



全新升级版

全国十二大考研辅导机构指定用书

2013 李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题 权威解析

数学
一

SHUXUE LINIAN ZHENTI QUANWEI JIEXI (SHUXUEYI)

主 编 李永乐 王式安

编 委 “高数”：武忠祥 刘喜波
“线代”：李永乐 “概率论”：王式安

权威名师与命题专家联手打造 考试知识复习与能力培养并重
多角度讲解试题开拓解题思路 分析解答透彻易懂更有针对性
详尽地归纳总结典型解题方法 综合提高运用知识的分析能力



海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团



直接点击进入：

[大家网考研论坛，精品资源，精彩学术探讨，欢迎考研考生的光临](#)

[考研政治复习资料大全&考研政治备考指导 !!!](#)

[考研英语精华资料大全](#)

[考研英语备考战略指导：提纲挈领式的方法+资料推荐，让你备考少走弯路！](#)

[考研数学精华资料大全：教材+真题+辅导班视频及讲义~~~！](#)



全国十二大考研辅导机构指定用书

2013 李永乐·王式安考研数学系列

数学历年真题 权威解析

数学一

SHUXUE LINIAN ZHENTI QUANWEI JIEXI (SHUXUEYI)

主 编 李永乐 王式安

编 委 “高数”：武忠祥 刘喜波
“线代”：李永乐 “概率论”：王式安



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析. 数学. 1/李永乐,王式安主编. —北京:
海豚出版社,2011.12

ISBN 978-7-5110-0701-8

I. ①数… II. ①李… ②王… III. ①概率论—研究生—入学
考试—自学参考资料 ②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 256624 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识,凡有防伪标识
的为正版图书,请读者注意识别。

书 名:数学历年真题权威解析(数学一)
主 编:李永乐 王式安
责任编辑:董锋 徐婵媛
出 版:海豚出版社
网 址:<http://www.dolphin-books.com.cn>
地 址:北京市百万庄大街 24 号
邮 编:100037
电 话:010-68997480(销售)
010-68998879(总编室)
传 真:010-68994018
印 刷:保定市中国画美凯印刷有限公司
开 本:787mm×1092mm 1/16
印 张:19
字 数:300 千字
版 次:2012 年 3 月第 1 版
印 次:2012 年 3 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 978-7-5110-0701-8
定 价:38.00 元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换

电话:(010)51906740

版权所有 侵权必究

前言

从真题中你能够了解一个真实的考研数学, 寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶, 题目经典, 又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内, 准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律, 全面提高解题能力, 进而更好地驾驭考试, 本书编写团队依据 15 年的命题与阅卷经验, 并结合近 10 年的考研辅导和研究精华, 精心编写了本书, 真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

历年来, 研究生入学考试数学各学科知识点没有太大变化, 而且各学科考查的重难点比较稳定, 都是往年考试反复考查的内容, 依据往年考题把握了这些重难点, 我们就等于成功了一半。练真题, 反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题, 如何与没有考过的知识点结合起来考查, 进而复习没有考过的知识点, 这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了, 也因此, 真题能够最有效的暴露我们的不足和复习误区, 提供更有效的复习思路和策略, 甚至可以说, 真题就是最好的“辅导老师”, 它告诉我们考试会考什么, 怎么考, 反过来又指导我们思考如何应对, 也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学, 经过命题人的反复推敲, 是市面上的练习题所无法比拟的, 市面上的练习题, 难易适中, 命制科学, 贴近考试要求的很少, 做真题, 反复揣摩, 这能节省我们宝贵的复习时间, 达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题, 在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书将真题按考点所属内容分类并进行解析, 各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点, 从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此章的历年考试出题规律, 分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类, 总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误, 给出相应的注意事项, 对每一道真题都给出解题思路的分析, 以便考生真正的理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题, 只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识, 提高实际解题能力, 本书作者精心选取历年真题其他卷别的试题作为练习题, 供考生练习, 以

便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,达到轻松解答真题的水平。同时,练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生遇到解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中,时刻想到将各个方面的知识融会贯通,做好知识的串联和总结,从而检验自己对问题的把握程度,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想分数。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在网络上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。详情见“金榜教育网”首页(www.jinbangjiaoyu.com)。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2012年3月

◆ 目 录 ◆

第一篇

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)	(1)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)参考答案	(5)

第二篇

2011 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(12)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(15)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(18)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(22)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(25)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(28)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试试题	(31)

第三篇

第一部分 高等数学	(34)
第一章 函数 极限 连续	(34)
第二章 一元函数微分学	(47)
第三章 一元函数积分学	(63)
第四章 向量代数和空间解析几何	(77)
第五章 多元函数的微分学	(79)
第六章 重积分	(88)

第七章	曲线、曲面积分	(97)
第八章	无穷级数	(110)
第九章	常微分方程	(120)
第二部分	线性代数	(175)
第一章	行列式	(175)
第二章	矩阵	(179)
第三章	向量	(188)
第四章	线性方程组	(195)
第五章	特征值与特征向量	(205)
第六章	二次型	(212)
第三部分	概率论与数理统计	(251)
第一章	随机事件和概率	(251)
第二章	随机变量及其分布	(254)
第三章	多维随机变量及其分布	(256)
第四章	随机变量的数字特征	(268)
第五章	大数定律和中心极限定理	(274)
第六章	数理统计的基本概念	(275)
第七章	参数估计	(277)
第八章	假设检验	(283)

◆ 第一篇 ◆

绝密 ★ 启用前

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^nn!$.

(3) 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在.

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$, 则有

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$.
(C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量

组线性相关的为

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$. 则 $Q^{-1}AQ =$

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\}$

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$.

(8) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ _____.

(10) $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx =$ _____.

(11) $\text{grad}(xy + \frac{z}{y}) \Big|_{(2,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设 α 为 3 维单位列向量, E 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则

$P(AB \mid \bar{C}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1).$

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t, \end{cases} \quad (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0$,

$f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(I) 计算行列式 $|A|$,

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解.

(21) (本题满分 11 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x$ 的秩为 2.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 f 化为标准形.

(22) (本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$\begin{array}{c} Y \\ \diagdown \\ X \end{array}$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X = 2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

(I) 求 Z 的概率 $f(z; \sigma^2)$;

(II) 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一) 参考答案**一、选择题****(1)【答案】** (C).**【分析】** 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ 得 $y = 1$ 是曲线的一条渐近线且曲线没有斜渐近线由 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$ 得 $x = 1$ 是曲线的一条渐近线由 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ 得 $x = -1$ 不是曲线的渐近线

所以曲线有两条渐近线, 故应选(C).

(2)【答案】 (A).

【分析】 由 $f(0) = 0$ 得 $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(e^{\Delta x} - 1)(e^{2\Delta x} - 2) \cdots (e^{n\Delta x} - n)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (e^{2\Delta x} - 2) \cdots (e^{n\Delta x} - n) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

故应选(A).

(3)【答案】 (B).**【分析】** 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$,又由 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 可知 $f(0, 0) = 0$.
$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x^2 + 0^2} \cdot x = 0, \text{ 类似 } f'_y(0, 0) = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - [f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 0. \end{aligned}$$

由微分定义知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 故应选(B).**【评注】** 1. 本题主要考查二元函数连续、偏导数、可微的定义.2. 可采用举反例排除错误答案, 取 $f(x, y) = |x| + |y|$ 排除(A), $f(x, y) = x + y$ 排除(C)、(D).**(4)【答案】** (D).**【分析】** $I_1 = \int_0^\pi e^{x^2} \sin x dx$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^\pi e^{x^2} \sin x dx + \int_\pi^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_1 + \int_\pi^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx$$

因为在 $[\pi, 2\pi)$ 上 $e^{x^2} \sin x < 0$, 所以 $\int_\pi^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < 0$ 所以 $I_2 < I_1$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_2 + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx$$

因在 $(2\pi, 3\pi)$ 上 $e^{x^2} \sin x > 0$ 所以 $I_2 < I_3$ 又因为 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx > 0$ 所以 $I_3 > I_1$, 所以 $I_2 < I_1 < I_3$ 故应选(D).

(5)【答案】 (C)

【分析】 n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$

$$\text{显然} \quad |\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 必线性相关.

(6)【答案】 (B)

【分析】 本题考查初等矩阵, 由于 P 经列变换(把第 2 列加至第 1 列)为 Q , 有 $Q =$

$$P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PE_{21}(1)$$

那么 $Q^{-1}AQ = [PE_{21}(1)]^{-1}A[PE_{21}(1)]$

$$= E_{21}^{-1}(1)P^{-1}APE_{21}(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

(7)【答案】 (A).

【分析】 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

则 $P\{X < Y\} = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^y e^{-x-4y} dx = \int_0^{+\infty} e^{-5y} dy = \frac{1}{5}$, 所以应选(A).

(8)【答案】 (D).

【分析】 令两段的长度分别为 X, Y 显然 $X + Y = 1$, 即 $Y = -X + 1$, 所以两者是线性关系, 是负相关, 所以相关系数为 -1 , 所以应选(D).

二、填空题

(9)【答案】 e^x .

【分析】 齐次线性微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为: $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根为: $r_1 = 1, r_2 = -2$, 因此齐次微分方程的通解为: $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

于是 $f'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}, f''(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}$,

代入 $f''(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 从而 $C_1 = 1, C_2 = 0$,

故 $f(x) = e^x$. 应填 e^x .

(10)【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【分析】 令 $t = x - 1$ 得 $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx = \int_{-1}^1 1(t+1) \sqrt{1-t^2} dt$

$$= \int_{-1}^1 1t \sqrt{1-t^2} dt + \int_{-1}^1 1 \sqrt{1-t^2} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(11)【答案】 (1, 1, 1).

【分析】 根据梯度定义 $\text{grad}f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, 于是

$$\text{grad}(xy + \frac{z}{y}) \Big|_{(2, 1, 1)} = (y, x - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y}) \Big|_{(2, 1, 1)} = (1, 1, 1). \text{ 故应填}(1, 1, 1).$$

(12)【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

【分析】 由第一类曲面积分的计算公式得 ($z = 1 - x - y$)

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} y^2 ds &= \iint_{D_{xy}} y^2 \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy \\ &= \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{12}, \end{aligned}$$

其中平面区域 $D_{xy}: x + y < 1, x \geq 0, y \geq 0$.

(13)【答案】 2

【分析】 设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T \alpha = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, 又

$$A = \alpha \alpha^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [a_1, a_2, a_3] = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

由于秩 $r(A) = 1$. 那么

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \lambda^2 = \lambda^3 - \lambda^2$$

所以, 矩阵 A 的特征值为 $1, 0, 0$.

从而 $E - A$ 的特征值为 $0, 1, 1$.

又 $E - A$ 为对称矩阵, 故 $E - A \sim \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

因此 $r(E - \alpha \alpha^T) = 2$.

(14)【答案】 $\frac{3}{4}$

【分析】 $P(AB | \bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}$, $P(\bar{C}) = 1$, $P(C) = \frac{2}{3}$ $P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC)$

因为 A 与 C 互不相容, 即 $AC = \emptyset$, 即 $P(AC) = 0$, 又 $ABC \subset AC$, 所以 $P(ABC) = 0$, 代入原式得 $P(AB\bar{C}) = \frac{1}{2}$, 故 $P(AB | \bar{C}) = \frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)【证】 记 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - \frac{x^2}{2} - 1$, 则

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x,$$

$$f''(x) = \frac{4}{(1-x^2)^2} - 1 - \cos x.$$

当 $-1 < x < 1$ 时, 由于 $\frac{4}{(1-x^2)^2} \geq 4$, $1 + \cos x \leq 2$, 所以 $f''(x) \geq 2 > 0$, 从而 $f'(x)$ 单调增加.

又因为 $f'(0) = 0$, 所以, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$, 于是 $f(0) = 0$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内的最小值.

从而当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, 即

$$x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

(16)【分析】 此题为常规题型, 只需用二元函数取得极值的充分条件即可.

【详解】 令 $f'_x(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$,
 $f'_y(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$.

解得函数驻点, 即可能极值点为 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$.

$$f''_{xx}(x, y) = -2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (1-x^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-x) = (x^2-3)xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

易得 $f''_{xy}(x, y) = (x^2-1)y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$

$$f''_{yy}(x, y) = -x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - xy \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-y) = (y^2-1)xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

(1) 在驻点 $(1, 0)$,

$$A = f''_{xx}(1, 0) = -2e^{-\frac{1}{2}}, B = f''_{xy}(1, 0) = 0, C = f''_{yy}(1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}.$$

由 $B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 且 $A < 0$, 知 $(1, 0)$ 为极大值点, 极大值 $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$.

(2) 在驻点为 $(-1, 0)$, $A = f''_{xx}(-1, 0) = 2e^{-\frac{1}{2}}, B = f''_{xy}(-1, 0) = 0,$

$C = f''_{yy}(-1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$. 由 $B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 且 $A > 0$, 知 $(-1, 0)$ 为极小值点, 极小值 $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$.

(17)【分析】 由此幂级数的构成知, 其和函数可以通过几何级数求导和求积分得到, 因此可以先求和函数, 再由幂级数的性质得收敛半径, 然后讨论端点的处的收敛性, 得幂级数的收敛域.

【详解】
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2+2}{2n+1} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n},$$

因为
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}, \quad -1 < x < 1,$$

当 $x \neq 0$ 时,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

因为 $x = 0$ 时,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = 2, \text{ 所以}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} = +\infty \neq 0$ 知级数发散.

当 $x = 0$ 时,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n} = 3,$$

因此, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域为 $-1 < x < 1$,

$$\text{和函数 } S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

(18)【分析】 先求切线方程, 然后根据两点间的距离恒为 1 得到微分方程.

【详解】 (1) 由参数方程的求导公式有: $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{f'(t)}$, 于是 L 上任意一点

$(x, y) = (f(t), \cos t)$ 处的切线方程为

$$Y - \cos t = -\frac{\sin t}{f'(t)}[X - f(t)].$$

令 $Y = 0$, 得此切线与 x 轴的交点为 $(\cot t f'(t) + f(t), 0)$.

由 $(\cot t f'(t) + f(t), 0)$ 到切点 $(f(t), \cos t)$ 的距离恒为 1, 有

$$(\cot t f'(t) + f(t) - f(t))^2 + (0 - \cos t)^2 = 1,$$

解得 $f'(t) = \pm \frac{\sin^2 t}{\cos t}$. 由 $f'(t) > 0$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$), 且 $f(0) = 0$ 知 $f(t) > 0$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$).

所以 $f'(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$, ($0 \leq t < \frac{\pi}{2}$).

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(t) &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \int (\sec t - \cos t) dt \\ &= \ln(\sec t + \tan t) - \sin t + C. \end{aligned}$$

由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故

$$f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t.$$

(2) 以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(19)【分析】 通过补线段后利用 Green 公式计算即可.

【详解】 设点 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, 补充线段 \overline{BO} , 且设由曲线弧 \widehat{OA} , \widehat{AB} , \overline{BO} 围成的平面区域为 D , 则由 Green 公式有

$$\begin{aligned} I &= \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \int_{L+\overline{BO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy - \int_{\overline{BO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \iint_D (3x^2 - 3x^2 + 1) dx dy - \int_2^0 (-2y) dy \\ &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 + y^2 \Big|_2^0 = \frac{\pi}{2} - 4. \end{aligned}$$

(20)【解】 (I) 按第一列展开,

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

(II) 当 $|A| = 0$ 时, 方程组 $Ax = \beta$ 有可能有无穷多解, 由 (I) 知 $a = 1$ 或 -1

(1) 如 $a = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

$r(\mathbf{A}) = 3, r(\bar{\mathbf{A}}) = 4$ 方程组无解, 舍去.

(2) 当 $a = -1$ 时

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) = 3$. 方程组有 ∞ 解, 取 x_4 为自由变量, 得方程组通解为

$$(0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T, (k \text{ 为任意常数.})$$

(21)【解】 (I) 因为 $r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$, 对 \mathbf{A} 施以初等行变称

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以, 当 $a = -1$ 时, $r(\mathbf{A}) = 2$.

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{那么 } |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6)$$

矩阵 \mathbf{A} 的特征值为 $0, 2, 6$.

对 $\lambda = 0$, 由 $(0\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得基础解系 $(-1, -1, 1)^T$;

对 $\lambda = 2$, 由 $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得基础解系 $(-1, 1, 0)^T$;

对 $\lambda = 6$, 由 $(6\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得基础解系 $(1, 1, 2)^T$.

因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 故只需单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{那么令 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{有 } \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = 2y_2^2 + 6y_3^2.$$

【评注】 当然如果直接计算也可行, 但计算是非常大.

$$\begin{aligned} \text{二次型矩阵 } A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于 $A^T A$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1+a^2 \end{vmatrix} = 2(1+a^2) \neq 0$. 所以二次型 f 的秩为 2. $\Leftrightarrow |A^T A| =$

0

$$\text{又 } |A^T A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{vmatrix} = (a+1)^2(a^2+3)$$

$$\therefore a = -1.$$

(22)【详解】 (I) $P\{X = 2Y\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{1}{4}$.

(II) 由 (X, Y) 的概率分布可得, X, Y, XY 的概率分布分别为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

,

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

,

XY	0	1	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

所以 $EX = \frac{2}{3}, EY = 1, EY^2 = \frac{5}{3}, DY = \frac{2}{3}, E(XY) = \frac{2}{3}, \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = 0$.

故 $\text{Cov}(X - Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - DY = -\frac{2}{3}$.

(23)【详解】 (I) 因 X 与 Y 相互独立, 所以 $Z = X - Y$ 服从正态分布, 且 $EZ = 0$, $DZ = DX + DY = 3\sigma^2$, 故得 Z 的概率密度为

$$f(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

(II) 设 z_1, z_2, \dots, z_n 为样本 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(z_i; \sigma^2) = (6\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2},$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(6\pi\sigma^2) - \frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{6\sigma^4} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0, \text{ 解得 } \sigma^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$.

(III) 因 $E\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n EZ_i^2 = \frac{1}{3} EZ^2 = \frac{1}{3} DZ = \sigma^2$, 所以 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

◆ 第二篇 ◆

2011 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上)

- (1) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是
 (A) (1, 0). (B) (2, 0).
 (C) (3, 0). (D) (4, 0).
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为
 (A) $(-1, 1]$. (B) $[-1, 1)$.
 (C) $[0, 2)$. (D) $(0, 2]$.
- (3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是
 (A) $f(0) > 1, f''(0) > 0$. (B) $f(0) > 1, f''(0) < 0$.
 (C) $f(0) < 1, f''(0) > 0$. (D) $f(0) < 1, f''(0) < 0$.
- (4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系为
 (A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$.
 (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.
- (5) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵, 记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A =$
 (A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$.
 (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$.
- (6) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为
 (A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 .
 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
- (7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 EX 与 EY 存在, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV)$ =

(A) $EU \cdot EV$.

(B) $EX \cdot EY$.

(C) $EU \cdot EY$.

(D) $EX \cdot EV$.

二、填空题 (9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.

(10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

(11) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{y=2} =$ _____.

(12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + xdy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

三、解答题 (15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

(16) (本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$. 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{y=1}$.

(17) (本题满分 10 分)

求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 证明: 任意的正整数, 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0$, $f(x, 1) = 0$, $\iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \text{ 计算二重积分 } I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy.$$

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知. \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$.

2010 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上)

- (1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x =$
 (A) 1. (B) e. (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a} .
- (2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则
 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$
 (A) x . (B) z .
 (C) $-x$. (D) $-z$.
- (3) 设 m, n 均是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性
 (A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.
 (C) 与 m, n 的取值都有关. (D) 与 m, n 的取值都无关.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$
 (A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$. (B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.
 (C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$. (D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$.
- (5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB = E$, 则
 (A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$. (B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$.
 (C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$. (D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.
- (6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.
 (C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.
- (7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $P\{X = 1\} =$

- (A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$. (D) $1 - e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足

- (A) $2a + 3b = 4$. (B) $3a + 2b = 4$.
(C) $a + b = 1$. (D) $a + b = 2$.

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 设 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|$ ($x \in [-1, 1]$), 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$, 则 $EX^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

(17) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设 P 为椭圆面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,

求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭圆面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解.(I) 求 λ, a ;(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(I) 求矩阵 A ;(II) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2 + 2xy - y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y | x)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的

个数 ($i = 1, 2, 3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

2009 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小,则 ()

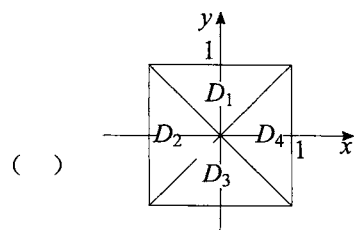
- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.
(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$. (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

(2) 如图,正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线

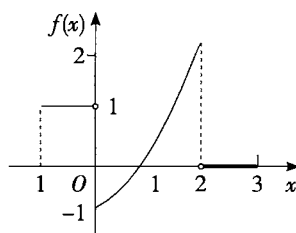
划分为四个区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$,

则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$

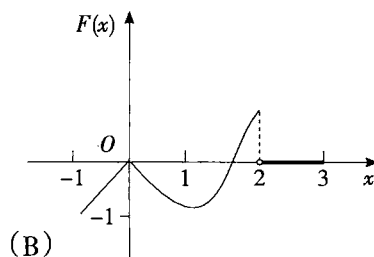
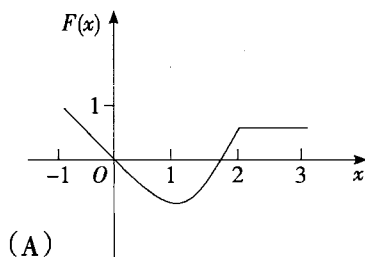
- (A) I_1 . (B) I_2 .
(C) I_3 . (D) I_4 .

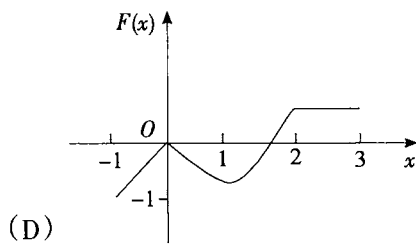
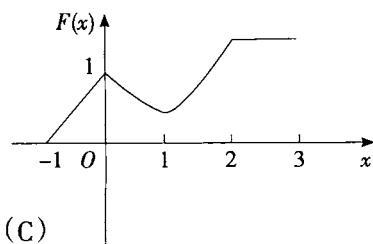


(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为 ()





(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 ()

- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.
 (C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛. (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 ()

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
 (C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

(6) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()

- (A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$.
 (C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) =$ ()

- (A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 答案填在题中横线上.)

(9) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

(11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.

(13) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

(16) (本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 所围成区域的面积, 记

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}, \text{求 } S_1 \text{ 与 } S_2 \text{ 的值.}$$

(17) (本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4, 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta) (\delta > 0)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(19) (本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对 (I) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

(22) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.



(I) 求 $P\{X=1|Z=0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

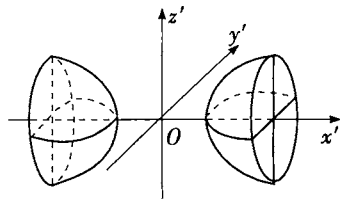
(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

2008 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t)dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ()
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (2) 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度等于 ()
 (A) i . (B) $-i$. (C) j . (D) $-j$.
- (3) 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是 ()
 (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.
 (C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.
- (4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ()
 (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
 (C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.
- (5) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^3 = O$, 则 ()
 (A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆. (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
 (C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆. (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.
- (6) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程

$$(x, y, z)A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1$$



在正交变换下的标准方程的图形如图所示,

则 A 的正特征值的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (7) 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 ()
 (A) $F^2(x)$. (B) $F(x)F(y)$.
 (C) $1 - [1 - F(x)]^2$. (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$.
- (8) 设随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 ()
 (A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$. (B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$.
 (C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$. (D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 答案填在题中横线上.)

- (9) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (10) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 _____.
- (12) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iiint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy =$ _____.
- (13) 设 A 为 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$. 则 A 的非零特征值为 _____.
- (14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

(17) (本题满分 11 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$, 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(I) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$;

(II) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19) (本题满分 11 分)

将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20) (本题满分 10 分)

设 α, β 为 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 其中 α^T, β^T 分别是 α, β 的转置. 证明:

(I) 秩 $r(A) \leq 2$;

(II) 若 α, β 线性相关, 则秩 $r(A) < 2$.

(21) (本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\} = \frac{1}{3} (i=-1, 0, 1)$, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{记 } Z = X + Y.$$

(I) 求 $P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X=0\right\}$;

(II) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23) (本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(II) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT .

2007 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、选择题(本题共 10 小题, 每小题 4 分, 满分 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

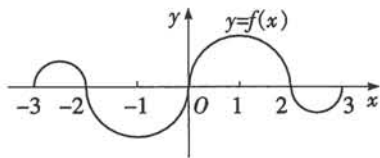
(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.
(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$.

(2) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为 ()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(3) 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)$



$= \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是 ()

- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$. (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.
(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$. (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是 ()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.
(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.
(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 则下列结论正确的是 ()

- (A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛. (B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.
(C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛. (D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

(6) 设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数) 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列积分小于零的是 ()

- (A) $\int_{\Gamma} f(x, y) dx$. (B) $\int_{\Gamma} f(x, y) dy$.

(C) $\int_{\Gamma} f(x, y) ds.$

(D) $\int_{\Gamma} f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy.$

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ()

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1.$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1.$

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1.$

(D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1.$

(8) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B ()

(A) 合同, 且相似.

(B) 合同, 但不相似.

(C) 不合同, 但相似.

(D) 既不合同, 也不相似.

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p (0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ()

(A) $3p(1-p)^2.$

(B) $6p(1-p)^2.$

(C) $3p^2(1-p)^2.$

(D) $6p^2(1-p)^2.$

(10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ()

(A) $f_X(x).$

(B) $f_Y(y).$

(C) $f_X(x)f_Y(y).$

(D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}.$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设 $f(u, v)$ 为二元可微函数, $z = f(x^y, y^x)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS = \underline{\hspace{2cm}}.$

(15) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题 (本题共 8 小题, 满分 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 11 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

(18) (本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \iiint_{\Sigma} xz dydz + 2yz dzdx + 3xy dx dy,$

其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} (0 \leq z \leq 1)$ 的上侧.

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20) (本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(I) 证明 $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$;

(II) 求 $y(x)$ 的表达式.

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数 $\theta (0 < \theta < 1)$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值.

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

2006 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (2) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- (3) 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (4) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 ()
- (A) $0 < dy < \Delta y.$ (B) $0 < \Delta y < dy.$
- (C) $\Delta y < dy < 0.$ (D) $dy < \Delta y < 0.$
- (8) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于 ()
- (A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$
- (C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$
- (9) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 ()
- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.
- (C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.
- (10) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ()
- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0.$
- (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0.$
- (C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0.$

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(11) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 为 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ()

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(12) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C ,

记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 ()

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^TAP^T$.

(D) $C = PAP^T$.

(13) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有 ()

(A) $P(A \cup B) > P(A)$.

(B) $P(A \cup B) > P(B)$.

(C) $P(A \cup B) = P(A)$.

(D) $P(A \cup B) = P(B)$.

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且

$$P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\},$$

则必有

()

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$.

(B) $\sigma_1 > \sigma_2$.

(C) $\mu_1 < \mu_2$.

(D) $\mu_1 > \mu_2$.

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

(16) (本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}$.

(17) (本题满分 12 分)

将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

(18) (本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(19) (本题满分 12 分)

设在上半平面 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有

$f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$. 证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

(20) (本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

(21) (本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

(22) (本题满分 9 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令 $Y = X^2, F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数. 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $F(-\frac{1}{2}, 4)$.

(23) (本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$), X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数, 求 θ 的最大似然估计.

2005 年全国硕士研究生入学 统一考试试题

一、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 答案填在题中横线上.)

- (1) 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____.
- (2) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为_____.
- (3) 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, 则 $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1, 2, 3)} =$ _____.
- (4) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy =$ _____.
- (5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \mathbf{B} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

 如果 $|\mathbf{A}| = 1$, 那么 $|\mathbf{B}| =$ _____.
- (6) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 则 $P\{Y = 2\} =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()
 (A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.
 (C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点.
- (8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 “ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有 ()
 (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
 (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
 (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
 (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.
- (9) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, 函数 ψ 具有一阶导数, 则必有 ()
 (A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
 (C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(10) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^x = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程 ()

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$.
 (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
 (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
 (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$.

(11) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是 ()

- (A) $\lambda_1 \neq 0$. (B) $\lambda_2 \neq 0$.
 (C) $\lambda_1 = 0$. (D) $\lambda_2 = 0$.

(12) 设 A 为 $n (n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^* 与 B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则 ()

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* .
 (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .
 (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.
 (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

(13) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 则 ()

- (A) $a = 0.2, b = 0.3$. (B) $a = 0.4, b = 0.1$.
 (C) $a = 0.3, b = 0.2$. (D) $a = 0.1, b = 0.4$.

(14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则 ()

- (A) $n\bar{X} \sim N(0, 1)$. (B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.
 (C) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$. (D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$.

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数, 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$.

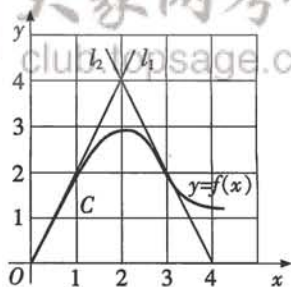
(16) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17) (本题满分 11 分)

如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点

$(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线, 其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$.



(18) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分

$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(II) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20) (本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

(21) (本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且

$AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

(22) (本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23) (本题满分 9 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, 记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

求: (I) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$;

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{cov}(Y_1, Y_n)$.

◆ 第三篇 ◆

第一部分 高等数学

第一章 函数 极限 连续

■ 本章导读

函数是微积分的研究对象, 极限是建立微积分理论和方法的基础, 连续性是函数的基本性态, 是函数可导和可积的基本条件, 连续函数是微积分所讨论的函数的主要类型. 因此, 函数、极限与函数连续性是本章的主要内容, 也是微积分的理论基础.

其主要内容有

1. 函数的概念, 基本性态及复合函数;
2. 极限的概念, 性质, 存在准则及求极限的方法; 无穷小量的概念、性质及阶的比较;
3. 连续的概念, 间断点及其分类, 连续函数的性质(运算性质及有限闭区间上连续函数性质).

■ 试题特点

本章是微积分的基础, 每年必考. 而本章的特点是, 基本概念和基本理论非常之多, 许多考题重点考查这些基本概念和基本理论, 从往年考研情况看, 失分率比较高, 因此, 望考生重视基本概念和基本理论的复习.

本章常考题型

1. 求极限;
2. 无穷小量及其比较;
3. 求间断点及判别间断点类型.

无穷小量比较实际上就“ $\frac{0}{0}$ ”型极限, 而间断点类型判定的关键也是求极限, 所以, 本章常考的三种题型的核心是求极限. 重点是求极限的常用方法(如有理运算, 基本极限, 等价无穷小代换、洛必达法则等).

■ 考题详析

一、极限的概念、性质及存在准则

- 1** (2008, 4 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是
- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
- (C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】 (B).

【解析一】 由于 $\{x_n\}$ 单调, $f(x)$ 单调有界, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界. 则数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 故应选(B).

【解析二】 排除法: 若取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则显然 $f(x)$ 单调, $\{x_n\}$ 收敛, 但 $f(x_n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 为偶数} \\ -1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ 显然 $\{f(x_n)\}$ 不收敛, 这样就排除了(A).

若取 $f(x) = \arctan x$, $x_n = n$, 则 $f(x_n) = \arctan n$, 显然 $\{f(x_n)\}$ 收敛且单调, 但 $\{x_n\}$ 不收敛, 这样就排除了(C)和(D), 故应选(B).

【评注】 本题主要考查数列收敛的单调有界准则, 是一道基本题, 但本题是当年考卷中四个高等数学选择题中考生做得最差的一个, 难度值为 0.456.

- 2** (2011, 18 题, 10 分) (I) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】 (I) 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (n, n+1)$, 使得

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$$

则 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$.

(II) 由(I)知, 当 $n \geq 1$ 时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n}) < 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减, 又

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n \\ &= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0. \end{aligned}$$

从而, 数列 $\{a_n\}$ 下有界, 故该数列收敛.

【评注】 本题中(I)是一个不等式的证明. 高等数学中有两个常用的不等式

$$(1) \sin x < x < \tan x \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$(2) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad x \in (-1, +\infty)$$

考生应该熟悉, 本题的(I)只要在不等式(2)中令 $x = \frac{1}{n}$ 便可证明. 本题中的(II)主要考查数列的单调有界准则.

■ 练习题

1. (1999, 数二, 3分) “对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件, 又非必要条件

2. (2003年, 4分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

3. (1999年, 7分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数,

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

⇔ 小结

(1) 极限的概念重点是理解数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义和函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 及 $\varepsilon - X$ 定义, 而不是用定义证明极限;

(2) 极限的性质重点是: 有界性; 保号性及有理运算性质;

(3) 极限的存在准则重点是: 单调有界准则和夹逼准则.

二、求函数的极限

3 (2006, 1题, 4分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 2.

【解析】 本题是求 $\frac{0}{0}$ 型极限. 用等价无穷小代换很方便. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

【评注】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限, 主要是利用等价无穷小代换求解. 常用的等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^{x-1};$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; (1+x)^a - 1 \sim ax; a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1)$$

还有若 $\alpha(x) \rightarrow 0$, 则 $\alpha(x) + o(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$

注意: 在乘法中可用等价无穷小代换, 而在加减法中不要用等价无穷小代换.

4 (2008, 15 题, 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

【解法一】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] x}{x^4}$ (等价代换)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cdot \cos x}{3x^2} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x^2} \quad (\text{极限为非零常数因子极限先求})$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \frac{1}{6}$$

【解法二】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{\sin^4 x} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} \quad (\text{变量代换 } \sin x = t)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2} = \frac{1}{6}$$

【解法三】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$

由泰勒公式 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ 知

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(\sin^3 x)$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - [\sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3)]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

【解法四】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \xi \cdot (x - \sin x)}{x^3} \quad (\text{拉格朗日中值定理})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

【评注】① 本题是一个“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,【解法一】主要是用洛必达法则和等价无穷小代换,【解法二】主要是利用变量代换和等价无穷小代换,【解法三】主要是利用泰勒公式,【解法四】主要是利用拉格朗日中值定理。

② 考卷中出现一些典型错误,例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 x}{x^4} - \frac{\sin(\sin x) \sin x}{x^4} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

这种做法所得分数只能是考生自己所得本题的答案,标准的0分,“经典”的错误。这说明考生对极限的最基本的运算法则和等价无穷小代换的基本原则掌握不够。

另一种典型的错误是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \dots = \frac{1}{6}$$

答案正确,但方法有问题,一种理解是 $\sin x \sim x \sin(\sin x) \sim \sin x$,但这是在减法中用等价代换;另一种理解是 $\sin x - \sin(\sin x) \sim x - \sin x$,此时,解法正确,但该结论需证明。

5 (2010, 1 题, 4 分) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$

(A) 1

(B) e

(C) e^{a-b}

(D) e^{b-a}

【答案】 (C).

【解析一】 这是一个“ 1^∞ ”型极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}} \right\}^{\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \cdot x}$$

$$= e^{a-b}$$

【解析二】 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= a-b \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = e^{a-b}$$

【解析三】 对于“ 1^∞ ”型极限可利用基本结论:

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = \infty$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$, 求极限由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)} \cdot x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x^2 + abx}{(x-a)(x+b)} = a-b \end{aligned}$$

$$\text{则} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = e^{a-b}$$

$$\begin{aligned} \text{【解析四】} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-a)(x+b)}{x^2} \right]^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{-x} \\ &= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b} \end{aligned}$$

【评注】 本题是一个“ 1^∞ ”型极限. **【解析一】** 是将所求极限凑成基本极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 的形式后求极限; **【解析二】** 是将原式改写成指数形式然后用等价无穷小代换(或用洛必达法则); **【解析三】** 和 **【解析四】** 都是利用关于“ 1^∞ ”型极限的基本结论求极限, 以上三种方法是求“ 1^∞ ”常用的三种方法, 往往第三种方法简单, 而第三种方法所用的关于“ 1^∞ ”型极限的结论也很容易证明.

$$\lim (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = \lim \{ [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \}^{\alpha(x)\beta(x)} = e^A$$

该结论在以后求“ 1^∞ ”型极限时可直接用.

6 (2011, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

【解析】 这是一个“ 1^∞ ”型极限. 方法一是改写成指数形式后用洛必达法则和等价无穷小代换; 方法二是上题中“ 1^∞ ”型极限的基本结论.

【解法一】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x-1}}$

$$\begin{aligned} \text{而} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)}{x} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1+x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

【解法二】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\ln(1+x)-x}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

$$\begin{aligned} \text{而} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x} \cdot \frac{1}{e^x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

【评注】显然【解法一】简单. 【解法二】中用的就是关于“ 1^∞ ”型极限的基本结论. 本题中的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ 也可用泰勒公式求解.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

■ 练习题

1. (2003 年, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. (2000 年, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$
3. (1999, 数二, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}.$
4. (2004, 数二, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$
5. (2010, 数三, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}.$

➡ 小结

1. 求函数的极限主要是求未定式 ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$) 的极限, 这里的关键是两种, 即“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, 而后 5 种都可化为前两种, 前两种当中特别是“ $\frac{0}{0}$ ”型考的最多, 求“ $\frac{0}{0}$ ”型极限主要是三种方法.

(1) 利用洛必达法则: 在处理“ $\frac{0}{0}$ ”型极限问题时, 不要急于用洛必达法则应先进行化简, 常用的方法有极限为非零常数的因子极限先求出来, 等价无穷小代换, 有理化. 化简完后再用洛必达法则;

(2) 利用等价无穷小代换;

(3) 利用泰勒公式:

其中 $\sin x, \ln(1+x), e^x, \cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒公式比较常用, 考生应熟悉.

2. “ 1^∞ ”型极限也是一种常考的类型, 最简单的方法是利用结论:

若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x) \beta(x) = A$, 则 $\lim (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$

三、求数列的极限

7 (2006, 16 题, 12 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}.$

【解析】 由于数列是由递推关系给出的, 通常用单调有界准则证明极限存在, 并求出极限. 由于(II)中的极限是一个“ 1^∞ ”型, 可将其化为函数的极限, 再利用重要极限或取对数便可求出此极限.

【解析】 (I) 用归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调减且有下界.

由于 $\sin x < x$, $x \in (0, \pi)$, 则由 $0 < x_1 < \pi$, 则 $0 < x_2 < \sin x_1 < \pi$,

设 $0 < x_n < \pi$, 则 $0 < x_{n+1} < \sin x_n < x_n < \pi$

所以, $\{x_n\}$ 单调减且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,

设 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 由 $x_{n+1} = \sin x_n$ 知 $a = \sin a$ 所以, $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(II) **【解法一】** 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$,

所以, 考虑函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \sin x}{x}}$,

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sin x - x}{x}\right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{6}}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

【解法二】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ 为“ 1^∞ ”型极限, 且

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{6}}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

【评注】 本题是一道综合题, 数列极限存在的单调有界准则, 数列极限转化为函数极限, “ 1^∞ ”型极限的求法——基本极限, 洛必达法则等. 考生的典型错误是不将原题中数列极限转化为函数极限, 直接对数列极限用洛必达法则.

8 (2010, 4 题, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$;

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$;

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$;

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$;

【答案】 (D).

【解析一】 证 $\delta_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$, 则

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+\frac{j^2}{n^2})} \cdot \frac{1}{n^2}$$

设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$. 用直线 $x = x_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 与 $y = y_j = \frac{j}{n}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) 将 D 分成 n^2 个小正方形, 每个正方形面积为 $\frac{1}{n^2}$ 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+x_i)(1+y_j^2)} \cdot \frac{1}{n^2} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+\frac{j^2}{n^2})} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} \end{aligned}$$

是二元函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的一个二重积分的和式, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \iint_D \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy. \end{aligned}$$

【解析二】 将 δ_n 看成是两个定积分的积分和式的乘积, 即

$$\delta_n = \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})} \cdot \frac{1}{n} \right] \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} \right]$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}$ 故应选(D).

【评注】 本题是考查和式的极限. 【解析一】是将题中的和式看成二元函数 $\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$ 在正方形区域 D 上的积分和式, 利用二重积分定义将其化为二重积分; 【解析二】是将原二重积分分解为两个定积分的和式的乘积, 利用定积分定义将其化为两个定积分的乘积, 进一步化为二重积分.

■ 练习题

1. (1998年, 数四, 6分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \tan \frac{1}{n})^{n^2}$ (n 为自然数).

2. (2008年, 数四, 4分) 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} =$

(A) a

(B) a^{-1}

(C) b

(D) b^{-1}

3. (1995年, 3分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) =$ _____.

4. (1998年, 6分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right]$.

5. (1996年, 5分) 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 试证: 数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

小结

处理数列极限问题的常用方法

1. 将所求数列极限问题转化为求函数极限(一般是为了使用洛必达法则)如题 7(II) 和练习题 1;
2. 利用夹逼原理求极限(更多的是用在 n 项和的数列极限中)如练习题 2【分析二】, 及练习题 3 和 4;
3. 利用定积分定义求极限(一般用在 n 项和的数列极限问题), 该方法的关键先提一个因子 $\frac{1}{n}$, 然后确定被积函数和积分区间, 一种常见的形式是: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$, 如题 8 及练习题 4.
4. 利用单调有界准则求极限(一般用在由递推关系 $x_{n+1} = f(x_n)$ 所定义的数列)如题 7 和练习题 5;
5. 利用结论 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i$ (其中 $a_i > 0$) 求极限, 如练习题 2.

四、确定极限中的参数

9 (2009, 1 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小量, 则

$$(A) a = 1, b = -\frac{1}{6}.$$

$$(B) a = 1, b = \frac{1}{6}.$$

$$(C) a = -1, b = -\frac{1}{6}.$$

$$(D) a = -1, b = \frac{1}{6}.$$

【答案】 (A)

【解析一】 由题设知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a \cos ax}{-3bx^2} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-3bx^2} \quad (a = 1, \text{ 否则与题设矛盾}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= -\frac{1}{6b} = 1 \end{aligned}$$

则 $b = -\frac{1}{6}$, 故应选 (A).

【解析二】 由泰勒公式知

$$\sin ax = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3) \right]}{x^2 \ln(1 - bx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x + \frac{a^3}{3!}x^3 + o(x^3)}{-bx^3} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\text{由此可解} \begin{cases} 1-a=0 \\ \frac{a^3}{3!} = 1 \\ -b=1 \end{cases}, \text{解得 } a=1, b=-\frac{1}{6}. \text{故应选(A).}$$

■ 练习题

1. (1994 年, 4 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则

$$(A) a=1, b=-\frac{5}{2}. \quad (B) a=0, b=-2.$$

$$(C) a=0, b=-\frac{5}{2}. \quad (D) a=1, b=-2.$$

2. (1998 年, 5 分) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \quad (c \neq 0)$.

➡ 小结

对于确定极限中参数的问题, 一般方法是求所给的极限, 确定题中的参数. 有此参数在求极限的过程中可确定, 有些参数在求得极限以后可确定出来. 求极限的方法要根据题中所给极限类型来确定, 一种最常见的类型是“ $\frac{0}{0}$ ”型, 常用的方法是三种, 洛必达法则, 等价无穷小代换和泰勒公式.

五、无穷小量及其阶的比较

10 (2007, 1 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是

$$(A) 1 - e^{\sqrt{x}} \quad (B) \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$$

$$(C) \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \quad (D) 1 - \cos \sqrt{x}$$

【答案】 (B).

【解析一】 $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) - \sqrt{x}$ (当 $x \rightarrow 0^+$)

事实上, $\ln(1+x) \sim x$, 即当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\ln(1+x)$ 是 x 的 1 阶无穷小, $-\ln(1-\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, 即 $-\ln(1-\sqrt{x})$ 是 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷, 几个不同阶的无穷小量的代数和其阶数由其中阶数最低的项来决定.

故应选(B).

【解析二】 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,

$$1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}, \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, 1 - \cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$$

则选项(A)(C)(D) 均不正确, 故应选(B).

■ 练习题

1. (2004, 4 分) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来,

使排在后面的一个是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

- (A) α, β, γ (B) α, γ, β (C) β, α, γ (D) β, γ, α

2. (2011, 数二, 4 分) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则

- (A) $k = 1, c = 4$ (B) $k = 1, c = -4$ (C) $k = 3, c = 4$ (D) $k = 3, c = -4$

⇔ 小结

有关无穷小量及其阶的比较主要是两类问题:

1. 无穷小量的比较, 也就是判断一个无穷小量是另外一个无穷小量的高阶, 同阶, 等价或低阶无穷小;

2. 由两个无穷小量之间的关系(等价、同阶等), 转化为确定极限中的参数问题:

以上两类问题的实质是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限问题, 常用方法有以下三种

- 1) 洛必达法则,
- 2) 等价无穷小代换,
- 3) 泰勒公式.

六、函数的连续性及其间断点类型

11 (2008, 数二, 4 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点; (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点;
(C) 2 个跳跃间断点; (D) 2 个无穷间断点

【答案】 (A).

【解析】 显然 $f(x)$ 只有两个间断点 $x = 0$ 和 $x = 1$, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| \cdot \sin x \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x-1|} = 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| \cdot x \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned}$$

则 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, 又

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}$$

$$= \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \text{ (等价无穷小代换)}$$

$$= \sin 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln[1+(x-1)]}{-(x-1)} = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = -\sin 1$$

则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 故应选(A).

【评注】部分考生只考虑 $x=1$ 时 $f(x)$ 的分母为零和 $\lim_{x \rightarrow 1} \ln |x| = 0$, 没有仔细分析就选择了(B)或(D). 判断间断点类型一定要先求出极限后再下结论.

■ 练习题

1. (2003, 数二, 10 分) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; a 为何值时, $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点?

2. (2001, 数二, 7 分) 求 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

➡ 小结

这里主要有以下三类问题

1. 讨论函数的连续性

常用的方法有

- 1) 利用连续的定义(特别是分段函数的分界点);
- 2) 利用连续函数的运算法则(四则、复合及反函数);
- 3) 利用初等函数在其定义区间内都是连续的.

2. 求已知表达式函数的间断点并判别类型

首先求出函数没有定义的点(必为间断点)和分段函数分界点(可疑间断点).

对以上点按间断点的分类判别其类型

3. 求由极限式定义的函数的间断点并判别其类型(如练习题 2)

此类问题首先求出极限得到所要讨论的函数 $f(x)$ 的表达式, 然后求间断点并判别其类型.

第二章 一元函数微分学

本章导读

导数与微分是微分学的两个基本概念,是研究函数局部性态的基础.微分中值定理建立了函数和导数之间的联系,是利用导数研究函数基本性态的理论基础.

其主要内容有:

1. 导数与微分的概念及其几何意义;
2. 连续、可导、可微之间的关系;
3. 微分法(有理运算,复合函数,隐函数,参数方程等);
4. 微分中值定理(罗尔,拉格朗日,柯西,泰勒);
5. 函数基本性态及判定(单调性,极值与最值,曲线的凹凸性与拐点,渐近线).

试题特点

本章考试内容多,考题比例大(一般 20 分左右),有基本概念——导数与微分;基本方法——微分法,基本理论——微分中值定理,应用——函数性态.

本章常考题型

1. 导数概念;
2. 微分法(复合函数,隐函数,参数方程);
3. 函数的单调性与极值;
4. 曲线的凹向与拐点;
5. 方程的根;
6. 证明函数不等式;
7. 微分中值定理证明题.

后三种题型是难点,考研试卷最难的题经常出在这一章,那就是与微分中值定理有关的证明题.

考题详析

一、导数与微分的概念

1 (2007, 4 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.
- (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ 存在.

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ 存在.

【解析一】 (D).

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 故 $f(0) = 0$, 命题(A) 正确.

同理, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(-x)] = f(0) + f(0) = 0$, 则 $f(0) = 0$, 故命题(B) 正确.

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 由(A) 选项的讨论知 $f(0) = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

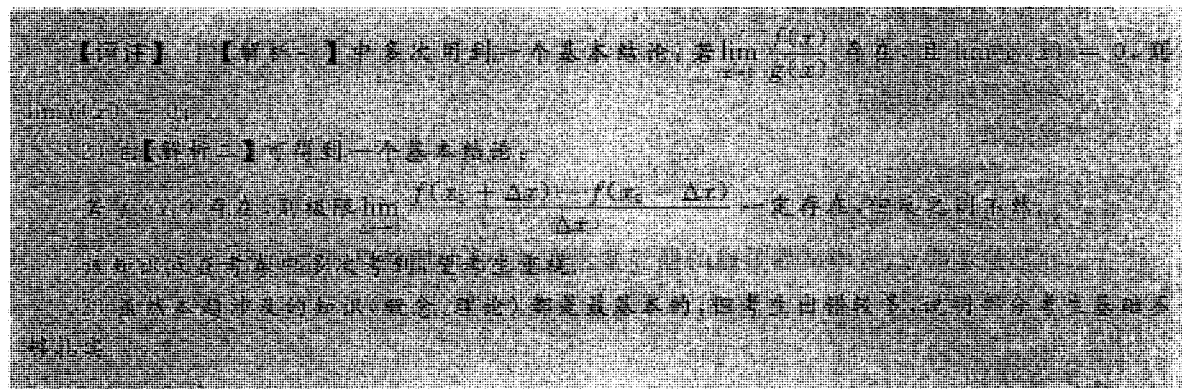
存在, 由导数定义知, $f'(0)$ 存在, 故命题(C) 正确, 由排除法知应选(D).

【解析二】 虽然有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{f(-x) - f(0)}{x} \right]$$

但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 不能保证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{x}$ 一定存在, 故 $f'(0)$ 不一定存在. 如 $f(x) = |x|$

虽然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |-x|}{x} = 0$ 存在, 但 $f'(0)$ 不存在, 故命题(D) 不正确, 应选(D).



■ 练习题

- (2004, 4 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得
 - $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.
 - $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.
 - 对任意 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.
 - 对任意 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.
- (2001, 3 分) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件为

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh h)$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在.

3. (2011, 数二, 4 分) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$

(B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$

(D) 0.

小结

这里常见的是以下两种问题

(1) 已知 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 求与 $f(x)$ 在 x_0 点导数定义 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 有关的极限, 如练习题 3, 该题中方法是解决此类问题常用的几种方法;

(2) 第(1)种问题的反问题. 即已知与 $f(x)$ 在 x_0 点导数定义 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 有关的极限存在, 问 $f(x)$ 在 x_0 处是否可导. 如题 1 及练习题 2.

二、导数与微分计算

2 (2005, 7 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

(A) 处处可导

(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点

(D) 至少有三个不可导点

【答案】 (C).

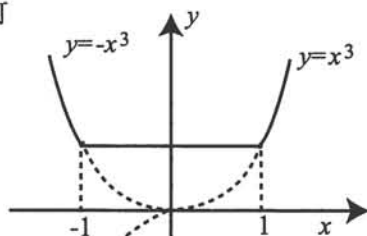
【解析】 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式, 然后再讨论 $f(x)$ 的可导性.

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i (a_i > 0) \text{ 知}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$$

$$= \max\{1, |x|^3\} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1. \\ |x|^3, & |x| > 1. \end{cases}$$

由 $y = f(x)$ 的表达式和其图形可知, $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处不可导(尖点), 在其余点均可导, 故应选(C).



【评注】 本题求得 $f(x)$ 的表达式后, 也可根据表达式确定各点的可导性. 由其表达式知, $f(x)$ 不可导点最多两个, 即 $x = \pm 1$, 其余点均可导. 又由 $f(x)$ 表达式知 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 两点处可导性相同, 因此, 只需讨论 $x = 1$ 处的可导性:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0, f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导, 从而在 $x = -1$ 处也不可导.

3 (2010, 9 题, 4 分) 设 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0.

【解析一】 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1+t^2)$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} [-e^t \ln(1+t^2)] \cdot \frac{1}{x'(t)} = e^{2t} \left[\frac{2t}{1+t^2} + \ln(1+t^2) \right]$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0$.

【解析二】 由参数方程求导公式知

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{y''(0)x'(0) - x''(0)y'(0)}{[x'(0)]^3}$$

$$x'(t) = -e^{-t}, x''(t) = e^{-t}, x'(0) = -1, x''(0) = 1$$

$$y'(t) = \ln(1+t^2), y''(t) = \frac{2t}{1+t^2}, y'(0) = 0, y''(0) = 0 \text{ 代入上式得 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0.$$

【解析三】 由 $x = e^{-t}$ 得, $t = -\ln x$, 则

$$y = \int_0^{-\ln x} \ln(1+u^2) du$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \ln(1+\ln^2 x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left[\ln(1+\ln^2 x) - \frac{2\ln x}{1+\ln^2 x} \right]$$

$$\text{当 } t=0 \text{ 时 } x=1, \text{ 则 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0.$$

【评注】 本题是一道参数方程求导的试题, 本题中前两种方法是常用的两种方法.

■ 练习题

- (2002, 3 分) 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定, 则 $y''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (1998, 3 分) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$ 不可导点的个数是
(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0
- (2007, 数二, 4 分) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

➡ 小结

导数与微分计算属基本运算, 几乎年年都考, 主要有以下几种题型:

- 复合函数求导;
- 隐函数求导; (如练习题 1)
- 参数方程求导; (如题 3)
- 高阶导数计算 (如练习题 3)
- 分段函数的导数 (如题 2 和练习题 2)

三、导数的几何意义

4 (2008, 10 题, 4 分) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是_____.

【答案】 $y = x + 1$.

【解析】 先求曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处切线斜率 $y'(0)$.

等式 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 两端对 x 求导得

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') + \frac{y' - 1}{y - x} = 1$$

在上式中令 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = 1$, 于是该曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = x$, 即 $y = x + 1$.

■ 练习题

1. (2010, 数二, 4 分) 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$ _____.

(A) $4e$

(B) $3e$

(C) $2e$

(D) e

2. (2002, 数二, 6 分) 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切

线与法线的直角坐标方程.

⇒ 小结

导数的几何意义是切线的斜率. 有关的考题通常是建立曲线的切线方程或法线方程, 其关键是求切线的斜率 k .

1. 若曲线由显式方程 $y = f(x)$ 给出, 则该曲线在 $x = x_0$ 处切线斜率为: $k = f'(x_0)$

2. 若曲线由 $F(x, y) = 0$ 给出, 则可用隐函数求导法求得: $k = f'(x_0)$

3. 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则曲线对应 $t = t_0$ 处切线斜率为

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

4. 若曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出, 此时, 可得到该曲线参数方程 $\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$$

四、函数的单调性、极值与最值

5 (2010, 16 题, 10 分) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且

$$f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} \\
 &= 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt
 \end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0, x = \pm 1$, 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	极小	\nearrow	极大	\searrow	极小	\nearrow

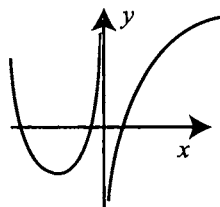
由以上表格可知, $f(x)$ 单调增加区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$; $f(x)$ 单调减少的区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$. $f(x)$ 的极小值为 $f(\pm 1) = \int_1^1 (1-t)e^{-t^2} dt = 0$, 极大值为 $f(0)$, $f(0) = -\int_1^0 te^{-t^2} dt = \int_0^1 te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})$.

【评注】 本题主要考查变上限积分求导和定积分计算, 以及求函数单调在区间与极值的方法. 考的是基本内容和常见问题, 但该题的得分率并不高, 考生的主要问题是

- 1) 不能正确求出 $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$ 是最普通的错误;
- 2) 部分考生由于粗心只求出一个驻点 $x = 0$, 漏掉了驻点 $x = \pm 1$;
- 3) 部分考生不能正确表示单调区间, 将单调增加区间写成了 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, 单调减少区间写成了 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

■ 练习题

1. (2003 年, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续其导函数图形所示, 则 $f(x)$ 有



- (A) 一个极小值点和两个极大值点.
- (B) 两个极小值点和一个极大值点.
- (C) 两个极小值点和两个极大值点.
- (D) 三个极小值点和一个极大值点.

2. (1996 年, 3 分) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
- (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
- (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

3. (2009, 数二, 4 分) 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为_____.

➡ 小结

这里主要是三个基本问题

1. 判断函数的单调性常用结论有

1) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导

(1) 若在 (a, b) 内 $f'(x) > 0 (< 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增(减);

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 且在 (a, b) 的任意子区间上 $f'(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增(减).

2) 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在区间 I 上单调不减(增) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (\leq 0)$.

