

第一章 绪 论

§ 1-1 杆件结构力学的研究对象和任务

土木工程中的各类建筑物和构筑物,例如房屋、桥梁、水池、水塔、挡土墙(图 1-1 至图 1-7)等,在使用过程中,都要承受各种荷载的作用。这种承受荷载的建筑物和构筑物或其中的某些承重构件,都可称为结构。图 1-1 所示由屋架、柱子、吊车梁、屋面构件以及基础等组成的工业厂房空间骨架,图 1-6 所示的水池和图 1-7 所示的挡土墙都是结构的例子。

结构的类型是多种多样的,就几何特征区分,有杆件结构(图 1-1)、薄壁结构(图 1-3、1-4 中的屋面和图 1-6)和实体结构(图 1-7)三类。杆件的基本特征是它的长度远大于其他两个尺度——截面的宽度和高度,杆件结构便是由若干这种杆件所组成的。薄壁结构是厚度远小于其他两个尺度的结构。平板状的薄壁结构,称为薄板;由若干块薄板可组成各种薄壁结构(图 1-4、1-6b)。具有曲面外形的薄壁结构,称为薄壳结构(图 1-3、1-6a)。实体结构是指三个方向的尺度大约为同一量级的结构,例如挡土墙(图 1-7)、堤坝、块式基础等。

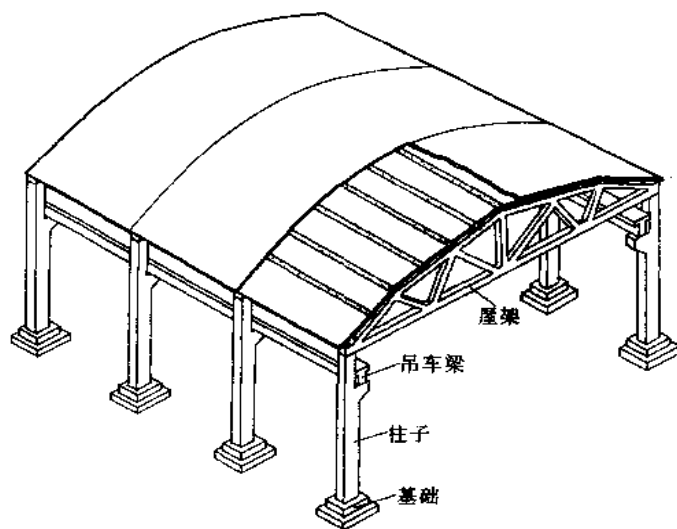


图 1-1

依照空间特征区分,杆件结构可分为平面杆件结构和空间杆件结构两类。凡组成结构的所有杆件的轴线都位于某一平面内,并且荷载也作用于该平面内的结构,称为平面杆件结构。否则,便是空间结构。严格说来,实际的结构都是空间结构,不过在进行计算时,常可根据其实际受力情况的特点,将它分解为若干平面结构来分析,以使计算简化。但需注意,并非所有情况都能

这样处理,有些是必须作为空间结构来研究的。本书的研究对象只限于平面杆件结构。



图 1-2

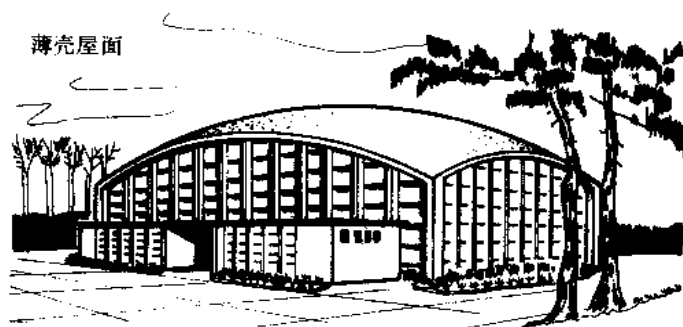


图 1-3

杆件结构力学的任务是研究结构的组成规律和合理形式以及结构在外因作用下的强度、刚度和稳定性的计算原理和计算方法。研究组成规律的目的在于保证结构各部分不致发生相对运动,使它能承受荷载并维持平衡。进行强度和稳定性计算的目的在于保证结构的安全并使之符合经济的要求。计算刚度的目的在于保证结构不致发生过大的、在实用上不能容许的位移。研究结构的合理形式是为了有效地利用材料,使其受力性能得到充分的发挥。上述强度、刚度和稳定性的计算,不仅在设计结构时需要进行,而且当已有结构所承受的荷载情况改变时,也应加以核算,以判明是否需要采取加固措施。

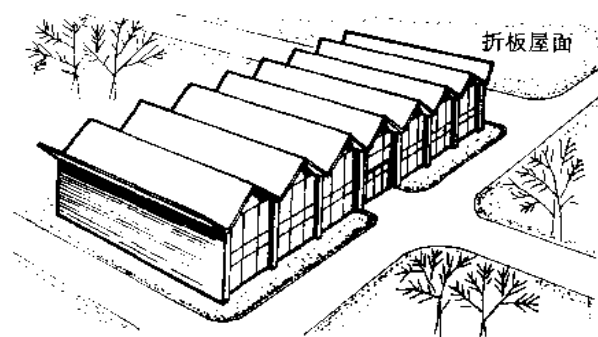


图 1-4

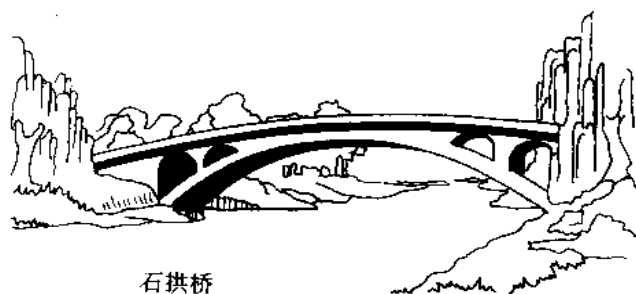


图 1-5

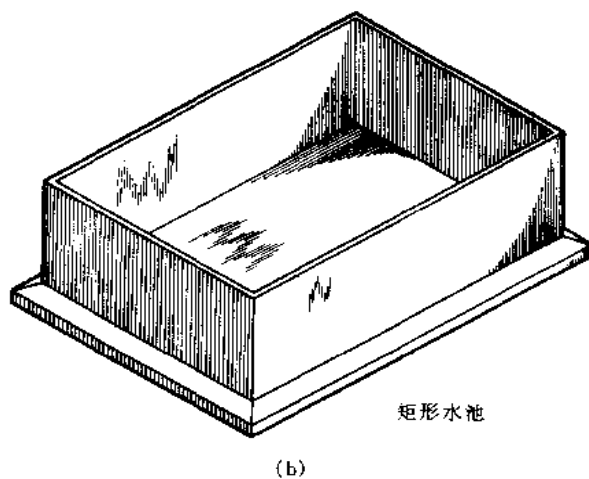
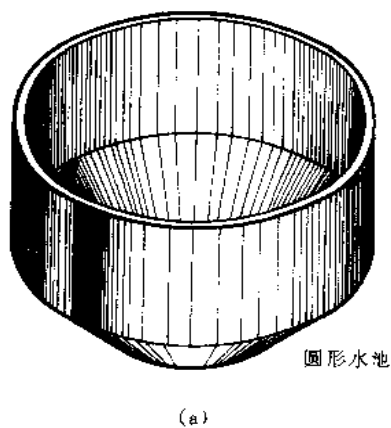


图 1-6

结构力学与材料力学的基本区别在于:后者主要是研究材料的强度和单根杆件的强度、刚度和稳定性的计算,而结构力学的研究对象是由杆件所组成的体系。根据非结构专业对本课程的教学要求,本书对结构的稳定性问题未作讨论。

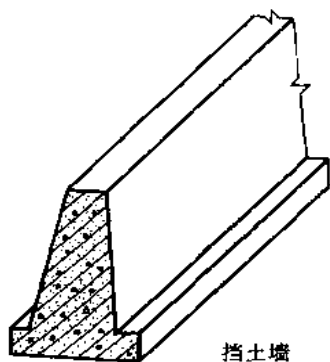


图 1-7

本书主要介绍结构力学中最基本的计算原理和计算方法,这些内容是解决一般常用结构的静力计算问题所必需的,也是进一步学习和掌握其他现代结构分析方法的基础。为了与当前结构力学的发展相适应,在第九章中扼要地介绍了结构矩阵分析的基本内容。

§ 1-2 杆件结构的计算简图

对结构进行力学分析之前,必须先将实际结构加以简化,分清结构受力、变形的主次,抓住主要矛盾,忽略一些次要因素,进行科学抽象,用一个简化了的理想模型来代替实际结构。这种在结构计算中用以代替实际结构并能反映结构主要受力和变形特点的理想模型,称为结构的计算简图。

确定结构的计算简图时,通常包括杆件的简化、支座的简化和结点的简化等方面的内容。

一、杆件的简化

根据杆件受力后的变形特点,由材料力学可知,各种杆件在计算简图中均用其轴线来代替。等截面直杆的轴线是一直线,曲杆是一曲线。一根变截面杆件也都近似地以一条直线或曲线来代替。

二、支座的简化和分类

将结构与基础或其他支承物联系,并用以固定结构位置的装置称为支座。在建筑结构中,从支座对结构的约束作用来看,常用的计算简图可分为三类:

1. 活动铰支座(图 1-8)

这种支座常用图 1-8a 所示方式表示,它对结构的约束作用是只能阻止结构上的 A 点沿垂直于支承平面方向的移动,这时,结构既可绕铰 A 作转动,又可沿着与支承平面平行的方向移动。因此,当不考虑支承平面上的摩擦力时,活动铰支座的反力将通过铰 A 的中心并与支承平面垂直,其作用点和方向是确定的,只是大小是未知的,可用 F_{Ay} 来表示。根据上述特点,这种支座在计算简图中又常用一根

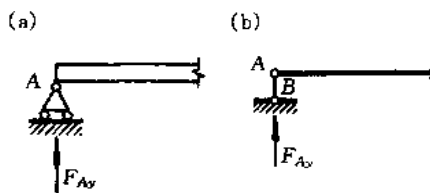


图 1-8

链杆来表示(图 1-8b), 因为与该链杆相联的结构不仅可绕铰 A 转动, 而且当链杆绕铰 B 作微小转动时, 结构也可在垂直于链杆的方向作微小移动。显然, 链杆 AB 的内力即代表该支座的反力。

在实际结构中, 凡符合或近似地符合上述约束条件的支承装置, 都可取成活动铰支座。

2. 固定铰支座(图 1-9)

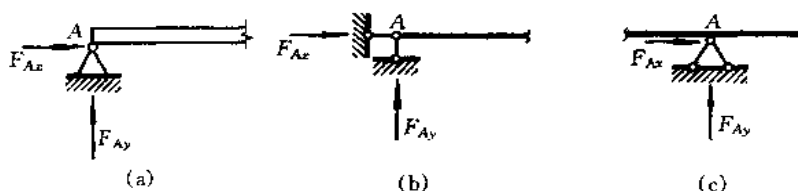


图 1-9

这种支座常用图 1-9a 所示方式表示, 它对结构的约束作用是不允许结构上的 A 点发生任何移动, 而结构只能绕铰 A 转动。因此, 固定铰支座的反力将通过铰 A 的中心, 但其方向和大小都是未知的, 可以用两个沿确定方向的未知分反力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 来表示。这种支座在计算简图中又常用交于一点 A 的两根链杆来表示(图 1-9b、c)。

在实际结构中, 凡属不能移动而可作微小转动的支承情况, 都可视为固定铰支座。例如插入钢筋混凝土杯形基础中的柱子, 当用沥青麻丝填缝时, 则柱的下端便可视为固定铰支座。

3. 固定支座(图 1-10)

这种支座不允许结构发生任何移动和转动, 它的反力的大小、方向和作用点都是未知的。因此, 可以用水平和竖向的分反力 F_x 和 F_y 以及反力矩 M 来表示(图 1-10a)。固定支座也可用三根既不全平行又不全交于一点的链杆表示(图 1-10b)。显然, 这时三根链杆的内力是与这种支座的三个反力等效的, 因为若将两根水平链杆的内力均向杆件截面的中心平移后, 便可合成为一个沿杆轴作用的水平反力 F_x 和一个反力矩 M 。在计算简图中这种支座常采用图 1-10c 所示的图形。

在实际结构中, 凡嵌入墙身的杆件, 其嵌入部分有足够的长度, 以致使杆端不能有任何移动和转动时, 该端就可视为固定支座。又如插入杯形基础中的柱子, 如果用细石混凝土填缝, 则柱的下端一般也看作是固定支座。

此外, 在结构分析中, 我们有时还会用到图 1-11 所示的支座, 它由两根平行的链杆表示, 其支座反力为沿杆轴作用的水平力 F_x 和一个反力矩 M 。这种支座称为定向支座。

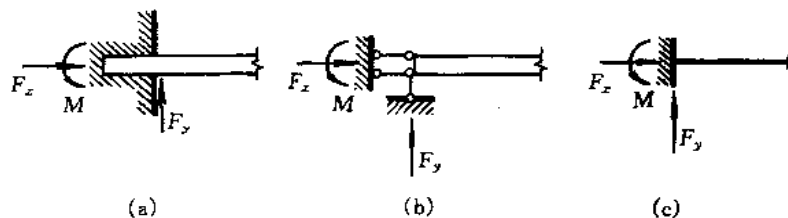


图 1-10

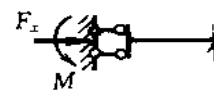


图 1-11

三、结点的简化

在杆件结构中,几根杆件相互联结处称为结点。根据结构的受力特点和结点的构造情况,在计算中常将其简化为以下两种类型:

1. 铰结点(图 1-12)

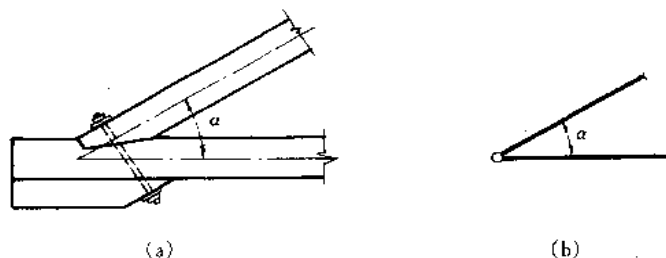


图 1-12

铰结点的特点是它所联结的各杆件都可以绕结点自由转动。例如图 1-12a 所示木屋架的端结点,它的构造情况大致符合上述约束的要求,故其计算简图如图 1-12b 所示,其中两杆之间的夹角 α 是可以改变的。

在实际结构中,根据其受力特点,如果一根杆件只有轴力,则此杆两端可用铰与结构的其他部分相联(参见图 1-15)。

2. 刚结点(图 1-13)

刚结点的特点是它所联结的各杆件变形前后在结点处各杆端切线的夹角保持不变,即各杆端转动的角度应相等。例如图 1-13a 所示钢筋混凝土结构的某一结点,它的构造是三根杆件之间用钢筋联成整体并用混凝土浇注在一起,这种结点的变形情况基本上符合上述特点,故可视为刚结点,其计算简图如图 1-13b 所示。

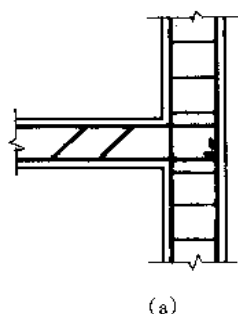


图 1-13

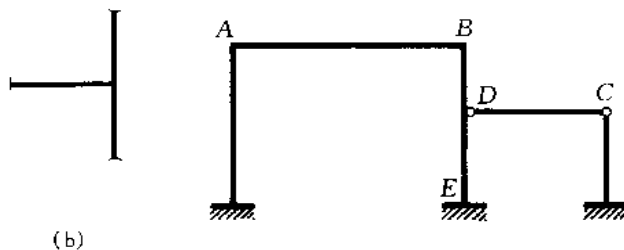


图 1-14

有时还会遇到铰结点和刚结点在一起形成的组合结点。例如,在图 1-14 中 A、B 为刚结点, C 为铰结点, D 则为组合结点。组合结点 D 应视为 BD、ED、CD 三杆在此结点相联,其中 BD 与 ED 二杆是刚性联结, CD 杆与其他两杆则由铰联结。组合结点处的铰又称为不完全铰。

综上所述,我们必须根据结构的支座和结点的实际构造情况,并分析其受力和变形特点,合理确定各支座和结点的类别。

四、计算简图示例

下面用一个简单例子来说明选取计算简图的方法和原则。

图 1-15a 所示为工业建筑中采用的一种桁架式组合吊车梁,横梁 AB 和竖杆 CD 由钢筋混凝土做成,但 CD 杆的截面面积比 AB 梁的截面面积小很多,斜杆 AD 、 BD 则为 16Mn 圆钢。吊车梁两端由柱子上的牛腿支承。

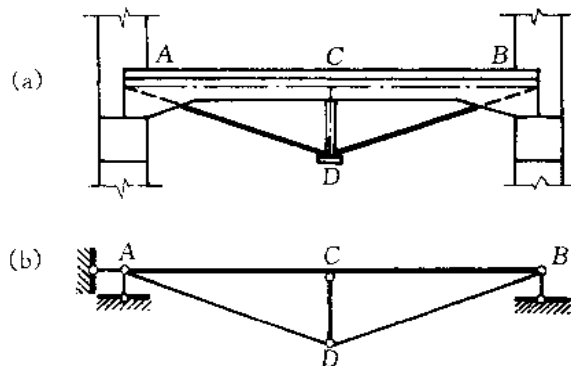


图 1-15

支座简化:由于吊车梁两端的预埋钢板仅通过较短的焊缝与柱子牛腿上的预埋钢板相联,这种构造对吊车梁支承端的转动不能起多大的约束作用,又考虑到梁的受力情况和计算的简便,所以梁的一端可简化为固定铰支座而另一端可简化为活动铰支座。

结点简化:因 AB 是一根整体的钢筋混凝土梁,截面抗弯刚度较大,故在计算简图中, AB 取为连续杆,而竖杆 CD 和钢拉杆 AD 、 BD 与横梁 AB 相比,截面的抗弯刚度小得多,它们主要是承受轴力,所以杆件 CD 、 AD 、 BD 的两端都可看作是铰结,其中铰 C 联在横梁 AB 的下方。

最后,用各杆件的轴线代替各杆件,则得图 1-15b 所示的计算简图。图中 A 、 B 、 D 为铰结点, C 为组合结点。这个计算简图,保证了主要横梁 AB 的受力性能(有弯矩、剪力和轴力);对其余三杆,保留了主要内力为轴力这一特点,而忽略了较小的弯矩和剪力的影响;对于支座,保留了主要的竖向支承作用,忽略了微弱转动的约束作用。实践证明,分析时选取这样的计算简图是合理的,它既反映了结构的变形和受力特点,又能使计算比较简单。

由以上简例可知,选取结构的计算简图时,应遵循的原则是:

- (1) 尽可能正确地反映实际结构的主要工作性能,以使计算结果精确可靠。
- (2) 必须抓住主要矛盾,忽略某些次要因素,力求计算简便。

用计算简图代替实际结构进行计算,虽然存在着一定的差异,但这是一种科学的抽象。在力学计算中,突出结构最本质的属性,忽略一些次要因素,这样就能更深入地了解问题的实质,认识事物的内在规律性。恰当选取实际结构的计算简图,是一个比较复杂的问题,不仅要掌握选取的原则,而且需要有较多的实践经验。对一些新型结构,往往还要通过反复试验和实践才能获得比较合理的计算简图。不过,对于常用的结构,前人已积累了许多经验,我们可以直接采用那些已为实践所验证的常用的计算简图。在计算简图选定之后,在作结构设计时,还应采取相应的构造措施,尽量使实际结构的内力分布和变形特点与计算简图的情况相符。

在实际工作中,有时对于同一结构,根据不同情况,可以分别采用不同的计算简图。例如,在初步设计杆件截面时,常先采用一个较简单又较粗略的计算简图,而在最后计算时,再采用一个较复杂但较精确的计算简图。较为精确的计算简图,可通过放弃某些简化假定,或者代以较为符合实际情况的假定而获得,可是计算工作就要复杂得多。由于在工程设计中使用了电子计算机,所以许多较为复杂但又比较精确的计算简图已被采用。

§ 1-3 平面杆件结构的分类

平面杆件结构是本书的研究对象,根据其组成特征和受力特点,它有如下几种类型:

1. 梁

梁是一种受弯杆件,可以是单跨的(图 1-16a,c),也可以是多跨的(图 1-16b,d)。

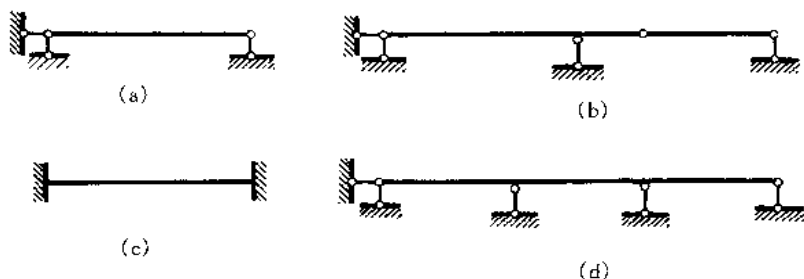


图 1-16

2. 拱

拱是曲线形的且在竖向荷载作用下支座将产生水平反力的杆件结构(图 1-17)。这种水平反力将使拱内弯矩远小于跨度、荷载及支承情况相同的梁的弯矩。

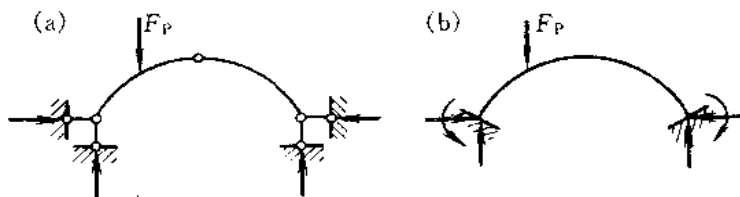


图 1-17

3. 刚架

刚架是由梁和柱组成的结构(图 1-18),各杆件主要受弯。刚架的结点主要是刚结点,也可以有部分铰结点或组合结点。

4. 桁架

桁架是由若干杆件在每杆两端用铰联结而成的结构(图 1-19)。桁架各杆的轴线都是直线,当只受到作用于结点的荷载时,各杆只产生轴力。

5. 组合结构

在这种结构中(图 1-20),有些杆件只承受轴力,而另一些杆件则同时承受弯矩、剪力和轴力。

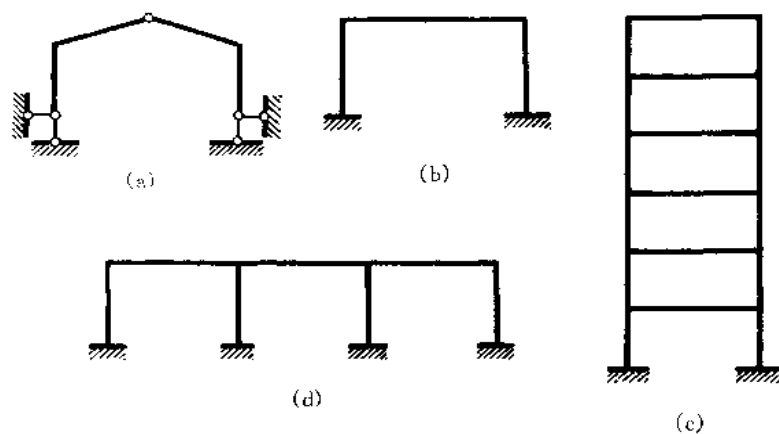


图 1-18

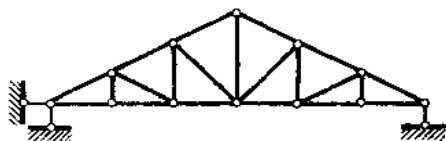


图 1-19

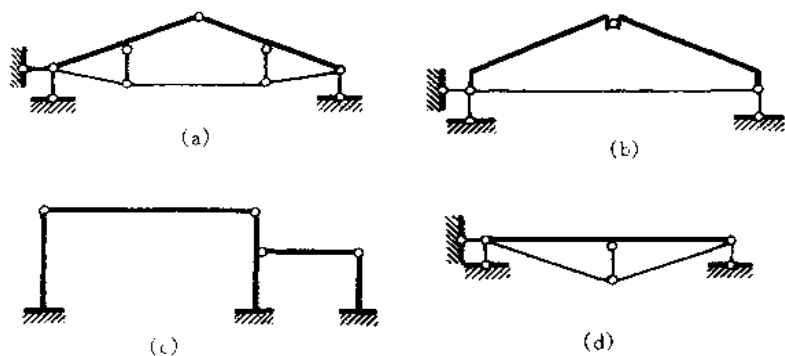


图 1-20

§ 1-4 荷载的分类

荷载是作用在结构上的主动力。按荷载作用的范围和分布情况,通常将其简化为分布荷载和集中荷载。分布荷载是指连续分布在结构某一部分上的荷载,它又可分为均布荷载和非均布荷载。当分布荷载的集度各处相同时称为均布荷载,例如等截面杆件的自重即可简化为沿杆长作用的均布荷载;当分布荷载的集度各处不相同称为非均布荷载,例如作用在池壁上的水压力

和作用在挡土墙上的土压力,均可简化为按直线变化的非均布荷载(又称线分布荷载)。集中荷载是指作用在结构上某一点处的荷载,当实际结构上的分布荷载的受载区域尺寸远小于结构的尺寸时,为了计算简便,可将此区域内分布荷载的总和视为作用在区域内某一点上的集中荷载。

作用于结构上的荷载,按其作用时间的久暂可以分为恒载和活载两类。恒载是指永久作用在结构上的荷载,如自重、结构上的固定设备的重量等。活载是指暂时作用在结构上且位置可以变动的荷载,如结构上的临时设备、风力、雪重、人群、水压力、移动的吊车等。

根据荷载作用的性质,又可分为静力荷载和动力荷载。静力荷载是指逐渐增加的、不致使结构产生显著的冲击或振动,因而可略去惯性力影响的荷载。恒载和上述大多数活载都可视为静力荷载。动力荷载是指作用在结构上面对结构产生显著的冲击或引起其振动的荷载,在这类荷载作用下,结构将会发生不容忽视的加速度。例如动力机械的振动、爆炸冲击、地震等所引起的荷载就是动力荷载。

本书只讨论结构在静力荷载作用下的计算问题。

荷载的性质和大小,应按有关设计规范或经过调查研究后审慎确定。

应该指出,结构除承受荷载外,还可能受到其他外在因素的作用,如温度改变、支座位移、材料收缩等,这些因素对结构受力和变形的影响将在后面有所讨论。

第二章 平面体系的几何组成分析

§ 2-1 几何组成分析的目的

杆件结构是由若干杆件互相联结所组成的体系,并与地基联结成一体,用来承受荷载的作用。当不考虑各杆件本身的变形时,它应能保持其原有几何形状和位置不变,即当不考虑材料的应变时,杆件结构的各个杆件之间以及整个结构与地面之间,应不致发生相对运动。

体系受到任意荷载作用后,在不考虑材料应变的条件下,若能保持其几何形状和位置不变者,称为几何不变体系,图 2-1a 所示即为这类体系的一个例子。可是另有一类体系,如图 2-1b 所示的例子,尽管只受到很小的荷载 F_P 作用,也将引起几何形状的改变,这类体系称为几何可变体系。显然,土木工程结构不能采用几何可变体系,而只能采用几何不变体系。

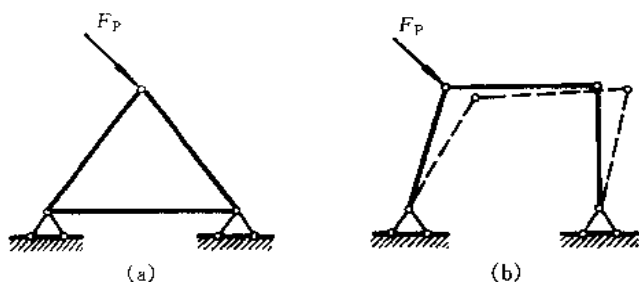


图 2-1

体系的上述区别是由于它们的几何组成不同。分析体系的几何组成,以确定它们属于哪一类体系,称为体系的几何组成分析。作这种分析的目的在于:判别某一体系是否几何不变,从而决定它能否作为结构;研究几何不变体系的组成规则,以保证所设计的结构能承受荷载而维持平衡;同时也为正确区分静定结构和超静定结构以及进行结构的内力计算打下必要的基础。

在本章中,只讨论平面杆件体系的几何组成分析。

§ 2-2 平面体系自由度的概念

为了便于对体系进行几何组成分析,先讨论平面体系自由度的概念。所谓体系的自由度,是指该体系运动时,用来确定其位置所需独立坐标的数目。在平面内的某一动点 A,其位置要由两个坐标 x 和 y 来确定(图 2-2a),所以一个点的自由度等于 2,即点在平面内可以作两种相互独立的运动,通常用平行于坐标轴的两种移动来描述。

在平面体系中,由于不考虑材料的应变,所以可认为各个构件没有变形。于是,可以把一根梁,一根链杆或体系中已经肯定为几何不变的某个部分看作一个平面刚体,简称为刚片。一个刚片在平面内运动时,其位置将由它上面的任一点 A 的坐标 x 、 y 和过 A 点的任一直线 AB 的倾角 φ 来确定(图 2-2b)。因此,一个刚片在平面内的自由度等于 3,即刚片在平面内不但可以自由移动,而且还可以自由转动。

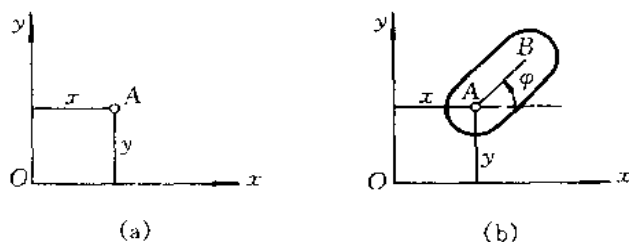


图 2-2

对刚片加上约束装置,它的自由度将会减少,凡能减少一个自由度的装置称为一个约束。例如用一根链杆将刚片与基础相联(图 2-3a),则刚片将不能沿链杆方向移动,因而减少了一个自由度,故一根链杆为一个约束。如果在刚片与基础之间再加一根链杆(图 2-3b),则刚片又减少了一个自由度。此时,它就只能绕 A 点作转动而丧失了自由移动的可能,即减少了两个自由度。

用一个铰把两个刚片 I 和 II 在 A 点联结起来(图 2-3c),那么,对刚片 I 而言,其位置可由 A 点的坐标 x 、 y 和 AB 线的倾角 φ_1 来确定。因此,它仍有三个自由度。在刚片 I 的位置被确定后,因为刚片 II 与刚片 I 在 A 点以铰联结,所以刚片 II 只能绕 A 点作相对转动。也就是说,刚片 II 只保留了独立的相对转角 φ_2 。因此,由刚片 I、II 所组成的体系在平面内的自由度为 4。而两个独立的刚片在平面内的自由度总数应为 $2 \times 3 = 6$ 。因此,用一个铰将两个刚片联结起来后,就使自由度的总数减少了两个。这种联结两个刚片的铰称为单铰。由上述可见,一个单铰相当于两个约束,也相当于两根相交链杆的约束作用(图 2-3b)。

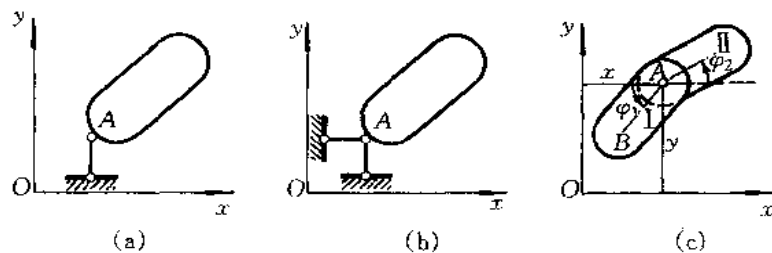


图 2-3

通过类似的分析可以知道,固定支座相当于三个约束;联结两杆件的刚结点相当于三个约束。

一个平面体系,通常都是由若干个刚片加入某些约束所组成的。加入约束后能减少体系的

自由度。如果在组成体系的各刚片之间恰当地加入足够的约束,就能使刚片与刚片之间不可能发生相对运动,从而使该体系成为几何不变体系。

§ 2-3 几何不变体系的简单组成规则

为了确定平面体系是否几何不变,须研究几何不变体系的组成规则。现就三种常见的基本情况来分析平面几何不变体系的简单组成规则。

一、两刚片的组成规则

平面中两个独立的刚片,共有六个自由度,如果将它们组成为一个刚片,则只有三个自由度。由此可知,在两刚片之间至少应该用三个约束相联,才可能组成为一个几何不变的体系。下面讨论这些约束应怎样布置才能达到这一目的。

如图 2-4a 所示,若刚片 I 和 II 用两根不平行的链杆 AB 和 CD 联结。为了分析两刚片间的相对运动情况,设刚片 I 固定不动,刚片 II 将可绕 AB 与 CD 两杆延长线的交点 O 而转动;反之,若设刚片 II 固定不动,则刚片 I 也将绕 O 点而转动。O 点称为刚片 I 和 II 的相对转动瞬心。上述情况等效于在 O 点用单铰把刚片 I 和 II 相联结。这个铰的位置是在两链杆轴线的交点上,但随着两刚片的相对转动,其位置将随之改变。因此,这种铰与一般的铰不同,称为虚铰。

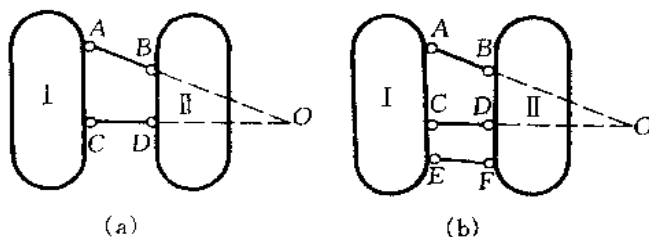


图 2-4

为了制止刚片 I 和 II 发生相对运动,还需要加上一根链杆 EF(图 2-4b)。如果链杆 EF 的延长线不通过 O 点,则刚片 I 和 II 之间就不可能再发生相对运动。这时,所组成的体系是几何不变的。于是,得出第一个组成规则:两刚片用不全交于一点也不全平行的三根链杆相联结,则所组成的体系是几何不变的。

二、三刚片的组成规则

平面中三个独立的刚片,共有九个自由度,而组成为一个刚片后便只有三个自由度。由此可见,在三个刚片之间至少应加入六个约束,方可能将三个刚片组成为一个几何不变的体系。

为了确定这六个约束的布置原则,今考察图 2-5a,其中刚片 I、II、III 用不在同一直线上的 A、B、C 三个铰两两相联。这一情况如同用三条线段 AB、BC、CA 作一三角形。由平面几何知识可知,用三条定长的线段只能作出一个形状和大小都一定的三角形。也就是说,由此得出的三角形是几何不变的。于是,得出第二个组成规则:三刚片用不在同一直线上的三个铰两两相联,则所组成的体系是几何不变的。

图 2-5a 中任一个铰可以换为由两根链杆所组成的虚铰,得出如图 2-5b 所示的体系。显然,这种体系也是几何不变的。

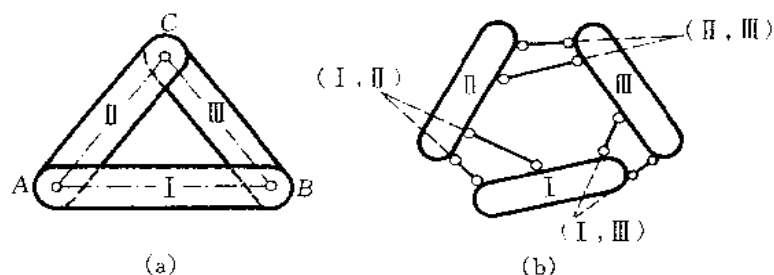


图 2-5

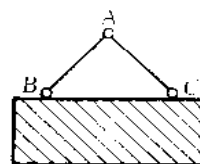


图 2-6

三、二元体规则

如将图 2-5a 中的刚片 I 与 II 看作链杆,就得到如图 2-6 所示的体系。显然,它是几何不变的。这种由两根不共线的链杆联结一个新结点的装置(例如图 2-6 中的 B—A—C)称为二元体。由上节已知,一个结点的自由度等于 2,用两根不在同一直线上的链杆相联,其约束数也等于 2。所以增加一个二元体对体系的实际自由度无影响。于是,得出第三个组成规则:在一个几何不变体系上增加一个二元体仍是几何不变的。据此推知,如在一个体系上撤去一个二元体,则也不会改变体系的几何组成性质。因此,在分析体系的几何组成时,宜先将二元体撤除,再对剩余部分进行分析,所得结论就是原体系几何组成分析的结论。

根据上述简单规则,可逐步组成更为一般的几何不变体系,也可用这些规则来判别给定体系是否几何不变。具体举例见 §2-4。值得指出,在上述三个组成规则中,都提出了一些限制条件。如果不能满足这些条件,将会出现下面所述的情况。

如图 2-7a 所示的两个刚片用三根链杆相联,链杆的延长线全交于 O 点,此时,两个刚片可以绕 O 点作相对转动,但在发生一微小转动后,三根链杆就不再全交于一点,从而将不再继续发生相对运动。这种在某一瞬时可以产生微小运动的体系,称为瞬变体系。又如图 2-7b 所示的两个刚片用三根互相平行但不等长的链杆相联,此时,两个刚片可以沿着与链杆垂直的方向发生相对移动,但在发生一微小移动后,此三根链杆就不再互相平行,故这种体系也是瞬变体系。应该注意,若三链杆等长并且是从其中一个刚片沿同一方向引出时(图 2-7c),则在两刚片发生一相对运动后,此三根链杆仍互相平行,故运动将继续发生,这样的体系就是几何可变体系。

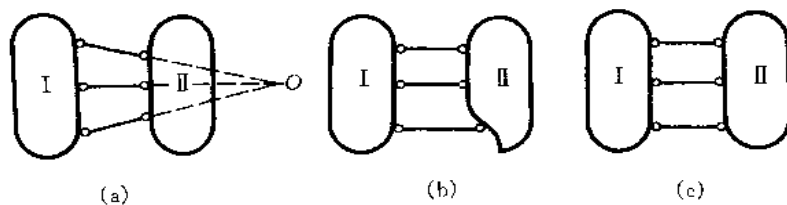


图 2-7

如三个刚片用位于一直线上的三个铰两两相联(图 2-8),此时 C 点位于以 AC 和 BC 为半径的两个圆弧的公切线上,故 C 点可沿此公切线作微小的移动。不过在发生一微小移动后,三个铰就不再位于一直线上,运动也就不再继续,故此体系也是一个瞬变体系。

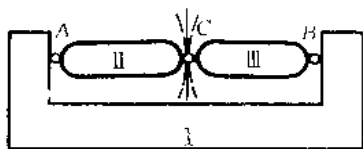


图 2-8

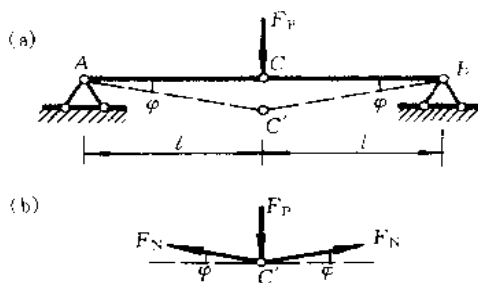


图 2-9

瞬变体系只发生微小的相对运动,似乎可以作为结构;但实际上当它受力时将可能出现很大的内力而导致破坏,或者产生过大的变形而影响使用。例如图 2-9a 所示瞬变体系,在外力 F_P 作用下,铰 C 向下发生一微小的位移而到 C' 的位置,由图 2-9b 所示隔离体的平衡条件 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_N = \frac{F_P}{2\sin \varphi}$$

因为 φ 为一无穷小量,所以

$$F_N = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{F_P}{2\sin \varphi} = \infty$$

可见,杆 AC 和 BC 将产生很大的内力和变形。因此,将有两种可能的情况:

- (1) 在杆件的变形发展过程中,其应力超过了材料的强度极限,从而导致体系的破坏。
- (2) 杆件的变形很大,但杆件的应力未超过材料的极限值,铰 C 向下移到一个新的几何位置,而在新情况下处于平衡。由此可知,在工程中是决不能采用瞬变体系的。

几何不变体系的组成规则中,指明了最低限度的约束数目。按照这些规则组成的体系称为无多余约束的几何不变体系。如果体系中的约束数目少于规定的数目,则该体系是几何可变的(图 2-10a)。如果体系中的约束比规则中所要求的多,则按规则组成有多余约束的几何不变体系。例如图 2-10b 所示体系,AB 部分以固定支座 A 与大地联结已构成一几何不变体系,支座 B 处的两根链杆对保证体系的几何不变性来说是多余的,称为多余约束,故该体系是具有两个多余约束的几何不变体系。

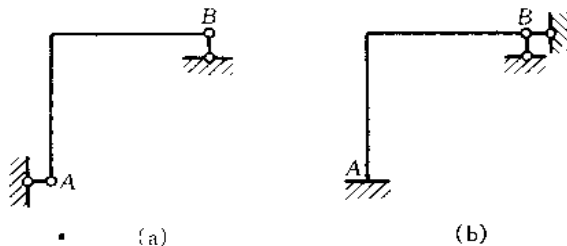


图 2-10

§ 2-4 几何组成分析举例

几何组成分析的依据通常是前述的三个规则,由于不考虑材料的应变,分析时可将基础(或大地)视为一刚片,也可把体系中的一根梁、一根链杆或某些几何不变部分视为一刚片,特别是根据规则三可先将体系中的二元体逐一撤除以使分析简化。

[例 2-1] 试对图 2-11 所示铰结链杆体系作几何组成分析。

解:在此体系中,ABC 是从一个基本铰结三角形 BFG 开始按规则三依次增加五个二元体所组成,故它是一几何不变部分。同理,ADE 也是一几何不变部分。把 ABC、ADE 视为刚片 I 和 II。链杆 CD 作为刚片 III。此时,刚片 I 和 II 用铰 A 相联;刚片 II 和 III 用铰 D 相联;刚片 III 和 I 用铰 C 相联。此三铰 A、D 和 C 不在同一直线上,所以 ABE 为一几何不变部分。将 ABE 视为一刚片,将基础视为另一刚片,该两刚片用既不全交于一点又不全平行的三根链杆相联,故知此体系是几何不变的,且无多余约束。

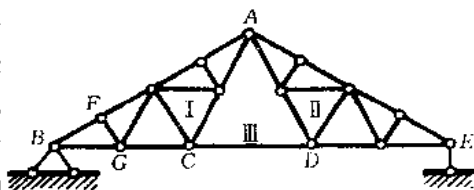


图 2-11

[例 2-2] 试对图 2-12 所示体系进行几何组成分析。

解:首先在基础上依次增加 A—C—B 和 C—D—B 两个二元体,并将所得部分视为一刚片;再将 EF 部分视为另一刚片。该两刚片通过链杆 ED 和 F 处两根水平链杆相联,而这三根链杆既不全交于一点又不全平行,故该体系是几何不变的,且无多余约束。

[例 2-3] 试对图 2-13 所示体系进行几何组成分析。

解:将 AB、BED 和基础分别作为刚片 I、II、III。刚片 I 和 II 用铰 B 相联;刚片 I 和 III 用铰 A 相联;刚片 II 和 III 用虚铰 C(D 和 E 两处支座链杆的交点)相联。因三铰在一直线上,故该体系为瞬变体系。

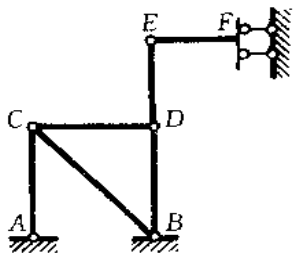


图 2-12

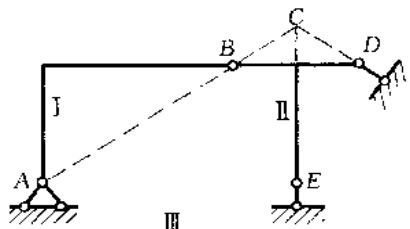


图 2-13

[例 2-4] 试对图 2-14 所示体系进行几何组成分析。

解:杆 AB 与基础通过三根既不全交于一点又不全平行的链杆相联,成为一几何不变部分,再增加 A—C—E 和 B—D—F 两个二元体。此外,又添上了一根链杆 CD,故此体系为具有一个多余约束的几何不变体系。

〔例 2-5〕 试对图 2-15 所示体系进行几何组成分析。

解: 根据规则三, 先依次撤除二元体 $G-J-H$ 、 $D-G-F$ 、 $F-H-E$ 、 $D-F-E$ 使体系简化。再分析剩下部分的几何组成, 将 ADC 和 CEB 分别视为刚片 I 和 II, 基础视为刚片 III。此三刚片分别用铰 C 、 B 、 A 两两相联, 且三铰不在同一直线上, 故知该体系是无多余约束的几何不变体系。

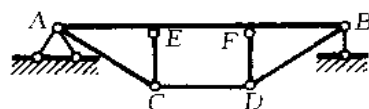


图 2-14

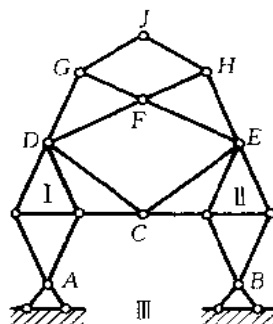


图 2-15

§ 2-5 静定结构和超静定结构

前已述及, 用来作为结构的杆件体系, 必须是几何不变的, 而几何不变体系又可分为无多余约束的(例 2-1、例 2-2、例 2-5)和有多余约束的(例 2-4)。后者的约束数目除满足几何不变性要求外尚有多余。例如图 2-16a 所示连续梁, 如果将 C 、 D 两支座链杆去掉(图 2-16b), 剩下的支座链杆恰好满足两刚片联结的要求, 所以它有两个多余约束。又如图 2-17a 所示加劲梁, 若将链杆 ab 去掉(图 2-17b), 则它成为无多余约束的几何不变体系, 故此加劲梁具有一个多余约束。

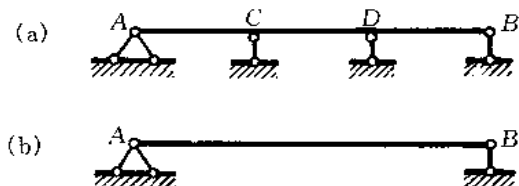


图 2-16

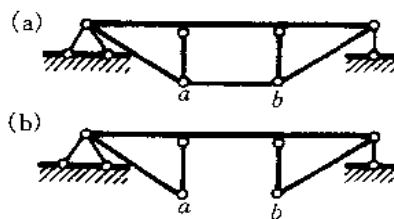


图 2-17

对于无多余约束的结构, 如图 2-18 所示的简支梁, 它的全部反力和内力都可由静力平衡条件求得, 这类结构称为静定结构。但是, 对于具有多余约束的结构, 却不能只依靠静力平衡条件求得其全部反力和内力。如图 2-19 所示的连续梁, 其支座反力共有五个, 而静力平衡条件只有三个, 因而仅利用三个静力平衡条件无法求得其全部反力, 从而也就不能求得它的全部内力, 这类结构称为超静定结构。

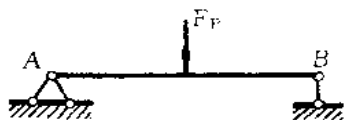


图 2-18

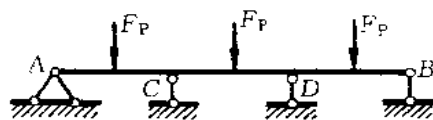


图 2-19

思考题

1. 几何可变体系、几何瞬变体系为什么不能作为结构？试举例说明。
2. 何谓单铰、虚铰？体系中任何两根链杆是否都相当于在其交点处的一个虚铰。
3. 图 2-20a 中 $B-A-C$ 是否为二元体，图 2-20b 中 $B-D-C$ 能否看成是二元体。

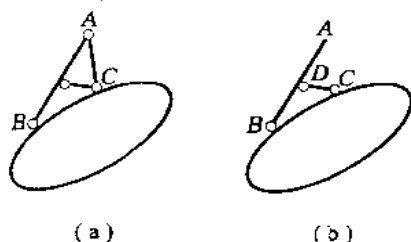


图 2-20

4. 瞬变体系与几何可变体系各有何特征？如何鉴别瞬变体系。
5. 在进行几何组成分析时，应注意体系的哪些特点，才能使分析得到简化。
6. 对例 2-3 所示体系，试用两刚片相联的规则一进行分析。通过与例 2-3 解答对比的启发，你能得到什么结论？

提示：其中两端铰接的折杆 AB ，可视为通过 A 、 B 两铰心的链杆。

7. 什么是多余约束？如何确定多余约束的个数？

习题

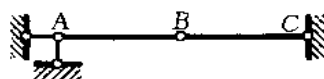
2-1~2-16 试对图示体系作几何组成分析。如果是具有多余约束的几何不变体系，则须指出其多余约束的数目。



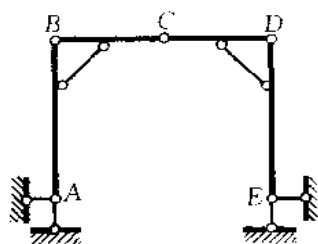
题 2-1 图



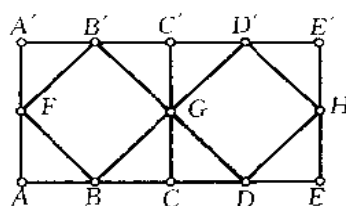
题 2-2 图



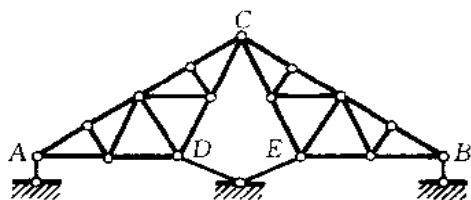
题 2-3 图



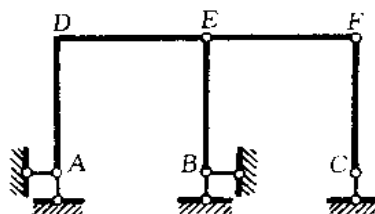
题 2-4 图



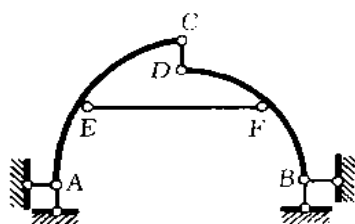
题 2-5 图



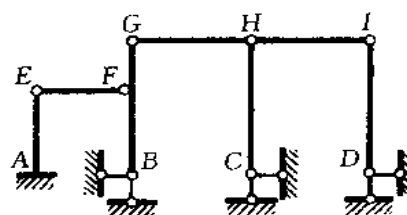
题 2-6 图



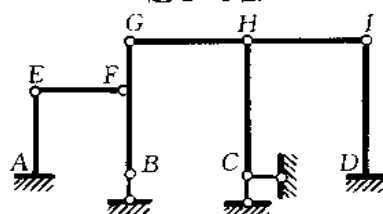
题 2-7 图



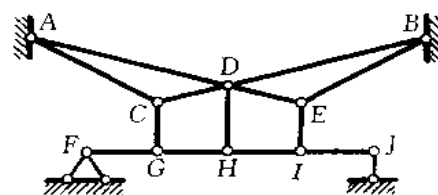
题 2-8 图



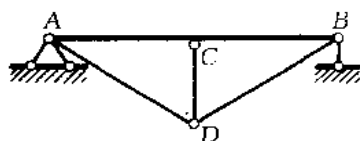
题 2-9 图



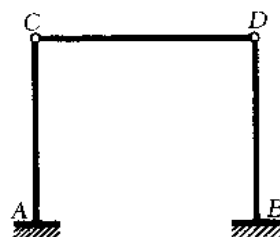
题 2-10 图



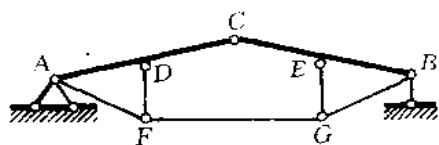
题 2-11 图



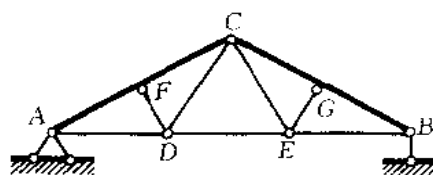
题 2-12 图



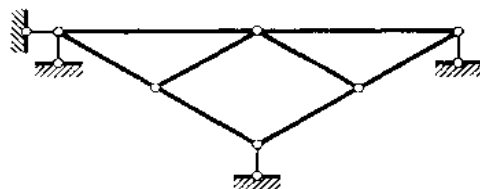
题 2-13 图



题 2-14 图



题 2-15 图



题 2-16 图

部分答案

2-1、2-2、2-4、2-6、2-8、2-9、2-10、2-11、2-14 均为无多余约束的几何不变体系。

2-12、2-13 为具有一个多余约束的几何不变体系。

2-15 为具有两个多余约束的几何不变体系。

2-3、2-16 为瞬变体系。

2-5、2-7 为几何可变体系。

第三章 静定结构的内力分析

§ 3-1 静 定 梁

一、单跨静定梁

单跨静定梁的计算在材料力学中已作详细讨论。例如图 3-1a 所示简支伸臂梁,通过计算可绘出其内力图如图 3-1b、c 所示。现在就图 3-1a 所示单跨伸臂梁讨论与内力图有关的一些问题。

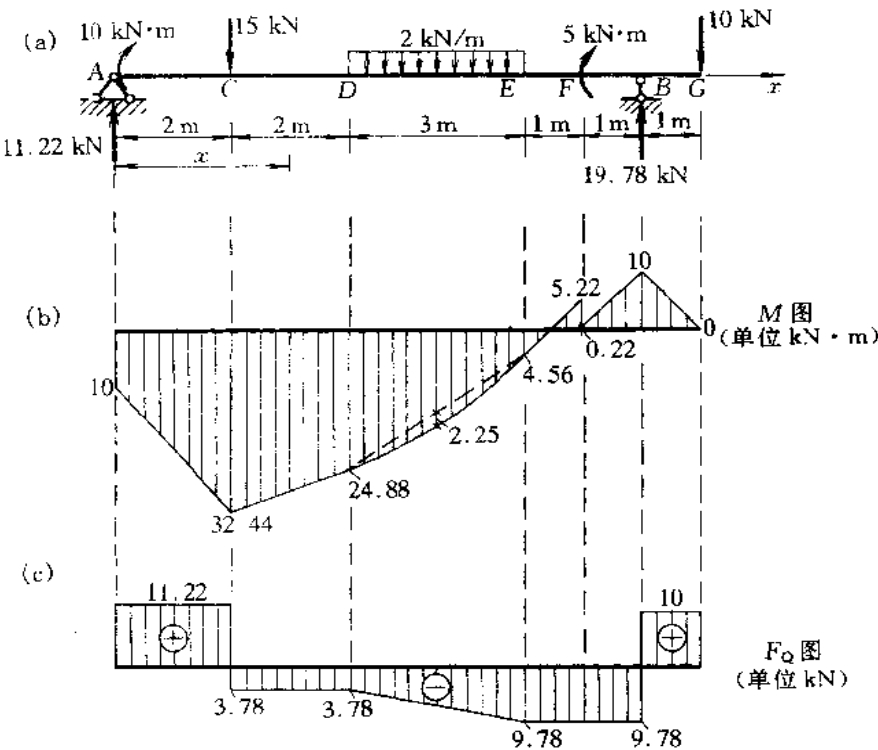


图 3-1

若以 x 表示梁中某一截面的位置,则此截面上的内力可用 x 的函数来表示,这就是内力函数,据此作出的图形就是内力图。掌握各内力函数之间和内力函数与荷载之间的微分关系将有助于对内力图进行分析。图 3-2 所示为某梁中的一个微段,考虑该微段的平衡,可得如下的微分关系式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_Q(x)}{dx} &= -q(x) \\ \frac{dM(x)}{dx} &= F_Q(x) \\ \frac{d^2 M(x)}{dx^2} &= -q(x) \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

内力图总是由若干段直线和曲线所组成。例如图 3-1b 所示弯矩图,由五段直线和一段曲线组成;图 3-1c 所示的剪力图,由五段直线组成。内力图的这种特点是由梁上荷载的分布情况所决定的。一般说,分布于梁上的荷载使梁的某些区段成为无荷载区($q=0$);使另一些区段成为分布荷载区(通常为均布荷载区,即 q 为常数;或者直线分布荷载区,即 q 为 x 的一次函数)。根据式(3-1)的微分关系可知,在无荷载区段,因 $q=0$,所以剪力 F_Q 为常数,弯矩 M 为 x 的一次函数,故 F_Q 图为平行于基线(x 轴)的直线, M 图为斜直线(如图 3-1 中 AG 梁的 AC、CD、EF、FB、BG 段)。在均布荷载区段,因 q 为常数,所以剪力 F_Q 为 x 的一次函数,弯矩 M 为 x 的二次函数。因此, F_Q 图为斜直线, M 图为二次抛物线(如图 3-1 中 AG 梁的 DE 段)。同理,在荷载为直线分布的区段,因 q 为 x 的一次函数,所以 F_Q 图为二次抛物线, M 图为三次抛物线,本章习题 3-6 中的 AB 段将是这一情况。

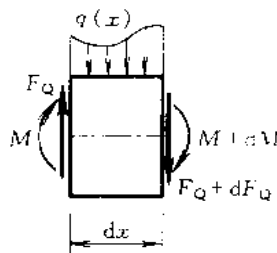


图 3-2

集中荷载作用点(如图 3-1 中 AG 梁的 C、B 点)、集中力矩作用点(如 AG 梁的 F 点)以及分布荷载的两端(如 AG 梁的 D、E 点)是荷载分布的间断点。在这些点处,内力图具有一定的特征。如集中荷载作用点处,剪力图发生突变,弯矩图发生转折;集中力矩作用点处弯矩图发生突变,剪力图无变化;分布荷载的两端处,弯矩图的直线段与曲线段在此相切等。

梁的端点的内力有时是给定的,不需计算。如铰支端(如图 3-1 中 AG 梁的 A 端),有集中力矩作用时,其弯矩等于集中力矩的大小;无力矩作用时则等于零。对于自由端(如图 3-1 中 AG 梁的 G 端),受集中荷载作用时,其剪力等于集中荷载之值,而弯矩等于零;若无荷载作用,则其剪力和弯矩均等于零。

以上扼要说明了内力图的一些特征,将有助于正确地绘出内力图。学习中应注意加深理解,熟练掌握。

绘制内力图时,可根据荷载分布情况分段进行。如图 3-1 中 AG 梁的 M 图,可分为六段。对于直线段,只要将两端的弯矩竖标定出,然后以直线连接即得。 M 图的曲线段,例如均布荷载作用的 DE 区段,定出两端点的竖标后再采用叠加法绘出其图形。下面介绍用叠加法绘制均布荷载作用区段的 M 图。

图 3-3a 为某一受均布荷载作用的杆段 ik ,图 3-3b 为具有同样跨度的受同一均布荷载作用的简支梁。因为荷载相同,所以它们有同样的微分关系 $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$,积分两次后可得

$$M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

式中 C_1 、 C_2 为两个待定常数。利用 $x=0$ 时, $M=M_k$; $x=l$ 时, $M=M_i$ 可以求得 C_1 、 C_2 。上

述边界条件不但适用于 ik 杆段,而且也适用于图 3-3b 所示的简支梁。由此可知,杆 ik 的弯矩方程与图 3-3b 所示简支梁的弯矩方程将完全相同,所以它们的弯矩图也相同。对于简支梁来说,其弯矩图等于图 3-3c 和图 3-3d 所示两个弯矩图叠加。图 3-3c 为两端力矩 M_{ik} 和 M_{ki} 作用下的弯矩图,图 3-3d 为均布荷载 q 作用下的弯矩图。叠加方法可按下述步骤进行:首先用虚线画出两个端力矩作用下的弯矩图,也就是图 3-3e 中的虚线,再过杆段中点作杆轴的垂线交

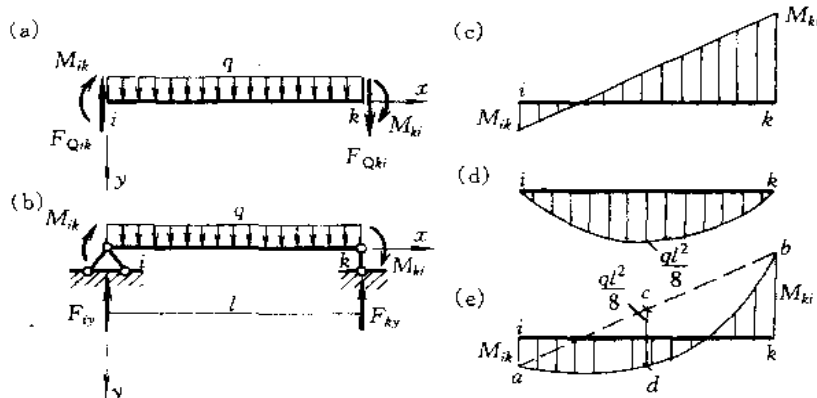


图 3-3

虚线于 c 点,然后过 c 点在垂线上沿荷载 q 的指向量取长度等于 $\frac{1}{8}ql^2$ 的线段 cd ,最后用光滑曲线将 a 、 d 、 b 三点连接,此曲线与基线所围成的图形即为叠加后的弯矩图(图 3-3e)。图 3-1a 中 DE 段的弯矩图就是按这一方法绘出的。

下面讨论斜简支梁。如图 3-4a 所示,斜简支梁的倾角为 α ,作用在梁上的均布荷载 q 沿水平分布,若 x' 轴沿梁轴布置,则得 $Ox'y'$ 坐标系;若 x 轴沿水平方向布置,则得 Oxy 坐标系。

现讨论斜简支梁计算中的两个问题:

1. 斜简支梁的内力表达式

列内力表达式时,按习惯取 Oxy 坐标系,任一截面 K 的位置以 x 表示。

取图 3-4b 所示隔离体,由 $\Sigma M_K = 0$ 得弯矩表达式为

$$M_K = \frac{ql}{2}x - \frac{1}{2}qx^2 \quad (a)$$

当 $x = \frac{l}{2}$ 时,即得斜梁中点的弯矩为 $\frac{ql^2}{8}$ 。若以 M_K^0 表示相应水平简支梁(其荷载和跨度与斜简支梁相同,如图 3-4c 所示)的弯矩,则式(a)可写为

$$M_K = M_K^0 \quad (b)$$

考虑图 3-4b 所示隔离体上各力对 y' 轴投影的平衡条件,可得剪力表达式为

$$F_{QK} = \left(\frac{ql}{2} - qx \right) \cos \alpha \quad (c)$$

或写成

$$F_{QK} = F_{QK}^0 \cos \alpha \quad (d)$$

式中 F_{QK}^0 为相应水平简支梁的剪力。

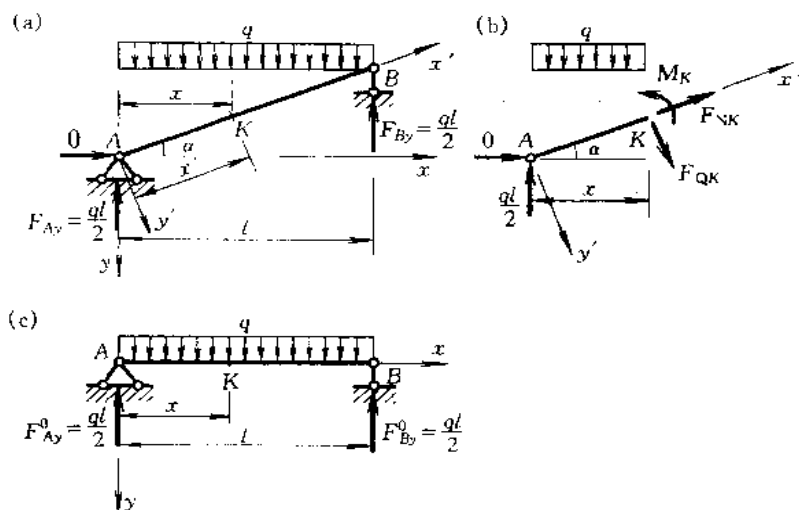


图 3-4

考虑图 3-4b 所示隔离体上各力对 x' 轴投影的平衡条件, 可得轴力表达式为

$$F_{NK} = \left(-\frac{ql}{2} + qx \right) \sin \alpha \quad (e) \quad (a)$$

或写成

$$F_{NK} = -F_{QK}^0 \sin \alpha \quad (f)$$

2. 斜简支梁内力图的绘制

绘制斜梁的内力图时, 一般是以梁轴为基线, 且内力图竖标与梁轴垂直。为此, 应将各内力方程中的自变量 x 变换为 x' 。注意到两组坐标系间有如下关系:

$$x = x' \cos \alpha$$

式中 $\cos \alpha$ 为常数。利用上式将式(a)、(c)、(e)中的自变量 x 转换为 x' 后, 可以看出斜简支梁在均布荷载作用下, 弯矩图的形状也是二次抛物线, 剪力图和轴力图的形状均为斜直线。根据内力方程可绘出图 3-4a 所示斜简支梁的弯矩图、剪力图和轴力图分别如图 3-5a、b 和 c 所示。

二、多跨静定梁

多跨静定梁是工程实际中比较常见的结构, 它的基本组成型式有图 3-6 所示的两种。图 3-6a 所示的是在伸臂梁 AC 上依次加上 CE、EF 两根梁。图 3-6b 所示的是在 AC 和 DF 两根伸臂梁上再加上一小悬跨 CD。通过几何组成分析可

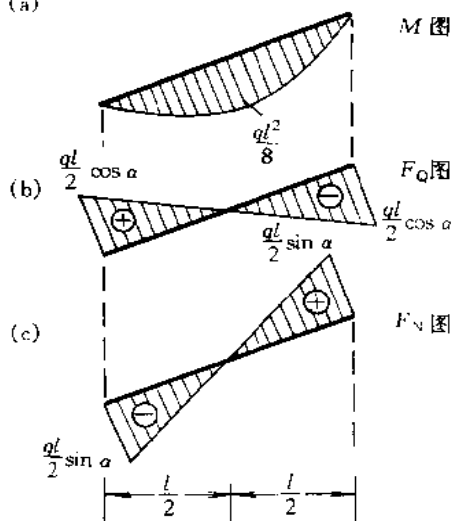


图 3-5

知,它们都是几何不变且无多余约束的体系,所以均为静定结构。

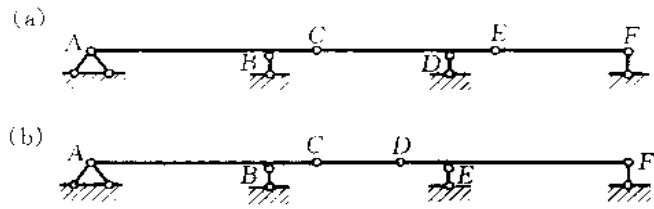


图 3-6

根据多跨静定梁的几何组成规律,可以将它的各部分区分为基本部分和附属部分。例如图 3-6a 所示的梁中,AC 是通过三根既不全平行也不全相交于一点的三根链杆与基础联结,所以它是几何不变的。CE 梁是通过铰 C 和支座链杆 D 联结在 AC 梁和基础上;EF 梁又是通过铰 E 和 F 支座链杆联结在 CE 梁和基础上。由此可知,AC 梁直接与基础组成一几何不变部分,它的几何不变性不受 CE 和 EF 影响,故称 AC 梁为该多跨静定梁中的基本部分。而 CE 梁要依靠 AC 梁才能保证其几何不变性,故称 CE 梁为 AC 梁的附属部分。同理,EF 梁相对于 AC 和 CE 组成的部分来说,也是附属部分,而 AC 和 CE 组成的部分,相对于 EF 梁来说,则是基本部分。

上述组成顺序可用图 3-7a 来表示。这种图形称为层次图。通过层次图可以看出力的传递过程。例如作用在最上面的附属部分 EF 上的荷载 F_{P3} 不但会使 EF 梁受力,而且还通过 E 支座将力传给 CE 梁,再通过 C 支座传给 AC 梁。同样,荷载 F_{P2} 能使 CE 梁和 AC 梁受力,但它不会传给 EF 梁。因此, F_{P2} 的作用对 EF 梁的内力无影响。同理,作用在基本部分 AC 梁上的荷载 F_{P1} ,只在 AC 梁上引起内力和反力,而对附属部分 CE 和 EF 都不会产生影响。总之,作用在附属部分上的荷载将使支承它的基本部分产生反力和内力,而作用在基本部分上的荷载则对附属部分没有影响。据此,计算多跨静定梁时,应先从附属部分开始,按组成顺序的逆过程进行。例如,对图 3-6a 所示多跨静定梁,应先取 EF 梁计算,再依次考虑 CE 梁和 AC 梁。这样,每一步都是单跨静定梁的计算问题,用材料力学的方法即可解决。

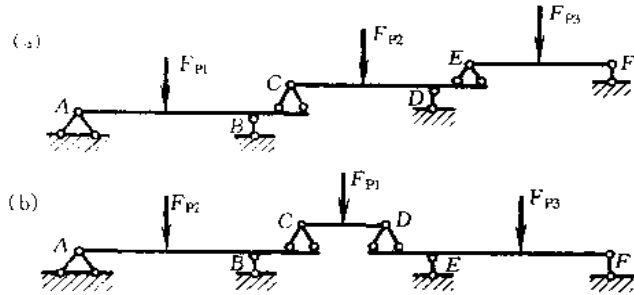


图 3-7

对图 3-6b 所示的梁。如果仅承受竖向荷载作用,则不但 AC 梁能独立承受荷载维持平衡,

DF 梁也能独立承受荷载维持平衡。这时, AC 梁和 DF 梁都可分别视为基本部分。其层次图如图 3-7b 所示, 由层次图可知, 对该梁的计算应从附属部分 CD 梁开始, 然后再计算 AC 梁与 DF 梁。

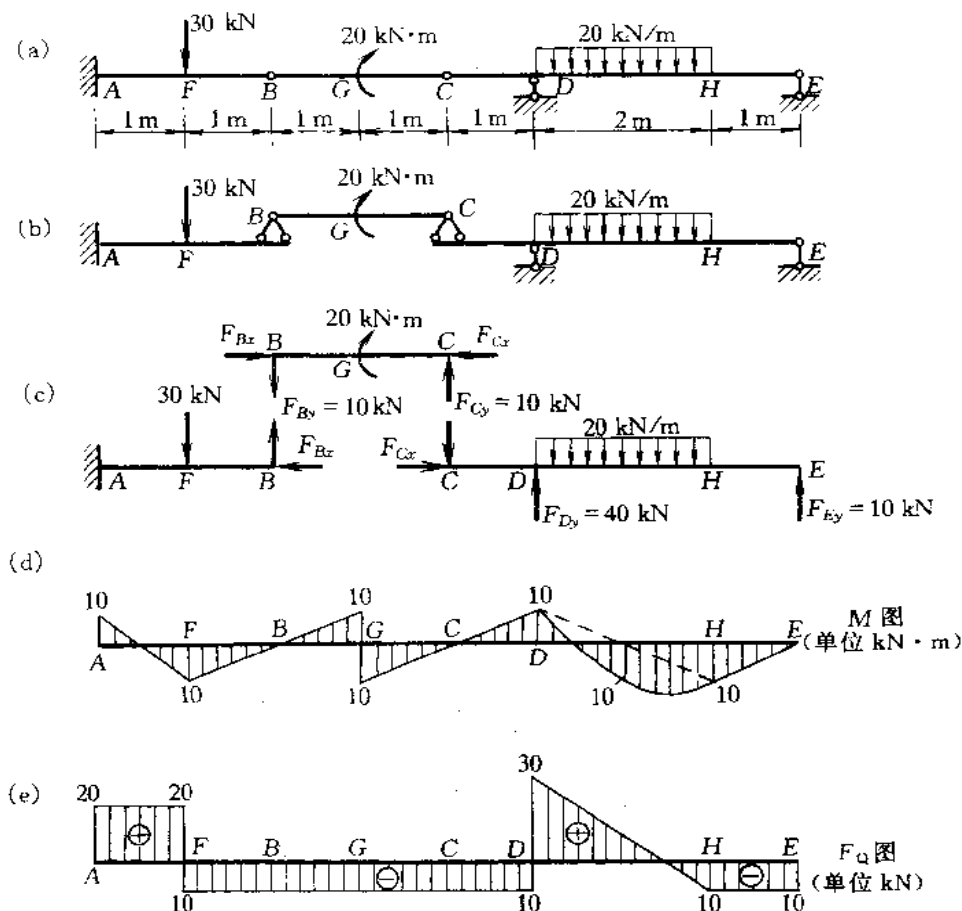


图 3-8

上述先附属部分后基本部分的计算原则, 也适用于由基本部分和附属部分组成的其他类型的结构。

下面举例说明多跨静定梁的计算方法。图 3-8a 所示多跨静定梁, 由于仅受竖向荷载作用, 故 AB 和 CE 均为基本部分, 其层次图如图 3-8b 所示。各根梁的隔离体示于图 3-8c 中。

从附属部分 BC 开始, 依次求出各根梁上的竖向约束力和支座反力。铰 C 处的水平约束力 F_{Cx} , 由 CE 梁的平衡条件可知其值为零, 并由此得知 F_{Bx} 也等于零。求出各约束力和支座反力后, 便可分别绘出各根梁的内力图。将各根梁的内力图置于同一基线上, 则得出该多跨静定梁的内力图如图 3-8d、e 所示。

在 FG、GD 两个区段内剪力 F_Q 是同一常数, 由微分关系 $\frac{dM}{dx} = F_Q$ 可知这两区段内的弯矩

图形有相同的斜率。因此,弯矩图中 FG 与 GD 两段的斜直线相互平行。同样的理由,因为在 H 左、右相邻截面上的剪力 F_Q 相等,所以弯矩图中 HE 区段内的直线与 DH 区段内的曲线在 H 点相切。

§ 3-2 静定平面刚架

平面刚架是由梁和柱组成的平面结构。如图 3-9a 所示为站台上用的“T”形刚架,它由两根横梁和一根立柱组成。梁与柱的联结处在构造上为刚性联结,即当刚架受力而变形时,汇交于联结处的各杆端之间的夹角始终保持不变。这种结点称为刚结点。具有刚结点是刚架的特点。图 3-9a 所示刚架柱子的下端用细石混凝土填缝而嵌固于杯形基础中,可看作是固定支座。又因横梁倾斜坡度不大,可近似地以水平直杆代替,故其计算简图如图 3-9b 所示。刚架受荷载作用后的变形图如图 3-9c 所示,汇交于刚结点 A 的各杆端都转动了同一角度 φ_A 。图 3-10a 为另一静定刚架,由横梁 CD 和立柱 AC 组成,其中结点 C 为刚结点。

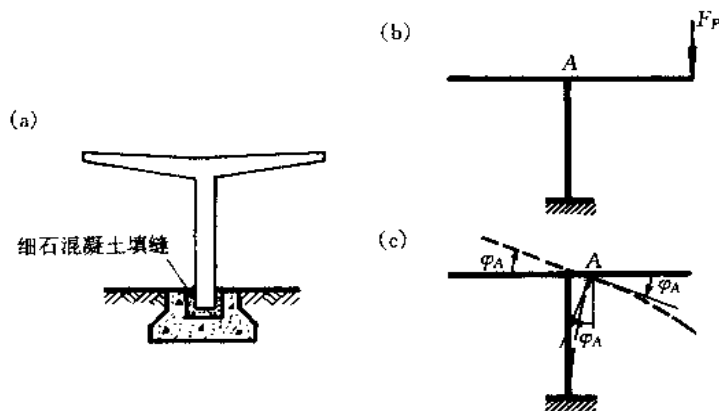


图 3-9

刚架的内力是指各杆件中垂直于杆轴的横截面上的弯矩 M 、剪力 F_Q 和轴力 F_N 。在计算静定刚架时,通常应由整体或某些部分的平衡条件,求出各支座反力和各铰接处的约束力,然后逐杆绘制内力图。值得指出,前述有关梁的内力图的绘制方法,对于刚架中的每一杆件同样适用。例如图 3-10a 中的立柱 AC ,在 C 点的下邻截面处截断立柱,并截断支座 A 的链杆,取出立柱 AC 的隔离体(图 3-10b)。将此隔离体与相应的简支梁(图 3-10b)比较,并注意轴力对弯矩和剪力不产生影响,则不难看出,二者的弯矩图、剪力图相同。由此可见,上节绘制内力图的方法也适用于立柱 AC 。刚架杆件中一般有轴力,这是它们与梁的主要区别。应该指出,当荷载与杆轴垂直时,此杆的轴力沿杆轴无变化。柱 AC 只受垂直于轴线的集中力作用,所以 AC 柱中的轴力为常数,只要将它的任一截面的轴力求得,便可绘出其轴力图。

计算图 3-10a 所示刚架的过程如下:

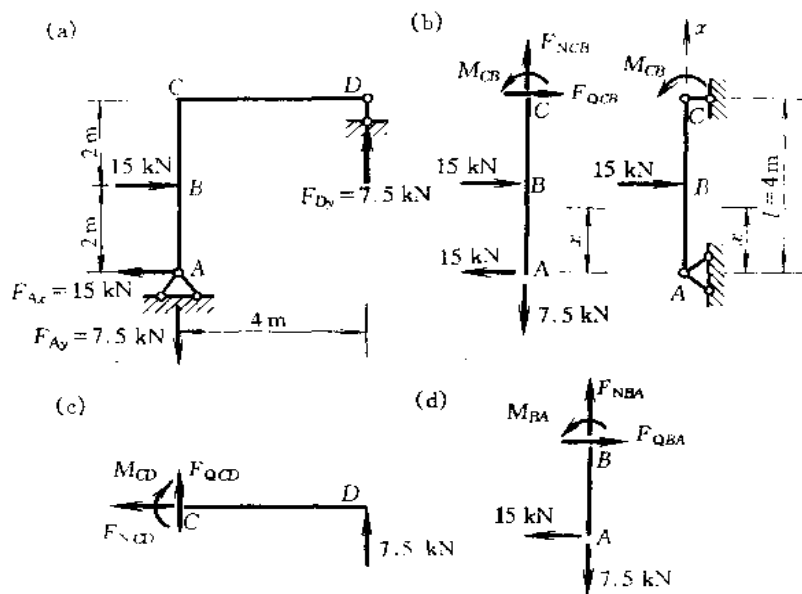


图 3-10

一、求支座反力

对于图 3-10a 所示刚架,可通过考虑整体平衡,先求出各支座反力:

$$\begin{aligned}
 &\text{由 } \Sigma M_A = 0, & 15 \times 10^3 \times 2 - F_{Dy} \times 4 = 0 \text{①} \\
 &\text{得 } & F_{Dy} = 7.5 \times 10^3 \text{ N} = 7.5 \text{ kN} \\
 &\text{由 } \Sigma F_y = 0, & -F_{Ay} + 7.5 \times 10^3 = 0 \\
 &\text{得 } & F_{Ay} = 7.5 \times 10^3 \text{ N} = 7.5 \text{ kN} \\
 &\text{再由 } \Sigma F_x = 0, & -F_{Ax} + 15 \times 10^3 = 0 \\
 &\text{得 } & F_{Ax} = 15 \times 10^3 \text{ N} = 15 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

然后根据其他平衡条件进行校核。例如由 $\Sigma M_D = 0$, 即 $-7.5 \times 10^3 \times 4 + 15 \times 10^3 \times 4 - 15 \times 10^3 \times 2 = 0$, 得知反力计算无误。

二、绘制内力图

1. 弯矩图

根据各杆的荷载情况进行分段绘图,即对于无荷载区段,只须定出两控制截面的弯矩值,即可连成直线图形;对于承受均布荷载的区段,则可利用相应简支梁的弯矩图进行叠加。通常规定弯矩图绘在纤维受拉的一边。

由图 3-10a 所示刚架的荷载情况,可知其弯矩图应分为 AB、BC 和 CD 三段来绘制。这三段都是无荷载区段,故取 A、B、C、D 为控制截面。为了使内力表达得清晰,在内力符号的右下方添上两个下标以标明内力所属杆件(或杆段),前一个下标表示该内力所属杆端。例如杆段 BC, B 端的弯矩用 M_{BC} 表示,而 C 端的弯矩则用 M_{CB} 表示。各控制截面弯矩计算如下:

① 这里量和单位的数字运算中,单位符号的使用见本书符号表说明第 4 点。以下类同。

A 端为铰,所以

$$M_{AB} = 0$$

截取图 3-10d 所示隔离体,由 $\sum M_B = 0$ 可求得

$$M_{BA} = 30 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ (右侧受拉)}$$

截取图 3-10b 所示隔离体,由 $\sum M_C = 0$ 可求得

$$M_{CB} = 30 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ (右侧受拉)}$$

截取图 3-10c 所示隔离体,由 $\sum M_C = 0$ 可求得

$$M_{CD} = 30 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ (下边受拉)}$$

$$M_{DC} = 0$$

此外,又注意到 $M_{BC} = M_{BA} = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。于是,由上述控制截面的弯矩值,即可绘出图 3-13a 所示的弯矩图。

弯矩图作出后,应进行校核。为此,可取各刚结点来检验其是否满足力矩平衡条件。例如,取结点 C 为隔离体(图 3-11),并写出其力矩平衡方程如下:

$$\sum M_C = 0, \quad 30 \times 10^3 - 30 \times 10^3 = 0$$

可见计算无误。

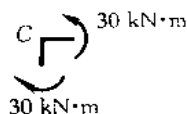


图 3-11

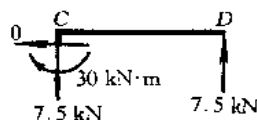


图 3-12

2. 剪力图

剪力仍规定以使隔离体有顺时针方向转动趋势的为正。在图 3-10 中所示的剪力都为正向。现因本例所分的三个区段都为无荷载区段,故各区段的剪力分别为一常数。只须求出每个区段中某一截面的剪力值便可作出剪力图。正号的剪力对于水平杆件一般绘在杆轴的上侧,并注明正号。对于竖杆和斜杆,正、负剪力可分绘于杆件两侧,并注明符号。

分别由图 3-10b、c、d 所示隔离体,即可求得

$$F_{QCB} = 0, \quad F_{QCD} = -7.5 \text{ kN}, \quad F_{QBA} = 15 \text{ kN}$$

绘出剪力图为图 3-13b 所示。

3. 轴力图

一般规定轴力以拉力为正。本例中两杆的轴力都为常数,由图 3-10b、c、d 所示隔离体可分别求得

$$F_{NCB} = 7.5 \text{ kN}$$

$$F_{NCD} = 0, \quad F_{NBA} = 7.5 \text{ kN}$$

正号的轴力对于水平杆件一般绘在杆件的上侧,并注明正号。对于竖杆和斜杆,正、负轴力可分绘于杆件两侧,并注明符号。图 3-13c 所示即为刚架的轴力图。

为了校核所作剪力图和轴力图的正确性,可用任一截面截取出刚架的某一部分,检验其平衡

条件 $\Sigma F_x = 0$ 和 $\Sigma F_y = 0$ 是否得到满足。例如,可截取如图 3-12 所示隔离体,由

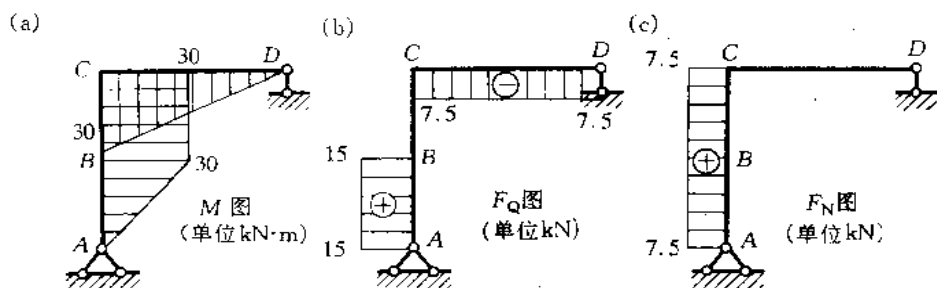


图 3-13

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0, & \text{满足} \\ \text{和 } \Sigma F_y &= 0, & -7.5 \times 10^3 + 7.5 \times 10^3 = 0 \end{aligned}$$

可知所得剪力图和轴力图无误。

为了便于读者进一步掌握上述内力图的绘制方法,下面再举两例加以说明。

[例 3-1] 试作图 3-14a 所示刚架的内力图。

解: 1. 求支座反力

$$\begin{aligned} \text{由 } \Sigma M_E &= 0, & F_{Ay} \times 4 + 5 \times 10^3 \times 2 - 16 \times 10^3 \times 5 \times 1.5 &= 0 \\ \text{得 } F_{Ay} &= 27.5 \times 10^3 \text{ N} = 27.5 \text{ kN} \\ \text{由 } \Sigma F_y &= 0, & F_{Ey} + 27.5 \times 10^3 - 16 \times 10^3 \times 5 &= 0 \\ \text{得 } F_{Ey} &= 52.5 \times 10^3 \text{ N} = 52.5 \text{ kN} \\ \text{由 } \Sigma F_x &= 0, & 5 \times 10^3 - F_{Ex} &= 0 \\ \text{得 } F_{Ex} &= 5 \times 10^3 \text{ N} = 5 \text{ kN} \end{aligned}$$

再由 $\Sigma M_A = 0$ 进行校核,有

$$5 \times 10^3 \times 2 + 16 \times 10^3 \times 5 \times 2.5 - 52.5 \times 10^3 \times 4 = 0$$

故知反力计算无误。

2. 绘制内力图

(1) 弯矩图

为了计算方便,暂规定弯矩的符号以使刚架内侧纤维受拉的为正,悬臂 DF 部分则以使下边纤维受拉为正。根据荷载情况可知,弯矩图可分为 AB 、 BC 、 CD 、 DE 和 DF 五段来绘制。各段控制截面的弯矩,可截取隔离体由平衡条件求得,也可根据任一截面上的弯矩等于该截面任一侧的所有外力对其形心的力矩的代数和,直接写出各控制截面上的弯矩。如果先从刚架的左侧开始,可知:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= M_{BA} = 0 \\ M_{BC} &= M_{CB} = 0 \\ M_{CB} &= -5 \times 10^3 \times 2 = -10 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = -10 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_{CD} &= -5 \times 10^3 \times 2 = -10 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = -10 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

