



面向 21 世纪 课 程 教 材  
Textbook Series for 21st Century

# 结构力学教程(I)

龙驭球 包世华 主编  
龙驭球 包世华 匡文起 袁 驷 编著



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

# Structural Mechanics (I)



ISBN 7-04-008630-1



9 787040 086300 >

定价 36.10 元

(含光盘 1 张)

面向 21 世纪课程教材  
Textbook Series for 21st Century

# 结构力学教程(I)

龙驭球 包世华 主编  
龙驭球 包世华 匡文起 袁 驷 编著



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS





# 序

教材建设是一项需要长期积累而又不断翻新的工作,既要锲而不舍、精益求精,又要善于探索、有所创新。本书是在清华大学四十多年结构力学教材建设和近几年教学改革实践的基础上编写的,主要想在以下几个方面作些新的尝试和安排:

一、由一本书扩充为三书鼎立。由于结构力学计算机化的进程日新月异,以及在计算机化的形势下结构定性分析的能力培养日益显得更为重要,因此除编写一本“结构力学教程”侧重于经典结构力学的基本理论和基本方法外,还拟编写两本配套教材,即“程序结构力学”和“定性结构力学”,分别侧重于计算机方法和定性分析方法。三书鼎立,相互呼应,以期适应新世纪、新形势的新要求。

二、为计算机化提供新的基础知识和新工具。在为矩阵位移法配置的计算机程序方面,有 FORTRAN 77 程序, Fortran 90 程序。此外,还引入作者教学和科研成果《结构力学求解器》作为新工具,提高解算大型结构、复杂结构的例题、习题的能力,开拓教学内容的广度和深度,利用动画显示,提高对结构性能的感性认识。

三、将虚功—能量方法贯通全书,提高理论水平。以前的结构力学教材也讲一点虚功—能量方法,但讲得太晚,太集中,学与用离得太远。针对这种情况,本书改为“提前讲、分段讲、就近用”的作法,以便收到“由浅入深、分散难点、学了就用、便于生根”的效果,从而进一步提高理论水平。计算机化不仅不排斥力学理论,而是更加需要力学理论的指导,呼唤力学理论的深化。

四、注意培养思维能力和科学素质。为了把力学方法上升到方法论的高度,在书中专门写了四节:

- 方法论(1)——学习方法(第1章)。
- 方法论(2)——静定结构部分(第6章)。
- 方法论(3)——超静定结构部分(第12章)。
- 方法论(4)——结构力学之道(最后一章)。

为了指导学习和启发思考,专门写了两章“总论”,分别对静定结构和超静定

结构两大部分内容进行融会贯通的梳理和开阔视野的指点;几乎每一章都专门写了“小结”和“思考与讨论”两节,引导读者跨进更广的思考空间。

五、适当更新内容。除了删去和压缩比较陈旧的内容外,还注意扩大专业覆盖面,新加悬索、空间结构等内容,适当介绍一些科研成果,包括作者新近的部分学术成果。

总的来说,“守本翻新”是本书的编写方针。守本,是指继续保持“打好基础,脉络清晰,理论联系实际,符合认识规律”的编写风格。翻新,是指进行一些经过初步实践的新尝试,包括上面提到的五点。

本书内容各校可根据具体教学要求选用,带\*号者为选学、提高内容。

本书稿请西安建筑科技大学刘铮教授和东南大学单建教授审阅,在审阅中提了不少宝贵意见。清华大学雷钟和教授提供了本书部分思考题及习题,张玉良副教授提供了 FORTRAN 77 程序的初稿。作者谨向他们表示衷心的感谢。

欢迎批评,恳请指正。

作 者

1999 年冬于清华园

## 本书符号表说明

为了深入贯彻国家技术监督局发布的国家标准(GB 3100~3102—93)《量和单位》,本书对结构力学符号和单位的传统用法作了调整,既保证了对国家标准的认真实施,又考虑了教师和学生使用上的习惯与方便。

在实施国家标准的过程中,为保证国家标准和现有惯例的衔接,本书作了认真的考虑,现作如下说明,请读者注意。

1. 国家标准规范的物理量、名称和符号,按国家标准使用,注重量的物理属性。如,旧称剪应变(剪切角) $\gamma$ ,现改称切应变;又如,各种力(包括荷载、反力和内力)都用 $F$ 作为主符号,而将其特性以下标(上标)表示;等等。

2. 对于在结构力学中广泛使用的广义力(包括力与力偶矩、力矩)和广义位移(包括线位移与角位移),为了体现其广义性(有时还有未知性),考虑到全书叙述的统一和表达的简洁、完整,本书仍沿用 $X$ (多余力未知力)、 $\Delta$ 和 $\delta$ (位移)、 $\rho$ (支座位移)等广义物理量。至于它们在具体问题中对应的量和相应单位,则视具体问题而定。

3. 在结构力学中经常应用“单位量”的概念,如单位力 $X=1$ ,单位荷载 $F_p=1$ ,单位位移 $\Delta=1$ 等。现以单位力 $X=1$ 为例加以说明。单位力 $X=1$ 是一种简称,详细地说,是指数值为1而其量纲指数都为零(量纲并不为零,量纲为一)的特定广义力 $\overline{X}=1$ (这里, $\overline{X}$ 与 $X$ 在数值上相等,但量纲不同。 $\overline{X}$ 是一个量纲一的量,以前称为无量纲量)。单位量的概念主要用于求比例系数(或称影响系数)。仍以力 $X$ 引起某量 $M$ 的情况为例,二者的比例系数为 $\overline{M}=\frac{M}{X}$ 。在线性问题中,比例系数是一个重要的概念。

4. 本教材中某些符号及有关公式运算中的单位表示,考虑以往教材的习惯和结合工程实际运算的方便,作了必要的处理。具体情况在本教材的相应处已有说明。

# 主要符号表

$A$	面积
$a$	振幅
$\lambda_e$	应变能密度
$B_e$	应变余能密度
$c$	支座广义位移、粘滞阻尼系数
$C$	弯矩传递系数
$C_{cr}$	临界阻尼系数
$d$	结间距离
$E$	弹性模量
$f$	矢高、工程频率
$F_p$	集中荷载
$\boldsymbol{F}_p$	荷载向量
$F_H$	水平推力
$F_x, F_y$	水平( $x$ )、垂直( $y$ )方向的分力
$F_N$	轴力
$F_{Nx}, F_{Ny}$	水平( $x$ )、垂直( $y$ )方向的分轴力
$F_Q$	剪力
$F_Q^l, F_Q^R$	截面左、右的剪力
$F_Q^l$	固端剪力
$F_{pe}$	欧拉临界荷载
$F_{pr}$	临界荷载
$F_{pu}$	极限荷载
$F_p^+$	可破坏荷载
$F_p$	可接受荷载
$F_e$	弹性力
$F_i$	惯性力
$F_d$	阻尼力



$F_R$	广义反力、反力合力
$F^e$	局部坐标系下单元杆端力向量
$F^s$	整体坐标系下单元杆端力向量
$F^{Fe}$	局部坐标系下单元固端力向量
$F^{Fs}$	整体坐标系下单元固端力向量
$G$	切变模量
$i$	线刚度
$I$	惯性矩
$\mathbf{I}$	单位矩阵
$k$	刚度系数、切应力分布不均匀系数
$k^e$	局部坐标系下单元刚度矩阵
$k^s$	整体坐标系下单元刚度矩阵
$\mathbf{K}$	结构刚度矩阵
$m$	质量
$\mathbf{M}$	质量矩阵
$M$	力矩、力偶矩、弯矩
$M^F$	固端弯矩
$M_u$	极限弯矩
$M_e$	弹性极限弯矩
$\mathbf{N}$	形函数矩阵
$p$	均布荷载集度
$P$	广义荷载、广义力
$P^e$	单元结点荷载向量
$\mathbf{P}$	结构结点荷载向量
$q$	均布荷载集度
$R$	半径
$r$	半径、反力影响系数
$S$	转动刚度
$t$	时间
$T$	周期、动能
$\mathbf{T}$	坐标转换矩阵
$U$	应变能
$u$	水平位移
$v$	竖向位移、挠度、速度
$V$	应变余能

$W$	功、计算自由度、弯曲截面系数
$X$	广义未知力、广义多余未知力
$Y$	位移幅值向量、主振型向量、主振型矩阵
$y$	位移
$Z$	影响线量值
$\alpha$	线膨胀系数、初相角
$\beta$	动力系数
$\Delta$	广义未知位移
$\Delta$	位移向量
$\Delta^e$	单元杆端位移向量
$\delta$	柔度系数、位移影响系数
$\epsilon$	线应变
$\mu$	力矩分配系数
$\kappa$	曲率
$\varphi$	弦转角
$\gamma_0$	平均切应变
$\theta$	截面的转角、干扰力频率
$\xi$	阻尼比
$\sigma_b$	强度极限
$\sigma$	屈服应力
$\sigma_s$	极限应力
$\omega$	圆频率

责任编辑	余美茵
封面设计	张楠
责任绘图	朱静
版式设计	周顺银
责任校对	马桂兰
责任印制	杨明

## 内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材和教育部工科力学“九五”规划教材。本书是在清华大学四十多年结构力学教材建设和近年教学改革实践基础上,为高等学校土建、水利、道桥、力学等专业结构力学课程编写的新教材。

全书共 16 章,分为(I)、(II)两册。第(I)册共 9 章,主要包括静定结构部分、超静定结构部分等。第(II)册共 7 章,主要包括矩阵位移法、能量原理以及动力、稳定、极限荷载计算等专题部分。本书为第(I)册,并附有《结构力学求解器》软件光盘 1 张。

本书贯彻“守本翻新”的方针。守本,是指继续保持“打好基础,脉络清晰,理论联系实际,符合认识规律”的编写风格。翻新,是指进行一些经过初步实践的新尝试:将经典与现代方法融为一体,将虚功—能量方法贯通全书,讲点方法论提高科学素质,更新内容扩大专业覆盖面,引入结构力学计算机辅助分析计算软件《结构力学求解器》作为新工具。



# 目 录

第1章 绪论 .....	1
§1-1 结构力学的学科内容和教学要求 .....	1
§1-2 结构的计算简图及简化要点 .....	4
§1-3 杆件结构的分类 .....	9
§1-4 荷载的分类 .....	10
§1-5 方法论(1)——学习方法 .....	11
第2章 结构的几何构造分析 .....	17
§2-1 几何构造分析的几个概念 .....	18
§2-2 平面几何不变体系的组成规律 .....	22
§2-3 平面杆件体系的计算自由度 .....	28
§2-4 空间杆件体系的几何构造分析 .....	32
§2-5 在求解器中输入平面结构体系 .....	36
§2-6 用求解器进行平面体系的几何构造分析 .....	42
§2-7 小结 .....	46
§2-8 思考与讨论 .....	48
习题 .....	50

## 第一部分 静定结构

第3章 静定结构的受力分析 .....	57
§3-1 梁的内力计算的回顾 .....	57
§3-2 静定多跨梁 .....	64
§3-3 静定平面刚架 .....	68
§3-4 静定空间刚架 .....	79
§3-5 静定平面桁架 .....	83
§3-6 静定空间桁架 .....	97
§3-7 组合结构 .....	103
§3-8 三铰拱 .....	108

§ 3-9	悬臂结构 .....	121
§ 3-10	用求解器确定截面单杆 .....	127
§ 3-11	用求解器求解组合结构 .....	131
§ 3-12	小结 .....	134
§ 3-13	思考与讨论 .....	135
习题	.....	137
<b>第4章</b>	<b>静定结构总论 .....</b>	<b>153</b>
§ 4-1	隔离体方法及其截取顺序的优选 .....	153
§ 4-2	几何构造分析与受力分析之间的对偶关系 .....	157
§ 4-3	零载法 .....	160
§ 4-4	刚体体系的虚功原理 .....	162
§ 4-5	静定结构的一般性质 .....	172
§ 4-6	各种结构型式的受力特点 .....	175
§ 4-7	用求解器求解一般静定结构 .....	178
§ 4-8	小结 .....	180
§ 4-9	思考与讨论 .....	181
习题	.....	182
<b>第5章</b>	<b>影响线 .....</b>	<b>186</b>
§ 5-1	移动荷载和影响线的概念 .....	186
§ 5-2	静力法作简支梁影响线 .....	188
§ 5-3	结点荷载作用下梁的影响线 .....	192
§ 5-4	静力法作桁架的影响线 .....	195
§ 5-5	机动法作影响线 .....	198
§ 5-6	影响线的应用 .....	203
§ 5-7	铁路、公路的标准荷载制和换算荷载 .....	212
§ 5-8	简支梁的包络图和绝对最大弯矩 .....	219
§ 5-9	用求解器计算结构的影响线 .....	223
§ 5-10	小结 .....	226
§ 5-11	思考与讨论 .....	227
习题	.....	228
<b>第6章</b>	<b>结构位移计算与虚功 - 能量法简述 .....</b>	<b>234</b>
§ 6-1	应用虚力原理求刚体体系的位移 .....	235
§ 6-2	结构位移计算的一般公式 .....	240
§ 6-3	荷载作用下的位移计算 .....	247
§ 6-4	荷载作用下的位移计算举例 .....	251

§ 6-5 图乘法 .....	257
§ 6-6 温度作用时的位移计算 .....	265
§ 6-7 用求解器进行位移计算 .....	267
§ 6-8 变形体的虚功原理 .....	269
§ 6-9 应变能与应变余能 .....	275
§ 6-10 能量偏导数定理 .....	283
§ 6-11 互等定理 .....	287
§ 6-12 位移影响线 .....	291
§ 6-13 方法论(2)——静定结构部分 .....	292
§ 6-14 小结 .....	297
§ 6-15 思考与讨论 .....	300
习题 .....	304

## 第二部分 超静定结构

第7章 力法 .....	315
§ 7-1 超静定结构的组成和超静定次数 .....	315
§ 7-2 力法的基本概念 .....	318
§ 7-3 超静定刚架和排架 .....	325
§ 7-4 超静定桁架和组合结构 .....	331
§ 7-5 对称结构的计算 .....	336
§ 7-6 两铰拱 .....	342
§ 7-7 无铰拱 .....	349
§ 7-8 由卡氏定理推致力法方程 .....	359
§ 7-9 支座移动和温度改变时的计算 .....	364
§ 7-10 超静定结构位移的计算 .....	372
§ 7-11 超静定结构计算的校核 .....	375
§ 7-12 用求解器进行力法计算 .....	378
§ 7-13 小结 .....	380
§ 7-14 思考与讨论 .....	381
习题 .....	384

第8章 位移法 .....	393
§ 8-1 位移法的基本概念 .....	393
§ 8-2 等截面杆件的刚度方程 .....	397
§ 8-3 无侧移刚架的计算 .....	404
§ 8-4 有侧移刚架的计算 .....	408

§8-5 位移法的基本体系 .....	417
§8-6 对称结构的计算 .....	422
§8-7 支座位移和温度改变时的计算 .....	427
§8-8 小结 .....	431
§8-9 思考与讨论 .....	432
习题 .....	435
<b>第9章 渐近法及超静定力的影响线</b> .....	<b>443</b>
§9-1 力矩分配法的基本概念 .....	443
§9-2 多结点的力矩分配 .....	450
§9-3 对称结构的计算 .....	458
§9-4 无剪力分配法 .....	461
§9-5 力矩分配法与位移法的联合应用 .....	469
§9-6 超静定力的影响线 .....	472
§9-7 连续梁的最不利荷载分布及内力包络图 .....	477
§9-8 用求解器求解一般的超静定结构 .....	481
§9-9 小结 .....	483
§9-10 思考与讨论 .....	484
习题 .....	486
附录 A 《结构力学求解器》(学生版)介绍 .....	494
附录 B 习题答案 .....	503
附录 C 索引 .....	515
主要参考书目 .....	520
主编简介 .....	521
编者简介 .....	523



# 第1章

## 绪论

---

§ 1-1 结构力学的学科内容和教学要求	§ 1-4 荷载的分类
§ 1-2 结构的计算简图及简化要点	§ 1-5 方法论(1)——学习方法
§ 1-3 杆件结构的分类	

---

### § 1-1 结构力学的学科内容和教学要求

#### 1. 结构

建筑物和工程设施中承受、传递荷载而起骨架作用的部分称为工程结构,简称为结构。房屋中的梁柱体系,水工建筑物中的闸门和水坝,公路和铁路上的桥梁和隧洞等,都是工程结构的典型例子。

从几何角度来看,结构可分为三类:

(1) 杆件结构——这类结构是由杆件所组成。杆件的几何特征是横截面尺寸要比长度小得多。梁、拱、桁架、刚架是杆件结构的典型形式。

(2) 板壳结构——这类结构也称为薄壁结构。它的厚度要比长度和宽度小得多。房屋中的楼板和壳体屋盖、水工结构中的拱坝都是板壳结构。

(3) 实体结构——这类结构的长、宽、厚三个尺度大小相仿。水工结构中的重力坝属于实体结构。

狭义的结构往往指的就是杆件结构,而通常所说的结构力学就是指杆件结构力学。

#### 2. 结构力学的研究对象

结构力学与理论力学、材料力学、弹塑性力学有密切的关系。理论力学着重讨论物体机械运动的基本规律,其余三门力学着重讨论结构及其构件的强度、刚度、稳定性和动力反应等问题,其中材料力学以单个杆件为主要研究对象,结构力学以杆件结构为主要研究对象,弹塑性力学以实体结构和

板壳结构为主要研究对象。

结构力学的任务是根据力学原理研究在外力和其他外界因素作用下结构的内力和变形,结构的强度、刚度、稳定性和动力反应,以及结构的组成规律。具体地说,包括以下几个方面:

- (1) 讨论结构的组成规律和合理形式,以及结构计算简图的合理选择。
- (2) 讨论结构内力和变形的计算方法,进行结构的强度和刚度的验算。
- (3) 讨论结构的稳定性以及在动力荷载作用下的结构反应。

结构力学问题的研究手段包含理论分析、实验研究和数值计算三个方面。实验研究方法的内容在实验力学和结构检验课程中讨论,理论分析和数值计算方面的内容在结构力学课程中讨论。

在结构分析中,首先把实际结构简化成计算模型,称为结构计算简图;然后再对计算简图进行计算。结构力学中介绍的计算方法是多种多样的,但所有各种方法都要考虑下列三方面的条件:

- (1) 力系的平衡条件或运动条件。
- (2) 变形的几何连续条件。
- (3) 应力与变形间的物理条件(或称为本构方程)。

结构力学的基本解法是直接运用上述三方面条件进行解算的,可称为“平衡-几何”解法。这些解法如果采用虚功和能量形式来表述,则称为“虚功-能量”解法。

电子计算机的出现,对结构力学学科产生了巨大的影响。过去由于缺乏现代化的计算手段,结构分析都是靠“手算”。现在情况不同了,过去无法解算的许多大型结构计算问题,现在已经成为“电算”中的常规问题。“电算”提高了结构力学解决问题的能力,同时也对结构力学提出了新的要求,即“电算”方法必须适应“电算”的特点。因此,一些与“电算”关系密切的内容,例如能量原理、结构矩阵分析、有限元法、半解析法、结构分析软件、结构优化设计等,已经在结构力学中占据愈来愈重要的地位,在结构力学学科领域里形成了一个新的分支学科——计算结构力学。这就是借助计算机采用数值方法解决结构力学问题的一个分支学科。

### 3. 课程教学中的能力培养

在《结构力学课程教学基本要求》中提出了关于分析能力、计算能力、自学能力和表达能力的培养要求。其要点如下:

#### (1) 分析能力

在结构力学课程中要培养多方面的分析能力,例如:

选择结构计算简图的能力——如何对实际结构进行“删繁就简”,确定其计算简图,这是进行结构力学计算的第一步。在结构力学课程中要初步

培养这方面的能力。

进行力系平衡分析和变形几何分析的能力——对结构的受力状态要进行平衡分析,对结构的变形和位移状态要进行几何分析。这两方面的分析能力是结构分析中的两个看家本领,要在反复运用中加以融会贯通,逐步提高,力求达到能正确、熟练、灵活运用水平。

选择计算方法的能力——结构力学中的计算方法很多,要了解各种方法的特点和最适用的场合,具有根据具体问题选择恰当计算方法的能力。

### (2) 计算能力

在结构力学课程中培养计算方面的能力包含三个方面:具有对各种结构进行计算或确定计算步骤的能力;具有对计算结果进行定量校核或定性判断的能力;初步具有使用结构计算程序的能力。在此三项中,计算能力是基础——不会计算,也就不会校核。不会手算,则电算是盲目的。校核和判断能力可以说比计算能力要更高一层——校核并不是重复计算一遍,面是要求用另一方法来核算。这里要求校核者能掌握多种算法并能灵活地运用。判断则要求能用简略的办法确定计算结果的合理范围,这里要求评判者通晓结构的力学性能和各种近似算法。使用计算程序的能力日益显得更加重要——不会电算就无法计算大型问题,也无法提高计算效率。

作题练习,是学习结构力学的重要环节。不作一定数量的习题,就很难对基本概念和方法有深入的理解,也很难培养较好的计算能力。但是,作题也要避免各种盲目性。

### (3) 自学能力

自学就是把别人的知识变成自己的。自学包含两个方面,一是消化已学的知识,二是摄取新的知识。如果把知识比作一个“笔记本”,也就是说,一是要由厚变薄,二是要由薄变厚。

消化,就是要将书本上的结论用自己的话来表述,把黑板上的论证按照自己的思路来整理,把分章分节学来的知识融成整体,把整章的丰富内容提炼概括成简短的几句话,在自己演算的习题本里穿插几行札记。总之,要把笔记本由厚变薄,把收集到的珍珠用线串起来,使知识得到升华,便于储存,便于驾驭。

摄取,就是逐步扩大自己的知识领域,把笔记本由薄变厚。摄取要有选择,扩大要围绕一个中心。首先要将中心内容扎扎实实地牢固掌握,把主要教科书精读钻研,然后有选择地阅读参考书籍和资料,这样,新知识才能在原来的知识结构上生根。

### (4) 表达能力

作业要整洁、清晰、严谨。

计算书要书写整洁,因为是要给人看的。书写整洁,与其说是一种能力,无宁说是一种习惯,一种郑重和负责任的习惯。

既要有形式上的整洁,更要有内容上的清晰。作题要步骤分明,思路清楚,图形简明,数据准确。

整洁和清晰,体现了一种严谨作风。科学是严谨的,从事科学的人要注意培养严谨作风。

## § 1-2 结构的计算简图及简化要点

实际结构是很复杂的,完全按照结构的实际情况进行力学分析是不可能的,也是不必要的。因此,对实际结构进行力学计算以前,必须加以简化,略去不重要的细节,显示其基本特点,用一个简化的图形来代替实际结构,这种图形称为结构的计算简图。

选择计算简图的原则是:

(1) 从实际出发——计算简图要反映实际结构的主要性能。

(2) 分清主次,略去细节——计算简图要便于计算。

计算简图的选择是力学计算的基础,极为重要。在下面几章讨论各种结构时,将说明从实际结构到计算简图的简化过程。在第12章里,还要对计算简图作补充讨论。

选取计算简图时,需要在多方面进行简化,下面简要地说明杆件结构计算简图的简化要点:

### 1. 结构体系的简化

一般结构实际上都是空间结构,各部分相互连接成为一个空间整体,以承受各个方向可能出现的荷载。但在多数情况下,常可以忽略一些次要的空间约束而将实际结构分解为平面结构,使计算得以简化。本教程主要讨论平面结构的计算问题。当然,也有一些结构具有明显的空间特征而不宜简化成平面结构,本教程也将涉及到这方面的内容。

### 2. 杆件的简化

杆件的截面尺寸(宽度、厚度)通常比杆件长度小得多,截面上的应力可根据截面的内力(弯矩、轴力、剪力)来确定。因此,在计算简图中,杆件用其轴线表示,杆件之间的连接区用结点表示,杆长用结点间的距离表示,而荷载的作用点也转移到轴线上。当截面尺寸增大时(例如超过长度的 $\frac{1}{4}$ ),杆件用其轴线表示的简化,将引起较大的误差。

### 3. 杆件间连接的简化

杆件间的连接区简化为结点。结点通常简化为以下两种理想情形:

(1) **铰结点** 被连接的杆件在连接处不能相对移动,但可相对转动,即可以传递力,但不能传递力矩。这种理想情况,实际上很难遇到。木屋架的结点比较接近于铰结点(图 1-1)。

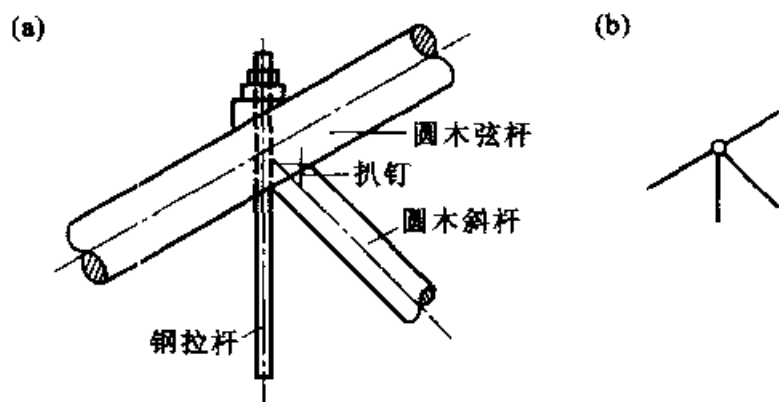


图 1-1

(2) **刚结点** 被连接的杆件在连接处既不能相对移动,又不能相对转动,即可以传递力,也可以传递力矩。现浇钢筋混凝土结点通常属于这类情形(图 1-2)。

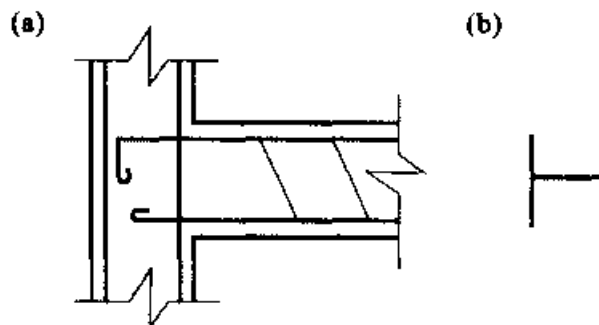


图 1-2

#### 4. 结构与基础间连接的简化

结构与基础的连接区简化为支座。按其受力特征,一般简化为以下四种情形:

(1) **滚轴支座** 被支承的部分可以转动和水平移动,不能竖向移动,所提供的反力只有竖向反力  $F_y$ 。在计算简图中用一根支杆表示(图 1-3)。

(2) **铰支座** 被支承的部分可以转动,不能移动,能提供两个反力  $F_x$ 、 $F_y$ 。在计算简图中用两根相交的支杆表示(图 1-4)。

(3) **定向支座** 被支承的部分不能转动,但可沿一个方向平行滑动,能

提供反力矩  $M$  和一个反力  $F_y$ 。在计算简图中用两根平行支杆表示(图 1-5)。

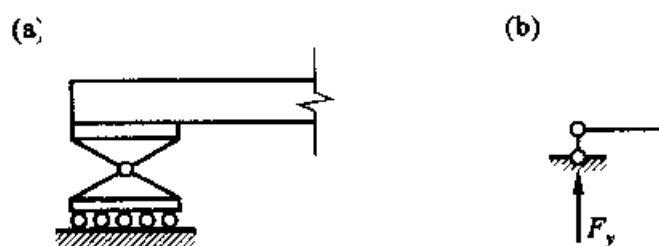


图 1-3

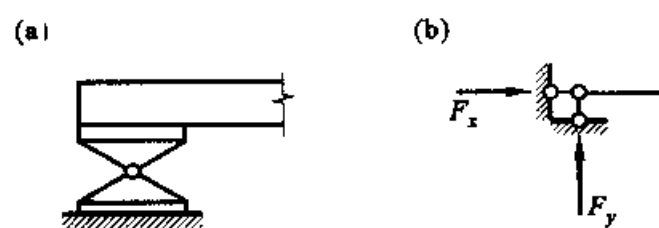


图 1-4

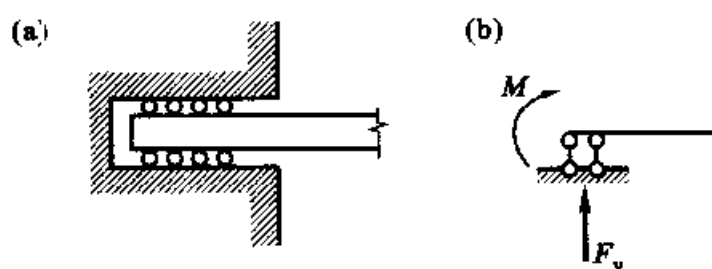


图 1-5

(4) 固定支座 被支承的部分完全被固定(图 1-6),能提供三个反力  $F_x$ 、 $F_y$ 、 $M$ 。在计算简图中可按图 1-6b 表示。

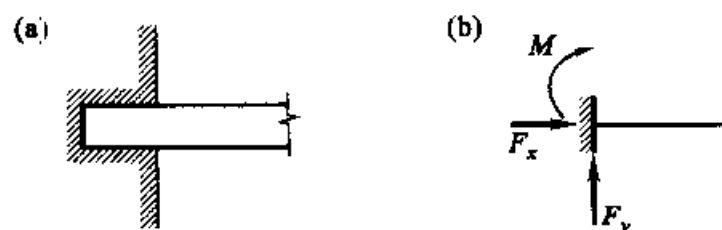


图 1-6

### 5. 材料性质的简化

在上木、水利工程中结构所用的建筑材料通常为钢、混凝土、砖、石、木料等。在结构计算中,为了简化,对组成各构件的材料一般都假设为连续的、均匀的、各向同性的、完全弹性或弹塑性的。

上述假设对于金属材料在一定受力范围内是符合实际情况的。对于混凝土、钢筋混凝土、砖、石等材料则带有一定程度的近似性。至于木材,因其顺纹与横纹方向的物理性质不同,故应用这些假设时须予注意。

### 6. 荷载的简化

结构承受的荷载可分为体积力和表面力两大类。体积力指的是结构的自重或惯性力等;表面力则是由其它物体通过接触面而传给结构的作用力,如土压力、车辆的轮压力等。在杆件结构中把杆件简化为轴线,因此不管是体积力还是表面力都可以简化为作用在杆件轴线上的力。荷载按其分布情况可简化为集中荷载和分布荷载。荷载的简化与确定比较复杂,下面还要专门讨论。

下面给出几个选取结构计算简图的例子。

(1) 图 1-7a 示一钢筋混凝土厂房结构,梁和柱都是预制的。柱子下端插入基础的杯口内,然后用细石混凝土填实。梁与柱的连接是通过将梁端和柱顶的预埋钢板进行焊接而实现的。在横向平面内柱与梁组成排架(图 1-7b)、各个排架之间,在梁上有屋面板连接,在柱的牛腿上有吊车梁连接。

计算上述的厂房结构时,可采用图 1-7c 所示的计算简图。

首先,厂房结构虽然是由许多排架用屋面板和吊车梁连接起来的空间结构,但各排架在纵向以一定的间距有规律地排列着。作用于厂房上的荷载,如恒载、雪载和风载等一般是沿纵向均匀分布的,通常可把这些荷载分配给每个排架,而将每一排架看作一个独立的体系,于是实际的空间结构便简化成平面结构(图 1-7b)。

其次,梁和柱都用它们的几何轴线来代表。由于梁和柱的截面尺寸比长度小得多,轴线都可近似地看作直线。

梁和柱的连接只依靠预埋钢板的焊接,梁端和柱顶之间虽不能发生相对移动,但仍有发生微小相对转动的可能,因此可取为铰结点。柱底和基础之间可以认为不能发生相对移动和相对转动,因此柱底可取为固定端。

(2) 图 1-8a 所示为水电站的高压水管,水管支承在一系列支托上,从整体看是一个连续梁。固定台很重,可看作梁的固定端,而支托可看作支杆。在水管自重和管内水重作用下,水管可按均布荷载作用下的连续梁来计算,计算简图如图 1-8b 所示。



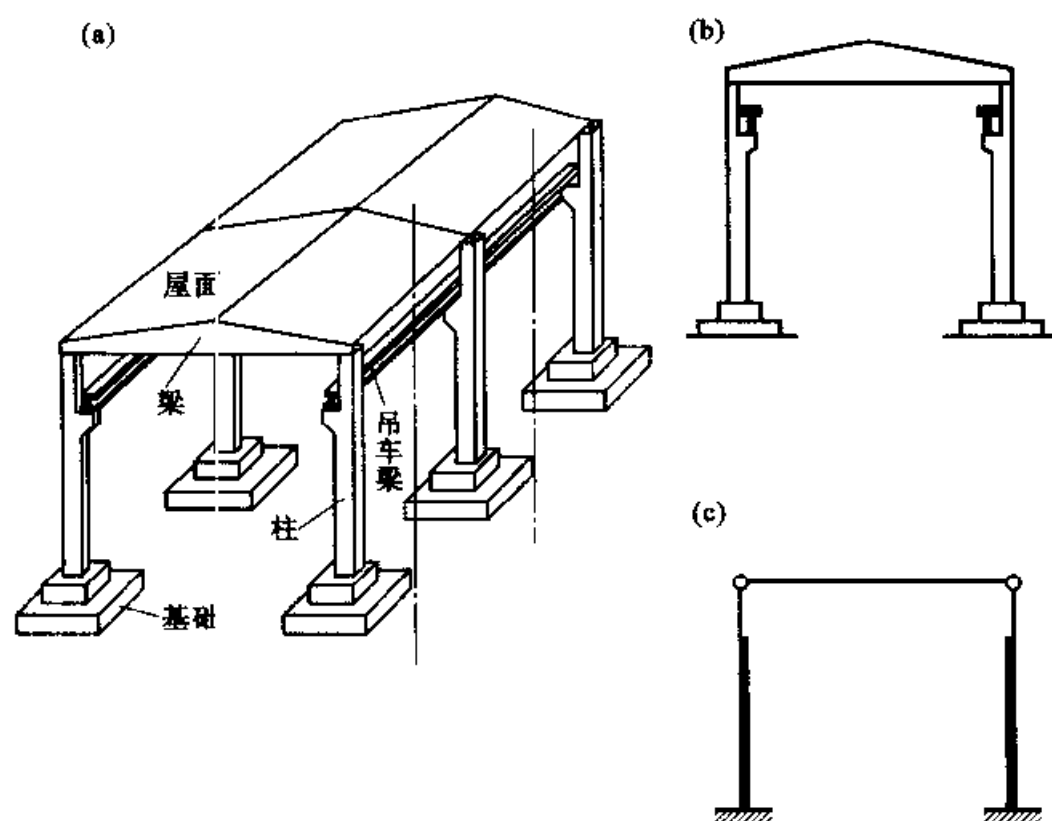


图 1-7

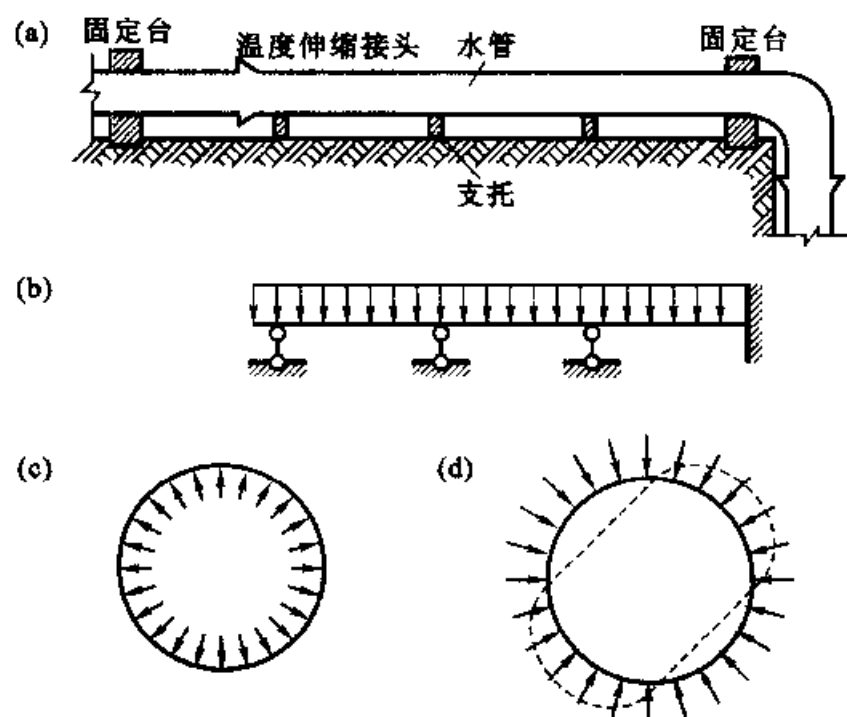


图 1-8

以上是计算水管纵向应力所取的计算简图。当计算环向应力时,由于水管很长,且每一截面所受的水压力也是一样的,因而可以截取一单位宽度的圆环进行计算,计算简图示于图 1-8c。当水管突然放空而形成真空时,由于外压的存在,有丧失稳定的可能,原先的圆环在失稳后变为椭圆形,故还须验算圆环在均匀外压作用下的稳定性(图 1-8d)。

### § 1-3 杆件结构的分类

结构的分类实际上是指结构计算简图的分类。

杆件结构通常可分为下列几类:

(1) 梁 梁(图 1-9a)是一种受弯构件,其轴线通常为直线。梁可以是单跨的或多跨的。

(2) 拱 拱(图 1-9b)的轴线为曲线,其力学特点是在竖向荷载作用下有水平支座反力(推力)。

(3) 桁架 桁架(图 1-9c)由直杆组成,所有结点都为铰结点。

(4) 刚架 刚架(图 1-9d)也是由直杆组成的,其结点通常为刚结点。

(5) 组合结构 组合结构(图 1-9e)是桁架和梁或刚架组合在一起形成的结构,其中含有组合结点。

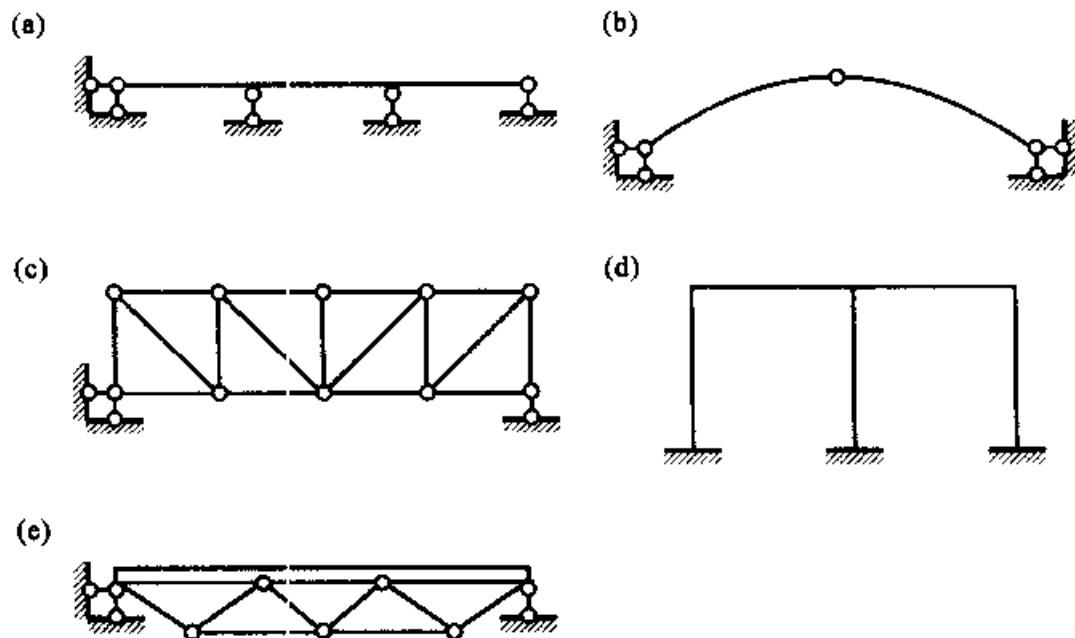


图 1-9

杆件结构可分为平面结构和空间结构两类。在平面结构中,各杆的轴线和外力的作用线都在同一平面内,如图 1-10 所示为一平面结构的桁架。

空间结构则不能满足上述条件,图 1-11 所示为一空间刚架,各杆的轴线不在同一平面内。大多数结构在设计中通常是按平面结构进行计算的。在有些情况下,必须考虑结构的空間作用。

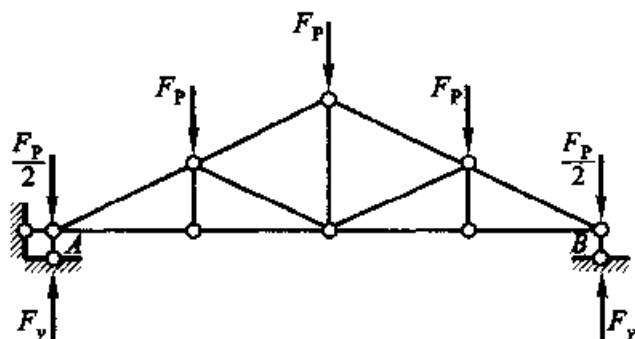


图 1-10

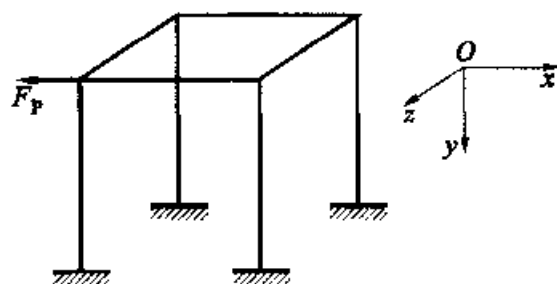


图 1-11

除上述分类外,按计算特性,结构又可分为静定结构和超静定结构。如果结构的杆件内力(包括反力)可由平衡条件唯一确定,则此结构称为静定结构。如果杆件内力由平衡条件还不能唯一确定,而必须同时考虑变形条件才能唯一确定,则此结构称为超静定结构。

## § 1-4 荷载的分类

荷载是主动作用于结构的外力,例如结构的自重,加于结构的水压力和土压力。除外力以外,还有其他因素可以使结构产生内力或变形,如温度变化、基础沉陷、材料收缩等。从广义上来说,这些因素也可以称为荷载。

对结构进行计算以前,须先确定结构所受的荷载。荷载的确定是结构设计中极为重要的工作。荷载如估计过大,则设计的结构会过于笨重,造成浪费;荷载如估计过低,则设计的结构将不够安全。确定荷载需要周密的考虑和谨慎的工作。

荷载可以根据不同特征进行分类:

根据荷载作用时间的久暂,可以分为恒载和活载两类。恒载是长期作用在结构上的不变荷载,如结构的自重或土压力。活载是在建筑物施工和使用期间可能存在的可变荷载,如楼面荷载、屋面荷载、吊车荷载、雪载和风载等。

对结构进行计算时,恒载和大部分活载(如雪载、风载)在结构上作用的位置可以认为是固定的,这种荷载称为固定荷载。有些活载如吊车梁上的吊车荷载、公路桥梁上的汽车荷载,在结构上的位置是移动的,这种荷载称为移动荷载。

根据荷载作用的性质,可以分为静力荷载和动力荷载两类。静力荷载的数量、方向和位置不随时间变化或变化极为缓慢,不使结构产生显著的加速度,因而惯性力的影响可以忽略。动力荷载是随时间迅速变化或在短暂时段内突然作用或消失的荷载,使结构产生显著的加速度,因而惯性力的影响不能忽略。结构的自重和其他恒载是静力荷载。动力机械运转时产生的荷载或冲击波的压力是动力荷载的例子。车辆荷载、风载和地震荷载通常在设计中简化为静力荷载,但在特殊情况下要按动力荷载考虑。

荷载的确定,常常是比较复杂的。荷载规范总结了设计经验和科学研究的成果,供设计时应用。但在不少情况下,设计者需要深入现场,结合实际情况进行调查研究,才能对荷载作出合理的确定。

## \* § 1-5 方法论(1)——学习方法

学习要讲究方法。要学会,更要会学。

关于学习方法,首先想起的是华罗庚院士的形象比喻:由薄到厚,再由厚到薄。

由薄到厚是指知识的摄取和积累过程,是加法。由厚到薄是指知识的提炼和升华过程,是减法。在学习中,要会加会减,减法似乎比加法更难、更重要。

在学习中,还要会问、会用、注意创新。作学问,要既学又问,问是学习的一把钥匙。学和用要结合,在学中用,在用中学,用是学的继续、检验和深化。在学习中要有创新意识,有所创新。

下面对加、减、问、用和创新五个方面展开些议论。主要是在结构力学教学和科研过程中产生的一些想法。

### 1. 会加

#### (1) 勤于积累

摄取和积累知识是培养能力的基础,也是研究创新的基础。

“才须学也。非学无以广才,非志无以成学”(诸葛亮)。要有集腋成裘,积土成山的志趣。

### (2) 融会贯通

要把知识点连成一片,互相沟通,左右联系,前后呼应,融会贯通。在数学语言和力学语言之间要会翻译:把抽象的数学公式翻译成具体生动的物理概念;把直观的力学思路翻译成严密的数学程序。

### (3) 用心梳理

积累的知识要用心梳理,使之条理化,成为一个脉络清晰、有主有次、有目有纲的知识网。这样才便于储存,便于提取,便于驾驭。

### (4) 落地生根

把别人的、书本上的知识变成自己的,化他为己,这样的知识才是牢靠的,生了根的。牛吃草,变成奶,也就是化他为己。把新学来的知识融化在自己已有的知识结构上,把“故”作为“新”的基地,使“新”在“故”上生根发芽成长。

关于知识的摄取和积累,有各式各样的理解和比喻:

把摘来的核桃装在麻袋里。

把采集的草药放在一排排药屉里。

把拾来的珍珠穿成项链。

把点和站编制成能放能收的网。

上述几种说法,在理解上有深浅之分,在比喻上有表里之别。

## 2. 会减

### (1) 概括的能力

把一章内容概括成三言两语,对一门课理出它的主要脉络,写人能勾出特征,画龙会点睛。

会概括,会减法,是值得炫耀的。“我用十句话说清楚了人家一本书的内容以及人家一本书没有说清的内容”(尼采)。

会健忘才会真不忘。“一种健康的健忘,千头万绪简化为二三事,留在记忆里,节省了不少心力”(钱钟书)。

### (2) 简化的能力

盲目简化——不分主次,乱剪乱砍。

合理简化——分清主次,剪枝留干。

选取结构计算简图是结构力学的基本功。不会简略估算、定性判断,是很危险的。

郑板桥曾写道,删繁就简三秋树……,树也会简化。会简化,才会过冬,

才会立于不败之地。

### (3) 统帅驾驭的能力

学习积累的知识,要形成一个知识系统,要培养提纲挈领,统帅全局的能力,达到纲举目张,灵活驾驭的目的。

一本书中有许多章、许多节、许多知识点,这些都是“目”。要能够抓住指导全书的基本思路,统帅全书的核心策略,贯穿全书的那根主线,这就是“纲”。举一纲而万目张。目的特点是多、繁、散,纲的特点是少、精、帅。多、繁、散,是砂与金的混杂。少、精、帅,是吹尽黄沙始见金,举帅旗而全军听指挥。

多、繁、散,有点抓不住。少、精、帅就好抓了,抓得牢了。抓住少、精、帅,才能带动多、繁、散;以少带多,以精领繁,以帅驭散。

能多更能少。能平铺细说,更能一语道破。

能繁更能精。能旁征博引,更能直指要害。

能放更能收。放得开,收得拢。铺得宽,提得起。

能进更能出。进得去,出得来,还能深入浅出。

### (4) 弃形取神的能力

“余画小鸡二十年,十年能得形似,十年能得神似。”(齐白石)画家讲形似,更推崇神似。讲究弃形取神。

在力学学习和科学研究中同样要培养由表入里,弃形取神的能力:

个别到一般。舍弃千差万别的个性和特殊性,摘取其中的共性和普遍性。

具体到抽象。舍弃不同问题的具体性,提炼为一般原理的抽象性。

现象到规律。舍弃现象的表面形态,洞察出深藏的本质和内在的规律。

温故到创新。拆除旧观念的篱笆,标新立异,另辟新路,开拓新途径和新领域。

## 3. 会问

### (1) 多问出智慧

学习中要多问,多打几个问号。“?”像一把钥匙,一把开启心扉和科学迷宫的钥匙。

### (2) 要会问

学习中提不出问题是学习中最大的问题。从学生提出的问题可以了解他学习的深浅。发现了问题是好事,抓住了隐藏的问题是学习深化的表现。

知感才能解感。学习和研究就是困惑和解感的过程。善于提出问题是解决问题的重要一步。正确敏锐地提出科学问题,是创新的开端。希耳伯特(D. Hilbert)1900年向数学界提出了23个有待解决的问题(称为 Hilbert

问题),一百年来吸引了无数数学家的目光,为数学学科开疆辟土,缔造了20世纪数学的辉煌。

### (3) 要追问

重要的问题要抓住不放,要层层剥笋,穷追紧逼,把深藏的核心问题解决了,才能达到“柳暗花明”的境界。这就是提问中的减法。溯河到源,剥笋至心。追到核心处,豁然得贯通。

### (4) 要问自己

问老师、问别人,更要问自己。

好老师注意启发性,引导思考,为学生留出思考的空间。学习时更要勤于思考,善于思考,为自己开辟思考的空间。

## 4. 会用

学而时习之(论语) 学习=学+习。

什么是“习”,通常把“习”理解为复习;更准确些,应把“习”理解为用,理解为实践。练习、实习、演习、习题、习作等等都是“习”,也就是用:应用和实践。

“用”是“学”的继续、深化和检验。与“学”相比,“用”有更丰富的内涵。

多面性:把知识应用于解决各式各样的问题,把单面的知识化为多面的知识。

综合性:处理问题时,要综合应用多种方法和知识。分门别类地学,综合优选地用。

反思性:正面学,反面用。计算时由因到果,校核时由果到因。

跳跃性:循规蹈矩地学,跳跃式地用。

灵活性:初学未用的知识往往是呆板的,多方应用过的知识就变活了,用能生巧。

牢固性:反复应用过的知识是牢固的,经久难忘。

悟性:学习可以获得言传的知识,应用可以体验难以言传的悟性。

检验性:学来的知识是真懂、半懂还是不懂,考几道题就分辨出来了。

“理论是灰色的,生命之树常青。”这句话也可以用来比喻学和用的区别。

针对涉及工程计算的一些学科的情况,还要对“习题”和“校核”两个具体问题作些议论。

### (1) 习题

作题练习,是学习工程计算学科的重要环节。不作一定数量的习题,就很难对基本概念和方法有深入的理解,也很难培养较好的计算能力。但是作题也要避免各种盲目性。举例如下:

不看书,不复习,埋头作题,这是一种盲目性。应当在理解的基础上作题,通过作题来巩固和加深理解。

贪多求快,不求甚解,这是另一种盲目性。有的习题要精作。1道题用3种方法作,往往比用1种方法作3道题更有收获。

只会对答数,不会自己校核和判断,这也是一种盲目性。要养成校核习惯,学会自行校核的本领。在实际工作中,计算人员要对自己交出来的计算结果负责。这种负责精神应当及早培养。

做错了题不改正,不会从中吸取教训,这又是一种盲目性。做错了题不改正,就是轻率地扔掉了一个良好的学习机会。特别不要放过一个似是而非的模糊概念,因为认识真理的主要障碍不是明显的谬误,而是似是而非的“真理”。错了,也要错个明白。

## (2) 校核

计算的结果要经过校核。“校核”是“计算”中应有之义。没有校核过的计算书是未完成的计算书。

出错是难免的。重要的是要会判断、抓错和改错。判断是对计算结果的真伪性和合理性作出鉴定。抓错是分析错误根源,指明错在何处,“鬼”在哪里。把“鬼”抓出来。改错是提出改正对策,得出正确结果。改错不易,判断、抓错更难。

关于判断和校核,还可分为三个层次:细校,粗算和定性。

另法细校:细校是指详细的定量的校核。细校不是重算一遍,而是提倡用另外的方法来核算。这就要求校核者了解多种方法,掌握十八般武器,并能灵活地运用,选用最优的方法。

毛估粗算:粗算是指采用简略的算法对计算结果进行毛估,确定其合理范围。这就要求粗算者能分清主次,抓大放小,对大事不糊涂。毛估粗算有多种做法:选取简化计算模型,在公式中忽略次要的项,检查典型特例,考虑问题的极限情况等等。

定性判断:定性判断是根据基本概念来判断结果的合理性,而不进行定量计算。试举力学中常用的几个例子:

采用量纲分析,判断所列方程是否有误。

根据物理概念,看答案的数量级和正负号是否对头。

根据误差理论,估计误差的范围。

根据互等定理,看计算结果是否合理。

根据上下限定理,看计算结果是否出格。

在渐近法和迭代法中,判断结果是否收敛。

在对称结构中,检查结果的对称性。



当参数变化时,看结果的相应变化是否合理。

在近似算法中,判断所得结果是偏于安全还是偏于不安全,并采用“前者宽,后者严”的不同标准。

不细算而能断是非,断案如神,既快又准,这是总工程师应具备的看家本领,也是每个工程师和有心人应及早学会的本领。这个“神”不是来自天上,而是来源于扎实的理论 and 积累的经验。

计算机引入结构力学后,增强了我们进行大型计算,分析大型结构的能力。在大型计算中,如果不会定性判断,不会抓错、改错,那是很危险的。计算机并不排斥力学理论,而是要求我们更深更活地掌握力学理论。

### 5. 创新

科学精神的精髓是求实创新。

创新:推陈出新,破旧立新,有推有出,有破有立。

创新并不神秘。把知识向前推进一步,向更广、更深、更精、更神的方向迈进一步,都是创新的一步。

创新意识要贯穿在整个学习过程中,在加、减、问、用各个方面都要着眼于创新,有心于创新。

加:在继承中创新。每项创新成果都吸取了前人的成果。像牛顿那样站在巨人肩上才能看得更远。广采厚积是创新的基础。

减:在“去粗取精,弃形取神”的减法过程中要注意“去”和“弃”。在“推陈出新、破旧立新”的创新过程中要注意“推”和“破”。二者是相通的。

问:在已有知识中发现疑点,感到困惑,是走向解惑和创新的起点。创新是善问巧思的回报。

用:在应用和实践中对已有知识进行检验,发现其中的不足而加以改进,这就是创新。实践为创新提供了机遇。

创新不能违反客观规律。在求实中创新,“出新意于法度之中”(苏轼)。在客观规律的容许之下,创造力有充分的自由活动空间。

### 后语

把上面的议论梳理一下,归结为五句话:

加……广采厚积,织网生根。

减……去粗取精,弃形取神。

问……知惑解惑,开启迷宫。

用……实践检验,多用巧生。

创新……觅真理立巨人肩上,出新意于法度之中。

## 第2章

# 结构的几何构造分析

§ 2-1 几何构造分析的几个概念	§ 2-6 用求解器进行平面体系的几何构造分析
§ 2-2 平面几何不变体系的组成规律	
§ 2-3 平面杆件体系的计算自由度	§ 2-7 小结
§ 2-4 空间杆件体系的几何构造分析	§ 2-8 思考与讨论
§ 2-5 在求解器中输入平面结构体系	习题

本章从几何构造的角度来讨论结构。

一个结构要能够承受各种可能的荷载,首先它的几何构造应当合理,它本身应是几何稳固的,要能够使其几何形状保持不变。反之,如果一个杆件体系本身为几何不稳固,不能使其几何形状保持不变,则它是不能承受任意荷载的。因此,从几何构造的角度看,一个结构应是一个几何形状不变的体系,简称几何不变体系。

进行结构的几何构造分析的一个目的,就是把杆件结构看成一个杆件体系,检查它是不是一个几何不变体系。为此,需要研究几何不变体系的组成规律。

结构的几何构造分析,首先结合平面杆件体系作较详细的讨论,然后简略地讨论空间杆件体系的情况。

在平面体系的几何构造分析中,最基本的规律是三角形规律。规律本身是简单浅显的,但规律的运用则变化无穷。因此,学习本章时遇到的困难不在于学懂,而在于运用。

本章在全书中只是一个短小的前奏,只是从几何构造的角度讨论结构力学中的一个侧面,根本不牵涉到内力和应变。但是构造分析与内力分析之间又是密切相关的,本章内容将在后面许多章节中得到应用。

## § 2-1 几何构造分析的几个概念

### 1. 几何不变体系和几何可变体系

图 2-1a 所示为由两根竖杆和一根横杆绑扎组成的平面支架。结点 A 和 B 可取为铰结点；假定竖杆在地基内埋得很浅，支点 C 和 D 可取为铰支座。显然，这个支架是几何不稳固的，容易倾倒，如图中虚线所示。如果加上一根斜撑 AD，就得到图 2-1b 所示的支架，这个支架是一个几何稳固的平面体系。

结构受荷或作用时，截面上产生应力，材料因而产生应变，结构发生变形。这种变形一般是微小的。在几何构造分析中，不考虑这种由于材料的应变所产生的变形。这样，杆件体系可以分为两类：

几何不变体系 (图 2-1b)——在不考虑材料应变的条件下，体系的位置和形状是不能改变的；

几何可变体系 (图 2-1a)——在不考虑材料应变的条件下，体系的位置和形状是可以改变的。

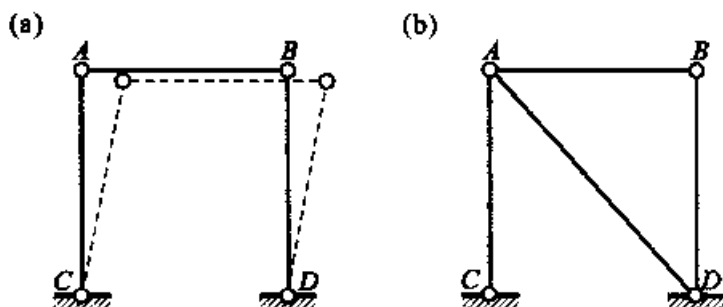


图 2-1

一般结构都必须几何不变体系，而不能采用几何可变体系。几何构造分析的一个主要目的就是要检查并设法保证结构的几何不变性。

### 2. 自由度

图 2-2 所示为平面内一点 A 的运动情况。一点在平面内可以沿水平方向 ( $x$  轴方向) 移动，又可以沿竖直方向 ( $y$  轴方向) 移动。换句话说，平面内一点有两种独立运动方式 (两个坐标  $x$ 、 $y$  可以独立地改变)。因此，一点在平面内有两个自由度。

图 2-3 所示为平面内一个刚片 (即平面刚体) 由原来的位置 AB 改变到后来的位置 A'B'。这个刚片可以有  $x$  轴方向的移动  $\Delta x$ ， $y$  轴方向的移动  $\Delta y$ ，还可以有转动  $\Delta \theta$ 。由于一个刚片在平面内有三种独立的运动方式 (三

个坐标  $x$ 、 $y$ 、 $\theta$  可以独立地改变), 因此一个刚片在平面内有三个自由度。

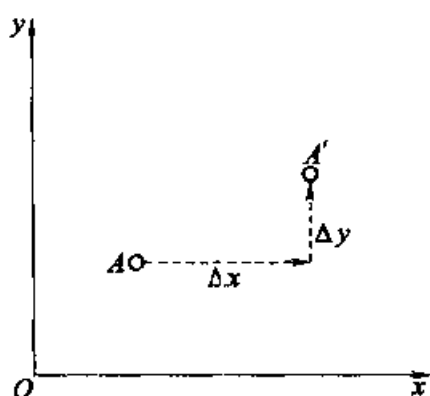


图 2-2

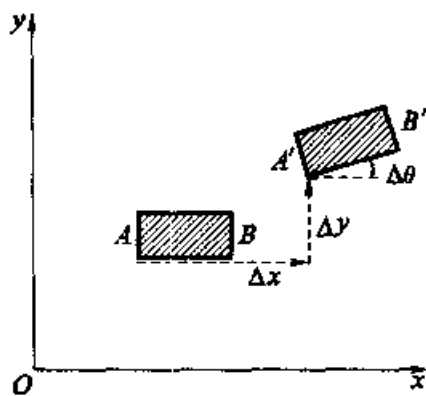


图 2-3

一般说来, 如果一个体系有  $n$  个独立的运动方式, 则这个体系有  $n$  个自由度。换句话说, 一个体系的自由度, 等于这个体系运动时可以独立改变的坐标的数目。

普通机械中使用的机构有一个自由度, 即只有一种运动方式。一般工程结构都是几何不变体系, 其自由度为零。凡是自由度大于零的体系都是几何可变体系。

### 3. 约束

在图 2-4a 中, 梁 AB 用支杆 AC 与基础相连。没有支杆时, 这个梁在平面内有三个自由度。加上支杆 AC 以后, 梁 AB 只有两种运动方式: A 点沿以 C 为圆心、以 AC 为半径画的圆弧移动; 梁绕 A 点转动。由此可见, 支杆 AC 使梁的自由度由 3 减为 2, 即支杆使梁的自由度减少一个。因此, 一个支杆相当于一个约束。

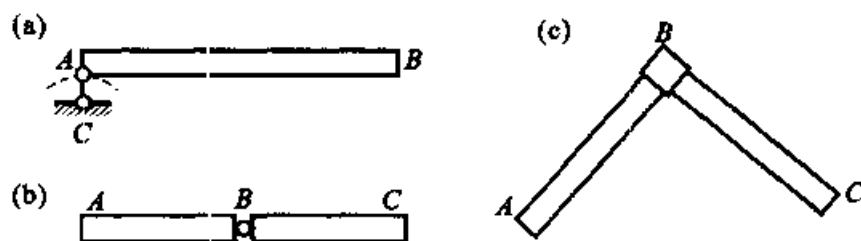


图 2-4

在图 2-4b 中, 两个梁 AB 和 BC 用铰 B 连接在一起。两个孤立的梁在平面内共有 6 个自由度。用铰连接以后, 自由度便减为 4; 因为用三个坐标便可以确定梁 AB 的位置, 然后梁 BC 只能绕 B 点转动, 只需再用一个转角就可以确定梁 BC 的位置。由此可见, 一个连接两个物体的铰使自由度减少两个, 所以一个铰相当于两个约束。

图 2-4c 所示为两根杆件  $AB$  和  $BC$  在  $B$  点连接成一个整体, 其中的结点  $B$  为刚结点。原来的两根杆件在平面内共有六个自由度, 刚性连接成整体后, 只有三个自由度, 所以一个刚性结合相当于三个约束。

#### 4. 多余约束

如果在一个体系中增加一个约束, 而体系的自由度并不因而减少, 则此约束称为多余约束。

例如, 平面内一个自由点  $A$  原来有两个自由度。如果用两根不共线的链杆 1 和 2 把  $A$  点与基础相连(图 2-5a), 则  $A$  点即被固定, 因此减少两个自由度, 可见链杆 1 或 2 都是非多余约束。

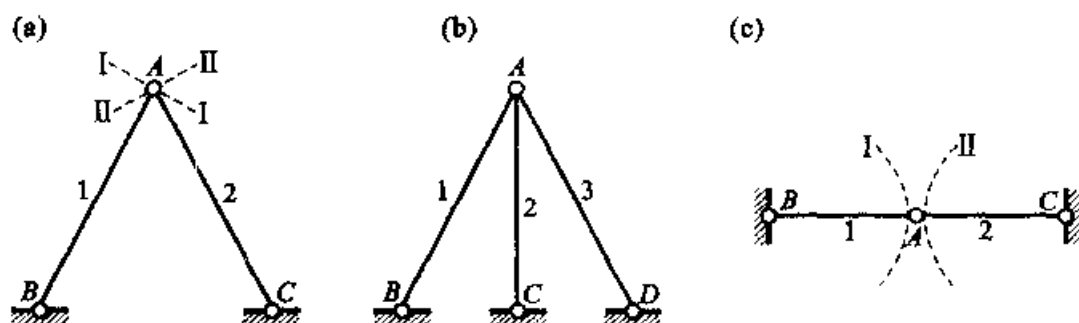


图 2-5

如果用三根不共线的链杆把  $A$  点与基础相连(图 2-5b), 实际上仍只减少两个自由度。因此, 这三根链杆中只有两根是非多余约束, 而有一根是多余约束(可把三根链杆中的任何一根视为多余约束)。

由上述可知, 一个体系中如果有多个约束存在, 那末, 应当分清楚: 哪些约束是多余的, 哪些约束是非多余的。只有非多余约束才对体系的自由度有影响, 而多余约束则对体系的自由度没有影响。

#### 5. 瞬变体系

如图 2-5a 所示, 用两根不共线的链杆可以把平面上的  $A$  点完全固定起来。但是, 要特别注意图 2-5c 所示两根链杆彼此共线的情况。这种体系具有如下一些特点:

第一, 从微小运动的角度来看, 这是一个可变体系。为了说明这个特点, 可将图 2-5a 与 c 中的体系作如下的对比。首先设想在  $A$  点把链杆 1 与 2 分开, 这时, 链杆 1 上的  $A$  点可绕  $B$  点沿圆弧 I 运动, 链杆 2 上的  $A$  点可绕  $C$  点沿圆弧 II 运动。然后再将两个链杆在  $A$  点铰结在一起。在图 2-5c 中, 由于两个圆弧在  $A$  点相切, 故  $A$  点仍可沿公切线方向作微小的运动。与此相反, 在图 2-5a 中, 由于两个圆弧在  $A$  点不是相切而是相交, 因此  $A$  点既不能沿圆弧 I 运动, 也不能沿圆弧 II 运动, 这样,  $A$  点就被完全固

定了。

第二,在图 2-5c 中,当 A 点沿公切线发生微小位移以后,两根链杆就不再彼此共线,因而体系就不再是可变体系。这种本来是几何可变、经微小位移后又成为几何不变的体系可称为瞬变体系。瞬变体系是可变体系的一种特殊情况。为了明确起见,可变体系还可进一步分为瞬变体系和常变体系两种情况。如果一个几何可变体系可以发生大位移,则称为常变体系,图 2-1a 为常变体系的例子。

第三,在图 2-5c 中,自由点 A 在平面内有两个自由度,增加两根共线链杆 1 和 2 把 A 点与基础相连接以后, A 点仍然具有一个自由度。可见在链杆 1 和 2 这两个约束中有一个是多余约束。一般说来,在任一瞬变体系中必然存在有多余约束。

### 6. 瞬铰

如图 2-6a 所示刚片 I 在平面内本来有三个自由度,如果用两根不平行的链杆 1 和 2 把它与基础相连接,则此体系仍有一个自由度。现在对它的运动特点加以分析。由于链杆的约束作用, A 点的微小位移应与链杆 1 垂直, C 点的微小位移应与链杆 2 垂直。以 O 表示两根链杆轴线的交点。显然,刚片 I 可以发生以 O 为中心的微小转动, O 点称为瞬时转动中心。这时,刚片 I 的瞬时运动情况与刚片 I 在 O 点用铰与基础相连接时的运动情况完全相同。因此,从瞬时微小运动来看,两根链杆所起的约束作用相当于在链杆交点处的一个铰所起的约束作用。这个铰可称为瞬铰。显然,在体系运动的过程中,与两根链杆相应的瞬铰位置也在改变。

用瞬铰替换对应的两个链杆约束,这种约束的等效变换只适用于瞬时微小运动。

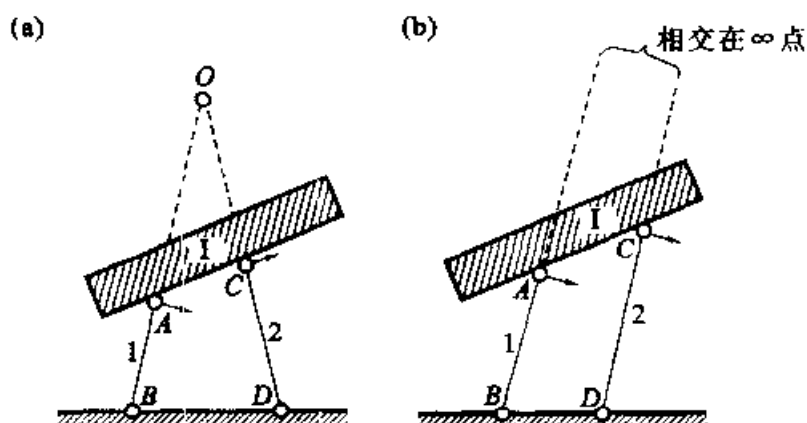


图 2-6

### 7. 无穷远处的瞬铰

如果用两根平行的链杆 1 和 2 把刚片 I 与基础相连接(图 2-6b), 则两根链杆的交点在无穷远处。因此, 两根链杆所起的约束作用相当于无穷远处的瞬铰所起的约束作用。由于瞬铰在无穷远处, 因此绕瞬铰的微小转动就退化为平动, 即沿两根链杆的正交方向产生平动(在图 2-6b 中, A 点和 C 点的微小位移都垂直于两根链杆)。

在几何构造分析中应用无穷远处瞬铰的概念时, 可以采用射影几何中关于 $\infty$ 点和 $\infty$ 线的下列四点结论:

- (1) 每个方向有一个 $\infty$ 点(即该方向各平行线的交点)。
- (2) 不同方向有不同的 $\infty$ 点。
- (3) 各 $\infty$ 点都在同一直线上, 此直线称为 $\infty$ 线。
- (4) 各有限点都不在 $\infty$ 线上。

关于上述四点结论的合理性, 可结合几何构造分析的实例加以检验。

## §2-2 平面几何不变体系的组成规律

本节讨论几何构造分析中的主要课题——无多余约束的几何不变体系的组成规律。这里只讨论平面杆件体系最基本的组成规律。(以后在 §2-6 和 §4-3 中还要讨论复杂体系的几何构造分析问题。)

### 1. 一个点与一个刚片之间的联结方式

一个点与一个刚片(或基础)之间应当怎样联结才能组成既无多余约束又是几何不变的整体呢? 图 2-5a 中的联结方式符合上述要求, 而图 2-5b 和 c 中的连接方式则不符合(图 2-5b 中有多余约束, 图 2-5c 为几何可变)。由此可得下述规律(参看图 2-7a):

**规律 1** 一个刚片与一个点用两根链杆相连, 且三个铰不在一直线上, 则组成几何不变的整体, 并且没有多余约束。

### 2. 两个刚片之间的联结方式

在图 2-7a 中, 如果把链杆 AB 看作刚片 II, 则得到图 2-7b 所示的体系, 它表示两个刚片 I 与 II 之间的联结方式。这样, 由规律 1 可得到下述规律:

**规律 2** 两个刚片用一个铰和一根链杆相联结, 且三个铰不在一直线上, 则组成几何不变的整体, 并且没有多余约束。

### 3. 三个刚片之间的联结方式

在图 2-7b 中, 如果再把链杆 AC 看作刚片 III, 则得到图 2-7c 所示的体系, 它表示三个刚片 I、II、III 之间的联结方式。这样, 由规律 2 可得到下

述规律:

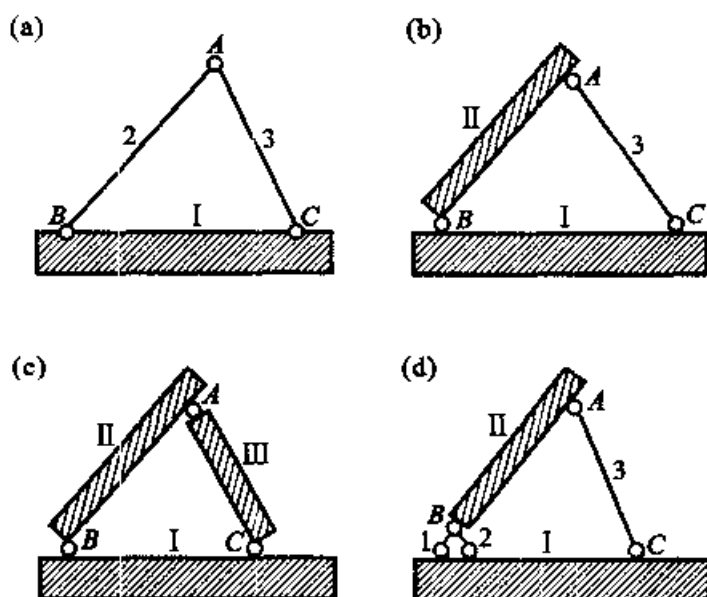


图 2-7

**规律 3** 三个刚片用三个铰两两相连,且三个铰不在一直线上,则组成几何不变的整体,并且没有多余约束。

上述三条规律虽然表述方式不同,但实际上可归纳为一个基本规律:如果三个铰不共线,则一个铰结三角形的形状是不变的,并且没有多余约束。这个基本规律可称为三角形规律。

在上述三条规律中,如果把图 2-7a、b、c 中的刚片 I 看作基础,则规律 1 说明一个点的固定方式,规律 2 说明一个刚片的固定方式,规律 3 说明两个刚片的固定方式。

前已指出,两根链杆的约束作用相当于一个瞬铰的约束作用。因此,三角形规律中的每一个铰,都可用相应的两根链杆来替换。这样,三角形规律还可用别的方式来表述。举例来说,如果把图 2-7b 中的铰 B 换成两根链杆 1 和 2,即得到图 2-7d 所示的体系(链杆 1 与 2 相交于 B 点)。这样,由规律 2 可得到下述规律:

**规律 4** 两个刚片用三根链杆相连,且三链杆不交于同一点,则组成几何不变的整体,并且没有多余约束。

注意,规律 4 中提到“三链杆不交于一点”,规律 2 中提到“三铰不在一直线上”,这两种提法实际上表示同一个条件。由图 2-7d 看出,如果三根链杆 1、2、3 不交于一点,则链杆 3 必不通过 1 与 2 的交点 B,因而三个铰 A、B、C 即不在一条直线上。因此,“三链杆不共点”与“三铰不共线”是完全等效的。



图2-8所示的体系不符合“三链杆不共点”的条件,它们都是瞬变体系。在图2-8a中,三链杆相交于同一点 $O$ ,刚片Ⅱ相对于基础Ⅰ可以绕 $O$ 点作瞬时转动。在图2-8b中,三链杆彼此平行(即相交于无限远的一点),刚片Ⅱ相对于基础Ⅰ可以在垂直链杆的方向作瞬时移动(即绕无限远的一点作瞬时转动)。

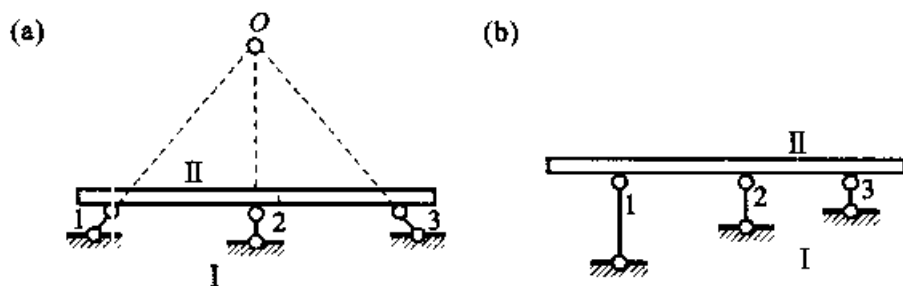


图 2-8

以上是平面杆件体系最基本的组成规律。虽然一共列了四条,但主要的是两点:三角形规律和瞬铰概念。

上述四种基本组成规律也可归结为三种基本装配格式:

(1) 固定一个结点的装配格式——在图2-7a中,用不共线的两根链杆2和3将结点A固定在基本刚片Ⅰ上,此格式简称为简单装配格式。

(2) 固定一个刚片的装配格式——在图2-7b、d中,用不共线的铰B和链杆3,或用不共点的三个链杆1、2、3将一个刚片Ⅱ固定在基本刚片Ⅰ上,此格式简称为联合装配格式。

(3) 固定两个刚片的装配格式——在图2-7c中,用不共线的三个铰A、B、C将两个刚片Ⅱ、Ⅲ固定在基本刚片Ⅰ上,此格式简称为复合装配格式。

多次应用上述基本组成规律或基本装配格式,可以组成各式各样的几何不变且无多余约束的体系。

装配的过程通常有两种:

(1) 从基础出发进行装配——先取基础作为基本刚片,将周围某个部件(一个结点,一个刚片或两个刚片)按照基本装配格式固定在基本刚片上,形成一个扩大的基本刚片。然后,由近及远地、由小到大地、逐个地按照基本装配格式进行装配,直至形成整个体系。图2-9是这种装配方式的例子。

图2-9a所示体系是从基础出发,多次应用简单装配格式所组成的,即用五对链杆(1,2)、(3,4)、(5,6)、(7,8)、(9,10)依次固定结点A、B、C、D、E,其中每一对链杆都不共线。因此,整个体系为无多余约束的几何不变体系。

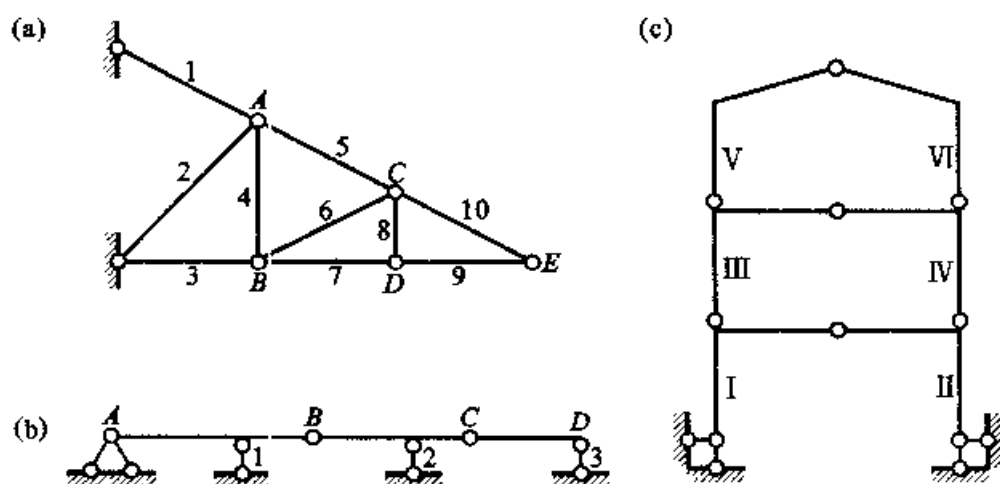


图 2-9

图 2-9b 所示体系是从基础出发,多次应用联合装配格式所组成的。组成的次序是先用铰  $A$  和链杆 1 将  $AB$  梁固定于基础,形成扩大的基本刚片。然后,再用铰  $B$  和链杆 2 将  $BC$  梁固定于扩大后的基本刚片。最后,用铰  $C$  和链杆 3 固定  $CD$  梁。在每个装配格式所用的约束中,链杆和铰都不共线。因此,整个体系为无多余约束的几何不变体系。

图 2-9c 所示体系是从基础出发,多次应用复合装配格式所组成的。组成的次序是先将刚片 I、II 固定于基础,由于所用的三个铰不共线,且在三个刚片间为两两相联,因此形成一个扩大的基本刚片,且无多余约束。然后,用同样格式依次固定(III、IV)和(V、VI)。因此,整个体系为无多余约束的几何不变体系。

(2) 从内部刚片出发进行装配——先在体系内部选取一个或几个刚片作为基本刚片,将其周围的部件按照基本装配格式进行装配,形成一个或几个扩大的基本刚片。最后,将扩大的基本刚片再与地基装配起来,从而形成整个体系。这种装配方式的例子如图 2-10 所示。

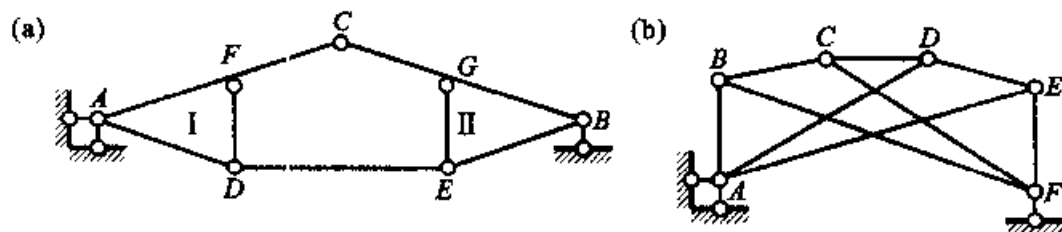


图 2-10

首先,分析图 2-10a 中的体系。左边三个刚片  $AC$ 、 $AD$ 、 $DF$  由不共线的三个铰  $A$ 、 $D$ 、 $F$  相连,组成一个无多余约束的大刚片,称为 I。同理,右边

三个刚片  $BC$ 、 $BE$ 、 $EG$  组成一个大刚片,称为 II。大刚片 I 与 II 之间由不共线的铰  $C$  和链杆  $DE$  相连,组成一个无多余约束的更大的刚片。最后,用不共点的三根支杆固定于基础。因此,整个体系为几何不变,且无多余约束。

其次,分析图 2-10b 中的体系。三角形  $BCF$  和  $EDA$  可看作两个大刚片,它们之间由不共点的三根链杆  $AB$ 、 $CD$ 、 $EF$  相连,组成一个更大的刚片。最后,用不共点的三根支杆固定于基础。因此,整个体系为几何不变,且无多余约束。

例 2-1 试分析图 2-11 所示体系的几何构造。

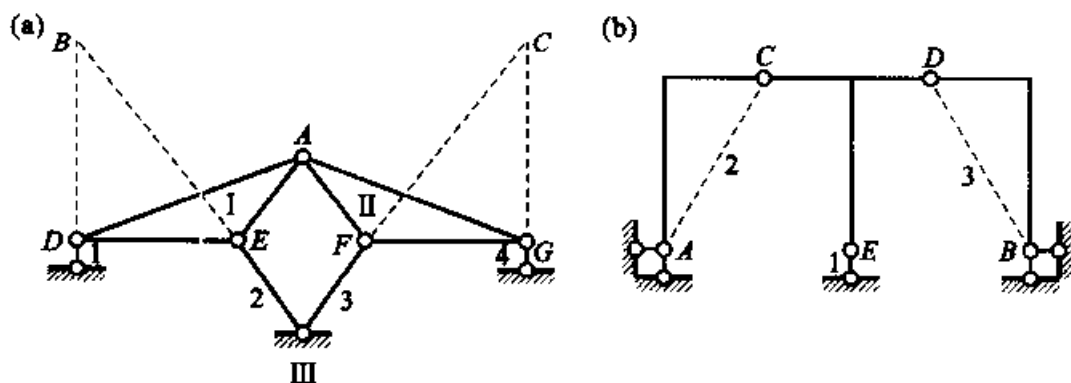


图 2-11

解 (1) 分析图 2-11a 中的体系

首先,三角形  $ADE$  和  $AFG$  是两个无多余约束的刚片,分别以 I 和 II 表示。I 与基础 III 间的链杆 1、2 相当于瞬铰  $B$ , II 与基础 III 间的链杆 3、4 相当于铰  $C$ 。如  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个铰不共线,则体系为无多余约束的几何不变体系;否则为几何瞬变体系。

(2) 分析图 2-11b 中的体系

先把折线杆  $AC$  和  $BD$  用虚线表示的链杆 2 与 3 来替换,于是 T 形刚片  $CDE$  由三个链杆 1、2、3 与基础相连。如三链杆共点,则体系是瞬变的;否则为无多余约束的几何不变体系。

例 2-2 试分析图 2-12 所示体系的几何构造。

解 (1) 分析图 2-12a 中的体系

把刚片 I、II、III 看作对象。I 与 II 之间由链杆  $AB$  和  $DE$  连接,相当于一个瞬铰在  $O_{I,II}$  点。同理,II 与 III 之间由瞬铰  $O_{II,III}$  相连,I 与 III 之间由瞬铰  $O_{I,III}$  相连。由于三个瞬铰不共线,因此体系内部为几何不变,且无多余约束。作为一个整体,体系对地面有三个自由度。

(2) 分析图 2-12b 中的体系

可采用同样方法进行分析。但是,由于三个瞬铰共线,故体系内部也是瞬变的。

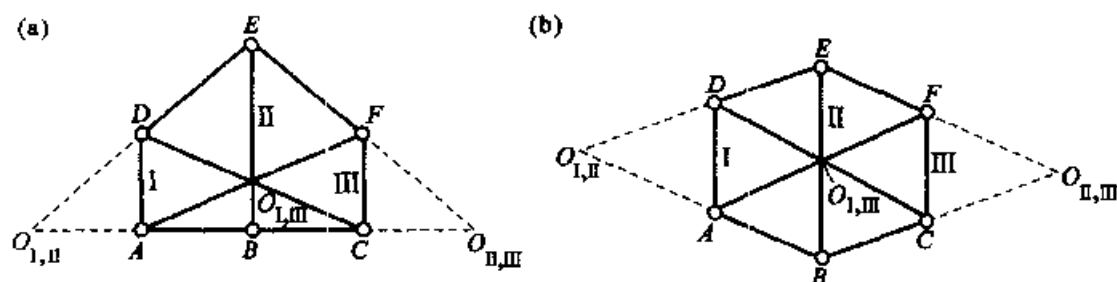


图 2-12

**例 2-3** 试利用无穷远瞬铰的概念,分析图 2-13 所示各三铰拱的几何不变性。

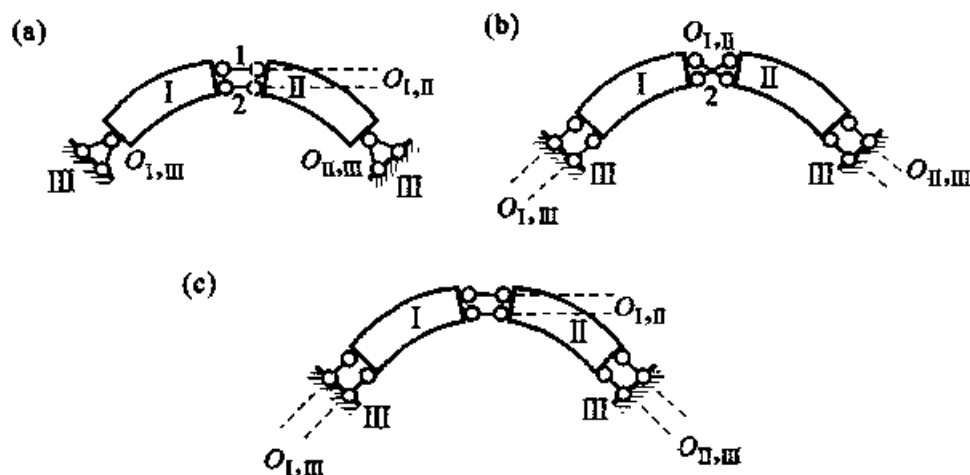


图 2-13

**解** 利用无穷远瞬铰分析几何构造时,可以应用射影几何中关于 $\infty$ 点和 $\infty$ 线的四点结论。

(1) 分析图 2-13a 中的体系

刚片 I、II 与基础 III 之间用三个铰  $O_{I,II}$ 、 $O_{I,III}$ 、 $O_{II,III}$  两两相联,其中  $O_{I,II}$  是平行链杆 1、2 对应的无穷远瞬铰。如果铰  $O_{I,II}$  与铰  $O_{I,III}$  的连线与链杆 1、2 平行,则三个铰共线,体系是瞬变的。否则,体系为几何不变,且无多余约束。

(2) 分析图 2-13b 中的体系

刚片 I、II 与基础 III 之间用三个铰相联,其中  $O_{I,II}$  和  $O_{II,III}$  是两个不同方向的无穷远瞬铰,它们对应于 $\infty$ 线上两个不同的点。铰  $O_{I,III}$  对应于有限

点。由于有限点不在 $\infty$ 线上,因此三个铰不共线,体系为几何不变,且无多余约束。

(3) 分析图 2-13c 中的体系

刚片 I、II 与基础 III 之间的三个铰都在无穷远点。由于各 $\infty$ 点都在同一直线上,因此体系是瞬变的。

通过以上几个例题,可以归纳出以下几点:

(1) 体系通常是由多个构造单元逐步形成的,即从第一个构造单元开始,然后按照某种顺序,把其他构造单元逐个地装配起来。在构造分析中,通常先找出一个几何不变的部分作为第一个构造单元,然后在其基础上扩大、装配,把由构造单元到体系的装配过程分析清楚。

每一个体系的装配过程都有自己的特点。在图 2-9a、b、c 中,装配过程是从地基上开始的,其中图 2-9a、b 的第一个构造单元是将刚片 AB 固定于地基上,图 2-9c 的第一个构造单元是将刚片 I 和 II 固定在地基上。在图 2-

10a、b 中,体系有三根不共点的支杆与地基相联,正好约束了体系对地面的三个自由度。因此,装配过程是从体系内部开始的,其中图 2-10a 的第一个构造单元是刚片 I 或 II,图 2-10b 的第一个构造单元是三角形 BCF 或 EDA。

(2) 要注意约束的等效替换。例如,在图 2-11a 和 2-12a、b 中,联系两个刚片的两链杆用相应的瞬铰来替换;图 2-11b 中,复杂形状的联结杆用直线链杆来替换。

(3) 有的体系只有一种装配方式,例如图 2-9b、c。有的体系却可有几种装配方式,例如图 2-9a。又如在图 2-12a 或 b 中,还可以把 AF、BE、CD 看作具有自由度的对象,或将 DE、AF、BC 看作具有自由度的对象,等等。还有一些体系的几何构造比较复杂,不是按图 2-7 所示的简单方式组成的(例如第 3 章中的复杂桁架),有关这类体系的构造分析可采用其他方法(例如 § 2-6 中的计算机方法和 § 4-3 中的零载法)。

### § 2-3 平面杆件体系的计算自由度

运用上节的三角形规律,对一些常见的体系能够进行构造分析,并对下面两个问题能够作出定量的回答:

(1) 体系是否几何可变? 自由度  $S$  是多少?

(2) 体系有无多余约束? 多余约束的个数  $n$  是多少?

实际上有一些复杂体系并不是按照三角形规律组成的,如何对它们进行构造分析,如何求出它们的  $S$  和  $n$ ,需要作进一步的讨论。为此,我们引进

计算自由度  $W$  的概念,然后根据  $W$  来得出关于  $S$  和  $n$  的一些定性的结论。

在给出  $W$  的定义以前,先把自由度  $S$  的算法介绍如下:体系是由部件加上约束组成的。首先设想体系中各个约束都不存在,在此情况下计算各部件的自由度总和  $a$ ;其次在全部约束中确定非多余约束数  $c$ ;最后将两数相减,得出体系的自由度  $S$  如下:

$$S = a - c \quad (2-1)$$

式(2-1)的概念非常简单,但应用时却有困难,即事先需要分清楚:在全部约束中,究竟哪些是非多余约束,哪些是多余约束。这个问题牵涉到体系的具体构造。体系的构造愈复杂,这个问题愈难于解决。为了回避这个困难,我们定义一个新参数  $W$  如下:

$$W = a - d \quad (2-2)$$

这里,  $d$  是全部约束的总数。上面两个式子外表很相似,但后者要简单得多,因为在式(2-2)中只需要算出全部约束的总数  $d$ ,而不需要研究哪些约束是多余约束  $n$  这个难题。

由于全部约束数  $d$  与非多余约束数  $c$  的差数是多余约束数  $n$ ,因此由式(2-1)减去式(2-2),即得

$$S - W = n \quad (2-3)$$

这就是计算自由度  $W$ 、自由度  $S$ 、多余约束  $n$  三者之间的关系式。如果三个参数中有两个为已知,则由此式即可求出第三个参数。

由于自由度  $S$  与多余约束数  $n$  都不是负数,即  $S \geq 0, n \geq 0$ ,因此由式(2-3)可得出下面两个不等式:

$$S \geq W \quad (2-4)$$

$$n \geq -W \quad (2-5)$$

也就是说,  $W$  是自由度  $S$  的下限,而  $(-W)$  则是多余约束  $n$  的下限。

下面由式(2-2)导出关于  $W$  的两种具体算法。在推导以前,还需对式(2-2)中的部件和约束这两个概念作进一步的说明。

在式(2-2)中,部件可以是点,也可以是刚片。这里要注意刚片的内部是否有多余约束。图 2-14a 是内部没有多余约束的刚片,而图 2-14b、c、d 则内部分别有 1、2、3 个多余约束的刚片,它们可看作在图 2-14a 的刚片内部分别附加了一根链杆或一个铰结或一个刚结。在式(2-2)中,作为部件的刚片是指内部没有多余约束的刚片,如果遇到内部有多余约束的刚片,则应把它变成内部无多余约束的刚片,而它的附加约束则在计算体系的约束总数时应当考虑进去。

约束可分为单约束和复约束。两个刚片 I、II 间的结合(图 2-15a)为

单结合。三个刚片间的结合(图 2-15b)相当于两个单结合,即刚片 I 与 II 间的单结合以及刚片 II 与 III 间的单结合。一般说来, $n$  个刚片间的结合相当于  $(n-1)$  个单结合。

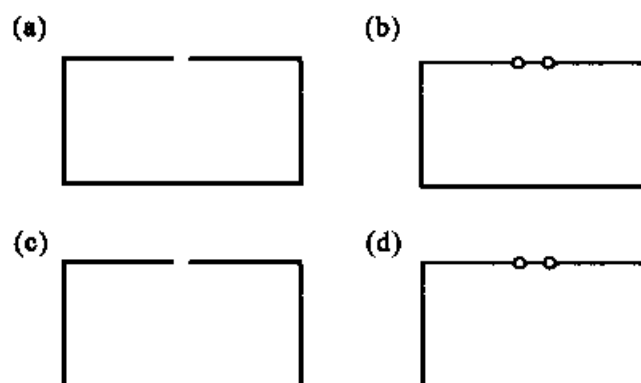


图 2-14

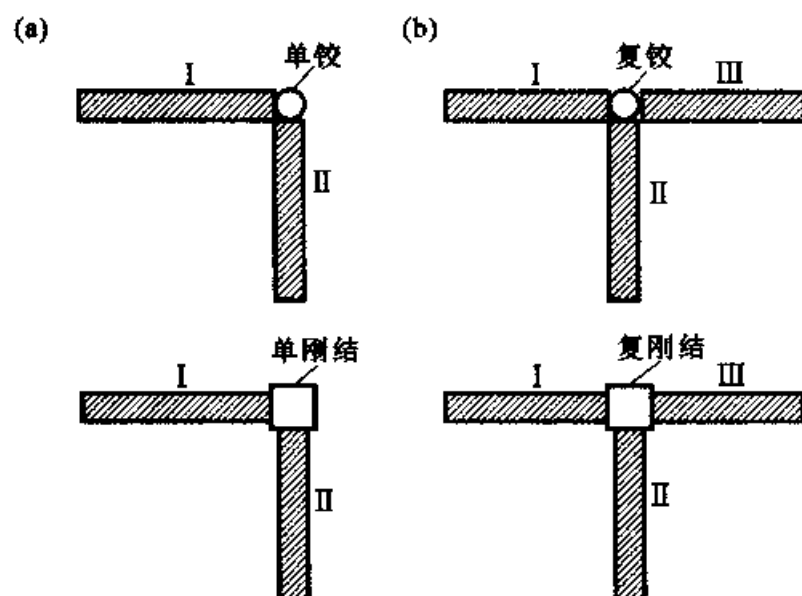


图 2-15

联结两点的链杆(图 2-16a)称为单链杆,相当于一个约束。连接三点的链杆(图 2-16b)将原来结点的六个自由度减少为刚片的三个自由度,相当于三个约束,即相当于三根单链杆。一般说来,联结  $n$  个点的复链杆相当于  $2n-3$  个单链杆。

先介绍第一种算法。把体系看作由许多刚片受铰结、刚结和链杆的约束而组成的。以  $m$  表示体系中刚片的个数,则刚片

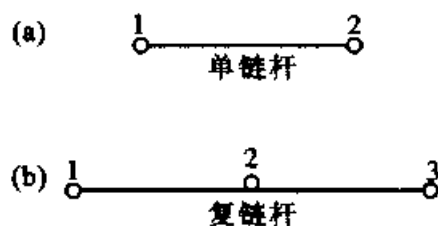


图 2-16

的自由度总和为  $3m$ 。计算约束总数时,体系中如有复约束,则应事先把它折合成单约束;刚片内部如有多余约束,也应把它们计算在内。以  $g$  代表单刚结个数,以  $h$  代表单铰结个数,以  $b$  代表单链杆根数,则约束总数为  $3g + 2h + b$ 。因此,体系的计算自由度  $W$  可表示为

$$W = 3m - (3g + 2h + b) \quad (2-6)$$

再介绍另一种算法。把体系看作由许多结点受链杆的约束而组成的。体系中如有复链杆,则应事先把它们折合成单链杆。以  $j$  代表结点个数,以  $b$  代表单链杆个数,则  $W$  可表示为

$$W = 2j - b \quad (2-7)$$

以上两式都是由式(2-2)导来的,只是在体系中选取部件的观点有所不同。在式(2-6)中,选取的部件都是刚片,在式(2-7)中,选取的部件都是结点。显然,除这两种算法外,还可以采用混合法。这时,计算公式即为

$$W = (3m - 2j) - (3g + 2h + b) \quad (2-8)$$

由式(2-6)、(2-7)或(2-8)算出的  $W$  值可能为正、为负、或为零。根据算出的  $W$  值,还不能得出自由度  $S$  和多余约束数  $n$  的确切值,但可以得出它们的差值  $S - n$ ,也可以得出  $S$  和  $n$  的下限值,从而得出如下的定性结论:

若  $W > 0$ , 则  $S > 0$ , 体系是几何可变的。

若  $W = 0$ , 则  $S = n$ , 如无多余约束则为几何不变,如有多余约束则为几何可变。

若  $W < 0$ , 则  $n > 0$ , 体系有多余约束。

**例 2-4** 试求图 2-10a 所示体系的  $W$ 。

**解** 按式(2-6)计算。刚片数  $m = 7$ , 由于复铰  $D$  和  $E$  各相当于两个单铰, 折算后全部单铰个数  $h = 9$ , 支杆数  $b = 3$ , 刚结个数  $g = 0$ , 因此

$$W = 3m - 2h - b = 3 \times 7 - 2 \times 9 - 3 = 0$$

再按式(2-7)计算。结点数  $j = 7$ , 由于复链杆  $AC$  和  $BC$  各相当于 3 个单链杆, 折算后全部单链杆个数  $b = 14$ , 因此

$$W = 2j - b = 2 \times 7 - 14 = 0$$

两种算法得出的结果相同。

**例 2-5** 试求图 2-17a 所示体系的  $W$ 。

**解** 把图 2-17a 所示体系的全部支座去掉以后, 剩下的是一个内部有多余约束的刚片。如果再在截面  $G$  处切开, 这样才变为无多余约束的刚片, 如图 2-17b 所示。按式(2-6)计算, 刚片数  $m = 1$ , 链杆个数  $b = 4$ , 铰结数  $h = 0$ ,  $A$ 、 $B$ 、 $G$  三处的单刚结数  $g = 3$  (这里把  $A$  或  $B$  处的固定支座看作杆件与基础间的刚结合), 因此,



$$W = 3n - (3g + 2h + b) = 3 \times 1 - (3 \times 3 + 2 \times 0 + 4) = -10$$

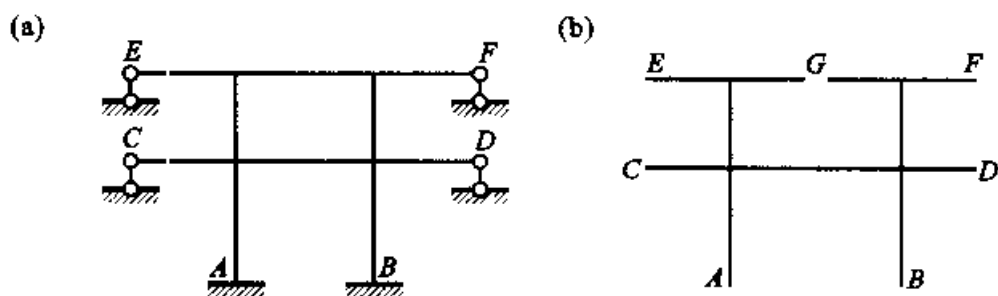


图 2-17

由于这个体系显然是几何不变的,故可知自由度  $S=0$ ,因此,由式(2-3)可求出多余约束数  $n$  如下:

$$n = S - W = 0 - (-10) = 10$$

这是一个具有 10 个多余约束的几何不变体系。

**例 2-6** 试求图 2-12a、b 所示两个体系的  $W$ 。

**解** 这两个体系都是全部由链杆组成的铰接体系。用式(2-7)计算  $W$  比较方便。由这两个体系可得下列相同的数字结果:结点数  $j=6$ ,简单链杆数  $b=9$ 。因此,

$$W = 2j - b = 2 \times 6 - 9 = 3$$

这里,由于体系没有联结到地基,作为一个整体,相对于地基有三个自由度。所以,这两个体系的内部计算自由度都是  $W+3=0$ 。如果希望进一步确定体系的内部自由度  $S=3$ ,则还需进行几何构造分析。根据例 2-2 中进行的几何构造分析可知:图 2-12a 是一个内部几何不变的、且无多余约束的体系,故知  $S=3=0$ 、且  $n=0$ 。此外,又知图 2-12b 是一个内部瞬变的、且有多余约束的体系,故知  $S=3=n>0$ 。

## \* §2-4 空间杆件体系的几何构造分析

杆件轴线不在同一平面内的结构称为空间结构。常见的空间结构有空间刚架和空间桁架。空间刚架由杆件与刚结点组成,多为具有多余约束的几何不变体系(即超静定体系)。空间桁架由直杆与球铰结点组成,称为空间铰接体系。本节将研究空间铰结体系的几何构造分析问题。

### 1. 空间几何不变体系的组成规律

#### (1) 一点与一刚体之间的联结方式

一点在空间内有三个自由度,即沿三个坐标轴方向的移动。由此可知,将一点联结到一个刚体(或基础)上需要三根链杆。图 2-18a 中的结点  $O$

在链杆  $OA$ 、 $OB$  的约束下,在平面  $AOB$  内的位置被固定,但这一平面仍可绕直线  $AB$  转动;再增加一根不在  $AOB$  平面内的链杆  $OC$ ,结点  $O$  在空间内的位置便固定了。图 2-18b 所示为三根链杆位于同一平面内的情况。这时,在平面  $AOB$  内有一个多余约束,而结点  $O$  沿平面  $AOB$  的法线方向仍可移动,体系有一个自由度、且有一个多余约束。

**规律 1** 空间中一点与一刚体用三根链杆相连,且三链杆不在同一平面内,则组成几何不变的整体,且无多余约束。

当刚片  $ABC$  是一平面铰接三角形时(图 2-19),它与平面外一点  $O$  用三链杆按规律 1 联结组成一个铰接四面体。因此,几何不变、且无多余约束的空间铰结体系基本组成规律是铰接四面体规律,即一个铰接四面体的形状是几何不变、且无多余约束的。多次利用这一规律可以组成各种静定空间桁架。

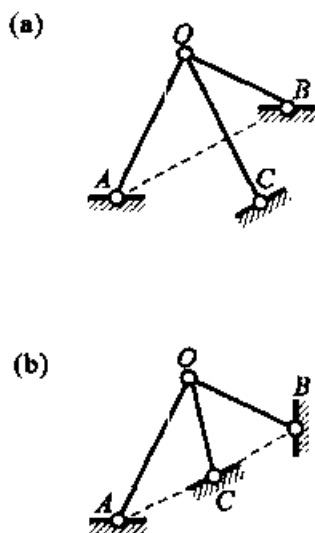


图 2-18

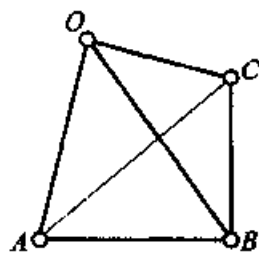


图 2-19

## (2) 两个刚体之间的联结方式

一个刚体在空间有沿三个坐标轴方向移动和绕三个坐标轴转动的六种独立运动方式,即一个刚体在空间有六个自由度。所以,将一个刚体联结到另一刚体(基础)上需要六根链杆。

图 2-20a 所示为六根支杆支承着一刚体的情况。其中不共面的三根支杆 1、2、3 交于  $A$  点,因而固定了刚体上  $A$  点的位置。这时,刚体沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的移动受到限制,但仍可以绕过  $A$  点的三个轴转动。再设置两根支杆 4、5,设其交点为  $B$ ;这样,刚体又有两个自由度受到了约束,但仍能发生绕  $AB$  直线的转动。为了完全固定刚体的位置,最后设置的第六根支杆必须能约束绕  $AB$  的转动;换句话说,六根支杆不得交于同一直线。图 2-20a 所示体系,其六根支

杆不交于同一直线,所以体系是无多余约束、且几何不变的。图 2-20b 所示是六根支杆交于同一直线  $AB$  的情况。显然,这时刚体仍能绕直线轴  $AB$  转动,体系是可变的。图 2-20c 所示体系,其支杆 4、5、6 互相平行,可以看成三杆在无穷远处交于一点。因此,过  $A$  作与支杆 4、5、6 平行的直线  $AA'$ ,六根杆都与直线  $AA'$  相交,体系是可变的。于是,有以下规律:

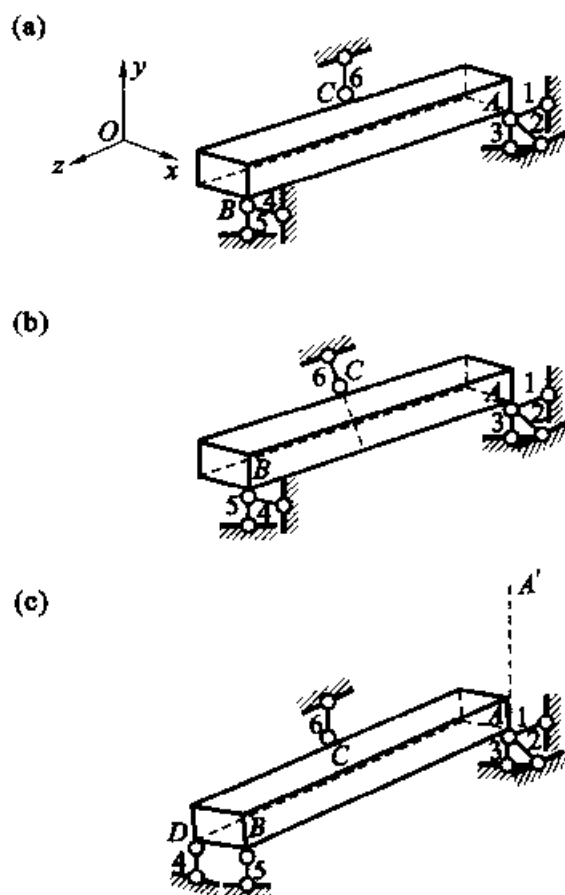


图 2-20

**规律 2** 一刚体与另一刚体(地基)用六根链杆相联,如链杆中有三根交于一点而不在同一平面内,当六根链杆不交于同一直线时,则组成几何不变的整体、且无多余约束。

图 2-21a 所示体系中六根支杆有三根位于同一平面内(支杆 1、2、3),但不交于一点。这三根支杆可以固定刚体在此平面(如  $xy$  平面)内的位置,但沿此平面法向( $z$  轴方向)的移动和绕此平面内任意轴线的转动(可以分解为绕  $x$  轴的转动和绕  $y$  轴的转动)需由另外三根支杆来约束。为此,六根支杆的布置仍应遵循六根杆不得交于同一直线的原则。图 2-21a 所示体系的六根支杆不交于同一直线,故该体系是几何不变体系。图 2-21b 所示体系是一可变体系,因为其六根支杆中相互平行的杆多于三根(支杆 1、3、5、6 互

相平行),这种情况可看作四根杆在无穷远处一点相交;过  $B$  点作此四根支杆的平行线  $BB'$ ,六根支杆都与直线  $BB'$  相交,刚体仍能发生绕直线  $BB'$  的转动。图 2-21c 所示体系也是一可变体系,因为其六根支杆中位于同一平面(比如  $xz$  平面)内的多于三根(支杆 2、4、5、6)。这种情况下,在  $x, z$  平面内作直线  $BD$  与杆 1 和杆 3 相交,不难看出,六根支杆都交于直线  $BD$ (杆 4 与直线  $BD$  在无穷远处相交);体系是可变的。于是,有以下规律 3:

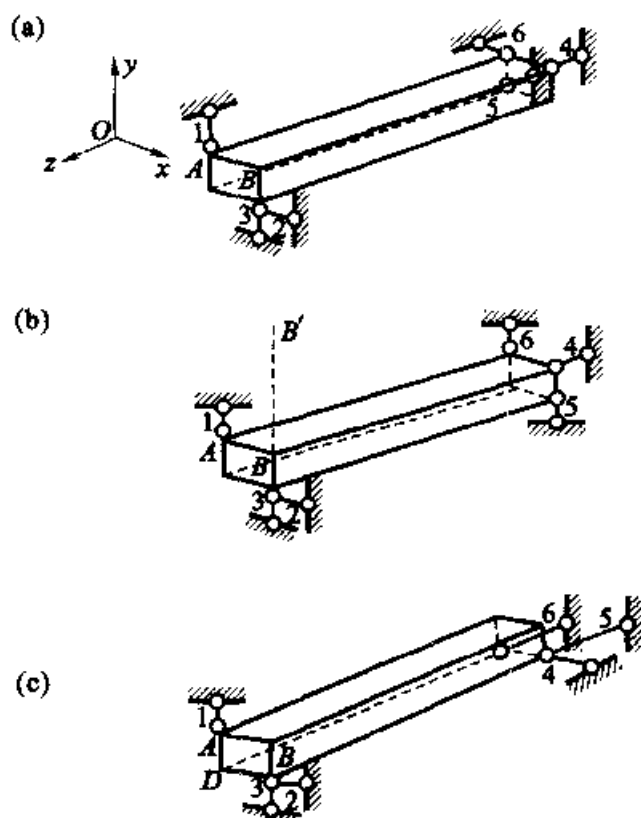


图 2-21

**规律 3** 一刚体与另一刚体(地基)用六根链杆相联,如链杆中有三根位于同一平面内而不交于一点,当六根杆不交于同一直线时,则组成几何不变的整体,且无多余约束。

空间刚体用六根链杆组成几何不变体系的一般规律是一个复杂的问题。一般情况下采用零载法来判断更为简便(零载法见第 4 章 § 4-3)。

**例 2-7** 试分析图 2-22 所示体系的几何构造。

**解** 先排除六根支杆的影响,分析体系内部

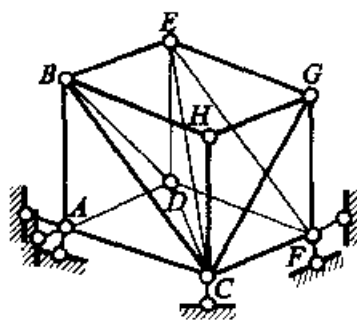


图 2-22

的几何构造。

体系中的  $ABCD$  是一个铰结四面体,因此它是几何不变的,且无多余约束的刚体。在此基础上按规律 1 用三根不共面的链杆  $BE$ 、 $CE$ 、 $DE$  联结结点  $E$ ,构成一个大的刚体;重复应用规律 1,依次将结点  $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别用三根不共面的链杆联结到大刚体上,构成几何不变又无多余约束的整体。最后,再用六根支杆按规律 2 将其与地基相联。因此,体系是无多余约束的几何不变体系。

## 2. 空间铰接体系的计算自由度 $W$

把体系中的结点看作具有自由度的对象,而将链杆(包括支杆)看作对结点施加的约束。设体系上结点的总数为  $j$ ,链杆与支杆的总数为  $b$ ,其计算自由度  $W$  可表示为

$$W = 3j - b \quad (2-9)$$

与平面体系中的情况类似, $W$  是体系自由度  $S$  的下限,  $W$  是多余约束数  $n$  的下限。所以,根据求得的  $W$  可对体系作出以下定性结论:

若  $W > 0$ ,体系是几何可变的;若  $W = 0$ ,体系可能是几何不变、且无多余约束的,也可能是几何可变、且有多余约束的,需作进一步分析(例如用零载法分析);若  $W < 0$ ,则体系有多余约束。

**例 2-8** 试计算图 2-22 所示体系的计算自由度  $W$ 。

**解** 先计算结点个数  $j = 8$ ,再计算链杆与支杆数目  $b = 24$ 。按式 (2-9)求体系的计算自由度  $W$  为

$$W = 3j - b = 3 \times 8 - 24 = 0$$

由此只能得到定性结论,即体系属于下列两种情况之一:或者是无多余约束、且几何不变的或者是有多余约束、且几何可变的。如再补充进行构造分析(见例 2-7),则可知体系属于前一情况。

## \* § 2-5 在求解器中输入平面结构体系

本书所附的《结构力学求解器》(SM Solver for Windows),以下简称为求解器,有一个非常有用的计算机辅助分析软件(见光盘)。有关求解器的安装和使用简介可以参阅本书的附录或软件的联机帮助,这里不作详细讲解。另外,本书中主要将求解器当作工具来用,其内在的算法和原理将在其他的文献和教材中介绍。本节介绍如何在求解器中输入结构体系。

在求解器中定义结构体系要满足数值化和可视化两方面的要求,另外还要有较好的人机交互功能。例如,铰支座可以有多种图形显示方法,但从计算角度上看都是等效的,因此除了位移约束信息外,还要补充一些有关的

显示信息。另外,对于各类组合结点,在求解器中也要求能够比较方便地定义。因此,在求解器中如何定义一个结构体系是一个很基本的问题。

### 1. 坐标系

求解器中的坐标系遵循以下的统一定义:

对于整个结构体系,规定一个整体坐标系,用  $x, y$  表示,如图 2-23 所示。整体坐标系中,  $x$  和  $y$  方向(即水平和竖直方向)的线位移分别记为  $u$  和  $v$ ,均规定与整体坐标正方向相同为正;角位移  $\theta$  规定由  $x$  向  $y$  方向转动为正<sup>①</sup>。

对于结构体系的每一个杆件单元,建立一个局部坐标系,用  $\bar{x}, \bar{y}$  表示<sup>②</sup>。在局部坐标系中,  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  方向的线位移分别记为  $\bar{u}$  和  $\bar{v}$ ,相应的力记为  $\bar{F}_x$  和  $\bar{F}_y$ ,均规定与局部坐标正方向相同为正;角位移  $\theta$  和相应的力矩  $M$  也规定由  $\bar{x}$  向  $\bar{y}$  方向转动为正。

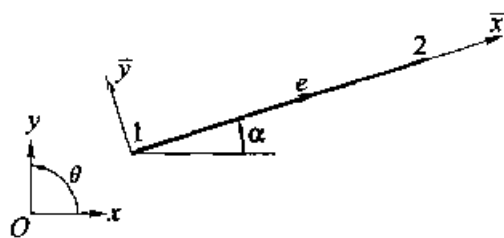


图 2-23 整体坐标和局部坐标

局部坐标系和整体坐标系之间要满足一定的关系。图 2-23 所示为一个典型的杆件单元  $e$ 。为单元规定一个方向,即指定一个始端 1 和一个末端 2。单元方向也可用轴向的箭头来表示:箭头从始端指向末端。规定局部坐标的原点取在杆端 1,  $\bar{x}$  轴指向杆端 2。  $\bar{y}$  轴的选取应与整体坐标转向一致,即当  $x$  轴向  $y$  轴方向转  $\alpha$  角度使得  $x$  轴与  $\bar{x}$  轴同向后,  $y$  轴应与  $\bar{y}$  轴同向。按照这样的定义,角位移和力矩在局部坐标下和整体坐标下方向是一致的,所以没有必要加以区分。

### 2. 虚拟刚结点

首先引入的一个概念是虚拟刚结点。

用求解器输入一个结构体系时,首先输入一些结点。这些结点被理解为是虚拟刚结点,即将每一个结点看作是一个具有 3 个自由度(2 个平移,1 个转动)的小刚体。虚拟刚结点是杆件之间连接的中介。在随后定义杆件单元时,不是去定义单元杆端和杆端的连接,而是定义杆端与虚拟刚结点的连接。每个杆端(整体坐标中)有三个位移自由度,为它们各自建立一个连接码,用 0 和 1 表示:0 表示不连接,1 表示连接。这样,若杆端的连接码为  $(1, 1, 1)$ ,则该杆端与虚拟刚结点为刚结; $(1, 1, 0)$  为铰结; $(1, 0, 0)$  为水平链

① 按顺时针或反时针表示角位移正方向容易引起混乱。如图 2-23 中角位移反时针为正,但若将  $y$  轴取为向下为正( $x$  轴方向不变),则角位移变为顺时针为正。

② 在整体坐标系中的量上面加一横线者,表示相应的局部坐标系中的量。

杆连接;  $(0, 1, 1)$  则为定向(水平滑动)连接。

下面结合图 2-24~2-26 所示的结点连接例子来讨论。

图 2-24 是刚结点的连接示例, 其中图 2-24a 中定义了一个虚拟刚结点和杆端的连接码; 各个杆端与虚拟刚结点连接后成为图 2-24b 的形式, 去掉虚拟刚结点后的效果为图 2-24c 所示的刚结点; 求解器中显示的是最后的图 2-24c。图 2-25 是组合结点的连接示例, 同理, 无须重复。铰结点是最常见的结点之一, 其连接示例在图 2-26 中给出。这里, 共有四种连接方式, 都等效于图 2-26e 中的铰结点, 通常采用图 2-26a 所示方式即可。值得一提的是, 如果将三个杆件固定住, 图 2-26b~d 中的虚拟刚结点也随之被固定不动, 而图 2-26a 中的虚拟刚结点仍然存在一个转动自由度, 可以绕

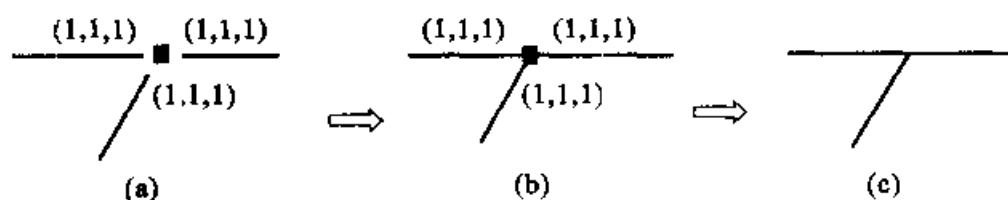


图 2-24 刚结点的连接

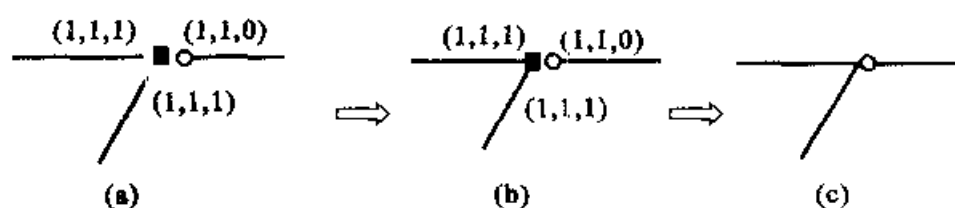


图 2-25 组合结点的连接

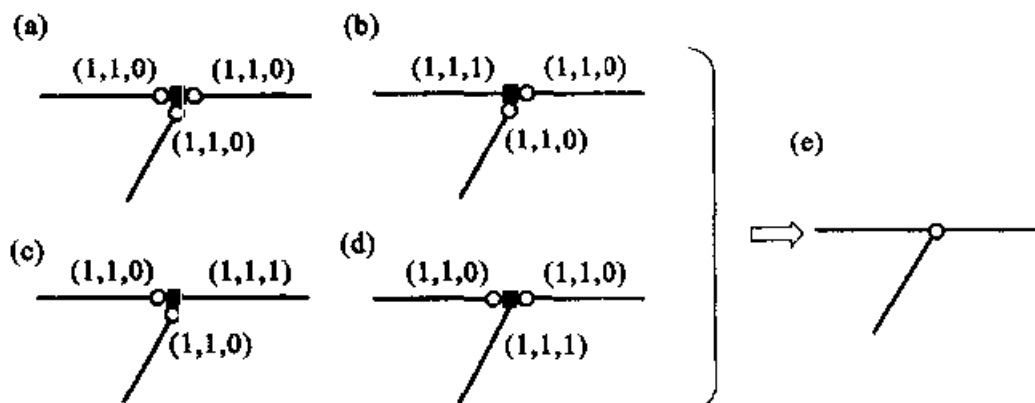


图 2-26 铰结点的连接

结点自由转动。这是一种结点转动机构,在求解器中会自动将其排除不计<sup>①</sup>。结点机构实际上也潜存于经典的结构力学之中,如将一个集中力矩加在铰结点上,便可以理解为加在结点机构上(犹如加在可自由转动的销钉上),是无意义的。

综上所述,求解器中单元对话框中的“连接方式”是指各杆端与虚拟刚结点的连接方式,而不是杆件之间的连接方式。这样,各杆件通过虚拟刚结点这一中介再和其他杆件间接地连接。这种处理的好处是可以避免结点的重复编码(如本书中矩阵位移法中所介绍的),同时可以方便地构造各种复杂的组合结点。

另外,在定义位移约束时,结点处的支座约束也是首先加在虚拟刚结点上,再通过虚拟刚结点施加给其它相关的杆端。

有了虚拟刚结点的概念,其他的具体做法都已比较显而易见,通过具体例题便很容易搞懂。因此,以下基本上以例题来代替叙述。疑问之处,可以参见求解器的联机帮助。

### 3. 输入结构体系

欲输入一个结构体系,首先在“编辑器”中打开一个新文件,然后输入命令。在求解器中输入命令有两种方法:

(1) 利用“命令”菜单中的子菜单,打开相应的对话框,在对话框中根据提示和选项输入命令;

(2) 在文档中直接键入命令行。

第(1)种方法可以免除用户记忆命令格式,且可以利用对话框中的预览功能随时修正输入的命令。如果用户对命令格式较熟悉,则直接键入命令更为快捷。本书在附录中给出了所有命令的语法规则和格式,需要时可以查阅。

修改命令也有两种方法:

1) 将光标置于要修改的命令行,单击工具栏上的“修改”按钮(或在“命令”菜单下选“修改”子菜单),则求解器将自动打开相应的命令对话框,对话框中的各选项再现了该条命令中的各个参数,用户可以查看或修改。

2) 在文档中直接修改命令行。

以下例题中,首先给出完成的命令数据文档,同时给出输入后的结构体系的图例,然后对个别命令行的输入作简要说明。

**例 2-9** 在求解器中输入图 2-27a 所示的结构体系。

**解** 输入后的结构如图 2-27b 所示,命令数据文档如下:

---

①: 在极限分析中的结点机构将被视为破坏机构的一种。



N,1,0,0	E,4,3,1,1,0,1,1,1
N,2,0,1	E,3,5,1,1,1,1,1,1
N,3,1,1	F,5,7,1,1,1,1,1,0
N,4,1,0	E,6,7,1,1,1,1,1,0
N,5,1,2	NSUPT,1,4,0,0,0
N,6,2,5,0	NSUPT,4,4,0,0,0
N,7,2,5,2,5	NSUPT,6,6,0,0,0,0
E,1,2,1,1,0,1,1,1	END
E,2,3,1,1,1,1,1,0	

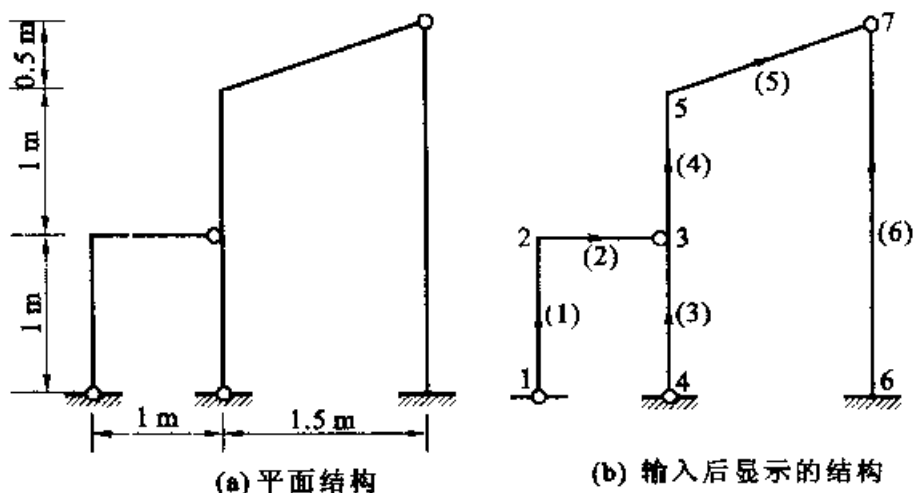


图 2-27 结构的数值化定义

以上命令数据中主要有三种命令:结点定义、单元定义、结点支座定义。下面分别讨论如何用对话框输入这些命令。

### (1) 结点定义

以第一行命令 N,1,0,0 为例:其中 N 为提示符,代表结点;1 为结点码;0,0 为整体坐标值。用对话框输入该命令步骤如下:

- 1) 在“命令”菜单下选择“结点”子菜单,打开结点对话框;此时,默认的命令选择是结点定义。
- 2) 在“结点码”下拉框中输入(或从下拉选项中选)1。
- 3) 在“坐标  $x$ ”和“ $y$ ”下拉框中分别输入 0,0。
- 4) 单击“预览”按钮,可以在观览器中看到结点 1 的显示。
- 5) 若不满意,可以修改以上输入。
- 6) 单击“应用”按钮,将命令写到文档上。
- 7) 可以继续输入下一个命令。
- 8) 完成输入后,单击“关闭”按钮,关闭结点对话框。

此时,可以在文档上看到已输入的命令行,同时观览器中会同步显示出该结

点。其余结点的输入类似。

### (2) 单元定义

在结点定义命令后面的是单元定义命令。此时,要用到虚拟刚结点的概念。第一行单元定义命令为:E,1,2,1,1,0,1,1,1;其中提示符E表示单元定义;其后的1,2为单元两端的结点码;随后的6个数据是两端点与虚拟刚结点1,2的连接码。用对话框输入该命令步骤如下:

1) 在“命令”菜单下选择“单元”子菜单,打开单元对话框;此时,默认的命令选择是单元定义

2) 单元编码按照输入顺序自动排列,因此没有单元码输入选项

3) 在“杆端1”的“连接结点”处输入1,“连接方式”选“铰结”。

4) 在“杆端2”的“连接结点”处输入2,“连接方式”选“刚结”。

5) 若要预览,可以单击“预览”。

6) 单击“应用”按钮,将命令写到文档上,而后可以继续下一个命令。

7) 单击“关闭”按钮,关闭对话框。

此时,可以在文档上看到已输入的命令,同时观览器中会显示出该单元。其余单元的输入类似。在观览器的“显示”菜单中,激活“单元方向”,则在各单元上可以看到表示单元方向的箭头;在观览器的“标注”菜单中,可以激活或取消“单元长度”、“单元码”等选项。

### (3) 结点支座定义

在单元定义命令后面的是结点支座定义命令。此时,也要用到虚拟刚结点的概念。第一行结点支座命令为:NSUPT,1,4,0,0,0;其中提示符NSUPT表示结点支座定义;其后的1表示结点1;4代表第4类支承(即第3种铰支座);随后的0代表支座方位为水平放置(无转动);0,0表示支座无水平和竖向位移。用对话框输入该命令步骤如下:

1) 在“命令”菜单下选“位移约束”子菜单,打开支座约束对话框。

2) 默认的约束类型是“结点支座”,在“结点码”下拉框中输入1。

3) 在“支座类型”处选4,“支座性质”保留默认的“刚性”,其余的均为0。

4) 其余的同上面的第5)~7)。

此时,可以在文档上看到命令,同时观览器中会显示出该支座。最后一行结点支座命令NSUPT,6,6,0,0,0,0在末尾多了一个0,这是由于该支座为固定支座,最后一个0表示该支座无转角。

## \* §2-6 用求解器进行平面体系的几何构造分析

### 1. 几何构造分析的计算机方法

进行几何构造分析时采用的方法可分为两类:一类是适用于手算的经典方法,另一类是适用于计算机的程序方法。

在 §2-2 中利用三角形组成规律进行几何构造分析的方法是一种适用于手算的经典方法。这方法机智灵巧,但不便于编制计算机程序;能够简捷地处理工程中常用的杆件体系问题,但难于处理复杂的杆件体系问题。

在求解器中自然采用计算机方法。关于这种方法的详细内容将在《程序结构力学》中介绍,本书主要将求解器当作工具使用,并对其解题思路作一简述。

思路——把平面体系的几何构造分析问题表示为一组齐次线性代数方程问题,然后根据方程组的解的性质可得出几何构造分析的有关结论。

求解步骤:

(1) 拆除体系中的各个约束,以体系的独立的结点位移作为基本未知量,共有  $N$  个。

(2) 再把约束加上去,也就是在待求位移之间建立约束条件,得到以  $N$  个结点位移为未知量的  $M$  个齐次线性代数方程。

(3) 由方程组求解待定位移。根据方程组系数矩阵的阶数和秩,可以确定解的性质。

如方程组有唯一的平凡解(待定位移都是零),则体系为几何不变;反之则为可变。

如方程组系数矩阵的秩小于约束方程的个数,则体系具有多余约束。

### 2. 两种求解模式

对于几何构造分析,求解器具有两种求解模式:

#### (1) 自动求解

可以对任意的平面体系进行几何构造分析;判断几何可变还是不变;对于可变体系,给出体系自由度,指出是常变还是瞬变,并静态或动画显示机构运动模态;若体系有多余约束,给出多余约束的数目。

#### (2) 智能求解

按两刚片或三刚片法则求解,给出具体的求解步骤。对于无法用三角形法则求解的问题,给出提示。

自动求解可用来求解所有问题,也是一个方便的研究工具;而智能求解可以模仿人工手算给出解题思路与步骤,对学生很有帮助。以下通过例题

来分别加以说明和介绍。

**例 2-10** 试用两种求解模式分析图 2-28a 的几何构造, 其中结点 5、6 是组合结点。

**解** 首先, 考虑自动求解。输入后的命令文档为

```
TITLE, 例 2-10
N, 1, 0, 0
N, 2, 0, 4, 0
N, 3, 0, 6, 0
N, 4, 1, 0
N, 5, 0, 2, 0, 5
N, 6, 0, 8, 0, 5
N, 7, 0, 35, 0, 3
N, 8, 0, 65, 0, 3
E, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0
E, 2, 3, 1, 1, 0, 1, 1, 0
E, 3, 4, 1, 1, 0, 1, 1, 0
E, 1, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 1
E, 5, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1
E, 6, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 0
E, 2, 7, 1, 1, 0, 1, 1, 0
E, 7, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 0
E, 8, 6, 1, 1, 0, 1, 1, 0
E, 3, 8, 1, 1, 0, 1, 1, 0
E, 8, 7, 1, 1, 0, 1, 1, 0
NSUPT, 1, 2, -90, 0, 0
NSUPT, 4, 1, 0, 0
END
```

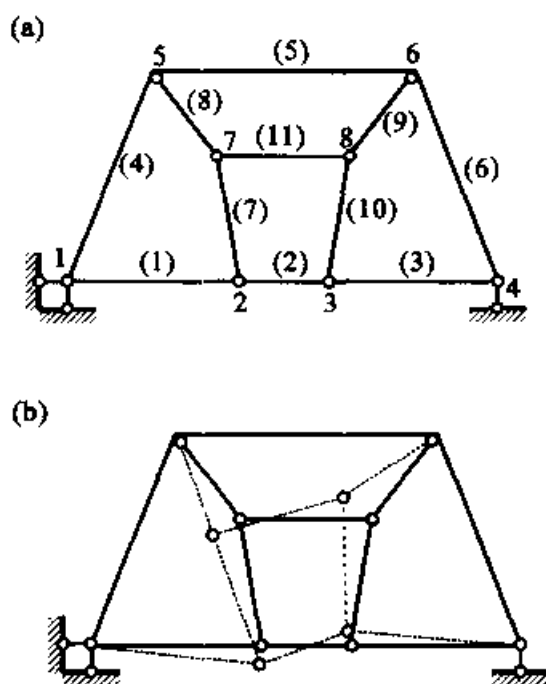


图 2-28

观览器中显示的图形如图 2-28a 所示。然后, 在编辑器中依次选菜单“求解”、“几何组成”, 得到“有多余约束的几何瞬变体系的结论”。在“几何构造分析”对话框中选“动态显示”, 则可在观览器中看到机构运动模态的动画显示, 如图 2-28b 所示。

其次, 考虑智能求解。在编辑器中依次选菜单“求解”、“几何构造”, 在弹出的对话框中单击“计算”按钮, 得到计算机输出的结果如下:

---

```
不必考虑大地及其支座
刚片 1 由以下杆件构成: (4)、(5)、(6)
将刚片 1 看成第一个刚片
将杆件 (7) 看成第二个刚片
将杆件 (10) 看成第三个刚片
由三刚片规则, 连接三刚片的三个(虚)铰过一直线, 瞬变体系
```

---

讨论:

对本例,手算时有两种思路,一种如上所示,另一种则仍将杆件(4)、(5)、(6)看成刚片1(第一个刚片),而将杆件(2)和(11)分别看成第二、三个刚片。在第二种思路中,其中的一个瞬铰的位置可以在结点1和4的连线的任一点,很难将常规的三刚片法则准确应用,因此不宜采用。求解器的智能求解算法考虑到这种情况,没有采用第二种思路,因而给出了正确的计算步骤和结果。

例2-11 试用求解器分析图2-29所示的几何构造。

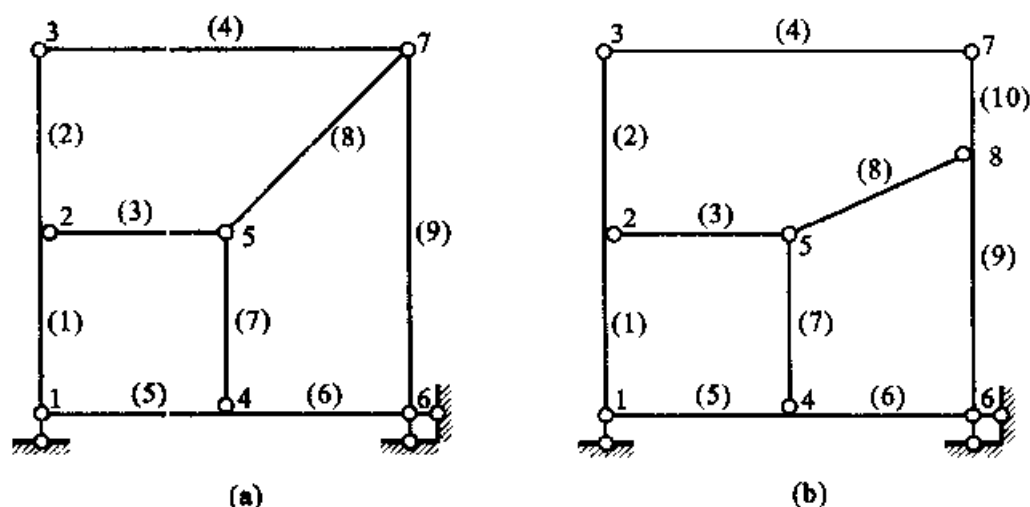


图 2-29

数据文档从略。采用智能求解,计算机输出结果如下:

对图2-29a:

刚片1由以下杆件构成:(1)、(2)

刚片2由以下杆件构成:(5)、(6)

由三刚片规则,将单元(8)看成一刚片。

另两刚片为:1,2,可得一大刚片1

对图2-29b:

本题用两刚片和三刚片法则无法求解

图2-29b在图2-29a的基础上稍加变化,但题目求解性质发生了改变,无法再用常规的刚片法则求解,这是智能求解的局限。采用自动求解,图2-29a和图2-29b所示体系均为无多余约束的几何不变体系。由于图2-29b中有一些复链杆,因此用零载法时涉及弯矩和剪力,不是很方便。

例2-12 试用求解器分析图2-30所示的几何构造。

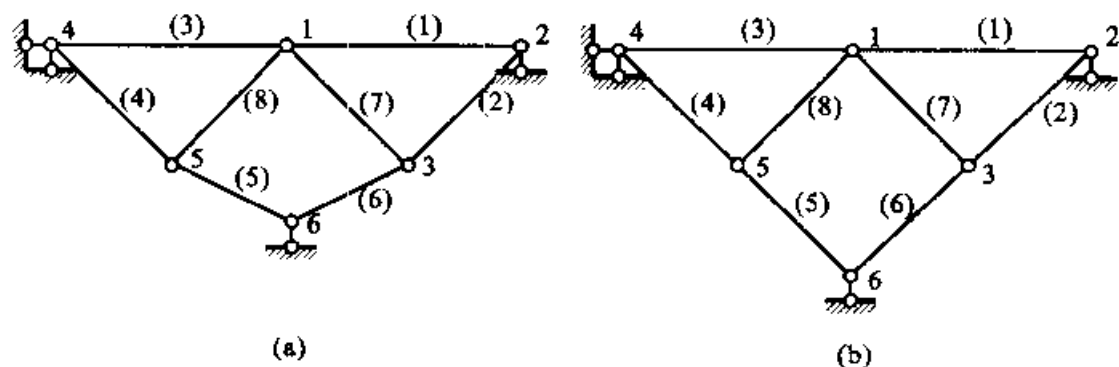


图 2-30

数据文档从略。先采用智能求解,计算机输出结果如下:

对图 2-30a:

将大地看成一刚片,记为刚片 0

刚片 1 由以下杆件构成:(1)、(2)、(7)

由三刚片规则,将单元(5)看成一刚片

另两刚片为:0、1,可得一大刚片 0

对图 2-30b:

将大地看成一刚片,记为刚片 0

刚片 1 由以下杆件构成:(1)、(2)、(7)

将刚片 0 看成第一个刚片

将刚片 1 看成第二个刚片

将杆件(5)看成第三个刚片

由三刚片规则,连接三刚片的三个(虚)

铰过一直线,瞬变体系

图 2-30b 仅将图 2-30a 中的结点 6 的位置稍加调整,但使平面体系性质发生了改变,求解器对这两种情况也分别给出了正确的计算步骤和结论。

为了获得图 2-30b 所示的机构运动模态,可采用自动求解,其运动模态如图 2-31 所示。

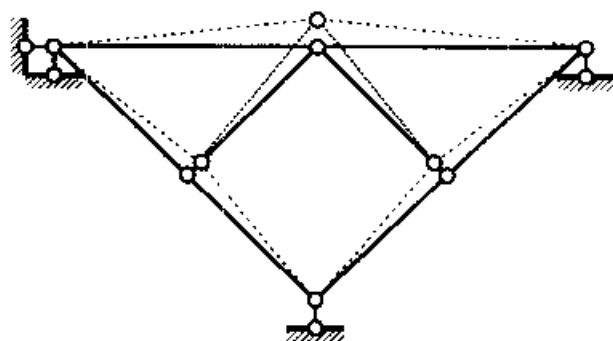


图 2-31

## §2-7 小 结

杆件结构是由众多杆件组成的。本章从几何构造的角度讨论杆件结构的合理组成规律以及静定结构与超静定结构在几何构造上的区别。

结构力学主要是研究杆件结构的受力状态和变形状态,因此通常把杆件看成变形体,把杆件结构看成由变形体组成的体系。在本章中由于讨论的问题不同,因此把杆件当作刚体,把杆件体系看作刚体组成的体系,这一点应加以注意。

有的刚体体系在几何构造上不合理,不能保证体系的几何不变性,因而不能作为结构。研究杆件结构的合理组成规律,就是把结构看成一个刚体体系,并研究如何保证这个体系成为一个几何不变体系。

本章主要内容可归纳为下列四点。

### 1. 几何构造分析的两个主要问题

对杆件体系进行几何构造分析,主要是讨论两个问题:

- (1) 判定体系是否可变,确定体系的自由度  $S$ 。
- (2) 判定体系中有无多余约束,确定多余约束的个数  $n$ 。

对杆件结构进行几何构造分析,主要是解决两个问题:

- (1) 结构应是一个几何不变体系,其自由度  $S$  应等于零。
- (2) 结构分为静定和超静定两类,它们的标志分别为  $n=0$  和  $n>0$ 。

### 2. 几何构造分析中采用的方法

对平面体系进行几何构造分析,可采用两种方法:

#### (1) 经典方法

主要作法是多次应用三角形规律及其四种形式,由局部到整体,完成整个体系的装配过程和分析过程。这种作法的特点是:直观灵巧,便于分析常规体系,但不便于分析复杂体系,也不便于编制计算程序。

辅助作法是求出体系的计算自由度  $W$ ,从而得到关于自由度  $S$  和多余约束个数  $n$  的下限公式。这种作法的特点是: $W$  的算式很简单,但单靠这种作法不能求出  $S$  和  $n$  的确定值。如果把上述主要作法和辅助作法结合起来,互相配合,有时会收到好的效果。

零载法是分析复杂体系的经典方法,将在 §4-3 中介绍。

#### (2) 计算机方法

在求解器中采用的是-一种便于编制程序的计算机方法。其主要思路是:把几何构造分析问题归结为一组齐次线性代数方程,再由解的性质得出几何构造分析的有关结论。

### 3. 关于三角形规律的运用问题

运用三角形规律对平面体系进行几何构造分析时,有几点值得注意:

(1) 三角形规律是组成无多余约束的几何不变体系的基本组成规律。这个规律也可归结为三种基本装配格式或三种基本构造单元。

(2) 要学会搭积木的方法。整个体系是搭起来的,是由多个构造单元依次装配而成的。这就是积零为整的方法。

首先在整个体系中找出第一个构造单元,作为装配过程的起点。然后从第一个构造单元出发,逐步装配新的构造单元,由小到大,由局部到整体,完成整个体系的装配过程。

(3) 装配方式通常有两种:

如果体系与地基之间只有三个约束,则从内部刚片出发进行装配。参看图 2-10 所示的例子(图 2-9a 也可采用这种装配方式)。

如果体系与地基之间的约束多于三个,则从地基出发进行装配。参看图 2-9b、c 所示的例子(图 2-9a 也可采用这种装配方式)。

(4) 进行等效变换。用瞬铰替代对应的两个链杆;用大刚片替代已经装配好的几何不变部分;用直线链杆替代曲形链杆;用一个刚片替代整个地基;用等效的多个单约束替代一个复约束;等等。

(5) 了解本法的应用范围。本法只适用于分析常规体系。分析某些复杂体系时应采用其他方法,如计算机方法和零载法。

(6) 三角形规律是浅显的,但规律的运用却灵活多变。要由浅入深地作必要的练习,逐步提高运用能力。

### 4. 关于计算自由度 $W$

$S$  和  $n$  都与体系的具体构造有关。但二者的差值  $S - n$  (即  $W$ ) 却与体系的具体构造无关,而只与体系所具有的部件和约束的个数有关。其计算公式为式(2-6)和(2-7)。由于  $S \geq W$ ,  $n \geq -W$ ,这样就得到了计算  $S$  和  $n$  的下限公式。在运用此公式时,应当注意将有多余约束的刚片变为无多余约束的刚片,将复约束换算成单约束。

根据  $W$  的数值,可对体系的几何构造特性得出一些结论,如下表所示。

$W$ 的数值	几何构造特性
$W > 0$	对象的自由度数大于约束数 体系为几何可变,不能用作结构
$W = 0$	对象的自由度数等于约束数 如体系为几何不变,则无多余约束,体系为静定结构 如体系为几何可变,则有多余约束



续表

W 的数值	几何构造特性
$W < 0$	对象的自由度数小于约束数 体系有多余约束 如体系为几何不变,则为超静定结构

## §2-8 思考与讨论

### §2-1 思考题

2-1 有的文献把几何可变体系称为几何不稳定体系,把几何不变体系称为几何稳定体系。材料力学中把压杆屈曲问题称为弹性稳定性问题。试对几何稳定性和弹性稳定性这两个不同概念加以比较。

2-2 “多余约束”从哪个角度来看才是多余的?

- (a) 从对体系的自由度是否有影响的角度看;
- (b) 从对体系的计算自由度是否有影响的角度看;
- (c) 从对体系的受力和变形状态是否有影响的角度看;
- (d) 从区分静定与超静定两类问题的角度看。

2-3 结合图示瞬变体系,试从不同角度说明瞬变体系的特点(按照几何构造分析中的假设,各杆均为刚性杆):

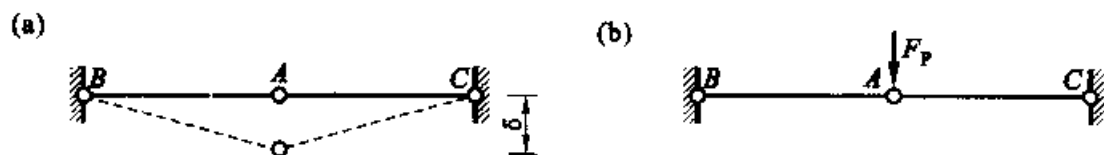
(a) 设 A 点位移  $\delta$  为微量,位移  $\delta$  是否有非零解(在几何方程中忽略高阶微量)? 体系的几何形状是否保持不变?

(b) 设 A 点位移  $\delta$  为有限量,位移  $\delta$  是否有非零解? 体系的几何形状是否保持不变?

(c) 在图 b 所示荷载  $F_P$  作用下,体系能否维持平衡?

(d) 在零荷载作用下,各杆轴力是否有非零解? 是否有唯一解?

试从以上讨论,归纳出瞬变体系的特点。



思考题 2-3 图

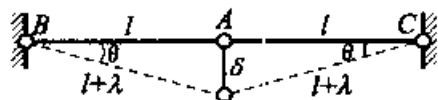
2-4 结合思考题 2-3 所示体系,假设体系中的各杆为弹性变形杆(杆长为  $l$ ,杆截面积为  $A$ ,弹性模量为  $E$ ,杆的伸长量为  $\lambda$ ),试从不同角度说明“瞬变体系”的特点:

(a) 设  $A$  点位移  $\delta$  为一阶微量, 试问杆件转角  $\theta$  和杆长伸长量  $\lambda$  各是几阶微量? 比值  $\frac{\delta}{\lambda}$  是多少? 杆件的微小伸长是否会引起很大的位移  $\delta$ ?

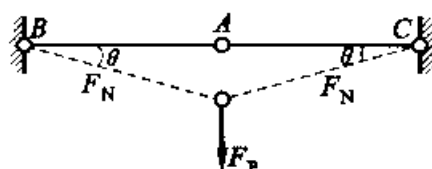
(b) 在图 b 所示荷载  $F_P$  作用下, 试根据变形后结构的几何图形(虚线所示)求杆件的轴力  $F_N$ 。轴力  $F_N$  与荷载  $F_P$  之间是否仍是线性关系?

试从以上讨论, 归纳出“瞬变体系”的特点。

(a)



(b)



思考题 2-4 图

## § 2-2 思考题

2-5 分析平面体系的几何构造时, 可以运用基本构造单元按照搭积木的装配方法进行。试总结自己的经验。

某些体系的装配方案只有一种, 某些体系的装配方案有几种, 试分别举例说明。对于图 2-9a, 图 2-11b, 图 2-12a, b 所示体系, 你能提出几种装配方案? (在图 2-11b 中, 也可把地基看作一个刚片。)

2-6 分析平面体系的几何构造时, 也可以运用基本构造单元按照拆积木的方式进行。试结合图 2-9a, b, c 所示体系进行拆卸, 并对原体系的几何构造特性作出结论。

2-7 在几何构造分析中可以进行哪些等效变换? 如何保证变换的等效性?

2-8 利用无穷远瞬铰概念进行几何构造分析时, 为什么可以采用关于  $\infty$  点和  $\infty$  线的四点结论 (§ 2-1 的第 7 小节)? 试结合图 2-13 所示体系用别的方法加以分析, 并说明上述四点结论的合理性。

## § 2-3 思考题

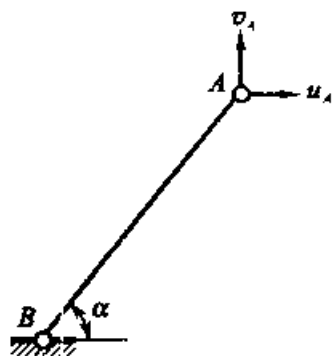
2-9 试对式 (2-8) 加以推导。在应用式 (2-8) 时应注意些什么? 试用式 (2-8) 重作例 2-4, 并采用几种不同的混合方案。

2-10 如果已经算出体系的计算自由度  $W$ , 而未进行几何构造分析, 则对体系的自由度  $S$  和多余约束数  $n$  能得出什么结论? 如果再进一步已知体系为几何不变, 则对  $n$  能得出什么结论?

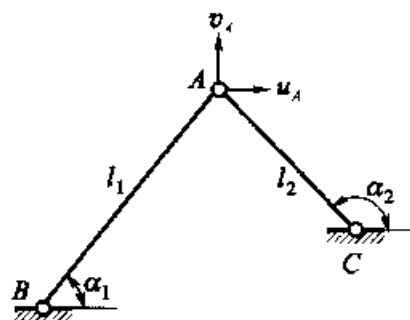
## § 2-6 思考题

2-11  $A$  点在平面内有两个位移  $u_A$  和  $v_A$ 。如果加上链杆  $BA$  与地基相联, 试问在  $u_A$  和  $v_A$  之间可建立什么样的约束方程?  $AB$  杆长为  $l$ 。

2-12 A点在平面内有两个位移 $u_A$ 和 $v_A$ 。如果加上两个链杆BA和CA与地基相联,试在 $u_A$ 和 $v_A$ 之间建立相应的两个约束方程。由这两个齐次线性代数方程求解 $u_A$ 和 $v_A$ 时,在什么情况下有唯一的平凡解( $u_A=0, v_A=0$ )?在什么情况下, $u_A$ 和 $v_A$ 有非零解?从几何构造分析来看,从这两种情况可分别引出什么结论?



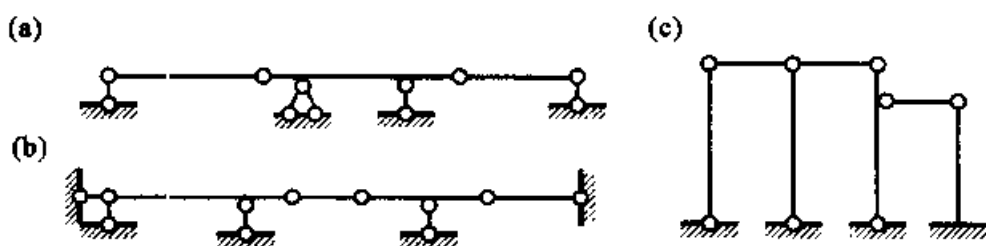
思考题 2-11 图



思考题 2-12 图

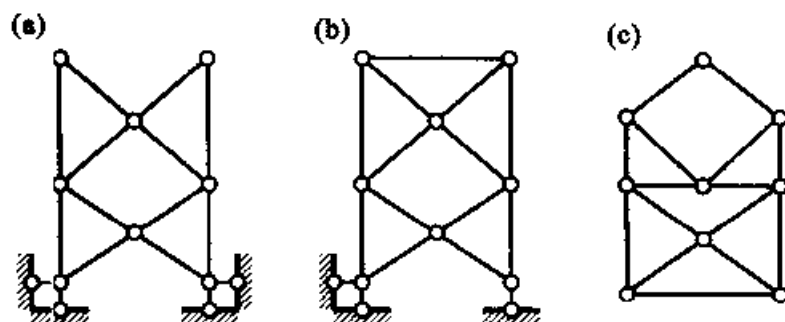
### 习 题

2-1 试分析所示体系的几何构造。



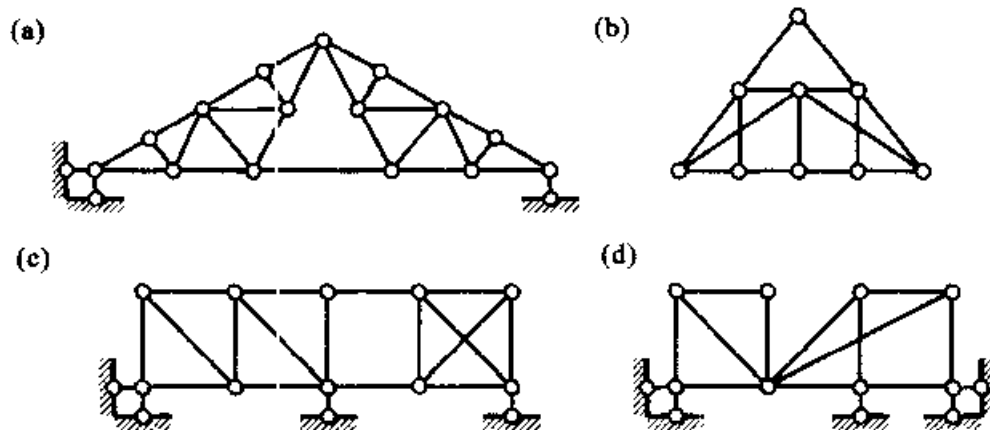
题 2-1 图

2-2 试分析所示体系的几何构造。



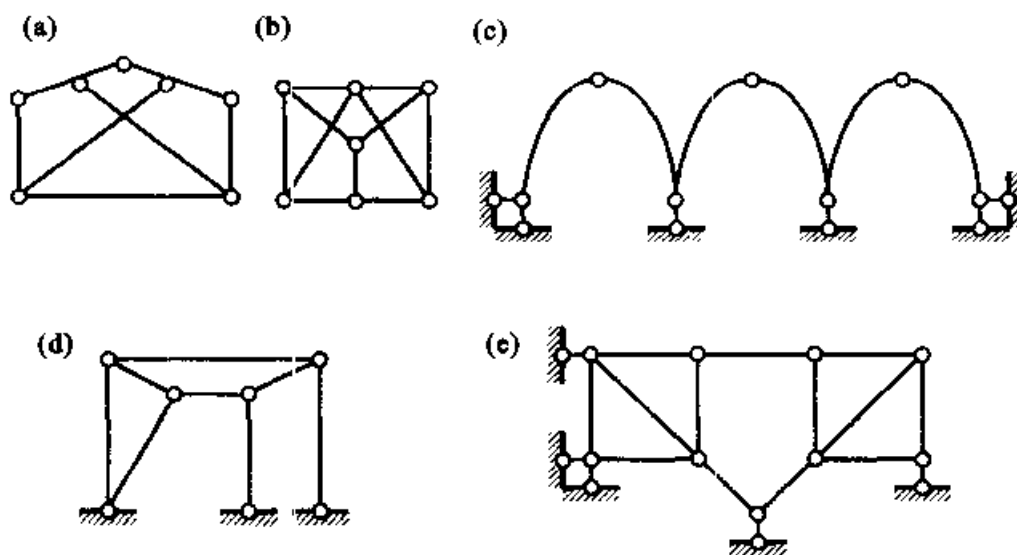
题 2-2 图

2-3 试分析所示体系的几何构造。



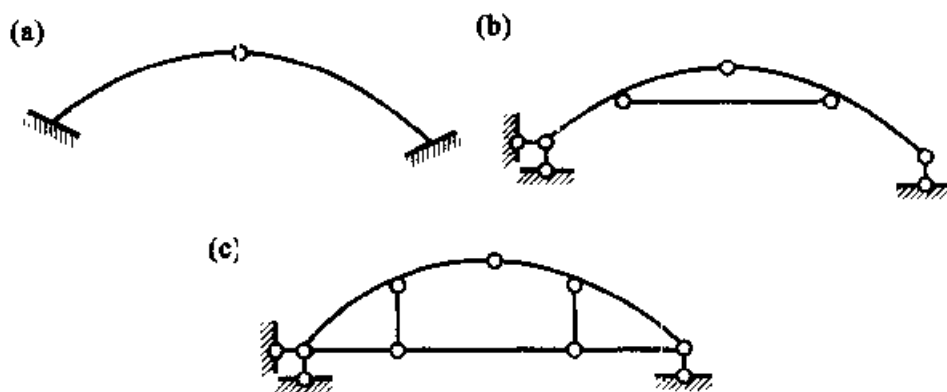
题 2-3 图

2-4 试分析所示体系的几何构造。



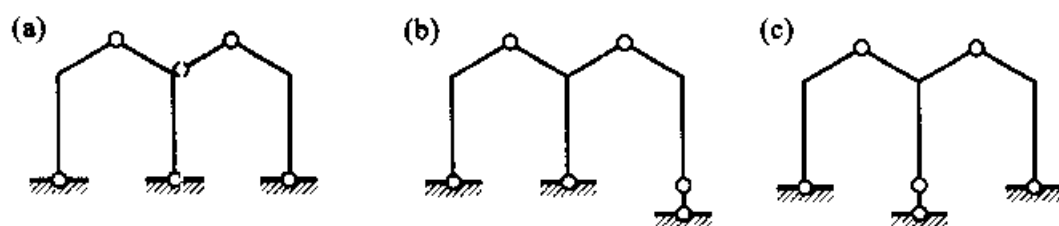
题 2-4 图

2-5 试分析所示体系的几何构造。



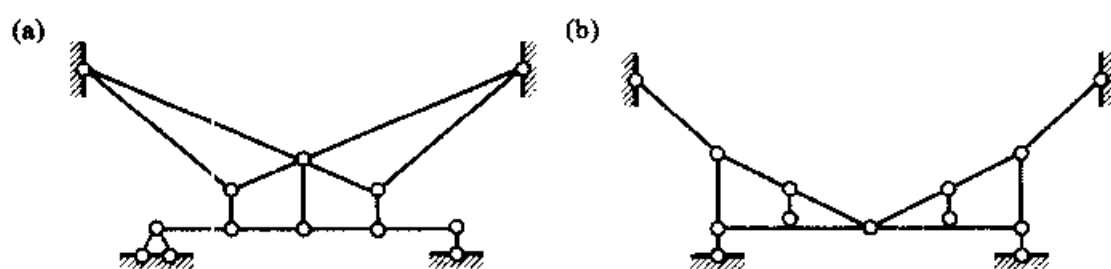
题 2-5 图

2-6 试分析所示体系的几何构造。



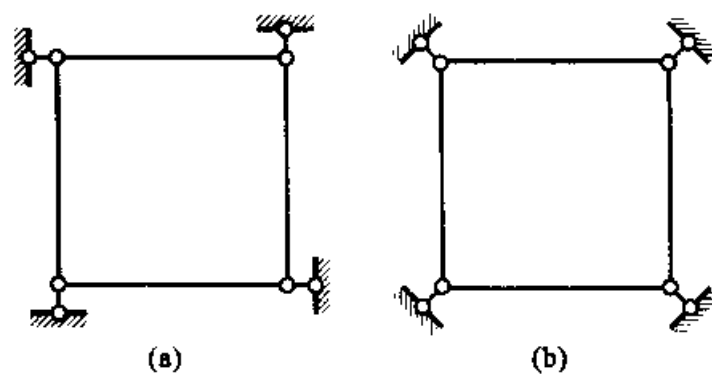
题 2-6 图

2-7 试分析所示体系的几何构造。



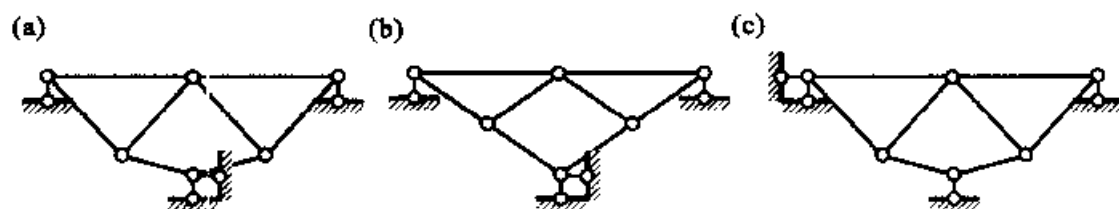
题 2-7 图

2-8 试分析所示体系的几何构造。



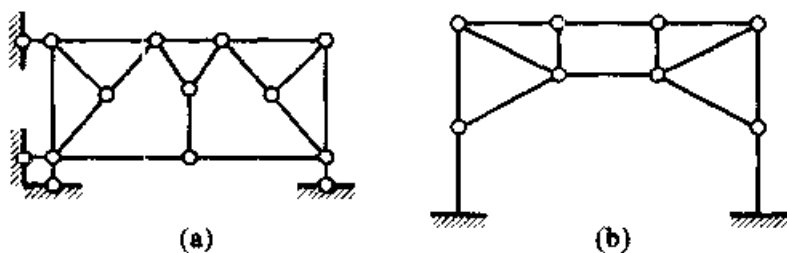
题 2-8 图

2-9 试分析所示体系的几何构造。



题 2-9 图

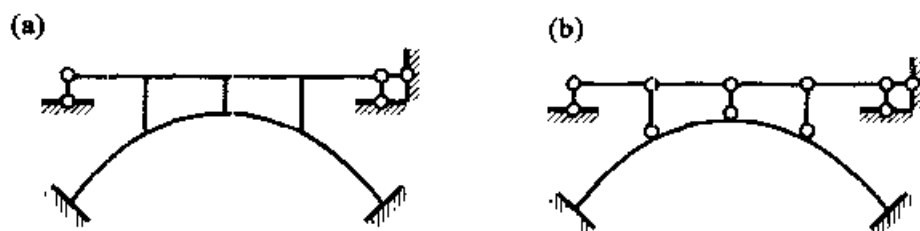
2-10 试分析图示体系的几何构造。



题 2-10 图

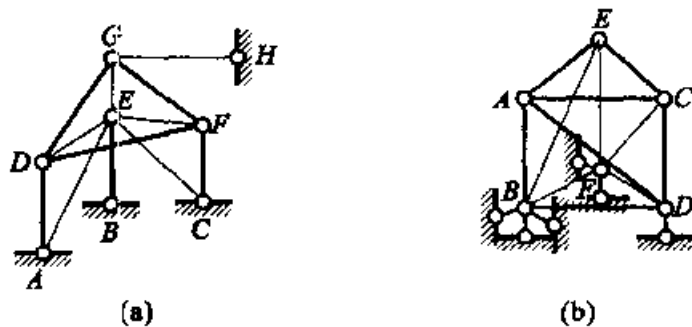
2-11 试求习题 2-5 至 2-10 中各体系的计算自由度。

2-12 试求所示体系的计算自由度  $W$ 。



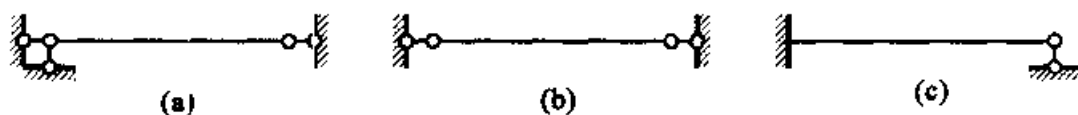
题 2-12 图

2-13 试分析图示空间体系的几何构造。



题 2-13 图

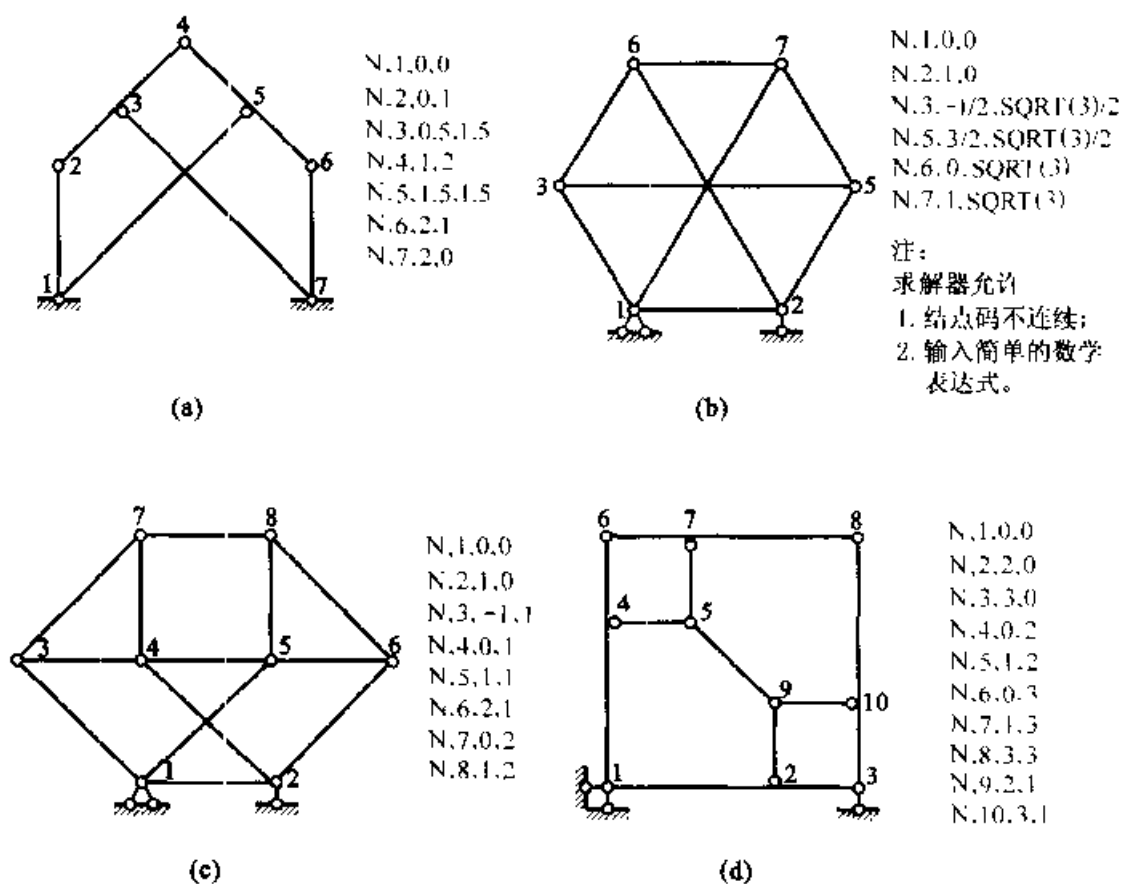
2-14 试在求解器中输入以下单跨梁,并分别用自动模式和智能模式作几何构造分析。



题 2-14 图

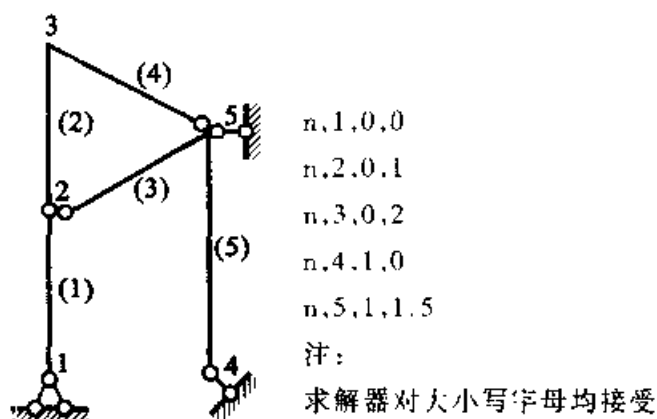
2-15 试在求解器中输入以下平面体系,并分别用自动模式和智能模式作几何构造

造分析, 结点坐标见图侧的数据命令。



题 2-15 图

2-16 求解器中可以输入较为任意和复杂的结点连接(如单向连接、斜向连接等), 做法可参见联机帮助。作为练习, 试在求解器中输入图小平面体系[其中杆件(5)同结点2的连接为斜方向的单向连接], 并用自动模式作几何构造分析。



题 2-16 图

# 第一部分 静定结构

下面4章讨论静定结构。第3章讨论静定结构的受力分析,第4章为静定结构总论,第5章讨论影响线,第6章为结构位移计算与虚功-能量法简述。

静定结构与超静定结构有重要的区别。对静定结构进行受力分析时,只需考虑平衡条件,而不需考虑变形条件。

在第3章中,我们先对各类典型的静定结构分别进行讨论,侧重于个性;在第4章中再对静定结构进行综合讨论,侧重于共性。以上都只涉及到固定荷载作用,在第5章中进一步讨论移动荷载作用。由个性到共性,由固定荷载到移动荷载,通过反复学习和多方运用,希望准确而熟练地掌握静力分析的基本方法:选取隔离体,建立平衡方程。这是学习结构力学时应当掌握的基本功之一。

必须重视基本功的训练。历来教学实践证明,在超静定结构和专题部分的学习中暴露出来的许多问题,追根溯源,其病因常常是在静定结构的学习中遗留下来的。

有些初学者认为“隔离体和平衡方程早就学过了,静定结构部分没有新理论”。其实“学过了”这种说法,不等于都真正学懂了。所谓学懂,有不同的层次。由低层次的懂到高层次的懂,由入门到登堂入室,还有一段长路程。在静定结构的静力分析中,基本原理本来就是少数几条,但基本原理的运用却是变化无穷的。对于基本原理,困难不在于理解,而在于运用;不在于有知识,而在于有能力,有驾驭基本原理解决复杂问题的能力,在“驭”字上要多花力气。少讲多练,在学习静定结构时更应如此。

学习静定结构各章时,应当在以下四个方面注意提高:

(1) 要由会算一根梁和简单桁架提高到会算复杂的静定结构系统。由杆到杆系,由单元到结构,这里有一个不小的台阶。但是,结构总可以分解成杆件和单元,在牢固掌握杆件和单元分析方法的基础上,再学会“化繁为简”的分解方法,这个台阶是容易上去的。



(2) 要了解静力分析与构造分析的内在联系,对静力分析要有一个规律性的认识。静定结构的形式多种多样,静力分析的具体步骤也是千差万别,从何下手,按照什么顺序进行,初学者对此往往感到茫然。其实,这里是有规律的。如果注意静力分析与构造分析之间的联系,就可以找到这个规律。所谓构造分析,就是研究一个结构如何用单元组合起来,研究“如何搭”的问题。所谓静力分析,就是研究如何把静定结构的内力计算问题分解为单元的内力计算问题,研究“如何拆”的问题。组合与分解,搭与拆,是一对相反的过程。因此,在静力分析中如果截取单元的次序与结构组成时添加单元的次序正好相反,则静力分析的工作就可以顺利进行。总之,从构造分析入手,反其道而行之,这就是对静定结构进行静力分析应当遵循的规律。

(3) 要在静力分析的基础上进一步了解结构的受力性能和结构的合理型式。每类结构型式(梁、刚架、桁架、组合结构、拱、悬索)在受力性能上有什么特点,要在静力分析的基础上进行总结,什么是拱轴的合理曲线,什么是桁架的合理型式,要根据静力分析进行优化和创新。既要学会分析,还要学会概括和创新。

(4) 不仅要掌握在固定荷载作用下的静力分析,而且要学习在移动荷载作用下的静力分析。荷载移动到什么位置最为不利?荷载移动时结构中产生的最大内力是多少,这些新问题将应用“影响线”这个新工具加以解决。

浅尝辄止的缺点,在学习静定结构时一定要注意克服。

# 第3章

## 静定结构的受力分析

§ 3-1 梁的内力计算的回顾	§ 3-8 三铰拱
§ 3-2 静定多跨梁	* § 3-9 悬索结构
§ 3-3 静定平面刚架	* § 3-10 用求解器确定截面单杆
§ 3-4 静定空间刚架	* § 3-11 用求解器求解组合结构
§ 3-5 静定平面桁架	§ 3-12 小结
§ 3-6 静定空间桁架	§ 3-13 思考与讨论
§ 3-7 组合结构	习题

本章结合几种常用的典型结构型式讨论静定结构的受力分析问题,涉及梁、刚架、桁架、组合结构、拱、悬索等。内容包括支座反力和内力的计算、内力图的绘制,受力性能的分析等。

本章的讲解是在材料力学等课程的基础上进行的,但在讨论问题的深度和广度上有显著的提高,这一点必须注意,而且这一章的内容对学习下面各章是很重要的。

### § 3-1 梁的内力计算的回顾

#### 1. 截面的内力分量及其正负号规定

在平面杆件的任一截面上,一般有三个内力分量:轴力  $F_N$ 、剪力  $F_Q$  和弯矩  $M$ 。

截面上应力沿杆轴切线方向的合力,称为轴力。轴力以拉力为正。

截面上应力沿杆轴法线方向的合力称为剪力。剪力以绕微段隔离体顺时针转者为正。

截面上应力对截面形心的力矩称为弯矩。在水平杆件中,当弯矩使杆件下部受拉时,弯矩为正(图 3-1)。

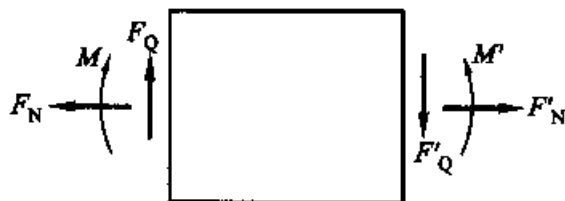


图 3-1

作轴力图 and 剪力图时要注明正负号。作弯矩图时,我们规定弯矩图的纵坐标应画在杆件受拉纤维一边,不注明正负号。

## 2. 截面法

计算指定截面内力的基本方法是截面法,即将杆件在指定截面切开,取左边部分(或右边部分)为隔离体,利用隔离体的平衡条件,确定此截面的三个内力分量。

由截面法可以得出截面内力如下:

- { 轴力等于截面一边的所有外力沿杆轴切线方向的投影代数和。
- { 剪力等于截面一边的所有外力沿杆轴法线方向的投影代数和。
- { 弯矩等于截面一边的所有外力对截面形心的力矩代数和。

画隔离体受力图时,要注意以下几点:

- (1) 隔离体与其周围的约束要全部截断,而以相应的约束力代替。
- (2) 约束力要符合约束的性质。截断链杆(两端为铰的直杆、杆上无荷载作用)时,在截面上加轴力。截断受弯杆件时,在截面上加轴力、剪力和弯矩。去掉滚轴支座、铰支座、固定支座时分别加一个、二个、三个支座反力(固定支座的三个反力中有一个是力偶)。

(3) 隔离体是应用平衡条件进行分析的对象。在受力图中只画隔离体本身所受到的力,不画隔离体施给周围的力。

(4) 不要遗漏力。受力图上的力包括两类:一类是荷载,一类是截断约束处的约束力。

(5) 未知力一般假设为正号方向,数值是代数值(正数或负数)。已知力按实际方向画,数值是绝对值(正数)。未知力计算得到的正负号就是实际的正负号。

## 3. 荷载与内力之间的微分关系

在荷载连续分布的直杆段内,取微段  $dx$  为隔离体,如图 3-2 所示。其中  $q_x$  和  $q_y$  分别为沿  $x$  和  $y$  方向的荷载集度。在图 3-2 所示荷载和坐标设置的情况下,由平衡条件可导出微分关系如下:

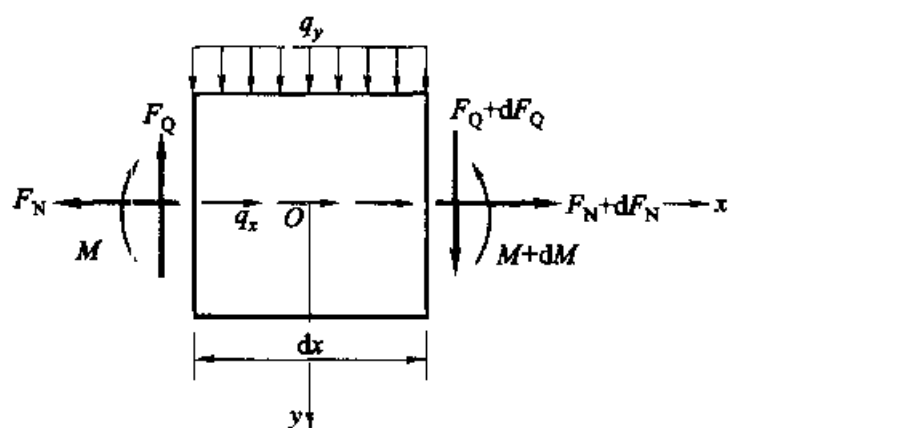
$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_N}{dx} &= -q_x \\ \frac{dF_Q}{dx} &= -q_y \\ \frac{dM}{dx} &= F_Q \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$


图 3-2

#### 4. 荷载与内力之间的增量关系

在集中荷载作用处,取微段为隔离体,如图 3-3 所示。其中  $F_x$  是水平集中力,向右为正;  $F_y$  是竖向集中力,向下为正;  $M_0$  是力偶,顺时针方向为正。右侧截面与左侧截面相比,内力增量分别为  $\Delta F_N$ 、 $\Delta F_Q$  和  $\Delta M$ 。由平衡条件可求得增量关系如下:

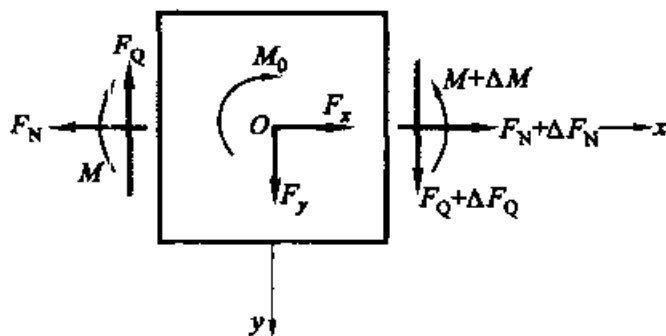


图 3-3

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_N &= -F_x \\ \Delta F_Q &= -F_y \\ \Delta M &= M_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

#### 5. 荷载与内力之间的积分关系

从直杆中取出荷载连续分布的一段 AB(图 3-4),由式(3-1)积分可

得:

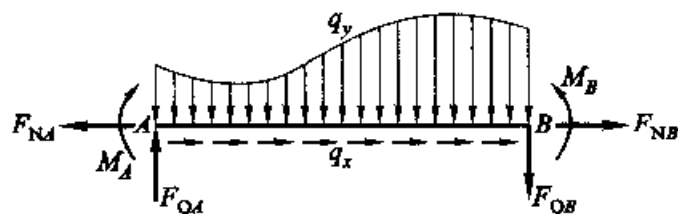


图 3-4

$$\left. \begin{aligned} F_{NB} &= F_{NA} - \int_{x_A}^{x_B} q_x dx \\ F_{QB} &= F_{QA} - \int_{x_A}^{x_B} q_y dx \\ M_B &= M_A + \int_{x_A}^{x_B} F_Q dx \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

积分关系的几何意义是:

B 端的轴力等于 A 端的轴力减去该段荷载  $q_x$  图的面积。

B 端的剪力等于 A 端的剪力减去该段荷载  $q_y$  图的面积。

B 端的弯矩等于 A 端的弯矩加上此段剪力图的面积。

荷载与内力之间的关系式,对于绘制内力图和校核内力图都有用处。

### 6. 分段叠加法作弯矩图

对结构中的直杆段作弯矩图时,可采用分段叠加法,使绘制工作得到简化。

先讨论简支梁(图 3-5a)的情形,荷载包括两部分:跨间荷载  $q$  和端部力偶  $M_A$ 、 $M_B$ 。当端部力偶单独作用时,弯矩图( $\bar{M}$  图)为直线图形,如图 3-5b 所示。当跨间荷载  $q$  单独作用时,弯矩图( $M^0$  图)如图 3-5c 所示。如果在  $\bar{M}$  图的基础上再叠加  $M^0$  图,即得到总弯矩图( $M$  图)如图 3-5d 所示。

应当指出,这里所说的弯矩图叠加,是指纵坐标的叠加,而不是指图形的简单拼合。图 3-5d 所示三个纵坐标  $\bar{M}$ 、 $M^0$  与  $M$  之间的叠加关系为

$$\bar{M}(x) + M^0(x) = M(x)$$

注意,图 3-5d 中的纵坐标  $M^0$ ,如同  $\bar{M}$ 、 $M$  一样,也是垂直于杆轴 AB,而不是垂直于图中的虚线 A'B'。

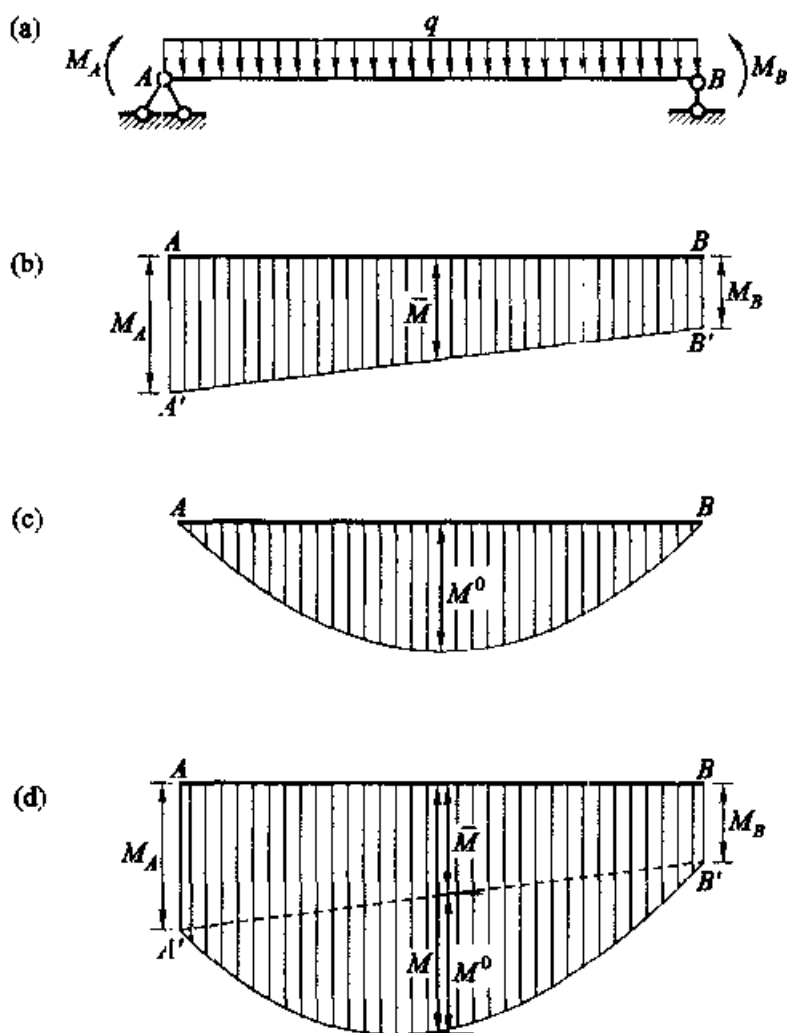


图 3-5

现在讨论结构中任意直杆段的弯矩图。以图 3-6a 中的杆段  $AB$  为例, 其隔离体如图 3-6b 所示, 隔离体上的作用力除荷载  $q$  外, 在杆端还有弯矩  $M_A$ 、 $M_B$ , 轴力  $F_{NA}$ 、 $F_{NB}$  和竖向力  $F_{yA}$ 、 $F_{yB}$ 。为了说明杆段  $AB$  弯矩图的特性, 把它与图 3-6c 中的简支梁相比。设简支梁承受相同的荷载  $q$  和相同的杆端力偶  $M_A$ 、 $M_B$ , 但支座竖向反力为  $F_{yA}^0$ 、 $F_{yB}^0$ 。在图 3-6b 和 c 中分别应用平衡方程求  $F_{yA}$ 、 $F_{yB}$  和  $F_{yA}^0$ 、 $F_{yB}^0$ , 可知  $F_{yA} = F_{yA}^0$ 、 $F_{yB} = F_{yB}^0$ , 因此二者的弯矩图也彼此相同。这样, 作任意直杆段弯矩图的问题(图 3-6b)就归结为作相应简支梁弯矩图的问题(图 3-6c), 从而也可采用分段叠加法作  $M$  图, 如图 3-6d 所示。具体作法分成两步: 首先根据  $A$ 、 $B$  两点的弯矩  $M_A$ 、 $M_B$ , 作直线  $\bar{M}$  图; 然后以此直线为基线, 再叠加相应简支梁  $AB$  在跨间荷载作用下的  $M^0$  图。

利用上述关于内力图的特性和弯矩图的分段叠加法, 可将梁的弯矩图

的一般作法归纳如下:

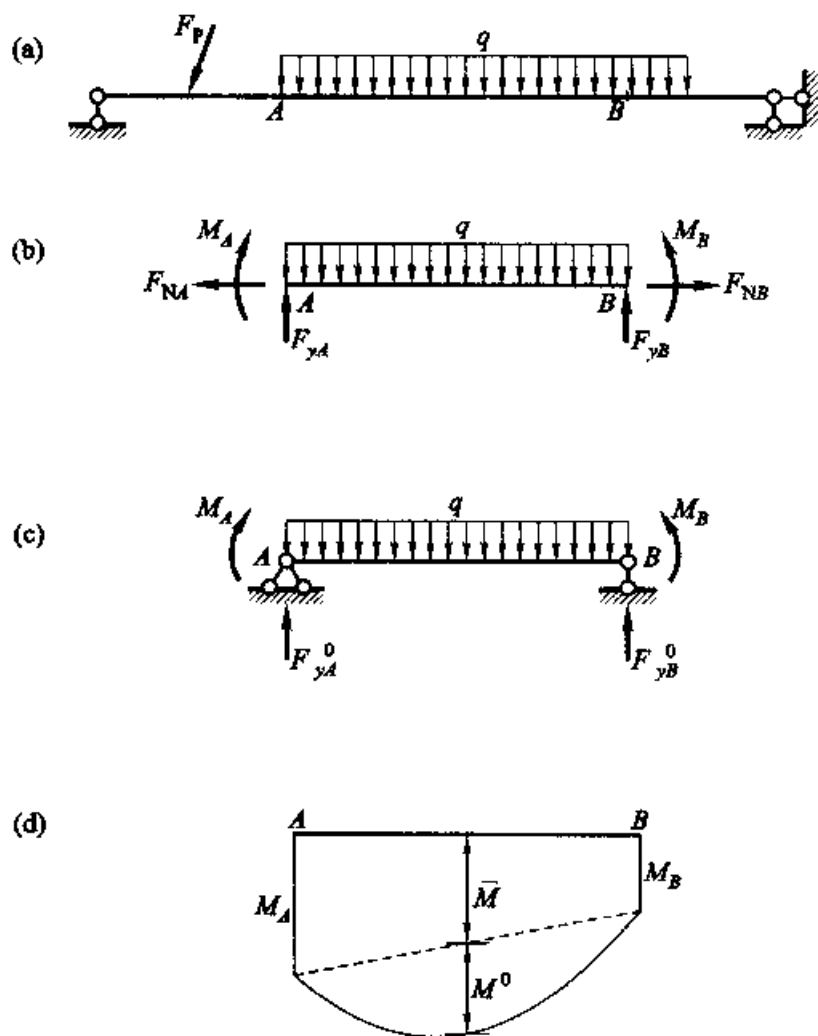


图 3-6

(1) 选定外力的不连续点(如集中力作用点、集中力偶作用点、分布荷载的起点和终点等)为控制截面,求出控制截面的弯矩值。

(2) 分段画弯矩图。当控制截面间无荷载时,根据控制截面的弯矩值,即可作出直线弯矩图。当控制截面间有荷载作用时,根据控制截面的弯矩值作出直线图形后,还应叠加这一段按简支梁求得的弯矩图。

**例 3-1** 试作图 3-7a 所示简支梁的内力图。

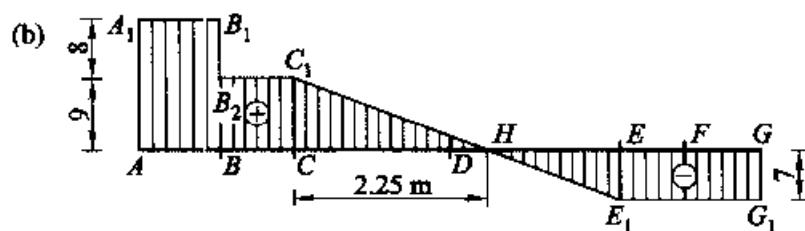
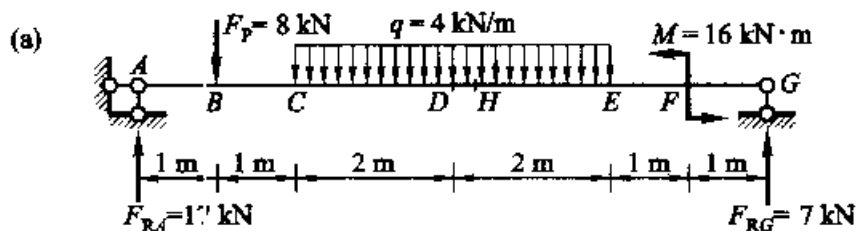
**解** (1) 作剪力图

AB、BC、EF、FG 各段无荷载作用,  $F_Q$  为常数,  $F_Q$  图为水平线。CE 段有均布荷载,  $F_Q$  图是斜直线。从 A 端开始,可求出控制截面的剪力如下:

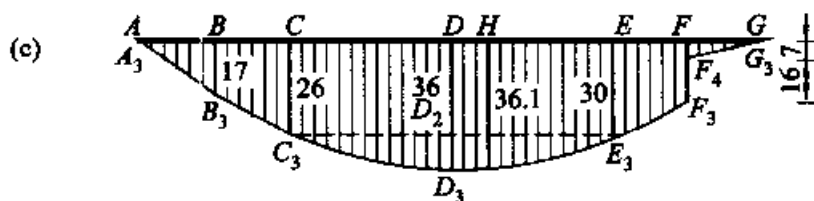
$$F_{QA} = F_{RA} = 17 \text{ kN}$$

$$F_{QB}^R = F_{RA} - F_P = 17 \text{ kN} - 8 \text{ kN} = 9 \text{ kN}$$

$$F_{QD} = F_{RD} - F_p - q \times 4 \text{ m} = 17 \text{ kN} - 8 \text{ kN} - 16 \text{ kN} = -7 \text{ kN}$$



$F_Q$  图 (单位 kN)



$M$  图 (单位 kN·m)

图 3-7

依次在  $F_Q$  图 (图 3-7b) 上定出  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $E_1$  诸点。作水平线  $A_1B_1$ 、 $B_1C_1$ 、 $E_1G_1$ , 作斜直线  $C_1E_1$ 。

## (2) 作弯矩图

选  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $F^R$ 、 $G$  为控制截面, 求出其弯矩值如下:

$$M_A = 0$$

$$M_B = F_{RA} \times 1 \text{ m} = 17 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = F_{RA} \times 2 \text{ m} - F_p \times 1 \text{ m} = 34 \text{ kN} \cdot \text{m} - 8 \text{ kN} \cdot \text{m} = 26 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_E = F_{RG} \times 2 \text{ m} + M = 14 \text{ kN} \cdot \text{m} + 16 \text{ kN} \cdot \text{m} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_F^L = F_{RG} \times 1 \text{ m} + M = 7 \text{ kN} \cdot \text{m} + 16 \text{ kN} \cdot \text{m} = 23 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_F^R = F_{RG} \times 1 \text{ m} = 7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_G = 0$$

依次在  $M$  图 (图 3-7c) 上定出  $A_3$ 、 $B_3$ 、 $C_3$ 、 $E_3$ 、 $F_3$ 、 $F_4$ 、 $G_3$  诸点。在  $AB$ 、 $BC$ 、 $EF$  和  $FG$  各段无荷载作用。连  $A_3B_3$ 、 $B_3C_3$ 、 $E_3F_3$ 、 $F_4G_3$  等直线, 即为弯矩图。

$CE$  段有均布荷载。以  $C_3E_3$  为基线 (图 3-7c 中虚线), 叠加以  $CE$  为



跨度的简支梁在均布荷载作用下的弯矩图,可作出抛物线  $C_1D_1E_1$ ,中点的竖距  $D_1D_1$  为  $\frac{4 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2}{8} = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 截面  $D$  最后弯矩值为

$$\frac{26 \text{ kN} \cdot \text{m} + 30 \text{ kN} \cdot \text{m}}{2} + 8 \text{ kN} \cdot \text{m} = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

为了确定弯矩的最大值  $M_{\max}$ ,首先需要确定发生最大弯矩的截面位置。

由微分关系  $\frac{dM}{dx} = F_Q$  得知,如果  $F_Q = 0$ ,则  $\frac{dM}{dx} = 0$ 。因此,  $F_Q$  图的零点相应于  $M$  图的极值点。在图 3-7b 中  $F_Q$  图的零点  $H$  的位置可确定如下:在  $CH$  段中,剪力图的斜率为  $\frac{dF_Q}{dx} = -\frac{CC_1}{CH}$ ,利用微分关系  $\frac{dF_Q}{dx} = -q$ ,由此求出  $\overline{CH} = \frac{9 \text{ kN}}{4 \text{ kN/m}} = 2.25 \text{ m}$ 。  $H$  点的位置确定以后,即可利用积分关系式求得  $M_H$

$$M_H = M_C + \int_C^H F_Q dx = 26 \text{ kN} \cdot \text{m} + \frac{1}{2} \times 9 \text{ kN} \times 2.25 \text{ m} = 36.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

### § 3-2 静定多跨梁

简支梁、悬臂梁和伸臂梁是静定梁中最简单的情形。多次利用这些构造单元,可以得到各种形式的静定多跨梁。图 3-8a 所示为公路桥使用的静定多跨梁,其计算简图如图 3-8b 所示。

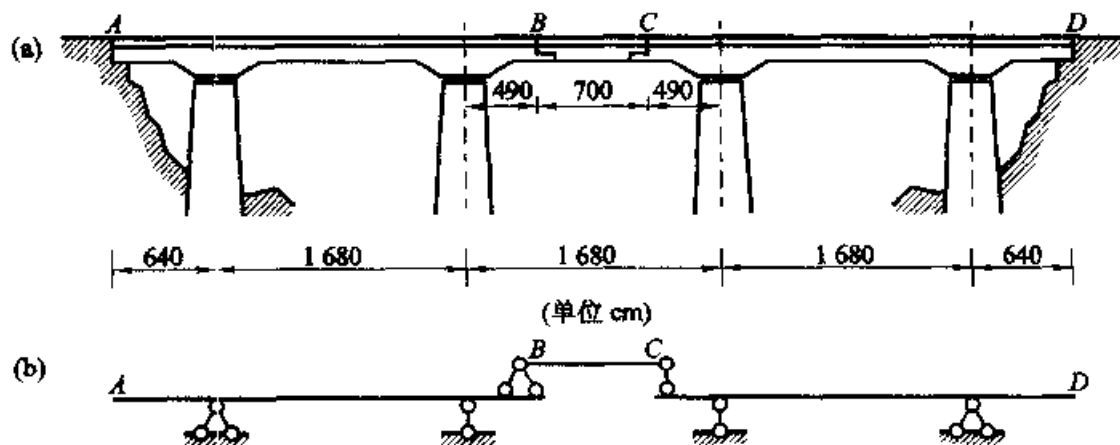


图 3-8

从几何构造分析知道,梁  $AB$  和  $CD$  直接由支杆固定于基础,是几何不变的。短梁  $BC$  两端支于梁  $AB$  和  $CD$  的伸臂上面。整个结构是几何不变的。梁  $AB$  和  $CD$  本身(不依赖梁  $BC$ )就可以承受荷载,称为基本部分。梁

BC 依靠基本部分的支承才能承受荷载并保持平衡,称为附属部分。

在檩条中也可采用静定多跨梁这种结构形式,图 3-9a 所示为木檩条的构造。在檩条接头处采用斜搭接的形式,并用螺栓系紧,这种接头可看作铰结点。计算简图如图 3-9b 所示,梁的支承关系如图 3-9c 所示。在竖向荷载作用下,CD 和 GH 是附属部分,AC、DG、IJ 是基本部分。在图 3-9b 中,未知支座反力的数目为 7,梁的中间加了 4 个铰,每加一个铰就增加一个静力平衡方程,即在有铰的截面,弯矩应为零(铰任一边所有外力对铰的力矩之和应等于零)。再加上三个整体平衡方程,静力平衡方程共有七个。未知反力数与静力平衡方程数相等,因此,此梁是静定的。