2. 求函数的极值分两步进行

1) 求出可能的极值点, 即驻点和导数不存在的点;

2) 对以上两种点用极值充分条件作判定.

3. 求最大最小值这里主要是两类问题

1) 求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大最小值.

首先求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内可能的极值点, 即驻点和导数不存在的点, 然后将可能的数值点上的函数值与两端点函数值 $f(a), f(b)$ 比较, 便可得到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大最小值.

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内只有唯一的极值点, 且在该点取得极大(小)值, 则该极大(小)值必为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大(小)值.

2) 最大最小值的应用题

首先建立目标函数并确定其定义域, 此时问题转化为 1) 进一步求解.

五、曲线的凹向, 拐点及渐近线

6 (2011, 1 题, 4 分) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) (1, 0)

(B) (2, 0)

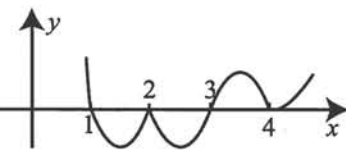
(C) (3, 0)

(D) (4, 0)

【答案】 (C).

【解析一】 图示法:

由曲线方程 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 可知, 该曲线和 x 轴有四个交点, 即 $x=1, x=2, x=3, x=4$, 且在 $x=2$ 取极大值, $x=4$ 取极小值, 则拐点只能在另外两个点上, 由不难看出 $(3, 0)$ 为拐点, 故应选(C).



【解析二】 记 $g(x) = (x-1)(x-2)^2(x-4)^4$, 则

$$y = (x-3)^3 g(x)$$

设 $g(x)$ 在 $x=3$ 处的泰勒展式为

$$g(x) = a_0 + a_1(x-3) + \dots$$

则

$$y = a_0(x-3)^3 + a_1(x-3)^4 + \dots$$

由该式可知

$$y''(3) = 0, y'''(3) = a_0 \cdot 3! \neq 0$$

因为 $a_0 = g(3) \neq 0$.

由拐点的第二充分条件知, $(3, 0)$ 为拐点.

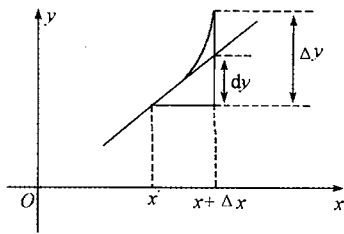
7 (2006, 7 题, 4 分) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则

(A) $0 < dy < \Delta y$

- (B) $0 < \Delta y < dy$
 (C) $\Delta y < dy < \Delta x$
 (D) $dy < \Delta y < 0$

【答案】 (A)

【解析一】 由题设条件知, $y = f(x)$ 单调增且是凹的, 再由 $\Delta y, dy$ 的几何意义, 如图所示, 有 $0 < dy < \Delta y$



故应选(A).

【解析二】 排除法: 取 $f(x) = x^2 \quad x \in (0, +\infty)$, 显然满足题设条件, 取 $x_0 = 1$, 则 $dy = f'(x_0)dx = 2dx = 2\Delta x$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = \Delta x(2 + \Delta x) = 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

由于 $\Delta x > 0$, 则 $0 < dy < \Delta y$

排除(B)(C)(D), 故应选(A).

【解析三】 由 $f'(x) > 0, \Delta x > 0$ 知 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x \quad (x_0 < c < x_0 + \Delta x)$$

由于 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 单调增, $f'(c) > f'(x_0)$, 从而有 $f'(x_0)\Delta x < f'(c)\Delta x$

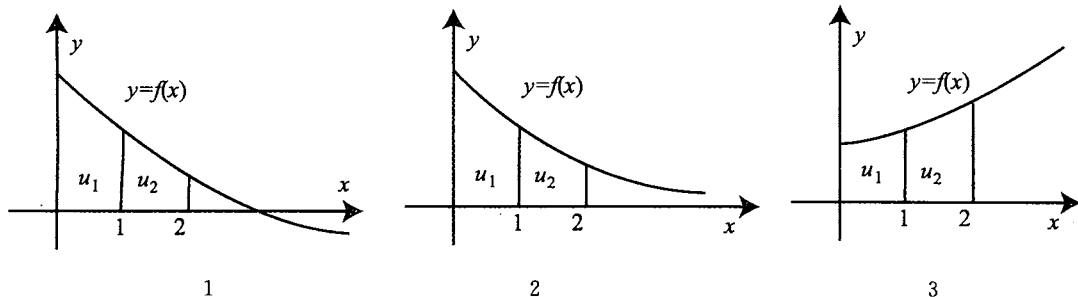
故 $0 < dy < \Delta y$

【8】(2007, 5题, 4分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$, 则下列结论正确的是

- (A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛
 (B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散
 (C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛
 (D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

【答案】 (D).

【解析一】 图示法: 由 $f''(x) > 0$, 知, 曲线 $y = f(x)$ 是凹的,



显然, 图 1 排除选项(A), 其中 $u_n = f(n) \rightarrow -\infty$; 图 2 排除选项(B), 其中 $u_n = f(n) \rightarrow 0$; 图 3 排除选项(C), 其中 $u_n = f(n) \rightarrow +\infty$; 故应选(D).

【解析二】 排除法, 取 $f(x) = (x-2)^2$, 显然在 $(0, +\infty)$, $f''(x) = 2 > 0$, $f(1) = 1 > f(2) = 0$, 但 $u_n = f(n) = (n-2)^2 \rightarrow +\infty$, 排除(A);

取 $f(x) = \frac{1}{x}$, 在 $(0, +\infty)$ 上, $f''(x) > 0$, 且 $f(1) = 1 > f(2) = \frac{1}{2}$, 但 $u_n = f(n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, 排除(B).

取 $f(x) = e^x$, 在 $(0, +\infty)$ 上, $f''(x) = e^x > 0$, 且 $f(1) = e < f(2) = e^2$, 但 $u_n = f(n) = e^n \rightarrow +\infty$, 排除(C), 故应选(D).

【解析三】 直接法, 直接证明(D) 正确.

由拉格朗日中值定理知

$$u_2 - u_1 = f(2) - f(1) = f'(c) > 0, \quad (1 < c < 2)$$

当 $n > 2$ 时,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n) - f(2) + f(2) \\ &= f'(\xi)(n-2) + f(2) \quad (2 < \xi < n) \end{aligned}$$

由于 $f''(x) > 0$, 且 $\xi > c$, 则 $f'(\xi) > f'(c) > 0$, 从而有

$$f(n) > f'(c)(n-2) + f(2) \rightarrow +\infty$$

则有 $u_n = f(n) \rightarrow +\infty$

【评注】 本题显然是图示法和排除法比较简单. 由于大部分考生对这两种方法不熟悉, 而证明(D) 正确又有一定难度, 部分考生只能猜答案, 准确率较低.

9 (2005, 1 题, 4 分) 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____.

【答案】 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

【解析】 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2x+1)x} = \frac{1}{2}$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2x+1} - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{2(2x+1)} = -\frac{1}{4}$ 则斜渐近线方程为

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

10 (2007, 2 题, 4 分) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

【答案】 (D).

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right] = \infty$, 则 $x = 0$ 为曲线的垂直渐近线;

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right] = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$) 则 $y = 0$ 为曲线的水平渐近线;

由于 $-\infty$ 一侧已有水平渐近线, 则斜渐近线只可能出现在 $+\infty$ 一侧, 又

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) - \ln e^x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

则曲线有斜渐近线 $y = x$, 故该曲线有三条渐近线, 应选(D).

【评注】 本题是一道基本题, 但得分率很低, 难度值为 0.220. 其主要原因是很多考生选择了(C), 少了一条渐近线. 原因可能是考生认为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right] = \infty,$$

则该曲线没有水平渐近线, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+e^x)}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [y - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1+e^x) - \ln e^x \right] = 0$$

该曲线有斜渐近线 $y = x$, 这样就少了一条水平渐近线, 选择了 (C). 其问题的关键是考生错误的认为 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, 这是一种“经典”的错误, 正确的是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

■ 练习题

1. (2000, 数二, 3 分) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

2. (2004, 数二, 4 分) 该函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向

上凸的 x 取值范围为 _____.

3. (2007, 数三, 10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹性.

➡ 小结

这里主要是三个基本问题:

1. 确定曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 那么若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0 (< 0)$, 则曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是凹(凸)的.

2. 求曲线的拐点

拐点只可能出现在两种点处, 即二阶导数为零和二阶导数不存在的点处.

1) 设 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在, 若 $f''(x)$ 在 x_0 点两侧变号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点; 若 $f''(x)$ 在 x_0 点两侧不变号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

2) 若 $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

3. 求曲线的渐近线

渐近线有三种

1) 垂直渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$) 则 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线.

2) 水平渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$) 则 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线.

3) 斜渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$, 则 $y = ax + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

六、证明函数不等式

11 (2004, 15 题, 12 分) 设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

【证法一】 要证的不等式可改写为

$$\frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b - a} > \frac{4}{e^2}$$

由以上不等式可看出可用拉格朗日中值定理,

令 $f(x) = \ln^2 x$, 由拉格朗日中值定理知

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b - a} = f'(\xi) = \frac{2\ln\xi}{\xi} \quad (a < \xi < b) \text{ 只要证明 } \frac{2\ln\xi}{\xi} > \frac{4}{e^2}, \text{ 为此,}$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \quad (e < x < e^2).$$

$$\text{则 } \varphi(x) \text{ 在 } (e, e^2) \text{ 上单调减, } \varphi(\xi) = \frac{\ln\xi}{\xi} > \varphi(e^2) = \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}.$$

$$\text{因此, } \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b - a} > \frac{4}{e^2}, \text{ 即 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a).$$

【证法二】 要证的不等可改写为

$$\ln^2 b - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(b - a) > 0$$

$$\text{令 } F(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x - a), \text{ 只要利用函数单调性证明 } F(x) > 0, (a < x \leq b)$$

$$F'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}$$

由于

$$F''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} < 0 \quad (e < x < e^2)$$

$$\text{因此, } F'(x) \text{ 在 } (e, e^2) \text{ 上单调减, } F'(x) > F'(e^2) = 0 \quad (e < x < e^2)$$

$$\text{从而 } F(x) \text{ 在 } [e, e^2] \text{ 上单调增, 则 } F(x) > F(a) = 0 \quad (e < a < x \leq b < e^2)$$

$$\text{特别的 } F(b) > 0, \text{ 即 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$$

【评注】 【证法一】是利用拉格朗日中值定理, 【证法二】是利用函数的单调性, 这两种方法是最常用的证明函数不等式的方法. 其中在【证法二】中也可令 $F(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$, 或 $F(x) = e^2 \ln^2 x - 4x$.

■ 练习题

1. (1999, 6分) 试证: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.

2. (1995, 数二, 8分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明 $f(x) \geq x$.

➡ 小结

证明函数不等式常用的有以下五种方法:

1. 利用函数单调性;
2. 利用函数的最值最小值;
3. 利用拉格朗日中值定理;
4. 利用泰勒公式;
5. 利用凹凸性(定义或性质).

七、方程根的存在性与个数

12 (2011, 17 题, 10 分) 求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

【解法一】 令 $f(x) = k \arctan x - x$, 则 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 则其零点关于原点对称, 因此, 只须讨论 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的零点个数.

$$\text{又 } f(0) = 0, f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}$$

1) 当 $k-1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$, $f'(x) < 0 (x > 0)$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点.

2) 当 $k-1 > 0$ 时, 即 $k > 1$ 时, 在 $(0, \sqrt{k-1})$ 内 $f'(x) > 0$, 又 $f(0) = 0$, 则 $f(\sqrt{k-1}) > 0$, 在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内 $f'(x) < 0$, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [k \arctan x - x] = -\infty$$

则 $f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内有一个零点.

综上所述, 当 $k \leq 1$ 时原方程有一个实根, 当 $k > 1$ 时, 原方程有三个实根.

【解法二】 $f(x) = k \arctan x - x$ 是奇函数, 只须讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数, 为此, 令

$$g(x) = \frac{x}{\arctan x} - k \quad x \in (0, +\infty)$$

$g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数相同, 又

$$g'(x) = \frac{\arctan x - \frac{x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2} = \frac{(1+x^2)\arctan x - x}{(1+x^2)(\arctan x)^2}$$

令 $\varphi(x) = (1+x^2)\arctan x - x$, 则 $\varphi'(x) = 2x\arctan x > 0 \quad x \in (0, +\infty)$.

$\varphi(0) = 0$, 则 $\varphi(x) > 0$, 从而 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\arctan x} - k \right) = 1 - k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\arctan x} - k \right) = +\infty.$$

1) 若 $k \leq 1$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 无零点, 原方程有唯一实根 $x = 0$;

2) 若 $k > 1$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点, 原方程有三个实根.

■ 练习题

1. (1996 年, 3 分) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$

(A) 无实根 (B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根 (D) 有无穷多个实根

2. (2003, 数二, 12 分) 讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

➡ 小结

方程根的问题通常是两个基本问题

1. 根的存在性问题

方法 1° 利用连续函数的零点定理

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根;

方法 2° 利用罗尔定理

若 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理条件, 且 $F'(x) = f(x) \quad x \in [a, b]$ 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根.

2. 根的个数

方法 1° 利用函数的单调性

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调(可通过 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$ 判定), 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内最多一个实根.

方法 2° 利用罗尔定理的推论

若在区间 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至多 n 个实根.

八、微分中值定理有关的证明题

13 (2007, 19 题, 11 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

【分析】 若令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则本题要证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F''(\xi) = 0$, 又 $F(a) = F(b) = 0$, 若能证明存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F(\eta) = 0$, 对 $F(x)$ 反复用罗尔定理可证明本题.

【证法一】 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$.

设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内的最大值为 M , 且分别在 $\alpha \in (a, b), \beta \in (a, b)$ 取到, 即 $f(\alpha) = M, g(\beta) = M$.

i) 若 $\alpha = \beta$, 取 $\eta = \alpha$, 则 $F(\eta) = 0$;

ii) 若 $\alpha \neq \beta$, 则

$$F(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = M - g(\alpha) \geq 0,$$

$$F(\beta) = f(\beta) - g(\beta) = f(\beta) - M \leq 0$$

此时, 由连续函数介值定理知在 α 与 β 之间至少存在点 η , 使

$$F(\eta) = 0$$

综上所述, 存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F(\eta) = 0$,

由罗尔定理知存在 $\xi_1 \in (a, \eta), \xi_2 \in (\eta, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0$$

再由罗尔定理得, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使得 $F''(\xi) = 0$, 即

$$f''(\xi) = g''(\xi)$$

【证法二】 为证明存在 $\eta \in (a, b)$ 使 $F(\eta) = 0$, 用反证法, 假设不存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F(\eta) = 0$, 由 $F(x)$ 的连续性知对一切 $x \in (a, b)$, $F(x)$ 恒大于零或恒小于零, 不妨设 $F(x) > 0$, 设 $g(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 取到最大值, 则 $F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$, 即 $f(x_0) > g(x_0)$, 从而可知 $f(x)$ 在 (a, b) 上的最大值必大于 $g(x)$ 在 (a, b) 上最大值, 这与题设矛盾, 故存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F(\eta) = 0$

以下同证法一.

【评注】 本题证明完全的考生并不多, 错误多种多样, 主要有

1) 部分考生将题设“存在相等的最大值”误解为“不但最大值相等, 而且取得最大值的点也相同”即存在 $\eta \in (a, b)$, 使

$$f(\eta) = \max_{x \in [a, b]} f(x), g(\eta) = \max_{x \in [a, b]} g(x)$$

这样 $f(\eta) = g(\eta)$, 证明就简单多了, 这显然是错误的.

2) 有些考生不考虑题设条件, 直接用柯西定理(柯西定理要求某函数导数不为零), 可能是受“只要题中有两个函数的导数等式, 就用柯西中值定理”的误导.

3) 还有考生见到题目条件中有二阶可导, 就想到用泰勒公式, 这同样是受某些参考书中的“解题套路”的影响.

14 (2005, 18 题, 12 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) =$

1. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\xi) = 1$.

【证明】 (I) 令 $F(x) = f(x) - 1 + x \quad x \in [0, 1]$ 由题设知, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又

$$F(0) = f(0) - 1 = -1 < 0, F(1) = f(1) - 1 = 0 > 0$$

由连续函数的零点定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$

即 $f(\xi) = 1 - \xi$

(II) 在区间 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} = f'(\eta) \quad \eta \in (0, \xi)$$

$$\frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = f'(\zeta) \quad \zeta \in (\xi, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{此时, } f'(\eta)f'(\zeta) &= \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} \cdot \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} \\ &= \frac{f(\xi)}{1 - \xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{\xi} = 1 \end{aligned}$$

15 (2009, 18 题, 11 分) (I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$;

(II) 证明, 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(I) **【证明】** 令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

由题设知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$

根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$F'(\xi) = 0$$

$$\text{即 } f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\text{故 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

注: 辅助函数也可构造为

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x,$$

$$F(x) = [f(b) - f(a)]x - (b - a)f(x) \text{ 等}$$

(II)【证法一】

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi) \quad \xi \in (0, x)$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 且当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\xi \rightarrow 0^+$, 所以

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f'(\xi) = A$$

故 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

【证法二】 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ (右导数定义)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{1} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= A$$

练习题

1. (1999, 数三, 7 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$. 试证

(1) 存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得

$$f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1.$$

2. (2010, 数三, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3)$$

(I) 证明: 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $f(\eta) = f(0)$;

(II) 证明: 存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

3. (1998, 数三, 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$$

4. (1999, 数二, 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

小结

微分中值定理证明题通常主要是三类问题

1. 证明存在一个点 ξ , 使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$.

如(题 13, 练习题 1) 这类问题一般是构造辅助函数用罗尔定理; 常用的辅助函数有:

要证明的结论

可考虑的辅助函数

$$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$$

$$xf(x)$$

$$\xi f'(\xi) + nf(\xi) = 0$$

$$x^n f(x)$$

$$\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

$$\frac{f(x)}{x}$$

$$\xi f'(\xi) - nf(\xi) = 0$$

$$\frac{f(x)}{x^n}$$

$$f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$$

$$e^{\lambda x} f(x)$$

$$f'(\xi) + f(\xi) = 0$$

$$e^x f(x)$$

$$f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

$$e^{-x} f(x)$$

2. 证明存在两个点 ξ, η (双中值) 使 $F(\xi, f(\xi), f'(\xi), \eta, f(\eta), f'(\eta)) = 0$

如(题 14 及练习题 3) 这里又可分为两种问题:

1) 不要求 $\xi \neq \eta$ (如练习题 3)

这种问题通常是在同一区间 $[a, b]$ 上用两次微分中值定理, 一般是用拉格朗日定理和柯西定理, 具体如何用要将要证结论中含有 ξ 的项和含有 η 的项分离开然后再确定.

2) 要求 $\xi \neq \eta$ (如题 14)

这种问题在不能在同一区间 $[a, b]$ 上用两次中值定理, 因为无法证明 $\xi \neq \eta$. 通常要将原区间 $[a, b]$ 分成两个区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$, 然后在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上分别用拉格朗日定理. 这里分点 c 的选段是关键, 题 14 中有第 (I) 问的提示, 选 $c = \xi$;

3. 有关泰勒中值定理的证明题

一般说来, 当题设条件或要证的结论中出现二阶或二阶以上导数往往要用泰勒中值定理 (如练习题 4, 条件中出现 $f(x)$ 有三阶连续导数, 要证结论 $f'''(\xi) = 3$).

第三章 一元函数积分学

本章导读

一元积分学是微积分的另一个主要内容. 与微分学不同, 积分是研究函数整体性态的. 其中不定积分是微分的逆运算, 定积分是一种和式的极限, 微积分基本定理和牛顿—莱布尼茨公式阐明了微分学和积分学的内在联系, 换元法和分部积分法是计算不定积分和定积分的两种主要方法, 微元法是用定积解决几何、物理等问题的一种常用的基本方法. 一元积分是多元积分的基础.

其主要内容

- (1) 不定积分与原函数的概念, 求不定积分的两种主要方法——换元法, 分部积分法;
- (2) 定积分的概念、性质及计算方法(换元、分部), 变上限积分及其导数;
- (3) 反常积分的概念与计算;
- (4) 定积分应用(几何、物理).

试题特点

定积分与不定积分是积学的两个基本概念, 计算不定积分和定积分是微积分的一种基本运算, 是考研的一个重点, 定积分应用是考研试卷中考应用题考的最多的一个内容.

本章常考题型

- (1) 不定积分、定积分及反常积分的计算;
- (2) 变上限积分及其应用;
- (3) 用定积分计算几何、物理量;
- (4) 一元微积分学的综合题.

考题详析

一、不定积分的计算

虽然近几年数学一试卷没有出现专门考不定积分的试题, 但不定积分是微积分的一种基本运算, 在其他题目中常常考查, 考生应重视.

练习题

1. (2001 年, 6 分) 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

小结

1. 不定积分的计算重点考察求不定的基本方法:

(1) 分项积分法;

(2) 凑微分法;

(3) 换元法;

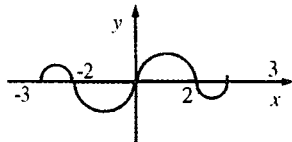
(4) 分部积分法.

考生不应用大量时间在一些难题和偏题上.

2. 专门考不定积分的试题并不是很多, 但计算不定积分是一种基本运算, 在其他试题中经常考(定积分、多元积分、微分方程), 所以考生必须熟练掌握不定积分的基本方法.

二、定积分概念、性质及几何意义

1 (2007, 3 题, 4 分) 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是



(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$

(B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$

(D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

【答案】 (C)**【解析一】** 四个选项中出现的 $F(x)$ 在四个点上的函数值可根据定积分的几何意义确定.

$$F(3) = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$$

$$F(2) = \int_0^2 f(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt = -\int_{-2}^0 f(t) dt = -(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(t) dt = -\int_{-3}^0 f(t) dt = -\left[\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{3}{8}\pi$$

则 $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$, 故应选(C).

【解析二】 由定积分几何意义知 $F(2) > F(3) > 0$, 排除(B)

又由 $f(x)$ 的图形可知 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, 从而

$$F(-3) = F(3) > 0, F(-2) = F(2) > 0$$

显然排除(A)和(D), 故选(C).

【评注】 1. 部分考生选(A), 可能是没注意到 $F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt = -\int_{-2}^0 f(t) dt = \frac{\pi}{2}$, 误以为 $F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt = -\frac{\pi}{2}$;

2. **【解析二】** 简单, 这里用到一个基本结论: 设 $f(x)$ 是连续函数, 则

$$f(x) \text{ 为奇函数} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 为偶函数,}$$

$$f(x) \text{ 为偶函数} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 为奇函数.}$$

2 (2011, 4 题, 4 分) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系为

(A) $I < J < K$.

(B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$.

(D) $K < J < I$.

【答案】 (B)

【解析】 同一区间上定积分大小比较最常用的思想就是比较被积函数大小.

由于当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $0 < \sin x < \cos x < 1 < \cot x$.

又因为 $\ln x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的单调增函数, 所以

$$\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x, x \in (0, \frac{\pi}{4})$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx,$$

即 $I < K < J$.

■ 练习题

1. (2002 年, 数二, 3 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos n \frac{\pi}{n}} \right) =$

2. (1997 年, 3 分) 设在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 记 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$, $S_2 = f(b)(b-a)$, $S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则

(A) $S_1 < S_2 < S_3$

(B) $S_2 < S_1 < S_3$

(D) $S_3 < S_1 < S_2$

(D) $S_2 < S_3 < S_1$

3. (2003 年, 4 分) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

(A) $I_1 > I_2 > 1$

(B) $1 > I_1 > I_2$

(C) $I_2 > I_1 > 1$

(D) $1 > I_2 > I_1$

◀▶ 小结

1. 定积分是一种和式的极限 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, 利用定积分定义求某种和式极限是

考查定积分概念的一种常见题型, 其关键是先提一个因子 $\frac{1}{n}$, 然后再确定被积函数和积分区间. 一种最常见的和式极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

2. 定积分的几何意义

定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴在 x 轴上方所围面积与在 x 轴下方所围面积之差.

3. 定积分的性质重点是不等式性质及积分中值定理.

(1) 不等式性质:

(i) 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$;

特别的, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(ii) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

(iii) $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$.

(2) 积分中值定理

(i) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$, 其中 $a < c < b$.

(ii) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx, \quad (a \leq c \leq b)$$

三、定积分计算

3 (2007, 11 题, 4 分) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

【解析一】 $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_1^2 \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_1^2 \frac{1}{x} de^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \Big|_1^2 + \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} d\frac{1}{x}$
 $= -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + e + e^{\frac{1}{x}} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{e}}{2}$

【解析二】 令 $\frac{1}{x} = t, x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx &= -\int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t de^t = te^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt \\ &= e - \frac{\sqrt{e}}{2} - e^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - (e - \sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}}{2} \end{aligned}$$

4 (2010, 10 题, 4 分) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx &= \int_0^{\pi} 2t^2 \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 ds \sin t \\ &= 2t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} t \sin t dt \\ &= 4t \cos t \Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} \cos t dx = -4\pi. \end{aligned}$$

5 (2005, 17 题, 11 分) 如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 L_1 与 L_2 与分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx.$$

【分析】 本题要求的是幂函数与 $f(x)$ 的高阶导数乘积的定积分, 通常的做法是用分部积分法, 并从图中得到 $f(x)$ 的相关导数值和函数值

【解析】 由点 $(3, 2)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点知 $f''(3) = 0$. 由于直线 L_1 与 L_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 且由图中不难看出直线 L_1 与 L_2 的斜率分别为 2 和 -2 知, $f'(0) = 2, f'(3) = -2$, 且由图不难看出 $f(0) = 0, f(3) = 2$. 则

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx &= \int_0^3 (x^2 + x) df''(x) \\ &= (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 (2x + 1) f''(x) dx \\ &= - \int_0^3 (2x + 1) df'(x) \\ &= - (2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\ &= - [7 \cdot (-2) - 2] + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\ &= 16 + 2f(x) \Big|_0^3 \\ &= 16 + 2(2 - 0) = 20. \end{aligned}$$

【评注】 本题是一道微积分学的综合题, 主要考查分部积分法和导数的几何意义. 与一般题不同的是, 本题中 $f(x), f'(x), f''(x)$ 在相关点的值不是直接给出, 而是隐含在图形中, 考生的错误主要是两种:

1. 有些考生误认为 $y = f(x)$ 是三次曲线, 从而假设 $y = ax^3 + bx^2 + cx$;
2. 由于概念不清, $f'(0), f'(3), f''(3)$ 求错.

■ 练习题

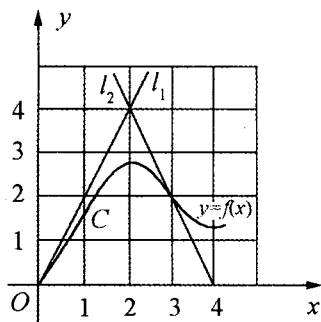
1. (2001, 3 分) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

2. (2008, 数二, 9 分) 计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3. (1999, 数三, 6 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 已知 $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$ 的值.

➡ 小结

计算是积分常用的有以下五种方法:



1. 利用牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. 利用定积分换元法;

3. 利用定积分的分部积分法;

4. 利用奇偶性, 周期性计算定积分;

$$(i) \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数} \\ 0 & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

(ii) 若 $f(x)$ 为周期为 T 的连续函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

5. 利用已有公式计算定积分:

$$(i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(ii) 若 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

四、变上限积分函数及其应用

6 (2008, 1 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t) dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

【答案】 (B).

【解析】 由于 $f'(x) = 2x \ln(2+x^2)$ 且 $\ln(2+x^2) \neq 0$, 则 $x=0$ 是 $f'(x)$ 唯一的零点, 故应选(B).

7 (2005, 8 题, 4 分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示 M 的充分必要条件是 N , 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数;

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数;

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数;

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

【答案】 (A).

【解析一】 若 $F(x)$ 是偶函数, 由导函数的一个基本结论“可导的偶函数其导函数为奇函数”知, $F'(x) = f(x)$ 为奇函数, 反之.

若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$$

则 $F(x)$ 是偶函数.

故应选(A).

【解析二】 排除法:取 $f(x) = \cos x + 1, F(x) = \sin x + x + 1$, 显然 $f(x)$ 连续, $F'(x) = f(x)$, 且 $f(x)$ 是偶函数, 周期函数, 但 $F(x)$ 不是奇函数 ($F(0) \neq 0$), 也不是周期函数, 排除(B) 和(C) 选项.

若取 $f(x) = x, F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 排除(D), 故应选(A).

【评注】 本题主要考查函数和其原函数之间的关系, 主要结论有:

(1) 可导的偶函数的导函数为奇函数, 而可导的奇函数的导函数为偶函数;

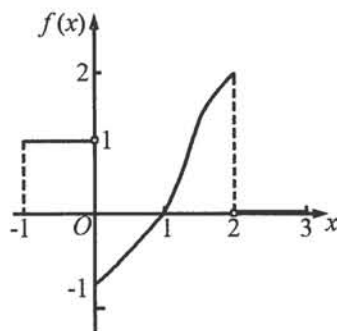
(2) 奇函数的原函数都是偶函数, 而偶函数的原函数之一为奇函数;

(3) 可导的周期函数其导函数仍为周期函数(但周期函数的原函数并不一定是周期函数,

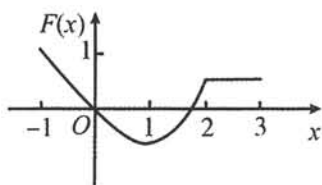
【解析二】 中已给出反例).

本题可直接利用(1) 和(2) 得出选项(A) 正确.

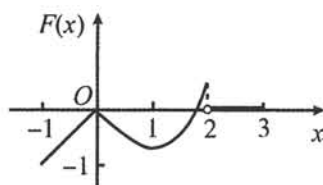
8 (2009, 3 题, 4 分) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示



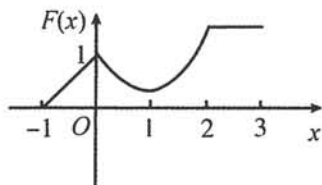
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



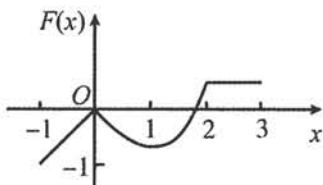
(A)



(B)



(C)



(D)

【答案】 (D).

【解析】 由 $y = f(x)$ 的图形可看出, $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上有界, 且只有两个间断点 ($x = 0, x = 2$), 则 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上可积, 从而 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 应为连续函数, 所以, 排除(B).

又由 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 知, $F(0) = 0$, 排除(C).

(A) 与 (D) 选项中的 $F(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上不同, 由

$$F(x) = \int_0^x 1 dt = x \quad x \in [-1, 0]$$

排除 (A), 故应选 (D).

9 (2008, 18 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续,

(I) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$;

(II) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

【证明】 (I) 对任意的 x , 由于函数 $f(x)$ 连续, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} \quad (\text{积分中值定理}) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) \end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 $x + \Delta x$ 之间.

由 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$ 可知, 函数 $F(x)$ 在 x 处可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

(II) **【证法一】** 由于对任意的 x , 有

$$\begin{aligned} [G(x+2)]' &= \left[2 \int_0^{x+2} f(t) dt - (x+2) \int_0^2 f(t) dt \right]' \\ &= 2f(x+2) - \int_0^2 f(t) dt \\ &= 2f(x) - \int_0^2 f(t) dt \\ G'(x) &= \left[2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt \right]' = 2f(x) - \int_0^2 f(t) dt \end{aligned}$$

所以 $[G(x+2) - G(x)]' = 0$

从而有 $G(x+2) - G(x) = C$ (常数)

又 $G(0+2) - G(0) = G(2) - G(0) = 0$

则 $C = 0, G(x+2) - G(x) = 0$, 即 $G(x)$ 也是以 2 为周期的周期函数.

【证法二】 由于对任意 x , 有

$$\begin{aligned} G(x+2) &= 2 \int_0^{x+2} f(t) dt - (x+2) \int_0^2 f(t) dt \\ &= 2 \int_0^2 f(t) dt + 2 \int_2^{x+2} f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt \\ &= 2 \int_2^{x+2} f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt \\ &\quad \int_2^{x+2} f(t) dt \xrightarrow{t=u+2} \int_0^x f(u+2) du = \int_0^x f(u) du = \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

则 $G(x+2) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt = G(x)$

故 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

【证法三】 由于对任意的 x , 有

$$\begin{aligned}
 G(x+2) &= 2 \int_0^{x+2} f(t) dt - (x+2) \int_0^2 f(t) dt \\
 &= 2 \int_0^x f(t) dt + 2 \int_x^{x+2} f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt
 \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 以 2 为周期, 则 $\int_x^{x+2} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$

$$G(x+2) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt = G(x)$$

故 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

【证法四】 由于对任意的 x , 有

$$\begin{aligned}
 G(x+2) &= 2 \int_0^{x+2} f(t) dt - (x+2) \int_0^2 f(t) dt \\
 \int_0^{x+2} f(t) dt &\stackrel{u=t-2}{=} \int_{-2}^x f(u+2) du = \int_{-2}^0 f(u) du + \int_0^x f(u) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } G(x+2) &= 2 \int_{-2}^0 f(u) du + 2 \int_0^x f(u) du - x \int_0^2 f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt \\
 &= G(x) + 2 \int_{-2}^0 f(u) du - 2 \int_0^2 f(t) dt = G(x)
 \end{aligned}$$

故 $G(x)$ 也是以 2 为周期的函数.

【评注】 1. 在(I)的证明中考生有如下错误:

$$(I) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)}{1}$$

上式中用了洛必达法则, 这是错误的, 因为变上限积分求导的结论正是本题要证的;

$$(II) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F'(\xi) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$$

上式中用到拉格朗日中值定理, 但这里 $F(x)$ 可导正是本题要证的结论;

2. 在(II)的证明中多次用到关于周期函数的结论:

若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

在(II)的证明中考生有两个典型的错误:

(I) 因为 $f(x)$ 以 2 为周期, 所以 $\int_0^x f(t) dt = \int_0^{x+2} f(t) dt$;

(II) 因为 $G'(x)$ 以 2 为周期, 则 $G(x)$ 也以 2 为周期.

■ 练习题

1. (1998 年, 3 分) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt =$

- (A) $xf(x^2)$ (B) $-xf(x^2)$ (C) $2xf(x^2)$ (D) $-2xf(x^2)$

2. (2006, 数二, 4 分) 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则

$\int_0^x f(t) dt$ 是

- (A) 连续的奇函数 (B) 连续的偶函数
(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数 (D) 在 $x=0$ 间断的偶函数

$$3. (2002, \text{数二}, 2 \text{ 分}) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 的表达式.

4. (1997, 8 分) 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

小结

与变上限积分函数有关的考题在考研试卷中几乎年年都有, 且题型变化也很多, 而解决这些问题的关键是有关变上限积分函数 $\int_a^x f(t) dt$ 的三个性质, 即连续性、可导性及奇偶性.

1) 连续性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续;

2) 可导性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

以上结论是变上限积分求导的理论基础, 虽然变上限积分求导题目很多, 但常见的就以下三种类型:

$$(I) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)'$$

这种类型直接利用公式

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

求解, 其中 $f(x)$ 连续, $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都可导.

$$(II) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \right)'$$

这种类型的被积函数 $f(x, t)$ 中含有求导变量 x , 不能直接求导, 通常是通过变量代换把 $f(x, t)$ 中的 x 换出来, 或设法把 x 从积分号中提出来, 然后再求导.

$$(III) \left(\int_a^b f(x, t) dt \right)'$$

事实上, (III) 是 (II) 的特例 ($\varphi(x) = a, \psi(x) = b$), 因此方法与 (II) 相同.

3) 奇偶性:

设 $f(x)$ 连续, 则

(i) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是偶函数;

(ii) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是奇函数.

五、与定积分有关的证明题

10 (2010, 17 题, 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt (n=1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(I) 【证明】 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 因为 $0 \leq \ln(1+t) \leq t$. 所以

$$0 \leq |\ln t| [\ln(1+t)]^n \leq t^n |\ln t|$$

从而有
$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$$

(II) 【解法一】 由(I)知

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n &= \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt \\ \int_0^1 t^n |\ln t| dt &= -\int_0^1 t^n \ln t dt \\ &= -\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^n |\ln t| dt = 0$, 由夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【解法二】 由于 $\ln x$ 为单增函数, 则当 $t \in [0, 1]$ 时, $\ln(1+t) \leq \ln 2$, 从而有

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n &= \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \ln^2 2 \int_0^1 |\ln t| dt \\ \int_0^1 |\ln t| dt &= -\int_0^1 \ln t dt = -t \ln t \Big|_0^1 + \int_0^1 dt = 1 \end{aligned}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln^2 2 = 0$, 由夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【解法三】 由(I)知

$$0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$$

又因为 $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$, 且 $t \ln t$ 在 $(0, 1]$ 上连续, 则 $t \ln t$ 在 $(0, 1]$ 上有界, 从而

存在 $M > 0$, 使

$$0 \leq |t \ln t| \leq M \quad t \in (0, 1]$$

$$\text{则 } \int_0^1 t^n |\ln t| dt \leq M \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{M}{n}$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n} = 0$ 及夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【评注】 本题是一道综合题, 主要考查定积分的不等式性质和求极限的夹逼准则, 同时这里用到一个常用的函数不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad x \in (0, +\infty)$$

许多考生在问题(I)中不知如何入手判断两个积分值的大小, 其主要原因是不熟悉以上的函数不等式.

■ 练习题

1. (2003, 数二, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$, 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内存在 ξ , 使 $\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a, b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η , 使 $f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$.

2. (2000, 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$.

试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

➡ 小结

有关定积分的证明题, 常见是两类问题, 证明与定积分有关的等式或不等式, 在证明中常用的结论是积分不等式性质和积分中值定理.

1. 证明积分等式的常用方法

1) 换元法;

2) 分部分积分法, 特别是被积函数中出现 $f(x)$ 的导数时;

3) 利用积分中值定理.

2. 证明积分不等式的常用方法

1) 利用积分不等的性质;

2) 利用积分中值定理;

3) 将积分上限换为 x , 转化为证明函数不等式.

六、反常积分的概念与计算

II (2010, 3 题, 4 分) 设 m, n 为正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关.

(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m, n 的取值都有关.

(D) 与 m, n 的取值都无关.

【答案】 (D).

【解析】 本题主要考查反常积分的敛散性, 题中的被积函数分别在 $x \rightarrow 0^+$ 和 $x \rightarrow 1^-$ 时无界

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx.$$

在反常积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 中, 被积函数只在 $x \rightarrow 0^+$ 时无界.

由于 $\frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \geq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}}{\frac{1}{\sqrt[n]{x}}} = 0$$

且反常积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛, 则 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛. 在反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 中, 被积函数

只在 $x \rightarrow 1^-$ 时无界. 由于 $\frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \geq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^{\frac{2}{n}}(1-x)}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}} = 0 \text{ (洛必达法则)}$$

且反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛, 所以, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛.

综上所述, 无论 m, n 取何正整数, 反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛, 故应选 (D).

■ 练习题

1. (2002, 3 分) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. (1996, 数三, 6 分) 计算 $\int_e^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx$

➡ 小结

反常积分有两种, 即无穷区间上的反常积分和无界函数的反常积分, 两种反常积分都定义为变限定积分的极限. 因此, 计算反常积分就是先算一个定积分, 再计算一个极限, 在解题过程中这两个步骤可一并进行, 这就得到计算反常积分的换元法和分部积分法, 这两种方法是计算反常积分的主要方法.

七、定积分应用

12 (2011, 9 题, 4 分) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\ln(1 + \sqrt{2}).$

【解析】 由 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \sec x dx$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)

所以

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

【评注】 本题主要考查曲线弧长的计算, 计算中用到一个基本积分公式

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

练习

1. (2006, 数二, 12 分) 已知曲线 L 的方程为: $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0).$

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

2. (2002, 数三, 7 分) 设 D_1 由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域; D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$.

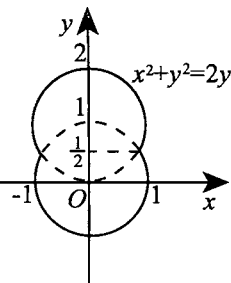
(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转而成旋转体体积 V_2 ;

(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值.

3. (2011, 数二, 11 分) 一容器的内侧是由图中曲线 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y (y \geq \frac{1}{2})$ 与 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq \frac{1}{2})$ 连接而成.

(I) 求容器的容积;

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功? (长度单位: m, 重力加速度为 $g \text{ m/s}^2$, 水的密度为 10^3 kg/m^3)



小结

考研试卷中几乎每年都有应用题. 而定积分的应用题是考的最多的, 定积分的应用题主要是两个方面

(1) 定积分在几何上的应用

定积分在几何上的应用主要包括: 计算平面图形的面积, 求平面曲线的弧长, 求旋转体的体积及表面积, 其中平面域面积和旋转体体积考的更多.

(2) 定积分在物理上的应用

定积分在物理上的应用主要包括: 求功、压力及引力. 比起几何应用物理应用考得少多了.

解决以上问题常用的两种方法

i) 代公式

几何应用通常是利用已有公式计算, 但有些问题没有现成公式, 此时, 用“微元法”.

ii) 微元法

物理应用没有现成公式可以直接用, 因此, 要用“微元法”. 首先建立“微元”, 即写出所计算的几何或物理量 M 在微小区间 $[x, x+dx]$ 上对应量的近似值 $dM = f(x)dx$, 然后微元积分, 得到所求的量 $M = \int_a^b f(x)dx$.

第四章 向量代数和空间解析几何

本章导读

本章内容只在硕士研究生入学考试数学试题中数学一要求, 从 1999 年到 2012 年, 只在 2006 年单独考过一个填空题. 此部分考题较少, 不是说该内容不重要, 在考试复习中也要重视这方面的内容.

试题特点

单独出题的几率较小, 即使出题也多为选择题或填空题, 试题难度不大. 但多元函数微分学在几何中应用、重积分、曲线和曲面积分的题目有许多涉及到空间解析几何. 主要要掌握向量的概念、运算及其运算性质, 会求各种形式的直线及平面方程, 特别是要记住常见的几种曲面方程以及它们在各坐标面上的投影.

考题详析

一、求点到平面的距离

1 (2006, 4 题, 4 分) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 直接利用点到平面距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

进行计算. 其中 (x_0, y_0, z_0) 为点的坐标, $Ax + By + Cz + D = 0$ 为平面方程.

$$d = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \sqrt{2}.$$

小结

1. 点 P_0 到过点 P 且以 S 为方向向量的直线的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times S|}{|S|}$.
2. 求两平行直线, 两平行平面间的距离, 转化为点到直线或平面的距离.

二、求转面的方程

2 (2009, 17 题, 11 分) 椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是过点 $(4, 0)$

且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(II) 求 S_1 及 S_2 之间的立体体积.

【分析】 S_1 及 S_2 为两个旋转面, 方程可直接写出; 所围立体的体积可利用定积分或二重积分来计算.

【详解】 (I) S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2 + z^2}{3} = 1$.

过点 $(4, 0)$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线方程为 $y = \pm(\frac{1}{2}x - 2)$, 切点为 $(1, \pm\frac{3}{2})$,

所以 S_2 的方程为 $y^2 + z^2 = (\frac{1}{2}x - 2)^2$.

(II) S_1 及 S_2 之间的体积等于一个底面半径为 $\frac{3}{2}$ 、高为 3 的锥体体积 $\frac{9}{4}\pi$ 与部分椭球体体积 V 之差, 其中 $V = \frac{3}{4}\pi \int_1^2 (4 - x^2) dx = \frac{5}{4}\pi$.

故所求体积为 $\frac{9}{4}\pi - \frac{5}{4}\pi = \pi$.

小结

近 14 年来, 本章内容单独只考过一个小题, 但在考过的题目中曾有其他类型. 如求直线及平面的方程, 向量代数等. 详见本章的练习题.

练习题

1. (1995, 3 分) 已知 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) =$ _____.

2. (1996, 3 分) 设一平面经过原点及点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 则此平面方程为 _____.

3. (1993, 3 分) 设有直线 $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与 $l_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 则 l_1 与 l_2 的夹角为

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

4. (1994, 6 分) 已知点 A 与 B 的直角坐标分别为 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 1)$, 线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S , 求由 S 及两平面 $z = 0, z = 1$ 所围成的立体体积.

第五章 多元函数的微分学

本章导读

本章主要研究二元函数的偏导数、全微分等概念, 要掌握计算它们的各种方法以及它们的应用. 一元函数中的许多结论可以推广到二元函数中来, 但有些结论是不成立的. 二元函数微分学比一元函数的微分学要复杂的多, 我们要掌握它们的共同规律, 踏踏实实做一些题目, 一定会收到预期的效果.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题, 分数约占试卷的 8%, 主要考查复合函数求偏导数及多元函数的极值, 难度不是很大. 一定要熟练掌握复合函数求偏导数的公式, 特别要注意抽象函数求高阶偏导数的题目, 以及复合函数求偏导数的方法在隐函数求偏导中的应用. 同时, 多元函数微分学在几何中的应用和求函数的极值、最值也是考研数学的一个重点.

考题详析

一、求多元函数的偏导数及全微分

1 (2005, 9 题, 4 分) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

$$(A) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$(B) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$(C) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$(D) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

【答案】 (B).

【解析】 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y),$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 应选(B).

【评注】 本题综合考查了复合函数求偏导和隐函数求偏导以及高阶偏导的计算. 作为做题技巧, 也可取 $\varphi(t) = t^2, \psi(t) = 1$, 则 $u(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2y$, 容易验算只有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 成立, 同样可找到正确选项(B).

2 (2005, 10 题, 4 分) 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^x = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$.
- (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
- (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$.
- (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$.

【答案】 (D).

【解析】 $F(x, y, z) = xy - z \ln y + e^x - 1$, 则

$$F'_x = y + e^x z, F'_y = x - \frac{z}{y}, F'_z = -\ln y + e^x x,$$

且 $F'_x(0, 1, 1) = 2, F'_y(0, 1, 1) = -1, F'_z(0, 1, 1) = 0$. 由此可确定相应的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$. 故应选(D).

【评注】 隐函数存在定理是首次直接考查, 有部分考生感到较生疏. 实际上本题也可从隐函数求偏导公式着手分析: 若偏导表达式有意义, 相应偏导数也就存在.

3 (2007, 12 题, 4 分) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f(x^y, y^x)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

【答案】 $f'_1 \cdot yx^{y-1} + f'_2 \cdot y^x \ln y$.

【解析】 利用复合函数的求导公式, 可直接得出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot yx^{y-1} + f'_2 \cdot y^x \ln y.$$

【评注】 二元复合函数求偏导时, 最好设出中间变量, 注意计算的正确性.

4 (2009, 9 题, 4 分) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

【答案】 $xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$.

【解析】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \cdot y$, 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$.

5 (2010, 2 题, 4 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $f''_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

- (A) x .
- (B) z .
- (C) $-x$.
- (D) $-z$.

【答案】 (B).

【解析】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_1(-\frac{y}{x^2}) + F'_2(-\frac{z}{x^2})}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{F'_1 \cdot \frac{y}{x} + F'_2 \cdot \frac{z}{x}}{F'_2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F'_1}{F'_2},$$

所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{F'_2} - \frac{yF'_1}{F'_2} = \frac{F'_2 \cdot z}{F'_2} = z$, 因此应选(B).

【评注】 此题也可两边求全微分求得 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

6 (2011, 11 题, 4 分) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=0, y=2} =$ _____.

【答案】 4.

【解析】 由 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y \sin xy}{1+(xy)^2}$, 得

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=0, y=2} = \left(\frac{2 \sin 2x}{1+4x^2} \right)' \Big|_{x=0} = \frac{4(1+4x^2) \cos 2x - 16x \sin 2x}{(1+4x^2)^2} \Big|_{x=0} = 4.$$

故应填 4.

7 (2011, 16 题, 9 分) 设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=1, y=1}$.

【分析】 利用多元复合函数的求偏导法则及 $g'(1)=0$.

【详解】 由题意 $g'(1)=0$. 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + yg'(x)f'_2$, 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y[xf''_{11} + g(x)f''_{12}] + g'(x)f'_2 + yg'(x)[xf''_{21} + g(x)f''_{22}],$$

所以, 令 $x=y=1$, 且注意到 $g(1)=1, g'(1)=0$, 得

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=1, y=1} = f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1).$$

小结

本题型包括如下几个方面的问题: 初等函数的偏导数和全微分, 求抽象函数的复合函数的偏导数, 由方程所确定的隐函数的偏导数和全微分, 含抽象函数的方程所确定的隐函数的偏导数和全微分, 由方程组所确定的隐函数的偏导数. 主要使用的方法是直接求导法, 公式法, 微分形式不变性.

此题型是常考的题型, 复习时须注意:

1. 要做一定量的题目, 从头到尾做下来, 不要因为繁杂而放弃, 复杂的运算能力是研究生考试的重要测试点.

2. 求抽象函数的高阶偏导数时, 要做到不遗漏、不重复.

另需注意的是, 关于偏导数、全微分、连续、极限等概念及其它们之间的关系, 虽然 2005—2011 年没有单独命题, 但应关注. 参见练习题 1、2 及 2012 年第 3 题.

练习题

1. (1997, 数一, 3 分) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处

(A) 连续, 偏导数存在.

(B) 连续, 偏导数不存在.

(C) 不连续, 偏导数存在.

(D) 不连续, 偏导数不存在.

2. (2002, 数一, 3 分) 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面 4 条性质:① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续,② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续,③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微,④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出性质 Q , 则有(A) $② \Rightarrow ③ \Rightarrow ①$ (B) $③ \Rightarrow ② \Rightarrow ①$.(C) $③ \Rightarrow ④ \Rightarrow ①$ (D) $③ \Rightarrow ① \Rightarrow ④$.3. (1998, 数一, 3 分) 设 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$, f 和 φ 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ 4. (2005, 数三, 16 题, 8 分) 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x, y) = f(\frac{y}{x}) + yf(\frac{x}{y})$,求 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.5. (2009, 数二, 17 题, 10 分) 设 $z = f(x+y, x-y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

二、求多元函数的极值

8 (2006, 10 题, 4 分) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.**【答案】** (D).

【解析】 作拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 并记对应 x_0, y_0 的参数 λ 的值为 λ_0 , 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

消去 λ_0 , 得

$$f'_x(x_0, y_0) \varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

整理得 $f'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{\varphi'_y(x_0, y_0)} f'_y(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0)$. (因为 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$),

若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 故选(D).

【评注】 本题考查了二元函数极值的必要条件和拉格朗日乘数法.

9 (2007, 17 题, 11 分) 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

【分析】 本题求二元函数在闭区域的最值. 先求出函数在区域内的驻点, 然后比较驻点的函数值和边界上的极值, 则最大者为最大值, 最小者为最小值.

【详解】 因为 $\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy^2 = 0 \\ f'_y = 4y - 2x^2y = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$,

所以函数在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 内的驻点为 $(\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$ 和 $(0, 0)$.

下求函数在边界线上的极值. 作拉格朗日函数如下

$$L(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4), \text{ 则}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4y - 2x^2y + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \text{ 解之得 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}, \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

于是条件驻点为 $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(0, 2)$, $(\pm 2, 0)$.

$$\text{而 } f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2, f(\pm\sqrt{3}, 1) = 2, f(0, 0) = 0, f(0, 2) = 8, f(\pm 2, 0) = 4.$$

比较以上函数值, 可得函数在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值为 8, 最小值为 0.

【评注】 多元函数的最值问题, 一般都用拉格朗日乘数法解决. 利用拉格朗日乘数法确定目标函数的可能极值点后, 不必一一检验它们是否为极值点, 只要比较目标函数在这些点处的值, 最大者为最大值, 最小者为最小值. 但当只有唯一的可能极值点时, 目标函数在这点处必取到最值, 究竟是最大值还是最小值需根据问题的实际意义判定.

10 (2008, 17 题, 11 分) 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$, 求曲线 C 距 xOy 面最远和最近的点.

【分析】 点 (x, y, z) 到 xOy 平面的距离为 $|z|$, 故求 C 上距离 xOy 面最远点和最近点的坐标, 等价于求函数 $H = z^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ 与 $x + y + 3z = 5$ 下的最大值点和最小值点.

【详解】 设 $P(x, y, z)$ 为曲线 C 上的任意一点, 则点 P 到 xOy 平面的距离为 $|z|$, 问题转化为求 z^2 在约束条件 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ 与 $x + y + 3z = 5$ 下的最值点. 令拉格朗日函数为

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2z^2) + \mu(x + y + 3z - 5)$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = -4\lambda z + 3\mu = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ F'_\mu = x + y + 3z - 5 = 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } x = y, \text{ 从而 } \begin{cases} 2x^2 - 2z^2 = 0, \\ 2x + 3z = 5, \end{cases}$$

$$\text{得可能极值点: } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5, \\ y = -5. \end{cases}$$

$$\text{又 } z \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2} = 1, \quad z \Big|_{(-5,-5)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + y^2} = 5.$$

根据几何意义, 曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点, 故所求点依次为 $(-5, -5, 5)$ 和 $(1, 1, 1)$.

【评注】 本题考察两个约束条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的函数 $u = f(x, y, z)$ 的条件极值问题, 可类似地构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$$

解出可能极值点后, 直接代入目标函数计算函数值再比较大小确定相应的极值(或最值)即可.

11 (2009, 15 题, 9 分) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

【分析】 先求函数的驻点, 再用二元函数取得极值的充分条件判断.

【详解】 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0 \\ f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$ 得 $x = 0, y = \frac{1}{e}$.

而 $f''_{xx} = 2(2 + y^2), f''_{yy} = 2x^2 + \frac{1}{y}, f''_{xy} = 4xy$. 则

$$f''_{xx} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2(2 + \frac{1}{e^2}), f''_{xy} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0, f''_{yy} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e.$$

因为 $f''_{xx} > 0, (f''_{xy})^2 - f''_{xx}f''_{yy} < 0$, 所以二元函数存在极小值 $f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

12 (2011, 3 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f(0) > 1, f''(0) > 0$.

(B) $f(0) > 1, f''(0) < 0$.

(C) $f(0) < 1, f''(0) > 0$.

(D) $f(0) < 1, f''(0) < 0$.

【答案】 (A).

【解析】 由 $z = f(x) \ln f(y)$, 有 $z'_x(x, y) = f'(x) \ln f(y), z'_y(x, y) = f(x) \frac{f'(y)}{f(y)}$,

所以 $z'_x(0, 0) = f'(0) \ln f(0) = 0, z'_y(0, 0) = f(0) \frac{1}{f(0)} f'(0) = 0$.

故 $(0, 0)$ 是 $z = f(x) \ln f(y)$ 可能的极值点. 经计算得

$$z''_{xx}(x, y) = f''(x) \ln f(y),$$

$$z''_{yy}(x, y) = f(x) \frac{f''(y)f(y) - f'^2(y)}{f^2(y)},$$

$$z''_{xy}(x, y) = f'(x) \frac{f'(y)}{f(y)}.$$

所以 $A = z''_{xx}(0, 0) = f''(0) \ln f(0), B = z''_{xy}(0, 0) = 0, C = z''_{yy}(0, 0) = f''(0)$.

由 $B^2 - AC < 0$, 且 $A > 0, C > 0$, 有 $f''(0) > 0, f(0) > 1$. 因此应选(A).

【评注】 此题于最近几年关于直接求二元函数的极值形式上有所不同, 但实质是一样的.

小结

1. 二元函数极值的求法

(1) 解方程组 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, 得所有驻点;

(2) 对每一个驻点 (x_0, y_0) , 求 $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ 的值;

(3) 由 $B^2 - AC$ 的符号确定是否为极值点, 是极大值点还是极小值点.

2. 条件极值的求法用拉格朗日乘数法.

3. 最值的求法

闭区域上连续多元函数的最值可能在区域内部或边界上达到, 先求出在区域内部的所有驻点以及偏导数不存在的点, 比较这些点与边界上点的函数值, 最大者即为最大值, 最小者即为最小值. 对于实际问题一般根据实际背景来确定是否取最值(如可能极值点唯一, 则极小(大)值点即最小(大)值点).

■ 练习题

1. (2003, 数一, 4 分) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1, \text{ 则}$$

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
 (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点.
 (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
 (D) 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点.