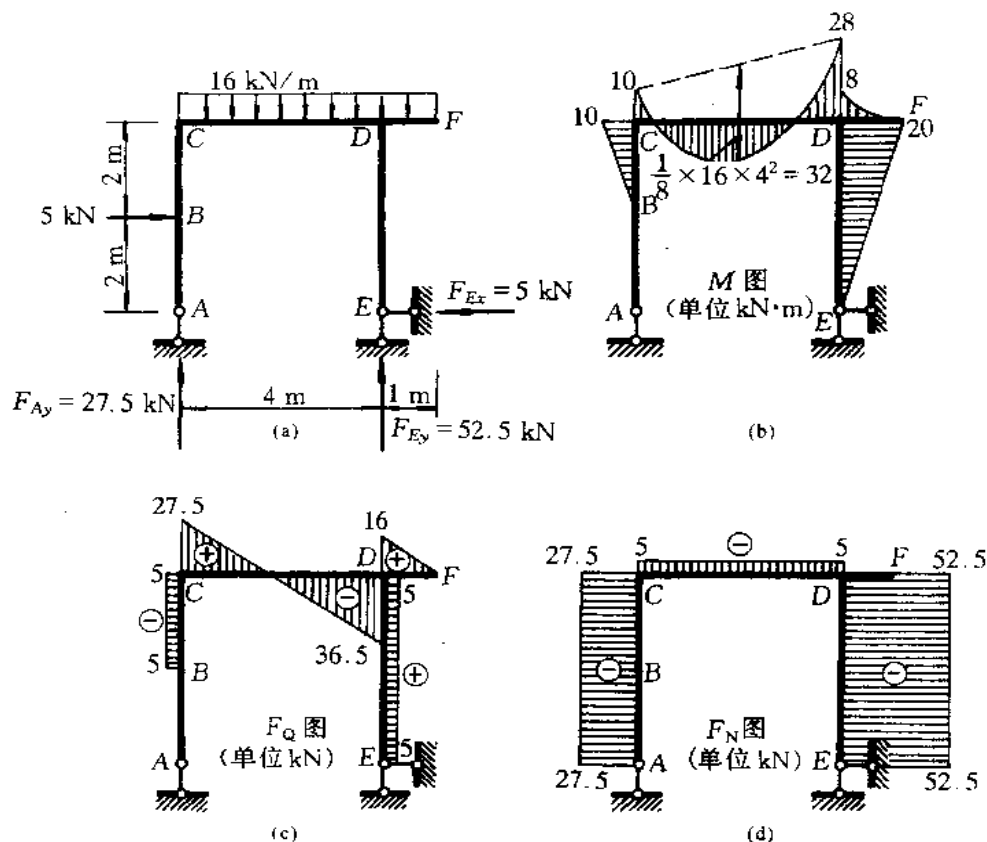


图 3-14

计算 M_{DE} 、 M_{DF} 、 M_{DC} 时,取截面以右部分考虑较简便,于是有

$$M_{DE} = -5 \times 10^3 \times 4 = -20 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DF} = -\frac{1}{2} \times 16 \times 10^3 \times 1^2 = -8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = -8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DC} = -\frac{1}{2} \times 16 \times 10^3 \times 1^2 - 5 \times 10^3 \times 4 = -28 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = -28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{ED} = 0$$

$$M_{FD} = 0$$

悬臂部分的弯矩 M_{DF} 为负,说明悬臂上侧受拉。其他弯矩为负,说明杆件的外侧受拉。

求得上述各控制截面的弯矩值后,便可绘制弯矩图。根据荷载分布情况可知该刚架的弯矩图除 CD、DF 段外,其余各段的弯矩图都为直线,以直线联结两端竖标即得。至于 CD 段的弯矩图,则可利用叠加法来绘制。整个刚架的弯矩图如图 3-14b 所示。

为了校核弯矩图,可取结点 D 为隔离体,检验它是否满足 $\sum M_D = 0$ 这一平衡条件。由图 3-15 可知

$$8 \times 10^3 + 20 \times 10^3 - 28 \times 10^3 = 0$$

对其他刚结点,也可按同样方法进行校核,并可证实所得的弯矩图无误。

(2) 剪力图

各段控制截面上的剪力,等于该截面任一侧的全部外力在截面方向上投影的代数和,从而可作出剪力图如图 3-14c 所示。

(3) 轴力图

杆件中任一截面上的轴力,等于该截面任一侧的全部外力在垂直于截面方向上投影的代数和,于是可作出如图 3-14d 所示的轴力图。

最后,取结点 D 来检验其剪力和轴力是否满足 $\Sigma F_x = 0$ 和 $\Sigma F_y = 0$ 两个平衡条件。由图 3-16 有



图 3-15

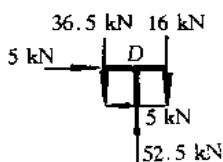


图 3-16

$$5 \times 10^3 - 5 \times 10^3 = 0$$

$$52.5 \times 10^3 - 36.5 \times 10^3 - 16 \times 10^3 = 0$$

可知所得剪力图 and 轴力图无误。

[例 3-2] 试作图 3-17a 所示三铰刚架的内力图。

解:1. 计算反力

$$\begin{aligned} \text{由 } \Sigma M_B = 0, \quad & F_{Ay} \times 8 - 20 \times 10^3 \times 4 \times 6 = 0 \\ \text{得 } & F_{Ay} = 60 \times 10^3 \text{ N} = 60 \text{ kN} \\ \text{由 } \Sigma F_y = 0, \quad & F_{By} + 60 \times 10^3 - 20 \times 10^3 \times 4 = 0 \\ \text{得 } & F_{By} = 20 \times 10^3 \text{ N} = 20 \text{ kN} \\ \text{由 } \Sigma F_x = 0 \text{ 可知, } & F_{Ax} = F_{Bx} \end{aligned}$$

取 CB 部分为隔离体(图 3-18a),由

$$\begin{aligned} \Sigma M_C = 0, \quad & F_{Bx} \times 8 - 20 \times 10^3 \times 4 = 0 \\ \text{得 } & F_{Bx} = 10 \times 10^3 \text{ N} = 10 \text{ kN} \\ \text{于是 } & F_{Ax} = 10 \text{ kN} \end{aligned}$$

为了校核反力,取 AC 部分为隔离体(图 3-18 b),根据 $\Sigma M_C = 0$ 检验如下:

$$60 \times 10^3 \times 4 - 10 \times 10^3 \times 8 - 20 \times 10^3 \times 4 \times 2 = 240 \times 10^3 - 80 \times 10^3 - 160 \times 10^3 = 0$$

故知反力计算无误。

2. 绘制内力图

根据荷载情况,可分为 AD、DC、CE 和 EB 四段,分别计算出各段控制截面的内力,即可作

出如图 3-17b、c 和 d 所示的弯矩图、剪力图和轴力图。对于 AD 和 EB 段仿照前例方法不难求得有关内力, 现对倾斜段 DC 和 CE 的控制截面上的内力计算说明如下:

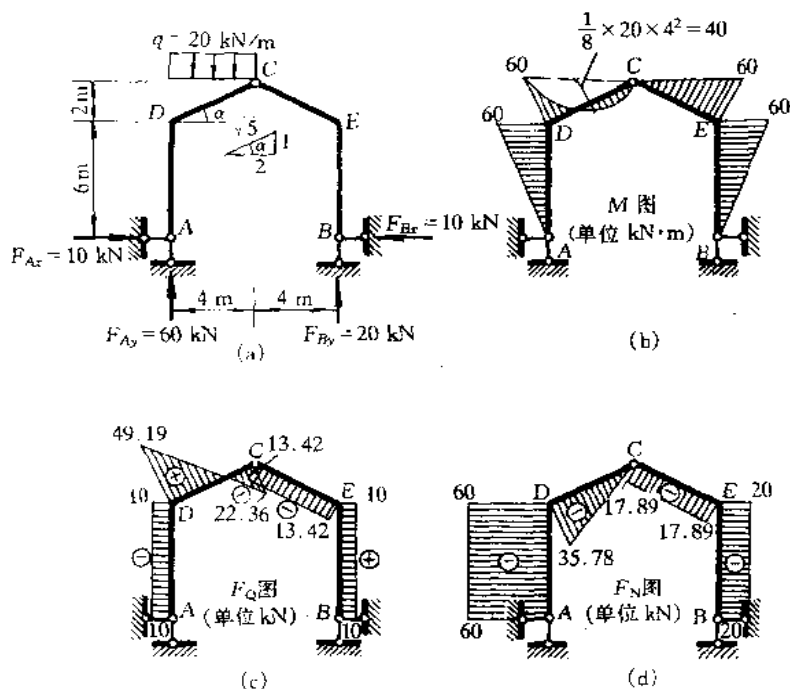


图 3-17

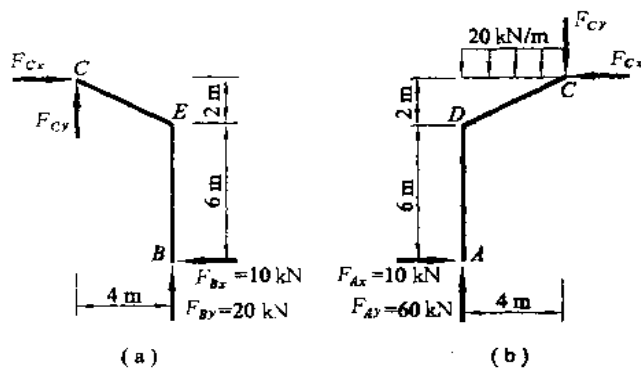


图 3-18

(1) 求 DC 段控制截面的内力

取图 3-19a 所示隔离体, 由 $\sum M_D = 0$, 有

$$M_{DC} - 10 \times 10^3 \times 6 = 0$$

$$M_{DC} = 60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

为了便于计算, 取 Dnt 坐标系, 列出投影方程。由 $\sum F_n = 0$, 有

$$F_{NDX} + 10 \times 10^3 \cdot \cos \alpha + 60 \times 10^3 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$F_{NDX} + 10 \times 10^3 \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 60 \times 10^3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

$$F_{NDX} = -16\sqrt{5} \times 10^3 \text{ N} = -35.78 \text{ kN}$$

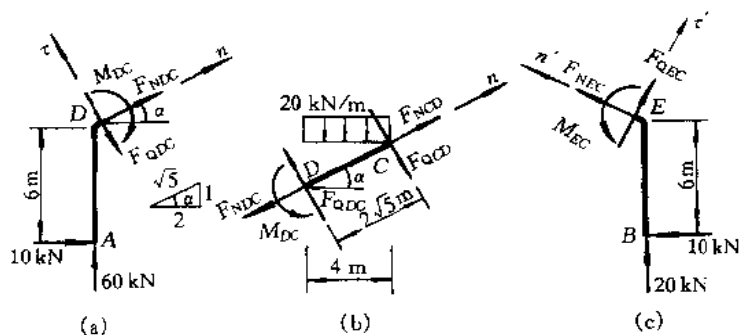


图 3-19

由 $\Sigma F_x = 0$, 有 $-F_{QDC} + 60 \times 10^3 \cdot \cos \alpha - 10 \times 10^3 \cdot \sin \alpha = 0$

可得 $F_{QDC} = 22\sqrt{5} \times 10^3 \text{ N} = 49.19 \text{ kN}$

再取 DC 为隔离体(图 3-19b), 由 $\Sigma M_D = 0$, 有

$$-60 \times 10^3 + \frac{1}{2} \times 20 \times 10^3 \times 4^2 + F_{QCD} \times 2\sqrt{5} = 0$$

得 $F_{QCD} = -10\sqrt{5} \times 10^3 \text{ N} = -22.36 \text{ kN}$

由 $\Sigma F_x = 0$, 有 $F_{NCD} - 20 \times 10^3 \times 4 \cdot \sin \alpha - F_{NDX} = 0$

即 $F_{NCD} - 20 \times 10^3 \times 4 \times \frac{1}{\sqrt{5}} - (-16\sqrt{5} \times 10^3) = 0$

得 $F_{NCD} = 0$

此外, 因 C 端为铰, 故 $M_{CD} = 0$ 。

(2) 求 CE 段控制截面的内力

取图 3-19c 所示隔离体, 由 $\Sigma M_E = 0$, 有

$$-M_{EC} + 10 \times 10^3 \times 6 = 0$$

得 $M_{EC} = 60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$

同理, 取 $En'\tau'$ 坐标系, 列出投影方程, 由 $\Sigma F_x = 0$, 有

$$F_{NEC} + 10 \times 10^3 \cdot \cos \alpha + 20 \times 10^3 \cdot \sin \alpha = 0$$

即 $F_{NEC} + 10 \times 10^3 \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 20 \times 10^3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$

得 $F_{NEC} = -8\sqrt{5} \times 10^3 \text{ N} = -17.89 \text{ kN}$

由 $\Sigma F_y = 0$, 有 $F_{QEC} - 10 \times 10^3 \cdot \sin \alpha + 20 \times 10^3 \cdot \cos \alpha = 0$

可得

$$F_{QDE} = -6\sqrt{5} \times 10^3 \text{ N} = -13.42 \text{ kN}$$

注意到该段为无荷载区段,故剪力和轴力分别为一常数,即 $F_{QCE} = F_{QDE} = -13.42 \text{ kN}$, $F_{NCE} = F_{NDE} = -17.89 \text{ kN}$ 。

求得上述两倾斜杆段有关控制截面的内力后,即可作出相应的内力图。 DC 段的弯矩图,等于相应斜简支梁在端弯矩 $M_{DC} = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 作用下的弯矩图(图 3-17 b 中 DC 杆上的虚线),叠加均布荷载作用下的弯矩图(参见 § 3-1 中图 3-5a)。具体叠加方法与均布荷载作用下水平杆件的弯矩图叠加法相同,只须注意竖标应与杆轴 DC 垂直。

§ 3-3 三 铰 拱

一、概述

拱结构是应用比较广泛的结构型式之一。在房屋建筑中,屋面承重结构也用到拱结构(图 3-20)。

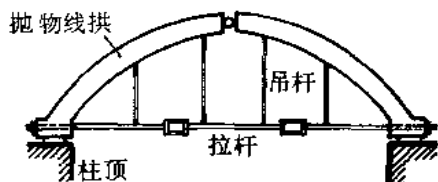


图 3-20



图 3-21

拱结构的计算简图通常有三种(图 3-21),图 3-21a 和图 3-21b 所示无铰拱和两铰拱是超静定的,图 3-21c 所示三铰拱是静定的。在本节中将只讨论三铰拱的计算。

拱结构的特点是:杆轴为曲线,而且在竖向荷载作用下支座将产生水平反力。这种水平反力又称为水平推力,或简称为推力。拱结构与梁结构的区别,不仅在于外形不同,更重要的还在于在竖向荷载作用下是否产生水平推力。例如图 3-22 所示的两个结构,虽然它们的杆轴都是曲线,但图 3-22a 所示结构在竖向荷载作用下不产生水平推力,其弯矩与相应简支梁(同跨度、同荷载的梁)的弯矩相同,所以这种结构不是拱结构而是一根曲梁。但图 3-22b 所示结构,由于其两端都有水平支座链杆,在竖向荷载作用下将产生水平推力,所以属于拱结构。由于水平推力的存在,拱中各截面的弯矩将比相应的曲梁或简支梁的弯矩要小,并且会使整个拱体主要是承受压力。因此,拱结构可用抗压强度较高而抗拉强度较低的砖、石、混凝土等建筑材料来建造。

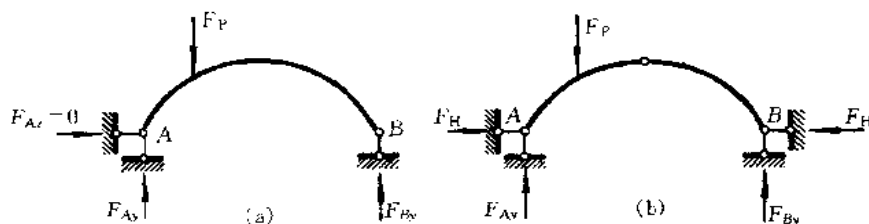


图 3-22

拱结构(图 3-23a)最高的一点称为拱顶。三铰拱的中间铰通常是安置在拱顶处。拱的两

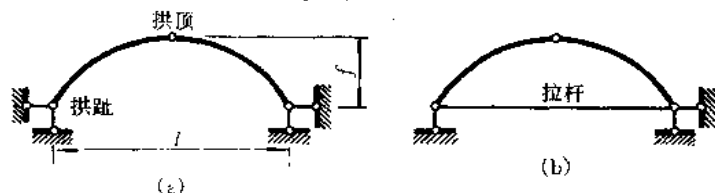


图 3-23

端与支座联结处称为拱趾,或者称为拱脚。两拱趾在同一水平线上的拱称为平拱,否则为斜拱。两个拱趾间的水平距离 l 称为跨度。拱顶到两拱趾连线的竖向距离 f 称为拱高,或者称为拱矢。拱高与跨度之比 f/l 称为高跨比或矢跨比。由后面可知,拱的主要力学性能与高跨比有关。

用作屋面承重结构的三铰拱,常在两支座铰之间设水平拉杆(图 3-23b)。这样,拉杆内所产生的拉力代替了支座推力的作用,在竖向荷载作用下,使支座只产生竖向反力。但是,这种结构的内部受力情况与三铰拱完全相同,故称为具有拉杆的拱,或者简称为拉杆拱。它的优点在于消除了推力对支承结构(例如砖墙)的影响。图 3-20 所示的装配式钢筋混凝土三铰拱就是拉杆拱的实例。设置吊杆是为了减少拉杆的挠度,在分析拱的内力时可以不考虑。拉杆拱的计算简图如图 3-23b 所示。

二、三铰拱的计算

三铰拱为静定结构,其全部反力和内力都可由静力平衡方程算出。为了说明三铰拱的计算方法,现以图 3-24a 所示在竖向荷载作用下的平拱为例,导出其计算公式如下。

1. 支座反力的计算公式

三铰拱的两端都是铰支座,因此有四个未知反力,故需列四个平衡方程进行解算。除了三铰拱整体平衡的三个方程之外,还可利用中间铰处不能抵抗弯矩的特性(即弯矩 $M_C = 0$)来建立一个补充方程。

首先考虑三铰拱的整体平衡,由 $\sum M_B = 0$,有

$$F_{Ay} \cdot l - F_{P1} \cdot b_1 - F_{P2} \cdot b_2 - F_{P3} \cdot b_3 = 0$$

可得左支座竖向反力

$$F_{Ay} = \frac{F_{P1} b_1 + F_{P2} b_2 + F_{P3} b_3}{l} \quad (a)$$

同理,由 $\Sigma M_A = 0$ 可得右支座竖向反力

$$F_{By} = \frac{F_{P1}a_1 + F_{P2}a_2 + F_{P3}a_3}{l} \quad (b)$$

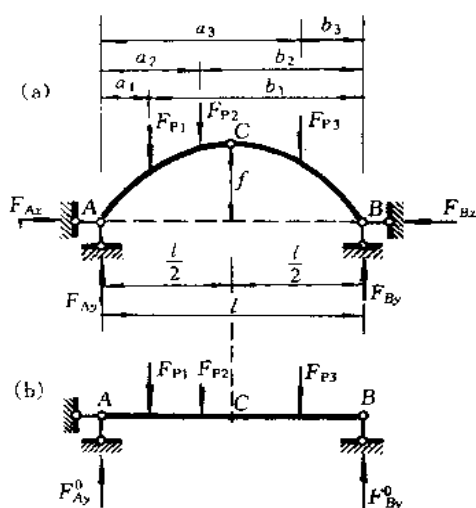


图 3-24

由 $\Sigma F_x = 0$, 可知

$$F_{Ax} = F_{Bx} = F_H$$

再考虑 $M_C = 0$ 的条件,取左半拱上所有外力对 C 点的力矩来计算,则由 $\Sigma M_C = 0$, 有

$$F_{Ay} \cdot \frac{l}{2} - F_{P1} \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - F_{P2} \left(\frac{l}{2} - a_2 \right) - F_{Ax} \cdot f = 0$$

所以

$$F_H = F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{F_{Ay} \cdot \frac{l}{2} - F_{P1} \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - F_{P2} \left(\frac{l}{2} - a_2 \right)}{f} \quad (c)$$

式(a)和式(b)右边的值,恰好等于图 3-24b 所示相应简支梁的支座反力 F_{Ay}^0 和 F_{By}^0 。式(c)右边的分子,等于相应简支梁(图 3-24b)上与拱的中间铰位置相对应的截面 C 的弯矩 M_C^0 。由此可得

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 \quad (3-1)$$

$$F_{By} = F_{By}^0 \quad (3-2)$$

$$F_H = F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{M_C^0}{f} \quad (3-3)$$

由式(3-3)可知,推力 F_H 等于相应简支梁截面 C 的弯矩 M_C^0 除以拱高 f 。其值只与三个铰的位置有关,而与各铰间的拱轴形状无关。也就是说,只与拱的高跨比 f/l 有关。当荷载和拱的跨度不变时,推力 F_H 将与拱高 f 成反比,即 f 愈大则 F_H 愈小,反之, f 愈小则 F_H 愈大。

2. 内力的计算公式

计算内力时, 应注意到拱轴为曲线这一特点, 所取截面应与拱轴正交, 即与拱轴的切线相垂直(图 3-25a)。任一截面 K 的位置取决于该截面形心的坐标 x_K 、 y_K , 以及该处拱轴切线的倾角 φ_K 。截面 K 的内力可以分解为弯矩 M_K 、剪力 F_{QK} 和轴力 F_{NK} , 其中 F_{QK} 沿截面方向, 即沿拱轴法线方向作用, 轴力 F_{NK} 沿垂直于截面的方向, 即沿拱轴切线方向作用。下面分别研究这三种内力的计算。

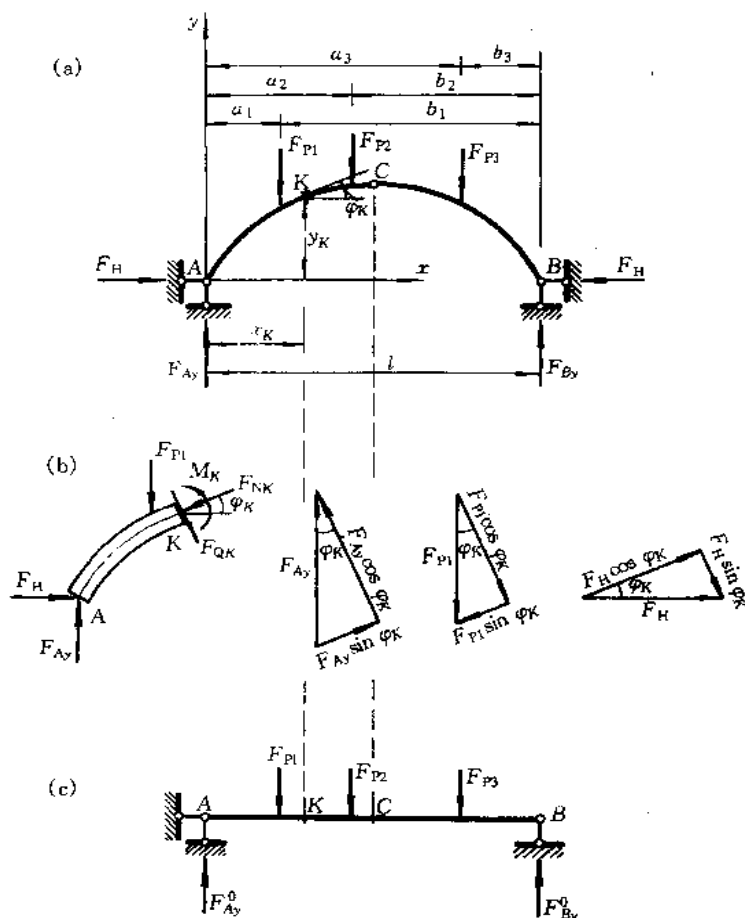


图 3-25

(1) 弯矩的计算公式

弯矩的符号规定以使拱内侧纤维受拉的为正, 反之为负。取 AK 段为隔离体(图 3-25b), 由 $\sum M_K = 0$, 有

$$F_{Ay}x_K - F_{P1}(x_K - a_1) - F_H y_K - M_K = 0$$

得截面 K 的弯矩

$$M_K = [F_{Ay}x_K - F_{P1}(x_K - a_1)] - F_H y_K$$

根据 $F_{Ay} = F_{Ay}^0$, 可见式中方括号内之值等于相应简支梁(图 3-25c)截面 K 的弯矩 M_K^0 , 所以上式可改写为

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K \quad (3-4)$$

即拱内任一截面的弯矩, 等于相应简支梁对应截面的弯矩减去由于拱的推力 F_H 所引起的弯矩 $F_H y_K$ 。由此可知, 因推力的存在, 三铰拱中的弯矩比相应简支梁的弯矩为小。

(2) 剪力的计算公式

剪力的符号通常规定以使截面两侧的隔离体有顺时针方向转动趋势的为正, 反之为负。取 AK 段为隔离体, 将其上各力对截面 K 投影(图 3-25b), 由平衡条件

$$F_{QK} + F_{Pl} \cos \varphi_K + F_H \sin \varphi_K - F_{Ay} \cos \varphi_K = 0$$

得

$$F_{QK} = (F_{Ay} - F_{Pl}) \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K$$

式中 $(F_{Ay} - F_{Pl})$ 等于相应简支梁在截面 K 处的剪力 F_{QK}^0 , 于是上式可改写为

$$F_{QK} = F_{QK}^0 \cos \varphi_K - F_H \sin \varphi_K \quad (3-5)$$

式中 φ_K 为截面 K 处拱轴切线的倾角。

(3) 轴力的计算公式

因拱轴通常为受压, 所以规定使截面受压的轴力为正, 反之为负。取 AK 段为隔离体, 将其上各力向垂直于截面 K 的方向上投影(图 3-25b), 由平衡条件

$$F_{NK} + F_{Pl} \sin \varphi_K - F_{Ay} \sin \varphi_K - F_H \cos \varphi_K = 0$$

得

$$F_{NK} = (F_{Ay} - F_{Pl}) \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K$$

即

$$F_{NK} = F_{QK}^0 \sin \varphi_K + F_H \cos \varphi_K \quad (3-6)$$

有了上述公式, 则不难求得任一截面的内力, 从而作出三铰拱的内力图, 具体作法见下例。

[例 3-3] 试绘制图 3-26a 所示三铰拱的内力图。其拱轴为一抛物线, 当坐标原点选在左支座时, 拱轴方程由下式表达:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

解: 先求支座反力, 根据式(3-1)、(3-2)、(3-3)可得

$$F_{Ay} = F_{Ay}^0 = \frac{100 \times 10^3 \times 9 + 20 \times 10^3 \times 6 \times 3}{12}$$

$$= 105 \times 10^3 \text{ N} = 105 \text{ kN}$$

$$F_{By} = F_{By}^0 = \frac{100 \times 10^3 \times 3 + 20 \times 10^3 \times 6 \times 9}{12}$$

$$= 115 \times 10^3 \text{ N} = 115 \text{ kN}$$

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{105 \times 10^3 \times 6 - 100 \times 10^3 \times 3}{4}$$

$$= 82.5 \times 10^3 \text{ N} = 82.5 \text{ kN}$$

反力求出后, 即可根据式(3-4)、(3-5)、(3-6)绘制内力图。为此, 将拱跨分成八等分, 列表(表 3-1)算出各截面上的 M 、 F_Q 、 F_N 值, 然后根据表中所得数值绘制 M 、 F_Q 、 F_N 图, 如图 3-26c、d、e 所示。这些内力图是以水平线为基线绘制的。图 3-26b 为相应简支梁的弯矩图。

今以截面 1(离左支座 1.5 m 处)和截面 2(离左支座 3.0 m 处)的内力计算为例, 对表 3-1

说明如下。

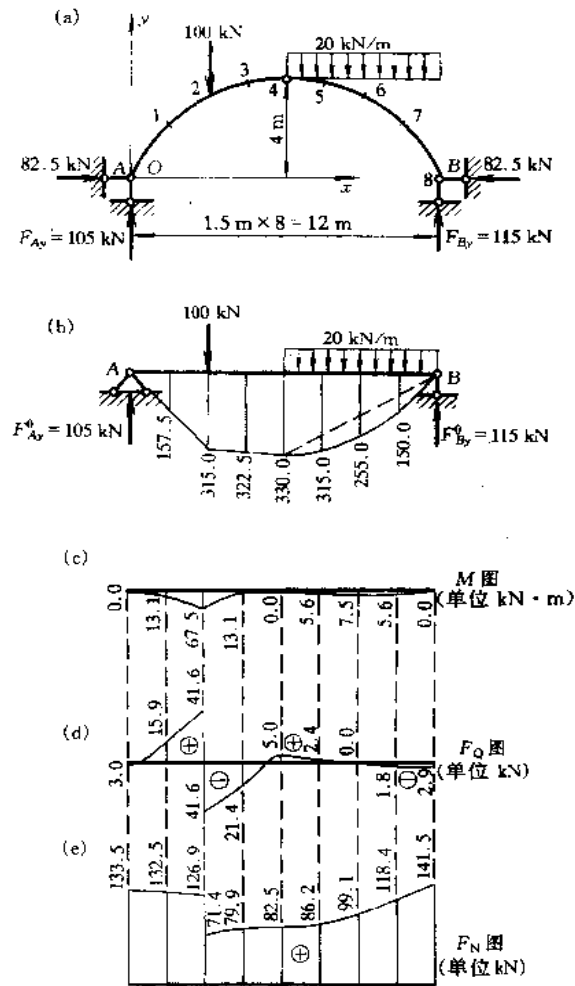


图 3-26

表 3-1 三铰拱内力的计算

拱轴 分点	y/m	tan φ_K	sin φ_K	cos φ_K	F_{QK}^0/kN	$M/(\text{kN}\cdot\text{m})$			F_Q/kN			F_N/kN		
						M_K^0	$-F_{H,y_K}$	M_K	$F_{QK}^0 \cos \varphi_K$	$-F_H \sin \varphi_K$	F_{QK}	$F_{QK}^0 \sin \varphi_K$	$F_H \cos \varphi_K$	F_{NK}
0	0	1.333	0.800	0.599	105.0	0	0	0	63.0	-66.0	-3.0	84.0	49.5	133.5
1	1.75	1.000	0.707	0.707	105.0	157.5	-144.4	13.1	74.2	-58.3	15.9	74.2	58.3	132.5
$2\frac{L}{R}$	3	0.667	0.555	0.832	105.0	315.0	-247.5	67.5	87.4	-45.8	41.6	58.4	68.6	127.0
					5.0				4.2		-41.6	2.8		71.4
3	3.75	0.333	0.316	0.948	5.0	322.5	-309.4	13.1	4.7	-26.1	-21.4	1.6	78.3	79.9

续表

拱轴 分点	y/m	tan φ_K	sin φ_K	cos φ_K	F_{QK}^0/kN	$M/(\text{kN}\cdot\text{m})$			F_Q/kN			F_N/kN		
						M_K^0	$-F_{H1}y_K$	M_K	$F_{QK}^0 \cos \varphi_K$	$-F_{H1} \sin \varphi_K$	F_{QK}	$F_{QK}^0 \sin \varphi_K$	$F_{H1} \cos \varphi_K$	F_{NK}
4	4	0.000	0.000	1.000	5.0	330.0	-330.0	0	5.0	0	5.0	0	82.5	82.5
5	3.75	-0.333	-0.316	0.948	-25.0	315.0	-309.4	5.6	-23.7	26.1	2.4	7.9	78.3	86.2
6	3	-0.667	-0.555	0.832	-55.0	255.0	-247.5	7.5	-45.8	45.8	0	30.5	68.6	99.1
7	1.75	-1.000	-0.707	0.707	-85.0	150.0	-144.4	5.6	-60.1	58.3	-1.8	60.1	58.3	118.4
8	0	-1.333	-0.800	0.599	-115.0	0	0	0	-68.9	66.0	-2.9	92.0	49.5	141.5

在截面 1, 有 $x = 1.5 \text{ m}$, 由拱轴方程可求得

$$y = \frac{4f}{l^2} x_1 (l - x_1) = \frac{4 \times 4}{12^2} \times 1.5 \times (12 - 1.5) = 1.75 \text{ m}$$

截面 1 处的切线斜率为

$$\tan \varphi_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_1) = \frac{4 \times 4}{12^2} \times (12 - 2 \times 1.5) = 1$$

于是

$$\sin \varphi_1 = \frac{\tan \varphi_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

根据式(3-4)、(3-5)、(3-6)求得该截面的弯矩、剪力和轴力分别为

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1^0 - F_H y_1 = 105 \times 10^3 \times 1.5 - 82.5 \times 10^3 \times 1.75 \\ &= 13.1 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 13.1 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Q1} &= F_{Q1}^0 \cos \varphi_1 - F_H \sin \varphi_1 = 105 \times 10^3 \times 0.707 - 82.5 \times 10^3 \times 0.707 \\ &= 15.9 \times 10^3 \text{ N} = 15.9 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{N1} &= F_{Q1}^0 \sin \varphi_1 + F_H \cos \varphi_1 = 105 \times 10^3 \times 0.707 + 82.5 \times 10^3 \times 0.707 \\ &= 132.5 \times 10^3 \text{ N} = 132.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

在截面 2 因有集中荷载作用, 该截面两边的剪力和轴力不相等, 此处 F_Q 、 F_N 图将发生突变。

现计算该截面内力如下:

$$\begin{aligned} M_2 &= M_2^0 - F_H y_2 = 105 \times 10^3 \times 3 - 82.5 \times 10^3 \times 3 = 67.5 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} \\ &= 67.5 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Q2}^L &= F_{Q2}^{0L} \cos \varphi_2 - F_H \sin \varphi_2 = 105 \times 10^3 \times 0.832 - 82.5 \times 10^3 \times 0.555 \\ &= 41.6 \times 10^3 \text{ N} = 41.6 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Q2}^R &= F_{Q2}^{0R} \cos \varphi_2 - F_H \sin \varphi_2 = 5.0 \times 10^3 \times 0.832 - 82.5 \times 10^3 \times 0.555 \\ &= -41.6 \times 10^3 \text{ N} = -41.6 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{N2}^L &= F_{Q2}^{0L} \sin \varphi_2 + F_H \cos \varphi_2 = 105 \times 10^3 \times 0.555 + 82.5 \times 10^3 \times 0.832 \\ &= 126.9 \times 10^3 \text{ N} = 126.9 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$F_{N2}^R = F_{Q2}^{0R} \sin \varphi_2 + F_H \cos \varphi_2 = 5.0 \times 10^3 \times 0.555 + 82.5 \times 10^3 \times 0.832$$

$$= 71.4 \times 10^3 \text{ N} = 71.4 \text{ kN}$$

其他各截面内力的计算与以上类同。

三、拱的合理轴线

对于三铰拱来说,在一般情况下,截面上有弯矩、剪力和轴力作用,而处于偏心受压状态,其正应力分布不均匀。但是,在给定荷载作用下,可以选取一根适当的拱轴线,使拱上各截面只承受轴力,而弯矩为零。此时,任一截面上正应力分布将是均匀的,因而拱体材料能够得到充分地利用,这样的拱轴线称为合理轴线。

由式(3-4),任意截面 K 的弯矩为

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K$$

上式说明,三铰拱的弯矩 M_K 是由相应简支梁的弯矩 M_K^0 与 $-F_H y_K$ 叠加而得。当拱的跨度和荷载为已知时, M_K^0 不随拱轴线改变而变,而 $-F_H y_K$ 则与拱的轴线有关(注意:前已指出推力 F_H 的数值只与三个铰的位置有关,而与各铰间的轴线形状无关)。因此,可以在三个铰之间恰当地选择拱的轴线形式,使拱中各截面的弯矩 M 都为零。为了求出合理轴线方程,由式(3-4)根据各截面弯矩都为零的条件应有

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

所以得

$$y = \frac{M^0}{F_H} \quad (3-7)$$

由式(3-7)可知:合理轴线的竖标 y 与相应简支梁的弯矩竖标成正比, $\frac{1}{F_H}$ 是这两个竖标之间的比例系数。当拱上所受荷载为已知时,只需求出相应简支梁的弯矩方程,然后除以推力 F_H ,便可得到拱的合理轴线方程。

[例 3-4] 试求图 3-27a 所示对称三铰拱在均布荷载 q 作用下的合理轴线。

解:作出相应简支梁如图 3-27b 所示,其弯矩方程为

$$M^0 = \frac{1}{2} q l x - \frac{1}{2} q x^2 = \frac{1}{2} q x (l - x)$$

由式(3-3)求得

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{\frac{1}{8} q l^2}{f} = \frac{q l^2}{8 f}$$

所以由式(3-7)得到合理轴线方程为

$$y = \frac{\frac{1}{2} q x (l - x)}{\frac{q l^2}{8 f}} = \frac{4 f}{l^2} x (l - x)$$

由此可见,在满跨的竖向均布荷载作用下,三铰拱的合理轴线是一根抛物线。房屋建筑中拱的轴线常采用抛物线。

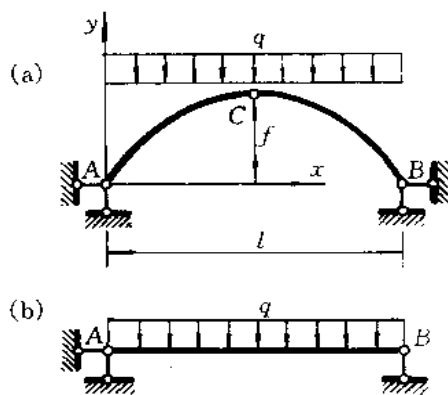


图 3-27

§ 3-4 静定平面桁架

一、概述

桁架结构在土木工程中应用很广泛。特别是在大跨度结构中,桁架更是一种重要的结构型式。图 3-28a、c 所示钢筋混凝土屋架和钢木屋架就属于桁架;武汉长江大桥和南京长江大桥的主体结构也是桁架结构。

桁架的型式、桁架杆件之间的连接方式以及 (a)
它所用的材料是多种多样的。在分析桁架时必须抓住矛盾的主要方面,选取既能反映这种结构的本质又便于计算的计算简图。科学试验和理论分析的结果表明,各种桁架有着共同的特性: (b)
在结点荷载作用下,桁架中各杆的内力主要是轴力,而弯矩和剪力则很小,可以忽略不计。因而从力学的观点来看,各结点所起的作用和理想铰是接近的。这样,图 3-28a、c 所示桁架的计算 (c)
简图分别如图 3-28b、d 所示。这种计算简图引用了下列假定:

1. 各杆在两端用绝对光滑而无摩擦的理想铰相互联结。
2. 各杆的轴线都是绝对平直的,且处于同一平面内,并通过铰的中心。 (d)
3. 荷载和支座反力作用在结点上,并且都位于桁架的平面内。

在上述理想情况下,桁架各杆均为两端铰接的直杆,仅在两端受约束力作用,故只产生轴力。

这类杆件也称为二力杆。在轴向受拉或受压的杆件中,由于截面上的应力均匀分布且同时达到极限值,故材料能得到充分的利用。

实际的桁架常不能完全符合上述理想情况。例如桁架的结点具有一定的刚性,有些杆件在结点处可能连续不断,或各杆之间的夹角几乎不可能变动。另外,各杆轴无法绝对平直,结点上各杆的轴线也不一定全交于一点,荷载不一定都作用在结点上等。因此,桁架在荷载作用下,其中某些杆件必将发生弯曲而产生弯曲应力,并不能如理想情况只产生轴向均匀分布的应力。通常把按桁架理想情况计算出来的应力称为初应力或基本应力,由于理想情况不能完全实现而产生的附加应力称为次应力。关于次应力的计算有专门的参考文献论述,本节只限于讨论桁架的理想情况。

常用的桁架一般是按下列两种方式组成的:

1. 由基础或由一个基本铰结三角形开始,依次增加二元体,组成一个桁架,如图 3-29a、b 所示。这样的桁架称为简单桁架。

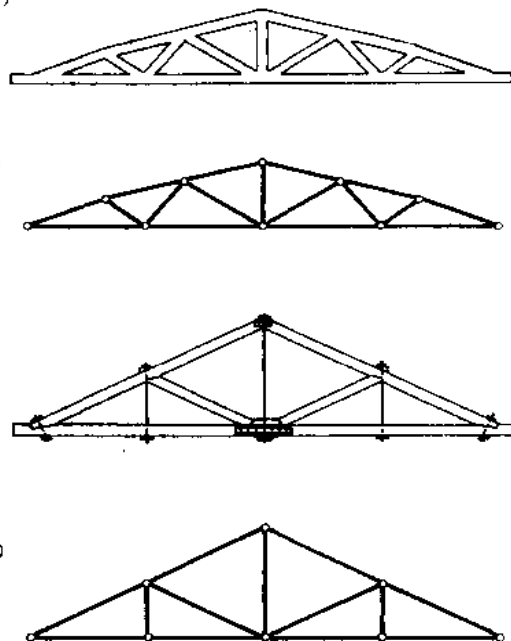


图 3-28

2. 几个简单桁架按照几何不变体系的简单组成规则联成一个桁架,如图 3-30 所示。这样的桁架称为联合桁架。

桁架的杆件,依其所在位置不同,可分为弦杆和腹杆两类。弦杆是指桁架上、下外围的杆件,上边的杆件称为上弦杆,下边的杆件称为下弦杆。桁架上弦杆和下弦杆之间的杆件称为腹杆。腹杆又分为竖杆和斜杆。弦杆上相邻两结点之间的区间称为节间,其距离 d 称为节间长度(图 3-29a)。

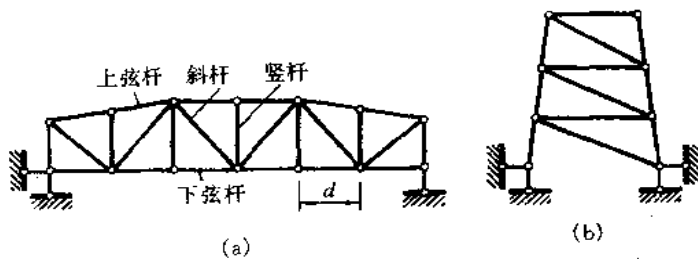


图 3-29

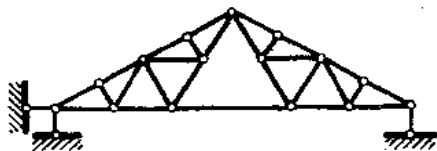


图 3-30

二、解算桁架内力的方法

1. 结点法

所谓结点法就是取桁架的结点为隔离体,利用结点的静力平衡条件来计算杆件的内力或支座反力。因为桁架的各杆只承受轴力,作用于任一结点的各力组成一个平面汇交力系,所以可就每一个结点列出两个平衡方程进行解算。

在实际计算中,为了简便起见,取结点考虑时,应力求作用于该结点的未知力不超过两个。在简单桁架中,实现这一点并不困难,因为简单桁架是由基础或一个基本铰接三角形开始,依次增加二元体所组成的桁架,其最后一个结点只包含两根杆件。分析这类桁架时,可先由整体平衡条件求出它的反力,然后再从最后一个结点开始,依次考虑各结点的平衡,即可使每个结点出现的未知内力不超过两个,直接求出各杆的内力。

【例 3-5】 试用结点法解算图 3-31a 所示桁架中各杆的内力。

解:首先求出支座反力。以整个桁架为隔离体,由 $\sum M_8 = 0$ 得

$$(F_{1y} - 10 \times 10^3) \times 8 - 20 \times 10^3 \times 6 - 10 \times 10^3 \times 4 = 0$$

$$F_{1y} = 30 \times 10^3 \text{ N} = 30 \text{ kN}(\uparrow)$$

再由 $\sum F_y = 0$ 得

$$30 \times 10^3 - 10 \times 10^3 - 20 \times 10^3 - 10 \times 10^3 + F_{8y} = 0$$

$$F_{8y} = 10 \times 10^3 \text{ N} = 10 \text{ kN}$$

求出反力后,可截取结点解算各杆的内力。最初遇到只包含两个未知力的结点有 1 和 8 两个结点,现在从结点 1 开始,然后依 2、3、4、…次序进行解算。

在计算时,通常假定杆件内力为拉力,如所得结果为负,则为压力。现用结点法计算各杆内力如下:

1. 取结点 1 为隔离体(图 3-31b)。由 $\Sigma F_y = 0$,

$$F_{N13} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - 10 \times 10^3 + 30 \times 10^3 = 0$$

得

$$F_{N13} = -44.72 \times 10^3 \text{ N} = -44.72 \text{ kN}$$

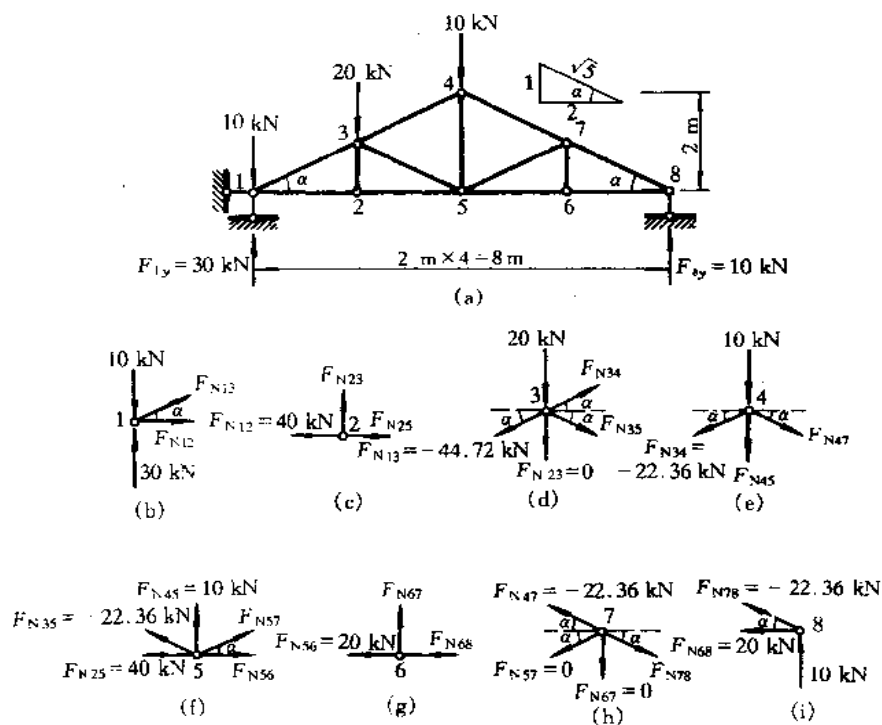


图 3-31

再由 $\Sigma F_x = 0$ 得

$$F_{N13} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + F_{N12} = 0$$

$$F_{N12} = -F_{N13} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 40 \text{ kN}$$

2. 取结点 2 为隔离体(图 3-31c)。

$$\Sigma F_y = 0, \quad F_{N23} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0, \quad F_{N25} - F_{N12} = 0$$

得

$$F_{N25} = F_{N12} = 40 \text{ kN}$$

3. 取结点 3 为隔离体(图 3-31d)。

$$\Sigma F_x = 0, \quad -F_{N13} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + F_{N34} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + F_{N35} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad -20 + F_{N34} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - F_{N35} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - F_{N13} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

可得

$$F_{N34} = -22.36 \text{ kN}, \quad F_{N35} = -22.36 \text{ kN}$$

4. 取结点 4 为隔离体(图 3-31e)。由 $\Sigma F_x = 0$ 得

$$F_{N47} = -22.36 \text{ kN}$$

再由 $\Sigma F_y = 0$ 得

$$F_{N45} = 10 \text{ kN}$$

5. 取结点 5 为隔离体(图 3-31f)。由 $\Sigma F_y = 0$ 得

$$F_{N57} = 0$$

再由 $\Sigma F_x = 0$ 得

$$F_{N56} = 20 \text{ kN}$$

6. 取结点 6 为隔离体(图 3-31g)。由 $\Sigma F_y = 0$ 得

$$F_{N67} = 0$$

再由 $\Sigma F_x = 0$ 得

$$F_{N68} = 20 \text{ kN}$$

7. 取结点 7 为隔离体(图 3-31h)。由 $\Sigma F_x = 0$ 得

$$F_{N78} = -22.36 \text{ kN}$$

至此,桁架中各杆件的内力都已求得。最后可根据结点 8 的隔离体(图 3-31i)是否满足平衡条件 $\Sigma F_x = 0$ 和 $\Sigma F_y = 0$ 来作校核。此时有

$$-(-22.36 \times 10^3) \times \frac{2}{\sqrt{5}} - 20 \times 10^3 = 0$$

$$-22.36 \times 10^3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} + 10 \times 10^3 = 0$$

故知计算结果无误。

为了清晰起见,将此桁架各杆的内力注在图 3-32 中。

桁架中内力为零的杆件称为零杆。如上例中的 23、67、57 三杆件就是零杆,出现零杆的情况可归结如下:

(1) 两杆结点上无荷载作用时(图 3-33a),则该两杆的内力都等于零。

(2) 三杆结点上无荷载作用时(图 3-33b),如果其中有两杆在一直线上,则另一杆必为零杆。

上述结论都不难由结点平衡条件得到证实。在分析桁架时,可先利用上述原则找出零杆,这样可使计算工作简化。

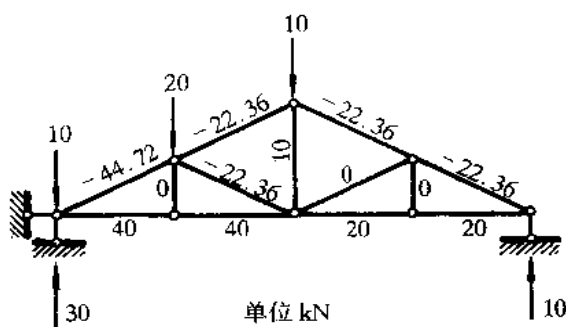


图 3-32

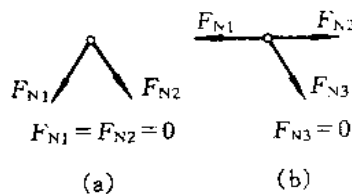


图 3-33

2. 截面法

除结点法外,另一种分析桁架的基本方法是截面法。这种方法是用一截面,截取桁架中两个或多于两个结点的某一部分为隔离体,建立静力平衡方程求出未知的杆件内力。作用于隔离体上的力系为平面一般力系。只要未知力数目不多于三个,则可把截面上的全部未知力求出。

现举例说明如下。

[例 3-6] 试求图 3-34a 所示桁架(与例 3-5 同)中 25、34、35 三杆的内力。

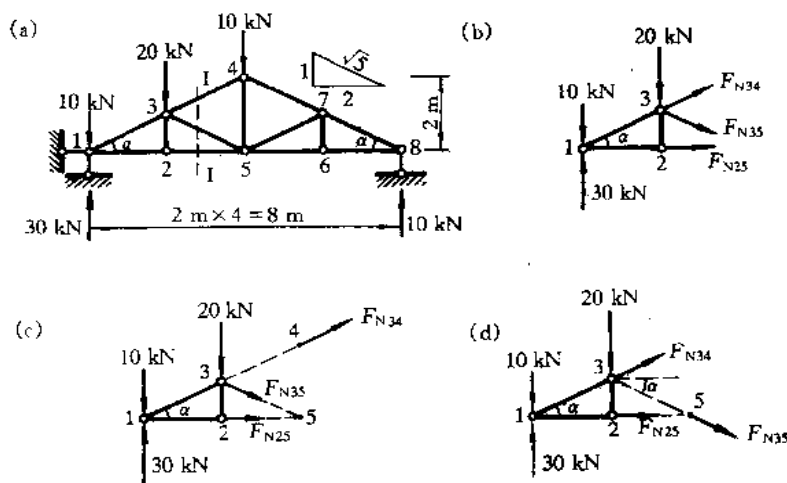


图 3-34

解:首先求出支座反力。由例 3-5 已得

$$F_{1y} = 30 \text{ kN}(\uparrow), \quad F_{8y} = 10 \text{ kN}(\uparrow)$$

然后设想用截面 I-I 将 34、35、25 三杆截断,取桁架左边部分为隔离体(图 3-34b)。为求得 F_{N25} 可取 F_{N34} 和 F_{N35} 两未知力的交点 3 为矩心,由 $\sum M_3 = 0$ 得

$$(30 \times 10^3 - 10 \times 10^3) \times 2 - F_{N25} \times 1 = 0$$

$$F_{N25} = 40 \times 10^3 \text{ N} = 40 \text{ kN}$$

为了求得 F_{N34} , 可取 F_{N35} 和 F_{N25} 两力的交点 5 为矩心, 不过, 这时需要算出 F_{N34} 的力臂, 不是很方便的。为此, 可将 F_{N34} 沿其作用线移到点 4 (图 3-34c) 并分解为水平与竖向两分力。因竖向分力通过矩心 5, 故由 $\Sigma M_5 = 0$ 得

$$(30 \times 10^3 - 10 \times 10^3) \times 4 - 20 \times 10^3 \times 2 + F_{N34} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times 2 = 0$$

$$F_{N34} = -22.36 \times 10^3 \text{ N} = -22.36 \text{ kN}$$

同理, 为求得 F_{N35} , 可将 F_{N35} 沿其作用线移至 5 点分解 (图 3-34d), 由 $\Sigma M_1 = 0$, 可求得 $F_{N35} = -22.36 \text{ kN}$ 。也可利用投影方程来求 F_{N35} 。

结点法及截面法为计算桁架内力常用的两种方法。对于简单桁架来说用哪种方法来计算都很简便。至于联合桁架的内力分析, 则宜先用截面法将联合处杆件的内力求出, 然后再对组成联合桁架的各简单桁架进行分析。例如图 3-35 所示联合桁架, 由截面法 (用截面 I—I 截开) 先求出联系杆件 34 的内力之后, 则其左、右两部分都可作为简单桁架加以处理。

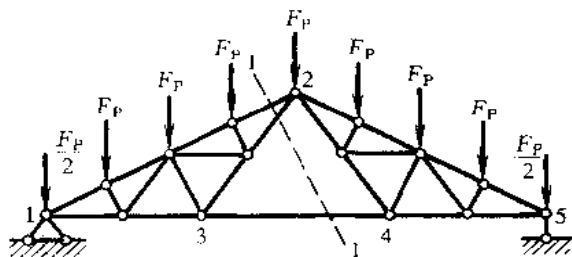


图 3-35

§ 3-5 静定结构的内力分析和受力特点

一、基本特征

1. 在几何组成方面, 静定结构是没有多余约束的几何不变体系。在静力学方面, 静定结构的全部反力和内力均可由静力平衡条件求得, 且其解答是唯一的确定值。

2. 由于只用静力平衡条件即可确定静定结构的反力和内力, 因此其反力和内力只与荷载以及结构的几何形状和尺寸有关, 而与构件所用材料及其截面形状和尺寸无关。

3. 由于静定结构不存在多余约束, 因此可能发生的支座位移、温度改变或制造误差会导致结构产生位移, 而不会产生反力和内力。如图 3-36a 所示三铰刚架, 当支座 B 下沉时, 整个刚架将随之发生虚线所示的刚体运动, 但不产生反力和内力。又如图 3-36b 所示柱子, 当两侧温度变化不同时, 柱子可自由伸长和弯曲而发生如图中虚线所示的变形, 也不会产生反力和内力。

4. 静定结构在平衡力系作用下, 其影响的范围只限于受该力系作用的最小几何不变部分, 而不致影响到此范围以外。如图 3-37 所示平衡力系作用的桁架, 其粗线部分是受平衡力系作用的最小几何不变部分。因此, 只在粗线所示的杆件中产生内力, 而反力和其他杆件的内力都等于零。

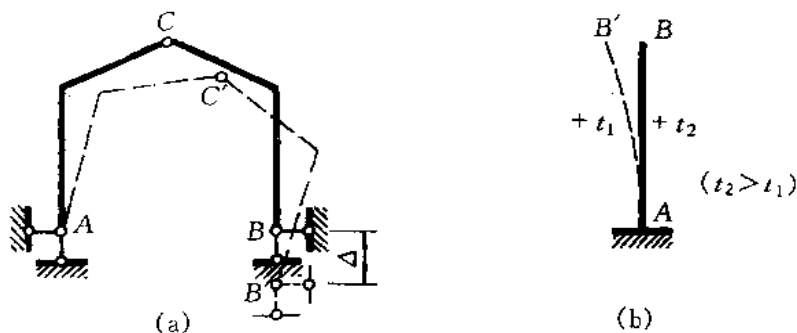


图 3-36

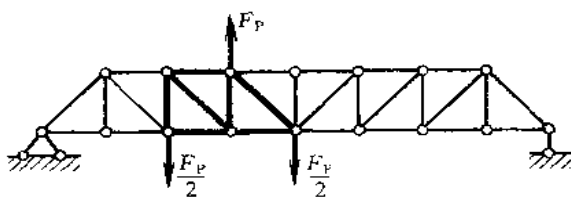


图 3-37

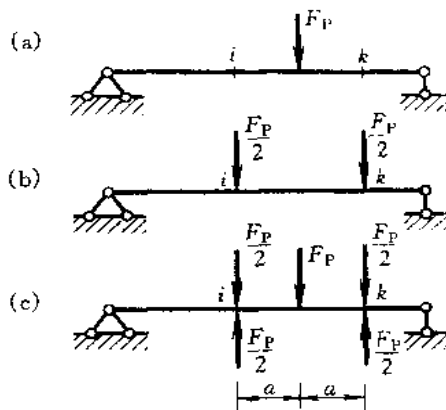


图 3-38

5. 两个力系向同一点简化,如果合力相等,合力矩也相等,则该两个力系静力等效。静力等效的两个力系分别作用在静定结构上,只会使两力系共同占有的几何不变部分发生不同的内力,而结构中其他部分的受力情况则相同。例如,图 3-38a、b 中所示的两个力系是静力等效的,它们对梁的影响,在 ik 范围之内的内力不同,而在 ik 以外的内力和反力是相同的。对于这一特性可作如下说明。如果在图 3-38a 所示的情况下再叠加一平衡力系,则得到图 3-38c 所示的情况。根据前述平衡力系作用下的特性可知图 3-38c 与图 3-38a 的受力情况只在 ik 段内不相同。若在图 3-38c 中把作用在上边的力 F_P 与作用在下边的两个大小为 $\frac{F_P}{2}$ 的力组成的平衡力系去掉,也不影响 ik 段以外的受力情况,这样就得到图 3-38b 所示的情况。由此可知,图 3-38a 与图 3-38b 中的梁只在 ik 段内受力情况有所不同。

二、静定结构的受力分析

隔离体分析是受力分析的基础。从结构中截取隔离体,将未知的反力和内力暴露出来,使其

成为隔离体上的外力,而后应用平衡方程计算支座反力和内力。

当作用在隔离体上的力系为平面汇交力系时,利用两个独立的平衡条件,可求解两个未知量;若为平面一般力系,则有三个独立的平衡条件,可求解三个未知力。

三、常用静定结构的受力特点

在工程中,静定结构的典型结构型式为梁、桁架、拱、刚架和组合结构。

1. 简支梁、悬臂梁、伸臂梁、多跨静定梁

它们均由受弯构件所组成。在受弯构件中,由于弯曲变形引起截面上的应力分布不均匀,使材料强度得不到充分利用,故当跨度较大时,一般不宜采用梁作为承重结构。简支梁多用于小跨度结构。在同样跨度并承受同样荷载的情况下,悬臂梁的最大弯矩和最大挠度值都远大于简支梁,因此悬臂梁只宜用于跨度很小的承重结构,如雨篷、挑廊、阳台等。在多跨静定梁中,由于伸臂的设置,使支座处截面产生了负弯矩,它将使跨中的正弯矩数值减小,所以多跨静定梁较相应的多跨简支梁节省材料,但构造较为复杂。

2. 桁架

桁架中的杆件都是二力杆,在结点荷载作用下,各杆都只产生轴力,处于轴向受力(拉或压)状态,杆件截面上的正应力分布均匀,能充分利用材料的强度。因此,桁架比梁能跨越更大的空间。

3. 三铰拱和三铰刚架

它们均属有推力结构,由于水平推力的作用,可以使杆件截面的弯矩值减小。三铰拱在给定荷载作用下,若恰当地选用拱轴线,可使整个拱体主要承受压力,便于用抗压强度较高而抗拉强度较低的砖、石、混凝土等建筑材料来建造。三铰刚架的各杆件为受弯构件,它比三铰拱具有更大的空间,可用作食堂、场馆、车间等建筑物的承重结构。

4. 组合结构

这类结构中包含有受力性质完全不同的两类杆件:受弯的梁式杆和二力杆。在组合结构中,利用二力杆的受力特点,能较充分地利用材料强度,并从加劲的角度出发,改善了梁式杆的受力状态。如图 3-39 所示的加劲梁。

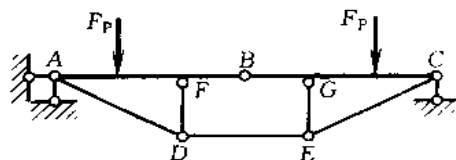


图 3-39

在实际工程中,以梁作为承重结构一般跨度不宜过大,三铰拱、三铰刚架和组合结构可用于跨度较大结构,桁架则常用于跨度更大的结构。

不同结构型式,均有其各自适用的范围,在选择结构型式时,除从受力状态方面考虑外,还应进行全面的分析和比较,才能获得最佳的方案。

思 考 题

1. 结构的基本部分与附属部分是如何划分的? 荷载作用在结构的基本部分上时,在附属部分是否引起内力? 若荷载作用在附属部分时,是否在所有基本部分都会引起内力?
2. 在荷载作用下,刚架的弯矩图在刚结点处有何特点?
3. 你能不通过计算,直接画出图 3-40 所示结构的弯矩图吗?
4. 作图 3-41 所示伸臂梁的弯矩图时,不求反力而分为 AB、BD 两区段作图,AB 段可用叠加法进行绘制,

你认为可以吗？应该如何进行？

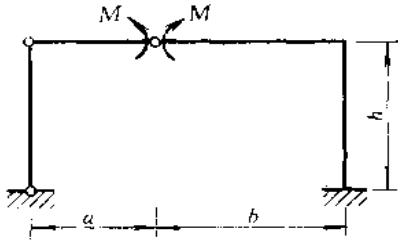


图 3-40

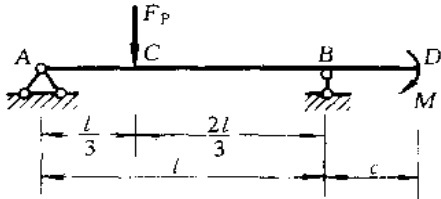
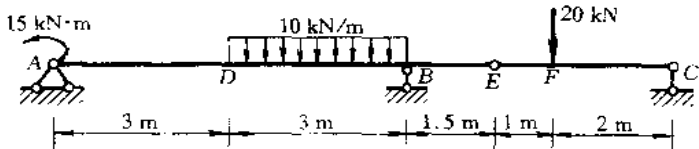


图 3-41

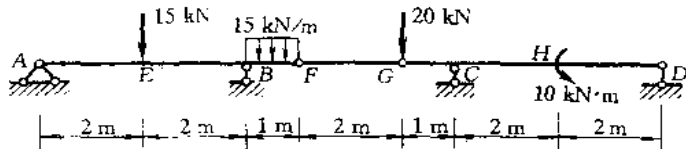
5. 绘制三铰拱内力图的方法与绘制静定梁和静定刚架内力图时所采用的方法有何不同？为什么会有这些差别？
6. 用结点法计算桁架内力时，一般都利用投影平衡方程(如 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$)，当作用于结点的两个未知力都为斜向时，采用力矩平衡方程是否可能更为简便？如考虑图 3-31 所示桁架中结点 3 的平衡时，应如何列出力矩平衡方程？（提示：隔离体上的未知力要沿其作用线移动。）
7. 在静定结构的受力分析中，通常按结构几何组成相反的顺序进行；解算时力求用一个平衡条件求出一个未知力。试结合实际问题对这些分析要领加以说明。

习 题

3-1~3-2 试作图示多跨静定梁的 M 、 F_Q 图。

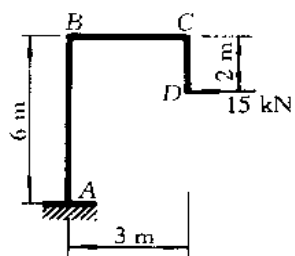


题 3-1 图

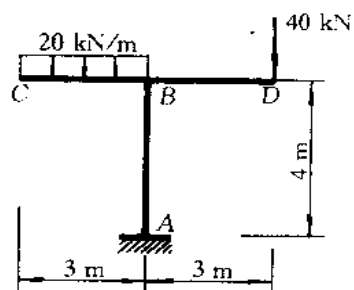


题 3-2 图

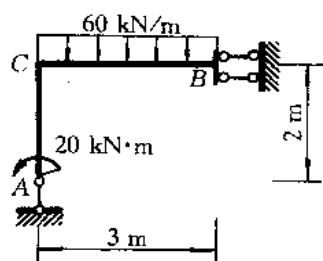
3-3~3-15 试作图示刚架的内力(M 、 F_Q 、 F_N)图,并校核所得结果。



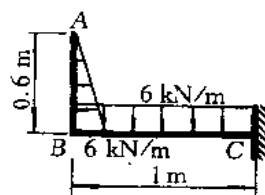
题 3-3 图



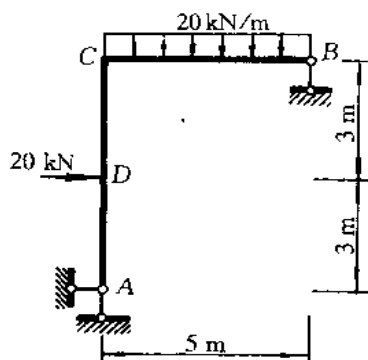
题 3-4 图



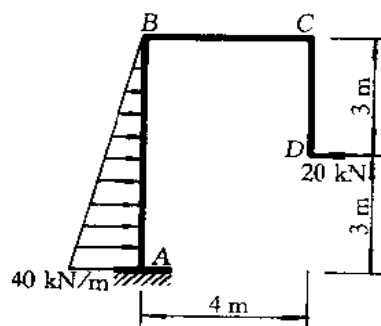
题 3-5 图



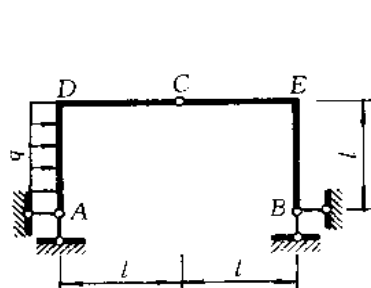
题 3-6 图



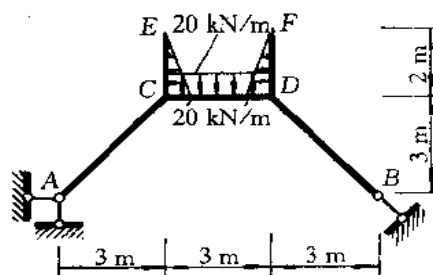
题 3-7 图



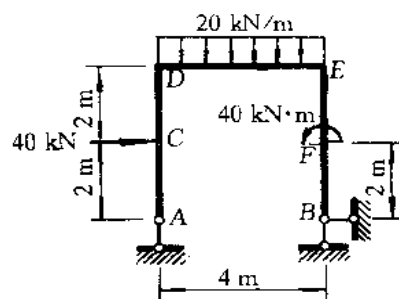
题 3-8 图



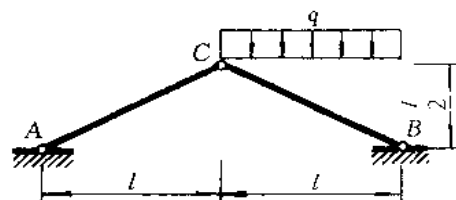
题 3-9 图



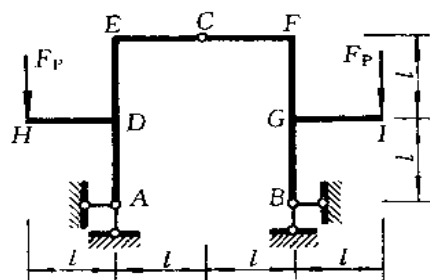
题 3-10 图



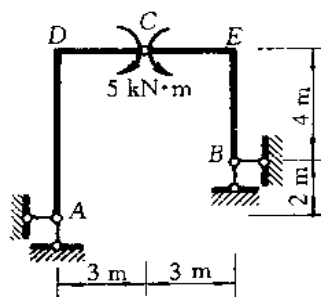
题 3-11 图



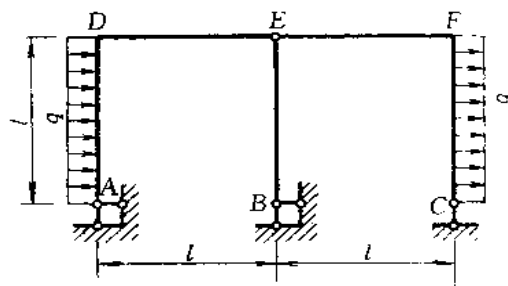
题 3-12 图



题 3-13 图



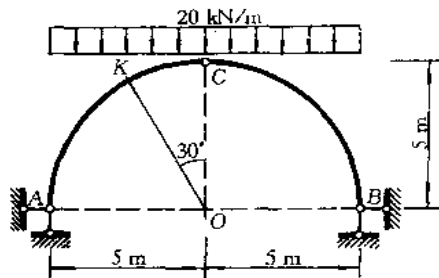
题 3-14 图



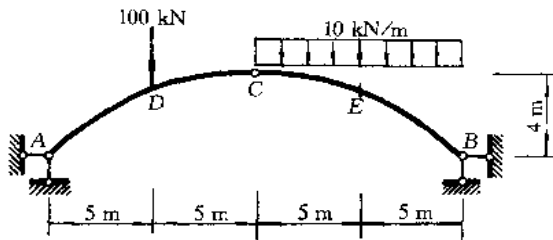
题 3-15 图

3-16 试求图示圆弧三铰拱的支座反力,并求截面 K 的内力。

3-17 试求图示抛物线三铰拱的支座反力,并求截面 D 和 E 的内力。

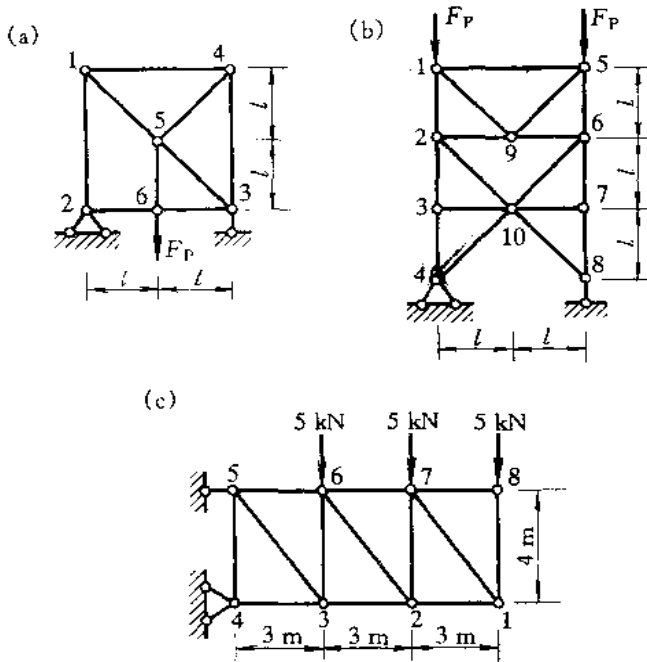


题 3-16 图



题 3-17 图

3-18 试用结点法计算图示桁架中各杆的内力。

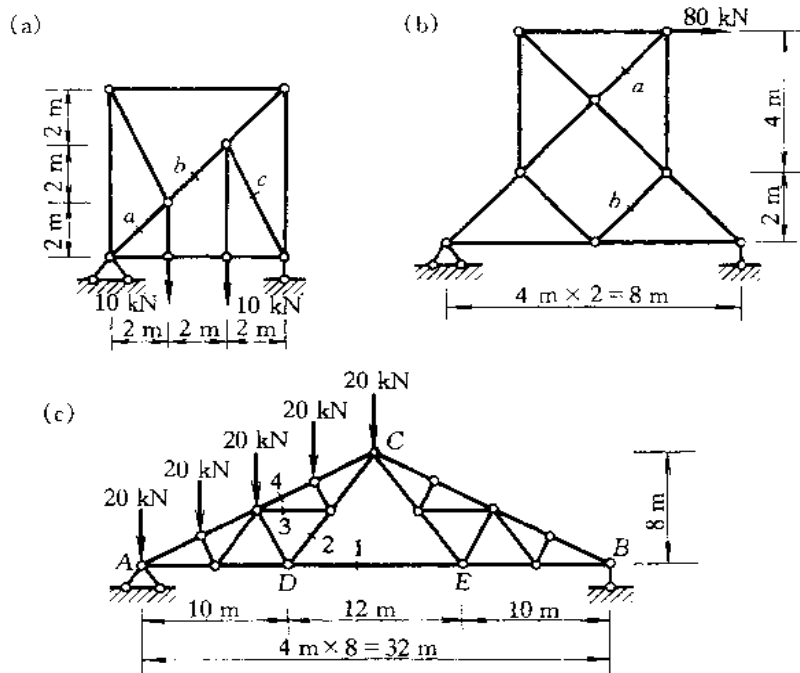


题 3-18 图

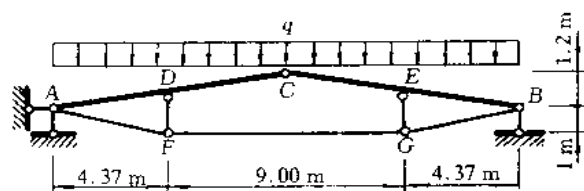
3-19 试用截面法求题 3-18c 中杆 23、62、67 的内力。

3-20 试用较简捷的方法计算图示桁架中指定杆件的内力。

3-21 图示组合屋架承受均布荷载 $q = 20 \text{ kN/m}$ 作用,试求杆 AF , DF , FG , EG , BG 的轴力,并绘出杆 AC 、 BC 的弯矩图。



题 3-20 图



题 3-21 图

部分答案

- 3-1 $M_D = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 3-2 $M_H^R = -15 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_E = 11.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 3-3 $M_{AB} = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (右侧受拉)
 3-4 $M_{AB} = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉)
 3-5 $M_{BC} = 250 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (下边受拉), $M_{CA} = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉)
 3-6 $M_{CB} = 3.36 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (上边受拉)
 3-7 $M_{CA} = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (右侧受拉)
 3-8 $M_{AB} = 180 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉)
 3-9 $M_{IA} = ql^2/4$ (右侧受拉)
 3-10 $M_{CD} = 40/3 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (上边受拉)
 3-11 $M_{ED} = 120 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (上边受拉), $M_{FB} = 80 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (右侧受拉)

$$3-13 \quad M_{DA} = \frac{F_P e}{2} (\text{右侧受拉}), M_{EC} = 0$$

$$3-14 \quad M_{DA} = 6 \text{ kN}\cdot\text{m} (\text{左侧受拉}), M_{CE} = 5 \text{ kN}\cdot\text{m} (\text{上边受拉})$$

$$3-15 \quad M_{DA} = \frac{3}{2} q l^2 (\text{右侧受拉}), M_{FE} = \frac{1}{2} q l^2 (\text{下边受拉})$$

$$3-16 \quad M_K = -29 \text{ kN}\cdot\text{m}, F_{QK} = 18.3 \text{ kN}, F_{NK} = 68.3 \text{ kN}$$

$$3-17 \quad M_D = 125 \text{ kN}\cdot\text{m}, F_{QD}^L = 46.4 \text{ kN}, F_{QD}^R = -46.4 \text{ kN}, F_{ND}^L = 153.2 \text{ kN}, F_{ND}^R = 116.1 \text{ kN}, M_E = 0, F_{QE} = 0, F_{NE} = 134.7 \text{ kN}$$

$$3-18 \quad (a) F_{N81} = F_{N84} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_P, F_{N14} = -\frac{1}{2} F_P; (b) F_{N12} = F_{N23} = F_{N34} = -F_P, F_{N56} = F_{N67} = F_{N78} = -F_P; (c) F_{N87} = 3.75 \text{ kN}, F_{N62} = 12.5 \text{ kN}, F_{N23} = -11.25 \text{ kN}$$

$$3-20 \quad (a) F_{Nc} = -\frac{10\sqrt{5}}{3} \text{ kN}; (b) F_{N4} = 56.569 \text{ kN}, F_{N8} = -20\sqrt{2} \text{ kN}; (c) F_{N1} = 50 \text{ kN}, F_{N2} = 40 \text{ kN}, F_{N3} = 20 \text{ kN}, F_{N4} = -105 \text{ kN}$$

$$3-21 \quad F_{NFG} = 358 \text{ kN}, F_{NAF} = 367 \text{ kN}, F_{NFD} = -81.9 \text{ kN}, M_{DC} = 15.5 \text{ kN}\cdot\text{m} (\text{下边受拉})$$

第四章 静定结构的位移计算

§ 4-1 计算结构位移的目的

结构在荷载作用下会产生内力,同时使其材料产生应变,以致结构发生变形。由于变形,结构上各点的位置将会发生改变。杆件结构中杆件的横截面除移动外,还将发生转动。这些移动和转动称为结构的位移。此外,结构在其他因素如温度改变、支座位移等的影响下,也都会发生位移。

例如图 4-1a 所示简支梁,在荷载作用下梁的形状由直变弯,如图 4-1b 所示。这时,横截面 mm 的形心 C 移动了一个距离 CC' ,称为 C 点的线位移。同时截面 mm 还转动了一个角度 φ_C ,称为截面 C 的角位移或转角。

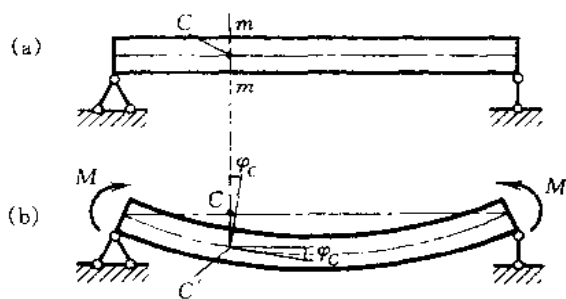


图 4-1

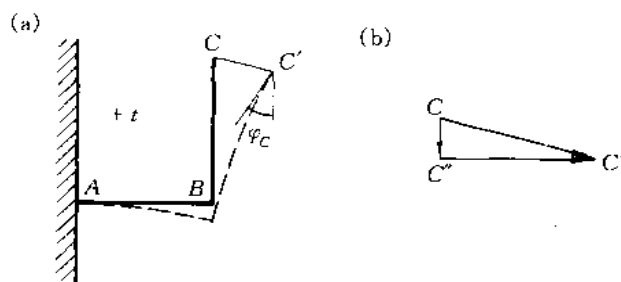


图 4-2

又如图 4-2a 所示结构,在内侧温度升高的影响下发生如图中虚线所示的变形。此时, C 点

移至 C' ,即 C 点的线位移为 CC' 。若将 CC' 沿水平和竖向分解(图4-2b),则分量 $C''C'$ 和 CC'' 分别称为 C 点的水平位移和竖向位移。同样,截面 C 还转动了一个角度 φ_C ,这就是截面 C 的角位移。

在结构设计中,除了要考虑结构的强度外,还要计算结构的位移以验算其刚度。验算刚度的目的,是保证结构物在使用过程中不致发生过大的位移。

计算结构位移的另一重要目的,是为超静定结构的计算打下基础。在计算超静定结构的反力和内力时,除利用静力平衡条件外,还必须考虑结构的位移条件。这样,位移的计算就成为解算超静定结构时必然会遇到的问题。

此外,在结构的制作、架设等过程中,常须预先知道结构位移后的位置,以便采取一定的施工措施,因而也需要计算其位移。

本章所研究的是线性变形体系位移的计算。所谓线性变形体系是指位移与荷载成比例的结构体系,荷载对这种体系的影响可以叠加,而且当荷载全部撤除时,由荷载引起的位移也完全消失。这样的体系,变形应是微小的,且应力与应变的关系符合胡克定律。由于变形是微小的,因此在计算结构的反力和内力时,可认为结构的几何形状和尺寸,以及荷载的位置和方向保持不变。

§4-2 功 广义力和广义位移

在力学中,功的定义是:一个不变的集中力所作的功等于该力的大小与其作用点沿力作用线方向所发生的分位移的乘积。

例如在图4-3a所示结构中, A 点处作用一个集中力 F ,待达到平衡以后,假设由于某种其他原因结构继续发生如图4-3b中虚线所示的变形,力 F 的作用点由 A 移动到 A' 。在移动过程中,如果力 F 的大小和方向均保持不变,则力 F 所作之功为

$$W = F\Delta$$

式中 Δ 是 A 点的线位移 AA' 在力作用线方向的分位移,也称为与力 F 相应的位移。为了清晰,在图4-3a中没有标明由于力 F 作用而使结构发生的变形,在图4-3b中则没有标明使结构发生变形的原因。

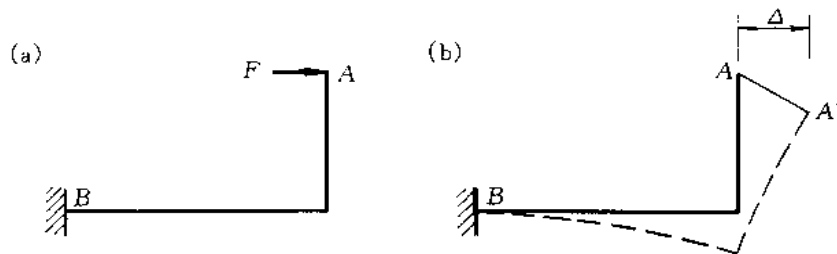


图 4-3

对于其他形式的力或力系所作的功,也常用两个因子的乘积来表示,其中与力相应的因子称

为广义力,而另一个与位移相应的因子称为广义位移。这样,便可用统一而紧凑的形式将功表示为广义力与广义位移的乘积。下面对几种力系所作的功加以说明。

如图 4-4a 所示结构,在 A 、 B 两点受有一对大小相等、方向相反并沿 AB 连线作用的力 F 。当此结构由于某种其他原因发生图 4-4b 中虚线所示的变形时, A 、 B 两点分别移至 A' 和 B' 。设以 Δ_A 和 Δ_B 分别代表 A 、 B 两点沿 AB 连线方向的分位移,则这一对力 F 所作之功(做功过程中二力大小和方向保持不变)为

$$W = F\Delta_A + F\Delta_B = F(\Delta_A + \Delta_B) = F\Delta$$

式中 $\Delta = \Delta_A + \Delta_B$ 代表 A 、 B 两点沿其连线方向的相对线位移。由上式可见,广义力是作用于 A 、 B 两点并沿该两点连线作用的一对等值而反向的力,在式中以 F 来代表,而取 A 、 B 两点沿力的方向的相对线位移作为广义位移。

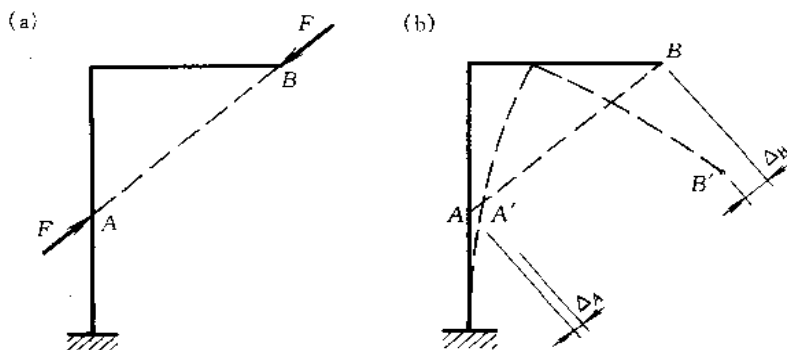


图 4-4

又如图 4-5a 所示结构,在 C 、 D 两结点上作用着与杆 CD 相垂直的等值而反向的两个力 F 。设由于某种其他原因使结构发生位移时, C 、 D 两点分别移至 C' 、 D' 的位置(图 4-5b),并用 Δ_C 和 Δ_D 分别表示 C 、 D 两点沿力 F 方向的分位移,则这两个力 F 所作之功(做功过程中二力大小和方向保持不变)为

$$W = F\Delta_C + F\Delta_D = F(\Delta_C + \Delta_D) = F \cdot d \frac{\Delta_C + \Delta_D}{d}$$

式中 d 为 CD 杆长,所以 Fd 即代表两个等值而反向的力 F 所形成的力偶矩 $M = Fd$ 。又注意到在微小变形假设的前提下,结构变形时的位移是微小的。因此,在图 4-5b 中,当 CD 杆的转角为 φ 时,则有

$$\varphi \approx \frac{ED'}{EC'} \approx \frac{\Delta_C + \Delta_D}{d}$$

故二力所作总功可写为

$$W = M\varphi$$

因而在目前情况下,所取的广义力为力偶矩 M ,广义位移为 CD 杆的转角 φ 。

再看图 4-6a 所示两端受等值而反向的力矩 M 作用的简支梁 AB ,当由于某种其他原因发生图 4-6b 中虚线所示的变形时,其两端力矩所作总功(做功过程中 M 的大小保持不变)为

$$W = M\alpha + M\beta = M(\alpha + \beta) = M\varphi$$

由上式可知,可取作用于 A、B 两端等值而反向的力矩 M 作为广义力,而取 A、B 两端截面的相对转角 φ 作为广义位移。

由以上例子可见,作功时广义力与相应广义位移的乘积具有相同的量纲,即功的量纲。

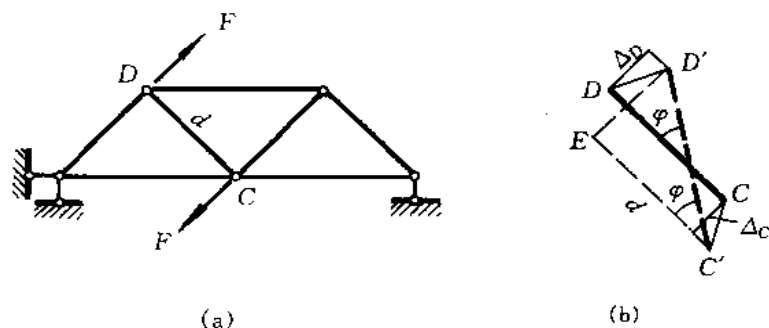


图 4-5

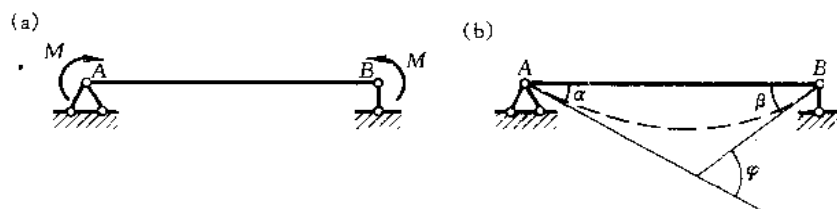


图 4-6

§ 4-3 计算结构位移的一般公式

一、外力虚功和虚应变能

由上节可知,功包含两个要素——力和位移。当作功的力与其相应的位移彼此独立无关时,就把这种功称为虚功。作用在结构上的外力(包括荷载和支承反力)所作的虚功,称为外力虚功,以 W 表示。

由于在虚功中,力和位移是彼此独立无关的两个因素,例如上节讨论的功,其中作功的力是取自图 4-3a 至图 4-6a,而位移因素是取自图 4-3b 至图 4-6b。因此,可将虚功中的两个因素看成是分别属于同一结构的两种彼此无关的状态,其中力系所属状态称为力状态(如图 4-3a 至图 4-6a),位移因素所属状态称为位移状态(如图 4-3b 至图 4-6b)。

当结构的力状态的外力因结构的位移状态的位移作虚功时,力状态的内力也因位移状态的相对变形而作虚功,这种虚功称为虚应变能,以 V 表示。

对于杆件结构,设力状态(图 4-7a)中杆件任一微段 dx 的内力为 F_{N1} 、 F_{Q1} 、 M_1 (图 4-7c);而位移状态(图 4-7b)中杆件对应微段的相对变形,即正应变 ϵ_2 、切应变 γ_2 和曲率 κ_2 分别如图

4-7d、e、f 所示。当略去高阶微量后,微段上的虚应变能可表为

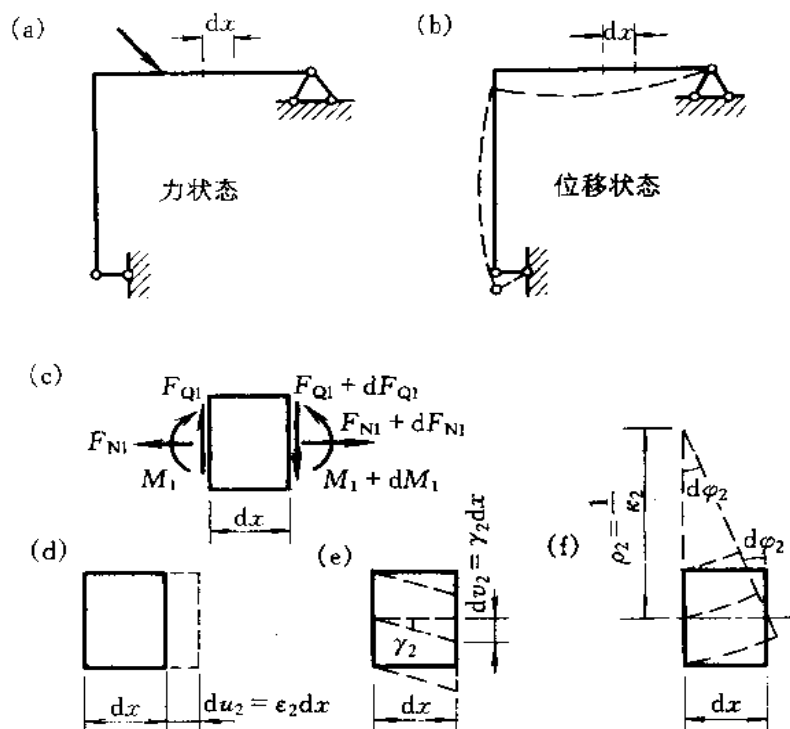


图 4-7

$$dV = F_{N1} du_2 + F_{Q1} dv_2 + M_1 d\varphi_2$$

将上式表示的微段虚应变能沿杆长进行积分,然后对结构的全部杆件求和,即得杆件结构的虚应变能为

$$V = \sum \int F_{N1} du_2 + \sum \int F_{Q1} dv_2 + \sum \int M_1 d\varphi_2$$

或

$$V = \sum \int F_{N1} \epsilon_2 dx + \sum \int F_{Q1} \gamma_2 dx + \sum \int M_1 \kappa_2 dx \quad (4-1)$$

