x) \neq g(x)$ .

(2) 不一定恒等. 如  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  与  $g(x) = 1$  在  $[a, b] \subseteq$



$\mathbf{R}$  均可积, 且  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx = b-a$ , 但  $f(0) \neq g(0)$ ,

即  $f(x) \neq g(x)$ .

(3) 有  $f(x) \equiv g(x)$ . 用反证法证. 设  $f(x) \neq g(x)$ , 且  $f(x) \geq g(x)$ ,  $f, g \in C[a, b]$ , 则令  $F(x) = f(x) - g(x)$  得  $F(x) \geq 0$ , 且  $F(x) \not\equiv 0$ , 依例 8 题(1)知,  $\int_a^b F(x) dx > 0$ . 即

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

与假设矛盾, 故必  $f(x) \equiv g(x)$ .

• 例 15 证明:

(1) 设  $f, g \in \mathcal{M}[a, b]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , 则  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}[a, b]$ , 并且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(2) 设  $f, g \in \mathcal{M}[a, b]$ , 且  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

证 利用定积分定义来证.

(1) 因为  $f, g$  在  $[a, b]$  上可积, 故  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$ , 当  $d < \delta_1$  时, 对函数  $f$ ,  $\sum_{k=1}^n \omega'_k \Delta x_k < \varepsilon$ ; 对同一  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_2 > 0$ , 当  $d < \delta_2$  时, 对函数  $g$ ,  $\sum_{k=1}^n \omega''_k \Delta x_k < \varepsilon$ . 所以  $\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 当  $d < \delta$  时, 有

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (\alpha \omega'_k + \beta \omega''_k) \Delta x_k < (\alpha + \beta) \varepsilon,$$

即  $\alpha f + \beta g$  也在  $[a, b]$  上可积.

(2)  $n$  等分区间  $[a, b]$ , 并取子区间中同一点为  $\xi_k$ , 则由题设得

$$f(\xi_k) \leq g(\xi_k), \quad k=1, 2, \dots, n.$$

故  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k$ .

依极限的保号性, 有

$$\lim_{j \rightarrow 0} \sum_{i=1}^j f(\xi_i) \Delta x_i \leq \lim_{j \rightarrow 0} \sum_{i=1}^j g(\xi_i) \Delta x_i,$$

即 
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

• 例 16 设  $f$  与  $g$  在  $[a, b]$  上连续, 证明 Cauchy 不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left[ \int_a^b f^2(x)dx \right]^{1/2} \left[ \int_a^b g^2(x)dx \right]^{1/2}.$$

证 因为  $\forall t \in \mathbb{R}$ , 不等式

$$\int_a^b [f(x) + g(x)t]^2 dx \geq 0$$

即 
$$\int_a^b g^2(x)t^2 dx + 2 \int_a^b f(x)g(x)t dx + \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$$

恒有解, 所以, 其判别式

$$\Delta = \left[ 2 \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 - 4 \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leq 0,$$

即 
$$\left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx,$$

故 
$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left[ \int_a^b f^2(x)dx \right]^{1/2} \left[ \int_a^b g^2(x)dx \right]^{1/2}.$$

例 17 设  $f$  与  $g$  在区间  $[a, b]$  上连续, 利用 Cauchy 不等式证明 Minkowski 不等式

$$\left\{ \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \leq \left[ \int_a^b f^2(x)dx \right]^{1/2} + \left[ \int_a^b g^2(x)dx \right]^{1/2}.$$

证 利用 Cauchy 不等式, 有

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x)dx + 2 \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \\ &\leq \int_a^b f^2(x)dx + 2 \left[ \int_a^b f^2(x)dx \right]^{1/2} \left[ \int_a^b g^2(x)dx \right]^{1/2} + \int_a^b g^2(x)dx \\ &= \left\{ \left[ \int_a^b f^2(x)dx \right]^{1/2} + \left[ \int_a^b g^2(x)dx \right]^{1/2} \right\}^2, \end{aligned}$$

两边开方, 得



$$\left\{ \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \leq \left[ \int_a^b f^2(x) dx \right]^{1/2} + \left[ \int_a^b g^2(x) dx \right]^{1/2}.$$

• 例 18 设  $f$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 利用 Cauchy 不等式证明:  $\int_a^b e^{f(x)} dx \int_a^b e^{-f(x)} dx \geq (b-a)^2$ .

证 若设  $F(x) = [e^{f(x)}]^{1/2}$ ,  $G(x) = [e^{-f(x)}]^{1/2}$ , 则由 Cauchy 不等式得

$$\left[ \int_a^b F(x)G(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b F^2(x) dx \int_a^b G^2(x) dx,$$

即 
$$\left( \int_a^b dx \right)^2 \leq \int_a^b e^{f(x)} dx \int_a^b e^{-f(x)} dx,$$

故 
$$\int_a^b e^{f(x)} dx \int_a^b e^{-f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

例 19 证明: 若  $f(x)$  在  $[1, e]$  上可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{1+1/n} f(x^n) dx = \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt.$$

证 令  $x^n = t$ , 则  $dx = \frac{1}{nt} \sqrt[n]{t} dt$ , 函数满足积分中值定理条件, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{(1+1/n)^n} \frac{\sqrt[n]{t}}{t} f(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\xi} \int_1^{(1+1/n)^n} \frac{f(t)}{t} dt \quad (1 < \xi < (1+1/n)^n) \\ &= \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

例 20 设  $b > a > 0, \theta > 0$ , 证明: 存在  $|\xi| < 1$ , 使得

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x} \sin x}{x} dx = \frac{2\xi}{a}.$$

证 令  $f(x) = e^{-\theta x}/x$ ,  $g(x) = \sin x$ , 则  $g(x) \in C[a, b]$ , 而

$$f'(x) = -(1+\theta x)e^{-\theta x}/x^2,$$

即  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调减少, 且  $f(x) \geq 0$ . 依定积分的第二中值定理知, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\text{原式} = \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx = \frac{e^{-ax}}{a}(\cos a - \cos \xi),$$

$$\text{从而} \quad \left| \int_a^b \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx \right| < \frac{2}{a}.$$

$$\text{令 } \xi = \frac{a}{2} \int_a^b \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx, \text{ 则 } |\xi| < 1, \text{ 且}$$

$$\int_a^b \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx = \frac{2}{a} \xi.$$

**例 21** 设  $x > 0$ , 证明: 存在  $0 < \theta < 1$ , 使得

$$\int_0^x e^t dt = xe^{ax}, \quad \text{且} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = 1.$$

**证** 由积分中值定理知, 存在  $0 < \theta < 1$ , 使得

$$\int_0^x e^t dt = xe^{ax}.$$

$$\text{又有} \quad \int_0^x e^t dt = e^x - 1,$$

$$\text{从而} \quad xe^{ax} = e^x - 1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x},$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{x} / x \stackrel{\text{L'}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} \cdot \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)' \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = 1. \end{aligned}$$

**例 22** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有连续二阶导数, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

$$\text{证} \quad \text{设 } F(x) = \int_0^x f(t)dt, \text{ 则 } F'(x) = f(x).$$

将  $F(x)$  在点  $x_0 = (a+b)/2$  展开为二阶 Taylor 公式, 得

$$\begin{aligned} F(a) &= F(x_0) + F'(x_0)(b-x_0) + \frac{F''(x_0)}{2}(b-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{F'''(\xi_1)}{3!}(b-x_0)^3 \quad (x_0 < \xi_1 < b), \end{aligned}$$



$$F(b) = F(x_0) + F'(x_0)(a-x_0) + \frac{F''(x_0)}{2}(a-x_0)^2 \\ + \frac{F'''(\xi_2)}{3!}(a-x_0)^3 \quad (a < \xi_2 < x_0).$$

两式相减,且因为

$$b-x_0=(b-a)/2, \quad a-x_0=-(b-a)/2,$$

则  $F(b)-F(a)$

$$= 2F'(x_0) \frac{b-a}{2} + \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{8}(b-a)^3 [F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2)] \right\},$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{48} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] (b-a)^3.$$

因为  $f''(x)$  连续,故由介值定理知,存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ,使得

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)],$$

$$\text{从而 } \int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b-a)^3 f'''(\xi).$$

**例 23** 估计  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx$  的符号.

**解** 令  $x^2=t$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx &= \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{\pi+u}} du \\ &\quad \xrightarrow{u=t-\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{\pi+t}} \right) \sin t dt > 0, \end{aligned}$$

故知积分  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx$  取正号.

关于换元积分法请阅读本章第三节.

**例 24** 利用定积分定义求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin(n\pi/n)}{n+1/n} \right].$$

**解** 利用定积分定义  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ , 将极限式变形, 求得  $f(x)$  与  $[a, b]$ , 化为定积分.

$$\begin{aligned} (1) \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= 2 \int_0^1 \ln(1+x) dx \quad (\text{或 } 2 \int_1^2 \ln x dx) = 4 \ln 2 - 2. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n+1/k}, \text{ 而}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1/k} \leq \frac{1}{n},$$

$$\text{故 } \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n+1/k} \leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \int_0^1 \sin x \pi dx = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

由夹逼原理, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin(n\pi/n)}{n+1/n} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

## 第二节 微积分基本公式与基本定理

### 知识要点

1. 如果在区间  $I$  上,  $F'(x) = f(x)$ , 则称  $F$  是  $f$  在  $I$  上的一



个原函数.

2. Newton-Leibniz 公式 设  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , 且  $f$  在区间  $[a, b]$  上有一个原函数  $F$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

该公式又称为微积分基本公式.

3. 设  $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ , 则定积分  $\int_a^x f(t) dt$  在  $[a, b]$  上确定一个函数  $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , 即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

通常称为变上限积分.

4. 微积分第一基本定理 设  $f \in C[a, b]$ , 则函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  在  $[a, b]$  上可导, 且有

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

推论 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上必有原函数, 且变上限积分  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  就是它的一个原函数.

5. 微积分第二基本定理 设  $F$  是  $f$  在区间  $I$  上的一个原函数,  $C$  为任意常数, 则  $F+C$  就是  $f$  在  $I$  上的所有原函数.

6. 函数  $f$  在区间  $I$  上所有原函数的一般表达式称为  $f$  在  $I$  上的不定积分, 记作  $\int f(x) dx$ . 其中  $f$  称为被积函数,  $f(x) dx$  称为被积式.

若  $F$  是  $f$  在  $I$  上的一个原函数, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

7. 不定积分有如下基本性质:

$$(1) [\int f(x) dx]' = f(x) \quad \text{或} \quad d \int f(x) dx = f(x) dx,$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad \text{或} \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

(2) 设  $f$  与  $g$  在区间  $I$  上的原函数存在, 则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$$

其中  $\alpha$  与  $\beta$  为任意常数.

### 疑难解析

1. Newton-Leibniz 公式为什么被称为微积分基本公式?

答 Newton-Leibniz 公式将定积分计算归结为求被积函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数问题, 建立了定积分与不定积分之间的联系. Newton-Leibniz 公式为定积分计算提供了一个简便的计算方法, 即函数  $f(x)$  在区间  $I$  上的定积分等于  $f$  的一个原函数在区间  $[a, b]$  上的增量. 因此它被称为微积分基本公式.

2. 微积分基本定理的意义是什么?

答 微积分第一基本定理揭示了微分(导数)与积分之间的联系, 它表明, 变上限积分是上限的一个函数, 该积分对上限的导数等于被积函数在上限处的值. 微积分第二基本定理则指出, 如果  $f$  在  $I$  上有原函数, 则必有无限多个原函数, 并可用统一的形式来表示.

3. 怎样计算变上限函数的导数?

答 对一般的变上限函数, 有

$$\left[ \int_a^x f(t) dt \right]' = f(x),$$

$$\left[ \int_x^a f(t) dt \right]' = - \left[ \int_a^x f(t) dt \right]' = -f(x).$$

若上限(或下限)是  $x$  的函数, 则有

$$\left[ \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi(x)] \varphi'(x),$$

$$\left[ \int_{\psi(x)}^a f(t) dt \right]' = -f[\psi(x)] \psi'(x),$$



$$\left[ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

### 典型例题与习题详解

• 例1 函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上的定积分与原函数有何区别与联系? 试通过在区间  $[0, 1]$  上的函数  $f(x) = x$  的定积分与原函数说明之.

解 定积分与原函数的区别在于, 定积分  $\int_a^b f(x) dx$  是一个和式的极限, 是一个数值; 而原函数是一个函数, 其导数恰为  $f(x)$ . 它们之间又存在紧密的联系, 统一在 Newton-Leibniz 公式中, 函数  $f$  在  $[a, b]$  上的定积分等于  $f$  的一个原函数  $F(x)$  在区间  $[a, b]$  上的增量  $F(b) - F(a)$ .

例如, 定义在  $[0, 1]$  上的函数  $f(x) = x$  的定积分是  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$  (见本章第一节例1题(1)), 而  $f(x) = x$  在  $[0, 1]$  上的全体原函数为  $x^2/2 + C$ , 有

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = \left( \frac{x^2}{2} + C \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{2} + C \right) - (0 + C).$$

• 例2 证明:  $\sin^2 x$ ,  $-\cos^2 x$  与  $-\frac{1}{2}\cos 2x$  都是同一个函数的原函数. 你能解释为什么同一个函数的原函数在形式上的这种差异吗?

解 因为

$$(\sin^2 x)' = (-\cos^2 x)' = \left( -\frac{1}{2}\cos 2x \right)' = \sin 2x,$$

所以它们都是同一个函数  $\sin 2x$  的原函数.

同一个函数的原函数若存在, 则必定有无穷多个, 且可表为统一的形式  $F(x) + C$ , 当  $C$  不同时原函数就会有不同的形式. 如

$$-\cos^2 x = \sin^2 x - 1, \quad -\frac{1}{2} \cos 2x = \sin^2 x - \frac{1}{2}.$$

所以,它们的差异只是任意常数  $C$  的不同.

• 例 3 用 Newton-Leibniz 公式计算下列定积分:

$$(1) \int_0^1 4x^2 dx; \quad (2) \int_1^e \frac{dx}{x};$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sin x dx; \quad (4) \int_{-1}^1 |x| dx;$$

$$(5) \int_0^{\pi/3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) dx;$$

$$(6) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0, \end{cases} \text{ 求 } \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

解 先求出被积函数的原函数(依导数公式逆推),再计算原函数在区间上的增量.

$$(1) \int_0^1 4x^2 dx = \left. \frac{4}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$$(2) \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = 1.$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2.$$

$$\begin{aligned} (4) \int_{-1}^1 |x| dx &= -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 x dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

$$(5) \int_0^{\pi/3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) dx = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) \Big|_0^{\pi/3} = 1.$$

$$\begin{aligned} (6) \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

• 例 4 求下列各函数的导数:



$$\begin{aligned}
 (1) f(x) &= \int_0^x \arctan t \, dt; & (2) f(x) &= \int_x^b \frac{dt}{1+t^4}; \\
 (3) F(x) &= \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} \, dt; & (4) F(x) &= \int_{\sin x}^0 \frac{t}{1-t^2} \, dt; \\
 (5) y &= \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln(1+t^6) \, dt; \\
 (6) \text{ 设 } F(x) &= \int_{\varphi}^{\varphi(x)} f(t) \, dt, f \in C[a, b], \varphi \text{ 可微, 且 } \varphi \text{ 的值域包}
 \end{aligned}$$

含在  $[a, b]$  中;

$$(7) y = \int_{x^2}^{x^3} (x+t)\varphi(t) \, dt, \text{ 其中 } \varphi \text{ 为连续函数.}$$

**解** 依疑难解析 3 所述的方法求导函数.

$$(1) f'(x) = \arctan x.$$

$$(2) f'(x) = -\frac{1}{1+x^4}.$$

$$(3) F'(x) = e^{(\sqrt{x})^2} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^x.$$

$$(4) F'(x) = -\frac{\sin x}{1-\sin^2 x} (\sin x)' = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} \cos x = -\tan x.$$

$$\begin{aligned}
 (5) \frac{dy}{dx} &= \ln[1+(\sqrt[3]{x})^6] \cdot (\sqrt[3]{x})' - \ln[1+(\sqrt[2]{x})^6] \cdot (\sqrt{x})' \\
 &= x^{-2/3}/3 \cdot \ln(1+x^2) - x^{-1/2}/2 \cdot \ln(1+x^3).
 \end{aligned}$$

$$(6) F'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

$$\begin{aligned}
 (7) \frac{dy}{dx} &= [x \int_{x^2}^{x^3} \varphi(t) \, dt + \int_{x^2}^{x^3} t\varphi(t) \, dt]' \\
 &= \int_{x^2}^{x^3} \varphi(t) \, dt + x[\varphi(x^3)(x^3)' - \varphi(x^2)(x^2)'] \\
 &\quad + x^3 \varphi(x^3)(x^3)' - x^2 \varphi(x^2)(x^2)' \\
 &= \int_{x^2}^{x^3} \varphi(t) \, dt + 3x^3(1+x^2)\varphi(x^3) - 2x^2(1+x)\varphi(x^2).
 \end{aligned}$$

• **例 5** 指出下列运算中有无错误. 若有错误, 错在何处?

$$(1) \frac{d}{dx} \left( \int_0^{x^2} \sqrt{t+1} \, dt \right) = \sqrt{x^2+1};$$

$$(2) \int_0^{x^2} \left( \frac{d}{dt} \sqrt{t+1} \right) dt = \sqrt{x^2+1};$$

$$(3) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{-1}^1 = 0;$$

$$(4) \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 x} dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

解 (1)有错误. 错在上限是  $x$  的函数, 应增加对  $x^2$  求导的项. 应为: 原式  $= \sqrt{x^2+1} \cdot 2x$ .

(2)有错误. 错在先对  $t$  求导后积分, 结果应是增量. 应为: 原式  $= \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+0} = \sqrt{1+x^2} - 1$ .

(3)有错误. 错在函数  $1/x$  在  $(-1, 1)$  内有间断点, 是反常积分(见本章第 6 节).

(4)有错误. 错在  $\sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|$ , 积分应分区间来求. 应为: 原式  $= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$ .

• 例 6 求由参数方程  $x = \int_0^t \sin^2 u du, y = \int_0^t \cos \sqrt{u} du$  所确定的函数  $y=f(x)$  的一阶导数.

解 因为  $x'_t = \sin^2 t, y'_t = 2t \cos t$ , 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t \cos t}{\sin^2 t} = 2t \cot t \csc t.$$

• 例 7 求由方程  $\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{x^2} t e^t dt = 0$  所确定的隐函数  $y=f(x)$  的一阶导数.

解 方程两边同时对  $x$  求导, 得

$$e^{y^2} \cdot y' + x^2 e^{x^2} \cdot 2x = 0,$$

解得

$$y' = -2x^3 e^{x^2 - y^2}.$$

• 例 8 求函数  $y = \int_0^x \sqrt{t}(t-1)^3 dt$  的定义域、单调区间和极值点.



解 函数在 $[0, +\infty)$ 上有定义. 由 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}(x-1)^3$ , 解得驻点 $x_1=0$ (舍去),  $x_2=1$ . 在 $[0, 1]$ 内有 $\frac{dy}{dx} < 0$ , 在 $[1, +\infty)$ 内 $\frac{dy}{dx} > 0$ , 所以, 在 $[0, 1]$ 内  $y$  单调减少, 在 $[1, +\infty)$ 内  $y$  单调增加,  $x=1$  为函数的极小值点.

• 例 9 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$

(1) 求函数  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ;

(2) 讨论函数  $F(x)$  的连续性和可导性.

解 (1)  $F(x) = \begin{cases} \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3, & x \leq 0, \\ \int_0^x \sin x dx = 1 - \cos x, & x > 0. \end{cases}$

(2) 显然,  $F(x)$  在各段连续且可导. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) = 0 = F(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3}x^3 = 0,$$

所以,  $F(x)$  在  $x=0$  处连续, 从而在定义域内连续. 又在点  $x=0$  处, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2/2}{\Delta x} = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x^3/3}{\Delta x} = 0,$$

所以,  $F(x)$  在  $x=0$  处可导. 从而在定义域内可导.

• 例 10 如果函数  $f$  在有限区间  $I$  上连续,  $F$  为  $f$  在  $I$  上的一个原函数, 那么, 下列式子哪些正确, 哪些不正确? 为什么?

(1)  $\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$  (其中  $a$  为  $I$  中一点,  $C$  为常数);

(2)  $\frac{d}{dx} \int f(t) dt = F'(x)$ ;

(3)  $\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C$  ( $C$  为任意常数);

$$(4) \frac{d}{dx} \int f(t) dt = \frac{d}{dx} \int f(x) dx;$$

$$(5) \int_a^x F'(x) dx = \int F'(x) dx;$$

$$(6) \int_a^x F'(x) dx = F(x).$$

解 (1)正确,因为  $C$  可取为  $-F(a)$ .

$$(2) \text{不正确, 因为 } \frac{d}{dx} \int f(t) dt = \frac{d}{dx} F(t) = 0.$$

$$(3) \text{正确, 因为若 } \int f(x) dx = F(x) + C_1, \text{ 则}$$

$$\int_a^x f(x) dt + C = (F(x) + C_2) + C = F(x) + (C + C_2).$$

这里  $C_1$  与  $C + C_2$  均为任意常数,故等号成立.

$$(4) \text{不正确, 因为 } \frac{d}{dx} \int f(t) dt = 0, \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x).$$

$$(5) \text{不正确, 因为 } \int_a^x F'(x) dx = F(x) - F(a), \int F'(x) dx = F(x) + C \text{ 是一个原函数与全体原函数的差别.}$$

$$(6) \text{不正确, 因为 } \int_a^x F'(x) dx = F(x) - F(a), \text{ 而 } F(a) \text{ 可能不是数 } 0.$$

• 例 11 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{3x+5}{\sqrt{x}} dx; \quad (2) \int \frac{x^2-1}{x-1} dx;$$

$$(3) \int \frac{3x^2}{1+x^2} dx; \quad (4) \int 2^{x-1} e^x dx;$$

$$(5) \int \tan^2 x dx; \quad (6) \int \frac{\cos 2t}{\cos^2 t \sin^2 t} dt.$$

解 这些都是最简单的积分,可以施行化简、恒等变形、拆、拼、组合等技巧,化为可利用导数公式逆推形式来计算.

$$(1) \int \frac{3x+5}{\sqrt{x}} dx = \int (3x^{1/2} + 5x^{-1/2}) dx = 2x^{3/2} + 10x^{1/2} + C.$$



$$(2) \int \frac{x^2-1}{x-1} dx = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

$$(3) \int \frac{3x^2}{1+x^2} dx = 3 \int \frac{x^2+1}{1+x^2} dx - \int \frac{3}{1+x^2} dx \\ = 3x - 3\arctan x + C.$$

$$(4) \int 2^{x-1} e^x dx = \frac{1}{2} \int (2e)^x dx = \frac{1}{2} \frac{(2e)^x}{\ln 2e} + C \\ = \frac{e^x}{1+\ln 2} 2^{x-1} + C.$$

$$(5) \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C.$$

$$(6) \int \frac{\cos 2t}{\cos^2 t \sin^2 t} dt = \int \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t \sin^2 t} dt \\ = \int (\csc^2 t - \sec^2 t) dt = -\cot t - \tan t + C.$$

$$\text{例 12 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x/3)}{x}, & x < 0, \\ \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x > 0, \end{cases} \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x/3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x/3)}{3 \cdot x/3} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \sin t^2 dt / x^3 \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1/3.$

例 13 讨论下列函数的连续性:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1}, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ \frac{1}{x^3} \int_0^x (1 - e^{-2t^2}) dt, & x < 0. \end{cases}$$

解  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  与  $(0, +\infty)$  内显然连续. 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin[2(e^x - 1)]}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(e^x - 1)}{e^x - 1} \\ = 2 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\int_0^x (1 - e^{-2t^2}) dt}{x^3} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-2x^2}}{3x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3} \neq f(0) = 2,$$

所以,  $f(x)$  在  $x=0$  处间断.

**例 14** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (1 + \sin 2t)^{1/t} dt}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt}{x^3};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^{3/2} dt}{\int_0^x t(t - \sin t) dt};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}.$$

**解** 本例为不定式的极限, 要使用  $L'$  Hospital 法则求解, 对变上限积分函数求导数.

$$(1) \text{原式} \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 2x)^{1/x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x}} = e^2.$$

$$(2) \text{原式} \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin^2 x \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin^2 x}{3 \sin^2 x} \cos x = \frac{1}{3}.$$

$$(3) \text{原式} \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^4}{x(x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x - \sin x}.$$

依 Taylor 公式  $x - \sin x = x^3/6 + o(x^3)$ , 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x^3/6 + o(x^3)} = 12.$$

$$(4) \text{原式} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dx}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dx}{e^{x^2}}$$



$$\stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

• 例 15 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 证明: 函数  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  在  $[a, b]$  上连续.

证 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则由可积的必要条件知,  $|f(x)| \leq M$ , 即  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

又  $\forall x \in [a, b]$ , 有

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq M |x - x_0|, \end{aligned}$$

故当  $|x - x_0| = \varepsilon/M$  时, 恒有  $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ . 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

由  $x_0$  的任意性知,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

• 例 16 试确定  $a, b$  的值, 使得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt}{bx - \sin x} = 1$ .

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt}{bx - \sin x} \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(b - \cos x) \sqrt{a+x}} = 1, x^2 \rightarrow 0,$$

故  $\lim_{x \rightarrow 0} (b - \cos x) = 0 \Rightarrow b = 1$ .

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 - \cos x) \sqrt{a+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2/2 \cdot \sqrt{a+x}} = \frac{2}{\sqrt{a}} = 1,$$

可知  $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$ .

所以  $a = 4, b = 1$ .

例 17 确定  $a, b, c$  的值, 使得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \quad (c \neq 0).$$

解 因为  $x \rightarrow 0$  时,  $ax - \sin x \rightarrow 0$ , 但  $c \neq 0$ , 故有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0 \Rightarrow b = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{\text{L'}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos x) / \frac{\ln(1+x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a - \cos x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c \quad (c \neq 0).$$

当  $x \rightarrow 0$  时,  $a - \cos x \rightarrow 0 \Rightarrow a = 1$ , 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} = c,$$

所以  $a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1/2$ .

• 例 18 设函数  $f$  在  $x = 1$  的邻域内可导, 且  $f(1) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1, \text{ 计算 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \left[ \int_t^1 f(u) du \right] dt}{(1-x)^3}.$$

解 首先要认识  $\int_t^1 f(u) du$  是  $t$  的函数, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \left[ \int_t^1 f(u) du \right] dt}{(1-x)^3} \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{\text{L'}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \int_x^1 f(u) du}{3(1-x)^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_x^1 f(u) du}{(1-x)^2} \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\stackrel{\text{L'}}{=} -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-f(x)}{2(1-x)} \left( \frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{L'}}{=} -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} [-f'(x)] = \frac{1}{6}.$$

• 例 19 设  $f, g \in C[a, b]$ , 证明至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

证 引入辅助函数



$$F(x) = \int_x^b g(x) dx \int_a^x f(x) dx,$$

则由题设知,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续且可导,  $F(a) = F(b) = 0$ , 满足 Rolle 定理条件. 故至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

例 20 设  $f(x) \in \mathcal{R}[1, e]$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^{1+1/n} f(x^n) dx = \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt. \quad c$$

证 令  $x^n = t, dx = \frac{1}{n} \sqrt[n]{t} dt$ , 函数满足积分中值定理条件, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^{1+1/n} f(x^n) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{(1+1/n)^n} \frac{\sqrt[n]{t}}{t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\xi} \int_1^{(1+1/n)^n} \frac{f(t)}{t} dt \quad \left(1 < \xi < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &= \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

### 第三节 两种基本积分法

#### 知识要点

1. 换元法则 I (凑微分法) 设函数  $f$  存在原函数,  $\varphi$  可微, 且  $\varphi$  的值域含于  $f$  的定义域中, 则

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left[ \int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)}.$$

换元法则 II 设  $f$  是连续函数,  $\varphi$  有连续的导数, 且  $\varphi'$  定号, 则

$$\int f(x) dx = \left\{ \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right\}_{t=\varphi^{-1}(x)},$$

其中  $\varphi^{-1}$  是  $\varphi$  的反函数.

2. 常用的代换形式如下:

(1) 三角代换 若被积函数中含有

1)  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , 可作代换  $x = a \sin t$  (或  $a \cos t$ );

2)  $\sqrt{x^2 + a^2}$ , 可作代换  $x = a \tan t$  (或  $a \sinh t$ );

3)  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , 可作代换  $x = a \sec t$  (或  $a \cosh t$ ).

(2) 根式代换 若被积函数中含有  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sqrt[n]{x}$ , 可作代换  $\sqrt[n]{x} = t$ ;

若被积函数中含有  $\sqrt[n]{ax+b}$ , 可作代换  $\sqrt[n]{ax+b} = t$ .

(3) 指数代换 若被积函数中含因式  $a^x$ , 可作代换  $a^x = t$ .

(4) 对数代换 若被积函数中含因式  $\ln x$ , 可作代换  $\ln x = t$ .

(5) 倒代换 若被积函数为分式, 且分母中变量次数高于分子中变量次数时, 可作代换  $x = 1/t$ .

3. 分部积分法 设  $u, v$  有关于  $x$  的连续导数, 则有分部积分公式  $\int u dv = uv - \int v du$ .

4. 定积分的换元积分法 设函数  $f$  在有限区间  $I$  上连续,  $x = \varphi(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上有连续的导数, 并且  $\varphi$  的值域  $R(\varphi) \subseteq I$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

其中  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ .

5. 定积分的分部积分法 设函数  $u, v$  在  $[a, b]$  上有连续的导数, 则  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ .

### 疑难解析

1. 不定积分的换元积分法的基础是什么? 使用换元积分法应注意些什么问题?

答 不定积分的换元积分法基于复合函数的求导法则逆转过来用于求不定积分而得到的, 它可以解决一大类函数的不定积分



问题,是计算不定积分的重要方法.

(1)换元积分法 I 又称为凑微分法,它将不定积分式中的被积函数进行分离,使其中一部分与自变量的微分凑成一个新变量的微分,而余下部分恰为新变量的函数;同时使原不定积分化为新变量的函数对新变量的不定积分,即

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du, \\ &= G(u) + C = G(\varphi(x)) + C,\end{aligned}$$

但一般不写出新变量  $u=\varphi(x)$ . 注意,应使  $\int g(u)du$  比  $\int f(x)dx$  简单易求.

(2)换元积分法 II 是引入一个新变量,使原不定积分中自变量的微分化为新变量的函数与新变量的微分,而原被积函数与原自变量微分中分离出来的新变量函数之积构成新变量的被积函数,得一个新变量被积函数对新变量的不定积分,即

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt \\ &= G(t) + C = G[\varphi^{-1}(x)] + C.\end{aligned}$$

这里,  $\varphi^{-1}(x)$  必须存在且易于求得.

因此,熟练掌握复合函数求导法则,牢记基本求导公式,掌握求反函数的方法是用好换元积分法的关键.而善于凑微分与引入新变量则是用活换元积分法的技巧所在.

2. 分部积分法的基础是什么? 使用分部积分公式的原则是什么?

答 分部积分法是函数乘积的求导法则的逆转,在认识分部积分公式  $\int u dv = uv - \int v du$  时要注意到,等号的成立是指等号两边的原函数在全体意义上的相等,而不是某个别原函数的相等.

使用分部积分公式的原则是:经过分部得到的积分  $\int v du$  要比原积分简单易求,特别是  $v = \int dv$  要易于得到(最好可以观察出

来). 将  $f(x)dx$  化为  $u dv$  是分部积分的重要技巧. 当  $f(x)$  可以表示为两个函数的乘积时, 选择其中一个为  $u$ , 另一个与  $dx$  组成  $dv$ . 在函数中选择  $u$  的优先次序是“反、对、幂、三、指”, 即函数中选  $u$  的优先次序是反三角函数, 对数函数, 幂函数、三角函数、指数函数. 次序选对了, 则积分易于求出, 否则可能求不出来.

还应注意的是, 分部积分式可能出现积分式循环出现的现象. 此时只要通过移项, 即能得出积分结果.

### 3. 使用定积分的换元法要注意哪些问题?

答 定积分的换元积分法 I 由于换元形式没有表现出来, 故不需讨论. 对换元积分法 II, 在定积分中是代回原变量的, 从而得到一个关于原变量的原函数. 但定积分是数值计算, 不需要代回原变量, 只需根据 Newton-Leibniz 公式计算新变量的原函数在新变量的变化区间上的增量. 因此, 使用换元积分法 II 计算定积分必须注意:

(1) 要保证  $\varphi(t)$  的值域包含在  $x$  的定义范围内, 并有  $\varphi(a) = a, \varphi(\beta) = b$ , 但并不一定要求  $\varphi(t)$  是单调或一一对应的.

(2) 换元必须换限, 换元 ( $x = \varphi(t)$ ) 后, 积分限必须由  $[a, b]$  换为  $[\alpha, \beta]$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

上限  $a$  对应  $\alpha$ , 下限  $b$  对应  $\beta$ .

## 典型例题与习题详解

换元积分法 I 的关键是凑微分, 常见的类型如下:

若  $\int f(u) du = F(u) + C$ , 则

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b),$$

$$\int f(x^n) x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int f(x^n) dx^n,$$

$$\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d \sin x,$$



$$\int f(\cos x) \sin x \, dx = - \int f(\cos x) d \cos x,$$

$$\int f(e^x) e^x \, dx = \int f(e^x) d e^x,$$

$$\int f(a^x) a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \int f(a^x) d a^x,$$

$$\int f(\ln x) \frac{1}{x} \, dx = \int f(\ln x) d \ln x,$$

$$\int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int f(\tan x) d \tan x,$$

$$\int f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = - \int f(\cot x) d \cot x,$$

$$\int f(\arcsin x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int f(\arcsin x) d \arcsin x,$$

$$\int f(\arctan x) \frac{1}{1+x^2} \, dx = \int f(\arctan x) d \arctan x,$$

$$\int f\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \, dx = \int f\left(x + \frac{1}{x}\right) d\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

$$\int f\left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \, dx = \int f\left(x - \frac{1}{x}\right) d\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

一般较复杂的积分,可能要凑几次微分,还要与换元积分法

II、分部积分法相结合,才能得出计算结果.

• 例 1 利用换元积分法 I 计算下列不定积分:

$$(1) \int \sin(\omega t + \varphi) dt;$$

$$(2) \int \frac{10}{\sqrt[3]{3-5x}} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}};$$

$$(4) \int x^2 (3+2x^3)^{1/6} dx;$$

$$(5) \int \frac{3x^3+x}{1+x^4} dx;$$

$$(6) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(7) \int \frac{\cos \ln |x|}{x} dx;$$

$$(8) \int \frac{\ln \ln x}{x \ln x} dx (x > e);$$

$$(9) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx;$$

$$(10) \int \cos^4 x dx;$$

$$(11) \int \sin^2 x \cos^2 x dx;$$

$$(12) \int \sec^4 x dx;$$

$$(13) \int \csc^3 x \cot x dx;$$

$$(14) \int \frac{1}{1+e^x} dx;$$

$$(15) \int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx;$$

$$(16) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$(17) \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx;$$

$$(18) \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2} \arccos(x/2)} dx.$$

**解** 一些积分式在换元前,往往还要进行恒等变形、拆、拼、重组才能确定换元方式.

$$\begin{aligned} (1) \int \sin(\omega t + \varphi) dt &= \frac{1}{\omega} \int \sin(\omega t + \varphi) d(\omega t + \varphi) \\ &= -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{10}{\sqrt[3]{3-5x}} dx &= -2 \int (3-5x)^{-1/3} d(3-5x) \\ &= -3(3-5x)^{2/3} + C. \end{aligned}$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x)}{\sqrt{1-(4x)^2}} = \frac{1}{4} \arcsin 4x + C.$$

$$\begin{aligned} (4) \int x^2 (3+2x^3)^{1/6} dx &= \frac{1}{6} \int (3+2x^3)^{1/6} d(3+2x^3) \\ &= \frac{1}{7} (3+2x^3)^{7/6} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int \frac{3x^3+x}{1+x^4} dx &= 3 \int \frac{x^3}{1+x^4} dx + \int \frac{x}{1+x^4} dx \\ &= \frac{3}{4} \int \frac{1}{1+x^4} d(1+x^4) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(x^2)^2} dx^2 \\ &= \frac{3}{4} \ln(1+x^4) + \frac{1}{2} \arctan x^2 + C. \end{aligned}$$

$$(6) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int (1+\sqrt{x})^{1/2} d(\sqrt{x}+1)$$



$$= \frac{4}{3}(1 + \sqrt{x})^{3/2} + C.$$

$$(7) \int \frac{\cos \ln |x|}{x} dx = \int \cos \ln |x| d \ln |x| \\ = \sin \ln |x| + C.$$

$$(8) \int \frac{\ln \ln x}{x \ln x} dx = \int \frac{\ln \ln x}{\ln x} d \ln x = \int \ln \ln x d \ln \ln x \\ = \frac{1}{2}(\ln \ln x)^2 + C.$$

$$(9) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} d \sin x = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) d \sin x \\ = -\sin x - \frac{1}{\sin x} + C.$$

$$(10) \int \cos^4 x dx = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ = \frac{1}{4} \int [1 + 2\cos 2x + (1 + \cos 4x)/2] dx \\ = \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx \\ = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

$$(11) \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx \\ = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

$$(12) \int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x d \tan x = \int (1 + \tan^2 x) d \tan x \\ = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C.$$

$$(13) \int \csc^3 x \cot x dx = - \int \csc^2 x d \csc x = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C.$$

$$(14) \int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx = - \int \frac{1}{e^{-x} + 1} d(e^{-x} + 1) \\ = -\ln(1 + e^{-x}) + C.$$

$$\begin{aligned}
 (15) \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} &= -\int \frac{d \cot x}{\csc^2 x + 1} = -\int \frac{d \cot x}{\cot^2 x + 2} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{\frac{\sqrt{2} d \cot x}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{\cot x}{\sqrt{2}}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\cot x}{\sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (16) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} e^{-\sqrt{1+x^3}} dx &= \int e^{-\sqrt{1+x^3}} d \sqrt{1+x^3} \\
 &= -e^{-\sqrt{1+x^3}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (17) \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx &= \int (\arctan x)^{1/2} d \arctan x \\
 &= \frac{2}{3} (\arctan x)^{3/2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (18) \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2} \arccos(x/2)} &= \int \frac{1}{\arccos(x/2)} d \arccos \frac{x}{2} \\
 &= \ln | \arccos(x/2) | + C.
 \end{aligned}$$

• 例 2 证明下列各式( $m, n \in \mathbb{N}_+$ ):

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n; \end{cases}$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n; \end{cases}$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$$

证 这三个积分等式反映的性质称为三角函数系的正交性.

(1) 当  $m = n$  时,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos 2mx) dx \\
 &= \left( x - \frac{1}{2m} \sin 2mx \right) \Big|_0^{\pi} = \pi;
 \end{aligned}$$



当  $m \neq n$  时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{\pi} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] dx \\ &= \left[ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] \Big|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

从而命题成立.

(2) 与题(1)类似. 当  $m = n$  时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2 \int_0^{\pi} \cos^2 mx dx = \int_0^{\pi} (1 + \cos 2mx) dx \\ &= \left[ x + \frac{1}{2m} \sin 2mx \right] \Big|_0^{\pi} = \pi;\end{aligned}$$

当  $m \neq n$  时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \\ &= \left[ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] \Big|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

从而命题成立.

$$(3) \text{ 原式} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx \xrightarrow{\text{奇偶性}} 0.$$

• 例 3 利用换元积分法 II 计算下列不定积分:

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\int x \sqrt{3-2x} dx;$                  | (2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}};$          |
| (3) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}};$          | (4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$    |
| (5) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}};$       | (6) $\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{3/2}};$     |
| (7) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2} dx;$      | (8) $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x+3}};$ |
| (9) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx;$ | (10) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{3e^x-2}} dx.$ |

解 根据被积函数形式, 选择适当的新变量, 注意使反函数

易于求出.

(1) 选用根式代换  $t = \sqrt{3-2x}$ , 则  $x = (3-t^2)/2$ .

$$\begin{aligned}\int x \sqrt{3-2x} dx &= \frac{1}{2} \int (3-t^2)t(-t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int (t^4 - 3t^2) dt = \frac{1}{10} t^5 - \frac{1}{2} t^3 + C \\ &= \frac{1}{10} (3-2x)^{5/2} - \frac{1}{2} (3-2x)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

(2) 选用根式代换  $t = \sqrt{1+x}$ , 则  $x = t^2 - 1$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} &= \int \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= 2[t - \ln(1+t)] + C \\ &= 2\sqrt{1+x} - 2\ln(1+\sqrt{1+x}) + C.\end{aligned}$$

(3) 选用三角代换  $x = \sin t$ , 则  $t = \arcsin x$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int \frac{1}{\cos^3 t} \cos t dt = \int \sec^2 t dt \\ &= \tan t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.\end{aligned}$$

在用三角代换时, 相关反函数利用直角三角形图示法(见图 3.3.1) 求出, 十分明了并且简便.

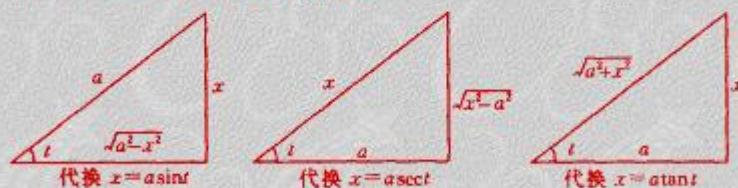


图 3.3.1

(4) 选用三角代换  $x = a \sin t$ , 则

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 \sin^2 t \cos t dt}{a \cos t} = \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt$$



$$= \frac{a^2}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin x - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(5) 选用三角代换  $x = 3 \sec t$ , 则

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} = \int \frac{3 \sec t \tan t}{9 \sec^2 t \cdot 3 \tan t} dt = \frac{1}{9} \int \cos t dt$$

$$= \frac{1}{9} \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + C.$$

(6) 选用三角代换  $x = \tan t$ , 则

$$\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \frac{\tan^3 t \sec^2 t}{\sec^3 t} dt = \int \sin^2 t \sec^2 t dt$$

$$= - \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} d \cos t = - \int \left( \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) d \cos t$$

$$= \cos t + \sec t + C = \sqrt{1+x^2} + 1/\sqrt{1+x^2} + C.$$

(7) 选用倒代换  $t = 1/x$ , 则

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2} dx = \int t^2 \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}} \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt = - \int \frac{\sqrt{1+2t}}{t} dt.$$

再选用根式代换  $u = \sqrt{1+2t}$ ,  $t = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$ , 则

$$- \int \frac{\sqrt{1+2t}}{t} dt = - \int \frac{2u^2}{u^2-1} du = -2 \int \left( 1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du$$

$$= -2u + \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C$$

$$= -2\sqrt{2/x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{2/x+1}+1}{\sqrt{2/x+1}-1} \right| + C.$$

(8) 选用代换  $u = x+1$ , 则

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du^2}{u^2\sqrt{u^2+2}}.$$

再选用根式代换  $t = \sqrt{u^2+2}$ , 则

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int \frac{du^2}{u^2 \sqrt{u^2+2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(t^2-2)t} dt = \int \frac{dt}{t^2-2} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{2}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

(9) 选根式代换  $t = \sqrt{1+\ln x}$ , 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x \ln x} &= \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{\ln x} d(1+\ln x) = \int \frac{t}{t^2-1} 2t dt \\
 &= 2 \int \left( 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\
 &= 2\sqrt{1+\ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

(10) 选根式代换  $t = \sqrt{3e^x-2}$ , 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{3e^x-2}} &= \int \frac{(t^2+2)}{3t} \cdot \frac{2t}{3} dt = \frac{2}{9} \int (t^2+2) dt \\
 &= \frac{2}{27} t(t^2+6) + C \\
 &= \frac{2}{27} \sqrt{3e^x-2} (3e^x+4) + C.
 \end{aligned}$$

读者还可以尝试用别的换元方法进行计算.