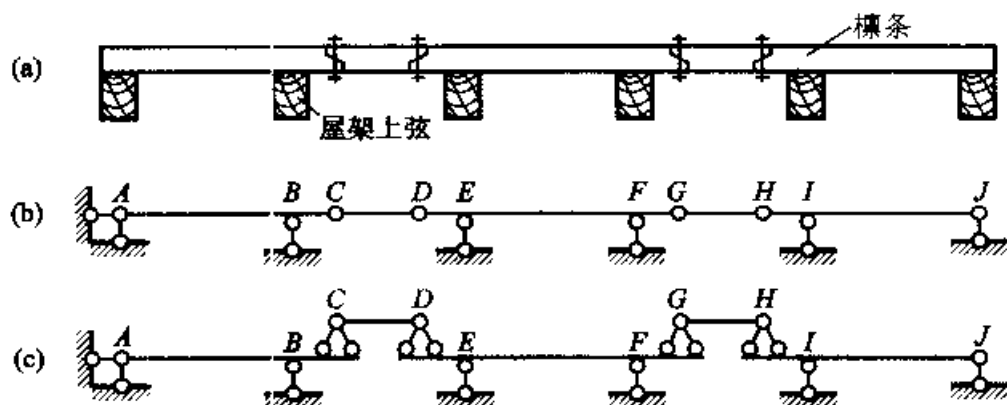


图 3-9

从几何构造来看,静定多跨梁是由几根梁组成的,组成的次序是先固定基本部分,后固定附属部分。因此,计算静定多跨梁时,我们要遵守的原则是:先计算附属部分,再计算基本部分。将附属部分的支座反力反其指向,就是加于基本部分的荷载。这样,便把多跨梁拆成单跨梁,各个解决,从而可避免解算联立方程。将各单跨梁的内力图连在一起,就是多跨梁的内力图。弯矩和剪力的正负号规定,同单跨梁。绘制弯矩图时,一般习惯把竖距画在受拉纤维一边。

**例 3-2** 试作图 3-10a 所示静定多跨梁的内力图。

**解** 此梁的组成次序为先固定梁 AB,再固定梁 BD,最后固定梁 DF。基本部分与附属部分之间的支承关系如图 3-10b 所示。

计算时按照相反的次序拆成单跨梁,如图 3-10c 所示。先计算附属部分 FD。D 点反力求出后,反其指向就是梁 DB 的荷载。梁 DB 在 B 点的反力求出后,反其指向就是梁 BA 的荷载。最后计算梁 BA,求出 A 端的支座反力。

支座反力求出后,即可作 M 图和  $F_Q$  图,如图 3-10d 和 e 所示。这里,

荷载  $F_P$  作用在附属部分上,而对基本部分也同时产生内力。与此相反,如果荷载作用在基本部分上,则对附属部分并不引起内力。

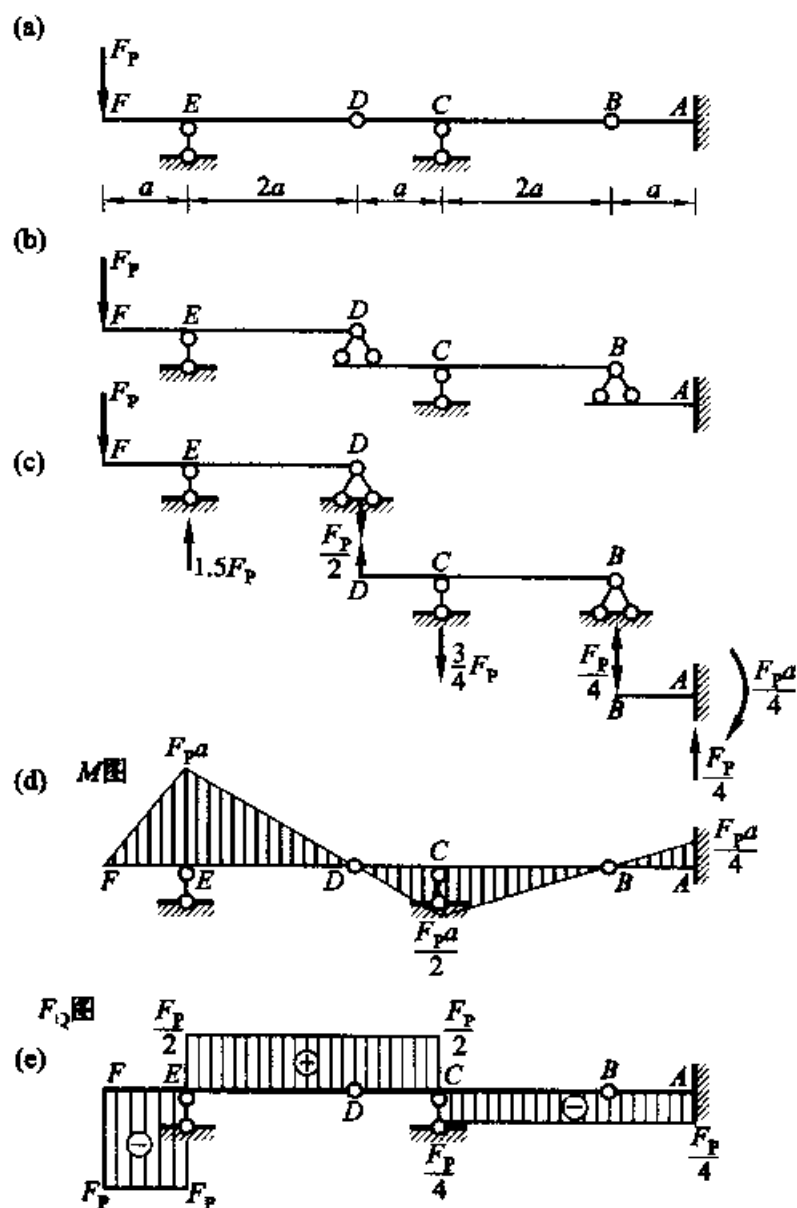


图 3-10

在设计静定多跨梁时,铰的安放位置可以适当选择,以减小弯矩图的峰值,从而节约材料。下面举例说明。

**例 3-3** 图 3-11a 所示为一两跨梁,全长承受均布荷载  $q$ 。试求铰  $D$  的位置,使负弯矩峰值与正弯矩峰值相等。

**解** 以  $x$  表示铰  $D$  与支座  $B$  之间的距离。在图 3-11b 中,先计算附属

部分 AD, 求出支座反力为  $\frac{q(l-x)}{2}$ , 并作出弯矩图, 跨中正弯矩峰值为  $\frac{q(l-x)^2}{8}$ 。

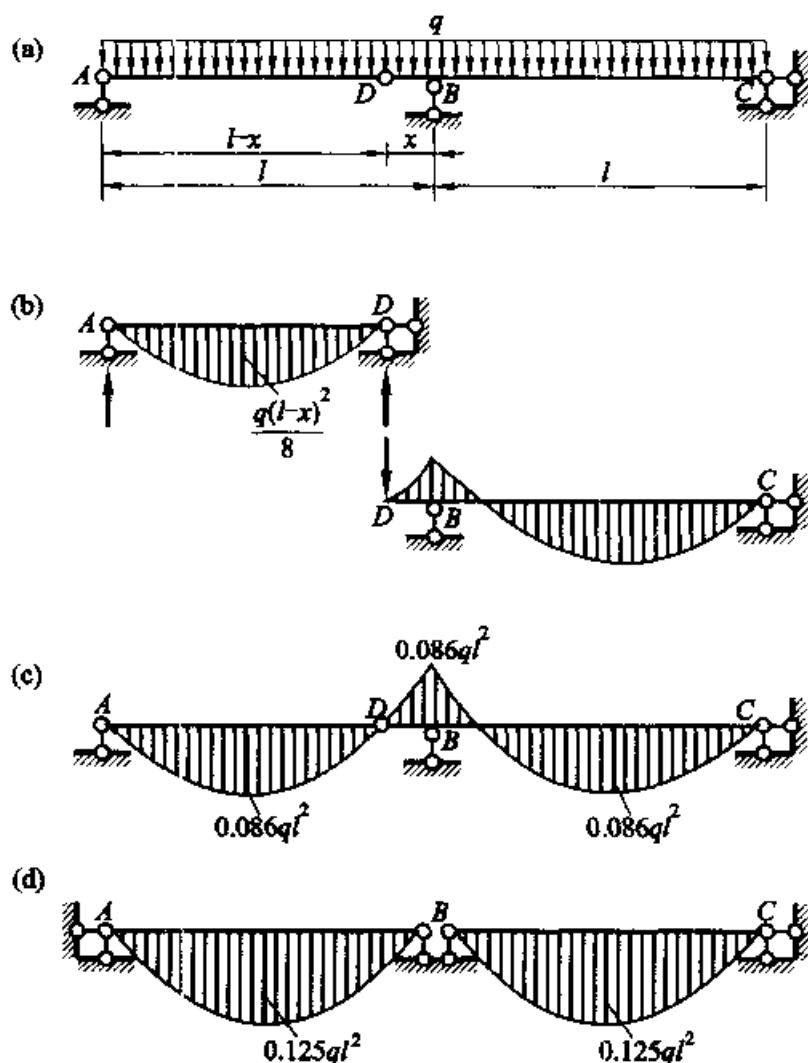


图 3-11

再计算基本部分 DC, 将附属部分在 D 点所受的支承反力  $\frac{q(l-x)}{2}$  反其指向, 当作荷载加于基本部分, 支座 B 处的负弯矩峰值为  $\frac{q(l-x)x}{2} + \frac{qx^2}{2}$ 。

令正负弯矩峰值彼此相等, 即

$$\frac{q(l-x)^2}{8} = \frac{q(l-x)x}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

得

$$x = 0.172l$$

铰的位置确定后,可作弯矩图如图 3-11c 所示,其中正负弯矩峰值都等于  $0.086ql^2$ 。

如果改用两个跨度为  $l$  的简支梁,则弯矩图如图 3-11d 所示。由此可知,静定多跨梁的弯矩峰值比一系列简支梁的要小,二者的比值为  $\frac{0.086}{0.125} = 68.8\%$ 。

一般说来,静定多跨梁与一系列简支梁相比,材料用量可少一些,但构造要复杂一些。

### § 3-3 静定平面刚架

#### 1. 刚架的特点

刚架和桁架都是由直杆组成的结构。二者的区别是:桁架中的结点全部都是铰结点,刚架中的结点全部或部分为刚结点。图 3-12a 是一个几何可变的铰结体系,为了使它成为几何不变,一种办法是增设斜杆,使它成为桁架结构(图 3-12b),另一种办法是把原来的铰结点  $B$  和  $C$  改为刚结点,使它成为刚架结构(图 3-12c)。由此看出,刚架中由于具有刚结点,因而不需斜杆也可组成几何不变体系,使结构内部具有较大的空间,便于使用。

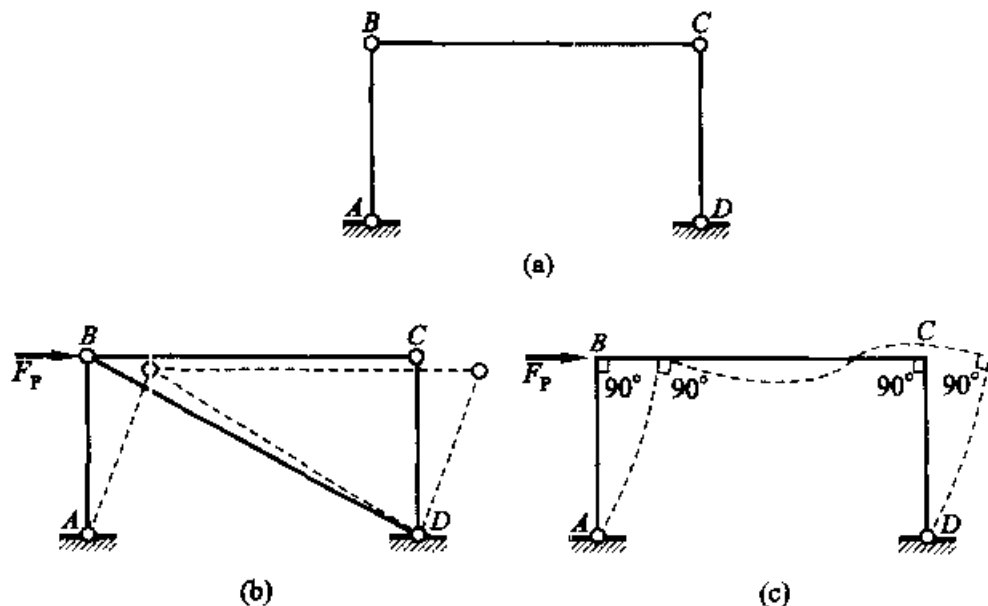


图 3-12

与铰结点相比,刚结点具有不同的特点。从变形角度来看,在刚结点处各杆不能发生相对转动,因而各杆间的夹角始终保持不变。从受力角度来

看,刚结点可以承受和传递弯矩,因而在刚架中弯矩是主要内力。

为了将刚架与简支梁加以比较,在图 3-13 中给出两者在均布荷载作用下的弯矩图,在图 3-13b 所示刚架中由于刚结点处产生弯矩,故横梁跨中弯矩的峰值得到削减。

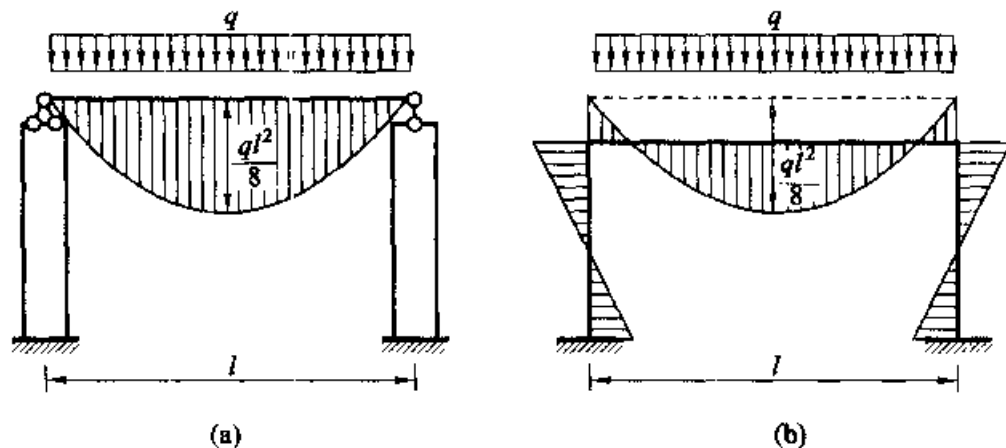


图 3-13

## 2. 刚架的支座反力

在静定平面刚架的受力分析中,通常是先求支座反力,再求控制截面的内力,最后作内力图。

现在结合图 3-14a 所示的三铰刚架,说明支座反力的求法。

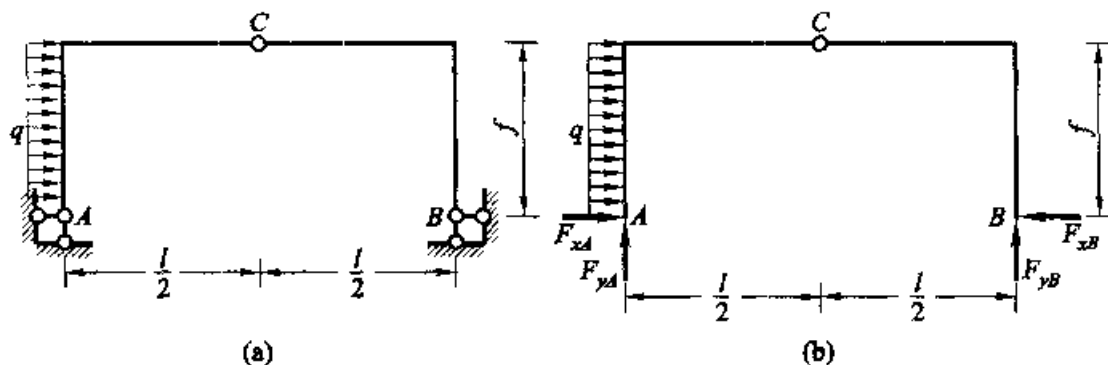


图 3-14

截断铰支座 A 和 B,隔离体图如图 3-14b 所示,这里共有四个未知反力  $F_{xA}$ 、 $F_{yA}$ 、 $F_{xB}$ 、 $F_{yB}$ 。从运动角度来看,隔离体一方面可以整体运动,共有三个自由度;另一方面其中的两个折线杆件 AC 和 BC 还可以绕铰 C 相对转动。因此,再增加一个自由度。与之相应,隔离体平衡时所应满足的静力平衡方程共有四个;除三个整体平衡方程之外,又加一个铰 C 处弯矩为零的静力平衡方程。下面我们利用这四个静力平衡方程计算四个支座

反力

首先用两个整体平衡方程求  $F_{yA}$  和  $F_{yB}$ 。

$$\sum M_B = 0, \quad F_{yA} \times l + \frac{q}{2} f^2 = 0$$

所以

$$F_{yA} = -\frac{qf^2}{2l} \quad (\downarrow)$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{yB} l - \frac{q}{2} f^2 = 0$$

所以

$$F_{yB} = \frac{qf^2}{2l} \quad (\uparrow)$$

然后用铰 C 处弯矩为零的平衡方程求  $F_{yB}$ 。如取右半边刚架作隔离体，则有

$$M_C = 0, \quad F_{yB} f - F_{yB} \frac{l}{2} = 0$$

所以

$$F_{yB} = F_{yB} \frac{l}{2f} = \frac{qf}{4} \quad (\leftarrow)$$

最后用第三个整体平衡方程求  $F_{yA}$ ，

$$\sum F_x = 0, \quad F_{yA} - F_{yB} + qf = 0$$

所以

$$F_{yA} = F_{yB} - qf = -\frac{3}{4} qf \quad (\leftarrow)$$

图 3-15a 为一个多跨刚架。从受力角度看，这个刚架共有四个未知反力  $F_{xG}$ 、 $F_{yB}$ 、 $F_{yA}$ 、 $F_{yD}$ 。从整体的三个静力平衡方程，加上铰 E 处弯矩为零的静力平衡方程，原则上可以求出这四个支座反力。从几何构造角度看，此刚架的组成次序是先固定右边，然后再固定左边。因此，求反力的次序应与组成次序相反，先求左边的  $F_{xG}$ ，再求右边的  $F_{yB}$ 、 $F_{yA}$ 、 $F_{yD}$ 。这样，就可以避免解算联立方程的麻烦。

先考虑 GE 部分，由  $M_E = 0$ ，得

$$F_{xG} = -\frac{1}{4 \text{ m}} (2 \text{ kN} \times 2 \text{ m} + 4 \text{ kN/m} \times 2 \text{ m} \times 1 \text{ m}) = -3 \text{ kN} \quad (\leftarrow)$$

再考虑整体平衡条件：

$$\sum F_x = 0, \quad F_{xG} + 2 \text{ kN} + 2 \text{ kN} - 3 \text{ kN} = 1 \text{ kN} \quad (\leftarrow)$$

$$\sum M_B = 0, \quad F_{yA} = \frac{1}{4 \text{ m}} (2 \text{ kN} \times 2 \text{ m} + 2 \text{ kN} \times 2 \text{ m}) = 2 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0, \quad F_{yB} &= \frac{1}{4} (4 \text{ kN/m} \times 8 \text{ m} \times 4 \text{ m} - 2 \text{ kN} \times 2 \text{ m} - \\ &\quad 2 \text{ kN} \times 2 \text{ m}) = 30 \text{ kN} (\uparrow)\end{aligned}$$

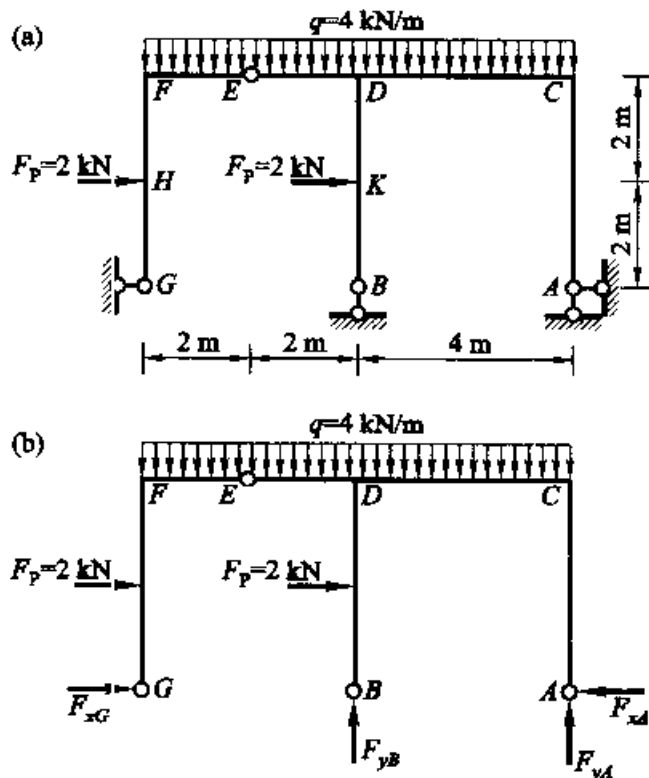


图 3-15

### 3. 刚架中各杆的杆端内力

作刚架内力图时,首先要求各杆的杆端内力。求杆端内力的基本方法仍是截面法。现结合刚架的特点来说明几个问题。

第一,要注意内力正负号的有关规定。在刚架中,剪力和轴力都规定正负号(与梁相同),但弯矩则不规定正负号,而只规定弯矩图的纵坐标应画在杆件受拉纤维的一边。也就是说,这里不是用正负号而是用纵坐标的位置来标明弯矩的性质(标明受拉纤维在哪一边)。

第二,要注意在结点处有不同的杆端截面。在图 3-16a 所示的刚架中,在结点  $D$  处有三个杆件  $DA$ 、 $DB$ 、 $DC$  相交。因此,在结点  $D$  处有三个不同的截面  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$ 。如果笼统地说截面  $D$ ,则是无意义的。这三个截面  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  的弯矩通常分别用  $M_{DA}$ 、 $M_{DB}$ 、 $M_{DC}$  来表示。对于剪力和轴力也采用同样的写法。

第三,要正确地选取隔离体。用截面法求三个指定截面  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  的内力时,应分别在指定截面切开,得出隔离体图如图 3-16b、c、d 所示。这里



在每个切开的截面处作用有二个未知力  $F_N$ 、 $F_Q$ 、 $M$ ，其中未知力  $F_N$  和  $F_Q$  都按正方向画出，而未知力  $M$  则按任意指定的方向画出。

分别对三个隔离体应用平衡条件，可求得内力如下：

$$\begin{aligned} F_{ND1} &= 0 & F_{ND2} &= 4 \text{ kN} & F_{ND3} &= 0 \\ F_{QD1} &= 5 \text{ kN} & F_{QD2} &= 5 \text{ kN} & F_{QD3} &= -4 \text{ kN} \\ M_{D1} &= 5 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_{D2} &= 15 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_{D3} &= 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &(\text{左边受拉}) & &(\text{右边受拉}) & &(\text{下边受拉}) \end{aligned}$$

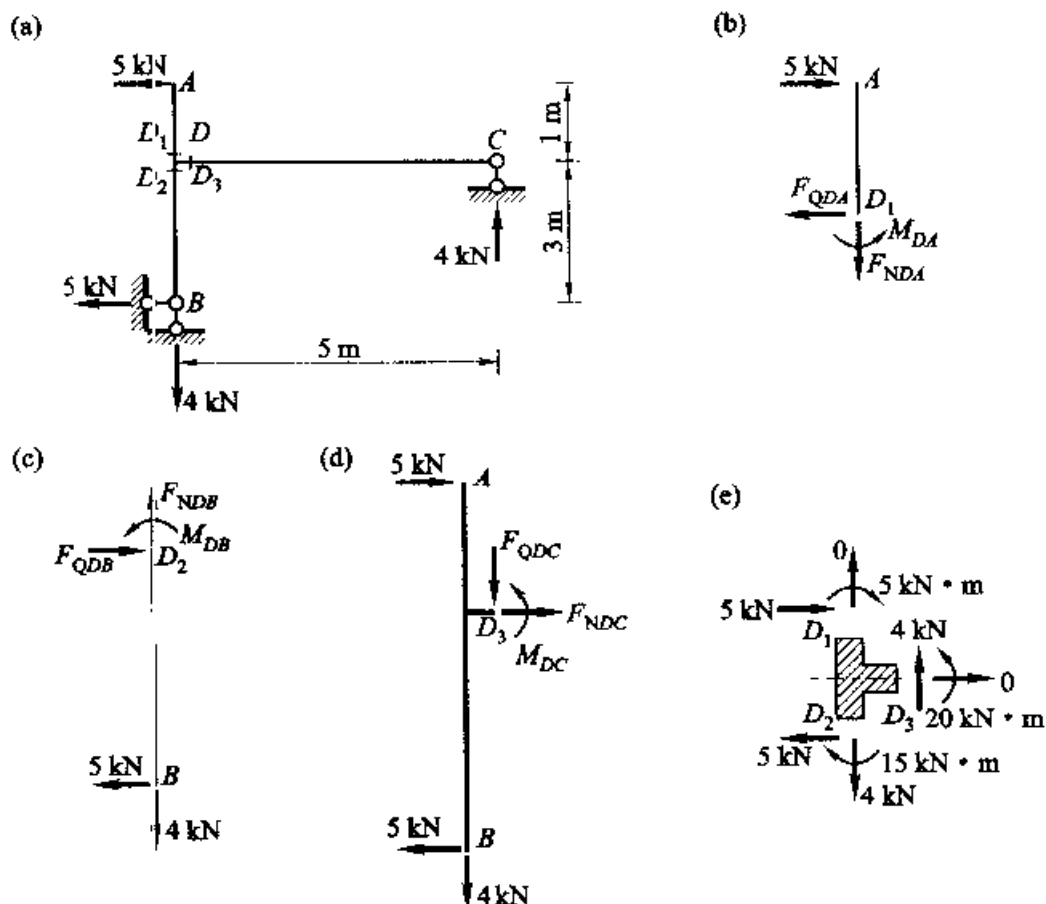


图 3-16

第四，要注意结点的平衡条件。上面求得的三个截面  $D_1$ 、 $D_2$ 、 $D_3$  的内力并不是独立的，它们应满足结点 D (图 3-16e) 的三个平衡条件：

$$\sum F_x = 5 \text{ kN} - 5 \text{ kN} + 0 = 0$$

$$\sum F_y = 0 - 4 \text{ kN} + 4 \text{ kN} = 0$$

$$\sum M = 5 \text{ kN} \cdot \text{m} + 15 \text{ kN} \cdot \text{m} - 20 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0$$

通常可利用这些条件进行校核。

## 4. 刚架的内力图

刚架内力图基本作法是把刚架拆成杆件、也就是说,先求各杆的杆端内力,然后利用杆端内力分别作各杆的内力图,各杆内力图合在一起就是刚架的内力图。

下面结合图 3-17a 所示刚架说明其计算步骤。

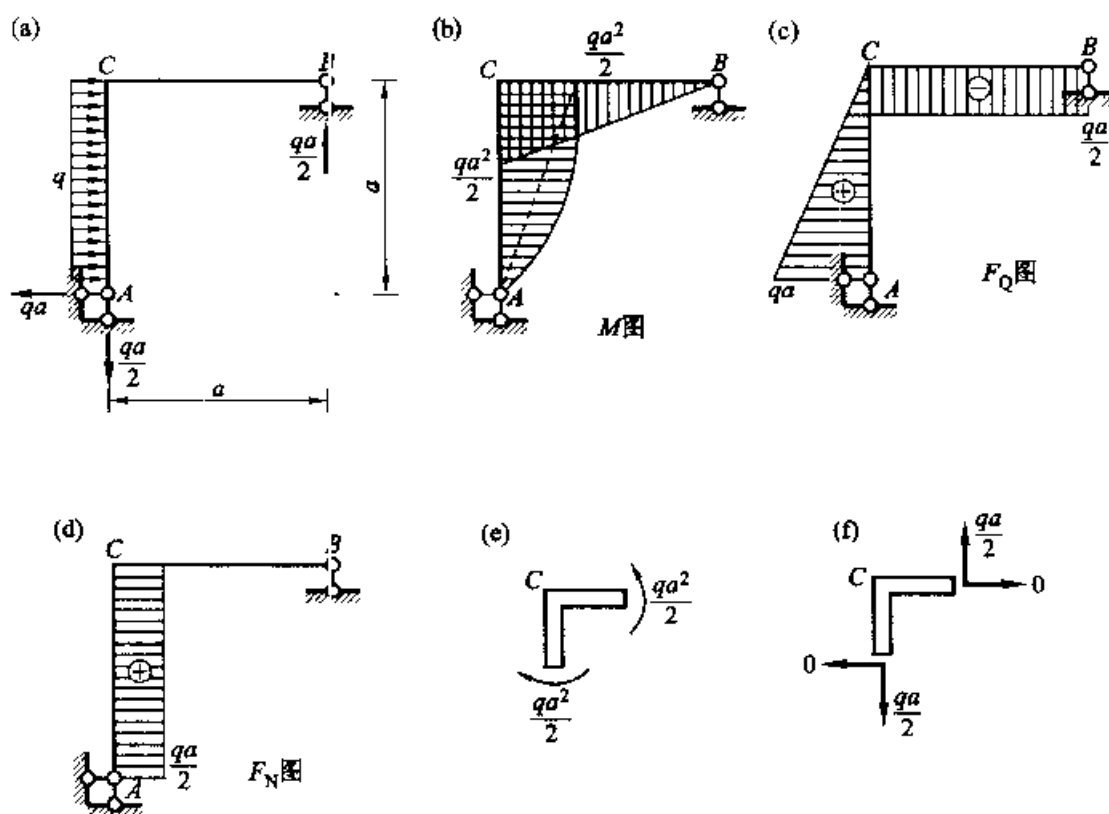


图 3-17

## (1) 求支座反力

$$\sum F_x = 0, \quad F_{xA} = qa \quad (\leftarrow)$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{yB} = \frac{qa}{2} \quad (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{yA} = \frac{qa}{2} \quad (\downarrow)$$

## (2) 作 M 图

先根据截面法,求得各杆杆端弯矩如下:

$$M_{AC} = 0, \quad M_{CA} = \frac{qa^2}{2} \quad (\text{右边受拉})$$

$$M_{BC} = 0, \quad M_{CB} = \frac{qa^2}{2} \quad (\text{下边受拉})$$

然后分别作各杆  $M$  图。

$CB$  杆上没有荷载作用,将杆端弯矩连以直线即为弯矩图。

$AC$  杆上有荷载作用,将杆端弯矩连以直线后再叠加简支梁的弯矩图,即为此杆的弯矩图。 $M$  图如图 3-17b 所示。

(3) 作  $F_Q$  图

先求各杆杆端剪力:

$$F_{QA} = qa$$

$$F_{QB} = 0$$

$$F_{QC} = F_{QB} = -\frac{qa}{2}$$

利用杆端剪力即可作出剪力图,如图 3-17c 所示。剪力图中须注明正负号。 $BC$  杆上无荷载作用,故剪力为常数。 $AC$  杆上有均布荷载,剪力图为斜直线。

(4) 作  $F_N$  图

先求各杆杆端轴力:

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{qa}{2}$$

$$F_{NC} = F_{NB} = 0$$

$F_N$  图如图 3-17d 所示,须注明正负号。由于各杆上都无切向荷载,故各杆轴力都是常数。

(5) 校核

图 3-17e 所示为结点  $C$  各杆杆端的弯矩,满足力矩平衡条件:

$$\sum M = \frac{qa^2}{2} - \frac{qa^2}{2} = 0$$

图 3-17f 所示为结点  $C$  各杆杆端的剪力和轴力,满足两个投影方程:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y: \frac{qa}{2} - \frac{qa}{2} = 0$$

**例 3-4** 试用另一种方法作图 3-17a 所示刚架的  $F_Q$  图和  $F_N$  图。

**解** 上面作  $F_Q$  图和  $F_N$  图时,杆端剪力和杆端轴力是根据截面一边的荷载及支座反力直接求出的。现在介绍另一种作法:首先作  $M$  图;然后取杆件作隔离体,利用杆端弯矩求杆端剪力;最后取结点作隔离体,利用杆端剪力求杆端轴力。

(1) 求杆端剪力

作杆  $AC$  的隔离体图,如图 3-18a 所示。根据已经作出的弯矩图(图

3-17b), 可知 A 端  $M$  为零, C 端  $M$  为  $\frac{qa^2}{2}$ , 右边受拉, 即为反时针力偶。未知杆端力  $F_Q$  和  $F_N$  则按正方向画出。应用力矩平衡方程, 可求出杆端剪力如下:

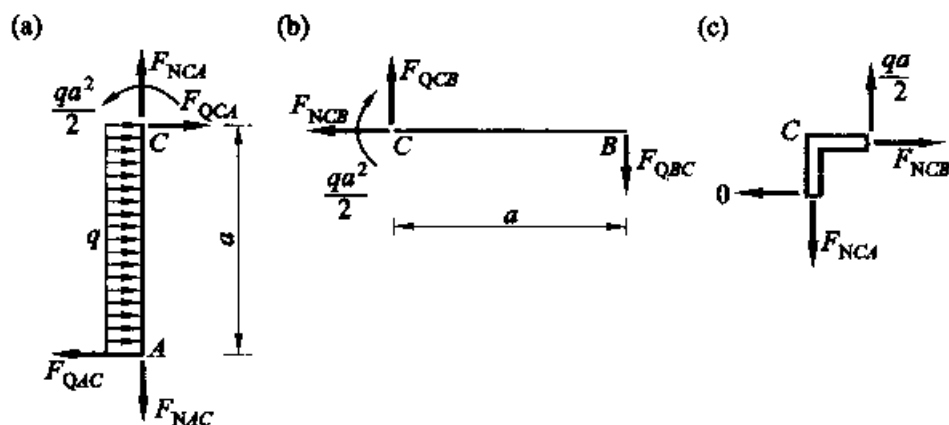


图 3-18

$$\sum M_A = 0, \quad F_{QCA} = \frac{1}{a} \left( \frac{qa^2}{2} - qa \times \frac{a}{2} \right) = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad F_{QAC} = \frac{1}{a} \left( \frac{qa^2}{2} + qa \times \frac{a}{2} \right) - qa$$

同理, 由杆 CB 的隔离体图(图 3-18b), 可得

$$F_{QCB} = F_{QBC} = -\frac{qa}{2}$$

## (2) 求杆端轴力

作结点 C 的隔离体图, 如图 3-18c 所示(图中未标出弯矩)。根据已经作出的  $F_Q$  图(图 3-17c), 可知  $F_{QCA} = 0$ 。  $F_{QCB} = -\frac{qa}{2}$  (逆时针方向)。其中的未知轴力  $F_{NCA}$  和  $F_{NCB}$ , 则按正方向画出。应用投影平衡方程, 可求出杆端轴力如下:

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NCB} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NCA} = \frac{qa}{2}$$

两种方法所得的结果相同。对于复杂的情况, 以第二种方法较为方便。

**例 3-5** 试绘制图 3-19a 所示门式刚架左半跨在均布荷载作用下的内力图。

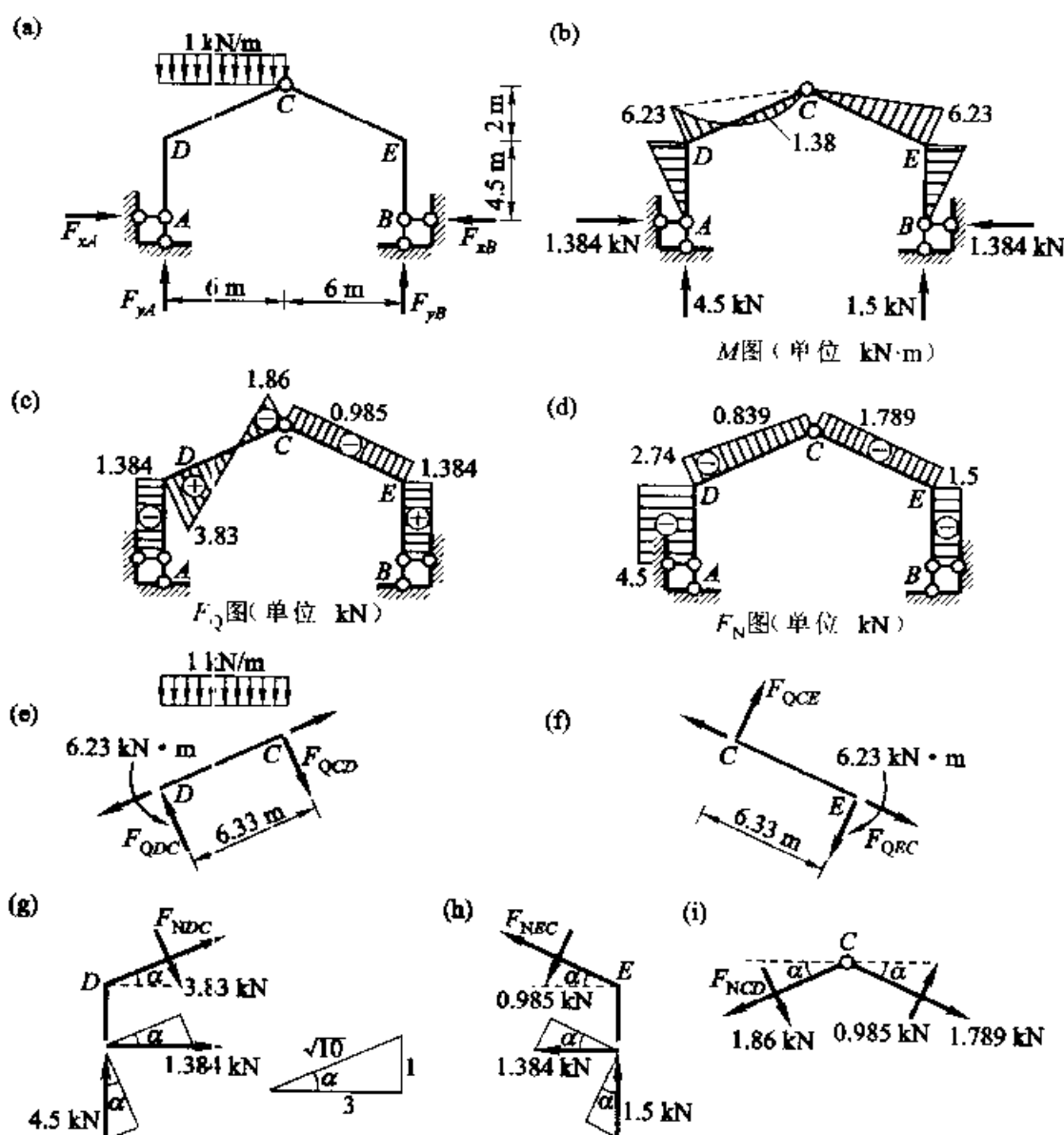


图 3-19

解 (1) 求支座反力

$$\sum M_A = 0, \quad 6 \text{ kN} \times 3 \text{ m} - 12 \text{ m} F_{yB} = 0, \quad F_{yB} = 1.5 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_B = 0, \quad 6 \text{ kN} \times 9 \text{ m} - 12 \text{ m} F_{yA} = 0, \quad F_{yA} = 4.5 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{xA} - F_{xB} = 0, \quad F_{xA} = F_{xB}$$

$$\sum M_C = 0 \text{ (考虑铰 } C \text{ 右边部分),}$$

$$6.5 \text{ m} F_{yB} - 6 \text{ m} F_{xB} = 0, \quad F_{xB} = 1.384 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$F_{xA} = 1.384 \text{ kN} (\rightarrow)$$

(2) 作  $M$  图

先求杆端弯矩,画于受拉一边并连以直线,再叠加简支梁的弯矩图。

以  $DC$  为例,

$$M_{Dx} = 1.384 \text{ kN} \times 4.5 \text{ m} = 6.23 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = 0$$

$DC$  杆的中点弯矩为

$$-\frac{1}{2} \times 6.23 \text{ kN} \cdot \text{m} + \frac{1}{8} \times 1 \text{ kN/m} \times 6^2 \text{ m}^2 = 1.38 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$M$  图如图 3-19b 所示。

(3) 作  $F_Q$  图

杆端剪力可分别采用上述两种方法来求。

对于  $AD$  和  $BE$  两杆,可取截面一边为隔离体,求出杆端剪力如下:

$$F_{QAD} = F_{QDA} = -1.384 \text{ kN}$$

$$F_{QBE} = F_{QEB} = 1.384 \text{ kN}$$

对于  $CD$  和  $CE$  两杆,可取杆  $CD$  和  $CE$  为隔离体(图 3-19e、f),求出杆端剪力如下:

$$F_{QDC} = \frac{1}{6.33 \text{ m}} (6.23 \text{ kN} \cdot \text{m} + 6 \text{ kN} \times 3 \text{ m}) = 3.83 \text{ kN}$$

$$F_{QCD} = \frac{1}{6.33 \text{ m}} (6.23 \text{ kN} \cdot \text{m} - 6 \text{ kN} \times 3 \text{ m}) = -1.86 \text{ kN}$$

$$F_{QCE} = F_{QEC} = \frac{1}{6.33 \text{ m}} (-6.23 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -0.985 \text{ kN}$$

$F_Q$  图如图 3-19c 所示。

(4) 作  $F_N$  图

杆端轴力可分别采用上述两种方法来求。

对于  $AD$  和  $BE$  两杆,可取截面一边为隔离体,求出杆端轴力如下:

$$F_{NAD} = F_{NDA} = 4.5 \text{ kN}$$

$$F_{NBE} = F_{NEB} = -1.5 \text{ kN}$$

至于  $DC$  和  $CE$  两杆的杆端轴力,则可取结点为隔离体进行计算。取结点  $D$  为隔离体(图 3-19g),沿轴线  $DC$  列投影方程,可求得  $F_{NDC}$  如下:

$$F_{NDC} + 1.384 \text{ kN} \cos \alpha + 4.5 \text{ kN} \sin \alpha = 0$$

$$F_{NDC} = -2.74 \text{ kN}$$

同样,由结点  $E$  的隔离体图(3-19h),以  $EC$  为轴线列投影方程:

$$F_{NEC} = -1.384 \text{ kN} \cos \alpha - 1.5 \text{ kN} \sin \alpha = -1.789 \text{ kN}$$

因为杆  $EC$  上沿轴线方向没有荷载,所以沿杆长轴力不变,即

$$F_{NCE} = -1.789 \text{ kN}$$

为了求得  $F_{NCD}$ ,可利用结点  $C$  的隔离体图 3-19i,

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0, \quad & -F_{NCD} \cos \alpha + 1.86 \text{ kN} \sin \alpha + 0.985 \text{ kN} \sin \alpha - \\ & 1.789 \text{ kN} \cos \alpha = 0 \\ & F_{NCD} = -0.839 \text{ kN}\end{aligned}$$

$F_N$ 图如图 3-19d 所示。

### (5) 校核

可以截取刚架的任何部分校核是否满足平衡条件。例如对结点 C 的隔离体(图 3-19i)可以验算  $\sum F_y = 0$ 。

**例 3-6** 试求作图 3-20a 所示两层刚架的  $M$  图。

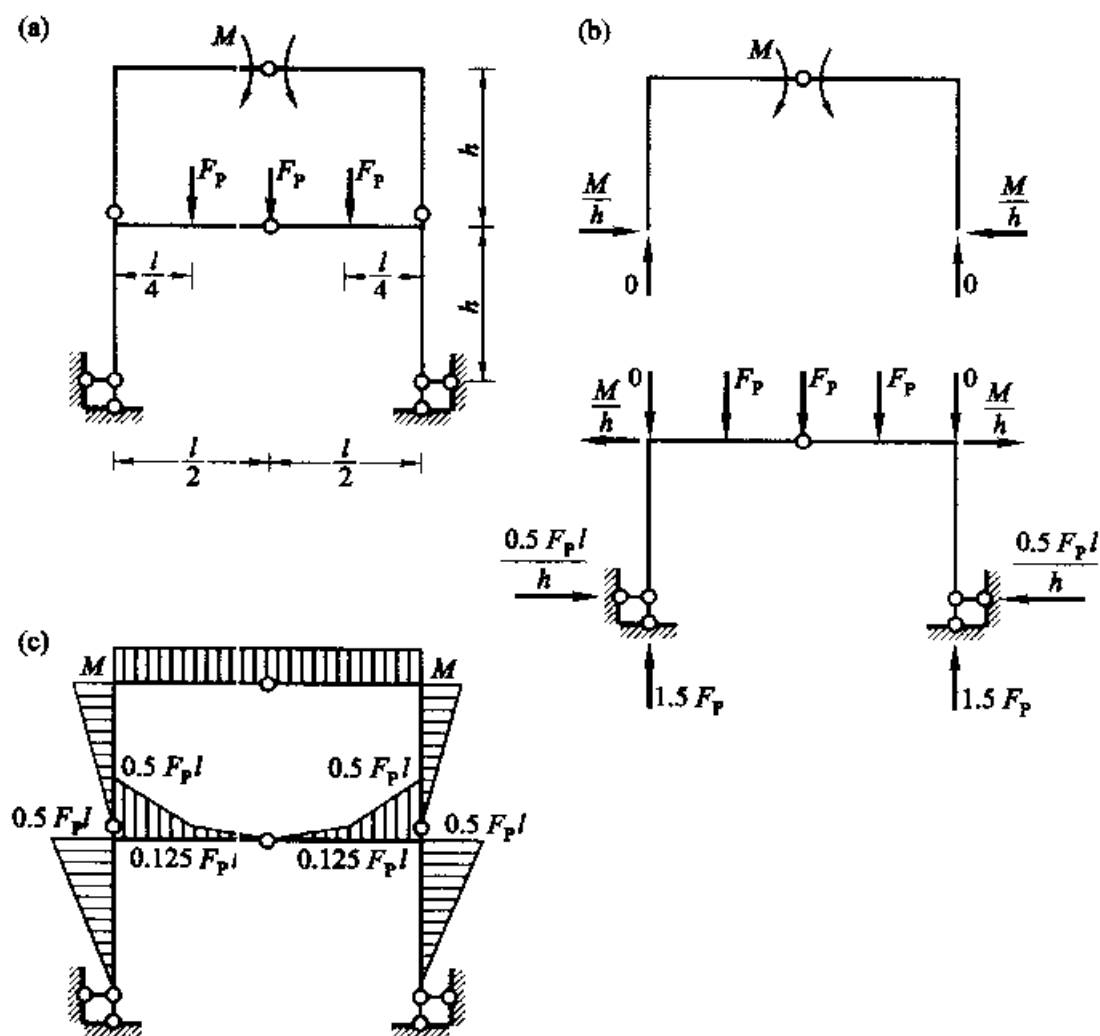


图 3-20

**解** 这是一个双层三铰刚架,组成的次序是先固定下部,再固定上部。求约束反力的次序应与组成次序相反,因此先求上部结构的约束反力,然后将求得结果反其指向加于下部结构上,再求下部结构的支座反力。计算结果如图 3-20b 所示。约束力求出后,即可绘制弯矩图,如图 3-20c 所示。

前面讨论了静定梁和静定刚架的受力分析及内力图的绘制。作法要点归纳如下:

(1) 通常先求约束力和支座反力。求约束力和支座反力时,要注意结构的几何构造特点,求约束力的次序应与组成次序相反。

(2) 作  $M$  图时,先求每杆的杆端弯矩,将坐标画于受拉纤维一边,连以直线,再叠加上由于横向荷载产生的简支梁的  $M$  图。 $M$  图不注正负号。

(3) 作  $F_Q$  图时,先计算每杆的杆端剪力。杆端剪力通常可根据截面一边的荷载及支座反力直接计算。当情况比较复杂时,可取一杆为隔离体,利用力矩平衡方程求杆端剪力。杆端剪力求出后,杆的  $F_Q$  图可按简支梁的规律画出。 $F_Q$  图的正负号必须注明。

(4) 作  $F_N$  图时,先计算每杆的杆端轴力。杆端轴力通常可根据截面一边的荷载及支座反力直接计算。当情况比较复杂时,可取结构的结点为隔离体,用投影平衡方程求杆端轴力。 $N$  图必须注明正负号。

(5) 内力图的校核是必要的。通常截取结点或结构的一部分,验算其是否满足平衡条件。

### § 3-4 静定空间刚架

上一节讨论了刚架处于平面受力状态的情况,其中假设刚架各杆轴线都在同一平面内,且荷载和支座反力也都作用在刚架平面内。若不能满足上述条件,则刚架处于空间受力状态,这类问题称为空间刚架问题。图 3-21 所示刚架由  $AB$ 、 $BC$  两杆组成,两杆轴线都在  $Oxz$  平面内,但由于荷载  $F_P$  不在  $Oxz$  平面内,故属于空间刚架的计算问题。

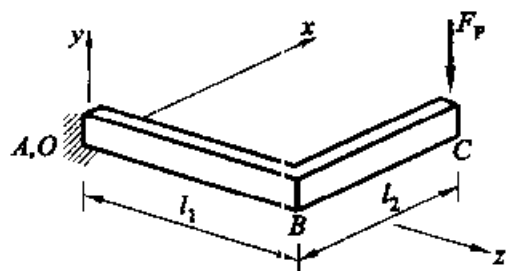


图 3-21

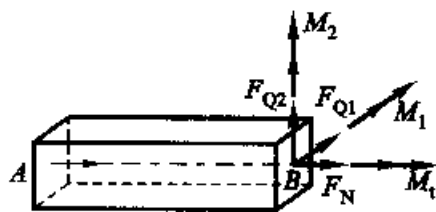


图 3-22

在空间受力状态下,杆件截面上一般有六个内力分量(图 3-22):  $F_N$ 、 $F_{Q1}$ 、 $F_{Q2}$ 、 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_t$ 。其中  $F_N$  是轴力,沿杆件轴线方向作用的分力;

$F_{Q1}$ 、 $F_{Q2}$  是剪力,分别沿截面的两个主轴方向作用的分力;

$M_t$  是扭矩,绕杆件轴线旋转的力偶矩;



$M_1$ 、 $M_2$  是弯矩, 分别绕截面两个主轴旋转的力偶矩(这里的下标 1、2 可根据计算时具体情况用  $x$ 、 $y$  或  $z$  来代替)。

为了更清楚地表示力偶作用面的位置, 这里的力偶都按右手旋转法则用双箭头矢量来表示。

静定空间刚架的内力计算仍采用截面法。由于一个物体在空间有六个自由度, 故可对所取隔离体建立六个平衡方程, 由此求出截面上的六个内力分量。

作内力图的步骤仍然是: 首先求各杆的杆端内力, 然后分别作各种内力图, 最后组合在一起便得到空间刚架内力图。

为了表示各内力分量的正负号和性质, 作内力图时采用如下的规定:

轴力图 and 扭矩图都要注明正负号。轴力  $F_N$  以受拉为正; 扭矩  $M_t$  以双箭头矢量向外为正。

弯矩图不注正负号, 弯矩  $M_1$ 、 $M_2$  都画在杆件受拉纤维一侧。

剪力图也不注正负号, 但需预先规定杆件轴线的正方向(在图 3-22 中, 杆轴的正方向如箭头所示, 即由 A 到 B 的方向为正方向), 并规定截面的正面和反面(图 3-22 中, 截面 B 的外法线与杆轴正方向一致, 称为正面; 截面 A 的外法线与杆轴正方向相反, 称为反面)。剪力图即画在正面上剪力所指向的一侧。

以下通过图 3-21 所示刚架说明内力图的作法。设杆 AB 和 BC 的截面主轴分别为  $x$ 、 $y$  和  $z$ 、 $y$ 。

(1) 求杆 BC 的杆端内力

先由端点 C 的受力情况可知, 截面 C 沿  $y$  轴的剪力为

$$(F_{Q_y})_{CB} = F_P$$

其余五个内力分量全为零。

再考虑杆 BC 的 B 端, 取隔离体如图 3-23a 所示。截面 B 的六个内力分量可由平衡方程求出如下:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, & (F_{N_{BC}})_{BC} = 0, \\ \sum F_y = 0, & (F_{Q_y})_{BC} = F_P, \\ \sum F_z = 0, & (F_{Q_z})_{BC} = 0, \end{cases} \begin{cases} \sum M_x = 0, & (M_x)_{BC} = 0 \\ \sum M_y = 0, & (M_y)_{BC} = 0 \\ \sum M_z = 0, & (M_z)_{BC} = F_P l_z \text{ (上边受拉)} \end{cases}$$

(2) 求杆 AB 的杆端内力

先考虑杆 AB 的 B 端, 取隔离体如图 3-23b 所示。由六个平衡方程求出内力如下:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, & (F_{Q_x})_{BA} = 0, \\ \sum F_y = 0, & (F_{Q_y})_{BA} = F_P, \\ \sum F_z = 0, & F_{N_{BA}} = 0, \end{cases} \begin{cases} \sum M_x = 0, & (M_x)_{BA} = 0 \\ \sum M_y = 0, & (M_y)_{BA} = 0 \\ \sum M_z = 0, & (M_z)_{BA} = -F_P l_z \end{cases}$$

再考虑杆 AB 的 A 端, 隔离体如图 3-23c 所示。由六个平衡方程求得

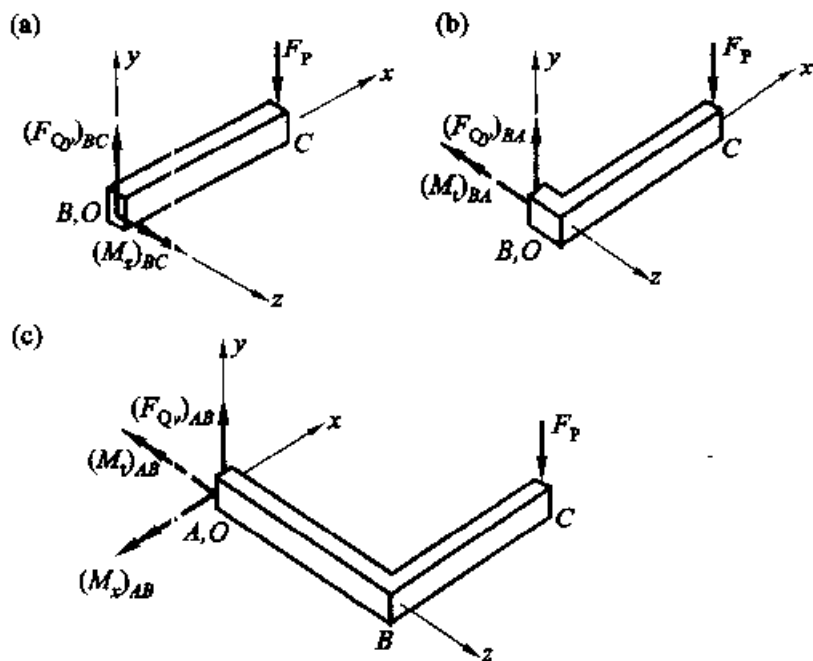


图 3-23

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, & (F_{Q_x})_{AB} = 0 \\ \sum F_y = 0, & (F_{Q_y})_{AB} = F_P \\ \sum F_z = 0, & F_{NAB} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum M_x = 0, & (M_x)_{AB} = F_P l_1 \text{ (上边受拉)} \\ \sum M_y = 0, & (M_y)_{AB} = 0 \\ \sum M_z = 0, & (M_z)_{AB} = -F_P l_2 \end{cases}$$

(3) 最后作内力图如图 3-24 所示。

图 3-24a 为弯矩图, 杆 AB 上为  $M_x$  图, 杆 BC 上为  $M_z$  图。由于两杆均为上部纤维受拉, 故图形画在上面。

图 3-24b 为扭矩图。图中需注明正负号。

图 3-24c 为剪力图, 图中用箭头规定了杆轴线的正方向。由于各杆在正面上的剪力均指向下边, 因而剪力图都画在杆件下边。

**例 3-7** 图 3-25a 所示刚架承受空间平衡力系, 试求作内力图。

**解** 由于结构和荷载都对称于通过 D 点且与  $xy$  面平行的平面, 因此只需求半边结构 ABCD 的内力。

(1) 作弯矩图

杆 AB 的 A 端,

$$M_x = M_y = 0$$

B 端,

$$M_x = F_P a \text{ (下边受拉)}$$

$$M_y = 0$$

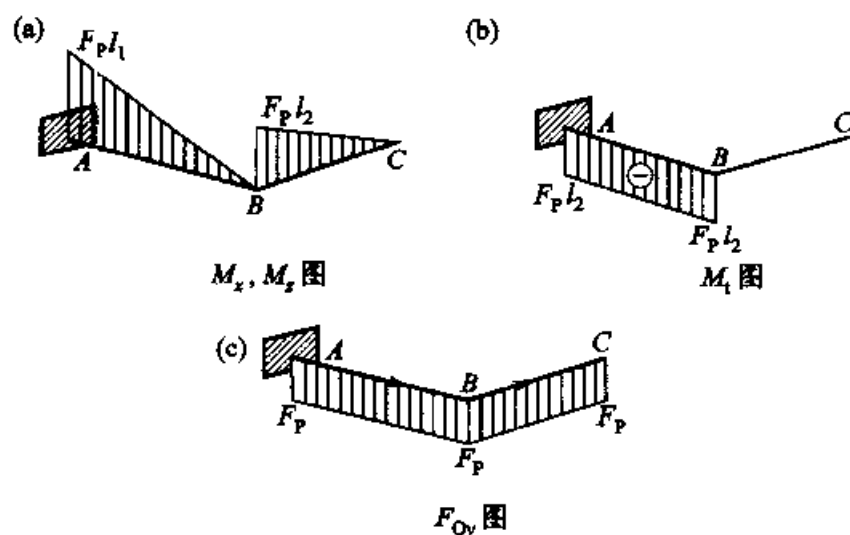


图 3-24

杆  $BC$  的  $B$  端,

$$M_y = 0$$

$$M_x = F_P a \text{ (上边受拉)}$$

$C$  端,

$$M_y = 0, \quad M_x = 0$$

杆  $CD$  的  $C$  端,

$$M_x = F_P a \text{ (下边受拉)}, \quad M_y = 0$$

$D$  端,

$$M_y = 2F_P a \text{ (下边受拉)}, \quad M_x = 0$$

作出弯矩图,如图 3-25b 所示。弯矩图是对称的。

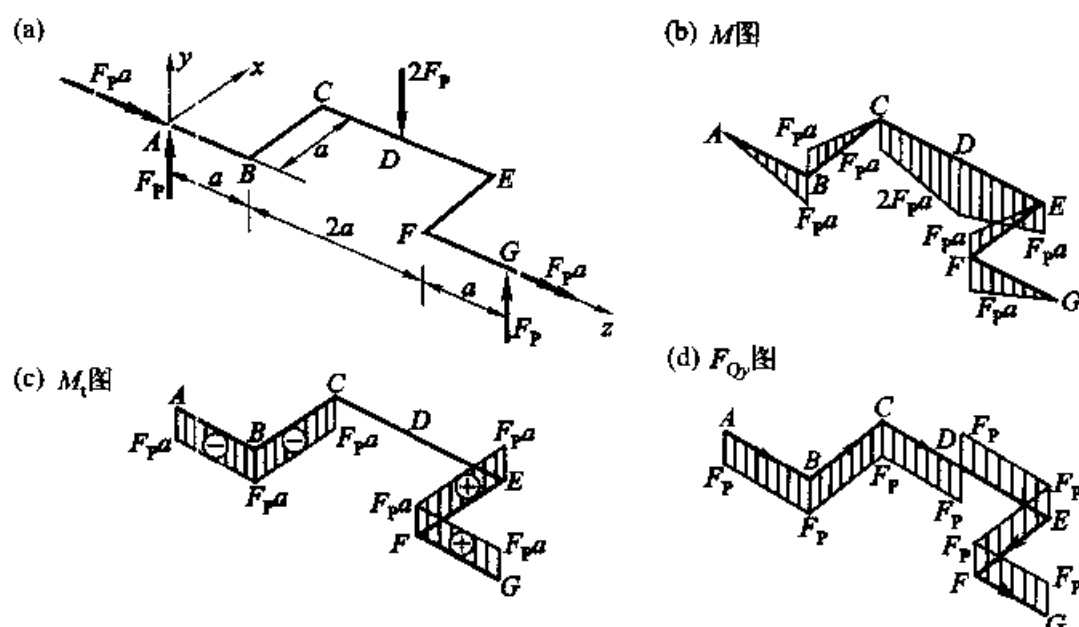


图 3-25

(2) 作扭矩图

杆 AB,  $M_i = -F_p a$

杆 BC,  $M_i = F_p a$

杆 CD,  $M_i = 0$

作出扭矩图是反对称的, 如图 3-25c 所示。

### (3) 作剪力图

剪力  $F_{Q_v}$  图如图 3-25d 所示。图形是反对称的。图中用箭头表示各杆轴线的正方向, 半边结构各截面  $F_{Q_v} = F_p$ , 剪力图画在杆件正面上剪力指向的一侧。

## § 3-5 静定平面桁架

### 1. 桁架的特点和组成

梁和刚架承受荷载后, 主要产生弯曲内力, 截面上的应力分布是不均匀的, 因而材料不能充分利用。桁架是由杆件组成的格构体系, 当荷载只作用在结点上时, 各杆内力主要为轴力, 截面上的应力基本上分布均匀, 可以充分发挥材料的作用。因此, 桁架是大跨结构常用的一种型式。

桁架在工程实际中有广泛的应用。图 3-26 是钢筋混凝土组合屋架, 图 3-27 为武汉长江大桥所采用的桁架型式。

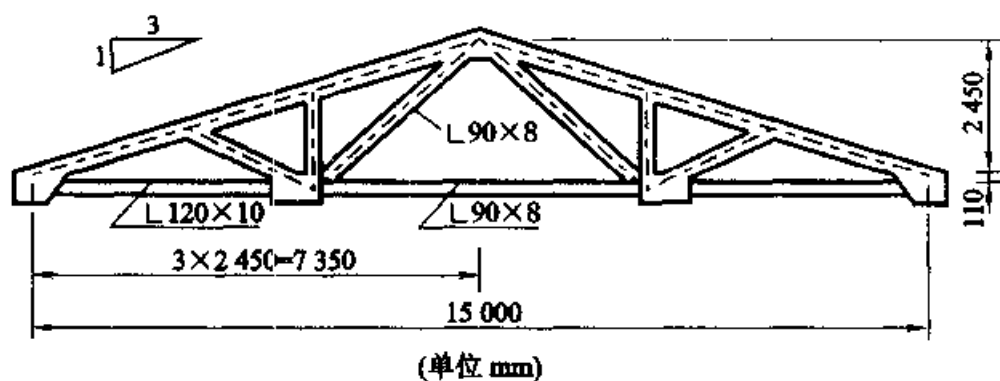


图 3-26

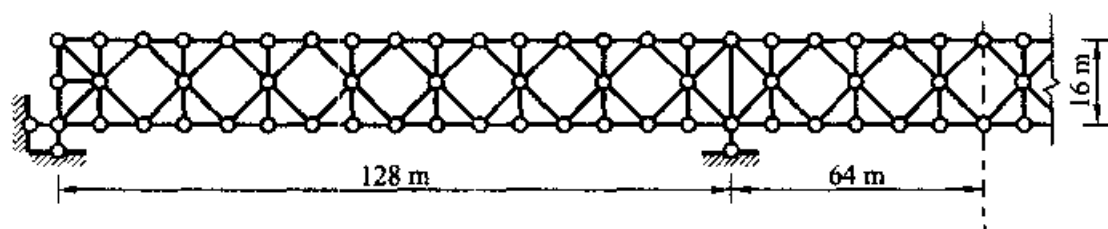


图 3-27

实际桁架的受力情况比较复杂,在计算中必须抓主要矛盾,对实际桁架作必要的简化。通常在桁架的内力计算中,采用下列假定:

- (1) 桁架的结点都是光滑的铰结点;
- (2) 各杆的轴线都是直线并通过铰的中心;
- (3) 荷载和支座反力都作用在结点上。

图 3-28a 是根据上述假设画出的一个桁架的计算简图。各杆均用轴线表示,结点的小圆圈代表铰。荷载  $F_{P1}$ 、 $F_{P2}$  和支座反力  $F_{yA}$ 、 $F_{yB}$  都作用在结点上。图 3-28b 所示为从这个桁架中任意取出的一根杆件。杆 CD 只在两端受力,此二力既成平衡,所以必然数量相等、方向相反,有同一作用线,即轴线 CD。因此,杆 CD 只受轴力作用。桁架的杆件都只在两端受力,称为二力杆。其轴力可能是拉力,也可能是压力,由具体情况通过计算可以确定。

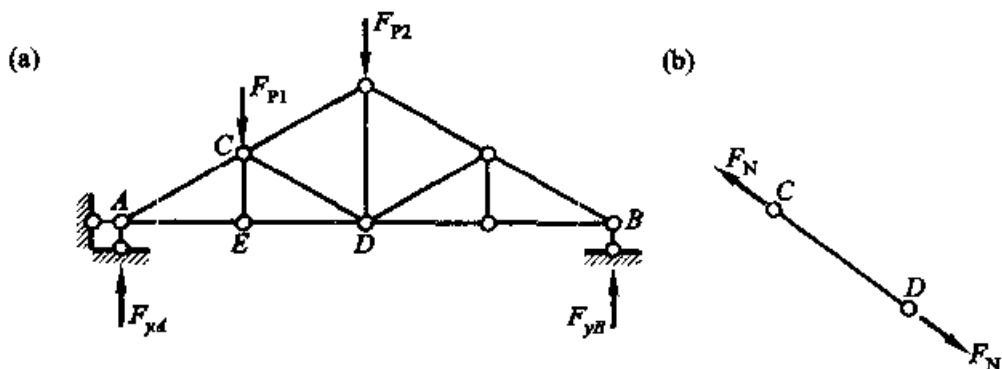


图 3-28

实际桁架与上述假定是有差别的。除木桁架的榫接结点比较接近于铰结点外,钢桁架和钢筋混凝土桁架的结点都有很大的刚性。有些杆件在结点处是连续不断的。各杆的轴线也不一定全是直线,结点上各杆的轴线也不一定全交于一点。但科学实验和工程实践证明,结点刚性等因素的影响一般说来对桁架是次要的。按上述假定计算得到桁架内力称为主内力。由于实际情况与上述假定不同而产生的附加内力称为次内力。这里只研究主内力的计算。

桁架的杆件布置必须满足几何不变体系的组成规律。根据几何构造的特点,静定平面桁架可分为三类:

- (1) 由基础或一个基本铰接三角形开始,每次用不在一条直线上的两个链杆连接一个新结点。按这个规律组成的桁架称为简单桁架。

如在图 3-29a 中,从三角形 ABC 开始,每次用两根杆(4,5),(6,7),(8,9),(10,11),(12,13)依次连接结点 D、E、F、G、H,组成一个简单桁架。这个桁架本身是几何不变的,没有多余约束。图 3-29b 是从基础开始,每次用

两根杆(1,2),(3,4),(5,6),…依次连接点 A、B、C、…组成的简单桁架。这个桁架是几何不变的,并且没有多余约束。

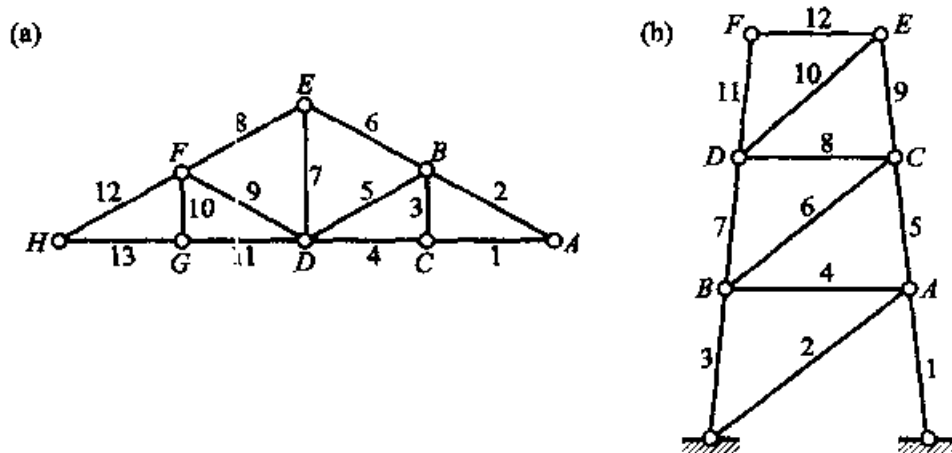


图 3-29

(2) 由几个简单桁架联合组成几何不变的铰结体系,这类桁架称为联合桁架。

在图 3-30 中, I、II 两部分都是简单桁架,用铰 A 和链杆 BC 连接在

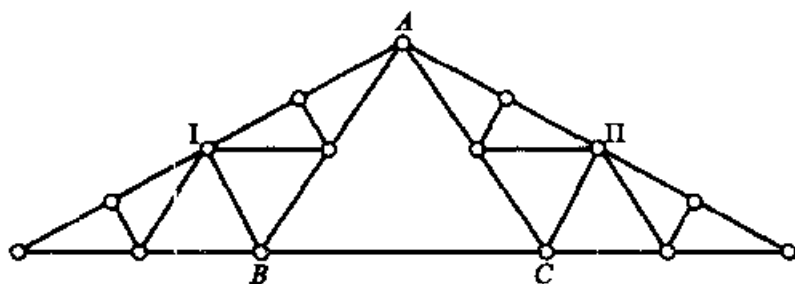


图 3-30

一起,组成一个联合桁架。因为 A、B、C 三个铰不同在一直线上,这个桁架本身是几何不变的,并且没有多余约束。

(3) 凡不属于前两类的桁架,称为复杂桁架,图 3-31 所示为一复杂桁架。

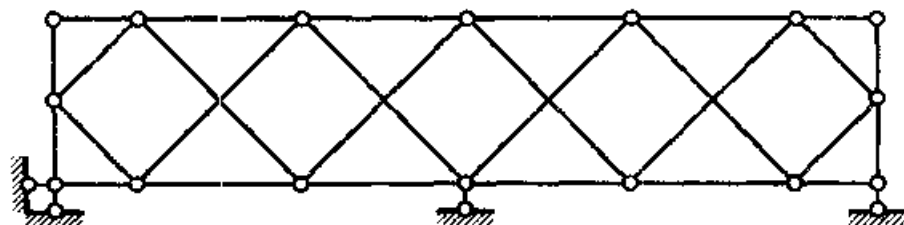


图 3-31

## 2. 结点法、截面法及其联合应用

为了求得桁架各杆的轴力,我们可以截取桁架中的一部分为隔离体,考虑隔离体的平衡,建立平衡方程,由平衡方程解出杆的轴力。如果隔离体只包含一个结点,这种方法称为结点法。如果截取的隔离体包含两个以上的结点,这种方法称为截面法。

在建立平衡方程时,时常需要把杆的轴力  $F_N$  分解为水平分力  $F_x$  和竖向分力  $F_y$ 。在图 3-32a 中,杆 AB 的杆长  $l$  及其水平投影  $l_x$  和竖向投影  $l_y$  组成一个三角形。在图 3-32b 中,杆 AB 的轴力  $F_N$  及其水平分力  $F_x$  和竖向分力  $F_y$  也组成一个三角形。这两个三角形各边相互平行,所以是相似的,因而有下列比例关系:

$$\frac{F_N}{l} = \frac{F_x}{l_x} = \frac{F_y}{l_y} \quad (3-4)$$

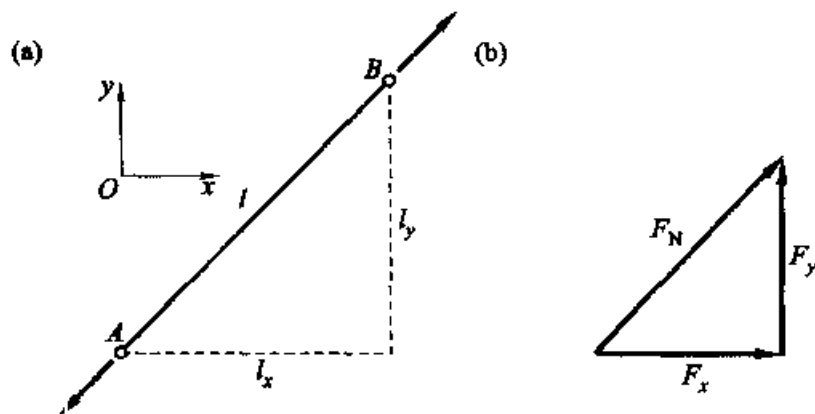


图 3-32

利用这个比例关系,可以很简便地由  $F_N$  推算出  $F_x$  和  $F_y$ ,或者反过来由  $F_x$  推算  $F_N$  和  $F_y$ ,由  $F_y$  推算  $F_N$  和  $F_x$ ,而不需使用三角函数进行计算。

### 结点法

结点法是取桁架结点为隔离体,利用平面汇交力系的两个平衡条件计算各杆的未知力。如果桁架是静定的,则其计算自由度  $W=0$ ,由式(2-7)可知

$$W = 2j - b = 0$$

即  $2j = b$ 。因此,利用  $j$  个结点的  $2j$  个独立的平衡方程,便可确定全部  $b$  个杆件或支杆的未知力。

结点法最适用于计算简单桁架。下面用例题说明结点法的详细计算步骤。

在计算过程中,通常先假设杆的未知轴力为拉力。计算结果如得正值,表示轴力确是拉力;如得负值,表示轴力为压力。

例 3-8 图 3-33a 所示为一施工托架的计算简图。在所示荷载作用下,试求各杆的轴力

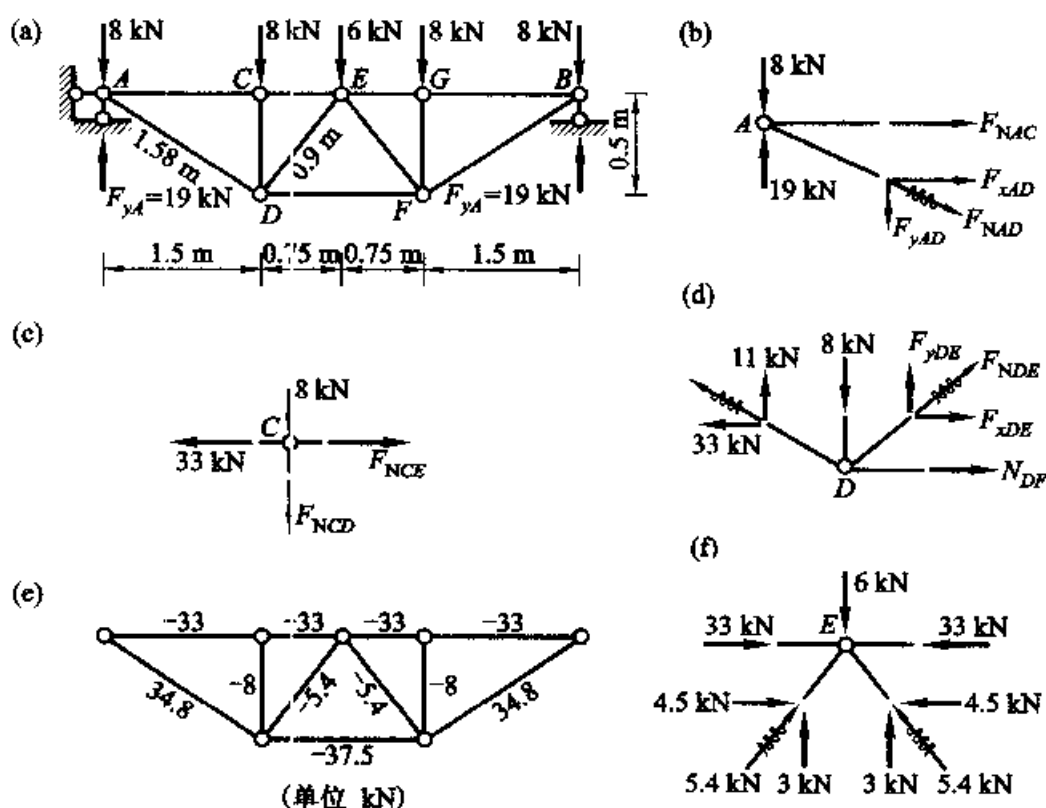


图 3-33

解 (1) 求支座反力

$$F_{yA} = F_{yB} = \frac{1}{2} (8 \text{ kN} \times 4 + 6 \text{ kN}) = 19 \text{ kN} (\uparrow)$$

(2) 结点 A

作结点 A 的隔离体图(图 3-33b),未知力  $F_{NAC}$ 、 $F_{NAD}$  假设为拉力,并将斜杆轴力  $F_{NAD}$  用其分力  $F_{xAD}$  和  $F_{yAD}$  代替。

由  $\sum F_y = 0$ , 得

$$19 \text{ kN} - 8 \text{ kN} - F_{yAD} = 0$$

所以

$$F_{yAD} = 11 \text{ kN}$$

利用比例关系式(3-4),得

$$F_{xAD} = 11 \text{ kN} \times \frac{1.5 \text{ m}}{0.5 \text{ m}} = 33 \text{ kN}$$

$$F_{NAD} = 11 \text{ kN} \times \frac{1.58 \text{ m}}{0.5 \text{ m}} = 34.8 \text{ kN} (\text{拉力})$$



由  $\sum F_x = 0$ ,  $F_{NAC} + F_{xAD} = 0$ , 得

$$F_{NAC} = -33 \text{ kN (压力)}$$

### (3) 结点 C

结点 C 的隔离体图见图 3-33c。其中的已知力都按实际方向画出, 未知力  $F_{NCE}$  和  $F_{NCD}$  都假设为拉力。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NCE} + 33 \text{ kN} = 0$$

得

$$F_{NCE} = -33 \text{ kN (压力)}$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{NCD} - 8 \text{ kN} = 0$$

得

$$F_{NCD} = -8 \text{ kN (压力)}$$

### (4) 结点 D

隔离体图见图 3-33d, 斜杆轴力都用分力  $F_x$ 、 $F_y$  代替,

$$\sum F_x = 0, \quad F_{yDE} + 11 \text{ kN} - 8 \text{ kN} = 0$$

得

$$F_{yDE} = -3 \text{ kN}$$

$$\text{由式(3-4), } F_{NDE} = -3 \text{ kN} \times \frac{0.9 \text{ m}}{0.5 \text{ m}} = -5.4 \text{ kN (压力)}$$

得

$$F_{xDE} = -3 \text{ kN} \times \frac{0.75 \text{ m}}{0.5 \text{ m}} = -4.5 \text{ kN (压力)}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NDF} + F_{xDE} + 33 \text{ kN} = 0$$

得

$$F_{NDF} = 33 \text{ kN} + 4.5 \text{ kN} = 37.5 \text{ kN (拉力)}$$

### (5) 利用对称性

由于桁架和荷载都是对称的, 因此处于对称位置的两根杆具有相同的轴力, 也就是说, 桁架中的内力也是对称分布的。因此, 只需计算半边桁架的轴力。整个桁架的轴力如图 3-33e 所示。

### (6) 校核

对称轴上的结点平衡条件可用来校核。图 3-33f 为结点 E 的隔离体图。由于对称, 平衡条件  $\sum F_x = 0$  已经自然满足。因此, 只需校核另一个平衡条件如下:

$$\sum F_y = 0, \quad -6 \text{ kN} + 3 \text{ kN} + 3 \text{ kN} = 0$$

上例中的桁架(图 3-33a)是一个简单桁架。可以认为它是从三角形

DEFG 开始,每次用两杆连接一个新结点 E、D、C、A 组成的。只要按照与组成相反的次序 A、C、D、E、F、G 截取结点,则在每个结点只遇到两个未知力。总之,用结点法计算简单桁架时,如果截取结点的次序与桁架组成时添加结点的次序相反,就可以顺利地求出全部轴力。

一个简单桁架往往可以按不同的结点次序组成,因此用结点法求解时也可按不同的次序截取结点。例如,图 3-33a 所示桁架,也可以认为是由三角形 ACD 开始,依次用二杆连接结点 E、F、G、B 组成的。所以这个桁架也可以按 B、G、F、E、C、D 的次序截取结点。

这里提一下结点单杆的概念。如果在同一结点的所有内力为未知的各杆中,除某一杆外,其余各杆都共线,则该杆称为此结点的单杆。关于结点单杆有下面两种情况:

- (1) 结点只包含两个未知力杆,且此二杆不共线(图 3-34a),则每杆都是单杆;
- (2) 结点只包含三个未知力杆,其中有两杆共线(图 3-34b),则第三杆是单杆

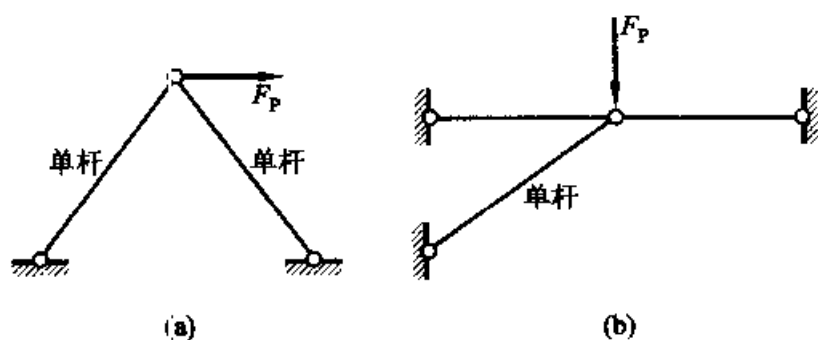


图 3-34

下面给出有关结点单杆的一些性质:

(1) 结点单杆的内力,可由该结点的平衡条件直接求出。而非结点单杆的内力则不能由该结点的平衡条件直接求出。

(2) 当结点无荷载作用时,单杆的内力必为零。或者说,无载结点的单杆必为零杆。图 3-35 所示桁架在荷载  $F_P$  作用下只有用粗线表示的各杆(杆 AB ~ 杆 HI)内力不为零,其余各杆都是零杆。因为按照图中数字标明的次序,可依次判断它们是无载结点的单杆。

(3) 如果依靠拆除结点单杆的方法可将整个桁架拆完,则此桁架即可应用结点法按照每次只解一个未知力的方式将各杆内力求出。计算

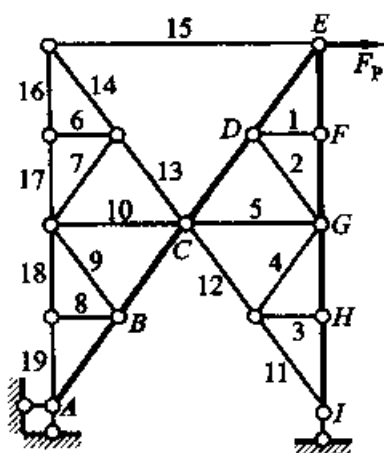


图 3-35

程序应按照拆除单杆的程序进行。图 3-36a 所示桁架虽不是简单桁架,但可以依靠拆除单杆的方法将整个结构拆完,拆除次序如图 3-36a 中数字所示。各杆内力可采用结点法求出。运算直接在桁架图上进行。因为对称,图 3-36b 中只注明了一半。

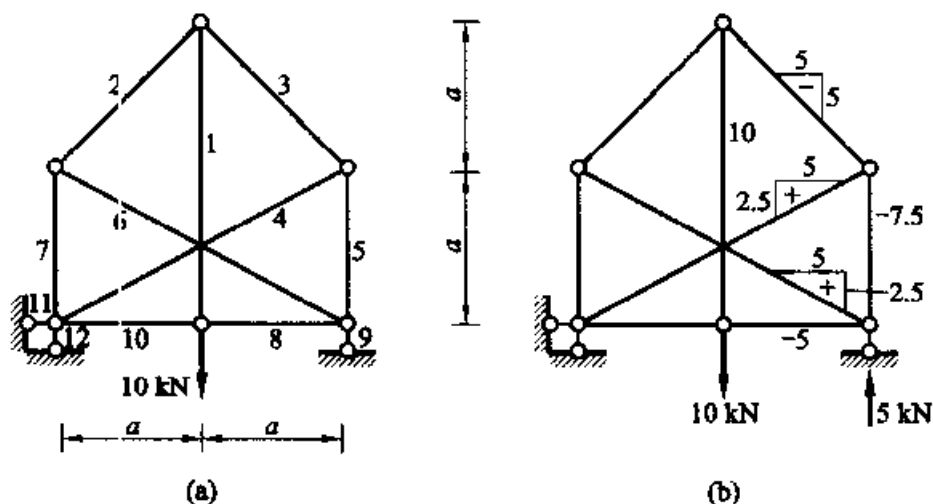


图 3-36

### 截面法

截面法是用截面切断拟求内力的杆件,从桁架中截出一部分为隔离体(隔离体包含两个以上的结点,所作用的力系为平面一般力系),利用平面一般力系的三个平衡方程,计算所切各杆中的未知轴力。如果所切各杆中的未知轴力只有三个,它们既不相交于同一点,也不彼此平行,则用截面法即可直接求出这三个未知轴力。因此截面法最适用于下列情况:联合桁架的计算;简单桁架中少数杆件的计算。

在计算中,仍先假设未知轴力为拉力。计算结果如得正值,则实际轴力就是拉力;如得负值,则是压力。

为了避免解联立方程,应注意对平衡方程加以选择。

**例 3-9** 试求图 3-37a 所示桁架中 1、2、3 三杆的轴力。桁架所受荷载和各杆长度(单位为 mm)已在图中给出。

**解** 先求出支座反力:

$$F_{yA} = 4.52 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$F_{yD} = 1.48 \text{ kN} (\uparrow)$$

此桁架是简单桁架,虽然可以采用结点法计算,但必须从端部开始,逐步截取结点 A、b、B、c、C,才能求出 1、2、3 三杆的轴力。因此,对于这种只求少数杆件轴力的问题,以直接采用截面法较为方便。

作截面  $m-m$ , 切断 1、2、3 三杆, 取右边部分为隔离体, 如图 3-37b 所示 ( $G$  点处的支杆也被切断), 其中共有三个未知力  $F_{N1}$ 、 $F_{N2}$ 、 $F_{N3}$ , 全部设为拉力, 可利用隔离体的三个平衡方程求出。

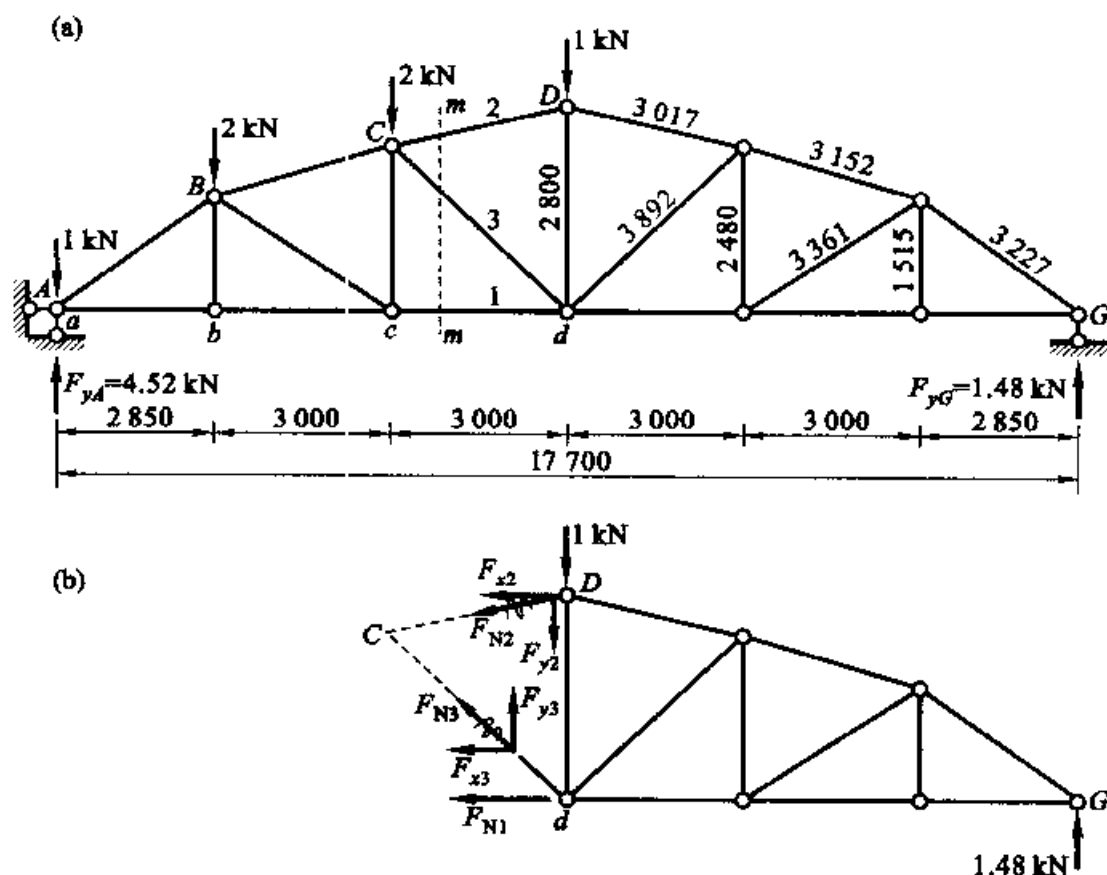


图 3-37

应用平衡方程求轴力时, 应注意避免解联立方程。例如, 为了求未知力  $F_{N1}$ , 可取其他未知力  $F_{N2}$  和  $F_{N3}$  的交点  $C$  为力矩中心, 列出力矩平衡方程。这时, 轴力  $F_{N1}$  就是方程中唯一的未知量, 因而可直接求出如下:

$$\sum M_C = 0, \quad F_{N1} \times 2.48 \text{ m} + 1 \text{ kN} \times 3.00 \text{ m} - 1.48 \text{ kN} \times 11.85 \text{ m} = 0$$

所以

$$F_{N1} = 5.87 \text{ kN (拉力)}$$

同样, 求  $F_{N2}$  时, 可取  $F_{N1}$  与  $F_{N3}$  的交点  $d$  为力矩中心。此外, 为了便于计算斜杆轴力  $F_{N2}$  的力矩, 可先将  $F_{N2}$  在  $D$  点分解为  $F_{x2}$  和  $F_{y2}$ 。由力矩方程

$$\sum M_d = 0, \quad -F_{x2} \times 2.80 \text{ m} - 1.48 \text{ kN} \times 8.85 \text{ m} = 0$$

所以

$$F_{x2} = -4.68 \text{ kN}$$

再由比例关系, 得

$$F_{N2} = -4.68 \text{ kN} \times \frac{3.017 \text{ m}}{3.00 \text{ m}} = -4.70 \text{ kN (压力)}$$

最后,求  $F_{N3}$  时,由于其他未知力已经求出,故也可利用投影平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{r1} - F_{N1} - F_{r2} = 0$$

所以

$$F_{r3} = -F_{N1} - F_{r2} = -5.87 \text{ kN} + 4.68 \text{ kN} = -1.19 \text{ kN}$$

再由比例关系,得

$$F_{N3} = -1.19 \text{ kN} \times \frac{3.89 \text{ m}}{3.00 \text{ m}} = -1.54 \text{ kN}$$

以上计算结果,可应用平衡方程  $\sum F_x = 0$  来进行校核。

这里,提一下截面单杆的概念。如果某个截面所截的内力为未知的各杆中,除某一杆外其余各杆都交于一点(或彼此平行——交点在无穷远处),则此杆称为该截面的单杆。关于截面单杆有下列两种情况:

(1) 截面只截断三个杆,且此三杆不交于一点(或不彼此平行),则其中每一杆都是截面单杆(例如图 3-37a 中的杆 1、2、3 都是截面  $m-m$  的单杆)。

(2) 截面所截杆数大于 3,但除某一杆外,其余各杆都交于一点(或都彼此平行),则此杆也是截面单杆(例如图 3-38 中的  $a$  杆是截面  $m-m$  的单杆)。

截面单杆具有如下性质:截面单杆的内力可从本截面相应的隔离体的平衡条件直接求出。对于第一种截面单杆,上述性质是显然的。对于第二种截面单杆,由图 3-38 也容易得出上述结论。实际上,在图 3-38a 中,单杆  $a$  的轴力可利用其余各杆交点  $O$  的力矩方程求出;在图 3-38b 中,单杆  $a$  的轴力可利用沿其余各杆垂直方向的投影方程求出。

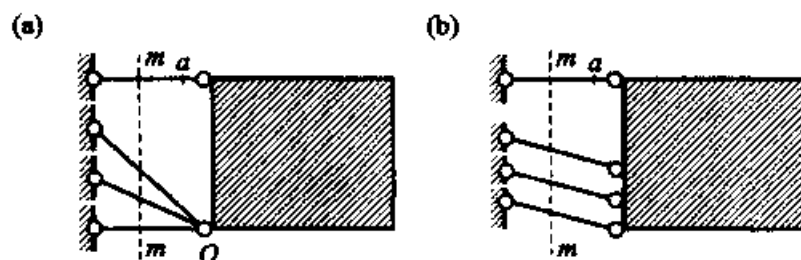


图 3-38

在计算联合桁架和某些复杂桁架时,应注意应用截面单杆的上述性质。

图 3-39 所示桁架虽然是一个复杂桁架,但对图中所示水平截面  $m-m$  来说,  $AF$  杆是截面单杆,因此其轴力可由此截面的水平投影方程直接求出。

此杆轴力求出后,其余各杆轴力即可用结点法依次求出(依次取结点  $F$ 、 $D$ 、 $G$ 、 $E$  为隔离体)

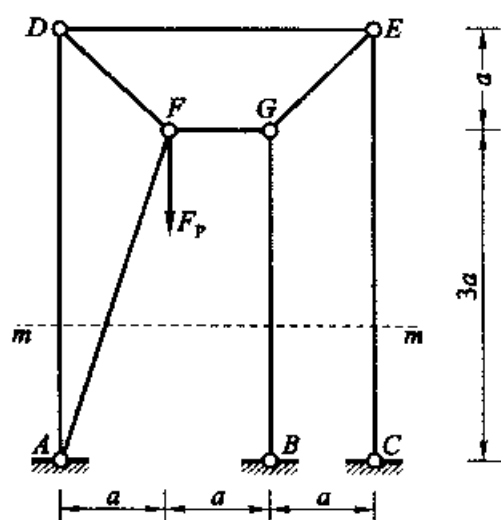


图 3-39

图 3-40 所示桁架都是联合桁架。每个结点都不存在结点单杆,故用结点法时遇到困难。这些联合桁架都是由两个简单桁架用三个连接杆 1、2、3 装配而成的。对于图中所示的截面,连接杆 1、2、3 都是截面单杆,因而可以

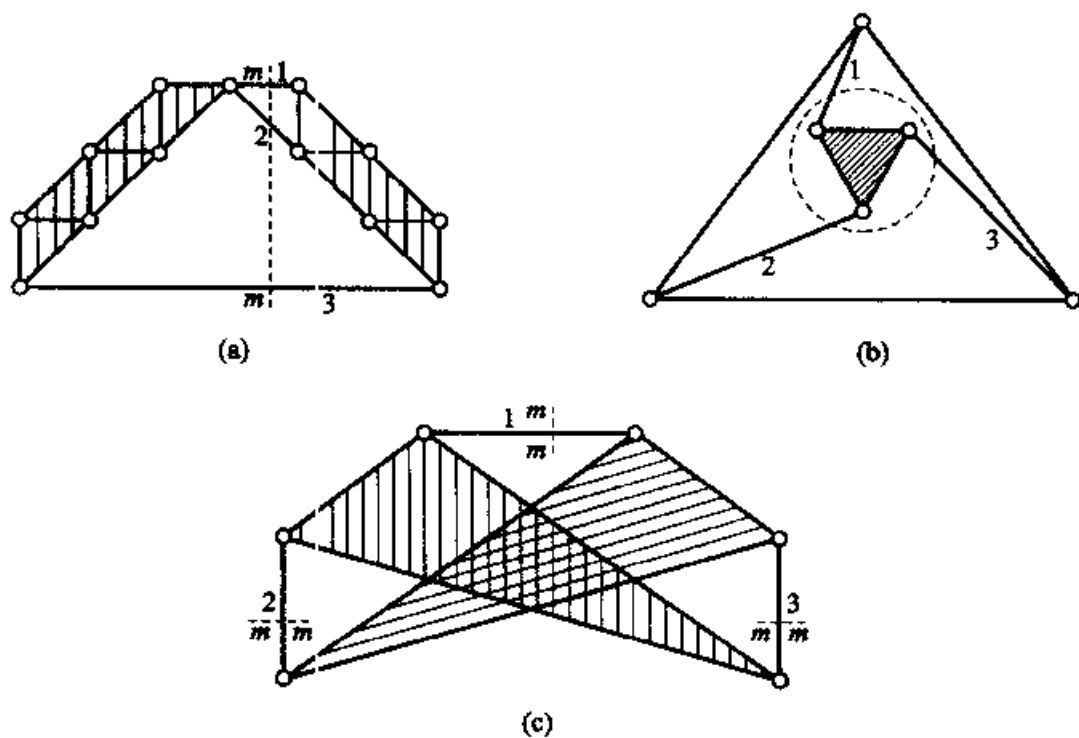


图 3-40

直接求出其轴力。由此可知,计算联合桁架时,一般不宜直接采用结点法,而应首先采用截面法,并从计算三个连接杆轴力开始。

### 结点法与截面法的联合应用

在桁架计算中,有时联合应用结点法和截面法更为方便。

图 3-41a 示一简单桁架,设拟求两根斜杆 1、2 的轴力。如果我们使用截面  $m-m$ ,考虑左部的平衡,由  $\sum F_x = 0$  得到的方程包括  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$  两个未知量,还需要对  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$  补充一个方程。这个补充方程可以利用结点法得到。由结点  $G$  的平衡(图 3-41b),可以建立  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$  的关系,从而也就建立了  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$  的关系。这样  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$  就可以计算出来。

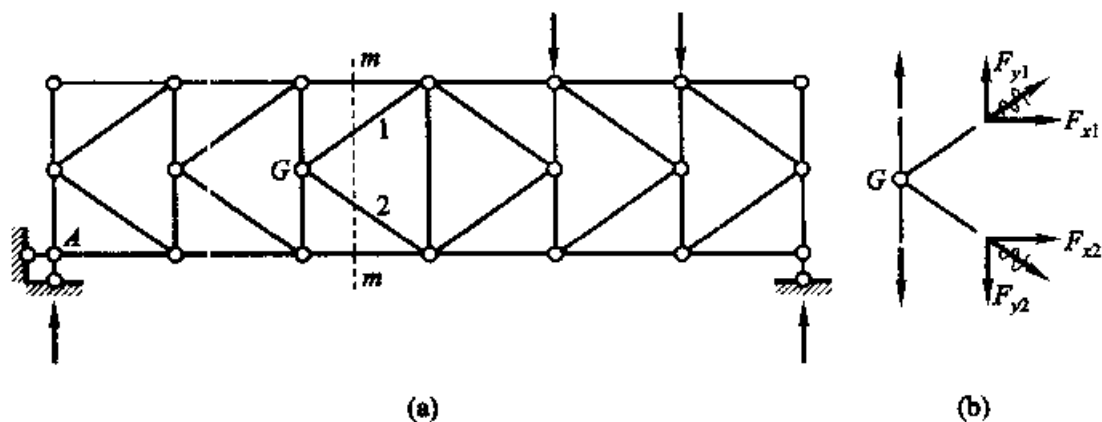


图 3-41

**例 3-10** 试求图 3-42a 所示桁架中 1、2、3 三杆的轴力。

**解** 先求出支座反力。

这是一个联合桁架,单用结点法很不方便。

先作截面  $m-m$ ,求  $F_{N4}$ 。取截面  $m-m$  以右部分为隔离体(隔离体图省去),并以  $G$  为力矩中心,得

$$\sum M_G = 0, \quad F_{N4} \times 4 \text{ m} - 8 \text{ m} \times 6 \text{ kN} = 0$$

所以

$$F_{N4} = 12 \text{ kN (拉力)}$$

再作截面  $n-n$ ,取截面左部为隔离体(图 3-42b)。以  $D$  点为力矩中心,并将  $F_{N2}$  在  $G$  点分解为  $F_{x2}$  和  $F_{y2}$ 。

$$\sum M_D = 0, \quad 18 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - 3 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - 6 \text{ kN} \times 2 \text{ m} - 12 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - F_{x2} \times 4 \text{ m} = 0$$

所以

$$F_{x2} = 0$$

因此

$$F_{N2} = 0, \quad F_{N3} = 0$$

再取结点  $E$  为隔离体(图 3-42c), 用投影方程可求出  $F_{N1}$  和  $F_{N3}$ 。

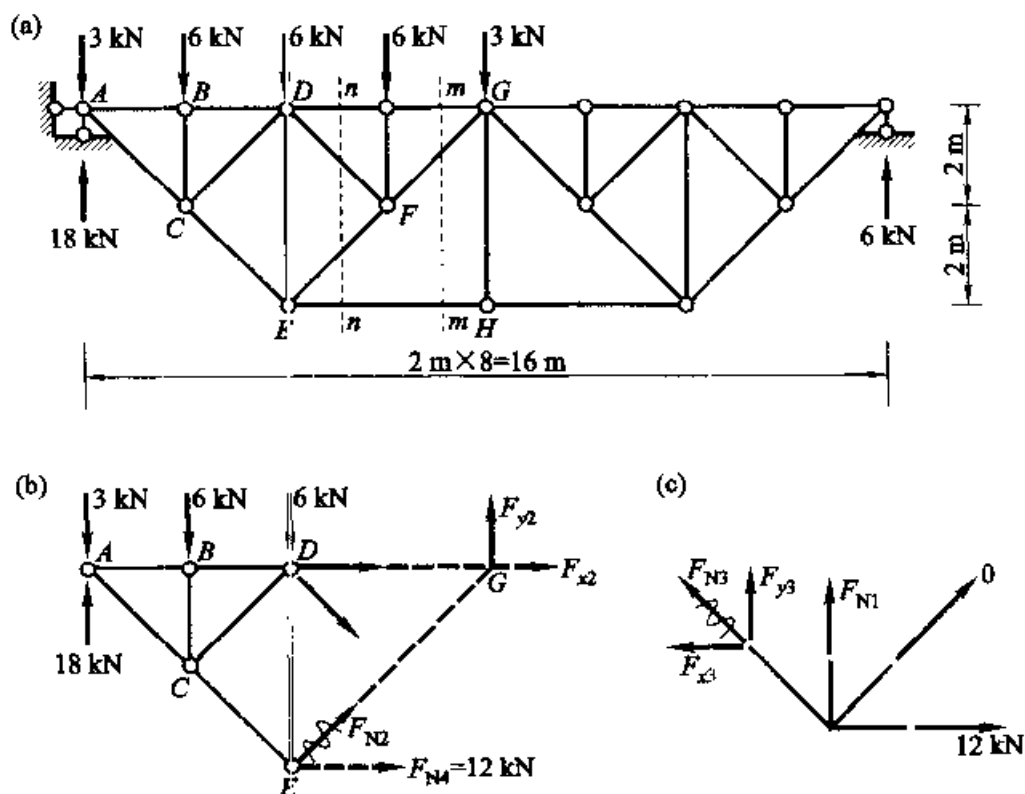


图 3-42

$$\sum F_x = 0, \quad 12 \text{ kN} - F_{N1} = 0$$

所以

$$F_{N1} = 12 \text{ kN}$$

因此

$$F_{N1} = 12 \text{ kN}, \quad F_{N3} = 12 \text{ kN} \times \sqrt{2} = 16.97 \text{ kN} \text{ (拉力)}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N2} + F_{N3} = 0$$

所以

$$F_{N2} = F_{N3} = -12 \text{ kN} \text{ (压力)}$$

### 复杂桁架的计算——代替杆法

联合应用结点法和截面法一般均可求解复杂桁架。现介绍另一种解法

图 3-43a 所示复杂桁架, 内部少一根杆, 是内部可变体系; 但支承杆却有四根, 因而  $W$  值仍为零。

若将中间支杆移去, 代之以杆  $BE$ , 如图 3-43b 所示, 则此为一简单桁



架,容易求解。此时,  $F_{NBE} = F_P$ 。

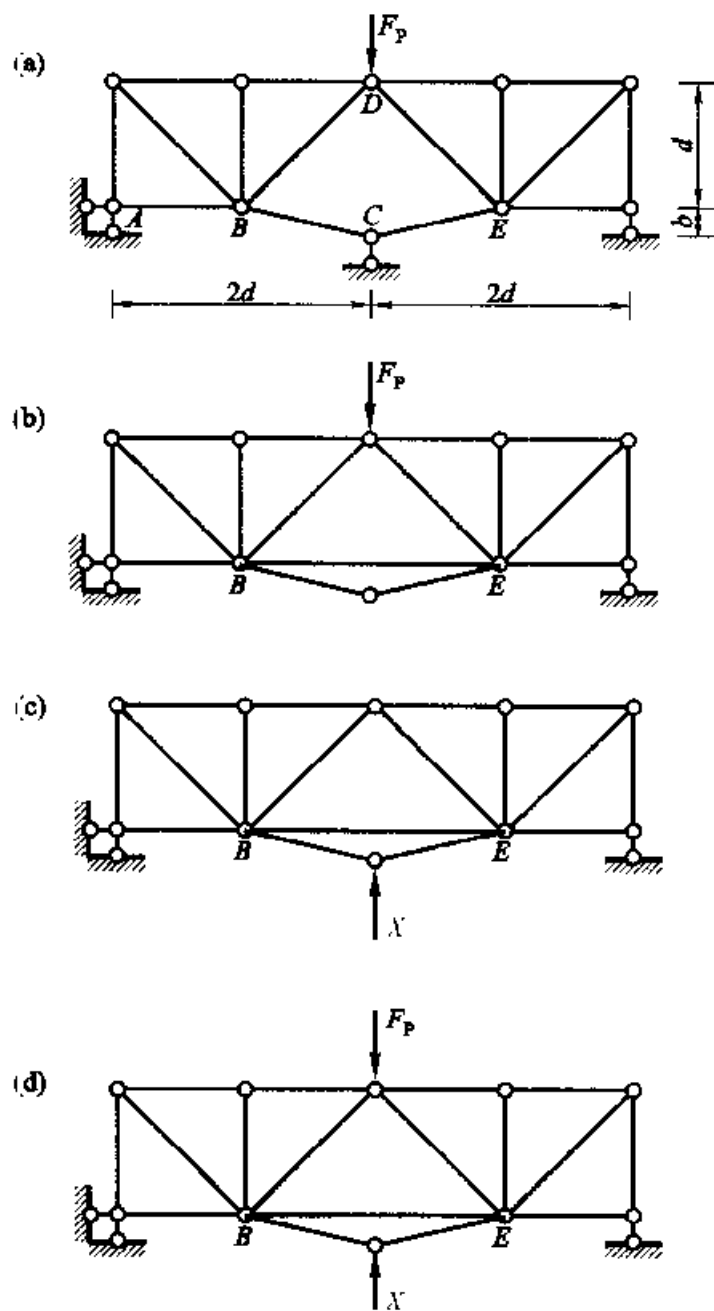


图 3-43

再将中间支杆未知反力  $X$ <sup>①</sup> 作用于此代替桁架,如图 3-43c 所示。此亦为一简单桁架,可求出各杆内力。此时,

$$F_{NBE} = \frac{d}{2b} X$$

① 这里未知力  $X$  为广义未知力,所以仍沿用以往教材中的  $X$  符号。

将图 3-43b、c 两简单桁架的结果叠加,如图 3-43d 所示。此时,

$$F_{NBF} = \frac{d-b}{2b}X + F_P$$

如图 3-43d 中 BE 杆内力为零,则图 3-43d 与图 3-43a 的结果完全相同。由此,得确定中支杆反力的条件为

$$F_{NBF} = \frac{d-b}{2b}X + F_P = 0$$

即

$$X = \frac{2b}{b-d}F_P$$

中间支杆未知反力  $X$  求出后,各杆内力即不难求出。

由以上结果还可看出,当  $b=d$  时,  $X \rightarrow \infty$ ,表示此时体系是可变的。

## \* § 3-6 静定空间桁架

### 1. 空间桁架的应用

平面桁架只能承受作用在桁架平面内的荷载,但是实际上结构所受的荷载常作用于不同方向的几个平面内。因此,由一系列互相平行的平面桁架组成的结构必须用连接系统构成一个空间体系,才能承受各个方向的荷载。这种空间体系通常都可简化为平面桁架进行计算。

在工程实际中还有一类具有明显空间特征的桁架,不能简化为平面桁架来计算,属于这类空间桁架的例子有网架结构、塔架、起重机构架等。图 3-44a 为网架结构。图 3-44b 为广州电视塔,高 200 m,塔身为八边形结构。

### 2. 空间桁架的几何构造

空间桁架的结点一般都看作圆球铰结点,连接圆球铰的杆件可以绕通过铰中心的任意轴线转动。与平面桁架一样,两端由铰连接的直杆称为链杆。

空间桁架由结点和链杆组成。每个结点在空间有三个自由度,而每个链杆或支杆相当于一个约束。因此,空间桁架的计算自由度  $W$  可按下式计算:

$$W = 3j - b$$

式中  $j$  是空间桁架的结点数,  $b$  是链杆和支杆的总数。如果  $W > 0$ ,则体系是可变的。如果体系是几何不变、且无多余约束的空间桁架,则必有  $W = 0$ 。

组成几何不变空间桁架的最简单规则,是从一个平面三角形或从基础开始,依次用三根不在同一平面内的链杆固定一个新结点。因为三角形是几何不变的,三根不共面的链杆在空间可以固定一点,所以得到的仍是一个

几何不变、且无多余约束的整体。因此,这样依次添加结点组成的空间桁架是几何不变、且无多余约束的,称为简单桁架。图3-45所示为几个简单桁架的例子,都是按照A、B、C、…的次序依次添加结点组成的。

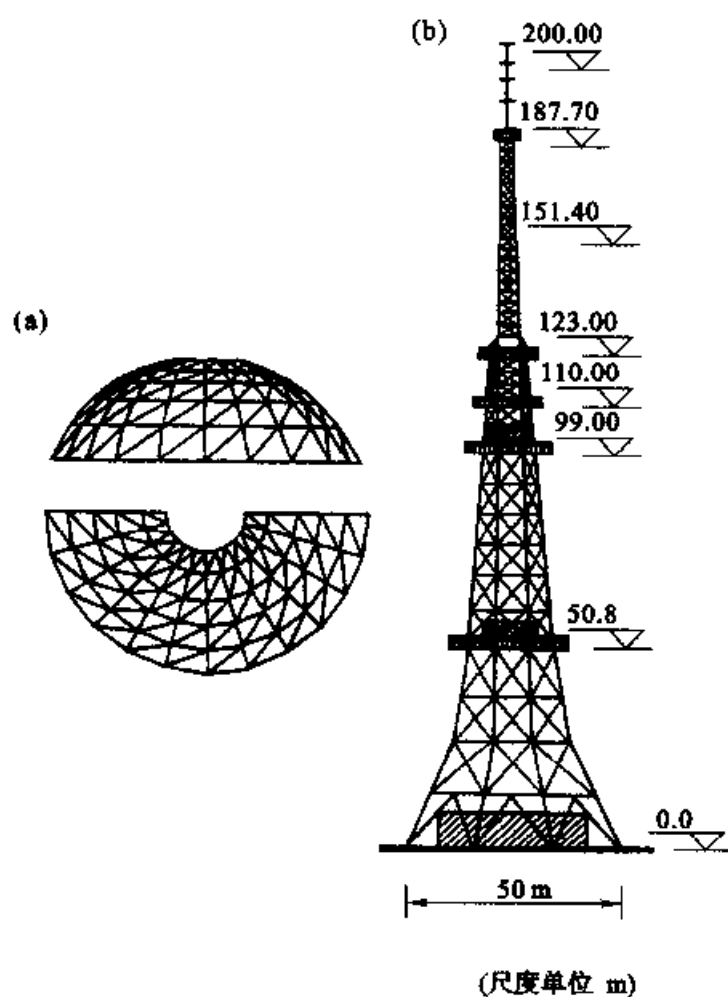


图 3-44

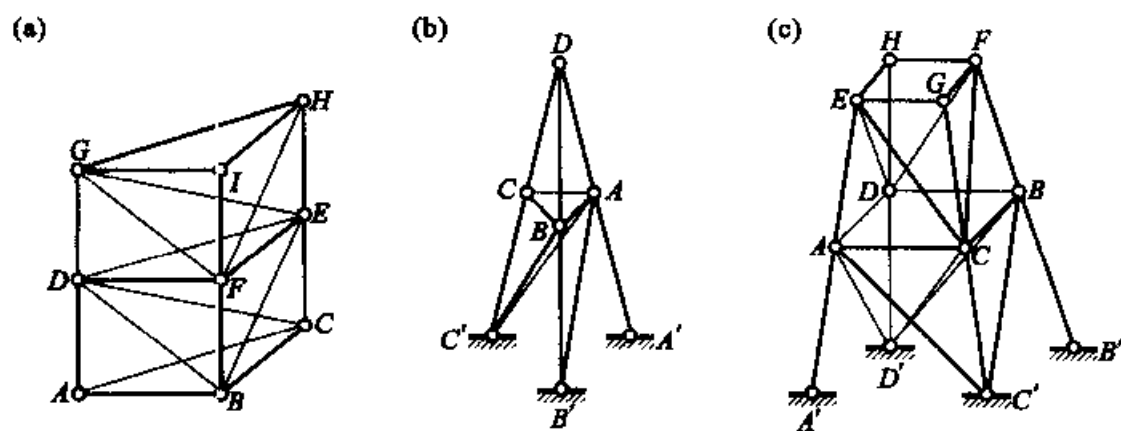


图 3-45

与平面桁架类似,按几何构造的特点,空间桁架也可以分为简单桁架、联合桁架和复杂桁架三种。联合桁架也是由简单桁架连接而成的。联合桁架和复杂桁架的几何构造比较复杂时,可以首先求其计算自由度,在计算自由度等于零的条件下,再用零载法判定其几何不变性。

### 3. 结点法和截面法

与平面桁架一样,当荷载只作用于结点时,空间桁架各杆只受轴力。可以用结点法或截面法计算。

结点法是截取结点为隔离体,利用每个结点所受的空间汇交力系的三个平衡条件:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \quad (3-5)$$

来求各杆的轴力。

简单桁架的内力可以完全用结点法求出。截取结点的次序应与组成桁架时添加结点的次序相反。如图 3-46 所示的简单桁架,可先取结点 F, 求出 1、2、3 三杆的轴力,再依次取结点 E 和 D, 求出 4、5、6 杆和 7、8、9 杆的轴力。

计算内力时,常须将杆件的轴力  $F_N$  分解为沿直角坐标轴  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的分力  $F_x$ 、 $F_y$ 、 $F_z$ 。设杆件 AB 的长度为  $l$ , 其在坐标轴  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的投影为  $l_x$ 、 $l_y$ 、 $l_z$  (图 3-47), 则轴力及其分力与杆长及其投影之间存在下列比例关系:

$$\frac{F_x}{l_x} = \frac{F_y}{l_y} = \frac{F_z}{l_z} = \frac{F_N}{l} \quad (3-6)$$

求轴力与各分力之间关系时可利用上述比例式。

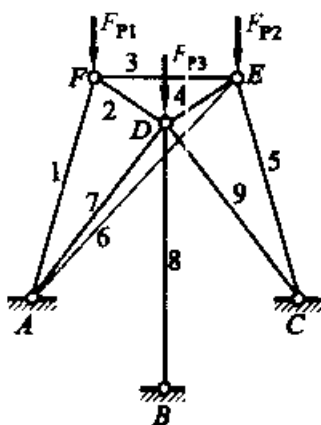


图 3-46

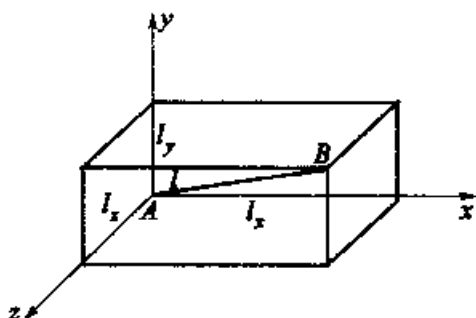


图 3-47

**例 3-11** 试求图 3-48a 所示桁架各杆的轴力。

**解** 先根据各杆投影尺寸求杆长:

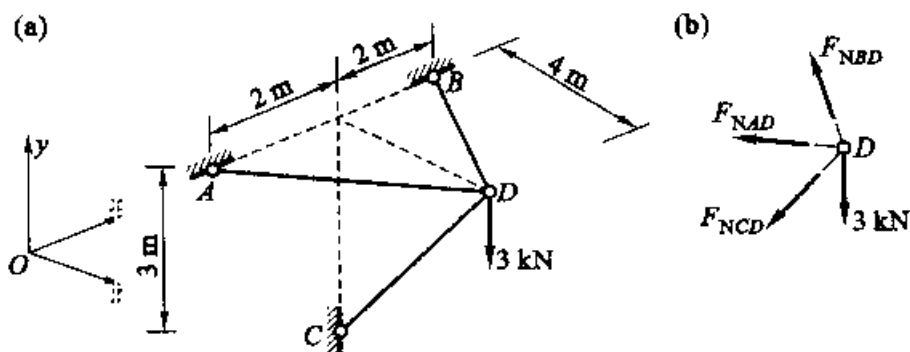


图 3-48

$$l_{AD} = l_{BD} = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 4.47 \text{ m}$$

$$l_{CD} = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$$

设杆未知轴力为拉力,取结点  $D$  为隔离体,如图 3-48b 所示。由投影方程  $\sum F_y = 0$ ,求得杆  $CD$  的竖向分力

$$F_{yCD} = 3 \text{ kN}$$

利用式(3-6),可知:

$$F_{xCD} = -4 \text{ kN}$$

$$F_{NCD} = 5 \text{ kN (压力)}$$

由投影方程  $\sum F_x = 0$ ,求得

$$F_{xAD} = F_{xBD}$$

由式(3-6)可知:

$$F_{yAD} = F_{yBD}$$

$$F_{NAD} = F_{NBD}$$

最后,由投影方程  $\sum F_x = 0$ ,求得

$$F_{xAD} + F_{xBD} - 4 \text{ kN} = 0$$

所以

$$F_{xAD} = F_{xBD} = 2 \text{ kN}$$

由式(3-6)可知:

$$F_{NAD} = F_{NBD} = 2.24 \text{ kN (拉力)}$$

**例 3-12** 图 3-49 示一锥形桁架。底面  $ABCD$  为长方形;边长为  $a$  和  $b$ 。荷载  $F_P$  与  $a$  边平行。试求反力及各杆轴力。

**解** 此桁架为一联合桁架。反力可用 6 个平衡方程求出。选择力矩轴时,应注意尽量使计算简便。

先将所有支杆截断,并令所有反力向  $AD$  轴取矩,即得

$$\sum M_{AD} = 0, \quad F_{R6} = 0$$

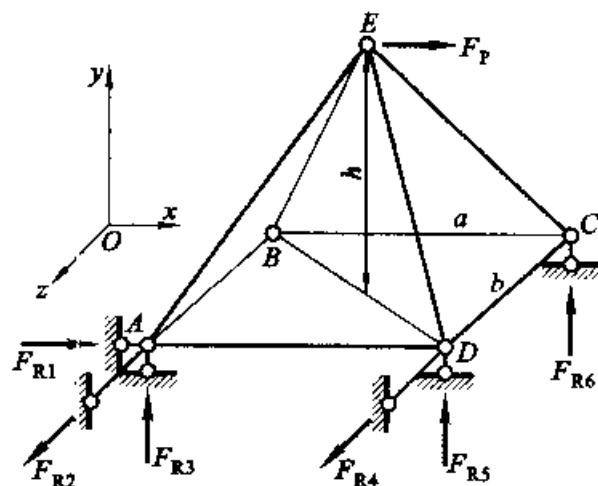


图 3-49

再作

$$\sum M_{AB} = 0, \quad F_{R5} = \frac{h}{a} F_P (\uparrow)$$

作

$$\sum F_y = 0, \quad F_{R3} = -\frac{h}{a} F_P (\downarrow)$$

作

$$\sum F_x = 0, \quad F_{R1} = -F_P (\leftarrow)$$

再以通过 D 点与 y 轴平行直线为力矩轴,

$$\sum M_{yD} = 0, \quad F_{R2} = \frac{b}{a} \frac{F_P}{2} (\rightarrow)$$

再作

$$\sum F_z = 0, \quad F_{R4} = -\frac{b}{a} \frac{F_P}{2} (\downarrow)$$

计算各杆轴力可用结点法,

$$\text{结点 C: } F_{NCE} = F_{NBC} = F_{NCD} = 0$$

$$\text{结点 B: } F_{NBE} = F_{NBD} = F_{NAB} = 0$$

$$\text{结点 D: } \sum F_y = 0, \quad F_{NDE} = -\frac{F_P}{a} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NAD} = \frac{F_P}{2}$$

$$\text{结点 A: } \sum F_y = 0, \quad F_{NAE} = \frac{F_P}{a} \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

由计算结果得知只有 AE、AD 和 DE 三杆有力,事实上此三杆构成一个

平面桁架,与荷载  $F_P$  能在此平面内成平衡。

考虑结点平衡时,如有下列特殊情况,便可简化计算:

(1) 如除去一力  $F_N$  以外,其余各力均在同一平面内,则  $F_N$  等于零(图 3-50a)。

(2) 如有不在同一平面内的三个力成平衡,则此三力全等于零(图 3-50b)。

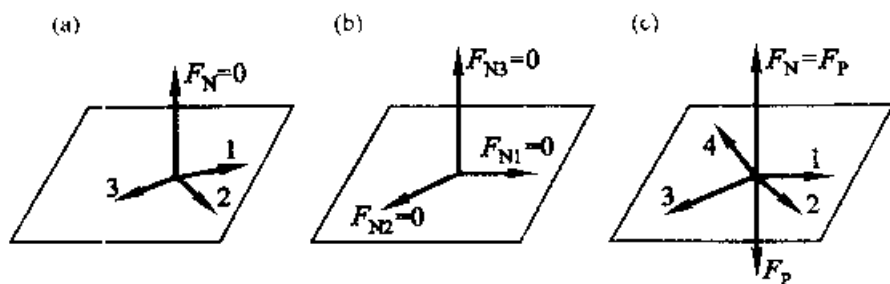


图 3-50

(3) 如除在一直线上的两个方向相反的力  $F_N$  和  $F_P$  外,其余各力都在同一平面内,则  $F_N = F_P$  (图 3-50c)。

图 3-51 为一支承贮罐的塔架,承受竖向荷载和水平荷载。这是一个复杂桁架,根据叠加原理,可以将荷载分开求解。下面以荷载  $F_{P1}$  为例加以分析。

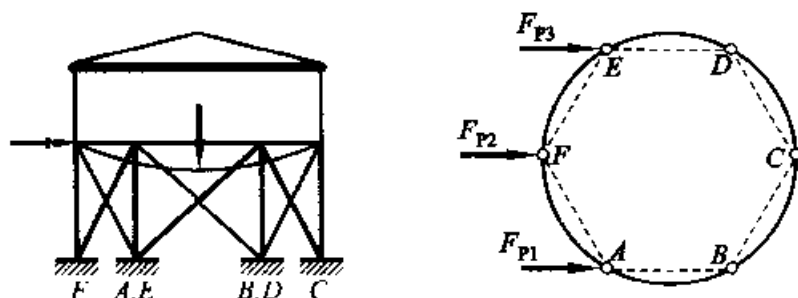


图 3-51

在荷载  $F_{P1}$  作用下(图 3-52),用结点法求解时,从任一结点开始都遇到四个未知力。但是,在结点 6 上,除杆 61 外,其余三杆在一平面内,由投影方程可知  $F_{N61} = 0$ 。同样,由结点 5 可知  $F_{N56} = 0$ 。依次取结点 4、3、2 可知  $F_{N45} = F_{N34} = F_{N23} = 0$ 。再依次取结点 6、5、4、3,每结点都是无荷载作用的二杆结点,因而各杆都是零杆。再由结点 1 可知,  $F_{N1F} = 0$ 。最后,只剩下  $\triangle BFA$  平面内的杆件需要计算,不难按平面桁架求出其内力。

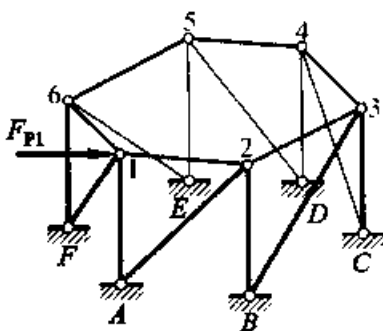


图 3-52

## 4. 分解成平面桁架法

对于由几个平面桁架组成的空间桁架,可将空间桁架分解成平面桁架进行计算,因而计算工作大为简化。

图 3-53a 为一空间桁架,求荷载  $F_P$  作用下各杆内力时,可将作用在  $E$  点的荷载  $F_P$  沿  $EH$ 、 $EF$  和  $EA$  三个方向分解为  $F_{P1}$ 、 $F_{P2}$ 、 $F_{P3}$  三个分力,分别计算每一分力在桁架中引起的内力,然后将三组内力叠加,便得到所要求的解答

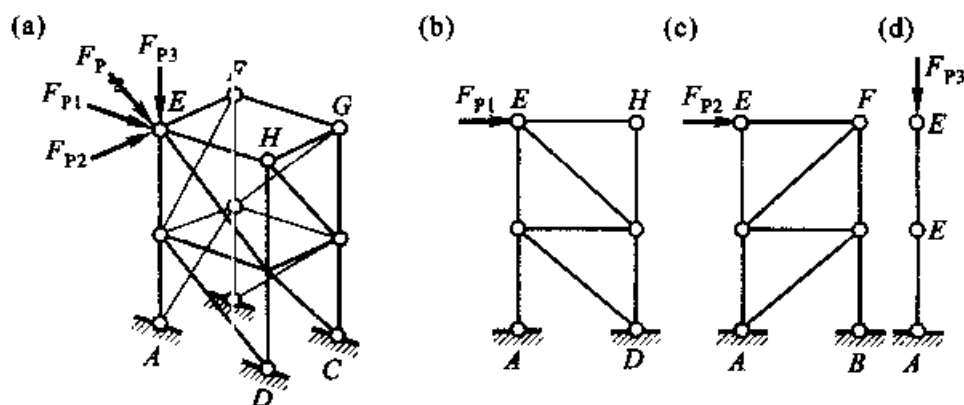


图 3-53

因为静定结构满足平衡条件的解答是唯一的解答。在一定的荷载作用下,能满足平衡条件的内力状态便是真正的内力状态。所以可以看出: $F_{P1}$ 可由平面桁架  $ADHE$  维持平衡(图 3-53b),因此只需计算此平面桁架,其余各杆轴力为零;同理, $F_{P2}$ 只使平面桁架  $ABFE$  受力(图 3-53c),其余各杆轴力为零; $F_{P3}$ 只使杆  $AE$  受压(图 3-53d),其余各杆轴力为零。

前面用结点法分析图 3-52 所示塔架时,其结论是只有  $12BA$  平面内的杆件受力。这一结论也可直接从分解平面桁架法得到。这个例子可以帮助我们了解分解平面桁架法的正确性。

对于超静定空间桁架,设计时可用分解平面桁架法计算,求得近似解。

## § 3-7 组合结构

在有些由直杆组成的结构中,一部分杆件是链杆,只受轴力作用;另一部分杆件是梁式杆,除受轴力作用外,还受弯矩作用。这种由链杆和梁式杆组成的结构,称为组合结构。

图 3-54、3-55 所示为组合结构的一些例子。图 3-54a 为一下撑式三角形屋架,上弦由钢筋混凝土制成,下弦和腹杆为型钢。计算简图如图 3-54b 所示。



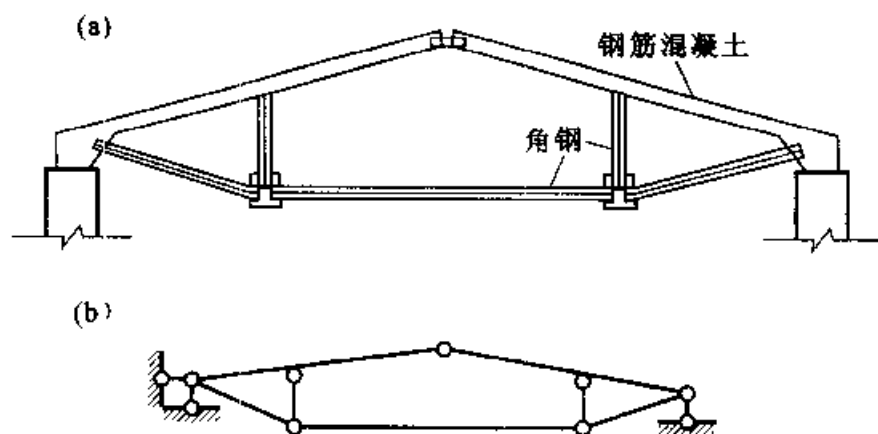


图 3-54

图 3-55a 为拱桥的计算简图, 其中由多根链杆组成链杆拱, 再与加劲梁用链杆连接, 组成整个结构。当跨度较大时, 加劲梁可换成加劲桁架, 如图 3-55b 所示。

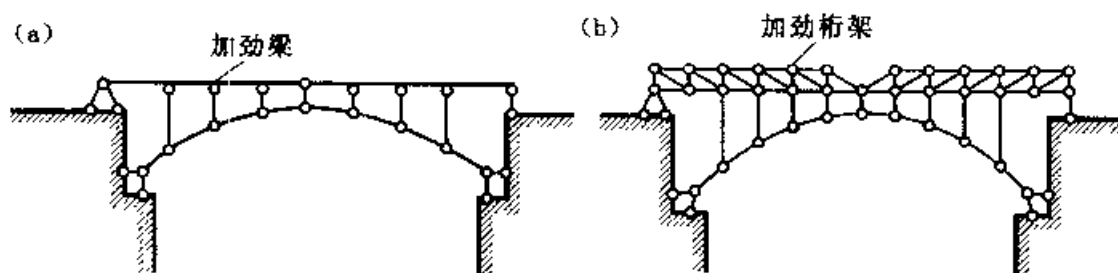


图 3-55

应用截面法计算组合结构时, 应注意被截的杆件是链杆还是梁式杆。对于链杆, 截面上只作用有轴力; 对于梁式杆, 截面上一般作用有三个力, 即弯矩、剪力和轴力。

假如所截断的杆全是链杆, 则前面讨论桁架时的所有计算方法和结论全可应用。但如所截断的杆中有梁式杆时, 则不能使用桁架计算的结论。如图 3-56a 中, 当取结点  $F$  为隔离体时 (图 3-56b), 由于杆  $FA$  和  $FC$  并非链杆, 故  $FD$  并非零杆。

在截面 I-I 左部的隔离体上, 除作用有两个未知轴力外, 不应忘记在梁式杆截面上还作用有未知弯矩和剪力 (图 3-56c)。

由于梁式杆的截面一般有三个内力, 为了不使隔离体上的未知力过多, 应尽可能避免截断梁式杆。因此, 计算组合结构的步骤一般是先求出各链

杆的轴力,然后根据荷载和所求得的轴力作梁式杆的  $M$ 、 $F_Q$ 、 $F_N$  图。

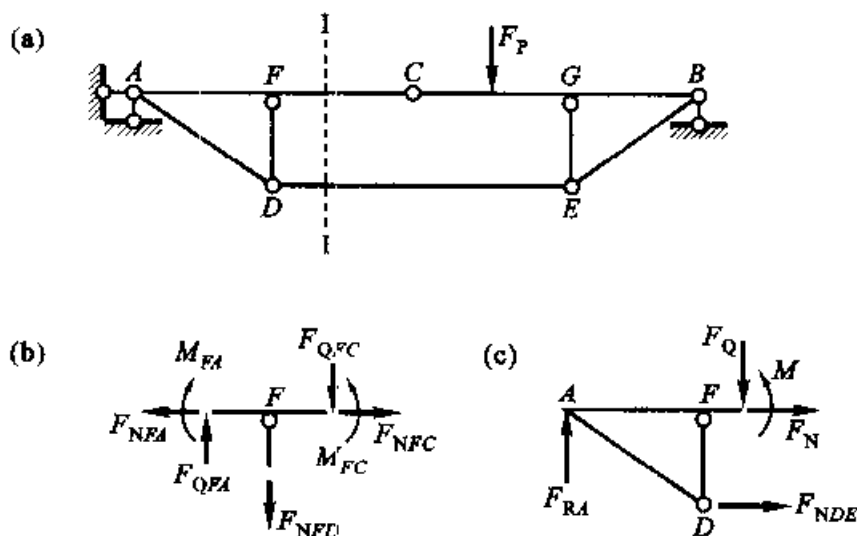


图 3-56

例 3-13 试作图 3-57a 所示下撑式五角形组合屋架的内力图

解 (1) 链杆的内力计算

此结构是由左右两个几何不变、且无多余约束的部分  $ACD$ 、 $BCE$  用铰  $C$  和链杆  $DE$  连接而成,因此,是静定的。计算内力时,可先作截面 1-1,截断铰  $C$  和链杆  $DE$  (图 3-57b)。由力矩方程  $\sum M_C = 0$ , 得

$$6 \text{ kN} \times 6 \text{ m} - 1 \text{ kN/m} \times 6 \text{ m} \times 3 \text{ m} - 1.2 F_{NDE} = 0$$

所以

$$F_{NDE} = 15 \text{ kN}$$

再由结点  $D$  和  $E$ , 可求得所有链杆的轴力。结果记在图 3-57b 中。

(2) 梁式杆的内力图

杆  $AFC$  的受力情况如图 3-57c 所示。将结点  $A$  处的竖向力合并后,受力图如图 3-57d 所示。内力图求得如图 3-57e 所示。下面作些说明:

任一截面的剪力和轴力,可按下式计算:

$$F_Q = F_y \cos \alpha - 15 \sin \alpha$$

$$F_N = -F_y \sin \alpha - 15 \cos \alpha$$

式中  $F_y$  为该截面所受竖向力的合力。图中  $\sin \alpha = 0.0835$ ,  $\cos \alpha = 0.996$ 。如杆  $A$  端的剪力和轴力为

$$\begin{aligned} F_{QAF} &= 2.5 \text{ kN} \cos \alpha - 15 \text{ kN} \sin \alpha \\ &= 2.5 \text{ kN} \times 0.996 - 15 \text{ kN} \times 0.0835 \end{aligned}$$

$$\approx 1.24 \text{ kN}$$

$$F_{\text{NAF}} = -2.5 \text{ kN} \sin \alpha - 15 \text{ kN} \cos \alpha$$

$$= -2.5 \text{ kN} \times 0.0835 - 15 \text{ kN} \times 0.996$$

$$= -15.13 \text{ kN}$$

跨中最大弯矩发生在剪力为零处, 以  $x'$  表示其横坐标(图 3-57d) 由

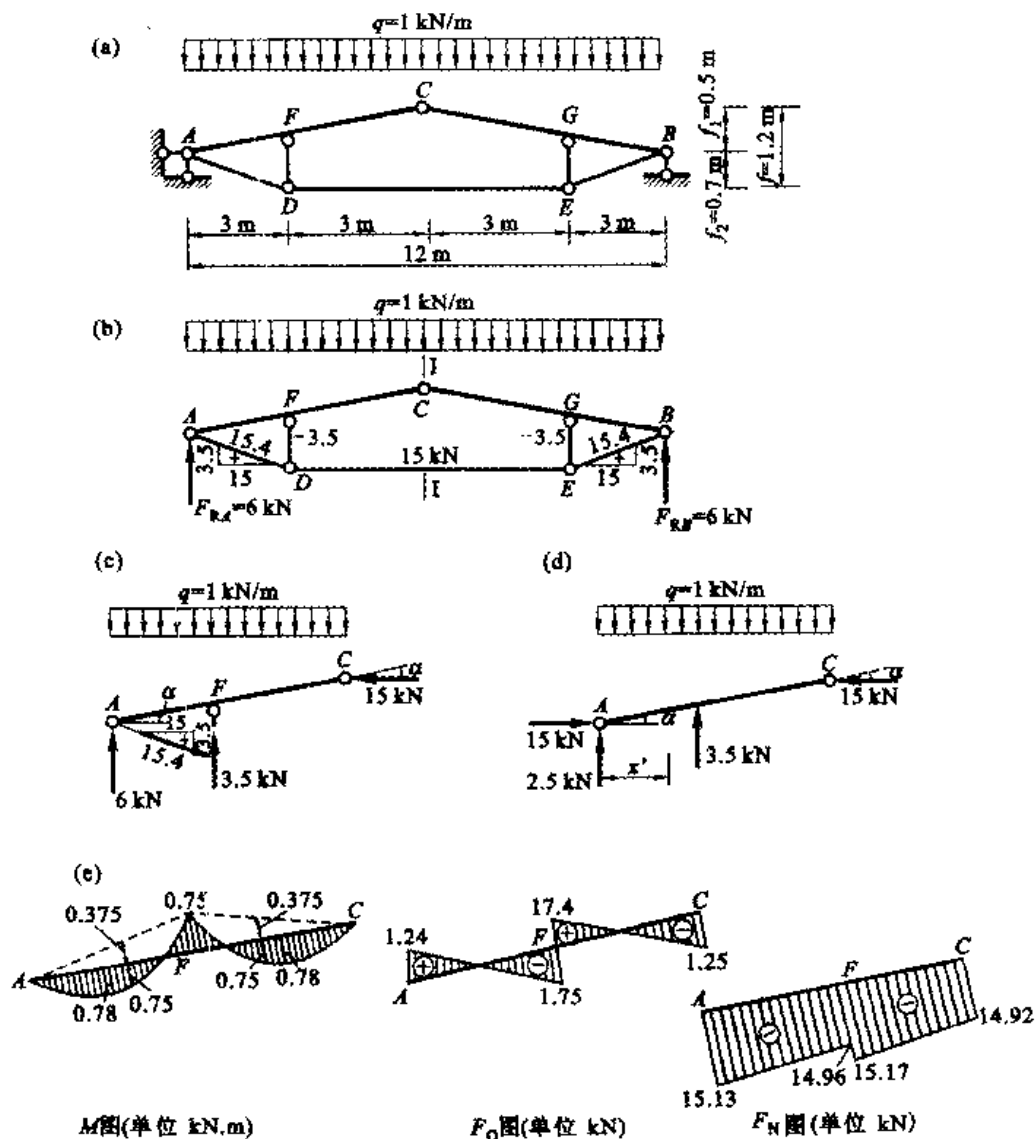


图 3-57

$$F_{\text{C}} = F_{\text{y}} \cos \alpha - 15 \text{ kN} \sin \alpha = 0$$

得

$$F_{\text{y}} = 15 \text{ kN} \tan \alpha, \quad \text{在 AF 段, } F_{\text{y}} = 2.5 \text{ kN} - qx'$$

即

$$2.5 \text{ kN} - qx' = 15 \text{ kN} \tan \alpha$$

所以

$$x' = \frac{2.5 \text{ kN}}{1 \text{ kN/m}} - \frac{15 \text{ kN}}{1 \text{ kN/m}} \times \frac{0.5 \text{ m}}{6 \text{ m}} \approx 1.25 \text{ m}$$

因此,最大弯矩为

$$M_{\text{r}} = 2.5 \text{ kN} \times 1.25 \text{ m} - 15 \text{ kN} \left( \frac{0.5 \text{ m}}{6 \text{ m}} \times 1.25 \text{ m} \right) - \left( 1 \text{ kN/m} \times 1.25 \text{ m} \times 1.25 \text{ m} \times \frac{1}{2} \right) \approx 0.78 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

现就上述例题讨论如下:

影响下撑式五角形组合屋架的内力状态的主要因素有两个:

(1) 高跨比  $\frac{f}{l}$

轴力  $F_{\text{NDE}}$  可用三铰拱的推力公式计算:

$$F_{\text{NDE}} = \frac{M_{\text{C}}^0}{f}$$

高跨比愈小,轴力  $F_{\text{NDE}}$  愈大,屋架轴力愈大,此一点与三铰拱有类似处。

(2)  $f_1$  与  $f_2$  的关系

当高度  $f$  确定后,内力状态随  $f_1$  与  $f_2$  的比例不同而变。图 3-58 中给出了三种结果,从中可以看出:

弦杆轴力的变化幅度不大,但上弦杆弯矩的变化幅度很大。

当坡度(即  $f_1$ )减小时,上弦负弯矩增大。当  $f_1 = 0$  时,上弦坡度为零,即为下撑式平行弦组合结构(图 3-58a)。此时上弦全部为负弯矩,上弦弯矩有如支在 A 和 F 两点的伸臂梁。

当坡度(即  $f_1$ )加大时,上弦正弯矩增大。当  $f_2 = 0$  时,即为一个带拉杆的三铰拱式屋架(图 3-58c)。此时上弦全部为正弯矩,上弦弯矩有如支在 A、C 两点的简支梁。

当  $f_1 = (0.45 \sim 0.5)f$  时,上弦结点 F 处的负弯矩与两个节间的最大正弯矩,在数值上将大致相等(图 3-58b)。且数值比图 3-58a、c 两种极限情形小得多。

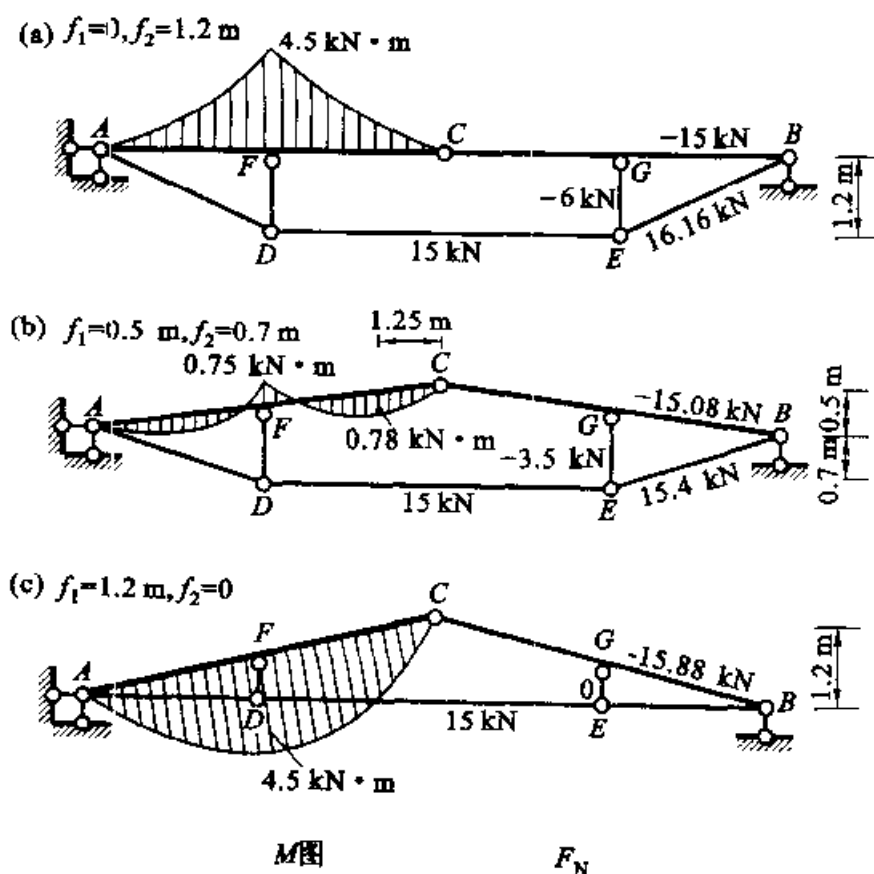


图 3-58

### § 3-8 三 铰 拱

#### 1. 三铰拱的支座反力和内力

三铰拱是一种静定的拱式结构,在桥梁和屋盖中都得到应用。图 3-59 所示为三铰拱的两种形式。

图 3-59a 为无拉杆的三铰拱,AC 和 BC 是两根曲杆,在 C 点用铰连接, A、B 两点是铰支座。图 3-59b 为有拉杆的三铰拱, B 点改为滚轴支座,同时加上拉杆 AB。拱的基本特点是在竖向荷载作用下有水平推力。对于有拉杆的三铰拱,推力就是拉杆内的拉力。推力对拱的内力有重要影响。曲杆的轴线常用抛物线和圆弧,有时采用悬链线。拱高  $f$  与跨长  $l$  的比值是拱的基本参数。工程实际中,高跨比由 1 至  $1/10$ ,变化的范围很大。

图 3-60 为北京玻璃厂使用的装配式钢筋混凝土三铰拱。图 3-60a 所示为拱的尺寸,图 3-60b 所示为其计算简图。

下面我们讨论在竖向荷载作用下三铰拱的支座反力和内力的计算方法,并将拱与梁加以比较,用以说明拱的受力特性。

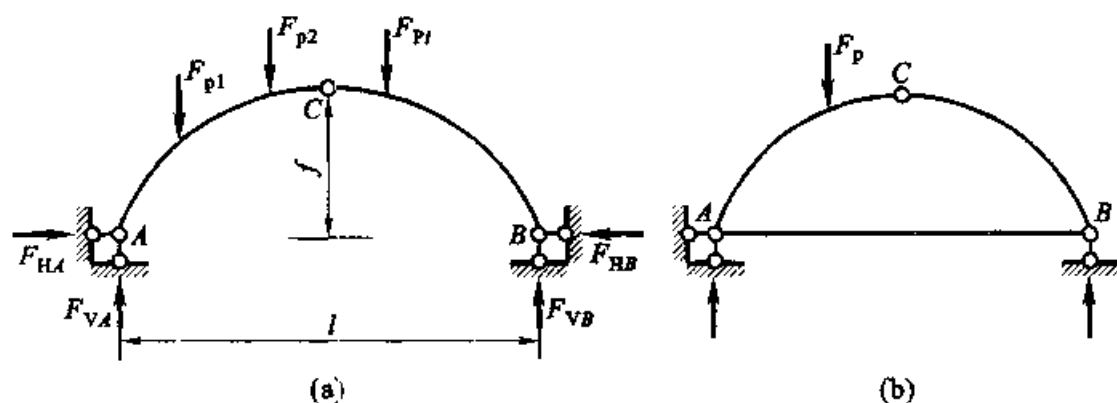


图 3-59

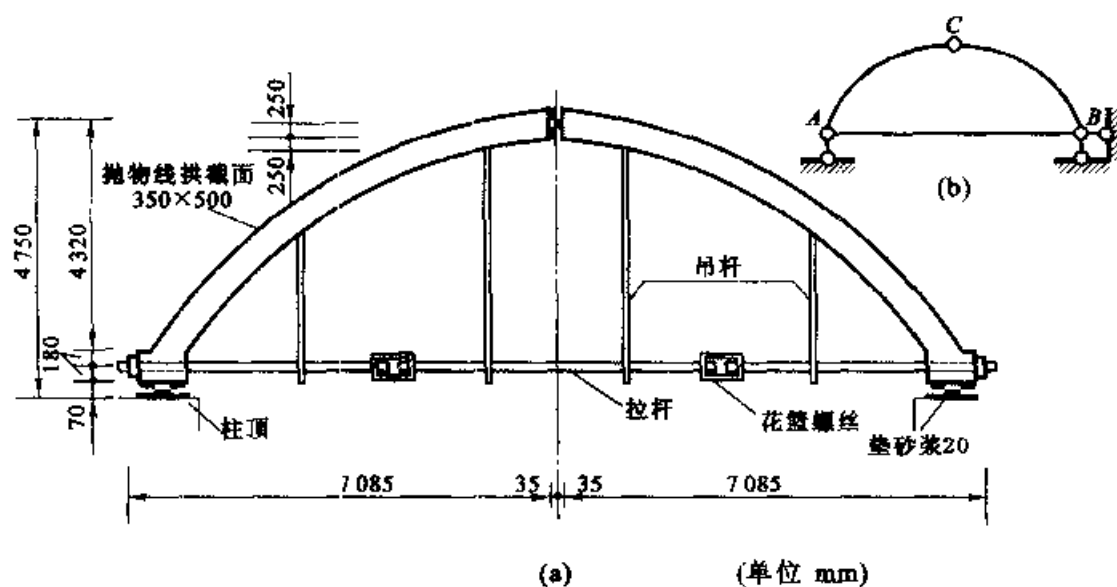


图 3-60

## (1) 支座反力计算

图 3-61a 所示三铰拱, 有四个支座反力  $F_{VA}$ 、 $F_{HA}$ 、 $F_{VB}$ 、 $F_{HB}$ , 求解时需要四个方程。拱的整体有三个平衡方程, 此外铰 C 又增加一个静力平衡方程, 即 C 点的弯矩应为零。所以, 三铰拱是静定结构。

为了便于比较, 我们在图 3-61b 中画出一个简支梁, 跨度和荷载都与三铰拱相同。因为荷载是竖向的, 梁没有水平反力, 只有竖向反力  $F_{VA}^0$  和  $F_{VB}^0$ 。简支梁的竖向反力  $F_{VA}^0$  和  $F_{VB}^0$  可分别由平衡方程  $\sum M_B = 0$  和  $\sum M_A = 0$  求出。

考虑拱的整体平衡, 由  $\sum M_B = 0$  和  $\sum M_A = 0$ , 可求出拱的竖向反力:

$$F_{VA} = \frac{1}{l}(F_{p1}b_1 + F_{p2}b_2)$$

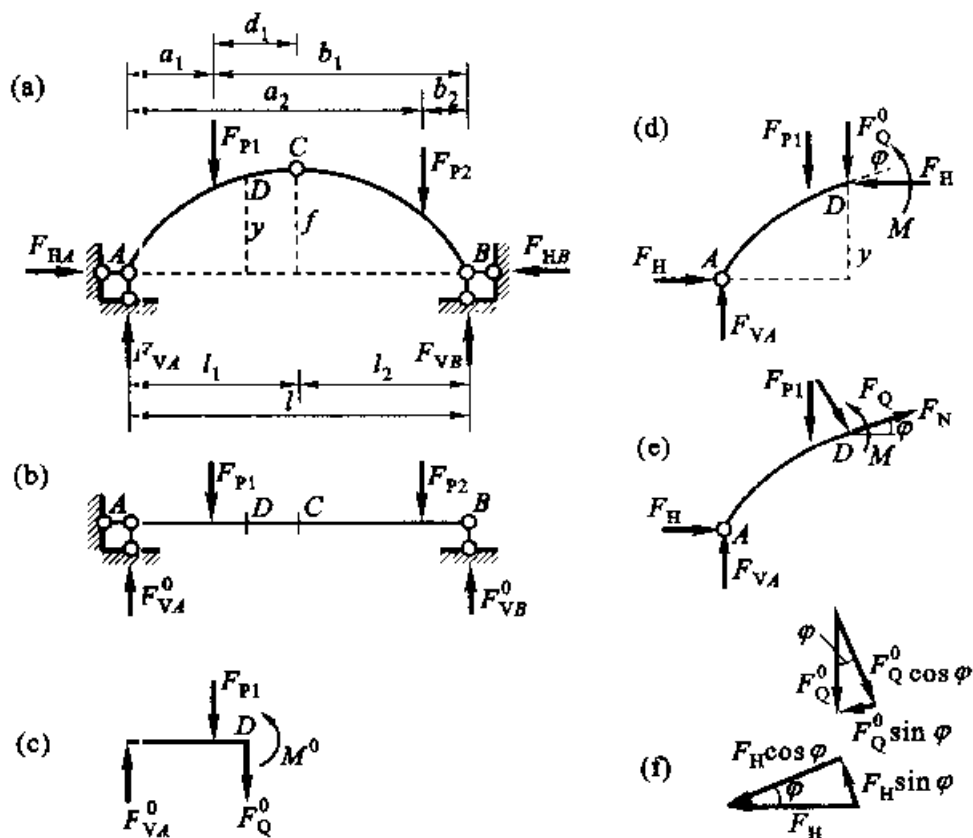


图 3-61

$$F_{VB} = \frac{1}{l} (F_{P1} a_1 + F_{P2} a_2)$$

与图 3-61b 中的梁相比较,可知:

$$F_{VA} = F_{VA}^0$$

$$F_{VB} = F_{VB}^0 \quad (3-7)$$

这就是说,拱的竖向反力与简支梁的竖向反力相同。

由  $\sum F_x = 0$ , 得

$$F_{HA} = F_{HB} = F_H$$

A、B 两点的水平反力方向相反,数量相等,以  $F_H$  表示推力的数量。

为了求出推力  $F_H$ , 我们应用铰 C 提供的条件:

$$M_C = 0$$

考虑铰 C 左边所有的外力,上式可写为

$$F_{VA} l_1 - F_{P1} d_1 - F_H f = 0$$

前两项是 C 点左边所有竖向力对 C 点的力矩代数和,等于简支梁相应截面 C 的弯矩。以  $M_C^0$  表示简支梁截面 C 的弯矩,则上式可写成:

$$M_C^0 - F_H f = 0$$

所以

$$F_H = \frac{M_c^0}{f} \quad (3-8)$$

由此可知,推力与拱轴的曲线形式无关,而与拱高  $f$  成反比,拱愈低推力愈大。荷载向下时,  $F_H$  得正值,方向如图 3-61a 所示,推力是向内的。如果  $f \rightarrow 0$ , 推力趋于无限大,这时 A、B、C 三个铰在一条直线上,成为几何可变体系。

## (2) 内力计算

试求指定截面 D 的内力。

在计算中,我们借用简支梁相应截面 D 的弯矩  $M^0$  和剪力  $F_Q^0$  (图 3-61c)。图 3-61d 所示为三铰拱截面 D 左边的隔离体,在截面 D 作用的内力不但有弯矩  $M$ ,而且有水平力(等于拱的推力  $F_H$ )和竖向力(等于简支梁截面 D 的剪力  $F_Q^0$ )。后两个力可由投影方程  $\sum F_x = 0$  和  $\sum F_y = 0$  证实。而  $M$  要对 D 点(截面 D 的形心)列力矩方程才能得到,即

$$M = M^0 - F_H y \quad (3-9)$$

这里,  $y$  是 D 点到 AB 直线的垂直距离。弯矩  $M$  以使拱的内面产生拉应力为正。

图 3-61e 所示为设计中使用的内力分量,剪力  $F_Q$  与截面 D 处轴线的切线垂直,轴力  $F_N$  与轴线的切线平行。把图 3-61d 中的竖向力  $F_Q^0$  和水平力  $F_H$  加以分解(图 3-61f),就得到剪力  $F_Q$  和轴力  $F_N$ 。以  $\varphi$  表示截面 D 处轴线的切线与水平线所成的锐角,得

$$F_Q = F_Q^0 \cos \varphi - F_H \sin \varphi \quad (3-10)$$

$$F_N = -F_Q^0 \sin \varphi - F_H \cos \varphi \quad (3-11)$$

这里,截面的剪力以使拱的小段顺时针方向转动为正,轴力以拉力为正。应用式(3-10)和(3-11)时,在拱的左半,  $\varphi$  取正号;在拱的右半,  $\varphi$  取负号。

## (3) 受力特点

由上述分析可知:

- 1) 在竖向荷载作用下,梁没有水平反力,而拱则有推力。
- 2) 由式(3-9)可知,由于推力的存在,三铰拱截面上的弯矩比简支梁的弯矩小。弯矩的降低,使拱能更充分地发挥材料的作用。
- 3) 在竖向荷载作用下,梁的截面内没有轴力,而拱的截面内轴力较大,且一般为压力(参看例 3-14)。

总起来看,拱比梁能更有效地发挥材料作用,因此适用于较大的跨度和较重的荷载。由于拱主要是受压,便于利用抗压性能好而抗拉性能差的材料,如



砖、石、混凝土等。但是,事物都是一分为二的。三铰拱既然受到向内的推力作用,也就给基础施加向外的推力,所以三铰拱的基础比梁的基础要大。因此,用拱作屋顶时,都使用有拉杆的三铰拱,以减少对墙(或柱)的推力。

**例 3-14** 三铰拱及其所受荷载如图 3-62 所示,拱的轴线为抛物线:

$y = \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x)$ 。试求支座反力,并绘制内力图。

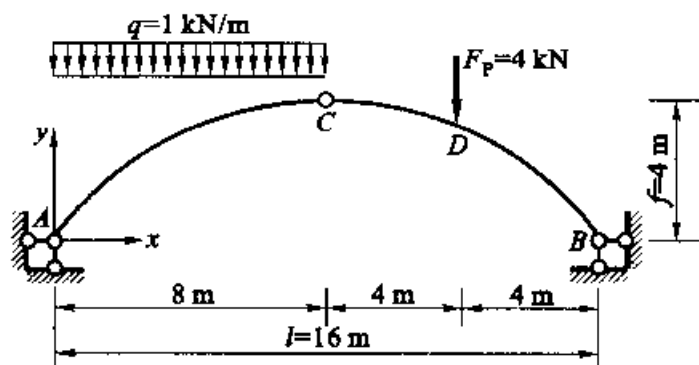


图 3-62

**解** (1) 反力计算

由式(3-7)

$$F_{VA} = F_{VA}^0 = \frac{4 \text{ kN} \times 4 \text{ m} + 8 \text{ kN} \times 12 \text{ m}}{16 \text{ m}} = 7 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$F_{VB} = F_{VB}^0 = \frac{8 \text{ kN} \times 4 \text{ m} + 4 \text{ kN} \times 12 \text{ m}}{16 \text{ m}} = 5 \text{ kN} (\uparrow)$$

由式(3-8)

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{5 \text{ kN} \times 8 \text{ m} - 4 \text{ kN} \times 4 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 6 \text{ kN}$$

(2) 内力计算

为了绘制内力图,将拱沿跨度方向分成八等分,算出每个截面的弯矩、剪力和轴力的数值。现以  $x = 12 \text{ m}$  的截面 D 为例来说明计算步骤。

1) 截面 D 的几何参数

根据拱轴线的方程:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \times 4 \text{ m}}{(16 \text{ m})^2} \times 12 \text{ m}(16 \text{ m} - 12 \text{ m}) = 3 \text{ m}$$

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x) = \frac{4 \times 4 \text{ m}}{(16 \text{ m})^2} (16 \text{ m} - 2 \times 12 \text{ m}) = -0.5$$

因而得出:

$$\varphi = -26^\circ 34', \quad \sin \varphi = -0.447, \quad \cos \varphi = 0.894$$

## 2) 截面 D 的内力

由式(3-9)得

$$M = M^0 - F_H y = 5 \text{ kN} \times 4 \text{ m} - 6 \text{ kN} \times 3 \text{ m} = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

根据式(3-10)、(3-11),因为在集中荷载处,  $F_Q^0$  有突变,所以要算出左、右两边的剪力  $F_{QL}$ 、 $F_{QR}$  和轴力  $F_{NL}$ 、 $F_{NR}$ 。

$$\begin{aligned} F_{QL} &= F_{QL}^0 \cos \varphi - F_H \sin \varphi \\ &= -1 \text{ kN} \times 0.894 - 6 \text{ kN}(-0.447) = 1.79 \text{ kN} \\ F_{NL} &= -F_{QL}^0 \sin \varphi - F_H \cos \varphi \\ &= -(1 \text{ kN}) \times (-0.447) - 6 \text{ kN} \times 0.894 = -5.81 \text{ kN} \\ F_{QR} &= F_{QR}^0 \cos \varphi - F_H \sin \varphi \\ &= -5 \text{ kN} \times 0.894 - 6 \text{ kN}(-0.447) = -1.79 \text{ kN} \\ F_{NR} &= F_{QR}^0 \sin \varphi - F_H \cos \varphi \\ &= -(-5) \text{ kN} \times (-0.447) - 6 \text{ kN} \times 0.894 = -7.6 \text{ kN} \end{aligned}$$

具体计算时,可列表进行(见表3-1)。根据表(3-1)中的数值,绘出内力图,如图3-63a、b、c所示。

表 3-1 三铰拱内力计算

截面几何参数					弯矩计算			剪力计算			轴力计算		
x	y	$\tan \varphi$	$\varphi$	$F_Q^0$	$M^0$	$-F_H y$	M	$F_Q^0 \cos \varphi$	$-F_H \sin \varphi$	$F_Q$	$F_Q^0 \sin \varphi$	$-F_H \cos \varphi$	$F_N$
0	0	1	45°	0.707	7	0	0	4.95	-4.24	0.71	-4.95	-4.24	-9.19
2	1.75	0.75	36.52°	0.600	5	12	10.5	4.00	-3.60	0.40	-3.00	4.80	-7.80
4	3.00	0.50	26.54°	0.447	3	20	18.0	2.68	-2.68	0	1.34	-5.36	-6.70
6	3.75	0.25	14.2°	0.243	1	24	22.5	0.97	-1.46	0.49	-0.24	-5.82	6.06
8	4.00	0	0	1	-1	24	-24.0	-1.00	0	-1.00	0	6.00	-6.00
10	3.75	-0.25	14.2°	0.243	-1	22	22.5	-0.97	1.46	0.49	-0.24	-5.82	-6.06
12	3.00	-0.50	-26.54°	-0.447	-3	20	-18.0	-2.68	2.68	-1.79	-2.24	5.36	-7.60
14	1.75	-0.75	-36.52°	-0.600	-5	10	-10.5	-4.00	3.60	-0.40	-3.00	4.80	7.80
16	0	-1	-45°	-0.707	-5	0	0	-3.54	4.24	0.70	-3.54	-4.24	7.78

注:表中尺寸单位为 m,弯矩单位为  $\text{kN} \cdot \text{m}$ ,剪力、轴力单位为 kN。

为了将拱与梁进行比较,在图3-63d中用实线画出了同跨度、同荷载的简支梁的弯矩图( $M^0$ 图),图中还用虚线画出了三铰拱的  $F_H y$  曲线。虚实两条曲线的纵坐标差值( $M^0 - F_H y$ )即为三铰拱的弯矩值,因此两条曲线之间所围的狭窄图形即代表三铰拱的弯矩图。由此看出,三铰拱与对应的简支

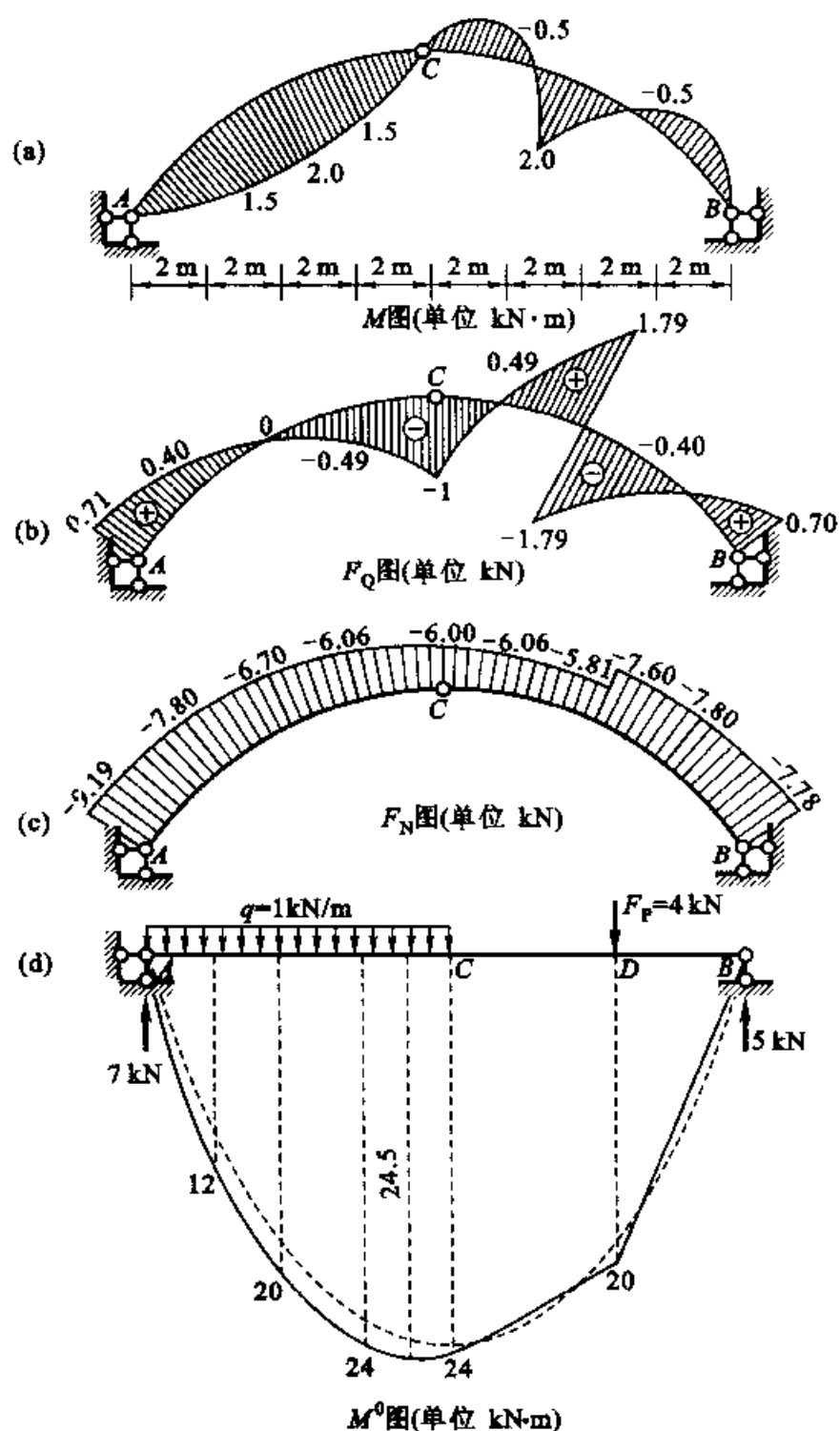


图 3-63

梁相比,弯矩要小得很多(简支梁的最大弯矩为  $24.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,而三铰拱的最大弯矩则下降为  $2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ )。还可看出,三铰拱弯矩的下降完全是由于推力造成的。因此,在竖向荷载作用下存在推力,是拱式结构的基本特点。由于

这个缘故,拱式结构也称为推力结构。

## 2. 三铰拱的压力线

如果三铰拱中某截面  $D$  左边(或右边)所有外力的合力  $F_{RD}$  已经确定(图 3-64a),则由此合力便可确定该截面的弯矩、剪力、轴力(图 3-64b)如下:

$$M_D = F_{RD} r_D$$

$$F_{QD} = F_{RD} \sin \alpha_D$$

$$F_{ND} = F_{RD} \cos \alpha_D$$

这里,  $r_D$  是由截面形心到合力  $F_{RD}$  的垂直距离,  $\alpha_D$  是合力  $F_{RD}$  与  $D$  点拱轴切线间的夹角。由此看出,确定截面内力的问题可归结为确定截面一边所有外力的合力的问题,包括确定合力的大小、方向和作用线。

现以图 3-65a 所示三铰拱为例,说明求截面合力的图解作法。

第一步,确定各截面合力的大小和方向。

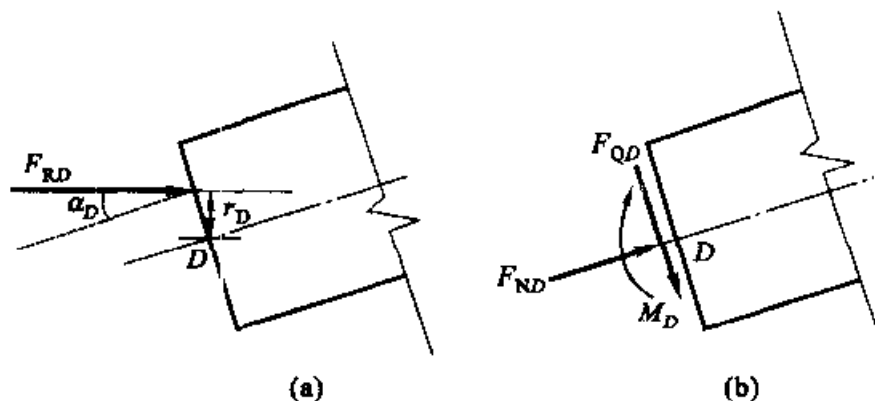


图 3-64

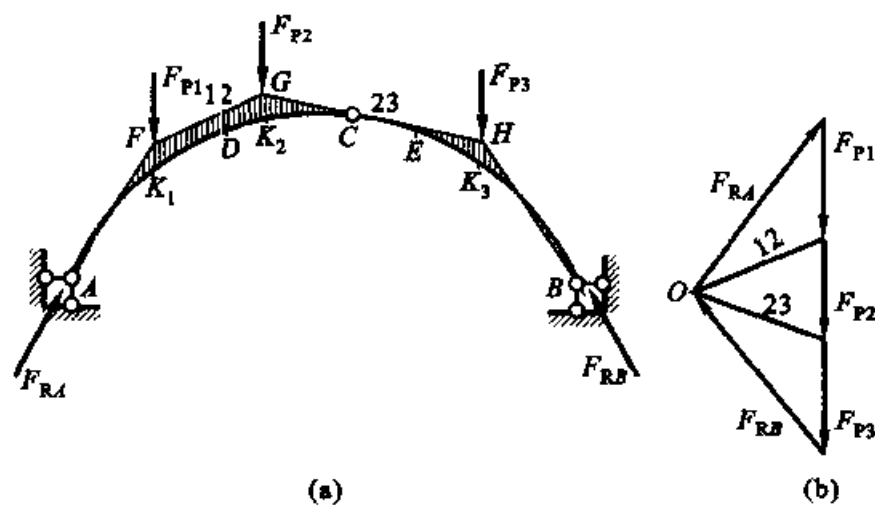


图 3-65

首先,用数解法求支座  $A$ 、 $B$  的竖向和水平反力及其合力  $F_{RA}$  和  $F_{RB}$ 。然后,按  $F_{RA}$ 、 $F_{P1}$ 、 $F_{P2}$ 、 $F_{P3}$ 、 $F_{RB}$  的顺序画出闭合力多边形。最后,以  $F_{RA}$  和  $F_{RB}$  的交点  $O$  为极点,画出射线 12 和 23 (由极点到力多边形顶点的连线叫做射线),如图 3-65b 所示。现在说明各条射线的意义。例如,在拱的  $AK_1$  段中,任一截面左边只有一个外力  $F_{RA}$ ,因此,射线  $F_{RA}$  表示  $AK_1$  段中任一截面左边外力的合力。又如射线 12 表示  $K_1K_2$  段中任一截面左边所有外力  $F_{RA}$  与  $F_{P1}$  的合力,同时也代表该截面右边所有外力  $F_{P2}$ 、 $F_{P3}$ 、 $F_{RB}$  的合力。总之,四个射线  $F_{RA}$ 、12、23、 $F_{RB}$  分别表示  $AK_1$ 、 $K_1K_2$ 、 $K_2K_3$ 、 $K_3B$  四段中任一截面所受的合力,即截面左边(或右边)所有外力的合力。显然,射线只表示合力的大小和方向,并不表示合力的作用线。

第二步,确定各截面合力的作用线。

由图 3-65b 已经知道四个合力  $F_{RA}$ 、12、23、 $F_{RB}$  的方向,如果再分别确定一个作用点,则每个合力的作用线就确定了。现参照图 3-65a 说明作法如下:

首先, $F_{RA}$  应通过支点  $A$ ,故由  $A$  点作射线  $F_{RA}$  的平行线,即为合力  $F_{RA}$  的作用线。

其次, $F_{RA}$  与  $F_{P1}$  的作用线相交于  $F$  点,它们的合力 12 也应通过  $F$  点。因此,由  $F$  点作射线 12 的平行线  $FG$ ,即为合力 12 的作用线。

再次,12 与  $F_{P2}$  的作用线交于  $G$  点,因此,由  $G$  点作射线 23 的平行线  $GH$ ,即为合力 23 的作用线。

最后,由 23 与  $F_{P3}$  作用线的交点  $H$  作射线  $F_{RB}$  的平行线,即为合力  $F_{RB}$  的作用线。显然,此线应当通过支座  $B$  点。这个性质可作为校核条件,用以检验作图的精确程度。

以上依次得出了四个合力的作用线,它们组成一个多边形  $AFGHB$ ,称作索多边形,其中每个边称为索线。四个索线  $F_{RA}$ 、12、23、 $F_{RB}$  分别表示  $AK_1$ 、 $K_1K_2$ 、 $K_2K_3$ 、 $K_3B$  各段中任一截面左边(或右边)所有外力的合力作用线。因此,这个索多边形又称为合力多边形。对拱来说,由于截面轴力一般都是压力,故称为压力多边形或压力线。

总结起来,利用压力线和力多边形这两个图形,即可确定拱中任一截面一边外力的合力:合力的大小和方向可由力多边形中的射线确定,合力的作用线则由压力线中的索线确定。合力确定之后,再参照图 3-64,即可求出截面的弯矩、剪力和轴力。以图 3-65a 中的截面  $D$  为例,它的合力  $F_{RD}$  由索线 12 和射线 12 共同表示。求弯矩  $M_D$  时,可先在图 3-65b 中量出射线 12 的长度,从而得出合力  $F_{RD}$  的数值;然后在图 3-65a 中量出截面形心  $D$

到索线 12 的垂直距离  $r_D$ ; 最后根据二者的乘积  $F_{RD} \cdot r_D$  便得出弯矩  $M_D$ 。求剪力  $F_{QD}$  和轴力  $F_{ND}$  时, 可在图 3-65b 中将射线 12 沿平行和垂直于截面  $D$  的方向投影, 即得出  $F_{QD}$  和  $F_{ND}$ 。在铰  $A$ 、 $B$ 、 $C$  处, 弯矩为零, 因而相应的距离  $r$  应为零。可见压力线应当与杆轴在铰  $A$ 、 $B$ 、 $C$  处相交。这一性质也可用于压力线图的校核。

压力线在砖石和混凝土拱的设计中是很重要的概念。由于这些材料的抗拉强度低, 通常要求各个截面不出现拉应力。因此, 压力线不应超出截面的核心。如拱的截面为矩形, 因矩形截面的截面核心高度为截面高度的三分之一, 故压力线不应超出截面对称轴上三等分的中段范围。

### 3. 三铰拱的合理轴线

当拱的压力线与拱的轴线重合时, 各截面形心到合力作用线的距离为零, 则各截面弯矩为零, 只受轴力作用, 正应力沿截面均匀分布, 拱处于无弯矩状态。这时材料的使用最经济。在固定荷载作用下使拱处于无弯矩状态的轴线称为合理拱轴线。

式(3-9)表明, 在竖向荷载作用下, 三铰拱的弯矩  $M$  是由简支梁的弯矩( $M^0$ )与 $(-F_H y)$ 叠加而得, 而后一项与拱的轴线有关。因此, 如果对拱的轴线形式加以选择, 则有可能使拱处于无弯矩状态。实际上, 在竖向荷载作用下, 三铰拱合理轴线的方程可由下列公式求得

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

故

$$y = \frac{M^0}{F_H} \quad (3-12)$$

这就是说, 在竖向荷载作用下, 三铰拱的合理轴线的纵坐标与简支梁弯矩图的纵坐标成正比。

了解合理轴线这个概念, 有助于设计中选择合适的结构形式, 更好地发挥人的主观能动作用。

**例 3-15** 设三铰拱承受沿水平方向均匀分布的竖向荷载, 试求其合理轴线(图 3-66a)。

**解** 由式(3-12)得知

$$y = \frac{M^0}{F_H}$$

简支梁(图 4-8b)的弯矩方程为

$$M^0 = \frac{q}{2} x(l-x)$$

拱的推力为

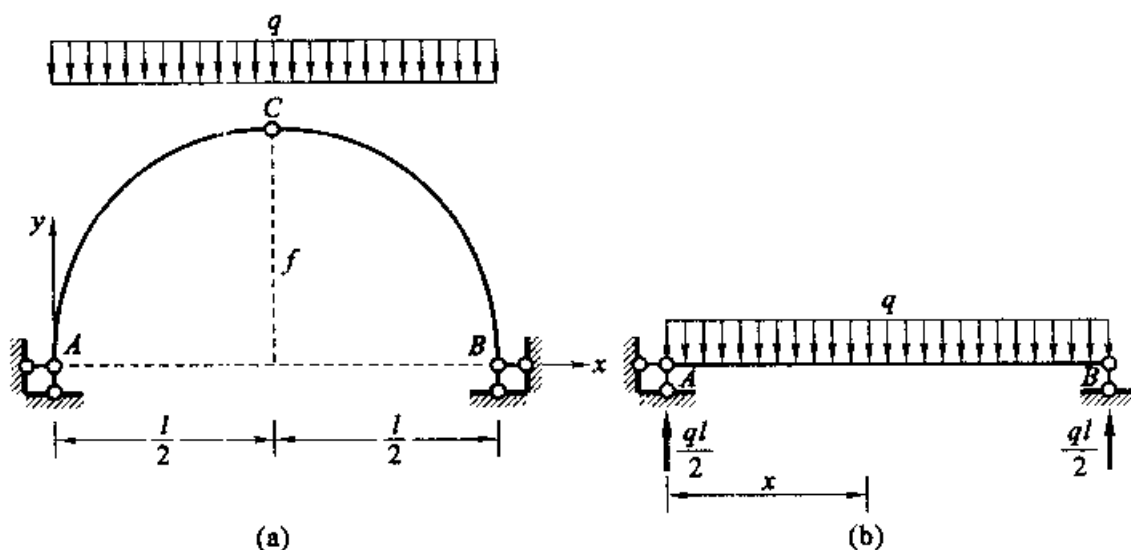


图 3-66

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

所以

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

由此可知,三铰拱在沿水平线均匀分布的竖向荷载作用下,合理轴线为一抛物线。正因为如此,所以房屋建筑中拱的轴线常用抛物线。

在合理拱轴的抛物线方程中,拱高  $f$  没有确定。具有不同高跨比的一组抛物线都是合理轴线。

**例 3-16** 设三铰拱承受均匀水压力作用,试证明其合理轴线是圆弧曲线(图 3-68)。

**证** 在证明之前,先推导曲杆内力的微分关系式。

从曲杆中取微段为隔离体,如图 3-67 所示。设微段杆轴的曲率半径为  $R$ ,两端截面的夹角为  $d\varphi$ ,微段轴线长度为  $ds = R d\varphi$ 。用  $s$  和  $r$  分别表示杆轴的切线和法线方向。沿  $s$  和  $r$  方向的荷载集度分别为  $q_s$  和  $q_r$ 。

由  $\sum F_x = 0$ , 得

$$\begin{aligned} (F_N + dF_N) \cos \frac{d\varphi}{2} - F_N \cos \frac{d\varphi}{2} - \\ (F_Q + dF_Q) \sin \frac{d\varphi}{2} - F_Q \sin \frac{d\varphi}{2} + q_r ds = 0 \end{aligned}$$

因为  $d\varphi$  很小,可令  $\cos \frac{d\varphi}{2} = 1, \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$ , 并忽略高价微量,得

$$dF_N - F_Q d\varphi + q_r ds = 0$$

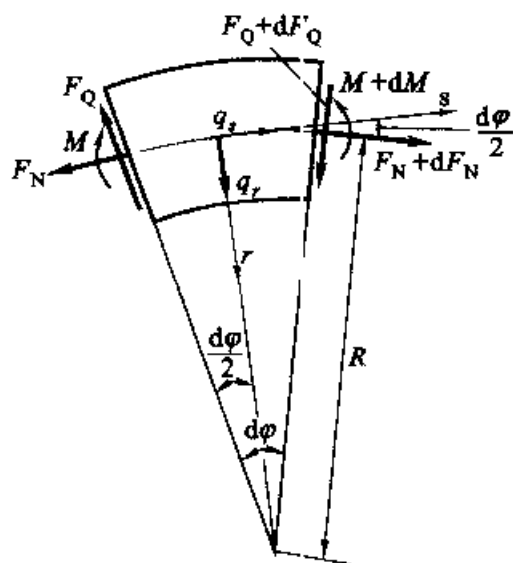


图 3-67

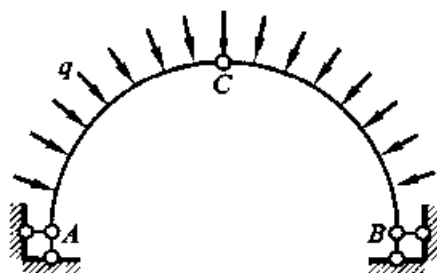


图 3-68

除以  $ds$ , 并考虑到  $ds = R d\varphi$ , 故得

$$\frac{dF_N}{ds} = \frac{F_Q}{R} - q_r$$

同理, 由  $\sum F_r = 0$ , 得

$$dF_Q + F_N d\varphi + q_r ds = 0$$

即

$$\frac{dF_Q}{ds} = -\frac{F_N}{R} - q_t$$

再由  $\sum M = 0$ , 得

$$dM - F_Q ds = 0$$

即

$$\frac{dM}{ds} = F_Q$$

综合起来, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_N}{ds} &= \frac{F_Q}{R} - q_r \\ \frac{dF_Q}{ds} &= -\frac{F_N}{R} - q_t \\ \frac{dM}{ds} &= F_Q \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

式(3-13)就是曲杆内力的微分关系。当  $R \rightarrow \infty$  时, 曲杆即变为直杆, 而曲杆公式(3-13)即变为直杆的公式。

在本问题中, 由于拱受均匀水压力  $q$  作用, 故切线荷载  $q_t = 0$ , 法向荷载



$q_s = q$  (常数)。因此, 曲杆内力的微分关系式(3-13)可写成:

$$\frac{dF_N}{ds} = \frac{F_Q}{R} \quad (a)$$

$$\frac{dF_Q}{ds} = -\frac{F_N}{R} - q \quad (b)$$

$$\frac{dM}{ds} = F_Q \quad (c)$$

设拱处于无弯矩状态, 即  $M=0$ , 将此式代入式(c), 即得

$$F_Q = 0 \quad (d)$$

再将式(d)代入式(a), 即得  $\frac{dF_N}{ds} = 0$ , 因此,

$$F_N = C \text{ (常数)} \quad (e)$$

将式(d)代入式(b), 得  $0 = -\frac{F_N}{R} - q$ , 因此,

$$R = -\frac{F_N}{q} \quad (3-14)$$

由式(e)已知各截面的轴力  $F_N$  是一个常数, 且荷载  $q$  也是常数, 因此各截面的曲率半径  $R$  也应是一个常数。这就是说, 拱的轴线应是圆弧曲线。

总结起来, 拱在均匀水压力作用下, 合理轴线为圆弧, 而轴力等于常数。因此, 水管、高压隧洞和拱坝常采用圆形截面。

**例 3-17** 设在三铰拱的上面填土, 填土表面为一水平面, 试求在填土重量下三铰拱的合理轴线。设填土的容重为  $\gamma$ , 拱所受的竖向分布荷载为  $q = q_c + \gamma y$  (图 3-69)。

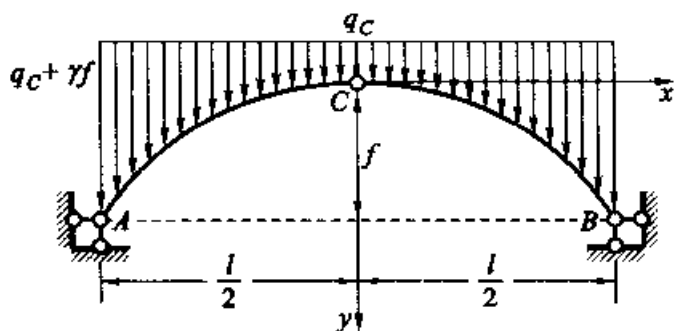


图 3-69

**解** 将式(3-12)对  $x$  微分两次, 得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{F_H} \frac{d^2 M^0}{dx^2}$$

用  $q(x)$  表示沿水平线单位长度的荷载值, 则

$$\frac{d^2 M^0}{dx^2} = -q(x)$$

所以

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q(x)}{F_H} \quad (3-15)$$

这就是在竖向荷载作用下拱的合理轴线的微分方程。式中规定  $y$  向上为正。在图 3-69 中,  $y$  轴是向下的, 故式(3-15)右边应改取正号, 即

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q(x)}{F_H} \quad (a)$$

在本题中, 当拱轴线改变时, 荷载也随之改变,  $M^0$  图无法事先求得, 因此求合理轴线时, 我们不用式(3-12)而用式(a)。

将  $q = q_c + \gamma y$  代入式(a), 得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\gamma}{F_H} y = \frac{q_c}{F_H}$$

这个微分方程的解答可用双曲线函数表示:

$$y = A \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\gamma}{F_H}} x + B \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\gamma}{F_H}} x - \frac{q_c}{\gamma}$$

两个常数  $A$  和  $B$  可由边界条件求出如下:

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } y=0, \text{ 得} \quad A = \frac{q_c}{\gamma}$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 得} \quad B = 0$$

因此

$$y = \frac{q_c}{\gamma} \left( \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\gamma}{F_H}} x - 1 \right) \quad (b)$$

上式表明: 在填土重量作用下, 三铰拱的合理轴线是一悬链线。

在工程实际中, 同一结构往往要受到各种不同荷载的作用, 而对应不同的荷载就有不同的合理轴线。因此, 根据某一固定荷载所确定的合理轴线并不能保证拱在各种荷载作用下都处于无弯矩状态。在设计中应当尽可能地使拱的受力状态接近无弯矩状态。通常是以主要荷载作用下的合理轴线作为拱的轴线。这样, 在一般荷载作用下拱仍会产生不大的弯矩。

## \* §3-9 悬索结构

### 1. 悬索结构的特点

悬索结构是由一系列受拉的索作为主要承重构件, 按一定规律组成各

种不同形式的体系,并悬挂在相应的支承上的结构。因为索是柔软的,其抗弯刚度可以忽略,索内弯矩和剪力都为零,只受轴向拉力作用,在支承处除受竖向反力分量外,还受向外的水平拉力以维持索的平衡。

悬索结构的形式可以分为单层索系、双层索系、鞍形索网、斜拉式屋盖、索梁体系等。

柔性的张拉结构在没有施加预应力以前基本上没有刚度,其形状是不确定的,必须通过施加适当预应力赋予一定的形状,才能成为能承受荷载的结构。

单层悬索体系由一系列按一定规律布置的单根悬索组成。单层悬索体系又可以分成平行布置(图3-70)、辐射式布置(图3-71)和网状布置(图3-72)三种布置形式。

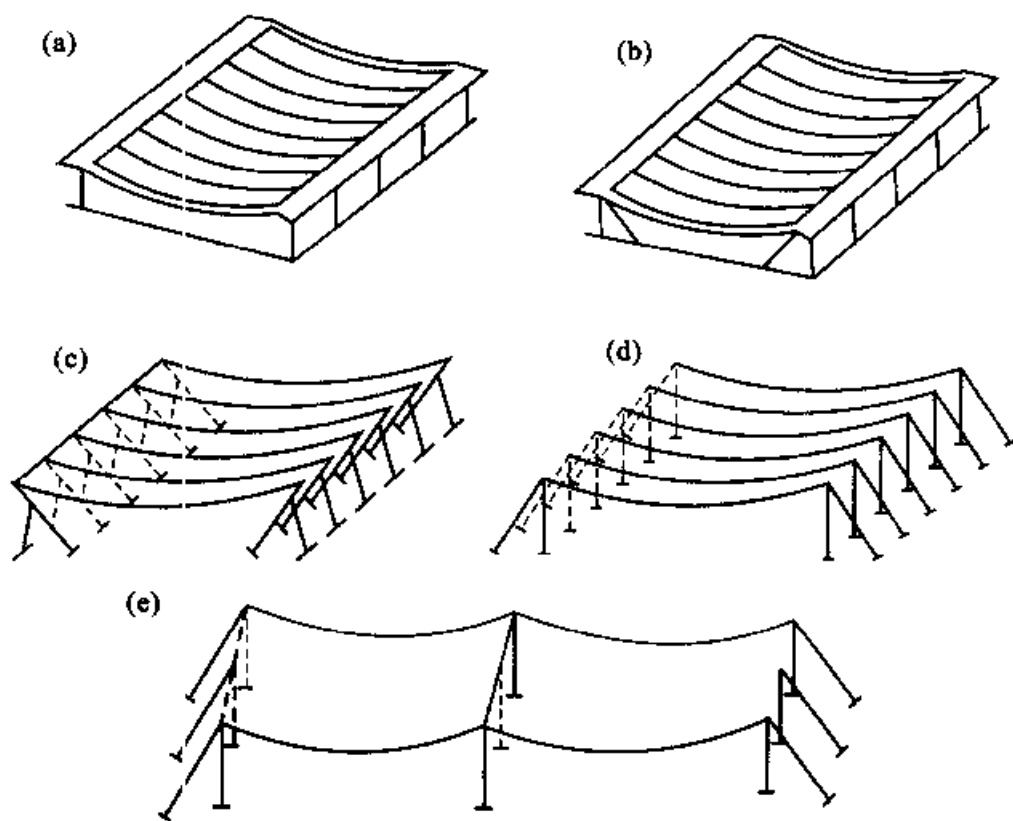


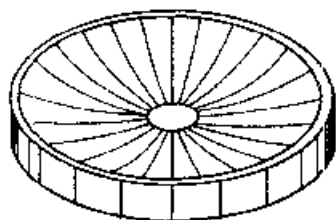
图 3-70 平行布置的单层悬索体系

## 2. 单根悬索的计算方法

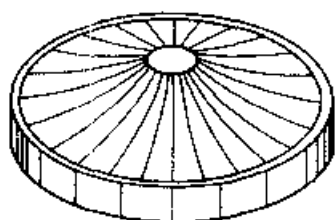
进行单根悬索的计算时,一般情况下采用下列基本假设:

第一,认为索是理想柔性的,即不能受压、不能受弯,只能受拉。由于索的截面尺寸与索长相比十分微小,因而在计算中可不考虑截面的抗弯刚度,但是,也有例外,如在某些连接点处,索可能有转折。如果转折的曲率过大,

索内会产生较大的局部弯曲应力。因此,在这些地方应采取正确的构造措施,以避免产生这种不利情形。



(a)



(b)

图 3-71 辐射布置的单层悬索体系

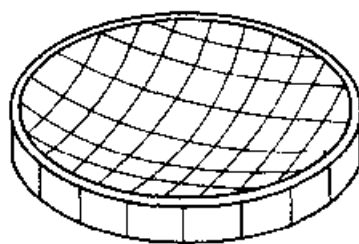


图 3-72 网状布置的单层悬索体系

第二,认为索在使用阶段时应力和应变符合线性关系,即符合胡克定律。但是,在研究索的极限承载力时,则应该摒弃这条基本假设。

图 3-73 所示为一竖向集中荷载作用下支座等高的悬索。

与同跨度的简支梁相比,可以得

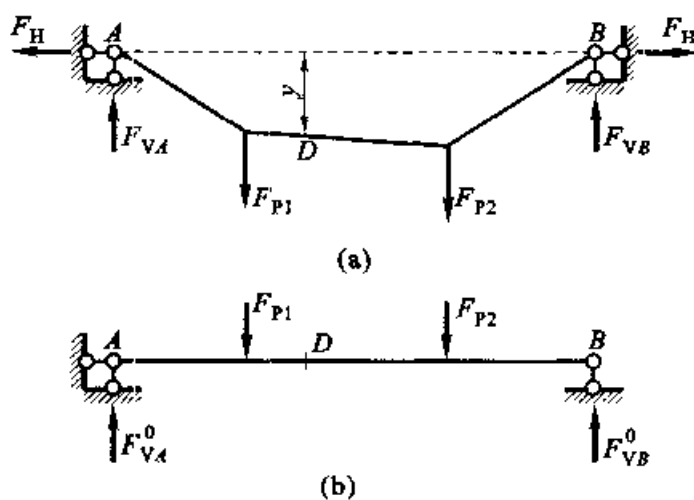


图 3-73

$$F_{VA} = F_{VA}^0$$

$$F_{VB} = F_{VB}^0$$

悬索任一截面  $D$  的弯矩为零,故有

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

即

$$y = \frac{M^0}{F_H}$$

可见悬索的平衡形式与三铰拱的合理轴线相同,不同的是:在向下的竖向荷

载作用下,拱的水平反力是向内的推力,而悬索的水平反力是向外的拉力;拱是向上突起的形状,而悬索是下垂的形状,拱结构受压力而悬索受拉力。

现在来推导承受两个方向任意分布荷载  $q_z(x)$  和  $q_x(x)$  作用的一根悬索的平衡方程(图 3-74)。单索的曲线形状可由方程  $z = z(x)$  表示。由于索是理想柔性的,索的张力  $T$  只能沿索的切线方向作用。设某点索张力的水平分量为  $F_H$ , 则它的竖向分量为  $V = F_H \tan \theta = F_H \frac{dz}{dx}$ 。由该索截出的水平投影长度为  $dx$  的任意微分单元及所作用的内力和外力如图 3-74b 所示。根据微分单元的静力平衡条件,有

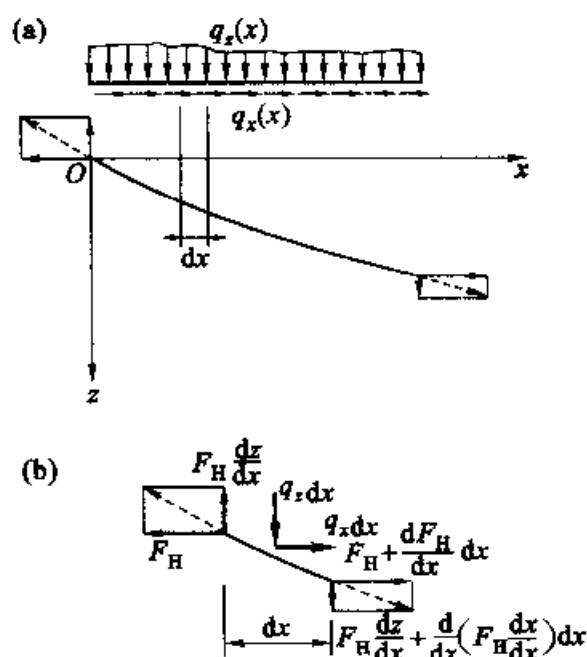


图 3-74 索微分单元及受力图

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad & \frac{dF_H}{dx} dx + q_x dx = 0 \\ & \frac{dF_H}{dx} + q_x = 0 \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0, \quad & \frac{d}{dx} \left( F_H \frac{dz}{dx} \right) dx + q_z dx = 0 \\ & \frac{d}{dx} \left( F_H \frac{dz}{dx} \right) + q_z = 0 \end{aligned} \quad (3-17)$$

方程(3-16)、(3-17)就是单索的基本平衡微分方程。如果悬索只承受竖向荷载的作用,即  $q_x = 0$  时,由方程(3-16)得

$$F_H = a (\text{常量}) \quad (3-18)$$

因此,式(3-17)可写成:

$$F_H \frac{d^2 z}{dx^2} + q_z = 0 \quad (3-19)$$

方程(3-19)的物理意义是:索曲线在某点的二阶导数(当索较平坦时即为其曲率)与作用在该点的竖向荷载集度成正比。应该注意,在推导上述各方程时,荷载  $q_z$  和  $q_x$  的定义是沿跨度单位长度上的荷载,并且与坐标轴一致时为正。

**例 3-18** 图 3-75 所示单索承受沿跨度均匀分布竖向荷载,试求索的张力。

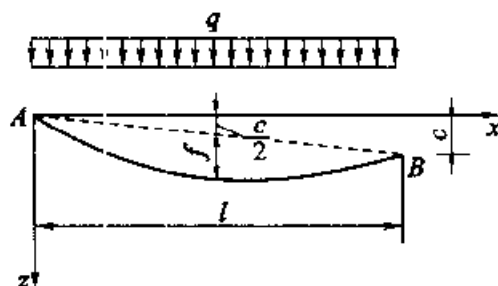


图 3-75 受沿跨度均布竖向荷载单索计算简图

**解** 根据题设  $q_z = q$  (常量),  $q_x = 0$

由式(3-18)可知:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q}{F_H}$$

积分两次得

$$z = -\frac{q}{2F_H} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (a)$$

这是一条抛物线。积分常数可由下述边界条件确定(图 3-75)

$$x = 0, \quad z = 0;$$

$$x = l, \quad z = c,$$

由此可求得  $C_1 = \frac{c}{l} + \frac{ql}{2F_H}$ ;  $C_2 = 0$

代入式(a),并整理,得

$$z = \frac{q}{2F_H} x(l-x) + \frac{c}{l} x \quad (b)$$

图 3-75 已给出索曲线在跨中的垂度  $f$ ,即

$$x = \frac{l}{2}, \quad z = \frac{c}{2} + f$$

将此条件代入式(b),即可求得索内的水平张力  $F_H$  为

$$F_H = \frac{ql^2}{8f}$$

代回式(b),可得

$$z = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + \frac{c}{l}x \quad (c)$$

当左、右支座等高时,  $c=0$ , 于是

$$z = \frac{4fx(l-x)}{l^2} \quad (d)$$

当索曲线方程确定后, 索各点的张力即可按下式计算:

$$F_t = F_H \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

当索较平坦时,  $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$  与 1 比较是微量, 于是有

$$F_t \approx F_H \quad (e)$$

以方程(d)所示抛物线索为例, 曲线的斜率为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4f}{l} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

比值  $F_t/F_H$  在支点处具有最大值

$$\left(\frac{F_t}{F_H}\right)_{\max} = \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}}$$

索内  $F_t/F_H$  的平均值则可按下式求得

$$\begin{aligned} \left(\frac{F_t}{F_H}\right) &= \frac{1}{l} \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2} dx \end{aligned}$$

下表给出了按不同垂跨比  $f/l$  算得的比值  $F_t/F_H$  的最大值和平均值。

可以认为, 当  $f/l \leq 0.1$  时, 采用简便的近似式(e), 即能保证很好的精确度。

$F_t/F_H$  的最大值和平均值

$f/l$	$F_t/F_H$ 的最大值	$F_t/F_H$ 的平均值
0.05	1.019 8	1.006 6
0.10	1.077 0	1.026 0
0.15	1.166 2	1.057 1
0.20	1.280 6	1.098 3

如已知单索跨度  $l = 10 \text{ m}$ , 承受均布竖向荷载  $q = 1 \text{ kN/m}$ , 索曲线在跨中的垂度  $f = 0.2 \text{ m}$ , 可以求出水平张力为

$$F_H = \frac{ql^2}{8f} = \frac{1 \text{ kN/m} \times 10^2 \text{ m}}{8 \times 0.2 \text{ m}} = 62.5 \text{ kN}$$

### § 3-10 用求解器确定截面单杆

对于桁架结构, 求解器为截面法提供了一个很有用的功能, 即截面单杆的搜寻和确定。利用求解器的这一功能, 对于任意的平面桁架(静定或超静定), 求解器均可以找出使指定杆件成为截面单杆的所有截面(亦即求解器的解法是完备的)。虽然其中有一些截面的截法令人感到意外, 也很少用到, 但却很有启发性, 可以加深对截面法的理解和认识, 并可强化训练截面法的应用技巧。

在求解器中, 结点单杆看作是截面单杆的特例, 因此无须单独处理。由于截面单杆的搜寻与荷载无关, 因此例题中都没有考虑荷载。另外, 求解器只是找出截面单杆, 而后的平衡方程的建立则留给读者完成, 没有进一步给出。再有, 本节中将“使指定杆件成为截面单杆的截面”称为单杆截面。以下结合具体例题来介绍。

**例 3-19** 试用求解器确定图 3-76 中使杆(4)和杆(9)成为截面单杆的所有截面。

**解** 先输入结构体系, 输入的数据文档如下(图 3-76):

```

TITLE, 例 3-19 : E, 3, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0
C 杆 4(4)、杆 9(2) : E, 6, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0
N, 1, 0, 0 : E, 1, 6, 1, 1, 0, 1, 1, 0
N, 2, 1, 0 : E, 3, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 0
N, 3, 2, 0 : E, 3, 4, 1, 1, 0, 1, 1, 0
N, 4, 3, 0 : E, 4, 6, 1, 1, 0, 1, 1, 0
N, 5, 0, 1 : E, 4, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 0
N, 6, 3, 1 : NSUPT, 1, 3, 0, 0, 0
E, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0 : NSUPT, 4, 1, 0, 0, 0
E, 1, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 0 : END

```

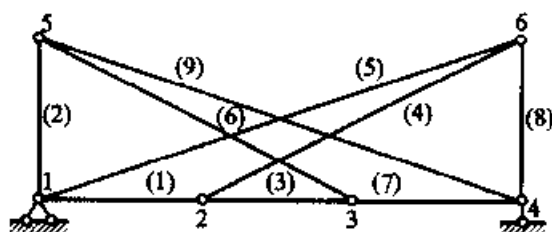


图 3-76

输入结构体系后, 依次选菜单“求解”、“截面法”, 弹出“截面单杆”对话框; 在“欲求内力的单元码”下拉框中选 4, 单击“计算”按钮计算。然后可以看到, 共有 4 个单杆截面, 可以逐一显示, 如图 3-77a、b、c、d 所示。其中第 3 个截面实际上是结点法, 也是最简单的方法。第 4 个截面有些奇特, 其隔离体不



是单连通的,平常也不太会去想,但是作为完备的解答,求解器还是给出了这个解,希望对解题思路有所启发和拓宽。

再用类似的方法计算杆件(9)的单杆截面,共有2个,如图3-78所示,其中第2个截面截断了支座约束,而第1个截面无须截断支座约束即可。

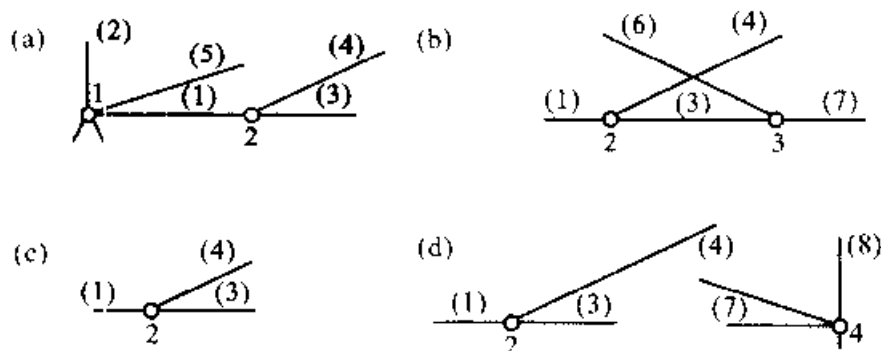


图 3-77

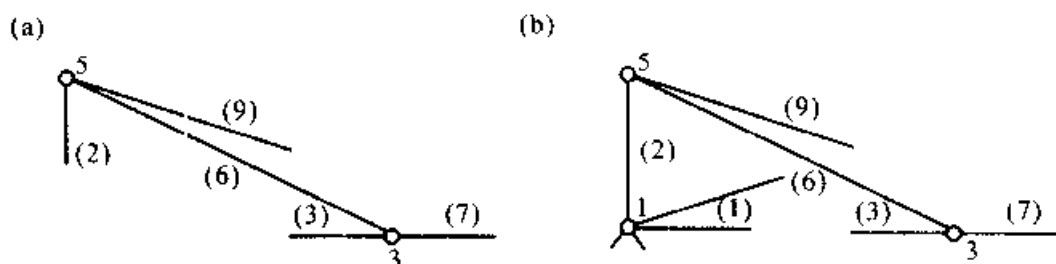


图 3-78

**例 3-20** 试用求解器确定图3-79中使杆(13)成为截面单杆的所有截面。

**解** 先输入结构体系,输入的数据文档如下(图3-79):

```

C 求杆 13 的单杆截面 : E,6,7,1,1,0,1,1,0
N,1,0,0 : E,7,8,1,1,0,1,1,0
N,4,3,0 : E,8,1,1,1,0,1,1,0
FILL,1,4,2,2,1 : E,8,5,1,1,0,1,1,0
N,7,3,3 : E,2,5,1,1,0,1,1,0
FILL,1,7,2,5,1 : E,3,6,1,1,0,1,1,0
N,8,0,3 : E,4,6,1,1,0,1,1,0
E,1,2,1,1,0,1,1,0 : E,4,7,1,1,0,1,1,0
E,2,3,1,1,0,1,1,0 : NSUPT,1,3,0,0,0
E,3,4,1,1,0,1,1,0 : NSUPT,4,1,0,0
E,1,5,1,1,0,1,1,0 : END
E,5,6,1,1,0,1,1,0

```

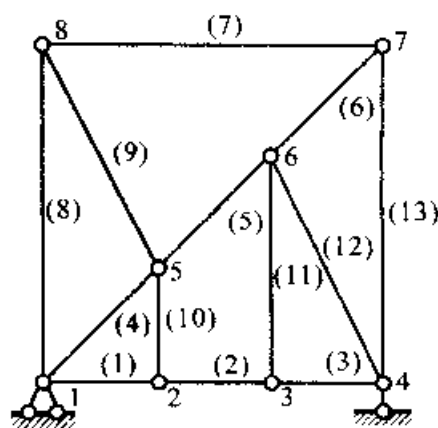


图 3-79

注意以上的数据输入中用了结点填充的命令(可在“结点”的对话框中选“结

点填充”选项),使得结点定义的数据行大为减少。按照上一例介绍的操作方法,可以得到求解器的解答:共有 2 个截面,如图 3-80a、b 所示,其中第 1 个截面无须截断支座约束。可以看出,这两个截面的思路都略为曲折,体现了求解器的良好的智能性以及对手解的启发性。

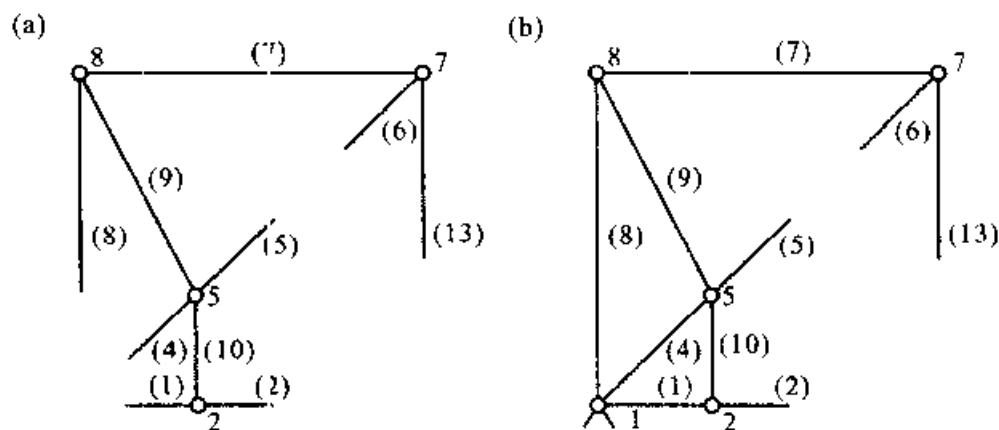


图 3-80

**例 3-21** 试用求解器确定图 3-81 中使竖直杆(14)成为截面单杆的所有截面。

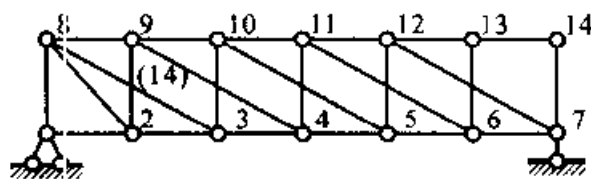


图 3-81

**解** 先输入结构体系,输入的数据文档如下(图 3-81)。

```

TITLE, 例 3-21
C 求杆 14 的单杆截面
LET, A=2, H=1.5
N,1,0,0
N,7,6*A,0
FILL
NGEN,1,7,1,7,1,0,H
E,1,2,1,1,0,1,1,0
EGEN,5,1,1,1
EGEN,1,1,6,7
E,1,8,1,1,0,1,1,0
EGEN,6,13,13,1
E,8,3,1,1,0,1,1,0
EGEN,4,20,20,1
E,2,8,1,1,0,1,1,0
NSUPT,1,3,0,0,0
NSUPT,7,1,0,0
END

```

此题的输入用了一些新的功能:变量定义、结点生成、单元生成。下面简单地加以介绍。

### 1. 变量定义

本例中定义了两个变量： $A=2$ ， $H=1.5$ 。一种做法是直接键入命令行

LET, A=2, H=1.5

另一种做法是用对话框输入，步骤如下：

- 1) 依次选菜单“命令”、“变量定义”，弹出“变量定义”对话框；
- 2) 在“新变量名”下输入 A，在“数学表达式”下输入 2，单击“继续”按钮定义下一个变量；
- 3) 仿上输入 H 和 1.5，单击“应用”、“关闭”。

引入变量可以使数据的修改十分方便，如若希望将 H 改为 2 的话，只需将  $H=1.5$  改为  $H=2$  即可。目前，求解器只提供实型变量的定义，但输入数值时，可以输入整数值。对于定义了的变量，后面的数据命令中凡是用实型数据的地方，都可以直接引用变量，也可以用简单的数学表达式。

### 2. 结点生成

在第 1 排结点(结点 1 到 7)定义之后，上面一排结点(结点 8 到 14)可以自动生成，而无须逐个定义。用对话框的做法如下：

- 1) 依次选菜单“命令”、“结点”，弹出“结点”对话框后，选“结点生成”；
- 2) “生成次数”填 1，“结点码增量”填 7，“从结点”填 1，“到结点”填 7，“码增量”填 1；“dx”填 0，“dy”填 H；
- 3) 若对操作没有把握，可以单击“预览”观看图形显示；若不满意，可以修改；
- 4) 单击“应用”将命令写到命令文档上，然后单击“关闭”退出。

### 3. 单元生成

在第 1 个单元(连接结点 1 和 2)定义之后，可以用单元生成的功能自动生成单元 2 到单元 6。用对话框的做法如下：

- 1) 依次选菜单“命令”、“单元”，弹出“单元”对话框后，选“单元生成”；
- 2) 对“生成次数”填 5，“结点码增量”填 1；“从单元”填 1，“到单元”填 1；
- 3) 若对操作没有把握，可以单击“预览”观看图形显示；若不满意，可以修改；
- 4) 单击“应用”将命令写到命令文档上，然后单击“关闭”退出。

命令文档中的其他自动生成命令与上面介绍的类似，请读者自行研习掌握。对于本例，求解器给出的结果如图 3-82 所示。这一截面会使很多读者感到意外，仔细分析，确实是一个单杆截面。此例再一次表明了“电脑”是“人脑”的重要延伸和补充，反过来人们也可以用“电脑”来给“人脑”充电，拓宽解题的思路与技巧。

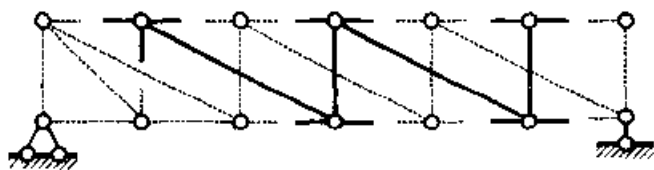


图 3-82

### \* §3-11 用求解器求解组合结构

人工求解组合结构的要点是避免求解联立方程,所以求解策略和步骤很重要。求解策略得当的话,每一步解出一个未知力,无须求解联立方程。求解器为组合结构提供了智能求解功能,可以为用户自动找出最快捷的求解步骤。注意,求解器是以最快捷为目标,也就是追求最少的求解步骤,但有些步骤可能未必是最常用的或最方便的(最方便的解法因人而异,标准难以统一)。求解组合结构的内力需要有荷载作用,因此本节首先介绍荷载的输入,然后结合具体例题来进一步介绍。

在“编辑器”中依次选择菜单“命令”、“荷载条件”可打开荷载对话框,从中可见,求解器允许输入6种类型荷载。荷载可以加在结点上或单元上,分别对应“结点”和“单元”选项。

#### 1. 结点荷载

结点荷载需要输入作用的结点码、类型、大小和方向,其中方向与整体坐标  $x$  轴同向为初始方向,“方向”中输入角度后,荷载将按逆时针绕结点旋转输入的角度。

#### 2. 单元荷载

单元荷载除了需要输入单元码、类型、大小外,对于集中荷载还需要输入荷载作用位置,而对于分布荷载还需要输入荷载的起始位置和终止位置。位置统一用局部坐标与杆长  $l$  的比值来表示,亦即为  $(0,1)$  之间的一个数值。此外,单元荷载的方向与局部坐标  $x$  轴同向为初始方向,因此转  $90^\circ$  后得横向荷载,而“指向单元”和“背离单元”都是按横向荷载来考虑的。

输入荷载后,若是没有把握,可以单击“预览”按钮预览,满意后再“应用”。下面结合具体例题来进一步讨论。

在具体举例之前,首先对以下有些例、习题中使用的符号作一说明:

$F_x$  和  $F_y$  分别代表作用在结点  $i$  处的水平方向和竖直方向的反力;

$F_N$ ,  $F_Q$  和  $M$  分别代表第  $i$  个杆件的轴力、剪力和弯矩。

另外,用户输入结构时,应该注意统一单位,而在以下有些例、习题中,采用

的是无单位的计算。

**例 3-22** 试用求解器求解图 3-83 中杆件(5)的轴力。

**解** 先输入结构体系,输入的数据文档如下(图 3-83):

```

N,1,0,0      E,1,6,1,1,0,1,1,0
N,5,4,0      E,2,6,1,1,0,1,1,0
FILL,1,5,3,2,1 E,4,7,1,1,0,1,1,0
N,6,1, -1    E,5,7,1,1,0,1,1,0
N,7,3, -1    E,6,7,1,1,0,1,1,0
E,1,2,1,1,0,1,1,1 NSUPT,1,2, -90,0,0
E,2,3,1,1,1,1,1,0 NSUPT,5,1,0,0
E,3,4,1,1,0,1,1,1 NLOAD,2,1,1, -90
E,4,5,1,1,1,1,1,0 NLOAD,4,1,3, -90
E,1,6,1,1,0,1,1,0 END
  
```

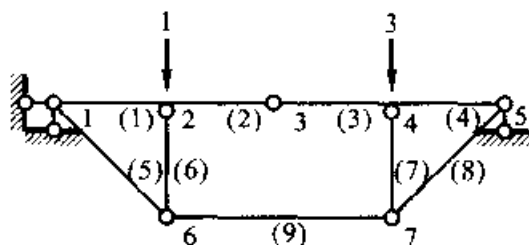
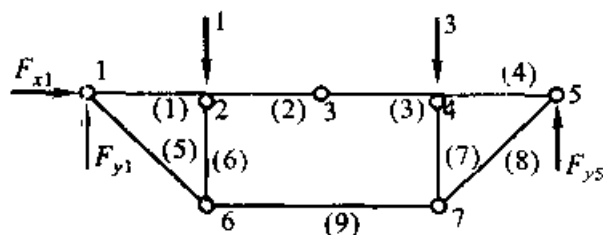


图 3-83

输入结构后,继续如下操作:

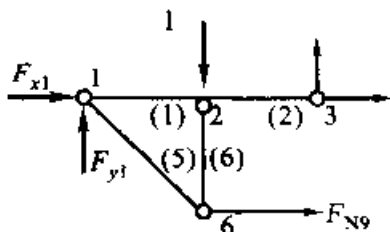
- 1) 选择菜单“求解”、“组合结构”,打开“组合结构求解”对话框;
- 2) “求解内容”中选“3. 指定杆件内力”,在“轴力”的杆件编号处填 5;
- 3) 单击“图文解”按钮,打开“解题步骤”对话框;
- 4) 一步步单击“下一步”可看到用图形和文字描述的解题步骤,如下所示:

(a)



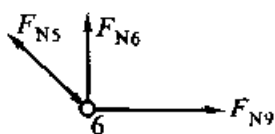
考虑图示隔离体,可求出:  
1 点处的竖向反力  $F_{y1}$  的数值  
为 1.5

(b)



考虑图示隔离体,可求出:杆件  
(9)的轴力  $F_{N9}$  的数值为 2

(c)

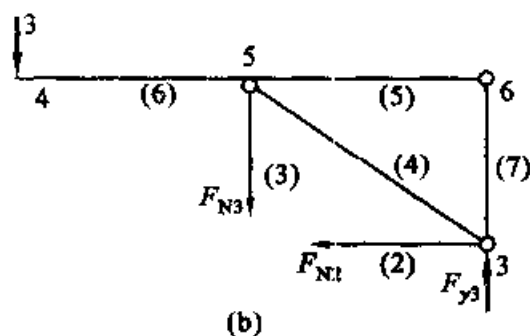
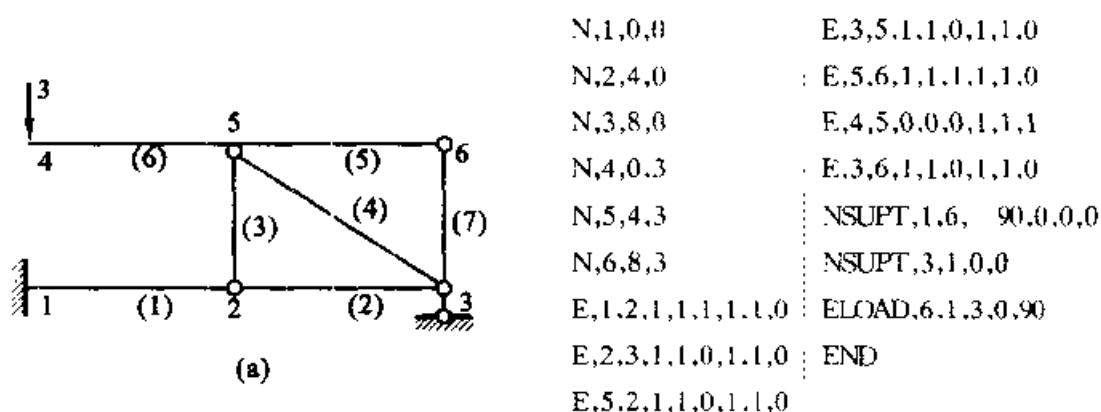


考虑图示隔离体,可求出:杆件  
(5)的轴力  $F_{N5}$  的数值为 2.83

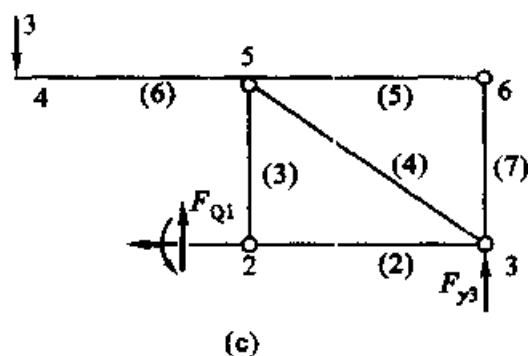
图 3-84 例 3-22 的解答步骤

例 3-23 试用求解器求解图 3-85a 中杆件(1)的剪力。

解 数据文档的输入如下所示,求解器给出的简洁的求解步骤如图 3-85b~3-85c 所示。



考虑图示隔离体,可求出:3 点处的竖向反力  $F_{y3}$  的数值为 -3



考虑图示隔离体,可求出:杆件(1)的剪力  $F_{Q1}$  的数值为 6

图 3-85 例 3-23 的解答步骤

### § 3-12 小 结

本章讨论静定结构的受力分析。基本方法是隔离体平衡方法。其要点是:选取隔离体,建立平衡方程,解方程求出支座反力和杆件内力。

受力和位移计算是静定结构分析的两个主题。静定结构受力分析同时又是静定结构位移计算的基础,也是超静定结构分析的基础。因此,本章内容是结构力学的一个十分重要的基础性内容,应当熟练掌握。

静定结构常见的结构型式有六种,可分为三组:

● 梁和刚架——由受弯直杆(称为梁式杆)组成。

● 桁架和组合结构——桁架由只受轴力的链杆组成,组合结构由链杆和梁式杆组合而成。

● 三铰拱和悬索——都是具有水平支座反力的结构。拱主要受压,悬索受拉。

本章各节结合上述结构型式,分别讨论隔离体平衡方法的具体应用。方法虽然同源,但应用形式却多种多样。通过多样化的应用,可以加深对基本方法的理解和培养灵活运用能力。

下面将各种结构型的分析要点简述如下。主要结合平面结构来讲。

#### 1. 梁和刚架的受力分析要点

梁和刚架中的杆件都是受弯直杆,弯矩是主要内力。受力分析的结果通常是画出结构各杆的内力图,包括  $M$  图以及相应的  $F_Q$  图和  $F_N$  图。

弯矩图的一般作法是分段叠加法。其要点是:首先根据结构的几何构造特点,求出支座反力。然后选取各杆两端截面作为控制截面,根据截面法求出控制截面的弯矩值。最后用分段叠加法,作各杆的弯矩图,也就是先根据杆件两端处控制截面的弯矩值作直线图形,再叠加上由于杆件上作用的荷载而产生的简支梁弯矩图。

作出内力图后要进行校核。对各杆内力图可检验是否满足荷载与内力之间的微分关系、增量关系和积分关系。在结点处,可取结点作隔离体,检验是否满足平衡条件。

#### 2. 桁架和组合结构的受力分析要点

在结点荷载作用下,桁架中的杆件只受轴力,处于无弯矩状态,因而也处于无剪力状态。受力分析的结果是列出桁架各杆的轴力值。

结点法和截面法是计算桁架内力的基本方法,要熟练掌握,并会联合应用,还要善于识别结点单杆和截面单杆。根据几何构造分析,要会识别简单桁架和联合桁架,并会优选最简捷的分析方法和分析顺序。

分析组合结构时,最主要的是学会识别链杆和梁式杆,正确地画出隔离

体的受力图。

### 3. 三铰拱和悬索的受力分析要点

三铰拱的受力分析比较简单。在竖向荷载作用下,三铰拱的弯矩  $M$  由下式给出:

$$M = M^0 - F_H y$$

这里,三铰拱的弯矩  $M$  用相应简支梁的弯矩  $M^0$  来表示。

进行力学分析,全面地讲,应该包含两方面的内容:一方面,根据力学分析,导出用数学公式表示的结论;另一方面,把数学公式翻译成力学语言,透过数学公式加深对结构力学性能的理解,并进一步提出如何改善力学性能的指导性意见。两方面都很重要,前者侧重于理论推导,后者侧重于实际应用。

从上述三铰拱弯矩公式来看,可以引出三铰拱力学性能的两点结论:

第一,由于推力  $F_H$  的影响,在相同的竖向荷载作用下,三铰拱的最大弯矩一般比简支梁的要小。

第二,如果合理地选定三铰拱的轴线形状,例如选定  $y(x) = \frac{M^0(x)}{F_H}$ ,则拱的各截面弯矩为零,拱处于无弯矩状态,从而得到拱轴线形状的最优化结果。

悬索与具有合理轴线的三铰拱之间具有对偶性。由于悬索本身的柔软性,悬索的平衡形式总是处于无弯矩状态。因此,三铰拱的合理轴线可以利用悬索在相同竖向荷载作用下的平衡形式来比拟。这是一种既相似又相反的比拟:索向下低垂,拱向上突起;索受拉,拱受压;索的水平支座反力向外,拱的水平支座反力向内。

本章对静定结构几种常见结构型式的受力分析分别进行了讨论,侧重于个性。关于静定结构的共性问题将在下面第四章进行综合性讨论。

## § 3-13 思考与讨论

### § 3-1 思考题

3-1 为什么对静定结构进行受力分析时,只需考虑平衡条件,而不需考虑变形条件?这样作出的受力分析的结果是否是唯一正确的结果?