二、虚功原理

变形体系的虚功原理可表述为:设变形体系在力系作用下处于平衡状态(力状态),又设该变形体系由于别的原因产生符合约束条件的微小的连续变形(位移状态),则力状态的外力在位移状态的位移上所作的虚功,恒等于力状态的内力在位移状态的变形上所作的虚功,即等于虚应变能。或简写为

$$\text{外力虚功 } W = \text{虚应变能 } V$$

对于杆件结构虚功原理可用下式表达

或

$$\left. \begin{aligned} W &= \sum \int F_{N1} du_2 + \sum \int F_{Q1} dv_2 + \sum \int M_1 d\varphi_2 \\ W &= \sum \int F_{N1} \epsilon_2 dx + \sum \int F_{Q1} \gamma_2 dx + \sum \int M_1 \kappa_2 dx \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

式(4-2)称为杆件结构的虚功方程。

虚功原理有两种用法:

1. 虚设位移状态——可求实际力状态的未知力。这是在给定的力状态与虚设的位移状态之间应用虚功原理,这种形式的应用即为虚位移原理。

2. 虚设力状态——可求实际位移状态的位移。这是在给定的位移状态与虚设的力状态之间应用虚功原理,这种形式的应用即为虚力原理。

三、利用虚功原理计算结构的位移

下面将从虚力原理出发,利用虚功方程(4-2)导出计算杆件结构位移的一般公式。

图4-8a所示为某一结构,由于荷载 F_{P1} 和 F_{P2} 、支座 A 的位移 c_1 和 c_2 等各种因素的作用而发生如图中虚线所示的变形,这一状态称为结构的实际状态。现要求出实际状态中 D 点的水平位移 Δ ,所以应将实际状态作为结构的位移状态。

为了利用虚功方程求得 D 点的水平位移,应选取如图4-8b所示虚设的力状态,即在该结构的 D 点处沿水平方向加上一个单位荷载 $F_P = 1^{①}$ 。这时, A 处虚拟状态中的支座反力为 \bar{R}_1 、 \bar{R}_2 , B 处的反力为 $F_{B\bar{}}$,结构在单位力和相应的各支座反力的作用下维持平衡,其内力用 \bar{M} 、 \bar{F}_N 、 \bar{F}_Q 来表示。由于结构的力状态是虚设的,故称为虚拟状态。虚设力系的外力(包括反力)对实际状态的位移所作的总虚功为

$$W = 1 \cdot \Delta + \bar{R}_1 c_1 + \bar{R}_2 c_2$$

一般可写为

$$W = \Delta + \sum \bar{R}c$$

式中 $\bar{R}^{②}$ 表示虚拟状态中的广义支座反力, c 表示实际状态中的广义支座位移, $\sum \bar{R}c$ 表示支座反力所作虚功之和。

以 $d\varphi$ 、 du 、 dv 表示实际状态中微段的变形,则总虚应变能为

$$V = \sum \int_l \bar{M} d\varphi + \sum \int_l \bar{F}_N du + \sum \int_l \bar{F}_Q dv$$

由杆件结构的虚功方程(4-2)可得

$$\Delta + \sum \bar{R}c = \sum \int_l \bar{M} d\varphi + \sum \int_l \bar{F}_N du + \sum \int_l \bar{F}_Q dv$$

即

$$\Delta = \sum \int_l \bar{M} d\varphi + \sum \int_l \bar{F}_N du + \sum \int_l \bar{F}_Q dv - \sum \bar{R}c \quad (4-3)$$

① 根据中华人民共和国国家标准 GB 3101—9,任一物理量均由数值和单位符号的乘积组成,即它的规定表达方式 $A = \{A\} \cdot [A]$,式中 A 为该物理量的符号, $[A]$ 为其某一单位的符号, $\{A\}$ 就是以 $[A]$ 为单位时该物理量的数值。这里,对于单位荷载 $F_P = 1$ 的规定写法应为 $\{F_P\} = 1$,即采用某一力的单位时,该力的数值为1。考虑书写和教学的方便,以后均简记为 $F_P = 1$ 。本书中还用到单位力矩、单位力偶、单位多余力和单位位移等概念,均作类似表述,不再一一赘述。

② 这里的支座反力 R 和支座位移 c 分别属广义力和广义位移,其使用见本书符号表说明第2点。以下类同。

这就是计算结构位移的一般公式。

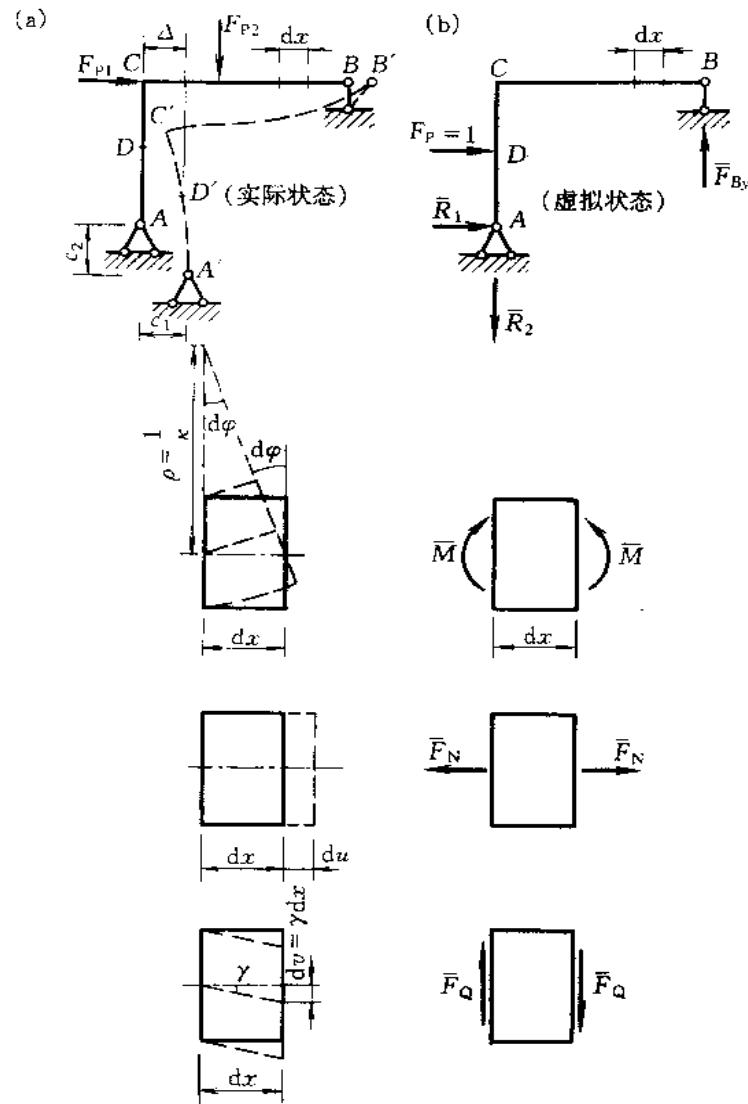


图 4-8

这种利用虚力原理求结构位移的方法称为单位荷载法。应用这个方法每次只能求得一个位移。在计算时,虚拟单位荷载的指向可以任意假定,若按上式计算出来的结果是正的,就表示实际位移的方向与虚拟单位荷载的方向相同,否则相反。这是因为公式中的左边一项 Δ 实际上为虚拟单位荷载所作的虚功,若计算结果为负,则表示虚拟单位荷载的虚功为负,即位移的方向与虚拟单位荷载的方向相反。

单位荷载法不仅可用来计算结构的线位移,而且可用来计算其他性质的位移,只要虚拟状态中的单位荷载为与所求位移相应的广义力即可。现举出几种典型的虚拟状态如下:

当求结构的某两点 A 、 B 沿其连线方向的相对线位移时,可在该两点沿其连线加上两个方向相反的单位荷载(图 4-9a 及 b)。

当求梁或刚架某一截面 K 的角位移时,可在该截面处加上一个单位力矩(图 4-9c);但求桁架中某一杆件 i 的角位移时,则应加一个单位力偶(图 4-9d),构成单位力偶的每一个集中力为 $\frac{1}{l_i}$,各作用于该杆的两端并须与该杆垂直,这里的 l_i 为杆件 i 的长度。

当求梁或刚架上两个截面的相对角位移时,可在这两个截面上加两个方向相反的单位力矩,例如图 4-9e 所示为求铰 C 处左右两侧截面的相对角位移的虚拟状态;当求桁架中两根杆件的相对角位移时,则应加两个方向相反的单位力偶,例如图 4-9f 所示为求 i 、 j 两杆的相对转角的虚拟状态。

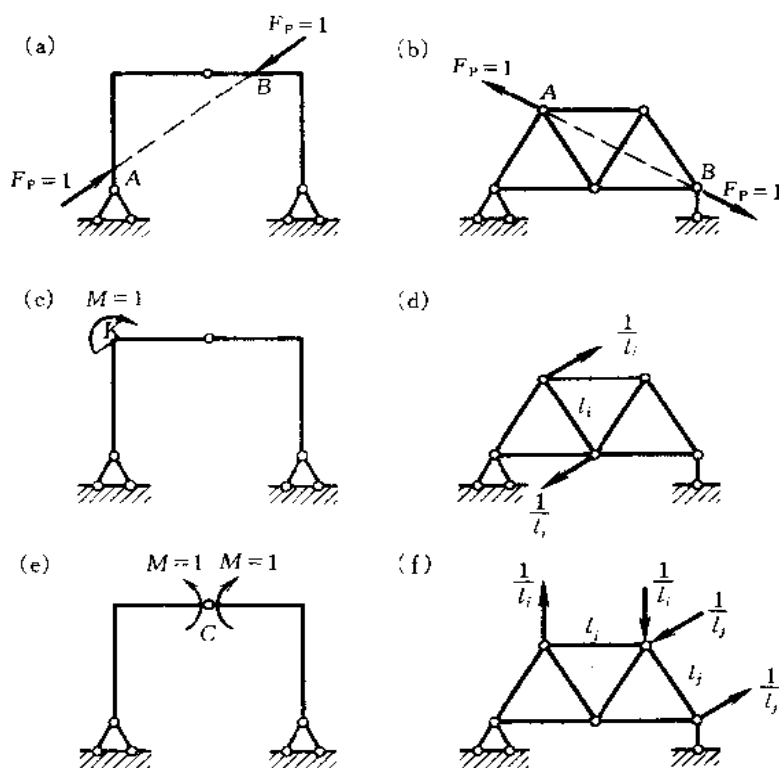


图 4-9

§ 4-4 静定结构由于荷载所引起的位移

如果结构只受到荷载作用的影响,以 M_P 、 F_{NP} 、 F_{QP} 表示结构实际状态的内力,则在实际状态下微段的变形为

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= \kappa dx = \frac{M_P}{EI} dx \\ du &= \epsilon dx = \frac{F_{NP}}{EA} dx \\ dv &= \gamma dx = \frac{kF_Q}{GA} dx \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中 EI 、 EA 和 GA 分别是杆件的抗弯、抗拉和抗剪刚度； k 为截面的切应力分布不均匀系数，它只与截面的形状有关，当截面为矩形时， $k = 1.2$ 。将式(a)代入式(4-3)并注意到无支座移动(即 $c = 0$)，得

$$\Delta = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_P}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} dx + \sum \int_l \frac{k\bar{F}_Q F_Q}{GA} dx \quad (4-4)$$

式中 \bar{M} 、 \bar{F}_N 、 \bar{F}_Q 代表虚拟状态中由于单位荷载所产生的内力。在静定结构中，上述内力均可通过静力平衡条件求得，故不难利用式(4-4)求出相应的位移。

在梁和刚架中，轴向变形和剪切变形的影响甚小，可以略去，其位移的计算只考虑弯曲变形一项的影响已足够精确。这样，式(4-4)可简化为

$$\Delta = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_P}{EI} dx \quad (4-5)$$

在一般的实体拱中，其位移的计算只考虑弯曲变形一项的影响也足够精确。但在扁平拱中，除弯矩外，有时尚须考虑轴向变形对位移的影响。

在桁架中，只有轴力的作用，且每一杆件的内力及截面都沿杆长 l 不变，故其位移的计算公式成为

$$\Delta = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA} \quad (4-6)$$

应该指出，在计算由于内力所引起的变形时，我们没有考虑杆件的曲率对变形的影响，这只是对直杆才是正确的，应用于曲杆的计算则是近似的。不过，在常用的结构中，例如拱结构或具有曲杆的刚架等，其曲率对变形的影响都很微小，可以略去不计。

[例 4-1] 试求图 4-10a 所示等截面简支梁中点 C 的竖向位移 Δ_{CV} 。已知 $EI = \text{常数}$ 。

解：在 C 点加一竖向单位荷载作为虚拟状态(图 4-10b)，分别求出实际荷载和单位荷载作用下梁的弯矩。设以 A 为坐标原点，则当 $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ 时，有

$$\bar{M} = \frac{1}{2}x, \quad M_P = \frac{q}{2}(lx - x^2)$$

因为对称，所以由式(4-5)得

$$\Delta_{CV} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{EI} \times \frac{x}{2} \times \frac{q}{2}(lx - x^2) dx = \frac{q}{2EI} \int_0^{\frac{l}{2}} (lx^2 - x^3) dx = \frac{5ql^4}{384EI} (\downarrow)$$

计算结果为正，说明 C 点竖向位移的方向与虚拟单位荷载的方向相同，即为向下。

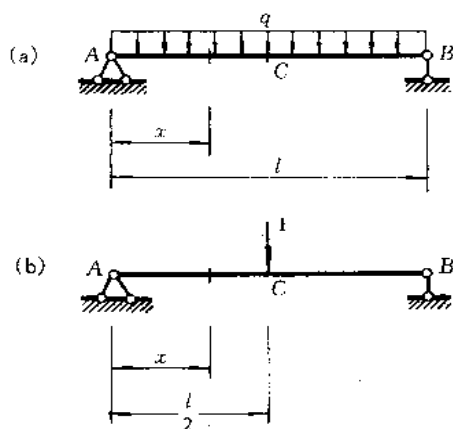


图 4-10

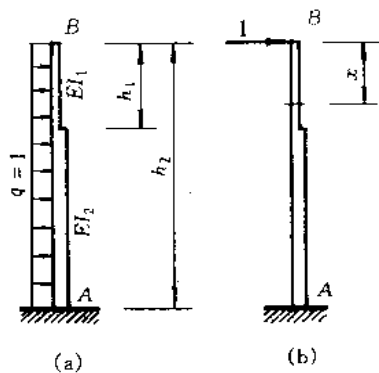


图 4-11

〔例 4-2〕 试求图 4-11a 所示单阶柱柱顶 B 的水平位移 Δ_{BH} 。

解:因所求位移是柱顶的水平位移,所以在 B 点加一水平单位荷载作为虚拟状态(图 4-11b)。设以 B 为坐标原点,暂规定弯矩 M 以使柱的左侧受拉为正,则有

$$\bar{M} = x, \quad M_P = \frac{1}{2}x^2$$

因该柱上、下两段的抗弯刚度不同,所以将以上 \bar{M} 和 M_P 代入式(4-5)求位移时,应分段进行积分,于是得

$$\begin{aligned} \Delta_{BH} &= \int_0^{h_2} \frac{\bar{M}M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI_1} \int_0^{h_1} x \times \frac{x^2}{2} dx + \frac{1}{EI_2} \int_{h_1}^{h_2} x \times \frac{x^2}{2} dx \\ &= \frac{h_1^4}{8EI_1} + \frac{h_2^4 - h_1^4}{8EI_2} = \frac{1}{8E} \left(\frac{h_1^4}{I_1} + \frac{h_2^4 - h_1^4}{I_2} \right) (\rightarrow) \end{aligned}$$

结果为正,表示 B 点水平位移向右。

〔例 4-3〕 试求图 4-12a 所示结构 C 端的水平位移 Δ_{CH} 和角位移 φ_C 。已知 EI 为一常数。

解:略去轴向变形和剪切变形的影响,只计算弯曲变形一项。在荷载作用下,弯矩的变化如图 4-12b 所示。

1. 求 C 端的水平位移时,可在 C 点加上一水平单位荷载作为虚拟状态,其方向取为向左,如图 4-12c 所示。

两种状态的弯矩为

$$\text{横梁 BC 上} \quad \bar{M} = 0, \quad M_P = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$\text{竖柱 AB 上} \quad \bar{M} = x, \quad M_P = -\frac{1}{2}ql^2$$

代入公式(4-5),得 C 端水平位移为

$$\Delta_{CH} = \Sigma \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l x \times \left(-\frac{1}{2}ql^2 \right) dx = -\frac{ql^4}{4EI} (\rightarrow)$$

计算结果为负,表示实际位移与所设虚拟单位荷载的方向相反,即为向右。

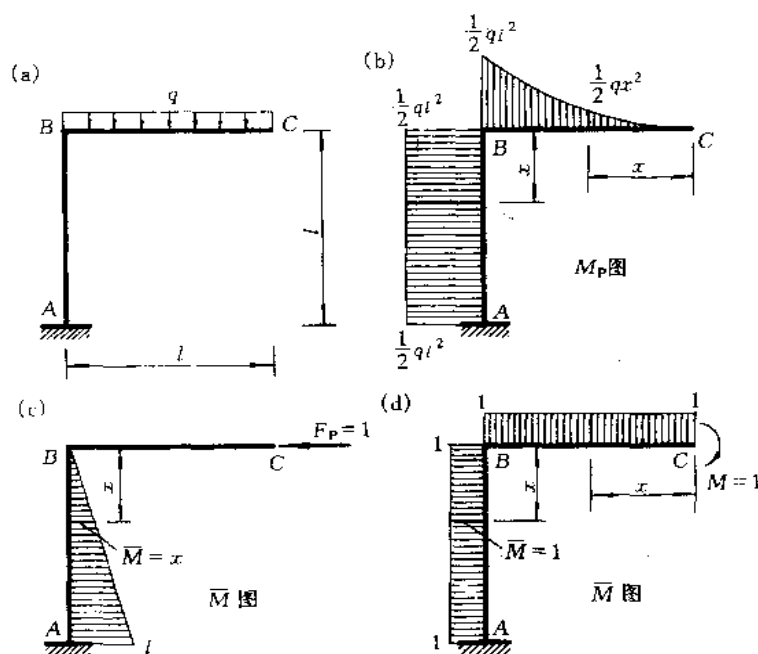


图 4-12

2. 求 C 端的角位移时,可在 C 点加一单位力矩^① 作为虚拟状态,其方向设为顺时针方向,如图 4-12d 所示。

两种状态的弯矩为

$$\text{横梁 } BC \text{ 上} \quad \bar{M} = -1, \quad M_P = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$\text{竖柱 } AB \text{ 上} \quad \bar{M} = -1, \quad M_P = -\frac{1}{2}ql^2$$

代入公式(4-5),得 C 端角位移为

$$\varphi_C = \frac{1}{EI} \int_0^l (-1) \left(-\frac{1}{2}qx^2 \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^h (-1) \left(-\frac{1}{2}ql^2 \right) dx = \frac{2ql^3}{3EI} (\searrow)$$

计算结果为正,表示 C 端转动的方向与虚拟力矩的方向相同,为顺时针方向转动。

[例 4-4] 试求图 4-13a 所示圆弧形曲杆 B 点的竖向位移, I 及 A 都为常数。曲率的影响忽略不计。

解:在与 OB 成 θ 角的截面 K 上,各内力如图 4-13b 所示,其值为

$$M_P = F_P r \sin \theta, \quad F_{QP} = F_P \cos \theta, \quad F_{NP} = F_P \sin \theta$$

由于是求 B 点的竖向位移,所以虚拟状态为在 B 点加一向下的单位荷载,因此只需要在图

^① 这里的单位力矩 $M=1$ 属单位量,其使用见本书符号表说明第 3 点。以下类同。

4-13a 中令 $F_P = 1$ 即得虚拟状态, 于是在 M_P 、 F_{QP} 、 F_{NP} 的表达式中令 $F_P = 1$, 即得虚拟状态的内力为

$$\bar{M} = r \sin \theta, \quad \bar{F}_Q = \cos \theta, \quad \bar{F}_N = \sin \theta$$

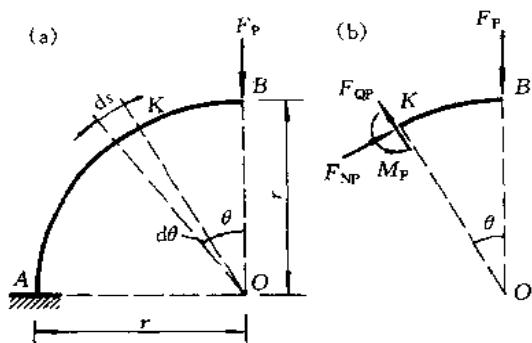


图 4-13

利用式(4-4)计算位移时, 对于曲杆, 应令 $dx = ds$, 由图 4-13a 知 $ds = r d\theta$, 所以有

$$\begin{aligned} \Delta_{BV} &= \int_B^A \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + k \int_B^A \frac{\bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds + \int_B^A \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds \\ &= \frac{F_P r^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta + k \frac{F_P r}{GA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \frac{F_P r}{EA} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{F_P r^3}{EI} + k \frac{F_P r}{GA} + \frac{F_P r}{EA} \right] \end{aligned}$$

若截面为矩形($b \cdot h$), 则

$$k = 1.2$$

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} A h^2$$

或

$$A = \frac{12I}{h^2}$$

另外, 设 $G = 0.4E$, 于是

$$\Delta_{BV} = \frac{\pi F_P r^3}{4EI} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] = \frac{\pi F_P r^3}{4EI} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] (\downarrow)$$

截面厚度 h 一般远较 r 为小, 因此上式方括号中第二项远小于 1, 由此可见剪切变形及轴向变形的影响甚微, 因而在受弯杆件中通常可略去而只计算弯曲变形一项的影响。

[例 4-5] 试求图 4-14a 所示木桁架(与例题 3-5 同)下弦中间结点 5 的挠度。设各杆的截面面积均为 $A = 0.12 \text{ m} \times 0.12 \text{ m} = 0.0144 \text{ m}^2$, $E = 850 \times 10^7 \text{ Pa}$ 。

解: 虚拟状态如图 4-14b 所示。实际状态和虚拟状态所产生的杆件内力均列在表 4-1 中, 根据式(4-6)

$$\Delta = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA}$$

—
—
—



0 0 100 0 0

正

表

$$\Sigma = 125\sqrt{5} + 260$$

§ 4-5 图 乘 法

在求梁和刚架结构的位移时,将遇到如下的积分式:

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M} M_P dx}{EI}$$

如果结构各杆段均满足下述三个条件,则这一积分式就可逐段通过 \bar{M} 和 M_P 两个弯矩图之间的相乘方法来求得解答。这三个条件是:第一,杆段的 EI 为常数;第二,杆段轴线为直线;第三,各杆段的 \bar{M} 图和 M_P 图中至少有一个为直线图形。对于等截面直杆,上述的前两个条件自然恒可满足,至于第三个条件,虽然 M_P 图在受到分布荷载作用时将成为曲线形状,但其 \bar{M} 图却总是由直线段所组成的,这时只要分段考虑就可得到满足。

现以图 4-15 所示杆段的两个弯矩图来作说明,假设其中 \bar{M} 图为直线,而 M_P 图为任何形状,并取

$$\bar{M} = x \tan \alpha + b$$

代入积分式,则有

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M} M_P dx}{EI} &= \frac{1}{EI} \left(\tan \alpha \int x M_P dx + b \int M_P dx \right) \\ &= \frac{1}{EI} \left(\tan \alpha \int x dA_P + b \int dA_P \right) \end{aligned}$$

其中 dA_P 表示 M_P 图的微分面积,因而积分 $\int x dA_P$ 表示 M_P 图的面积 A_P 对于 $O_1 O_2$ 轴的静矩。这个静矩可以写成

$$\int x dA_P = A_P x_C$$

式中 x_C 是 M_P 图的形心到 $O_1 O_2$ 轴的距离。 $\int dA_P$ 则为 M_P 图的面积 A_P 。因此,得

$$\int \frac{\bar{M} M_P dx}{EI} = \frac{1}{EI} A_P (x_C \tan \alpha + b)$$

又因

$$x_C \tan \alpha + b = y_C$$

为 \bar{M} 图中与 M_P 图形心相对应的竖标,故得

$$\int \frac{\bar{M} M_P dx}{EI} = \frac{1}{EI} A_P y_C \quad (4-7)$$

由此可见,当上述三个条件被满足时,积分式 $\int \frac{\bar{M} M_P dx}{EI}$ 之值就等于 M_P 图(任何图形)的面积 A_P 乘其形心下相应的 \bar{M} 图(直线图形)上的竖标 y_C ,再以 EI 除之。所得结果按 A_P 与 y_C 在基线的同一侧时为正,否则为负。

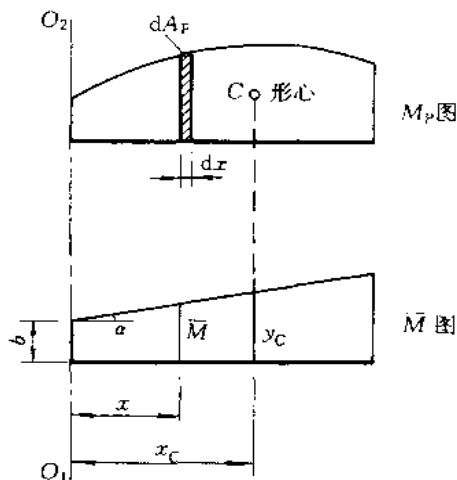


图 4-15

这就是图形相乘法,简称图乘法。应当注意: y_c 必须从直线图形上取得。当 \bar{M} 图形是由若干段直线组成时,就应该分段图乘。如对图 4-16 所示情况,有

$$\Sigma \int \frac{\bar{M} M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} (A_{P1} y_1 + A_{P2} y_2 + A_{P3} y_3)$$

应用图乘法时,如遇到弯矩图的形心位置或面积不便于确定的情况,则可将该图形分解为几个易于确定形心位置和面积的部分,并将这些部分分别与另一图形相乘,然后再将所得结果相加,即得两图相乘之值。

例如图 4-17 所示的两个梯形相乘时,可不必找出梯形的形心,而将其中一个梯形(设为 M_p 图的 $ABCD$)分解为两个三角形 ABD 和 ADC ,并以 M'_p 和 M''_p 分别表示任一截面的弯矩 M_w 在 BZ 和 P 在这两个三角形中所含的竖标,将 $M_p = M'_p + M''_p$ 代入计算位移的积分式中,使得

$$\int \frac{\bar{M} M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\int \bar{M} M'_p dx + \int \bar{M} M''_p dx \right)$$

上式表明:我们可将三角形 ABD 和 ADC 分别与 \bar{M} 图相乘,再将所得结果相加后以 EI 除之,即得计算位移的积分值。按上述方法处理的结果,有

$$\int \frac{\bar{M} M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{al}{2} \cdot y_a + \frac{bl}{2} \cdot y_b \right)$$

式中

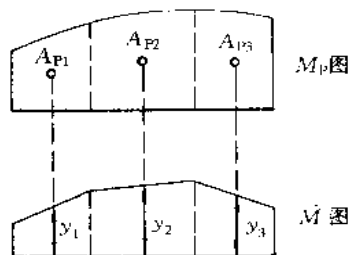


图 4-16

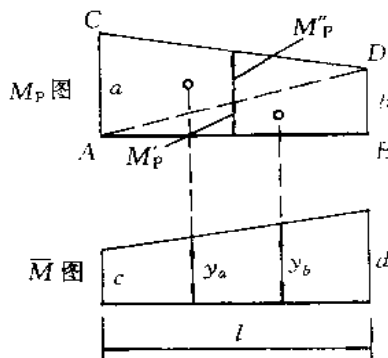


图 4-17

$$y_a = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d, \quad y_b = \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d$$

又如图 4-18 所示两个图形都成直线变化,但都含有不同符号的两部分,在进行图乘时,可将其中一个图形(设为 M_p 图)分解为 ABD 和 ABC 两个三角形,由于原图形任一截面的竖标 M_p 等于这两部分所含竖标 M'_p 和 M''_p 的代数和,故可按同上方方法处理而得

$$\int \frac{\bar{M} M_p dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{al}{2} y_a + \frac{bl}{2} y_b \right)$$

式中

$$y_a = \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}d, \quad y_b = \frac{2}{3}d - \frac{1}{3}c$$

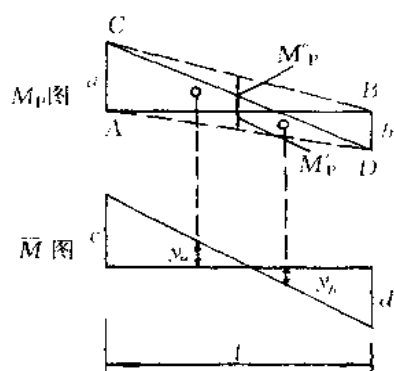


图 4-18

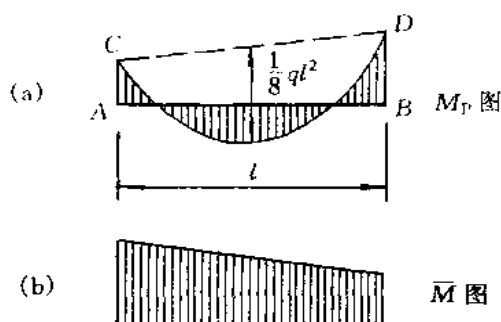


图 4-19

对于图 4-19a 所示某一均布荷载作用的区段的 M_p 图, 可根据第三章中所阐述过的法则, 将 M_p 图看作是由两端弯矩竖标所连成的梯形 $ABDC$ (当有一端为零时则为三角形) 与相应简支梁在均布荷载作用下的弯矩图叠加而成的, 后者即虚线 CD 与曲线之间所包含的部分。因此, 可将 M_p 图分解为上述两个图形并分别与 \bar{M} 图相乘, 然后取其代数和, 即可方便地得出其结果。

为了计算方便, 现将常遇到的二次和三次标准抛物线图形的面积及其形心的位置表示于图 4-20 中。所谓标准抛物线是指含有顶点在内且顶点处的切线与基线平行的抛物线。弯矩图为标准抛物线时, 在顶点处应有 $\frac{dM}{dx} = 0$, 也就是说, 顶点处截面的剪力为零。

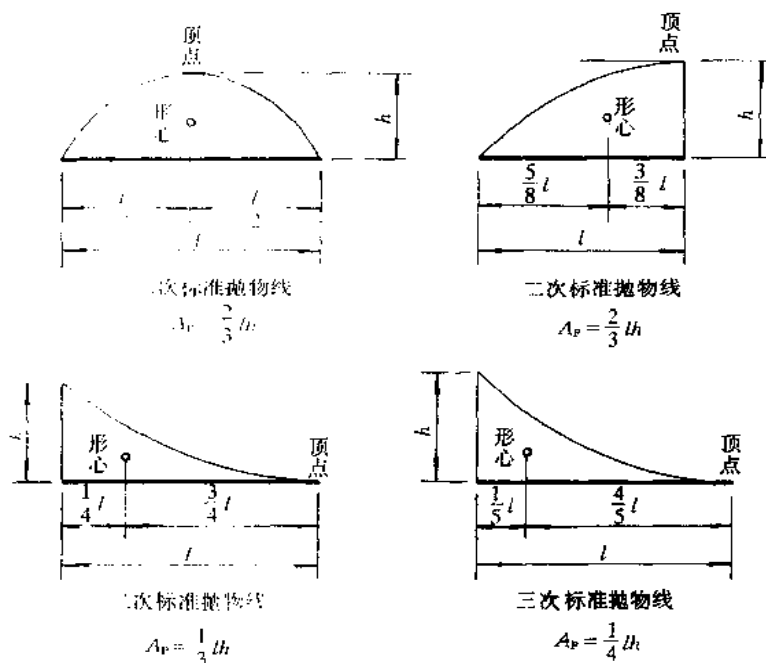


图 4-20

〔例 4-6〕 试求图 4-21a 所示简支梁 A 端的角位移 φ_A 和中点 C 的竖向位移 Δ_{cv} 。EI 为常数。

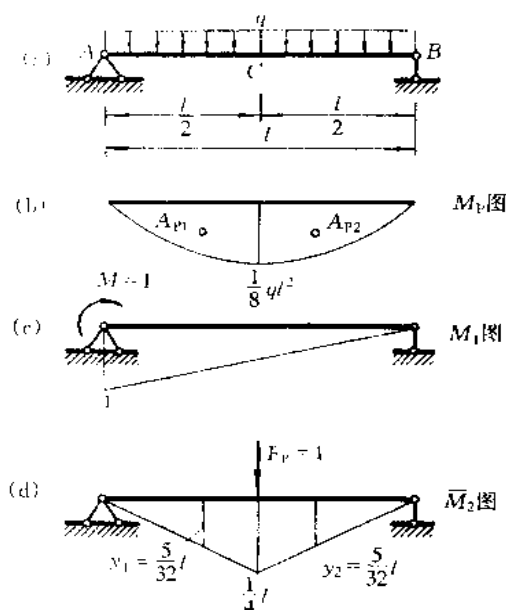


图 4-21

解: 荷载作用下弯矩图和两个单位弯矩图如图 4-21b、c、d 所示。

将图 4-21b 与图 4-21c 相乘, 则得

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot l \times \frac{ql^2}{8} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EI} (\curvearrowright)$$

将图 4-21b 与图 4-21d 相乘, 则得

$$\Delta_{cv} = \frac{1}{EI} (A_{p1} y_1 + A_{p2} y_2) = \frac{2}{EI} \left(\frac{2}{3} \times \frac{l}{2} \times \frac{ql^2}{8} \right) \times \frac{5}{32} l = \frac{5ql^4}{384EI} (\downarrow)$$

〔例 4-7〕 试求图 4-22a 所示刚架 C 点的水平位移 Δ_{ch} 。EI 为常数。

解: 作出 M_p 图和 \bar{M} 图如图 4-22b、c 所示。因为 \bar{M} 图中的 BC 段没有弯矩, 故只需在 AB 段进行图乘。由于 \bar{M} 图和 M_p 图在 AB 段都是直线图形, 故为了图乘简便起见, 宜在面积计算简单的 \bar{M} 图上取面积, 而在 M_p 图上取相应的竖标, 即得

$$\Delta_{ch} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \left(\frac{1}{3} \times 80 \times 10^3 + \frac{2}{3} \times 160 \times 10^3 \right) = \frac{1.067 \times 10^6}{EI} (\rightarrow)$$

〔例 4-8〕 试求图 4-23a 所示伸臂梁 A 端的角位移 φ_A 及 C 端的竖向位移 Δ_{cv} 。EI = $5 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 。

解: 先作出 M_p 图及两个 \bar{M} 图如图 4-23b、c、d 所示。

将图 4-23b 与图 4-23c 相乘, 则得

$$\varphi_A = -\frac{1}{5 \times 10^7} \times \frac{1}{2} \times 48 \times 10^3 \times 6 \times \frac{1}{3} \times 1 = -9.6 \times 10^{-4} \text{ 弧度} (\curvearrowleft)$$

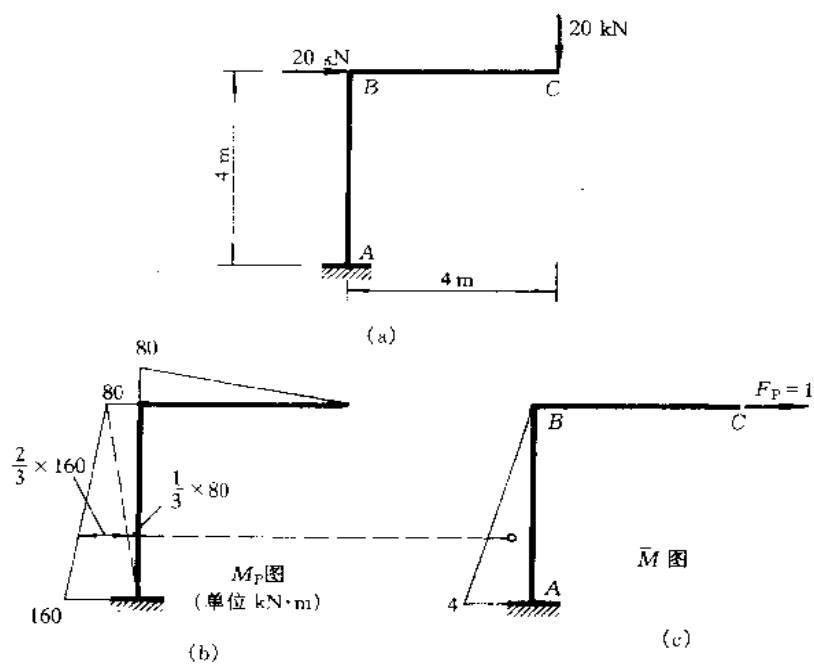


图 4-22

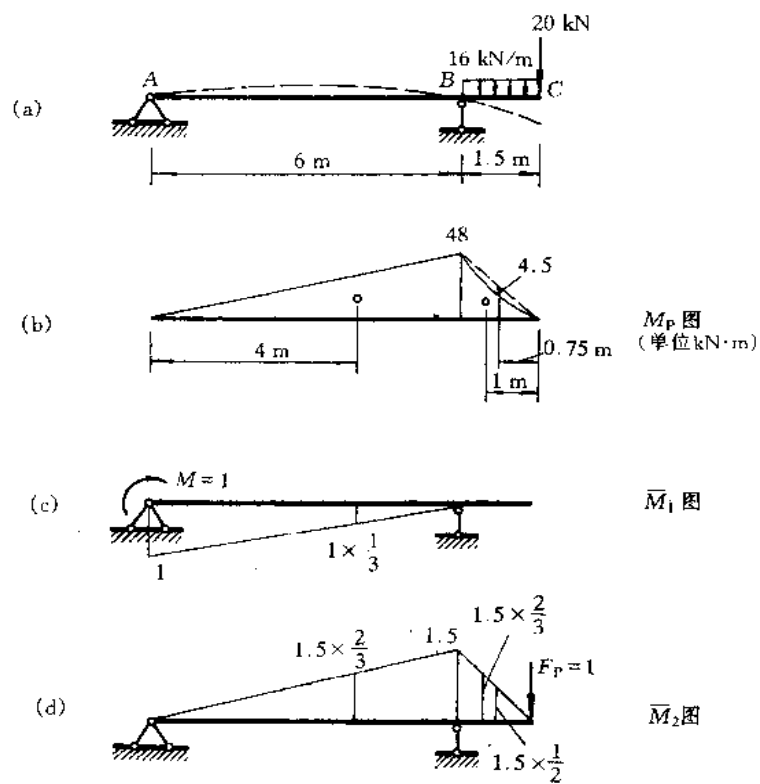


图 4-23

式中最初所用的负号是因为相乘的两个图形不在基线的同一侧。最后结果中的负号则表示 φ_A 的实际转动方向与 $M_A = 1$ 的方向相反, 即 φ_A 是逆时针方向转动的。

为了计算 Δ_{CV} 值, 需将图 4-23b 与图 4-23d 相乘。此时, 对于 AB 区段并无任何困难, 而对承受均布荷载的 BC 区段, 则可将 M_P 图看作是由 B、C 两端的弯矩竖标所连成的三角形图形与相应简支梁在均布荷载作用下的标准抛物线图形(即图 4-23b 中的虚线与曲线之间所包含的面积)叠加而成的。将上述两种图形分别与图 4-23d 的相应部分相乘, 由此可得

$$\begin{aligned}\Delta_{CV} &= \frac{1}{5 \times 10^7} \times \left(\frac{1}{2} \times 48 \times 10^3 \times 6 \times \frac{2}{3} \times 1.5 + \frac{1}{2} \times 48 \times 10^3 \times 1.5 \times \frac{2}{3} \times 1.5 - \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{3} \times 4.5 \times 10^3 \times 1.5 \times \frac{1.5}{2} \right) \\ &= 3.5 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.5 \text{ mm} (\downarrow)\end{aligned}$$

[例 4-9] 试求图 4-24a 所示刚架 C、D 两点之间的相对水平位移 $\Delta_{H(C-D)}$ 。各杆抗弯刚度均为 EI 。

解: 先作出 M_P 图(图 4-24b), 其中 AC、BD 两杆的弯矩图是三次标准抛物线。

因为要计算 C、D 两点之间的相对水平位移, 须沿两点的连线加上一对方向相反的单位荷载作为虚拟状态, 并绘出 \bar{M} 图(图 4-24c)。

将图 4-24b 与图 4-24c 相乘, 得

$$\begin{aligned}\Delta_{H(C-D)} &= \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{4} \cdot l \times \frac{ql^2}{6} \right) \times \frac{4l}{5} + \frac{1}{EI} \left(2l \times \frac{ql^2}{6} \right) \cdot l - \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \times 2l \times \frac{ql^2}{2} \right) \cdot l \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{ql^4}{15} + \frac{ql^4}{3} - \frac{2ql^4}{3} \right) = -\frac{4ql^4}{15EI} (\rightarrow \leftarrow)\end{aligned}$$

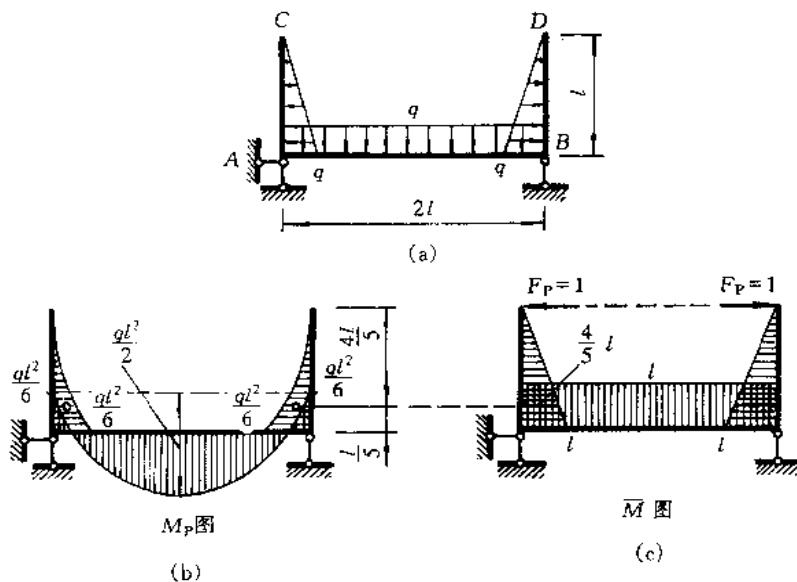


图 4-24

计算结果是负值, 说明 C、D 两点实际的相对水平位移与虚拟力的指向相反, 即 C、D 两点

是相互靠近而不是相互离开。

§ 4-6 静定结构由于支座位移、温度改变所引起的位移

一、支座位移的影响

在静定结构中,支座位移和转动并不使结构产生应力和应变,而使结构产生刚体运动。因此,位移的计算公式(4-3)简化成如下形式

$$\Delta = -\sum \bar{R}_c \quad (4-8)$$

式中 $\sum \bar{R}_c$ 为虚拟状态的反力在实际状态的支座位移上所作虚功之和。

[例 4-10] 图 4-25a 所示结构,若支座 B 发生水平移动,即 B 点向右移动一间距 a ,试求 C 铰左、右两截面的相对转角 φ 。

解:求相对转角 φ 的虚拟状态及其所引起的虚拟反力如图 4-25b 所示。利用式(4-8)即得

$$\varphi = -\sum \bar{R}_c = -\left(\frac{1}{h} \cdot a\right) = -\frac{a}{h} (\downarrow \curvearrowright)$$

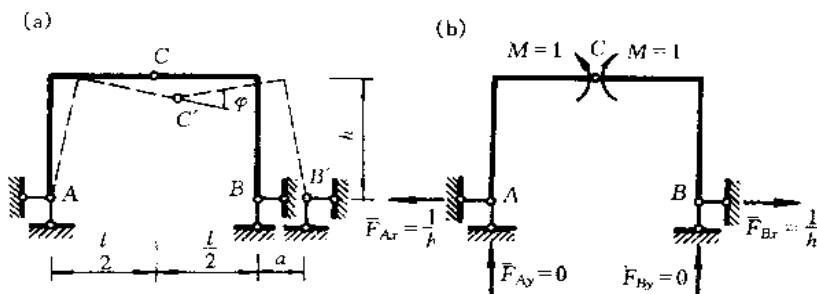


图 4-25

负号表明, C 铰左、右两截面相对转角的实际方向与所设虚单位广义力的方向相反。

二、温度改变的影响

图 4-26a 所示结构,由于温度改变而产生变形,计算其位移时,同样可采用单位荷载法,例如求 C 点的竖向位移 Δ ,可选取图 4-26b 所示虚拟状态,即在 C 点处加一个竖向的单位荷载,这时结构的内力用 \bar{M} 、 \bar{F}_N 、 \bar{F}_Q 表示。此时,由计算位移的一般公式(4-3)并注意到支座位移为零(即 $\sum \bar{R}_c = 0$),则有

$$\Delta = \sum \int_l \bar{M} d\varphi + \sum \int_l \bar{F}_N du + \sum \int_l \bar{F}_Q dv \quad (a)$$

式中 $d\varphi$ 、 du 、 $dv = \gamma dx$ 为实际状态中杆件微段 dx 由于温度改变产生的变形(图 4-26c)。计算时,因假定温度沿截面的高度 h 按直线规律变化,在变形之后,截面仍将保持为平面。当杆件截面对称于形心轴时(即 $h_1 = h_2$),则其形心轴处的温度 t 为

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

如果杆件截面不对称于形心轴(即 $h_1 \neq h_2$), 则

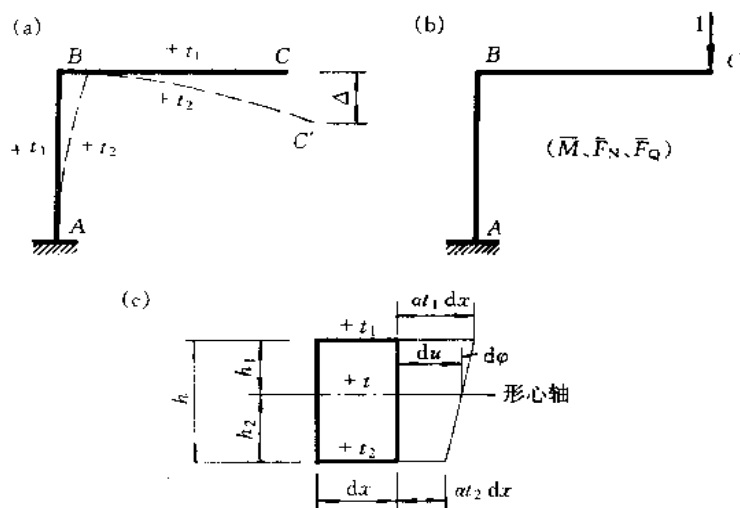


图 4-26

$$t = \frac{t_1 h_2 + t_2 h_1}{h}$$

若以 α 表示材料的线膨胀系数, 则杆件微段 dx 由于温度改变所产生的变形为

$$du = \alpha t dx$$

$$d\varphi = \frac{\alpha(t_1 - t_2)dx}{h} = \frac{\alpha \Delta t}{h} dx$$

式中 $\Delta t = t_1 - t_2$ 为杆件上、下两面温度改变之差。由于温度改变并不引起切应变, 即 $\gamma = 0$, 因此 $dv = 0$ 。

将以上变形代入式(a), 得

$$\Delta = \sum(\pm) \alpha \int \bar{M} \frac{\Delta t}{h} dx + \sum(\pm) \alpha \int \bar{F}_N t dx \quad (4-9)$$

这就是静定结构由于温度改变所引起的位移的计算公式。应用时对于式中的正负符号(\pm)可按如下的办法来确定, 即: 比较实际状态与虚拟状态的变形, 若二者变形方向相同, 则取正号, 反之则取负号。若每一杆件沿其全长上的温度改变相同, 且截面尺寸不变, 则式(4-9)可写为

$$\Delta = \sum(\pm) \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot A_{\bar{M}} + \sum(\pm) F_N \alpha t l \quad (4-10)$$

式中 l 为杆件的长度, $A_{\bar{M}}$ 代表 \bar{M} 图的面积。

必须指出, 在计算由于温度改变所引起的位移时, 不能略去轴向变形的影响。

[例 4-11] 试求图 4-27a 所示结构由于杆件一边的温度升高 10°C 时, 在 C 点所产生的竖向位移。各杆的截面相同, 且与形心轴对称。

解: 在 C 点加一竖向单位荷载, 算出各杆的轴力 \bar{F}_N 并绘出 \bar{M} 图, 如图 4-27b、c 所示。图中虚线所示的弧形表示杆件弯曲的方向。可以看出各杆实际的弯曲变形方向都与虚拟的相反,

且两杆的尺寸及温度改变都相同,故两杆的 A_M 可合并计算。

$$A_M = l \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l \cdot l = 1.5l^2$$

$$t = \frac{1}{2} \times (0^\circ\text{C} + 10^\circ\text{C}) = 5^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = |0^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}| = 10^\circ\text{C}$$

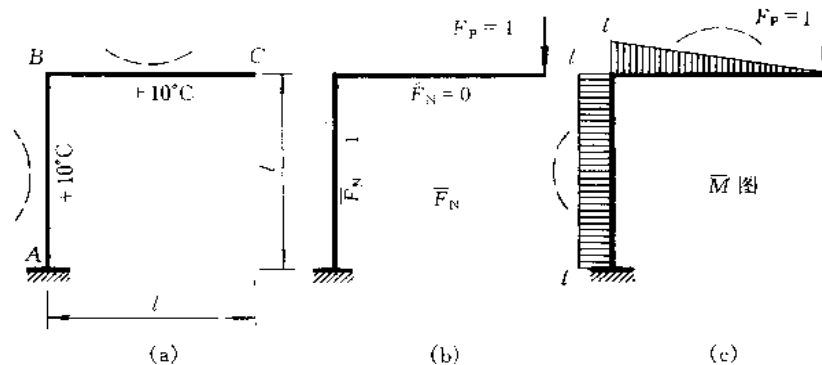


图 4-27

以上各值均为绝对值,这是因为求温度改变所引起的位移时,其正负号将由变形方向来决定。在目前情况下,温度改变将使竖柱伸长,而虚拟状态则使其压缩,故轴向变形的影响一项须取负值;对于弯曲变形的影响,其变形情况如前所述也应取负值。因此,由式(4-10)得 C 点的竖向位移为

$$\Delta_{CV} = -15\alpha \frac{l^2}{h} - 5\alpha l (\uparrow)$$

§4-7 互等定理

一、功的互等定理

图 4-28a 及图 4-28b 所示为同一结构分别承受一组外力 F_1 和一组外力 F_2 的两种状态。设以 M_1, F_{N1}, F_{Q1} 代表第一组力 F_1 所产生的内力,以 M_2, F_{N2}, F_{Q2} 代表第二组力 F_2 所产生的内力。现在来研究这两组力按不同的次序先后作用于结构上时所引起的虚功,并由此推出功的互等定理。

如图 4-28c 所示,若先施加力 F_1 ,待达到弹性平衡后,再施加 F_2 ,此时,如以 W_{12} 代表第一组外力由于第二组力 F_2 的影响所作的虚功,则由虚功原理有

$$W_{12} = \sum \int M_1 d\varphi_2 + \sum \int F_{N1} du_2 + \sum \int F_{Q1} dv_2 = \sum \int M_1 \frac{M_2 dx}{EI} + \sum \int F_{N1} \frac{F_{N2} dx}{EA} + \sum \int k F_{Q1} \frac{F_{Q2} dx}{GA} \quad (a)$$

又如图 4-28d 所示,若先施加力 F_2 ,待达到弹性平衡后,再施加力 F_1 ,此时,如以 W_{21} 代表第二组外力由于第一组力 F_1 的影响所作的虚功,则有

$$W_{21} = \Sigma \int M_2 d\varphi_1 + \Sigma \int F_{N2} du_1 + \Sigma \int F_{Q2} dv_1 = \Sigma \int M_2 \frac{M_1 dx}{EI} + \Sigma \int F_{N2} \frac{F_{N1} dx}{EA} + \Sigma \int kF_{Q2} \frac{F_{Q1} dx}{GA} \quad (b)$$

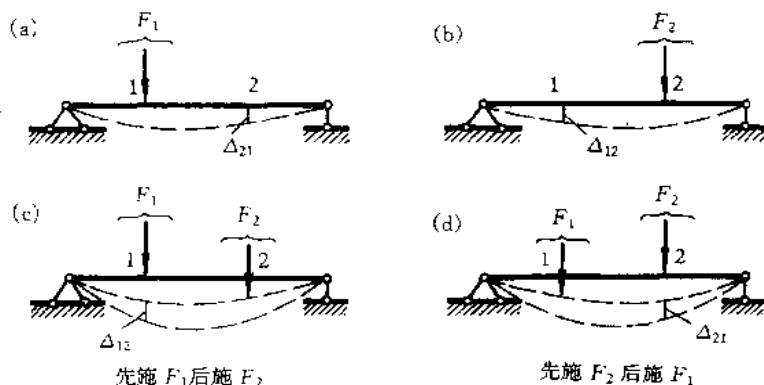


图 4-28

比较式(a)及式(b)可知

$$W_{12} = W_{21} \quad (4-11)$$

或写为

$$\Sigma F_1 \Delta_{12} = \Sigma F_2 \Delta_{21} \quad (4-12)$$

式中 Δ_{12} 及 Δ_{21} ① 分别代表与 F_1 及 F_2 相应的位移①。总和号 Σ 表示包括结构上全部外力所作的虚功。

上面所得到的公式就是功的互等定理,即第一状态的外力在第二状态的位移上所作的虚功,等于第二状态的外力在第一状态的位移上所作的虚功。

功的互等定理适用于任何类型的弹性结构,在两种状态中也可以包括支座位移在内,不过在计算外力的虚功时也必须把反力所作的虚功包括在内。

二、位移互等定理

应用上述功的互等定理,可研究下面一种特殊情况,如图 4-29a、b 所示的 I、II 两种状态中,状态 I 中只承受力 F_1 ,状态 II 中只承受力 F_2 。图 4-29a 中的 Δ_{21} 表示 F_1 引起的与 F_2 相应的位移,图 4-29b 中的 Δ_{12} 表示力 F_2 引起的与力 F_1 相应的位移。实际上,常在位移符号下加两个下标,记为 Δ_{ij} 。其中第一个下标 i 表示位移是与力 F_i 相应的,第二个下标 j 表示位移是由力 F_j 引起的。

由功的互等定理可得

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21} \quad (a)$$

在线性变形体系中,位移 Δ_{ij} 与力 F_j 的比值是一个常数,称为位移影响系数,它等于 F_j 为单位力时所引起的与力 F_i 相应的位移,记为 δ_{ij} ,即

$$\frac{\Delta_{ij}}{F_j} = \delta_{ij}$$

① 这里的位移 Δ 属广义位移,其使用见本书符号表说明第 2 点。以下类同。

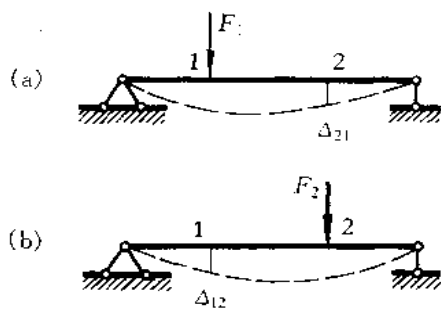


图 4-29

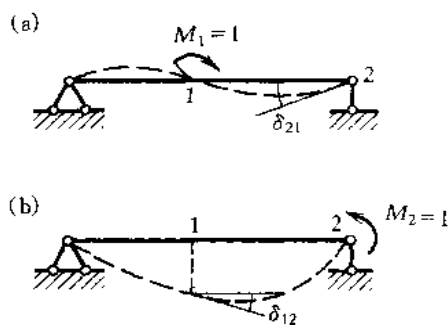


图 4-30

或

$$\Delta_{ij} = F_j \delta_{ij} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a),得到

$$F_1 F_2 \delta_{12} = F_2 F_1 \delta_{21}$$

由此得到

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (4-13)$$

上式就是位移互等定理,即:在任一线性变形体系中,由力 F_1 所引起的与力 F_2 相应的位移影响系数 δ_{21} ,等于由力 F_2 所引起的与力 F_1 相应的位移影响系数 δ_{12} 。或者说,由单位力 $F_1 = 1$ 所引起的与力 F_2 相应的位移,等于由单位力 $F_2 = 1$ 所引起的与力 F_1 相应的位移。

应当指出,这里的力可以是广义力,位移是相应的广义位移,图 4-30 和图 4-31 所示为应用位移互等定理的两个例子。图 4-30 表示两个角位移影响系数的互等情况。图 4-31 表示线位移与角位移影响系数的互等情况。

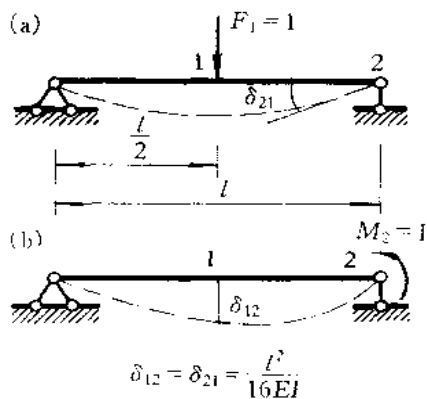


图 4-31

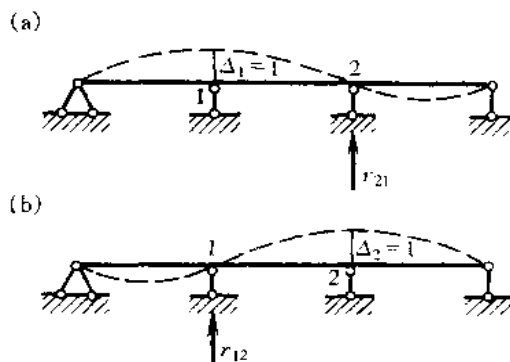


图 4-32

三、反力互等定理

这一定理也是功的互等定理的一种特殊情况。它用来说明超静定体系在两个支座分别产生

单位位移时,这两种状态中的相应反力的互等关系。

图 4-32 所示为两个支座分别产生单位位移^①的两种状态;其中图 4-32a 表示支座 1 发生单位位移 $\Delta_1 = 1$ 的状态,设此时支座 2 产生的反力为 r_{21} ;图 4-32b 则表示支座 2 发生单位位移 $\Delta_2 = 1$ 的状态,此时支座 1 产生的反力设为 r_{12} 。与前相仿, r_{12} 、 r_{21} 也称为反力影响系数,其符号的第一个下标表示它所在的位置,第二个下标表示产生反力的单位位移所在位置。其他支座的反力未在图中一一绘出,由于它们所对应的另一状态的相应位移都等于零,因而不作虚功。根据功的互等定理,同样可以证明:

$$r_{12} = r_{21} \quad (4-14)$$

上式就是反力互等定理,即:支座 1 由于支座 2 的单位位移所引起的反力 r_{12} ,等于支座 2 由于支座 1 的单位位移所引起的反力 r_{21} 。这一定理适用于体系中任何两个约束上的反力。但应注意,在两种状态中,同一约束的反力和位移在做功的关系上应该是相应的。

同样,由于位移是广义位移,所以反力也是广义反力。图 4-33 表示反力互等的另一例子, $r_{12} = r_{21}$ 表示支座 1 的反力影响系数与支座 2 的反力矩影响系数互等。

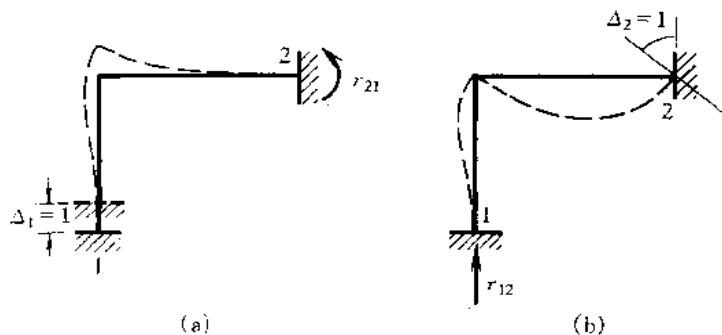


图 4-33

思 考 题

1. 用公式(4-5), $\Delta = \sum \int \frac{M\bar{M}_p dx}{EI}$ 计算梁和刚架的位移,需先写出 \bar{M} 和 M_p 的表达式,在同一区段内写这两个弯矩表达式时,可否将坐标原点分别取在不同的位置?为什么?

2. 例 4-8 中求 C 端的竖向位移时,BC 段的图乘若按下面两种算式计算(图 4-34)是否正确?试述其理由。

$$(1) \frac{1}{5 \times 10^7} \times \left(\frac{1}{3} \times 48 \times 10^3 \times 1.5 \right) \times \left(\frac{3}{4} \times 1.5 \right)$$

$$(2) \frac{1}{5 \times 10^7} \times \left[\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 16 \times 10^3 \times 1.5^2 \times 1.5 \right) \times \left(\frac{3}{4} \times 1.5 \right) + \left(\frac{1}{2} \times 20 \times 10^3 \times 1.5 \times 1.5 \right) \times \left(\frac{2}{3} \times 1.5 \right) \right]$$

① 这里的单位位移 $\Delta = 1$ 属单位物理量,其使用见本书符号表说明第 3 点。以下类同。

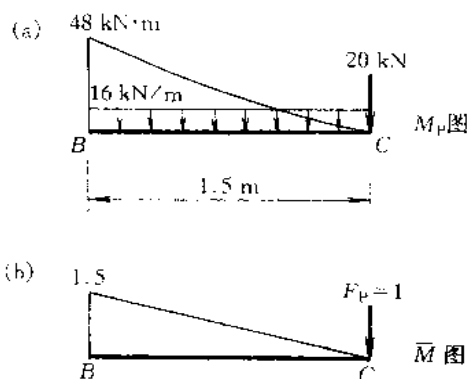


图 4-34

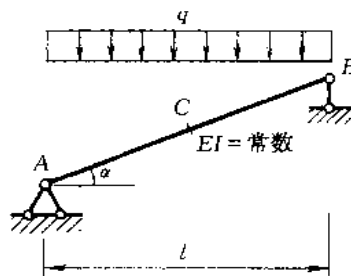


图 4-35

3. 用单位荷载法求图 4-35 所示斜简支梁中点 C 的竖向线位移和垂直于杆轴方向的线位移, 应如何分别选取虚拟状态? 利用图乘法计算这两个线位移(只考虑弯曲变形的影响)应如何进行? 试将它们与相应水平简支梁中点挠度值相比较, 看有何不同?

4. 试用功的互等定理证明图 4-36a 所示状态在 2 点产生的竖向位移 δ_{21} , 等于图 4-36b 所示状态在 1 处产生的反力矩 r_{12} , 但符号相反。

上述关系称为反力与位移互等定理, 即: 由于单位荷载对结构某一约束所产生反力, 等于因该约束发生相应单位位移所引起的单位荷载作用点沿其方向的位移, 但符号相反。

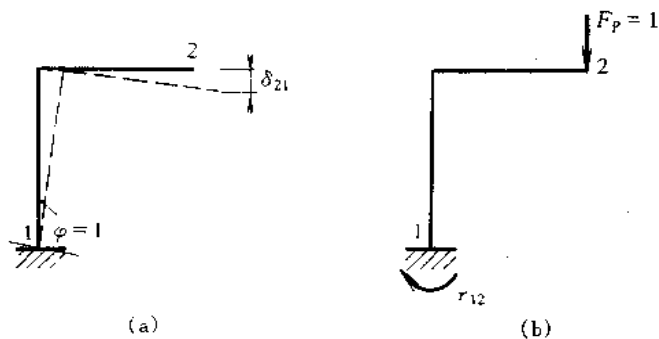


图 4-36

5. 试用图 4-37a、b 所示两种状态说明位移互等定理。又设 $EI = \text{常数}$, 试算出 δ_{21} 和 δ_{12} , 并就二者是否相同加以说明。

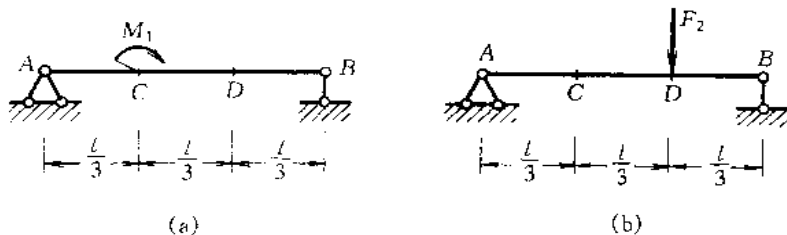


图 4-37

6. 已知图 4-38a 所示结构的弯矩图, 试用功的互等定理求图 4-38b 所示结构由于左端 A 转动 φ_A 角而使梁中点产生的挠度 Δ_{CV} 。

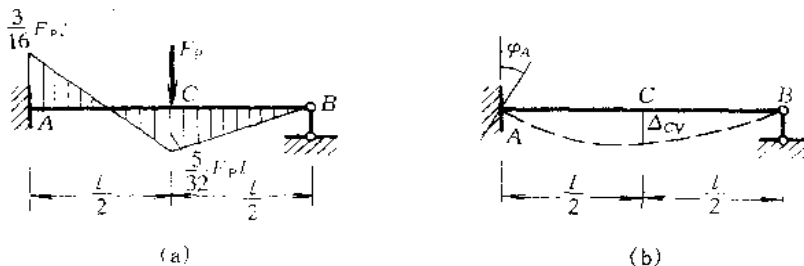
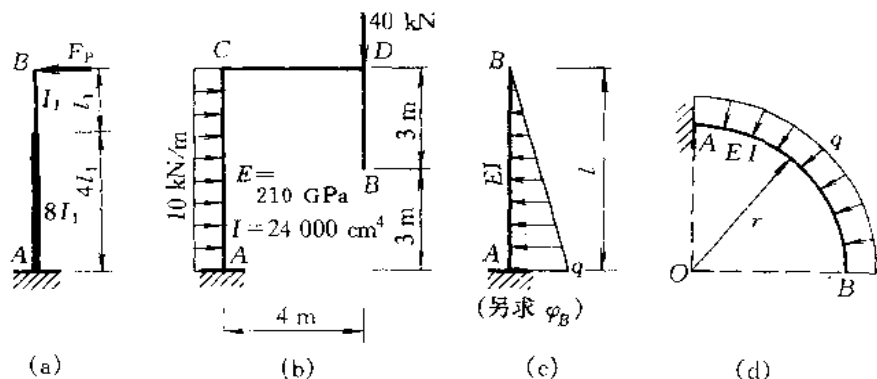


图 4-38

7. 求桁架中某一杆件的角位移时, 应在该杆加一个单位力偶(图 4-9d)作为虚拟状态。构成单位力偶的每一个集中力必为 $\frac{1}{l_i}$, 分别作用于该杆的两端且必须与该杆垂直。试问为什么?

习 题

4-1 试求图示结构 B 点的水平位移。



题 4-1 图

4-2 试求图示桁架结点 B 的竖向位移, 已知桁架各杆的 $EA = 21 \times 10^4 \text{ kN}$ 。

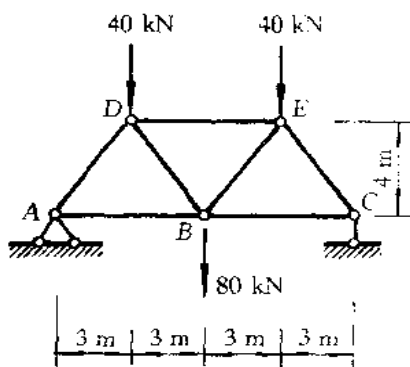
4-3 试用图乘法求图示结构中 B 处的转角和 C 处的竖向位移。 $EI = \text{常数}$ 。

4-4 试求图示结构 C 点的竖向位移。

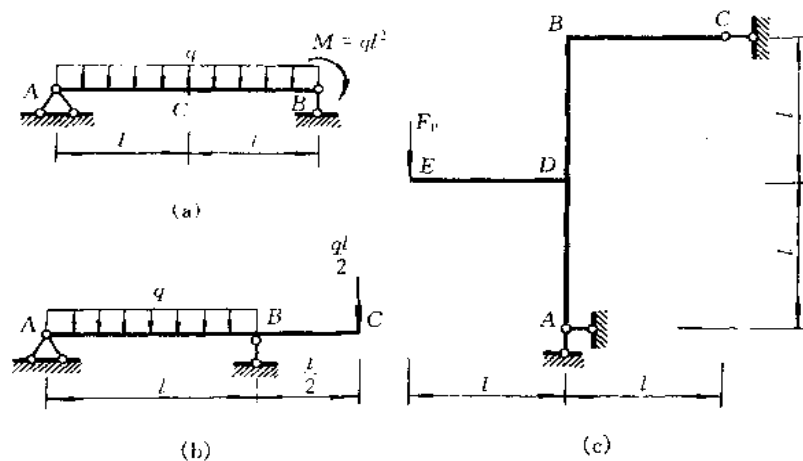
4-5 试求题 3-10 所示结构 E、F 两点间的相对水平线位移 $\Delta_{H(E-F)}$ 。 $EI = \text{常数}$ 。

4-6 试求图示结构 A 点的竖向位移。已知 $E = 210 \text{ GPa}$, $A = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $I = 36 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ 。

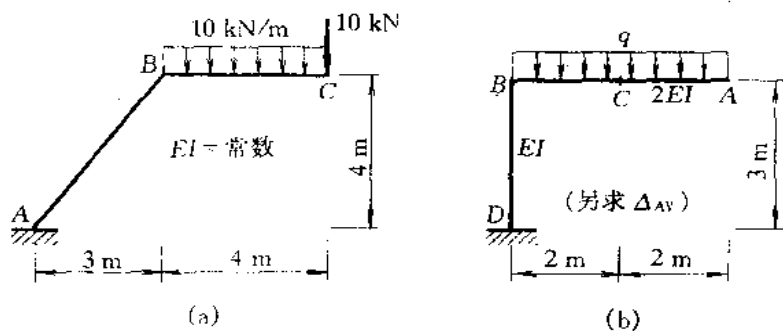
4-7 图示结构支座 B 发生水平位移 a 、竖向位移 b 。试求由此而产生的铰 C 左、右两截面的相对转角及 C 点的竖向位移。



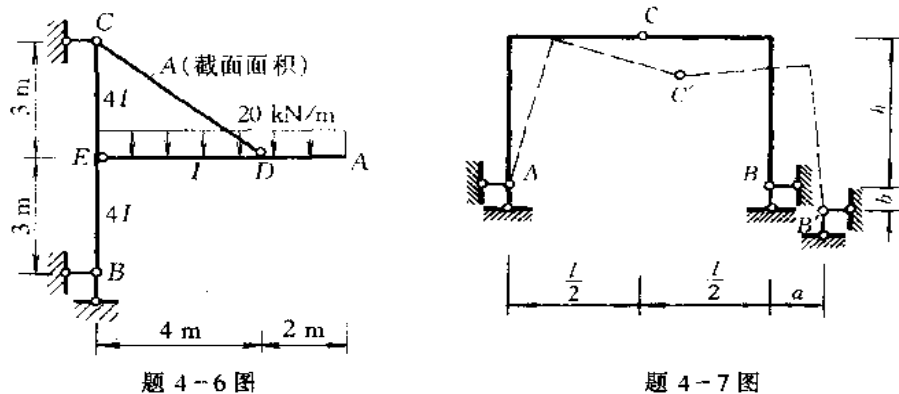
题 4-2 图



题 4-3 图

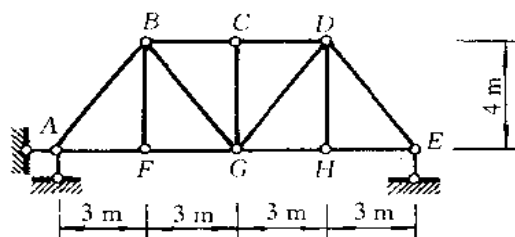


题 4-4 图

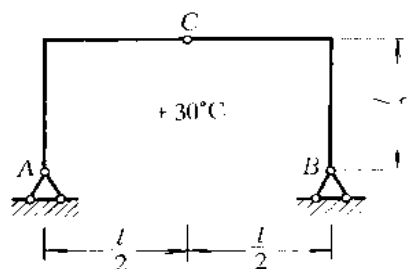


4-8 在图示桁架中,杆件 GD 由于制造误差,比原设计长度短 1 cm 。试求因此所引起结点 G 的竖向位移。

4-9 图示三铰刚架若其内部温度升高 30°C ,试求 C 点的竖向位移。各杆截面均为矩形,且高度 h 相同。线膨胀系数为 α_0 。



题 4-8 图



题 4-9 图

部分答案

4-1 (a) $\Delta_{BH} = \frac{11F_P l_1^3}{2EI_1}$ (\leftarrow); (b) $\Delta_{BH} = 0.833 \text{ cm}$ (\leftarrow); (c) $\Delta_{BH} = \frac{ql^4}{30EI}$ (\leftarrow), $\varphi_B = \frac{ql^3}{24EI}$ (\curvearrowright); (d) $\Delta_{BH} = \frac{qr^4}{2EI}$ (\leftarrow)

4-2 $\Delta_{BV} = 0.768 \text{ cm}$ (\downarrow)

4-3 (a) $\varphi_B = \frac{ql^3}{3EI}$ (\curvearrowright), $\Delta_{CV} = \frac{ql^4}{24EI}$ (\uparrow); (b) $\varphi_B = \frac{ql^3}{24EI}$ (\curvearrowright), $\Delta_{CV} = \frac{ql^4}{24EI}$ (\downarrow); (c) $\varphi_B = \frac{F_P l^3}{12EI}$ (\curvearrowright), $\Delta_{CV} = \frac{F_P l^4}{12EI}$ (\downarrow)

4-4 (a) $\Delta_{CV} = \frac{18250}{3EI}$ (\downarrow); (b) $\Delta_{CV} = \frac{53.67q}{EI}$ (\downarrow), $\Delta_{AV} = \frac{112q}{EI}$ (\downarrow)

4-5 $\Delta_{H(E-F)} = \frac{34}{3EI}$ ($\leftarrow \rightarrow$)

4-6 $\Delta_{AV} = 4.84 \text{ cm}$ (\downarrow)

4-7 $\Delta\varphi_A = \frac{a}{h}$ (\curvearrowright), $\Delta_{AV} = \frac{al}{4h} + \frac{b}{2}$ (\downarrow)

4-8 $\Delta_{CV} = 0.625 \text{ cm}$ (\uparrow)

4-9 $\Delta_{CV} = 15al + 7.5 \frac{al^2}{h}$ (\uparrow)

第五章 力 法

§5-1 超静定结构概述

超静定结构是工程实际中常用的一类结构,前已述及,超静定结构的反力和内力只凭静力平衡条件是无法确定的,或者是不能全部确定的。例如图 5-1a 所示的连续梁,它的水平反力虽可由静力平衡条件求出,但其竖向反力只凭静力平衡条件就无法确定,因此也就不能进一步求出其全部内力。又如图 5-1b 所示的加劲梁,虽然它的反力可由静力平衡条件求得,但却不能确定杆件的内力。因此,这两个结构都是超静定结构。

分析以上两个结构的几何组成,可知它们都具有多余约束。多余约束上所发生的力称为多余未知力。如图 5-1a 所示的连续梁中,可认为 B 支座链杆是多余约束,其多余未知力为 F_{By} (图 5-1c)。又如图 5-1b 所示的加劲梁,可认为其中的 BD 杆是多余约束,其多余未知力为该杆的轴力 F_N (图 5-1d)。超静定结构在去掉多余约束后,就变成为静定结构。

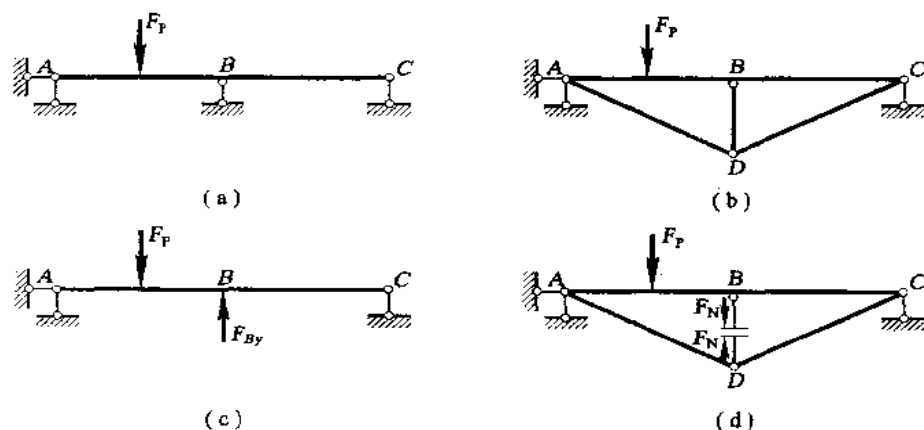


图 5-1

常见的超静定结构类型有:超静定梁(图 5-2),超静定刚架(图 5-3),超静定桁架(图 5-4),超静定拱(图 5-5),超静定组合结构(图 5-6)和铰接排架(图 5-7)等。

超静定结构最基本的计算方法有两种,即力法和位移法,此外还有各种派生出来的方法,如力矩分配法就是由位移法派生出来的一种方法。这些计算方法将在本章和以下两章中分别介绍。

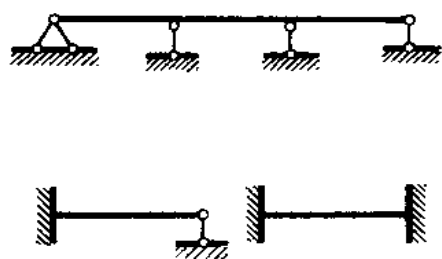


图 5-2

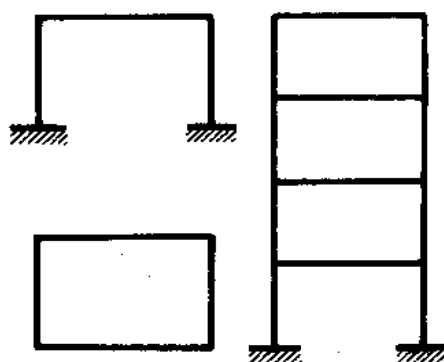


图 5-3

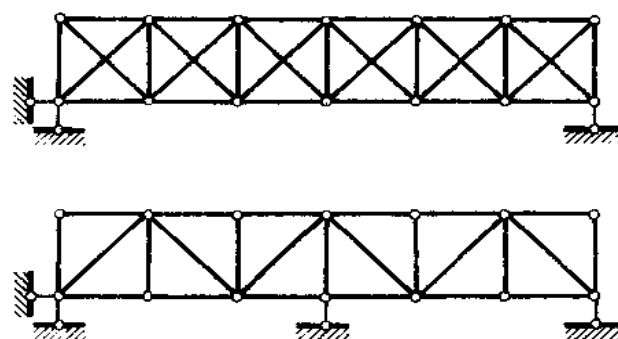


图 5-4



图 5-5



图 5-6

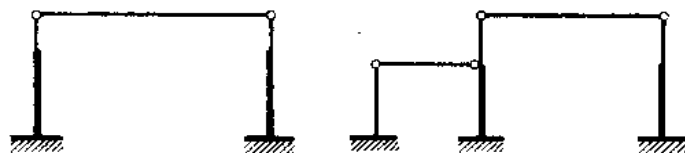


图 5-7

§5-2 力法的基本概念

在掌握静定结构内力和位移计算的基础上,下面来寻求分析超静定结构的方法。

先举一个简单的例子加以阐明。设有图 5-8a 所示一端固定另一端铰支的梁,它是具有一个多余约束的超静定结构。如果以右支座链杆作为多余约束,则在去掉该约束后,得到一个静定结构,该静定结构称为力法的基本结构。在基本结构上,若以多余未知力 X_1 ^① 代替所去约束的作用,并将原有荷载 q 作用上去,则得到如图 5-8b 所示的同时受荷载 q 和多余未知力 X_1 作用的体系。该体系称为力法的基本体系。在基本体系上的原有荷载 q 是已知的,而多余力 X_1 是未知的。因此,只要能设法先求出多余未知力 X_1 ,则原结构的计算问题即可在静定的基本体系上来解决。显然,如果单从平衡条件来考虑,则 X_1 可取任何数值,这时基本体系都可以维持平衡,但相应的反力、内力和位移就会有不同之值,因而 B 点就可能发生大小和方向各不相同的竖向位移。为了确定 X_1 ,还必须考虑位移条件。注意到原结构的支座 B 处,由于受竖向支座链杆约束,所以 B 点的竖向位移应为零。因此,只有当 X_1 的数值恰与原结构右支座链杆上实际发生的反力相等时,才能使基本体系在原有荷载 q 和 X_1 共同作用下 B 点的竖向位移(即沿 X_1 方向的位移) Δ_1 等于零。所以,用来确定 X_1 的位移条件是:在原有荷载和多余未知力共同作用下,在基本体系上去掉多余约束处的位移应与原结构中相应的位移相等。由上述可见,为了唯一确定超静定结构的反力和内力,必须同时考虑静力平衡条件和位移条件。

若令 Δ_{11} 及 Δ_{1P} 分别表示基本结构在多余未知力 X_1 及荷载 q 单独作用时 B 点沿 X_1 方向的位移(图 5-8c,d),其符号都以沿 X_1 方向者为正。根据叠加原理及 $\Delta_1 = 0$,有

$$\Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0$$

再令 δ_{11} 表示 X_1 为单位力 $\bar{X}_1 = 1$ 时, B 点沿 X_1 方向所产生的位移,则 $\Delta_{11} = \delta_{11} X_1$,于是上式可写成

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (5-1)$$

由于 δ_{11} 和 Δ_{1P} 都是静定结构在已知外力作用下的位移,均可按第四章所述计算位移的方法求得,于是多余未知力即可由式(5-1)确定。这里采用图乘法计算 δ_{11} 及 Δ_{1P} 。先分别绘出 $\bar{X}_1 = 1$ 和荷载 q 单独作用在基本结构上的弯矩图 \bar{M}_1 (图 5-8e)和 M_P (图 5-8f),然后求得

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \times \frac{l^2}{2} \times \frac{2l}{3} = \frac{l^3}{3EI} \\ \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot l \times \frac{ql^2}{2} \right) \times \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EI} \end{aligned}$$

所以由式(5-1)有

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql^4}{8EI} \times \frac{3EI}{l^3} = \frac{3}{8} ql$$

① 由于多余未知力是未知的广义力(包括集中力和力矩),为叙述的统一和完整,本书以 X 代表,对于文中所对应的物理量和相应单位,则视具体问题而定。

② 这里的单位力 $\bar{X} = 1$ 属单位物理量,其使用见本书符号表说明第 3 点。以下类同。

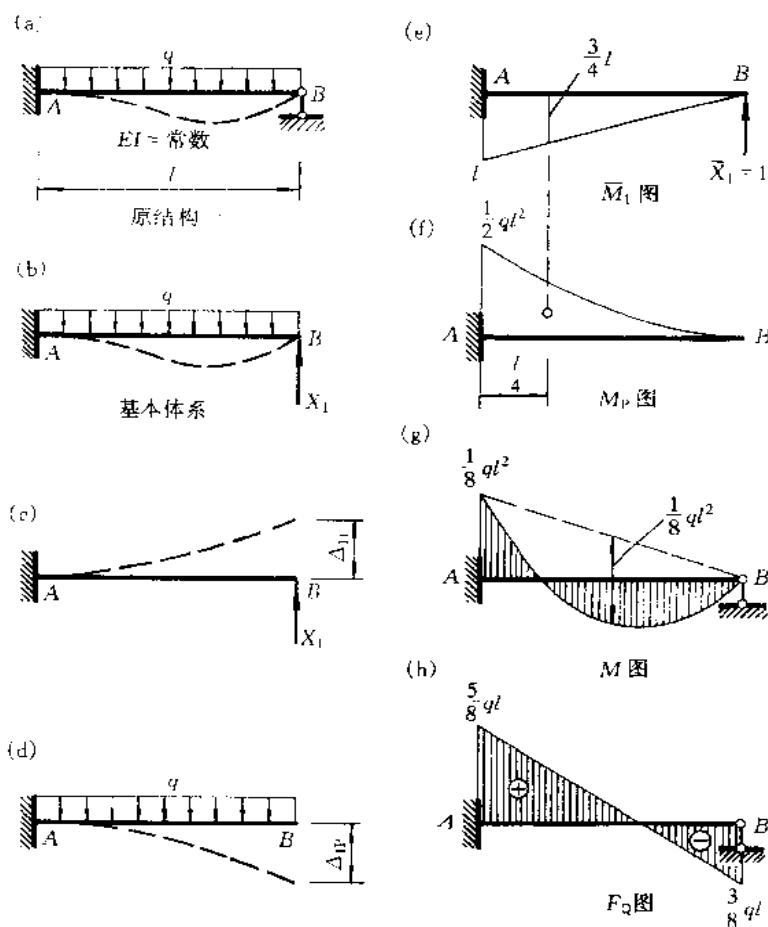


图 5-8

多余未知力 X_1 求得后, 就与计算悬臂梁一样, 完全可用静力平衡条件来确定其反力和内力。

例如 A 端的弯矩为

$$M_{AB} = X_1 l - ql \times \frac{l}{2} = \frac{3}{8} ql^2 - \frac{1}{2} ql^2 = -\frac{1}{8} ql^2$$

最后弯矩图和剪力图如图 5-8g、h 所示。

以上所述计算超静定结构的方法称为力法。它的基本特点就是以多余未知力作为基本未知量, 并根据基本体系上相应的位移条件将多余未知力首先求出, 以后计算即与静定结构无异。力法可用来分析各种类型的超静定结构。

§ 5-3 超静定次数的确定

由上节所述基本概念不难理解, 在一般情况下用力法计算超静定结构时, 首先应确定多余约

束的数目,亦即多余未知力的数目。这个数目表示:除静力平衡方程之外,尚需补充多少个反映位移条件的方程以求解多余未知力,从而才能确定所给结构的内力。通常将多余约束或多余未知力的数目称为结构的超静定次数。

确定结构超静定次数的方法是,去掉结构的多余约束,使原结构变成一个静定的结构,则所去掉约束的数目即为结构的超静定次数。下面结合具体例子加以说明。

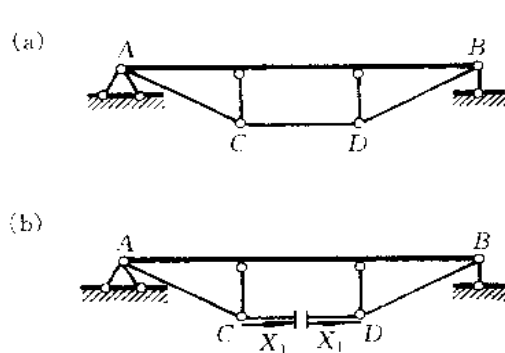


图 5-9

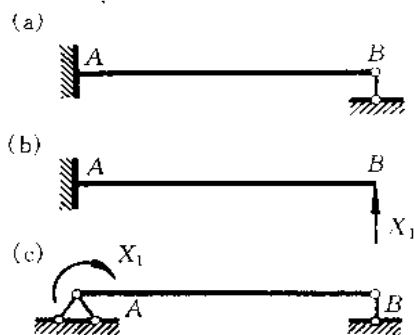


图 5-10

图 5-9a 所示结构,如果将链杆 CD 切断(图 5-9b),原结构就成为一个静定结构,因为一根链杆相当于一个约束,所以这个结构具有一个多余约束,是一次超静定结构。