• 例 4 求下列定积分的值:

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{\cos x} dx;$ | (2) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$                  |
| (3) $\int_1^e \frac{2+3\ln x}{x} dx;$         | (4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x} - \cos^3 x dx;$ |
| (5) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$         | (6) $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$   |
| (7) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx.$   |  |



解 选择适当方法进行计算.

$$\begin{aligned}(1) \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{\cos x} dx &= - \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{1/2} d \cos x \\ &= - \frac{2}{3} (\cos x)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + (e^x)^2} de^x \\ &= \arctan e^x \Big|_0^1 = \arctan e - \pi/4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \int_1^e \frac{2 + 3 \ln x}{x} dx &= \int_1^e (2 + 3 \ln x) d \ln x \\ &= \left( 2 \ln x + \frac{3}{2} \ln^2 x \right) \Big|_1^e = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x} - \cos^3 x dx \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| \sqrt{\cos x} dx = -2 \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{1/2} d \cos x \\ &= - \frac{4}{3} (\cos x)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &\stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int_0^2 \left( 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 2[t - \ln(1+t)] \Big|_0^2 = 2(2 - \ln 3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx &\stackrel{x=\sin t}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 t - 1) dt \\ &= -(\cot t + t) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx &\stackrel{x=\sec t}{=} \int_0^{\pi/3} \frac{\tan t}{\sec^2 t} \sec t \tan t dt \\ &= \int_0^{\pi/3} (\sec t - \cos t) dt \\ &= (\ln |\sec t + \tan t| - \sin t) \Big|_0^{\pi/3}\end{aligned}$$

$$= \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}/2.$$

• 例 5 设  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 利用定积分的换元法证明:

(1) 如果  $f(x)$  为奇函数, 那么  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ;

(2) 如果  $f(x)$  为偶函数, 那么  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ;

(3) 计算  $\int_{-1}^1 |x| \left( x^2 + \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} \right) dx$ .

证 由定积分的区间可加性, 有

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

$$\text{又 } \int_{-a}^0 f(x) dx \xrightarrow{t=-x} - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt,$$

$$\text{则 } \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

(1) 如果  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(x) = -f(-x)$ , 故

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a 0 dx = 0.$$

(2) 如果  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(x) = f(-x)$ , 故

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a 2f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int_{-1}^1 |x| \left( x^2 + \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 |x| x^2 dx + \int_{-1}^1 \frac{|x| \sin^3 x}{1 + \cos x} dx \\ &= 2 \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

• 例 6 设  $f(x)$  为连续的周期函数, 其周期为  $T$ , 利用定积分的换元法证明:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad (a \text{ 为常数}).$$

证 因为  $f(x)$  是周期为  $T$  的周期函数, 故



$$f(x) = f(T+x),$$

又由区域可加性,有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \int_T^{a+T} f(x) dx &\stackrel{x=T+t}{=} \int_0^a f(T+t) dt = \int_0^a f(t) dt \\ &= -\int_a^0 f(x) dx, \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

• 例 7 利用分部积分法计算下列积分:

$$(1) \int x \sin 3x dx; \quad (2) \int x^3 \operatorname{ch} x dx;$$

$$(3) \int x^2 \arctan x dx; \quad (4) \int x \ln(1+x^2) dx;$$

$$(5) \int \frac{x e^x dx}{(1+e^x)^2}; \quad (6) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx;$$

$$(7) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx; \quad (8) \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx;$$

$$(9) \int_0^{e-1} \ln(1+x) dx; \quad (10) \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx.$$

解 对不定积分使用分部积分法,选择  $u$  的次序是“反、对、幂、三、指”,必须严格遵循,否则很难得到结果.在定积分时,可先求出部分结果,如  $uv \Big|_a^b$ .

$$\begin{aligned} (1) \int x \sin 3x dx &= -\frac{1}{3} \int x d \cos 3x \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C. \end{aligned}$$

$$(2) \int x^3 \operatorname{ch} x dx = \int x^3 d \operatorname{sh} x = x^3 \operatorname{sh} x - 3 \int x^2 \operatorname{sh} x dx$$

$$\begin{aligned}
&= x^3 \operatorname{sh} x - 3x^2 \operatorname{ch} x + 6 \int x \operatorname{ch} x dx \\
&= x^3 \operatorname{sh} x - 3x^2 \operatorname{ch} x + 6x \operatorname{sh} x + 6 \int \operatorname{sh} x dx \\
&= (x^3 + 6x) \operatorname{sh} x - 3(x^2 + 2) \operatorname{ch} x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \int x^2 \arctan x dx &= \frac{1}{3} \int \arctan x dx^3 \\
&= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx^2 \\
&= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \int x \ln(1+x^2) dx &= \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(x^2+1) \\
&= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{2x(x^2+1)}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \int \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx &= - \int x d\left(\frac{1}{1+e^x}\right) \\
&= -\frac{x}{1+e^x} + \int \frac{dx}{1+e^x} \\
&= -\frac{x}{1+e^x} - \int \frac{de^{-x}}{e^{-x}+1} \\
&= -\frac{x}{1+e^x} - \ln(1+e^{-x}) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx &= -2 \int \arcsin x d\sqrt{1-x} \\
&= -2\sqrt{1-x} \arcsin x + 2 \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= -2\sqrt{1-x} \arcsin x + 2 \int (1+x)^{-1/2} d(1+x)
\end{aligned}$$



$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 4(1+x)^{1/2} + C.$$

$$\begin{aligned}(7) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int x d \tan x = x \tan x - \int \tan x dx \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8) \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx &\stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \int t \sin t \cdot 2t dt \\ &= -2 \int t^2 d \cos t = -2t^2 \cos t + 4 \int t \cos t dt \\ &= -2t^2 \cos t + 4t \sin t - 4 \int \sin t dt \\ &= -2t^2 \cos t + 4t \sin t + 4 \cos t + C \\ &= (4-2x) \cos \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(9) \int_0^{e-1} \ln(1+x) dx &= x \ln(1+x) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{1+x} dx \\ &= (e-1) \ln e - [x - \ln(1+x)] \Big|_0^{e-1} \\ &= \ln e = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10) \int_0^\pi x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \sin x dx \\ &= 2x \cos x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi \cos x dx \\ &= -2\pi - 2 \sin x \Big|_0^\pi = -2\pi.\end{aligned}$$

• 例 8 证明下列递推公式 ( $n = 2, 3, \dots$ ):

$$(1) \text{ 设 } I_n = \int \tan^n x dx, \text{ 则 } I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2};$$

$$(2) \text{ 设 } I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}, \text{ 则 } I_n = \frac{1}{1-n} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

证 利用分部积分法证明.

$$\begin{aligned}(1) \int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x d \tan x - \int \tan^{n-2} x dx\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}.$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{dx}{\sin^n x} &= \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} d \cot x \\ &= -\frac{\cot x}{\sin^{n-2} x} - \int \frac{\cot x \cdot (n-2) \cos x}{\sin^{n-1} x} dx \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)(I_n - I_{n-2}), \end{aligned}$$

移项得 
$$I_n = \frac{1}{1-n} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

• 例 9 计算下列积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x^4 + 3x^2}; \quad (2) \int \frac{t}{t^4 + 10t^2 + 9} dt;$$

$$(3) \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx; \quad (4) \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{3+2\cos x}; \quad (6) \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx;$$

$$(7) \int \frac{x^2}{a^2 - x^6} dx; \quad (8) \int \frac{x^{11}}{x^8 + 4x^4 + 5} dx;$$

$$(9) \int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx; \quad (10) \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin x \cos x} dx;$$

$$(11) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx; \quad (12) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$(13) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx; \quad (14) \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

**解** 题(1)至题(4)被积函数是有理分式函数,需先分解为部分分式,才能计算不定积分.题(5)、题(6)需利用三角函数恒等变形后再计算.

$$(1) \int \frac{dx}{x^4 + 3x^2} = \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx$$



$$= -\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{t}{t^4 + 10t^2 + 9} dt &= \frac{1}{8} \int t \left( \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 9} \right) dt \\ &= \frac{1}{16} \left[ \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} - \int \frac{d(t^2 + 9)}{t^2 + 9} \right] \\ &= \frac{1}{16} \ln \frac{t^2 + 1}{t^2 + 9} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx &= \int \frac{(x^2 - 1) + 1}{(x-1)^{100}} dx \\ &= \int \frac{(x-1) + 2}{(x-1)^{99}} dx + \int \frac{dx}{(x-1)^{100}} \\ &= \frac{-1}{99(x-1)^{99}} - \frac{1}{49(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx &= \frac{1}{7} \int \frac{1-x^7}{x^7(1+x^7)} dx^7 \\ &= \frac{1}{7} \int \left( \frac{1}{x^7} - \frac{2}{1+x^7} \right) dx^7 \\ &= \frac{1}{7} \ln |x^7| - \frac{2}{7} \ln |1+x^7| + C \\ &= \ln |x| - \frac{2}{7} \ln |1+x^7| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int \frac{dx}{3+2\cos x} &= \int \frac{dx}{3+2[2\cos^2(x/2)-1]} \\ &= \int \frac{dx}{1+4\cos^2(x/2)} = 2 \int \frac{d \tan(x/2)}{\sec^2(x/2)+4} \\ &= 2 \int \frac{d \tan(x/2)}{\tan^2(x/2)+5} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \left( \tan \frac{x}{2} / \sqrt{5} \right) + C. \end{aligned}$$

$$(6) \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \ln |\cos x + \sin x| + C.$$

$$(7) \int \frac{x^2}{a^2 - x^4} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{a^2 - (x^3)^2} = \frac{1}{6a} \ln \left| \frac{a + x^3}{a - x^3} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} (8) \int \frac{x^{11}}{x^8 + x^4 + 5} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x^8}{x^8 + x^4 + 5} dx^4 = \frac{1}{4} \int \frac{x^8 + x^4 + 5 - x^4 - 5}{x^8 + x^4 + 5} dx^4 \\ &= \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} \int \frac{(2x^4 + 4) dx^4}{x^8 + 4x^4 + 5} + \frac{3}{4} \int \frac{dx^4}{(x^8 + 2)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} \ln(x^8 + 4x^4 + 5) + \frac{3}{4} \arctan(x^4 + 2) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \int \frac{\ln \tan x}{\sin x \cos x} dx &= \int \frac{\ln \tan x}{\tan x \cos^2 x} dx \\ &= \int \ln \tan x d \ln \tan x = \frac{1}{2} \ln^2 \tan x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) \int \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin x \cos x} &= \int \frac{d \sin x \cos x}{1 + \sin x \cos x} \\ &= \ln |1 + \sin x \cos x| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (11) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int (x + \sin x) d \tan \frac{x}{2} \\ &= (x + \sin x) \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} (1 + \cos x) dx \\ &= (x + \sin x) \tan \frac{x}{2} - 2 \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx \\ &= x \tan \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos x + C_1 \\ &= x \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx &= \int \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2} dx = \int \frac{d(x - 1/x)}{(x - 1/x)^2 + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + C. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (13) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx & \xrightarrow{x=\tan t} \int \frac{\ln \tan t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt \\
 & = \int \cos t \ln \tan t dt = \int \ln \tan t \sin t \\
 & = \sin t \ln \tan t - \int \sin t \frac{dt}{\sin t \cos t} \\
 & = \sin t \ln \tan t - \ln |\sec t + \tan t| + C \\
 & = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x} & = \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x} dx \\
 & = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \\
 & = \frac{1}{2} x - \ln |\sin x + \cos x| + C.
 \end{aligned}$$

• 例 10 证明下列积分等式:

(1)  $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a+(b-a)x] dx$ , 其中  $f$  为连续函数;

$$(2) \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx;$$

$$(3) \int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx, \text{ 其中 } f \text{ 为连续函数.}$$

证 利用换元积分法证明.

(1) 令  $t = a + (b-a)x$ , 则

$$(b-a) \int_0^1 f[a+(b-a)x] dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

(2) 令  $t = 1-x$ , 则

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_1^0 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx.$$

(3) 令  $t = x^2$ , 则

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} t f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx.$$

例 11 计算下列不定积分:

$$(1) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx; \quad (2) \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}; \quad (4) \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx.$$

解 (1) 令  $x = a \cos 2t$ , 则  $dx = -2a \sin 2t dt$ , 故

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= -4a \int \cos^2 t dt = -4a \left( \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C \\ &= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad -a \leq x < a. \end{aligned}$$

(2) 令  $x = 2a \sin^2 t$ , 则  $dx = 4a \sin t \cos t dt$ , 故

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx &= \int 8a^2 \sin^4 t dt = 2a^2 \int (1 - \cos 2t)^2 dt \\ &= a^2 \left( 3t - 2\sin 2t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) + C \\ &= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + C, \\ &\quad 0 \leq x < 2a. \end{aligned}$$

(3) 令  $x-a = (b-a) \sin^2 t$ , 则  $dx = (b-a) \sin 2t dt$ , 故

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= 2 \int dt = 2t + C \\ &= 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C, \quad a < x < b. \end{aligned}$$

(4) 因为被积函数在  $x < -a$  及  $x \geq a$  时有定义, 所以当  $x \geq a$  时, 设  $x-a = 2a \sinh^2 t$ , 则

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= 4a \int \sinh^2 t dt = a \sinh 2t - 2at + C \\ &= \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) + C; \end{aligned}$$



当  $x < -a$  时, 设  $x+a = 2a\text{sh}^2 t$ , 则

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= -4a \int \text{sh}^2 t dt = -a \text{sh} 2t + 2at + C \\ &= -\sqrt{x^2+a^2} + 2a \ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a}) + C.\end{aligned}$$

例 12 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx; \quad (2) \int e^x \left( \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \right) dx;$$

$$(3) \int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(x+1)} dx.$$

解 (1) 由于因式  $xe^x$  不能分解, 故要将分子分母同乘一因式, 凑成  $e^x(x+1)dx = d(xe^x)$ . 常用形式

$$e^{ax} [\varphi(bx) + b\varphi'(bx)] = d[e^{ax}\varphi(bx)]$$

来求解, 如  $\int e^x \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) dx = e^x \ln x + C$ . 因此

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx &= \int \frac{e^x(x+1)}{xe^x(1+xe^x)} dx = \int \frac{dxe^x}{xe^x(1+xe^x)} \\ &= \int \left( \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{1+xe^x} \right) d(xe^x) \\ &= \ln |xe^x| - \ln |1+xe^x| + C \\ &= x + \ln \frac{x}{1+xe^x} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx &= \int e^x \left( \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} \right) dx \\ &= e^x \frac{\sin x}{1+\cos x} + C.\end{aligned}$$

这里用了一个简单的公式: 若  $v(x) = xu'(x)$ , 则有

$$\int [u(x) + v(x)] dx = xu(x) + C,$$

故由  $\frac{1}{1+\cos x} = \left( \frac{\sin x}{1+\cos x} \right)'$ , 再依题(1) 即得上面结果.

$$(3) \int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(x+1)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) [\ln(1+x) - \ln x] dx \\
&= - \int [\ln(1+x) - \ln x] d[\ln(1+x) - \ln x] \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]^2 + C.
\end{aligned}$$

**例 13** 计算下列不定积分:

(1) 已知  $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ , 求  $\int f(x) dx$ ;

(2) 已知  $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$ , 求  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ .

**解** 先求出  $f(x)$ , 再计算积分.

(1) 设  $\ln x = t$ , 则  $x = e^t$ ,  $f(t) = [\ln(1+e^t)]/e^t$ , 故

$$\begin{aligned}
\int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = - \int \ln(1+e^x) de^{-x} \\
&= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{dx}{1+e^x} \\
&= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \left( 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx \\
&= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C.
\end{aligned}$$

(2) 设  $t = \sin^2 x$ , 则  $\sin x = \sqrt{t}$ ,  $x = \arcsin \sqrt{t}$ ,  $f(t) = \frac{\arcsin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ,

$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ , 故

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx \\
&= \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = - \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d(1-x) \\
&= -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x}
\end{aligned}$$



$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

例 14 计算下列不定积分:

$$(1) \int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx; \quad (2) \int \frac{x^2 dx}{(x\sin x + \cos x)^2}.$$

解 本例的特点是分母均为某函数  $\varphi(x)$  的平方式, 故可设法将分子化为  $\varphi'(x)$ , 与  $dx$  凑成  $d\varphi(x)$ , 再去分母, 用分部积分法求出.

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx &= \int \frac{(x-\ln x) - (x-1)}{(x-\ln x)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x-\ln x} - \int \frac{x}{(x-\ln x)^2} d(x-\ln x) \\ &= \int \frac{dx}{x-\ln x} - \int x d\left(\frac{-1}{x-\ln x}\right) \\ &= \int \frac{dx}{x-\ln x} - x \frac{-1}{x-\ln x} - \int \frac{dx}{x-\ln x} \\ &= \frac{x}{x-\ln x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{x^2 dx}{(x\sin x + \cos x)^2} &= \int \frac{x}{\cos x} \frac{x\cos x dx}{(x\sin x + \cos x)^2} \\ &= \int \frac{x}{\cos x} \frac{d(x\sin x + \cos x)}{(x\sin x + \cos x)^2} = - \int \frac{x}{\cos x} d \frac{1}{x\cos x + \cos x} \\ &= - \frac{x}{\cos x} \frac{1}{x\sin x + \cos x} + \int \frac{(\cos x + x\sin x) dx}{(x\sin x + \cos x) \cos^2 x} \\ &= - \frac{x}{\cos x} \frac{1}{x\sin x + \cos x} + \tan x + C. \end{aligned}$$

例 15 已知  $\frac{\sin x}{x}$  是  $f(x)$  的原函数, 求  $\int x f'(x) dx$ .

解  $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ , 故

$$\begin{aligned}\int x f'(x) dx &= \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} + C \\ &= \cos x - 2 \frac{\sin x}{x} + C.\end{aligned}$$

例 16 设  $f'(\sin^2 x) = \tan^2 x$ , 求  $f(x)$ .

解 令  $u = \sin^2 x$ , 则  $\tan^2 x = \frac{u}{1-u}$ , 故

$$\begin{aligned}f(u) &= \int f'(u) du = \int \frac{u}{1-u} du = \int \left(\frac{1}{1-u} - 1\right) du \\ &= -\ln(1-u) - u + C,\end{aligned}$$

即  $f(x) = -\ln(1-x) - x + C$ .

例 17 已知  $F(x) = f(x) - 1/f(x)$ ,  $G(x) = f(x) + 1/f(x)$ , 若  $F'(x) = [G(x)]^2$ , 且  $f(\pi/4) = 1$ , 求  $f(x)$ .

解 由题设知

$$F'(x) = f'(x) + [f'(x)]^2 / f^2(x) = f'(x)[1 + 1/f^2(x)],$$

$$\begin{aligned}\text{又 } F'(x) &= [G(x)]^2 = f^2(x) + 2 + 1/f^2(x) \\ &= [1 + 1/f^2(x)][1 + f^2(x)],\end{aligned}$$

$$\text{故 } f'(x) = 1 + f^2(x) \Rightarrow f'(x)/[1 + f^2(x)] = 1,$$

$$\text{即 } \int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = \int 1 dx.$$

$$\text{因此 } \int \frac{df(x)}{1 + f^2(x)} = \arctan f(x) = x + C,$$

将  $f(\pi/4) = 1$  代入上式, 得

$$\pi/4 = \pi/4 + C \Rightarrow C = 0.$$

于是, 由  $\arctan f(x) = x$ , 得

$$f(x) = \tan x.$$

例 18 利用  $\int x f''(x) dx$  的结果计算积分  $\int x \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$ .



$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x f''(x) dx &= \int x df'(x) = x f'(x) - \int f'(x) dx \\ &= x f'(x) - f(x) + C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故} \quad \int x \left( \frac{\sin x}{x} \right)' dx &= x \left( \frac{\sin x}{x} \right)' - \frac{\sin x}{x} + C \\ &= \frac{x \cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C \\ &= \cos x - \frac{2 \sin x}{x} + C.\end{aligned}$$

**例 19** 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1], \\ x, & x \in (1, 2], \end{cases}$  求  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $[0, 2]$  上的表达式, 并讨论  $\Phi(x)$  在  $[0, 2]$  上的连续性.

**解** 当  $x \in [0, 1]$  时,

$$\Phi(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3};$$

当  $x \in (1, 2]$  时,

$$\Phi(x) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^x x dx = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{即} \quad \Phi(x) = \begin{cases} x^3/3, & x \in [0, 1], \\ -1/6 + x^2/2, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

显然,  $\Phi(x)$  在各段上连续, 又

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \Phi(x) = \frac{1}{3} = \Phi(1), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \Phi(x) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

所以  $\Phi(x)$  在  $x = 1$  处连续, 即  $\Phi(x)$  在  $[0, 2]$  上连续.

**例 20** 已知  $\int_0^x f(t) dt = x f(\theta x)$ , 求  $\theta$ .

$$(1) f(t) = t^n \quad (n > -1); \quad (2) f(t) = \ln t.$$

**解** (1) 因为  $\int_0^x t^n dt = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ , 所以

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} = x^{n+1} \theta^n \Rightarrow \theta = \sqrt[n]{1+(n+1)}.$$

(2) 因为  $\int_0^x \ln t dt = x(\ln x - 1)$ , 所以

$$x(\ln x - 1) = x \ln \theta x \Rightarrow \theta = 1/e.$$

在定积分计算中, 如能记住一些常用公式, 会给计算带来很多方便. 常用公式有:

$$\textcircled{1} \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

$$\textcircled{3} \int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x) dx,$$

$$\textcircled{4} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx,$$

$$\textcircled{6} \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^a [f(x) + f(a-x)] dx,$$

$$\textcircled{7} \int_0^a f(x) dx = \int_0^{a/2} [f(x) + f(a-x)] dx.$$

**例 21** 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$(2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 - e^{-x}} dx;$$

$$(3) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx;$$

$$(4) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx;$$

$$(5) \int_0^{\pi} \ln \sin x dx;$$

$$(6) \int_0^{\pi} x \sin^n x dx;$$

$$(7) \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx; \quad (8) \int_a^b x |x| dx (a < b).$$

**解** 利用上述常用公式进行计算.

$$(1) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} \xrightarrow{x = a \sin t} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$$



$$\text{公式 ③} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt,$$

故

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t + \sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 - e^{-x}} dx &\stackrel{\text{公式 ⑤}}{=} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos^2 x}{1 - e^x} + \frac{\cos^2 x}{1 - e^{-x}} \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{8}(\pi + 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &\stackrel{\text{公式 ①}}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \arctan \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx &\stackrel{\text{公式 ③}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_0^{\pi} \ln \sin x dx &\stackrel{\text{公式 ②}}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (\ln \sin x + \ln \cos x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

移项,得

$$\int_0^{\pi} \ln \sin x dx = -\pi \ln 2,$$

同时得

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$(6) \int_0^{\pi} x \sin^n x dx \stackrel{\text{公式 ①}}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^n x dx \stackrel{\text{公式 ②}}{=} \pi \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

$$\stackrel{\text{公式 ④}}{=} \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \pi, & m \text{ 为正奇数,} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi^2}{2}, & m \text{ 为正偶数.} \end{cases}$$

$$(7) \int_0^{\pi} \sin^{n+1} x \cos(n-1)x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x (\cos nx \cos x - \sin nx \sin x) dx \\
&= \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos nx \cos x dx - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx \\
&= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx d \sin^n x - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx \\
&= \frac{1}{n} \cos nx \sin^n x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(8) 对上、下限进行如下讨论:

当  $a < 0, b < 0$  时,

$$\int_a^b x |x| dx = \int_a^b (-x^2) dx = \frac{1}{3} (a^3 - b^3);$$

当  $a < 0, b > 0$  时,

$$\int_a^b x |x| dx = \int_a^0 (-x^2) dx + \int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} (a^3 + b^3);$$

当  $b > a > 0$  时,

$$\int_a^b x |x| dx = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3).$$

• 例 22 证明:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2^m} \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx \quad (m \in \mathbb{N}_+).$$

$$\text{证 原式} = \frac{1}{2^m} \int_0^{\pi/2} (\sin 2x)^m dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int_0^{\pi} \sin^m t dt$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \left( \int_0^{\pi/2} \sin^m t dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^m t dt \right).$$

$$\text{而} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^m t dt \xrightarrow{\text{公式④}} \int_0^{\pi/2} \cos^m t dt,$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^m x dx = - \int_0^{\pi/2} \cos^m u du = \int_{-\pi/2}^0 \cos^m u du = \int_0^{\pi/2} \cos^m u du,$$

$$\text{所以} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2^m} \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx.$$



• 例 23 计算  $\int_0^m \sqrt{1 - \sin 2x} dx$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ).

解 因为  $\sqrt{1 - \sin 2x}$  是周期  $T = \pi$  的函数, 所以

$$\begin{aligned} & \int_0^m \sqrt{1 - \sin 2x} dx \\ &= n \int_0^\pi \sqrt{1 - \sin 2x} dx = n \int_0^\pi |\sin x - \cos x| dx \\ &= n \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + n \int_{\pi/4}^\pi (\sin x - \cos x) dx \\ &= n(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} + n(-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^\pi \\ &= 2\sqrt{2}n. \end{aligned}$$

• 例 24 计算  $\int_0^{10\pi} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx$ .

解 被积函数是  $T = 2\pi$  的周期函数, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^{10\pi} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx \\ &= 5 \int_{-\pi}^\pi \left( \frac{\sin^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} + \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} \right) dx \\ &\stackrel{\text{奇偶性}}{=} 10 \int_0^\pi \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx \\ &= 10 \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx + \int_{\pi/2}^\pi \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \int_{\pi/2}^\pi \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} dx &\stackrel{u = \pi/2 - x}{=} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 u}{2\cos^2 u + \sin^4 u} du \\ &= - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x + \sin^4 x} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 原式} &= 10 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x + \cos^4 x} - \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x + \sin^4 x} \right) dx \\ &\stackrel{\text{公式 ②}}{=} 0. \end{aligned}$$

• 例 25 计算  $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx (n \in \mathbf{N}_+)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x |\sin x| dx \\
 &= \frac{x = (k-1)\pi + u}{k=1} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi [(k-1)\pi + u] |\sin[(k-1)\pi + u]| du \\
 &= \int_0^\pi \left[ \sum_{k=1}^n (k-1)\pi + nu \right] |\sin u| du \\
 &= \frac{n}{2} (n-1)\pi \int_0^\pi \sin u du + n \int_0^\pi u \sin u du \\
 &= n(n-1)\pi + n \left[ -u \cos u \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos u du \right] \\
 &= n(n-1)\pi + n\pi = n^2 \pi.
 \end{aligned}$$

• 例 26 计算  $\int_{1/2}^2 (1+x-1/x) e^{x+1/x} dx$ .

解 因为

$$\begin{aligned}
 \int_{1/2}^2 e^{x+1/x} dx &= x e^{x+1/x} \Big|_{1/2}^2 - \int_{1/2}^2 x(1-1/x^2) e^{x+1/x} dx \\
 &= \frac{3}{2} e^{5/2} - \int_{1/2}^2 (x-1/x) e^{x+1/x} dx,
 \end{aligned}$$

$$\text{移项即得} \quad \int_{1/2}^2 (1+x-1/x) e^{x+1/x} dx = \frac{3}{2} e^{5/2}.$$

• 例 27 计算  $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx \\
 &= \int \frac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \\
 &= \int \frac{e^x}{1+x} dx + \frac{e^x}{1+x} - \int \frac{e^x}{1+x} dx = \frac{e^x}{1+x} + C.
 \end{aligned}$$



例 28 计算  $\int_0^1 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$ .

解 令  $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$ , 则

$$\sin t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}, \quad \sin^2 t = \frac{x}{1+x}, \quad \cos^2 t = \frac{1}{1+x}, \quad x = \tan^2 t,$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_0^1 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx &= \int_0^{\pi/4} t d \tan^2 t = t \tan^2 t \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^2 t dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} (\sec^2 t - 1) dt = \frac{\pi}{4} - (\tan t - t) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

例 29 求  $f(t) = \int_0^1 |x-t| dx$  在  $0 \leq t \leq 1$  上的最大值和最小值.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(t) &= \int_0^t (t-x) dx + \int_t^1 (x-t) dx = t^2 - t + \frac{1}{2}, \\ f'(t) &= 2t - 1. \end{aligned}$$

令  $f'(t) = 0$ , 解得驻点  $t = 1/2$ . 比较

$$f(0) = 1/2, \quad f(1/2) = 1/4, \quad f(1) = 1/2,$$

得最大值  $f(0) = f(1) = 1/2$ , 最小值  $f(1/2) = 1/4$ .

例 30 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{证 记 } I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

所以  $I_n$  单调减少且非负, 故

$$I_{2n} I_{2n+1} \leq I_{2n}^2 \leq I_{2n} I_{2n-1},$$

$$\text{即 } \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\leq \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \right]^2 \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2},$$

从而推出

$$\frac{1}{2n+1} \frac{2}{\pi} \leq \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \leq \frac{1}{2n} \frac{2}{\pi} \left( \text{颠倒后乘以} \frac{1}{2n+1} \right),$$

得 
$$\frac{2n}{2n+1} \frac{\pi}{2} \leq \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}.$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ , 所以依夹逼原理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

**例 31** 设  $f(x) = x - [x]$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx$ .

**解** 设  $n \leq x < n+1$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx &= \frac{1}{x} \left\{ \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x-1) dx + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \int_{n-1}^n [x-(n-1)] dx + \int_n^x (x-n) dx \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (x-n)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2x} [n + (x-n)^2]. \end{aligned}$$

而 
$$\frac{1}{2(n+1)} (n+0) \leq \frac{1}{2x} [n + (x-n)^2] \leq \frac{1}{2n} (n+1),$$

且 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2},$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx.$$

**例 32** 设函数  $f(x)$  在  $(-L, L)$  内连续, 在  $x=0$  处可导, 且  $f'(0) \neq 0$ . 证明:

对任意给定的  $0 < x < L$ , 存在  $0 < \theta < 1$ , 使得

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)],$$



并求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$ .

$$\text{证 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt,$$

则  $F(x)$  在  $[0, x]$  可微, 且  $F(0) = 0$ , 依 Lagrange 中值定理, 存在  $0 < \theta < 1$ , 使得

$$F(x) = F(x) - F(0) = F'(\theta x)x,$$

$$\text{即 } \int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)].$$

由上式得

$$\frac{\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt}{x^2} = \frac{f(\theta x) - f(0)}{x} - \frac{f(-\theta x) - f(0)}{x}.$$

令  $x \rightarrow 0^+$ , 等式两边取极限, 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt}{x^2} \\ & \stackrel{\text{L'}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(x) - f(0)}{2x} + \frac{f(-x) - f(0)}{-2x} \right] \\ & = \frac{1}{2} [f'(0) + f'(0)] = f'(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(\theta x) - f(0)}{x} - \frac{f(-\theta x) - f(0)}{x} \right] \\ & = f'(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta + f'(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = 2f'(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f'(0) = 2f'(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = \frac{1}{2}.$$

**例 33** 设  $f(t) > 0$ , 且在  $\mathbf{R}$  上连续,  $f(-t) = f(t)$ , 设

$$g(x) = \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt, \quad -a \leq x \leq a, a > 0.$$

(1) 证明  $g'(x)$  严格单调增加;

(2) 求出  $g(x)$  的最小值点;

(3) 当  $g(x)$  的最小值为  $f(a) - a^2 - 1$  时, 求  $f(t)$ .

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-a}^x (x-t)f(t)dt + \int_x^a (t-x)f(t)dt \\ &= x \int_{-a}^x f(t)dt - \int_{-a}^x tf(t)dt + \int_x^a tf(t)dt - x \int_x^a f(t)dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{-a}^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) - xf(x) \\ &\quad - \int_x^a f(t)dt + xf(x) \end{aligned}$$

$$= \int_{-a}^x f(t)dt - \int_x^a f(t)dt,$$

$$g''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) > 0,$$

所以  $g'(x)$  严格单调增加.

$$\begin{aligned} (2) g'(x) &= \int_{-a}^x f(t)dt - \int_{-x}^a f(-t)d(-t) \\ &= \int_{-a}^x f(t)dt + \int_{-x}^a f(t)dt = \int_{-x}^x f(t)dt, \end{aligned}$$

令  $g'(x) = 0$ , 则因为  $f(t) > 0$ , 所以只有驻点  $x = 0$ . 又  $g'(x)$  单调增加, 故当  $x < 0$  时  $g'(x) < 0$ , 当  $x > 0$  时  $g'(x) > 0$ , 从而  $x = 0$  是  $g(x)$  的极小值点, 也是最小值点.

(3) 最小值为

$$g(0) = - \int_{-a}^0 tf(t)dt + \int_0^a tf(t)dt = 2 \int_0^a tf(t)dt = f(a) - a^2 - 1.$$

上式对  $a$  求导, 得

$$2af(a) = f'(a) - 2a,$$

$$\text{即 } \frac{df(a)}{f(a)+1} = 2ada \Rightarrow \ln[f(a)+1] = a^2 + C.$$

由  $g(0) = f(a) - a^2 - 1$ , 当  $a = 0$  时,  $0 = f(0) - 1 \Rightarrow f(0) = 1$ , 故  $C = \ln 2$ , 此时  $f(a) + 1 = e^{a^2 + \ln 2}$ , 得

$$f(t) = 2e^{t^2} - 1.$$



例 34 设函数  $f(x)$  为连续函数,  $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$  (常数), 求  $\varphi'(x)$ , 并讨论  $\varphi'(x)$  在  $x=0$  处的连续性.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ , 所以

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \varphi(0) = \int_0^1 f(0) dt = 0.$$

令  $u = xt$ , 则

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \quad (x \neq 0),$$

故 
$$\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \quad (x \neq 0),$$

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

因为 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) dx}{x^2} \\ &= A - A/2 = A/2 = \varphi'(0), \end{aligned}$$

所以  $\varphi'(x)$  在  $x=0$  处连续.

例 35 设  $f(x)$  在  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) 上有二阶连续导数,  $f(0) = 0$ , 证明: 在  $[-a, a]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$a^3 f''(\xi) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

证 由  $f(x)$  的 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a \left[ f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2 \right] dx \\
 &= \int_{-a}^a f'(0)x dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx.
 \end{aligned}$$

因为  $f''(x)$  在  $[-a, a]$  上连续, 所以  $f''(x)$  在  $[-a, a]$  上必有最小值  $m$  和最大值  $M$ , 故

$$\begin{aligned}
 m \int_{-a}^a x^2 dx &\leq \int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx \leq M \int_{-a}^a x^2 dx, \\
 \text{即 } m &\leq \frac{\int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx}{\int_{-a}^a x^2 dx} = \frac{3 \int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx}{2a^3} \leq M.
 \end{aligned}$$

由连续函数的介值定理, 存在  $\xi \in [-a, a]$ , 使得

$$f''(\xi) = \frac{3 \int_{-a}^a f''(\xi_1)x^2 dx}{2a^3} = \frac{3 \times 2 \int_{-a}^a f(x) dx}{2a^3},$$

$$\text{即 } a^3 f''(\xi) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

**例 36** 已知  $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$ , 且  $f(\pi) = 2$ , 求  $f(0)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } 5 &= \int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx \\
 &= \int_0^\pi f(x) \sin x dx + \int_0^\pi \sin x df'(x) \\
 &= \int_0^\pi f(x) \sin x dx + \sin x f'(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\
 &= \int_0^\pi f(x) \sin x dx - f(x) \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x) \sin x dx \\
 &= f(\pi) + f(0),
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f(0) = 5 - f(\pi) = 3.$$



## 疑难解析

定积分的物理应用要注意哪些问题?

答 用定积分的微元法求解应用问题的关键是确定自变量,建立函数,求出变化区间.在物理应用中,更基本的是建立一个恰当的坐标系,使自变量、函数易于确定且比较简单,使积分容易计算.这要求我们对物理概念有充分了解,能很好利用物理概念.如计算水压力问题,由物理概念知压强与水的深度有关,所以取水平面为  $y$  轴,  $x$  轴竖直向下,使符合  $x$  增大压强增大的原则,然后通过区间、受压面积确定  $\Delta F = p dA$ ,写出积分表达式

$$F = \int_a^b dF = \int_a^b p dA = \int_a^b f(x) dx.$$

## 典型例题与习题详解

用定积分求平面图形面积,必须画出草图,借助图形来确定被积函数与积分区间,观察对哪个变量积分可以少分区域,使被积函数简单,积分易于计算.

• 例 1 求下列曲线所围平面图形面积:

(1) 曲线  $y=9-x^2$ ,  $y=x^2$  与直线  $x=0$ ,  $x=1$ ;

(2) 抛物线  $y=x^2/4$  与直线  $3x-2y-4=0$ ;

(3) 曲线  $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$  ( $a>0$ ) 与坐标轴;

(4) 曲线  $y=e^x$ ,  $y=e^{2x}$  与直线  $y=2$ ;

(5) 曲线  $y=x(x-1)(x-2)$  与直线  $y=3(x-1)$ ;

(6) 闭曲线  $y^2=x^2-x^4$ ;

(7) 双纽线  $\rho^2=4\sin 2\theta$ ;

(8) 双纽线  $\rho^2=2\cos 2\theta$  与圆  $\rho=1$  围成图形的公共部分;

(9) 摆线  $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$  的一拱 ( $0\leq t\leq 2\pi$ ) 与  $x$  轴;

(10) 星形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  外, 圆  $x^2 + y^2 = a^2$  内的部分.

解 (1) 如图 3.4.1 所示, 所求图形面积

$$A = \int_0^1 [(9-x^2) - x^2] dx = \int_0^1 (9-2x^2) dx = \left( 9x - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{25}{3}.$$

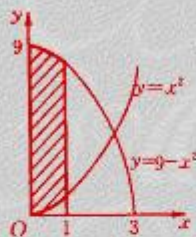


图 3.4.1

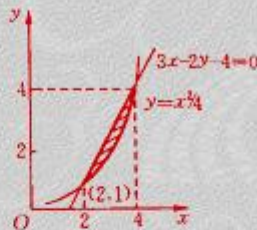


图 3.4.2

(2) 如图 3.4.2 所示, 交点为  $(2, 1)$ ,  $(4, 4)$ , 故所求图形面积

$$A = \int_2^4 \left[ \left( \frac{3}{2}x - 2 \right) - x^{3/4} \right] dx = \left( -\frac{x^3}{12} + \frac{3}{4}x^2 - 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{1}{3}.$$

(3) 如图 3.4.3 所示, 交点为  $(0, a)$ ,  $(a, 0)$ , 故所求图形面积

$$A = \int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = \left( ax + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{a}x^{3/2} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2}{6}.$$

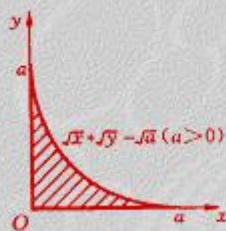


图 3.4.3

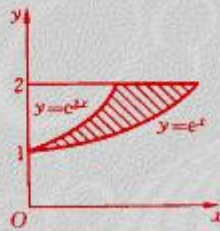


图 3.4.4

(4) 如图 3.4.4 所示, 若选择对  $x$  积分, 则要在区间  $[0, e^{\frac{1}{2}\ln 2}]$ ,  $[e^{\frac{1}{2}\ln 2}, e^{\ln 2}]$  上分别积分. 故选择对  $y$  积分, 则  $x = \ln y$ ,  $x = \frac{1}{2}\ln y$ , 故



所求图形面积

$$A = \int_1^2 (\ln y - \frac{1}{2} \ln y) dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln y dy = \frac{1}{2} (y \ln y - y) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1).$$

(5) 如图 3.4.5 所示. 曲线与直线交点为  $(-1, -6)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(1, 0)$ , 故所求图形面积

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 [x(x-1)(x-2) - 3(x-1)] dx \\ &\quad + \int_1^3 [3(x-1) - x(x-1)(x-2)] dx \\ &= \int_{-1}^1 (x-1)(x^2-2x-3) dx \\ &\quad + \int_1^3 (x-1)(3-x^2+2x) dx = 8. \end{aligned}$$

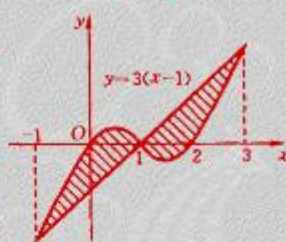


图 3.4.5

(6) 如图 3.4.6 所示. 化为极坐标方程为

$$r^2 \cos^4 \theta = \cos 2\theta,$$

即  $r^2 = \cos 2\theta / \cos^4 \theta$

是双纽线. 由图形的对称性知, 所求图形面积

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \frac{\cos 2\theta}{\cos^4 \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} (1 - \tan^2 \theta) d \tan \theta \\ &= 2 [\tan \theta - (\tan^3 \theta) / 3] \Big|_0^{\pi/4} = 4/3. \end{aligned}$$

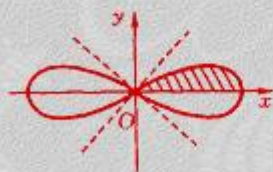


图 3.4.6

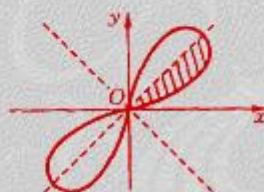


图 3.4.7

(7) 如图 3.4.7 所示. 由图形的对称性知, 所求图形面积

$$A = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} 4 \sin 2\theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/4} \sin 2\theta d\theta = -4 \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 4.$$

(8) 如图 3.4.8 所示. 由图形知, 点  $P$  的坐标为  $r=1, \theta=\pi/6$ .  
利用对称性知, 所求图形面积

$$\begin{aligned} A &= 4 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} 1^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/4} 2 \cos 2\theta d\theta \right] \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{6} + \sin 2\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} \right) = 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

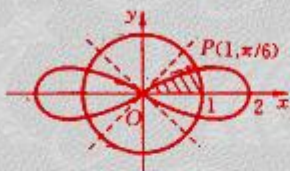


图 3.4.8

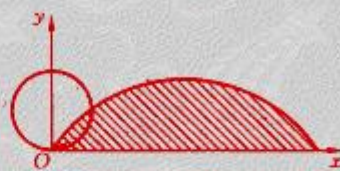


图 3.4.9

(9) 如图 3.4.9 所示, 所求图形面积

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left( 1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= a^2 \left( \frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

(10) 如图 3.4.10 所示. 由图形的对称性知, 所求图形面积

$$\begin{aligned} A &= \pi a^2 - 4 \int_{\pi/2}^0 a \sin^3 t \cdot a 3 \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= \pi a^2 - 12a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^4 t dt \\ &= \pi a^2 - 12a^2 \left( \frac{3}{4 \times 2 \cdot 2} \frac{\pi}{2} - \frac{5 \times 3}{6 \times 4 \times 2 \cdot 2} \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi a^2 - 3\pi a^2 / 8 = 5\pi a^2 / 8. \end{aligned}$$

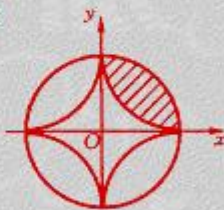


图 3.4.10

本题要注意的是, 当点由  $(0, 1) \rightarrow (1, 0)$  时,  $t$  是从  $\pi/2 \rightarrow 0$ , 不要误解为  $t$  从  $0 \rightarrow \pi/2$ .