3-2 如何根据内力的微分、积分关系对内力图进行校核?

3-3 用分段叠加法作弯矩图时,为什么要强调  $M$  图的叠加是指两个  $M$  图纵坐标的叠加,而不是两个  $M$  图图形的简单拼合?

### § 3-2 思考题

3-4 静定多跨梁当荷载作用在基本部分上时,对附属部分是否引起内力,为什么?

3-5 静定多跨梁的基本部分和附属部分的划分在有些情况下是否与所受的荷载



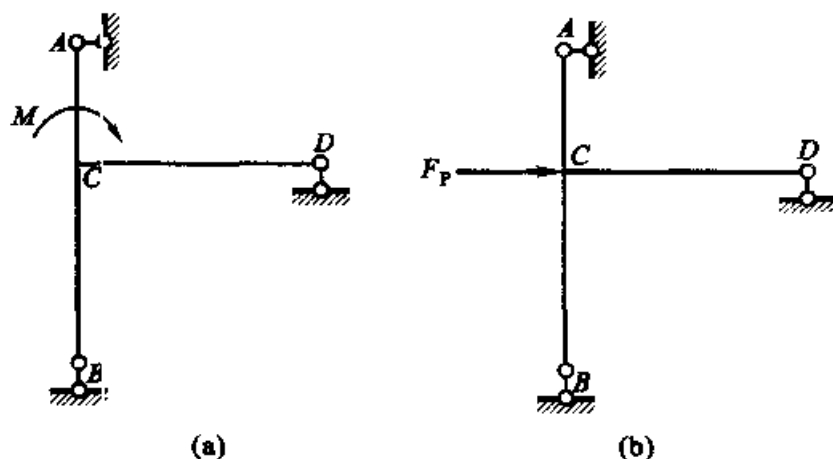
有关系?

3-6 为什么说一般情况下,静定多跨梁的弯矩比一系列相应的简支梁的弯矩要小?

### § 3-3 思考题

3-7 刚架与梁相比,力学性能有什么不同?内力计算上有哪些异同?

3-8 在图示刚架的刚结点处内力图有何特点?试列出图示刚架在结点C处各杆端内力应满足的关系式。



思考题 3-8 图

### § 3-5、§ 3-7 思考题

3-9 对于简单桁架和联合桁架,怎样利用桁架几何构造的特点简化计算,以避免解联立方程?

3-10 试由合力  $F_N$  与分力  $F_x$ 、 $F_y$  之间的三角函数关系推出式(3-4)

3-11 什么叫结点单杆和截面单杆?它们各有什么特点?在桁架的计算中它们各有什么用处?

3-12 组合结构的计算与桁架的计算有什么不同?应注意哪些特点?

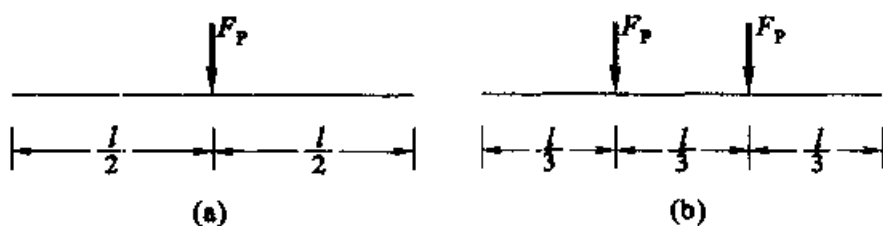
### § 3-8 思考题

3-13 在图 3-60 中吊杆起什么作用?

3-14 三铰拱式屋架常加拉杆,为什么?

3-15 能利用拱的反力和内力的计算公式求三铰刚架的反力和内力吗?

3-16 什么是拱的合理轴线?试求思考题 3-16 图所示荷载作用下三铰拱的合理轴线。拱高对合理轴线有无影响?



思考题 3-16 图

## § 3-9 思考题

3-17 在竖向集中荷载作用下单根悬索的两个支座如果不等高时求垂度  $y$  的表达式

3-18 单根悬索受任意规律分布的竖向连续分布荷载时求索曲线坐标的表达式。

## 综合思考讨论题

3-19 怎样提高静定结构计算的解题能力和解题的速度? 结合静定梁、静定刚架、静定桁架、组合结构以及三铰拱和悬索等多种结构型式自己进行这方面的总结, 以增强自己的能力。

3-20 前一章讲的几何构造分析在本章中有哪些具体的应用? 举例加以说明并总结出应用了几何构造分析的知识之后的效果。

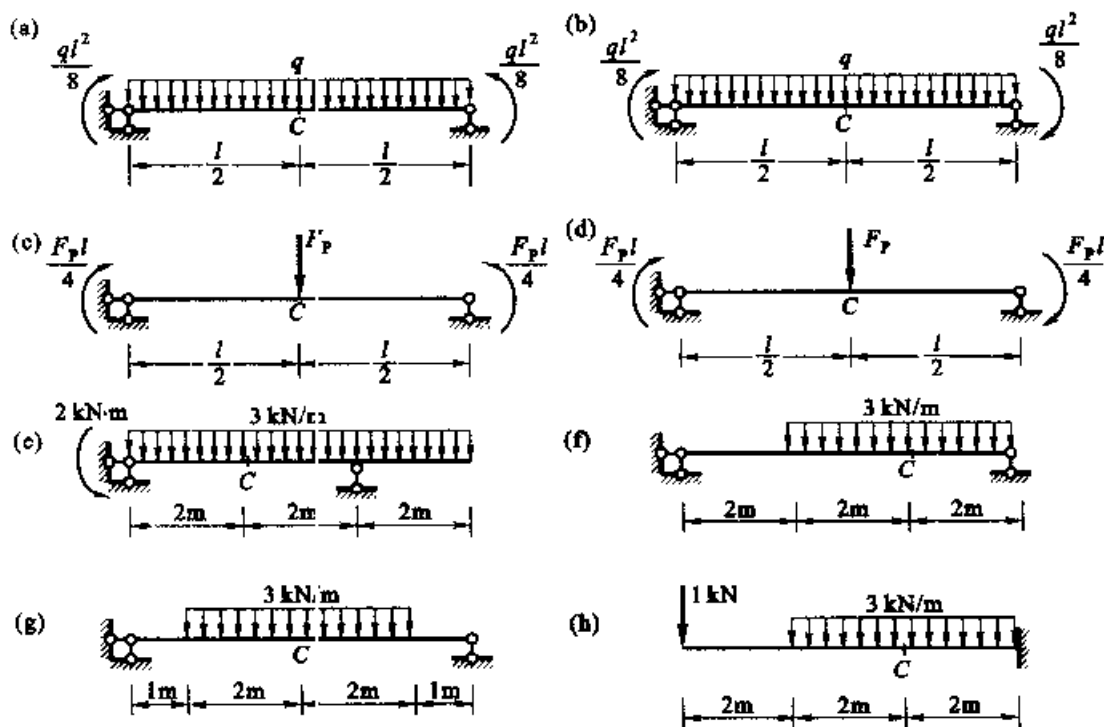
3-21 由平面桁架到空间桁架, 由平面刚架到空间刚架它们的计算工作有哪些不同? 有哪些发展?

3-22 本章中哪些地方应用了叠加原理? 叠加原理在什么条件下可以应用, 什么条件下不能应用。

3-23 怎样判断计算静定结构解答的正确性?

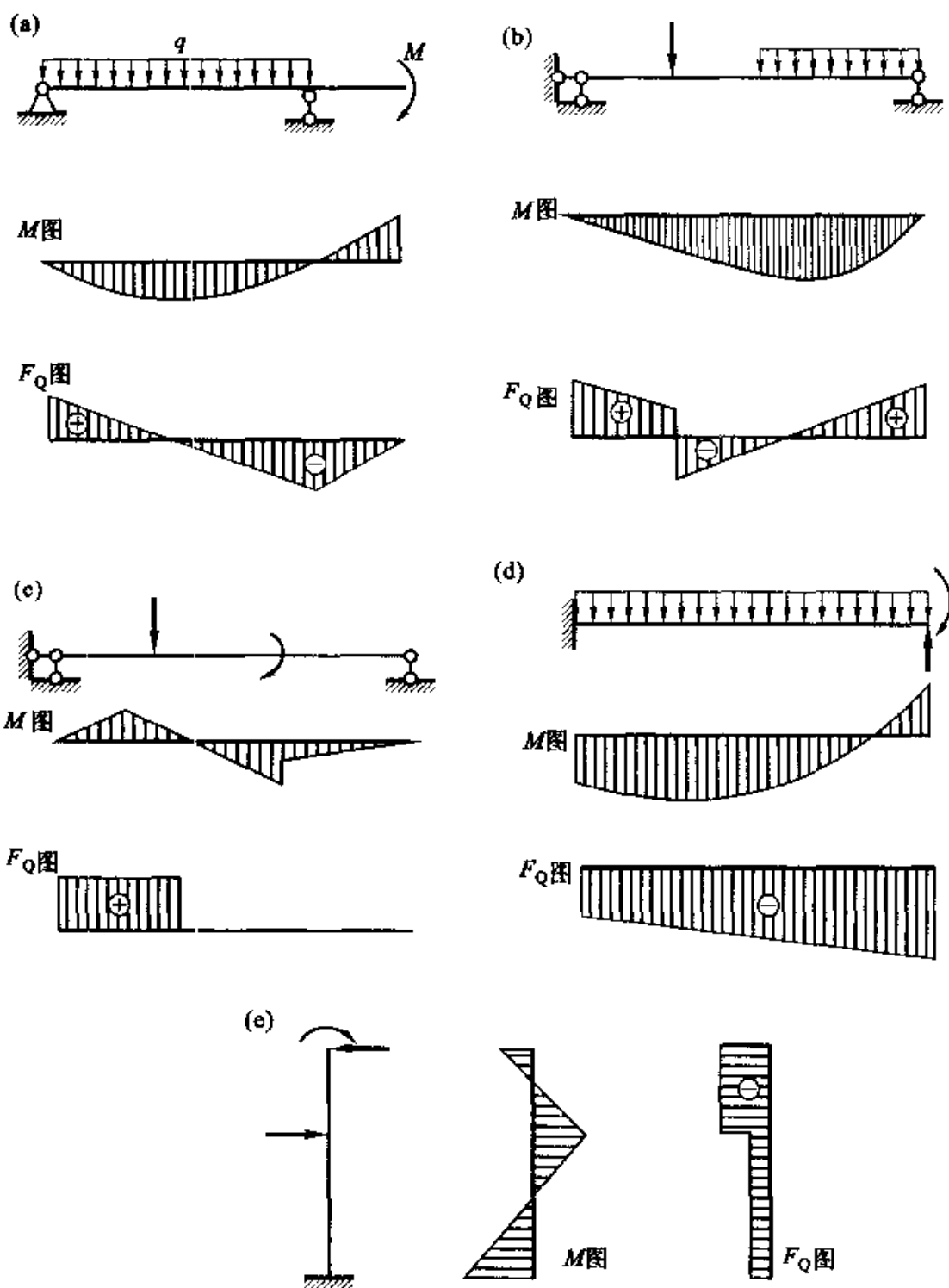
## 习 题

3-1 试用分段叠加法作下列梁的  $M$  图



题 3-1 图

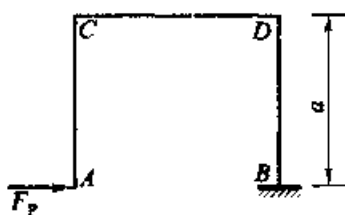
3-2 试判断内力图正确与否,将错误改正。



题 3-2 图

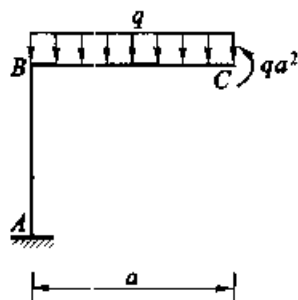
3-3 试速画  $M$  图。图下的提示说明供自我检查之用,作图前先不要查阅。

(a)



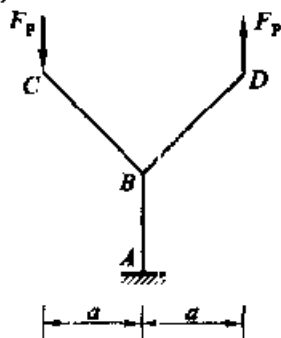
注意  $F_P$  通过  $B$ ,  $M_B = 0$

(b)



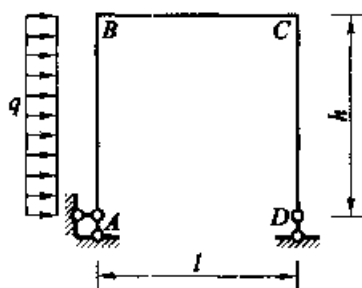
注意  $\hookleftarrow$  有集中力偶荷载

(c)



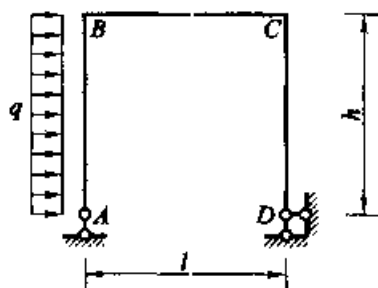
注意  $B$  结点的平衡

(d)



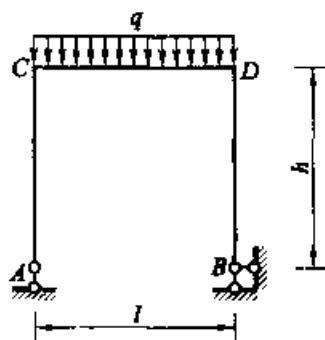
注意  $D$  无水平反力,  $CD$  杆  $M$  图的特点,  $AB$  段  $M$  图弧形朝向

(e)



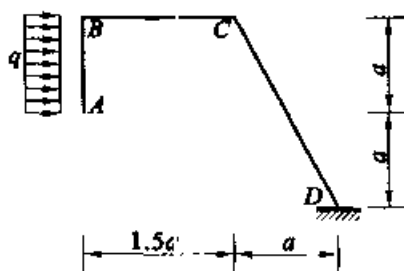
注意  $M$  图在  $A$  点的切线方向

(f)



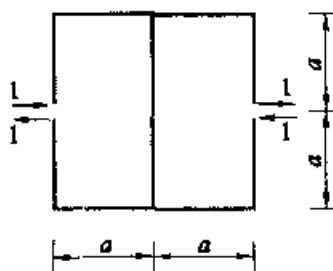
注意  $A, B$  无水平反力,  $M_C = M_D = 0$

(g)

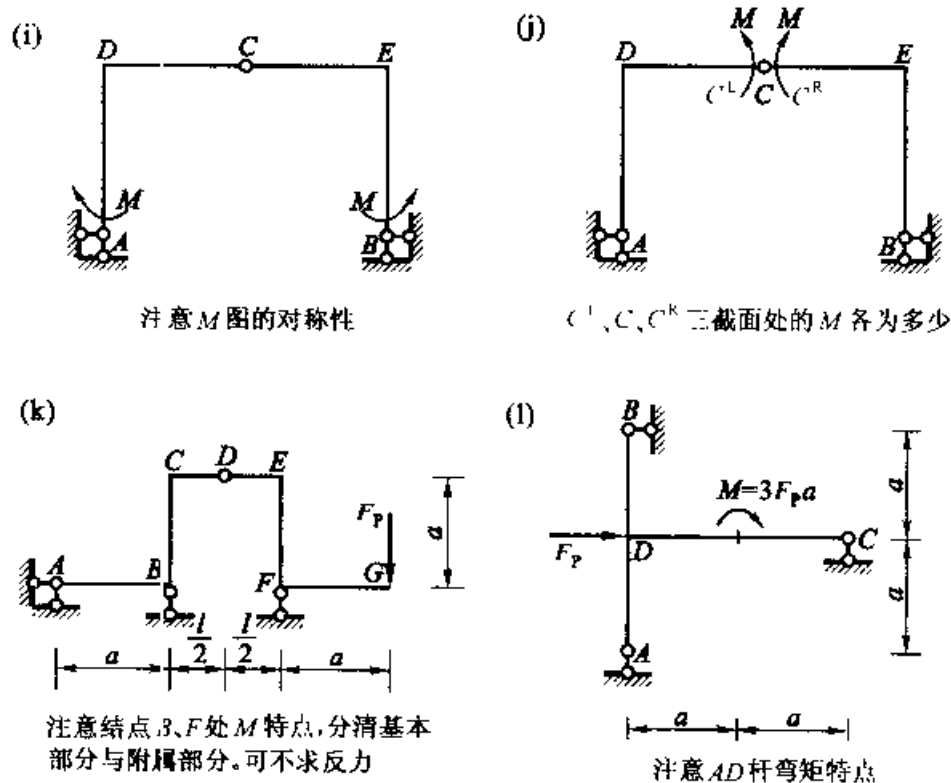


注意  $CD$  杆何处  $M = 0$ ,  
 $CD$  杆  $M$  的标距垂直  $CD$

(h)

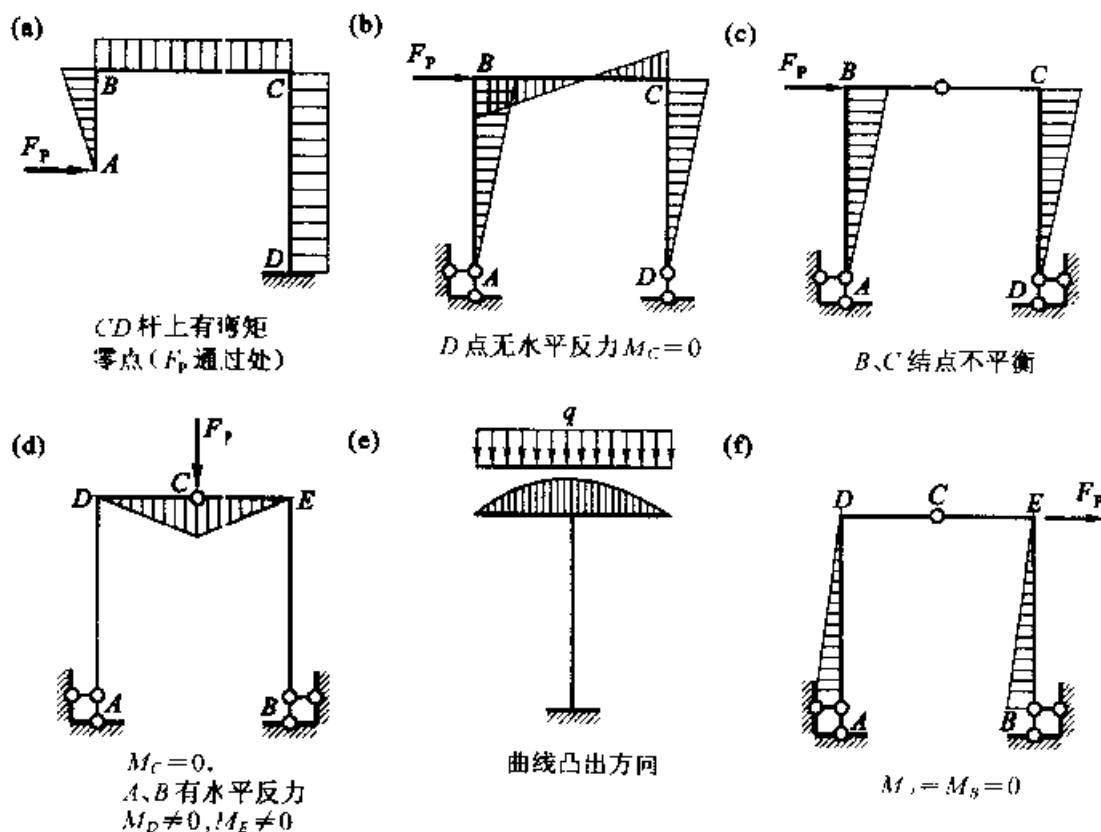


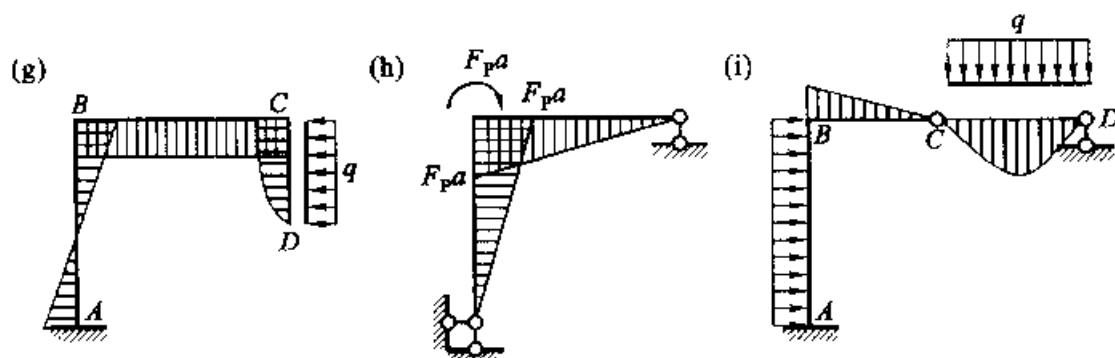
注意三杆刚结点的平衡



题 3-3 图

3-4 试检查  $M$  图的正误, 并加以改正。检查前先不要看图下的提示说明。





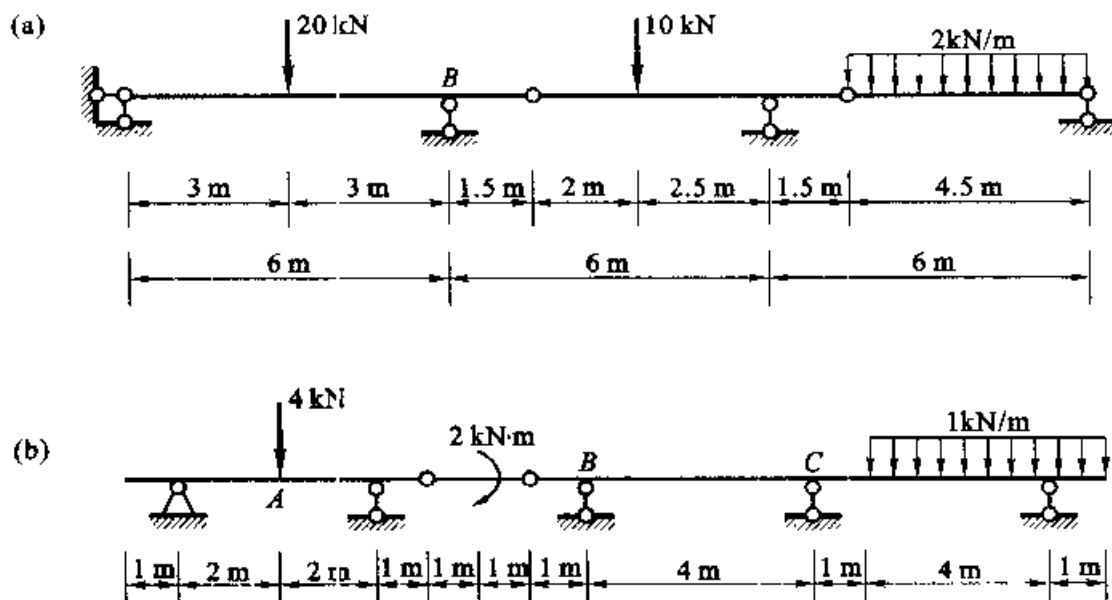
各杆哪一侧受拉?  
AB杆弯矩零点位置

刚结点平衡应  
包含外力偶

C点右侧的曲线斜率应  
与左侧直线斜率相同

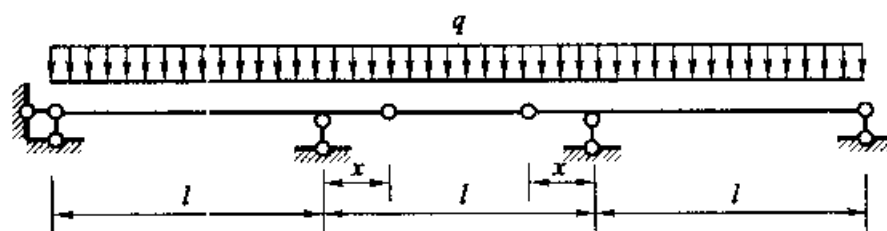
题 3-4 图

3-5 试求支座反力,并作梁的内力图



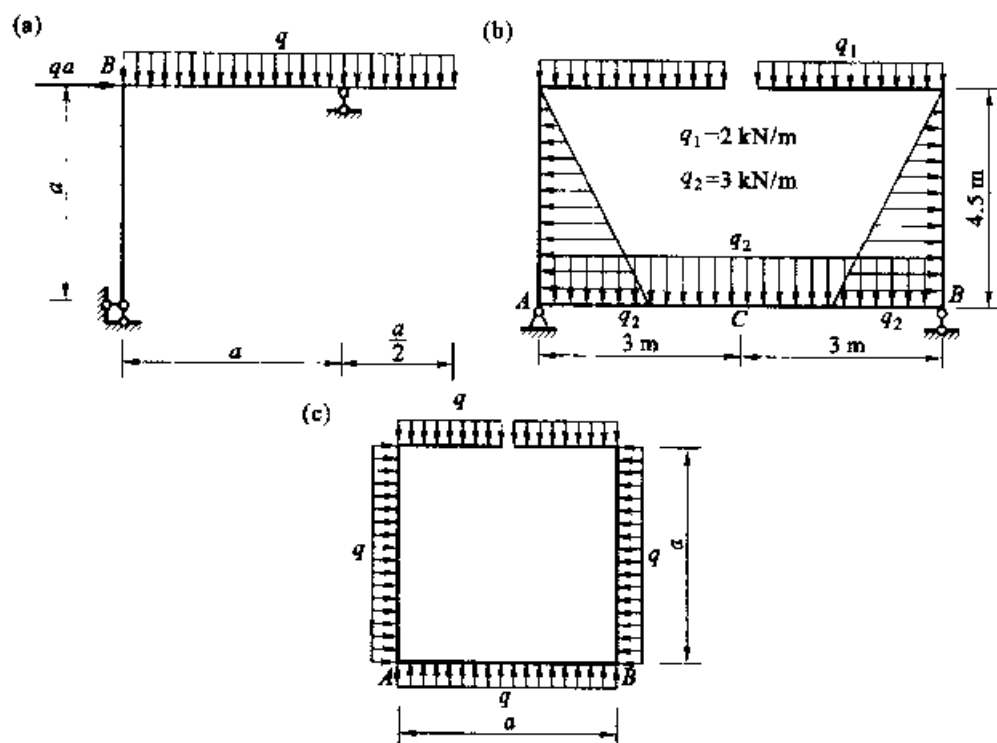
题 3-5 图

3-6 试选择铰的位置  $x$ , 使中间一跨的跨中弯矩与支座弯矩绝对值相等。



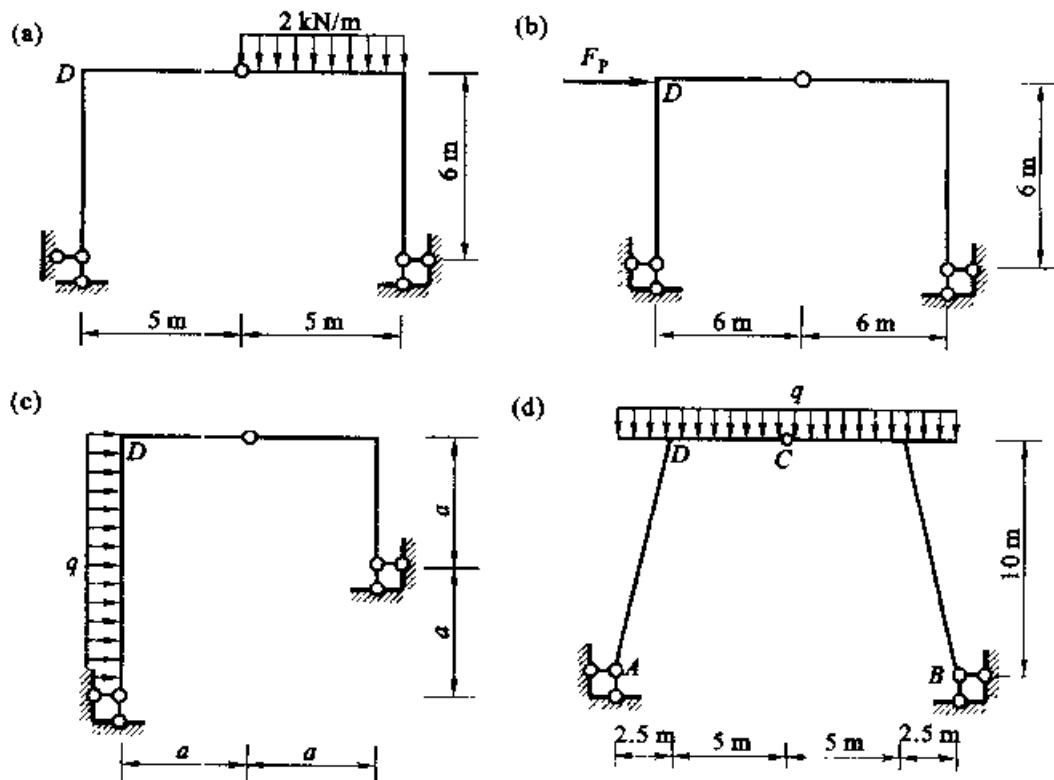
题 3-6 图

## 3-7 试作图示刚架的内力图



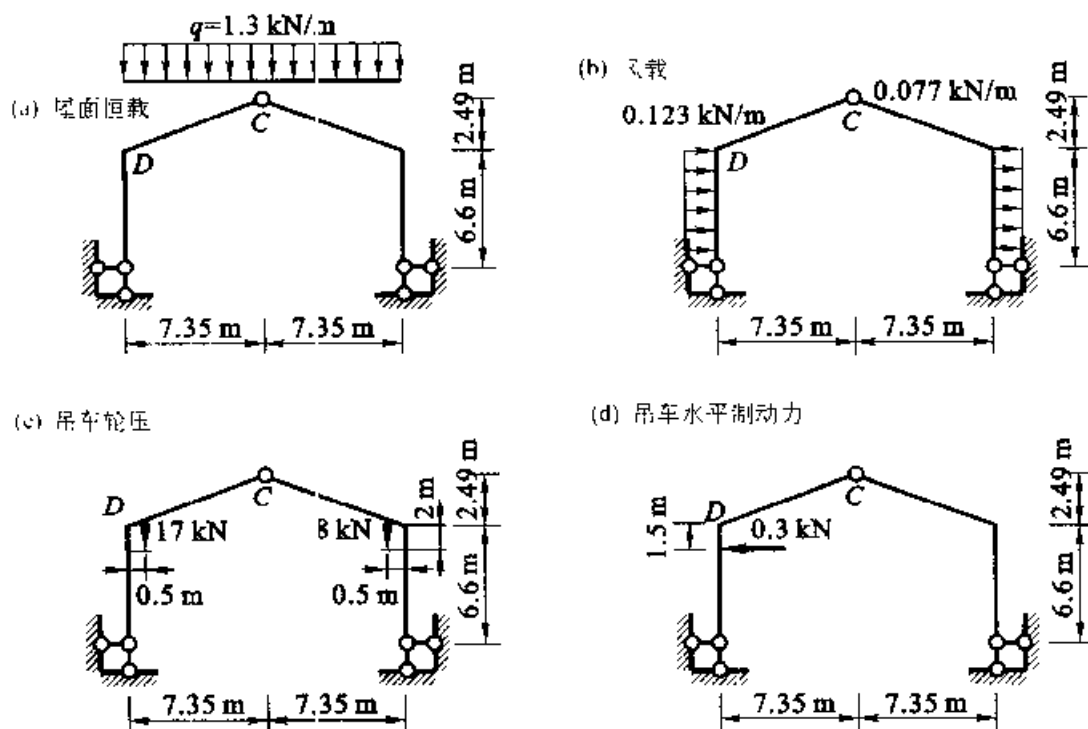
题 3-7 图

## 3-8 试作图示三铰刚架的内力图。



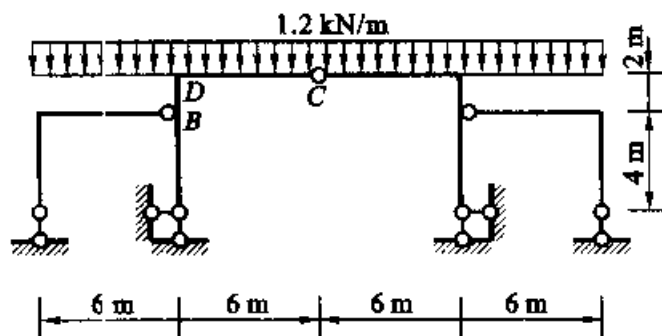
题 3-8 图

3-9 试求图示门式刚架在各种荷载作用下的弯矩图,并作图 a 刚架的  $F_Q$  图和  $F_N$  图



题 3-9 图

3-10 试对图示刚架进行构造分析,并作  $M$  图。



题 3-10 图

3-11 试作图示刚架的弯矩图。

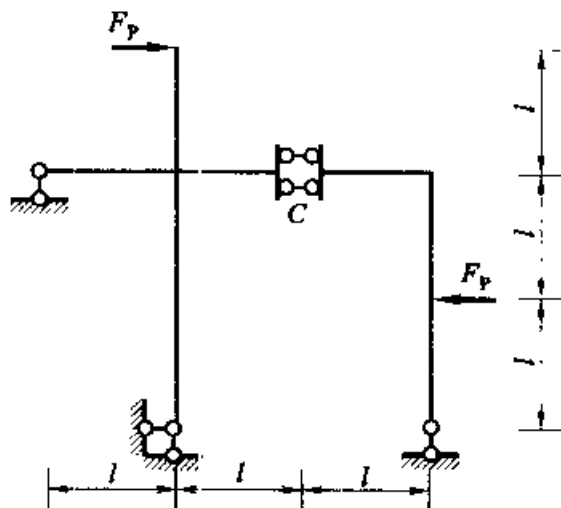
3-12 试求图示刚架的支座反力。

3-13 试作下列梁和刚架在空间受力状态下的内力图。

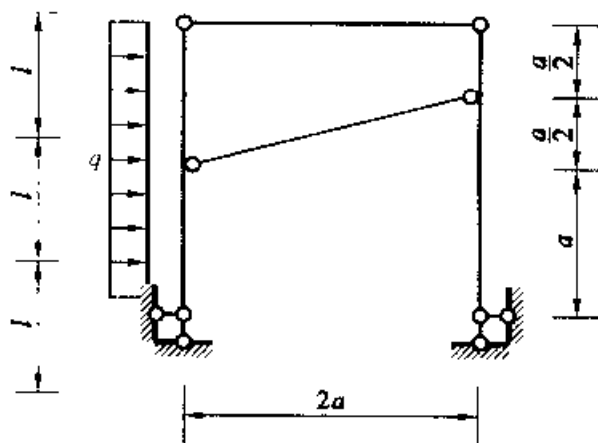
3-14 试分析桁架的类型,指出零杆。

3-15 试讨论下列桁架中指定杆内力的求法。

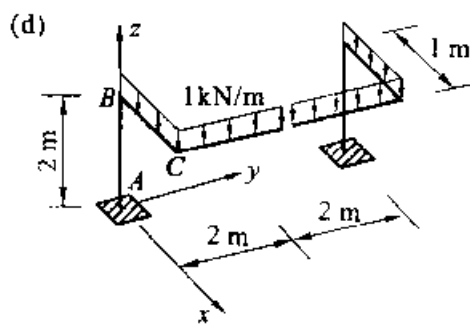
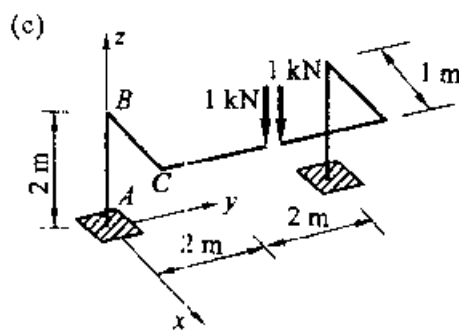
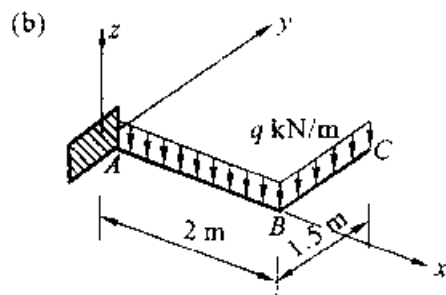
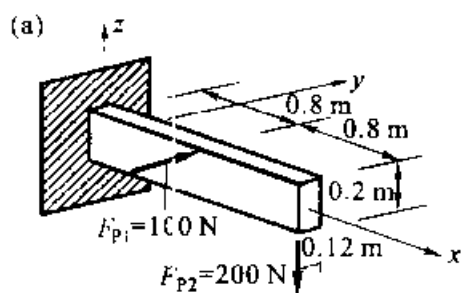




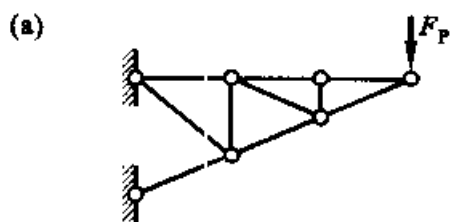
题 3-11 图



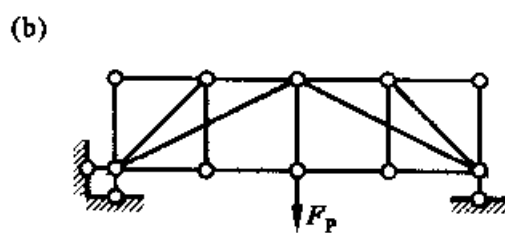
题 3-12 图



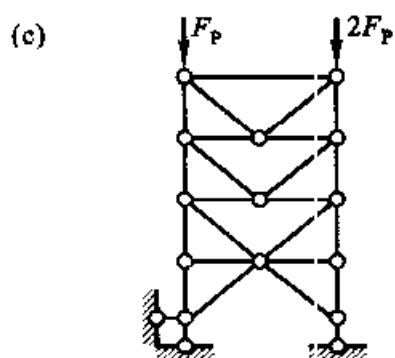
题 3-13 图



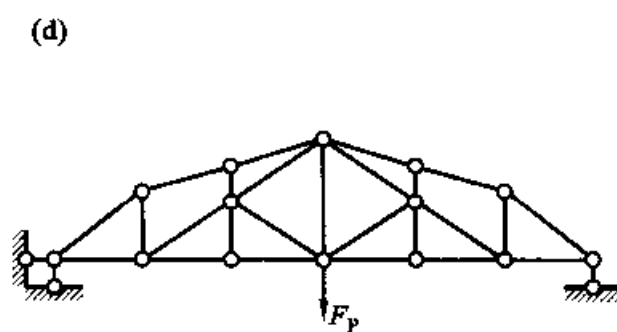
简单桁架, 有4根零杆



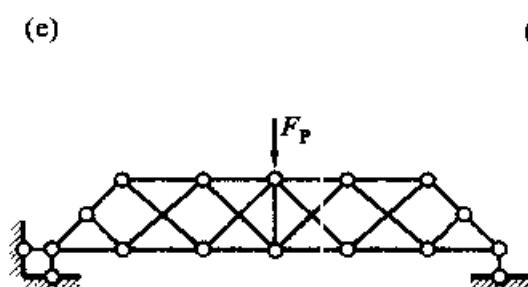
联合桁架, 有10根零杆



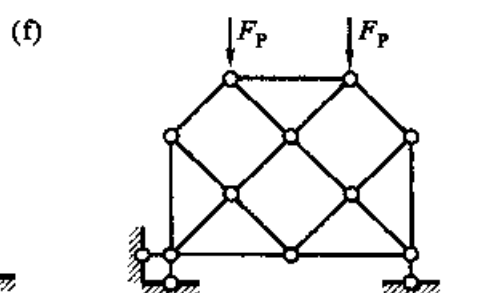
简单桁架, 15根零杆



简单桁架, 6根零杆

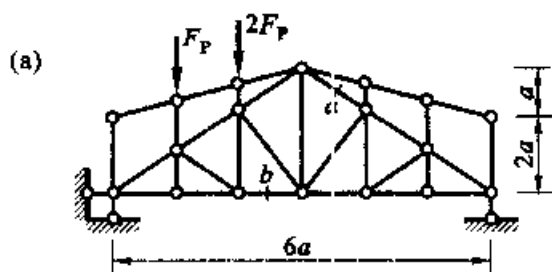


简单桁架, 7根零杆

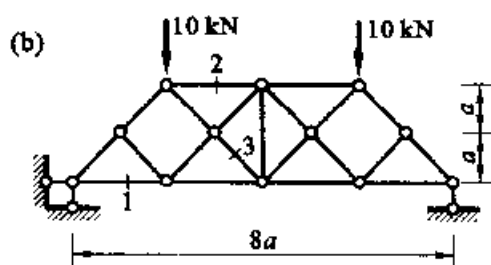


复杂桁架, 利用对称性, 8根零杆

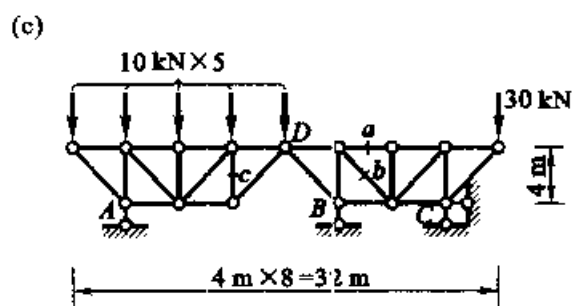
题 3-14 图



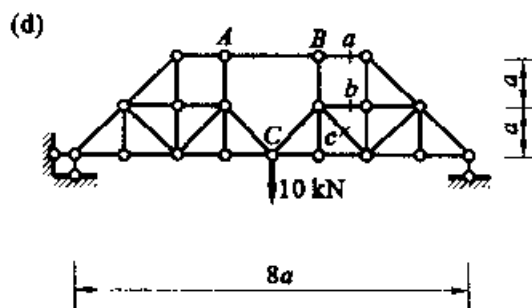
先求零杆, 再作截面



先找零杆, 再作截面



分清基本部分和附属部分,  
先从附属部分开始



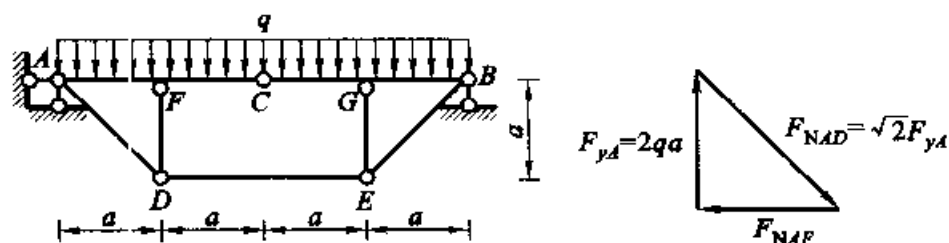
联合桁架, 先求联合桁架  
中的联系杆 AB 的内力

题 3-15 图

3-16 在图示的组合结构中,试问:

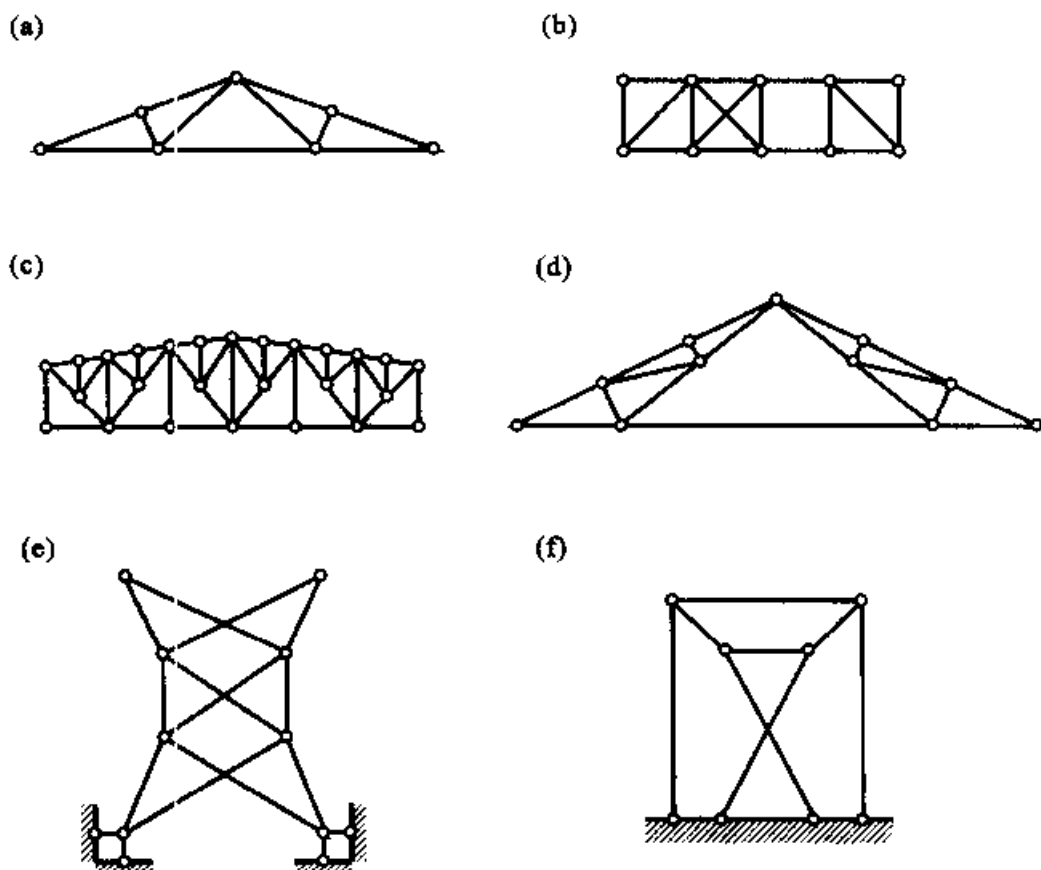
(1)  $DF$  是零杆? 对吗? 为什么?

(2) 取结点  $A$ , 用结点法计算  $AD$ 、 $AF$  的轴力, 得  $F_{NAD} = 2\sqrt{2}qa$ ,  $F_{NAF} = 2qa$ , 这样作对吗? 为什么?



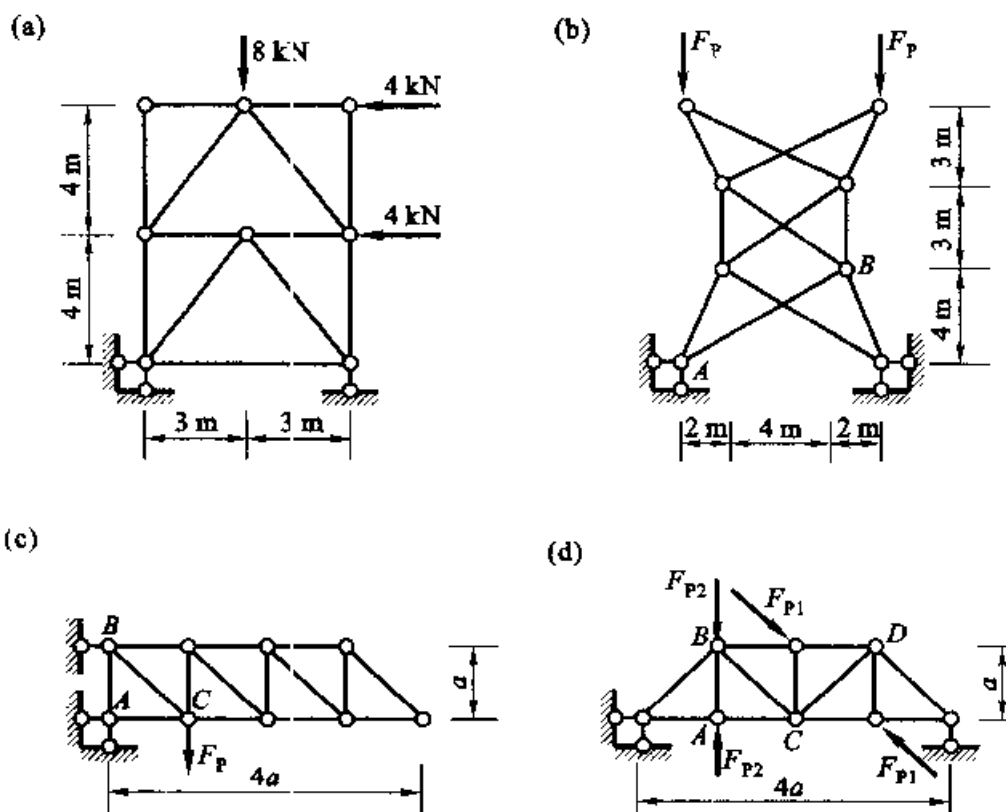
题 3-16 图

3-17 试分析下列桁架的几何构造, 确定是否几何不变?



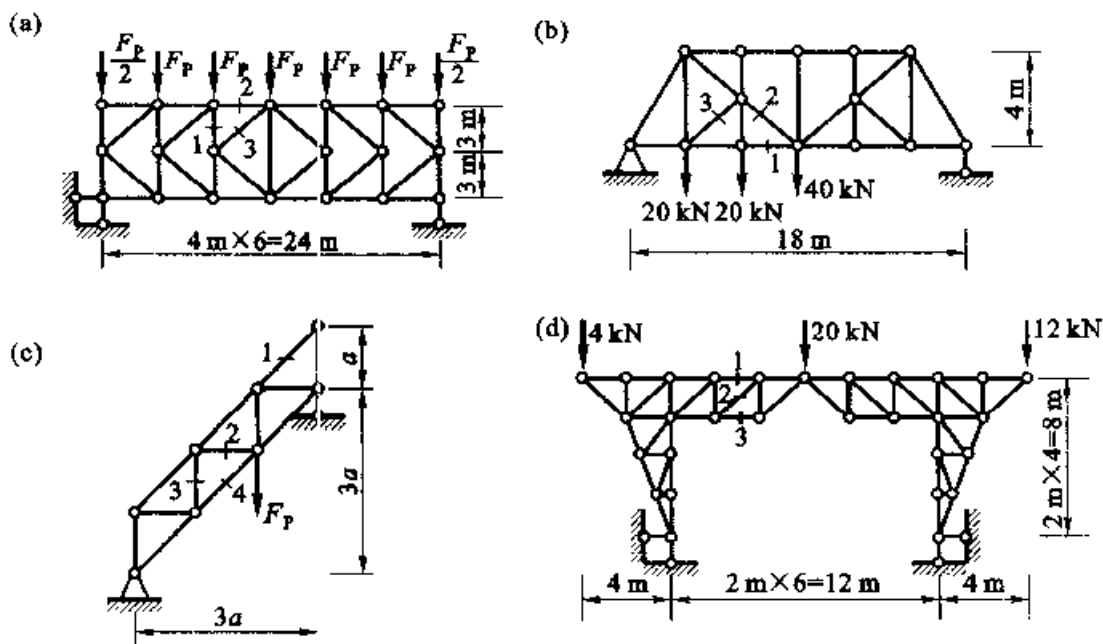
题 3-17 图

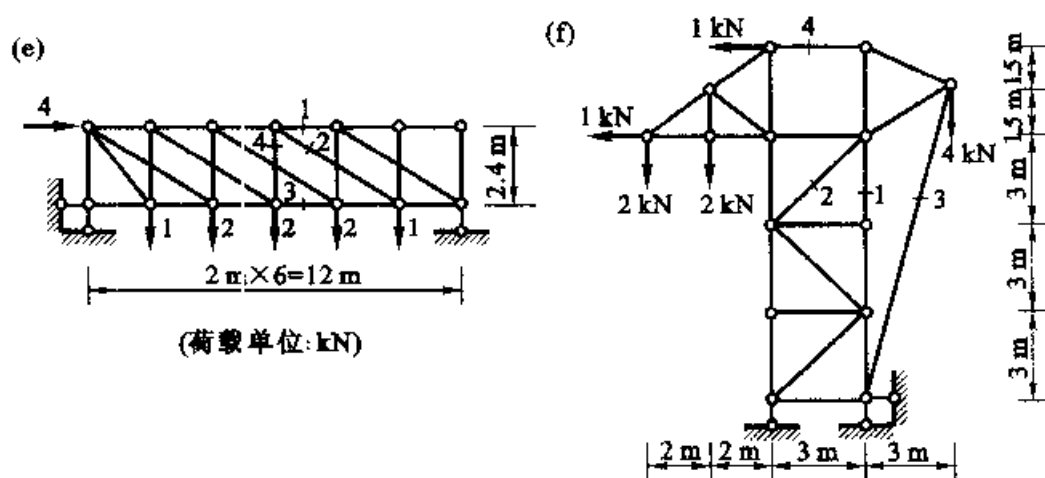
3-18 试用结点法或截面法求图示桁架各杆的轴力



题 3-18 图

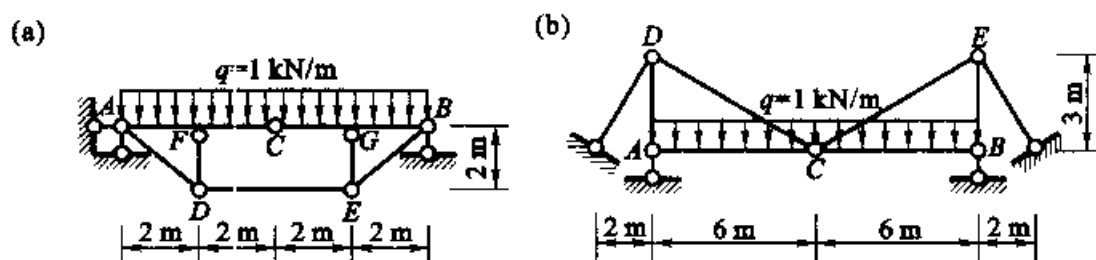
3-19 试求图示各桁架中指定杆的内力。



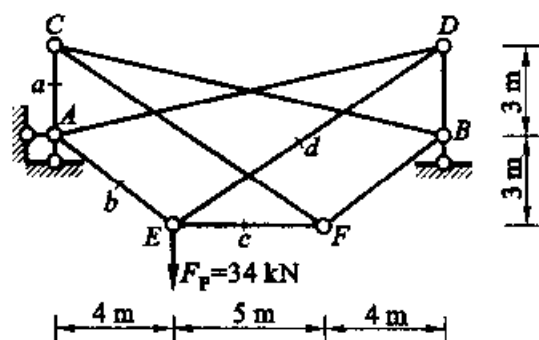


题 3-19 图

3-20 试作图示组合结构的内力图。

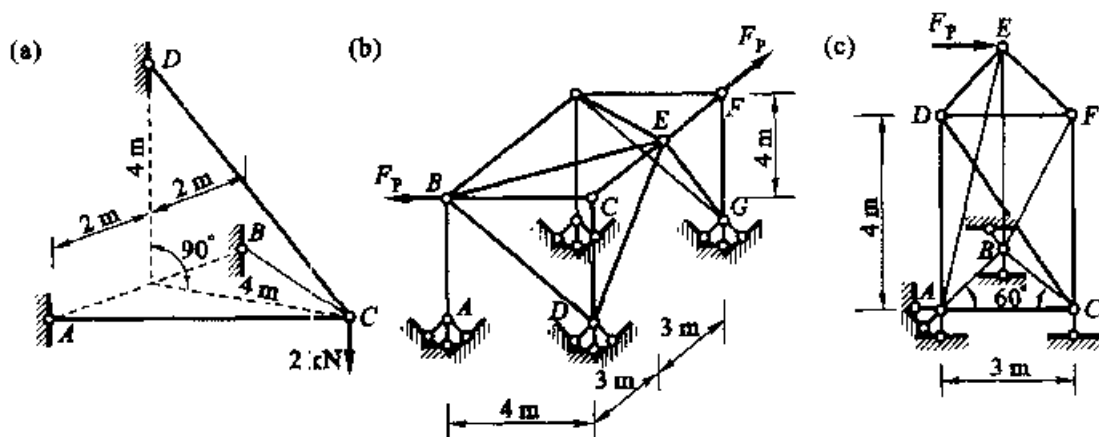


题 3-20 图

3-21 试求桁架杆  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  的轴力

题 3-21 图

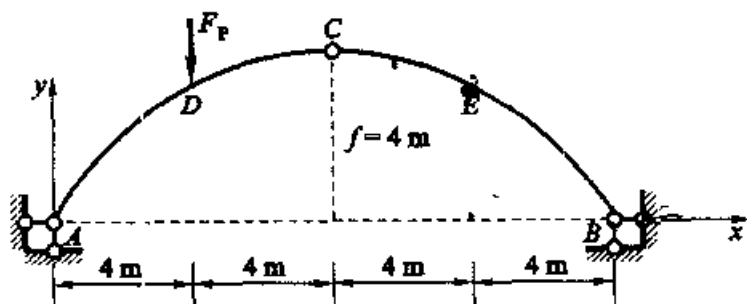
3-22 试求下列图示空间桁架各杆轴力。



题 3-22 图

3-23 图示抛物线三铰拱轴线的方程为  $y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$ ,  $l = 16 \text{ m}$ ,  $f = 4 \text{ m}$ 。试:

- (1) 求支座反力;
- (2) 求截面 E 的  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$  值;
- (3) 求 D 点左右两侧截面的  $F_Q$ 、 $F_N$  值。



题 3-23 图

3-24 图 a 所示为一三铰拱式屋架。上弦通常用钢筋混凝土或预应力混凝土,拉杆用角钢或圆钢,结点不在上弦杆的轴线上而有偏心。图 b 为其计算简图。设  $l = 12 \text{ m}$ ,  $h = 2.2 \text{ m}$ ,  $e_1 = 0.2 \text{ m}$ ,  $e_2 = 0$ ,  $q = 1.2 \text{ kN/m}$ 。试求支座反力和内力。

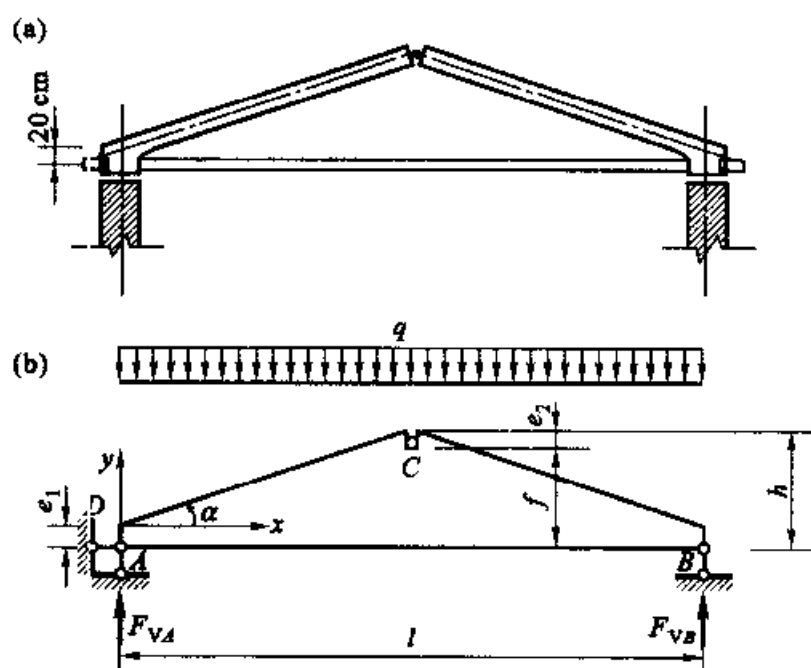
3-25 图示一三铰刚架,在所荷荷载作用下,试:

- (1) 求支座反力。
- (2) 求截面 D 和 E 的弯矩。
- (3) 画出压力线的大致形状。

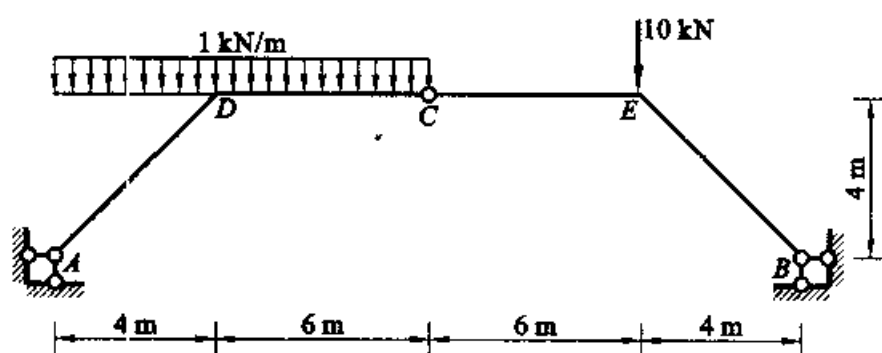
3-26 图示一抛物线三铰拱,铰 C 位于抛物线的顶点和最高点。试:

- (1) 求由铰 C 到支座 A 的水平距离。
- (2) 求支座反力。

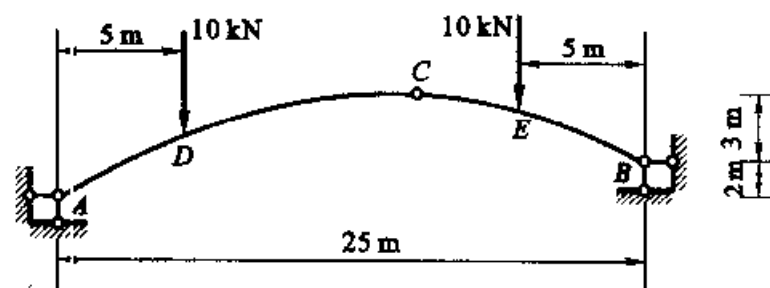
(3) 求  $D$  点处的弯矩。



题 3-24 图



题 3-25 图



题 3-26 图

3-27 参看习题 3-23 中的三铰拱。

(1) 如果改变拱高(设  $f = 8\text{ m}$ ), 支座反力和弯矩有何变化?

(2) 如果拱高和跨度同时改变, 但高跨比  $\frac{f}{l}$  保持不变, 支座反力和弯矩有何变化?

3-28 在例题 3-18(图 3-75)中, 如果荷载沿索长均匀分布(而不是沿跨度均匀分布)时, 求索的曲线方程。并求当左、右二支座等高且已知跨中垂度  $f$ , 如何求出索的水平张力  $F_H$ ?

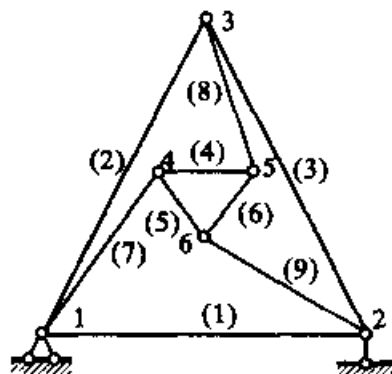
3-29 试求本章例题 3-19(图 3-76)中杆(3)和杆(8)的单杆截面。

3-30 试求本章例题 3-20(图 3-79)中杆(9)和杆(10)的单杆截面。

3-31 试求本章例题 3-21(图 3-81)中杆 2-8(连接结点 2 和 8)的单杆截面。

3-32 图示桁架中的第 5 个结点水平移动到什么位置可以使杆件(4)有 3 个单杆截面?

n, 1, 0, 0	e, 4, 5
n, 2, 1, 0	e, 4, 6
n, 3, 1/2, 1	e, 5, 6
n, 4, 0.35, 0.5	e, 1, 4
n, 5, 0.65, 0.5	e, 3, 5
n, 6, 0.5, 0.3	e, 2, 6
e, 1, 2	NSUPT, 1, 3, 0, 0, 0
e, 1, 3	NSUPT, 2, 1, 0, 0
e, 2, 3	end

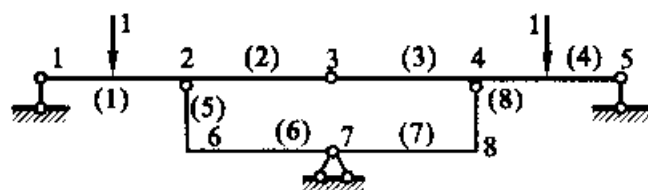


题 3-32 图

3-33 试用求解器的智能求解功能求解图示组合结构的各杆内力。若将第 2 个集中力值改为 2, 再求解, 会遇到什么情况?

N, 1, 0, 0	E, 4, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 0
N, 2, 2, 0	E, 2, 6, 1, 1, 0, 1, 1, 1
N, 3, 4, 0	E, 6, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 0
N, 4, 6, 0	E, 7, 8, 1, 1, 0, 1, 1, 1
N, 5, 8, 0	E, 8, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 0
N, 6, 2, -1	NSUPT, 1, 1, 0, 0
N, 7, 4, -1	NSUPT, 5, 1, 0, 0
N, 8, 6, -1	NSUPT, 7, 3, 0, 0, 0
E, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 1	ELOAD, 1, 1, 1, 1/2, 90
E, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 0	ELOAD, 4, 1, 1, 2/4, 90
E, 3, 4, 1, 1, 0, 1, 1, 1	END



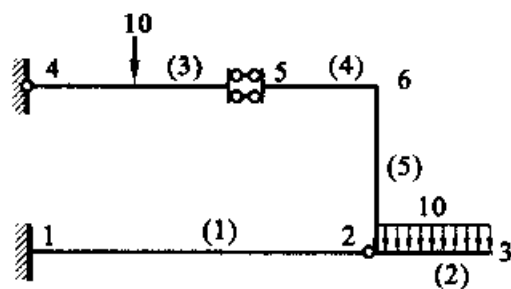


题 3-33 图

3-34 试用求解器的智能求解功能求解图示组合结构杆件(1)固定端处(结点1)的弯矩。

```

N,1,0,0      E,4,5,1,1,0,1,0,1
N,2,6,0      E,6,5,1,1,1,1,0,1
N,3,8,0      E,2,6,1,1,1,1,1,1
N,4,0,3      NSUPT,1,6,-90,0,0,0
N,5,4,3      NSUPT,4,4,-90,0,0,0
N,6,6,3      ELOAD,2,3,10,0,1,90
E,1,2,1,1,1,1,1,0 ELOAD,3,1,10,1/2,90
E,2,3,1,1,1,0,0,0 END
  
```



题 3-34 图

## 第4章

# 静定结构总论

§4-1 隔离体方法及其截取顺序的 优选	§4-5 静定结构的一般性质
§4-2 几何构造分析与受力分析之间 的对偶关系	§4-6 各种结构型式的受力特点
§4-3 零载法	§4-7 用求解器求解一般静定结构
§4-4 刚体体系的虚功原理	§4-8 小结
	§4-9 思考与讨论
	习题

### §4-1 隔离体方法及其截取顺序的优选

静定结构的受力分析,主要是利用平衡方程确定支座反力和杆件内力,作出结构的内力图。

求静定结构约束力(支座反力和内力)的基本方法是隔离体分析方法。其要点是:首先,在结构中人为地截断约束,取出隔离体,把约束力暴露出来,成为隔离体的外力。然后,建立平衡方程,以解出约束力。在§4-4中还要介绍另一方法——虚功法,即应用虚位移方程求约束力的方法。虚位移方程实际上是用虚功的形式表示的平衡方程。

受力分析与几何构造分析是密切相关的。要善于根据结构的几何构造特点来确定受力分析的步骤,要善于把整个结构的计算问题逐步分解为单个单元的计算问题,以收到化整为零、各个击破的效果。

#### 1. 隔离体的形式、约束力及独立平衡方程

##### (1) 隔离体的形式

从结构中截取的隔离体(或简称为单元)有多种形式:结点(铰结点、刚结点、组合结点),杆件,刚片(内部几何不变体系),内部几何可变体系或杆件微段单元。

桁架的结点法以结点为隔离体。桁架截面法截取的隔离体通常是多杆

体系。多跨静定梁以杆件为隔离体。在刚架分析中,常取杆件为隔离体计算杆端剪力,以结点为隔离体计算杆端轴力。推导荷载与内力之间的微分关系时取杆件微段为隔离体。

### (2) 约束力的类型

选取隔离体时,在截断约束处暴露出来的约束力成为隔离体的外力。这些约束力的个数和类型是由所截断的约束的性质决定的。例如在平面结构中:

截断链杆——有一个约束力(轴力);

截断简单铰结——一般有两个约束力;

截断简单刚结(或截断梁式杆)——一般有三个约束力。

截断滚轴支座、铰支座、定向支座、嵌固支座——分别有一个、二个、二个、三个约束力。

### (3) 隔离体的独立平衡方程个数

对隔离体建立平衡方程时,其独立平衡方程的个数等于隔离体的自由度的个数。例如在平面结构中:

取铰结点为隔离体——两个独立平衡方程;

取刚结点和组合结点为隔离体——三个独立平衡方程;

取刚片或内部几何不变体系为隔离体——三个独立平衡方程;

取内部几何可变体系为隔离体—— $S$  个独立平衡方程( $S$  表示隔离体的自由度的个数)。

对隔离体的平衡方程应当进行优选,使求解时尽量不解或少解联立方程。最优情况是:每建立一个新的平衡方程时,只出现一个新的未知力。还要注意:不能选用彼此不独立的平衡方程。因此,对某个隔离体选用的平衡方程的个数不应超过其独立平衡方程个数。

为了举例说明关于隔离体的形式、约束力的类型和平衡方程的优选,可以图 4-1a、b、c 所示结构作为简例。

在图 4-1a 中,可选铰结点  $C$  作为隔离体。由于  $AC$  和  $BC$  都是链杆约束,因此截断链杆时暴露出来的约束力是轴力。隔离体上共作用两个未知力  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$ 。由于铰结点  $C$  有两个自由度,因此可写出两个独立的平衡方程,正好可解出两个未知力。

在图 4-1b 中,可选刚片  $AC$  作为隔离体。截断链杆  $BC$  和铰支座  $A$ , 暴露出来的待定约束力分别为轴力  $F_N$  和支座反力  $F_{xA}$ 、 $F_{yA}$ 。由于刚片  $AC$  有三个自由度,因此可写出三个独立的平衡方程,正好可解出三个未知力。

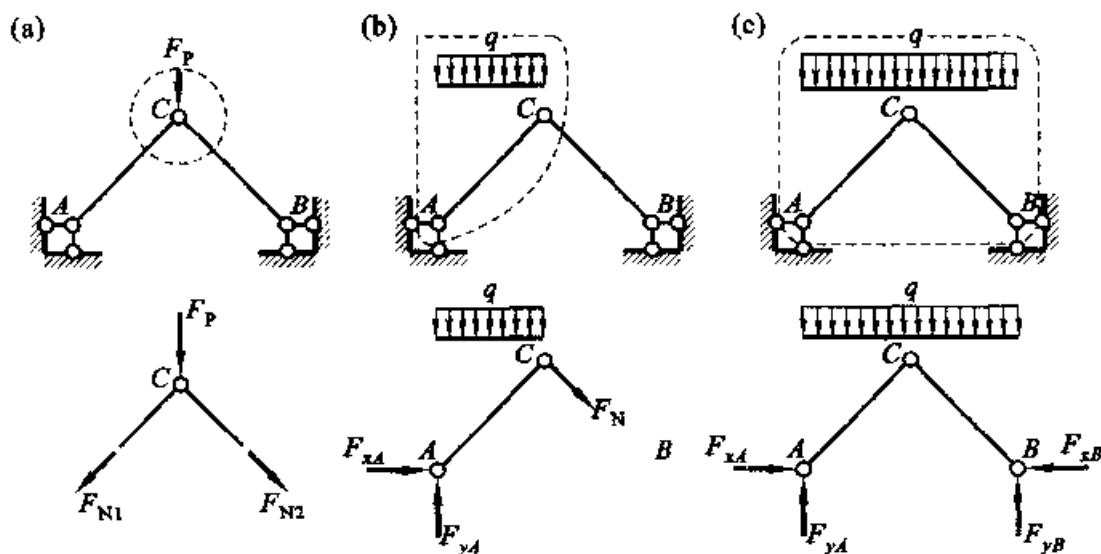


图 4-1

在图 4-1c 中,可选刚片 AC 和 BC 组成的铰结体系作为隔离体。截断两个铰支座 A 和 B,暴露出来的待定约束力为四个支座反力  $F_{xA}$ 、 $F_{yA}$ 、 $F_{xB}$ 、 $F_{yB}$ 。由于隔离体是一个内部几何可变体系,共有四个自由度(其中三个是整体自由度,另一个是两刚片相对转动的内部自由度),因此可写出四个独立的平衡方程(三个整体平衡方程  $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_y = 0$ 、 $\sum M = 0$  以及与上述内部自由度对应的平衡方程  $M_c = 0$ ),正好可解出四个未知力。为了避免解四元联立方程,还可按照求三铰拱支座反力的作法,对四个平衡方程进行优选。

在图 4-1a、b、c 中,虽然结构形式相同,但由于受力状态不同,因而所选的隔离体也不相同。这正好说明,对隔离体分析方法需要深入理解并能灵活地加以运用。

## 2. 计算的简化和隔离体截取顺序的优选

前已指出,对隔离体的平衡方程应当进行优选,尽量避免解联立方程。例如,在桁架结点法中,经常使用投影方程,但有时使用力矩方程更方便。在桁架截面法中,力矩中心和投影轴的选择就很重要,选择得好就可以不需解联立方程。

掌握了结构的受力特点,就能简化计算。例如,在图 4-1a 中,如认识到 AC 和 BC 都是链杆,就可以用结点法解决问题。如果不能看出 AC 和 BC 是链杆,就必须用三铰拱的方法计算反力。在桁架计算中,如能识别出零杆(轴力为零的杆件)或单杆,常常可以使计算简化。对称结构在对称荷载作用下,反力和内力也是对称的。利用这个规律,对于对称问题只计算半边结

构就够了。图 4-2a 是一个简例, 因为结构和荷载都是左右对称的, 反力也是对称的, 因而只须计算 A 点的反力  $F_H$  和  $F_V$ 。如果取杆 AC 为单元(图 4-2b), 在铰 C 处只有水平未知力  $F_{XC}$ , 没有竖向未知力。

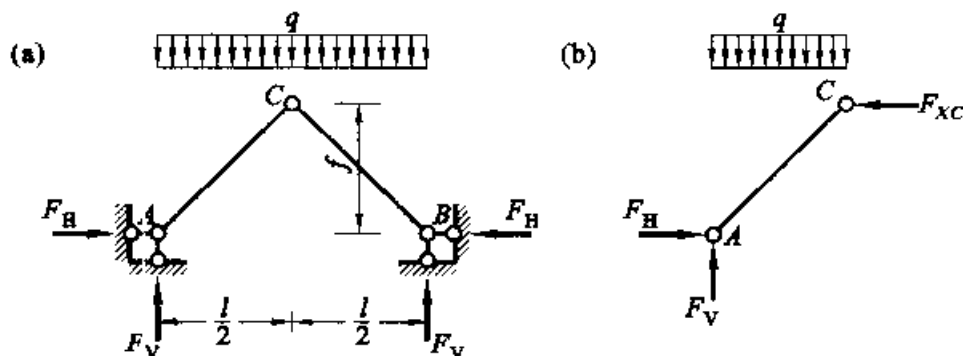


图 4-2

简化静定结构受力分析的最重要的手段, 是合理选择截取单元的次序。对于多跨梁, 应先计算附属部分, 然后计算基本部分。

对于简单桁架, 截取结点的次序, 应与桁架组成时添加结点的次序相反。对于联合桁架, 应先用截面法求出连接杆的轴力, 然后计算其他杆件的内力。由此可知, 为了选择合理的计算次序, 必须分析结构的几何构造。在受力分析中, 要解决结构如何分解为单元, 即“如何拆”的问题; 几何构造分析, 要解决结构如何组成, 即“如何搭”的问题。拆和搭是互相联系的, 如果

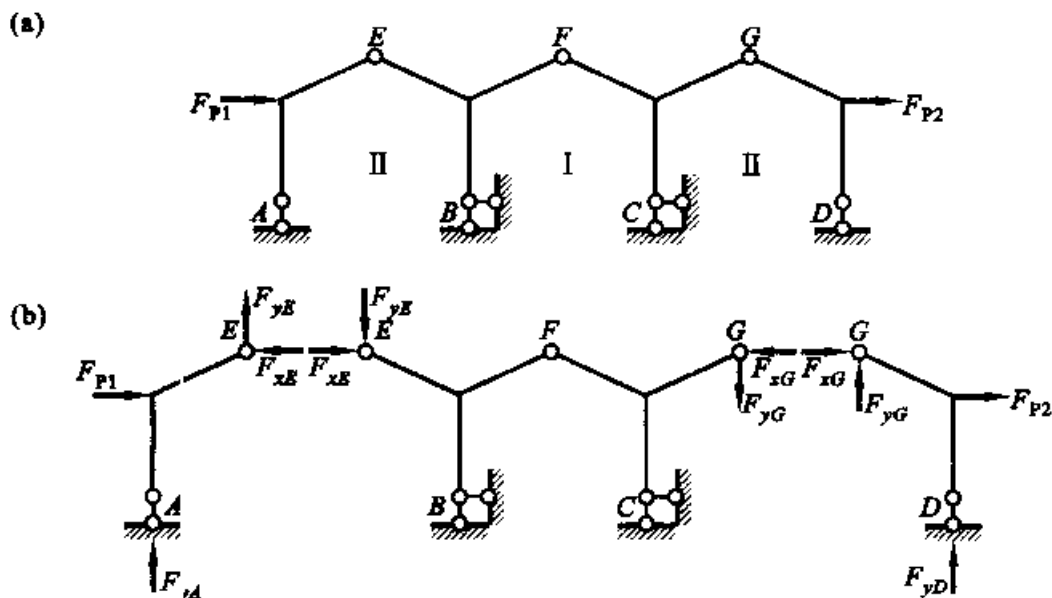


图 4-3

拆的次序与搭的次序正好相反, 工作就可以顺利进行。因此, 如果逐步截取

单元的次序与结构组成过程中逐步添加单元的次序相反,结构的受力分析就比较简便。

图 4-3a 所示为一静定刚架,是按照 I、II 次序组成的。受力分析应按照相反的次序截取单元,如图 4-3b 所示。

有时同一结构有几种不同的搭法,因此也就有几种不同的拆法。在桁架的结点法中,我们已遇到过这样的例子。

## § 4-2 几何构造分析与受力分析之间的对偶关系

几何构造分析与受力分析之间存在对偶关系。上节中把二者的关系比喻为“搭”和“拆”的关系,这就是一种对偶关系。

对偶关系还表现在其他方面,现作进一步的讨论。

### 1. 从计算自由度 $W$ 的力学含义和几何含义看对偶关系

在第 2 章中指出,计算自由度  $W$  等于“各部件的自由度总数”与“全部约束数”的差值。这就是  $W$  的几何含义。

在受力分析中,取各部件作为隔离体,把各部件的约束切断,用其约束力来代替,然后利用隔离体的平衡方程来求未知的约束力。由于对部件的每一个自由度可写出一个相应的平衡方程,又每一个约束对应于一个未知的约束力,因此从静力分析的角度看,参数  $W$  又具有如下的力学含义: $W$  又等于“各部件的平衡方程总数”与“未知力总数”的差值。

由此可见,参数  $W$  不仅具有几何含义,而且也具有对应的力学含义。根据  $W$  的数值,可对体系的静力特性得出如下结论:

#### (1) 若 $W > 0$ , 则平衡方程个数大于未知力个数

由这组平衡方程求解未知力时,在一般情况下,方程组是矛盾的,没有解答。也就是说,在任意荷载作用下,体系不是都能维持平衡的。(从几何构造分析来看,这种情况对应于体系为几何可变。)

#### (2) 若 $W < 0$ , 则平衡方程个数小于未知力个数

如果此方程组有解,则解答必定有无穷多种。也就是说,体系如能维持平衡,则必定是超静定的。(从几何构造分析来看,这种情况对应于体系有多余约束。)

#### (3) 若 $W = 0$ , 则平衡方程个数等于未知力个数

此平衡方程组解答的性质要根据方程组的系数行列式  $D$  是否为零而定:

1) 如果  $D \neq 0$ , 则平衡方程组有解,且必是唯一解。(从几何构造分析来看,如果  $D \neq 0$ , 则体系是几何不变的、且无多余约束。)

2) 如果  $D = 0$ , 则平衡方程在一般荷载下无解,在特殊荷载作用下有无

穷多组解。(从几何构造分析来看,如果  $D=0$ ,则体系是几何可变、且有多余约束。)

可以看出,由  $W$  引出的静力特性与 §2-3 中由  $W$  引出的几何特性之间具有对偶关系:在一般荷载作用下平衡方程组有解对应于体系几何不变,无解则对应于几何可变。平衡方程组只有唯一解对应于体系无多余约束,有无穷多种解答则对应于有多余约束。

## 2. 从 $W=0$ 的一个简例看对偶关系

图 4-4a 所示为一个  $W=0$  的简单对称体系,其中  $\alpha$  角在  $0$  与  $\frac{\pi}{2}$  之间取值。对此体系分别进行几何构造分析和受力分析,并从中看出二者之间的对偶关系。

首先,从几何构造分析(图 4-4a)中得出两点结论:

- (1) 当  $\alpha \neq 0$  (链杆 1 和 2 不共线) 时,体系为几何不变、且无多余约束。
- (2) 当  $\alpha = 0$  (链杆 1 和 2 为共线) 时,体系为几何可变(瞬变)、且有多余约束。

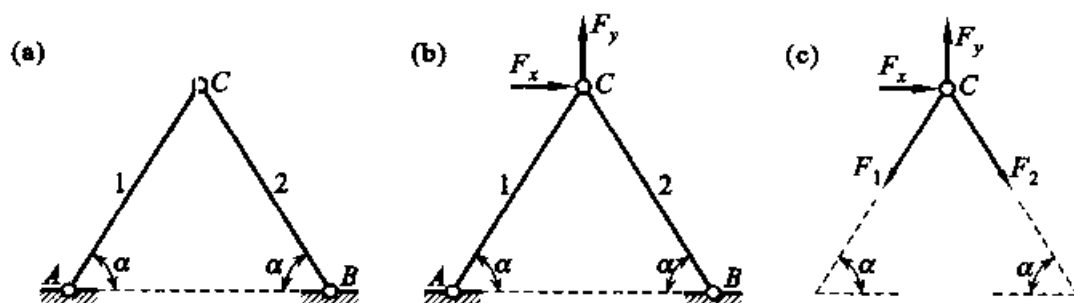


图 4-4

其次,进行受力分析(图 4-4b)。为了求链杆 1 和 2 中的未知轴力  $F_1$  和  $F_2$ ,取结点 C 为隔离体(图 4-4c),可写出两个投影平衡方程:

$$\begin{aligned} F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha &= F_x \\ F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha &= F_y \end{aligned} \quad (4-1)$$

这时,平衡方程个数与未知力个数正好相等,但方程组是否可解,或者是否有唯一解,还需根据方程组的系数行列式  $D$  是否为零才能得出结论。由式 (4-1) 得

$$D = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\cos \alpha \\ \sin \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha \quad (4-2)$$

下面分为两种情况讨论:

- (1) 当  $\alpha \neq 0$  时(两根链杆 1 和 2 不共线)

此时,由式(4-2)得知

$$D \neq 0$$

因此,方程组(4-1)有解,且为唯一解。解的一般形式可写成

$$F_1 = \frac{D_1}{D}, \quad F_2 = \frac{D_2}{D} \quad (4-3)$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} F_x & -\cos \alpha \\ F_y & \sin \alpha \end{vmatrix} = F_y \sin \alpha + F_x \cos \alpha$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & F_x \\ \sin \alpha & F_y \end{vmatrix} = -F_x \sin \alpha + F_y \cos \alpha$$

故得

$$F_1 = \frac{F_x}{2 \cos \alpha} + \frac{F_y}{2 \sin \alpha}, \quad F_2 = -\frac{F_x}{2 \cos \alpha} + \frac{F_y}{2 \sin \alpha}$$

由此得出受力分析的结论:当两链杆不共线时,平衡方程组有解,且为唯一解

(2) 当  $\alpha = 0$  时(两根链杆共线)

此时,由式(4-2)得知

$$D = 0$$

解的一般表示式(4-3)由于分母为无穷大而不再成立。

实际上,当  $\alpha = 0$  时,方程组(4-1)退化为

$$F_1 + F_2 = F_x \quad (4-4a)$$

$$F_1 \times 0 + F_2 \times 0 = F_y \quad (4-4b)$$

当荷载  $F_y \neq 0$  时,方程组(4-4)无解。

如果考虑  $F_y = 0$  而只有水平荷载  $F_x$  作用的特殊情况,则方程组(4-4)退化为

$$F_1 + F_2 = F_x \quad (4-5a)$$

$$F_1 \times 0 + F_2 \times 0 = 0 \quad (4-5b)$$

这时,方程组(4-5)的解为

$$F_1 = F_x + F_2 = \text{任意值}$$

由此得出受力分析的结论:当两链杆共线时,平衡方程组在一般荷载作用下无解,在特殊荷载作用下有解,但解是不唯一的。

最后指出,上面从几何构造分析和受力分析分别得出的结论是殊途同归的。

由于静力特性和几何构造特性的交互关系,一方面,在进行静力分析时



可以充分利用结构的几何特性,例如根据结构的组成顺序来选择静力分析的方法和顺序,应用机动法作静定内力和反力的影响线(第5章),等等。另一方面,在讨论几何构造问题时,也可借用静力解法,例如通过静力计算,根据平衡方程的解答是否唯一来判断体系中是否有多余约束。下节讨论的零载法就是这方面的应用。

### §4-3 零 载 法

上节已经指出:对于  $W=0$  的体系,其静力特征可归结为两点:

- (1) 如体系为几何不变,则其平衡方程组不仅有解、且是唯一解。
- (2) 如体系为几何可变和瞬变,则只有在特殊荷载作用下,其平衡方程组才有解,而其解必定不是唯一解。

概括起来,对于  $W=0$  的体系,平衡方程的解是否具有唯一性,是该体系是否几何不变的标志。

零载法是针对  $W=0$  的体系,用静力法来研究几何构造问题,用平衡方程的解的唯一性来检验其几何不变性的方法。

检查平衡方程解答的唯一性时,可以任取一种适当的特殊荷载来进行。最简单而又普遍适用的特殊荷载是零荷载,因此,零载法的作法可说明如下:对于  $W=0$  的体系,如果是几何不变的,则在荷载为零的情况下,它的全部内力都为零;反之,如果是几何可变的,则在荷载为零的情况下,它的某些内力可不为零。

图4-5中的两个体系,计算自由度  $W$  都为零,荷载也都为零。其中图4-5a的体系是几何不变的,与此相应,它的全部支座反力都为零。图4-5b的体系是几何可变的,与此相应,它的水平支座反力  $F_x$  可以不为零。

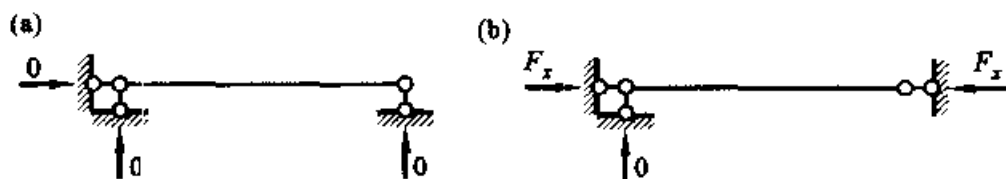


图 4-5

荷载为零而内力不全为零的内力状态可称为自内力。因此,对于  $W=0$  的体系来说,自内力是否可能存在,是这类体系是否几何可变的标志。

把几何构造问题转化为静力计算问题,这是零载法的特点。它为研究  $W=0$  的复杂体系的几何可变性提供了一个新的有效的途径。

例 4-1 试用零载法检验图 4-6a 所示桁架的几何不变性。

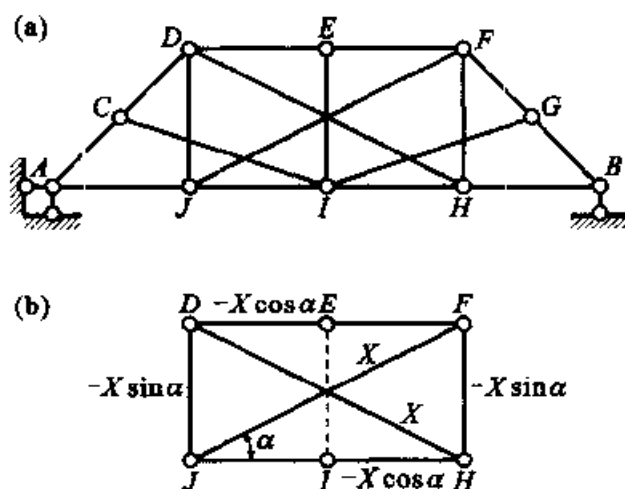


图 4-6

解 首先求  $W$ 。结点数 10, 链杆和支杆总数为 20, 所以,

$$W = 2 \times 10 - 20 = 0$$

因此, 可以应用零载法来检验几何不变性。

由整体平衡条件可知, 在零载下,  $A$  和  $B$  处支座反力为零, 即

$$F_{xA} = F_{yA} = F_{xB} = 0$$

由结点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $G$  的平衡条件可知:

$$F_{NAC} = F_{NAJ} = F_{NBG} = F_{NBH} = 0$$

$$F_{NCD} = F_{NCI} = F_{NGF} = F_{NGH} = 0$$

余下部分见图 4-6b。由结点  $E$  或  $I$  可以断定  $F_{NEI} = 0$ 。设  $F_{NDH} = X$ , 由结点平衡条件可求出各杆轴力如图 4-6b 所示。这里当  $X$  为任一值时, 各结点都能保持平衡。也就是说, 这个桁架可以有自内力存在, 因此, 是几何可变体系。

例 4-2 试用零载法检验图 4-7a 所示桁架的几何不变性。

解 此体系的  $W = 0$ , 因此可采用零载法。

在零载下, 可以直接判断支座反力为零, 又  $F_{NCF}$ 、 $F_{NGF}$ 、 $F_{NHA}$ 、 $F_{NHI}$  都为零。余下的部分见图 4-7b。其中, 在每个结点, 有三个或三个以上的杆件相交, 用结点法不能简便地求出内力。为此可预设  $AB$  杆的轴力  $F_{NAB} = X$ ,  $X$  称为初参数。然后, 根据初参数  $X$  再求其他杆内力, 就可直接应用结点法, 而不需解联立方程。

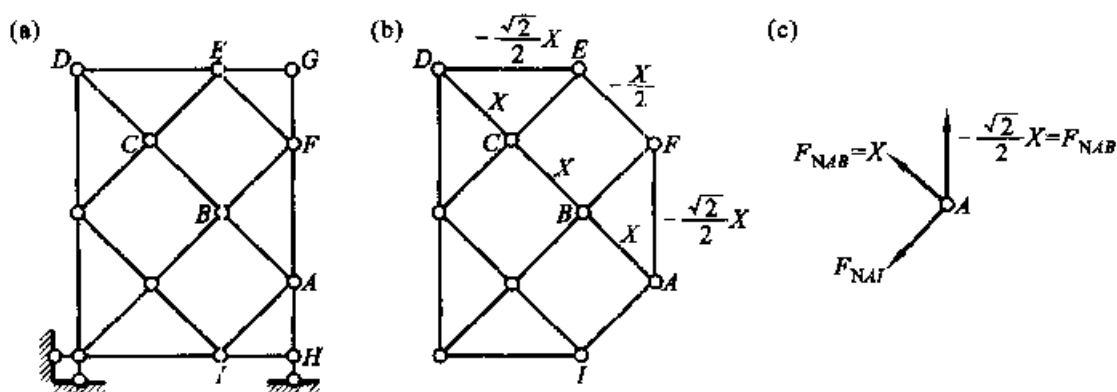


图 4-7

下面按照  $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  的次序应用结点法：

结点  $B$  和  $C$ ， $F_{NBc} = F_{NCb} = X$

结点  $D$ ， $F_{NDc} = -\frac{\sqrt{2}}{2}X$

结点  $E$ ， $F_{NEF} = -\frac{X}{2}$

结点  $F$ ， $F_{FAF} = -\frac{\sqrt{2}}{2}X$

经过这一圈之后，最后回到结点  $A$ 。结点  $A$  的隔离体图如图 4-7c 所示。这里只有两个待定值，即  $X$  和  $F_{NAI}$ ，因此可利用结点的平衡方程求出  $X$ 。实际上，沿  $AB$  杆方向可列出投影平衡方程如下：

$$X - \frac{1}{2}X = 0$$

由此可知，初参数  $X$  应为零。由此进一步得出各杆轴力全部为零，即不可能存在自内力，因此体系是几何不变的。

上面采用的方法称为初参数法或通路法。

在分析复杂桁架的几何不变性或者在给定荷载作用下计算复杂桁架的内力时，通路法是一种有效的方法。

## § 4-4 刚体体系的虚功原理

在以前各章中，详细地讨论了静力分析的基本方法：选取隔离体，建立平衡方程。在本节中，补充介绍静力分析的另一个普遍方法：应用虚功原理，建立虚功方程。虚功原理在力学分析中有多方面的应用。本节中，把虚

功方程看作是平衡方程的另一种表示形式,用以求静定结构的约束力。

### 1. 虚功原理

对于具有理想约束的刚体体系,其虚功原理可表述如下:

设体系上作用任意的平衡力系,又设体系发生符合约束条件的无限小刚体体系位移,则主动力在位移上所作的虚功总和恒等于零。

这里,有两个彼此无关的状态:一是体系上作用的任意平衡力系,以后简称平衡力系;二是体系发生符合约束条件的无限小的刚体体系位移,以后简称可能位移。功的前面加一个“虚”字,只是用以指明作功的双方(平衡力系为一方,可能位移为另一方)彼此独立无关这一特征,而没有别的含义。

理想约束是指其约束力在可能位移上所作的功恒等于零的那种约束。光滑铰结与刚性链杆都是理想约束的例子。

在刚体中,任何两点间的距离保持不变,可以设想任何两点间有刚性链杆相连。因此,刚体是具有理想约束的质点系,刚体内力在刚体的可能位移上所作的功恒等于零。

既然虚功原理中的平衡力系与可能位移无关,因此不仅可以把位移看作是虚设的,而且也可以把力系看作虚设的。根据虚设对象的不同选择,虚功原理主要有两种应用形式,用来解决两类问题。

本节先讨论虚功原理的一种应用形式:虚设位移,求未知力。另一种应用形式:虚设力系,求位移,将在 § 6-1 中讨论。

为了说明虚功原理的第一种应用形式,最简单的例子是图 4-8a 所示的杠杆,其中在 B 点作用已知荷载  $F_P$ ,求杠杆平衡时在 A 点需加的未知力  $F_X$ ①。

杠杆是一个几何可变体系,可绕 C 点自由转动,如图 4-8b 所示。我们把这个刚体位移取作虚位移,可得出虚功方程如下:

$$F_X \Delta_X + F_P \Delta_P = 0 \quad (a)$$

式中  $\Delta_X$  和  $\Delta_P$  分别是沿  $F_X$  和  $F_P$  方向的虚位移。

令  $\delta_P$  表示位移  $\Delta_P$  和  $\Delta_X$  之间

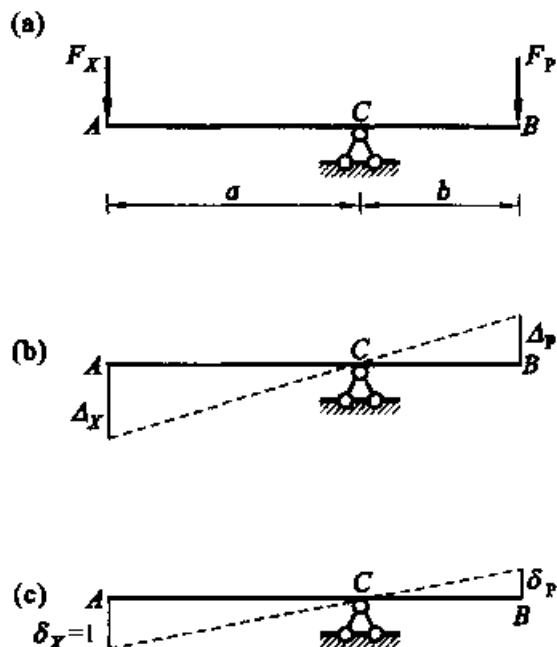


图 4-8

①  $F_X$  表示广义未知力。下同。

的比例系数:

$$\delta_P = \frac{\Delta_P}{\Delta_X} \quad (b)$$

由图 4-8b, 得

$$\delta_P = \frac{\Delta_P}{\Delta_X} = -\frac{b}{a} \quad (c)$$

由图 4-8b 看出, 如果  $\Delta_X$  为正(与  $F_X$  方向一致), 则  $\Delta_P$  为负(与  $F_P$  方向相反), 因此  $\delta_P$  应为负值, 且是一个纯数值。

将式(a)除以  $\Delta_X$ , 得

$$F_X \times 1 + F_P \delta_P = 0 \quad (d)$$

由此即可求得

$$F_X = -F_P \delta_P = \frac{b}{a} F_P$$

为了计算上的方便, 可将图 4-8b 所示位移图除以  $\Delta_X$ , 得到图 4-8c 所示广义位移图, 其中沿  $F_X$  方向的位移为虚设的单位位移(数值为 1, 且为纯数值), 沿  $F_P$  方向的位移即为  $\delta_P$ 。令图 4-8a 的力系在图 4-8c 的虚位移上作虚功, 同样可得到式(d)。这种作法更为直接和简便。

此外, 图 4-8c 中沿  $F_X$  方向虚设的单位位移可记为  $\delta_X = 1^{①}$ 。这里  $\delta_X$  是一个在数值上与  $\Delta_X$  相等的纯数值。

由此简例, 可归纳出以下几点:

第一, 式(d)就是以 C 点为矩心的力矩平衡方程  $\sum M_C = 0$ 。由此可见, 虚功方程形式上是功的方程, 实际上就是平衡方程。

第二, 虚位移是人为虚设的, 为了方便, 可以随意虚设  $\delta_X = 1$ 。显然, 虚位移与实际力系是彼此独立无关的。

第三, 求解时的一个重要步骤是得出位移之间的几何关系[式(c)], 由此即可得出力系之间的静力平衡关系[式(d)]。因此, 这里用虚功原理求解问题的特点是采用几何方法来解静力平衡问题。这种用虚功原理求解问题的方法称为虚功法。

**例 4-3** 图 4-9 所示为一机构, 在 F 点作用已知荷载  $F_P$ 。试求机构平衡时在 B 点需加的力  $F_X$ 。已知 CA、CB、CD、CE、FD、FE 的长度都是  $a$ 。

**解** (1) 建立虚功方程

图中虚线表示这个机构的可能位移, 虚功方程为

① 参见本书符号表说明 3。

$$F_X \Delta_X + F_P \Delta_P = 0 \quad (a)$$

(2) 建立位移之间的几何关系

取杆 ACE 的转角  $d\theta$  作为位移参数,各点位移可用  $d\theta$  来表示。由图得知

$$b = 2a \cos \theta, \quad c = a \sin \theta$$

其导数为

$$db = -2a \sin \theta d\theta, \quad dc = a \cos \theta d\theta$$

由于  $\Delta_X = -db, \Delta_P = -3dc$ , 故得

$$\Delta_X = 2a \sin \theta d\theta, \quad \Delta_P = -3a \cos \theta d\theta$$

由此可得出位移比值如下:

$$\frac{\Delta_P}{\Delta_X} = -\frac{3}{2} \cot \theta$$

(3) 求未知力  $F_X$

将几何关系式(b)代入虚功方程(a),可得

$$F_X = -\frac{\Delta_P}{\Delta_X} F_P = \frac{3}{2} \cot \theta F_P$$

从本例中可指出几点:

第一,这里的计算工作量主要花在几何关系式(b)的推导上面。本来是一个静力平衡问题,

可是从计算角度来看,主要归结为一个几何问题,这就是虚功法的特点。

第二,此题如果按照截取隔离体的方法求解,则需分两步进行:第一步,在铰 D 和 E 处切开,取上部为隔离体,求出铰 D 和 E 处的约束力。第二步,取下部为隔离体,根据铰 D 和 E 处的约束力再来推算  $F_X$ 。总之,要先求出某些约束力,然后借助这些约束力才能间接地求出  $F_X$ 。虚功法与此不同。在虚功方程(a)中,可以直接由荷载  $F_P$  来求未知力  $F_X$ 。这种解法的优点是可以直接求出拟求的未知力,而不需要先求别的约束力。虚功法的这个优点实际上是与虚功方程的下述特点相连的,即在理想约束的情况下,虚功方程中只出现主动力,而不出现约束力。

## 2. 应用虚功原理求静定结构的约束力——单位支座位移法

上面应用虚功原理讨论了机构(具有一个自由度的几何可变体系)的平衡问题。由于机构本身可能发生刚体体系的位移,这种位移即取作虚位移。

现在进一步应用虚功原理求静定结构的约束力。

图 4-10a 所示为一静定梁,拟求支座 A 的反力  $F_X$ 。静定结构与机构不同,在符合约束的条件下,不可能发生刚体体系位移。因此,应用虚功原

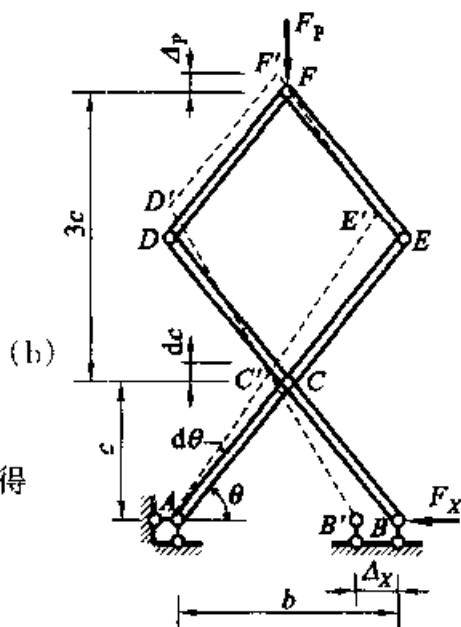


图 4-9

理求  $F_X$  时,首先要将静定结构变成机构。为此,撤除与  $F_X$  相应的约束(即支座 A),得到图 4-10b 所示的机构。这就是图 4-8a 中的机构。因此,求图 4-10a 中静定梁支座未知反力  $F_X$  的问题即转化为求图 4-8a 中机构的平衡问题。

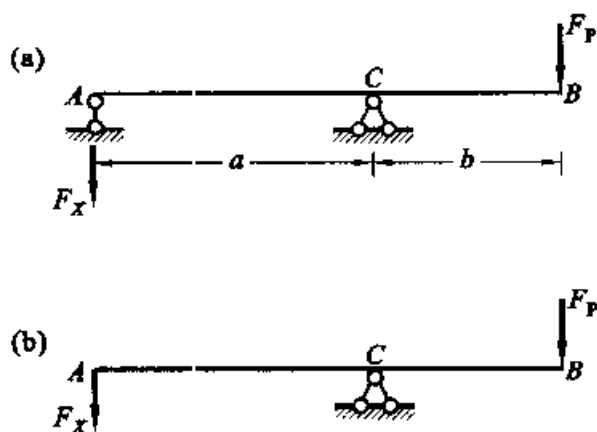


图 4-10

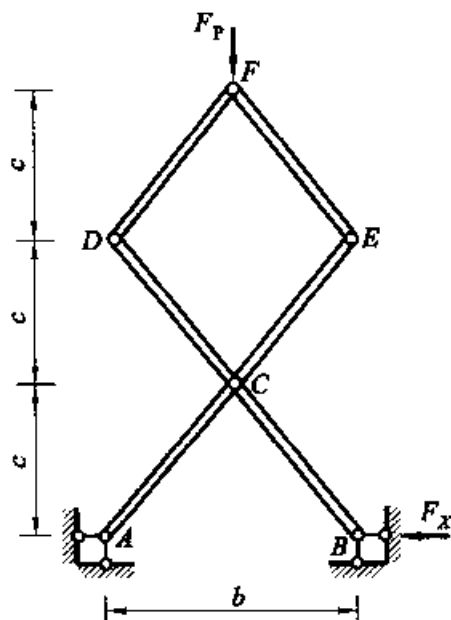


图 4-11

又如图 4-11 所示为一静定结构,拟求支座 B 的水平反力  $F_X$ 。为此,把与  $F_X$  相应的约束撤除,即把支座 B 处的水平支杆撤除,于是问题便归结为求图 4-9 所示机构的平衡问题。

一般说来,应用虚功原理求静定结构某一约束力  $F_X$  (支座反力或内力)时,可按如下方法进行。

(1) 撤除与  $F_X$  相应的约束,使原来的静定结构变成具有一个自由度的机构,使原来的约束力  $F_X$  变成主动力  $F_X$ 。

(2) 把机构可能发生的刚体体系位移当作虚位移,这样才有可能应用虚功原理。设与未知力  $F_X$  和荷载  $F_P$  相应的虚位移分别为  $\Delta_X$  和  $\Delta_P$ ,则可写出虚功方程如下:

$$F_X \Delta_X + \sum F_P \Delta_P = 0 \quad (4-6)$$

这里由于  $F_X$  已经变成主动力,因此  $F_X$  才有可能在虚功方程中出现,因而才有可能由虚功方程来求  $F_X$ 。

(3) 求出  $\Delta_X$  与  $\Delta_P$  之间的几何关系,代入式(4-6),即可求出  $F_X$ ,即

$$F_X = - \frac{\sum F_P \Delta_P}{\Delta_X} \quad (4-7)$$

为了计算上的方便,沿  $F_X$  方向的位移可虚设为单位位移。在这种状态下,如用  $\delta_P = \frac{\Delta_P}{\Delta_X}$  表示沿  $F_P$  方向的位移,则虚功方程为

$$F_X \delta_X + \sum F_P \delta_P = 0 \quad (4-8)$$

由此求得

$$F_X = - \sum F_P \delta_P \quad (4-9)$$

基本方程(4-8)形式上是虚功方程,实质上是约束力  $F_X$  与荷载  $F_P$  之间的平衡方程。

关键步骤是在拟求未知力  $F_X$  方向虚设单位位移,并利用几何关系求出  $\delta_P$ 。因此,这个解法可称为单位支座位移法,或者称为单位约束位移法,简称为单位位移法。其特点是采用几何方法来解静力平衡问题。

**例 4-4** 试求图 4-12a 所示静定多跨梁在 C 点的支座反力  $F_X$ 。设荷载  $F_{P1}$  和  $F_{P2}$  等于常数  $F_P$ 。

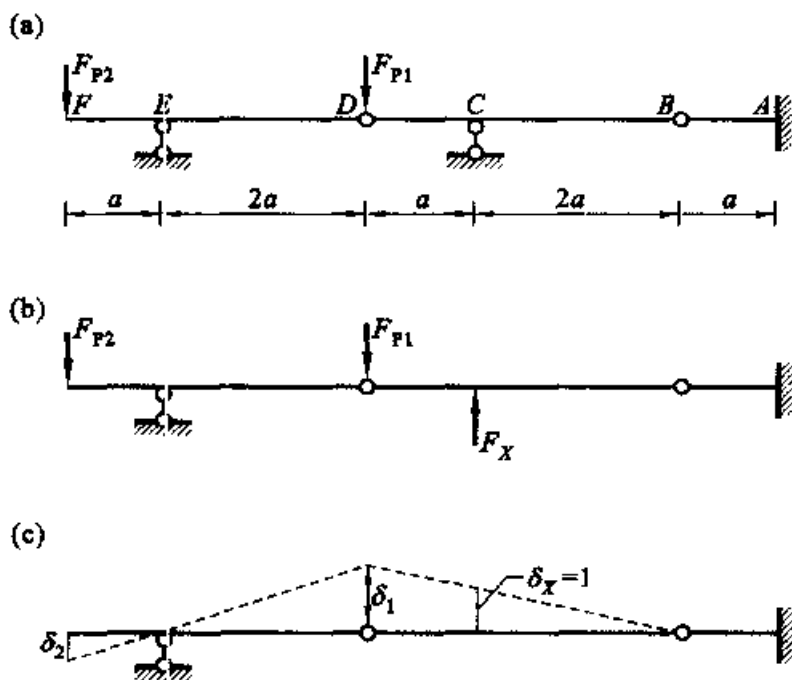


图 4-12

**解** (1) 撤除支杆 C,把支座反力变成主动力  $F_X$ 。这时,体系已变成一个机构,如图 4-12b 所示。

(2) 取图 4-12c 中虚线所示机构的刚体体系的位移作为虚位移,并设沿  $F_X$  方向的位移  $\delta_X = 1$ 。根据几何关系,可求出与  $F_{P1}$  和  $F_{P2}$  相应的位移:



$$\delta_1 = -\frac{3}{2}, \quad \delta_2 = \frac{3}{4}$$

注意,  $\delta_1$  与  $F_{P1}$  的方向相反, 故  $\delta_1$  为负值。

(3) 虚功方程为

$$F_A \times 1 + F_{P1} \delta_1 + F_{P2} \delta_2 = 0$$

即

$$F_A \times 1 + F_P \left( -\frac{3}{2} \right) + F_P \left( \frac{3}{4} \right) = 0$$

由此求得

$$F_A = \frac{3}{4} F_P$$

**例 4-5** 试求简支梁截面  $C$  的弯矩  $M_C$ , 设在  $A$  端作用力偶荷载  $M$  (图 4-13a)。

**解** (1) 撤除与弯矩  $M_C$  相应的约束, 即将截面  $C$  由刚接改为铰接。同时, 弯矩  $M_C$  由约束力变成主动力, 由一对大小相等, 方向相反的力偶所组成, 如图 4-13b 所示。

(2) 取虚位移如图 4-13c 所示。设  $C$  点竖向位移为  $\Delta_C$ , 则  $AC$  和  $BC$  两段的转角  $\alpha$  和  $\beta$  分别为

$$\alpha = \frac{\Delta_C}{a}, \quad \beta = \frac{\Delta_C}{b}$$

(3) 令图 4-13b 中的主动力在图 4-13c 所示虚位移上作功, 虚功方程为

$$M_C (\alpha + \beta) - M\alpha = 0$$

即

$$M_C \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Delta_C - M \frac{\Delta_C}{a} = 0$$

约去  $\Delta_C$ , 可求得  $M_C$  如下:

$$M_C = M \frac{b}{a+b} = M \frac{b}{l}$$

**例 4-6** 试求简支梁截面  $C$  的剪力  $F_{QC}$ , 设全跨作用均布竖向荷载  $q$  (图 4-14a)。

**解** (1) 撤除与剪力  $F_{QC}$  相应的约束, 即将截面  $C$  切开, 加上两个平行梁轴的链杆。这时, 两侧截面  $C_1$  和  $C_2$  可发生相对剪切位移, 但不能发生相对轴向位移和相对转角。同时, 剪力  $F_{QC}$  由约束力变成主动力, 由一对大小相等、方向相反的竖向力所组成, 如图 4-14b 所示。

(2) 取虚位移如图 4-14c 所示。由于两侧截面  $C_1$  和  $C_2$  没有相对转

动,因此  $AC_1$  和  $C_2B$  两段梁仍保持平行。两段梁的转角为  $\theta$ ,则截面  $C_1$  和  $C_2$  的竖向位移分别为  $a\theta$ (向下)和  $b\theta$ (向上), $C_1$  和  $C_2$  的相对竖向位移为  $a\theta + b\theta$ 。

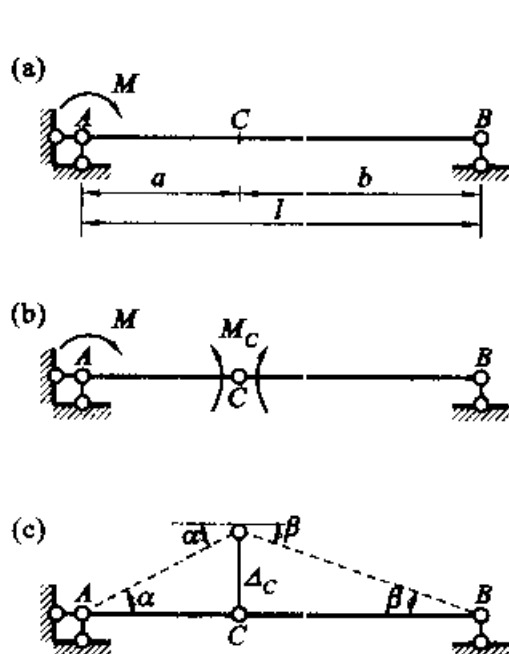


图 4-13

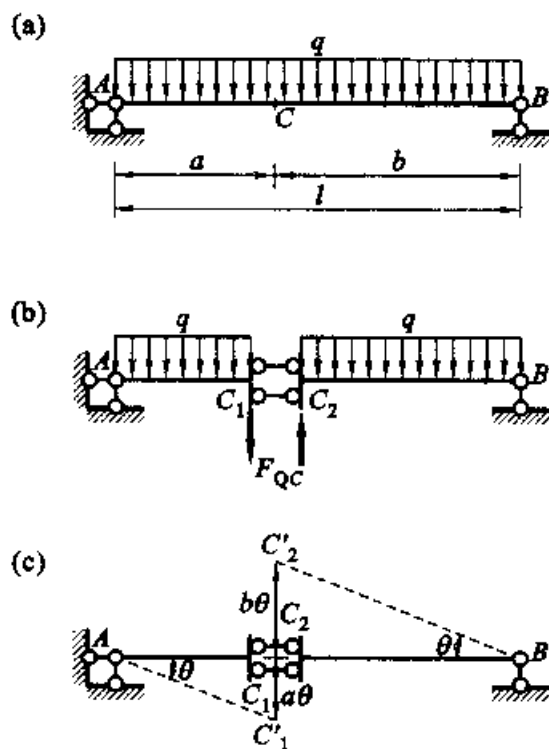


图 4-14

(3) 令图 4-14b 中的主动力在图 4-14c 所示虚位移上做功,其中剪力  $F_{QC}$  作的虚功为

$$F_{QC}(a\theta + b\theta) = F_{QC}l\theta$$

微段  $dx$  上的均布荷载  $q$  在竖向位移  $y$  上作的虚功为( $q$  和  $y$  均以向下为正)

$$q dx \cdot y$$

梁段  $AC_1$  上均布荷载  $q$  作的虚功为

$$q \int_A^{C_1} y dx = q \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\theta \right) = \frac{q}{2} a^2 \theta$$

梁段  $C_2B$  上均布荷载  $q$  作的虚功为

$$- \frac{q}{2} b^2 \theta$$

因此,虚功方程为

$$F_{QC}l\theta + \frac{q}{2} a^2 \theta - \frac{q}{2} b^2 \theta = 0$$

约去  $\theta$ , 可求得  $F_{QC}$  如下:

$$F_{QC} = \frac{b^2 - a^2}{2l} q = \frac{q}{2} (b - a)$$

例 4-7 试求图 4-15a 所示桁架  $FG$  杆的未知力  $F_N$ 。

解 (1) 撤除链杆  $FG$ , 代以轴力  $F_N$ , 原来的桁架变成由两个刚片  $ACF$  与  $ECG$  在  $C$  点用铰相连而组成的机构, 如图 4-15b 所示。

(2) 取虚位移如图 4-15c 所示。设两个刚片分别绕  $A$  点和  $E$  点的转角为  $\theta$ , 则荷载作用点  $B$ 、 $C$ 、 $D$  的竖向位移为

$$\Delta_B = \Delta_D = -\theta a, \quad \Delta_C = -2\theta a$$

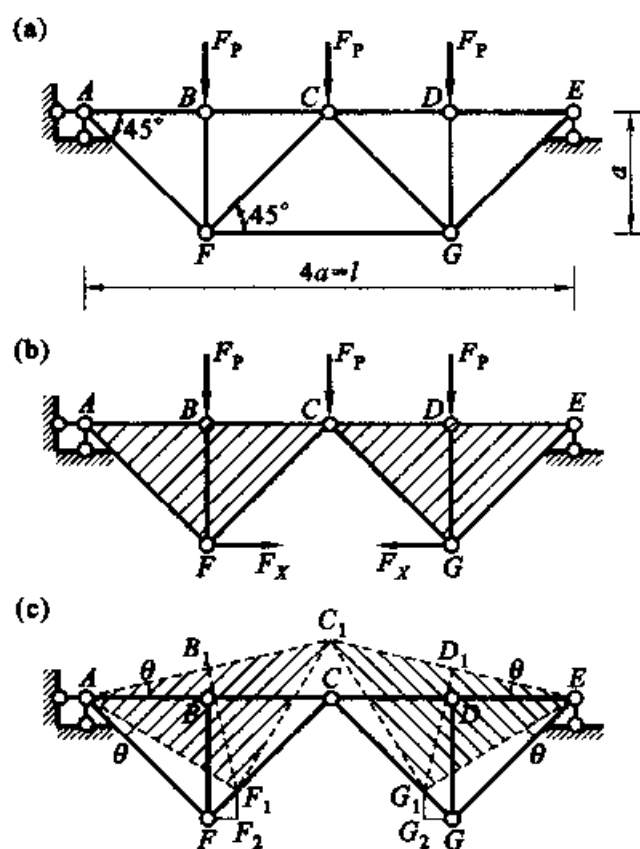


图 4-15

又  $F$  点绕  $A$  点转动  $\theta$  时产生的总位移为

$$\overline{FF_1} = \overline{AF} \cdot \theta = \sqrt{2}a \cdot \theta$$

$F$  点的水平位移分量为

$$\overline{FF_2} = \overline{FF_1} \cos 45^\circ = a\theta$$

同理  $G$  点的水平位移分量为

$$\overline{GG_2} = a\theta$$

因此,  $F$  和  $G$  两点的相对水平位移为

$$a\theta + a\theta = 2a\theta$$

(3) 令图 4-15b 中的主动力在图 4-15c 所示虚位移上作功, 虚功方程为

$$F_X(2a\theta) + F_P(-a\theta - 2a\theta - a\theta) = 0$$

由此求得

$$F_X = 2F_P$$

### 3. 从虚功原理角度看零载法

上节介绍过零载法。零载法是针对  $W=0$  的体系, 用平衡方程的解的唯一性来检验其几何不变性的方法。

现在应用虚功原理来解平衡问题, 讨论平衡问题解答的唯一性, 因而从另一个角度对零载法进行一番新的审视。

现结合图 4-16a 和图 4-17a 所示体系来说明。两个体系的计算自由度  $W$  都为零。在零荷载作用下, 应用虚位移原理求某一约束力  $F_X$ 。为此, 撤除与  $F_X$  相应的约束, 代以主动力  $F_X$ , 得到图 4-16b 和图 4-17b 中的可变体系, 图中虚线表示体系的可能位移。

由于荷载为零, 虚功方程左边只有一项

$$F_X \cdot \Delta_X = 0 \quad (a)$$

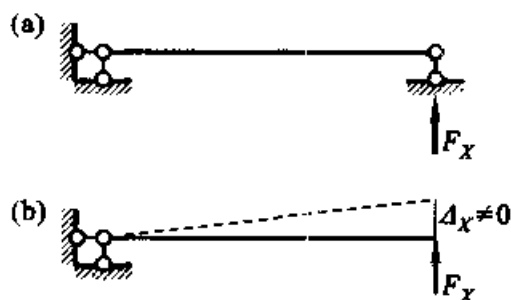


图 4-16

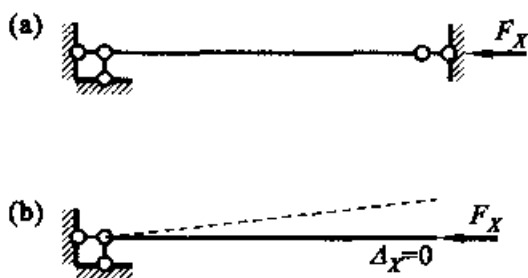


图 4-17

由式(a)解  $F_X$  时, 可能出现两种情况:

(1) 与  $F_X$  相应的约束是非多余约束(图 4-16a)。在撤除此约束后, 体系增加了一个自由度, 因而在图 4-16b 所示的可能位移中, 沿  $F_X$  方向产生了新的位移  $\Delta_X \neq 0$ 。所以, 由式(a)解得  $F_X = 0$ 。

如果体系中所有约束都是非多余约束, 则所有的约束力在零荷载条件下都应是零。体系中不存在自内力状态。

(2) 与  $F_X$  相应的约束是多余约束(图 4-17a)。在撤除此约束后, 体系并不增加自由度, 因而在图 4-17b 所示的可能位移中, 沿  $F_X$  方向不产生新的位移, 即  $\Delta_X = 0$ 。将此结果代入式(a), 得

$$F_X \times 0 = 0$$

可知方程的解为  $F_X$  等于任意值。也就是说,自内力状态能够在体系中存在。

由此得出结论:自内力状态能(否)存在是体系有(无)多余约束的标志。

对于  $W=0$  的体系又可得出如下结论:在  $W=0$  的体系中,自内力状态能(否)存在是体系是(否)几何可变的标志。这个结论就是零载法的理论根据。

## §4-5 静定结构的一般性质

静定结构与超静定结构都是几何不变体系,二者之间的差别为:

(1) 在几何构造方面,静定结构无多余约束,超静定结构有多余约束。

(2) 在静力平衡方面,静定结构的内力,可以由平衡条件完全确定,得到的解答只有一种;超静定结构的内力,由平衡条件不能完全确定,而需要同时考虑变形条件后才能得到唯一的解答。

由此可知,满足平衡条件的内力解答的唯一性,是静定结构的基本静力特性。下面提到的一些特性,都是在此基础上派生出来的。

### 1. 温度改变、支座移动和制造误差等因素在静定结构中不引起内力

例如在图 4-18a 中,简支梁由于支座 B 下沉只会引起刚体位移(如虚线所示),而在梁内并不引起内力。为了说明这个结论,可以假想先把 B 端的支杆去掉,这时,梁就成为几何可变的。然后使梁绕 A 点转动,等 B 端移至 B' 后,再把支杆重新加上。在这个过程中,梁内不会产生内力。

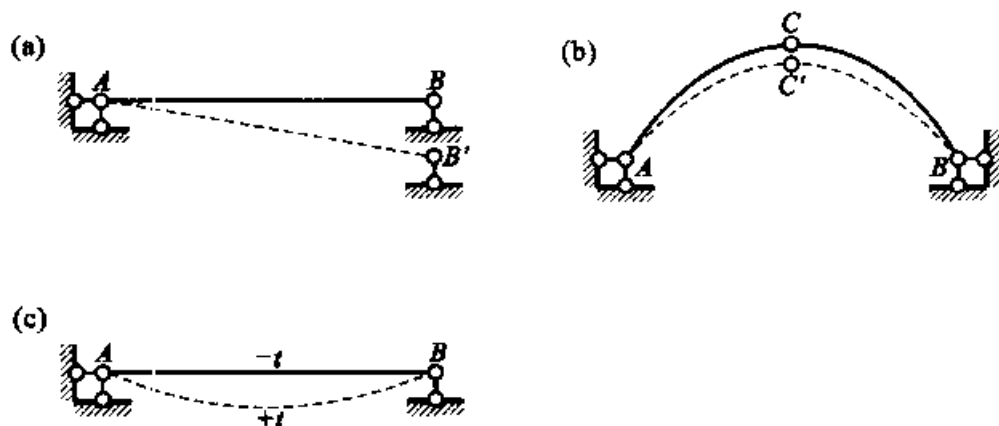


图 4-18

图 4-18b 中,设三铰拱的杆  $AC$  因施工误差稍有缩短,拼装后结构形状略有改变(如虚线所示),但三铰拱内不会产生内力。

图 4-18c 中,设简支梁的上方和下方温度分别改变了  $\mp t$ ,因为简支梁

可以自由地产生弯曲变形(如虚线所示),所以梁内不会产生内力。

## 2. 静定结构的局部平衡特性

在荷载作用下,如果仅靠静定结构中的某一局部就可以与荷载维持平衡,则其余部分的内力必为零。

如图 4-19a 所示的静定多跨梁,梁 AB 是几何不变部分,当梁 AB 承受荷载时,它自身可与荷载维持平衡,因而梁 BC 即无内力。又如图 4-19b 所示静定桁架,当杆 AB 承受任意平衡力系时,除杆 AB 产生内力外,其余各杆都是零杆。

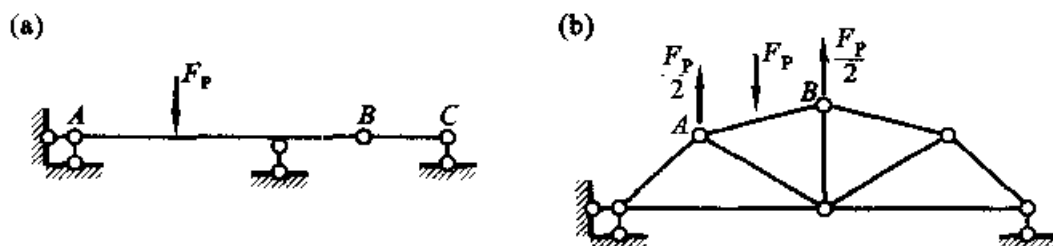


图 4-19

实际上,上述内力状态已满足结构各部分的所有平衡条件。对于静定结构来说,这就是内力的唯一解答。

还应指出,局部平衡部分不一定是几何不变的,也可以是几何可变的,只要在特定荷载作用下可以维持平衡即可。如图 4-20a 所示静定桁架,在下弦杆两端承受一对等值反向的压力,这时仅靠下弦杆承受压力,已经能够维持局部平衡(图 4-20b),因此,其余各杆都为零杆。

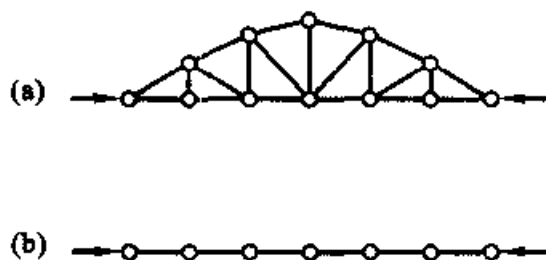


图 4-20

## 3. 静定结构的荷载等效特性

当静定结构的一个内部几何不变部分上的荷载作等效变换时,其余部分的内力不变。这里,等效荷载是指荷载分布虽不同,但其合力彼此相等的荷载。

图4-21a中的荷载 $F_P$ ,与结点A、B上的两个荷载 $\frac{F_P}{2}$ 是等效荷载。将图4-21a改为图4-21b时,只有杆AB的内力改变,其余各杆的内力都不变。

静定结构在等效荷载作用下的这一特性,可用局部平衡特性来说明。设在静定结构的某一个几何不变的部分上作用有两种等效荷载 $F_{P1}$ 、 $F_{P2}$ ,其相应的内力分别为 $F_{S1}$ <sup>①</sup>和 $F_{S2}$ (如图4-21a、b),根据叠加原理,在荷载 $F_{P1}$ 和荷载 $-F_{P2}$ 共同作用下相应的内力应为 $F_{S1} - F_{S2}$ 。由于 $F_{P1}$ 和 $-F_{P2}$ 组成平衡力系(图4-21c),根据局部平衡特性,可知除杆AB以外,其余部分的内力 $F_{S1} - F_{S2}$ 应为零,即 $F_{S1} = F_{S2}$ 。由此可知,在两种等效荷载 $F_{P1}$ 和 $F_{P2}$ 分别作用时,除杆AB以外,其余部分相应的内力 $F_{S1}$ 和 $F_{S2}$ 必相等。

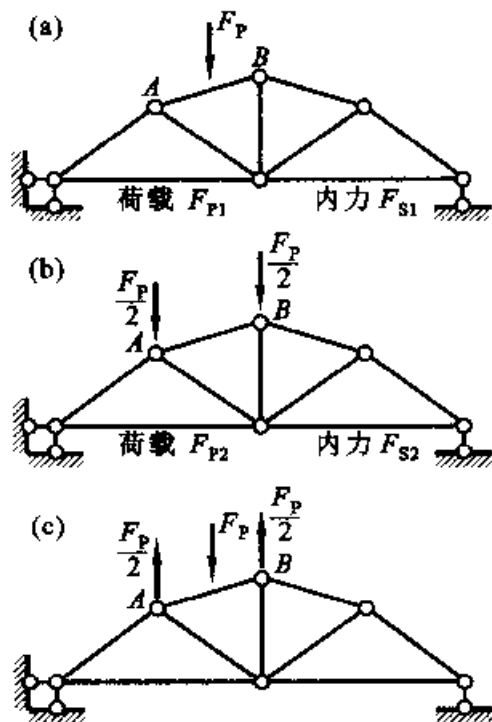


图 4-21

上述特性,可以用来说明桁架在非结点荷载作用下的受力状态。在图4-21a中,桁架承受非结点荷载,可以把这个非结点荷载分解为两部分:即图4-21b中的等效结点荷载和图4-21c中的局部平衡荷载。因此,得出如下结论:桁架在非结点荷载作用下所产生的内力(图4-21a),等于桁架在等效结点荷载下所产生的轴力(图4-21b),再叠加在局部平衡荷载作用下(图4-21c)所产生的局部内力(弯矩、剪力、轴力)。

#### 4. 静定结构的构造变换特性

当静定结构的一个内部几何不变部分作构造变换时,其余部分的内力不变。

图4-22e所示桁架中,设将上弦杆AB改为一个小桁架,如图4-22b所示,则只是AB的内力有改变,其余部分的内力没有改变。为了说明这一点,可将杆AB与其余部分分开(图4-22c),这两个隔离体分别在各自的荷载和约束力作用下维持平衡。现将杆AB变换成小桁架AB(图4-22d)。

① 这里,所指的內力为广义的內力(弯矩、剪力、轴力),故用 $F_{S1}$ 表示。下同。

假设其余部分的内力以及二者间的约束力保持不变,则其余部分原来满足的平衡条件仍然成立,而小桁架在原来的荷载和约束力所组成的平衡力系作用下,自然也能维持平衡。因此,这种内力状态就是构造变换后结构的真实内力状态。

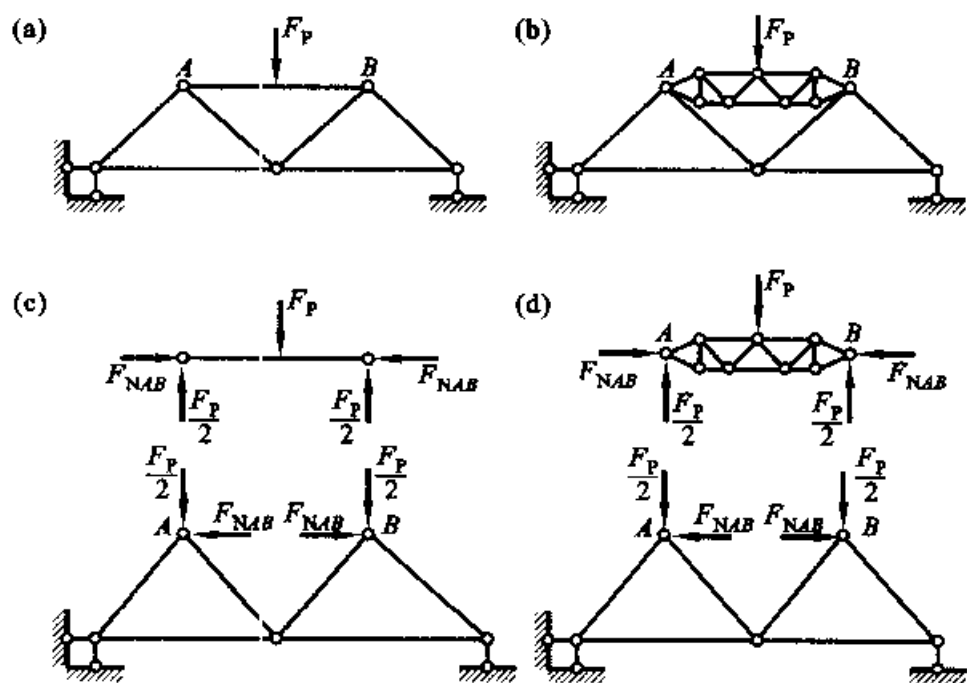


图 4-22

## § 4-6 各种结构型式的受力特点

前几章讨论了静定结构几种典型的结构型式:梁、刚架、拱、桁架和组合结构。这些结构型式还可以从不同角度加以分类。现举出常用的两种分类方法。

第一,将结构分为无推力结构和有推力结构。梁和梁式桁架属于前者;三铰拱、三铰刚架、拱式桁架和某些组合结构属于后者。

第二,将杆件分为链杆和梁式杆。桁架中的各杆都是链杆;多跨梁和刚架中的各杆都是梁式杆,组合结构中的杆件有的是链杆,有的是梁式杆。

链杆中只有轴力作用,没有弯矩,处于无弯矩状态。在无弯矩状态下,杆件截面上的正应力为均匀分布,能够充分利用材料的强度。梁式杆处于有弯矩状态,弯矩产生的弹性正应力在截面上为三角形分布,在中性轴附近的应力很小,没有充分利用材料的强度。因此,为了做到物尽其用,我们总



是希望尽量减小杆件中的弯矩,最好是完全消除杆件中的弯矩,使之处于无弯矩状态。现在从这个角度讨论各种结构型式的特点。

(1) 在静定多跨梁和伸臂梁中,利用杆端的负弯矩可以减小跨中的正弯矩,参看例3-3。

(2) 在有推力结构中,利用水平推力的作用可以减少弯矩峰值。例3-14的三铰拱,例3-5的三铰刚架,例3-13的组合结构都可以说明这个结论。

(3) 在桁架中,利用杆件的铰接和合理布置以及荷载的结点传递方式,可使桁架中的各杆处于无弯矩状态。在三铰拱中,采用合理轴线可以使拱处于无弯矩状态。从力学角度来看,无弯矩状态是一种合理的受力状态,上述结构型式都是合理的结构型式。在组合结构中也有一部分杆件处于无弯矩状态。

为了对各种结构型式的力学特点进行综合比较,在图4-23中我们给出几种结构型式在相同跨度和相同荷载(全跨受均布荷载 $q$ )作用下的主要内力的数值。

图4-23a是简支梁。跨中截面 $C$ 的弯矩为 $M_C^0 = \frac{ql^2}{8}$ 。如果截面为矩形(截面高度为 $h$ ),截面上正应力为三角形分布,则在截面 $C$ 上压应力的总和与拉应力的总和都是 $F_H = \frac{M_C^0}{\frac{2}{3}h}$ 。

图4-23b是伸臂梁。为了使弯矩减小,我们设法使支座负弯矩与跨中正弯矩正好相等。根据这个条件可以求出伸臂长度应为 $0.207l$ 。这时弯矩峰值下降,约为 $\frac{1}{6}M_C^0$ 。

图4-23c是带拉杆的三角形三铰拱。推力为 $F_H = \frac{M_C^0}{f}$ 。由于推力的作用,上弦杆的弯矩峰值下降为 $\frac{1}{4}M_C^0$ 。在图4-23d中,我们还使拉杆与上弦杆端部之间有一个偏心距 $e = \frac{f}{6}$ 。这样,上弦杆端部负弯矩与杆中正弯矩正好相等,弯矩峰值进一步下降为 $\frac{1}{6}M_C^0$ 。

图4-23e是抛物线三铰拱。由于拱轴是合理轴线,故处于无弯矩状态。推力仍为 $\frac{M_C^0}{f}$ 。

图4-23f是梁式桁架。在结点荷载作用下各杆处于无弯矩状态。中间下弦杆的轴力为 $\frac{M_C^0}{h}$ 。

图 4-23g 是组合结构。为了使上弦杆的结点负弯矩与杆中正弯矩正好相等,故取  $f_1 = \frac{5}{12}f$ ,  $f_2 = \frac{7}{12}f$ 。这时上弦杆的弯矩峰值下降为  $\frac{1}{24}M_C^0$ , 中间下弦杆的轴力为  $\frac{M_C^0}{f}$ 。

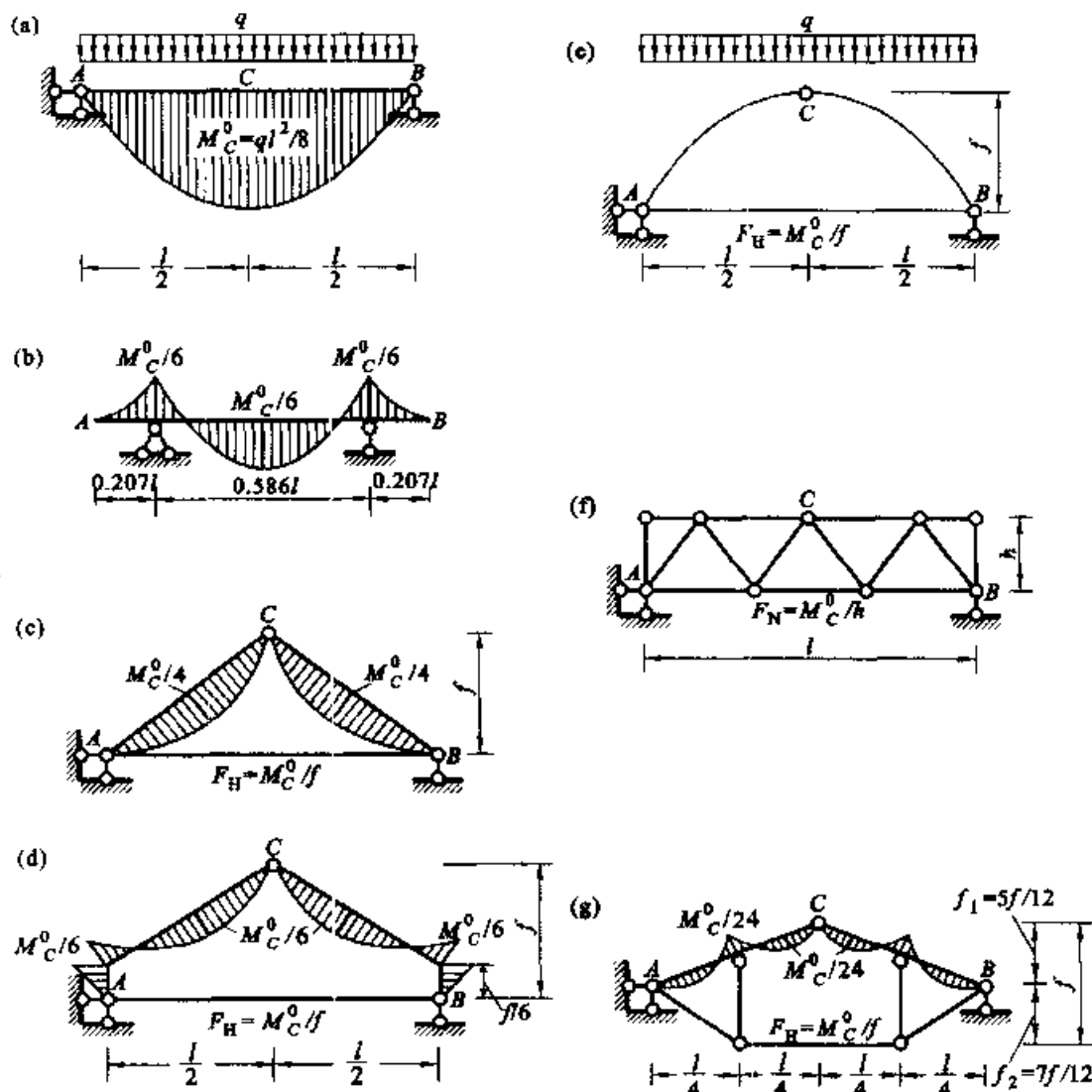


图 4-23

从以上的分析和比较中可以看出,在相同跨度和相同荷载下,简支梁的弯矩最大,伸臂梁、静定多跨梁,三铰刚架、组合结构的弯矩次之,而桁架以及具有合理轴线的三铰拱的弯矩为零。基于这些受力特点,所以在工程实际中,简支梁多用于小跨度结构;伸臂梁、静定多跨梁、三铰刚架和组合结构

可用于跨度较大的结构;当跨度更大时,则多采用桁架和具有合理轴线的拱。所以,不同的结构形式都有各自适用的跨度范围,这是在选择结构型式时要注意的一个问题。

另一方面,各种结构型式都有它的优点和缺点。简支梁虽然具有上述缺点,但也有许多优点:如施工简单、使用方便。所以,在工程实际中简支梁仍然是广泛使用的一种结构型式。其他结构型式虽然具有某些优点,但也有其缺点:例如桁架的杆件很多,结点构造比较复杂;三铰拱要求基础能承受推力(或者需要设置拉杆承受推力),曲线形式也增加施工上的不便。所以,选择结构型式时,不能只从受力状态这一方面去看,而必须进行全面的分析和比较。

### \* §4-7 用求解器求解一般静定结构

求解器的自动求解模式可以求解一般的静定结构,包括静定桁架、刚架、多跨梁以及各样的组合结构。求解时,首先输入结构和荷载,而无须输入杆件刚度等材料性质,然后在“求解”菜单中选“内力计算”,从而打开内力计算对话框,从中可以根据需要查看各种内力计算结果。如果结构是超静定的,求解器将提示用户输入各个杆件的材料性质;如果是几何可变的,求解器也会给出提示而拒绝求解。如果要计算位移,即使是静定结构,也需要输入杆件的材料性质。所有这些,求解器都会自动给出提示。

求解器中内力的画法及其正负号规定如下:

● 弯矩图画在杆件受拉纤维一边,局部坐标  $\bar{y} < 0$  一侧的弯矩图标为正号;

● 剪力正负号同本书前面的定义,即以绕微段隔离体顺时针转动者为正,正剪力画在局部坐标  $\bar{y} > 0$  一侧;

● 轴力正负号也同本书前面的定义,即以受拉为正,正轴力画在局部坐标  $\bar{y} > 0$  一侧。

以下举例说明。

**例 4-8** 试用求解器试求解图 4-24a、b 中静定结构的内力。

**解** 先输入结构体系,其中图 4-24a、b 中结构的差别仅在于结点 5 的水平坐标不同。输入的数据文档如下(图 4-24):

```
N,1,0,0
N,4,6,0
FILL
C Case a
```

N,5,8,0

C case b

C N,5,10,0

NGEN,1,4,2,4,1,0,-1.5

E,1,2,1,1,0,1,1,1

E,2,3,1,1,1,1,1,0

E,3,4,1,1,0,1,1,1

E,4,5,1,1,1,1,1,0

E,2,6,1,1,0,1,1,1

E,6,7,1,1,1,1,1,0

E,7,8,1,1,0,1,1,1

E,8,4,1,1,1,1,1,0

NSUPT,1,1,0,0

NSUPT,5,1,0,0

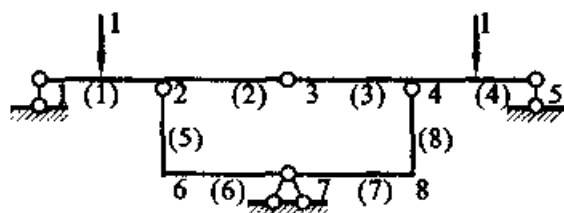
NSUPT,7,3,0,0,0

ELOAD,1,1,1,1/2,90

ELOAD,4,1,1,1/2,90

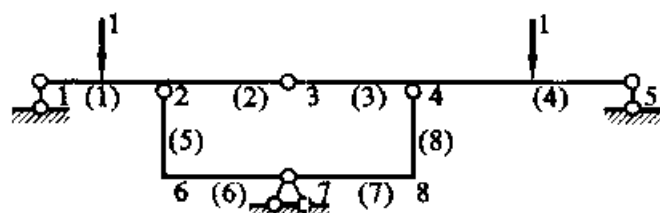
END

(a)



N,5,8,0

(b)



N,5,10,0

图 4-24

输入结构后,继续进行如下操作:

(1) 选择菜单“求解”、“内力计算”,求解器打开“内力计算”对话框,“内力显示”组中选“结构”,然后可在下面表格中看到杆端内力值。

(2) “内力类型”组中选“弯矩”,可在观览器中看到弯矩图。

(3) “内力类型”组中选“剪力”,可在观览器中看到剪力图。

(4) “内力类型”组中选“轴力”,可在观览器中看到轴力图。

(5) 可单击观览器中的“加大幅值”或“减小幅值”按钮调节图形幅值;或者选“设置”菜单中的“显示幅度设置”,然后在对话框中给定的显示幅度值。

以上求得图 4-24a,b 所示结构的内力图分别如图 4-25 和 4-26 所示。

从内力图可以看出一个有趣的现象,图 4-24a,b 所示结构的最右边一跨梁相当于一个简支梁的受力状态,整个内力图除了最右边一跨梁有所区别以外,其余部分的内力图都是一样的。读者可以验证,无论最右边一跨梁的长度如何,只要集中荷载作用在跨中,其余部分的内力就不会改变。请读者思考,这应该如何解释?

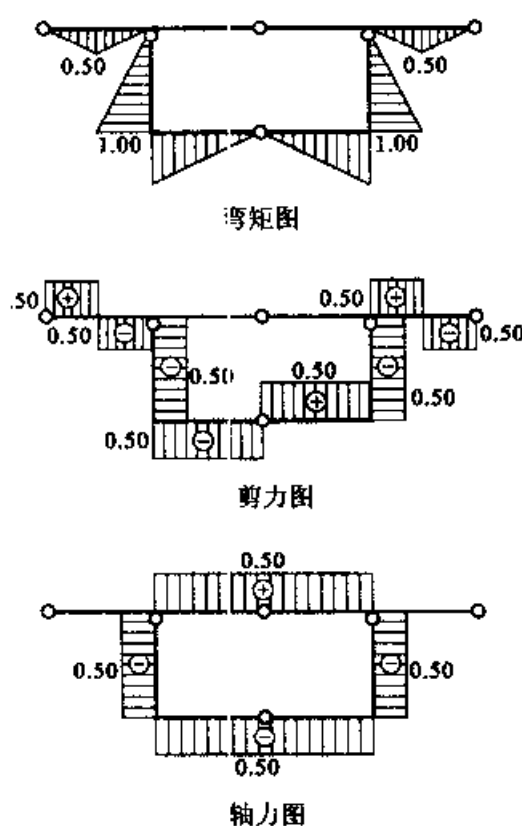


图 4-25

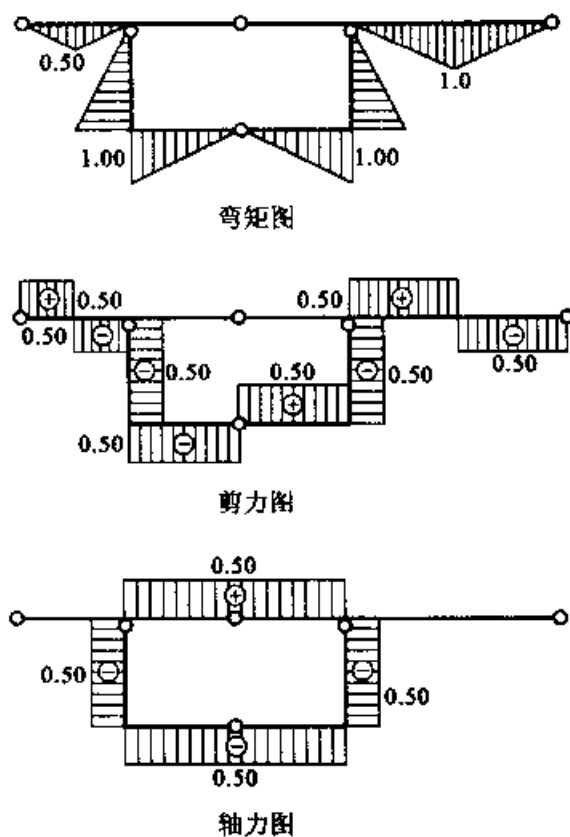


图 4-26

## § 4-8 小 结

本章的特点是侧重“综述”和“总论”。一方面对静定结构受力分析方法进行综述和补充；另一方面对静定结构及其各种型式的受力特性进行综述。

对“总论”再作“小结”，似乎是多余的。因此，下面只对各部分内容之间的联系、比较和贯通，提一些看法。

### 1. 静定结构各种受力分析方法的比较

静定结构的受力分析方法有两类：

- (1) 取隔离体、建立平衡方程的方法。
- (2) 虚设位移、建立虚功方程的方法。

首先，要对每类方法深入学习，学懂会用。其次，还要把两类方法合在一起，加以研究和比较：

要了解两类方法之间的本质联系。为什么说虚位移方程实际上是平衡

方程?

要了解两类方法各自的优缺点。在什么情况下某一类方法优于另一类方法?

## 2. 几何构造分析与受力分析之间的联系

学习过程经常是 首先分门别类地学,然后融会贯通地想,综合优选地用。

分别学完几何构造分析方法和受力分析方法之后,重要的是要把两部分内容融会贯通起来,掌握二者之间的对偶关系,并能灵活地交叉应用,用“他山之石”攻“此山之玉”。下面是交叉应用的正反二例:

(1) 隔离体截取顺序的优选——借鉴几何构造分析的知识,用以指导受力分析方法的优选。也就是按照“后搭的先拆”这个原则,确定截取顺序。

(2) 零载法——借用受力分析方法解决几何构造分析问题。

在以后章节中,还有多处介绍交叉应用的实例,值得注意。

## 3. 与静定结构各种特性相贯通的基本特性

在 § 4-5 中列举了静定结构的四条普遍性质。它们都是由一条基本特性派生出来的。这个基本特性就是:在静定结构中,满足平衡条件的内力解答是存在的,而且是唯一的。

一谈到解的存在性和唯一性,有时总觉得有点抽象和枯燥。如果结合实际问题来学,而且还能得出一些具有实际价值的结论,这样就不会觉得枯燥了。理论结合实际,在学习中是很重要的。

## 4. 评价各种结构型式受力特性的一个基本观点

在 § 4-6 中比较了梁、拱、桁架、组合结构等结构型式的受力特点。如何评价结构型式的合理性,要从受力特性、施工、经济等多方面综合考虑;而从受力特性角度看,一个基本观点就是要设法“材尽其用”,尽量减少弯矩峰值,尽量接近无弯矩状态这一理想境界。

# § 4-9 思考与讨论

### § 4-1 思考题

4-1 按照“后搭的先拆”这个原则,试对习题 2-2 图 a、b、c 所示体系确定截取隔离体的合理顺序(结点荷载可任意给定,对图 c 体系可补充三根不共线的支杆)。又图 c 所示体系是否能维持平衡?

4-2 按照“后搭的先拆”这个原则,试对习题 2-3 图 a、b 所示体系确定截取隔离体的合理顺序(图 a 的结点荷载可任意给定,图 b 的荷载应为平衡力系)。

4-3 对习题 2-6 图 a、b、c 所示静定刚架进行受力分析,确定截取隔离体的合理顺

序(荷载可任意给定)。

#### §4-2 思考题

4-4 将图4-4b所示对称体系换成下图所示不对称体系,其中 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 都在0与 $\frac{\pi}{2}$ 之间取值。试对此不对称体系进行受力分析,并得出相应的结论:

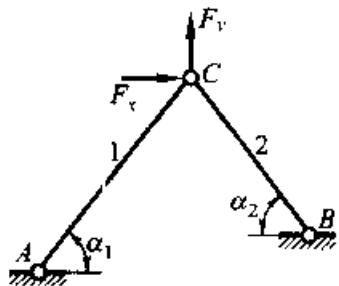
(1) 在什么几何形状下,平衡方程组有解,且为唯一解。

(2) 在什么几何形状下,当一般荷载作用时平衡方程组无解;当某种特殊荷载作用时平衡方程组有解,且解是不唯一的。

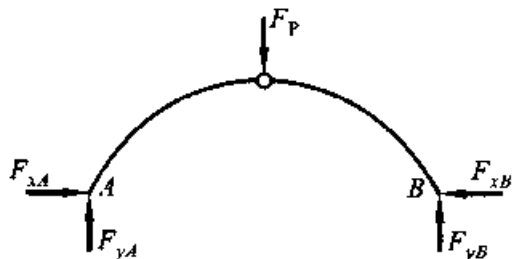
#### §4-3 思考题

4-5 试用零载法检验习题2-8图a、b所示体系的几何不变性。

4-6 应用零载法检验 $W=0$ 体系的几何不变性时,所设的荷载是一种最简单的特殊荷载,即零荷载。如果改用其他的特殊荷载,是否也可用于检验 $W=0$ 体系的几何不变性?



思考题4-4图



思考题4-9图

#### §4-4 思考题

4-7 应用虚功法求静定结构某一约束力 $F_x$ 时,为什么必须撤去与 $F_x$ 相应的约束,代之以未知的力 $F_x$ ?

4-8 应用虚功法求静定结构约束力时,是否可以同时撤去多个约束?这时虚功方程中一般含有几个未知力?可以得出几个独立的平衡方程?

4-9 求三铰拱的四个支座反力 $F_{xA}$ 、 $F_{yA}$ 、 $F_{xB}$ 、 $F_{yB}$ 时,通常应用下列四个平衡方程,即三个整体平衡方程:

$$(1) \sum F_x = 0;$$

$$(2) \sum M_A = 0;$$

$$(3) \sum M_B = 0;$$

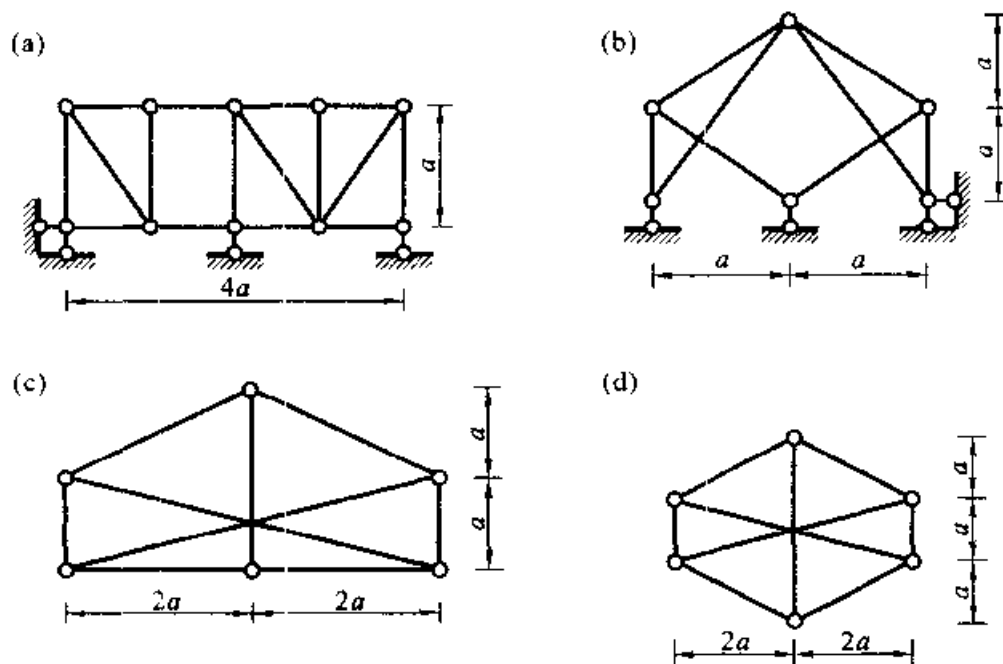
以及铰C处弯矩为零的方程:

$$(4) M_C = 0.$$

如果采用虚功法来建立上述四个平衡方程,则四种相应的虚位移状态应如何选取?

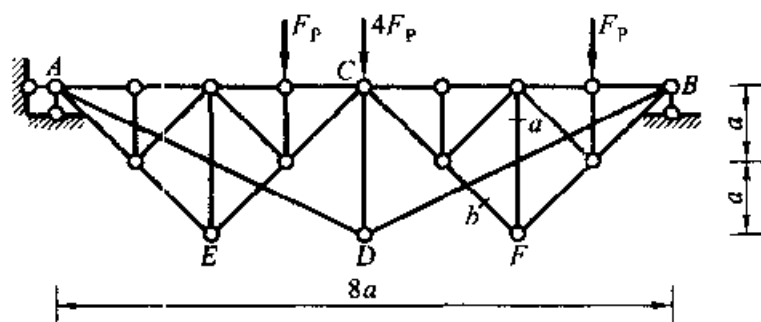
### 习 题

4-1 试用零载法检验所示体系是否几何不变。



题 4-1 图

4-2 试求图示桁架指定杆的内力。



题 4-2 图

4-3 图示两种结构在静力等效荷载作用下,内力有哪些不同?