去掉多余约束使超静定结构成为静定结构,可以有多种不同的方式。例如如图 5-10a 所示单跨梁,可以把 B 支座链杆去掉而使结构成为静定的悬臂梁(图 5-10b),所以它是具有一个多余约束的超静定结构。如果在原结构的固定支座 A 处,将阻止转动的约束去掉,使之成为固定铰支座,则成为图 5-10c 所示的简支梁。因固定支座相当于三个约束,改成固定铰支座就相当于去掉一个约束,这时与所去约束相对应的多余未知力则是固定端截面的弯矩。对于同一个超静定结构,由于去掉多余约束的方式不同,因而所得基本结构也不同,但是所去多余约束的数目,应该是一样的。例如图 5-10a 所示结构,虽然可取成不同的基本结构,但都只有一个多余约束,是一次超静定结构。

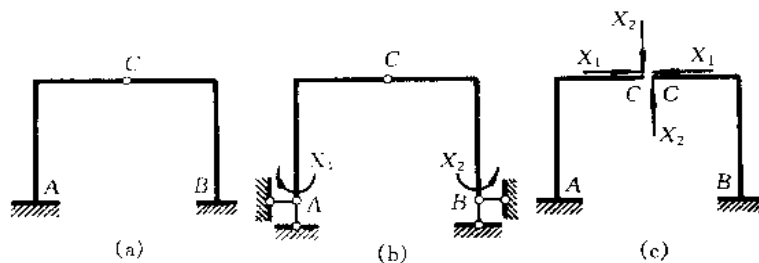


图 5-11

图 5-11a 所示刚架,可将 A, B 两固定支座改成固定铰支座,则得图 5-11b 所示的静定结构,所以是两次超静定的。也可去掉中间铰 C,而得图 5-11c 所示静定结构。所以去掉一个联结两刚片的铰,相当于去掉两个约束,即阻止铰接处两侧截面发生相对水平位移和相对竖向位移的约束。

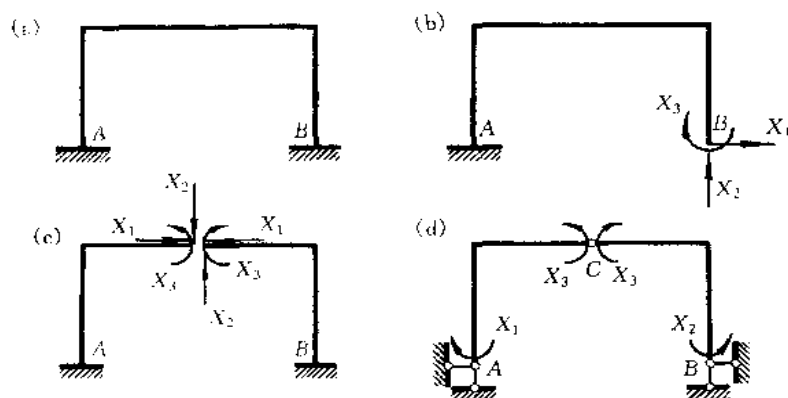


图 5-12

图 5-12a 所示刚架,若将 B 端固定支座撤去,则得图 5-12b 所示悬臂刚架,所以是三次超静定的。如果将原结构从横梁中间切断,则得图 5-12c 所示两个悬臂刚架,所以将一梁式杆切断,就相当于去掉三个约束,即阻止切口两侧截面发生相对水平位移和相对竖向位移以及相对转角的约束。我们还可将原结构横梁的中点及两支座处改成铰接,得图 5-12d 所示三铰刚架。所以凡将受弯杆件某处改成铰接,就相当于去掉一个约束,即阻止该处两侧截面发生相对转角的约束。

根据上述例子可知,在结构上去掉多余约束的方法,通常有如下几种:

1. 切断一根链杆,或者撤去一个支座链杆,相当于去掉一个约束。
2. 将一固定支座改成固定铰支座,或者将受弯杆件某处改成铰接,相当于去掉一个约束。
3. 去掉一个联结两刚片的铰,或者撤去一个固定铰支座,相当于去掉两个约束。
4. 将一梁式杆切断,或者撤去一个固定支座,相当于去掉三个约束。

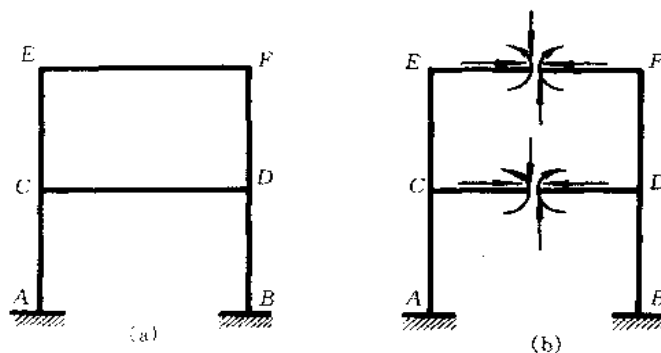


图 5-13

应用上述去掉约束的基本方式,可以确定任何结构的超静定次数。例如图 5-13a 所示结构,将它从中间切开,就成为图 5-13b 所示的静定结构,由于切断了原结构的两根梁式杆,所以相当于去掉六个约束,该结构是六次超静定的。值得指出,在图 5-13a 所示的刚架中,由 CD 、 DF 、 FE 、 EC 四根杆件刚性联结起来的封闭框格 $CDFE$,必须将它从某一截面处切开,才能确定这一部分结构的内力。绝不能认为将图 5-13a 所示结构撤去一个固定支座以后就成为静定的

了,因为这样去掉的约束只有三个,而这时 $CDFE$ 部分的内力仍无法由静力平衡条件确定。

由于去掉多余约束的方案不同,同一结构的基本结构就会有不同的形式,但应注意,得到的基本结构必须是几何不变的。为了保证基本结构的几何不变性,有时某些约束是绝对不能去掉的。例如图 5-14 所示的连续梁,其水平支座链杆就绝对不能去掉,否则将成为几何可变体系。又如图 5-15 所示两铰拱,其任一竖向支座链杆也绝对不能去掉,否则将成为瞬变体系。



图 5-14

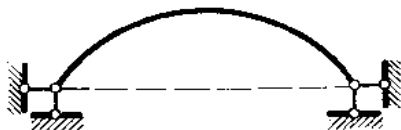


图 5-15

§ 5-4 力法的典型方程

如前所述,用力法计算超静定结构是以多余未知力作为基本未知量,并根据相应的位移条件来求解多余未知力;待多余未知力求出后,即可按静力平衡条件求其反力和内力。因此,用力法解算一般超静定结构的关键即在于根据位移条件建立力法方程以求解多余未知力。下面拟通过一个三次超静定的刚架来说明如何建立力法方程。

图 5-16a 所示刚架为三次超静定结构,分析时必须去掉它的三个多余约束。设去掉固定支座 B ,并以相应的多余未知力 X_1 、 X_2 和 X_3 代替所去约束的作用,得到图 5-16b 所示的基本体系。在原结构中,由于 B 端为固定端,所以没有水平位移、竖向位移和角位移。因此,承受荷载 F_{P1} 、 F_{P2} 和三个多余未知力 X_1 、 X_2 、 X_3 作用的基本体系上,也必须保证同样的位移条件,即 B 点沿 X_1 方向的位移(水平位移) Δ_1 、沿 X_2 方向的位移(竖向位移) Δ_2 和沿 X_3 方向的位移(角位移) Δ_3 都应等于零,即

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0$$

令 δ_{11} 、 δ_{21} 和 δ_{31} 分别表示当 $\bar{X}_1 = 1$ 单独作用时,基本结构上 B 点沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移(图 5-16c); δ_{12} 、 δ_{22} 、 δ_{32} 分别表示当 $\bar{X}_2 = 1$ 单独作用时,基本结构上 B 点沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移(图 5-16d); δ_{13} 、 δ_{23} 、 δ_{33} 分别表示当 $\bar{X}_3 = 1$ 单独作用时,基本结构上 B 点沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移(图 5-16e); Δ_{1P} 、 Δ_{2P} 和 Δ_{3P} 分别表示当荷载(F_{P1} 、 F_{P2})单独作用时,基本结构上, B 点沿 X_1 、 X_2 和 X_3 方向的位移(图 5-16f)。根据叠加原理,则位移条件可写成:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= 0, & \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \Delta_2 &= 0, & \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \Delta_3 &= 0, & \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

这就是根据位移条件建立的求解多余未知力 X_1 、 X_2 和 X_3 的方程组。这组方程的物理意义为:在基本体系中,由于全部多余未知力和已知荷载的作用,在去掉多余约束处(现即为 B 点)的位移应与原结构中相应的位移相等。在上列方程中,主斜线(从左上方的 δ_{11} 至右下方的 δ_{33})上的系数 δ_{ii} 称为主系数,其余的系数 δ_{ik} 称为副系数, Δ_{iP} (如 Δ_{1P} 、 Δ_{2P} 和 Δ_{3P})则称为自由项。所有系

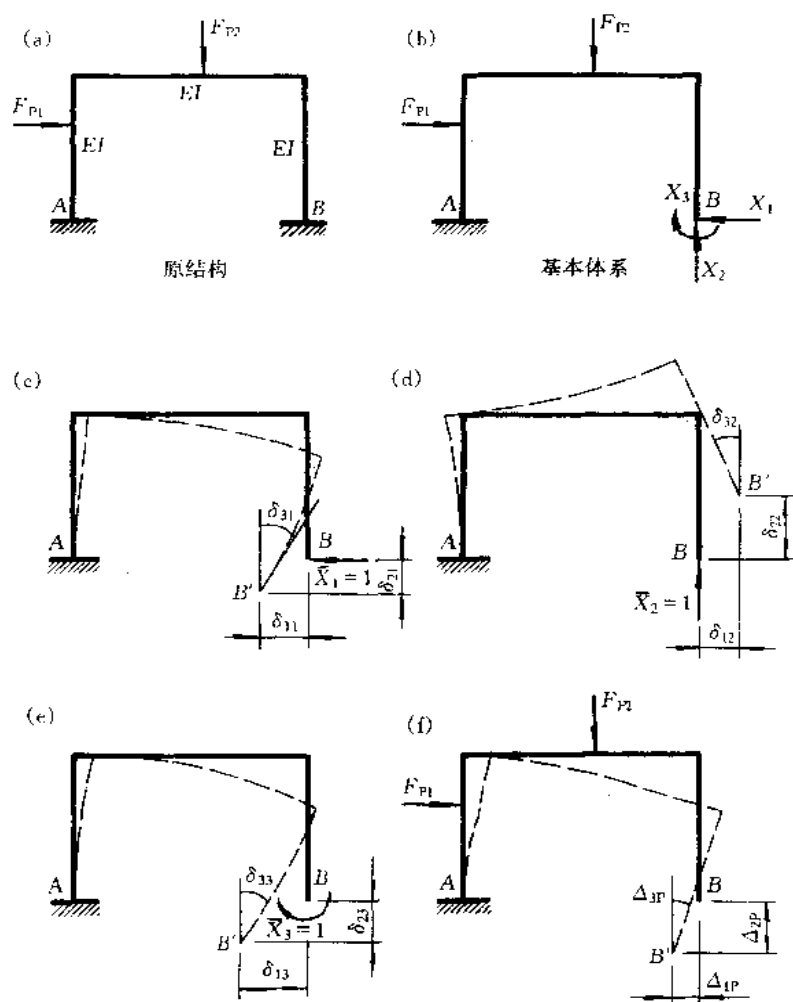


图 5-16

数和自由项,都是基本结构中在去掉多余约束处沿某一多余未知力方向的位移,并规定与所设多余未知力方向一致的为止。所以,主系数总是正的,且不会等于零,而副系数则可能为正、为负或为零。根据位移互等定理可以得知,副系数有互等关系,即

$$\delta_{jk} = \delta_{ki}$$

方程(5-2)通常称为力法的典型方程。其中各系数和自由项都是基本结构的位移,因而可根据第四章求位移的方法求得。

系数和自由项求得后,即可解算典型方程以求得各多余未知力,然后再按照分析静定结构的方法求原结构的内力。

对于 \$n\$ 次的超静定结构来说,共有 \$n\$ 个多余未知力,而每一个多余未知力对应着一个多余约束,也就对应着一个已知的位移条件,故可按 \$n\$ 个已知的位移条件建立 \$n\$ 个方程。当已知多余未知力作用处的位移为零时,则力法典型方程可写为

[illegible]

§ 5-5 用力法计算超静定刚架

图 5-17a 为一超静定刚架,如果在 A 支座处将固定支座改为固定铰支座;将 B 支座处的竖向支座链杆去掉,并以相应的多余未知力 X_1 、 X_2 代替其作用,则得到图 5-17b 所示的基本体系。该结构是两次超静定的。根据原结构中 CA 杆的 A 端不能转动以及原结构 B 点不可能发生竖向位移,得出应满足的位移条件,即在基本体系中 A 点沿 X_1 方向, B 点沿 X_2 方向的位移应等于零,于是可写出力法典型方程如下:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

其中各系数和自由项的物理意义示于图 5-17c、d、e 中。

为了用图乘法求得各系数和自由项,作出单位弯矩图 \overline{M}_1 、 \overline{M}_2 和荷载弯矩图 M 。如图 5-18a、b、c 所示。

由图乘法算得

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot l \times 1 \times \frac{2}{3} \times 1 \right) = \frac{l}{3EI_1}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot l^2 \times \frac{2}{3} \cdot l \right) + \frac{1}{2EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot l^2 \times \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{l^3}{2EI_1}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot l^2 \times \frac{1}{3} \right) = -\frac{l^2}{6EI_1}$$

$$\Delta_{IP} = \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot l \times 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{F_P l}{2} \right) = \frac{F_P l^2}{12EI_1}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot l \times \frac{F_P l}{2} \times \frac{2}{3} \cdot l \right) - \frac{1}{2EI_1} \left(\frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{F_P l}{2} \times \frac{5}{6} \cdot l \right) = -\frac{7F_P l^3}{32EI_1}$$

代入典型方程并整理得

$$\frac{1}{3}X_1 - \frac{l}{6}X_2 + \frac{F_P l}{12} = 0$$

$$-\frac{1}{6}X_1 + \frac{l}{2}X_2 - \frac{7F_F l}{32} = 0$$

联立解得

$$X_1 = -\frac{3}{80}F_P l, \quad X_2 = \frac{17}{40}F_P$$

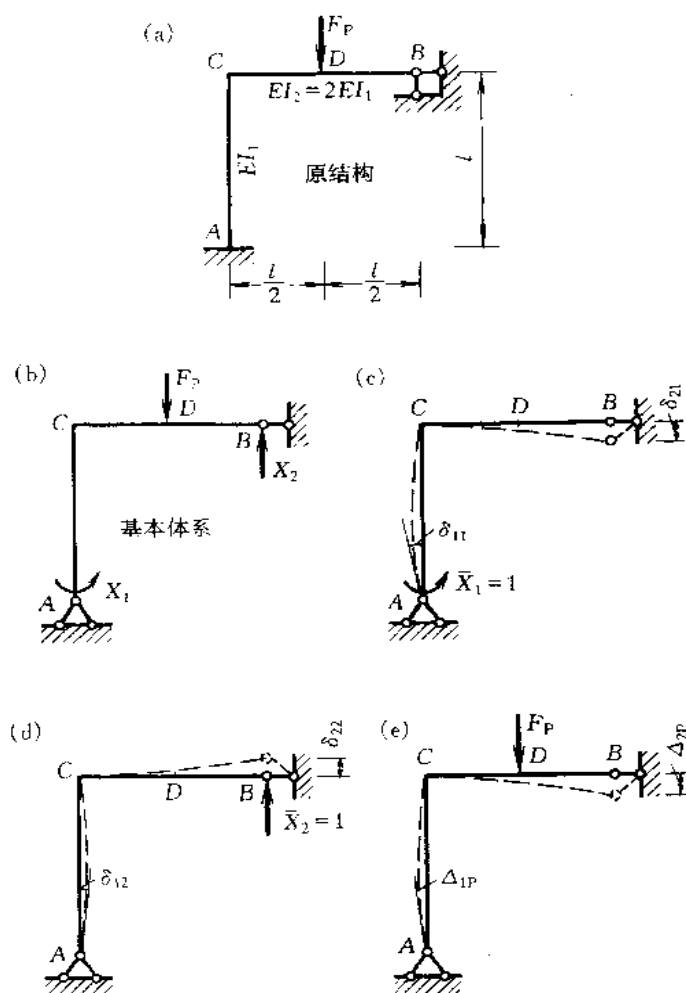


图 5-17

多余未知力求得后,最后弯矩图可按叠加原理由下式计算:

$$M = X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + M_P$$

例如,AC 杆 C 端的弯矩为(设使 C 端外侧受拉的弯矩为正)

$$M_{CA} = \left(-\frac{3}{80} F_P l \right) \times 0 + \left(\frac{17}{40} F_P \right) (-1) + \frac{F_P l}{2} = \frac{6}{80} F_P l$$

根据基本结构上荷载和各多余未知力作用的情况,应将刚架的弯矩图分为三段,分别计算出各段控制截面的弯矩值后,即可作出最后弯矩图如图 5-18d 所示。

至于剪力图和轴力图,在多余未知力求得后,便不难按绘制静定结构内力图的方法作出。剪力图和轴力图示于图 5-18e、f 中。

由这个例子可以看出,在荷载作用下,如果结构中各根杆件的弹性模量 E 相同(即为同一种材料),则结构的内力只与各杆件惯性矩的比值有关。当各杆所用材料不同时,弹性模量 E 就不能从计算式中消去,此时结构的内力就与各杆的抗弯刚度 EI 的比值有关。这是超静定结构的

一个重要特性。由于这一特性,在计算荷载作用下结构的内力时,为了简便起见,各杆件的刚度可采用其比值。

根据以上所述,可将力法计算超静定结构的步骤归纳如下:

1. 确定基本未知量数目。
2. 去掉结构的多余约束得出一个静定的基本结构,并以多余未知力代替相应多余约束的作用。
3. 根据基本体系在多余未知力和原有荷载共同作用下,多余未知力作用点沿多余未知力方向的位移应与原结构中相应多余约束处的位移相同的条件,建立力法典型方程。为此,需要:
 - (1) 作出基本结构的单位内力图 and 荷载内力图(或列出内力的表达式)。
 - (2) 按照求位移的方法计算系数和自由项。
4. 解典型方程,求出各多余未知力。
5. 多余未知力确定后,即可按分析静定结构的方法绘出原结构的内力图。这种内力图也称最后内力图。

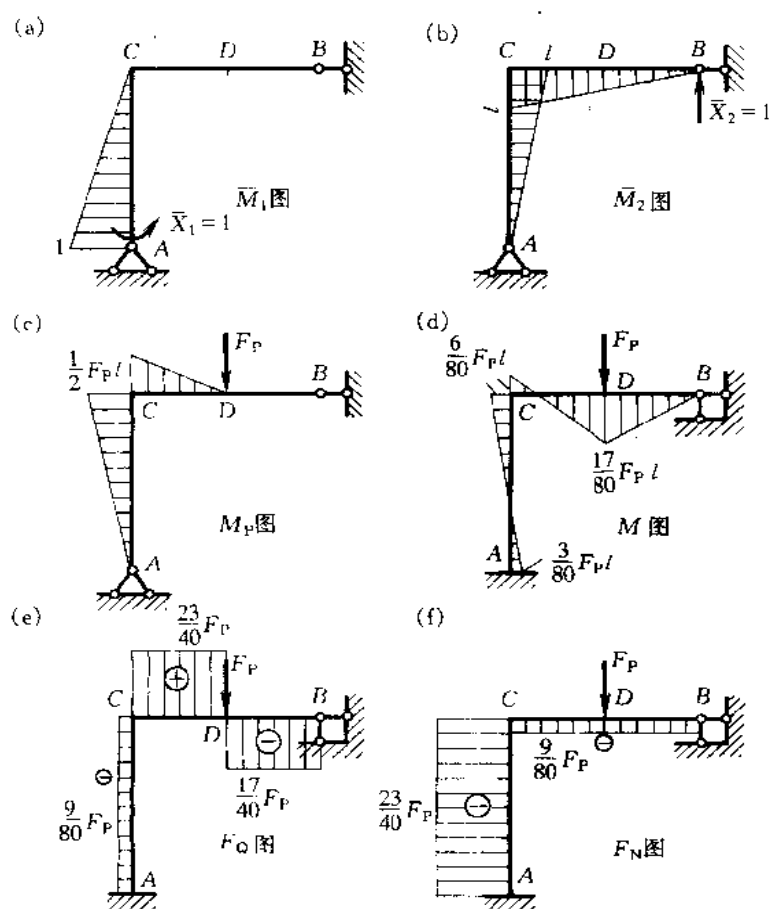


图 5-18

6. 校核。

对最后内力图进行校核可分两步。第一步是静力平衡校核,就是取结点或结构中某一部分为隔离体,检查它们是否平衡。但这种校核不能发现建立和解算典型方程时的错误。因为正确的单位弯矩图(\overline{M}_i 图)和荷载弯矩图(M_P 图)是满足平衡条件的,将 \overline{M}_i 图与多余未知力相乘,然后与 M_P 图叠加,不论多余未知力正确与否,其结果仍然会满足平衡条件。

第二步是位移条件的校核。为此,首先讨论超静定结构的位移计算问题。如已知图 5-17a 所示超静定结构的位移与图 5-17b 所示基本体系的位移相等。为了简便计算,超静定结构的位移计算常在其基本体系上进行。例如欲计算原结构(图 5-17a)CB 梁中点的竖向位移,便可转换为求图 5-17b 所示基本体系 CB 梁中点的位移。根据第四章讨论的计算位移的单位荷载法,将虚拟力作用于基本结构上即得计算位移的虚拟状态(图 5-19)。由于基本结构是静定的,所以虚拟状态中的弯矩图根据平衡条件即可绘出。图 5-17b 所示基本体系的弯矩图也就是原结构的弯矩图,已示于图 5-18d 中。将图 5-19 和图 5-18d 所示两弯矩图进行图乘,便得所求位移。故有

$$\begin{aligned}\Delta_{Dv} &= \frac{1}{2EI_1} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{80} F_P l - \frac{1}{3} \times \frac{17}{80} F_P l \right) + \\ &\quad \frac{1}{EI_1} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \cdot l \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{80} F_P l - \frac{1}{3} \times \frac{3}{80} F_P l \right) \\ &= \frac{31 F_P l^3}{3840 EI_1} = 0.00807 \frac{F_P l^3}{EI_1} (\downarrow)\end{aligned}$$

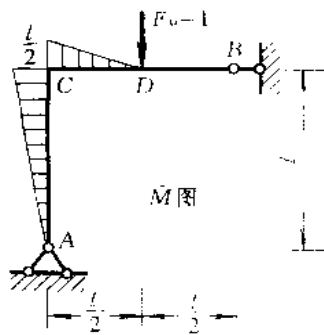


图 5-19

上述超静定结构的位移计算方法的优点在于虚拟状态是静定的,所以比较简便。在超静定结构中,当通过力法计算,其最后内力图已经绘出来了以后,可用这种方法来计算超静定结构的任一位移。例如如图 5-17a 所示刚架支座 A 的角位移也可以用这种方法计算。但是支座 A 是固定支座,其角位移应等于零。这时,我们可以利用这一已知的位移条件,校核所求得的最内力图。图 5-17a 所示刚架中支座 A 的角位移等于图 5-17b 所示基本体系中截面 A 的角位移。计算图 5-17b 所示基本体系中截面 A 的角位移时,将虚拟力 $M=1$ 作用于基本结构的截面 A,便得到计算该位移的虚拟状态。图 5-18a 即为所求的虚拟状态。根据图 5-18a 与图 5-18d 所示的弯矩图用图乘法计算 A 截面的角位移 φ_A ,如果图 5-18d 所示的最后弯矩图是正确的,则 $\varphi_A=0$ 。现在计算如下:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI_1} \times \frac{1}{2} \times 1 \cdot l \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{80} F_P l - \frac{2}{3} \times \frac{3}{80} F_P l \right) = 0$$

由此可知该位移条件得到满足。基本体系中 $\varphi_A=0$,就是用力法计算图 5-17a 所示刚架时,建立典型方程的第一个位移条件。除此以外,还用到了基本体系中 B 点的竖向位移等于零的条件。若第二个位移条件也能满足,则可证明最后弯矩图(图 5-18d)无误。

§5-6 对称性的利用

在工程中常有这样一类结构,它们不仅杆件轴线所构成的几何图形是对称的,而且杆件的刚

度及支承情况也是对称的,这类结构称对称结构。例如图 5-20a、b 所示的刚架就是两个对称结构。平分对称结构的中线称为对称轴。现根据对称结构的特点来研究它们的简化计算方法。

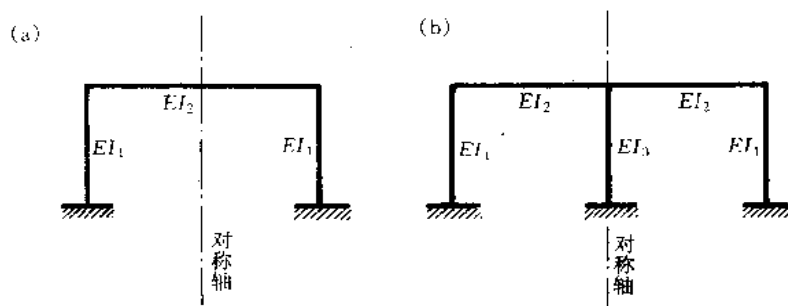


图 5-20

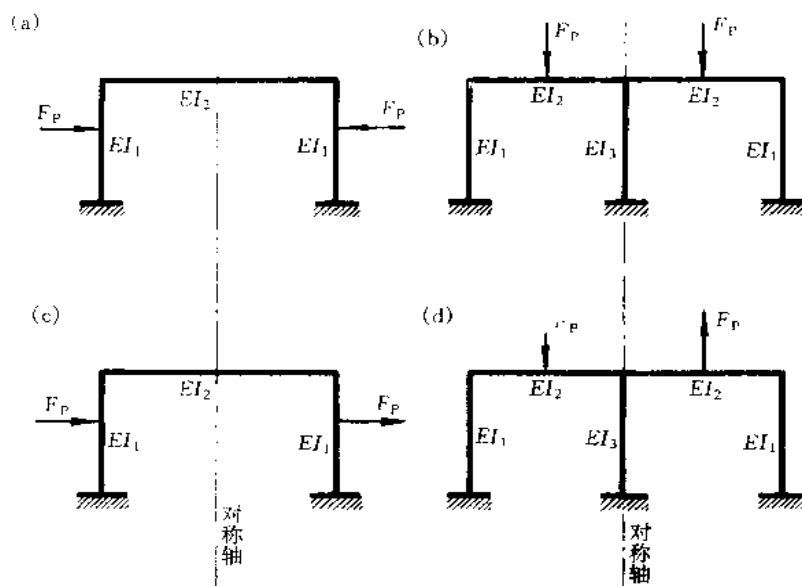


图 5-21

作用在对称结构上的荷载,有两种特殊的情况。例如图 5-21 所示对称刚架,若将左部分绕对称轴转 180° ,则与右部分结构重合。如果左右两部分上所受荷载的作用线重合,且其大小和方向都相同(图 5-21a、b),则这种荷载称为正对称的;如果左右两部分上所受的荷载的作用线互相重合且其大小相同,但方向恰好相反(图 5-21c、d),则这种荷载称为反对称的。

下面讨论图 5-22a 所示对称结构受正对称荷载作用时的受力和变形特点,并由此得出其简化计算方法。

现将刚架从 CD 的中点截面 K 处切开,并代以相应的多余未知力 X_1 、 X_2 、 X_3 ,得图 5-22b 所示对称的基本体系。因为原结构中 CD 杆是连续的,所以在 K 处左右两边的截面,没有相对转动,也没有上下和左右的相对移动。据此位移条件,可写出力法典型方程如下:

$$\begin{aligned}\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0\end{aligned}$$

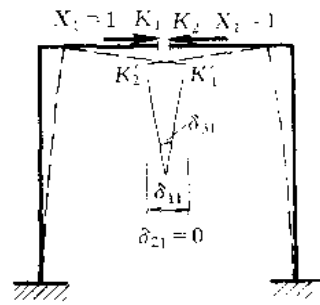
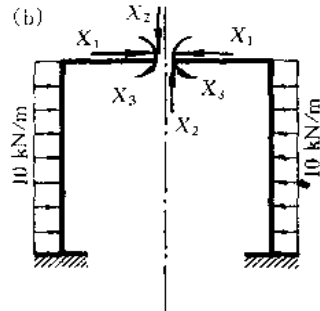
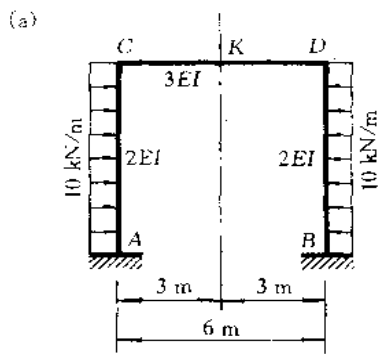


图 5-22

图 5-23

以上方程组的第一式表示基本体系中切口两边截面沿水平方向的相对位移应为零;第二式表示切口两边截面沿竖直方向的相对位移应为零;第三式表示切口两边截面的相对转角应为零。典型方程的系数和自由项都代表基本结构中切口两边截面的相对位移,例如在 $\bar{X}_1 = 1$ 单独作用下,基本结构的变形如图 5-23 所示, δ_{11} 为切口两边截面的相对水平位移, δ_{31} 为切口两边截面的相对转角, δ_{21} (切口两边截面的相对竖向位移) 为零,图中没有画出。

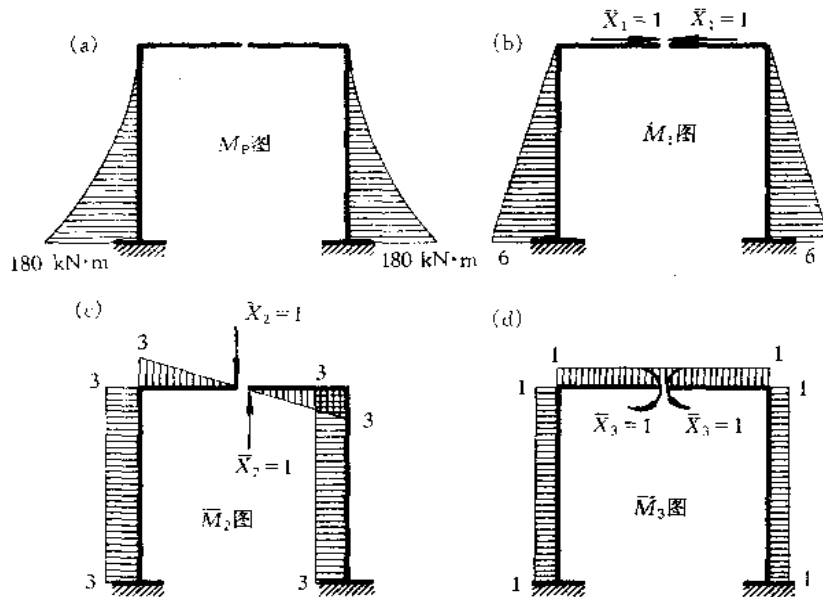


图 5-24

为了计算系数和自由项,我们分别绘出单位弯矩图和荷载弯矩图如图 5-24 所示。因为 \bar{X}_1

和 \bar{X}_3 是正对称的力,所以 \bar{M}_1 和 \bar{M}_3 图都是正对称图形。而 \bar{X}_2 是反对称的力,所以 \bar{M}_2 图是反对称图形。又因杆件的刚度是对称的,所以按这些图形来计算系数时,其结果必然是

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

$$\delta_{13} = \delta_{32} = 0$$

又由于 M_P 图是正对称图形,所以 $\Delta_{2P} = 0$ 。这样,典型方程为

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0$$

$$\delta_{22} X_2 = 0$$

由方程组的第三式可得 $X_2 = 0$ 。由第一、二两式则可解出 X_1 和 X_3 。

根据上述分析可知,对称的超静定结构,如果从结构的对称轴处去掉多余约束来选取对称的基本结构,则可使某些副系数为零,从而使力法的计算得到简化。如果荷载是正对称的,则在对称的基本体系上,反对称的多余未知力为零。这时,作用在对称的基本结构上的荷载和多余未知力都是正对称的,故结构的受力和变形状态都是正对称的,不会产生反对称的内力和位移。如果荷载是反对称的,则基本结构上的 M_P 图也是反对称的,将它与对称的 \bar{M}_1 、 \bar{M}_3 图(图5-24b、d)进行图乘时,求得的自由项 Δ_{1P} 、 Δ_{3P} 必等于零。由此可知,正对称的多余未知力 X_1 、 X_3 将等于零。于是,结构中的内力将成反对称分布,变形状态也必然是反对称的。据此,可得如下结论:对称结构在正对称荷载作用下,其内力和位移都是正对称的;在反对称荷载作用下,其内力和位移都是反对称的。

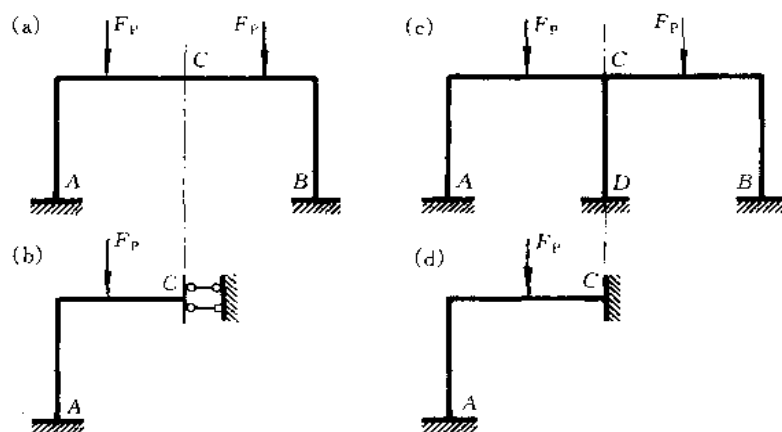


图 5-25

利用上述结论,可使对称结构的计算得到很大的简化。如在分析对称刚架时,可取半个刚架来进行计算。下面就图5-25a、c所示奇数跨和偶数跨两种对称刚架加以说明。

图5-25a所示对称刚架,在正对称荷载作用下,其变形和内力只能是正对称分布的,位于对称轴上的截面C,不能发生转动和水平移动,只能发生竖向移动;该截面上的内力只可能存在弯矩和轴力,不存在剪力。这种情况如同截面C受到了一种约束,可以用一个定向支座形象地表示这种约束,并把右半部分刚架弃去,则得到图5-25b所示的半刚架。定向支座约束了截面C的转动和水平移动,而允许产生竖向移动;定向支座能产生反力矩和水平反力,但无竖向反力,所

以它使截面 C 受到的约束,与原来的情况完全相同。因此,这时图 5-25b 所示刚架的受力和变形情况与图 5-25a 中左半刚架的情况完全相同。

图 5-25c 所示对称刚架,在正对称荷载作用下,只可能发生正对称的内力和变形,因此柱 CD 只有轴力和轴向变形,而不可能有弯曲和剪切变形。由于在刚架分析中,一般不考虑杆件轴向变形的影响,所以对称轴上的 C 点,不可能发生任何位移。分析时截面 C 处约束如同固定支座,故可得到图 5-25d 所示半刚架。而柱 CD 的轴力即等于图 5-25d 中支座 C 竖向反力的两倍。

图 5-26a 所示对称刚架在反对称荷载作用下,位于对称轴的 C 截面上,由前述已知只有剪力,不存在弯矩和轴力。同时,由于这时刚架的变形是反对称的,所以 C 截面可以左右移动和转动,但不会产生竖向位移。因此,截取半刚架时可在该处用一根竖向链杆的装置代替原有的约束作用(图 5-26b)。

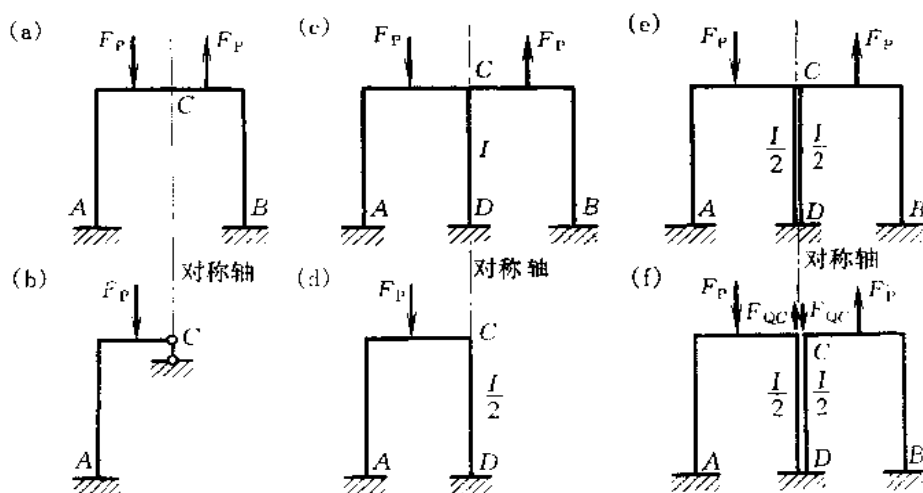


图 5-26

图 5-26c 所示为偶数跨对称刚架,在反对称荷载作用下,内力和变形都是反对称的,为了取出半刚架,设想将处于对称轴上的竖柱用两根惯性矩为 $\frac{I}{2}$ 的竖柱代替(图 5-26e)。将其沿对称轴切开,由于荷载是反对称的,故截面上只有剪力 F_{QC} (图 5-26f)。剪力 F_{QC} 仅仅分别在左右柱中产生拉力和压力。又因求原柱的内力时,应将两柱中的内力叠加,故剪力 F_{QC} 对原结构的内力和变形无影响。于是,可将其略去而取出如图 5-26d 中所示的半刚架。

计算出半刚架的内力后,另一半刚架的内力利用对称性即不难确定。若对称刚架上作用着任意荷载(图 5-27a),则可先将其分解为正对称和反对称两组(图 5-27b、c),然后利用上述方法分别取半刚架计算。最后将两个计算结果叠加,即得原结构的内力。

【例 5-1】 图 5-28a 所示结构, $EI = \text{常数}$,试作 M 图。

解:以过圆心的水平和竖向直线作为该结构的两根对称轴,利用对称性可取结构的四分之一来计算,如图 5-28b 所示。这是一次超静定结构,图 5-28c 所示为基本体系,力法典型方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

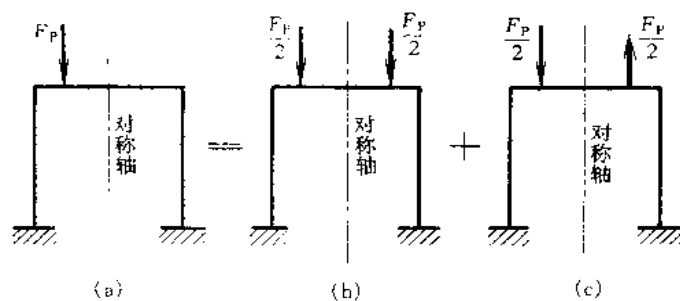


图 5-27

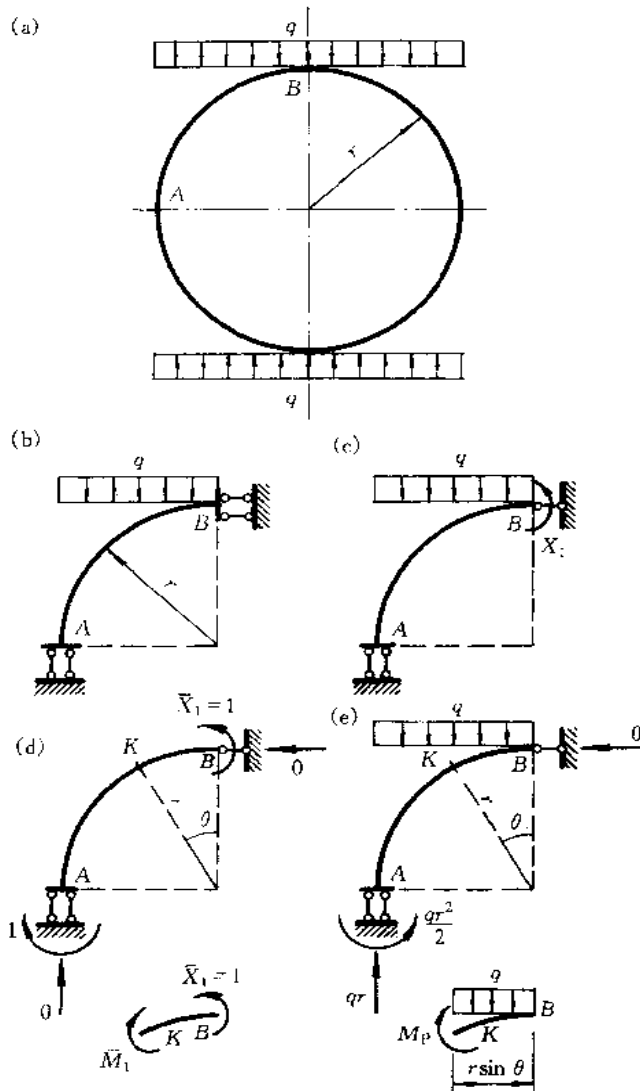


图 5-28

对于曲杆结构,在通常情况下,曲率的影响可忽略不计。在位移计算中,也常容许只考虑弯

曲变形一项的影响。由图 5-28d、e 可知

$$\bar{M}_1 = 1, \quad M_P = -\frac{qr^2 \sin^2 \theta}{2}$$

则由公式 $\Delta = \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EI}$ 算得 ($ds = r d\theta$):

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1^2}{EI} r d\theta = \frac{\pi r}{2EI}$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI} \times 1 \times \left(-\frac{qr^2 \sin^2 \theta}{2} \right) r d\theta = -\frac{qr^3}{2EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{q\pi r^3}{8EI}$$

所以

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{q\pi r^3}{8EI} \times \frac{2EI}{\pi r} = \frac{qr^2}{4}$$

按 $M = X_1 \bar{M}_1 + M_P = \frac{qr^2}{4} - \frac{qr^2 \sin^2 \theta}{2}$ 可作出结构的弯矩图, 如图 5-29 所示。

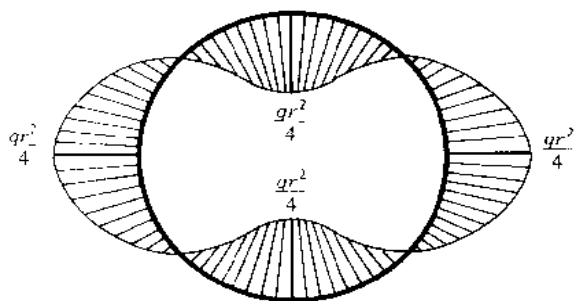


图 5-29

§ 5-7 用力法计算铰接排架

装配式单层工业厂房的主要承重结构是由屋架(或屋面大梁)、柱子和基础所组成的横向排架(图 5-30a)。计算横向排架就是对柱子进行内力分析。在一般情况下, 可认为联系两个柱顶的屋架(或屋面大梁)两端之间的距离不变, 而将它看作是一根抗拉(抗压)刚度无限大(即 $EA \rightarrow \infty$) 的链杆, 通常称为排架的横梁。因此, 图 5-30a 所示横向排架的计算简图如图 5-30b 所示, 称之为铰接排架。通常的砖木结构厂房、食堂等也可简化为铰接排架进行计算。

铰接排架是超静定结构, 可用力法进行计算。现通过下例加以说明。

图 5-31a 所示两跨不等高排架 ($E = \text{常数}$), 承受图示荷载的作用。注意到横梁为二力杆, 将一根横梁截断相当于去掉一个约束, 截断两根横梁后得到图 5-31b 所示的基本体系。根据基本结构在原有荷载和多余未知力共同作用下, 横梁切口处两侧截面相对水平位移应等于零的条件, 可写出力法典型方程为

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0, & \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \Delta_2 &= 0, & \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned}$$

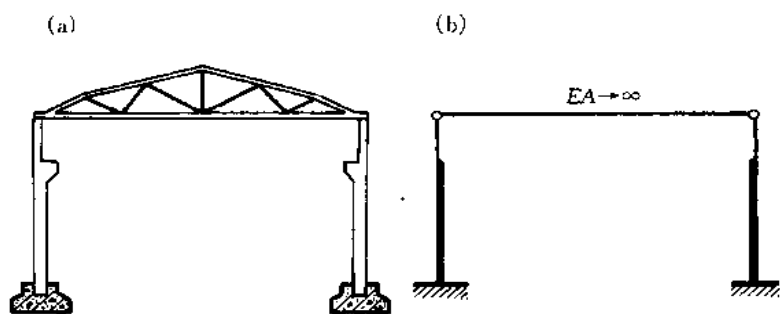


图 5-30

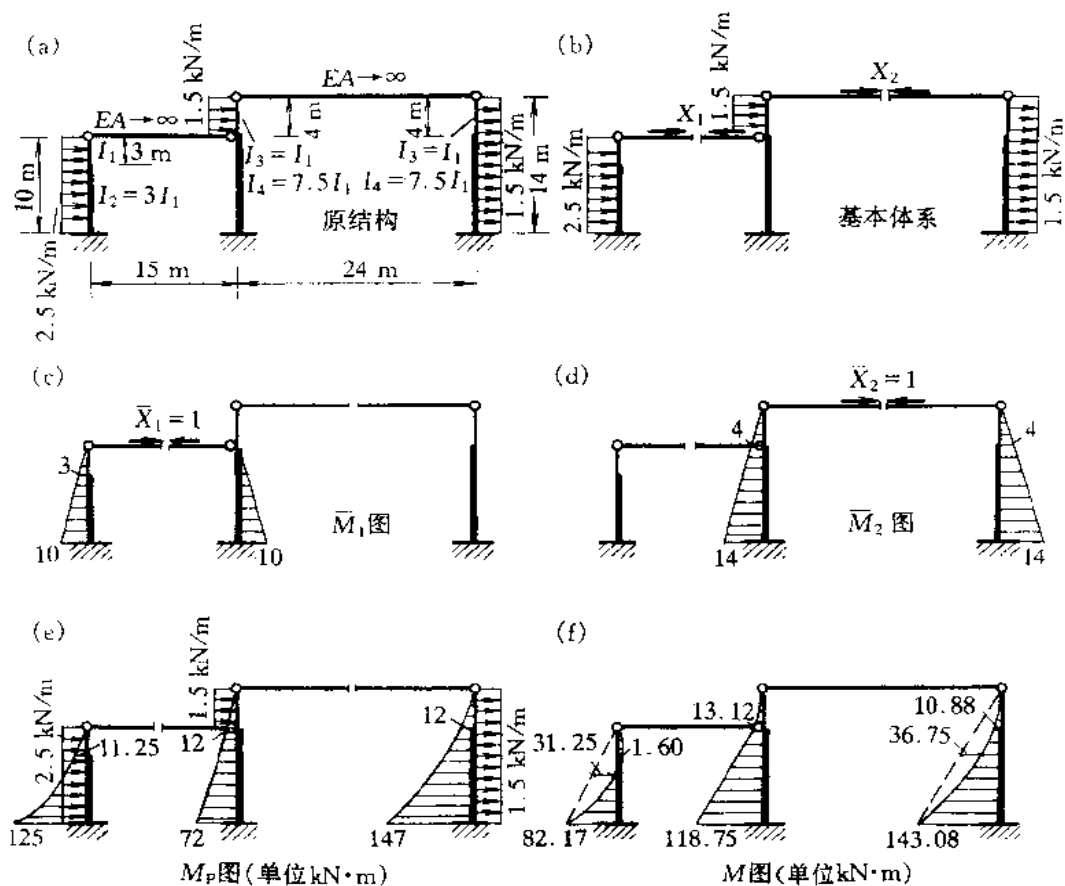


图 5-31

为了求得各系数和自由项,需分别作出单位弯矩图 \bar{M}_1 、 \bar{M}_2 和荷载弯矩图 M_P (图5-31c、d、e)。注意到横梁的 $EA \rightarrow \infty$,故在计算系数 δ_{11} 、 δ_{22} 时不要考虑横梁轴向变形的影响。应用图乘法求得各系数和自由项如下:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{2}{3} \times 3 \right) + \frac{1}{3EI_1} \left[\frac{1}{2} \times 3 \times 7 \times \left(\frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 10 \right) + \frac{1}{2} \times 10 \times 7 \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 10 \right) \right] + \frac{1}{7.5EI_1} \left(\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{2}{3} \times 10 \right) \\ &= \frac{1}{EI_1} \left(9 + \frac{56}{3} + \frac{805}{9} + \frac{1\,000}{3 \times 7.5} \right) = \frac{161.556}{EI_1}\end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{7.5EI_1} \left[\frac{1}{2} \times 10^2 \times \left(\frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 14 \right) \right] = -\frac{1\,600}{3 \times 7.5EI_1} = -\frac{71.111}{EI_1}$$

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \frac{2}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{2}{3} \times 4 \right) + \frac{2}{7.5EI_1} \left[\frac{1}{2} \times 4 \times 10 \times \left(\frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 14 \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \times 10 \times 14 \times \left(\frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 14 \right) \right] \\ &= \frac{2}{EI_1} \left(\frac{64}{3} + \frac{440}{22.5} + \frac{2\,240}{22.5} \right) = \frac{280.889}{EI_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= \frac{1}{EI_1} \times \frac{1}{3} \times 3 \times 11.25 \times 10^3 \times \frac{3}{4} \times 3 + \frac{1}{3EI_1} \left[\frac{1}{2} \times 11.25 \times 10^3 \times 7 \times \left(\frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 10 \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \times 125 \times 10^3 \times 7 \times \left(\frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 10 \right) - \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} \times 2.5 \times 10^3 \times 7^2 \times 7 \times \frac{1}{2} \times (3 + 10) \right] - \\ &\quad \frac{1}{7.5EI_1} \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 10^3 \times 10 \times \frac{1}{3} \times 10 + \frac{1}{2} \times 72 \times 10^3 \times 10 \times \frac{2}{3} \times 10 \right) \\ &= \frac{25.313 \times 10^3}{EI_1} + \frac{1}{EI_1} [70 + 1\,118.056 - 154.826] \times 10^3 - \frac{346.667 \times 10^3}{EI_1} = \frac{711.876 \times 10^3}{EI_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2P} &= \frac{1}{EI_1} \times \frac{1}{3} \times 4 \times 12 \times 10^3 \times \frac{3}{4} \times 4 + \frac{1}{7.5EI_1} \left[\frac{1}{2} \times 12 \times 10^3 \times 10 \times \left(\frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 14 \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \times 72 \times 10^3 \times 10 \times \left(\frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 14 \right) \right] - \frac{1}{EI_1} \times \frac{1}{3} \times 12 \times 10^3 \times 4 \times \frac{3}{4} \times 4 - \\ &\quad \frac{1}{7.5EI_1} \left[\frac{1}{2} \times 12 \times 10^3 \times 10 \times \left(\frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 14 \right) + \frac{1}{2} \times 147 \times 10^3 \times 10 \times \left(\frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 14 \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} \times 1.5 \times 10^3 \times 10^2 \times 10 \times \frac{1}{2} \times (4 + 14) \right] \\ &= \frac{48 \times 10^3}{EI_1} + \frac{1}{7.5EI_1} (440 + 3\,840) \times 10^3 - \frac{48 \times 10^3}{EI_1} - \frac{1}{7.5EI_1} (440 + 7\,840 - 1\,125) \times 10^3 \\ &= -\frac{383.333 \times 10^3}{EI_1}\end{aligned}$$

将各系数和自由项代入典型方程,可得

$$\begin{aligned}161.556X_1 - 71.111X_2 + 711.876 \times 10^3 &= 0 \\ -71.111X_1 + 280.889X_2 - 383.333 \times 10^3 &= 0\end{aligned}$$

解得

$$X_1 = -4.283 \text{ kN(压力)}, \quad X_2 = 0.280 \text{ kN(拉力)}$$

按式 $M = X_1 \overline{M}_1 + X_2 \overline{M}_2 + M_P$ 即可得出原结构的弯矩图,如图 5-31f 所示。

§5-8 等截面单跨超静定梁的杆端内力

在以后位移法和力矩分配法等计算过程中,需要用到单跨超静定梁在荷载作用下以及杆端发生位移时的杆端内力。这些内力简称为杆端力,可用力法求得。

为了表达明确和计算方便,在位移法和力矩分配法中,对于杆端弯矩恒在字母 M 的右下角用两个下标表明该弯矩所属的杆件,其中前一个下标表示该弯矩所属的杆端。例如图 5-32 所示的 AB 梁,其 A 端的弯矩以 M_{AB} 表示,而 B 端的弯矩则以 M_{BA} 表示。它们的正向则采用如下的规定:对杆端而言,弯矩以顺时针方向为正;对结点或支座而言,则以逆时针方向为正。现仍以图 5-32 所示的梁来看:在图示荷载作用下,杆端弯矩的实际方向如图所示,其 A 端弯矩 M_{AB} ,对杆端为逆时针方向,对支座则为顺时针方向,与正向规定恰好相反,故为负值,而 B 端弯矩 M_{BA} 的实际方向则与正向规定相符,故为正值,显然,这里所采用的弯矩正负符号的规定与材料力学中所用的不同,应加注意。至于杆端剪力除采用两个下标表明所属的杆件及其杆端外,其正负符号的规定则与以往完全相同。

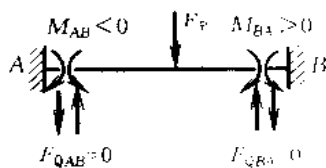


图 5-32

对单跨超静定梁仅由于荷载作用所产生的杆端弯矩,通常称为固端弯矩,并以 M_{AB}^F 和 M_{BA}^F 表示,相应的杆端剪力称为固端剪力,以 F_{QAB}^F 和 F_{QBA}^F 表示。

在以后的两章中,我们将会遇到图 5-33 所示的三种类型的等截面单跨超静定梁。下面着重对两端固定梁的杆端内力计算进行讨论。

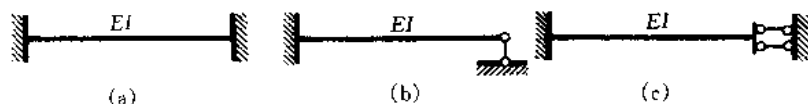


图 5-33

图 5-34a 所示等截面单跨梁,如果去掉固定支座 B ,就得到图 5-34b 所示的悬臂梁,所以两端固定的单跨梁是一个三次超静定结构。现以图 5-34b 所示的悬臂梁为基本体系,以多余未知力 X_1 、 X_2 和 X_3 代替所去约束的作用。由于对受弯直杆来说,轴向变形相对于弯曲变形是次要的,故通常不予考虑,即认为受弯直杆变形后两端之间的距离保持不变(称为受弯直杆假定)。因此, X_3 可略去不计,而只就沿 X_1 和 X_2 方向的位移条件来建立求解多余未知力 X_1 和 X_2 的方程。

原结构中, B 点处不可能发生转角和竖向位移,按此位移条件可写出力法典型方程为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

作出两个单位弯矩图 \overline{M}_1 、 \overline{M}_2 (图 5-34c、d) 和荷载弯矩图 M_P (图 5-34e),应用图乘法,可算得

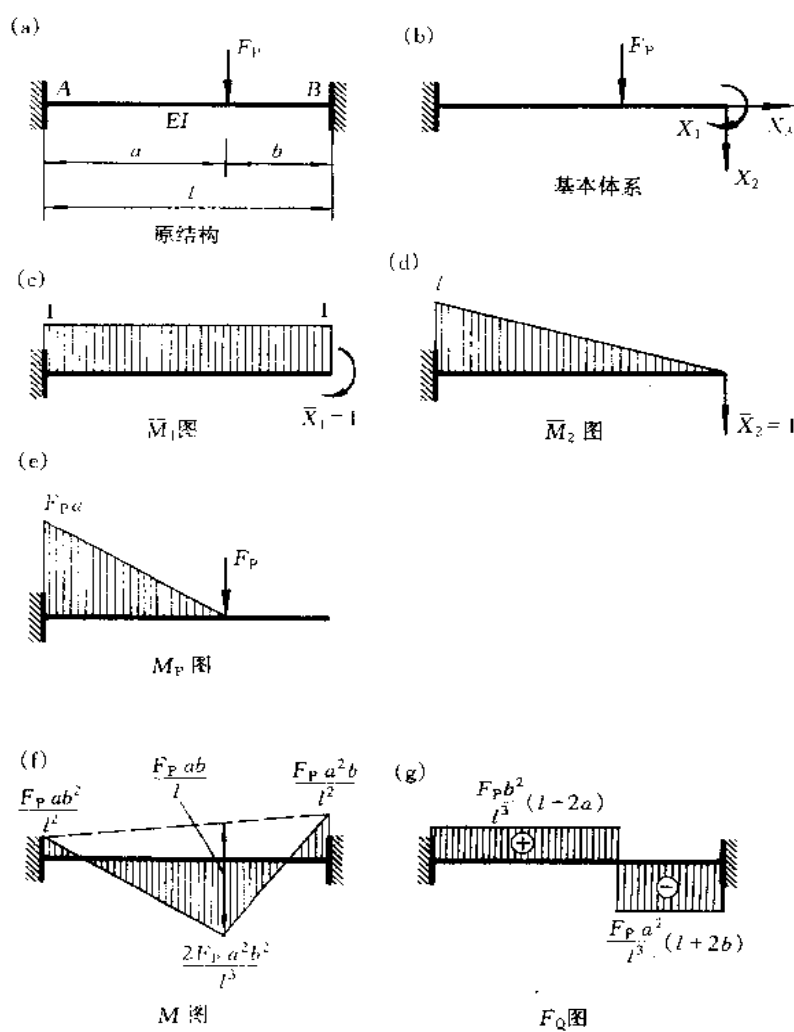


图 5-34

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \times 1 \cdot l \times 1 = \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \times \frac{2l}{3} = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \times 1 = \frac{l^2}{2EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \times \frac{F_P a^2}{2} \times 1 = \frac{F_P a^2}{2EI}$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EI} \times \frac{F_P a^2}{2} \left(b + \frac{2}{3} a \right) = \frac{F_P a^2}{6EI} (3b + 2a)$$

将以上系数和自由项代入方程,并消去 $\frac{1}{EI}$,得

$$lX_1 + \frac{l^2}{2}X_2 + \frac{F_P a^2}{2} = 0$$

$$\frac{l^2}{2}X_1 + \frac{l^3}{3}X_2 + \frac{F_P a^2}{6}(3b+2a) = 0$$

解联立方程组,得

$$X_1 = \frac{F_P a^3 b}{l^2}, \quad X_2 = -\frac{F_P a^2(l+2b)}{l^3}$$

因此,AB 梁 B 端的弯矩和剪力为

$$M_{BA} = \frac{F_P a^2 b}{l^2}, \quad F_{QBA} = -\frac{F_P a^2(l+2b)}{l^3}$$

由静力平衡条件可求得 A 端的弯矩和剪力为

$$M_{AB} = -\frac{F_P ab^2}{l^2}, \quad F_{QAB} = \frac{F_P b^2(l+2a)}{l^3}$$

最后弯矩图和剪力图如图 5-34f、g 所示。

根据上面的结果,我们从受力和变形两个方面,将单跨超静定梁(图 5-35a)与相应的简支梁(图 5-35b)作一个简单的比较。从受力方面看,在简支梁中,各截面都承受正弯矩(在这里,为了比较清晰,仍以使梁下缘纤维受拉的弯矩为正),使梁下缘纤维受拉。在超静定梁中,由于多余约束的存在,内力发生了变化,在弯矩图中出现了弯矩为零的 C、D 两点,CD 范围内梁承受正弯矩,使梁的下缘纤维受拉;而 CD 范围外,梁承受负弯矩,使梁的上缘纤维受拉。整根梁的内力分布较相应的简支梁均匀,且弯矩的绝对值也较相应的简支梁为小。从变形方面看,参考两个弯矩图,可画出两根梁变形后的曲线大致如图中虚线所示。在简支梁中,因在整根梁的范围内都是下缘受拉,故变形曲线向下凸;而在超静定梁中,两弯矩零点之间即 CD 范围内,因是下缘受拉,

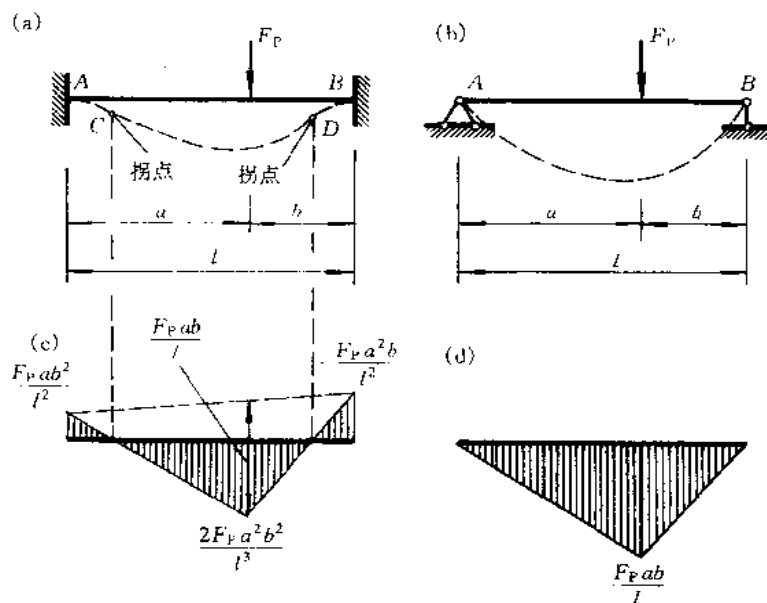


图 5-35

故变形曲线向下凸,在 CD 范围外,则是向上凸。梁轴线上与弯矩零点相对应的点称为反弯点,变形曲线中与该点相对应的点称为拐点。

图 5-36a 所示为一等截面两端固定梁,固定端 A 顺时针转动一角度 φ_A 。现计算其支座反力并作弯矩图和剪力图。

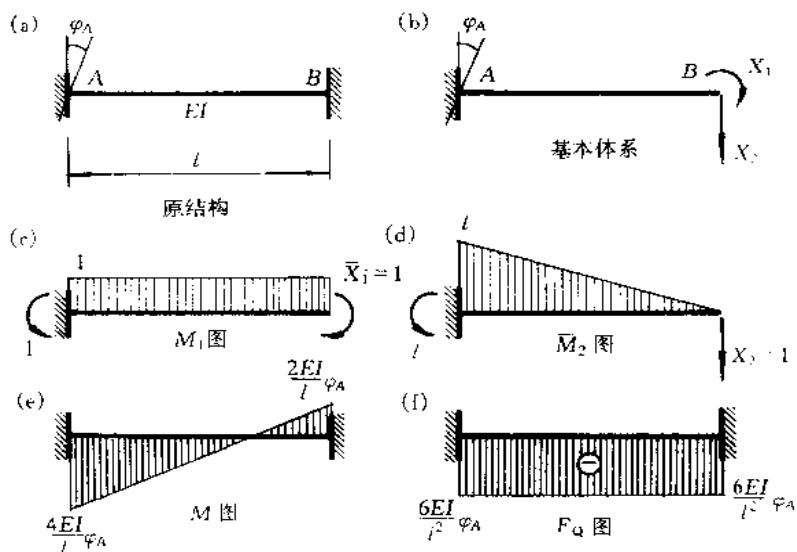


图 5-36

同前面一样,取图 5-36b 所示的基本体系,可写出力法典型方程为

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1c} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2c} = 0$$

为了求得各系数和自由项,作出两个单位弯矩图 \bar{M}_1 图、 \bar{M}_2 图(图 5-36c、d)。 Δ_{1c} 、 Δ_{2c} 分别为基本结构支座 A 转动 φ_A 后, B 点沿 X_1 方向的转角和沿 X_2 方向的竖向位移。按式(4-8)计算,得

$$\Delta_{1c} = -\sum \bar{R}_C = -(-1 \times \varphi_A) = \varphi_A$$

$$\Delta_{2c} = -\sum \bar{R}_C = -(-l \times \varphi_A) = l\varphi_A$$

各系数与前同。将所有系数和自由项代入典型方程,可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{EI} X_1 + \frac{l^2}{2EI} X_2 + \varphi_A &= 0 \\ \frac{l^2}{2EI} X_1 + \frac{l^3}{3EI} X_2 + l\varphi_A &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解得

$$X_1 = \frac{2EI}{l} \varphi_A, \quad X_2 = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_A$$

即

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l} \varphi_A, \quad F_{QBA} = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_A$$

由静力平衡条件得

$$F_{QAB} = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_A, \quad M_{AB} = \frac{4EI}{l} \varphi_A$$

最后弯矩图和剪力图如图 5-36e、f 所示。

图 5-37a 所示等截面两端固定梁, 在垂直于梁轴方向两支座发生相对线位移 Δ_{AB} 。这种情况可看作支座 A 向上发生竖向位移 Δ_{AB} 或支座 B 向下发生竖向位移 Δ_{AB} 。同样可用力法进行计算, 并可作出其弯矩图和剪力图如图 5-37b、c 所示。

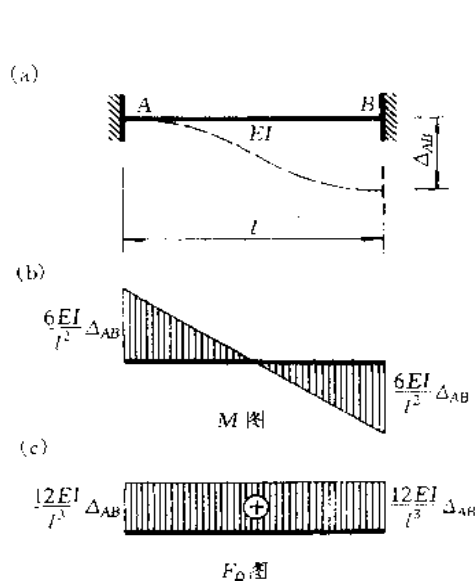


图 5-37

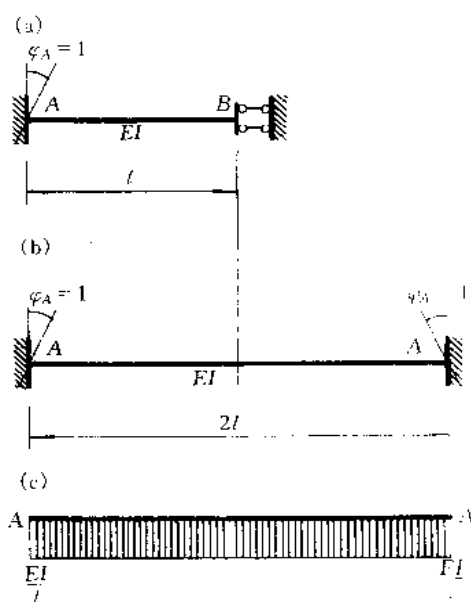


图 5-38

对于一端固定另一端铰支的等截面梁, 同样可用力法计算其杆端力。为了便于今后应用, 现将两端固定梁, 一端固定另一端铰支梁和一端固定另一端定向支承梁在常见的外因 (荷载作用、支座转动和支座移动) 影响下的杆端力数值列于表 5-1 中。

一端固定另一端定向支承的等截面梁, 是在对称性的利用中由于取结构的一半来计算时所遇到的情况。计算这种梁时, 可以利用 § 5-6 的对称性原理, 将其视为某两端固定梁的一半, 从而转变为计算两端固定单跨梁的问题。例如如图 5-38a 为等截面梁, A 端固定, B 端定向支承, A 端发生单位转角。图 5-38b 为抗弯刚度 EI 与前者相同, 但跨度为前者两倍的两端固定梁, 两端正对称地发生单位转角。由对称性原理可知, 从图 5-38b 所示梁中取出一半, 跨中截面处应设置定向支座, 于是就得到图 5-38a 所示的梁。图 5-38b 所示两端固定梁的杆端弯矩可由表 5-1 得出。

$$M_{AA'} = 4 \times \frac{EI}{2l} - 2 \times \frac{EI}{2l} = \frac{EI}{l} = i_{AB}$$

其中

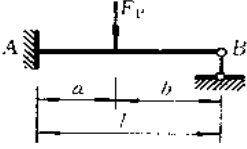
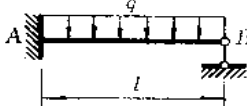
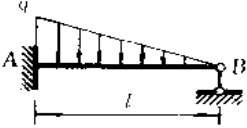
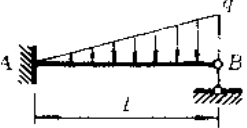
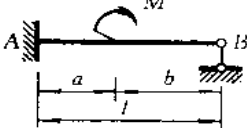
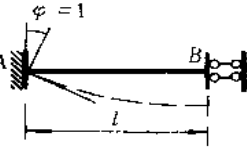
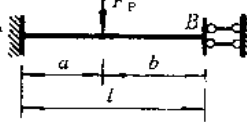
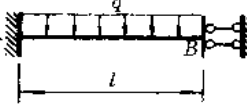
$$i_{AB} = \frac{EI}{l}$$

是 AB 杆的抗弯刚度与其跨度之比值, 称为 AB 杆的线抗弯刚度, 或者简称线刚度。

表 5-1 等截面单跨超静定梁的杆端弯矩和剪力

编号	梁的简图	弯 矩		剪 力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QBA}
1		$\frac{4EI}{l} = 4i$	$\frac{2EI}{l} = 2i$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6 \frac{i}{l}$	$\frac{6EI}{l^2} = 6 \frac{i}{l}$
2		$-\frac{6EI}{l^2} = -6 \frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6 \frac{i}{l}$	$12 \frac{EI}{l^3} = 12 \frac{i}{l^2}$	$12 \frac{EI}{l^3} = 12 \frac{i}{l^2}$
3		$-\frac{F_P ab^2}{l^2}$	$\frac{F_P a^2 b}{l^2}$	$\frac{F_P b^2 (l+2a)}{l^3}$	$-\frac{F_P a^2 (l+2b)}{l^3}$
4		$-\frac{1}{12} ql^2$	$\frac{1}{12} ql^2$	$\frac{1}{2} ql$	$-\frac{1}{2} ql$
5		$-\frac{1}{20} ql^2$	$\frac{1}{30} ql^2$	$\frac{7}{20} ql$	$-\frac{3}{20} ql$
6		$\frac{b(3a-l)}{l^2} M$	$\frac{a(3b-l)}{l^2} M$	$-\frac{6ab}{l^3} M$	$\frac{6ab}{l^3} M$
7		$\frac{3EI}{l} = 3i$		$-\frac{3EI}{l^2} = -3 \frac{i}{l}$	$-\frac{3EI}{l^2} = -3 \frac{i}{l}$
8		$-\frac{3EI}{l^2} = -3 \frac{i}{l}$		$\frac{3EI}{l^3} = 3 \frac{i}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^3} = 3 \frac{i}{l^2}$

表 5-1 (续)

编号	梁的简图	弯 矩		剪 力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QB}
9		$-\frac{F_P ab(l+b)}{2l^2}$		$\frac{F_P b(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$\frac{F_P a^2(2l+b)}{2l^3}$
10		$-\frac{1}{8}ql^2$		$\frac{5}{8}ql$	$\frac{3}{8}ql$
11		$-\frac{1}{15}ql^2$		$\frac{4}{10}ql$	$-\frac{1}{10}ql$
12		$-\frac{7}{120}ql^2$		$\frac{9}{40}ql$	$-\frac{11}{40}ql$
13		$\frac{l^2-3b^2}{2l^2}M$		$-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$	$-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$
14		$\frac{EI}{l} = i$	$-\frac{EI}{l} = -i$		
15		$-\frac{F_P a(l+b)}{2l}$	$-\frac{F_P a^2}{2l}$	F_P	
16		$-\frac{1}{3}ql^2$	$-\frac{1}{6}ql^2$	ql	

表中 EI 为等截面梁的抗弯刚度, $i = \frac{EI}{l}$ 为线抗弯刚度。

梁 AA' 的弯矩图如图 5-38c 所示,由此可得一端固定另一端定向支承的等截面梁的杆端弯矩为

$$M_{AH} = i_{AB} = \frac{EI}{l}, \quad M_{HA} = -i_{AB} = -\frac{EI}{l}$$

这种梁在其他因素影响下的杆端力,均可仿此求得,不再赘述。

当单跨超静定梁受到各种荷载以及支座移动和转动的共同作用时,其杆端力可根据叠加原理,由表 5-1 中相应各栏的杆端力值叠加而得。

对于图 5-39a 所示两端固定的等截面梁,其杆端弯矩和剪力为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\varphi_A + 2i\varphi_B - 6i\frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= 2i\varphi_A + 4i\varphi_B - 6i\frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

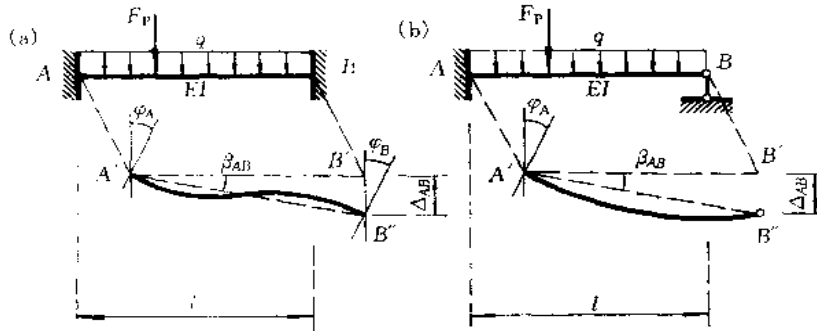


图 5-39

$$\left. \begin{aligned} F_{QAB} &= -6\frac{i}{l}\varphi_A - 6\frac{i}{l}\varphi_B + 12\frac{i}{l}\cdot\frac{\Delta_{AB}}{l} + F_{QAB}^F \\ F_{QBA} &= -6\frac{i}{l}\varphi_A - 6\frac{i}{l}\varphi_B + 12\frac{i}{l}\cdot\frac{\Delta_{AB}}{l} + F_{QBA}^F \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

对于图 5-39b 所示 A 端固定 B 端铰支的等截面梁,其杆端弯矩和剪力为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 3i\varphi_A - 3i\frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{QAB} &= -3\frac{i}{l}\varphi_A + 3\frac{i}{l}\cdot\frac{\Delta_{AB}}{l} + F_{QAB}^F \\ F_{QBA} &= -3\frac{i}{l}\varphi_A + 3\frac{i}{l}\cdot\frac{\Delta_{AB}}{l} + F_{QBA}^F \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

式(5-3)、(5-4)、(5-5)、(5-6)常称为等截面直杆的转角位移方程。它表达了杆件两端内力与所受荷载以及两端的位移之间的关系。上述公式中关于杆件两端的相对线位移 Δ_{AB} 与杆长 l 的比值,又可写成

$$\beta_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l}$$

并称为杆件 AB 的弦转角。关于公式中 φ_A 、 φ_B 的正负符号,都规定以顺时针方向转动为正,而 Δ_{AB} 则以使整个杆件顺时针转动的为正,即弦转角以顺时针方向转动的为正。图 5-39 中所示 φ_A 、 φ_B 、 Δ_{AB} 或 β_{AB} 都为正向。

上述转角位移方程虽然是针对两端固定或一端固定另一端铰支的等截面梁导出的,但它们所表示的杆端力与杆端位移及荷载之间的关系对于刚架中任何一根等截面受弯直杆来说都是适用的。如图 5-40a 所示刚架,在图示荷载作用下其变形曲线如虚线所示,结点 C 的转角为 φ_C , 结点 D 的转角为 φ_D 。根据前述受弯直杆假定, C 、 D 两点的水平位移均为 Δ ,而这两点的竖向位移均为零。考虑到各杆件的杆端位移应与相应的结点位移相同,则各杆件的变形状态及受力情况分别如图 5-40b、c、d 所示。因此, AC 杆的杆端弯矩可按式(5-3)或查表 5-1 写出,即为

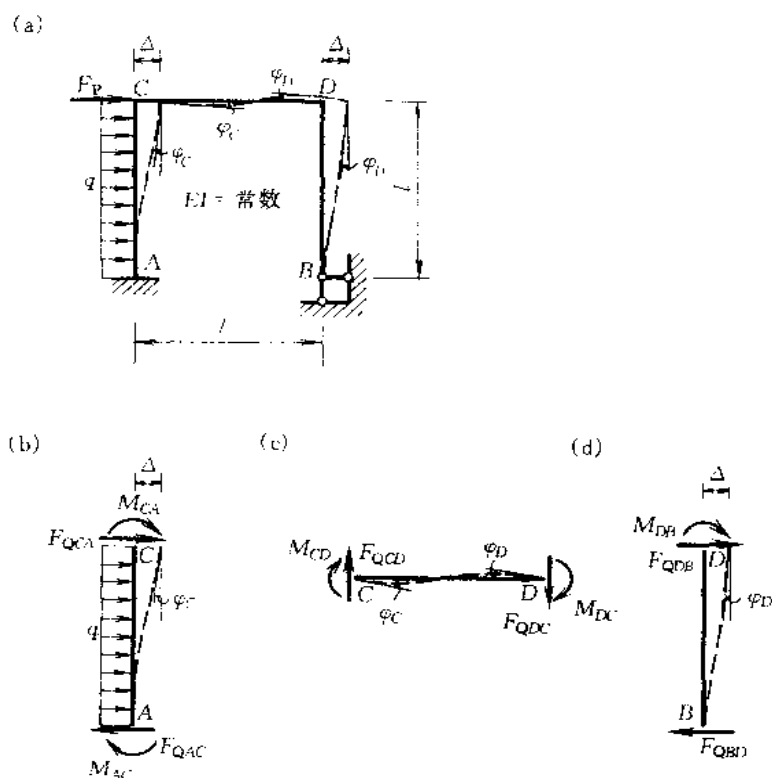


图 5-40

$$\left. \begin{aligned} M_{AC} &= 2i\varphi_C - 6i\frac{\Delta}{l} + M_{AC}^F \\ M_{CA} &= 4i\varphi_C - 6i\frac{\Delta}{l} + M_{CA}^F \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中等号右边三项,是将 AC 视为两端固定梁时,分别在 φ_C 、 Δ 和均布荷载 q 三种外因单独作用下的杆端弯矩。

对于杆件 CD ,水平位移 Δ 只使它发生刚体平动,不引起内力,故 CD 杆应视为两端固定梁在 φ_C 和 φ_D 两种外因作用下的情况,于是其杆端弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_{CD} &= 4i\varphi_C + 2i\varphi_D \\ M_{DC} &= 2i\varphi_C + 4i\varphi_D \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

对于 DB 杆,则应视为 D 端固定, B 端铰支的梁受 φ_D 和 Δ 两种外因作用,故有

$$\left. \begin{aligned} M_{DB} &= 3i\varphi_D - 3i\frac{\Delta}{l} \\ M_{BD} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

各杆的杆端剪力可按相应公式或查表得出。还应掌握在杆端弯矩求出后,直接以各杆件为隔离体,由平衡条件求杆端剪力的方法。

由以上分析可知,若刚架的结点位移(如图 5-40a 所示刚架的 φ_C 、 φ_D 、 Δ)能预先求得,则可计算出各杆的杆端弯矩,再利用平衡条件即可求得杆端剪力及任一截面中的内力。下一章的位移法就是以结点位移作为基本未知量来解算超静定结构的一种方法。

思考题

1. 图 5-41b、c 都可作为用力法计算图 5-41a 所示超静定结构的基本体系。试问分别用这两种基本体系计算时,其位移条件各是什么?并分别写出其力法典型方程。

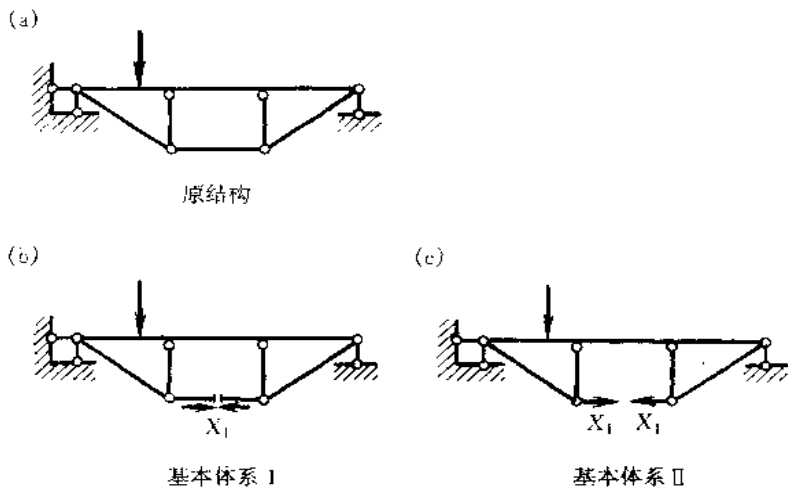


图 5-41

2. 试为图 5-42 所示连续梁选取计算最为简便的力法基本结构。

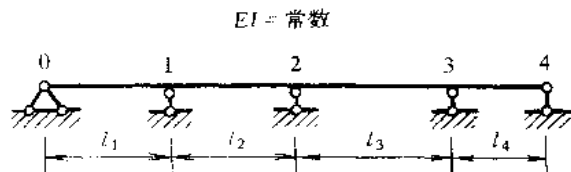


图 5-42

3. 欲使力法解算超静定结构的工作得到简化,你应该从哪些方面去考虑。
4. 试选出图 5-43 所示超静定结构的半结构,并画出其内力图。

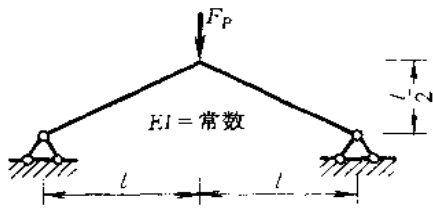


图 5-43

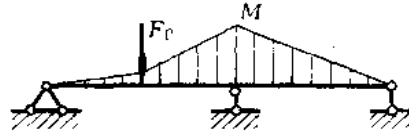
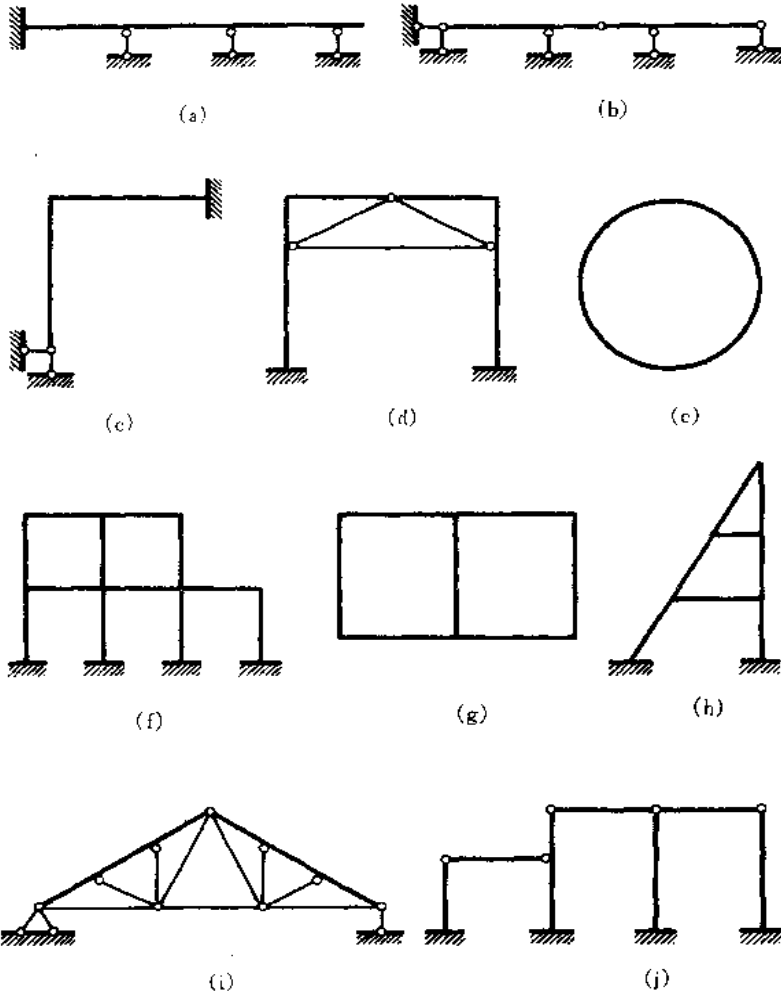


图 5-44

5. 试问图 5-44 所示连续梁的弯矩图轮廓是否正确？为什么？
 6. 超静定结构在支座位移作用下，其内力与各杆件的刚度有什么关系？

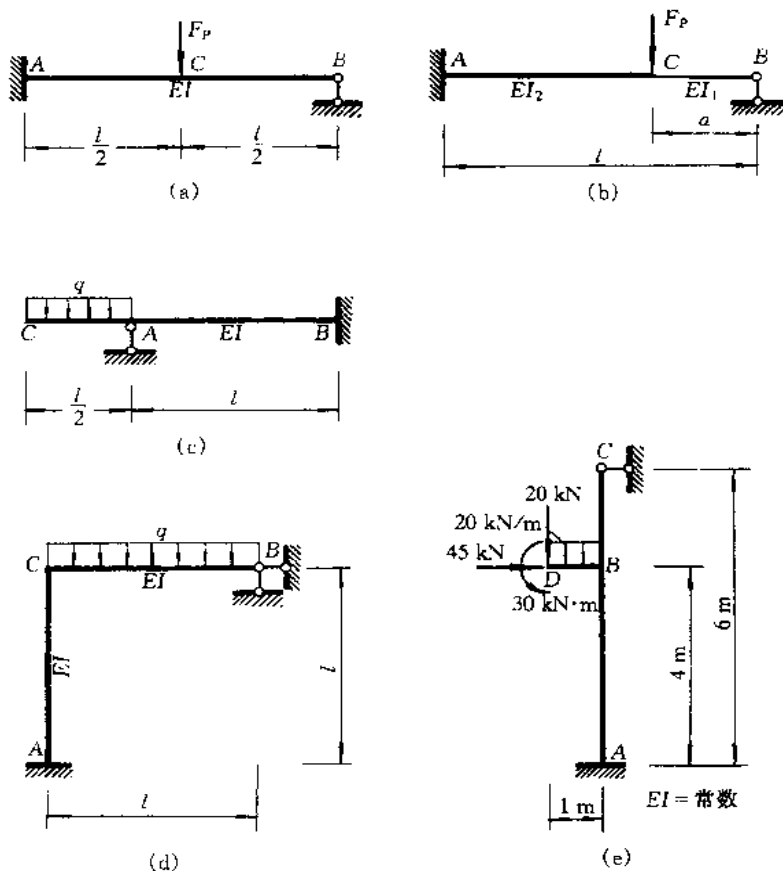
习 题

5-1 试确定图示结构的超静定次数。



题 5-1 图

5-2 试用力法计算下列结构,并绘出弯矩图。



题 5-2 图

5-3 试利用可能简便的方法计算图示对称结构的内力,并绘出弯矩图。

5-4 试用力法计算图示组合结构中各链杆的轴力,并绘出横梁的弯矩图。已知:横梁的 $EI = 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$, 链杆的 $E_1 A_1 = 15 \times 10^4 \text{ kN}$ 。