• 例 2 求下列各曲线所围成的图形按指定轴旋转所产生旋转体的体积:



(1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 分别绕  $x$  轴与  $y$  轴;

(2)  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 与  $x$  轴所围成图形分别绕  $x$  轴、 $y$  轴与直线  $y=1$ ;

(3)  $x^2 + y^2 = a^2$  绕直线  $x=-b$  ( $b>a>0$ );

(4) 心形线  $\rho=4(1+\cos\theta)$ , 射线  $\theta=0$  及  $\theta=\pi/2$  绕极轴;

(5) 摆线  $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$  的一拱 ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) 与  $x$  轴, 绕  $y$  轴.

解 (1)  $x^2 = a^2(1 - y^2/b^2)$ ,  $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$ , 则图形绕  $x$  轴旋转所产生的旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \times 2 \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{2\pi b^2}{a^2} \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4\pi a b^2}{3}; \end{aligned}$$

图形绕  $y$  轴旋转所产生的旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-b}^b x^2 dy = \pi \frac{a^2}{b^2} \times 2 \int_0^b (b^2 - y^2) dy \\ &= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left( b^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b = \frac{4\pi a^2 b}{3}. \end{aligned}$$

(2) 绕  $x$  轴所得旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}; \end{aligned}$$

绕  $y$  轴所得旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi (\pi - \arcsin y)^2 dy - \int_0^1 \pi \arcsin^2 y dy = \pi^2 \int_0^1 (\pi - 2\arcsin y)^2 dy \\ &= \pi^3 - 2\pi^2 (y \arcsin y - \sqrt{1-y^2}) \Big|_0^1 = 2\pi^2. \end{aligned}$$

本题也可以用另一公式求解, 过程如下:

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2\pi \int_0^{\pi} x d(-\cos x) \\
 &= 2\pi \left( -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = 2\pi^2,
 \end{aligned}$$

绕  $y=1$  所得的旋转体体积相当于两个旋转体体积的差,即

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\pi} [1^2 - (1 - \sin x)^2] dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin^2 x) dx \\
 &= \pi \left( -2\cos x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} \\
 &= 4\pi - \pi^2/2.
 \end{aligned}$$

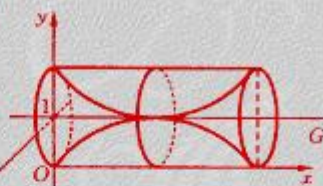


图 3.4.11

(3)如图 3.4.12 所示, 旋转体体积可表示为两个旋转体的体积差, 即两条曲线  $x = \sqrt{a^2 - y^2} + b$  与  $x = \sqrt{a^2 - y^2} - b$  绕直线  $x = -b$  旋转所得旋转体的体积之差, 所以

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-a}^a \pi [(\sqrt{a^2 - y^2} + b)^2 - (\sqrt{a^2 - y^2} - b)^2] dy \\
 &= 4\pi b \times 2 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = 8\pi b \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t dt \\
 &= 8\pi a^2 b \frac{\pi}{4} = 2\pi^2 a^2 b.
 \end{aligned}$$

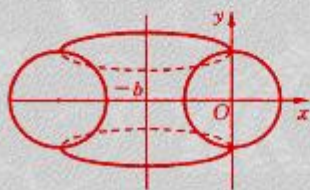


图 3.4.12

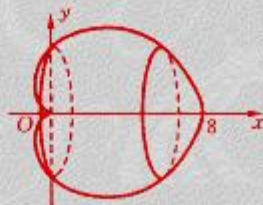


图 3.4.13

(4)如图 3.4.13 所示, 所求立体体积



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^8 y^2 dx = \pi \int_{\pi/2}^0 [4(1+\cos\theta)\sin\theta]^2 d[4(1+\cos\theta)\cos\theta] \\
 &= 64\pi \int_0^{\pi/2} (1+\cos\theta)^2 \sin^2\theta (\sin\theta + \sin 2\theta) d\theta \\
 &= 64\pi \left( \frac{1}{3} \cos^3\theta + \cos^2\theta + \frac{1}{2} \cos^4\theta - \frac{4}{3} \cos^3\theta - 2\cos^2\theta - \cos\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= 64\pi \times 5/2 = 160\pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) V &= \int_0^{2\pi} 2\pi xy dx = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) a^2 (1 - \cos t)^2 dt \\
 &= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \left[ 1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \right] dt \\
 &= 2\pi a^3 \left[ \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{2} \cos t - 2t \sin t + \sin^2 t + \frac{1}{4} t \sin 2t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{8} \cos 2t + \frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{1}{2} \cos t \right] \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 6\pi^3 a^3.
 \end{aligned}$$

• 例 3 立体底面为抛物线  $y=x^2$  与直线  $y=1$  围成的图形, 而任一垂直于  $y$  轴的截面分别是: (1) 正方形; (2) 等边三角形; (3) 半圆形. 求各种情形下立体的体积.

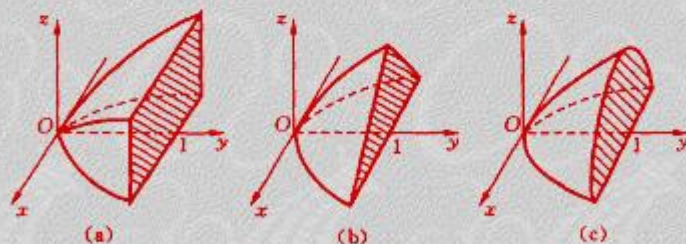


图 3.4.14

解 (1) 截面是正方形 (见图 3.4.14(a)), 截面积  $A(y) = (2\sqrt{y})^2 = 4y$ , 故立体体积

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 4y dy = 2.$$

(2) 截面是正三角形(见图 3.4.14(b)), 截面积  $A(y) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{y})^2 = \sqrt{3}y$ , 故立体体积

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 \sqrt{3}y dy = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 截面是半圆形(见图 3.4.14(c)), 截面积  $A(y) = \frac{\pi}{2}(\sqrt{y})^2 = \frac{\pi}{2}y$ , 故立体体积

$$V = \int_0^1 A(y) dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2}y dy = \frac{\pi}{4}.$$

• 例 4 两质点的质量分别为  $M$  和  $m$ , 相距为  $a$ , 现将质点沿两质点连线向外移动距离  $l$ , 求克服引力所作的功.

解 选坐标系如图 3.4.15 所示. 依万有引力定律, 相距为  $x$  的两质量为  $M$  与  $m$  的两质点间的引力

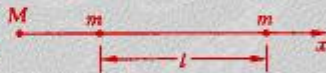


图 3.4.15

$$F = k \frac{mM}{x^2} \quad (k \text{ 是引力常数}),$$

则质点  $m$  由  $x$  移动到  $x+dx$  时克服引力所作的功

$$dW = Fdx = k \frac{mM}{x^2} dx,$$

从而移动距离  $l$  时克服引力所作的功

$$\begin{aligned} W &= \int_a^{a+l} dW = \int_a^{a+l} k \frac{mM}{x^2} dx \\ &= -kMm/x \Big|_a^{a+l} = kMm \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right). \end{aligned}$$

• 例 5 有一直角三角形板, 其直角顶点到斜边的高为  $h$ , 将其竖直放入水中.



- (1) 如果直角顶点在水面, 斜边在水下且与水面平行;  
 (2) 如果斜边与水面相齐, 分别求出这两种情况下该板一侧所受到的水压力.

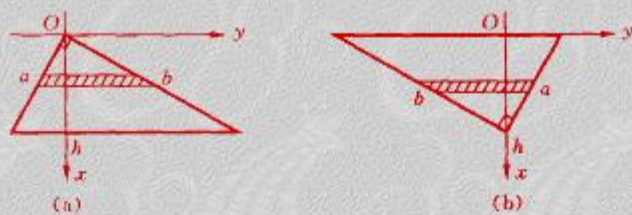


图 3.4.16

解 (1) 如图 3.4.16(a) 所示, 设在  $x$  轴上取点  $x$  时, 对应的直角三角斜边长为  $y$ , 则

$$x/h = y/\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow y = x\sqrt{a^2+b^2}/h.$$

故水压力微元

$$dF = xg \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{h} dx = gx^2 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{h} dx,$$

从而所求水压力

$$F = \int_0^h dF = \int_0^h gx^2 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{h} dx = \frac{1}{3} gh^2 \sqrt{a^2+b^2}.$$

(2) 如图 3.4.16(b) 所示, 在  $x$  轴上取点  $x$  时, 对应的直角三角形斜边长为  $y$ , 则  $(h-x)/h = y/\sqrt{a^2+b^2}$ , 故水压力微元

$$dF = xg \frac{\sqrt{a^2+b^2}(h-x)}{h} dx,$$

从而所求水压力

$$F = \int_0^h dF = \int_0^h xg \frac{(h-x)\sqrt{a^2+b^2}}{h} dx = \frac{1}{6} gh^2 \sqrt{a^2+b^2}.$$

• 例 6 有一椭圆板, 长、短半轴分别为  $a$  与  $b$ , 将其竖直放入

水中,且长为  $2a$  的轴与水面平行.

(1) 如果水面刚好淹没该板的一半,

(2) 如果水面刚好淹没该板,

分别求两种情况下该板一侧受到的水压力.

解 (1) 取坐标系如图 3.4.17(a) 所示. 椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

故水压力微元

$$dF = p(y)dA = g(-y)2xdy = -2g \frac{a}{b} y \sqrt{b^2 - y^2} dy,$$

从而所求水压力

$$\begin{aligned} F &= \int_{-a}^0 dF = -2 \int_{-a}^0 g \frac{a}{b} y \sqrt{b^2 - y^2} dy \\ &= \frac{2}{3} g \frac{a}{b} (b^2 - y^2)^{3/2} \Big|_{-a}^0 = \frac{2}{3} g a b^2. \end{aligned}$$

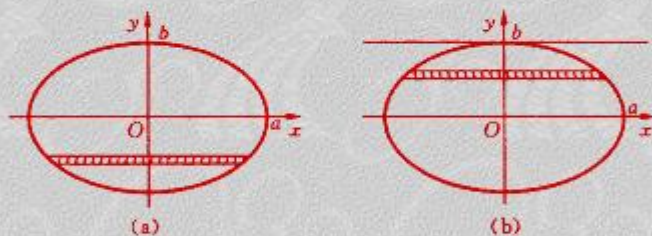


图 3.4.17

(2) 取坐标系如图 3.4.17(b) 所示. 椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

故水压力微元

$$dF = g(b-y)2xdy = \frac{2ga}{b}(b-y)\sqrt{b^2 - y^2} dy,$$

从而所求水压力

$$F = \int_{-a}^a dF = \int_{-a}^a \frac{2ga}{b}(b-y)\sqrt{b^2 - y^2} dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2ga}{b} \left( \int_{-b}^b b \sqrt{b^2 - y^2} dy - \int_{-b}^b y \sqrt{b^2 - y^2} dy \right) \\
 &= 4ga \int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} dy = \pi g a b^2.
 \end{aligned}$$

• 例 7 以下各种容器中均装满水, 分别求把各种容器中的水全部从容器口抽出克服重力所作的功.

- (1) 容器为圆柱形, 高为  $H$ , 底半径为  $R$ ;
- (2) 容器为圆锥形, 高为  $H$ , 底半径为  $R$ ;
- (3) 容器为圆台形, 高为  $H$ , 上底半径为  $R$ , 下底半径为  $r$ , 且  $R > r$ ;
- (4) 容器为抛物线  $y = x^2$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 的弧段绕  $y$  轴旋转所产生的旋转面.

解 (1) 取坐标系如图 3.4.18(a) 所示, 则柱体中位于  $[z, z + \Delta z]$  一段的水的重量为  $g\pi R^2 \Delta z$ , 从而抽取这一段水所作功的微元  $dW = g\pi R^2 (H - z) dz$ , 于是, 全部功

$$W = \int_0^H dW = \pi g R^2 \int_0^H (H - z) dz = \frac{1}{2} \pi g R^2 H^2.$$

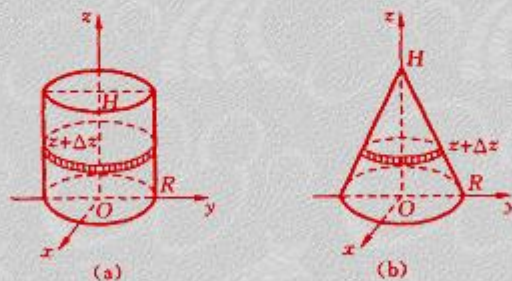


图 3.4.18

(2) 取坐标系如图 3.4.18(b) 所示, 则水高为  $z$  处锥体截面半径  $r$  由  $(H - z)/H = r/R$  求出, 得  $r = R(H - z)/H$ . 从而, 抽取锥体中位于  $[z, z + \Delta z]$  一段水所作功的微元

$$dW = g \cdot \frac{\pi}{3} \left[ \frac{R}{H} (H - z) \right]^2 (H - z) dz = \frac{\pi g R^2}{3H^2} (H - z)^3 dz,$$

于是,全部功

$$\begin{aligned} W &= \int_0^H \frac{\pi g R^2}{3H^2} (H-z)^3 dz = -\frac{\pi g R^2}{3H^2} \int_0^H (H-z)^3 d(H-z) \\ &= -\frac{\pi g R^2}{3H^2} \cdot \frac{1}{4} (H-z)^4 \Big|_0^H = \frac{\pi g R^2}{12} H^2. \end{aligned}$$

(3)取坐标系如图 3.4.19(a)所示,则水高为  $z$  处圆台截面的半径  $r'$  由  $(x-r)/(R-r)=z/H$  得出,  $r'=(R-r)z/H+r$ , 从而,抽取圆台体中位于  $[z, z+\Delta z]$  一段水所作功的微元

$$dW = \pi g [(R-r)z/H+r]^2 (H-z) dz$$

于是,全部功

$$\begin{aligned} W &= \int_0^H dW = \pi g \int_0^H [(R-r)z/H+r]^2 (H-z) dz \\ &= \pi g \int_0^H \left[ \frac{(R-r)(R-3r)}{H} z^2 + r(2R-3r)z + r^2 H \right. \\ &\quad \left. - \frac{(R-r)^2}{H^2} z^3 \right] dz \\ &= \pi g [(R-r)(R-3r)H^2/3 + r(2R-3r)H^2/2 + r^2 H^2 \\ &\quad - (R-r)^2 H^2] \\ &= \pi g H^2 (R^2 + 2Rr + 3r^2)/12. \end{aligned}$$

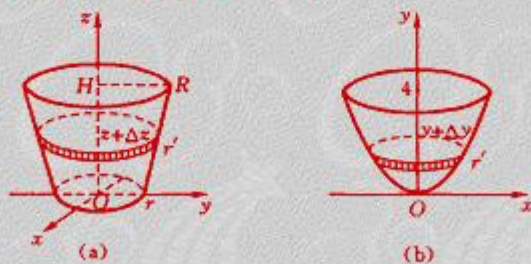


图 3.4.19

(4)取坐标系如图 3.4.19(b)所示,则水高为  $y$  处抛物体截面半径为  $r'=\sqrt{y}$ , 从而,抽取抛物体中位于  $[y, y+\Delta y]$  一段水所作功



的微元

$$dW = g\pi y(4-y)dy,$$

于是,全部功

$$\begin{aligned} W &= \int_0^4 dW = \pi g \int_0^4 y(4-y)dy \\ &= \pi g (2y^2 - y^3/3) \Big|_0^4 = 32\pi g/3. \end{aligned}$$

• 例 8 一圆柱形物体,底半径为  $R$ ,高为  $H$ ,该物体竖立于水中,且上底面与水面相齐.现将它竖直打捞出来,试对下列两种情形分别计算该物体刚刚脱离水面时需要作的功:

- (1) 该物体的密度  $\mu=1$  (与水的密度相等);
- (2) 该物体的密度  $\mu>1$ .

解 取坐标系如图 3.4.20 所示.

(1) 将位于  $[x, x+dx]$  处的一段圆柱体打捞出水面所作功的微元

$$dW = (H-x)\pi R^2 g dx,$$

于是,全部功

$$\begin{aligned} W &= \int_0^H dW = \pi R^2 g \int_0^H (H-x) dx \\ &= \pi R^2 g (Hx - x^2/2) \Big|_0^H = \pi R^2 g H^2/2. \end{aligned}$$

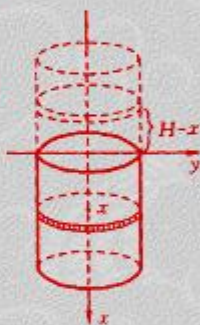


图 3.4.20

(2) 将位于  $[x, x+\Delta x]$  处的一段圆柱体打捞出水面,在水中一段行程为  $x$ ,克服力(重力减浮力)做功;在水上一段行程为  $H-x$ ,克服重力作用做功.所以,功的微元

$$\begin{aligned} dW &= xg(\mu-1)\pi R^2 dx + (H-x)g\mu\pi R^2 dx \\ &= g(H\mu-x)\pi R^2 dx, \end{aligned}$$

于是,全部功

$$\begin{aligned} W &= \int_0^H dW = \pi g R^2 \int_0^H (H\mu-x) dx \\ &= \pi g R^2 (H\mu x - x^2/2) \Big|_0^H = (2\mu-1)\pi R^2 g H^2/2. \end{aligned}$$

• 例9 一个半径为  $R$  的半圆环导线, 均匀带电, 电荷密度为  $\delta$ , 在圆心处放置一个带电量为  $q$  的点电荷, 求它们之间的作用力.

解 取坐标系如图 3.4.21 所示, 则半圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $y \geq 0$ ). 在半圆环上点  $(x, y)$  处取长度为  $ds$  的弧段, 将其视为点电荷, 则由库仑定律知,  $ds$  对原点处的点电荷的吸引力微元

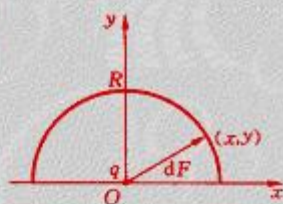


图 3.4.21

$$dF = K \frac{q\delta ds}{(x^2 + y^2)^{3/2}} r^0$$

$$= K \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} dx = \frac{Kq\delta}{R^2} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{y} dx,$$

所以 
$$dF_x = \frac{Kq\delta}{R^2} \frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad dF_y = \frac{Kq\delta}{R^2} dx.$$

从而, 得到

$$F_x = \int_{-R}^R dF_x = \int_{-R}^R \frac{Kq\delta}{R^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \stackrel{\text{奇}}{=} 0,$$

$$F_y = \int_{-R}^R dF_y = \int_{-R}^R \frac{Kq\delta}{R^2} dx = \frac{2Kq\delta}{R},$$

于是 
$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = \frac{2Kq\delta}{R} \mathbf{j}.$$

• 例10 一个半径为  $R$  的圆环导线, 均匀带电, 电荷密度为  $\delta$ , 在过圆心且垂直于环所在平面的直线上与圆心相距为  $a$  之处有一个带电量为  $q$  的点电荷, 求导线与点电荷之间的作用力.

解 取坐标系如图 3.4.22 所示, 则圆环的方程为

$$\begin{cases} z = a, \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

在圆环上点  $(x, y, z)$  处取微元  $ds$ , 并视其为带电量为  $\delta ds$  的点电荷, 则由库仑定律,  $\delta ds$  对原点处的点电荷的吸引力



$$\begin{aligned} dF &= K \frac{q\delta ds}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} r^0 \\ &= Kq\delta \frac{(xi+yj+ak)}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} dx \\ &= Kq\delta \frac{(xi+yj+ak)}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2} |y|} dx, \end{aligned}$$

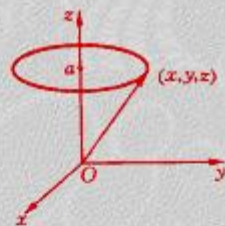


图 3.4.22

从而  $dF_x = Kq\delta R \frac{x}{|y|(R^2+a^2)^{3/2}} dx$

$$= Kq\delta R \frac{x}{(R^2+a^2)^{3/2} \sqrt{R^2-x^2}} dx,$$

$$dF_y = Kq\delta R \frac{y dx}{|y|(R^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{Kq\delta R}{(R^2+a^2)^{3/2}} (\pm) dx = \begin{cases} \frac{Kq\delta R}{(R^2+a^2)^{3/2}} dx, & y \geq 0, \\ -\frac{Kq\delta R}{(R^2+a^2)^{3/2}} dx, & y < 0, \end{cases}$$

$$dF_z = \frac{Kq\delta Ra}{(R^2+a^2)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} dx.$$

得  $F_x = 2 \int_{-R}^R dF_x \stackrel{?}{=} 0, \quad F_y = 2 \int_{-R}^R dF_y = 0,$

$$F_z = 2 \int_{-R}^R dF_z = \frac{2Kq\delta Ra}{(R^2+a^2)^{3/2}} \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$= \frac{2\pi Kq\delta Ra}{(R^2+a^2)^{3/2}},$$

于是  $F = F_x i + F_y j + F_z k = \frac{2\pi Kq\delta Ra}{(R^2+a^2)^{3/2}} k.$

• 例 11 曲线  $a^2 y = x^2$  ( $0 < a < 1$ ) 将图 3.4.23 所示边长为 1 的正方形分为  $A_1, A_2$  两部分.

(1) 分别求  $A_1$  绕  $y$  轴旋转一周与  $A_2$  绕  $x$  轴旋转一周所得两旋转体体积  $V_{A_1}$  与  $V_{A_2}$ ;

(2) 当  $a$  取何值时,  $V_{A_1} = V_{A_2}$ ?

(3) 当  $a$  取何值时,  $V_{A_1} + V_{A_2}$  取得最小值?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) V_{A_1} &= \int_0^1 \pi x^2 dy = \int_0^1 \pi a^2 y dy \\ &= \pi a^2 / 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{A_2} &= \int_0^a \pi y^2 dx + \pi \times 1^2 \times (1-a) \\ &= \int_0^a \pi x^4 / a^4 dx + \pi(1-a) \\ &= \pi x^5 / (5a^4) \Big|_0^a + \pi(1-a) \\ &= \pi(1 - 4a/5). \end{aligned}$$

(2) 若  $V_{A_1} = V_{A_2}$ , 即  $\pi a^2 / 2 = \pi(1 - 4a/5)$ , 解得

$$a_1 = (\sqrt{66} - 4)/5, \quad a_2 = (-\sqrt{66} - 4)/5 \text{ (舍去)},$$

故当  $a = (\sqrt{66} - 4)/5$  时, 有  $V_{A_1} = V_{A_2}$ .

(3) 设  $f(a) = V_{A_1} + V_{A_2} = \pi(a^2 - 8a/5 + 2)/2$ , 则

$$f'(a) = \pi(a - 4/5).$$

令  $f'(a) = 0$ , 得

$$a = 4/5.$$

又

$$f''(a) = \pi > 0,$$

故当  $a = 4/5$  时,  $V_{A_1} + V_{A_2}$  取得唯一极小值, 也为最小值.

• 例 12 设有立体, 用过  $x$  轴上点  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) 处作垂直于  $x$  轴的平面截该立体的截面面积为已知连续函数  $A(x)$ , 立体两端点处的截面(可以缩为一点)分别对应于  $x=a$  与  $x=b$ , 证明: 该立体的体积  $V = \int_a^b A(x) dx$ .

解 选坐标系如图 3.4.24 所示, 则在  $[x, x+\Delta x]$  上体积微元  $dV = A(x) dx$ . 所以, 立体体积

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

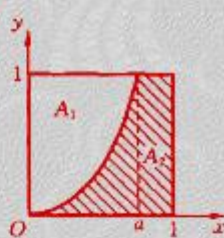


图 3.4.23



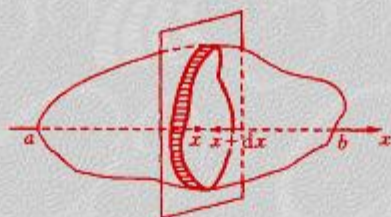


图 3.4.24

**例 13** 设  $Oxy$  平面上有正方形  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  及直线  $l: x + y = t$  ( $t \geq 0$ ), 如图 3.4.25 所示. 若  $A(t)$  表示正方形  $D$  位于直线左下方部分的面积, 试求  $\int_0^x A(t) dt$  ( $x \geq 0$ ).

**解** 首先建立  $A(t)$  的表达式.

$$A(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \leq t \leq 1, \\ -t^2/2 + 2t - 1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

当  $0 \leq t \leq 1$  时,

$$\int_0^x A(t) dt = \int_0^x t^2/2 dt = x^3/6;$$

当  $1 < t \leq 2$  时,

$$\begin{aligned} \int_0^x A(t) dt &= \int_0^1 t^2/2 dt + \int_1^x (-t^2/2 + 2t - 1) dt \\ &= -x^3/6 + x^2 - x + 1/3; \end{aligned}$$

当  $x > 2$  时,

$$\begin{aligned} \int_0^x A(t) dt &= \int_0^1 t^2/2 dt + \int_1^2 (-t^2/2 + 2t - 1) dt + \int_2^x 1 dt \\ &= x - 1. \end{aligned}$$

$$\text{即 } A(t) = \begin{cases} x^3/6, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x^3/6 + x^2 - x + 1/3, & 1 < x \leq 2, \\ x - 1, & x > 2. \end{cases}$$

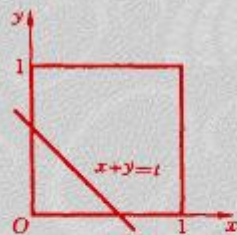


图 3.4.25

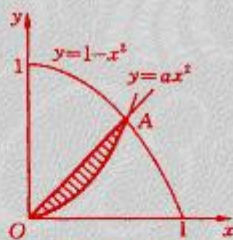


图 3.4.26

**例 14** 设曲线  $y=ax^2$  ( $a>0, x\geq 0$ ) 与  $y=1-x^2$  交于点  $A$ , 过坐标原点  $O$  与点  $A$  的直线与曲线  $y=ax^2$  围成一平面图形.  $a$  为何值时, 该图形绕  $x$  轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

**解** 如图 3.4.26 所示, 当  $x\geq 0$  时, 由  $y=ax^2$  与  $y=1-x^2$  解得交点坐标为  $A(1/\sqrt{1+a}, a/\sqrt{1+a})$ , 故直线  $\overline{OA}$  的方程为  $y=ax/\sqrt{1+a}$ . 所以, 旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{1/\sqrt{1+a}} \left( \frac{a^2 x^2}{1+a} - a^2 x^4 \right) dx \\ &= \pi \left( \frac{a^2 x^3}{3(1+a)} - \frac{a^2 x^5}{5} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{1+a}} = \frac{2\pi}{15} \frac{a^2}{(1+a)^{5/2}}, \\ &= \frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{5/2}} \quad (a>0), \end{aligned}$$

且 
$$V'_a = \frac{\pi(4a-a^2)}{15(1+a^2)^{7/2}}.$$

令  $V'_a=0$ , 得  $a=4$ , 且为唯一驻点. 依题意知, 旋转体在  $a=4$  时有最大值, 最大值

$$V=32\sqrt{5}\pi/1\ 875.$$

**例 15** 为清除井底的污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口 (见图 3.4.27). 已知井深 30 m, 抓斗自重 400 N, 缆绳每米重 50 N, 抓斗抓起的污泥重 2000 N, 提升速度为 3 m/s. 在提升过程中, 污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉, 现将抓起



污泥的抓斗提升至井口,克服重力需作多少焦耳的功?

**解** 取坐标系如图 3.4.27 所示. 将抓起污泥的抓斗提升至井口所作功

$$W = W_1 + W_2 + W_3,$$

其中,  $W_1$  是抓斗克服自重所作的功,  $W_2$  是克服缆绳重力所作的功,  $W_3$  是提出污泥所作的功, 则

$$W_1 = 400 \times 30 = 12000 \text{ J}.$$

将抓斗由  $x$  处提升到  $x + dx$  处, 克服缆绳所作功的微元  $dW_2 = 50(30 - x)dx$ , 故

$$W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500 \text{ J}.$$

将污泥从井底提升到井口需用时间为  $30/3 = 10 \text{ s}$ , 在时间间隔  $[t, t + \Delta t]$  内提升污泥所作功的微元

$$dW_3 = 3(2000 - 2t)dt,$$

故  $W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 2t)dt = 57000 \text{ J}.$

从而, 一共作功

$$W = 12000 + 22500 + 57000 = 91500 \text{ J}.$$

**例 16** 已知抛物线  $y = px^2 + qx$  ( $p > 0, q > 0$ ) 在第一象限内与直线  $x + y = 5$  相切, 且此抛物线与  $x$  轴所围成的平面图形的面积为  $A$ . (1)  $p$  和  $q$  为何值时,  $A$  达到最大值? (2) 求出此最大值.

**解** 如图 3.4.28 所示, 抛物线与  $x$  轴交点的横坐标为  $x_1 = 0, x_2 = -q/p$ , 所围平面图形面积

$$A = \int_0^{-q/p} (px^2 + qx)dx$$

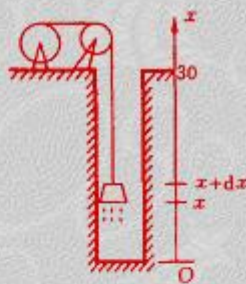


图 3.4.27

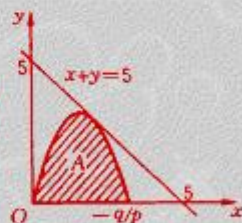


图 3.4.28

$$= (px^3/3 + qx^2/2) \Big|_0^{-q/p} = q^3/6p^2.$$

因为直线  $x+y=5$  与抛物线  $y=px^2+qx$  相切, 所以有唯一交点.

由方程组 
$$\begin{cases} x+y=5, \\ y=px^2+qx, \end{cases}$$

有 
$$px^2+(q+1)x-5=0,$$

其判别式 
$$\Delta=(q+1)^2+20p=0,$$

即 
$$p=-(1+q)^2/20,$$

故 
$$A=A(q)=200q^3/[3(q+1)^4],$$

且 
$$A'(q)=200q^2(3-q)/[3(q+1)^5]$$

令  $A(q)=0$ , 得  $q=3$ .

当  $0 < q < 3$  时,  $A'(q) > 0$ ; 当  $q > 3$  时,  $A'(q) < 0$ . 于是, 当  $q=3$  时,  $A(q)$  取得极大值, 也是最大值.

此时,  $p=-4/5$ , 而  $A=225/32$ .

**例 17** 设有曲线  $y=\sqrt{x-1}$ , 过原点作其切线, 求曲线、切线及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴一周所得旋转体的体积.

**解** 如图 3.4.29 所示, 先求切线的方程. 设切点横坐标为  $x_0$ , 则切点为  $(x_0, \sqrt{x_0-1})$ , 故曲线在该点切线方程为

$$\begin{aligned} y - \sqrt{x_0-1} &= (\sqrt{x-1})' \Big|_{x=x_0} \cdot (x-x_0) \\ &= (x-x_0)/(2\sqrt{x_0-1}). \end{aligned}$$

又切线过原点, 所以代入  $(0,0)$ , 得  $x_0=2$ ,

于是切线方程为  $y=x/2$ , 切点为  $(2,1)$ .

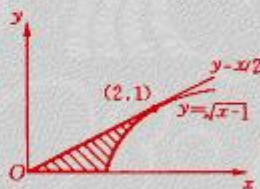


图 3.4.29

曲线弧  $y=\sqrt{x-1}$  ( $1 \leq x \leq 2$ ) 绕  $x$  轴旋转所得旋转体表面积

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_1^2 \pi y \sqrt{1+y'^2} dx \\ &= \int_1^2 \pi \sqrt{4x-3} dx = \pi(5\sqrt{5}-1)/6. \end{aligned}$$

而直线  $y=x/2$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 绕  $x$  轴旋转所得旋转体表面积



$$A_2 = \int_0^2 2\pi \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} x dx = \sqrt{5}x.$$

故所求旋转体表面积

$$A = A_1 + A_2 = \pi(11\sqrt{5} - 1)/6.$$

• 例 18 由曲线  $y=f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ),  $x=a$ ,  $x=b$  与  $x$  轴围成的平面图形绕  $y$  轴旋转一周产生一个旋转体, 试用微元法推导出该旋转体的体积公式.

解 如图 3.4.30 所示, 对区间  $[a, b]$  细分. 在  $[x, x+dx]$  上的曲边梯形绕  $y$  轴旋转一周所得体积近似一个薄壳柱体, 所以体积微元

$$dV = 2\pi x f(x) dx,$$

从而旋转体的体积公式为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

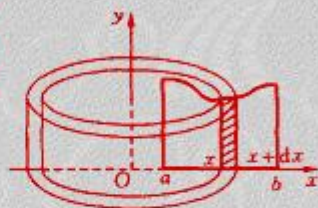


图 3.4.30

• 例 19 设函数  $y=f(x)$  在区间  $[c, d]$  上有连续的导数, 证明: 由曲线  $y=f(x)$  与直线  $y=kx+b$  ( $k \neq 0$ ),  $y=-1/k+b_1$ ,  $y=-1/k+b_2$  ( $b_1 < b_2$ ) 所围成的曲边梯形(见图 3.4.31)绕直线  $kx+b$  旋转一周所产生立体的体积

$$V = \frac{\pi}{(1+k^2)^{3/2}} \int_c^d [f(x) - kx - b]^2 |1 + kf'(x)| dx.$$

证 在  $[c, d]$  上取元素  $[x, x+dx]$ , 过点  $x, x+dx$  作  $x$  轴的垂线交曲线  $y=f(x)$  于点  $(x, f(x))$  与  $(x+dx, f(x)+dy)$ . 又过点  $(x, f(x))$  与  $(x+dx, f(x)+dy)$  作直线  $y=kx+b$  的垂线, 得垂足  $r, r+dr$ . 于是, 得到直线  $y=kx+b$  上的微元  $[r, r+dr]$ . 由于点  $(x, f(x))$  到直线  $y=kx+b$  的距离为

$$L(x) = |f(x) - kx - b| / \sqrt{1+k^2},$$

故旋转体的体积微元

$$dV = \pi L^2(x) dr = \pi [f(x) - kx - b]^2 / (1+k^2) \cdot dr.$$

再来研究  $dr$  与  $dx$  的关系. 记  $[x, x+dx]$  上对应的切线段长度为  $dl$ , 并设该切线与  $x$  轴、直线  $y=kx+b$  的夹角分别为  $\alpha$  与  $\beta$ , 则  $\tan\alpha=f'$ . 又记直线  $y=kx+b$  与  $x$  轴间的夹角为  $\gamma$ , 则  $\tan\gamma=k$ , 且有

$$f' = \tan\alpha = \tan(\beta + \gamma) = \frac{k + \tan\beta}{1 - k \tan\beta}.$$

于是

$$\tan\beta = (f' - k) / (1 + kf'),$$

因而

$$\cos\beta = \frac{|1 + kf'|}{\sqrt{1+k^2} \sqrt{1+f'^2}},$$

而  $dl = \sqrt{1+f'^2} dx, \quad dr = \cos\beta dl,$

从而  $dr = \sqrt{1+f'^2} \cos\beta dx = |1 + kf'| / \sqrt{1+k^2} \cdot dx,$

得到旋转体的体积微元

$$dV = \pi[f(x) - kx - b]^2 |1 + kf'(x)| / (1+k^2)^{3/2} dx,$$

所以, 旋转体体积

$$V = \int_c^d dV = \frac{\pi}{(1+k^2)^{3/2}} \int_c^d [f(x) - kx - b]^2 |1 + kf'(x)| dx.$$

• 例 20(人口统计模型) 我们知道, 一般来说城市人口的分布密度  $P(r)$  随着与市中心距离  $r$  的增加而减少. 设某城市 1990 年的人口密度为  $P(r) = 40/(r^2 + 20)$  (万人/ $\text{km}^2$ ), 试求该市距市中心 2 km 的范围内的人口数  $M$ .

解 
$$M = \int_0^2 P(r) ds = \int_0^2 \frac{40}{r^2 + 20} 2\pi r dr$$
  

$$= 40\pi \ln(r^2 + 20) \Big|_0^2 \approx 22.91 \text{ 万人}.$$

例 21 计算抛物线  $y^2 = 2px$  自点  $(0, 0)$  至点  $(p/2, p)$  之间的

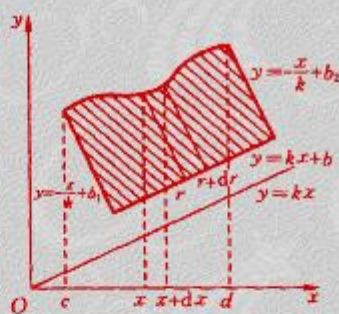


图 3.4.31



一段弧长.

解 因为  $x' = y/p$ , 所以弧长

$$\begin{aligned} s &= \int_0^p \sqrt{1+x'^2} dy = \int_0^p \sqrt{1+(y/p)^2} dy \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p \sqrt{p^2+y^2} dy = p \int_0^{\pi/4} \sec^3 t dt \\ &= \frac{p}{2} [\sec t \tan t + \ln(\sec t + \tan t)] \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{p}{2} \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

例 22 一个底面积  $A=4000 \text{ cm}^2$ , 高  $H=50 \text{ cm}$  的圆柱形木制浮标浮于水面, 已知木头的密度  $\rho=0.8 \text{ g/cm}^3$ .

(1) 要使浮标完全浮出水面, 需作多少功?

(2) 要使浮标完全没入水中, 需作多少功?

解 取坐标系如图 3.4.32 所示. 浮标质量  $m=400 \times 50 \times 0.8=160000 \text{ g}$ , 体积  $V=4000 \times 50=200000 \text{ cm}^3$ , 正常时浮出水面体积为  $V_1=40000 \text{ cm}^3$ , 浮出水面高度为  $10 \text{ cm}$ .

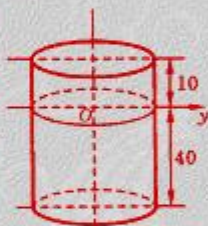


图 3.4.32

(1) 使浮标完全浮出水面需作的功相当于把浮标没入水中部分体积所占的水抽出水面所作的功. 因为  $dV=4000xdx$ , 所以

$$W = g \int_0^{40} 4000x dx = 2000x^2 g \Big|_0^{40} \approx 313.6 \text{ J}.$$

(2) 使浮标完全没入水中所作的功相当于把浮标浮于水上部分灌满水克服重力所作的功, 即

$$W = g \int_0^{10} 4000x dx = 2000x^2 g \Big|_0^{10} \approx 19.6 \text{ J}.$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left( \int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right),$$

且知:非齐次线性微分方程的通解等于它的一个特解与它所对应的齐次线性微分方程的通解之和.

5. 形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1, n \in \mathbf{R})$$

的一阶微分方程称为 Bernoulli 方程,先化为

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

再令  $u = y^{1-n}$ , 可化为关于  $u$  的一阶线性微分方程求解.

6. 可降阶的高阶微分方程分为如下三类:

(1)  $y^{(n)} = f(x)$  型方程, 用逐次积分法可求解.

(2)  $y'' = f(x, y')$  型方程, 其特征是方程中不显含未知函数  $y$ . 解法是: 作变量代换  $y' = p$ , 则  $y'' = dp/dx$ , 方程化为关于  $p$  的

一阶微分方程  $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$ , 求出解  $p = \varphi(x, C_1)$ , 代入  $y' = p$  再积

分, 得  $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$ .

(3)  $y'' = f(y, y')$  型方程, 其特征是方程中不显含自变量  $x$ .

解法是: 作变量代换  $y' = p$ , 则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ . 方程化为关于  $p$  的一阶

微分方程  $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$ , 求出解  $p = \varphi(y, C_1)$ , 代入  $y' = p$ , 再积

分得  $y = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2$ .

### 疑难解析

怎样用微分方程解决实际问题?

答 用微分方程解决实际问题分为直接法与间接法.

直接法是利用物理、几何、化学等各方面的知识、定理与定律



直接列出方程,其实施步骤是:

(1)根据实际问题,确定自变量、未知函数、未知函数导数,写出方程与初始条件,即列出初值问题;

(2)根据方程特点,选用适当方法求出方程的通解,并根据初始条件确定特解;

(3)对解得结果进行分析,解释其实际意义,确定是否与实际问题相符.若有显著差异,则需重建模型,重新求解.

间接法又称小元素分析法.在不能依据定理、定律直接列出方程时,利用对具体问题某一时刻状态的分析,讨论各量之间的关系,从而确定自变量、未知函数与未知函数导数之间的关系,建立微分方程.

在实际问题中常常出现成比例的问题.一般来说,当函数与导数同号(或方向相同)时,比例系数  $k$  前取正号;当函数与导数异号(或方向相反)时,比例系数  $k$  前取负号.

### 典型例题与习题详解

求解微分方程时,首先要辨明微分方程的类型,选择适当的方法解出;其次要注意是特解还是通解,特解需确定常数  $C$  的值.

• 例 1 用分离变量法求下列微分方程的解:

(1)  $x dy - y \ln y dx = 0$ ; (2)  $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$ ;

(3)  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-y^2}}$ ; (4)  $\frac{x}{1+y} dx + \frac{y}{1+x} dy = 0, y|_{x=0} = 1$ ;

(5)  $(xy^2 + x) dx + (y - x^3 y) dy = 0$ ;

(6)  $\arctan y dy + (1 + y^2) x dx = 0$ .

解 (1)先将方程变形为  $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x}$ ,两边积分,得

$$\ln |\ln y| = \ln |x| + \ln |C| \Rightarrow \ln y = Cx,$$

故所求的通解为  $y = e^{Cx}$ .

(2)先将方程变形为

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = -\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx,$$

两边积分

$$\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = -\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx \Rightarrow \int \frac{d \tan y}{\tan y} = -\int \frac{d \tan x}{\tan x},$$

得  $\ln \tan y = -\ln \tan x + \ln C \Rightarrow \ln \tan x \tan y = \ln C,$

故所求通解为  $\tan x \tan y = C.$

(3) 将方程变形为

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

两边积分, 得  $\arcsin y = \arcsin x + C,$

即为方程隐式解.