4-4 用虚功原理试求图示静定结构的指定内力或支座反力:

(a) 求支座反力  $F_{RC}$  和  $F_{RF}$  以及弯矩  $M_H$  和  $M_C$ ;

(b) 求支座反力  $F_H$  和  $F_V$  以及杆 AC 的轴力  $F_N$ ;

(c) 求支座反力  $F_{RC}$  以及弯矩  $M_{RH}$  和  $M_{RA}$ ;

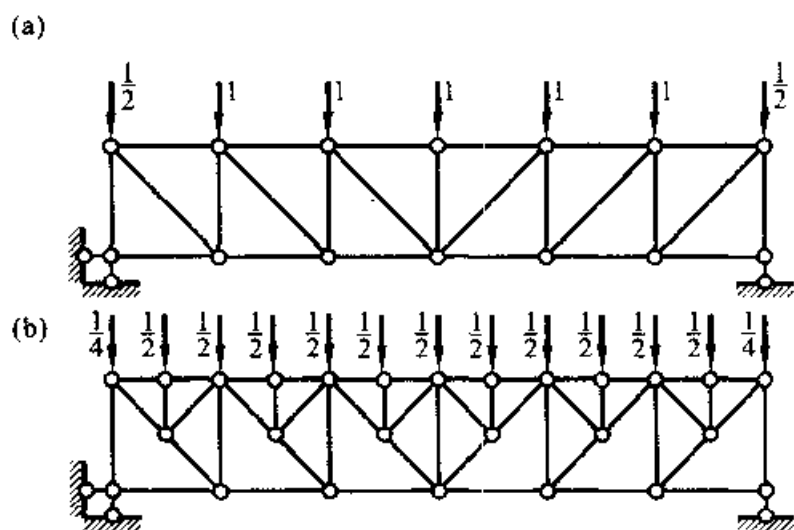
(d) 求 1、2、3 杆的轴力  $F_{N1}$ 、 $F_{N2}$ 、 $F_{N3}$ 。

4-5 用求解器的自动求解功能试求解例 3-22 的各杆内力。

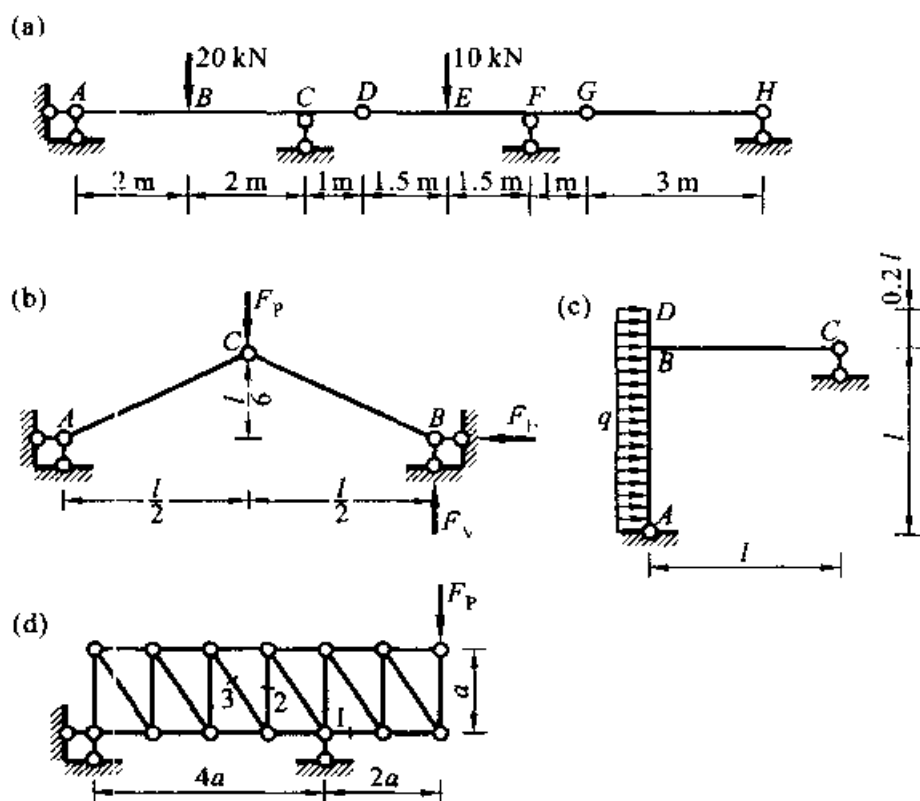
4-6 用求解器的自动求解功能试求解例 3-23 的各杆内力。

4-7 用求解器的自动求解功能试求解习题 3-34 的各杆内力。





题 4-3 图 (荷载单位 kN)



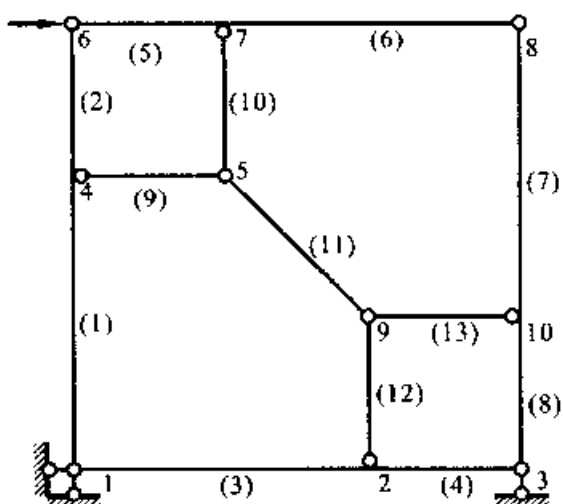
题 4-4 图

4-8 用求解器的自动求解功能试求解  $a=2$  和  $a=1.5$  时的各杆内力,其中  $a=2$  的情况如图所示。从结果可以看出,4 个复链杆的弯矩在两种情况下改变了正负号。用试算法在区间  $(1.5, 2)$  内,确定弯矩变号的临界点  $a_c$ 。当  $a=a_c$  时,该结构体系是否处于无矩状态,或者是其他状态?

```

Let,a=2
N,1,0,0,
N,2,a,0
N,3,3,0
N,4,0,a
N,5,1,2
N,6,0,3
N,7,3-a,3
N,8,3,3,
N,9,2,1
N,10,3,3-a
E,1,4,1,1,0,1,1,1
E,6,4,1,1,0,1,1,1
E,1,2,1,1,0,1,1,1
E,3,2,1,1,0,1,1,1
E,6,7,1,1,0,1,1,1
E,8,7,1,1,0,1,1,1
E,8,10,1,1,0,1,1,1
E,3,10,1,1,0,1,1,1
E,4,5,1,1,0,1,1,0
E,5,7,1,1,0,1,1,0
E,5,9,1,1,0,1,1,0
E,2,9,1,1,0,1,1,0
E,9,10,1,1,0,1,1,0
NSUPT,1,2,270,0,0,0
NSUPT,3,1,0,0,0,0
NLOAD,6,1,1,0
END

```



题 4 8 图

# 第5章

## 影 响 线

§ 5-1 移动荷载和影响线的概念	荷载
§ 5-2 静力法作简支梁影响线	· § 5-8 简支梁的包络图和绝对最大弯矩
§ 5-3 结点荷载作用下梁的影响线	
§ 5-4 静力法作桁架的影响线	· § 5-9 用求解器计算结构的影响线
§ 5-5 机动法作影响线	§ 5-10 小 结
§ 5-6 影响线的应用	§ 5-11 思考与讨论
§ 5-7 铁路、分路的标准荷载制和换算	习 题

### § 5-1 移动荷载和影响线的概念

前面各章讨论的荷载都是固定荷载,荷载作用点的位置是固定不变的。但是有些结构要承受移动荷载,荷载作用点在结构上是移动的。例如在桥梁上行驶的火车和汽车,在吊车梁上行驶的吊车等,都是移动荷载。

在本章中,着重讨论结构在移动荷载作用下的内力计算问题。这个问题具有如下特点:结构内力随荷载的移动而变化,为此需要研究内力的变化范围和变化规律。设计时必须以内力的最大值作为设计依据,为此需要确定荷载的最不利位置——即使结构某个内力或支座反力达到最大值的荷载位置。

移动荷载的类型很多,我们没有必要逐个地加以讨论,而只需抽出其中的共性进行典型分析。典型的移动荷载就是单位移动荷载  $F_p = 1$ <sup>①</sup>,它是从各种移动荷载中抽出来的最简单、最基本的元素。只要把单位移动荷载作用下的内力变化规律分析清楚,那末,根据叠加原理,就可以顺利地解决各种移动荷载作用下的内力计算问题以及最不利荷载位置的确定问题。

① 参见本书符号表说明 3。

表示单位移动荷载作用下内力变化规律的图形称为内力影响线。影响线是研究移动荷载作用的基本工具。下面举例说明影响线的概念。

图 5-1a 所示为一简支梁 AB, 当单个竖向荷载  $F_P$  在梁上移动时, 现讨论支座反力  $F_{RB}$  的变化规律。

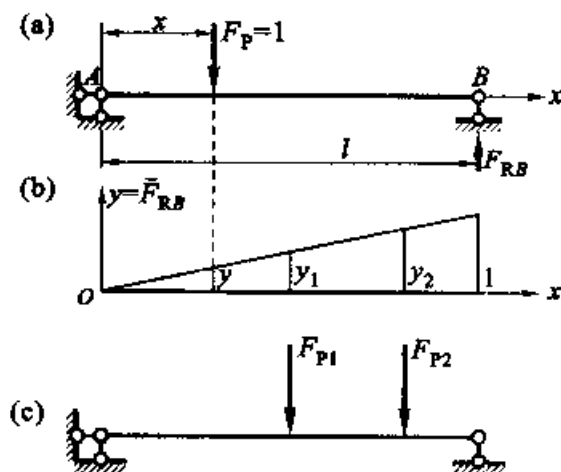


图 5-1

取 A 点作坐标原点, 用  $x$  表示荷载作用点的横坐标。如果  $x$  是常量, 则  $F_P$  就是一个固定荷载。反之, 如果把  $x$  看作变量, 则  $F_P$  就成为移动荷载。

当荷载  $F_P$  在梁上任意位置  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) 时, 利用平衡方程可求出支座反力  $F_{RB}$  :

$$F_{RB} = \frac{x}{l} F_P \quad (0 \leq x \leq l) \quad (a)$$

$F_{RB}$  与  $F_P$  成正比, 比例系数  $\frac{x}{l}$  称为  $F_{RB}$  的影响系数, 用  $\bar{F}_{RB}$  表示, 即

$$\bar{F}_{RB} = \frac{x}{l} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (b)$$

显然, 影响系数  $F_{RB}$  在数值上等于当  $F_P = 1$  时引起的支座反力  $F_{RB}$ 。

式(b)表示影响系数  $\bar{F}_{RB}$  与荷载位置参数  $x$  之间的函数关系。这个函数的图形便称  $F_{RB}$  的影响线。由于式(b)是一次式, 故  $F_{RB}$  的影响线是直线。为了定出直线上的两点, 可设  $x=0$ , 得  $\bar{F}_{RB}=0$ 。再设  $x=l$ , 得  $\bar{F}_{RB}=1$ 。由此定出两点, 再连成直线, 便得出  $F_{RB}$  的影响线, 如图 5-1b 所示。

图 5-1b 中的影响线形象地表明支座反力  $F_{RB}$  随荷载  $F_P = 1$  的移动而变化的规律: 当荷载  $F_P = 1$  从 A 点开始, 逐渐向 B 点移动时, 支座反力影响系数  $\bar{F}_{RB}$  则相应地从零开始, 逐渐增大, 最后达到最大值  $\bar{F}_{RB} = 1$ 。

$F_{RB}$  的影响线还可用来求各种荷载作用下引起的支座反力  $F_{RB}$ 。例如如图 5-1c 所示梁上有吊车轮压  $F_{P1}$  和  $F_{P2}$  作用, 根据叠加原理, 这时的支座反力  $F_{RB}$  应为

$$F_{RB} = F_{P1} y_1 + F_{P2} y_2$$

这里,  $y_1$  和  $y_2$  分别为对应于荷载  $F_{P1}$  和  $F_{P2}$  位置的影响系数  $\bar{F}_{RB1}$  和  $\bar{F}_{RB2}$ 。

概括说来, 当单位集中荷载  $F_P = 1$  沿结构移动时, 表示结构某量  $Z$  变化规律的曲线, 称为  $Z$  的影响线。影响线上任一点的横坐标  $x$  表示荷载的位置参数, 纵坐标  $y$  表示荷载作用于此点时  $Z$  的影响系数  $\bar{Z}$ 。

影响系数  $Z$  是  $Z$  与  $F_P$  的比例系数, 即

$$Z = F_P \bar{Z}, \quad \text{或} \quad \bar{Z} = \frac{Z}{F_P}$$

当  $F_P = 1$  时,  $\bar{Z}$  与  $Z$  在数值上彼此相等。但  $\bar{Z}$  与  $Z$  的量纲不同, 它们相差一个荷载  $F_P$  的量纲。如果  $F_{RB}$  的量纲是  $\text{LMT}^{-2}$ , 则  $\bar{F}_{RB}$  的量纲是  $(\text{LMT}^{-2})/(\text{LMT}^{-2})$ , 即为量纲一的量<sup>①</sup>。

## § 5-2 静力法作简支梁影响线

静定结构的内力或支座反力影响线有两种基本作法, 静力法和机动法。本节通过求简支梁的内力(或支座反力)影响线说明静力法。

静力法是以荷载的作用位置  $x$  为变量, 通过平衡方程, 从而确定所求内力(或支座反力)的影响函数, 并作出影响线。

### 1. 支座反力影响线

简支梁支座反力  $F_{RB}$  的影响线已在上一节中讨论过(图 5-1), 现在讨论支座反力  $F_{RA}$  的影响线。

将  $F_P = 1$  放在任意位置, 距  $A$  为  $x$ 。由平衡方程求影响系数  $\bar{F}_{RA} = \frac{F_{RA}}{F_P}$ :

$$\sum M_B = 0, \quad \bar{F}_{RA} l - 1(l - x) = 0$$

$$\text{得} \quad \bar{F}_{RA} = \frac{l-x}{l} \quad (0 \leq x \leq l)$$

这就是  $F_{RA}$  的影响线方程。由此方程可知,  $F_{RA}$  的影响线也是一条直线。在  $A$  点,  $x=0$ ,  $\bar{F}_{RA}=1$ 。在  $B$  点,  $x=l$ ,  $\bar{F}_{RA}=0$ 。利用这两个竖距便可以画出  $F_{RA}$  的影响线, 如图 5-2c 所示

① 所有量纲指数为零的量, 其量纲为  $A^0=1$ , 称为量纲一的量(以往称为无量纲量)。

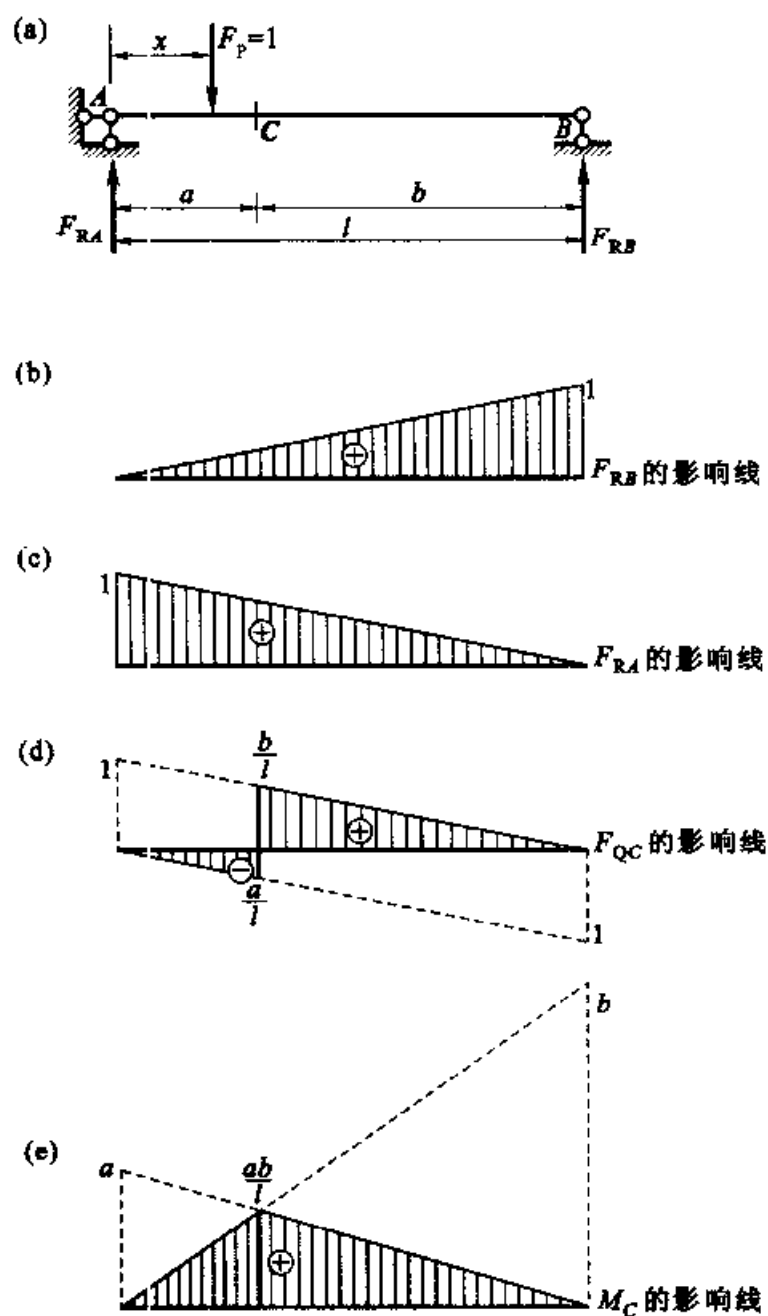


图 5-2

## 2. 剪力影响线

现在拟作指定截面 C 的剪力  $F_{QC}$  的影响线(图 5-2d)。当  $F_p=1$  作用在 C 点以左或以右时,剪力  $F_{QC}$  的影响系数具有不同的表示式,应当分别考虑。

当  $F_p=1$  作用在 CB 段时,取截面 C 的左边为隔离体,由  $\sum F_v=0$ ,得

$$F_{QC} = F_{RA} \quad (F_p=1 \text{ 在 CB 段})$$

由此看出,在CB段内, $F_{QC}$ 的影响线与 $F_{RA}$ 的影响线相同。因此,可先作 $F_{RA}$ 的影响线,然后保留其中的CB段(至于AC段则舍弃不用)。C点的竖距可按比例关系求得为 $b/l$ 。

当 $F_P=1$ 作用在AC段时,取截面C的右边为隔离体,由 $\sum F_y=0$ ,得

$$F_{QC} = -F_{RB} \quad (F_P=1 \text{ 在 AC 段})$$

由此看出,在AC段内, $F_{QC}$ 的影响线与 $F_{RB}$ 的影响线相同,但正负号相反。因此,可先把 $F_{RB}$ 的影响线翻过来画在基线下面,然后保留其中的AC段。

C点的竖距可按比例关系求得为 $-\frac{a}{l}$ 。

综合起来, $F_{QC}$ 的影响线分成AC和CB两段,由两段平行线所组成,在C点形成台阶。由此看出,当 $F_P=1$ 作用在AC段任一点时,截面C为负号剪力。当 $F_P=1$ 作用在CB段任一点时,截面C为正号剪力。当 $F_P=1$ 越过C点由左侧移到右侧时,截面C的剪力将引起突变。当 $F_P=1$ 正好作用C点时, $F_{QC}$ 的影响系数没有意义。

剪力影响系数 $\bar{F}_Q = \frac{F_Q}{F_P}$ 为比例系数,为量纲一的量。

### 3. 弯矩影响线

现在拟作指定截面C的弯矩 $M_C$ 的影响线(图5-2e)。仍分成两种情况( $F_P=1$ 作用在C点以左和以右)分别考虑。

当 $F_P=1$ 作用在CB段时,取C的左边为隔离体,得

$$M_C = F_{RA} \cdot a \quad (F_P=1 \text{ 在 CB 段})$$

由此看出,在CB段内, $M_C$ 的影响系数等于 $F_{RA}$ 的影响系数的 $a$ 倍。因此,可先把 $F_{RA}$ 的影响线的竖距乘以 $a$ ,然后保留其中的CB段,就得到 $M_C$ 在CB段的影响线。这里C点的竖距应为 $ab/l$ 。

当 $F_P=1$ 作用在AC段时,取C的右边为隔离体,得

$$M_C = F_{RB} \cdot b \quad (F_P=1 \text{ 在 AC 段})$$

因此,可先把 $F_{RB}$ 的影响线的竖距乘以 $b$ ,然后保留其中的AC段,就得到 $M_C$ 在AC段的影响线。这里C点的竖距仍是 $ab/l$ 。

综合起来, $M_C$ 的影响线分成AC和CB两段,每一段都是直线,形成一个三角形,如图5-2e所示。由此看出,当 $F_P=1$ 作用在C点时,弯矩 $M_C$ 为极大值。当 $F_P=1$ 由C点向梁的两端移动时,弯矩 $M_C$ 逐渐减小到零。

弯矩影响系数的单位为 $[M] = \frac{[M]}{[F_P]}$ ,其量纲为L,单位为m。

例 5-1 试作图 5-3a 所示伸臂梁的  $F_{RA}$ 、 $F_{RB}$ 、 $F_{QC}$ 、 $F_{QD}$  的影响线。

解 (1) 作  $F_{RA}$ 、 $F_{RB}$  的影响线

取 A 点为坐标原点, 横坐标  $x$  以向右为正。当荷载  $F_P = 1$  作用于梁上任一点  $x$  时, 由平衡方程求得支座反力的影响系数为

$$\left. \begin{aligned} F_{RA} &= \frac{l-x}{l} \\ F_{RB} &= \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (-l_1 \leq x \leq l+l_2)$$

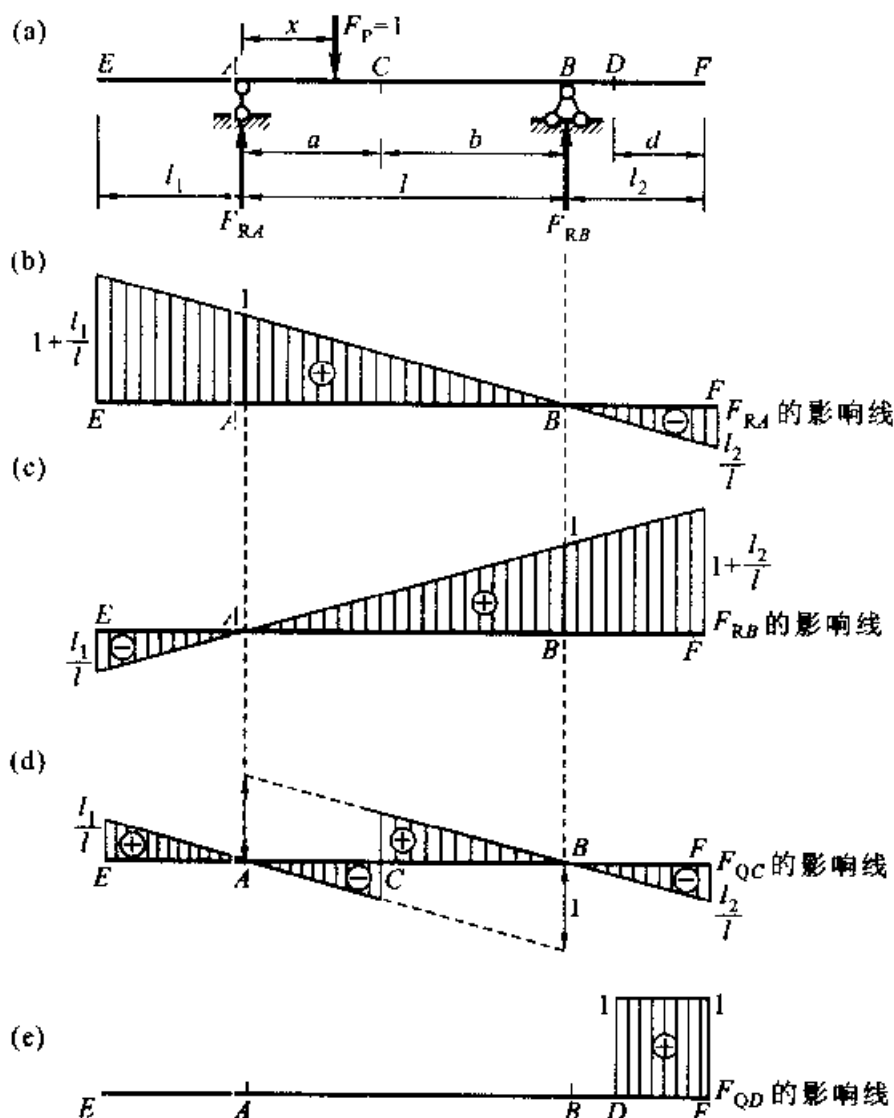


图 5-3

这两个支座反力影响线方程与简支梁的相同, 只是荷载  $F_P = 1$  的作用范围有所扩大。在简支梁中,  $x$  的变化范围为  $0 \leq x \leq l$ , 这里则为  $-l_1 \leq x \leq l + l_2$ 。影响线图形如图 5-3b、c 所示。在 AB 段内的影响线与简支梁的完全相同, 仍



是直线。再将直线向两个伸臂部分延长,即得出整个影响线。

(2) 作剪力  $F_{QC}$  的影响线

当  $F_P = 1$  在  $C$  点以左时,得

$$F_{QC} = -F_{RB} \quad (F_P = 1 \text{ 在 } EC \text{ 段})$$

当  $F_P = 1$  在  $C$  点以右时,得

$$F_{QC} = F_{RA} \quad (F_P = 1 \text{ 在 } CF \text{ 段})$$

仿照简支梁作剪力影响线的作法,得出  $F_{QC}$  影响线如图 5-3d 所示。

(3) 作剪力  $F_{QD}$  的影响线

当  $F_P = 1$  在  $D$  点以左时,取  $D$  的右边为隔离体,得

$$\bar{F}_{QD} = 0$$

当  $F_P = 1$  在  $D$  点以右时,仍取  $D$  的右边为隔离体,得

$$\bar{F}_{QD} = +1$$

由此可作出  $F_{QD}$  影响线如图 5-3e 所示。这里只有  $DF$  段的影响系数不为零,也就是说,只有当荷载作用  $DF$  段时,才对  $F_{QD}$  产生影响。

### § 5-3 结点荷载作用下梁的影响线

图 5-4a 所示为一桥梁结构承载示意图。荷载直接加于纵梁。纵梁是简支梁,两端支在横梁上。横梁则由主梁支承;荷载通过纵梁下面的横梁传到主梁。不论纵梁承受何种荷载,主梁只在  $A$ 、 $C$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $B$  等有横梁处(即结点处)承受集中力,因此主梁承受的是结点荷载。

下面研究主梁的影响线的作法。

(1) 支座反力  $F_{RA}$  和  $F_{RB}$  的影响线

支座反力  $F_{RA}$  和  $F_{RB}$  的影响线,与图 5-2 所示完全相同,在图 5-4 中没有画出。

(2)  $M_C$  的影响线

$C$  点正好是结点。 $F_P = 1$  在  $C$  点以右时,利用  $F_{RA}$  求  $M_C$ ;  $F_P = 1$  在  $C$  点以左时,利用  $F_{RB}$  求  $M_C$ 。由此可知,  $M_C$  的影响线作法与图 5-2 完全相同,如图 5-4b 所示。 $C$  点的竖距为

$$\frac{ab}{l} = \frac{d \cdot 3d}{4d} = \frac{3}{4}d$$

(3)  $M_D$  的影响线

$M_D$  的影响线如图 5-4c 所示。先说明其作法,然后加以证明。

先假设  $F_P = 1$  直接加于主梁  $AB$ , 则  $M_D$  的影响线为一三角形(其中

(E 段为虚线)。D 点的竖距为

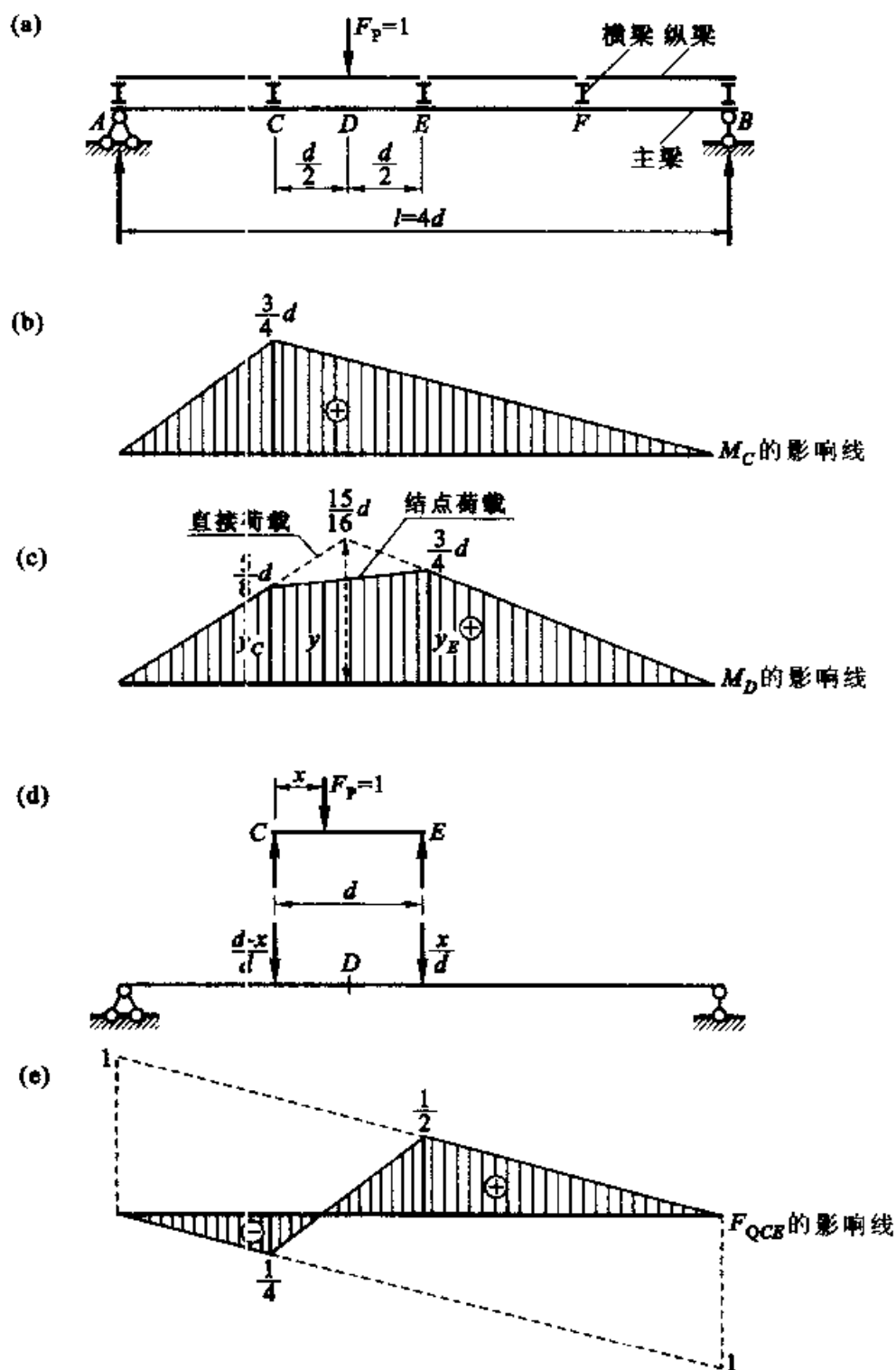


图 5-4

$$\frac{ab}{l} = \frac{\frac{3}{2}d \times \frac{5}{2}d}{4d} = \frac{15}{16}d$$

由比例可知, C、E 两点的竖距为

$$y_C = \frac{15}{16}d \times \frac{2}{3} = \frac{5}{8}d$$

$$y_E = \frac{15}{16}d \times \frac{4}{5} = \frac{3}{4}d$$

将 C、E 两点的竖距连一直线, 就得到结点荷载作用下  $M_D$  的影响线, 如图中实线所示。

为了证明上述作法的正确性, 只需注意以下两点:

1) 如果单位荷载加在 C 点或 E 点, 则结点荷载与直接荷载完全相同, 所以在结点荷载作用下  $M_D$  影响线在 C 点的竖距  $y_C$  和在 E 点的竖距  $y_E$  与直接荷载作用下相应的竖距相等。

2) 如单位荷载作用在 C、E 两点之间, 其到 C 点的距离以  $x$  表示, 则纵梁 CE 的反力如图 5-4d 所示。主梁在 C 点受向下的荷载  $\frac{d-x}{d}$  作用, 在 E 点受向下的荷载  $\frac{x}{d}$  作用。单位荷载作用在点  $x$  时对主梁  $M_D$  的影响系数  $y$  可用叠加原理求得如下:

$$\text{当 } F_P = 1 \text{ 加在 C 点时, } \quad \bar{M}_D = y_C$$

$$\text{当 } F_P = 1 \text{ 加在 E 点时, } \quad \bar{M}_D = y_E$$

当  $F_P = 1$  距 C 点为  $x$  时, 主梁 C 点荷载为  $\frac{d-x}{d}$ , E 点荷载为  $\frac{x}{d}$ , 故

$$y = y_C \frac{d-x}{d} + y_E \frac{x}{d}$$

上式为  $x$  的一次式。由此可知在结点荷载作用下,  $M_D$  的影响线在 CE 一段为一直线。

一般的结论可表达如下:

1) 在结点荷载作用下, 结构任何影响线在相邻两结点之间为一直线。

2) 先作直接荷载作用下的影响线, 用直线连接相邻两结点的竖距, 就得到结点荷载作用下的影响线。

#### (4) $F_{QCE}$ 的影响线

在结点荷载作用下, 主梁在 C、E 两点之间没有外力, 因此 CE 一段各截面的剪力都相等, 通常称为节间剪力, 以  $F_{QCE}$  表示。  $F_{QCE}$  的影响线如图 5-4e 所示, 是按照上述结论作出的。

## § 5-4 静力法作桁架的影响线

图 5-5a 所示为一平行弦桁架。设单位荷载沿桁架下弦 AG 移动, 试作各杆轴力的影响线。桁架通常承受结点荷载, 荷载传递的方式与图 5-5b 所示的梁相同。任一杆的轴力(例如  $F_{N_k}$ )的影响线在相邻结点之间为一直线。我们可以把单位荷载  $F_P = 1$  依次置于 A、B、C、D、E、F、G 诸点, 计算  $F_{N_k}$  的数值, 用竖距表示出来, 再连以直线, 就得到  $F_{N_k}$  的影响线。由此可知, 绘制静定桁架各杆内力的影响线原则上没有什么困难。

下面结合图 5-5 说明桁架影响线的静力作法, 其基础仍然是截面法和结点法。

1.  $F_{RA}$  和  $F_{RG}$  的影响线

$F_{RA}$  和  $F_{RG}$  的影响线与简支梁相同, 图中没有画出。

2. 上弦杆轴力  $F_{N_k}$  的影响线

作截面 I-I, 以 C 为力矩中心, 用力矩方程  $\sum M_C = 0$ , 求  $F_{N_k}$ 。

如单位荷载在 C 的右方, 取截面 I-I 左部为隔离体, 得

$$\begin{aligned} F_{RA} \times 2d + F_{N_k} h &= 0 \\ F_{N_k} &= -\frac{2d}{h} F_{RA} \end{aligned} \quad (a)$$

如单位荷载在 C 点以左, 取截面 I-I 以右部分为隔离体, 得

$$\begin{aligned} F_{RG} \cdot 4d + F_{N_k} h &= 0 \\ F_{N_k} &= -\frac{4d}{h} F_{RG} \end{aligned} \quad (b)$$

在图 5-5c 中, 利用式(a)作出  $F_{RA}$  的影响线, 将竖距乘以  $\frac{2d}{h}$ , 画于基线以下, 取 C 以右一段; 又利用式(b)作出  $F_{RG}$  的影响线, 将竖距乘以  $\frac{4d}{h}$ , 画于基线以下, 取 C 以左一段。这样得到一个三角形。由于在相邻结点之间都是直线, 因此得到的三角形就是  $F_{N_k}$  的影响线。

式(a)和(b)可以合并为一个式子, 即

$$F_{N_k} = -\frac{M_C^0}{h} \quad (c)$$

式中  $M_C^0$  是相应的简支梁(图 5-5b)结点 C 的弯矩。由式(c)可知,  $F_{N_k}$  的影响线为一三角形, 顶点的竖距为

$$-\frac{ab}{lh} = -\frac{2d \cdot 4d}{6dh} = -\frac{4d}{3h}$$

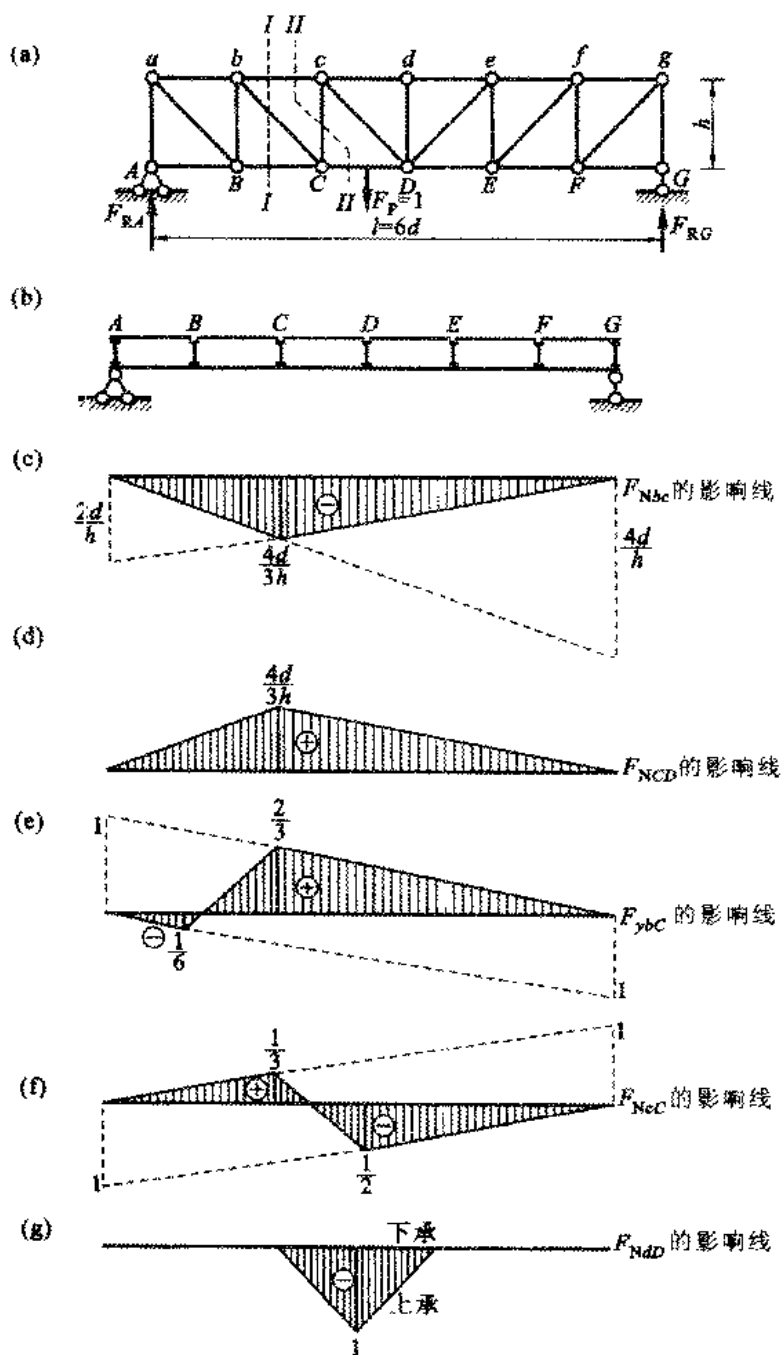


图 5-5

3. 下弦杆轴力  $F_{NcD}$  的影响线

作截面 II-II, 以结点  $c$  为力矩中心, 用力矩方程  $\sum M_c = 0$ , 得

$$F_{NCD} = \frac{M_C^0}{h} \quad (d)$$

即  $F_{NCD}$  的影响线可由相应梁结点  $C$  的弯矩影响线得到, 只需将后者的竖距除以  $h$ 。图 5-5d 所示为  $F_{NCD}$  的影响线。

#### 4. 斜杆 $bC$ 轴力的竖向分力 $F_{vbC}$ 的影响线

仍然用截面 I-I, 分三段考虑。

单位荷载在  $C$  点以右时, 考虑截面 I-I 以左部分的平衡, 由投影方程  $\sum F_v = 0$ , 得

$$F_{vbC} = F_{RA} \quad (e)$$

单位荷载在  $B$  点以左时, 考虑截面 I-I 以右部分的平衡, 得

$$F_{vbC} = -F_{RG} \quad (f)$$

单位荷载在  $B$ 、 $C$  之间, 影响线为直线。

根据上述分析作出  $F_{vbC}$  的影响线如图 5-5e 所示。利用相应梁节间  $BC$  的剪力  $F_{QBC}^0$ , 可将上述分析概括成一个式子:

$$F_{vbC} = F_{QBC}^0 \quad (g)$$

图 5-5e 所示的影响线其实就是节间剪力  $F_{QBC}^0$  的影响线。

#### 5. 竖杆轴力 $F_{NC}$ 的影响线

作截面 II-II, 利用投影方程  $\sum F_v = 0$ , 求  $F_{NC}$ 。可利用相应梁节间  $CD$  的剪力  $F_{QCD}^0$  列出下列式子:

$$F_{NC} = -F_{QCD}^0 \quad (h)$$

图 5-5f 系  $F_{NC}$  的影响线, 是按节间剪力  $F_{QCD}^0$  的影响线作出的, 但将正负号作了改变。

#### 6. 竖杆轴力 $F_{NdD}$ 的影响线

在上面的分析中, 我们一直假设单位荷载沿下弦移动, 即由桁架下弦结点承受荷载(下承桁架)作用。这样, 由上弦结点  $d$  的平衡, 可知

$$F_{NdD} = 0$$

因此,  $F_{NdD}$  的影响线与基线重合(图 5-5g), 不管单位荷载在什么位置,  $dD$  永远是零杆。

如果假设单位荷载沿桁架的上弦移动, 由桁架上弦结点承受荷载(上承桁架)作用, 则由结点  $d$  的平衡, 可知:

$$\text{当 } F_P = 1 \text{ 在结点 } d \text{ 时, } \quad \bar{F}_{NdD} = -1$$

$$\text{当 } F_P = 1 \text{ 在其他结点时, } \quad \bar{F}_{NdD} = 0$$

由于结点之间是直线, 因此  $F_{NdD}$  的影响线如图 5-5g 中实线所示, 是一个三

角形。

由此可知,作桁架的影响线时,要注意区分桁架是下弦承载,还是上弦承载。在本例中,如果桁架改为上承,则  $F_{N_{bc}}$ 、 $F_{N_{cd}}$ 、 $F_{N_{dc}}$  的影响线仍如图 5-5c、d、e 所示,但图 5-5f 中的  $F_{N_{cd}}$  影响线需要修改,因为在上承桁架中,式(h)应用下式代替:

$$F_{N_{cd}} = -F_{Q_{ba}}^0$$

而  $F_{N_{cd}}$  影响线应按节间剪力  $F_{Q_{ba}}^0$  的影响作出,但正负号相反。

### § 5-5 机动法作影响线

作静定内力或支座反力影响线时,除可采用静力法外,还可采用机动法。机动法是以虚功原理为基础,把作内力或支座反力影响线的静力问题转化为作位移图的几何问题。

机动法有一个优点:不需经过计算就能很快地绘出影响线的轮廓。因此,对于某些问题,用机动法处理特别方便(例如,在确定荷载最不利位置时,往往只需知道影响线的轮廓,而无需求出其数值)。此外,用静力法作出的影响线也可用机动法来校核。

下面以简支梁支座反力影响线为例,运用虚功原理说明机动法作影响线的概念和步骤。

我们拟求图 5-6a 所示梁的支座 B 反力  $Z = F_{N_B}$  的影响线。为此,将与 Z 相应的约束——支杆 B 撤去,代以未知量 Z(图 5-6b),使体系具有一个自由度。然后给体系以虚位移,使梁绕 A 点作微小转动,列出虚功方程如下:

$$Z\delta_Z + F_P\delta_P = 0 \quad (5-1)$$

这里,  $\delta_P$  是与荷载  $F_P = 1$  相应的位移,由于  $F_P$  以向下为正,故  $\delta_P$  也以向下为正;  $\delta_Z$  是与未知力 Z 相应的位移,  $\delta_Z$  以与 Z 正方向一致者为正。由式 (5-1) 求得

$$\bar{Z} = -\frac{\delta_P}{\delta_Z} \quad (5-2)$$

当  $F_P = 1$  移动时,位移  $\delta_P$  随着变化,是荷载位置参数  $x$  的函数;而位移  $\delta_Z$  则与  $x$  无关,是一个常量。因此,式(5-2)可表示为

$$\bar{Z}(x) = \left( -\frac{1}{\delta_Z} \right) \delta_P(x) \quad (5-3)$$

这里,函数  $Z(x)$  表示 Z 的影响线,函数  $\delta_P(x)$  表示荷载作用点的竖向位移

图(参看图 5-6b)。由此可知,  $Z$  的影响线与荷载作用点的竖向位移图成正比。也就是说, 根据位移  $\delta_p$  图就可以得出影响线的轮廓。

如果还要确定影响线各竖距的数值, 则应将位移  $\delta_p$  图除以  $\delta_Z$  (或在位移图中设  $\delta_Z = 1$ ), 由此得到的图 5-6c 就从形状上和数值上完全确定了  $Z$  的影响线。

至于影响线竖距的正负号可规定如下: 当  $\delta_Z$  为正值时, 由式(5-3)得知  $Z$  与  $\delta_p$  的正负号正好相反, 又  $\delta_p$  以向下为正, 因此, 如果位移图在横坐标轴上方, 则  $\delta_p$  值为负, 因而影响系数为正。

总结起来, 机动法作静定内力或支座反力的影响线的步骤如下:

(1) 撤去与  $Z$  相应的约束, 代以未知力  $Z$ 。

(2) 使体系沿  $Z$  的正方向发生位移, 作出荷载作用点的竖向位移图( $\delta_p$  图), 由此可定出  $Z$  的影响线的轮廓。

(3) 再令  $\delta_Z = 1^J$ , 可进一步定出影响线各竖距的数值。

(4) 横坐标以上的图形, 影响系数取正号; 横坐标以下的图形, 影响系数取负号。

**例 5-2** 试用机动法作图 5-7a 所示简支梁的弯矩和剪力的影响线。

**解** (1) 弯矩  $M_C$  的影响线

撤去与弯矩  $M_C$  相应的约束(即在截面  $C$  处改为铰结), 代以一对等值反向的力偶  $M_C$ 。这时, 铰  $C$  两侧的刚体可以相对转动。

给体系以虚位移, 如图 5-7b 所示。这里, 与  $M_C$  相应的位移  $\delta_Z$  就是铰  $C$  两侧截面的相对转角。利用  $\delta_Z$  可以确定位移图中的竖距。由于  $\delta_Z$  是微小转角, 可先求得  $BB_1 = \delta_Z \cdot b$ , 再按几何关系, 可求出  $C$  点竖向位移为  $\frac{ab}{l}\delta_Z$ 。这样得到的位移图即代表  $M_C$  的影响线的轮廓。

为了求得影响系数的数值, 再将图 5-7b 中的位移图除以  $\delta_Z$ , 即得到  $M_C$  影响线如图 5-7c 所示, 其中  $C$  点的影响系数为  $\frac{ab}{l}$ 。

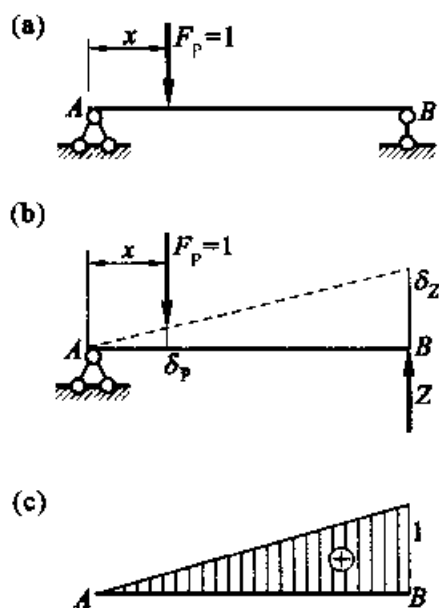


图 5-6

(1) 参见本书符号表说明 3。



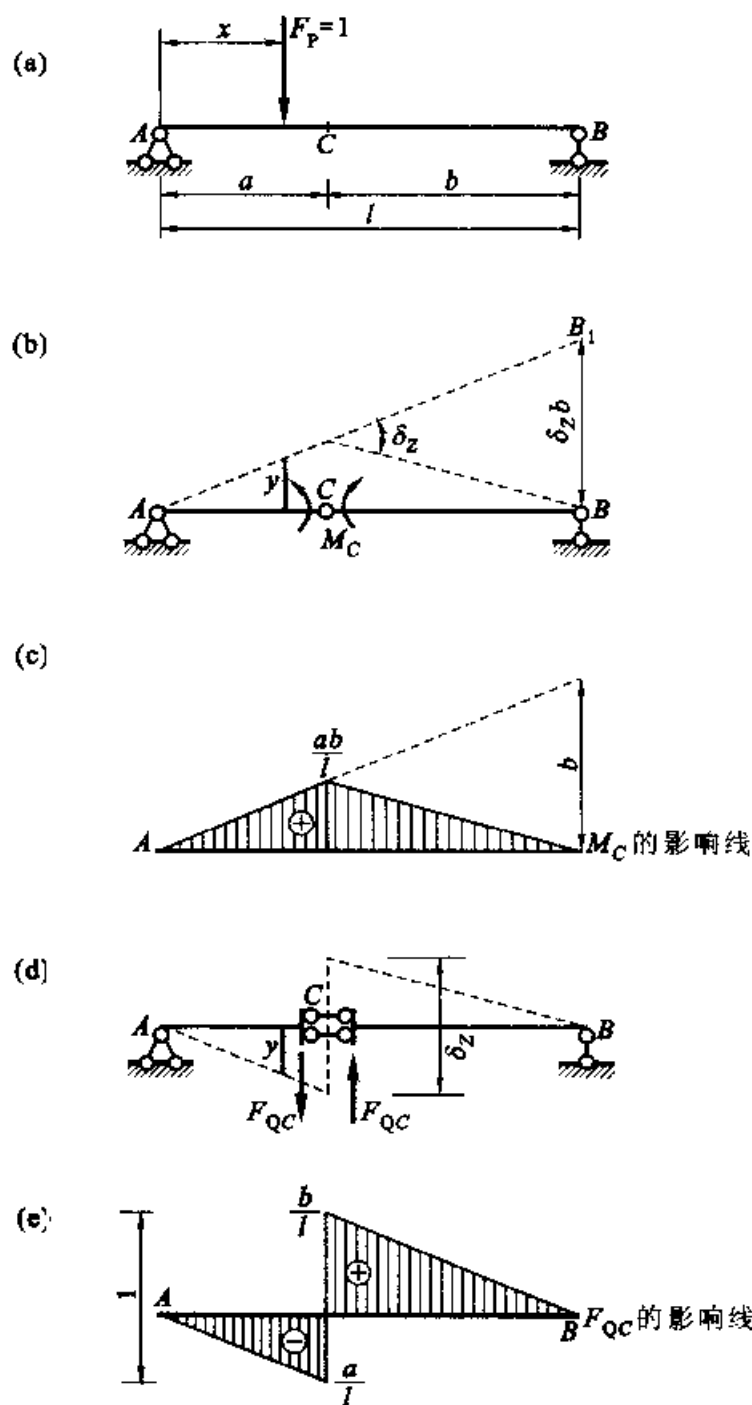


图 5-7

应当指出,由于虚位移  $\delta_z$  是微小值,因此这里只说将  $\delta_p$  图除以  $\delta_z$ ,而  
不说令相对转角  $\delta_z = 1 \text{ rad}$ 。换句话说,如果仍采用“令  $\delta_z = 1$ ”的说法,则应  
理解为令竖向位移中的参数  $\delta_z$  等于 1,而不是直接令相对转角  $\delta_z$  等于  
 $1 \text{ rad}$ 。

## (2) 剪力 $F_{QC}$ 的影响线

撤去截面  $C$  处相应于剪力的约束,代以剪力  $F_{QC}$ ,得图 5-7d 所示的机构。此时,在截面  $C$  处能发生相对的竖向位移,但不能发生相对的转动和水平移动。因此,切口两边的梁在发生位移后保持平行,切口的相对竖向位移即为  $\delta_z$ 。令  $\delta_z = 1$ ,由三角形几何关系即可确定影响线的各控制点数值(图 5-7e)。

**例 5-3** 试用机动法作图 5-8a 所示静定多跨梁的  $M_K$ 、 $F_{QK}$ 、 $M_C$ 、 $F_{QE}$  和  $F_{RD}$  的影响线。

**解** (1)  $M_K$  的影响线

在截面  $K$  加铰,使发生虚位移,如图 5-8b 所示。铰  $K$  两侧相对转角为  $\delta_z$ ,截距  $BB' = 1 \cdot \delta_z = \delta_z$ 。将图 5-8b 中的  $\delta_p$  图除以  $\delta_z$ (或令竖距中的参数  $\delta_z = 1$ ,即令  $BB' = 1$ ),即得  $M_K$  的影响线如图 5-8c 所示。各控制点的影响系数可按比例关系求出。在横坐标轴以上的图形为正号,以下的为负号。

(2)  $F_{QK}$  的影响线

以下不再画体系的虚位移图,直接作出影响线的图形。

$F_{QK}$  影响线的图形与  $K$  点两侧截面发生竖向错动时的  $\delta_p$  图成比例。作图时,先保持各支点的位移为零。然后,在  $K$  点两边分别作平行线  $AK'$  和  $K''B$ ,在  $K$  点错动的方向与剪力  $F_{QK}$  的正方向一致(使隔离体顺时针转动),同时令  $K'K'' = \delta_z = 1$ 。最后作附属部分  $EF$  和  $FG$  的影响线,为此,连接  $E'C$ ,并延长到  $F'$ ;连接  $F'D$ ,并延长到  $G'$ 。这样,便得到  $F_{QK}$  的影响线如图 5-8d 所示。

(3)  $M_C$  的影响线

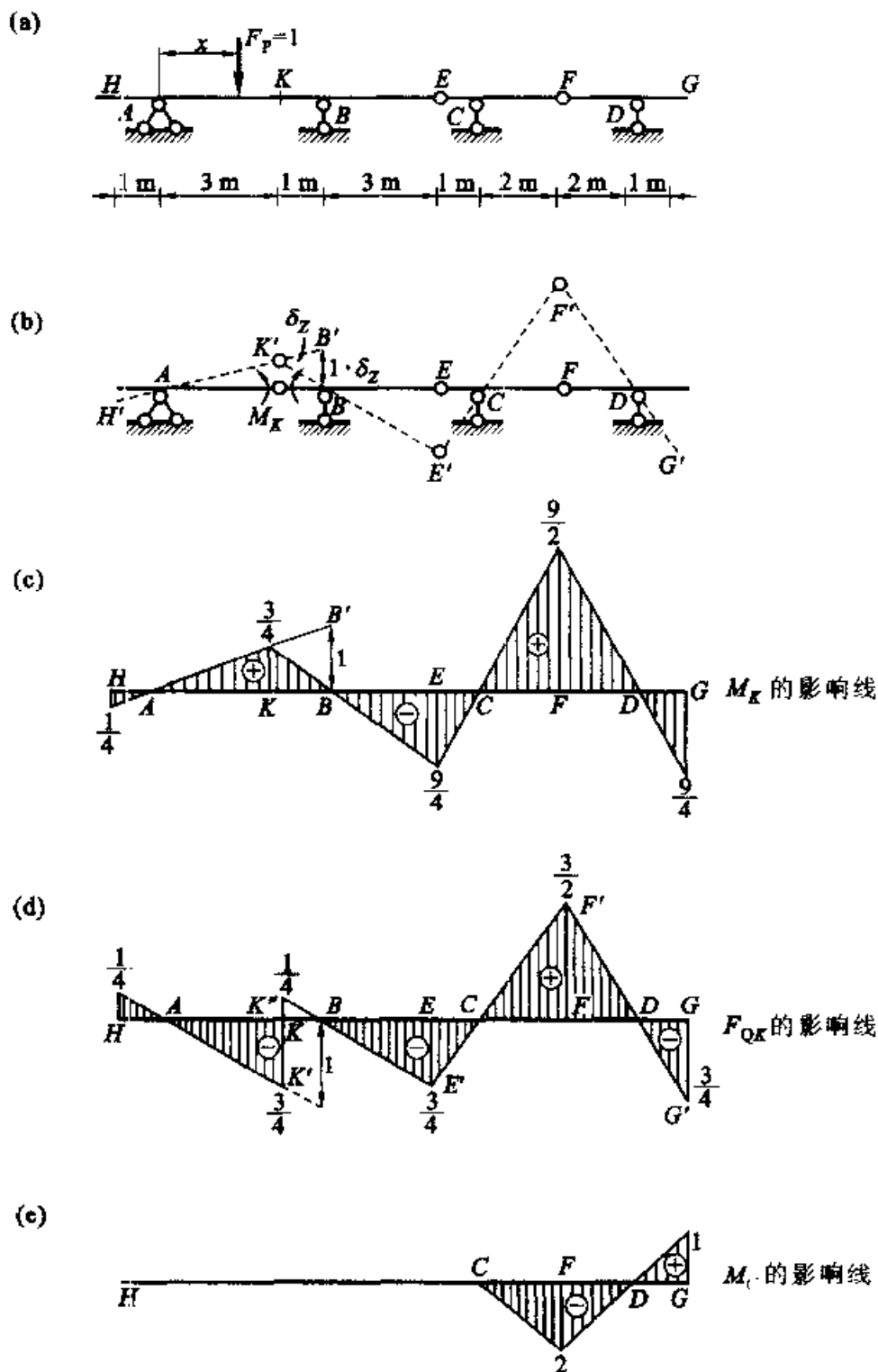
在截面  $C$  加铰后, $HE$  和  $EC$  仍不能发生虚位移,因此  $M_C$  的影响线在  $HC$  段与基线重合。但附属部分  $CF$  和  $FG$  可发生虚位移。与  $M_C$  对应的位移  $\delta_z$  即铰  $C$  两侧截面的相对转角。由于  $EC$  无转角,故  $CF$  的转角即为  $\delta_z$ ,而  $F$  点的竖向位移为  $2 \cdot \delta_z$ 。令其中的参数  $\delta_z = 1$ ,故  $F$  点的影响系数等于 2。 $M_C$  的影响线如图 5-8e 所示。

(4)  $F_{QE}$  的影响线

当  $E$  点两侧截面沿  $F_{QE}$  正方向发生错动时,基本部分  $HE$  不能发生位移,因此,在  $HE$  段  $F_{QE}$  影响线恒等于零。 $EF$  段绕支座  $C$  转动, $FG$  段绕支座  $D$  转动。令与  $F_{QE}$  对应的相对位移(即  $E$  点竖坐标)  $\delta_z$  等于 1,便得到  $F_{QE}$  的影响线如图 5-8f 所示。

(5)  $F_{RD}$  的影响线

在静定多跨梁中,  $FG$  是  $HF$  的附属部分。当撤去支杆  $D$  时,  $HF$  段仍不能发生位移, 因此, 在  $HF$  段  $F_{RD}$  影响线恒等于零。令  $FG$  段在  $D$  点沿  $F_{RD}$  方向发生单位竖向位移, 便得到  $F_{RD}$  的影响线如图 5-8g 所示。



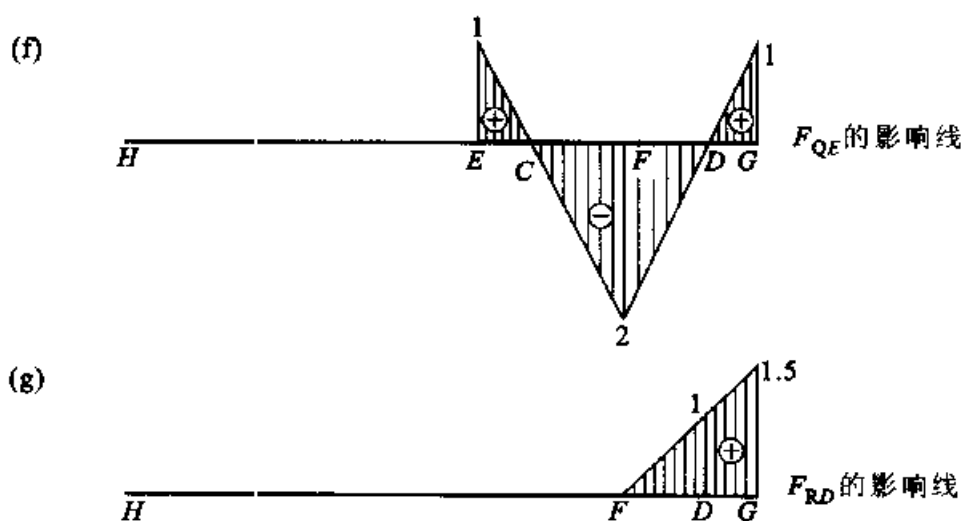


图 5-8

由图 5-8 所示各影响线的图形可以看出,在静定多跨梁中,基本部分的内力(或支座反力)影响线是布满全梁的,而附属部分内力(或支座反力)的影响线则只在附属部分不为零(基本部分上的线段恒等于零)。这个结论与静定多跨梁的力学特性是一致的。

由本例可以看出,用机动法作静定多跨梁的影响线是十分简便的,读者可以试用静力法与其进行比较。

## § 5-6 影响线的应用

### 1. 求各种荷载作用下的影响

作影响线时,用的是单位荷载。根据叠加原理,可利用影响线求其他荷载作用下产生的总影响。

设有一组集中荷载  $F_{P1}$ 、 $F_{P2}$ 、 $F_{P3}$ , 加于简支梁, 位置已知, 如图 5-9a 所示。如  $F_{QC}$  的影响线在各荷载作用点的竖距为  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$ , 则由  $F_{P1}$  产生的  $F_{QC}$  等于  $F_{P1}y_1$ ,  $F_{P2}$  产生的  $F_{QC}$  等于  $F_{P2}y_2$ ,  $F_{P3}$  产生的  $F_{QC}$  等于  $F_{P3}y_3$ 。根据叠加原理, 可知, 在这组荷载作用下  $F_{QC}$  的数值为

$$F_{QC} = F_{P1}y_1 + F_{P2}y_2 + F_{P3}y_3 \quad (a)$$

一般说来, 设有一组集中荷载  $F_{P1}$ 、 $F_{P2}$ 、 $\dots$ 、 $F_{Pn}$  加于结构, 而结构某量  $Z$  的影响线在各荷载作用处的竖距为  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $\dots$ 、 $y_n$ , 则

$$Z = F_{P1}y_1 + F_{P2}y_2 + \dots + F_{Pn}y_n = \sum_{i=1}^n F_{Pi}y_i \quad (5-4)$$

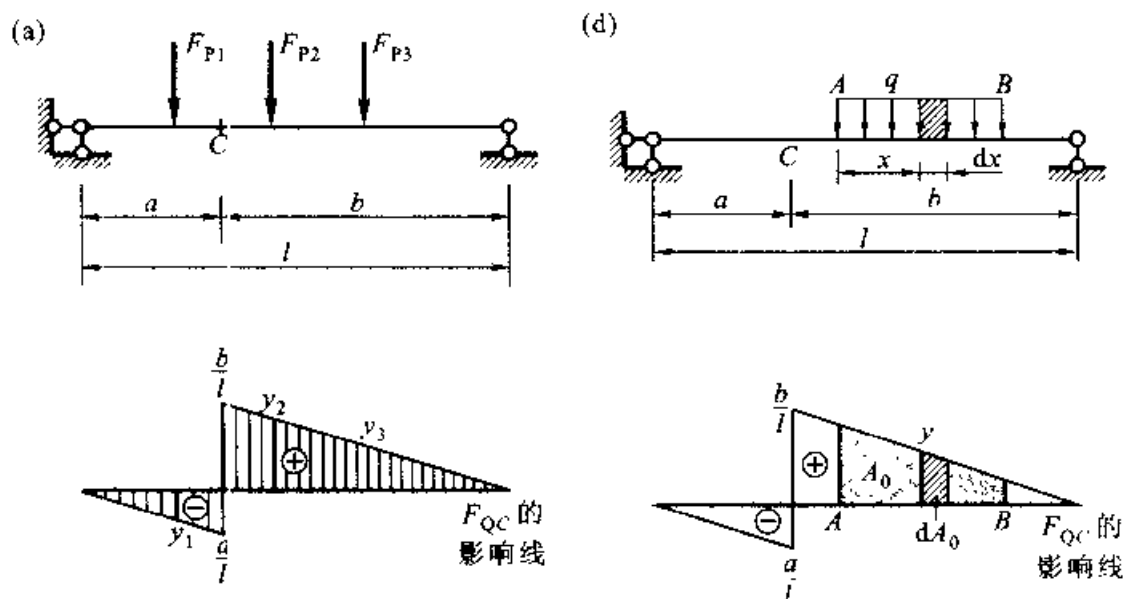


图 5-9

如果结构在  $AB$  段承受均布荷载  $q$  (图 5-9b) 作用, 则微段  $dx$  上的荷载  $qdx$  可看作集中荷载, 它所引起的  $Z$  值为  $y \cdot qdx$ , 因此, 在  $AB$  段均布荷载作用下的  $Z$  值为

$$Z = \int_A^B yqdx = q \int_A^B ydx = qA_0 \quad (5-5)$$

这里,  $A_0$  表示影响线的图形在受载段  $AB$  上的面积。上式表示, 均布荷载引起的  $Z$  值等于荷载集度乘以受载段的影响线面积。应用此式时, 要注意面积  $A_0$  的正负号。

**例 5-4** 图 5-10 所示为一简支梁, 全跨受均布荷载作用, 试利用截面  $C$  的剪力  $F_{QC}$  的影响线计算  $F_{QC}$  的数值。

**解**  $F_{QC}$  的影响线正号部分的面积以  $A_1$  表示, 负号部分的面积以  $A_2$  表示, 则

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 4 \text{ m} = \frac{4}{3} \text{ m}^{\text{①}}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times 2 \text{ m} = -\frac{1}{3} \text{ m}$$

由式(5-5)得

$$F_{QC} = q(A_1 + A_2) = 20 \text{ kN/m} \left( \frac{4}{3} \text{ m} - \frac{1}{3} \text{ m} \right) = 20 \text{ kN}$$

①  $F_{QC}$  的影响线(即影响系数图形)竖距无单位, 故其面积的单位为  $\text{m}$ 。下同。

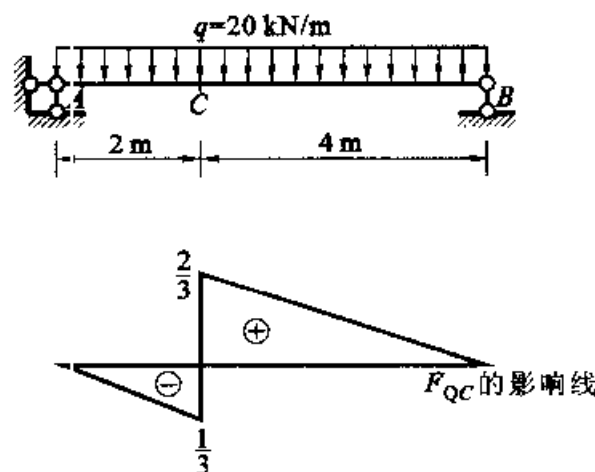


图 5-10

## 2. 求荷载的最不利位置

如果荷载移动到某个位置,使某量  $Z$  达到最大值,则此荷载位置称为最不利位置。影响线的一个重要作用,就是用来确定荷载的最不利位置。

对于一些简单情况,只需对影响线和荷载特性加以分析和判断,就可定出荷载的最不利位置。判断的一般原则是:应当把数量大、排列密的荷载放在影响线竖距较大的部位。下面举几个简单例子。

如果移动荷载是单个集中荷载,则最不利位置是这个集中荷载作用在影响线的竖距最大处。

如果移动荷载是一组集中荷载,则在最不利位置时,必有一个集中荷载作用在影响线的顶点(图 5-11)。

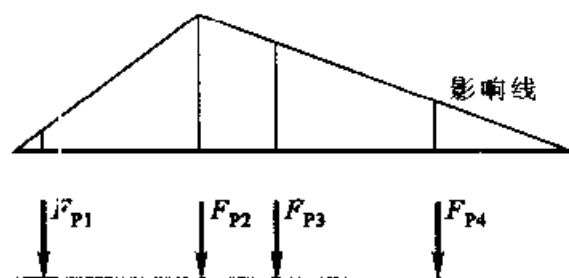


图 5-11

如果移动荷载是均布荷载,而且可以按任意方式分布,则其最不利位置是在影响线正号部分布满荷载(求最大正号值),或在负号部分布满荷载(求最大负号值)(图 5-12)。

**例 5-5** 图 5-13a 所示为两台吊车的轮压和轮距,试求吊车梁 AB 在截面 C 的最大正剪力。

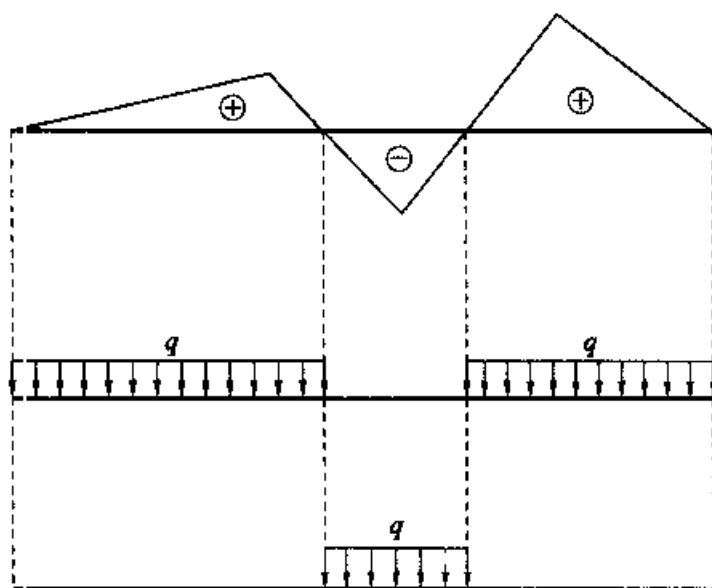


图 5-12

解 先作出  $F_{QC}$  的影响线(图 5-13c)

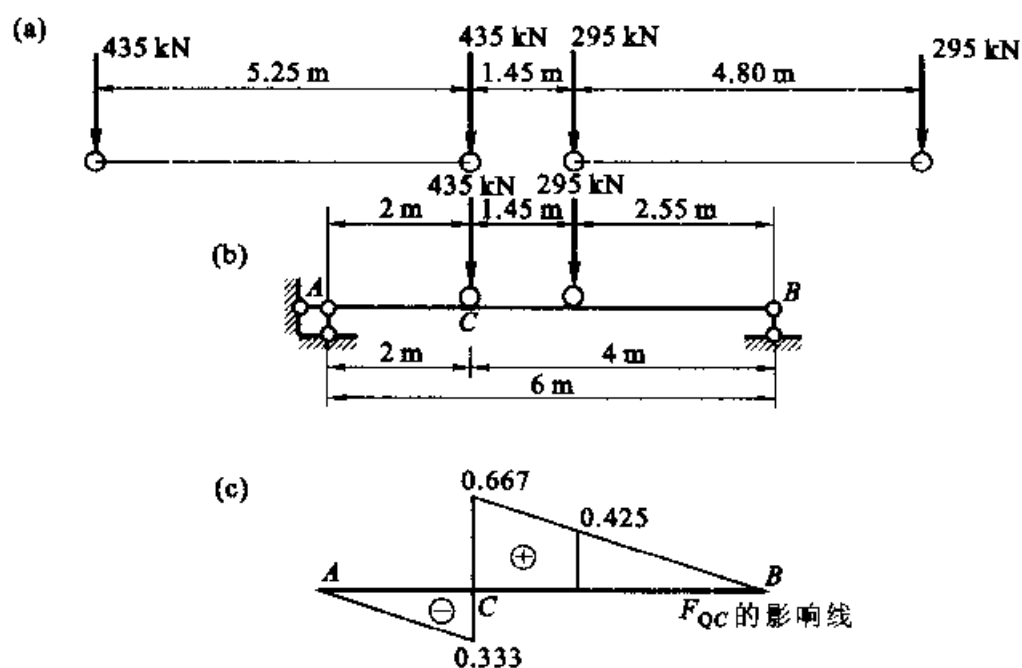


图 5-13

要使  $F_{QC}$  为最大正号剪力, 首先, 荷载应放在  $F_{QC}$  影响线的正号部分。其次, 应将排列较密的荷载(中间两个轮压)放在影响系数较大的部位(荷载 435 kN 放在 C 点的右侧)。图 5-13b 所示为荷载的最不利位置。由此求得

$$F_{QC_{max}} = F_{P1}y_1 + F_{P2}y_2 = 435 \text{ kN} \times 0.667 + 295 \text{ kN} \times 0.425 = 415 \text{ kN}$$

**例 5-6** 图 5-10 中的简支梁承受均布荷载  $q = 20 \text{ kN/m}$  作用, 荷载在梁上可以任意布置。试求  $F_{QC}$  的最大正号值和最大负号值。

**解** 由图 5-10 所示  $F_{QC}$  的影响线可知, 当荷载布满 CB 段时, 可得到最大正剪力  $F_{QC_{max}}$  为

$$F_{QC_{max}} = qA_{CB} = 20 \text{ kN/m} \times \frac{4}{3} \text{ m} = 26.7 \text{ kN}$$

当荷载布满 AC 段时, 可得到最大负剪力  $F_{QC_{min}}$  为

$$F_{QC_{min}} = qA_{AC} = 20 \text{ kN/m} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \text{ m} = -6.67 \text{ kN}$$

### 3. 临界位置的判定

如果移动荷载是一组集中荷载, 要确定某量  $Z$  的最不利荷载位置, 通常分成两步进行:

第一步, 求出使  $Z$  达到极值的荷载位置。这种荷载位置称为荷载的临界位置。

第二步, 从荷载的临界位置中选出荷载的最不利位置。也就是从  $Z$  的极大值中选出最大值, 从极小值中选出最小值。

下面以多边形影响线为例, 说明荷载临界位置的特点及其判定方法。

图 5-14a 所示为一组集中荷载, 荷载行动时其间距和数值保持不变。图 5-14b 所示为某量  $Z$  的影响线, 为一多边形。各边的倾角以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  表示 (其中  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是正的,  $\alpha_3$  是负的)。各边区间内荷载的合力用  $F_{R1}, F_{R2}, F_{R3}$  表示。

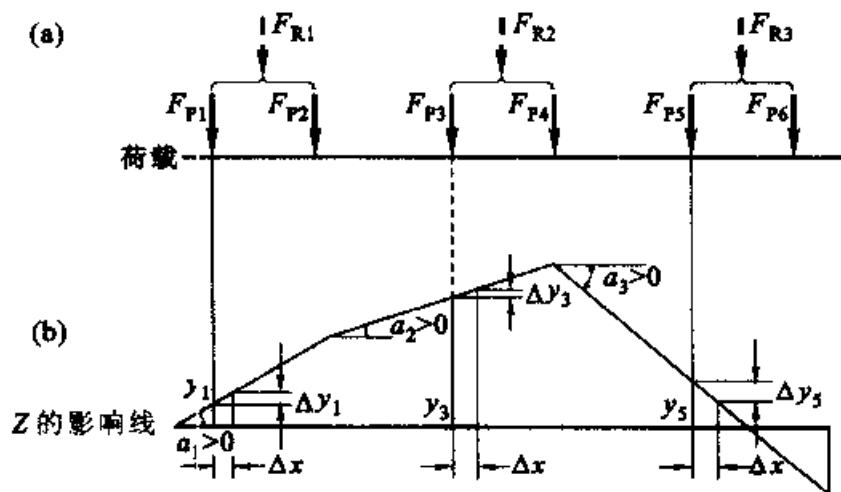


图 5-14

根据叠加原理, 并按各边区间内荷载的合力来计算, 则



$$Z = F_{R1} \bar{y}_1 + F_{R2} \bar{y}_2 + F_{R3} \bar{y}_3 = \sum_{i=1}^3 F_{Ri} \bar{y}_i$$

这里,  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$  分别是各段荷载合力  $F_{R1}, F_{R2}, F_{R3}$  对应的影响系数。

设荷载移动  $\Delta x$  (向右移动时  $\Delta x$  为正), 则竖距  $y_i$  的增量为

$$\Delta \bar{y}_i = \Delta x \cdot \tan \alpha_i$$

而  $Z$  的增量为

$$\Delta Z = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^3 F_{Ri} \tan \alpha_i$$

显然, 使  $Z$  成为极大值的临界位置, 必须满足如下条件: 荷载自临界位置向右或向左移动时,  $Z$  值均应减少或等于零, 即  $\Delta Z \leq 0$ , 即

$$\Delta x \cdot \sum_{i=1}^3 F_{Ri} \tan \alpha_i \leq 0 \quad (a)$$

式(a)还可分为两种情况:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时 (荷载稍向右移), } \sum F_{Ri} \tan \alpha_i \leq 0 \\ \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时 (荷载稍向左移), } \sum F_{Ri} \tan \alpha_i \geq 0 \end{array} \right\} \quad (5-6)$$

同理, 使  $Z$  成为极小值的临界位置, 必须满足如下条件:

$$\left. \begin{array}{l} \text{荷载稍向右移, } \sum F_{Ri} \tan \alpha_i \geq 0 \\ \text{荷载稍向左移, } \sum F_{Ri} \tan \alpha_i \leq 0 \end{array} \right\} \quad (5-7)$$

下面只讨论  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i \neq 0$  的情形。这时可得出如下结论: 如果  $Z$  为极值 (极大或极小), 则荷载稍向左、右移动时,  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$  必须变号。

下面分析在什么情况下  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$  才有可能变号。首先, 由于  $\tan \alpha_i$  是影响线中各段直线的斜率, 它是常数, 因此要使  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$  改变符号, 只有各段内的合力  $F_{Ri}$  改变数值才有可能。其次, 整个荷载稍向左、右移动时, 要使  $F_{Ri}$  改变数值, 则在临界位置中必须有一个集中荷载正好作用在影响线的顶点上 (例如, 设有集中力  $F_{Pcr}$  作用在第  $i$  段和第  $i+1$  段直线之间的顶点上, 那么, 当整个荷载稍向左移时,  $F_{Pcr}$  应计入  $F_{Ri}$ ; 当稍向右移时,  $F_{Pcr}$  应计入  $F_{Ri+1}$ )。总之, 当荷载稍向左、右移动时,  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$  变号的必要条件是一个集中荷载作用于影响线的顶点, 但这不是充分条件。

归结起来, 确定荷载最不利位置的步骤如下:

(1) 从荷载中选定一个集中力  $F_{Pcr}$ , 使它位于影响线的一个顶点上。

(2) 当  $F_{Pcr}$  在该顶点稍左或稍右时, 分别求  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$  的数值。如果  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$  变号 (或者由零变为非零), 则此荷载位置称为临界位置, 而荷载  $F_{Pcr}$  称为临界荷载。如果  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$  不变号, 则此荷载位置不是临界位置。

(3) 对每个临界位置可求出  $Z$  的一个极值, 然后从各种极值中选出最

大值或最小值。同时,也就确定了荷载的最不利位置。

例 5-7 图 5-15a 所示为一组移动荷载,图 5-15b 为某量  $Z$  的影响线。试求荷载最不利位置和  $Z$  的最大值。已知  $F_{P1} = F_{P2} = F_{P3} = F_{P4} = F_{P5} = 90 \text{ kN}$ ,  $q = 37.8 \text{ kN/m}$ 。

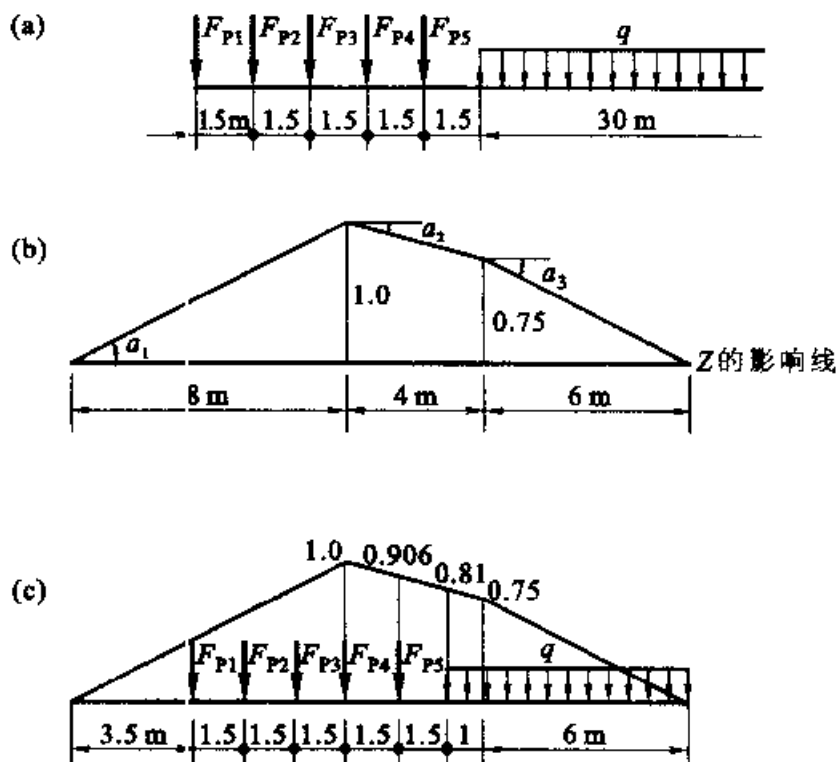


图 5-15

解 (1) 试将  $F_{P1}$  放在影响线的最高顶点。荷载布置情况如图 5-15c 所示。

(2) 试算  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$

由图 5-15b, 得

$$\tan \alpha_1 = \frac{1}{8}, \quad \tan \alpha_2 = -\frac{0.25}{4}, \quad \tan \alpha_3 = -\frac{0.75}{6}$$

如果整个荷载稍向右移, 各段荷载合力为

$$F_{R1} = 90 \text{ kN} \times 3 = 270 \text{ kN}$$

$$F_{R2} = 90 \text{ kN} \times 2 + 37.8 \text{ kN/m} \times 1 \text{ m} = 217.8 \text{ kN}$$

$$F_{R3} = 37.8 \text{ kN/m} \times 6 \text{ m} = 226.8 \text{ kN}$$

因此

$$\sum F_{Ri} \tan \alpha_i = 270 \text{ kN} \times \frac{1}{8} + 217.8 \text{ kN} \times \left( -\frac{0.25}{4} \right) +$$

$$226.8 \text{ kN} \times \left( -\frac{0.75}{6} \right) = -8.2 \text{ kN} < 0$$

如果稍向左移,则

$$F_{R1} = 90 \text{ kN} \times 4 = 360 \text{ kN}$$

$$F_{R2} = 90 \text{ kN} + 37.8 \text{ kN/m} \times 1 \text{ m} = 127.8 \text{ kN}$$

$$F_{R3} = 226.8 \text{ kN}$$

$$\sum F_{Ri} \tan \alpha_i = 360 \text{ kN} \times \frac{1}{8} + 127.8 \text{ kN} \times \left( -\frac{0.25}{4} \right),$$

$$226.8 \text{ kN} \times \left( -\frac{0.75}{6} \right) = 8.7 \text{ kN} > 0$$

由于  $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$  变号,故此位置是临界位置。

(3) 计算  $Z'$  值(参看图 5-15c 中标出的影响系数)

$$Z = 90 \text{ kN} \times \left( \frac{3.5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6.5}{8} + 1 \right) + 90 \text{ kN} \times 0.906 + 37.8 \text{ kN/m} \times \left( \frac{0.81+0.75}{2} \times 1 \text{ m} + \frac{0.75 \times 6 \text{ m}}{2} \right) = 455 \text{ kN}$$

当影响线为三角形时,临界位置的特点可以用更方便的形式表示出来。如图 5-16 所示,设  $Z$  的影响线为一三角形。如要求  $Z$  的极大值,则在临界

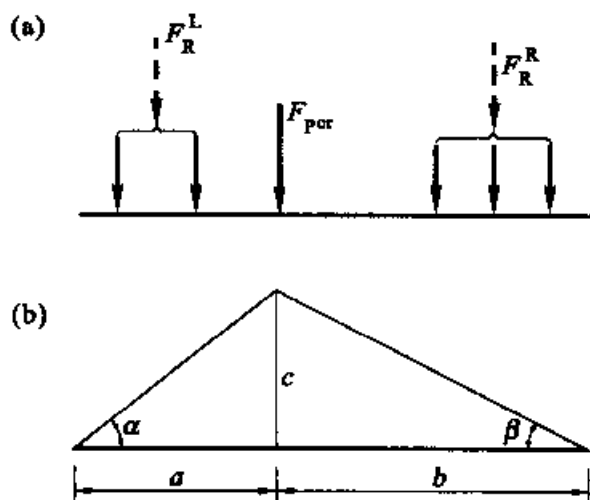


图 5-16

位置必有一荷载  $F_{\text{per}}$  正好在影响线的顶点上。以  $F_R^L$  表示  $F_{\text{per}}$  左方荷载的合力,  $F_R^R$  表示  $F_{\text{per}}$  右方荷载的合力,式(5-6)可写为

$$\text{荷载向右移, } F_R^L \tan \alpha - (F_{\text{per}} + F_R^R) \tan \beta \leq 0$$

$$\text{荷载向左移, } (F_R^L + F_{\text{per}}) \tan \alpha - F_R^R \tan \beta \geq 0$$

在上式中,代入  $\tan \alpha = \frac{c}{a}$ ,  $\tan \beta = \frac{c}{b}$ ,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_R^L}{a} &\leq \frac{F_{Per} + F_R^R}{b} \\ \frac{F_R^L + F_{Per}}{a} &\geq \frac{F_R^R}{b} \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

式(5-8)表明:临界位置的特点为有一集中荷载  $F_{Per}$  在影响线的顶点, 将  $F_{Per}$  计入哪一边(左边或右边), 则哪一边荷载的平均集度要大。

例 5-8 图 5-17a 所示为一梁 AB, 跨度为 40 m, 承受汽车车队荷载。试求截面 C 的最大弯矩。

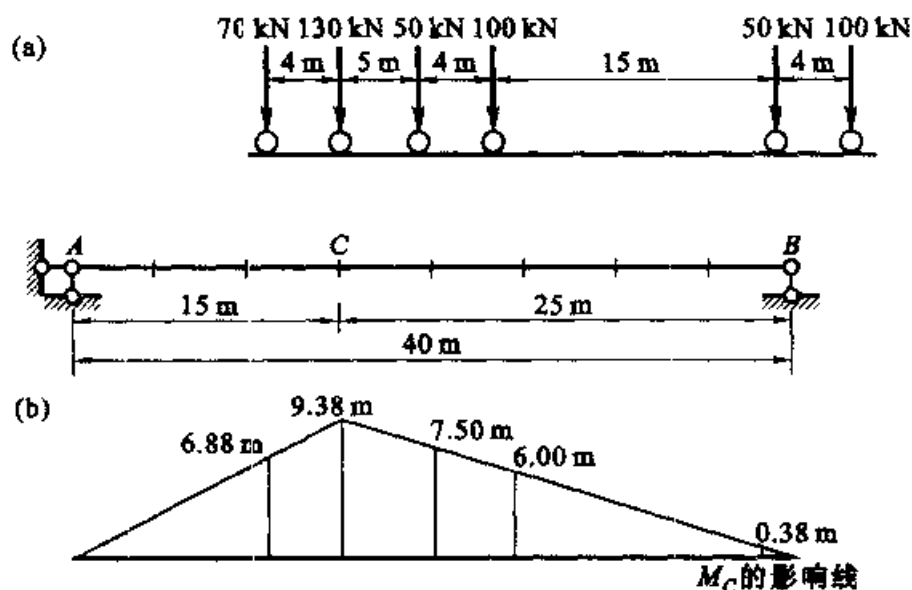


图 5-17

解  $M_C$  的影响线如图 5-17b 所示。

首先, 设汽车车队向左行, 将轴重 130 kN 置于 C 点, 用式(5-8)验算:

$$\begin{aligned} \frac{70 \text{ kN}}{15 \text{ m}} &< \frac{130 \text{ kN} + 200 \text{ kN}}{25 \text{ m}} \\ \frac{70 \text{ kN} + 130 \text{ kN}}{15 \text{ m}} &> \frac{200 \text{ kN}}{25 \text{ m}} \end{aligned}$$

由此可知, 所试位置是临界位置, 相应的  $M_C$  值为

$$\begin{aligned} M_C &= 70 \text{ kN} \times 6.88 \text{ m} + 130 \text{ kN} \times 9.38 \text{ m} + 50 \text{ kN} \times 7.50 \text{ m} + \\ &\quad 100 \text{ kN} \times 6.00 \text{ m} + 50 \text{ kN} \times 0.38 \text{ m} = 2694 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

其次, 假设汽车车队向右行, 仍将 130 kN 荷载置于 C 点(图 5-18), 用式(5-8)验算:

$$\frac{150 \text{ kN}}{15 \text{ m}} < \frac{130 \text{ kN} + 220 \text{ kN}}{25 \text{ m}}$$

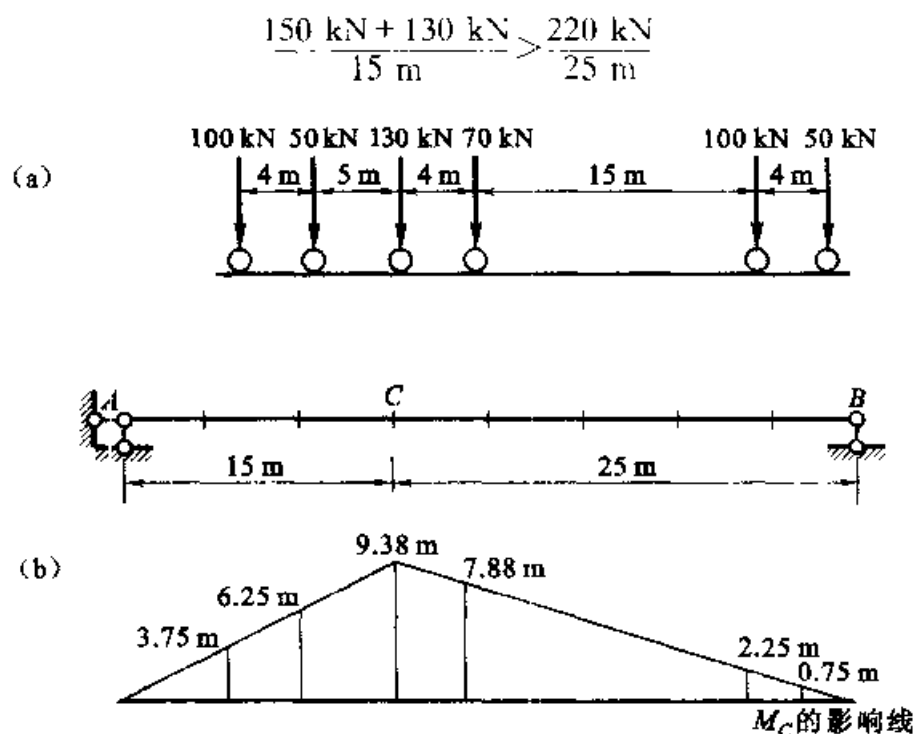


图 5-18

此位置亦为临界位置,相应的  $M_C$  值为

$$M_C = 100 \text{ kN} \times 3.75 \text{ m} + 50 \text{ kN} \times 6.25 \text{ m} + 130 \text{ kN} \times 9.38 \text{ m} + 70 \text{ kN} \times 7.88 \text{ m} + 100 \text{ kN} \times 2.25 \text{ m} + 50 \text{ kN} \times 0.75 \text{ m} = 2\,720 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

比较上列计算,可知图 5-18 所示荷载位置为最不利位置。 $M_C$  的最大值为  $2\,720 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

## § 5-7 铁路、公路的标准荷载制和换算荷载

由于铁路和公路上行驶的车辆种类繁多,载重情况复杂,在结构设计中不可能对每种情况都进行计算。因而,对这些荷载情况进行统计分析,并考虑将来发展的需要,制定了设计时使用的统一的标准荷载制

### 1. 铁路标准荷载

我国铁路桥涵设计使用中华人民共和国铁路标准活载,简称中—活载<sup>①</sup>,它包括普通活载和特种活载两种,如图 5-19 所示。设计时,哪一种活载产生的内力大就应取用哪一种。特种活载的轴压大,但轴数少,只在小跨

① 中—活载是中华人民共和国铁路标准活载的简称,是我国铁路桥涵设计使用的标准荷载。此外,还有公路桥涵设计使用的标准荷载。

度(例如跨度在 7 m 以下)的受弯构件设计中起控制作用;而在一般计算中常用普通活载进行设计。

普通活载代表一列火车的重量,前面 5 个集中力代表一台机车的 5 个轴重,30 m 长的均布荷载代表煤水车和与之联挂的第二台机车的平均重量,后面任意长的均布荷载代表后面列车的平均重量。使用这种荷载时,可以任意截取其中的一段,但不能变更轴距;所截取的荷载段可以由左端或右端进入桥梁,以确定其最不利位置。另外,应当注意,图 5-19 所示的中—活载是一个车道上的荷载,如果桥梁是单线的,且只有两根主梁,则每根主梁承受中—活载的一半。

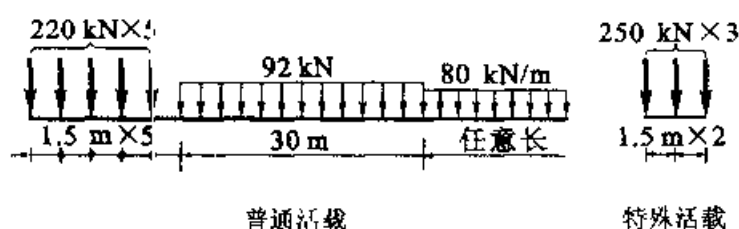


图 5-19

## 2. 公路标准荷载

我国公路桥涵设计使用的标准荷载分为计算荷载和验算荷载两种。计算荷载以汽车车队表示,有汽车—10 级、汽车—15 级、汽车—20 级和汽车—超 20 级四个等级,其纵向排列如图 5-20 所示。各车辆之间的距离可任意变更,但不得小于图示距离。每个车队中只有一辆重车,车的数目不限。验算荷载以履带车、平板挂车表示,详见有关规范<sup>[1]</sup>。

## 3. 换算荷载

在移动荷载作用下求结构上某量的最大(最小)值时,通常需先确定荷载最不利位置,然后才能算出相应的量值。这一计算过程是很麻烦的。在实际工作中,对于铁路和公路的标准荷载,若影响线的形状是三角形,就可以利用制成的换算荷载表来简化计算。

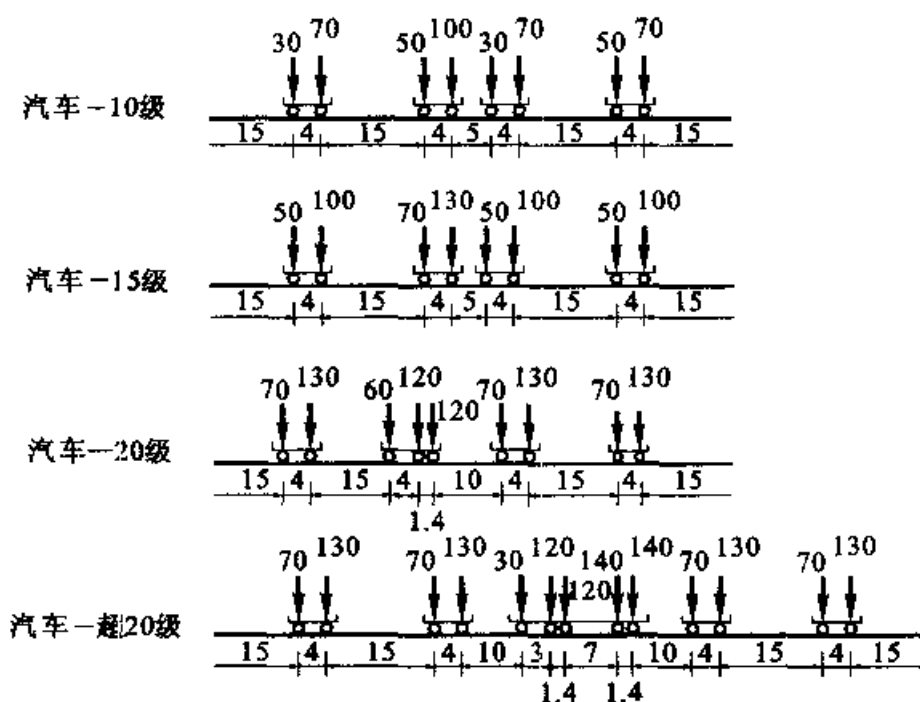
换算荷载  $K$  是一种均布荷载,它所产生的某一量值,与实际移动荷载产生的该量值最大值  $Z_{\max}$  相等。即

$$KA_0 = Z_{\max} \quad (a)$$

式中  $A_0$  为  $Z$  影响线的面积。

由式(a)可知,该移动荷载的换算荷载为

[1] 《公路工程技术标准》,人民交通出版社,1989 年。



(重量单位 kN, 长度单位 m)

图 5-20

$$K = \frac{Z_{\max}}{A_0} \quad (b)$$

换算荷载的数值与移动荷载及影响线的形状有关。但对长度相等、顶点位置相同的影响线,换算荷载是相等的。设图 5-21 所示为符合上述条件的两条影响线  $y_1$  和  $y_2$ 。由于  $y_2 = n y_1$ , 所以  $A_2 = n A_1$ 。于是,有

$$K_2 = \frac{\sum P y_2}{A_2} = \frac{n \sum P y_1}{n A_1} = \frac{\sum P y_1}{A_1} = K_1$$

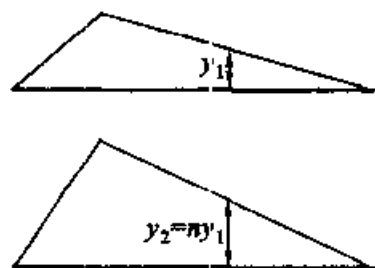


图 5-21

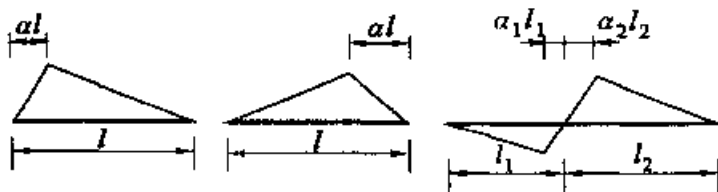


图 5-22

以下表 5-1 和表 5-2 中列出了根据三角形影响线编制的我国现行铁路、公路标准荷载的换算荷载。使用时应注意:

- (1) 加载长度  $l$  (表 5-1) 指同符号影响长度 (图 5-22)。

(2) 影响线顶点位置用顶点至较近零点间水平距离与底边之比  $\alpha$  表示,  $\alpha$  的值为  $0 \sim 0.5$  (图 5-22)。

(3) 当  $l$  或  $\alpha$  值在表列数值之间时,  $K$  值可按直线内插法确定。

**例 5-9** 利用换算荷载试计算中—活载作用下图 5-23a 所示简支梁截面  $C$  的最大(小)剪力和弯矩。

**解** 作出  $F_{QC}$ 、 $M_C$  的影响线, 如图 5-23b 所示。

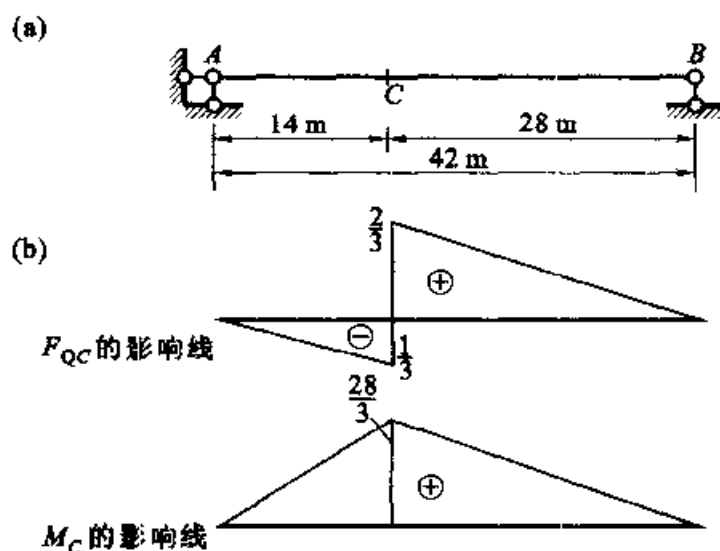


图 5-23

由  $F_{QC}$  影响线的正号部分求  $(F_{QC})_{\max}$  时,

$$l = 28 \text{ m}, \quad \alpha = 0$$

先由表 5-1 查出  $\alpha = 0$  时,

$$l = 25 \text{ m}, \quad K = 122.5 \text{ kN/m}$$

$$l = 30 \text{ m}, \quad K = 117.8 \text{ kN/m}$$

按直线内插法求得

$$\begin{aligned} K &= 117.8 \text{ kN/m} + (122.5 \text{ kN/m} - 117.8 \text{ kN/m}) \frac{30 \text{ m} - 28 \text{ m}}{30 \text{ m} - 25 \text{ m}} \\ &= 119.7 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

表 5-1 中—活载的换算荷载

单位 kN/m(每线)

加载长度 $l/\text{m}$	影响线最大纵距位置 $\alpha$				
	0(端部)	1/8	1/4	3/8	1/2
1	500.0	500.0	500.0	500.0	500.0
2	312.5	285.7	250.0	250.0	250.0
3	250.0	238.1	222.2	200.0	187.5



续表

加载长度 $l/m$	影响线最大纵距位置 $\alpha$				
	0(端部)	1/8	1/4	3/8	1/2
4	234.4	214.3	187.5	175.0	187.5
5	210.0	197.1	180.0	172.0	180.0
6	187.5	178.6	166.7	161.1	166.7
7	179.6	161.8	153.1	150.9	153.1
8	172.2	157.1	151.3	148.5	151.3
9	165.5	151.5	147.5	144.5	146.7
10	159.8	146.2	143.6	140.0	141.3
12	150.4	137.5	136.0	133.9	131.2
14	143.3	130.8	129.4	127.6	125.0
16	137.7	125.5	123.8	121.9	119.4
18	133.2	122.8	120.3	117.3	114.2
20	129.4	120.3	117.4	114.2	110.7
24	123.7	115.7	112.2	108.3	104.0
25	122.5	114.7	111.0	107.0	102.5
30	117.8	110.3	106.6	102.4	99.7
32	116.2	108.9	105.3	100.8	98.4
35	114.3	106.9	103.3	99.1	97.3
40	111.6	104.8	100.8	97.4	96.1
45	109.2	102.9	98.8	96.2	95.1
48	107.9	101.8	97.6	95.5	94.5
50	107.1	101.1	96.8	95.0	94.1
60	103.6	97.8	94.2	92.8	91.9
64	102.4	96.8	93.4	92.0	91.1
70	100.8	95.4	92.2	90.9	89.9
80	98.6	93.3	90.6	89.3	88.2
90	96.9	91.6	89.2	88.0	86.8
100	95.4	90.2	88.1	86.9	85.5
110	94.1	89.0	87.6	85.9	84.6
120	93.1	88.1	86.1	85.1	83.6
140	91.4	86.7	85.1	83.8	82.8
160	90.0	85.7	84.2	82.9	82.2
180	89.0	84.9	83.4	82.3	81.7
200	88.1	84.2	82.8	81.8	81.4

表 5-2 汽车 - 10 级的换算荷载表

单位 kN/m(每车列)

跨径 或 荷载 长度 /m	影响线顶点位置 $a$									
	标 准 车 列					无 加 重 车 车 列				
	0 (端部)	1/8	1/4	3/8	$\frac{1}{2}$ (跨中)	0 (端部)	1/8	1/4	3/8	$\frac{1}{2}$ (跨中)
1	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0	140.0	140.0	140.0	140.0	140.0
2	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	70.0	70.0	70.0	70.0	70.0
3	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7	46.7	46.7	46.7	46.7	46.7
4	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	35.0	35.0	35.0	35.0	35.0
6	38.9	37.3	35.2	33.3	33.3	26.7	25.7	24.4	23.3	23.3
8	31.3	30.4	29.2	27.5	25.0	21.3	20.7	20.0	19.0	17.5
10	26.0	25.4	24.7	23.6	22.0	17.6	17.3	16.8	16.2	15.2
13	21.5	20.4	19.9	19.3	19.4	14.0	13.7	13.5	13.1	12.5
16	18.9	18.0	17.9	17.3	17.0	11.6	11.4	11.3	11.0	10.6
20	17.1	16.0	15.8	16.1	15.2	9.8	9.3	9.2	9.0	8.8
26	14.6	13.9	13.8	14.0	13.4	9.1	8.2	7.4	7.1	7.0
30	13.3	12.7	12.6	12.7	12.3	8.6	7.9	7.0	6.4	6.1
35	12.5	11.5	11.4	11.4	11.1	7.9	7.4	6.8	6.3	5.6
40	11.8	10.8	10.7	10.5	10.2	7.5	6.9	6.4	6.0	5.4
45	11.0	10.3	10.2	10.0	9.7	7.3	6.6	6.1	5.8	5.6
50	10.5	9.7	9.7	9.5	9.3	7.3	6.5	5.8	5.5	5.1
60	9.8	9.0	8.7	8.7	8.7	6.7	6.2	5.7	5.5	5.6

汽车 - 15 级的换算荷载

单位 kN/m(每车列)

1	260.0	260.0	260.0	260.0	260.0	200.0	200.0	200.0	200.0	200.0
2	130.0	130.0	130.0	130.0	130.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
3	86.7	86.7	86.7	86.7	86.7	66.7	66.7	66.7	66.7	66.7
4	65.0	65.0	65.0	65.0	65.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0
6	51.1	48.9	45.9	43.3	43.3	38.9	37.3	35.2	33.3	33.3
8	41.3	40.0	38.3	36.0	32.5	31.3	30.4	29.2	27.5	25.0
10	34.4	33.6	32.5	31.0	28.8	26.0	25.4	24.7	23.6	22.0
13	29.5	27.5	26.4	25.5	25.9	20.7	20.4	19.9	19.3	18.3
16	26.0	24.7	23.0	23.5	23.0	17.2	17.0	16.7	16.3	15.6
20	23.7	22.0	21.7	22.1	20.7	14.5	13.9	13.7	13.4	13.0
26	20.2	19.3	19.1	19.3	18.5	13.5	12.1	10.9	10.6	10.4
30	18.7	17.6	17.4	17.6	17.0	12.8	11.7	10.4	9.5	9.1
35	17.7	16.0	15.9	15.8	15.3	11.8	11.1	10.1	9.3	8.3
40	16.7	15.2	15.0	14.5	14.2	11.2	10.4	9.6	9.0	8.1
45	15.6	14.5	14.3	13.9	13.4	11.0	9.8	9.1	8.6	8.4
50	14.9	13.7	13.6	13.3	12.9	10.7	9.6	8.7	8.2	8.6
60	13.9	12.8	12.3	12.2	12.2	10.1	9.2	8.5	8.2	8.4

汽车-20级的换算荷载

单位 kN/m(每车列)

跨径 或 荷载 长度 $l/\text{m}$	影响线顶点位置 $\alpha$									
	标准车列					无加重车列				
	0 (端部)	1/8	1/4	3/8	$\frac{1}{2}$ (跨中)	0 (端部)	1/8	1/4	3/8	$\frac{1}{2}$ (跨中)
1	260.0	260.0	260.0	260.0	260.0	260.0	260.0	260.0	260.0	260.0
2	156.0	144.0	130.0	130.0	130.0	130.0	130.0	130.0	130.0	130.0
3	122.7	117.3	110.2	100.0	86.7	86.7	86.7	86.7	86.7	86.7
4	99.0	96.0	92.0	86.4	78.0	65.0	65.0	65.0	65.0	65.0
6	72.7	69.3	67.6	65.1	61.3	51.1	48.9	45.9	43.3	43.3
8	59.6	57.4	54.5	51.6	49.5	41.3	40.0	38.3	36.0	32.5
10	50.2	48.8	46.9	44.3	43.7	34.2	33.6	32.5	31.0	28.8
13	40.3	39.5	38.4	36.3	36.0	27.5	27.0	26.4	25.5	24.1
16	33.7	33.1	32.4	31.4	31.1	22.8	22.5	22.1	21.5	20.6
20	29.2	27.2	26.7	26.1	25.9	19.3	18.4	18.1	17.8	17.2
26	25.1	23.8	23.9	22.6	21.4	17.9	16.1	14.5	14.1	13.7
30	22.7	21.8	22.4	21.5	19.9	17.0	15.6	13.9	12.6	12.1
35	20.9	19.9	20.5	19.8	18.7	15.7	14.7	13.4	12.4	11.1
40	20.0	18.9	18.3	17.5	14.9	14.9	13.8	12.7	12.0	10.8
45	19.0	18.4	17.7	16.9	16.8	14.6	13.1	12.0	11.5	11.2
50	18.0	17.7	17.0	16.4	16.3	14.2	12.8	11.6	11.0	11.4
60	16.9	16.3	15.7	15.3	15.2	13.4	12.2	11.3	10.9	11.2

于是,

$$(F_{QE})_{\max} = 119.7 \text{ kN/m} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 28 \text{ m} = 1117 \text{ kN}$$

由  $M_C$  影响线求  $(M_C)_{\max}$  时,  $l = 42 \text{ m}$ ,  $\alpha = \frac{14}{42} = 0.333$ 。这时可多次用内插法计算如下:

由表 5-1 查得  $l = 40 \text{ m}$  时  $K_{0.25} = 100.8 \text{ kN/m}$  和  $K_{0.375} = 97.4 \text{ kN/m}$ , 由内插法求得

$$l = 40 \text{ m}, \quad K_{0.333} = 97.4 \text{ kN/m} + (100.8 \text{ kN/m} - 97.4 \text{ kN/m}) \times \frac{0.375\text{m} - 0.333\text{m}}{0.375\text{m} - 0.25\text{m}} = 98.5 \text{ kN/m}$$

再由表 5-1 查得  $l = 45 \text{ m}$  时,  $K_{0.25} = 98.8 \text{ kN/m}$  和  $K_{0.375} = 96.2 \text{ kN/m}$ , 由内插法求得

$$l = 45 \text{ m}, \quad K_{0.333} = 96.2 \text{ kN/m} + (98.8 \text{ kN/m} - 96.2 \text{ kN/m}) \times \frac{0.375\text{m} - 0.333\text{m}}{0.375\text{m} - 0.25\text{m}} = 97.1 \text{ kN/m}$$

根据以上内插法结果,再用内插法求得

$$l = 42 \text{ m}, \quad K_{0.333} = 97.1 \text{ kN/m} + (98.5 \text{ kN/m} - 97.1 \text{ kN/m}) \times$$

$$\frac{45 \text{ m} - 42 \text{ m}}{45 \text{ m} - 40 \text{ m}} = 97.9 \text{ kN/m}$$

于是,求得

$$(M_c)_{\max} = 97.9 \text{ kN/m} \times \frac{1}{2} \times \frac{28}{3} \text{ m} \times 42 \text{ m} = 19\,188 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

### \* § 5-8 简支梁的包络图和绝对最大弯矩

在设计承受移动荷载的结构时,必须求出每一截面内力的最大值(最大正值和最大负值)。连接各截面内力最大值的曲线称为内力的包络图。包络图是结构设计中重要的工具,在吊车梁、楼盖的连续梁和桥梁的设计中应用很多。

下面以简支梁在单个集中荷载  $F_P$  作用下的弯矩包络图为例加以说明。

当单个集中荷载在梁上移动时,某个截面  $C$  的弯矩影响线如图 5-24a 所示。由影响线可以断定,当荷载正好作用于  $C$  时,  $M_C$  为最大值:  $M_C =$

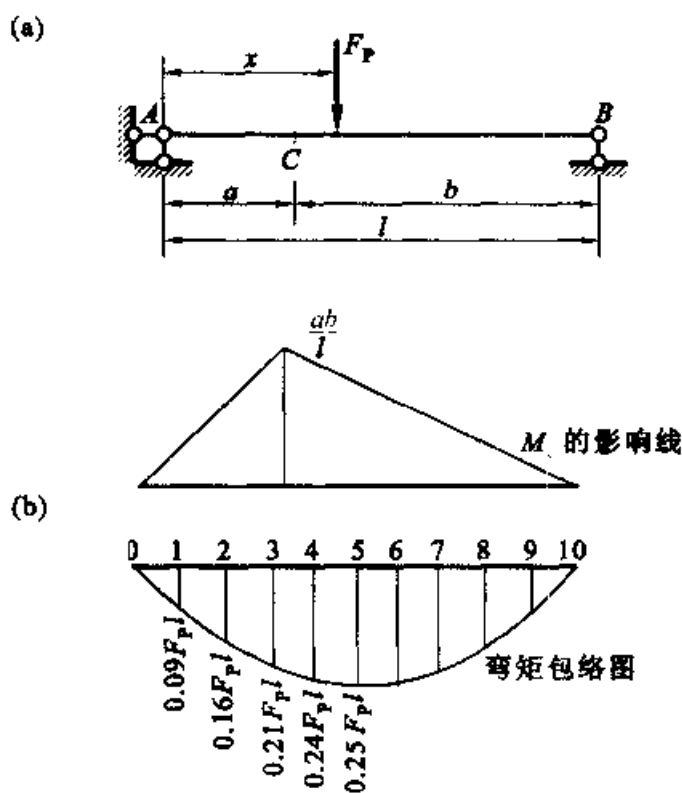


图 5-24

$\frac{ab}{l}F_P$ 。由此可见,荷载由 A 向 B 移动时,只要逐个算出荷载作用点处的截面弯矩,便可以得到弯矩包络图。我们选一系列截面(把梁分成十等分),对每一截面利用图 5-24a 中  $M_C$  影响线求出其最大弯矩。例如,在截面 4 处,

$$a = 0.4l, \quad b = 0.6l, \quad (M_4)_{\max} = 0.24F_P l$$

根据逐点算出的最大弯矩值而连成的图形即为弯矩包络图(图 5-24b)。弯矩包络图表示出各截面的弯矩可能变化的范围。

图 5-25a 所示为一吊车梁,跨度为 12 m。图 5-25b 所示为此吊车梁所受的移动荷载。两台吊车传来的最大轮压为 82 kN,轮距为 3.5 m,两台吊车并行的最小间距为 1.5 m。

将吊车梁分为十等分,在吊车荷载作用下逐个求出各截面的最大弯矩,即可画出弯矩包络图,如图 5-25c 所示。

同样,还可求出剪力包络图,如图 5-25d 所示。

包络图表示各截面内力变化的极值,在设计中是十分重要的。弯矩的包络图中最高的竖距称为绝对最大弯矩(图 5-25c 中为 578 kN·m)。它代表在一定移动荷载作用下梁内可能出现的弯矩最大值。下面介绍简支梁在一组集中荷载作用下绝对最大弯矩的求法。

图 5-26 所示为一简支梁。移动荷载  $F_{P1}, \dots, F_{Pn}$  的数量和间距不变,在梁上移动。试求梁内所能发生的最大弯矩,即绝对最大弯矩。

荷载在任一位置时,梁的弯矩图的顶点永远发生在集中荷载下面。因此,可以断定,绝对最大弯矩必定发生在某一集中荷载的作用点。

试取一个集中荷载  $F_{Pcr}$ ,研究它的作用点的弯矩何时成为最大,以  $x$  表示  $F_{Pcr}$  与 A 点的距离, $a$  表示梁上荷载的合力  $F_R$  与  $F_{Pcr}$  的作用线之间的距离。由  $\sum M_B = 0$ ,得

$$F_{RA} = R \frac{l-x-a}{l}$$

$F_{Pcr}$  作用点的弯矩为

$$M = F_{RA}x - M_{cr} = F_R \frac{l-x-a}{l}x - M_{cr}$$

这里, $M_{cr}$ 表示  $F_{Pcr}$  左面的荷载对  $F_{Pcr}$  作用点的力矩之和,是与  $x$  无关的常数。由

$$\frac{dM}{dx} = 0$$

得

$$\frac{F_R}{l}(l-2x-a) = 0$$

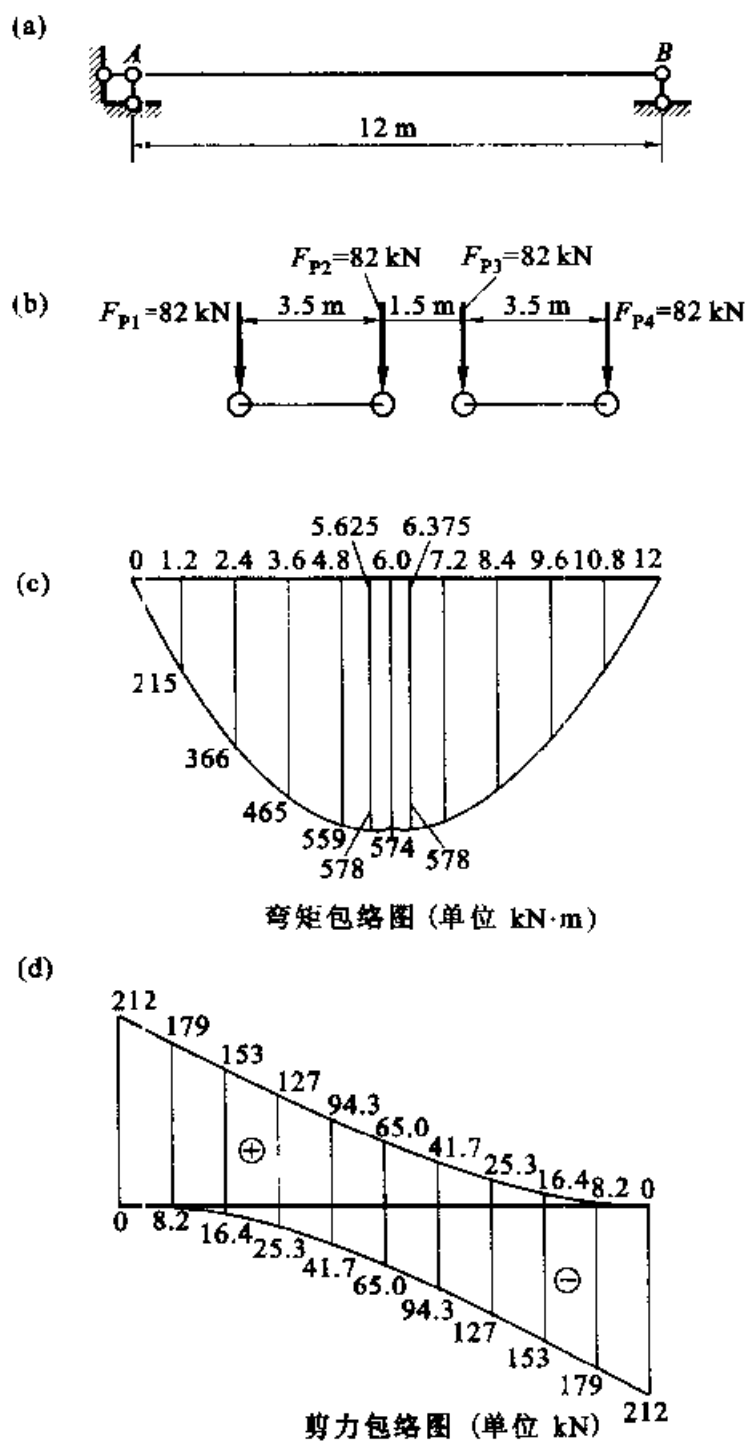


图 5-25

即

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \quad (5-9)$$

上式说明,  $F_{Pr}$  作用点的弯矩为最大时, 梁的中线正好平分  $F_{Pr}$  与  $F_R$  之间的距离。此时最大弯矩为

$$M_{\max} = F_R \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{l} M_{\text{总}} \quad (5-10)$$

应用公式(5-9)和(5-10)时,须注意  $R$  是梁上实有荷载的合力。安排  $F_{\text{Pcr}}$  与  $F_R$  的位置时,有些荷载可能来到梁上或者离开梁上。这时应重新计算合力  $F_R$  的数值和位置

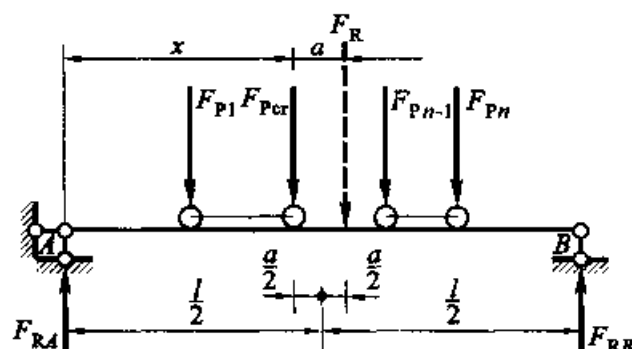


图 5-26

比较各个荷载作用点的最大弯矩,选择其中最大的一个,就是绝对最大弯矩,实际计算中,常常可以估计出哪个荷载或那几个荷载需要考虑。

**例 5-10** 试求图 5-25a 所示吊车梁的绝对最大弯矩。

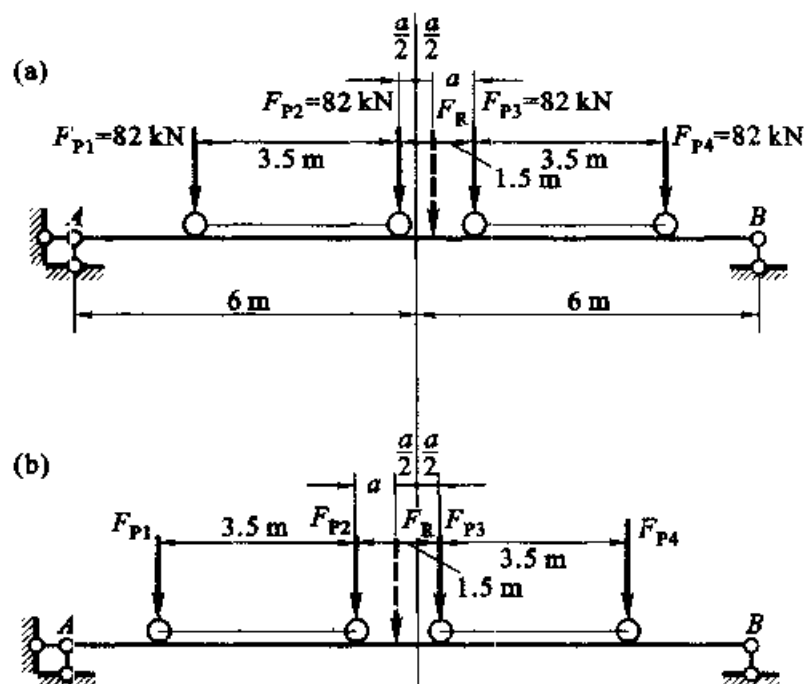


图 5-27

**解** 不难看出,绝对最大弯矩将发生在荷载  $F_{P2}$  或  $F_{P3}$  下面的截面。

先求荷载  $F_{P2}$  下面的最大弯矩。合力  $F_R = 4 \times 82 \text{ kN} = 328 \text{ kN}$ , 合力作

用线在  $F_{P2}$  与  $F_{P3}$  中间。此时  $a = 0.75 \text{ m}$  (图 5-27a),  $F_{P2}$  距跨中  $0.375 \text{ m}$ 。由式(5-10),

$$M_{\max} = F_R \left( \frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{l} = M_L = 578 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

再求荷载  $F_{P3}$  下面的最大弯矩。此时,  $a = -0.75 \text{ m}$  (图 5-27b)。由式(5-10),

$$M_{\max} = 328 \text{ kN} \cdot \left[ \frac{12 \text{ m}}{2} - \left( \frac{-0.75 \text{ m}}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{12 \text{ m}}$$

$$(82 \text{ kN} \times 5 \text{ m} + 82 \text{ kN} \times 1.5 \text{ m}) = 578 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由于对称, 本题在  $F_{P2}$  和  $F_{P3}$  下的最大弯矩相等。因此, 绝对最大弯矩即为  $578 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。此值即图 5-25c 中弯矩包络图中的最大竖距。

## § 5-9 用求解器计算结构的影响线

基于机动法、静定结构影响线的计算可以归结为几何可变体系的刚体位移(机构运动)模态的计算, 因此可以利用求解器中几何构造问题的自动求解功能间接地计算影响线。求解器中专门设置了影响线的求解功能, 可以直接计算一般平面结构的影响线。

本节只讨论静定结构影响线的求解器计算方法。

用求解器计算静定结构的影响线时, 用户首先要输入一个静定结构, 然后要输入计算影响线所需要的其他控制参数。

### 1. 输入影响线求解参数

求解器可以求解任意平面结构的任意一个单元内任一截面内力的影响线。单位荷载可以是单位竖向力、水平力或单位力矩; 截面内力可以是轴力、剪力或弯矩。

在编辑器中依次选择菜单: “命令”、“其他控制参数”、“影响线”, 便可打开“影响线求解参数”对话框, 从中可以看到“单位荷载”和“截面内力”两个数据栏。在“单位荷载”栏中, 可以按需要选择单位荷载的“类型”和“方向”; 在截面内力栏中可以选择欲求影响线的截面内力的类型、所在单元及其截面的位置。

输入数据后单击“应用”按钮将命令写到命令文档中, 然后单击“关闭”退出对话框。以下用具体的例题来说明。

### 2. 例题

**例 5-11** 试求解图 4-24a 中结构在竖向荷载下杆件(2)和(6)中点弯矩、剪力和轴力的影响线。



**解** 先输入结构体系,输入的数据文档见图 4-24。在该命令文档中 END 命令之前,插入一空行,以备插入命令用。下面以杆件(2)中点的弯矩影响线为例,进一步说明做法。

按上一节做法打开“影响线求解参数”对话框。在单位荷载数据栏中,类型选为“力”,方向选“向下”。在截面内力框中,单元码选 2,距杆端 1 选“1/2”L 处,内力类型选“弯矩”。单击“应用”、“关闭”后,可在命令文档中见到命令行:IL, -2,2,1/2,3。其中,关键词 IL 代表影响线缩写;-2 代表单位荷载沿  $y$  轴方向(竖直的),指向  $y$  轴的反方向(即向下);后面的 2 代表第 2 个单元;1/2 表示截面位置;3 代表弯矩。杆件(2)和(6)中点弯矩、剪力和轴力的影响线计算所需的命令行分别为:

杆件(2)	杆件(6)
IL, -2,2,1/2,3	IL, -2,6,1/2,3
IL, -2,2,1/2,2	IL, -2,2,1/2,2
IL, -2,2,1/2,1	IL, -2,6,1/2,1

注意,求解器目前的版本只能接受一条命令,如果像上面一样输入了 3 条命令,则只接受最后一条命令。

为计算影响线,依次选菜单:“求解”、“影响线”。在打开的“影响线”对话框的最上部,可以看到影响线的一些参数。在“影响线显示”数据栏里,选“结构”后,便可在观览器中看到相应的影响线的图形,具体的数值可以从“单元影响线分析”数据框中获得。各影响线图形如图 5-28 和图 5-29 所示。

下面再讨论如何使用影响线图形

影响线图形中,任一杆件中任一点的纵距,表示单位荷载作用在该点时指定截面处的内力值。影响线的纵距值的量取规则为

荷载类型	标距方向	正负号
竖直荷载	整体竖直方向	正值标在上方
水平荷载	整体水平方向	正值标在左方
单位力矩	杆件垂直方向	正值标在局部坐标 $y$ 的正方向

以杆件(2)中点截面轴力的影响线为例(图 5-28c),当单位荷载作用在上面的梁上时,作用在中间的铰结点处时指定截面轴力最大(受拉),而当单位荷载作用在下面的水平杆件上时,作用在竖杆处时指定截面轴力最大(也是受拉)。

可以看出,求解器给出的影响线图形是一个完整的图形,包括了单位荷

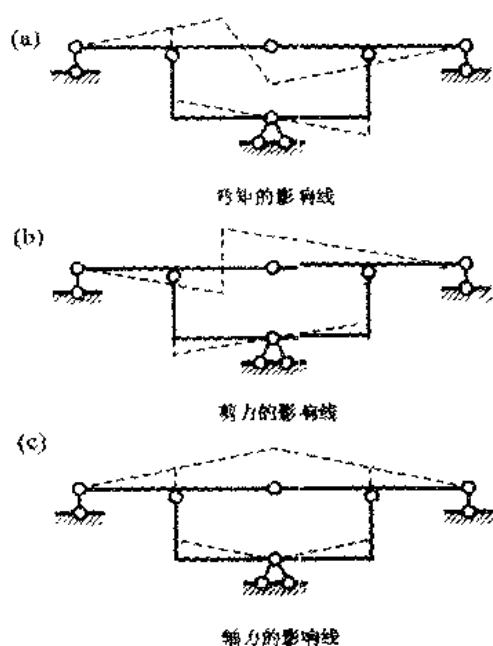


图 5-28 杆件(2)的影响线

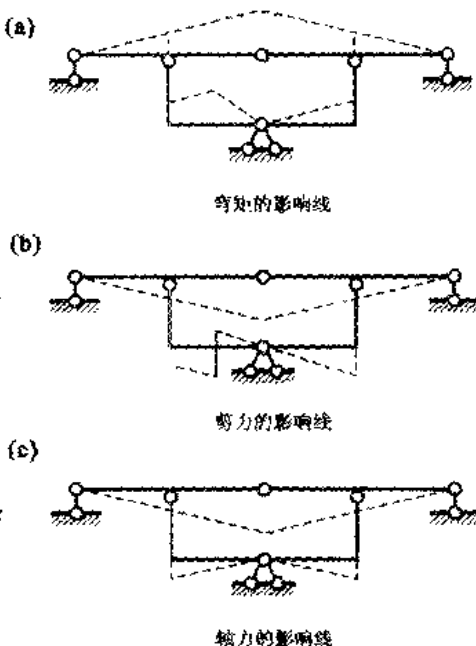


图 5-29 杆件(6)的影响线

线作用在结构任一杆件上的指定截面内力的影响线。

**例 5-12** 试求简图 5-4a 中结构截面  $D$  处弯矩的影响线。

**解** 为了简单,取量纲一的量  $d=1$ 。这是一个间接荷载作用下的结构影响线问题。用求解器求解时,可以建立一个等效的计算模型,如图 5-30a 所示。输入的数据命令从略,计算出来的影响线形状如图 5-30b 所示。注意,由于单位荷载作用在上层的水平杆件上,因此应取上层杆件的图形作为

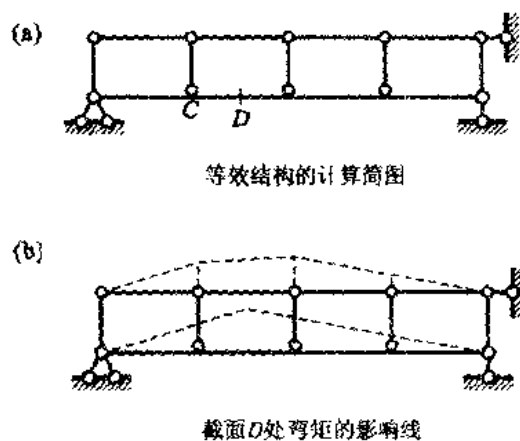


图 5-30 间接荷载作用下的影响线

影响线图,而下面的图形是单位荷载作用在梁上时的影响线。

### § 5-10 小 结

本章主要讨论静定内力(反力)的影响线的作法和应用。关于超静定内力(反力)的影响线将在第9章中讨论。

影响线是影响系数与荷载位置间的关系曲线,它与内力分布图是有区别的。内力图是描述在固定荷载作用下,内力沿结构各个截面的分布;而影响线是描述单位集中荷载在不同位置作用时对结构中某固定处某量的影响。可以通过简支梁内力图与影响线的比较讨论加深对影响线概念的理解。

可应用静力法和机动法两种方法来绘制影响线。静力法作静定内力(反力)的影响线时是取隔离体运用平衡方程来求,但应将荷载位置的坐标看作变量。因此,如何选择合适的平衡方程和计算次序,仍应根据结构的几何构造来定。但是,列平衡方程时要特别注意该方程的适用范围,即对于哪些荷载位置是适用的。一般来说,应该将荷载作用范围分成几段,对不同区段分别列影响系数方程。静力法是绘制影响线的最基本的方法,应正确地掌握和运用。

本章中习题5-1、5-2、5-3可供辅导课选用参考。

机动法作静定内力(反力)影响线,是虚功原理在静力问题中的应用,其基本公式为

$$\bar{Z}(x) = -\frac{1}{\delta_Z} \delta_P(x)$$

在作 $Z$ 的影响线时,应从结构中撤去与 $Z$ 相应的约束。在这样形成的机构中,其荷载作用点的竖向位移图 $\delta_P$ 即与 $Z$ 的影响线成正比。必须正确了解 $\delta_Z$ 和 $\delta_P$ 的意义, $\delta_Z$ 是与 $Z$ 相对应的,而 $\delta_P$ 则是与荷载的作用点相对应的。对于刚体的 $\delta_P$ 图的特性应清楚了解,从而加深对静定内力(反力)的影响线为直线图形的特性的理解。学习机动法,应着重原理部分,并能运用它来绘制较简单的影响线。

习题5-4、5-5可供辅导课选用参考。

利用叠加原理,根据影响线可以确定各种荷载作用时的影响值,并用以确定移动荷载的不利位置。对于直线图形构成的影响线,为了确定荷载的不利位置,要掌握如何判定临界荷载和临界位置。

## § 5-11 思考与讨论

### § 5-1 思考题

5-1 影响线的含义是什么? 它的  $x$  和  $y$  坐标各代表什么物理意义?

5-2 如果图 5-1a 中梁承受全跨均布荷载  $q$ , 能否利用图 5-1b 所示  $F_{K0}$  的影响线计算此均布荷载作用下的支座反力  $F_{RB}$ ?

### § 5-2 思考题

5-3 图 5-2d 的剪力影响线的左、右直线是平行的, 在  $C$  点有突变, 它们代表什么含义?

5-4 在什么情况下, 影响线的方程必须分段求出?

5-5 只有在叠加原理成立的条件下, 才能引入影响线的概念, 对吗? 由此说明影响线的应用条件

### § 5-4 思考题

5-6 桁架的影响线有什么特点?

5-7 为什么作桁架影响线时, 要注意区分桁架是下弦承载还是上弦承载? 在什么情况下两种承载方式的影响线彼此相同。

### § 5-5 思考题

5-8 在用机动法作影响线时, 说明式(5-3)中函数  $\delta_P(x)$  的定义。在荷载直接作用和荷载由结点传递两种情况下,  $\delta_P$  有何区别? 在上弦承载桁架和下弦承载桁架中,  $\delta_P$  有何区别?

5-9 说明为什么静定多跨梁附属部分的内力(或支座反力)影响线在基本部分上的线段与基线重合?

### § 5-6 思考题

5-10 试说明在一组移动的集中荷载作用下, 要确定某量  $Z$  的最不利荷载位置时用到的“临界位置”和“临界荷载”的含义。

### 综合思考讨论题

以下各个问题可以进行讨论或用来自学总结:

5-11 影响线和内力图从图形的形状上看有些情况下是相似的, 但实质上它们是完全不同的两个问题。读者可以从它们的含义、单位、作法等方面对二者的不同进行比较, 并可以列出对照表。这样, 不仅明确了影响线的基本概念, 而且又进一步认清了影响线和内力图作法的特点。

5-12 对于影响线这一章内容, 有的结构力学教材把它安排在静定结构受力计算之前, 有的教材把它安排在静定结构受力计算和超静定结构计算之间, 还有的教材把它安排在超静定结构计算之后。通过影响线这一章的学习, 你能否说出来上述三种安排方法都是从什么角度考虑的? 你自己认为以何者为好?

5-13 作影响线的方法有静力法和机动法。你是否能总结一下这两种方法各自的

特点和长处? 特别要注意能否在解同一个题目时, 同时应用静力法和机动法作影响线, 请你举出一个联合运用两个方法解题的例子来。

5-14 本章单位移动荷载一般都是指竖向的, 如果单位移动荷载是水平方向的或斜向的是否也可以作结构某项内力(或某个支座反力)的影响线? 如果可以作的话, 其含义和作法与单位竖向移动荷载作用下的影响线有何异同?

5-15 内力包络图与内力图有什么区别? 请用简支梁在单个集中竖向荷载作用下的弯矩包络图来加以说明。

5-16 如何求对于桁架中某量(如某杆轴力)的荷载最不利位置?

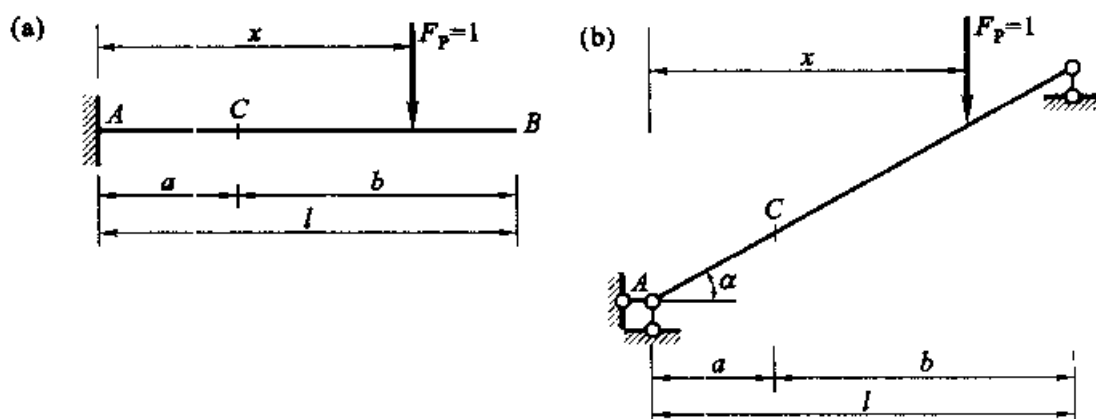
5-17 移动荷载含有均布荷载时如何确定荷载最不利位置?

### 习 题

5-1 试用静力法作影响线:

(a) 求  $F_{yA}$ 、 $M_A$ 、 $M_C$  及  $F_{QC}$  的影响线;

(b) 求斜梁  $F_{yA}$ 、 $M_C$ 、 $F_{QC}$ 、 $F_{yC}$  的影响线。

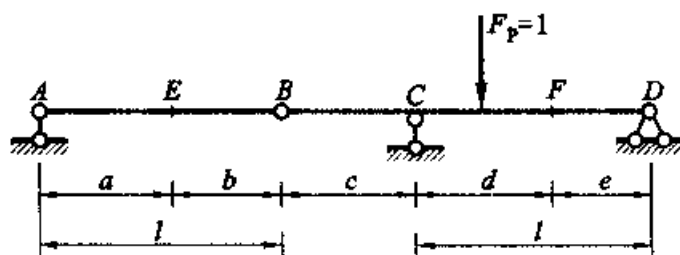


题 5-1 图

5-2 试用静力法求  $F_{RA}$ 、 $F_{QB}$ 、 $M_B$ 、 $F_{QB}$ 、 $F_{RL}$ 、 $F_{RD}$ 、 $M_F$ 、 $F_{QF}$  的影响线。

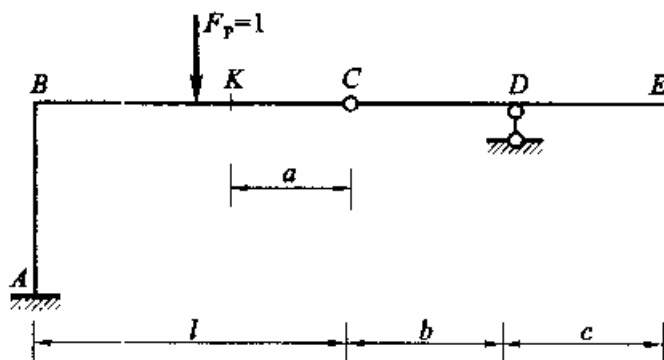
附属部分(AB)各量的影响线与简支梁相同, 且在基本部分(BD)无竖距;

基本部分(BD)各量的影响线在 BD 段与伸臂梁 BD 相同, 在 AB 段为一直线。



题 5-2 图

5-3 试用静力法求刚架中  $M_A$ 、 $F_{VA}$ 、 $M_B$ 、 $F_{QB}$  的影响线。设  $M_A$ 、 $M_B$  均以内侧受拉为正。

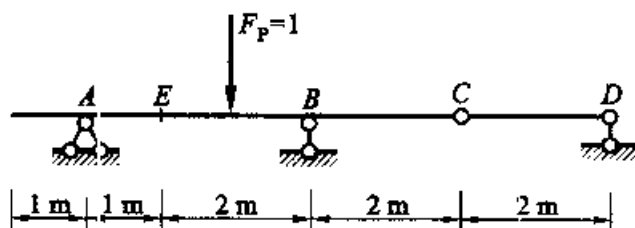


题 5-3 图

5-4 试用机动法求  $M_F$ 、 $F_{QB}^L$ 、 $F_{QB}^R$  的影响线。

注意: (1)  $\delta_P$  是广义位移, 必须与撤去的约束相应;

(2)  $\delta_P(x)$  必须符合约束条件。



题 5-4 图

5-5 试用机动法作影响线:

(a) 作  $M_C$ 、 $F_{QC}$  的影响线;

注意主梁虚位移图与荷载作用点位移图的区别。

(b) 求单位移动力偶  $M=1$  作用下  $F_{RA}$ 、 $F_{RB}$ 、 $M_C$ 、 $F_{QC}$  的影响线;

注意与  $M=1$  相应的位移是转角  $\theta(x)$ ,  $\theta(x)$  与  $F_P=1$  作用下  $\delta_P(x)$  的关系为

$$\theta(x) = \frac{d\delta_P(x)}{dx}$$

(c) 求单位水平移动荷载作用下  $F_{VA}$ 、 $F_{VA}$ 、 $M_C$ 、 $F_{QC}$  的影响线;

注意:  $\delta_P(x)$  的方向必须与荷载方向一致, 故应在位移图中找出水平位移分量。

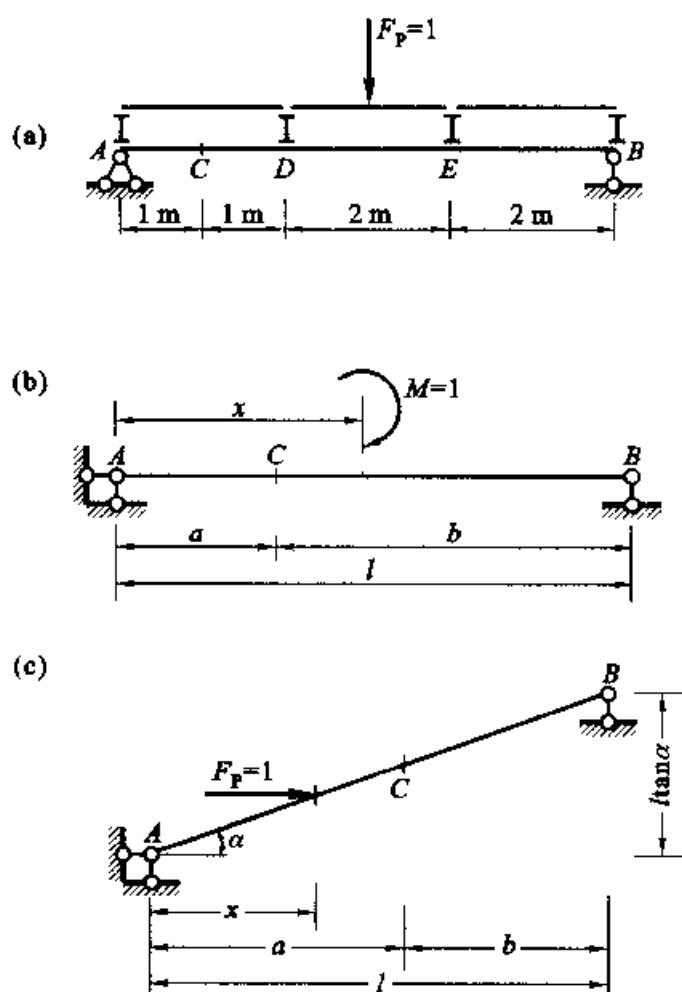
5-6 试用静力法作题 5-5b 及 c。

5-7 试用静力法作图示静定多跨梁  $F_{RA}$ 、 $F_{RB}$ 、 $F_{QB}^L$ 、 $F_{QB}^R$  和  $M_F$ 、 $F_{QH}$ 、 $M_G$ 、 $F_{QG}$  的影响线

5-8 试用静力法作图示静定多跨梁  $F_{RA}$ 、 $F_{RB}$ 、 $M_A$  的影响线。

5-9 试用静力法作图示桁架轴力  $F_{N1}$ 、 $F_{N2}$ 、 $F_{N3}$  的影响线(荷载分为上承、下承两

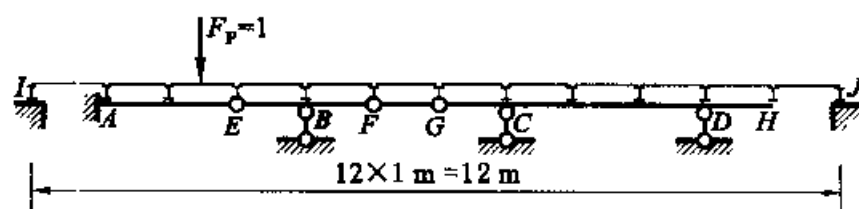
种情形)。



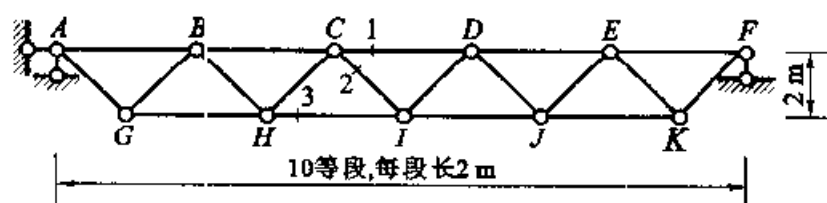
题 5-5 图



题 5-7 图

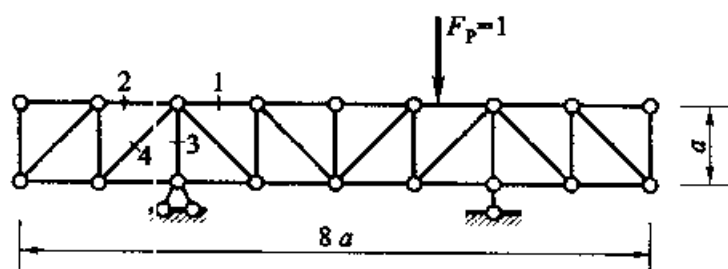


题 5-8 图



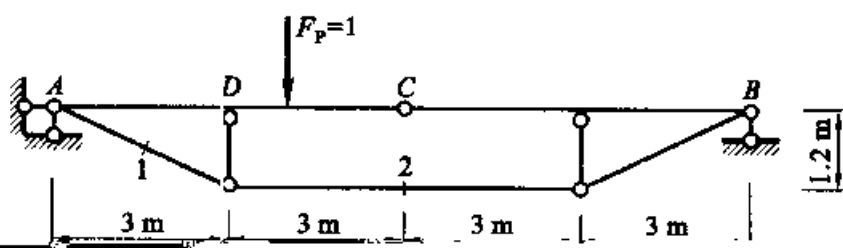
题 5 - 9 图

5 - 10 试作图示桁架轴力  $F_{N1}$ 、 $F_{N2}$ 、 $F_{N3}$ 、 $F_{N4}$  的影响线。



题 5 - 10 图

5 - 11 试作图示组合结构  $F_{N1}$ 、 $F_{N2}$ 、 $F_{N3}$ 、 $M_F$ 、 $F_{QD}$ 、 $F_{QD}^R$  的影响线。

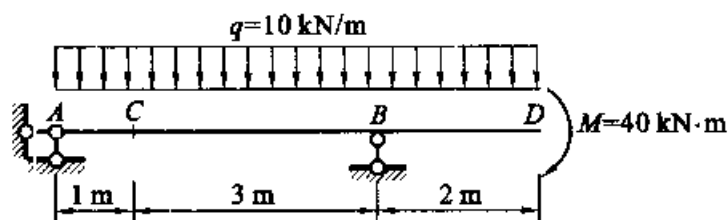




5-13 试作图示刚架  $M_C$ 、 $F_{QC}$  的影响线, 单位水平荷载沿柱高移动。

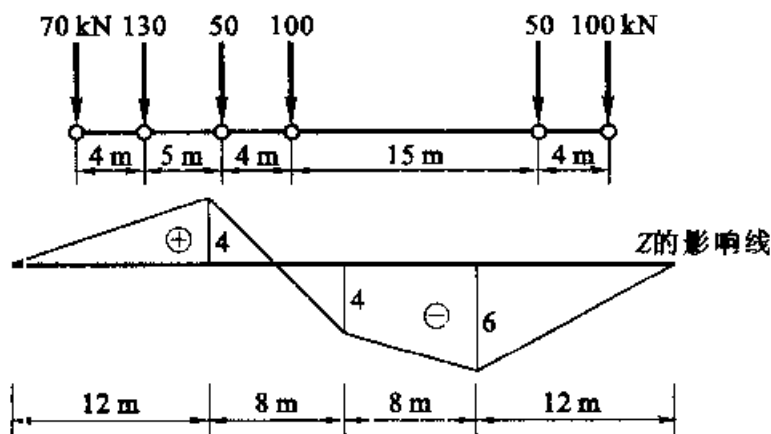
5-14 试用机动法重作题 5-7、5-8。

5-15 试利用影响线, 求在所示荷载作用下的  $F_{KA}$ 、 $F_{RB}$ 、 $F_{QC}$ 、 $M_C$ 。



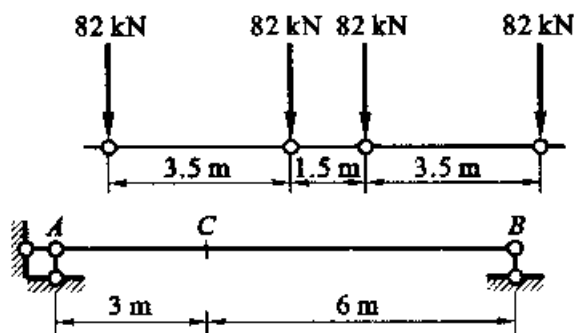
题 5-15 图

5-16 试求出车队荷载在影响线  $Z$  的最不利位置和  $Z$  的绝对最大值。



题 5-16 图

5-17 两台吊车如图所示, 试求吊车梁的  $M_C$ 、 $F_{QC}$  的荷载最不利位置, 并计算其最大值(和最小值)。



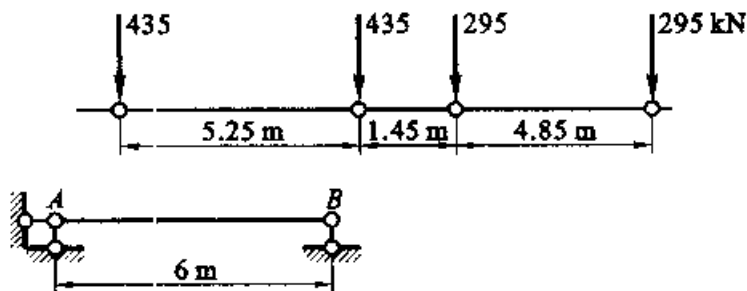
题 5-17 图

5-18 两台吊车同上题, 试求支座  $B$  的最大反力。



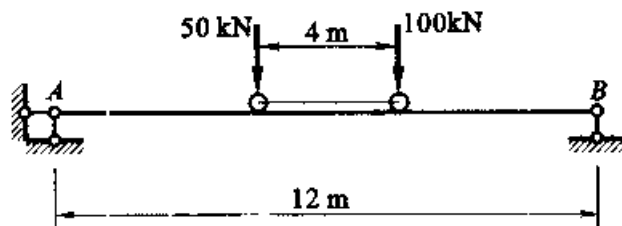
题 5-18 图

5-19 图示简支梁 AB 承受两台吊车荷载,试求绝对最大弯矩。



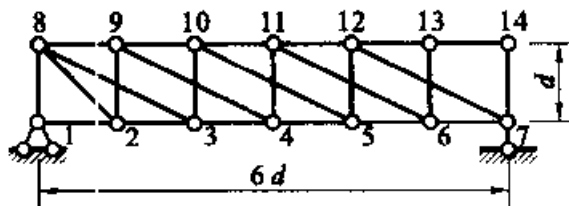
题 5-19 图

5-20 试求图示简支梁的绝对最大弯矩,并与跨中截面的最大弯矩相比较。



题 5-20 图

5-21 试用求解器求解题 5-21 图所示桁架结构连接结点 2、8、2、9、3、8、1、2、8、9 各杆轴力的影响线。



题 5-21 图

5-22 试用求解器求解图 5-30 截面 D 剪力的影响线,以及截面 C 弯矩和剪力的影响线。

5-23 求解器目前只能计算杆件内力的影响线,尚不能直接计算支座反力的影响线(最新版本可能会有此功能)。若仍然要用求解器计算支座反力的影响线,该如何做呢?

## 第6章

### 结构位移计算与虚功—能量法简述

§ 6-1 应用虚力原理求刚体体系的位移	§ 6-9 应变能与应变余能
§ 6-2 结构位移计算的一般公式	§ 6-10 能量偏导数定理
§ 6-3 荷载作用下的位移计算	§ 6-11 互等定理
§ 6-4 荷载作用下的位移计算举例	§ 6-12 位移影响线
§ 6-5 图乘法	§ 6-13 方法论(2)——静定结构部分
§ 6-6 温度作用时的位移计算	§ 6-14 小结
§ 6-7 用求解器进行位移计算	§ 6-15 思考与讨论
§ 6-8 变形体的虚功原理	习题

本章处在静定结构分析与超静定结构分析的交界处,起着承上启下的作用。

本章 § 6-1~§ 6-12 包含两部分内容:

第一部分(§ 6-1~§ 6-7)介绍静定结构在荷载和温度等因素作用下的位移计算公式。前面几章已经讨论了静定结构的内力计算(包括影响线),本章再补充讨论静定结构的位移计算。内力计算和位移计算是结构力学中的两类基本问题,因此,从学习的基本要求看,关于静定结构部分已经讨论得比较完备,可以打上句号。

第二部分(§ 6-8~§ 6-12)简略介绍变形体虚功原理、能量偏导数定理、虚功互等定理及其应用,从而在静定结构部分使虚功—能量解法的内容得到加强,同时又为后面学习超静定结构的虚功—能量解法打下基础。(关于能量法在第 11 章还要作较全面的介绍。)本书与以往教材不同的一个方面就是试图分阶段地尽早地提前介绍虚功—能量解法,并在超静定结构部分及时加以应用,以便在能量法方面得到更好的训练。

本章最后 § 6-13~§ 6-14 将从方法论角度对静定结构部分作些讨论,并对本章内容加以总结。

## § 6-1 应用虚力原理求刚体体系的位移

### 1. 推导位移计算一般公式的基本思路

本节及 § 6-2 讨论的主题是建立静定结构位移计算的一般公式(关于超静定结构位移计算方法将在 § 7-10 中进一步讨论)。按照由浅入深的原则,将推导过程分解成以下三步:

第一步(§ 6-1),讨论静定结构由于支座移动而引起的位移计算问题。这是一个刚体体系的位移问题。将应用刚体体系虚力原理(虚功原理的一种应用形式)导出其位移计算公式。

第二步(§ 6-2),讨论静定结构由于局部变形(例如结构中某个微段产生拉伸、剪切、弯曲变形,而结构其他部分没有变形,仍为刚体)而引起的位移。这仍是一个刚体体系的位移问题,仍由刚体体系虚力原理导出其位移计算公式。

第三步(§ 6-2),讨论静定结构由于整体变形(结构杆件中各个微段都产生变形)而引起的位移。应用第二步导出的关于局部变形引起的位移计算公式,再应用叠加原理,即可得到关于整体变形引起的位移计算公式,这就是静定结构位移计算的一般公式。

上述推导过程的基本思路是“化整为零和积零为整”:把结构的整体变形分解为局部变形,先应用刚体体系的虚力原理导出局部变形的位移公式,然后应用叠加原理,导出整体变形时的位移公式。

### 2. 结构位移计算概述

计算结构的位移,有两个目的,一个目的是验算结构的刚度,即验算结构的位移是否超过允许的位移限值(例如吊车梁允许的挠度限值通常规定为跨度的  $1/600$ )。另一个目的是为超静定结构的内力分析打下基础。因为在超静定结构的内力分析中,不仅要考虑平衡条件,而且还必须考虑变形方面的条件。

产生位移的原因主要有下列三种:

- (1) 荷载作用;
- (2) 温度变化和材料胀缩;
- (3) 支座沉降和制造误差。

结构各点产生位移时,结构内部是否也同时产生应变呢? 这里有两种情况:

例如在图 6-1 中,如果静定多跨梁的支座 A 有给定的位移  $c_A$ ,那么杆

AC 将绕 B 点转动, 杆 CD 绕 D 点转动。这时, 各杆只发生刚体运动, 而应变却等于零。

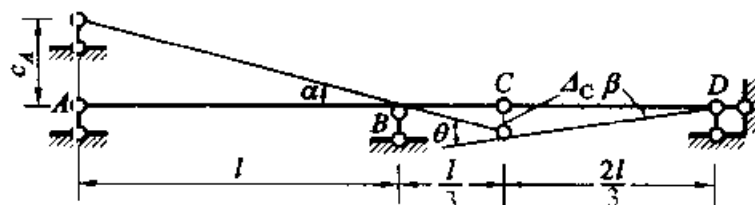


图 6-1

又如在图 6-2 中, 简支梁在荷载  $q$  作用下, 各点产生线位移(挠度  $w$ ); 同时, 梁内由于承受弯矩  $M$  而产生曲率  $\kappa$  (曲率半径  $R = \frac{1}{\kappa}$ ) 和应变  $\epsilon$  (一边纤维拉伸, 一边纤维压缩)。

在上面两个例子中, 前一个是刚体体系的位移问题(有位移, 但无应变); 后一个是变形体体系的位移问题(有位移, 也有应变)。

计算位移的问题原是一个几何问题, 因此可采用几何方法求解。

在图 6-1 所示刚体体系位移问题中, 如果支座位移  $c_A$  是一个微量, 则根据几何关系即可直接求出下列角位移和线位移:

$$\text{杆 AC 的角位移} \quad \alpha = \frac{c_A}{l}$$

$$\text{C 点的线位移} \quad \Delta_C = \alpha \cdot \frac{l}{3} = \frac{c_A}{3} \quad (6-1a)$$

$$\text{杆 CD 的角位移} \quad \beta = \Delta_C / \left( \frac{2l}{3} \right) = \frac{c_A}{2l} \quad (6-1b)$$

图 6-2 所示变形体体系位移问题, 实际上也是一个几何问题。根据曲率与挠度之间的几何关系:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d^2 w}{dx^2}$$

即可由曲率  $\kappa$  求出挠度  $w$ 。

位移计算虽然是一个几何问题, 但最好的解法并不是几何法, 而是虚功

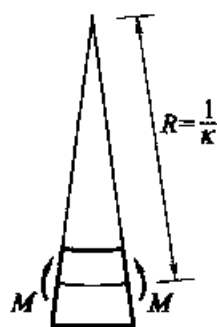
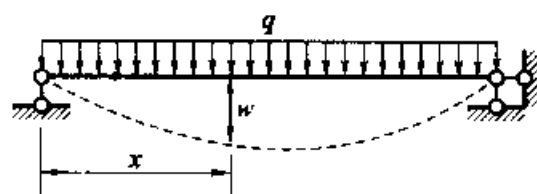


图 6-2

法(这里虚功法的应用形式称为虚力法)。

### 3. 虚功原理的另一种应用形式——虚力原理(虚设力系, 求位移)

在 § 4-4 中, 讨论了虚功原理及其在静定结构内力计算中的应用, 并且强调指出: 位移与力系是独立无关的。

既然位移与力系无关, 因此, 不仅可以把位移看作虚设的(见 § 4-4); 而且也可以把力系看作虚设的, 本节正是利用虚功原理的这一应用形式, 求刚体体系的位移。

例如图 6-3a 中的静定梁, 支座 A 向上移动一个已知距离  $c_1$ , 现在拟求 B 点的竖向位移  $\Delta$ 。

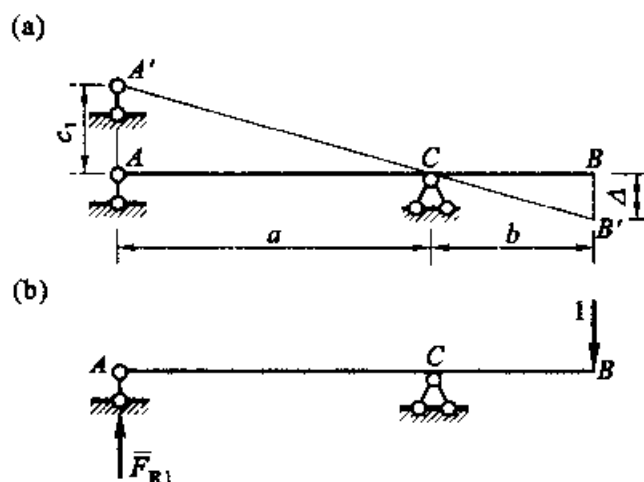


图 6-3

为此, 对图 6-3a 中的位移状态应用虚功原理。这里, 位移状态是给定的, 力系则可根据我们的意图来虚设。

我们的意图是: 为了便于求出  $\Delta$ , 希望在虚功方程中除了拟求的未知位移  $\Delta$  外, 不再包含别的未知位移。因此, 在选择虚力系时应当只在拟求位移  $\Delta$  的方向设置单位荷载<sup>①</sup>, 而在其他处不再设置荷载。这个单位荷载与相应的支座反力组成一个虚设的平衡力系, 如图 6-3b 所示。根据平衡条件, 可求出支座 A 的反力  $\bar{F}_{R1} = -\frac{b}{a}$ 。

令图 6-3b 中的虚设平衡力系在图 6-3a 中的实际刚体位移上作虚功, 即得出虚功方程如下:

$$\Delta \cdot 1 + c_1 \bar{F}_{R1} = 0 \quad (6-2)$$

<sup>①</sup> 参见本书符号表说明 3。

由于  $F_{R1} = -\frac{b}{a}$ , 故得

$$\Delta = -c_1 \bar{F}_{R1} - \frac{b}{a} c_1$$

以上就是应用虚功原理求未知位移  $\Delta$  的过程。从中可归纳出如下几点:

这里是在虚设力系(图 6-3b)与给定位移(图 6-3a)之间应用虚功原理。这是虚功原理的另一种应用形式,称为虚力原理。

基本方程(6-2)形式上是虚功方程,实质上是未知位移  $\Delta$  与已知位移  $c_1$  之间的几何方程。

关键步骤是在拟求位移  $\Delta$  方向虚设单位荷载,并利用平衡条件求出与  $c_1$  相应的支座反力  $\bar{F}_{R1}$ 。因此,这个解法称为做单位荷载法,其特点是采用静力平衡方法来解决几何问题。

与 §4-4 对照,我们用对偶的方式来叙述虚功原理的两种应用形式:相应的两类问题——求未知力和求未知位移,相应的两种解法——单位支座位移法和单位荷载法。清楚地看出,二者之间存在着多方面的对偶性。对偶性把两个不同的领域联系在一起。抓住对偶性这条线索,就会比较顺利地由比较熟悉的领域(虚功法求未知力)转到新的领域(虚功法求位移)。

#### 4. 支座移动时静定结构的位移计算

现在应用单位荷载法讨论支座移动时静定结构的位移计算,并结合图 6-1 来说明。在图 6-1 中,支座 A 有给定的竖向位移  $c_1$ ,现在拟求:

(1) C 点的竖向位移  $\Delta_C$ 。

(2) 杆 CD 的转角  $\beta$ 。

首先要说明一点:在静定结构中,支座移动时并不引起内力,也不引起应变。因此,支座移动时静定结构的位移计算问题都是刚体体系的位移计算问题,因而可用刚体体系虚功原理来求解。

应用单位荷载法求不同的位移时,应当选择不同的单位荷载。虚设单位荷载的目的是希望在虚功方程中正好包含拟求的未知位移。因此,虚设的单位荷载应当正好是拟求位移相应的单位荷载,也就是说,这个单位荷载所作的虚功在数值上应当正好等于拟求的位移。例如:

(1) 求 C 点的竖向位移  $\Delta_C$  时,应在 C 点加一个单位竖向荷载(图 6-4a)。

(2) 求杆 CD 的转角  $\beta$  时,应在杆 CD 上加一个单位力偶荷载(图 6-4b),因为力偶作的功等于力偶矩与转角的乘积。

现分别使图 6-4a、b 中的两种虚设力系在图 6-1 中的实际位移状态上

作虚功, 得出虚功方程如下:

$$1 \cdot \Delta_c - \frac{1}{3} \cdot c_A = 0$$

$$\lambda \cdot \beta - \frac{1}{2l} \cdot c_A = 0$$

其中支座 A 的反力作负功(因为反力与位移  $c_A$  的方向相反), 支座 B 和 D 的反力都不做功(因为支座 B 和 D 的位移为零),

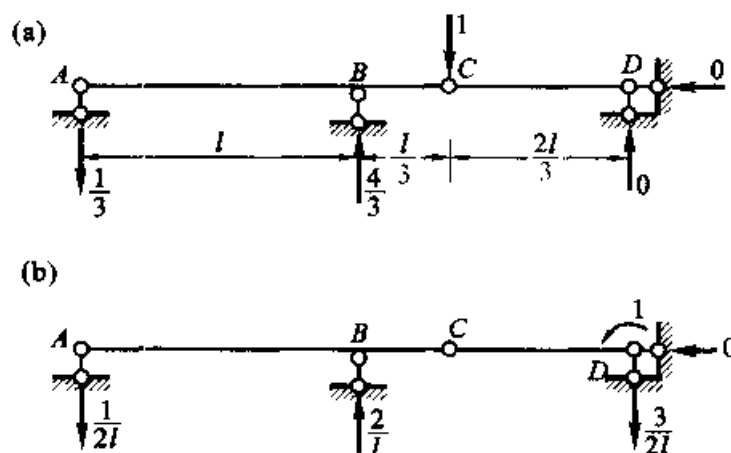


图 6-4

解上述方程得

$$\Delta_c = \frac{1}{3} c_A$$

$$\beta = \frac{1}{2l} c_A$$

求得的位移都是正值, 表明位移的实际方向与所设单位荷载的方向一致。这里用虚功原理得出的结果与式(6-1)中根据几何关系得出的结果相同。

归纳起来, 当支座有给定位移时, 静定结构的位移可用虚力原理求出。设支座 K 有给定位移  $c_K$ , 且  $K = 1, 2, \dots, n$ 。计算步骤如下:

(1) 沿拟求位移  $\Delta$  方向虚设相应的单位荷载, 并求出单位荷载作用下的支座反力  $F_{RK}$ 。

(2) 令虚设力系在实际位移上作虚功, 写出虚功方程:

$$1 \cdot \Delta + \sum \bar{F}_{RK} c_K = 0 \quad (6-3)$$

式中  $\bar{F}_{RK} c_K$  是支座反力  $\bar{F}_{RK}$  在相应位移  $c_K$  上作的虚功, 当二者的方向一致时, 乘积为正。  $\sum$  是指对 K 求和。

(3) 由虚功方程, 解出拟求位移为

$$\Delta = - \sum \bar{F}_{RK} c_K \quad (6-4)$$



如果求得的位移  $\Delta$  为正值,表明位移的实际方向与所设单位荷载方向一致。式(6-4)就是计算静定结构由支座移动引起的位移的一般公式。

为了求未知位移  $\Delta$ , 可虚设力系如图 6-5c 所示。这里, 在 A 点沿拟求位移  $\Delta$  的方向虚设单位荷载。此外, 在铰 B 处还必须虚设一对弯矩  $\bar{M}$ 。根据平衡条件可求出  $\bar{M}$  的数值如下:

$$\bar{M} = 1 \cdot a$$

令图 6-5c 中的平衡力系在图 6-5b 中的实际位移上作功, 可写出虚功方程如下:

$$1 \cdot \Delta - \bar{M} \cdot \theta = 0$$

由此解得

$$\Delta = \bar{M} \theta \quad (6-5)$$

由此看出, 位移  $\Delta$  与截面相对转角  $\theta$  成正比, 它们之间的比例系数正好就是虚设单位荷载在该截面引起的弯矩  $\bar{M}$ 。

**例 6-2** 在图 6-6a 中, 截面 B 有相对剪切位移  $\eta$ , 试求 A 点与杆轴成  $\alpha$  角的斜向位移分量  $\Delta$ 。

**解** 图 6-6a 中的实际位移状态可改用图 6-6b 来表示。这里将截面 B 切开, 加上两根平行杆轴的链杆, 使能产生相对剪切位移, 但不能产生相对轴向位移和相对角位移, 从而把实际位移状态明确地表示为刚体体系的位移状态。

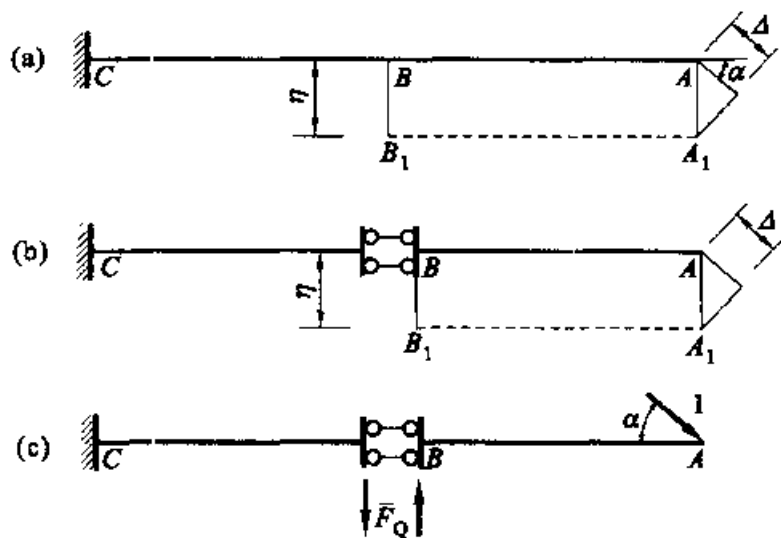


图 6-6

虚设力系如图 6-6c 所示。这里, 在拟求位移  $\Delta$  方向虚设单位荷载。此外, 为了保证刚体体系处于平衡状态, 在截面 B 的两侧还需设一对剪力  $F_Q$ , 其数值可根据平衡条件求出:

$$\bar{F}_Q = \sin \alpha$$

令图 6-6c 中的平衡力系在图 6-6b 中的实际位移上作功, 可写出虚功

方程如下:

$$1 \cdot \Delta - F_Q \cdot \eta = 0$$

由此解得

$$\Delta = F_Q \eta \quad (6-6)$$

由此看出,位移  $\Delta$  与截面相对剪切位移  $\eta$  成正比,它们之间的比例系数正好就是虚设单位荷载在该截面引起的剪力  $F_Q$ 。

## 2. 局部变形时的位移公式

例 6-1 和例 6-2 给出了当结构有局部变形时计算位移的两个算例。现在推导局部变形时计算位移的一般公式。

图 6-7a 所示为局部变形问题的一个典型情况。

悬臂梁除 B 点附近的微段  $ds$  有局部变形外,结构其他部分没有变形。

微段  $ds$  局部变形包括三部分:

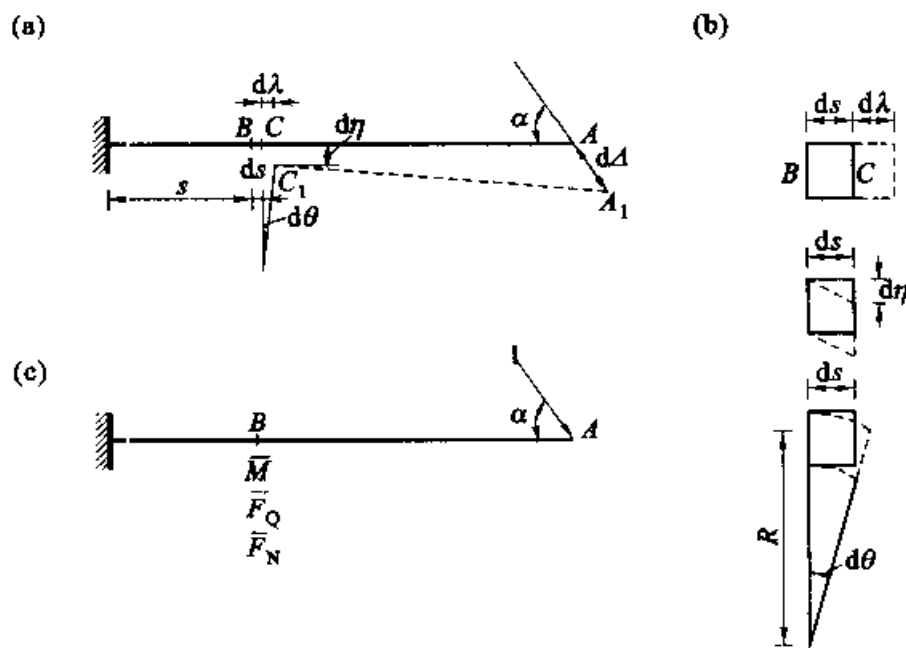


图 6-7

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{轴线伸长应变为 } \epsilon; \\ \text{平均剪切应变为 } \gamma_n; \\ \text{轴线曲率为 } \kappa \left( \kappa = \frac{1}{R}, R \text{ 为轴线变形后的曲率半径} \right). \end{array} \right.$$

现在拟求 A 点沿  $\alpha$  方向的位移分量  $d\Delta$ 。

处理这个问题的基本思路是:把局部变形时的位移计算问题转化为刚体体系的位移计算问题。

首先,根据微段  $ds$  的三类变形,可求出微段两端截面的三种相对位移

(图 6-7b):

$$\left. \begin{aligned} \text{相对轴向位移, } d\lambda &= \epsilon ds \\ \text{相对剪切位移, } d\eta &= \gamma_0 ds \\ \text{相对转角, } d\theta &= \frac{ds}{R} = \kappa ds \end{aligned} \right\} \quad (6-7)$$

相对位移  $d\lambda$ 、 $d\eta$ 、 $d\theta$  是描述微段总变形的三个基本参数。

其次,将微段变形加以集中化,即  $ds$  趋于零,但三种相对位移仍存在。这相当于整个结构除截面  $B$  变生集中变形(即在截面  $B$  处集中地发生相对位移  $d\lambda$ 、 $d\eta$ 、 $d\theta$ )外,其他部分都是刚体,没有任何变形。显然,问题已经转化为刚体体系的位移问题。

最后,应用刚体体系虚功原理,根据截面  $B$  的相对位移  $d\lambda$ 、 $d\eta$ 、 $d\theta$ ,可分别求出  $A$  点的位移  $d\Delta$ 。计算结果可参看例 6-1、6-2。将上述结果进行叠加,即得

$$d\Delta = \bar{M}d\theta + \bar{F}_Nd\lambda + \bar{F}_Qd\eta \quad (6-8a)$$

或

$$d\Delta = (\bar{M}\kappa + \bar{F}_N\epsilon + \bar{F}_Q\gamma_0)ds \quad (6-8b)$$

这就是局部变形的位移公式,其中  $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_N$ 、 $\bar{F}_Q$  分别是虚设单位荷载在截面  $B$  引起的弯矩、轴力和剪力(图 6-7c)。

### 3. 结构位移计算的一般公式

整个结构的变形是结构各个微段变形的总和。根据叠加原理,整体变形时在结构某点引起的总位移  $\Delta$  可由每个微段变形在该点引起的微小位移  $d\Delta$  叠加得出,即

$$\Delta = \int d\Delta = \int (\bar{M}\kappa + \bar{F}_N\epsilon + \bar{F}_Q\gamma_0)ds$$

如果结构中含有多个杆件,则上式可写成

$$\Delta = \sum \int (\bar{M}\kappa + \bar{F}_N\epsilon + \bar{F}_Q\gamma_0)ds \quad (6-9)$$

这里积分号表示沿杆件长度积分,总和号表示对结构中各杆求和。

如果结构除各微段有变形外,在支座处还有给定位移  $c_K$ ,则将式(6-9)与(6-4)的右边叠加,即可得出总的位移

$$\Delta = \sum \int (\bar{M}\kappa + \bar{F}_N\epsilon + \bar{F}_Q\gamma_0)ds + \sum \bar{F}_{RK}c_K \quad (6-10)$$

这就是结构位移计算的一般公式。在式(6-10)的右边,如果分别保留一项,即

$$\Delta_s = \sum \int \bar{M}\kappa ds \quad (6-11)$$

$$\Delta_\epsilon = \sum \int F_N \epsilon ds \quad (6-12)$$

$$\Delta_\gamma = \sum \int \bar{F}_Q \gamma_0 ds \quad (6-13)$$

$$\Delta_c = - \sum F_{RK} c_K \quad (6-14)$$

则它们分别表示单独由于弯曲变形  $\kappa$ , 轴向变形  $\epsilon$ , 剪切变形  $\gamma_0$  和支座位移  $c_K$  对位移的影响。

式(6-10)是根据刚体体系虚力原理和叠加原理得出的, 它适用于微小变形的情况。

式(6-10)虽然是根据虚力方程导出的, 但实质上它是一个几何方程, 它给出了已知变形(内部应变  $\kappa, \epsilon, \gamma_0$  和支座位移  $c_K$ )与拟求位移  $\Delta$  二者之间的几何关系。

式(6-10)是一个普遍性公式, 它的普遍性表现在下列几个方面:

从变形类型来看, 它既可以考虑弯曲变形, 也可以考虑拉伸或剪切变形。

从变形因素来看, 它既可以考虑荷载引起的位移, 也可以考虑温度或支座移动引起的位移。

从结构类型来看, 它可用于梁、刚架、桁架、拱等各类型式的结构。上面是结合静定结构讨论的, 但式(6-10)也可用于超静定结构。关于超静定结构的位移计算在 §7-10 中有补充说明。

从材料性质来看, 它可用于弹性材料, 也可用于非弹性材料。

在下面各节中将讨论这个普遍公式在不同情况下的具体应用。

最后指出, 结构位移计算的一般公式(6-10)还可应用变形体虚功原理导出, 参见 §6-8。实际上, 式(6-10)就是变形体虚功原理的一种表示形式。为了说明这一点, 将式(6-10)改写为下列形式:

$$1 \cdot \Delta + \sum \bar{F}_{RK} c_K = \sum \int (\bar{M} \kappa + \bar{F}_N \epsilon + \bar{F}_Q \gamma_0) ds \quad (6-15)$$

上式左边是结构的虚设外力(单位荷载和支座反力  $\bar{F}_{RK}$ )在给定位移上所作的虚功的总和, 简称为外虚功  $W$ ; 上式右边是各微段  $ds$  两侧截面上应力合力  $\bar{M}, \bar{F}_N, \bar{F}_Q$  (对微段是外力, 而对结构则是内力)在给定的变形  $\kappa, \epsilon, \gamma_0$  上所作虚功的总和, 简称为内虚功  $W_i$ 。因此式(6-10)可表示为

$$W = W_i \quad (6-16)$$

这就是变形体的虚功方程。

#### 4. 结构位移计算的一般步骤

已知结构各微段的应变  $\kappa, \epsilon, \gamma_0$  和支座的位移  $c_K$ , 现在拟求结构某点

沿某方向的位移  $\Delta$ , 其计算步骤如下:

(1) 在某点沿拟求位移  $\Delta$  的方向虚设相应的单位荷载。

(2) 在单位荷载作用下, 根据平衡条件, 求出结构内力  $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_N$ 、 $\bar{F}_Q$  和支座反力  $\bar{F}_{KK'}$ 。

(3) 最后根据公式(6-10)可求出位移  $\Delta$ 。

在式(6-10)的右边有四个乘积:  $\bar{M}\kappa$ 、 $\bar{F}_N\varepsilon$ 、 $\bar{F}_Q\gamma$ 、 $\bar{F}_{KK'}C_K$ , 它们都是力与变形之间的乘积。当力与变形的方向一致时, 则乘积为正(例如, 当  $M$  与  $\kappa$  使微体的同侧纤维受拉时, 则乘积  $\bar{M}\kappa$  为正)。

由式(6-10)求得的  $\Delta$  如果是正值, 则表明位移  $\Delta$  的实际方向与所设单位荷载方向一致。

### 5. 广义位移的计算

式(6-10)中的拟求位移  $\Delta$  可以引申理解为广义位移。它可以表示结构某点沿某方向的线位移、某截面的角位移、某两个截面的相对位移等。因此, 在应用式(6-10)求广义位移时, 必须根据广义位移的性质虚设广义单位荷载。

例如, 图 6-8a 所示为一简支梁, 在弯曲变形时, 截面 A 产生顺时针转角  $\theta_A$ , 截面 B 产生反时针转角  $\theta_B$ , 以  $\Delta$  表示其相对转角, 则

$$\Delta = \theta_A + \theta_B$$

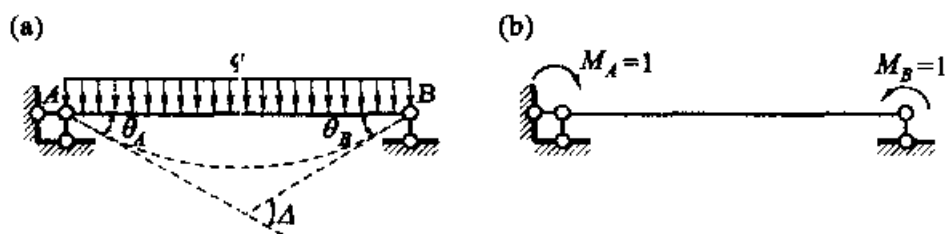


图 6-8

这里,  $\theta_A$  以顺时针转向(↻)为正,  $\theta_B$  以反时针转向(↺)为正, 而  $\Delta$  以(↻↺)为正。相对转角  $\Delta$  是广义位移的一个例子, 它是由两个角位移  $\theta_A$  与  $\theta_B$  组成的, 也可称为组合位移。

求这一广义位移时, 怎样虚设广义单位荷载呢? 这里, 广义单位荷载所起的作用与单位荷载所起的作用是相同的, 就是要在虚功方程中引出拟求位移, 使外力虚功具有如下的简单形式

$$W = 1 \cdot \Delta \quad (a)$$

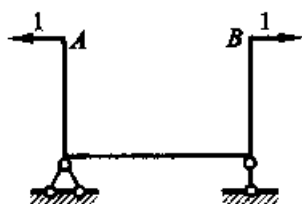
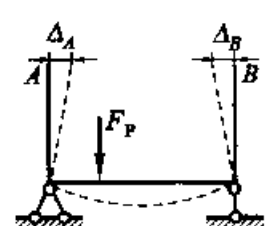
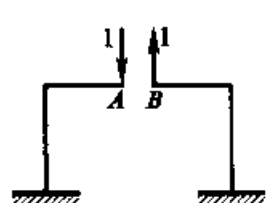
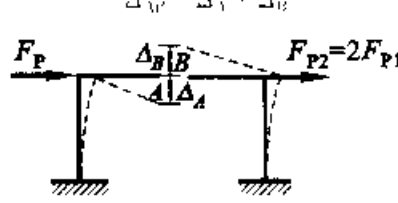

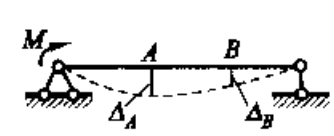
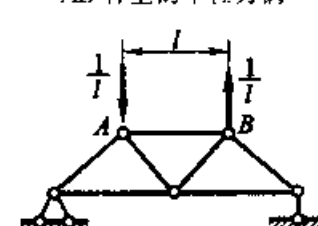
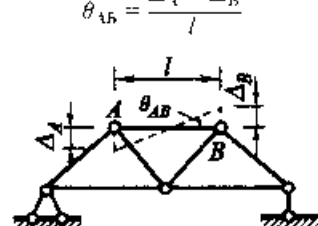
当拟求位移  $\Delta$  是由两个转角  $\theta_A$  和  $\theta_B$  组成的广义位移时, 与之相应, 广义单位荷载也是由两个相应的反向单位力偶  $M_A = 1$  和  $M_B = 1$  所组成(图 6-

8b)。这时,它所作的外力虚功

$$W = 1 \cdot \theta_A + 1 \cdot \theta_B = 1 \cdot (\theta_A + \theta_B) = 1 \cdot \Delta$$

表6-1列举了一些例子,说明广义位移与广义单位荷载之间的相应关系。由此可以看出,这些广义单位荷载所作的外力虚功都具有式(a)所示的简单形式。

表 6-1 广义位移和广义单位荷载示例

	虚设的广义单位荷载	拟求的广义位移
1	<p>A、B 两点处 一对方向相反的水平单位力</p> 	<p>A、B 两点的水平相对位移</p> $\Delta_{AB} = \Delta_A + \Delta_B$ <p>(此处 <math>\Delta_A</math> 和 <math>\Delta_B</math> 为负值)</p> 
2	<p>A、B 两点处 一对方向相反的竖向单位力</p> 	<p>A、B 两点的竖向相对位移</p> $\Delta_{AB} = \Delta_A + \Delta_B$ 
3	<p>A、B 两点处 一对方向相同的竖向单位力</p> 	<p>A、B 两点的竖向位移之和</p> $\Delta_{AB} = \Delta_A + \Delta_B$ 
4	<p>AB 杆上的单位力偶</p> 	<p>AB 杆的转角</p> $\theta_{AB} = \frac{\Delta_A + \Delta_B}{l}$ 

最后指出:在位移计算中,要特别强调虚设力和拟求位移之间应符合相应关系,即共轭关系。这里,“相应”和“共轭”关系是从虚功角度确定的。如果力  $F$  在位移  $\Delta$  上所作的虚功  $W$  正好由下式表示:

$$W = F\Delta \quad (6-17)$$

则称力  $F$  是位移  $\Delta$  的共轭力, 也称位移  $\Delta$  是力  $F$  的共轭位移。反之, 如果虚功表示式与上式不同, 则它们之间就不存在共轭关系(相应关系)。

同样, 广义力  $F$  和广义位移  $\Delta$  之间是否存在共轭关系(相应关系), 也是指它们所作的虚功是否可用式(6-17)来表示。

### § 6-3 荷载作用下的位移计算

#### 1. 计算步骤

现在应用一般公式(6-10)或(6-9)导出计算荷载引起的位移公式。在本节中, 我们只讨论下列情况: 假设结构是静定的, 而且材料是弹性的。

计算荷载作用下的位移时, 可按 § 6-2 中归纳的一般步骤进行。这里只需补充一点, 即式(6-9)中的应变  $\kappa, \epsilon, \gamma_0$  是由荷载引起的, 可按下列顺序求出:

荷载——内力——应力——应变

下面列出在荷载作用下, 静定结构的弹性位移的具体计算步骤:

(1) 根据荷载情况, 求出结构各截面的弯矩  $M_P$ 、轴力  $F_{NP}$ 、剪力  $F_{QP}$ 。这里的内力是由荷载引起的, 故用下标  $P$  来表示。

(2) 根据内力, 求出相应的弯曲、拉伸和剪切应变:

$$\kappa = \frac{M_P}{EI} \quad (6-18a)$$

$$\epsilon = \frac{F_{NP}}{EA} \quad (6-18b)$$

$$\gamma_0 = k \frac{F_{QP}}{GA} \quad (6-18c)$$

这里,  $E$  和  $G$  分别为材料的弹性模量和剪切弹性模量;  $A$  和  $I$  分别是杆件截面的面积和惯性矩;

$EI$ 、 $EA$ 、 $GA$  分别是杆件截面的抗弯、抗拉、抗剪刚度;  $k$  是一个与截面形状有关的系数, 将在后面给出。

(3) 将式(6-18)代入式(6-9), 即得到在荷载作用下弹性位移的一般公式

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds + \sum \int \frac{k \bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds \quad (6-19)$$

注意, 在式(6-19)中共有两类内力:

$M_P, F_{NP}, F_{QP}$ ——实际荷载引起的内力;

$\bar{M}, \bar{F}_N, \bar{F}_Q$ ——虚设单位荷载引起的内力。

关于内力的正负号可规定如下:



轴力  $F_{NP}, F_N$ ——以拉力为正;

剪力  $F_{QP}, F_Q$ ——使微段顺时针转动者为正;

弯矩  $M_P, M$ ——只规定乘积  $\bar{M}M_P$  的正负号。当  $M$  与  $M_P$  使杆件同侧纤维受拉时,其乘积取正值。

## 2. 各类结构的位移公式

式(6-19)是静定结构在荷载作用下弹性位移的一般公式。公式右边的第一项表示弯曲变形的影响,第二项表示拉伸变形的影响,第三项表示剪切变形的影响。对于各种特殊的结构形式来讲,这三种影响在位移中所占的比重各不相同,按照保留主要影响忽略次要影响的原则,从式(6-19)可以得到各类特殊结构形式相应的简化公式。

### (1) 梁和刚架

在梁和刚架中,位移主要是弯矩引起的,轴力和剪力的影响较小(参看例6-3和例6-10),因此位移公式可简化为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds \quad (6-20)$$

### (2) 桁架

在桁架中,各杆只受轴力,而且每根杆的截面面积  $A$  以及轴力  $\bar{F}_N$  和  $F_{NP}$  沿杆长一般都是常数,因此位移公式可简化为

$$\Delta = \sum \int \frac{F_N F_{NP}}{EA} ds = \sum \frac{F_N F_{NP}}{EA} \int ds = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA} \quad (6-21)$$

### (3) 桁梁混合结构

在桁梁混合结构中,一些杆件主要受弯曲,一些杆件只受轴力,故位移公式可简化为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds + \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA} \quad (6-22)$$

### (4) 拱

在拱中,当压力线与拱的轴线相近(即两者的距离与杆件的截面高度为同量级)时,应考虑弯曲变形和拉伸变形对位移的影响,即

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds \quad (6-23)$$

当压力线与拱轴线不相近时,则只需考虑弯曲变形的影响(参看例6-5),即可按式(6-20)计算位移。

## 3. 截面平均切应变 $\gamma_0$ 和系数 $k$

首先,补充说明截面平均切应变  $\gamma_0$  的求法。

由式(6-15)看出,微段  $ds$  的内虚功  $dW_i$  是由三项所组成,其中第三项

是剪力  $F_Q$  所作的内虚功,称为剪切变形虚功  $dW_Q$ ,即

$$dW_Q = \bar{F}_Q \gamma_0 ds \quad (a)$$

因此,只需先求出  $dW_Q$ ,由此便可求出  $\gamma_0$ 。

下面讨论剪切变形虚功  $dW_Q$  的求法。

图 6-9a 所示为微段  $ds$  两侧截面上的虚剪力  $F_Q$  (为了清晰起见,两侧截面上的弯矩  $\bar{M}$  和轴力  $\bar{F}_N$  都未画出)。截面上任一点  $y$  的切应力  $\tau$  可由材料力学公式求出:

$$\tau(y) = \frac{F_Q S(y)}{I b(y)} \quad (b)$$

式中  $b(y)$  是截面任一点  $y$  处的截面宽度(截面形状和截面尺寸如图 6-9c 所示),  $S(y)$  是  $y$  点以下(或以上)面积对中性轴  $z$  的面积矩。通常,切应力  $\tau$  沿截面高度并不是均匀分布的。

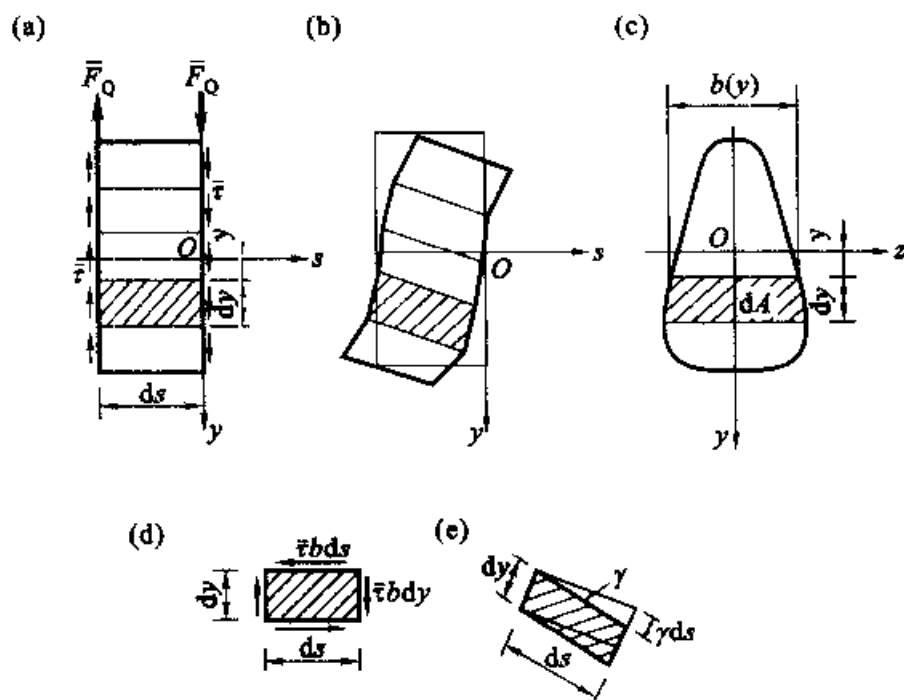


图 6-9

图 6-9b 所示为微段  $ds$  的实际剪切变形情况。由于切应变  $\gamma$  通常沿截面高度也不是均匀分布,因而两侧截面在变形后不再保持为平面。

为了求微段  $ds$  的剪切变形虚功  $dW_Q$ ,可令图 6-9a 中的力系在图 6-9b 中的变形上作虚功。由于  $\tau$  和  $\gamma$  沿截面高度都不是均匀分布,因此,可先取出高度为  $dy$  的微小单元来计算。图 6-9d 所示为微小单元的受力情况,左右侧面上的合力为  $\bar{\tau} b dy = \bar{\tau} dA$  ( $dA = b dy$  是微小单元的侧面面积)。

图 6-9e 所示为微小单元的变形情况。切应变为  $\gamma$ , 左右两侧面的相对剪切位移为  $\gamma ds$ 。由此可知, 微小单元的剪切变形虚功为

$$(\tau dA) \cdot (\gamma ds)$$

然后再对整个截面面积  $A$  进行积分, 即得整个微段的剪切变形虚功:

$$dW_{\text{剪}} = ds \cdot \int_A \tau \gamma dA$$

将式(b)代入, 得

$$dW_{\text{剪}} = \frac{F_{\text{QP}} ds}{I} \int_A \frac{S\gamma}{b} dA \quad (c)$$

将式(a)与(c)加以比较, 即得

$$\gamma_0 = \frac{1}{I} \int_A \frac{S\gamma}{b} dA \quad (6-24)$$

这就是根据截面切应变的分布函数  $\gamma(y)$  推算平均切应变  $\gamma_0$  的换算公式。

从以上的讨论中看出, 在弯曲、拉伸、剪切三类变形中, 剪切变形的分布情况比较复杂, 因而剪切变形虚功  $dW_{\text{剪}}$  的计算公式[式(c)]也比较复杂。我们引进平均切应变  $\gamma_0$  这个参数, 目的是为了使  $dW_{\text{剪}}$  的表示形式由复杂[式(c)]变成简单[式(a)]。这样做的好处是: 形式得到简化, 概念更加清晰, 而且在式(6-15)或(6-10)等基本公式中, 三类变形的影响都可用统一的格式来表示。

其次, 补充说明系数  $k$  的求法。

当计算结构在荷载作用下的弹性位移时, 可根据荷载引起的剪力  $F_{\text{QP}}$  求出切应变  $\gamma$  为

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{F_{\text{QP}} S}{GIb}$$

将上式代入式(6-24), 得

$$\gamma_0 = \frac{F_{\text{QP}}}{GI} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA \quad (6-25)$$

将式(6-25)与(6-18c)加以比较, 可得

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA \quad (6-26)$$

这就是根据截面形状推算系数  $k$  的公式。

表 6-2 切应变的截面形状系数  $k$

截面形式	系数 $k$
矩形	6/5
圆形	10/9
薄壁圆环形	2
工字形或箱形	$A/A_1$ ( $A_1$ 为腹板面积)*

\* 此值为近似值。

由式(6-18c)看出,系数  $k$  是在计算平均切应变  $\gamma_0$  时由于考虑到切应力在截面上分布不均匀而加的改正系数。由式(6-26)看出,系数  $k$  是一个与截面形状有关的参数(量纲一的量,以往称为无量纲量)。

## § 6-4 荷载作用下的位移计算举例

### 1. 梁的位移计算

**例 6-3** 试求图 6-10a 所示悬臂梁在 A 端的竖向位移  $\Delta$ , 并比较弯曲变形与剪切变形对位移的影响。设梁的截面为矩形。

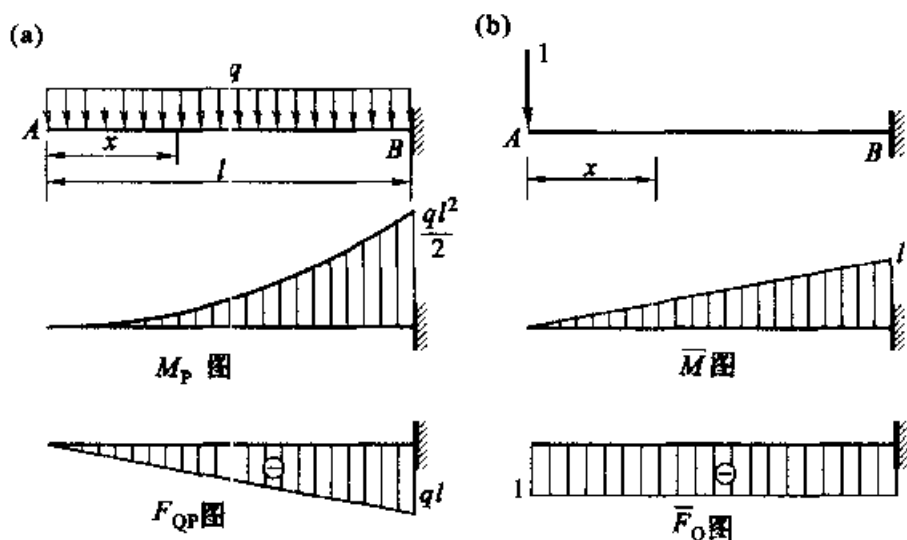


图 6-10

**解** 先求实际荷载(图 6-10a)作用下的内力,再求虚设单位荷载(图 6-10b)作用下的内力,取 A 点为坐标原点,任意截面  $x$  的内力为

实际荷载                      虚设单位荷载

$$M_P = -\frac{1}{2}qx^2 \qquad \bar{M} = -x$$

$$F_{QP} = 0 \qquad \bar{F}_Q = 0$$

$$F_{QP} = -qx \qquad \bar{F}_Q = 1$$

弯曲变形引起的位移为

$$\Delta_M = \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds = \int_0^l \frac{(-x)\left(-\frac{1}{2}qx^2\right)}{EI} dx = \frac{ql^4}{8EI}$$

剪切变形引起的位移为  $\Delta_Q$  (对于矩形截面,  $k=1.2$ )

$$\Delta_Q = k \int \frac{F_Q \bar{F}_Q}{GA} ds = 1.2 \int_0^l \frac{(-1)(-qx)}{GA} dx = 0.6 \frac{ql^2}{GA}$$

由于梁的轴力为零,故总位移为

$$\Delta = \Delta_M + \Delta_Q = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{0.6ql^2}{GA}$$

现在再比较剪切变形与弯曲变形对位移的影响。二者的比值为

$$\frac{\Delta_Q}{\Delta_M} = \frac{\frac{0.6ql^2}{GA}}{\frac{ql^4}{8EI}} = 4.8 \frac{EI}{GA l^2}$$

设横向变形系数  $\mu = 1/3$ ,  $E/G = 2(1 + \mu) = 8/3$ , 对于矩形截面,  $I/A = h^2/12$  ( $h$  为截面高度), 代入上式, 得

$$\frac{\Delta_Q}{\Delta_M} = 1.07 \left( \frac{h}{l} \right)^2$$

当梁的高跨比  $h/l$  是  $1/10$  时, 则  $\Delta_Q/\Delta_M = 1.07\%$ , 剪力影响约为弯矩影响的百分之一, 故对于一般的梁可以忽略剪切变形对位移的影响。但是, 当梁的高跨比  $h/l$  增大为  $1/2$  时, 则  $\Delta_Q/\Delta_M$  增大为  $1/4$ ; 因此, 对于深梁, 剪切变形对位移的影响不可忽略。

## 2. 桁架的位移计算

**例 6-4** 图 6-11a 所示为一屋架, 屋架的上弦杆和其他压杆采用钢筋混凝土杆, 下弦杆和其他拉杆采用钢杆。图 6-11b 是屋架的计算简图。设屋架承受均布荷载  $q$  作用。试求顶点  $C$  的竖向位移。

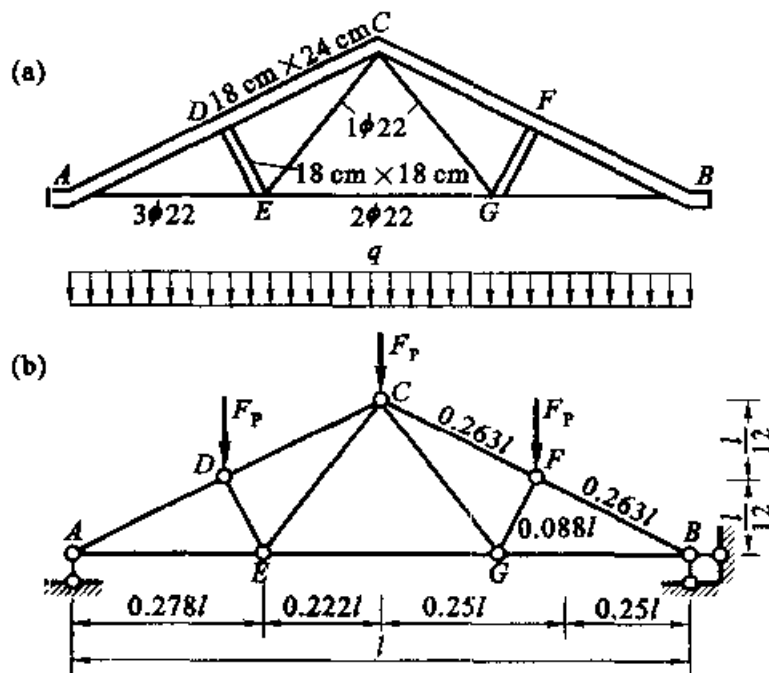


图 6-11

解 (1) 求  $F_{NP}$

先将均布荷载  $q$  化为结点荷载  $F_P = \frac{ql}{4}$ 。

求结点荷载作用下的  $F_{NP}$ 。

为了简便计算, 结点荷载取为单位值(图 6-12), 图中给出的内力数值乘以  $F_P$  后, 即为轴力  $F_{NP}^{(1)}$ 。

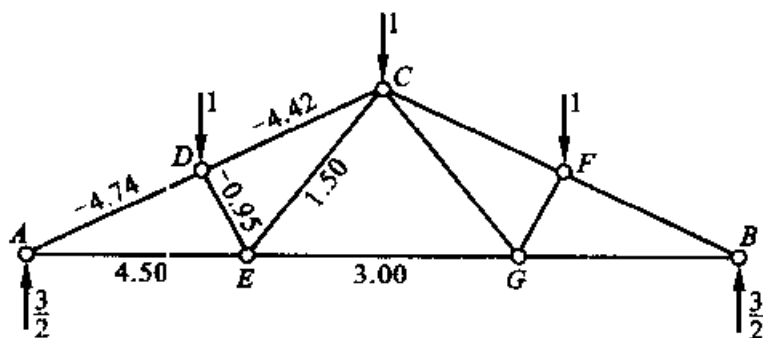


图 6-12

(2) 求  $\bar{F}_N$

在 C 点虚设单位竖向荷载, 相应的轴力  $\bar{F}_N$  如图 6-13 所示。

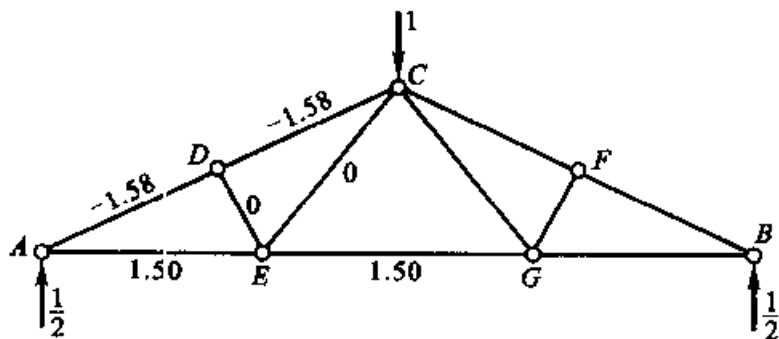


图 6-13

(3) 求  $\Delta_c$

根据桁架位移公式(6-21), 得

$$\Delta_c = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA}$$

具体计算过程见表 6-3。由于对称性, 计算总和时, 在表中只计算了半

(1) 本例中, 为了简便计算, 结点荷载取为单位值, 没有取真值, 故图中等处未注明其单位, 单位只是在最后结果中给出。下同。

个桁架。杆 EG 的长度只取一半。

表 6-3 求位移  $\Delta_c$  的列表计算过程

材 料	杆件	$F_{NP}$	$l$	$A$	$F_N$	$F_N F_{NP} l / AE$
钢筋 混凝土	AD	$-4.74 F_P$	$0.263l$	$A_h$	$-1.58$	$1.97 F_P l / A_h E_h$
	DC	$4.42 F_P$	$0.263l$	$A_h$	$-1.58$	$1.84 F_P l / A_h E_h$
	DE	$0.95 F_P$	$0.088l$	$0.75 A_h$	0	0
						$\Sigma = \frac{3.81 F_P l}{A_h E_h}$
钢  筋	CE	$1.50 F_P$	$0.278l$	$A_g$	0	0
	AE	$4.50 F_P$	$0.278l$	$3 A_g$	$1.50$	$0.63 F_P l / A_g E_g$
	EG	$3.00 F_P$	$0.222l$	$2 A_g$	$1.50$	$0.5 F_P l / A_g E_g$
						$\Sigma = \frac{1.13 F_P l}{A_g E_g}$

表中的  $A_h$  是上弦杆的截面面积:  $A_h = 18 \text{ cm} \times 24 \text{ cm} = 432 \text{ cm}^2$ 。表中的  $A_g$  是  $\phi 22$  钢筋的截面面积:

$$A_g = 3.8 \text{ cm}^2$$

根据表中结果,即得

$$\Delta_c = 2 F_P l \left( \frac{3.81}{A_h E_h} + \frac{1.13}{A_g E_g} \right) \quad (\text{a})$$

设原始数据给定如下:

跨度  $l = 12 \text{ m}$

荷载  $q = 13\,000 \text{ N/m}$ ,  $F_P = \frac{ql}{4} = 39\,000 \text{ N}$

混凝土  $E_h = 3.0 \times 10^4 \text{ MPa}$

钢筋  $E_g = 2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$

代入式(a),则得

$$\Delta_c = 1.66 \text{ cm} (\downarrow)$$

### 3. 曲杆的位移计算

**例 6-5** 图 6-14a 所示为一等截面圆弧形曲杆 AB, 截面为矩形, 圆弧 AB 的圆心角为  $\alpha$ , 半径为  $R$ 。设均布竖向荷载  $q$  沿水平线作用。试求 B 点的竖向位移  $\Delta$ 。

**解** 求  $\Delta$  时, 我们在 B 点加单位竖向荷载(图 6-14b)。现分别求实际荷载和单位荷载作用下的内力。取 B 点作坐标原点, 任一点 C 的坐标为  $x$ ,

$y$ , 圆心角为  $\theta$ .