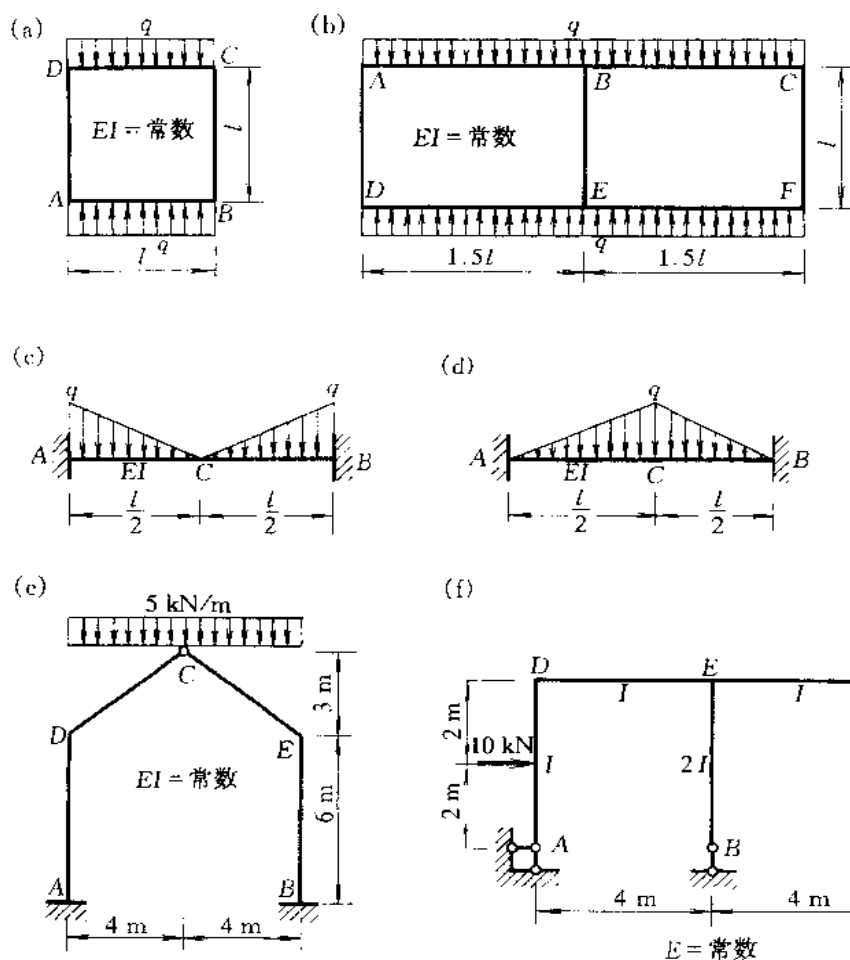
(提示: AB 杆为受弯杆件,只需考虑弯曲变形的影响,其余各杆均为二力杆,只有轴向变形的影响。)

5-5 试用力法计算图示铰接排架,绘出其弯矩图,并计算 C 点的水平位移。已知: $I_2/I_1 = 5.77$, $I_2 = 12.3 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, $E = 25.5 \text{ GPa}$ 。

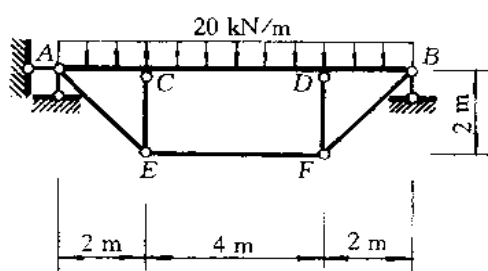
5-6 试用力法计算图示桁架,各杆 $EA = \text{常数}$ 。

5-7 试求题 5-2 图 a 中 C 点的竖向位移。

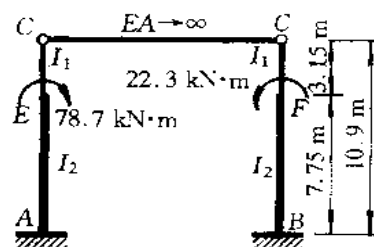
5-8 试求题 5-2 图 d 中 C 截面的转角 φ_C 。



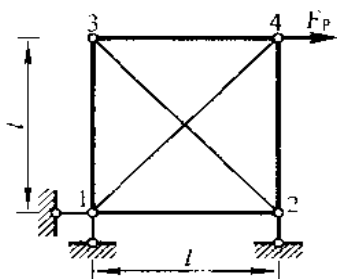
题 5-3 图



题 5-4 图



题 5-5 图



题 5-6 图

部分答案

5-2 (a) $M_{AB} = \frac{3}{16} F_P l$ (上边受拉); (b) $F_{By} = \frac{F_P}{2} \cdot \frac{2l^3 - 3l^2 a + a^3}{l^3 - \left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) a^3}$; (c) $M_{BA} = \frac{q l^2}{16}$ (下边受拉); (d) M_{AC}

$= \frac{q l^2}{28}$ (右侧受拉), $F_{By} = \frac{3}{7} q l$ (\uparrow), $F_{Du} = \frac{3}{28} q l$ (\leftarrow); (e) $M_{AB} = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉)

5-3 (a) $M_{AB} = \frac{q l^2}{24}$ (下边受拉); (b) $M_{AB} = \frac{9}{112} q l^2$ (上边受拉), $M_{BA} = \frac{27}{112} q l^2$ (上边受拉); (c) $M_{BA} = \frac{1}{32} q l^2$; (d) $M_{CA} = \frac{5}{96} q l^2$; (e) $M_{AD} = 17.51 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (右侧受拉), $M_{DA} = 20.83 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉); (f) $M_{DE} = -\frac{55}{7} \text{ kN}\cdot\text{m}$ (下边受拉)

5-4 $F_{NEF} = 67.3 \text{ kN}$, $M_c = 14.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (上边受拉)

5-5 $M_{EA} = 60.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉), $M_{FB} = 4.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (右侧受拉), $\Delta_{CH} = 0.49 \text{ cm}$ (\rightarrow)

5-6 $F_{N34} = 0.396 F_P$, $F_{N24} = -0.604 F_P$, $F_{N14} = 0.854 F_P$, $F_{N23} = -0.560 F_P$,

5-7 $\Delta_{CV} = \frac{7 F_P l^3}{768 EI}$ (\downarrow)

5-8 $\varphi_C = \frac{q l^3}{56 EI}$ (\downarrow)

第六章 位 移 法

§ 6-1 位移法的基本概念

前面介绍的力法是分析超静定结构的最基本而且历史最悠久的方法。它是以结构的多余未知力作为基本未知量,按照位移条件首先将它们求出,然后便可据以求出结构的其他反力、内力和位移。由于在一定外因作用下,结构的内力和位移之间恒具有一定的关系。因此,也可把结构的某些位移作为基本未知量,首先求出它们,然后再据以确定结构的内力。这样的方法称为位移法。

为了说明位移法的基本概念,下面分别讨论几个简单例子。图 6-1a 所示为一两跨等截面

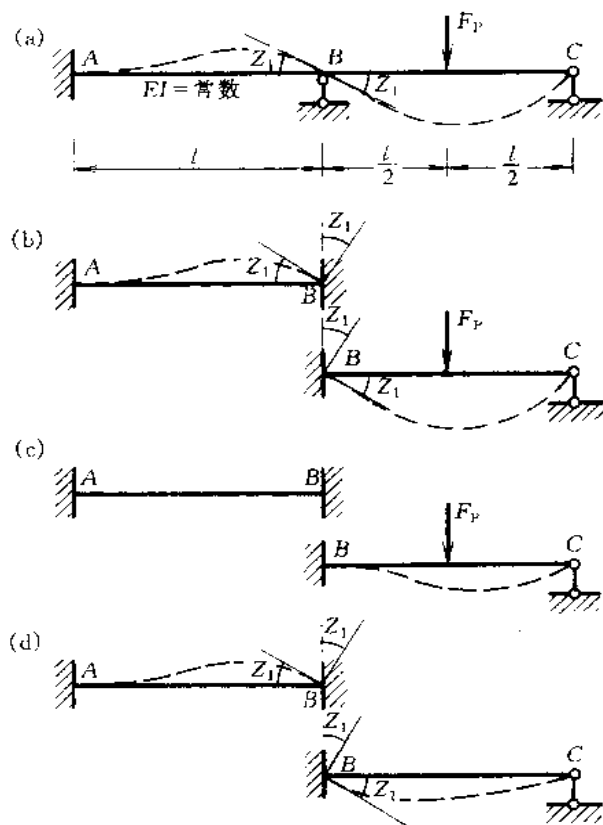


图 6-1

的连续梁,在荷载作用下将发生如图中虚线所示的变形。该连续梁可看成由 AB、BC 两根杆件在 B 端刚性联结而组成,所以结点 B 为刚结点。因为不考虑受弯杆件的轴向变形,且结点 B 有竖向链杆支承,故结点 B 无水平线位移和竖向线位移,只有角位移,设其角位移为 Z_1 ^①。汇交于该刚结点的两杆的杆端在变形后将发生与结点相同的转角。因此,图 6-1a 中 AB 杆的 B 端和 BC 杆的 B 端均发生转角 Z_1 。

分别考察 AB、BC 两杆,不难发现,它们的变形情况与图 6-1b 所示相同;其中 AB 杆相当于两端固定梁在固定端 B 处发生转角 Z_1 ;BC 杆则相当于左端固定右端铰支的单跨梁受荷载 F_P 作用,且在固定端 B 处发生大小为 Z_1 的转角。根据叠加原理,图 6-1b 又可分解为图 6-1c、d 所示两种情况来考虑。据此,按转角位移方程(5-3)、(5-5)或查表 5-1,即可写出 AB、BC 两杆的杆端弯矩如下:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{l}Z_1, & M_{BA} &= \frac{4EI}{l}Z_1 \\ M_{BC} &= \frac{3EI}{l}Z_1 - \frac{3}{16}F_P l, & M_{CB} &= 0 \end{aligned}$$

其中 M_{BC} 的第二项 $-\frac{3}{16}F_P l$ 为图 6-1c 中的 BC 梁当 B 端支座无位移时,仅由于荷载作用所产生的弯矩,这种杆端弯矩称为固端弯矩,用 M_{BC}^F 表示。

注意到若能确定两杆的杆端弯矩,则杆中的内力即可由平衡条件求得。在上述各杆端弯矩的表达式中,固端弯矩可根据已知荷载直接算出或查表得出,而结点 B 的转角 Z_1 却是未知量。只有预先求得 Z_1 ,才可能确定杆端弯矩。

下面讨论如何求得结点 B 的转角 Z_1 。假设结点 B 转动任意大小的角度,即 Z_1 无论取何数值,这时虽然汇交于结点 B 的各杆端仍有相同的转角,结构的变形保持谐调,但相应地各杆端产生的弯矩值就不一定满足结点 B 的力矩平衡条件,从而造成不符合结构实际的变形和受力情况。因此,应根据结点 B 的力矩平衡条件来确定角位移 Z_1 。

结点 B 的力矩平衡条件(图 6-2)为

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

将杆端弯矩值代入上式后,得

$$\left(\frac{4EI}{l} + \frac{3EI}{l}\right)Z_1 - \frac{3}{16}F_P l = 0$$

所以

$$Z_1 = \frac{3F_P l^2}{112EI}$$

结点 B 的转角 Z_1 求得后,再代回原杆端弯矩的表达式中,即可求得各杆的杆端弯矩为

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l} \times \frac{3F_P l^2}{112EI} = \frac{3}{56}F_P l$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{l} \times \frac{3F_P l^2}{112EI} = \frac{3}{28}F_P l$$

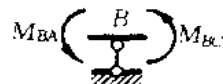


图 6-2

① 位移法中的位移 Z 属广义位移,其使用见本书符号表说明第 2 点。以下类同。

$$M_{IK} = \frac{3EI}{l} \times \frac{3F_P l^2}{112EI} - \frac{3}{16} F_P l = \frac{9}{112} F_P l - \frac{3}{16} F_P l = -\frac{3}{28} F_P l$$

$$M_{CB} = 0$$

杆端弯矩求得后,即可利用图 6-3a 所示隔离体由平衡条件求出杆端剪力。杆端剪力也可利用方程(5-4)、(5-6)直接算出。原结构的弯矩图和剪力图如图 6-3b、c 所示。

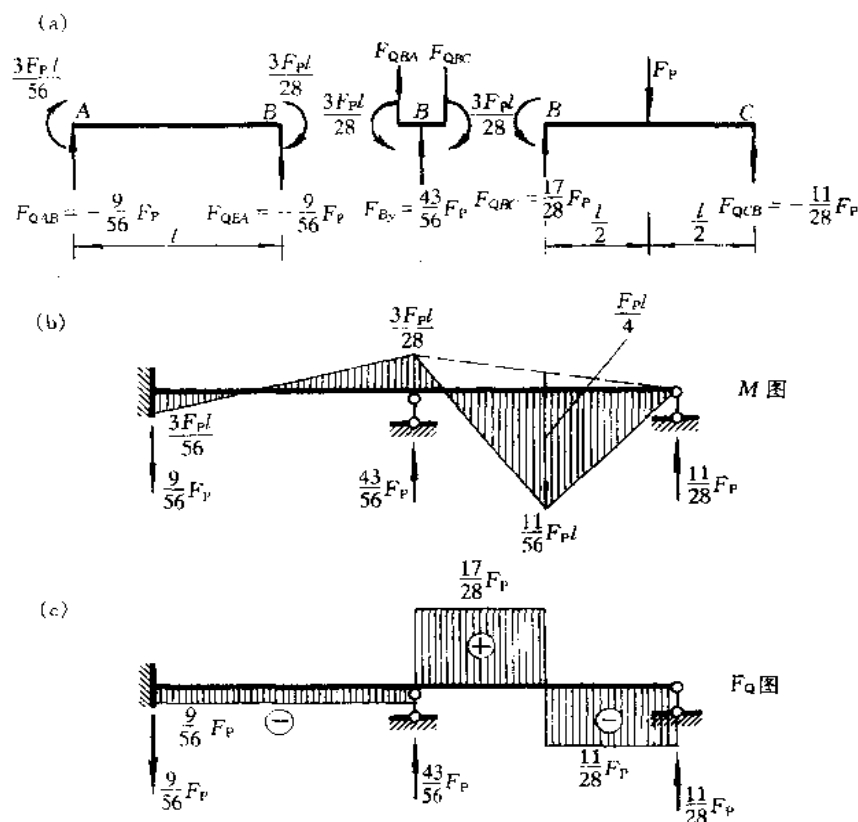


图 6-3

又如图 6-4a 所示刚架,结点 1 为刚结点。在荷载 \$q\$ 作用下,将发生如图中虚线所示的变形,汇交于结点 1 的两杆在 1 端将产生相同的转角 \$Z_1\$。严格地说,结点 1 还具有微小的线位移,不过,对于受弯直杆,通常都可略去轴向变形和剪切变形的影响,并认为弯曲变形是微小的,故可假定各杆两端之间的距离在变形过程中保持不变。这样,在图示刚架中,由于支座 2、3 都不能移动,而结点 1 与 2、3 两点之间的距离根据上述假定又都保持不变,于是结点 1 也就被认为不能发生线位移。

在图 6-4a 中杆 12 和 13 的变形情况分别与图 6-4b、c 所示的两根单跨梁相同。因此,同样以单跨超静定梁为基础可写出各杆端弯矩表达式,然后利用结点 1 的力矩平衡条件求得结点 1 的角位移。

上述结构只有一个刚结点,变形后该刚结点只有角位移,计算时取该结点的角位移为基本未知量。在一般情况下,结构具有若干结点,各个结点可能同时发生转角和线位移。如图 6-5a 所

示的刚架, C 、 D 两刚结点分别发生转角 Z_1 和 Z_2 , 同时具有一个独立的水平线位移 Z_3 。同样, 首先应求出 Z_1 、 Z_2 和 Z_3 这三个基本未知量, 然后才能确定全部杆端弯矩和剪力。这三个结点位移的大小由结构的平衡条件确定。求解上述三个基本未知量时, 可取结点 C 和 D (图 6-5b) 为隔离体, 列出两个力矩平衡方程, 由 $\sum M_C = 0$ 和 $\sum M_D = 0$ 得

$$M_{CA} + M_{CD} = 0, \quad M_{DC} + M_{DB} = 0$$

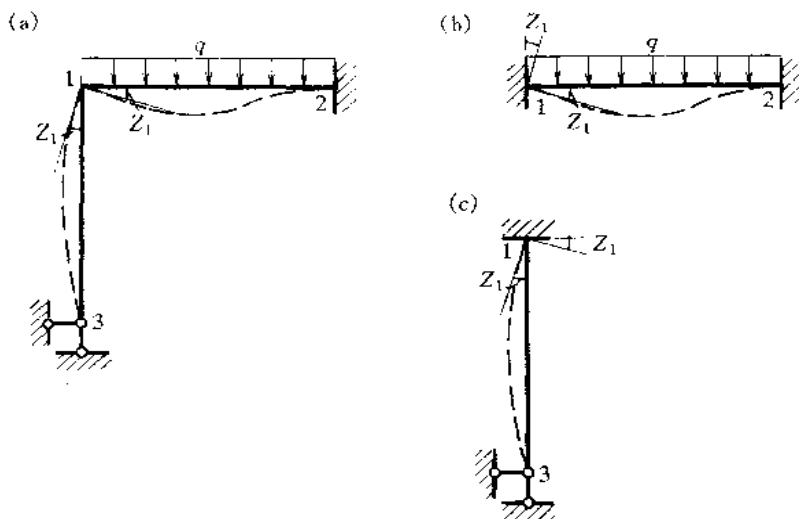


图 6-4

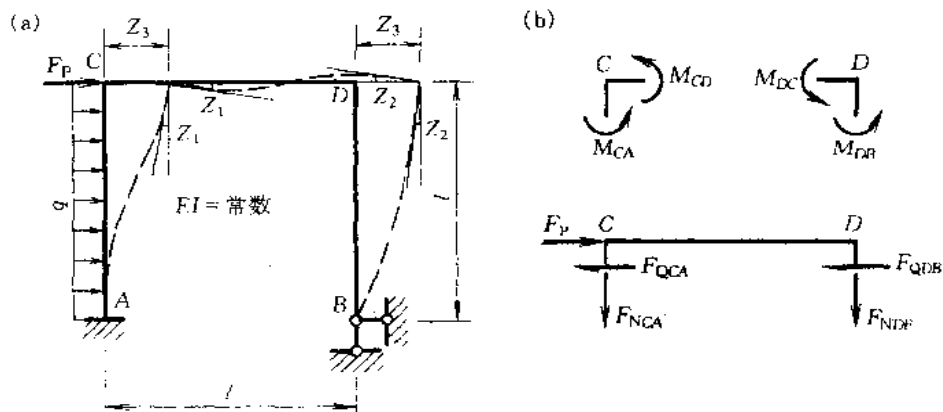


图 6-5

此外, 再截取结构中包含发生 Z_3 各结点在内的部分为隔离体, 列出一个投影平衡方程。在本例中, 可截开柱顶取柱顶以上横梁 CD 部分为隔离体 (图 6-5b), 由 $\sum F_x = 0$ 得

$$F_p - F_{QCA} - F_{QDB} = 0$$

将杆端内力表达式代入上述三个平衡方程后, 就可得到求解三个基本未知量 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 的三个代数方程。于是, 问题即可求解。

根据以上所述, 位移法是以结构中结点位移 (转角和线位移) 作为基本未知量来解题的。若

有 n 个刚结点, 则有 n 个转角未知量, 就需从这 n 个刚结点建立 n 个力矩平衡方程; 若有 m 个独立的结点线位移未知量, 一般则需考虑某些横梁部分 (包含柱端) 的平衡来建立 m 个平衡方程。根据全部平衡方程将结点位移求出后, 便可以确定结构的内力。从计算原理上看, 位移法是按如下思路进行的:

(1) 把结构在可动结点处拆开, 将各杆分别视为相应的单跨超静定梁。这些梁承受原有的荷载, 并在杆端发生与实际情况相同的杆端位移。据此, 即可写出各杆杆端内力表达式。

(2) 将各杆组合成原结构。此时, 考虑结构的变形谐调, 各杆的杆端位移应与连接该杆的结点的位移相谐调, 并考虑各刚结点的力矩平衡条件及结构某些部分的平衡条件 (一般取横梁部分的剪力平衡条件)。由此, 即可获得与基本未知量数量相等的方程求解各未知结点位移。这样的方程称为位移法基本方程。

值得指出, 上述分析是以单根杆件的受力分析为基础的, 必须事先知道单根杆件的杆端力与杆端位移以及所受荷载之间的关系式。这种关系式可从表 5-1 或等截面直杆转角位移方程获得。如果能将一些其他类型杆件 (如变截面直杆、曲杆、甚至折杆等) 的转角位移方程求得, 我们也能用位移法求解由这些杆件组成的超静定结构。

§ 6-2 位移法基本未知量数目的确定

由上节可知, 在位移法中是以结构结点的独立角位移和线位移作为基本未知量。因此, 用位移法计算结构时, 必须先确定这些独立的结点位移的数目。下面就讨论这个问题。

一、角位移数目的确定

用位移法计算刚架时, 是以单跨超静定梁的转角位移方程作为计算的基础。因为刚架中的每个刚结点都有可能发生角位移, 而汇交于刚结点的各杆端的转角就等于该刚结点的转角, 所以角位移基本未知量的数目就等于刚结点的数目。只需计算刚结点的个数, 即可确定角位移的数目。例如, 图 6-6a 所示刚架, 有 B 、 C 两个刚结点, 故有两个角位移未知量; 图 6-6b 所示刚架, 结点 B 为组合结点, 它的左、右各有一个刚结点, 故也有两个角位移未知量。值得说明的是, 在图 6-6b 中, 伸臂 CD 部分, 内力可根据静力平衡条件确定。若将伸臂 CD 去掉, 则杆件 BC 就变成 B 端固定、 C 端铰支的单跨超静定梁。因此, 确定位移法基本未知量的数目时, 可将结构中的静定部分去掉, 然后再予以考虑。

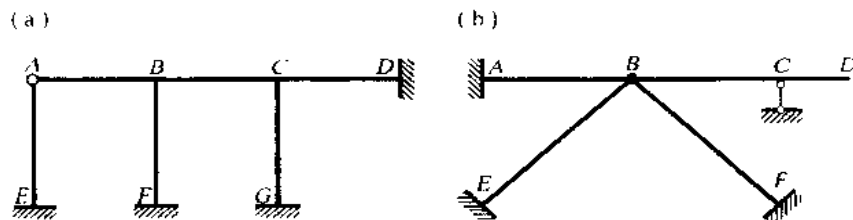


图 6-6

二、线位移数目的确定

由于一点在平面内具有两个移动自由度, 所以平面刚架的每个结点如不受约束, 则有两个线

位移。但为了简化计算,通常都假定结构的变形是微小的,受弯直杆在受力发生弯曲和轴向变形时,对杆件长度所产生的影响,可以忽略不计。也就是说,受弯直杆受力发生变形时,其两端结点之间的距离保持不变。这就等同于每根受弯直杆提供了相当于一根刚性链杆的约束条件。因此,计算刚架结点的线位移个数时,可以先把所有的受弯直杆视为刚性链杆,同时把所有的刚结点和固定支座全部改为铰结点或固定铰支座,从而使刚架变成一个铰接体系。然后,再分析该铰接体系的几何组成,凡是可动的结点,用增设附加链杆的方法使其不动,从而使整个铰接体系成为几何不变体系。最后计算出所需增设的附加链杆总数,即为刚架结点的独立线位移个数。例如如图 6-7a 所示刚架,改成铰接体系后,只需增设 2 根附加链杆的约束就能变成几何不变体系,如图 6-7b 所示,故有 2 个独立线位移。图 6-8a 所示刚架,改成铰接体系后,只需增设 1 根附加链杆的约束就能变成几何不变体系,如图 6-8b 所示,故只有 1 个独立线位移。其中,刚结点 B 上的悬臂 BC,因为它是静定的,其内力可根据静力平衡条件确定,故计算线位移个数时可以把它去掉。

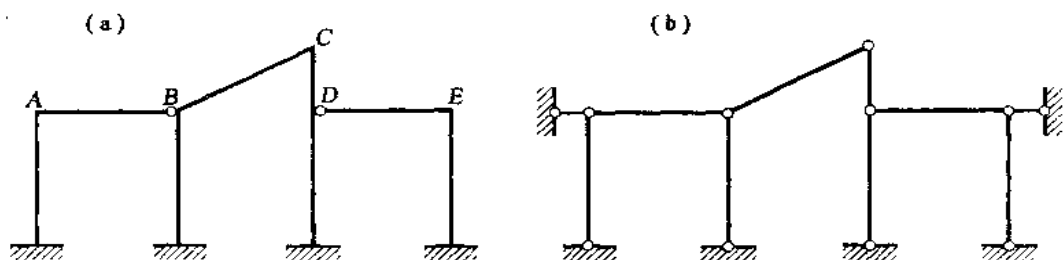


图 6-7

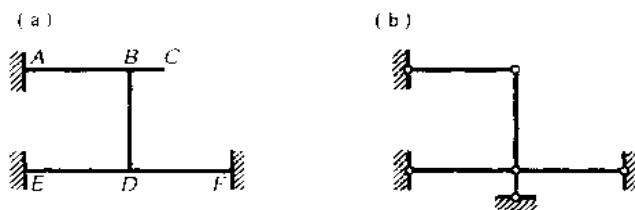


图 6-8

三、位移法的基本未知量数目的确定

位移法的基本未知量数目应等于结构结点的独立角位移和线位移二者数目之和。

例如,图 6-7a 所示刚架,有 A、B、C、D、E 等 5 个刚结点,即有 5 个角位移,由图 6-7b 可知,刚架有 2 个线位移,故总共有 7 个基本未知量。图 6-8a 所示刚架,有 B、D 两个刚结点,即有 2 个角位移,由图 6-8b 可知结构有 1 个线位移,故该结构总共有 3 个基本未知量。

对图 6-9a 所示排架,将其变成铰接体系后,需要增设 2 根附加链杆的约束,才能成为几何不变体系,如图 6-9b 所示,故有 2 个线位移;确定角位移时,要注意柱 2B 上的结点 3 是一个组合结点,杆件 2B 应视为由 23 和 3B 两杆在 3 处刚性联接而形成,故结点 3 处有一个转角基本未知量;由此可知,该排架的位移法基本未知量共有 3 个。

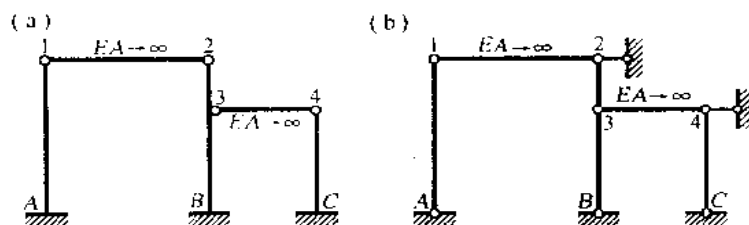


图 6-9

应当注意,上面介绍的计算结点独立线位移数目的方法,都是以不计杆件的轴向变形作为前提的。如果需要考虑杆件轴向变形的影响,则上述方法就不适用了。因为当需要考虑杆件轴向变形的影响时,“杆件两端结点之间距离保持不变”的假设就被否定,因而也就不能再把受弯直杆当作刚性链杆约束来计算刚架的结点线位移数目。在这种情况下,除支座外,刚架的每个结点有两个线位移。如果刚架中有需要考虑其轴向变形影响的杆件,则用相应的铰接体系计算刚架的结点线位移数目时,就不能把这种杆件当作刚性链杆。例如,在图 6-10a 所示的刚架中,杆 CD 是一根只承受轴力的二力杆,在计算刚架的内力时,必须考虑其轴向变形的影响,故把此刚架变成铰接体系来计算结点线位移数时,不应将该杆当作刚性链杆,如图 6-10b 所示。这样,此刚架就有 3 个独立的结点线位移,再加上 4 个刚结点的角位移,总共有 7 个基本未知量。

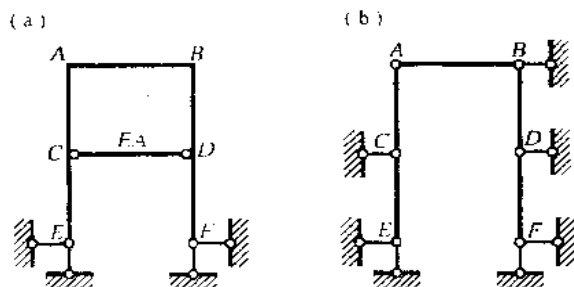


图 6-10

§ 6-3 用位移法计算刚架的步骤和示例

用位移法计算超静定刚架的步骤可归纳如下:

1. 确定基本未知量数目,并绘出示意图。图中应示出原结构所承受的荷载和独立的结点位移。
2. 考虑变形协调条件,并根据转角位移方程(或表 5-1),写出用基本未知量表示的各杆杆端弯矩和剪力的表达式。
3. 利用刚结点的力矩平衡条件和结构中某一部分的平衡条件(通常为横梁部分的剪力平衡条件),建立求解基本未知量的方程组。
4. 解算方程组,求出各基本未知量。
5. 将求得的基本未知量代入第 2 步所得的杆端内力的表达式,从而求出各杆杆端内力。
6. 作内力图。

7. 校核结构的各刚结点是否满足力矩平衡条件和结构某些部分是否满足剪力平衡条件,如都得到满足,则说明计算结果无误。

[例 6-1] 试用位移法计算图 6-11a 所示刚架。

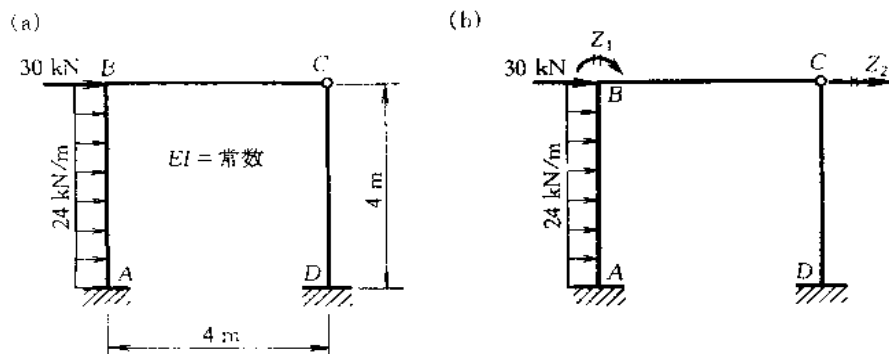


图 6-11

解:基本未知量为刚结点 B 的角位移 Z_1 和结点 C 的水平线位移 Z_2 (图 6-11b)。

根据图 6-11b 并利用表 5-1 写出各杆杆端内力如下 (其中 $i = \frac{EI}{4}$):

$$M_{AB} = 2iZ_1 - \frac{6}{4}iZ_2 - \frac{1}{12} \times 24 \times 10^3 \times 4^2 = 2iZ_1 - \frac{3}{2}iZ_2 - 32 \times 10^3$$

$$M_{BA} = 4iZ_1 - \frac{6}{4}iZ_2 + \frac{1}{12} \times 24 \times 10^3 \times 4^2 = 4iZ_1 - \frac{3}{2}iZ_2 + 32 \times 10^3$$

$$M_{BC} = 3iZ_1$$

$$M_{CB} = M_{CD} = 0$$

$$M_{DC} = -\frac{3i}{4}Z_2$$

$$F_{QAB} = -\frac{6i}{4}Z_1 + \frac{3i}{4}Z_2 + \frac{1}{2} \times 24 \times 10^3 \times 4 = -\frac{3i}{2}Z_1 + \frac{3i}{4}Z_2 + 48 \times 10^3$$

$$F_{QBA} = -\frac{6i}{4}Z_1 + \frac{3i}{4}Z_2 - \frac{1}{2} \times 24 \times 10^3 \times 4 = -\frac{3i}{2}Z_1 + \frac{3i}{4}Z_2 - 48 \times 10^3$$

$$F_{QBC} = -\frac{3i}{4}Z_1$$

$$F_{QCB} = -\frac{3i}{4}Z_1$$

$$F_{QCD} = \frac{3i}{4^2}Z_2 = \frac{3i}{16}Z_2$$

$$F_{QDC} = \frac{3i}{4^2}Z_2 = \frac{3i}{16}Z_2$$

从原结构中取出如图 6-12a、b 所示的两个隔离体,由图 6-12a 的平衡条件 $\sum M_B = 0$ 得

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

由图 6-12b 的平衡条件 $\Sigma F_x = 0$ 得

$$F_{QBA} + F_{QCD} - 30 \times 10^3 = 0$$

将以上有关杆端内力的表达式代入, 整理后得

$$\left. \begin{aligned} (3i + 4i)Z_1 - \frac{3i}{2}Z_2 + 32 \times 10^3 &= 0 \\ -\frac{3i}{2}Z_1 + \left(\frac{3i}{4} + \frac{3i}{16}\right)Z_2 - 78 \times 10^3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

即

$$\left. \begin{aligned} 7iZ_1 - \frac{3i}{2}Z_2 + 32 \times 10^3 &= 0 \\ -\frac{3i}{2}Z_1 + \frac{15i}{16}Z_2 - 78 \times 10^3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解得

$$Z_1 = \frac{464\,000}{23i}, \quad Z_2 = \frac{2\,656\,000}{23i}$$

将 Z_1 、 Z_2 的结果代回杆端内力表达式, 算得

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -164.87 \text{ kN}\cdot\text{m}, & M_{BA} &= -60.52 \text{ kN}\cdot\text{m}, & M_{BC} &= 60.52 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{CB} &= 0, & M_{CD} &= 0, & M_{DC} &= -86.61 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ F_{QAB} &= 104.35 \text{ kN}, & F_{QBA} &= 8.35 \text{ kN}, & F_{QBC} &= -15.13 \text{ kN} \\ F_{QCB} &= -15.13 \text{ kN}, & F_{QCD} &= 21.65 \text{ kN}, & F_{QDC} &= 21.65 \text{ kN} \end{aligned}$$

再由结点的平衡条件即可求得各杆的轴力。刚架的 M 、 F_Q 、 F_N 图如图 6-13a、b、c 所示。

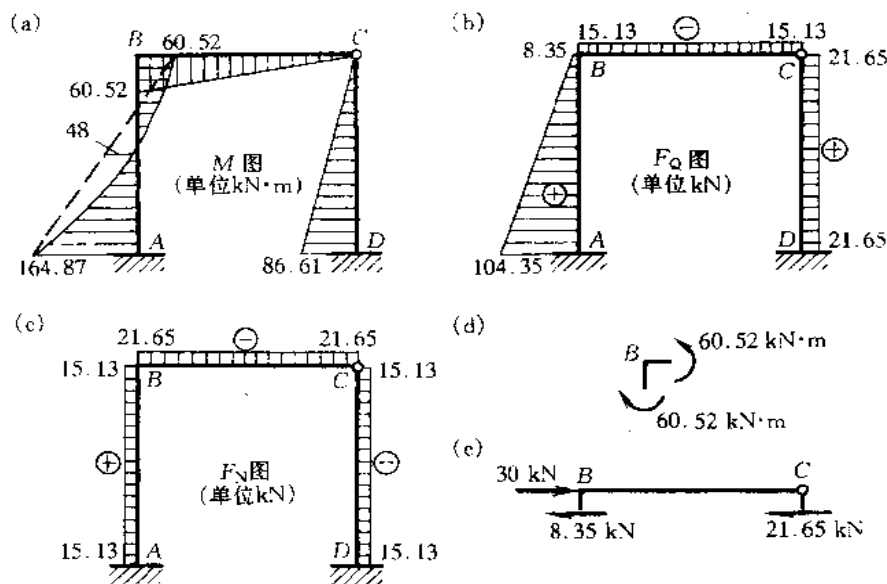


图 6-13

分别取图 6-13d、e 所示隔离体, 可知 $\Sigma M_B = 0$ 及 $\Sigma F_x = 0$ 的平衡条件都能满足, 故知计算

结果无误。

[例 6-2] 图 6-14a 所示刚架的支座 A 下沉 Δ , 试用位移法计算此刚架并绘制其内力图。
 $EI = \text{常数}$ 。

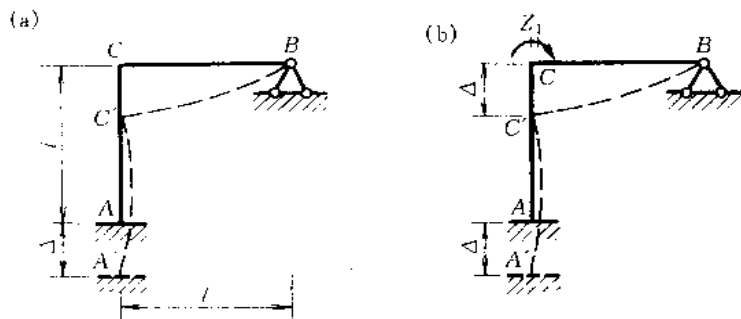


图 6-14

解:基本未知量为结点 C 的角位移 Z_1 (图 6-14b)。

由图 6-14b 并利用表 5-1 写出各杆杆端内力如下:

$$\begin{aligned} M_{AC} &= \frac{2EI}{l} Z_1, & F_{QAC} &= -\frac{6EI}{l^2} Z_1 \\ M_{CA} &= \frac{4EI}{l} Z_1, & F_{QCA} &= -\frac{6EI}{l^2} Z_1 \\ M_{CB} &= \frac{3EI}{l} Z_1 + \frac{3EI}{l^2} \Delta, & F_{QCB} &= -\frac{3EI}{l^2} Z_1 - \frac{3EI}{l^3} \Delta \\ M_{BC} &= 0, & F_{QBC} &= -\frac{3EI}{l^2} Z_1 - \frac{3EI}{l^3} \Delta \end{aligned}$$

由结点 C 的力矩平衡条件 $M_{CA} + M_{CB} = 0$ 得

$$\frac{4EI}{l} Z_1 + \frac{3EI}{l} Z_1 + \frac{3EI}{l^2} \Delta = 0$$

解得

$$Z_1 = -\frac{3}{7l} \Delta$$

将其代回原杆端内力表达式, 算得

$$\begin{aligned} M_{AC} &= -\frac{6EI}{7l^2} \Delta, & F_{QAC} &= \frac{18EI}{7l^3} \Delta \\ M_{CA} &= -\frac{12EI}{7l^2} \Delta, & F_{QCA} &= \frac{18EI}{7l^3} \Delta \\ M_{CB} &= \frac{12EI}{7l^2} \Delta, & F_{QCB} &= -\frac{12EI}{7l^3} \Delta \\ M_{BC} &= 0, & F_{QBC} &= -\frac{12EI}{7l^3} \Delta \end{aligned}$$

再由结点 C 的平衡条件 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ 求得

$$F_{NAC} = \frac{12EI}{7l^3} \Delta, \quad F_{NBC} = \frac{18EI}{7l^3} \Delta$$

刚架的内力图如图 6-15a、b、c 所示。

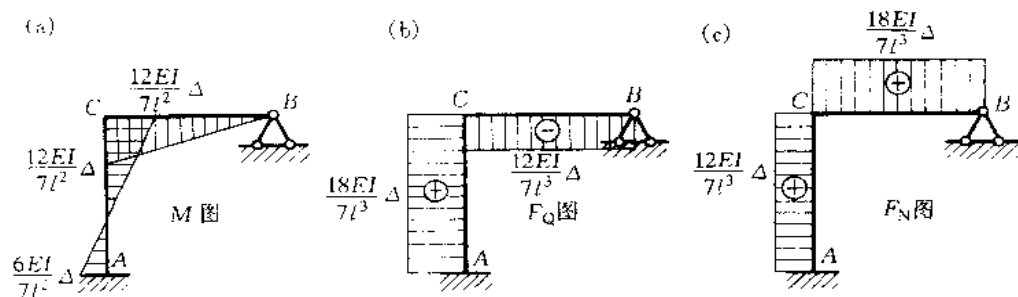


图 6-15

【例 6-3】 仅利用两端固定的单跨超静定梁的转角位移方程, 试用位移法计算图 6-16a 所示的连续梁。

解: 由两端固定的单跨梁的转角位移方程可知, 其杆端力与杆件两端的角位移有关。在图 6-16a 所示连续梁中, BC 杆受荷载 F_P 作用后, 在 B 端和 C 端均发生角位移, 若分别用 Z_1 和 Z_2 表示, 则其杆端力与 Z_1 和 Z_2 有关。因此, 根据题意除取结点 B 的角位移 Z_1 为基本未知量外, 还应将 C 端的角位移 Z_2 作为基本未知量(图 6-16b)。

根据图 6-16b 并利用表 5-1 写出各杆的杆端内力如下(其中 $i = \frac{EI}{l}$):

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2iZ_1, & M_{BA} &= 4iZ_1 \\ M_{BC} &= 4iZ_1 - 2iZ_2 - \frac{1}{8}F_P l, & M_{CB} &= 2iZ_1 + 4iZ_2 + \frac{1}{8}F_P l \\ F_{QAB} &= -\frac{6i}{l}Z_1, & F_{QBA} &= -\frac{6i}{l}Z_1 \\ F_{QBC} &= -\frac{6i}{l}Z_1 - \frac{6i}{l}Z_2 + \frac{F_P}{2}, & F_{QCB} &= -\frac{6i}{l}Z_1 - \frac{6i}{l}Z_2 - \frac{F_P}{2} \end{aligned}$$

由图 6-17a、b 所示隔离体的力矩平衡条件 $\sum M_B = 0$ 、 $\sum M_C = 0$ 得

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ M_{CB} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

将有关杆端内力表达式代入并整理, 可得

$$\left. \begin{aligned} 8iZ_1 + 2iZ_2 - \frac{1}{8}F_P l &= 0 \\ 2iZ_1 + 4iZ_2 + \frac{1}{8}F_P l &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解此可得

$$Z_1 = \frac{3F_P l}{112i}, \quad Z_2 = -\frac{5F_P l}{112i}$$

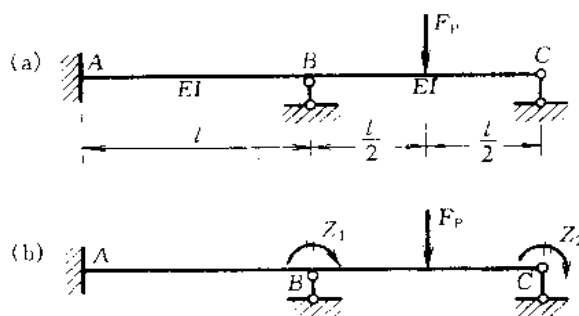


图 6-16

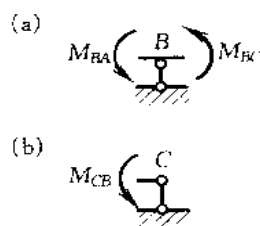


图 6-17

将 Z_1 、 Z_2 之值代回各杆端内力表达式,算得

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{3F_P l}{56}, & M_{BA} &= \frac{3F_P l}{28} \\ M_{BC} &= -\frac{3F_P l}{28}, & M_{CB} &= 0 \\ F_{QAB} &= -\frac{9}{56}F_P, & F_{QBA} &= -\frac{9}{56}F_P \\ F_{QBC} &= \frac{17}{28}F_P, & F_{QCB} &= -\frac{11}{28}F_P \end{aligned}$$

本例即图 6-1a 所示连续梁,只是所采用的基本未知量有所不同。事实说明两种计算结果完全一致。

在图 6-1 中,我们取 AB 杆为两端固定梁,而 BC 杆为 B 端固定 C 端铰支的梁,根据转角位移方程(5-3)、(5-5),相应的基本未知量只需要一个,即结点 B 的角位移;对于本例,则取 AB 杆和 BC 杆均为两端固定梁,相应的基本未知量比前者多一个,即增加了 BC 杆 C 端的角位移 Z_2 。事实上,因 BC 杆的 C 端为铰接,所以有 $M_{CB}=0$,即 $2iZ_1 + 4iZ_2 + \frac{F_P l}{8} = 0$,故 Z_2 总可用 Z_1 来表示,即 Z_2 不是独立的未知转角。对于手算,当然宜按前一种未知量少的方法进行分析,因其计算简便;但对于电算,则因后一种方法将各杆统一为两端固定梁,便于编写计算程序,故常被采用。

§ 6-4 位移法的典型方程

以上介绍了直接利用平衡条件建立位移法基本方程的原理和步骤,下面将以例 6-1 所解算过的刚架(图 6-18a)为例,说明建立位移法基本方程的另一途径。

由例 6-1 已知,该刚架的位移法基本未知量为结点 B 的角位移和 C 点的水平线位移。为使原结构的各杆都成为单跨超静定梁,可采用如下的方法:对图 6-18a 所示刚架,在刚结点 B 上加一个控制该结点转动但不能控制移动的约束,并用“ ∇ ”表示。这种约束称为附加刚臂,它

的约束作用是使结点 B 不能转动;又在结点 C 上加上一个控制该结点沿水平方向移动但不能控制转动的附加链杆,使结点 C 不能水平移动。附加刚臂和附加链杆统称为附加约束。这样,结构中刚结点的转动和所有结点的移动都受到控制,得到图 6-18b 所示的结构。分析其中每一杆件两端的约束情况,可知 AB 杆如同两端固定的单跨梁, BC 、 CD 杆则如同一端固定另一端铰支的单跨梁。也就是把整个结构转化为一个由若干单跨超静定梁组合起来的组合体系。实际的结构称为原结构,这样的组合体系称为位移法的基本结构。

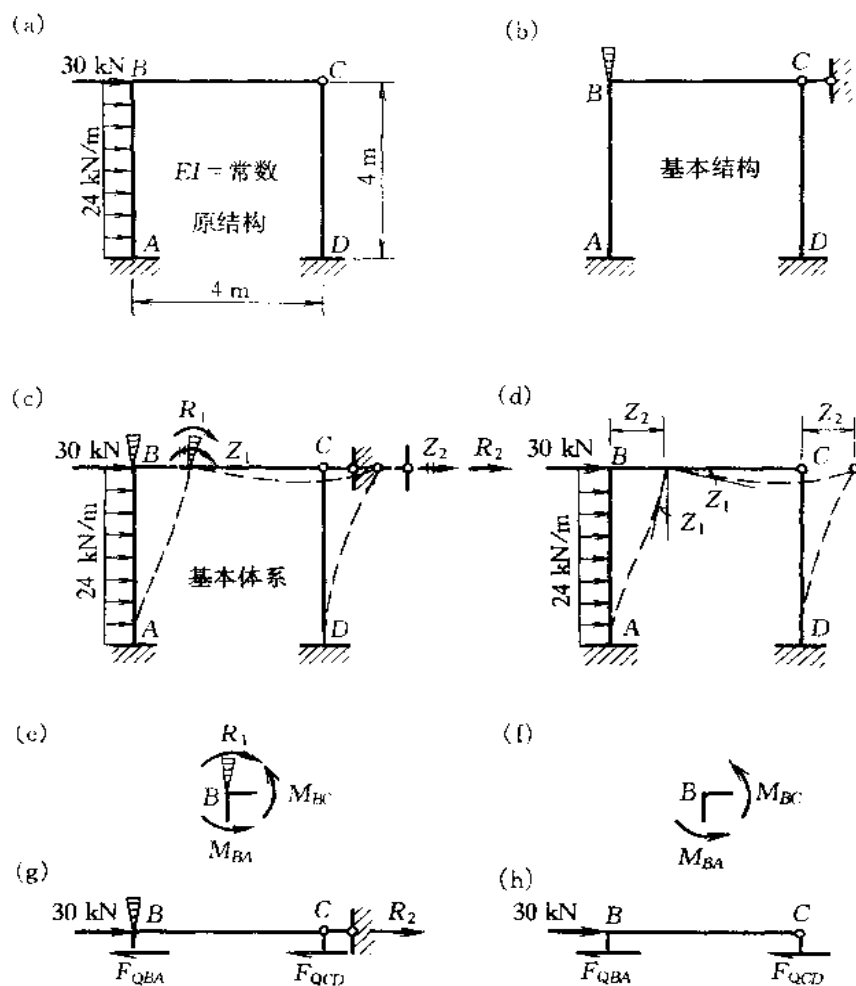


图 6-18

设原结构变形后,结点 B 的角位移为 Z_1 ,结点 C 的水平线位移为 Z_2 。据此,使基本结构承受的荷载与原结构上的荷载相同,并使结点 B 处的附加刚臂转动 Z_1 ,而结点 C 处附加链杆发生水平线位移 Z_2 ,如图 6-18c 所示(称为位移法的基本体系)。这样,基本体系中各杆的变形情况和受力情况与原结构中各根杆件的变形和受力情况(图 6-18d)完全一致。

进一步考察图 6-18c 所示的情况,设附加刚臂上的反力矩为 R_1 ,附加链杆上的反力为 R_2 。从图 6-18c 中截取如图 6-18e、g 所示的两个隔离体,由平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= M_{BA} + M_{BC} \\ R_2 &= F_{QBA} + F_{QCD} - 30 \times 10^3 \end{aligned} \right\}$$

又从图 6-18d 中截取如图 6-18f、h 所示的两个隔离体,由其平衡条件可知 $M_{BA} + M_{BC} = 0$, $F_{QBA} + F_{QCD} - 30 \times 10^3 = 0$,因而得出基本体系上附加约束的反力矩或反力为零,即 $R_1 = 0, R_2 = 0$ 。由此可见,基本体系上附加约束的反力矩或反力等于零的条件保证了基本体系的受力和变形情况与原结构完全相同。同时,从上面的分析可知,这一条件等价于平衡条件。现在根据这一条件来建立位移法方程。

图 6-18c 所示基本体系的受力情况,可视为由图 6-19a、b、c 三种情况叠加而成,故有

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{11} + R_{12} + R_{1P} = 0 \\ R_2 &= R_{21} + R_{22} + R_{2P} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

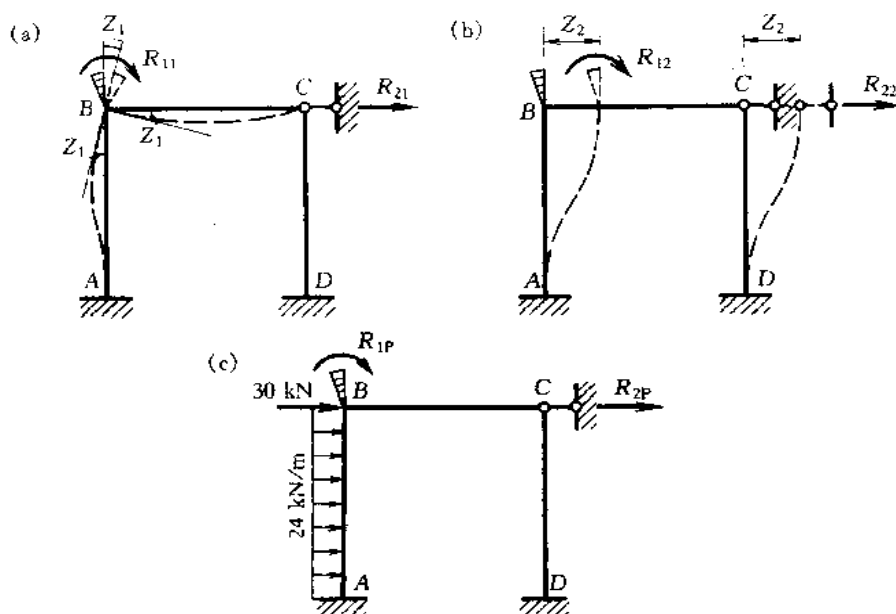


图 6-19

式中 R_{11} 、 R_{21} 为附加刚臂单独转动 Z_1 时,分别在附加刚臂和附加链杆中所引起的反力矩和反力(图 6-19a); R_{12} 、 R_{22} 为附加链杆单独移动 Z_2 时,分别在附加刚臂和附加链杆中所引起的反力矩和反力(图 6-19b); R_{1P} 、 R_{2P} 为荷载单独作用时在附加刚臂和附加链杆中所引起的反力矩和反力(图 6-19c)。在 R_{ij} 、 R_{iP} 的两个下标中,第一个下标表示该反力矩或反力的作用处,第二个下标表示产生该反力矩或反力的原因。

设在基本结构中由于附加刚臂单独发生单位角位移 $\bar{Z}_1 = 1$ ^①、附加链杆单独发生单位水平位移 $\bar{Z}_2 = 1$ 时在附加刚臂中产生的反力矩分别为 r_{11} 和 r_{12} ,在附加链杆中产生的反力分别为 r_{21} 和

① 这里的单位位移 $\bar{Z}_1 = 1$ 属单位物理量,其使用见本书符号表说明第 3 点。以下类同。

•
•
•

1

1

$$Z_1 = \frac{464\,000}{23i}, \quad Z_2 = \frac{2\,656\,000}{23i}$$

求得结点位移后,最后弯矩图可按叠加原理由下式计算

$$M = Z_1 \bar{M}_1 + Z_2 \bar{M}_2 + M_P$$

例如 AB 杆 A 端的弯矩为(弯矩正负按转角位移方程中的规定)

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{464\,000}{23i} \times 2i + \frac{2\,656\,000}{23i} \times \left(-\frac{3i}{2}\right) + (-32 \times 10^3) \\ &= -164.87 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -164.87 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

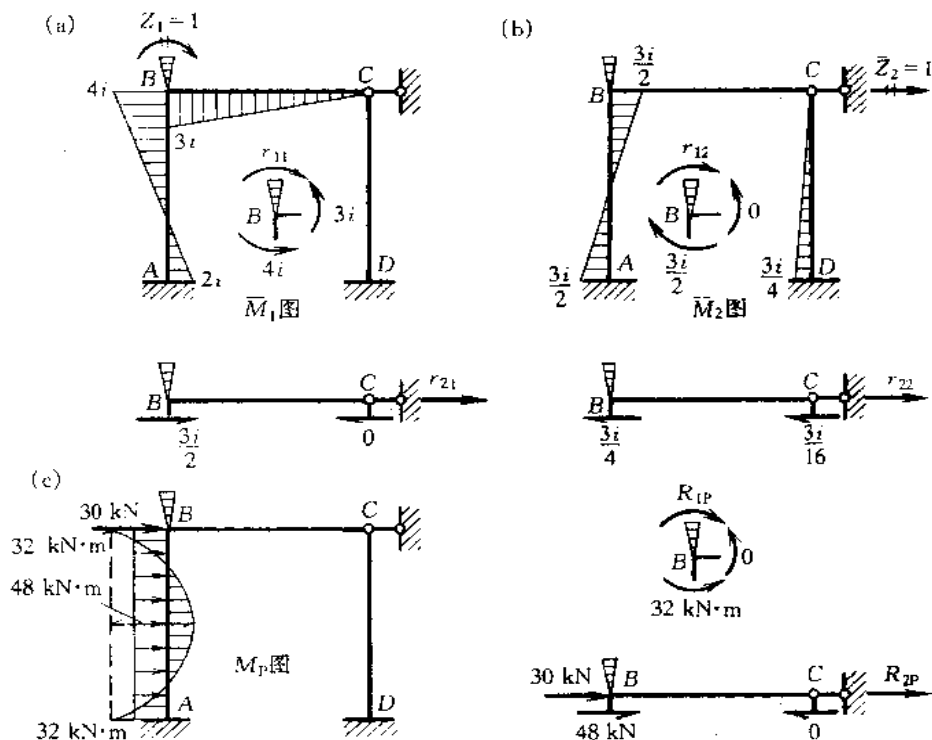


图 6-20

最后弯矩图如图 6-13a 所示。再截取各杆为隔离体利用平衡条件可求得各杆杆端剪力;截取各结点为隔离体利用平衡条件可求得各杆轴力。剪力图及轴力图分别如图 6-13b、c 所示(参见例 6-1)。

由上所述,采用位移法的基本体系替代原结构进行求解的步骤可归纳如下:

1. 在原结构上加入附加约束,阻止刚结点的转动和各结点的移动,从而得出一个由若干单跨超静定梁组成的组合体系作为基本结构。
2. 使基本结构承受与原结构同样的荷载,并令各附加约束发生与原结构相同的位移。然后根据此基本体系各附加约束上的反力矩或反力为零的条件,建立位移法典型方程。为此需要:
 - (1) 分别绘出基本结构由于每一附加约束发生单位位移时的 \bar{M}_i 图和原有荷载作用下的 M_P 图。

(2) 利用平衡条件求出各系数及自由项。

3. 解算位移法典型方程, 求出结点位移基本未知量。

4. 按叠加原理绘制最后弯矩图, 再由平衡条件求出各杆杆端剪力和轴力, 作出剪力图和轴力图。

最后, 将力法与本节介绍的位移法作一比较, 以加深理解。

1. 利用力法或位移法计算超静定结构时, 都必须同时考虑静力平衡条件和变形协调条件, 才能确定结构的受力与变形状态。

2. 力法以多余未知力作为基本未知量, 其数目等于结构的多余约束数目(即超静定次数)。位移法以结构独立的结点位移作为基本未知量, 其数目与结构的超静定次数无关。

3. 力法的基本结构是从原结构中去掉多余约束后所得到的静定结构。位移法的基本结构则是在原结构中加入附加约束, 以控制结点的独立位移后所得的单跨超静定梁的组合体系。

4. 在力法中, 求解基本未知量的方程是根据原结构的位移条件建立的, 体现了原结构的变形协调。在位移法中, 求解基本未知量的方程是根据原结构的平衡条件建立的, 体现了原结构的静力平衡。

注意到力法典型方程中的系数表示单位力(广义单位力)在力法基本结构上所引起的某种位移。(广义位移)此方程中各系数都可称为柔度系数, 其系数矩阵称为柔度矩阵。位移法典型方程中的系数表示发生单位位移(广义单位位移)时在位移法基本结构的某附加约束上所需施加的力(广义力), 此方程中各系数都可称为刚度系数, 其系数矩阵称为刚度矩阵。因此, 在结构矩阵分析中, 又将矩阵力法称为柔度法, 将矩阵位移法称为刚度法。

思考题

1. 位移法的基本思路是什么? 为什么说位移法是建立在力法的基础之上的?

2. 位移法的典型方程是平衡方程, 那么在位移法中是否只用平衡条件就可以确定基本未知量从而确定超静定结构的内力? 在位移法中满足了结构的位移条件(包括支承条件和变形协调条件)没有? 在力法中又是怎样满足结构的位移条件和平衡条件的?

3. 在什么条件下独立的结点线位移数目等于使与结构相应的铰结体系成为几何不变所需添加的最少链杆数?

4. 试用位移法解算杆件结构时, 为什么能够取结点位移作为基本未知量?

5. 试对照建立位移法基本方程的两种不同途径, 说明其相互间的内在联系与不同之点?

6. 力法与位移法在原理与步骤上有何异同? 试将二者从基本未知量、基本结构、基本体系、典型方程的意义、每一系数和自由项的含义和求法等方面作一全面比较。

7. 在什么情况下求内力时可采用各杆刚度的相对值? 求结点位移时能否采用各杆刚度的相对值?

8. 试证明: 对于无侧移(即无结点线位移)刚架, 当只承受结点集中荷载时, 弯矩为零。

9. 试用位移法解算图 6-21 所示排架:

(1) 若只允许利用等截面直杆的转角位移方程, 则应如何取基本结构?

(2) 若只取柱顶水平线位移为基本未知量, 则应先解决什么问题?

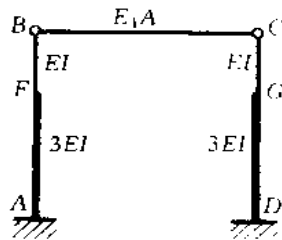
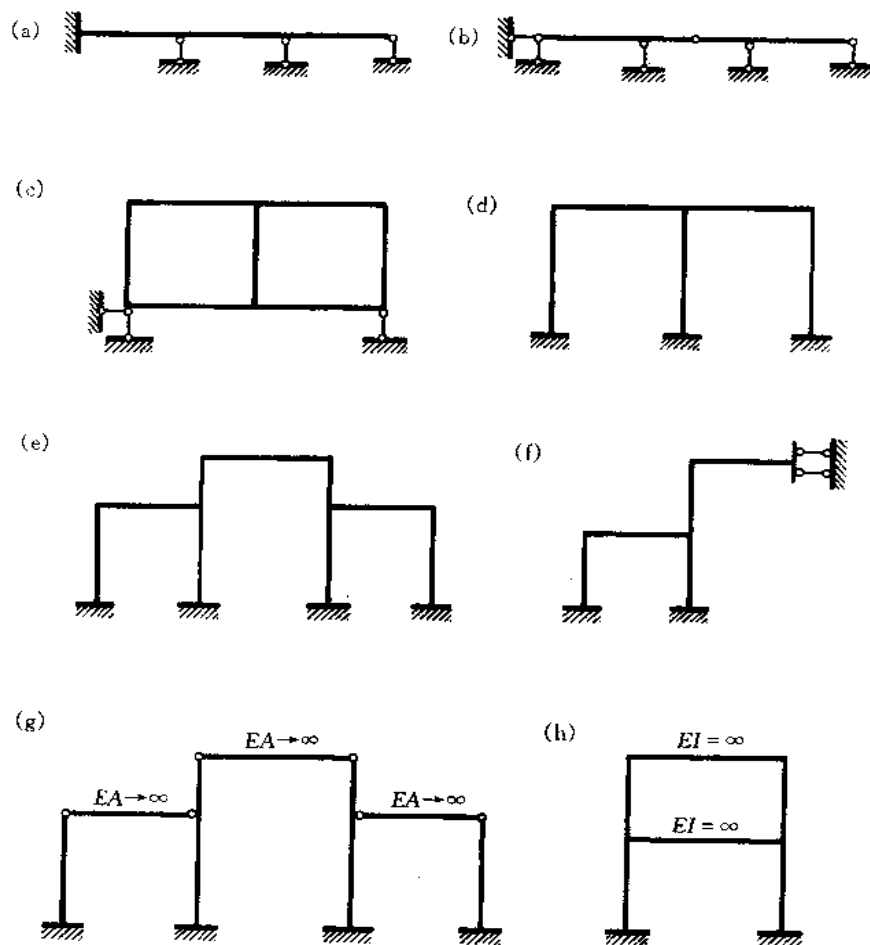


图 6-21

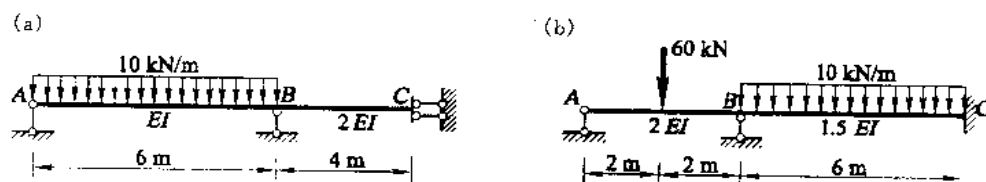
习 题

6-1 试确定下列结构用位移法计算时的基本未知量。



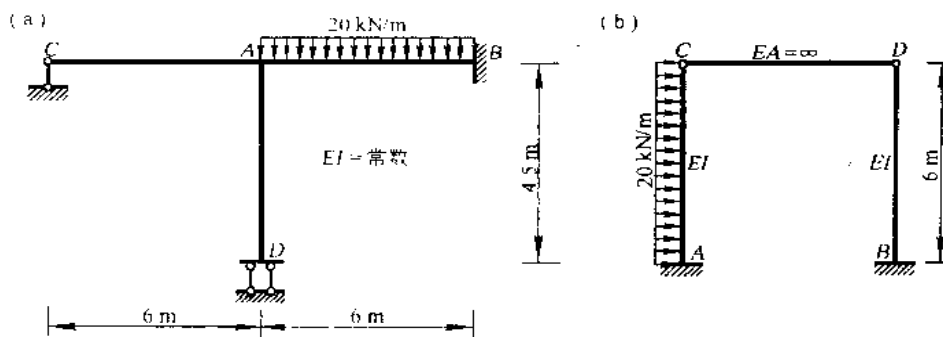
题 6-1 图

6-2 试用位移法计算图示连续梁,并绘出其弯矩图和剪力图。



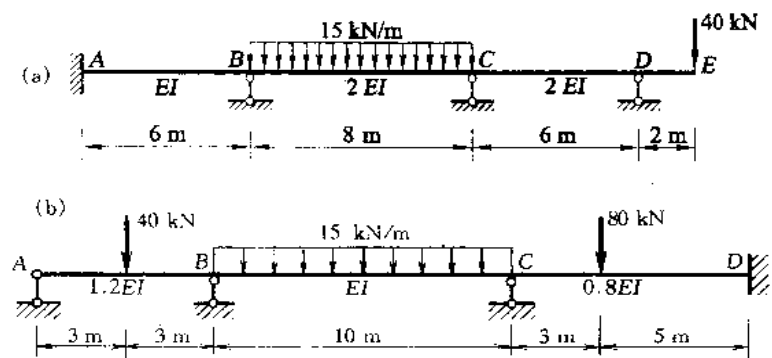
题 6-2 图

6-3 试用位移法计算图示刚架,并绘出其弯矩图和剪力图。



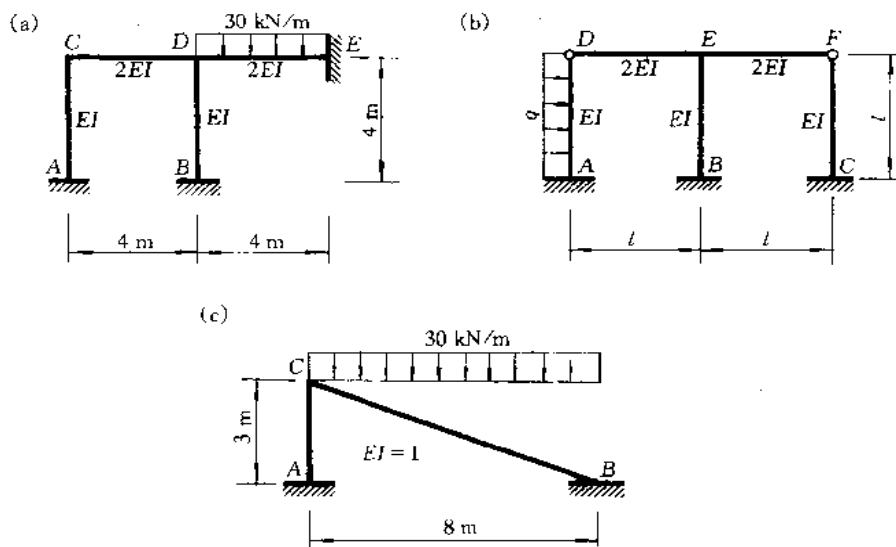
题 6-3 图

6-4 试用位移法计算图示连续梁,并绘出其弯矩图。



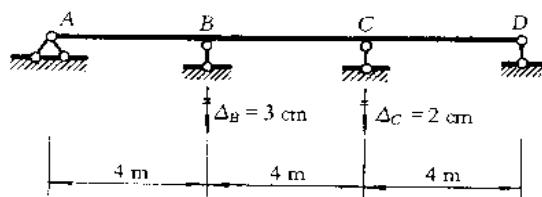
题 6-4 图

6-5 试用位移法计算图示刚架,并绘出其内力图。



题 6-5 图

6-6 试用位移法计算图示等截面连续梁,梁的抗弯刚度 $EI = 17\,500 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$,支座 B 下沉 3 cm ,支座 C 下沉 2 cm ,画出梁的弯矩图。



题 6-6 图

部分答案

6-2 (a) $M_{BA} = 22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$; (b) $M_{BA} = 36.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$

6-3 (a) $M_{AB} = -31.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$; (b) $M_{AC} = -225 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $F_{QAC} = 97.5 \text{ kN}$

6-4 (a) $M_{BA} = 47.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{CB} = 37.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$; (b) $M_{BA} = 100.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{CD} = -118.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{DC} = 43.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$

6-5 (a) $M_{DE} = -\frac{160}{7} \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{ED} = \frac{340}{7} \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{BD} = \frac{30}{7} \text{ kN}\cdot\text{m}$; (b) $M_{AD} = -\frac{11}{56} ql^2$, $M_{DE} = -\frac{1}{8} ql^2$, $M_{CF} = -\frac{1}{14} ql^2$; (c) $M_{AC} = 59.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $F_{Ar} = 59.2 \text{ kN}(\rightarrow)$, $M_{BC} = 180.79 \text{ kN}\cdot\text{m}$

6-6 $M_{BA} = -65.625 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{CD} = 0$

第七章 力矩分配法

§ 7-1 概 述

力矩分配法主要用于连续梁和无结点线位移刚架的计算,其特点是不需要建立和解算联立方程组,可以在其计算简图上进行计算,或者列表进行计算,并能直接求得各杆杆端弯矩。此方法采用轮流放松各结点的办法,使各刚结点逐步达到平衡。计算过程按照重复、机械的步骤进行。随着计算轮数的增加,结果将越来越接近真实的解答,所以属渐近法。由于力矩分配法的物理意义清楚,便于掌握,且适合手算,故仍是工程计算中常用的方法。

在本章中,关于杆端弯矩正负符号的规定,仍与 § 5-8 中的规定相同,即对杆端而言,弯矩以顺时针方向为正,反之为负;对结点而言,则以逆时针方向为正,反之为负。关于结点的转角,则以顺时针方向为正,反之为负。

§ 7-2 力矩分配法的基本概念

首先解释力矩分配法中所使用的几个名词。

一、转动刚度 S

图 7-1a 所示杆件 AB, A 端为铰支座, B 端为固定支座。当使 A 端转动单位角度 $\varphi = 1$ 时,在 A 端所需施加的力矩称为 AB 杆在 A 端的转动刚度,并用 S_{AB} 表示,其中第一个下标代表施力端或称近端,第二个下标代表远端。由于杆件受力情况只与杆件所承受的荷载和杆端位移有关,故图 7-1a 所示 AB 杆的变形和受力情况,与图 7-1b 所示两端固定梁当 A 端转动单位角度 $\varphi = 1$ 时的情况 (a)

相同。因此,图 7-1a 的转动刚度 S_{AB} 等于图 7-1b 中 A 端所产生的弯矩 M_{AB} 。对于等截面杆件,由表 5-1 可知

$M_{AB} = \frac{4EI}{l} = 4i_c$ 因此,图 7-1a 所示 AB 杆 A 端的转动刚度 $S_{AB} = 4i$ 。当远端为不同支承情况时,等截面直杆施力端的转动刚度 S_{AB} 的数值见表 7-1 所示。

由表 7-1 可见,等截面直杆杆端的转动刚度与该杆的线刚度和远端的支承情况有关。杆件的 i 值越大(即 EI 越大或 l 越小),杆端的转动刚度就越大。这时欲使杆端转动一单位角度所需施加的力矩就越大。所以,杆端的

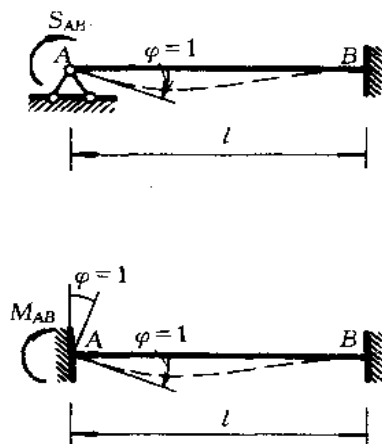
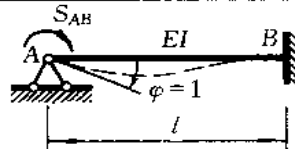
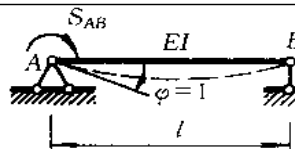
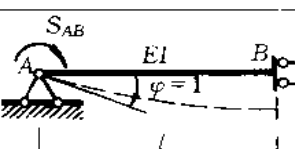


图 7-1

转动刚度即表示杆端抵抗转动的能力。

表 7-1 等截面直杆的杆端转动刚度

简 图	A 端转动刚度	说 明
	$S_{AB} = \frac{4EI}{l} = 4i$	远端固定
	$S_{AB} = \frac{3EI}{l} = 3i$	远端铰支
	$S_{AB} = \frac{EI}{l} = i$	远端定向支承

二、分配系数 μ

设有图 7-2a 所示由等截面杆件组成的刚架, 只有一个刚结点 1, 它只能转动不能移动。当有外力矩 M 加于结点 1 时, 刚架发生如图中虚线所示的变形, 各杆的 1 端均发生转角 φ_1 , 试求杆端弯矩 M_{12} 、 M_{13} 、 M_{14} 、 M_{15} 。

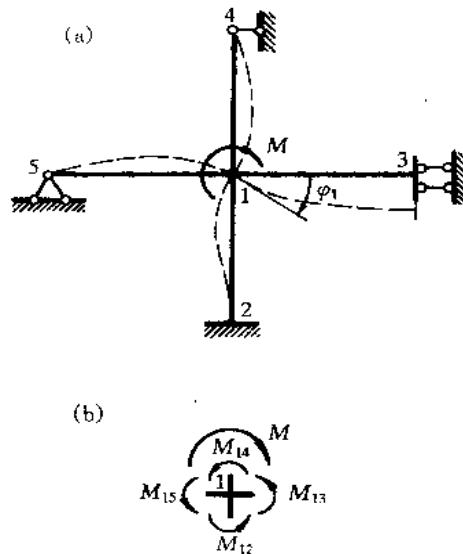


图 7-2

由转动刚度的定义可知:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= S_{12} \varphi_1 = 4i_{12} \varphi_1 \\ M_{13} &= S_{13} \varphi_1 = i_{13} \varphi_1 \\ M_{14} &= S_{14} \varphi_1 = 3i_{14} \varphi_1 \\ M_{15} &= S_{15} \varphi_1 = 3i_{15} \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

利用结点 1(图 7-2b)的力矩平衡条件得

$$M = M_{12} + M_{13} + M_{14} + M_{15} = (S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15}) \varphi_1$$

所以

$$\varphi_1 = \frac{M}{S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15}} = \frac{M}{\sum_{(1)} S}$$

其中 $\sum_{(1)} S$ 为汇交于结点 1 的各杆件在 1 端的转动刚度之和。

将所求得的 φ_1 代入式(a),得

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{S_{12}}{\sum_{(1)} S} M \\ M_{13} &= \frac{S_{13}}{\sum_{(1)} S} M \\ M_{14} &= \frac{S_{14}}{\sum_{(1)} S} M \\ M_{15} &= \frac{S_{15}}{\sum_{(1)} S} M \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

式(b)表明,各杆近端产生的弯矩与该杆杆端的转动刚度成正比,转动刚度越大,则所产生的弯矩越大。

设
$$\mu_{1j} = \frac{S_{1j}}{\sum_{(1)} S} \quad (7-1)$$

式中的下标 j 为汇交于结点 1 的各杆之远端,在本例中即为 2、3、4、5。于是,式(b)可写成

$$M_{1j} = \mu_{1j} M \quad (7-2)$$

μ_{1j} 称为各杆件在近端的分配系数。汇交于同一结点的各杆杆端的分配系数之和应等于 1,即

$$\sum_{(1)} \mu_{1j} = \mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14} + \mu_{15} = 1$$

由上述可见,加于结点 1 的外力矩 M ,按各杆杆端的分配系数分配给各杆的近端。因而杆端弯矩 M_{1j} 称为分配弯矩。

三、传递系数 C

在图 7-2a 中,当外力矩 M 加于结点 1 时,该结点发生转角 φ_1 ,于是各杆的近端和远端都将产生杆端弯矩。由表 5-1 可得这些杆端弯矩分别为

$$\begin{aligned} M_{12} &= 4i_{12} \varphi_1, & M_{21} &= 2i_{12} \varphi_1 \\ M_{13} &= i_{13} \varphi_1, & M_{31} &= -i_{13} \varphi_1 \\ M_{14} &= 3i_{14} \varphi_1, & M_{41} &= 0 \\ M_{15} &= 3i_{15} \varphi_1, & M_{51} &= 0 \end{aligned}$$

将远端弯矩与近端弯矩的比值称为由近端向远端的传递系数,并用 C_{ij} 表示。而将远端弯矩称为传递弯矩。例如,对杆 12 而言,其传递系数和传递弯矩分别为

$$C_{12} = \frac{M_{21}}{M_{12}} = \frac{1}{2}, \quad M_{21} = C_{12} M_{12} = \frac{1}{2} \times 4i_{12} \varphi_1 = 2i_{12} \varphi_1$$

也就是说,传递弯矩按下式计算:

$$M_{ji} = C_{ij} M_{ij} \quad (7-3)$$

传递系数 C 随远端的支承情况而异。对等截面直杆来说,各种支承情况下的传递系数为

$$\text{远端固定: } C = \frac{1}{2}$$

$$\text{远端定向支承: } C = -1$$

$$\text{远端铰支: } C = 0$$

由前述可知,对于图 7-2a 所示只有一个刚结点的结构,在刚结点上受一力矩 M 作用,则该结点只产生角位移,其解算过程分为两步:首先,按各杆的分配系数求出各杆件的近端弯矩,又称为分配弯矩,这一步称为分配过程;其次,将近端弯矩乘以传递系数便得远端弯矩,又称为传递弯矩,这一步称为传递过程。经过分配和传递便得出了各杆的杆端弯矩,这种求解方法称为力矩分配法。

承受一般荷载作用的只具有一个刚结点的结构,也可用力矩分配法进行计算。如图 7-3a 所示连续梁,在图示荷载作用下,其变形如图中虚线所示。计算时,首先在结点 B 加上一个附加刚臂,使结点 B 不能转动,于是得到一个由单跨超静定梁组成的基本结构(图 7-3b)。将原结构的荷载作用在基本结构上,这时,各杆件的杆端产生固端弯矩。本例的 BC 跨因无荷载作用,所以 $M_{BC}^F = 0$ 。在基本结构的结点 B 处,各杆的固端弯矩不能互相平衡,故附加刚臂必产生约束力矩 M_B^F ,其值可由图 7-3b 所示结点 B 的力矩平衡条件求得

$$M_B^F = M_{BA}^F + M_{BC}^F$$

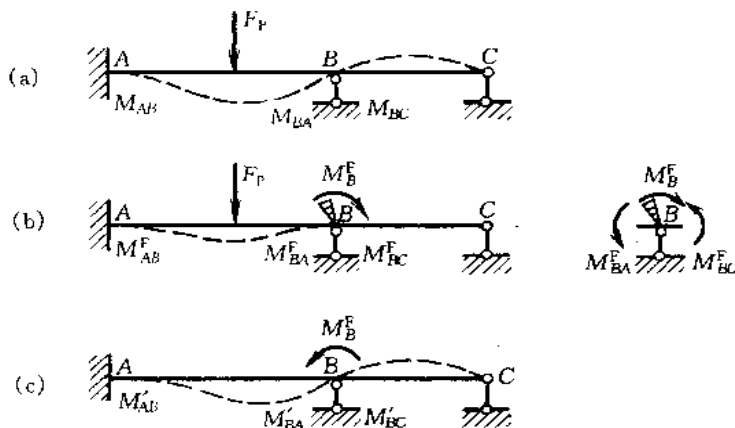


图 7-3

约束力矩 M_B^F 称为结点 B 上的不平衡力矩,它等于汇交于该结点的各杆端的固端弯矩之代数和,以顺时针方向为正。

在连续梁的结点 B , 原来没有刚臂, 也没有约束力矩 M_B^F 作用。因此, 图 7-3b 的杆端弯矩并不是结构在实际状态下的杆端弯矩, 必须对此结果加以修正。为此, 我们放松结点 B 处的刚臂, 消除约束力矩 M_B^F 的作用, 使梁回复到原来的状态(图 7-3a)。这一过程相当于在结点 B 加一个外力矩, 其值等于约束力矩 M_B^F , 但方向与约束力矩相反(图 7-3c)。将图 7-3b 和图 7-3c 所示两种情况相叠加, 就消去了约束力矩, 也就是消去了刚臂的约束作用, 得到图 7-3a 所示原结构的情况。将图 7-3b 和图 7-3c 所示的杆端弯矩叠加, 就是我们所要求的杆端弯矩。例如 $M_{BA} = M_{BA}^F + M'_{BA}$ 。

图 7-3c 中的各杆端弯矩可按前述方法求得。在结点 B 处, 各杆端弯矩即为分配弯矩, 按式(7-2)计算。各杆的远端将产生传递弯矩, 按式(7-3)计算。应注意, 在计算分配弯矩时, 须将式(7-2)中的 M 代以 $-M_B^F$, 即 M 值等于不平衡力矩反号。

用力矩分配法计算的要点是: 先在刚结点 B 加上附加刚臂, 把原结构分成若干单跨超静定梁, 求出各杆端产生的固端弯矩。汇交于结点 B 处的各杆固端弯矩之代数和即为该结点的不平衡力矩 M_B^F 。按式(7-1)计算汇交于结点 B 各杆杆端的分配系数。将不平衡力矩反号乘以各杆端的分配系数即得近端的分配弯矩, 再将分配弯矩乘以传递系数, 便得到远端的传递弯矩。各杆端的最后弯矩等于该端的固端弯矩与该端的分配弯矩或传递弯矩之和。可见, 具有一个刚结点的结构, 且该结点只能转动时, 用力矩分配法计算是简便的, 而且得到的是精确解答。

【例 7-1】 试用力矩分配法计算图 7-4a 所示的两跨连续梁, 绘出梁的弯矩图和剪力图, 并计算各支座反力。

解: 计算过程通常在梁的下方列表进行。为了便于学习, 现将各栏的计算说明如下:

1. 计算结点 B 处各杆端的分配系数

转动刚度为

$$S_{BA} = 3 \times \frac{2EI}{12} = 0.5EI$$

$$S_{BC} = 4 \times \frac{EI}{8} = 0.5EI$$

所以

$$\mu_{BA} = \frac{0.5}{0.5+0.5} = 0.5$$

$$\mu_{BC} = \frac{0.5}{0.5+0.5} = 0.5$$

且

$$\mu_{BA} + \mu_{BC} = 0.5 + 0.5 = 1$$

可见汇交于结点 B 两杆端的分配系数之和等于 1。

将分配系数记在图 7-4a 第(1)栏的方框内。

2. 按表 5-1 计算固端弯矩

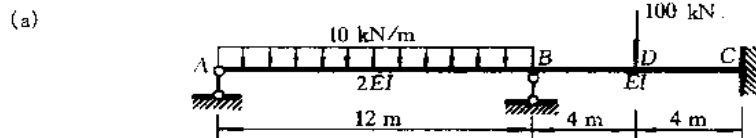
此时认为刚结点 B 不能转动, 即各杆成为单跨超静定梁在荷载作用下的情况。于是可得

$$M_{AB}^F = 0$$

$$M_{BA}^F = \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8} \times 10 \times 10^3 \times 12^2 = 180 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{1}{8} F_P l = -\frac{1}{8} \times 100 \times 10^3 \times 8 = -100 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = -100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{1}{8} F_P l = \frac{1}{8} \times 100 \times 10^3 \times 8 = 100 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(1)	分配系数		0.5	0.5	
(2)	固端弯矩	0	180	-100	100
(3)	分配与传递	0	-40	-40	-20
(4)	最后弯矩	0	140	-140	80

弯矩单位 $\text{kN} \cdot \text{m}$

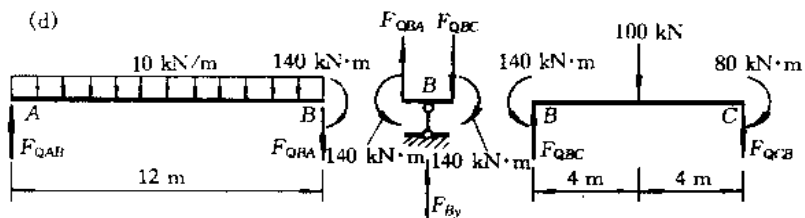
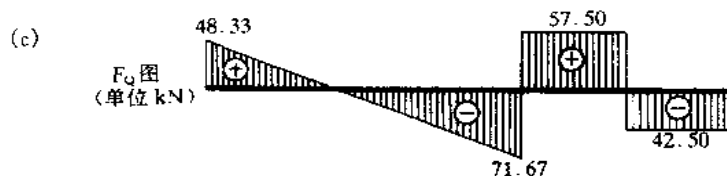
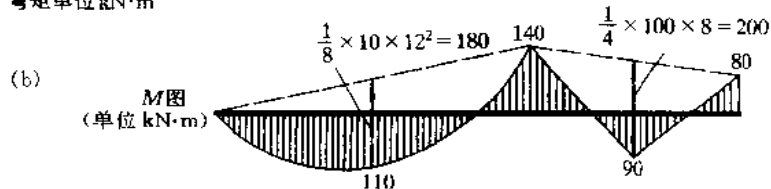


图 7-4

将各固端弯矩记在图 7-4a 的第(2)栏内,并得出结点 B 的不平衡力矩为

$$M_B^F = M_{BA}^F + M_{BC}^F = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3. 计算分配弯矩与传递弯矩

分配弯矩为

$$M_{BA} = 0.5 \times (-80 \times 10^3) = -40 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = 0.5 \times (-80 \times 10^3) = -40 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

传递弯矩为

$$M_{CB} = C_{BC}M_{BC} = \frac{1}{2} \times (-40 \times 10^3) = -20 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AB} = C_{BA}M_{BA} = 0 \times (-40 \times 10^3) = 0$$

将它们记在图 7-4a 的第(3)栏内,并在结点 B 的分配弯矩下划一横线,表示该结点已达到平衡。在分配弯矩与传递弯矩之间划一水平方向的箭头,表示弯矩传递方向。

4. 计算杆端最后弯矩

将以上结果相加,即得最后弯矩,记在图 7-4a 的第(4)栏内。

由 $140 \times 10^3 + (-140 \times 10^3) = 0$ 可知满足结点 B 的力矩平衡条件 $\sum M_B = 0$ 。

5. 根据各杆杆端的最后弯矩即可利用叠加法作出连续梁的弯矩图,如图 7-4b 所示。

6. 由图 7-4d 所示隔离体的平衡条件,即可算得各杆的杆端剪力和梁的支座反力如下:

$$F_{QAB} = 48.33 \text{ kN}, \quad F_{QBA} = -71.67 \text{ kN}$$

$$F_{QBC} = 57.50 \text{ kN}, \quad F_{QCB} = -42.50 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 48.33 \text{ kN}(\uparrow), \quad F_{By} = 129.17 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$F_{Cy} = 42.50 \text{ kN}(\uparrow)$$

剪力图如图 7-4c 所示。

[例 7-2] 试用力矩分配法计算图 7-5 所示刚架的各杆端弯矩。

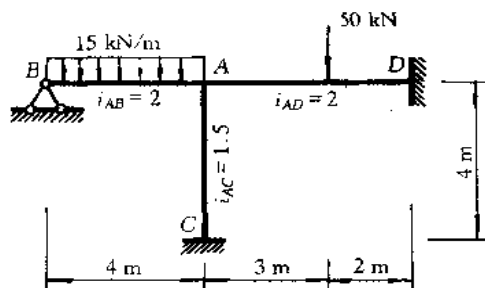


图 7-5

解:按式(7-1)算出各杆端的分配系数:

$$\mu_{AB} = \frac{3 \times 2}{3 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 1.5} = 0.3$$

$$\mu_{AD} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 1.5} = 0.4$$

$$\mu_{AC} = \frac{4 \times 1.5}{3 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 1.5} = 0.3$$

按表 5-1 算出各杆的固端弯矩:

$$M_{AB}^F = \frac{1}{8} \times 15 \times 10^3 \times 4^2 = 30 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AD}^F = -\frac{50 \times 10^3 \times 3 \times 2^2}{5^2} = -24 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -24 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DA}^F = \frac{50 \times 10^3 \times 3^2 \times 2}{5^2} = 36 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

用力矩分配法计算刚架时,可列成表格进行,如表 7-2 所示。

表 7-2 杆端弯矩的计算

结 点	B	A			D	C
杆 端	BA	AB	AC	AD	DA	CA
分配系数		0.3	0.3	0.4		
固端弯矩	0	30	0	-24	36	0
分配弯矩和传递弯矩	0	-1.80	-1.80	-2.40	-1.20	-0.90
最后弯矩	0	28.20	-1.80	-26.40	34.80	-0.90

弯矩单位 kN·m

§ 7-3 用力矩分配法计算连续梁和无结点线位移的刚架

上面以只有一个结点转角的结构说明了力矩分配法的基本原理。对于具有多个结点转角但无结点线位移(简称无侧移)的结构,只需依次对各结点使用上节所述方法便可求解。作法是:先将所有刚结点固定,计算各杆固端弯矩;然后将各刚结点轮流放松,即每次只放松一个结点,其他结点仍暂时固定,这样把各刚结点的不平衡力矩轮流进行分配与传递,直到传递弯矩小到可略去时为止。这种计算杆端弯矩的方法属于渐近法。下面结合具体例子说明。