(4) 将方程变形为

$$(1+y)ydy = (1+x)x dx,$$

两边积分, 得  $y^2/2 + y^3/3 = x^2/2 + x^3/3 + C,$

即  $3y^2 + 2y^3 = 3x^2 + 2x^3 + C.$

代入初始条件  $y|_{x=0} = 1$ , 得  $C = 5$ , 故所求特解为

$$2(x^3 - y^3) + 3(x^2 - y^2) + 5 = 0.$$

(5) 将方程变形为

$$\frac{2y}{1+y^2} dy = \frac{2x}{x^2-1} dx,$$

两边积分, 得  $\ln(1+y^2) = \ln|1-x^2| + \ln C.$

故所求通解为  $1+y^2 = C(1-x^2).$

(6) 将方程变形为

$$\frac{\arctan y}{1+y^2} dy = -x dx,$$

两边积分  $\int \arctan y d \arctan y = \int (-x) dy,$

得  $\arctan^2 y / 2 = -x^2 / 2 + C / 2.$

故所求通解为  $x^2 + \arctan^2 y = C.$



**例 2** 求下列微分方程满足初始条件的特解:

(1)  $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0, y|_{x=0} = 1;$

(2)  $\cos x \sin y dy - \cos y \sin x dx = 0, y|_{x=0} = \pi/4;$

(3)  $y' \sin x = y \ln y, y|_{x=\pi/2} = e;$

(4)  $\cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0, y|_{x=0} = \pi/4.$

**解** (1) 将方程变形为

$$e^y(e^x + 1)dy + e^x(1 - e^y)dx = 0,$$

两边积分  $\int \frac{e^y dy}{1 - e^y} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x} \Rightarrow -\int \frac{de^y}{e^y - 1} = \int \frac{de^x}{e^x + 1},$

得  $-\ln(e^y - 1) = \ln(e^x + 1) + \ln C_1,$

即  $\ln(e^x + 1) + \ln(e^y - 1) = \ln C.$

代入初始条件  $y|_{x=0} = 1$ , 得  $C = 2(e - 1)$ , 故所求特解为

$$(e^x + 1)(e^y - 1) = 2(e - 1).$$

(2) 方程变形为

$$\tan y dy = \tan x dx,$$

两边积分, 得

$$-\ln \cos y = -\ln \cos x - \ln C \Rightarrow \cos y = C \cos x.$$

代入初始条件  $y|_{x=0} = \pi/4$ , 得  $C = 1/\sqrt{2}$ , 故所求特解为

$$\sqrt{2} \cos y = \cos x.$$

(3) 方程变形为  $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$ , 两边积分

$$\int \frac{d \ln y}{\ln y} = \int \csc x dx,$$

得  $\ln \ln y = \ln \tan(x/2) + \ln C,$

即  $\ln y = C \tan(x/2) \Rightarrow y = e^{C \tan(x/2)}.$

代入初始条件  $y|_{x=\pi/2} = e$ , 得  $C = 1$ , 故所求特解为

$$y = e^{\tan(x/2)}.$$

(4) 方程变形为

$$\frac{dx}{1 + e^{-x}} = \tan y dy,$$

两边积分  $\int \frac{de^x}{e^x+1} = \int \frac{d \cos y}{\cos y}$

得  $\ln(e^x+1) = \ln \cos y + \ln C,$

即  $e^x+1 = C \cos y.$

代入初始条件  $y|_{x=0} = \pi/4$ , 得  $C = 2\sqrt{2}.$

注意, 用分离变量法解微分方程时, 对方程变形有可能丢掉原方程的解. 如微分方程  $x^2 dy - y^2 dx = 0$ , 若用  $x^2 y^2$  (假定  $xy \neq 0$ ) 除方程各项得  $dy/y^2 = dx/x^2$ , 两边积分, 得方程解  $1/y = 1/x + C$ , 则这个通解中不包含原方程的解  $x=0$  与  $y=0$ . 因此, 要考虑找回丢失的解.

同时, 微分方程的通解也不一定包含其所有特解. 如微分方程  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$  的通解为  $y = x \sin \ln Cx, |\ln Cx| \leq \pi/2$ , 但显然没有包含其特解  $y = \pm x$ .

例 3 求下列齐次微分方程的解:

• (1)  $(2x^2 - y^2) + 3xy \frac{dy}{dx} = 0;$       • (2)  $xy' = y \ln \frac{y}{x};$

• (3)  $(x^3 + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0;$       (4)  $y' = \frac{x+y+1}{x-y-3};$

(5)  $x^2 y' = 3(x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} + xy;$

(6)  $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (y^2 + 2yx - x^2) dy = 0, \quad y|_{x=1} = 1;$

• (7)  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y|_{x=-1} = 2.$

解 (1) 方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x)^2 - 2}{3(y/x)}.$$

令  $u = y/x$ , 得  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ , 原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 2}{3u} \Rightarrow \frac{u}{1+u^2} du = -\frac{2}{3x} dx,$$



两边积分,得  $\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{1}{6}\ln|C|$ ,

即  $(1+u^2)^3=C/x^4\Rightarrow(x^2+y^2)^3=Cx^2$

为原方程通解.

(2) 方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

令  $u=y/x$ , 得

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u\Rightarrow\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x},$$

两边积分,得  $\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|$ ,

即  $\ln u=1+Cx\Rightarrow u=e^{1+Cx}\Rightarrow y=xe^{1+Cx}$

为原方程通解.

(3) 方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(y/x)^3}{3(y/x)^2},$$

令  $u=y/x$ , 得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^3}{3u^2}\Rightarrow\frac{3u^2}{1-2u^3}du=\frac{dx}{x},$$

两边积分,得  $-\frac{1}{2}\ln|1-2u^3|=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|C|$ ,

即  $x^2(1-2u^3)=C\Rightarrow(x^3-2y^3)=Cx$

为原方程通解.

(4) 方程变形为

$$y'=\frac{(x-1)+(y+2)}{(x-1)-(y+2)},$$

令  $\xi=x-1, \eta=y+2$ , 得齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{1+n/\xi}{1-n/\xi}.$$

令  $u=n/\xi$ , 得

$$u + \xi \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow \xi \frac{du}{d\xi} = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{d\xi}{\xi},$$

两边积分, 得  $\arctan u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln \xi + C,$

代回原方程, 即

$$\arctan \frac{y+2}{x-1} = \frac{1}{2} \ln[(x-1)^2 + (y+2)^2] + C$$

为原方程通解.

(5) 方程变形为

$$y' = 3 \left[ 1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right] \arctan \frac{y}{x} + \frac{y}{x},$$

令  $u = y/x$ , 得

$$u + x \frac{du}{dx} = 3(1+u^2) \arctan u + u \Rightarrow \frac{du}{(1+u^2) \arctan u} = 3 \frac{dx}{x},$$

两边积分, 得  $\ln |\arctan u| = 3 \ln |x| + \ln |C_1|,$

即  $\arctan u = Cx^3 \Rightarrow y = x \tan(Cx^3)$  ( $x$  可取零)

为原方程通解.

(6) 方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x)^2 - 2(y/x) - 1}{(y/x)^2 + 2(y/x) - 1},$$

令  $u = y/x$ , 得

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 2u - 1}{u^2 + 2u - 1} \Rightarrow -\frac{u^2 + 2u - 1}{u^3 + u^2 + u + 1} du = \frac{dx}{x},$$

两边积分, 得  $\ln |u+1| - \ln |1+u^2| = \ln |x| + \ln C,$

即  $\frac{x(1+u^2)}{1+u} = C \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{x+y} = C$

为原方程通解. 代入初始条件  $y|_{x=1} = 1$ , 得  $C=1$ . 故特解为

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = 1.$$

(7) 令  $u = y/x$ , 原方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = u + \frac{1}{u} \Rightarrow u du = \frac{dx}{x},$$



两边积分,得

$$u^2/2 = \ln|x| + C/2 \Rightarrow y^2 = 2x^2 \ln|x| + Cx^2.$$

代入初始条件  $y|_{x=-1}=2$ , 得  $C=4$ . 故特解为

$$y^2 = 2x^2(\ln|x| + 2).$$

**例 4** 设  $\int_0^x [2f(t) + \sqrt{t^2 + f^2(t)}] dt = xf(x)$ , 且  $f(1) = 0$ ,

求函数  $f(x)$ .

**解** 将方程两边对  $x$  求导, 得

$$2f(x) + \sqrt{x^2 + f^2(x)} = xf'(x) + f(x),$$

即 
$$2y + \sqrt{x^2 + y^2} = xy' + y.$$

化为齐次方程

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (y/x)^2},$$

令  $u = y/x$ , 得

$$u + u'x = u + \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x},$$

两边积分, 得  $\ln|u + \sqrt{1 + u^2}| = \ln|x| + C$ .

代入初始条件  $u|_{x=1} = y|_{x=1} = 0$ , 得  $C=0$ . 故特解为

$$u + \sqrt{1 + u^2} = x \Rightarrow y = (x^2 - 1)/2.$$

• **例 5** 求下列一阶线性微分方程的通解:

(1)  $y' - 2y = x + 2$ ;

(2)  $xy' - 3y = x^4 e^x$ ;

(3)  $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ ;

(4)  $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$ ;

(5)  $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ ;

(6)  $xy' - y = x/\ln x$ .

**解** 求解一阶线性微分方程, 可将所给方程化为标准形后, 直接套用通解公式求出.

$$\begin{aligned} (1) y &= e^{2ax} \left[ \int (x+2)e^{-2ax} dx + C \right] \\ &= e^{2x} \left[ \int (x+2)e^{-2x} dx + C \right] \end{aligned}$$

$$= Ce^{2x} - x/2 - 5/4.$$

(2)化为标准形  $y' - 3y/x = x^3 e^x$ , 则

$$\begin{aligned} y &= e^{\int 3/x dx} \left( \int x^3 e^x e^{-\int 3/x dx} dx + C \right) \\ &= x^3 \left( \int x^3 e^x x^{-3} dx + C \right) = x^3 (e^x + C). \end{aligned}$$

(3)化为标准形  $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$ , 则

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left[ \int (1+x^2) e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} dx + C \right] \\ &= (1+x^2) \left[ \int (1+x^2)(1+x^2)^{-1} dx + C \right] \\ &= (1+x^2)(x+C). \end{aligned}$$

(4)化为标准形  $y' + \sec^2 xy = \tan x \sec^2 x$ , 则

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \sec^2 x dx} \left( \int \tan x \sec^2 x e^{\int \sec^2 x dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\tan x} \left( \int \tan x \sec^2 x e^{\tan x} dx + C \right) \\ &= e^{-\tan x} \left( \int \tan x e^{\tan x} d \tan x + C \right) \\ &= e^{-\tan x} [(\tan x - 1)e^{\tan x} + C] \\ &= (\tan x - 1) + Ce^{-\tan x}. \end{aligned}$$

(5)化为标准形  $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \ln x}y = \frac{1}{x}$ , 则

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} \left( \int \frac{1}{x} e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\ln \ln x} \left( \int \frac{1}{x} e^{\ln \ln x} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{\ln x} \left( \int \frac{1}{x} \ln x dx + C \right) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{C}{\ln x}. \end{aligned}$$

(6)化为标准形  $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{\ln x}$ , 则



$$\begin{aligned}
 y &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left( \int \frac{1}{\ln x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\
 &= e^{\ln x} \left( \int \frac{1}{\ln x} e^{-\ln x} dx + C \right) \\
 &= x \left( \int \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{x} + C \right) = x (\ln \ln x + C).
 \end{aligned}$$

**例 6** 已知  $\int_0^1 f(tx) dx = \frac{1}{2} f(x) + 1$ , 求  $f(x)$ .

**解** 方程两边乘以  $x$ , 得

$$\int_0^1 f(tx) dx = \frac{x}{2} f(x) + x \Rightarrow \int_0^x f(u) du = \frac{x}{2} f(x) + x,$$

两边对  $x$  求导, 得

$$f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = -\frac{2}{x}.$$

该方程是一阶线性微分方程, 故

$$\begin{aligned}
 y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( \int -\frac{2}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\
 &= \frac{1}{x} \left( \int -\frac{2}{x} x dx + C \right) = -2 + \frac{C}{x}.
 \end{aligned}$$

**例 7** 求下列微分方程的通解:

$$(1) y' - x^2 y^2 = y; \quad (2) 3y^2 y' - y^3 = x + 1;$$

$$(3) y' = \frac{1}{e^y + x}; \quad (4) (\cos y - 2x)' = 1;$$

$$(5) \frac{dy}{dx} = (x+y)^2; \quad (6) y' = \sin^2(x-y+1);$$

$$(7) yy' - y^2 = x^2; \quad (8) xy' + y = y(\ln x + \ln y).$$

**解** 首先将方程变形, 辨别方程的类型, 然后按类型选适当方法求解.

(1) 将方程变形为 Bernoulli 方程  $y^{-2} y' - y^{-1} = x^2$ , 令  $z = y^{-1}$ , 得  $\frac{dz}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$ . 于是, 原方程化为一阶线性微分方程

$$\frac{dz}{dx} + z = -x^2,$$

$$\begin{aligned}\text{则 } z &= e^{-\int dx} \left( \int -x^2 e^{\int dx} dx + C \right) \\ &= e^{-x} \left( \int -x^2 e^x dx + C \right) = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2,\end{aligned}$$

$$\text{故所求通解为 } y^{-1} = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2.$$

(2) 方程是 Bernoulli 方程, 令  $z = y^3$ , 得  $\frac{dz}{dx} - z = x + 1$ , 是一阶线性微分方程, 则

$$\begin{aligned}z &= e^{\int dx} \left[ \int (x+1)e^{-\int dx} dx + C \right] \\ &= e^x \left[ \int (x+1)e^{-x} dx + C \right] = Ce^x - (x+2).\end{aligned}$$

$$\text{故所求通解为 } y^3 = Ce^x - (x+2).$$

(3) 方程化为  $\frac{dx}{dy} - x = e^y$ , 它是关于  $y$  的一阶线性微分方程

$$x = e^{\int dy} \left( \int e^y e^{-\int dy} dy + C \right) = e^y \left( \int e^y e^{-y} dy + C \right) = e^y (y + C).$$

本题说明, 若方程对  $y$  不易求解时, 可转而对  $x$  求解.

(4)  $(\cos y - 2x)' = 1$  可以直接对方程两边积分, 得

$$\cos y - 2x = x + C,$$

$$\text{故所求通解为 } \cos y - 3x = C.$$

(5) 令  $u = x + y$ , 则  $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ , 原方程化为

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{du}{1+u^2} = dx,$$

$$\text{两边积分, 得 } \arctan u = x + C,$$

$$\text{故所求通解为 } \arctan(x+y) = x + C.$$

(6) 令  $u = (x - y + 1)$ , 则  $\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$ , 原方程化为

$$\frac{du}{dx} = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u \Rightarrow \sec^2 u du = dx,$$



两边积分,得

$$\tan u = x + C,$$

故所求通解为

$$\tan(x-y+1) = x + C,$$

(7) 令  $u=y^2$ , 原方程化为

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dx} - u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} - 2u = 2x^2,$$

$$u = e^{\int 2dx} \left( \int 2x^2 e^{-\int 2dx} dx + C \right)$$

$$= e^{2x} \left( \int 2x^2 e^{-2x} dx + C \right) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}(2x^3 + 2x + 1),$$

故所求通解为

$$y^2 = Ce^{2x} - x^2 - x - 1/2.$$

(8) 令  $u=xy$ ,  $\frac{du}{dx} = xy' + y$ , 原方程化为

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \ln u \Rightarrow \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x},$$

两边积分,得  $\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow u = e^{Cx}$ ,

故所求通解为

$$xy = e^{Cx} \Rightarrow y = e^{Cx}/x.$$

• 例 8 设有微分方程  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$ , 其中  $\varphi(u)$  为连续函数,  $a, b, c, d, e, f$  为常数.

(1) 若  $ae \neq bd$ , 证明: 可适当选取常数  $h$  与  $k$ , 使变换  $x=u+h$ ,  $y=v+k$  把该方程化为齐次微分方程;

(2) 若  $ae = bd$ , 证明: 可用一适当的变换把该方程化为变量分离方程;

(3) 用题(1)或题(2)中的方法分别求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6} \quad \text{和} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+x-y}{x-y}$$

的通解.

证 (1) 若  $ae = bd$ , 则方程组

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ dx+ey+d=0 \end{cases}$$

有唯一解

$$\begin{cases} x_0 = h, \\ y_0 = k. \end{cases}$$

令  $x = u + h, y = v + k$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ , 原方程化为

$$\frac{dv}{du} = \varphi\left(\frac{au + bv}{du + ev}\right) = \varphi\left(\frac{au/v + b}{du/v + e}\right) \triangleq g\left(\frac{u}{v}\right).$$

该方程即是一阶齐次微分方程.

(2) 已知  $ae = bd$ , 令  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = k$ , 则  $a = kd, b = ke$ , 故

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi\left(\frac{kdx + key + c}{dx + ey + f}\right) = \varphi\left[\frac{k(dx + ey) + c}{(dx + ey) + f}\right] \\ &\triangleq g(dx + ey). \end{aligned}$$

再令  $u = dx + ey$ , 得  $\frac{du}{dx} = d + e \frac{dy}{dx}$ , 原方程化为

$$\frac{du}{dx} = d + eg(u) \Rightarrow \frac{du}{d + eg(u)} = dx.$$

该方程是变量已分离的微分方程.

(3) 辨别方程类型, 再求解.

1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6}$  是  $ae \neq bd$  情形, 故有

$$\begin{cases} x + y + 4 = 0, \\ x - y - 6 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = -5. \end{cases}$$

令  $x = u + 1, y = v - 5$ , 原方程化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v} = \frac{1+v/u}{1-v/u}.$$

令  $T = \frac{v}{u}$ , 则  $\frac{dv}{du} = T + u \frac{dT}{du} = \frac{1+T}{1-T}$ ,

分离变量, 得  $\frac{1-T}{1+T^2} dT = \frac{du}{u}$ .

两边积分, 得  $\arctan T - \frac{1}{2} \ln(1+T^2) - \ln u = C$ ,



即  $\arctan \frac{v}{u} - \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) = C$ .

故所求通解为

$$\arctan \frac{y+5}{x-1} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 - 2x + 10y + 26) = C.$$

2)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x-y}{x-y}$  是  $ae=bd$  情形. 令  $u=x-y$ , 原方程化为

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{1+u}{u} = -\frac{1}{u} \Rightarrow udu = -dx,$$

两边积分, 得  $u^2/2 = -x + C/2$ ,

故所求通解为  $2x + (x-y)^2 = C$ .

**例 9** 求下列微分方程的通解:

- (1)  $y'' = \frac{1}{1+x^2}$ ;
- (2)  $y'' = y' + x$ ;
- (3)  $y'' = y''$ ;
- (4)  $y'' = 1 + (y')^2$ ;
- (5)  $yy'' + 1 = (y')^2$ ;
- (6)  $y'' = (y')^3 + y'$ ;
- (7)  $y^3 y'' + 1 = 0$ ,  $y|_{x=1} = 1$ ,  $y'|_{x=1} = 0$ ;
- (8)  $y'' + (y')^2 = 1$ ,  $y|_{x=0} = 0$ ,  $y'|_{x=0} = 0$ .

**解** 本例均为可降阶的高阶微分方程. 在求解时, 要区分类型, 选用适当方法.

(1) 用逐次积分法, 积分两次, 得

$$y' = \arctan x + C,$$

故所求通解为

$$y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2.$$

(2)  $y'' = y' + x$  是  $y'' = f(x, y')$  型方程, 令  $p = y'$ , 得  $y'' = \frac{dp}{dx}$ ,

方程化为一阶线性微分方程  $\frac{dp}{dx} - p = x$ , 则

$$p = e^{\int dx} \left( \int x e^{-\int dx} dx + C \right) = C_1 e^x - (x+1),$$

即 
$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^x - (x+1).$$

故所求通解为

$$y = \int (C_1 e^x - x - 1) dx = C_1 e^x - x^2/2 - x + C_2.$$

(3) 令  $p = y'$ , 则  $\frac{dp}{dx} = y''$ , 原方程化为  $\frac{dp}{dx} - p = 0$ , 其通解为

$$p = C_1 e^x.$$

即

$$y'' = C_1 e^x.$$

两边积分, 得

$$y' = C_1 e^x + C_2.$$

再两边积分, 得所求通解

$$y = C_1 e^x + C_2 x + C_3.$$

(4)  $y'' = 1 + (y')^2$  是  $y'' = f(x, y')$  型方程. 令  $p = y'$ . 则  $y'' =$

$\frac{dp}{dx}$ , 原方程化为

$$\frac{dp}{dx} = 1 + p^2 \Rightarrow \frac{dp}{1+p^2} = dx,$$

两边积分, 得

$$\arctan p = x + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan(x + C_1),$$

再两边积分, 得所求通解

$$y = -\ln |\cos(x + C_1)| + C_2.$$

(5)  $yy'' + 1 = (y')^2$  是  $y'' = f(y, y')$  型方程. 令  $y' = p(y)$ , 则

$y'' = p \frac{dp}{dy}$ , 原方程化为

$$yp \frac{dp}{dy} + 1 = p^2 \Rightarrow \frac{p dp}{p^2 - 1} = \frac{dy}{y}, \quad \textcircled{1}$$

需分别讨论  $|p| > 1$  和  $|p| < 1$  两种情形.

1) 当  $|p| > 1$  时, 对式①两边积分, 得

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 - 1) = \ln|y| + \ln|C_1|,$$



即  $p^2 - 1 = (C_1 y)^2 \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 + (C_1 y)^2},$

分离变量, 得  $\frac{C_1 dy}{\sqrt{1 + (C_1 y)^2}} = \pm C_1 dx,$

两边积分, 得  $\operatorname{arcsinh}(C_1 y) = \pm (C_1 x + C_2),$

故所求通解为

$$y = \frac{1}{C_1} \operatorname{sh}[\pm (C_1 x + C_2)] = \pm \frac{1}{C_1} \operatorname{sh}(C_1 x + C_2).$$

当  $y' < -1$  时, 取负号; 当  $y' > 1$  时, 取正号.

2) 当  $|p| < 1$  时, 方程化为  $\frac{-p dp}{1 - p^2} = \frac{dy}{y},$  对式①两边积分, 得

$$\frac{1}{2} \ln(1 - p^2) = \ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow 1 - p^2 = (C_1 y)^2,$$

即  $p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 - (C_1 y)^2}.$

分离变量, 得  $\frac{C_1 dy}{\sqrt{1 - (C_1 y)^2}} = \pm C_1 dx,$

两边积分, 得  $\arcsin C_1 y = \pm (C_1 x + C_2),$

故所求通解为

$$y = \frac{1}{C_1} \sin[\pm (C_1 x + C_2)] = \pm \frac{1}{C_1} \sin(C_1 x + C_2).$$

当  $-1 < y < 0$  时, 取负号; 当  $0 \leq y < 1$  时, 取正号.

(6) 令  $p = y',$  则  $y'' = p \frac{dp}{dy},$  原方程化为

$$p \frac{dp}{dy} = p^3 + p \Rightarrow p \left[ \frac{dp}{dy} - (1 + p^2) \right] = 0.$$

令  $p = 0$  知,  $y = C$  是原方程的一个解 (但不是通解). 由

$$\frac{dp}{dy} - (1 + p^2) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{1 + p^2} = dy,$$

两边积分, 得  $\arctan p = y - C_1 \Rightarrow p = \tan(y - C_1),$

即  $\frac{dy}{dx} = \tan(y - C_1) \Rightarrow \frac{dy}{\tan(y - C_1)} = dx.$

再两边积分,得

$$x+C=\ln\sin(y-C_1)\Rightarrow y-C_1=\arcsin(C_2e^x),$$

故所求通解为  $y=\arcsin(C_2e^x)+C_1$ .

(7)原方程化为

$$y''=-1/y^3\Rightarrow 2y'y''=-2y'/y^3\Rightarrow d(y')^2=-2/y^3\cdot dy,$$

两边积分,得  $(y')^2=1/y^2+C_1$ .

代入初始条件  $y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$ , 得  $C_1=-1$ . 于是

$$(y')^2=1/y^2-1=(1-y^2)/y^2,$$

得  $y'=\frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}\Rightarrow\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=\pm x.$

两边积分,得  $-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2$ .

代入初始条件  $y|_{x=1}=1$ , 得  $C_2=\mp 1$ . 于是

$$-\sqrt{1-y^2}=\pm(x-1)\Rightarrow 1-y^2=(x-1)^2.$$

故所求通解为

$$x^2+y^2=2x \quad \text{或} \quad y=\sqrt{2x-x^2}.$$

(8) 设  $p=y'$ , 则  $y''=p\frac{dp}{dy}$ , 原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}+p^2=1\Rightarrow\frac{pdp}{1-p^2}=dy.$$

两边积分,得  $\frac{1}{2}\ln(p^2-1)=-y+C_1$ ,

即  $\ln(p^2-1)=-2y+2C_1\Rightarrow p^2-1=C_1e^{-2y}$ .

代入初始条件  $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$ , 得  $C_1=-1$ . 于是

$$p^2=1-e^{-2y}\Rightarrow p=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm dx.$$

两边积分,得  $\pm x+C_2=\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})$ ,

代入初始条件  $y|_{x=0}=0$ , 得  $C_2=0$ . 于是

$$\pm x=\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})\Rightarrow e^{\pm x}=e^y+\sqrt{e^{2y}-1}.$$

由  $e^x=e^y+\sqrt{e^{2y}-1}\Rightarrow e^{2x}-1=e^{2x}-2e^xe^y+e^{2y}$ ,



解得  $e^y = (e^x + e^{-x})/2$ ;

由  $e^{-x} = e^y + \sqrt{e^{2y} - 1} \Rightarrow e^{2y} - 1 = e^{-2x} - 2e^y e^{-x} + e^{2y}$ ,

解得  $e^y = (e^{-x} + e^x)/2$ .

故原方程通解为  $y = \ln(\cosh x)$ .

• 例 10 设一曲线过点(1,0), 曲线上任一点  $P(x, y)$  处的切线在  $y$  轴上的截距等于原点到点  $P$  的距离, 求此曲线的方程.

解 设此曲线的方程为  $y = f(x)$ , 则在点  $P(x, y)$  处的切线方程可表示为  $Y - y = y'(X - x)$ , 令  $X = 0$ , 得切线在  $y$  轴上截距

$$Y = b = y - xy',$$

由题设得  $y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

即有微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + (y/x)^2}$  (因为  $x_0 = 1$ , 故取正号).

令  $u = y/x \Rightarrow y' = u + xu'$ , 上述方程化为

$$x \frac{du}{dx} = -\sqrt{1+u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}.$$

两边积分, 得  $\ln|u + \sqrt{1+u^2}| = -\ln|x| + \ln|C|$ ,

即  $x(u + \sqrt{1+u^2}) = C \Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$ .

又曲线过点(1,0), 即有初始条件  $y|_{x=1} = 0$ , 代入得  $C = 1$ , 故所求曲线方程为

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1, \quad \text{即} \quad x^2 + 2y = 1.$$

• 例 11 一曲线经过点(2,8), 曲线上任一点到两坐标轴的垂线与两坐标轴构成的矩形被该曲线分为两部分, 其中一部分的面积恰好是另一部分面积的两倍, 求该曲线的方程.

解 如图 3.5.1 所示, 设曲线方程为  $y = f(x)$ ,  $P(x, y)$  为曲线上任一点. 矩形被曲线分为  $A_1, A_2$  两部分, 其面积分别为

$$A_1 = \int_0^x (y - f(t)) dt, \quad A_2 = \int_0^x f(t) dt.$$

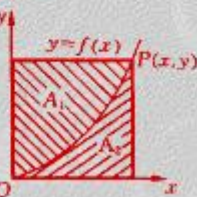


图 3.5.1

分为  $A_1=2A_2, A_2=2A_1$  两种情形讨论.

(1) 设  $A_1=2A_2$ , 则

$$\int_0^x (y-f(t)) dt = 2 \int_0^x f(t) dt,$$

即  $3 \int_0^x f(t) dt = \int_0^x y dx = xy = xf(x).$

两边对  $x$  求导, 得一阶线性微分方程

$$3f(x) = f(x) + xf'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0,$$

故  $y = e^{\int \frac{2}{x} dx} C = Cx^2.$

代入初始条件  $y|_{x=2} = 8$ , 得  $C=2$ . 故所求曲线方程为

$$y=2x^2.$$

(2) 设  $A_2=2A_1$ , 则

$$2 \int_0^x f(t) dt = 2 \int_0^x (y-f(t)) dt,$$

即  $3 \int_0^x f(t) dt = 2xy = 2xf(x).$

两边对  $x$  求导, 得一阶线性微分方程

$$3y = 2y + 2xy' \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = 0,$$

故  $y = e^{\int \frac{1}{2x} dx} C = C\sqrt{x}.$

代入初始条件  $y|_{x=2} = 8$ , 得  $C=4\sqrt{2}$ . 故所求曲线方程为

$$y^2=32x.$$

• 例 12 设有质量为  $m$  的降落伞以初速度  $v_0$  开始降落, 若空气的阻力与速度成正比, 求降落伞下降速度与时间的关系.

解 取坐标系如图 3.5.2 所示. 设空气阻力系数为  $k$ , 降落伞在时刻  $t$  的降落速度为  $v$ , 重力为  $mg$ , 阻力为  $kv$ , 依力学定律, 得

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$



该方程是一阶线性微分方程,故

$$v = e^{-\frac{k}{m}t} \left( \int g e^{\frac{k}{m}t} dt + C \right) = \frac{mg}{k} + C e^{-\frac{k}{m}t}.$$

代入初始条件  $v|_{t=0} = v_0$ , 得  $C = v_0 - \frac{mg}{k}$ .

从而知,降落伞下降速度与时间的关系为

$$v = \frac{mg}{k} + \left( v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

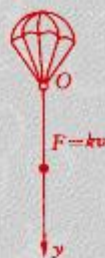


图 3.5.2

• 例 13 容器内装有 10 L 盐水,其中含盐 1 kg.

现以 3 L/min 的速度注入净水,同时以 2 L/min 的速度抽出盐水,试求 1 h 后容器内溶液的含盐量.

解 设在时刻  $t$  时溶液的含盐量为  $x(t)$ , 在时刻  $t + \Delta t$  的含盐量为  $x(t) + \Delta x$ . 于是,由题设条件知

$$\Delta x = -\frac{2x\Delta t}{10 + (3-2)t} = -\frac{2x\Delta t}{10+t} \quad (\text{负号反映含盐量减少}),$$

$$\text{即} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{2x}{10+t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{2}{10+t}x = 0,$$

$$\text{得} \quad x(t) = e^{-\int \frac{2}{10+t} dt} C = \frac{C}{(10+t)^2}.$$

代入初始条件  $x|_{t=0} = 1$ , 得  $C = 100$ . 于是

$$x(t) = \frac{100}{(10+t)^2} \Rightarrow x(60) = \frac{100}{(10+60)^2} \text{ kg} = \frac{1}{49} \text{ kg}.$$

即 1 h 后容器内含盐量为  $1/49$  kg.

• 例 14 由经济学知,市场上的商品价格的变化率与商品的过剩需求量(即需求量与供给量之差)成正比,假设某种商品的供给量  $Q_1$  与需求量  $Q_2$  都是价格  $P$  的线性函数:

$$Q_1 = -a + bP, \quad Q_2 = c - dP,$$

其中  $a, b, c, d$  都是正常数,试求该商品的价格随时间的变化规律.

解 由题设条件建立方程

$$\frac{dP}{dt} = k(Q_2 - Q_1) = k[-(d+b)P + (a+c)] \quad (k \text{ 为比例系数}),$$

化为一阶线性微分方程

$$\frac{dP}{dt} + k(b+d)P = k(a+c),$$

$$\begin{aligned}\text{故 } P &= e^{-k(b+d)t} \left[ \int k(a+c) e^{k(b+d)t} dt + C \right] \\ &= e^{-k(b+d)t} \left[ \frac{a+c}{b+d} e^{k(b+d)t} + C \right].\end{aligned}$$

可知该商品的价格随时间的变化规律为

$$P(t) = \frac{a+c}{b+d} + Ce^{-k(b+d)t}.$$

**例 15** 求微分方程  $xdy + (x-2y)dx = 0$  的一个解  $y=y(x)$ , 使得由曲线  $y=y(x)$  与直线  $x=1, x=2$  及  $x$  轴所围成平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体体积为最小.

**解** 方程化为一阶线性方程  $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -1$ , 则

$$\begin{aligned}y &= e^{\int \frac{2}{x} dx} \left( \int -e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) \\ &= x^2(1/x + C) = x + Cx^2.\end{aligned}$$

由曲线  $y=x+Cx^2$  与直线  $x=1, x=2$  及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周的旋转体体积

$$V(C) = \int_1^2 \pi(x+Cx^2)^2 dx = \pi \left( \frac{31}{5}C^2 + \frac{15}{2}C + \frac{7}{3} \right).$$

$$\text{令 } V'(C) = \pi \left( \frac{62}{5}C + \frac{15}{2} \right) = 0 \Rightarrow C = -\frac{75}{124} \text{ (唯一),}$$

又  $V''(C) = \frac{62}{5}\pi > 0$ , 所以当  $C = -\frac{75}{124}$  时, 旋转体体积取得最小值, 曲线方程为

$$y=y(x) = x - \frac{75}{124}x^2.$$

**例 16** 某湖泊的水量为  $V$ , 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为  $V/6$ , 流入湖泊内不含 A 的水量为  $V/6$ , 流出湖泊的水量为  $V/3$ . 已知 1999 年底湖中 A 的含量为  $5m_0$ , 超过国家规定指标.



为了治理污染,从 2000 年初起,限定排入湖泊中含 A 污染物的水的浓度不超过  $m_0/V$ . 问:至多需经过多少年,湖泊中污染物 A 的含量降至  $m_0$  以内(注:设湖水中 A 的浓度是均匀的)?

解 设 2000 年初(令此时  $t=0$ )开始,第七年湖泊中污染物 A 的总量为  $m$ ,浓度为  $m/V$ ,则在时间间隔  $[t, t+\Delta t]$  内,排入湖泊中 A 的量为  $\frac{m_0}{V} \frac{V}{6} dt = \frac{m_0}{6} dt$ ,流出湖泊的水中 A 的量为  $\frac{m}{V} \frac{V}{3} dt = \frac{m}{3} dt$ ,因而在此时间间隔内湖泊中污染物 A 的改变量为

$$dm = \left( \frac{m_0}{6} - \frac{m}{3} \right) dt \xrightarrow{\text{分离变量}} m = \frac{m_0}{2} - Ce^{-t/3}.$$

代入初始条件  $m|_{t=0} = 5m_0$ , 得  $C = -9m_0/2$ . 于是

$$m = m_0(1 + 9e^{-t/3}) \xrightarrow{\text{令 } m=m_0} t = 6\ln 3.$$

可知至多需经过  $6\ln 3$  年,湖泊中污染物 A 的含量降至  $m_0$  以内.

例 17 如图 3.5.3 所示,设  $L$  是一条平面曲线,曲线上任意点  $P(x, y)$  ( $x > 0$ ) 到坐标原点的距离,恒等于该点处的切线在  $y$  轴上的截距,且  $L$  经过点  $(1/2, 0)$ .

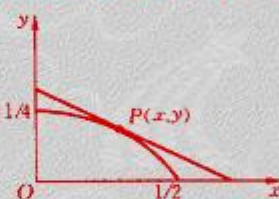


图 3.5.3

(1)求曲线  $L$  的方程;

(2)求  $L$  位于第一象限部分的一条切线,使得该切线与  $L$  以及两坐标轴所围图形的面积最小.

解 (1)设曲线  $L$  过点  $P(x, y)$  的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x).$$

令  $X=0$ , 得切线在  $y$  轴上的截距为  $y - xy'$ . 由题设得微分方程

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy' \Rightarrow \sqrt{1 + (y/x)^2} = y/x - y'.$$

令  $u = y/x$ , 得  $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$ , 解得

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

代入初始条件  $y|_{x=1/2}=0$ , 得  $C=1/2$ , 则曲线  $L$  的方程为

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1/2 \Rightarrow y = 1/4 - x^2.$$

(2) 设曲线  $y = 1/4 - x^2$  在第一象限内在点  $P(x, y)$  处的切线方程为

$$Y - (1/4 - x^2) = -2x(X - x),$$

即  $Y = -2xX + x^2 + 1/4$  ( $0 < x \leq 1/2$ ).

与两坐标轴交于点  $((x^2 + 1/4)/(2x), 0)$  与  $(0, x^2 + 1/4)$ , 则

$$A(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1/4)^2}{2x} - \int_0^{1/2} (1/4 - x^2) dx.$$

对  $x$  求导, 得

$$A'(x) = \frac{1}{4x^2} \left( x^2 + \frac{1}{4} \right) \left( 3x^2 - \frac{1}{4} \right),$$

令  $A'(x) = 0$ , 得唯一驻点  $x = \sqrt{3}/6$ .

因为  $A'(x)$  从左至右经过点  $x = \sqrt{3}/6$  时, 由负变正, 所以  $x = \sqrt{3}/6$  是  $A(x)$  的极小值点, 也是最小值点, 从而知所求切线为

$$Y = -2 \frac{\sqrt{3}}{6} X + \frac{3}{36} + \frac{1}{4}, \quad \text{即} \quad Y = -\frac{\sqrt{3}}{3} X + \frac{1}{3}.$$

• 例 18 研究肿瘤细胞增殖动力学, 能为肿瘤的临床治疗提供一定的理论依据. 试按下述两种假设分别建立肿瘤生长的数学模型并求解.

(1) 设肿瘤体积  $V$  随时间  $t$  增大的速率与  $V^b$  成正比, 其中  $b$  为常数 (称为形状参数). 开始测得肿瘤的体积为  $V_0$ , 试分别求当  $b = 2/3$  与当  $b = 1$  时  $V$  随时间变化的规律, 以及当  $b = 1$  时肿瘤体积增加一倍所需的时间 (称为倍增时间  $t_d$ ).

(2) 设肿瘤体积  $V$  随时间  $t$  增大的速率与  $V$  成正比, 但比例系数  $k$  不是常数, 它随时间  $t$  的增大而减小, 并且减小的速率与当时  $k$  的值成正比, 比例系数为常数, 试求  $V$  随时间  $t$  的变化规律、倍增时间及肿瘤体积的理论上限值.

解 (1) 依题意, 得  $\frac{dV}{dt} = kV^b, V|_{t=0} = V_0$ .



1) 当  $b=2/3$  时,

$$\frac{dV}{V^{2/3}} = k dt \Rightarrow 3V^{1/3} = kt + C.$$

代入初始条件  $V|_{t=0} = V_0$ , 得  $C = 3V_0^{1/3}$ , 于是

$$V^{1/3} = kt/3 + V_0^{1/3}.$$

2) 当  $b=1$  时,

$$\frac{dV}{dt} = kV \Rightarrow \ln V = kt + \ln C.$$

代入初始条件  $V|_{t=0} = V_0$ , 得  $C = V_0$ , 于是

$$V = V_0 e^{kt}.$$

3) 由 2), 令

$$V = 2V_0 \Rightarrow t = \ln 2/k,$$

故知当  $b=1$  时, 肿瘤的倍增时间为  $t_d = \ln 2/k$ .

(2) 依题意, 得  $\frac{dV}{dt} = kV$ , 且

$$\frac{dk}{dt} = -\alpha k \quad (\alpha \text{ 是正比例系数}), \quad k|_{t=0} = A \quad (A > 0).$$

由  $\frac{dk}{dt} = -\alpha k$  及  $k|_{t=0} = A$ , 得  $k = Ae^{-\alpha t}$ , 于是确定初值问题

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t} V, \quad V|_{t=0} = V_0.$$

分离变量后积分, 求得肿瘤体积变化规律为

$$V = V_0 e^{A(1-e^{-\alpha t})/\alpha}.$$

令  $V = 2V_0 = V_0 e^{A(1-e^{-\alpha t})/\alpha}$ , 得倍增时间

$$t_d = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \frac{\alpha}{A} \ln 2) = \frac{1}{\alpha} [\ln A - \ln(A - \alpha \ln 2)].$$

又  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V = \lim_{t \rightarrow +\infty} V_0 e^{A(1-e^{-\alpha t})/\alpha} = V_0 e^{A/\alpha},$

所以肿瘤体积的理论上限值为  $V_0 e^{A/\alpha}$ .

• 例 19 位于坐标原点的我舰向位于点  $A(1,0)$  处的敌舰发射制导鱼雷, 设鱼雷永远对准敌舰. 已知敌舰以最大速度  $v_0$  在直

线  $x=1$  上行驶, 鱼雷的速度为  $5v_0$ , 求鱼雷的航迹曲线方程. 敌舰行驶多远时将被鱼雷击中.

**解** 设鱼雷的航迹曲线为  $y=y(x)$ , 又设时刻  $t$ , 鱼雷位于点  $P(x, y)$ , 敌舰位于点  $Q(1, v_0 t)$  (见图 3.5.4). 由于鱼雷始终对准敌舰, 所以直线  $PQ$  即为鱼雷的航迹曲线  $\widehat{OP}$  在点  $P$  处的切线, 故

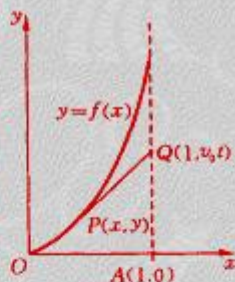


图 3.5.4

$$y' = \frac{v_0 t - y}{1 - x} \Rightarrow (1 - x)y' + y = v_0 t. \quad (1)$$

又弧  $\widehat{OP}$  的长度是  $|AQ|$  的 5 倍, 则有

$$\int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = 5v_0 t. \quad (2)$$

由式①与式②消去  $v_0 t$ , 得方程

$$(1 - x)y' + y = \frac{1}{5} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (3)$$

将式③两边对  $x$  求导, 得  $y'' = f(x, y')$  型微分方程

$$(1 - x)y'' = \frac{1}{5} \sqrt{1 + y'^2}, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 0.$$

令  $y' = P$ , 方程转化为

$$(1 - x) \frac{dP}{dx} = \frac{1}{5} \sqrt{1 + P^2} \Rightarrow \frac{dP}{\sqrt{1 + P^2}} = \frac{dx}{5(1 - x)}. \quad (4)$$

对式④作变上限积分并考虑  $P(0) = 0$ , 有

$$\int_0^x \frac{dP}{\sqrt{1 + P^2}} = \frac{1}{5} \int_0^x \frac{dx}{1 - x}.$$

$$\text{得} \quad \ln(P + \sqrt{1 + P^2}) = -\frac{1}{5} \ln(1 - x),$$

$$\text{即} \quad y' - \sqrt{1 + y'^2} = -(1 - x)^{1/5}.$$

$$\text{解得} \quad y' = \frac{1}{2} [(1 - x)^{-1/5} - (1 - x)^{1/5}]. \quad (5)$$



对式⑤作变上限积分并考虑  $y(0)=0$ , 得

$$\begin{aligned}y &= \int_0^x \frac{1}{2} [(1-x)^{-1/5} - (1-x)^{1/5}] dx \\&= -\frac{5}{8}(1-x)^{4/5} + \frac{5}{12}(1-x)^{6/5} + \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

该方程即为鱼雷的航迹曲线方程.