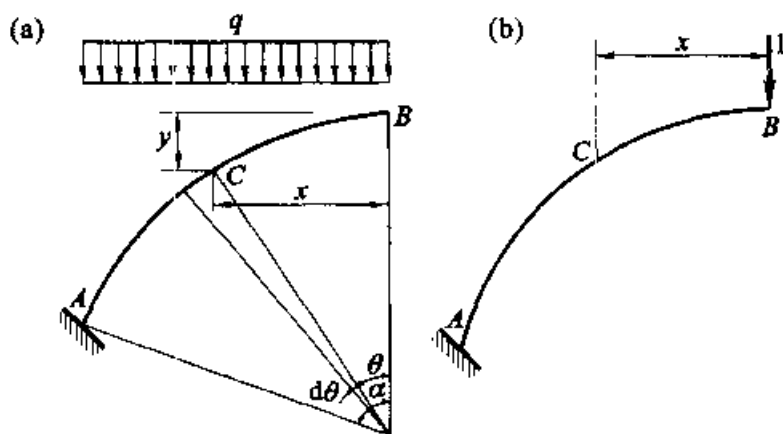


图 6-14

实际荷载	虚设荷载
$M_P = -\frac{1}{2}qx^2$ ,	$\bar{M} = -x$
$F_{NP} = -qrx \sin \theta$ ,	$\bar{F}_N = -\sin \theta$
$F_{QP} = qrx \cos \theta$ ,	$\bar{F}_Q = \cos \theta$

位移公式为

$$\Delta = \int \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds + \int \frac{F_{NP} \bar{F}_N}{EA} ds + \int \frac{k F_{QP} \bar{F}_Q}{GA} ds$$

用  $\Delta_M$ 、 $\Delta_N$ 、 $\Delta_Q$  分别表示  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$  所引起的位移, 得

$$\begin{aligned}\Delta_M &= \int_B^A \frac{M_P \bar{M}}{EI} ds = \frac{q}{2EI} \int_B^A x^2 ds \\ \Delta_N &= \int_B^A \frac{F_{NP} \bar{F}_N}{EA} ds = \frac{q}{EA} \int_B^A x \sin^2 \theta ds \\ \Delta_Q &= \int_B^A \frac{k F_{QP} \bar{F}_Q}{GA} ds = \frac{kq}{GA} \int_B^A x \cos^2 \theta ds\end{aligned}$$

取  $\theta$  作变数, 则

$$x = R \sin \theta, \quad y = R(1 - \cos \theta), \quad ds = R d\theta$$

代入上式, 得

$$\begin{aligned}\Delta_M &= \frac{qR^4}{2EI} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \\ \Delta_N &= \frac{qR^2}{EA} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \\ \Delta_Q &= \frac{kqR^2}{GA} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta\end{aligned}$$



由于

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\alpha} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\alpha} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= \left[ -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\alpha} \\
 &= \frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \\
 \int_0^{\alpha} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\alpha} \\
 &= \frac{1}{3} (1 - \cos^3 \alpha)
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 \Delta_M &= \frac{qR^4}{2EI} \left( \frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right) \\
 \Delta_N &= \frac{qR^2}{EA} \left( \frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right) \\
 \Delta_Q &= \frac{kqR^2}{GA} \cdot \frac{1}{3} (1 - \cos^3 \alpha)
 \end{aligned}$$

如果  $\alpha = 90^\circ$ , 则

$$\begin{aligned}
 \Delta_M &= \frac{qR^4}{3EI} \\
 \Delta_N &= \frac{2qR^2}{3EA} \\
 \Delta_Q &= \frac{kqR^2}{3GA}
 \end{aligned}$$

结合上例讨论如下:在上例中,弯曲变形对位移  $\Delta$  的影响是主要的。为了进行比较,求出  $\Delta_N/\Delta_M$  和  $\Delta_Q/\Delta_M$  这两个比值。

设  $\alpha = 90^\circ$ ,  $h/R = 1/10$ ,  $E/G = 8/3$ , 截面为矩形,  $I/A = h^2/12$  ( $h$  为截面高度),  $k = 1.2$ , 则

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta_N}{\Delta_M} &= \frac{2I}{R^2 A} = \frac{1}{6} \frac{h^2}{R^2} = \frac{1}{600} \\
 \frac{\Delta_Q}{\Delta_M} &= \frac{kEI}{R^2 GA} = \frac{k}{12G} \frac{E h^2}{R^2} = \frac{1}{375}
 \end{aligned}$$

计算结果表明,在给定的条件下,轴力和剪力所引起的位移可以忽略不计。

**例 6-6** 图 6-15a 所示简支梁受集中荷载  $F_P$  作用。试求梁两端截面 A、B 的相对转角  $\Delta$ 。

解 由图 6-15a 中可见, 相对转角  $\Delta = \theta_A + \theta_B$ 。因此, 虚设力系时, 在截面 A、B 处施加一对反向的单位力偶, 如图 6-15b 所示。

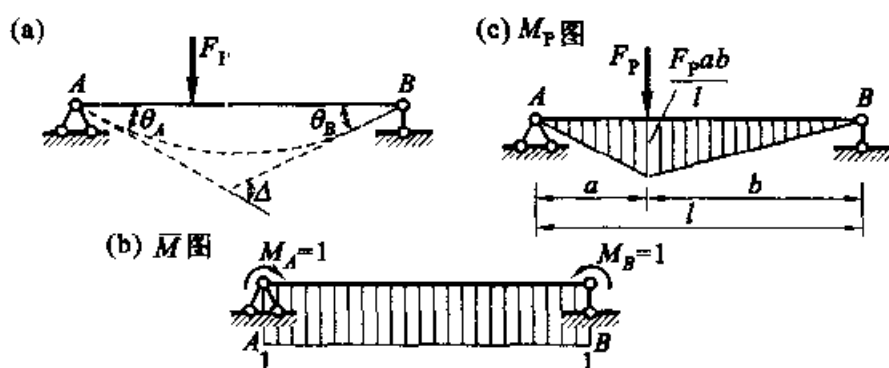


图 6-15

求得内力表达式如下:

实际荷载作用下的弯矩图  $M_P$  如图 6-15c 所示,

$$M_P = \frac{F_P b}{l} x \quad (0 < x < a), \quad M_P = F_P a \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (a < x < l)$$

虚设单位荷载作用下,

$$M = 1 \quad (0 < x < l)$$

代入式(6-20), 得到相对转角  $\Delta$  为

$$\begin{aligned} \Delta &= \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds = \int_0^a \frac{F_P b}{EI} x dx + \int_a^l \frac{F_P a}{EI} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) dx \\ &= \frac{F_P ab}{2EI} (\searrow) \end{aligned}$$

求得结果为正值, 表明相对转角  $\Delta$  的方向与所设的一对单位力偶方向相同。

## § 6-5 图 乘 法

在荷载作用下求结构弹性位移的一般公式(6-19)中, 需要求下列积分项的值:

$$\int \frac{M_i M_k}{EI} dx \quad (a)$$

求积分项的值时, 除采用各种积分方法求出精确的显式表示式外, 还可采用数值积分方法求出精确的或近似的数值解。

一种常用的数值积分方法是高斯数值积分法, 在有限元法书籍中一般都有介绍, 可以参考。

本节介绍一种求式(a)这类积分值的方法——图乘法。在一定的应用条件下,图乘法可给出积分(a)的数值解,而且是精确解。

### 1. 图乘法及其应用条件

图6-16所示为一直杆或直杆段AB的两个弯矩图,其中有一个弯矩图( $M_i$ 图)是直线图。如果在AB范围内该杆截面抗弯刚度 $EI$ 为一常数,则式(a)这类积分可按下式求出积分值:

$$\int \frac{M_i M_k}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int M_i M_k dx = \frac{1}{EI} A y_0 \quad (6-27)$$

式中 $A$ 是AB段内 $M_k$ 图的面积, $y_0$ 是与 $M_k$ 图形心 $C$ 对应处的 $M_i$ 图标距,即纵坐标。

式(6-27)可证明如下:

先看直线图形( $M_i$ 图)。以 $M_i$ 图中两直线的交点 $O$ 作为坐标原点,以 $\alpha$ 表示 $M_i$ 图直线的倾角,则 $M_i$ 图任一点标距可表示为

$$M_i = x \tan \alpha \quad (b)$$

因此

$$\int_A^B M_i M_k dx = \tan \alpha \int_A^B x M_k dx \quad (c)$$

式中 $M_k dx$ 可看作 $M_k$ 图的微分面积(图6-16中画阴影线的部分); $x \cdot M_k dx$ 是这个微分面积对 $y$ 轴的面积矩。于是, $\int_A^B x M_k dx$ 就是 $M_k$ 图的面积 $A$ 对 $y$ 轴的面积矩。以 $x_0$ 表示 $M_k$ 图的形心 $C$ 到 $y$ 轴的距离,则

$$\int_A^B x \cdot M_k dx = A x_0 \quad (d)$$

将上式代入式(c),得到

$$\int_A^B M_i M_k dx = \tan \alpha \cdot A x_0 = A y_0 \quad (e)$$

式中 $y_0$ 是在 $M_k$ 图形心 $C$ 对应处的 $M_i$ 图标距。利用式(e),即可导出式(6.27),证毕。

式(6-27)是图乘法所使用的公式。它将式(a)形式的积分运算问题简化为求图形的面积、形心和标距的问题。

应用图乘法计算时要注意两点:

(1) 应用条件:杆段应是等截面直杆段,两个图形中至少应有一个是直线,标距 $y_0$ 应取自直线图中。

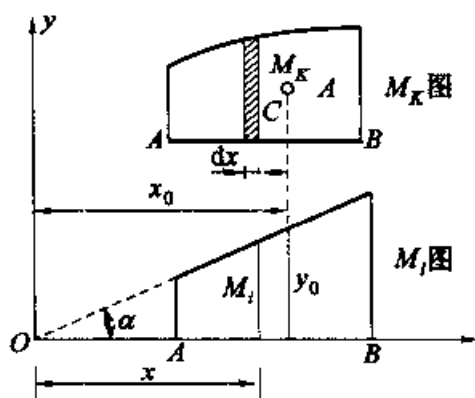


图 6-16

(2) 正负号规则:面积  $A$  与标距  $y_0$  在杆的同一边时,乘积  $Ay_0$  取正号;  
 $A$  与  $y_0$  在杆的不同边时取负号。

## 2. 几种常见图形的图积和形心位置

在图 6-17 中,给出了位移计算中几种常见图形的面积公式和形心位置。

应当注意,在所示的各次抛物线图形中,抛物线顶点处的切线都是与基线平行的。这种图形可称为抛物线标准图形。应用图中有关公式时,应注意这个特点。

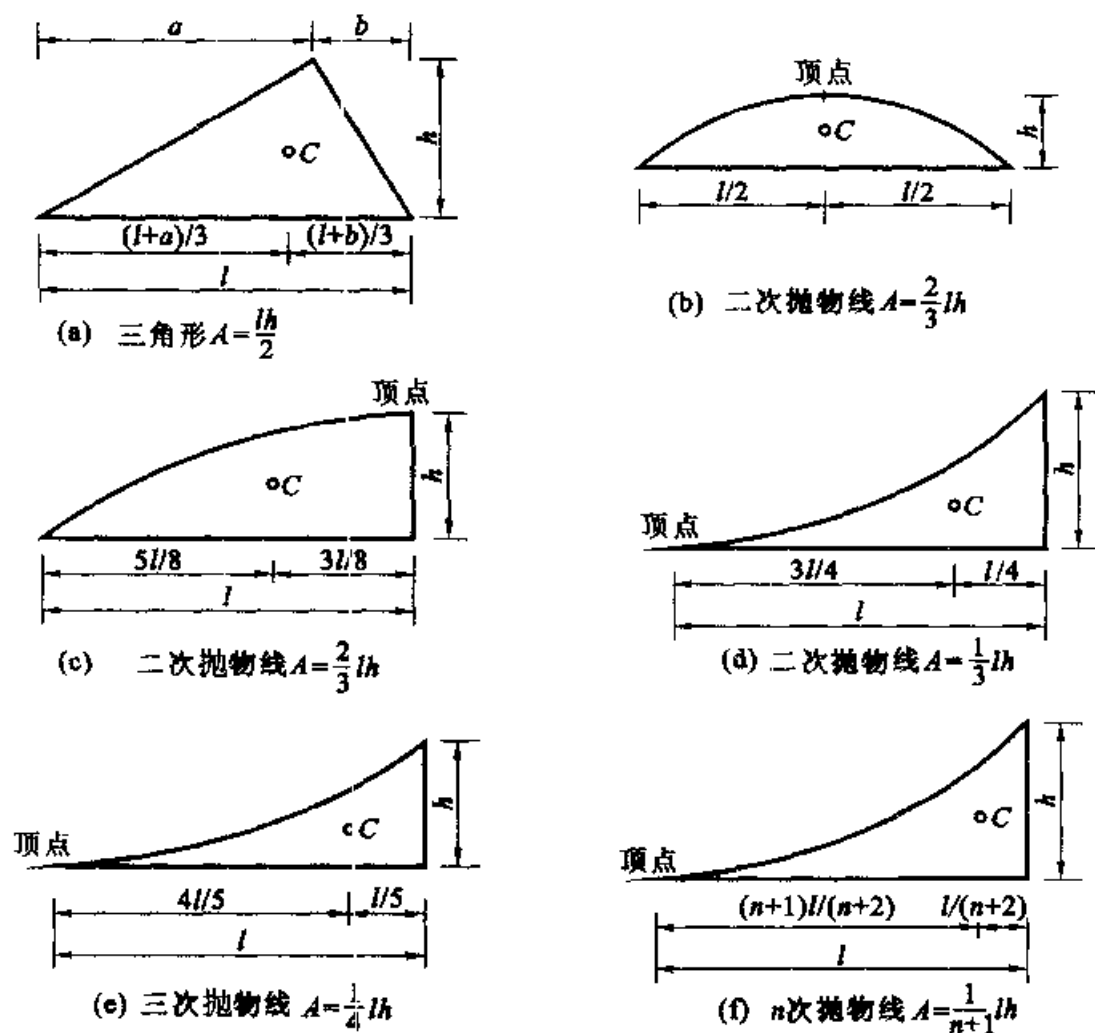


图 6-17

## 3. 应用图乘法时的几个具体问题

- (1) 如果两个图形都是直线图形,则标距  $y_0$  可取自其中任一个图形。
- (2) 如果一个图形是曲线,另一个图形是由几段直线组成的折线,则应分段考虑。对于图 6-18 所示的情形,则有

$$\int M_i M_K dx = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3$$

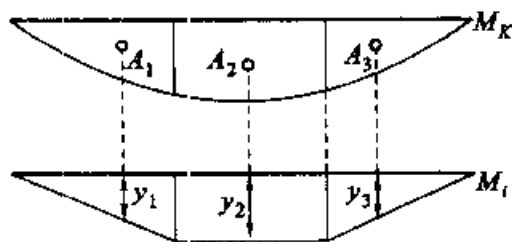


图 6-18

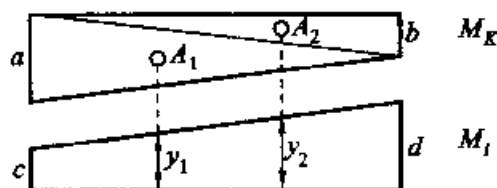


图 6-19

(3) 如果图形比较复杂,则可将其分解为几个简单图形,分项计算后再进行叠加。

首先,考虑梯形的分解。

例如,图 5-19 中两个图形都是梯形,可以不求梯形面积的形心,而将其中的一个梯形( $M_K$  图)分为两个三角形(也可分为一个矩形和一个三角形)再应用图乘法。因此,

$$\int M_i M_K dx = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

其次,考虑抛物线非标准图形的分解。

例如,图 6-20a 所示结构中一段直杆 AB 在均布荷载  $q$  作用下的  $M_P$  图。在一般情况下,这是一个抛物线非标准图形。由第二章可知, $M_P$  图是由两端弯矩  $M_A$ 、 $M_B$  组成的直线图(图 6-20b 中的  $M'$  图)和简支梁在均布荷载  $q$  作用下的弯矩图(图 6-20c 中的  $M^0$  图)叠加而成的。因此,可将  $M_P$  图分解为直线的  $M'$  图和标准抛物线的  $M^0$  图,然后再应用图乘法。

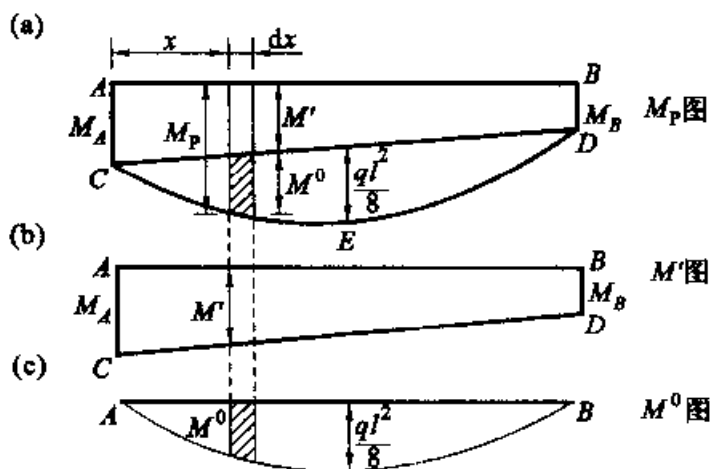


图 6-20

还要指出,所谓弯矩图的叠加是指弯矩图纵坐标的叠加。所以虽然图 6-20a 中的  $M^0$  图与图 6-20c 中的  $M^0$  图形状并不相似,但在同一横坐标  $x$  处,二者的纵坐标是相同的,微段  $dx$  的微小面积(图中带阴影的面积)是相同的。因此,两图的面积和形心的横坐标也是相同的。

**例 6-7** 试用图乘法计算图 6-21a 所示简支梁在均布荷载  $q$  作用下的  $B$  端转角  $\Delta_B$ 。

**解** 作荷载作用下的  $M_P$  图和虚设单位力偶作用下的  $\bar{M}$  图,如图 6-21a、b 所示。

$$\Delta_B = \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds = \frac{1}{EI} A y_0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \frac{1}{2} = -\frac{ql^3}{24EI} \quad (\searrow)$$

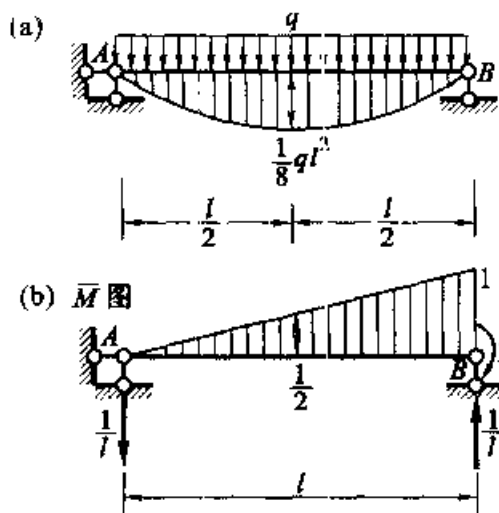


图 6-21

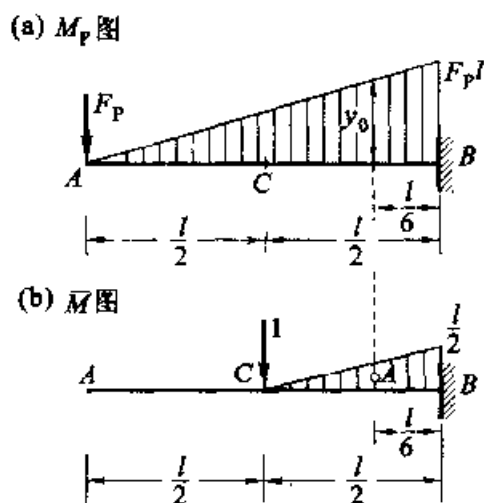


图 6-22

**例 6-8** 图 6-22a 所示为一悬臂梁,在  $A$  点作用集中荷载  $F_P$ 。试求中点  $C$  的挠度  $\Delta_C$ 。

**解** 作  $M_P$  图与  $\bar{M}$  图如图 6-22a、b 所示。应用图乘法,  $\bar{M}$  图中三角形面积为

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}$$

$M_P$  图中相应的标距:

$$y_0 = \frac{5}{6} F_P l$$

求得

$$\Delta_C = \frac{1}{EI} \int \bar{M} M_P ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{5}{6} F_P l = \frac{5 F_P l^3}{48 EI} \quad (\downarrow)$$

在应用图乘法时,如果计算  $M_P$  图面积  $A = \frac{1}{2} F_P l^2$ ,  $\bar{M}$  图上相应的标距

$y_0 = \frac{l}{6}$ , 则将得到错误的结果:  $\Delta_c = \frac{F_P l^3}{12EI}$  (↓)。请读者分析, 其中错误何在?

**例 6-9** 试求图 6-23a 所示刚架结点 B 的水平位移  $\Delta$ 。各杆截面为矩形  $bh$ , 惯性矩相等。只考虑弯曲变形的影响。

**解** 作  $M_P$  图和  $M$  图, 如图 6-23b、c 所示。

$M_P$  图的面积可分为  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  三块计算

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{ql^2}{2} \cdot l = \frac{ql^3}{4}, \quad A_2 = \frac{ql^3}{4}, \quad A_3 = \frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \cdot l = \frac{ql^3}{12}$$

$M$  图上相应的标距为

$$y_1 = \frac{2}{3}l, \quad y_2 = \frac{2}{3}l, \quad y_3 = \frac{l}{2}$$

(a)

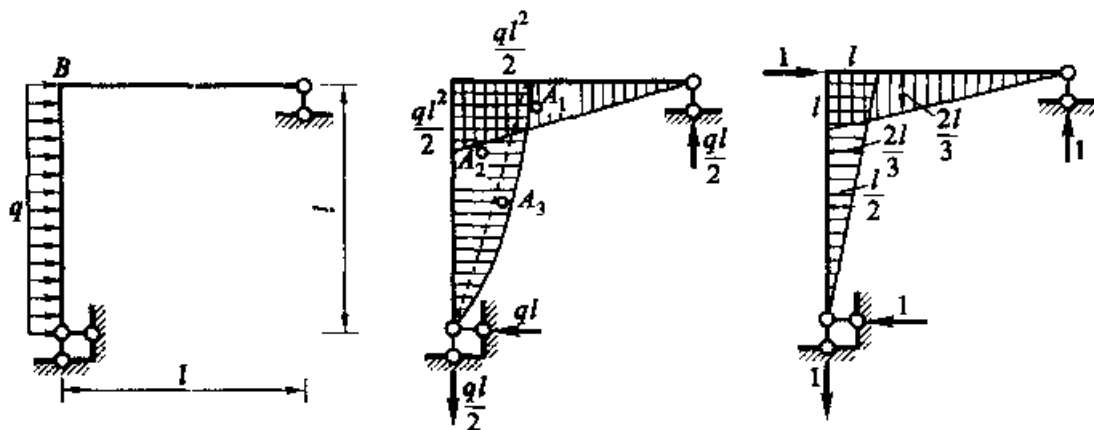
(b)  $M_P$  图(c)  $M$  图

图 6-23

求得

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{ql^3}{4} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{ql^3}{4} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{l}{2} \right) \\ &= \frac{3ql^4}{8EI} \quad (\rightarrow) \end{aligned}$$

**例 6-10** 试分析例 6-9 所示刚架轴向变形对 B 点水平位移的影响。

**解** 作  $F_{NP}$  图和  $\bar{F}_N$  图如图 6-24 所示。

轴向变形引起的位移  $\Delta_N$

$$\Delta_N = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA} = \frac{ql}{2} \times 1 \cdot \frac{l}{EA} = \frac{ql^2}{2EA} \quad (\rightarrow)$$

由例 6-9 求得

$$\Delta_M = \frac{3ql^4}{8EI}$$

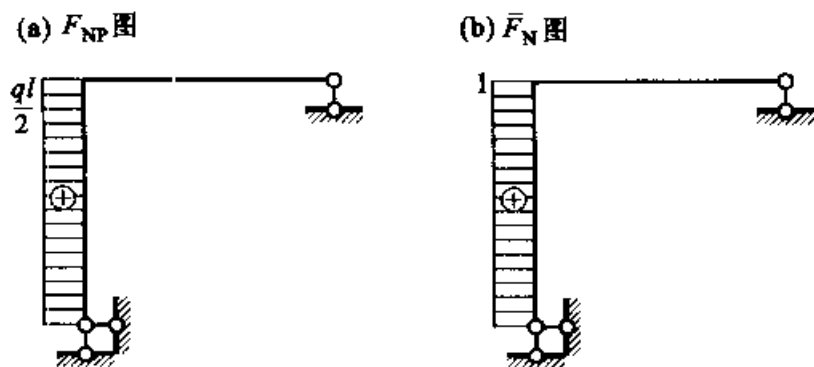


图 6-24

二者的比值为

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_M} = \frac{ql^2}{2EA} \cdot \frac{8EI}{3ql^3} = \frac{4I}{3Al^2}$$

由于矩形截面  $\frac{I}{A} = \frac{h^2}{12}$

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_M} = \frac{1}{9} \frac{h^2}{l^2}$$

可见, 当  $h/l$  很小时 (例如  $h = \frac{l}{10}$ ), 轴力变形的影响可以忽略 (只占弯矩影响的  $\frac{1}{900}$ )。

**例 6-11** 试求图 6-25a 所示刚架在水压力作用下  $C$ 、 $D$  两点的相对水平位移。设各杆  $EI$  为常数。

**解** (1) 作荷载作用下的  $M_p$  图, 如图 6-25b 所示。应当注意,  $AC$ 、 $BD$  杆的  $M_p$  图是三次抛物线。

(2) 在  $C$ 、 $D$  两点加一对反向的单位水平力, 并作  $\bar{M}$  图, 如图 6-25c 所示。

(3) 用图乘法计算位移。

杆  $AC$  和  $BD$

$$A_1 = \frac{1}{4} \times 1 \text{ m} \times \left( \frac{1}{6} \text{ m}^2 \right) q = \left( \frac{1}{24} \text{ m}^3 \right) q$$

$$\varphi_1 = \frac{4}{5} \times 1 \text{ m} = \frac{4}{5} \text{ m}$$

杆  $AB$

$$A_2 = \left( \frac{1}{6} \text{ m}^2 \right) q \times 2 \text{ m} - \frac{2}{3} \times \left( \frac{1}{2} \text{ m}^2 \right) q \times 2 \text{ m}$$



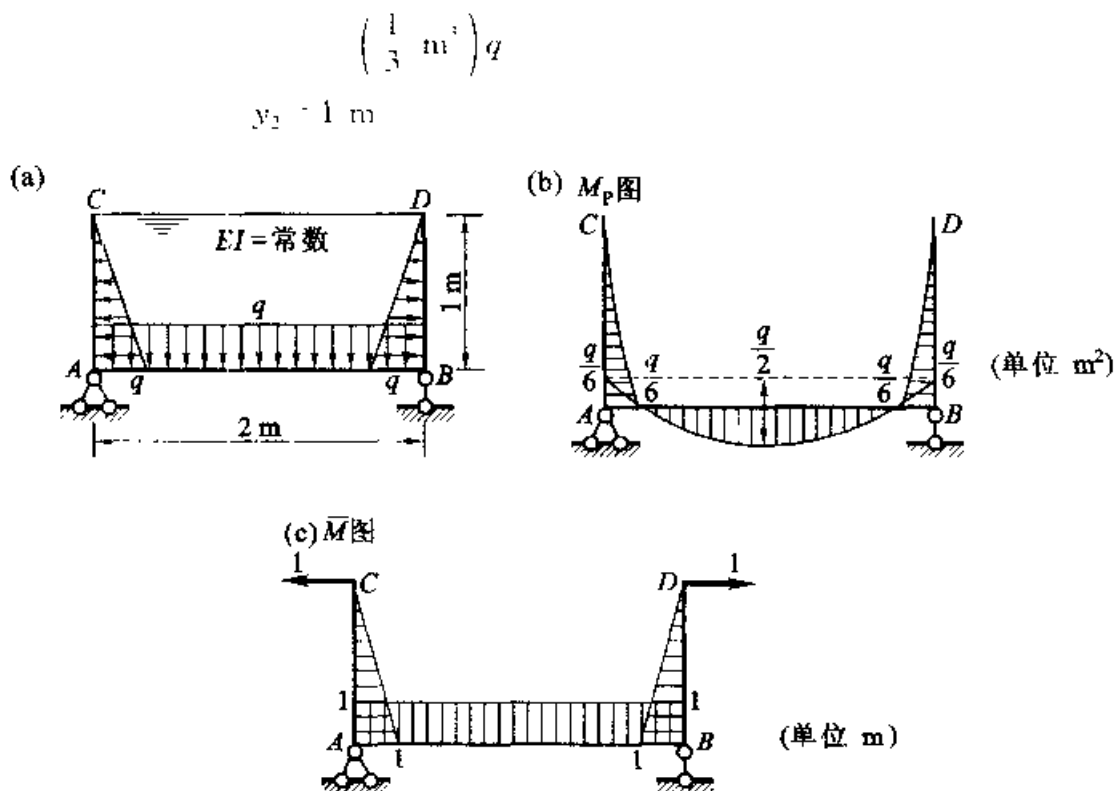


图 6-25

求得

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum \int \frac{MM_P}{EI} ds = \left[ 2(A_1 y_1) + (A_2 y_2) \right] \frac{1}{EI} \\ &= \frac{1}{EI} \left[ 2 \left( \frac{q \text{ m}^3}{24} \times \frac{4 \text{ m}}{5} \right) + \left( \frac{q \text{ m}^3}{3} \right) \times 1 \text{ m} \right] \\ &= - \left( \frac{4}{15} \text{ m}^3 \right) \frac{q}{EI} \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{aligned}$$

计算结果为负值,说明  $C, D$  两点实际的相对水平位移与所设单位荷载的指向相反,即不是两点相互分开,而是相互靠近。

**例 6-12** 图 6-26 所示为一水平面内的刚架  $ABC$ ,在  $C$  点承受竖向荷载  $F_P$ ,处于空间受力状态。设各杆  $EI$  和  $GI_t$  为常数。试求  $C$  点竖向位移  $\Delta$ 。

**解** 实际荷载作用下的弯矩  $M_P$  图和扭矩  $M_{tP}$  图,如图 6-26c 和 c 所示

虚设单位荷载(图 6-26b)作用下的弯矩  $\bar{M}$  图和扭矩  $\bar{M}_t$  图,如图 6-26d 和 f 所示。弯曲变形引起的位移为

$$\Delta_1 = \sum \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds = \frac{F_P}{3EI} (l_1^3 + l_2^3)$$

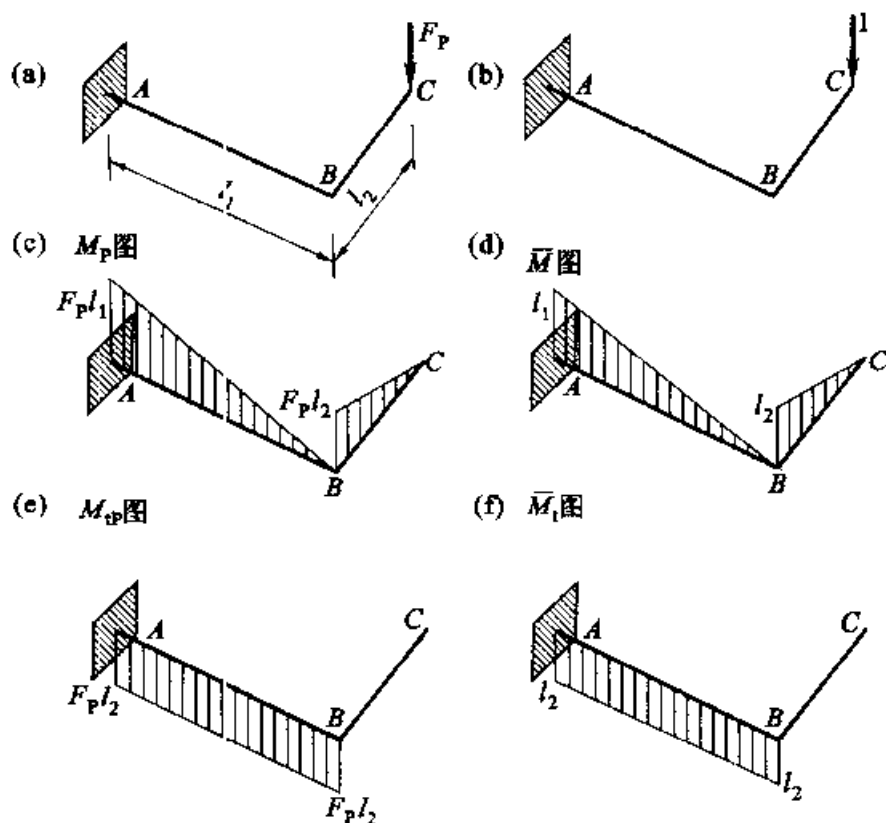


图 6-26

扭转变形引起的位移为

$$\Delta_2 = \sum \int \frac{\bar{M}_t M_{tP}}{GI_t} ds = \frac{F_P l_1 l_2^2}{GI_t}$$

忽略剪切变形影响时, C 点竖向位移为

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{F_P}{3EI} (l_1^3 + l_2^3) + \frac{F_P l_1 l_2^2}{GI_t} (\downarrow)$$

## § 6-6 温度作用时的位移计算

对于静定结构, 温度改变并不引起内力。变形和位移是材料自由膨胀、收缩的结果。

设杆件的上边缘温度上升  $t_1$ , 下边缘上升  $t_2$ , 而沿杆截面厚度为线性分布(图 6-27)。此时, 杆件的轴线温度  $t_0$  与上、下边缘的温差  $\Delta t$  分别为

$$t_0 = \frac{h_1 t_2 + h_2 t_1}{h}, \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

式中  $h$  是杆件截面厚度,  $h_1$  和  $h_2$  分别是由杆轴至上、下边缘的距离。如果

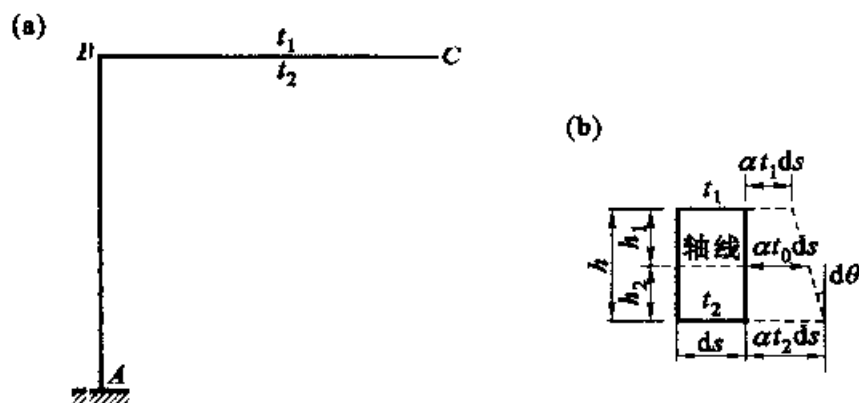


图 6-27

杆件的截面是对称截面, 则  $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$ ,  $t_0 = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$ 。在温度变化时, 杆件不引起切应变, 引起的轴向伸长应变  $\epsilon$  和曲率  $\kappa$  分别为

$$\epsilon = \alpha t_0$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\alpha(t_2 - t_1)ds}{h ds} = \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

式中  $\alpha$  为材料的线膨胀系数。将上列两式代入式(6-9), 并令  $\gamma_0 = 0$ , 得

$$\Delta = \sum \int \bar{F}_N \alpha t_0 ds + \sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds \quad (6-28a)$$

如果  $t_0$ 、 $\Delta t$  和  $h$  沿每一杆件的全长为常数, 则得

$$\Delta = \sum \alpha t_0 \int \bar{F}_N ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds \quad (6-28b)$$

式(6-28)是求温度位移的公式, 积分号包括杆的全长, 总和号包括结构各杆。轴力  $\bar{F}_N$  以拉伸为正,  $t_0$  以升高为正。弯矩  $\bar{M}$  和温差  $\Delta t$  引起的弯曲为同一方向时(即当  $\bar{M}$  和  $\Delta t$  使杆件的同一边产生拉伸变形时), 其乘积取正值, 反之取负值。

**例 6-13** 试求图 6-28a 所示刚架 C 点的竖向位移  $\Delta_C$ 。梁下侧和柱右侧温度升高  $10^\circ\text{C}$ , 梁上侧和柱左侧温度无改变。各杆截面为矩形, 截面高度  $h = 60\text{ cm}$ ,  $a = 6\text{ m}$ ,  $\alpha = 0.000\,01$ 。

**解** 在 C 点加单位竖向荷载, 作相应的  $\bar{F}_N$  图和  $\bar{M}$  图(图 6-28b、c)。

杆轴线处的温度升高值为

$$t_0 = \frac{10^\circ\text{C} + 0^\circ\text{C}}{2} = 5^\circ\text{C}$$

上、下(左、右)边缘温差为

$$\Delta t = 10^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C} = 10^\circ\text{C}$$

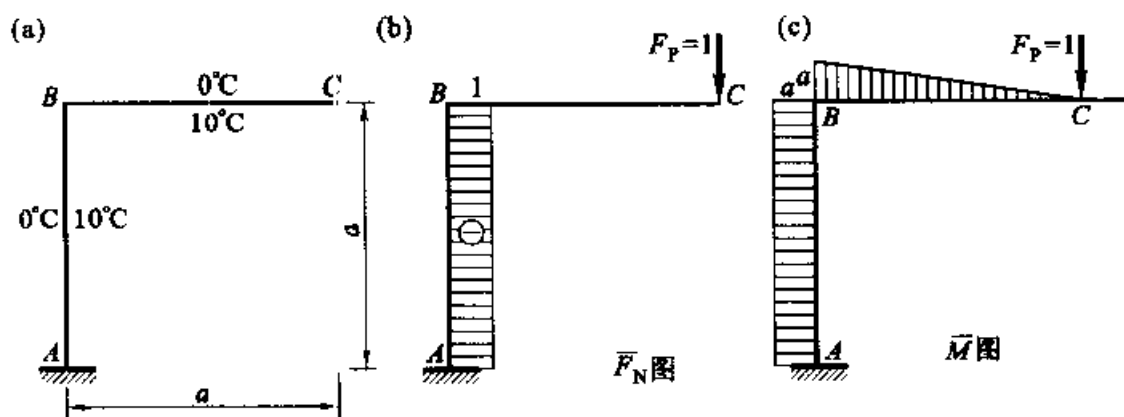


图 6-28

代入式(6-28b),得

$$\begin{aligned}\Delta_C &= \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M} ds + \sum \alpha t_0 \int \bar{F}_N ds = -\frac{10\alpha}{h} \frac{3}{2} a^2 + 5\alpha (-a) \\ &= -5\alpha a \left( \frac{3}{2} + \frac{a}{h} \right)\end{aligned}$$

因  $\Delta t$  与  $\bar{M}$  所产生的弯曲方向相反,故上式第一项取负号。代入  $\alpha = 0.000\,01$ ,  $a = 600\text{ cm}$ ,  $h = 60\text{ cm}$ ,得

$$\Delta_C = -0.93\text{ cm} (\uparrow)$$

## § 6-7 用求解器进行位移计算

用求解器可以求解一般平面结构的位移。本节主要以静定结构为例进行讨论,但是做法同样适用于后面章节中讨论的超静定结构的位移计算。位移计算通常与结构各杆件的材料性质有关,因此本节首先介绍如何输入各杆件的材料性质,然后介绍如何输入温度的改变,最后结合具体例题进一步介绍位移的计算。

### 1. 输入材料性质

在“编辑器”中依次选择菜单“命令”、“材料性质”便可打开材料性质对话框。选择相同材料性质的单元范围,再选择或输入所需的杆件刚度性质(质量和极限弯矩可以空缺),然后单击“应用”按钮将命令写到命令文档中去。若还有单元刚度未定义,可在对话框中继续输入新的数据,再“应用”,直至定义完毕,单击“关闭”退出。

注意,若前后两个命令行中的定义有重复和冲突时,则以后面的定义为准,亦即前面的定义被后面的定义覆盖和取代。

## 2. 输入温度改变

在“编辑器”中依次选择菜单“命令”、“温度改变”，可打开温度改变对话框。与上面类似，选择相同温度改变的单元范围，再按照提示选择或输入所需的各项参数，然后单击“应用”按钮将命令写到命令文档中去。若还要继续定义，可在对话框中输入新的数据，再“应用”，直至定义完毕，单击“关闭”退出。

温度改变须提供截面高度，输入时要注意同结构其他的尺寸采用统一单位。

**例 6-14** 试用求解器求解例 6-4。

**解** 本例力和尺寸单位统一采用 kN 和 cm。输入的数据文档如下(图 6-29a)：

```

LET,L=1200,P=39                                E,7,4,1,1,0,1,1,0
LET,Ah1=18*24,Ah2=18*18,Ag=3.8                 E,2,5,1,1,0,1,1,0
LET,Eh=3000,Eg=20000,EAg=Eg*Ag                 E,3,7,1,1,0,1,1,0
LET,EAh1=Eh*Ah1,EAh2=Eh*Ah2                     E,2,6,1,1,0,1,1,0
N,1,0,0                                           E,3,6,1,1,0,1,1,0
N,2,0.278*L,0                                     : NSUPT,1,1,0,0
N,3,0.722*L,0                                     NSUPT,4,2,0,0,0
N,4,1,0                                           NLOAD,5,1,39, 90
N,6,L/2,L/6                                       NLOAD,6,1,39, 90
FILL,1,6,1,5,1                                   NLOAD,7,1,39, 90
FILL,6,4,1,7,1                                   ECHAR,1,2,3*EAg,1,0,0, 1
E,1,2,1,1,0,1,1,0                                ECHAR,3,3,2*EAg,1,0,0, 1
E,3,4,1,1,0,1,1,0                                ECHAR,10,11,EAg,1,0,0, 1
E,2,3,1,1,0,1,1,0                                ECHAR,4,7,EAh1,1,0,0, -1
E,1,5,1,1,0,1,1,0                                ECHAR,8,9,EAh2,1,0,0, 1
E,5,6,1,1,0,1,1,0                                :
E,6,7,1,1,0,1,1,0                                :

```

由于本例与抗弯刚度无关，因此输入了单位值。输入结构体系后，继续如下操作：

- 1) 选择菜单“求解”、“位移计算”，打开“位移计算”对话框，
- 2) “位移显示”栏中选“结构”，在观览器中便可以看到变形图，如图 6-29b 所示，
- 3) 在下面的“杆端位移值”的表格里，找到单元 5 的第 2 个端点的竖向位移，
- 4) 再在“乘以系数”下拉框中选 0.01，则可以看出结点 6 的竖向位移为：

$$\Delta_C = -1.66143 \text{ cm} (\downarrow)$$

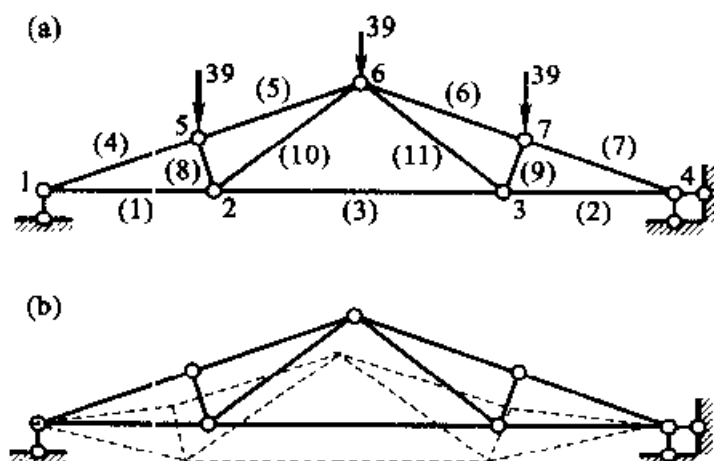


图 6-29

例 6-15 试用求解器求解例 6-13。

解 本例尺寸单位统一采用 cm。输入的数据文档如下(图 6-30):

```
LET, A=600, H=60
N, 1, 0, 0
N, 2, 0, A
N, 3, A, A
E, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1
E, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1
NSUPT, 1, 6, 0, 0, 0, 0
ECHAR, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 1
ETLOD, 1, 2, 5, 10, 0.00001, H
END
```

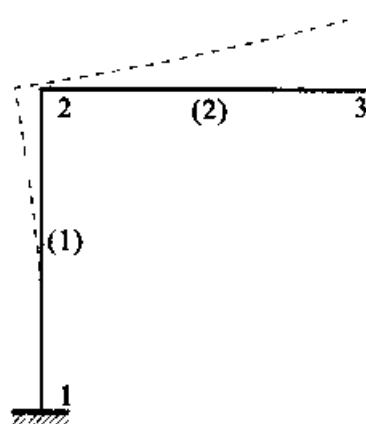


图 6-30

由于本例与刚度无关, 因此都输入了单位值。仿照上例的操作步骤, 可得结点 3 的竖向位移为

$$\Delta_C = 0.93 \text{ cm} (\uparrow)$$

## § 6-8 变形体的虚功原理

虚功原理是力学中的一个基本原理。虚位移原理和虚力原理是它的两个基本形式。由虚位移原理可以导出力的平衡条件, 由虚力原理可以导出变形的协调条件。引入弹性体的本构关系后, 由虚功原理可以导出一系列能量原理, 用于分析弹性结构各种力学问题。

针对刚体体系这一特殊情况建立的虚功原理(虚位移原理和虚力原理)

已经在§4-4和§6-1中分别介绍。本节进一步讨论变形体体系的一般情况,建立变形体体系的虚功原理。在刚体体系的虚功原理中,由于刚体的应变恒为零,内力所作的功恒为零,因此只需考虑外力所作的功。而在变形体体系的虚功原理中,由于变形体中存在应变,因而既要考虑外力,也要考虑内力所作的功。换句话说,还要补充考虑应力在变形上所作的内虚功,这是变形体体系虚功原理与刚体体系虚功原理唯一的不同之处。

变形体的虚功原理可表述如下:

设变形体在力系作用下处于平衡状态,又设变形体由于其他原因产生符合约束条件的微小连续变形,则外力在位移上所作外虚功  $W$  恒等于各个微段的应力合力在变形上所作的内虚功  $W_i$ 。

变形体的虚功原理可用式(6-16)表示,即

$$W = W_i$$

我们先讨论变形体为单个杆件的情况,然后推广到杆件结构的一般情况。

### 1. 变形体虚功方程的应用条件

变形体虚功方程的应用条件是:力系应当满足平衡条件;位移应当符合支承情况并保持结构的连续性,或者说,位移应当满足变形连续协调条件。下面对这两方面的条件加以说明。

#### (1) 力系的平衡条件

图6-31a所示直杆AB承受沿杆长分布的轴向荷载集度  $p$  和法向荷载集度  $q$ ; A端外力  $M_A$ 、 $F_{NA}$ 、 $F_{QA}$  和B端外力  $M_B$ 、 $F_{NB}$ 、 $F_{QB}$ 。如果杆件处于

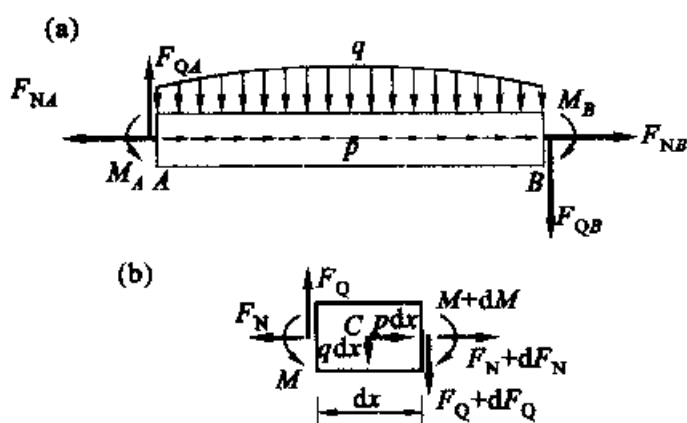


图 6-31

平衡状态,则图6-31b所示微段隔离体应满足平衡条件,即截面内力  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$  与分布荷载  $p$ 、 $q$  之间应满足下列平衡微分方程:

$$\left. \begin{aligned} dF_N + p dx &= 0 \\ dF_Q + q dx &= 0 \\ dM + F_Q dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-29)$$

## (2) 变形协调条件

图 6-32a 所示直杆 AB 的位移和变形情况可分述如下:

任一截面的位移可用三个位移分量来描述。即截面的角位移  $\theta$ 、截面形心的轴向位移  $u$  和横向位移  $w$ 。杆轴切线的角位移  $\varphi$  可由  $w$  得出:

$$\varphi = \frac{dw}{dx} \quad (6-30)$$

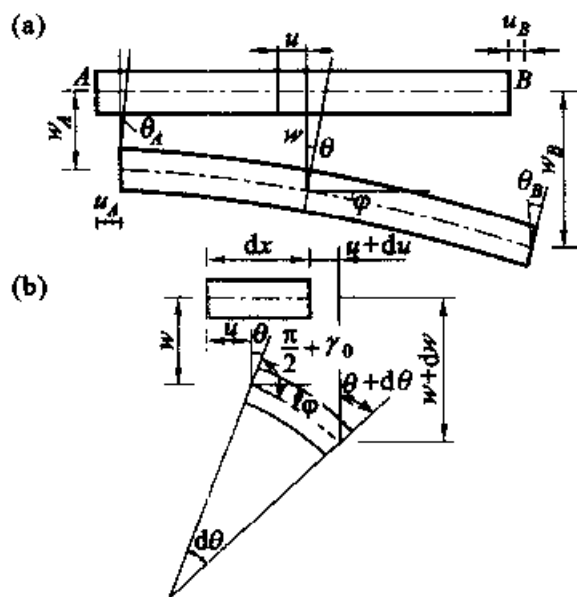


图 6-32

集中荷载  $F_P$  作用点的垂直位移可用  $\Delta$  表示。

微段  $dx$  的变形可用三个应变分量来描述。即两端截面的相对转角  $d\theta$ 、轴线的线应变  $\epsilon$ 、截面平均剪应变  $\gamma_0$  (图 6-32b)。

位移分量与应变分量之间应满足下列关系式

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \quad (6-31)$$

$$\gamma_0 = \varphi - \theta = \frac{dw}{dx} - \theta \quad (6-32)$$

此外,在杆端还应满足静力平衡或几何方面的边界条件。以 A 端为例,如为自由端,则截面 A 的  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$  应与 A 端给定的外力  $M_A$ 、 $F_{NA}$ 、 $F_{QA}$  相等;如为固定端,则截面 A 的  $\theta$ 、 $u$ 、 $w$  应与支座 A 给定的位移  $\theta_A$ 、 $u_A$ 、 $w_A$  相等;如为铰支端,则截面 A 的  $M$ 、 $u$ 、 $w$  应与 A 端给定的  $M_A$ 、 $u_A$ 、 $w_A$  相等。



应变位移关系式和几何边界条件合在一起称为变形协调条件。

## 2. 变形体虚功方程

令图 6-31 中的平衡受力状态在图 6-32 中连续变形状态上作虚功。

外力在位移上所作的外虚功为

$$W = (M_B \theta_B + F_{NB} u_B + F_{QB} w_B) - (M_A \theta_A + F_{NA} u_A + F_{QA} w_A) + \int_A^B (pu + qw) dx \quad (6-33)$$

式中前两项是杆端力作的虚功,第三项是分布荷载作的虚功。

微段  $dx$  两侧面的应力合力在变形上作的内虚功为

$$dW_i = M d\theta + F_N \epsilon dx + F_Q \gamma_0 dx$$

因此,整个变形体的内虚功为

$$W_i = \int_A^B (M d\theta + F_N \epsilon dx + F_Q \gamma_0 dx) \quad (6-34)$$

将式(6-33)和式(6-34)代入式(6-16),得到变形体虚功方程:

$$(M_B \theta_B + F_{NB} u_B + F_{QB} w_B) - (M_A \theta_A + F_{NA} u_A + F_{QA} w_A) + \int_A^B (pu + qw) dx = \int_A^B (M d\theta + F_N \epsilon dx + F_Q \gamma_0 dx) \quad (6-35)$$

## 3. 变形体虚功方程的证明

现在对虚功方程式(6-35)加以证明。

首先,根据平衡微分方程式(6-29),可知下面等式成立:

$$\int_A^B [(dF_N + p dx)u + (dF_Q + q dx)w + (dM + F_Q dx)\theta] = 0$$

上式可改写为

$$\int_A^B (u dF_N + w dF_Q + \theta dM) + \int_A^B (pu + qw + F_Q \theta) dx = 0 \quad (a)$$

由于

$$u dF_N + w dF_Q + \theta dM = d(uF_N + wF_Q + M\theta) - (F_N du + F_Q dw + M d\theta)$$

故式(a)又可改写为

$$\begin{aligned} [uF_N + wF_Q + M\theta] \Big|_A^B - \int_A^B (F_N du + F_Q dw + M d\theta) + \\ \int_A^B (pu + qw) dx + \int_A^B F_Q \theta dx = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

由应变位移关系式(6-31)、(6-32),可知

$$du = \epsilon dx, dw = \theta dx = \gamma_0 dx$$

代入式(b),得

$$[F_{NB} u_B + F_{QB} w_B + M_B \theta_B] - [F_{NA} u_A + F_{QA} w_A + M_A \theta_A] + \int_A^B (pu + qw) dx$$

$$= \int_A^B (F_N \epsilon dx + F_Q \gamma_0 dx + M d\theta) \quad (c)$$

式(c)就是式(6-35)。于是,变形体虚功方程式(6-35)得到了证明。

#### 4. 推广

如果杆上除分布荷载外,还有集中荷载,只需在外虚功  $W$  中计入集中荷载  $F_P$  作的虚功  $\sum F_P \Delta$  ( $\Delta$  是与  $F_P$  相应的位移),便得到推广的变形体虚功方程。

式(6-35)中只讨论了单个杆件的情况。现在进一步讨论杆件结构的情况。

对结构中每个杆件分别应用式(6-35),然后进行叠加,即得

$$\begin{aligned} & \sum [M\theta + F_N u + F_Q w]_A^B + \sum \int_A^B (pu + qw) ds + \sum F_P \Delta \\ &= \sum \int_A^B (M' d\theta + F_N' \epsilon ds + F_Q' \gamma_0 ds) \end{aligned} \quad (d)$$

式中左边第一项是所有各杆杆端力所作虚功总和。现在将所有各杆的杆端截面分为两类:

第一类杆端截面是结构内部结点处的杆端截面(例如,图 6-33 中杆件 1、2、3 的截面  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ )。由于结点本身处于平衡状态,因此在同一结点周围各杆的杆端力组成一个平衡力系,它们在结点位移上所作虚功总和等于零。

第二类杆端截面是结构的边界截面(例如,图 6-33 中的截面  $B$ 、 $C$ 、 $D$ )。这些杆端力的虚功总和就是结构边界外力的虚功,包括边界荷载和支座反力的虚功。其中支座反力的虚功可记为  $\sum F_{RK} c_K$ , 这里  $F_{RK}$  是支座反力,  $c_K$  是与  $F_{RK}$  相应的支座位移。

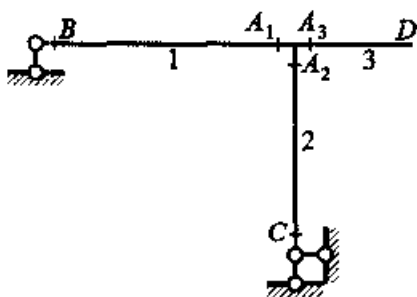


图 6-33

通常,可将结构边界荷载所作虚功与各杆集中荷载的虚功统一表示为  $\sum F_P \Delta$ 。于是,可得到杆件结构虚功方程的一般形式:

$$\begin{aligned} & \sum F_P \Delta + \sum F_{RK} c_K + \sum \int (pu + qw) ds \\ &= \sum \int_A^B (M d\theta + F_N' \epsilon ds + F_Q' \gamma_0 ds) \end{aligned} \quad (6-36)$$

上式左边第一项和第三项分别表示集中荷载和分布荷载作的虚功。这两项也可合成一项,仍记为  $\sum F_P \Delta$ , 则上式还可简写为(令  $d\theta = \kappa ds$ )

$$\sum F_P \Delta + \sum F_{RK} c_K = \sum \int_0^B (M\kappa + F_N \epsilon + F_Q \gamma_0) ds \quad (6-37)$$

在上面的证明过程中,只引用了力系的平衡条件和变形的协调条件。这两个条件就是应用变形体虚功原理时所需满足的全部条件。也就是说,虚功方程实际上是平衡方程和协调方程的综合。反过来,虚功方程既可以用来代替平衡方程,也可以用来代替几何方程(即协调方程)。

上述两方面的条件是分别对力系和变形独立给出的。力系和变形彼此是独立无关的。如果力系是给定的,位移是虚设的,式(6-37)便称为变形体的虚位移方程,它代表力系的平衡方程,可用于求力系中的某未知力。如果位移是给定的,力系是虚设的,则式(6-37)称为变形体的虚力方程,它代表几何协调方程,可用于求给定变形状态中某未知位移。

### 5. 变形体虚功方程的两种应用

虚功方程是“两用”方程:既可当虚力方程用,也可当虚位移方程用。

#### (1) 变形体虚力方程

在虚功方程(6-37)中,如果令力系( $F_P, F_{RK}, M, F_N, F_Q$ )是虚设的平衡力系,则可写为

$$\begin{array}{c} \text{虚设平衡力系} \\ \hline \sum F_P^* \Delta + \sum F_{RK}^* c_K = \sum \int (M^* \kappa + F_N^* \epsilon + F_Q^* \gamma_0) ds \quad (6-38) \\ \hline \text{实际协调变形} \end{array}$$

这里,加\*号的量表示虚设量。式(6-38)称为变形体虚力方程。当虚设力系设定之后,上式就成为关于变形状态中各物理量(位移 $\Delta$ 以及支座位移 $c_K$ 和应变 $\kappa, \epsilon, \gamma_0$ )之间应满足的条件,即几何条件。这是一种借用虚功形式表示的几何条件。单位荷载法就是应用这种形式的几何条件来求位移 $\Delta$ 的。

#### (2) 变形体虚位移方程

在虚功方程(6-37)中,如果令变形状态为虚设,则可写成

$$\begin{array}{c} \text{虚设变形状态} \\ \hline \sum F_P \Delta^* + \sum F_{RK} c_K^* = \sum \int (M \kappa^* + F_N \epsilon^* + F_Q \gamma_0^*) ds \quad (6-39) \\ \hline \text{实际平衡力系} \end{array}$$

上式称为变形体虚位移方程。当虚设变形状态设定之后,上式就成为平衡受力状态中各物理量(荷载  $F_P$  以及支座反力  $F_{Rk}$  和内力  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$ )之间应满足的条件,即平衡方程。这是一种借用虚功形式表示的平衡方程。这种形式的平衡方程可方便地用来计算某个拟求的支座反力。单位支座位移法就是应用这种形式的几何条件来求支座反力的。

### 6. 单位支座位移法

考虑结构某个平衡受力状态,已知荷载  $F_P$  和各杆内力  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$ ,现在拟求某个支座反力(或约束反力)  $F_{Ri}$ 。

首先,根据拟求的支座反力  $F_{Ri}$ ,虚设与之相应的单位支座位移  $c_i^* = 1$  (其余支座位移均设为零),并确定由此单位支座位移引起的协调变形状态(包括与荷载  $F_P$  的相应位移  $\delta_{Pi}^*$  以及应变  $\bar{\epsilon}_i^*$ 、 $\bar{\gamma}_{0i}^*$ 、 $\bar{\kappa}_i^*$ )。

其次,将上述平衡受力状态和虚设的协调变形状态代入虚位移方程(6-39),即得

$$F_{Ri} = \sum \int (M \bar{\kappa}_i^* + F_N \bar{\epsilon}_i^* + F_Q \bar{\gamma}_{0i}^*) ds - \sum F_P \delta_{Pi}^* \quad (6-40)$$

这就是应用单位支座位移法求结构支座反力  $F_{Ri}$  的一般公式。

如果结构是静定结构,当虚设单位移支座位移时,结构只产生刚体体系的位移。此时,虚设应变为零,式(6-40)简化为

$$F_{Ri} = - \sum F_P \delta_{Pi}^*$$

此即在 §4-4 中已导出的公式(4-9)。

## \* §6-9 应变能与应变余能

本节引入弹性杆件结构的应变能  $U$  和应变余能  $V$  等概念。杆件单位长度的应变能和应变余能称为应变能密度  $A_e$  和应变余能密度  $B_e$ 。

关于弹性的含义,需要说明两点。第一,弹性体的应力-应变关系应当是单值函数关系。如果物体在卸载时的变形特性与加载时的不同,则应力与应变之间已不是单值函数关系,这种非弹性情况在这里不予考虑。第二,弹性体的应力-应变关系可以是线性的或非线性的,前者称为线性弹性体,后者称为非线性弹性体。本节只讨论线性弹性情况。

### 1. 弹性杆件的物理方程

在线性弹性情况下,杆件截面内力  $F_N$ 、 $F_Q$ 、 $M$  与广义应变  $\epsilon$ 、 $\gamma$ 、 $\kappa$  之间的物理方程为线性方程:

$$\left. \begin{aligned} F_N &= EA\epsilon \\ F_Q &= \frac{GA}{k}\gamma \\ M &= EI\kappa \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{EA}F_N \\ \gamma &= \frac{k}{GA}F_Q \\ \kappa &= \frac{1}{EI}M \end{aligned} \right\} \quad (6-41a, b)$$

式中  $EA$ 、 $\frac{GA}{k}$ 、 $EI$  分别为截面的抗拉、抗剪、抗弯刚度。式(6-41a, b)分别称为物理方程的刚度形式和柔度形式。

## 2. 杆件的应变能密度

杆件的应变能密度  $A_\epsilon$  是单位杆长内由于杆件产生应变而储存的能量, 等于截面内力在应变上所作的功,  $A_\epsilon$  为拉伸、剪切、弯曲应变能密度  $A_n$ 、 $A_s$ 、 $A_b$  之和:

$$A_n = \int_0^\epsilon F_N d\epsilon, \quad A_s = \int_0^\gamma F_Q d\gamma, \quad A_b = \int_0^\kappa M d\kappa \quad (6-42)$$

$$A_\epsilon = A_n + A_s + A_b = \int_0^\epsilon F_N d\epsilon + \int_0^\gamma F_Q d\gamma + \int_0^\kappa M d\kappa$$

在线性弹性情况下, 将线性关系式(6-41a)代入式(6-42), 得

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \int_0^\epsilon EA\epsilon d\epsilon = \frac{1}{2}EA\epsilon^2 \\ A_s &= \int_0^\gamma \frac{GA}{k}\gamma d\gamma = \frac{1}{2}\frac{GA}{k}\gamma^2 \\ A_b &= \int_0^\kappa EI\kappa d\kappa = \frac{1}{2}EI\kappa^2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

因此

$$A_\epsilon = \frac{1}{2}EA\epsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{GA}{k}\gamma^2 + \frac{1}{2}EI\kappa^2 \quad (6-43)$$

应变能密度  $A_\epsilon$  为应变  $\epsilon$ 、 $\gamma$ 、 $\kappa$  的齐次二次式。

如用位移表示, 则在小位移情况下, 有

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}EA\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \\ A_s &= \frac{1}{2}\frac{GA}{k}\left(\frac{dw}{ds} - \theta\right)^2 \\ A_b &= \frac{1}{2}EI\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$A_\epsilon = \frac{1}{2}EA\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{GA}{k}\left(\frac{dw}{ds} - \theta\right)^2 + \frac{1}{2}EI\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 \quad (6-44)$$

## 3. 杆件结构的应变能

杆件  $e$  的应变能  $U^e$  由应变能密度  $A_e$  沿杆件长度积分得出:

$$U^e = \int A_e ds \quad (c)$$

杆件结构的应变能  $U$  是各杆应变能  $U^e$  之和:

$$U = \sum_e U^e = \sum_e \int A_e ds \quad (6-45)$$

在线性弹性情况下,将式(6-43)和(6-44)代入上式,得

$$\begin{aligned} U &= \sum_e \int \frac{1}{2} \left( EA\epsilon^2 + \frac{GA}{k} \gamma^2 + EI\kappa^2 \right) ds \\ &= \sum_e \int \frac{1}{2} \left[ EA \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{GA}{k} \left( \frac{dw}{ds} - \theta \right)^2 + EI \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 \right] ds \quad (6-46) \end{aligned}$$

对于薄杆,可忽略剪切变形,因而  $\theta = \frac{dw}{ds}$ ,故得

$$U = \sum_e \int \frac{1}{2} \left[ EA \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + EI \left( \frac{d^2 w}{ds^2} \right)^2 \right] ds \quad (6-47)$$

## 4. 杆件的应变余能密度

杆件的应变余能密度  $B_e$  是由拉伸、剪切、弯曲应变余能密度  $B_n$ 、 $B_s$ 、 $B_b$  之和:

$$B_n = \int_0^{F_N} \epsilon dF_N, \quad B_s = \int_0^{F_Q} \gamma dF_Q, \quad B_b = \int_0^M \kappa dM \quad (6-48)$$

$$B_e = B_n + B_s + B_b = \int_0^{F_N} \epsilon dF_N + \int_0^{F_Q} \gamma dF_Q + \int_0^M \kappa dM$$

现以拉伸情况为例,说明拉伸应变能密度  $A_n$  与拉伸应变余能密度  $B_n$  彼此互为余数这一性质。在图 6-34a、b 中给出  $F_N$  与  $\epsilon$  之间的内力—应变曲线  $A_n$  表示该曲线与横坐标之间的面积,即  $A_n = \int_0^\epsilon F_N d\epsilon$  (图 6-34a),而

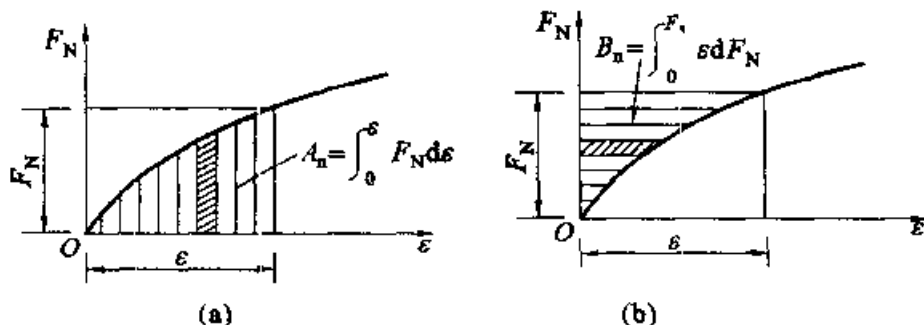


图 6-34

$B_n$  表示该曲线与纵坐标之间的面积,即  $B_n = \int_0^{F_N} \epsilon dF_N$  (图 6-34b)。面积

$A_n$  和面积  $B_s$  正好合成一个矩形面积,即

$$A_n + B_s = F_N \varepsilon$$

换句话说,对于矩形面积  $F_N \varepsilon$  来说,  $A_n$  和  $B_s$  彼此互为余数。这就是“余能”这个名称的由来。

在线性弹性情况下,将线性关系式(6-41b)代入式(6-48),得

$$\left. \begin{aligned} B_n &= \int_0^{F_N} \frac{1}{EA} F_N dF_N = \frac{1}{2EA} F_N^2 \\ B_s &= \int_0^{F_Q} \frac{k}{GA} F_Q dF_Q = \frac{k}{2GA} F_Q^2 \\ B_t &= \int_0^M \frac{1}{EI} M dM = \frac{1}{2EI} M^2 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

因此

$$B_s = \frac{1}{2EA} F_N^2 + \frac{k}{2GA} F_Q^2 + \frac{1}{2EI} M^2 \quad (6-49)$$

应变余能密度  $B_s$  为内力  $F_N$ 、 $F_Q$ 、 $M$  的齐次二次式。式(6-43)和(6-49)分别给出了在线性弹性情况下  $A_n$  和  $B_s$  的表示式。根据线性物理方程(6-41),可知  $A_n$  和  $B_s$  在数值上彼此相等。从另一角度看,如果材料为线性弹性,则图6-34a、b的内力—应变曲线退化为一直线。此时,互为余数的两个面积  $A_n$  和  $B_s$  也是彼此相等的。

### 5. 杆件结构的应变余能

杆件  $e$  的应变余能  $V^e$  由应变余能密度  $B_s$  沿杆件长度积分得出:

$$V^e = \int B_s ds \quad (e)$$

杆件结构的应变余能  $V$  是各杆应变余能  $V^e$  之和:

$$V = \sum_e V^e = \sum_e \int B_s ds \quad (6-50)$$

对于线性弹性情况,将式(6-49)代入上式,得

$$V = \sum_e \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{EA} F_N^2 + \frac{k}{GA} F_Q^2 + \frac{1}{EI} M^2 \right) ds \quad (6-51)$$

### 6. 具有初应变时的情况

设杆件具有初应变  $\varepsilon_0$ 、 $\gamma_0$ 、 $\kappa_0$ ;此外,由内力  $F_N$ 、 $F_Q$ 、 $M$  引起的应变为  $\varepsilon$ 、 $\gamma$ 、 $\kappa$ ;总应变为  $\varepsilon_0 + \varepsilon$ 、 $\gamma_0 + \gamma$ 、 $\kappa_0 + \kappa$ 。

应变能密度  $A_e$  和应变能  $U$  仍由式(6-42)和(6-45)表示,因而初应变对应变能没有影响。另一方面,应变余能密度  $B_s$  和应变余能  $V$  则应考虑初应变的影响,改为

$$\left. \begin{aligned} B_N &= \int_0^{F_N} (\epsilon_0 + \epsilon) dF_N = \epsilon_0 F_N + \int_0^{F_N} \epsilon dF_N \\ B_Q &= \int_0^{F_Q} (\gamma_0 + \gamma) dF_Q = \gamma_0 F_Q + \int_0^{F_Q} \gamma dF_Q \\ B_M &= \int_0^M (\kappa_0 + \kappa) dM = \kappa_0 M + \int_0^M \kappa dM \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

$$B_s = \epsilon_0 F_N + \gamma_0 F_Q + \kappa_0 M + \int_0^{F_N} \epsilon dF_N + \int_0^{F_Q} \gamma dF_Q + \int_0^M \kappa dM \quad (6-52a)$$

$$V = \sum_s \int \left[ \epsilon_0 F_N + \gamma_0 F_Q + \kappa_0 M + \int_0^{F_N} \epsilon dF_N + \int_0^{F_Q} \gamma dF_Q + \int_0^M \kappa dM \right] ds \quad (6-53a)$$

对于线性弹性情况,则有

$$B_s = \epsilon_0 F_N + \gamma_0 F_Q + \kappa_0 M + \frac{1}{2EA} F_N^2 + \frac{k}{2GA} F_Q^2 + \frac{1}{2EI} M^2 \quad (6-52b)$$

$$V = \sum_s \int \left[ \epsilon_0 F_N + \gamma_0 F_Q + \kappa_0 M + \frac{1}{2EA} F_N^2 + \frac{k}{2GA} F_Q^2 + \frac{1}{2EI} M^2 \right] ds \quad (6-53b)$$

## 7. 用能量密度偏导数表示的物理方程

应变能密度  $A_s$  和应变余能密度  $B_s$  是根据物理方程采用积分形式定义的,如式(6-42)、(6-48)所示。反之,物理方程也可借助  $A_s$  和  $B_s$  采用微分形式来表示。

### (1) 刚度形式的物理方程——用 $A_s$ 的偏导数表示

由  $A_s$  的表示式(6-42),可得出如下的偏微分关系:

$$\frac{\partial A_s}{\partial \epsilon} = F_N, \quad \frac{\partial A_s}{\partial \gamma} = F_Q, \quad \frac{\partial A_s}{\partial \kappa} = M \quad (6-54)$$

这就是用  $A_s$  的偏导数表示的物理方程(刚度形式)。对于线性弹性情况,  $A_s$  的表示式由式(6-43)给出。将式(6-43)代入式(6-54),即得到线性物理方程(6-41a)。

### (2) 柔度形式的物理方程——用 $B_s$ 的偏导数表示

由  $B_s$  的表示式(6-48),可得出如下的偏微分关系:

$$\frac{\partial B_s}{\partial F_N} = \epsilon, \quad \frac{\partial B_s}{\partial F_Q} = \gamma, \quad \frac{\partial B_s}{\partial M} = \kappa \quad (6-55a)$$

这就是用  $B_s$  的偏导数表示的物理方程(柔度形式)。对于线性弹性情况,  $B_s$  的表示式由式(6-49)给出。将式(6-49)代入式(6-55a),即得到线性物理方程(6-41b)。



如果有初应变存在,则由  $B_e$  的表示式(6-52a)可得出偏微分关系如下:

$$\frac{\partial B_e}{\partial F_N} = \varepsilon_0 + \varepsilon, \quad \frac{\partial B_e}{\partial F_Q} = \gamma_0 + \gamma, \quad \frac{\partial B_e}{\partial M} = \kappa_0 + \kappa \quad (6-55b)$$

这就是具有初应变时用  $B_e$  的偏导数表示的物理方程。如将  $B_e$  的表示式(6-52b)代入上式,则得到线性物理方程(6-41b)。

### 8. $A_e$ 与 $B_e$ 的区别, $U$ 与 $V$ 的区别

在没有初应变且材料为线性弹性的特殊情况下,应变能密度  $A_e$  与应变余能密度  $B_e$  在数值上彼此相等[参见式(6-43)和(6-49)]。尽管如此,  $A_e$  和  $B_e$  毕竟是两个不同的概念,不可混淆:

(1) 当有初应变时,  $A_e$  和  $B_e$  在数值上不相等[参见(6-43)和(6-52)]。

(2) 当材料为非线弹性时,  $A_e$  和  $B_e$  在数值上不相等。

(3) 函数  $A_e$  和  $B_e$  具有不同的自变量:  $A_e$  是应变的函数,  $B_e$  是内力的函数。

以上列举了  $A_e$  与  $B_e$  的区别。下面再讨论  $U$  和  $V$  的区别。  $U$  和  $V$  分别是对  $A_e$  和  $B_e$  积分后得到的结构总能量。  $A_e$  和  $B_e$  只与材料的性质有关,与结构的性质无关;而  $U$  和  $V$  则还与结构的性质有关,要考虑结构的几何组成形式和边界条件等情况。因此,除上列区别外,  $U$  和  $V$  还有下列区别:

(4) 应变能  $U$  是由结构应变分布函数确定的能量,在位移法、势能法中应用。应变余能  $V$  是由结构内力分布函数确定的能量,在力法、余能法中应用。

**例 6-16** 图 6-35a 所示为一线性弹性对称桁架。考虑对称变形情况:结点  $B$  只有竖向位移  $\Delta$ , 水平位移为零。试求各杆的应变以及桁架的应变能。

**解** (1) 杆  $A, B$  的应变

设  $A, B$  杆的杆长为  $l_i$ , 截面面积为  $A_i$ , 由图 6-35b 得知,  $A, B$  杆的伸长量  $\lambda_i$  和轴向应变  $\varepsilon_i$  分别为

$$\lambda_i = \Delta \sin \alpha_i \quad (6-56)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta}{l_i} \sin \alpha_i \quad (6-57)$$

(2) 桁架的应变能

$A, B$  杆的应变能为

$$\frac{1}{2} EA_i l_i \varepsilon_i^2 = \frac{1}{2} \frac{EA_i}{l_i} \Delta^2 \sin^2 \alpha_i$$

因此,桁架的应变能为

$$U = \frac{1}{2} E \Delta^2 \sum_{i=1}^5 \frac{A_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i \quad (6-58)$$

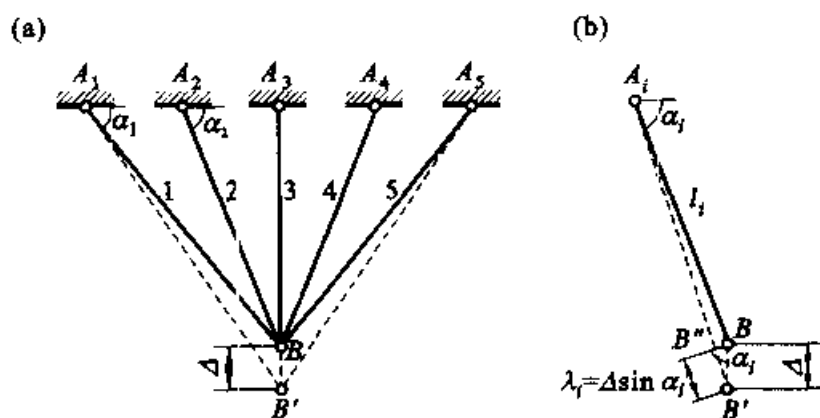


图 6-35

应变能  $U$  是位移  $\Delta$  的二次齐次式。

**例 6-17** 图 6-36 所示为一线性弹性等截面薄梁  $AB$ , 设梁的两端有竖向位移  $\Delta_A$  和  $\Delta_B$  以及角位移  $\theta_A$  和  $\theta_B$ 。试求梁的曲率  $\kappa$  和弯曲应变能  $U$ 。

**解** (1) 梁的挠曲线和曲率

由于梁上没有荷载作用, 因此梁的挠曲线的微分方程为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0$$

其解为

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

四个待定常数由下列四个位移边界条件确定:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} &= \Delta_A, & w|_{x=l} &= \Delta_B \\ \frac{dw}{dx}\bigg|_{x=0} &= \theta_A, & \frac{dw}{dx}\bigg|_{x=l} &= \theta_B \end{aligned}$$

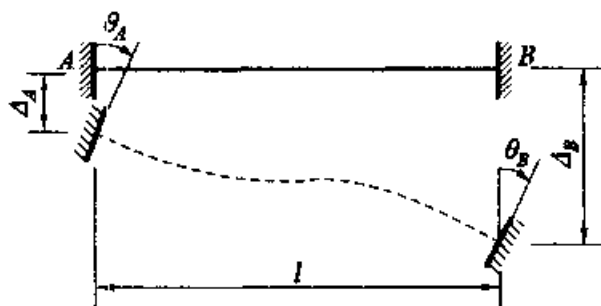


图 6-36

从而求得挠曲线方程如下:

$$w = \Delta_A + \theta_A x - \frac{1}{2} k_0 x^2 - \frac{1}{6} k_1 x^3$$

其中

$$k_0 = \frac{6}{l^2} (\Delta_A - \Delta_B) + \frac{4}{l} \theta_A + \frac{2}{l} \theta_B$$

$$k_1 = \frac{12}{l^3} (\Delta_B - \Delta_A) - \frac{6}{l^2} (\theta_A + \theta_B)$$

梁的曲率  $\kappa$  求得如下:

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dx^2} = k_0 + k_1 x$$

(2) 梁的弯曲应变能

线性弹性等截面薄梁的弯曲应变能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} EI \int_0^l \kappa^2 dx \\ &= \frac{1}{2} EI (k_0^2 l + k_0 k_1 l^2 + \frac{1}{3} k_1^2 l^3) \end{aligned}$$

最后得

$$U = \frac{2EI}{l} \left[ \theta_A^2 + \theta_A \theta_B + \theta_B^2 - 3(\theta_A + \theta_B) \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l} + \frac{3}{l^2} (\Delta_B - \Delta_A)^2 \right] \quad (6-59)$$

应变能  $U$  是两端位移的齐次二次式, 叠加原理不能成立。例如, 位移  $\theta_A$ 、 $\theta_B$ 、 $\Delta_A$ 、 $\Delta_B$  共同引起的  $U$  不等于它们单独引起的  $U$  的总和。

**例 6-18** 线性弹性悬臂梁  $AB$  在自由端作用广义力  $X_1$  和  $X_2$ , 又梁的初始曲率为  $\kappa_0$  (图 6-37)。试求梁的应变余能  $V$ 。

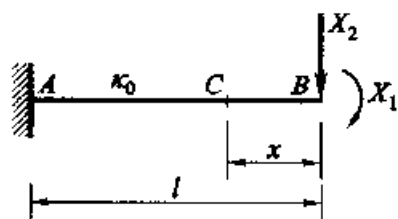


图 6-37

**解** 在坐标为  $x$  的任一截面处弯矩为

$$M = -X_1 - xX_2$$

应变余能为(只考虑弯曲应变余能)

$$V = \int_0^l \left( \kappa_0 M + \frac{M^2}{2EI} \right) dx$$

最后得

$$V = -\kappa_0 \left( X_1 l + X_2 \frac{l^2}{2} \right) + \frac{1}{2EI} \left( X_1^2 l + X_1 X_2 l^2 + X_2^2 \frac{l^3}{3} \right) \quad (6-60)$$

## \* § 6-10 能量偏导数定理

本节介绍关于应变能和应变余能的偏导数定理:卡氏第一定理;克罗蒂恩格塞定理及其特例——卡氏第二定理。

## 1. 卡氏第一定理

卡氏第一定理可表述如下:

设弹性结构的应变能  $U$  表示为  $n$  个独立变量位移  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  的函数,与位移  $\Delta_i$  相应的约束力记为  $F_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),除  $n$  个约束力  $F_i$  外,结构上没有荷载作用,则应变能  $U$  对变量位移  $\Delta_i$  的偏导数便等于与  $\Delta_i$  相应的约束力  $F_i$ :

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \quad (6-61)$$

下面应用虚位移原理对卡氏第一定理及其公式(6-61)加以证明,并以图 6-38 作为参照。

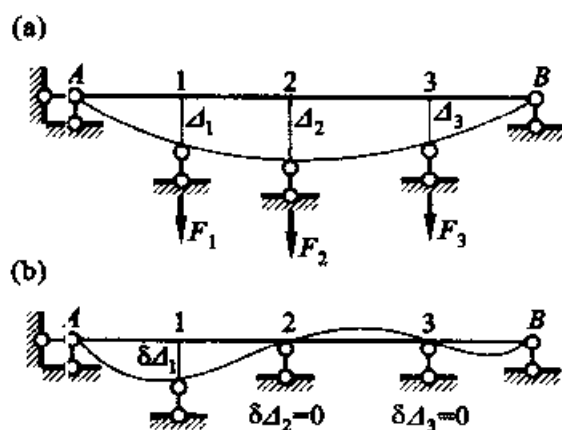


图 6-38

图 6-38a 所示结构具有三个自由度。 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  是三个独立的变量位移,而两端支座 A 和 B 的位移为零,没有荷载作用。结构的应变能  $U$  是变量  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  的函数,设只考虑弯曲应变能,则

$$U = \int \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx \quad (a)$$

为了求约束力  $F_1$ ,虚设位移如图 6-38b 所示:在点 1 处设有非零的位移增量  $\delta\Delta_1$ ,在点 2 和点 3 处设位移增量为零。此外两端支座处的虚位移为零。曲率  $\kappa$  的增量为

$$\delta \kappa = \frac{\partial \kappa}{\partial \Delta_1} \delta \Delta_1 \quad (b)$$

令图 6-38a 中的力系在图 6-38b 中的虚位移上作虚功, 其虚功方程为

$$F_1 \delta \Delta_1 = \int (EI \kappa) \delta \kappa dx \quad (c)$$

将式(b)代入式(c), 得

$$F_1 = \int EI \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial \Delta_1} dx \quad (d)$$

引入式(a)后, 上式可写成

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} \quad (e)$$

此即卡氏第一定理的公式(6-61)。证毕。

**例 6-19** 图 6-36 所示等截面弹性薄梁 AB 在两端有竖向位移  $\Delta_A$  和  $\Delta_B$  以及角位移  $\theta_A$  和  $\theta_B$ 。试用卡氏第一定理求两端竖向反力  $F_{yA}$  和  $F_{yB}$  以及两端反力矩  $M_A$  和  $M_B$  (图 6-39)。

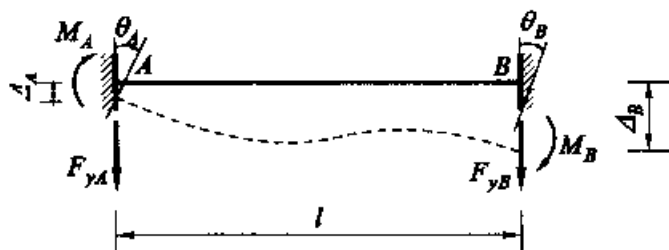


图 6-39

**解** 此梁的应变能  $U$  是四个独立变量位移  $\Delta_A$ 、 $\Delta_B$ 、 $\theta_A$ 、 $\theta_B$  的函数。由式(6-59), 得

$$U = \frac{2EI}{l} \left[ \theta_A^2 + \theta_A \theta_B + \theta_B^2 - 3(\theta_A + \theta_B) \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l} + \frac{3}{l^2} (\Delta_B - \Delta_A)^2 \right]$$

现用卡氏第一定理求与  $\Delta_A$ 、 $\Delta_B$ 、 $\theta_A$ 、 $\theta_B$  相应的约束力  $F_{yA}$ 、 $F_{yB}$ 、 $M_A$ 、 $M_B$  如下:

$$\begin{aligned} F_{yA} &= \frac{\partial U}{\partial \Delta_A} = \frac{6EI}{l^2} (\theta_A + \theta_B) - \frac{12EI}{l^3} (\Delta_B - \Delta_A) \\ F_{yB} &= \frac{\partial U}{\partial \Delta_B} = -\frac{6EI}{l^2} (\theta_A + \theta_B) + \frac{12EI}{l^3} (\Delta_B - \Delta_A) = -F_{yA} \\ M_A &= \frac{\partial U}{\partial \theta_A} = \frac{4EI}{l} \theta_A + \frac{2EI}{l} \theta_B - \frac{6EI}{l^2} (\Delta_B - \Delta_A) \\ M_B &= \frac{\partial U}{\partial \theta_B} = \frac{2EI}{l} \theta_A + \frac{4EI}{l} \theta_B - \frac{6EI}{l^2} (\Delta_B - \Delta_A) \end{aligned} \quad (6-62)$$

**例 6-20** 图 6-35 所示对称桁架发生对称变形时只有一个自由度,即结点 B 的竖向位移  $\Delta$ 。试用卡氏第一定理求当结点 B 产生竖向位移  $\Delta$  时在该点所需施加的竖向力  $F_{wB}$ 。

**解** 此桁架的应变能  $U$  是变量位移  $\Delta$  的函数。由式(6-58),得

$$U = \frac{1}{2} E \Delta^2 \sum_{i=1}^5 \frac{A_i}{L_i} \sin^2 \alpha_i$$

与  $\Delta$  相应的力  $F_{wB}$  由卡氏第一定理求得如下:

$$F_{wB} = \frac{dU}{d\Delta} = E \Delta \sum_{i=1}^5 \frac{A_i}{L_i} \sin^2 \alpha_i \quad (6-63a)$$

由上式还可得出如下结果:设对称桁架在 B 点有竖向荷载  $F_{wB}$  作用,则桁架在 B 点产生的竖向位移  $\Delta$  为

$$\Delta = \frac{F_{wB}}{E \sum_{i=1}^5 \frac{A_i}{L_i} \sin^2 \alpha_i} \quad (6-63b)$$

## 2. 克罗蒂-恩格塞定理

克罗蒂-恩格塞定理可表述如下:

设弹性结构的应变余能  $V$  表示为  $n$  个独立变量力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的函数,且支座位移为零,则应变余能  $V$  对独立变量力  $X_i$  的偏导数便等于与  $X_i$  相应的位移  $\Delta_i$ :

$$\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial X_i} \quad (6-64)$$

下面应用虚力原理对上述定理及其公式(6-64)加以证明,并以图 6-40 作为参照。

图 6-40a 所示结构有三个独立变量力  $X_1, X_2, X_3$  作用,还有常量荷载  $F_P$  作用,设梁有初曲率  $\kappa_0$ ,而支座位移为零。结构的应变余能  $V$  是独立变量力  $X_1, X_2, X_3$  的函数,设只考虑弯曲应变余能,则由式(6-53)得

$$V = \int \left( \frac{1}{2EI} M^2 + \kappa_0 M \right) dl \quad (f)$$

为了求位移  $\Delta_1$ ,虚设力系如图 6-40b 所示:在点 1 处设有非零的力增量  $\delta X_1$ ,

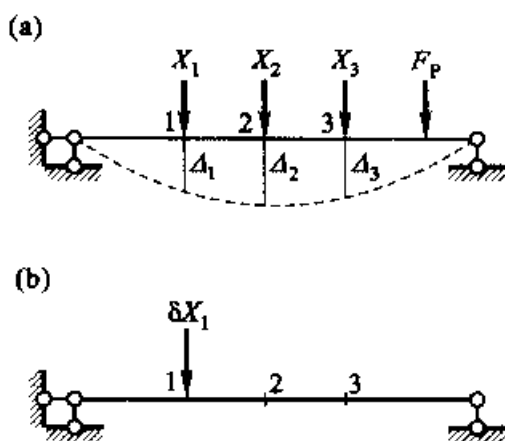


图 6-40

① 这里,独立变量力为广义力,所以仍沿用  $X_i$  表示。

在点2和点3处设力增量为零。弯矩  $M$  的增量为

$$\delta M = \frac{\partial M}{\partial \bar{X}_1} \delta X_1 \quad (g)$$

令图6-40b中的虚设力系在图6-40a中的变形状态上作虚功,其虚力方程为

$$\Delta_1 \delta X_1 = \int \left( \frac{M}{EI} + \kappa_0 \right) \delta M dx \quad (h)$$

将式(g)代入上式,得

$$\Delta_1 = \int \left( \frac{M}{EI} + \kappa_0 \right) \frac{\partial M}{\partial \bar{X}_1} dx \quad (i)$$

引入式(f)后,上式可写成

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial \bar{X}_1} \quad (j)$$

此即克罗蒂-恩格塞定理的公式(6-64)。证毕。

### 3. 卡氏第二定理

现在讨论克罗蒂-恩格塞定理的一个特殊形式。设结构为线性弹性,而且没有初应变。此时,应变能  $U$  与应变余能  $V$  彼此相等,而式(6-64)可写成

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial \bar{X}_1} \quad (6-65)$$

上式称为卡氏第二定理。它可表述如下:

在结构为线性弹性、没有初应变、没有支座位移的情况下,如果将结构的应变能  $U$  表示为  $n$  个独立变量力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的函数,则应变能  $U$  对变量力  $X_i$  的偏导数便等于与  $X_i$  相应的位移  $\Delta_i$ 。

**例6-21** 试求例6-18中的悬臂梁在自由端  $B$  点的转角  $\theta_B$  和挠度  $w_B$  (图6-37)。

**解** 梁的应变余能  $V$  已在式(6-60)中求出:

$$V = -\kappa_0 \left( X_1 l + X_2 \frac{l^2}{2} \right) + \frac{1}{2EI} \left( X_1^2 l + X_1 X_2 l^2 + X_2^2 \frac{l^3}{3} \right)$$

应用式(6-64),得

$$\begin{aligned} \theta_B = \Delta_1 &= \frac{\partial V}{\partial X_1} = -\kappa_0 l + \frac{l}{EI} X_1 + \frac{l^2}{2EI} X_2 \\ w_B = \Delta_2 &= \frac{\partial V}{\partial X_2} = -\kappa_0 \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2EI} X_1 + \frac{l^3}{3EI} X_2 \end{aligned}$$

### 4. 讨论

结合本节内容,可指出以下几点:

(1) 本节介绍的两组、三项能量偏导数定理最后归结为三个公式(6-61)、(6-64)和(6-65),即

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}, \quad \Delta_i = \frac{\partial V}{\partial X_i}, \quad \Delta_i = \frac{\partial U}{\partial X_i}$$

可分别应用于求弹性结构的约束力  $F_i$  和位移  $\Delta_i$ 。三个公式既重要又简洁,展示出科学的简洁美,体现了真与美的结合。

(2) 在三个能量偏导数定理中,前一个是根据变形体虚位移方程导出的,后两个是根据变形体虚力方程导出的。它们分别代表变形体虚功原理的两种应用方式:虚设位移方式和虚设力方式。

虚功原理和能量定理二者是相通的。它们之间的区别是:虚功原理不涉及物理条件,既适用于弹性情况,又适用于非弹性情况,应用范围更广;能量定理引用了弹性条件,只适用于弹性结构,应用范围较窄,但公式很简洁、很方便。

(3) 卡氏第一定理与单位支座位移法都用于求约束力  $F_i$ ,二者是相通的。克罗蒂-恩格塞定理、卡氏第二定理与单位荷载法都用于求位移  $\Delta_i$ ,二者也是相通的。

(4) 本节介绍的能量偏导数定理还可以进一步推广。卡氏第一定理可以推广为势能偏导数定理;克罗蒂-恩格塞定理可以推广为余能偏导数定理;而势能偏导数定理和余能偏导数定理又可看作是分区混合能量偏导数定理的两个特例。这些内容将在第11章和第12章中作进一步的介绍。科学是不断发展的,而且总是后来居上。我们既欣赏后来居上的发展,更要记住前人原创的功绩。

## § 6-11 互等定理

本节讨论四个普遍定理——互等定理。在以后的章节中,经常要引用这些定理。

互等定理只适用于线性变形体系,其应用条件为

- (1) 材料处于弹性阶段,应力与应变成正比。
- (2) 结构变形很小,不影响力的作用。

### 1. 功的互等定理

图 6-41a、b 所示为同一线性变形体系的两种状态。

在状态 I 中,力系用  $F_P'$ 、 $F_Q'$ 、 $M'$ 、 $F_Q'$  表示,位移和应变用  $\Delta'$ 、 $\epsilon'$ 、 $\kappa'$ 、 $\gamma_0'$  表示。

在状态 II 中,力系用  $F_P''$ 、 $F_Q''$ 、 $M''$ 、 $F_Q''$  表示,位移和应变用  $\Delta''$ 、 $\epsilon''$ 、 $\kappa''$ 、 $\gamma_0''$



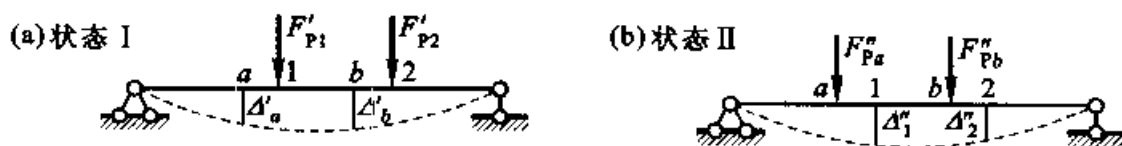


图 6-41

表示。

令状态 I 的力系在状态 II 的位移和变形上作虚功,可写出虚功方程如下:

$$W_{12} \equiv \sum F'_p \Delta'' = \sum \int \frac{F'_N F''_N}{EA} ds + \sum \int \frac{M' M''}{EI} ds + \sum \int \frac{k F'_Q F''_Q}{GA} ds \quad (a)$$

这里,外虚功  $W$  有两个下标,其中第一个表示受力状态,第二个表示相应的位移状态

同理,令状态 II 的力系在状态 I 的位移和变形上作虚功,写出虚功方程如下:

$$W_{21} \equiv \sum F''_p \Delta' = \sum \int \frac{F''_N F'_N}{EA} ds + \sum \int \frac{M'' M'}{EI} ds + \sum \int \frac{k F''_Q F'_Q}{GA} ds \quad (b)$$

由于式(a)、(b)右边的内虚功彼此相等,所以左边的外虚功也应相等:

$$\sum F'_p \Delta'' = \sum F''_p \Delta'$$

这就是功的互等定理:在任一线性变形体系中,第一状态外力在第二状态位移上所作的功  $W_{12}$  等于第二状态外力在第一状态位移上所作的功  $W_{21}$ 。即

$$W_{12} = W_{21} \quad (6-66)$$

在本节讨论的定理中,功的互等定理是基本定理,其他几个定理可由功的互等定理导出。

## 2. 位移互等定理

图 6-42 所示为功的互等定理应用的一个特殊情形。设状态 I 中只有一个荷载  $F_{P1}$ ,状态 II 中也只有一个荷载  $F_{P2}$ 。这里,表示位移  $\Delta_{ij}$  时也采用两个下标,其中第一个下标  $i$  表示位移是与  $F_{Pi}$  相应的,第二个下标  $j$  表示位移是由力  $F_{Pj}$  引起的。例如,图 6-42a 中  $\Delta_{21}$  表示力  $F_{P1}$  引起的与  $F_{P2}$  相应的位移。

由功的互等定理式(6-66)可得

$$F_{P1} \Delta_{12} = F_{P2} \Delta_{21} \quad (c)$$

在线性变形体系中,位移  $\Delta_{ij}$  与力  $F_{Pj}$  的比值是一个常数,记作  $\delta_{ij}$ ,即

$$\frac{\Delta_{ij}}{F_{Pj}} = \delta_{ij}$$

或

$$\Delta_{ji} = F_{Pj} \delta_{ji} \quad (d)$$

$\delta_{ji}$  称为位移影响系数。

将式(d)代入式(c), 得到

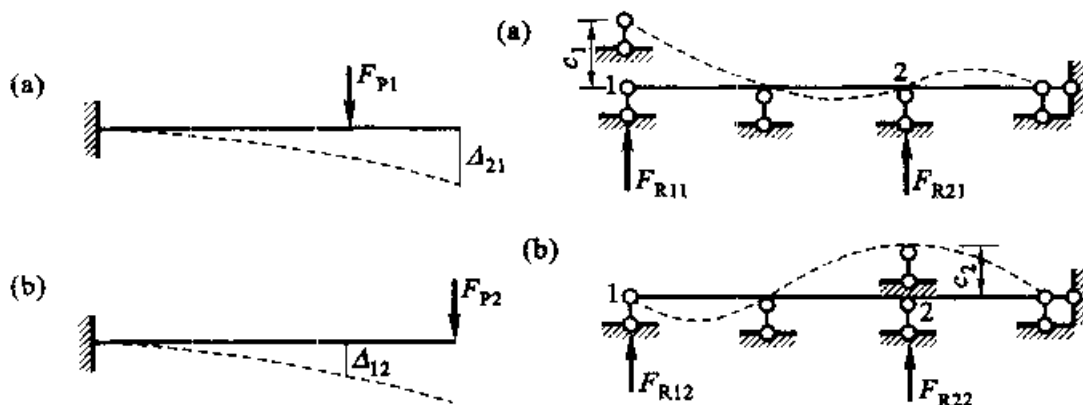


图 6-42

图 6-43

$$F_{P1} F_{P2} \delta_{12} = F_{P2} F_{P1} \delta_{21} \quad (e)$$

由此得到下列等式

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (6-67)$$

这就是位移互等定理:在任一线性变形体系中,由荷载  $F_{P1}$  引起的与荷载  $F_{P2}$  相应的位移影响系数  $\delta_{21}$  等于由荷载  $F_{P2}$  引起的与荷载  $F_{P1}$  相应的位移影响系数  $\delta_{12}$ 。

由于式(e)两边分别是功  $W_{12}$  和  $W_{21}$ , 且彼此相等, 可记为  $W$ , 因此  $\delta_{12}$  和  $\delta_{21}$  的量纲就是  $\left( \frac{W}{F_{P1} F_{P2}} \right)$  的量纲。

应当指出, 这里的荷载可以是广义荷载, 而位移则是相应的广义位移。在一般情况下, 定理中的两个广义位移的量纲可能是不相等的, 但它们的影晌系数在数值和量纲上仍然保持相等。因此, 严格地说, 位移互等定理应该称为位移影响系数互等定理。但在习惯上, 仍称为位移互等定理。

### 3. 反力互等定理

反力互等定理也是功的互等定理的一种特殊情况。

图 6-43 所示为同一线性变形体系的两种变形状态。在图 6-43a 中, 由于支座 1 发生位移  $c_1$  而在支座 1 和 2 引起的反力分别用  $F_{R11}$  和  $F_{R21}$  表示; 在图 6-43b 中, 由于支座 2 发生位移  $c_2$ , 在支座 1、2 分别引起反力  $F_{R12}$  和  $F_{R22}$ 。这里, 反力  $F_{Rij}$  的两个下标中, 第一个下标  $i$  表示反力是与位移  $c_i$  相应的, 第二个下标  $j$  表示反力是由  $c_j$  引起的。

对上述两种状态应用功的互等定理,得到

$$F_{R11} \times 0 + F_{R21} \cdot c_2 = F_{R12} \cdot c_1 + F_{R22} \times 0$$

即

$$F_{R21} \cdot c_2 = F_{R12} \cdot c_1 \quad (f)$$

在线性变形体系中,反力  $F_{Rij}$  与  $c_j$  的比值为—常数,记作  $r_{ij}$ ,即

$$r_{ij} = \frac{F_{Rij}}{c_j}$$

或

$$F_{Rij} = r_{ij} \cdot c_j \quad (g)$$

$r_{ij}$  称为反力影响系数。

将式(g)代入式(f),得

$$c_1 r_{21} c_2 = c_2 r_{12} c_1 \quad (h)$$

由此得到下列等式:

$$r_{21} = r_{12} \quad (6-68)$$

这就是反力互等定理:

在任一线性变形体系中,由位移  $c_1$  所引起的与位移  $c_2$  相应的反力影响系数  $r_{21}$ ,等于由位移  $c_2$  所引起的与位移  $c_1$  相应的反力影响系数  $r_{12}$ 。

由于式(h)的左边和右边都是功  $W$ ,因此反力影响系数  $r_{12}$  和  $r_{21}$  的量纲就是  $\left(\frac{W}{c_1 c_2}\right)$  的量纲。

上述所说的支座可以换成别的约束,支座位移  $c_i$  可以换成该约束相应的广义位移,因而支座反力可以换成与该约束相应的广义力。

#### 4. 位移反力互等定理

图 6-44 所示为同—线性变形体系的两种变形状态。在图 6-44a 中,由于荷载  $F_{P1}$  作用,支座 2 产生反力  $F_{R21}$ ;在图 6-44b 中,由于支座 2 位移  $c_2$  而在  $F_{P1}$  方向产生相应的位移  $\Delta_{12}$ 。

由功的互等定理可得

$$F_{P1} \Delta_{12} + F_{R21} c_2 = 0$$

即

$$F_{P1} \Delta_{12} = -F_{R21} c_2$$

令

$$\frac{\Delta_{12}}{c_2} = \delta'_{12}, \quad \frac{F_{R21}}{F_{P1}} = r'_{21}$$

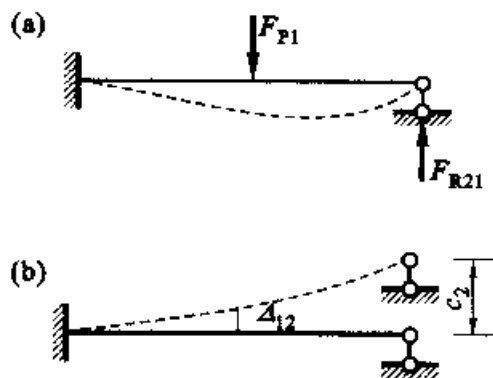


图 6-44

即

$$\Delta_{12} = \delta'_{12} c_2, \quad F_{R21} = r'_{21} F_{P1} \quad (j)$$

将式(j)代入式(i),得

$$F_{P1} \delta'_{12} c_2 = -r'_{21} F_{P1} c_2 \quad (k)$$

由此得出下列等式:

$$\delta'_{12} = -r'_{21} \quad (6-69)$$

这就是位移反力互等定理:在任一线性变形体系中,由位移  $c_2$  所引起的与荷载  $F_{P1}$  相应的位移影响系数  $\delta'_{12}$ ,在绝对值上等于由荷载  $F_{P1}$  所引起的与位移  $c_2$  相应的反力影响系数  $r'_{21}$ ,但二者差一个负号。同样,这里的力可以是广义力,位移可以是广义位移。

由于式(k)的左边和右边的量纲都是功  $W$  的量纲,因此影响系数  $\delta'_{12}$  和  $r'_{21}$  的量纲都是  $\left(\frac{W}{F_{P1} c_2}\right)$  的量纲。

## \* § 6-12 位移影响线

现在拟求位移  $\Delta_K$  的影响线。

设有一方向不变的单位力  $F_P = 1$  在结构上移动,结构上拟求位移  $\Delta_K$  的影响系数  $\delta_{KP}$  亦随之变化。表示  $\delta_{KP}$  变化规律的图线就称为位移影响线(图 6-45)。

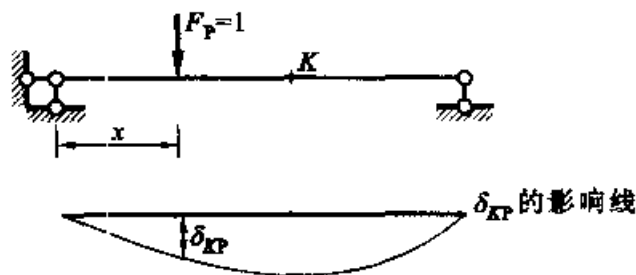


图 6-45

利用上一节所讨论的位移互等定理可以绘制位移影响线。

现在,设想在结构上施加与拟求位移  $\Delta_K$  相应的单位荷载  $F_K = 1$ 。在此固定荷载  $F_K = 1$  作用下,与  $F_P = 1$  相应的位移可表示为  $\delta_{PK}$ (图 6-46)。对图 6-45 和图 6-46 所示的两种状态应用位移互等定理,得

$$\delta_{KP} = \delta_{PK} \quad (6-70)$$

由此表明,在移动荷载  $F_P = 1$  作用下某指定位移  $\Delta_K$  的影响线( $\delta_{KP}$ 图)与在

固定荷载  $F_K = 1$  作用下结构沿移动荷载方向的位移图 ( $\delta_{PK}$  图) 完全相同。于是, 在移动单位荷载作用下求位移影响线的问题可以转变为在固定单位荷载作用下求结构位移图的问题。

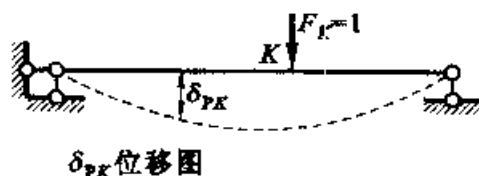


图 6-46

作影响线时, 移动荷载  $F_P = 1$  通常是竖向荷载, 而拟求位移  $\Delta_K$  可以是广义位移。此时图 6-46 中的  $\delta_{PK}$  图是与  $\Delta_K$  相应的广义荷载  $F_K = 1$  引起的竖向位移图。

例如, 求图 6-47a 所示简支梁 A 端转角  $\theta_A$  的影响线时, 可以利用位移互等定理:

$$\theta_{AP} = \delta_{PA}$$

把问题变为求  $M_A = 1$  作用下梁的竖向位移图  $\delta_{PA}$  (图 6-47b)。因此, 分别作  $\bar{M}_P$  图和  $\bar{M}_A$  图, 由图乘法求得

$$\theta_{AP} = \delta_{PA} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \frac{(l-x)x}{l} \cdot l \cdot \frac{(2l-x)}{3l} = \frac{x(l-x)(2l-x)}{6EI}$$

给  $x$  以不同数值, 便可算出  $\theta_{AP}$  各点竖标, 绘出其影响线图形。

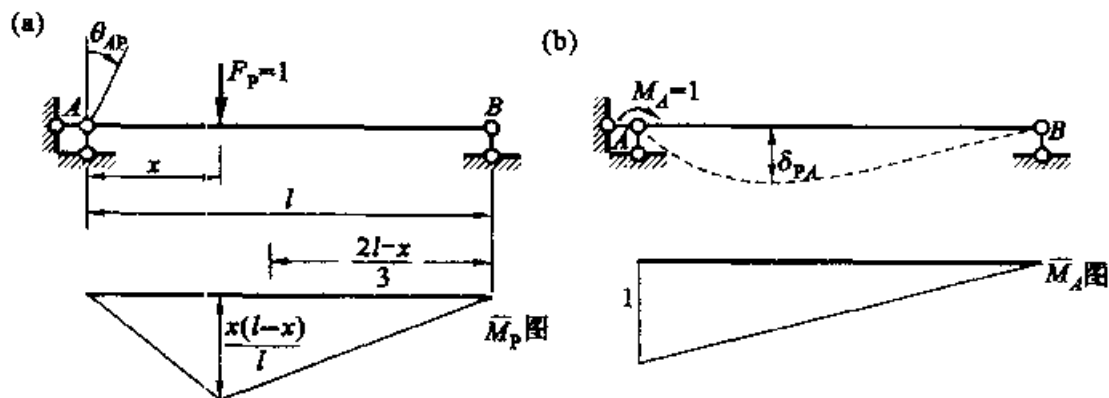


图 6-47

### \* § 6-13 方法论(2)——静定结构部分

现在从方法论角度对静定结构部分加以回顾, 指出其中一些富有启发性的方法, 并从方法论的高度加以阐释。

首先,从前面介绍的各种力学方法中挑出四个实例,从方法论进行典型分析。然后,按章列出前六章中力学方法的各种实例并对其方法特征予以概括:

- 实例 1——结构计算简图的选取方法。
- 实例 2——隔离体方法。
- 实例 3——受力分析与构造分析之间的对偶关系。
- 实例 4——影响线的机动作法。
- 前 6 章各类方法汇总。

### 1. 结构计算简图(建模法)——分析综合方法

建模是指建立理想模型,如建立数学模型,建立物理模型,建立力学模型(质点、刚体、弹性固体等都是基本的力学模型),建立结构计算简图(理想支座、理想结点、理想轴线、理想桁架等)。

模型是原型的理想化。建模法的要点是:善于抓住原型中起主要作用的因素,摒弃或暂时摒弃一些次要因素。也就是要善于分析综合,分清主次(分析),抓大放小(综合),达到简化和逼真的双重目的。

简化是化繁为简,化难为易。逼真是反映原型的本质特征。逼真有形似与神似之分。形似只停留在表面现象,神似才深入到核心和本质。

举例来说,钢桁架的结点构造实际上是焊接或铆接,形式上更似刚结点。而采用理想铰结桁架的计算简图却反映了桁架受力的本质特征。这就是不求形似而求神似的典型例子。

选取结构计算简图是进行结构力学计算的第一步,而且是影响全局的第一步。这是结构力学的一项基本功,在以后的课程学习和工程实践中还要继续学习和提高。

培养分析综合能力是方法论学习中的一个重要方面。在建模中要学会分清主次和抓大放小的方法,这是分析综合方法的一种运用形式。在结构力学中还要学习化整为零和积零为整的方法,这是分析综合方法的另一种运用形式。

### 2. 隔离体方法(兼论力法)——过渡转化方法

求静定结构约束力(内力、支座反力)的基本方法是隔离体法,即人为地截断约束,取出隔离体,建立平衡方程,解出约束力的作法。

初学隔离体法时往往感到不习惯,好端端的一个结构干吗要人为地去截断、去隔离呢?后来虽然用惯了,也往往不从方法论角度去深入追究。实际上,这体现了认识论的一个基本观点:要用对比联系、过渡转化的观点来认识事物。如果孤立地、静止地去看,往往是看不清楚的。

静定结构中的约束力藏在约束里面。为了了解它,求解它,先要截断相

应的约束,把约束力暴露出来,由隐藏的力变为可以主动变化的“变力”。隔离体是截断约束后从结构中隔离出来的自由刚体(或刚体体系),在“变力”作用下,隔离体的“表现”一般是处于不平衡状态,然后进行对比,认出由不平衡到平衡的转化条件,建立起平衡方程,最后求出约束力。因此隔离体法是暴露、对比、过渡、转化的方法。或者说,是“欲擒故纵”法。要抓住约束力,先要故意放纵它,让它变,让它表现,然后从不平衡表现的对比中才能认出平衡条件,把它抓出来。

过渡转化方法在超静定结构部分也是一个基本方法,例如建立力法和位移法基本方程时都是采用这个方法。

后面学到力法时,可以回过来与隔离体法互相比,找出它们的相同处和相异处。两种方法都采用去约束和过渡转化的方法,这是相同处。二者不同处是:去约束后的隔离体是自由刚体,约束力使自由刚体一般处于不平衡状态,由不平衡到平衡的对比转化中,建立的是平衡方程。另一方面,力法计算超静定结构时,去约束后的力法基本体系是静定结构,约束力使基本体系一般处于变形不协调状态,由不协调到协调的对比转化中,建立的是协调方程。同中有异,学习中要特别注意。

### 3. 受力分析与构造分析之间的对偶关系——对比联系方法

静定结构的全部约束力(内力和支座反力)都可以由平衡方程组求出它们的解答。问题是可解的。

我们不仅关心平衡方程组的可解性,更关心求解工作的高效率。要解得快,尽量不解或少解联立方程。最理想的情况是:每建立一个新的平衡方程时,只出现一个新的未知力。这就需要对隔离体的选取方式和选取顺序进行优化。

参考书里有些隔离体选取得非常巧妙,受到读者的赞赏,甚至觉得这种奇思妙法很难学会,不免发出“可至而不可学”的感叹!我们不应当把隔离体的优选问题比喻为猜谜语的智力测验,而应当找出它的规律,成为有法可循和“可至而又可学”的学问。

这个规律其实很简单:根据结构的构造特征来选取隔离体,选取隔离体和去约束的过程应当与几何组成和加约束的过程正好相反,两个过程互为逆过程。概括地说,就是“后搭的先拆”。

后搭的先拆。应用这个规律的典型例子可列举如下:

静定多跨梁——选取隔离体的顺序是:先附属部分,后基本部分。

简单桁架——取结点为隔离体,截取结点的顺序与桁架组成时添加结点的顺序相反。

联合桁架——如果联合桁架是用三根连接杆把两个简单桁架联合而

成,则应先用截面法求出三根连接杆的轴力,再按结点法分别求两个简单桁架的轴力。

复杂桁架——如果替换一根杆就可以把复杂桁架变成简单桁架,则应先用代替杆法求出该被替换杆的轴力,然后用结点法求其余杆的轴力。

上面把选取隔离体的作法上升为规律性的认识。这个认识来源于对静力分析和构造分析二者之间的融会贯通,来源于运用二者之间存在着的对偶关系。正是由于采用了对比联系的方法,才使我们对受力分析方法有了更深的理解和掌握,而不再停留在猜谜语的被动境地。

结构力学中有不少对偶关系。例如,虚位移方程与虚力方程之间,单位荷载法与单位支座位移法之间,力法与位移法之间都存在对偶关系。

#### 4. 影响线的机动作法——交叉比拟方法

作静定结构指定约束力(内力、支座反力)的影响线,这是一个纯粹的静力平衡问题。

求解静力问题最直接的方法当然是静力法。这是一种直来直去的方法。但是,直来直去的方法并不总是最简捷的方法,有时采用迂回侧击、交叉比拟的方法反而更有效。

影响线的机动法就是一种巧妙的交叉比拟法。本来是一个静力问题,这里却用比拟方法把它变成一个作位移图的几何问题(令指定约束发生单位位移或广义位移,然后作结构承载点的竖向位移图),从而开辟出一条用几何方法处理静力问题的新路子。这是一种“智取法”。这个“智”来源于内力影响线与位移图之间的比拟关系,静力法与几何法之间的交叉替代。其理论基础是虚功原理。

虚功是力和位移二者的乘积和综合量。虚功方程是静力方程和位移协调方程二者的综合形式。应用虚功方程可以用几何方法来解静力问题(如上所述),也可以用静力方法来解几何问题(如零载法进行构造分析,单位荷载法求位移)。正的,反的,两种交叉都有用。

交叉比拟是一种常用的方法,有特色,有灵气。

#### 5. 前六章各类方法汇总

现按章列出力学方法的各种实例并指出其方法特征。

##### 第1章 绪论

(1) 结构计算简图的选取方法——分清主次,抓大放小。分析综合方法的一种运用形式。

##### 第2章 几何构造分析

(2) 构造分析中采用“体系 $\rightleftharpoons$ 单元”的方法

先将整个体系拆成一系列构造单元,再将构造单元搭成体系。从--拆



一搭的过程中可得出体系是否可变和有无多余约束的结论——化整为零(拆),积零为整(搭)。分析综合方法的另一种运用形式。

### (3) 瞬铰、复杂联结的替换方法

在构造分析中将两个链杆约束换成瞬铰,将  $n$  个刚片间的复杂联结换成  $n-1$  个简单联结,从而使复杂体系的构造分析得到简化——等效替代,化难为易。对比联系方法的一种运用形式。

## 第3章 静定结构的受力分析

### (4) 隔离体方法——过渡转化方法的应用实例。

### (5) 按构造特征选取隔离体的方法——对比联系方法的应用实例

### (6) 拱合理轴线的索比拟法——比拟方法的应用实例

(7) 桁架结点法与截面法的联合应用——两种方法并用,各用所长。联合法的应用实例

## 第4章 静定结构总论

### (8) 零载法

在  $W=0$  的复杂体系中,体系是否几何可变的问题可比拟为:在零载下体系是否存在非零内力解的问题。这里把构造分析问题比拟为静力分析问题,用静力方法来处理几何问题——交叉比拟方法又一个应用实例。

## 第5章 影响线

### (9) 影响线的概念和应用

先从各种移动荷载中抽出典型的单位移动荷载(多中取一),由此作出影响线;然后利用影响线可求出各种荷载下的影响(以一求多)——从一般中选出典型,用典型分析结果指导一般。分析综合方法的一种运用形式。

### (10) 影响线的机动作法——交叉比拟方法的应用实例。

### (11) 铁路、公路的换算荷载——等效替代方法的应用实例。

## 第6章 结构位移计算与虚功-能量法简述

### (12) 单位荷载法(虚力法)

根据已知的材料变形和已知的支座位移来求指定点的待定位移,这原本是一个几何问题。但是可以不直接采用几何方法,而改用虚力方法:虚设荷载,并由静力方法求出相应的虚内力和虚反力。其特点是用静力方法来解几何问题,在静力法与几何法之间进行交叉替换。——交叉比拟方法又一个应用实例。

### (13) 单位支座位移法(虚位移法)

根据已知的荷载来求指定支座的待定反力,这原本是一个静力问题。但是可以不直接采用静力方法,而改用虚位移方法:虚设单位支座位移,并由几何方法求出与荷载相应的虚位移。其特点是用几何方法来解静力问题,在几

何法与静力法之间进行交叉替换——交叉比拟方法又一个应用实例。

(14) 虚功互等定理——等效代替方法的一个重要定理。

(15) 广义位移和广义力——位移和力在概念上的延伸,延展开拓方法的应用实例。

## § 6-14 小 结

本章既是静定部分的结尾,又是超静定部分的先导。

作为静定部分的结尾,本章第一部分讨论静定结构两个基本问题之一——求位移的问题。先采用刚体体系虚力原理和叠加原理导出计算位移的一般公式,后来又指出还可以应用变形体虚力原理直接导出。

作为超静定部分的先导,本章第二部分先将刚体虚功原理引申到变形体虚功原理(变形体虚力原理和变形体虚位移原理的综合),再引伸到能量偏导数定理,既可用于求位移,也可用于求约束力;既可用于静定结构问题,也可用于超静定结构问题,从而为虚功-能量法解超静定问题准备了理论基础。

### 1. 位移计算的一般公式及其灵活应用

位移计算的一般公式是式(6-10),即

$$\Delta = \sum \int (\bar{M}\kappa + \bar{F}_N\varepsilon + \bar{F}_Q\gamma_0)ds - \sum \bar{F}_{RK}c_K$$

式中包含两组物理量:

一组是实际的位移和应变,包括拟求的实际位移  $\Delta$  以及实际给定的支座位移  $c_K$  和应变  $\kappa, \varepsilon, \gamma_0$ 。

另一组是虚设外力和内力,包括虚设的与  $\Delta$  共轭的单位荷载  $F_P = 1$  以及与该单位荷载保持平衡的虚支座反力  $\bar{F}_{RK}$  和虚内力  $\bar{M}, \bar{F}_N, \bar{F}_Q$ 。

这个位移计算方法由于要虚设力系,故称为虚力法;由于虚设力系以单位荷载为标志,故又称为单位荷载法。

对位移计算的一般公式要会灵活应用,现指出以下几点:

(1) 了解式(6-10)的应用范围——对于弹性和非弹性材料,对于荷载、温度、支座移动等因素,对于静定和超静定结构,式(6-10)都适用。

(2) 了解式(6-19)的应用范围——只适用于弹性材料和荷载因素。对静定和超静定结构都适用。

(3) 了解位移公式在各种具体条件下的简化形式(对于支座移动、温度与荷载等不同因素,对于梁、刚架、桁架、拱、混合结构等不同型式)。

(4) 了解图乘法的应用条件,熟练掌握计算方法(例如复杂图形的分

解)。

(5) 在虚力法中,位移计算问题主要归结为内力计算问题。因此,在学习位移计算问题的同时,应当提高内力计算的能力。

(6) 如果  $\Delta$  是拟求的广义位移,则虚设的荷载应是与广义位移  $\Delta$  共轭的单位广义荷载  $F_p = 1$ ,共轭的定义是指它们之间的虚功表示式应与下式保持一致:

$$W = F_p \Delta = 1 \cdot \Delta$$

## 2. 变形体虚功方程和能量偏导数定理的两类形式

### (1) 变形体虚功方程的两类形式

变形体虚功方程(6-37),即

$$\sum F_p \Delta + \sum F_{RK} C_K = \sum \int (M\kappa + F_N \epsilon + F_Q \gamma_0) ds$$

虚功方程(6-37)有两种应用形式:

如果虚设力系,则称为虚力方程(6-38)。它代表几何协调方程,可用于求位移。单位荷载法求位移的一般公式可以应用虚力方程直接导出。

如果虚设位移和变形状态,则称为虚位移方程(6-39)。它代表平衡方程,可用于求支座反力或约束反力。单位支座位移法求支座反力的一般公式(6-40)可以应用虚位移方程导出。

### (2) 能量偏导数定理的两种形式

能量偏导数定理也有两种形式:

如果以力作变量,对变量力求能量的偏导数,则得到克罗蒂—恩格塞公式(6-64):

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial X_i}$$

可用于求位移。

如果以位移作变量,对变量位移求能量的偏导数,则得到卡氏第一定理及其公式(6-61):

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}$$

可用于求约束力。

虚功方程不涉及到材料的性质,对弹性和非弹性问题都可用。能量定理只适用于弹性问题。

### (3) 对偶量和对偶关系

从功的角度看,位移和力是一双对偶量。从能量角度看,应变能和应变余能是一双对偶量。从问题类型看,求约束力和求位移是一双对偶问题。

从方程类型看,虚位移方程和虚力方程是一双对偶方程,力系的平衡方程和位移的几何协调方程是一双对偶方程。从能量定理的类型看,对变量位移的能量偏导数定理和对变量力的能量偏导数定理是一双对偶定理。从力学问题的解法来看,“平衡—几何”解法和“虚功—能量”解法是一双对偶解法,静力法和机动法是一双对偶解法。

上述对偶关系可用下表列出。

表 6-4 力学中的对偶关系

	求约束力	求位移
“平衡—几何” 解法	平衡方程	几何协调方程
“虚功—能量” 解法	虚位移方程	虚力方程
	单位支座位移法	单位荷载法
	卡氏第一定理	克罗蒂—恩格塞定理,卡氏第二定理

### 3. 互等定理及其应用

有四个互等定理,其中虚功互等定理是基础,其余三个是特例:

虚功互等定理(式 6-66):  $W_{12} = W_{21}$

位移互等定理(式 6-67):  $\delta_{12} = \delta_{21}$

反力互等定理(式 6-68):  $r_{12} = r_{21}$

位移反力互等定理(式 6-69):  $\delta'_{12} = -r'_{21}$

互等定理的应用条件——只适用于线性变形体系。

互等关系中的对偶量——两个量互等是指在数值和量纲方面都相等。

在虚功互等定理中,式(6-66)的两边都是功( $W_{12}$ 和 $W_{21}$ ),是指两种交互作用的功相等。显然在数值和量纲上都相等。

在其余三个互等定理中,等式两边都是影响系数,是指两种交互作用的影响系数在数值和量纲上都相等。以位移互等定理为例,严格地说,应该称为位移影响系数互等定理。因为定理中的两个位移可以是两个广义位移(如一个线位移和一个角位移),两个广义位移的量纲可能是不相等的,但它们的影响系数在数值和量纲上仍然保持相等。

互等定理的应用实例——在 § 6-11 介绍过互等定理之后,紧接着在 § 6-12 讲述位移影响线,实际上这是指出位移互等定理的一个应用实例。

在前面的章节中是不是也可以找出互等定理的一些应用实例呢?例如第五章的机动法作静定反力和内力影响线的理论基础,又如 § 6-2 式(6-5)和(6-6)

$$\Delta = \bar{M}\theta, \quad \Delta = \bar{F}_Q \eta$$

中影响系数  $\bar{M}$  和  $\bar{F}_Q$  的理论解释,是否可应用互等定理加以说明呢?

在以后的章节中也会有互等定理的应用实例,有心人不妨加以收集和整理。

## § 6-15 思考与讨论

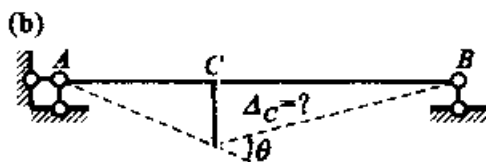
### § 6-1 思考题

6-1 应用虚功原理求位移时,怎样选择虚设的单位荷载?试应用虚功原理求图 6-1 中杆 AC 的转角  $\alpha$  和铰 C 处两侧截面的相对转角  $\theta$ 。

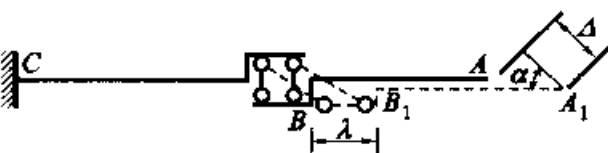
6-2 详细比较单位位移法与单位荷载法的原理和步骤。详细比较下面两个问题的作法(思考题 6-2 图):

(a) C 点作用荷载  $F_P$  时,求截面 C 的弯矩  $M_C$  (单位位移法)。

(b) 截面 C 有相对转角  $\theta$  时,求 C 点的竖向位移  $\Delta_C$  (单位荷载法)。



思考题 6-2 图



### § 6-2 思考题

6-3 在思考题 6-3 图中,设截面 B 有相对轴向位移  $\lambda$ ,现在拟求 A 点的斜向位移  $\Delta$ ,应如何选取虚设力系?又  $\Delta$  与  $\lambda$  之间的比例系数是什么?

6-4 如果把均布荷载  $q$  (图 6-8a) 看作一个广义荷载:荷载集度  $q$  代表广义荷载的值(模),集度  $q = 1$  的均布荷载代表单位广义荷载,试问与之共轭的广义位移  $\Delta$  代表什么?

6-5 在 § 6-2 中推导位移一般公式(6-10)时是结合静定结构进行的,试问式(6-10)是否可用于求超静定结构的位移?

提示:可参看思考题 6-27。

### § 6-3 思考题

6-6 试说明式(6-10)和(6-19)中各量的物理意义和正负号规定,分别说明式(6-10)、式(6-19)的适用条件。

6-7 在非弹性情况下,怎样计算荷载作用下的位移?设曲率与弯矩之间有如下的线性关系: $\kappa = aM + bM^2$ ,试导出在荷载作用下梁的位移公式。

6-8 试证明矩形截面系数  $k$  值是 1.2(表 6-2)。

### § 6-4 思考题

6-9 在例 6-4 中计算桁架结点  $C$  的竖向位移时,曾将均布荷载化为结点荷载,试问这一变换对所求位移有没有影响?

6-10 对于例 6-6 中的简支梁,先求截面  $A$  转角  $\theta_A$ ,再求截面  $B$  转角  $\theta_B$ ,然后验证例 6-6 中求得的相对转角  $\Delta$  计算结果。

6-11 如果规定当  $\frac{\Delta_N}{\Delta_M}$  和  $\frac{\Delta_Q}{\Delta_M}$  两个比值不超过 5% 时,可以忽略剪切变形和轴力变形对位移的影响。则对于例 6-5 中曲梁,使用式(6-20)计算位移时,  $h/R$  应符合什么条件?

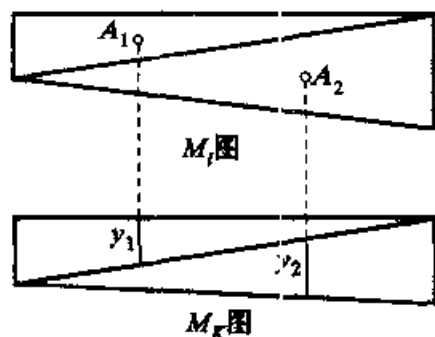
### § 6-5 思考题

6-12 图乘法的适用条件是什么?求变截面梁和拱的位移时是否可用图乘法?如果梁的截面沿杆长成阶梯形变化,求位移时能否用图乘法?

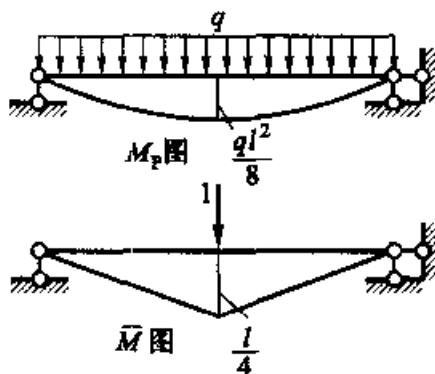
6-13 应用图乘法计算位移时,正负号怎样确定?

6-14 设  $M_1$  图和  $M_K$  图都是梯形,试问下列算法是否正确?

$$\int M_1 M_K dx = A_1 y_1 + A_2 y_2$$



思考题 6-14 图



思考题 6-15 图

6-15 所示  $M_p$  图和  $\bar{M}$  图分别为抛物线和三角形,试问下列算法是否正确?

$$\int M_p \bar{M} dx = \left( \frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \cdot l \right) \times \frac{l}{4}$$

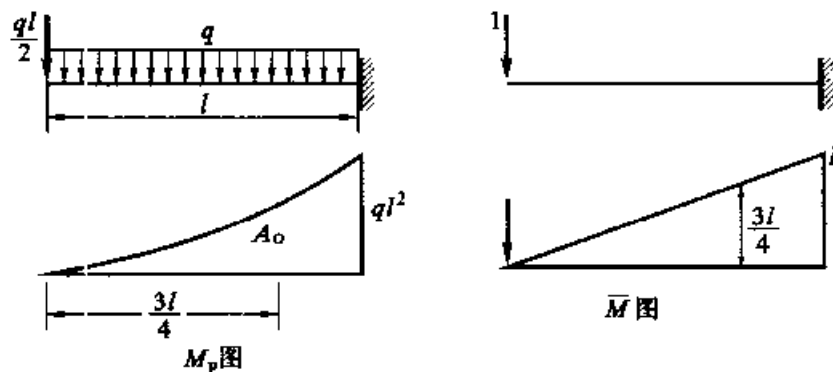
6-16 对于所示的  $M_p$  图和  $\bar{M}$  图,下列算法是否正确?

$$\int M_p \bar{M} dx = \left( \frac{1}{3} \cdot ql^2 \cdot l \right) \times \frac{3l}{4}$$

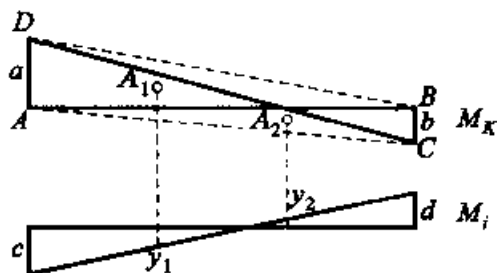
6-17 对于图 6-19 所示的两个梯形,试导出下列计算公式:

$$\int M_1 M_K dx = \frac{al}{6}(2c+d) + \frac{bl}{6}(c+2d) \quad (6-71)$$

6-18 对于图示的两个梯形,是否可用式(6-71)计算?其中  $a, b, c, d$  的正负号



思考题 6-16 图



思考题 6-18 图

如何定?

### § 6-6 思考题

6-19 计算温度改变引起的位移时,式(6-28b)中各项的符号如何确定?如果例6-13中梁上侧和柱侧温度升高  $15^\circ\text{C}$ ,梁下侧和柱右侧温度不变,试求位移  $\Delta_i$ 。

### § 6-7 思考题

6-20 例6-15中,在结点3处施加一个竖向集中荷载  $F_P$ ,使得该点的竖向位移为零,试用求解器确定  $F_P$  的大小和方向。用求解器求解温度和  $F_P$  共同作用下的位移用以验证所得的结果。

6-21 例6-15中,若在结点3处同时施加水平力  $F_{P,H}$  和竖向力  $F_{P,V}$ ,从而使得该点的竖直和水平位移都为零,该如何确定这两个力?

6-22 欲通过增加下弦钢杆的截面面积将例6-14中桁架的下弦杆的挠度控制为  $1\text{ cm}$ ,因此将下弦钢杆的面积  $A_k = 3.8$  乘以系数  $\beta$ 。试用求解器确定  $\beta$  值(精确到3位有效数字)。

### § 6-8 思考题

6-23 说明变形体虚功原理与刚体虚功原理的区别。

6-24 说明变形体虚功原理的应用条件和应用范围。

6-25 说明变形体虚功方程与力系平衡方程、变形协调方程的关系。为什么说变形体虚力方程实际上就是变形协调方程?

6-26 直接由变形体虚力方程推导支座移动时的位移计算公式(6-4)和局部变形

时的位移公式(6-8)。

6-27 直接由变形体虚力方程推导位移计算一般公式(6-10)。为什么说此式同样适用于静定和超静定结构?试从推导过程加以说明。

讨论1: 位移计算一般公式(6-10)既可直接由变形体虚力方程导出,又可像在§6-2中那样由刚体体系虚力方程和叠加原理导出。但在§6-2中是结合静定结构进行的,因而尚未证明式(6-10)还可用于求超静定结构的位移(参看思考题6-5)。

讨论2: 式(6-10)虽然对静定和超静定两种结构都可应用,但在应用时仍存在一些差别。例如式中的虚内力  $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_N$ 、 $\bar{F}_Q$  是由单位荷载作用下引起的平衡受力状态中的内力。这些内力在静定结构中只有唯一解,而在超静定结构中则不是唯一解(参看§7-10)。

### § 6-9 思考题

6-28 应变能密度  $A$  和应变余能密度  $B$  在什么情况下两者相等?二者有何区别?

### § 6-10 思考题

6-29 克罗蒂-恩格塞公式(6-64)是在特定情况下(结构为弹性结构,支座位移为零)求位移  $\Delta_1$  的公式。试用单位荷载法计算位移的一般公式(6-10)导出式(6-64),并以图6-40所示结构求位移  $\Delta_1$  为例进行讨论。

提示:在上述特定情况下,如只考虑弯曲变形,则式(6-10)简化为

$$\Delta_1 = \int \bar{M}_1 \kappa dx$$

其中  $\bar{M}_1$  是单位荷载  $X_1 = 1$  作用下引起的弯矩,故有

$$\bar{M}_1 = \frac{\partial M}{\partial X_1}$$

6-30 卡氏第一定理及式(6-61)是在特定情况下(结构为弹性结构,没有荷载作用)求约束力  $F_1$  的公式。试用单位支座位移法求约束力的一般公式(6-40)导出式(6-61),并以图6-38所示结构求约束力  $F_1$  为例进行讨论。

提示:在上述特定情况下,如果只考虑弯曲变形,则式(6-40)简化为

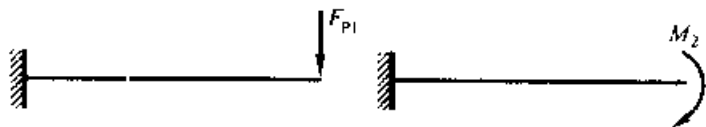
$$F_1 = \int M \bar{\kappa}_1 dx$$

其中  $\bar{\kappa}_1$  是单位支座位移  $\Delta_1 = 1$  引起的曲率,故有

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\partial \kappa}{\partial \Delta_1}$$

### § 6-11 思考题

6-31 试就下列两图说明位移互等定理,并说明其中  $\delta_{12}$  和  $\delta_{21}$  的量纲是什么?



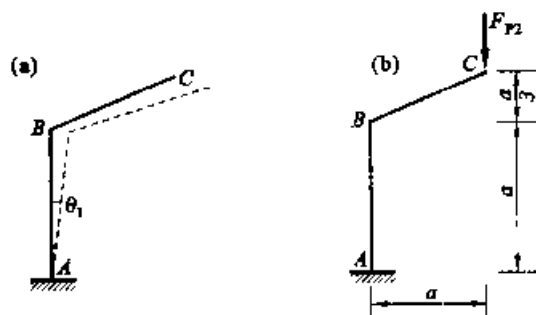
思考题 6-31 图



6-32 反力互等定理是否可用于静定结构? 这时会得出什么结果?

6-33 位移反力互等定理是否可用于静定结构? 是否可用于非弹性的静定结构?

6-34 试就静定刚架的两种状态说明位移反力互等定理。在图 a 所示状态中, 设刚架的支座 A 有给定转角  $\theta_1$ ; 在图 b 所示状态中, 设刚架在 C 点有给定荷载  $P$ 。



思考题 6-34 图

6-35 思考题 6-34 中  $\delta'_{21}$  和  $r'_{12}$  的量纲是什么? 设  $\theta_1 = 0.001 \text{ rad}$ , 试用位移反力互等定理求 C 点的竖向位移。

6-36 式(6-4)、(6-5)、(6-6)都是计算位移的公式:

$$\Delta = -\sum \bar{F}_{RK} c_K, \quad \Delta = \bar{M}\theta, \quad \Delta = F_Q \eta$$

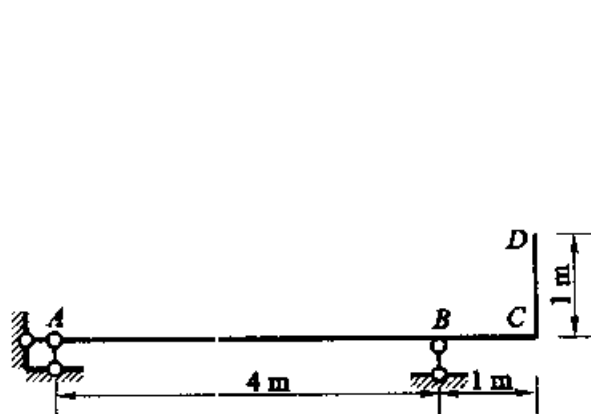
其中  $-F_{RK}$ 、 $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_Q$  都是位移影响系数。试用反力位移互等定理及其公式(6-69)加以论证。

### § 6-12 思考题

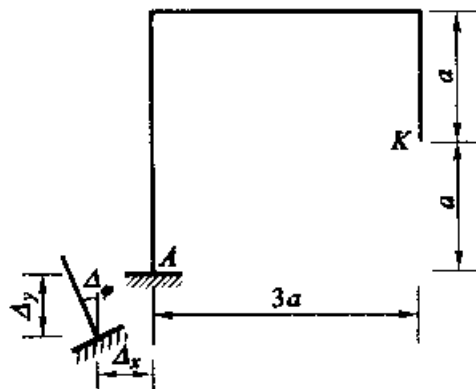
6-37 为什么作位移影响线的问题可以转变为作位移图的问题? 其应用条件是什么? 在式(6-70)中,  $\delta_{KP}$  与  $\delta_{PK}$  的区别是什么? 对于静定结构和超静定结构是否都适用?

### 习 题

6-1 应用刚体体系虚力原理求所示结构 D 点的水平位移: (a) 设支座 A 向左移动 1 cm; (b) 设支座 A 下沉 1 cm, (c) 设支座 B 下沉 1 cm。



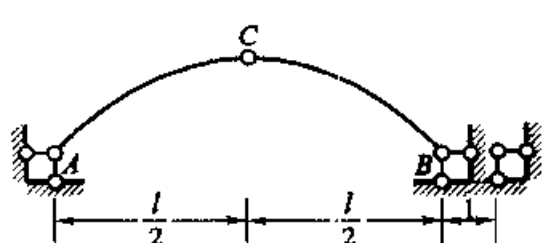
题 6-1 图



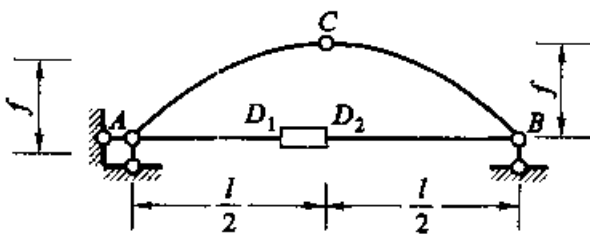
题 6-2 图

6-2 设支座  $A$  有给定位移  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$ 、 $\Delta_3$ , 试求  $K$  点的竖向位移  $\Delta_V$ 、水平位移  $\Delta_H$  和转角  $\theta$

6-3 设三铰拱支座  $B$  向右位移单位距离, 试求  $C$  点的竖向位移  $\Delta_1$ 、水平位移  $\Delta_2$  和两个半拱的相对转角  $\Delta_3$ 。



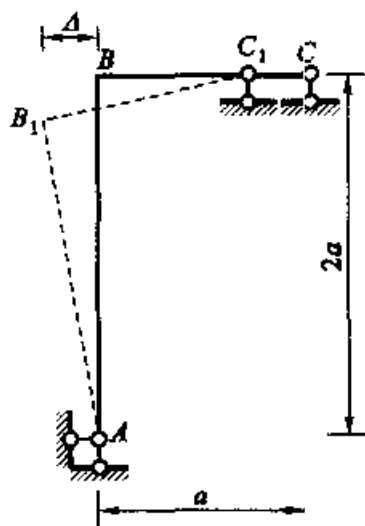
题 6-3 图



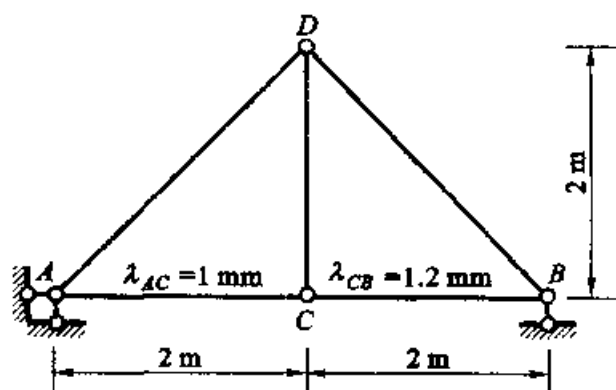
题 6-4 图

6-4 设三铰拱中的拉杆  $AB$  在  $D$  点装有花兰螺丝。如果拧紧螺丝, 使截面  $D_1$  与  $D_2$  彼此靠近的距离为  $\lambda$ , 试求  $C$  点的竖向位移  $\Delta$ 。

6-5 设柱  $AB$  由于材料收缩, 产生应变  $-\epsilon_1$ , 试求  $B$  点的水平位移  $\Delta$ 。



题 6-5 图



题 6-6 图

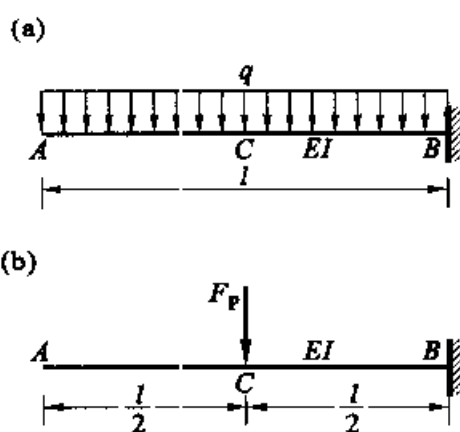
6-6 设由于温度升高, 杆  $AC$  伸长  $\lambda_{AC} = 1 \text{ mm}$ , 杆  $CB$  伸长  $\lambda_{CB} = 1.2 \text{ mm}$ , 试求  $C$  点的竖向位移  $\Delta$ 。

6-7 试用积分法求图示悬臂梁  $A$  端和跨中  $C$  点的竖向位移和转角(忽略剪切变形的影响)。

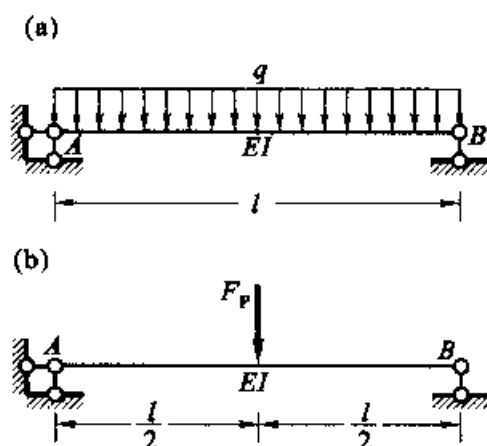
6-8 试用积分法求图示梁的跨中挠度(忽略剪切变形的影响)。

6-9 试求图示简支梁中点  $C$  的竖向位移  $\Delta$ , 并将剪力和弯矩对位移的影响加以比较。设截面为矩形,  $h$  为截面高度,  $G = \frac{3}{8} E$ ,  $k = 1.2$ ,  $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ 。

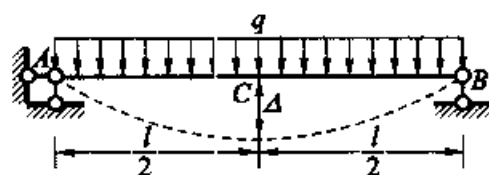
6-10 试求结点  $C$  的竖向位移  $\Delta_C$ , 设各杆的  $EA$  相等。



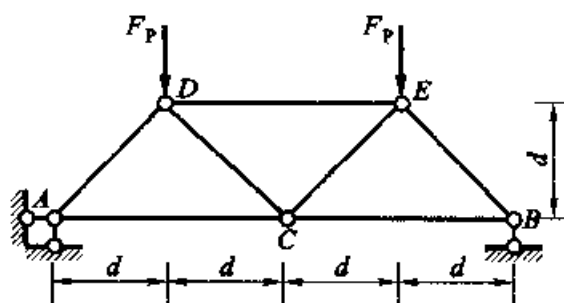
题 6-7 图



题 6-8 图

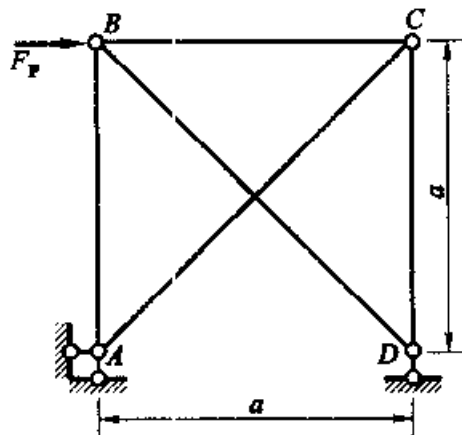


题 6-9 图

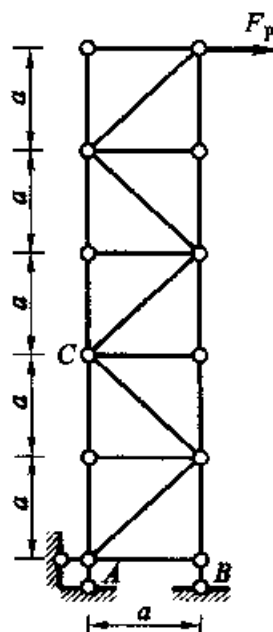


题 6-10 图

6-11 试求结点 C 的水平位移  $\Delta_C$ , 设各杆的 EA 相等。



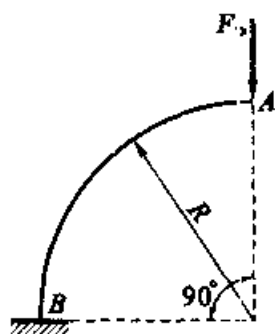
题 6-11 图



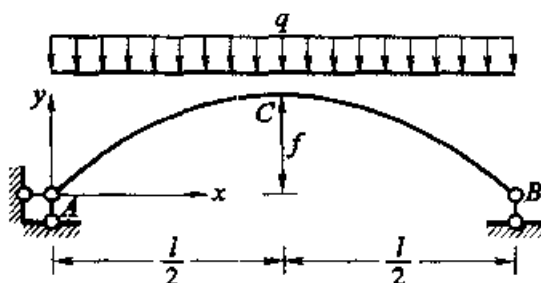
题 6-12 图

6-12 试求结点  $C$  的水平位移  $\Delta_C$ , 设各杆的  $EA$  相等。

6-13 试求等截面圆弧曲杆  $A$  点的竖向位移  $\Delta_V$  和水平位移  $\Delta_H$ 。设圆弧  $AB$  为  $\frac{1}{4}$  个圆周, 半径为  $R$ ,  $EI$  为常数。



题 6-13 图



题 6-14 图

6-14 试求曲梁  $B$  点的水平位移  $\Delta_B$ , 已知曲梁轴线为抛物线, 方程为

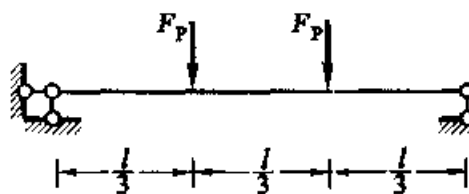
$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

$EI$  为常数, 承受均布荷载  $q$ 。计算时可只考虑弯曲变形。设拱比较平, 可取  $ds = dr$ 。

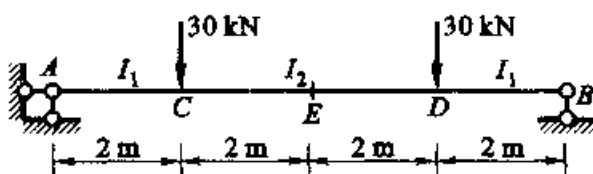
6-15 试用图乘法解习题 6-7。

6-16 试用图乘法解习题 6-8。

6-17 试用图乘法求梁的最大挠度  $f_{\max}$ 。

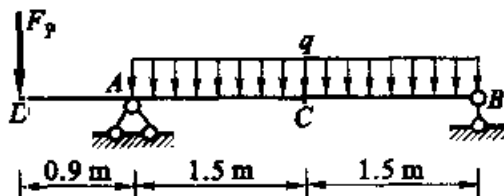


题 6-17 图



题 6-18 图

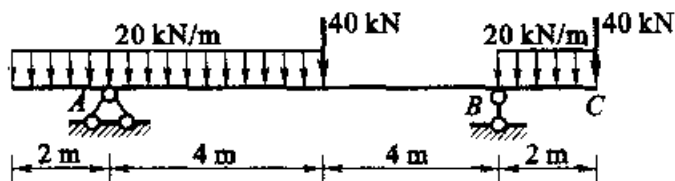
6-18 试求图所示梁在截面  $C$  和  $E$  的挠度。已知  $E = 2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $I_1 = 6560 \text{ cm}^4$ ,  $I_2 = 12430 \text{ cm}^4$ 。



题 6-19 图

6-19 试求  $C$  点挠度, 已知  $F_P = 9000 \text{ N}$ ,  $q = 15000 \text{ N/m}$ , 梁为 18 号工字钢,  $I = 1660 \text{ cm}^4$ ,  $h = 18 \text{ cm}$ ,  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。

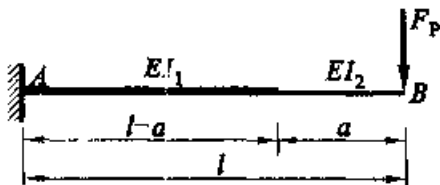
6-20 试求 C 点挠度。已知  $EI = 2 \times 10^8 \text{ kN} \cdot \text{cm}^2$ 。



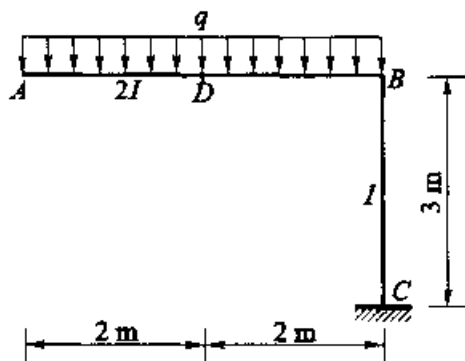
题 6-20 图

6-21 试求图示梁 B 端的挠度。

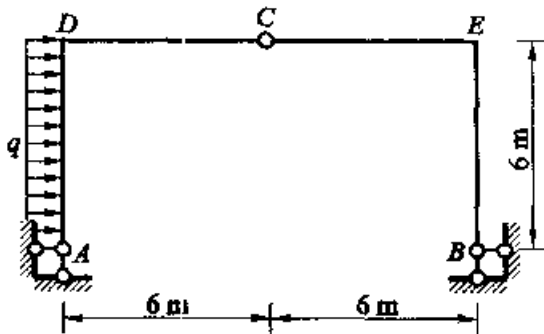
6-22 试求图示刚架 A 点和 D 点的竖向位移。已知梁的惯性矩为  $2I$ ，柱的惯性矩为  $I$ 。



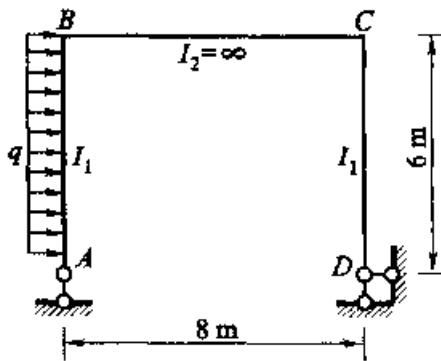
题 6-21 图



题 6-22 图



题 6-23 图



题 6-24 图

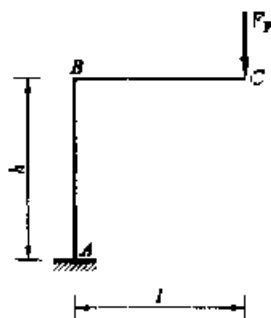
6-24 试求 B 点的水平位移。

6-25 试求 C 点的水平位移  $\Delta_H$ 、竖向位移  $\Delta_V$ 、转角  $\theta$ 。设各杆  $EI$  与  $EA$  为常数。

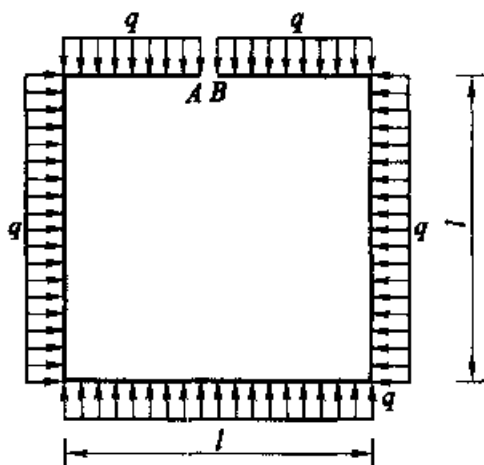
(a) 忽略轴向变形的影响。

(b) 考虑轴向变形的影响。

6-26 试求题 6-8 简支梁截面 A 和 B 的相对转角  $\Delta$ 。



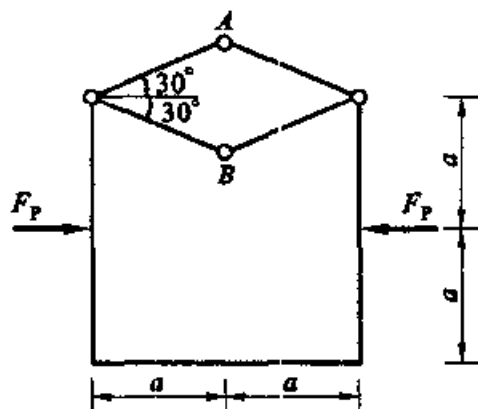
题 6-25 图



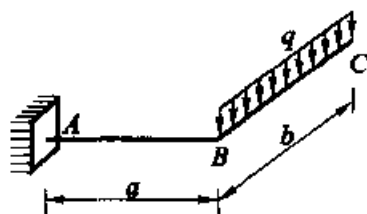
题 6-27 图

6-27 图示框形刚架,在顶部横梁中点被切开,试求切口处两侧截面 A 与 B 的竖向相对位移  $\Delta_1$ 、水平相对位移  $\Delta_2$  和相对转角  $\Delta_3$ 。设各杆  $EI$  为常数。

6-28 试求图示结构中 A、B 两点距离的改变值  $\Delta$ 。设各杆截面相同。



题 6-28 图



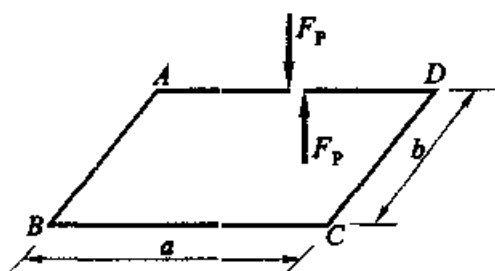
题 6-29 图

6-29 图示一水平面内刚架,  $\angle ABC = 90^\circ$ , 承受竖向均布荷载  $q$ 。试求 C 点竖向位移。已知  $q = 20 \text{ N/cm}$ ,  $a = 0.6 \text{ m}$ ,  $b = 0.4 \text{ m}$ , 各杆均为直径  $d = 3 \text{ cm}$  的圆钢,  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $G = 0.8 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。

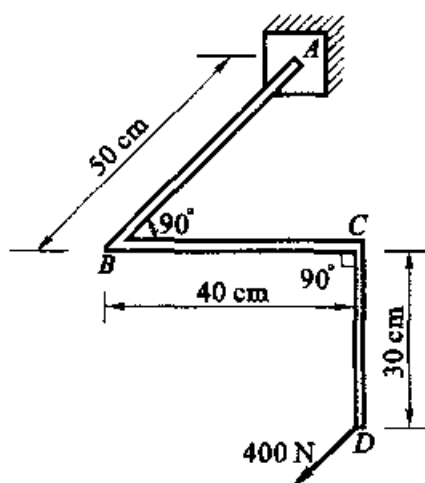
6-30 图示水平面内的刚架 ABCD, 在 AD 边中点切开, 并施加两个反向竖向荷载  $F_P$ , 设各杆  $EI$  和  $GI_t$  为常数。试求切口相对竖向位移  $\Delta$ 。

6-31 图示一折线钢杆, 圆形截面直径为  $3 \text{ cm}$ , 设  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ , 试求 D 点的位移。

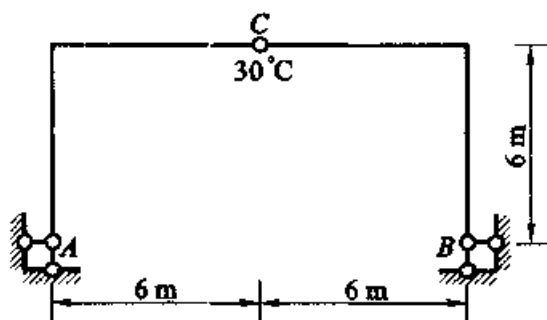
6-32 设三铰刚架内部升温  $30^\circ\text{C}$ , 各杆截面为矩形, 截面高度  $h$  相同。试求 C 点的竖向位移  $\Delta_C$ 。



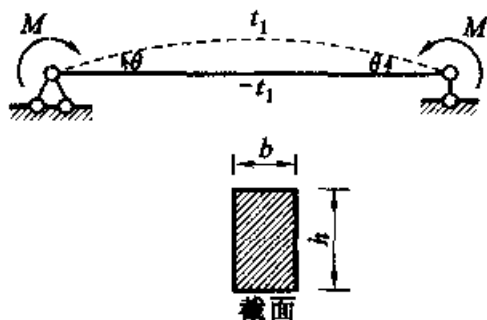
题 6-30 图



题 6-31 图



题 6-32 图



题 6-33 图

6-33 在简支梁两端作用一对力偶  $M$ , 同时梁上边温度升高  $t_1$ , 下边温度下降  $t_1$ , 试求端点的转角  $\theta$ 。如果  $\theta=0$ , 问力偶  $M$  应是多少? 设梁为矩形截面, 截面尺寸为  $b \times h$ 。

6-34 题 6-3 中的三铰拱温度均匀上升  $t$ , 试求  $C$  点的竖向位移  $\Delta_1$  和  $C$  铰两侧截面的相对转角  $\Delta_2$ , 拱轴方程为  $y = \frac{4}{l^2}x(l-x)$

6-35 题 6-10 中桁架的下弦杆温度上升  $t$ , 试求  $C$  点的竖向位移  $\Delta_C$ 。

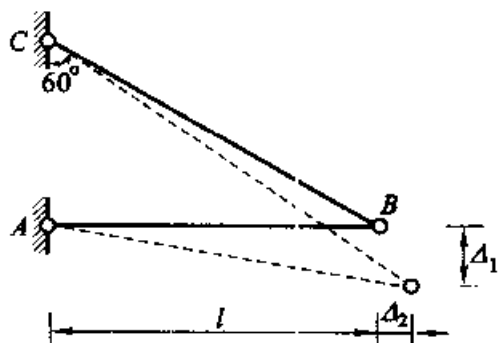
6-36 所示桁架变形时, 结点  $B$  有竖向位移  $\Delta_1$  和水平位移  $\Delta_2$ , 各杆的弹性模量和截面面积分别为  $E$  和  $A$ 。试将桁架的应变能  $U$  写成  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  的函数

6-37 所示桁架在  $B$  点作用竖向荷载  $F_{P1}$  和水平荷载  $F_{P2}$ , 试将桁架的应变余能  $V$  写成  $F_{P1}$  和  $F_{P2}$  的函数。设各杆的弹性模量和截面面积分别为  $E$  和  $A$ 。

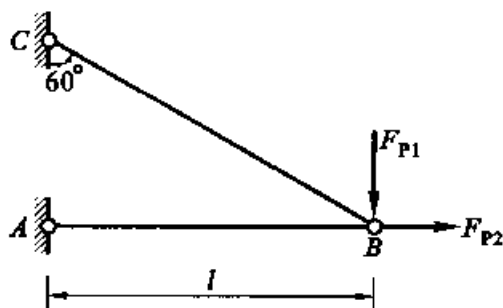
6-38 当题 6-36 所示桁架在  $B$  点产生竖向位移  $\Delta_1$  和水平位移  $\Delta_2$  时, 试用卡氏第一定理求在  $B$  点需施加的竖向力  $F_{P1}$  和水平力  $F_{P2}$ 。

6-39 题 6-37 所示桁架在  $B$  点受竖向荷载  $F_{P1}$  和水平荷载  $F_{P2}$  作用, 试用克罗蒂-恩格塞定理求  $B$  点的竖向位移  $\Delta_1$  和水平位移  $\Delta_2$ 。(本题与上题互为反问题。上题

以位移  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  为变量, 由位移推算相应的力。本题以力  $F_{P1}$ 、 $F_{P2}$  为变量, 由力推算相应的位移。)



题 6-36 图



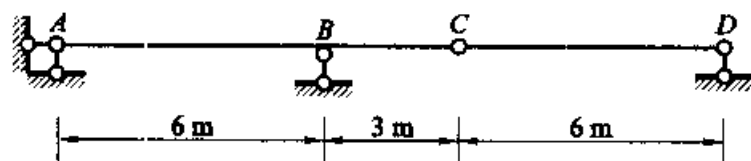
题 6-37 图

6-40 试求所示静定多跨梁下列位移影响线:

(a) 截面 A 的转角  $\theta_A$  影响线;

(b) C 点的竖向位移  $\Delta_C$  影响线。

设各梁的  $EI$  为常数。



题 6-40 图





## 第二部分 超静定结构

下面第7章至第12章讨论超静定结构的计算问题。

结构计算的内容包括计算内力和位移,以校核强度和刚度。解算这些内力和位移所依据的条件包括静力平衡条件和变形协调条件。

超静定结构与静定结构在计算方面的主要区别在于:静定结构的内力只根据静力平衡条件即可求出,而不必考虑变形协调条件,也就是说,内力是静定的;超静定结构的内力则不能单从静力平衡条件求出,而必须同时考虑变形协调条件,换句话说,内力是超静定的。

为了解算问题的方便,我们常在超静定结构的所有未知量中选出一部分作为基本未知量。解算时,首先把其余未知量表示成基本未知量的函数,然后再集中力量来解出基本未知量。

根据基本未知量选择方法的不同,超静定结构的解法可分为两大类:

力法——取某些力作基本未知量。

位移法——取某些位移作基本未知量。

力法和位移法是计算超静定结构的两个基本方法。

力法是提出较早、发展最完备的计算方法,同时也是更为基本的方法。力法是把超静定结构拆成静定结构,再由静定结构过渡到超静定结构。静定结构的内力和位移计算是力法计算的基础,因而在学习力法时,要求巩固地掌握静定结构的分析方法。第7章将讨论力法的原理及其应用。先讨论力法的一般原理,再讨论其在超静定刚架、排架、拱、桁架和组合结构等体系中的应用。

位移法的提出较力法稍晚些,是在20世纪初为了计算复杂刚架而建立起来的。位移法是把结构拆成杆件,再由杆件过渡到结构。杆件的内力和位移关系是位移法的计算基础,因而在学习位移法时,要求巩固地掌握杆件的分析方法以及杆件的基本特性。位移法虽然主要用于超静定结构,但也可用于静定结构。也就是说,从力法角度看,静定与超静定的界限是很分明的,但从位移法角度看,这条界限是无关紧要的。第8章将讨论位移法的原

理及其应用。

用力法和位移法计算结构时,都要求解联立方程。求解联立方程,可采用直接解法或渐近解法。在渐近解法中,开始只是得出近似解,然后逐步加以修正,最后收敛于精确解。结构力学中的渐近法有两种应用方式。一种方式是先从力学上建立方程组,然后从数学上对方程组采用渐近解法。另一种方式是不建立方程组,而是直接考虑结构的受力状态,从开始时的近似状态,逐步调整,最后收敛于真实状态。力法和位移法都可以采用渐近解法,但以位移法的收敛性能较好而被广泛采用。第9章将介绍的力矩分配法和无剪力分配法都是属于位移法类型的渐近解法,是不建立方程组,直接从力学意义去渐近。它的优点是,计算过程中的每个步骤都有明确的物理意义,便于理解和记忆,因而是一种便于掌握的手算方法。

第10章矩阵位移法将讨论一种适合计算机进行计算的结构分析方法。这方法与位移法一样,计算时先把结构拆开,分解成杆件;然后再将这些杆件按一定条件集成结构。为了适应电算的特点,在理论推导中采用了矩阵方法。矩阵方法使推导过程书写简明,便于使计算过程程序化。

第11章介绍能量原理。能量法在结构力学中占有重要地位。主要介绍了势能原理、余能原理以及它们与位移法、力法的关系。还介绍了广义能量偏导数定理,它是卡氏第一、第二定理的推广。

第12章超静定结构总论,将讨论超静定结构基本解法的分类及比较;在此基础上,推广和扩充了它们的应用。最后是超静定结构的特性,以及根据超静定结构的特性对计算简图的补充讨论。

# 第7章

## 力 法

§ 7-1 超静定结构的组成和超静定次数	§ 7-8 由卡氏定理推导力法方程
§ 7-2 力法的基本概念	§ 7-9 支座移动和温度改变时的计算
§ 7-3 超静定刚架和排架	§ 7-10 超静定结构位移的计算
§ 7-4 超静定桁架和组合结构	§ 7-11 超静定结构计算的校核
§ 7-5 对称结构的计算	§ 7-12 用求解器进行力法计算
§ 7-6 两铰拱	§ 7-13 小结
§ 7-7 无铰拱	§ 7-14 思考与讨论
	习题

本章介绍超静定结构的第一个基本解法——力法。力法以静定结构为基础,将多余约束力作为基本未知量,根据变形条件建立力法方程并求解。

学习本章先要掌握力法的原理;然后是对各种结构型式在荷载、温度和支座移动等条件下的应用,此时应注意各种结构型式的受力和变形特点。

通过能量原理建立力法方程求解的方法,不仅在计算原理上改变了力法的提法,也使解题步骤及计算形式发生了变化,是属于提高或选学的内容。

### § 7-1 超静定结构的组成和超静定次数

#### 1. 超静定结构的组成

为了认识超静定结构的特性,现把它与静定结构作一些对比。

一个结构,如果它的支座反力和各截面的内力都可以用静力平衡条件唯一地确定,就称为静定结构。图 7-1a 所示简支梁是静定结构的一个例子。一个结构,如果它的支座反力和各截面的内力不能完全由静力平衡条件唯一地加以确定,就称为超静定结构。图 7-1b 所示连续梁是超静定结构的一个例子。

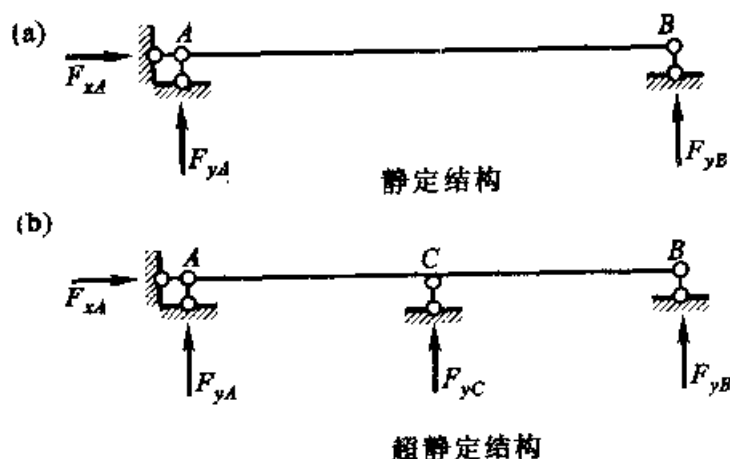


图 7-1

再从几何构造看,简支梁和连续梁都是几何不变的。如果从简支梁中去掉支杆  $B$ ,就变成了几何可变体系。反之,如果从连续梁中去掉支杆  $C$ ,则仍是几何不变的。因此,支杆  $C$  是多余约束。由此引出如下结论:静定结构是没有多余约束的几何不变体系,而超静定结构则是有多余约束的几何不变体系。

总起来说,内力是超静定的,约束有多余的,这就是超静定结构区别于静定结构的基本特点。

## 2. 超静定次数

从几何构造看,超静定次数是指超静定结构中多余约束的个数。如果从原结构中去掉  $n$  个约束,结构就成为静定的,则原结构即为  $n$  次超静定。

由于原结构是几何不变的,因此由 § 2-3 可知,超静定次数  $n$  为

$$n = W \quad (a)$$

从静力分析看,超静定次数等于根据平衡方程计算未知力时所缺少的方程的个数,即多余未知力(多余约束力)的个数。

例如图 7-2a、b、c、d 所示超静定结构,在撤去或切断多余约束后,即变为图 7-3a、b、c、d 中的静定结构,在图中同时还标明了相应的多余约束力  $X_i$ <sup>①</sup>。因此,其超静定次数分别为 2、4、6、3。

按照式(a)求超静定次数时,关键是要学会把原结构拆成一个静定结构。这里要注意以下几点:

- (1) 撤去一根支杆或切断一根链杆,等于拆掉一个约束(图 7-3a、b)。
- (2) 撤去一个铰支座或撤去一个单铰,等于拆掉两个约束。

<sup>①</sup> 由于多余约束力是未知的广义力(包括集中力、力偶、力矩),为叙述的统一和完整,本书仍沿用以往教材中使用的  $X_i$  表示,对于文中所对应的物理量和相应单位,则视具体问题而定。

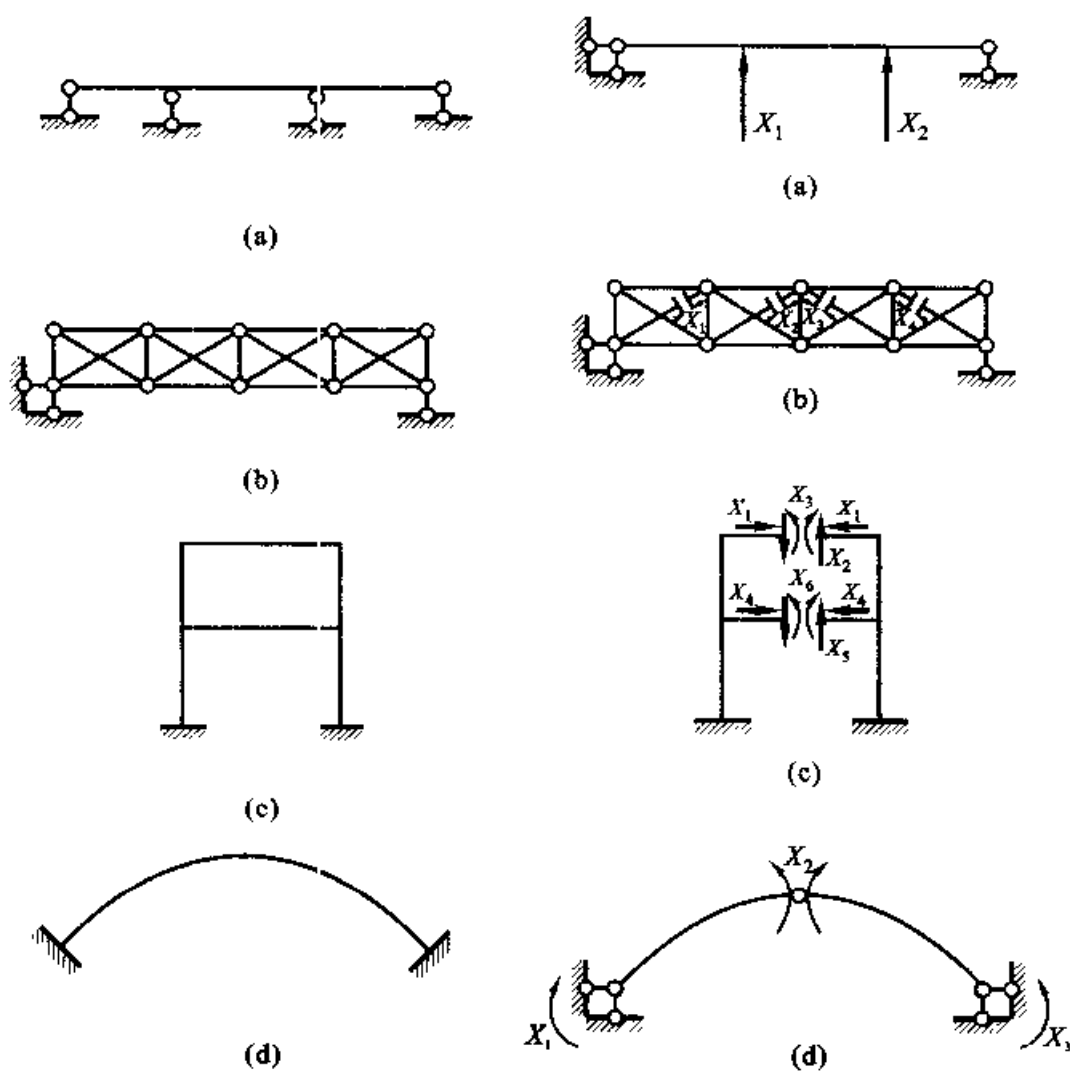


图 7-2

图 7-3

(3) 撤去一个固定端或切断一个梁式杆, 等于拆掉三个约束(图 7-3c)。

(4) 在连续杆中加入一个单铰, 等于拆掉一个约束(图 7-3d)。

此外, 还要注意:

(5) 不要把原结构拆成一个几何可变体系, 即不能去掉必要约束。例如, 如果把图 7-2a 所示梁中的水平支杆拆掉, 它就变成了几何可变体系。

(6) 要把全部多余约束都拆除。例如, 图 7-4a 中的结构, 如果只拆去一根竖向支杆, 如图 7-4b 所示, 则其中的闭合框仍然具有三个多余约束。必须把闭合框再切开一个截面, 如图 7-4c 所示, 这时才成为静定结构。因此, 原结构总共有四个多余约束。

也可以按式(a)利用第 2 章的式(2-6)和式(2-7)来计算超静定次数。如桁架的超静定次数  $n$  为

$$n = W - b - 2j$$

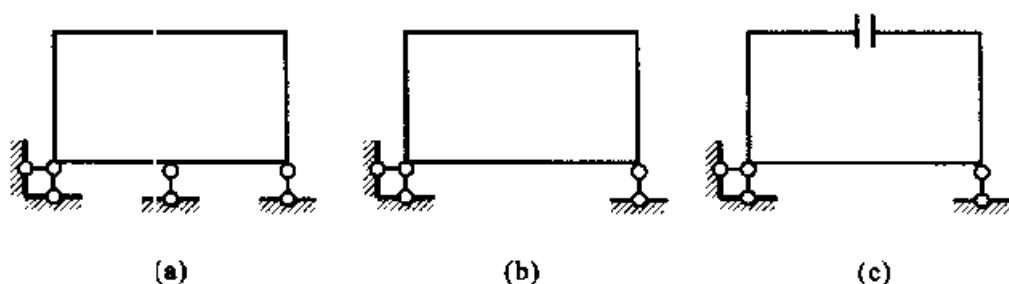


图 7-4

以图 7-2b 所示桁架为例,  $b=24$ ,  $j=10$ , 所以

$$n = 24 - 2 \times 10 = 4$$

## § 7-2 力法的基本概念

### 1. 基本思路

力法是计算超静定结构的最基本的方法。

采用力法解超静定结构问题时, 我们不是孤立地研究超静定问题, 而是把超静定问题与静定问题联系起来, 加以比较, 从中找到由静定过渡到超静定的途径。

下面结合图 7-5a 所示一次超静定结构说明力法中的三个基本概念。

#### (1) 力法的基本未知量

我们将图 7-5a 中的超静定结构与图 7-5b 中的静定结构加以比较:

在图 7-5b 中有三个未知力  $F_{xA}$ 、 $F_{yA}$ 、 $M_A$ , 可用三个平衡方程全部求出。

在图 7-5a 中, 在支座 B 处还多了一个未知力  $X_1$ 。这个多余未知力无法由平衡方程求出。因此, 在超静定结构中遇到的新问题就是计算多余未知力  $X_1$  的问题。只要  $X_1$  能够设法求出, 则剩下的问题就是静定的问题了。

力法的第一个特点是: 把多余未知力的计算问题当作超静定问题的关键问题, 把多余未知力当作处于关键地位的未知力——称为力法的基本未知量。力法这个名称就是由此而来的。

在力法中, 不是把全部未知力  $F_{xA}$ 、 $F_{yA}$ 、 $M_A$ 、 $X_1$  平均看待, 而是从中把基本未知量  $X_1$  突出出来, 作为主攻目标。因为只要  $X_1$  能解出, 其余的未知力也就迎刃而解了(在图 7-5a 中, 也可以把  $F_{yA}$  或  $M_A$  取作基本未知量。)

#### (2) 力法的基本体系

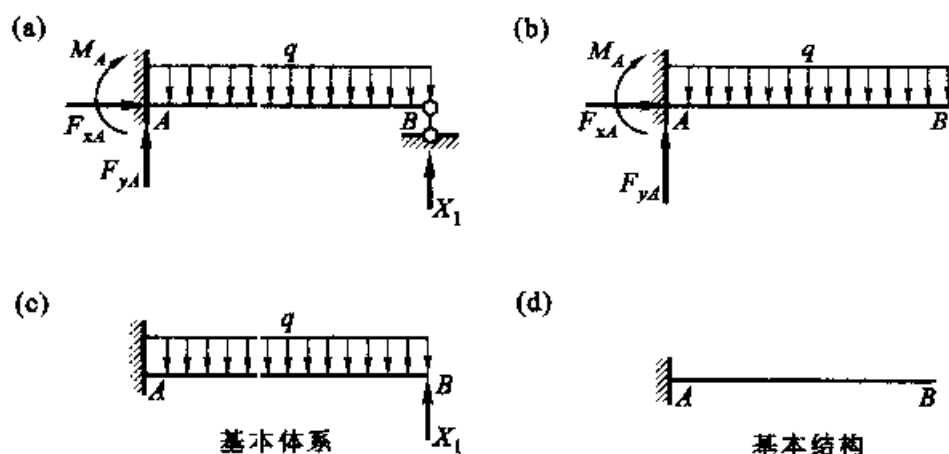


图 7-5

在图 7-5c 中,把图 7-5a 中的多余约束(支座 B)去掉,而代之以多余未知力  $X_1$ ,这样得到的含有多余未知力的静定结构称为力法的基本体系。与之相应,把图 7-5a 中原超静定结构中多余约束(支座 B)和荷载都去掉后得到的静定结构称为力法的基本结构(图 7-5d)。

在基本体系中仍然保留原结构的多余约束反力  $X_1$ ,只是把它由被动力改为主动力,因此基本体系的受力状态可使之与原结构完全相同。由此看出,基本体系本身既是静定结构,又可用它代表原来的超静定结构。因此,它是由静定结构过渡到超静定结构的一座桥梁。

### (3) 力法的基本方程

怎样才能求出图 7-5a 中基本未知量  $X_1$  的确定值?显然不能利用平衡条件求出,必须补充新的条件。

前面已经说明:图 7-5c 中的基本体系可以转化为图 7-5a 中的超静定结构。现在需要说明,在什么条件下,图 7-5c 中的基本体系才能真正变成图 7-5a 中的超静定结构。为此,我们将图 7-5a 和图 7-5c 加以比较。

在图 7-5a 所示的超静定结构中,  $X_1$  是被动力,是固定值。与  $X_1$  相应的位移  $\Delta_1$  (即 B 点的竖向位移)等于零。

在图 7-5c 的基本体系中,  $X_1$  是主动力,是变量。如果  $X_1$  过大,则梁的 B 端往上翘;如果  $X_1$  过小,则 B 端往下垂。只有当 B 端的竖向位移正好等于零时,基本体系中的变力  $X_1$  才与超静定结构中常力  $X_1$  正好相等,这时基本体系才能真正转化为原来的超静定结构。

由此看出,基本体系转化为原来超静定结构的条件是:基本体系沿多余未知力  $X_1$  方向的位移  $\Delta_1$  应与原结构相同,即

$$\Delta_1 = 0 \quad (a)$$



这个转化条件是一个变形条件,也就是计算多余未知力时所需要的补充条件。

下面只讨论线性变形体系的情形,并应用叠加原理把变形条件(a)写成显含多余未知力  $X_1$  的展开形式,称为力法的基本方程。

图 7-6a 所示基本体系承受荷载  $q$  和未知力  $X_1$  的共同作用。根据叠加原理,状态(a)应等于状态(b)与(c)的总和,这里状态(b)和(c)分别表示基本结构在  $q$  和  $X_1$  单独作用下的受力状态,如图 7-6b 和 c 所示。因此,变形条件(a)可表示如下:

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0 \quad (b)$$

这里,  $\Delta_1$  是基本体系在荷载与未知力  $X_1$  共同作用下沿  $X_1$  方向的总位移(即图 7-6a 中 B 点的竖向位移)。

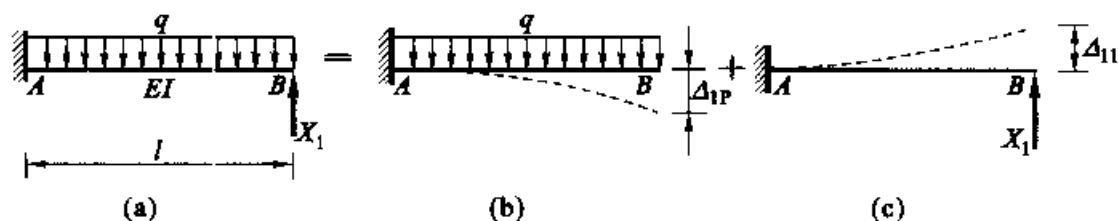


图 7-6

$\Delta_{1P}$  是基本结构在荷载单独作用下沿  $X_1$  方向的位移(图 7-6b)。

$\Delta_{11}$  是基本结构在未知力  $X_1$  单独作用下沿  $X_1$  方向的位移(图 7-6c)。

位移  $\Delta_1$ 、 $\Delta_{1P}$ 、 $\Delta_{11}$  的方向如果与力  $X_1$  的正方向相同,则规定为正。

$\Delta_{11}$  是由未知力  $X_1$  引起的位移。根据叠加原理,位移  $\Delta_{11}$  应与力  $X_1$  成正比,其中的比例系数如用  $\delta_{11}$  表示,则可写成

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1 \quad (c)$$

由此看出,系数  $\delta_{11}$  在数值上等于基本结构在单位力  $X_1 = 1$  单独作用下沿  $X_1$  方向产生的位移(图 7-7b)。将式(c)代入式(b),即得

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (7-1)$$

这就是在线性变形条件下一次超静定结构的力法基本方程。

力法方程中的系数  $\delta_{11}$  和自由项  $\Delta_{1P}$  都是基本结构即静定结构的位移,我们已经熟悉其计算方法。为了计算  $\delta_{11}$  和  $\Delta_{1P}$ ,作基本结构在荷载作用下的弯矩图  $M_P$ (图 7-7a)和在单位力  $X_1 = 1$  作用下的弯矩图  $\bar{M}_1$ (图 7-7b)。应用图乘法,得

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left( \frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} \cdot l \right) \times \frac{3l}{4} = -\frac{ql^4}{8EI}$$

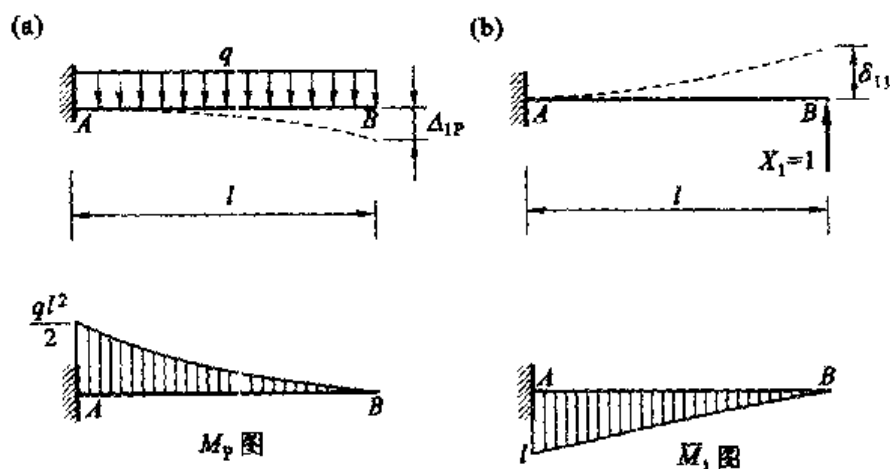


图 7-7

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{l \cdot l}{2} \times \frac{2l}{3} \right) = \frac{l^3}{3EI}$$

代入力法方程(7-1)得

$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - \frac{ql^4}{8EI} = 0$$

由此求出:

$$X_1 = \frac{3}{8} ql$$

求得的未知力是正号,表示反力  $X_1$  的方向与原设的方向相同。

多余未知力求出以后,就可以利用平衡条件求原结构的支座反力,作内力图,计算结果如图 7-8 所示。

根据叠加原理,结构任一截面的弯矩  $M$  也可以用下列公式表示:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P \quad (7-2)$$

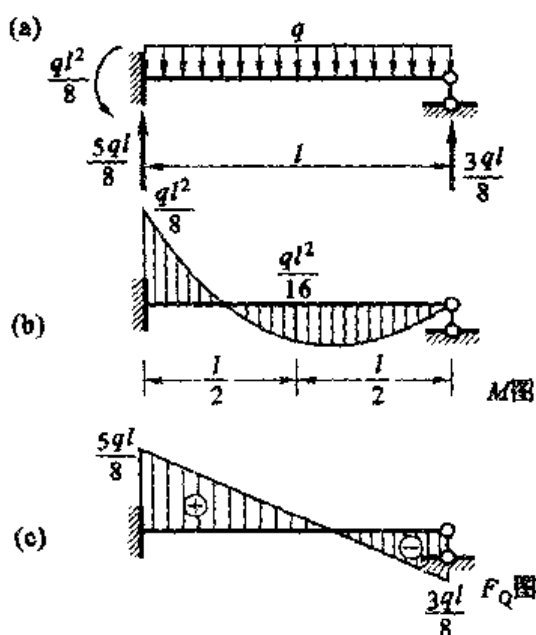


图 7-8

这里,  $\bar{M}_1$  是单位力  $X_1 = 1$  在基本结构中任一截面所产生的弯矩,  $M_P$  是荷载在基本结构中所产生的弯矩。

## 2. 多次超静定结构的计算

结合图 7-9a 所示刚架进行讨论。这是一个两次超静定结构，如果取  $B$  点两根支杆的反力  $X_1$  和  $X_2$  为基本未知量，则基本体系如图 7-9b 所示，相应的基本结构如图 7-9c 所示。

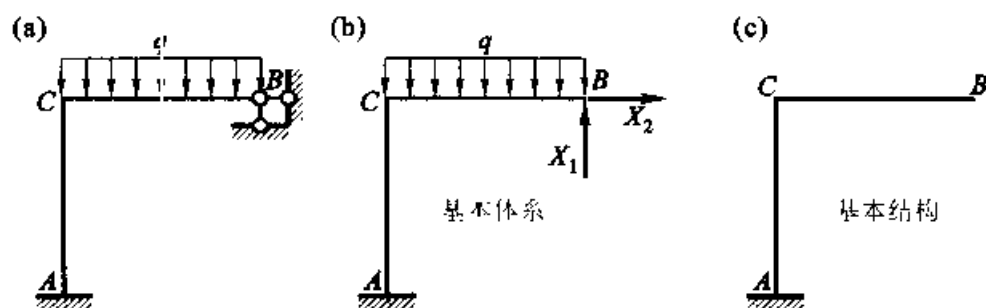


图 7-9

为了确定多余未知力  $X_1$  和  $X_2$ ，可利用多余约束处的变形条件：即基本体系在  $B$  点沿  $X_1$  和  $X_2$  方向的位移应与原结构相同，即应等于零。因此可写成

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{cases} \quad (d)$$

这里， $\Delta_1$  是基本体系沿  $X_1$  方向的位移，即  $B$  点的竖向位移； $\Delta_2$  是基本体系沿  $X_2$  方向的位移，即  $B$  点的水平位移。

下面应用叠加原理把变形条件式(d)写成展开形式。为了计算基本体系在荷载和未知力  $X_1$ 、 $X_2$  共同作用下的位移  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$ ，先分别计算基本结构在每种力单独作用下的位移如下：

(1) 荷载单独作用时，相应位移为  $\Delta_{1P}$ 、 $\Delta_{2P}$  (图 7-10a)。

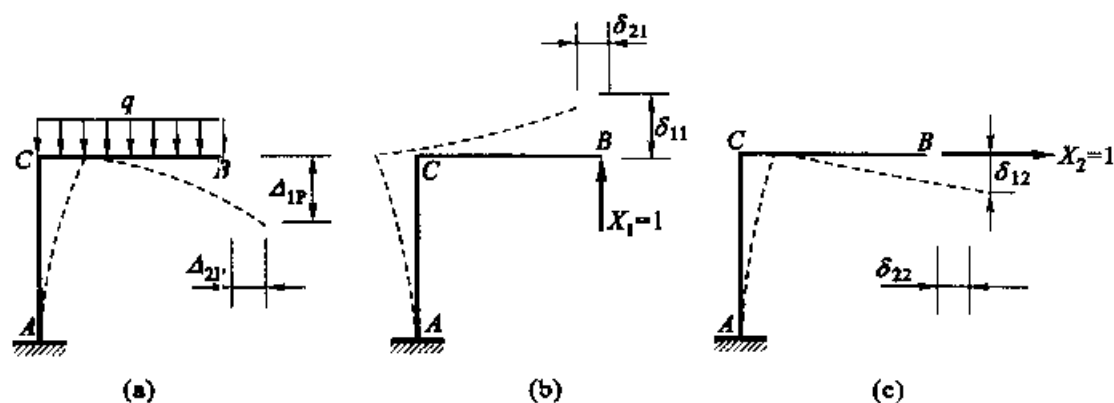


图 7-10

(2) 单位力  $X_1 = 1$ <sup>①</sup> 单独作用时，相应位移为  $\delta_{11}$ 、 $\delta_{21}$  (图 7-10b)；未知

<sup>①</sup> 参看本书符号表说明 3。

力  $X_1$  单独作用时,相应位移为  $\delta_{11} X_1, \delta_{21} X_1$ ;

(3) 单位力  $X_2 = 1$  单独作用时,相应位移为  $\delta_{12}, \delta_{22}$  (图 7-10c); 未知力  $X_2$  单独作用时,相应位移为  $\delta_{12} X_2, \delta_{22} X_2$ 。

由叠加原理,得

$$\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P}$$

$$\Delta_2 = \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P}$$

因此变形条件(d)即为

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \quad (7-3)$$

这就是两次超静定结构的力法基本方程。

力法基本方程中的系数  $\delta$  和自由项  $\Delta$  都是基本结构的位移。由于基本结构是静定结构,所以计算这些系数和自由项时并无困难。

由基本方程求出多余未知力  $X_1, X_2$  以后,利用平衡条件便可求出原结构的支座反力和内力。此外,也可利用叠加原理求内力,例如任一截面的弯矩  $M$  可用下面的叠加公式计算:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_P$$

这里,  $M_P$  是荷载在基本结构任一截面产生的弯矩,  $\bar{M}_1$  和  $\bar{M}_2$  分别是单位力  $X_1 = 1$  和  $X_2 = 1$  在基本结构同一截面产生的弯矩。

同一结构可以按不同方式选取力法的基本体系和基本未知量。例如图 7-9a 所示结构,其基本体系也可采用图 7-11a 或 b 所示体系。这时,力法基本方程在形式上与式(7-3)完全相同,但由于  $X_1$  和  $X_2$  的实际含义不同,因而变形条件的实际含义也不同。此外,还要注意,基本体系应是几何不变的,因此图 7-11c 所示瞬变体系不能取作基本体系。

下面讨论  $n$  次超静定的一般情形。这时力法的基本未知量是  $n$  个多余未知力  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 。力法的基本体系是从原结构中去掉  $n$  个多余约束,而代之以相应的  $n$  个多余未知力后所得到的静定结构,力法的基本方程是在  $n$  个多余约束处的  $n$  个变形条件——基本体系中沿多余未知力方向的位移应与原结构中相应的位移相等。在线性变形体系中,根据叠加原理,  $n$  个变形条件通常可写为



线,主对角线上的系数  $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$  称为主系数,主系数都是正值,且不为零。不在主对角线上的系数  $\delta_{ij} (i \neq j)$ , 称为副系数。副系数可以是正值或负值,也可以为零。根据位移互等定理,柔度矩阵是一个对称矩阵。