2. (2004, 数一, 19 题, 12 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由

$$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0 \text{ 确定的函数, 求 } z = z(x, y) \text{ 的极值点和极值.}$$

3. (2005, 数二, 20 题, 10 分) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1)$

$$= 2. \text{ 求 } f(x, y) \text{ 在椭圆域 } D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\} \text{ 上的最大值和最小值.}$$

4. (2008, 数二, 21 题, 11 分) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大和最小值.

5. (2010, 数三, 17 题, 10 分) 求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

6. (2011, 数三, 16 题, 10 分) 已知函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, $z = f(x + y, f(x, y))$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1, y=1}$.

三、反问题

13 (2006, 18 题, 12 分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

【分析】 利用复合函数偏导数计算方法求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 即可得 (I). 按常规方法解 (II) 即可.

【解析】 (I) 设 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(u) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(u) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\ &= f''(u) \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(u) \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(u) \cdot \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 得 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$.

(II) 令 $f'(u) = p$, 则 $p' + \frac{p}{u} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{du}{u}$, 两边积分得

$$\ln p = -\ln u + \ln C_1, \text{ 即 } p = \frac{C_1}{u}, \text{ 亦即 } f'(u) = \frac{C_1}{u}.$$

由 $f'(1) = 1$ 可得 $C_1 = 1$. 所以有 $f'(u) = \frac{1}{u}$, 两边积分得 $f(u) = \ln u + C_2$,

由 $f(1) = 0$ 可得 $C_2 = 0$, 故 $f(u) = \ln u$.

【评注】 本题为基础题型, 着重考查多元复合函数的偏导数的计算及可降阶方程的求解.

小结

解题思路: 由已知满足的关系式或条件, 利用多元函数微分学的方法和结论, 求出待定的函数、参数等. 特别是已知偏导数或偏导数所满足的关系式(方程)求函数, 主要有两种题型:

1. 已知偏导数, 通过不定积分求函数.

设 $f(x, y)$ 有连续偏导数, 且 $f'_x(x, y) = g(x, y), f'_y(x, y) = h(x, y)$, 则有

$$f(x, y) = \int f'_x(x, y) dx + \varphi(y) = \int g(x, y) dx + \varphi(y),$$

$$f(x, y) = \int f'_y(x, y) dy + \psi(x) = \int h(x, y) dy + \psi(x).$$

2. 已知多元函数的偏导数所满足的方程, 通过变量变换, 化为一元函数的导数所满足的方程, 即常微分方程, 求解微分方程得到函数.

练习题

1. (1996, 数一, 3 分) 已知 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 a 等于
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2.

四、求方向导数与梯度

14 (2005, 3 题, 4 分) 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}$, 则

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1,2,3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{3}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{6}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{9}$, 于是所求方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1,2,3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【评注】 本题若 $\mathbf{n} = \{m, t, l\}$ 非单位向量, 则应先将其单位化, 从而得方向余弦为:

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + t^2 + l^2}}, \cos \beta = \frac{t}{\sqrt{m^2 + t^2 + l^2}}, \cos \gamma = \frac{l}{\sqrt{m^2 + t^2 + l^2}}.$$

15 (2008, 2 题, 4 分) 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度等于

- (A) i . (B) $-i$. (C) j . (D) $-j$.

【答案】 (A).

【解析】 直接利用公式 $\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} j$.

$$\text{因为 } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\text{于是 } \left. \text{grad} f(x, y) \right|_{(0,1)} = f'_x(0,1)i + f'_y(0,1)j = 1 \cdot i + 0 \cdot j = i.$$

故应选(A).

小结

1. 求方向导数、梯度直接按定义, 考题较易, 但方向有时不直接给出需计算方向余弦.
2. 若函数在一点可微, 则在此点任何方向的方向导数均存在, 而梯度则是方向导数取得最大值的方向, 梯度的模为方向导数的最大值.
3. 在考研题目中, 有时还会涉及到散度和旋度.

练习题

1. (1996 年, 3 分) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在 $A(1, 0, 1)$ 点处沿 A 点指向 $B(3, -2, 2)$ 点方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

第六章 重积分

本章导读

本章考查的重点是二重积分的计算, 除了掌握基本的计算方法, 须注意对称性、拆分区域、拆分函数、交换积分次序、交换积分坐标系等的应用. 三重积分的考查要求较低.

试题特点

由于重积分可以糅合在线面积分中, 单独对重积分的测试不是每年试题中均出现, 分数约占试卷的 4~5%. 主要集中在二重积分计算的考查, 往往在被积函数和积分区域设置障碍, 因而要掌握一定的方法和技巧. 另外, 被积函数为抽象函数的二重积分值得关注.

考题详析

一、基本概念及性质

1 (2009, 2 题, 4 分) 如图, 正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区域

$D_k (k = 1, 2, 3, 4), I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\}$

(A) I_1

(B) I_2

(C) I_3

(D) I_4

【答案】 (A).

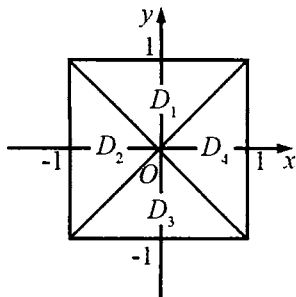
【解析】 D_2, D_4 两区域关于 x 轴对称, 被积函数是关于 y 的奇函数, 所以 $I_2 = I_4 = 0$;

D_1, D_3 两区域关于 y 轴对称, 被积函数是关于 x 的偶函数, 所以

$$I_1 = 2 \iint_{\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}} y \cos x dx dy > 0;$$

$$I_3 = 2 \iint_{\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq -x\}} y \cos x dx dy < 0,$$

因而正确答案为 (A).



2 (2010, 4 题, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

【答案】 (D).

【解析】 因为

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{n(1+\frac{i}{n})n^2[1+(\frac{j}{n})^2]} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})[1+(\frac{j}{n})^2]} \cdot \frac{1}{n^2} \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy,
 \end{aligned}$$

所以应选(D).

【评注】 1. 也可用定积分定义计算

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right) \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} \cdot \frac{1}{n} \right) \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.
 \end{aligned}$$

2. 以往多次考过定积分定义求极限, 本题是首次考查二重积分定义求极限, 题目较新颖.

小结

1. $\iint_D f(u, v) du dv = A$ 为常数, 与积分变量用哪个字母表示无关.

2. 二重积分不等式性质须注意条件, 如

(1) $f(x, y) \geq g(x, y)$ 得不到 $\iint_D f(x, y) dx dy > \iint_D g(x, y) dx dy$, 但加上 $f(x, y), g(x, y)$ 连续且 $f(x, y)$ 不恒等于 $g(x, y)$ 结论正确.

(2) $f(x, y) \geq 0$ 且 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ 推不出 $f(x, y) = 0$, 但加上 $f(x, y)$ 连续, 则结论正确.

练习题

1. (2005, 数三, 8 题, 4 分) 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma, I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma,$
 $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则
(A) $I_3 > I_2 > I_1$.(B) $I_1 > I_2 > I_3$.(C) $I_2 > I_1 > I_3$.(D) $I_3 > I_1 > I_2$.

二、二重积分的基本计算

3 (2011, 19 题, 11 分) 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0$,

$\iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分

$$\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy.$$

【分析】 把二重积分化为二次积分, 用分部积分法.

【解析】 $\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y df'_x(x, y) \right) dx.$

用分部积分法

$$\int_0^1 y df'_x(x, y) = y f'_x(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x, y) dy = - \int_0^1 f'_x(x, y) dy.$$

交换积分次序

$$\int_0^1 x \left(\int_0^1 y df'_x(x, y) \right) dx = - \int_0^1 x \left(\int_0^1 f'_x(x, y) dy \right) dx = - \int_0^1 \left(\int_0^1 x f'_x(x, y) dx \right) dy.$$

再用分部积分法

$$\int_0^1 x f'_x(x, y) dx = \int_0^1 x df(x, y) = x f(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 f(x, y) dx.$$

所以
$$\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = a.$$

【评注】 注意在计算二次积分的过程中对分部积分法及已知条件的应用.

小结

1. 计算二重积分的步骤为(1)画出积分区域 D 的草图.(2)用不等式组表示积分区域 D .(3)把二重积分表示为二次积分.(4)计算二次积分.

2. 注意积分坐标及积分次序的选择, 一般说: 若积分区域为圆域或圆域的一部分, 被积函数为形如 $f(\sqrt{x^2 + y^2}), f\left(\frac{y}{x}\right), f\left(\frac{x}{y}\right)$ 等, 可考虑采用在极坐标系下进行计算.

3. 利用直角坐标计算二重积分 $d\sigma = dx dy$

若 $D: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$

若 $D: c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$

4. 利用极坐标计算 $d\sigma = r dr d\theta$, 计算方法同直角坐标, 一般先 r , 后 θ

若极点 O 在积分区域 D 的外部, D 可以表示为 $D: \alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

若极点 O 在积分区域 D 的边界上, D 可以表示为 $D: \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq \varphi(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

若极点 O 在积分区域 D 的内部, D 的边界方程为 $r = \varphi(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

5. 注意利用二重积分的对称性化简运算.

■ 练习题

1. (2006, 数三, 16 题, 7 分) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

2. (2009, 数二、三, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (x - y) dx dy$. 其中 $D = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

3. (2011, 数二, 13 题, 4 分) 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴所围成, 则二重积分 $\iint_D xy d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、利用区域的对称性及函数的奇偶性计算积分

4 (2006, 15 题, 10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$.

【分析】 由于积分区域 D 关于 x 轴对称, 故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分, 又积分区域为圆域的一部分, 则将其化为极坐标系下累次积分即可.

【解析】 积分区域 D 如右图所示. 因为区域 D 关于 x 轴对称,

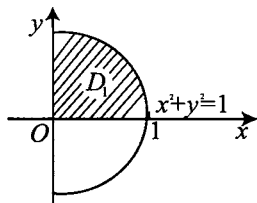
函数 $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ 是变量 y 的偶函数,

函数 $g(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$ 是变量 y 的奇函数. 则

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1 + r^2} dr = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

$$\iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = 0,$$

$$\text{故 } \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy + \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$



【评注】 只要见到积分区域具有对称性的二重积分计算问题, 就要想到考查被积函数或其代数和的每一部分是否具有奇偶性, 以便简化计算.

➡ 小结

1. 如下结论十分重要

(1) 若 D 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, -y) = -f(x, y) \text{ 时,} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(x, -y) = f(x, y) \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 的上半平面部分.

(2) 若 D 关于 y 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(-x, y) = -f(x, y) \text{ 时,} \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(-x, y) = f(x, y) \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 D_2 为 D 的右半平面部分.

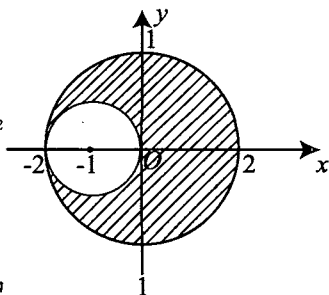
(3) $x \longleftrightarrow y$ 互换, D 保持不变时, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy.$$

2. 若积分区域不具有对称性或被积函数不具有奇偶性可考虑拆分区或函数.

■ 练习题

1. (2004, 数三, 8 分) 求 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面区域(如图).



2. (2005, 数二, 10 题, 4 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

(A) $ab\pi$.

(B) $\frac{ab}{2}\pi$.

(C) $(a+b)\pi$.

(D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

3. (2010, 数三, 16 题, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$ 所围成.

四、分块函数积分的计算

5 (2005, 15 题, 11 分) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$.

【分析】 首先应设法去掉取整函数符号, 为此将积分区域分为两部分即可.

【解析】 令 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,

$D_2 = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + 2 \iint_{D_2} xy dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

【评注】 对于二重积分(或三重积分)的计算问题, 当被积函数为分块函数时应利用积分的可加性分区域积分. 而实际考题中, 被积函数经常为隐含的分块函数, 如取绝对值函数 $|f(x, y)|$ 、取极值函数 $\max\{f(x, y), g(x, y)\}$ 以及取整函数 $[f(x, y)]$ 等等.

小结

形如积分 $\iint_D |f(x, y)| d\sigma$ 、 $\iint_D \max\{f(x, y), g(x, y)\} d\sigma$ 、 $\iint_D \min\{f(x, y), g(x, y)\} d\sigma$ 、

$\iint_D [f(x, y)] d\sigma$ 、 $\iint_D \operatorname{sgn}\{f(x, y) - g(x, y)\} d\sigma$ 等的被积函数均应当作分区域函数看待, 利用积分的可加性分区域积分.

练习题

1. (2005, 数二、三, 9 分) 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

2. (2008, 数二、三, 11 分) 计算 $\iint_D \max(xy, 1) dx dy$, 其中

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

五、交换积分次序及坐标系

6 (2006, 8 题, 4 分) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

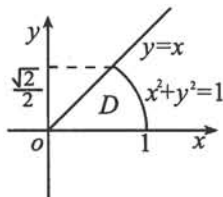
(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

【答案】 (C).

【解析】 由题设可知积分区域 D 如右图所示, 显然是 Y 型域, 则

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$



故选(C).

【评注】 本题为基本题型, 关键是首先画出积分区域的图形.

小结

1. 交换积分次序是常考的题型, 通常有如下两种情形

(1) 题目本身要求交换积分次序;

(2) 计算时, 按原积分次序计算比较复杂或无法计算, 需交换积分次序, 一般可从被积函数的类型看出, 如含有形如 e^x , $\frac{\sin x}{x}$ 等, 应后对 x 积分.

2. 须注意的是一定要准确地画出积分区域.

3. 有些累次积分仅交换积分次序不能解决问题, 此时应考虑交换坐标系.

4. 极坐标系下的交换积分次序虽然没有考过, 但须关注.

■ 练习题

1. (2007, 数二、三, 8 题, 4 分) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

2. (2010, 数二, 20 题, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

六、三重积分的计算

7 (2009, 12 题, 4 分) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{4}{15}\pi$.

【解析】 利用球面坐标

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi \rho^2 \cos^2 \varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d(-\cos \varphi) \int_0^1 \rho^4 d\rho \\ &= -\frac{2\pi}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$

【注】 也可利用柱坐标

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_{-1}^1 z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dx dy = \int_{-1}^1 z^2 \pi(1-z^2) dz = \frac{4}{15}\pi.$$

➡ 小结

1. 直角坐标下计算三重积分

(1) “先一后二”法

若 $\Omega: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

(2) “先二后一”法(适用于旋转体或垂直于某轴的截面的面积为已知的情形)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

2. 柱面坐标下计算三重积分

当积分区域 Ω 的边界曲面方程容易用极坐标表示, 且积分区域 Ω 为柱体, 或被积函数为

$$f(x^2 + y^2) \text{ 时, 三重积分应采用柱坐标变换的换元公式 } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \text{ 此时, 应注意确定变量 } r, \varphi, \theta$$

的取值范围 $\Omega: a \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta), \psi_1(r, \theta) \leq z \leq \psi_2(r, \theta)$,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r dr \int_{\psi_1(r, \theta)}^{\psi_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz.$$

3. 球面坐标系下计算三重积分

当积分区域 Ω 的边界曲面为球面、圆锥面, 或被积函数为 $f(x^2 + y^2 + z^2)$ 时, 三重积分应采用

$$\text{球坐标变换的换元公式 } \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \text{ 此时, 应注意确定变量 } r, \varphi, \theta \text{ 的取值范围}$$

$$\Omega: a \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta), \psi_1(\varphi, \theta) \leq r \leq \psi_2(\varphi, \theta),$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{\psi_1(\varphi, \theta)}^{\psi_2(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr$$

4. 在计算过程中, 注意三重积分对称性的使用.

■ 练习题

1. (2003, 数一, 12 分) 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}, G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-1}^t f(x^2) dx},$$

其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}, D(t) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

七、重积分的应用

8 (2010, 12 题, 4 分) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心坐标 $\bar{z} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解析】
$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 z dz}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \left(\frac{1}{2} - \frac{r^4}{2} \right) dr}{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^1 d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

故应填 $\frac{2}{3}$.

小结

重积分的应用在考题中出现的频率较低，数学一的同学主要掌握几何应用即可。

第七章 曲线、曲面积分

本章导读

本章一直是研究生考试命题的重要内容, 重点是第二类积分的计算、平面曲线积分与路径无关的判定和相关计算与证明, 要熟练掌握与格林公式、高斯公式相关的各类题型及其思路、方法、技巧等.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题, 分数约占试卷的 9%. 主要考查各类线面积分的计算, 重点是第二类线面积分的计算. 第一类积分的考查相对较少, 且难度不大.

考题详析

一、第一类曲线积分的计算

1 (2009, 11 题, 4 分) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

【答案】 $\frac{13}{6}$.

【解析】 由题意可知 $ds = \sqrt{1+4x^2} dx$. 所以,

$$\begin{aligned} \int_L x ds &= \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2} d(1+4x^2) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1+4x^2)^3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

小结

计算第一类曲线积分, 首先, 应将积分曲线方程代入被积函数, 对积分进行化简; 其次, 考察积分曲线是否关于 x 轴 (或 y 轴) 对称, 并且被积函数 (或被积函数的某一部分) 是否关于变量 y (或变量 x) 为奇、偶函数, 若是, 则利用对称性化简积分; 最后, 写出积分曲线的参数方程, 将曲线积分化为参变量的定积分.

1. 第一类曲线积分的对称性质

(1) 若积分曲线 L 关于 x 轴对称, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & f(x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \int_{L_1} f(x, y) ds, & f(x, -y) = f(x, y) \end{cases},$$

其中 L_1 为 L 在 x 轴上方或下方的部分.

(2) 若积分曲线 L 关于 y 轴对称, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & f(-x, y) = -f(x, y) \\ 2 \int_{L_2} f(x, y) ds, & f(-x, y) = f(x, y) \end{cases},$$

其中 L_2 为 L 在 y 轴左边或右边的部分.

(3) 若积分曲线 L 关于变量 x, y 具有轮换对称性, 即交换变量 x 与 y 积分曲线 L 的方程不变, 或积分曲线 L 关于直线 $y = x$ 对称, 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds = \frac{1}{2} \int_L [f(x, y) + f(y, x)] ds.$$

2. 第一类曲线积分的计算方法

设积分曲线 L 的参数方程为: $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

特别地, 若积分曲线 L 的直角坐标方程为: $y = y(x), a \leq x \leq b$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

若积分曲线 L 的极坐标方程为: $\rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta] \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta.$$

■ 练习题

1. (1989, 3 分) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分

$$\int_L (x^2 + y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. (1998, 3 分) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、第二类曲线积分的计算

2 (2007, 6 题, 4 分) 设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N, T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列小于零的是

(A) $\int_T f(x, y) dx.$

(B) $\int_T f(x, y) dy$

(C) $\int_T f(x, y) ds.$

(D) $\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy.$

【答案】 (B).

【解析】

设 M, N 点的坐标分别为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则由题设可知 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.

因为 $\int_T f(x, y) dx = \int_T dx = x_2 - x_1 > 0,$

$$\int_T f(x, y) dy = \int_T dy = y_2 - y_1 < 0;$$

$$\int_T f(x, y) ds = \int_T ds = T \text{ 的弧长} > 0;$$

$$\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = \int_T 0 dx + 0 dy = 0.$$

所以应选(B).

【评注】 本题属基本概念题型, 注意求对坐标的曲线积分时要考虑方向, 对于曲线积分和曲面积分, 应尽量先将曲线, 曲面方程代入被积表达式化简, 然后再计算.

3 (2008, 16 题, 9 分) 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

【分析】 利用曲线的参数方程直接转化为定积分计算或添加线段使之形成封闭曲线, 再用格林公式, 而添加线段上用参数法.

$$\begin{aligned} \text{【详解一】 } \int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy &= \int_0^\pi [\sin 2x + 2(x^2 - 1)\sin x \cdot \cos x] dx \\ &= \int_0^\pi x^2 \sin 2x dx = -\frac{x^2}{2} \cos 2x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi x \cos 2x dx \\ &= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{x}{2} \sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx = -\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

【详解二】 添加 x 轴上从点 $(\pi, 0)$ 到点 $(0, 0)$ 的线段 L_1 , D 为 L 与 L_1 围成的封闭区域, 则

$$\begin{aligned} \int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy &= \oint_{L+L_1} \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy - \int_{L_1} \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy \\ &= -\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy + \int_0^\pi \sin 2x dx \\ &= -\iint_D 4xy dx dy + 0 = -\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} 4xy dy \\ &= -\int_0^\pi 2x \sin^2 x dx = -\int_0^\pi x(1 - \cos 2x) dx = -\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

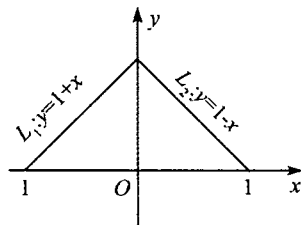
4 (2010, 11 题, 4 分) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|$, $x \in [-1, 1]$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点是 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy =$ _____.

【答案】 0.

【解析】 如图所示 $L = L_1 + L_2$, 其中

$$L_1: y = 1 + x, (-1 \leq x < 0), L_2: y = 1 - x, (0 \leq x < 1).$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_L xy dx + x^2 dy &= \int_{L_1} xy dx + x^2 dy + \int_{L_2} xy dx + x^2 dy \\ &= \int_{-1}^0 [x(1+x) + x^2] dx + \int_0^1 [x(1-x) - x^2] dx \\ &= \int_{-1}^0 (2x^2 + x) dx + \int_0^1 (x - 2x^2) dx = 0. \end{aligned}$$



【评注】 此题也可补曲线, 用格林公式.

5 (2011, 12 题, 4 分) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正方向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____.

【答案】 π .

【解析】 用斯托克斯公式直接计算

$$\begin{aligned}\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz &= \iint_{z=x+y} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \\ dydz & dzdx & dxdy \end{vmatrix} = \iint_{z=x+y} y dydz + x dzdx + dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-x-y) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r\cos\theta - r\sin\theta) r dr = \pi.\end{aligned}$$

故应填 π .

【评注】 注意其中对坐标的曲面积分的计算, 用到了矢量点积法. 本题可把曲线的参数方程写出, 用参数法计算也可.

小结

计算第二类平面曲线积分一直是历年考试的重点内容, 一般可按以下思路进行分析与求解:

1. 对于积分曲线 L 不是闭曲线的积分

(1) 直接用参数法化曲线积分为参变量的定积分, 此时积分曲线 L 的方程容易写成参数方程, 且代入积分后所得的定积分容易计算.

设积分曲线 L 的参数方程为: $x = x(t), y = y(t)$, 则

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt,$$

特别注意: α, β 分别为积分曲线 L 的起点与终点所对应的参变量 t 的值.

(2) 添加有向曲线(直线)段 L^* , 使 $L + L^*$ 为闭曲线, 且方向同为正向(或负向), 则

$\int_L P dx + Q dy = \int_{L+L^*} P dx + Q dy - \int_{L^*} P dx + Q dy$, 第一个积分利用格林公式, 第二个积分利用参数法计算.

(3) 考察积分是否与路径无关, 即检验 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 是否成立? 若成立, 则取特殊路径积分, 即构造与 L 具有相同起点与终点的曲线 L^* (一般为平行于坐标轴的折线段), 且使得 P, Q 在 L 与 L^* 所围成的区域内没有奇点, 有 $\int_L P dx + Q dy = \int_{L^*} P dx + Q dy$; 若不成立, 但可将被积表达式分为两部分, 使其中的某一部分容易求出原函数, 则该部分的积分归结为求原函数, 另一部分用参数法计算.

2. 对于积分曲线 L 为闭曲线的积分:

(1) 如果在积分曲线 L 所围成的区域 D 内不含奇点, 则直接在 D 上利用格林公式.

(2) 如果在积分曲线 L 所围成的区域 D 内含有奇点(也就是使 P, Q 的一阶偏导数不连续的点, 一般地, 奇点都是使得 P, Q 或它们的偏导数没有意义的点), 则不能直接在 D 上利用格林公式, 此时可先考虑构造闭曲线挖去奇点, 再利用格林公式.

(3) 也可考虑用参数法化曲线积分为参变量的定积分.

注意: 在计算曲线曲面积分(不管是第一类还是第二类)时, 应先考虑能否将积分曲线曲面方程代入被积表达式, 对积分进行化简. 另若曲线 L 垂直于 x 轴, 则沿 L 对坐标 x 的积分为零.

■ 练习题

1. (2001 年, 7 分) 计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

2. (2004 年, 第 3 题, 4 分) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$ 的值为_____.

三、平面曲线积分与路径无关的问题

6 (2005, 19 题, 12 分) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$;

(II) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

【分析】 证明(I)的关键是如何将封闭曲线 C 与围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线相联系, 这可利用曲线积分的可加性将 C 进行分解讨论; 而(II)中求 $\varphi(y)$ 的表达式, 显然应用积分与路径无关即可.

【解析】 (I) 如图, 将 C 分解为: $C = l_1 + l_2$, 另作一条曲线 l_3 围绕原点且与 C 相接, 则

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} &= \oint_{l_1+l_2} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{l_2+l_3} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(II) 设 $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$, $Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$, P, Q 在单连通区域 $x > 0$ 内具有一阶连续偏导数, 由

(I) 知, 曲线积分 $\int_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关, 故当 $x > 0$ 时, 总有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$$\text{而 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x \cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2}. \quad (2)$$

比较①、②两式的右端, 得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5. & (4) \end{cases}$$

由③得 $\varphi(y) = -y^2 + c$, 将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5 - 4cy^3 = 2y^5$, 所以 $c = 0$, 从而 $\varphi(y) = -y^2$.

【评注】 本题难度较大, 关键是如何将待求解的问题转化为可利用已知条件的情形.

7 (2006, 19 题, 12 分) 设在上半平面 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内, 函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$.

证明: 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

【分析】 利用曲线积分与路径无关的条件 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

【解析】 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$ 两边对 t 求导得

$$xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty) = -2t^{-3} f(x, y).$$

令 $t = 1$, 则 $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y)$. ①

设 $P(x, y) = yf(x, y)$, $Q(x, y) = -xf(x, y)$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x, y) - xf'_x(x, y), \frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y) + yf'_y(x, y).$$

由 ① 可得 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L , 都有

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0.$$

小结

证明积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 或已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 求 P, Q 中所包含的未知函数、待定参数, 是常考的题型, 应熟练掌握其解题思路与方法.

1. 证明积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 一般利用积分与路径无关的充要条件.

设 P, Q 在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数, 则在 D 内以下结论等价

(1) 积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径 L 无关.

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

(3) 对于 D 内任一分段光滑有向闭曲线 L , 有积分 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

(4) $Pdx + Qdy$ 在 D 内为某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分 (称函数 $u(x, y)$ 为微分式 $Pdx + Qdy$ 的原函数).

(5) 向量 $Pi + Qj$ 在 D 内为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度.

2. 已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在某单连通区域 D 内与路径无关, 求微分式 $Pdx + Qdy$ 的原函数, 一般有以下方法:

(1) 特殊路径积分法: 在区域 D 内取一特殊点 (x_0, y_0) , 有原函数

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C$$

或

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx + C.$$

(2) 不定积分法: 由积分与路径无关的充要条件得原函数 $u(x, y)$ 满足 $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

由 $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ (或 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$) 两边对变量 x (或 y) 积分, 得

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y) \text{ (或 } u(x, y) = \int Q(x, y) dy + C(x)),$$

再由 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ (或 $\frac{\partial u}{\partial x} = P$) 确定 $C(y)$ (或 $C(x)$), 即可求得原函数 $u(x, y)$.

(3) 凑微分法: 对被积表达式 $Pdx + Qdy$ 进行凑微分.

3. 已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在某单连通区域 D 内与路径无关, 求积分 $\int_C Pdx + Qdy$, 一般有以下方法:

(1) 原函数法: 求出微分式 $Pdx + Qdy$ 的原函数 $u(x, y)$, 则有

$$\int_C Pdx + Qdy = u(x, y) \Big|_A^B, \text{ 其中 } A, B \text{ 分别为积分曲线 } C \text{ 的起点与终点.}$$

(2) 特殊路径积分法: 构造与 C 具有相同起点与终点的曲线 C^* (一般为平行于坐标轴的折线段), 且使得 P, Q 在 C 与 C^* 所围成的区域内没有奇点, 则有

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C^*} Pdx + Qdy.$$

4. 已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 求 P, Q 中所包含的未知函数或待定参数, 一般利用积分与路径无关的充要条件: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

■ 练习题

1. (1989, 5 分) 设曲线积分 $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 的值.

2. (2002, 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时, 求积分 I 的值.

四、第一类曲面积分的计算

8 (2007, 14 题, 4 分) 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【解析】 由积分域与被积函数的对称性有

$$\oiint_{\Sigma} x dS = 0, \oiint_{\Sigma} |x| dS = \oiint_{\Sigma} |y| dS = \oiint_{\Sigma} |z| dS,$$

$$\text{所以} \quad \oiint_{\Sigma} |y| dS = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} (|x| + |y| + |z|) dS = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} dS = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故} \quad \oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS = \frac{4}{3} \sqrt{3}.$$

【评注】 对面积的曲面积分, 应考虑利用积分区域的对称性简化计算.

9 (2010, 19 题, 10 分) 设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

【分析】 本题考查了空间曲线的计算与投影, 第一型曲面积分的计算等多个知识点, 属综合题.

【解析】 (1) 求轨迹 C .

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1$, 故动点 $P(x, y, z)$ 的切平面的法向量为 $n = \{2x, 2y - z, 2z - y\}$. 由切平面垂直 xOy , 得 $2z - y = 0$.

注意到 P 在椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上, 故所求曲线 C 的方程为:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1, \\ 2z - y = 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1, \\ 2z - y = 0. \end{cases}$$

(2) 计算曲面积分

因为曲线 C 在 xOy 平面的投影为 $D_{xy}: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 又方程 $x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 两边分别对

x, y 求导得

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} - z - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

解之得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y - 2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - z}{y - 2z},$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{y - 2z}\right)^2 + \left(\frac{2y - z}{y - 2z}\right)^2} dxdy \\ &= \frac{\sqrt{4x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8yz}}{|y - 2z|} dxdy = \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|y - 2z|} dxdy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad I &= \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS = \iint_{D_{xy}} (x + \sqrt{3}) dxdy = \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} dxdy \\ &= \sqrt{3} \times \pi \times 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\pi. \end{aligned}$$

【评注】 对于第一类曲面积分注意利用曲面的方程化简被积函数表达式.

小结

对于计算第一类曲面积分, 首先, 应将积分曲面方程代入被积函数, 对积分进行化简; 其次, 考察积分曲面是否关于 xOy 面 (或 yOz 面、 zOx 面) 对称, 并且被积函数 (或被积函数的某一部分) 是否关于变量 z (或变量 x 、变量 y) 为奇、偶函数, 若是, 则利用对称性化简积分; 最后, 用投影法将

曲面积分化为投影区域上的二重积分.

1. 第一类曲面积分的对称性质

若积分曲面 Σ 关于 xOy 面对称, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & f(x, y, -z) = -f(x, y, z) \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS, & f(x, y, -z) = f(x, y, z) \end{cases},$$

其中 Σ_1 为 xOy 在 xOy 面上方或下方的部分.

类似地, 可得到积分曲面关于 yOz 面或 zOx 面对称的情形. 还有轮换对称性.

2. 第一类曲面积分的计算方法

若积分曲面 Σ 在 xOy 面(或 yOz 面、 zOx 面)上的投影区域较简单, 将积分曲面 Σ 的方程写成形式: $z = z(x, y)$ (或 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$), 则有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\ &= \left(\iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz, \iint_{D_{zx}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz \right). \end{aligned}$$

■ 练习题

1. (1995, 6 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

2. (2000, 3 分) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有

(A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS.$

(B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS.$

(C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS.$

(D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS.$

五、第二类曲面积分的计算

10 (2005, 4 题, 4 分) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 是整个边界的外侧, 则 $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2\pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})R^3.$

【解析】
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz \\ &= 3 \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})R^3. \end{aligned}$$

11 (2006, 3 题, 4 分) 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 2π .

【解析】 设 $\Sigma_1: z = 1(x^2 + y^2 \leq 1)$, 取上侧, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy \\ &= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy - \iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy. \end{aligned}$$

而

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = \iiint_V 6dv = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 dz = 2\pi,$$

$$\iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 0.$$

所以 $\iint_{\Sigma} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 2\pi$.

12 (2007, 18 题, 10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2yzdzdx + 3xydxdy$, 其中 Σ 为曲面

$z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} (0 \leq z \leq 1)$ 的上侧.

【分析】 本题 Σ 不是封闭曲面, 首先想到加一曲面 $\Sigma_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \end{cases}$, 取下侧, 使 $\Sigma + \Sigma_1$ 构成封闭曲面, 然后利用高斯公式转化为三重积分, 再用球面(或柱面)坐标进行计算即可.

【解析】 Σ 的方程为: $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} (0 \leq z \leq 1)$.

添加一个平面 $\Sigma_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \end{cases}$, 取下侧, 则 Σ 与 Σ_1 构成闭曲面 Σ_* , 其所围区域记为 Ω . 于是

$$I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \oiint_{\Sigma_*} - \iint_{\Sigma_1}.$$

而

$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma_*} xzdydz + 2yzdzdx + 3xydxdy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(2yz)}{\partial y} + \frac{\partial(3xy)}{\partial z} \right) \\ &= 3 \iiint_{\Omega} z dxdydz = 3 \int_0^1 z dz \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1-z} dxdy \\ &= 6\pi \int_0^1 z(1-z) dz = \pi, \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma_1} xz dydz + 2yz dzdx + 3xy dx dy = \iint_{\Sigma_1} 3xy dx dy = \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1} 3xy dx dy = 0$$

$$\text{所以 } I = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \oiint_{\Sigma} - \iint_{\Sigma_1} = \pi.$$

13 (2008, 12 题, 4 分) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 则

$$\iint_{\Sigma} xy dydz + xz dx + x^2 dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 4π .

【解析】 补曲面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 0 \end{cases}$, 取下侧, 记 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} xy dydz + xz dx + x^2 dx dy \\ &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} xy dydz + xz dx + x^2 dx dy - \iint_{\Sigma_1} xy dydz + xz dx + x^2 dx dy \\ &= \oiint_{\Omega} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dx dy dz + \iint_D x^2 dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} y dx dy dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^2 r^3 dr = 4\pi. \end{aligned}$$

14 (2009, 19 题, 10 分) 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

【分析】 用高斯公式但有奇点, 根据题目特点挖掉一个小球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

【解析】 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

由于被积函数及其偏导数在点 $(0, 0, 0)$ 处不连续, 作封闭曲面 (内侧)

$\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, 0 < R < 1$, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= - \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{R^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} 3dV = \frac{3}{R^3} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi.$$

【评注】这是常见的题型,但须注意挖去合适的曲面以及曲面侧的选取.

小结

计算第二类曲面积分一直是历年考试的重点内容,一般有以下三种方法:

1. 直接投影法

$\iint_{\Sigma} Pdydz = \pm \iint_{D_{yz}} Pdydz$ (曲面 Σ 的法向量与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 取正号, 大于 $\frac{\pi}{2}$, 取负号).

$\iint_{\Sigma} Qdzdx = \pm \iint_{D_{xz}} Qdzdx$ (曲面 Σ 的法向量与 y 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 取正号, 大于 $\frac{\pi}{2}$, 取负号).

$\iint_{\Sigma} Rdx dy = \pm \iint_{D_{xy}} Rdx dy$ (曲面 Σ 的法向量与 z 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 取正号, 大于 $\frac{\pi}{2}$, 取负号).

特别注意: 不要忽略正、负号.

2. 矢量点积法:

对于曲面积分 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$, 若不能利用高斯公式, 且用直接投影法又比较复杂,

则可考虑积分曲面 Σ 在某个坐标面上的投影区域是否比较简单.

若积分曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 比较简单, 则将积分曲面 Σ 的方程写成形式:

$z = z(x, y)$, 求出 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \iint_{D_{xy}} [P \cdot (-\frac{\partial z}{\partial x}) + Q \cdot (-\frac{\partial z}{\partial y}) + R] dx dy \\ &= \pm \iint_{D_{xy}} [P \cdot (-\frac{\partial z}{\partial x}) + Q \cdot (-\frac{\partial z}{\partial y}) + R] dx dy. \end{aligned}$$

类似地, 有其他两种情形.

3. 高斯公式:

若积分曲面 Σ 为闭曲面 (或者通过添加辅助有向曲面 Σ^* , 使 $\Sigma + \Sigma^*$ 成为闭曲面), 且在积分曲面 Σ (或 $\Sigma + \Sigma^*$) 所围成的闭区域 Ω 内, P, Q, R 具有一阶连续偏导数, 表达式

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 比较简单, 则利用高斯公式计算积分

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \pm \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \quad (\Sigma \text{ 取外侧, 正号; 取内侧, 负号}).$$

添加辅助有向曲面 Σ^* , 使 $\Sigma + \Sigma^*$ 成为闭曲面, 应考虑 Σ 的侧来确定 Σ^* 的侧, 使 Σ^* 与 Σ 所围成闭曲面后同为外侧 (或内侧).

注意: (1) 在计算曲线曲面积分 (不管是第一类还是第二类) 时, 应先考虑能否将积分曲线曲面方程代入被积表达式, 对积分进行化简.

(2) 若投影为 xOy 平面上一条直线, 则 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = 0$.

■ 练习题

1. (1994, 6 分) 计算曲面积分 $\iint_S \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R, z = -R (R > 0)$ 所围立体表面的外侧.

2. (2004, 17 题, 12 分) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy,$$

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

第八章 无穷级数

■本章导读

本章主要考查如下几个方面: 一是判别或证明数项级数的敛散性, 特别是抽象级数的敛散性的判定; 二是求幂级数的和函数及数项级数的和; 三是求函数的幂级数展开式; 对于傅里叶级数, 考试频率低, 应熟练掌握狄利克雷收敛定理.

■试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题, 分数约占试卷的 9%. 小题主要是抽象级数敛散性的判定, 一般以选择题的形式出现, 往往有一定难度; 大题主要涉及求幂级数的和函数和把函数展开成幂级数, 题目难度不是很大. 对于傅里叶级数, 2005—2012 年只在 2008 年考过一次.

■考题详析

一、数项级数敛散性的判定

1 (2006, 9 题, 4 分) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

【答案】 (D).

【解析】 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛, 故应选 (D).

【评注】 也可利用排除法:

取 $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, 则可排除选项 (A), (B);

取 $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, 则可排除选项 (C). 故 (D) 项正确.

2 (2009, 4 题, 4 分) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

【答案】 (C).

【解析】 取 $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, 排除(A). 取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 排除(B)、(D).

【评注】 可直接证明(C) 正确, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 知存在 $M > 0$, 当 n 充分大时, 有

$|a_n| \leq M$, 因而 $a_n^2 b_n^2 \leq M^2 b_n^2$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 所以应选(C).

小结

1. 解题思路:

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; 否则进一步判断.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 先化简 u_n , 视其特点选择适当的判别法:

① 若 u_n 中含有 $\frac{1}{n^p}$ (或 $\frac{1}{n^p \ln^q n}$), 则可与 p 级数 (或对数 p 级数) 比较;

② 若 u_n 中含有 n 的乘积的形式 (包括 $n!$), 则可考虑用比值判别法;

③ 若 u_n 中含有形如 $a^{f(n)}$ 的因子, 则可考虑用根值判别法;

④ 以上方法均失效, 则可利用已知级数的敛散性质, 结合敛散的定义和性质, 考察其收敛性.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数, 则可用方法(1) 和(2) 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的敛散性.

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则看 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否是交错级数, 若是, 用莱布尼兹判别法判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否条件收敛.

2. 除了掌握以上判定级数敛散性的基本思路, 熟悉以下结论有助于我们判定级数的敛散性.

(1) 对于三个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$,

① 如果有两个收敛, 则第三个收敛;

② 如果其中一个收敛, 另一个发散, 则第三个发散;

③ 如果有两个发散, 则第三个的敛散性不能确定;

④ 如果有两个绝对收敛, 则第三个绝对收敛;

⑤ 如果其中一个绝对收敛, 另一个条件收敛, 则第三个条件收敛;

⑥ 如果有两个条件收敛, 则第三个收敛, 但不能判定它是绝对收敛还是条件收敛.

(2) ① 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 都收敛;

② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$ 都收敛;

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$ 都发散;

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$, 一个收敛, 一个发散 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p (p \geq 1)$ 一定收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}$ 等均收敛.

■ 练习题

1. (2004, 数一, 4 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$.

2. (2005, 数三, 9 题, 4 分) 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则下列结论正确的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

3. (2011, 3 题, 4 分) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

二、求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

3 (2008, 11 题, 4 分) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为_____.

【答案】 $(1, 5]$.

【解析】 由题设知, 当 $|x+2| < |0+2| = 2$, 即 $-4 < x < 0$ 时, 幂级数收敛; 而当 $|x+2| > |-4+2| = 2$, 即 $x < -4$ 或 $x > 0$ 时, 幂级数发散. 可见幂级数的收敛半径为 2.

于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 当 $|x-3| < 2$, 即 $1 < x < 5$ 时收敛, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛区间为 $(1, 5)$.

另外, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 相当于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 在 $x=5$ 处收敛, 故所求收敛域为 $(1, 5]$.

【评注】 收敛区间特指开区间, 而收敛域应考虑在端点的敛散性.

4 (2011, 2 题, 4 分) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域是

- (A) $(-1, 1]$. (B) $[-1, 1)$. (C) $[0, 2)$. (D) $(0, 2]$

【答案】 (C).

【解析】 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛区间是以 1 为中心的对称区间, 排除(A)、(B). 而 $x=0$ 时, 由莱布尼兹判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛. $x=2$ 时, 由部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1, 2, \dots$) 发散知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 因此应选(C).

小结

本题型的解题思路

1. 对于一般函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 先求 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$ 或 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $\{x \in \mathbf{R}: \rho(x) < 1\} \cup \{a \in \mathbf{R}: \rho(a) = 1 \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \text{ 收敛}\}$.

2. 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 先求 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 或 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$, 收敛区间为 $(x_0 - R, x_0 + R)$, 收敛域为 $(x_0 - R, x_0 + R) \cup \{x = x_0 \pm R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ 收敛}\}$.

3. 若 $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ (可以从某项开始), 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ 的收敛区间(域)的交集就是 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$ 的收敛区间(域).

4. 幂级数经过有限次的逐项求导或积分, 不改变其收敛半径与收敛区间, 但在收敛区间的端点处的敛散性可能会改变.

练习题

1. (2009, 数三, 11 题, 4 分) 幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为_____.

三、求幂级数的和函数及数项级数的和

5 (2005, 16 题, 12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + \frac{1}{n(2n-1)}) x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

【分析】 先求收敛半径, 进而可确定收敛区间. 而和函数可利用逐项求导得到.

【解析】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1} = 1$, 所以当 $x^2 < 1$ 时, 原级数绝对收敛, 当 $x^2 > 1$ 时, 原级数发散, 因此原级数的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$

$$\text{记 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}, x \in (-1, 1),$$

$$\text{则 } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, x \in (-1, 1),$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-1, 1).$$

$$\text{由于 } S(0) = 0, S'(0) = 0,$$

$$\text{所以 } S'(x) = \int_0^x S''(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x,$$

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1),$$

$$\text{从而 } f(x) = 2S(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$= 2x \arctan x - \ln(1+x^2) + \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1).$$

【评注】 本题求收敛区间是基本题型, 应注意收敛区间一般指开区间. 而幂级数求和尽量将其转化为形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 幂级数, 再通过逐项求导或逐项积分求出其和函数.

6 (2007, 20 题, 10 分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足 $y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

$$(I) \text{ 证明: } a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots;$$

(II) 求 $y(x)$ 的表达式.

【分析】 可将幂级数代入微分方程通过比较同次项系数, 从而证得 (I); 由 (I) 求 (II).

【解析】 (I) 由题设可得

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n,$$

代入 $y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$, 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0,$$

即 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$, 比较同次项系数可得

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$$

(II) 由 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$ 可得

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{2}{2n} a_{2n-1} = \frac{2}{2n} \cdot \frac{2}{(2n-2)} a_{2n-3} = \dots = \frac{1}{n!} a_1 = \frac{1}{n!},$$

故 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = x e^{x^2}.$

【评注】 本题为一道幂级数与二阶微分方程的综合题, 考查了幂级数的逐项微分法及 e^x 的麦克劳林级数展开式. 所以需记住常见函数 $e^x, \frac{1}{1-x}, \ln(1+x)$ 等函数的麦克劳林级数展开式.

7 (2009, 16 题, 9 分) 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

【解析】 曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 的交点为 $(0, 0), (1, 1)$.

所以 $a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$

从而

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

由 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$, 令 $x = 1$

得 $\ln 2 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \right) = 1 - S_2 \Rightarrow S_2 = 1 - \ln 2.$

【评注】 此题是定积分的几何意义与级数求和的一个综合题, 特别是用到了常见函数 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式.

8 (2010, 18 题, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【分析】 用比值判别法确定收敛区间, 进而确定收敛域; 利用幂级数的逐项求导求和函数.

【解析】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}(2n-1)}{x^{2n}(2n+1)} \right| = x^2$, 所以当 $x^2 < 1$, 即 $-1 < x < 1$ 时,

原幂级数绝对收敛.

当 $x = \pm 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 由莱布尼兹判别法显然收敛, 故原幂级数的收敛域为

$[-1, 1]$.

$$\text{又} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$$

$$\text{令} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, x \in (-1, 1),$$

$$\text{则} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{由于 } f(0) = 0, \text{ 所以 } f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = \arctan x.$$

从而幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$, 和函数为 $x \arctan x, x \in [-1, 1]$.

【评注】 对于缺项的幂级数, 一般用比值判别法确定收敛区间; 本题也可令 $t = x^2$ 转化为不缺项的幂级数.

小结

1. 求幂级数的和函数 $S(x)$ 主要有以下两种方法:

(1) 先通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质将其化为典型的幂级数求和问题

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(2) 通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质转化为关于和函数 $S(x)$ 的微分方程问题.

2. 求数项级数的和主要有以下的思路与方法:

(1) 构造幂级数法: 即通过构造幂级数, 转化为幂级数求和函数问题. 应先用级数的代数运算等性质对级数进行适当变形, 以便构造易于求和的幂级数形式.

对于收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n$, 一般构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (显然要求它在 $x = b$ 处收敛), 求出其和函数 $S(x)$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n = S(b)$. 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 相当于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n$ 当 $b = 1$ 时的特殊情形.

(2) 利用收敛级数的定义及其性质: 即求部分和数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, 也经常将通项 u_n 进行分解:

$u_n = a_n \pm b_n$, 先求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的和, 再根据级数的运算性质得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和.

(3) 利用常见函数的幂级数展开式.

练习题

1. (2005, 数三, 18 题, 9 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n+1} - 1) x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$.

2. (2006, 数三, 19 题, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $s(x)$.

四、函数的幂级数展开

9 (2006, 17 题, 12 分) 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数.

【分析】 利用常见函数的幂级数展开式.

【解析】 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{(2-x)(1+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{1+x}$, 比较两边系数可得 $A = \frac{2}{3}$,

$$B = -\frac{1}{3}, \text{ 即 } f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1+x} \right].$$

$$\text{而 } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1), \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n, x \in (-2, 2),$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{1}{3} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n} \right) x^n, x \in (-1, 1).$$

【评注】 分式函数的幂级数展开一般采用间接法, 要熟记常用函数的幂级数展开公式:

$$1. \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u^n, u \in (-1, 1);$$

$$2. \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots + (-1)^n u^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^n, u \in (-1, 1);$$

$$3. e^u = 1 + u + \frac{1}{2!} u^2 + \cdots + \frac{1}{n!} u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n, u \in (-\infty, +\infty);$$

$$4. \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}, u \in (-\infty, +\infty);$$

$$5. \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}, u \in (-\infty, +\infty);$$

$$6. \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}, u \in (-1, 1];$$

$$7. (1+u)^a = 1 + au + \frac{a(a-1)}{2!} u^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} u^n + \cdots, u \in (-1, 1].$$

小结

将函数在某点处展开成幂级数是重要的考试内容. 幂级数展开有直接法与间接法, 一般考查间接展开法, 即通过适当的恒等变形、求导或积分等, 将函数转化为幂级数展开式已知的函数. 数学三要求较低.

1. 求出展开式后, 要写出展开式成立的区间. 幂级数经过有限次的逐项求导、积分不改变其收敛半径及收敛区间, 但在收敛区间的端点处的敛散性可能会改变. 因此, 需判别展开式在收敛区间的端点处是否收敛.

2. 幂级数展开式的两个简单应用

(1) 利用幂级数展开式求数项级数的和. 求出展开式, 根据要求和的级数的特点, 在展开式中

令 x 取某特殊值, 即可得到所求级数的和.

(2) 求函数 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 特别是 $f^{(n)}(0)$. 求出函数 $f(x)$ 的幂级数展开式 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 又 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, 根据函数幂级数展开式的唯一性, 得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = a_n x^n, \text{ 即 } f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!.$$

■ 练习题

1. (2003, 数一, 12 分) 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.
2. (2007, 数三, 20 题, 10 分) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

五、傅里叶级数

10 (2008, 19 题, 11 分) 将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

【解析】 因为 $f(x)$ 为偶函数, 于是 $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$, 对 $n = 1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos nx \, dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[0 - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x^2 d \sin nx \right] = -\frac{2}{n\pi} \left[x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin nx \, dx \right] \\ &= -\frac{4}{n^2 \pi} \int_0^{\pi} x d \cos nx = -\frac{4}{n^2 \pi} \left[x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] \\ &= -\frac{4}{n^2 \pi} \cdot \pi (-1)^n = \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2}. \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) \, dx = 2 \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \right).$$

所以
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx.$$

令 $x = 0$, 得
$$f(0) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2},$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

➡ 小结

对于傅里叶级数, 主要考查以下三个方面的内容

1. 求函数 $f(x)$ 的傅里叶级数与傅里叶系数

先确定 $f(x)$ 的周期 $2l$, 利用公式求出傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx (n = 0, 1, 2, \dots), b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \dots);$$

再由傅里叶系数得到傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}).$$

2. 求傅里叶级数的和

这类问题主要考查傅里叶级数的收敛定理, 即狄利克雷定理.

设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上满足狄利克雷定理的条件, 则 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) \text{ 的和函数}$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点, } x \in (-l, l) \\ \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)], & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点, } x \in (-l, l) \\ \frac{1}{2}[f(-l+0) + f(l-0)], & x = \pm l \end{cases}.$$

3. 求函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式

设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上有定义, 且满足狄利克雷的条件, 则

(1) 若 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 连续, 则

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) (-l < x < l).$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 连续, 且 $f(-l) = f(l)$, 则

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) (-l \leq x \leq l).$$

■ 练习题

1. (2003, 数一, 3 分) 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx (-\pi \leq x \leq \pi)$, 则 $a_2 =$ _____.

第九章 常微分方程

本章导读

本章主要侧重于一阶微分方程及二阶常系数线性微分方程的求解, 其他类型的方程考试出现的频率较低. 一阶微分方程重点掌握可分离变量、齐次及一阶线性微分方程的求解, 特别是一阶线性微分方程的求解.

试题特点

每年试题一般是一个小题, 以大题出现的形式较少, 分数约占试卷的 4%, 难度不是很大. 除了各种微分方程的求解, 对常系数线性微分方程解的结构及性质的考查也是测试的一个重要方面.

考题详析

一、一阶微分方程

1 (2005, 2 题, 4 分) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为.

【答案】 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

【解析】 原方程等价于

$$y' + \frac{2}{x}y = \ln x,$$

$$\begin{aligned} \text{于是通解为 } y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\int x^2 \ln x dx + C \right] \\ &= \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x + C \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C = 0$, 故所求解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

【评注】 本题虽属基本题型, 但在用相关公式时应注意先化为标准型. 另外, 本题也可如下求解, 原方程可化为 $x^2 y' + 2xy = x^2 \ln x$, 即 $[x^2 y]' = x^2 \ln x$, 两边积分得

$$x^2 y = \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C,$$

再代入初始条件即可得所求解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

2 (2006, 2 题, 4 分) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____.

【答案】 $y = Cxe^{-x} (x \neq 0)$.

【解析】 原方程等价于

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx,$$

两边积分得 $\ln y = \ln x - x + C_1$, 整理得

$$y = Cxe^{-x}, (C = e^{C_1})$$

3 (2008, 9 题, 4 分) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ _____.

【答案】 $y = \frac{1}{x}$.

【解析】 分离变量, 得 $\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx$, 两边积分有

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_1 \Rightarrow \ln|xy| = C_1 \Rightarrow xy = \pm e^{C_1} = C,$$

利用条件 $y(1) = 1$ 知 $C = 1$, 故满足条件的解为 $y = \frac{1}{x}$.

【评注】 微分方程 $xy' + y = 0$ 可改写为 $(xy)' = 0$, 再两边积分即可.

4 (2011, 10 题, 4 分) 微分方程 $y' + y = e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为_____.

【答案】 $e^{-x}\sin x$.

【解析】 微分方程的通解为 $y = e^{-\int dx} (C + \int e^{-x}\cos x e^{\int dx} dx) = e^{-x}(C + \sin x)$.

由初值条件 $y(0) = 0$ 得 $C = 0$. 所以应填 $e^{-x}\sin x$.

小结

1. 此类题解题步骤:

(1) 判断方程的类型, 可将方程写成形式: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 或 $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ (这里将变量 x 看作函数, y 看作自变量).

(2) 若不能确定类型, 考虑用适当的变量代换.

2. 应熟练掌握考试大纲所要求的一阶方程类型及其解法:

(1) 可分离变量方程: 分离变量化为 $f(x)dx = g(y)dy$, 两边积分得通解.

(2) 齐次方程: 将方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 有 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 代入方程并化为

$$\text{可分离变量方程 } \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

(3) 一阶线性方程: 将方程化为标准形式: $y' + P(x)y = Q(x)$, 由通解公式得通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right].$$

(4) 伯努利方程: 先将方程化为标准形式: $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha (\alpha \neq 0, 1)$,

令 $z = y^{1-\alpha}$, 方程化为一阶线性方程 $z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$.

(5) 全微分方程: 方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 为全微分方程的充要条件是:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \text{ 其通解为 } u(x, y) = C, \text{ 其中 } u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy,$$

或者 $u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx$.

另外, 如果方程中出现 $f(x \pm y), f(xy), f(x^2 \pm y^2), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y})$ 等复合函数, 通常作相应的

变量代换: $u = x \pm y, xy, x^2 \pm y^2, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}$, 将方程化为上述基本类型.

特别值得注意的是, 可降阶的微分方程 05 年—12 年数学一没有考题, 但属于考纲要求的内容, 应掌握三种可降阶的二阶微分方程的求解.

■ 练习题

1. (2005, 数三, 2 题, 4 分) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 _____.

2. (2006, 数三, 10 题, 4 分) 非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$.

(D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$.

3. (2007, 数三, 14 题, 4 分) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y =$ _____.

4. (2008, 数二, 10 题, 4 分) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$ 的通解是 _____.

二、高阶常系数微分方程的求解

5 (2007, 13 题, 4 分) 二阶常系数非齐次微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y =$ _____

【答案】 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$.

【解析】 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3,$$

则对应齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

设原方程的特解为 $y^* = Ae^{2x}$, 代入原方程可得

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow A = -2,$$

所以原方程的特解为 $y^* = -2e^{2x}$, 故原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

6 (2008, 3 题, 4 分) 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$.

(B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$.

(D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

【答案】 (D).

【解析】 由通解表达式 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

可知其特征根为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i.$$

可见对应特征方程为

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4,$$

故对应微分方程为

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0,$$

应选(D).

【评注】 对于三阶或三阶以上的常系数线性微分方程, 同样应该掌握其特征方程与对应解之间的关系.

7 (2009, 10 题, 4 分) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $y = -xe^x + x + 2$.

【解析】 由二阶常系数线性齐次微分方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 得对应特征方程的两个特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 故 $a = -2, b = 1$;

对应非齐次微分方程为 $y'' - 2y' + y = x$, 设其特解为 $y^* = Ax + B$, 代入得 $-2A + Ax + B = x$, 有 $A = 1, B = 2$.

所以特解为 $y^* = x + 2$, 因而非齐次微分方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2$,

把 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 代入, 得 $C_1 = 0, C_2 = -1$.

所求特解为 $y = -xe^x + x + 2$.

【评注】 此题是通常二阶常系数线性微分方程解的结构和形式的考察.

8 (2010, 15 题, 10 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

【分析】 直接利用二阶常系数线性微分方程的求解方法.