当  $x=1$  时,  $y=5/24$ . 从而知当敌舰驶至点  $(1, 5/24)$  时被击中.

**例 20(冷却定律与破案问题)** 按照 Newton 冷却定律, 温度为  $T$  的物体在温度为  $T_0$  ( $T_0 < T$ ) 的环境中冷却的速度与温差  $T-T_0$  成正比. 你能用该定律确定张某是下面案件中的犯罪嫌疑人吗? 某公安局于晚上 7:30 发现一具女尸, 当晚 8:20 法医测得尸体温度为  $32.6^\circ\text{C}$ , 1 h 后尸体被抬走时又测得尸体温度为  $31.4^\circ\text{C}$ , 假定室温在几个小时内均为  $21.1^\circ\text{C}$ . 由案情分析得知张某是此案的主要犯罪嫌疑人, 但是张某矢口否认, 并有证人说: “下午张某一直在办公室, 下午 5:00 打了一个电话后才离开办公室.” 从办公室到凶案现场步行需 5 min. 问: 张某是否能被排除在犯罪嫌疑人之外?

**解** 若能推断出被害者是在 5:05 之前被杀, 则张某能被排除在犯罪嫌疑人之外, 否则张某的嫌疑不能被排除.

现以晚上 7:30 为记时时刻刻, 单位为 min. 由题设条件与 Newton 冷却定律建立微分方程

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-21.1),$$

定解条件  $T(50)=32.6, \quad T(110)=31.4$ .

分离变量得  $\frac{dT}{T-21.1} = -k dt$ , 两边积分, 得通解

$$T = Ce^{-kt} + 21.1.$$

代入定解条件得

$$32.6 = Ce^{-50k} + 21.1, \quad 31.4 = Ce^{-110k} + 21.1.$$

解联立方程组, 得

$$k = \frac{1}{60} \ln \frac{11.5}{10.3}, \quad C = 11.5 e^{\frac{50}{60} \ln \frac{11.5}{10.3}}.$$

于是,方程确定为

$$T=11.5 \exp\left(\frac{50-t}{60} \ln \frac{11.5}{10.3}\right)+21.1.$$

由于正常人体温在  $35^{\circ}\text{C}$  至  $37^{\circ}\text{C}$  之间. 若死者体温越低, 则在 5:05 之后被杀的可能性越大, 故不妨设死者的正常体温为  $37^{\circ}\text{C}$ , 可利用上述方程求出被杀时间. 由

$$37=11.5 \exp\left(\frac{50-t}{60} \ln \frac{11.5}{10.3}\right)+21.1 \Rightarrow 15.9=11.5 \exp\left(\frac{50-t}{60} \ln \frac{11.5}{10.3}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{得} \quad t &= 50 - 60 \frac{\ln(159/115)}{\ln(115/103)} \approx (50 - 60 \times 2.94) \text{ min} \\ &= -126.4 \text{ min.}\end{aligned}$$

从而确定死者被杀时间为

$$t_0 = \left(7.50 - \frac{126.4}{60}\right) \text{ h} = (7.50 - 2.107) \text{ h} = 5.393 \text{ h},$$

即被杀时间为 5:24 左右. 因此, 张某不能被排除在犯罪嫌疑人外.

## 第六节 反常积分

### 知识要点

1. 无穷区间上的反常积分 设函数  $f$  定义在  $[a, +\infty)$  上, 若对任何  $b > a$ ,  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 则称  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  为  $f$  在无穷区间上的积分, 简称无穷积分, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

若极限  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  存在, 则称  $f$  在  $[a, +\infty)$  上的积分收敛, 称这个极限值为  $f$  在  $[a, +\infty)$  上积分的值. 若极限不存在, 则称  $f$  在  $[a, +\infty)$  上的积分发散.

类似地, 定义



$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx,$$

若  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx$  与  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$  同时存在, 则称  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的积分收敛; 若其中有一个极限不存在, 则称  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的积分发散.

2. 无界函数的反常积分 设函数  $f$  定义在区间  $(a, b]$  上,  $f$  在  $a$  附近无界(此时称  $a$  为  $f$  的奇点或瑕点), 并且对任意的  $\epsilon > 0$ , 在  $[a+\epsilon, b]$  上 Riemann 可积, 则称  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$  为无界函数  $f$  在  $(a, b]$  上的积分, 记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

若极限  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$  存在, 则称无界函数  $f$  在  $(a, b]$  上的积分收敛, 称这个极限值为无界函数  $f$  在  $(a, b]$  上积分的值. 若极限不存在, 则称  $f$  在  $(a, b]$  上的积分发散.

若  $f$  定义在  $[a, b)$  上,  $b$  为  $f$  的奇点, 可类似地定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

若  $f$  定义在  $[a, c) \cup (c, d]$  上,  $c$  为  $f$  的奇点, 定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx.$$

若极限  $\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx$  与  $\lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx$  都存在, 则称无界函数  $f$  在  $[a, b]$  上的积分收敛. 若其中有一个不存在, 则  $f$  在  $[a, b]$  上的积分发散.

3. 无穷区间上反常积分的审敛准则如下:

(1) 比较准则 I 设  $f, g$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 并且

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, +\infty),$$

则 1) 当  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛;

2) 当  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散时,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  发散.

(2) 比较准则 II 如果  $f, g$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 并且  $g(x) > 0$ , 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$  (有限或  $\infty$ ), 则

1) 当  $\lambda \neq 0$  时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  有相同的敛散性;

2) 当  $\lambda = 0$  时, 若  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛;

3) 当  $\lambda = \infty$  时,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也发散.

在用比较准则 II 时, 经常取  $1/x^p$  作为  $g(x)$  来判定积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  的敛散性 (已知  $\int_a^{+\infty} 1/x^p dx$  当  $p > 1$  时收敛, 当  $0 < p \leq 1$  时发散).

(3) 绝对收敛准则 若  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛, 此时称积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  绝对收敛.

4. 无界函数的反常积分的审敛准则如下:

(1) 比较准则 I 设  $f, g$  在  $(a, b]$  上连续,  $a$  是它们的奇点, 并且在  $(a, b]$  上有  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , 则

1) 当  $\int_a^b g(x)dx$  收敛时,  $\int_a^b f(x)dx$  也收敛;

2) 当  $\int_a^b f(x)dx$  发散时,  $\int_a^b g(x)dx$  也发散.

(2) 比较准则 II 设  $f, g$  在  $(a, b]$  上连续,  $a$  是它们的奇点, 且  $g(x) > 0$ . 又  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$  (有限或  $\infty$ ), 则

1) 当  $\lambda \neq 0$  时,  $\int_a^b f(x)dx$  与  $\int_a^b g(x)dx$  有相同的敛散性;



2) 当  $\lambda = 0$  时, 若  $\int_a^b g(x) dx$  收敛, 则  $\int_a^b f(x) dx$  也收敛;

3) 当  $\lambda = \infty$  时,  $\int_a^b g(x) dx$  发散, 则  $\int_a^b f(x) dx$  也发散.

(3) 绝对收敛准则 若  $\int_a^b |f(x)| dx$  收敛, 则  $\int_a^b f(x) dx$  也收敛, 此时称  $\int_a^b f(x) dx$  绝对收敛.

5.  $\Gamma$  函数 由反常积分  $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  在区间  $(0, +\infty)$  内确定的以  $\alpha$  为自变量的函数称为  $\Gamma$  函数.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha \in (0, +\infty),$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

### 疑难解析

1. 反常积分与 Riemann 积分有何联系? 怎样计算反常积分?

答 反常积分可以化为极限记号下的 Riemann 积分. 反常积分的计算步骤是:

(1) 将反常积分化为极限记号下的 Riemann 积分;

(2) 带着极限记号计算 Riemann 积分;

(3) 对 Riemann 积分结果取极限, 即得反常积分的结果.

也可以先求对应 Riemann 积分的原函数, 再利用 Newton-Leibniz 公式求增量, 再取极限.

由上可知, 在不定积分与定积分中用过的变量代换、换元积分、分部积分以及拆、拼、凑等技巧仍然可以使用. 只是要注意, 代换后反常积分积分限的变换, 有时可能变为 Riemann 积分, 所以应先确定敛散性, 再进行计算.

2. 两种反常积分之间有什么联系?

答 两种反常积分虽然互不相同,但也不是互相割裂的.在一定条件下,可以互相转换.例如,在无穷区间上的反常积分可以转换成无界函数的反常积分.即

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x) dx &\stackrel{x=1/t}{=} \int_{1/a}^0 \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad \left(\text{令 } g(t) = \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ &= \int_0^{1/a} g(t) dt \quad (0 \text{ 为奇点}).\end{aligned}$$

同样,可以写出逆推的情形.

### 典型例题与习题详解

反常积分问题包括敛散性判定、反常积分值的计算、敛散性的讨论.在解反常积分问题前,必须认真研究函数,确定反常积分类型,选择恰当的方法讨论.

• 例1 利用无穷积分的定义判别下列无穷积分的敛散性.如果收敛,计算它的值.

$$\begin{array}{ll}(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}; & (2) \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(x+15)}; \\ (3) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx; & (4) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx; \\ (5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}; & (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.\end{array}$$

解 先判别敛散性,再计算积分的值,关键是找到已知敛散性可用来作比较的函数  $g(x)$ .

$$(1) \text{ 设 } f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x^{3/2}},$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{(1+x)\sqrt{x}} = 1,$$

而  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$  收敛,所以  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$  也收敛.又

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$$



而  $\int_1^b \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\arctan\sqrt{x} \Big|_1^b = 2\arctan\sqrt{b} - \frac{\pi}{2},$

所以  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\arctan\sqrt{b} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$

(2) 设  $f(x) = \frac{1}{x(x+15)}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2},$

因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x+15)} = 1,$

而  $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  收敛, 所以  $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x(x+15)}$  也收敛. 又

$$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x(x+15)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_5^b \frac{dx}{x(x+15)},$$

而  $\int_5^b \frac{dx}{x(x+15)} = \frac{1}{15} \ln \frac{x}{x+15} \Big|_5^b = \frac{1}{15} \left( \ln \frac{b}{b+15} + 2\ln 2 \right),$

所以  $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x(x+15)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{15} \left( \ln \frac{b}{b+15} + 2\ln 2 \right) = \frac{2}{15} \ln 2.$

(3) 因为  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\sqrt{x}} dx,$

而  $\int_0^b e^{-\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^b e^{-\sqrt{x}} \sqrt{x} d\sqrt{x} = -2 \int_0^b \sqrt{x} de^{-\sqrt{x}}$   
 $= -2(\sqrt{x}+1)e^{-\sqrt{x}} \Big|_0^b = 2 - 2(\sqrt{b}+1)e^{-\sqrt{b}},$

所以  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-\sqrt{x}} dx = 2 - 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sqrt{b}+1)e^{-\sqrt{b}} = 2,$

即积分  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$  收敛, 且  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2.$

(4) 因为  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\arctan x}{x^2} dx,$

而  $\int_1^b \frac{\arctan x}{x^2} dx = \left( -\frac{1}{x} \arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \Big|_1^b$   
 $= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{b} \arctan b + \frac{1}{2} \ln \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{1}{2} \ln 2,$

所以  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\arctan x}{x^2} dx$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b} \arctan b + \frac{1}{2} \ln \frac{b^2}{1+b^2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2,$$

即积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$  收敛, 且  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ .

(5) 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 2},$$

$$\text{而 } \int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \arctan(x+1) \Big|_a^0 = \frac{\pi}{4} - \arctan(a+1),$$

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \arctan(x+1) \Big|_0^b = \arctan(b+1) - \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [-\arctan(a+1)] + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan(b+1) = \pi.$$

$$(6) \text{ 因为 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} \Big|_0^b = +\infty, \end{aligned}$$

所以  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$  发散.

• 例 2 利用无界函数积分的定义判别下列无界函数积分的敛散性. 如果收敛, 计算它的值.

$$(1) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(2) \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

$$(3) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$$

$$(4) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3};$$

$$(5) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b); \quad (6) \int_0^1 \ln x dx;$$



$$(7) \int_1^x \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}},$$

$$(8) \int_1^3 \ln \sqrt{\left| \frac{\pi}{2-x} \right|} dx.$$

解 先找出被积函数的奇点,再化为极限记号下的 Riemann 积分,计算反常积分的值.

(1)  $x=1$  是被积函数的奇点,故

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-\sqrt{1-x^2}) \Big|_0^{1-\epsilon} = 1,$$

所以  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$  收敛,且  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ .

(2)  $x=1$  是被积函数的奇点,故

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x-1} \right) \Big|_{1+\epsilon}^2 = +\infty,$$

所以  $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$  发散.

(3)  $x=1$  是被积函数的奇点,故

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + 2 \sqrt{x-1} \right] \Big|_{1+\epsilon}^2 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \epsilon^{3/2} - 2\sqrt{\epsilon} \right) = \frac{8}{3}, \end{aligned}$$

所以  $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$  收敛,且  $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{8}{3}$ .

(4)  $x=1$  是被积函数的奇点,故

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon_2}^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}, \end{aligned}$$

$$\text{而 } \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln 3 \right) = +\infty,$$

所以  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$  发散.

(5)  $x=a$  与  $x=b$  是被积函数奇点. 故

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon_1}^{(a+b)/2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{(a+b)/2}^{b-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}. \end{aligned}$$

设  $x-a = (b-a)\sin^2 t$  ( $0 < t < \pi/2$ ), 则

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin t \cos t,$$

$$dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt,$$

于是 
$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \int_0^{\pi/2} dt = \pi.$$

也可以设  $x = a^2 \cos^2 t + b \sin^2 t$ , 则

$$dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt,$$

同样可得

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a)\sin t \cos t}{(b-a)\sin t \cos t} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} dt = \pi. \end{aligned}$$

注意, 代换后的积分限事实上也是极限状态下的. 由上面的积分可知, 引入新变量是很关键的.

(6)  $x=0$  是被积函数的奇点, 故

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-1 + \varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon) = -1, \end{aligned}$$

所以  $\int_0^1 \ln x dx$  收敛, 且  $\int_0^1 \ln x dx = -1$ .

(7)  $x=e$  是被积函数的奇点, 故



$$\begin{aligned}
& \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{e-\epsilon} \frac{d \ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin(\ln x) \Big|_1^{e-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin[\ln(e-\epsilon)] = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

所以  $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}}$  收敛, 且  $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}} = \frac{\pi}{2}$ .

(8)  $x=2$  是被积函数奇点, 故

$$\begin{aligned}
& \int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} dx \\
&= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\epsilon_1} \ln \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2-x}} dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{2+\epsilon_2}^3 \ln \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x-2}} dx \\
&= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} [(1-\epsilon_1) \ln \pi + \epsilon_1 \ln \epsilon_1 - \epsilon_1 + 1] \\
&\quad + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} [(1-\epsilon_2) \ln \pi + 1 + \epsilon_2 \ln \epsilon_2 - \epsilon_2] \\
&= \ln \pi + 1,
\end{aligned}$$

所以  $\int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} dx$  收敛, 且  $\int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} dx = 1 + \ln \pi$ .

• 例 3 利用定义判别下列反常积分的敛散性. 如果收敛, 计算它的值.

$$(1) \int_{-\pi/4}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}}$$

解 (1) 本题是无穷积分, 故

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/4}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-\pi/4}^b -\sin \frac{1}{x} d \frac{1}{x} \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} \Big|_{-\pi/4}^b = 1 - \cos \frac{4}{\pi},
\end{aligned}$$

所以  $\int_{-\pi/4}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$  收敛, 且  $\int_{-\pi/4}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = 1 - \cos \frac{4}{\pi}$ .

(2) 本题既是无穷积分又是无界函数积分,  $x=1$  是被积函数奇点, 故

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2\arctan \sqrt{x-1} \Big|_{1+\epsilon}^2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\arctan \sqrt{x-1} \Big|_2^b \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2(\arctan 1 - \arctan \sqrt{\epsilon}) + \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\left(\arctan \sqrt{b-1} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi/2 + \pi/2 = \pi, \end{aligned}$$

所以  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$  收敛, 且  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \pi$ .

• 例 4 对于反常积分  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ ,  $k$  为何值时收敛,  $k$  为何值时发散?

解 这是一个无穷积分, 故

$$\begin{aligned} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{d \ln x}{(\ln x)^k}, \\ \int_e^b \frac{d \ln x}{(\ln x)^k} &= \begin{cases} \ln \ln x \Big|_e^b = \ln \ln b, & k=1, \\ \frac{(\ln x)^{1-k}}{1-k} \Big|_e^b = \frac{(\ln b)^{1-k} - 1}{1-k}, & k \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

当  $k=1$  时,  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \ln b = +\infty$ , 发散;

当  $k < 1$  时,  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-k} [(\ln b)^{1-k} - 1] = +\infty$ , 发散;

当  $k > 1$  时,  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-k} [(\ln b)^{1-k} - 1] = \frac{1}{k-1}$ , 收敛.

所以, 当  $k > 1$  时,  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$  收敛于  $\frac{1}{k-1}$ ; 当  $k \leq 1$  时,



$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$  发散.

**例 5** 对于反常积分  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$  ( $b > a$ ),  $k$  为何值时收敛,  $k$

为何值时发散?

**解** 这是无界函数的积分,  $x = a$  是被积函数的奇点, 故

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^k},$$

$$\int_{a+\epsilon}^b \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln(x-a) \Big|_{a+\epsilon}^b, & k=1, \\ \frac{1}{1-k} (x-a)^{1-k} \Big|_{a+\epsilon}^b, & k \neq 1. \end{cases}$$

当  $k=1$  时,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(x-a) \Big|_{a+\epsilon}^b = +\infty$ , 发散;

当  $k < 1$  时,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-k} (x-a)^{1-k} \Big|_{a+\epsilon}^b = \frac{(b-a)^{1-k}}{1-k}$ , 收敛;

当  $k > 1$  时,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-k} (x-a)^{1-k} \Big|_{a+\epsilon}^b = +\infty$ , 发散.

所以, 当  $k \geq 1$  时,  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$  发散; 当  $k < 1$  时,  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$

收敛.

**• 例 6** 利用各种判别法, 讨论下列无穷积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + x^2 + 1}; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x+1}};$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{x}}; \quad (4) \int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos x dx;$$

$$(5) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx; \quad (6) \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} dx.$$

**解** (1) 设  $f(x) = \frac{x}{x^3 + x^2 + 1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \text{ 而 } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \text{ 收敛, 所以 } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + x^2 + 1} \text{ 收}$$

敛.

(2) 设  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ , 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ,  
而  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 2$  收敛, 所以  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$  收敛.

(3) 因为  $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/4}}$ ,  $p = \frac{3}{4} < 1$ , 所以  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$  发散.

(4) 因为  $0 \leq |e^{-kx} \cos x| \leq e^{-kx}$ , 而  $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \frac{1}{k}$  收敛, 所以  
 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \cos x dx$  绝对收敛.

(5) 令  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ , 则

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^{+\infty} x^n de^{-x} = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1} \\ &= n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n! I_0, \end{aligned}$$

而 
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x de^{-x} \\ &= -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \end{aligned}$$

所以  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  收敛于  $n!$ .

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx.$$

对  $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$ , 因为  $x^{-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \rightarrow 1$  ( $x \rightarrow 0^+$ ), 所以, 积分  
当  $m > -1$  时收敛.

对  $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ , 因为  $x^{n-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \rightarrow 1$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), 所以, 积  
分当  $n-m > 1$  时收敛.



综上所述,  $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$  在  $m > -1, n-m > 1$  时收敛.

• 例 7 利用各种判别法, 讨论下列反常积分的敛散性:

- (1)  $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ ; (2)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ;  
 (3)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}}$ ; (4)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ ;  
 (5)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}}$ ; (6)  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ ;  
 (7)  $\int_0^1 \frac{x^x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; (8)  $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ .

解 (1)  $x=0, x=1$  是被积函数的奇点, 因为, 当  $0 < x < 1$  时,  $\ln x < 0$ , 而

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{\ln x} / \frac{1}{1-x} \right) \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{-1/x} = 1,$$

所以  $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$  发散, 从而  $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$  发散.

(2)  $x=1$  是被积函数奇点,  $\forall x \in [0, 1), 0 \leq \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \leq$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , 而  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$  收敛, 所以  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$  收敛.

(3)  $x=0, x=1$  是被积函数奇点, 故

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon_1}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{1/2}^{1-\epsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}},$$

而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}} / \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1$ ,

又  $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  收敛, 所以  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}}$  收敛.

同时  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x^2}} / \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

又  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$  收敛, 所以  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$  收敛.

(4)  $x=0, x=1$  是被积函数奇点, 故

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon_1}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{1/2}^{1-\epsilon_2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2},$$

而  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} / \frac{1}{(1-x)^2} \right) = 1,$

知  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$  发散, 同题(3), 知  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$  收敛, 从而

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$  发散.

(5)  $x=2$  是被积函数奇点, 又为无穷积分, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}} \\ &= \int_2^3 \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}}, \end{aligned}$$

而  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}} / \frac{1}{\sqrt{x-2}} \right) = \frac{1}{8},$

又  $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$  收敛, 所以  $\int_2^3 \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}}$  收敛. 而

$$0 < \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}} < \frac{1}{x^4},$$

又  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$  收敛, 所以  $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}}$  收敛. 从而

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}}$  收敛.

$$(6) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = \int_0^{1/2} \frac{\ln x}{1-x^2} dx + \int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx,$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\ln x}{1-x^2} / \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0,$  又  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  收敛, 所以  $\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$  收敛.



$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{\ln x}{1-x^2} / \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) = 0,$$

而  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$  收敛, 所以  $\int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  收敛. 从而  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$  收敛.

$$(7) \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/2}^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} / x^n \right) = 1$ , 所以  $\int_0^{1/2} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$  当  $n > -1$  时收敛.

又对任意的  $n$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} / \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以  $\int_{1/2}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$  收敛. 从而  $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$  当  $n > -1$  时收敛.

$$(8) \int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^{1/q} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx + \int_{1/2}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$$

对  $\int_{1/2}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ , 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( x^p \ln^q \frac{1}{x} \right) / (1-x)^q \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^p \left[ \frac{\ln(1/x)}{1-x} \right]^q = \left[ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1/x)}{1-x} \right]^q \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(-1/x^2)}{-1} \right]^q = 1, \end{aligned}$$

所以  $\int_{1/2}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$  当  $q > -1$  时收敛, 当  $q \leq -1$  时发散, 即

$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$  必发散.

对  $\int_0^{1/2} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ , 考虑到  $q > -1$  的情形, 若  $p > -1$ , 可取  $\tau >$

0 充分小, 使  $p - \tau > -1$ . 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x^p \ln^q \frac{1}{x} \right) / \frac{1}{x^{p+q}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln(1/x)]^q}{(1/x)^q} = 0.$$

因为  $-p+q < 1$ , 所以  $\int_0^{1/2} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$  收敛. 若  $p \leq -1$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx &\geq \int_0^{1/2} x^{-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = - \int_0^{1/2} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^q d \ln \frac{1}{x} \\ &= - \frac{[\ln(1/x)]^{q+1}}{q+1} \Big|_0^{1/2} = +\infty, \end{aligned}$$

所以, 此时  $\int_0^{1/2} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$  发散.

综上所述, 当且仅当  $p > -1, q > -1$  时,  $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$  收敛.

• 例 8 判别  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$  的敛散性时, 下列两种解法中哪一种是错误的? 为什么?

$$\begin{aligned} \text{解法 1 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_{-a}^a \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \{ \ln(1+a^2) - \ln[1+(-a)^2] \} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 2 } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^b, \end{aligned}$$

由于两个极限都不存在, 所以该积分发散.

答 解法 1 是错误的. 依定义, 当且仅当  $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx$  与  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$  都收敛时,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$  才收敛, 且  $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx$  与



$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$  中  $x \rightarrow \infty$  的速度并不一定相同,故一般不会出现解法 1 中

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \{ \ln(1+a^2) - \ln[1+(-a)^2] \} = 0$$

的情况. 所以应按定义确定解法 2 正确.

• 例 9 判别积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$  的敛散性时, 下列两种解法中哪一种是错误的? 为什么?

$$\begin{aligned} \text{解法 1 } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} &= \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{1+x} \Big|_1^b = \ln 2, \end{aligned}$$

所以  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$  收敛.

解法 2  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b - \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(1+x) \Big|_1^b$ , 因为两个极限都不存在, 所以  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$  发散.

答 解法 2 是错误的. 当且仅当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  都存在时, 才有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

而解法 2 中两个极限都不存在, 所以不能利用极限运算法则. 在解法 1 中, 先利用对数计算法则, 再取极限是合理的, 故正确.

例 10 证明下列等式:

$$(1) \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^2};$$

$$(3) \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{16}.$$

证 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{\ln x}{1+x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = 0,$$

所以依比较判别法的极限形式, 题(1)、(2)、(3) 中的三个积分都收敛.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx & \xrightarrow{x=1/t} \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt \\ & = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt, \end{aligned}$$

$$\text{移项即得} \quad \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx.$$

(2) 由分部积分法得

$$\int_0^1 x^n \ln x dx = -\frac{1}{(n+1)^2}, \quad \int_0^1 x^n \ln^2 x dx = \frac{2}{(n+1)^3},$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx & = \int_0^1 \left[ \ln x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \ln x dx \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx & = \int_0^1 \left[ \ln^2 x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} \ln^2 x dx \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{16}. \end{aligned}$$

最后一个等式可由  $f(x)=x^2$  在  $[-1,1]$  上的 Fourier 级数展开式

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos \pi x}{\pi^2 n^2} \quad (|x| \leq 1)$$

逐项积分后取  $x=1/2$  得到.



• 例 11 设  $f$  在  $[a, c) \cup (c, b]$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ , 那么反常积分  $\int_a^b f(x) dx$  能否用极限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right]$$

来定义?为什么?讨论积分  $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$  的敛散性.

解 不能用极限  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right]$  来定义, 因为  $c$  是被积函数的奇点, 依定义, 应该有

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx,$$

即  $x$  从  $c$  的两侧趋于  $c$  的速度不一定相同. 如果让  $x \rightarrow c$  的两侧速度相同, 很可能会出现两个本来都不存在的极限相互抵消的情形, 从而得出错误的结论.

• 例 12 讨论下列反常积分的敛散性:

- (1)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} \quad (p, q > 0)$ ; (2)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (p, q > 0)$ ;  
(3)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx \quad (n \text{ 为正数})$ ; (4)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$ .

解 (1)  $x=0, x=\pi/2$  是被积函数奇点, 故

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

关于  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ , 对任意的  $q$ , 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} / \frac{1}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{\sin x} \right)^p \frac{1}{\cos^q x} = 1,$$

所以  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$  当  $p < 1, q$  任意时收敛.

关于  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ , 对任意的  $q$ , 由于

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} / \frac{1}{(\pi/2 - x)^q}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left( \frac{\pi/2 - x}{\cos x} \right)^q \left( \frac{1}{\sin x} \right)^p \xrightarrow{t = \pi/2 - x} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{t}{\sin t} \right)^q = 1,$$

所以  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$  当  $q < 1, p$  任意时收敛.

综上所述,  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$  当  $p < 1, q < 1$  时收敛.

(2)  $x = 1$  是被积函数的奇点, 故

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

关于  $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ , 对于任意的  $p$ , 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^p \ln^q x} / \frac{1}{(x-1)^q}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^p} \left( \frac{x-1}{\ln x} \right)^q = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x-1}{\ln x} \right)^q \xrightarrow{L'} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{1/x} \right)^q = 1,$$

所以  $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  当  $q < 1, p$  为任意值时收敛.

关于  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ , 对  $p > 1$ , 取  $a > 0$  充分小, 使得  $p-a > 1$ ,

则对任意的  $q$ , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^p \ln^q x} / \frac{1}{x^{p-a}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a \ln^q x} = 0,$$

所以  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  收敛; 如果  $p \leq 1, q < 1$ , 则因为

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \geq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \left. \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} \right|_2^{+\infty} = +\infty,$$

故  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  发散.

综上所述,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  当  $p > 1, q < 1$  时收敛.



(3)  $x=0$  是被积函数的奇点, 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$$

关于  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ , 当  $n > 1$  时, 取  $a$  充分小, 使得  $n-a > 1$ .

因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} / \frac{1}{x^{n-a}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^a} = 0$ ,

所以  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$  当  $n > 1$  时收敛, 当  $n \leq 1$  时, 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} / \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty,$$

所以  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$  当  $n \leq 1$  时发散.

关于  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ , 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^n} / \frac{1}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

所以  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$  当  $n < 2$  ( $n-1 < 1$ ) 时收敛.

综上所述, 当  $1 < n < 2$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$  收敛.

(4)  $x=0$  是被积函数的奇点, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} / \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{x}{\sin x} \right)^{1/3} \sqrt[3]{\sin x} \ln(\sin x) \right] = 0,$$

所以  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$  收敛.

• 例 13 证明: 当  $p > 0, q > 0$  时,  $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  收敛.

此时, 该反常积分是参数  $p, q$  的函数, 称为 Beta 函数, 记作

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, q > 0).$$

进而证明 Beta 函数具有下列性质:

$$(1) B(p, q) = B(q, p);$$

$$(2) \text{ 当 } q > 1 \text{ 时, } B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1),$$

$$\text{当 } p > 1 \text{ 时, } B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q);$$

$$(3) \text{ 若 } m, n \in \mathbf{N}_+, \text{ 则 } B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

证 当  $p > 1, q > 1$  时,  $B(p, q)$  为定积分.

当  $0 < p < 1, q \geq 1$  时, 被积函数只有  $x = 0$  一个奇点, 因为

$\int_0^1 x^{p-1} dx$  收敛, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^p - 1} = 1 \neq 0,$$

所以,  $B(p, q)$  当  $0 < p < 1, q \geq 1$  时收敛.

当  $p \geq 1, 0 < q < 1$  时, 被积函数只有  $x = 1$  一个奇点, 因为

$\int_0^1 (1-x)^{q-1} dx$  收敛, 且

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^q - 1} = 1 \neq 0,$$

所以,  $B(p, q)$  当  $p \geq 1, 0 < q < 1$  时收敛.

当  $0 < p < 1, 0 < q < 1$  时, 被积函数有  $x = 0$  与  $x = 1$  两个奇点, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \\ &= \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx. \end{aligned}$$

由前面讨论知两个积分都收敛, 所以,  $B(p, q)$  当  $0 < p < 1, 0 < q < 1$  时收敛.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx & \xrightarrow{t=1-x} \int_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt \\ &= \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx, \end{aligned}$$

故  $B(p, q) = B(q, p).$



(2) 当  $q > 1$  时, 有

$$\begin{aligned}
 B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{q-1} \frac{1}{p} dx^p \\
 &= \frac{1}{p} x^p (1-x)^{q-1} \Big|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx \\
 &= \frac{q-1}{p} \int_0^1 [x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)] (1-x)^{q-2} dx \\
 &= \frac{q-1}{p} \left[ \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-2} dx - \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \right] \\
 &= \frac{q-1}{p} [B(p, q-1) - B(p, q)],
 \end{aligned}$$

移项即得  $B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1).$

类似可证, 当  $p > 1$  时,

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q).$$

(3) 当  $m, n \in \mathbb{N}_+$  时, 有

$$\begin{aligned}
 B(n, m) &= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 (1-x)^{m-1} dx^n \\
 &= \frac{1}{n} x^n (1-x)^{m-1} \Big|_0^1 + \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^n (1-x)^{m-2} dx \\
 &= \frac{m-1}{n} B(n+1, m-1) \\
 &= \frac{(m-1)(m-2)}{n(n+1)} B(n+2, m-2) \\
 &= \cdots = \frac{(m-1)!}{n(n+1)\cdots(n+m-2)} B(n+m-1, 1) \\
 &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-2)!} \frac{1}{n+m-1} x^{n+m-1} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}.
 \end{aligned}$$

由于  $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(m) = (m-1)!,$   
 $\Gamma(n+m) = (n+m-1)!,$

故  $B(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}.$

**例 14** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有界, 且导数连续, 又对任意实数  $x$ , 有  $|f(x) + f'(x)| \leq 1$ , 证明:  $|f(x)| \leq 1$ .

证 令  $F(x) = e^x f(x)$ , 则

$$F'(x) = e^x [f(x) + f'(x)].$$

故  $|F'(x)| \leq e^x$ , 即  $-e^x \leq F'(x) \leq e^x$ .

因此  $\int_{-\infty}^x -e^x dx \leq \int_{-\infty}^x F'(x) dx \leq \int_{-\infty}^x e^x dx$ ,

即  $-e^x \leq F(x) \Big|_{-\infty}^x = e^x f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x f(x) = e^x f(x) \leq e^x$ .

故  $-1 \leq f(x) \leq 1$ , 即  $|f(x)| \leq 1$ .

**例 15** 设  $f(0) = 1, f'(x) = \frac{1}{e^x + |f(x)|} (x \geq 0)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 证明:  $\sqrt{2} \leq A \leq 1 + \ln 2$ .

证 由题设知

$$\begin{aligned} A - 1 &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= -\ln(1 + e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2, \end{aligned}$$

所以  $A \leq 1 + \ln 2$ .

因为  $f(x)$  单调增加, 所以  $|f(x)| = f(x) \leq A$ .

$$\begin{aligned} A - 1 &\geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + A} \xrightarrow{e^x = t} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{At + t^2} \\ &\geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{At^2 + t^2} = \frac{1}{A+1} \left( -\frac{1}{t} \right) \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{A+1}, \end{aligned}$$

即  $(A+1)(A-1) \geq 1 \Rightarrow A^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow A \geq \sqrt{2}$ .

### 综合练习题

• 1. 为了控制人口的增长, 需要由当前的人口统计数预测若干年后的人口数. 假设某城市在时刻  $t$  净增人口 (指出生人口) 以



每年  $r(t) = 5 \times 10^4 + 10^5 t$  的速率增长, 考虑到人口的死亡与迁移, 在  $t_1$  时刻的人口数  $N(t_1)$  只有一部分在  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) 时刻存在, 设为  $\bar{h}(t_2 - t_1)N(t_1)$ , 其中  $h(t) = e^{-t/40}$ , 如果已知 1990 年该市人口数为  $10^7$ , 试求 2000 年该市的人口数.

**解** 以 1990 年为  $t = 0$  时刻, 则 2000 年为  $t = 10$ . 今设时刻  $t$  的人口数为  $N(t)$ , 则在时间间隔  $[t, t + \Delta t]$  上人口数的改变量

$$\begin{aligned}\Delta N &= N(t + \Delta t) - N(t) = r(t)\Delta t + h(\Delta t)N(t) - N(t) \\ &\approx r(t)\Delta t - \frac{1}{40}N(t)\Delta t,\end{aligned}$$

由此得出  $\frac{dN}{dt} + \frac{1}{40}N(t) = r(t)$ , 且  $N(0) = 10^7$ .

解上述一阶线性微分方程, 得

$$N(t) = 16.8e^{-t/40} \times 10^7 + 4 \times 10^5 t - 15.8 \times 10^7,$$

从而知, 2000 年该市的人口数为

$$N(10) \approx 1.2838 \times 10^7.$$

• 2. 将放射性核废料装在密封的圆桶内并沉入水底约 91 m 的海底是美国原子能委员会设计的处理核废料的一种方法. 试验证明, 当圆桶到达海底的速度超过 12.2 m/s 时, 圆桶会因碰撞破裂而造成核泄漏. 设圆桶的体积为  $0.208 \text{ m}^3$ , 质量为  $239.456 \text{ kg}$ , 海水的浮力为  $10054.2 \text{ N/m}^3$ , 圆桶下沉时的阻力与下沉的速度成正比, 比例系数  $k = 1.176$ . 又圆桶下沉的初速度为零. 试求圆桶下沉的速度与下沉的深度之间的关系. 又圆桶到达海底时会因碰撞而破裂吗(取重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ )?

**解** 设圆桶的质量为  $m$ , 重力  $G = mg$ , 浮力为  $F_B$ , 阻力  $F_R$ , 则

$$B = 10054.2 \times 0.208 = 2091.2736$$

取  $y$  轴竖直向下, 原点为海平面(即圆桶开始下沉的位置). 并设开始下沉的时刻  $t = 0$ , 则经过时间  $t$ , 圆桶所在位置为  $y(t)$ , 下沉速度为  $v(t)$ . 于是, 由题设可得

$$y(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad F_R = kv = k \frac{dy}{dt}.$$

依据牛顿第二定律,有  $G - F_B - F_R = m \frac{dv}{dt}$ , 即

$$m \frac{dv}{dt} = G - F_B - kv.$$

将  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$ ,

代入上式,得到关于速度与位移关系的一阶微分方程

$$v \frac{dv}{dy} = \frac{G - F_B - kv}{m} \Rightarrow \frac{v dv}{G - F_B - kv} = \frac{dy}{m}, \quad v|_{y=0} = 0.$$

两边积分,得

$$-\frac{v}{k} - \frac{G - F_B}{k^2} \ln(G - F_B - kv) = \frac{y}{m} + C.$$

代入初始条件  $v|_{y=0} = 0$ , 得

$$C = -\frac{G - F_B}{k^2} \ln(G - F_B),$$

故方程的解(即圆桶下沉速度与下沉深度的关系式)为

$$-\frac{v}{k} - \frac{G - F_B}{k^2} \ln \frac{G - F_B - kv}{G - F_B} = \frac{y}{m}.$$

将题给数据  $y = 91 \text{ m}$ ,  $G = mg = 2346.6688 \text{ N}$ ,  $F_B = 2091.2736 \text{ N}$ ,  $m = 239.456 \text{ kg}$ ,  $k = 1.176$  代入,可算得

$$v \approx 13.64 \text{ m/s} > 12.2 \text{ m/s}.$$

从而知圆桶到达海底时会因碰撞而破裂.

• 3. 某工厂生产某产品经过两道工序,第一道工序在甲车间进行,第二道工序在乙车间进行,甲车间的产品作为乙车间的原料.甲车间的生产速度为每月 500 件,乙车间的生产速度为每月 100 件.由于受到乙车间生产能力的限制,甲车间要进行等周期的有间断的生产,同时还必须保证乙车间不停工待料.甲的产品运到乙之前要包装,平均每批产品(即一个周期内生产的产品)的包装费为 5 元.如果甲车间的产品运送到乙车间后暂时来不及加工,则要花储存费用,每件产品每天的储存费为 0.006 元.

(1) 试将一个月用于包装和储存产品的总费用  $y$  表示为生



产周期  $T$  (单位: d) 的函数  $y = f(T)$ ;

(2) 求最优生产周期  $T_0$ , 使  $f(T)$  最小, 并求甲车间在一个周期  $[0, T_0]$  内的实际生产天数  $t_0$ .

**解** 一个月以 30 d 计算.

(1) 一个月内用于包装的费用

$$C_1 = \frac{30}{T} \times 500 = \frac{1500}{T}.$$

设甲车间连续生产一批产品后再等待下一批生产, 则由题设知, 在一个周期  $[0, T]$  内, 甲车间的实际生产时间为  $[0, T/5]$ . 且在  $[0, T/5]$  时间内一边生产一边供应乙车间产品生产, 并将多余产品储存起来. 若设在一个周期  $[0, T]$  内的任意时刻  $t$ , 产品储存量为  $q(t)$ , 则依题意

$$q'(t) = \frac{500}{30} - \frac{100}{30} = \frac{400}{30}, \quad \forall t \in [0, \frac{T}{5}], \quad q'(t) = -\frac{100}{30},$$

$$\forall t \in (\frac{T}{5}, T], \quad q(0) = 0, \quad q(\frac{T}{5}) = \frac{80}{30}T, \quad q(T) = 0.$$

画出  $q(t)$  的图形如图 3.6.1 所示. 由此得出一个周期内的储存费用

$$C = 0.006 \int_0^T q(t) dt = 0.008T^2.$$

日平均储存费为  $\bar{C} = 0.008T$ , 故一个月内的储存费为  $30 \times 0.008T$ . 一个月内的总费用函数为

$$y = f(T) = C_1 + C_2 = 30 \left( \frac{5}{T} + 0.008T \right).$$

(2)  $f'(T) = 30(0.008 - 5/T^2)$ , 令

$f'(T) = 0$ , 得  $T_1 = 25$  (负值舍去).

$$f''(T) = 300/T^3 \Rightarrow f''(25) = 300/25^3 > 0.$$

所以,  $T = 25$  是极小值点, 因为极值点唯一, 故  $T = 25$  又是最小值点. 从而知, 所求最优周期为  $T_0 = 25$  d. 甲车间在一个周期  $[0, T_0]$  内实际生产天数  $t = T_0/5 = 5$  d.

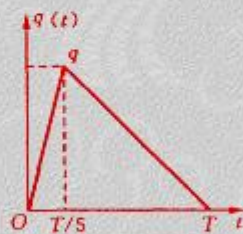


图 3.6.1

(2) **绝对收敛准则** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

若绝对值级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **绝对收敛**; 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **条件收敛**.

(3) 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则任意交换它的各项次序所得到的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$  也绝对收敛, 且它们的和相等.

(4) 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都绝对收敛, 其和分别为  $A, B$ , 则它们各项相乘得到的所有可能的乘积项  $a_n b_m$  按任何次序排列所得的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  也绝对收敛, 且其和为  $AB$ .

### 疑难解析

1. 怎样理解无穷级数收敛的概念?

**答** 无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是无穷多项的和(简称无限和), 与有限多项的和(简称有限和)不同, 有限和是一定存在的, 但无限和不一定存在. 例如

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2, \text{和是有限数;}$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots = +\infty, \text{和是无穷大;}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots, \text{和是不确定数.}$$

当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和是有限数时称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

但是, 无限和与有限和之间又有着密切的联系. 级数的前  $n$  项



的和是一个有限和,当  $n$  取不同值时,得到一个部分和序列  $\{S_n\}$ . 而无限和  $S$  等于有限和的极限,即  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . 因此,判别级数的敛散性可以归结为判别它的部分和序列的敛散性,求级数的和实质上就是求部分和数列的极限.

2. 应该怎样使用比较准则?

答 利用比较准则来判别级数的敛散性,关键在于选择一个已知敛散性的级数作为比较级数. 由第二比较准则可以这样思考问题:若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的通项  $a_n \sim 0 \ (n \rightarrow \infty)$ , 则级数一定发散;若  $a_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ , 则可以通过分析  $\{a_n\}$  的无穷小阶数,选择通项  $b_n$  和  $a_n$  同阶、低阶或高阶无穷小的已知敛散性的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  作为比较级数. 因此,我们应该牢记一些敛散性已知的级数,如等比级数、 $p$  级数等.

### 典型例题与习题详解

• 例 1 试用级数的理论解释《庄子》中所说的“一尺之棰,日取其半,万世不竭”.

解 “一尺之棰,日取其半”一句,可以用数据表示为一个无穷数列  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ , 将其各项用加号连接起来,就是一个无穷级数,且收敛于 1. 即

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

由于  $n \rightarrow \infty$  时,  $a_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$  但不为 0, 因此数据是无穷尽的,从而充分体现了“万世不竭”的思想.