图 7-6 所示三跨等截面连续梁,在荷载作用下,两个中间结点 B、C 将发生转角,设想用附加刚臂使结点 B 和 C 不能转动(以下称为固定结点),得出由三根单跨超静定梁组成的基本结构,并可求得各杆的固端弯矩如下:

$$M_{AB}^F = 0, \quad M_{BA}^F = 0$$

$$M_{BC}^F = -\frac{1}{8} \times 400 \times 10^3 \times 6 = -300 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -300 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{1}{8} \times 400 \times 10^3 \times 6 = 300 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 300 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}^F = -\frac{1}{8} \times 40 \times 10^3 \times 6^2 = -180 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -180 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

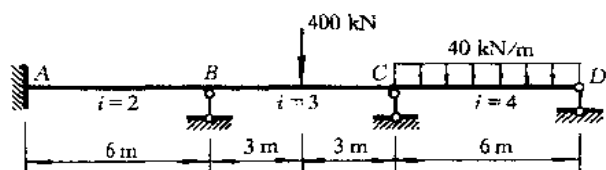
$$M_{DC}^F = 0$$

而 B、C 两结点处的不平衡力矩分别为

$$M_B^F = -300 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C^F = 120 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

为了消去这两个不平衡力矩,设先放松结点 B,而结点 C 仍为固定。此时 ABC 部分即可利



分配系数	0.4		0.6		0.5		0.5	
固端弯矩	0	0	-300	300	-180	0	0	0
B 一次分配传递	60	120	180	90				
C 一次分配传递			-52.5	-105	-105			
B 二次分配传递	10.5	21.0	31.5	15.75				
C 二次分配传递			-3.94	-7.88	-7.88			
B 三次分配传递	0.79	1.58	2.36	1.18				
C 三次分配传递			-0.30	-0.59	-0.59			
B 四次分配传递	0.06	0.12	0.18	0.09				
C 四次分配传递			-0.02	-0.04	-0.04			
B 五次分配传递		0.01	0.01					
最后弯矩	71.35	142.71	-142.71	293.51	-293.51	0	0	0

弯矩单位 $\text{kN}\cdot\text{m}$

图 7-6

用上节所述力矩分配和传递的办法进行计算。为此,需求出汇交于结点 B 的各杆端的分配系数:

$$\mu_{BA} = \frac{4 \times 2}{4 \times 2 + 4 \times 3} = 0.4$$

$$\mu_{BC} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2 + 4 \times 3} = 0.6$$

将不平衡力矩 M_B^F 反号再乘以分配系数,求得结点 B 的各杆端的分配弯矩为

$$M_{BA} = 300 \times 10^3 \times 0.4 = 120 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 120 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = 300 \times 10^3 \times 0.6 = 180 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 180 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

将分配弯矩乘上相应的传递系数求得传递弯矩为

$$M_{AB} = 120 \times 10^3 \times \frac{1}{2} = 60 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = 180 \times 10^3 \times \frac{1}{2} = 90 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

这样,就完成了在结点 B 的第一次分配和传递,将求得的分配弯矩和传递弯矩记入图 7-6 所示表格中的第三行内。通过上述运算,结点 B 暂时得到平衡,在分配弯矩值下面绘一横线表示。

这时,结点 C 仍然存在不平衡力矩,它的数值等于原来在荷载作用下产生的不平衡力矩再加上由于放松结点 B 而传来的传递弯矩,故结点 C 上的不平衡力矩为 $210 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。为消去结点 C 上的这一不平衡力矩,需放松结点 C,但在放松结点 C 之前应将结点 B 重新固定,这样才能在 BCD 部分进行力矩分配和传递。汇交于结点 C 的各杆端的分配系数为

$$\mu_{CB} = \frac{4 \times 3}{4 \times 3 + 3 \times 4} = 0.5$$

$$\mu_{CD} = \frac{3 \times 4}{4 \times 3 + 3 \times 4} = 0.5$$

各杆近端的分配弯矩为

$$M_{CB} = -210 \times 10^3 \times 0.5 = -105 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -105 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = -210 \times 10^3 \times 0.5 = -105 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -105 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

远端的传递弯矩为

$$M_{BC} = -105 \times 10^3 \times \frac{1}{2} = -52.5 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -52.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC} = -105 \times 10^3 \times 0 = 0$$

上述数字都记在表格中的第四行,与连续梁相应杆端对齐,并在分配弯矩值下面绘一横线,表示此时结点 C 也得到暂时的平衡。至此,完成了力矩分配法的第一个循环(或称为第一轮)的计算。但是这时结点 B 上又有了新的不平衡力矩,其数值为 $-52.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$,不过已比前一次的不平衡力矩值($-300 \text{ kN}\cdot\text{m}$)小了许多。按照上述完全相同的步骤,继续依次在结点 B 和结点 C 消去不平衡力矩,则不平衡力矩绝对值愈来愈小。经过若干轮以后,传递弯矩小到可以略去不计时,便可停止进行。此时,结构也就非常接近于真实的平衡状态了。各次计算结果都一一记在图 7-6 的表格中,把每一杆端历次的分配弯矩、传递弯矩和原有的固端弯矩相加便得到各杆端的最后弯矩,其单位为 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

上面叙述的计算方法同样可用于一般无结点线位移的刚架。

力矩分配法的计算过程是依次放松各刚结点以消去结点上出现的不平衡力矩,求得各杆端弯矩的修正值,使结点上出现的不平衡力矩绝对值逐渐减小,直至可以忽略。为了使计算时收敛较快,通常宜从不平衡力矩绝对值较大的结点开始计算。

力矩分配法的计算步骤可归纳如下:

- (1) 在各结点上按各杆端的转动刚度 S_{ik} 计算其分配系数 μ_{ik} ,并确定其传递系数 C_{ik} 。
- (2) 计算各杆的固端弯矩 M_{ik}^F 。
- (3) 依次放松各结点以使弯矩平衡。每平衡一个结点时,按分配系数将不平衡力矩反号分配于各杆近端,然后将各杆端所得的分配弯矩乘以传递系数传递至远端。将此步骤重复运用至各杆端的传递弯矩小到可以略去而不需传递时为止。
- (4) 将各杆端的固端弯矩与历次的分配弯矩和传递弯矩相加,即得各杆端的最后弯矩。

【例 7-3】 试用力矩分配法计算图 7-7a 所示等截面连续梁的各杆端弯矩,并作 M 、 F_Q 图。 $EI = \text{常数}$ 。

解: 此梁的悬臂 EF 为一静定部分,这部分的内力根据静力平衡条件便可求得为 $M_{EF} = -40 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $F_{QEF} = 20 \text{ kN}$ 。若将该悬臂部分去掉,而将 M_{EF} 、 F_{QEF} 作为外力作用于结点 E 的右侧(图

7-7b), 这样, 结点 E 便化为铰支端, 整个计算即可按此来考虑。计算各分配系数时, 其中

$$\mu_{DC} = \frac{4 \times \frac{EI}{6}}{4 \times \frac{EI}{6} + 3 \times \frac{EI}{4}} = 0.471$$

$$\mu_{DE} = \frac{3 \times \frac{EI}{4}}{4 \times \frac{EI}{6} + 3 \times \frac{EI}{4}} = 0.529$$

计算固端弯矩时, 对于 DE 杆, 将相当于 D 端固定, E 端铰支的单跨梁, 其中作用在 E 端的集中力为支座直接承受, 在梁内不引起内力, 在铰支端 E 处的力矩作用下, DE 杆的固端弯矩为

$$M_{ED}^F = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}, \quad M_{DE}^F = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

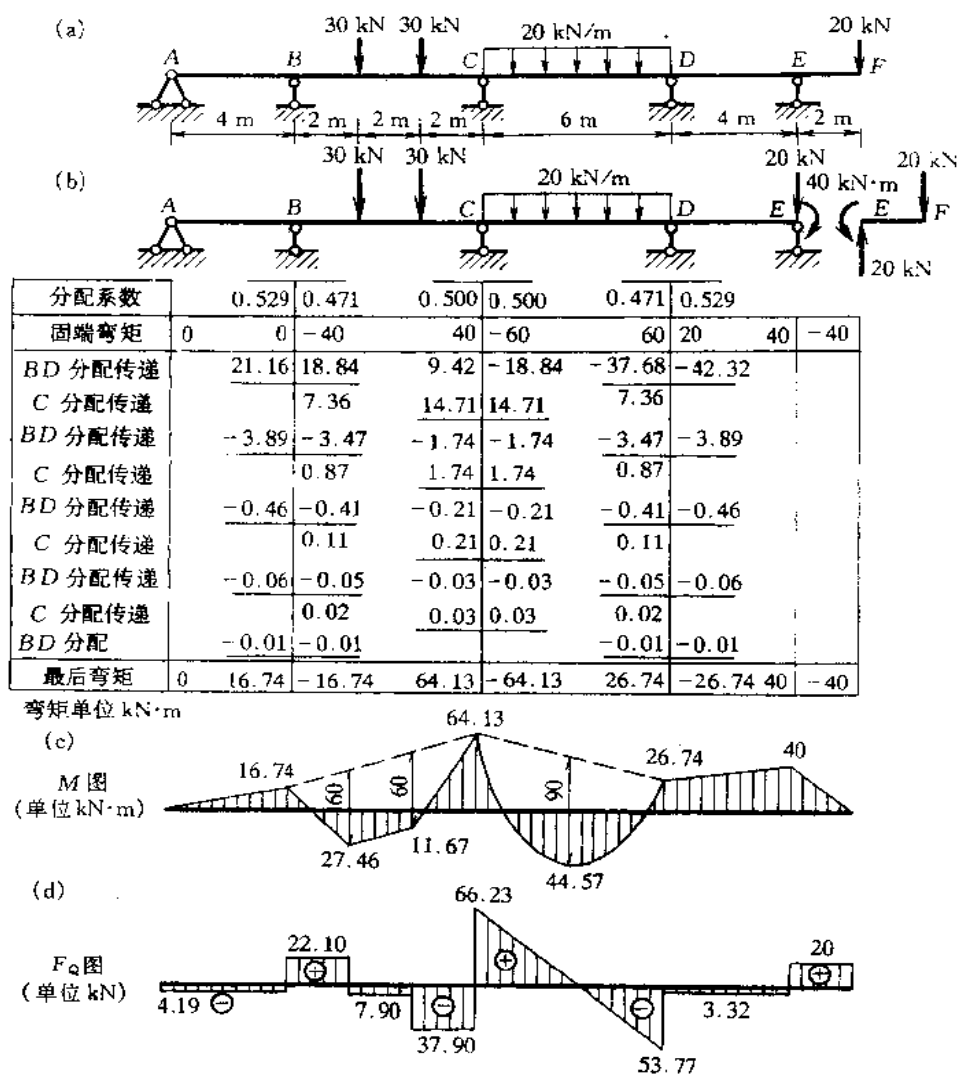


图 7-7

至于其余的固端弯矩可按表 5-1 求得,不赘述。

全部计算过程均列于图 7-7 中,弯矩单位为 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。最后 M 图和 F_Q 图如图 7-7c、d 所示。

[例 7-4] 试用力矩分配法计算图 7-8a 所示刚架,并绘出其弯矩图。 $EI = \text{常数}$ 。

解: 该刚架具有两根对称轴 xx 和 yy , 因为荷载对这两根轴是正对称的, 所以可取结构的四分之一计算(图 7-8b)。

计算分配系数

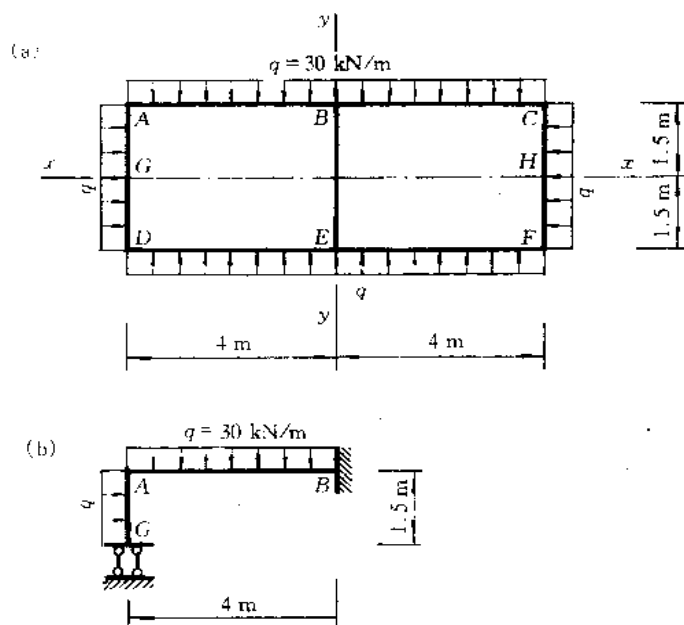


图 7-8

$$S_{AB} = 4i_{AB} = 4 \times \frac{EI}{4} = EI$$

$$S_{AG} = i_{AG} = \frac{EI}{1.5} = \frac{2}{3}EI$$

故

$$\mu_{AB} = \frac{EI}{\frac{2}{3}EI + EI} = 0.6$$

$$\mu_{AG} = \frac{\frac{2}{3}EI}{\frac{2}{3}EI + EI} = 0.4$$

计算固端弯矩

$$M_{GA}^F = \frac{1}{6} \times 30 \times 10^3 \times 1.5^2 = 11.25 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 11.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AG}^F = \frac{1}{3} \times 30 \times 10^3 \times 1.5^2 = 22.5 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AB}^F = -\frac{1}{12} \times 30 \times 10^3 \times 4^2 = -40 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

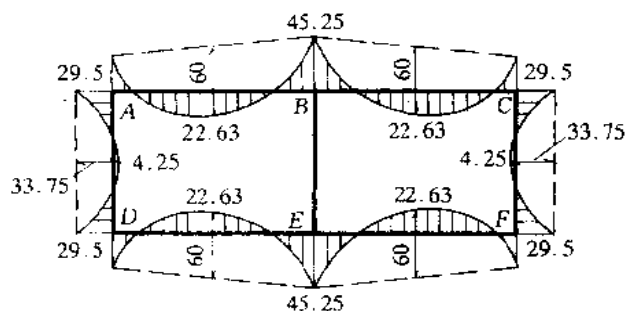
$$M_{BA}^F = \frac{1}{12} \times 30 \times 10^3 \times 4^2 = 40 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

然后按力矩分配法进行计算,计算过程见表 7-3,弯矩的单位为 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。由表 7-3 的计算结果可绘出结构的弯矩图如图 7-9 所示。

表 7-3 杆端弯矩的计算

杆 端	GA	AG	AB	BA
分配系数		0.4	0.6	
固端弯矩	11.25	22.50	-40.00	40.00
分配与传递	-7.00	7.00	10.50	5.25
最后弯矩	4.25	29.50	-29.50	45.25

弯矩单位 $\text{kN}\cdot\text{m}$



M 图(单位 $\text{kN}\cdot\text{m}$)

图 7-9

[例 7-5] 图 7-10a 所示对称的等截面连续梁,支座 B、C 都向下发生 2 cm 的线位移。试用力矩分配法计算该结构,并作出其弯矩图。已知 $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ 。

解:由于结构对称,外因也是正对称的,故可取结构的一半(图 7-10b)进行分析。

杆端转动刚度为

$$S_{BA} = 3 \times \frac{EI}{4} = 0.75EI, \quad S_{BE} = \frac{EI}{2} = 0.5EI$$

分配系数

$$\mu_{BA} = \frac{0.75EI}{0.75EI + 0.5EI} = 0.6$$

$$\mu_{BE} = \frac{0.5EI}{0.75EI + 0.5EI} = 0.4$$

当结点 B 被固定时,由于 B 支座沉陷,将在杆端引起固端弯矩

$$M_{BA}^F = -\frac{3EI}{l^2} \Delta = -\frac{3 \times 200 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}}{4^2} \times 2 \times 10^{-2} = -3 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m} = -300 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AB}^F = 0, \quad M_{BE}^F = 0, \quad M_{ED}^F = 0$$

其余计算见图 7-10b, 弯矩图如图 7-10c 所示。

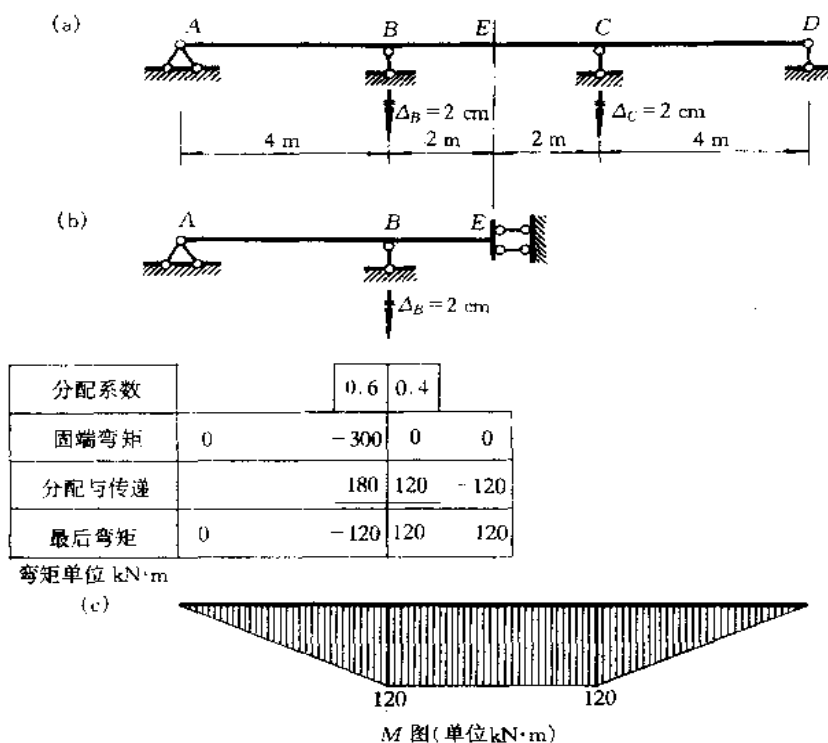


图 7-10

§ 7-4 超静定结构的受力和变形特点

一、超静定结构的特性

1. 超静定结构具有多余约束

从几何组成看, 多余约束的存在, 是超静定结构区别于静定结构的主要特征。由于具有多余约束, 相应地就有多余未知力, 因此超静定结构的反力和内力仅凭静力平衡条件不能唯一确定, 只有在考虑变形协调条件后才能得到唯一解答。

2. 超静定结构在撤除多余约束后, 仍可维持几何不变性。

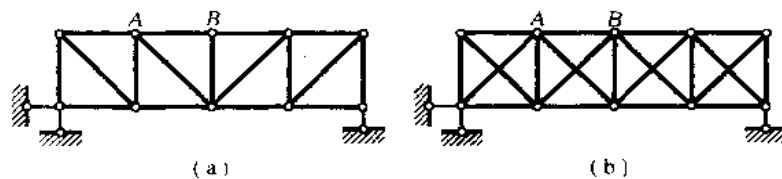


图 7-11

静定结构是几何不变且无多余约束的体系,若撤除任何一个约束,它就成为几何可变的机构,因而失去了承载能力。如图 7-11a 的静定桁架,若任意一根杆件(如 AB 杆)被破坏,即成为机构。

超静定结构则不然,当撤除部分或全部多余约束后,它仍为几何不变体系。例如图 7-11b 所示超静定桁架,若任意一根桁架杆件(如 AB 杆)被破坏时,仍为几何不变体系,因而还有一定的承载能力。与静定结构相比较,超静定结构具有较强的防护能力。

3. 超静定结构的内力和变形分布比较均匀

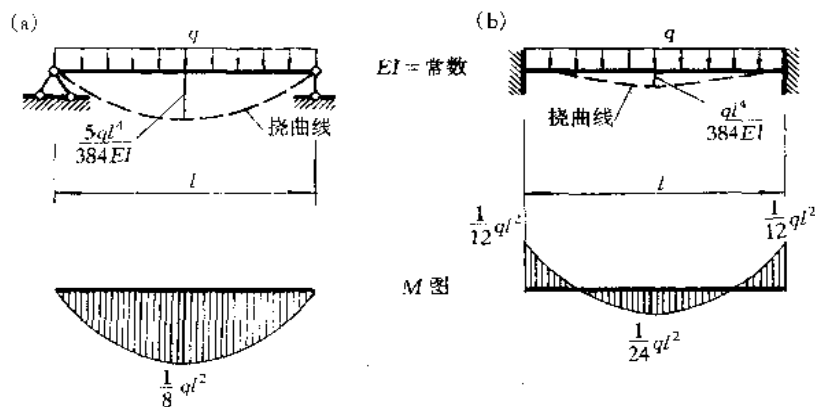


图 7-12

在荷载、跨度、刚度、结构类型相同的情况下,超静定结构的最大内力和位移一般小于静定结构的相应数值。如图 7-12b 所示的等截面两端固定梁与相应的简支梁(图 7-12a)比较,其弯矩分布均匀,峰值较小,最大挠度仅为后者的 $\frac{1}{5}$ 。

再如图 7-13a 所示三跨连续梁,从中跨荷载 F_P 作用下的弯矩图和变形曲线可以看出,由于两个边跨的支承作用,所产生的弯矩和变形都比较均匀;但对图 7-13b 所示的多跨静定梁,当承受同样中跨荷载 F_P 时,两个边跨由于中间铰的存在,不能起到支承作用,所以它的弯矩和变形分布就远没有图 7-13a 所示的连续梁均匀。一般来说,由于超静定结构各部分的相互支承,它的内力和变形分布都较均匀,这种特性从结构设计角度来说是有利的。

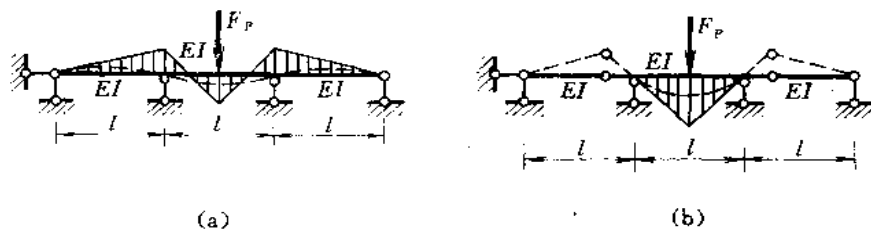


图 7-13

4. 超静定结构在荷载作用下的反力和内力,仅与各杆的相对刚度有关

静定结构的内力和反力只按静力平衡条件即可确定,其值与结构的材料性质和截面尺寸无关。超静定结构的全部反力和内力如只按静力平衡条件则无法确定,还必须同时考虑变形协调

条件,即各部分的变形必须符合原结构的联结条件和支承条件,才能得出确定的解答。因此,超静定结构的内力状态与结构的材料性质和截面尺寸有关。在荷载作用下,超静定结构的内力只与各杆刚度的相对比值有关,而与其绝对值无关。

由于超静定结构在荷载作用下的内力与各杆刚度比值有关,因此在设计超静定结构时,需根据经验或参考同类结构的已有资料预先假设截面尺寸,定出各杆刚度比值,才能进行内力计算。然后根据内力计算的结果来重新合理选择截面尺寸,若假设截面与设计截面相差悬殊,则需进行必要的调整。

根据这个特点,还可以通过改变杆件间刚度比值的方法,来达到合理调整内力的目的。

图 7-14a 为一次超静定刚架,用力法或位移法可求得横梁端截面的弯矩为

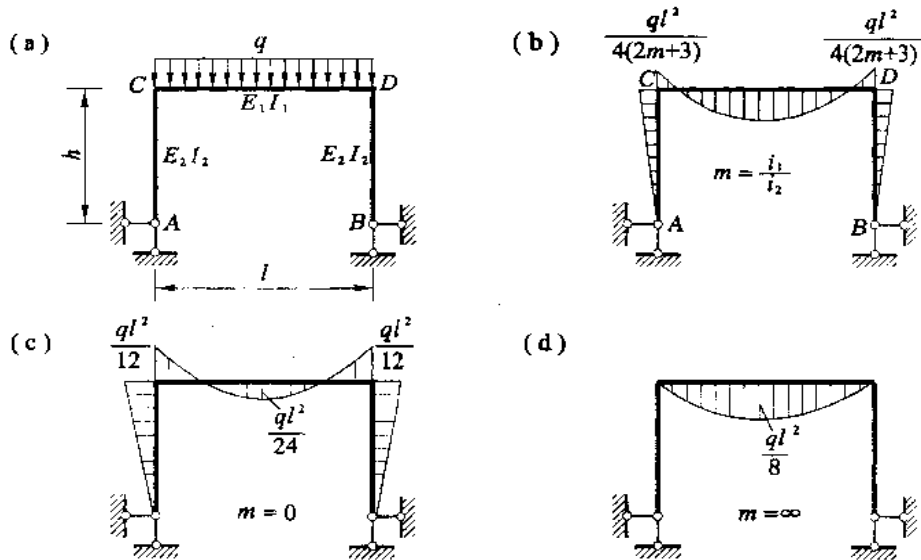


图 7-14

$$M_D = \frac{ql^2}{4(2m+3)}$$

式中 $m = \frac{i_1}{i_2}$, $i_1 = \frac{E_1 I_1}{l}$, $i_2 = \frac{E_2 I_2}{h}$ 。

绘出的弯矩图如图 7-14b 所示。显然,横梁杆端弯矩与梁柱线刚度比值 m 有关。当立柱短而粗,横梁细而长,即 $m \rightarrow 0$ 时,这时横梁的两端接近于固定端,其杆端弯矩值接近 $\frac{1}{12}ql^2$,跨中弯矩趋于 $\frac{1}{24}ql^2$ (图 7-14c),横梁与立柱的弯矩分布不均匀。反之,当立柱细而长,横梁短而粗,即 $m \rightarrow \infty$ 时,横梁接近于两端铰结的简支梁,梁端的弯矩趋于零,跨中弯矩接近于 $\frac{1}{8}ql^2$,弯矩分布更不均匀。上述两种内力状态都不够理想。若适当调整梁柱的截面尺寸(即梁柱的线刚度比值 m),就可改善弯矩的分布,使横梁跨中弯矩与立柱柱顶弯矩大体相等,这样的内力状态是比较合理的。

5. 超静定结构在温度变化和支座位移时会产生内力,且内力与各杆刚度的绝对值有关。

对于静定结构,除荷载外,其他因素如温度变化、支座位移等均不引起内力。但是对于超静

定结构,由于存在着多余约束,当结构受到这些因素影响而发生位移时,都会受到多余约束的限制,因而相应产生内力,而且内力的大小与各杆刚度的绝对值有关。一般来说,各杆刚度绝对值增大,内力也随之增大。

超静定结构的这一特性,在一定条件下会带来不利影响,例如连续梁可能由于地基不均匀沉降而产生过大的附加内力。但是,在另外的情况下又可能成为有利的方面,例如,可以通过改变支座的高度来调整连续梁的内力,以得到更合理的内力分布。超静定结构的这一特性也说明,为了提高结构对温度变化和支座位移的抵抗能力,靠增大截面的尺寸,并不是有效的措施。

二、计算超静定结构的基本方法是力法和位移法

力法和位移法通常都需要建立和求解联立方程,其基本未知量的多少是影响计算工作量的主要因素。因此,一般说来,凡是多余约束多而结点位移少的结构,采用位移法要比力法简便,反之,则力法优于位移法。此外,由于有单跨超静定梁的计算成果,所以在计算典型方程的系数和自由项时,位移法比力法要简单些。

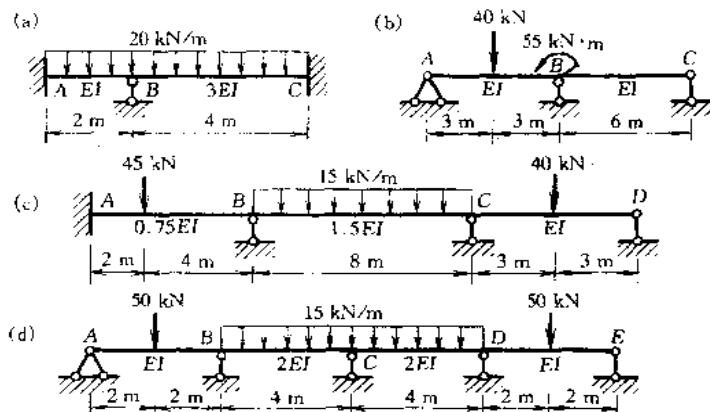
力矩分配法是位移法的变体,它避免了建立和解算联立方程的工作,能直接计算杆端弯矩,又适用于手算。在电子计算机被广泛应用的今天,力矩分配法仍有一定的实用价值。

思考题

1. 什么是转动刚度?什么是分配系数?为什么汇交于同一刚结点处各杆端的分配系数之和等于1?
2. 什么是不平衡力矩?如何计算不平衡力矩?为什么要将它反号才能进行分配?
3. 力矩分配法只适合于计算无结点线位移的结构,当这类结构发生已知支座位移时结点是有线位移的,为什么还可以用力矩分配法计算?
4. 试就图 7-6 中的计算过程说明结点 B 经过了几次放松才消除了不平衡力矩;每一次放松是否都使该结点转动了同样大小的角度?转动的方向是否相同?
5. 对于某一无结点线位移的结构,用力矩分配法求解后,你能提出两种计算其结点角位移的方法吗?
6. 在力矩分配法的计算过程中,若仅是传递弯矩有误,杆端最后弯矩能否满足结点的力矩平衡条件?为什么?

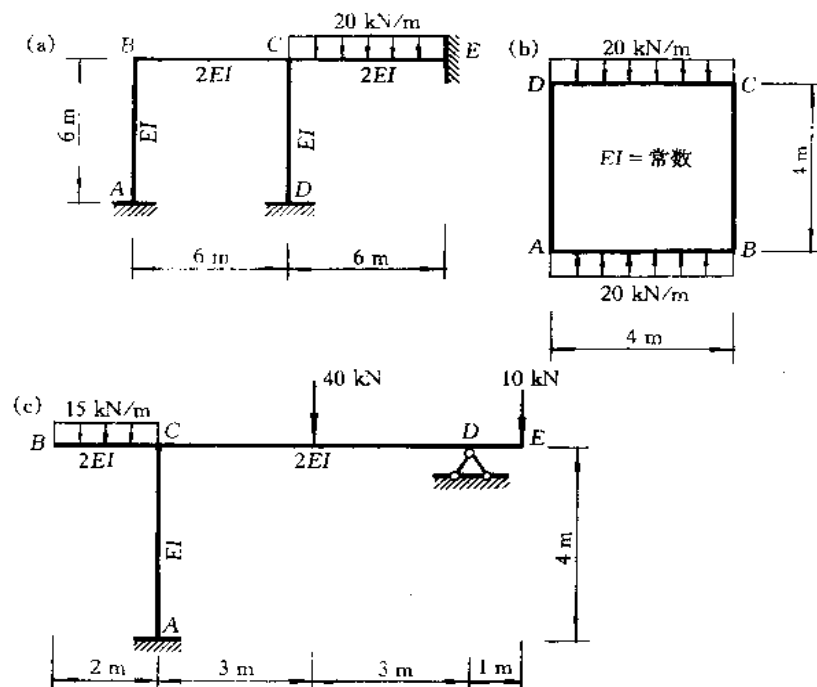
习 题

7-1 试用力矩分配法计算图示连续梁,绘出弯矩图和剪力图,并求支座 B 的反力。



题 7-1 图

7-2 试用力矩分配法计算图示刚架,并绘出弯矩图。



题 7-2 图

7-3 用力矩分配法计算题 5-3b 和 5-2d。

7-4 用力矩分配法计算题 6-6。

部分答案

7-1 (a) $M_{CB} = 32.67 \text{ kN}\cdot\text{m}$; (b) $M_{BA} = -5 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{BC} = -50 \text{ kN}\cdot\text{m}$; (c) $M_{AB} = -24.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{CD} = -68.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$; (d) $M_{BA} = 32.73 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{CD} = -13.64 \text{ kN}\cdot\text{m}$

7-2 (a) $M_{BA} = -4.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{CD} = 12.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{EC} = 72.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$; (b) $M_{AB} = 13.33 \text{ kN}\cdot\text{m}$; (c) $M_{CA} = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{DC} = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$

*第八章 影响线和内力包络图

§ 8-1 影响线的概念

一般的工程结构,除承受恒载外,还将受到各种活载的作用。前面几章讨论结构的内力计算时,荷载的位置是固定不动的,解决了恒载作用下结构的计算问题。当结构受活载作用时,例如桥梁承受行驶的列车、汽车等荷载,厂房中的吊车梁承受吊车荷载等(称为移动荷载),又如结构承受的人群、临时设备、水压力和风压力等荷载(称为可动荷载),结构的反力和内力将随着荷载位置的不同而变化。因此,在结构设计中,必须求出活载作用下结构的反力和内力的最大值。结构在移动荷载作用下,不仅不同的反力和不同截面的内力变化规律各不相同,而且在同一截面上的不同内力(如弯矩、剪力)的变化规律也不相同。例如图 8-1 所示简支梁,当汽车由左向右行驶时,反力 F_{Ay} 将逐渐减小,而反力 F_{By} 将逐渐增大。因此,一次只能研究一个反力或某一个截面的某一项内力的变化规律。显然,要求出某一反力或某一内力的最大值,就必须先确定产生这一最大值的荷载位置,这一荷载位置称为最不利荷载位置。

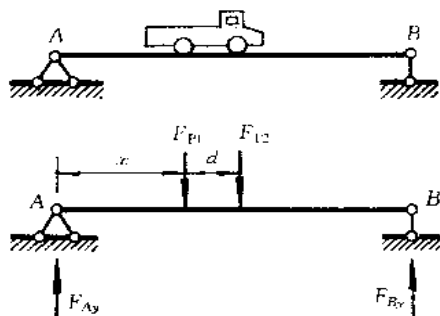


图 8-1

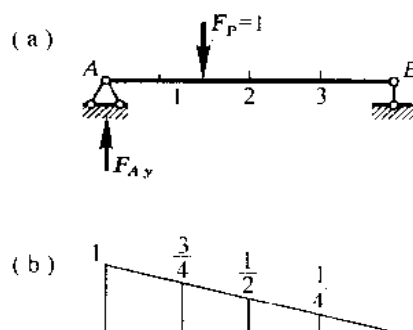


图 8-2

工程实际中的移动荷载通常是由很多间距不变的竖向荷载所组成,而其类型是多种多样的,我们不可能逐一加以研究。为此,可先研究一种最简单的荷载,即一个竖向单位集中荷载 $F_P = 1$ 沿结构移动时,对某一指定量值(例如某一反力或某一截面的某一内力或位移等)所产生的影响,然后根据叠加原理就可进一步研究各种移动荷载对该量值的影响。

例如图 8-2a 所示简支梁,当荷载 $F_P = 1$ 分别移动到 A、1、2、3、B 各等分点时,反力 F_{Ay} 的数值分别为 1 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 0 。如果以横坐标表示荷载 $F_P = 1$ 的位置,以纵坐标表示反力 F_{Ay} 的数值,并将各数值在水平的基线上用竖标绘出,再将各竖标顶点连接起来,这样所得的图形(图 8-2b)就表示了 $F_P = 1$ 在梁上移动时反力 F_{Ay} 的变化规律。这一图形称为反力 F_{Ay} 的影响线。

由上可见,影响线的定义如下:当一个指向不变的单位集中荷载(通常是竖直向下的)沿结构移动时,表示某一指定量值变化规律的图形,称为该量值的影响线。

某量值的影响线一经绘出,就可利用它来确定给定移动荷载的最不利荷载位置,从而求出该量值的最大值。下面先讨论影响线的绘制方法(静力法),然后再讨论影响线的应用。

§ 8-2 用静力法作简支梁的影响线

用静力法绘制影响线时,先把荷载 $F_P = 1$ 放在任意位置,并根据所选坐标系,以 x 表示其作用点的横坐标;然后运用静力平衡条件求出所研究的量值与荷载 $F_P = 1$ 的位置 x 之间的关系。表示这种关系的方程称为影响线方程。根据影响线方程即可作出影响线。

现以图 8-3a 所示简支梁为例来说明。

一、支座反力影响线

设欲绘制反力 F_{Ay} 影响线。为此,将荷载 $F_P = 1$ 作用于距左支座(坐标原点)为 x 处,写出所有力对右支座 B 的力矩方程,并假定反力方向以向上为正,由 $\Sigma M_B = 0$ 有

$$F_{Ay}l - F_P(l - x) = 0$$

由此可得

$$F_{Ay} = \frac{F_P(l - x)}{l} = \frac{l - x}{l}$$

这个方程就表示反力 F_{Ay} 随荷载 $F_P = 1$ 移动而变化的规律。将它绘成函数图形,即得 F_{Ay} 影响线。从所得方程可知 F_{Ay} 是 x 的一次函数,故 F_{Ay} 影响线为一直线。(c) 于是,只需定出两个竖标即可绘出此影响线。

当 $x = 0$ 时, $F_{Ay} = 1$

当 $x = l$ 时, $F_{Ay} = 0$

因此,在左支座处取等于 1 的竖标,以其顶点和右支座处的零点相连,即可绘出 F_{Ay} 影响线(图 8-3b)。

为了绘制反力 F_{By} 影响线,取对左支座 A 的力矩方程 $\Sigma M_A = 0$ 有

$$F_{By}l - F_Px = 0$$

由此可得反力 F_{By} 影响线方程为

$$F_{By} = \frac{x}{l}$$

当 $x = 0$ 时, $F_{By} = 0$

当 $x = l$ 时, $F_{By} = 1$

绘出的反力 F_{By} 影响线如图 8-3c 所示。

在作影响线时,通常假定单位荷载 $F_P = 1$,当利用影响线研究实际荷载对某一量值的影响时(见 § 8-3),则须将荷载的单位计入,方能得到该量值的单位。

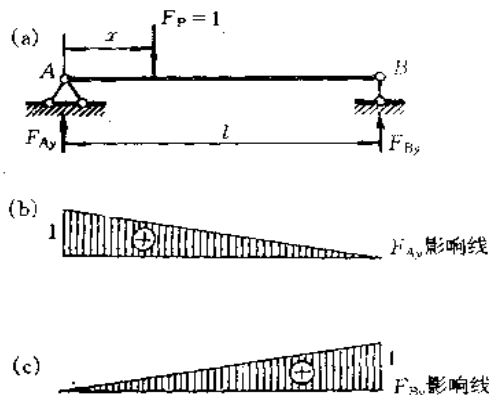


图 8-3

二、弯矩影响线

设欲绘制截面 C (图 8-4a) 的弯矩影响线。为此, 先考虑荷载 $F_P = 1$ 在截面 C 的左方移动, 即令 $0 \leq x \leq a$ 。为了计算简便起见, 取梁中的 CB 段为隔离体, 并规定以使梁下面纤维受拉的弯矩为正, 由 $\sum M_C = 0$ 可得

$$M_C = F_{By} \cdot b = \frac{x}{l} b \quad (0 \leq x \leq a)$$

由此可知, M_C 影响线在截面 C 以左部分为一直线:

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时,} \quad M_C = 0$$

$$\text{当 } x = a \text{ 时,} \quad M_C = \frac{ab}{l}$$

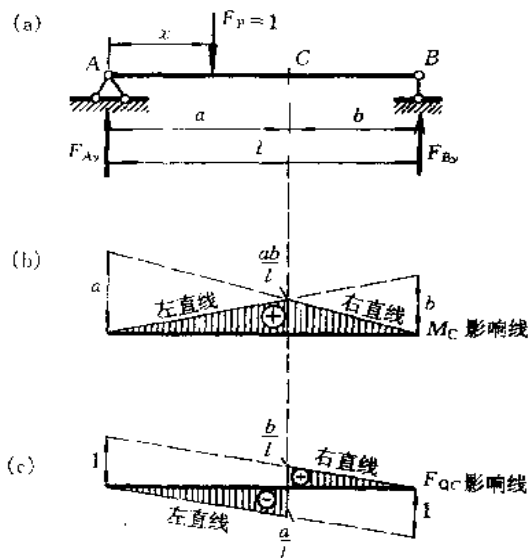


图 8-4

因此, 在截面 C 处取一个等于 $\frac{ab}{l}$ 的竖标, 然后以其顶点与左支座处的零点相连, 即得荷载 $F_P = 1$ 在截面 C 以左移动时 M_C 影响线 (图 8-4b)。

当荷载 $F_P = 1$ 在截面 C 以右移动时, 即 $a \leq x \leq l$, 上面所求得的影响线方程已不适用。因此, 须另外列出 M_C 的表达式才能作出相应区段内的影响线。为此, 取 AC 段为隔离体, 由 $\sum M_C = 0$ 即得当 $F_P = 1$ 在截面 C 以右移动时 M_C 的影响线方程

$$M_C = F_{Ay} a = \frac{l-x}{l} a \quad (a \leq x \leq l)$$

由上式可知:

$$\text{当 } x = a \text{ 时,} \quad M_C = \frac{ab}{l}$$

$$\text{当 } x = l \text{ 时,} \quad M_C = 0$$

因此, 只需把截面 C 处的竖标 $\frac{ab}{l}$ 的顶点与右支座处的零点相连, 即可得出当荷载 $F_P = 1$ 在截面

C 以右移动时 M_C 影响线,其全部影响线如图 8-4b 所示。这样, M_C 影响线是由两段直线所组成,此二直线的交点位于截面 C 处的竖标顶点。通常称截面以左的直线为左直线,截面以右的直线为右直线。

从上述弯矩影响线方程可以看出,左直线可由反力 F_{By} 影响线将竖标乘以 b 而得到,而右直线可由反力 F_{Ay} 影响线将竖标乘以 a 而得到。因此,可以利用 F_{Ay} 和 F_{By} 影响线来绘制 M_C 影响线;在左、右两支座处分别取竖标 a 、 b ,将它们的顶点各与右、左两支座处的零点用直线相连,则这两根直线的交点与左、右零点相连部分就是 M_C 影响线。这种利用已知量值的影响线来作其他量值影响线的方法,能带来较大的方便。

由于已假定 $F_P = 1$,故弯矩影响线的单位为长度单位。

三、剪力影响线

设欲绘制截面 C(图 8-4a)的剪力影响线,为此,先将荷载 $F_P = 1$ 在截面 C 的左方移动,即令 $0 \leq x \leq a$ 。取截面 C 以右部分为隔离体,并规定使隔离体有顺时针转动趋势的剪力为正,则

$$F_{QC} = -F_{By} \quad (0 \leq x \leq a)$$

由此可知, F_{QC} 影响线在截面 C 以左的部分(左直线)与支座反力 F_{By} 影响线各竖标的数值相同,但符号相反。因此,可在右支座处取等于 -1 的竖标,以其顶点与左支座处的零点相连,并由截面 C 引竖线,即得出 F_{QC} 影响线的左直线(图 8-4c)。

同样,当荷载 $F_P = 1$ 在截面 C 以右移动,即 $a \leq x \leq l$ 时,取截面 C 以左部分为隔离体,可得

$$F_{QC} = F_{Ay} \quad (a \leq x \leq l)$$

因此,可直接利用反力 F_{Ay} 影响线作出 F_{QC} 影响线的右直线(图 8-4c)。

值得指出,影响线与内力图是截然不同的,前者表示当单位荷载沿结构移动时,某一指定截面处的某一量值的变化情形;后者表示在固定荷载作用下,某种量值在结构所有截面上的分布情形。例如图 8-5a 所示的 M_C 影响线与图 8-5b 所示的弯矩图,与截面 K 对应的 M_C 影响线的竖标 y_K ,代表荷载 $F_P = 1$ 作用于 K 处时,弯矩 M_C 的大小;而与截面 K 对应的弯矩图的竖标 M_K ,则代表固定荷载 F_P 作用于 C 点时,截面 K 所产生的弯矩。显然,由某一个内力图,不能看出当荷载在其他位置时这种内力将如何分布。只有另作新的内力图,才能知道这种内力新的分布情形。然而,某一量值的影响线能使我们看出,当单位荷载处于结构的任何位置时,该量值的变化规律,但它不能表示其他截面处的同一量值的变化情形。

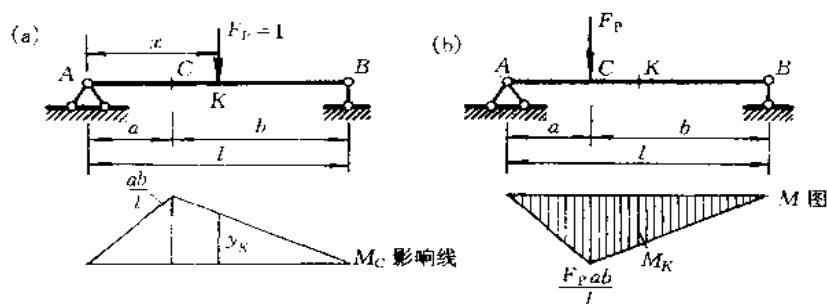


图 8-5

§ 8-3 利用影响线求量值

前面已讨论了简支梁影响线的绘制方法。下面讨论如何利用某量值的影响线来求出当位置确定的若干集中荷载或分布荷载作用时对该量值的影响。

先讨论集中荷载的影响。图 8-6a 所示简支梁截面 C 的剪力影响线, 如图 8-6b 所示。设有一组集中荷载 F_{P1} 、 F_{P2} 、 F_{P3} 作用于梁上, 需求出截面 C 的剪力。此时可利用已作出的 F_{QC} 影响线。设在荷载作用点处影响线的竖标依次为 y_1 、 y_2 、 y_3 。根据叠加原理可知在这组荷载作用下应有

$$F_{QC} = F_{P1}y_1 + F_{P2}y_2 + F_{P3}y_3$$

一般而言, 当绘出结构的某一量值 S 的影响线时, 则可知在一组竖向的集中荷载作用下该量值为

$$S = F_{P1}y_1 + F_{P2}y_2 + \cdots + F_{Pn}y_n = \sum F_{Pi}y_i \quad (8-1)$$

式中 y_i 为 F_{Pi} 作用点处相应的 S 影响线的竖标。

以集中荷载的影响为依据, 就不难推求出分布荷载 q_x

(图 8-7a) 的影响。为此, 将分布荷载沿其长度分为许多无限小的微段 dx 。由于每一微段上的荷载 $q_x dx$ 可作为一集中荷载, 故在 mn 区段内的分布荷载对量值 F_{QC} 的影响可用下式表达

$$F_{QC} = \int_{x_m}^{x_n} q_x y_x dx$$

若 q_x 为均布荷载 (图 8-7b), 即当 $q_x = q$ 时, 则上式变为

$$F_{QC} = q \int_{x_m}^{x_n} y_x dx = qA$$

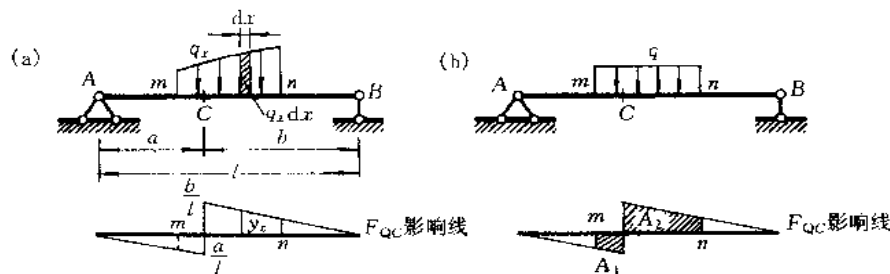


图 8-7

式中 A 表示影响线在荷载分布范围 mn 内的面积。上述两式适用于任一量值 S 的影响线, 写成一般形式为

$$S = \int_{x_m}^{x_n} q_x y_x dx \quad (8-2)$$

当 $q_x = q$ 时,

$$S = q \int_{x_m}^{x_n} y_r dx = qA \quad (8-3)$$

由上可见,为了求得均布荷载的影响,只须把影响线在荷载分布范围内的面积求出,再以荷载集度 q 乘以这个面积。但应注意,在计算面积 A 时,应考虑影响线的正、负符号。例如,对于图 8-7b 所示情况,应有

$$A = A_2 - A_1$$

[例 8-1] 试利用图 8-8a 所示简支梁的 F_{QC} 影响线求 F_{QC} 值。

解:首先,作出 F_{QC} 影响线如图 8-8b 所示,并算出有关竖标值。

其次,按叠加原理可得

$$F_{QC} = F_P y_D + qA = 20 \times 10^3 \times 0.4 + 10 \times 10^3 \times \left(\frac{0.6+0.2}{2} \times 2 - \frac{0.2+0.4}{2} \times 1 \right) = 13 \times 10^3 \text{ N} = 13 \text{ kN}$$

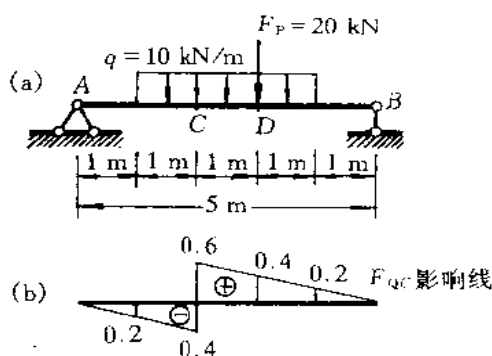


图 8-8

§ 8-4 最不利荷载位置

如前所述,在活载作用下,结构上的任一量值 S 一般都随荷载位置的变化而变化。在结构设计中,需要求出量值 S 的最大值 S_{\max} 作为设计的依据,所谓最大值包括最大正值和最大负值,对于最大负值有时也称为最小值 S_{\min} ;而要解决这个问题就必须先确定使其发生最大值的最不利荷载位置。只要所求量值的最不利荷载位置确定,则其最大值即不难求得。因此,寻求某一量值的最大值的关键,就在于确定其最不利荷载位置。

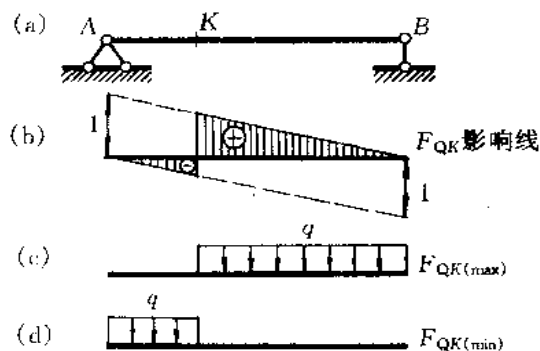


图 8-9

对于可动均布活载(如人群等),由于它可以任意断续地布置,故最不利荷载位置是很容易确定的。从式(8-3)可知:当均布活载布满对应影响线正号面积部分时,则量值 S 将有其最大值 S_{\max} ;反之,当均布活载布满对应影响线负号面积部分时,则量值 S 将有其最小值 S_{\min} 。例如,求图

8-9a 所示简支梁中截面 K 的剪力最大值 $F_{QK(\max)}$ 和最小值 $F_{QK(\min)}$ 时,相应的最不利荷载位置分别如图 8-9c、d 所示。

对于移动集中荷载,根据式(8-1)

$$S = \sum F_{Pi} y_i$$

可知,当 $\sum F_{Pi} y_i$ 为最大值时,则相应的荷载位置即为量值 S 的最不利荷载位置。由此推断,最不利荷载位置必然发生在荷载密集于影响线竖标最大处,并且可进一步论证必有一集中荷载位于影响线顶点。为了分析方便,通常将这一位于影响线顶点的集中荷载称为临界荷载。

[例 8-2] 试求图 8-10a 所示简支梁在图示吊车荷载作用下截面 K 的最大弯矩。

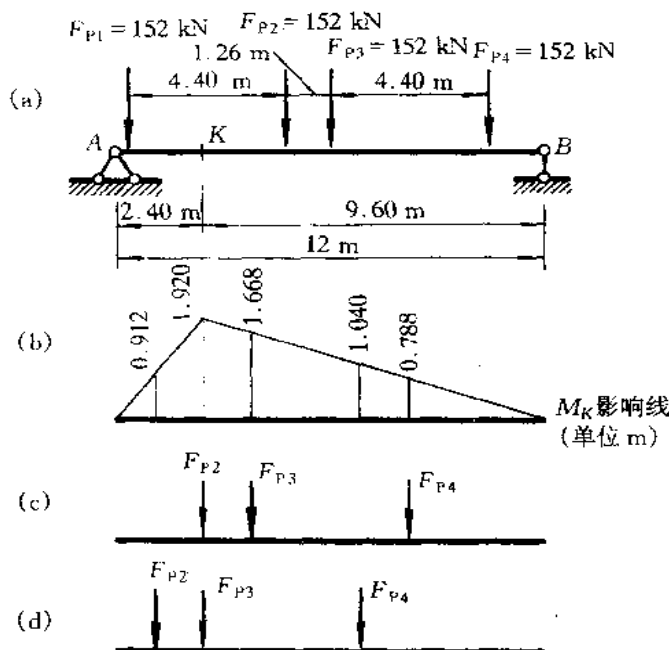


图 8-10

解:先作出 M_K 影响线如图 8-10b 所示。

据前述推断, M_K 的最不利荷载位置将有如图 8-10c、d 所示两种可能情况。分别计算对应的 M_K 值,并加以比较,即可得出 M_K 的最大值。

对于图 8-10c 所示情况有

$$M_K = 152 \times 10^3 \times (1.920 + 1.668 + 0.788) = 665.15 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 665.15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

对于图 8-10d 所示情况有

$$M_K = 152 \times 10^3 \times (0.912 + 1.920 + 1.040) = 588.54 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = 588.54 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

者比较可知,图 8-10c 所示为 M_K 的最不利荷载位置,此时

$$M_{K(\max)} = 665.15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

[例 8-3] 图 8-11a 所示为吊车荷载作用下的两跨静定梁。试求支座 B 的最大反力。

解:该梁实为两根简支梁,故可作出如图 8-11b 所示的 F_{By} 影响线。其最不利荷载位置有

如图 8-11c、d 所示两种可能情况,现分别计算如下。

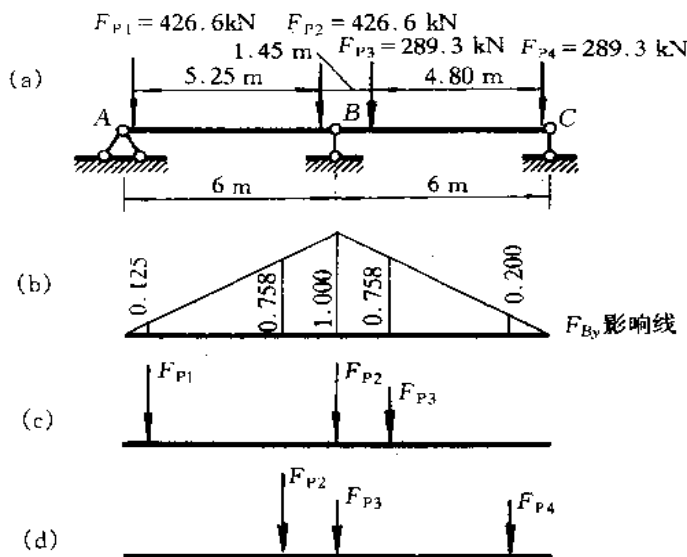


图 8-11

对于图 8-11c 所示情况有

$$F_{By} = 426.6 \times 10^3 \times (0.125 + 1.000) + 289.3 \times 10^3 \times 0.758 = 699.22 \times 10^3 \text{ N} = 699.22 \text{ kN}$$

对于图 8-11d 所示情况有

$$F_{By} = 426.6 \times 10^3 \times 0.758 + 289.3 \times 10^3 \times (1.000 + 0.200) = 670.52 \times 10^3 \text{ N} = 670.52 \text{ kN}$$

二者比较可知,图 8-11c 所示的荷载情况为最不利荷载位置,相应地 $F_{By(\max)} = 699.22 \text{ kN}$ 。

§ 8-5 简支梁的内力包络图

在设计承受移动荷载的结构时,常须知道它在恒载和活载共同作用下各截面的内力(弯矩和剪力)的最大值和最小值,作为结构截面设计的依据。通常将恒载和活载的影响分别加以考虑,然后将两者的影响进行叠加。关于恒载作用下的计算,前面已有详细论述。结构在移动荷载作用下,可采用前节所述的方法将每一截面的内力的最大值求得。如果将结构上各截面的同类内力的最大值按一定比例用竖标表示出来,则所得的图形称为该内力的包络图。梁的内力包络图有弯矩包络图和剪力包络图。它们分别表明不论活载处于何种位置,结构各截面所产生的弯矩或剪力值都不会超出相应包络图所示数值的范围。包络图在吊车梁设计中经常用到,本节仅介绍吊车梁承受吊车荷载作用时的内力包络图。

图 8-12a 示一吊车梁,跨度为 12 m,承受图 8-12b 所示两台桥式吊车荷载作用。绘制其弯矩包络图时,一般将梁分成若干等分(通常为 10 等分),求出各等分点处截面的最大弯矩值,然后按同一比例标出各相应竖标,并将各竖标顶点连成一光滑曲线,即得到如图 8-12c 所示的弯矩包络图。

值得指出:在弯矩包络图中,跨中截面的最大弯矩并非是整根梁上各截面最大弯矩中的最大

者。通常将各截面最大弯矩中的最大值称为绝对最大弯矩,它发生在跨中附近的截面上,该绝对最大弯矩与跨中截面最大弯矩值之差,一般为 2% 左右。如例中的绝对最大弯矩分别发生在距两端为 5.685 m 处,其值为 968.71 kN·m,比跨中截面最大弯矩值 963.68 kN·m 只增加 0.52%。因此,通常不需另行计算绝对最大弯矩。

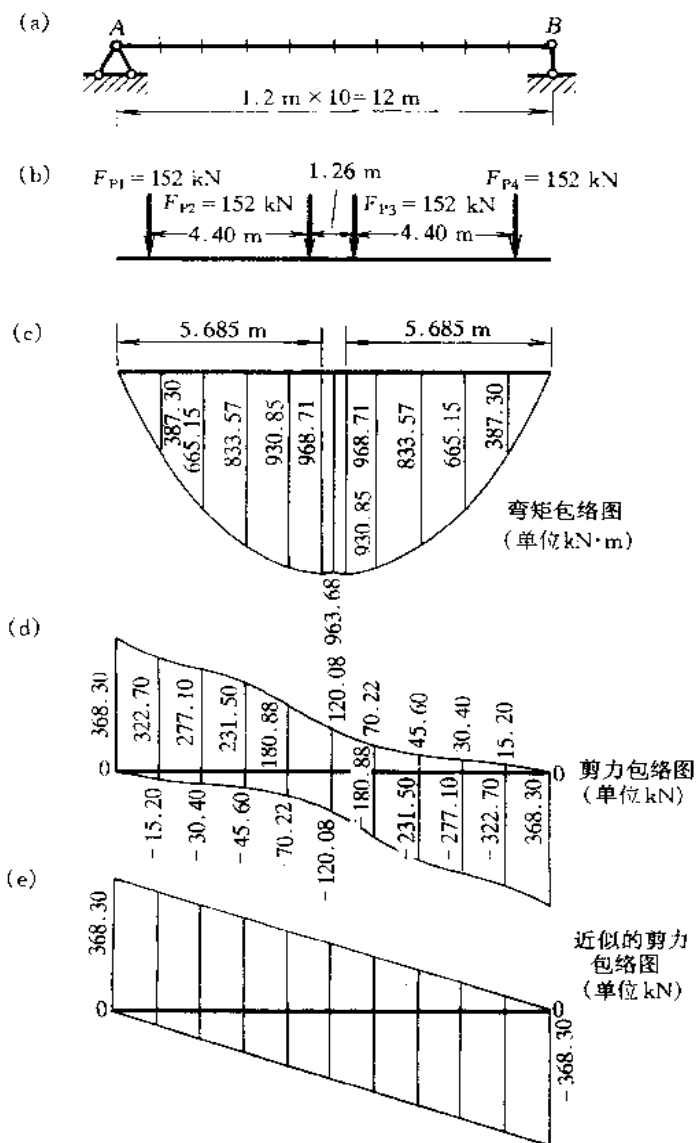


图 8-12

同理,可绘出剪力包络图如图 8-12d 所示。由于每一截面的剪力可能发生最大正值和最大负值,故剪力包络图有两根曲线。但实际设计中,用到的主要是支座附近处截面的剪力值,故通常只将两端支座处截面上的最大剪力值和最小剪力值求出,用直线分别将两端相应的竖标相连,近似地作为所求的剪力包络图。这样,图 8-12d 所示的剪力包络图就可用图 8-12e 来代替。

必须指出,上述的内力包络图仅在某种吊车荷载作用下所得,设计时还须将其与恒载作用下相应的内力图叠加,作出恒载与活载共同作用下的内力包络图才能作为设计的依据。另外,所谓内力包络图,是针对某种活载而言的,不同情况的活载,将有不同的内力包络图。

§ 8-6 连续梁的内力包络图

由梁(主梁和次梁)、板组成的肋形楼盖和水池顶盖,其中的板、次梁、主梁一般都按连续梁计算。连续梁受到恒载和活载的共同作用,要保证结构在各种可能出现的荷载作用下都能安全使用,必须求出各截面可能产生的最大弯矩和最小弯矩,作为结构设计的依据。对结构的任一截面,在恒载作用下所产生的弯矩是固定不变的,而活载作用下所引起的弯矩则随着活载分布不同而改变。因此,求截面的最大弯矩和最小弯矩的主要问题在于确定活载的影响。在研究可动均布活载的影响时,通常按每一跨单独布满活载的情况逐一作出其相应的弯矩图。然后对于任一截面,将这些弯矩图中对应的所有正弯矩值与恒载作用下的相应弯矩值相加便得到该截面的最大弯矩;同理,若将对应的所有负弯矩值与恒载作用下相应的弯矩值相加,便得到该截面的最小弯矩。将各截面的最大弯矩和最小弯矩在同一图中按一定的比例尺用竖标表示出来,并将竖标顶点分别连成两条曲线,所得图形称为连续梁的弯矩包络图。该图表明,连续梁在已知恒载和活载共同作用下,各个截面可能产生的弯矩的极限范围,不论活载如何分布,各个截面产生的弯矩都不会超出这一范围。

在结构设计中,有时还需要作出表明连续梁在恒载和活载共同作用下的最大剪力和最小剪力变化情形的剪力包络图。其绘制原则与弯矩包络图相同。实际设计中,主要用到各支座附近截面上的剪力值。因此,通常只要将各跨两端靠近支座截面上的最大剪力和最小剪力求出,作出相应的竖标后,在每跨中用直线相连,近似地作出所求的剪力包络图。

内力包络图在结构设计中是很有用的,它清楚地表明了连续梁各截面内力变化的极限情形,可以根据它合理地选择截面尺寸,在设计钢筋混凝土梁时,也是配置钢筋的重要依据。

下面以图 8-13a 所示三跨等截面连续梁为例,具体说明弯矩包络图和剪力包络图的作法。设梁上的恒载 $q = 16 \text{ kN/m}$,活载 $p = 30 \text{ kN/m}$ 。

一、作弯矩包络图

1. 作出恒载作用下的弯矩图(图 8-13b)和各跨分别承受活载时的弯矩图(图 8-13c、d、e)。
2. 将梁的各跨分为若干等分(现将每跨分为 4 等分),对每一等分点截面,将恒载弯矩图中该截面处的竖标值与所有各种活载弯矩图中对应的正(负)竖标值相加,即得各截面的最大(小)弯矩值。例如,在支座 B 处:

$$M_{B(\max)} = (-25.60 \times 10^3) + 8.00 \times 10^3 = -17.60 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -17.60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{B(\min)} = (-25.60 \times 10^3) - (-31.98 \times 10^3) + (-24.02 \times 10^3) = -81.60 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = -81.60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

3. 将各截面的最大弯矩值和最小弯矩值在同一图中按同一比例用竖标画出,并将竖标顶点分别以曲线相连,即得弯矩包络图,如图 8-13f 所示,图中弯矩单位为 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

二、作剪力包络图

1. 作出恒载作用下的剪力图(图 8-14a)和各跨分别承受活载时的剪力图(图 8-14b、c、d)。
2. 将恒载剪力图中各支座左右两侧截面处的竖标值和所有各种活载剪力图中对应的正

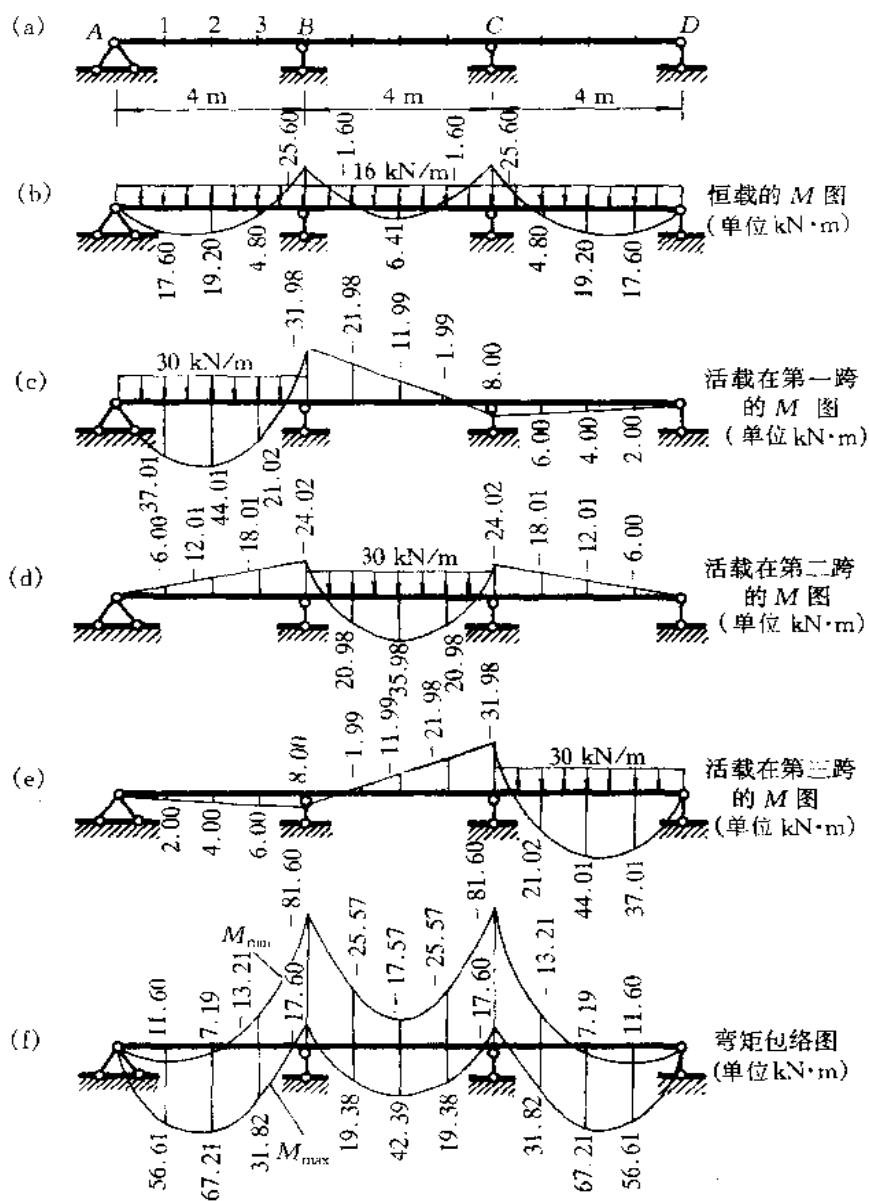


图 8-13

(负)竖标值相加,便得到相应截面的最大(小)剪力值。

3. 把各跨两端截面(即支座侧边的截面)上的最大剪力值和最小剪力值分别用直线相连,即得剪力包络图如图 8-14e 所示,图中剪力单位为 kN 。

由上例可知,计算第一跨跨中附近某一截面的最大正弯矩(例如 $M_{2(\max)}$)时,对于活载的影响只考虑了图 8-13c、e 两种情况,亦即图 8-15a 所示活载情况;计算支座 B 处的最大负弯矩

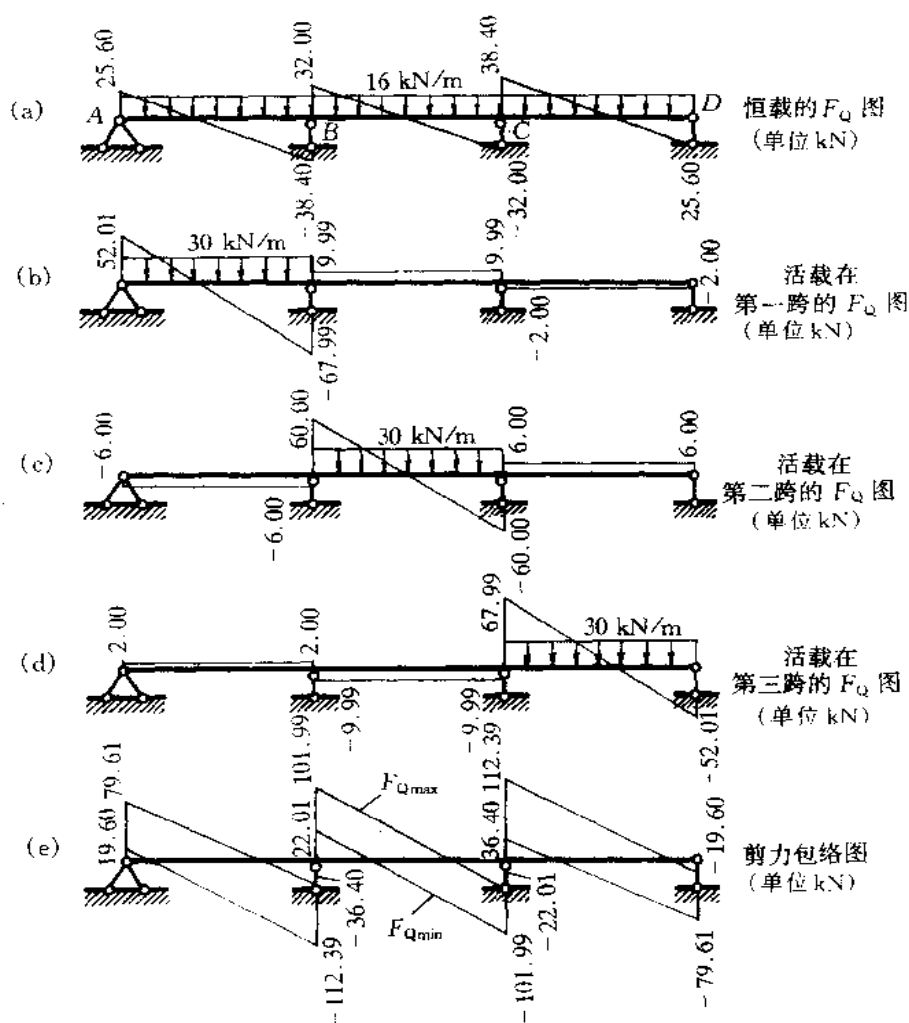


图 8-14

(即 $M_{B(\min)}$)时,只考虑了图 8-13c、d 两种情况,亦即图 8-15b 所示活载情况。这些活载布置也就是相应量值的最不利荷载位置。在最不利荷载位置确定后,即不难计算出活载作用下相应的最大(小)内力,进而求得在恒载和活载共同作用下相应的最大(小)内力。为此,以图 8-16a 所示五跨连续梁有关弯矩的最不利活载的布置为例,说明其规律性。

从图 8-16 中可知:

1. 求某跨跨中附近的最大正弯矩时,应在该跨布满活载,其余每隔一跨布满活载。
2. 求某支座的最大负弯矩时,应在该支座相邻两跨布满活载,其余每隔一跨布满活载。掌握上述规律后,对于多跨连续梁,当计算活载作用下相应的量值时,可查阅有关计算手册进行计算。

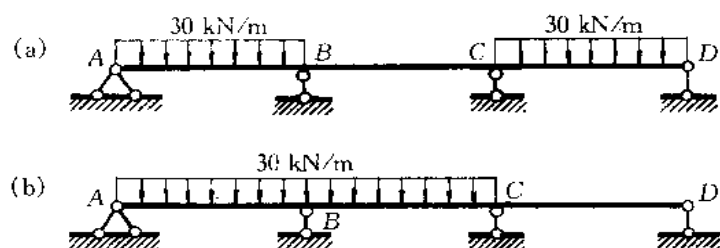


图 8-15

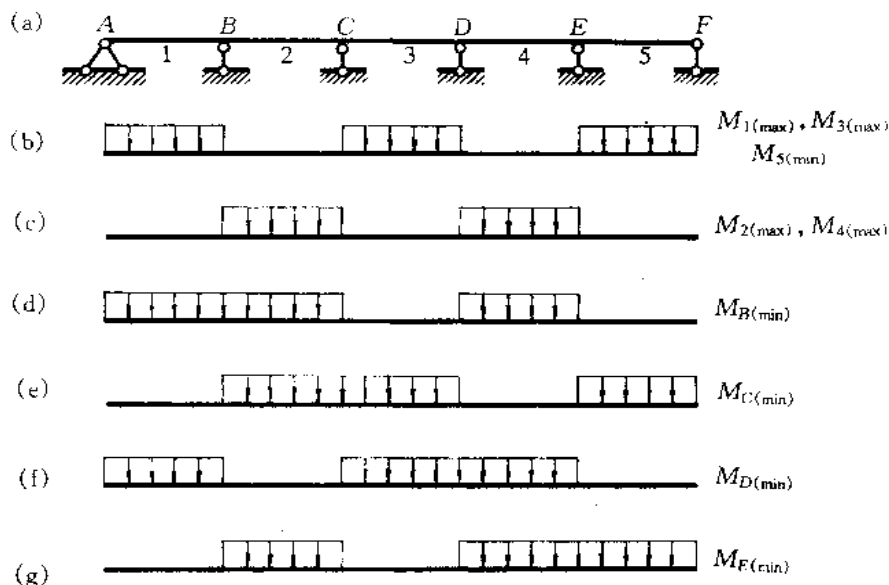


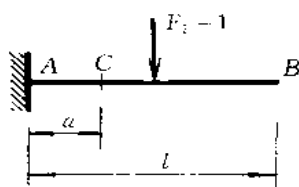
图 8-16

思考题

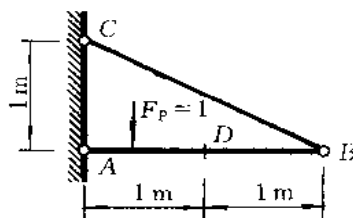
1. 试问影响线上任一点的横坐标与纵坐标各代表什么意义?
2. 试问作某内力影响线与在固定荷载下求该内力有何异同?
3. 试问在什么情况下影响线方程必须分段列出?
4. 为何可以利用影响线来求得恒载作用下的内力?
5. 何谓最不利荷载位置? 何谓临界荷载?
6. 试问内力包络图与内力图、影响线有何区别? 三者各有何用途?

习 题

8-1 试绘出图示悬臂梁的 F_A 、 M_A 、 F_{QC} 、 M_C 影响线。



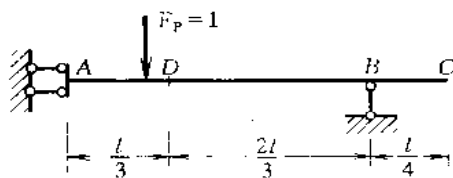
题 8-1 图



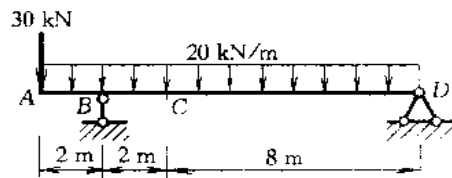
题 8-2 图

8-2 试绘出图示结构横梁 AB 的 M_D 和 F_{QD} 影响线。

8-3 试绘出图示静定梁的 M_A 、 F_{By} 、 M_D 、 F_{QD} 、 F_{QB}^L 、 F_{QB}^R 影响线。



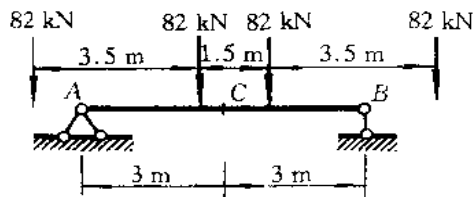
题 8-3 图



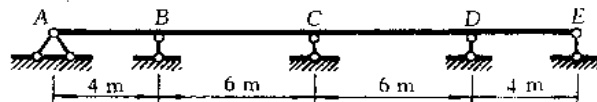
题 8-4 图

8-4 对图示荷载作用下的伸臂梁,试分别利用其 F_{QC} 、 M_C 影响线求截面 C 的剪力和弯矩。

8-5 试求图示简支梁在移动荷载作用下的 F_{Ay} 、 M_C 和 F_{QC} 的最大值。



题 8-5 图



题 8-6 图

8-6 图示连续梁中各跨除承受均布恒载 $q = 10 \text{ kN/m}$ 外,还受有均布活载 $p = 20 \text{ kN/m}$ 的作用。试绘制其弯矩和剪力的包络图。

部分答案

8-4 $F_{QC} = 70 \text{ kN}$, $M_C = 80 \text{ kN}\cdot\text{m}$

8-5 $F_{Ay(\max)} = 157.2 \text{ kN}$, $M_{C(\max)} = 184.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $F_{QC(\max)} = 61.5 \text{ kN}$

* 第九章 矩阵位移法

§ 9-1 概 述

用前述的力法和位移法求解超静定结构,随着基本未知量数目的增多,相应需要建立和求解的多元联立方程的个数也增多,计算工作极为冗繁和困难。由于结构分析方法和计算机技术的飞速发展,电子计算机被广泛应用于结构分析中,使结构矩阵分析方法从本世纪 60 年代迅速发展起来。

在结构矩阵分析中,运用矩阵进行计算,不仅能使公式非常紧凑,而且在形式上十分规格,便于实现计算过程程序化,因而适用于电子计算机自动进行数值计算。

结构矩阵分析的两种基本方法是矩阵位移法(刚度法)和矩阵力法(柔度法),前者在计算中采用结点位移作为基本未知量,后者则采用多余未知力作为基本未知量。对于杆件结构,矩阵位移法比矩阵力法便于编制通用的程序,因而在工程界应用较为广泛。

矩阵位移法与位移法在本质上并无区别,二者的差异仅在于矩阵位移法是从电算这一角度出发,在求解过程中以矩阵作为组织运算的数学工具。在杆件结构的矩阵位移法中,把复杂的结构视为有限个单元(杆件)的集合,各单元彼此在结点处连接而组成整体,因而解算时先把结构分解成有限个单元和结点,即对结构进行离散化。继而对单元进行分析,建立单元杆端力与杆端位移之间的关系。然后,根据变形协调条件、静力平衡条件使离散化的结构恢复为原结构,从而形成结构刚度方程,据此不难求解结构的结点位移和内力。矩阵位移法的基本思路是“先分后合”,即先将结构离散然后再集合,这样一分一合的过程,就把复杂结构的计算问题转化为简单杆件的分析与综合问题。因此,它的解题过程可分为两大步骤:

- (1) 单元分析——研究单元的力学特性;
- (2) 整体分析——考虑单元的集合,研究整体方程的组成原理和求解方法。

§ 9-2 单元刚度矩阵

一、单元的划分

在杆件结构中,一般是把每个杆件作为一个单元。为了计算方便起见,只采用等截面直杆这种形式的单元,并且还规定荷载只作用于结点处。根据上述要求,划分单元的结点应该是杆件的转折点、汇交点、支承点和截面突变点等,这些结点都是根据结构本身的构造特征来确定的,故称为构造结点。例如图 9-1 所示结构中 1、2、3、4、5、6 等点都是构造结点。此外,对于集中力作用处,例如图 9-1 中的 7 点,为保证结构只承受结点荷载,也可将它作为一个结点处理,这种结点则称为非构造结点(单元上承受荷载

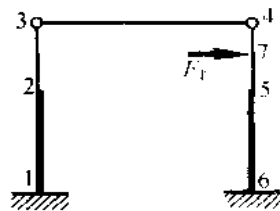


图 9-1

的另一种处理方法是将它改用等效结点荷载来替代,这将在 §9-5 中进行讨论)。结构的所有结点确定后,则结点间的单元也就被确定。

对于曲杆或变截面杆件组成的结构,可沿轴线将杆件分段,每段均作为等截面直杆单元,截面可近似取为该段中点处的截面大小。显然,采用这种处理方法,单元划分得越多,其计算结果将越接近于真实情况。

二、单元的杆端位移和杆端力

一般的杆件单元,每一杆端有三个杆端位移,即两个线位移和一个角位移。与此相应,每一杆端有三个杆端力,即两个集中力和一个力矩。现对它们的表示方法说明如下。

例如如图 9-2 示某一等截面杆单元(e),它的两端分别用 i, j 表示,取图示的 $O\bar{x}\bar{y}$ 坐标系,其中 \bar{x} 轴与单元的轴线重合,以 i 为单元的始端, j 为单元的末端,并以由 i 到 j 的方向为正。这种就某一单元而建立的坐标系,称为单元坐标系或局部坐标系。

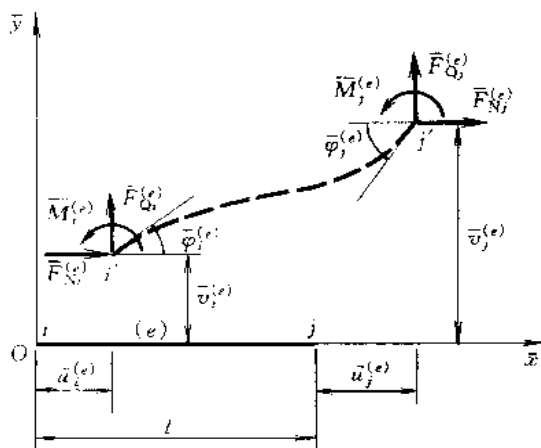


图 9-2

现设 i 端的杆端位移为 $\bar{u}_i^{(e)}$ 、 $\bar{v}_i^{(e)}$ 和 $\bar{\varphi}_i^{(e)}$ (在此即为轴向位移、切向位移和转角),相应的杆端力为 $\bar{F}_{N_i}^{(e)}$ 、 $\bar{F}_{Q_i}^{(e)}$ 和 $\bar{M}_i^{(e)}$ (在此即为轴力、剪力和弯矩);而 j 端的杆端位移为 $\bar{u}_j^{(e)}$ 、 $\bar{v}_j^{(e)}$ 和 $\bar{\varphi}_j^{(e)}$,相应的杆端力为 $\bar{F}_{N_j}^{(e)}$ 、 $\bar{F}_{Q_j}^{(e)}$ 和 $\bar{M}_j^{(e)}$ 。它们的正负号采取如下规定:就单元(e)而言, \bar{u} 或 \bar{F}_N 以沿 \bar{x} 轴的正方向为正; \bar{v} 或 F_Q 以沿 \bar{y} 轴的正方向为正; $\bar{\varphi}$ 或 \bar{M} 以逆时针方向为正。据此规定,图中所示的杆端位移和杆端力都是正的。可见,这种杆端力和杆端位移的正向规定与材料力学中的规定不同,也与前述各章的规定有所不同,需加以注意。

如果用 $\bar{\mathbf{F}}^{(e)}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)}$ 分别表示在单元坐标系下的杆端力列向量和杆端位移列向量,则有

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}^{(e)} &= [\bar{F}_{N_i}^{(e)} \quad \bar{F}_{Q_i}^{(e)} \quad \bar{M}_i^{(e)} \quad \bar{F}_{N_j}^{(e)} \quad \bar{F}_{Q_j}^{(e)} \quad \bar{M}_j^{(e)}]^T \\ \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} &= [\bar{u}_i^{(e)} \quad \bar{v}_i^{(e)} \quad \bar{\varphi}_i^{(e)} \quad \bar{u}_j^{(e)} \quad \bar{v}_j^{(e)} \quad \bar{\varphi}_j^{(e)}]^T \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

式中各元素是依照先 i 端后 j 端并且依 \bar{x} 、 \bar{y} 、 $\bar{\varphi}$ 的顺序排列的。

三、单元刚度矩阵

现就图 9-2 所示的单元(e),建立由单元杆端位移确定杆端力的转换矩阵——单元刚度矩阵。为此,可先分别求出由各杆端位移单独引起的杆端力,如图 9-3 所示。其中 E 为材料的弹

性模量, l 为杆长, A 为横截面面积, I 为截面的惯性矩。从图 9-3 可以看出, 杆端力与杆端位移之间的关系与单元材料的物理性质有关。再应用叠加原理, 即可得到杆端力与杆端位移之间的关系式如下:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{N_i}^{(e)} &= \frac{EA}{l} u_i^{(e)} - \frac{EA}{l} u_j^{(e)} \\ \bar{F}_{Q_i}^{(e)} &= \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i^{(e)} + \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_i^{(e)} - \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j^{(e)} + \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_j^{(e)} \\ \bar{M}_i^{(e)} &= \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i^{(e)} + \frac{4EI}{l} \bar{\varphi}_i^{(e)} - \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j^{(e)} + \frac{2EI}{l} \bar{\varphi}_j^{(e)} \\ \bar{F}_{N_j}^{(e)} &= -\frac{EA}{l} u_i^{(e)} + \frac{EA}{l} u_j^{(e)} \\ \bar{F}_{Q_j}^{(e)} &= -\frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i^{(e)} - \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_i^{(e)} + \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j^{(e)} - \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_j^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} &= \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i^{(e)} + \frac{2EI}{l} \bar{\varphi}_i^{(e)} - \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j^{(e)} + \frac{4EI}{l} \bar{\varphi}_j^{(e)} \end{aligned} \quad (9-2)$$

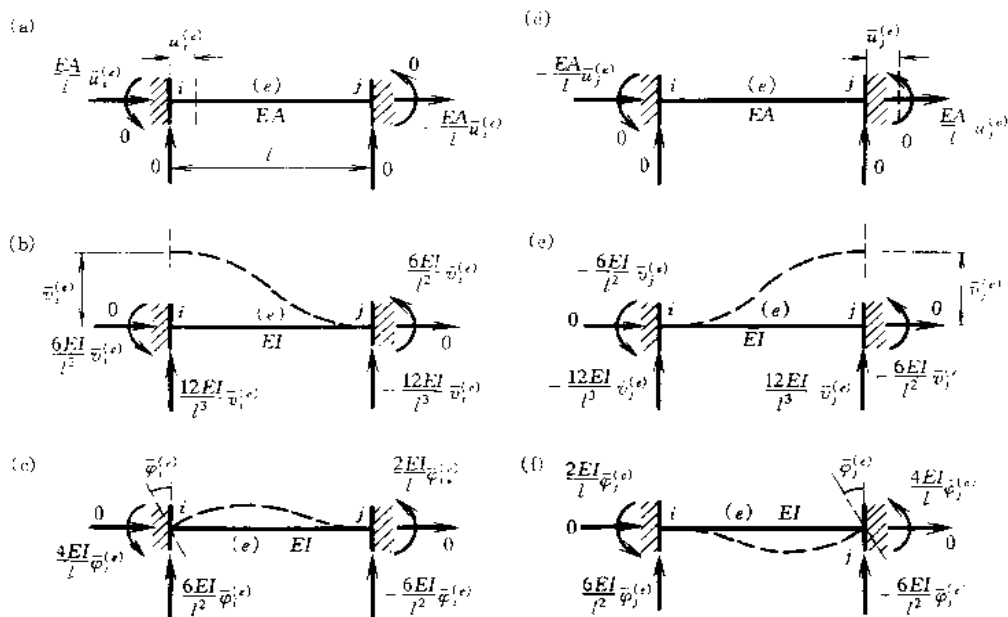


图 9-3

写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{N_i}^{(e)} \\ \bar{F}_{Q_i}^{(e)} \\ \bar{M}_i^{(e)} \\ \bar{F}_{N_j}^{(e)} \\ \bar{F}_{Q_j}^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^{(e)} \\ \bar{v}_i^{(e)} \\ \bar{\varphi}_i^{(e)} \\ \bar{u}_j^{(e)} \\ \bar{v}_j^{(e)} \\ \bar{\varphi}_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9-3)$$

式(9-3)即单元(e)的刚度方程,可简写成

$$\mathbf{F}^{(e)} = \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} \quad (9-4)$$

其中

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^{(e)} = 1 \\ \bar{v}_i^{(e)} = 1 \\ \bar{\varphi}_i^{(e)} = 1 \\ \bar{u}_j^{(e)} = 1 \\ \bar{v}_j^{(e)} = 1 \\ \bar{\varphi}_j^{(e)} = 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_N^{(e)} \\ F_Q^{(e)} \\ M_i^{(e)} \\ F_N^{(e)} \\ F_Q^{(e)} \\ M_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9-5)$$