【解析】 由方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程解得特征根, 所以方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解为 $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

设 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的特解为 $y^* = x(ax + b)e^x$, 则

$$(y^*)' = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x, (y^*)'' = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x.$$

代入原方程, 解得 $a = -1, b = -2$, 故特解为: $y^* = x(-x - 2)e^x$,

所以原方程的通解为 $y = \bar{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} - x(x + 2)e^x$.

小结

1. 求二阶常系数非齐次线性微分方程的解的步骤

(1) 求特征方程的根.

(2) 写出齐次方程的通解.

(3) 求出非齐次方程的一个特解.

(4) 写出非齐次的通解.

2. 对于高阶线性微分方程, 应掌握解的性质、叠加原理以及通解的结构.

3. 对于二阶常系数线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$, 应熟练掌握求通解的方法.

(1) 对于对应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$, 会根据其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根的情况, 写出齐次方程的通解.

(2) 当自由项 $f(x)$ 为多项式函数、指数函数、三角函数以及它们的和、差、积所得的函数时, 应熟练掌握用待定系数法确定特解.

4. 对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$, 函数 $Ae^{\alpha x}$ 是其解的充要条件为 $\lambda = \alpha$ 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根; 函数 $Ae^{\alpha x} \sin \beta x, Be^{\alpha x} \cos \beta x$ 或 $e^{\alpha x} (A \sin \beta x + B \cos \beta x)$ 是其解的充要条件为 $\lambda = \alpha \pm \beta i$ 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根. 利用以上结论, 可由方程的解, 确定其对应的特征方程的根, 从而得到特征方程及其对应的齐次微分方程.

5. 对于简单的高于二阶的常系数齐次线性微分方程, 会根据其特征方程的根的情况, 写出其

通解.

■ 练习题

1. (2006, 数二, 10 题, 4 分) 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3x e^x$.

(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3x e^x$.

(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

2. (2010, 数二, 9 题, 4 分) 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

3. (2011, 数二, 4 题, 4 分) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为

(A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

(D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

练习题参考答案及解析

第一章 函数 极限 连续

一、极限的概念、性质及存在准则

1.【答案】 (C).

【解析】 本题主要考查考生对数列极限的 $\epsilon-N$ 定义的理解. 其定义是“对任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$ ”显然, 若 $|x_n - a| < \epsilon$, 则必有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$, 但反之也成立, 这是由于 ϵ 的任意性, 对于任意给定的 $\epsilon_1 > 0$, 取 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ 中的 $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{3}$, 则有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon_1 < \epsilon_1$ 即, 对任意给定的正数 $\epsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon_1$, 故应选(C).

【评注】 到目前为止, 考研试卷中还没考过利用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的试题, 但从本题可看出, 要求考生理解极限的定义.

2.【答案】 (D).

【解析一】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$, 即该极限不存在, 故应选(D).

【解析二】 数列极限描述的是 n 无限增大时数列的变化趋势, 其极限是否存在, 如果极限存在, 极限值等于什么与数列的前有限项无关. 数列极限的保号性及其推论(保序性)只是从某个充分大的 N 项以后成立.

虽然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, 但这只能得到存在充分大的 N , 当 $n > N$ 时, 恒有

$$a_n < b_n < c_n$$

而上式并不是对任意的 n 成立, 如 $a_n = \frac{100}{n}$, $b_n = \frac{n}{n+1}$, $c_n = \frac{n}{100}$. 从而选项(A)(B)不对. 又 $a_n c_n$ 是 $0 \cdot \infty$ 未定式, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不一定存在, 而不是一定不存在, 如 $a_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = n$, 从而选项(C)也不对, 故应选(D).

【评注】 ① 本题主要考查极限的性质; ② 关于 ∞ 的基本结论有: $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$; $\infty \pm (\text{有界变量}) = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$, 但 $\infty \cdot (\text{有界变量})$ 不一定是无穷大; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

3.【解析】 证明数列极限存在最常用的方法是利用“单调有界数列必有极限”的准则.

【证明】 由于 $f(x)$ 单调减, 则

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad x \in [k, k+1]$$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) \geq 0 \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 下有界, 又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减, 故由单调有界准则知数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

【评注】 本题考试的结果很不理想, 有 66% 的考生得零分, 只有 7.5% 的考生得满分, 本题证明中出现的主要问题是考生证明了数列 $\{a_n\}$ 单调减少而没能证明 $a_n \geq 0$, 本题的难度值为 0.17.

二、求函数的极限

1. **【答案】** $e^{-\frac{1}{2}}$.

【解析】 由于 $(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= -\frac{1}{2} \quad \text{则} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. **【解析】** 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, 则本题的极限应分左右极限来求.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) &= 2 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{4/x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-4/x} + e^{-3/x}}{e^{-4/x} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

故原式 = 1

【评注】 (1) 有几个基本极限应注意:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (错), 正确的是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$;
- ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ (错), 正确的是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$;
- iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ (错), 正确的是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$;
- iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$ (错), 正确的是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$.

(2) 考生的典型错误是将极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{1/x}} + \frac{\sin x}{x} \right)$ 分成两个极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 去讨论, 而这两个极限都不存在, 就答原题极限不存在, 这是错误的, 我们有以下结论:

I) 存在 + 不存在 = 不存在

II) 不存在 + 不存在 = 不一定

III) 存在 \times 不存在 = 不一定

IV) 不存在 \times 不存在 = 不一定

$$\begin{aligned}
 3. \text{【解析】} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x [\ln(1+x) - x] [\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}]} \quad (\text{分子有理化}) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x [\ln(1+x) - x]} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{\ln(1+x) - x} \quad (\text{等价代换}) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-\frac{x}{1+x}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

【评注】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限, 主要是利用有理化, 等价无穷小代换和洛必达法则求极限.

4. 【解析】 本题是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限, 由于分子中含有幂指函数, 通常的求解方法是将其化为指数函数形式, 然后用等价无穷小 ($e^x - 1 \sim x$) 代换, 然后再用洛必达法则.

$$\begin{aligned}
 \text{【解法一】} & \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+\cos x) - \ln 3}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2+\cos x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \\
 &= -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{【解法二】} & \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\cos x - 1}{3})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad (\text{等价代换})
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

【评注】本题是一个“ $0/0$ ”型极限, 又出现了幂指函数, 第一步将其改写成指数形式后用等价无穷小代换即可.

5.【解析】由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, 则本题是一个“ 0^0 ”型极限, 通常是改写成指数形式或取对数后用洛必达法则.

【解析】原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}}$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{\frac{1}{x}})'}{\frac{1}{x}(x^{\frac{1}{x}} - 1)} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln x}{x}})'}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{\ln x}{x}} (\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2})}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x} (e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \sim \frac{\ln x}{x}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{原式} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

三、求数列的极限

1.【分析】本题是一个“ 1^∞ ”型极限, 可利用“ 1^∞ ”型极限的基本结论求该极限.

【解析】由于

$$\left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right]^{n^2} = \left[1 + \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right]^{n^2}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^3}$$

这是一个“ $\frac{0}{0}$ ”型数列极限, 不能直接用洛化达法则, 通常是化为相应的函数极限后再用洛必达法, 为此考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{3}}$$

2.【答案】 (B).

【解析一】 由于 $0 < a < b$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} &= a^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= a^{-1} \left(\text{其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n = 0 \right)\end{aligned}$$

【解析二】 利用夹逼原理求极限, 由于 $0 < a < b$, 且

$$\begin{aligned}(a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a} \right)^n + \left(\frac{1}{b} \right)^n} \\ \frac{1}{a} &= \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a} \right)^n} < \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a} \right)^n + \left(\frac{1}{b} \right)^n} < \sqrt[n]{2 \left(\frac{1}{a} \right)^n} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt[n]{2} \\ \text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} &= 1, \text{ 则}\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$$

【解析三】 利用此类极限的一个常用结论:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i, \text{ 其中 } a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, m).$$

由于 $0 < a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a} \right)^n + \left(\frac{1}{b} \right)^n} = \frac{1}{a}.$$

【评注】 本题属 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$ ($a_i > 0$) 型极限. 【解析一】是将 m 个底数 a_i 中是大的提出来; 【解析二】是利用夹逼原理; 【解析三】是利用此类极限的一个常用结论, 该结论可用【解析一】和【解析二】中的两种方法来证明, 以后该结论可直接用, 会给我们带来方便, 如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2} \right)^n} \quad (x \geq 0) \text{ 都可用该结论求出.}$$

3.【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 这是一个 n 项和的数列极限, 常用的是两种方法——夹逼原理和定积分定义. 由于

$$\frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2 + n + n} < \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} < \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2 + n + 1}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2 + n + n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \frac{1}{2},$$

【评注】 本题用到一个常用的求和公式

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

4.【解析】 这是一个 n 项和的极限, 如果分母都是 n , 则和式

$$\delta_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n}$$

是函数 $\sin \pi x$ 在区间 $[0, 1]$ 上的积分和, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \int_0^1 \sin \pi x dx$$

为了求得本题的极限, 可对其分母进行适当的放缩, 用夹逼原理求得该极限.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) &\leq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) &= \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \pi \right) \\ &= \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

由夹逼原理知, 原式 $= \frac{2}{\pi}$

【评注】 本题是 n 项和的数列极限问题, 解决此类问题常用的两种方法——夹逼原理和定积分的定义.

5.【分析】 这是用递推关系定义的数列, 首先用单调有界准则证明极限存在, 然后等式 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 两端取极限解出极限值.

【证法一】 先用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调减.

由 $x_1 = 10, x_2 = \sqrt{x_1+6} = \sqrt{16} = 4$, 知 $x_1 > x_2$, 即 $n=1$ 时, 有 $x_n > x_{n+1}$.

设 $n=k$ 时, 不等式 $x_n > x_{n+1}$ 成立, 由 $x_{k+1} = \sqrt{x_k+6} > \sqrt{x_{k+1}+6} = x_{k+2}$ 可知, $n=k+1$ 时 $x_n > x_{n+1}$ 也成立, 因而对一切的自然数 $x_n > x_{n+1}$ 总成立.

又 $x_n > 0, (n=1, 2, \cdots)$ 即 $\{x_n\}$ 下有界, 由单调有界准则知原数列极限存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 等式 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 两端取极限得:

$$a = \sqrt{6+a}$$

由此解得 $a=3, a=-2$ (与题设不符, 舍去), 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

【证法二】 直接证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ (此结果可利用等式 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 两端求极限得到).

由于

$$|x_n - 3| = |\sqrt{6+x_{n-1}} - 3| = \frac{|x_{n-1} - 3|}{\sqrt{6+x_{n-1}} + 3} \quad (\text{有理化})$$

$$< \frac{1}{3} |x_{n-1} - 3| < \frac{1}{3^2} |x_{n-2} - 3| < \cdots < \frac{1}{3^{n-1}} |x_1 - 3| = \frac{7}{3^{n-1}}$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{3^{n-1}} = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

【评注】 本题的【证法一】是处理递推关系式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 给出的数列极限问题的一般思想方法.

四、确定极限中的参数

1. **【答案】** (A).

$$\begin{aligned} \text{【解析一】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} &= \frac{\frac{1}{1+x} - (a + 2bx)}{2x} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (1 + 2bx)}{2x} \quad (a = 1, \text{ 否则原式极限为 } \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - 2b}{2} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= -\frac{1+2b}{2} = 2 \end{aligned}$$

则 $b = -\frac{5}{2}$, 故应选(A).

$$\begin{aligned} \text{【解析二】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - ax}{x^2} - b \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - a}{2x} - b \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} - b \quad (a = 1, \text{ 否则原式极限为 } \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} - b = -\frac{1}{2} - b = 2 \end{aligned}$$

则 $b = -\frac{5}{2}$

【解析三】 由泰勒公式知

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - (\frac{1}{2} + b)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2$$

$$\text{由此可得 } \begin{cases} 1-a=0 \\ -(\frac{1}{2}+b)=2 \end{cases}, \text{ 解得 } a=1, b=-\frac{5}{2}.$$

$$2. \text{【解析】 由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \neq 0, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} (ax - \sin x) = 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0,$$

从而 $b = 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换 } \ln(1+x^3) \sim x^3) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (a = 1, \text{ 否则原式极限为 } \infty) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \frac{1}{2} = c
 \end{aligned}$$

故 $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}$.

【评注】 本题中用到两个常用的基本结论:

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 本题中由此结论得 $a = 1$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在但不为零, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$;

本题中由此结论得 $b = 0$.

五、无穷小量及其阶的比较

1. 【解析】 对题中的三个无穷小量进行比较便可得到正确的结论. 常用的方法有两种, 一种是两两进行比较, 另一种是都与 x^k 进行比较.

$$\begin{aligned}
 \text{由于,} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\gamma} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x} \quad (\text{等价无穷小代换}) = 0
 \end{aligned}$$

即 β 为 γ 的高阶无穷小, β 应排在 γ 后面, 显然选项 (A) (C) (D) 都不正确, 故应选 (B).

【解析二】 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{kx^{k-1}} = 1 \quad (k = 1)$$

则 $x \rightarrow 0^+$ 时, α 是 x 的等阶无穷小.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \tan x}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{kx^{k-1}} = \frac{2}{3}, k = 3$$

则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, β 是 x 的三阶无穷小.

$$\begin{aligned}
 \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}}}{kx^{k-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{kx^{k-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x}{kx^{k-1}} = \frac{1}{4} \quad (k=2)
 \end{aligned}$$

则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, γ 是 x 的二阶无穷小, 故正确的排序为 α, γ, β , 选(B).

2.【答案】 (C).

$$\begin{aligned}
 \text{【解析一】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x - 3\cos 3x}{ckx^{k-1}} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 3\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \frac{1}{c} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} \right) \quad (k=3) \\
 &= \frac{1}{c} \left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right) = 1
 \end{aligned}$$

由此得 $c=4$.

【解析二】 由泰勒公式知

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } f(x) = 3\sin x - \sin 3x &= 3x - \frac{x^3}{2} - 3x + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) \\
 &= 4x^3 + o(x^3) \sim 4x^3 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时})
 \end{aligned}$$

故 $k=3, c=4$

六、函数的连续性间断点类型

$$\begin{aligned}
 1. \text{【解析】 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \quad (\text{等价代换}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) = -6a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \quad (\text{等价代换}) \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} \quad (\text{洛必达法则}) = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2 e^{ax} + 2}{2} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= 2a^2 + 4
 \end{aligned}$$

令 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 得 $-6a = 2a^2 + 4$, 解得 $a = -1$ 或 $a = 2$,

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,

当 $a = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -12 \neq f(0)$, 则 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

【评注】 本题求解中用到一个等价无穷小代换, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sim -\frac{1}{2}x^2$, 事实上 $1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \sim -\frac{1}{2}x^2$.

2.【解析】 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式, 这是一个“ 1^∞ ”型极限, 由于

$$\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right) = \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x}\right),$$

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\sin t - \sin x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$$

$$\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

由 $f(x)$ 表达式知 $x = 0$ 及 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 都是 $f(x)$ 的间断点.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$, 则 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点; 而在 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处 $f(x)$ 有一个单侧极限是无穷大, 则 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 均为第二类间断点, 如在 $x = \pi$ 处, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} e^{\frac{x}{\sin x}} = +\infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow \pi^+} e^{\frac{x}{\sin x}} = 0$, 显然 $\lim_{x \rightarrow \pi} e^{\frac{x}{\sin x}} = \infty$ 是典型的错误.

第二章 一元函数微分学

一、导数与微分的概念

1.【答案】 (C).

【解析】 由于 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$

所以由函数极限的局部保号性知, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时, $\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$, 则

当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $f(x) - f(0) < 0$, 即有 $f(x) < f(0)$; 当 $x \in (0, \delta)$ 时, $f(x) - f(0) > 0$, 即有 $f(x) > f(0)$.

故应选(C).

【评注】 1) 不少考生选(A), 错误的将区间上导数大于零可推得函数在该区间上单调增的结论应用到一点处导数大于零. 事实上由 $f'(x_0) > 0$ 得不出在 x_0 的某邻域内函数单调增的结论. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 > 0$$

$$f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

对任意 $\delta > 0$, 只要 n 充分大, 则有 $\frac{1}{2n\pi} \in (-\delta, \delta)$, 此时 $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 1 - 2 = -1 < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内不会单调增.

2) 从本题的讨论可得到一个常用结论:

若 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) > f(x_0)$. 若 $f'(x_0) < 0$, 则有类似结论.

2.【答案】 (B).

【解析一】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h)}{e^h - 1}$ (等价代换)

$$\stackrel{1 - e^h = x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{-x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 存在的充要条件是 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在, 故应选(B).

【解析二】 排除法:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{1 - \cosh h} \cdot \frac{1 - \cosh h}{h^2} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cosh h)}{1 - \cosh h}$$

由于当 $h \rightarrow 0$ 时, $1 - \cosh h \rightarrow 0^+$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_+(0)$ (右导数) 存在, 排除(A).

若取 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, 显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 但 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (h - \sinh h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h - \sinh h)^{\frac{2}{3}}}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h - \sinh h}{h^3} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{2}{3}}$ 存在, 排除(C).

若取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0 \text{ 存在}$$

排除(D), 故应选(B).

3.【答案】 (B).

【解析一】 加项减项凑 $x = 0$ 处导数定义

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0) - 2f(x^3) + 2f(0)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0) \end{aligned}$$

【解析二】 拆项用导数定义

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3}$$

由于 $f(0) = 0$, 由导数定义知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0)$$

$$\text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0)$$

【解析三】 排除法: 选择合条件的具体函数 $f(x)$, 令 $f(x) = x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^3}{x^3} = -1$$

而对于 $f(x) = x, f'(0) = 1$, 显然选项(A)(C)(D) 都是错误的, 故应选(B).

【解析四】 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = f'(0)x + o(x)$$

$$f(x^3) = f'(0)x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2[f'(0)x + o(x)] - 2[f'(0)x^3 + o(x^3)]}{x^3}$$

$$= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0)$$

二、导数与微分计算

1. **【答案】** -2.

【解析】 方程两端对 x 求导得

$$e^y y' + 6y + 6xy' + 2x = 0$$

由原方程知 $x = 0$ 时, $y = 0$, 代入上式得 $y'(0) = 0$.

等式 $e^y y' + 6y + 6xy' + 2x = 0$ 两端对 x 求导得

$$e^y y'^2 + e^y y'' + 12y' + 6xy'' + 2 = 0$$

将 $x = 0, y = 0, y'(0) = 0$ 代入上式得

$$y''(0) = -2$$

2. **【答案】** (B).

【解析一】 本题中的函数带有绝对值, 若去掉绝对值为分段函数, 当 $x \neq 0, \pm 1$ 时 $f(x)$ 可导 (多项式函数) 只需用导数定义考察分界点 $x = 0, x = \pm 1$ 处可导性. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} (x^2 - x - 2) |x^2 - 1| = \begin{cases} -2, & x \rightarrow 0^+ \\ 2, & x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

即 $f'_+(0) = -2, f'_-(0) = 2$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} (x^2 - x - 2) |x^2 + x| = \begin{cases} -4, & x \rightarrow 1^+ \\ 4, & x \rightarrow 1^- \end{cases}$$

即 $f'_+(1) = -4, f'_-(1) = 4$, 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) |x + 1|}{x + 1} (x - 2) |x^2 - x| = 0$$

即 $f'(-1) = 0$, 故应选(B).

【解析二】 也可利用一个基本结论求解:

设 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则 $f(x) = |x - x_0| \varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导的充分条件是 $\varphi(x_0) = 0$.

先考虑 $x = 1$ 处, 由于 $f(x) = |x - 1| (x^2 - x - 2) |x^2 + x|$

其中 $\varphi(x) = (x^2 - x - 2) |x^2 + x|$, 而 $\varphi(1) = -4 \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导. 再考虑 $x = 0$, 由于 $f(x) = |x| (x^2 - x - 2) |x^2 - 1|$

其中 $\varphi(x) = (x^2 - x - 2) |x^2 - 1|$, 而 $\varphi(0) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导. 最后考虑 $x = -1$, 由于 $f(x) = |x + 1| (x^2 - x - 2) |x^2 - x|$ 其中 $\varphi(x) = (x^2 - x - 2) |x^2 - x|$, 而 $\varphi(-1)$

$= 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处可导.

【解析三】 也可利用以下结论求解

(1) $|x|$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(2) $x|x|$ 在 $x = 0$ 处可导.

由于 $|x^3 - x| = |x||x-1||x+1|$, 由结论(1)知 $|x^3 - x|$ 在 $x = 0, x = 1, x = -1$ 处都不可导, 而 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x| = (x-2)(x+1)|x||x-1||x+1|$

由(2)可知 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处可导, 则 $f(x)$ 不可导的点为 $x = 0$ 和 $x = 1$, 故应选(B).

3. 【解析一】 先求一阶导数 y' , 二阶导数 y'' , 然后归纳 n 阶导数.

$$y = \frac{1}{2x+3} = (2x+3)^{-1}$$

则

$$y' = (-1)(2x+3)^{-2} \cdot 2$$

$$y'' = (-1) \cdot (-2)(2x+3)^{-3} \cdot 2^2$$

由此可归纳得

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (2x+3)^{-(n+1)} \cdot 2^n$$

则

$$y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$$

【解析二】 利用幂级数展开, 为求 $y^{(n)}(0)$ 将 $y = \frac{1}{2x+3}$ 在 $x = 0$ 处展开为幂级数, 则其展开式中 x 的 n 次幂项的系数为 $\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$, 即可求得 $y^{(n)}(0)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+3} &= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}x} \\ &= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + \cdots + (-1)^n \left(\frac{2}{3}x\right)^n + \cdots \right] \end{aligned}$$

等式右端 x^n 的系数为 $(-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}}$, 则

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$$\text{故 } y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$$

【评注】 本题属于高阶导数计算. 计算高阶导数通常有 3 种方法:

1. 求一阶, 二阶, 然后归纳 n 阶导数;
2. 利用泰勒公式(适合求具体点高阶导数)
3. 利用已有高阶导数公式

$$\text{I) } (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{II) } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{III) } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

三、导数的几何意义

1. 【答案】 (C).

【解析】 设曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 的公切点为 (x_0, y_0) , 则

$$\begin{cases} x_0^2 = a \ln x_0 \\ 2x_0 = \frac{a}{x_0} \end{cases}$$

由此可得 $x_0 = \sqrt{e}, a = 2e$, 故应选(C).

【评注】 本题主要考查导数的几何意义. 两曲线相切在切点处不仅导数值相同而且函数值相同. 部分考生未能得到正确选项, 可能是只注意到在切点处导数值相等, 而未利用函数值也相等的条件.

2.【分析】 此类问题的一般方法是将方程 $r = 1 - \cos\theta$ 代入 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 便可得到曲线的参数方程(θ 为参数) 然后用参数方程求导法求出切线斜率.

【解析】 曲线 $r = 1 - \cos\theta$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1 - \cos\theta)\cos\theta = \cos\theta - \cos^2\theta \\ y = (1 - \cos\theta)\sin\theta = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

令 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 得切点坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})$.

切线斜率为 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{-\sin\theta + \sin 2\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1$.

则所求切线直角坐标方程为 $y - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4})$

即 $x - y + \frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = 0$

法线的直角坐标方程为 $y - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = - \left[x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}) \right]$

即 $x + y + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$.

四、函数的单调性、极值与最值

1.【答案】 (C).

【解析】 由于极值只可能在驻点和导数不存的点取到, 而由导函数 $f'(x)$ 的图形可看出 $f(x)$ 有三个驻点(即曲线 $y = f'(x)$ 与 x 轴交点) 和一个不可导的点 $x = 0$. 三个驻点两侧导数都变号, 其中一个驻点两侧导数由正变负, 而另外两个驻点两侧导数由负变正, 因而过三个驻点中一个是极大值点, 两个是极小值点; 而在点 $x = 0$ 处($f(x)$ 连续) 的两侧导数由正变负, 则 $x = 0$ 为极大值点, 故应选(C).

2.【答案】 (B).

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1 > 0$, 由极限的保号性知, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时

$\frac{f''(x)}{|x|} > 0$ 即 $f''(x) > 0$ 从而 $f'(x)$ 单调增, 又 $f'(0) = 0$, 则

当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (0, \delta)$ 时, $f'(x) > 0$,

由极值第一充分条件知, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值.

3. 【答案】 $e^{-\frac{2}{e}}$

【解析】 因为 $y' = x^{2x}(2\ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得驻点 $x = \frac{1}{e}$, 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $y' < 0$, $y(x)$ 单调减; 当 $x \in (\frac{1}{e}, 1]$ 时, $y' > 0$, $y(x)$ 单调增加, 则 $y(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取到区间 $(0, 1]$ 上的最小值, 最小值为 $y(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{2}{e}}$.

五、曲线的凹向, 拐点及渐近线

1. 【答案】 (C)

【解析】 在关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 中令 $x = 0$, 得 $f''(0) = 0$, 等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 两端对 x 求导得

$$f'''(x) + 2f'(x)f''(x) = 1$$

在上式中令 $x = 0$, 得 $f'''(0) = 1 \neq 0$, 由拐点的第二充分条件得 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 故应选 (C).

【评注】 1) 从题设可知 $f(x)$ 的三阶导数存在, 这是因为 $f''(x) = -[f'(x)]^2 + x$ 右端可导;

2) 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 2)$

则 1) 当 n 是奇数时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

2) 当 n 是偶数时, $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极值点, 其中当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

2. 【答案】 $(-\infty, 1)$ (或 $(-\infty, 1]$).

【解析】 由于 $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 + \frac{-2}{t^2 + 1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left[1 + \frac{-2}{t^2 + 1} \right] \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}$$

由题设知 $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 则 $t < 0$,

又 $x'(t) = 3t^2 + 3 > 0$, 则 $x(t)$ 是 t 的单调增函数, $x(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^3 + 3t + 1) = -\infty$, 故 x 的取值范围为 $(-\infty, 1)$ (或 $(-\infty, 1]$).

3. 【分析】 问题的关键是要确定在点 $(1, 1)$ 附近函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $y''(x)$ 的正负.

【解析一】 方程 $y \ln y - x + y = 0$ 两端对 x 求导得

$$y' \ln y + 2y' - 1 = 0$$

解得 $y' = \frac{1}{2 + \ln y}$

再对 x 求导得

$$y'' = \frac{-y'}{y(2 + \ln y)^2} = \frac{-1}{y(2 + \ln y)^3}$$

将 $(x, y) = (1, 1)$ 代入上式得 $y''|_{y=1} = -\frac{1}{8} < 0$

由于二阶导数 $y''(x)$ 在 $x = 1$ 附近连续, 因此, 在 $x = 1$ 附近 $y''(x) < 0$, 故曲线 $y = y(x)$ 在 $(1, 1)$ 附近是凸的.

【解析二】 方程 $y \ln y - x + y = 0$ 两端对 x 求导得

$$y' \ln y + 2y' - 1 = 0$$

再对 x 求导得 $y'' \ln y + \frac{y'^2}{y} + 2y'' = 0$

将 $x = 1, y = 1$ 代入以上两式得 $y''(1) = -\frac{1}{8} < 0$

由于二阶导数 $y''(x)$ 在 $x = 1$ 附近连续, 因此在 $x = 1$ 附近 $y''(x) < 0$, 则曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近是凸的.

六、证明函数不等式

1. **【证法一】** 令 $f(x) = (x^2 - 1) \ln x - (x - 1)^2$ ($x > 0$) 则 $f(1) = 0$, 且

$$f'(x) = 2x \ln x - x + 2 - \frac{1}{x} = x \left(2 \ln x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

令 $\varphi(x) = 2 \ln x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$)

$$\text{则 } \varphi'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^3} = \frac{2[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]}{x^3} > 0 \quad (x > 0)$$

则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增, 又 $\varphi(1) = 0$, 则

当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi(x) < 0$, 从而 $f'(x) < 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 从而 $f'(x) > 0$, 则 $f(1)$ 为 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值, 又 $f(1) = 0$

故当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

【证法二】 只要证明当 $x > 1$ 时, $(x + 1) \ln x \geq x - 1$, 且当 $0 < x < 1$ 时, $(x + 1) \ln x \leq x - 1$ 即可. 令

$$\varphi(x) = (x + 1) \ln x - (x - 1),$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = \ln x + \frac{1}{x}, \varphi''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - 1}{x^2}$$

当 $x > 1$ 时, $\varphi''(x) > 0$, $\varphi'(x)$ 单调增, 而 $\varphi'(1) = 1 > 0$,

则 $\varphi'(x) > 0$, 从而 $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$, 即 $(x + 1) \ln x \geq x - 1$;

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi''(x) < 0$, $\varphi'(x)$ 单调减, 而 $\varphi'(1) = 1 > 0$, 则 $\varphi'(x) > 0$, 从而 $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$, 即 $(x + 1) \ln x \leq x - 1$.

原题得证.

2. **【证法一】** 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$$

由泰勒公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

又 $f''(x) > 0$, 则 $f(x) \geq x$.

【证法二】 同证法一, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 得, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)x \quad (c \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

由于 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 单调增,

若 $x > 0$, 则 $f'(c) > f'(0) = 1$, 从而 $f'(c)x \geq f'(0)x = x$

若 $x < 0$, 则 $f'(c) < f'(0) = 1$, 从而 $f'(c)x \geq f'(0)x = x$ 则对一切 x 有 $f(x) \geq x$.

【证法三】 令 $F(x) = f(x) - x$, 只要证明 $F(x) \geq 0$,

由于 $F'(x) = f'(x) - 1$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知, $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 则

$$F'(0) = f'(0) - 1 = 0$$

又 $F''(x) = f''(x) > 0$, 则 $F'(x)$ 单调增, 从而 $x = 0$ 为 $F(x)$ 唯一的驻点, 又 $F''(0) = f''(0) > 0$, 则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值, 且 x 为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上唯一的极值点, 则有 $F(0)$ 为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最小值, 又 $F(0) = f(0) - 0 = 0$, 则对一切 x 有

$$f(x) \geq x.$$

【证法四】 由 $f''(x) > 0$ 知, 曲线 $y = f(x)$ 是凹的, 则曲线在其任一点的切线上方.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则曲线在 $(0, 0)$ 点的切线方程为: $y = x$

从而有 $f(x) \geq x$.

七、方程根的存在性与个数

1. **【答案】** (C).

【解析】 令 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 则 $f(x)$ 是偶函数, 因此, 只须讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数.

注意到 $f(0) = -1 < 0, f(\pi) = \pi^{\frac{1}{4}} + \pi^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0 \quad x \in (0, \pi)$$

则 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内有且仅有一个零点.

当 $x > \pi$ 时 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x > \pi^{\frac{1}{4}} + \pi^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$ 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点, 故方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有两个实根.

2. **【分析】** 问题等价于讨论方程 $\ln^4 x - 4\ln x + 4x - k = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内实根的个数.

【解析】 令 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$, 则

$$\varphi'(x) = \frac{4\ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4}{x}(\ln^3 x - 1 + x)$$

显然, $\varphi'(1) = 0$, 且

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调减, 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调增.

又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$\varphi(1) = 4 - k$, 则

- 1) 当 $4 - k > 0$, 即 $k < 4$ 时, $\varphi(x)$ 无零点;
- 2) 当 $4 - k = 0$, 即 $k = 4$ 时, $\varphi(x)$ 有一个零点.
- 3) 当 $4 - k < 0$, 即 $k > 4$ 时, $\varphi(x)$ 有两个零点.

综上所述, 当 $k < 4$ 时, 两曲线没有交点; 当 $k = 4$ 时, 两曲线只有一个交点; 当 $k > 4$ 时, 两曲线有两个交点.

八、微分中值定理有关的证明题

1. 【证明】 (1) 要证 $f(\eta) = \eta$, 即要证 $f(\eta) - \eta = 0$, 令 $F(x) = f(x) - x$, 由题设知 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又 $F(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} > 0$, $F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$ 由连续函数零点定理知, 存在 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $F(\eta) = 0$ 即 $f(\eta) = \eta$.

(2) 为证存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$, 也就只要证 $[f'(\xi) - 1] - \lambda[f(\xi) - \xi] = 0$, 令 $\varphi(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上满足罗尔定理条件, 由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$. 即 $e^{-\lambda \xi}[(f'(\xi) - 1) - \lambda(f(\xi) - \xi)] = 0$ 但 $e^{-\lambda \xi} \neq 0$, 则 $[f'(\xi) - 1] - \lambda[f(\xi) - \xi] = 0$, 故 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

2. 【分析】 对 (I) 只要证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$, 这是积分中值定理的推广, 因为这里要求 η 属于开区间 $(0, 2)$, 而不是闭区间 $[0, 2]$,

对 (II) 只要能证明 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上有三个点函数值相等, 反复用罗尔定理即可证明.

【证明】 (I) 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ($0 \leq x \leq 2$), 则

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$$

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使

$$F(2) - F(0) = 2F'(\eta) = 2f(\eta)$$

$$\text{即 } \int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$$

由题设 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx$ 知, $f(\eta) = f(0)$

(II) 由于 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 从而有

$$m \leq \frac{f(2) + f(3)}{2} \leq M$$

由连续函数介值定理知, 存在 $c \in [2, 3]$, 使

$$f(c) = \frac{f(2) + f(3)}{2}$$

由 (I) 的结果知 $f(0) = f(\eta) = f(c)$ ($0 < \eta < c$)

根据罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in (0, \eta)$, $\xi_2 \in (\eta, c)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = 0$$

再根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 3)$, 使

$$f''(\xi) = 0$$

【评注】 本题是一道综合题, 主要考查罗尔定理、拉格朗日中值定理、连续函数的最大最小值定理及介值定理的应用. 考生的主要错误是

1) 部分考生在证(I)时, 直接用一般教材上的积分中值定理得

$$\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta) \quad (0 \leq 1 \leq \eta \leq 2)$$

由此得 $f(\eta) = f(0)$, 但 η 的范围没有说明在开区间 $(0, 2)$ 内.

2) 部分考生在证明(II)时, 将题设条件 $\frac{f(2)+f(3)}{2} = f(0)$ 变形为 $f(2) - f(0) + f(3) - f(0) = 0$, 由拉格朗日定理得 $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 0$, $\xi_1 \in (0, 2)$, $\xi_2 \in (0, 3)$. 由此推得 $f'(\xi_1)$ 与 $f'(\xi_2)$ 异号, 再由导函数 $f'(x)$ 的介值性知存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $f'(\xi_3) = 0$. 由(I)的结论易推得存在 $\xi_4 \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi_4) = 0$. 从而存在 $\xi \in (\xi_4, \xi_3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

由于上述 ξ_1, ξ_2 存在的区间具有公共部分, 不能保证 ξ_1, ξ_2 是两个不同的点, 所以这个证明是不对的.

由(I)的证明可得到一个“升级版”积分中值定理:

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b)$$

注意这里的 ξ 是在开区间, 该结论以后可直接用, 在很多问题会带来方便.

3. **【分析】** 这种证明存在两个点 $\xi, \eta \in (a, b)$ (即双中值), 又不要求 $\xi \neq \eta$, 往往在 (a, b) 上要利用两次中值定理, 一般是用拉格朗日中值定理和柯西中值定理, 为此, 把含有 ξ 和含有 η 的项分离到等式两边作分析, 即 $f'(\xi) = \frac{e^b - e^a}{b-a} \frac{f'(\eta)}{e^\eta}$.

【证明】 对 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

对 $f(x)$ 和 e^x 在 $[a, b]$ 上用柯西中值定理, 存在 $\eta \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\xi)}{e^\eta}$$

$$\text{即 } f(b) - f(a) = (e^b - e^a) \cdot \frac{f'(\eta)}{e^\eta}$$

$$\text{从而有 } (b-a)f'(\xi) = (e^b - e^a) \frac{f'(\eta)}{e^\eta}$$

$$\text{故 } \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}$$

4. **【证明】** 由于 $f(x)$ 三阶可导, 可考虑泰勒公式; 又 $f'(0) = 0$, 应在 $x = 0$ 处展开

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}x^3. \quad (\eta \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

在上式中分别取 $x = 1$ 和 $x = -1$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(\eta_1)}{3!} \quad (0 < \eta_1 < 1)$$

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} - \frac{f'''(\eta_2)}{3!} \quad (-1 < \eta_2 < 0)$$

两式相减得 $f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6$, 即 $\frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3$

由于 $f'''(x)$ 连续, 则 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2, \eta_1]$ 上有最大值 M 和最小值 m .

则 $m \leq \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} \leq M$

由连续函数介值定理知, 存在 $\xi \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1, 1)$, 使

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3$$

【评注】 本题是一道综合题, 既要用到泰勒公式, 还要用到有限闭区间上连续函数的最大值最小值定理和介值定理, 比较难. 得分率较低, 主要问题有

1) 在泰勒公式中将 $x = -1$ 和 $x = 1$ 代入后, 把 η_1 和 η_2 不加区分都写成 ξ , 似乎很快得到证明. 但这显然是错误的, 由证明过程可知 η_1 和 η_2 分别位于不同区间, 是绝对不可能相等的.

2) 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^3$, 试图连续使用罗尔定理达到目的, 但证不出来.

若能构造一个三次多项式 $g(x)$, 使 $g(-1) = f(-1)$, $g(1) = f(1)$, $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$, 反复用罗尔定理可证明本题.

$$\text{令 } g(x) = \frac{x^2(x+1)}{2} + (1-x^2)f(0)$$

显然, $g(x)$ 符合以上要求,

$$\text{令 } F(x) = f(x) - g(x)$$

$$\text{则 } F(-1) = F(0) = F(1) = 0, F'(0) = 0$$

在区间 $[-1, 0]$ 和 $[0, 1]$ 上分别对 $F(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\eta_1 \in (-1, 0)$, $\eta_2 \in (0, 1)$ 使 $F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$

在区间 $[\eta_1, 0]$ 和 $[0, \eta_2]$ 上分别对 $F'(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\xi_1 \in (\eta_1, 0)$, $\xi_2 \in (0, \eta_2)$ 使 $F''(\xi_1) = F''(\xi_2) = 0$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $F''(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $F'''(\xi) = 0$

$$\text{又 } F'''(x) = f'''(x) - 3$$

$$\text{则 } f'''(\xi) - 3 = 0, \text{ 故 } f'''(\xi) = 3$$

第三章 一元函数积分学

一、不定积分的计算

1. 【解法一】 令 $e^x = t$, 则 $x = \ln t$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= \int \frac{\arctan t}{t^3} dt = -\frac{1}{2} \int \arctan t d \frac{1}{t^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\arctan t}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2(1+t^2)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\arctan t}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1+t^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\arctan t}{t^2} + \frac{1}{t} + \arctan t \right] + C \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\arctan e^x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^x} + \arctan e^x \right] + C \end{aligned}$$

【解法二】
$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= -\frac{1}{2} \int \arctan e^x de^{-2x} \\&= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}} dx \\&= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})} \\&= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \left[-\int \frac{de^x}{1+e^{2x}} + \int \frac{de^x}{e^{2x}} \right] \\&= -\frac{1}{2} \left[e^{-2x} \arctan e^x + \arctan e^x + \frac{1}{e^x} \right] + C\end{aligned}$$

二、定积分概念、性质及几何意义

1. 【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

【解析】
$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \cos \frac{i\pi}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos \pi x} dx \\&= \int_0^1 \sqrt{2 \cos^2 \frac{\pi x}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\end{aligned}$$

2. 【答案】 (B)

【解析一】 由于本题的几何意义很清楚, 所以, 可利用几何意义求解.

由题设知, 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方, 单调减且是凹的, 如图所示.

S_1 表示曲边梯形 $ABCD$ 的面积, S_2 表示矩形 $ABCE$ 的面积, S_3 表示梯形 $ABCD$ 的面积, 由图不难看出 $S_2 < S_1 < S_3$.

【解析二】 排除法: 选择一个符合题设条件的具体 $f(x)$, 排除其中的三个选项

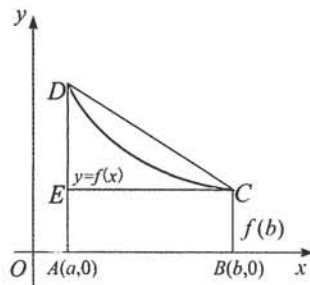
取 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1, b = 2$, 则

$$S_1 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}, S_2 = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}, S_3 = \frac{5}{8}$$

显然有

$$S_2 < S_1 < S_3.$$

排除(A)(C)(D), 故应选(B).



3. 【答案】 (B)

【解析】 由基本不等式 $\sin x < x < \tan x$ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 知

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\tan x}, \quad \frac{x}{\tan x} < 1,$$

由 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\tan x}$ 知, $I_1 > I_2$, 因此, 排除(C)(D).

由 $\frac{x}{\tan x} < 1$ 知, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \frac{\pi}{4} < 1$, 因此, 排除(A), 故应选(B).

三、定积分计算

1. 【答案】 $\frac{\pi}{8}$.

【解析】 由于 $x^3 \cos^2 x$ 为奇函数, $\sin^2 x \cos^2 x$ 为偶函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

2. 【解法一】 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t \cos t}{\cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

【解法二】 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2-1) \arcsin x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= - \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} \arcsin x) dx + \int_0^1 \left(\frac{-x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + x \right) dx + \frac{1}{2} \arcsin^2 x \Big|_0^1$$

$$= - \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$$

移项得 $2 \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$

则 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$

3. 【分析】 本题要计算的积分 $\int_1^2 f(x) dx$ 的被积函数 $f(x)$ 没给出, 但给出了一个关于 $f(x)$ 的变上限积分的等式 $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 通常等式两端求导可解出 $f(x)$.

【解析】 令 $u = 2x - t$, 则 $du = -dt$

$$\int_0^x t f(2x-t) dt = - \int_{2x}^2 (2x-u) f(u) du = 2x \int_x^{2x} f(u) du - \int_x^{2x} u f(u) du$$

于是得

$$2x \int_x^{2x} f(u) du - \int_x^{2x} u f(u) du = \frac{1}{2} \arctan x^2$$

等式两端对 x 求导得

$$2 \int_x^{2x} f(u) du + 2x[2f(2x) - f(x)] - [2xf(2x) \cdot 2 - xf(x)] = \frac{x}{1+x^4}$$

$$\text{即} \quad 2 \int_x^{2x} f(u) du = \frac{x}{1+x^4} + xf(x)$$

$$\text{令 } x=1 \text{ 得 } 2 \int_1^2 f(u) du = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{故} \quad \int_1^2 f(x) = \frac{3}{4}$$

四、变上限积分函数及其应用

1. 【答案】 (A).

【解析一】 先作变量代换将被积式中 x 换出来, 然后再求导.

$$\text{令 } x^2 - t^2 = u, \text{ 则 } -2t dt = du, t dt = -\frac{1}{2} du$$

$$\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

$$\text{则} \quad \frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x = x f(x^2)$$

故应选(A).

【解析二】 排除法: 取 $f(x) \equiv 1$, 显然满足题设条件, 而

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x t dt = x$$

由此可知, 选项(B)(C)(D) 都是错误的, 排除(B)(C)(D), 故应选(A).

2. 【答案】 (B).

【解析一】 排除法: 选一个符合题设条件的具体函数, 取

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 1 dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \int_0^x (-1) dt, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|$$

是一个连续的偶函数, 排除选项(A), (C), (D), 故应选(B).

【解析二】 利用变上限积分函数的两个基本结论:

1) 若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数;

2) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数;

若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数.

由于 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数; 又 $f(x)$ 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则 $f(x)$ 可积, 从而 $\int_0^x f(t) dt$ 为连续函数; 即 $\int_0^x f(t) dt$ 为连续的偶函数, 故应选 (B).

【评注】 本题主要考查变上限积分函数的性质, **【解法二】** 中关于变上限积分函数的两个基本结论常用, 望考生注意.

3.【分析】 本题是求分段函数的变上限积分函数的表达式, 由于被积函数在不同区间上表达式不同, 所以要分别讨论.

【解析】 当 $x \in [-1, 0]$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x \left(2t + \frac{3}{2}t^2 \right) dt \\ &= \left(t^2 + \frac{t^3}{2} \right) \Big|_{-1}^x = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

当 $x \in [0, 1]$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 \left(2t + \frac{3}{2}t^2 \right) dt + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t + 1)^2} dt \\ &= \left(t^2 + \frac{t^3}{2} \right) \Big|_{-1}^0 - \int_0^x t d \frac{1}{e^t + 1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{t}{e^t + 1} \Big|_0^x + \int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{1 + e^{-t}} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} - \int_0^x \frac{d(1 + e^{-t})}{1 + e^{-t}} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-t}) \Big|_0^x \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) + \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{则 } F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ -\frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) + \ln 2 - \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

【评注】 虽然过去考过此类题, 但还是有不少考生出错.

1) 部分考生在 $F(x)$ 的定义域 $[-1, 1]$ 外也进行计算;

2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{te^t}{(e^t + 1)^2} dt.$$

4.【分析】 首先通过变量代换将 $\varphi(x)$ 化为积分上限的函数, 然后求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

【解析】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 及 $f(x)$ 的连续性知, $f(0) = 0$, 从而有

$$\varphi(0) = \int_0^1 f(0) dt = 0$$

当 $x \neq 0$ 时, 令 $xt = u$, 则 $t = \frac{u}{x}$, $dt = \frac{du}{x}$

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}, x \neq 0$$

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0) \end{aligned}$$

则 $\varphi'(0)$ 在 $x = 0$ 处连续.

【评注】 这是一道综合性很强的考题, 主要考查定积分的换元法、变上限积分求导、洛必达法则、导数定义及函数连续性的概念. 考生的主要问题有:

1) 部分考生不会由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 得出 $f(0) = 0$, 从而 $\varphi(0) = 0$;

2) 部分考生不分 $x = 0$ 和 $x \neq 0$, 得 $\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}$, 从而得 $\varphi'(0)$ 不存在, $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

3) 相当多的考生求 $\varphi'(x)$ 时, 导数直接在积分号内求, 得

$$\varphi'(x) = \int_0^1 f'(xt) dt$$

这里有两个错. 第一, 导数在积分号内求, 是有条件的, 本题条件不够; 第二, 等式

$$\left[\int_0^1 f(xt) dt \right]' = \int_0^1 f'(xt) dt$$

不成立, 因为左端表示对 x 求导, 而右端 $f'(xt)$ 是表示对 xt 求导;

4) 有的考生在求 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x)$ 时, 不是拆项求极限, 而是直接用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) + f(x) - f(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

这显然是错误的, 因为原题只假设 $f(x)$ 连续, 从而 $f'(x)$ 不一定存在;

5) 部分考生由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, 得 $f(x) = Ax + o(x) (x \rightarrow 0)$, 再代入 $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ 中去计算, 这也是一种典型的错误, 因为 $f(x) = Ax + o(x)$ 仅是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的性态, 不能在整个区间 $[0, 1]$ 上用该式代入.

五、与定积分有关的证明题

1. 【证明】 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a) = 0$,

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $f(a) = 0$, 又 $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增, 故

$$f(x) > f(a) = 0 \quad x \in (a, b)$$

(2) 设 $F(x) = x^2, g(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$

则 $g'(x) = f(x) > 0$, 故 $F(x), g(x)$ 满足柯西中值定理条件, 于是在 (a, b) 内存在 ξ , 使

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt} = \frac{(x^2)'}{(\int_a^x f(t) dt)'} \quad x = \xi$$

$$\text{即} \quad \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$$

(3) 因为 $f(\xi) = f(\xi) - f(a)$, 在 $[a, \xi]$ 上应用拉格朗日中值定理, 在 (a, ξ) 内存在一点 η , 使

$$f(\xi) = f'(\eta)(\xi - a)$$

从而由(2)的结论得

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi - a)}$$

$$\text{故} \quad f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx.$$

2. 【证法一】 由 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, 及积分中值定理知, 存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使 $f(\xi) = 0$.

若在 $(0, \pi)$ 内 $f(x)$ 只有一个零点 ξ_1 , 则由 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ 知, $f(x)$ 在 $(0, \xi_1)$ 与 (ξ_1, π) 内异号.

不妨设在 $(0, \xi_1)$ 内 $f(x) > 0$, 在 (ξ_1, π) 内 $f(x) < 0$, 又在 $(0, \xi_1)$ 内 $(\cos x - \cos \xi_1) > 0$, 在 (ξ_1, π) 内 $(\cos x - \cos \xi_1) < 0$, 则

$$\int_0^\pi f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx > 0$$

另一方面

$$\int_0^\pi f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx - \cos \xi_1 \int_0^\pi f(x) dx$$

$$\text{由} \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0 \text{ 及 } \int_0^\pi f(x) dx = 0 \text{ 知 } \int_0^\pi f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx = 0$$

矛盾, 原题得证.

【证法二】 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq \pi$, 则有 $F(0) = 0, F(\pi) = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{又 } 0 &= \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dF(x) \\
 &= F(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx \\
 &= \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx \\
 &= \pi F(\xi) \sin \xi \quad \xi \in (0, \pi)
 \end{aligned}$$

这里应用了积分中值定理, 由于 $\sin \xi \neq 0$, 则 $F(\xi) = 0$

由以上证明得 $0 < \xi < \pi$, $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0$

对 $F(x)$ 分别在区间 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, \pi]$ 上用罗尔定理知, 存在 $\xi_1 \in (0, \xi)$ 和 $\xi_2 \in (\xi, \pi)$, 使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

六、反常积分的概念与计算

1. 【答案】 1

【解析】
$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{+\infty} = 1$$

2. 【分析】 本题的被积函数是幂函数和指数函数两类不同函数相乘, 应该用分部积分.

【解析一】 由于

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int x d \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{dx}{1+e^{-x}} \\
 &= \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^x) + C
 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right] + \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{x e^x}{1+e^x} - \ln[e^x(1+e^{-x})] \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x e^x}{1+e^x} - x - \ln(1+e^{-x}) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x}{1+e^x} - \ln(1+e^{-x}) \right] = 0$$

$$\text{故 } \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2$$

【解析二】
$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx = - \int_0^{+\infty} x d \frac{1}{1+e^x} \\
 &= - \frac{x}{1+e^x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\
 &= - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2
 \end{aligned}$$

七、定积分应用

1.【分析】 为确定 L 的凹凸性,须先求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 并确定其正负,要解第(II)问,首先要求出曲线上点 (x_0, y_0) 对应的参数 t_0 处的斜率,然后求出切线方程,由(I)和(II)可知所求平面图形的基本形状,从而求出其面积.

【解析一】 (I) 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{t} - 1 \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(-\frac{2}{t^2} \right) \cdot \frac{1}{x'(t)} = -\frac{1}{t^3}$$

当 $t > 0$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 故 L 是凹的;

(II) 当 $t = 0$ 时, $x'(0) = 0, y'(0) = 4, x(0) = 1, y(0) = 0, \frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \infty$

则 $t = 0$ 时, L 在对应点处切线方程为 $x = 1$, 不合题意, 故设切点 (x_0, y_0) 对应的参数为 $t_0 > 0$, 则 L 在 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - (4t_0 - t_0^2) = \left(\frac{2}{t_0} - 1 \right) (x - t_0^2 - 1)$$

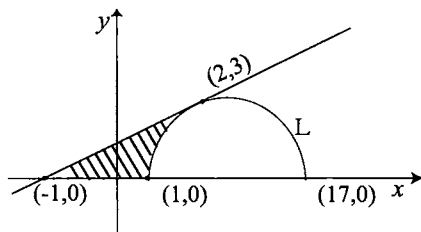
令 $x = -1, y = 0$, 得 $t_0^2 + t_0 - 2 = 0$

解得 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = -2$ (舍去)

由 $t_0 = 1$ 知, 切点为 $(2, 3)$, 且切线方程为 $y = x + 1$.

(III) 令 $y = 4t - t^2 = 0$, 得 $t_1 = 0, t_2 = 4$, 对应曲线 L 与 x 轴的两个交点 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$, 由以上讨论知曲线 L 和所求的切线如图所示, 故所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_1^2 y dx \\ &= \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) d(t^2 + 1) \\ &= \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) \cdot 2t dt \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$



【解析二】 (I) 同解法一.

(II) 由 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$ 知, $t = \sqrt{x-1}$,

$$y = 4t - t^2 = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$$

由于当 $x_0 = 1$ 时, L 在对应点处切线方程为 $x = 1$, 不合题意, 故可设 L 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1 \right) (x - x_0) \quad (x_0 > 1)$$

将 $x = -1, y = 0$ 代入上式, 得

$$-y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1 \right) (-1 - x_0)$$

即 $-4\sqrt{x_0-1} + (x_0-1) = \frac{-2+\sqrt{x_0-1}}{\sqrt{x_0-1}}(x_0+1)$ 整理得

$$(x_0-1) + \sqrt{x_0-1} - 2 = 0 \quad \text{即} \quad (\sqrt{x_0-1}+2)(\sqrt{x_0-1}-1) = 0$$

解得 $x_0 = 2$, 并得 $y_0 = 3$, 因此切线方程为 $y = x + 1$.

(Ⅲ) 在 $y = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$ 中令 $y = 0$, 得 L 与 x 轴的交点为 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$, 故所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1)dx - \int_1^2 [4\sqrt{x-1} - (x-1)]dx \\ &= \frac{2}{9} - \left[\frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right] \Big|_1^2 \\ &= \frac{2}{9} - \frac{13}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

【评注】 本题主要考查的是参数方程确定的函数的导数, 参数方程所表示的曲线的切线及所围的面积. 由于曲线是用参数方程表示的, 因此, 在解第(Ⅱ)(Ⅲ)两问时应用参数方程比较方便, 即解法一较方便, 而把参数方程化为直角坐标方程(即解法二)稍繁一些.

考生的问题主要是

1) 部分考生将参数方程二阶导数求错;

2) 不少考生搞不清参数方程所表示的曲线 L 的基本形状, 当然面积也就求错了.

2. **【解析】** (1) D_1 与 D_2 如图所示, 则

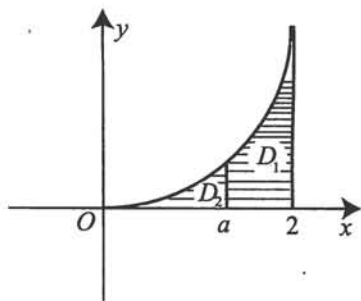
$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_a^2 y^2 dx = \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx \\ &= \frac{4\pi}{5} (32 - a^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi \int_0^{2a^2} x^2 dy \\ &= 2\pi a^4 - \pi \int_0^{2a^2} \frac{y}{2} dy \\ &= 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4 \end{aligned}$$

$$(2) V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5} (32 - a^5) + \pi a^4$$

$$\frac{dV}{da} = 4\pi a^3 (1 - a)$$

当 $a = 1$ 时, $\frac{dV}{da} = 0$, 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{dV}{da} > 0$, V 单调增; 当 $a > 1$ 时, $\frac{dV}{da} < 0$, V 单调减, 则 $a = 1$ 时 V 最大, 且最大值为 $V_1 + V_2 = \frac{129}{5}\pi$.



3. **【解析】** (I) 由对称性知容器位于 $y = \frac{1}{2}$ 上、下两侧部分的容积相等, 因此, 只须考察 -1

$\leq y \leq \frac{1}{2}$ 部分, 曲线可表示为 $x = f(y) = \sqrt{1-y^2} (-1 \leq y \leq \frac{1}{2})$, 则容积

$$V = 2 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi f^2(y) dy = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-y^2) dy = \frac{9}{4}\pi$$

(II) 容器内侧曲线记为 $x = f(y)$, 在 y 轴取小区间 $[y, y+dy]$, 对应容器内小薄片水的重量为 $\rho g \pi f^2(y) dy$ (ρ 为水的密度), 抽出这部分水需走的路程近似为 $2-y$, 将此薄层水抽出需做的功近似等于

$$\begin{aligned} dW &= \rho g \pi f^2(y) (2-y) dy \\ &= \begin{cases} \rho g \pi (1-y^2) (2-y) dy, & -1 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ \rho g \pi (2y-y^2) (2-y) dy, & \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } W &= \pi \rho g \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-y^2) (2-y) dy + \pi \rho g \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y-y^2) (2-y) dy \\ &= \pi \rho g \left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (y^3 - 2y^2 - y + 2) dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 (y^3 - 4y^2 + 4y) dy \right] = \frac{27}{8} \pi \rho g \end{aligned}$$

第四章 向量代数和空间解析几何

二、求转面的方程

1. 【答案】 4.