• 例 2 已知级数的部分和  $S_n$  如下,试写出该级数并求出它们的和:

$$(1) S_n = \frac{2n}{n+1}; \quad (2) S_n = \frac{3^n - 1}{3^n}.$$

解 (1) 当

$$a_1 = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right), a_2 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \dots, a_n = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \dots$$

$$\text{时, 有 } S_n = \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}.$$

所以, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ , 且和

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

(2) 当  $a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{2}{3^2}, \dots, a_n = \frac{2}{3^n}, \dots$  时, 有

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] / \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3^n - 1}{3^n}.$$

所以, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ , 且和

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{3^n} = 1.$$

• 例 3 利用级数收敛的定义判别下列级数的敛散性, 并对收敛级数求和:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 1}{q^n} \quad (|q| > 3); \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}.$$

解 为了易于判别级数的敛散性, 常常需要对级数的项进行恒等变形、拼、拆、凑以及添加或去掉括号, 但一定要符合级数的性质.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 1}{q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{q}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n, \text{ 因为 } \left|\frac{3}{q}\right| < 1,$$

$\left|\frac{1}{q}\right| < 1$ , 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{q}\right)^n$  收敛于  $\frac{3}{q-3}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n$  收敛于  $\frac{1}{q-1}$ , 从



而  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+1}{q^n}$  收敛, 且和

$$S = \frac{q}{q-3} + \frac{q}{q-1} = \frac{2q(q-2)}{(q-3)(q-1)}.$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } S_n &= \frac{1}{3} \left[ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+4}\right). \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+4}\right) = \frac{1}{3},$$

所以级数收敛, 且和  $S = 1/3$ .

$$\begin{aligned} (3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S''_n &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n + S''_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{2} - 1)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - (\sqrt{2} - 1) \right] = 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

所以,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$  收敛,和为  $1 - \sqrt{2}$ .

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln n - \ln(n+1)],$$

$$S_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + [\ln n - \ln(n+1)] \\ = -\ln(n+1) \rightarrow -\infty,$$

所以,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$  发散.

• 例4 证明:数列  $\{a_n\}$  收敛  $\Leftrightarrow$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$  收敛. 这个结论说明,也能将研究数列的敛散性问题转化为研究级数的敛散性问题.

证 必要性 若  $\{a_n\}$  收敛,则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,而

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

$$\text{所以 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_1) = a - a_1,$$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$  收敛.

充分性 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$  收敛,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_1) = a,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a + a_1,$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a + a_1.$$

说明数列  $\{a_n\}$  极限存在.

• 例5 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛,证明  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  必发散.

若这两个级数都发散,上述结论是否成立?



证 用反证法证. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  收敛, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 与题设矛盾. 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  必发散.

类似可证,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$  也发散.

若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  不一定发散. 例如:

$\sum_{n=1}^{\infty} 1$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)$  也发散, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} 0$  收敛;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  也发散, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  收敛.

所以, 两个级数都发散时, 上述结论不一定成立.

• 例 6 已知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$ , 求  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的和.

解 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ , 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + \cdots,$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} + \cdots) = 2 - 5 = -3.$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 5 + 3 = 8.$$

• 例7 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的前  $2n$  项之和  $S_{2n} \rightarrow A$ , 并且  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 证明该级数收敛且其和为  $A$ .

证 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = A, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = A,$$

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A$ , 即级数收敛且其和为  $A$ .

• 例8 利用级数的性质判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{(1+1/n)^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} \right); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \left( 1 + \frac{\pi}{n^2} \right).$$

解 可以利用收敛的必要条件以及一些常用性质, 并利用一些已知的极限与已知敛散性的级数来帮助判别.

(1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$ , 不满足级数收敛的必要条件, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{(1+1/n)^n}$  发散.

(2) 因为  $a_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \pi$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \pi = \pi \neq 0$ , 不满足级数收敛必要条件, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$  发散.

(3) 因为  $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} \right)$  发散.

(4) 因为  $a_n = n^2 \ln \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right) = \ln \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{x}}$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{x}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{x}} = \ln e^x = x.$$



所以,当  $x = 0$  时,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)$  收敛;

当  $x \neq 0$  时,级数不满足收敛的必要条件,发散.

• 例 9 试求在第  $i$  点钟到第  $i+1$  点钟之间的什么时间,时钟上的分针与时针重合.

解 因为时钟的分针与时针一定在 0 时与 12 时重合,在 0 与 12 时之间重合 10 次.所以,可以将 1 个小时等分为 11 个时间间隔,即

$$0 + \frac{0}{11}, 1 + \frac{1}{11}, 2 + \frac{2}{11}, \dots, 10 + \frac{10}{11}, 11 + \frac{11}{11}.$$

由此可见,在  $i + \frac{i}{11}$  ( $i = 1, 2, \dots, 11$ ),时钟的时针与分针重合.

• 例 10 试用 Cauchy 收敛原理证明:若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

证 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.依 Cauchy 收敛原理,  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists N \in \mathbb{N}_+$ ,使得  $\forall p \in \mathbb{N}_+$ ,当  $n > N$  时,恒有  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$ .

不妨设  $p = 1$ ,则  $|a_n| < \varepsilon$ ,即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

• 例 11 下列命题是否正确?若正确,给出证明;若不正确,举出反例.

(1) 若  $a_n \leq b_n$ ,且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛,则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  必收敛;

(2) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ ,则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  必收敛;

(3) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,且  $a_n > 0$ ,则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1$ ;

(4) 若数列  $\{a_n\}$  单调减少,且  $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ,则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  必收敛.

(5) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  必发散;

(6) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  必收敛.

解 (1) 仅当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都是正项级数时, 若  $a_n \leq b_n$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. 因为, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛于  $T$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq T,$$

可知  $\{S_n\}$  有界, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

在一般情况下,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  不一定收敛. 如  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛,  $-1 < \frac{1}{2^n}$ , 但  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  显然发散.

(2) 仅当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都是正项级数时, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛. 因为,  $\forall \varepsilon = \frac{1}{2}, \exists N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$  时, 恒有

$$1 - \frac{1}{2} \leq \frac{b_n}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}a_n \leq b_n \leq \frac{3}{2}a_n,$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

在一般情况下,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  不一定收敛. 例如  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  收敛,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right] / \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1,$$

但  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$  发散.



(3) 命题不正确. 例如  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 且  $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$ , 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

(4) 命题不正确. 例如数列  $\left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right\}$  是单调减少的, 且  $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 但因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right)$  发散.

(5) 命题不正确. 例如级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛.

(6) 命题正确. 因为, 由不等式

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \Rightarrow \left| a_n \cdot \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left( a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  都收敛, 从而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|$  收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  绝对收敛.

• 例 12 判别下列正项级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 - \ln n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{n!}.$$

解 判别级数的敛散性, 可以用级数的基本性质、必要条件、比较准则以及各种比值判别方法. 无论用什么方法, 都要从级数的实际出发, 具体分析所给级数, 选择恰当的方法.

(1) 因为  $a_n = \frac{1}{3^n + 2} < \frac{1}{3^n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  收敛, 所以依第一比较准

则,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$  收敛.

(2) 因为  $a_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \cdot \frac{n}{(n+1)^2}$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{e},$$

已知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以依第二比较准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$  发散.

(3) 因为  $a_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^p} = \frac{4}{n^p(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}$ ,

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^p(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})} / \frac{1}{n^p} = A$ ,

所以 1) 当  $a > \frac{1}{2}$  时,  $p > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛, 原级数收敛;

2) 当  $a \leq \frac{1}{2}$  时,  $p \leq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  发散, 原级数发散.

(4) 因为  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 - \ln n}$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n}}{n^2 - \ln n} / \frac{1}{n^{3/2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \ln n / n^2} = 1,$$

已知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  收敛, 所以依第二比较准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 - \ln n}$  也收敛.

(5) 因为

$$0 \leq a_n = \frac{n^3[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \leq \frac{n^3(\sqrt{2} + 1)^n}{3^n},$$

依 D'Alembert 比值法, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3(\sqrt{2}+1)^{n+1}}{3^{n+1}} / \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$  收敛, 依第一比较准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$



收敛

(6) 因为  $a_n = \frac{2^n n^2}{n!}$ , 依 D'Alembert 比值法, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)^2}{(n+1)!} \bigg/ \frac{2^n n^2}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n^2} = 0,$$

所以, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n!}$  收敛.

• 例 13 设  $|r| < 1$ , 利用级数理论证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ .

证 对于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |nr^n|$  使用 Cauchy 准则, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|nr^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |r| < 1,$$

所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |nr^n|$  收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$  绝对收敛. 依级数收敛的必要条件知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ .

• 例 14 讨论下列交错级数的敛散性, 并对收敛级数说明是绝对收敛还是条件收敛.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n - \ln n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 0, a \neq 1).$$

解 (1) 因为  $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3^n n!}$ , 依 D'Alembert

比值法, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}{3^{n+1} (n+1)!} \bigg/ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3^n n!} = \frac{2}{3} < 1,$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3^n n!}$  绝对收敛.

(2) 因为  $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} > 0$ , 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} / \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

已知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$  不绝对收敛.

但是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ , 故依 Leibniz

准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$  收敛, 所以是条件收敛.

(3) 因为  $a_n = \frac{1}{n - \ln n} > 0$ , 且  $\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n - \ln n}$  不绝对收敛. 又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 - \ln n/n} = 0$ .

再设  $f(x) = x - \ln x$ , 由

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 1)$$

知,  $n - \ln n$  单调增加. 即  $1/(n - \ln n)$  单调减少. 于是依 Leibniz 准

则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n - \ln n}$  收敛, 所以是条件收敛.

(4) 设  $f(n) = \sqrt[n]{a} - 1$ , 则不论  $a > 1$  或  $a < 1$ , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{1/n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1/x} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{1/x} \ln a}{-1/x^2} = \infty,$$

所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{a} - 1)$  不绝对收敛.

但是,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0$ ,



且  $f'(x) = -a^{1/x}/x^2 < 0 \quad (x > 1)$ ,

即  $\sqrt[n+1]{a} - 1 < \sqrt[n]{a} - 1$ , 从而依 Leibniz 准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{a} - 1)$  收敛, 所以级数条件收敛.

• 例 15 下列级数是否交错级数? 是否满足 Leibniz 准则? 是否收敛?

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad (4) \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots.$$

解 (1)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$ , 所以级数不是交错级数. 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n-2} / \frac{1}{n} \right) = 1,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 依第二比较准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$  发散.

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$  不是交错级数. 当  $n$  为奇数时,  $a_n = 0$ ; 当  $n$  为偶数时,  $a_n > 0$ . 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} / \frac{1}{n^2} = 1,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 依第二比较准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$  收敛.

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  是交错级数. 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

设  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}} < 0 \quad (x > 0).$$

所以  $f(x)$  单调减少, 即  $a_n > a_{n+1}$ . 依 Leibniz 准则, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  收敛.

(4)  $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$  是交错级数,  $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ .

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} / \frac{1}{n+1} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\ln(x+1)} \stackrel{L'}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x+1 = \infty$ ,

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  发散, 依第二比较准则, 级数  $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$  发散.

• 例 16 判别下列级数的敛散性:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$  ( $p > 0$ ,  $|a| \neq 1$ );

(2)  $a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \dots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} + \dots$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ).

解 (1) 对于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$ , 由 D'Alembert 比值法得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |a|.$$

所以, 当  $|a| < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$  收敛; 当  $|a| > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$  发散.

(2) 对于级数  $a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \dots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} + \dots$  要分不同情况进行讨论, 确定其敛散性.

当  $a = b$  时, 级数化为

$$a \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

依 Leibniz 准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  收敛, 所以此时原级数收敛, 但是,



$a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故此时级数条件收敛.

当  $a \neq b$  时, 对级数加括号得

$$\left(a - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n}\right) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n,$$

$$\text{因为 } C_n = \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} = \frac{2n(a-b) + b}{2n(2n-1)} = \frac{a-b}{2n-1} + \frac{b}{2n(2n-1)},$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a-b}{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{2n(2n-1)}.$$

但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a-b}{2n-1} = (a-b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{2n(2n-1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{n^2}$  收

敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  发散. 由于加括号后的级数发散, 原级数一定发散,

于是知当  $a \neq b$  时, 级数  $a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots + \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n} + \cdots$  发散.

• 例 17 计算  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$  的近似值, 使绝对误差小于  $10^{-3}$ .

解 级数为交错级数. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0, \quad \frac{1}{(2n-1)!} > \frac{1}{(2n+1)!},$$

所以依 Leibniz 准则, 级数收敛. 要求误差要小于  $10^{-3}$ , 需确定  $n$  的值, 由于

$$|r_n| \leq \frac{1}{(2n-1)!} < 10^{-3}, \quad \text{即 } (2n-1)! > 1000,$$

故可取  $n=4$ , 得

$$S \approx S_3 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0.8417.$$

• 例 18 下列级数中哪些是绝对收敛的, 哪些是条件收敛的?

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!}{n\sqrt{n}};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{n}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(2+1/n)}{\sqrt{9n^2-4}}.$$

解 (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!}{n\sqrt{n}}$  是任意项级数. 因为  $|a_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!}{n\sqrt{n}}$  绝对收敛.

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{n}{2^n}$  是任意项级数. 因为  $|a_n| = \frac{n}{2^n}$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n/2^n} = \frac{1}{2} < 1$ , 依 Cauchy 准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{n}{2^n}$  绝对收敛.

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  是交错级数,  $\left| (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right| = \frac{1}{n^{1/n}}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/n}}$  发散, 所以原级数不绝对收敛.

$$\text{但是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}},$$

故依 Leibniz 准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  收敛, 所以是条件收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(2+1/n)}{\sqrt{9n^2-4}} \text{ 是交错级数, 因为}$$

$$a_n = \frac{\ln(2+1/n)}{\sqrt{9n^2-4}} > \frac{1}{3n},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$  发散, 所以原级数不绝对收敛.



但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+1/n)}{\sqrt{9n^2-4}} = 0,$$

$$\frac{\ln(2+1/n)}{\sqrt{9n^2-4}} > \frac{\ln[2+1/(n+1)]}{\sqrt{9(n+1)^2-4}},$$

故依 Leibniz 准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(2+1/n)}{\sqrt{9n^2-4}}$  收敛, 所以是条件收敛.

**例 19** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为收敛的正项级数,  $\{a_{n_k}\}$  是  $\{a_n\}$  的一个子

列, 证明级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$  收敛.

**证** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则其部分和  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$ . 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$  的部分和为  $S'_n$ , 由于  $\{a_{n_k}\}$  是  $\{a_n\}$  的一个子列, 故  $\{S'_n\}$  是  $\{S_n\}$  的一个子列. 从而由  $\{S_n\}$  收敛, 得知  $\{S'_n\}$  收敛, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$  收敛.

**例 20** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  都收敛, 且  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , 证明

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

**证** 由题设  $a_n \leq b_n \leq c_n$  知,  $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$ , 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  都收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$  收敛. 依第一比较准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$  也收敛. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} [(b_n - a_n) + a_n]$$

收敛.

**例 21** 设  $a_n > 0$ , 证明:

(1) 若  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda < 1$  (或  $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda < 1$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 若  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  (或  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

证 (1) 设  $a_{n+1} \leq \lambda a_n, \lambda < 1$ , 则级数的各项成立

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \\ & \leq a_1 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_1 + \cdots + \lambda^n a_1 + \cdots \\ & = a_1 (1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n + \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \lambda^{n-1}. \end{aligned}$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \lambda^{n-1}$  是公比  $\lambda < 1$  的等比级数, 是收敛的, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(2) 由  $a_{n+1} > a_n$  可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , 不满足收敛的必要条件, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

• 例 22 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 令

$$\begin{aligned} a_n^+ &= \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0, \end{cases} \\ a_n^- &= \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n, & a_n < 0, \\ 0, & a_n \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

则  $a_n^+$  与  $a_n^-$  分别称为  $a_n$  的正部和负部. 证明:

(1) 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  都收敛;

(2) 任一绝对收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  都可以表示为两个收敛的正项

级数之差, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ .

证 (1) 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛和  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛, 所以依收敛级数的性质, 有



$$1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right] \text{收敛};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right] \text{收敛}.$$

(2) 因为

$$a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = \left( \frac{a_n}{2} + \frac{|a_n|}{2} \right) - \left( \frac{|a_n|}{2} - \frac{a_n}{2} \right) = a_n^+ - a_n^-,$$

由题(1)知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  都收敛, 且  $a_n^+ \geq 0$ ,  $a_n^- \geq 0$ . 从而, 任一绝对收敛的级数都可以表示为两个收敛的正项级数之差, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

**例 23** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{3n}}{n! a^n} = 0$ .

**证** 利用级数收敛的必要条件来证.

作正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b^{3n}}{n! a^n} \right|$ ,  $u_n = \left| \frac{b^{3n}}{n! a^n} \right|$ , 由 D'Alembert 比值法, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b^{3(n+1)}}{(n+1)! a^{n+1}} \cdot \frac{n! a^n}{b^{3n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{b^3}{a} \right| = 0 < 1. \end{aligned}$$

可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b^{3n}}{n! a^n} \right|$  收敛, 于是, 依级数收敛的必要条件, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b^{3n}}{n! a^n} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{3n}}{n! a^n} = 0.$$

**例 24** 证明:

(1) 若  $a_n \geq 0$ , 且  $\{m_n\}$  有界, 则级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\frac{1}{m_n}}$  收敛;

(2) 若数列  $\{m_n\}$  收敛, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$  收敛, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  也收敛.

证 (1) 因为  $a_n \geq 0$ , 且  $\{m_n\}$  有界, 所以  $\exists M > 0$ , 使得  $\forall n \in \mathbb{N}_+, 0 \leq m_n \leq M$ . 从而

$$0 \leq a_n \leq \frac{M}{n}, \quad a_n^2 \leq \left(\frac{M}{n}\right)^2.$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2} = M^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 于是  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  也收敛.

(2) 因为数列  $\{m_n\}$  收敛, 可设  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = A$ , 又  $\sum_{n=0}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$  收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  存在. 而

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 - a_0) + 2(a_2 - a_1) + 3(a_3 - a_2) + \cdots + n(a_n - a_{n-1}) \\ &= -a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} + m_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k + m_n, \end{aligned}$$

即 
$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = m_n - S_n,$$

所以 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (m_n - S_n) = A - S,$$

即级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛于  $(A - S)$ .

• 例 25 设  $a_n > 0, b_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

证 因为若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则依 D'Alembert 准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lambda < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1,$$



所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

• 例 26 设  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln a_n}{\ln n} = q$ , 证明:

(1) 若  $q > 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 若  $q < 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

证 (1) 已知  $q > 1$ , 故设  $q = 1 + \alpha$  ( $\alpha > 0$ ), 则由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln a_n}{\ln n} = q$  知,  $\exists N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$  时,  $\frac{-\ln a_n}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ , 即  $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ . 由

$p$  级数的性质知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$  收敛, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(2) 已知  $q < 1$ , 故设  $q = 1 - \beta$  ( $\beta > 0$ ), 则  $\exists N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$  时,  $\frac{-\ln a_n}{\ln n} \leq 1$ , 即  $a_n \geq \frac{1}{n}$ , 由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

例 27 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某一邻域内具有二阶连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛.

证 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  知  $f(0) = 0$ , 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0,$$

故依 Taylor 公式, 有

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0) \frac{1}{n} + \frac{1}{2} f''(0) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

所以,  $\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$  等价于  $\frac{f''(0)}{2n^2}$ , 由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛.

• 例 28 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1+\alpha}} \quad (\alpha > 0); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(5+n^3)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n+1} \right)^n \quad (\alpha > 0); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \tan(\sqrt{n^5+1}\pi);$$

$$(5) \sqrt{3} + \sqrt{3-\sqrt{6}} + \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6}}} + \cdots \\ + \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}+\cdots}}.$$

解 (1) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}$  ( $\alpha > 0$ ), 设  $\delta > 0$ , 使得  $1+\alpha-\delta > 1$ ,

则

$$\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}} = \frac{\ln n}{n^{\delta}} \cdot \frac{1}{n^{1+\alpha-\delta}},$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\delta}} = 0$ , 所以当  $n$  充分大时, 有

$$\frac{\ln n}{n^{1+\alpha}} \leq \frac{C}{n^{1+\alpha-\delta}} \quad (C > 0).$$

由于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha-\delta}}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1+\alpha}}$  收敛.

(2) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(5+n^3)}$ , 因为当  $n > 1$  时, 有

$$\frac{1}{n \ln(5+n^3)} > \frac{1}{n \ln n^3} \geq \frac{1}{4n \ln n} > \frac{1}{4n},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(5+n^3)}$  发散.

(3) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n+1} \right)^n$ , 因为  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{a^n}{n+1}$ , 所以依 Cauchy 准

则, 当  $a \leq 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n+1} \right)^n$  收敛. 当  $a > 1$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x+1} \stackrel{\text{L'}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \ln a > 1,$$



所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n+1}\right)^n$  发散.

(4) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(\sqrt{n^2+1}\pi)$ , 因为

$$\begin{aligned} a_n &= \tan[\sqrt{n^2+1}\pi] = \tan[n\sqrt{1+(1/n)^2}\pi] \\ &\geq \tan[n\pi + \pi/(2n)] \geq \pi/(2n), \end{aligned}$$

而  $\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(\sqrt{n^2+1}\pi)$  发散.

(5) 用数学归纳法可以证明.

$$\sqrt{3-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}},$$

$$\sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{6}}},$$

$\vdots$

$$\sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{6}+\cdots+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3-\sqrt{6}+\sqrt{6}+\cdots+\sqrt{6}}(n-1 \text{ 重根号})}{\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{6}+\cdots+\sqrt{6}}(n \text{ 重根号})},$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}+\sqrt{6}+\cdots+\sqrt{6}}} < 1.$

依 D'Alembert 准则知, 原级数收敛.

例 29 判别下列级数的敛散性:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx;$  (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\int_0^n \sqrt[n]{1+x^4} dx;$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^2(1-x)^n dx;$  (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$

解 (1) 因为  $a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ , 当  $x > 0$  时, 有

$$0 < a_n < \int_0^{1/n} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3n^{3/2}} = b_n,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^{3/2}}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$  收敛.

(2) 因为  $a_n = 1/\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx$ , 当  $x > 0$  时, 有

$$0 < a_n < 1/\int_0^n x dx = \frac{2}{n^2} = b_n,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx$  收敛.

(3) 因为  $a_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n dx$ , 利用分部积分得

$$a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / \frac{1}{n^3}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 2$ ,

所以由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  收敛知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^2(1-x)^n dx$  收敛.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \left( \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) \right] = \frac{1}{6}.$$

(4) 因为  $a_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$ , 而  $0 < a_n \leq e^{-\sqrt{n}}$ , 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-\sqrt{n}} / \frac{1}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 0,$$

所以由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛知,  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$  收敛.

**例 30** 设  $a_n > 0$ , 证明以下级数收敛:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

证 用收敛的定义证明. 因为

$$\begin{aligned} & \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)} \\ &= \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})} \\ & \quad - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}, \end{aligned}$$

所以 
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} > 0.$$

由于  $a_n > 0$ , 故  $\{S_n\}$  是单调减少有下界的数列, 所以级数收敛.

例 31 计算下列级数的和:

(1)  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots;$

(2)  $\frac{8}{3} + \frac{11}{3^2} + \frac{14}{3^3} + \cdots + \frac{3n+5}{3^n} + \cdots.$

解 可用组合法计算, 即利用  $S_n$  与  $aS_n$  的组合 (适当选取  $a \neq 0$ ), 求出  $S_n$ , 再求得  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

(1)  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n},$

$$2S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

则  $S_n = 2S_n - S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n}$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) / \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{2n-1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3,$$

所以, 原级数的和为 3.

(2)  $S_n = \frac{8}{3} + \frac{11}{3^2} + \frac{14}{3^3} + \cdots + \frac{3(n-1)+5}{3^{n-1}} + \frac{3n+5}{3^n}.$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S_n &= \frac{8}{3^2} + \frac{11}{3^3} + \frac{14}{3^4} + \cdots + \frac{3(n-1)+5}{3^n} + \frac{3n+5}{3^{n+1}}, \\ \frac{2}{3}S_n &= S_n - \frac{1}{3}S_n = \frac{8}{3} + 3\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) - \frac{3n+5}{3^{n+1}} \\ &= \frac{8}{3} + 3\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^n}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3n+5}{3^{n+1}}\right),\end{aligned}$$

$$\text{则 } S_n = 4 + \frac{27}{4}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{3}{2} \frac{3n+5}{3^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} + 4 = \frac{19}{4},$$

所以,原级数之和为  $19/4$ .

**例 32** 用 Cauchy 审敛原理证明下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad (2) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \cdots;$$

$$(3) \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n} + \cdots.$$

**解** 利用 Cauchy 审敛原理证明问题,关键是把握好  $p$  的取法与  $N$  的确定.取法正确可以使证明过程简单.

(1) 因为  $\forall n, p \in \mathbf{N}_+$ , 有

$$\begin{aligned}& \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ & < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ & = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},\end{aligned}$$

故只需取  $N = [1/\varepsilon]$ , 则当  $n > N$  时, 即有

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(2) 由级数正、负项的规律性, 取  $p = 3n$ , 则

$$\begin{aligned}& |S_{n+p} - S_n| \\ &= \left| \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \left( \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left( \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \right|\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{4n-2} \\
 &> \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \cdots + \frac{1}{4n} = n \frac{1}{4n} = \frac{1}{4},
 \end{aligned}$$

所以, 取  $\varepsilon_0 = 1/4$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}_+$ ,  $\exists p = 3n$ , 使得

$$|S_{n+p} - S_n| > \varepsilon_0,$$

从而原级数发散.

(3)  $\forall p \in \mathbf{N}_+$ , 有

$$\begin{aligned}
 &|S_{n+p} - S_n| \\
 &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\
 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) / \left( 1 - \frac{1}{2} \right) < \frac{1}{2^n}.
 \end{aligned}$$

所以,  $\forall \varepsilon > 0$ , 只需取  $N = [\log_2(1/\varepsilon)] + 1$ , 则当  $n > N$  时,  $\forall p \in \mathbf{N}_+$ , 都有上式成立, 知级数收敛.

**例 33** 设  $u_n = (-1)^n \ln(1 + 1/\sqrt{n})$ , 则级数( ).

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  都收敛;    B.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  都发散;  
 C.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛而  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  发散;    D.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散而  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  收敛.

**解**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是交错级数,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + 1/\sqrt{n}) = 0$ , 又

$$\ln(1 + 1/\sqrt{n}) > \ln(1 + 1/\sqrt{n+1}),$$

依 Leibniz 准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛. 故 B 与 D 可排除. 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( u_n^2 / \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(1 + 1/\sqrt{n})}{1/n} = 1,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2(1 + 1/\sqrt{n})$  也发散, A 排除. 故选 C.

例 34 设  $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ ,

(1) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$  的值;

(2) 证明: 对任意的常数  $\lambda > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) &= \frac{1}{n} \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\pi/4} \tan^n x d \tan x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

所以 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

(2) 因为 
$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx \stackrel{t=\tan x}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \\ &< \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

所以 
$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}.$$

从而由  $p$  级数的敛散性与比较准则知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛.

例 35 设  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ , 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在; (2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/a_{n+1} - 1)$  收敛.

证 (1)  $a_n > 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1,$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_n} - a_n \right) = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leq 0,$$

知  $\{a_n\}$  单调减少有下界, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.

(2) 由题(1)知  $0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1}.$



记 
$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1},$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$  存在, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 从而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  收敛.

依第一比较准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛.

## 第二节 函数项级数

### 知识要点

1. 设  $\{u_n\}$  是定义在  $D \subset \mathbf{R}$  上的函数列, 则表达式  $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$  或  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  称为集合  $D$  上的函数项级数,  $u_n$  称为它的通项,

$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  称为它的部分和.

2. 设  $\{f_n\}$  是定义在  $D \subset \mathbf{R}$  上的函数列, 若对某个  $x_0 \in D$ , 数列  $\{f_n(x_0)\}$  收敛, 则称  $x_0$  是  $\{f_n\}$  的一个收敛点, 收敛点的全体称为  $\{f_n\}$  的收敛域. 若  $\forall x \in D$ , 数列  $\{f_n(x)\}$  都收敛, 则称  $\{f_n\}$  在  $D$  上处处收敛 (或逐点收敛). 由

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in D$$

所定义的函数  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  称为函数列  $\{f_n\}$  的处处 (逐点) 极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{或} \quad f_n \rightarrow f (n \rightarrow \infty).$$

3. 若  $x_0 \in D$  是  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的部分和函数列  $\{S_n\}$  的收敛点, 则称  $x_0$  为该级数的收敛点, 由收敛点的全体所构成的集合称为该级数的收敛域, 否则, 称发散点或发散域. 若  $\forall x \in D$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  处处 (逐

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D$  上一致收敛.

收敛的正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  称为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的优级数或控制级数.

8. 一致收敛级数具有以下性质:

(1) 和函数的连续性 设  $u_n \in C(I)$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ), 若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $I$  上一致收敛于  $S: I \rightarrow \mathbf{R}$ , 则和函数  $S \in C(I)$ .

(2) 和函数的可积性 设  $u_n \in C[a, b]$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ), 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $S: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , 则和函数  $S$  在区间  $[a, b]$  上可积, 且  $\forall x \in [a, b]$ ,

$$\int_a^x S(t) dt = \int_a^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt.$$

(3) 和函数的可导性 设  $u_n \in C^{(1)}(I)$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ), 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $I$  上处处收敛于函数  $S: I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$  在  $I$  上一致收敛于  $\sigma: I \rightarrow \mathbf{R}$ , 则和函数  $S \in C^{(1)}(I)$ , 并且

$$S'(x) = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sigma(x).$$

### 疑难解析

1. 函数项级数的处处收敛与一致收敛有何不同? 在一致收敛下函数项级数有何性质?

答 对函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 若部分和函数列  $\{S_n\}$  在  $x_0 \in D$  收敛, 则  $x_0$  为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的收敛点. 若  $\forall x \in D$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  都收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D$  上处处收敛.

如图 4.2.1 所示, 若函数列  $\{S_n\}$  处处收敛于函数  $S: D \rightarrow \mathbf{R}$ ,



要求  $\forall \epsilon > 0, \exists N(x, \epsilon) \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N(x, \epsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有  $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ . 可知  $N(x, \epsilon)$  对于不同的  $x$  与  $\epsilon$  是不同的. 如果对于不同的  $\epsilon > 0, N$  只与  $\epsilon$  有关, 而与  $x$  无关, 即  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N(\epsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有  $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ . 则称函数列  $\{S_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $S$ , 亦即  $S$  是

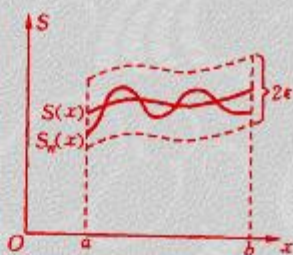


图 4.2.1

$\{S_n\}$  的一致极限. 此时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D$  上一致收敛于  $S$ .

从而得知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D$  上处处收敛与一致收敛的区别在于部分和函数列  $\{S_n\}$  是处处收敛还是一致收敛, 而部分和函数列  $\{S_n\}$  处处收敛与一致收敛的区别在于  $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N}_+$  是与  $\epsilon$  和  $x$  有关还是仅与  $\epsilon$  有关. 函数列  $\{S_n\}$  在  $D$  上一致收敛的几何意义是: 对于任给的  $\epsilon > 0$ , 当  $n > N(\epsilon)$  时, 所有函数  $S_n$  的图像都落到关于函数  $S$  图像对称的宽为  $2\epsilon$  的带形域之内.

一致收敛下的函数项级数有较好的分析性质, 如和函数的连续性、可积性与可导性, 而这是处处收敛级数所不具备的.

2. 怎样判别函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (或函数列  $\{f_n\}$ ) 在  $D$  上不一致收敛?

答 常用来判别函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (或函数列  $\{f_n\}$ ) 在  $D$  上不一致收敛的方法如下:

(1) 不一致收敛定义 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D$  上的部分和函数列  $\{S_n\}$  收敛于函数  $S: D \rightarrow \mathbf{R}$ , 但存在某  $\epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  及  $\forall x \in D$ , 有

$$|S_n(x) - S(x)| \geq \varepsilon_0,$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D$  上不一致收敛.

(2) Cauchy 准则的逆否命题.

(3) 和函数法 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的每一项  $u_n$  在  $I$  上连续, 而和函数

$S(x)$  在  $I$  上不连续, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $I$  上不一致收敛.

(4) 点列法 若  $\exists$  点列  $\{x_n\} \in I$ , 当  $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow x$ , 但  $\{S_n(x_n)\} \not\rightarrow S(x)$ , 则  $\{S_n(x_n)\}$  在  $I$  上不一致收敛.

3. 举例说明一致收敛是和函数的连续性、可积性、可导性的充分条件但不是必要条件.

答 设有函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right],$$

其部分和  $S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ , 在  $[0, 1]$  上, 和函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0,$$

但是, 在取  $\{x_n\} = \{1/n\}$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n(1/n) - S(1/n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1/n)}{1+(1/n)^2n^2} = \frac{1}{2} > 0.$$

所以, 此函数项级数在  $[0, 1]$  上不一致收敛.

但是函数项级数的通项

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$$

在  $[0, 1]$  上连续, 且

(1)  $\forall x_0 \in [0, 1]$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} S_n(x), \quad \text{即} \quad 0 = 0.$$

(2)  $\forall x \in [0, 1]$ , 有



$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx,$$

$$0 = \int_0^1 0 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0.$$

(3) 因为,  $\forall x \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right) \right], \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right], \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} - \frac{(n-1)-(n-1)^3x^2}{[1+(n-1)^2x^2]^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S'(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k-k^3x^2}{(1+k^2x^2)^2} - \frac{(k-1)-(k-1)^3x^2}{[1+(k-1)^2x^2]^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

4. 若函数列  $\{f_n\}$  中的每项  $f_n, \forall x \in (a, b)$  都不连续, 则  $\{f_n(x)\}$  在  $(a, b)$  内还一致收敛于连续函数  $f(x)$  吗?

答 可能. 例如

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

其每一项  $f_n(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内任一点都不连续, 但

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

连续, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

从而知  $\{f_n(x)\}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内一致收敛于连续函数  $f(x)$ .

### 典型例题与习题详解

• 例 1 证明: 若函数列  $\{f_n\}$  在  $D \subset \mathbb{R}$  上一致收敛于  $f$ , 则  $\{|f_n|\}$  在  $D$  上一致收敛于  $|f|$ .

证 若  $\{f_n\}$  一致收敛于  $f$ , 则依定义,  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N(\epsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因为  $|f_n(x)| - |f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ ,

所以  $||f_n(x)| - |f(x)|| < |f_n(x) - f(x)|$   
 $= |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$

从而, 对定义在  $D \subset \mathbf{R}$  上的一个函数列  $\{|f_n|\}$ , 存在一个函数  $|f|: D \rightarrow \mathbf{R}$ , 满足:  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N(\epsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有  $||f_n(x)| - |f|| < \epsilon$ . 即  $\{|f_n|\}$  在  $D$  上一致收敛于  $|f|$ .

例 2 确定下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

(1)  $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ ,  $D = [0, +\infty)$ ;

(2)  $f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + (n+2)x}$ ,  $D = [0, +\infty)$ ;

(3)  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ , 在  $\mathbf{R}$  上;

(4)  $f_n(x) = \sin(x/n)$ , 在  $\mathbf{R}$  上;

(5)  $f_n(x) = \frac{x^2}{1+x^n}$  在下列区间上:

1)  $[0, 1-\delta]$ , 2)  $[1-\delta, 1+\delta]$ , 3)  $[1+\delta, +\infty)$ ,

其中  $0 < \delta < 1$ .

解 讨论是否存在极限函数, 再由一致收敛定义或充要条件进行判别.

(1)  $\forall x \in [0, +\infty)$ , 存在极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-x^2} = 0,$$

依函数列收敛的充要条件

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} x^n e^{-x^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x} = 0,$$

所以  $\{f_n(x)\} = \{x^n e^{-x^2}\}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

(2)  $\forall x \in [0, +\infty)$ , 存在极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n^2 + (n+2)x} = 0,$$



取  $(0, +\infty)$  上的自然数列  $x_n = n$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nn}{n^2 + (n-2)n} \right| = \frac{1}{2} > 0,$$

所以依一致收敛的充要条件,  $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{nx}{n^2 + (n-2)x} \right\}$  在  $[0, +\infty)$  上不一致收敛.

(3)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 存在极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1/n^2} = |x|,$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\sqrt{x^2 + 1/n^2} - |x|| \\ &= \frac{1/n^2}{\sqrt{x^2 + 1/n^2} + |x|} \\ &\leq \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} < \epsilon (\text{取 } N = [1/\epsilon]), \end{aligned}$$

所以,  $\forall \epsilon > 0 (\epsilon < 1)$ ,  $\exists N = [1/\epsilon] \in \mathbf{N}_+$ ,  $\forall n > N$  和  $x \in \mathbf{R}$ , 恒有  $|\sqrt{x^2 + 1/n^2} - |x|| < \epsilon$ . 从而  $\{\sqrt{x^2 + 1/n^2}\}$  在  $\mathbf{R}$  上一致收敛.

(4)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 存在极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x/n) = 0,$$

且  $\exists \epsilon_0 = 1/2 > 0$ ,  $\forall N \in \mathbf{N}_+$ ,  $\exists n_0 > N$ ,  $x_0 = n_0 \pi/2 \in \mathbf{R}$ ,

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| = \left| \sin \frac{n_0 \pi/2}{n_0} \right| = \sin(\pi/2) = 1 > 1/2.$$

所以  $\{f_n(x)\} = \{\sin(x/n)\}$  在  $\mathbf{R}$  上不一致收敛.

(5)  $\forall x \in [0, +\infty)$ , 存在极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

1)  $\forall x \in [0, 1-\delta]$ , 有

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|\} = \sup\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\} \leq (1-\delta)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

所以  $\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$  在  $[0, 1-\delta]$  上一致收敛.

2)  $\forall x \in (1, 1+\delta)$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \frac{1}{1+x^n},$$

故  $\exists \varepsilon_0 = 1/4 > 0$ ,  $\forall N \in \mathbf{N}_+$ ,  $\exists m > N$  和  $x_0 = \sqrt[m]{2} \in (1, 1+\delta)$ , 使得

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{1}{1+x_0^n} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4}.$$

从而  $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{x^n}{1+x^n} \right\}$  在  $(1, 1+\delta)$  内即  $[1-\delta, 1+\delta]$  上不一致收敛.

3)  $\forall x \in [1+\delta, +\infty)$ , 有

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|\} = \sup\left\{\frac{1}{1+x^n}\right\} \leq \frac{1}{1+(1+\delta)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

所以,  $\{f_n(x)\} = \left\{ \frac{x^n}{1+x^n} \right\}$  在  $[1+\delta, +\infty)$  上一致收敛.

• 例 3 设  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f$ ,  $\{g_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $g$ , 证明:  $\{f_n \pm g_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f \pm g$ .

证 由题设知, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $f_n \rightarrow f$ ,  $g_n \rightarrow g$ , 故  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N_1(\varepsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 有  $|f_n - f| < \varepsilon/2$ ;  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N_2(\varepsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 有  $|g_n - g| < \varepsilon/2$ . 于是, 对  $\{f_n + g_n\}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 取

$$N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} \in \mathbf{N}_+,$$

则当  $n > N(\varepsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有

$$\begin{aligned} |(f_n + g_n) - (f + g)| \\ = |(f_n - f) + (g_n - g)| < |f_n - f| + |g_n - g| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以,  $\{f_n + g_n\}$  一致收敛于  $f + g$ .

类似可证  $\{f_n - g_n\}$  一致收敛于  $f - g$ .

• 例 4 证明:  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$  在  $[0, +\infty)$  上逐点收敛于

零, 但不一致收敛于零.



证 要证逐点收敛,只需  $\forall \epsilon > 0$ , 找到相应的  $N$ , 使  $n > N$  时, 恒有  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  即可.  $N$  可与  $\epsilon$  有关, 也可与  $x$  有关. 但要证一致收敛, 则与  $\epsilon$  相应的  $N$ , 只能与  $\epsilon$  有关, 不能与  $x$  有关.

因为由

$$\left| \frac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \epsilon,$$

可解得  $n > 1/(\epsilon x)$ , 所以  $\forall \epsilon > 0, \exists N = [1/(\epsilon x)] \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有  $|f_n(x) - 0| < \epsilon$ . 从而知  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$  在  $[0, +\infty]$  上逐点收敛于零.

显然,  $N$  既与  $\epsilon$  有关, 又与  $x$  有关.

下面证  $f_n(x)$  在  $[0, +\infty)$  上不一致收敛于零.

$\forall 1/2 > \epsilon > 0$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  时, 只要取  $x = 1/n$ , 有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0 \right| = \left| \frac{n(1/n)}{1+n^2(1/n)^2} \right| = \frac{1}{2} > \epsilon,$$

所以,  $f_n(x)$  在  $[0, 1]$  上不一致收敛. 当  $1 < x < +\infty$  时, 有

$$|f_n(x) - 0| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} < \frac{1}{n},$$

只要取  $N = [1/\epsilon]$ , 则对一切满足  $x > 1$  的  $x$  均有  $|f_n(x) - 0| < \epsilon$ . 所以,  $f_n(x)$  在  $(1, +\infty)$  上一致收敛.

综上即知,  $f_n(x)$  在  $[0, +\infty)$  上不一致收敛.

• 例5 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛, 并求它的和函数.

证 因为,  $\forall x \in (-\infty, +\infty), \frac{1}{1+x^2} < 1$ , 所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内为公比  $|q| < 1$  的等比级数, 且是收敛的, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \text{ 绝对收敛.}$$

$S(x)$  可以通过各项重组求出.

对级数的奇数项求和,得

$$\begin{aligned} & -x^2 \left[ \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+x^2)^{2k+1}} + \cdots \right] \\ & = -x^2 \frac{1/(1+x^2)}{1-1/(1+x^2)^2} = \frac{-1-x^2}{2+x^2}, \end{aligned}$$

对级数的偶数项求和,得

$$\begin{aligned} & -x^2 \left( \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^4} + \cdots + \frac{1}{(1+x^2)^{2k}} + \cdots \right) \\ & = -x^2 \frac{1/(1+x^2)^2}{1-1/(1+x^2)^2} = \frac{1}{2+x^2}, \end{aligned}$$

所以,级数的和函数

$$S(x) = \frac{-1-x^2}{2+x^2} + \frac{1}{2+x^2} = \frac{-x^2}{2+x^2}.$$

• 例6 证明:若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D \subset \mathbb{R}$  上一致收敛,则函数列  $\{u_n\}$  在  $D$  上一致收敛于零.

证 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D \subset \mathbb{R}$  上一致收敛,则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N(\varepsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有  $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon/2$ .