解力法方程得到多余未知力  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的数值后,超静定结构的内力可根据平衡条件求出,或根据叠加原理用下式计算:

$$\left. \begin{aligned} M &= \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p \\ F_Q &= \bar{F}_{Q1} X_1 + \bar{F}_{Q2} X_2 + \dots + \bar{F}_{Qn} X_n + F_{QP} \\ F_N &= \bar{F}_{N1} X_1 + \bar{F}_{N2} X_2 + \dots + \bar{F}_{Nn} X_n + F_{NP} \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

式中  $\bar{M}_i, \bar{F}_{Qi}$  和  $\bar{F}_{Ni}$  是基本结构由于  $X_i = 1$  作用而产生的内力,  $M_p, F_{QP}$  和  $F_{NP}$  是基本结构由于荷载作用而产生的内力。在应用式(7-6)第一式画出原结构的弯矩图后,也可以直接应用平衡条件计算  $F_Q$  和  $F_N$ , 并画出  $F_Q$  和  $F_N$  图。

### § 7-3 超静定刚架和排架

计算刚架和排架位移时,通常忽略轴力和剪力的影响,而只考虑弯矩的影响,因而使计算得到简化。轴力的影响在高层刚架的柱中比较大,剪力的影响当杆件短而粗时比较大,当遇到这种情况时要作特殊处理。

图 7-12 所示为装配式单层单跨厂房的排架计算简图。其中的柱是阶梯形变截面杆件,柱底为固定端,柱顶与横梁(屋架)为铰接。计算时常忽略横梁的轴向变形。



图 7-12

**例 7-1** 图 7-13a 所示为一超静定刚架,梁和柱的截面惯性矩分别为  $I_1$  和  $I_2$ ,  $I_1 : I_2 = 2 : 1$ 。当横梁承受均布荷载  $q =$

20 kN/m 作用时,试作刚架的内力图。

**解** (1) 选取基本体系

这个刚架是一次超静定。可以取 B 点的水平反力为多余未知力。撤去 B 点水平支杆而代之以未知力  $X_1$  后,得到图 7-13b 所示的基本体系。

(2) 列出力法方程

基本体系应满足 B 点无水平位移的变形条件。力法方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

(3) 求系数和自由项

系数  $\delta_{11}$  和自由项  $\Delta_{1P}$  都是基本结构(静定刚架)的位移。计算刚架位移

时只考虑弯矩的影响。为此,绘制基本结构在荷载作用下的弯矩图,即  $M_P$  图(称为荷载弯矩图);在单位力  $X_1 = 1$  作用下的弯矩图,即  $\bar{M}_1$  图(称为单位弯矩图),分别如图 7-13c、d 所示。

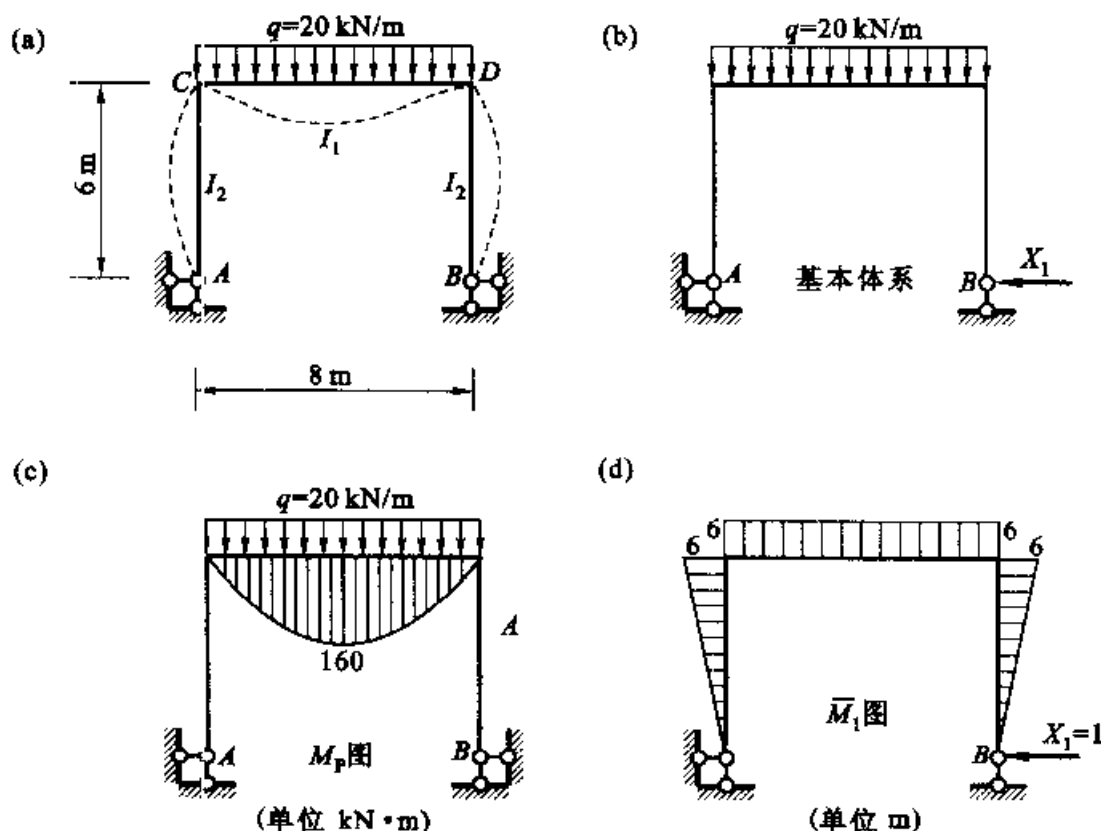


图 7-13

计算位移时采用图乘法:

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds = -\frac{1}{EI_1} \left( \frac{2}{3} \times 8 \text{ m} \times 160 \text{ kN} \cdot \text{m} \right) \times 6 \text{ m} \\ &= -\frac{5120 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI_1}\end{aligned}$$

这里,由于横梁的  $M_P$  图与  $\bar{M}_1$  图不在同一边,故乘积为负值。

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{EI_1} (6 \text{ m} \times 8 \text{ m}) \times 6 \text{ m} + \frac{2}{EI_2} \left( \frac{1}{2} \times 6 \text{ m} \times 6 \text{ m} \right) \times \\ &\quad \left( \frac{2}{3} \times 6 \text{ m} \right) = \frac{288 \text{ m}^3}{EI_1} + \frac{144 \text{ m}^3}{EI_2}\end{aligned}$$

因  $I_2 = \frac{1}{2} I_1$ , 故

$$\delta_{11} = \frac{576 \text{ m}^3}{EI_1}$$

## (4) 求多余未知力

将  $\delta_{11}$  及  $\Delta_{1P}$  代入力法方程,得

$$\frac{576 \text{ m}^3}{EI_1} X_1 - \frac{5 \cdot 120 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI_1} = 0$$

所以

$$X_1 = \frac{80}{9} \text{ kN}$$

因为力法方程的各项都有  $EI_1$ , 可以消去。由此可见, 计算超静定刚架在荷载作用下的内力时, 只需要知道各杆  $EI$  的相对值, 而不需要各杆  $EI$  的绝对值

## (5) 作内力图

多余未知力求出以后, 作内力图的问题即属于静定问题。通常作内力图的次序为: 首先, 利用已经作好的  $\bar{M}_1$  图和  $M_P$  图作最后弯矩图; 然后, 利用弯矩图作剪力图; 最后, 利用剪力图作轴力图。现分述如下:

## 1) 作弯矩图

弯矩叠加公式为

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P$$

因此, 以  $X_1 = 80/9 \text{ kN}$  乘  $\bar{M}_1$  图后, 再与  $M_P$  图相加, 即得出  $M$  图 (图 7-14a)。

## 2) 作剪力图

作任一杆的剪力图时, 可取此杆为隔离体, 利用已知的杆端弯矩, 由平衡条件求出杆端剪力, 然后作此杆的剪力图。

以  $CD$  杆为例, 其隔离体图如图 7-14b 所示。求出杆端剪力后, 即可在图 7-14c 中作杆  $CD$  的  $F_Q$  图。

最后的  $F_Q$  图如图 7-14c 所示。

## 3) 作轴力图

作任一杆的轴力图时, 可取结点为隔离体, 利用已知的杆端剪力, 由平衡条件求出杆端轴力, 然后作此杆的轴力图。

以结点  $C$  为例, 其隔离体图如图 7-14d 所示, 每个结点有两个投影方程。按照适当的次序截取结点, 就可以求出所有杆端轴力。轴力图如图 7-14e 所示。

**例 7-2** 图 7-15 为两跨厂房排架的计算简图, 试求在所示吊车荷载作用下的内力。计算资料如下:

## (1) 截面惯性矩

左柱: 上段  $I_{A1} = 10.1 \times 10^4 \text{ cm}^4$ , 下段  $I_{A2} = 28.6 \times 10^4 \text{ cm}^4$ 。



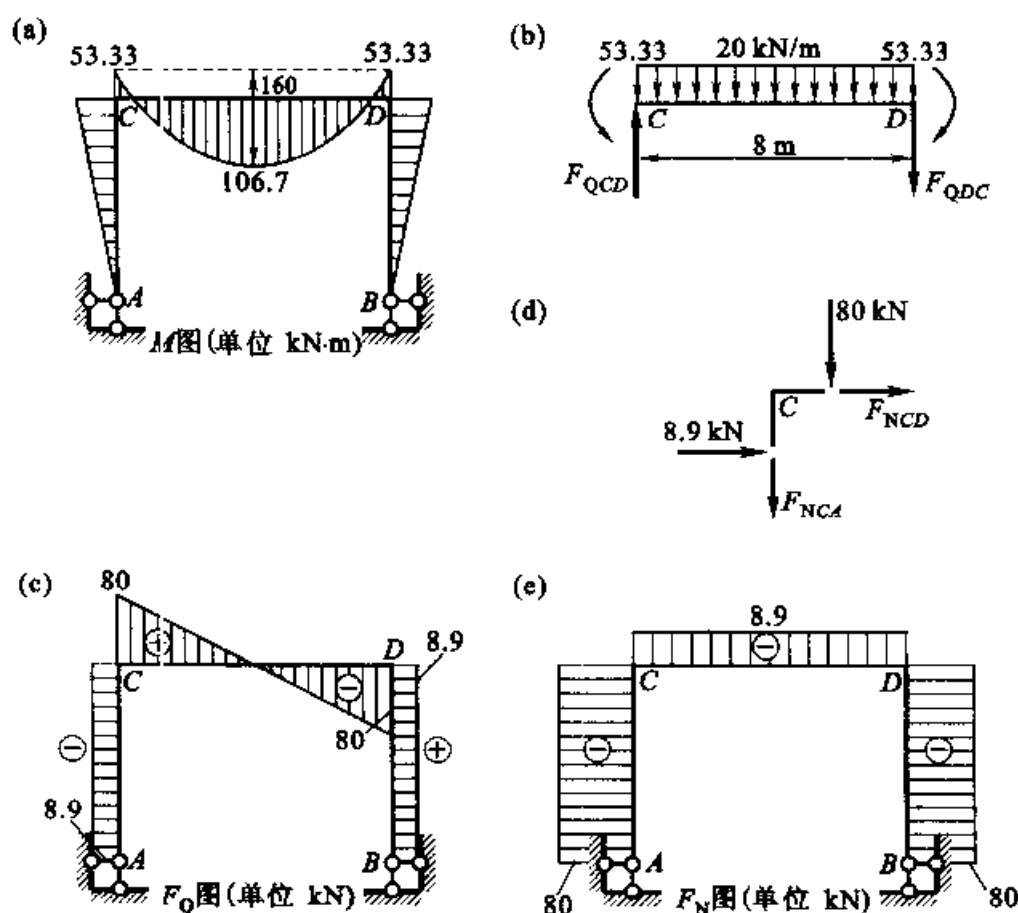


图 7-14

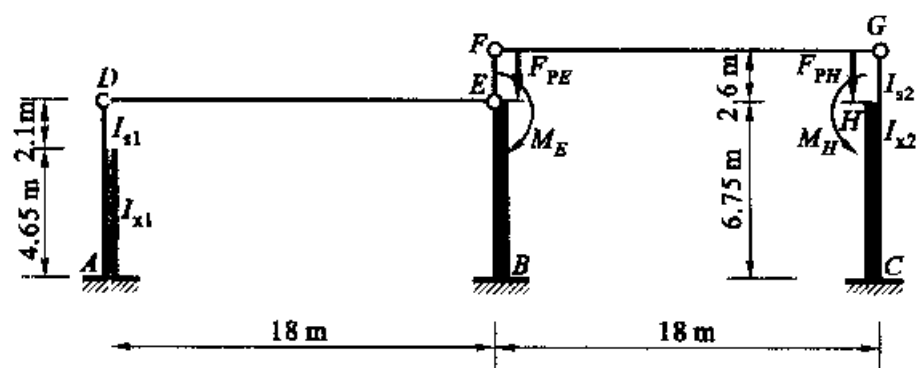


图 7-15

右柱及中柱: 上段  $I_{x2} = 16.1 \times 10^4 \text{ cm}^4$ , 下段  $I_{x2} = 81.8 \times 10^4 \text{ cm}^4$ 。

## (2) 右跨吊车荷载

竖向荷载为  $F_{PH} = 108 \text{ kN}$ ,  $F_{PE} = 43.9 \text{ kN}$ 。由于  $F_{PH}$ 、 $F_{PE}$  与下柱轴线有偏心距  $e = 0.4 \text{ m}$ , 因此在  $H$ 、 $E$  点的力偶荷载为

$$M_H = F_{PH} e = 43.2 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_E = F_{PE} e = 17.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**解** 此排架是二次超静定。横梁  $FG$  和  $DE$  是两端铰接的杆件,在吊车荷载作用下横梁起链杆作用,只受轴力。吊车荷载的作用除使  $E$ 、 $H$  两截面有力偶  $M_E$ 、 $M_H$  外,还有竖向的压力;因为竖向压力只使下柱产生轴力,故在图 7-16a 计算弯曲内力的基本体系中,未将竖向力  $F_E$ 、 $F_H$  标出。

取链杆  $FG$  和  $DE$  的轴力  $X_1$  和  $X_2$  为多余未知力。截断两个链杆的轴向约束,在切口处加上轴力  $X_1$  和  $X_2$ ,得出基本体系如图 7-16a 所示。这里需要说明两点:

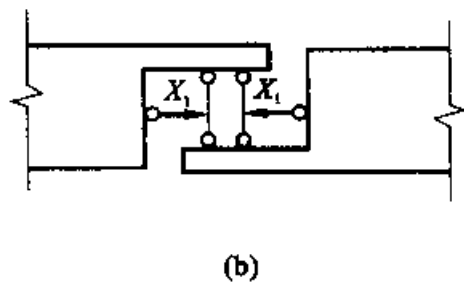
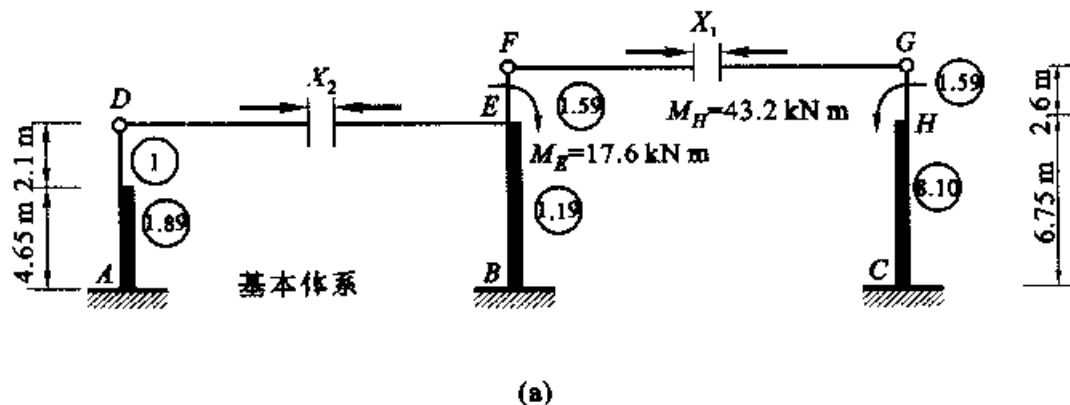


图 7-16

第一, 多余未知力  $X_1$  和  $X_2$  都是内力; 内力在基本体系中是广义力, 是由数值相等、方向相反的一对力组成的。

第二,切断一根杆件,是指在切口处把与轴力、剪力、弯矩相应的三个约束全部切断。这里指的是切断杆件中的轴向约束,即只切断与轴力相应的那一个约束,另外两个约束仍然保留。图 7-16b 所示为杆 FG 在切口处详细情形,只切断了轴向约束。

力法基本方程为

$$\Delta_i = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \Delta_{ip} = 0$$

$$\Delta_{\gamma} = \Delta_{\gamma 1} X_1 + \delta_{\gamma 2} X_2 + \Delta_{\gamma p} = 0$$

这里,  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  分别表示与轴力  $X_1$  和  $X_2$  相应的广义位移, 即切口处两个截面的轴向相对位移。因此, 这里力法基本方程所表示的变形条件为: 切口处

两个截面沿轴向应仍保持接触,即沿轴向的相对位移应为零。

作基本结构的  $M_p$ 、 $M_1$ 、 $M_2$  图(图 7-17a、b、c),由此求得自由项和系数如下(图 7-16a 中括号内的数字是各杆  $EI$  的相对值)<sup>①</sup>:

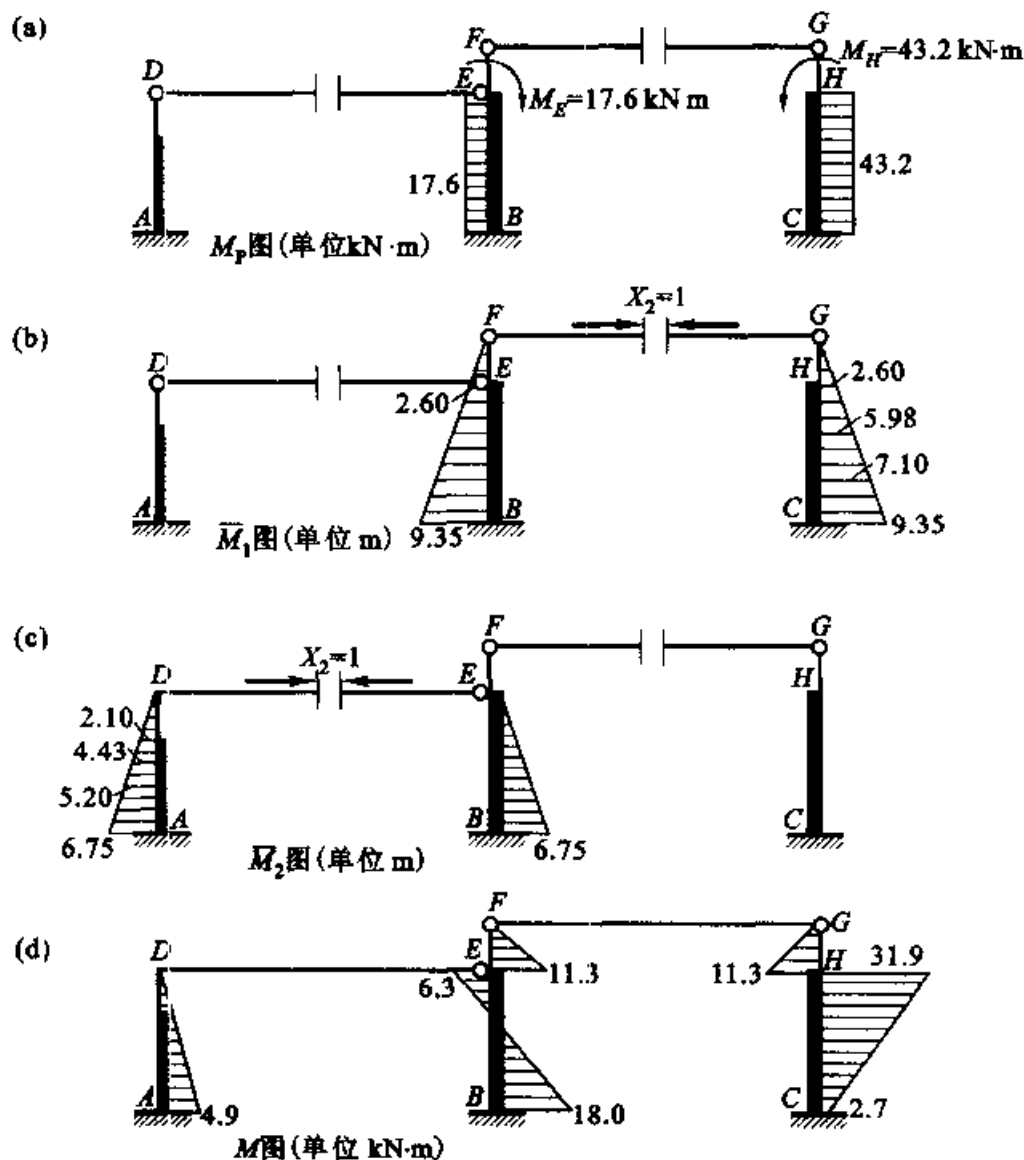


图 7-17

① 因为超静定结构在荷载作用下的内力只与各杆  $EI$  的相对值有关,与各杆  $EI$  的绝对值(真值)无关;以后为了计算的简单,常采用相对值。这时,中间过程的计算结果  $\delta_{ij}$ 、 $\Delta_{ip}$  等已不是真值,而只是相对值,故本例题在运算中不注明其单位。最后内力  $X$ ,是真值,注明其单位。本书中以后凡是相对值而非真值计算的算例均按此处理,不再一一说明。

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds = \frac{1}{8.10} \left( \frac{2.60 + 9.35}{2} \times 6.75 \right) \times (43.2 + 17.6) = 303$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} ds = -\frac{1}{8.10} \left( \frac{6.75 \times 6.75}{2} \right) \times 17.6 = -49.5$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds \\ &= \frac{1}{1.59} \left( \frac{2.6 \times 2.6}{2} \right) \times \left( \frac{2}{3} \times 2.6 \right) \times 2 + \frac{1}{8.10} \left[ (2.6 \times 6.75) \times 5.98 + \right. \\ &\quad \left. \frac{6.75 \times 6.75}{2} \times 7.10 \right] \times 2 = 73.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} ds = \frac{1}{8.10} \left( \frac{6.75 \times 6.75}{2} \right) \times \left( \frac{2}{3} \times 6.75 \right) + \frac{1}{1} \left( \frac{2.1 \times 2.1}{2} \right) \times \\ &\quad \left( \frac{2}{3} \times 2.1 \right) + \frac{1}{2.83} \left[ (2.1 \times 4.65) \times 4.43 + \frac{4.65 \times 4.65}{2} \times 5.20 \right] \\ &= 50.9 \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{8.1} \left( \frac{6.75 \times 6.75}{2} \right) \times 7.10 = -20$$

力法方程为

$$\begin{cases} 73.4X_1 - 20X_2 + 303 = 0 \\ -20X_1 + 50.9X_2 - 49.5 = 0 \end{cases}$$

解方程,得

$$X_1 = -4.33 \text{ kN}, \quad X_2 = -0.73 \text{ kN}$$

利用叠加公式  $M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_P$  作  $M$  图,如图 7-17d 所示。

## § 7-4 超静定桁架和组合结构

桁架是链杆体系,计算力法方程的系数和自由项时,只考虑轴力的影响。组合结构中既有链杆也有梁式杆,计算力法方程的系数和自由项时,对链杆只考虑轴力的影响;对梁式杆通常可忽略轴力和剪力的影响,只考虑弯矩的影响。

**例 7-3** 试求图 7-18a 所示超静定桁架的内力。各杆截面面积在表 7-1 中给出。

**解** 此桁架为一次超静定,基本体系如图 7-18b 所示。基本结构在荷载作用下的各杆轴力  $F_{NP}$  示于图 7-18c,在单位力  $X_1 = 1$  作用下的各杆轴力  $\bar{F}_{N1}$  示于图 7-18d。位移公式为

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{F}_{N1}^2 l}{EA}, \quad \Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{F}_{N1} F_{NP} l}{EA}$$

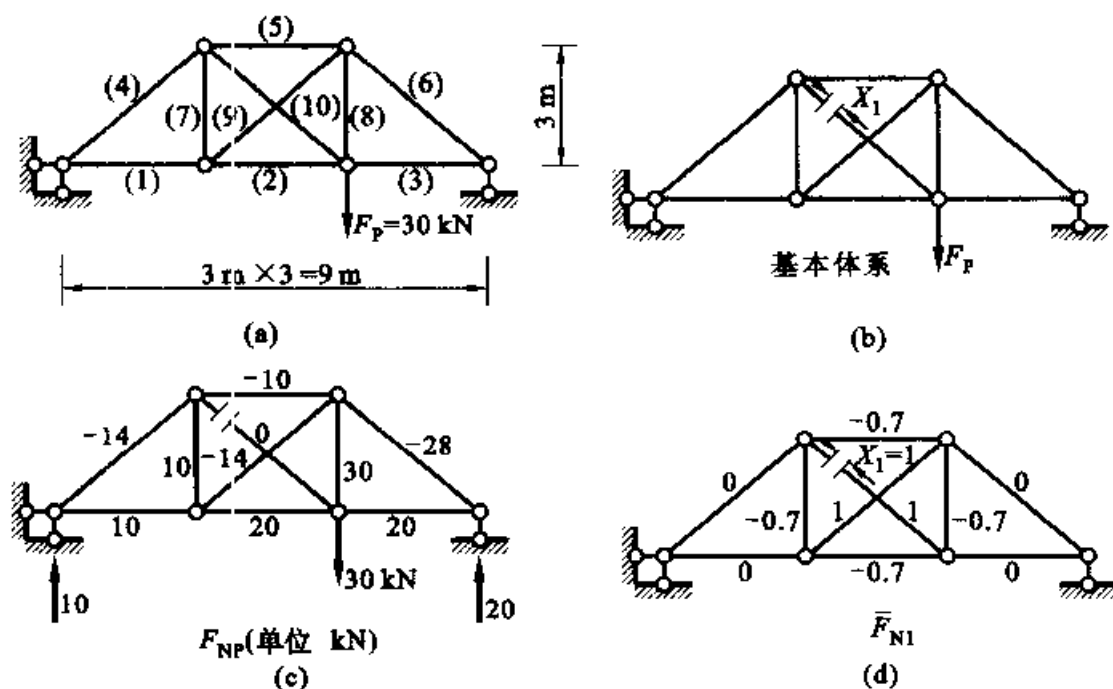


图 7-18

可列表(表 7-1)进行计算。代入力法方程后,解得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-1.082 \text{ kN/cm} \cdot E}{89.5 \text{ cm}^{-1} E} = 12.1 \text{ kN}$$

各杆轴力可用下式计算:

$$F_N = \bar{F}_{N1} X_1 + F_{NP}$$

计算结果也列在表 7-1 中。

表 7-1  $\delta_{11}$ 、 $\Delta_{1P}$  和轴力  $F_N$  的计算

杆件	$l/\text{cm}$	$A/\text{cm}^2$	$F_{NP}/\text{kN}$	$\bar{F}_{N1}$	$\frac{\bar{F}_{N1}^2 l}{A} / \text{cm}^{-1}$	$\frac{\bar{F}_{N1} F_{NP} l}{A} / \text{kN} \cdot \text{cm}^{-1}$	$F_N = \bar{F}_{N1} X_1 + F_{NP} / \text{kN}$
1	300	15	10	0	0	0	10.0
2	300	20	20	-0.7	7.5	-210	11.5
3	300	15	20	0	0	0	20.0
4	424	20	-14	0	0	0	14.0
5	300	25	-10	-0.7	6	84	18.5
6	424	20	-28	0	0	0	-28.0
7	300	15	10	-0.7	10	-140	1.5
8	300	15	30	-0.7	10	-420	21.5
9	424	15	-14	1	28	-396	-1.9
10	424	15	0	1	28	0	12.1
$\Sigma$					89.5	-1.082	

例 7-4 试求图 7-19a 所示一次超静定组合结构在荷载作用下的内力。各杆的刚度给定如下:杆 AD 为梁式杆,

$$EI = 1.40 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$EA = 1.99 \times 10^6 \text{ kN}$$

杆 AC 和 CD 为链杆,  $EA = 2.56 \times 10^5 \text{ kN}$

杆 BC 为链杆,  $EA = 2.02 \times 10^5 \text{ kN}$

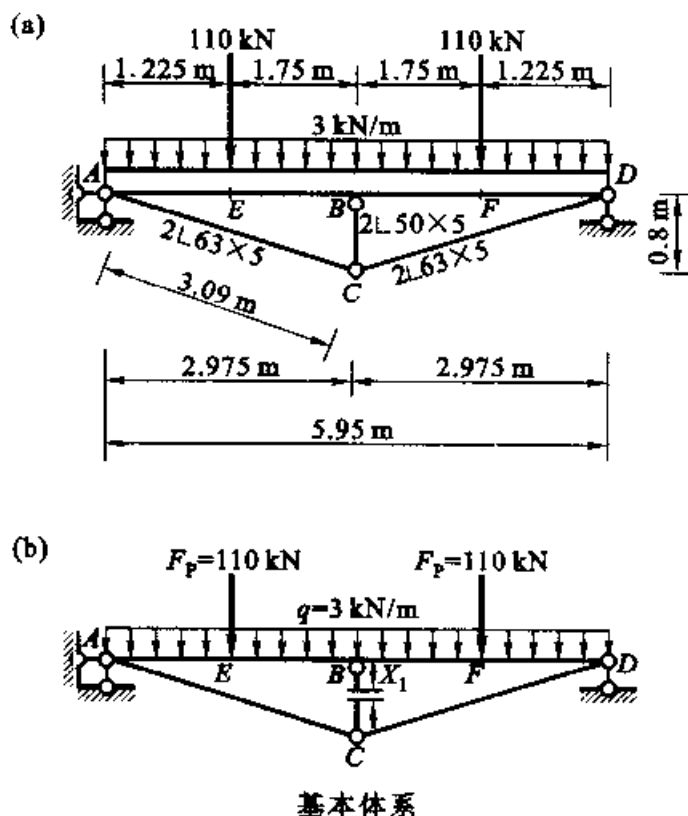


图 7-19

解 (1) 基本体系和力法方程

本题为一次超静定结构,切断多余链杆 BC,在切口处代以未知轴力  $X_1$ ,得到图 7-19b 所示基本体系。基本体系由于荷载和未知力在  $X_1$  方向的位移应当是零,亦即切口处两截面的相对位移应为零。由此得力法方程:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

(2) 系数和自由项

在基本结构切口处加单位力  $X_1 = 1$ 。各杆轴力可由结点法求得,如图 7-20a 所示。杆 AD 还有弯矩,  $\bar{M}_1$  图如图 7-20c 所示。

基本结构在荷载作用下,各杆没有轴力,只有杆 AD 有弯矩,两个  $M_P$  图如图 7-20b、d 所示。

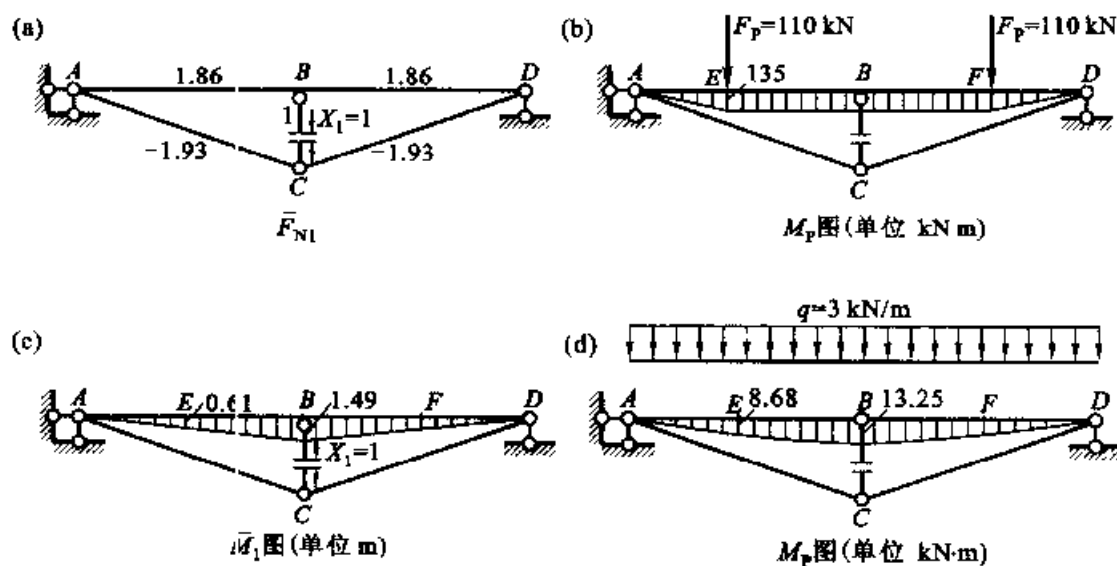


图 7-20

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \sum \frac{F_{N1}^2 l}{EA} = \frac{1}{1.4 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} \left[ \frac{1.49 \text{ m} \times 2.975 \text{ m}}{2} \times \left( \frac{2}{3} \times 1.49 \text{ m} \right) \right] \times 2 + \\ &\quad \frac{1}{1.99 \times 10^6 \text{ kN}} (1.86^2 \times 5.95 \text{ m}) + \\ &\quad \frac{1}{2.56 \times 10^5 \text{ kN}} (1.93^2 \times 3.09 \text{ m}) \times 2 + \\ &\quad \frac{1}{2.02 \times 10^5 \text{ kN}} (1^2 \times 0.80 \text{ m}) \Big] \\ &= 0.000419 \text{ m/kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} ds = \frac{1}{1.4 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}} \left[ \left( \frac{2}{3} \times 13.25 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 2.975 \text{ m} \right) \times \left( \frac{5}{8} \times 1.49 \text{ m} \right) \times 2 + \left( \frac{1}{2} \times 135 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 1.225 \text{ m} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{2}{3} \times 0.61 \text{ m} \right) \times 2 + (135 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 1.75 \text{ m}) \times \left( \frac{0.61 \text{ m} + 1.49 \text{ m}}{2} \right) \times 2 \right] \\ &= 0.0438 \text{ m} \end{aligned}$$

(3) 求多余未知力

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{0.0438 \text{ m}}{0.000419 \text{ m/kN}} = -104.5 \text{ kN (压力)}$$

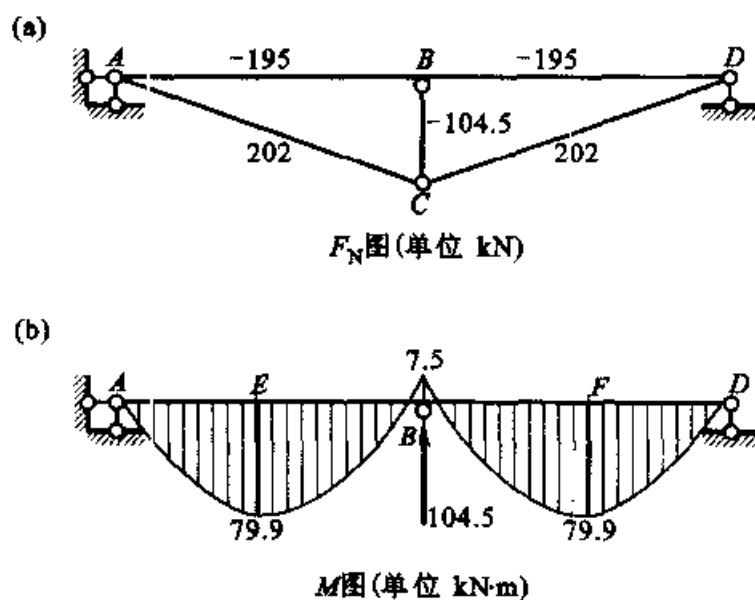
(4) 求内力

内力叠加公式为

$$F_N = \bar{F}_{N1} X_1 + F_{Np}$$

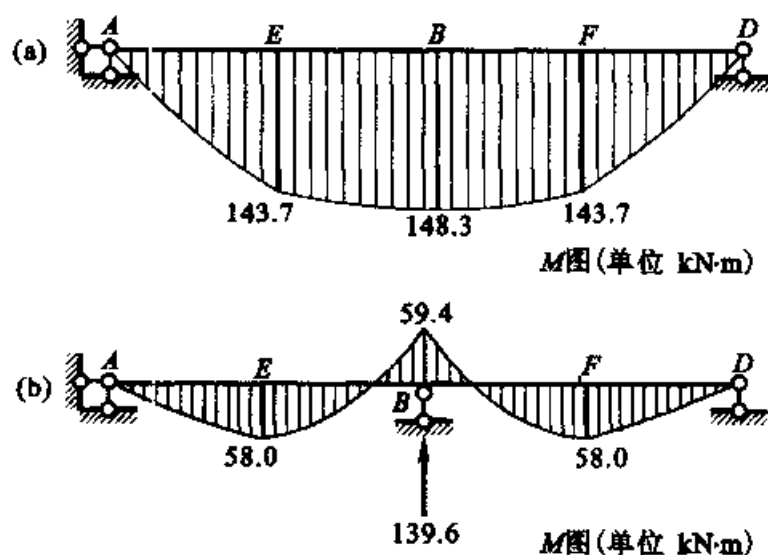
$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_p$$

各杆轴力及横梁 AD 弯矩图见图 7-21a、b。



### (5) 讨论

由图 7-21b 可以看出, 横梁 AD 在中点 B 受到下部桁架的支承反力为 104.5 kN, 这时横梁最大弯矩为 79.9 kN·m, 如果没有下部桁架的支承, 则





横梁  $AD$  为一简支梁,其弯矩图如图 7-22a 所示,其最大弯矩为  $148.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。可见,由于桁架的支承,横梁的最大弯矩减少了 46%,

还需指出,这个超静定结构的内力分布与横梁和桁架的相对刚度有关。如果下部链杆的截面很小,则横梁的  $M$  图接近于简支梁的  $M$  图(图 7-22a)。如果下部链杆的截面很大,则横梁的  $M$  图接近于两跨连续梁的  $M$  图(图 7-22b)。

### § 7-5 对称结构的计算

在工程中,很多结构具有对称性,图 7-23 是一些具有对称性的结构的例子。利用对称性可以使计算工作得到简化。本节只讨论具有单对称轴的常见情况。

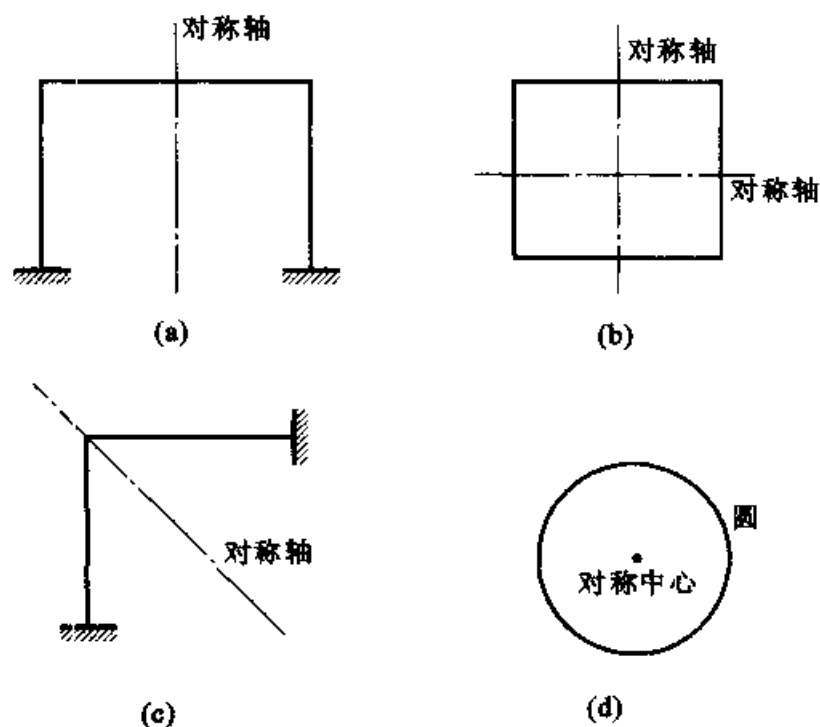


图 7-23

图 7-24a 所示的对称单跨刚架,有一根竖向对称轴。所谓对称结构,就是指:

- (1) 结构的几何形式和支承情况对某轴对称;
- (2) 杆件截面和材料性质也对此轴对称(因而杆件的截面刚度  $EI$  对此轴对称)。

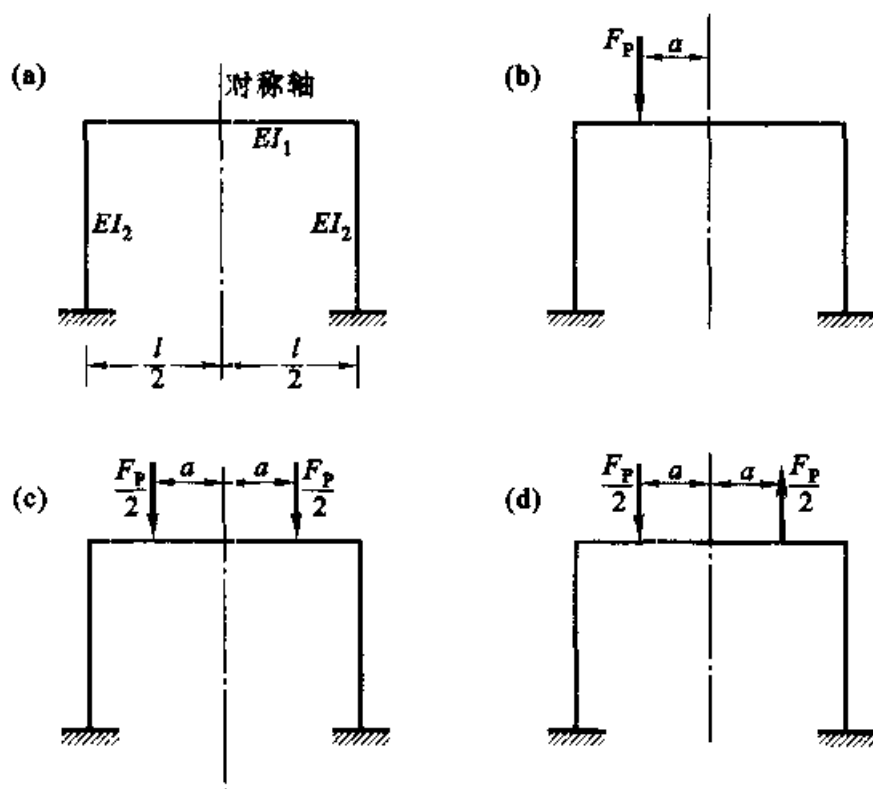


图 7-24

作用在对称结构上的任何荷载(图 7-24b)都可分解为两组:一组是对称荷载(图 7-24c),另一组是反对称荷载(图 7-24d)。对称荷载绕对称轴对折后,左右两部分的荷载彼此重合(作用点相对应、数值相等、方向相同);反对称荷载绕对称轴对折后,左右两部分的荷载正好相反(作用点相对应、数值相等、方向相反)。

计算超静定对称结构时,为了简化计算,应当选择对称的基本体系,并取对称力或反对称力作为多余未知力。以图 7-24b 所示刚架为例,可沿对称轴上梁的中间截面切开,这样得到的基本体系是对称的(图 7-25a)。这时多余未知力包括三个广义力  $X_1$ 、 $X_2$  和  $X_3$ 。它们分别是一对弯矩、一对轴力和一对剪力。其中  $X_1$  和  $X_2$  是对称力,  $X_3$  是反对称力。

基本体系(图 7-25a)所要满足的变形条件是:

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = 0$$

$$\Delta_3 = 0$$

这里  $\Delta_1$  是沿  $X_1$  方向的位移。由于  $X_1$  是一对弯矩,所以位移  $\Delta_1$  是指切口两侧截面的相对转角等于零,而第一个力法方程是指切口两侧截面的相对转角应等于零(注意,这里不是指截面的转角等于零,而是指相对转角等于

零,即两侧截面的转角应彼此相等)。同样,第二个和第三个力法方程分别表示切口两侧截面的水平相对位移和竖向相对位移应等于零

图 7-25b、c、d 所示为各单位未知力作用时的单位弯矩图和变形图。显然,对称未知力  $X_1$  和  $X_2$  所产生的弯矩图  $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$  和变形图是对称的,反对称未知力  $X_3$  所产生的弯矩图  $\bar{M}_3$  和变形图是反对称的。因此

$$\delta_{11} = \delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} ds = 0$$

$$\delta_{21} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3}{EI} ds = 0$$

这样,力法方程就简化为

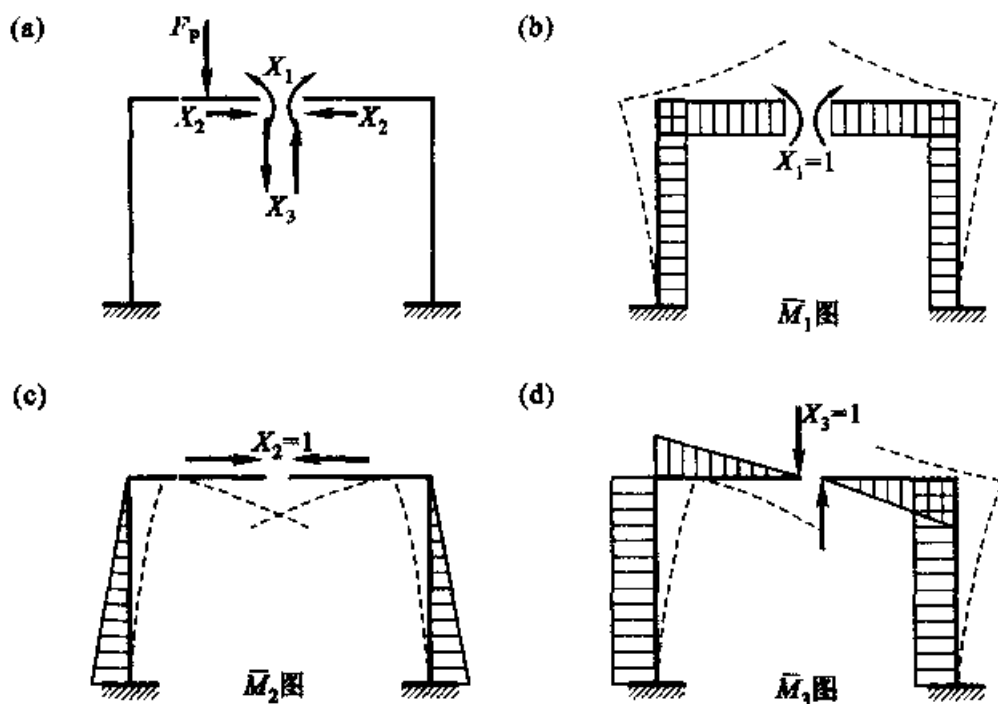


图 7-25

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

可以看出,方程已分为两组。一组只包含对称未知力  $X_1$ 、 $X_2$ ,另一组只包含反对称未知力  $X_3$ 。

一般地说,采用力法计算任何对称结构时,只要所取的基本未知量都是对称力或反对称力,则力法方程必然分解成独立的两组,其中一组只包含对称未知力,另一组只包含反对称未知力,原来的高阶方程组现在分解为两个

低阶方程组,因而使计算得到简化。

下面先就对称荷载和反对称荷载两种情况作进一步的讨论。

(1) 对称荷载——以图 7-24c 所示荷载为例,这时基本结构的荷载弯矩图  $M_p$  是对称的(图 7-26a)。由于  $M_3$  是反对称的,因此,

$$\Delta_{3p} = \sum \int \frac{\bar{M}_3 M_p}{EI} ds = 0$$

代入力法方程(7-7)的第三式,可知反对称未知力  $X_3 = 0$ 。至于对称未知力  $X_1$  和  $X_2$ ,则需根据前两式进行计算(图 7-26b)。

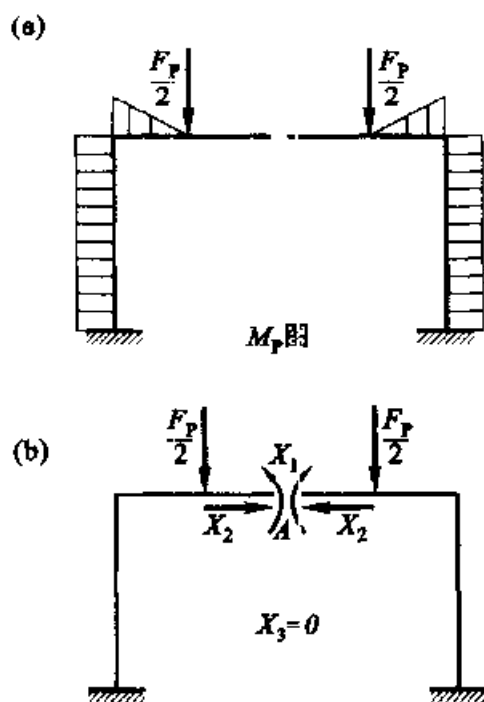


图 7-26

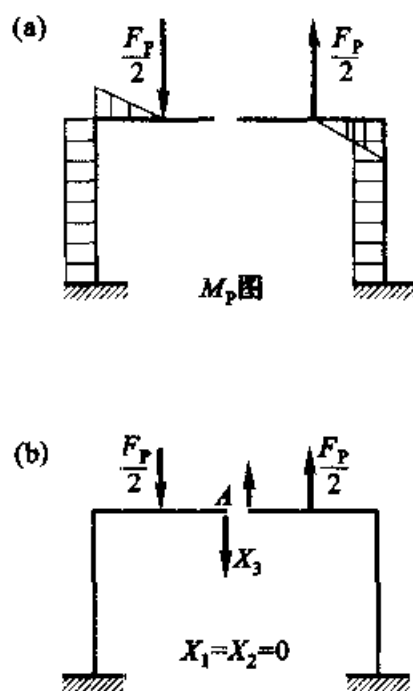


图 7-27

一般地说,对称结构在对称荷载作用下,如果所取的基本未知量都是对称力或反对称力,则反对称未知力必等于零,只需计算对称未知力。

(2) 反对称荷载——以图 7-24d 所示荷载为例,这时基本结构的荷载弯矩图  $M_p$  是反对称的(图 7-27a)。由于  $M_1$  与  $M_2$  是对称的,因此,

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} ds = 0$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI} ds = 0$$

代入力法方程(7-7)的前两式,可知对称力  $X_1 = X_2 = 0$ 。至于反对称未知力  $X_3$ ,则需根据第三式进行计算(图 7-27b)。

一般地说,对称结构在反对称荷载作用下,如果所取的基本未知量都是

对称力或反对称力,则对称未知力必等于零,只需计算反对称未知力。

最后,讨论非对称荷载的情形。这里有两种作法。

第一种作法,把荷载分解为对称与反对称两部分,对这两部分荷载分别计算,然后把两种结果叠加起来。

第二种作法,不进行分解,直接取非对称荷载进行计算。

以上两种做法各有利弊,可根据情况选用。

归纳起来,利用对称性以简化计算的要点如下:

- (1) 选用对称的基本结构,选用对称力或反对称力作为基本未知量。
- (2) 在对称荷载作用下,只考虑对称未知力(反对称未知力等于零)。
- (3) 在反对称荷载作用下,只考虑反对称未知力(对称未知力等于零)。
- (4) 非对称荷载可分解为对称荷载和反对称荷载。

最后指出,对称结构的计算还有另一种方法——取半边结构进行计算,见 § 8-6。

**例 7-5** 试求作图 7-28a 所示对称刚架在水平力  $F_P$  作用下的弯矩图。

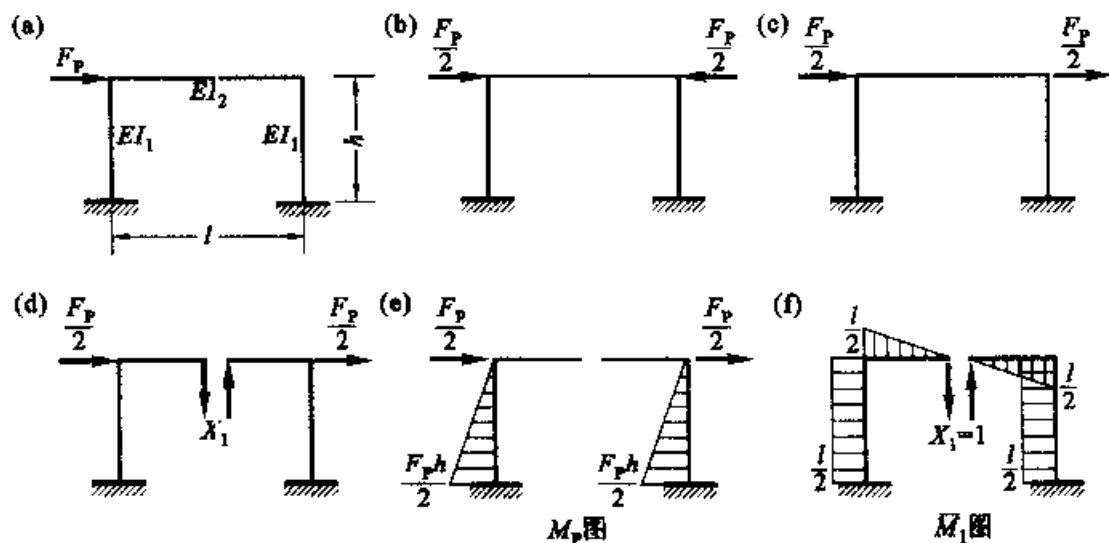


图 7-28

**解** 荷载  $F_P$  可分为对称荷载(图 7-28b)和反对称荷载(图 7-28c)。

在对称荷载作用下(图 7-28b),可以得出只有横梁承受压力  $\frac{F_P}{2}$ ,而其他杆无内力的结论。这是因为计算刚架时我们通常忽略轴力对变形的影响,对此刚架也就是忽略横梁的压缩变形。在这个条件下,上述内力状态不仅满足了平衡条件,也同时满足了变形条件,所以就是真正的内力状态。因

此,为了求作图 7-28a 所示刚架的弯矩图,只须求作图 7-28c 中刚架在反对称荷载作用下的弯矩图即可。

在反对称荷载作用下,基本体系如图 7-28d 所示。切口截面的弯矩、轴力都是对称未知力,应为零;只有反对称未知力  $X_1$  存在。基本结构在荷载和单位未知力作用下的弯矩图,如图 7-28e、f 所示,由此得

$$\Delta_{1P} = 2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{F_P h}{2} \times \frac{l}{2EI_1} \right) = \frac{F_P h^2 l}{4EI_1}$$

$$\delta_{11} = 2 \left[ \left( \frac{l}{2} h \right) \frac{l}{2EI_1} + \left( \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \right) \frac{1}{3EI_2} \right] = \frac{l^2 h}{2EI_1} + \frac{l^3}{12EI_2}$$

代入力法方程,并设  $k = \frac{I_2 h}{I_1 l}$ , 得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{6k}{6k+1} \frac{F_P h}{2l}$$

刚架的弯矩图如图 7-29a 所示。

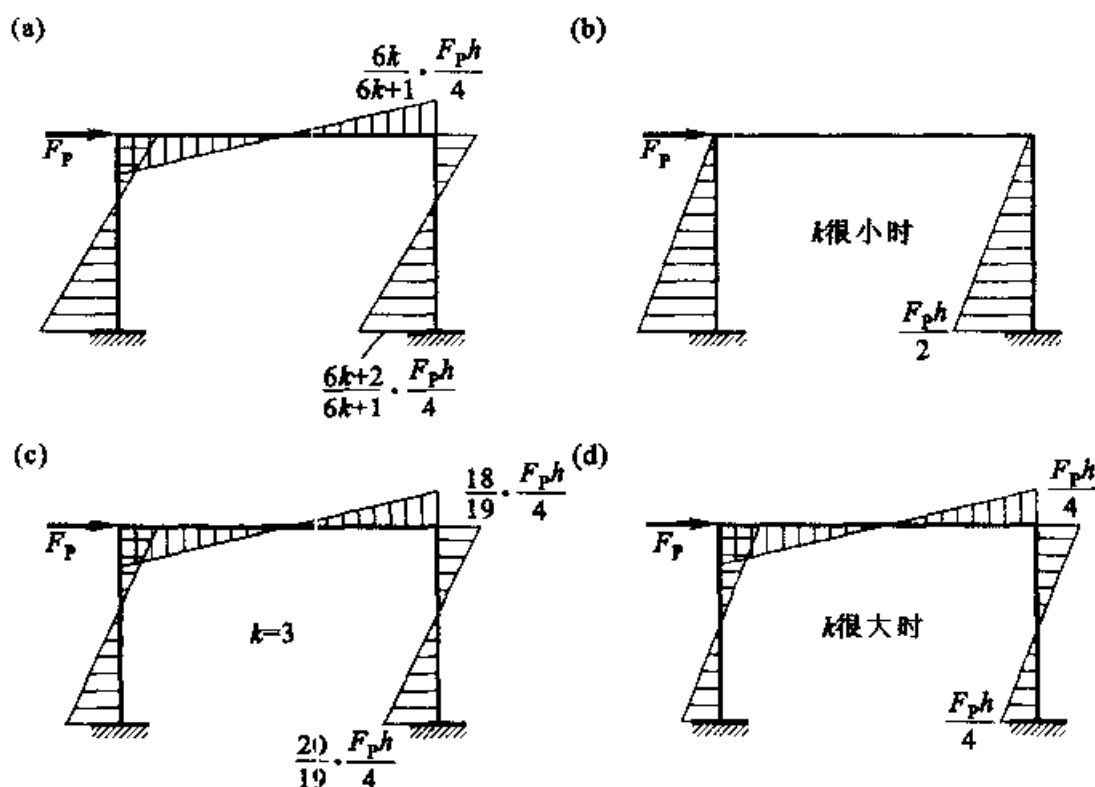


图 7-29

结合上例讨论如下:

弯矩图随横梁与立柱刚度比值  $k$  而改变。

(1) 当横梁比立柱的  $I$  小很多时,即  $k$  很小时,弯矩图如图 7-29b 所

示,此时柱顶弯矩趋向于零。

(2) 当横梁比立柱的  $I$  大很多时,即  $k$  很大时,弯矩图如图 7-29d 所示,此时柱的弯矩零点趋于柱的中点。

(3) 一般情况下,柱的弯矩图有零点,此弯矩零点在柱上半部范围内变动,当  $k=3$  时,零点位置与柱中点已很接近(图 7-29c)。故在刚架受水平结点荷载的近似计算中,当  $k \geq 3$  时,常将弯矩零点置于柱中点(即可视横梁刚度  $EI_2 \rightarrow \infty$ ),以简化计算。

## § 7-6 两 铰 拱

拱结构在工程中应用很广。在桥梁方面,历史上有著名的赵州石拱桥。近年来双曲拱桥被广泛采用。在建筑方面,除采用落地式拱顶结构外,通常采用带拉杆的拱式屋架(在图 7-30a 中,曲杆为钢筋混凝土构件,拉杆为角钢、吊杆是为了防止拉杆下垂而设的附件,图 7-30b 为计算简图)。水利工

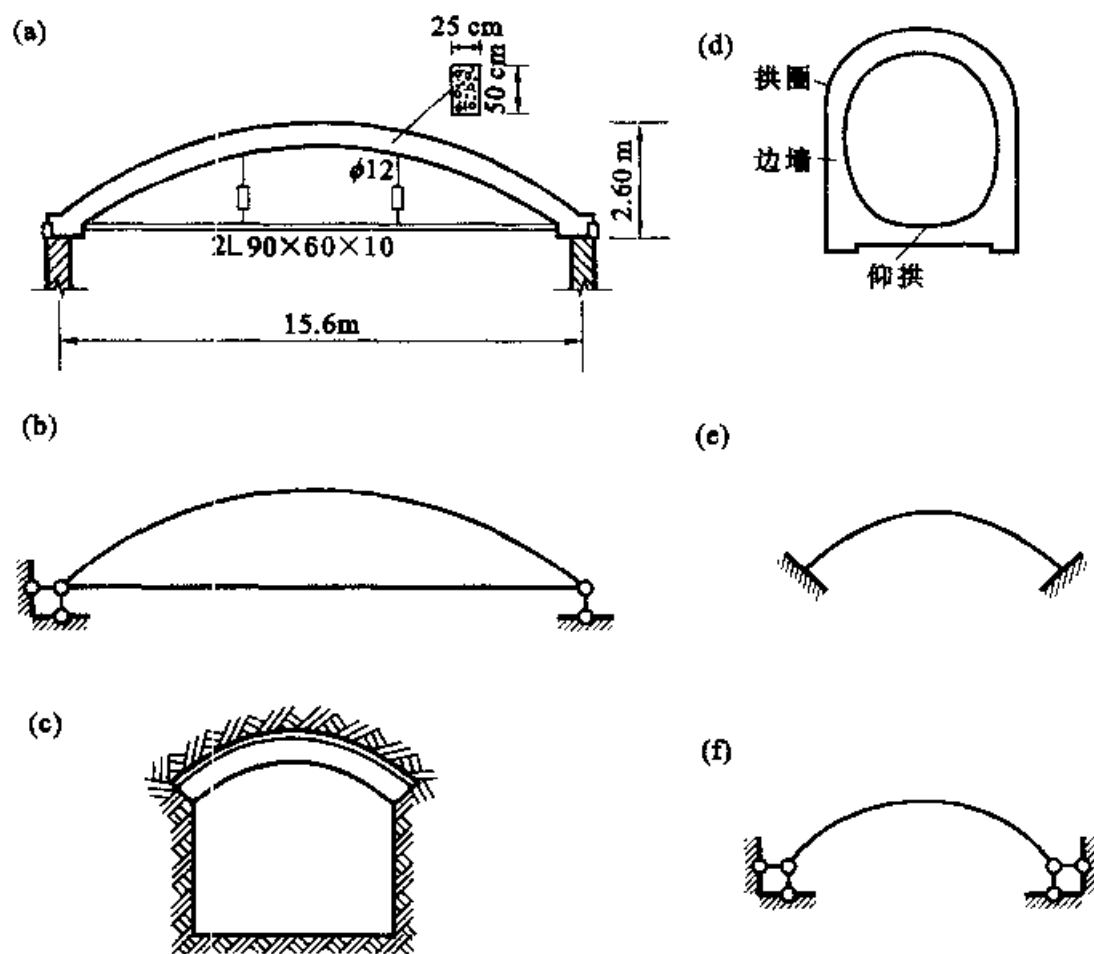


图 7-30

程和地下建筑中的隧洞衬砌也是一种拱式结构(图 7-30c、d)。

超静定拱多数是无铰拱或两铰拱(图 7-30e、f), 闭合环形结构可看作是无铰拱的一种特殊情形。

本节先讨论两铰拱的计算。

两铰拱是一次超静定结构(图 7-31a)。选用简支曲梁(图 7-31b)作基本体系, 以推力  $X_1$  作基本未知量, 则力法方程(表示支座 B 没有水平位移)为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

由于拱是曲杆, 求位移  $\delta_{11}$  和  $\Delta_{1P}$  时不能采用图乘法, 因而计算要繁一些。

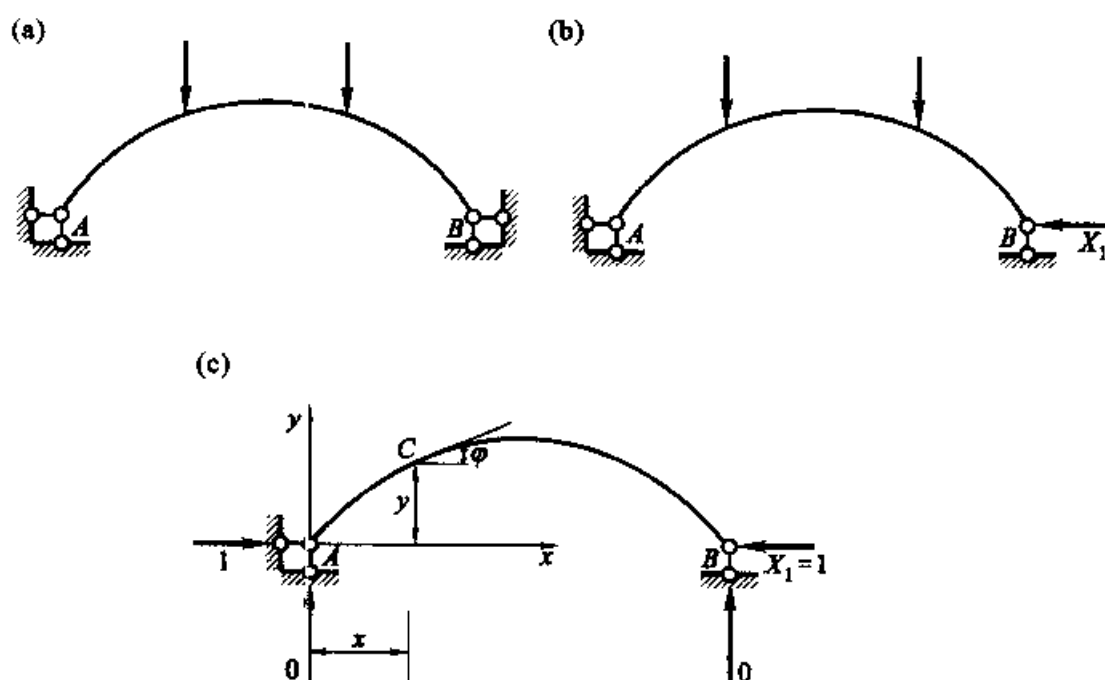


图 7-31

因为基本结构是一个简支曲梁, 计算  $\Delta_{1P}$  时一般只考虑弯曲变形; 计算  $\delta_{11}$  时, 有时(对较平的扁拱且截面较厚时)要考虑轴向变形。因此,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds \\ \delta_{11} &= \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \int \frac{\bar{F}_{N1}^2}{EA} ds \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

基本结构在  $X_1 = 1$  作用下(图 7-31c), 竖向支座反力为零, 任意截面 C 的弯矩和轴力为

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -y \\ \bar{F}_{N1} &= -\cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (b)$$



这里,  $y$  表示任意截面  $C$  的纵坐标, 向上为正;  $\varphi$  表示截面  $C$  处拱轴切线与  $x$  轴所成的锐角, 左半拱的  $\varphi$  为正, 右半拱的  $\varphi$  为负; 弯矩  $M$  以使拱的内缘受拉为正; 轴力  $F_N$  以拉力为正。

如果只承受竖向荷载, 则简支曲梁任意截面的弯矩  $M_p$  与同跨度同荷载的简支水平梁相应截面的弯矩  $M^0$  彼此相等, 即

$$M_p = M^0 \quad (c)$$

将式(b)和(c)代入式(a), 得

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1p} &= - \int \frac{M^0 y}{EI} ds \\ \delta_{11} &= \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds \end{aligned} \right\}$$

$\delta_{11}$  和  $\Delta_{1p}$  求出后, 由力法方程可求  $X_1$  (即推力  $F_H$ ):

$$X_1 = F_H = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}$$

推力  $F_H$  求出后, 内力的计算方法和计算公式完全与三铰拱相同。在竖向荷载作用下, 两铰拱的内力计算公式为

$$\left. \begin{aligned} M &= M^0 - F_H y \\ F_Q &= F_Q^0 \cos \varphi - F_H \sin \varphi \\ F_N &= -F_Q^0 \sin \varphi - F_H \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

从以上讨论中可以看出下列两点:

从力法计算来看, 两铰拱与两铰刚架基本相同, 只是位移  $\delta_{11}$  和  $\Delta_{1p}$  需按曲杆公式计算, 不能采用图乘法。

从受力特性来看, 两铰拱与三铰拱基本相同。内力计算式(d)在形式上与三铰拱完全相同。只是其中的  $F_H$  值有所不同: 在三铰拱中, 推力  $F_H$  是由平衡条件求得的; 在两铰拱中, 推力  $F_H$  则是由变形条件求得的。

在屋盖结构中采用的两铰拱, 通常带拉杆(图 7-32a)。设置拉杆的目的, 一方面是使砖墙或立柱不受推力, 从而在砖墙或立柱中不产生弯矩; 另一方面又使拱肋承受推力, 从而减小了拱肋的弯矩。

计算带拉杆的两铰拱时, 可将拉杆切断, 基本体系如图 7-32b 所示。基本未知力  $X_1$  是拉杆内的拉力, 也就是拱肋所受的推力  $F_H$ 。力法方程(表示切口两边无相对位移)为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

与无拉杆的两铰拱相比, 力法方程在形式上是一样的。但是在计算  $\delta_{11}$  时, 应当考虑拉杆的变形, 即

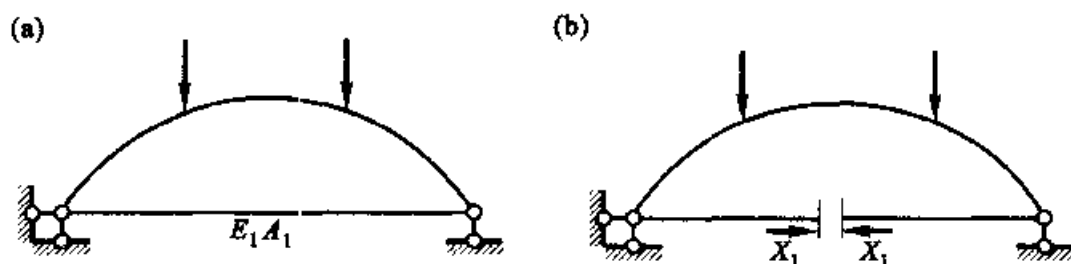


图 7 32

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \int \frac{\bar{F}_{N1}^2}{EA} ds + \int_0^l \frac{\bar{F}_{N1}^2}{E_1 A_1} dx \quad (e)$$

这里,前两项是对拱肋积分,末一项是对拉杆积分。 $E_1$  和  $A_1$  分别表示拉杆的弹性模量和截面面积。基本结构在  $X_1 = 1$  作用下,拉杆的轴力为  $\bar{F}_{N1} = 1$ , 因此,末一项积分为

$$\int_0^l \frac{\bar{F}_{N1}^2}{E_1 A_1} dx = \int_0^l \frac{1^2}{E_1 A_1} dx = \frac{l}{E_1 A_1} \quad (f)$$

将式(f)代回式(e),得

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \int \frac{\bar{F}_{N1}^2}{EA} ds + \frac{l}{E_1 A_1} \quad (g)$$

基本结构在荷载作用下,拉杆的拉力为零。因此,计算  $\Delta_{1P}$  时只对拱肋积分,即

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds \quad (h)$$

这个式子与无拉杆的两铰拱是一样的。

其余的解法与前一样,不再重述。

下面对两铰拱的两种型式(有拉杆和无拉杆)加以比较。由式(g)和(h),可得出位移  $\delta_{11}$ 、 $\Delta_{1P}$  (无拉杆)与位移  $\delta_{11}^*$ 、 $\Delta_{1P}^*$  (有拉杆)之间的关系如下:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} + \frac{l}{E_1 A_1}$$

$$\Delta_{1P}^* = \Delta_{1P}$$

由此可得出推力  $F_H$  (无拉杆)和推力  $F_H^*$  (有拉杆)的计算式如下:

$$F_H = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

$$F_H^* = -\frac{\Delta_{1P}^*}{\delta_{11}^*} = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11} + \frac{l}{E_1 A_1}}$$

如果拉杆的刚度很大( $E_1 A_1 \rightarrow \infty$ ), 则  $F_H^* \rightarrow F_H$ 。这时, 两种型式的推力基本相等, 因而受力状态也基本相同。

如果拉杆的刚度很小( $E_1 A_1 \rightarrow 0$ ), 则  $F_H^* \rightarrow 0$ 。这时, 带拉杆的两铰拱实际上是一简支曲梁, 拱肋的受力状态是很不利的。

由此可见, 在设计带拉杆的两铰拱时, 为了减少拱肋的弯矩, 改善拱的受力状态, 应当适当地加大拉杆的刚度。

**例 7-6** 图 7-33a 所示为一抛物线两铰拱, 承受半跨均布荷载。试求其水平推力  $F_H$ 。设拱的截面尺寸为常数, 以左支点为原点, 拱轴方程为

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

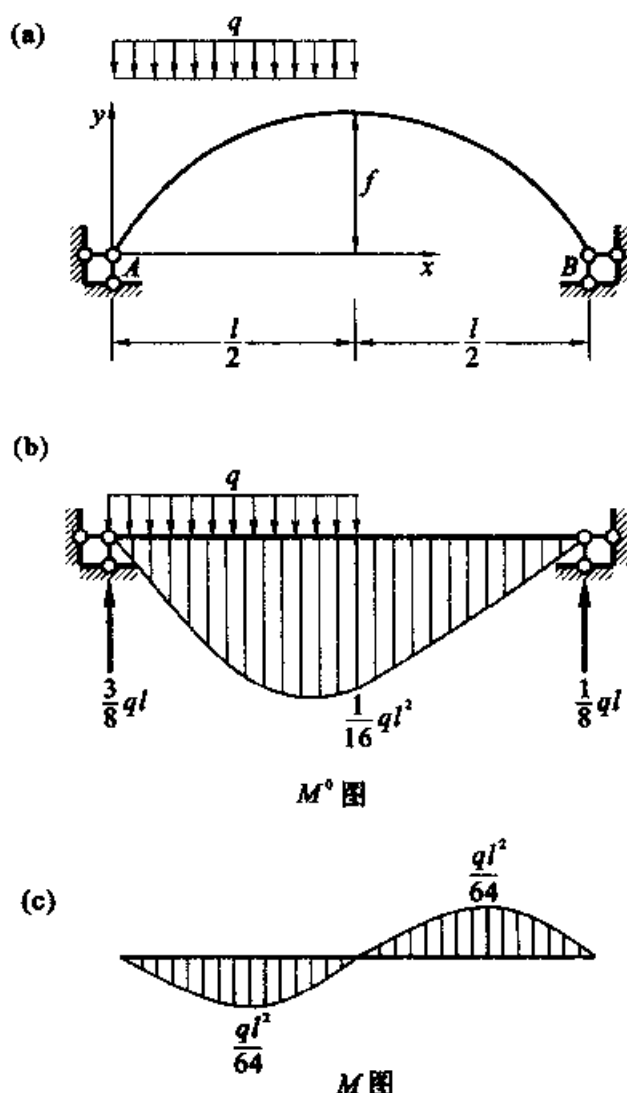


图 7-33

**解** 计算时, 我们采用两个简化假设:

(1) 忽略轴向变形,只考虑弯曲变形;

(2) 当拱比较平时(例如  $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$ ),可近似地取  $ds = dx$ ,  $\cos \varphi = 1$ 。因此,位移的简化公式为

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l y^2 dx$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \int_0^l y M^0 dx$$

先计算  $\delta_{11}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left[ \frac{4f}{l^2} x(l-x) \right]^2 dx \\ &= \frac{16f^2}{EI l^4} \int_0^l (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) dx = \frac{8f^2 l}{15EI} \end{aligned}$$

计算  $\Delta_{1P}$  时,先求简支梁的弯矩  $M^0$ 。 $M^0$  图如图 7-33b 所示,弯矩方程分两段表示如下:

$$\text{左半跨} \quad \left( 0 < x < \frac{l}{2} \right), \quad M^0 = \frac{3}{8} qlx - \frac{1}{2} qx^2$$

$$\text{右半跨} \quad \left( \frac{l}{2} < x < l \right), \quad M^0 = \frac{ql}{8}(l-x)$$

因此

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} y \left( \frac{3}{8} qlx - \frac{1}{2} qx^2 \right) dx - \frac{1}{EI} \int_{\frac{l}{2}}^l y \frac{ql}{8} (l-x) dx = -\frac{qfl^3}{30EI}$$

由力法方程求得

$$F_H = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql^2}{16f}$$

这个结果与三铰拱在半跨均布荷载作用下的结果是一样的。

$F_H$  求出以后,利用公式

$$M = M^0 - F_H y$$

可作出  $M$  图,如图 7-33c 所示。这个弯矩图也与三铰拱的弯矩图相同。

讨论:上面计算的结果,两铰拱的推力与三铰拱的推力相等,这不是一个普遍性结论。如果在别的荷载作用下,或者在计算位移时不忽略轴向变形的影响,则两铰拱的推力不一定与三铰拱推力相等。但是,在一般荷载作用下,两铰拱的推力与三铰拱的推力通常是比较接近的。

**例 7-7** 图 7-34 所示为一等截面抛物线两铰拱,拱轴方程为  $y = \frac{4f}{l^2} x \times (l-x)$ 。试求其水平推力  $F_H$  和拱顶截面  $C$  处  $M_C$  的影响线。

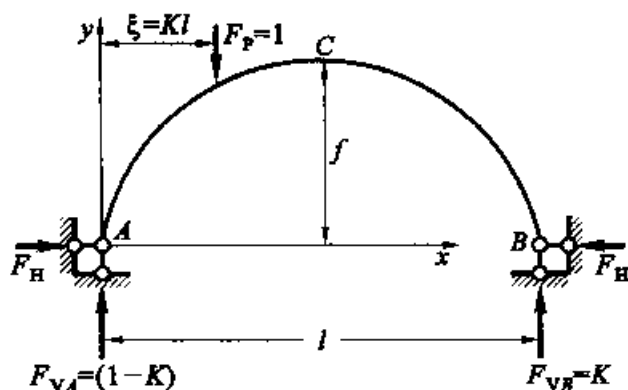


图 7-34

解 计算时忽略轴向变形的影响,只考虑弯曲变形,并近似地取  $ds = dx$ 。

(1) 作基本未知力  $F_H$  的影响线。

将荷载  $F_P=1$  放置在  $\xi=Kl$  处,由力法方程求得  $F_H$  的影响系数为

$$F_H = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

其中:

$$\delta_{11} = \int \frac{y^2 ds}{EI} = \int_0^l \frac{1}{EI} \left[ \frac{4f}{l^2} x(l-x) \right]^2 dx = \frac{8f^2 l}{15EI}$$

$$\delta_{1P} = - \int \frac{M_P y ds}{EI} = - \frac{1}{EI} \int_0^l y M^0 dx$$

在  $F_P=1$  作用下,简支梁的弯矩方程为

$$\text{当 } 0 \leq x \leq \xi, \quad M^0 = F_{VA}x = (1-K)x$$

$$\text{当 } \xi \leq x \leq l, \quad M^0 = F_{VB}(l-x) = K(l-x)$$

将  $M^0$  代入  $\delta_{1P}$  中,得

$$\begin{aligned} \delta_{1P} &= -\frac{1}{EI} \left[ \int_0^\xi \frac{4f}{l^2} x(l-x)(1-K)x dx + \int_\xi^l \frac{4f}{l^2} x(l-x)K(l-x) dx \right] \\ &= -\frac{fl^2}{3EI} K(1-K)(1+K-K^2) \end{aligned}$$

因此,

$$F_H = \frac{5l}{8f} K(1-K)(1+K-K^2)$$

$F_H$  的影响线如图 7-35a 所示

(2) 作其他内力的影响线

两铰拱任一截面的内力计算公式为

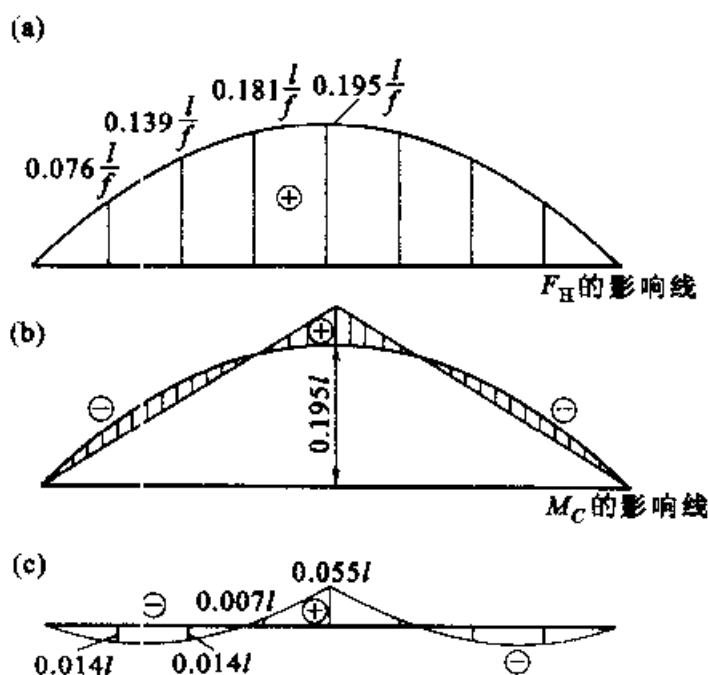


图 7-35

$$M = M^0 - F_H y$$

$$F_Q = F_Q^0 \cos \varphi - F_H \sin \varphi$$

$$F_N = -F_Q^0 \sin \varphi - F_H \cos \varphi$$

有了水平推力  $F_H$  的影响线后,再利用上式就可以用叠加法绘制出其他内力的影响线。例如拱顶弯矩的算式为

$$M_C = M_C^0 - F_H f$$

将  $M_C^0$  影响线(图 7-35b 中三角形部分)与  $F_H$  影响线乘以  $f$  后的图形(图 7-35b 中曲线部分)相减,便得到  $M_C$  的影响线。图 7-35c 为  $M_C$  的影响线画在横坐标轴上的图形。

### (3) 讨论

这里通过两铰拱说明用力法作超静定力影响线的方法,它与静定力影响线的静力法相应。

还应指出,也可以利用超静定力影响线与挠度图之间的比拟关系,作超静定力的影响线,它与静定力影响线的机动法相应,见 § 9-6。

## § 7-7 无 铰 拱

本节只讨论常见的对称无铰拱的计算。

图 7-36a 为一对称无铰拱,为三次超静定结构。为了简化计算,我们采

用两项简化措施。

第一项简化措施是利用结构的对称性。为此,选取对称的基本体系,在拱顶截开,取拱顶的弯矩  $X_1$ 、轴力  $X_2$  和剪力  $X_3$  为多余未知力(图 7-36b)。 $X_1$  和  $X_2$  是对称未知力, $X_3$  是反对称未知力,因此力法方程简化为独立的两组如下:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

第二项简化措施是利用刚臂,进一步使余下的一对副系数  $\delta_{12}$  和  $\delta_{21}$  也等于零,从而使力法方程简化为三个独立的一元一次方程:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-8)$$

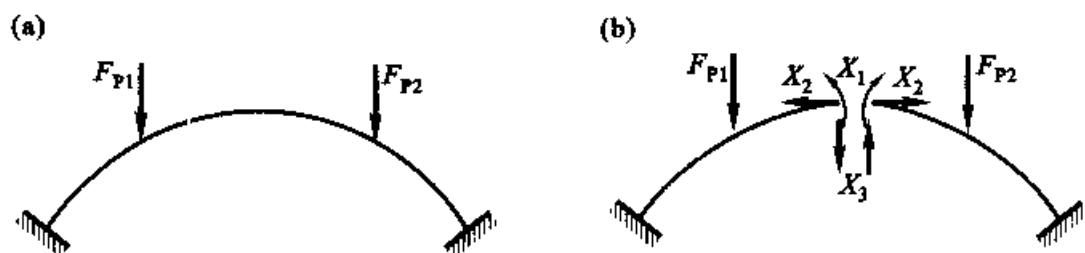


图 7-36

下面说明如何利用刚臂来达到上述简化的目的。

首先,把原来的无铰拱换成图 7-37a 所示的拱:即先在拱顶把无铰拱切开,在切口处沿竖向对称轴安上两根刚性为无穷大的杆件  $CO$  和  $C_1O_1$  (称为刚臂),再在端部把两个刚臂重新刚性地连接起来。在任意荷载作用下, $O$  和  $O_1$  之间没有任何相对位移(包括相对移动和相对转动),而刚臂又是绝对刚性的,不产生任何变形,因此  $C$  和  $C_1$  之间也没有任何相对位移。由此看出,这个带刚臂的无铰拱与原来的无铰拱是等效的,可以互相代替。

然后,取基本体系。将带刚臂的无铰拱在  $O$  处切开,在切口处加上三对多余未知力  $X_1$ 、 $X_2$  和  $X_3$ ,如图 7-37b 所示。这个基本体系仍然是对称的, $X_1$  和  $X_2$  是对称未知力, $X_3$  是反对称未知力,力法方程(7-7)仍然适用。

现在需要确定刚臂的长度,也就是确定刚臂端点  $O$  的位置。我们的目的是要使副系数  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ 。因此可根据这个条件反过来推算  $O$  点的位置。为此,先写出副系数  $\delta_{12}$  的算式如下:

$$\delta_{12} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} ds + \int \frac{k \bar{F}_{Q1} \bar{F}_{Q2}}{GA} ds + \int \frac{F_{N1} F_{N2}}{EA} ds \quad (a)$$

这个积分的范围只包括拱轴的全长,而不包括刚臂部分,因为刚臂为绝对刚性,其积分值等于零。

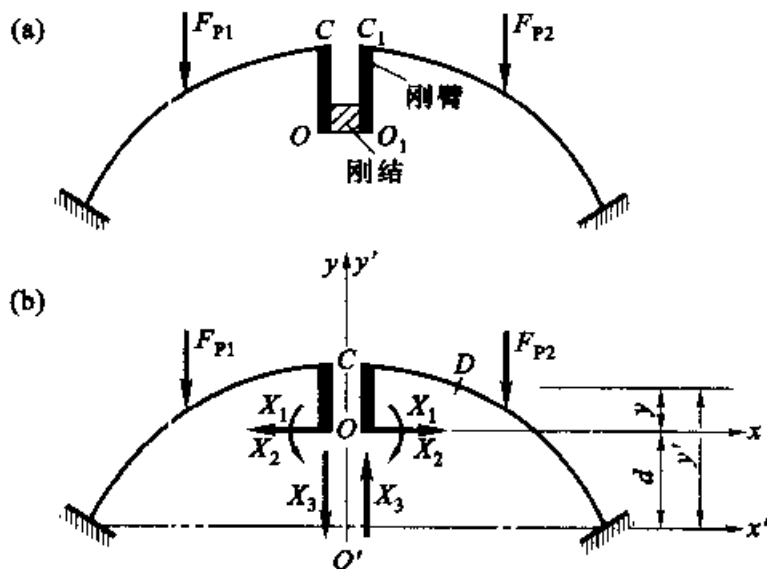


图 7-37

其次,求单位力  $X_1 = 1$  和  $X_2 = 1$  产生的内力。选  $O$  点为坐标原点,  $x$ 、 $y$  轴的方向如图 7-37b 所示。在单位力  $X_1 = 1$  作用下,内力的算式为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1 &= 1 \\ \bar{F}_{N1} &= 0 \\ \bar{F}_{Q1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在单位力  $X_2 = 1$  作用下,内力的算式为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_2 &= -y \\ \bar{F}_{N2} &= -\cos \varphi \\ \bar{F}_{Q2} &= -\sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将式(b)和(c)代入式(a),得

$$\delta_{12} = - \int \frac{y}{EI} ds \quad (d)$$

在图 7-37b 中,我们另取一个参考坐标轴  $x'y'$ :  $y'$  轴与  $y$  轴重合,  $x'$  轴与  $x$  轴间的距离为  $d$ 。拱轴上任一点  $D$  的新坐标  $y'$  与坐标  $y$  有如下的关系:

$$\left. \begin{aligned} y' &= y + d \\ y &= y' - d \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

将式(e)代入式(d),得



$$\delta_{12} = - \int \frac{y' - d}{EI} ds = \int \frac{y'}{EI} ds + d \int \frac{1}{EI} ds$$

令  $\delta_{12} = 0$ , 得

$$d = \frac{\int \frac{y'}{EI} ds}{\int \frac{1}{EI} ds} \quad (7-9)$$

现将以上讨论结果归纳如下:先取参考坐标轴  $x'y'$ , 由式(7-9)求出  $d$  值, 这样, 刚臂端点  $O$  的位置就确定了。然后按图 7-37b 取基本体系, 力法方程就简化为式(7-8)。这样, 计算工作就大为简化。

这个方法中的一个重要环节, 是根据式(7-9)来确定刚臂端点  $O$  的位置。为了对这个公式有一个形象的理解, 我们作如下的比拟: 图 7-38a 所示为实际给定的无铰拱; 在图 7-38b 中我们另外设想一个窄条面积, 以拱的轴线作为它的轴线, 以拱的截面抗弯刚度的倒数 (即  $\frac{1}{EI}$ ) 作为它的截面宽度。这个设想的面积称为弹性面积。从弹性面积中取出微段  $ds$ , 微段的面积为  $dA = \frac{ds}{EI}$ 。因此, 式(7-9)中的积分  $\int \frac{ds}{EI}$  就是总弹性面积, 积分  $\int \frac{y'}{EI} ds$  就是弹性面积对  $x'$  轴的面积矩, 而式(7-9)中的  $d$  就是弹性面积的形心到  $x'$  轴的距离。由此得出结论: 刚臂的端点  $O$  就是弹性面积的形心, 称为弹性中心。

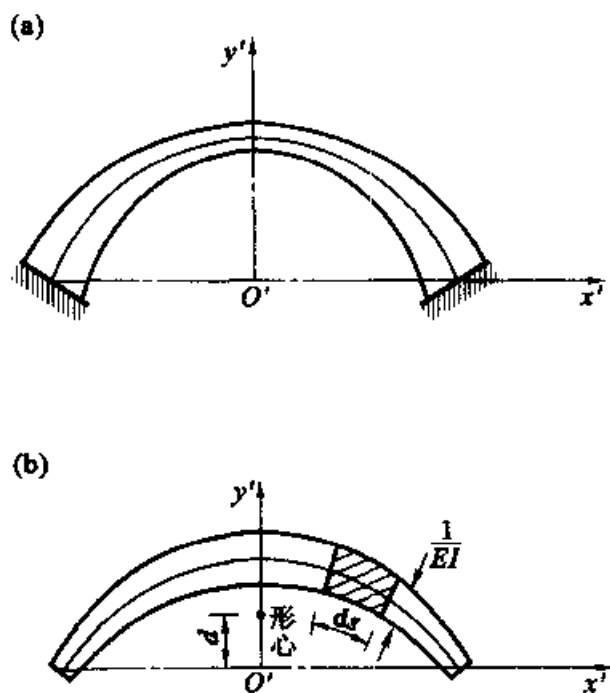


图 7-38

上面介绍的计算方法,通常称为弹性中心法。方法的要点是:先由式(7-9)确定弹性中心的位置;然后取带刚臂的基本体系,多余未知力作用在弹性中心;最后按力法方程(7-8)解出多余未知力。

下面给力法方程中的系数和自由项的算式。

计算位移  $\Delta_{1P}$  和  $\delta_{11}$  时,通常只考虑弯矩的影响;但计算  $\delta_{22}$  时,有时需要考虑轴力的影响。因此,计算位移时通常采用下列算式:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds, & \delta_{11} &= \int \frac{M_1^2}{EI} ds \\ \Delta_{2P} &= \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} ds, & \delta_{22} &= \int \frac{M_2^2}{EI} ds + \int \frac{\bar{F}_{N2}^2}{EA} ds \\ \Delta_{3P} &= \int \frac{\bar{M}_3 M_P}{EI} ds, & \delta_{33} &= \int \frac{M_3^2}{EI} ds \end{aligned} \right\} \quad (7-10)$$

将  $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 、 $\bar{M}_3$  和  $\bar{F}_{N2}$  的表达式代入式(7-10),则得

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int \frac{M_P}{EI} ds, & \delta_{11} &= \int \frac{1}{EI} ds \\ \Delta_{2P} &= - \int \frac{y M_P}{EI} ds, & \delta_{22} &= \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds \\ \Delta_{3P} &= \int \frac{x M_P}{EI} ds, & \delta_{33} &= \int \frac{x^2}{EI} ds \end{aligned} \right\} \quad (7-11)$$

最后应指出,超静定拱(含两铰拱和无铰拱)许多是变截面的,又是曲杆,故求  $\delta_{ij}$  和  $\Delta_{iP}$  时常须用数值积分法分段求和计算。

**例 7-8** 试求如图 7-39a 所示等截面圆弧无铰拱在均布竖向荷载  $q = 10 \text{ kN/m}$  作用下的内力。设跨度  $l = 10 \text{ m}$ , 矢高  $f = 2.5 \text{ m}$ 。

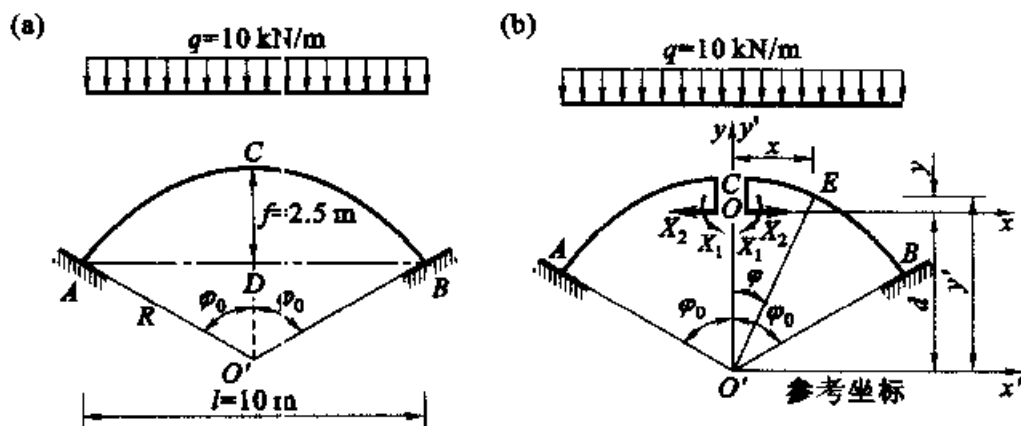


图 7-39

**解** (1) 求圆拱的半径  $R$  和半拱的圆心角  $\varphi$ 。

由直角三角形  $O'AD$ , 得

$$R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (R-f)^2$$

所以 
$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} = 6.25 \text{ m}$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{AD}{OA} = \frac{l/2}{R} = 0.8, \quad \cos \varphi_0 = 0.6, \quad \varphi_0 = 0.9273 \text{ rad}$$

(2) 确定弹性中心  $O$  的位置

坐标轴  $x$  和  $y$  通过弹性中心  $O$ , 另取参考坐标轴  $x'$  和  $y'$  通过圆心  $O'$ 。拱轴上任一点  $E$  的坐标  $x, y$  和  $x', y'$  可用其圆心角  $\varphi$  表示如下:

$$x' = x = R \sin \varphi$$

$$y' = y + d = R \cos \varphi$$

弹性中心  $O$  与圆心  $O'$  的距离为

$$d = \frac{\int \frac{y'}{EI} ds}{\int \frac{ds}{EI}} = \frac{2 \int_0^{\varphi_0} R \cos \varphi \cdot R d\varphi}{2 \int_0^{\varphi_0} R d\varphi} = \frac{R \sin \varphi_0}{\varphi_0} = 5.39 \text{ m}$$

(3) 求系数  $\delta_{11}$  和  $\delta_{22}$

由于对称,  $X_3 = 0$ 。计算位移时, 只考虑弯矩的影响。在  $X_1 = 1$  和  $X_2 = 1$  分别作用下, 基本结构的弯矩方程为

$$\bar{M}_1 = 1$$

$$\bar{M}_2 = -y = d - y' = R \left( \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi \right)$$

因此

$$EI\delta_{11} = \int \bar{M}_1^2 ds = 2 \int_0^{\varphi_0} R d\varphi = 2R\varphi_0$$

$$\begin{aligned} EI\delta_{22} &= \int \bar{M}_2^2 ds = 2 \int_0^{\varphi_0} R^2 \left( \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi \right)^2 \cdot R d\varphi \\ &= 2R^3 \int_0^{\varphi_0} \left( \frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0^2} - 2 \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \cos \varphi + \cos^2 \varphi \right) d\varphi \\ &= 2R^3 \left[ \frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0^2} \varphi - 2 \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \sin \varphi + \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \right]_0^{\varphi_0} \\ &= 2R^3 \left( \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi_0 \right) \end{aligned}$$

将数字代入, 得

$$EI\delta_{11} = 1.855R$$

$$EI\delta_{22} = 0.0270R^3$$

(4) 求自由项  $\Delta_{1P}$  和  $\Delta_{2P}$

基本结构在荷载  $q$  作用下的弯矩方程为

$$M_P = -\frac{q}{2}x^2 = -\frac{q}{2}R^2 \sin^2 \varphi$$

因此

$$\begin{aligned} EI\Delta_{1P} &= \int \bar{M}_1 M_P ds = 2 \int_0^{\varphi_0} 1 \cdot \left( -\frac{q}{2} R^2 \sin^2 \varphi \right) \cdot R d\varphi \\ &= -qR^3 \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\varphi_0} \\ &= -qR^3 \left( \frac{\varphi_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi_0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EI\Delta_{2P} &= \int \bar{M}_2 M_P ds = 2 \int_0^{\varphi_0} R \left( \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi \right) \times \left( -\frac{q}{2} R^2 \sin^2 \varphi \right) \cdot R d\varphi \\ &= -qR^4 \left[ \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_0^{\varphi_0} \\ &= -qR^4 \left( \frac{1}{2} \sin \varphi_0 - \frac{1}{4\varphi_0} \sin \varphi_0 \sin 2\varphi_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0 \right) \end{aligned}$$

将数字代入,得

$$EI\Delta_{1P} = -0.224 qR^3$$

$$EI\Delta_{2P} = -0.0223 qR^4$$

(5) 内力计算

多余未知力为

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{0.224 qR^3}{1.855 R} = 0.121 qR^2 = 47.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}} = \frac{0.0223 qR^4}{0.0270 R^3} = 0.827 qR = 51.7 \text{ kN}$$

由此求得

$$\text{水平推力} \quad F_H = X_2 = 51.7 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \text{拱顶弯矩} \quad M_0 &= X_1 - X_2(R-d) = 47.1 \text{ kN} \cdot \text{m} - 51.7 \text{ kN} \times \\ &\quad (6.25 \text{ m} - 5.39 \text{ m}) = 2.76 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{拱脚弯矩} \quad M_A = M_B &= X_1 + X_2(d - R \cos \varphi_0) - \frac{q}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 \\ &= 5.98 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

(6) 讨论

与三铰拱比较,在同样荷载作用下,拱轴相同的三铰拱的推力为

$$F_H' = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f} = \frac{10 \text{ kN/m} \times (10 \text{ m})^2}{8 \times 2.5 \text{ m}} = 50 \text{ kN}$$

$F_H$  与  $F'_H$  非常接近, 相对差值为  $\frac{51.7 \text{ kN} - 50 \text{ kN}}{50 \text{ kN}} = 3\%$ 。

**例 7-9** 试求等截面圆弧形无铰拱在均匀水压力  $p$  作用下的内力(图 7-40a)。

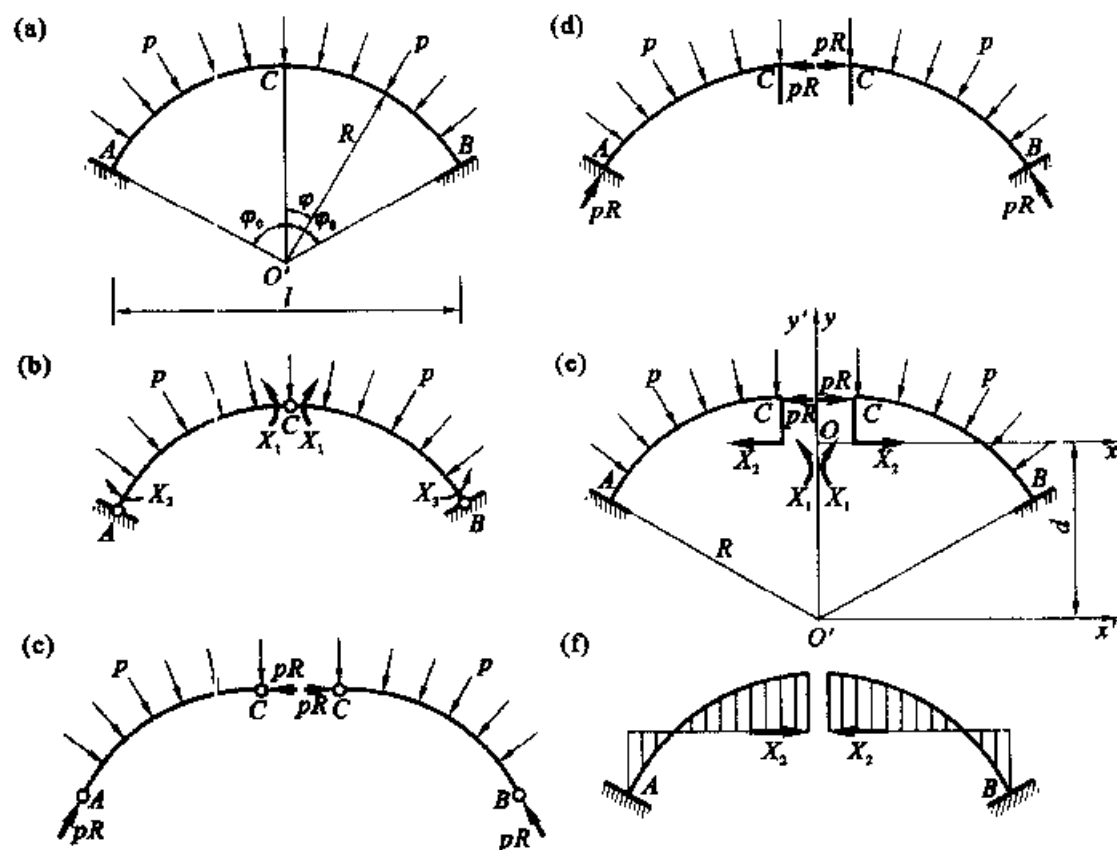


图 7-40

**解** 在计算本例无铰拱之前, 先讨论三铰拱的受力状态。在均匀水压力  $p$  作用下, 圆弧三铰拱轴线是合理轴线, 弯矩和剪力都等于零, 轴力等于常数, 即  $F_N = -pR$ , 其中  $R$  是圆弧的半径。

计算无铰拱时, 将利用三铰拱的上述受力特点以简化计算。下面按两种情况加以讨论。

第一种情况, 忽略轴向变形时的内力计算

我们取三铰拱作为基本体系(图 7-40b)。基本结构在荷载作用下的受力状态非常简单(图 7-40c):

$$M_F = 0$$

$$F_{QF} = 0$$

$$F_{NF} = -pR$$

计算力法方程的自由项时,如果忽略轴力  $F_{NP}$  对位移的影响,再考虑到  $M_P$  和  $F_{QP}$  为零,可得

$$\Delta_{1P} = 0$$

$$\Delta_{2P} = 0$$

$$\Delta_{3P} = 0$$

因而多余未知力  $X_1$ 、 $X_2$ 、 $X_3$  全部为零。

由此可知,在忽略轴向变形的假定下,无铰圆拱在均匀水压力下的内力与三铰圆拱完全相同,即为图 7-40c 所示的无弯矩状态。

第二种情况,考虑轴向变形时的内力计算

上面得出的无弯矩状态并不是无铰拱的精确解,而只是在忽略轴向变形的假设下得到的近似解。现在讨论精确计算。

计算时采用弹性中心法。同时,为了简化的目的,把精确的受力状态分为两部分:

- (1) 不考虑轴向变形时荷载引起的受力状态——无弯矩状态。
- (2) 单纯由轴向变形引起的受力状态——附加内力状态。

第一部分受力状态前已求出,如图 7-40c 所示,也可以改用图 7-40d 来表示,其中在截面 C 处,轴力为压力  $pR$ ,弯矩和剪力为零。

第二部分附加内力状态可看作是由弹性中心处的多余未知力  $X_1$  和  $X_2$  引起的(由于对称,  $X_3 = 0$ )。

将两部分受力状态合在一起,即得出基本体系总的受力状态,如图 7-40e 所示。注意,这里把总的受力状态分解成两部分时,分解的方式与通常有所不同。采用这种作法的目的是为了使基本结构的计算得到简化。

下面用弹性中心法求  $X_1$  和  $X_2$ 。弹性中心 O 与圆拱的圆心 O' 的距离为(参看例 7-8)

$$d = \frac{R \sin \varphi_0}{\varphi_0}$$

考虑轴向变形时,可得出下列位移:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= 0 \\ \Delta_{2P} &= \int \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds = \int \frac{\cos \varphi \cdot pR^2 \cdot d\varphi}{EA} = 2 \frac{pR^2}{EA} \sin \varphi_0 \\ \delta_{22} &= \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} ds + \int \frac{\bar{F}_N^2}{EA} ds = \int \frac{y^2 ds}{EI} + \int \frac{\cos^2 \varphi ds}{EA} \\ &= \frac{2R^3}{EI} \left[ \frac{1}{2} \varphi_0 + \frac{1}{4} \sin 2\varphi_0 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right] + \\ &\quad \frac{2R}{EA} \left[ \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi_0 \right] \end{aligned}$$

因此

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}} = -\frac{\rho R \sin \varphi_0}{12 \left( \frac{R}{h} \right)^3 \left[ \frac{1}{2} \varphi_0 + \frac{1}{4} \sin 2\varphi_0 - \frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right] + \left[ \frac{1}{2} \varphi_0 + \frac{1}{4} \sin 2\varphi_0 \right]} \quad (a)$$

其中  $h$  为拱截面的厚度。附加的弯矩图如图 7-40f 所示, 最大弯矩发生在拱顶和拱脚处。

根据上面的讨论, 可作如下说明:

(1) 对三铰拱来说, 圆拱轴线是在均匀水压力下的合理轴线。因此, 内力为无弯矩状态。对超静定拱来说, 在均匀水压力下, 如果忽略轴力的影响, 则内力亦为无弯矩状态。如果考虑轴向变形, 由于拱轴缩短的影响, 圆拱将产生附加内力。这时, 无铰拱内虽然出现弯矩, 但数值不大, 仍然接近于无弯矩状态。

同理, 还可得出更一般的结论如下: 如果在某一荷载作用下, 三铰拱处于无弯矩状态, 则在同一荷载作用下, 与三铰拱轴线形式相同的无铰拱的内力接近无弯矩状态。

(2) 在上面的计算中, 我们把总的受力状态分解为两部分: 忽略轴向变形时的无弯矩状态以及轴向变形引起的附加内力。这种作法有三个好处:

第一, 计算上得到简化。

第二, 借此可以了解拱的受力特点。

第三, 能够更好的保证计算的精度。

关于第三点可以说明如下:

如果按照通常的作法, 选用图 7-41 所示的基本体系, 总的弯矩可表示为

$$M = M_P + (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2) \quad (b)$$

根据拱的特性, 总弯矩  $M$  是一个小数, 再考虑到图 7-41 中基本体系中的基本结构实际上是两个悬臂曲梁, 在荷载  $q$  作用下, 它的弯矩  $M_P$  应是一个大数。最后, 由式 (b) 可知,  $(\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2)$  应是一个与  $M_P$  符号相反而数值相近的大数, 而  $M$  是两个大数相减得出的一个小数。在这种情况下, 如果求  $X_1$  和  $X_2$  时

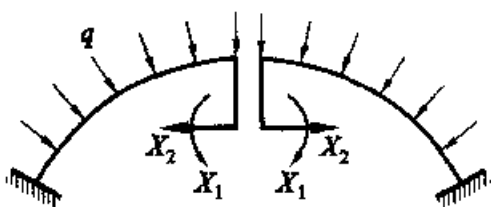


图 7-41

发生不大的误差,由式(b)求得的 $M$ 可能会发生很大的误差,甚至会使 $M$ 改变符号。因此,从理论上讲,采用图7-41的基本体系是正确的,但从保证计算精度的角度来看,这种作法是不好的。

与此相比,如果选用图7-40e所示的基本体系,由于 $M_P=0$ ,故

$$M = (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2)$$

这时不会出现两个大数相减得出一个小数的情况,因而计算精度得到了保证。

## § 7-8 由卡氏定理推导力法方程

前面是在基本体系与原结构受力与变形一致性的基础上,利用基本体系在基本未知力处的变形(连续)条件建立力法方程的。本节将说明力法方程也可从卡氏定理导出。

设结构为 $n$ 次超静定。仍采用基本体系的概念,以多余未知力为基本未知量

$$\mathbf{X} = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]^T$$

基本体系的内力可表示为

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_P \\ F_Q &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Qi} X_i + F_{QP} \\ F_N &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Ni} X_i + F_{NP} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

这里, $\bar{M}_i$ 、 $\bar{F}_{Qi}$ 、 $\bar{F}_{Ni}$ 和 $M_P$ 、 $F_{QP}$ 、 $F_{NP}$ 分别为基本结构由单位力 $X_i=1$ 和荷载引起的弯矩、剪力、轴力。当 $X_i$  ( $i=1,2,\cdots,n$ )为任意参数时,式(a)中的内力都是原超静定结构的静力可能(满足平衡条件的)内力。

下面将用能量偏导数定理(§6-10)导出力法方程。

第一步,求应变能 $U$ ,并用基本未知力 $\mathbf{X}$ 表示。

结构的应变能(见§6-9)

$$U = \sum \int \left[ \frac{M^2}{2EI} + \frac{kF_Q^2}{2GA} + \frac{F_N^2}{2EA} \right] ds$$

将式(a)代入,得

$$U = \frac{1}{2} \sum \int \left[ \frac{1}{EI} \left( \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_P \right)^2 + \frac{k}{GA} \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Qi} X_i + F_{QP} \right)^2 + \frac{1}{EA} \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Ni} X_i + F_{NP} \right)^2 \right] ds$$



上式可写成:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n \Delta_{iP} X_i + C \quad (b)$$

其中  $C$  是常数

$$\delta_{ij} = \sum \int \left[ \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} + \frac{k \bar{F}_{Qi} \bar{F}_{Qj}}{GA} + \frac{\bar{F}_{Ni} \bar{F}_{Nj}}{EA} \right] ds$$

$$\Delta_{iP} = \sum \int \left[ \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} + \frac{k \bar{F}_{Qi} F_{QP}}{GA} + \frac{\bar{F}_{Ni} F_{NP}}{EA} \right] ds$$

第二步,应用卡氏第二定理(见 § 6-10),求与基本未知力  $X$  相应的位移

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial X_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (c)$$

因为与基本未知力  $X$  相应的位移  $\Delta = 0$ ,由式(b)和(c)得

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

上式就是力法方程,由此可解出基本未知力  $X$ ,由式(a)可求出结构的内力。

**例 7-10** 图 7-42a 所示为一具有弹性支座的连续梁,弹性支座的刚度系数为  $k$ 。试用能量原理导出力法方程。

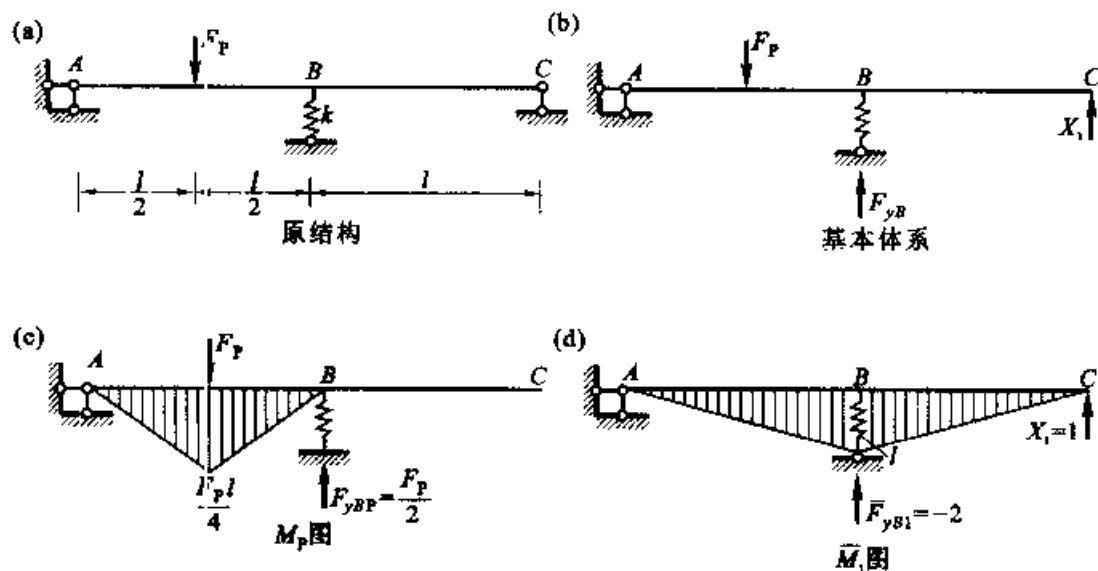


图 7-42

**解** 结构的应变能包含各杆及弹性支座的应变能之和,即

$$U = \sum \int \frac{M^2}{2EI} ds + \frac{1}{2k} F_{yB}^2$$

采用图 7-42b 所示的基本体系。基本结构在荷载及单位力  $X_1 = 1$  作

用下的  $M_p$  图和  $\bar{M}_1$  图如图 7-42c、d 所示。

利用下列叠加公式：

$$\left. \begin{aligned} M &= \bar{M}_1 X_1 + M_p \\ F_{yB} &= \bar{F}_{yB1} X_1 + F_{yBP} \end{aligned} \right\}$$

及导数公式：

$$\frac{\partial M}{\partial X_1} = \bar{M}_1, \quad \frac{\partial F_{yB}}{\partial X_1} = \bar{F}_{yB1}$$

由卡氏第二定理  $\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0$ , 得

$$\sum \int \frac{M}{EI} \bar{M}_1 ds + \frac{1}{k} F_{yB} \bar{F}_{yB1} = 0$$

即

$$\left[ \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \frac{1}{k} \bar{F}_{yB1}^2 \right] X_1 + \left[ \sum \int \frac{M_1 M_p}{EI} ds + \frac{1}{k} \bar{F}_{yB1} F_{yBP} \right] = 0$$

或写成

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \frac{1}{k} \bar{F}_{yB1}^2 \\ \Delta_{1P} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} ds + \frac{1}{k} \bar{F}_{yB1} F_{yBP} \end{aligned} \right\}$$

上式右边第一项表示各杆弯曲变形的影响,第二项表示弹性支座变形的影响。

**例 7-11** 试用卡氏第二定理计算图 7-43a 所示超静定梁,并说明在方法中可以混合采用不同的基本结构来分别计算  $\bar{M}_1$  和  $M_p$ 。

**解** 混合采用两种不同的基本结构：

首先,取简支梁作基本结构(图 7-43b),作荷载作用下的  $M_p$  图。

其次,另取悬臂梁作基本结构(图 7-43c),作单位力  $X_1 = 1$  作用下的  $\bar{M}_1$  图。

下面仍按通常作法由  $M_p$  和  $\bar{M}_1$  求力法方程的系数和自由项：

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{l^3}{3EI} \\ \Delta_{1P} &= \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dx = \frac{ql^4}{24EI} \end{aligned} \right\}$$

力法基本方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = X_1 \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx + \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dx = 0 \quad (d)$$

由此求得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{ql}{8}$$

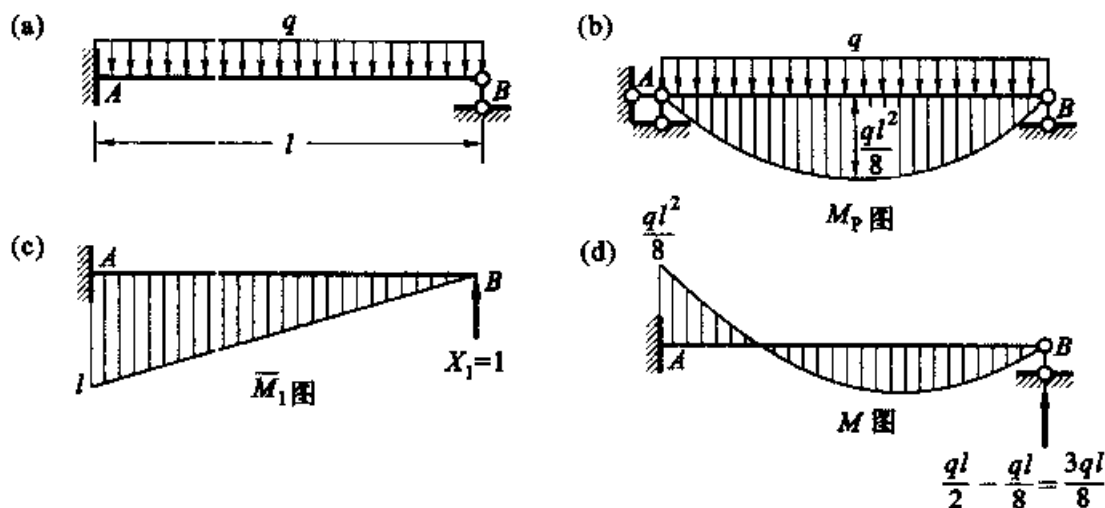


图 7-43

利用下列叠加公式

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P \quad (e)$$

超静定梁的  $M$  图如图 7-43d 所示。可以验证,所得的结果是正确的。

上述算法的正确性,由能量原理极易说明。

首先,尽管  $\bar{M}_1$  和  $M_P$  图是由不同的基本结构求得的,但内力表示式(e)仍然是原结构在给定荷载下静力可能内力的一般表示式。

其次,由上述可能内力,可求出结构的应变能  $U$  如下:

$$U = \int \frac{1}{2EI} (\bar{M}_1 X_1 + M_P)^2 dx$$

再应用卡氏第二定理,即得

$$X_1 \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx + \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dx = 0 \quad (f)$$

上式实际上就是前面的式(d)。

由此看出,尽管  $\bar{M}_1$  和  $M_P$  是由不同的基本结构求得的,但力法基本方程(f)仍与通常的形式完全相同,这就是要说明的结论。

**例 7-12** 图 7-44a 所示为一等截面圆形无铰拱,承受均布水压力  $q$ 。试用卡氏第二定理求其内力。

**解** 为了使计算得到简化,求  $\bar{M}_1$  和  $M_P$  时采用不同的基本结构。

首先,按弹性中心法选取基本结构(图 7-44b)。这时,力法基本方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

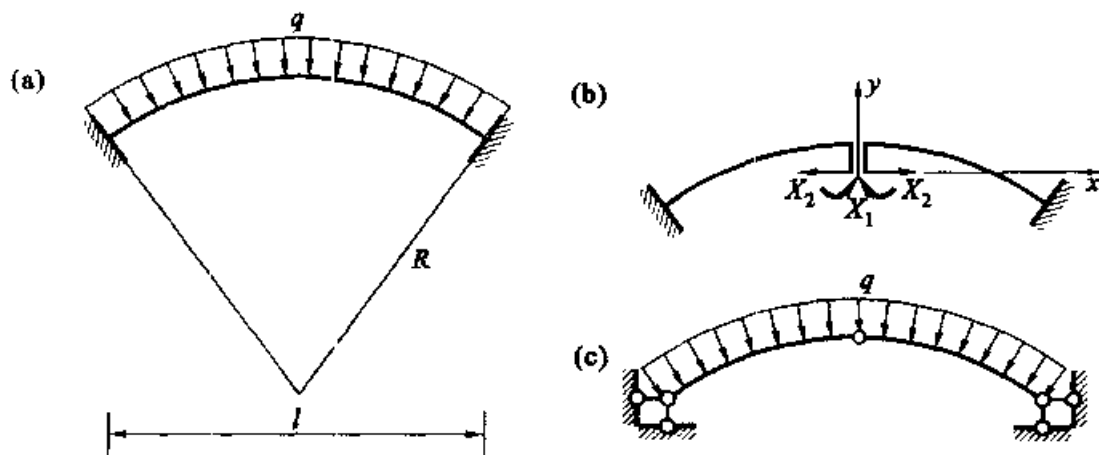


图 7-44

其次,求荷载作用下的内力时,最好改取三铰拱作基本结构(图 7-44c)。这时拱处于无弯矩状态,内力的表示式最为简单,即

$$M_P = 0, \quad F_{QP} = 0, \quad F_{NP} = -qR \quad (h)$$

由图 7-44b 的基本体结构知:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1 &= 1, \quad \bar{F}_{Q1} = 0, \quad \bar{F}_{N1} = 0 \\ \bar{M}_2 &= -y, \quad \bar{F}_{Q2} = -\sin \varphi, \quad \bar{F}_{N2} = -\cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

因此求得

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= 0 \\ \Delta_{2P} &= \frac{qR}{EA} \int \cos \varphi ds = \frac{qRl}{EA} \end{aligned}$$

代入式(g),解得

$$X_1 = 0, \quad X_2 = -\frac{qRl}{EA\delta_{22}}$$

最后按下式求出弯矩:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_P$$

在上面的计算中,由荷载引起的内力算式(h)以及由多余力引起的内力算式(i)都非常简单,这里显示了混合采用不同基本结构进行计算的优点。

上述算法的正确性,读者可用卡氏第二定理自行说明。需注意,在  $n$  次超静定结构中, $n$  个单位弯矩图( $\bar{M}_i$  图)虽然可以混合选取不同基本结构求出,但它们必须是彼此线性无关的。

## §7-9 支座移动和温度改变时的计算

超静定结构有一个重要特点,就是无荷载作用时,也可以产生内力。支座移动、温度改变、材料收缩、制造误差等所有使结构发生变形的因素,都能使超静定结构产生内力。

超静定结构在支座移动和温度改变等因素作用下产生的内力,称为自内力。用力法计算自内力时,计算步骤与荷载作用的情形基本相同。下面通过例题说明详细的计算过程,并着重讨论它们与荷载作用时的不同点。

## 1. 支座移动时的计算

**例 7-13** 图 7-45a 所示为一等截面梁 AB,左端 A 为固定端,右端 B 为滚轴支承。如果已知左端支座转动角度为  $\theta$ ,右端支座下沉位移为  $a$ ,试求梁中引起的自内力。

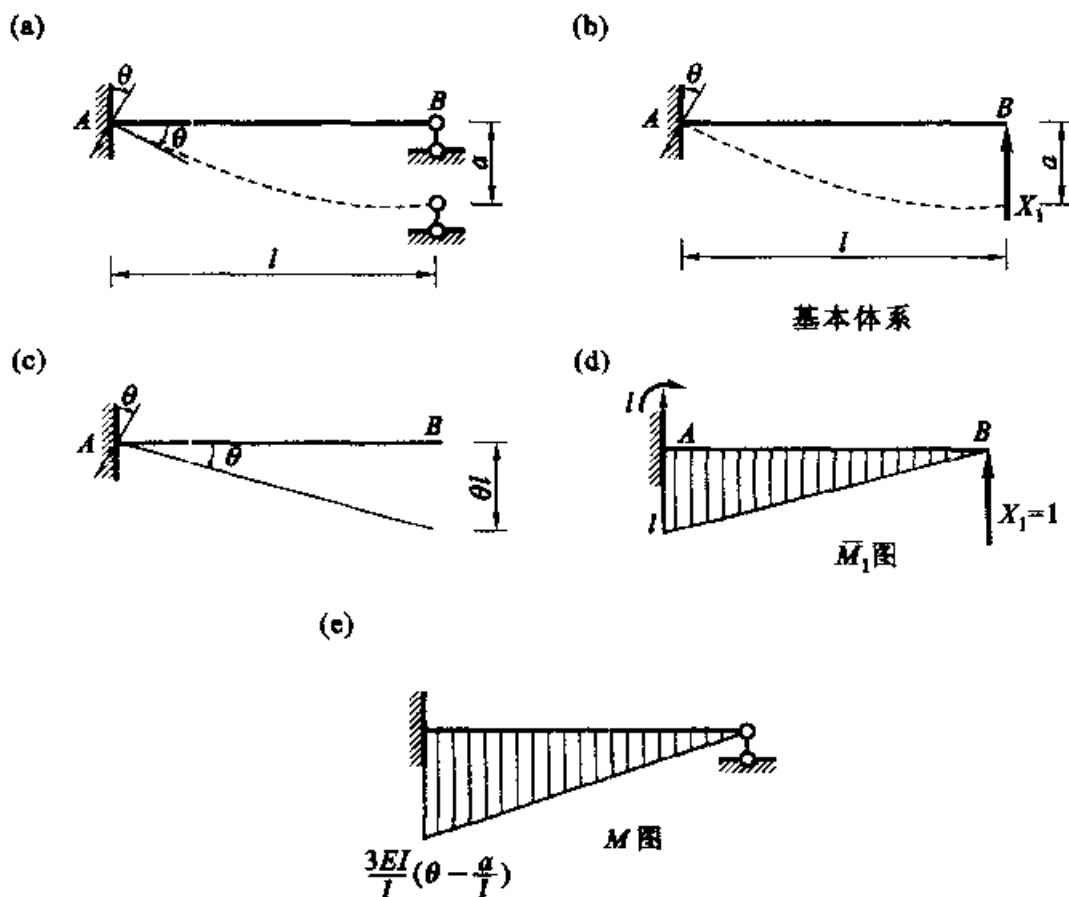


图 7-45

**解** 此梁为一次超静定,取支座 B 的竖向反力为多余未知力  $X_1$ ,基本体系为悬臂梁(图 7-45b)。

变形条件为基本体系在  $B$  点的竖向位移  $\Delta_1$  应与原结构相同。由于原结构在  $B$  点的竖向位移已知为  $a$ , 方向与  $X_1$  相反, 故变形条件可写出如下:

$$\Delta_1 = -a \quad (a)$$

另一方面, 基本体系的位移  $\Delta_1$  是由未知力  $X_1$  和支座  $A$  的转角  $\theta$  共同作用产生的, 因此式(a)可写成

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1c} = a \quad (b)$$

上式左边的自由项  $\Delta_{1c}$  是当支座  $A$  产生转角  $\theta$  时在基本结构中产生的沿  $X_1$  方向的位移。由图 7-45c 得

$$\Delta_{1c} = -\theta l \quad (c)$$

系数  $\delta_{11}$  则可由图 7-45d 中的  $\bar{M}_1$  图求得

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int M_1^2 dx = \frac{l^3}{3EI} \quad (d)$$

将式(a)和(d)代入(b), 得

$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - \theta l = -a \quad (e)$$

由此求得

$$X_1 = \frac{3EI}{l^2} \left( \theta - \frac{a}{l} \right) \quad (f)$$

因为基本结构是静定结构, 支座移动时在基本体系中不引起内力, 因此内力全是由多余未知力引起的。弯矩叠加公式为

$$M = \bar{M}_1 X_1 \quad (g)$$

$M$  图如图 7-45e 所示。

下面说明两点:

(1) 支座移动时的计算特点:

与荷载作用时的计算相比, 这里有如下的特点:

第一, 由式(a)或(e)看出, 力法方程的右边可不为零。

第二, 由式(b)、(c)看出, 力法方程的自由项是基本结构由支座移动产生的。

第三, 由式(g)看出, 内力全部是由多余未知力引起的。

第四, 由式(f)和(g)看出, 内力与杆件  $EI$  的绝对值有关。

(2) 取不同的基本结构计算

如果取简支梁作基本体系, 取支座  $A$  的反力偶矩作为多余未知力  $X_1$  (图 7-46a), 则变形条件为简支梁在  $A$  点的转角应等于给定值  $\theta$ 。因此, 力法方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1c} = \theta$$

自由项  $\Delta_{11}$  是简支梁由于支座  $B$  下沉位移  $a$  而在  $A$  点产生的转角。由图 7-46b 得知

$$\Delta_{11} = \frac{a}{l}$$

系数  $\delta_{11}$  可由图 7-46c 中的  $M_1$  图求得

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI}$$

因此力法方程为

$$\frac{l}{3EI}X_1 + \frac{a}{l} - \theta \quad (h)$$

由此求得

$$X_1 = \frac{3EI}{l} \left( \theta - \frac{a}{l} \right)$$

同样可求出  $M$  图如图 7-45e 所示

以上选取两种不同的基本结构, 得出两个不同的力法方程 (e) 和 (h)。每个力法方程中都出现两个支座位移参数  $\theta$  和  $a$ 。但在式 (e) 中,  $\theta$  在左边,  $a$  在右边; 而在式 (h) 中,  $\theta$  在右边,  $a$  在左边。一般说来, 凡是与多余未知力相应的支座位移参数都出现在力法方程的右边项中, 而其他的支座位移参数都出现在左边的自由项中。

如果按图 7-47 选取基本体系, 这时, 支座位移参数  $\theta$  和  $a$  都不是与  $X_1$  相应的位移, 因此它们都出现在力法方程的左边自由项中, 而力法方程的右边项为零。

**例 7-14** 图 7-48a 所示为一等截面圆弧形无铰拱, 设支座  $B$  发生水平位移  $\Delta_H = 0.002 \text{ m}$ 。试求拱顶和拱脚处的截面弯矩。已知  $l = 14 \text{ m}$ ,  $f = 4 \text{ m}$ ,  $E = 2.6 \times 10^4 \text{ MPa}$ , 矩形截面尺寸为  $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ 。

**解** (1) 求几何参数

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} = 8.125 \text{ m}$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{l}{2R} = 0.8615$$

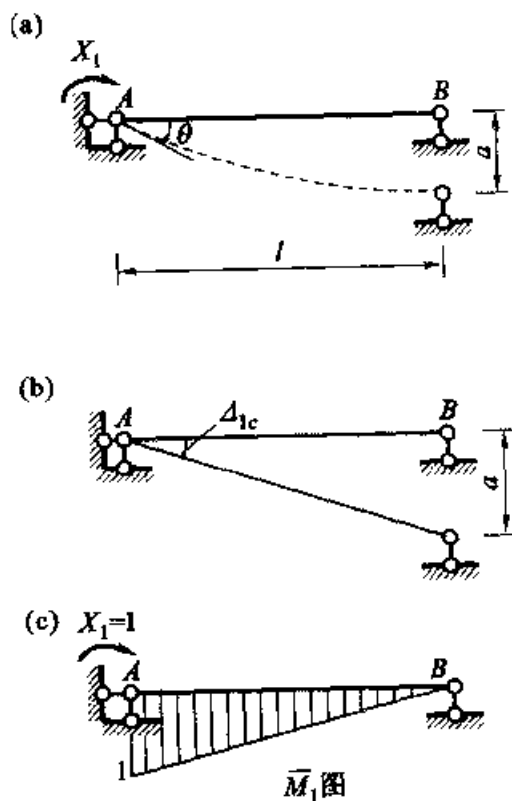


图 7-46

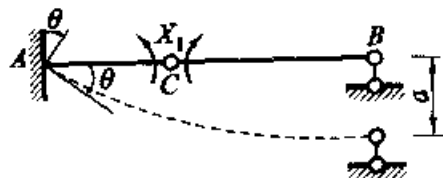


图 7-47

$$\varphi_0 = 1.038 \text{ rad}$$

$$\text{弹性中心与圆心的距离 } d = \frac{R \sin \varphi_0}{\varphi_0} = \frac{8.125 \text{ m} \times 0.8615}{1.038} = 6.75 \text{ m}$$

$$\text{截面惯性矩 } I = \frac{(0.5 \text{ m})^4}{12} = 0.0052 \text{ m}^4$$

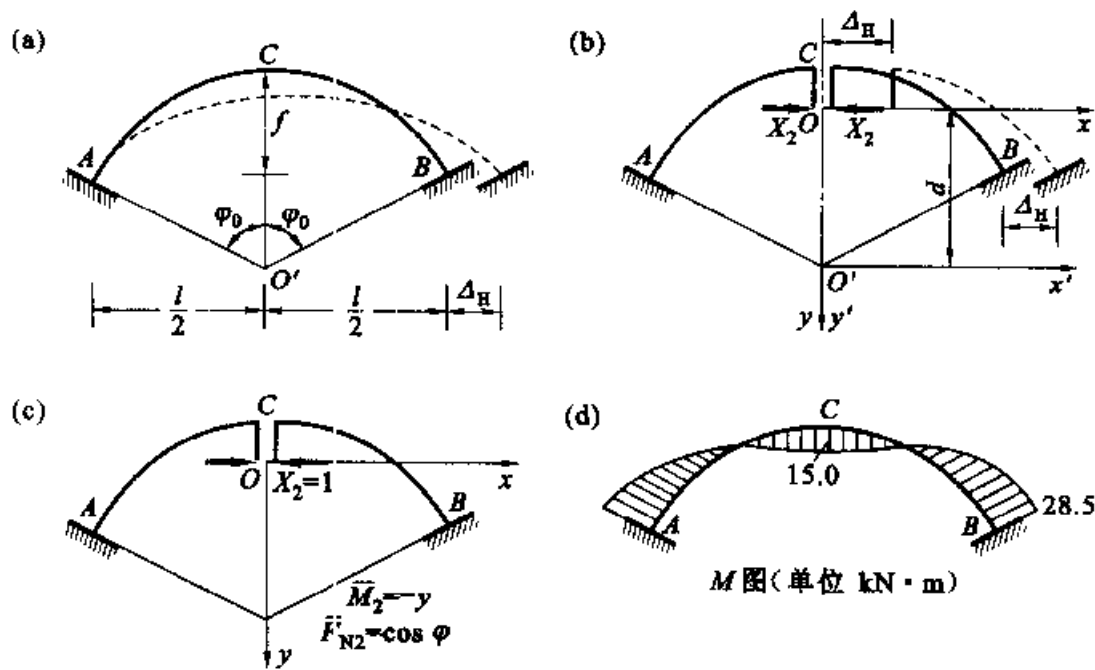


图 7-48

## (2) 取基本体系

图 7-48b 为所取的基本体系。由于支座只发生水平位移, 因此弹性中心处的弯矩  $X_1$  和竖向力  $X_3$  都等于零, 只剩下一个水平力  $X_2$ , 相应的力法方程为

$$\delta_{22} X_2 + \Delta_{2C} = 0$$

(3) 求  $\delta_{22}$ 、 $\Delta_{2C}$  和  $X_2$ 

求  $\delta_{22}$  时, 考虑弯矩和轴力的影响 (图 7-48c), 得

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} ds + \int \frac{\bar{F}_{N2}^2}{EA} ds = \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds \\ &= \frac{R^3}{EI} \left( \varphi_0 + \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 - \frac{2 \sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right) + \frac{R}{EA} (\varphi_0 + \cos \varphi_0 \sin \varphi_0) \\ &= \frac{1}{EI} \left( 24.64 \text{ m}^3 + 11.99 \text{ m} \frac{I}{A} \right) = \frac{24.9 \text{ m}^3}{EI} \end{aligned}$$

自由项  $\Delta_{2C}$  可直接由图 7-48b 得出:

$$\Delta_{2C} = -\Delta_H = -0.002 \text{ m}$$



$$\begin{aligned}\text{由力法方程,得 } X_2 &= -\frac{\Delta_{2c}}{\delta_{22}} = 0.002 \text{ m} \times \frac{EI}{24.9 \text{ m}^3} \\ &= 0.80 \text{ m}^3 \times 10^{-4} EI = 10.9 \text{ kN}\end{aligned}$$

(4) 求内力

$$\begin{aligned}\text{拱顶截面 } M_C &= X_2(R-d) = 10.9 \text{ kN}(8.125 \text{ m} - 6.75 \text{ m}) \\ &= 15.0 \text{ kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{拱脚截面 } M_A &= M_B = -X_2(f-R+d) \\ &= -10.9 \text{ kN}(4 \text{ m} - 1.375 \text{ m}) = -28.5 \text{ kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

弯矩图如图 7-48d 所示。

可以看到,无铰拱对于支座移动是很敏感的,不大的支座移动可以引起相当数量的内力。拱的抗弯刚度  $EI$  愈大,则引起的内力也愈大。因此,选用无铰拱这类结构形式时,应当注意地基情况,防止出现由于地基变形对拱产生的不利影响。

当支座发生竖向位移或转动时,内力计算可以同样进行。

## 2. 温度应(内)力的计算

**例 7-15** 图 7-49a 所示刚架,浇注混凝土时温度为  $15^\circ\text{C}$ ,冬季混凝土外皮温度为  $-35^\circ\text{C}$ ,内皮温度为  $15^\circ\text{C}$ 。试求此时由于温度变化在刚架中引起的内力。各杆  $EI$  为常数,截面尺寸如图所示。混凝土的弹性模量为

$$E = 2 \times 10^{10} \text{ MPa}$$

温度膨胀系数为

$$\alpha = 0.00001$$

**解** (1) 基本体系

此刚架为一次超静定,取基本体系如图 7-49b 所示。

(2) 力法方程

变形条件为基本体系在铰  $C$  处相对转角应等于零。这个位移是由温度变化和未知力  $X_1$  共同产生的,即

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t} = 0$$

这里,自由项  $\Delta_{1t}$  是由于温度变化在基本结构中沿  $X_1$  方向产生的位移。

(3) 计算系数和自由项

系数  $\delta_{11}$  的求法与荷载作用时相同,但自由项  $\Delta_{1t}$  的求法不同。

施工温度和冬季温度的变化值为

轴线平均温度变化

$$t_0 = \frac{1}{2}(15^\circ\text{C} - 35^\circ\text{C}) - 15^\circ\text{C} = -25^\circ\text{C}$$

内外温差

$$\Delta t = 15^{\circ}\text{C} - (-35^{\circ}\text{C}) = 50^{\circ}\text{C}$$

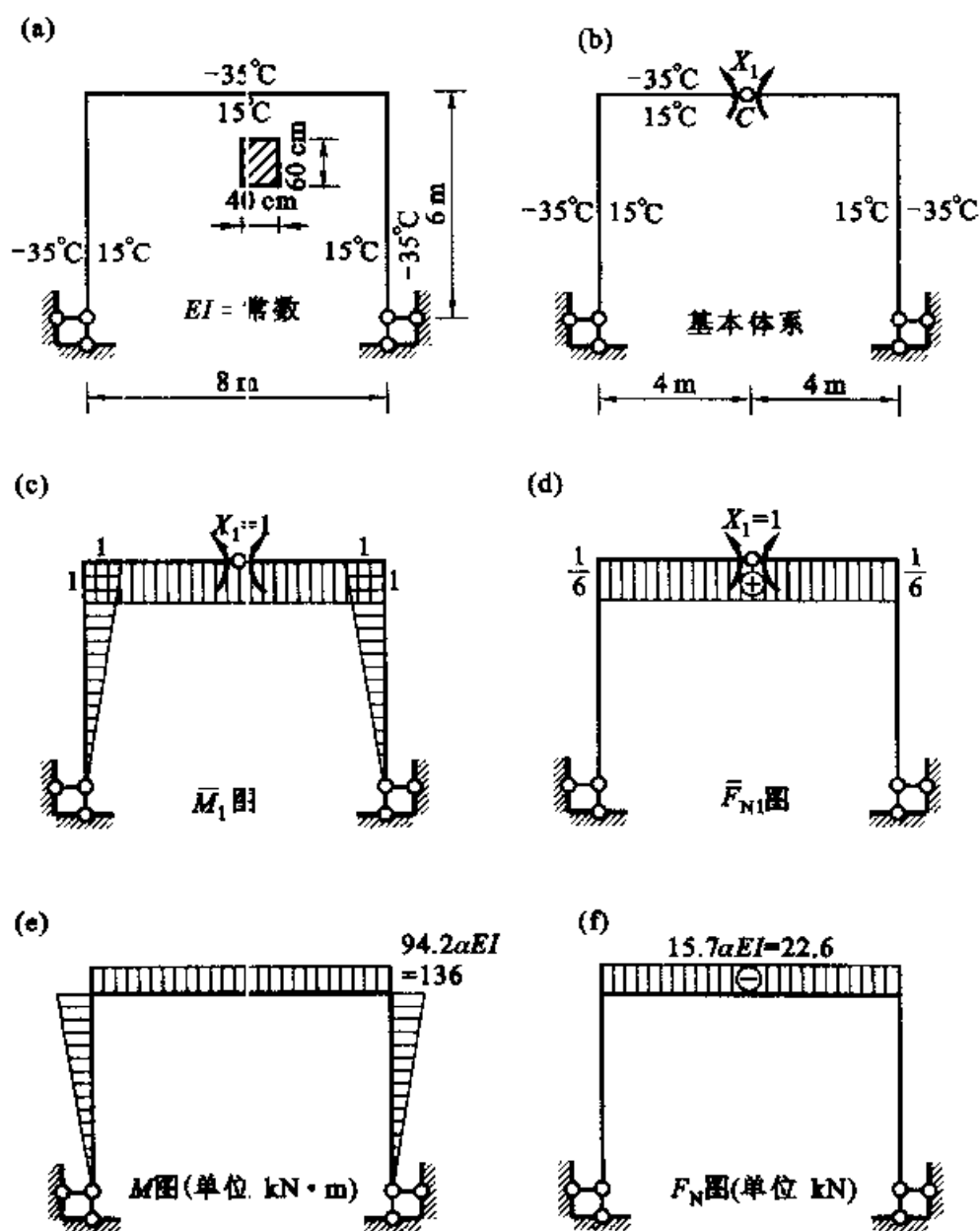


图 7-49

$\Delta_{tr}$  的计算公式为

$$\Delta_{tr} = \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \int \bar{M}_1 ds + \sum \alpha t_0 \int \bar{F}_{N1} ds$$

其中,两个积分就是  $\bar{M}_1$  图和  $\bar{F}_{N1}$  图的面积。

作  $\bar{M}_1$  和  $\bar{F}_{N1}$  图(图 7-49c、d),利用位移公式求得

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ (1 \times 8) \times 1 + 2 \left( \frac{1}{2} \times 1 \times 6 \right) \times \frac{2}{3} \right] = \frac{12}{EI}$$

$$\Delta_{1t} = \alpha \frac{50}{0.6} \left( 1 \times 8 + \frac{1 \times 6}{2} \times 2 \right) - \alpha 25 \left( \frac{1}{6} \times 8 \right) = 1\,166\alpha - 33.4\alpha = 1\,133\alpha$$

在  $M_1$  图中, 杆内部纤维受拉, 温差  $\Delta t$  也是内部温度较高, 故上式第一项取正号。在  $\bar{F}_{N1}$  图中, 横梁受拉, 温度变化  $t_0$  为负, 故上式第二项取负号。

#### (4) 解力法方程

由力法方程, 得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = \frac{1\,133\alpha}{12/EI} = -94.2\alpha EI$$

#### (5) 作内力图

因为基本结构是静定结构, 温度变化不引起内力, 故内力都是由多余未知力引起的, 即

$$\left. \begin{aligned} M &= M_1 X_1 \\ F_N &= F_{N1} X_1 \end{aligned} \right\}$$

内力图如图 7-49e、f 所示。

结合上例讨论如下:

计算结果表明, 温度变化引起的内力与杆件的  $EI$  成正比。在给定的温度条件下, 截面尺寸愈大, 内力也愈大。所以为了改善结构在温度作用下的受力状态, 加大截面尺寸并不是一个有效的途径。

当杆件有温差  $\Delta t$  时, 弯矩图的竖矩出现在降温面一边, 使升温面产生压应力, 降温面产生拉应力。因此, 在钢筋混凝土结构中, 要特别注意因降温可能出现裂缝。

**例 7-16** 试求图 7-50a 所示无铰圆拱由于均匀温度变化和混凝土收缩而产生的内力。

**解** 基本体系如图 7-50b 所示, 通过刚臂把多余未知力放在弹性中心  $O$  上。因为对称, 剪力  $X_3 = 0$ 。

由于内外两侧温度相同,  $\Delta t$  为零,  $t_0$  为常数。利用温度变化时的位移计算公式以及下列各式:

$$\bar{M}_1 = 1, \quad \bar{F}_{N1} = 0, \quad M_2 = -y, \quad F_{N2} = -\cos \varphi$$

求得

$$\Delta_{1t} = \int \frac{\alpha \Delta t \bar{M}_1 ds}{h} = 0$$

$$\Delta_{2t} = \int \frac{\alpha \Delta t \bar{M}_2 ds}{h} + \int \alpha t_0 \bar{F}_{N2} ds = -\alpha t_0 \int \cos \varphi ds = -\alpha t_0 \int dx = -\alpha t_0 l$$

所以

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = 0$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2t}}{\delta_{22}} = \frac{\alpha t_0 l}{\delta_{22}}$$

拱的温度内力为

$$M = -X_2 y$$

$$F_N = -X_2 \cos \varphi$$

$$F_Q = -X_2 \sin \varphi$$

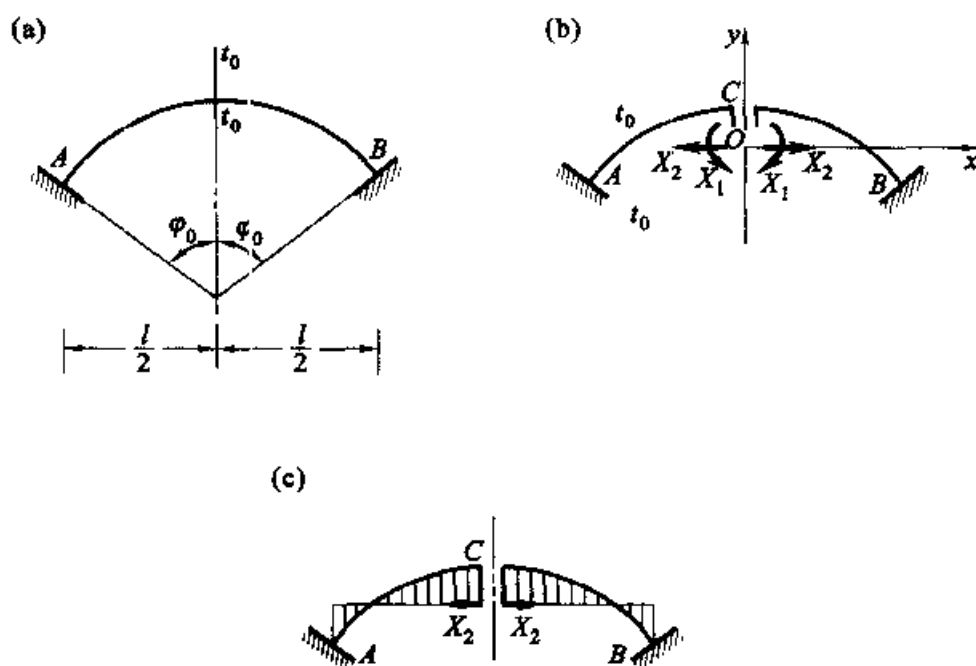


图 7-50

压力线为通过弹性中心的水平线。压力线与拱轴线之间的竖距与弯矩成正比(图 7-50c)。

结合上例讨论如下:

(1) 计算结果表明,拱的推力和内力与  $1/\delta_{22}$  成正比,即与拱的刚度成正比。当温度升高时,轴力为压力;温度下降时,轴力为拉力。对于混凝土拱,应避免因降温产生的拉力而引起裂缝。

(2) 材料收缩的影响,可以当成温度均匀下降来考虑。普通混凝土凝结时的收缩系数约为 0.000 25,温度膨胀系数为 0.000 01,故混凝土收缩相当于降温 25℃。工程实际中,因为混凝土是分段浇灌的,并考虑到混凝土的徐变性质,一般对收缩按降温 10~15℃ 计算。

## § 7-10 超静定结构位移的计算

前面讨论过静定结构的位移计算,现在讨论超静定结构的位移计算。

我们以图 7-51a 的超静定梁为例,求在均布荷载作用下梁的中点 C 的挠度  $f$ 。

方法的基本思路是取静定结构作基本体系,利用基本体系来求原结构的内力。例如可取图 7-51b 的静定梁作基本体系,得出弯矩图如图 7-51c 所示。现在要计算超静定结构的位移,仍采用同一个思路:利用基本体系来求原结构的位移。

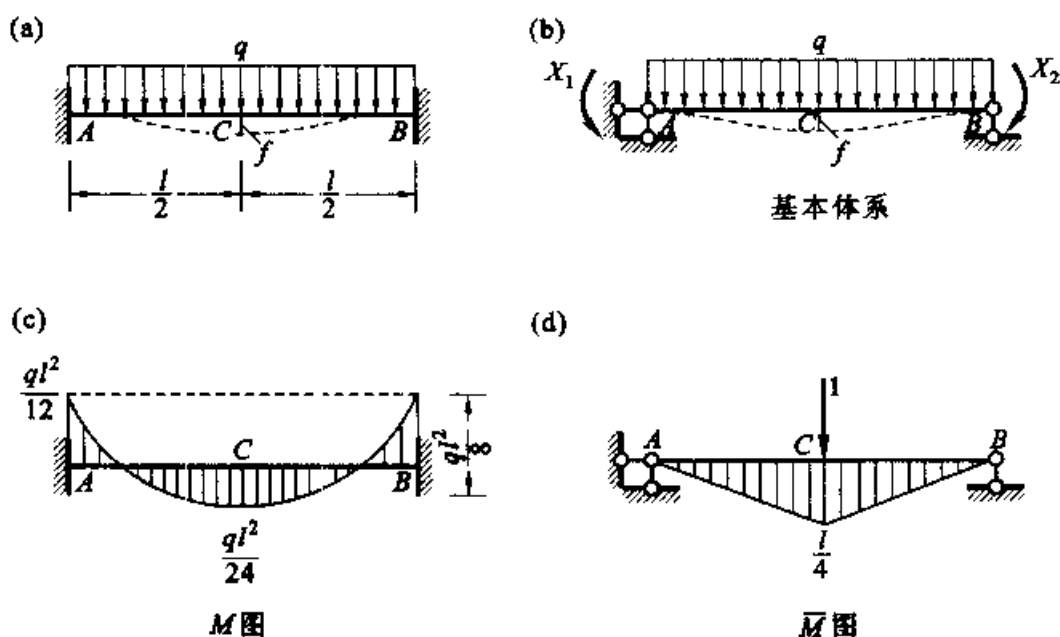


图 7-51

基本体系与原结构的唯一区别是把多余未知力由原来的被动力换成主动力。因此,只要多余未知力满足力法方程,则基本体系的受力与变形状态就与原结构完全相同,因而求原结构位移的问题就归结为求基本体系这个静定结构的位移问题。

为此,在基本结构的 C 点加单位竖向荷载,作出单位弯矩图(图 7-51d)。利用  $\bar{M}$  图和  $M$  图,进行图乘,得

$$\begin{aligned}
 f &= \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds = \frac{2}{EI} \left[ - \left( \frac{ql^2}{12} \times \frac{l}{2} \right) \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{l}{4} \right) + \left( \frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times \frac{l}{2} \right) \left( \frac{5}{8} \times \frac{l}{4} \right) \right] \\
 &= \frac{ql^4}{384EI} (\downarrow)
 \end{aligned}$$

这就是利用基本体系求得的原结构 C 点的挠度  $f$ 。

由此看出,计算超静定结构的位移时,单位荷载可加在基本结构上。这样,单位内力图是静定的,绘制也非常简便。

由于计算超静定结构时可以采用不同的基本体系,因此计算同一位移时,单位内力图将不只是一种。例如求两端固定梁的跨中位移  $f$  时,我们也可以采用图 7-52a 或 b 所示的单位弯矩图。所采用的单位弯矩图虽然不同,但求得的位移应是相同的。可以自行验算这个结论的正确性。

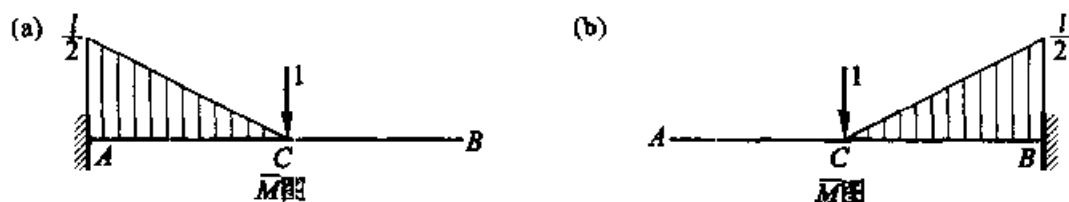


图 7-52

平面结构位移计算的一般公式为

$$\Delta = \sum \int (\bar{M}\kappa + \bar{F}_N\epsilon + \bar{F}_Q\gamma_0) ds - \sum \bar{F}_{Rk}c_k$$

对于静定和超静定结构都同样适用。下面专门给出超静定结构在荷载、支座移动和温度变化等因素作用下的位移公式。

#### (1) 荷载作用

设超静定结构在荷载作用下的内力为  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$ , 这时杆件微段的变形为

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{M}{EI} \\ \epsilon &= \frac{F_N}{EA} \\ \gamma_0 &= \frac{kF_Q}{GA}\end{aligned}$$

因此,位移公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_N}{EA} ds + \sum \int \frac{k\bar{F}_Q F_Q}{GA} ds \quad (7-12)$$

这个公式与静定结构的公式形式上完全相同。但需注意,这里的  $\bar{M}$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$  可以是任一基本结构(也可以是原计算超静定结构内力时取用的基本结构)在单位力作用下的内力。

#### (2) 支座移动

设支座移动时超静定结构的内力为  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$ , 这时杆件微段的变形仍为

$$\kappa = \frac{M}{EI}$$

$$\epsilon = \frac{F_N}{EA}$$

$$\gamma_0 = \frac{kF_Q}{GA}$$

因此,位移公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_N}{EA} ds + \sum \int \frac{k\bar{F}_Q F_Q}{GA} ds + \sum \bar{F}_{RK} C_K \quad (7-13)$$

### (3) 温度变化

设温度变化时超静定结构的内力为  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$ , 这时, 除内力引起弹性变形外, 还有微段在自由膨胀的条件下由温度引起的变形, 即

$$\kappa = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

$$\epsilon = \frac{F_N}{EA} + \alpha t_0$$

$$\gamma_0 = k \frac{Q}{GA}$$

因此,位移公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_N}{EA} ds + \sum \int \frac{k\bar{F}_Q F_Q}{GA} ds +$$

$$\sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \sum \int \bar{F}_N \alpha t_0 ds \quad (7-14)$$

### (4) 综合影响下的位移公式

如果超静定结构是在外荷载作用、支座移动、温度变化等因素的共同影响下, 则位移公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_N}{EA} ds + \sum \int \frac{k\bar{F}_Q F_Q}{GA} ds +$$

$$\sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t}{h} ds + \sum \int \bar{F}_N \alpha t_0 ds + \sum \bar{F}_{RK} C_K \quad (7-15)$$

式中  $M$ 、 $F_N$ 、 $F_Q$  是超静定结构在全部因素影响下的内力, 而  $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_N$ 、 $\bar{F}_Q$  和  $\bar{F}_R$  则是基本结构在单位力作用下的内力和支座反力。

**例 7-17** 试求例 7-13 中的超静定梁由于支座位移引起的跨中挠度。

**解** 支座位移时在超静定梁中引起的弯矩  $M$  图如图 7-45e 所示。

作单位弯矩图时, 选取两种基本结构:

(1) 取简支梁作基本结构, 图 7-53a 所示为单位力作用下的  $\bar{M}$  图和支座反力。

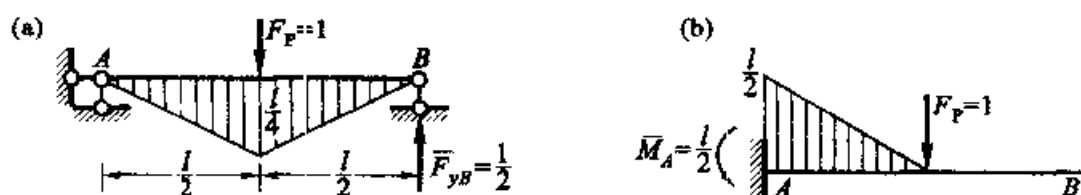


图 7-53

$$\Delta = \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds - F_{yB}(-a) = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \times \frac{l}{4} \cdot l \right) \times \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3EI}{l} \left( \theta - \frac{a}{l} \right) \right] - \frac{1}{2}(-a) = \frac{3}{16} \theta l + \frac{5}{16} a$$

(2) 取悬臂梁作基本结构, 图 7-53b 所示为单位力作用下的  $\bar{M}$  图和支座反力。

$$\Delta = \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds - \bar{M}_A(-\theta) = \frac{-1}{EI} \left( \frac{1}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \right) \left[ \frac{5}{6} \times \frac{3EI}{l} \left( \theta - \frac{a}{l} \right) \right] - \left( \frac{l}{2} \right) (-\theta) = \frac{3}{16} \theta l + \frac{5}{16} a$$

以上两种算法得到相同的结果。

## § 7-11 超静定结构计算的校核

超静定结构的计算过程较长, 数字运算较繁, 因而计算的校核工作很重要。关于校核工作, 可以指出以下几点:

(1) 要重视校核工作, 培养校核习惯。未经校核的计算书决不是正式的计算书。

(2) 校核并不是简单地重算一遍, 要培养校核的能力, 其中包括运用不同的方法进行定量校核的能力, 运用近似估算方法或者根据结构的力学性能对结果的合理性进行定性判断的能力。

(3) 要培养科学作风, 计算书要整洁易读, 层次分明。这样可少出差错, 也便于校核。

(4) 校核工作要分阶段进行, 要及时发现小错误, 避免造成大返工。

关于力法计算的阶段校核, 可以指出几点:

(1) 在计算前要核对计算简图和原始数据, 要检查基本体系是否几何可变。

(2) 求系数和自由项时, 先要校核内力图, 并注意正负号。

(3) 方程解完后, 应将解答代回原方程, 检查是否满足。

(4) 最重要的是对最后内力图进行总检查、总校核。



关于最后内力图的总校核要从平衡条件和变形条件两个方面来进行。下面以图 7-54a、b、c 所示内力图为例加以说明。

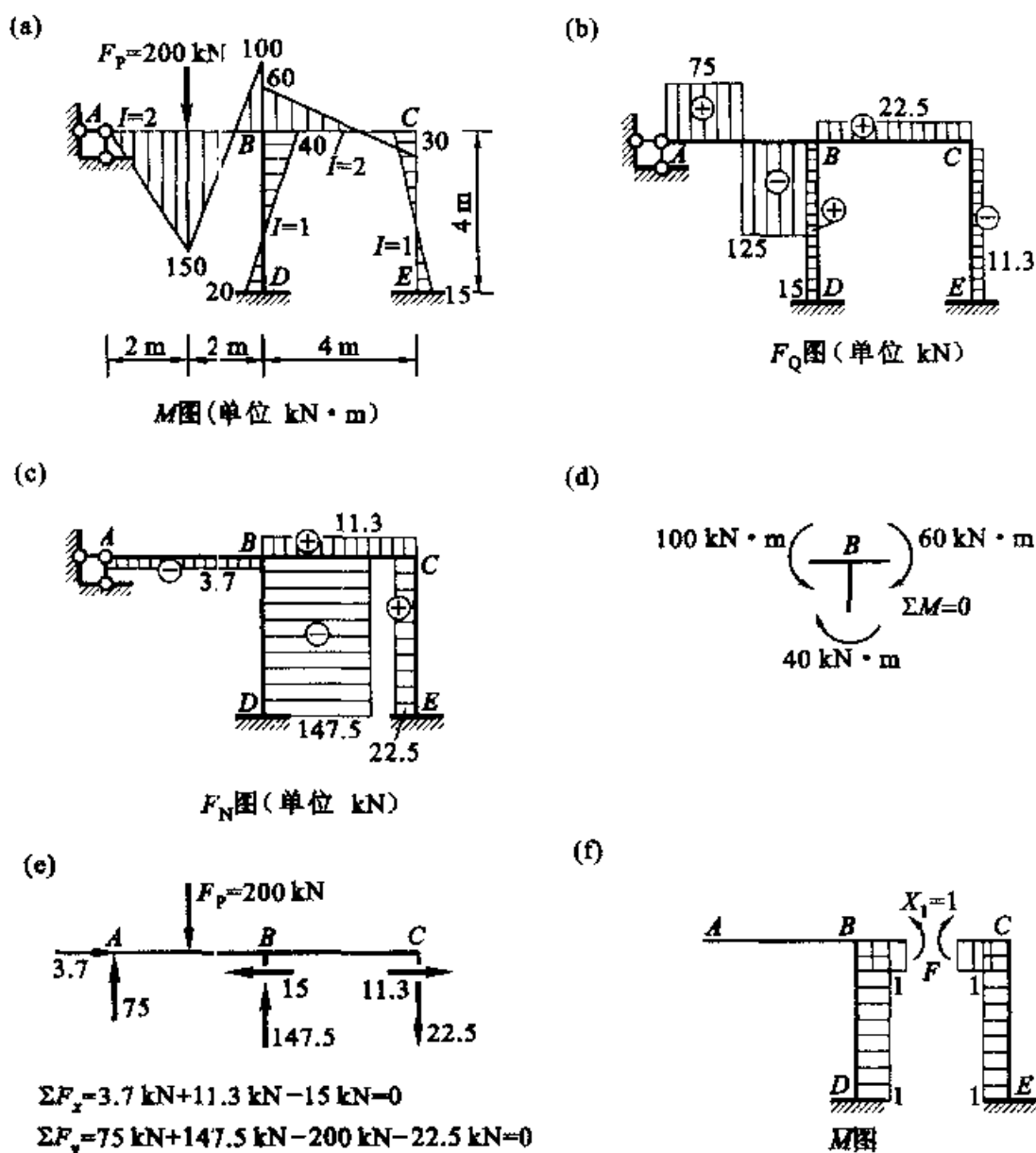


图 7-54

### 1. 平衡条件的校核

从结构中任意取出的一部分,都应当满足平衡条件。常用的作法是截取结点或截取杆件。例如,如图 7-54d 所示,截取结点 B(杆端剪力和轴力在图中未标出),检查是否满足平衡条件  $\Sigma M = 0$ ;如图 7-54e,截取杆件 ABC(杆端弯矩在图中未标出),检查是否满足平衡条件  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ 。从图中可以看出,以上的平衡条件是满足的。

## 2. 变形条件的校核

计算超静定结构的内力时,除平衡条件外,还应用了变形条件。因此,校核工作也应包括变形条件的校核。特别在力法中,计算工作量主要是在变形条件方面,因此校核工作也应以此为重点。

变形条件校核的一般作法是:任意选取基本结构,任意选取一个多余未知力  $X_1$ ,然后根据最后的内力图算出沿  $X_1$  方向的位移  $\Delta_1$ ,并检查  $\Delta_1$  是否与原结构中的相应位移(如给定值  $a$ )相等,即检查是否满足下式:

$$\Delta_1 = a \quad (7-16)$$

如果按式(7-15)求位移  $\Delta_1$ ,则上式变为

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \sum \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_N}{EA} ds + \sum \int \frac{k\bar{F}_Q F_Q}{GA} ds + \\ & \sum \int M \frac{a\Delta t}{h} ds + \sum \int \bar{F}_N a t_0 ds - \sum F_{KK} c_K = a \end{aligned} \quad (7-17)$$

式中,  $\bar{M}$ 、 $\bar{F}_N$ 、 $\bar{F}_Q$  和  $\bar{F}_K$  为基本结构在单位力  $X_1 = 1$  作用下的内力和支座反力。

如果原结构只受荷载作用,则式(7-16)的左边项  $\Delta_1$  可按式(7-12)计算,右边项则为零,因此可写成

$$\sum \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_N}{EA} ds + \sum \int \frac{k\bar{F}_Q F_Q}{GA} ds = 0 \quad (7-18)$$

例如,为了校核图 7-54a 所示的  $M$  图,可选用图 7-54f 所示的基本结构,并取杆  $BC$  中任一截面  $F$  的弯矩作为多余未知力  $X_1$ 。这时,在单位力  $X_1 = 1$  作用下,只有封闭框形  $DBCE$  部分产生弯矩  $\bar{M} = 1$ 。因此,变形条件(7-18)为

$$\oint \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (7-19)$$

由此得出结论,当结构只受荷载作用时,沿封闭框形的  $\frac{M}{EI}$  图形的总面积应等于零。

现在利用这个结论来检查图 7-54a 中的  $M$  图。沿  $DBCE$  部分进行积分,其值为

$$\begin{aligned} \oint \frac{M}{I} ds = & \frac{1}{1} \left( -\frac{20 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 4 \text{ m}}{2} + \frac{40 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 4 \text{ m}}{2} \right) + \\ & \frac{1}{2} \left( -\frac{60 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 4 \text{ m}}{2} + \frac{30 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 4 \text{ m}}{2} \right) + \\ & \frac{1}{1} \left( -\frac{15 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 4 \text{ m}}{2} + \frac{30 \text{ kN}\cdot\text{m} \times 4 \text{ m}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= -130 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 + 170 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \neq 0$$

可见这个  $M$  图未能满足变形条件,因此计算结果显然是错误的。

**例 7-18** 试对例 7-13 的计算结果(图 7-45e 中的  $M$  图)进行校核。

**解** 选取图 7-45b 所示的基本体系,单位弯矩图如图 7-45d 所示。这时的变形条件可由式(7-17)写出如下:

$$\frac{1}{EI} \int \bar{M} M ds - M_A \theta = -a \quad (7-20)$$

现在利用式(7-20)来检查图 7-45e 中的  $M$  图。先计算式(7-20)的左边项

$$\frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \right) \left[ \frac{2}{3} \times \frac{3EI}{l} \left( \theta + \frac{a}{l} \right) \right] - l \cdot \theta = -a$$

可见图 7-45e 中的  $M$  图满足变形条件(7-20)。

## § 7-12 用求解器进行力法计算

求解器可以求解一般的平面超静定结构的位移和内力。超静定结构的计算通常与结构各杆件的刚度有关。由于前面已经介绍了如何输入各杆件的材料性质,因此超静定结构的求解无需引入新的输入命令;在位移计算的基础上,直接选择“求解”菜单中的“内力计算”、“位移计算”或“位移内力”等菜单即可。对此这里不再赘述。

为了加深和加强力法的概念,本节讨论如何用求解器进行力法的辅助计算。

传统上,将力法的基本体系取为静定结构,主要是因为静定结构容易摆弄和计算,手算时尤其如此。其实,只要计算上无困难(譬如用求解器求解),超静定结构同样可以被用作基本体系。下面看一个超静定结构基本体系的具体例题。

**例 7-19** 用求解器试求图 7-55 中的二次超静定刚架。取结点 3 水平支杆反力为基本未知力,各杆长相等  $l = 4 \text{ m}$ ,刚度参数如下

杆件(1):  $EA = 5.2 \times 10^6 \text{ kN}$ ,  $EI = 1.25 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$

杆件(2):  $EA = 4.5 \times 10^6 \text{ kN}$ ,  $EI = 1.2 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$

**解** 力单位为  $\text{kN}$ ,尺寸单位为  $\text{m}$ 。依题意,取基本体系如图 7-56a 所

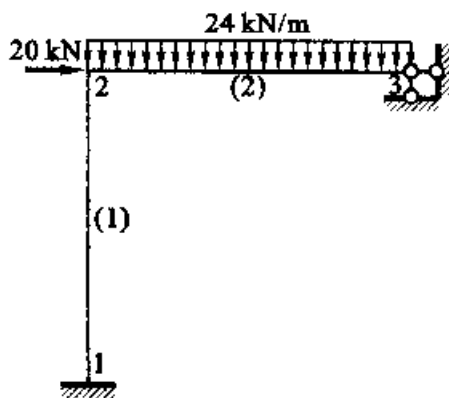
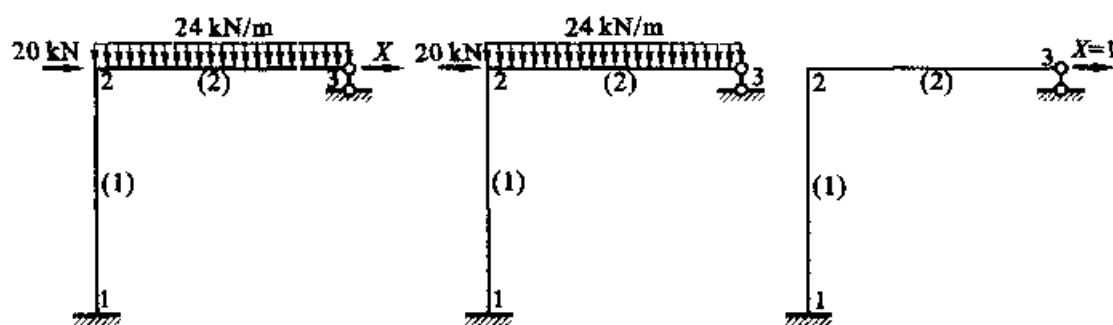


图 7-55

示,此基本体系是超静定的。图 7-56b 和图 7-56c 分别给出了仅荷载作用和仅单位未知力作用下的计算简图。图 7-56a~7-56c 的命令文档列在了计算简图的下面,其中后两个文档只在个别给出的命令处有区别。



(a) 超静定基本体系

(b) 仅荷载作用

(c) 单位未知力作用

图 7-56

N,1,0,0	...	...
N,2,0,4		
N,3,4,4		
E,1,2,1,1,1,1,1,1	...	...
E,2,3,1,1,1,1,1,1		
NSUPT,1,6,0,0,0,0	...	
NSUPT,3,2,0,0	NSUPT,3,1,0,0	...
NLOAD,2,1,20,0	...	NLOAD,3,-1,1,180
ELOAD,2,3,24,0,1,90		C ELOAD,2,3,24,0,1,90
ECHAR,1,1,5.2E6,1.25E5,0,0,-1		...
ECHAR,2,2,4.5E6,1.2E5,0,0,-1		
END	...	...

首先计算荷载作用下结点 3 水平位移  $\Delta_p$ 。输入图 7-56b 下面的命令文档后,在“求解”菜单下选“位移计算”打开位移计算对话框。在“位移显示”栏中选“结构”,可看到对话框下端表格中给出了杆端位移。找到单元 (2) 的第 2 个杆端的位移  $u$  的值。为了获得较多的有效数字,在“乘以系数”下拉框中选 0.000 001,由此得到  $\Delta_p = 0.022\ 924\ 26\ \text{m}$ 。

类似地计算单位未知力作用下结点 3 的水平位移  $\delta_{11}$ ,得  $\delta_{11} = 0.000\ 076\ 651\ \text{m}$ 。由以上结果有  $X = -\Delta_p/\delta_{11} = -29.907\ 285\ \text{kN}$ 。最后,将荷载和求出的基本未知力共同作用在基本结构上,用求解器求解,得变形图、弯矩图如图 7-57 所示。可以看出,结点 3 确实没有水平位移;说明位移

协调条件已得到满足。

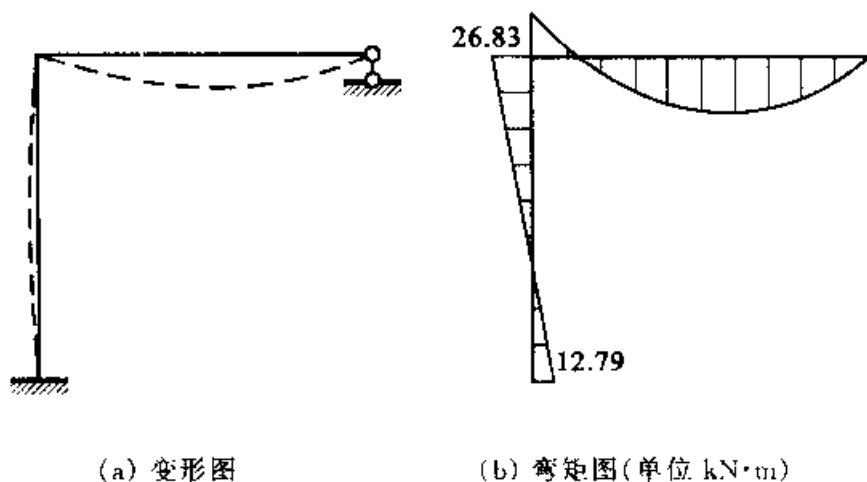


图 7-57

### § 7-13 小 结

掌握力法的基本原理,主要是了解力法的基本未知量、力法的基本体系和力法方程这三个环节。在力法中,把多余未知力的计算作为突破口。突破了这个关口,超静定问题就转化为静定问题。计算多余未知力的方法是:首先把多余约束去掉,以暴露多余未知力;然后使多余约束弥合,以解出多余未知力。前者是取基本体系,后者是列力法方程。

计算超静定结构时,要同时运用平衡条件和变形条件。这里要着重了解变形条件的运用:对于每一个超静定结构,它有几个独立的变形条件?每个变形条件的几何意义是什么?如何考虑荷载、温度和支座位移等不同因素的影响?变形条件如何用方程来表示?方程中每一项代表什么意义?如何求出方程中的系数和自由项?

除对变形条件应理解透彻外,还要应用前几章的原理,即

(1) 利用第 2 章的几何构造分析方法来确定超静定次数和判定基本结构是否几何不变;

(2) 利用静定结构的计算方法作基本结构的内力图;

(3) 利用第 6 章计算位移的方法求力法方程的系数和自由项。

这三方面应当作适当的复习,并通过力法计算得到巩固和提高。

还要注意,拱结构是曲杆,计算有些特点。计算位移时,忽略轴力影响、剪力影响或曲率影响是有一定条件的;同时图乘法不能采用,因而需要直接积分或采用数值积分。

为了使计算简化,要善于选取合适的基本体系,会利用对称性。

以上是本章的主要内容,应当通过较多的练习牢固地掌握。此外,我们还要记住,计算超静定结构的位移时,虚设的单位力可以加在任意基本结构上。

由能量法不仅可以导出力法方程,而且还使力法具有更多的灵活性。计算同一结构时,荷载与基本未知力可以加于不同的基本结构。这种作法的合理性直接从力法概念是不易解释的,从能量方法就很容易理解了。

最后指出,本章所讨论的超静定结构都属于线性变形体系。对于非线性变形体系,力法的概念和方法也可以应用。我们仍然可以选取基本体系和基本未知量,并根据其应满足的变形条件(例如: $\Delta_1 = 0$ 、 $\Delta_2 = 0$ 等)建立力法方程,但这时不能应用叠加原理,因而不能列出式(7-4)那样的典型方程,同时,在计算基本体系的位移时也不能采用线性变形体系的位移公式。

顺便指出,本章习题 7-1a、b、h, 7-3a, 7-5a, 7-8a 可供辅导课选用参考。思考题 7-23, 7-24 及习题 7-24, 7-25 是提高性的综合题,有的要借助于求解器求解,供参考。

## § 7-14 思考与讨论

### § 7-2 思考题

7-1 用力法解超静定结构的思路是什么?什么是力法的基本体系、基本结构和基本未知量?为什么首先要计算基本未知量?基本体系与原结构有何异同?基本体系与基本结构有何不同?

7-2 力法方程的物理意义是什么?

7-3 试从物理意义上说明,为什么力法方程中的主系数必为大于零的正值,而副系数可为正值或负值或为零。

### § 7-3 思考题

7-4 为什么静定结构的内力状态与  $EI$  无关?为什么超静定结构的内力状态与  $EI$  有关?

7-5 为什么在荷载作用下超静定刚架的内力状态只与各杆  $EI$  的相对值有关,而与其绝对值(真值)无关?

### § 7-4 思考题

7-6 试比较在荷载作用下用力法计算刚架、排架、桁架和组合结构的异同。

7-7 在超静定桁架、组合结构及厂房排架中,用撤去多余链杆的基本体系代替切开多余链杆的基本体系,这种算法是否正确?二者的力法方程有何异同?

### § 7-5 思考题

7-8 什么叫对称结构?为什么利用对称性可以使计算得到简化?

7-9 利用对称性简化结构计算有哪几种作法?

### § 7-6 思考题

7-10 图 7-33 中的两铰拱受半跨均布荷载  $q$  作用, 拱轴  $y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$ , 试取三铰拱为基本结构, 计算其推力并画弯矩图。

讨论: 三铰抛物线拱受半跨均布荷载  $q$  作用, 可分为对称作用的全跨均布荷载  $\frac{q}{2}$ , 和反对称作用的均布荷载  $\frac{q}{2}$ 。前者无弯矩, 后者弯矩为反对称,  $X_1$  是对称的; 故  $\Delta_{1P} = 0$ ,  $X_1 = 0$ 。

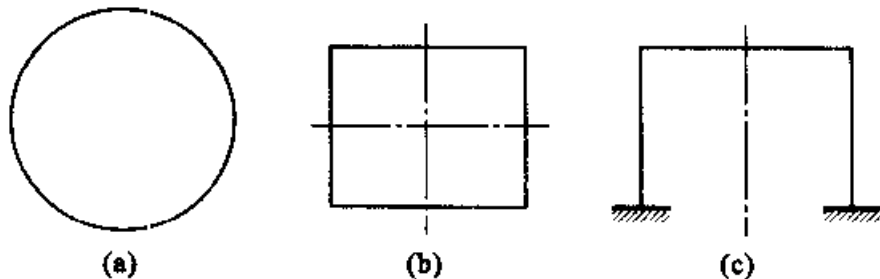
7-11 能不能说两铰拱在均布荷载  $q$  作用下的合理轴线仍是抛物线  $y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$ ? 能不能说在均布荷载  $q$  作用下,  $y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$  形状的两铰拱与同样形状的两铰拱实际受力状态是一样的? 为什么?

### § 7-7 思考题

7-12 计算拱的位移时,  $M$ 、 $F_Q$ 、 $F_N$  的影响哪个重要? 哪个次要? 在什么情况下可以忽略  $F_Q$  和  $F_N$  的影响?

7-13 什么叫弹性中心? 怎样确定弹性中心的位置? 弹性中心法的好处是什么?

除了无铰拱外, 下图这些结构可以用弹性中心法求解吗? 用弹性中心法求解这类结构时, 有什么共同的特点?



思考题 7-13 图

### § 7-9 思考题

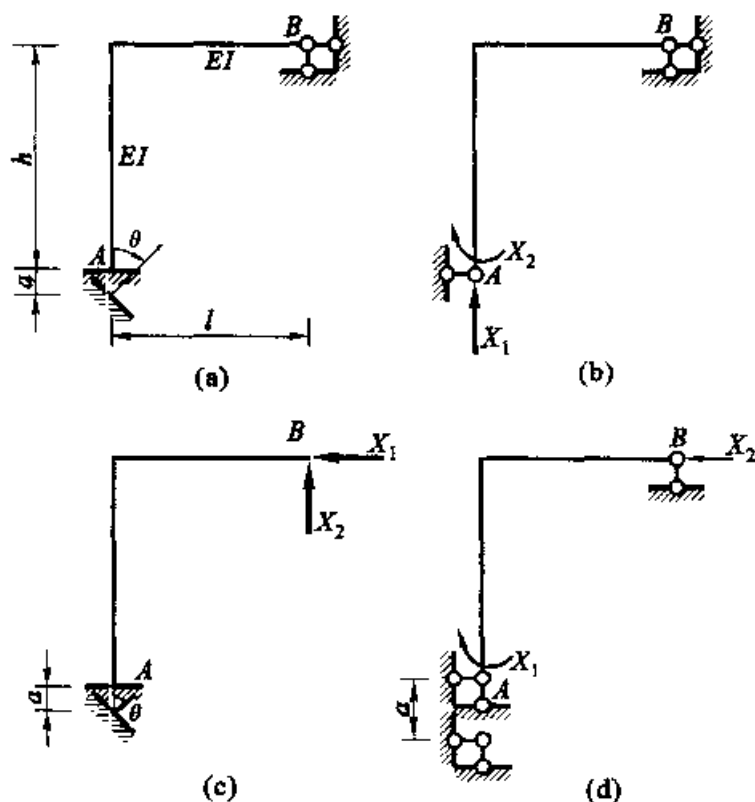
7-14 结构上没有荷载就没有内力, 这个结论在什么情况下适用? 在什么情况下不适用?

7-15 用力法计算超静定结构时, 考虑支座移动、温度改变等因素的影响与考虑荷载作用的影响, 两者有何异同?

7-16 图 a 所示刚架, 支座 A 发生转角  $\theta$  和竖向位移  $a$ , 试用以下不同的基本体系求解。

- (1) 基本体系中不保留支座位移(图 b);
- (2) 基本体系中保留全部支座位移(图 c);

(3) 基本体系中保留部分支座位移(图 d)。



思考题 7-16 图

### § 7-10 思考题

7-17 计算超静定结构的内力时,在什么情况下只需给出  $EI$ (或  $EA$ )的相对值,在什么情况下需给出  $EI$  的绝对值?为什么?

7-18 计算超静定结构的位移与计算静定结构的位移,二者有何异同?

7-19 为什么计算超静定结构的位移时单位荷载可加在基本结构上?

7-20 计算超静定结构的位移时,各杆的  $EI$  能用相对值吗?为什么?

### § 7-11 思考题

7-21 变形条件(7-19)的物理意义是什么?为什么用力法计算超静定结构的结果必须进行变形条件的校核?

7-22 计算超静定结构的位移不能用各杆  $EI$ (或  $EA$ )的相对值,而需用其绝对值;若用变形条件校核荷载产生的内力时,为什么又可以用  $EI$  的相对值?用变形条件校核支座移动或温度变化产生的内力时能否用  $EI$ (或  $EA$ )的相对值?为什么?

### 综合思考题

7-23 图示刚架,上梁的  $I_2$  是下梁  $I_1$  的  $s$  倍,即  $I_2 = sI_1$ 。

(1) 试用超静定的基本结构按只有一个基本未知力  $X_1$  求解,与用静定的基本结构求解,比较二者的计算过程和结果

(2) 当  $s$  变化时(如:  $s = 0.1, 1, 10$ ),求内力图的变化。

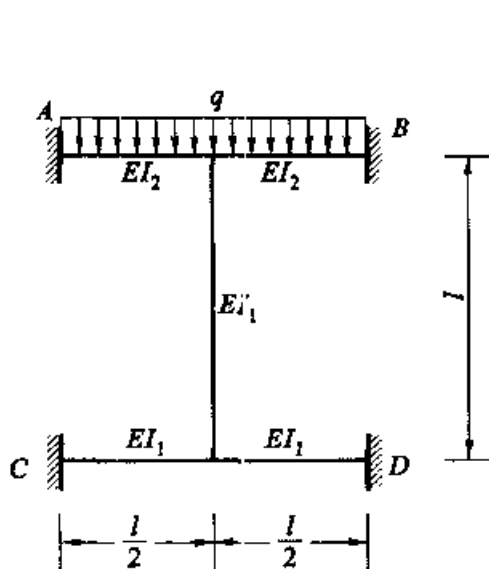


讨论:(1) 本题可选用超静定的基本结构,按只有一个基本未知力  $X_1$  求解。

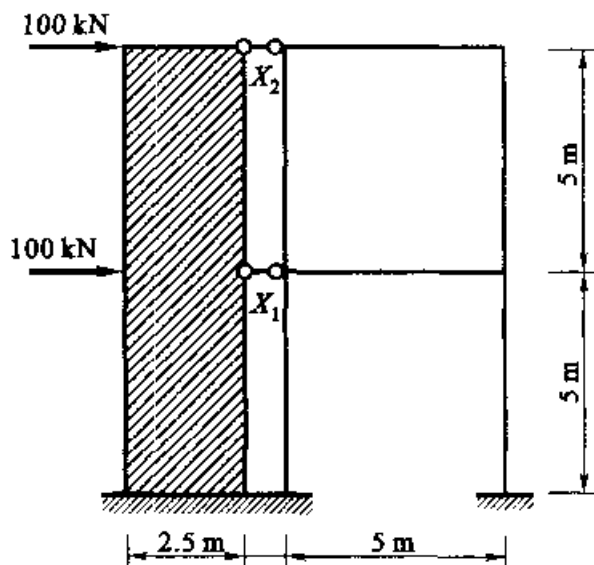
1) 超静定结构取静定结构作基本结构是因为静定结构可解(已知);当某超静定结构的内力和位移可解(已知)时,则也可以用它作为基本结构。

2) 本题因为对称,竖杆无弯矩、剪力,而只有轴力、切断此竖杆,其轴力可取为基本未知力  $X_1$ ,此时的基本结构是超静定的。

3) 利用变形协调条件,可建立力法方程,求得  $X_1$ 。



思考题 7-23 图



思考题 7-24 图

(2) 试分析结构的内力如何随杆件的刚度比而变化。

1) 当  $EI_1 \rightarrow 0$  时,只有 AB 梁起作用,此时结构变为两端固定梁 AB。

2) 当  $EI_1 \rightarrow \infty$  时,上梁 AB 变为中间固定的两跨梁。

建议有兴趣的读者自己完成此题。

7-24 试求图示刚架—剪力墙组合体系的内力。已知剪力墙厚度为 0.12 m,宽度为 2.5 m;刚架柱截面尺寸为 0.4 m×0.6 m,横梁为无限刚性。材料的弹性模量相同,均为 E。

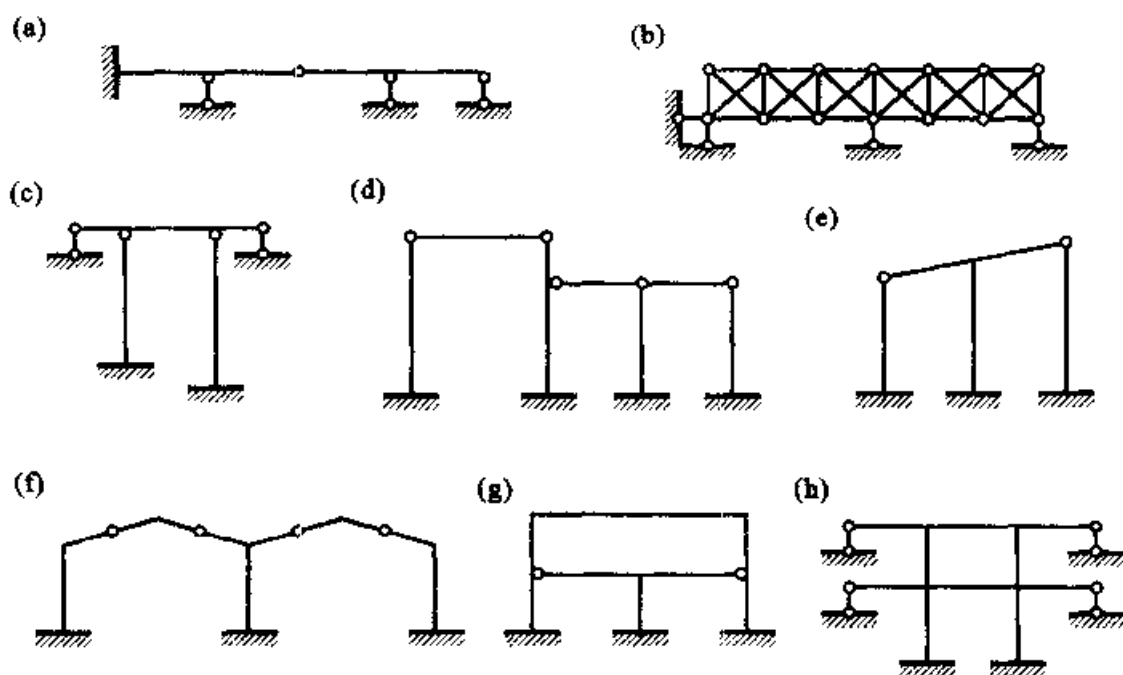
讨论:完全取静定结构作基本结构,本题将有几个基本未知力?