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & [(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) \\ &= (a \times b + b \times b + a \times c + b \times c) \cdot (c+a) \\ &= (a \times b) \cdot c + (a \times c) \cdot c + (b \times c) \cdot c + (a \times b) \cdot a + (a \times c) \cdot a + (b \times c) \cdot a \\ &= (a \times b) \cdot c + (b \times c) \cdot a = 2(a \times b) \cdot c = 4. \end{aligned}$$

2. 【答案】 $2x + 2y - 3z = 0$.

【解析】 设 $M(x, y, z)$ 是所求平面上的任一点, 则向量 $\{x, y, z\}$ 与向量 $\{6, -3, 2\}$ 以及向量 $\{4, -1, 2\}$ 的混合积为零, 即

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

化简得 $2x + 2y - 3z = 0$, 即为所求的平面方程.

3. 【答案】 (B).

【解析】 直线 l_1 的方向向量是 $S_1 = \{1, -2, 1\}$. 而直线 l_2 的方向向量是

$$S_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -i - j + 2k.$$

从而直线 l_1 与 l_2 的夹角 φ 的余弦为

$$\cos \varphi = \frac{S_1 \cdot S_2}{|S_1| |S_2|} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

4. 【分析】 绕 z 轴旋转所得旋转体的体积计算, 关键是求出其垂直于 z 轴的截面的面积 $S(z)$,

然后即可转化为定积分进行计算. 这里截面为圆, 只需找出 x, y 关于 z 的表达式, 即可求出圆的半径, 从而求出圆的面积, 而这一点可通过直线方程得到.

【详解】由于直线 AB 过点 $(1, 0, 0)$ 和 $(0, 1, 1)$, 因此直线方程为

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1},$$

即 $x = 1 - z, y = z$.

用 $z = z$ 的平面去截此旋转体, 其截面为圆域, 且圆截面半径为

$$r(z) = \sqrt{(1-z)^2 + z^2} = \sqrt{1-2z+2z^2}$$

从而截面面积为 $S(z) = \pi(1-2z+2z^2)$, 因此旋转体的体积为

$$V = \int_0^1 \pi(1-2z+2z^2) dz = \frac{2}{3}\pi.$$

第五章 多元函数的微分学

一、求多元函数的偏导数及全微分

1. 【答案】 (C).

【解析】 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \stackrel{y=x}{=} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续, 排除(A),

(B).

由偏导数的定义 $f'_x(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 同理 $f'_y(0, 0) = 0$.

所以, 应选(C).

2. 【答案】 (A).

【解析】 直接利用偏导存在、可微的相关结论.

3. 【答案】 $yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y)$.

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{y}{x}f'(xy) + y\varphi'(x+y)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{x^2}f(xy) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x}f'(xy) \right) + \frac{\partial}{\partial y} (y\varphi'(x+y)) \\ &= -\frac{x}{x^2}f'(xy) + \frac{1}{x}f'(xy) + \frac{y}{x}f''(xy)x + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y). \end{aligned}$$

【评注】 1. 因为 f 和 φ 具有二阶连续导数, 则混合偏导数相等, 此题求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 更简单一些.

2. 本题考生常犯的错误的: 把 f 和 φ 看作有两个中间变量, 出现 f'_x, f'_y 等错误的记号, 实际上 f 和 φ 只有一个中间变量.

4. 【分析】 先求出二阶偏导数, 再代入相应表达式即可.

【详解】 由已知条件可得

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x}) + f'(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4}f''(\frac{x}{y}) + \frac{1}{y}f''(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{x}f'(\frac{y}{x}) + f(\frac{x}{y}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x}{y}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}f''(\frac{y}{x}) - \frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y}) + \frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y}) + \frac{x^2}{y^3}f''(\frac{x}{y}),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^2}f''(\frac{x}{y}) + \frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y}) - \frac{y^2}{x^2}f''(\frac{y}{x}) - \frac{x^2}{y}f''(\frac{x}{y}) \\ &= \frac{2y}{x}f'(\frac{y}{x}). \end{aligned}$$

5.【详解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 + yf'_3, \frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 - f'_2 + xf'_3,$

所以, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (f'_1 + f'_2 + yf'_3)dx + (f'_1 - f'_2 + xf'_3)dy,$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot (-1) + f''_{13} \cdot x + f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot (-1) + f''_{23} \cdot x + f'_3 \\ &\quad + y[f''_{31} \cdot 1 + f''_{32} \cdot (-1) + f''_{33} \cdot x] \\ &= f''_{31} + f''_{11} - f''_{22} + xyf''_{33} + (x+y)f''_{13} + (x-y)f''_{23} \end{aligned}$$

二、求多元函数的极值

1.【答案】 (A).

【解析】 由 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ 知, 分子的极限必为零, 从而有 $f(0, 0) = 0$, 且

$f(x, y) - xy \approx (x^2 + y^2)^2 (|x|, |y| \text{ 充分小时}),$ 于是

$$f(x, y) - f(0, 0) \approx xy + (x^2 + y^2)^2.$$

可见当 $y = x$ 且 $|x|$ 充分小时, $f(x, y) - f(0, 0) \approx x^2 + 4x^4 > 0$; 而当 $y = -x$ 且 $|x|$ 充分小时, $f(x, y) - f(0, 0) \approx -x^2 + 4x^4 < 0$. 故点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点, 应选(A).

【评注】 本题综合考查了多元函数的极限、连续和多元函数的极值概念, 题型比较新, 有一定难度. 将极限表示式转化为极限值加无穷小量, 是有关极限分析过程中常用的思想.

2.【分析】 可能极值点是两个一阶偏导数为零的点, 先求出一阶偏导, 再令其为零确定极值点即可, 然后用二阶偏导确定是极大值还是极小值, 并求出相应的极值.

【详解】 因为 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 所以

$$2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$-6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0, \end{cases} \quad \text{故 } \begin{cases} x = 3y, \\ z = y. \end{cases}$$

将上式代入 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 可得

$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 3, \text{ 或} \\ z = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -9, \\ y = -3, \\ z = -3. \end{cases}$$

$$\text{由于 } 2 - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$-6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{所以 } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{1}{6}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(9,3,3)} = -\frac{1}{2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{5}{3},$$

故 $AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$, 又 $A = \frac{1}{6} > 0$, 从而点 $(9, 3)$ 是 $z(x, y)$ 的极小值点, 极小值为 $z(9, 3) = 3$.

类似地, 由

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{1}{6}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-9,-3,-3)} = \frac{1}{2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{5}{3},$$

可知 $AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$, 又 $A = -\frac{1}{6} < 0$, 从而点 $(-9, -3)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 极大值为

$$z(-9, -3) = -3.$$

【评注】 本题讨论由方程所确定的隐函数求极值问题, 关键是求可能极值点时应注意 x, y, z 满足原方程.

3. 【分析】 根据全微分和初始条件可先确定 $f(x, y)$ 的表达式. 而 $f(x, y)$ 在椭圆域上的最大值和最小值, 可能在区域的内部达到, 也可能在区域的边界上达到, 且在边界上的最值又转化为求条件极值.

【详解】 由题设, 知 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$,

于是 $f(x, y) = x^2 + C(y)$, 且 $C'(y) = -2y$, 从而 $C(y) = -y^2 + C$,

再由 $f(1, 1) = 2$, 得 $C = 2$, 故 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 得可能极值点为 $x = 0, y = 0$. 且 $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = 0,$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} = -2,$$

$\Delta = B^2 - AC = 4 > 0$, 所以点 $(0, 0)$ 不是极值点, 从而也非最值点.

再考虑其在边界曲线 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的情形: 令拉格朗日函数为

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1),$$

$$\text{解 } \begin{cases} F'_x = \frac{\partial f}{\partial x} + 2\lambda x = 2(1 + \lambda)x = 0, \\ F'_y = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\lambda y}{2} = -2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$$

得可能极值点 $x=0, y=2, \lambda=4; x=0, y=-2, \lambda=4; x=1, y=0, \lambda=-1; x=-1, y=0, \lambda=-1$. 代入 $f(x, y)$ 得 $f(0, \pm 2) = -2, f(\pm 1, 0) = 3$,

可见 $z = f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 内的最大值为 3, 最小值为 -2.

【评注】 本题综合考查了多元函数微分学的知识, 涉及到多个重要基础概念, 特别是通过偏导数反求函数关系, 要求考生真正理解并掌握了相关知识.

4. **【详解】** 设拉格朗日函数为

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 4),$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} F'_x(x, y, z) = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y(x, y, z) = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z(x, y, z) = 2z + \lambda + \mu = 0, \\ F'_\lambda(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0, \\ F'_\mu(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0. \end{cases} \quad \text{得}$$

$$\begin{cases} x = -2, \\ y = -2, \\ z = 8 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

故最大值、最小值分别为 $u_{\max} = (-2)^2 + (-2)^2 + 8^2 = 72, u_{\min} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.

【评注】 本题考察两个约束条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的函数 $u = f(x, y, z)$ 的条件极值问题, 可类似地构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$$

解出可能极值点后, 直接代入目标函数计算函数值再比较大小确定相应的极值(或最值)即可.

5. **【分析】** 本题为条件极值问题, 用拉格朗日乘数法.

【详解】 令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$,

$$\text{解方程组} \begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

得 $x=1, y=\pm\sqrt{5}, z=2$ 或 $x=-1, y=\pm\sqrt{5}, z=-2$ 或 $x=\pm\sqrt{2}, y=0, z=\mp\sqrt{2}$.

由 $u(1, \sqrt{5}, 2) = u(-1, -\sqrt{5}, -2) = 5\sqrt{5}, u(1, -\sqrt{5}, 2) = u(-1, \sqrt{5}, -2) = -5\sqrt{5},$
 $u(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = u(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 0$

得所求最大值为 $5\sqrt{5}$, 最小值为 $-5\sqrt{5}$.

【评注】 求多元函数的极值已连续几年考查, 仍属基本题型.

6. **【分析】** 利用多元复合函数的求偏导法则及取得极值的必要条件

【解析】 由链导法则, $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_u + z'_v v'_x$, 其中 $u = x + y, v = f(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{uv} + z''_{vu} v'_y + (z''_{u\alpha} + z''_{\alpha v} v'_y) v'_x + z'_{\alpha} v''_{xy}.$$

由于 $f(1,1) = 2$ 是 $f(u,v)$ 的极值, 则

$$v'_x(1,1) = f'_x(1,1) = 0, v'_y(1,1) = f'_y(1,1) = 0.$$

令 $x = y = 1$, 得

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=y=1} = z''_{uv}(2,2) + z'_{\alpha}(2,2) v''_{xy}(1,1) = f''_{uv}(2,2) + f'_{\alpha}(2,2) f'_{uv}(1,1)$$

【评注】 该题虽然是抽象复合函数求偏导的题目, 实际上关键要用到二元函数取得极值的必要条件.

三、反问题

1. **【答案】** (D).

【解析】 令 $P = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, Q = \frac{y}{(x+y)^2}$, 由于 $Pdx + Qdy$ 为某函数的全微分, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

即 $(a-2)x - ay = -2y$, 亦是 $(a-2)x = (a-2)y$,

当 $a = 2$ 时, 上式恒成立, 故应选(D).

四、求方向导数与梯度

1. **【答案】** $\frac{1}{2}$.

【解析】 计算得

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \Big|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2}.$$

方向 $\overrightarrow{AB} = \{2, -2, 1\}$, 方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{1}{3}$,

于是所求的方向导数为 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) \Big|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2}$.

第六章 重积分

一、基本概念及性质

1. **【答案】** (A).

【解析】 在区域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上, 有 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, 从而有

$$\frac{\pi}{2} > 1 \geq \sqrt{x^2 + y^2} \geq x^2 + y^2 \geq (x^2 + y^2)^2 \geq 0,$$

由于 $\cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上为单调减函数, 于是

$$0 \leq \cos \sqrt{x^2 + y^2} \leq \cos(x^2 + y^2) \leq \cos(x^2 + y^2)^2$$

因此 $\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma < \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma < \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 故应选(A).

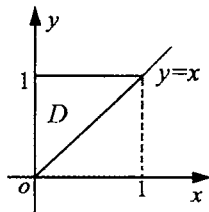
【评注】 本题比较二重积分大小, 本质上涉及到用重积分的不等式性质和函数的单调性进行分析讨论.

二、二重积分的基本计算

1. **【分析】** 画出积分域, 将二重积分化为累次积分即可.

【解析】 积分区域如图. 因为根号下的函数为关于 x 的一次函数, “先 x 后 y ” 积分比较容易, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2 - xy} dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{y} (y^2 - xy)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^y dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$



【评注】 计算二重积分时, 首先画出积分区域的图形, 然后结合积分域的形状和被积函数的形式, 选择坐标系和积分次序.

2. **【分析】** 利用极坐标计算

【详解一】 由 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$, 得 $r \leq 2(\sin\theta + \cos\theta)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} (r\cos\theta - r\sin\theta) r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} (r\cos\theta - r\sin\theta) r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{3} (\cos\theta - \sin\theta) r^3 \Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} \right] d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{8}{3} (\cos\theta - \sin\theta) \cdot (\sin\theta + \cos\theta) \cdot (\sin\theta + \cos\theta)^2 d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{8}{3} (\cos\theta - \sin\theta) \cdot (\sin\theta + \cos\theta)^3 d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin\theta + \cos\theta)^3 d(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} (\sin\theta + \cos\theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

【详解二】 如图将区域 D 分成 D_1, D_2 两部分, 其中

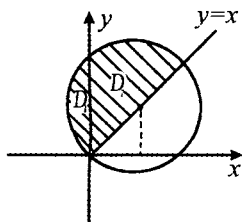
$$D_1 = \{(x, y) \mid 1 - \sqrt{2 - (x-1)^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{2 - (x-1)^2}, 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 1 + \sqrt{2 - (x-1)^2}, 0 \leq x \leq 2\},$$

由二重积分的性质知

$$\iint_D (x-y) dx dy = \iint_{D_1} (x-y) dx dy + \iint_{D_2} (x-y) dx dy.$$

$$\text{因为 } \iint_{D_1} (x-y) dx dy = \int_{1-\sqrt{2}}^0 dx \int_{1-\sqrt{2-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} (x-y) dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{1-\sqrt{2}}^0 2(x-1) \sqrt{2-(x-1)^2} dx \\
 &= -\frac{2}{3} (\sqrt{2-(x-1)^2})^3 \Big|_{1-\sqrt{2}}^0 = -\frac{2}{3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_2} (x-y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_x^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} (x-y) dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^2 [2-2(x-1) \sqrt{2-(x-1)^2}] dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left[4 + \frac{2}{3} (\sqrt{2-(x-1)^2})^3 \Big|_0^2 \right] = -2
 \end{aligned}$$

所以 $\iint_D (x-y) dx dy = -\frac{8}{3}.$

【评注】 可利用坐标变换, 令 $u = x-1, v = y-1$, 那么 $D = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u\}$. 原式化简为

$$\begin{aligned}
 \iint_D (u-v) du dv &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r \cos \theta - r \sin \theta) \cdot r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sin \theta + \cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (-2\sqrt{2}) = -\frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

即为所求.

3. 【答案】 $\frac{7}{12}.$

【解析】 易得圆的极坐标方程为 $r = 2\sin\theta$, 于是

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy d\sigma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cos\theta \sin\theta \cdot r dr = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos\theta d\theta \\
 &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\sin\theta = \frac{7}{12}.
 \end{aligned}$$

三、利用区域的对称性及函数的奇偶性计算积分

1. 【分析】 首先, 将积分区域 D 分为大圆 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ 减去小圆 $D_2 = \{(x, y) | (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$, 再利用对称性与极坐标计算即可.

【解析】 令 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}, D_2 = \{(x, y) | (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$,

由对称性, $\iint_D y d\sigma = 0.$

$$\begin{aligned}
 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma &= \iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma - \iint_{D_2} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^2 dr. \\
 &= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{9} = \frac{16}{9}(3\pi - 2)
 \end{aligned}$$

所以, $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma = \frac{16}{9}(3\pi - 2).$

【评注】 本题属于在极坐标系下计算二重积分的基本题型, 对于二重积分, 经常利用对称性及将一个复杂区域划分为两个或三个简单区域来简化计算.

2. **【答案】** (D).

【解析】 由轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] d\sigma \\ &= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \frac{a+b}{2} \pi. \end{aligned}$$

应选(D).

【评注】 被积函数含有抽象函数时, 一般考虑用对称性分析. 特别, 当具有轮换对称性(x, y 互换, D 保持不变)时, 往往用如下方法:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy.$$

3. **【分析】** 被积函数展开, 利用二重积分的对称性.

【解析】 显然 D 关于 x 轴对称, 且 $D = D_1 \cup D_2$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}, D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 0, -\sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}.$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)^3 d\sigma &= \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy \\ &= \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy + \iint_D (3x^2y + y^3) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy + 0 \quad (\text{被积函数 } 3x^2y + y^3 \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数}) \\ &= 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (-y^4 + 8y^2 + 1) dy = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} y^5 + \frac{8}{3} y^3 + y \right) \Big|_0^1 = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

【评注】 二重积分的对称性的考察一直是研究生考试的重要测试内容.

四、分块函数积分的计算

1. **【分析】** 被积函数含有绝对值, 应当作分区域函数看待, 利用积分的可加性分区域积分即可.

【解析】 记 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \in D\}$,

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1, (x, y) \in D\},$$

$$\text{于是 } \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma = - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) dx dy - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\
&= \frac{\pi}{8} + \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 - 1) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

【评注】 形如积分 $\iint_D |f(x, y)| d\sigma$ 、 $\iint_D \max\{f(x, y), g(x, y)\} d\sigma$ 、 $\iint_D \min\{f(x, y), g(x, y)\} d\sigma$ 、 $\iint_D [f(x, y)] d\sigma$ 、 $\iint_D \operatorname{sgn}\{f(x, y) - g(x, y)\} d\sigma$ 等的被积函数均应当作分区域函数看待, 利用积分的可加性分区域积分.

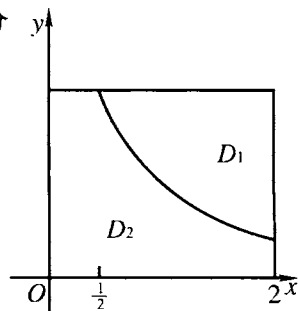
2. **【分析】** 被积函数 $f(x, y) = \max(xy, 1)$ 是分区域函数, 要利用积分的可加性分区域积分.

$$\text{【解析】} \max(xy, 1) = \begin{cases} xy, & xy \geq 1, \\ 1, & xy < 1, \end{cases}$$

记 $D_1 = \{(x, y) | xy \geq 1, (x, y) \in D\}$,

$D_2 = \{(x, y) | xy < 1, (x, y) \in D\}$, 则

$$\begin{aligned}
\iint_D \max(xy, 1) dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 1 dx dy \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\
&= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2.
\end{aligned}$$



五、交换积分次序及坐标系

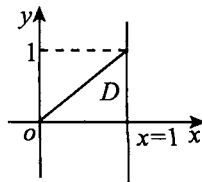
1. **【答案】** (B).

【解析】 由题设可知, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1$, 则 $0 \leq y \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi$, 故应选(B).

2. **【分析】** 化极坐标积分区域为直角坐标区域, 相应的被积函数也化为直角坐标系下的表示形式, 然后计算二重积分.

【解析】 直角坐标系下 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } I &= \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2} \cos 2\theta dr d\theta \\
&= \iint_D r \sin \theta \sqrt{1-r^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot r dr d\theta \\
&= \iint_D y \sqrt{1-x^2+y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1-x^2+y^2} dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2+y^2} d(1-x^2+y^2) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3} [1 - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \quad (\text{令 } x = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \pi.
\end{aligned}$$

六、三重积分的计算

1. 【分析】 (1) 先分别在球面坐标下计算分子的三重积分和在极坐标下计算分母的重积分, 再根据导函数 $F'(t)$ 的符号确定单调性; (2) 将待证的不等式作适当的恒等变形后, 构造辅助函数, 再用单调性进行证明即可.

【解析】 (1) 因为

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 \sin \varphi dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr} = \frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr}, \\
F'(t) &= 2 \frac{tf(t^2) \int_0^t f(r^2) r(t-r) dr}{\left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2},
\end{aligned}$$

所以在 $(0, +\infty)$ 上 $F'(t) > 0$, 故 $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

(2) 因

$$G(t) = \frac{\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr},$$

要证明 $t > 0$ 时 $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$, 只需证明 $t > 0$ 时, $F(t) - \frac{2}{\pi} G(t) > 0$, 即

$$\int_0^t f(r^2) r^2 dr \int_0^t f(r^2) dr - \left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2 > 0.$$

令
$$g(t) = \int_0^t f(r^2) r^2 dr \int_0^t f(r^2) dr - \left[\int_0^t f(r^2) r dr \right]^2,$$

则 $g'(t) = f(t^2) \int_0^t f(r^2) (t-r)^2 dr > 0$, 故 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

因为 $g(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 所以当 $t > 0$ 时, 有 $g(t) > g(0)$.

又 $g(0) = 0$, 故当 $t > 0$ 时, $g(t) > 0$,

因此, 当 $t > 0$ 时, $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$.

【评注】 本题将定积分、二重积分和三重积分等多个知识点结合起来了, 但难点是证明(2)中的不等式, 事实上, 这里也可用柯西积分不等式证明:

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx,$$

在上式中取 $f(x)$ 为 $\sqrt{f(r^2)}r$, $g(x)$ 为 $\sqrt{f(r^2)}$ 即可.

第七章 曲线、曲面积分

一、第一类曲线积分的计算

1. 【答案】 π .

【解析】 将积分曲线 L 的方程: $y = -\sqrt{1-x^2}$, 即 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq 0)$ 代入被积函数, 得

$$\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_L 1 \cdot ds = \pi (\text{积分曲线 } L \text{ 的弧长}).$$

【评注】 本题也可利用参数法, 将曲线积分化为参变量的定积分. L 的参数方程为

$$x = \cos t, y = \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi,$$

于是
$$\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_{\pi}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_{\pi}^{2\pi} 1 dt = \pi.$$

2. 【答案】 $12a$.

【解析】 将积分曲线 L 的方程: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 即 $3x^2 + 4y^2 = 12$ 代入被积函数, 得

$$\oint_L (3x^2 + 4y^2) ds = \oint_L 12 ds = 12a,$$

由于 L 关于 x 轴 (y 轴) 对称, 函数 $2xy$ 关于变量 y (变量 x) 为奇函数, 所以

$$\oint_L 2xy ds = 0.$$

于是
$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \oint_L 2xy ds + \oint_L (3x^2 + 4y^2) ds = 12a.$$

【评注】 若积分曲线关于 x 轴 (或 y 轴) 对称, 应考察被积函数或被积函数的某一部分是否关于变量 y (或变量 x) 为奇、偶函数, 利用对称性化简积分.

二、第二类曲线积分的计算

1. 【分析】 第二类空间曲线积分一般可用参数法或斯托克斯公式进行计算, 本题用斯托克斯公式计算比较简单.

【解析】 设 Σ 为平面 $x + y + z = 2$ 的上侧被 L 所围成的部分, Σ 在 xOy 面的投影区域

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}, \Sigma \text{ 的单位法向量为 } \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),$$

由斯托克斯公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x + 2y + 3z) dS \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (6 + x - y) dS \quad (\text{代入 } z = 2 - x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} (6+x-y) \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy \\
 &= -2 \iint_{D_{xy}} (6+x-y) dx dy,
 \end{aligned}$$

由二重积分的对称性质, $\iint_{D_{xy}} (x-y) dx dy = 0$,

所以,
$$I = -12 \iint_{D_{xy}} dx dy = -24.$$

2. 【答案】 $\frac{3}{2}\pi$.

【解析】 正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta, \\ y = \sqrt{2}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

于是
$$\begin{aligned}
 \int_L x dy - 2y dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{2}\cos\theta \cdot \sqrt{2}\cos\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta \cdot \sqrt{2}\sin\theta] d\theta \\
 &= \pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta d\theta = \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

【评注】 本题也可添加直线段, 使之成为封闭曲线, 然后用格林公式计算, 而在添加的线段上用参数法化为定积分计算即可.

三、平面曲线积分与路径无关的问题

1. 【分析】 曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 由此可得到关于 $\varphi(x)$ 的微分方程, 解方程求出 $\varphi(x)$.

【解析】 由题设知

$$\frac{\partial(y\varphi(x))}{\partial x} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}, \text{ 即 } y\varphi'(x) = 2xy, \text{ 解方程得 } \varphi(x) = x^2 + C,$$

又由 $\varphi(0) = 0$, 得 $C = 0$, 所以 $\varphi(x) = x^2$.

所以
$$\begin{aligned}
 \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + x^2 y dy \\
 &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} d\left(\frac{1}{2}x^2 y^2\right) = \frac{1}{2}x^2 y^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

2. 【分析】 判断积分 $\int_L P dx + Q dy$ 是否与路径无关, 只须检验 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

利用(1)的结果, 根据积分与路径无关, 取特殊路径积分或求出原函数即可求得积分 I 的值.

【详解一】(1) 由于

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \right\} = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xy f'(xy) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] \right\}$$

在上半平面内成立, 所以在上半平面内积分 I 与路径无关.

(2) 由于积分 I 与路径无关, 故可取积分路径: 由点 (a, b) 到点 (c, b) 再到点 (c, d) 的折线段, 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^c \frac{1}{b} [1 + b^2 f(bx)] dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} [y^2 f(cy) - 1] dy \\
&= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_a^c b f(bx) dx + \int_b^d c f(cy) dy \\
&= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t) dt + \int_{bc}^{cd} f(t) dt \quad (\text{利用定积分换元法}) \\
&= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t) dt,
\end{aligned}$$

又由于 $ab = cd$, 所以 $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

【详解二】(1) 同详解一.

(2) 由(1)可知, $Pdx + Qdy$ 的原函数存在, 又

$$\begin{aligned}
Pdx + Qdy &= yf(xy)dx + xf(xy)dy + \frac{ydx - xdy}{y^2} = f(xy)dxy + d\frac{x}{y} \\
&= d\left[\int_0^{xy} f(t)dt + \frac{x}{y}\right].
\end{aligned}$$

$$\text{所以 } I = \left[\int_0^{xy} f(t)dt + \frac{x}{y}\right] \Big|_{(a,b)}^{(c,d)} = \int_0^{cd} f(t)dt + \frac{c}{d} - \int_0^{ab} f(t)dt - \frac{a}{b} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

【评注】 在解二中应注意凑微分: $f(xy)dxy = d\int_0^{xy} f(t)dt$, 一般地, 对于连续函数 $f(x)$, 变限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 即为函数 $f(x)$ 的原函数, 用变限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 表示一抽象函数 $f(x)$ 的原函数, 是重要的解题思想.

四、第一类曲面积分的计算

1. **【分析】** 考虑到积分曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域比较简单, 为圆域

$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 将曲面积分化为该投影区域上的二重积分.

【解析】 曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$,

$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{2}dxdy$, 将积分曲面方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 代入被积表达式,

$$\begin{aligned}
\text{于是 } \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} dxdy \\
&= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{32}{9} \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

【评注】 对于曲面积分, 应先将积分曲面方程代入被积表达式化简积分, 再计算曲面积分.

2. **【答案】** (C).

【解析】 四个选项等式右边的积分都大于零, 由第一类曲面积分的对称性质, 得积分

$$\iint_S x dS = \iint_S y dS = \iint_S xyz dS = 0,$$

所以应选(C).

【评注】事实上, 对于(D) 曲面 S 关于 yOz 面和 zOx 面均对称, 而被积函数 z 关于变量 x, y 均为偶函数, 所以有

$$\iint_S z dS = 2 \iint_{S \cap \{x \geq 0\}} z dS = 4 \iint_{S_1} z dS,$$

另外, 由于曲面 S_1 在第一卦限内关于变量 x, y, z 具有轮换对称性, 所以有

$$\iint_{S_1} z dS = 4 \iint_{S_1} x dS = 4 \iint_{S_1} y dS.$$

五、第二类曲面积分的计算

1. 【分析】考虑到函数 $Q = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, R = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 在曲面 S 内部的点 $(0, 0, 0)$ 处没有意义, 即不具有有一阶连续偏导数, 所以不能直接利用高斯公式. 只能对 S 的三张曲面: $x^2 + y^2 = R^2, z = R, z = -R$ 分别积分.

【解析】令 $S_1: \begin{cases} z = R \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{cases}$, 取上侧; $S_2: \begin{cases} z = -R \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{cases}$, 取下侧;

$S_3: \begin{cases} -R \leq z \leq R \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$, 取外侧.

则有

$$\iint_S \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{S_1 + S_2 + S_3} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

而

$$\iint_{S_1} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{S_2} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0,$$

令 $D_{xy}: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq R^2 \end{cases}$ 表示 S_1, S_2 在 xOy 面上的投影区域, 有

$$\iint_{S_1 + S_2} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{D_{xy}} \frac{R^2}{x^2 + y^2 + R^2} dx dy - \iint_{D_{xy}} \frac{(-R)^2}{x^2 + y^2 + R^2} dx dy = 0.$$

在 S_3 上, $\iint_{S_3} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$

令 $D_{yz}: \begin{cases} x = 0 \\ -R \leq y \leq R, -R \leq z \leq R \end{cases}$ 表示 S_3 在 yOz 面的投影区域, 有

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz - \iint_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz = 2 \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz \\ &= 2 \int_{-R}^R dy \int_{-R}^R \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dz = \frac{1}{2} \pi^2 R. \end{aligned}$$

于是

$$\iint_S \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \pi^2 R.$$

【评注】 1. 在式子 $\iint_{S_3} \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2} dydz - \iint_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2} dydz$ 中, 是将曲面

S_3 分为前、后两部分, 它们的方程分别为 $x = \sqrt{R^2-y^2}$ 与 $x = -\sqrt{R^2-y^2}$, 在 yOz 面的投影区域都为 D_{yz} , 但它们的侧相反, 前部分取前侧, 后部分取后侧.

2. 不能直接将方程 $x^2+y^2=R^2$ 代入积分 $I = \iint_S \frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$, 化为

$I = \iint_S \frac{xdydz+z^2dxdy}{R^2+z^2}$, 因为积分曲面 S 是由三片曲面: $x^2+y^2=R^2, z=R, z=-R$ 组成的, 而 $x^2+y^2=R^2$ 只是组成 S 的三片曲面中的一片曲面的方程.

2.【分析】 先添加一曲面使之与原曲面围成一封闭曲面, 应用高斯公式求解, 而在添加的曲面上应用直接投影法求解即可.

【解析】 取 \sum_1 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧, 记 Ω 为由 \sum 与 \sum_1 围成的空间闭区域, 则

$$I = \iint_{\sum+\sum_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy - \iint_{\sum_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy.$$

由高斯公式知

$$\begin{aligned} \iint_{\sum+\sum_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy &= \iiint_{\Omega} 6(x^2+y^2+z)dxdydz \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z+r^2)rdz \\ &= 12\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2 + r^3(1-r^2) \right] dr \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

$$\text{而 } \iint_{\sum_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -3dxdy = 3\pi,$$

$$\text{故 } I = 2\pi - 3\pi = -\pi.$$

【评注】 本题选择 \sum_1 时应注意其侧与 \sum 围成封闭曲面后同为外侧(或内侧), 再就是在 \sum_1 上直接投影积分时, 应注意符号(\sum_1 取下侧, 与 z 轴正向相反, 所以取负号).

第八章 无穷级数

一、数项级数敛散性的判定

1.【答案】 (B).

【解析】 取 $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 排除(A),(D),

又取 $a_n = \frac{1}{n \sqrt{n}}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \infty$, 排除(C), 故应选(B).

【评注】 本题也可用比较判别法的极限形式, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda \neq 0$, 而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散, 故应选(B).

2. 【答案】 (B).

【解析】 取 $a_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 均发散, 排除(A), (B) 选项, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 发散, 进一步排除(C), 故应选(D). 事实上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 的部分和数列极限存在.

【评注】 通过反例用排除法找答案是求解类似无穷级数选择问题的最常用方法.

3. 【答案】 (A).

【解析】 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则该级数加括号后得到的级数仍收敛, 因此应选(A).

二、求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

1. 【答案】 $\frac{1}{e}$.

【解析】 由题意知, $a_n = \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} > 0$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{e^n - (-1)^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{e^{n+1} \left[1 - \left(-\frac{1}{e} \right)^{n+1} \right]}{e^n \left[1 - \left(-\frac{1}{e} \right)^n \right]} \rightarrow e (n \rightarrow \infty)$$

所以, 该幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{e}$.

【评注】 也可下法求解, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{e}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 1, 取两者最小值为所求.

三、求幂级数的和函数及数项级数的和

1. 【分析】 幂级数求和函数一般采用逐项求导或逐项积分, 转化为几何级数或已知函数的幂级数展开式, 从而达到求和的目的.

【解析】 设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) x^{2n},$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n}, S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n},$$

则

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x), x \in (-1, 1)$$

由于

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2},$$

$$(xS_1(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}, x \in (-1, 1),$$

因此 $xS_1(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = -x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$

又由于 $S_1(0) = 0$, 故

$$S_1(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & |x| < 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

所以 $S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}, & |x| < 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

【评注】 而幂级数求和尽量将其转化为形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 幂级数, 再通过逐项求导或逐项积分求出其和函数. 本题应特别注意 $x=0$ 的情形.

2. **【分析】** 因为幂级数缺项, 按函数项级数收敛域的求法计算; 利用逐项求导或积分并结合已知函数的幂级数展开式计算和函数.

【解析】 记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}} \right| = |x|^2.$$

所以当 $|x|^2 < 1$, 即 $|x| < 1$ 时, 所给幂级数收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 所给幂级数发散;

当 $x = \pm 1$ 时, 所给幂级数为 $\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}, \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$, 均收敛,

故所给幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$

$$\text{在 } (-1, 1) \text{ 内, } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-1)(2n)} = 2xs_1(x),$$

$$\text{而 } s'_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, s''_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{所以 } s'_1(x) - s'_1(0) = \int_0^x s''_1(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x, \text{ 又 } s'_1(0) = 0,$$

于是 $s'_1(x) = \arctan x$. 同理

$$\begin{aligned} s_1(x) - s_1(0) &= \int_0^x s'_1(t) dt = \int_0^x \arctan t dt \\ &= t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \end{aligned}$$

又 $s_1(0) = 0$, 所以 $s_1(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

故 $s(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), x \in (-1, 1)$.

由于所给幂级数在 $x = \pm 1$ 处都收敛, 且 $s(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2)$ 在 $x = \pm 1$ 处都连续, 所以 $s(x)$ 在 $x = \pm 1$ 成立, 即

$$s(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), x \in [-1, 1].$$

【评注】 本题幂级数是缺项幂级数, 则应采用函数项级数求收敛域的方法, 属基本题型.

四、函数的幂级数展开

1. **【分析】** 幂级数展开有直接法与间接法, 一般考查间接法展开, 即通过适当的恒等变形、求导或积分等, 转化为可利用已知幂级数展开的情形. 本题可先求导, 再利用函数 $\frac{1}{1-x}$ 的幂级数展开 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ 即可, 然后取 x 为某特殊值, 得所求级数的和.

【解析】 因为 $f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

又 $f(0) = \frac{\pi}{4}$, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n} \right] dt \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛, 函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处连续, 所以

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \right] = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

再由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

2. **【分析】** 本题考查函数的幂级数展开, 利用间接法.

【解析】 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$, 而

$$\frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}, -2 < x < 4,$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^{n+1}}, -1 < x < 3,$$

所以 $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n$, 收敛区

间为 $-1 < x < 3$.

五、傅里叶级数

1.【答案】 1.

【解析】 根据余弦级数的定义, 有

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 d\sin 2x \\
 &= \frac{1}{\pi} [x^2 \sin 2x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot 2x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x d\cos 2x = \frac{1}{\pi} [x \cos 2x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

第九章 常微分方程

一、一阶微分方程

1.【答案】 $xy = 2$.

【解析】 原方程可化为 $(xy)' = 0$, 积分得 $xy = C$, 代入初始条件得 $C = 2$, 故所求特解为 $xy = 2$.

【评注】 本题虽属基本题型, 也可先变形

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \text{再积分求解.}$$

2.【答案】 (B).

【解析】 由于 $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的非零解, 所以它的通解是 $Y = C[y_1(x) - y_2(x)]$, 故原方程的通解为

$$y = y_1(x) + Y = y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)], \text{故应选(B).}$$

【评注】 本题属基本题型, 考查一阶线性非齐次微分方程解的结构:

$$y = y^* + Y.$$

其中 y^* 是所给一阶线性微分方程的特解, Y 是对应齐次微分方程的通解.

3.【答案】 $y = \frac{x}{\sqrt{\ln x + 1}}, x > e^{-1}$.

【解析】 令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程变为

$$u + x \frac{du}{dx} = u - \frac{1}{2}u^3 \Rightarrow \frac{du}{u^3} = -\frac{dx}{2x}.$$

两边积分得

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln C,$$

即 $x = \frac{1}{C}e^{\frac{1}{u^2}} \Rightarrow x = \frac{1}{C}e^{\frac{x^2}{y^2}}$, 将 $y|_{x=1} = 1$ 代入左式得 $C = e$,

故满足条件的方程的特解为 $ex = e^{\frac{x^2}{2}}$, 即 $y = \frac{x}{\sqrt{\ln x + 1}}, x > e^{-1}$.

4. 【答案】 $y = x(C - e^{-x})$.

【解析】 原方程可改写为 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot y = xe^{-x}$,

于是通解为
$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int xe^{-x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right]$$
$$= x \left[\int e^{-x} dx + C \right] = x(C - e^{-x}).$$

二、高阶常系数微分方程的求解

1. 【答案】 (D).

【解析】 由所给解的形式, 可知原微分方程对应的齐次微分方程的特征根为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2.$$

则对应的齐次微分方程的特征方程为

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0, \text{ 即 } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

故对应的齐次微分方程为

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

又 $y^* = xe^x$ 为原微分方程的一个特解, 而 $\lambda = 1$ 为特征单根, 故原非齐次线性微分方程右端的非齐次项应具有形式 $f(x) = Ce^x$ (C 为常数). 所以综合比较四个选项, 应选 (D).

【评注】 对于由常系数非齐次线性微分方程的通解反求微分方程的问题, 关键是要掌握对应齐次微分方程的特征根和对应特解的关系以及非齐次方程的特解形式.

2. 【答案】 $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

【解析】 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 即 $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = 0$, 解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = \pm i$, 所以通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

【评注】 虽然此题是 3 阶微分方程, 但是考试大纲明确要求会的内容.

3. 【答案】 (C).

【解析】 $\pm \lambda$ 均是特征方程 $r^2 - \lambda^2 = 0$ 的根. 自由项为 $e^{\lambda x}$ 及 $e^{-\lambda x}$ 的特解形式分别为 $x(ae^{\lambda x})$ 及 $x(be^{-\lambda x})$, 所以微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$) 的特解形式为 $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$. 因此应选 (C).

【评注】 此题主要考察线性微分方程解的结构.

第二部分 线性代数

第一章 行列式

■ 本章导读

历年来单纯行列式的考题不多, 分值也不大, 相对重要的是抽象型行列式的计算, 另一方面大家要注意如何通过行列式的计算来帮助回答矩阵、向量、方程组、特征值、二次型中的等等问题, 即行列式的应用.

一、数字型行列式的计算

■ 试题特点

对于数字型行列式的计算主要是用按行、按列展开公式, 但在展开之前往往先运用行列式性质对其作恒等变形, 以期某行或某列有较多的零元素, 这时再展开可减轻计算量. 同时, 也要注意一些特殊公式, 如上(下)三角、范德蒙行列式、拉普拉斯展开式的运用.

计算行列式时, 一些常用的技巧有: 把第一行的 k_i 倍加至第 i 行; 把每行都加到第一行; 逐行相加; …

1 (08, 21 题, 6 分)(局部) 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$.

提示: 为证明 $|A| = (n+1)a^n$ 可以用数学归纳法; 或者用逐行相加的技巧, 即把第一行的倍数加到第二行, 再把新第二行倍数加到第三行, … 化其为上三角行列式.

详细解答参看第四章方程组. (见本书 P195)

■ 练习题(看看下面的计算)

1. (96, 数一, 3 分) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

2. (99, 数二, 3 分) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$

的根的个数为

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

3. (00, 数四, 3 分) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha \alpha^T$, n 为正整数, 则 $|aE - A^n| = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. (97, 数四, 3 分) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、抽象性行列式的计算

■ 试题特点

对于抽象型行列式的计算, 有可能考查行列式性质的理解、运用, 有可能涉及矩阵的运算, 也可能用特征值、相似等处理. 这一类题目往往综合性强, 涉及知识点多. 因此, 考生复习时要注意知识的衔接与转换, 如果内在联系把握得好, 解题时的思路就灵活. 这一类题目计算量一般不会太大.

2 (2005, 5 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【分析】 **【方法一】** 用行列式的性质, 例如先 3 列 - 2 列再 2 列 - 1 列有

$$|B| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3|$$

$$= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 + 5\alpha_3|$$

$$= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_3| = 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3|$$

$$= 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3| = 2 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2 |A|$$

【方法二】 用分块矩阵, 由于

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

两边取行列式, 并用行列式乘法公式, 所以

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 |A|.$$

【评注】 计算抽象型行列式本题的这两种解法是很重要的。本题难度系数 0.638。

3 (2006, 5 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则

$$|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 2

【分析】 由 $BA = B + 2E$ 得 $B(A - E) = 2E$, 两边取行列式, 有

$$|B| \cdot |A - E| = |2E| = 4$$

$$\text{因为 } |A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \text{ 所以 } |B| = 2.$$

【评注】 本题考查抽象行列式的计算, 运用的是矩阵运算, 行列式乘法公式等基础知识。另外 $|kA| = k^n |A|$ 不要出错。本题难度系数 0.485。简单题考的不理想要引起警惕。

■ 练习题(选三道题再次提醒三种解法)

1. (93, 数四, 3 分) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是 4 维列向量, 且 4 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$, $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$, 则 4 阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$

(A) $m + n$.

(B) $-(m + n)$.

(C) $n - m$.

(D) $m - n$.

2. (03, 数二, 4 分) 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2 B - A - B = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 若 $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } |B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. (00, 数三, 3 分) 若 4 阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式

$$|B^{-1} - E| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、行列式 $|A|$ 是否为零的判定

■ 试题特点

常用的判断 $|A| = 0$ 是否为零的问题的思路有:

- ① 利用秩, 设法证 $r(A) < n$;
- ② 用齐次方程组 $Ax = 0$ 是否有非零解;
- ③ 据 $|A| = \prod \lambda_i$, 判断 0 是特征值?
- ④ 反证法;
- ⑤ 相反数 $|A| = -|A|$?

最近十年没有考这类型题. 下列考题会做吗?

■ 练习题

1. (99, 数一, 3 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则

- (A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$.
- (B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$.
- (C) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$.
- (D) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$.

2. (94, 数一, 6 分) 设 A 为 n 阶非零矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 当 $A^* = A^T$ 时, 证明 $|A| \neq 0$.

3. (95, 数一, 6 分) 设 A 为 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = E$, $|A| < 0$, 求 $|A + E|$.

直接点击进入：

[大家网考研论坛，精品资源，精彩学术探讨，欢迎考研考生的光临](#)

[考研政治复习资料大全&考研政治备考指导 !!!](#)

[考研英语精华资料大全](#)

[考研英语备考战略指导：提纲挈领式的方法+资料推荐，让你备考少走弯路！](#)

[考研数学精华资料大全：教材+真题+辅导班视频及讲义~~~！](#)

第二章 矩阵

■ 本章导读

矩阵是线性代数的核心内容, 矩阵的概念、运算及理论贯穿线性代数的始终. 几乎年年都有单纯的矩阵知识的考题而且其它考题也回避不了矩阵的知识, 矩阵的重要性不言而喻.

二十多年来, 矩阵的解答题考的很少, 但复习时, 对于填空与选择不要大意失荆州.

一、矩阵运算、初等变换

■ 试题特点

试题简单、基本、但容易失误. 由于矩阵乘法没有交换律、没有消去律、有零因子, 这和大家熟悉的算术运算有很大区别, 试题往往就是考查这里的基本功, 因此复习时对于矩阵的运算要正确、熟练, 不要眼高手低犯低级失误.

矩阵的初等行变换是左乘初等矩阵、矩阵的初等列变换是右乘初等矩阵, 在这里要分清左乘、右乘, 记住初等矩阵的逆矩阵.

1 (05, 12 题, 4 分) 设 A 为 $n (n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^* , B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则

- (A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*
- (B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*
- (C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$
- (D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$

【答案】 C

【分析】 为书写简捷, 不妨设 A 为 3 阶矩阵, 因为 A 作初等行变换得到 B , 所以用初等矩阵左乘 A 得到 B , 按已知有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B \Rightarrow B^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

从而

$$\frac{|B^*|}{|B|} = \frac{|A^*|}{|A|} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

又因 $|A| = -|B|$, 故 $A^* \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -B^*$, 所以应选 (C).

【评注】 本题考查初等矩阵的两个定理: 一个是左乘右乘问题, 一个是初等矩阵的逆矩阵公式. 注意求伴随矩阵有两种思路: 一是用定义法, 一是用可逆矩阵来转换 ($A^* = |A| A^{-1}$). 本题难度系数 0.557.

2 (06, 12 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C , 记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^TAP$.

(D) $C = PAP^T$.

【答案】 B

【分析】 按已知条件, 用初等矩阵描述有

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A, \quad C = B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是 $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAP^{-1}$. 所以应选(B).

本题考查初等矩阵的左乘右乘问题及初等矩阵逆矩阵的公式. 难度系数 0.805.

3 (2011, 5 题, 4 分) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵.

记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A =$

(A) P_1P_2 .

(B) $P_1^{-1}P_2$.

(C) P_2P_1 .

(D) $P_2P_1^{-1}$.

【答案】 D

【分析】 本题是常规的也是基本的初等变换、初等矩阵的考题. 按题意

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} B = E$$

即

$$AP_1 = B, P_2B = E$$

从而

$$P_2(AP_1) = E$$

故

$$A = P_2^{-1}EP_1^{-1} = P_2P_1^{-1}$$

即应选(D).

【评注】 搞清“左乘”和“右乘”, 记住初等矩阵逆矩阵的公式. 本题难度系数 0.796.

近十年没有出单纯矩阵运算的考题, 但早年考的一些题型应当复习.

■ 练习题

1. (94, 数一, 3 分) 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $A = \alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 则 $A^n =$ _____.

2. (03, 数二, 4 分) 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha \alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T \alpha =$ _____.

3. (99, 数三, 数四, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 而 $n \geq 2$ 为正整数, 则 $A^n - 2A^{n-1} =$ _____.

4. (04, 数四, 4 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为 3 阶可逆矩阵, 则 $B^{2004} - 2A^2$

$=$ _____.

5. (97, 数一, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $t =$ _____.

二、伴随矩阵、可逆矩阵

■ 试题特点

伴随与可逆是矩阵中最重要的知识点, 关键公式: $AA^* = A^*A = |A|E$

进而有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \text{ 或 } A^* = |A|A^{-1}$$

涉及伴随与可逆的试题非常多, 要想到并灵活运用 $AA^* = A^*A = |A|E$ 这一核心公式.

☆ 定义法, 单位矩阵恒等变形, 可逆的充要条件都是重要的考点.

4 (2008, 5 题, 4 分) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则

(A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆.

(B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.

(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆.

(D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

【答案】 C

【分析】 判断矩阵 A 可逆通常用定义, 或者用充要条件行列式 $|A| \neq 0$

(当然 $|A| \neq 0$ 又要很多等价的说法).

因为 $(E - A)(E + A + A^2) = E - A^3 = E$,

$(E + A)(E - A + A^2) = E + A^3 = E$,

所以, 由定义知 $E - A, E + A$ 均可逆. 故选 (C).

【评注】 本题用特征值也是简捷的, 由 $A^3 = O \Rightarrow A$ 的特征值 $\lambda = 0 \Rightarrow E - A$ (或 $E + A$) 特征值均不为 0 $\Rightarrow |E - A| \neq 0$ (或 $|E + A| \neq 0$) $\Rightarrow E - A$ (或 $E + A$) 可逆. 本题难度系数 0.653

5 (09, 6 题, 4 分) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$

【答案】 B

【分析】 由 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 6$, 知矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 可逆, 那么

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = 6 \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 6A^{-1} \\ 6B^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$$

故应选(B).

本题也可设 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, 那么由 $AA^* = |A|E$ 有

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6E & O \\ O & 6E \end{bmatrix}$$

由 $AX_3 = 6E \Rightarrow X_3 = 6A^{-1} = 3A^*$

故应选(B).

(由题中 4 个选项可知必有 $X_1 = O, X_4 = O$, 只需检查 X_2 或 X_3 即可)

【评注】 本题考查的知识点有: $AA^* = |A|E$ 或 $A^* = |A|A^{-1}$ 或 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$; 行列式的拉普拉斯展开式; 分块矩阵的求逆公式. 这些都是线性代数的基本内容.

本题难度系数 0.651.

下面是一些考题, 希望你认真地做, 好好体会与把握处理伴随和可逆的思想方法.

■ 练习题

1. (01, 数一, 3 分) 设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = O$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (00, 数二, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, E 为 4 阶单位矩阵, 且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$,

则 $(E + B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. (91, 数一, 3 分) 设 n 阶方阵 A, B, C 满足关系式 $ABC = E$, 其中 E 是 n 阶单位阵, 则必有

(A) $ACB = E$.

(B) $CBA = E$.

(C) $BAC = E$.

(D) $BCA = E$.

4. (95, 数三、数四, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. (98, 数二, 3 分) 设 A 是任一 $n(n \geq 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, 又 k 为常数, 且 $k \neq 0, \pm 1$,

则必有 $(kA)^* =$ _____

- (A) kA^* . (B) $k^{n-1}A^*$. (C) k^nA^* . (D) $k^{-1}A^*$.

6. (02, 数四, 3 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C =$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \text{ 则 } C \text{ 的伴随矩阵 } C^* =$$

- (A) $\begin{bmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} |B|B^* & 0 \\ 0 & |A|A^* \end{bmatrix}$.
(C) $\begin{bmatrix} |A|B^* & 0 \\ 0 & |B|A^* \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$.

7. (97, 数一, 5 分) 设 A 是 n 阶可逆方阵, 将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B .

(1) 证明 B 可逆;

(2) 求 AB^{-1} .

8. (02, 数二, 6 分) 已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆; (2) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

9. (96, 数一, 6 分) 设 $A = E - \xi\xi^T$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, ξ^T 是 ξ 的转置. 证明: (1) $A^2 = A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi = 1$; (2) 当 $\xi^T\xi = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

10. (97, 数三, 6 分) 设 A 为 n 阶非奇异矩阵, α 为 n 维列向量, b 为常数, 记分块矩阵

$$P = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix},$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 PQ ;

(2) 证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

三、矩阵的秩

■ 试题特点

矩阵的秩是重点也是难点, 要正确理解矩阵秩的概念

$r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0, 每个 $r+1$ 阶子式 (若还有) 全为 0.

在这里要分清“有一个”与“每一个”, 当 $r(A) = r$ 时, A 中能否有 $r-1$ 阶子式为 0? 能否有 $r+1$ 阶子式不为 0?

你如何用行列式来描述 $r(A) \geq r$? 如何描述 $r(A) < r$?

要搞清矩阵的秩与向量组秩之间的关系, 这种转换是重要的. 在线性相关的判断与证明中往往是由矩阵的秩推导向量组的秩, 而解方程组时往往由相关、无关推导矩阵的秩.

经初等变换矩阵的秩不变, 这是求秩的最重要的方法, 有时可以把定义法与初等变换法结合起来分析推导矩阵的秩.

要会用 ① $|A|$ 是否为 0? ② 相关、无关 ③ 方程组的解会用其中的两个信息夹逼求出矩阵 A 的秩.

6 (2007, 15 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

【答案】 1

【分析】 因为 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以 $r(A^3) = 1$

【评注】 这是基础题, 但考的并不理想, 难度系数是 0.678.

注意, 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

则 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, A^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^n = O$

7 (2008, 20 题, 10 分) 设 α, β 为 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha \alpha^T + \beta \beta^T$, 其中 α^T, β^T 分别是 α, β 的转置. 证明:

(I) 秩 $r(A) \leq 2$;

(II) 若 α, β 线性相关, 则秩 $r(A) < 2$.

【证】 (I) 因为 α, β 为 3 维列向量, 那么 $\alpha \alpha^T$ 和 $\beta \beta^T$ 都是 3 阶矩阵, 且秩 $r(\alpha \alpha^T) \leq 1, r(\beta \beta^T) \leq 1$.

那么, $r(A) = r(\alpha \alpha^T + \beta \beta^T) \leq r(\alpha \alpha^T) + r(\beta \beta^T) \leq 2$.

(II) 由于 α, β 线性相关, 不妨设 $\alpha = k\beta$, 于是

$$r(A) = r(\alpha \alpha^T + \beta \beta^T) = r((1 + k^2)\beta \beta^T) \leq r(\beta) \leq 1 < 2.$$

【评注】 本题考查矩阵秩的性质公式.

(I) 中有两个基本知识点: ① $r(\alpha \alpha^T) \leq 1$ 和 ② $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

(II) 中有两个基本知识点: ① α, β 线性相关的几何意义和 ② $r(kA) = r(A), k \neq 0$.

注意, 如果分块矩阵比较熟悉, 本题的 (I) 也可如下处理:

因为

$$A = \alpha \alpha^T + \beta \beta^T = (\alpha, \beta, 0) \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \\ 0 \end{bmatrix}$$

那么

$$|A| = |\alpha, \beta, 0| \cdot \begin{vmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \\ 0 \end{vmatrix}$$

从而 $r(A) \leq 2$.

本题难度系数 0.352.

则

8 (2010, 5 题, 4 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB = E$,

(A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$.(B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$.(C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$.(D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.

【答案】 A

【分析】 本题考的是矩阵秩的概念和公式.

因为 $AB = E$ 是 m 阶单位矩阵, 知 $r(AB) = m$.又因 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$, 故

$$m \leq r(A), m \leq r(B).$$

①

另一方面, A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 又有

$$r(A) \leq m, r(B) \leq m.$$

②

比较 ①、② 得 $r(A) = m, r(B) = m$. 所以选 (A). 本题难度系数 0.564.

请完成下面的考题.

■ 练习题

1. (96, 数一, 3 分) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 则 $r(AB) =$

2. (98, 数二, 3 分) 设 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$, 则 a 必为

(A) 1. (B) $\frac{1}{1-n}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{n-1}$.

3. (03, 数三, 4 分) 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵的秩等于 1, 则必有

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$. (B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$.
(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$. (D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.

4. (93, 数一, 3 分) 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $PQ = O$, 则

(A) $t = 6$ 时 P 的秩必为 1.

(B) $t = 6$ 时 P 的秩必为 2.

(C) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 1.

(D) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 2.

5. (03, 数四, 4 分) 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B , 则秩 $(A - 2E)$ 与秩 $(A - E)$

之和等于

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.

6. (98, 数一, 3 分) 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的, 则直线

$$\frac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_3}{c_1 - c_2} \text{ 与 } \frac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \frac{z - c_1}{c_2 - c_3}$$

(A) 相交于一点.

(B) 重合.

(C) 平行但不重合.

(D) 异面.

四、矩阵方程

■ 试题特点

解矩阵方程时, 首先要根据矩阵的运算法则、性质把方程化简 (特别要注意矩阵的乘法没有交换律), 化简之后有三种形式:

$$AX = B; XA = B; AXB = C$$

对于前两个方程, 若判断出 A 可逆, 则有

$$X = A^{-1}B; X = BA^{-1}$$

对于第三个方程, 若 A, B 均可逆, 则有 $X = A^{-1}CB^{-1}$

那么, 再通过求逆等运算就可求出 X .

近十年未考矩阵方程, 以往的考题请练习

■ 练习题

1. (98, 数二, 5 分) 设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 是 4 阶单位矩阵, A^T 是 4 阶矩阵 A 的转

置矩阵, 且

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 A .

2. (01, 数二, 6 分) 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

且矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵, 求 X .

3. (05, 数四, 4 分) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $B = E + AB, C = A + CA$, 则 $B - C =$

(A) E

(B) $-E$

(C) A

(D) $-A$

4. (00, 数一, 6 分) 设矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 是 4 阶单位矩阵, 求矩阵 B .

第三章 向 量

■本章导读

向量既是重点又是难点, 由于向量的抽象性及逻辑推理上有较高的要求, 同学们在复习时要迎难而上.