因为  $u_n = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } |u_n(x) - 0| &= |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \\ &= |[S_n(x) - S(x)] - [S_{n-1}(x) - S(x)]| \\ &\leq |S_n(x) - S(x)| + |S_{n-1}(x) - S(x)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

故知函数列  $\{u_n\}$  在  $D$  上一致收敛于零.

• 例7 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

$$(1) \frac{1}{1+x} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}, \quad x \in [0, 1];$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}, \quad x \in (0, \infty);$$



$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}}, x \in [-1, 1];$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} 2^{-n}, (1) x \in [\delta, +\infty), (\delta > 0), (2) x \in (0, +\infty);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{x}{n}), x \in [-\delta, \delta], (\delta > 0).$$

**解** 可以依据定义确定一致收敛性,但利用一致收敛原理与 M 判别准则更为简便.应用 M 判别准则时,关键在于通过对级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的通项进行估计,得到不等式  $|u_n(x)| \leq M_n$ , 并且证明  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  收敛.

(1)  $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{1+x}$  的值是有限数.

对于级数部分,因为

$$|u_n| = \left| \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} \right| < \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{(n-1)^2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$  收敛,依 M 判别准则,级数部分一致收敛.从而

$\frac{1}{1+x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$  对于  $x \in [0, 1]$  一致收敛.

(2) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}, x \in (0, \infty),$

因为  $\frac{1}{1+n^2 x} < \frac{1}{n^2 x} = \frac{1}{x} \frac{1}{n^2},$

当  $x$  值取定时,  $\frac{1}{x}$  为定值.由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛,知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}$  在  $(0, \infty)$  内处处收敛.但是,要

$$\left| \frac{1}{1+n^2x} - 0 \right| < \left| \frac{1}{n^2x} \right| < \varepsilon,$$

必须  $n > [1/\sqrt{x\varepsilon}]$ , 可见  $N$  与  $\varepsilon$  和  $x$  都有关, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$  在  $(0, \infty)$  内不一致收敛.

(3) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ , 当  $x=0$  时, 显然收敛于零.

当  $x \neq 0$  时, 因为  $(1+n^2x)^2 > 0$ , 即  $1+n^4x^2 > 2n^2x$ , 所以

$$\left| \frac{x}{1+n^4x^2} \right| < \left| \frac{x}{2n^2x} \right| = \frac{1}{2n^2}.$$

故由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$  收敛知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

(4) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{3/2}}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , 显然,  $\left| \frac{x}{n^{3/2}} \right| < \frac{1}{n^{3/2}}$ , 所以, 依 M

判别准则, 由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  收敛知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{3/2}}$  在  $[-1, 1]$  上一致收敛.

(5) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}2^{-nx}$ ,

1)  $x \in [\delta, +\infty]$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}_+$ , 有

$$|u_n(x)| = \sqrt{n}2^{-nx} \leq \sqrt{n}2^{-n\delta}.$$

记  $M_n = \sqrt{n}2^{-n\delta}$ , 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} 2^{-\delta} = 2^{-\delta} < 1,$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  收敛. 依 M 判别准则知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}2^{-nx}$  在区间  $[\delta, +\infty)$  上一致收敛.

2) 在  $x \in (0, +\infty)$  时, 对  $\varepsilon_0 = 1/2$ , 若取

$$x_n = 1/n \in (0, +\infty),$$

则  $|u_n(x)| = \sqrt{n}2^{-n(1/n)} = \sqrt{n}/2 > 1/2 = \varepsilon_0$ .



所以  $\{u_n(x)\}$  不一致收敛于零, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} 2^{-n^2}$  在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.

(6) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$ ,  $x \in [-\delta, \delta]$  ( $\delta > 0$ ), 因为

$$\left|1 - \cos \frac{x}{n}\right| = \left|2 \sin^2 \frac{x}{2n}\right| < 2 \frac{x^2}{2n^2} \leq \frac{\delta^2}{n^2},$$

并且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以依 M 判别准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$  在  $[-\delta, \delta]$  内一致收敛.

• 例 8 证明: 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$  在  $[0, 1]$  上不一致收敛.

证 因为

$$\begin{aligned} S_n &= (1-x) + (x-x^2) + (x^2-x^3) + \cdots + (x^n-x^{n+1}) \\ &= 1-x^{n+1}, \end{aligned}$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x^{n+1}) = 1, \quad S(0) = S(1) = 0,$$

所以, 若取  $\epsilon_0 = 1/\sqrt{2}$ , 则  $\forall n \in \mathbf{N}_+$  和  $x_n = 1/\sqrt[n+1]{2}$ , 有

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = (1/\sqrt[n+1]{2})^{n+1} = 1/2 = \epsilon_0.$$

从而知级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$  在  $[0, 1]$  上不一致收敛.

例 9 证明: 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  在  $[-q, q]$  ( $0 < q < 1$ ) 上一致收敛,

并且

$$(1) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad |x| < 1;$$

$$(2) \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots, \quad |x| < 1.$$

证 因为  $|u_n| = |x^n| < |q|^n$ , 而  $|q| < 1$ , 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  收敛.

依 M 判别准则, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  在  $[-q, q]$  ( $0 < q < 1$ ) 上一致收敛.

(1) 因为  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1, 1),$

所以  $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad (-1, 1),$

由一致收敛级数和函数的可积性, 对  $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$  等式两边求和, 得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

(2) 同题(1), 利用一致收敛级数和函数的可导性, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

• 例 10 证明:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有二阶连续导数, 并且  $f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ .

证 因为,  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  收敛, 所以依 M 判别准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上

一致收敛. 依一致收敛级数和函数的可导性, 对  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$  两边求导, 得

$$f'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}.$$



因为  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$  也一致收敛. 再次运用和函数的可导性, 对  $f'(x) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$  两边求导, 得

$$f''(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n^2}.$$

而此时  $|u_n(x)| = \left| -\frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$

由于  $\sum \frac{1}{n^2}$  收敛, 依 M 判别准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛, 所以和函数

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

• 例 11 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D \subset \mathbb{R}$  上处处收敛于  $S$ , 并且在  $D$  上一致收敛, 证明: 该级数在  $D$  上必一致收敛于  $S$ .

证 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D \subset \mathbb{R}$  上处处收敛于  $S$ , 则  $\forall x \in D$ , 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

又级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $D$  上一致收敛, 即  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N(\epsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 均有  $|S_n(x) - S_1(x)| < \epsilon$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S_1(x).$$

由极限的唯一性知,  $S(x) = S_1(x)$ , 所以, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  在  $D$  上一致收敛于  $S$ .

• 例 12(函数列的Cauchy一致收敛原理) 设  $\{f_n\}$  是集合  $D$  上的一个函数列, 证明:  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛的充要条件为  $\{f_n\}$  为  $D$  上的基本列, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall m, n > N, \forall x \in D, \text{恒有} \\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

证 必要性 若  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f(x)$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbf{N}_+$ , 使得在  $n > N$  时,  $\forall x \in D$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2, |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2,$$

$$\text{从而 } |f_m(x) - f_n(x)| = |[f_m(x) - f(x)] - [f_n(x) - f(x)]| \\ < |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

充分性 若  $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ , 可令

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x),$$

则  $\forall \varepsilon > 0$ , 总  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+$ , 使得当  $n > N(\varepsilon)$  时, 有

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

所以,  $\{f_n\}$  在  $D$  上一致收敛于  $f(x)$ .

例 13 设  $f_1(x)$  在  $[a, b]$  上正常可积, 且

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

证明: 函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于零.

证 因为  $f_1(x)$  在  $[a, b]$  上正常可积, 故在  $[a, b]$  上有界, 即  $\exists M > 0$ , 使得  $|f_1(x)| \leq M (\forall x \in [a, b])$ , 且有

$$|f_2(x)| \leq \int_a^x |f_1(t)| dt \leq M(x-a).$$

所以, 通常有  $|f_n(x)| \leq \frac{M(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ , 则

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)| dt = \frac{M}{(n-1)!} \int_a^x (t-a)^{n-1} dt \\ = \frac{M(x-a)^n}{n!},$$

于是  $|f_n(x)| \leq \frac{M(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$



即对  $x \in [a, b], \{f_n(x)\}$  一致收敛于零.

**例 14** 证明:若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  在区间  $I$  上一致收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  也在  $I$  上一致收敛. 反之, 是否成立?

**证** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  在  $I$  上一致收敛, 则依 Cauchy 收敛原理,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$  和  $p \in \mathbf{N}_+, \forall x \in I$ , 有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| < \varepsilon,$$

$$\text{即 } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

从而知  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $I$  上一致收敛.

反之, 不一定成立. 如级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$  在  $[0, 1]$  上一致收敛. 用分区间法证明反之不一定成立. 因为

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (1-x)x^k = (1-x) \sum_{k=1}^n (-x)^k \\ &= -\frac{x(1-x)[1-(-x)^{n+1}]}{1+x}, \end{aligned}$$

在  $[0, 1)$  上, 显然有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -\frac{x(1-x)}{1+x}.$$

当  $x = 1$  时上式也成立,

$$S(x) = -\frac{x(1-x)}{1+x}, \quad x \in [0, 1],$$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \frac{(1-x)(-x)^{n+1}}{1+x} \right| \leq (1-x)x^{n+1}.$$

故  $\forall x \in [1-\varepsilon, 1] (\varepsilon > 0), \forall n \in \mathbf{N}_+$ , 有

$$|S(x) - S_n(x)| \leq (1-x)x^{n+1} \leq 1-x \leq \varepsilon.$$

而  $\forall x \in [0, 1-\epsilon]$ , 要使

$$|S_n(x) - S(x)| \leq (1-x)x^{n+1} \leq x^{n+1} \leq (1-\epsilon)^{n+1} < \epsilon$$

成立, 必须有  $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln(1+\epsilon)-1}$ . 故当取  $N = \left[ \frac{\ln \epsilon}{\ln(1+\epsilon)-1} - 1 \right]$  时,

上述不等式成立. 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$  在  $[0, 1-\epsilon]$  与  $[1-\epsilon, 1]$  上都一致收敛, 所以在  $[0, 1]$  上一致收敛.

$$\text{但 } \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n,$$

有  $S_n(x) = 1 - x^n \quad (x \neq 1),$

$$\text{故 } S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

取  $\epsilon_0 = 1/3 > 0$ , 则  $\exists N \in \mathbf{N}_+, \exists n_0 > N, \exists x_0 = 1 - 1/n_0 \in [0, 1)$ , 使得

$$|S(x_0) - S_n(x_0)| = (1 - 1/n_0)^{n_0} > 1/3,$$

这里  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/n)^n = 1/e > 1/3.$

所以当  $n_0$  充分大时, 上式成立, 从而知  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$  在  $[0, 1]$  上不一致收敛.

**例 15** 证明: 若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛,

且函数  $\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\varphi(x)$  在  $[a, b]$  上也一致收敛.

**证** 由 Cauchy 收敛原理, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$  和  $p \in \mathbf{N}_+, \forall x \in [a, b]$ , 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \epsilon.$$

又对  $\varphi(x), \exists M > 0, \forall x \in [a, b]$ , 有  $|\varphi(x)| < M$ . 于是, 有



$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \varphi(x) \right| = |\varphi(x)| \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| < M\varepsilon.$$

从而知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \varphi(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

**例 16** 证明:若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} [au_n(x) + bv_n(x)]$  在区间  $I$  上也一致收敛( $a, b$  为常数).

**证** 依题设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  在  $I$  上一致收敛,则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$  和  $p \in \mathbf{N}_+, \forall x \in I$ ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_n(x) \right| < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad & \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} [au_n(x) + bv_n(x)] \right| \\ &= \left| a \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) + b \sum_{k=n+1}^{n+p} v_n(x) \right| \\ &= |a| \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| + |b| \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} v_n(x) \right| \\ &< |a| \varepsilon + |b| \varepsilon = (|a| + |b|) \varepsilon. \end{aligned}$$

故知  $\sum_{k=n+1}^{n+p} [au_n(x) + bv_n(x)]$  在  $I$  上一致收敛.

• **例 17** 写出在一致收敛条件下,函数列  $\{f_n\}$  的极限函数的连续性、可积性与可导性定理,并给予证明.

**解** (1) 连续性定理 若函数列  $\{f_n\}$  在区间  $I$  上一致收敛,且每一项都连续,则其极限函数在  $I$  上也连续.

证明过程如下:设  $x_0$  为  $I$  上任一点,  $f$  为  $\{f_n\}$  在  $I$  上的极限函数,则

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(x_0)| \\ &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \\ + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

因为  $f_n(x)$  一致收敛于  $f(x)$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时,  $\forall x \in I$ , 都有

$$|f(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{和} \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3.$$

又由  $f_n$  的连续性,  $\forall$  同一  $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ . 于是, 当  $n > N$  及  $|x - x_0| < \delta$  时, 就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

即  $\{f_n\}$  的极限函数  $f$  在  $x_0$  处连续.

由连续性定理可知: 在一致收敛条件下, 连续函数列  $\{f_n(x)\}$  中两个独立的变量  $n$  与  $x$  在分别求极限时, 其极限顺序可以交换, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0).$$

(2) 可积性定理 若函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

证明过程如下: 设  $f$  为函数列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上的极限函数, 由题(1)知,  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 所以  $f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 与  $f$  在  $[a, b]$  上都可积.

由于  $f_n$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$ , 当  $n > N$  时,  $\forall x \in [a, b]$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

于是, 依定积分性质, 得

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \\ \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon(b-a).$$



从而知 
$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

由此得出:在一致收敛条件下,极限运算与积分运算可以交换次序.

(3) 可微性定理 设  $\{f_n\}$  是定义在  $[a, b]$  上的函数列, 设  $x_0 \in [a, b]$  为  $\{f_n\}$  的收敛点,  $\{f_n\}$  的每一项在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $\{f'_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则

$$\frac{d}{dx} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

证明过程如下: 因为  $n \rightarrow \infty$  时,  $f_n(x_0) \rightarrow A$ ,  $f'_n \Rightarrow g$ ,  $x \in [a, b]$ , 所以  $\forall x \in [a, b]$ , 恒有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

取  $n \rightarrow \infty$  时的极限, 得

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

由  $g$  的连续点以及变上限积分导数知

$$f'(x) = g(x),$$

从而得到 
$$\frac{d}{dx} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

• 例 18 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在开区间  $(a, b)$  内的任一闭子区间上一致收敛, 则称该级数在  $(a, b)$  上内闭一致收敛. 证明: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $(a, b)$  上内闭一致收敛, 则它在  $(a, b)$  内逐点收敛.

证 设  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛, 则  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N(\epsilon)$  时,  $\forall x \in D$ , 恒有  $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ .

当  $n$  充分大时,  $\forall x \in D$ ,  $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $(a, b)$  内逐

点收敛.

• 例 19 设有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ , 证明:

- (1) 该级数的收敛区域为  $(-1, 1)$ ;
- (2) 该级数在  $(-1, 1)$  内闭一致收敛;
- (3) 该级数的和函数在  $(-1, 1)$  内连续.

证 (1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = |x|$ , 依 Cauchy 准则, 当  $|x| < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$  绝对收敛. 当  $|x| = 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , 级数发散. 所以, 该级数的收敛区域为  $(-1, 1)$ .

(2) 在  $[-1+\delta, 1-\delta]$  ( $\delta > 0$ ) 上,  $|x| \leq 1-\delta$ , 所以

$$|(x + 1/n)^n| \leq (1-\delta + 1/n)^n < 1,$$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (x + 1/n)^n$  在  $[-1+\delta, 1-\delta]$  上一致收敛. 因为  $\delta$  可以任意地小, 故该级数在  $(-1, 1)$  上内闭一致收敛.

(3) 该级数的和函数  $S(x)$  在  $[-1+\delta, 1-\delta]$  上连续, 由于  $\delta$  可以任意地小, 故  $[-1+\delta, 1-\delta]$  可以取到除  $-1$  和  $1$  以外的任意点, 从而知和函数  $S(x)$  在  $(-1, 1)$  上连续.

• 例 20 证明: 设  $u_n \in C(I)$  ( $n \in \mathbb{N}_+$ ), 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $I$  上内闭一致收敛于  $S: I \rightarrow \mathbb{R}$ , 则和函数  $S \in C(I)$ .

证 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  在  $I$  上一致收敛, 则和函数  $S \in C(I)$ . 这是因为  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得当  $x \in U(x_0, \delta) \cap I$  时, 有

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &\leq |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - S(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

对  $x_0 \in I$ , 只要  $\delta$  充分小,  $U(x_0, \delta)$  一定包含在  $I$  的某一内闭子区间内. 从而满足和函数连续性定理条件, 所以和函数  $S \in$



$C(I)$ .

• 例 21 证明:级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

证 当  $x=0$  时,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$  一致收敛.

当  $x>0$  时,由 Taylor 公式,有

$$e^x > 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2} > \frac{n^2 x^2}{2},$$

故  $e^{-x} < \frac{2}{n^2 x^2}$ , 于是

$$|x^2 e^{-nx}| < 2/n^2,$$

此式在  $x=0$  时也成立. 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以依 M 判别准则, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

• 例 22 如果  $\forall n \in \mathbf{N}_+$ ,  $u_n(x)$  是单调函数, 并且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  的端点绝对收敛, 证明: 它在  $[a, b]$  上绝对一致收敛 (即绝对值级数一致收敛).

证 由题设知,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$  都收敛. 若令  $\varphi_n = \max\{|u_n(a)|, |u_n(b)|\}$ , 则

$$0 \leq \varphi_n \leq |u_n(a)| + |u_n(b)|,$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$  收敛. 又由  $u_n(x)$  的单调性知,  $\forall x \in [a, b]$ , 恒有

$$|u_n(x)| \leq \varphi_n.$$

依 M 判别准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上绝对一致收敛.

例 23 证明下列级数在  $(-\infty, +\infty)$  上不一致收敛, 但其和函数却连续.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2} - \frac{(n+1)^2 x}{1+(n+1)^3 x^2} \right];$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}].$$

证 (1)部分和

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2} - \frac{(n+1)^2 x}{1+(n+1)^3 x^2} \right\} \\ &= \frac{x}{1+x^2} - \frac{(m+1)^2 x}{1+(m+1)^3 x} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = S(x), \end{aligned}$$

$S(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是连续的. 由于余项

$$r_m(x) = S(x) - S_m(x) = \frac{(m+1)^2 x}{1+(m+1)^3 x^2}$$

可用求极值方法求得, 当  $x_m = \pm 1/(m+1)^{3/2}$  时, 有极值

$$r_m(x_m) = \pm \sqrt{m+1}/2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \pm \infty.$$

所以, 级数在  $x=0$  的邻域内不一致收敛.

$$(2) S_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x} \} = mxe^{-mx^2}.$$

当  $x \neq 0$  时,  $x^2 > 0$ , 有  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = 0$ , 即

$$S(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = 0;$$

当  $x=0$  时,  $S(0)=0$ , 所以和函数  $S(x)=0$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

由于余项  $r_m(x) = S(x) - S_m(x) = -mxe^{-mx^2}$ , 可用极值方法求得, 当  $x_m = \pm 1/\sqrt{m}$  时有极值

$$r_m(x) = \mp m \cdot 1/\sqrt{m} \cdot e^{-1} = \mp \sqrt{m}/e \rightarrow \mp \infty,$$

所以, 级数在  $x=0$  的邻域内不一致收敛.

**例 24** 证明: 若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛, 则函数列  $\{u_n(x)\}$  在  $I$  上一致收敛于零. 反之是否成立? 试举例说明.



证 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上一致收敛, 则依 Cauchy 收敛原理,  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$  和  $p \in \mathbf{N}_+, \forall x \in I$ , 有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

当取  $p=1$  时, 即为  $|u_{n+1}(x)| < \varepsilon$ , 故知  $\{u_n(x)\}$  在  $I$  上一致收敛于零.

反之不一定成立. 例如, 函数列  $\{x^n/n\}$ .  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [1/\varepsilon] \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \forall x \in (0, 1)$ , 有

$$|x^n/n - 0| = |x|^n/n < 1/n < \varepsilon.$$

所以  $\{x^n/n\}$  在  $(0, 1)$  内一致收敛于零. 但  $\forall \varepsilon_0 = 1/5 > 0, \forall N \in \mathbf{N}_+, \exists m > N$  和  $p_0 = m \in \mathbf{N}_+, \exists x_0 = 1/\sqrt[2m]{2} \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x_0^{m+1}}{m+1} + \frac{x_0^{m+2}}{m+2} + \cdots + \frac{x_0^{2m}}{2m} \right| \\ & \geq m \frac{x_0^{2m}}{2m} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5} = \varepsilon_0, \end{aligned}$$

从而知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  在  $(0, 1)$  内不一致收敛.

由本例可以认识到: 函数列  $\{u_n(x)\}$  在区间  $I$  上一致收敛于零只是函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上一致收敛的必要条件, 而不是充分条件.

### 第三节 幂级数

#### 知识要点

##### 1. 形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

## 疑难解析

### 1. 怎样求幂级数的收敛域?

答 幂级数的收敛域与收敛区间不完全一致. 因为收敛域有时还包括收敛区间的端点, 有时可能只有一个点  $x = 0$ .

常用的求收敛域步骤为:

(1) 求出  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径, 写出收敛区间  $(-R, R)$ , 讨论  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  的敛散性, 确定收敛域.

(2) 对 Taylor 级数进行变量代换  $y = \varphi(x)$ , 化原级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ , 依步骤(1) 求出  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  的收敛域, 再演变为原级数的收敛域.

(3) 将一个复杂的级数化为几个简单级数的代数和, 分别依步骤(1) 或(2) 求出各级数的收敛域, 再求出其交集, 即为原级数收敛域.

(4) 缺项级数用数项级数检比法求出收敛半径后, 再讨论收敛域.

### 2. 常用的求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径的方法有哪些?

答 常用方法有三种.

(1) 比值法 取  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ , 则

1) 若  $0 < \rho < +\infty$ , 收敛半径  $R = 1/\rho$ ;

2) 若  $\rho = 0$ , 收敛半径  $R = +\infty$ ;

3) 若  $\rho = +\infty$ , 收敛半径  $R = 0$ .

(2) 根值法 取  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ , 收敛半径  $R$  同比值法.

(3) Cauchy-Hadamard 法 取  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ , 收敛半径  $R$



同比值法.

3. 为什么又称 Abel 定理为幂级数收敛性定理?

答 Abel 定理将一个幂级数的敛散性问题归结为确定幂级数在一个点的敛散性问题. 即若幂级数在点  $x_0$  处收敛, 则  $\forall |x| < |x_0|$  的点, 幂级数都收敛; 若幂级数在点  $x_0$  处发散, 则  $\forall |x| > |x_0|$  的点, 幂级数都发散. 从而一个点上幂级数的敛散性确定了一个区间上幂级数的敛散性. 并且由此得出, 必然存在这样的点  $x_R$ , 当  $|x| > |x_R|$  时幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  发散, 当  $|x| < |x_R|$  时, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛, 从而完全确定一个幂级数的收敛半径. 正因为如此, Abel 定理被称为幂级数的敛散性定理.

4. 将函数展成幂级数用哪些方法?

答 常用的方法有直接展开法与间接展开法两种.

(1) 直接展开法 求出函数  $f$  的各阶导数及各阶导数在点  $x_0$  处的值, 依定义写出 Taylor 展开式形式. 研究余项  $R_n(x)$  的敛散性, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , 则

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

成立, 并求出 Taylor 级数的收敛域.

(2) 间接展开法 由某些已知函数的幂级数展开式, 利用恒等变形、四则运算、变量代换、逐项求积、逐项求导等等方法求得所求函数的幂级数展开式.

间接展开法的优点是简捷易行, 收敛半径一般与利用的幂级数展开式相同, 不必讨论余项的敛散性.

常用的有五个 Maclaurin 展开式与  $\frac{1}{1 \pm x}$  的展开式. 在利用

$\frac{1}{1 \pm x}$  来展开形如  $\frac{1}{a \pm bf(x)}$  的函数的展开式时,要注意收敛区间的讨论.

其它的展开法还有待定系数法等. 待定系数法使用起来比较繁琐,一般利用两个幂级数相等时,对应项系数相等的性质,通过列方程解出待定系数,适用于有关函数乘法与除法的情形.

### 典型例题与习题详解

• 例 1 为什么说 Abel 定理是研究幂级数敛散性的一个基本定理?设有幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$ , 它在  $x=0$  处收敛, 在  $x=3$  处发散, 这可能吗?

解 Abel 定理与幂级数敛散性的关系, 请阅本节疑难解析 3.

幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$  不可能在  $x=0$  处收敛而在  $x=3$  处发散. 因为, 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$  在  $x=2$  处收敛, 则收敛半径  $R \geq 2$ , 即幂级数至少在  $(0, 4)$  内收敛, 从而不可能在  $x=3$  处发散.

• 例 2 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x=-3$  处条件收敛, 你能确定该幂级数的收敛半径吗?

解 由 Abel 定理, 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x_0 \neq 0$  处收敛, 则在  $|x| < |x_0|$  时, 幂级数绝对收敛. 因为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x=-3$  处条件收敛, 所以  $|x| < |-3| = 3$  时幂级数绝对收敛, 从而知  $R \geq 3$ .

• 例 3 已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R=1$ , 有人采用下面的方法求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$  的收敛半径, 你认为对吗?



若不对,指出错在何处.

由于  $R = 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ . 从而得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0,$$

因此, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径为  $+\infty$ .

**解** 这种求法不对. 例如  $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ , 因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} x^n &= x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \end{aligned}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3}{2n} / \frac{3}{2n+2} \right| = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2n+1} / \frac{1}{2n+3} \right| = 1$ ,

两级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n} x^{2n}$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$  收敛半径都是 1, 因此幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} x^n$  的收敛半径为 1. 但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} \right|$$

不存在, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

不成立.

**• 例 4** 求下列幂级数的收敛区间与收敛域:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1} x^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}} x^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (x+2)^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n-1};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (2x+1)^n.$$

**解** 先求出收敛半径, 确定收敛区间. 若  $R \neq 0$  或  $+\infty$ , 则需讨论在  $x = \pm R$  处所得常数项级数的敛散性, 然后得出收敛域.

(1) 对于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1} x^n$ , 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{(n+1)!} \right| = 0,$$

所以, 收敛域为点  $x = 0$ .

(2) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n} x^n$ , 因为级数是缺项级数, 依

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \right| = +\infty,$$

所以, 收敛域为  $-\infty < x < +\infty$ .

(3) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}} x^n$ , 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}} \right| = 1,$$

所以,  $R = 1$ , 收敛区间  $(-1, 1)$ .

当  $x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n+\sqrt{n}}$  是发散的; 当  $x = 1$  时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$  是收敛的交错级数. 从而得级数的收敛域为  $-1 < x \leq 1$ .

(4) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (x+2)^n$ , 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} \right| = 2,$$

所以,  $R = 2$ ,  $|x+2| < 2 \Rightarrow -4 < x < 0$ .



当  $x = -4$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} 2^n$  收敛; 当  $x = 0$  时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n 2^n}$  发散, 从而得级数的收敛域为  $-4 \leq x < 0$ .

(5) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n-1}$ , 因为幂级数是缺项级数, 由 D'Alembert

准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left( \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} x^{2n+1} \right)}{\left( \frac{n!}{n^n} x^{2n-1} \right)} \right| = \frac{|x^2|}{e} < 1,$$

所以  $|x| < \sqrt{e}$ , 从而级数收敛域为  $|x| < \sqrt{e}$ .

(6) 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (2x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$ ,

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1} \bigg/ \frac{3^n + (-2)^n}{n} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3(3/3)^n + (-2)(-2/3)^n}{(3/3)^n + (-2/3)^n} \right| = 3, \end{aligned}$$

所以  $|y| = |2x+1| < 1/3 \Rightarrow -2/3 < x < 1/3$ .

当  $x = \frac{1}{3}$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n!} \left(\frac{5}{3}\right)^n$  发散; 当  $x = -\frac{2}{3}$  时,

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  收敛, 从而得收敛域为  $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3}$ .

• 例 5 指出下列推导有什么错误:

$$\text{由于} \quad \frac{x}{1-x} = x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$\frac{-x}{1-x} = \frac{1}{1-1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n} + \cdots,$$

两式相加得

$$\cdots + \frac{1}{x^n} + \cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 0.$$

解 由  $\frac{1}{1-x}$  的展开式知,  $|x| < 1$ , 因此, 第一个等式在  $|x| < 1$

时成立,第二个等式在  $1/|x| < 1$  时成立,而二者不可能同时成立,故此两式不能相加.

• 例 6 求下列函数的 Maclaurin 展开式:

- (1)  $xe^{-x^2}$ ; (2)  $\sin^2 x$ ; (3)  $\operatorname{ch} \frac{x}{2}$ ;  
 (4)  $\arcsin x$ ; (5)  $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ ; (6)  $\frac{x}{1+x-2x^2}$ ;  
 (7)  $\ln(1-3x+2x^2)$ ; (8)  $\sqrt[3]{27-x^3}$ .

解 尽可能用间接展开法求解.

(1) 因为  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 所以

$$xe^{-x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(2) 因为  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 所以

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

(3) 因为  $\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2})$ ,  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , 所以

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{x}{2} &= \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2}) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! 2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n! 2^n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)! 4^n}, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

(4) 利用幂级数和函数的可积性. 因为

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2},$$

再利用  $(1+x)^a$  的展开式, 得



$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)(-1)^n x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} (2n-1)!! x^{2n}, \quad |x| < 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故} \quad \arcsin x &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} (2n-1)!! x^{2n} dx \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.\end{aligned}$$

在  $x = \pm 1$  时, 级数也收敛(可用 Raabe 判别法确定), 所以收敛域为

$$|x| \leq 1.$$

注 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数, 且存在极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{u_n + 1}{u_n}\right) = r$ , 则  $r < 1$  时, 级数收敛;  $r > 1$  时, 级数发散.

(5) 利用  $(1+x)^a$  的展开式, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2-x}} &= (2-x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2n-1)!! \frac{1}{2^n} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n! 4^n} x^n, \quad -2 \leq x < 2.\end{aligned}$$

(6) 先分解部分分式, 再利用  $\frac{1}{1-x}$  的展开式求解.

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x-2x^2} &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n \right] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n 2^n] x^n, \quad |x| < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(7) 先分解因式, 再利用  $\ln(1+x)$  的展开式求解.

$$\begin{aligned}
 & \ln(1-3x+2x^2) \\
 &= \ln(1-x)(1-2x) = \ln(1-x) + \ln(1-2x) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} 2^n x^n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} (2^n + 1) x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n} x^n,
 \end{aligned}$$

收敛域为  $-1/2 \leq x < 1/2$ .

(8) 利用  $(1+x)^a$  的展开式求解.

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{27-x^3} &= 3(1-x^3/27)^{1/3} \\
 &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/3 \cdot (-2/3) \cdots (1/3-n+1)}{n!} \left(-\frac{x^3}{27}\right)^n \\
 &= 3 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(1-3)(1-6) \cdots [1-3(n-1)]}{81^n n!} x^{3n},
 \end{aligned}$$

收敛域为  $-3 < x < 3$ .

• 例 7 设  $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ , 求  $f^{(n)}(0)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ).

解 若令  $v = x^3, u = e^{-x^2}$ , 则  $f(x) = uv$ , 可用 Newton-Leibniz 公式求  $uv$  的  $n$  阶导数, 但比较繁琐. 用  $f(x)$  的 Maclaurin 展开式的系数来求, 则相对比较简单. 因为

$$x^3 e^{-x^2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n+3}.$$

而  $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ . 由于  $x^3 e^{-x^2}$  是奇函数, 其 Maclaurin 级数无偶次项, 因而

$$f^{(2m)}(0) = 0,$$

$$f^{(2m+1)}(0) = (-1)^{m-1} \frac{(2m+1)!}{(m-1)!} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

• 例 8 求下列函数在给定点  $x_0$  处的 Taylor 展开式:

(1)  $e^{x-1}, x_0 = 2;$

(2)  $\cos x, x_0 = \pi/4;$

(3)  $\ln x, x_0 = 1;$

(4)  $\frac{x}{x^2-5x+6}, x_0 = 5;$



$$(5) \frac{1}{x^2}, x_0 = 3; \quad (6) \cos(2x + \pi/4), x_0 = 0;$$

$$(7) \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x, x_0 = 0;$$

$$(8) \frac{x}{(1-x^2)^7}, x_0 = 0.$$

**解** 由于是在指定点  $x_0$  展开为 Taylor 展开式, 故需先化  $f(x)$  为含  $(x-x_0)$  因式情形, 然后利用已知展开式求出.

$$(1) e^{x-1} = e^{(x-2)+1} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}, -\infty < x < +\infty.$$

$$\begin{aligned} (2) \cos x &= \cos\left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi/4)^{2n}}{(2n)!} \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n, -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \ln x &= \ln[1 + (x-1)] \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, 0 < x \leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \frac{x}{x^3 - 5x + 6} &= \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} \\ &= \frac{3}{2 + (x-5)} - \frac{2}{3 + (x-5)} \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{1 + (x-5)/2} - \frac{2}{3} \frac{1}{1 + (x-5)/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-5}{2}\right)^n - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-5}{3}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}\right) (x-5)^n, |x-5| < 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad \frac{1}{x^2} &= \left(\frac{-1}{x}\right)' = \left[\frac{-1}{3+(x-3)}\right]' = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+(x-3)/3}\right]' \\
&= -\frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} (x-3)^n\right]' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} n(x-3)^{n-1}, \quad 0 < x < 6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{n!} 2^n x^n, \quad -\infty < x < +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) \quad \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x &+ \frac{1}{2} \arctan x - x \\
&= \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1-x) - \frac{1}{2} \arctan x - x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } \arctan x &= \int_0^x (\arctan)' dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - x \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) - x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1}, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (8) \quad \frac{x}{(1-x^2)^3} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x^2} \right)' = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \right]' \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}, \quad |x| < 1.
 \end{aligned}$$

• 例 9 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{n-1}};$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n; \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}.$$

解 已知幂级数求和函数的一般方法是:将已知幂级数进行分解重组或者逐项求积、逐项求导,化为已知和函数的幂级数形式,再求出和函数.

$$(1) \text{ 设 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n, \text{ 因为}$$

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1)(n+2)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1},$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \left[ \int_0^x S(x) dx \right] dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)x^{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \\
 &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1,
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S(x) = \left( \frac{x^2}{1-x} \right)' = \left[ \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

$$(2) \text{ 设 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^{n-1}, \text{ 因为}$$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^{n-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1},$$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \left( \frac{1}{1+x} \right)' = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad |x| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^{n-1} = \left[ \frac{-x}{(1+x)^2} \right]' = \frac{x-1}{(1+x)^3}, \quad |x| < 1,$$

从而  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3}, \quad |x| < 1.$

(3) 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ , 因为

$$[xS(x)]' = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n,$$

$$[xS(x)]'' = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

所以  $[xS(x)]' = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x),$

$$xS(x) = -\int_0^1 \ln(1-x) dx = (1-x)\ln(1-x) + x,$$

从而  $S(x) = \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1, \quad |x| < 1, x \neq 0,$

$$S(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)} \left( \frac{x}{3} \right)^{2n-1}, \end{aligned}$$

而  $\left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)} \left( \frac{x}{3} \right)^{2n-1} \right]'$   
 $= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{x}{3} \right)^{2(n-1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+(x/3)^2},$

故  $S(x) = x \int_0^x \frac{1}{3} \frac{dx}{1+(x/3)^2} = x \arctan \frac{x}{3}, \quad |x| \leq 3.$



$$(5) \text{ 设 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (x+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$\text{因为 } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$\text{所以 } S(x) = 2\left(\frac{x}{1-x}\right)' - \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

$$(6) \text{ 设 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \text{ 因为}$$

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-x/2},$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \int_0^x \frac{1/2}{1-x/2} dx = -\ln(1-x/2),$$

$$\text{故 } S(x) = \frac{-1}{x} \ln(1-x/2), \quad 2 \leq x < 2, x \neq 0,$$

$$S(0) = 1/2.$$

• 例 10 利用幂级数求下列常数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}; \quad (2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n2^n};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 - n + 1) \frac{1}{2^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n+1}}.$$

解 观察所给数项级数, 考虑其与某易求和函数的幂级数的关系, 利用幂级数和函数在某  $x_0$  处的值, 求得常数项级数的和.

$$(1) \text{ 利用幂级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ 求解. 因为}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} / \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right| = 1,$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$  在  $(-1, 1)$  内收敛, 因而可逐项求导, 即

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$

令  $x = 1/\sqrt{2}$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \end{aligned}$$

从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1).$

$$(2) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2} \frac{1}{2^n},$$

利用幂级数  $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2} x^n$  求解. 因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)2^{n+1}} &= \frac{1}{2^3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)2^{n-2}} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{8} \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \ln 2, \end{aligned}$$

$$\text{又 } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16},$$

$$\text{所以 } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n2^n} = \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{16} = \frac{5}{16} - \frac{3}{8} \ln 2.$$

(3) 利用  $\frac{1}{1-x}$  的展开式求解. 因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 - n + 1) \frac{1}{2^n} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1) \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

$$\text{而 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^{n-1},$$



$$\text{由 } \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1)x^{n-2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1},$$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},$$

$$\text{所以 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(n-1)x^n = x^2 \left( \frac{1}{1+x} \right)' = \frac{2x^2}{(1+x)^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 - n + 1)x^n = \frac{2x^2}{(1+x)^3} + \frac{1}{1+x}.$$

令  $x = 1/2$ , 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 - n + 1) \frac{1}{2^n} = \frac{2(1/2)^2}{(1+1/2)^3} + \frac{1}{1+1/2} = \frac{22}{27}.$$

(4) 利用  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1}$  的和函数求解. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1},$$

$$\text{而 } \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n,$$

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x},$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = \left( \frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

令  $x = 1/2$ , 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2(1/2)^2}{(1-1/2)^3} = 4.$$

• 例 11 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$ ,

(1) 证明:  $f(x)$  在  $(-1/3, 1/3)$  内连续;

(2) 计算  $\int_0^{1/8} f(x) dx$ .

证 由于幂级数和函数的可积性与可导性,有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(3x)^{n-1} \\ &= \left[ \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n(3x)^{n-1} dx \right]' = \left[ \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n \right]' \\ &= \left( \frac{1}{3} \frac{3x}{1-3x} \right)' = \frac{1}{(1-3x)^2}, \quad |x| < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(1) 因为  $f(x)$  是幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$  在  $(-1/3, 1/3)$  内的和函数, 所以  $f(x)$  在  $(-1/3, 1/3)$  内连续.

(2) 由于  $(0, 1/8) \subset (-1/3, 1/3)$ , 利用和函数在收敛区间内的可积性, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^{1/8} f(x) dx &= \int_0^{1/8} \frac{1}{(1-3x)^2} dx = -\frac{1}{3} \int_0^{1/8} \frac{d(1-3x)}{(1-3x)^2} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{-1}{(1-3x)} \Big|_0^{1/8} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

• 例 12 说明函数  $f$  在  $x_0$  处的 Taylor 公式, Taylor 级数及 Taylor 展开式之间的关系.

解 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处  $n$  阶可微, 则有 Taylor 公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

当  $n \rightarrow \infty$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  时, Taylor 公式就演变为 Taylor 展开式, 即

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots. \end{aligned}$$

Taylor 展开式右边的级数称为 Taylor 级数.

$f(x)$  的 Taylor 公式只有有限项, 而 Taylor 展开式是无穷多项. Taylor 公式与 Taylor 展开式是等式, 而 Taylor 级数不是等式.



• 例 13 求下列函数的近似值, 精确到  $10^{-4}$ :

- (1)  $e$ ; (2)  $\cos 10^\circ$ ;  
 (3)  $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$ ; (4)  $\int_0^{1/4} \sqrt{1+x^2} dx$ .

解 利用函数的幂级数, 由对余项的估计确定  $n$ , 从而得到满足精确度的近似值.

(1) 因为  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$ , 而误差

$$\Delta = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} \\ = \frac{1}{n!n},$$

要  $\Delta < 10^{-4}$  只要  $nn! > 10^4 \Rightarrow n \geq 7$ .

当每项取到小数点后第五位时, 有

$$e = 1 + \sum_{n=1}^7 \frac{1}{n!} \approx 2.71828.$$

(2) 因为  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  是交错级数, 所以误差

$R_{2n}^{(x)} \leq \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ . 取  $x = 18^\circ = \pi/10$ , 则要

$$\frac{1}{(2n)!} \left( \frac{\pi}{18} \right)^{2n} < 10^{-4} \Rightarrow n = 2.$$

故  $\cos 10^\circ = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{18} \right)^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{\pi}{18} \right)^4 \approx 0.98480$ ,

其中每项取到小数点后第五位.

(3) 因为  $\cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$ , 所以

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^n dx \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n)!(n+1)} \Big|_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!(n+1)}$$

是交错级数, 误差  $R_{2n}(x) \leq \frac{1}{(2n)!(n+1)}$ . 要

$$\frac{1}{(2n)!(n+1)} < 10^{-4},$$

只需取  $n = 4$ , 故

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{480} \approx 0.76280,$$

其中每项取到小数点后第五位.

(4) 因为

$$\sqrt{1+x^3} = (1+x^3)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \cdots,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^{1/4} \sqrt{1+x^3} dx &= \int_0^{1/4} (1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{56}x^6 + \cdots) dx \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{256} - \frac{1}{56} \times \frac{1}{16384} + \cdots, \end{aligned}$$

要  $R_n(x) < 10^{-4}$ , 只需取  $n = 2$ , 故

$$\int_0^{1/4} \sqrt{1+x^3} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2048} \approx 0.25048,$$

其中每项取到小数点后第五位.

• 例 14 利用 Euler 公式将  $e^x \sin x$  与  $e^x \cos x$  展开成  $x$  的幂级数.

解 因为  $e^x \cos x + ie^x \sin x = e^x e^{ix} = e^{(i+1)x}$ ,

$$\begin{aligned} \text{而 } e^{(i+1)x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i+1)^n}{n!} x^n \\ &= 1 + (i+1)x + \frac{1}{2!}(i+1)^2 x^2 + \frac{1}{3!}(i+1)^3 x^3 + \cdots \\ &= 1 + (i+1)x + \frac{2i}{2!}x^2 + \frac{-2+2i}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + x - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{4}{4!}x^4 - \frac{4}{5!}x^5 + \cdots \end{aligned}$$



$$+i(x+x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{4}{5!}x^5+\cdots),$$

对比等式两边的实部与虚部,得

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots, -\infty < x < +\infty,$$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

**例 15** 确定下列级数的收敛半径与收敛域:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n |x|^n}.$$

**解** 题(1)、(2)、(3)是缺项级数,但解法各不相同.而题(4)根本不是幂级数.

(1) 用 D'Alembert 准则求解,因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n} \right) / \left( \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} \right) = \frac{|x|^2}{2},$$

所以,当  $|x| < \sqrt{2}$  时,幂级数绝对收敛,故  $R = \sqrt{2}$ ; 当  $x = \pm\sqrt{2}$  时,

级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (n-2)$ , 发散. 从而知幂级数收敛域为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

(2) 对级数添加一些值为零的项,得

$$a_k = \begin{cases} n^2, & k = n^2, \\ 0, & k \neq n^2, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots,$$

即级数化为  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ . 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R = 1,$$

且当  $x = \pm 1$  时,原级数的通项  $(\pm 1)^{n^2} n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , 所以原级数收敛域为  $(-1, 1)$ .