如果只用两个基本未知力  $X_1$ 、 $X_2$ ,并采用超静定的基本结构,试应用力法原理求解此题。

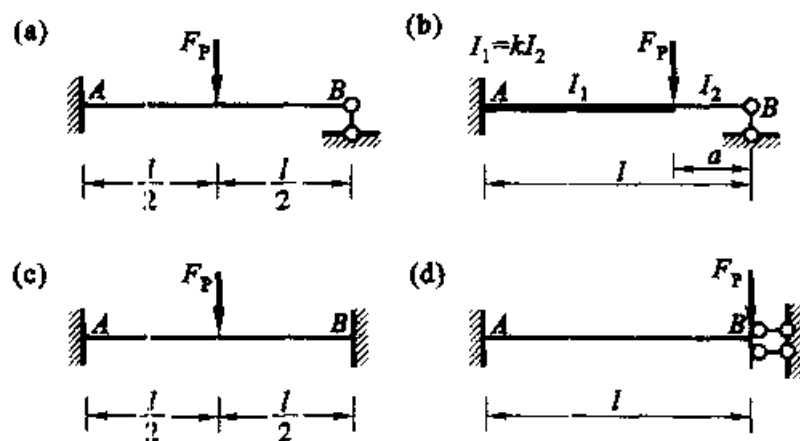
## 习 题

7-1 试确定下列结构的超静定次数。

7-2 试用力法计算下列结构,作  $M$ 、 $F_Q$  图。除图 b 为变截面外,其余各图  $EI$ —常数。



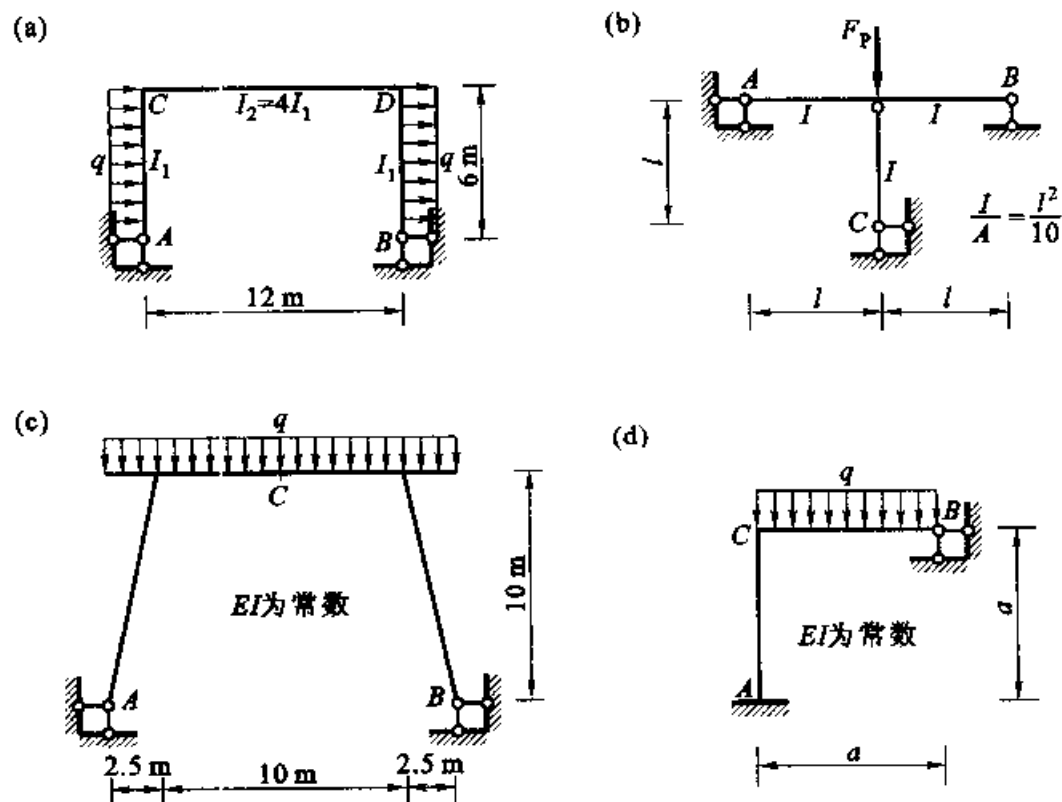
题 7-1 图



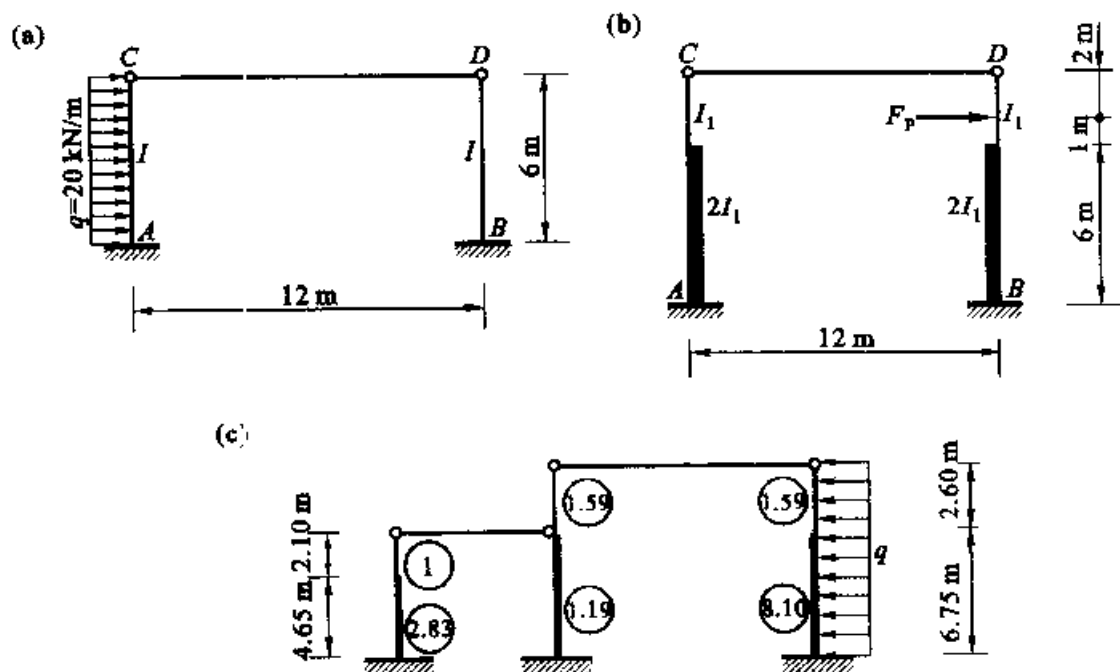
题 7-2 图

7-3 试用力法计算下列刚架,作  $M$  图。

7-4 试用力法计算下列排架,作  $M$  图。(图 c 中圆圈内的数字代表各杆  $EI$  的相对值)

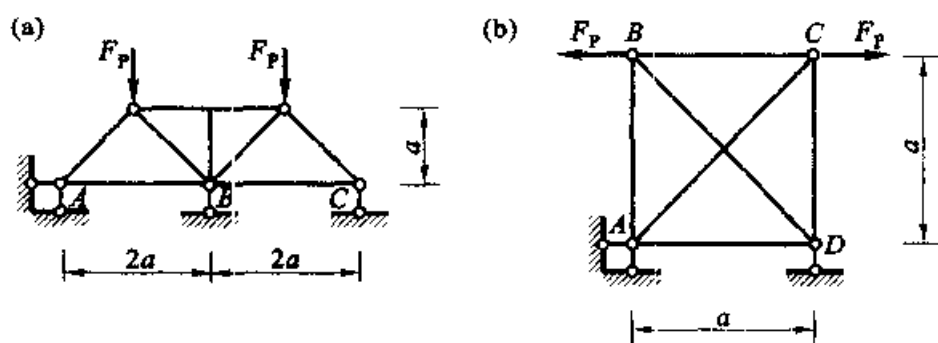


题 7-3 图



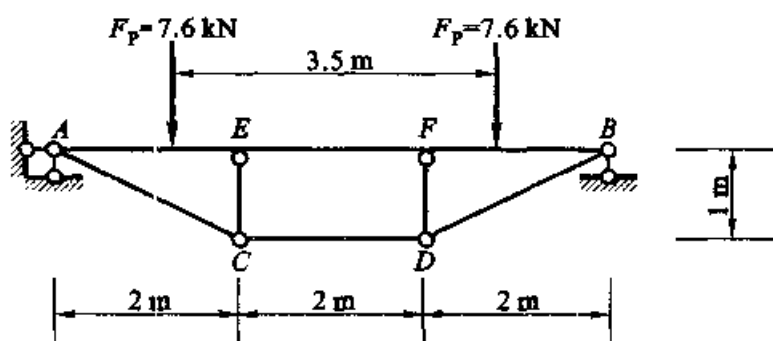
题 7-4 图

7-5 试用力法计算下列桁架的轴力。各杆  $EA$ —常数



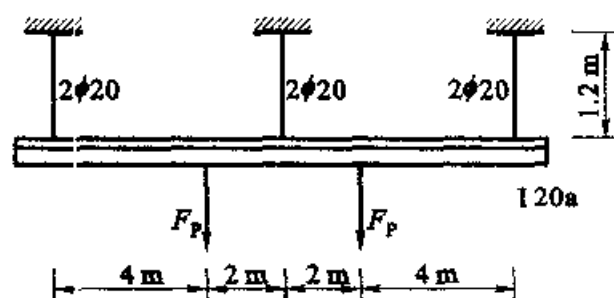
题 7-5 图

7-6 图示一组合式吊车梁,上弦横梁截面  $EI = 1400 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ,腹杆和下弦的  $EA = 2.56 \times 10^5 \text{ kN}$ 。试计算各杆内力,作横梁的弯矩图



题 7-6 图

7-7 图示连续两跨悬挂式吊车梁,承受吊车荷载  $F_P = 4.5 \text{ kN}$ ,考虑吊杆的轴向变形。试计算吊杆的拉力和伸长,画出梁的  $M$ 、 $F_Q$  图。 $\phi 20$  钢筋每根截面积  $A = 3.14 \text{ cm}^2$ , 120 a 钢梁  $I = 2370 \text{ cm}^4$ 。

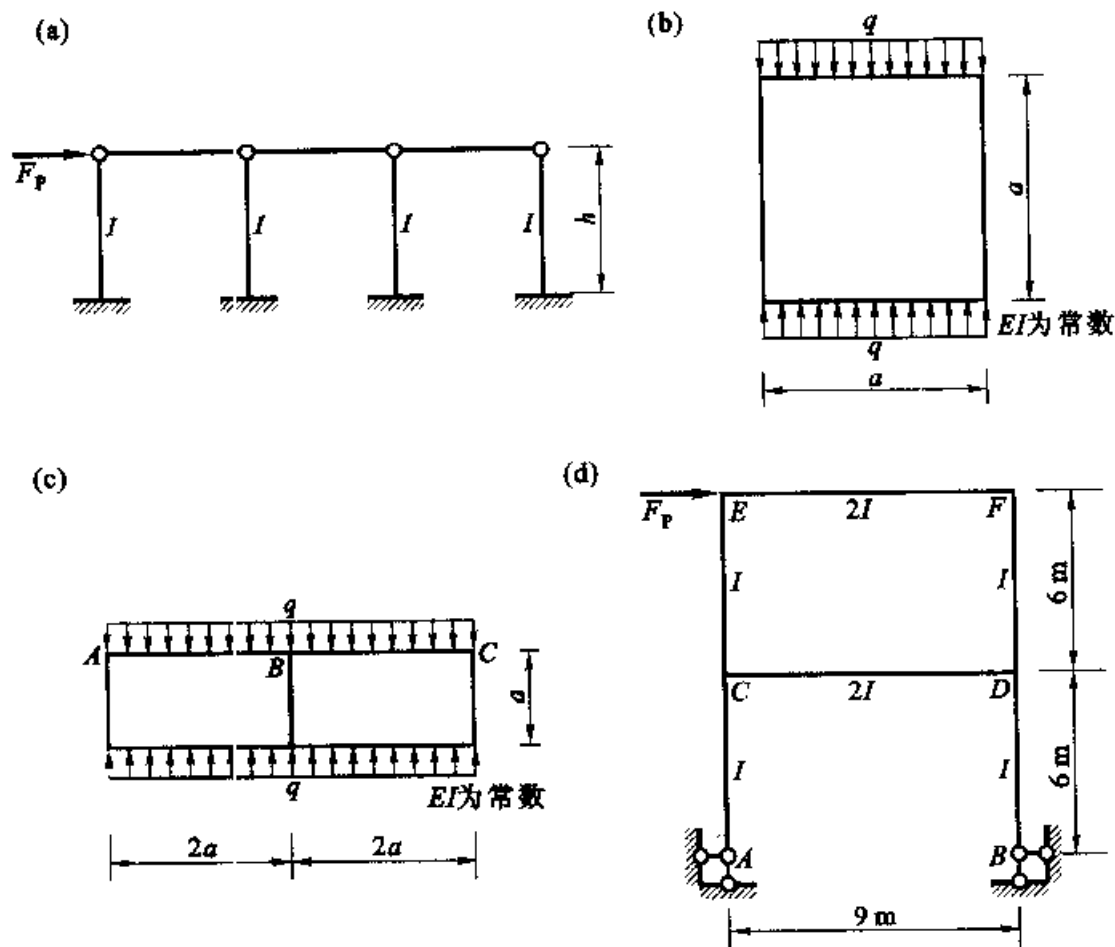


题 7-7 图

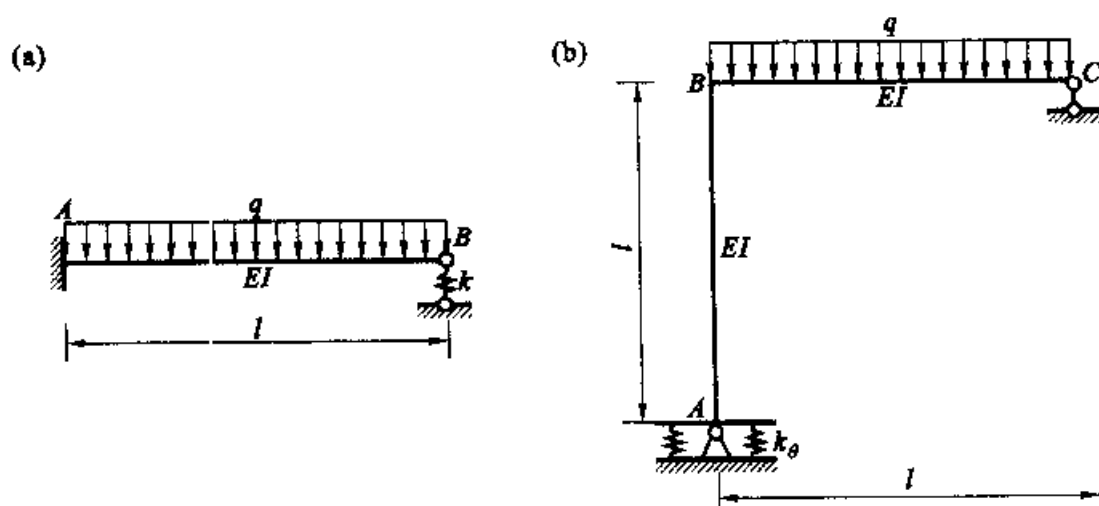
7-8 试作下列对称刚架的  $M$  图。

7-9 试求解下列具有弹性支座的结构(图 a 中弹性支座刚度  $k = \frac{3EI}{l^3}$ , 图 b 中弹性

水平抗转动刚度  $k_t = \frac{EI}{l}$ ), 并作  $M$  图。

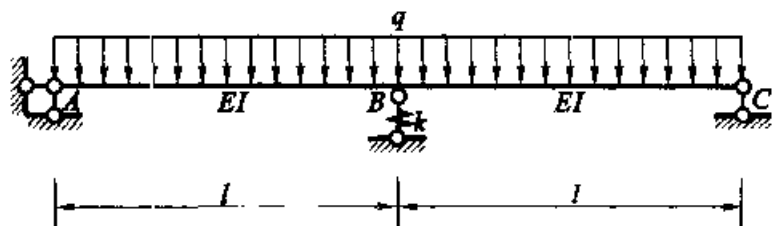


题 7-8 图



题 7-9 图

7-10 为使梁截面  $B$  的弯矩为零,试问弹性支座刚度  $k$  应取多大? 并求此时  $B$  点的挠度。

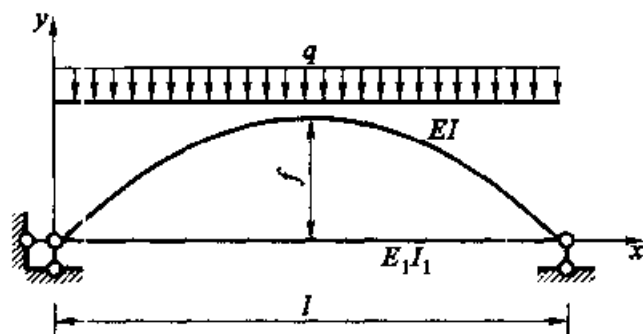


题 7-10 图

7-11 试推导带拉杆抛物线两铰拱在均布荷载作用下拉杆内力的表达式。拱截面  $EI$  为常数,拱轴方程为

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

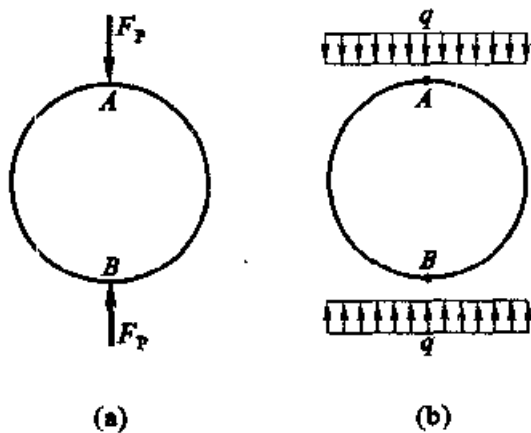
计算位移时,拱身只考虑弯矩的作用,并假设  $ds = dx$ 。



题 7-11 图

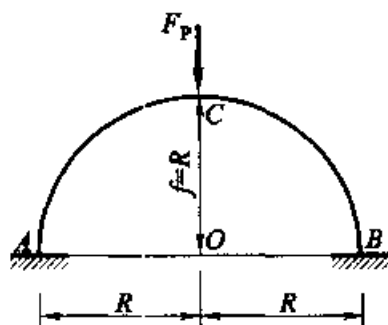
7-12 试求等截面圆弧两铰拱当  $\frac{f}{l} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  时,在满跨均布竖向荷载  $q$  作用下的推力。

7-13 试求等截面圆管在图示荷载作用下的内力。圆管半径为  $R$ 。

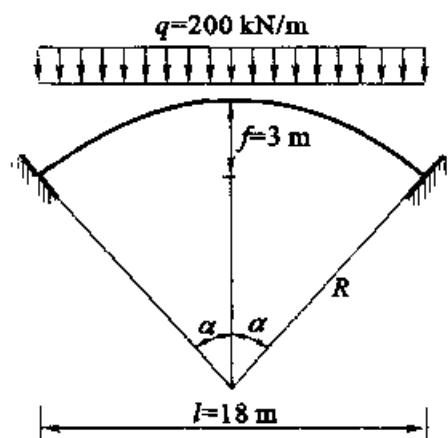


题 7-13 图

7-14 试求等截面半圆无铰拱在拱顶受集中荷载  $F_P$  时的内力



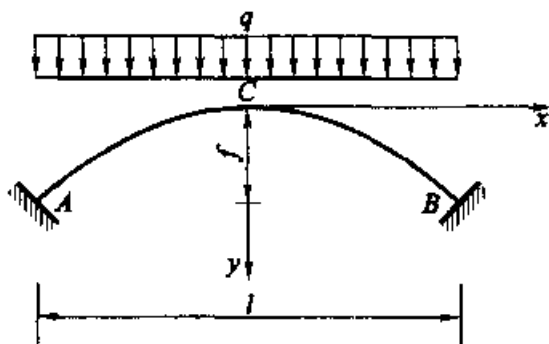
题 7-14 图



题 7-15 图

7-15 图示一等截面圆弧形无铰拱,试求拱顶和拱脚截面弯矩。

7-16 抛物线无铰拱的轴线方程  $y = \frac{4f}{l^2} x^2$ 。截面面积  $A = \frac{A_0}{\cos \varphi}$ , 惯性矩  $I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$ ,  $A_0$  和  $I_0$  为拱顶截面处的面积和惯性矩。 $l = 18 \text{ m}$ ,  $f = 3 \text{ m}$ , 拱顶处截面高度为  $h = 0.6 \text{ m}$ , 考虑弹性压缩。试求拱的水平推力、拱顶和拱脚截面处内力 (其中  $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$ )。

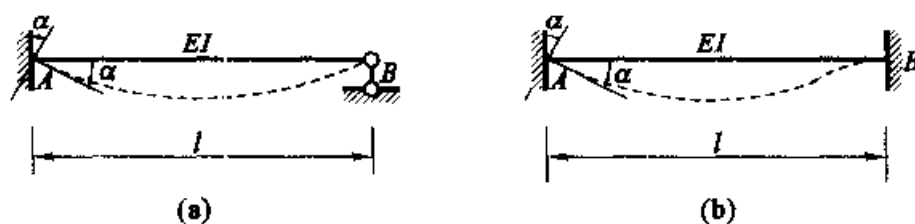


题 7-16 图

7-17 试用能量法重作题 7-8。

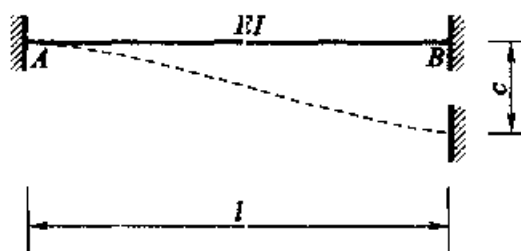
7-18 试采用不同的基本结构 (即基本未知力与荷载加于不同的基本结构) 重作题 7-15 和题 7-16 所示的无铰拱。

7-19 设图示梁 A 端有转角  $\alpha$ , 试作梁的  $M$  图和  $F_Q$  图; 对每一个梁选用两种基本体系计算, 并求梁的挠曲线方程和最大挠度。

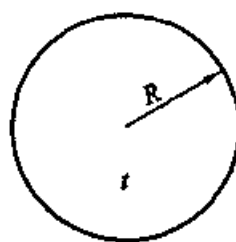


题 7-19 图

7-20 设图示梁 B 端下沉  $c$ , 试作梁的  $M$  图和  $F_Q$  图。



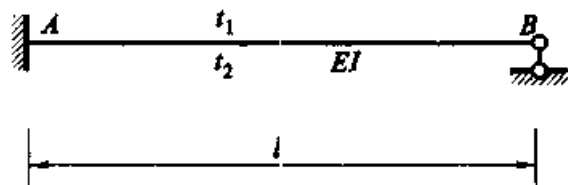
题 7-20 图



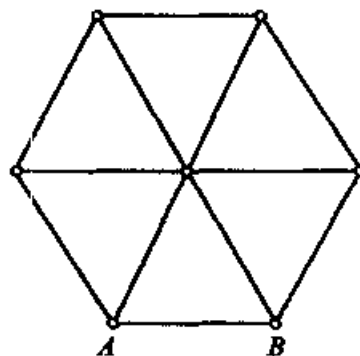
题 7-21 图

7-21 钢筋混凝土烟囱平均半径为  $R$ , 壁厚  $h$ , 温度膨胀系数为  $\alpha$ 。当内壁温度与外壁温度差值为  $t$  时, 试求烟囱内力。

7-22 梁上、下侧温度变化分别为  $+t_1$  与  $+t_2$  ( $t_2 > t_1$ ), 梁截面高  $h$ , 温度膨胀系数  $\alpha$ , 试求作  $M$  图及挠曲线方程。



题 7-22 图

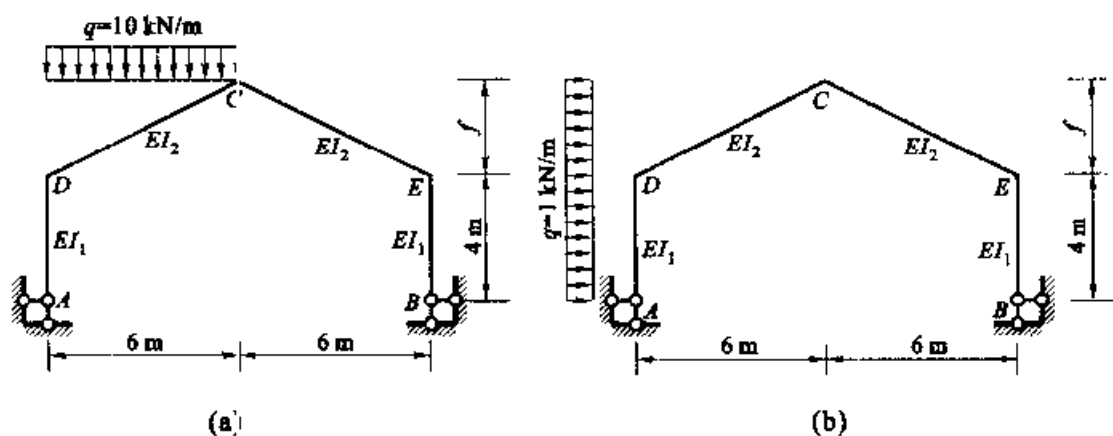


题 7-23 图

7-23 图示桁架, 各杆长度均为  $l$ ,  $EA$  相同。但杆  $AB$  制作时短了  $\Delta$ , 将其拉伸 (在弹性极限内) 后进行装配。试求装配后杆  $AB$  的长度。

7-24 图示门式刚架, 梁的  $I_2$  是柱的  $I_1$  的  $s$  倍, 即  $I_2 = sI_1$ ,  $s$  值分三种情况:  $s = 0.2, 1.5$ ; 屋顶矢高有四种取值:  $f = 0 \text{ m}, 0.6 \text{ m}, 2 \text{ m}, 4 \text{ m}$ 。试求:



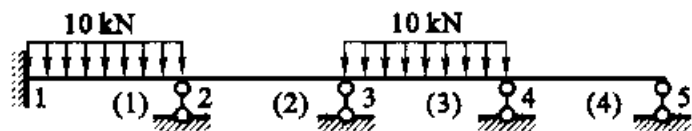


题 7-24 图

(a) 固定  $f = 2\text{ m}$ , 各种  $s$  值时内力的变化;

(b) 固定  $s = 1$ , 各种  $f$  值时内力的变化。

7-25 试用求解器求解图中结点 3 处竖直支杆反力。按力法原理求解, 以结点 3 支杆反力作为基本未知力, 原结构中去除该支杆得到的体系为基本体系。各跨其他参数相同: 跨长为  $10\text{ m}$ ,  $EA = 5 \times 10^6\text{ kN}$ ,  $EI = 2 \times 10^5\text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 。



题 7-25 图

# 第8章

## 位 移 法

§ 8-1 位移法的基本概念	§ 8-6 对称结构的计算
§ 8-2 等截面杆件的刚度方程	§ 8-7 支座位移和温度改变时的计算
§ 8-3 无侧移刚架的计算	§ 8-8 小结
§ 8-4 有侧移刚架的计算	§ 8-9 思考与讨论
§ 8-5 位移法的基本体系	习题

位移法是计算超静定结构的第二个基本方法。位移法将结构拆成杆件,以杆件的内力和位移关系作为计算的基础;再把杆件组装成结构,这是通过各杆件在结点处的力的平衡和变形的协调来实现的。

本章主要讨论位移法的原理和应用位移法计算刚架。取刚架的结点位移作基本未知量,由结点的平衡条件建立位移法方程。位移法方程有两种表现形式:直接写平衡方程的形式和基本体系典型方程的形式,二者是等价的;前者便于了解和手算,后者利于与力法及后面以计算机计算为基础的矩阵位移法对比,以加深对内容的理解。

### § 8-1 位移法的基本概念

#### 1. 关于位移法的简例

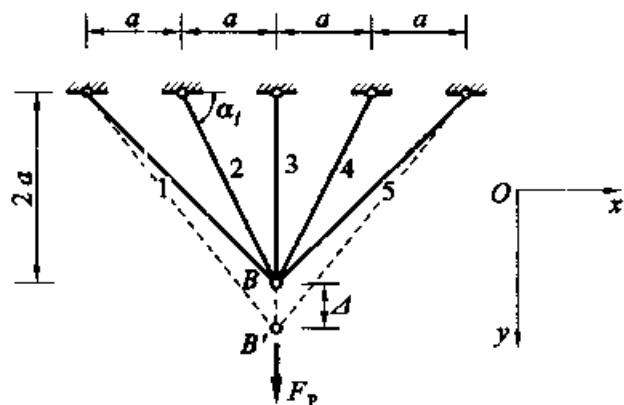
先看一个简单的桁架例子,以便更具体地了解位移法的基本思路。

图 8-1a 为一个对称结构,承受对称荷载  $F_P$ 。结点 B 只发生竖向位移  $\Delta$ ,水平位移为零。在位移法中,我们把此竖向位移  $\Delta$  选作基本未知量。这是因为:如果能设法把位移  $\Delta$  求出,那么各杆的伸长变形即可求出,从而各杆的内力就可求出,整个问题也就迎刃而解了。由此看出,位移  $\Delta$  确是一个关键的未知量。

现在进一步讨论如何求基本未知量  $\Delta$  的问题。计算分为两步:

第一步,从结构中取出一个杆件进行分析。

(a)



(b)

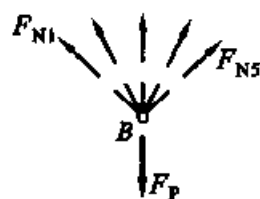
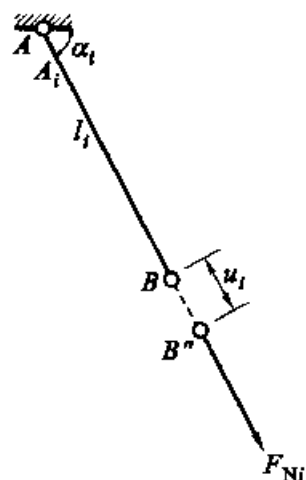


图 8-1

(a)



(b)

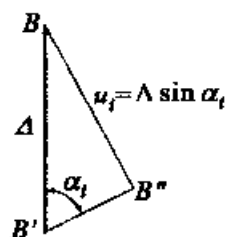


图 8-2

图 8-2a 中杆  $AB$ , 如已知杆端  $B$  沿杆轴向的位移为  $u_i$  (即杆的伸长), 则杆端力  $F_{Ni}$  应为

$$F_{Ni} = \frac{EA_i}{l_i} u_i \quad (8-1)$$

式中  $E$ 、 $A_i$ 、 $l_i$  分别为杆件的弹性模量、截面面积和长度。系数  $\frac{EA_i}{l_i}$  是使杆端产生单位位移时所需施加的杆端力, 称为杆件的刚度系数。式 (8-1) 表明杆件的杆端力  $F_{Ni}$  与杆端位移  $u_i$  之间的关系, 称为杆件的刚度方程。

第二步, 把各杆件综合成结构。综合时各杆在  $B$  端的位移是相同的, 即都由  $B$  改变到  $B'$ , 此为变形协调条件。根据变形协调条件, 各杆端位移  $u_i$  与基本未知量  $\Delta$  间的关系为 (图 8-2b)

$$u_i = \Delta \sin \alpha_i \quad (a)$$

再考虑结点  $B$  的平衡条件  $\sum F_y = 0$ , 得 (图 8-1b)

$$\sum_{i=1}^5 F_{N_i} \sin \alpha_i = F_P \quad (b)$$

其中各杆的轴力  $F_{N_i}$  可由式(8-1)表示,再利用式(a)可用基本未知量  $\Delta$  表示,代入式(b),即得

$$\sum_{i=1}^5 \frac{EA_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i \Delta = F_P \quad (c)$$

这就是位移法的基本方程,它表明结构的位移  $\Delta$  与荷载  $F_P$  之间的关系。由此可求出基本未知量

$$\Delta = \frac{F_P}{\sum_{i=1}^5 \frac{EA_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i} \quad (d)$$

至此,完成了位移法计算中的关键一步。

基本未知量  $\Delta$  求出以后,其余问题就迎刃而解了。例如,为了求各杆的轴力,可将式(d)代入式(a),再代入式(8-1),可得

$$F_{N_i} = \frac{\frac{EA_i}{l_i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^5 \frac{EA_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i} F_P \quad (e)$$

将图 8-1a 的尺寸代入式(d)和(e),设各杆  $EA$  相同,得

$$\Delta = 0.637 \frac{F_P a}{EA}$$

$$F_{N1} = F_{N3} = 0.159 F_P$$

$$F_{N2} = F_{N4} = 0.255 F_P$$

$$F_{N5} = 0.319 F_P$$

在图 8-1a 中,如只有 2 根杆,结构是静定的;当杆数大于(或等于)3 时,结构是超静定的,均可用上述方法计算。可见,用位移法计算时,计算方法并不因结构的静定或超静定而有所不同。

由上面的简例,可归纳出位移法的要点如下:

(1) 位移法的基本未知量是结构的结点位移(如图 8-1a 中  $B$  点的竖向位移  $\Delta$ )。

(2) 位移法的基本方程是平衡方程[如  $B$  点的竖向投影平衡方程式 (c)]。

(3) 建立基本方程的过程分为两步:

第一步,把结构拆成杆件,进行杆件分析,得出杆件的刚度方程[如式 (8-1)]。

第二步,再把杆件综合成结构,进行整体分析,得出基本方程。

这个过程是一拆一搭,拆了再搭的过程。它把复杂结构的计算问题转变为简单杆件的分析和综合的问题。这就是位移法的基本思路。

(4) 杆件分析是结构分析的基础,杆件的刚度方程是位移法基本方程的基础。因此,位移法也称为刚度法。

## 2. 位移法计算刚架的基本思路

以上结合链杆体系的情况对位移法的基本思路作了简短的说明。现在再结合刚架的情况作进一步的介绍。

图 8-3a 所示为一刚架,在给定荷载下,结点  $A$  发生角位移  $\theta_A$  和线位移  $\Delta$ 。采用位移法计算时,取结点位移  $\theta_A$  和  $\Delta$  作为基本未知量(注意,支座处的位移不作为基本未知量)。如果能够设法把基本未知量  $\theta_A$  和  $\Delta$  求出,那么整个刚架的计算问题就分解成杆件的计算问题,如图 8-3b、c 所示。其中杆  $AB$  的计算条件是  $B$  端固定、 $A$  端有已知位移  $\theta_A$  和  $\Delta$ ,并承受已知荷载  $q$  的作用。杆  $AC$  的计算条件是  $C$  端为简支、 $A$  端有已知位移  $\theta_A$ ,并承受已知荷载  $P$  的作用。

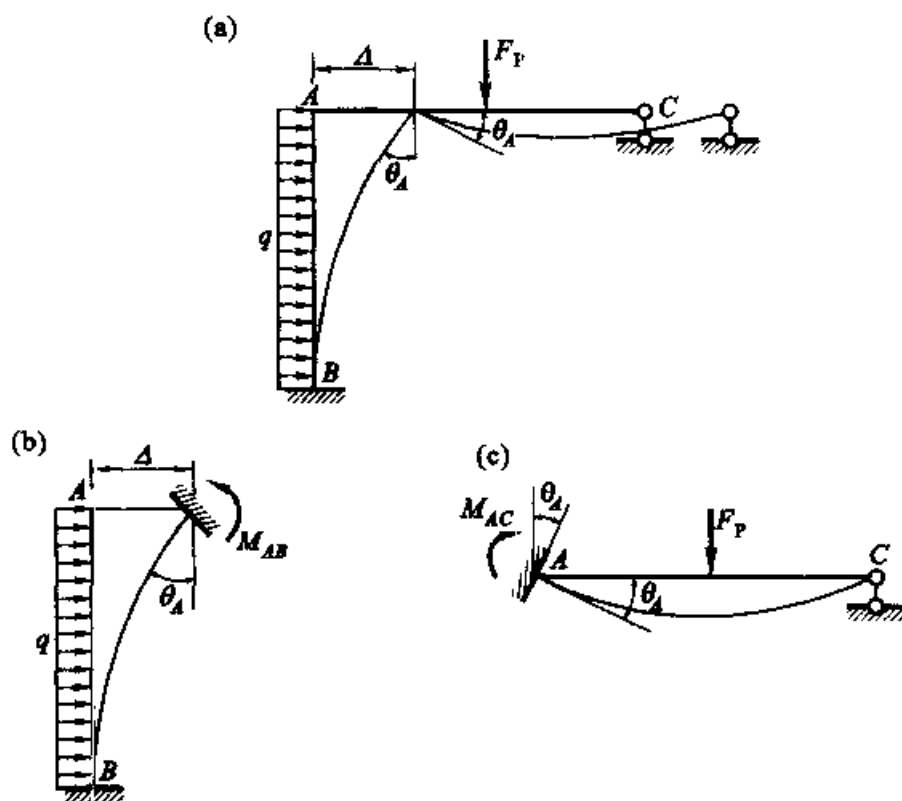


图 8-3

由此看出,用位移法计算刚架,结点位移是处于关键地位的未知量,只要这个关键问题解决了,余下的问题就是杆件的计算问题。

还可看出,用位移法计算刚架的基本思路仍然是拆了再搭。首先是把

刚架拆成杆件,进行杆件分析——杆件在已知端点位移和已知荷载作用下的计算。这相当于上述链杆体系(图 8-1)中的第一步,即式(8-1)。但是现在问题要复杂一些,需要作为预备知识在 § 8-2 中详细讨论。其次是把杆件再合成刚架,利用刚架平衡条件,建立位移法基本方程,借以求出基本未知量。这相当于上述链杆体系中的第二步,这个问题将在 § 8-3 和 § 8-4 中详细讨论。

### 3. 用能量法推导位移法基本方程

在 § 7-8 中曾用能量法推导出力法基本方程。同样,也可用能量法推导位移法基本方程。仍以图 8-1 所示桁架为例,说明位移法基本方程(c)如何由能量法导出。

在例 6-20 中曾用卡氏第一定理导出了桁架结点 B 的竖向位移  $\Delta$  与结点竖向力  $F_{yB}$  之间的关系式(6-63a)。如果竖向力  $F_{yB}$  改用  $F_P$  表示,则式(6-63a)就是式(c)。因此用能量法推导位移法基本方程(c)的工作已经在例 6-20 中完成了。关于能量法与位移法之间的联系将在第 11 章中进一步讨论。

顺便指出,用能量法推导位移法和力法的基本方程时,分别应用的是卡氏第一定理和卡氏第二定理。

## § 8-2 等截面杆件的刚度方程

为了给用位移法计算刚架作好准备,我们讨论等截面杆件计算的两个问题:一是在已知端点位移下求杆端弯矩,二是在已知荷载作用下求固端弯矩。

### 1. 由杆端位移求杆端弯矩

图 8-4 所示为一等截面杆件 AB,截面惯性矩  $I$  为常数。已知端点 A 和 B 的角位移分别为  $\theta_A$  和  $\theta_B$ ,两端垂直杆轴的相对位移为  $\Delta$ ,拟求杆端弯矩  $M_{AB}$  和  $M_{BA}$  (注意:如果杆件沿平行或垂直杆轴方向平行移动,则不引起杆端弯矩。因此,我们只需考虑两端在垂直杆轴方向发生相对位移  $\Delta$  的情形。此外,由  $\Delta$  可得出弦转角:  $\varphi = \frac{\Delta}{l}$ )。

在位移法中,我们采用如下的正负号规则:结点转角  $\theta_A$ 、 $\theta_B$ ,弦转角  $\varphi$ ,杆端弯矩  $M_{AB}$ 、 $M_{BA}$ ,一律以顺时针转向为正。

必须注意:这里关于杆端弯矩的正负号规则与通常关于弯矩的正负规则(例如在梁中,弯矩使梁下部纤维受拉者规定为正)有所不同。第一,这里的规则是针对杆端弯矩,而不是针对杆中任一截面的弯矩。第二,当取杆件(或取结点)为隔离体时,杆端弯矩是隔离体上的外力,建立隔离体平衡方程

时,力矩一律以顺时针(或反时针)转向为正。因此,这里的规则是把杆端弯矩看作外力,为了便于建立平衡方程(位移法的基本方程)而规定的。另一方面,在作弯矩图时,我们把弯矩看作杆件的内力,因此仍应遵守通常的正负号规则。总之,杆端弯矩有双重身分:既是杆件的内力,又是隔离体外力,要注意在不同场合按相应的正负号规则取用。

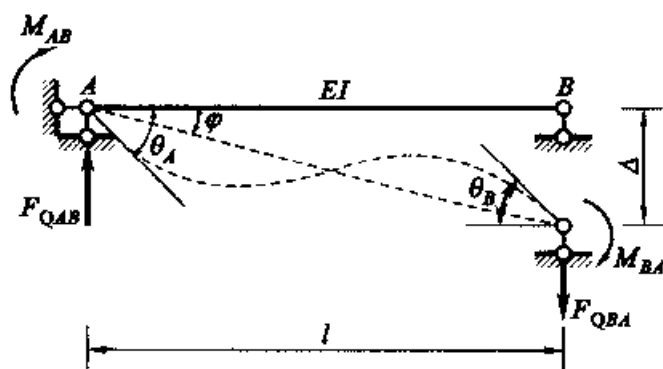


图 8-4

首先,计算简支梁在两端力偶  $M_{AB}$ 、 $M_{BA}$  作用下产生的杆端转角(图 8-5a)。由单位荷载法,得

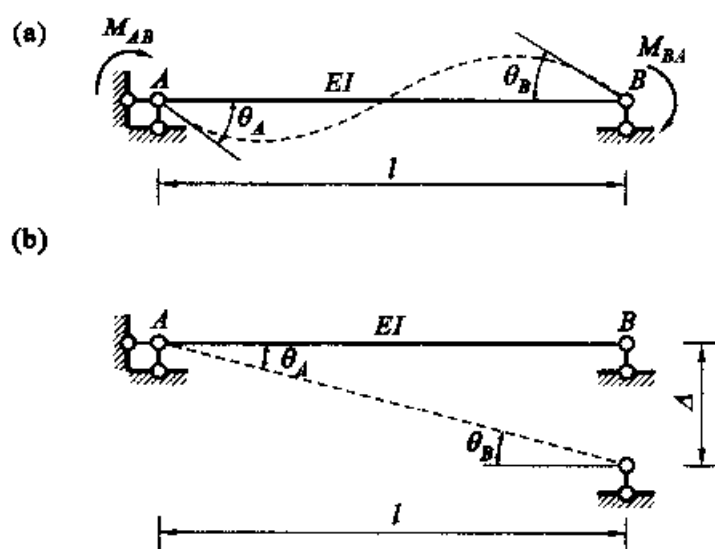


图 8-5

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{3i}M_{AB} - \frac{1}{6i}M_{BA} \\ \theta_B &= -\frac{1}{6i}M_{AB} + \frac{1}{3i}M_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

式中  $i = \frac{EI}{l}$ , 称为杆件的线刚度。

其次,当简支梁两端有相对竖向位移  $\Delta$  时(图 8-5b),杆端转角应为

$$\theta_A = \theta_B = \frac{\Delta}{l} \quad (8-3)$$

综合起来,当两端有力偶  $M_{AB}$ 、 $M_{BA}$  作用,而两端又有相对竖向位移  $\Delta$  时,则杆端转角为

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{3i}M_{AB} - \frac{1}{6i}M_{BA} + \frac{\Delta}{l} \\ \theta_B &= -\frac{1}{6i}M_{AB} + \frac{1}{3i}M_{BA} + \frac{\Delta}{l} \end{aligned} \quad (8-4)$$

解联立方程,则得

$$\begin{cases} M_{AB} = 4i\theta_A + 2i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} \\ M_{BA} = 2i\theta_A + 4i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} \end{cases} \quad (8-5)$$

式(8-5)就是由杆端位移  $\theta_A$ 、 $\theta_B$ 、 $\Delta$  求杆端弯矩的公式(习惯上称为转角位移方程)。此外,由平衡条件还可求出杆端剪力如下:

$$F_{QAB} = F_{QBA} = -\frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA})$$

再将式(8-5)代入,即得

$$F_{QAB} = F_{QBA} = -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta \quad (8-6)$$

为了紧凑起见,可以把式(8-5)和(8-6)写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ F_{QAB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i & -\frac{6i}{l} \\ 2i & 4i & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (8-7)$$

上式与式(8-1)具有类似的性质,称为弯曲杆件的刚度方程。其中

$$\begin{bmatrix} 4i & 2i & -\frac{6i}{l} \\ 2i & 4i & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} \end{bmatrix}$$

称为弯曲杆件的刚度矩阵,其中的系数称为刚度系数。刚度系数是只与杆件的截面尺寸和材料性质有关的常数,所以又称为形常数。

顺便指出,式(8-5)和(8-6)也可应用卡氏第一定理导出,参见第6章

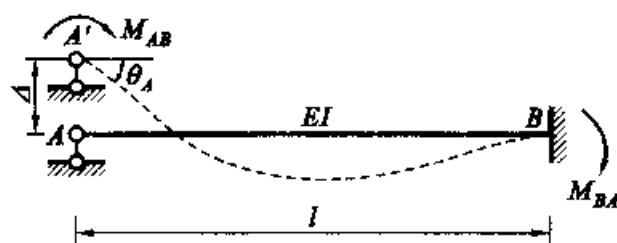


例 6-19 及式(6-62)。

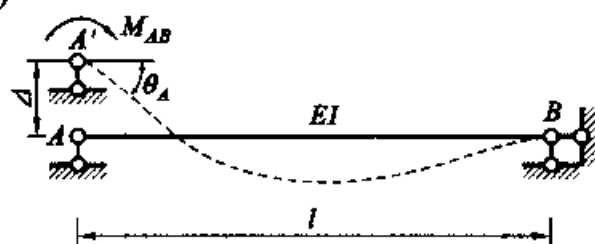
下面讨论杆件在一端具有不同支座时的刚度方程。

(1) B 端为固定支座(图 8-6a)

(a)



(b)



(c)

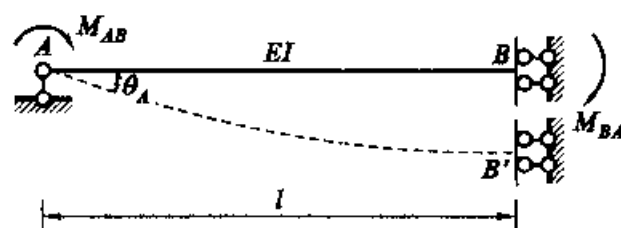


图 8-6

在式(8-5)中令  $\theta_B = 0$ , 则得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\theta_A - 6i\frac{\Delta}{l} \\ M_{BA} &= 2i\theta_A - 6i\frac{\Delta}{l} \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

(2) B 端为铰支座(图 8-6b)

在式(8-4)第一式中令  $M_{BA} = 0$ , 则得

$$M_{AB} = 3i\theta_A - 3i\frac{\Delta}{l} \quad (8-9)$$

(3) B 端为滑动支座(图 8-6c)

在式(8-6)中令  $\theta_B = 0$  和  $F_{QAB} = F_{QBA} = 0$ , 则得

$$\frac{\Delta}{l} \approx \frac{1}{2} \theta_A$$

由代入式(8-5),得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= i\theta_A \\ M_{BA} &= -i\theta_A \end{aligned} \right\} \quad (8-10)$$

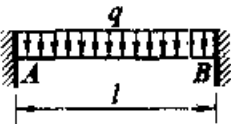
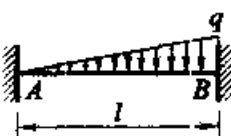
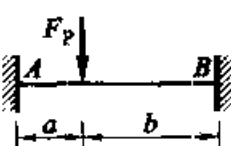
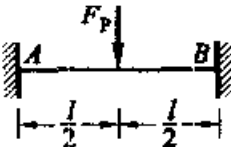
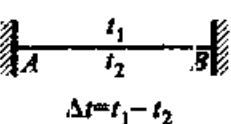
## 2. 由荷载求固端弯矩

对于下列三种杆件:

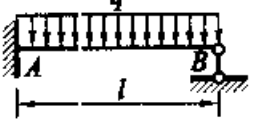
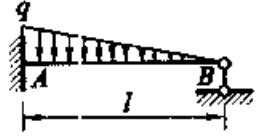
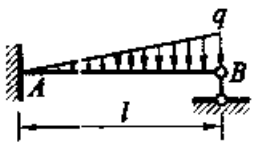
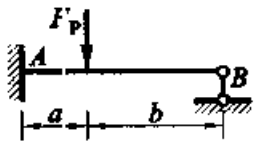

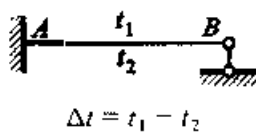
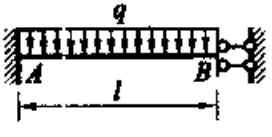
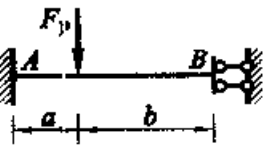
- (1) 两端固定的梁;
- (2) 一端固定、另一端简支的梁;
- (3) 一端固定、另一端滑动支承的梁;

表 8-1 给出了几种常见荷载作用下的杆端弯矩和剪力,称为固端弯矩和固端剪力。因为它们是只与荷载形式有关的常数,所以又称为载常数。固端弯矩用  $M_{AB}^F$  和  $M_{BA}^F$  表示。

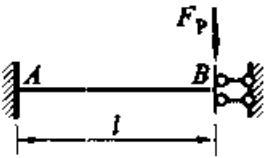
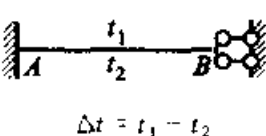
表 8-1 等截面杆件的固端弯矩和剪力

编号	简 图	固端弯矩(以顺时针转向为正)	固 端 剪 力
1		$M_{AB}^F = -\frac{ql^2}{12}$ $M_{BA}^F = \frac{ql^2}{12}$	$F_{QAB}^F = \frac{ql}{2}$ $F_{QBA}^F = -\frac{ql}{2}$
2		$M_{AB}^F = -\frac{ql^2}{30}$ $M_{BA}^F = \frac{ql^2}{20}$	$F_{QAB}^F = \frac{3ql}{20}$ $F_{QBA}^F = -\frac{7ql}{20}$
3		$M_{AB}^F = -\frac{F_P ab^2}{l^2}$ $M_{BA}^F = \frac{F_P a^2 b}{l^2}$	$F_{QAB}^F = \frac{F_P b^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l}\right)$ $F_{QBA}^F = -\frac{F_P a^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l}\right)$
4		$M_{AB}^F = -\frac{F_P l}{8}$ $M_{BA}^F = \frac{F_P l}{8}$	$F_{QAB}^F = \frac{F_P}{2}$ $F_{QBA}^F = -\frac{F_P}{2}$
5		$M_{AB}^F = \frac{Ela\Delta t}{h}$ $M_{BA}^F = -\frac{Ela\Delta t}{h}$	$F_{QAB}^F = 0$ $F_{QBA}^F = 0$

续表

编号	简图	固端弯矩(以顺时针转向为正)	固端剪力
一端固定另一端铰支	6 	$M_{AB}^F = -\frac{ql^2}{8}$	$F_{QA}^F = \frac{5}{8}ql$ $F_{QB}^F = -\frac{3}{8}ql$
	7 	$M_{AB}^F = -\frac{ql^2}{15}$	$F_{QA}^F = \frac{2}{5}ql$ $F_{QB}^F = \frac{1}{10}ql$
	8 	$M_{AB}^F = -\frac{7ql^2}{120}$	$F_{QA}^F = \frac{9}{40}ql$ $F_{QB}^F = \frac{11}{40}ql$
	9 	$M_{AB}^F = -\frac{F_P b(l^2 - b^2)}{2l^2}$	$F_{QA}^F = \frac{F_P b(3l^2 - b^2)}{2l^3}$ $F_{QB}^F = -\frac{F_P a^2(3l - a)}{2l^3}$
	10 	$M_{AB}^F = -\frac{3F_P l}{16}$	$F_{QA}^F = \frac{11}{16}F_P$ $F_{QB}^F = -\frac{5}{16}F_P$
	11  $\Delta t = t_1 - t_2$	$M_{AB}^F = -\frac{3Ela\Delta t}{2h}$	$F_{QA}^F = F_{QB}^F$ $= -\frac{3Ela\Delta t}{2hl}$
一端固定另一端滑动支承	12 	$M_{AB}^F = \frac{ql^2}{3}$ $M_{BA}^F = \frac{ql^2}{6}$	$F_{QA}^F = ql$ $F_{QB}^F = 0$
	13 	$M_{AB}^F = -\frac{F_P a}{2l}(2l - a)$ $M_{BA}^F = -\frac{F_P a^2}{2l}$	$F_{QA}^F = F_P$ $F_{QB}^F = 0$

续表

编号	简 图	固端弯矩(以顺时针转向为正)	固 端 剪 力
14		$M_{AB}^F = M_{BA}^F = \frac{F_P l}{2}$	$F_{QA}^F = F_P$ $F_{QB}^F = F_P$ $F_{QB}^R = 0$
15		$M_{AB}^F = \frac{E l \alpha \Delta t}{h}$ $M_{BA}^F = \frac{E l \alpha \Delta t}{h}$	$F_{QA}^F = 0$ $F_{QB}^F = 0$

在两端固定的梁中,表 8-1 第三行的公式是基本公式,利用这个公式,根据叠加原理,可得出在集中力系  $F_{Pi}$  和分布荷载  $q(a)$  作用下的固端弯矩如下(图 8-7):

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^F &= - \sum F_{Pi} \frac{a_i (l - a_i)^2}{l^2} - \int_0^l \frac{q(a) a (l - a)^2}{l^2} da \\ M_{BA}^F &= \sum F_{Pi} \frac{a_i^2 (l - a_i)}{l^2} + \int_0^l \frac{q(a) a^2 (l - a)}{l^2} da \end{aligned} \right\} \quad (8-11)$$

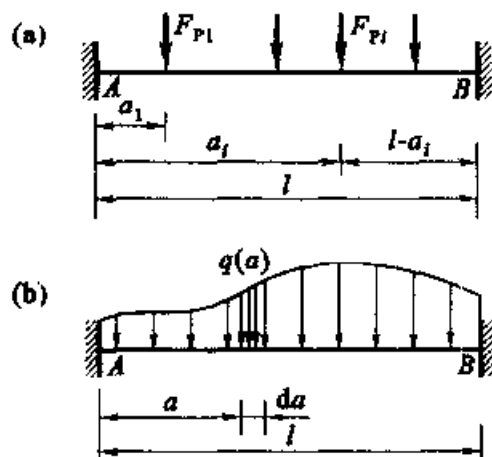


图 8-7

式中  $a_i$  表示荷载  $F_{Pi}$  与 A 端的距离,  $a$  表示荷载  $q(a)da$  与 A 端的距离。

此外,三类梁的固端弯矩是有联系的,例如第二、三类梁的固端弯矩可利用第一类梁的结果得到。

如果等截面杆件既有已知荷载作用,又有已知的端点位移,则根据叠加原理,杆端弯矩的一般公式为[对照式(8-5)]:

$$M_{AB} = 4i\theta_A + 2i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} + M_{AB}^F \quad (8-12)$$

$$M_{BA} = 2i\theta_A + 4i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} + M_{BA}^F$$

杆端剪力的一般公式为〔对照式(8-6)〕:

$$\left. \begin{aligned} F_{QAB} &= -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta + F_{QAB}^F \\ F_{QBA} &= -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta + F_{QBA}^F \end{aligned} \right\} \quad (8-13)$$

式中  $F_{QAB}^F$  和  $F_{QBA}^F$  是荷载引起的固端剪力。

本节解决了一个杆件的杆端力与杆端位移及荷载之间的关系问题,是位移法的基础;与第10章矩阵位移法中的单元分析是相对应的内容。

### §8-3 无侧移刚架的计算

如果刚架的各结点(不包括支座)只有角位移而没有线位移,这种刚架称为无侧移刚架。

本节讨论无侧移刚架的计算。连续梁的计算也属于这类问题。

图8-8a所示为一连续梁,在荷载作用下,结点B只有角位移 $\theta_B$ ,没有线位移,属于无侧移的问题。

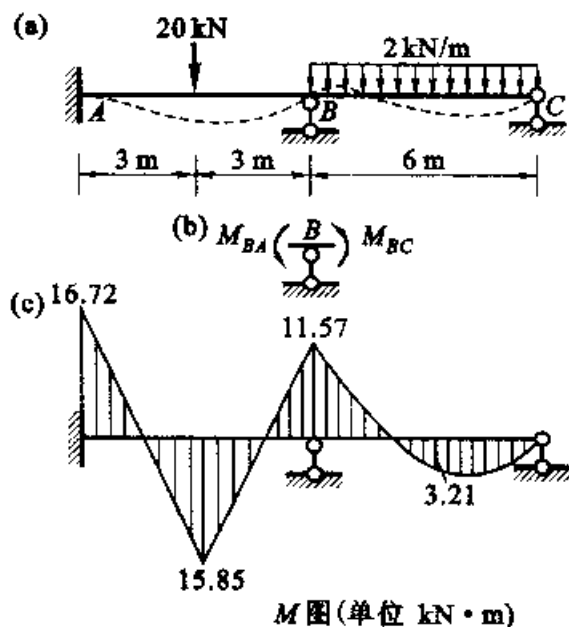


图 8-8

采用位移法计算时,取结点角位移  $\theta_B$  作为基本未知量(铰支座C处虽

有角位移,但可不选作基本未知量)。

由表 8-1 可求出各杆的固端弯矩为

$$-M_{AB}^F = M_{BA}^F = \frac{20 \text{ kN} \times 6 \text{ m}}{8} = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{2 \text{ kN/m} \times (6 \text{ m})^2}{8} = -9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

再利用式(8-8)和(8-9)(其中令  $\Delta = 0$ ),可列出各杆杆端弯矩如下(设各杆的线刚度  $i$  相等):

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2i\theta_B - 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_{BA} &= 4i\theta_B + 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_{BC} &= 3i\theta_B - 9 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由此看出,一旦求出  $\theta_B$ ,杆端弯矩即可求出。

下面建立位移法基本方程,以便求出基本未知量  $\theta_B$ 。为此,取结点  $B$  为隔离体(图 8-8b),可列出力矩平衡方程:

$$\sum M_B = 0, \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (b)$$

利用式(a),此平衡方程可写为

$$7i\theta_B + 6 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0 \quad (c)$$

式(c)就是用位移  $\theta_B$  表示的平衡方程,即位移法的基本方程,由此可求出基本未知量

$$\theta_B = -\frac{6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{7i} \quad (d)$$

至此,位移法的关键问题已得到解决。余下的问题是将式(d)代入式(a),即可求出各杆杆端弯矩:

$$M_{AB} = 2i \left( -\frac{6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{7i} \right) - 15 \text{ kN} \cdot \text{m} = -16.72 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = 4i \left( -\frac{6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{7i} \right) + 15 \text{ kN} \cdot \text{m} = 11.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = 3i \left( -\frac{6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{7i} \right) - 9 \text{ kN} \cdot \text{m} = -11.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

据此,可作弯矩图,如图 8-8c 所示。

一般说来,用位移法解连续梁和无侧移刚架时,在每个刚结点处有一个结点转角——基本未知量;与此相应,在每个刚结点处又可写出一个力矩平衡方程——基本方程。因此,基本方程的个数与基本未知量的个数恰好相等,因而可解出全部基本未知量。

位移法的基本作法是先拆散,后组装。组装的原则有二:首先,在结点

处各个杆件的变形要协调一致;其次,装配好的结点要满足平衡条件。关于第一个要求,在选定基本未知量时已经考虑到。因为在每个刚结点处只规定了一个结点转角,也就是说,我们规定了刚结点处的各杆杆端转角都彼此相等,这样就保证了结点处的变形连续条件。关于第二个要求,是在建立基本方程时才考虑的,因为基本方程就是根据结点的平衡条件列出的。从这里我们不仅看到位移法的解答已经满足平衡条件和变形连续条件,而且还看到经过什么途径才使这两方面的条件得到满足。

例 8-1 试求作图 8-9a 所示刚架的弯矩图。

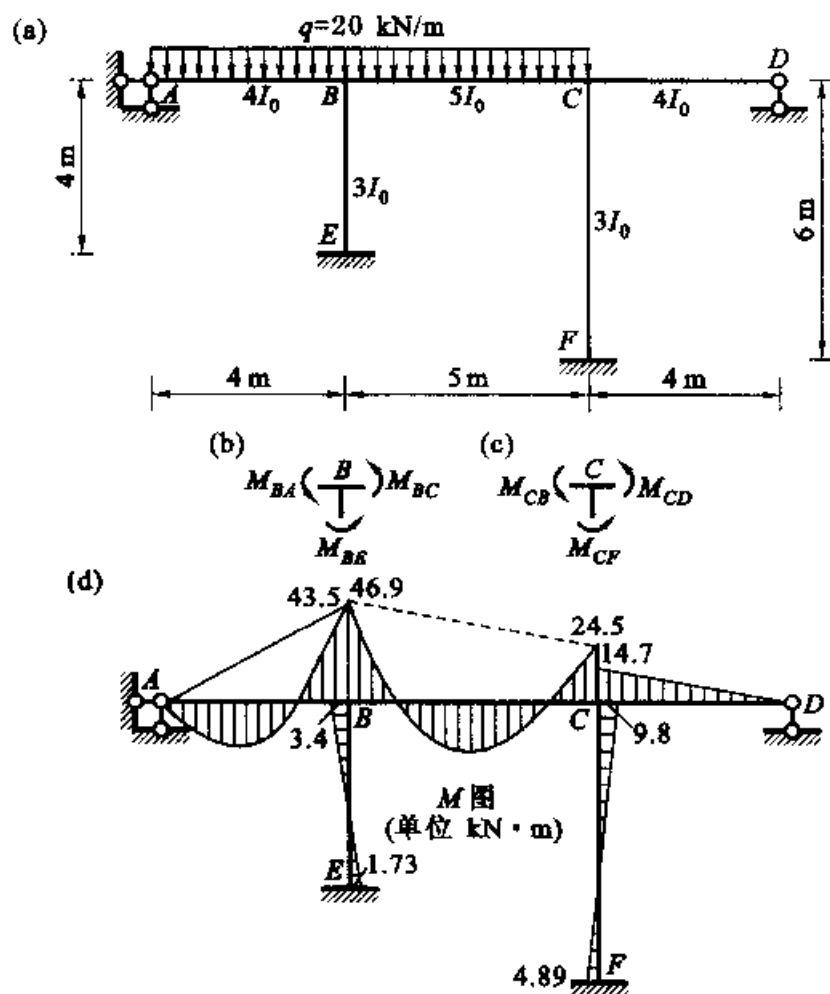


图 8-9

解 (1) 基本未知量

共有两个基本未知量:  $\theta_B, \theta_C$ 。

(2) 杆端弯矩

固端弯矩查表 8-1 求得

$$M_{BA}^t = \frac{ql^2}{8} = \frac{20 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2}{8} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^t = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{20 \text{ kN/m} \times (5 \text{ m})^2}{12} = -41.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^F = 41.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

各杆刚度取相对值计算, 设  $EI_0 = 1$ ①, 则

$$i_{BA} = \frac{4EI_0}{4} = 1, \quad i_{BC} = \frac{5EI_0}{5} = 1, \quad i_{CD} = \frac{4EI_0}{4} = 1$$

$$i_{BE} = \frac{3EI_0}{4} = \frac{3}{4}, \quad i_{CF} = \frac{3EI_0}{6} = \frac{1}{2}$$

由式(8-5), (8-8), (8-9), 再叠加固端弯矩, 可列出各杆杆端弯矩如下:

$$M_{BA} = 3i_{BA}\theta_B + M_{BA}^t = 3\theta_B + 40$$

$$M_{BC} = 4i_{BC}\theta_B + 2i_{BC}\theta_C + M_{BC}^F = 4\theta_B + 2\theta_C - 41.7$$

$$M_{CB} = 2i_{BC}\theta_B + 4i_{BC}\theta_C + M_{CB}^F = 2\theta_B + 4\theta_C + 41.7$$

$$M_{CD} = 3i_{CD}\theta_C = 3\theta_C$$

$$M_{BE} = 4i_{BE}\theta_B = 3\theta_B, \quad M_{EB} = 2i_{BE}\theta_B = 1.5\theta_B$$

$$M_{CF} = 4i_{CF}\theta_C = 2\theta_C, \quad M_{FC} = 2i_{CF}\theta_C = \theta_C$$

### (3) 位移法方程

结点 B 平衡,  $\sum M_B = 0$  (图 8-9b):

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0$$

将上步结果代入得

$$10\theta_B + 2\theta_C - 1.7 = 0 \quad (a)$$

结点 C 平衡,  $\sum M_C = 0$  (图 8-9c):

$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CF} = 0$$

将上步结果代入得

$$2\theta_B + 9\theta_C + 41.7 = 0 \quad (b)$$

### (4) 求基本未知量

解(a)、(b)两方程, 得

$$\theta_B = 1.15, \quad \theta_C = -4.89$$

### (5) 求杆端弯矩

将求得的位移代入第2步各式, 得

① 当超静定结构内力计算时, 若各杆刚度均按相对值取用, 即只是一个比例关系, 而没有取真值; 则中间运算式中不再注明其单位, 单位只在最后结果中给出。下同。



$$M_{BA} = 43.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -46.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = 24.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = -14.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BE} = 3.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FB} = 1.73 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CF} = -9.78 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FC} = -4.89 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

最后指出,因为各杆用的是相对刚度,因而例题中求出的位移并不是真值。如果要求位移的真值,则刚度也必须采用真值。

## § 8-4 有侧移刚架的计算

刚架分为无侧移和有侧移两类。图 8-10 中刚架除有结点转角外,还有结点线位移,它们都是有侧移刚架。

用位移法计算有侧移的刚架时,基本思路与无侧移刚架基本相同,但在具体作法上增加了一些新内容:

- (1) 在基本未知量中,要包括结点线位移;
- (2) 在杆件计算中,要考虑线位移的影响;
- (3) 在建立基本方程时,要增加与结点线位移对应的平衡方程。

在下面的讨论中将着重讲解上述新内容。

### 1. 基本未知量的选取

计算有侧移刚架时,位移法的基本未知量既包括结点角位移,又包括结点线位移。现在着重讨论结点线位移的选取问题。

如果不忽略杆件在轴力作用下的轴向变形,则平面刚架中每个结点有两个线位移。例如,图 8-10a、b、c 的刚架各有 2、3、4 个结点,故分别有 4、6、8 个结点线位移。

结点线位移的个数越多,则位移法的计算工作量越大。为了减少基本未知量的个数,使计算得到简化,通常在位移法中忽略轴力对变形的影响。更详细的说,我们引入如下假设:

- (1) 忽略轴力产生的轴向变形;
- (2) 结点转角  $\theta$  和各杆弦转角  $\varphi$  都很微小。

根据假设(1),杆件变形前的直线长度与变形后的曲线长度可认为相等。根据假设(2),变形后的曲线长度与弦线长度可认为相等。综合起来,

可得出如下结论:尽管杆件发生弯曲变形,但杆件两端结点之间的距离仍保持不变。

根据上述假设,下面研究独立的结点线位移的个数。

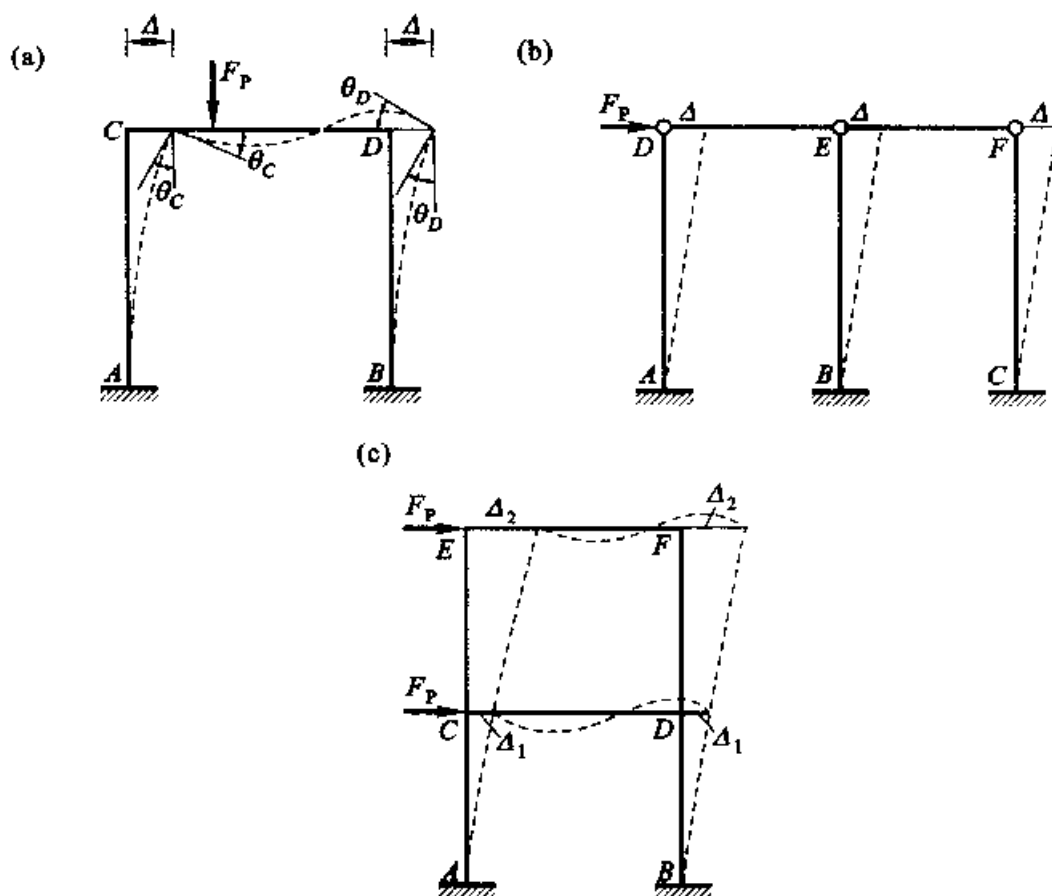


图 8-10

以图 8-10a 中的刚架为例。由于各杆两端距离假设不变,因此在微小位移的情况下,结点  $C$  和  $D$  都没有竖向位移,而且结点  $C$  和  $D$  的水平位移也彼此相等,可用一个符号  $\Delta$  来表示。因此,原来的两个结点线位移现在归结为一个独立的结点线位移  $\Delta$ 。全部基本未知量只有三个,即  $\theta_C$ 、 $\theta_D$  和  $\Delta$ 。

对于一般刚架,独立结点线位移的数目常可由观察判定。图 8-10b、c 所示两个例子,虚线表示变形后杆的曲线。在图 8-10b 中,只有一个独立线位移  $\Delta$ ,因为由水平梁连起来的各结点  $D$ 、 $E$ 、 $F$  其水平线位移必然相同。图 8-10c 所示为由水平梁与立柱组成的两层刚架,4 个刚结点  $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  有 4 个转角;此外,还有两个独立结点线位移  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$ 。显然,每层有一个线位移,因而独立结点线位移的数目等于刚架的层数。

由于在刚架计算中,不考虑各杆长度的改变,因而结点的独立线位移的

数目还可以用几何构造分析的方法来确定。如果把所有的刚结点(包括固定支座)都改为铰结点,则此铰结体系的自由度数就是原结构的独立结点线位移的数目。换句话说,为了使此铰结体系成为几何不变而需添加的链杆数就等于原结构的独立结点线位移的数目。以图 8-11a 所示刚架为例,为了确定独立结点线位移的数目,把所有刚结点都改为铰结点,得到图 8-11b 中实线所示的体系。添加两个链杆(虚线)后,体系就由几何可变成几何不变(实际上成为一个简单桁架)。由此可知,图 8-11a 中的刚架有两个独立结点线位移。

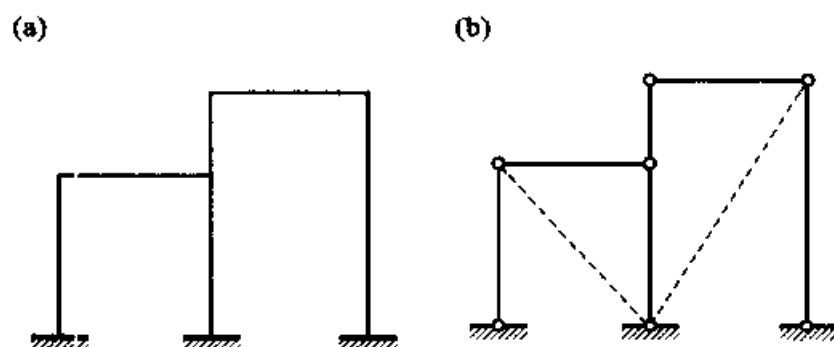


图 8-11

总起来看,用位移法计算有侧移刚架时,基本未知量包括结点转角和独立结点线位移。结点转角的数目等于刚结点的数目,独立结点线位移的数目等于铰结体系的自由度的数目。在选取基本未知量时,由于既保证了刚结点处各杆杆端转角彼此相等,又保证了各杆杆端距离保持不变。因此,在拆了再搭的过程中,能够保证各杆位移的彼此协调,因而能够满足变形连续条件。

## 2. 基本方程的建立

基本未知量分为刚结点角位移和独立结点线位移两类,与此对应,基本方程也分为两类。下面用例子说明位移法的基本方程是如何建立的。

图 8-12a 所示刚架,柱的线刚度为  $i$ ,梁的线刚度为  $2i$ 。基本未知量为刚结点  $B$  的转角  $\theta_B$  和柱顶的水平位移  $\Delta$ ,如图 8-12b 所示。

进行杆件计算时,要注意  $AB$  和  $CD$  两杆的两端结点有相对侧移  $\Delta$ ,但杆  $BC$  的两端结点只有整体的水平位移,而没有相对的垂直位移。利用式 (8-8)、(8-9),并叠加固端弯矩后,可列出各杆的杆端弯矩如下:

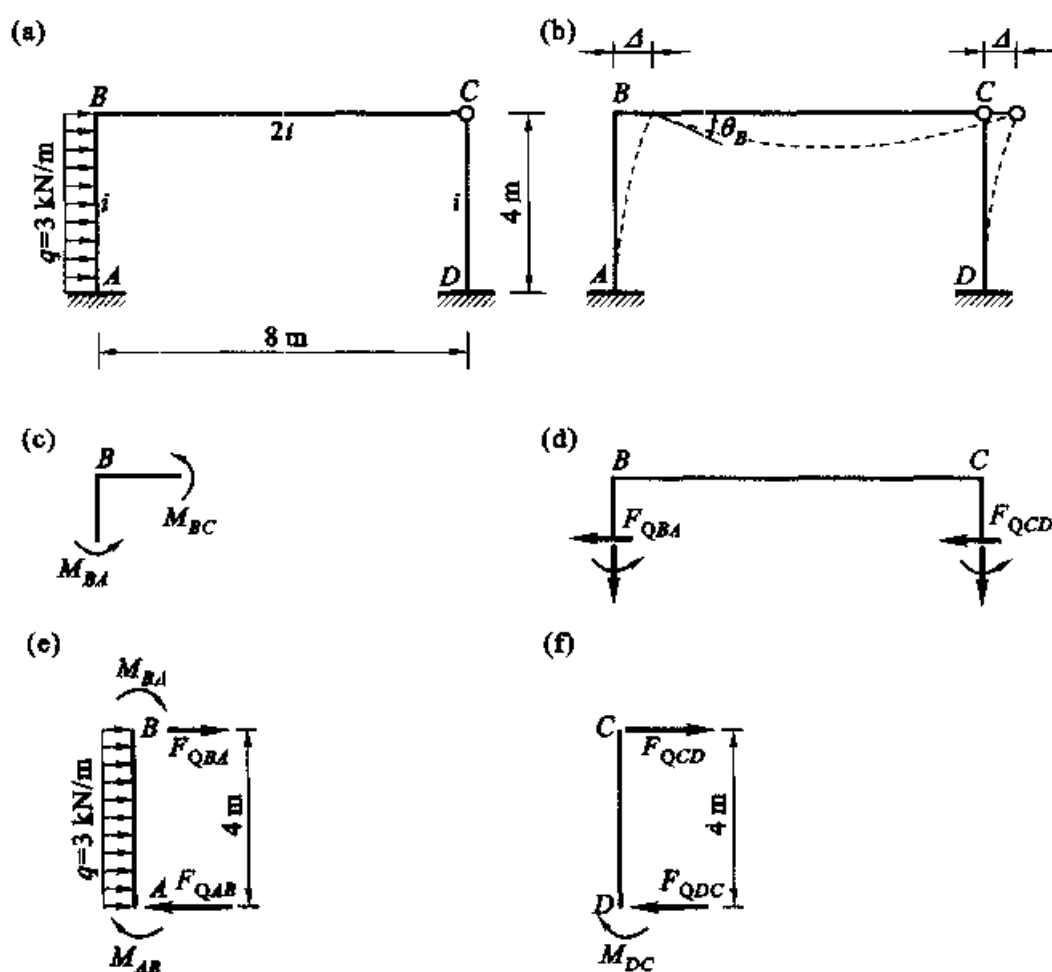


图 8-12

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2i\theta_B - 6i \frac{\Delta}{4} - \frac{1}{12} \times 3 \times 4^2 \\ M_{BA} &= 4i\theta_B - 6i \frac{\Delta}{4} + \frac{1}{12} \times 3 \times 4^2 \\ M_{BC} &= 3(2i)\theta_B \\ M_{DC} &= -3i \frac{\Delta}{4} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

下面建立基本方程。首先,与结点 B 角位移  $\theta_B$  对应,取结点 B 为隔离体(图 8-12c),可列出力矩平衡方程:

$$\sum M_B = 0, \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (b)$$

利用式(a),此平衡方程可写为

$$10i\theta_B - 1.5i\Delta + 4 = 0 \quad (8-14a)$$

其次,与横梁水平位移  $\Delta$  对应,我们取柱顶以上横梁 BC 部分为隔离体(图 8-12d),可列出水平投影方程:

$$\sum F_x = 0, \quad F_{QBA} + F_{QCD} = 0 \quad (c)$$

式(c)中的杆端剪力可先换成杆端弯矩。为此,取柱 AB 作隔离体(图 8-12e,图中杆端轴力未画出),得

$$\sum M_A = 0, \quad F_{QBA} = -\frac{1}{4}(M_{AB} + M_{BA}) - 6$$

再取柱 CD 作隔离体(图 8-12f),得

$$\sum M_D = 0, \quad F_{QCD} = -\frac{1}{4}M_{DC}$$

将以上两剪力的表达式代入式(c),得

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{DC} + 24 = 0 \quad (d)$$

再利用式(a),得

$$6i\theta_B - 3.75i\Delta + 24 = 0 \quad (8-14b)$$

解联立方程(8-14a、b),就可求出结点位移  $\theta_B$  和  $\Delta$ ,然后代入式(a)可求出杆端弯矩,进而可以作刚架的内力图。

一般说来,位移法的基本方程都是根据平衡方程得出的。基本未知量中每一个转角有一个相应的结点力矩平衡方程,每一个独立结点线位移有一个相应的截面平衡方程。平衡方程的个数与基本未知量的个数彼此相等,正好解出全部基本未知量。

**例 8-2** 试求作图 8-13a 所示刚架的弯矩图,忽略横梁的轴向变形。

**解** (1) 基本未知量

柱 AB、CD、EF 是平行的,因而变形时横梁只有水平移动,横梁在变形前后保持平行(图 8-13b),所以各柱顶的水平位移是相等的,只有一个独立线位移  $\Delta$ 。本例没有刚结点,没有转角基本未知量。

(2) 各柱的杆端弯矩和剪力

各柱的线刚度为

$$i_1 = \frac{EI_1}{h_1}$$

$$i_2 = \frac{EI_2}{h_2}$$

$$i_3 = \frac{EI_3}{h_3}$$

由式(8-9)可知杆端弯矩为

$$M_{BA} = 3i_1 \frac{\Delta}{h_1}$$

$$M_{DC} = -3i_2 \frac{\Delta}{h_2}$$

$$M_{FE} = -3i_3 \frac{\Delta}{h_3}$$

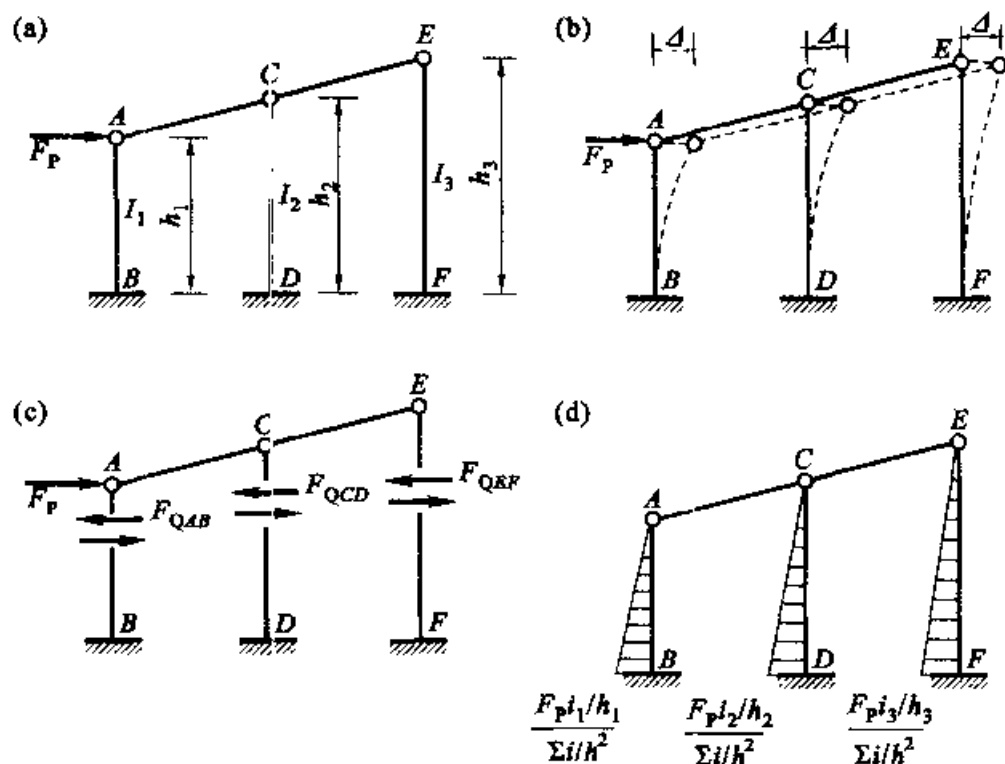


图 8-13

由每柱的平衡求得杆端剪力为

$$F_{QAB} = 3i_1 \frac{\Delta}{h_1}$$

$$F_{QCD} = 3i_2 \frac{\Delta}{h_2}$$

$$F_{QEF} = 3i_3 \frac{\Delta}{h_3}$$

### (3) 位移法方程

取柱顶以上横梁部分为隔离体(图 8-13c), 由水平方向的平衡条件  $\sum F_x = 0$ , 得

$$F_P - (F_{QAB} + F_{QCD} + F_{QEF}) = 0$$

$$F_P - 3\Delta \left( \frac{i_1}{h_1} + \frac{i_2}{h_2} + \frac{i_3}{h_3} \right) = 0$$

求得

$$\Delta = \frac{F_P}{3 \left( \frac{i_1}{h_1} + \frac{i_2}{h_2} + \frac{i_3}{h_3} \right)} = \frac{F_P}{3 \sum \frac{i}{h^2}}$$

式中  $\sum \frac{i}{h^2}$  为各立柱  $\frac{i}{h^2}$  之和。

(4) 杆端弯矩和剪力

将  $\Delta$  代入第(2)步各式得

$$M_{BA} = -\frac{F_P \frac{i_1}{h_1}}{\sum \frac{i}{h^2}}, \quad M_{BC} = -\frac{F_P \frac{i_2}{h_2}}{\sum \frac{i}{h^2}}, \quad M_{CE} = -\frac{F_P \frac{i_3}{h_3}}{\sum \frac{i}{h^2}}$$

$$F_{QAB} = \frac{F_P \frac{i_1}{h_1}}{\sum \frac{i}{h^2}}, \quad F_{QCD} = \frac{F_P \frac{i_2}{h_2}}{\sum \frac{i}{h^2}}, \quad F_{QEF} = \frac{F_P \frac{i_3}{h_3}}{\sum \frac{i}{h^2}}$$

(5) 根据杆端弯矩可画出  $M$  图,如图 8-13d 所示。

(6) 讨论

计算结果表明,排架仅在柱顶荷载作用时,各柱柱顶剪力  $F_Q$  与  $\frac{i}{h^2}$  成正比。根据这个性质,可以用下述方法求此排架的内力:荷载  $F_P$  作为各柱总剪力,按各柱  $\frac{i}{h^2}$  的比例分配给各柱,得各柱剪力,根据柱顶剪力,即可画出弯矩图(图 8-13d)。

例 8-3 试求作图 8-14a 所示刚架的内力图。

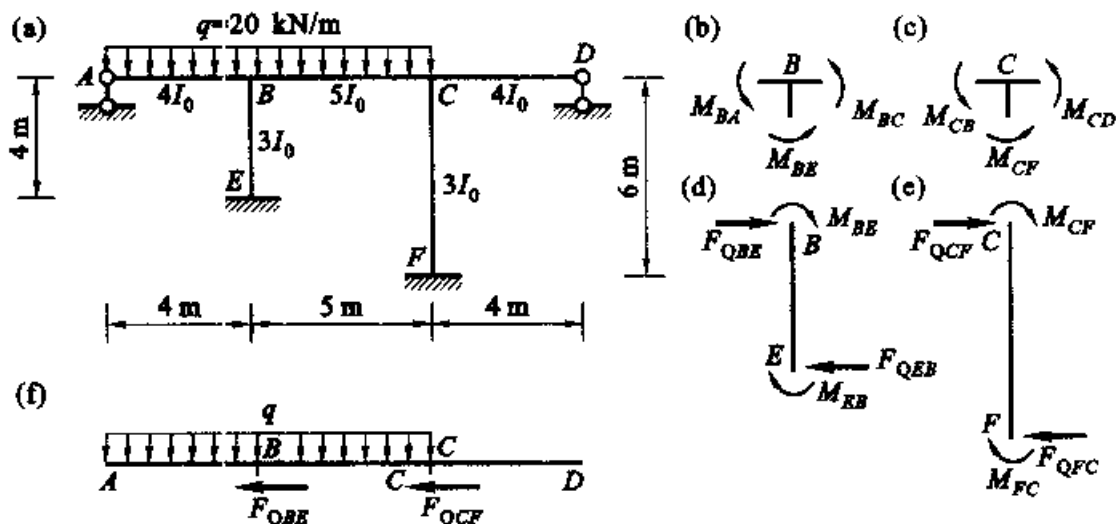


图 8-14

解 (1) 基本未知量

本例与例 8-1 不同处是结点 B、C 除转角  $\theta_B$  和  $\theta_C$  外,还有水平线位移  $\Delta$ 。

## (2) 杆端弯矩

固端弯矩在例 8-1 中已求出。仍假设各杆刚度取相对值,由式(8-5)、

(8-8)、(8-9)叠加固端弯矩后,各杆杆端弯矩为

$$M_{BA} = 3i_{BA}\theta_B + M_{BA}^F = 3\theta_B + 40$$

$$M_{BC} = 4i_{BC}\theta_B + 2i_{BC}\theta_C + M_{BC}^F = 4\theta_B + 2\theta_C - 41.7$$

$$M_{CB} = 2i_{BC}\theta_B + 4i_{BC}\theta_C + M_{CB}^F = 2\theta_B + 4\theta_C + 41.7$$

$$M_{CD} = 3i_{CD}\theta_C = 3\theta_C$$

$$M_{BE} = 4i_{BE}\theta_B - 6\frac{i_{BE}}{l_{BE}}\Delta = 3\theta_B - 1.125\Delta$$

$$M_{EB} = 2i_{BE}\theta_B - 6\frac{i_{BE}}{l_{BE}}\Delta = 1.5\theta_B - 1.125\Delta$$

$$M_{CF} = 4i_{CF}\theta_C - 6\frac{i_{CF}}{l_{CF}}\Delta = 2\theta_C - 0.5\Delta$$

$$M_{FC} = 2i_{CF}\theta_C - 6\frac{i_{CF}}{l_{CF}}\Delta = \theta_C - 0.5\Delta$$

## (3) 位移法方程

考虑结点 B 的平衡(图 8-14b),

$$\sum M_B = 0, \quad M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0$$

得

$$10\theta_B + 2\theta_C - 1.125\Delta - 1.7 = 0 \quad (a)$$

考虑结点 C 的平衡(图 8-14c):

$$\sum M_C = 0, \quad M_{CB} + M_{CD} + M_{CF} = 0 \quad (b)$$

得

$$2\theta_B + 9\theta_C - 0.5\Delta + 41.7 = 0$$

以截面切断柱顶,考虑柱顶以上横梁 ABCD 部分的平衡(图 8-14f):

$$\sum F_x = 0, \quad F_{QBE} + F_{QCF} = 0$$

再考虑柱 BE 和柱 CF 的平衡(图 8-14d 和 e):

$$\sum M_E = 0, \quad F_{QBE} = -\frac{M_{BE} + M_{EB}}{4}$$

$$\sum M_F = 0, \quad F_{QCF} = -\frac{M_{CF} + M_{FC}}{6}$$

故截面平衡方程可写为

$$\frac{M_{BE} + M_{EB}}{4} + \frac{M_{CF} + M_{FC}}{6} = 0$$

得



$$6.75\theta_B + 3\theta_C - 4.37\Delta = 0 \quad (c)$$

(4) 求基本未知量

联立解(a)、(b)、(c)三个方程,得

$$\theta_B = 0.94, \quad \theta_C = -4.94, \quad \Delta = -1.94$$

(5) 求杆端弯矩

将求得的位移代入第(2)步各式,得

$$M_{BA} = 42.82 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -47.82 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = 23.82 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = 14.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BF} = 5.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EB} = 3.59 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CF} = -8.91 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FC} = 3.97 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

(6) 作内力图

由杆端弯矩作出的  $M$  图,如图 8-15a 所示。由每杆的隔离体图,用平衡方程可求出杆端剪力,然后作  $F_Q$  图(图 8-15b)。由结点的平衡方程可求出杆端轴力,然后作  $N$  图(图 8-15c)。

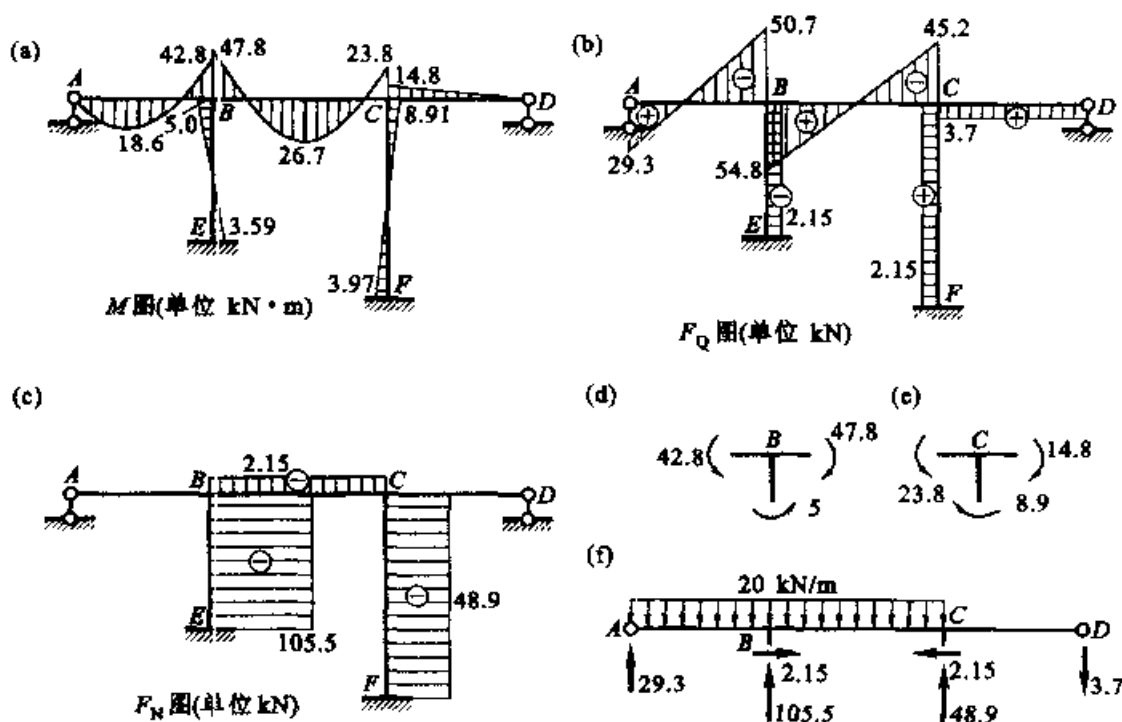


图 8-15

## (7) 校核

在力法中曾经详细讨论过超静定结构计算的校核问题,其中许多作法这里仍然适用。但是要注意一点:在位移法中,一般以校核平衡条件为主;与此相反,在力法中,一般以校核变形连续条件为主。这是因为在选取位移法的基本未知量时已经考虑了变形连续条件,而且刚度系数的计算比较简单,不易出错,因而变形连续条件在位移法中不作为校核的重点。

图 8-15 中的内力图可进行平衡条件校核如下:首先由图 8-15d、e 看出,结点 B 和 C 处的力矩(单位为  $\text{kN}\cdot\text{m}$ )平衡条件是满足的。其次,在图 8-15f 中(力单位为  $\text{kN}$ )取柱顶以上梁 ABCD 部分为隔离体,可校核水平和竖向平衡条件:

$$\sum F_x = 0, \quad 2.15 \text{ kN} - 2.15 \text{ kN} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0, \quad & 29.3 \text{ kN} + 105.5 \text{ kN} + 48.9 \text{ kN} - 20 \text{ kN/m} \times 9 \text{ m} - 3.7 \text{ kN} \\ & = 183.7 \text{ kN} - 183.7 \text{ kN} = 0 \end{aligned}$$

## § 8-5 位移法的基本体系

在上面的讨论中,介绍了位移法的基本未知量和基本方程,基本方程是直接由平衡条件建立的。本节介绍通过位移法的基本体系建立位移法典型方程的解法。这种方法解题程序与力法相对应,有助于进一步理解位移法基本方程的意义,另外也为以后将要介绍的矩阵位移法打下一些基础。

我们结合图 8-16a 所示的刚架加以说明。这个刚架前面在 § 8-4 的图 8-12 中已经讨论过,可以前后对照学习。

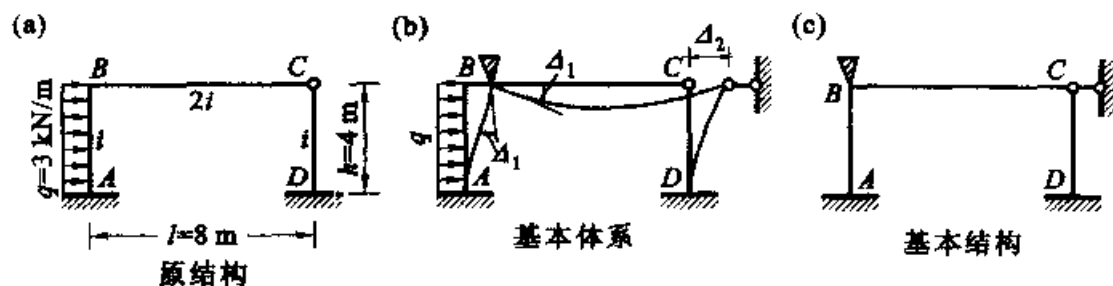


图 8-16

这个刚架有两个基本未知量:结点 B 的转角  $\Delta_1$  和结点 C 的水平位移  $\Delta_2$ 。这里位移法的基本未知量,不管是角位移还是线位移,统一用  $\Delta$  表示,以便与力法中使用的基本未知量  $X$  相对照。

图 8-16b 所示为位移法采用的基本体系:在刚结点 B 加约束控制结点

$B$  的转角(注意,不控制线位移),在结点  $C$  加水平支杆控制结点  $C$  的水平位移。与之相应,在结点  $B$  加约束使结点  $B$  不能转动,在结点  $C$  加水平支杆使结点  $C$  不能水平移动,这个超静定杆的组合体称为位移法的基本结构(图 8-16c)。

基本体系与原结构的区别在于:增加了人为的约束,把基本未知量由被动的位移变成为受人工控制的主动的位移。

基本体系是用来计算原结构的工具或桥梁。一方面,它可以转化成原结构,可以代表原结构;另一方面,它的计算又比较简单。因为加了人工控制的约束之后,原来的整体结构被分隔成许多杆件(这些杆件各自单独变形,互不干扰;且已经知道了它们的转角位移方程),结构的整体计算拆成许多单个杆件的计算,从而使计算简化。应该注意,在力法中是用撤除约束的办法达到简化计算的目的。在位移法中是用增加约束的办法达到简化计算的目的。措施相反,效果相同。

现在利用基本体系来建立基本方程。

分析:在什么条件下,基本体系才能转化成原结构。这个转化条件就是位移法的基本方程。下面分两步来考虑。

第一步,控制附加约束,使结点位移  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  全部为零,这时刚架处于锁住状态,即基本结构。施加荷载后,可求出基本结构中的内力(图 8-17a),同时在附加约束中会产生约束力矩  $F_{1P}$  和约束水平力  $F_{2P}$ 。这些约束力在原结构中是没有的。

第二步,再控制附加约束,使基本结构发生结点位移  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$ ,这时附加约束中的约束力  $F_1$  和  $F_2$  将随之改变。如果控制结点位移  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  使与原结构的实际值正好相等,则约束力  $F_1$  和  $F_2$  即完全消失。这时基本体系形式上虽然还有附加约束,但实际上它们已经不起作用,因而基本体系实际上处于放松状态,面与原结构完全相同。

由此看出 基本体系转化为原结构的条件是:基本结构在给定荷载以及结点位移  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$  共同作用下,在附加约束中产生的总约束力  $F_1$  和  $F_2$  应等于零。即

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 0 \\ F_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

这就是建立位移法基本方程的条件。

下面利用叠加原理,把基本体系中的总约束力  $F_1$  和  $F_2$  分解成几种情况分别计算:

(1) 荷载单独作用——相应的约束力为  $F_{1P}$  和  $F_{2P}$ (图 8-17a)。

(2) 单位位移  $\Delta_1 = 1$ <sup>(1)</sup> 单独作用——相应的约束力为  $k_{11}$  和  $k_{21}$  (图 8-17b)。

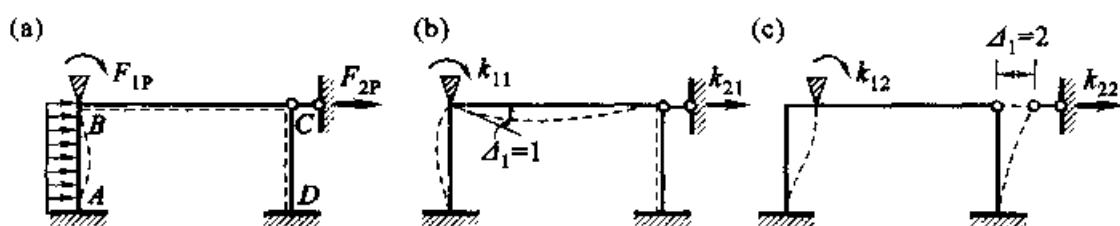


图 8-17

(3) 单位位移  $\Delta_2 = 1$  单独作用——相应的约束力为  $k_{12}$  和  $k_{22}$  (图 8-17c)。

叠加以上结果,则总约束力为

$$\begin{cases} F_1 = k_{11} \Delta_1 + k_{12} \Delta_2 + F_{1P} \\ F_2 = k_{21} \Delta_1 + k_{22} \Delta_2 + F_{2P} \end{cases} \quad (8-16)$$

再考虑式(8-15),得位移法的基本方程为

$$\begin{cases} k_{11} \Delta_1 + k_{12} \Delta_2 + F_{1P} = 0 \\ k_{21} \Delta_1 + k_{22} \Delta_2 + F_{2P} = 0 \end{cases} \quad (8-17)$$

利用基本方程式(8-17)即可求出基本未知量  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$ 。

因此,从基本体系来看,基本方程具有明确的意义,即基本体系应当实际上处于放松状态,附加约束中的约束力应当全部为零;实质上仍然是平衡方程。

由此看出,位移法的基本思路仍然是过渡法,即由基本体系过渡到原结构。过渡的步骤是先锁住后放松,根据放松的条件建立位移法的基本方程。这里讲的“先锁后松”与前面讲的“先拆后搭”,是从不同的角度对位移法的基本思路加以概括;同时,两种说法也是相通的,“锁住”实际上是把结构的整体变形“拆成”孤立的杆件变形,“放松”是要求附加约束实际上不起作用,也就是要求各个杆件综合在一起时能够满足平衡条件。

下面按照上述步骤进行具体计算。

(1) 基本结构在荷载作用下的计算。

先分别求各杆的固端弯矩,作出弯矩图如图 8-18a 所示。基本结构在荷载作用下的弯矩图称为  $M_P$  图。

取结点 B 为隔离体(图 8-18b),求得  $F_{1P} = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

(1) 见 § 4-4 注。这里及下面,单位位移  $\Delta_i = 1$  的规定写法应为  $[\Delta_i] = 1$ ,即采用某一单位时,该位移的数值为 1。为了简便,记为  $\Delta_i = 1$ 。

取柱顶以上横梁  $BC$  部分为隔离体(图 8-18c), 已知立柱  $BA$  的固端剪力  $F_{QBA} = -\frac{qh}{2} = -\frac{3 \times 4}{2} \text{ kN} = -6 \text{ kN}$ , 因此  $F_{2P} = -6 \text{ kN}$ 。

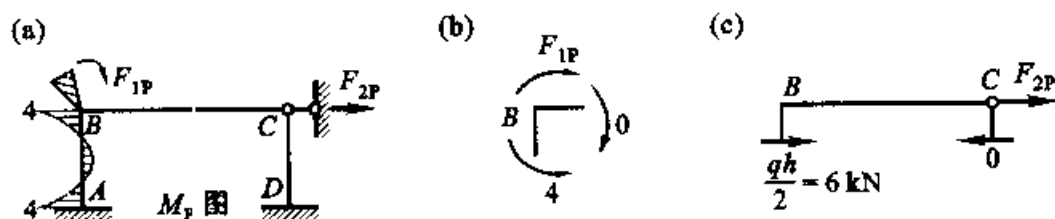


图 8-18

(2) 基本结构在单位转角  $\Delta_1 = 1$  作用下的计算。

当结点  $B$  转角  $\Delta_1 = 1$  时, 分别求各杆的杆端弯矩, 作出弯矩图( $\bar{M}_1$  图)如图 8-19a 所示。

由图 8-19b、c, 得

$$k_{11} = 4i + 3(2i) = 10i, \quad k_{21} = -1.5i$$

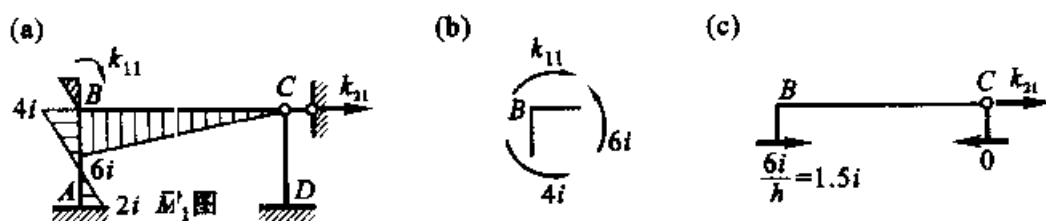


图 8-19

(3) 基本结构在单位水平位移  $\Delta_2 = 1$  作用下的计算。

当结点  $B$ 、 $C$  的水平位移  $\Delta_2 = 1$  时, 分别求各杆的杆端弯矩, 作出弯矩图( $\bar{M}_2$  图)如图 8-20a 所示。

由图 8-20b、c, 得

$$k_{12} = -1.5i, \quad k_{22} = \frac{15}{16}i$$

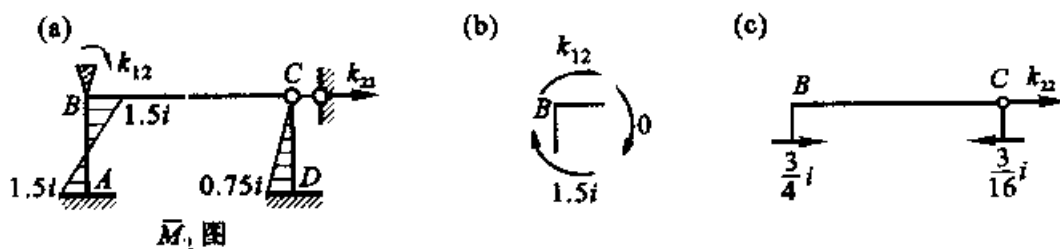


图 8-20



上式与力法典型方程是对应的,称为位移法典型方程,这里

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

称为结构的刚度矩阵,其中系数称为结构的刚度系数。由反力互等定理可知

$$k_{ij} = k_{ji}$$

因此,结构刚度矩阵也是一个对称矩阵,主对角线上的系数,称为主系数,恒大于零;其他系数称为副系数,可为正,可为负,也可为零

§8-3、§8-4 和本节以不同的表现形式解决了位移法中把拆开的杆件组装成原结构的问题,是位移法的主体内容;这与本书(Ⅱ)第10章矩阵位移法中的整体分析是相对应的。

## §8-6 对称结构的计算

对称的连续梁和刚架在工程中应用很多。作用于对称结构上的任意荷载,可以分为对称荷载和反对称荷载两部分分别计算。在对称荷载作用下,变形是对称的,弯矩图和轴力图是对称的,而剪力图是反对称的。在反对称荷载作用下,变形是反对称的,弯矩图和轴力图是反对称的,而剪力图是对称的。利用这些规则,计算对称连续梁或对称刚架时,只需计算这些结构的半边结构。

下面讨论半边结构的取法。

### 1. 奇数跨对称结构

#### (1) 对称荷载(图8-22a)

在对称轴上的截面C没有转角和水平位移,但可有竖向位移。计算中所取半边结构如图8-22b所示,C端取为滑动支承端。

#### (2) 反对称荷载(图8-22c)

在对称轴上的截面C没有竖向位移,但可有水平位移和转角。计算中所取的半边结构如图8-22d所示,C端为辊轴支座。

### 2. 偶数跨对称结构

#### (1) 对称荷载(图8-23a)

在对称轴上,截面C没有转角和水平位移,柱CD没有弯矩和剪力。因为忽略杆CD的轴向变形,故半边结构如图8-23b所示。C端为固定支座。

## (2) 反对称荷载(图 8-24a)

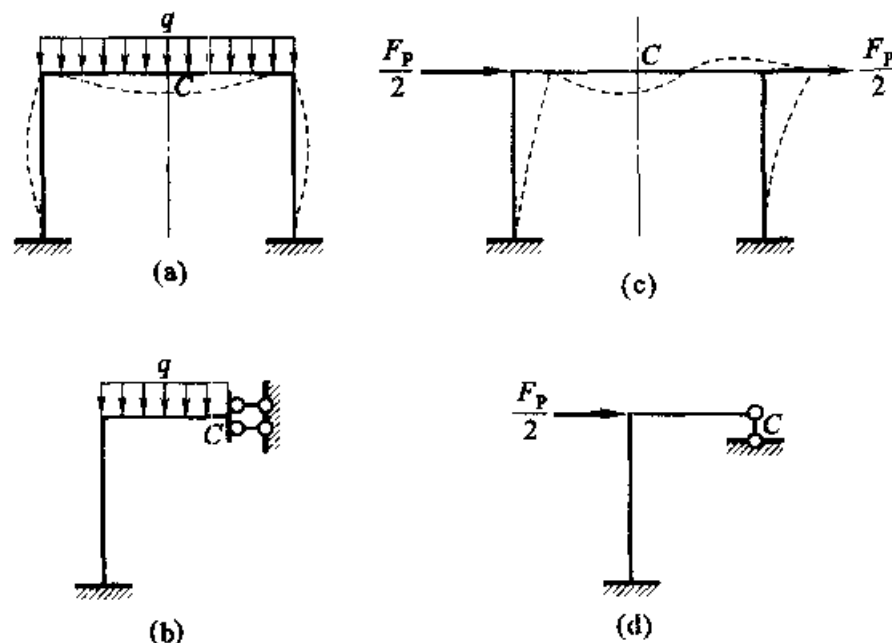


图 8-22

在对称轴上,柱  $CD$  没有轴力和轴向位移,但有弯矩和弯曲变形。可将中间

柱分成两根分柱,分柱的抗弯刚度为原柱的一半,这样问题就变为奇数跨的问题,如图 8-24b 所示,其中在两根分柱之间增加一跨,但其跨度为零。半边结构如图 8-24c 所示。因为忽略轴向变形的影响, $C$  处的竖向支杆可取消,半边结构也可按图 8-24d 选取。中间柱  $CD$  的总内力为两根分柱内力之和。由于两根分柱的弯矩、剪力相同,故总弯矩和总剪力为分柱弯矩和剪力的两倍。又由于两根分柱的轴力绝对值相同而正负号相反,故总轴力为零。

最后说明一下,对取得的半边结构,可以用任何适宜的方法进行计算。

**例 8-4** 试求作图 8-25a 所示吊桥

结构的内力图。吊杆的  $EA$  等于横梁  $EI$  的  $\frac{1}{20} \text{ m}^{-2}$ 。

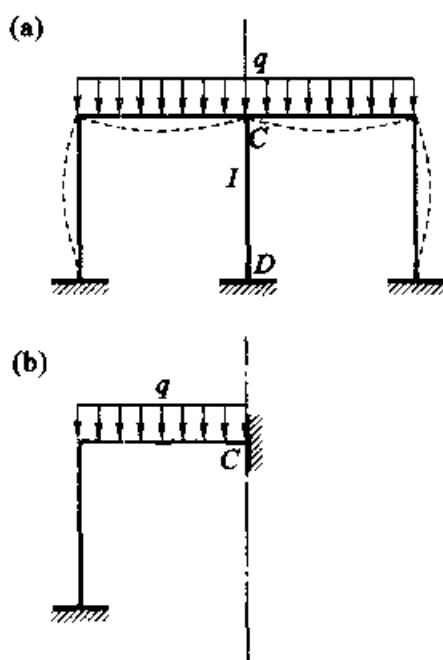


图 8-23



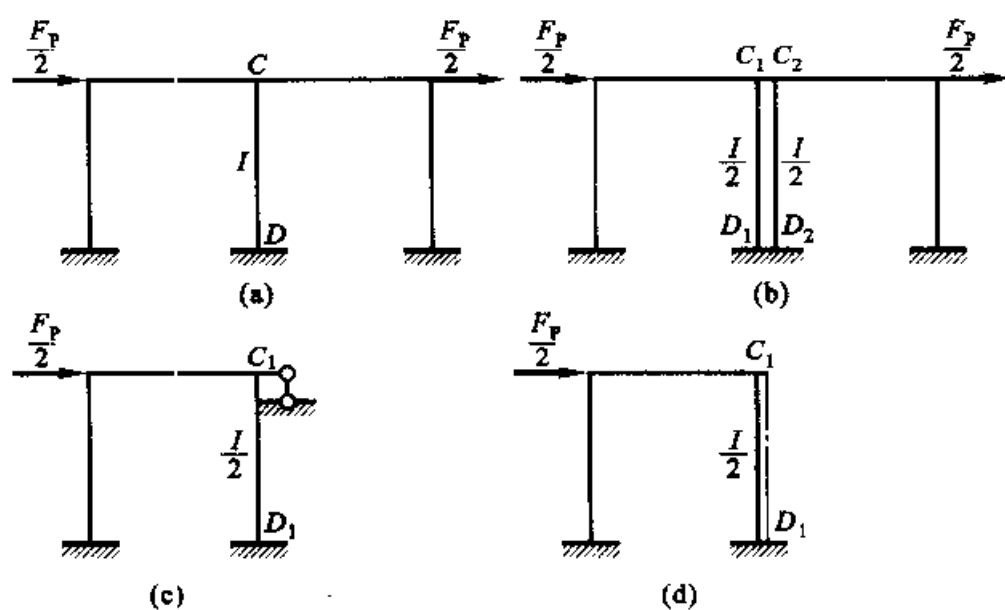


图 8-24

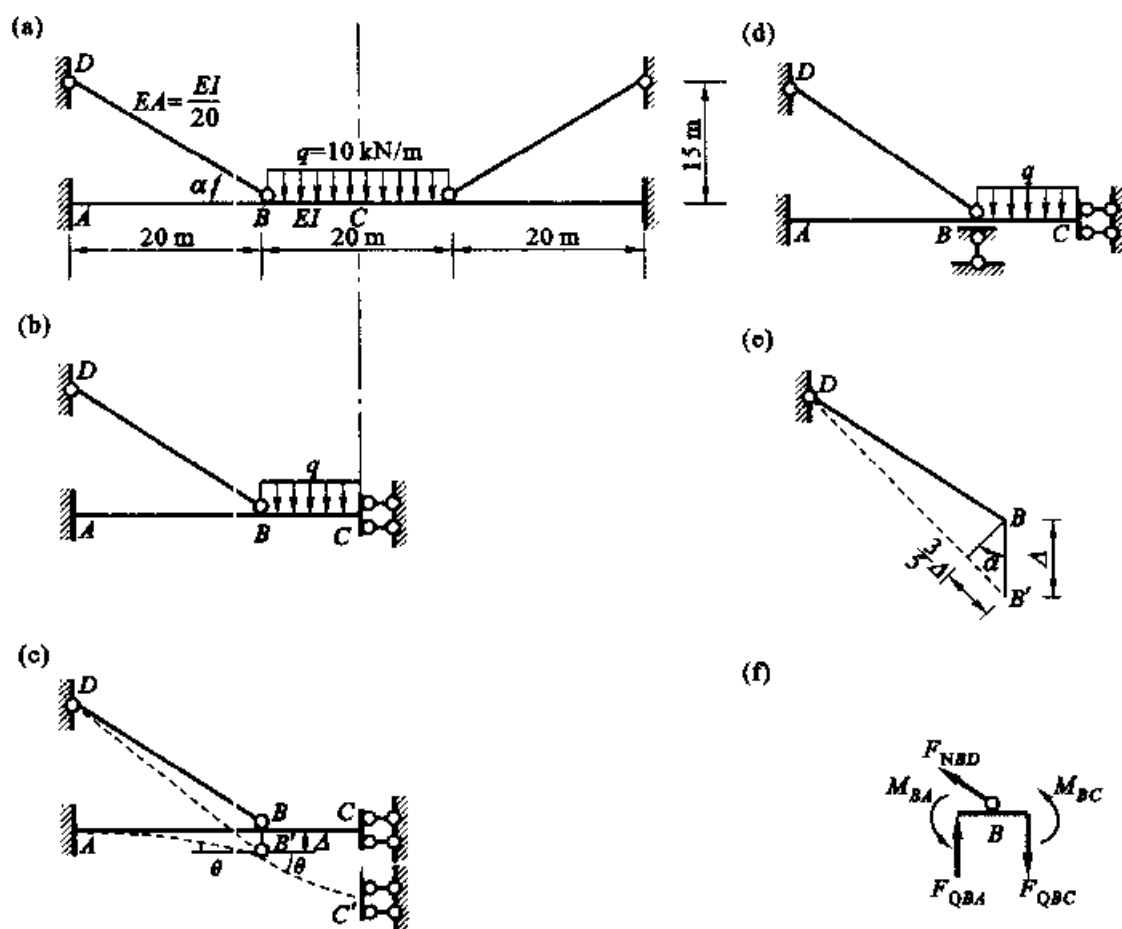


图 8-25

解 (1) 基本未知量

图 8-25a 是一个受对称荷载的对称结构, 在对称轴上的截面 C 没有转角, 计算时取半边结构如图 8-25b 所示。

取结点 B 的转角  $\theta$  和竖向位移  $\Delta$  为基本未知量(参看图 8-25c)。

(2) 求固端力

在结点 B 加约束, 固定转角  $\theta$  和位移  $\Delta$ (图 8-25d)。查表 8-1 求出在荷载作用下的固端弯矩和剪力如下:

$$M_{BC}^F = -\frac{ql^2}{3} = -\frac{10 \text{ kN/m} \times (10 \text{ m})^2}{3} = -333 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^F = -\frac{ql^2}{6} = -\frac{10 \text{ kN/m} \times (10 \text{ m})^2}{6} = -167 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_{QBC} = ql = 10 \text{ kN/m} \times 10 \text{ m} = 100 \text{ kN}$$

$$F_{QCB} = 0$$

(3) 求杆端力

先求由位移  $\theta$  和  $\Delta$  所产生的杆端力。对有荷载作用的杆, 再叠加上固端力, 即得杆端力如下:

杆 AB:

$$M_{AB} = 2i_{AB}\theta - 6i_{AB}\frac{\Delta}{l} = 2\frac{EI}{20}\theta - \frac{6EI}{20^2}\Delta$$

$$M_{BA} = 4i_{AB}\theta - 6i_{AB}\frac{\Delta}{l} = 4\frac{EI}{20}\theta - \frac{6EI}{20^2}\Delta$$

$$F_{QBA} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} = -\frac{6EI}{20^2}\theta + \frac{12EI}{20^3}\Delta$$

杆 BC: 因为 C 端为滑动支承端, B 端有线位移时, 不引起杆端弯矩, 所以

$$M_{BC} = \frac{EI}{10}\theta - 333$$

$$M_{CB} = -\frac{EI}{10}\theta - 167$$

$$F_{QBC} = 100 \text{ kN}$$

杆 BD: 当 B 端有竖向位移  $\Delta$  移至 B' 时(图 8-25e), 杆 BD 伸长  $\frac{3}{5}\Delta$ 。

所以, 链杆 BD 的轴力为

$$F_{NBD} = \frac{EA}{l} \left( \frac{3}{5}\Delta \right) = \frac{EI}{25} \left( \frac{3}{5}\Delta \right) = \frac{3EI}{5 \times 20 \times 25}\Delta$$

## (4) 列位移法方程

考虑结点 B 的平衡(图 8-25f, 其中横梁轴力未画出):

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0, & M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & \frac{3}{5} F_{NBD} + F_{QBA} - F_{QBC} &= 0\end{aligned}$$

将上面求出的杆端力代入, 得

$$\begin{aligned}\frac{4EI}{20}\theta - \frac{6EI}{20^2}\Delta + \frac{EI}{10}\theta - 333 &= 0 \\ \frac{3}{5}\left(\frac{3EI}{5 \times 20 \times 25}\right)\Delta - \frac{6EI}{20^2}\theta + \frac{12EI}{20^3}\Delta - 100 &= 0\end{aligned}$$

整理后, 得

$$\left. \begin{aligned}0.3\theta - 0.015\Delta - \frac{333}{EI} \\ - 0.015\theta + 0.00222\Delta = \frac{100}{EI}\end{aligned} \right\}$$

## (5) 解位移法方程

得

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{5\,080}{EI} \\ \Delta &= \frac{79\,400}{EI}\end{aligned}$$

## (6) 求杆端力

将求得的  $\theta$ 、 $\Delta$  代回第(3)步, 得

$$\begin{aligned}M_{AB} &= -682 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{BA} &= -174 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ F_{QBA} &= 42.8 \text{ kN} \\ M_{BC} &= 174 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{CB} &= -675 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ F_{QBC} &= 100 \text{ kN} \\ F_{NBD} &= 95.2 \text{ kN}\end{aligned}$$

## (7) 绘内力图

内力图如图 8-26 所示。

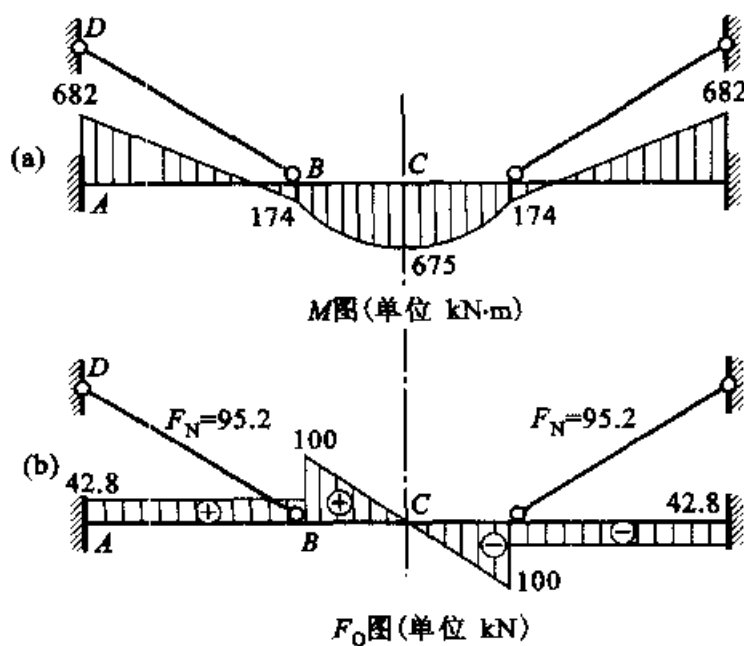


图 8-26

## § 8-7 支座位移和温度改变时的计算

## 1. 支座位移时的计算

超静定结构当支座产生已知的位移(移动或转动)时,结构中一般会引引起内力。用位移法计算时,基本未知量和基本方程以及作题步骤都与荷载作用时一样,不同的只有固端力一项,例如由荷载产生的固端弯矩改变成由已知支座位移产生的固端弯矩。具体计算通过下面的例题说明。

**例 8-5** 试求作图 8-27a 所示连续梁支座 C 下沉  $\Delta_c$  时的弯矩图。设两杆的  $i$  相等。

**解** (1) 基本未知量为  $\theta_B$

(2) 求杆端弯矩

$$M_{BA} = 3i\theta_B$$

$$M_{BC} = 3i\theta_B - 3i \frac{\Delta_c}{l}$$

因为没有荷载作用,只有支座 C 下沉  $\Delta_c$ , 上式中第二项  $\left(-3i \frac{\Delta_c}{l}\right)$  就是由已知下沉  $\Delta_c$  引起的固端弯矩。

(3) 列位移法方程

$$M_{BA} + M_{BC} = 0, \quad 3i\theta_B + 3i\theta_B - 3i \frac{\Delta_c}{l} = 0$$

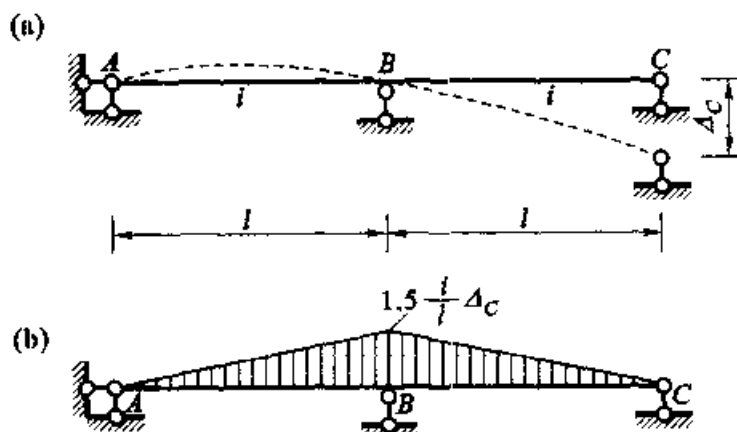


图 8-27

得

$$\theta_B = \frac{1}{2} \frac{\Delta_c}{l}$$

(4) 杆端弯矩和弯矩图

$$M_{BA} = 3i \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta_c}{l} \right) = 1.5i \frac{\Delta_c}{l}$$

$$M_{BC} = 3i \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta_c}{l} \right) - 3i \frac{\Delta_c}{l} = -1.5i \frac{\Delta_c}{l}$$

弯矩图如图 8-27b 所示。

## 2. 温度改变时的计算

温度改变时的计算,与支座位移时的计算基本相同。这里只作一点补充:除了杆件内外温差使杆件弯曲,因而产生一部分固端弯矩外;温度改变时杆件的轴向变形不能忽略,而这种轴向变形会使结点产生已知位移,从而使杆端产生相对横向位移,又产生另一部分固端弯矩。具体计算通过下面的例题说明。

**例 8-6** 试求图 8-28 所示排架由于温度均匀升高  $t$  所产生的弯矩。各横梁截面尺寸相同,各立柱截面也相同,温度膨胀系数为  $\alpha$ 。

**解** 图 8-28a 为奇数跨情况,图 8-28b 为偶数跨情况。因为排架是对称的,荷载(温度变化也是一种广义荷载)也是对称的,因此在对称轴上的 C 点没有转角和水平侧移。温度升高  $t$  时的变形如图中虚线所示。立柱伸长时,由于不受约束,故不产生内力。横梁伸长时,使柱顶各点产生的水平线位移为

$$\Delta = \alpha t L$$

其中  $L$  为结点到对称轴的距离。

根据结点位移,由式(8-9)可求出柱底弯矩如下:

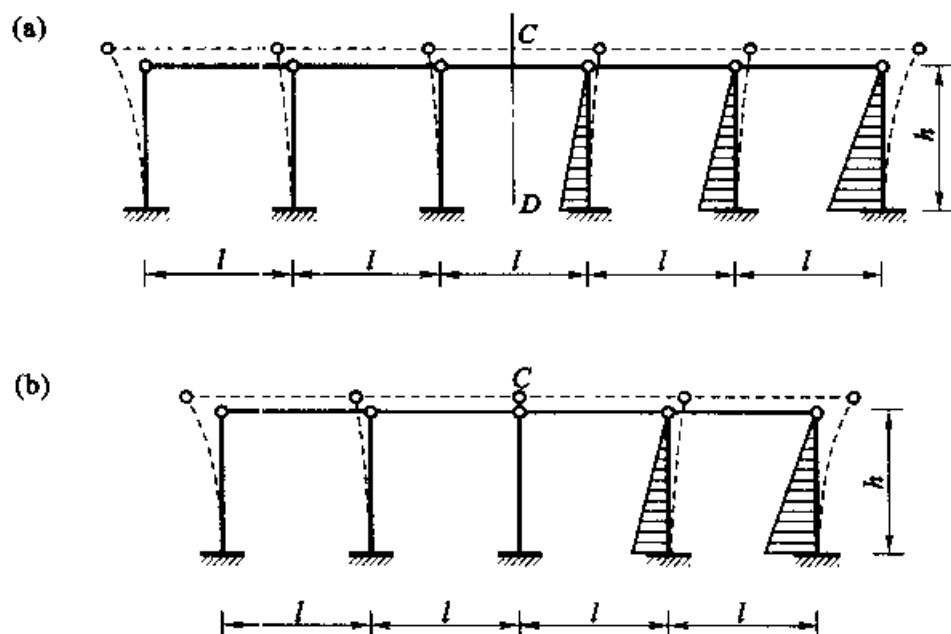


图 8-28

$$M = -3i \frac{1}{h} \Delta = -3i \frac{\alpha t L}{h}$$

弯矩图在图 8-28 中的右半部画出。计算结果表明,排架愈长,温度变化产生的内力也愈大。所以,当结构长度过大时,应设置温度缝,将结构分开,以减小温度内力。

**例 8-7** 试求图 8-29a 所示刚架由于温度改变而产生的弯矩。图中所标温度为温度变化值,各杆截面尺寸相同。

**解** 本题原有三个结点角位移和一个独立的结点线位移。由于结构是对称的,温度也是对称分布的,因此半边结构可取如图 8-29b 所示,其中只有一个基本未知量  $\theta_B$ 。这里因为要考虑轴向变形的影响,所以图 8-29b 中 CD 杆仍要画出。

为了求固端弯矩,可将温度变化分为两部分:轴线平均温度变化  $t_0$  (图 8-29c) 和杆两侧温度差变化  $\Delta t$  (图 8-29d)。杆轴线平均温度变化使杆长发生变化,但变化值为已知值(图 8-29c):

$$\text{柱 AB 缩短} \quad \alpha t_0 H = 40\alpha$$

$$\text{柱 CD 伸长} \quad \alpha t_0 H = 40\alpha$$

$$\text{梁 BC 缩短} \quad \alpha t_0 l = 60\alpha$$

这些长度变化使各杆端结点产生相对线位移:

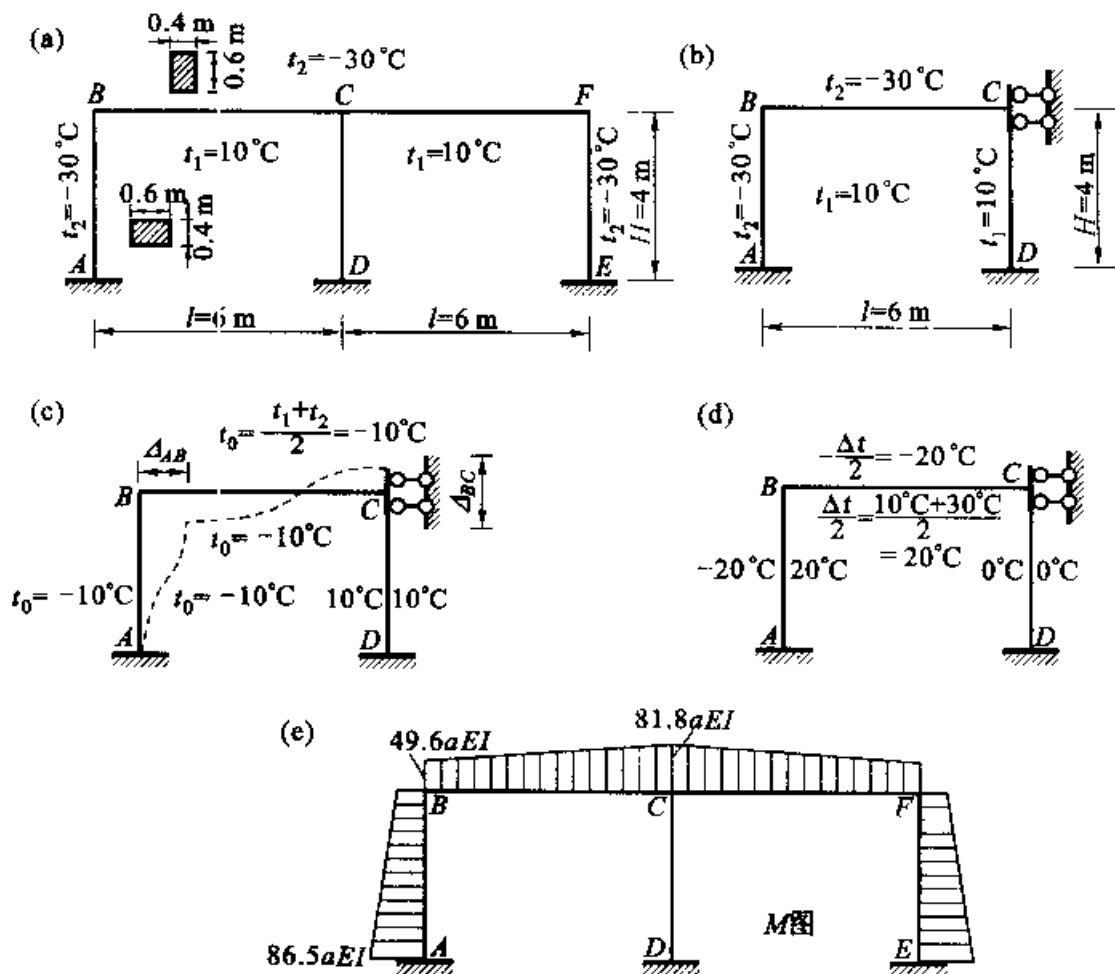


图 8-29

$$\Delta_{AB} = 60a$$

$$\Delta_{BC} = -(40a + 40a) = -80a$$

上述位移使杆端产生的固端弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB}^F &= M_{BA}^F = -6 \frac{EI}{H} \Delta_{AB} = -6 \frac{EI}{4} (60a) = -22.5aEI \\ M_{BC}^F &= M_{CB}^F = -6 \frac{EI}{l} \Delta_{BC} = -6 \frac{EI}{6} (-80a) = 13.3aEI \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

杆件两侧的温度差  $\Delta t$  使杆端产生的固端弯矩为(查表 8-1):

$$\left. \begin{aligned} -M_{AB}^F &= M_{BA}^F = \frac{EI\alpha\Delta t}{h} = \frac{40aEI}{0.6} = 66.7aEI \\ -M_{BC}^F &= M_{CB}^F = \frac{EI\alpha\Delta t}{h} = \frac{40aEI}{0.6} = 66.7aEI \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

最后固端弯矩等于式(a)和式(b)之和

杆端弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2i_{AB}\theta_B + M_{AB}^F = 2\frac{EI}{4}\theta_B + (-22.5\alpha EI - 66.7\alpha EI) = 0.5EI\theta_B - 89.2\alpha EI \\ M_{BA} &= 4i_{AB}\theta_B + M_{BA}^F = 4\frac{EI}{4}\theta_B + (-22.5\alpha EI + 66.7\alpha EI) = 1.0EI\theta_B + 44.2\alpha EI \\ M_{BC} &= 4i_{BC}\theta_B + M_{BC}^F = 4\frac{EI}{6}\theta_B + (13.3\alpha EI - 66.7\alpha EI) = 0.67EI\theta_B - 53.3\alpha EI \\ M_{CB} &= 2i_{BC}\theta_B + M_{CB}^F = 2\frac{EI}{6}\theta_B + (13.3\alpha EI + 66.7\alpha EI) = 0.33EI\theta_B + 80.0\alpha EI \end{aligned} \right\} (c)$$

位移法方程为

$$M_{BA} + M_{BC} = 0, \quad 1.67EI\theta_B - 9.1\alpha EI = 0$$

由此求得

$$\theta_B = 5.4\alpha$$

代入式(c), 得杆端弯矩为:

$$M_{AB} = (0.5 \times 5.4 - 89.2)\alpha EI = -86.5\alpha EI$$

$$M_{BA} = (5.4 + 44.2)\alpha EI = 49.6\alpha EI$$

$$M_{BC} = (0.67 \times 5.4 - 53.3)\alpha EI = -49.7\alpha EI$$

$$M_{CB} = (0.33 \times 5.4 + 80.0)\alpha EI = 81.8\alpha EI$$

弯矩图如图 8-29e 所示。

## § 8-8 小 结

力法和位移法是计算超静定结构的两个基本方法。由杆端位移和荷载推算杆端弯矩的公式是位移法的基本公式, 对它的物理意义应了解清楚。由此可以了解在位移法中为什么可以取结点位移作为基本未知量。这里要特别注意关于杆端弯矩新的正负号规定。

在位移法中, 用以解算基本未知量的是平衡方程。对每一个刚结点的未知角位移, 可以写一个结点力矩平衡方程。对每一个独立的结点线位移, 可以写一个截面平衡方程。平衡方程的数目与基本未知量的数目正好相等。

位移法的另一种演算形式是利用基本体系进行计算。这样可使位移法与力法之间建立更加完整的对应关系, 因而有助于对两种方法的深入了解。采用基本体系后, 不仅使得基本方程中的每项系数和自由项都具有独立的力学意义, 而且可以与第 10 章的矩阵位移法相呼应。学习时对两种解法可以有所侧重。对前一解法应熟练掌握; 对后一解法重在理解力学意义, 为学习矩阵位移法打下基础。

对称结构的计算, 可以取半边结构进行。这里关键的是要了解清楚半



边结构的取法,即了解清楚在对称荷载或反对称荷载下结构有哪些独立的结点位移。

本章习题8-1~8-3供辅导课选用参考。习题8-21以后的习题是借助于求解器求解的综合题,是提高的内容,供参考。

最后想提一下:学习了力法与位移法之后,如果再把二者加以联系和对比,将是很有兴味的。实际上,这两个方法可以说是天生的一对,相反互补,有许多对偶关系:

从基本未知量看,力法取的是力——多余约束力,位移法取的是位移——独立的结点位移。

从基本体系看,力法是去约束,位移法是加约束。

从基本方程看,力法是写位移协调方程,位移法是写力系平衡方程。

从能量法看,力法应用卡氏第二定理,位移法应用卡氏第一定理。

这些对偶关系简直就像一幅对仗工整的对联,体现了一种内在的科学美。掌握了这个对偶关系,就可以学一知二,达到融会贯通的境界。还应看到,力法只是用于分析超静定结构,位移法则通用于分析静定和超静定结构。这也许是相反互补的另一表现。

## § 8-9 思考与讨论

### § 8-2 思考题

8-1 为什么铰支座及铰结点处的角位移可不选作基本未知量?试比较当铰支座及铰结点处角位移选作与不选作基本未知量时两种算法的优缺点。

8-2 为什么滑动支座处的线位移可不选作基本未知量?试比较当滑动支座处线位移选作与不选作基本未知量时两种算法的优缺点。

讨论:从以上两思考题可以知道,当只有两端刚结杆的转角位移方程式(8-5)和两端固定杆的固端弯矩值时,铰支座和铰结点处的角位移必须选作基本未知量,滑动支座处的线位移也必须选作基本未知量,方可用位移法求解。

当有了一端刚结另一端铰结的转角位移方程式(8-9)和一端固定另一端铰支的固端弯矩值后,铰支座和铰结点处的转角不选作基本未知量,用位移法亦可求解。

同理,当有了一端刚结另一端为滑动支座的转角位移方程式(8-10)和一端固定另一端为滑动支座的固端弯矩值后,则滑动支座处的线位移不选作基本未知量,用位移法亦可求解。

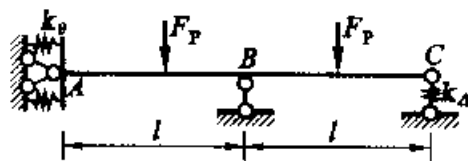
由此可知,用位移法能否求解,以及选取哪些量作为基本未知量,取决于事先已知的条件,即从已知求未知这一总的方法中已知的程度。

### § 8-4 思考题

8-3 图示弹性支座上的梁,用位移法求解,弹性支座A的转角 $\theta_A$ 与支座C的线位

移是否应取为基本未知量?为什么?相应地,位移法方程应该怎么写?弹性支座的刚度系数分别为  $k_y$  与  $k_\Delta$ 。

讨论:若预先不知道弹性支座杆的转角位移方程和弹性支座杆的固端弯矩值,则根据思考题 8-1 和 8-2 的讨论,基本未知量应怎么取?相应的位移法平衡方程有几个?建议读者自己完成此题



思考题 8-3 图

8-4 为什么求内力时可采用刚度的相对值,而求位移时则需采用刚度的真值?

8-5 在什么条件下独立的结点线位移的数目等于铰结体系自由度的数目?

8-6 在力法和位移法中,各以什么方式满足平衡条件和变形连续条件?

### § 8-5 思考题

8-7 位移法的基本体系和基本结构有什么不同?它们各自在位移法的计算过程中起什么作用?

8-8 将 § 8-3、§ 8-4 直接写平衡方程的方法与 § 8-5 基本体系典型方程的方法加以比较。两种计算方法的位移法方程是否相同?它们的关系是什么?

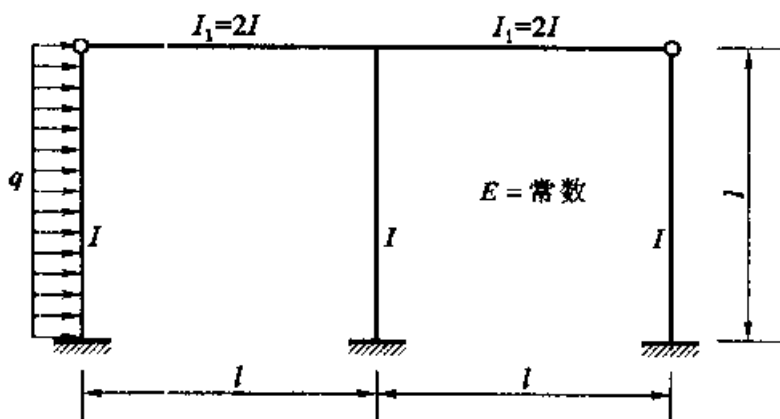
讨论:直接写平衡方程的方法可概括为两步:

- (1) 先利用叠加原理写出含基本未知量的杆端力表达式;
- (2) 根据平衡条件列出位移法方程。

基本体系典型方程的方法也可概括为两步:

- (1) 先分别用平衡条件求出位移法方程的刚度系数  $k_{ij}$  和自由项  $F_{iP}$ ;
- (2) 再按叠加原理写出含基本未知量的位移法平衡方程。

读者可按照上述概括的步骤,用图中所示两个基本未知量的刚架为例,分别写出两种方法的位移法方程,分析两者间的关系,最后结果是否相同。



思考题 8-8 图

8-9 将力法与位移法加以比较。二者的基本未知量、基本体系和基本方程有什么不同?

## § 8-6 思考题

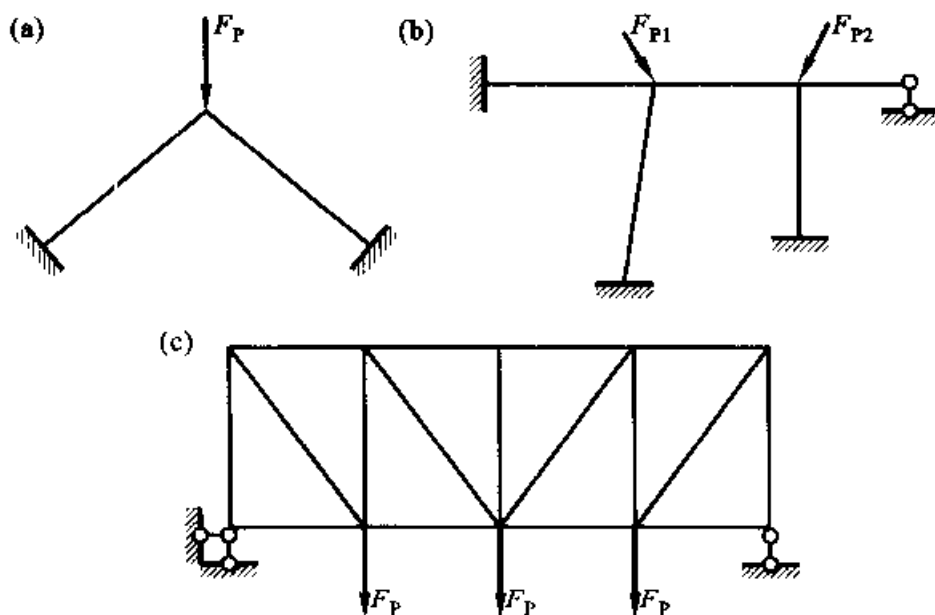
8-10 为什么对称结构在对称和反对称荷载作用时可以取半边结构计算? 荷载不对称时还能不能取半边结构计算?

8-11 对称结构如不取半边结构, 而直接利用原结构用位移法进行计算, 是否也能利用对称性简化计算?

8-12 对具有刚性横梁 ( $EI$  为  $\infty$ ) 的结构, 用位移法求解时应注意些什么问题?

## § 8-7 综合思考题

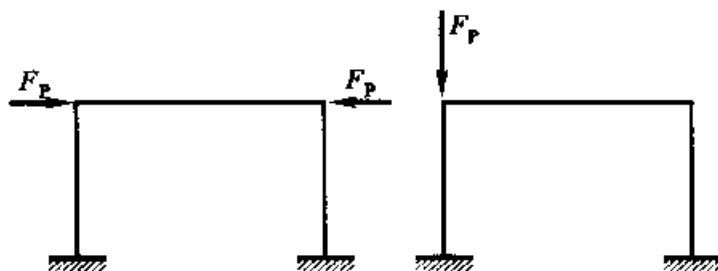
8-13 对图中所示无结点线位移的刚架(图 a、b)和刚结桁架(图 c), 当忽略杆轴向变形的影响时, 在结点荷载作用下, 各杆的弯矩是否均为零? 试说明原因。



思考题 8-13 图

讨论: 试用本题的理由说明桁架结构虽然其结点并不是理想铰, 但可按铰结点计算的依据。

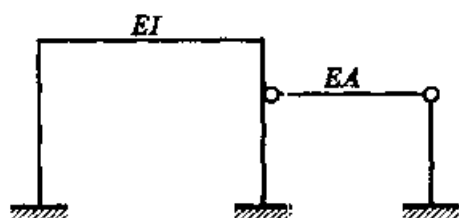
8-14 图中所示有结点线位移的刚架, 因为荷载的特殊性, 在什么情况下各杆的弯矩均为零?



思考题 8-14 图

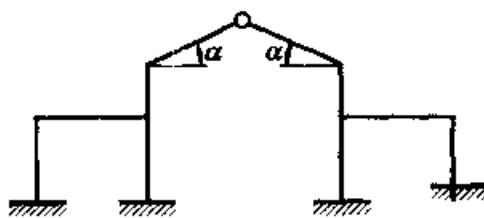
习 题

8-1 确定基本未知量。



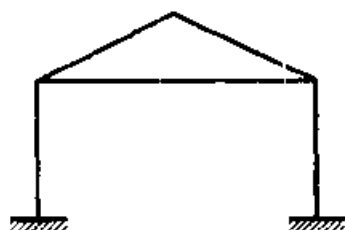
(a)

- (1) 当  $EI, EA$  为无限大时,
- (2) 当  $EI, EA$  为有限值时



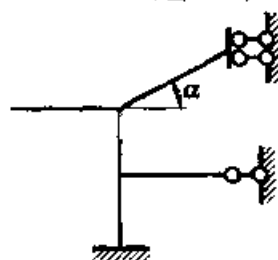
(b)

- (1) 当  $\alpha \neq 0$  时,
- (2) 当  $\alpha = 0$  时



(c)

- (1) 当不考虑轴向变形时,
- (2) 当考虑轴向变形时

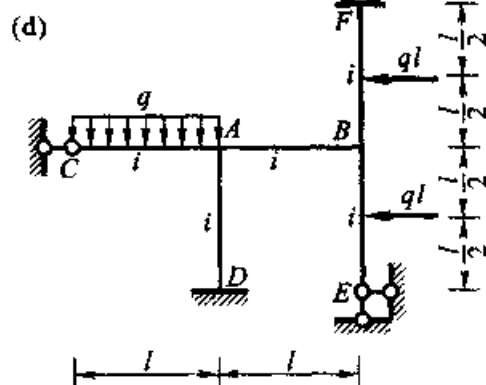
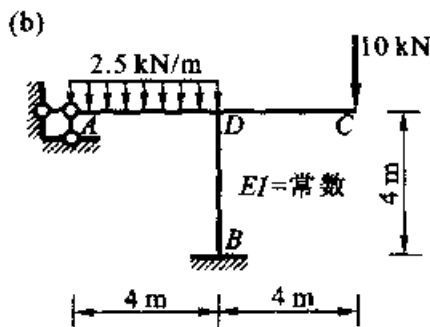
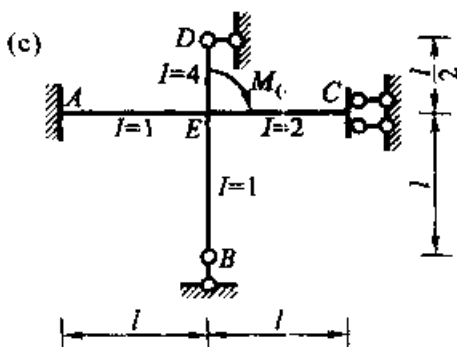
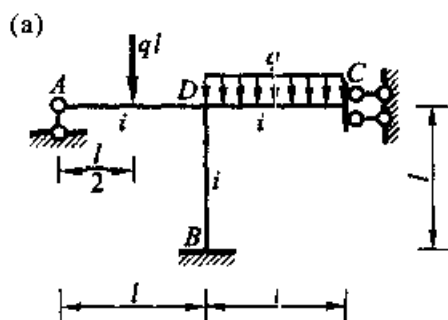


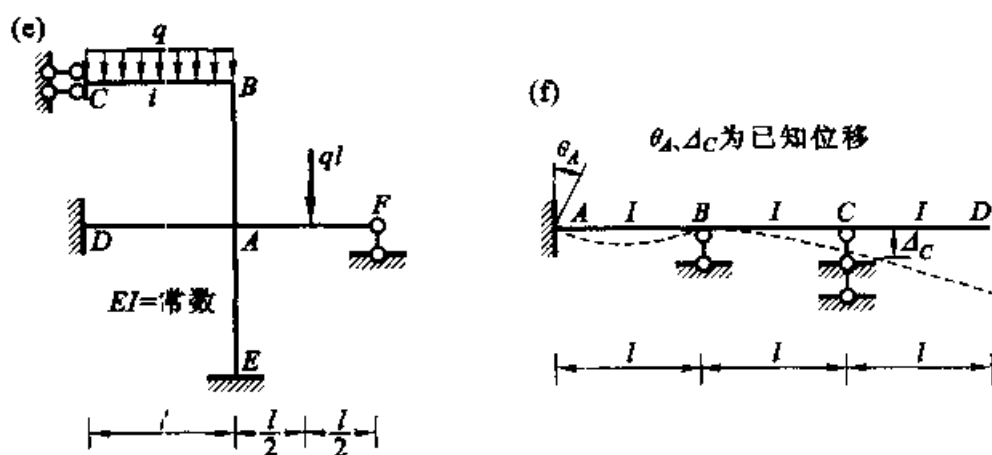
(d)

- (1) 当  $\alpha \neq 0$  时,
- (2) 当  $\alpha = 0$  时

题 8-1 图

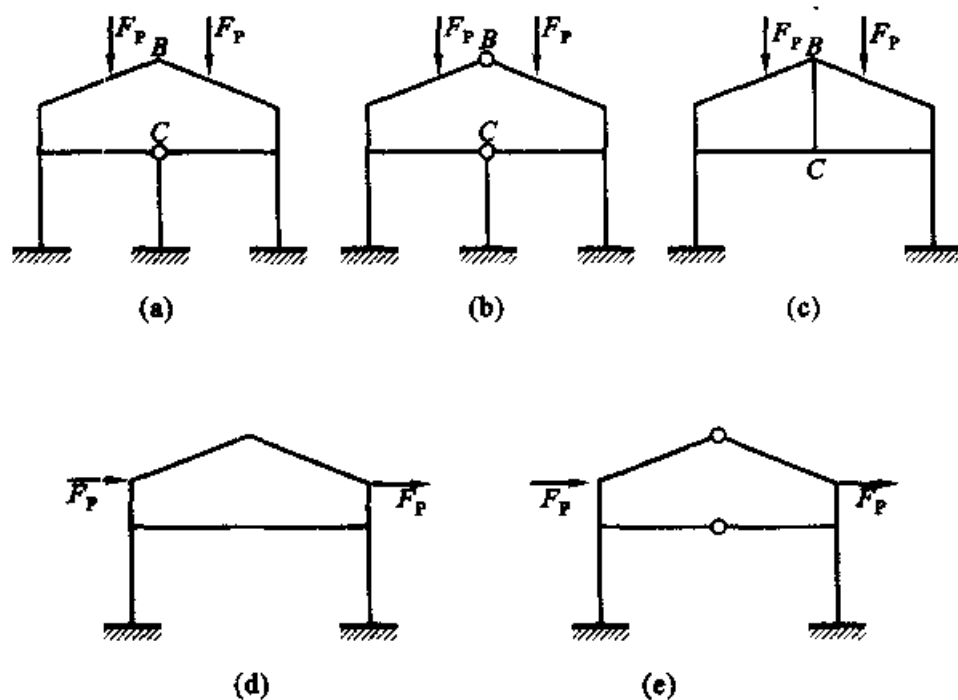
8-2 写出杆端弯矩表达式及位移法基本方程。





题 8-2 图

8-3 对所示对称结构确定基本未知量和选取半边结构。



题 8-3 图

8-4 如图所示刚性承台,各杆  $EA$  相同,试用位移法求各杆轴力。

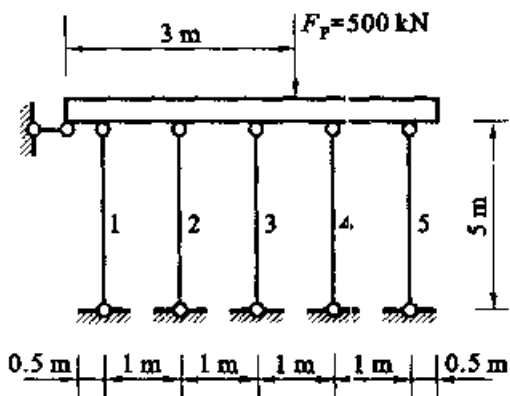
8-5 试作如图所示刚架的弯矩图,假设各杆  $EI$  相同。

8-6 试作如图所示刚架的弯矩图,设各杆  $EI$  相同。

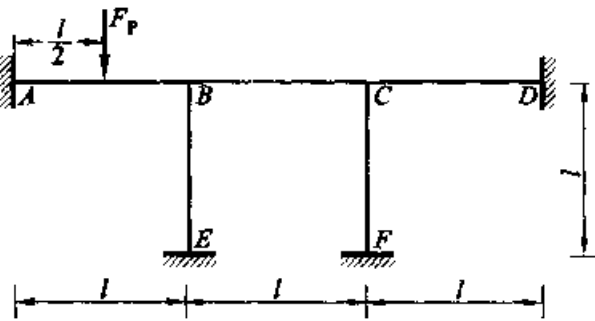
8-7 试作如图所示刚架的  $M$ 、 $F_Q$ 、 $F_N$  图。

8-8 试作如图所示排架的  $M$  图。

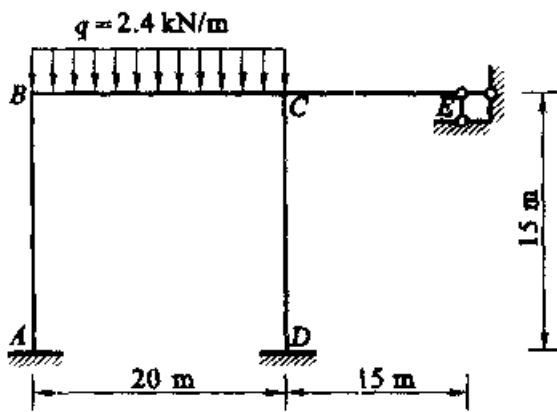
8-9 试作如图所示刚架的  $M$  图。设各杆  $EI$  为常数。



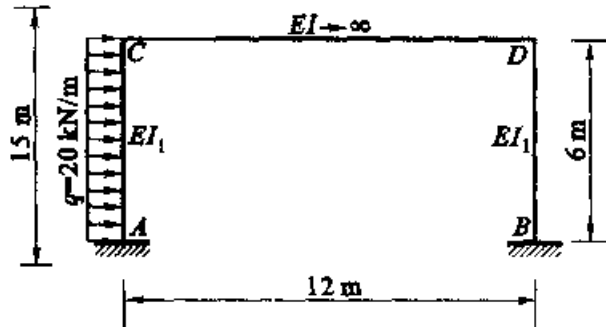
题 8-4 图



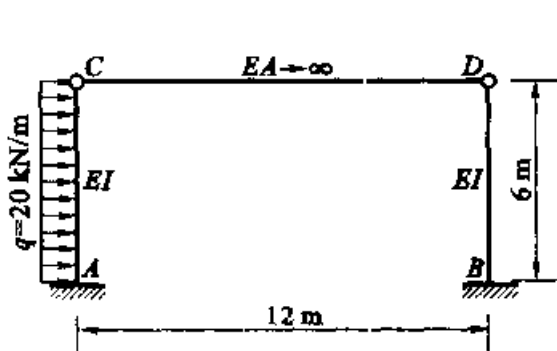
题 8-5 图



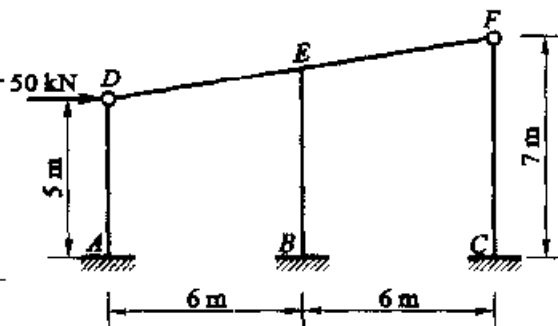
题 8-6 图



题 8-7 图

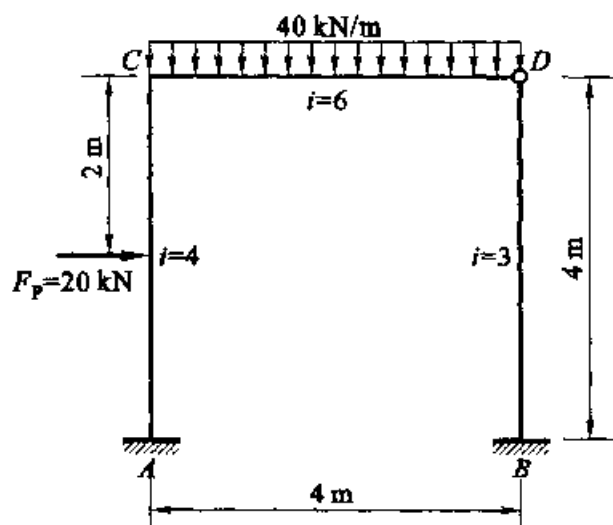


题 8-8 图



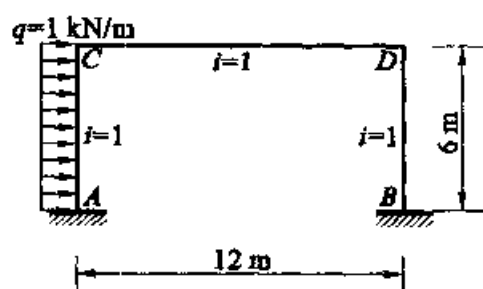
题 8-9 图

8-10 试作如图所示刚架的  $M$  图。

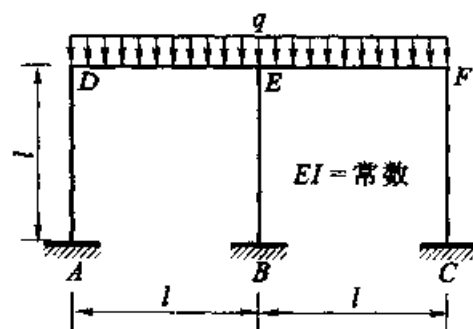


题 8-10 图

8-11 试作如图所示刚架的内力图。



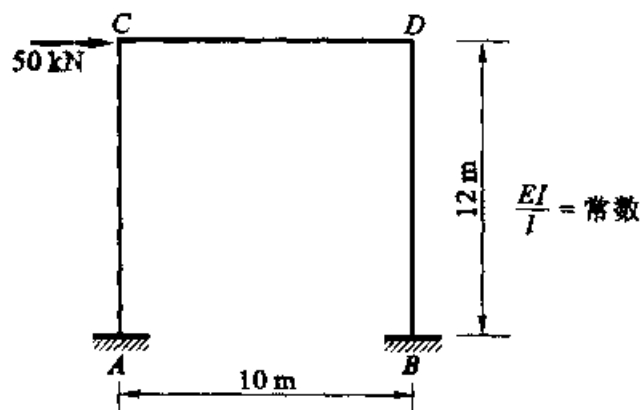
题 8-11 图



题 8-12 图

8-12 试利用对称,作如图所示刚架的  $M$  图。

8-13 试利用对称,作如图所示刚架的  $M$  图。

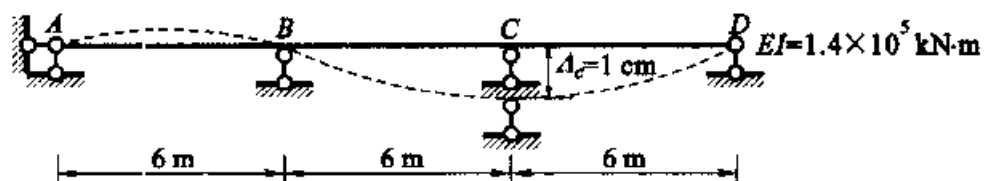


题 8-13 图



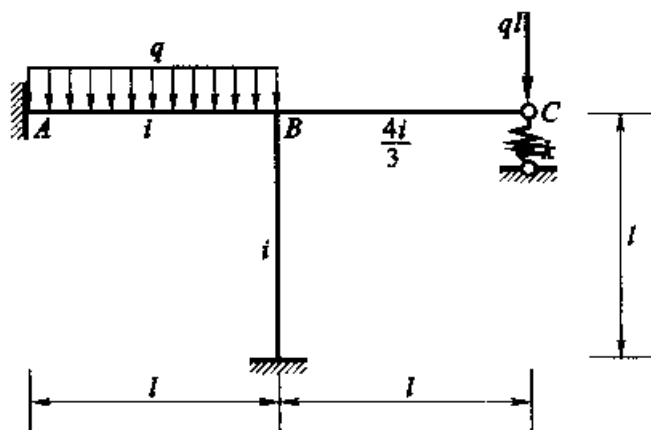


8-17 如图所示连续梁, 设支座 C 下沉 1 cm。试求作  $M$  图。



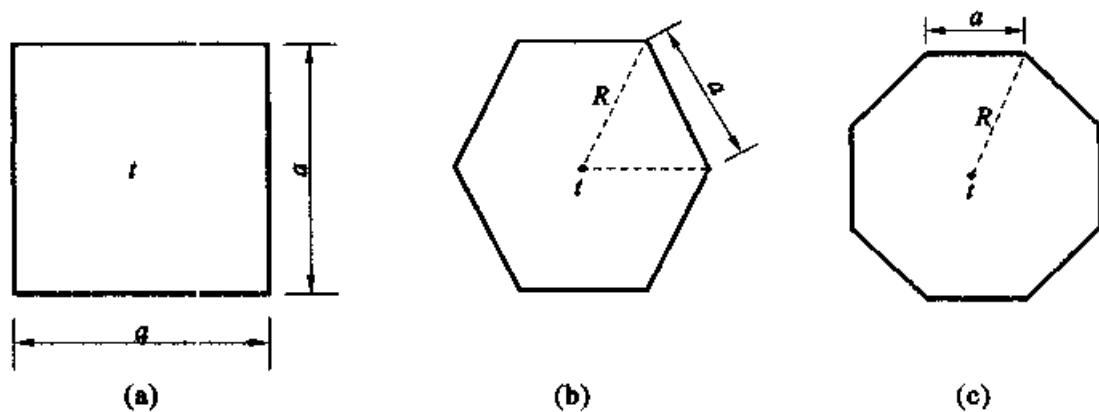
题 8-17 图

8-18 试求图示弹性支座上刚架的弯矩图。 $i$  为杆的线刚度, 弹性支座刚度  $k = 4i/l^3$ 。



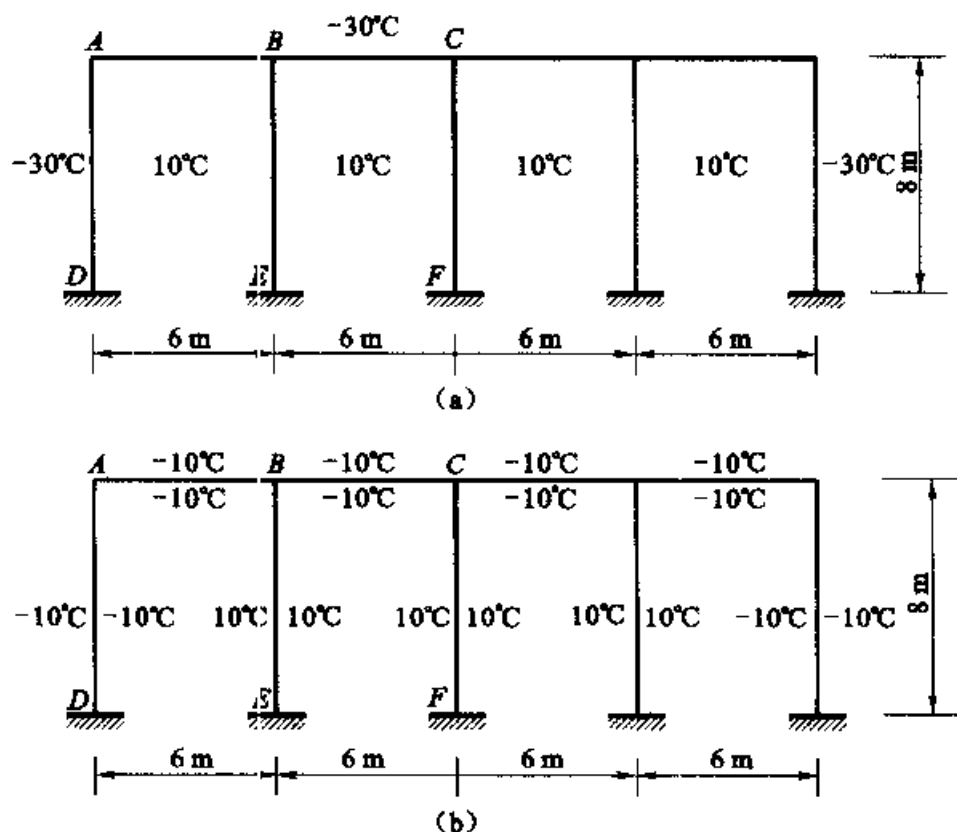
题 8-18 图

8-19 图示等截面正方形、正六边形、正八边形刚架, 内部温度升高  $t$ , 杆截面厚度为  $\delta$ , 温度膨胀系数为  $\alpha$ 。试求作  $M$  图。



题 8-19 图

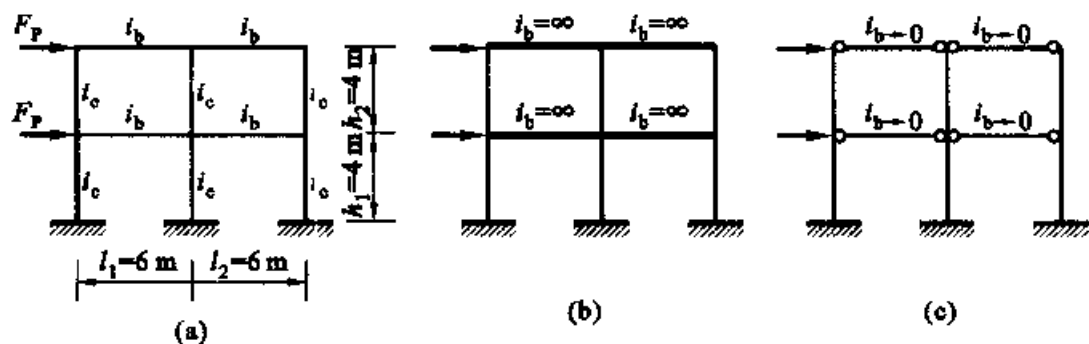
8-20 试求作如图所示刚架温度变化时的弯矩图。设  $E = 1.5 \times 10^3 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 1 \times 10^{-5}$ , 各杆截面尺寸均为  $500 \text{ mm} \times 600 \text{ mm}$ 。



题 8-20 图

8-21 图 a 所示 2 跨 2 层刚架, 梁的线刚度  $i_b$  为柱的线刚度  $i_c$  的  $s$  倍, 即  $i_b = si_c$ 。试求  $s = 0.1, 0.5, 1, 5, 10$  等 5 种  $s$  情况时, 柱的侧向位移和弯矩。

图 b 是  $s \rightarrow \infty$  时的极限情况, 图 c 是  $s \rightarrow 0$  时的极限情况。试问  $s$  的数值大(或小)到什么程度时, 即可认为趋向极限值?



题 8-21 图

8-22 上题图 a 所示 2 跨 2 层刚架, 试比较以下三种情况(均为杆线刚度相对值)的计算结果。

- (a)  $i_b = 1, i_c = 1$  (正常比较情况);
- (b)  $i_b = 1, i_c = 10$  (加大柱刚度情况);

(c)  $i_b = 10$ ,  $i_c = 1$  (加大梁刚度情况)。

试问为了减小刚架的侧向位移,哪种情况较好?为了改善刚架的受力情况,哪种情况较有利?

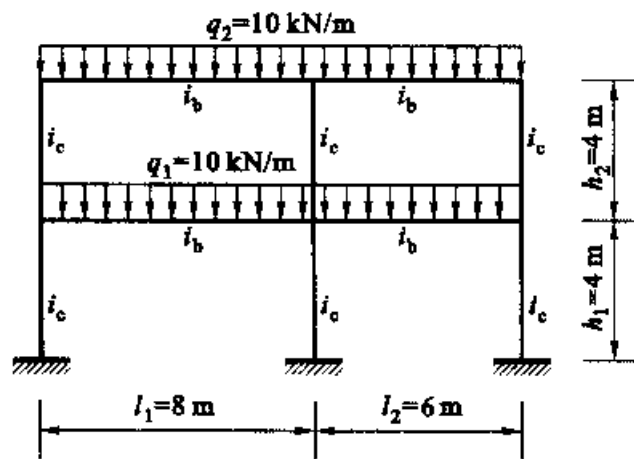
8-23 图中所示2跨2层刚架,梁的线刚度  $i_b$ ,柱的线刚度  $i_c$ 。试在以下三种情况下(均为杆线刚度相对值):

(a)  $i_b = 1$ ,  $i_c = 1$ ;

(b)  $i_b = 1$ ,  $i_c = 10$ ;

(c)  $i_b = 10$ ,  $i_c = 1$ 。

求 (a) 忽略结点侧移时,刚架的弯矩图;



题 8-23 图

(b) 考虑结点侧移时,刚架的弯矩图;

(c) 比较以上三种情况下,忽略结点侧移与考虑结点侧移内力的差别。

## 第9章

# 渐近法及超静定力的影响线

§ 9-1 力矩分配法的基本概念	§ 9-7 连续梁的最不利荷载分布及内力包络图
§ 9-2 多结点的力矩分配	
§ 9-3 对称结构的计算	§ 9-8 用求解器求解一般的超静定结构
§ 9-4 无剪力分配法	§ 9-9 小结
§ 9-5 力矩分配法与位移法的联合应用	§ 9-10 思考与讨论
§ 9-6 超静定力的影响线	习题

本章介绍属于位移法类型的渐近解法——力矩分配法和无剪力分配法。力矩分配法适用于连续梁和无结点线位移的刚架；无剪力分配法适用于刚架中除两端无相对线位移的杆件外，其余杆件都是剪力静定杆件的情况，它是力矩分配法的一种特殊的形式。对于一般有结点线位移的刚架，可用力矩分配法和位移法联合求解。

渐近法是本章讨论的重点，此外，还简略地介绍了利用挠度图作超静定力影响线和连续梁的最不利荷载分布及内力包络图。

### § 9-1 力矩分配法的基本概念

力矩分配法的理论基础是位移法，解题方法采用渐近法，适用范围是无结点线位移的刚架和连续梁。下面先解释力矩分配法中使用的几个名词。杆端弯矩的正负号规定与位移法相同。

#### 1. 名词解释

##### (1) 转动刚度

转动刚度表示杆端对转动的抵抗能力。杆端的转动刚度以  $S$  表示，它在数值上等于使杆端产生单位转角时需要施加的力矩。图 9-1 给出了等截面杆件在 A 端的转动刚度  $S_{AB}$  的数值。关于  $S_{AB}$  应当注意下列几点：

1) 在  $S_{AB}$  中 A 点是施力端, B 点称为远端。当远端为不同支承情况时,  $S_{AB}$  数值也不同。

2)  $S_{AB}$  是指施力端 A 在没有线位移的条件下的转动刚度。在图 9-1 中, A 端画成铰支座, 其目的是为了强调 A 端只能转动、不能移动这个特点。

如果把 A 端改成辊轴支座, 则  $S_{AB}$  的数值不变。也可以把 A 端看作可转动(但不能移动)的刚结点。这时  $S_{AB}$  就代表当刚结点产生单位转角时在杆端 A 引起的杆端弯矩。

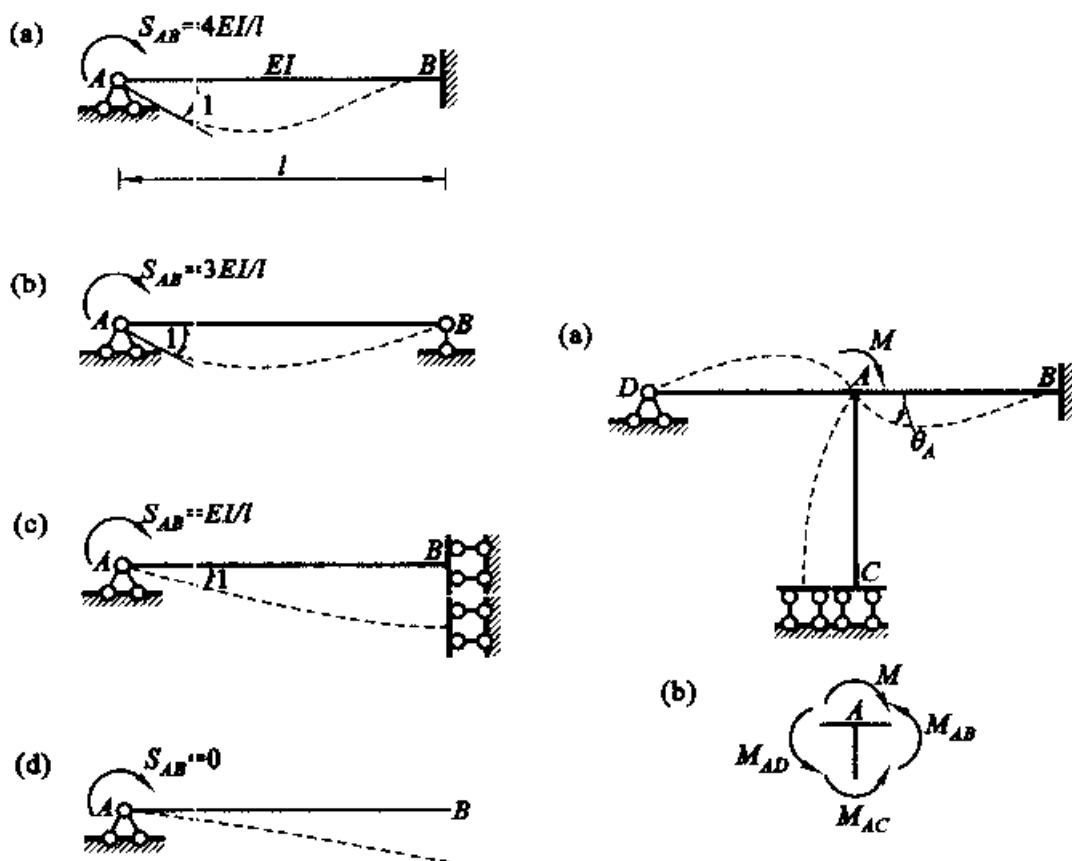


图 9-1

图 9-2

3) 图 9-1 中的转动刚度可由位移法中的杆端弯矩公式导出。汇总如下:

$$\text{远端固定, } S = 4i \quad (9-1)$$

$$\text{远端简支, } S = 3i \quad (9-2)$$

$$\text{远端滑动, } S = i \quad (9-3)$$

$$\text{远端自由, } S = 0 \quad (9-4)$$

式中  $i = \frac{EI}{l}$ 。

## (2) 分配系数

图 9-2a 所示三杆 AB、AC 和 AD 在刚结点 A 连接在一起。为了便于说明问题, 设 B 端为固定端, C 端为滑动支座, D 端为铰支座。

设有力偶荷载  $M$  加于结构 A, 使结点 A 产生转角  $\theta_A$ , 然后达到平衡。试求杆端弯矩  $M_{AB}$ 、 $M_{AC}$  和  $M_{AD}$ 。由转动刚度的定义可知:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} - S_{AB}\theta_A &= 4i_{AB}\theta_A \\ M_{AC} - S_{AC}\theta_A &= i_{AC}\theta_A \\ M_{AD} &= S_{AD}\theta_A = 3i_{AD}\theta_A \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

取结点 A 作隔离体(图 9-2b), 由平衡方程  $\sum M = 0$ , 得

$$M = S_{AB}\theta_A + S_{AC}\theta_A + S_{AD}\theta_A$$

$$\theta_A = \frac{M}{S_{AB} + S_{AC} + S_{AD}} = \frac{M}{\sum_A S}$$

式中  $\sum_A S$  表示各杆 A 端转动刚度之和。

将  $\theta_A$  值代入式(a), 得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{S_{AB}}{\sum_A S} M \\ M_{AC} &= \frac{S_{AC}}{\sum_A S} M \\ M_{AD} &= \frac{S_{AD}}{\sum_A S} M \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

由此看来, 各杆 A 端的弯矩与各杆 A 端的转动刚度成正比。可以用下列公式表示计算结果:

$$M_{Aj} = \mu_{Aj} M \quad (9-5)$$

$$\mu_{Aj} = \frac{S_{Aj}}{\sum_A S} \quad (9-6)$$

$\mu_{Aj}$  称为分配系数。其中  $j$  可以是 B、C 或 D, 如  $\mu_{AB}$  称为杆 AB 在 A 端的分配系数。杆 AB 在结点 A 的分配系数  $\mu_{AB}$  等于杆 AB 的转动刚度与交于 A 点的各杆的转动刚度之和的比值。

同一结点各杆分配系数之间存在下列关系:

$$\sum \mu_{Aj} = \mu_{AB} + \mu_{AC} + \mu_{AD} = 1$$

总之, 加于结点 A 的力偶荷载  $M$ , 按各杆的分配系数分配于各杆的 A 端。

## (3) 传递系数

在图 9-2a 中,力偶荷载  $M$  加于结点  $A$ ,使各杆近端产生弯矩,同时也使各杆远端产生弯矩。由位移法中的刚度方程可得杆端弯矩的具体数值如下:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 4i_{AB}\theta_A & M_{BA} &= 2i_{AB}\theta_A \\ M_{AC} &= i_{AC}\theta_A, & M_{CA} &= -i_{AC}\theta_A \\ M_{AD} &= 3i_{AD}\theta_A, & M_{DA} &= 0 \end{aligned}$$

由上述结果可知:

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = C_{AB} = \frac{1}{2}$$

这个比值  $C_{AB} = \frac{1}{2}$  称为传递系数。传递系数表示当近端有转角时,远端弯矩与近端弯矩的比值。对等截面杆件说来,传递系数  $C$  随远端的支承情况而异,数值如下:

$$\text{远端固定,} \quad C = \frac{1}{2} \quad (9-7)$$

$$\text{远端滑动,} \quad C = -1 \quad (9-8)$$

$$\text{远端铰支,} \quad C = 0 \quad (9-9)$$

用下列公式表示传递系数的应用:

$$M_{BA} = C_{AB}M_{AB} \quad (9-10)$$

系数  $C_{AB}$  称为由  $A$  端至  $B$  端的传递系数。

现在把图 9-2a 所示问题的计算方法归纳如下:

结点  $A$  作用的力偶荷载  $M$ ,按各杆的分配系数分配给各杆的近端;远端弯矩等于近端弯矩乘以传递系数。

## 2. 基本运算(单结点的力矩分配)

力矩分配法的物理概念可用实物模型来说明。图 9-3 所示为一连续梁的模型。连续梁  $ABC$  为薄钢片,用砝码加荷载  $F_P$  后,连续梁的变形如图 9-3a 中虚线所示。伴随着这个变形出现的杆端弯矩,是我们计算的目标。

在力矩分配法中,我们直接计算各杆的杆端弯矩。杆端弯矩以顺时针转向为正。计算步骤表述如下:

(1) 设想我们先在结点  $B$  加一个阻止转动的约束(用螺丝夹紧)阻止结点  $B$  转动,然后再加砝码。这时,只  $AB$  一跨有变形,如图 9-3b 中虚线所示。这表明结点约束把连续梁  $ABC$  分成为两个单跨梁  $AB$  和  $BC$ 。 $AB$  一段受荷载  $F_P$  作用后产生变形,相应地产生固端弯矩。结点  $B$  的约束施加的力矩  $M_B$  (称为约束力矩)可以通过结点  $B$  的平衡方程求得。从图 9-3b 可以看出,杆  $BC$  的固端弯矩  $M_{BC}^F = 0$ ,杆  $BA$  的固端弯矩为  $M_{BA}^F$ 。由  $\sum M_B = 0$ ,

可知结点  $B$  的约束力矩  $M_B = M_{BA}^f + M_{BC}^f = M_{BA}^f$ ，约束力矩等于固端弯矩之和，以顺时针转向为正。

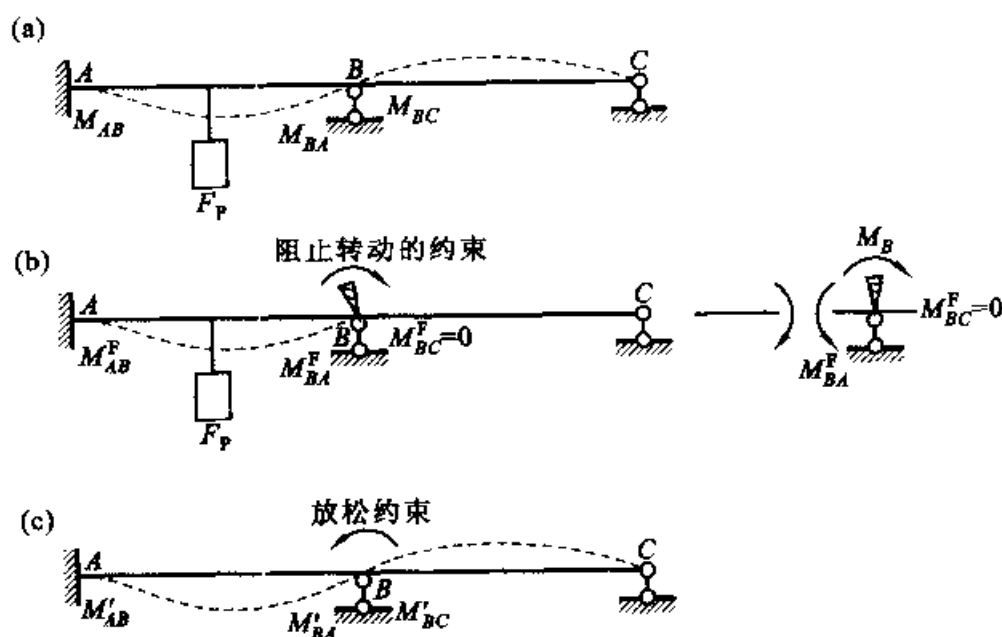


图 9-3

(2) 连续梁的结点  $B$  本来没有约束，也不存在约束力矩  $M_B$ 。因此，图 9-3b 所示的解答必须加以修正。为了达到这个目的，我们放松结点  $B$  处的约束，梁即回复到原来的状态（图 9-3a），结点  $B$  处的约束力矩即由  $M_B$  回复到零，这相当于在结点  $B$  原有约束力矩  $M_B$  的基础上再新加一个力偶荷载（ $-M_B$ ）。力偶荷载  $-M_B$  使梁新产生的变形如图 9-3c 中虚线所示。这时，结点  $B$  处各杆在  $B$  端新产生弯矩  $M'_{BA}$  和  $M'_{BC}$ ，称为分配力矩；在远端  $A$  新产生弯矩  $M'_{AB}$ ，称为传递力矩。

(3) 把图 9-3b、c 所示两种情况叠加，就得到图 9-3a 所示情况。因此，把图 9-3b、c 中的杆端弯矩叠加，就得到实际的杆端弯矩（图 9-3a），例如  $M_{BA}^f + M'_{BA} = M_{BA}$ 。

现在把力矩分配法的物理概念简述如下：先在刚结点  $B$  加上阻止转动的约束，把连续梁分为单跨梁，求出杆端产生的固端弯矩。结点  $B$  各杆固端弯矩之和即为约束力矩  $M_B$ 。去掉约束（即相当于在结点  $B$  新加  $-M_B$ ），求出各杆  $B$  端新产生的分配力矩和远端新产生的传递力矩。叠加各杆端记下的力矩就得到实际的杆端弯矩。

下面通过例题说明力矩分配法的基本运算步骤。

**例 9-1** 图 9-4 所示为一连续梁，试用力矩分配法作弯矩图。



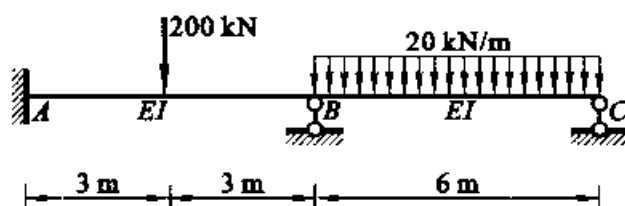


图 9-4

解 (1) 先在结点  $B$  加上约束(图 9-5a)

计算由荷载产生的固端弯矩(顺时针转向为正号), 写在各杆端的下方:

$$M_{AB}^F = -\frac{200 \text{ kN} \times 6}{8} \text{ m} = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA}^F = \frac{200 \text{ kN} \times 6}{8} \text{ m} = 150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{20 \text{ kN/m} \times (6 \text{ m})^2}{8} = -90 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在结点  $B$  处, 各杆端弯矩总和为  $M_B = 150 \text{ kN} \cdot \text{m} - 90 \text{ kN} \cdot \text{m} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

$M_B$  即为结点  $B$  的约束力矩。

(2) 放松结点  $B$

这等于在结点  $B$  新加一个外力偶矩  $-60 \text{ kN} \cdot \text{m}$ (图 9-5b)。此力偶按分配系数分配于两杆的  $B$  端, 并使  $A$  端产生传递力矩。具体演算如下:

杆  $AB$  和  $BC$  的线刚度相等,  $i = \frac{EI}{l}$ 。

转动刚度:

$$S_{BA} = 4i$$

$$S_{BC} = 3i$$

分配系数:

$$\mu_{BA} = \frac{4i}{4i + 3i} = 0.571$$

$$\mu_{BC} = \frac{3i}{4i + 3i} = 0.429$$

校核:

$$\mu_{BA} + \mu_{BC} = 1$$

分配系数写在结点  $B$  上面的方框内。

分配力矩:

$$M'_{BA} = 0.571(-60 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -34.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M'_{BC} = 0.429(-60 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -25.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

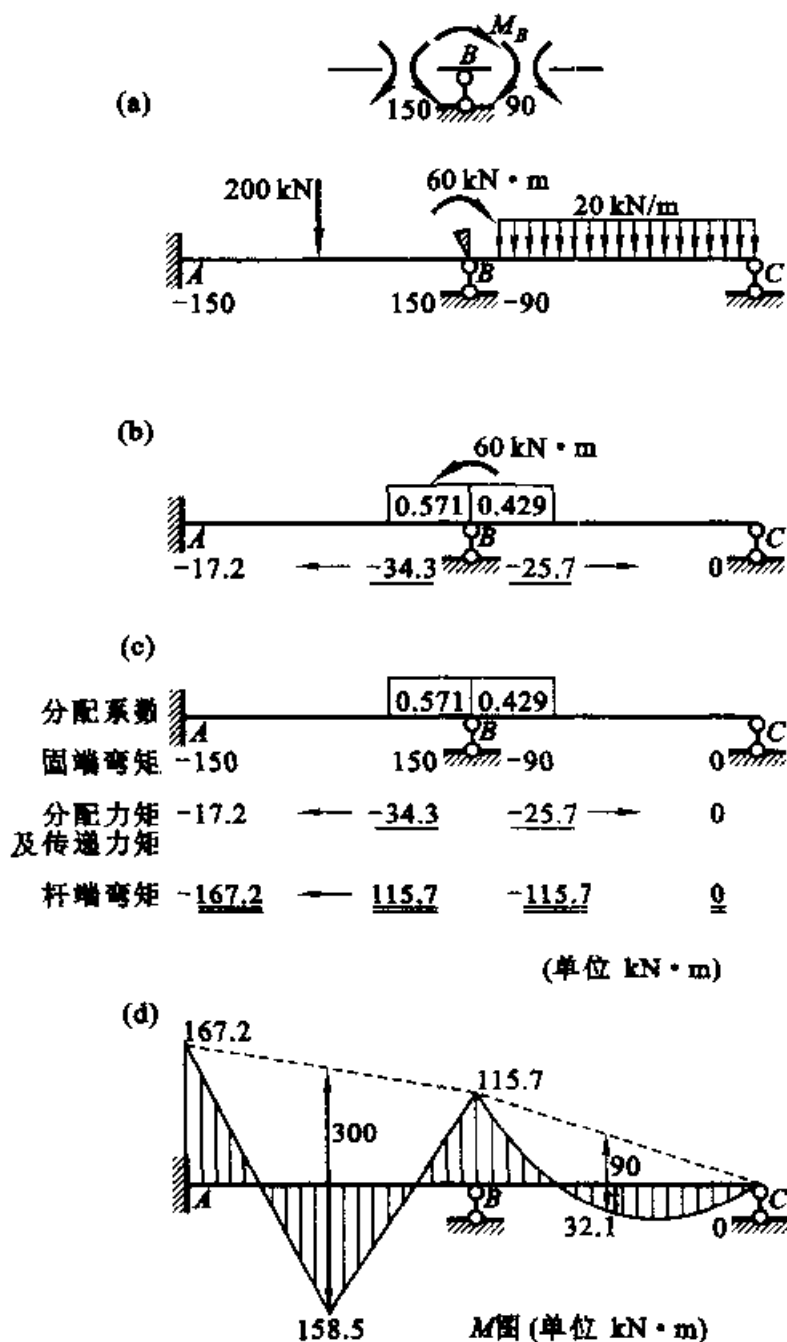


图 9-5

分配力矩下面画一横线,表示结点已经放松,达到平衡。

传递力矩(远端固定时,传递系数为  $1/2$ ;远端为铰支时,传递系数为零):

$$M'_{AB} = \frac{1}{2} M'_{BA} = \frac{1}{2} (-34.3 \text{ kN} \cdot \text{m}) = -17.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M'_{CB} = 0$$

将结果按图 9-5b(图中弯矩、力矩单位为  $\text{kN}\cdot\text{m}$ )写出,并用箭头表示力矩传递的方向。

(3) 将以上结果叠加,即得到最后的杆端弯矩,其单位为  $\text{kN}\cdot\text{m}$ (图 9-5c)

实际演算时,可将以上计算步骤汇集在一起,按图 9-5c 的格式演算。下面画双横线表示最后结果。注意在结点 B 应满足平衡条件:

$$\sum M = 115.7 \text{ kN}\cdot\text{m} - 115.7 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0$$

根据杆端弯矩,可作出  $M$  图,如图 9-5d 所示。

## § 9-2 多结点的力矩分配

上节已经说明了力矩分配法的基本概念。对于有多个结点的连续梁和刚架,只要逐次对每一个结点应用上节的基本运算,就可求出杆端弯矩。

先用一个三跨连续梁的模型来说明逐次渐近的过程。连续梁 ABCD 在中间跨加砝码后的变形曲线如图 9-6a 所示,相应于此变形的弯矩是我们计算的目标。下面说明渐近过程。

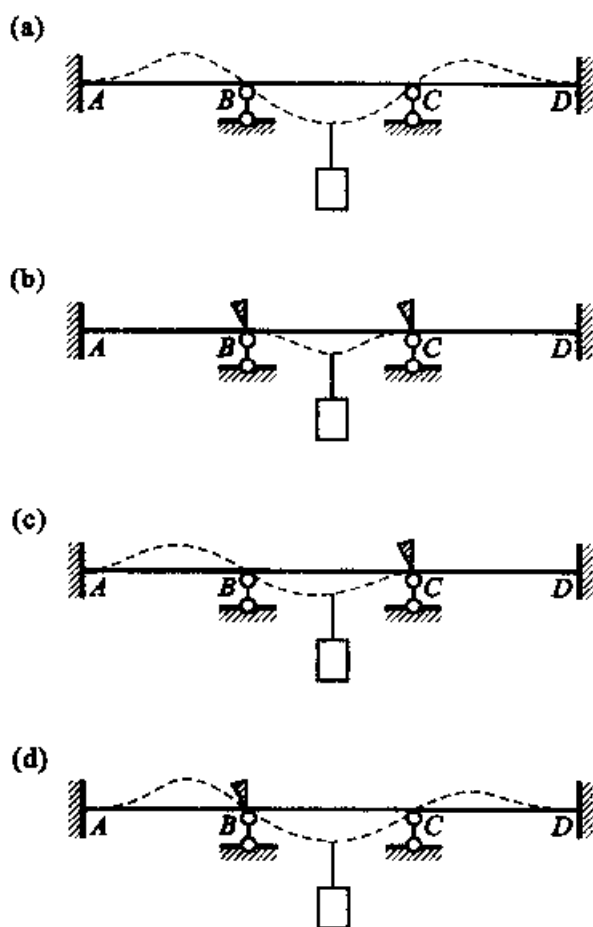


图 9-6

第一步,先在结点  $B$  和  $C$  加约束,阻止结点转动,然后再加砝码(图 9-6b)。这时,约束把连续梁分成了三根单跨梁,仅  $BC$  一跨有变形,如图中虚线所示。

第二步,去掉结点  $B$  的约束(图 9-6c,注意此时结点  $C$  仍夹紧),这时结点  $B$  将有转角,累加的总变形如图 9-6c 中虚线所示。

第三步,重新将结点  $B$  夹紧,然后去掉结点  $C$  的约束。累加的总变形将如图 9-6d 中虚线所示。从模型中可以看出,此时变形已比较接近实际变形。

依次类推,再重复第二步和第三步,即轮流去掉结点  $B$  和结点  $C$  的约束。连续梁的变形和内力很快就达到实际状态,但每次只放松一个结点,故每一步均为单结点的分配和传递运算。最后,将各项步骤所得的杆端弯矩(弯矩增量)叠加,即得所求的杆端弯矩(总弯矩)。实际上,只需对各结点进行两到三个循环的运算,就能达到较好的精度。

**例 9-2** 试作图 9-7a 所示连续梁的弯矩图。

**解** 通过此例给出多结点力矩分配法的演算格式,如图 9-7b 所示。

现按演算程序说明如下:

(1) 求各结点的分配系数

由于在计算中只在  $B$ 、 $C$  两个结点施加约束并进行放松,所以只需计算  $B$ 、 $C$  两结点的分配系数。

结点  $B$ :<sup>①</sup>

$$S_{BA} = 4i_{BA} = 4 \times \frac{1}{6} = 0.667$$

$$S_{BC} = 4i_{BC} = 4 \times \frac{2}{8} = 1$$

所以

$$\mu_{BA} = \frac{0.667}{1 + 0.667} = 0.4$$

$$\mu_{BC} = \frac{1}{1 + 0.667} = 0.6$$

结点  $C$ :

$$S_{CB} = 4i_{CB} = 4 \times \frac{2}{8} = 1 (i_{BC} = i_{CB})$$

$$S_{CD} = 3i_{CD} = 3 \times \frac{1}{6} = 0.5$$

<sup>①</sup> 本例中  $EI$  用的是相对值,故转动刚度  $S$  已非真值,只是一个比例关系,故不注明单位。下同

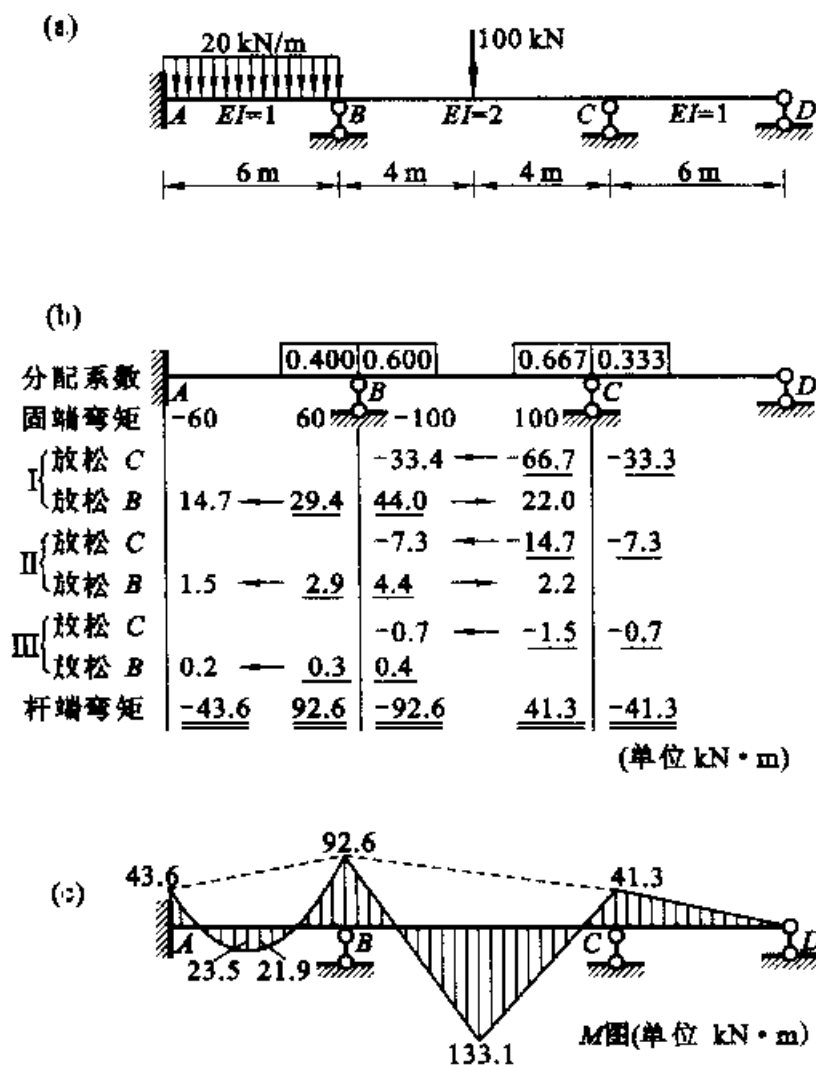


图 9-7

所以

$$\mu_{CB} = \frac{1}{1+0.5} = 0.667$$

$$\mu_{CD} = \frac{0.5}{1+0.5} = 0.333$$

分配系数分别写在图 9-7b 中结点上端的方格内。

(2) 锁住结点 B、C, 求各杆的固端弯矩:

$$M_{AB}^F = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{20 \text{ kN/m} \times (6 \text{ m})^2}{12} = -60.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA}^F = 60.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{F_P l}{8} = -\frac{100 \text{ kN} \times 8 \text{ m}}{8} = -100.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB}^F = 100.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

将计算结果记于图 9-7b 中第一行。

(3) 放松结点 C (此时结点 B 仍被锁住), 按单结点问题进行分配和传递: 结点 C 的约束力矩为  $100.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , 放松结点 C, 等于在结点 C 新加力偶荷载 ( $-100.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ), CB、CD 两杆的相应分配力矩为

$$0.667 \times (-100) \text{ kN}\cdot\text{m} = -66.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$0.333 \times (-100) \text{ kN}\cdot\text{m} = -33.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

杆 BC 的传递力矩为

$$\frac{1}{2} \times (-66.7) \text{ kN}\cdot\text{m} = -33.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

经过分配和传递, 结点 C 已经平衡, 可在分配力矩的数字下画一横线, 表示横线以上的结点力矩总和已等于零。

(4) 重新锁住结点 C, 并放松结点 B

结点 B 的约束力矩为

$$60.0 \text{ kN}\cdot\text{m} - 100.0 \text{ kN}\cdot\text{m} - 33.4 \text{ kN}\cdot\text{m} = -73.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

放松结点 B, 等于在结点 B 新加一力偶 ( $73.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ), BA、BC 两杆的分配力矩为

$$0.4 \times 73.4 \text{ kN}\cdot\text{m} = 29.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$0.6 \times 73.4 \text{ kN}\cdot\text{m} = 44.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

传递力矩为

$$\frac{1}{2} \times 29.4 \text{ kN}\cdot\text{m} = 14.7 \text{ kN}\cdot\text{m}, \quad \frac{1}{2} \times 44.0 \text{ kN}\cdot\text{m} = 22.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

此时, 结点 B 已经平衡, 但结点 C 又不平衡了。以上完成了力矩分配法的第一个循环。

(5) 进行第二个循环

再次先后放松结点 C 和 B, 相应的结点约束力矩分别为  $22 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $7.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$

(6) 进行第三个循环

相应的结点约束力矩分别为  $2.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $-0.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$

由此可以看出, 结点约束力矩的衰减过程是很快的。进行三次循环后, 结点约束力矩已经很小, 结构已接近恢复到实际状态, 故计算工作可以停止。

(7) 将固端弯矩, 历次的分配力矩和传递力矩相加, 即得最后的杆端弯矩, 其单位为  $\text{kN}\cdot\text{m}$  (图 9-7b)。

(8) 根据杆端弯矩, 可画出  $M$  图, 如图 9-7c 所示。

**例 9-3** 试求图 9-8 所示刚架的弯矩图、剪力图和轴力图。

**解** (1) 转动刚度

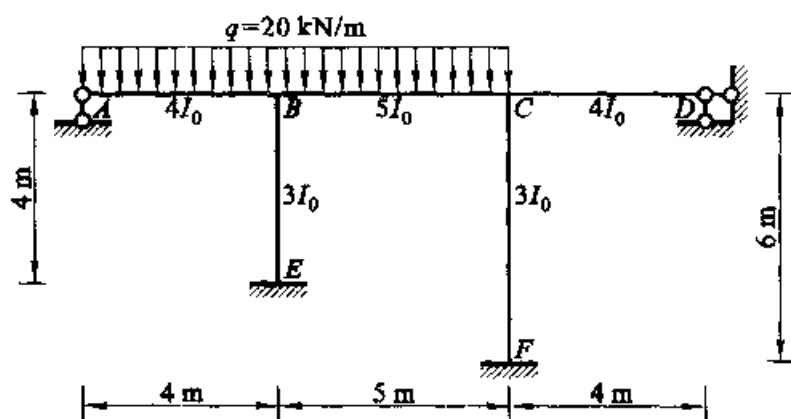


图 9-8

取相对值计算, 设  $EI_0 = 1^{\text{①}}$ ,

$$i_{BA} = \frac{4EI_0}{4} = 1, \quad S_{BA} = 3i_{BA} = 3$$

$$i_{BC} = \frac{5EI_0}{5} = 1, \quad S_{BC} = S_{CB} = 4i_{BC} = 4$$

$$i_{CD} = \frac{4EI_0}{4} = 1, \quad S_{CD} = 3i_{CD} = 3$$

$$i_{BE} = \frac{3EI_0}{4} = \frac{3}{4}, \quad S_{BE} = 4i_{BE} = 4 \times \frac{3}{4} = 3$$

$$i_{CF} = \frac{3EI_0}{6} = \frac{1}{2}, \quad S_{CF} = 4i_{CF} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

(2) 分配系数

结点 B:  $\sum S = S_{BA} + S_{BC} + S_{BE} = 3 + 4 + 3 = 10$

$$\mu_{BA} = \frac{3}{10} = 0.3, \quad \mu_{BC} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\mu_{BE} = \frac{3}{10} = 0.3$$

结点 C:

$$\sum S = S_{CB} + S_{CD} + S_{CF} = 4 + 3 + 2 = 9$$

$$\mu_{CB} = \frac{4}{9} = 0.445, \quad \mu_{CD} = \frac{3}{9} = 0.333,$$

$$\mu_{CF} = \frac{2}{9} = 0.222$$

<sup>①</sup> 超静定结构在荷载作用下的内力只与各杆  $EI$  的相对值有关, 与各杆  $EI$  的绝对值(真值)无关, 为了计算的简单, 常采用相对值, 本例题中的有关刚度均是相对值, 故不注明其单位。下同。

## (3) 固端弯矩

$$M_{BA}^F = \frac{ql^2}{8} = \frac{20 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2}{8} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{20 \text{ kN/m} \times (5 \text{ m})^2}{12} = -41.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^F = 41.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