考研的重点首先是对线性相关、无关概念的理解与判断, 要清晰选择、填空、证明各类题型的解题思路 and 技巧; 其次, 要把握线性表出问题的处理; 第三, 要理解向量组的极大线性无关组和向量组秩的概念, 会推导和计算; 第四, 向量空间的相应概念.

一、向量的线性表出

■试题特点

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

\Leftrightarrow 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$

☆ 如果已知向量的坐标, 那就通过判断方程组是否有解来回答向量能否线性表出的问题, 不仅要会一个向量 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 还要会分析、讨论一个向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的问题.

☆ 如果向量 β 的坐标是未知的, 那就要能用秩、用概念以及相关的定理来推理、分析.

1 (2011, 20 题, 11 分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

【解】 (I) 因为 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

那么 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关. 即

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0,$$

所以 $a = 5$.

(II) 如果方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_j$ ($j = 1, 2, 3$) 都有解, 即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 因为现在的三个方程组系数矩阵是相同的, 故可拼在一起加减消元, 然后再独立地求解. 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2 & 1 & 5 \\ & 1 & & 4 & 2 & 10 \\ & & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

所以 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

【评注】 因为4个3维向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha$ 必线性相关, 所以若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 与题设矛盾, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 一定相关, 由此亦可推出 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = 0$.

本题已给出向量坐标故用解方程组的方法来处理. 下面的练习题中, 有两个题有向量坐标就解方程, 还有两个没有向量坐标, 就用概念、秩、定理来分析推导.

■ 练习题

- (98, 数二, 8分) 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T, \beta = (3, 10, b, 4)^T$, 问
 - a, b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?
 - a, b 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 并写出此表示式.
- (03, 数四, 13分) 设有向量组(I): $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 3)^T, \alpha_3 = (1, -1, a+2)^T$ 和向量组(II): $\beta_1 = (1, 2, a+3)^T, \beta_2 = (2, 1, a+6)^T, \beta_3 = (2, 1, a+4)^T$. 试问: 当 a 为何值时, 向量组(I)与(II)等价? 当 a 为何值时, 向量组(I)与(II)不等价?
- (98, 数四, 3分) 若向量组 α, β, γ 线性无关; α, β, δ 线性相关, 则
 - α 必可由 β, γ, δ 线性表示.
 - β 必不可由 α, γ, δ 线性表示.
 - δ 必可由 α, β, γ 线性表示.
 - δ 必不可由 α, β, γ 线性表示.
- (99, 数四, 3分) 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组(II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则
 - α_m 不能由(I)线性表示, 也不能由(II)线性表示.
 - α_m 不能由(I)线性表示, 但可由(II)线性表示.
 - α_m 可由(I)线性表示, 也可由(II)线性表示.
 - α_m 可由(I)线性表示, 但不可由(II)线性表示.

二、向量组的线性相关和线性无关

■ 试题特点

线性相关是难点之一, 也是历年考生在考试时丢分最多的一个考点.

如存在不全为0的数组 k_1, k_2, \dots, k_s , 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非0解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$$

若使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 成立, 必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ 只有 } 0 \text{ 解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s.$$

☆ 证无关, 若用定义法就是设法证 $k_1 = 0, \dots, k_s = 0$; 若用秩, 就是设法证 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ (这里就是要通过用矩阵秩的定理、公式转换推导出向量组秩的信息).

2 (2005, 11 题, 4 分) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$.

(B) $\lambda_2 \neq 0$.

(C) $\lambda_1 = 0$.

(D) $\lambda_2 = 0$.

【答案】 B

【分析】 按特征值、特征向量定义

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$$

若 $\lambda_2 = 0$, 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 即 $\alpha_1, \lambda_1\alpha_1$ 必线性相关. 排除(D).

若 $\lambda_1 = 0$, 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_2\alpha_2$ 必线性无关, 但 $\lambda_1 = 0$ 只是 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分条件, 并不必要. 因此(C)是错误的.

【方法一】 (用定义) 设 $k_1\alpha_1 + k_2A(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathbf{0}$, 即有

$$(k_1 + \lambda_1 k_2)\alpha_1 + \lambda_2 k_2\alpha_2 = \mathbf{0} \quad (1)$$

由于特征值不同特征向量线性无关, 所以 α_1, α_2 线性无关. 由(1)得

$$\begin{cases} k_1 + \lambda_1 k_2 = 0 \\ \lambda_2 k_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ 无关} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2) \text{ 只有零解} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_2 \neq 0$$

【方法二】 (用秩) 因为 $(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = (\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 那么 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = 2$

$$\text{由于 } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性无关, 故 } \alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ 线性无关} \Leftrightarrow r \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \Leftrightarrow \lambda_2 \neq 0$$

【评注】 处理相关、无关要会用定义法和秩这些手段. 本题难度系数 0.57.

3 (2006, 11 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

【答案】 A

【分析】 **【方法一】** (用定义法)

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 故存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

从而有

$$A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s) = A0 = 0$$

亦即 $k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_sA\alpha_s = 0$.

由于 k_1, k_2, \dots, k_s 不全为 0 而使上式成立, 说明 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关. 故(A) 正确.

【方法二】 (用秩) 利用分块矩阵有 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$

那么 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$

从而 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) < s$ 故 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关, 即应选(A).

【评注】 如令 $A = O$ 易见(B), (D) 不正确. 如令 $A = E$ 易见(C) 不正确.

本题难度系数 0.575.

4 (2007, 7 题, 4 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$

(D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.

【答案】 A

【分析】 因为 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$,

所以向量组 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关, 故应选(A).

至于(B)、(C)、(D) 的线性无关性可以用 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$ 的方法来处理. 即若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 那么 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow |C| \neq 0$. 例如,

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 故知 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

【评注】 常规题, 难度系数 0.813.

■ 练习题(这里的选择题、证明题能独立完成吗? 思路和技巧?)

1. (04, 数一, 4 分) 设 A, B 为满足 $AB = 0$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

2. (03, 数一, 4 分) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

(A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

(D) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

3. (08, 数二, 数三, 10 分) 设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量,

向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关; (II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

4. (96, 数三, 8 分) 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解即 $A\beta \neq 0$. 试证明: 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_r$ 线性无关.

5. (01, 数四, 8 分) 设 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T (i = 1, 2, \dots, r; r < n)$ 是 n 维实向量, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关. 已知 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量. 试判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 的线性相关性.

三、向量组的极大线性无关组与秩

■ 试题特点

虽然近十年数一没有单纯的极大无关组或向量组秩的考题, 但是齐次方程组的基础解系实际上就是解向量的极大线性无关组, 这在方程组求解和求特征向量时是回避不了的; 向量空间的维数和基实际上就是向量组的秩和极大无关组概念在向量空间的延伸, 所以复习时这里的概念、计算、证明仍然要认真对待.

■ 练习题

1. (06, 数三、数四, 13 分) 设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$, 问 a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

2. (95, 数三, 9 分) 已知向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$. 如果各向量组的秩分别为 $r(I) = r(II) = 3, r(III) = 4$.

证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

3. (00, 数二, 7 分) 已知向量组

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

与向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

四、向量空间

■ 试题特点

复习向量空间这部分内容时应了解向量空间、子空间、解空间、基底、维数、坐标等概念, 要了解基变换与坐标变换公式(在二次型化标准形中会用到), 应会求过渡矩阵, 要会线性无关向量组的施密特正交规范化方法, 由此可构造规范正交基.

不要混淆向量维数和空间维数的概念, 例如 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (2, 4, 5)^T$ 是 3 维向量(因为它们有 3 个分量), 但由 α_1, α_2 生成的空间 $L(\alpha_1, \alpha_2)$ 是 2 维的向量空间(因为 α_1, α_2 线性无关, 它们就是空间的基, 而基里有 2 个向量即空间是 2 维).

过渡矩阵的概念不要搞反, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 3 维向量空间的两组基, 且

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + c_{32}\alpha_3, \\ \beta_3 = c_{13}\alpha_1 + c_{23}\alpha_2 + c_{33}\alpha_3, \end{cases}$$

$$\text{即 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{则称 } C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \text{ 为由基 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 到基 } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ 的过渡矩阵.}$$

5 (2009, 5 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(B) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(C) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

$$(D) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

【答案】 A

【分析】 本题考查过渡矩阵的概念, 用观察法易见

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ 所以选(A)}$$

本题难度系数 0.665.

6 (2010, 13 题, 4 分) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____.

【答案】 6

【分析】 本题考查向量空间及其维数的概念, 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 所生成的向量空间是 2 维, 亦即向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由秩为 2, 知 $a = 6$.

本题难度系数 0.816.

■ 练习题

1. (97, 数一, 5 分) 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵, $\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^T$, $\alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^T$ 是齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的解向量, 求 $Bx = 0$ 的解空间的一个标准正交基. * (现在考试大纲已经把“标准正交基”改为“规范正交基”)

第四章 线性方程组

■ 本章导读

线性方程组是否有解?若有解,那么一共有多少解?有解时怎样求出其所有的解?如何求齐次方程组的基础解系?

当给出具体的方程组时,如何加减消元化简(注意只用行变换)?如何求出所有的解(可能还涉及对一些参数的讨论)?

没有具体的方程组时,如何利用解的结构(注意对矩阵秩的推断)分析、推导出通解?

面对两个方程组,如何处理公共解或同解问题?

这一切都是大家在复习方程组时要认真对待的,方程组历年来都是考试的重点,比重大、分值高、解答题多,一定要好好复习.

一、齐次方程组、基础解系

■ 试题特点

考查的主要定理是:

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解 \Leftrightarrow 秩 $r(A) < n$;

(2) 齐次方程组 $Ax = 0$ 如有非 0 解,则必有无穷多解,而线性无关的解向量个数为 $n - r(A)$.

☆ 求基础解系是重点、是关键.

$n - r(A)$ 既表示 $Ax = 0$ 线性无关解向量的个数,也表示方程组中自由变量的个数,如何确定自由变量?如何给自由变量赋值并求解,是这的基本功.

不论是 $Ax = 0$ 还是 $Ax = b$ 都要涉及到求 $Ax = 0$ 的基础解系,这里的计算一定要过关(正确、熟练).

线性无关的证明题另一种出题方法就是证基础解系.

1 (2005, 21 题, 9 分) 已知三阶矩阵 A 的第 1 行是 (a, b, c) 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k

为常数), 且 $AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

【分析】 本题没有完整的矩阵 A , 因此求方程组 $Ax = 0$ 的解不是用加减消元来实现, 而应当利用解的结构要由秩入手, 另外对 $AB = O$ 要意识到 B 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

【解】 由 $AB = O$ 知 $r(A) + r(B) \leq 3$, 又 $A \neq 0, B \neq 0$ 故 $1 \leq r(A) \leq 2, 1 \leq r(B) \leq 2$.

(1) 如果 $k \neq 9$, 必有 $r(B) = 2$. 此时 $r(A) = 1$. 由于 $n - r(A) = 3 - 1 = 2$, 又因 $AB = O$ 知 B 的列向量是 $Ax = 0$ 的解. 故 $Ax = 0$ 的通解为: $k_1(1, 2, 3)^T + k_2(3, 6, k)^T$, k_1, k_2 为任意常数.

(2) 如果 $k = 9$, 则 $r(B) = 1$. 此时 $r(A) = 1$ 或 2.

1° 若 $r(A) = 2$, 则 $n - r(A) = 1$. $Ax = 0$ 的通解为 $k(1, 2, 3)^T$, k 为任意常数;

2° 若 $r(A) = 1$,

则 $Ax = 0$ 与 $ax + by + cz = 0$ 同解. 由 $n - r(A) = 2$. 不妨设 $a \neq 0$, 那么 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1(-b, a, 0)^T + k_2(-c, 0, a)^T$, k_1, k_2 为任意常数.

【评注】 本题难度系数 0.303, 有的考生不知道 $AB = 0$ 时, B 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解, 多数考生分析、讨论不严谨.

2 (2011, 6 题, 4 分) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为

(A) α_1, α_3 .

(B) α_1, α_2 .

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

【答案】 D

【分析】 本题没有给出具体的方程组, 因而求解应当由解的结构、由秩开始.

因为 $Ax = 0$ 只有 1 个线性无关的解, 即 $n - r(A) = 1$, 从而 $r(A) = 3$. 那么 $r(A^*) = 1 \Rightarrow n - r(A^*) = 4 - 1 = 3$. 故 $A^*x = 0$ 的基础解系中有 3 个线性无关的解, 可见选项 (A)、(B) 均错误.

再由 $A^*A = |A|E$, 及 $|A| = 0$, 有 $A^*A = 0$, 知 A 的列向量全是 $A^*x = 0$ 的解, 而秩 $r(A) = 3$, 故 A 的列向量中必有 3 个线性无关.

$$\text{最后, 按 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ 即 } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ 即 } \alpha_1 + \alpha_3 = 0,$$

说明 α_1, α_3 相关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相关. 从而应选 (D).

【评注】 不要忘记

$$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0 & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

当没有具体的方程组时, 一定要有用解的结构, 用秩来分析、推导的构思.

本题难度系数 0.407.

下面的考题既涉及如何加减消元求基础解系也涉及到如何判断矩阵的秩和基础解系的证明.

■ 练习题

1. (04, 数一, 9 分) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0, \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

试问 a 为何值时, 该方程组有非零解, 并求其通解.

2. (02, 数三, 8 分) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$. 试讨论 a, b 为何值时, 方程组仅有零解, 有无穷多组解? 在有无穷多组解时, 求出全部解, 并用基础解系表示全部解.

3. (04, 数三, 4 分) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq 0$, 若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系

- (A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.
(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

4. (01, 数一, 6 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系:

$\beta_1 = t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2, \beta_2 = t_1 \alpha_2 + t_2 \alpha_3, \dots, \beta_s = t_1 \alpha_s + t_2 \alpha_1$, 其中 t_1, t_2 为实常数. 试问 t_1, t_2 满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也为 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

二、非齐次方程组的求解

■ 试题特点

记住解的结构

$$\alpha + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_{n-r} \eta_{n-r}$$

其中 α 是 $Ax = b$ 的特解, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

往届考生在加减消元时计算错误较多(一定要多动手做;认真);讨论参数时不能丢三落四, 要严谨.

求 A 的秩、求特解、求基础解系、讨论参数是复习时要注意的知识点.

3 (2006, 20 题, 9 分) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

【分析】 本题考查含参数的非齐次线性方程组的求解问题, 那么如何求参数 a 和 b ? 题目给的追加信息是 $Ax = b$ 有三个线性无关的解, 如何用这信息? 其实问题 (I) $r(A) = 2$ 就是提示.

【解】 (I) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次方程组的 3 个线性无关的解, 那么 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$, 是 $Ax = 0$ 线性无关的解, 所以 $n - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$.

显然矩阵 A 中有 2 阶子式不为 0, 又有 $r(A) \geq 2$, 从而秩 $r(A) = 2$.

(II) 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & a+1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{array} \right]. \end{aligned}$$

由题设和(I)知, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 故有

$$4 - 2a = 0, b + 4a - 5 = 0$$

解出 $a = 2, b = -3$

$$\text{此时 } \bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

那么 $\alpha = (2, -3, 0, 0)^T$ 是 $Ax = b$ 的解, 且 $\eta_1 = (-2, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (4, -5, 0, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以方程组的通解是 $\alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ (k_1, k_2 为任意常数).

【评注】 通过本题要体会如何用两个条件把 $r(A) = 2$ 夹逼出来的方法. 不少考生把题目中的“有三个线性无关的解”理解为“恰有三个线性无关的解”, 这就改变了(I)证明的难度和命题的原意. 大家要认真审题, 准确理解题意. 本题难度系数 0.532.

4 (2008, 21 题, 12 分) 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

【分析】 本题考查 n 阶行列式的计算和方程组的求解. 作为“三对角”行列式可用数学归纳法或“三角化”; 对于唯一解应利用克莱姆法则.

【解】 (I) 用数学归纳法. 记 n 阶行列式 $|A|$ 的值为 $D_n = (n+1)a^n$

当 $n = 1$ 时 $D_1 = 2a$, 命题 $D_n = (n+1)a^n$ 正确; 当 $n = 2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$, 命题正确.

设 $n < k$ 时 $D_n = (n+1)a^n$, 命题正确.

当 $n = k$ 时, 按第一列展开, 则有

$$\begin{aligned} D_k &= 2a \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} + a^2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} \\ &= 2aD_{k-1} - a^2D_{k-2} = 2a(ka^{k-1}) - a^2[(k-1)a^{k-2}] = (k+1)a^k, \text{命题正确.} \end{aligned}$$

所以 $|A| = (n+1)a^n$.

(II) 据(I)由克莱姆法则, $|A| \neq 0$ 方程组有唯一解, 故 $a \neq 0$ 时方程组有唯一解, 且用克莱姆法则, 有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 2a & 1 & \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix}}{D_n} = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}.$$

(Ⅲ) 当 $a = 0$ 时, 方程组为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, 由 $r(A) = r(\bar{A}) = n-1$, 方程

组有无穷多解. 按解的结构, 其通解为 $(0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, 0, \dots, 0)^T$, 其中 k 为任意常数.

【评注】 本题的“三对角”行列式也可用逐行相加的技巧将其上三角化, 即把第一行的 $-\frac{1}{2}a$ 倍加至第二行, 再把新第 2 行的 $-\frac{2}{3}a$ 倍加至第三行, ...

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & a^2 & 2a & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & \\ & a^2 & 2a & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n \\ &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n = \dots \\ &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}_n = (n+1)a^n. \end{aligned}$$

本题难度系数 0.305, 是 08 年考题中得分最低的题目之一.

5 (2009, 20 题, 11 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;(II) 对 (I) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

【分析】 本题的第 (I) 问, 实际是求方程组 $Ax = \xi_1$ 和 $A^2x = \xi_1$ 的解, 而且要求把通解写成向量的形式.

【解】 (I) 对增广矩阵 $(A : \xi_1)$ 作初等行变换:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

得到方程组 $Ax = \xi_1$ 的通解为 $(0, 0, 1)^T + k(-1, 1, -2)^T$, 从而 $\xi_2 = (-k, k, 1-2k)^T$, k 是任意常数.

由于 $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 对 $A^2x = \xi_1$, 由增广矩阵作初等行变换, 有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

得方程组通解 $x_1 = -\frac{1}{2} - u, x_2 = u, x_3 = v$, 即 $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2} - u, u, v\right)^T$, 其中 u, v 为任意常数.

(II) 因为行列式

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

所以对任意的 k, u, v , 恒有 $|\xi_1, \xi_2, \xi_3| \neq 0$, 即对任意的 ξ_2, ξ_3 , 恒有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

【评注】 本题若能发现 $A\xi_1 = 0$, 那么 (II) 也可用定义法来处理.

(II) 证法 2 由题设可得 $A\xi_1 = 0$. 设存在数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0, \quad (1)$$

等式两端左乘 A , 得

$$k_2A\xi_2 + k_3A\xi_3 = 0,$$

即

$$k_2\xi_1 + k_3A\xi_3 = 0, \quad (2)$$

等式两端再左乘 A , 得

$$k_3A^2\xi_3 = 0,$$

即

$$k_3\xi_1 = 0, \text{ 又 } \xi_1 \neq 0$$

于是 $k_3 = 0$ 代入 (2) 式, 得 $k_2\xi_1 = 0$, 故 $k_2 = 0$. 将 $k_2 = k_3 = 0$ 代入 (1) 式, 可得 $k_1 = 0$, 从而 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

本题难度系数 0.356, 不应当是难题吧, 是不是复习出问题了?

6 (2010, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不

同的解,

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

【解】 (I) 因为方程组 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < n$

$$\text{故 } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0$$

知 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$

当 $\lambda = 1$ 时

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

显然 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$, 此时方程组无解, $\lambda = 1$ 舍去.

当 $\lambda = -1$ 时, 对 $Ax = b$ 的增广矩阵施以初等行变换:

$$(A, b) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right]$$

因为 $Ax = b$ 有解, 所以 $a = -2$.

(II) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以 $Ax = b$ 的通解为

$$x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

【评注】 本题难度系数 0.662.

■ 练习题

1. (00, 数一, 3 分) 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (97, 数四, 3 分) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中未知量个数为 n , 方程个数为 m , 系数矩阵 A 的秩为 r , 则

(A) $r = m$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有解.

(B) $r = n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

(C) $m = n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

(D) $r < n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

3. (01, 数三, 3 分) 设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维列向量, 若秩 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} = \text{秩}(A)$, 则线性方程组

(A) $Ax = \alpha$ 必有无穷多解.

(B) $Ax = \alpha$ 必有唯一解.

(C) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 仅有零解.

(D) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 必有非零解.

4. (04, 数四, 13 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解. 试求

(I) 方程组的全部解, 并用对应的齐次方程组的基础解系表示全部解;

(II) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

三、公共解与同解

■ 试题特点

如果已知两个方程组 (I) 和 (II), 那么将其联立 $\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$, 其联立方程组的解就是 (I) 与 (II) 的公共解.

如果已知 (I) 与 (II) 的基础解系分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 , 则可设公共解为 γ , 那么

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$$

由此得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$, 解出 k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 可求出公共解 γ .

这两种常见的出题方法应当把握.

而处理同解的方法, 往往是代入来处理, 即把 (I) 的解代入 (II), 把 (II) 的解代入 (I)

7 (2007, 21 题, 11 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{①}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad \text{②}$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

【分析】 本题考查两个方程组的公共解问题, 应当有两种思路: 一个是 ① 与 ② 联立方程组的解就是公共解; 一个是先求 ① 的解然后代入到 ② 中来确定公共解.

【解法 1】 因为方程组 ① 与 ② 的公共解, 即为联立方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases} \quad \text{③}$$

的解.

对方程组 ③ 的增广矩阵 \bar{A} 施以初等行变换, 有

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{bmatrix}$$

由于方程组 ③ 有解, 故 ③ 的系数矩阵的秩等于增广矩阵 \bar{A} 的秩, 于是 $(a-1)(a-2) = 0$, 即 $a = 1$ 或 $a = 2$.

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此 ① 与 ② 的公共解为: $x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此 ① 与 ② 有惟一的公共解为:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

【解法 2】 先求出方程组 ① 的解, 其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)$.

当 $a \neq 1, a \neq 2$ 时, 方程组 ① 只有零解, 但此时 $x = (0, 0, 0)^T$ 不是方程 ② 的解. 所以公共解发生在 $a = 1$ 或 $a = 2$ 时:

当 $a = 1$ 时, 对方程组 ① 的系数矩阵施以初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此 ① 的通解为 $x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

此解也满足方程 ②, 所以方程组 ① 与 ② 的所有公共解为: $x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

当 $a = 2$ 时, 对线性方程组 ① 的系数矩阵施以初等行变换,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到方程组 ① 的通解是 $x = k(0, -1, 1)^T$, k 为任意常数, 将其代入 ② 有

$$0 + 2(-k) + k = 1$$

得 $k = -1$, 因此 ① 与 ② 的公共解惟一为 $x = (0, 1, -1)^T$.

【评注】本例中方程组 ①, ② 只是两个方程组求公共解的问题, 这里还要考虑有没有两个方程组都没有解的情况, 例 11.12 中就有类似情况.

■ 练习题

1. (02, 数四, 8 分) 设 4 元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

而已知另一 4 元齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T.$$

(1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

2. (03, 数一, 4 分) 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$, 其中 A, B 均 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

① 若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解, 则秩 $(A) \geq$ 秩 (B) ;

② 若秩 $(A) \geq$ 秩 (B) , 则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解;

③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则秩 $(A) =$ 秩 (B) ;

④ 若秩 $(A) =$ 秩 (B) 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题中正确的是

(A) ①②.

(B) ①③.

(C) ②④.

(D) ③④.

3. (00, 数三, 3 分) 设 A 为 n 阶实矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 则对于线性方程组 (I): $Ax = 0$ 和 (II): $A^T Ax = 0$, 必有

(A) (II) 的解是 (I) 的解, (I) 的解也是 (II) 的解.

(B) (II) 的解是 (I) 的解, 但 (I) 的解不是 (II) 的解.

(C) (I) 的解不是 (II) 的解, (II) 的解也不是 (I) 的解.

(D) (I) 的解是 (II) 的解, 但 (II) 的解不是 (I) 的解.

4. (05, 数三、数四, 13 分) 已知齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases} \text{ 和 } (II) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases} \text{ 同解, 求 } a, b, c \text{ 的值.}$$

5. (1998, 数四, 7 分) 已知下列非齐次线性方程组 (I), (II)

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3; \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$$

(1) 求解方程组 (I), 用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组中的参数 m, n, t 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 同解.

第五章 特征值与特征向量

本章导读

特征值和特征向量是线性代数的重要内容之一,也是考研的重点之一,它涉及到行列式;矩阵;相关、无关;秩;基础解系;……一系列问题,知识点多,综合性强,必须好好复习.

首先要掌握求特征值、特征向量的各种方法;第二是相似,把握住和对角矩阵相似的充分必要条件,会求可逆矩阵 P ;第三(可能更重要),利用实对称矩阵的隐含信息处理求特征值、特征向量,用正交矩阵相似对角化等一系列问题.

一、特征值、特征向量的概念与计算

试题特点

常见的命题形式:

1. 用定义 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 推理、分析、判断.
2. 由 $|\lambda E - A| = 0$ 和 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 求基础解系.
3. 通过相似 $P^{-1}AP = B$.
 (1) 如 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $B(P^{-1}\alpha) = \lambda(P^{-1}\alpha)$
 (2) 如 $B\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A(P\alpha) = \lambda(P\alpha)$

特别地,如 $r(A) = 1$,有

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum a_{ii}\lambda^{n-1}, \lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

1 (2008, 13 题, 4 分) 设 A 为 2 阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为_____.

【答案】 1

【分析】 根据已知条件本题有两种解法.

用定义,由 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1, A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 知 A 的特征值为 1 和 0. 因此 A 的非 0 特征值为 1.

或者,利用相似,有

$$A(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

可知 $A \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 亦可得 A 的特征值 1 和 0, 因此 A 的非 0 特征值为 1.

【评注】 要掌握定义法, $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 通过恒等变形推导出特征值、特征向量的信息.

若已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 又有 $A\alpha_1 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, A\alpha_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3, A\alpha_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$ 的信息一定不要忘记这有相似的背景.

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)$$

$$= (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } P^{-1}AP = B, \text{ 其中 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

本题难度系数 0.704.

2 (2009, 13 题, 4 分) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 为转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____

【答案】 2

【分析】 因为矩阵 $A = \beta \alpha^T$ 的秩为 1, 所以矩阵 A 的特征值是 $\sum a_{ii}, 0, 0$.

而本题 $\sum a_{ii}$ 就是 $\alpha^T \beta$, 故 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 2.

【评注】 若 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则

$$A = \beta \alpha^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

那么 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \lambda^2$, 而 $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

一般地, 如 $r(A) = 1$, 有 $|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum a_{ii} \lambda^{n-1}$, 则 $\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

本题难度系数 0.680.

关于秩为 1 的矩阵的特征值公式应当熟悉!

通过下面的考题, 请进一步体会考场上如何求特征值、特征向量.

■ 练习题

1. (02, 数二, 3 分) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是 _____.

2. (93, 数四, 3 分) 设 $\lambda = 2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

3. (98, 数三、数四, 9 分) 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 都是非零向量, 且满足条件 $\alpha^T \beta = 0$, 记 n 阶矩阵 $A = \alpha \beta^T$. 求: (I) A^2 . (II) 矩阵 A 的特征值和特征向量.

4. (03, 数一, 10 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = P^{-1}A^*P$, 求 $B + 2E$ 的特征

值与特征向量, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵.

二、相似与相似对角化

■ 试题特点

围绕相似定义 $P^{-1}AP = B$, 相似的性质设计试题, 或者考查判断是否和对角矩阵相似.

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

\Leftrightarrow 如 λ 是 A 的 k 重特征值, 则 λ 有 k 个线性无关的特征向量.

如 A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A \sim \Lambda$.

■ 练习题

1. (01, 数一, 8 分) 已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x , 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$.

(1) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B , 使 $A = PBP^{-1}$; (2) 计算行列式 $|A + E|$.

2. (09, 数三, 4 分) 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. (97, 数一, 6 分) 已知 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(I) 试确定参数 a, b 及特征向量 ξ 所对应的特征值;

(II) 问 A 能否相似于对角阵? 说明理由.

4. (04, 数一, 9 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A

是否可相似对角化.

三、关于相似时可逆矩阵 P

■ 试题特点

$P^{-1}AP = \Lambda$ 时, Λ 是 A 的特征值, P 是 A 的特征向量, 要意识到这一类题目实际上就是求矩阵 A 特征值和特征向量的另一种出题方法. 这类试题往往会涉及到处理一些参数.

练习题 1 和 2 是常规题型, 而练习题 3 是用合成的方法求可逆矩阵 P . ($P_1^{-1}AP_1 = B, P_2^{-1}BP_2 =$

$$C \Rightarrow P^{-1}AP = C, P = P_1 P_2)$$

■ 练习题

1. (1992, 数三, 7 分) 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$

(1) 求 x 和 y 的值,

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

2. (99, 数四, 7 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & 1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, 问当 k 为何值时, 存在可逆矩阵 P , 使得

$P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 并求出 P 和相应的对角矩阵.

3. (05, 数四, 13 分) 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3.$$

(I) 求矩阵 B , 使得 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$;

(II) 求矩阵 A 的特征值;

(III) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

四、实对称矩阵

■ 试题特点

实对称矩阵有几个重要的定理, 例如: 实对称矩阵一定和对角矩阵相似 (不管特征值有没有重根); 实对称矩阵特征值不同时特征向量必相互正交 (由此有内积为 0, 从而可构造齐次方程组求特征向量); 实对称矩阵可以用正交矩阵来相似对角化. 试题就是围绕这些定理来设计的. 考研的重点, 特别要复习好综合性强的解答题.

3 (2006, 21 题, 9 分) 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

【分析】 本题矩阵 A 未知, 而 (I) 要求出 A 的特征值、特征向量. 因而要有用定义法分析、推导的构思.

【解】 (I) 因为矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 即有 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以 3 是矩阵 A 的

特征值, $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 是 A 属于 3 的特征向量.

又 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1, A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$, 故 α_1, α_2 是矩阵 A 属于 $\lambda = 0$ 的两个线性无关的特征向量. 因此矩阵 A 的特征值是 3, 0, 0.

$\lambda = 3$ 的特征向量为 $k(1, 1, 1)^T$, 其中 $k \neq 0$ 为常数;

$\lambda = 0$ 的特征向量为 $k_1(-1, 2, -1)^T + k_2(0, -1, 1)^T$, 其中 k_1, k_2 是不全为 0 的常数.

(II) 因为 α_1, α_2 不正交, 故要 Schmidt 正交化.

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{单位化 } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{那么令 } Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{ 得 } Q^T A Q = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

【评注】 本题也可先求出矩阵 A , 然后来完成 (I) 和 (II), 这样工作量会大一些,

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ 由题设有 } \begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3 \\ a_{12} + a_{22} + a_{23} = 3 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 3 \end{cases}$$

又由 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 0$ 有

$$\begin{cases} -a_{11} + 2a_{12} - a_{13} = 0 \\ -a_{12} + 2a_{22} - a_{23} = 0 \\ -a_{13} + 2a_{23} - a_{33} = 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} -a_{12} + a_{13} = 0 \\ -a_{22} + a_{23} = 0 \\ -a_{23} + a_{33} = 0 \end{cases}$$

联立这九个方程可得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

进而由 $|\lambda E - A| = 0 \cdots$ 可完成本题.

当特征值有重根时, 要小心此时的特征向量垂直吗? 是否有 Schmit 正交化的考点?

本题难度系数 0.458.

4 (2007, 22 题, 11 分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

【解】 (I) 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 知 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$. 那么

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\alpha_1 = -2\alpha_1,$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量.

类似地, 若 $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3$, 有

$$B\alpha_2 = (\lambda_2^5 - 4\lambda_2^3 + 1)\alpha_2 = \alpha_2, B\alpha_3 = (\lambda_3^5 - 4\lambda_3^3 + 1)\alpha_3 = \alpha_3,$$

因此, 矩阵 B 的特征值为 $\mu_1 = -2, \mu_2 = \mu_3 = 1$.

由矩阵 A 是对称矩阵知矩阵 B 也是对称矩阵, 设矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的特征向量是 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$, 那么因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 有

$$\alpha_1^T \beta = x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

所以矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的线性无关的特征向量是 $\beta_2 = (1, 1, 0)^T, \beta_3 = (-1, 0, 1)^T$.

因而, 矩阵 B 属于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量是 $k_1(1, -1, 1)^T$, 其中 k_1 是不为 0 的任意常数.

矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的特征向量是 $k_2(1, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 1)^T$, 其中 k_2, k_3 是不全为 0 的任意常数.

(II) 由 $B\alpha_1 = -2\alpha_1, B\beta_2 = \beta_2, B\beta_3 = \beta_3$ 有 $B(\alpha_1, \beta_2, \beta_3) = (-2\alpha_1, \beta_2, \beta_3)$. 那么

$$\begin{aligned} B &= (-2\alpha_1, \beta_2, \beta_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【译注】 本题求矩阵 B , 亦可用 $P^{-1}BP = A$ 或 $Q^{-1}BQ = A$ 的方法来实现, 要想到用正交内积为 0 来求特征向量, 难度系数 0.303.

5 (2010, 6 题, 4 分) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

$$\begin{aligned} \text{(A)} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, & \text{(B)} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{(C)} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, & \text{(D)} & \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【答案】 D

【分析】 这是一道常见的基础题, 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 知 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$, 那么对于 $A^2 + A = O \Rightarrow (\lambda^2 + \lambda)\alpha = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0$

所以 A 的特征值只能是 0 或 -1.

再由 A 是实对称必有 $A \sim \Lambda$, 而 Λ 即是 A 的特征值, 那么由 $r(A) = 3$, 可知 (D) 正确.

本题难度系数 0.775.

6 (2011, 21 题, 11 分) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且 $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

【分析】 本题未给出具体的矩阵 A , 又要求 A 的特征值、特征向量, 应当考虑用定义法 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 来推理、分析、判断.

【解】 (I) 因 $r(A) = 2$ 知 $|A| = 0$, 所以 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值.

$$\text{又 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以按定义 $\lambda = 1$ 是 A 的特征值, $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ 是 A 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量;

$\lambda = -1$ 是 A 的特征值, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$ 是 A 属于 $\lambda = -1$ 的特征向量.

设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是 A 属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量, 作为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 因此
$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = x_1 + x_3 = 0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = x_1 - x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{解出 } \alpha_3 = (0, 1, 0)^T.$$

故矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 0$; 特征向量依次为

$k_1(1, 0, 1)^T, k_2(1, 0, -1)^T, k_3(0, 1, 0)^T$, 其中 k_1, k_2, k_3 均是不为 0 的任意常数.

(II) 由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, -\alpha_2, 0)$, 有

$$A = (\alpha_1, -\alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

【评注】当然也可设

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \text{ 由 } A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 有 } \begin{cases} a-c=-1, \\ a+c=1, \\ b-e=0, \\ b+e=0, \\ c-f=1, \\ c+f=1, \end{cases}$$

易得 $a=0, c=1, b=0, e=0, f=0$. 即有 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 再由 $r(A) = 2 \Rightarrow d = 0$. 然后再来

求特征值、特征向量.

不要忘记实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交这一重要定理, 由此构造齐次方程组可求出特征向量, 本题难度系数 0.534.

【小结】通过这几个试题希望你很好地归纳一下, 面对实对称矩阵都有哪些求特征值、特征向量的方法技巧?

■ 练习题

1. (02, 数四, 8 分) 设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵,

并计算行列式 $|A - E|$ 的值.

2. (01, 数三、数四, 9 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一, 试求: (1) a 的值; (2) 正交矩阵 Q , 使 $Q^T A Q$ 为对角矩阵.

第六章 二次型

■本章导读

二次型实际上是特征值的几何应用, 复习二次型就一定搞清它与特征值、特征向量之间的内在联系.

考点主要有三个: 一个是二次型化标准形的正、反两方面的问题, 依托的是特征值、特征向量相似对角化的理论与方法; 一个是二次型的正定性, 既有正定的判定, 又有正定性质的运用, 也都会涉及到特征值; 第三是合同, 它是由二次型经坐标变换引申出来的概念.

数一还常有二次型与二次曲面相沟通的试题.

一、二次型的标准形

■试题特点

用正交变换化二次型为标准形, 求其标准就是求二次型矩阵 A 的特征值, 求坐标变换就是求 A 的特征向量.

若求二次型的表达式就是求矩阵 A , 这样的试题一般都是实对称矩阵试题的翻版.

1 (2005, 20 题, 9 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

【解】 (I) 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 由于二次型 f 的秩为 2,

即 $r(A) = 2$, 所以有 $|A| = 2 \begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix} = -8a = 0$, 得 $a = 0$.

(II) 当 $a = 0$ 时, 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$,

知矩阵 A 的特征值是 $2, 2, 0$.

对 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得特征向量 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)^T$.

对 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得特征向量 $\alpha_3 = (1, -1, 0)^T$.

由于特征向量已经两两正交, 只需单位化, 于是有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \gamma_2 = (0, 0, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T.$$

令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 那么, 经正交变换 $x = Qy$ 有

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2.$$

(Ⅲ)【方法一】 由(Ⅱ)知, 在正交变换 $x = Qy$ 下, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 化成 $2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$, 解之得 $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = t$ (t 为任意实数), 从而

$$x = Q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t\gamma_3 = t(1, -1, 0)^T$$

即方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解是 $k(1, -1, 0)^T$, k 为任意实数.

【方法二】 由于 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 = 0$, 所以

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

其通解为 $x = k(-1, 1, 0)^T$, 其中 k 为任意常数.

【评注】 本题的前两问是常规题, 也是常见的, 只要按步骤处理即可, 要注意对(Ⅲ)的理解, 本题难度系数 0.563.

2 (2008, 6 题, 4 分) 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程

$$(x, y, z)A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1$$

在正交变换下的标准方程的图形如右图所示, 则 A 的正特征值的个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 B

【分析】 本题把线性代数与解析几何的内容有机的联系起来, 首先要明白所给图形是什么曲面? 其标准方程是什么?

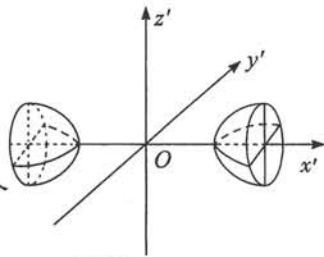
双叶双曲面, 标准方程是: $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$

其次, 二次型经正交变换化为标准形时, 其平方项的系数就是 A 的特征值, 所以应选(B).

本题难度系数是 0.436, 很多考生选择(C), 是不是把标准方程记成了

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

而忽略了本题的条件是 $x^T A x = 1$.



3 (2009, 21 题, 11 分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

【解】 (I) 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a)(\lambda - (a+1))(\lambda - (a-2)), \end{aligned}$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

(II) 因为二次型 f 的规范为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 那么二次型矩阵 A 的特征值为 $+, +, 0$.

显然 $a-2 < a < a+1$ 所以必有 $a = 2$.

【评注】 本题难度系数 0.495.

只要求出特征值, 或者知道特征值的 $+, -, 0$ 就有了正、负惯性指数也就可写规范形, 当然也有配方法这条化标准形的路, 但本题配方法不合适.

4 (2010, 21 题, 11 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(I) 求矩阵 A ;

(II) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

【分析】 本题已知二次型在正交变换下的标准形就是已知矩阵 A 的特征值, 而 Q 的列就是 A 的特征向量, 现在的问题是如何求出 A 的所有线性无关的特征向量? 反求出矩阵 A ?

【解】 (I) 二次型 $x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明二次型矩阵 A 的特征值是 $1, 1, 0$. 又因 Q 的第 3 列是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$, 说明 $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 是矩阵 A 关于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量. 因为 A 是实对称矩阵, 特征值不同特征向量相互正交. 设 A 关于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha^T \alpha_3 = 0$, 即 $x_1 + x_3 = 0$.

取 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, 那么 α_1, α_2 是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

由 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$ 有

$$\begin{aligned} A &= (\alpha_1, \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(II) 由于矩阵 A 的特征值是 $1, 1, 0$, 那么 $A + E$ 的特征值是 $2, 2, 1$. 因为 $A + E$ 的特征值全大

于 0, 所以 $A + E$ 正定.

【评注】 本题也可把 α_1, α_2 单位化处理(它们已经正交!) 构造出正交矩阵 Q , 即

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}. \text{ 于是有 } A = QAQ^T = \dots$$

本题综合性强, 知识点多, 复习二次型一定要搞清二次型和特征值知识点之间的衔接和转换, 难度系数 0.385.

5 (2011, 13 题, 4 分) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____

【答案】 1

【分析】 本题又是一道线性代数与二次曲面的简单综合题.

由于二次型 $\mathbf{x}A^T\mathbf{x}$ 经正交变换化为标准形时, 矩阵 A 的特征值就是标准形中平方项的系数. 按题意, 矩阵 A 的特征值是 0, 1, 4, 据 $|A| = \prod \lambda_i$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-1 & 0 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 = 0.$$

可见 $a = 1$.

本题难度系数 0.693.

2005 年考题的思路和方法是最基本的, 也是最重要的. 而 2010 年试题已知条件 Q 的信息应好好把握, 练习题中还有 2 和 3 又会提醒哪些知识点?

■ 练习题

1. (04, 数三, 4 分) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为 _____.

2. (98, 数一, 6 分) 已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 可以经过正交变

换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\xi^2 = 4$, 求 a, b 的值和正交矩阵 P .

3. (03, 数三, 13 分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0),$$

其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

二、二次型的正定

■ 试题特点

围绕正定的定义“ $\forall x \neq 0$ 必有 $x^T A x > 0$ ”设计的试题一般难度较大, 用特征值(参看 2010 年试题)、顺序主子式的考题是容易的.

复习时, 注意考定义法的题(参看下面的练习题)

■ 练习题

1. (97, 数三, 3 分) 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是_____.

2. (99, 数一, 6 分) 设 A 为 m 阶实对称矩阵, B 为 $m \times n$ 实矩阵, B^T 为 B 的转置矩阵, 试证: $B^T A B$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = n$.

3. (99, 数三, 7 分) 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 已知矩阵 $B = \lambda E + A^T A$, 试证: 当 $\lambda > 0$ 时, 矩阵 B 为正定矩阵.

4. (00, 数三, 9 分) 设有 n 元实二次型

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$, 其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为实数. 试问: 当 a_1, a_2, \dots, a_n 满足何种条件时, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型.

三、合同矩阵

■ 试题特点

不是重点, 填空、选择为主.

$A \simeq B \Leftrightarrow p_A = p_B, q_A = q_B$

通过什么来确定正、负惯性指数? 特征值!!! 有时也可用配方法.

注意相似与合同的联系和区别.

6 (2007, 8 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同, 且相似.

(B) 合同, 但不相似.

(C) 不合同, 但相似.

(D) 既不合同, 也不相似.

【答案】 B

【分析】 根据相似的必要条件: $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$, 易见 A 和 B 肯定不相似, 由此可排除 (A) 与 (C). 而合同的充分必要条件是相同的正惯性指数、负惯性指数. 为此可以用特征值加以判断. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)^2$$

知矩阵 A 的特征值为 $3, 3, 0$. 故二次型 $x^T A x$ 的正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$. 而二次型 $x^T B x$ 的正惯性指数亦为 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 所以 A 与 B 合同, 故应选 (B).

【评注】 实对称矩阵 A 和 B 相似, 则 A 和 B 必合同, ($\because A \sim B \Rightarrow \lambda_A = \lambda_B \Rightarrow p_A = p_B, q_A = q_B \Rightarrow A \sim B$) 但合同不一定相似, 一般情况通过特征值来判断合同是方便的.

本题难度系数 0.467.

■ 练习题

1. (08, 数四, 4 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

2. (96, 数三, 8 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 已知 A 的一个特征值为 3, 试求 y ;

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

练习题参考答案及解析

第一章 行列式

一、数字型行列式的计算

1.【分析】 这是一个数字型行列式的计算, 由于本题有较多的零, 可以直接展开计算. 若按第一行展开, 有

$$\begin{aligned} D &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3). \end{aligned}$$

所以应选(D).

若熟悉拉普拉斯展开, 可通过两行互换, 两列互换, 把零元素调至行列式的一角. 例如

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3). \end{aligned}$$

2.【分析】 问方程 $f(x) = 0$ 有几个根, 也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 将第 1 列的 -1 倍依次加至其余各列, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)+(4)} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = x(5x-5) \end{aligned}$$

可见由拉普拉斯展开式知 $f(x)$ 是 x 的 2 次多项式, 故应选(B).

【评注】 由于行列式中各项均含有 x , 若直接展开是繁琐的, 故一定要先恒等变形; 更不要错误地认为 $f(x)$ 一定是 4 次多项式.

3.【分析】 因为

$$A = \alpha \alpha^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (1, 0, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 而 } \alpha^T \alpha = (1, 0, -1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2,$$

则

$$A^2 = (\alpha \alpha^T)(\alpha \alpha^T) = \alpha (\alpha^T \alpha) \alpha^T = 2 \alpha \alpha^T = 2A.$$

于是

$$A^n = 2^{n-1}A.$$

那么 $|aE - A^n| = |aE - 2^{n-1}A| = \begin{vmatrix} a - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a - 2^{n-1} \end{vmatrix} = a^2(a - 2^n).$

【评注】 若对特征值熟练, 由 $r(A) = 1$, 知 A 的特征值为 $2, 0, 0$. 那么, A^n 的特征值是 $2^n, 0, 0$. 从而 $aE - A^n$ 的特征值是 $a - 2^n, a, a$. 故 $|aE - A^n| = (a - 2^n)a^2$.

4. 【分析】 把第 $2, 3, \dots, n$ 各行均加至第 1 行, 则第 1 行为 $n-1$, 提取公因数 $n-1$ 后, 再把第 1 行的 -1 倍加至第 $2, 3, \dots, n$ 各行, 可化为上三角行列式. 即

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

【评注】 除去用行列式性质及展开公式计算外, 你能利用特征值更简单地求出行列式 $|A|$ 的值吗?

二、抽象性行列式的计算

1. 【分析】 利用行列式的性质, 有

$$\begin{aligned} |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| &= |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| \\ &= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| = -m + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n - m. \end{aligned}$$

所以应选(C).

【评注】 作为抽象行列式, 本题主要考查用行列式的性质恒等变形, 化简求值.

2. 【分析】 由已知条件有 $(A^2 - E)B = A + E$, 即 $(A + E)(A - E)B = A + E$.

因为 $A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 知 $A + E$ 可逆. 故 $(A - E)B = E$.

两边取行列式, 并用行列式乘法公式, 有 $|A - E| \cdot |B| = 1$

而 $|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$, 故 $|B| = \frac{1}{2}$.

【评注】 本题考查的是利用矩阵的运算.

3. 【分析】 本题已知条件是特征值和相似, 而要求出行列式的值, 由于 $|A| = \prod \lambda_i$, 故应求出 $B^{-1} - E$ 的特征值.

由 $A \sim B$, 知 B 的特征值是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. 于 B^{-1} 的特征值是 2, 3, 4, 5. 那么 $B^{-1} - E$ 的特征值是 1, 2, 3, 4. 从而 $|B^{-1} - E| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

三、行列式 $|A|$ 是否为零的判定

1.【分析一】 因为 AB 是 m 阶矩阵, $|AB| = 0$ 的充分必要条件是秩 $r(AB) < m$. 由于

$$r(AB) \leq r(B) \leq \min(m, n),$$

可见当 $m > n$ 时, 必有 $r(AB) \leq n < m$. 因此选(B).

【分析二】 由于方程组 $Bx = 0$ 的解必是方程组 $ABx = 0$ 的解, 而 $Bx = 0$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组, 因此当 $m > n$ 时, $Bx = 0$ 必有非零解, 从而 $ABx = 0$ 有非零解, 故 $|AB| = 0$. 所以选(B).

2.【证法一】 由于 $A^* = A^T$, 即有 $A_{ij} = a_{ij} \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, n)$, 其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式.

因为 $A \neq O$, 不妨设 $a_{ij} \neq 0$, 那么

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 > 0.$$

故 $|A| \neq 0$.

【证法二】 (反证法) 若 $|A| = 0$, 则 $AA^T = AA^* = |A|E = O$.

设 A 的行向量为 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\alpha_i \alpha_i^T = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

于是 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

进而有 $A = O$, 这与 A 是非零矩阵相矛盾. 故 $|A| \neq 0$.

3.【解】 因 $|A + E| = |A + AA^T| = |A(E + A^T)| = |A| \cdot |(E + A)^T| = |A| \cdot |E + A|$

又因 $AA^T = E$ 有 $|A| \cdot |A^T| = 1$ 即 $|A|^2 = 1$. 因 $|A| < 0$, 故 $|A| = -1$.

那么 $|A + E| = -|A + E|$, 所以 $|A + E| = 0$.

第二章 矩阵

一、矩阵运算、初等变换

1.【分析】 矩阵乘法有结合律, 注意

$$\beta \alpha^T = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3, (\text{是一个数})$$

$$\text{而 } A = \alpha^T \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, (\text{是 } 3 \text{ 阶矩阵})$$

$$\text{于是 } A^n = (\alpha^T \beta)(\alpha^T \beta) \cdots (\beta \alpha^T) = \alpha^T (\beta \alpha^T) \cdots (\beta \alpha^T) \beta = 3^{n-1} \alpha^T \beta = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

【评注】 若 α, β 是 n 维列向量, 则 $A = \alpha\beta^T$ 是秩为 1 的 n 阶矩阵, 而 $\alpha^T\beta$ 是 1 阶矩阵, 是一个数. 由于矩阵乘法有结合律, 此时 $A^n = l^{n-1}A$, 而 $l = \alpha^T\beta$.

2.【分析】 设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, 则

$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{而 } \alpha^T\alpha = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\text{所以 } \alpha^T\alpha = 1 + 1 + 1 = 3$$

【评注】 本题 $\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的矩阵, $\alpha^T\alpha$ 是一个数, 这两个符号不要混淆. 且若 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 均为 n 维列向量, 则 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = \sum a_{ii}$, (矩阵 A 主对角线元素之和).

3.【分析】 由于 $A^n - 2A^{n-1} = (A - 2E)A^{n-1}$, 而

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

易见 $(A - 2E)A = 0$, 从而 $A^n - 2A^{n-1} = 0$.

【评注】 由于

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A,$$

利用数学归纳法也容易得出 $A^n - 2A^{n-1} = 0$. 本题若用相似对角化的理论来求 A^n , 虽说可得到正确结论, 但烦琐.

4.【分析】 本题考查 n 阶方阵方幂的运算. 由于

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix},$$

$$\text{又 } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{易见} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

从而

$$A^{2004} = (A^2)^{1002} = E.$$

$$\text{那么} \quad B^{2004} - 2A^2 = P^{-1}A^{2004}P - 2A^2 = P^{-1}EP - 2A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【注】 若 $P^{-1}AP = B$ 则 $P^{-1}A^nP = B^n$, 通过相似求 A^n 是求 A 的方幂的重要方法.

5.【分析】 由 $AB = O$, 对 B 按列分块有

$$AB = A(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (A\beta_1, A\beta_2, A\beta_3) = (0, 0, 0),$$

即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

又因 $B \neq O$, 故 $Ax = 0$ 有非零解, 那么

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7(t+3) = 0. \Rightarrow t = -3.$$

若熟悉公式: $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$. 可知 $r(A) < 3$. 亦可求出 $t = -3$.

【评注】 对于 $AB = O$ 要有 B 的每个列向量都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的构思, 还要有秩 $r(A) + r(B) \leq n$ 的知识.

二、伴随矩阵、可逆矩阵

1.【分析】 矩阵 A 的元素没有给出, 因此用伴随矩阵、用初等行变换求逆的路均堵塞. 应当考虑用定义法.

$$\text{因为} \quad (A - E)(A + 2E) - 2E = A^2 + A - 4E = O,$$

$$\text{故} \quad (A - E)(A + 2E) = 2E, \text{ 即 } (A - E) \cdot \frac{A + 2E}{2} = E.$$

$$\text{按定义知} \quad (A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(A + 2E).$$

2.【分析】 虽可以由 A 先求出 $(E + A)^{-1}$, 再作矩阵乘法求出 B , 最后通过求逆得到 $(E + B)^{-1}$. 但这种方法计算量太大.

本题实际是考单位矩阵恒等变形的技巧, 我们有

$$\begin{aligned} B + E &= (E + A)^{-1}(E - A) + E \\ &= (E + A)^{-1}[(E - A) + (E + A)] = 2(E + A)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad (E + B)^{-1} = [2(E + A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(E + A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

或者, 由 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 左乘 $E + A$ 得 $(E + A)B = E - A$.

$$\Rightarrow \quad (E + A)B + (E + A) = E - A + E + A = 2E$$

即有

$$(E + A)(E + B) = 2E.$$

【评注】 本题既综合又灵活, 这是考生失误较多的一道考题, 其解题思路方法值得很好体会.

3. **【分析】** 矩阵的乘法没有交换律, 只有一些特殊情况可交换. 由于 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$, 据行列式乘法公式 $|A||B||C| = 1$ 知 A, B, C 均可逆. 那么对 $ABC = E$ 先左乘 A^{-1} 再右乘 A , 有

$$ABC = E \rightarrow BC = A^{-1} \rightarrow BCA = E. \text{ 选(D).}$$

类似地, 由 $BCA = E \rightarrow CAB = E$.

不难想出, 若 n 矩阵 $ABCD = E$, 则有 $ABCD = BCDA = CDAB = DABC = E$.

4. **【分析】** 由 $AA^* = |A|E$ 有 $\frac{A}{|A|}A^* = E$, 故 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$. 现 $|A| = 10$.

$$\text{所以 } (A^*)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. **【分析】** 对任何 n 阶矩阵都要成立的关系式, 对特殊的 n 阶矩阵自然也要成立. 那么, 当 A 可逆时, 由 $A^* = |A|A^{-1}$ 有

$$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n |A| \cdot \frac{1}{k} A^{-1} = k^{n-1} A^*.$$

故应选(B).

一般地, 若 $A = (a_{ij})$, 有 $kA = (ka_{ij})$, 那么矩阵 kA 的 i 行 j 列元素的代数余子式为

$$\begin{aligned} (kA)_{ij} &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} k^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^{n-1} A_{ij} \end{aligned}$$

即 $|kA|$ 中每个元素的代数余子式恰好是 $|A|$ 相应元素的代数余子式的 k^{n-1} 倍, 因而, 按伴随矩阵的定义知 $(kA)^*$ 的元素是 A^* 对应元素的 k^{n-1} 倍.

6. **【分析】** 对任何 n 阶矩阵 A, B 关系式要成立, 那么 A, B 可逆时仍应成立, 故可看 A, B 可逆时 $C^* = ?$

$$\text{由于 } C^* = |C|C^{-1} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = |A||B| \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$$

所以应选(D).

作为选择题, 根据这四个选项, 也可如下判断:

设 $C^* = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, 由 $CC^* = |C|E$, 有

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 \\ BX_3 & BX_4 \end{bmatrix} = |A||B| \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

因为 $AX_1 = |A||B|E \Rightarrow X_1 = |A||B|A^{-1} = |B|A^*$. 故应选(D).

7.【解】 由于 $B = E_{ij}A$, 其中 E_{ij} 是初等矩阵

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

(1) 因为 A 可逆, $|A| \neq 0$, 故 $|B| = |E_{ij}A| = |E_{ij}| \cdot |A| = -|A| \neq 0$. 所以 B 可逆.

(2) 由 $B = E_{ij}A$, 知 $AB^{-1} = A(E_{ij}A)^{-1} = AA^{-1}E_{ij}^{-1} = E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

8.【解】 (1) 由 $2A^{-1}B = B - 4E$ 左乘 A 知 $AB - 2B - 4A = 0$.

从而 $(A - 2E)(B - 4E) = 8E$, 或 $(A - 2E) \cdot \frac{1}{8}(B - 4E) = E$.

故 $A - 2E$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(2) 由(1)知 $A = 2E + 8(B - 4E)^{-1}$.

而 $(B - 4E)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$

故 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$

【评注】 如果只是要证明 $A - 2E$ 可逆, 那么由

$$AB - 2B - 4A = 0 \Rightarrow (A - 2E)B = 4A.$$

因为 A 可逆, 知 $|A| = 4|B| \neq 0$, 故 $|A - 2E| \cdot |B| \neq 0$, 这可证出 $A - 2E$ 可逆.