(3) 由根值法,有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x^{n^2}|/2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2} \\ &= \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1/2, & |x| = 1, \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

得收敛半径  $R = 1$ , 收敛域为  $[-1, 1]$ .

(4) 不是幂级数, 无收敛半径.

1) 当  $x = 0$  时, 原级数没有意义;

2) 当  $x > 0$  时, 原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n|x|^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 发散;

3) 当  $x < 0$  时, 原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n|x|^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ , 依 Leibniz

准则, 级数收敛.

综上所述,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n|x|^n}$  的收敛域为  $(-\infty, 0)$ .

**例 16** 设  $|x| < 1$ , 证明:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

**证** 利用等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  与逐项求导公式求解.

$$\begin{aligned}(1) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n dx \right]' \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$$



$$\begin{aligned}
&= \left\{ \int \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} dx \right] dx \right\}^n \\
&= \left[ \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2} x^n dx \right]^n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} x^{n+1} \right)^n \\
&= \left[ \frac{x^2}{2(1-x)} \right]^n = \frac{1}{(1-x)^3}. \\
(3) \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} x^{n-2} \\
&= \left\{ \int \left( \int \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{6} x^{n-2} dx \right] dx \right) dx \right\}^n \\
&= \left\{ \int \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{6} x^{n-1} dx \right] dx \right\}^n \\
&= \left[ \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{6} x^n dx \right]^n = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} x^{n+1} \right]^n \\
&= \left[ \frac{x^3}{6(1-x)} \right]^n = \frac{1}{(1-x)^4}.
\end{aligned}$$

例 17 证明: 当  $|x| < 1$  时, 有

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}; \\
(2) \quad &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x.
\end{aligned}$$

证 两级数在  $|x| < 1$  时均一致收敛, 故可以逐项求积.

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \\
&= \int_0^x dt + \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt + \cdots + \int_0^x t^{2n-2} dt + \cdots \\
&= \int_0^x (1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n-2} + \cdots) dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t} \right) dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \ln 2 = 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots \right);$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \ln 3 = 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots \right);$$

$$\text{令 } x = \frac{2}{3}, \text{ 则 } \ln 5 = 2 \left( \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{2^5}{5 \cdot 3^5} + \cdots \right).$$

$$\begin{aligned} (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \\ &= \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \cdots + (-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n-2} dt + \cdots \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x, \quad |x| \leq 1. \end{aligned}$$

令  $x = \sqrt{3}/3$ , 得

$$\pi = 2\sqrt{3} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^3} - \frac{1}{7 \cdot 3^5} + \cdots \right).$$

令  $x = \pm 1$ , 则得 Leibniz 级数

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right).$$

**例 18** 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$  ( $-\infty < x < +\infty$ ), 不求和函数,

将积分  $\int_0^x t f(t) dt$  用  $f(x)$  表示出来.

**解** 利用幂级数在收敛区间内可逐项求积的性质, 对

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{n!} \text{ 积分.}$$

$$\int_0^x t f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{n!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+2} x^{2n+2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{2} [f(x) - 1].
 \end{aligned}$$

**例 19** 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), 证明: 当  $0 < x < 1$  时, 有

$$f(x) + f(1-x) + \ln x [\ln(1-x)] = \pi^2/6.$$

**证** 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$ , 所以幂级数收敛半径为 1, 而

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \text{ 利用逐项微分, 得} \\
 \{f(x) + f(1-x) + \ln x [\ln(1-x)]\}' \\
 &= f'(x) - f'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln x}{x-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}}{n} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

从而  $f(x) + f(1-x) + \ln x [\ln(1-x)] = C, x \in (0, 1)$ .

令  $x \rightarrow 0^+$ , 得  $C = f(1) = \pi^2/6$ , 故

$$f(x) + f(1-x) + \ln x [\ln(1-x)] = \pi^2/6.$$

**例 20** 设  $a_n \geq 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 0$ ,

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .

**证** 因为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散, 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R \leq 1$ . 依

Cauchy-Hadamard 法, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$ .

设  $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 因为

$$1 - \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \frac{A_{n-1}}{A_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

所以  $\sqrt[n]{A_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 0$  知, 当  $n$  充分大时, 有

$$a_n < a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A_n.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 1,$

即  $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$

• 例 21 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间为  $(-R, R), 0 < R < +\infty$ , 并且在  $x = -R$  处绝对收敛, 证明它在  $[-R, R]$  上一致收敛.

证 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-R, R)$  内收敛, 又

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n (-R)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n R^n| \Rightarrow |a_n x^n| < |a_n R^n|,$$

依 M 判别准则, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  在  $[-R, R]$  上一致收敛.

• 例 22 证明: 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  的和函数在  $x_0$  的邻域内恒等于零, 那么它的所有系数  $a_n$  都等于零.

证 由题设知

$$\begin{aligned} 0 &= S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \end{aligned}$$

由和函数的连续性, 得

$$0 = S(x_0) = a_0.$$

又由和函数的逐项求导性, 得

$$0 = S'(x_0) = a_1, 0 = S''(x_0) = 2a_2, \cdots, 0 = S^{(n)}(x_0) = n!a_n, \cdots,$$

从而  $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0,$

即所有的系数  $a_n$  都等于零.



• 例 23 如果正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $[-1, 1]$  上连续.

证 在  $[-1, 1]$  上,  $|a_n x^n| \leq |a_n|$ , 则由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 依 M 判别准则,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $[-1, 1]$  上一致收敛, 从而和函数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $[-1, 1]$  上连续.

例 24 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$  在  $(0, 1)$  内不一致收敛, 但在  $[0, 1]$  上可逐项积分.

证 1) 先证级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$  在  $(0, 1)$  内不一致收敛. 因为  $x = 1$  时, 级数通项  $u_n(1) = x^{2n} \ln x|_{x=1} = 0$ . 当  $0 < x < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$  为等比级数, 所以和函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-x^2} \ln x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

于是  $S(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x^2 \ln[1-(1-x)]}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2} \neq S(1)$ .

从而由和函数不连续知,  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$  在  $(0, 1)$  内不一致收敛.

2) 再证级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$  在  $[0, 1]$  上可逐项积分. 因为

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{2k} \ln x = \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} \ln x = \frac{x^2 \ln x}{1-x^2} x^{2n},$$

而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{1-x^2}$  与  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 \ln x}{1-x^2}$  都有有限极限, 并且  $\frac{x^2 \ln x}{1-x^2}$  在  $(0, 1)$  内连续, 所以  $\frac{x^2 \ln x}{1-x^2}$  在  $(0, 1)$  内有界. 从而  $\exists M > 0$ , 使得  $\left| \frac{x^2 \ln x}{1-x^2} \right|$

$\leq M$ . 于是

$$|R_n(x)| \leq Mx^{2n},$$

$$\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| \leq \int_0^1 |R_n(x)| dx \leq M \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{M}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

此式说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 R_n(x) dx = 0$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x$  可以在  $[0, 1]$  上逐项积分.

**例 25** 利用幂级数证明不等式:

(1)  $e^x + e^{-x} \leq 2e^{x^2/2}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ;

(2)  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

**证** (1) 因为

$$e^x + e^{-x} = 2\cosh x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad 2e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2n}}{(2n)!!},$$

所以  $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!!} \Rightarrow e^x + e^{-x} \leq 2e^{x^2/2}.$

(2) 因为

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] dx \\ &> \int_0^1 \frac{1-x-x^2/2}{\sqrt{1-x^2}} dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \sin t - \frac{1}{2} \sin^2 t \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{8} - 1 > 0, \end{aligned}$$

从而知  $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx > \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$



因为将  $F$  展开为  $[-l, l]$  上的 Fourier 级数时,

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

所以 
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

该式称为  $f$  在  $[0, l]$  上的 Fourier 正弦展开式.

7. Fourier 级数的复数形式 对定义在  $[-l, l]$  上周期为  $2l$ 、满足 Dirichlet 条件的函数  $f$ , 令  $\omega = \frac{\pi}{l}$ , 由 Euler 公式  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ , 得

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = \cos n\omega x = \frac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}),$$

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = \sin n\omega x = \frac{1}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}),$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}) - \frac{ib_n}{2}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x} \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x}. \end{aligned}$$

以上三式称为 Fourier 级数的复数形式.

应用 Fourier 级数分析各种频率成分的正弦波振幅的大小, 称为频谱分析.

### 疑难解析

1. 对函数进行 Fourier 展开时要注意哪些问题?

答 首先考虑函数的定义区间是否满足收敛定理要求.

(1) 当  $f(x)$  是定义于  $(-\infty, +\infty)$  上的以  $2\pi$  为周期的函数, 且满足收敛定理条件时, 可按收敛定理写出 Fourier 级数并得到和函数.

(2) 若函数  $f(x)$  仅定义在  $[-\pi, \pi]$  或  $[0, 2\pi]$  上, 则要对  $f(x)$  作周期延拓, 使之成为  $(-\infty, +\infty)$  上以  $2\pi$  为周期的周期函数 (不必写具体延拓过程), 依收敛定理写出 Fourier 级数并得到和函数.

(3) 若函数  $f(x)$  仅定义在  $[0, \pi]$  上, 则要对  $f(x)$  作奇延拓或偶延拓, 使之成为  $[-\pi, \pi]$  上的奇函数或偶函数; 再进行周期延拓, 使之成为  $(-\infty, \infty)$  上以  $2\pi$  为周期的周期函数; 最后依收敛定理写出 Fourier 级数并得到和函数.

(4) 若函数  $f(x)$  是定义在  $[-l, l]$  或  $[0, l]$  上的函数, 那么, 首先作代换  $x = \frac{l}{\pi}t$ , 使  $g(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = f(x)$  成为  $[-\pi, \pi]$  或  $[0, \pi]$  上的函数, 再写出  $f(x)$  的 Fourier 级数并得到和函数. 其次要注意的是 Fourier 系数的规律性问题.  $a_n$  (或  $b_n$ ) 的值的规律常常不从  $n=1$  开始, 而从某  $n_0$  开始, 因此需要计算前若干个  $a_n$  (或  $b_n$ ). 当  $n$  为奇 (偶) 数时,  $a_n$  (或  $b_n$ ) 的表达式可能不同.

2. 怎样认识可积函数在指定区间上的 Fourier 展开式的唯一性与其三角展开式的多样性?

答 依 Dirichlet 收敛定理, 可积函数  $f(x)$  在指定的区间上的 Fourier 展开式是唯一确定的. 但当将  $f(x)$  的定义区间延拓时, 由于在延拓后的区间上, 函数形式有了改变, 因此得到不同的三角展开式. 例如, 对定义在  $[0, l]$  上的函数  $f(x)$  奇延拓后, 在  $(-l, l)$  内得到一个正弦展开式, 而偶延拓后, 在  $(-l, l)$  内得到一个余弦展开式, 两者的形式完全不同.

### 典型例题与习题详解

Fourier 级数的实质本意不在积分区间, 而在于所选择的函数系是三角函数正交系. 在改变积分区间时, 只要选择不同的三角函数正交系就可以了. 因此, 必须认识正交函数系特点.

• 例 1 什么叫做正交函数系? 证明函数系

$$\{\sin \omega t, \sin 2\omega t, \cdots, \sin n\omega t\}, t \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \omega = \frac{2\pi}{T}$$



是所给区间上的正交函数系.

**证** 在一个函数系中,若任意两个不同函数在所给区间上的积分等于零,而任一函数自身的平方在所给区间上的积分不等于零,则称该函数系为正交函数系.

据此,  $\forall n, m \in \mathbf{N}$ , 因为

$$\begin{aligned} & \int_0^{T/2} \sin n\omega t \sin m\omega t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T/2} [\cos(n-m)\omega t - \cos(n+m)\omega t] \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n-m)\omega} \sin(n-m)\omega t \right]_0^{T/2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n+m)\omega} \sin(n+m)\omega t \right]_0^{T/2} = 0, \\ & \int_0^{T/2} \sin^2 n\omega t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{T/2} (1 - \cos 2n\omega t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{2n\omega} \sin 2n\omega t \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{T}{4}, \end{aligned}$$

所以,函数系

$$\{\sin\omega t, \sin 2\omega t, \dots, \sin m\omega t\}, \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \omega = \frac{2\pi}{T}$$

是  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  上的正交函数系.

• **例 2** 函数  $f$  满足什么样的条件就存在着相应的 Fourier 级数?  $f$  的 Fourier 级数一定收敛吗? 若收敛, 一定收敛于  $f$  本身吗?

**解** 由 Euler-Fourier 公式确定系数的三角级数称为 Fourier 级数. 若只就公式而言, 只要  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 就可写出唯一的 Fourier 展开式形式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

但此时  $f(x)$  与 Fourier 展开式之间还不能用等号连接起来. 因此还不能说函数  $f$  存在相应的 Fourier 级数.

依Dirichlet定理,若 $f$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段单调,而且除有限个第一类间断点外连续,则函数 $f$ 的Fourier级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛,和函数为

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 是 } f \text{ 的连续点,} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 是 } f \text{ 的间断点,} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

可以看出,当 $f$ 满足Dirichlet定理条件时, $f(x)$ 的Fourier级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于 $S(x)$ . 当且仅当 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上并在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续时,Fourier级数才收敛于 $f(x)$ .

• 例3 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ )上满足Dirichlet条件,如何求 $f$ 在 $[a, b]$ 上的Fourier展开式?试写出它的Fourier系数公式.

解 若函数 $f$ 在区间 $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ )上满足Dirichlet条件,则 $f(x)$ 是周期 $T = b - a$ 的周期函数.不妨设 $T = 2l = 2\frac{b-a}{2}$ ,并作代换

$$z = x - \frac{b-a}{2} = x - l,$$

于是  $f(x) = f(z+l) = F(z)$ ,  $-\frac{b-a}{2} \leq z \leq \frac{b-a}{2}$ ,

即  $-l \leq z \leq l$ , 从而有

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(z) \cos \frac{n\pi z}{l} dz, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz, & n = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad ①$$

再作一次代换,令 $y = \frac{\pi z}{l}$ ,于是区间 $-l \leq z \leq l$ 化为 $-\pi \leq y \leq \pi$ ,

$F(z) = F\left(\frac{ly}{\pi}\right) = \varphi(y)$ ,  $\varphi(y)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数,且满足



Dirichlet 条件,从而有

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(y) \cos ny dy, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(y) \sin ny dy, & n = 0, 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (2)$$

再代回  $z$ , 即得前面的系数公式 ①, 再在式 ① 中代回变量  $x$ , 得  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的 Fourier 系数式

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} f(x) \cos \frac{n\pi(x-l)}{l} dx, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} f(x) \sin \frac{n\pi(x-l)}{l} dx, & n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

其中  $l = (b-a)/2$ .

• 例 4 设  $S(x)$  是周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$  的和函数,  $f(x)$  在一个周期内的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 2 < |x| \leq \pi, \\ x, & |x| \leq 2. \end{cases}$$

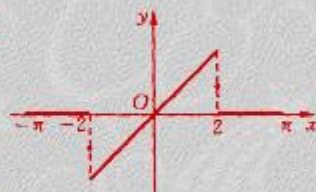


图 4.4.1

写出  $S(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式.

解 因为  $f(x)$  在点  $x = \pm 2$  间断(见图 8.4.1), 在其它点连续, 则由 Dirichlet 条件, 得

$$S(x) = \begin{cases} -1, & x = -2, \\ x, & |x| < 2, \\ 1, & x = 2, \\ 0, & 2 < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

• 例 5 求下列函数的 Fourier 级数, 它们在一个周期内的定义分别为:

$$(1) f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi;$$

$$(2) f(x) = 2\sin \frac{x}{3}, \quad -\pi \leq x < \pi;$$

$$(3) f(x) = e^x + 1, -\pi \leq x < \pi;$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi.$$

解 先考察在 $[-\pi, \pi]$ 上定义的函数是否满足 Dirichlet 条件, 依 Euler-Fourier 公式计算 Fourier 系数, 再写出函数的 Fourier 级数, 并按题设条件求出 Fourier 级数的和函数.

(1)  $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$ , 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 且为偶函数, 因此

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x^2 d \sin nx \text{ (分部)} \\ &= (-1)^n 4/n^2, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

因为函数在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 所以

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx, \quad |x| \leq \pi.$$

(2)  $f(x) = 2 \sin \frac{x}{3}, -\pi \leq x < \pi$ , 在 $(-\pi, \pi)$ 内连续, 且为奇函数, 因此

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin \frac{x}{3} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \cos \left( \frac{1}{3} - n \right) x - \cos \left( \frac{1}{3} + n \right) x \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin(n-1/3)x}{n-1/3} - \frac{\sin(n+1/3)x}{n+1/3} \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin(n-1/3)\pi}{n-1/3} - \frac{\sin(n+1/3)\pi}{n+1/3} \right] \\ &= \frac{3}{\pi} \sqrt{3} \left( \frac{-\cos n\pi}{3n-1} - \frac{\cos n\pi}{3n+1} \right) \end{aligned}$$



$$= (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \frac{n}{9n^2-1}.$$

又  $f(-\pi) \neq f(\pi)$ , 所以

$$f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{9n^2-1} \sin nx, \quad |x| < \pi.$$

(3)  $f(x) = e^x + 1, -\pi \leq x < \pi$ , 在  $(-\pi, \pi)$  内连续, 因此

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x + 1) dx = \frac{1}{\pi} [e^x - e^{-x} + 2\pi],$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x + 1) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x \cos nx + \cos nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^x}{1+n^2} (\cos nx + n \sin nx) + \frac{1}{n} \sin nx \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^{\pi} \cos n\pi}{1+n^2} - \frac{e^{-\pi} \cos(-n\pi)}{1+n^2} \right] = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x + 1) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^x \sin nx + \sin nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^x}{1+n^2} (\sin nx - n \cos nx) \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-ne^{\pi} \cos n\pi}{1+n^2} + \frac{ne^{-\pi} \cos(-n\pi)}{1+n^2} \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} n}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}). \end{aligned}$$

因为  $f(-\pi) \neq f(\pi)$ ,  $\text{sh}\pi = (e^{\pi} - e^{-\pi})/2$ , 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi} + 2\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \cos nx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\pi(1+n^2)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \sin nx \\ &= 1 + \frac{\text{sh}\pi}{\pi} + \frac{2\text{sh}\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - \sin nx), \quad |x| < \pi. \end{aligned}$$

(4)  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0, \end{cases}$   $x=0$  是第一类间断点, 因此

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{-1}{n\pi} [\cos nx] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{-1}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{2}{\pi(2k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

所以  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x, \quad 0 < |x| < \pi.$

(5)  $f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$ , 即

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -x, & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

在  $[-\pi, \pi]$  上满足 Dirichlet 条件, 且  $f(x)$  是偶函数, 因此

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin nx - \frac{1}{n} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} = \frac{-4}{(2k+1)^2 \pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

所以  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \quad |x| \leq \pi.$

• 例 6 把下列函数展开为 Fourier 级数, 它们在一个周期内的定义分别为

(1)  $f(x) = x(l-x), \quad x \in [-l, l];$

(2)  $f(x) = 1 - |x|, \quad x \in [-1, 1];$

(3)  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in [0, 4], \\ x-6, & x \in [4, 8]; \end{cases}$

(4)  $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \in [-2, -1] \cup [1, 2]; \end{cases}$



$$(5) f(x) = \begin{cases} \pi x + x^2, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi x - x^2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

并求级数的和函数在  $x = \pi, 3\pi/2, -10$  各点处的值.

解 (1)  $f(x)$  在  $(-l, l)$  内连续. 因此

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(l-x) dx = \frac{1}{l} \left( \frac{l}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-l}^l = -\frac{2}{3} l^2,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{-1}{l} \int_{-l}^l x^2 \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= -\frac{2}{l} \int_0^l x^2 \frac{l}{n\pi} d \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left( x^2 \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \Big|_0^l + \frac{4}{n\pi} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{-4l}{n^2 \pi^2} \int_0^l x d \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{4l^2}{n^2 \pi^2} (-1)^{n-1},$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{-2l}{n\pi} \left[ \left( x \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \Big|_0^l - \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right] = \frac{2l^2}{n\pi} (-1)^{n-1}.$$

所以

$$f(x) = -\frac{l^2}{3} + \frac{2l^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{2}{n^2 \pi} \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$|x| < l.$$

$$(2) f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1+x, & -1 \leq x < 0, \end{cases} \text{ 即 } l=1, \text{ 因此}$$

$$a_0 = \int_{-1}^0 (1+x) dx + \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^0 (1+x) \cos n\pi x dx + \int_0^1 (1-x) \cos n\pi x dx \\ &= \int_{-1}^0 x \cos n\pi x dx - \int_0^1 x \cos n\pi x dx + \int_0^1 \cos n\pi x dx + \int_{-1}^0 \cos n\pi x dx \\ &= \frac{-1}{n\pi} \left( \int_{-1}^0 \sin n\pi x dx - \int_0^1 \sin n\pi x dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi x \Big|_{-1}^0 - \cos n\pi x \Big|_0^1) \\
&= \frac{1}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n - (-1)^n + 1] \\
&= \frac{4}{n^2 (2k+1)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^0 (1+x) \sin n\pi x dx + \int_0^1 (1-x) \sin n\pi x dx \\
&= \int_{-1}^0 x \sin n\pi x dx - \int_0^1 x \sin n\pi x dx + \int_{-1}^1 \sin n\pi x dx \\
&= \frac{-1}{n\pi} (x \cos n\pi x \Big|_{-1}^0 - x \cos n\pi x \Big|_0^1) = 0,
\end{aligned}$$

所以  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x, \quad |x| \leq 1.$

(3)  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in [0, 4], \\ x-6, & x \in [4, 8], \end{cases}$  因此

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4} \int_0^8 f(x) dx = \frac{1}{4} \left[ \int_0^4 (2-x) dx + \int_4^8 (x-6) dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 + \left( \frac{x^2}{2} - 6x \right) \Big|_4^8 \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{4} \left[ \int_0^4 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{4} dx + \int_4^8 (x-6) \cos \frac{n\pi x}{4} dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} - \frac{4x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} - \frac{16}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{4} \right) \Big|_0^4 \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( \frac{4x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} + \frac{16}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{4} - \frac{24}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} \right) \Big|_4^8 \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \frac{-16}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] + \frac{16}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \right\} \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{16}{n^2 \pi^2}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{4} \left[ \int_0^4 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{4} dx + \int_4^8 (x-6) \sin \frac{n\pi x}{4} dx \right]$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left( \frac{-8}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} + \frac{4x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} - \frac{16}{n^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi x}{4} \right) \Big|_0^4 \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( \frac{-4x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} + \frac{16}{n^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi x}{4} + \frac{24}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{4} \right) \Big|_4^8 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 8.$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \in [-2, -1] \cup [1, 2]. \end{cases}$$

显然  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上连续, 且两端点函数值相等, 因此

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \cos \pi x) dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right) \Big|_{-1}^1 = 1,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \cos \pi x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \cos \left( \pi + \frac{n\pi}{2} \right) x + \cos \left( \pi - \frac{n\pi}{2} \right) x \right] dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{n\pi + 2\pi} \sin \left( \pi + \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{2}{2\pi - n\pi} \sin \left( \pi - \frac{n\pi}{2} \right) \right] \\
&= \left[ \frac{2}{(2n-1)\pi} - \frac{1}{2-(2n-1)\pi} + \frac{1}{2-(2n+1)\pi} \right] (-1)^{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{8}{\pi (2n-1) [4 - (2n-1)^2]},
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \cos \pi x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \stackrel{\text{奇}}{\longrightarrow} 0,$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1) [4 - (2n-1)^2]} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad |x| \leq 2.$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} \pi x + x^2, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi x - x^2, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

$f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 因此

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi x + x^2) dx + \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi x + x^2) \cos nx dx + \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 x^2 \cos nx dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi x + x^2) \sin nx dx + \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin nx dx \right] \\ &= 2 \int_0^{\pi} x \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx - \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx \right) \\ &= \frac{-2}{n} \left( x \cos nx - \frac{1}{n} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} + \frac{x}{n^2 \pi} (2 \sin nx - nx \cos nx) \Big|_{-\pi}^0 \\ &\quad + \frac{2}{n^2 \pi} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{x}{n^2 \pi} (2 \sin nx - nx \cos nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n^3 \pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{-2\pi}{n} (-1)^n + \frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{2}{n^3 \pi} [1 - (-1)^n] \\ &\quad + \frac{\pi}{n} (-1)^n - \frac{2}{n^3 \pi} [(-1)^n - 1] \\ &= \frac{4}{n^3 \pi} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

所以  $f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)x, |x| \leq \pi,$

$$S(\pi) = \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)] = 0,$$

$$S(3\pi/2) = S(-\pi/2) = -\pi^2/4,$$

$$S(-10) = S(-10+4\pi) = (4\pi-10)(10-3\pi).$$

• 例 7 将下列函数展开为指定的 Fourier 级数:

(1)  $f(x) = (\pi-x)/2, x \in [0, \pi],$  正弦级数;



$$(2) f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi/2], \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, \pi], \end{cases} \text{余弦级数};$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 3x/2, & x \in [0, \pi/3], \\ \pi/2, & x \in [\pi/3, 2\pi/3], \\ 3(\pi - x)/2, & x \in [2\pi/3, \pi], \end{cases} \text{正弦级数};$$

$$(4) f(x) = x - 1, x \in [0, 2], \text{余弦级数, 并求常数项级数}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

解 (1) 对  $f(x) = (\pi - x)/2, x \in [0, \pi]$  进行奇延拓, 故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \pi \sin nx \, dx - \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{x}{n} \cos nx - \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

所以, 所求正弦级数为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad 0 < x \leq \pi.$$

$$(2) \text{ 对 } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi/2], \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, \pi], \end{cases} \text{ 进行偶延拓, 故}$$

$$b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \cos nx \, dx \\ &= \left( \frac{2}{n} \sin nx - \frac{2}{\pi n^2} \cos nx - \frac{2x}{\pi n} \sin nx \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{-1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2 \pi} \left[ (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right], \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{\pi}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi} \left[ (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right] \right\} \cos nx,$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

在  $x = \frac{\pi}{2}$  处,  $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

(3) 对  $f(x) = \begin{cases} 3x/2, & x \in [0, \pi/3], \\ \pi/2, & x \in (\pi/3, 2\pi/3], \\ 3(\pi-x)/2, & x \in (2\pi/3, \pi] \end{cases}$  进行奇延拓,

故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/3} \frac{3x}{2} \sin nx \, dx + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\pi}{2} \sin nx \, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{3}{2}(\pi-x) \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{3}{\pi} \left( \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi/3} - \left( \frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} \\ &\quad - 3 \left( \frac{1}{n} \cos nx \right) \Big|_{2\pi/3}^{\pi} - \frac{3}{\pi} \left( \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right) \Big|_{2\pi/3}^{\pi} \\ &= \frac{3}{\pi^2\pi} \sin \frac{n\pi}{3} - \frac{1}{n} \left( \cos \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} \right) + \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{3} \\ &\quad - \frac{3}{n} \left[ (-1)^n - \cos \frac{2n\pi}{3} \right] + \frac{3}{\pi^2\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} + \frac{3(-1)^n}{n} - \frac{2}{n} \cos \frac{2n\pi}{3} \\ &= \frac{3}{\pi^2\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right) = \frac{6}{\pi^2\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{6} \\ &= \frac{6}{\pi(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{6}, \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi}{6} \sin(2n-1)x,$$

$$0 \leq x \leq \pi.$$

(4) 对  $f(x) = x-1, x \in [0, 2]$  进行偶延拓, 则



$$b_n = 0, \quad a_0 = \int_0^2 (x-1) dx = \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = \frac{-8}{(2k-1)^2 \pi^2}, \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{-8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)}{2} \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

在  $x=0$  处,  $f(0) = -1 = \frac{-8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$

即  $S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$

设  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots,$

$$S_1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots,$$

则  $S_1 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \right) = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} (S_0 + S_1),$

所以  $S_1 = \frac{1}{3} S_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24},$

从而  $S = S_0 + S_1 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}.$

• 例 8 证明: 在  $[0, \pi]$  上成立

$$(1) x(\pi-x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2};$$

$$(2) x(\pi-x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

证 对  $f(x) = x(\pi-x)$  求 Fourier 正弦级数与余弦级数.

(1) 对  $f(x)$  作偶延拓, 则

$$b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) dx = x^2 \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \pi \int_0^{\pi} x \cos nx dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= 2 \left( \frac{1}{n^2} \cos nx + \frac{x}{n} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} (nx \sin nx + 2 \cos nx) - \frac{2}{n^3} \sin nx \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{n^2} (-1)^n - \frac{1}{n^2} \right] - \frac{2}{\pi} \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n \\ &= \frac{2}{n^2} (-1)^{n+1} - \frac{2}{n^2} = \frac{-4}{(2n)^2}, \end{aligned}$$

所以 
$$\begin{aligned} f(x) = x(\pi - x) &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n)^2} \cos 2nx \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2nx. \end{aligned}$$

(2) 对  $f(x)$  作奇延拓, 则

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \pi \int_0^{\pi} x \sin nx dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= 2 \left( \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x}{n^2} (2 \sin nx - nx \cos nx) + \frac{2}{n^3} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2\pi}{n} (-1)^n + \frac{2\pi}{n} (-1)^n + \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$



$$= \frac{8}{\pi(2n-1)^3},$$

所以 
$$x(\pi-x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)x.$$

• 例 9 利用例 8 证明:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

证 (1) 在例 8 题(1) 中令  $x = \pi/2$ , 则

$$\frac{\pi}{2} \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi/2)}{n^2},$$

即 
$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

故 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(2) 同样, 在例 8 题(2) 中令  $x = \pi/2$ , 则

$$\frac{\pi}{2} \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi/2]}{(2n-1)^3} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi - \pi/2)}{(2n-1)^3},$$

而  $\sin(n\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin n\pi \cos(\frac{\pi}{2}) - \cos n\pi \sin(\frac{\pi}{2}) = (-1)^{n-1}.$

故 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

• 例 10 将下列函数展开为复数形式的 Fourier 级数, 并画出它们的频谱图.

(1) 锯齿波  $f(t) = \frac{h}{T}t, t \in [0, T]$ , 周期为  $T$ ;

(2) 全波整流波  $f(t) = |E \sin \omega t|, t \in [-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ , 周期为  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

解 (1)  $f(t) = \frac{h}{T}t, t \in [0, T]$ , 周期为  $T$ , 则

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{h}{T}t dt = \frac{h}{T^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{h}{2},$$

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{h}{T} t e^{-in\omega t} dt = \frac{h}{T^2} \frac{-1}{in\omega} \int_0^T t d e^{-in\omega t} \\
 &= \frac{-h}{in\omega T^2} e^{-in\omega t} + \frac{1}{n^2 \omega^2} (e^{-in\omega T} - 1) \quad (T = \frac{2\pi}{\omega}) \\
 &= \frac{ih}{2\pi n} (e^{-in2\pi} = \cos 2n\pi - i \sin 2n\pi = 1),
 \end{aligned}$$

从而 
$$f(t) = \frac{h}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{ih}{2n\pi} e^{in\omega t} \quad (\omega = 2\pi/T),$$

$$|C_n| = \frac{h}{2\pi n}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

列表如下:

$n$	0	1	2	3	4	...
$ C_n $	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2\pi}$	$\frac{h}{2\pi} \frac{1}{2}$	$\frac{h}{2\pi} \frac{1}{3}$	$\frac{h}{2\pi} \frac{1}{4}$	...

其频谱图如图 4.4.2 所示.

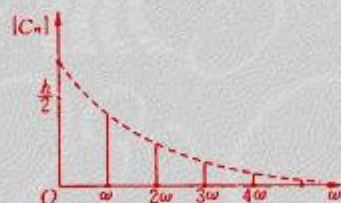


图 4.4.2

(2)  $f(t) = |E \sin \omega t|, t \in [-\frac{\omega}{\pi}, \frac{\omega}{\pi}]$ , 周期为  $\frac{2\pi}{\omega}$ , 则

$$C_0 = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t dt = \frac{\omega E}{\pi} \left( -\frac{\cos \omega t}{\omega} \right) \Big|_0^{\pi/\omega} = \frac{2E}{\pi}.$$

$$C_n = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t e^{-in\omega t} dt.$$



当  $n \neq \pm 1$  时, 利用 Euler 公式, 得

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\omega E}{2\pi i} \int_0^{x/\omega} [e^{-i(n-1)\omega t} - e^{-i(n+1)\omega t}] dt \\ &= \frac{\omega E}{2\pi i} \left[ \frac{-1}{i(n-1)\omega} e^{-i(n-1)\omega t} - \frac{-1}{i(n+1)\omega} e^{-i(n+1)\omega t} \right] \Big|_0^{x/\omega} \\ &= \frac{E}{2\pi} \left\{ \frac{1}{n-1} [e^{-i(n-1)\pi} - 1] - \frac{1}{n+1} [e^{-i(n+1)\pi} - 1] \right\} \\ &= \frac{E}{\pi} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2 - 1} \\ &= \begin{cases} -\frac{E}{\pi} \frac{2}{(2k)^2 - 1}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

当  $n = \pm 1$  时, 得

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\omega}{2\pi} \left[ \int_{-x/\omega}^0 (-\sin \omega t) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{x/\omega} \sin \omega t e^{-i\omega t} dt \right] \\ &= \frac{\omega E}{2\pi} \left[ \frac{\cos 2\omega t}{4\omega} + i \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right) \right] \Big|_{-x/\omega}^0 \\ &\quad + \frac{\omega E}{2\pi} \left[ -\frac{\cos 2\omega t}{4\omega} - i \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right) \right] \Big|_0^{x/\omega} \\ &= \frac{\omega E}{2\pi} \left( i \frac{\pi}{2\omega} \right) + \frac{\omega E}{2\pi} \left( -i \frac{E}{2\omega} \right) = 0. \end{aligned}$$

类似可得

$$C_{-1} = 0.$$

所以

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{2E}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{2n\omega t},$$

$$|C_n| = \frac{2E}{\pi} \left| \frac{1}{4n^2 - 1} \right|.$$

列表如下:

$n$	0	1	2	3	4	...
$ C_n $	$\frac{2E}{\pi}$	0	$\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{3}$	0	$\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{15}$	...

其频谱图如图 4.4.3 所示.

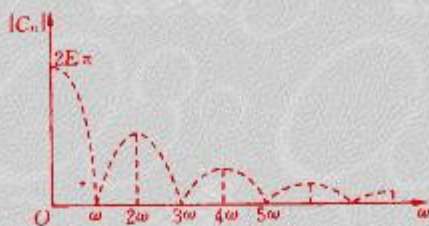


图 4.4.3

• 例 11 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积, 并且平方可积, 证明 Bessel 不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

成立, 其中  $a_0, a_n$  与  $b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 是  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 系数.

证 讨论积分  $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$ , 其中

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } |f(x) - S_n(x)|^2 &= [f(x) - S_n(x)][\overline{f(x) - S_n(x)}] \\ &= |f(x)|^2 - 2\operatorname{Re} S_n(x) f(x) + |S_n(x)|^2. \end{aligned}$$

(Re 指实部), 而

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} 2\operatorname{Re} f(x) S_n(x) dx \\ &= 2\operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) f(x) dx = 2\pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{n} \right) (a_k^2 + b_k^2) \right], \\ &\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^2 dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^2 (a_k^2 + b_k^2) \pi, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S(x)|^2 dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx + \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) (a_k^2 + b_k^2) \\
&\quad - 2\pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k^2 + b_k^2) \right] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

由于  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \geq 0$ ,

故  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right).$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} (a_k^2 + b_k^2) = 0$ .

于是

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

• 例 12 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 级数一致收敛于  $f$ , 并且  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上平方可积, 证明 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

成立, 其中  $a_0, b_n, a_n$  是  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 系数.

证 由题设条件知, 例 11 结论成立. 设

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

由于  $f(x)$  的 Fourier 级数一致收敛于有界函数  $f$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall x \in [-\pi, \pi]$ , 有

$$\left| f(x) - S_n(x) \right| = \left| f(x) - \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \right| < \varepsilon.$$

从而, 得

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx < 2\pi\varepsilon^2,$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$

与例 11 结论对比, 即得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

例 13 证明:

$$\begin{aligned} & \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

并求等式右边级数的和.

证 将  $f(x) = \pi/4$  进行奇延拓, 并展开为正弦级数, 得

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin nx dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2n} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ 1/(2k-1), & n = 2k-1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } f(x) &= \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \cdots, \\ & \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

令  $x = \pi/2$ , 得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots.$$

例 14 设  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上光滑, 证明:

(1) 若  $f(-x) = f(x)$  或  $f(\pi-x) = -f(x)$ , 则函数的 Fourier 级数为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x.$$

(2) 若  $f(-x) = -f(x)$  或  $f(\pi-x) = f(x)$ , 则函数的 Fourier 级数为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x.$$

证 (1) 若  $f(-x) = f(x)$  或  $f(\pi-x) = -f(x)$ , 则  $f(x)$



为偶函数, 则

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{而} \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx \right],$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} f(x) \cos 2nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx \right]. \end{aligned}$$

设  $x = \pi - t$ , 则  $dx = -dt$ , 于是

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx = - \int_{\pi/2}^0 f(\pi - t) dt = \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) dx,$$

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx &= - \int_{\pi/2}^0 f(\pi - t) \cos 2nt dt \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) \cos 2nx dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad a_0 &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x) + f(\pi - x)] dx = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} f(x) \cos 2nx dx + \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) \cos 2nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x) + f(\pi - x)] \cos 2nx dx = 0, \end{aligned}$$

$$\text{从而} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x.$$

(2) 请读者自己用类似方法证明.

**例 15** 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 其 Fourier 系数为  $a_0, a_n, b_n$ .

(1) 求函数  $G(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$  的 Fourier 系数  $A_0,$

$A_n, B_n$ ;

(2) 利用题(1)的结果证明 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

$$\begin{aligned} \text{证 } G(x+2\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+2\pi+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt = G(x), \end{aligned}$$

所以  $G(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 符合收敛定理条件. 故

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dx \right] dt \\ &\stackrel{x+t=u}{=} \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u) du \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du \right] dt = \frac{a_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = a_0^2. \\ A_n &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \right] \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nx dx \right] f(t) dt \\ &\stackrel{x+t=u}{=} \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u) \cos n(u-t) du \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi+t}^{\pi+t} \cos nt f(u) \cos nu du \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi+t}^{\pi+t} \sin nt f(u) \sin nu du \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nt f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nt f(t) dt \\ &= a_n^2 + b_n^2. \end{aligned}$$

类似可得

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) \sin nx dx = a_n b_n - a_n b_n = 0.$$

(2) 由题(1)得



$$G(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos nx.$$

在  $G(x)$  中, 令  $x = 0$ , 得

$$G(0) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

即 
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

**例 16** 设  $0 < \alpha < 1$ ,  $f(x) = \cos \alpha x$  在  $(-\pi, \pi)$  的 Fourier 级数为  $\cos \alpha x = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right]$ , 证明:

$$(1) \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2};$$

$$(2) \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad (0 < x < \pi);$$

$$(3) \pi = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2} dx;$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

**证** (1) 在所给 Fourier 级数中令  $x = 0$ , 即得

$$\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

(2)  $\forall x \in (0, \pi)$ , 令  $\alpha = x/\pi$ , 则  $0 < \alpha < 1$ , 代入题(1)的结果即得

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2}.$$

(3) 将题(2)的结果改写为

$$1 = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad (0 < x < \pi),$$

令 
$$u_0(x) = \begin{cases} \sin x/x, & 0 < x < \pi, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

$$u_1(x) = \begin{cases} -2x\sin x/(x^2 - \pi^2), & 0 \leq x < \pi, \\ 1, & x = \pi, \end{cases}$$

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{2x\sin nx}{x^2 - n^2\pi^2} \quad (n \geq 2, 0 \leq x \leq \pi),$$

则  $\forall n \geq 0, u_n(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 且由题(1) 有

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

当  $n \geq 2$  时,  $\forall x \in [0, \pi]$ , 有

$$|u_n(x)| \leq \frac{2\pi}{n^2\pi^2 - \pi^2} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

而 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2} < +\infty,$$

所以  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  在  $[0, \pi]$  上收敛且一致收敛, 故可在  $[0, \pi]$  上逐项积分, 得

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} u_n(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{2x\sin x}{x^2 - n^2\pi^2} dx.$$

(4) 由于所给无穷区间上的积分可以转化为有限区间上的积分的级数, 故有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi} dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \left( \frac{\sin t}{t+n\pi} + \frac{\sin t}{t-n\pi} \right) dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{2t\sin t}{t^2 - n^2\pi^2} dt = \pi \quad (\text{由题(3)}). \end{aligned}$$



事实上,若将题给 Fourier 级数写成

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos a x}{\sin a \pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos n x}{a^2 - \pi^2},$$

令  $x = \pi$ , 再将  $a\pi$  改写为  $x$ , 可得

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right).$$

利用  $\tan x = -\cot(x - \pi/2)$ , 即得

$$\tan x = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{x - (2n+1)\pi/2} + \frac{1}{x + (2n-1)\pi/2} \right] - \frac{2}{2x - \pi}.$$

由此可见,利用 Fourier 级数的收敛性质,能够通过一个函数的 Fourier 级数得到许多有用的公式.

### 综合练习题

在热辐射理论中,会遇到反常积分  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$  的计算问题(见吴百诗主编《大学物理》下册,西安交通大学出版社,222 ~ 224 页),试利用无穷级数的知识计算  $I$  的值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I &= \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} x^3 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^3 \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n dx \quad (x > 0 \text{ 时}, e^{-x} < 1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} \int_0^{+\infty} x^3 de^{-nx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{n} x^3 e^{-nx} \Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{n} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3}{n^2} \int_0^{+\infty} x^2 de^{-nx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-6x}{n^3} e^{-nx} \Big|_0^{+\infty} + \frac{6}{n^3} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{n^4} e^{-nx} \Big|_0^{+\infty} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \end{aligned}$$

再计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  的值. 由例 5 题(5) 知,  $f(x) = |x|$  的 Fourier 级数为

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x,$$

即  $a_0 = \pi$ ,  $a_n = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2}$ ,  $b_n = 0$  ( $|x| \leq \pi$ ),

又  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$ ,

依 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

令  $f(x) = |x|$ , 则有

$$\frac{2}{3} \pi^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4},$$

移项整理, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{6 \times 16},$$

即  $S_0 = \frac{\pi^4}{6 \times 16} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$ ,

设  $S_1 = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \dots$ ,

$$S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \dots,$$

而  $S_1 = \frac{1}{2^4} S = \frac{1}{2^4} (S_0 + S_1) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{15} \cdot \frac{\pi^4}{6 \times 16}$ ,

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = S = 16S_1 = \frac{\pi^4}{6 \times 15}$ .

故  $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}$ .