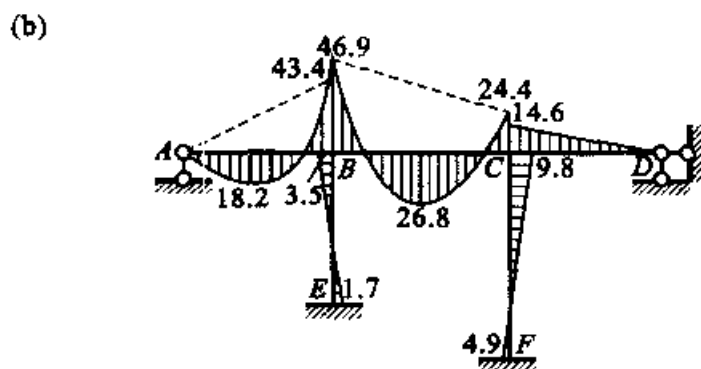
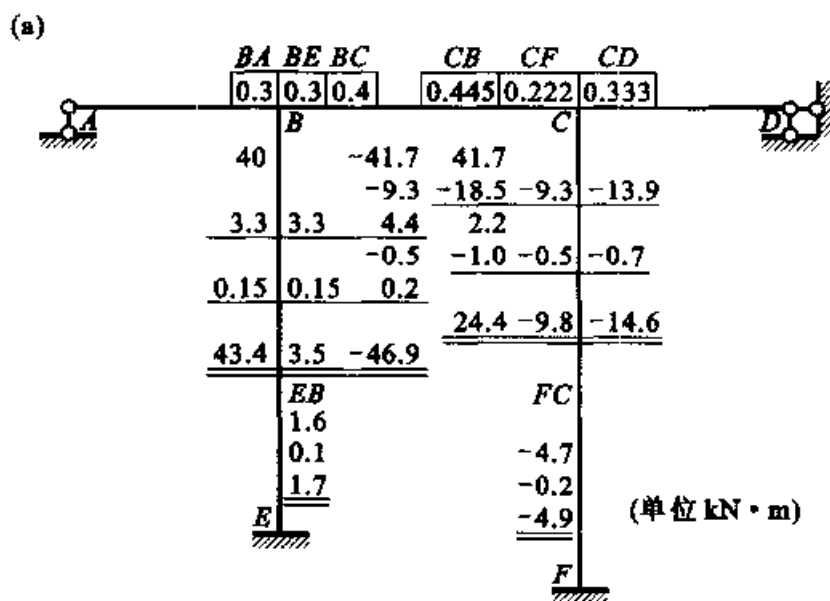
## (4) 力矩分配

按 C、B 顺序分配两轮, 计算如图 9-9a 所示。放松结点的次序可以任取, 并不影响最后的结果。但为了缩短计算过程, 最好先放松约束力矩较大的结点。在本例中, 先放松结点 C 较好。

## (5) 作弯矩图如图 9-9b 所示。

(6) 作  $F_Q$  图

取各杆为隔离体, 用平衡方程求杆端剪力。利用杆端剪力可作每杆的  $F_Q$  图、 $F_Q$  图如图 9-9c 所示。



M图(单位  $\text{kN} \cdot \text{m}$ )



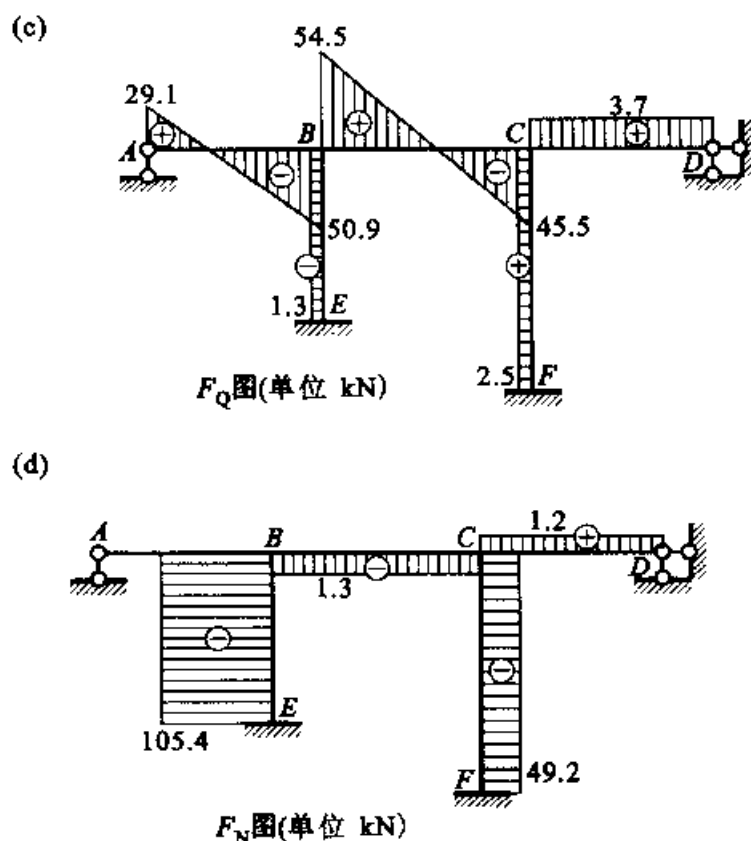


图 9-9

(7) 作  $F_Q$  图

取结点为隔离体,已知各杆对结点的剪力,根据平衡条件可求出各杆对结点的轴力。轴力图如图 9-9d 所示。

**例 9-4** 图 9-10a 所示为一带悬臂的等截面连续梁,试作  $M$  图。

**解** (1) 锁住结点  $B$  和  $C$ , 写出固端弯矩。

悬臂梁的固端弯矩是静定的,  $M_{CD}^f = -50 \text{ kN}\cdot\text{m}$

(2) 放松结点  $C$

$$S_{CB} = 4 \frac{EI}{5}, \quad S_{CD} = 0$$

$$\mu_{CB} = 1, \quad \mu_{CD} = 0$$

记下分配力矩和传递力矩(图 9-10b)。

(3) 结点  $C$  不再锁住,保持为铰支端

放松结点  $B$ :

$$S_{BA} = 3 \frac{EI}{1}, \quad S_{BC} = 3 \frac{EI}{5}$$

$$\mu_{BA} = \frac{5}{6}, \quad \mu_{BC} = \frac{1}{6}$$

只记分配力矩, 无传递力矩。至此力矩分配过程即告结束。

(4) 画弯矩图

弯矩图如图 9-10c 所示。

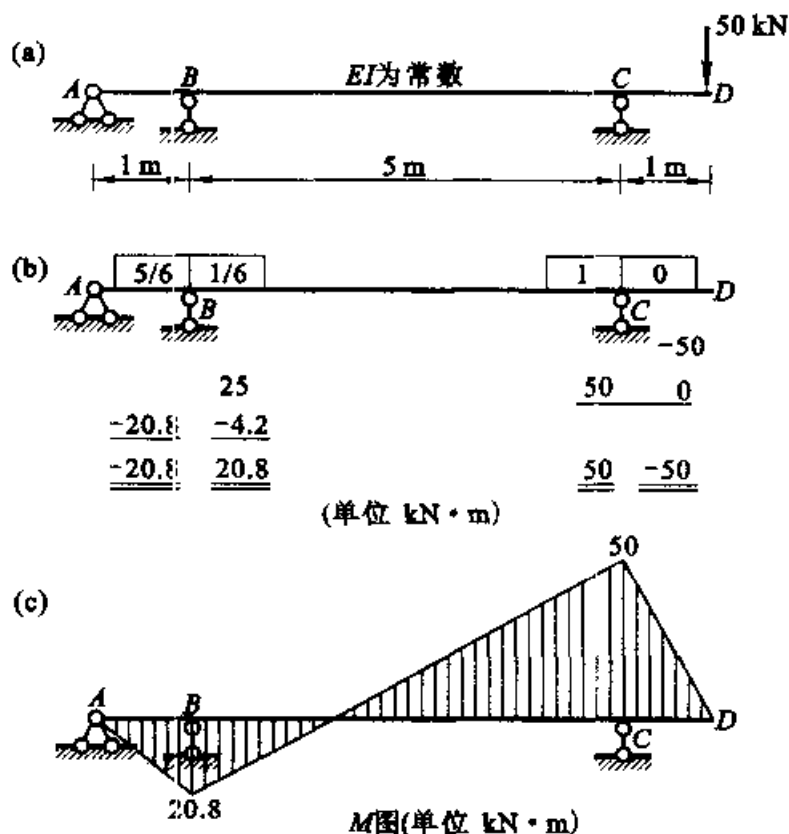


图 9-10

图 9-10a 所示的梁, 也可以将伸臂 CD 部分及其荷载简化为一个作用于结点 C 的力偶  $M = 50.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$  (这时 C 为铰结点) 进行计算。读者可按这种计算程序重算此例题。

本节介绍了多结点力矩分配法计算的全过程。

与之相近的还有一种力矩迭代法 (常简称为迭代法), 也是以位移法为基础的一种渐近解法, 也是以杆端弯矩作为运算对象。杆端弯矩也采用相同的正负号规定。二者的区别是: 在每次渐近运算中, 力矩分配法计算的是杆端弯矩新添的增量, 力矩迭代法计算的是杆端弯矩全量的新一轮近似解。此外, 力矩分配法一般只用于解无侧移刚架, 力矩迭代法可用于解无侧移和有侧移的刚架。有关力矩迭代法的详细内容可参见龙驭球, 包世华主编, 《结构力学》, 上册, 第二版, 高等教育出版社, 1994 年。

最后指出,无论力矩分配法还是力矩迭代法,都是线性方程组迭代解法在结构力学中的具体运用。按结构的受力状态,从开始时的近似状态,逐步调整,最后收敛于真实状态;把计算过程中的每个步骤都给以明确的物理(力学)意义,因而便于理解和掌握;是数学方法与力学应用问题结合得很好的一个范例。

### §9-3 对称结构的计算

实际工程中的连续梁和刚架常是对称的。作用在对称结构上的任意荷载,可以分解为对称荷载和反对称荷载两部分分别计算。在对称荷载作用下,弯矩图和轴力图是对称的,而剪力图是反对称的;在反对称荷载作用下,弯矩图和轴力图是反对称的,而剪力图是对称的。利用这些性质,在对称结构中可只取半边结构进行计算。下面通过例题说明力矩分配法在对称结构中的应用。

例 9-5 图 9-11a 所示刚架,试作  $M$  图。

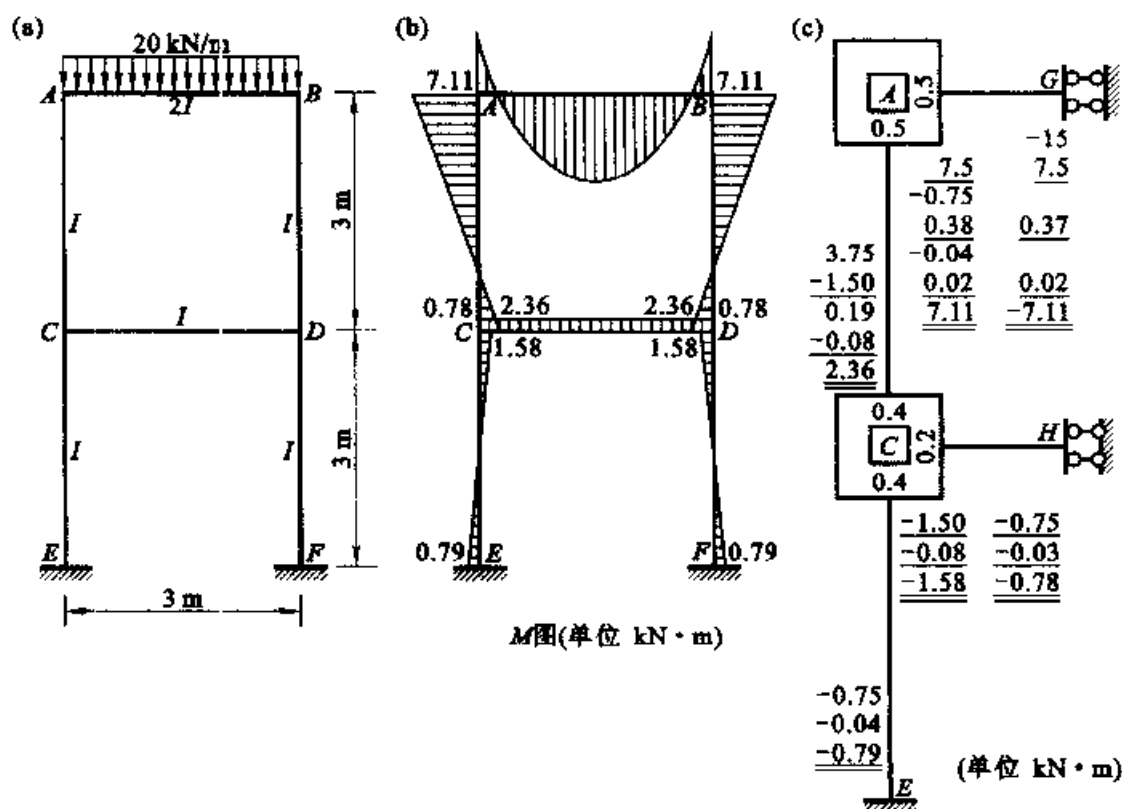


图 9-11

解 (1) 计算中取半边结构

如图 9-11c 所示,  $G$  和  $H$  为滑动端。

(2) 计算分配系数

$$S_{AG} = \frac{2EI}{3} = \frac{4}{3}EI, \quad S_{AC} = S_{CA} = \frac{4}{3}EI$$

$$S_{CH} = \frac{2EI}{3}, \quad S_{CK} = \frac{4EI}{3}$$

结点  $A$ :

$$\mu_{AG} = 0.5, \quad \mu_{AC} = 0.5$$

结点  $C$ :

$$\mu_{CH} = 0.2, \quad \mu_{CA} = 0.4, \quad \mu_{CK} = 0.4$$

各杆分配系数记于结点周围。

(3) 计算固端弯矩

梁  $AB$  的固端弯矩可以根据原结构或半边结构计算, 参看表 8-1。

$$\text{据原结构, } M_{AB}^F = -\frac{1}{12} \times 20 \text{ kN/m} \times (3 \text{ m})^2 = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{据半边结构, } M_{AC}^F = -\frac{1}{3} \times 20 \text{ kN/m} \times (1.5 \text{ m})^2 = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(4) 放松结点按  $A$ 、 $C$ 、 $A$ 、 $C$ 、 $A$  次序进行

各杆端的固端弯矩, 分配力矩和传递力矩, 写于此杆端的一旁。注意: 放松结点  $C$  时, 分配力矩  $M_{CA}$  应向柱  $AC$  的上端传递。

(5) 作  $M$  图

图 9-11b 所示为刚架的  $M$  图。

**例 9-6** 试求图 9-12a 所示矩形衬砌在上部土压力作用下的弯矩图。

**解** 衬砌上部土压力为均匀分布, 集度为  $q$  kN/m。底面反力假设为均布, 则由竖向平衡条件, 竖向反力也为  $q$  kN/m。计算简图如图 9-12b 所示。

本题中的结构和荷载对  $x$  轴和  $y$  轴都是对称的。对称轴  $y$  上面的  $E$  点只有竖向位移, 没有水平位移和转角。同样对称轴  $x$  上面的  $F$  点只有水平位移, 没有竖向位移和转角。因此, 只需截取结构的  $EAF$  一段进行计算, 在  $E$  点和  $F$  点取为滑动支座, 如图 12-12c 所示。

本题只有一个结点  $A$ , 转动刚度和分配系数如下:

转动刚度:

$$S_{AE} = \frac{EI_1}{l_1/2} = 2i_1, \quad S_{AF} = \frac{EI_2}{l_2/2} = 2i_2$$

这里,  $i_1$ 、 $i_2$  为横梁和竖柱原来的线刚度。

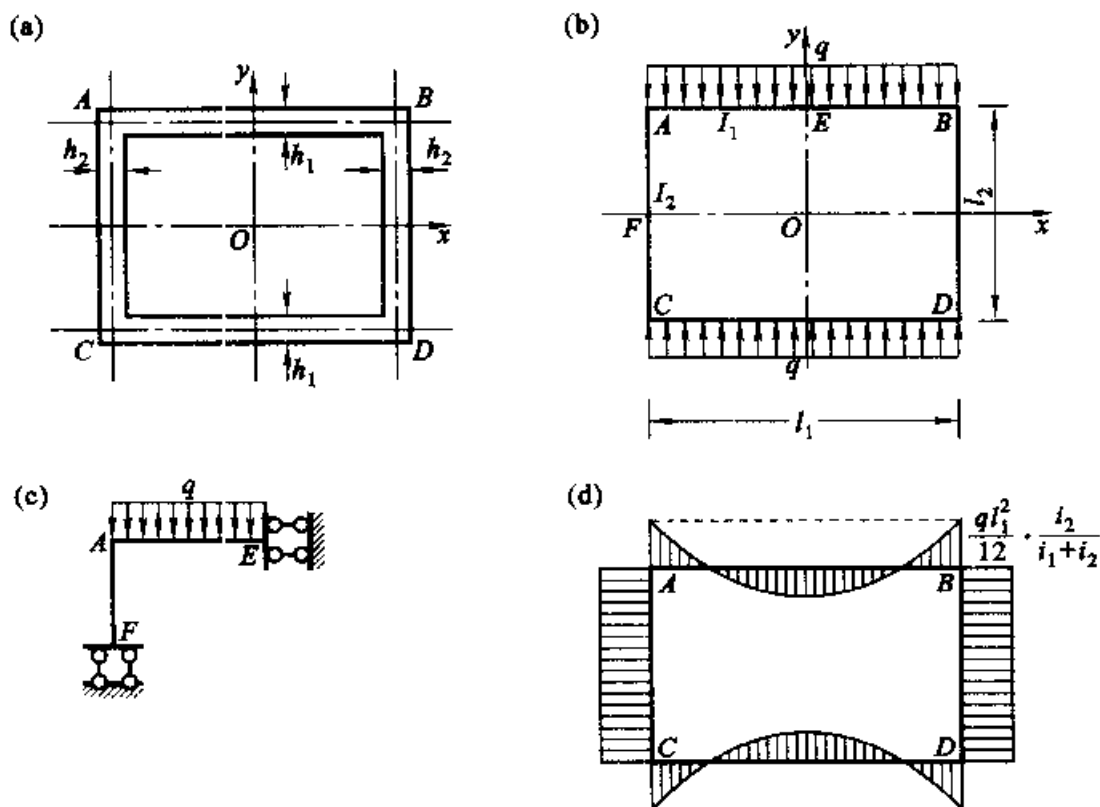


图 9-12

分配系数:

$$\mu_{AE} = \frac{2i_1}{2(i_1 + i_2)} = \frac{i_1}{i_1 + i_2}$$

$$\mu_{AF} = \frac{2i_2}{2(i_1 + i_2)} = \frac{i_2}{i_1 + i_2}$$

固端弯矩(见表 8-1):

$$M_{AF}^F = -\frac{1}{3}q\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{12}ql_1^2$$

分配过程如图 9-13 所示。

求得结点 A 的弯矩后,再利用对称性,可知其他结点弯矩也相同。最后的弯矩图如图 9-12d 所示。

讨论:

(1) 当竖柱比横梁的刚度大很多时,即  $i_2 \gg i_1$ , 则  $\frac{i_2}{i_1 + i_2}$  接近于 1 (如  $i_2 \geq 20i_1$ , 误差在 5% 以内)。梁端弯矩接近于固端弯矩  $\frac{ql_1^2}{12}$ 。此时,竖柱对横梁而言,起固定支座的作用。

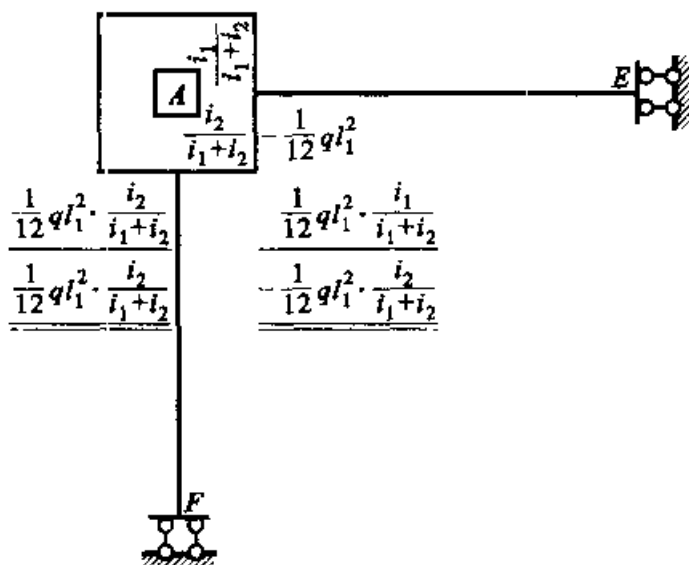


图 9-13

(2) 当横梁比竖柱的刚度大很多时, 即  $i_1 \gg i_2$ , 则  $\frac{i_2}{i_1 + i_2}$  接近于零 (如  $i_1 \geq 20i_2$ , 误差在 5% 以内)。梁端弯矩接近于零。此时, 竖柱对横梁而言, 起铰支座的作用。

从这个例子可以看出: 结构中相邻部分 (如这里的梁和柱) 是互为支承的, 支承的作用不仅决定于构造作法, 也与相对刚度有关。在本例中只要横梁线刚度  $i_1$  超过竖柱线刚度  $i_2$  的 20 倍 (如  $l_1 = l_2$ , 即  $\frac{h_1^3}{h_2^3} \geq 20$ ,  $h_1 \geq 2.7h_2$ ) 横梁即可按简支梁计算; 反之, 只要竖柱线刚度  $i_2$  超过横梁线刚度  $i_1$  的 20 倍, 横梁即可按两端固定的梁计算, 误差均在 5% 以内。

## § 9-4 无剪力分配法

在位移法中, 刚架分为无侧移刚架与有侧移刚架两类。它们的区别是: 在位移法的基本未知量中, 前者只包含结点角位移, 后者则还包含结点线位移。

力矩分配法是无侧移刚架的渐近法, 不能直接用于有侧移刚架。但对某些特殊的有侧移刚架, 可以用与力矩分配法类似的无剪力分配法进行计算。

### 1. 无剪力分配法的应用条件

无剪力分配法不能直接用于有侧移的一般刚架, 而只能用于某些特殊刚架。图 9-14a 所示有侧移的半刚架是一个典型例子 (单跨对称刚架在反对称荷载作用下的计算可归结为这类问题)。

在图 9-14a 中, 各梁的两端结点没有相对线位移 (即没有垂直杆轴的相

对位移),这种杆件称为两端无相对线位移的杆件。各柱的两端结点虽然有侧移,但剪力是静定的(图9-14b所示为各柱的剪力图,可根据平衡条件直接求出),这种杆件称为剪力静定杆件

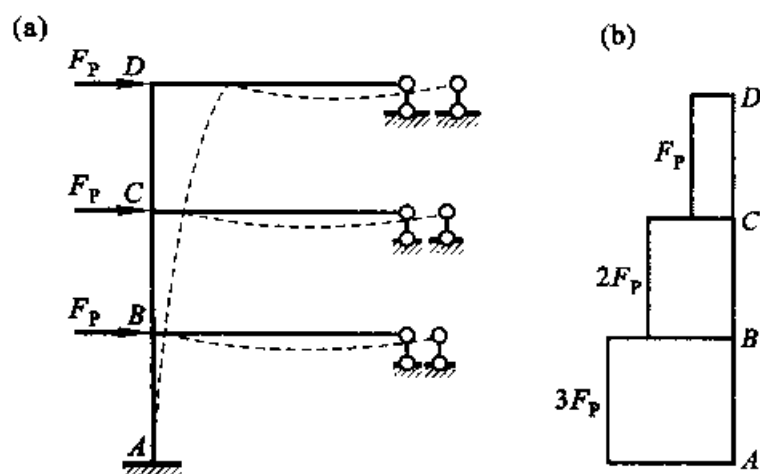


图 9-14

无剪力分配法的应用条件是:刚架中除两端无相对线位移的杆件外,其余杆件都是剪力静定杆件。

在图9-15所示有侧移的刚架中,竖柱AB和CD既不是两端无相对线位移的杆件,也不是剪力静定杆件。这种刚架不能直接用无剪力分配法求解。

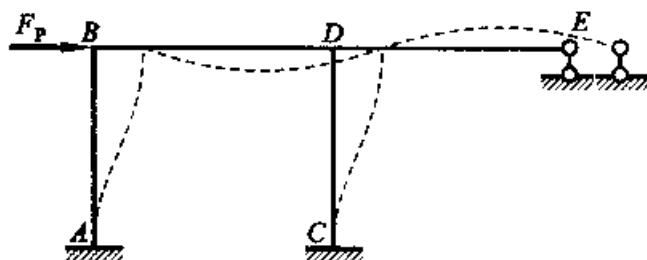


图 9-15

在力矩分配法中,我们讨论过两端无相对线位移的杆件,也讨论过剪力静定杆件的某些简单情况(例如图9-12c中的杆AE和AF)。这里将着重对剪力静定杆件的各种情况作更详细的讨论。

## 2. 剪力静定杆件的固端弯矩

采用无剪力分配法计算图9-16a所示半边刚架时,计算过程仍分两步:第一步是锁住结点(只阻止结点的角位移,但不阻止线位移),求各杆的固端弯矩(图9-16b)。第二步是放松结点(结点产生角位移,同时也产生线位移),求各杆的分配弯矩和传递弯矩(图9-16c)。将两步所得的结果叠加,即得出原刚架的杆端弯矩。

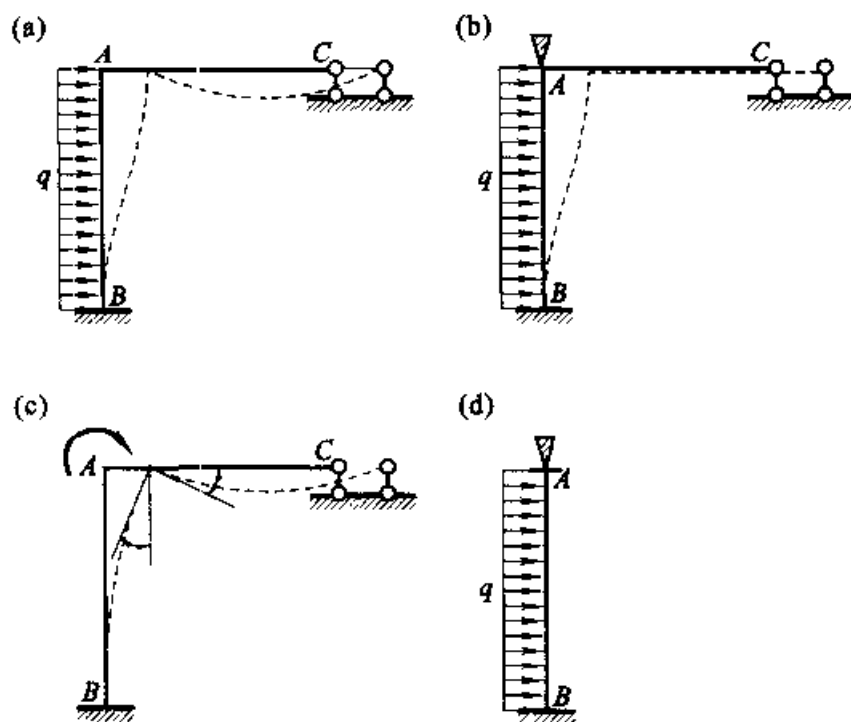


图 9-16

现在求图 9-16b 中杆 AB 的固端弯矩。此杆的变形特点是：两端没有转角，但有相对侧移。受力特点是：整根杆件的剪力是静定的，例如顶点 A 处的剪力已知为零。因此，图 9-16b 中杆 AB 的受力状态与图 9-16d 所示下端固定、上端滑动的杆 AB 相同。它的固端弯矩可根据表 8-1 查出。

图 9-17a 所示为两层半边刚架处于锁住状态。其中杆 ABC 的受力状态可用图 9-17b 表示。根据平衡条件可知，A 点下边截面的剪力为  $F_{P1}$ ，B 点

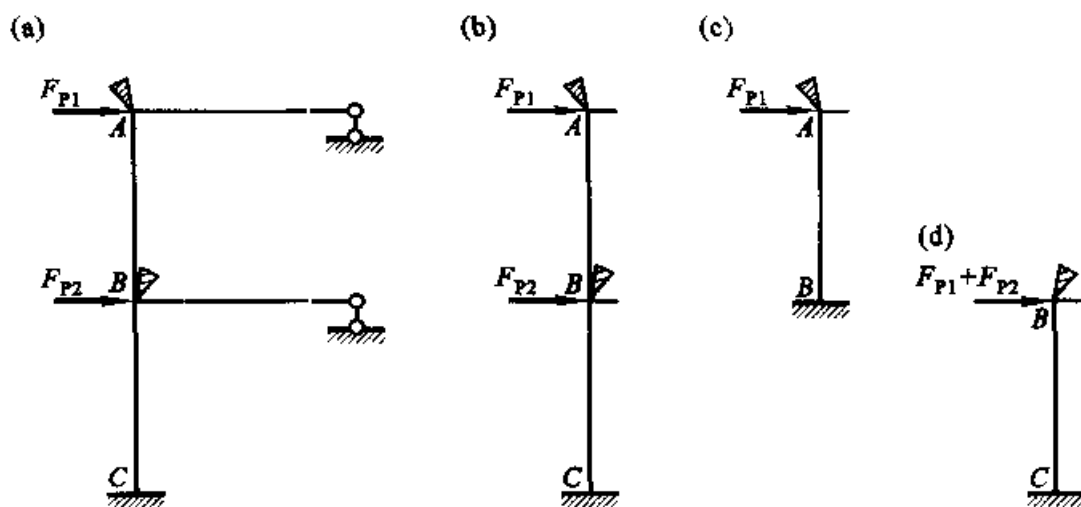


图 9-17



下边截面的剪力为  $F_{P1} + F_{P2}$ 。因此,杆  $AB$  和  $BC$  的固端弯矩可分别由图 9-17c 和 d 所示情况求出。

总之,对于刚架中任何形式的剪力静定杆件,求固端弯矩的步骤是:先根据静力条件求出杆端剪力,然后将杆端剪力看作杆端荷载,按该端滑动,另一端固定的杆件进行计算。

### 3. 零剪力杆件的转动刚度和传递系数

现在讨论图 9-16c 所示刚架在放松结点  $A$  时所引起的附加内力。放松结点  $A$  的约束,相当于在结点  $A$  加一个与图 9-16b 中约束力偶相反的力偶荷载(图 9-18a)。

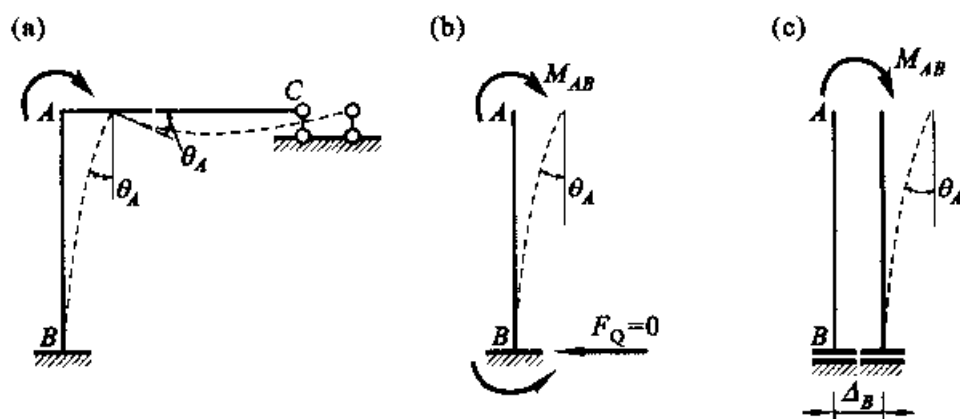


图 9-18

在图 9-18a 中,杆  $AB$  的变形特点是:结点  $A$  既有转角,同时也有侧移。受力特点是:各截面剪力都为零,因而各截面的弯矩为一常数。这种杆件称为零剪力杆件。因此,图 9-18a 所示杆  $AB$  受力状态与图 9-18b 所示悬臂杆相同。当  $A$  端转动  $\theta_A$  时,杆端力偶为

$$M_{AB} = i_{AB}\theta_A, \quad M_{BA} = M_{AB}$$

由此可知,零剪力杆件的转动刚度为

$$S_{AB} = i_{AB} \quad (9-11)$$

传递系数为

$$C_{AB} = 1 \quad (9-12)$$

应当指出,在图 9-18b 中,固定端  $B$  的水平反力为零。因此,不妨把固定端  $B$  换成滑动支座,如图 9-18c 所示。二者相比,内力状态、杆轴的弯曲形状和端点转角都彼此相同,只是水平位移可能相差一个常数  $\Delta_B$ 。因此,二者的转动刚度和传递系数也是彼此相同的。(注意,图 9-18c 中  $B$  点的水平位移  $\Delta_B$  是一个待定值,应考虑额外的位移条件才能确定。)

下面再考虑图 9-17 所示刚架在放松结点 B 时的情形。为此, 考虑图 9-19a 所示在结点 B 施加力偶荷载的情形。

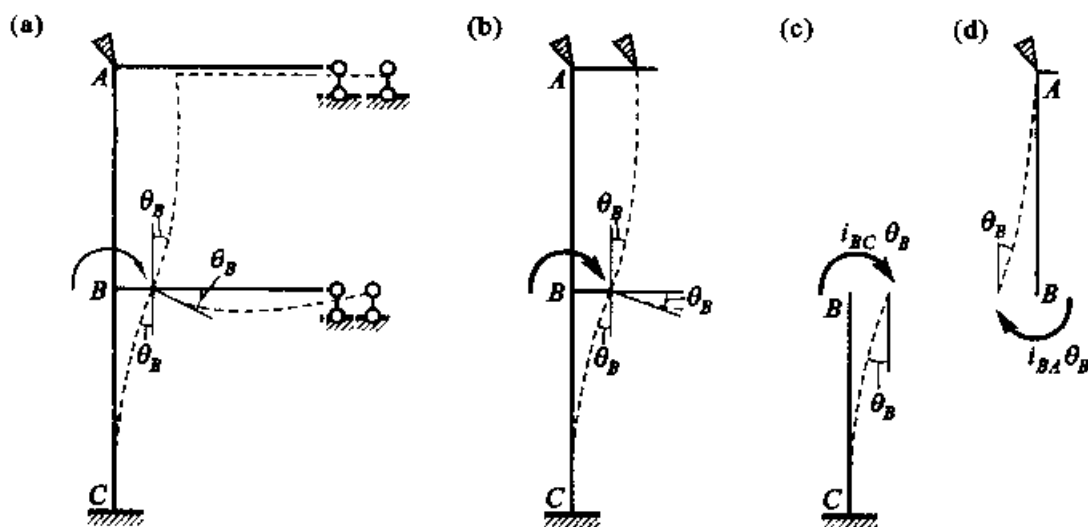


图 9-19

我们只讨论图 9-19a 中杆 ABC 变形状态, 它可用图 9-19b 来表示。由于杆 ABC 为零剪力杆件, 因此其中 BC 段的受力情况如图 9-19c 所示, 即:

$$S_{BC} = i_{BC}, \quad C_{BC} = -1$$

同时, 杆 ABC 中的 AB 段的受力状态如图 9-19d 所示, 即:

$$S_{BA} = i_{BA}, \quad C_{BA} = -1$$

至于图 9-19d 中的水平位移可根据图 9-19c 和 d 中 B 点水平位移彼此相等的条件来确定。

总之, 在结点力偶作用下, 刚架中的剪力静定杆件都是零剪力杆件。因此, 当放松结点时 (结点既转动、又侧移), 这些杆件都是在零剪力的条件下得到分配弯矩和传递弯矩, 故称为无剪力分配。它们的转动刚度和传递系数都按式 (9-11) 和式 (9-12) 确定。

**例 9-7** 试求作图 9-20 所示刚架的弯矩图。

**解** 刚架中的杆 BC 为两端无相对线位移杆件, 杆 AB 为剪力静定杆件, 可采用无剪力分配法计算。

固端弯矩:

$$M_{BC}^F = -\frac{3}{16} \times 5 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = -3.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA}^F = -\frac{ql^2}{6} = -\frac{1 \text{ kN/m} \times (4 \text{ m})^2}{6} = -2.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AB}^F = -\frac{ql^2}{3} = -5.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

转动刚度和分配系数:

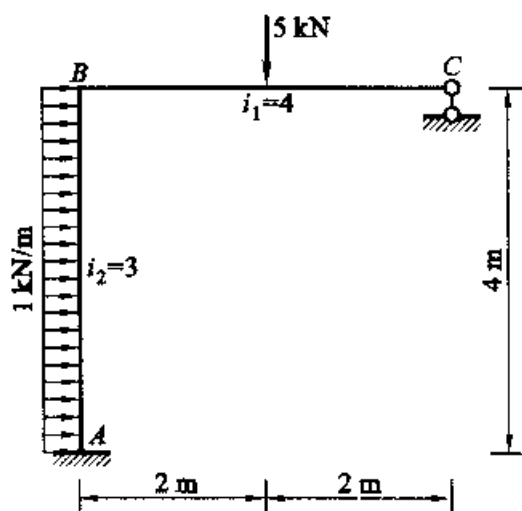


图 9-20

$$\begin{cases} S_{BC} = 3i_1 = 12, \\ S_{BA} = i_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_{BC} = \frac{4}{5} \\ \mu_{BA} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

杆 BA 的传递系数为  $-1$ 。

无剪力分配的计算过程如图 9-21a 所示,  $M$  图如图 9-21b 所示。

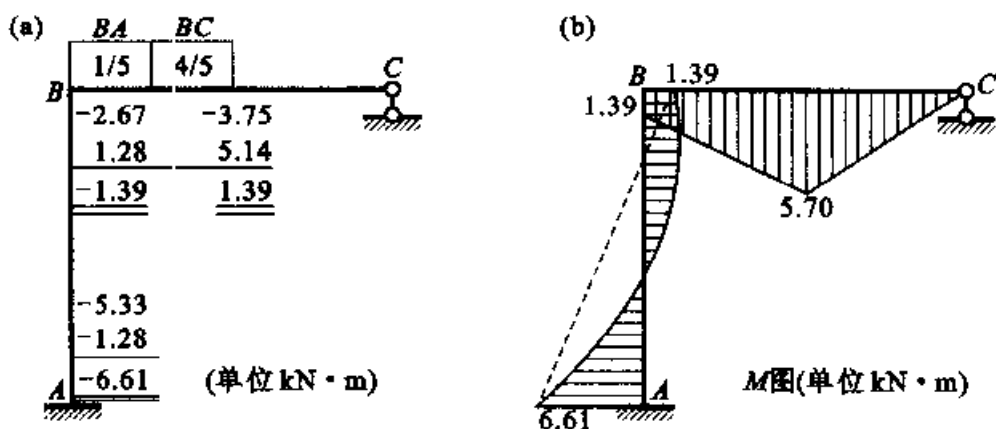


图 9-21

**例 9-8** 试求作图 9-22a 所示刚架在水平力作用下的弯矩图。

**解** 由于刚架为对称结构, 将荷载分成对称和反对称两部分。对称荷载对弯矩无影响, 不予考虑。在图 9-22b 所示反对称荷载作用下, 可取图 9-22c 所示半边刚架计算。其中横梁长度减少一半, 故线刚度  $i = \frac{I}{l}$  增大 1 倍。

(1) 固端弯矩

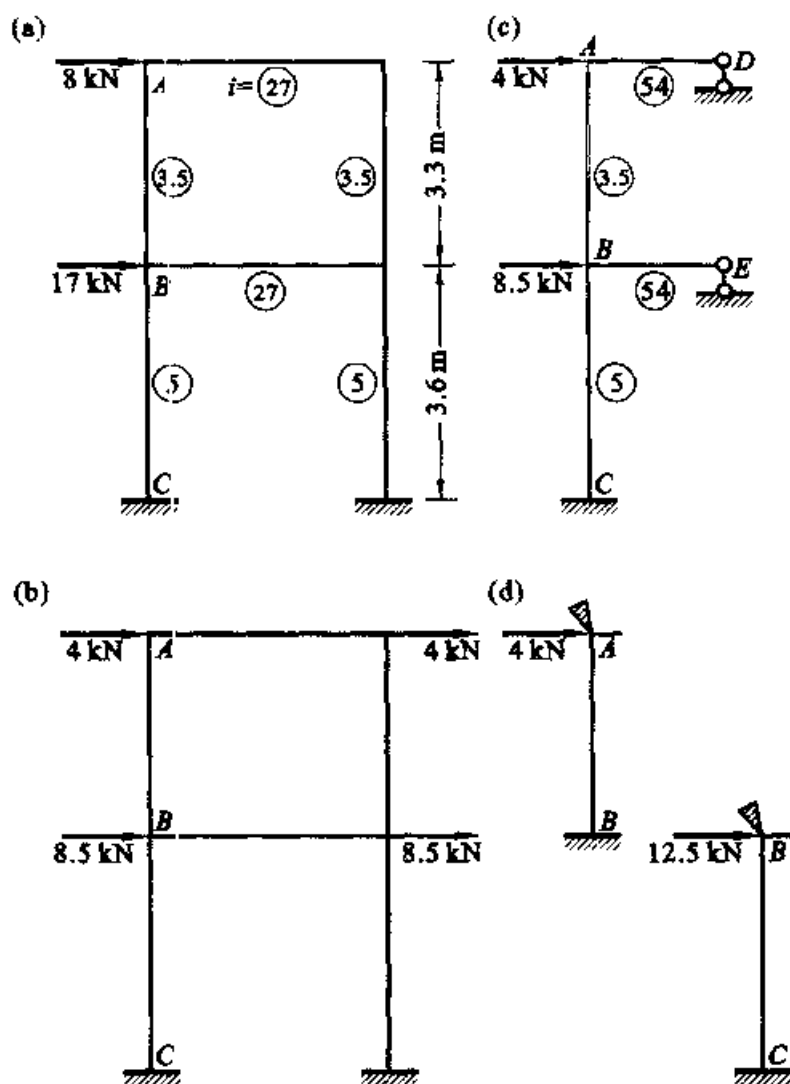


图 9-22

立柱 AB 和 BC 为剪力静定杆, 由平衡方程求得剪力为

$$F_{QAB} = 4 \text{ kN}, \quad F_{QBC} = 12.5 \text{ kN}$$

将杆端剪力看作杆端荷载, 按图 9-22d 所示杆件可求得固端弯矩如下 (参看表 8-1):

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = -\frac{1}{2} \times 4 \text{ kN} \times 3.3 \text{ m} = -6.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^F = M_{CB}^F = -\frac{1}{2} \times 12.5 \text{ kN} \times 3.6 \text{ m} = -22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 分配系数

以结点 B 为例:

$$S_{BA} = i_{BA} = 3.5$$

$$S_{BC} = i_{BC} = 5$$

$$S_{DE} = 3i_{DE} = 3 \times 54 = 162$$

$$\sum S = 170.5$$

故结点 B 的分配系数为:

$$\mu_{BA} = \frac{3.5}{170.5} = 0.0206$$

$$\mu_{BC} = \frac{5}{170.5} = 0.0293$$

$$\mu_{BE} = \frac{162}{170.5} = 0.9501$$

同理,可求出结点 A 的分配系数,写在图 9-23 的方格内。

### (3) 力矩分配和传递

计算过程如图 9-23 所示。结点分配次序为 B、A、B、A。注意,立柱的传递系数为 -1。最后作 M 图,如图 9-24 所示。

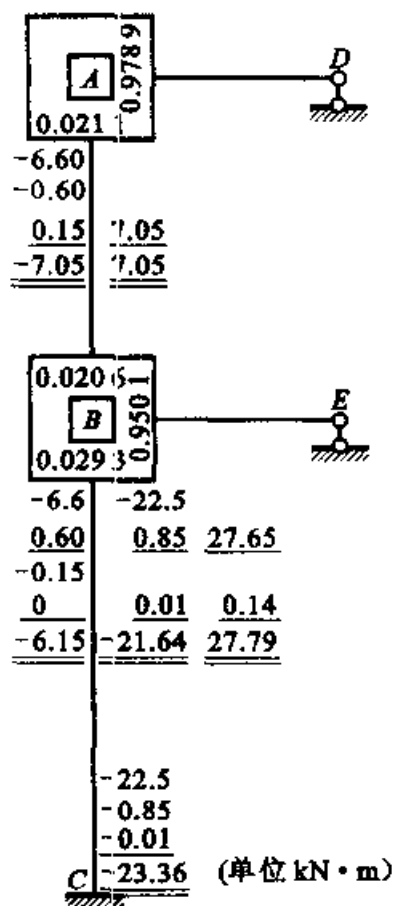


图 9-23

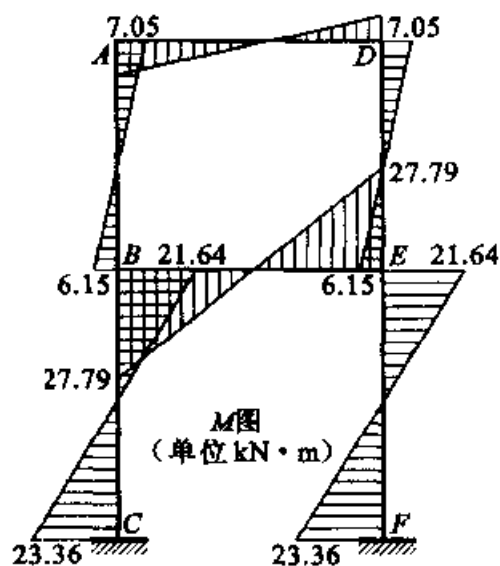


图 9-24

以上讨论了无剪力分配法及其在单跨对称刚架计算中的应用,对于其进一步的推广应用可参见龙驭球、包世华编,《结构力学教程》,高等教育出版社,1988年;龙驭球、包世华主编,《结构力学》,上册,第二版,高等教育出

版社,1994年。

### § 9-5 力矩分配法与位移法的联合应用

对于一般有结点线位移的刚架,上述的力矩分配法和无剪力分配法均不适用。为此,可联合用力矩分配法与位移法求解,用力矩分配法考虑角位移的影响,用位移法考虑线位移的影响。现在以图 9-25a 所示刚架为例说明计算的原理。

首先,用位移法求解,但所取的基本体系只控制结点线位移,而不控制结点角位移,基本体系的两个分解状态示于图 9-25c、d。基本结构如图 9-25b 所示。换句话说,这里只取结点线位移  $\Delta_1$  作基本未知量,至于结点角位移则不算作基本未知量。此时,相应的位移法方程为

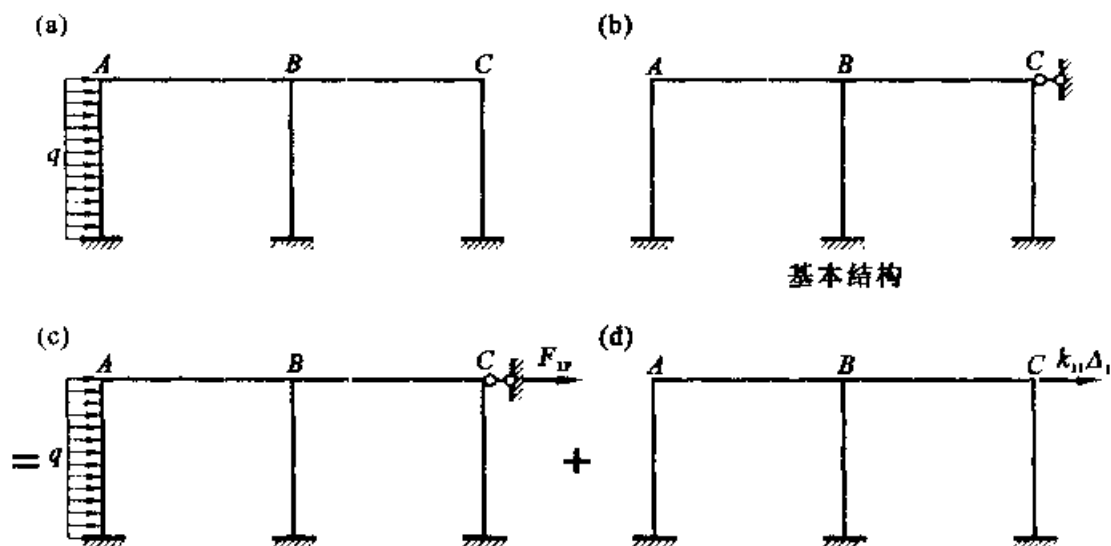


图 9-25

$$k_{11} \Delta_1 + F_{1P} = 0 \quad (a)$$

而弯矩可表示为

$$M = \bar{M}_1 \Delta_1 + M_P \quad (b)$$

式中  $F_{1P}$ 、 $M_P$  是基本结构在荷载作用下的附加反力和弯矩,  $k_{11}$ 、 $\bar{M}_1$  是基本结构由于单位位移  $\Delta_1 = 1$  而产生的附加反力和弯矩。

其次,用力矩分配法计算基本结构,求出  $k_{11}$ 、 $F_{1P}$ 、 $\bar{M}_1$ 、 $M_P$ 。由于在基本结构中,结点线位移是给定的,只有结点角位移是未知量,因此,用力矩分配法求解是很方便的。

按式(a)求出结点线位移  $\Delta_1 = -\frac{F_{1P}}{k_{11}}$ , 然后按式(b)可求得弯矩图。

例 9-9 试求图 9-26 所示刚架的内力。

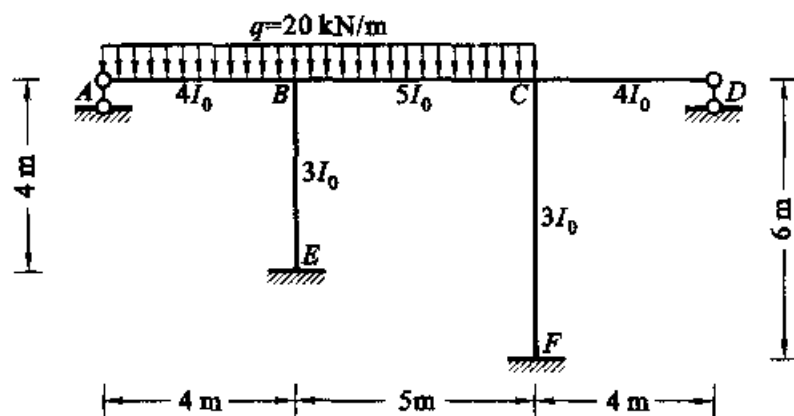


图 9-26

解 (1) 在 D 处加水平链杆, 然后求作荷载作用下的弯矩图  $M_P$ 。

这时由于没有结点线位移, 可用力矩分配法计算, 得出的弯矩图如图 9-27 所示。

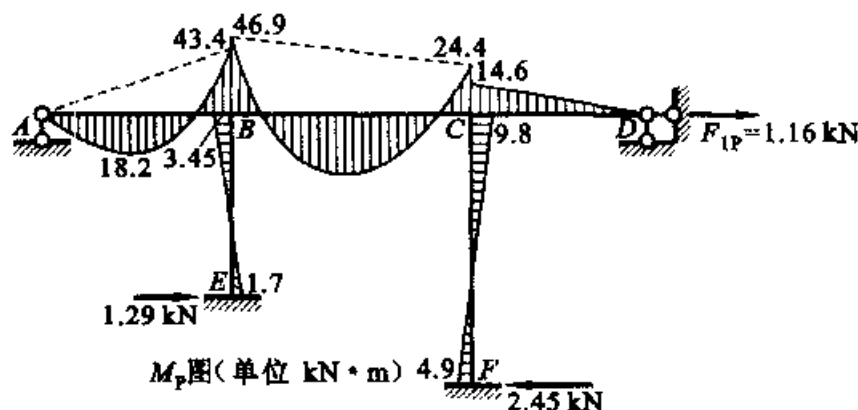


图 9-27

由杆端弯矩可求出柱底剪力:

$$F_{QEB} = -\frac{3.45 \text{ kN} \cdot \text{m} + 1.7 \text{ kN} \cdot \text{m}}{4 \text{ m}} = -1.29 \text{ kN}$$

$$F_{QFC} = \frac{9.8 \text{ kN} \cdot \text{m} + 4.9 \text{ kN} \cdot \text{m}}{6 \text{ m}} = 2.45 \text{ kN}$$

再由整个刚架的平衡条件  $\sum F_x = 0$ , 求得

$$F_{1P} = (2.45 - 1.29) \text{ kN} = 1.16 \text{ kN} (\rightarrow)$$

(2) 求作支座 D 向右产生单位位移时刚架的弯矩图  $M_1$ 。

这时结点线位移已知为  $\Delta_1 = 1^{\text{D}}$ , 可用力矩分配法计算, 设  $EI_0 = 1$ , 得到的弯矩图如图 9-28 所示。

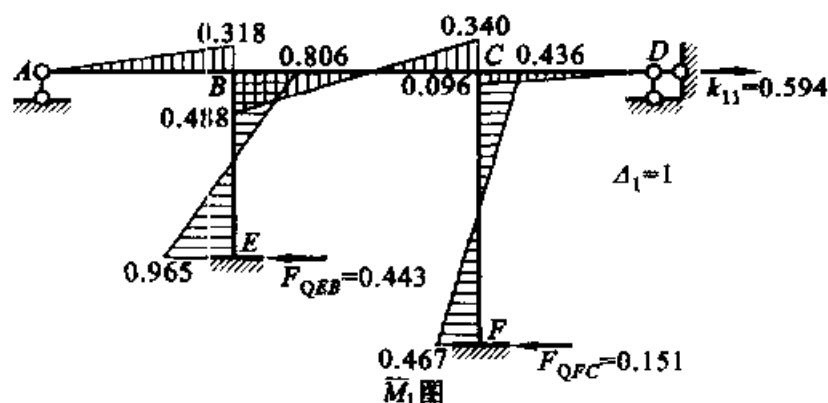


图 9-28

由杆端弯矩求出的柱底剪力为:

$$F_{QEB} = \frac{0.965 + 0.806}{4} = 0.443$$

$$F_{QFC} = \frac{0.467 + 0.436}{6} = 0.151$$

再由整体平衡条件求出  $k_{11}$ :

$$k_{11} = 0.443 + 0.151 = 0.594 (\rightarrow)$$

(3) 求结点水平位移  $\Delta_1$

由位移法方程求得

$$\Delta_1 = -\frac{F_{1P}}{k_{11}} = -\frac{1.16}{0.594} = -1.95$$

(4) 作弯矩图

将图 9-28 中  $\bar{M}_1$  图的标距乘以  $\Delta_1 = -1.95$ , 再与图 9-27 中  $M_P$  图的标距叠加, 即得出最后弯矩图  $M$ , 如图 9-29 所示。

当结点线位移多于一个时, 也可用类似的方法进行计算。现在以具有两个线位移未知量  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  的刚架为例, 写出其计算步骤如下:

(1) 在原结构上设置两个附加支杆, 以控制线位移  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$ , 并以这个无线位移的体系作为基本结构。

(2) 用力矩分配法求出基本结构在荷载作用下的  $M_P$ 、 $F_{1P}$ 、 $F_{2P}$ 。

(3) 在基本结构中令  $\Delta_1 = 1$ , 用力矩分配法求出  $\bar{M}_1$ 、 $k_{11}$ 、 $k_{21}$ 。

(4) 在基本结构中令  $\Delta_2 = 1$ , 用力矩分配法求出  $\bar{M}_2$ 、 $k_{12}$ 、 $k_{22}$ 。

<sup>D</sup> 这里,  $\Delta_1 = 1$ , 并非真值; 相应的  $\bar{M}_1$ 、 $F_Q$ 、 $k_{11}$  及  $\Delta_1$  也均非真值, 故在运算中均不注单位。



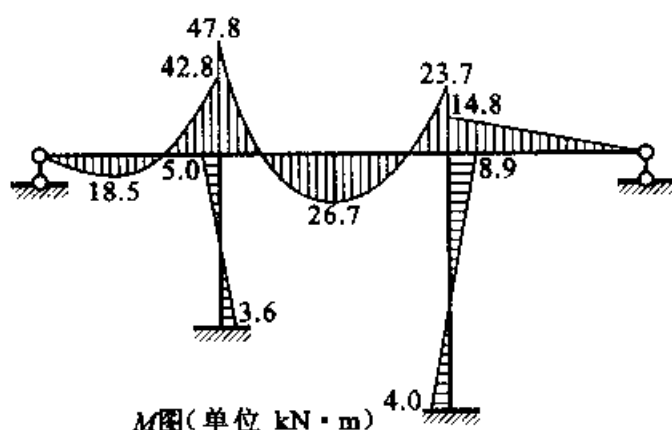


图 9-29

(5) 位移法方程为:

$$k_{11}\Delta_1 + k_{12}\Delta_2 + F_{1P} = 0$$

$$k_{21}\Delta_1 + k_{22}\Delta_2 + F_{2P} = 0$$

由此解出  $\Delta_1$  和  $\Delta_2$ 。

(6) 用叠加公式  $M = \bar{M}_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_P$  作弯矩图。

## § 9-6 超静定力的影响线

超静定力的影响线有两种作法:一种作法是用力法(或位移法、力矩分配法等)直接求出影响系数的方法,见例 7-7;另一种作法是利用超静定力影响线与挠度图间的比拟关系。它们分别与静定力影响线的静力法和机动法相应。

本节介绍后一种方法,因为它可以极方便地绘出影响线的形状,这对判断不利荷载的分布是很有用的。

图 9-30a 所示为一超静定梁。我们以 B 点支座反力  $Z_1$  的影响线为例,说明影响线与挠度图之间的比拟关系。

设荷载  $P_P = 1$  作用于任一位置  $x$ ,采用力法求所引起的支座反力  $Z_1$ 。

取  $Z_1$  作基本未知力,基本体系如图 9-30b 所示。显然,这个基本体系仍是超静定的,是  $n-1$  次超静定结构。基本结构如图 9-30c 所示。力法方程为

$$\delta_{11}Z_1 + \delta_{1P} = 0$$

由此解得

$$Z_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \quad (9-13)$$

式中  $\delta_{1P}$  和  $\delta_{11}$  都是单位力在基本结构中产生的位移,在图 9-30d、e 中都已标明。

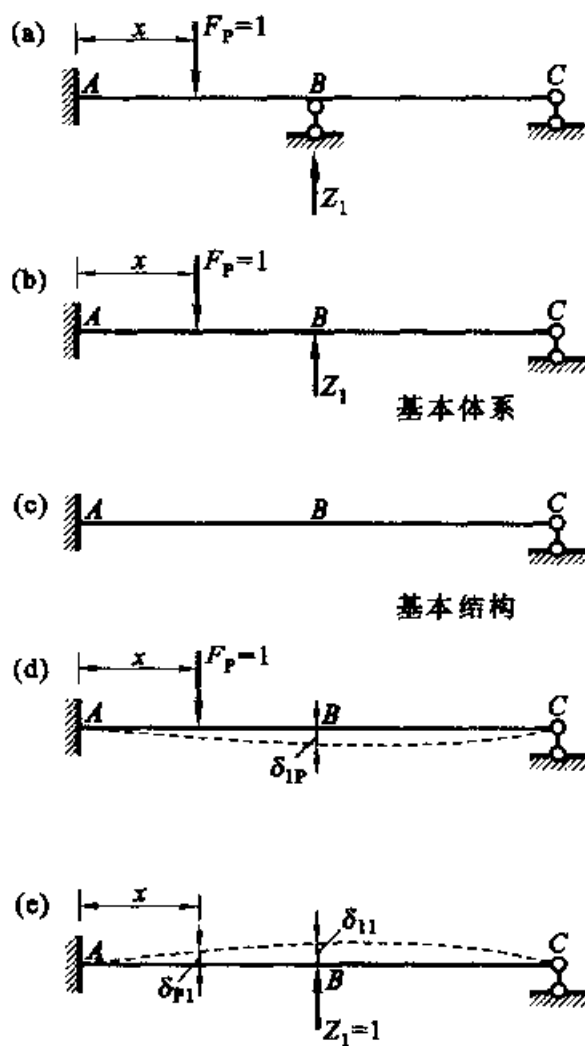


图 9-30

应用位移互等定理

$$\delta_{IP} = \delta_{PI}$$

式(9-13)可写为

$$Z_1 = -\frac{\delta_{PI}}{\delta_{I1}}$$

$\delta_{PI}$  所代表的位移如图 9-30e 所示,它是单位力  $Z_1 = 1$  在基本结构中引起的沿荷载  $F_P$  作用点的竖向位移。

在上式中,支座反力  $Z_1$  和位移  $\delta_{PI}$  都随荷载  $F_P$  的移动而变化,它们都是荷载位置参数  $x$  的函数。 $\delta_{I1}$  则是一个常数,不随荷载位置  $x$  变化。因此,上式可以更明确地写成如下的形式:

$$Z_1(x) = -\frac{1}{\delta_{I1}} \delta_{PI}(x) \quad (9-14)$$

式中当  $x$  变化时, 函数  $Z_1(x)$  的变化图形就是  $Z_1$  的影响线; 而函数  $\delta_{p1}(x)$  的变化图形就是荷载作用点的挠度图。由此可以看出, 影响线与挠度图之间的关系。根据这个关系, 可利用挠度图来作超静定力的影响线。其步骤与用机动法作静定结构影响线是类似的, 可归纳如下:

- (1) 撤去与所求约束力  $Z_1$  相应的约束;
- (2) 使体系沿  $Z_1$  的正方向发生位移, 作出荷载作用点的挠度图, 即为影响线的形状;
- (3) 将  $\delta_{p1}$  图除以常数  $\delta_{11}$  (或在  $\delta_{p1}$  图中令  $\delta_{11} = 1$ ), 便确定了影响线的数值;
- (4) 横坐标以上图形为正号, 横坐标以下图形为负号。

图 9-31 为连续梁的几个影响线图形的形状。其中图 9-31b 为铰 C 左右有相对转角时的挠度图, 图 9-31c 为  $M_C$  影响线; 图 9-31d 为铰 K 左右有相对转角时的挠度图, 图 9-31e 为  $M_K$  影响线; 图 9-31f 为  $F_Q$  影响线; 图 9-31g 为  $F_{Q1}^R$  影响线。

应当指出: 上述作法与机动法作静定内力(支座反力)影响线虽然相似, 但它们之间也有区别: 对静定内力(支座反力)来讲, 位移图是几何可变体系的位移图, 因而是折线图形。对超静定内力(支座反力)来讲, 位移图是几何不变体系的挠度图, 因而是曲线图形。

下面给出单跨梁的挠度和转角公式, 以供计算  $\delta_{p1}$  和  $\delta_{11}$  时参考。

图 9-32 所示为一简支梁 AB, 两端作用力偶  $M_A$  和  $M_B$ , 则两端转角  $\theta_A$  和  $\theta_B$  为

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B) \\ \theta_B &= \frac{l}{6EI}(2M_B + M_A) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

任一点  $x$  处的挠度为

$$v(x) = \frac{x(l-x)}{6EI} [M_A(2l-x) + M_B(l+x)] \quad (b)$$

以上公式读者可用图乘法自行导出。

**例 9-10** 试求图 9-33a 所示连续梁支座弯矩  $M_B$  的影响线。

**解** 在截面 B 加铰, 并施加一对力偶  $M_B = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , 这时挠度  $\delta_{p1}$  图如图 9-33b 中的虚线所示。又  $\delta_{11}$  为 B 点两侧截面转角  $\delta'_{11}$  与  $\delta''_{11}$  之和。

为了求  $\delta_{p1}$  和  $\delta_{11}$ , 可先用力矩分配法求出力偶  $M_B = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$  所引起的弯矩图, 如图 9-33c 所示。然后, 根据以下每跨的杆端弯矩即可求出各跨的挠度方程, 并求出  $\delta_{11}$ 。

第一跨: 两端弯矩分别为  $-0.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$  和  $1.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , 代入式(b), 得

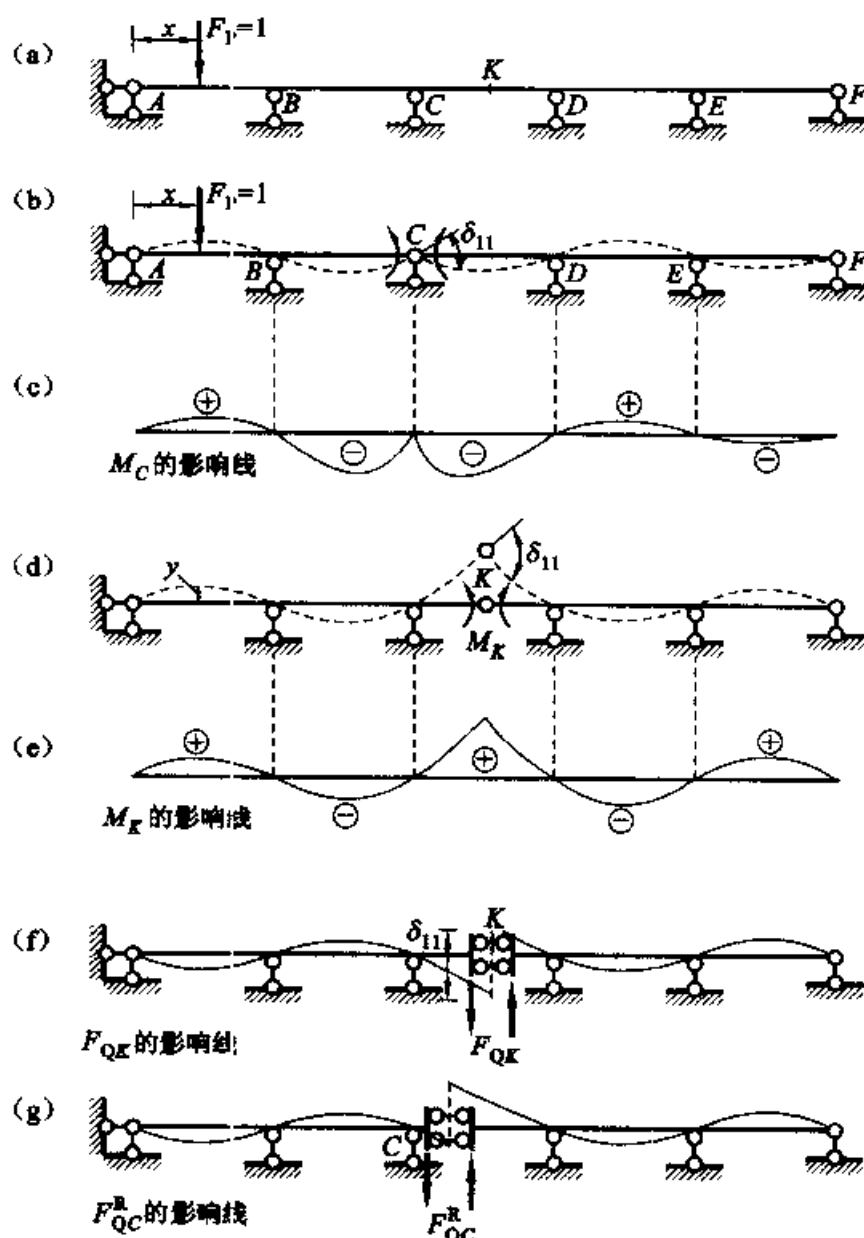


图 9-31

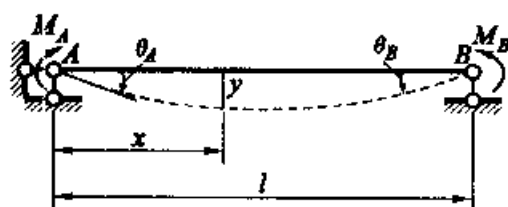


图 9-32

$$\begin{aligned}
 y(x_1) = & \frac{x_1(6 \text{ m} - x_1)}{6 \times 6 \text{ m} \cdot EI} [-0.5 \text{ kN} \cdot \text{m}(12 \text{ m} - x_1) + 1 \text{ kN} \cdot \text{m}(x_1 + 6 \text{ m})] \\
 & + \frac{1.5 \text{ kN}(6 \text{ m} - x_1)x_1^2}{36EI}
 \end{aligned}$$

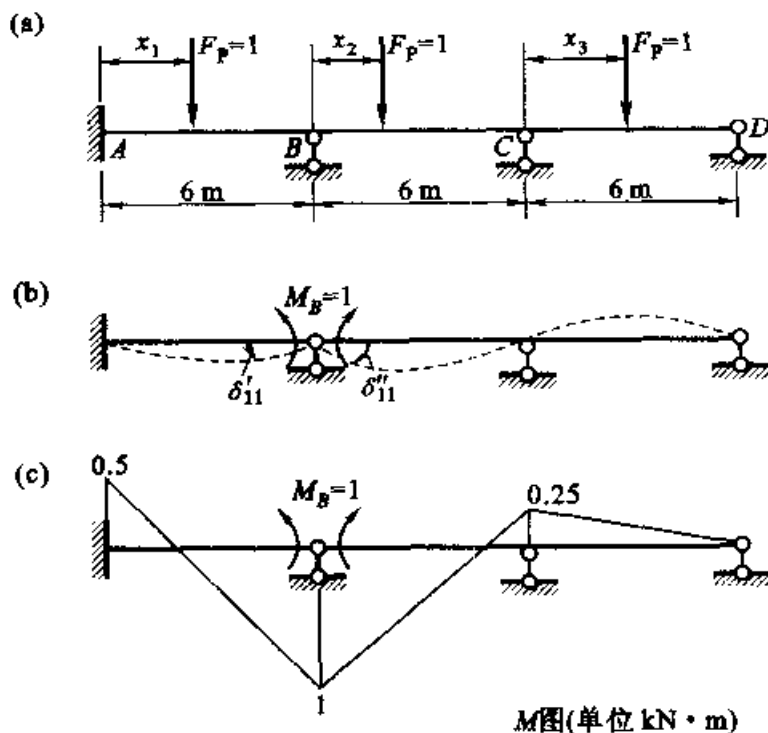


图 9-33

第二跨:两端弯矩分别为  $1.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$  和  $-0.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , 挠度方程为

$$\begin{aligned} v(x_2) &= \frac{x_2(6 \text{ m} - x_2)}{6 \times 6 \text{ m} \cdot EI} [1 \text{ kN}\cdot\text{m}(12 \text{ m} - x_2) - 0.25 \text{ kN}\cdot\text{m}(x_2 + 6 \text{ m})] \\ &= \frac{(6 \text{ m} - x_2)x_2}{36EI} [(10.5 \text{ kN}\cdot\text{m} - 1.25 \text{ kN}\cdot\text{m} \cdot x_2)] \end{aligned}$$

第三跨:两端弯矩分别为  $-0.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$  和  $0$ , 挠度方程为

$$\begin{aligned} v(x_3) &= \frac{x_3(6 \text{ m} - x_3)}{6 \times 6 \text{ m} \cdot EI} [-0.25 \text{ kN}\cdot\text{m}(12 \text{ m} - x_3)] \\ &= -\frac{x_3(6 \text{ m} - x_3)(12 \text{ m} - x_3)}{36EI \times 0.25 \text{ kN}} \end{aligned}$$

将相应的  $x$  值代入后,求得  $EIy(x)$  图如图 9-34a 所示,此即  $EI\delta_{P1}$  图。

由式(a),可求得  $\delta_{11}$  为

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \delta'_{11} + \delta''_{11} = \frac{6 \text{ m}}{6EI} [(2 \text{ kN}\cdot\text{m} - 0.5 \text{ kN}\cdot\text{m}) + (2 \text{ kN}\cdot\text{m} - \\ &\quad 0.25 \text{ kN}\cdot\text{m})] = \frac{(3.25 \text{ kN}\cdot\text{m}^2)}{EI} \end{aligned}$$

将  $\delta_{P1}$  除以  $\delta_{11}$  即得影响线如图 9-34b 所示。

等跨度等截面连续梁各截面弯矩的影响线和支座截面剪力的影响线均有制成的表格,设计时可以直接查用。

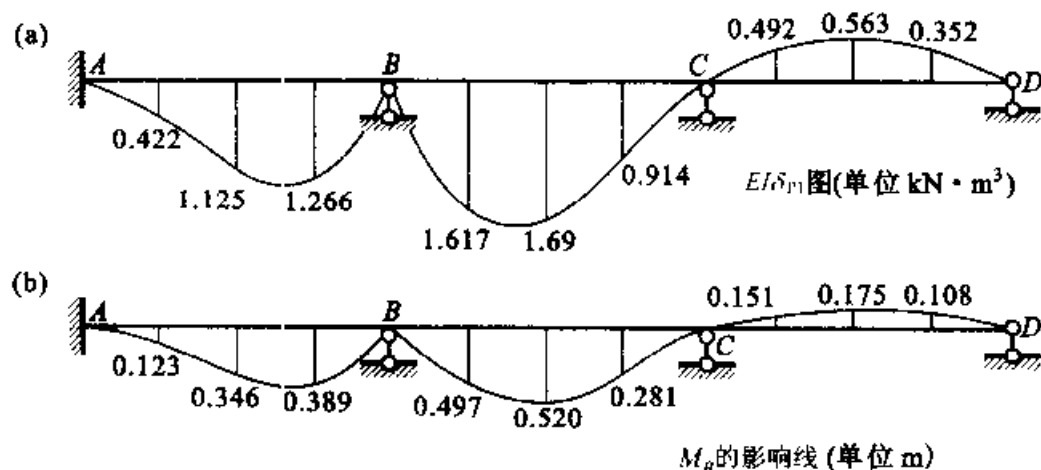


图 9-34

## § 9-7 连续梁的最不利荷载分布及内力包络图

连续梁是工程中常用的一种结构。连续梁所受荷载通常包括恒载和活载两部分。恒载经常存在而布满全跨,活载不经常存在且不同时布满各跨;对某一截面来说,恒载产生的弯矩是固定不变的,而活载产生的弯矩则随活载分布的不同而改变。设计时为了保证结构在各种荷载作用下都能安全使用,必须求得各截面在各种荷载作用下的最大弯矩。因此,求截面最大弯矩的主要问题在于确定活载的影响。只要求出了活载作用下某一截面的最大正弯矩和最大负弯矩(或称最大弯矩和最小弯矩),再加上恒载作用下该截面的弯矩,就可以得到恒载和活载共同作用下该截面的最大、最小弯矩。

计算某截面在活载作用下的最大、最小弯矩时,需要事先知道相应的活载最不利分布情况,这可利用影响线来判断。

在图 9-35 中给出了五跨连续梁一个支座截面  $B$  和一个跨中截面 2 的弯矩影响线的图形,同时附有与最大弯矩和最小弯矩相应的最不利活载分布图。从图中可以看出,活载布满各跨时并不是连续梁的最不利情况。最不利的情况是:

(1) 支座截面最大负弯矩: 支座两个邻跨有活载, 然后每隔一跨有活载(图 9-35b)。

(2) 跨中截面最大正弯矩: 本跨有活载, 然后每隔一跨有活载(图 9-35c)。

在各种荷载作用下,连续梁的内力可用力矩分配法计算。等跨连续梁在各种荷载作用下的内力值已制成表格(见《建筑结构静力计算手册》,中国工业出版社,1975年),设计时可直接查用。

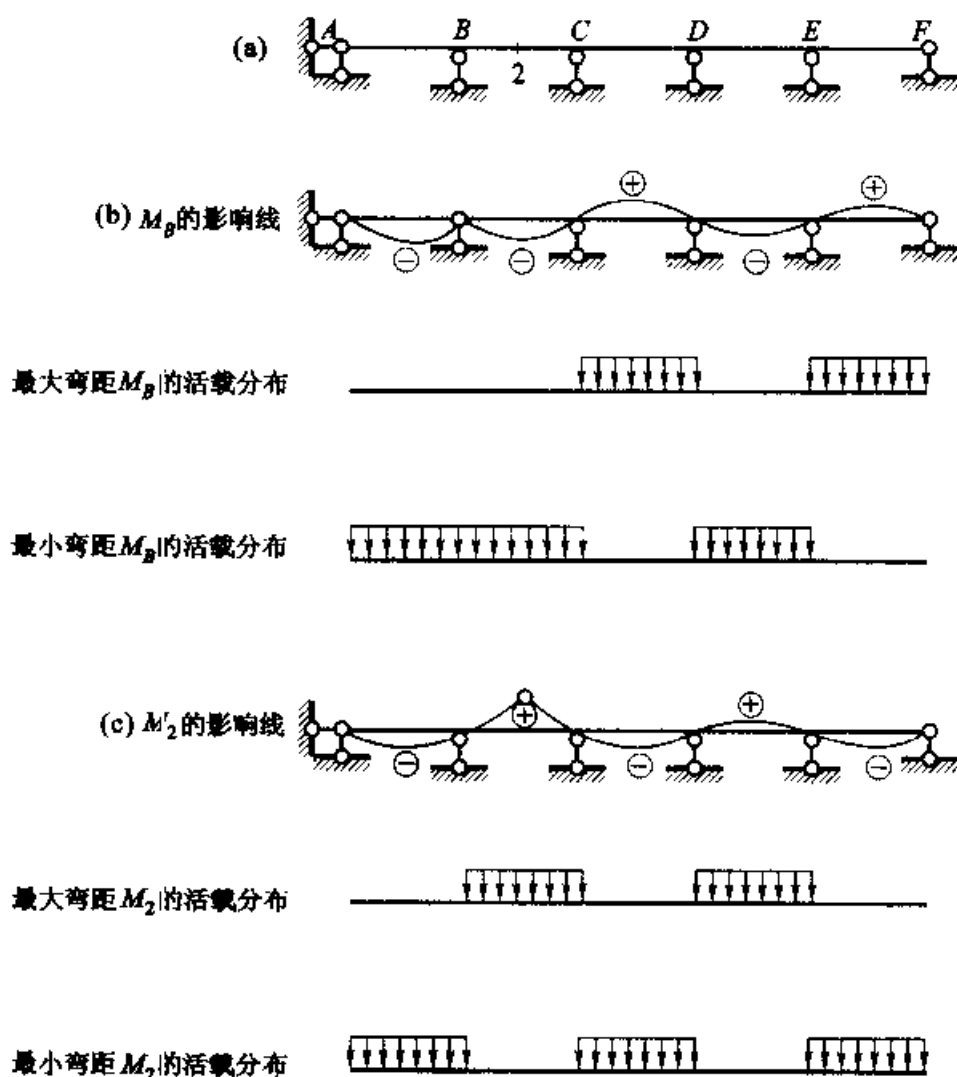


图 9-35

算得连续梁每个截面的最大弯矩和最小弯矩后,在图中将它们标出,并连成两条曲线(或折线),这个图形称为弯矩包络图。

下面通过例题说明弯矩包络图的作法。用类似方法可绘制剪力包络图。

**例 9-11** 一多层工业厂房楼盖结构的剖面如图 9-36a 所示,作主梁的弯矩包络图。

**解** (1) 主梁的计算简图如图 9-36b 所示。因为主梁的线刚度  $(i = \frac{EI}{l})$  远大于柱和墙的线刚度,且主梁支承在墙上,梁下支承处有局部变形,所以柱和墙对主梁起铰支座的作用。主梁跨度取支承面中到中的距离。次梁加于主梁的反力当作集中力作用在主梁的三分点处。为计算方便计,主梁自重也看作集中力,计算在恒载  $F_G$  内。

(2) 先作恒载作用下的弯矩图(图 9-37a)。再分别作各跨单独受活载

$F_P$  作用时的弯矩图(图 9-37b、c、d)。

(3) 根据以上弯矩图可作出弯矩包络图,如图 9-37e 所示。其中最大弯

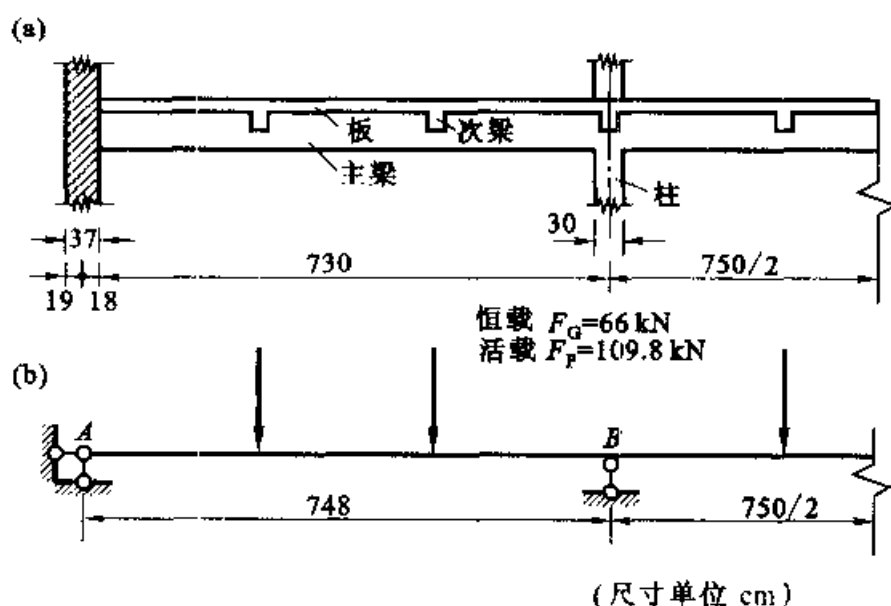


图 9-36

矩图的纵标距等于恒载弯矩图的纵标距与各活载弯矩图的正号纵标距的总和;而最小弯矩图的纵标距等于恒载弯矩图的纵标距与各活载弯矩图的负号纵标距的总和。

以跨中截面 1、2 为例:

$$M_{1\max}(F_G: \text{各跨都有}, F_P: \text{第一、三跨有}) = 121.2 \text{ kN}\cdot\text{m} + 225.9 \text{ kN}\cdot\text{m} + 12.1 \text{ kN}\cdot\text{m} = 359.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{2\max}(F_G: \text{各跨都有}, F_P: \text{第一、三跨有}) = 77.2 \text{ kN}\cdot\text{m} + 177.3 \text{ kN}\cdot\text{m} + 24.1 \text{ kN}\cdot\text{m} = 278.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{1\min}(F_G: \text{各跨都有}, F_P: \text{第二跨有}) = 121.2 \text{ kN}\cdot\text{m} - 36.5 \text{ kN}\cdot\text{m} = 84.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{2\min}(F_G: \text{各跨都有}, F_P: \text{第二跨有}) = 77.2 \text{ kN}\cdot\text{m} - 73.0 \text{ kN}\cdot\text{m} = 4.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

以支座截面 B 为例:

$$M_{B\max}(F_G: \text{各跨都有}, F_P: \text{第三跨有}) = -131.6 \text{ kN}\cdot\text{m} + 36.2 \text{ kN}\cdot\text{m} = -95.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{B\min}(F_G: \text{各跨都有}, F_P: \text{第一、二跨有}) = -131.6 \text{ kN}\cdot\text{m} - 145.8 \text{ kN}\cdot\text{m} - 109.5 \text{ kN}\cdot\text{m} = -386.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

将各截面最大、最小弯矩纵标值连成折线,即得弯矩包络图。



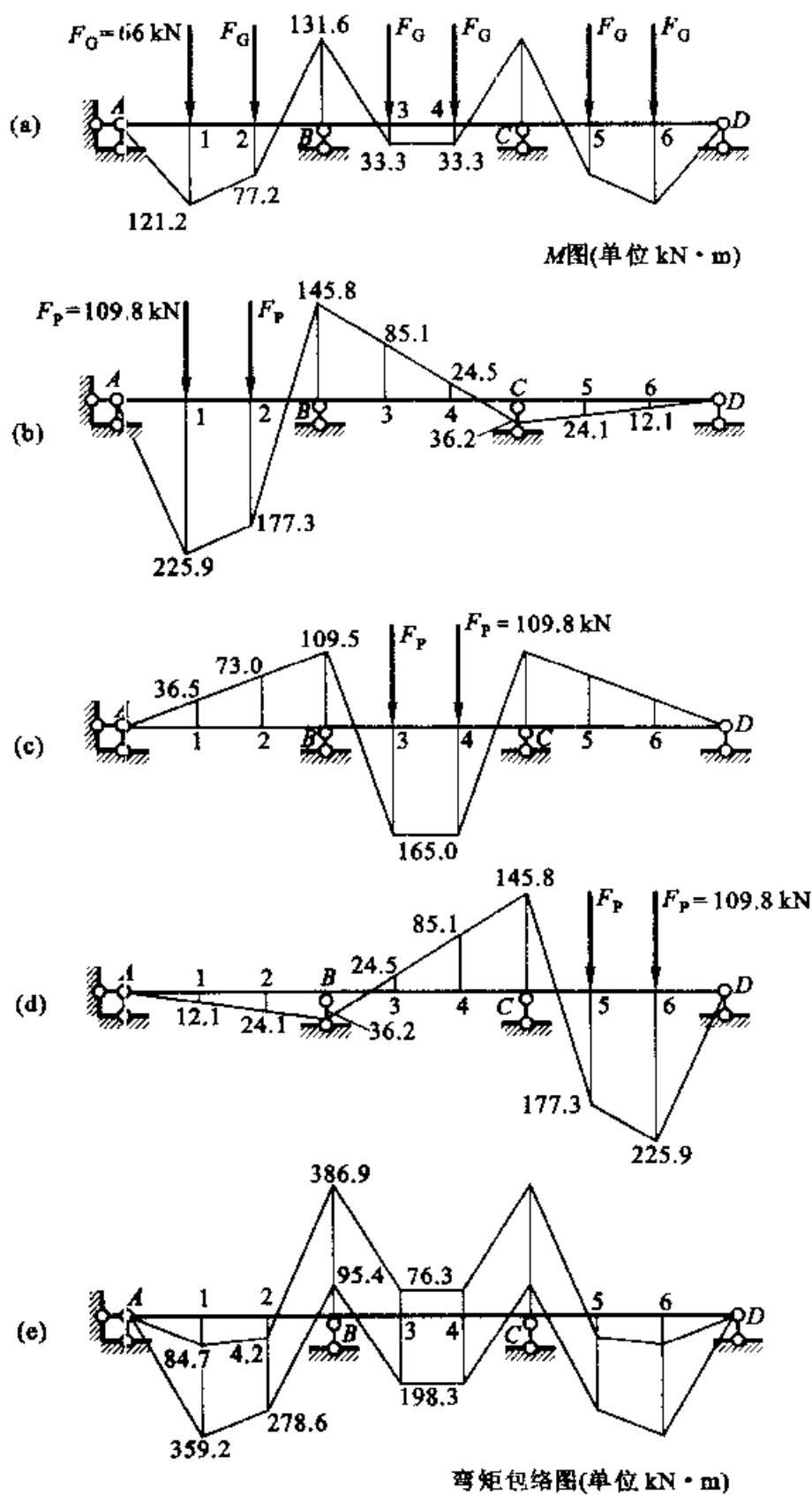


图 9-37

## \* §9-8 用求解器求解一般的超静定结构

对于一般的平面超静定结构,求解器不仅可以求解各种荷载下的位移和内力,而且可以包括弹性支座、支座移动、温度改变等因素,以及影响线的计算。本节通过具体的例题介绍求解器的这些功能。

**例 9-12** 对于图 9-38 中的超静定刚架,各杆刚度参数同例 7-19,现结点 1 支座竖直向下沉降 0.01 m,水平向右移动 0.01 m,用求解器试求变形图和弯矩图。

**解** 力单位为 kN,弯矩单位为 kN·m,尺寸单位为 m。输入的命令文档如下面所示;与例 7-19 相比,除了去掉了荷载命令之外,结点 1 支座命令改为 NSUPT,1,6,0,0.01, -0.01,0。这句命令可用命令对话框输入:在“命令”菜单中选“位

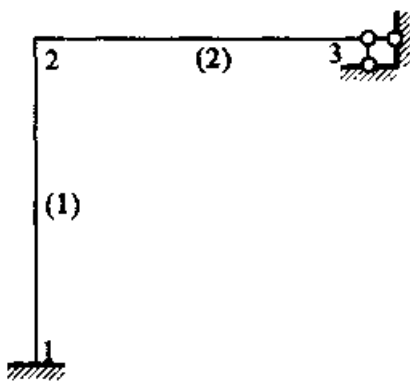
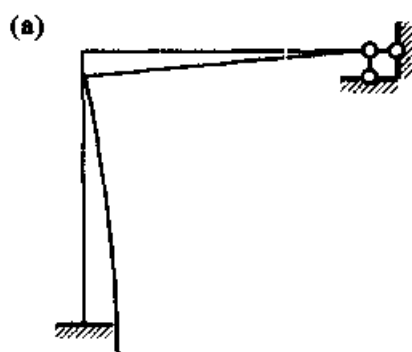
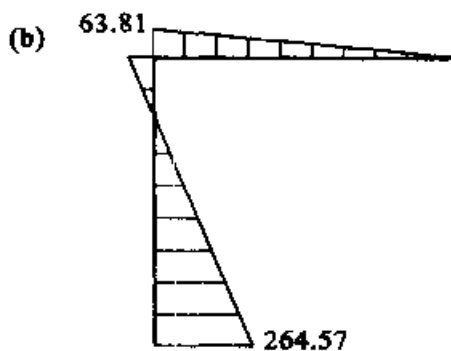


图 9-38

移约束”打开“支座位移”对话框,在“水平位移”和“竖向位移”下拉框中输入给定的位移值即可。求解后的变形图和弯矩图如图 9-39 所示。



变形图



弯矩图(单位 kN·m)

```

N,1,0,0
N,2,0,4
N,3,4,4
E,1,2,1,1,1,1,1,1
E,2,3,1,1,1,1,1,1
NSUPT,1,6,0,0.01, -0.01,0
NSUPT,3,2,0,0
ECHAR,1,1,5.2E6,1.25E5,0,0, 1
ECHAR,2,2,4.5E6,1.20E5,0,0, -1
END

```

图 9-39

**例 9-13** 对于图 9-38 中的超静定刚架,各杆刚度参数同前。用求解器试计算在向右的水平单位荷载作用下立柱顶端弯矩和剪力的影响线图形。

**解** 在例 7-19 的命令文档中,添加影响线计算的命令,分别为 IL,1,1,1,3 和 IL,1,1,1,2。注意,荷载的命令可以保留。求解器计算出的影响线图形如图 9-40 所示。

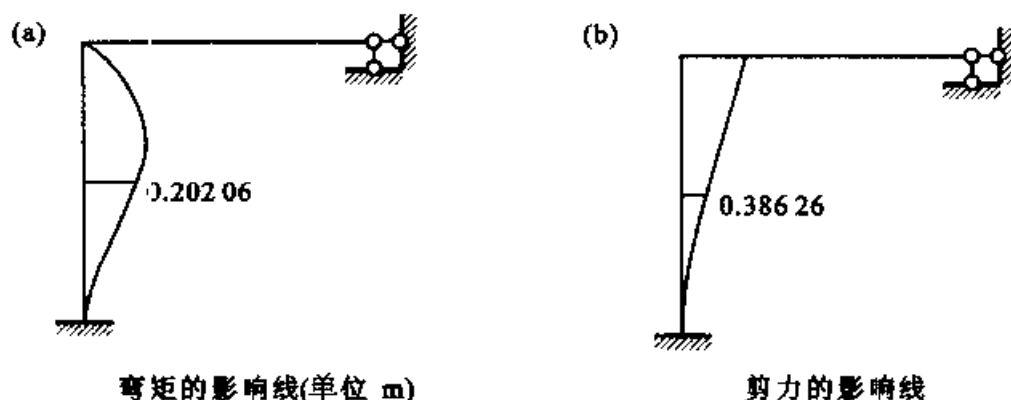


图 9-40

**例 9-14** 图 9-41 所示为一两跨连续梁,各跨有关参数相同: $l=6\text{ m}$ , $E=1.5\times 10^6\text{ kPa}$ ,截面  $0.5\text{ m}\times 0.6\text{ m}$ ,线膨胀系数  $\alpha=1\times 10^{-5}$ 。第一跨梁底部温度升高  $60^\circ\text{C}$ ,用求解器试求变形图和内力图。

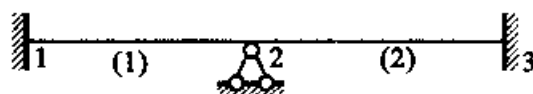


图 9-41

**解** 输入的命令文档如图 9-41 所示,解答在图 9-42 中给出。本例的解答有几点值得注意:首先,虽然温度改变不是对称的,变形却是反对称的;其次,虽然中点有一个铰支座,弯矩的斜率却在该点是连续的,剪力在整个梁上是一个常数。

```

N,1,0,0
N,2,5,0
N,3,10,0
E,1,2,1,1,1,1,1,1
E,2,3,1,1,1,1,1,1
NSUPT,1,6,-90,0,0,0
NSUPT,2,3,0,0
NSUPT,3,6,90,0,0,0
ECHAR,1,2,450000,13500,0,0,-1
ETLOD,1,1,30,-60,0.00001,0.6
END

```

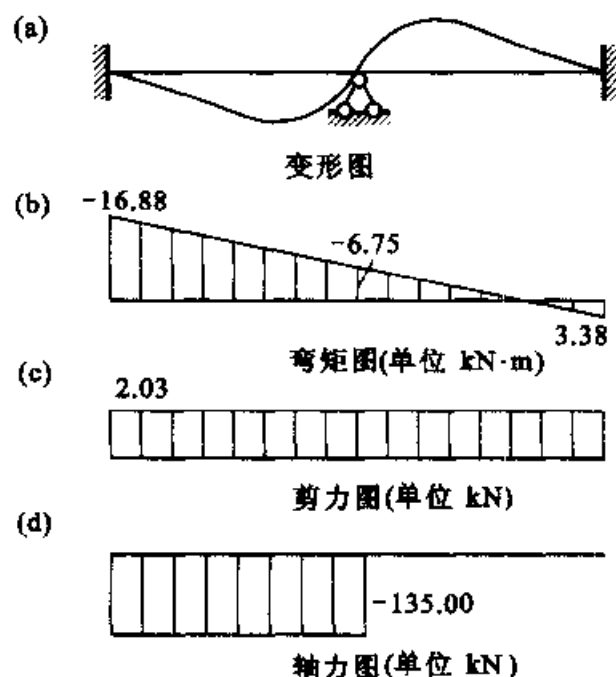


图 9-42 例 9-15 解答

## § 9-9 小 结

力矩分配法和无剪力分配法从原理上看,是位移法的一种渐近解法。从应用范围上看,前者适用于连续梁和无结点线位移的刚架,后者适用于刚架中除两端无相对线位移的杆件外,其余杆件都是剪力静定杆件的情况。它们的优点是:无需建立和解算联立方程,收敛速度快(一般只须分配两轮或三轮),力学概念明确,直接以杆端弯矩进行运算等。因而,在工程计算中,被作为一种简便的实用解法而乐于使用。

在力矩分配法计算过程中,总是重复一个基本运算——单结点的力矩分配。其中又分三个环节:

- (1) 根据荷载求各杆的固端弯矩和结点的约束力矩;
- (2) 根据分配系数求分配力矩;
- (3) 根据传递系数求传递力矩。

这三个环节的物理意义要了解透彻,然后才能灵活运用。在位移法和力矩分配法中规定:杆端弯矩以顺时针转向为正,这是应该注意的。

对于一般有结点线位移的刚架,联合用力矩分配法和位移法求解,发挥了两个方法的长处。

利用超静定力影响线与挠度图间的比拟关系,可以很方便地绘出影响线的形状,可用来判断不利荷载的分布。这在工程中是很有用的方法。

习题9-1~9-3可供辅导课选用参考。习题9-21以后的习题是综合性的习题,供参考。

## §9-10 思考与讨论

### §9-1 思考题

9-1 什么叫固端弯矩? 约束力矩如何计算? 为什么要变号才进行分配?

9-2 什么叫转动刚度? 分配系数与转动刚度有何关系? 为什么每一结点的分配系数之和等于1?

9-3 什么叫传递力矩? 传递系数如何确定?

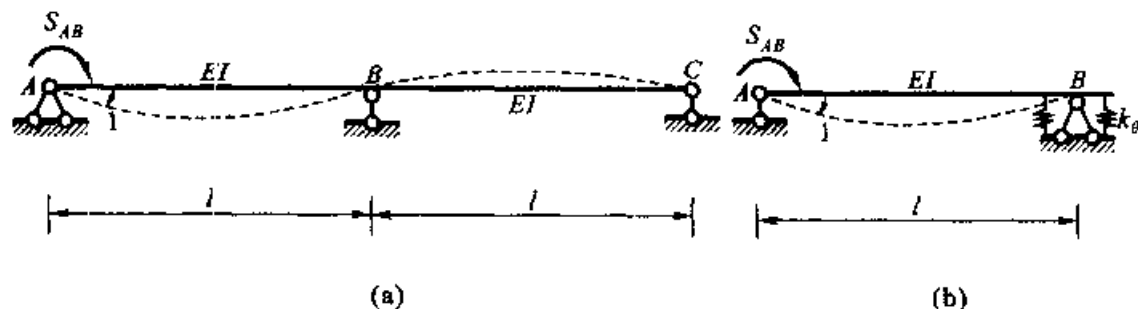
9-4 试求图示梁A端的转动刚度 $S_{AB}$ 及自A向B的力矩传递系数 $C_{AB}$ 。

讨论: 图a为一两跨梁, 在A点施加 $S_{AB}$ 使 $\theta_A = 1$ , B点无外加约束。

图b为一单跨梁, 在A点施加 $S_{AB}$ 使 $\theta_A = 1$ , B端为弹性支座, 抗转刚度系数为 $k_\theta$ 。

本问题已将§9-1的单个杆的转动刚度及力矩传递系数的概念扩大到了两跨梁和远端为弹性支座的梁。

读者可以用位移法或传统的力矩分配法求解本问题, 从而求出本问题的转动刚度 $S_{AB}$ 及力矩传递系数 $C_{AB}$ 。



思考题9-4图

9-5 力矩分配法的基本运算有哪些步骤? 每一步的物理意义是什么?

### §9-2 思考题

9-6 在多结点的力矩分配过程中, 为什么每次只放松一个结点? 可以同时放松多个结点吗? 在什么条件下可以同时放松多个结点?

讨论: 在多结点的力矩分配过程中, 每次只放松一个结点是因为, 当只放松一个结点时, 其分配系数及传递系数是已知的, 可以据以求解。

当同时放松多个结点时, 其分配系数及传递系数已不同于单结点的放松; 只有当其分配系数及传递系数均为已知时, 才可由之求解。

思考题9-10是一种多结点放松的例子, 可以参考。

9-7 力矩分配法直接计算出每杆的杆端弯矩。如果还要求出结点的转角, 应当如何进行计算?

讨论: 设有由杆AB、AC、AD相交的刚结点A无线位移, 在第n轮放松结点A时,

各杆近端相应的分配力矩为  $M_{ij}^n$ ; 与之相应地, 结点 A 的转角增量为  $\theta_A^n$ , 如图所示。设各杆的转动刚度为  $S_{ij}$ , 则有

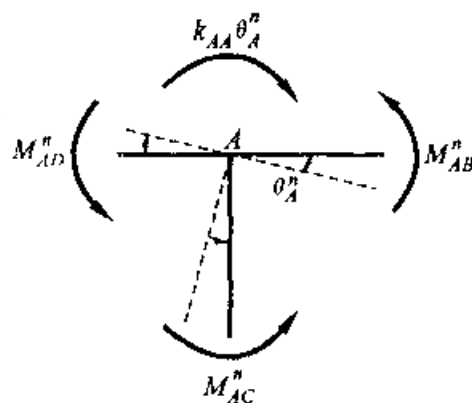
$$M_{ij}^n = S_{ij} \theta_A^n$$

结点 A 角位移增量  $\theta$  为相交于该结点的任一杆端在第  $n$  轮所获分配力矩与转动刚度之比:

$$\theta_A^n = \frac{M_{ij}^n}{S_{ij}}$$

结点 A 的角位移应等于各次放松结点所得角位移增量之和, 即

$$\theta_A = \sum \theta_A^n = \frac{1}{S_{ij}} \sum M_{ij}^n$$

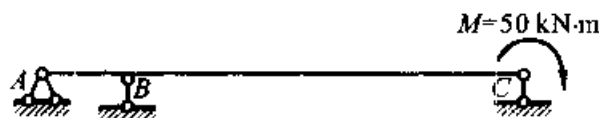


思考题 9-7 图

由上式可知, 只需将杆  $A_j$  的 A 端各次所得分配力矩相加, 再除以该杆的转动刚度, 即得结点角位移的渐近值。

9-8 用力矩分配法计算连续梁和刚架时, 为什么结点的约束力矩会趋于 0, 即为什么计算过程是收敛的?

9-9 试按另一种计算程序重算例题 9-4。思考题 9-9 图中当 B 结点锁住时, 杆 BC 的 B 端弯矩等于多少?



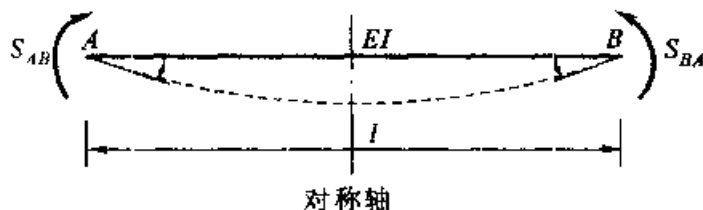
思考题 9-9 图

### § 9-3 思考题

9-10 用力矩分配法计算对称结构时, 如不取半边结构, 而直接利用原结构进行计算, 如何利用对称性简化计算?

讨论: 用力矩分配法计算对称结构时, 也可以不取半边结构, 而直接利用原结构的对称性以简化计算。

当对称刚架受对称荷载作用, 用力矩分配法进行计算时, 其锁(加约束求固端弯矩和结点不平衡力矩)和松(分配不平衡力矩及传递)均应保持对称的进行。此时应注意, 跨过对称轴的杆, 当 A、B 两端同时按对称变形放松时的转动刚度为  $S_{AB} = S_{BA} = 2i$ ; 另外, 此杆在杆端有分配弯矩后, 将不向远端传递, 因为是两端保持对称的分配的。



思考题 9-10 图

建议读者用此方法重作例 9-5, 讨论二者的异同

9-11 支座移动和温度改变时, 可以用力矩分配法进行计算吗? 什么情况下可以?

什么情况下不可以? 可以计算的情况下, 怎么计算?

### § 9-4 思考题

9-12 什么叫无剪力分配法? 它的应用条件是什么?

9-13 无剪力分配法为什么能用于单跨对称刚架? 单跨不对称刚架直接用无剪力分配法有什么问题?

### § 9-5 思考题

9-14 § 9-5 中实际上是采用有结点角位移而没有结点线位移的结构体系作为位移法的基本结构求解的, 为什么这种无结点线位移, 但有结点角位移的结构体系也可以作基本结构?

### § 9-6 思考题

9-15 说明超静定内力影响线与静定内力影响线的区别。

9-16 试用力法、力矩分配法和挠曲线比拟方法作两跨等截面等跨连续梁中间支座弯矩的影响线。总结一下各种作法的步骤。

9-17 推导式(9-13)时, 用了超静定结构作基本结构, 为什么超静定结构也可以作基本结构?

讨论: 本问题与思考题 9-14 是同一性质的问题。

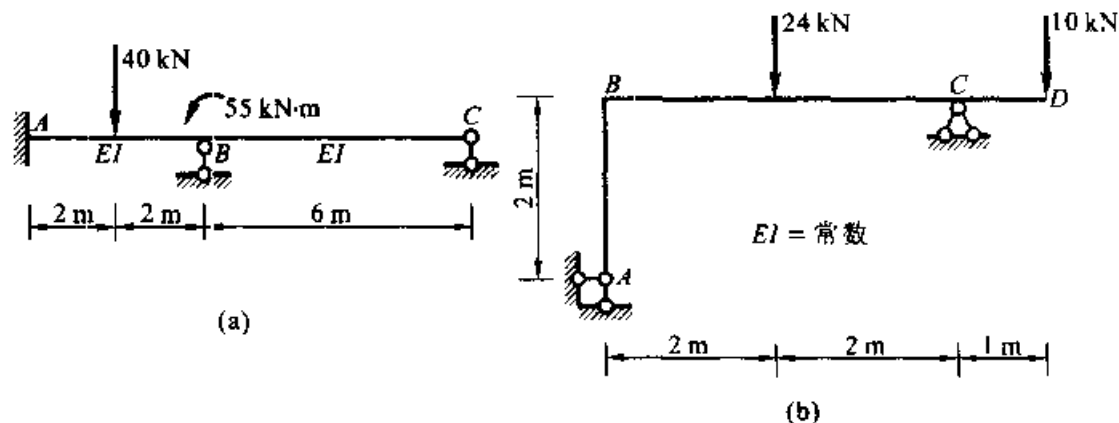
当一个超静定杆的内力和位移为已知(或可求解)时, 这一超静定杆就可取作基本结构。如推导式(9-13)时所用的图 9-30c, 虽然它仍是一个超静定杆, 但它的位移是可解的, 故可取之作为基本结构。

当一个超静定刚架的内力和位移为已知(或可解)时, 这一超静定刚架就可以取作基本结构。在 § 9-5 中, 为解图 9-25a 这一有未知的结点线位移的刚架, 取了图 9-25b 这个无结点线位移的刚架为基本结构; 因为这个无结点线位移的刚架是可以用力矩分配法求解的, 因而可以用它来作为基本结构, 作为求解有结点线位移刚架(图 9-25a)的过渡桥梁。

从这两个思考题是不是可以领悟到更深一层次的道理?

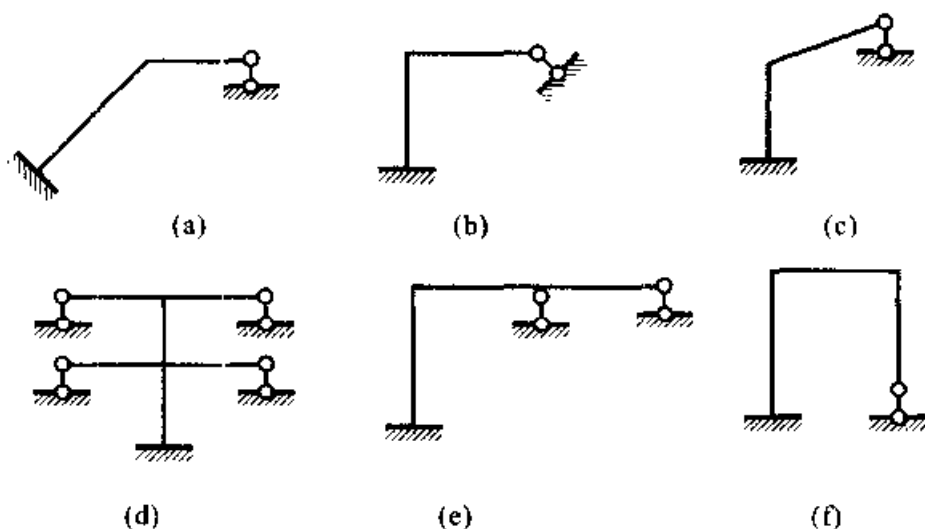
## 习 题

9-1 试用力矩分配法计算所示结构, 并作  $M$  图。



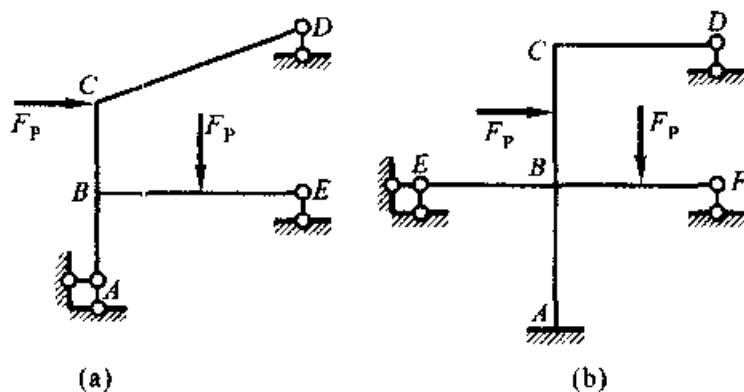
题 9-1 图

9-2 试判断下列结构可否用无剪力分配法计算,说明理由。



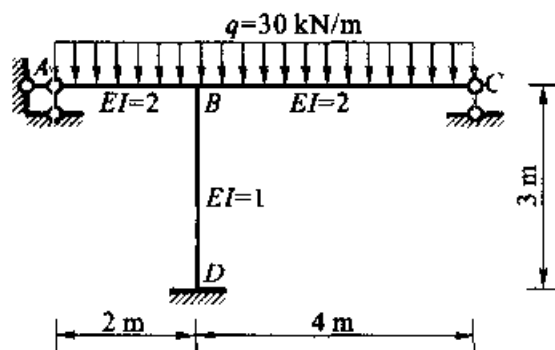
题 9-2 图

9-3 试讨论下列结构的解法,用什么方法?各杆的固端弯矩、转动刚度和传递系数如何确定?



题 9-3 图

9-4 试作图示刚架的  $M$  图(图中  $EI$  为相对值<sup>①</sup>)。

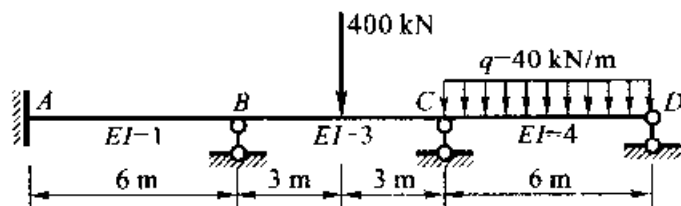


题 9-4 图

① 在荷载作用下影响超静定刚架内力的是各杆  $EI$  的相对值,并不是它的绝对值(或真值);故为了简单,这里及下面的习题中给出的均是相对值。

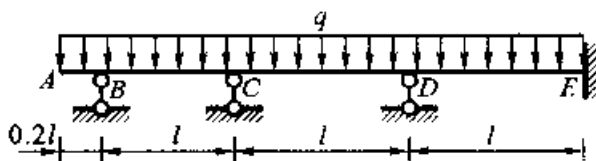
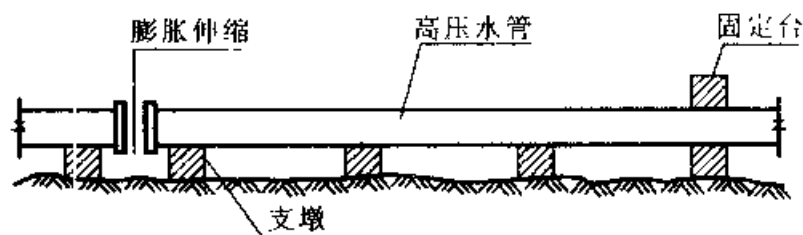


9-5 试作图示连续梁的  $M$ 、 $F_Q$  图,并求  $CD$  路的最大正弯矩和反力。



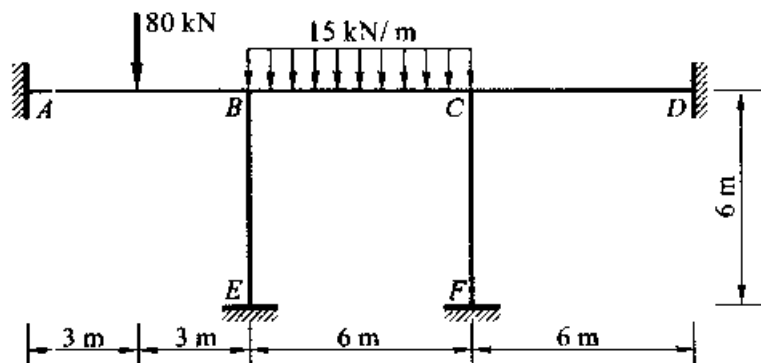
题 9-5 图

9-6 某水电站高压水管,受管内水重及管道自重作用。试作水管的弯矩图和剪力图。



题 9-6 图

9-7 试作图示刚架的  $M$  图。设  $EI$  = 常数。

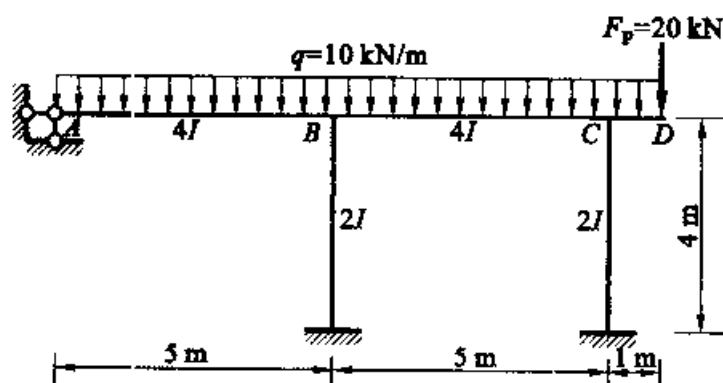


题 9-7 图

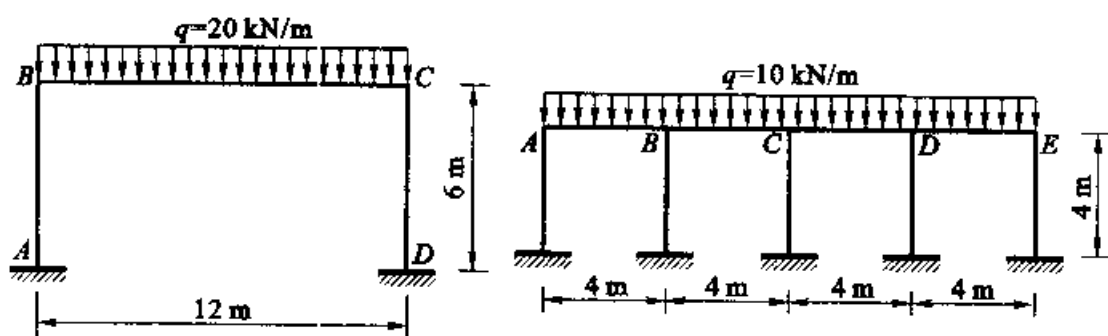
9-8 试作图示刚架的  $M$  图。

9-9~9-10 试作图示刚架的内力图。设  $EI$  = 常数。

9-11 试作图示刚架的  $M$ 、 $F_Q$ 、 $F_N$  图(图中  $I$  为相对值)。

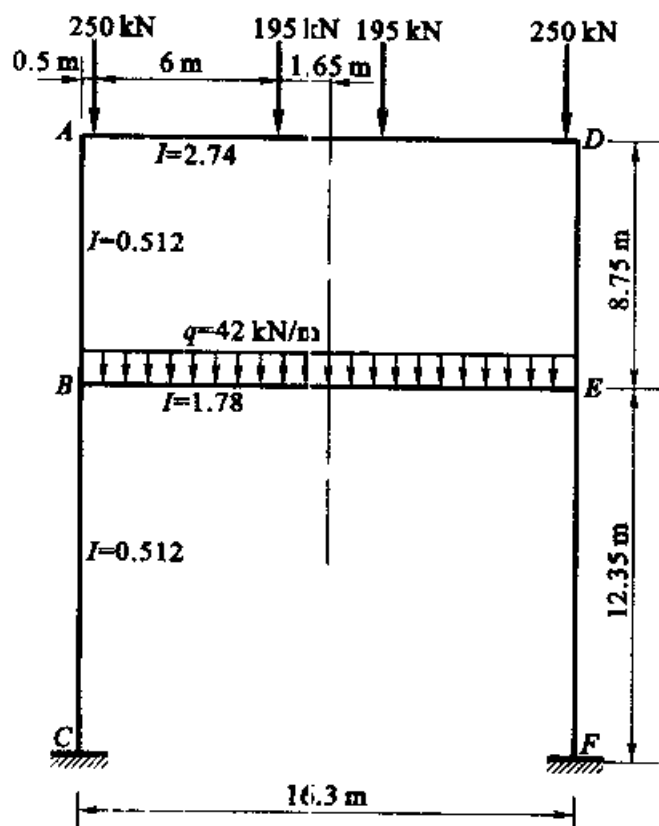


题 9-8 图

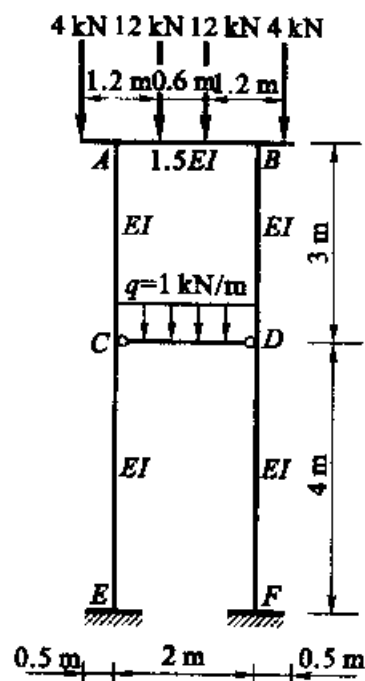


题 9-9 图

题 9-10 图



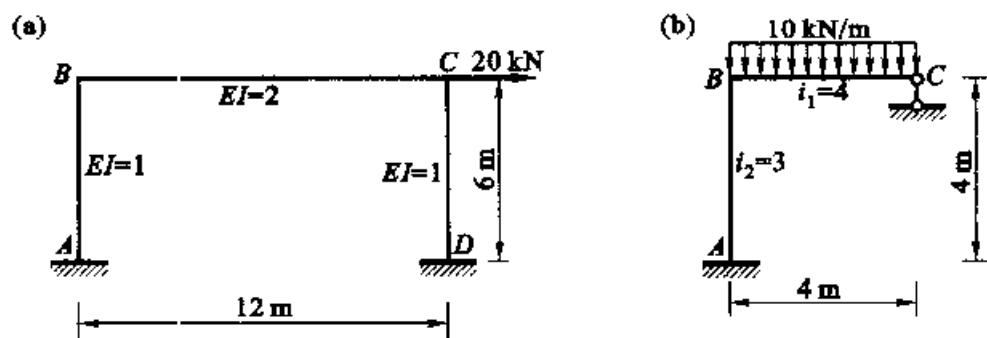
题 9-11 图



题 9-12 图

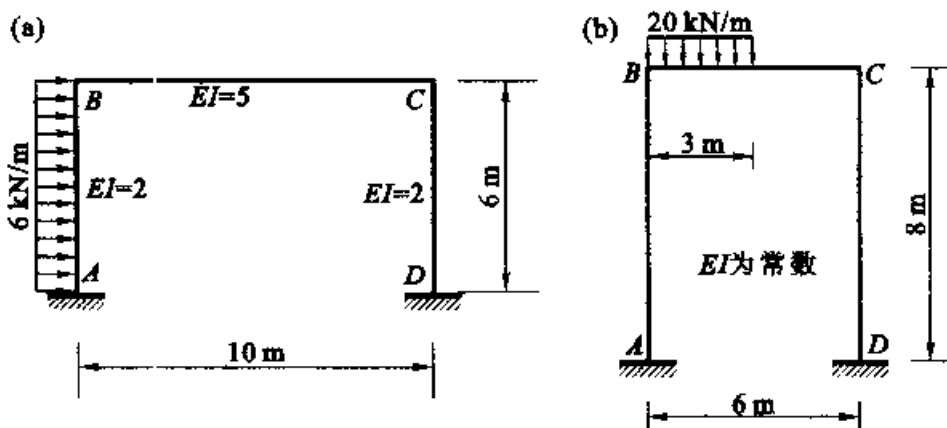
9-12 试作图示刚架的  $M$  图。

9-13 试作图示刚架的弯矩图。



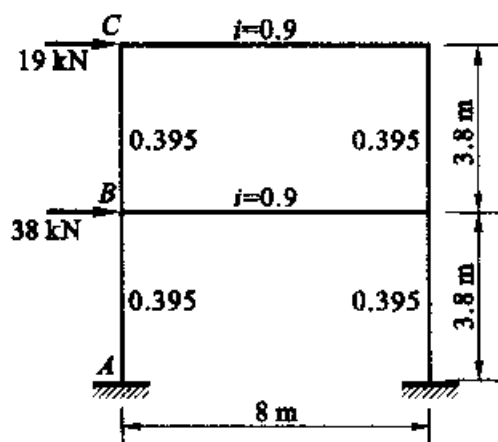
题 9-13 图

9-14 试作图示刚架的  $M$  图。



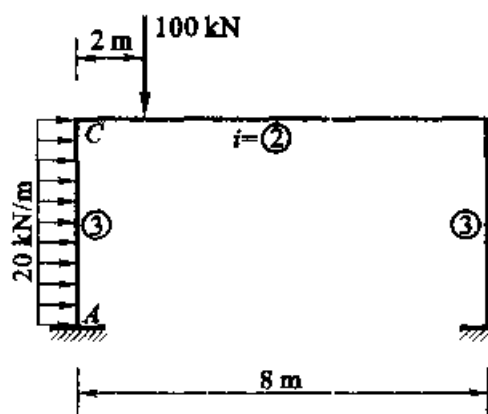
题 9-14 图

9-15 试作图示刚架的弯矩图。

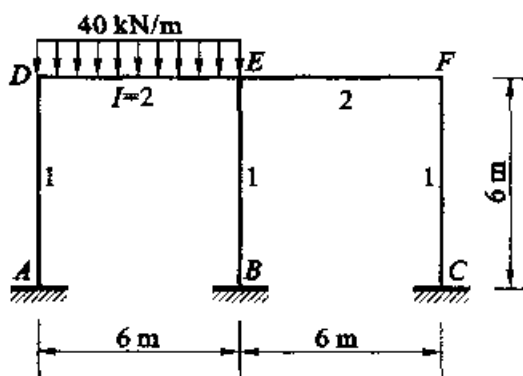


题 9-15 图

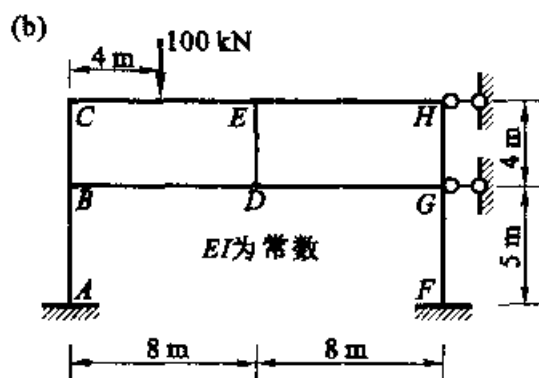
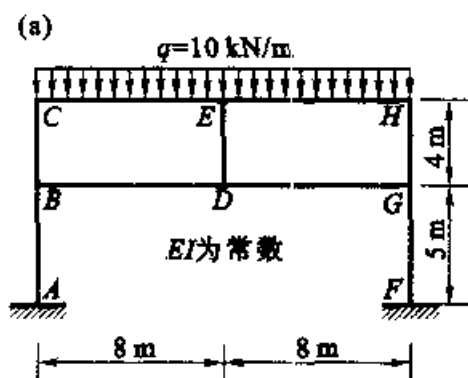
9-16~9-18 试联合应用力矩分配法和位移法计算图示刚架。



题 9-16 图

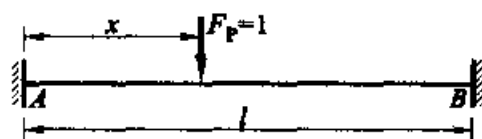


题 9-17 图



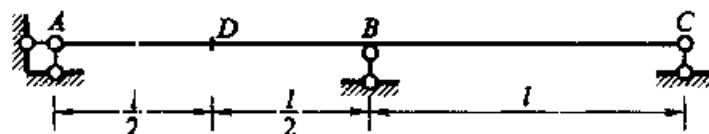
题 9-18 图

9-19 试作两端固定梁 AB 的杆端弯矩  $M_A$  的影响线。荷载  $F_P = 1$  作用在何处时,  $M_A$  达到极大值?



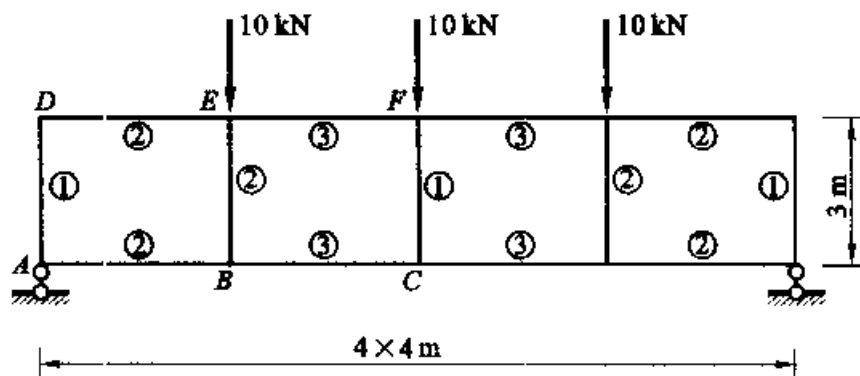
题 9-19 图

9-20 试作两跨等跨等截面连续梁  $F_{RB}$ 、 $M_D$ 、 $F_{QD}$  的影响线。



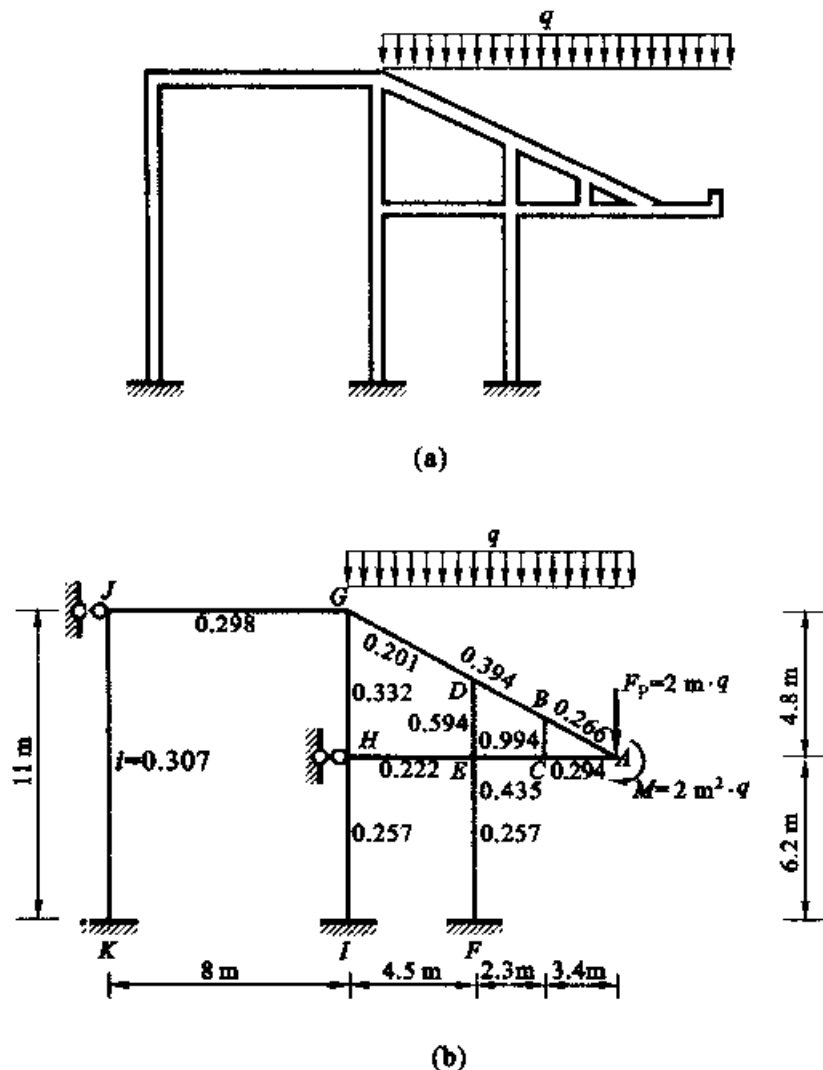
题 9-20 图

9-21 试作图示4孔空腹刚架的弯矩图。



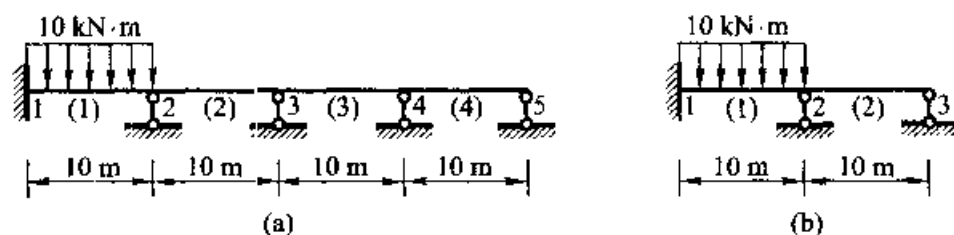
题9-21图

9-22 剧院跳台结构如图a所示,其计算简图如图b,杆旁数字为杆的线刚度  $i$ 。在竖向荷载  $q$  作用下,试作  $M$  图。注意:本题有结点线位移。



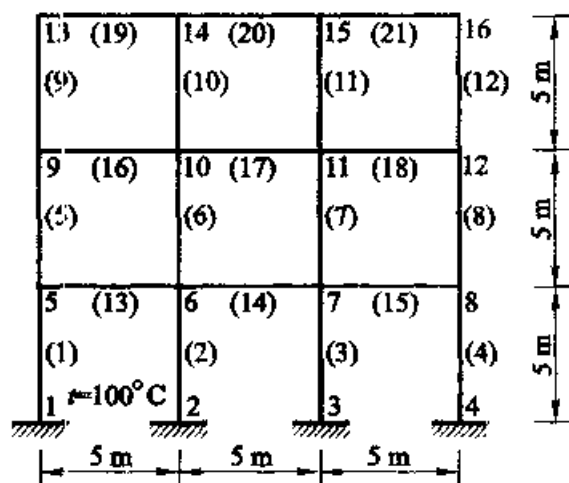
题9-22图

9-23 图示两个连续梁,其中第2个比第1个少了两跨,其余相同。用求解器分别求解两个连续梁,比较结点1和2处的弯矩,从中可得出什么结论?各跨刚度相同:  
 $EA = 5 \times 10^6 \text{ kN}$ ,  $EI = 2 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 。



题 9-23 图

9-24 图示框架底层左边第一间起火,温度上升了  $t = 100^\circ\text{C}$ 。用求解器计算温度改变引起的最大弯矩值。各杆截面高  $h = 0.6 \text{ m}$ ,  $EA = 5 \times 10^6 \text{ kN}$ ,  $EI = 2 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 。



题 9-24 图

# 附录 A 《结构力学求解器》 (学生版)介绍

## 1. 简介

把繁琐交给求解器,我们留下创造力!

结构力学求解器(SM Solver for Windows)是一个面向教师、学生以及工程技术人员  
的计算机辅助分析计算软件,其求解内容包括了一维平面结构(体系)的几何组成、静定、  
超静定、位移、内力、影响线、自由振动、弹性稳定、极限荷载等结构力学课程中所涉及  
的所有问题,全部采用精确算法给出精确解答。本软件界面方便友好,内容体系完整、功能  
完备通用,可供教师拟题、改题、演练,供学生做题、解题、研习,供工程技术人员设计、计  
算、验算之用,可望在 21 世纪的教学改革中发挥其特有的作用。

### 提示

本软件随时升级更新,所附光盘上的软件可能为更新版本,务请在装机使用前查看  
光盘上的最新说明。软件中凡与本介绍有出入的地方,均以光盘上的最新说明为准。

### 重要声明

本软件受版权保护。用户只能装在一台单独的计算机上使用,不得复制到多台计算  
机上使用,不得在网络上供多用户使用。务请遵守,违者必究。

## 2. 求解功能

求解功能分为自动求解和智能求解两类:

### 自动求解功能

- 平面体系的几何组成分析,对于可变体系可静态或动画显示机构模态;
- 平面静定结构和超静定结构的内力计算和位移计算,并绘制内力图和位移图;
- 平面结构的自由振动和弹性稳定分析,计算前若干阶频率和屈曲荷载,并静态或  
动画显示各阶振型和失稳模态;
- 平面结构的极限分析,求解极限荷载,并可静态或动画显示单向机构运动模态;
- 平面结构的影响线分析,并绘制影响线图

### 智能求解功能

- 平面体系的几何构造分析:按两刚片或三刚片法则求解,给出求解步骤;
- 平面桁架的截面法:找出使指定杆成为截面单杆的所有截面;
- 平面组合结构的求解:所有杆件内力、作弯矩图所需的所有内力、指定杆件内力  
三种模式求解;以文字形式或图文形式给出求解方法步骤。

## 3. 技术性能

## 运行环境

80486 级别以上的 PC 机, Windows 3. x/95/98/NT, 8M 内存, 2 M 硬盘空间(专业版求解大问题时需更多的内外存空间)。

## 版本区别

目前有两个版本: 学生版和专业版。学生版解题规模有如下限制: 几何组成、静力分析、影响线、截面法等问题最多 40 个单元; 自由振动、弹性稳定和极限分析最多 20 个单元。专业版解题规模无比限制, 只受机器的内外存空间大小的限制。本软件版本为学生版。

## 预装题目

本软件含有《结构力学》(龙驭球、包世华主编, 高等教育出版社, 1996 年)一书各章节中绝大多数习题题目, 分别在子目录 Chp1, Chp2, … 之中。预装题目可以作为输入示范, 同时可免除学生和教师大量的输入工作。

## 4. 装机与运行

### 软件安装

下面以 Windows 95/98 为例说明如何将软件安装到硬盘上:

在 Windows 环境下运行光盘上的 SMSetup.exe, 然后按提示操作即可完成装机。装机完成后, 桌面上会出现一个名为“求解器”的图标(用户可以更改名字)。

### 启动运行

- 双击桌面上的“求解器”图标, 再单击程序的封面, 便可使用求解器。
- 建议第一次运行时, 先调入“入门向导.inp”数据文件, 做法如下:

依次选菜单: “文件|打开”, 找到“入门向导.inp”文件, 确定后打开。该文件中包含了两个例题以及创建该例题的详细操作步骤。第一个例题包含了由几何组成分析一直到极限荷载各类问题的所有数据, 第二个例题是一个几何可变体系的例子, 用以展示可变体系的动画效果。

- 可随时调用联机帮助而获得其他有关的说明和帮助信息。

## 5. 研制组

研制人: 袁 驷 教授

参加人员: 叶康生、王建琳、孔令原、林永静、欧阳彦峰

研制单位: 清华大学土木系结构力学教研室

研制组将不断对 SM Solver 做更新升级; 若您在使用过程中发现不妥、不便之处, 或者有好的建议, 欢迎提出并请及时与研制组联系, 以便在维护升级中不断完善。对于小问题, 研制组将免费提供修补文件。

## 6. 命令指南

使用求解器时, 需要用户在编辑器中输入命令用以定义要求解的问题。对于一般用户来讲, 建议采用对话框的方式来输入和修改命令, 这样可不必关心命令格式。但是, 由于本书中几乎所有用求解器求解的例题都是用命令文档的形式来描述和定义的, 因此为了用户参阅的方便, 这里给出求解器中输入命令的语法和格式。

### (1) 格式说明



1) 命令集在功能上分为两类:分析求解命令和辅助显示命令。分析求解命令对于求解问题是必须的,如结点、单元定义等;而辅助显示命令只是对浏览器的显示增加一些功能,与问题求解无关,如尺寸线标注等。以下将两类命令一并列出。

2) 为了简化键入命令,很多命令设置了可缺省项。可缺省项用[...]标出。

3) 每一条命令都以关键词为先导,关键词允许为英文字符或中文汉字。以下用中文关键词作标题,而在命令格式中采用英文字符关键词。因此,若要采用中文关键词,只需将中文标题代替命令行中的关键词即可,如:"n,1,0,0"与"结点,1,0,0"是完全等效的。

4) 英文关键词可用大写字母,也可用小写字母。

5) 变量定义只定义实型变量,输入时格式很宽松,如:5,5.0,5.0E0 都是等效的,还可以直接输入已经定义了的变量名。

6) 凡是需要输入实型数的(如:坐标值,荷载值等),都可以输入变量名,但该变量必须已经定义并赋值。

7) 命令集将随着求解器的升级而不断更新,若发现与此处不符的命令,务请查看光盘上联机帮助中的最新版本。

## (2) 命令格式

命令行	注释
-----	----

### 问题标题

TITLE, *Ttext*

*Ttext*, 标题文本。

### 注释

C *Ctext* 或 C, *Ctext*

*Ctext*, 注释文本。

注:第1种格式中 C 和 *Ctext* 之间至少有一个空格。

### 变量定义

LET, *VarName* = *Formula*, *VarName* = *Formula* [, ...]

*VarName*, 变量名;

*Formula*, 算术表达式(按 Fortran 语言语法)。

### 结点

N, *Nn*, *x*, *y*

*Nn*, 结点编码;

*x*, 结点的 *x* 坐标;

*y*, 结点的 *y* 坐标。

### 结点填充

FILL[,N1,N2[,Nfill,Nstart,Nincr]]

N1,N2,定义填充范围的两个结点码( $N1 < N2$ ),缺省值为最新定义的两个结点码;

Nfill,要填充的结点数,缺省值 $= N2 - N1 + 1$ ;

Nstart,填充结点的起始编码,缺省值 $= N1 + 1$ ;

Nincr,填充结点的编码增量,缺省值 $= 1$ 。

### 结点生成

NGEN,Ngen,Nincr,N1,N2,N12incr,Dx,Dy

Ngen,结点生成的次数;

Nincr,每次生成的结点码增量;

N1,N2,基础结点范围;

N12incr,基础结点的编码增量;

Dx,Dy,生成结点的 $x,y$ 坐标增量。

### 单元(两种格式)

E,N1,N2[,DOF11,DOF12,DOF13,DOF21,DOF22,DOF23]

N1,N2,单元两端的结点码;

以下连接方式:1 为连接,0 为不连接;

DOF11,单元在杆端 1 处的 $x$ 方向自由度的连接方式,缺省值 $= 1$ ;

DOF12,单元在杆端 1 处的 $y$ 方向自由度的连接方式,缺省值 $= 1$ ;

DOF13,单元在杆端 1 处的转角方向自由度的连接方式,缺省值 $= 0$ ;

DOF21,单元在杆端 2 处的 $x$ 方向自由度的连接方式,缺省值 $= 1$ ;

DOF22,单元在杆端 2 处的 $y$ 方向自由度的连接方式,缺省值 $= 1$ ;

DOF23,单元在杆端 2 处的转角方向自由度的连接方式,缺省值 $= 0$ 。

E,N1,N2[,NType1[,Alpha1],NType2[,Alpha2]]

N1,N2,单元两端的结点码;

NType1,单元在杆端 1 处的连接类型,缺省值 $= 2$ ;

NType1 $= 2$ ,铰结;

NType1 $= 3$ ,固结;

NType1 $= 4$ ,自由;

NType1 $= 5$ ,竖向自由;

NType1 $= 6$ ,横向自由;

NType1 $= 7$ ,斜向自由;

NType1 $= 8$ ,斜向连结;

Alpha1,当 NType1 $= 7$  或  $8$  时,斜向连结(或自由)的倾斜角;

NType2,杆端 2 处的连接类型,缺省值 $= 2$ ;

$\text{Alpha2}$ , 当  $\text{NType2} = 7$  或  $8$  时, 斜向连结(或自由)的倾斜角。

注: 以上两单元定义命令可混合使用, 例如采用如下格式:

```
E, N1, N2, NType1, Alpha1, DOF21, DOF22, DOF23
E, N1, N2, DOF11, DOF12, DOF13, NType2, Alpha2
```

#### 单元生成

EGEN,  $\text{Ngen}$ ,  $E1$ ,  $E2$ ,  $\text{Nincr}$

$\text{Ngen}$ , 生成次数;

$E1$ ,  $E2$ , 基础单元范围;

$\text{Nincr}$ , 生成中单元两端点对应的结点码增量;

注: 生成后的单元刚度、质量和极限弯矩等均同基础单元

#### 结点支承

NSUPT,  $S_n$ ,  $\text{Stype}$ ,  $\text{Sdir}$  [,  $\text{Sdisx}$ ,  $\text{Sdisy}$ ,  $\text{SdisR}$ ]

$S_n$ , 支承的结点码;

$\text{Stype}$ , 支承类型, 参见支座定义窗口中的图示;

$\text{Sdir}$ , 支承方向, 以图示方向为零, 绕结点逆时针旋转为正;

$\text{Sdisx}$ ,  $x$  方向的支座位移, 缺省值 = 0;

$\text{Sdisy}$ ,  $y$  方向的支座位移, 缺省值 = 0;

$\text{SdisR}$ , 转角方向的支座位移, 缺省值 = 0。

#### 杆端支承

ESUPT,  $\text{Selem}$ ,  $\text{SelemEnd}$ ,  $\text{Stype}$  [[,  $\text{Sdir}$ ],  $\text{Sdisx}$  [,  $\text{Sdisy}$  [,  $\text{SdisR}$ ]]]

$\text{Selem}$ , 单元编码;

$\text{SelemEnd}$ , 单元杆端;

$\text{Stype}$ , 单元杆端约束类型;

$\text{Stype} = 1$ ,  $x$  方向;

$\text{Stype} = 2$ ,  $y$  方向;

$\text{Stype} = 3$ , 转角方向;

$\text{Stype} = 4$ ,  $x$  方向、 $y$  方向和转角方向;

$\text{Stype} = 5$ , 斜向;

$\text{Sdir}$ , 支座方向, 仅当  $\text{Stype} = 5$  时需输入;

$\text{Sdisx}$ ,  $x$  方向的支座位移, 缺省值 = 0;

$\text{Sdisy}$ ,  $y$  方向的支座位移, 缺省值 = 0;

$\text{SdisR}$ , 转角方向的支座位移, 缺省值 = 0。

## 结点弹簧

NSPR, *Sn*, *Stype*, *Sdir*[, *Stiffx*[, *Stiffy*[, *StiffR*]]]

*Sn*, 支承的结点码;

*Stype*, 支承类型, 参见支座定义窗口中的图示;

*Sdir*, 支承方向, 以图示方向为零, 绕结点逆时针旋转为正;

*Sdisx*, *x* 方向弹簧刚度;

*Sdisy*, *y* 方向弹簧刚度;

*SdisR*, 转角方向弹簧刚度(暂无此功能)。

注: 弹簧支承仅支持线弹簧, 暂不支持转动弹簧, 下同。

## 杆端弹簧

ESPR, *Selem*, *SelemEnd*, *Stype*[[, *Sdir*], *Stiffx*[, *Stiffy*[, *StiffR*]]]

*Selem*, 单元编码;

*SelemEnd*, 单元杆端;

*Stype*, 单元杆端弹簧类型;

*Stype* = 1, *x* 方向;

*Stype* = 2, *y* 方向;

*Stype* = 3, 转角方向;

*Stype* = 4, *x* 方向、*y* 方向和转角方向;

*Stype* = 5, 斜向;

*Sdir*, 弹簧支承方向, 仅当 *Stype* = 5 时需输入;

*Sdisx*, *x* 方向的弹簧刚度;

*Sdisy*, *y* 方向的弹簧刚度;

*SdisR*, 转角方向的弹簧刚度(暂无此功能)。

注: 同结点弹簧中的注。

## 结点荷载

NLOAD, *Ln*, *Ltype*, *Lsize*[, *Ldir*]

*Ln*, 荷载作用的结点码;

*Ltype*, 荷载类型;

*Ltype* = 1(-1), 集中荷载, 指向(背离)结点;

*Ltype* = 2(-2), 逆时(顺时)针方向的集中力矩;

*Lsize*, 荷载大小;

*Ldir*, 荷载方向(度), 仅当 *Ltype* = 1 或 -1 时输入, 缺省值 = 0。

## 单元荷载

ELOAD, *Ln*, *Ltype*, *Lsize1*[, *Lsize2*[, *Lpos1*[, *Lpos2*[, *Ldir*]]]]

*Ln*, 荷载作用的单元码;

*Ltype*, 荷载类型;

*Ltype* = 1( - 1), 集中荷载, 指向(背离)单元;

*Ltype* = 2( - 2), 逆时(顺时)针方向的集中力矩;

*Ltype* = 3( - 3), 均布荷载, 指向(背离)单元;

*Ltype* = 4( - 4), 逆时(顺时)针方向的均布力矩;

*Ltype* = 5( - 5), 线性荷载, 指向(背离)单元;

*Ltype* = 6( - 6), 逆时(顺时)针方向的线性力矩;

*Lsize1*, *Lsize2*, 荷载大小;

当 *Ltype* = 1, - 1, 2, - 2, 3, - 3, 4, - 4 时, 输入 *Lsize1*;

当 *Ltype* = 5, - 5, 6, - 6 时, 输入 *Lsize1* 及 *Lsize2*;

*Lsize1*, 荷载起点的大小;

*Lsize2*, 荷载终点的大小;

*Lpos1*, 荷载起点至单元杆端 1 的距离与单元杆长的比值,

缺省值 = 0;

*Lpos2*, 荷载起点至单元杆端 1 的距离与单元杆长的比值,

缺省值 = 1;

*Ldir*, 荷载方向(度), 仅当 *Ltype* = 1, 3, 5 或 - 1, - 3, - 5 时输入,

缺省值 = 0.

#### 单元材料性质

ECHAR, *ElemStart*, *ElemEnd*, *EA*, *EI*, *m*, *Mu*, *GA*

*ElemStart*, 单元起始码;

*ElemEnd*, 单元结束码;

*EA*, 单元抗拉刚度;

*EI*, 单元抗弯刚度;

*m*, 单元的均布质量;

*Mu*, 单元的极限弯矩;

*GA*, 单元的抗剪刚度。

#### 集中质量

NMASS, *N1*, *N2*, *MassValue*

*N1*, *N2*, 起始结点码和终止结点码;

*MassValue*, 集中质量值

#### 单元温度改变

ETLOD, *ElemStart*, *ElemEnd*, *T0*, *dT*, *Talpha*, *Hight*

*ElemStart*, 单元起始码;

*ElemEnd*, 单元结束码;

$T0$ , 单元杆件中面的温度;  
 $dT$ , 单元杆件上下表面温差:  $T_1 - T_2$ ;  
 上表面为局部坐标  $\bar{y} > 0$  的一侧;  
 $\alpha$ , 线膨胀系数;  
 $Height$ , 截面的高度(仅限矩形截面)。

#### 频率计算参数

FREQ,  $Nfreq$ ,  $FreqStart$ ,  $Tol$

$Nfreq$ , 欲求的频率数目;  
 $FreqStart$ , 频率起始阶数;  
 $Tol$ , 精度误差限。

#### 屈曲荷载参数

CRIT,  $Ncrit$ ,  $Critstart$ ,  $Tol$

$Ncrit$ , 欲求的屈曲荷载数目;  
 $Critstart$ , 屈曲荷载起始阶数;  
 $Tol$ , 精度误差限。

#### 极限荷载参数

LIMIT,  $Tol$

$Tol$ , 精度误差限。

#### 影响线参数

IL,  $LoadDOF$ ,  $En$ ,  $pos$ ,  $Fdof$

$LoadDOF$ , 单位荷载的方向(整体坐标): 1 为水平、2 为竖直、3 为转角;  
 $En$ , 单元码;  
 $pos$ , 单元上的截面位置: 距杆端 1 的距离与杆长  $l$  之比;  
 $Fdof$ , 欲求影响线的内力自由度(局部坐标): 1 为轴力、2 为剪力、3 为弯矩。

#### 定制结点码

NUM,  $Nn1$ ,  $Label1$ ,  $Nn2$ ,  $Label2$ , ...

$Nn1$ ,  $Nn2$ , ... 结点编码;  
 $Label1$ ,  $Label2$ , ... 用户定制的结点名(可为字符串)。

#### 定制单元码

ENUM,  $En1$ ,  $Label1$ ,  $En2$ ,  $Label2$ , ...

$En1, En2, \dots$ , 单元编码;

$Label1, Label2, \dots$ , 用户定制的单元名(可为字符串)

#### 尺寸线

$DIM, Pos, a1, a2, italic, bold, FontSize, x1, y1, Label1, x2, y2[, Label2, x3, y3[, \dots]]$

$Pos$ , 标注位置:1 在线之上,2 在线之下;

$a1, a2$ , 上、下引线长;

$italic, bold$ , 是否斜体、粗体:1 为是,0 为否;

$FontSize$ , 字体大小(磅);

$x1, y1, x2, y2$ , 尺寸线起始和终止坐标(整体);

$Label1$ , 尺寸标注字符串。

#### 文本

$TXT, x, y, String, italic, bold, FontSize$

$x, y$ , 文本左上角的位置(整体)坐标;

$String$ , 文本字符串;

$italic, bold$ , 是否斜体、粗体,1 为是,0 为否;

$FontSize$ , 字体大小(磅)

#### 结束问题

END

结束当前问题(开始下一个问题)。

### 7. 致谢

本软件的研制得到了国家自然科学基金、国家杰出青年科学基金、“教育部面向 21 世纪力学系列课程内容体系改革的研究与实践”项目、教育部 96—750 项目、高等教育出版社以及清华大学等多方面的支持和资助,特表感谢。

## 附录 B 习题答案

### 第 2 章

- 2-1 (a) 几何不变,无多余约束。  
(b) 几何可变。  
(c) 几何不变,无多余约束。
- 2-2 (a) 几何不变,无多余约束。  
(b) 几何不变,无多余约束。  
(c) 瞬变。
- 2-3 (a) 几何不变,无多余约束。  
(b) 内部不变,无多余约束。  
(c) 几何不变,有多余约束。  
(d) 瞬变。
- 2-4 (a) 内部不变,无多余约束(如三铰共线,则为瞬变)。  
(b) 内部不变,无多余约束。  
(c) 内部不变,无多余约束。  
(d) 内部不变,无多余约束。  
(e) 瞬变。
- 2-5 (a) 几何不变,有多余约束。  
(b) 几何不变,无多余约束。  
(c) 几何不变,无多余约束。
- 2-6 (a) 几何不变,无多余约束。  
(b) 几何不变,无多余约束。  
(c) 瞬变。
- 2-7 (a) 几何不变,无多余约束。  
(b) 几何不变,无多余约束。
- 2-8 (a) 几何不变,无多余约束。  
(b) 瞬变。
- 2-9 (a) 几何不变,无多余约束。  
(b) 瞬变。  
(c) 几何不变,无多余约束。
- 2-10 (a) 几何不变,无多余约束。  
(b) 瞬变。



2-11 习题2-5至2-10中各体系的计算自由度均为  $W=0$ ,  
题2-5(a),  $W=-2$ 。

2-12 (a)  $W=-12$

(b)  $W=-3$ 。

2-13 (a) 几何不变, 无多余约束

(b) 几何不变, 无多余约束。

2-14 (a) 几何瞬变体系。

(b) 两个自由度, 几何常变体系

(c) 有一个多余约束的几何不变体系。

2-15 (a) 几何瞬变体系。

(b) 几何瞬变体系。

(c) 几何常变体系。

(d) 无多余约束的几何不变体系

2-16 无多余约束的几何不变体系。

### 第3章

3-1 (a)  $M_A = \frac{ql^2}{4}$ 。

(b)  $M_A = \frac{ql^2}{8}$ 。

(c)  $M_C = \frac{F_P l}{2}$ 。

(d)  $M_C = \frac{F_P l}{4}$ 。

(e)  $M_D = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$

(f)  $M_C = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

(g)  $M_C = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

(h)  $M_C = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

3-5 (a)  $M_B = -6.09 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $F_{QB}^1 = -11 \text{ kN}$ 。

(b)  $M_A = 4.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (下边受拉),  $M_B = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (上边受拉),  $M_C = 1.87 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (上边受拉)。

3-6  $x = \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) l = 0.1465l$ 。

3-7 (a)  $M_B = qa^2$  (里边受拉)。

(b)  $M_A = M_D = 1.125 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (里边受拉),  $M_C = 12.38 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (下边受拉)。

(c)  $M_A = M_D = \frac{5}{8} qa^2$  (外边受拉)。

3-8 (a)  $M_D = 12.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (外边受拉)。

(b)  $M_D = 3 \text{ m} \cdot F_P$  (里边受拉)

(c)  $M_D = \frac{2}{3} qa^2$  (里边受拉)。

- (d)  $M_{D_1} = 12.5 \text{ m}^2 \cdot q$  (上边受拉),  $M_{D_2} = 9.37 \text{ m}^2 \cdot q$  (外边受拉),  $F_{QD_1} = 5 \text{ m} \cdot q$ .
- 3-9 (a)  $M_{D_1} = 25.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (外面受拉).  
 (b)  $M_{D_1} = 2.32 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (里边受拉).  
 (c)  $M_{D_1} = 3.95 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (里边受拉).  
 (d)  $M_{D_1} = 0.98 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (外面受拉).
- 3-10  $M_1 = 21.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (外边受拉),  $M_2 = 14.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (外边受拉).
- 3-11  $M_1 = F_P l$  (上边受拉).
- 3-12  $F_{N_1} = qa$  (←),  $F_{H_1} = 3qa$  (←),  $F_{V_1} = qa$  (↑),  $F_{H_2} = qa$  (←),  $F_{V_2} = qa$  (↑).
- 3-13 (a)  $M_1 = 2 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $M_{2a} = 320 \text{ N} \cdot \text{m}$  (上边受拉),  $M_{2b} = 80 \text{ N} \cdot \text{m}$ .  
 (b)  $M_1 = -1.125q \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{2a} = 5q \text{ kN} \cdot \text{m}$  (上边受拉),  $M_{2b} = 0$ .  
 (c)  $M_{2a} = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (左边受拉),  $M_{2b} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (后边受拉),  $M_{2c} = 0$ .  
 (d)  $M_{2a} = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (左边受拉),  $M_{2b} = 2.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (后边受拉),  $M_{2c} = 0$ .
- 3-17 (a) 不变.  
 (b) 可变.  
 (c) 不变.  
 (d) 不变.  
 (e) 不变.  
 (f) 可变.
- 3-18 (a)  $F_{NAB} = -4 \text{ kN}$ .  
 (b)  $F_{N_1} = 0.25F_P$  (←),  $F_{N_2} = 1.35F_P$ .  
 (c)  $F_{N_1} = -F_P$ ,  $F_{N_2} = \sqrt{2}F_P$ .  
 (d)  $F_{N_1} = -F_{P2}$ ,  $F_{N_2} = F_{P1}$ .
- 3-19 (a)  $F_{N_1} = 0.25F_P$ ,  $F_{N_2} = 2.67F_P$ ,  $F_{N_3} = 0.417F_P$ .  
 (b)  $F_{N_1} = 52.5 \text{ kN}$ ,  $F_{N_2} = 18 \text{ kN}$ ,  $F_{N_3} = 18 \text{ kN}$ .  
 (c)  $F_{N_1} = 0$ ,  $F_{N_2} = \frac{F_P}{3}$ ,  $F_{N_3} = \frac{F_P}{3}$ ,  $F_{N_4} = \frac{\sqrt{2}}{3}F_P$ .  
 (d)  $F_{N_1} = 11.17 \text{ kN}$ ,  $F_{N_2} = 10.37 \text{ kN}$ ,  $F_{N_3} = 7.33 \text{ kN}$ .  
 (e)  $F_{N_1} = -8.0 \text{ kN}$ ,  $F_{N_2} = 1.94 \text{ kN}$ ,  $F_{N_3} = 11.0 \text{ kN}$ ,  $F_{N_4} = 1 \text{ kN}$ .  
 (f)  $F_{N_1} = 2.83 \text{ kN}$ ,  $F_{N_2} = 3.3 \text{ kN}$ ,  $F_{N_3} = 1.21 \text{ kN}$ ,  $F_{N_4} = 5 \text{ kN}$ .
- 3-20 (a)  $M_1 = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (上拉),  $F_{QDE} = 4 \text{ kN}$ .  
 (b)  $F_{NDE} = 12 \text{ kN}$ ,  $F_{QDE} = 3 \text{ kN}$ .
- 3-21  $F_{N_1} = 0$ ,  $F_{N_2} = 30 \text{ kN}$ ,  $F_{N_3} = 0$ ,  $F_{N_4} = 28.84 \text{ kN}$ .
- 3-22 (a)  $F_{NCD} = 2.83 \text{ kN}$ ,  $F_{N_1} = 1.12 \text{ kN}$ .  
 (b)  $F_{NBD} = \sqrt{2}F_P$ ,  $F_{NDE} = \frac{5}{6}F_P$ .  
 (c)  $F_{N_1} = F_{N_2} = 1.33F_P$ .
- 3-23 (1)  $F_{N_1} = \frac{3}{4}F_P$ ,  $F_{N_2} = \frac{1}{4}F_P$ ,  $F_H = \frac{F_P}{2}$ .

$$(2) M_F = -0.5 \text{ m} \cdot F_P。$$

$$(3) F_{\text{QD}}^L = -0.78 F_P, F_{\text{QD}}^R = 0.45 F_P。$$

$$3-24 \quad F_{\text{N1}} = 9.82 \text{ kN}, M_D = -1.96 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{外边受拉}), F_{\text{QD}(1\text{m})} = 3.73 \text{ kN}, \\ F_{\text{ND}(1\text{m})} = -11.59 \text{ kN}。$$

$$3-25 \quad (1) F_{\text{VA}} = 9.5 \text{ kN}, F_{\text{VB}} = 10.5 \text{ kN}, F_H = 11.25 \text{ kN}。$$

$$(2) M_D = -15 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{上拉}), M_E = -3 \text{ kN} \cdot \text{m} (\text{上拉})。$$

$$3-26 \quad (1) F_{\text{VA}}, F_{\text{VB}} \text{ 不变}, F_H \text{ 减小一倍}, M \text{ 不变}。$$

$$(2) \text{反力不变, 拱高和跨度增大一倍}, M \text{ 也增大一倍}。$$

$$3-28 \quad F_H = \frac{fq}{ch \cdot a} - 1 \left( a = \frac{ql}{2F_H} \right)。$$

$$3-29 \quad \text{杆(3)的单杆截面: 切断(2)、(3)、(8)和右端的支承。杆(8)的单杆截面有两个: 第一个, 切断杆(2)、(3)、(8)和左端支座; 第二个: 切断杆(1)、(3)、(5)、(8)不切断支座。}$$

$$3-30 \quad \text{杆(9)的单杆截面有两个: 第一个, 切断杆(2)、(5)、(8)、(9)和左端支座; 第二个, 切断杆(1)、(2)、(4)、(5)、(9), 不必切断支座。}$$

$$3-31 \quad \text{切断杆件(1)至(12)。}$$

$$3-32 \quad \text{第5个结点水平移动到 } x=0.5 \text{ 位置。}$$

$$3-33 \quad \text{杆件(6)左端: 弯矩为 } -1.0 (\text{下边受拉}), \text{剪力为 } -0.5, \text{轴力为 } -1.0 (\text{受压})。$$

$$3-34 \quad -120 (\text{上边受拉})。$$

## 第 4 章

$$4-1 \quad (a) \text{ 不变}。$$

$$(b) \text{ 不变}。$$

$$(c) \text{ 不变}。$$

$$(d) \text{ 可变}。$$

$$4-2 \quad F_{\text{Na}} = -\frac{F_P}{2}$$

$$F_{\text{Nb}} = \frac{\sqrt{2}}{4} F_P$$

$$4-4 \quad (a) F_{\text{RC}} = 16.25 \text{ kN} (\uparrow), F_{\text{RB}} = 5 \text{ kN} (\uparrow), M_B = 17.5 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ M_C = -5 \text{ kN} \cdot \text{m}。$$

$$(b) F_H = \frac{3}{2} F_P, F_V = \frac{F_P}{2}, F_{\text{N}} = \frac{\sqrt{10}}{2} F_P。$$

$$(c) F_{\text{RL}} = 0.72 ql, M_{\text{BC}} = 0.72 ql^2 (\text{下边受拉}), M_{\text{BA}} = 0.7 ql^2 (\text{右边受拉})。$$

$$(d) F_{\text{N1}} = -2 F_P, F_{\text{N2}} = \frac{1}{2} F_P, F_{\text{N3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F_P。$$

$$4-5 \quad \text{杆件(2)左端点: 弯矩为 } -0.5 (\text{上边受拉}), \text{剪力为 } 0.5, \text{轴力为 } -2.0 (\text{受压})。$$

$$4-6 \quad \text{杆件(1)左端: 弯矩为 } -24 (\text{上边受拉}), \text{剪力为 } 6, \text{轴力为 } 。$$

$$4-7 \quad \text{杆件(1)左端: 弯矩为 } -120 (\text{上边受拉}), \text{剪力为 } 20, \text{轴力为 } -13.33 (\text{受压})。$$

$$4-8 \quad a_0 = 1.8 \text{ 时, 该结构为几何可变(瞬变)体系}。$$

## 第 5 章

5-1 (a)  $F_{\text{A}} = 1, M_{\text{A}} = -x,$

$$M_{\text{C}} = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ -(x-a) & (a \leq x \leq l), \end{cases}$$

$$F_{\text{QC}} = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ 1 & (a \leq x \leq l). \end{cases}$$

(b)  $\bar{F}_{\text{A}} = \bar{F}_{\text{A}}^0, \bar{M}_{\text{C}} = \bar{M}_{\text{C}}^0, F_{\text{Q}} = F_{\text{QC}}^0 \cos \alpha, F_{\text{A}} = \bar{F}_{\text{QC}}^0 \sin \alpha,$

其中上标加“0”者为平梁有关量的影响线。

5-2  $R_{\text{A}} = 1$  (A 点的值),  $F_{\text{RA}} = 0$  (B 点以右的值),  $F_{\text{RC}} = \frac{l+c}{l}$  (B 点的值),  $\bar{F}_{\text{RH}} = \frac{c}{l}$  (B 点的值),  $F_{\text{QB}} = -1$  (B<sub>左</sub> 点的值),  $F_{\text{QH}} = 0$  (B 点以右的值),  $M_{\text{F}} = \frac{ab}{l}$  (E 点的值),  $\bar{M}_{\text{F}} = -\frac{ce}{l}$  (B 点的值),  $F_{\text{QF}} = -\frac{a}{l}$  (E<sub>左</sub> 点的值),  $F_{\text{QF}} = \frac{c}{l}$  (B 点的值)。

5-3  $F_{\text{A}} = 1$  (BC 段),  $\bar{M}_{\text{A}} = -l$  (C 点的值),  $\bar{M}_{\text{K}} = -a$  (C 点的值),  $F_{\text{QA}} = 1$  (C<sup>R</sup> 点的值)。

5-4  $M_{\text{E}} = 0.667 \text{ m}$  (C 点的值),  $F_{\text{QB}}^{\text{L}} = 0.667$  (C 点的值),  $F_{\text{QH}}^{\text{R}} = 1$  (C 点的值)。

5-5 (a)  $M_{\text{C}} = \frac{2}{3} \text{ m}$  (D 点值),  $F_{\text{QC}} = \frac{2}{3}$  (D 点值)。

(b)  $F_{\text{RA}} = -\frac{1}{l}, F_{\text{RB}} = \frac{1}{l}, F_{\text{QC}} = -\frac{1}{l},$

$$M_{\text{A}} = \begin{cases} \frac{b}{l} \text{ (AC 段)} \\ \frac{a}{l} \text{ (CB 段)}. \end{cases}$$

(c)  $F_{\text{A}} = 1, \bar{F}_{\text{QA}} = -\frac{\tan \alpha}{l} x, \bar{M}_{\text{C}} = \frac{ab}{l} \tan \alpha$  (C 点的值),  $\bar{F}_{\text{QC}} = \frac{a}{l} \sin \alpha$  (C<sup>R</sup> 点的值)。

5-7  $\bar{F}_{\text{RA}} = -\frac{1}{4}$  (I<sub>H</sub> 点),  $\bar{F}_{\text{RC}} = \frac{5}{4}$  (I 点),  $F_{\text{QB}}^{\text{L}} = -\frac{1}{4}$  (H 点),  $F_{\text{QH}}^{\text{R}} = 1$  (H 点),

$\bar{M}_{\text{F}} = -\frac{1}{2} \text{ m}$  (H 点),  $F_{\text{QF}} = -\frac{1}{4}$  (H 点),  $\bar{M}_{\text{G}} = \frac{1}{2} \text{ m}$  (G 点),  $\bar{F}_{\text{QG}} = \frac{1}{2}$  (G 点右边)

5-8  $F_{\text{RA}} = -1, F_{\text{RB}} = 2, M_{\text{A}} = 2 \text{ m}$  (均为 F 点值)。

5-9 上承荷载:  $\bar{F}_{\text{A}} = -2$  (C 点),  $\bar{F}_{\text{A}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$  (D 点),  $F_{\text{A}} = \frac{12}{5}$  (C 点),

(\*) 本章有关答案中符号上面加一横线者, 表示其相应的影响系数值。

下承荷载:  $F_{N1} = \frac{5}{2}$  (I点),  $F_{N2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (I点),  $F_{N3} = \frac{9}{5}$  (H点),

5-10  $F_{N1} = \frac{3}{2}$ ,  $F_{N2} = 1$ ,  $F_{N3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $F_{N4} = \sqrt{2}$  (均为C点值),

5-11  $F_{N1} = 2.7$  (C点),  $F_{N2} = 2.5$  (C点),  $F_{QD1} = -2.5$  (C点),  $M_D = -1.5$  m (C点),  $F_{QD}^L = 0.25$  (D<sup>L</sup>),  $F_{QD}^R = 0.75$  (D<sup>R</sup>),

5-12  $M_D = -2.08$  m,  $F_{QD1} = -0.462$ ,  $F_{QD2} = 0.329$  (均为C点值)

5-13  $M_C = \frac{h}{2}$ ,  $F_{QC} = \frac{h}{l}$  (均为D点值)。

5-15  $F_{RA} = 5$  kN,  $F_{RH} = 55$  kN,  $F_{QH} = -5$  kN,  $M_C = 0$ 。

5-16  $Z_{\max} = 1.555$  kN

5-17  $M_{C_{\max}} = 314$  kN·m,  $F_{QC_{\max}} = 104.5$  kN,  $F_{QC_{\min}} = -27.3$  kN,

5-18  $F_{RH_{\max}} = 237$  kN,

5-19  $M_{\max} = 891$  kN·m,

5-20 绝对最大弯矩 355.6 kN·m, 跨中截面最大弯矩 350 kN·m

5-21 上承荷载: 杆 2-8 = 1.666 67 (结点 9), 下承荷载: 杆 2-8 = 1.666 67 (结点 2);

上承荷载: 杆 2-9 = -1 (结点 9), 下承荷载: 杆 2-9 = -1 (结点 4);

上承荷载: 杆 3-8 = 1.898 67 (结点 10), 下承荷载: 杆 3-8 = 1.898 67 (结点 3);

杆 1-2 的影响线为零;

上承荷载: 杆 8-9 = -1.777 78 (结点 10), 下承荷载: 杆 8-9 = 1.777 78 (结点 3)。

5-22 参见原例。

5-23 将支座用杆件单元代替: 如链杆支承可用一个刚性(刚度给一个大数)链杆代替; 固定支座可用一个刚性杆件(长度可随意)代替, 然后求刚性杆端的内力影响线。

## 第 6 章

6-1 (a)  $\Delta = 1$  cm(←),

(b)  $\Delta = 0.25$  cm(←),

(c)  $\Delta = 0.25$  cm(→)。

6-2  $\Delta_V = \Delta_V - 3a\Delta_\varphi$  (↓),  $\Delta_H = \Delta_H + a\Delta_\varphi$  (→),  $\theta = \Delta_\varphi$  (↘)。

6-3  $\Delta_1 = \frac{l}{4f}$  (↓),  $\Delta_2 = \frac{1}{2}$  (→),  $\Delta_3 = \frac{1}{f}$  (↘)。

6-4  $\Delta = \frac{l\lambda}{4f}$  (↑)。

6-5  $\Delta = 4\epsilon_1 a$  (→)。

6-6  $\Delta = 1.1$  mm(↓)。

6-7 (a)  $\Delta_1 = \frac{ql^2}{8EI}$  (↓),  $\theta_1 = \frac{ql^3}{6EI}$  (↘)。

(b)  $\Delta_A = \frac{5F_P l^3}{48EI}$  (↓),  $\theta_A = \frac{F_P l^2}{8EI}$  (↘)。

$$6-8 \quad (a) \Delta = \frac{5ql^4}{384EI} (\downarrow),$$

$$(b) \Delta = \frac{1}{48} \frac{F_P l^3}{EI} (\uparrow).$$

$$6-9 \quad \Delta_M = \frac{5ql^4}{384EI}, \Delta_Q = \frac{ql^2 h^2}{30EI}; \text{当 } \frac{h}{l} = \frac{1}{10} \text{ 时, } \frac{\Delta_Q}{\Delta_M} = 2.56\%.$$

$$6-10 \quad \Delta_C = 6.828 \frac{F_P d}{EA} (\downarrow).$$

$$6-11 \quad \Delta_C = 3.828 \frac{F_P a}{EA} (\rightarrow).$$

$$6-12 \quad \Delta_C = 23.6 \frac{F_P a}{EA} (\rightarrow).$$

$$6-13 \quad \Delta_A = \frac{\pi}{4} \frac{F_P R^3}{EI} (\uparrow), \Delta_H = \frac{1}{2} \frac{F_P R^3}{EI} (\rightarrow).$$

$$6-14 \quad \Delta_R = \frac{qfl^3}{15EI} (\rightarrow).$$

$$6-17 \quad f_{\max} = \frac{23}{648} \frac{F_P l^3}{EI} (\downarrow).$$

$$6-18 \quad \Delta_C = 1.58 \text{ cm} (\downarrow), \Delta_F = 2.06 \text{ cm} (\downarrow).$$

$$6-19 \quad \Delta_C = 0.32 \text{ cm} (\downarrow).$$

$$6-20 \quad \Delta_C = 1.00 \text{ cm} (\downarrow).$$

$$6-21 \quad \Delta_H = \frac{F_P(l^3 - a^3)}{3EI_1} + \frac{F_P a^3}{3EI_2} (\uparrow).$$

$$6-22 \quad \Delta_A = \frac{112}{EI} q (\uparrow), \Delta_D = \frac{53.67}{EI} q (\downarrow).$$

$$6-23 \quad \Delta_E = \frac{243}{EI} q (\rightarrow), \theta_H = \frac{49.5}{EI} q (\searrow).$$

$$6-24 \quad \Delta_B = \frac{432}{EI_1} q (\rightarrow).$$

$$6-25 \quad (a) \Delta_H = \frac{F_P l h^2}{2EI}, \Delta_V = \frac{F_P l^2(l+3h)}{3EI}, \theta = \frac{F_P l(l+2h)}{2EI}.$$

$$(b) \Delta_H = \frac{F_P l h^2}{2EI}, \Delta_V = \frac{F_P l^2(l+3h)}{3EI} + \frac{F_P h}{EA}, \theta = \frac{F_P l(l+2h)}{2EI}.$$

$$6-26 \quad (a) \Delta = \frac{ql^3}{12EI} (\nearrow), (b) \Delta = \frac{F_P l^2}{8EI} (\nearrow).$$

$$6-27 \quad \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0.917 \frac{ql^4}{EI} (\rightarrow), \Delta_3 = 1.17 \frac{ql^3}{EI} (\downarrow).$$

$$6-28 \quad \Delta = 9.81 \frac{F_P x^3}{EI} \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right).$$

$$6-29 \quad \Delta_C = \frac{qb}{EI} \left( \frac{b^3}{8} + \frac{a^3}{3} \right) + \frac{qb^3 a}{2GI_1} = 1.37 \text{ cm} (\downarrow).$$

$$6-30 \quad \Delta = \frac{F_P}{6EI} (a^3 + 4b^3) + \frac{F_P ab}{GI_1} \left( \frac{a}{2} + b \right).$$

6-31 D点向前 0.78 cm, 向左 0.24 cm, 向上 0.18 cm。

6-32  $\Delta_C = 180a + \frac{1080}{h}a(\uparrow)$ 。

6-33  $\vartheta = \frac{\alpha' l}{h} - \frac{Ml}{2EI}(\searrow)$ , 如  $\vartheta = 0$ , 则  $M = \frac{2\alpha' l EI}{h}$ 。

6-34  $\Delta_1 = \alpha l_0 \left( f + \frac{l^2}{4f} \right) (\uparrow)$ ,  $\Delta_2 = \frac{\alpha l_0 l}{f} (\nearrow)$ 。

6-35  $\Delta_1 = 2\alpha d (\downarrow)$ 。

6-36  $F_P = 0.3229 \times 10^{-4} (\downarrow)$ 。

6-37  $F_{IP} = 0.25 \times 10^{-8} (\leftarrow)$ ,  $F_{IP} = 0.41667 \times 10^{-8} (\downarrow)$ 。

6-38  $\beta = 2.125$ 。

## 第 7 章

7-1 (a) 2 次。

(b) 7 次。

(c) 3 次。

(d) 3 次。

(e) 4 次。

(f) 2 次。

(g) 7 次。

(h) 13 次。

7-2 (a)  $F_{PA} = \frac{5}{16} F_P$ 。

(b)  $F_{PB} = \frac{F_P 2l^3 - 3l^2 a + a^3}{2l^3 - (1-k)a^3}$ 。

(c)  $M_{BA} = \frac{1}{8} F_P l$  (上边受拉)。

7-3 (a)  $F_{IA} = F_{IB} = 6q (\leftarrow)$ 。

(b)  $F_{IC} = \frac{5}{8} F_P$ 。

(c)  $F_{IA} = 2.19m \cdot q (\rightarrow)$ 。

(d)  $M_{IA} = \frac{1}{14} qa^2$  (左边受拉)。

7-4 (a)  $M_A = 225 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (左边受拉)。

(b)  $M_C = 2.94 \text{ m} \cdot F_P$ ,  $M_D = 4.06 \text{ m} \cdot F_P$  (左边受拉)。

(c) 低跨链杆轴力为  $-0.725q$ , 高跨链杆轴力为  $-1.84m \cdot q$ 。

7-5 (a)  $F_{RB} = 1.173 F_P (\uparrow)$ 。

(b)  $F_{NKC} = 0.896 F_P$ 。

7-6  $F_{NCD} = 9.4 \text{ kN}$ 。

7-7 中间吊杆拉力 7.66 kN, 中间吊点处梁弯矩  $5 \text{ kN} \cdot \text{m}$  (上边受拉)。

7-8 (a) 各柱底部弯矩为  $-\frac{F_P h}{4}$  (左边受拉)。

(b) 角点弯矩  $\frac{qa^2}{24}$  (外面受拉)。

(c)  $M_{AB} = -\frac{1}{6}qa^2$  (上边受拉)。

(d)  $M_{FA} = 1.8F_P$  (内部受拉),  $M_{FE} = 1.2F_P$  (外部受拉),  $M_{CA} = 3F_P$  (内部受拉),  $M_{CD} = 4.2F_P$  (下部受拉)。

7-9 (a)  $M_{AB} = \frac{5}{16}ql^2$  (上边受拉)。

(b)  $M_{AB} = M_{BA} = \frac{1}{56}ql^2$  (外部受拉)。

7-10  $k = \frac{24EI}{l^3}$ ,  $\Delta_B = \frac{ql^4}{24EI}$ 。

7-11  $F_H = \frac{ql^2}{8f} \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{EI}{E_1 A_1 f^2}}$ 。

7-12

$f/l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$F_H / \left( \frac{ql^2}{8f} \right)$	0.994 4	0.977 6	0.948 0	0.895 6	0.848 0

7-13 (a)  $M_A = M_H = \frac{1}{\pi} F_P R$  (内部受拉)。

(b)  $M_A = M_B = \frac{1}{4}qR^2$  (内部受拉)。

7-14  $F_H = 0.46F_P$ ,  $M_A = M_B = 0.11F_P R$ 。

7-15 拱顶  $M = 76.65 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 拱脚  $M = -206.79 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

7-16 水平推力  $F_H = 13.05 \text{ m} \cdot q$ 。

7-19 (a)  $M_{AB} = \frac{3EI}{l} \alpha$  (下边受拉),  $y(x) = \frac{\alpha}{2l^2} (2l^2 x + 3Lx^2 - x^3)$ ,  $y_{\max} = 0.385 \alpha l$ 。

(b)  $M_{AB} = \frac{4EI}{l} \alpha$  (下边受拉),  $y(x) = \frac{\alpha}{l^2} (l^2 x - 2Lx^2 + x^3)$ ,  $y_{\max} = 0.148 \alpha l$ 。

7-20  $M_{AB} = \frac{6EI}{l^2} \epsilon$  (上边受拉)。

7-21  $M = \frac{EI \alpha}{h} t$  (外部受拉)。

7-22  $M_{AB} = \frac{3EI}{2h} \alpha (t_2 - t_1)$ ,  $y(x) = \frac{\alpha(t_2 - t_1)}{4h} \left( x^2 - \frac{x^3}{l} \right)$

7-23  $\delta_{AB} = l - \frac{11}{12} \Delta_c$ 。



7-25 51.289 kN(↑)

## 第 8 章

8-1 (a) (1) 3; (2) 6。

(b) (1) 10; (2) 10。

(c) (1) 4; (2) 9。

(d) (1) 3; (2) 2。

8-2 (a)  $M_{DH} = 4i\theta_D$ ,  $M_{DA} = 3i\theta_D + \frac{3ql^2}{16}$ ,  $M_{IX} = i\theta_D - \frac{ql^2}{3}$ ,  $8i\theta_D - \frac{7}{48}ql^2 = 0$ 。

(b)  $M_{DA} = 3 \cdot \frac{EI}{4} \theta_D + 5$ ,  $M_{DB} = EI\theta_D$ ,  $M_{IX} = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $1.75EI\theta_D - 35$

(c)  $M_{EA} = 4 \frac{E}{l} \theta_E$ ,  $M_{ED} = 24 \frac{E}{l} \theta_E$ ,  $M_{EC} = 2 \frac{E}{l} \theta_E$ ,  $M_{ED} = 0$ ,  $30 \frac{E}{l} \theta_E = M_0$ 。

(d)  $M_{AB} = 4i\theta_A + 2i\theta_B$ ,  $M_{BA} = 4i\theta_B + 2i\theta_A$ ,  $M_{DE} = i\theta_E + \frac{3ql^2}{8}$ ,  $M_{BE} = 3i\theta_E$

$\frac{3ql^2}{16}$ ,  $8i\theta_A + 2i\theta_B + \frac{ql^2}{2} = 0$ ,  $2i\theta_A + 8i\theta_B + \frac{3ql^2}{16} = 0$ 。

(e)  $M_{AD} = 4i\theta_A + 2i\theta_D$ ,  $M_{AD} = 4i\theta_A$ ,  $M_{AE} = 3i\theta_A - \frac{3ql^2}{16}$ ,  $M_{BE} = i\theta_B + \frac{ql^2}{3}$ ,

$5i\theta_A + 2i\theta_B - \frac{3ql^2}{16} = 0$ ,  $2i\theta_A + 5i\theta_B + \frac{ql^2}{3} = 0$ 。

(f)  $M_{BA} = 4i\theta_B + 2i\theta_A$ ,  $M_{BK} = 3i\theta_B - 3 \frac{1}{l} \Delta_C$ ,  $M_{CD} = 0$ ,  $7i\theta_B + 2i\theta_A - 3 \frac{1}{l} \Delta_C$

$= 0$ 。

8-3 (a) 3。

(b) 3。

(c) 3。

(d) 4。

(e) 4。

注: (d), (e) 可简化为 2 个基本未知量。

8-4  $F_{N1} = -50 \text{ kN}$ ,  $F_{N2} = -75 \text{ kN}$ ,  $F_{N3} = 100 \text{ kN}$ ,  $F_{N4} = -125 \text{ kN}$ ,  $F_{N5} = 150 \text{ kN}$ 。

8-5  $M_{AE} = -\frac{41}{280} F_P l$ ,  $M_{BC} = -\frac{11}{280} F_P l$

8-6  $M_{AE} = 27.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{BC} = -54.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{CH} = 70.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

8-7  $M_{AC} = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{CA} = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{BD} = M_{DB} = -90 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

8-8  $M_{AC} = -225 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{BD} = 135 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $F_{Q4} = 97.5 \text{ kN}$ 。

8-9  $M_{AD} = -84.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{EB} = 70.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{FD} = 35.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$

8-10  $M_{AC} = -34.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{CA} = 14.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{BD} = -20.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

8-11  $M_{AC} = -8.43 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{CD} = 2.07 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_{DC} = 3.07 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $F_{QAC} = 4.75 \text{ kN}$ ,  $F_{QCA} = -1.25 \text{ kN}$ ,  $F_{QCD} = -0.43 \text{ kN}$ ,  $F_{QDC} = 0.43 \text{ kN}$ ,  $F_{QBD} = -0.43$

$$\text{kN}, F_{\text{N},FD} = 1.25 \text{ kN},$$

$$8-12 \quad M_{AD} = \frac{1}{48}ql^2, M_{DF} = \frac{1}{24}ql^2.$$

$$8-13 \quad M_{AC} = M_{BD} = -171.4 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{CA} = M_{DB} = 128.6 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$8-14 \quad M_{AB} = 1.368\text{m}^2 \cdot q, M_{AC} = 0.6074\text{m}^2 \cdot q,$$

$$8-15 \quad M_{AB} = 59.14 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BA} = 60.86 \text{ kN}\cdot\text{m}, \\ M_{CA} = 59.14 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{DB} = 60.86 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$8-16 \quad M_{CB} = 47.37 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$8-17 \quad M_B = 93.7 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_C = 140.1 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$8-18 \quad M_{AB} = 0, M_{BA} = \frac{1}{4}ql^2, M_{BC} = -\frac{5}{12}ql^2.$$

$$8-19 \quad (a) \quad M = \frac{EI\alpha l^2}{\delta} \text{ (外部受拉)}.$$

(b) 同上。

(c) 同上。

$$8-20 \quad (a) \quad M_{AB} = 2.27 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BA} = -6.37 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$M_{BC} = 6.77 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{CB} = 1.41 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$M_{FE} = -1.08 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$(b) \quad M_{AB} = -2.23 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BA} = -1.87 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BC} = 2.27 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

## 第 9 章

9-2 (a) 否

(b) 否。

(c) 可。

(d) 可。

(e) 可。

(f) 可。

$$9-4 \quad M_{BA} = 38.2 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BC} = 48.4 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-5 \quad M_{AB} = 45.5 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{CD} = -308.3 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-6 \quad M_{CB} = 0.1005ql^2, M_{ED} = 0.0857ql^2.$$

$$9-7 \quad M_{AB} = 61.3 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-8 \quad M_{BA} = 27.3 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-9 \quad M_{BC} = 192 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-10 \quad M_{CB} = 12.78 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BA} = 15.65 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-11 \quad M_{AB} = 450 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-12 \quad M_{AB} = -3.5 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-13 \quad (a) \quad M_{BA} = -25.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(b) \quad M_{BC} = -4 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-14 \quad (a) \quad M_{BA} = -12.34 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{CB} = 20.06 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$(b) M_{BA} = 19.2 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{CB} = 16.8 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-15 \quad M_{LH} = -21.2 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{AB} = 58.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$9-16 \quad M_{AC} = -56.7 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{CD} = 45.3 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-17 \quad M_{Dn} = 46.4 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{AD} = 19.1 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-18 \quad (a) M_{BA} = 18.94 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BK} = 71.65 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BD} = 90.59 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{CF} = -107.79 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{FC} = -25.11 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(b) M_{CF} = -121.96 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{FE} = 37.15 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{EK} = 61.03 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BA} = 0.056 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{CB} = 121.96 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BD} = -61.09 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-19 \quad M_A = -\frac{x(l-x)^2}{l^2}; \text{当 } x = \frac{l}{3} \text{ 时, } M_A \text{ 达极大值 } \frac{4l}{27}$$

$$9-20 \quad F_{KF} = \frac{1}{2l^3}x(3l^2 - x^2) \text{ (AB 段)}, \bar{F}_{KF} = \frac{1}{2l^3}(2l - x)[3l^2 - (2l - x)^2] \text{ (BC 段)}, \bar{F}_{KF} = 0.6875 \text{ (D 点值)}, M_D = \frac{1}{8l^3}x(3l^2 + x^2) \text{ (AD 段)}, M_D = \frac{1}{8l^3}(l - x)(4l^2 - lx - x^2) \text{ (DB 段)}, M_D = -\frac{1}{8l^3}(x - l)(2l - x)(3l - x) \text{ (BC 段)}, M_F = 0.2031l \text{ (D 点值)}, F_{QDF} = \frac{1}{4l^3}x(5l^2 - x^2) \text{ (AD 段)}, F_{QDF} = \frac{1}{4l^3}(l - x)(4l^2 - lx - x^2) \text{ (DB 段)}, F_{QDF} = -\frac{1}{4l^3}(x - l)(2l - x)(3l - x) \text{ (BC 段)}, F_{QDF} = 0.4063 \text{ (D 右点的值)}.$$

$$9-21 \quad M_{FB} = 13.4 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_{BA} = 16.5 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$9-22 \quad M_{FK} = 1.78 \text{ m}^2 \cdot q, M_{DB} = 1.62 \text{ m}^2 \cdot q, M_{AB} = 1.5 \text{ m}^2 \cdot q, M_{AC} = 0.5 \text{ m}^2 \cdot q.$$

$$9-23 \quad (a) M_1 = 105.67 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_2 = 38.66 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

$$(b) M_1 = -107.14 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_2 = -35.71 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

由于弯矩沿梁向右逐跨迅速衰减,因此两跨的解可以很好地近似多跨的解,同时也可以大量减少计算量

$$9-24 \quad \text{最大弯矩发生在杆件(1)的上端,数值为 } 41.027 \text{ kN}\cdot\text{m}, \text{外侧受拉}.$$

## 附录 C 索引

### B

- 板壳结构 (plate and shell structures) 1
- 变形连续(协调)条件 (compatibility condition of deformation) 406
- 变形体的虚功原理 (principle of virtual work for deformable body) 270

### C

- 自由度 (degree of freedom) 19
- 常变体系 (constantly changeable system) 21
- 初参数法 (method of initial parameter) 162
- 超静定结构 (statically indeterminate structure) 315
- 超静定次数 (degree of indeterminacy) 316
- 自内力 (self-internal force) 364
- 超静定结构的位移 (displacement of statically indeterminate structure) 372
- 传递系数 (carry-over factor) 446

### D

- 动力荷载 (dynamic load) 11
- 多余约束 (redundant restraint) 20
- 代替杆法 (method of substitution of bars) 95
- 单位支座位移法 (method of unit support displacement) 165
- 单位荷载法 (unit load method) 238
- 对称结构 (symmetrical structure) 336
- 对称荷载 (symmetrical load) 337

### F

- 反对称荷载 (antisymmetrical load) 337
- 分配系数 (distribution factor) 445
- 反力互等定理 (theorem of reciprocal reactions) 290

## G

- 杆件结构(structure of bar system) 1
- 滚轴支座(roller support) 5
- 固定支座(fixed support) 6
- 公路标准荷载(highway standard load) 213
- 拱(arch) 9
- 刚架(frame) 9
- 刚臂(rigid arm) 350
- 刚度方程(stiffness equation) 395
- 刚度法(stiffness method) 396
- 刚度系数(stiffness coefficient) 399
- 固端弯矩(fixed-end moment) 401
- 固端剪力(fixed-end shear force) 401
- 广义位移(generalized displacement) 245
- 功的互等定理(theorem of reciprocal works) 288

## H

- 桁架(truss) 9
- 桁架影响线(influence line of truss) 195
- 合理拱轴线(optimal centre line of the arch) 117
- 换算荷载(equivalent load) 213
- 活载最不利分布(most unfavourable distribution of live loads) 477
- 荷载(load) 10
- 互等定理(reciprocal theorems) 287

## J

- 结构的计算简图(computing model of structure) 4
- 铰支座(hinge support) 5
- 结构(structure) 1
- 几何构造分析(geometric construction analysis) 17
- 几何不变体系(geometrically unchangeable system) 18
- 几何可変体系(geometrically changeable system) 18
- 计算自由度(computational degree of freedom) 29
- 静定结构(statically determinate structure) 55
- 静定多跨梁(statically determinate multi-span beam) 64
- 静定平面刚架(statically determinate plane frame) 69
- 静力荷载(static load) 11

静力法(static method) 188  
结点荷载(joint load) 192  
结点荷载作用下的影响线(influence line under joint load) 194  
绝对最大弯矩(absolute maximum bending moment) 220  
结点角位移(joint rotation displacement) 404  
结点线位移(joint translation displacement) 408  
结构的刚度矩阵(stiffness matrix of structure) 422  
渐近法(successive approximation method) 443  
机动法(kinematic method) 188

## K

卡氏第一定理(Castigliano's first theorem) 283  
克罗蒂-恩格塞定理(Crotti-Engesser's theorem) 285  
卡氏第二定理(Castigliano's second theorem) 286  
空间桁架(space truss) 95  
空间刚架(space frame) 79

## L

梁 (beam) 9  
力法(force method) 315  
连续梁(continuous beam) 315  
力法的基本未知量(primary unknown of force method) 318  
力法的基本结构(primary structure of force method) 319  
力法的基本体系(primary system of force method) 319  
力法的基本方程(basic equation of force method) 320  
力法典型方程(canonical equations of force method) 324  
两铰拱(two-hinged arch) 343  
带拉杆的两铰拱(two-hinged arch with tension bar) 344  
力矩分配法(method of moment distribution) 446  
零载法(method of zero load) 160

## N

内力影响线(influence line of internal force) 187  
内力包络图(envelope of internal force) 219

## R

柔度系数(flexibility coefficient) 324  
柔度矩阵(flexibility matrix) 324

## S

- 实体结构(massive structure) 1  
瞬变体系(instantaneously changeable system) 21  
瞬铰(instantaneous hinge) 21  
三铰拱(three-hinged arch) 108  
三铰拱的压力线(line of pressure in three hinged arch) 115

## T

- 铁路标准荷载(railway standard load) 212  
弹性中心(elastic centre) 352  
弹性中心法(method of elastic centre) 353  
图乘法(method of graph multiplication) 258  
通路法(method of closed loop) 162

## W

- 位移法(displacement method) 393  
位移法的基本未知量(primary unknown in displacement method) 395  
位移法的基本方程(basic equation in displacement method) 395  
温度应(内)力(temperature stress(internal force)) 368  
无铰拱(hingeless arch) 349  
无侧移刚架(rigid frame without sidesway) 404  
位移法的基本体系(primary system in displacement method) 417  
位移法的基本结构(primary structure in displacement method) 418  
位移法典型方程(canonical equations in displacement method) 422  
无剪力分配法(no shear moment distribution method) 461  
弯矩包络图(envelope for bending moment) 478  
位移互等定理(theorem of reciprocal displacements) 289  
位移反力互等定理(theorem of reciprocal displacement-reaction) 291  
位移影响线(influence line of displacement) 291  
位移(displacement) 235

## X

- 悬索(cable) 121  
虚功原理(principle of virtual work) 163  
虚力原理(principle of virtual force) 238

## Y

- 约束 (constraint, or restraint) 19  
影响线 (influence line) 87  
影响系数 (influence factor) 187  
应变能 (strain energy) 275  
应变余能 (complementary energy of strain) 275  
有侧移刚架 (rigid frame with sidesway) 408

## Z

- 组合结构 (composite structure) 9  
转角位移方程 (slope-deflection equation) 399  
转动刚度 (rotational stiffness) 443



## 主要参考书目

- 1 龙驭球,包世华主编.结构力学:上册.第二版.北京:高等教育出版社,1994
- 2 龙驭球,包世华编.结构力学教程:上册.北京:高等教育出版社,1988
- 3 杨第康,李家宝主编.结构力学:上册.第四版.北京:高等教育出版社,1998
- 4 李廉锟主编.结构力学:上册.第三版.北京:高等教育出版社,1996
- 5 Ghali A, Neville A M. Structural analysis. 3rd ed. London, New York: Chapman and Hall, 1989
- 6 雷钟和,江爱川,郝静明.结构力学解疑.北京:清华大学出版社,1996
- 7 缪加玉.结构力学的若干问题.成都:成都科技大学出版社,1993
- 8 沈世钊,徐崇宝,赵臣.悬索结构设计.北京:中国建筑工业出版社,1997



## 主编简介

**龙驭球** 清华大学土木工程系教授、中国工程院院士。1926年生,湖南安化人。1948年毕业于清华大学。曾任中国土木工程学会第四届理事。现任国家教育部高等学校工科力学课程教学指导委员会主任委员兼国家教育部高等学校工科结构力学课程教学指导组组长,中国力学学会“工程力学”学报主编,国际杂志“Advances in Structural Engineering”国际编委。

从事结构力学、有限元、能量原理、薄壳结构的教学科研工作。发表学术论文170多篇。出版《结构力学》、《结构力学教程》、《壳体结构概论》、《有限元法概论》、《新型有限元引论》、《有限元·变分原理·壳体分析》等教材和专著20本。参加制订《薄壳结构设计规程》。在科研方面,首创广义协调元、分区混合元、新型厚板厚壳元、四边形面积坐标理论、分区能量原理、含可选参数能量原理等六项成果。

1988年、1992年、1996年分别获第一、第二、第三届全国优秀教材奖,1993年获高等学校优秀教学成果国家级二等奖,1986年、1992年分别获国家教委科学技术进步一、二等奖,1998年度获教育部科学技术进步奖一等奖,1999年度获国家科学技术进步奖二等奖。



## 主 编 简 介

**包世华** 清华大学土木工程系教授,中国力学学会、《工程力学》常务编委,中国建筑学会高层建筑结构学组成员 1985~1986年为美国伊里诺大学土木工程系访问学者,1991~1993年为香港理工大学土木与结构系研究员 长期从事结构力学、弹性力学、能量原理及有限元、板壳结构、薄壁杆结构和高层建筑结构等领域的教学和研究工作

出版教材和专著 18 本 教材有《高层建筑结构设计》、《结构力学》、《结构力学教程》等,分别于 1987 年获建设部优秀教材二等奖,1988 年、1992 年获国家教委国家优秀教材奖,1998 年度获教育部科学技术进步奖一等奖,1999 年度获国家科学技术进步奖二等奖 专著有《薄壁杆件结构力学》、《高层建筑结构计算》等

在国内外发表学术论文 110 多篇 壳体研究成果被收入国家行业标准《钢筋混凝土薄壳结构设计规程》 提出和创建了高层建筑结构解析和半解析常微分方程求解器解法系列 1983 年获北京市科委技术成果奖,1986 年、1992 年、1994 年分别获国家教委科学技术进步奖一、二、三等奖



## 编 者 简 介

**匡文起** 清华大学土木工程系教授 历任清华大学结构力学教研组主任、清华大学结构工程研究所结构力学研究室主任、国家教委高等学校工科力学课程教学指导委员会委员 从事结构力学、弹性力学和有限元法的教学和科研工作 主要研究工作有：“分区混合有限元法计算应力强度因子”、“正交异性钢桥面板的几何非线性分析”、“电视塔壳体组合结构分析中的拟弹性地基梁法”、“预应力混凝土水压机的温度场和温度应力”等

出版教材与专著六种、研制并出版软件两种,发表学术论文 40 余篇

1986 年获国家教委科技进步二等奖,1988 年获国家级优秀教材奖,1989 年获北京市高教局优秀教学成果奖,1992 年获国家教委科技进步一等奖,1995 年获国家教委优秀教材二等奖,1998 年度获教育部科学技术进步一等奖 1999 年度获国家科学技术进步奖二等奖



## 编者简介

**袁 驷** 分别于1981年和1984年获清华大学土木系硕士和博士学位。曾先后在美国、英国作博士后和访问教授。现为清华大学土木工程系系主任、教授、博士生导师；兼《力学学报》编委、《工程力学》副主编、中国力学学会计算力学专业委员会副主任、中国力学学会结构工程专业委员会秘书长、国家教育部高等学校工科力学课程教学指导委员会委员兼秘书、海淀区人民代表大会代表等职。

先后获国家教委科技进步一、二、三等奖(第二完成人)各一项,1991年获“作出突出贡献的中国博士”称号,1995年获国家杰出青年科学基金(1998年获延续资助),1995年获宝钢教育奖优秀教师特等奖(第一名),1996年首批入选“国家百、千、万人才工程”第一、二层人选,1997年获北京市优秀教师等奖励。2000年被聘为国家教育部特聘教授。

目前主持国家杰出青年基金、教育部博士点基金、教育部96-750国家“九五”科技攻关(两项)等国家级科研项目。

1989年创立了有限元线法,并对其作了系统的开发与发展。1993年出版了独著的国内外首部有关该法的英文专著《The Finite Element Method of Lines》。发表学术论文90余篇。