9.【证明】 (1) $A^2 = (E - \xi\xi^T)(E - \xi\xi^T) = E - 2\xi\xi^T + \xi\xi^T\xi\xi^T$
 $= E - \xi\xi^T + \xi(\xi^T\xi)\xi^T - \xi\xi^T = A + (\xi^T\xi)\xi\xi^T - \xi\xi^T$

那么 $A^2 = A \Leftrightarrow (\xi^T \xi - 1) \xi \xi^T = 0$.

因为 ξ 是非零列向量, $\xi \xi^T \neq 0$, 故 $A^2 = A \Leftrightarrow \xi^T \xi - 1 = 0$ 即 $\xi^T \xi = 1$. club.topsage.com

(2) 反证法. 当 $\xi^T \xi = 1$ 时, 由(1)知 $A^2 = A$, 若 A 可逆, 则

$$A = A^{-1} A^2 = A^{-1} A = E$$

与已知 $A = E - \xi \xi^T \neq E$ 矛盾.

【评注】 ξ 是 n 维列向量, 则 $\xi \xi^T$ 是 n 阶矩阵且秩为 1, 而 $\xi^T \xi$ 是一个数, 数学符号的含义要搞清, 不要混淆, 本题考查矩阵乘法的分配律、结合律. 对(2), 由 $A = E - \xi \xi^T$, 有

$$A\xi = \xi - \xi(\xi^T \xi) = \xi - \xi = 0.$$

可见 ξ 是 $Ax = 0$ 的非零解, 故 $|A| = 0$. 亦知 A 不可逆. 本题证法很多, 你还有别的方法吗?

10. **【解】** (1) 由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 及 $A^* = |A|A^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A + |A| \alpha^T & -\alpha^T A^* \alpha + b|A| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 用行列式拉普拉斯展开公式及行列式乘法公式, 有

$$|P| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix} = |A|,$$

$$|P||Q| = |PQ| = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{vmatrix} = |A|^2 (b - \alpha^T A^{-1} \alpha).$$

又因 A 可逆, $|A| \neq 0$, 故 $|Q| = |A|(b - \alpha^T A^{-1} \alpha)$.

由此可知 Q 可逆的充分必要条件是 $b - \alpha^T A^{-1} \alpha \neq 0$, 即 $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

【评注】 本题考查分块矩阵的运算, 要把握住小块矩阵的左右位置. 要看清 $\alpha^T A^{-1} \alpha$ 是 1 阶矩阵, 是一个数.

三、矩阵的秩

1. **【分析】** 基础题, 本题是考查矩阵乘积的秩的公式: 如果 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B)$; $r(BA) = r(B)$.

本题 $|B| = 10 \neq 0$, 故 B 为可逆矩阵, 因此 $r(AB) = r(A) = 2$.

2. **【分析】** 本题可用秩的概念: $|A| = 0$ 但有 $n-1$ 阶子式不为 0 来分析、推断

$$\text{由于 } |A| = [(n-1)a + 1] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [(n-1)a + 1](1-a)^{n-1},$$

由 $r(A) = n-1$ 知 $|A| = 0$, 故 a 取自于 $\frac{1}{1-n}$ 或 1. 显然 $a = 1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

而 $r(A) = 1$ 不合题意, 故应选(B).

【评注】 因为 A 是实对称矩阵, 若特征值熟练, 亦可用相似来处理.

注意: $A = (1-a)E + \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$, 所以 A 的特征值: $(n-1)a+1, 1-a(n-1)$ 个

$$\text{故 } A \sim \begin{bmatrix} (n-1)a+1 & & & \\ & 1-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-a \end{bmatrix}.$$

3. 【分析】 已知矩阵 A 而需求是 $r(A^*)$, 故应以 $r(A^*)$ 公式为背景. 根据伴随矩阵 A^* 秩的关系式

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n, \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1, \text{ 知 } r(A^*) = 1 \Leftrightarrow r(A) = 2. \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

若 $a = b$, 易见 $r(A) \leq 1$, 故可排除(A), (B).

当 $a \neq b$ 时, A 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0$, 若 $r(A) = 2$, 按定义只需 $|A| = 0$. 由于

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2,$$

所以应选(C).

4. 【分析】 因为 $P \neq O$, 所以秩 $r(P) \geq 1$, 问题是 $r(P)$ 究竟为 1 还是 2?

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$.

当 $t = 6$ 时, $r(Q) = 1$. 于是从 $r(P) + r(Q) \leq 3$ 得 $r(P) \leq 2$.

因此(A), (B) 中对秩 $r(P)$ 的判定都有可能成立, 但不是必成立. 所以(A), (B) 均不正确.

当 $t \neq 6$ 时, $r(Q) = 2$. 于是从 $r(P) + r(Q) \leq 3$ 得 $r(P) \leq 1$. 故应选(C).

5. 【分析】 若 $P^{-1}AP = B$, 则 $P^{-1}(A + kE)P = B + kE$, 即若 $A \sim B$, 则 $A + kE \sim B + kE$. 又因相似矩阵有相同的秩, 故

$$\begin{aligned} r(A - 2E) + r(A - E) &= r(B - 2E) + r(B - E) \\ &= r \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 4. \end{aligned}$$

故应选(C).

【评注】 本题是考如 $A \sim B$, 则 $r(A) = r(B)$, 利用相似来处理矩阵的秩, 其中用到相似的性质: 如 $A \sim B$, 则 $A + kE \sim B + kE$.

6. 【分析】 经初等变换矩阵的秩不变, 由

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{bmatrix},$$

可知后者的秩仍为 3. 所以这两直线的方向向量 $v_1 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ 与 $v_2 = (a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$ 线性无关, 因此可排除 (B)、(C).

在这两条直线上各取一点 (a_3, b_3, c_3) 与 (a_1, b_1, c_1) , 又可构造向量 $v = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$, 如果 v, v_1, v_2 共面, 则两条直线相交, 若 v, v_1, v_2 不共面, 则两直线异面. 为此可用混合积

$$(v, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

或观察出 $v + v_1 + v_2 = 0$, 而知应选 (A).

【评注】 ① 空间解析几何与线性代数的综合题考过几个, 这是其中之一. 讨论的是秩与两条直线空间位置的关系.

② 本题有许多考生选了 (D), 究其原因是在推知两直线不平行后, 由第一条直线经过点 (a_3, b_3, c_3) , 第二条直线经过点 (a_1, b_1, c_1) , 而 $(a_1, b_1, c_1) \neq (a_3, b_3, c_3)$, 就误认为两直线不相交而选 (D), 这显然太粗心了.

四、矩阵方程

1. 【解】 用矩阵 C 左乘已知矩阵方程的两端, 有 $(2C - B)A^T = E$. 对上式两端取转置, 有 $A(2C^T - B^T) = E$. 因为 A 是 4 阶方阵, 故

$$A = (2C^T - B^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 【解】 化简矩阵方程, 有

$$AX(A - B) + BX(B - A) = E, \text{ 即 } (A - B)X(A - B) = E.$$

由于 $|A - B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 所以矩阵 $A - B$ 可逆, 且 $(A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 于

$$\text{是 } X = [(A - B)^{-1}]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. 【分析】 由 $B = E + AB \Rightarrow (E - A)B = E \Rightarrow B = (E - A)^{-1}$

由 $C = A + CA \Rightarrow C(E - A) = A \Rightarrow C = A(E - A)^{-1}$

那么 $B - C = (E - A)^{-1} - A(E - A)^{-1} = (E - A)(E - A)^{-1} = E$.

故应选(A).

4.【解】 由 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 有 $|A|^3 = 8$, 得 $|A| = 2$. A 是可逆矩阵. 用 A 右乘矩阵方程的两端, 有

$$(A - E)B = 3A. \quad (1)$$

因为 $A^*A = AA^* = |A|E$, 用 A^* 左乘上式的两端, 并把 $|A| = 2$ 代入, 有

$$(2E - A^*)B = 6E. \quad (2)$$

于是

$$B = 6(2E - A^*)^{-1}.$$

$$\text{因为 } 2E - A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \text{ 则可求出 } (2E - A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

因此

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

第三章 向 量

1.【分析】 本题已知向量的坐标, 故应当用讨论带参数的非齐次线性方程组是否有解的方法来回答.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$. 对 $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \beta)$ 作初等行变换有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array} \right],$$

所以

(1) 当 $b \neq 2$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 无解, 此时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(2) 当 $b = 2, a \neq 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有唯一解, 即

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 2, 0)^T.$$

于是 β 可唯一表示为 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

当 $b = 2, a = 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有无穷多个解. 即

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = k(-2, 1, 1)^T + (3, 0, -2)^T.$$

于是 $\beta = (-2k + 3)\alpha_1 + k\alpha_2 + (k - 2)\alpha_3, k$ 为任意常数.

【评注】 常规的基本题, 方法, 思路很清晰, 计算不能出错. 讨论要全面, 严谨.

2.【分析】 所谓向量组(I)与(II)等价, 即向量组(I)与(II)可以互相线性表出. 若方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 有解, 即 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 若对同一个 a , 三个方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i (i = 1, 2, 3)$ 均有解, 即向量组(II)可以由(I)线性表出.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i (i = 1, 2, 3)$, 由于这三个方程组的系数矩阵一样, 故可拼成

一个大的增广矩阵统一的加减消元. 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 作初等行变换, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & a+1 & a+2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-1 \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a \neq -1$ 时, 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = a+1 \neq 0$, 由克莱姆法则, 知三个线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i (i=1, 2, 3)$ 均有唯一解. 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 (I) 线性表出. 由于行列式

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ a+3 & a+6 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

故 $\forall a$, 方程组 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \alpha_j (j=1, 2, 3)$ 恒有唯一解, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 总可由向量组 (II) 线性表出.

因此, 当 $a \neq -1$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价.

(2) 当 $a = -1$ 时, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

由于秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$ 无解, 故向量 β_1 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 因此, 向量组 (I) 与 (II) 不等价.

3. 【分析】 由 α, β, γ 无关 $\Rightarrow \begin{matrix} \alpha, \beta \text{ 无关} \\ \alpha, \beta, \delta \text{ 相关} \end{matrix} \Rightarrow \delta$ 可由 α, β 线性表出 $\Rightarrow \delta$ 可由 α, β, γ 线性表出.

或者, 用秩来分析, 推理:

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ 无关} \Rightarrow r(\alpha, \beta, \gamma) = 3 \Rightarrow r(\alpha, \beta) = 2$$

$$\alpha, \beta, \delta \text{ 相关} \Rightarrow r(\alpha, \beta, \delta) < 3 \quad \text{从而} \quad r(\alpha, \beta, \delta) = 2$$

那么

$$r(\alpha, \beta, \gamma) = r(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$$

所以 δ 必可由 α, β, γ 线性表出.

4. 【分析】 因为 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 故可设

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m.$$

由于 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 故上述表达式中必有 $k_m \neq 0$. 因此

$$\alpha_m = \frac{1}{k_m}(\beta - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \dots - k_{m-1}\alpha_{m-1}).$$

即 α_m 可由 (II) 线性表示, 可排除 (A)、(D).

若 α_m 可由 (I) 线性表示, 设 $\alpha_m = l_1\alpha_1 + \dots + l_{m-1}\alpha_{m-1}$, 则

$\beta = (k_1 + k_m l_1)\alpha_1 + (k_2 + k_m l_2)\alpha_2 + \dots + (k_{m-1} + k_m l_{m-1})\alpha_{m-1}$. 与题设矛盾, 故应选 (B).

【评注】 本题能否用秩来分析、推导?

提示: $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}) + 1 = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta)$$

二、向量组的线性相关和线性无关

1. 【分析一】 设 A 是 $m \times n$, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = 0$ 那么 $r(A) + r(B) \leq n$. 由于 A, B 均非 0, 故 $0 < r(A) < n, 0 < r(B) < n$.

由 $r(A) = A$ 的列秩, 知 A 的列向量组线性相关.

由 $r(B) = B$ 的行秩, 知 B 的行向量组线性相关. 故应选(A).

【分析二】 若设 $A = (1, 0), B = (0, 1)^T$, 显然 $AB = 0$. 但矩阵 A 的列向量组线性相关, 行向量组线性无关; 矩阵 B 的行向量组线性相关, 列向量组线性无关. 由此就可断言选项(A) 正确.

2. 【分析】 根据定理“若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且 $s > t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 必线性相关”, 即若多数向量可以由少数向量线性表出, 则这多数向量必线性相关, 故应立选(D).

或者, 因 I 能有 II 表出 $\Rightarrow r(I) \leq r(II)$

又因 $r(II) \leq s \therefore r(I) \leq s < r$ 故应选(D).

【评注】 建议你举几个例子说明(A), (B), (C) 均不正确. 另外, 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3$ 的线性相关性你能立即作答吗? 为什么?

3. 【证明】 (I) 由特征值特征向量定义有: $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$.

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$,

用 A 乘 ① 得: $-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$.

① - ② 得: $2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$.

因为 α_1, α_2 是矩阵 A 不同特征值的特征向量, α_1, α_2 线性无关, 所以 $k_1 = 0, k_3 = 0$.

代入 ① 有 $k_2\alpha_2 = 0$. 因为 α_2 是特征向量, $\alpha_2 \neq 0$, 故 $k_2 = 0$. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(II) 由于 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. 【证法一】 (定义法) 若有一组数 k, k_1, k_2, \dots, k_t , 使得

$$k\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \dots + k_t(\beta + \alpha_t) = 0, \quad (1)$$

则因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的解, 知 $A\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, t)$, 用 A 左乘上式的两边, 有

$$(k + k_1 + k_2 + \dots + k_t)A\beta = 0$$

由于 $A\beta \neq 0$, 故

$$k + k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0 \quad (2)$$

对(1) 重新分组为 $(k + k_1 + \dots + k_t)\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t = 0$ (3)

把(2) 代入(3), 得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是基础解系, 它们线性无关, 故必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_t = 0$.

代入(2) 式得: $k = 0$.

因此, 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

【证法二】(用秩) 经初等变换向量组的秩不变. 把第 1 列的 -1 倍分别加至其余各列, 有

$$(\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t) \rightarrow (\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t).$$

因此

$$r(\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_t) = r(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_t)$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是基础解系, 它们是线性无关的, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) = t$, 又 β 必不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表出 (否则 $A\beta = 0$), 故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta) = t + 1$.

所以

$$r(\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t) = t + 1.$$

即向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

【评注】 用定义法证线性无关时, 应当对

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t = 0$$

作恒等变形, 常用技巧是“同乘”与“重组”, 本题这两个技巧都要用到.

另外, 用秩也是一种常见的方法.

5. 【解】 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + l\beta = 0$,

(1)

因为 β 为方程组的非 0 解, 有

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n = 0, \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}b_1 + a_{r2}b_2 + \dots + a_{rn}b_n = 0, \end{cases}$$

即 $\beta \neq 0, \beta^T\alpha_1 = 0, \dots, \beta^T\alpha_r = 0$.

用 β^T 左乘(1), 并把 $\beta^T\alpha_i = 0$ 代入, 得 $l\beta^T\beta = 0$.

因为 $\beta \neq 0$, 有 $\beta^T\beta > 0$, 故必有 $l = 0$.

从而(1) 式为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0$, 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 所以有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0.$$

因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性无关.

【评注】 由于不清楚 β 是齐次方程组的解, 即 $\beta^T\alpha_i = 0$. 许多考生没想到本题应当用 β^T 左乘(1) 式.

三、向量组的极大线性无关组与秩

1. 【解】 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 作初等行变换 (把第 n 行的 -1 倍分别加至每一行), 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

若 $a = 0$, 则秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

极大线性无关组 α_1 , 且 $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1$.

若 $a \neq 0$, 则有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

当 $a = -10$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 极大线性无关组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 且 $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

【评注】 当 $a = -10$ 时

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

显然, 矩阵 B 中第 2, 3, 4 列线性无关, 故我们可回答 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是极大线性无关组.

(注: 极大无关组答案不惟一), 在 B 中, 易见

$$(0, -1, -1, -1)^T = -(0, 1, 0, 0)^T - (0, 0, 1, 0)^T - (0, 0, 0, 1)^T$$

故可回答 $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

这样一种求极大线性无关组和回答线性表出的方法, 大家要掌握.

2. 【证明】 因为 $r(I) = r(II) = 3$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 因此 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 设为 $\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$.

若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_4 - \alpha_4) = 0$, 即

$$(k_1 - l_1k_4)\alpha_1 + (k_2 - l_2k_4)\alpha_2 + (k_3 - l_3k_4)\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0,$$

由于 $r(III) = 4$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 故必有

$$\begin{cases} k_1 - l_1k_4 = 0, \\ k_2 - l_2k_4 = 0, \\ k_3 - l_3k_4 = 0, \\ k_4 = 0, \end{cases}$$

解出 $k_4 = 0, k_3 = 0, k_2 = 0, k_1 = 0$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 - \alpha_4$ 线性无关. 即其秩为 4.

【评注】 本题考查向量组秩的概念, 涉及到线性相关, 线性无关等概念以及线性相关性向量组秩之间的关系.

3. 【解】 因 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 故线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解. 对增广矩阵施行初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} \end{array} \right].$$

由非齐次线性方程组有解的条件知 $\frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} = 0$ 得 $b = 5$.

又 α_1 和 α_2 线性无关, $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2.

由题设知向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩也是 2, 从而 $\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 解之得 $a = 15$.

四、向量空间

1.【分析】 要求 $Bx = 0$ 的解空间的一个标准正交基, 首先必须确定此解空间的维数以及相应个数的线性无关的解.

【解】 因秩 $r(B) = 2$, 故解空间的维数 $n - r(B) = 2$. 又因 α_1, α_2 线性无关, 故 α_1, α_2 是解空间的基. 取

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^T.$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (-1, 1, 4, -1)^T - \frac{5}{15}(1, 1, 2, 3)^T = \frac{2}{3}(-2, 1, 5, -3)^T.$$

将其单位化, 有:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1, 1, 2, 3)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(-2, 1, 5, -3)^T \text{ 即是解空间的规范正交基.}$$

【评注】 由于解空间的基不唯一, Schmidt 正交化处理后规范正交基也不唯一. 已知条件中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性相关的(注意: $2\alpha_1 - 3\alpha_2 = \alpha_3$), 不要误以为解空间是 3 维的.

第四章 线性方程组

一、齐次方程组、基础解系

1.【分析】 确定参数, 使包含 n 个未知量和 n 个方程的齐次线性方程组有非零解, 通常用两个方法: 一是对其系数矩阵作初等行变换化成阶梯形; 再就是由其系数行列式为零求出参数值. 本题的关键是参数 a 有两个值, 对每个值都要讨论.

【解】 设齐次方程组的系数矩阵为 A , 则

$$|A| = \left(a + \frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{n-1}.$$

那么, $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $a = -\frac{1}{2}(n+1)n$.

当 $a = 0$ 时, 对系数矩阵 A 作初等变换, (把第 n 行的 -1 倍分别加至每一行) 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, 由此得基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, \eta_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, \eta_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T.$$

于是方程组的通解为 $x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-1}\eta_{n-1}$, 其中 k_1, \cdots, k_{n-1} 为任意常数.

当 $a = -\frac{1}{2}(n+1)n$ 时, 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

故方程组的同解方程组为 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$ 由此得基础解系为 $\eta = (1, 2, \cdots, n)^T$, 于是方程组

的通解为 $x = k\eta$, 其中 k 为任意常数.

【评注】 本题也可直接对系数矩阵 A 作初等行变换, 化其为爪形

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

然后按 $a = 0$ 或 $a \neq 0$ 继续加减消元来求解. 不必求 $|A|$ 的值.

2. 【分析】 这是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组, $Ax = 0$ 只有零解的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 故可从计算系数行列式入手.

【解】 方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1},$$

(1) 当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时, 方程组只有零解.

(2) 当 $a = b$ 时, 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $n - r(A) = n - 1$, 取自由变量为 x_2, x_3, \cdots, x_n , 得到基础解系为:

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, \alpha_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T.$$

方程组的通解是: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1}$, 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为任意常数.

(3) 当 $a = (1-n)b$ 时, 对系数矩阵作初等行变换, 把 n 行的 -1 倍分别加至每一行, 有

$$\begin{bmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & (1-n)b & b \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \begin{bmatrix} -nb & 0 & 0 & \cdots & 0 & nb \\ 0 & -nb & 0 & \cdots & 0 & nb \\ 0 & 0 & -nb & \cdots & 0 & nb \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -nb & nb \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

由于 $r(A) = n-1$, 有 $n-r(A) = 1$, 即基础解系只有 1 个解向量, 取自由变量为 x_n , 则基础解系为 $\alpha = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T$. 故通解为 $k\alpha$, (k 为任意常数).

3. 【分析】 因为 $\xi_1 \neq \xi_2$, 知 $\xi_1 - \xi_2$ 是 $Ax = 0$ 的非零解, 故秩 $r(A) < n$. 又因伴随矩阵 $A^* \neq O$, 说明有代数余子式 $A_{ij} \neq 0$, 即 $|A|$ 中有 $n-1$ 阶子式非零. 因此秩 $r(A) = n-1$. 那么 $n-r(A) = 1$, 即 $Ax = 0$ 的基础解系仅含有一个非零解向量. 应选(B).

4. 【分析】 如果 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则表明

(1) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是 $Ax = 0$ 的解;

(2) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关;

(3) $s = n-r(A)$ 或 β_1, \cdots, β_s 可表示 $Ax = 0$ 的任一个解.

那么要证 β_1, \cdots, β_s 是基础解系, 也应当证这三点. 本题中(1)、(3) 是容易证明的, 关键是(2). 线性相关性的证明在考研中是常见的.

【解】 由于 $\beta_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合, 又 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 $Ax = 0$ 的解, 所以根据齐次方程组解的性质知 $\beta_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 均为 $Ax = 0$ 的解.

从 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 知 $s = n-r(A)$.

下面来分析 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关的条件. 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s = 0$,

即 $(t_1k_1 + t_2k_s)\alpha_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\alpha_2 + (t_2k_2 + t_1k_3)\alpha_3 + \cdots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\alpha_s = 0$,

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 因此有

$$\begin{cases} t_1k_1 + t_2k_s = 0, \\ t_2k_1 + t_1k_2 = 0, \\ t_2k_2 + t_1k_3 = 0, \\ \cdots \cdots \\ t_2k_{s-1} + t_1k_s = 0. \end{cases} \quad (*)$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s,$$

所以当 $t_1 + (-1)^{s+1}t_2 \neq 0$ 时, 方程组 (*) 只有零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$. 从而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关. 即当 s 为偶数 $t_1 \neq \pm t_2$, s 为奇数, $t_1 \neq -t_2$ 时, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也为 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

【评注】 本题考查基础解系的概念及线性无关的证明, 还涉及到 s 阶行列式的计算. 由于有些考生概念不清, 不知要证什么? 有的不会证线性无关, 还有同学在把 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关转化为齐次方程组 (*) 时, 方程写得过于少, 例如系数行列式成为

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{vmatrix},$$

结果对行列式的结构规律没有观察清楚, 造成行列式计算上的失误. 本题人均得分不足 2.3 分.

行列式中已有大量的 0, 直接展开就可得到行列式的值, 那么本题是按第一行展开好呢还是按第一列展开好?

二、非齐次方程组的求解

1. 【分析】 方程组无解的充分必要条件是 $r(A) \neq r(\bar{A})$. 故应对增广矩阵作初等行变换, 由

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a-3 \end{array} \right],$$

若 $a = -1$, 则 $\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & -1 & -1 & 1 \\ & & & -4 \end{array} \right]$. 于是有 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 从而方程组无解, 故应填: $a = -1$.

但本题出错率较高, 有些考生计算行列式 $|A| = -(a+1)(a-3)$ 时, 由 $|A| = 0$ 而认为 $a = -1$ 或 $a = 3$ 时方程组都无解. 这是错误的, 因为 $|A| \neq 0$ 时, 方程组有唯一解, $|A| = 0$ 时, 方程组既可能无解也可能有无穷多解, 这一点要理解清楚.

2. 【分析】 因为 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若秩 $r(A) = m$, 则 $m = r(A) \leq r(A, b) \leq m$. 于是 $r(A) = r(A, b)$. 故方程组有解, 即应选 (A).

或, 由 $r(A) = m$, 知 A 的行向量组线性无关, 那么其延伸必线性无关, 故增广矩阵 (A, b) 的 m 个行向量也是线性无关的. 亦知 $r(A) = r(A, b)$.

关于 (B)、(D) 不正确的原因是: 由 $r(A) = n$ 不能推导出 $r(A, b) = n$ (注意 A 是 $m \times n$ 矩阵, m 可能大于 n), 由 $r(A) = r$ 亦不能推导出 $r(A, b) = r$, 你能否各举一个简单的例子?

至于 (C), 由克莱姆法则, $r(A) = n$ 时才有唯一解, 而现在的条件是 $r(A) = r$, 因此 (C) 不正确.

本题答对的同学仅 40%, 一是由 $r(A) = m$ 不会分析出 $r(A, b) = m$, 一是由 $r(A) = n$ 误认为必有 $r(\bar{A}) = n$.

3. 【分析】 因为“ $Ax = 0$ 仅有零解”与“ $Ax = 0$ 必有非零解”这两个命题必然是一对一错, 不可能两个命题同时正确, 也不可能两个命题同时错误. 所以本题应当从 (C) 或 (D) 入手. 其中必有一个是正确的.

由于 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$ 是 $n+1$ 阶矩阵, A 是 n 阶矩阵, 故必有 $r \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} = r(A) \leq n < n+1$. 故选 (D).

4.【解】 将 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组, 得 $\lambda = \mu$. 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 4-2\lambda & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4\lambda-2 & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array} \right]$$

$$(I) \text{ 当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

因 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解, 其全部解为

$(-1, 0, 0, 1)^T + k_1(\frac{1}{2}, 1, 0, -1)^T + k_2(\frac{5}{2}, 0, 1, -3)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

$$\text{当 } \lambda \neq \frac{1}{2} \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

因 $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解, 其全部解为

$(-1, 0, 0, 1)^T + k(2, -1, 1, -2)^T$, 其中 k 为任意常数.

(II) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 若 $x_2 = x_3$, 由方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + k_1 - k_2, \\ x_2 = 1 - 3k_1 - 2k_2, \\ x_3 = k_1, \\ x_4 = 2k_2 \end{cases}$$

知 $1 - 3k_1 - 2k_2 = k_1$, 即 $k_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k_2$.

将其代入整理, 得全部解为

$$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{2}k_2, x_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k_2, x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k_2, x_4 = 2k_2,$$

或 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)^T + k_2(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)^T$, 其中 k_2 为任意常数.

当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时, $x_2 = x_3$ 知 $-k = k$, 即 $k = 0$. 从而只有惟一解 $(-1, 0, 0, 1)^T$.

三、公共解与同解

1.【解】 (1) 对方程组(I)的系数矩阵作初等行变换, 有

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{array} \right]$$

由于 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$, 基础解系由 2 个线性无关的解向量所构成, 取 x_3, x_4 为自由变量, 所以 $\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T$ 是方程组(I)的基础解系.

(2) 设 η 是方程组(I)与(II)的非零公共解, 则

$\eta = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$, 其中 k_1, k_2 与 l_1, l_2 均不全为零的常数.

那么 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 = 0$

由此得齐次方程组(III)

$$\begin{cases} 5k_1 - 3k_2 - 2l_1 + l_2 = 0, \\ -3k_1 + 2k_2 + l_1 - 2l_2 = 0, \\ k_1 - (a+2)l_1 - 4l_2 = 0, \\ k_2 - l_1 - (a+8)l_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III})$$

有非零解. 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \\ 0 & -3 & 5a+8 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & -5a+5 & -3a-3 \end{bmatrix}$$

当且仅当 $a+1=0$ 时, $r(\text{III}) < 4$, 方程组有非零解.

此时, (III) 的同解方程组是 $\begin{cases} k_1 - l_1 - 4l_2 = 0, \\ k_2 - l_1 - 7l_2 = 0. \end{cases}$ 解出 $\begin{cases} k_1 = l_1 + 4l_2 \\ k_2 = l_1 + 7l_2 \end{cases}$

于是 $\eta = (l_1 + 4l_2)\beta_1 + (l_1 + 7l_2)\beta_2 = l_1(\beta_1 + \beta_2) + l_2(4\beta_1 + 7\beta_2) = l_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

其中 l_1, l_2 为任意实数.

2.【分析】 显然命题④错误, 因此排除(C), (D). 对于(A)与(B) 其中必有一个正确, 因此命题①必正确, 那么②与③哪一个命题正确呢?

由命题①, “若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解, 则秩(A) \geq 秩(B)” 正确, 知“若 $Bx=0$ 的解均是 $Ax=0$ 的解, 则秩(B) \geq 秩(A)” 正确, 可见“若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 则秩(A) = 秩(B)” 正确. 即命题③正确, 故应选(B).

希望你能证明①正确, 举例说明②错误.

3.【分析】 若 η 是(I)的解, 则 $A\eta = 0$, 那么

$(A^T A)\eta = A^T(A\eta) = A^T 0 = 0$, 即 η 是(II)的解.

若 α 是(II)的解, 有 $A^T A\alpha = 0$, 用 α^T 左乘得 $\alpha^T A^T A\alpha = 0$, 即 $(A\alpha)^T(A\alpha) = 0$.

亦即 $A\alpha$ 自己的内积 $(A\alpha, A\alpha) = 0$, 故必有 $A\alpha = 0$, 即 α 是(I)的解.

所以(I)与(II)同解, 故应选(A).

【评注】 若 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 则 $\alpha^T \alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, 可见 $\alpha^T \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

4.【解】 因为方程组(ii)中方程个数 < 未知数个数, (ii)必有无穷多解, 所以(i)必有无穷多解. 因此(i)的系数行列式必为0, 即有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2.$$

对(i)系数矩阵作初等行变换, 有 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

可求出方程组(i)的通解是 $k(-1, -1, 1)^T$.

因为 $(-1, -1, 1)^T$ 应当是方程组(ii)的解, 故有

$$\begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -2 - b^2 + c + 1 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } b = 1, c = 2 \text{ 或 } b = 0, c = 1.$$

当 $b = 0, c = 1$ 时, 方程组(ii)为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

因其系数矩阵的秩为 1, 从而(i)与(ii)不同解, 故 $b = 1, c = 1$ 应舍去.

当 $a = 2, b = 1, c = 2$ 时, (i)与(ii)同解.

5.【解】 (1) 对方程组(I)的增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{A}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

由 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 取自由变量为 x_4 .

令 $x_4 = 0$, 得方程组(I)的特解 $(-2, -4, -5, 0)^T$

令 $x_4 = 1$, 得(I)的导出组的基础解系为 $(1, 1, 2, 1)^T$

故(I)的通解为: $(-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T, k$ 为任意实数.

(2) 把(I)的通解 $x_1 = -2 + k, x_2 = -4 + k, x_3 = -5 + 2k, x_4 = k$ 代入(II)

整理得

$$\begin{cases} (m-2)(k-4) = 0 \\ (n-4)(k-4) = 0 \\ t = 6 \end{cases}$$

由于 k 是任意常数, 故 $m = 2, n = 4, t = 6$. 此时(I)的解全是(II)的解. 当 $n = 4$ 时, 易见 $r(A_2) = r(\bar{A}_2) = 3$, (II)的通解为 $\alpha + k\eta$ 形式.

所以 $(-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T$ 就是(II)的通解, 从而(I)与(II)同解.

第五章 特征值与特征向量

一、特征值、特征向量的概念与计算

1.【分析】 这是一个基础题, 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4). \end{aligned}$$

可知非零特征值是 $\lambda = 4$.

2.【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 有 $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$, 故 $\frac{1}{3}A^2\alpha = \frac{1}{3}\lambda^2\alpha$.

即若 λ 是矩阵 A 的特征值, 则 $\frac{1}{3}\lambda^2$ 是矩阵 $\frac{1}{3}A^2$ 的特征值, 现 $\lambda = 2$, 因此, $\frac{1}{3}A^2$ 有特征值 $\frac{4}{3}$. 再利用如 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$, 从而 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有特征值 $\frac{3}{4}$. 故应选(B).

或者, $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}\alpha = 3(A^{-1})^2\alpha$, 由 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 知 $\frac{1}{2}$ 是 A^{-1} 的特征值, 于是 $\frac{1}{4}$ 是 $(A^{-1})^2$ 的特征值, 亦知应选(B).

3.【解】 (I) 由 $A = \alpha\beta^T$ 和 $\alpha^T\beta = 0$, 有

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 0\alpha\beta^T = 0.$$

(II) 设 λ 是 A 的任一特征值, η 是 A 属于特征值 λ 的特征向量, 即 $A\eta = \lambda\eta, \eta \neq 0$. 那么

$$A^2\eta = \lambda A\eta = \lambda^2\eta.$$

因为 $A^2 = 0$, 故 $\lambda^2\eta = 0$, 又因 $\eta \neq 0$, 从而矩阵 A 的特征值是 $\lambda = 0$ (n 重根).

不妨设向量 α, β 的第 1 个分量 $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$. 对齐次线性方程组 $(0E - A)x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$0E - A = \begin{bmatrix} -a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

得到基础解系

$$\eta_1 = (-b_2, b_1, \cdots, 0)^T, \eta_2 = (-b_3, 0, b_1, \cdots, 0)^T, \cdots, \eta_{n-1} = (-b_n, 0, 0, \cdots, b_1)^T.$$

于是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-1}\eta_{n-1}, \text{ 其中 } k_1, k_2, \cdots, k_{n-1} \text{ 是不全为零的任意常数.}$$

4.【分析】 因为 A^* 与 B 相似, 而两个相似矩阵的特征值与特征向量有关联, 利用它们之间的联系就可求出 B 的特征值与特征向量, 进而就可求出 $B + 2E$ 的特征值与特征向量.

【解】 由于

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-7 & \lambda-7 & \lambda-7 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-7)(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-7), \end{aligned}$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7$.

因为 $|A| = \prod \lambda_i = 7$, 若 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$, 所以, A^* 的特征值为: 7, 7, 1.

由于 $B = P^{-1}A^*P$, 即 A^* 与 B 相似, 故 B 的特征值为 7, 7, 1, 从而 $B + 2E$ 的特征值为 9, 9, 3.

$$\text{因为 } B(P^{-1}\alpha) = (P^{-1}A^*P)(P^{-1}\alpha) = P^{-1}A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}P^{-1}\alpha,$$

按定义可知矩阵 B 属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量是 $P^{-1}\alpha$. 因此 $B+2E$ 属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}+2$ 的特征向量是 $P^{-1}\alpha$.

由于 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 而

$$\lambda = 1 \text{ 时, 由 } (E-A)x = 0, \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得矩阵 A 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$,

$$\text{当 } \lambda = 7 \text{ 时, 由 } (7E-A)x = 0, \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到矩阵 A 属于 $\lambda = 7$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$

那么 $P^{-1}\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, P^{-1}\alpha_2 = (-1, -1, 1)^T, P^{-1}\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$

从而, $B+2E$ 属于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ 的特征向量为 $k_1(1, -1, 0)^T + k_2(-1, -1, 1)^T$, 其中 k_1, k_2 是不全为 0 的任意常数, 而 $B+2E$ 属于 $\lambda_3 = 3$ 的特征向量为 $k_3(0, 1, 1)^T$, 其中 k_3 为非 0 常数.

【评注】 本题也可以先求出 $A^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, 然后求 $B = P^{-1}A^*P =$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \text{再求 } B+2E \dots$$

二、相似与相似对角化

1. 【解】 (1) 方法 1° 由于 $AP = PB$, 即

$$A(x, Ax, A^2x) = (Ax, A^2x, A^3x) = (Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x)$$

$$= (x, Ax, A^2x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

方法 2° 由于 $P = (x, Ax, A^2x)$ 可逆, 那么 $P^{-1}P = E$, 即 $P^{-1}(x, Ax, A^2x) = E$.

$$\text{所以 } P^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P^{-1}Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P^{-1}A^2x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是 $B = P^{-1}AP = P^{-1}(Ax, A^2x, A^3x) = P^{-1}(Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x)$

$$= (P^{-1}Ax, P^{-1}A^2x, P^{-1}(3Ax - 2A^2x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

方法 3° 设 $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, 则由 $AP = PB$ 得

$$(Ax, A^2x, A^3x) = (x, Ax, A^2x) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{即} \begin{cases} Ax = a_1x + b_1Ax + c_1A^2x, \\ A^2x = a_2x + b_2Ax + c_2A^2x, \\ A^3x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x = 3Ax - 2A^2x. \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} a_1x + (b_1 - 1)Ax + c_1A^2x = 0, \\ a_2x + b_2Ax + (c_2 - 1)A^2x = 0, \\ a_3x + (b_3 - 3)Ax + (c_3 + 2)A^2x = 0. \end{cases}$$

因为 x, Ax, A^2x 线性无关, 故

$$a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = 0; a_2 = 0, b_2 = 0, c_2 = 1; a_3 = 0, b_3 = 3, c_3 = -2.$$

从而求出矩阵 B .

(2) 由 (1) 知 $A \sim B$, 那么 $A + E \sim B + E$, 从而

$$|A + E| = |B + E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

2. 【分析】 由于 $\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1, 0, k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, 那么由 $\alpha\beta^T \sim \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 知它们有相同的

迹. 故: $1 + 0 + k = 3 + 0 + 0$, 所以 $k = 2$.

3. 【解】 (I) 设 ξ 是属于特征值 λ_0 的特征向量, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{即} \begin{cases} 2 - 1 - 2 = \lambda_0 \\ 5 + a - 3 = \lambda_0, \\ -1 + b + 2 = -\lambda_0. \end{cases} \Rightarrow \lambda_0 = -1, a = -3, b = 0.$$

(II) 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3,$$

知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

$$\text{由于 } r(-E - A) = r \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

从而 $\lambda = -1$ 只有一个线性无关的特征向量, 故 A 不能相似对角化.

4.【解】 A 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ = (\lambda-2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a).$$

若 $\lambda = 2$ 是特征方程的二重根, 则有 $2^2 - 16 + 18 + 3a = 0$, 解得 $a = -2$.

当 $a = -2$ 时, A 的特征值为 $2, 2, 6$, 矩阵 $2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 的秩为 1, 故 $\lambda = 2$ 对应

的线性无关的特征向量有两个, 从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda = 2$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 为完全平方, 从而 $18 + 3a = 16$, 解得 $a = -\frac{2}{3}$.

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, A 的特征值为 $2, 4, 4$, 矩阵 $4E - A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ 的秩为 2, 故 $\lambda = 4$ 对应

的线性无关的特征向量只有一个, 从而 A 不可相似对角化.

三、关于相似时可逆矩阵 P

1.【解】 (1) 因为 A 和对角矩阵 B 相似, 所以 $-1, 2, y$ 就是矩阵 A 的特征值

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-x & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)[\lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-2)]$$

知 $\lambda = -2$ 是 A 的特征值, 因此必有 $y = -2$.

再由 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 知 $|2E - A| = 4[2^2 - 2(x+1) + (x-2)] = 0$, 得 $x = 0$

$$(2) \text{ 由 } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

对 $\lambda = -1$, 由 $(-E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = (0, -2, 1)^T$

对 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$

对 $\lambda = -2$, 由 $(-2E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_3 = (1, 0, -1)^T$

$$\text{那么, 令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = B.$$

2.【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ \lambda-1 & 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

得到矩阵 A 的特征值为 $1, -1, -1$

由于 $A \sim \Lambda$, 那么 $\lambda = -1$ 时矩阵 A 必有 2 个线性无关的特征向量, 因此 $n - r(-E - A) = 2$,

即 $r(-E-A) = 1$. 求出 $k = 0$

当 $\lambda = 1$ 时, 由 $(E-A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$

当 $\lambda = -1$ 时, 由 $(-E-A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_2 = (-1, 2, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$.

那么, 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 有 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

3.【解】 (I) 按已知条件, 有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{所以矩阵 } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(II) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 矩阵 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 所以 $C^{-1}AC = B$, 即 A 与 B 相似. 由

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4),$$

知矩阵 B 的特征值是 $1, 1, 4$. 故矩阵 A 的特征值是 $1, 1, 4$.

(III) 对于矩阵 B , 由 $(E-B)x = 0$, 得特征向量 $\eta_1 = (-1, 1, 0)^T, \eta_2 = (-2, 0, 1)^T$.

由 $(4E-B)x = 0$, 得特征向量 $\eta_3 = (0, 1, 1)^T$.

那么令 $P_1 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, 有 $P_1^{-1}BP_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$.

从而 $P_1^{-1}C^{-1}ACP_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$.

故当 $P = CP_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3)$ 时,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

四、实对称矩阵

1.【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & \lambda - a - 1 & 0 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 0 & a + 1 - \lambda & \lambda - a - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a - 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)^2 (\lambda - a + 2)$$

得到矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$.

对于 $\lambda = a + 1$, 由 $[(a + 1)E - A]x = 0$, 得到 2 个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T.$$

对于 $\lambda = a - 2$, 由 $[(a - 2)E - A]x = 0$, 得到特征向量 $\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$.

那么, 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 有 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2 \end{bmatrix}$.

因为 A 的特征值是 $a + 1, a + 1, a - 2$, 故 $A - E$ 的特征值是 $a, a, a - 3$. 所以

$$|A - E| = a^2(a - 3).$$

【评注】 由 $A \sim \Lambda$, 知 $A - E \sim \Lambda - E$, 于是

$$|A - E| = |\Lambda - E| = \begin{vmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a-3 \end{vmatrix} = a^2(a - 3).$$

亦可求出行列式 $|A - E|$ 的值.

2.【解】 对方程组 $Ax = \beta$ 的增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -a-2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a+2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

因为方程组有无穷多解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$. 故 $a = -2$.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3).$$

故矩阵 A 的特征值为: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3$

当 $\lambda_1 = 3$ 时, 由 $(3E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得到属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$.

当 $\lambda_2 = 0$ 时, 由 $(0E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得到属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量 $\alpha_2 = (1, 1, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = -3$ 时, 由 $(-3E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得到属于特征值 $\lambda = -3$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, -2, 1)^T$.

实对称矩阵的特征值不同时, 其特征向量已经正交, 故只需单位化.

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{那么令 } Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \text{得 } Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & -3 \end{bmatrix}.$$

第六章 二次型

一、二次型的标准形

1. 【分析】 因为二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_3x_1$

二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 易见 $r(A) = 2$, 所以二次型的秩为 2.

本题的陷阱: 注意 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$ 不是坐标变换, (因为行列式为 0), 不要误以为秩是 3.

2. 【解】 经正交变换化二次型为标准形, 二次型矩阵与标准形矩阵既合同又相似. 于是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

从而 $\begin{cases} 1 + a + 1 = 0 + 1 + 4, \\ |\mathbf{A}| = (b-1)^2 = |\mathbf{B}| = 0. \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 1.$

由 $(0E - A)x = 0$ 解出 $\lambda = 0$ 对应的特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$.

由 $(E - A)x = 0$ 解出 $\lambda = 1$ 对应的特征向量 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$.

由 $(4E - A)x = 0$ 解出 $\lambda = 4$ 对应的特征向量 $\alpha_3 = (1, 2, 1)^T$.

特征值不同特征向量已正交, 将其单位化有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T.$$

那么 $P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ 为所用正交矩阵.

3.【解】 (1) 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$. 设 A 的特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$, 由题设,

$$\text{有} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = 2(-2a - b^2) = -12. \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2 \text{ (已知 } b > 0 \text{)}.$$

(2) 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 3).$$

得到 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$.

$$\text{对于 } \lambda = 2, \text{ 由 } (2E - A)x = 0, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得到属于 $\lambda = 2$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 1)^T$.

$$\text{对于 } \lambda = -3, \text{ 由 } (-3E - A)x = 0, \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得到属于 $\lambda = -3$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, 0, -2)^T$.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已两两正交, 故只需单位化, 有

$$\gamma_1 = (0, 1, 0)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2)^T.$$

$$\text{那么, 令 } P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \text{ 则 } P \text{ 为正交矩阵, 在正交变换 } x = Py \text{ 下, 有 } P^T A P$$

$$= P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}.$$

二次型的标准形为 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

二、二次型的正定

$$1. \text{【分析】 二次型 } f \text{ 的矩阵 } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于 0.

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_3 = |A| = 1 - \frac{1}{2}t^2 > 0$$

所以 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

2.【证明】 必要性. 设 $B^T A B$ 为正定矩阵, 按定义 $\forall x \neq 0$, 恒有 $x^T (B^T A B) x > 0$.

即 $\forall x \neq 0$, 恒有 $(Bx)^T A (Bx) > 0$, 即 $\forall x \neq 0$, 恒有 $Bx \neq 0$.

因此, 齐次线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解, 从而 $r(B) = n$.

充分性. 因 $(B^T A B)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T A B$, 知 $B^T A B$ 为实对称矩阵.

若 $r(B) = n$, 则齐次方程组 $Bx = 0$ 只有零解, 那么 $\forall x \neq 0$ 必有 $Bx \neq 0$.

又 A 为正定矩阵, 所以对于 $Bx \neq 0$, 恒有 $(Bx)^T A (Bx) > 0$.

即当 $x \neq 0$ 时, $x^T (B^T A B) x > 0$, 故 $B^T A B$ 为正定矩阵.

【评注】 本题的证法很多. 例如, 利用秩的定义和性质可证必要性.

由 $B^T A B$ 是 n 阶正定矩阵, 知 $n = r(B^T A B) \leq r(B) \leq \min(m, n) \leq n$.

所以 $r(B) = n$, (请说出上述每一步成立的理由)

本题充分性的证明也可以用特征值法:

设 λ 是 $B^T A B$ 的任一特征值, α 是属于特征值 λ 的特征向量, 即 $(B^T A B)\alpha = \lambda\alpha$, 用 α^T 左乘等式的两端有 $(B\alpha)^T A (B\alpha) = \lambda\alpha^T \alpha$.

因为秩 $r(B) = n$, $\alpha \neq 0$, 知 $B\alpha \neq 0$ 以及 $\alpha^T \alpha = \|\alpha\|^2 > 0$, 又因 A 正定, 故由

$$\lambda\alpha^T \alpha = (B\alpha)^T A (B\alpha) > 0$$

得到 $\lambda > 0$. 所以 $B^T A B$ 正定.

本题证法虽很多, 但得分率即是当年数学一中最底的, 人均仅 0.78 分, 但是区分度高, 反映出优秀考生解本题并不困难. 对于定义法, 对于各概念的衔接与转换是考生复习时应当注意的.

3.【证明】 因 $B^T = (\lambda E + A^T A)^T = \lambda E + A^T A = B$, 故 B 是 n 阶实对称矩阵. 构造二次型 $x^T B x$, 则 $x^T B x = x^T (\lambda E + A^T A) x = \lambda x^T x + x^T A^T A x = \lambda x^T x + (Ax)^T (Ax)$.

$\forall x \neq 0$, 恒有 $x^T x > 0$, $(Ax)^T (Ax) \geq 0$. 因此, 当 $\lambda > 0$ 时, $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x = \lambda x^T x + (Ax)^T A x > 0.$$

二次型为正定二次型, 故 B 为正定矩阵.

【评注】 这是数学三当年全卷得分率最低的一道题, 得零分者占 62%, 得满分的不足 3%, 人均仅 1.1 分. 反映出考生对正定矩阵的性质及判别法不熟悉, 对于用定义法证明及内积 $\alpha^T \alpha$ 的理解都有欠缺.

4.【解】 由已知条件知, 对任意的 x_1, x_2, \dots, x_n , 恒有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, 其中等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0, \\ x_2 + a_2 x_3 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = 0, \\ x_n + a_n x_1 = 0. \end{cases}$$

根据正定的定义, 只要 $x \neq 0$, 恒有 $x^T A x > 0$, 则 $x^T A x$ 是正定二次型. 为此, 只要方程组 ① 仅有零解, 就必有当 $x \neq 0$ 时, $x_1 + a_1 x_2, x_2 + a_2 x_3, \dots$ 恒不全为 0, 从而 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, 亦即 f 是正定二次型.

而方程组 ① 只有零解的充分必要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0, \quad (2)$$

即当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n$ 时, 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型.

【评注】 本题考的仍不好, 得分偏低, 还是对二次型正定的理解上有问题. 由二次型 f 正定转化为齐次方程组只有零解, 进而转换为 n 阶行列式的计算, 如果方程组 ① 多写几个方程, 行列式 ② 多写几行多写几列, 计算时可能会少许多无谓的差错.

三、合同矩阵

1. **【分析】** A 与 B 合同 $\Leftrightarrow x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同的正惯性指数, 及相同的负惯性指数. 而正(负)惯性指数的问题可由特征值的正(负)来决定. 因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0, \text{ 故 } p = 1, q = 1.$$

本题中(D)之矩阵, 特征值为 $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$, 故 $p = 1, q = 1$.

所以选(D).

【评注】 本题的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 不仅和矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 合同, 而且它们也相似, 因为它们都和对角矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ 相似.

2. **【解】** (1) 因为 $\lambda = 3$ 是 A 的特征值, 故

$$|3E - A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-y & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-y & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8(2-y) = 0,$$

所以 $y = 2$.

(2) 由于 $A^T = A$, 要 $(AP)^T(AP) = P^T A^2 P = \Lambda$, 而 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵, 故可构造

二次型 $x^T A^2 x$, 将其化为标准形 $y^T \Lambda y$. 即有 A^2 与 Λ 合同. 亦即 $P^T A^2 P = \Lambda$.

由于 $x^T A^2 x = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3^2 + \frac{8}{5}x_3x_4 + \frac{16}{25}x_4^2\right) + 5x_4^2 - \frac{16}{5}x_4^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_4^2,$$

那么,令 $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4, y_4 = x_4$, 即经坐标变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{9}{5}y_4^2$.

所以,取 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 有 $(\mathbf{AP})^T (\mathbf{AP}) = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5 & \\ & & & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$.

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

■ 本章导读

本章是概率论与数理统计的基础, 近几年单独出本章的考题较少, 大多作为基本知识点出现在以后的各章考题中. 应该将本章中的重点的有关基本概念、基本理论和基本方法理解透彻和熟练掌握.

■ 试题特点

本章的考题大多是选择题或填空题, 考核重点有事件的关系和运算、概率的性质、概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式、古典概型和伯努利概型.

一部分考生对古典概型中的难题感到困难. 其实考试大纲对古典概型和几何概型只要会计算一般难度的题型就可以, 不必刻意去做各种复杂的题型.

本章的选择题或填空题一般会综合 3—4 个考点, 计算量不太大.

■ 考题详析

1 (2006, 13 题, 4 分) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A | B) = 1$, 则必有

$$(A) P(A \cup B) > P(A) \qquad (B) P(A \cup B) > P(B)$$

$$(C) P(A \cup B) = P(A) \qquad (D) P(A \cup B) = P(B)$$

【分析】 本题考查条件概率和概率的加法公式.

根据条件概率定义, 当 $P(B) > 0$ 时,

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

再利用概率的加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 就不难推得结果.

【求解】 由 $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1$, 得到 $P(AB) = P(B)$, 再根据加法公式, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A).$$

答案应选(C).

■ 练习题

1. (1998, 5 题, 3 分) 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0$, $P(B|A) = P(B|\bar{A})$, 则必有 _____.
- (A) $P(B|A) = P(\bar{A}|B)$ (B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$
 (C) $P(AB) = P(A)P(B)$ (D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$
2. (1999, 5 题, 3 分) 设两两相互独立的三事件 A, B 和 C 满足条件 $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, 且已知 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$ _____.
3. (2000, 5 题, 3 分) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生, B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

二

2 (2007, 9 题, 4 分) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p (0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

- (A) $3p(1-p)^3$ (B) $6p(1-p)^3$
 (C) $3p^2(1-p)^2$ (D) $6p^2(1-p)^2$

【分析】 本题考查事件的独立性, 独立重复试验.

把独立重复射击看成独立重复试验, 射击命中目标看成试验成功. 第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标就可以理解为:

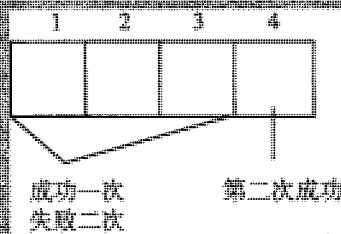
第 4 次试验为成功, 而前三次试验中必有 1 次成功, 2 次失败.

【求解】 根据独立重复的伯努利试验, 前 3 次试验中有 1 次成功和 2 次失败, 其概率为 $C_3^1 p(1-p)^2$, 再加上第 4 次试验是成功, 其概率为 p . 根据独立性, 第 4 次射击为第 2 次命中目标的概率为

$$C_3^1 p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2$$

答案应选(C).

【评注】 求解这类问题的关键是在分析好各次试验的结果, 这时可以作如下分析:



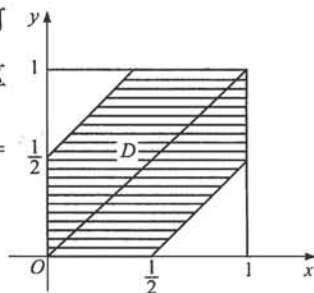
3 (2007, 16 题, 4 分) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 _____.

【分析】 本题是几何型概率. 不妨假定随机地取出两个数分别为 X 和 Y , 它们应是相互独立的, 如果把 (X, Y) 看成平面上一个点的坐标, 则由于 $0 < X < 1, 0 < Y < 1$, 所以 (X, Y) 为平面上正方形 $0 < X < 1, 0 < Y < 1$ 中的一个点. 而 X 与 Y 两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的点 (X, Y) 对应于正方形中 $|X - Y| < \frac{1}{2}$ 的区域.

【求解】 在区间 $(0, 1)$ 中随机选取的所有可能的两个数 X 和 Y , 可以将点 (X, Y) 看成右图单位正方形里的点. 满足 $|X - Y| < \frac{1}{2}$ 的点的区域就是图中阴影标出的区域 D . 根据几何型概率 $P\{|X - Y| < \frac{1}{2}\} =$

$$\frac{D \text{ 的面积}}{\text{单位正方形面积}} = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^2}{1} = \frac{3}{4}.$$

答案应填 $\frac{3}{4}$.



【评注】 几何型概率题的求解关键在于如何将满足条件的可能结果与某区域中的一个点对应起来, 这区域可以是一维的, 也可能是二维的, 甚至可能是三维的, 然后求出题目要求的区域和可能结果所对应区域长度或面积或体积之比.

■ 练习题

1. (1997, 5 题, 3 分) 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球, 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率是_____.

第二章 随机变量及其分布

本章导读

本章作为基础渗透到以后的各章考题中, 尤其是第三章多维随机变量及其分布, 近几年的考题大多在多维随机变量这章中, 多维会做当然一维也会做, 尤其是多维随机变量函数的分布的考题近年考得较多, 不过没有一维的基础, 多维就无法掌握.

试题特点

本章的考点: 分布函数、分布律、概率密度, 常考的一些分布的性质. 这些考点常以选择题或填空题的形式来考核.

随机变量函数的分布常出现在较大的计算题中.

考题详析

1 (2006, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$, 则必有

- (A) $\sigma_1 < \sigma_2$ (B) $\sigma_1 > \sigma_2$ (C) $\mu_1 < \mu_2$ (D) $\mu_1 > \mu_2$

【分析】 由于 X 与 Y 的分布不同, 不能直接判断 $P\{|X - \mu_1| < 1\}$ 和 $P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ 的大小与参数的关系, 如果将其标准化, 就可以方便地比较.

【求解】 $P\{|X - \mu_1| < 1\} = P\left\{\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right\}$. 随机变量 $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1)$, 且其概率密度函数是偶函数. 故

$$P\left\{\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right\} = 2P\left\{0 < \frac{X - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{1}{\sigma_1}\right\} = 2\left[\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - \Phi(0)\right] = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1.$$

$$\text{同理, } P\{|Y - \mu_2| < 1\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1.$$

因为 $\Phi(x)$ 是单调增函数, 当 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ 时, $2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1 > 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1$, 即 $\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) > \Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$, 所以 $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}$, 即 $\sigma_1 < \sigma_2$.

答案应选(A).

$$\mathbf{2} \text{ (2010, 7 题, 4 分) 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 1 \end{cases}$$

则 $P\{X = 1\} =$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$ (D) $1 - e^{-1}$

【分析】 根据分布函数的性质: $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$, 不难计算 $P\{X = 1\}$ 的值.

【求解】 $P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}$

所以答案应选(C).