$\bar{\mathbf{K}}^{(e)}$ 即单元(e)的单元刚度矩阵,它的第一列六个元素是当 $\bar{u}_i^{(e)} = 1$,其他杆端位移都为零时,所引起的六个杆端力;第二列的六个元素则是当 $\bar{v}_i^{(e)} = 1$,其他杆端位移都为零时引起的六个杆端力;其余各列的物理意义可以类推。在单元刚度矩阵的上方标记出各杆端位移,在右方标记出各杆端力,这样就可清楚地看出各元素的物理意义。单元刚度矩阵的行数等于单元杆端力的数目,而列数则等于杆端位移的数目。又因单元的杆端力与杆端位移是一一对应的,故单元刚度矩阵为 6×6 阶方阵。值得指出,单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^{(e)}$ 对应的行列式之值为零,所以 $\bar{\mathbf{K}}^{(e)}$ 是一个奇异矩阵,不存在逆矩阵,从而不能由单元的六个杆端力求得单元的六个杆端位移。这是因为单元(e)(图9-2)的位移中包含有刚体位移,在单元不受约束时,刚体位移不能确定。此外,单元刚度矩阵还是一个对称方阵,处于对角线两侧的对称位置上的元素互等。从各元素的物理意义和反力互等定理可知这一结论是正确的。

四、单元两端无线位移时的单元刚度矩阵

式(9-5)是平面杆件结构中杆件单元刚度矩阵的一般表达式。这种单元因其两端不受任何约束,所以又称为自由单元。

当单元两端受到约束,不能发生任何线位移而只发生角位移时,可以建立单元两端角位移与杆端弯矩之间的关系式,并由此得到单元刚度矩阵。在连续梁或无结点线位移的刚架中,各单元在杆端只有角位移而没有线位移,就可采用这种单元刚度矩阵。现推导出如下。

对图9-4所示单元,由图9-3c、f可得

$$\begin{bmatrix} M_i^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_i^{(e)} \\ \bar{\varphi}_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9-6)$$

相应的单元刚度矩阵为

$$\bar{\varphi}_i^{(e)} = 1 \quad \varphi_j^{(e)} = 1$$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_i^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9-7)$$

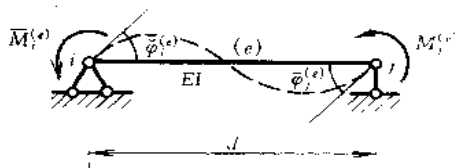


图 9-4

式(9-6)、(9-7)也可以从式(9-3)、(9-5)中,剔除与轴向位移相应的1、4行和列及与切向位移相应的2、5行和列而得到。注意到对图9-4所示单元已考虑了两端不能发生线位移的约束条件,因而单元没有刚体位移发生,故其单元刚度矩阵[式(9-7)]为非奇异矩阵。

为了简便地体现式(9-7)中各元素的物理意义,将其表示为

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^{(e)} & \bar{k}_{ij}^{(e)} \\ \bar{k}_{ji}^{(e)} & \bar{k}_{jj}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (9-8)$$

式中矩阵的第一列元素 $\bar{k}_{ii}^{(e)} = \frac{4EI}{l}$ 、 $\bar{k}_{ji}^{(e)} = \frac{2EI}{l}$ 分别表示单元(e)的*i*端发生单位角位移 $\bar{\varphi}_i^{(e)} = 1$ 时,在*i*端及*j*端引起的杆端弯矩;而第二列元素 $\bar{k}_{ij}^{(e)} = \frac{2EI}{l}$ 、 $\bar{k}_{jj}^{(e)} = \frac{4EI}{l}$ 则分别表示单元(e)的*j*端发生单位角位移 $\bar{\varphi}_j^{(e)} = 1$ 时,在*i*端及*j*端引起的杆端弯矩。上述表示方法中,各元素的第一个下标表示该弯矩作用的杆端;第二个下标表示引起该弯矩的杆端角位移。由于矩阵中同一行的各元素属于同一端的杆端弯矩,因而第一个下标相同,将此下标标记在矩阵的该行右侧,称为行码;而同一列各元素属于同一杆端角位移引起的杆端弯矩,所以第二个下标相同,将此下标标记在矩阵的该列上方,称为列码。如式(9-8)所示。这样,矩阵中的任一元素从其所在的行码和列码就能得知其物理意义。

将式(9-8)代入式(9-6),有

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_i^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{ii}^{(e)} & \bar{k}_{ij}^{(e)} \\ \bar{k}_{ji}^{(e)} & \bar{k}_{jj}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_i^{(e)} \\ \bar{\varphi}_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9-9)$$

展开上式得

$$\bar{M}_i^{(e)} = \bar{k}_{ii}^{(e)} \bar{\varphi}_i^{(e)} + \bar{k}_{ij}^{(e)} \bar{\varphi}_j^{(e)} \quad (9-10)$$

$$\bar{M}_j^{(e)} = \bar{k}_{ji}^{(e)} \bar{\varphi}_i^{(e)} + \bar{k}_{jj}^{(e)} \bar{\varphi}_j^{(e)} \quad (9-11)$$

§9-3 结构刚度矩阵

本节将以连续梁为例,讨论矩阵位移法的第二步——整体分析。

在计算任何结构时,都应使它满足平衡条件和变形谐调条件。矩阵位移法是在单元分析的基础上,利用结构的平衡条件和变形谐调条件来获得结构刚度方程的,与此同时也就得出了结构刚度矩阵。研究结构刚度矩阵的形成规律,便可得到直接形成结构刚度矩阵的方法。

图 9-5a 所示三跨连续梁,共有三个单元,四个结点。单元编码为(1)、(2)、(3);结点编码为 1、2、3、4。各单元统一以左端为始端,右端为末端,统一采用图示的坐标系 $O\bar{x}\bar{y}$ 。

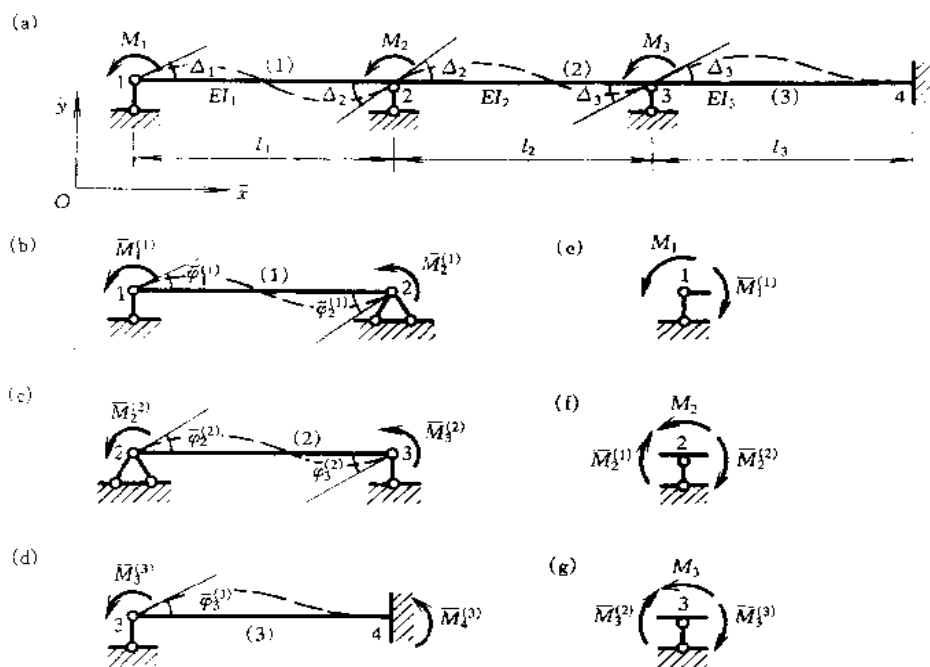


图 9-5

现取结构的结点位移列向量为

$$\Delta = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3]^T$$

其中 Δ_i ($i=1,2,3$) 代表第 i 个结点的角位移,以逆时针方向为正。相应的结点荷载(作用在结点上的外力矩)列向量为

$$F_P = [M_1 \quad M_2 \quad M_3]^T$$

其中 M_i 代表与第 i 个结点角位移相应的外力矩,以与 Δ_i 方向一致为正。对结构结点位移和结点荷载统一编排的数码(i)称为总码。

为了导出结点荷载列向量 F_P 与结点位移列向量 Δ 之间的关系式,应考虑结点 1、2、3 的力矩平衡条件。为此,取图 9-5e、f、g 所示的结点为隔离体,建立相应的平衡方程,即

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \bar{M}_1^{(1)} \\ M_2 &= \bar{M}_2^{(1)} + \bar{M}_2^{(2)} \\ M_3 &= \bar{M}_3^{(2)} + \bar{M}_3^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中的 $\bar{M}_1^{(1)}$ 、 $\bar{M}_2^{(1)}$ 、 $\bar{M}_2^{(2)}$ 、 $\bar{M}_3^{(2)}$ 、 $\bar{M}_3^{(3)}$ 分别为各单元的杆端弯矩。利用单元刚度方程(9-10)和(9-11)将这些杆端弯矩用杆端位移表示。同时考虑连续梁各结点处的变形协调条件,即

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_1^{(1)} &= \Delta_1 \\ \bar{\varphi}_2^{(1)} &= \bar{\varphi}_2^{(2)} = \Delta_2 \\ \bar{\varphi}_3^{(2)} &= \bar{\varphi}_3^{(3)} = \Delta_3 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将杆端位移换为相应的结点位移,再进行适当的处理,便可得到结点荷载列向量 F_P 与结点位移列向量 Δ 之间的关系式。具体计算时,先从各单元的刚度方程开始,如在单元(1)中,有 $\varphi_i^{(1)} = \bar{\varphi}_i^{(1)} = \Delta_1, \varphi_j^{(1)} = \varphi_2^{(1)} = \Delta_2$ 。即 i 以 1 代替, j 以 2 代替。也就是把单元(1)的杆端角位移编码 i, j 分别换为与其相应的结点角位移编码 1、2。这种处理称为“换码”。于是,得

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1^{(1)} &= \bar{k}_{11}^{(1)} \Delta_1 + \bar{k}_{12}^{(1)} \Delta_2 \\ \bar{M}_2^{(1)} &= \bar{k}_{21}^{(1)} \Delta_1 + \bar{k}_{22}^{(1)} \Delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\bar{k}_{11}^{(1)} = \bar{k}_{22}^{(1)} = \frac{4EI_1}{l_1}, \quad \bar{k}_{12}^{(1)} = \bar{k}_{21}^{(1)} = \frac{2EI_1}{l_1} \quad (d)$$

同理,对于单元(2), $\bar{\varphi}_i^{(2)} = \Delta_2, \bar{\varphi}_j^{(2)} = \Delta_3$ 。即 $i \rightarrow 2, j \rightarrow 3$, 换码后得

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_2^{(2)} &= \bar{k}_{22}^{(2)} \Delta_2 + \bar{k}_{23}^{(2)} \Delta_3 \\ \bar{M}_3^{(2)} &= \bar{k}_{32}^{(2)} \Delta_2 + \bar{k}_{33}^{(2)} \Delta_3 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

$$\bar{k}_{22}^{(2)} = \bar{k}_{33}^{(2)} = \frac{4EI_2}{l_2}, \quad \bar{k}_{23}^{(2)} = \bar{k}_{32}^{(2)} = \frac{2EI_2}{l_2} \quad (f)$$

类似地对于单元(3), $\bar{\varphi}_i^{(3)} = \Delta_3, \bar{\varphi}_j^{(3)} = 0$, 即 $i \rightarrow 3, j \rightarrow 4$, 得

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_3^{(3)} &= \bar{k}_{33}^{(3)} \Delta_3 \\ \bar{M}_4^{(3)} &= \bar{k}_{43}^{(3)} \Delta_3 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

$$\bar{k}_{33}^{(3)} = \frac{4EI_3}{l_3}, \quad \bar{k}_{43}^{(3)} = \frac{2EI_3}{l_3} \quad (h)$$

再将上述式(c)、(e)、(g)等关系式代入式(a)并加以整理,可得

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \bar{k}_{11}^{(1)} \Delta_1 + \bar{k}_{12}^{(1)} \Delta_2 \\ M_2 &= \bar{k}_{21}^{(1)} \Delta_1 + (\bar{k}_{22}^{(1)} + \bar{k}_{22}^{(2)}) \Delta_2 + \bar{k}_{23}^{(2)} \Delta_3 \\ M_3 &= \bar{k}_{32}^{(2)} \Delta_2 + (\bar{k}_{33}^{(2)} + \bar{k}_{33}^{(3)}) \Delta_3 \end{aligned} \right\}$$

将这一平衡方程组写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^{(1)} & \bar{k}_{12}^{(1)} & 0 \\ \bar{k}_{21}^{(1)} & (\bar{k}_{22}^{(1)} + \bar{k}_{22}^{(2)}) & \bar{k}_{23}^{(2)} \\ 0 & \bar{k}_{32}^{(2)} & (\bar{k}_{33}^{(2)} + \bar{k}_{33}^{(3)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} \quad (i)$$

式(i)为考虑结点 4 转角为零的条件后所得的结构刚度方程。令

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^{(1)} & \bar{k}_{12}^{(1)} & 0 \\ \bar{k}_{21}^{(1)} & (\bar{k}_{22}^{(1)} + \bar{k}_{22}^{(2)}) & \bar{k}_{23}^{(2)} \\ 0 & \bar{k}_{32}^{(2)} & (\bar{k}_{33}^{(2)} + \bar{k}_{33}^{(3)}) \end{bmatrix} \quad (j)$$

\mathbf{K} 就是结构刚度矩阵。于是式(i)可简写为

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{K} \Delta \quad (9-12)$$

考察式(j)所示的结构刚度矩阵 \mathbf{K} 可知:结构刚度矩阵中的各元素是由单元刚度矩阵中的元素组成的;进一步观察还可看出,单元刚度矩阵中的元素在结构刚度矩阵中的位置,可由它的两个下标所决定。元素的第一个下标的数字,表明该元素在结构刚度矩阵中所处位置的行数;而第二个下标的数字,则表明该元素在结构刚度矩阵中所处位置的列数。由此可知,根据元素的下

标,便可将本例中三个单元刚度矩阵 $\bar{K}^{(1)}$ 、 $\bar{K}^{(2)}$ 、 $\bar{K}^{(3)}$ 中的元素直接集合到结构刚度矩阵 K 中,从而得到结构刚度矩阵 K 。在电算时,具体处理方法如下所述。

首先,将按式(9-8)所示的各单元刚度矩阵上方的单元杆端位移编码及右方的杆端力编码 i 和 j ,换为相应的整体结点位移编码。但是,对于单元(3)的 j 端,因其为固定支座(角位移为零),故结点位移编码取为“0”。这样,本例的三个单元刚度矩阵可表示如下:

$$\bar{K}^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^{(1)} & \bar{k}_{12}^{(1)} \\ \bar{k}_{21}^{(1)} & \bar{k}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \bar{K}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{22}^{(2)} & \bar{k}_{23}^{(2)} \\ \bar{k}_{32}^{(2)} & \bar{k}_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \bar{K}^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{33}^{(3)} & \bar{k}_{34}^{(3)} \\ \bar{k}_{43}^{(3)} & \bar{k}_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

然后,在各单元刚度矩阵中,除了与“0”码对应的行或列的元素(如 $\bar{K}^{(3)}$ 中的 $\bar{k}_{34}^{(3)}$ 、 $\bar{k}_{43}^{(3)}$ 和 $\bar{k}_{44}^{(3)}$)外,将其余的各元素按矩阵右方标记的行码和上方标记的列码分别送入结构刚度矩阵 K 中相应的行和列的位置。例如, $\bar{K}^{(1)}$ 中的元素 $\bar{k}_{11}^{(1)}$ 对应矩阵右方的行码为 1 和上方的列码为 1,故应放在结构刚度矩阵 K 中第一行第一列的位置; $\bar{k}_{21}^{(1)}$ 则应放在 K 中第二行第一列的位置,余类推,在 K 中同一位置上如有多个元素,则予以叠加。例如 K 中第二行第二列位置上应为 $(\bar{k}_{22}^{(1)} + \bar{k}_{22}^{(2)})$ 。在 K 中空白处用“0”元素填补。这样可得

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^{(1)} & \bar{k}_{12}^{(1)} & 0 \\ \bar{k}_{21}^{(1)} & (\bar{k}_{22}^{(1)} + \bar{k}_{22}^{(2)}) & \bar{k}_{23}^{(2)} \\ 0 & \bar{k}_{32}^{(2)} & (\bar{k}_{33}^{(2)} + \bar{k}_{33}^{(3)}) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

所得结构刚度矩阵与式(j)所示的结构刚度矩阵完全相同。

上述形成结构刚度矩阵的方法,是将单元刚度矩阵换码后,直接按其右方的行码和上方的列码分别将各元素置于结构刚度矩阵的相应位置,通常称这一方法为“对号入座”。这种直接形成结构刚度矩阵的方法,称为直接刚度法。此法在形成结构刚度矩阵之前,已考虑了结构的位移边界条件(各结点线位移为零,固定端转角为零),在矩阵位移法中称为先处理法。

将所得结构刚度矩阵代入式(9-12),即可求得结点位移为

$$\Delta = K^{-1} F_P \quad (9-13)$$

按上式求得结点位移后,根据变形协调条件将式(9-9)中的杆端位移代之以相应的结点位移,则可计算各单元的杆端弯矩。

用“对号入座”的方法直接形成结构刚度矩阵,必须对各单元刚度矩阵“换码”后才能实现。将单元刚度矩阵换码后,矩阵上方从左往右排列的总码与右方从上往下排列的总码是完全相同的,将其写成列向量并用 $\lambda^{(e)}$ 表示。因 $\lambda^{(e)}$ 中的总码决定了单元刚度矩阵中各个元素在结构刚度矩阵中的位置,故将 $\lambda^{(e)}$ 称为单元(e)的定位向量。对于上例则有

$$\lambda^{(1)} = [1 \quad 2]^T, \lambda^{(2)} = [2 \quad 3]^T, \lambda^{(3)} = [3 \quad 0]^T$$

由此可见,“换码”的关键是先确定单元的定位向量。

[例 9-1] 试用直接刚度法建立图 9-6a 所示连续梁的结构刚度矩阵,并计算各杆的杆端弯矩。

解: 结点编码、单元的划分以及结点位移编码均示于图 9-6b 中,并采用图中所示的 $Ox-y$

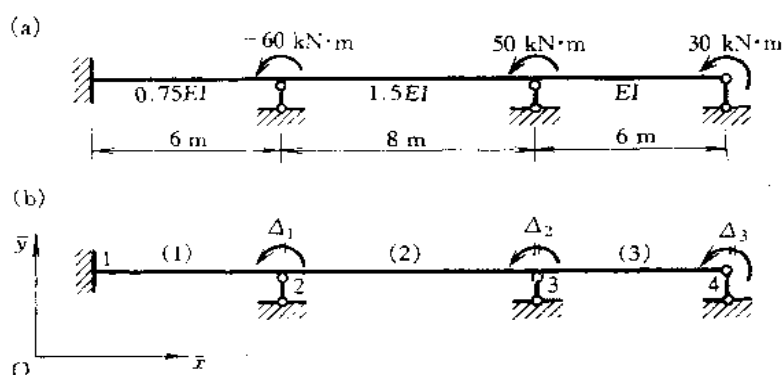


图 9-6

坐标系。

结点位移列向量为

$$\Delta = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3]^T$$

相应的结点荷载列向量为

$$F_P = \begin{bmatrix} -60 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{k})$$

列出各单元定位向量,建立各单元刚度矩阵并按定位向量进行换码,得

单元(1): $\lambda^{(1)} = [0 \quad 1]^T$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{4(0.75EI)}{6} & \frac{2(0.75EI)}{6} \\ \frac{2(0.75EI)}{6} & \frac{4(0.75EI)}{6} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5EI & 0.25EI \\ 0.25EI & 0.5EI \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (l)$$

单元(2): $\lambda^{(2)} = [1 \quad 2]^T$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{4(1.5EI)}{8} & \frac{2(1.5EI)}{8} \\ \frac{2(1.5EI)}{8} & \frac{4(1.5EI)}{8} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.75EI & 0.375EI \\ 0.375EI & 0.75EI \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{m})$$

单元(3): $\lambda^{(3)} = [2 \quad 3]^T$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{4EI}{6} & \frac{2EI}{6} \\ \frac{2EI}{6} & \frac{4EI}{6} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.667EI & 0.333EI \\ 0.333EI & 0.667EI \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{n})$$

对上述三个单元刚度矩阵中的各元素,按其行码和列码直接送入结构刚度矩阵中,进行“对号入座”,可得

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (0.5EI+0.75EI) & 0.375EI & 0 \\ 0.375EI & (0.75EI+0.667EI) & 0.333EI \\ 0 & 0.333EI & 0.667EI \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1.25 & 0.375 & 0 \\ 0.375 & 1.417 & 0.333 \\ 0 & 0.333 & 0.667 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

则

$$K^{-1} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0.879 & -0.264 & 0.132 \\ -0.264 & 0.879 & -0.439 \\ 0.132 & -0.439 & 1.718 \end{bmatrix} \quad (o)$$

将式(k)和式(o)代入式(9-13),求得结点角位移为

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0.879 & -0.264 & 0.132 \\ -0.264 & 0.879 & -0.439 \\ 0.132 & -0.439 & 1.718 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -60 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix} \times 10^3 = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -61.98 \\ 46.62 \\ 21.67 \end{bmatrix} \times 10^3$$

根据所得的结点角位移,并分别利用式(l)、(m)、(n)的三个单元刚度矩阵,可求得各单元的杆端弯矩为

$$\text{单元(1): } \bar{\varphi}_1^{(1)} = 0, \bar{\varphi}_2^{(1)} = \Delta_1 = -\frac{61.98 \times 10^3}{EI}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1^{(1)} \\ \bar{M}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5EI & 0.25EI \\ 0.25EI & 0.5EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{61.98}{EI} \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} -15.50 \\ -30.99 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$= \begin{bmatrix} -15.50 \\ -30.99 \end{bmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\text{单元(2): } \bar{\varphi}_2^{(2)} = \Delta_1 = -\frac{61.98 \times 10^3}{EI}, \bar{\varphi}_3^{(2)} = \Delta_2 = \frac{46.62 \times 10^3}{EI}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75EI & 0.375EI \\ 0.375EI & 0.75EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{61.98}{EI} \\ \frac{46.62}{EI} \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} -29.00 \\ 11.72 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$= \begin{bmatrix} -29.00 \\ 11.72 \end{bmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\text{单元(3): } \bar{\varphi}_3^{(3)} = \Delta_2 = \frac{46.62 \times 10^3}{EI}, \bar{\varphi}_4^{(3)} = \Delta_3 = \frac{21.67 \times 10^3}{EI}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_3^{(3)} \\ \bar{M}_4^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667EI & 0.333EI \\ 0.333EI & 0.667EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{46.62}{EI} \\ \frac{21.67}{EI} \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 38.31 \\ 29.98 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} = \begin{bmatrix} 38.31 \\ 29.98 \end{bmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m}$$

所得结果满足结点 2、3、4 的力矩平衡条件(读者可自行验证),故知计算结果无误。

§ 9-4 单元刚度矩阵的坐标变换

在 § 9-2 中,建立单元刚度方程时,单元的杆端位移及杆端力都是采用沿单元坐标系方向

的分量,但是,在一般结构中,各单元坐标系不尽相同。这样,就不便于进行整体分析。为了便于考虑结构的结点平衡条件和变形谐调条件,须选用一个统一的结构坐标系(又称整体坐标系),将各结点处的位移和力都统一用该坐标系方向的分量来表示。相应地,各单元的杆端力和杆端位移也都应改用沿结构坐标系方向的分量来表示。这样,表示结构坐标系中的杆端力分量和杆端位移分量之间的变换关系的单元刚度矩阵,一般将与单元坐标系下的单元刚度矩阵不同。在结构坐标系下的单元刚度矩阵,可通过将单元坐标系下的单元刚度矩阵进行坐标变换来获得

如图 9-7 所示单元(e), $\bar{Ox}\bar{y}$ 为单元坐标系, Oxy 为结构坐标系。在单元坐标系 $\bar{Ox}\bar{y}$ 下,单元杆端力用式(9-1)表示,即

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = [\bar{F}_{Ni}^{(e)} \quad \bar{F}_{Qi}^{(e)} \quad \bar{M}_i^{(e)} \quad \bar{F}_{Nj}^{(e)} \quad \bar{F}_{Qj}^{(e)} \quad \bar{M}_j^{(e)}]^T$$

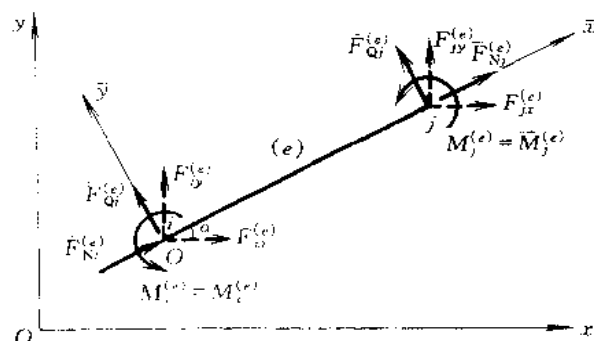


图 9-7

在结构坐标系 Oxy 下的单元杆端力表示为

$$\mathbf{F}^{(e)} = [F_{xi}^{(e)} \quad F_{yi}^{(e)} \quad M_i^{(e)} \quad F_{xj}^{(e)} \quad F_{yj}^{(e)} \quad M_j^{(e)}]^T \quad (9-14)$$

设以 x 轴逆时针转到与 \bar{x} 轴重合时所成的角度 α 为正,由静力等效变换得

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{Ni}^{(e)} &= F_{xi}^{(e)} \cos \alpha + F_{yi}^{(e)} \sin \alpha \\ \bar{F}_{Qi}^{(e)} &= -F_{xi}^{(e)} \sin \alpha + F_{yi}^{(e)} \cos \alpha \\ \bar{M}_i^{(e)} &= M_i^{(e)} \\ \bar{F}_{Nj}^{(e)} &= F_{xj}^{(e)} \cos \alpha + F_{yj}^{(e)} \sin \alpha \\ \bar{F}_{Qj}^{(e)} &= -F_{xj}^{(e)} \sin \alpha + F_{yj}^{(e)} \cos \alpha \\ \bar{M}_j^{(e)} &= M_j^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

将式(a)写成矩阵形式,可得

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{Ni}^{(e)} \\ \bar{F}_{Qi}^{(e)} \\ \bar{M}_i^{(e)} \\ \bar{F}_{Nj}^{(e)} \\ \bar{F}_{Qj}^{(e)} \\ \bar{M}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xi}^{(e)} \\ F_{yi}^{(e)} \\ M_i^{(e)} \\ F_{xj}^{(e)} \\ F_{yj}^{(e)} \\ M_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (9-15)$$

或简写成

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \mathbf{T} \mathbf{F}^{(e)} \quad (9-16)$$

其中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9-17)$$

称为坐标变换矩阵。注意到 \mathbf{T} 中任一行(或列)的各元素的平方和等于 1, 且任意两行(或两列)对应元素相乘的代数和为零, 故 \mathbf{T} 为正交矩阵。因此, 有

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (9-18)$$

式(9-16)表明单元(e)在结构坐标系下的杆端力与在单元坐标系下的杆端力之间的变换关系。显然这一变换关系同样适用于杆端位移, 即

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} = \mathbf{T} \boldsymbol{\delta}^{(e)} \quad (9-19)$$

其中

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [u_i^{(e)} \quad v_i^{(e)} \quad \varphi_i^{(e)} \quad u_j^{(e)} \quad v_j^{(e)} \quad \varphi_j^{(e)}]^T \quad (9-20)$$

称为结构坐标系下的杆端位移列向量。

将式(9-16)、(9-19)代入式(9-4), 有

$$\mathbf{T} \mathbf{F}^{(e)} = \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

上式两边前乘 \mathbf{T}^{-1} , 并考虑到式(9-18), 可得

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

命

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T} \quad (9-21)$$

则有

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)} \quad (9-22)$$

式(9-22)即结构坐标系下单元(e)的刚度方程。其中 $\mathbf{K}^{(e)}$ 为结构坐标系下的单元刚度矩阵, 它可根据单元坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^{(e)}$ [式(9-5)] 和坐标变换矩阵 \mathbf{T} [式(9-17)] 按式(9-21)求得, 即为

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \\ -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} \\ -\left(\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\left(\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \\ -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 -\left(\frac{EA}{l}\cos^2\alpha + \frac{12EI}{l^3}\sin^2\alpha\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)\cos\alpha\sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\sin\alpha \\
 -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)\cos\alpha\sin\alpha & -\left(\frac{EA}{l}\sin^2\alpha + \frac{12EI}{l^3}\cos^2\alpha\right) & \frac{6EI}{l^2}\cos\alpha \\
 \frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & \frac{2EI}{l} \\
 \frac{EA}{l}\cos^2\alpha + \frac{12EI}{l^3}\sin^2\alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)\cos\alpha\sin\alpha & \frac{6EI}{l^2}\sin\alpha \\
 \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)\cos\alpha\sin\alpha & \frac{EA}{l}\sin^2\alpha + \frac{12EI}{l^3}\cos^2\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha \\
 \frac{6EI}{l^2}\sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2}\cos\alpha & \frac{4EI}{l}
 \end{bmatrix} \quad (9-23)$$

这就是单元刚度矩阵进行坐标变换的一般公式。当单元坐标系与结构坐标系一致时(即 $\alpha = 0$)，则有 $\mathbf{K}^{(e)} = \bar{\mathbf{K}}^{(e)}$ 。

式(9-23)可表示为如下的一般形式

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix}
 k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} & k_{15}^{(e)} & k_{16}^{(e)} \\
 k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} & k_{25}^{(e)} & k_{26}^{(e)} \\
 k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} & k_{35}^{(e)} & k_{36}^{(e)} \\
 k_{41}^{(e)} & k_{42}^{(e)} & k_{43}^{(e)} & k_{44}^{(e)} & k_{45}^{(e)} & k_{46}^{(e)} \\
 k_{51}^{(e)} & k_{52}^{(e)} & k_{53}^{(e)} & k_{54}^{(e)} & k_{55}^{(e)} & k_{56}^{(e)} \\
 k_{61}^{(e)} & k_{62}^{(e)} & k_{63}^{(e)} & k_{64}^{(e)} & k_{65}^{(e)} & k_{66}^{(e)}
 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (9-24)$$

注意到在建立式(9-23)所示的单元刚度矩阵时,单元的杆端力分量和杆端位移分量是按规定顺序排列,并且是一一对应的。如果将它们按式(9-24)进行编码,则1、2、3分别代表*i*端沿*x*、*y*、 φ 方向的编码;而4、5、6分别代表*j*端沿*x*、*y*、 φ 方向的编码。于是,编码1、2、3、4、5、6就表明了单元杆端力分量(或杆端位移分量)的位置和方向,故又称为局部码。每个元素的两个下标中,第一个下标表示该杆端力的位置和方向;第二个下标表明引起该杆端力的单位杆端位移的位置和方向。例如,元素 $k_{25}^{(e)}$ 表示单元(*e*)仅在*j*端发生沿*y*方向的单位位移时,在*i*端沿*y*方向所引起的杆端力; $k_{16}^{(e)}$ 则表示单元(*e*)仅在*j*端发生沿 φ 方向的单位角位移时,在*i*端沿*x*方向所引起的杆端力。

§9-5 非结点荷载处理

以上所述,均假定荷载是作用在结点上的集中力或集中力矩,都是结点荷载。实际上常有非结点荷载作用在单元上。对于非结点荷载需要将其变换为相应的结点荷载。变换的原则是:使结构在结点荷载作用下,其结点的位移与原非结点荷载作用下的结点位移相同。这种结点荷载称为等效结点荷载。现以图9-8a所示刚架为例作具体说明。计算时考虑杆件的轴向变形。

若将刚架分为图示(1)、(2)、(3)三个单元,则在单元(1)和单元(2)中有非结点荷载作用,需

变换为等效结点荷载。其变换步骤如下：

(1) 在考虑杆件轴向变形的情况下, 结点 2、3 均有沿 x 和 y 方向的独立线位移, 并有角位移。因此, 需按图 9-8b 添加附加约束, 使各单元成为两端固定梁。此时各单元的固端力可由表 5-1 查得, 只须注意各固端力的方向以与结构坐标系正向一致为正, 便得结构坐标系中的固端力, 其结果如图 9-8d 所示, 据此, 可计算出各附加约束上的约束反力如图 9-8b 所示。

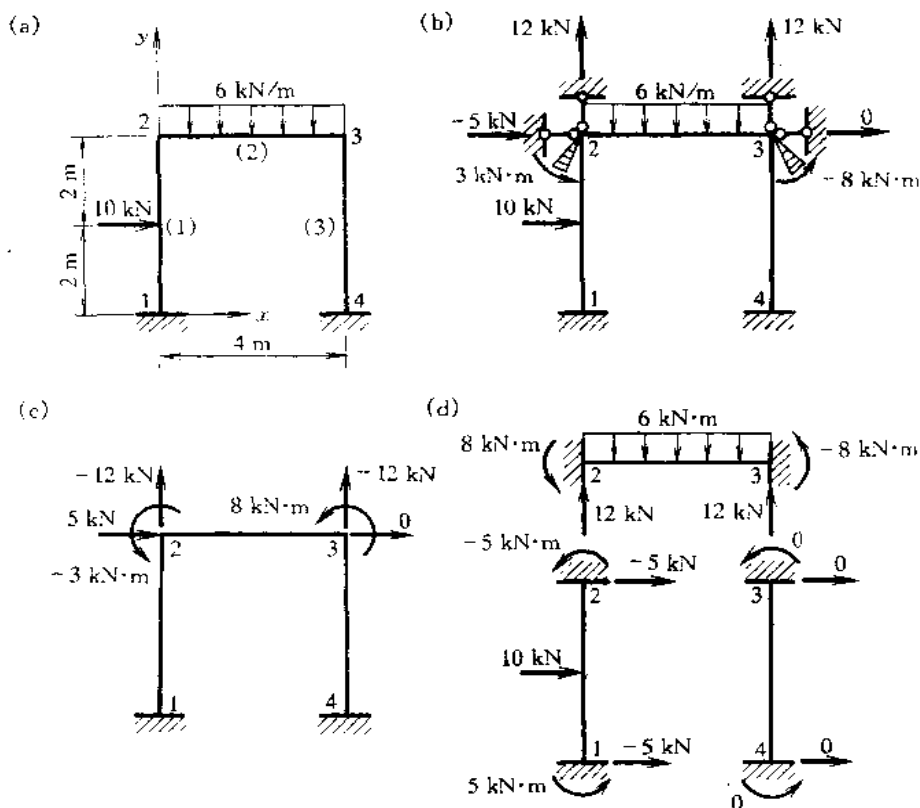


图 9-8

(2) 将各附加约束上的约束反力反号作用在结构的结点上, 得到结点荷载。如图 9-8c 所示。

将图 9-8b、c 两种情况叠加后, 则图 9-8b 中各附加约束的反力即与图 9-8c 中各结点荷载相互抵消, 这就如同解除了附加约束的约束作用, 使结构回复到原来的受力状态。由于在图 9-8b 所示情况下, 各结点位移均为零, 因此可以断定, 在图 9-8c 所示结点荷载作用下, 各结点的位移与原结构相同。这样就可利用图 9-8c 所示结构替代原结构来计算结点位移, 而原结构的内力则等于图 9-8c 和图 9-8b 所示结构的内力之和。图 9-8c 所示的结点荷载即为所求的等效结点荷载。

若结构上既有结点荷载又有非结点荷载作用, 则在求得非结点荷载的等效结点荷载后, 应与原有的结点荷载相叠加, 从而得到所谓综合结点荷载。结构在综合结点荷载作用下的结点位移就等于原结构的结点位移。

值得指出: 在这种情况下, 计算原结构的实际杆端力时, 如同在位移法或力矩分配法中一样,

应将上述综合结点荷载作用下的杆端力与相应的固端力相叠加。

§ 9-6 用直接刚度法计算平面刚架

用直接刚度法计算刚架的基本原理和步骤与计算连续梁相类似。本节只讨论考虑杆件轴向变形的刚架。刚架的结点除有角位移外还有线位移。现以图 9-9a 所示刚架为例进行说明。

首先,将刚架划分为图 9-9b 所示(1)、(2)、(3)三个单元,结点编码及结构坐标系如图中所示。单元(1)以 1 为始端,2 为末端,即由 1 到 2 的指向为单元坐标系 \bar{x} 轴的方向;单元(2)以 2 为始端,3 为末端;单元(3)以 3 为始端,4 为末端。这样即选定了各单元坐标系,并且由此可确定各单元的 α 角,如图 9-9b 中的 α_1 、 α_2 、 α_3 。

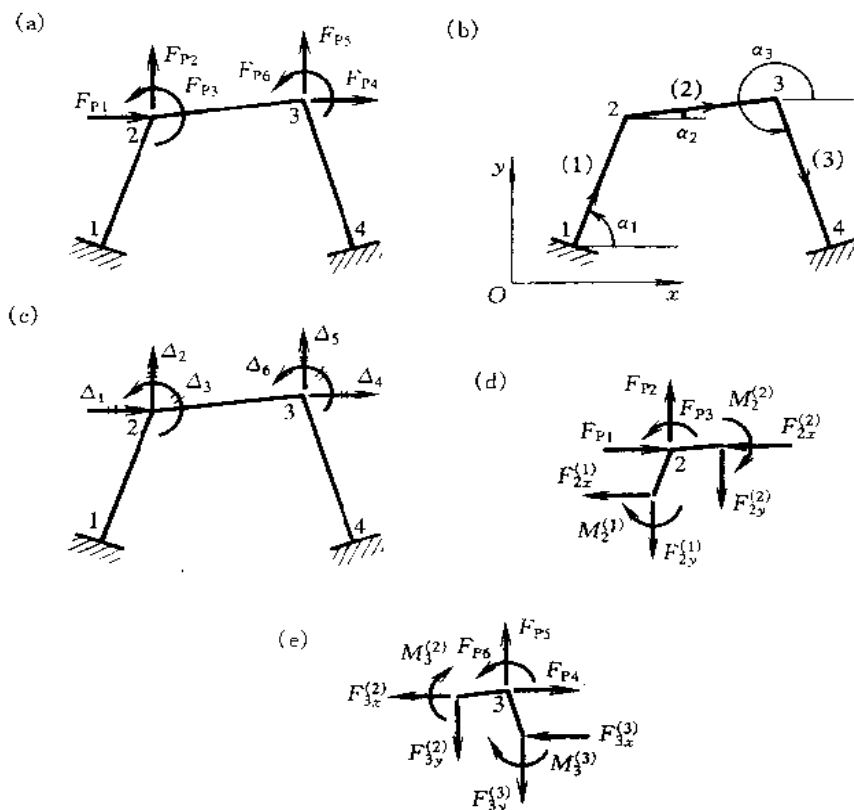


图 9-9

其次,将自由结点位移(即不受支承约束的结点位移)编码,并建立其列向量(图 9-9c)

$$\Delta = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4 \quad \Delta_5 \quad \Delta_6]^T \quad (a)$$

以及相应的结点荷载列向量(图 9-9a)

$$F_P = [F_{P1} \quad F_{P2} \quad F_{P3} \quad F_{P4} \quad F_{P5} \quad F_{P6}]^T \quad (b)$$

其中下标 1、2、3、4、5、6 是自由结点位移分量(或结点荷载分量)在整体结构中的统一编码,称为

总码。

然后,建立整体结构的平衡方程,由结点 2(图 9-9d)和结点 3(图 9-9e)的平衡条件 $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$ 及 $\Sigma M = 0$ 得

$$\begin{aligned} F_{P1} &= F_{2x}^{(1)} + F_{2x}^{(2)} \\ F_{P2} &= F_{2y}^{(1)} + F_{2y}^{(2)} \\ F_{P3} &= M_2^{(1)} + M_2^{(2)} \\ F_{P4} &= F_{3x}^{(2)} + F_{3x}^{(3)} \\ F_{P5} &= F_{3y}^{(2)} + F_{3y}^{(3)} \\ F_{P6} &= M_3^{(2)} + M_3^{(3)} \end{aligned}$$

或

$$\begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \\ F_{P3} \\ F_{P4} \\ F_{P5} \\ F_{P6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2x}^{(1)} \\ F_{2y}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{2x}^{(2)} \\ F_{2y}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ F_{3x}^{(2)} \\ F_{3y}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{3x}^{(3)} \\ F_{3y}^{(3)} \\ M_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (c)$$

为了建立结构刚度方程,需先分别将各单元的 EI 、 EA 、 l 、 α 代入式(9-23),求得各单元在结构坐标系下的单元刚度矩阵,并按式(9-22)得各单元刚度方程。再考虑结点变形谐调条件及位移边界条件后,将各单元在 2 端和 3 端的杆端力代入式(c),即可得出结构的刚度方程。

对于单元(1),其刚度矩阵用式(9-24)表示后,单元刚度方程为

$$\begin{bmatrix} F_{1x}^{(1)} \\ F_{1y}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ F_{2x}^{(1)} \\ F_{2y}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ \varphi_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \varphi_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (d)$$

考虑变形谐调条件及位移边界条件有

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(1)} &= 0, & v_1^{(1)} &= 0, & \varphi_1^{(1)} &= 0 \\ u_2^{(1)} &= \Delta_1, & v_2^{(1)} &= \Delta_2, & \varphi_2^{(1)} &= \Delta_3 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

将其代入式(d),可得

$$\begin{bmatrix} F_{2x}^{(1)} \\ F_{2y}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} \quad (f)$$

同理,对于单元(2)

$$\begin{bmatrix} F_{2x}^{(2)} \\ F_{2y}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ F_{3x}^{(2)} \\ F_{3y}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ \varphi_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} \\ \varphi_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (g)$$

根据变形谐调条件有

$$\left. \begin{aligned} u_2^{(2)} &= \Delta_1, & v_2^{(2)} &= \Delta_2, & \varphi_2^{(2)} &= \Delta_3 \\ u_3^{(2)} &= \Delta_4, & v_3^{(2)} &= \Delta_5, & \varphi_3^{(2)} &= \Delta_6 \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

将式(h)代入式(g)可得

$$\begin{bmatrix} F_{2x}^{(2)} \\ F_{2y}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ F_{3x}^{(2)} \\ F_{3y}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} \quad (i)$$

对于单元(3)

$$\begin{bmatrix} F_{3x}^{(3)} \\ F_{3y}^{(3)} \\ M_3^{(3)} \\ F_{4x}^{(3)} \\ F_{4y}^{(3)} \\ M_4^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(3)} & k_{14}^{(3)} & k_{15}^{(3)} & k_{16}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & k_{23}^{(3)} & k_{24}^{(3)} & k_{25}^{(3)} & k_{26}^{(3)} \\ k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} & k_{35}^{(3)} & k_{36}^{(3)} \\ k_{41}^{(3)} & k_{42}^{(3)} & k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)} & k_{45}^{(3)} & k_{46}^{(3)} \\ k_{51}^{(3)} & k_{52}^{(3)} & k_{53}^{(3)} & k_{54}^{(3)} & k_{55}^{(3)} & k_{56}^{(3)} \\ k_{61}^{(3)} & k_{62}^{(3)} & k_{63}^{(3)} & k_{64}^{(3)} & k_{65}^{(3)} & k_{66}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3^{(3)} \\ v_3^{(3)} \\ \varphi_3^{(3)} \\ u_4^{(3)} \\ v_4^{(3)} \\ \varphi_4^{(3)} \end{bmatrix} \quad (j)$$

变形谐调条件及位移边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u_3^{(3)} &= \Delta_4, & v_3^{(3)} &= \Delta_5, & \varphi_3^{(3)} &= \Delta_6 \\ u_4^{(3)} &= 0, & v_4^{(3)} &= 0, & \varphi_4^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

故有

$$\begin{bmatrix} F_{3x}^{(3)} \\ F_{3y}^{(3)} \\ M_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & k_{23}^{(3)} \\ k_{31}^{(3)} & k_{32}^{(3)} & k_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} \quad (l)$$

将式(f)、(i)、(l)代入式(c)可得

$$\begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \\ F_{P3} \\ F_{P4} \\ F_{P5} \\ F_{P6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{45}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & k_{46}^{(1)} + k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{54}^{(1)} + k_{21}^{(2)} & k_{55}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{56}^{(1)} + k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{64}^{(1)} + k_{31}^{(2)} & k_{65}^{(1)} + k_{32}^{(2)} & k_{66}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{45}^{(2)} + k_{12}^{(3)} & k_{46}^{(2)} + k_{13}^{(3)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} + k_{21}^{(3)} & k_{55}^{(2)} + k_{22}^{(3)} & k_{56}^{(2)} + k_{23}^{(3)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} + k_{31}^{(3)} & k_{65}^{(2)} + k_{32}^{(3)} & k_{66}^{(2)} + k_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} \quad (m)$$

上式可简写成

$$F_P = K\Delta$$

式中

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{45}^{(1)} + k_{12}^{(2)} & k_{46}^{(1)} + k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{54}^{(1)} + k_{21}^{(2)} & k_{55}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{56}^{(1)} + k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{64}^{(1)} + k_{31}^{(2)} & k_{65}^{(1)} + k_{32}^{(2)} & k_{66}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{45}^{(2)} + k_{12}^{(3)} & k_{46}^{(2)} + k_{13}^{(3)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} + k_{21}^{(3)} & k_{55}^{(2)} + k_{22}^{(3)} & k_{56}^{(2)} + k_{23}^{(3)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} + k_{31}^{(3)} & k_{65}^{(2)} + k_{32}^{(3)} & k_{66}^{(2)} + k_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (n)$$

为结构刚度矩阵。

对照式(d)、(g)、(j)中的单元刚度矩阵与式(n)的结构刚度矩阵可归纳出结构刚度矩阵的集成规则如下：

换码 根据变形谐调条件和位移边界条件,用结点位移的总码(若结点位移受支承约束则相应总码为“0”)替换单元的局部码,就可得到定位向量 $\lambda^{(e)}$ 。例如,对单元(1),根据式(e)可得定位向量 $\lambda^{(1)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3]^T$ 。用定位向量来表示单元刚度矩阵的行码和列码,分别在 $K^{(1)}$ 的上方和右方标出,即

$$K^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad (p)$$

对号入座 在换码后,将各单元刚度矩阵中行和列上均与非“0”码对应的各元素,按定位向量所示的行码和列码“对号入座”分别送入结构刚度矩阵 K 中。如在 $K^{(1)}$ [式(p)]中,只有虚线方框内的各元素需要送到结构刚度矩阵中“对号入座”,它们所处的位置也就是式(n)中所示的位置。同样,由式(h)和式(k)可得单元(2)和单元(3)的定位向量为

$$\lambda^{(2)} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]^T$$

$$\lambda^{(3)} = [4 \ 5 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

将单元(2)、(3)的单元刚度矩阵中有关各元素,分别按 $\lambda^{(2)}$ 、 $\lambda^{(3)}$ 表示的行码和列码送到 K 中“对号入座”。这样,就形成了式(n)所示的结构刚度矩阵。

现就用直接刚度法(先处理法)计算刚架的步骤概括如下:

1. 划分单元并对结点和单元进行编号,选取结构坐标系和单元坐标系(确定单元的始端和末端),同时对自由结点位移和相应的结点荷载进行编码。
2. 建立按结构坐标系编码顺序排列的自由结点位移列向量和相应的结点荷载列向量(包括对非结点荷载的处理)。
3. 按式(9-23)求出各单元在结构坐标系下的单元刚度矩阵,按变形协调条件和位移边界条件写出各单元的定位向量,并换码。
4. 将各单元刚度矩阵中有关元素按定位向量所示的行码和列码送到结构刚度矩阵中“对号入座”,如果同一位置上有多个元素,则应将这些元素叠加,即得到结构刚度矩阵。
5. 按式 $\Delta = K^{-1}F_p$ 求解未知自由结点位移。
6. 将杆端位移改用相应的结点位移表示后,按式(9-22)计算在结构坐标系下的单元杆端力,再按式(9-16)计算在单元坐标系下的单元杆端力,若单元内有非结点荷载作用,则还需叠加上相应的固端力才可得到实际的杆端力。

[例 9-2] 试计算图 9-10a 所示刚架的内力,设各杆的弹性模量和截面尺寸相同, $E = 210 \text{ GPa}$, $A = 0.4 \text{ m}^2$, $I = 0.04 \text{ m}^4$ 。

解:1. 如图 9-10b 所示,将刚架划分为(1)、(2)两个单元,结点编号为 1、2、3;结点位移编码为 Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 ;结构坐标系为 Oxy ;单元(1)取 $i \rightarrow 1, j \rightarrow 2$,单元(2)取 $i \rightarrow 2, j \rightarrow 3$,因此, $\alpha_1 = 0$, α_2 如图中所示。

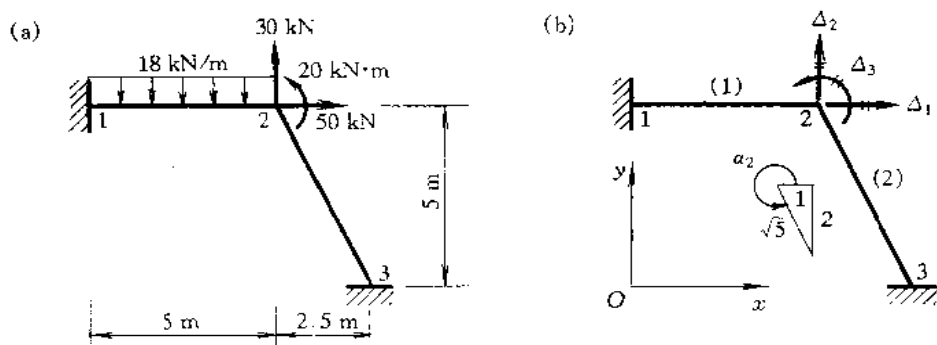


图 9-10

2. 结点位移列向量为

$$\Delta = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3]^T$$

按 § 9-5 的方法将单元(1)上的非结点荷载化为等效的结点荷载,然后与原有的结点荷载叠加,故相应的综合结点荷载列向量为

$$\mathbf{F}_P = \begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \\ F_{P3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -45 \\ 37.5 \end{bmatrix} \times 10^3 + \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 50 \text{ N} \\ -15 \text{ N} \\ 57.5 \text{ N} \cdot \text{m} \end{bmatrix} \times 10^3$$

3. 建立结构坐标系下的单元刚度矩阵并换码

单元(1): 因 $\alpha_1 = 0$, 可按式(9-5)求 $\mathbf{K}^{(1)}$, 且 $\lambda^{(1)} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3]^T$, 故得

$$\mathbf{K}^{(1)} = \bar{\mathbf{K}}^{(1)} = 10^8 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 168 & 0 & 0 & -168 & 0 & 0 \\ 0 & 8.064 & 20.16 & 0 & -8.064 & 20.16 \\ 0 & 20.16 & 67.2 & 0 & -20.16 & 33.6 \\ -168 & 0 & 0 & 168 & 0 & 0 \\ 0 & -8.064 & -20.16 & 0 & 8.064 & -20.16 \\ 0 & 20.16 & 33.6 & 0 & -20.16 & 67.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

单元(2): $\sin \alpha_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -0.8944$, $\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472$, 按式(9-23)求 $\mathbf{K}^{(2)}$, 且 $\lambda^{(2)} = [1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 故得

$$\mathbf{K}^{(2)} = 10^8 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 34.667 & -57.794 & 14.425 & -34.667 & 57.794 & 14.425 \\ -57.794 & 121.358 & 7.212 & 57.794 & -121.358 & 7.212 \\ 14.425 & 7.212 & 60.106 & -14.425 & -7.212 & 30.053 \\ -34.667 & 57.794 & -14.425 & 34.667 & -57.794 & -14.425 \\ 57.794 & -121.358 & -7.212 & -57.794 & 121.358 & -7.212 \\ 14.425 & 7.212 & 30.053 & -14.425 & -7.212 & 60.106 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

4. 将上述两个单元刚度矩阵中的各元素, 按定位向量表示的行码和列码, 用“对号入座”的办法可得结构刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= 10^8 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 168+34.667 & -57.794 & 14.425 \\ -57.794 & 8.064+121.358 & -20.16+7.212 \\ 14.425 & -20.16+7.212 & 67.2+60.106 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ &= 10^8 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 202.667 & -57.794 & 14.425 \\ -57.794 & 129.422 & -12.948 \\ 14.425 & -12.948 & 127.306 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{aligned}$$

结构刚度方程为

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F}_P$$

即

$$10^8 \times \begin{bmatrix} 202.667 & -57.794 & 14.425 \\ -57.794 & 129.422 & -12.948 \\ 14.425 & -12.948 & 127.306 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -15 \\ 57.5 \end{bmatrix} \times 10^3$$

5. 解结构刚度方程求结点位移

$$\Delta = K^{-1} F_P$$

即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} &= 10^{-8} \times \begin{bmatrix} 202.667 & -57.794 & 14.425 \\ -57.794 & 129.422 & -12.948 \\ 14.425 & -12.948 & 127.306 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50 \\ -15 \\ 57.5 \end{bmatrix} \times 10^3 \\ &= 10^{-9} \times \begin{bmatrix} 56.732 & 24.945 & -3.891 \\ 24.945 & 89.029 & 6.228 \\ -3.891 & 6.228 & 79.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ -15 \\ 57.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2387 \times 10^{-6} \text{ m} \\ 2.6993 \times 10^{-7} \text{ m} \\ 4.2905 \times 10^{-6} \text{ rad} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. 计算各单元的杆端力

单元(1): 因 $\alpha_1 = 0$, 可将杆端位移以相应的结点位移表示后按式(9-4)计算单元坐标系下的杆端力, 但该单元有非结点荷载作用, 故还须叠加上相应的固端力。于是, 实际的杆端力为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{F}_{N1}^{(1)} \\ \bar{F}_{Q1}^{(1)} \\ \bar{M}_1^{(1)} \\ \bar{F}_{N2}^{(1)} \\ \bar{F}_{Q2}^{(1)} \\ \bar{M}_2^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{1x}^{(1)} \\ F_{1y}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ F_{2x}^{(1)} \\ F_{2y}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{bmatrix} = 10^8 \times \begin{bmatrix} 168 & 0 & 0 & -168 & 0 & 0 \\ 0 & 8.064 & 20.16 & 0 & -8.064 & 20.16 \\ 0 & 20.16 & 67.2 & 0 & -20.16 & 33.6 \\ -168 & 0 & 0 & 168 & 0 & 0 \\ 0 & -8.064 & -20.16 & 0 & 8.064 & -20.16 \\ 0 & 20.16 & 33.6 & 0 & -20.16 & 67.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.2387 \times 10^{-6} \\ 2.6993 \times 10^{-7} \\ 4.2905 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 37.5 \\ 0 \\ 45 \\ -37.5 \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} -37.610 \text{ N} \\ 53.432 \text{ N} \\ 51.372 \text{ N}\cdot\text{m} \\ 37.610 \text{ N} \\ 36.568 \text{ N} \\ -9.212 \text{ N}\cdot\text{m} \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} -37.610 \text{ kN} \\ 53.432 \text{ kN} \\ 51.372 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 37.610 \text{ kN} \\ 36.568 \text{ kN} \\ -9.212 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

单元(2): $\sin \alpha_2 = -0.8944$, $\cos \alpha_2 = 0.4472$, 将杆端位移以相应的结点位移表示后按式(9-22)计算结构坐标系下的杆端力, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{2x}^{(2)} \\ F_{2y}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ F_{3x}^{(2)} \\ F_{3y}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{bmatrix} &= 10^8 \times \begin{bmatrix} 34.667 & -57.794 & 14.425 & -34.667 & 57.794 & 14.425 \\ -57.794 & 121.358 & 7.212 & 57.794 & -121.358 & 7.212 \\ 14.425 & 7.212 & 60.106 & -14.425 & -7.212 & 30.053 \\ -34.667 & 57.794 & -14.425 & 34.667 & -57.794 & -14.425 \\ 57.794 & -121.358 & -7.212 & -57.794 & 121.358 & -7.212 \\ 14.425 & 7.212 & 30.053 & -14.425 & -7.212 & 60.106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.2387 \times 10^{-6} \\ 2.6993 \times 10^{-7} \\ 4.2905 \times 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 12.390 \text{ N} \\ -6.568 \text{ N} \\ 29.212 \text{ N}\cdot\text{m} \\ -12.390 \text{ N} \\ 6.568 \text{ N} \\ 16.318 \text{ N}\cdot\text{m} \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 12.390 \text{ kN} \\ -6.568 \text{ kN} \\ 29.212 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ -12.390 \text{ kN} \\ 6.568 \text{ kN} \\ 16.318 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

再按式(9-16)计算单元坐标系下的杆端力, 得

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{N2}^{(2)} \\ \bar{F}_Q^{(2)} \\ \bar{M}_2^{(2)} \\ \bar{F}_{N3}^{(2)} \\ \bar{F}_Q^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & -0.8944 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8944 & 0.4472 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4472 & -0.8944 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.390 \\ -6.568 \\ 29.212 \\ -12.390 \\ 6.568 \\ 16.318 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$= \begin{bmatrix} 11.415 \text{ N} \\ 8.144 \text{ N} \\ 29.212 \text{ N}\cdot\text{m} \\ -11.415 \text{ N} \\ -8.144 \text{ N} \\ 16.318 \text{ N}\cdot\text{m} \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 11.415 \text{ kN} \\ 8.144 \text{ kN} \\ 29.212 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ -11.415 \text{ kN} \\ -8.144 \text{ kN} \\ 16.318 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

7. 根据各单元杆端力作内力图(图 9-11)

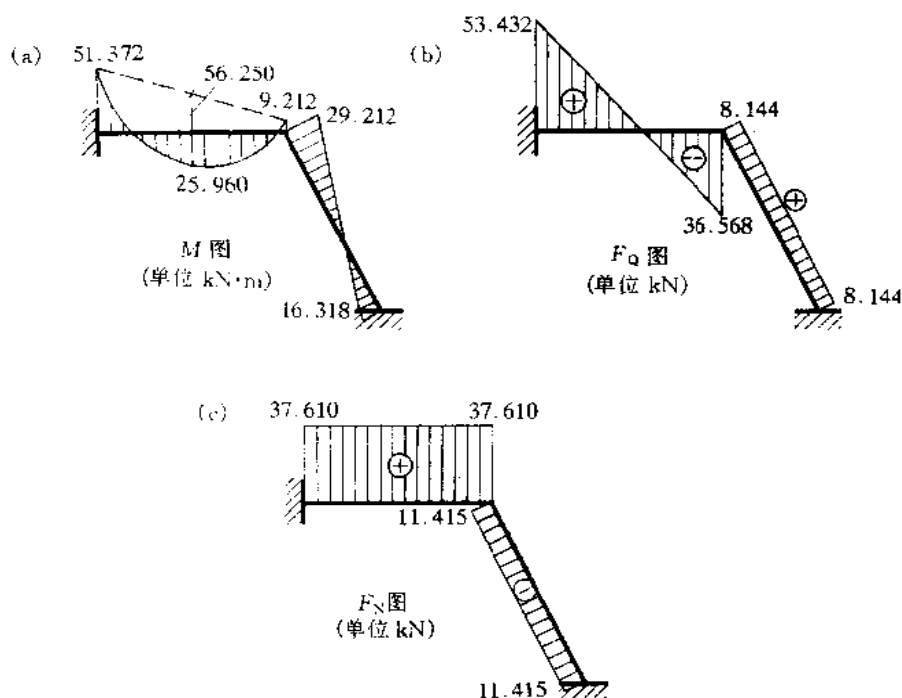


图 9-11

在图 9-11 中, F_Q 以使隔离体顺时针方向转动为正; F_N 以拉力为正。值得注意的是, 本章对杆端力符号的规定与位移法及材料力学都不同。作 M 图时应注意弯矩对杆端的作用是以逆时针方向为正, 从而判断受拉的一侧; 作 F_Q 、 F_N 图时, 要注意计算得到的剪力和轴力是以与单元坐标轴的正向相同为正, 据此判断出它们的实际方向, 才能确定轴力是拉力还是压力, 剪力是

正还是负,最后正确作出 M 、 F_Q 、 F_N 图。

8. 校核

取结点 2 为隔离体(图 9-12),根据平衡条件

$$\Sigma F_x = 0, 50 \times 10^3 - 37.610 \times 10^3 - 12.390 \times 10^3 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0, 30 \times 10^3 - 36.568 \times 10^3 + 6.568 \times 10^3 = 0$$

$$\Sigma M = 0, 20 \times 10^3 + 9.212 \times 10^3 - 29.212 \times 10^3 = 0$$

可知满足全部平衡条件,故计算结果无误。

[例 9-3] 试计算图 9-13a 所示刚架的内力,设各杆的弹性模量和截面尺寸相同, $E = 30 \text{ GPa}$, $A = 0.24 \text{ m}^2$, $I = 0.0128 \text{ m}^4$ 。不考虑轴向变形的影响。

图 9-12

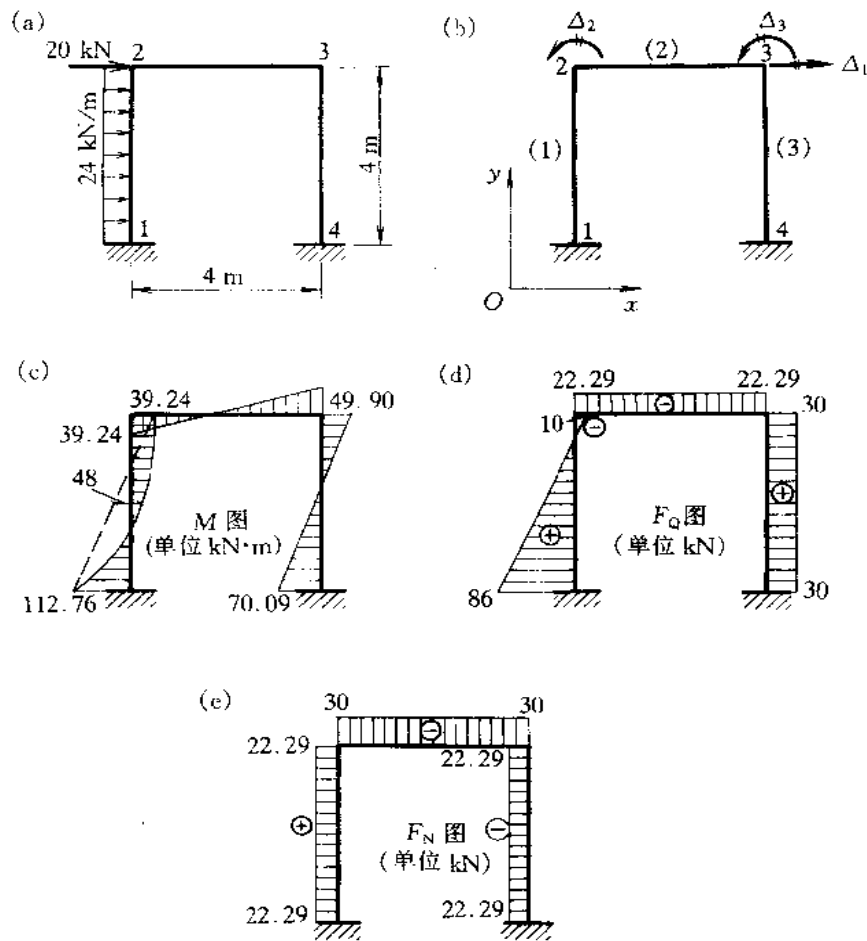


图 9-13

解:1. 如图 9-13b 所示,将刚架划分为(1)、(2)、(3)三个单元,结点编号为 1、2、3、4;在不考虑轴向变形情况下,结点 2 和结点 3 的水平线位移相等,故独立的结点线位移只有一个,用 Δ_1 表示,结点位移编码为 Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 ;结构坐标系为 Oxy 。单元(1)取 $i \rightarrow 1$, $j \rightarrow 2$,单元(2)取 $i \rightarrow 2$,

$j \rightarrow 3$, 单元(3)取 $i \rightarrow 4, j \rightarrow 3$, 故 $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ 。

2. 结点位移列向量为

$$\Delta = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3]^T$$

将单元(1)上的均布荷载化为等效结点荷载后,与原有的结点荷载叠加,得相应的综合结点荷载列向量为

$$\mathbf{F}_P = \begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \\ F_{P3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 68 \text{ N} \\ 32 \text{ N} \cdot \text{m} \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

3. 建立结构坐标系下的单元刚度矩阵并换码

单元(1): $\sin \alpha_1 = 1, \cos \alpha_1 = 0$, 按式(9-23)求 $\mathbf{K}^{(1)}$, 单元定位向量 $\lambda^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]^T$, 故有

$$\mathbf{K}^{(1)} = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 7.2 & 0 & -14.4 & -7.2 & 0 & -14.4 \\ 0 & 180 & 0 & 0 & -180 & 0 \\ -14.4 & 0 & 38.4 & 14.4 & 0 & 19.2 \\ -7.2 & 0 & 14.4 & 7.2 & 0 & 14.4 \\ 0 & -180 & 0 & 0 & 180 & 0 \\ -14.4 & 0 & 19.2 & 14.4 & 0 & 38.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

单元(2): 因 $\alpha_2 = 0$, 按式(9-5)求 $\mathbf{K}^{(2)}$, 由于 Δ_1 只引起单元(2)发生刚体平移而不引起内力, 所以单元(2)的受力情况仅与 2、3 两端转角 Δ_2, Δ_3 有关。因此, 在写定位向量时, Δ_1 的总码应换为“0”, 据此有 $\lambda^{(2)} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 3]^T$, 故有

$$\mathbf{K}^{(2)} = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 180 & 0 & 0 & -180 & 0 & 0 \\ 0 & 7.2 & 14.4 & 0 & -7.2 & 14.4 \\ 0 & 14.4 & 38.4 & 0 & -14.4 & 19.2 \\ -180 & 0 & 0 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & -7.2 & -14.4 & 0 & 7.2 & -14.4 \\ 0 & 14.4 & 19.2 & 0 & -14.4 & 38.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$

单元(3): $\sin \alpha_3 = 1, \cos \alpha_3 = 0$, 按式(9-23)求 $\mathbf{K}^{(3)}$, 且 $\lambda^{(3)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 3]^T$, 故有

$$\mathbf{K}^{(3)} = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 7.2 & 0 & -14.4 & -7.2 & 0 & -14.4 \\ 0 & 180 & 0 & 0 & -180 & 0 \\ -14.4 & 0 & 38.4 & 14.4 & 0 & 19.2 \\ -7.2 & 0 & 14.4 & 7.2 & 0 & 14.4 \\ 0 & -180 & 0 & 0 & 180 & 0 \\ -14.4 & 0 & 19.2 & 14.4 & 0 & 38.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$

4. 将上面三个单元刚度矩阵中的各元素,按定位向量表示的行码和列码,用“对号入座”的

办法可得结构刚度矩阵为

$$K = 10^7 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 7.2+7.2 & 14.4 & 14.4 \\ 14.4 & 38.4+38.4 & 19.2 \\ 14.4 & 19.2 & 38.4+38.4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 14.4 & 14.4 & 14.4 \\ 14.4 & 76.8 & 19.2 \\ 14.4 & 19.2 & 76.8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 10^7 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 14.4 & 14.4 & 14.4 \\ 14.4 & 76.8 & 19.2 \\ 14.4 & 19.2 & 76.8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

结构刚度方程为

$$K\Delta = F_P$$

即

$$10^7 \times \begin{bmatrix} 14.4 & 14.4 & 14.4 \\ 14.4 & 76.8 & 19.2 \\ 14.4 & 19.2 & 76.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

5. 解结构刚度方程求结点位移

$$\Delta = K^{-1} F_P$$

即

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = 10^{-7} \times \begin{bmatrix} 14.4 & 14.4 & 14.4 \\ 14.4 & 76.8 & 19.2 \\ 14.4 & 19.2 & 76.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 68 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$= 10^{-10} \times \begin{bmatrix} 99.2063 & -14.8810 & -14.8810 \\ -14.8810 & 16.1210 & -1.2401 \\ -14.8810 & -1.2401 & 16.1210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 68 \\ 32 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 6.2698 \text{ m} \\ -0.4960 \text{ rad} \\ -1.0516 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

6. 计算各单元的杆端力

单元(1): $\sin \alpha_1 = 1, \cos \alpha_1 = 0$, 将杆端位移以相应的结点位移表示后, 按式(9-22)计算结构坐标系下的单元杆端力, 因该单元有均布荷载作用, 故还须叠加上相应的固端力, 于是实际的杆端力为

$$\begin{bmatrix} F_{1x}^{(1)} \\ F_{1y}^{(1)} \\ M_1^{(1)} \\ F_{2x}^{(1)} \\ F_{2y}^{(1)} \\ M_2^{(1)} \end{bmatrix} = 10^7 \times \begin{bmatrix} 7.2 & 0 & -14.4 & -7.2 & 0 & -14.4 \\ 0 & 180 & 0 & 0 & -180 & 0 \\ -14.4 & 0 & 38.4 & 14.4 & 0 & 19.2 \\ -7.2 & 0 & 14.4 & 7.2 & 0 & 14.4 \\ 0 & -180 & 0 & 0 & 180 & 0 \\ -14.4 & 0 & 19.2 & 14.4 & 0 & 38.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.2698 \\ 0 \\ -0.4960 \end{bmatrix} \times 10^{-4} + \begin{bmatrix} -48 \\ 0 \\ 32 \\ -48 \\ 0 \\ -32 \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} -86.000 \text{ N} \\ 0 \\ 112.762 \text{ N}\cdot\text{m} \\ -10.000 \text{ N} \\ 0 \\ 39.239 \text{ N}\cdot\text{m} \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} -86.000 \text{ kN} \\ 0 \\ 112.762 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ -10.000 \text{ kN} \\ 0 \\ 39.239 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

再按式(9-16)计算单元坐标系下的杆端力, 得

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \bar{F}_{N1}^{(1)} \\ \bar{F}_{Q1}^{(1)} \\ \bar{M}_1^{(1)} \\ \bar{F}_{N2}^{(1)} \\ \bar{F}_{Q2}^{(1)} \\ \bar{M}_2^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -86.000 \\ 0 \\ 112.762 \\ -10.000 \\ 0 \\ 39.239 \end{bmatrix} \times 10^3 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 86.000 \text{ N} \\ 112.762 \text{ N}\cdot\text{m} \\ 0 \\ 10.000 \text{ N} \\ -39.239 \text{ N}\cdot\text{m} \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 86.000 \text{ kN} \\ 112.762 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 0 \\ 10.000 \text{ kN} \\ 39.239 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

值得指出:由于忽略了轴向变形的影响,因此不能算出单元的轴力,反映在计算单元杆端力时得到的轴力为零。在各单元剪力求出后,分别取结点为隔离体利用平衡条件,即可求得各单元的轴力。

单元(2):因 $\alpha_2 = 0$,将杆端位移以相应的结点位移表示后可按式(9-4)计算单元坐标系下的杆端力,得

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \bar{F}_{N2}^{(2)} \\ \bar{F}_{Q2}^{(2)} \\ \bar{M}_2^{(2)} \\ \bar{F}_{N3}^{(2)} \\ \bar{F}_{Q3}^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{2x}^{(2)} \\ F_{2y}^{(2)} \\ M_2^{(2)} \\ F_{3x}^{(2)} \\ F_{3y}^{(2)} \\ M_3^{(2)} \end{bmatrix} = 10^7 \times \begin{bmatrix} 180 & 0 & 0 & -180 & 0 & 0 \\ 0 & 7.2 & 14.4 & 0 & -7.2 & 14.4 \\ 0 & 14.4 & 38.4 & 0 & -14.4 & 19.2 \\ -180 & 0 & 0 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & -7.2 & -14.4 & 0 & 7.2 & -14.4 \\ 0 & 14.4 & 19.2 & 0 & -14.4 & 38.4 \end{bmatrix} \\
 &\quad \times 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -22.285 \times 10^3 \text{ N} \\ -39.237 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} \\ 0 \\ 22.285 \times 10^3 \text{ N} \\ -49.905 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -22.285 \text{ kN} \\ -39.237 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 0 \\ 22.285 \text{ kN} \\ -49.905 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

单元(3): $\sin \alpha_3 = 1, \cos \alpha_3 = 0$,按式(9-22)可得结构坐标系下的杆端力为

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F_{4x}^{(3)} \\ F_{4y}^{(3)} \\ M_4^{(3)} \\ F_{3x}^{(3)} \\ F_{3y}^{(3)} \\ M_3^{(3)} \end{bmatrix} &= 10^7 \times \begin{bmatrix} 7.2 & 0 & -14.4 & -7.2 & 0 & -14.4 \\ 0 & 180 & 0 & 0 & -180 & 0 \\ -14.4 & 0 & 38.4 & 14.4 & 0 & 19.2 \\ -7.2 & 0 & 14.4 & 7.2 & 0 & 14.4 \\ 0 & -180 & 0 & 0 & 180 & 0 \\ -14.4 & 0 & 19.2 & 14.4 & 0 & 38.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.2698 \\ 0 \\ -1.0516 \end{bmatrix} \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -30.000 \times 10^3 \text{ N} \\ 0 \\ 70.094 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \\ 30.000 \times 10^3 \text{ N} \\ 0 \\ 49.904 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30.000 \text{ kN} \\ 0 \\ 70.094 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 30.000 \text{ kN} \\ 0 \\ 49.904 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

按式(9-16)可得单元坐标系下的杆端力为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{N_4}^{(3)} \\ \bar{F}_{Q_4}^{(3)} \\ \bar{M}_4^{(3)} \\ \bar{F}_{N_3}^{(3)} \\ \bar{F}_{Q_3}^{(3)} \\ \bar{M}_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30.000 \\ 0 \\ 70.094 \\ 30.000 \\ 0 \\ 49.904 \end{bmatrix} \times 10^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 30.000 \text{ N} \\ 70.094 \text{ N} \cdot \text{m} \\ 0 \\ -30.000 \text{ N} \\ 49.904 \text{ N} \cdot \text{m} \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 30.000 \text{ kN} \\ 70.094 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 0 \\ -30.000 \text{ kN} \\ 49.904 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

7. 根据所得的各单元杆端剪力和弯矩,可作出如图9-13c、d所示的弯矩图和剪力图,再利用已作出的剪力图即可作出轴力图(图9-13e)。

§9-7 几个问题的简单说明

前面介绍了矩阵位移法中直接刚度法的先处理法,并着重论述了采用这一方法来计算平面刚架。现再就矩阵位移法的两个问题作简单的说明。

一、用矩阵位移法分析平面桁架

在桁架中,通常将每一杆件作为一个单元,单元的两端只有轴力作用,因而只有轴向变形,如图9-14所示,由图9-3a、d及式(9-2)可得在单元坐标系下的单元刚度方程为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{N_i}^{(e)} \\ \bar{F}_{N_j}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i^{(e)} \\ \bar{u}_j^{(e)} \end{bmatrix}$$

相应的单元刚度矩阵为

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

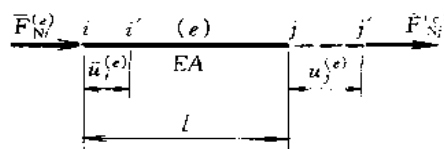


图 9-14

在结构坐标系下,桁架每一结点将有沿水平方向和竖直方向的两个位移分量,相应的结点荷载分量为水平集中力和竖向集中力。单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

该单元刚度矩阵可通过坐标变换或直接从式(9-23)中剔除与 EI 有关的各项而得出。

桁架的整体分析,同样可按直接刚度法的解算步骤进行。

二、直接刚度法后处理法

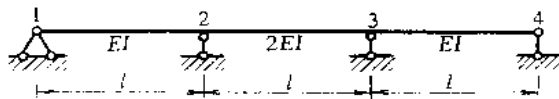
这种方法与前述的先处理法的区别在于:先不考虑支承对结点位移的约束作用,即认为全部结点都有可能发生位移。据此,对全部结点位移统一编码。此时整体结构的总刚度矩阵(简称总刚)的阶数等于全部结点位移的总数。形成总刚后,再考虑支承的约束条件,对总刚进行修改以得到结构刚度矩阵。由于这种方法是把支承条件的处理放在形成总刚之后进行,故称为直接刚度法后处理法,简称后处理法。

思 考 题

1. 试述矩阵位移法与位移法的异同。
2. 什么叫单元刚度矩阵?其每一元素的物理意义是什么?
3. 对单元刚度矩阵进行坐标变换的目的是什么?
4. 用直接刚度法形成结构刚度矩阵时,将单元刚度矩阵中各元素按定位向量“对号入座”,其实质是什么?
5. 什么叫等效结点荷载?如何求得?“等效”是指什么效果相等?
6. 能否用矩阵位移法计算静定结构?它与计算超静定结构有何不同?

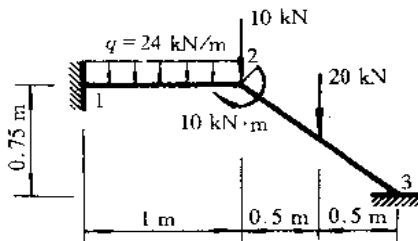
习 题

9-1 试求图示连续梁的结构刚度矩阵。



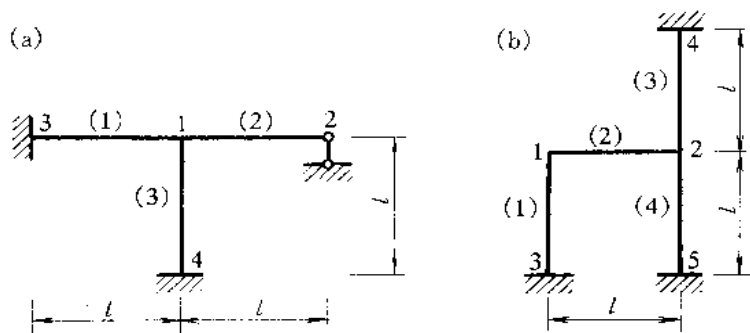
题 9-1 图

9-2 试求图示刚架(考虑轴向变形)的综合结点荷载。



题 9-2 图

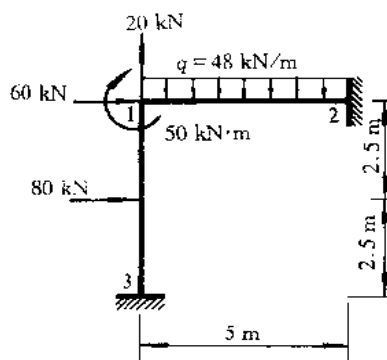
9-3 试求图示结构的结构刚度矩阵。设各杆 EA 、 EI 均为常数。



题 9-3 图

9-4 试用直接刚度法计算题 9-2 图所示刚架各杆的内力(考虑轴向变形), 设 $A = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $I = 1 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ GPa}$, 各杆 E 、 A 、 I 相同。

9-5 试用直接刚度法计算图示刚架(考虑轴向变形), 设 $A = 0.5 \text{ m}^2$, $I = \frac{1}{24} \text{ m}^4$, $E = 30 \text{ GPa}$, 各杆 E 、 A 、 I 相同。



题 9-5 图

部分答案

9-4 $F_{1x} = 20.261 \text{ kN}$, $F_{1y} = 13.138 \text{ kN}$, $M_1 = 4.366 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{2x} = -20.261 \text{ kN}$, $F_{2y} = 40.862 \text{ kN}$, $M_2 = -8.895 \text{ kN} \cdot \text{m}$

9-5 $F_{2x} = -111.006 \text{ kN}$, $F_{2y} = 138.698 \text{ kN}$, $M_2 = -133.873 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{3x} = -28.995 \text{ kN}$, $F_{3y} = 81.303 \text{ kN}$, $M_3 = 35.358 \text{ kN} \cdot \text{m}$

* 第十章 结构的计算简图和简化分析

§ 10-1 概 述

在结构设计中,涉及结构力学的有以下两个方面:

1. 将实际的结构简化为一个理想的力学模型,即选取计算简图;
2. 对计算简图进行力学分析,即计算内力、位移等。

前面各章主要介绍了杆件结构的力学分析原理和方法,关于选取计算简图的基本知识只在第一章中扼要地进行了介绍。为了加深对选取计算简图的原则和方法的理解,并使读者掌握某些复杂杆件结构和非杆件结构的一些简化分析方法,本章将对结构的计算简图和简化分析方法作一讨论。

第一章已述及,选取计算简图的原则是:

1. 尽可能正确地反映实际结构的主要工作性能,以使计算结果精确可靠;
2. 必须抓住主要矛盾,忽略某些次要因素,力求计算简便。

第一原则是指选取计算简图时要从实际出发,全面考虑结构的整体布置和构造情况,了解结构的实际受力状态。第二原则是指对影响结构受力状态的因素,要分清主次。选定计算简图的过程,是对结构的实际布置和构造,以及受力状态进行分析和简化的过程,是分析矛盾、突出主要矛盾和矛盾的主要方面,忽略次要矛盾和矛盾的次要方面的过程。选择计算简图虽有一般的规律可循,但因影响计算简图的因素很多,所以在运用一般规律时要特别注意灵活性。

实际结构往往比较复杂,通常都是由许多构件通过各种方式互相联结在一起而组成的。如何对各种约束进行合理的简化,是确定计算简图的一个主要问题。因此,需要分析各种约束的特点,确定约束性质。往后将会看到,决定约束性质的主要因素是结构各部分的刚度比值,即结构各部分的相对刚度。在选定结构的计算简图时,经常需要用到这个重要的概念。

下面,从几个方面分别讨论如何对实际结构进行简化和简化计算。

§ 10-2 将空间结构分解为平面结构

一、取平面单元计算

1. 单层厂房(参见图 1-1)是一个空间结构,其平面布置如图 10-1a 所示,它的横向是一个由基础、柱子和屋架组成的排架(图 10-1b),排架沿厂房纵向一般按 6 m 等间距排列,各排架之间用纵向构件如屋面板、吊车梁、纵向支撑等相联。作用于厂房结构上的恒载和风、雪等荷载,一般是沿纵向均匀分布的。因此,可以取图 10-1a 中阴影线所示部分作为计算单元,并按平面排架进行计算。

这样的简化计算,一般能反映厂房结构的主要受力特点,故常被采用。但是,当厂房结构的屋面刚度较大而两端具有山墙时,结构的整体刚性较好,如果仍按上述简化方法计算,则将引起较大的误差。因此,较为精确的方法是考虑厂房结构空间整体作用的分析方法。

一般说来,如果一个空间结构包含有许多个平面单元,各个平面单元之间又存在着空间联系,当平面单元本身的刚度大,空间联系的刚度小,则可从空间结构中取出平面单元按平面结构计算。

2. 图 10-2a 为多跨多层房屋的柱网平面布置,梁与柱组成一个空间刚架体系。从抵抗侧移来看,结构的横向刚度较小,纵向刚度较大。为了保证结构的承载能力,通常取横向刚架(图 10-2b)进行计算,这时要考虑竖向荷载和横向水平荷载(风载和地震力)的作用。对于纵向刚架(图 10-2c),一般只验算地震力的影响;由于迎风面积小,风载较小,抵抗的柱子又多,故风载所产生的内力可以忽略。

3. 对于很长的隧道或者压力水管等,因其各横向截面的几何形状和尺寸相同,所受荷载沿纵向不变,故可用两个相邻的横截面取出一个平面单元按平面结构计算。例如图 10-3a 和图 10-4a 是从某隧洞衬砌和压力水管中取出的一个平面单元,图 10-3b 和图 10-4b 分别是它们的计算简图。

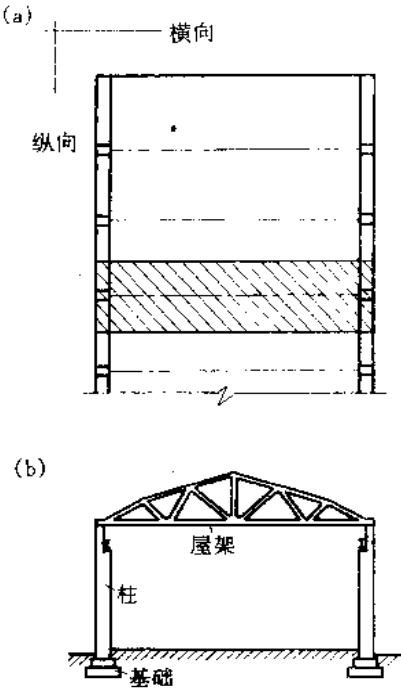


图 10-1

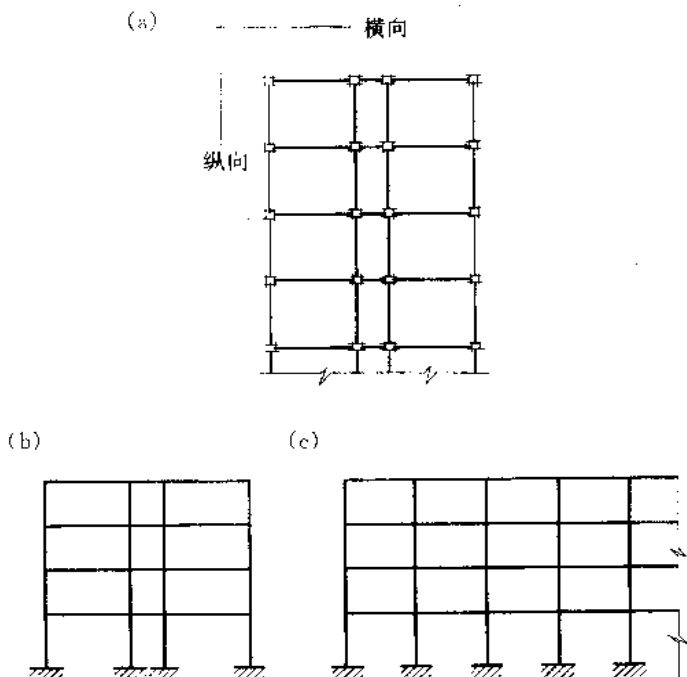


图 10-2

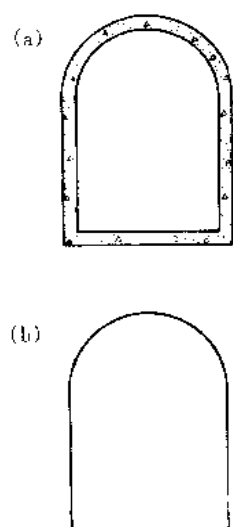


图 10-3

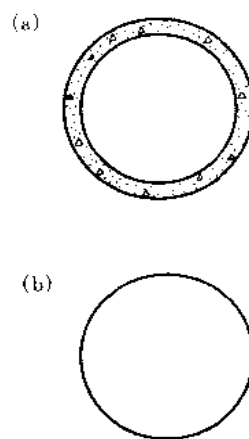


图 10-4

二、沿纵向和横向分别按平面结构计算

图 10-5 所示为水利工程中的钢筋混凝土 U 形渡槽, 槽身两端简支在支墩或支架上(图 10-5a), 横截面如图 10-5b 所示。在槽身顶部沿纵向以间距 a 设置横杆, 在支墩附近, 槽身底部做成平面放置在支墩上。

U 形渡槽是一个柱形长薄壳结构, 设计时常用简化分析方法, 设 $\mu = 0$ 并沿纵向和横向分别按平面结构计算。

沿纵向 将整个槽身看作支承在支墩上的 U 形截面简支梁, 梁上承受均布荷载(包括水重和自重), 计算简图如图 10-5c 所示。由此可算出横截面的内力, 从而可进行纵向配筋。

沿横向 用两个横截面 I—I 和 II—II 截取一段槽身作为计算单元, 计算简图如图 10-5d

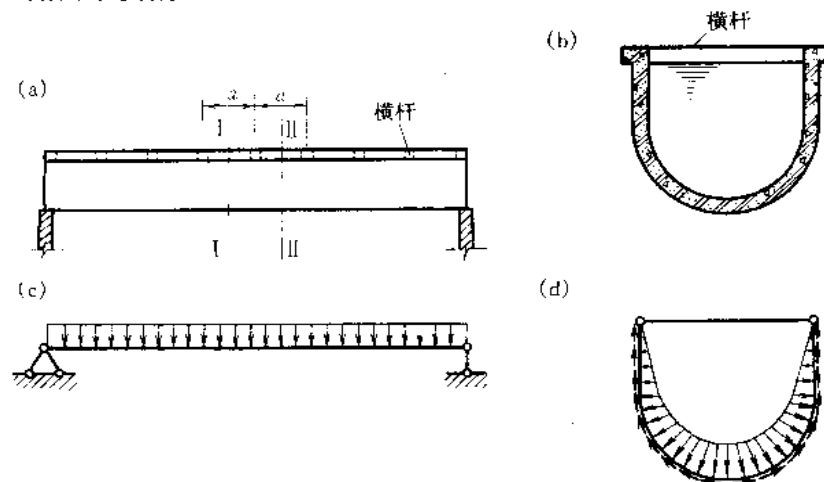


图 10-5

所示,这是一个顶部有横杆的 U 形曲杆结构。计算单元上作用的力除水压力和自重(图中只画出了水压力)外,还有计算单元两端横截面上的切应力。分析时将两截面上的切应力简化为图 10-5d 所示的力,沿切线方向作用,大小为两截面上切应力之差值。计算单元在这些力作用下处于平衡状态,用力法可算出曲杆的内力,据此可进行环向配筋。

在给水排水工程的构筑物中,一些较大的过水槽,也可仿此进行纵向和横向分析。

§ 10-3 将板壳结构简化为交叉体系

实际工程中的交叉梁系是一种常见的交叉体系,而板壳结构有时也可简化为交叉体系进行分析。

板壳结构是一种薄壁结构,它的几何特征是厚度远小于另外两个方向的尺度,因此又可称为面结构。在板壳中,平分厚度的面称为中面,板的中面为一平面,壳的中面为一曲面。土木工程中常采用板壳作为屋盖和楼盖承重结构,水池等构筑物也都属于板壳结构。

现仅就薄板作一分析。

一、矩形薄板的简化计算

图 10-6a 表示一块四边简支的矩形板,边长为 l_1 和 l_2 , 承受垂直于板面的均布横向荷载 q 。现用图 10-6a 中虚线所示的交叉梁系作为该板的计算简图,板上所受荷载由交叉梁系沿两个方向传到支座。

从板的中间部分取出交叉的两根梁 AB 和 CD(图 10-6b),它们近似于承受均布荷载的简支梁。以 q_1 和 q_2 分别表示梁 AB 和 CD 所担负的荷载集度,且 $q_1 + q_2 = q$; 以 I_1 和 I_2 分别表示梁 AB 和 CD 截面的惯性矩。

这两根梁跨中的挠度(图 10-6c 和 d)各为

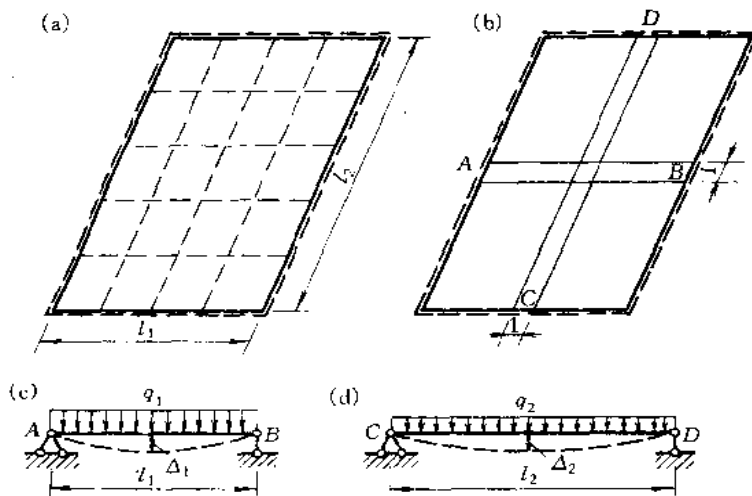


图 10-6

$$\Delta_1 = \frac{5q_1 l_1^4}{384EI_1}, \quad \Delta_2 = \frac{5q_2 l_2^4}{384EI_2} \quad (a)$$

因在两根梁的交叉点处挠度应相等, 即 $\Delta_1 = \Delta_2$, 又若 $I_1 = I_2$, 则由式(a)得

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{l_2^4}{l_1^4} \quad (b)$$

显然, 如果 $l_2 > l_1$, 则 $q_1 > q_2$ 。

由此可知, 较大部分的荷载将沿短方向传到支座。当 $l_2/l_1 > 2$ 时, $q_1 > 16q_2$, 即荷载 q 的 94% 以上将沿短方向传递。这时, 在设计中可近似地认为荷载只沿短的方向传递, 长的方向不起作用。

从刚度的概念分析, 由式(a)得

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{EI_1/l_1^4}{EI_2/l_2^4} \quad (c)$$

式中 $\frac{EI_1}{l_1^4}$ 和 $\frac{EI_2}{l_2^4}$ 反映两个方向的抗弯刚度, EI 越大 (或 l 越小) 则刚度越大。如果 $\frac{EI_1}{l_1^4} > \frac{EI_2}{l_2^4}$, 则 $q_1 > q_2$ 。由此得知, 较大部分的荷载将沿刚度大的方向传递。如果两个方向的刚度相近, 则荷载为双向传递, 如果两个方向的刚度相差悬殊, 则荷载主要沿刚度大的方向传递。

根据以上分析, 在设计中, 可把四边支承的矩形板分为两类:

1. 单向板 长边与短边之比大于 2, 板上荷载沿一个方向 (短向) 传至支座。
2. 双向板 长边与短边之比等于或小于 2, 板上荷载沿两个方向传至支座。

单向板可取单位宽度的板条作为计算单元, 按梁计算。双向板的分析属于弹性力学的薄板小挠度弯曲问题, 在设计工作中, 常用按弹性力学方法编制成的表格来计算双向板的最大挠度和内力。

二、矩形水池池壁的简化计算

在工程设计中, 对于高为 h , 长边为 a , 短边为 b 的矩形水池, 可根据池壁的不同长高比, 取不同的计算简图进行计算。简化的依据是上述关于矩形板传力的特点。现以单格矩形水池为例说明如下。

1. 双向板式水池

图 10-7 所示水池, 当池壁长高比为 $0.5 \leq \frac{a}{h} \leq 2.0$ 、 $0.5 \leq \frac{b}{h} \leq 2.0$ 时, 池壁将沿竖直和水平两个方向传力, 各面池壁都应按双向板计算。这种池壁称为双向板式池壁。工程中小容量的贮水池, 普通快滤池等属于这种情况。

2. 浅池

图 10-8a 所示水池, 当 $\frac{a}{h} > 3$ 、 $\frac{b}{h} > 3$ 时, 壁上所受荷载主要沿竖向 (短向) 传递, 故可取单位宽度的竖条作为计算单元, 按梁进行计算。又因底板刚

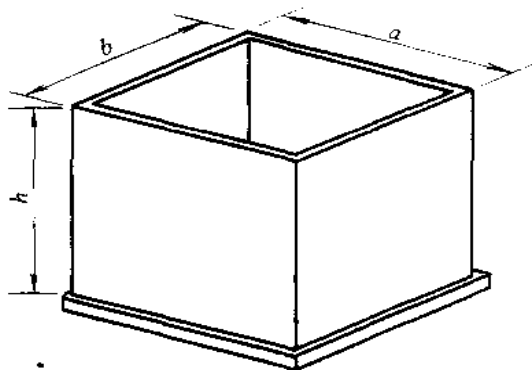


图 10-7

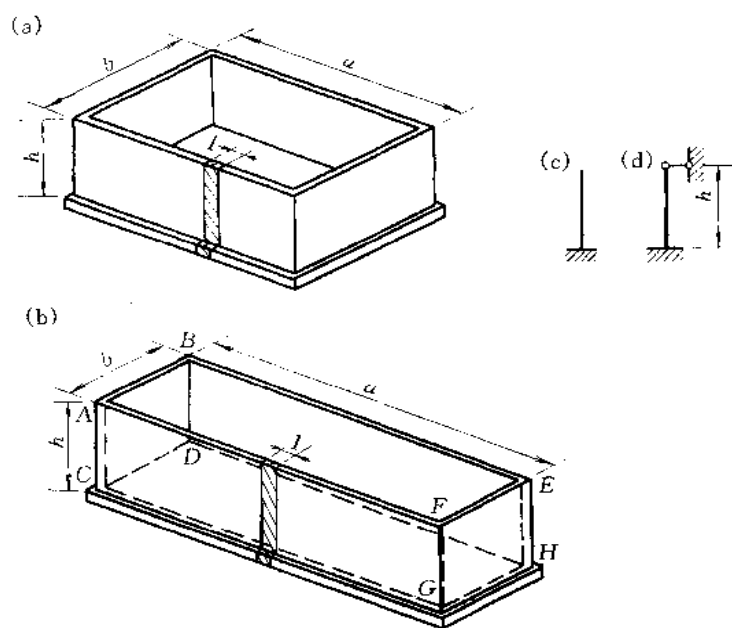


图 10-8

度较池壁大很多,所以计算简图是一根竖向的悬臂梁(图 10-8c);如果水池有顶盖,则计算简图是一根下端固定上端铰支的单跨梁(图 10-8d)。这种池壁在工程界称为挡土(水)墙式池壁。大容量的矩形贮水池、平流沉淀池等属于这种情况。

对挡土墙式池壁按竖条作近似计算时,在水池的角隅处,应注意考虑由于角隅效应引起的水平向弯矩。

图 10-8b 所示水池,当 $\frac{a}{h} > 3, 0.5 \leq \frac{b}{h} \leq 2.0$ 时,其短向池壁(如 ABDC)按双向板计算,长向池壁(如 ACGF)则按挡土墙式池壁计算。

3. 深池

图 10-9a 所示水池,当 $\frac{a}{h} < 0.5, \frac{b}{h} < 0.5$ 时,池壁上部主要沿水平方向(短向)传力。此时,在 $h > 2a$ 的部分可截取单位高度的板带作为计算单元(图 10-9c),其计算简图是一个水平封闭刚架。这种池壁称为水平刚架式池壁。在一般水池中很少遇到这类情况,它主要出现在矩形给水井和较深的矩形地下式泵房中。

对深池按水平封闭刚架作近似计算时,在池高

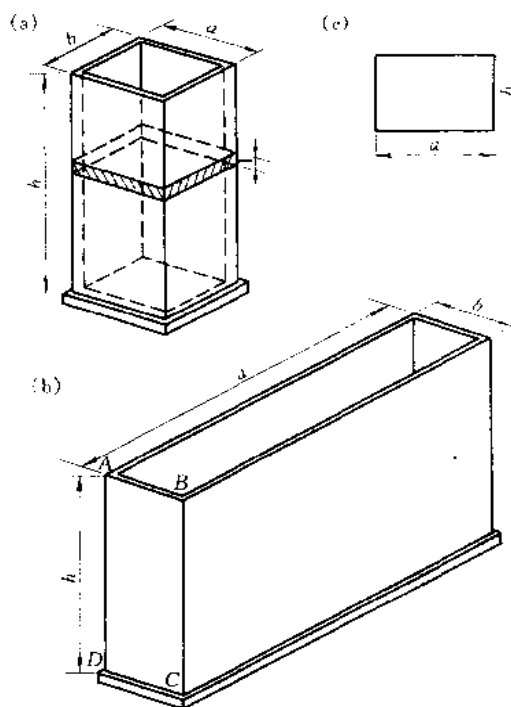


图 10-9

等于 $2a$ 的水池下部应按双向板池壁计算。

图 10-9b 所示水池,当 $\frac{b}{h} < 0.5$ 而 $\frac{a}{h} > 0.5$ 时,不能再按水平刚架计算。对于 $\frac{b}{h} < 0.5$ 的一面(如 ABCD)可按水平方向传力的单向板计算,而较长的一面则需根据 $\frac{a}{h}$ 的具体数值按双向板或挡土墙式计算。

对于圆形水池的池壁(薄壳结构),也可仿照前述矩形水池池壁(薄板结构)的简化计算方法,将其分为三类,设 h 为池壁高度, d 为水池直径, δ 为池壁厚度,则

1. 当 $\frac{h^2}{d\delta} < 0.2$ 时,属于浅池,荷载主要沿竖向传递,这时可取单位宽度的竖条作为计算单元,按悬臂梁计算。

2. 当 $\frac{h^2}{d\delta} > 56$ 时,这种情况通常称为深井,在竖向尺寸大于 $0.25h$ 的上部,荷载主要由环向承担,故可取单位高度的一环作为计算单元,按封闭圆环计算。在 $h = \sqrt{56d\delta}$ 以下的一段池壁则应按圆柱壳计算。

3. 当 $0.2 \leq \frac{h^2}{d\delta} \leq 56$ 时,荷载由两个方向传递,这时应按圆柱壳计算。

§ 10-4 将结构分解为基本部分和附属部分

超静定结构的各部分之间原来是互为弹性支承^①的,但是如果结构一部分的刚度很大,而另一部分的刚度很小,则可近似地把刚度大的部分视为基本部分,把刚度小的部分视为附属部分。当荷载只作用在刚度大的部分时,刚度小的部分只产生很小的内力,可略而不计。当荷载只作用在刚度小的部分时,刚度大的部分变形很小,可近似地将它看作刚度小的部分的刚性支承。基本部分与附属部分的刚度相差越大,这种近似处理的结果就越精确。

举例说明如下。

1. 图 10-10a 所示两跨连续梁,若 AB 跨的线刚度($i_1 = EI_1/l_1$)比 BC 跨的线刚度($i_2 = EI_2/l_2$)大很多,则可将 AB 视为基本部分,BC 视为附属部分。当荷载只作用于 AB 跨时,因 BC 跨只产生很小的内力,故可将其忽略不计。于是,AB 跨可按图 10-10b 所示简图作近似计算。当荷载只作用在 BC 跨内(图 10-10c),因 AB 跨变形很小,故 BC 跨可按左端固定右端铰支的单跨梁(图 10-10d)计算,并求得左端 B 的支座反力;然后将此支座反力反向作用于 AB 跨的右端(图 10-10e),便可计算 AB 跨的内力。

这种简化,只要 $\frac{i_1}{i_2} \geq 20$,其结果的误差将在 5% 以内。

2. 图 10-11a 所示厂房排架,右跨为主跨,左跨为附跨,如果主跨排架柱的刚度比附跨柱的刚度大很多,则可将主跨和附跨分开计算。首先计算附跨,这时主跨被当作附跨的刚性支承,忽

^① 弹性支承与一般的刚性支承(例如固定支座,铰支座等)不同,它的特征是对结构的约束作用具有弹性,弹性支承所提供的反力与该支承端相应的位移成正比。

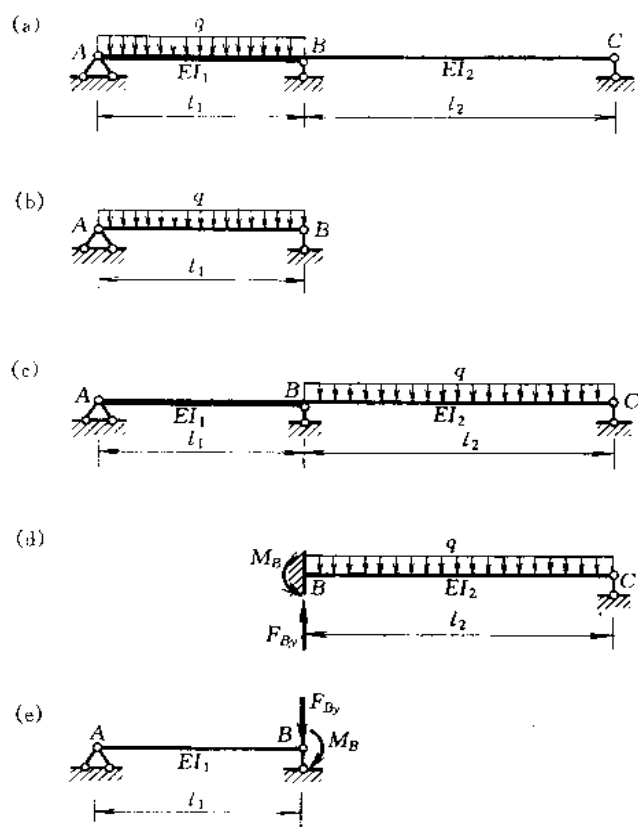


图 10-10

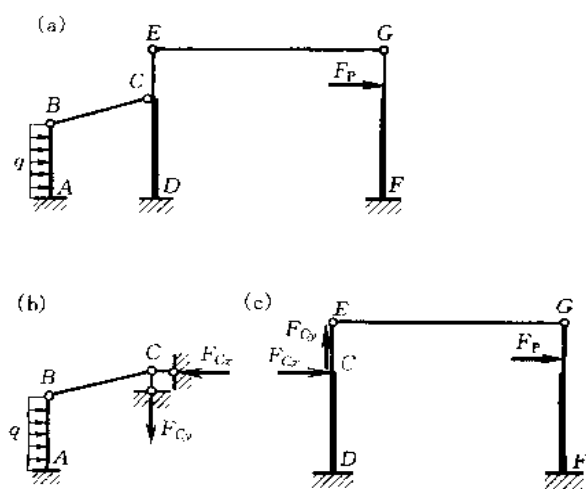


图 10-11

略 C 点的线位移后, 支点 C 就成为附跨的一个固定铰支座, 于是得图 10-11b 的计算简图。在荷载 q 的作用下, 求得附跨的内力和支座 C 处的反力 F_{Cx} 、 F_{Cy} 。然后计算主跨, 计算简图如图 10-11c 所示。主跨除承受本身的荷载 F_P 外, 还在 C 点承受附跨传来的力 F_{Cx} 、 F_{Cy} , 由此可求得主跨的内力。

3. 图 10-12a 所示由板、梁、柱组成的结构体系, 称为肋形梁板结构, 常用作房屋结构的屋盖和楼盖, 以及水池的顶盖。这种结构如果采用混凝土现场浇注而成, 则板、梁、柱形成一个整体。分析时考虑到在一般情况下, 板的刚度比次梁小, 次梁的刚度又比主梁小。因此, 可将板看作次梁的附属部分, 又把板和次梁看作主梁的附属部分。于是, 整个体系就可分解为板、次梁和主梁几类构件, 然后分开进行计算。现分述如下:

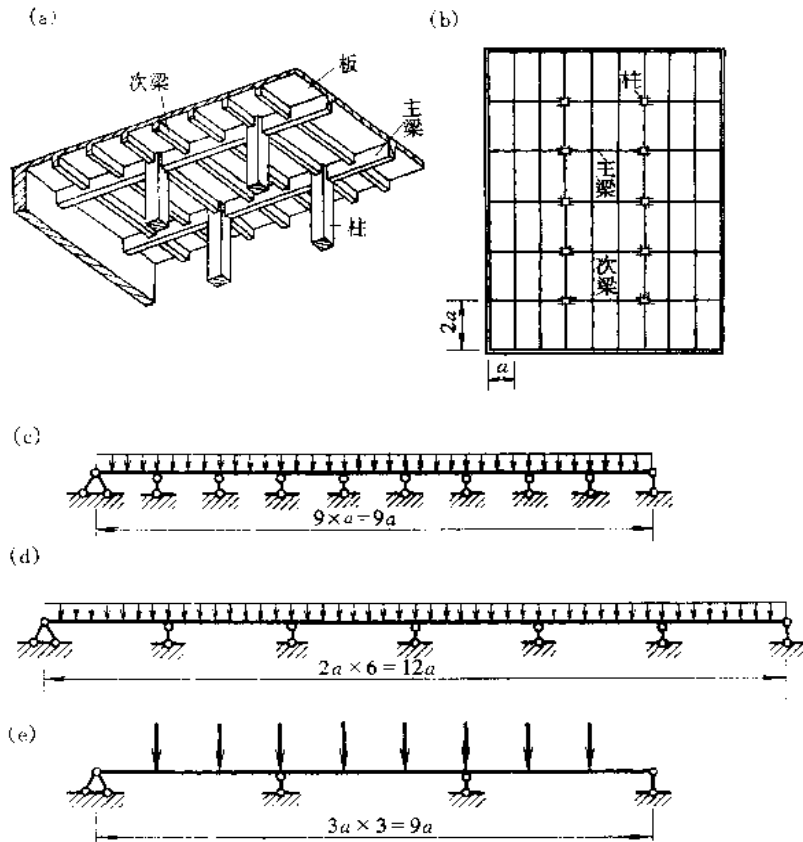


图 10-12

板 根据图 10-12b 的结构布置可知, 板可按单向板计算, 板上的荷载主要沿短跨方向传给次梁。因次梁是板的基本部分, 故可将次梁当作板的刚性支承, 再忽略次梁较小的抗扭刚度后, 则可将这种支承简化为链杆支座。据此, 板的计算简图可取为以次梁为支承的连续梁 (图 10-12c), 此梁即为单位宽度的板带, 它承受此单位宽度内板上的荷载, 通常按均布荷载考虑。

次梁 分析次梁时, 将板看作次梁的附属部分, 它只起传递荷载的作用, 不起约束作用。又

因主梁是次梁的基本部分,故可将它看作次梁的刚性支承,忽略主梁的抗扭刚度后,次梁的计算简图可取为以主梁为支承的连续梁(图 10-12d)。所受荷载包括板传来的荷载和次梁的自重,按均布荷载考虑。

主梁 分析主梁时,板和次梁都是它的附属部分,只起传递荷载的作用。主梁所受荷载主要是由次梁传来的集中力,主梁的自重则近似地化为在次梁位置的集中力。因主梁与柱的混凝土为整体浇注,故其内力按刚架计算较为合理。但是如果柱的抗弯刚度比主梁的抗弯刚度小很多时,则可将柱看作主梁的铰支座,主梁可按连续梁计算(图 10-12e)。

以上是肋形梁板结构通常采用的简化分析方法。实际计算表明,只要主梁的线刚度 i_1 与次梁的线刚度 i_2 的比值大于 $8\left(\frac{i_1}{i_2} > 8\right)$,则计算精度已能满足设计要求。

§ 10-5 忽略次要变形

将结构在荷载作用下产生的变形区分为主要变形和次要变形,并将次要变形略去不计,这是对结构进行简化分析的又一有效途径。

在以前各章中,已经多处采用过这一简化方法。例如,在计算梁和刚架的位移时,常略去剪切变形和轴向变形,而只考虑弯曲变形的影响;在用位移法和力矩分配法计算超静定梁和刚架的内力时,由于只考虑弯曲变形而使计算大为简化。计算中忽略剪切变形或轴向变形,实质上就是在计算中假设杆件的抗剪刚度或抗拉(压)刚度为无限大。

下面再从几个方面对忽略较小变形的简化方法作进一步说明。

一、在局部荷载作用下忽略连续梁和无侧移刚架的远处变形

1. 图 10-13a、b、c 分别示出每跨的跨度和截面都相同的两跨、三跨、四跨连续梁在左端 A

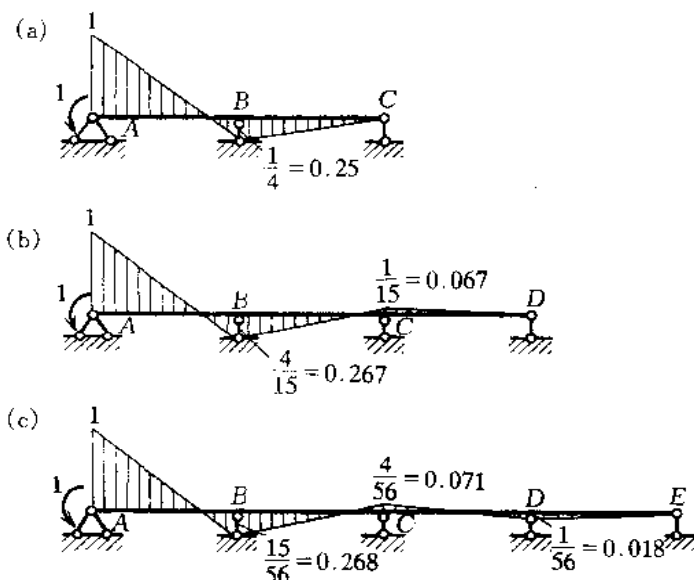


图 10-13

作用单位力矩时的弯矩图。由图可见,相邻支点弯矩的传递系数约为 $\frac{1}{4}$,经两次传递后,弯矩值已降至原值的7%左右。这说明,荷载对两跨以外的影响已经很小,可以忽略不计。因此,对于任意跨数的连续梁,如果只有一跨承受荷载,就只需取出该受荷载跨和它左右两边各两跨的一根五跨连续梁来计算。

2. 图 10-14a 为一多跨多层无侧移刚架,只在 AB 梁上承受局部荷载。由于远处变形迅速减小,故可只取 AB 梁及其相邻各梁柱组成的部分(图 10-14b)进行计算。考虑到图 10-14b 所示双十字刚架各梁柱的外端结点有一定的弹性转动而不是固定端,可将除 AB 外的其余各杆的线刚度都乘以 0.9,并将传递系数由 $\frac{1}{2}$ 改为 $\frac{1}{3}$,以作修正。

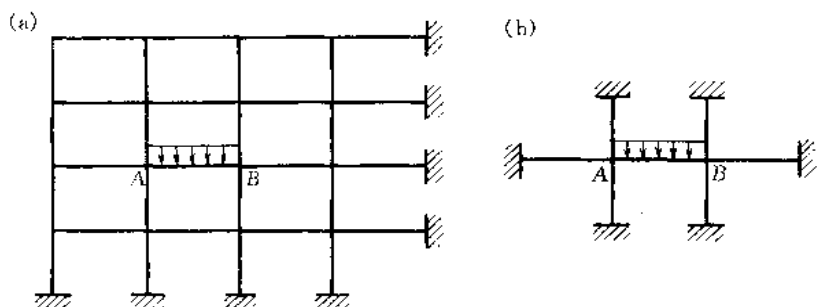


图 10-14

二、在竖向荷载作用下忽略刚架的侧移

对于有可能发生侧移的刚架,在竖向荷载作用下,由于侧移值一般比较小,可以略去不计。于是,原刚架就简化成一个无结点线位移的刚架,采用力矩分配法进行计算,十分简便。

一般说来,凡是刚架的跨数较多,或者接近于对称,或者横梁的相对刚度较大,在竖向荷载作用下,常可略去刚架侧移的影响。

为了进一步简化分析,现综合本节一、中分析的结论,对承受竖向荷载的多跨多层刚架介绍工程上常用的分层计算法如下。

分层计算法的近似假定和解题要点可概括为

- (1) 忽略侧移的影响,故可用力矩分配法进行计算;
- (2) 忽略每层梁的竖向荷载对其他各层的影响,从而可将多层刚架分解为一层一层单独进行计算。

例如图 10-15a 所示刚架,受竖向荷载作用。可按分层法分为图 10-15b 所示的三个刚架分别进行计算。除底层外,其余各层的每一个柱子都分别属于相邻两层刚架。因此,这些柱子的弯矩应由两部分叠加得出。

此外,上述简化分析中,各个分层刚架柱的远端都假设为固定端。这种假定一般与实际情况不符,因为除底层柱底为固定端外,其余各柱端实际上应为弹性固定端。为了反映这一特点,将除底层外其余各层柱的线刚度乘以折减系数 0.9,而相应地传递系数则由 $\frac{1}{2}$ 改为 $\frac{1}{3}$,以作修正。

分层计算法的计算结果,在各刚结点上弯矩是不平衡的,但一般误差不是很大。如有必要,

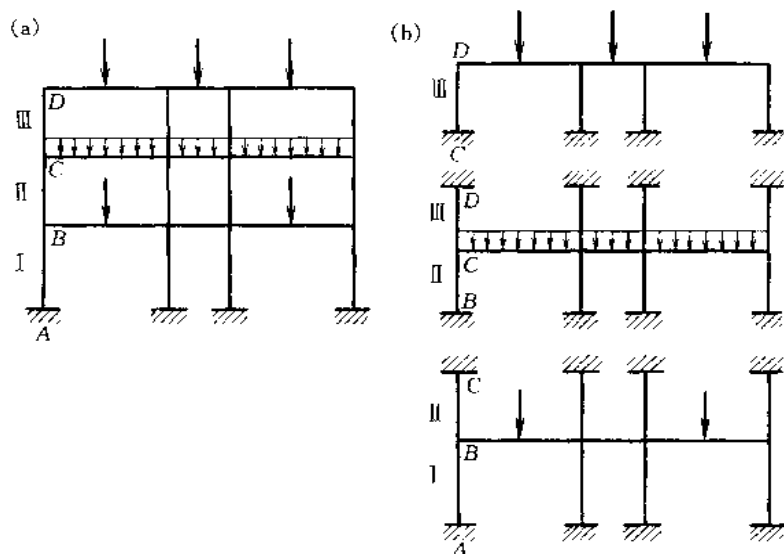


图 10-15

可对各结点的不平衡弯矩,再作一次分配,但不再传递。

三、在水平荷载作用下忽略刚架的结点转角

承受水平结点荷载的多跨多层刚架,如果横梁的刚度比立柱的刚度大得多,则刚架的变形特点是:结点的侧移是主要位移,而结点的转角是次要位移;对只受水平结点荷载作用的刚架,各杆

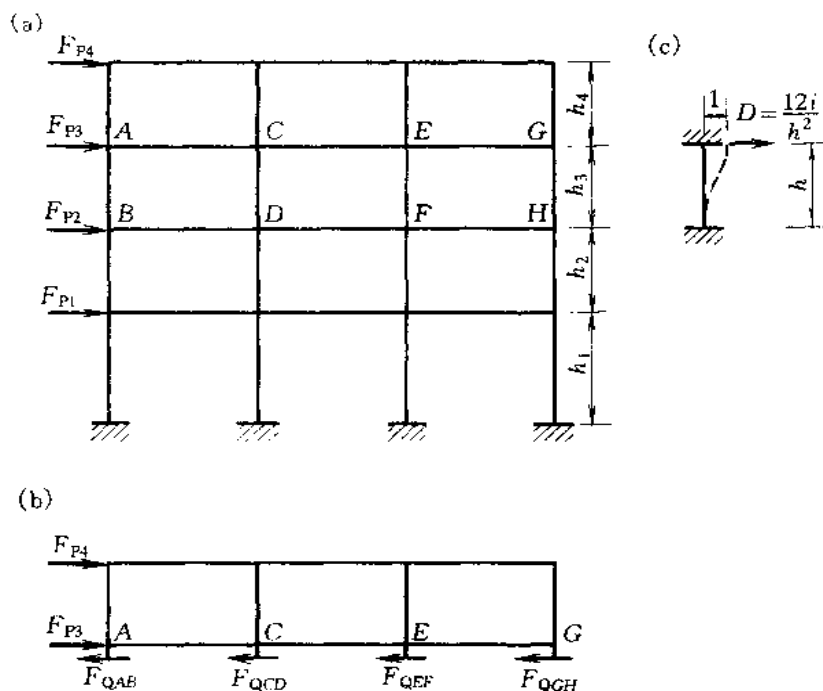


图 10-16

的剪力沿杆长都不变,各杆的弯矩图都是直线。反弯点法是计算这种刚架的常用近似方法。现说明如下。

忽略刚架的次要位移,即忽略各结点的转角不计,则由转角位移方程可知,各层立柱上下两端的弯矩都相等,于是弯矩为零的反弯点位于柱之中点。但是对于底层各柱,当下端为固定端时,则假定其反弯点位于柱的 $\frac{2}{3}$ 高度处。因此,若能将各柱的剪力求出,则利用上述反弯点的已知位置,即不难求得各柱端的弯矩。

例如,图 10-16a 所示刚架,当假定了各立柱反弯点的位置后,为了求得某一层各柱的剪力,可用一截面将该层各柱截断,考虑截面以上刚架部分的平衡条件(图 10-16b 所示,其中未示出柱端弯矩)可得

$$\Sigma F_Q = \Sigma F_P$$

式中 ΣF_Q 表示该层各柱的剪力总和; ΣF_P 表示截面以上所有各水平荷载之和,以向右为正。对于图 10-16b 所示情况则有

$$F_{QAB} + F_{QCD} + F_{QEF} + F_{QGH} = F_{P3} + F_{P4} = \Sigma F_P \quad (a)$$

又因同一层各柱两端无转角,但有相同的相对侧移 Δ ,则上述各柱剪力为

$$\left. \begin{aligned} F_{QAB} &= \frac{12i_{AB}}{h_3^2} \Delta = D_{AB} \Delta \\ F_{QCD} &= \frac{12i_{CD}}{h_3^2} \Delta = D_{CD} \Delta \\ F_{QEF} &= \frac{12i_{EF}}{h_3^2} \Delta = D_{EF} \Delta \\ F_{QGH} &= \frac{12i_{GH}}{h_3^2} \Delta = D_{GH} \Delta \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

其中

$$D = \frac{12i}{h^2} \quad (c)$$

称为立柱的侧移刚度,即立柱两端有单位相对侧移但两端无转角时,柱内所引起的剪力(图 10-16c)。

由式(a)、(b)可解得

$$\left. \begin{aligned} F_{QAB} &= \nu_{AB} \Sigma F_P \\ F_{QCD} &= \nu_{CD} \Sigma F_P \\ F_{QEF} &= \nu_{EF} \Sigma F_P \\ F_{QGH} &= \nu_{GH} \Sigma F_P \end{aligned} \right\} \quad (10-1)$$

式中

$$\nu_{AB} = \frac{D_{AB}}{\Sigma D}, \quad \nu_{CD} = \frac{D_{CD}}{\Sigma D}, \quad \nu_{EF} = \frac{D_{EF}}{\Sigma D}, \quad \nu_{GH} = \frac{D_{GH}}{\Sigma D} \quad (10-2)$$

$$\Sigma D = D_{AB} + D_{CD} + D_{EF} + D_{GH}$$

由上述分析过程可知,刚架某一层以上的荷载之总和 ΣF_P ,是由该层各柱的剪力来共同维持平衡的,总的荷载 ΣF_P 按各柱的 ν 值分配到各柱,即得各柱的剪力。因此, ν 称为剪力分配系数。上述分析方法又可称为剪力分配法。

求出立柱的剪力后,即可计算各柱的柱端弯矩。对于底层各柱,其底端(固定端)弯矩为

$$M = F_Q \times \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}F_Q h$$

其上端弯矩为

$$M = F_Q \times \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}F_Q h$$

对于其他各层立柱的上、下端弯矩则用下式计算

$$M = \frac{1}{2}F_Q h$$

各立柱的柱端弯矩求得后,横梁的杆端弯矩可由结点的力矩平衡条件确定。对于各中间结点两侧横梁的杆端弯矩,可先将与该结点相连的柱端弯矩的总和求出,然后按左、右两横梁的线刚度加以分配。例如在结点C(图10-16),左边横梁的杆端弯矩 M_{CA} 和右边横梁的杆端弯矩 M_{CE} 应分别为

$$M_{CA} = -\frac{i_{CA}}{i_{CA} + i_{CE}}\bar{M}_C, \quad M_{CE} = -\frac{i_{CE}}{i_{CA} + i_{CE}}\bar{M}_C$$

式中 \bar{M}_C 为结点C处上、下两柱端弯矩之和。

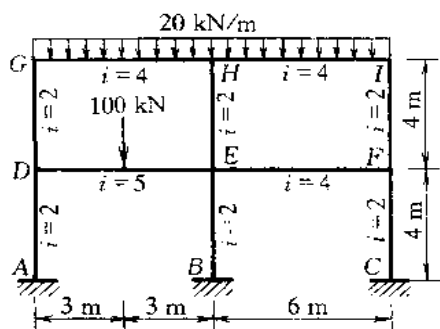
一般说来,如果多跨多层刚架梁柱的线刚度比值 $\frac{i_b}{i_c} \geq 3$,即强梁弱柱的情况,则可采用反弯点法作近似计算。

综上所述,可将反弯点法的计算步骤归纳如下:

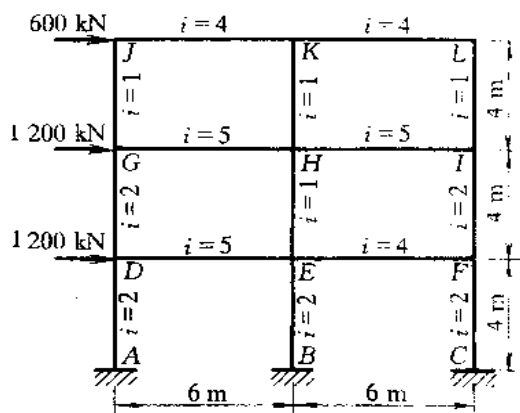
- (1) 设定各立柱反弯点的位置;
- (2) 按式(10-2)计算每一层各柱的剪力分配系数 ν ;
- (3) 按式(10-1)计算柱的剪力;
- (4) 根据各柱的反弯点位置计算柱的杆端弯矩;
- (5) 由结点的力矩平衡条件计算梁的杆端弯矩;
- (6) 绘制内力图。

习 题

10-1~10-2 试用近似法计算图示刚架各杆端的弯矩。



题 10-1 图



题 10-2 图

* 附录 平面刚架分析程序

现将平面刚架分析程序的框图和源程序(FORTRAN 语言)介绍于下,供学习参考。

一、适用范围和计算方法

结构形式:由等截面直杆组成的任意刚架,结点可以是刚结点铰结点或组合结点等。

支承方式:刚架的支承可为固定支座、固定铰支座、活动铰支座及定向支座等。

荷载类型:荷载包括结点荷载和非结点荷载。其中非结点荷载包括部分均布荷载、垂直于杆轴的集中荷载、沿杆轴的集中荷载、集中力偶等四种情况。

材料性质:整个刚架由一种材料组成,材料的弹性模量为常数。

计算方法:矩阵位移法,考虑杆件的弯曲变形和轴向变形,忽略剪切变形,用先处理法直接形成结构刚度矩阵,解方程时采用高斯消元法。

二、标识符说明

N1——结点数。对于铰结点,应按相应的单铰数加 1 计算。

N2——单元数。

N3——作用有结点荷载的结点数。

N4——非结点荷载数。

N5——支座结点数。

EM——弹性模量。

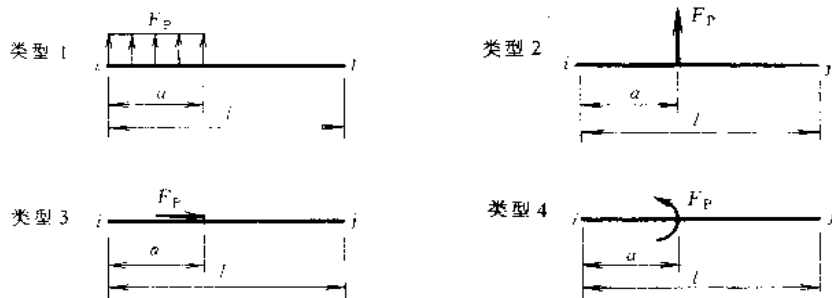
XY(2,50)——结点的 x, y 坐标数组。

IJ(2,50)——单元始端和末端结点码数组。

FPJ(4,50)——结点荷载数组。其中每一列为[结点码,沿 x, y, φ 方向的荷载] T 。

FPP(4,50)——非结点荷载数组。其中每一列为[单元码,荷载类型、FP 大小、位置 A] T ,荷载类型如附图 1 所示。

AIL(3,50)——单元面积、惯性矩、杆长数组。



附图 1

IZ(4,10)——支座结点信息数组。其中每一列为[支座结点码,沿 x 、 y 、 φ 方向的约束数]^T,有约束为“0”,无约束为“1”。

N——独立结点位移数。

ID(3,50)——结点定位向量数组。

SM(150,150)——贮存结构刚度矩阵的数组。

FP(150)——先为贮存荷载列阵的数组,后为贮存结点位移列阵的数组。

CS(2,50)——单元方向余弦数组。

T(6,6)——贮存单元坐标变换矩阵的数组。

ES(6,6)——贮存整体坐标系下单元刚度矩阵的数组。

AE(6,6)——贮存局部坐标系下单元刚度矩阵的数组。

FF(6)——局部坐标系下的单元固端力数组。

IH(6)——单元定位向量数组。

FE(6)——局部坐标系下的单元杆端力数组。

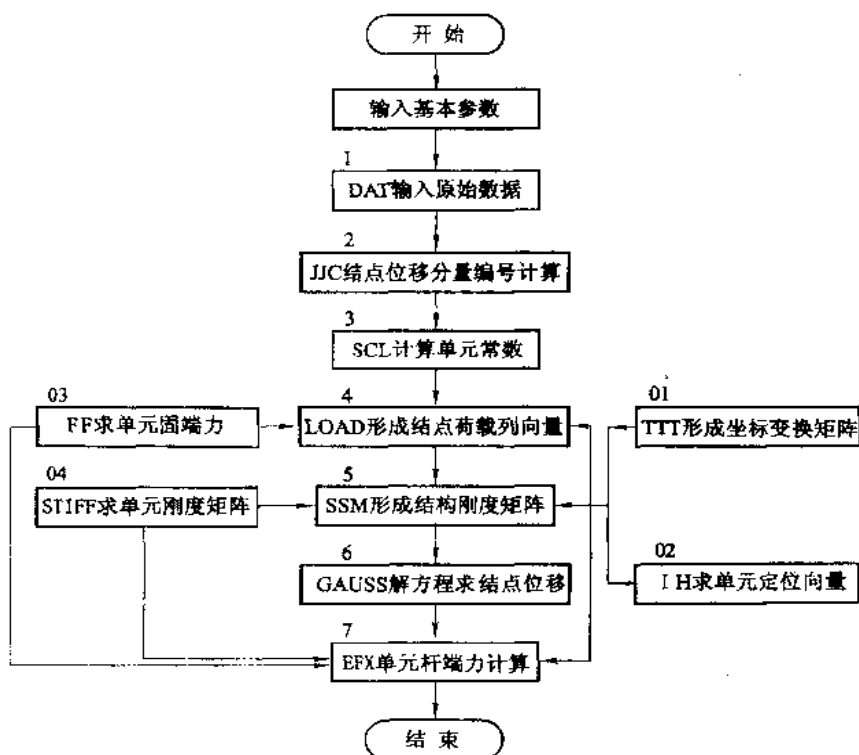
DE(6)——整体坐标系下的单元杆端位移数组。

FT(6)——整体坐标系下的单元固端力数组。

Z(3)——结点的三个位移分量数组。

三、框图

1. 总框图(附图2)



附图 2

总框图分为两级子框图：一级子框图 1、2、3、4、5、6、7，二级子框图 01、02、03、04，每个一级和二级子框图分别对应一个子程序，图中已标明了子程序的名称。根据总框图编写平面刚架的主程序，各程序段之间的数据传送均通过哑元与实元的对应关系来实现。

2. 输入原始数据——子框图 1(附图 3)

与子框图 1 对应的子程序 DAT，除输入每个结点的 x 坐标和 y 坐标，每个单元始端和末端的结点码，单元面积和惯性矩外。若结点荷载数(N3)不等于零，则输入结点荷载数据。若非结点荷载数据(N4)不等于零，则输入非结点荷载数据。最后还应输入支座结点信息。

输入： 结点坐标(x,y)数组	XY(2,50)
单元始端、末端结点码数组	IJ(2,50)
单元面积、惯性矩数组	AIL(3,50)
结点荷载数组	FPJ(4,50)
非结点荷载数组	FPF(4,50)
支座结点信息	IZ(4,10)

附图 3

3. 结点位移分量编号计算——子框图 2(附图 4)

子框图 2 对应子程序 JJC，该子程序的哑元为 ID、IZ、XY、N、N1、N5。其中，数组 ID 及整数 N 为子程序的输出参数，其余是子程序的输入参数。

4. 计算单元常数——子框图 3(附图 5)

子框图 3 对应子程序 SCL，其功能是根据

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_j - x_i \\ \Delta y &= y_j - y_i \\ l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \sin \alpha &= \frac{\Delta y}{l} \\ \cos \alpha &= \frac{\Delta x}{l} \end{aligned} \right\}$$

求单元的长度及单元的局部坐标系与结构坐标系之间夹角的正弦与余弦三角函数，分别存放在 AIL、CS 数组中。

子程序 SCL 的哑元为 IJ、XY、AIL、CS、N2，其中 AIL、CS 是输出参数，其余是输入参数。

5. 形成结点荷载列向量——子框图 4(附图 9)

在讨论一级子框图 4 之前，先讨论下列有关的三个二级子框图。

(1) 二级子框图 01、02 和 03

(a) 形成坐标转换矩阵——子框图 01(附图 6)

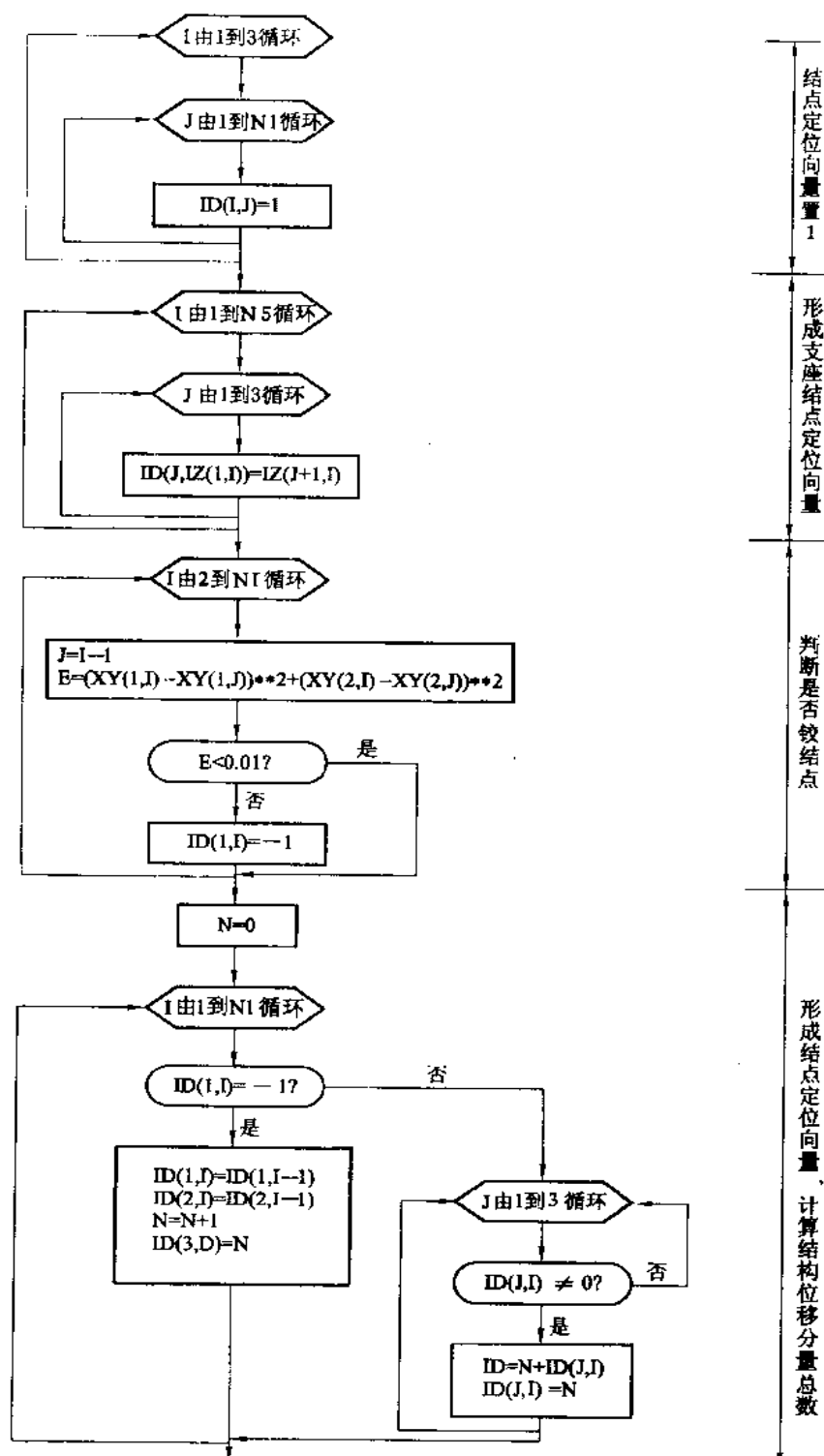
子框图 01 对应子程序 TTT。该子程序的哑元为 IE、CS、T，其中数组 T(6,6) 为单元(IE)的坐标转换矩阵，是输出参数，其余为输入参数。

(b) 求单元定位向量——子框图 02(附图 7)

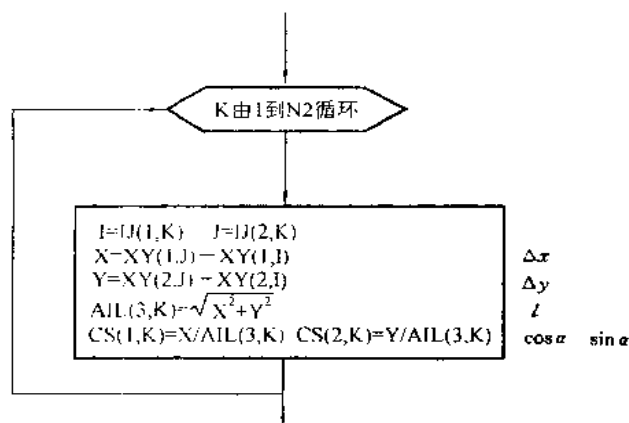
单元(IE)的定位向量存放在数组 IH(6)中，其中

IH(1)、IH(2)、IH(3)——分别为单元(IE)始端(I)的位移分量 u_i 、 v_i 、 θ_i 的编号。

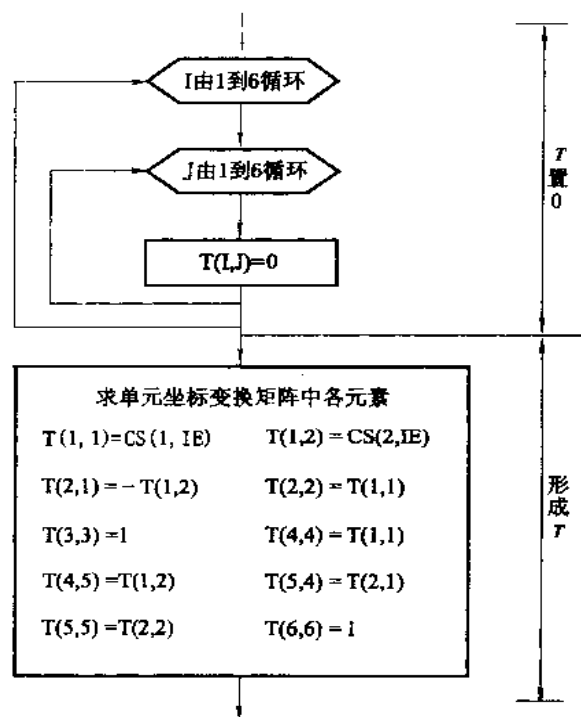
IH(4)、IH(5)、IH(6)——分别为单元(IE)末端(J)的位移分量 u_j 、 v_j 、 θ_j 的编号。



附图 4



附图 5



附图 6

单元(IE)始端(I)和末端(J)的结点编号可以从单元杆端结点编号数组 IJ 中取得,再从数组 ID 取出与单元的始端和末端结点相应的位移分量编号,将它们送入数组 IH,就形成了单元(IE)的定位向量。

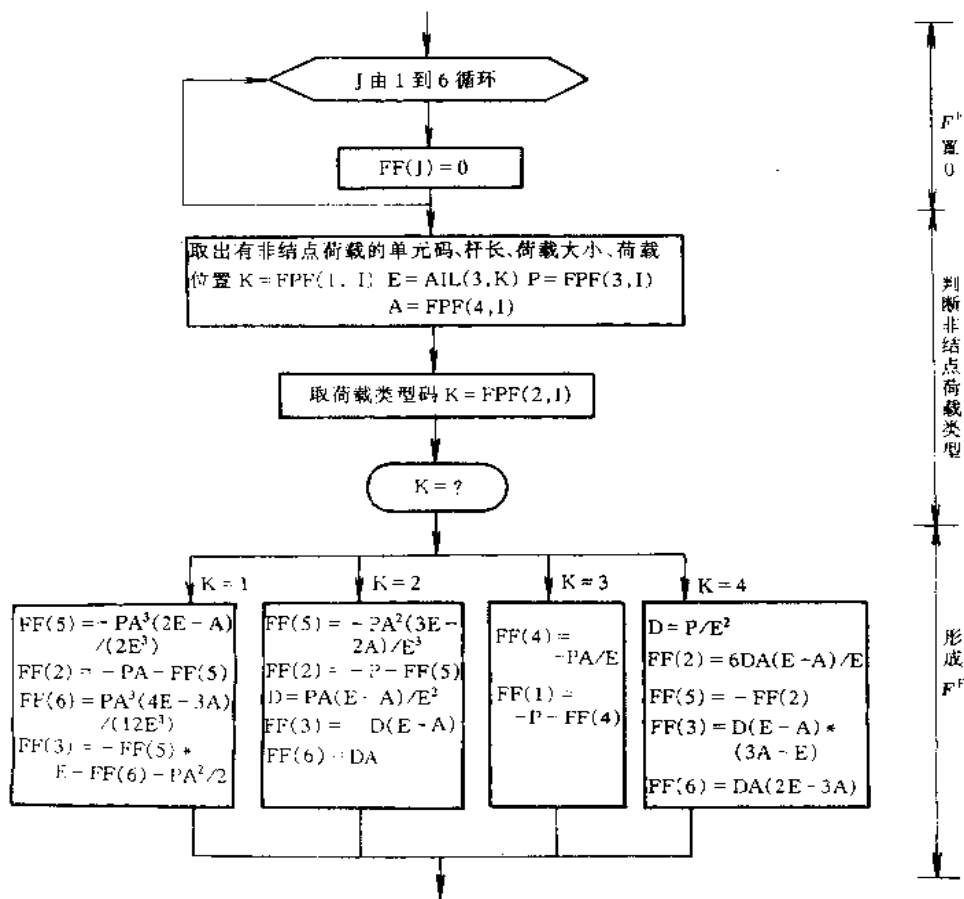
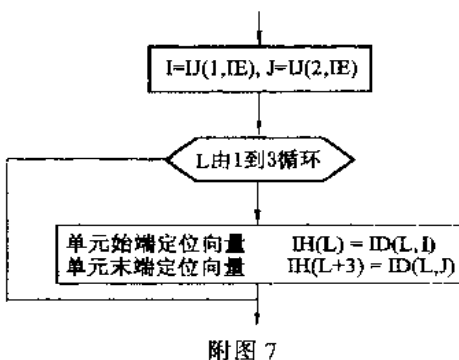
子框图 02 对应子程序 IH。该子程序的哑元为 IE、IJ、ID、IH,其中数组 IH(6)为输出参数,其余为输入参数。

(c) 求单元固端力——子框图 03(附图 8)

子框图 03 对应子程序 FF, 其功能是按照表 5-1 给出的计算公式求单元在各种非结点荷载作用下的单元固端力 \bar{F}^F , 将其存放在数组 FF(6) 中。该子程序的哑元为 I、FPF、AIL、FF, 其中数组 FF(6) 为输出参数, 其余为输入参数。

(2) 子框图 4(附图 9)

子框图 4 对应子程序 LOAD, 其功能是求出平面刚架的结点荷载列向量, 存放在数组 FP(N) 中。在子程序 LOAD 的 14 个哑元中, 数组 FP 是子程序的输出参数。

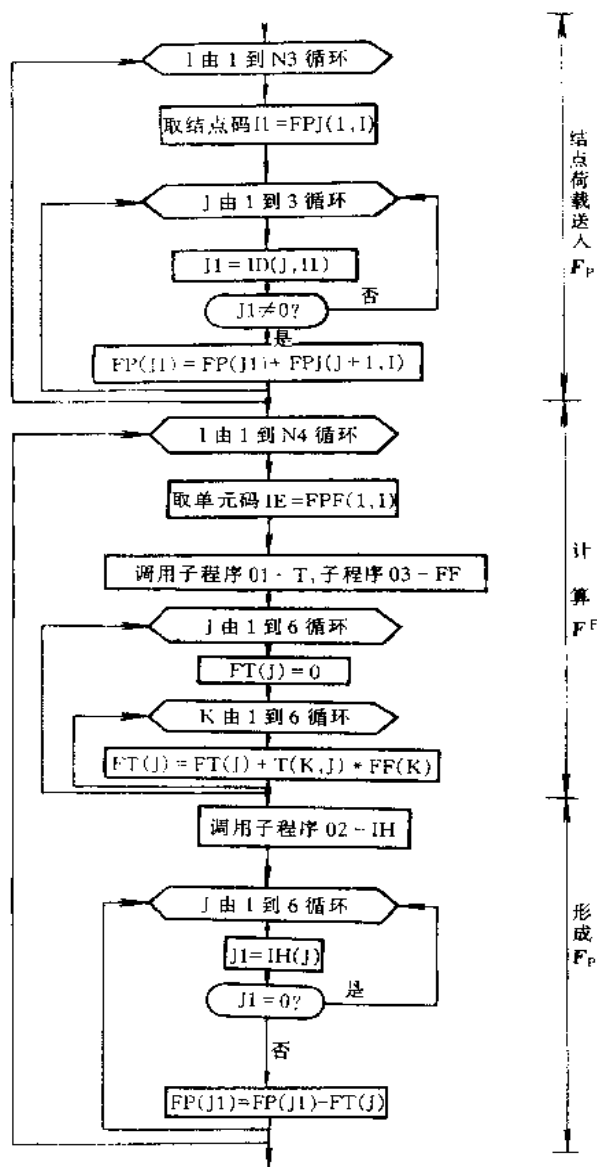


附图 8

6. 形成结构刚度矩阵——子框图 5(附图 11)

先讨论二级子框图 04(附图 10), 子框图 04 对应子程序 STIFF, 其功能是将式(9-5)的局部坐标系中的单元刚度矩阵存放在数组 AE(6,6) 中。

子框图 5(附图 11)对应子程序 SSM, 其功能是形成平面刚架的结构刚度矩阵 SM(N,N)。



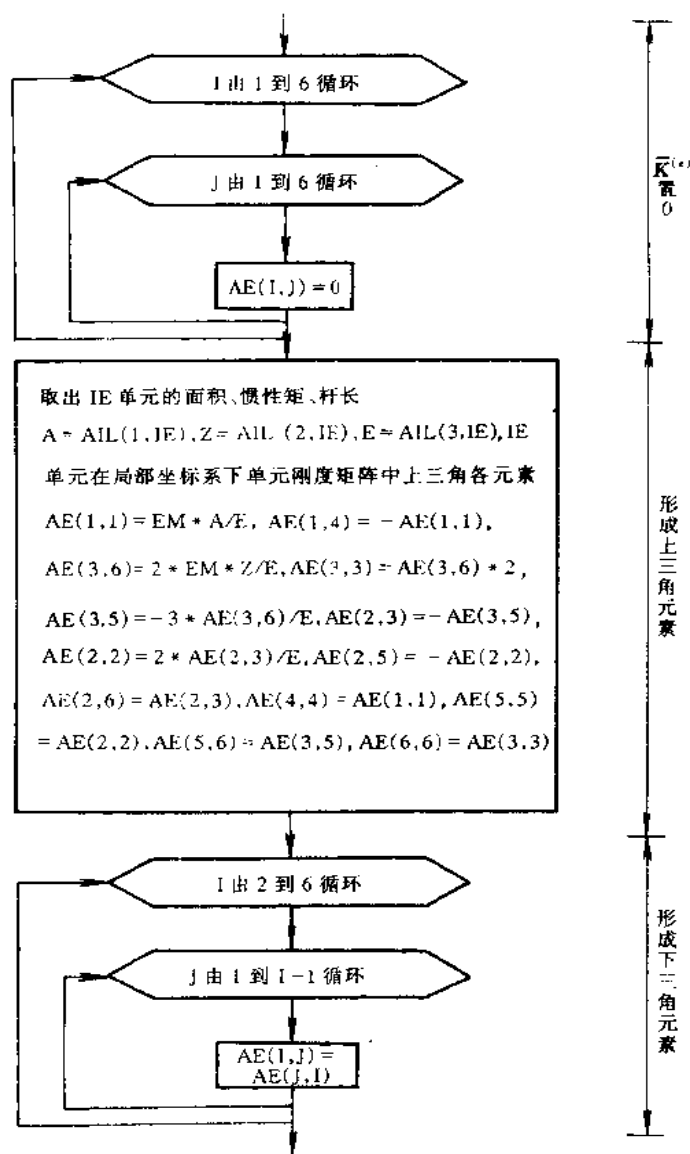
附图 9

7. 解方程组求结点位移——子框图 6(附图 12)

线性方程组 $KA = F_p$ 的求解采用高斯消元法,求出的结点位移存放在数组 FP 中。

在求得平面刚架的结点位移后,为了打印输出每个结点的三个位移分量,需要根据结点位移分量的编号来确定它们在数组 FP 中的位置。设第 1 个结点的第 J 个位移分量在数组 FP 中的位置为 K,则 $K = ID(J, 1)$,若 $K > 0$,则 $FP(K)$ 就是该位移分量的数组。若 $K = 0$,该位移分量受到约束,其值等于零。

8. 求单元杆端力——子框图 7(附图 13)

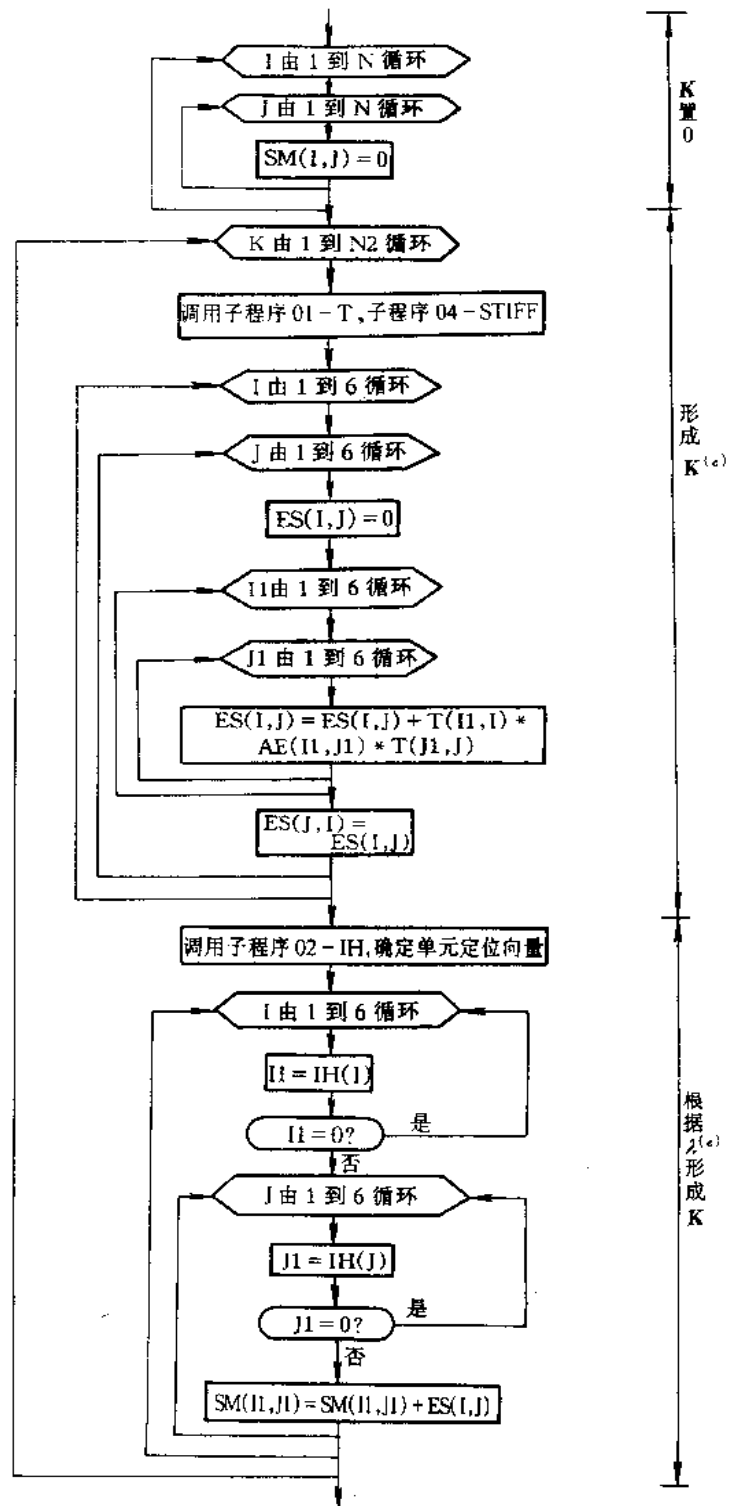


附图 10

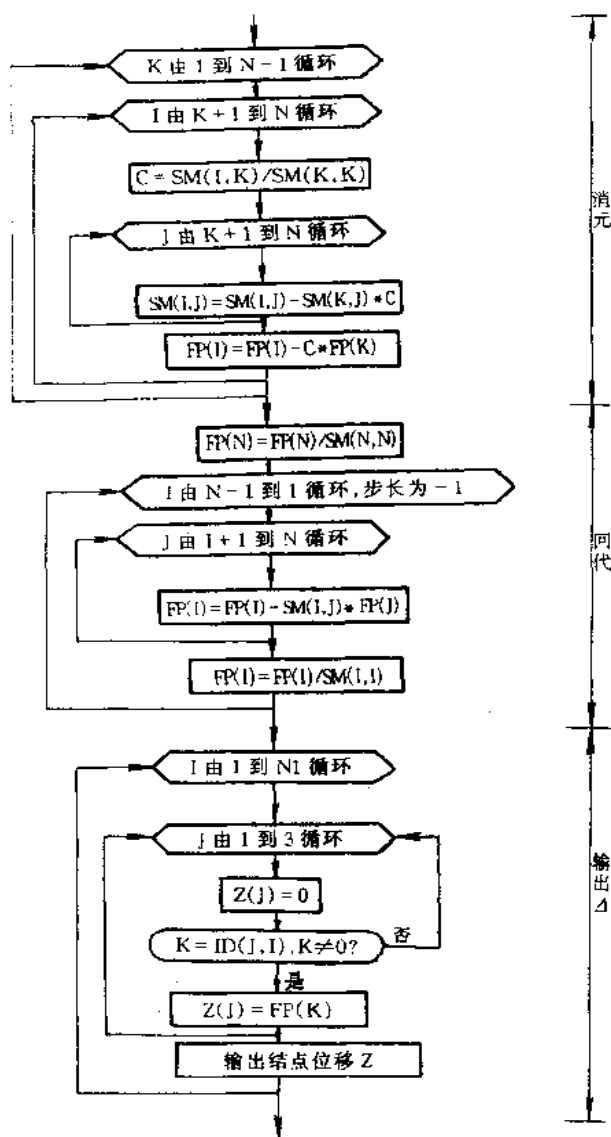
子框图 7 对应子程序 EFX,其功能是求出每个单元在局部坐标系中的杆端力并打印输出,子程序的哑元均为输入参数。

四、基本参数输入及填写格式

1. 输入 N1, N2, N3, N4, N5, EM
2. 按结点编号顺序输入各结点的坐标(x, y)
3. 按单元编号顺序输入各单元的[始端码, 末端码]
4. 按单元编号顺序输入各单元的[面积、惯性矩]



附图 11



附图 12

5. 对有结点荷载的结点分别输入[结点码, x 方向荷载, y 方向荷载, φ 方向荷载]

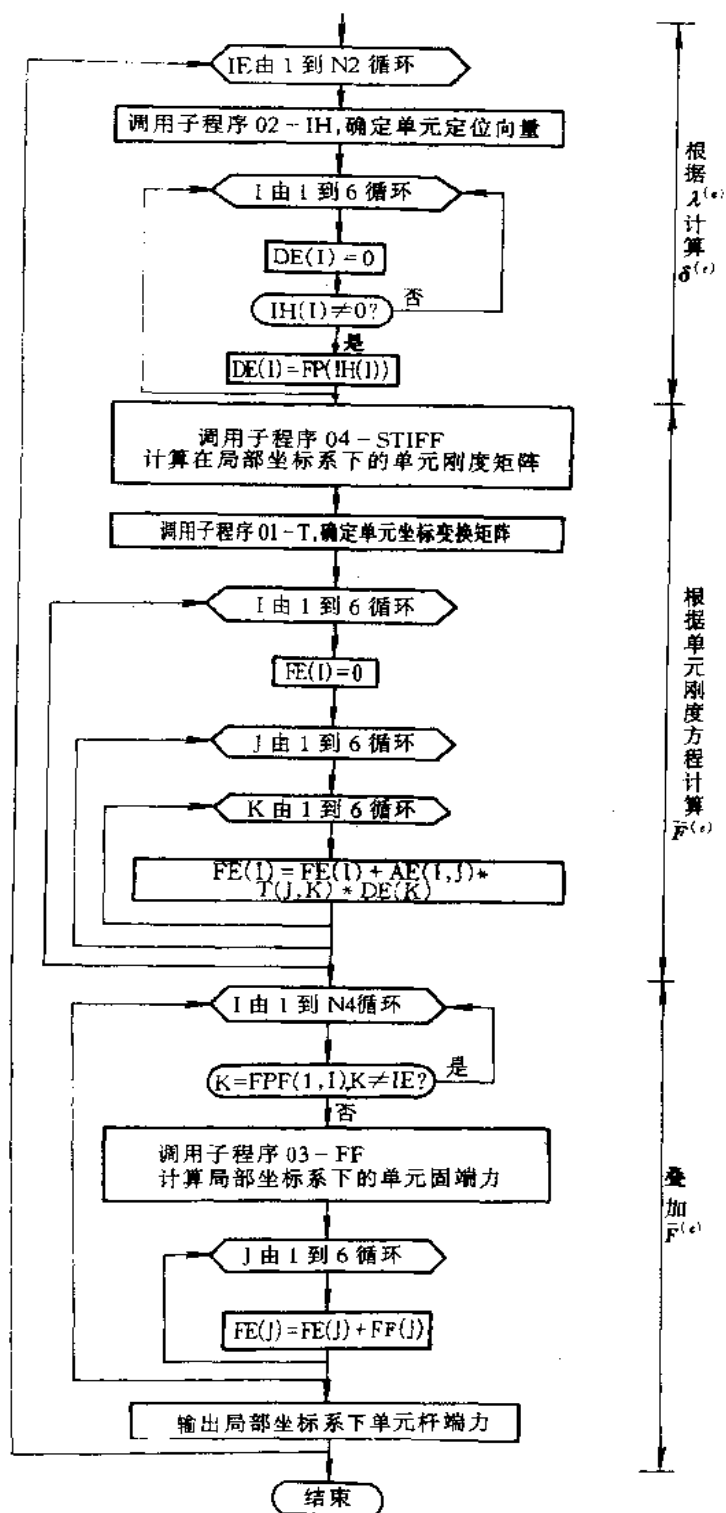
6. 对有非结点荷载的单元分别输入[单元码、荷载类型、荷载大小、荷载位置]

7. 对支座分别输入[结点码, x 方向约束, y 方向约束, φ 方向约束]

五、输出数据

1. 结点位移: 按结点编码顺序, 对每个结点输出一组数据[结点码, x 方向位移, y 方向位移, 转角 φ]

2. 在局部坐标系中的单元杆端力: 按单元编号顺序, 对每一单元输出一组数据[单元码, F_{Ni} , \bar{F}_{Qi} , \bar{M}_i , \bar{F}_{Nj} , \bar{F}_{Qj} , \bar{M}_j]



附图 13

六、源程序

C MAIN PROGRAM OF FRAME ANALYSIS(WANG MENGFU)

```
DIMENSION XY(2, 50), IJ(2, 50), AIL(3, 50), ID(3, 50), CS(2, 50),  
1  FPJ(4, 50), FPF(4, 50), IZ(4, 10), SM(150, 150), FP(150), AE(6, 6),  
2  T(6, 6), ES(6, 6), FF(6), IH(6), FE(6), DE(6), Z(3), FT(6)  
OPEN(5, FILE=' ' )  
OPEN(6, FILE='PRO. DAT', STATUS='NEW' )  
READ(5, *) N1, N2, N3, N4, N5, EM  
CALL DAT(N1, N2, N3, N4, N5, XY, IJ, AIL, FPJ, FPF, IZ)  
CALL SCL(IJ, XY, AIL, CS, N2)  
CALL JJC(ID, IZ, XY, N, N1, N5)  
CALL SSM(SM, N, N2, EM, AIL, AE, CS, T, ES, ID, IJ, IH)  
CALL LOAD(N, FP, FPJ, FPF, CS, T, AIL, FF, FT, IJ, IH, ID, N3, N4)  
CALL GAUSS(SM, FP, N, ID, Z, N1)  
CALL EFX(N2, N4, ID, IJ, IH, DE, FP, EM, AIL, CS, ES, T, FE, FPF, FF)  
END
```

C SUB1---DAT

```
SUBROUTINE DAT(N1, N2, N3, N4, N5, XY, IJ, AIL, FPJ, FPF, IZ)  
DIMENSION XY(2, 50), IJ(2, 50), AIL(3, 50), FPJ(4, 50),  
1 FPF(4, 50), IZ(4, 10)  
READ(5, *) (XY(1, I), XY(2, I), I=1, N1)  
READ(5, *) (IJ(1, I), IJ(2, I), I=1, N2)  
READ(5, *) (AIL(1, I), AIL(2, I), I=1, N2)  
IF (N3.NE.0) READ(5, *) ((FPJ(J, I), J=1, 4), I=1, N3)  
IF (N4.NE.0) READ(5, *) ((FPF(J, I), J=1, 4), I=1, N4)  
READ(5, *) ((IZ(J, I), J=1, 4), I=1, N5)  
RETURN  
END
```

C SUB2---JJC

```
SUBROUTINE JJC(ID, IZ, XY, N, N1, N5)  
DIMENSION ID(3, 50), IZ(4, 10), XY(2, 50)  
DO 10 I=1, 3  
DO 10 J=1, N1  
10 ID(I, J)=1  
DO 20 I=1, N5
```

```

      DO 20 J=1, 3
20    ID(J, IZ(1, I))=IZ(J+1, I)
      DO 40 I=2, N1
      J=I-1
      E=(XY(1, I)-XY(1, J))**2+(XY(2, I)-XY(2, J))**2
      IF (E.LT. 0. 01) ID(1, I)=-1
40    CONTINUE
      N=0
      DO 60 I=1, N1
      IF (ID(1, I).EQ. -1) THEN
        ID(1, I)=ID(1, I-1)
        ID(2, I)=ID(2, I-1)
        N=N+1
        ID(3, I)=N
      ELSE
        DO 50 J=1, 3
        N=N+ID(J, I)
        IF (ID(J, I).NE. 0) ID(J, I)=N
50    CONTINUE
      ENDIF
60    CONTINUE
      RETURN
      END

C    SUB3---SCL

      SUBROUTINE SCL(IJ, XY, AIL, CS, N2)
      DIMENSION IJ(2, 50), XY(2, 50), AIL(3, 50), CS(2, 50)
      DO 100 K=1, N2
      I=IJ(1, K)
      J=IJ(2, K)
      X=XY(1, J)-XY(1, I)
      Y=XY(2, J)-XY(2, I)
      AIL(3, K)=SQRT(X*X+Y*Y)
      CS(1, K)=X/AIL(3, K)
100   CS(2, K)=Y/AIL(3, K)
      RETURN
      END

```

C SUB4---LOAD

```
SUBROUTINE LOAD(N, FP, FPJ, FPF, CS, T, AIL, FF, FT, IJ, IH, ID, N3, N4)
  DIMENSION FP(150), FPJ(4, 50), ID(3, 50), FPF(4, 50), CS(2, 50),
  IJH(6), T(6, 6), AIL(3, 50), FF(6), FT(6), IJ(2, 50)
  DO 130 I=1, N
130  FP(I)=0.0
      DO 140 I=1, N3
          I1=FPJ(1, I)+0.01
          DO 140 J=1, 3
              J1=ID(J, I1)
              IF (J1.NE.0) FP(J1)=FP(J1)+FPJ(J+1, I)
140  CONTINUE
          DO 170 I=1, N4
              IE=FPF(1, I)+0.01
              CALL TTT(IE, CS, T)
              CALL FFSUB(I, FPF, AIL, FF)
              DO 150 J=1, 6
                  FT(J)=0.0
                  DO 150 K=1, 6
150  FT(J)=FT(J)+T(K, J)*FF(K)
                      CALL IHSUB(IE, ID, IJ, IH)
                      DO 160 J=1, 6
                          J1=IH(J)
                          IF (J1.NE.0) FP(J1)=FP(J1)-FT(J)
160  CONTINUE
170  CONTINUE
      RETURN
  END
```

C SUB5---SSM

```
SUBROUTINE SSM(SM, N, N2, EM, AIL, AE, CS, T, ES, ID, IJ, IH)
  DIMENSION SM(150, 150), AIL(3, 50), AE(6, 6), CS(2, 50),
  ID(3, 50), IJ(2, 50), IH(6), ES(6, 6), T(6, 6)
  DO 105 I=1, N
  DO 105 J=1, N
```

```

105  SM(I, J)=0.0
      DO 120 K=1, N2
      CALL STIFF(EM, K, AIL, AE)
      CALL TTT(K, CS, T)
      DO 102 I=1, 6
      DO 106 J=1, 6
      ES(I, J)=0.0
      DO 108 I1=1, 6
      DO 108 J1=1, 6
108  ES(I, J)=ES(I, J)+T(I1, I)*AE(I1, J1)*T(J1, J)
      ES(J, I)=ES(I, J)
106  CONTINUE
102  CONTINUE
      CALL IHSUB(K, ID, IJ, IH)
      DO 120 I=1, 6
      I1=IH(I)
      IF (I1.EQ.0) GOTO 120
      DO 110 J=1, 6
      J1=IH(J)
      IF (J1.EQ.0) GOTO 110
      SM(I1, J1)=SM(I1, J1)+ES(I, J)
110  CONTINUE
120  CONTINUE
      RETURN
      END

C    SUB6---GAUSS

      SUBROUTINE GAUSS(SM, FP, N, ID, Z, N1)
      DIMENSION SM(150, 150), FP(150), ID(3, 50), Z(3)
      DO 200 K=1, N-1
      DO 200 I=K+1, N
      C=SM(I, K)/SM(K, K)
      DO 190 J=K+1, N
190  SM(I, J)=SM(I, J)-SM(K, J)*C
200  FP(I)=FP(I)-C*FP(K)
      FP(N)=FP(N)/SM(N, N)
      DO 220 I=N-1, 1, -1
      DO 210 J=I+1, N

```

```

210  FP(I)=FP(I)-SM(I,J)*FP(J)
220  FP(I)=FP(I)/SM(I,I)
    WRITE(6,250)
250  FORMAT(15X,5(' '), 'RESULTS OF CALCULATION', 5(' ')/)
    WRITE(6,*) '  Displacements'
    WRITE(6,260)
260  FORMAT(5X, 'Node', 11X, 'U', 15X, 'V', 15X, 'Phi')
    DO 290 I=1, N1
    DO 270 J=1, 3
    Z(J)=0.0
    K=ID(J,I)
    IF (K.NE.0) Z(J)=FP(K)
270  CONTINUE
    WRITE(6,280) I, (Z(J), J=1, 3)
280  FORMAT(18, 5X, 3G16.5)
290  CONTINUE
    RETURN
    END

C    SUB7---EFX

    SUBROUTINE EFX(N2, N4, ID, IJ, IH, DE, FP, EM,
1AIL, CS, ES, T, FE, FPF, FF)
    DIMENSION ID(3, 50), IJ(2, 50), IH(6), DE(6), FP(150), FF(6),
2AIL(3, 50), CS(2, 50), ES(6, 6), T(6, 6), FE(6), FPF(4, 50), AE(6, 6)
    WRITE(6,292)
292  FORMAT(/1X, '  Internal Forces')
    WRITE(6,295)
295  FORMAT('  Ele.', 6X, 'FNI', 10X, 'FQi', 10X, 'Mi',
110X, 'FNj', 10X, 'FQj', 10X, 'Mj')
    DO 400 IE=1, N2
    CALL IHSUB(IE, ID, IJ, IH)
    DO 300 I=1, 6
    DE(I)=0.0
    IF (IH(I).NE.0) DE(I)=FP(IH(I))
300  CONTINUE
    CALL STIFF(EM, IE, AIL, AE)
    CALL TTT(IE, CS, T)
    DO 320 I=1, 6

```

```

        FE(1)=0.0
        DO 310 J=1,6
        DO 310 K=1,6
310     FE(1)=FE(1)+AE(I,J)*T(J,K)*DE(K)
320     CONTINUE
        DO 340 I=1,N4
        K=FPF(1,1)+0.01
        IF (K.EQ.IE) THEN
            CALL FFSUB(I,FPF,AIL,FF)
            DO 330 J=1,6
330         FE(J)=FE(J)+FF(J)
            ENDIF
        CONTINUE
        WRITE(6,370) IE, (FE(I), I=1,6)
370     FORMAT(I5,2X,6G12.5)
400     CONTINUE
        RETURN
        END

```

C SUB01---T

```

        SUBROUTINE TIT(IE,CS,T)
        DIMENSION CS(2,50),T(6,6)
        DO 540 I=1,6
        DO 540 J=1,6
540     T(I,J)=0.0
        T(1,1)=CS(1,IE)
        T(1,2)=CS(2,IE)
        T(2,1)=-T(1,2)
        T(2,2)=T(1,1)
        T(3,3)=1.0
        T(4,4)=T(1,1)
        T(4,5)=T(1,2)
        T(5,4)=T(2,1)
        T(5,5)=T(2,2)
        T(6,6)=1.0
        END

```

C SUB02--IH

```

SUBROUTINE IHSUB(IE, ID, IJ, IH)
DIMENSION ID(3, 50), IJ(2, 50), IH(6)
I=IJ(1, IE)
J=IJ(2, IE)
DO 550 L=1, 3
IH(L)=ID(L, I)
550 IH(L+3)=ID(L, J)
RETURN
END

```

C SUB03--FF

```

SUBROUTINE FFSUB(I, FPF, AIL, FF)
DIMENSION AIL(3, 50), FPF(4, 50), FF(6)
DO 560 J=1, 6
560 FF(J)=0.0
K=FPF(1, I)+0.01
E=AIL(3, K)
P=FPF(3, I)
A=FPF(4, I)
K=FPF(2, I)+0.01
GOTO (565, 570, 575, 580) K
565 FF(5)=-P*A*A*A*(2*E-A)/(2*E*E*E)
FF(2)=-P*A-FF(5)
FF(6)=P*A*A*A*(4*E-3*A)/(12*E*E)
FF(3)=-FF(5)*E-FF(6)-P*A*A/2
GOTO 585
570 FF(5)=-P*A*A*(3*E-2*A)/(E*E*E)
FF(2)=-P-FF(5)
D=P*A*(E-A)/(E*E)
FF(3)=-D*(E-A)
FF(6)=D*A
GOTO 585
575 FF(4)=-P*A/E
FF(1)=-P-FF(4)
GOTO 585
580 D=P/(E*E)
FF(2)=6*D*A*(E-A)/E

```



```

      FF(5)=-FF(2)
      FF(3)=D*(E-A)*(3*A-E)
      FF(6)=D*A*(2*E-3*A)
585  CONTINUE
      RETURN
      END

```

C SUB04--STIFF

```

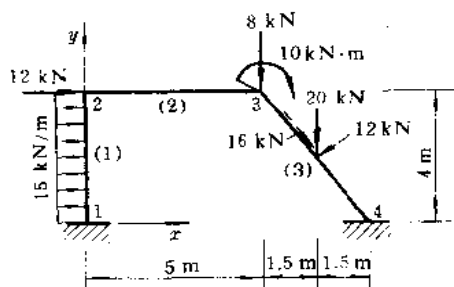
      SUBROUTINE STIFF(EM, IE, AIL, AE)
      DIMENSION AIL(3, 50), AE(6, 6)
      DO 110 I=1, 6
      DO 110 J=1, 6
110  AE(I, J)=0.0
      A=AIL(1, IE)
      Z=AIL(2, IE)
      E=AIL(3, IE)
      AE(1, 1)=EM*A/E
      AE(1, 4)=-AE(1, 1)
      AE(3, 6)=2*EM*Z/E
      AE(3, 3)=2*AE(3, 6)
      AE(3, 5)=-3*AE(3, 6)/E
      AE(2, 3)=-AE(3, 5)
      AE(2, 2)=2*AE(2, 3)/E
      AE(2, 5)=-AE(2, 2)
      AE(2, 6)=AE(2, 3)
      AE(4, 4)=AE(1, 1)
      AE(5, 5)=AE(2, 2)
      AE(5, 6)=AE(3, 5)
      AE(6, 6)=AE(3, 3)
      DO 530 I=2, 6
      DO 530 J=1, I-1
530  AE(I, J)=AE(J, I)
      RETURN
      END

```

七、算例

例 1 各杆 $A=0.5 \text{ m}^2$, $I=0.04167 \text{ m}^4$, $E=30 \text{ GPa}$ (考虑轴向变形)。

1. 结点编号、单元编号、整体坐标系如附图 14 所示。
2. 建立名为 E1 的磁盘文件：



4, 3, 2, 3, 2, 3E7
 0, 0, 0, 4, 5, 4, 8, 0
 1, 2, 2, 3, 3, 4
 0.5, 0.04166, 0.5, 0.04166, 0.5, 0.04166
 2, 12, 0, 0, 3, 0, -8, -10
 1, 1, -15, 4, 3, 2, -12, 2.5, 3, 3, 16, 2.5
 1, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0

附图 14

3. 运行程序,打印的结果如下:

*****RESULTS OF CALCULATION*****

Displacements

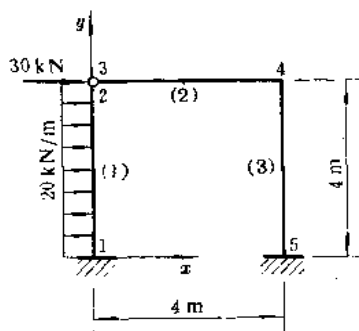
Node	U	V	Phi
1	.00000	.00000	.00000
2	.72245E-04	.20985E-05	.13604E-05
3	.64101E-04	.33344E-04	-.15098E-04
4	.00000	.00000	.00000

Internal Forces

Ele.	FNi	FQi	Mi	FNj	FQj	Mj
1	-7.8694	47.567	54.710	7.8694	12.433	15.560
2	24.433	-7.8694	-15.560	-24.433	7.8694	-23.787
3	27.355	10.024	13.787	-43.355	1.9755	6.3351

例2 各杆 $A = 1 \times 10^4 \text{ m}^2$, $I = 1 \text{ m}^4$, $E = 1 \text{ 000 Pa}$ (不考虑轴向变形,所以 A 取得较大,弹性模量只影响位移的相对值)。

1. 结点编号、单元编号,整体坐标系如附图 15 所示。
2. 建立名为 E2 的磁盘文件:



5, 3, 1, 1, 2, 1
 0, 0, 0, 4, 0, 4, 4, 4, 0
 1, 2, 3, 4, 5, 4
 1E4, 1, 1E4, 1, 1E4, 1
 2, 30, 0, 0
 1, 1, -20, 4
 1, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0

附图 15

3. 运行程序,打印结果如下:

*****RESULTS OF CALCULATION*****

Displacements

Node	U	V	Phi
1	.00000	.00000	.00000
2	389.65	.62619E-02	-119.45
3	389.65	.62619E-02	41.743
4	389.64	-.62619E-02	-83.495
5	.00000	.00000	.00000

Internal Forces

Ele.	FNi	FQi	Mi	FNj	FQj	Mj
1	-15.655	68.265	113.06	15.655	11.735	-.19073E-05
2	41.754	-15.655	.76294E-05	-41.754	15.655	62.619
3	15.655	41.746	104.37	-15.655	-41.746	62.619

主要参考书目

1. 杨蕪康,李家宝主编. 结构力学. 第三版. 北京:高等教育出版社,1983
2. 龙驭球,包世华主编. 结构力学:上册. 第二版. 北京:高等教育出版社,1994