3 (2010, 8 题, 4 分) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x) & x \leq 0 \\ bf_2(x) & x > 0 \end{cases} (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足

(A) $2a + 3b = 4$

(B) $3a + 2b = 4$

(C) $a + b = 1$

(D) $a + b = 2$

【分析】 根据密度函数的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 以正态分布和均匀分布的性质, 可以求出 a, b 应满足的条件.

【求解】 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 af_1(x) dx + \int_0^{+\infty} bf_2(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_0^{+\infty} f_2(x) dx$.

$f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, 其对称中心在 $x = 0$ 处, 故 $\int_{-\infty}^0 f_1(x) dx = \frac{1}{2}$.

$f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 即

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$\int_0^{+\infty} f_2(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4}$. 所以 $1 = a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{3}{4}$, 即 $2a + 3b = 4$. 答案选(A)

■ 练习题

1. (2002, 5 题, 4 分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, ($\sigma > 0$) 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\mu =$ _____.

2. (2004, 13 题, 4 分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$) 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$

(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$

(D) $u_{1-\alpha}$

第三章 多维随机变量及其分布

■本章导读

本章是概率论重点之一和每年必考的内容, 且往往是 11 分的解答题. 尤其要注意二维随机变量的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布函数 $F_Z(y)$ 求法; 以及二维随机变量 (X, Y) 的两个分量之间的关系, 包括 X 与 Y 的独立条件及不独立时的条件概率分布和条件概率密度等, 都是这几年常考的内容.

■试题特点

试题一般只涉及两个随机变量.

在涉及二维离散型随机变量的题中, 常要考生自己建立分布, 计算边缘分布, 条件分布. 在涉及二维连续型随机变量的题中, 常要考生熟练地应用二重积分和二次积分来计算边缘密度, 条件密度.

独立性及不相关性是一对重要概念, 要掌握它们的关系及判定方法. 特别是对二维正态分布及其参数做独立性和不相关性的判定.

对二维均匀分布, 密度函数是常数, 如何判定该常数, 以及在积分时如何利用这一特性, 应予以充分注意.

■考题详析

1 (2005, 6 题, 4 分) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, 2, \dots, X$ 中任一个数, 记为 Y , 则 $P\{Y = 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 先取一个数为 X , 后取数为 Y . 显然 Y 是受 X 的取值影响. 现求 $Y = 2$ 的概率, 这就涉及 X 可能取 2, 3 或 4.

【求解】 方法 1: 先求出 (X, Y) 的概率分布. 因为 X 是等可能地取 1, 2, 3, 4. 故 (X, Y) 关于 X 的边缘分布必有 $P\{X = i\} = \frac{1}{4}, i = 1, 2, 3, 4$. 而 Y 只从 $1 \sim X$ 中取, 又是等可能取 $1, 2, \dots, X$ 的

概率必为 $\frac{1}{4X}$, 所以 $P\{X = i, Y = j\} = \begin{cases} 0, & j > i \\ \frac{1}{4i}, & j \leq i \end{cases}$ 即:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{故 } P\{Y=2\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{13}{48}.$$

答案应填 $\frac{13}{48}$.

方法 2: 用全概率公式

$$\begin{aligned}
 P\{Y=2\} &= \sum_{i=1}^4 P\{X=i\}P\{Y=2|X=i\} \\
 &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \cdot P\{Y=2|X=i\} \\
 &= \frac{1}{4} \times (0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{13}{48}
 \end{aligned}$$

答案应填 $\frac{13}{48}$.

2 (2005, 13 题, 4 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 则

(A) $a=0.2, b=0.3$

(B) $a=0.4, b=0.1$

(C) $a=0.3, b=0.2$

(D) $a=0.1, b=0.4$

【分析】 显然, $0.4 + a + b + 0.1 = 1$, 可知 $a + b = 0.5$. 再由事件 $\{X=0\}$ 和 $\{X+Y=1\}$ 相互独立可以求出 a, b .

【求解】 方法 1: 由独立性可知

$$P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

而

$$P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} = a;$$

$$P\{X=0\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = 0.4 + a$$

$$P\{X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = a + b = 0.5$$

代入独立性等式, 得 $a = (0.4 + a) \times 0.5$, 解得 $a = 0.4$. 再由 $a + b = 0.5$ 得 $b = 0.1$.

答案应选(B).

方法 2: 如果把独立性理解为

$$P\{X+Y=1 \mid X=0\} = P\{X+Y=1\},$$

即 $P\{Y=1 \mid X=0\} = P\{X+Y=1\} = a+b=0.5$, 所以,

$$P\{Y=0 \mid X=0\} = 1 - P\{Y=1 \mid X=0\} = 0.5,$$

即 $P\{Y=1 \mid X=0\} = P\{Y=0 \mid X=0\} = 0.5$, 从而, $P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0, Y=0\}$,

即 $a = 0.4$, 又因 $a + b = 0.5$, 得 $b = 0.1$. 答案应选(B)

【评注】 也可以把本题的独立性理解成下列各式中任一个:

$$(1) P\{X=0, X+Y \neq 1\} = P\{X=0\}P\{X+Y \neq 1\};$$

$$(2) P\{X=1, X+Y=1\} = P\{X=1\}P\{X+Y=1\};$$

$$(3) P\{X+Y=1 \mid X=1\} = P\{X+Y=1\}.$$

各有相应的解法.

3 (2006, 6 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max(X, Y) \leq 1\} =$ _____

【分析】 本题考查均匀分布, 两个随机变量的独立性和它们的简单函数的分布.

事件 $\{\max(X, Y) \leq 1\} = \{X \leq 1, Y \leq 1\} = \{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 1\}$, 又根据 X, Y 相互独立, 均服从均匀分布, 可以直接写出 $P\{X \leq 1\} = \frac{1}{3}$

$$\text{【求解】 } P\{\max(X, Y) \leq 1\} = P\{X \leq 1, Y \leq 1\} = P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

【答案】 应填 $\frac{1}{9}$.

4 (2007, 10 题, 4 分) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y)$ 为

- (A) $f_X(x)$. (B) $f_Y(y)$. (C) $f_X(x)f_Y(y)$. (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

【分析】 二维正态分布随机变量 (X, Y) 中, X 与 Y 的独立等价于 X 与 Y 不相关. 而对任意二维随机变量 X 与 Y , 如果它们相互独立, 则有 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

【求解】 由于二维正态的 (X, Y) 中 X 与 Y 不相关, 故 X 与 Y 独立, 且

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

根据条件概率密度的定义, 当在 $Y = y$ 的条件下, 如果 $f_Y(y) \neq 0$, 则

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x).$$

现 $f_Y(y)$ 显然不为 0, 因此 $f_{X|Y}(x | y) = f_X(x)$. 答案应选(A).

【评注】 因为 X, Y 不相关, (X, Y) 又是二维正态分布, 故 X 与 Y 相互独立. 由独立可知 Y 的取值不影响 X 的取值, 所以 $f_{X|Y}(x | y) = f_X(x)$.

对于不是求解题设的这种问题也是一种好方法.

5 (2008, 7 题, 4 分) 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为

- (A) $F^2(x)$. (B) $F(x)F(y)$.
(C) $1 - [1 - F(x)]^2$. (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$.

【分析】 随机变量 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数 $F_Z(x)$ 应为 $F_Z(x) = P\{Z \leq x\}$, 由此定义不难推出 $F_Z(x)$.

【求解】 $F_Z(x) = P\{Z \leq x\} = P\{\max(X, Y) \leq x\} = P\{X \leq x, Y \leq x\}$
 $= P\{X \leq x\}P\{Y \leq x\} = F(x)F(x) = F^2(x)$.

故答案应选(A).

【评注】 不难验证(B) $F(x)F(y)$ 恰是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数.
 (C) $1 - [1 - F(x)]^2$ 则是随机变量 $\min(X, Y)$ 的分布函数. (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$ 本身不是分布函数, 因它不满足分布函数的充要条件.

6 (2011, 7题, 4分) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是

- (A) $f_1(x)f_2(x)$ (B) $2f_2(x)F_1(x)$
(C) $f_1(x)F_2(x)$ (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

【分析】 验证函数 $f(x)$ 是否为概率密度, 一般地说有二种常用方法:

(1) $f(x)$ 满足是概率密度的充要条件 $f(x) \geq 0$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

(2) $f(x) = F'(x)$ 或者 $\int_{-\infty}^x f(x)dx = F(x)$, 而 $F(x)$ 为分布函数.

【求解】 由于 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 均为分布函数, 显然 $F_1(x)F_2(x)$ 也是分布函数, 而
 $[F_1(x)F_2(x)]' = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

故答案应选(D).

练习題

1. (1999, 5题, 3分) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$, 则

- (A) $P\{X+Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ (B) $P\{X+Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$
(C) $P\{X-Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ (D) $P\{X-Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

2. (1999, 12题, 8分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 下表列出了二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值. 试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	Y			$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$
	y_1	y_2	y_3	
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

3. (2002, 5题, 3分) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量, 它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 则

- (A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.
 (B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.
 (C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.
 (D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

二

7 (2005, 22题, 9分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

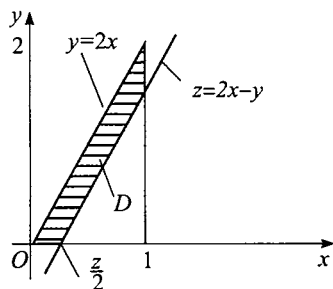
求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【分析】 本题涉及公式为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy, \quad f_Z(z) = F'_Z(z).$$



【求解】 (I) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{2x} dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^1 dx, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(II) 当 $z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 < z < 2 \text{ 时, } F_Z(z) &= P\{2X - Y \leq z\} = \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= 1 - \iint_{2x-y > z} f(x, y) dx dy = 1 - \int_{\frac{z}{2}}^1 dx \int_0^{2x-z} dy = z - \frac{z^2}{4}; \end{aligned}$$

当 $z \geq 2$ 时, $F_Z(z) = 1$.

所以
$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

【评注】 由于 $f(x, y)$ 是均匀分布密度, 积分 $\iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy$ 可以不必求积, 而看成求面积

$$\text{积 } \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy = S_D = 1 - (1 - \frac{z}{2})^2 = z - \frac{z^2}{4}.$$

8 (2006, 22 题, 9 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数. 求:

(I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(II) $F(-\frac{1}{2}, 4)$.

【分析】 $f_Y(y) = F'_Y(y)$, 而 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$. 由于 $f_X(x)$ 是分段函数, 所以在计算 $P\{X^2 \leq y\}$ 时, 要相应分段讨论. 求

$$F(-\frac{1}{2}, 4) = P\{X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4\} = P\{X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\},$$

只是与 X 有关, 不必先求出 $F(x, y)$ 函数.

【求解】 (I) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}.$$

当 $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = 0, f_Y(y) = 0$;

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 < y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) &= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = P\{-\sqrt{y} \leq X < 0\} + P\{0 \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{y} + \frac{1}{4}\sqrt{y} = \frac{3}{4}\sqrt{y}, \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{3}{8\sqrt{y}};$$

$$\text{当 } 1 \leq y < 4 \text{ 时, } F_Y(y) = P\{-1 \leq X < 0\} + P\{0 \leq X \leq \sqrt{y}\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{8\sqrt{y}};$$

当 $y \geq 4$ 时, $F_Y(y) = 1, f_Y(y) = 0$.

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} F(-\frac{1}{2}, 4) &= P\{X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4\} = P\{X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\} \\ &= P\{X \leq -\frac{1}{2}, -2 \leq X \leq 2\} = P\{-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}\} \\ &= P\{-1 < X \leq -\frac{1}{2}\} = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

9 (2007, 23 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【分析】 本题考查二维随机变量相关事件的概率和两个随机变量简单函数的分布计算 $P\{X > 2Y\}$ 可用公式

$$P\{X > 2Y\} = \iint_{x > 2y} f(x, y) dx dy.$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$, 可用两个随机变量和的概率密度的一般公式求解.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx,$$

此公式简单, 但讨论具体的积分上下限会较复杂.

另一种方法可用定义先求出 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} =$

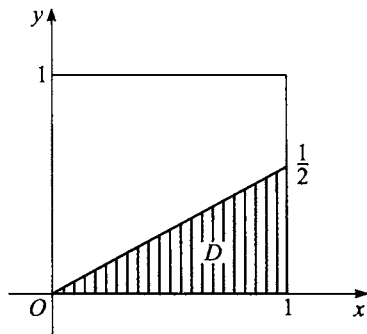
$P\{X + Y \leq z\}$, 然后 $f_Z(z) = F'_Z(z)$.

【求解】 (I) $P\{X > 2Y\} = \iint_{x > 2y} f(x, y) dx dy$

$$= \iint_D (2-x-y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} (2-x-y) dy$$

$$= \int_0^1 (x - \frac{5}{8}x^2) dx = \frac{7}{24}.$$



其中 D 为区域: $1 > x > 2y > 0$.

(II) 方法 1: 根据两个随机变量和的概率密度的一般公式有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

先考虑被积函数 $f(x, z-x)$ 中第一个自变量 x 的变化范围, 根据题设条件只有当 $0 < x < 1$ 时 $f(x, z-x)$ 才不等于 0. 因此, 不妨将积分范围改成:

$$f_Z(z) = \int_0^1 f(x, z-x) dx.$$

现在考虑被积函数 $f(x, z-x)$ 中第二个变量 $z-x$. 显然, 只有当 $0 < z-x < 1$ 时, $f(x, z-x)$ 才不等于 0, 且为 $2-x-(z-x) = 2-z$. 为此, 我们将 z 分段讨论:

$z \leq 0$ 时, 由于 $0 < x < 1$, 故 $z-x < 0$, 所以 $f_Z(z) = 0$;

$0 < z \leq 1$ 时, $f_Z(z) = \int_0^z (2-z) dx = 2z - z^2$;

$1 < z \leq 2$ 时, $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 (2-z) dx = 4 - 4z + z^2$;

$2 < z$ 时, 由于 $0 < x < 1$, 故 $z-x > 1$, 所以 $f_Z(z) = 0$. 总之,

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z \leq 1; \\ 4 - 4z + z^2, & 1 < z \leq 2; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

方法 2: $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\}$

$$= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

$z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

$0 < z \leq 1$ 时, $F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$

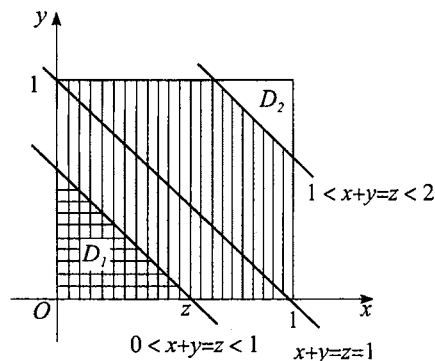
$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy \\
&= \int_0^z dx \int_0^{z-x} (2-x-y) dy \\
&= z^2 - \frac{1}{3} z^3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 < z \leq 2 \text{ 时, } F_Z(z) &= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\
&= 1 - \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\
&= 1 - \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 (2-x-y) dy = \frac{1}{3} z^3 - 2z^2 + 4z - \frac{5}{3};
\end{aligned}$$

$2 < z$ 时, $F_Z(z) = 1$.

所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z \leq 1; \\ 4 - 4z + z^2, & 1 < z \leq 2; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



10 (2008, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=i\} = \frac{1}{3}$

($i = -1, 0, 1$), Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 记 $Z = X + Y$.

(I) 求 $P\{Z \leq \frac{1}{2} | X = 0\}$;

(II) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

【分析】 本题考查均匀分布, 随机变量的独立性, 条件概率和随机变量简单函数的分布.

求 $P\{Z \leq \frac{1}{2} | X = 0\}$ 时, 由于 $Z = X + Y$, 且 X 与 Y 又独立, 所以

$$P\{Z \leq \frac{1}{2} | X = 0\} = P\{X + Y \leq \frac{1}{2} | X = 0\} = P\{Y \leq \frac{1}{2} | X = 0\} = P\{Y \leq \frac{1}{2}\}.$$

再利用 Y 均匀分布特性求 Z 的分布, 即求 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\}$. 可以将事件“ $X + Y \leq z$ ”分解成 $\{X + Y \leq z\} = \{X + Y \leq z, X = -1\} \cup \{X + Y \leq z, X = 0\} \cup \{X + Y \leq z, X = 1\}$, 就不难进一步求解.

$$\begin{aligned}
\text{【求解】} \quad (I) \quad P\{Z \leq \frac{1}{2} | X = 0\} &= P\{X + Y \leq \frac{1}{2} | X = 0\} = P\{Y \leq \frac{1}{2} | X = 0\} = P\{Y \leq \frac{1}{2}\} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II) \quad F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} \\
&= P\{X + Y \leq z, X = -1\} + P\{X + Y \leq z, X = 0\} + P\{X + Y \leq z, X = 1\} \\
&= P\{Y \leq z + 1, X = -1\} + P\{Y \leq z, X = 0\} + P\{Y \leq z - 1, X = 1\} \\
&= P\{Y \leq z + 1\}P\{X = -1\} + P\{Y \leq z\}P\{X = 0\} + P\{Y \leq z - 1\}P\{X = 1\} \\
&= \frac{1}{3}[P\{Y \leq z + 1\} + P\{Y \leq z\} + P\{Y \leq z - 1\}] \\
&= \frac{1}{3}[F_Y(z + 1) + F_Y(z) + F_Y(z - 1)],
\end{aligned}$$

其中 $F_Y(z)$ 为 Y 的分布函数, 由此得到

$$f_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{3}[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

【评注】 ① 本题主要考查条件概率和独立性的运用, 关键在于 $P\{X+Y \leq \frac{1}{2} | X=0\} = P\{Y \leq \frac{1}{2} | X=0\} = P\{Y \leq \frac{1}{2}\}$.

② 在求 $F_z(z)$ 时, 也可用全概率公式:

$$\begin{aligned} P\{Z \leq z\} &= \sum_{i=-1}^1 P\{X=i\} P\{X+Y \leq z | X=i\} = \frac{1}{3} \sum_{i=-1}^1 P\{Y \leq z-i | X=i\} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=-1}^1 P\{Y \leq z-i\} = \frac{1}{3} \sum_{i=-1}^1 F_Y(z-i). \end{aligned}$$

一般地说, 如果 $Z=X+Y$, 其中 X 是离散型随机变量, X 和 Y 又独立, 常常采用本题所用的方法求解 $F_z(z)$.

③ 当得到 $F_z(z) = \frac{1}{3}[F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)]$ 后, 就有

$$f_z(z) = F'_z(z) = \frac{1}{3}[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)].$$

严格地说, $F'_Y(z) = f_Y(z)$ 只有当 $z \neq 0$ 和 $z \neq 1$ 时成立, 因在 $z=0$ 和 $z=1$ 处 $f_Y(z)$ 不连续. 实际上, $F'_Y(z)$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 处不存在. 但作为密度函数, $f_Y(z)$ 个别点的取值并不影响 $f_Y(z)$ 和 $F_Y(z)$ 的概率性质, 就直接写成 $F'_Y(z) = f_Y(z)$ 处处成立.

11 (2009, 8 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_z(z)$ 的间断点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【分析】 本题考查标准正态分布, 随机变量的独立性, 条件概率, 全概率公式.

如果将事件“ $Y=0$ ”和“ $Y=1$ ”看成一完备事件组, 则由全概率公式

$$F_z(z) = P\{XY \leq z\} = P\{Y=0\}P\{XY \leq z | Y=0\} + P\{Y=1\}P\{XY \leq z | Y=1\}.$$

不难计算出 $F_z(z)$, 从而可判断其间断点. 这种方法常用于两独立随机变量其中一个为离散型的情况.

$$\begin{aligned} \text{【求解】 } F_z(z) &= P\{Y=0\}P\{XY \leq z | Y=0\} + P\{Y=1\}P\{XY \leq z | Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{0 \leq z | Y=0\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z | Y=1\}. \end{aligned}$$

又由于 X, Y 相互独立, 故

$$F_z(z) = \frac{1}{2}P\{0 \leq z\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z\}.$$

$$F_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z), & z < 0; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z), & z \geq 0. \end{cases} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \begin{cases} F_z(0^-) = \frac{1}{4} \\ F_z(0^+) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$F_z(z)$ 在 $z=0$ 处有一个间断点, 故答案应选(B).

【评注】 也可以将事件“ $Z \leq z$ ”分解成 $\{Z \leq z\} = \{Z \leq z, Y=0\} \cup \{Z \leq z, Y=1\}$.

即 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{Z \leq z, Y=0\} + P\{Z \leq z, Y=1\}$.

当 $z < 0$ 时, $P\{Z \leq z, Y=0\} = P\{XY \leq z, Y=0\} = P(\emptyset) = 0$;

当 $z \geq 0$ 时, $P\{Z \leq z, Y=0\} = P\{XY \leq z, Y=0\} = P\{Y=0\} = \frac{1}{2}$;

而对任意

$$\begin{aligned} P\{Z \leq z, Y=1\} &= P\{XY \leq z, Y=1\} = P\{X \leq z, Y=1\} \\ &= P\{X \leq z\}P\{Y=1\} = \frac{1}{2}\Phi(z). \end{aligned}$$

结论是相同的.

■ 练习题

1. (2003, 5 题, 4 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 6x & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

则 $P\{X+Y \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (2004, 23 题, 13 分) 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 内服从均匀分布, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 内服从均匀分布, 求

(I) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(II) Y 的概率密度;

(III) 概率 $P\{X+Y > 1\}$

3. (2001, 11 题, 8 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$ 上的均匀分布, 试求随机变量 $U = |X - Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

4. (2003, 12 题, 13 分) 设随机变量 X 与 Y 独立, 其中 X 的概率分布为

$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$ 而 Y 的概率密度为 $f(y)$, 求随机变量 $U = X + Y$ 的概率密度 $g(u)$.

三

12 (2009, 22 题, 11 分) 袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $P\{X=1 \mid Z=0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

【分析】 本题考查古典型概率, 条件概率和二维概率分布.

题设要求有放回地取两次, 每次一个, 总共取到两个, 每次有 6 种可能, 总共有 36 种可能, 求概率时只要把符合条件的可能性列出就可以了.

$$\begin{aligned} \text{【求解】 (I)} P\{X=1 \mid Z=0\} &= \frac{P\{X=1, Z=0\}}{P\{Z=0\}} = \frac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{Z=0\}} \\ &= \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{\frac{36}{3 \cdot 3}} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$\text{也可以 } P\{X=1|Z=0\} = \frac{P\{X=1, Z=0\}}{P\{Z=0\}} = \frac{C_2^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}.$$

或者用缩减样本空间方法:

$Z=0$, 即已知两次都没白球的条件下, 只能取红、黑, 总的可能为 $3 \cdot 3 = 9$,

$$P\{X=1|Z=0\} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}.$$

(II) 首先确定 X 与 Y 的取值范围均为 $0, 1, 2$, $P\{X=0, Y=0\} = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 6}$, 同理可求得

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 6}$	$\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{6 \cdot 6}$	$\frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 6}$
1	$\frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{6 \cdot 6}$	$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{6 \cdot 6}$	0
2	$\frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 6}$	0	0

即

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

13 (2010, 22 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

【分析】 二维正态随机变量的概率密度, 边缘概率密度和条件密度是本题考查的内容, 2010 年考试本题得分率为 0.296, 属于偏低的.

本题中当给出二维密度 $f(x, y)$ 后, 要求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 时, 可用公式 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$, 当 $f_X(x) > 0$, 而 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$. 本题还有待定常数 A . 用 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ 来定常数 A . 还不如用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ 来求 A .

【求解】

$$\begin{aligned} \text{方法 1: } f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2 - x^2} dy = A e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = A \sqrt{\pi} e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \pi. \text{ 即 } A = \frac{1}{\pi}.$$

当 $f_X(x) > 0$, 等价于 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{A \sqrt{\pi} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

方法 2: 二维正态概率密度一般形式为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

对比本题所给二维密度 $f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}$, 可知, $\mu_1 = \mu_2 = 0$,

且成立

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} = 2, \\ \frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} = 2, \\ \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} = 1. \end{cases}$$

由此解得 $\begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_2 = 1. \end{cases}$ $A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\pi}$

这时的边缘密度 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}, -\infty < y < +\infty.$$

■ 练习题

1. (2011, 23 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$, 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$

第四章 随机变量的数字特征

■ 本章导读

本章是概率论的重点之一, 有相当多的考题涉及这章内容. 求随机变量的数字特征, 包括数学期望、方差、矩、协方差、相关系数, 所有这些数字特征都是求期望, 求随机变量函数的数学期望.

■ 试题特点

本章的试题除了求一些给定随机变量的数学期望外, 很多题的数学期望或方差的计算都与常用分布有关. 应该牢记常用分布的参数和它们的概率意义. 有些常用分布的参数就是该随机变量的数学期望或方差. 也应该会用数字特征的基本性质, 会求一般随机变量函数的数学期望.

■ 考题详析

1 (2008, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = E(X^2)\} =$ _____

【分析】 $X \sim P(\lambda)$, 则有 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$

且 $E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$, 现 $\lambda = 1$, 直接代入即可.

【求解】 $E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 1 + 1^2 = 2$, 所以

$$P\{X = EX^2\} = P\{X = 2\} = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

【答案】 $\frac{1}{2e}$

2 (2009, 7 题, 4 分) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, $E(x) =$

(A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1

【分析】 本题考查正态分布随机变量及其标准化的性质.

题中给出了分布函数 $F(x)$, 要求 $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$. 可以通过 $F'(x) = f(x)$ 来求得.

【求解】 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$, 故

$$f(x) = F'(x) = 0.3\varphi(x) + 0.7\varphi(\frac{x-1}{2}) \cdot \frac{1}{2}$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0.3x\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{0.7}{2}x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \\
 &= 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + 0.7 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+1)\varphi(t)dt \\
 &= 0.3 \cdot 0 + 0.7 \cdot 1 = 0.7
 \end{aligned}$$

答案应选(C)

【评注】 当随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时, $(\sigma > 0)$ 时, 其分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

也就是说, 如有分布函数 $\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 则相应的随机变量 X 有 $E(X) = \mu$

$$\text{现 } F(x) = C_1 \Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + C_2 \Phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right), C_1 + C_2 = 1,$$

$$\text{则必有 } E(X) = C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2$$

3 (2010, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\} = \frac{C}{k!}, k=0, 1, 2, \dots$

则 $EX^2 =$ _____

【分析】 X 的分布 $P\{X=k\} = \frac{C}{k!}, k=0, 1, 2, \dots$, 其中 C 是待定常数, 不难发现 X 是一个泊松分布的随机变量, 而 $EX^2 = DX + (EX)^2$.

【求解】 泊松分布为 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0, 1, 2, \dots$

对比 $P\{X=k\} = \frac{C}{k!}, k=0, 1, 2, \dots$, 可以看出 $C = e^{-1}, X \sim P(1)$,

所以 $EX = DX = 1$, 而 $EX^2 = DX + (EX)^2 = 1 + 1^2 = 2$

4 (2011, 8 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 EX 和 EY 存在, 记

$U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) =$

(A) $EU \cdot EV$ (B) $EX \cdot EY$ (C) $EU \cdot EY$ (D) $EX \cdot EV$

【分析】 本题考查相互独立的两个随机变量简单函数的数字特征, 显然当 X 与 Y 相互独立时 $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$

$$\text{我们有公式 } U = \max\{X, Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2}, V = \min\{X, Y\} = \frac{X+Y-|X-Y|}{2},$$

对解题也是有用的.

$$\begin{aligned}
 \text{【求解】 方法 1: } UV &= \frac{X+Y+|X-Y|}{2} \cdot \frac{X+Y-|X-Y|}{2} = \frac{(X+Y)^2 - |X-Y|^2}{4} \\
 &= \frac{4XY}{4} = XY
 \end{aligned}$$

故 $E(UV) = E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$, 答案应选(B)

方法 2: $UV = \max\{X, Y\} \cdot \min\{X, Y\} = XY$

因为二个中大的一个乘小的一个就等于这二个相乘.

$E(U \cdot V) = E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$, 答案应选(B).

5 (2011, 14 题, 4 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2 \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$

【分析】 本题考查二维正态随机变量各参数的意义和两分量独立和不相关的关系, $(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2 \sigma^2; 0)$, 即 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = 0$, 二维正态时 $\rho_{XY} = 0$ 等价于 X 与 Y 相互独立.

【求解】 $(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2 \sigma^2; 0)$, 所以 X 与 Y 相互独立, 且

$$EX = EY = \mu, DX = DY = \sigma^2$$

$$E(XY^2) = EX \cdot EY^2 = \mu[DY + (EY)^2] = \mu(\sigma^2 + \mu^2) = \mu\sigma^2 + \mu^3$$

答案应填 $\mu\sigma^2 + \mu^3$

■ 练习题

1. (2000, 12 题, 8 分) 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 p ($0 < p < 1$), 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X , 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

2. (2002, 11 题, 7 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数, 求 Y^2 的数学期望.

3. (2003, 11 题, 10 分) 已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后, 求:

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

4. (2004, 16 题, 9 分) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ _____.

5. (1998, 11 题, 9 分) 设某种商品的每周的需求量 X 是服从区间 $[10, 30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间 $[10, 30]$ 中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利 500 元, 若供大于求则削价处理, 每处理 1 单位商品亏损 100 元, 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时每个单位商品仅获利 300 元. 为使商店所获利润期望值不少于 9280 元, 试确定最少进货量.

6. (1998, 11 题, 10 分) 一商店经销某种商品, 每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元; 若需求量超过了进货量, 商店可从其他商店调剂供应, 这时每单位商品获利润为 500 元, 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

—

6 (2005, 23 题, 9 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n ($n > 2$) 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, 记 $Y_i = X_i - \bar{X}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

求 (I) Y_i 的方差 $D(Y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$;

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\text{cov}(Y_1, Y_n)$.

【分析】 随机变量的方差、协方差.

求 $D(Y_i)$ 时, $Y_i = X_i - \bar{X}$, 而 \bar{X} 中又有 X_i 的成份, 因而 X_i 与 \bar{X} 不独立. 故

$$D(Y_i) = D(X_i - \bar{X}) \neq D(X_i) + D(\bar{X}).$$

应该将 \bar{X} 中的 X_i 成份与 X_i 合并, 再用 X_1, X_2, \dots, X_n 的相互独立性求. 求 $\text{cov}(Y_1, Y_n)$ 也用类似的方法.

$$\begin{aligned} \text{【求解】} \quad (\text{I}) \quad D(Y_i) &= D(X_i - \bar{X}) = D\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i}^n X_j\right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 D(X_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{j \neq i}^n D(X_j) \\ &= \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) \quad \text{cov}(Y_1, Y_n) &= E[Y_1 - E(Y_1)][Y_n - E(Y_n)] = E(Y_1 Y_n) = E(X_1 - \bar{X})(X_n - \bar{X}) \\ &= E(X_1 X_n - X_1 \bar{X} - X_n \bar{X} + \bar{X}^2) = E(X_1 X_n) - E(X_1 \bar{X}) - E(X_n \bar{X}) + E(\bar{X}^2) \\ &= E(X_1)E(X_n) - 2E(X_1 \bar{X}) + D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 \\ &= 0 - 2 \times \frac{1}{n} E(X_1^2 + \sum_{j=2}^n X_1 X_j) + D(\bar{X}) + 0 = -\frac{2}{n} \times (1+0) + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

【评注】 (1) 计算过程中用到 $E(X_i) = E(\bar{X}) = E(Y_i) = 0$.

(2) 在 (II) 的计算中, 由对称性得

$$E(X_1 \bar{X}) = E(X_n \bar{X}).$$

(3) 协方差的计算, 一般有几种途径:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_1, Y_n) &= E[Y_1 - E(Y_1)][Y_n - E(Y_n)] = \dots \\ \text{cov}(Y_1, Y_n) &= \text{cov}(X_1 - \bar{X}, X_n - \bar{X}) = \dots \\ \text{cov}(Y_1, Y_n) &= E(Y_1 Y_n) - E(Y_1)E(Y_n) = \dots \end{aligned}$$

至于选择哪一种方便要具体分析, 本题由于 $E(Y_i) = 0$, 所以选择

$$\text{cov}(Y_1, Y_n) = E(Y_1 Y_n) = E(X_1 - \bar{X})(X_n - \bar{X}) = \dots$$

如果选 $\text{cov}(Y_1, Y_n) = \text{cov}(X_1 - \bar{X}, X_n - \bar{X}) = \text{cov}(X_1, X_n) - \text{cov}(X_1, \bar{X}) - \text{cov}(X_n, \bar{X}) + \text{cov}(\bar{X}, \bar{X}) = \dots$ 也可以同样求得结果.

(4) 在本题求解过程中将

$$Y_i = X_i - \bar{X} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X_i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i}^n X_j$$

即将原来不独立的 X_i 和 \bar{X} , 改成独立的 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i}^n X_j$ 两部分, 这种基本运算方法在历年考题中常有涉及, 应该掌握.

■ 练习题

1. (2004, 14 题, 4 分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$, 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

$$(A) \text{cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$(B) \text{cov}(X_1, Y) = \sigma^2$$

$$(C) D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$$

$$(D) D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$$

三

7 (2008, 8 题, 4 分) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$ 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则

(A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$

(B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$

(C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$

(D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$

【分析】 由相关系数的性质可知: 如果 $|\rho_{XY}| = 1$, 则必有 $P\{Y = aX + b\} = 1, (a \neq 0)$,

现在题设条件 $\rho_{XY} = 1$, 只要在 $P\{Y = \pm 2X \pm 1\} = 1$ 四个选项中选一就可以了, 实际上只要确定它们的正负号即可.

本题可以从 $X \sim N(0, 1)$ 和 $Y \sim N(1, 4)$ 及 $\rho_{XY} = 1$ 直接推出 $P\{Y = aX + b\} = 1$ 中的 a, b 值. 但更方便的, 不如直接定出 a, b 的正负号更简单.

【求解】 先来确定常数 b , 由 $P\{Y = aX + b\} = 1$, 可得到 $E(Y) = aE(X) + b$

再因为 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4)$, 所以, $1 = a \cdot 0 + b$, 即得 $b = 1$

现在求常数 a , 实际上只要判定 a 的正负号就可以了.

$$1 = \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}, \text{ 而 } \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, aX + b) = a\text{cov}(X, X) = a$$

故 $a > 0$

答案应选(D)

【评注】 $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \frac{a\text{cov}(X, X)}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4}} = \frac{a}{2}$, 也可得 $a = 2$

8 (2011, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}, \begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}, \text{ 且 } P\{X^2 = Y^2\} = 1$$

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

【分析】 由 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ 得 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 0$

而 $P\{X^2 \neq Y^2\} = P\{X = 0, Y = -1\} + P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 0\} = 0$

即 $P\{X = 0, Y = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0$

【求解】 (I) (X, Y) 的概率分布的边缘分布为

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$	-1	0	1	$P_{i \cdot}$
0				$\frac{1}{3}$
1				$\frac{2}{3}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

再填入 $P\{X = 0, Y = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0$

$X \backslash Y$	-1	0	1	
0	0		0	$\frac{1}{3}$
1		0		$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

最后得到

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(II) $Z = XY$ 的可能取值 $-1, 0, 1$. 由 (X, Y) 的概率分布可得 Z 的概率分布

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(III) 由 X, Y 及 Z 的概率分布得

$$EX = \frac{2}{3}, DX = \frac{2}{9}, EY = 0, DY = \frac{2}{3}, E(XY) = E(Z) = 0$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = 0, \text{ 所以 } \rho_{XY} = 0.$$

■ 练习题

1. (2000, 5 题, 3 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为

(A) $E(X) = E(Y)$

(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$

(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$

2. (2001, 5 题, 3 分) 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

3. (2004, 22 题, 9 分) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求: (I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

第五章 大数定律和中心极限定理

本章导读

本章内容不是考试的重点. 2001 年考过一次切比雪夫不等式, 近十年就没再考过. 本章内容包括一个不等式: 切比雪夫不等式; 三个大数定律: 切比雪夫大数定律、伯努利大数定律、辛钦大数定律; 二个中心极限定理: 棣莫弗 — 拉普拉斯定理、列维 — 林德伯格定理.

试题特点

本章试题大多是简单的选择题和填空题. 只要把这些不等式、定律和定理的条件与结论记住就可以了. 前几年数三、数四曾经有用中心极限定理来近似计算的解答题. 但由于考试时不能使用计算器, 这类考题也不太多出现.

练习题

1. (2001, 5 题, 3 分) 设随机变量 X 的方差为 2, 则根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - EX| \geq 2\} \leq$ _____.

2. (2001, 11 题, 8 分) 一生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的. 假设每箱平均重量 50 千克, 标准差为 5 千克. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保障不超载的概率大于 0.977 ($\Phi(2) = 0.977$, 其中 Φ 是标准正态分布函数).

3. (2002, 5 题, 3 分) 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 则根据列维林德伯格 (Levy - Lindberg) 中心极限定理, 当 n 充分大时, S_n 近似服从正态分布, 只要 X_1, X_2, \dots, X_n

(A) 有相同的数学期望

(B) 有相同的方差

(C) 服从同一指数分布

(D) 服从同一离散分布

4. (2003, 6 题, 4 分) 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 _____

5. (2005, 14 题, 4 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量列, 且均服从参数为 $\lambda (\lambda > 1)$ 的指数分布, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda \sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

$$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

第六章 数理统计的基本概念

■本章导读

本章是数理统计的基础,也是重点之一.数理统计的基本概念包括总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差等.特别对正态总体的分布及其性质应予以充分的注意,对 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布,要掌握这些分布对应随机变量的典型模式和它们参数的确定.

■试题特点

这几年数一的数理统计考一个大题,也就是 11 分的解答题,有时还会有一个 4 分的填空题或选择题.一般说,数理统计是历届考生的薄弱点,很多考生感到公式多不好记,其实只要熟记一个总体的 \bar{X} , S^2 , $E\bar{X}$, $D\bar{X}$, EX^2 和 χ^2 分布, t 分布, F 分布的典型模式和参数,尤其正态总体抽样分布的一些性质就可以了.

■考题详析

1 (2005, 14 题, 4 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则

$$(A) n\bar{X} \sim N(0, 1)$$

$$(B) nS^2 \sim \chi^2(n)$$

$$(C) \frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$$

$$(D) \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$$

【分析】 有关正态总体 $N(0, 1)$ 的常用抽样分布, 考生应掌握 $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$, \bar{X} , S^2 独立, 且

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\text{以及 } \frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$$

用这些性质不难看出 (A), (B), (C) 均不正确.

【求解】 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$, $\sum_{i=2}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ 且 X_1^2 与 $\sum_{i=2}^n X_i^2$ 相互独立, 因此

$$\frac{X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2 / (n-1)} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$$

答案应选 (D)

■练习题

1. (2001, 12 题, 7 分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 从该总体中抽取简单随机样本

$X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$, 其样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$, 求统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

2. (2003, 6 题, 4 分) 设随机变量 $X \sim t(n) (n > 1)$, $Y = \frac{1}{X^2}$ 则

(A) $Y \sim \chi^2(n)$

(B) $Y \sim \chi^2(n-1)$

(C) $Y \sim F(n, 1)$

(D) $Y \sim F(1, n)$

3. (1999, 12 题, 7 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_9 是来自正态总体 X 的简单随机样本, $Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots +$

$X_6)$, $Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9)$, $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2$, $Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

4. (2001, 5 题, 3 分) 设总体 X 服从分布 $N(0, 2^2)$, 而 X_1, X_2, \dots, X_{15} 是来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量

$$Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)}$$

服从 _____ 分布, 参数为 _____.

5. (2002, 5 题, 3 分) 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则

(A) $X+Y$ 服从正态分布

(B) $X^2 + Y^2$ 服从 χ^2 分布

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布

(D) X^2/Y^2 服从 F 分布

6. (2004, 6 题, 4 分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. (2006, 6 题, 4 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $E(S^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

第七章 参数估计

本章导读

本章内容是考试重点之一, 尤其是矩估计法和最大似然估计法是经常考的大题. 有时还会要求验证所得估计量的无偏性. 区间估计常常是对单个正态总体均值求置信区间. 多年来, 基本不涉及两个正态总体的参数估计.

试题特点

矩估计法和最大似然估计法一般只对一个参数进行估计, 要熟悉离散型和连续型两种不同的形式处理, 尤其要正确写出最大似然估计中的似然函数.

估计量的无偏性有时以一个 4 分小题单独出现. 结合第六章的一些基本概念, 按数学期望求.

考题详析

1 (2006, 23 题, 9 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$). X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数. 求 θ 的最大似然估计.

【分析】 最大似然估计的关键是写出似然函数. 样本值中 x_i 小于 1 的概率为 θ , x_i 大于等于 1 的概率为 $(1 - \theta)$. 因此, 似然函数应为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1 - \theta)^{n-N}.$$

【求解】 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1 - \theta)^{n-N},$$

取对数, 得

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta),$$

两边对 θ 求导, 得

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta}.$$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$, 得 $\theta = \frac{N}{n}$, 显然 $\theta = \frac{N}{n}$, $L(\theta)$ 最大. 所以 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.

2 (2007, 24 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数 $\theta (0 < \theta < 1)$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值.

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由.

【分析】 用矩估计求唯一参数 θ , 只要令样本均值 \bar{X} 等于总体的期望 $E(X)$ 就可以求得. 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 只要判断 $E(4\bar{X}^2) = \theta^2$ 是否成立?

【求解】 (I) $E(X) = \int_0^\theta \frac{x}{2\theta} dx + \int_\theta^1 \frac{x}{2(1-\theta)} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta$, 令 $\bar{X} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta$, 解得 $\theta = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$. 所以参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$.

$$(II) E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4\{D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2\} = 4\left[\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right].$$

由 (I) 知 $E(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta$. 又有

$$E(X^2) = \int_0^\theta \frac{x^2}{2\theta} dx + \int_\theta^1 \frac{x^2}{2(1-\theta)} dx = \frac{1}{2\theta} \cdot \frac{\theta^3}{3} + \frac{1}{2(1-\theta)} \cdot \frac{1-\theta^3}{3} = \frac{1}{6}(1+\theta+2\theta^2).$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{6}(1+\theta+2\theta^2) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\theta\right)^2 = \frac{5}{48} - \frac{\theta}{12} + \frac{\theta^2}{12}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } E(4\bar{X}^2) &= 4\left[\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right] = 4\left[\frac{5}{48n} - \frac{\theta}{12n} + \frac{\theta^2}{12n} + \frac{1}{16} + \frac{\theta}{4} + \frac{\theta^2}{4}\right] \\ &= \frac{3n+5}{12n} + \frac{3n-1}{3n}\theta + \frac{3n+1}{3n}\theta^2 \end{aligned}$$

因此, $4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

【评注】 (II) 证明 $E(4\bar{X}^2) \neq \theta^2$, 可以简化计算, $E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4[D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2] = 4\left[\frac{D(X)}{n} + (EX)^2\right] > 4(EX)^2 > 4\left(\frac{1}{4} + \frac{\theta}{2}\right)^2 > \theta^2$.

3 (2009, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$

未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

【分析】 矩估计要求出总体的矩. 现未知参数就一个, 只要求出 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 就可以.

列出方程 $\bar{X} = EX$, 最大似然估计要求写出似然函数 $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda)$, 而 $f(x)$ 已给出, 就可以直接给出 $L(\lambda)$.

$$\text{【求解】 (I) } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{2}{\lambda}.$$

令 $\bar{X} = EX$, 即 $\bar{X} = \frac{2}{\lambda}$, 解得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1 = \frac{2}{\bar{X}}$.

(II) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n (x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$ 为样本观测值, 则似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^{2n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i,$$

$$\ln L = 2n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i, \text{ 令 } \frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}, \text{ 故 } \lambda \text{ 的最大似然估计}$$

$$\text{计量 } \hat{\lambda}_2 = \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = \frac{2}{\bar{X}}.$$

4 (2011, 23 题, 11 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知. \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$.

【分析】 求最大似然估计关键在于写出似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(X_i) \text{ 而 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}} \text{ 就可以直接给出 } L(\sigma^2),$$

求出 $\hat{\sigma}^2$ 后可以直接计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$.

【求解】 (I) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$$

$$\text{令: } \frac{d \ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)} = 0, \text{ 得}$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0$$

从而得 σ^2 的最大似然估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$$

$$(II) \text{ 方法 1: } E\hat{\sigma}^2 = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu_0)^2 = \sigma^2$$

$$D\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i - \mu_0)^2 = \frac{1}{n} D(X_i - \mu_0)^2,$$

$$\text{由于 } \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0, 1), \text{ 故 } \left(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1), D\left(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma}\right)^2 = 2$$

$$\text{所以, } D(X_i - \mu_0)^2 = 2\sigma^4, \text{ 即 } D\hat{\sigma}^2 = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

$$\text{方法 2: 由于 } \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

所以 $E(\frac{\hat{n}\sigma^2}{\sigma^2}) = n$ 和 $D(\frac{\hat{n}\sigma^2}{\sigma^2}) = 2n$

即 $E\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2 = \frac{2\sigma^4}{n}$.

■ 练习题

1. (1999, 13 题, 6 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

2. (2000, 13 题, 6 分) 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数. 又设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 X 的一组样本观测值, 求参数 θ 的最大似然估计值.

3. (2002, 12 题, 7 分) 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$ 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计

值和最大似然估计值.

4. (2004, 23 题, 9 分) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(I) β 的矩估计量; (II) β 的最大似然估计量.

—

5 (2008, 23 题, 11 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(II) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 求 DT .

【分析】 (I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量, 只要验证 $E(T) = E(\bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2) = \mu^2$. 由 $E(\bar{X}) =$

$\mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, E(S^2) = \sigma^2$, 就不难求得 $E(T)$.

(II) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 总体为标准正态分布 $N(0, 1)$, 且 \bar{X} 与 S^2 还是相互独立. 如果用公式 $D(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = E(T^2) = E\left(\bar{X}^2 - \frac{2}{n}\bar{X} \cdot S^2 + \frac{S^4}{n^2}\right)$, 计算会很繁杂.

如果利用 \bar{X}, S^2 的独立性, $D(T) = D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2}D(S^2)$, 再直接计算 $D(\bar{X}^2) = D\left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} X_i X_j\right)$ 和 $D(S^2)$ 更困难.

注意到 $\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0, 1)$, 即 $n\bar{X}^2 \sim \chi^2(1)$, 和 $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$, 而 $D(\chi^2(n)) = 2n$. 再来计算 $D(T) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2}D(S^2)$ 就不困难了.

$$\begin{aligned} \text{【求解】} \quad (I) E(T) &= E\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n}E(S^2) \\ &= D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 - \frac{1}{n}E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2. \end{aligned}$$

(II) 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$, 即有 $n\bar{X}^2 \sim \chi^2(1)$, $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$.

注意到 \bar{X} 与 S^2 是相互独立的, 且 $D(\chi^2(n)) = 2n$, 所以

$$\begin{aligned} D(T) &= D\left(\bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = D(\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2}D(S^2) \\ &= \frac{1}{n^2}D(n\bar{X}^2) + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2] \\ &= \frac{1}{n^2} \times 2 + \frac{1}{n^2(n-1)^2} \times 2(n-1) \\ &= \frac{2}{n^2} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

6 (2009, 14 题, 4 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

【分析】 若 $\bar{X} + kS^2$ 是 np^2 的无偏估计量, 则有 $E(\bar{X} + kS^2) = E(\bar{X}) + kE(S^2) = np^2$, 就可以定出 k 的值.

【求解】 由 \bar{X}, S^2 的性质: $E(\bar{X}) = E(X)$, $E(S^2) = D(X)$, 其中 $X \sim B(n, p)$. 所以 $E(\bar{X} + kS^2) = E(\bar{X}) + kE(S^2) = E(X) + kD(X) = np + knp(1-p) = np(1+k) - knp^2 = np^2$. 解得 $k = -1$. 答案应填 -1 .

7 (2010, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知, 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i = 1, 2, 3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

【分析】 无偏估计要求 $ET = \sum_{i=1}^3 a_i EN_i = \theta$.

N_i 是样本 X_1, X_2, \dots, X_n 中取 i 值的个数. 如果把样本中每个 X_i 取 i 值看成是试验成功, X_i 不取 i 值看成是试验失败, 则样本的 n 个分量看成是 n 重伯努利试验. 如果出现 i 的概率为 p_i , 则 $N_i \sim B(n, p_i)$. 这时 $EN_i = np_i$, $DN_i = np_i(1-p_i)$.

【求解】 记 $p_1 = 1 - \theta, p_2 = \theta - \theta^2, p_3 = \theta^2$, 则 $N_i \sim B(n, p_i) \quad i = 1, 2, 3$.
故 $EN_i = np_i$.

$$ET = \sum_{i=1}^3 a_i EN_i = \sum_{i=1}^3 a_i np_i = n[a_1(1 - \theta) + a_2(\theta - \theta^2) + a_3\theta^2]$$

要使 T 是 θ 的无偏估计量, 则有

$$n[a_1(1 - \theta) + a_2(\theta - \theta^2) + a_3\theta^2] = na_1 + n(a_2 - a_1)\theta + n(a_3 - a_2)\theta^2 = \theta$$

$$\text{因此} \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 - a_1 = \frac{1}{n}, \\ a_3 - a_2 = 0, \end{cases} \text{由此解得, 当} \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = \frac{1}{n}, \\ a_3 = \frac{1}{n}. \end{cases} \text{时, } T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i \text{ 为 } \theta \text{ 的无偏估计.}$$

这时, $T = \frac{1}{n}(N_2 + N_3)$. 由于 $N_1 + N_2 + N_3 = n$ 故

$$T = \frac{1}{n}(N_2 + N_3) = \frac{1}{n}(n - N_1) = 1 - \frac{N_1}{n}.$$

注意到 $N_1 \sim B(n, 1 - \theta)$, 所以

$$DT = D(1 - \frac{N_1}{n}) = \frac{1}{n^2} DN_1 = \frac{n(1 - \theta)\theta}{n^2} = \frac{\theta(1 - \theta)}{n}.$$

■ 练习题

1. (2003, 12 题, 8 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta. \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数, 从总体 X 中抽取简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 记 $\hat{\theta} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有无偏性.

2. (2008, 6 题, 4 分) 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.

(注: 标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$.)

第八章 假设检验

本章导读

假设检验是在历年考题中出现最少的一类内容,最近一次是在 1998 年的真题中曾出现过.假设检验的重点在作出“假设”的基本类型,显著性检验的基本思想,检验的基本步骤,两类错误等.

试题特点

假设检验的情况较多,考试时间有限,又不能使用计算器,所以一般考题考查单个总体的均值较多.应该记住方差已知和方差未知时,单个正态总体均值的假设检验的假设类型.统计量选择、检验的基本步骤.根据显著水平确定拒绝域等.

练习题

1. (1998, 15 题, 4 分) 设某次考试的学生成绩服从正态分布,从中随机地抽取 36 位考生的成绩,算得平均成绩为 66.5 分,标准差为 15 分,问在显著性水平为 0.05 下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

附表: t 分布表

$$P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$$

<div>p</div> <div>$t_p(n)$</div> <div>n</div>	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

练习题参考答案及解析

第一章 随机事件和概率

—

1.【简解】 利用条件概率和事件的独立性, 不难得到答案为(C). 事实上确定 A 与 B 独立有等价的下列诸条件中任一条件均可:

- (1) $P(AB) = P(A)P(B)$;
- (2) $P(A|B) = P(A|\bar{B}), 0 < P(B) < 1$;
- (3) A 与 \bar{B} 独立或者 \bar{A} 与 \bar{B} 独立;
- (4) $P(A|B) = P(A), P(B) > 0$.

2.【简解】 利用加法公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

再加上两两独立性质解得 $P(A) = \frac{1}{4}$

其实题设条件 $P(A) < \frac{1}{2}$ 没有必要, 因为求解方程中有一个增根

$P(A) = \frac{3}{4}$ 是不可能要的, 这一点可从 $P(A) \leq P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16} < \frac{3}{4}$ 直接得出.

3.【简解】 由题设条件 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$ 推出 $P(A) = P(B)$

再加上 A, B 独立, 解得 $P(A) = \frac{2}{3}$.

二、

1.【简解】 一般理解随机事件“第二个人取得黄球”与第一个人取得的是什么球有关, 这就要用全概率公式来计算, 但也可以用古典型概率来解, 这会简单得多.

方法一: 设事件 A_i 表示第 i 个人取得黄球, $i = 1, 2$, 则根据全概率公式:

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} + \frac{30}{50} \cdot \frac{20}{49} = \frac{2}{5}$$

方法二: 只考虑第二个人取得的球, 这 50 个球中每一个都会等可能地被第二个人取到, 而取到黄球的可能有 20 个, 故所求概率为 $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

【评注】 在古典型概率和几何型概率的求解中, 考生们会有无从下手的困难, 因为往往要求自己先去构造相应的样本空间, 然后再计算样本空间中符合要求事件中的样本点数. 如果在反映要求事件的条件下把样本空间构造得越简单, 则相应的计算就越简单, 例如把本题解成

$$P(A_2) = \frac{20 \cdot 19}{50 \cdot 49}, \text{ 计算量就稍大些.}$$

第二章 随机变量及其分布

1.【简解】 二次方程无实根, 即 $y^2 + 4y + X = 0$ 的判别式 $16 - 4X < 0$.

其概率为 $\frac{1}{2}$, 即 $P\{X > 4\} = \frac{1}{2}$, 所以 $\mu = 4$, 答案应填 4.

2.【简解】 利用正态分布的概率密度函数图形的对称性, 对任何 $x > 0$ 有

$$P\{X > x\} = P\{X < -x\} = \frac{1}{2}P\{|X| > x\}$$

或者直接利用图形求解.

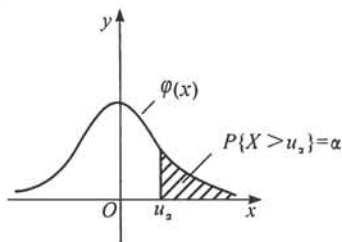
本题在 2004 年考试中数一得分率为 0.507, 而数三得分率仅为 0.264.

方法 1: 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 其中 $0 < \alpha < 1, x > 0$, 则

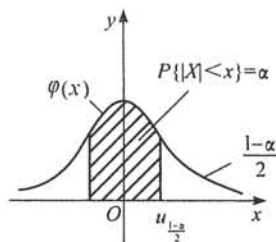
$$\begin{aligned} P\{X > x\} &= \frac{1}{2}P\{|X| > x\} = \frac{1}{2}P\{|X| \geq x\} = \frac{1}{2}[1 - P\{|X| < x\}] \\ &= \frac{1}{2}(1 - \alpha) = \frac{1 - \alpha}{2}, \end{aligned}$$

即 $x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. 答案应选 (C).

方法 2:



图一



图二

如图一所示题设条件 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$. 图二中间阴影部分面积为 $\alpha, P\{|X| < x\} = \alpha$. 两端各余面积为 $\frac{1-\alpha}{2}$, 所以 $P\{|X| < u_{\frac{1-\alpha}{2}}\} = \alpha$. 答案应选 (C).

第三章 多维随机变量及其分布

1.【简解】 答案应选 (B).

首先应看到, $X+Y$ 和 $X-Y$ 均为一维正态分布的随机变量.

其次要看到, 如果 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{Z \leq \mu\} = \frac{1}{2}$. 反之, 如果 $P\{Z \leq a\} = \frac{1}{2}$, 则必有 $a = \mu$. 因为正态分布的概率密度有对称性.

有考生在求解过程中将 $X+Y$ 和 $X-Y$ 都进行标准化, 更有考生把 $X+Y$ 和 $X-Y$ 都看成二维正态随机变量的函数来求解, 就更复杂化了.

2.【简解】 当离散型随机变量 (X, Y) 中 X 与 Y 相互独立时, 有 $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$

进一步就有, $\frac{p_{11}}{p_{21}} = \frac{p_{12}}{p_{22}} = \frac{p_{13}}{p_{23}} = \frac{p_{1j}}{p_{2j}} = \frac{p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot j}}{p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot j}} = \frac{p_{1\cdot}}{p_{2\cdot}}$

也就是说 (X, Y) 的分布律中, 当 X, Y 独立就对应各行成比例. 有了这一点再加上边缘分布性质, 就能很快解得

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

3.【简解】 方法 1, 用排除法, (A)、(B) 和 (C) 都不对.

(A) 因 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)] dx = 2$

(B) 选 $f_1(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 和 $f_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

则 $f_1(x)f_2(x) = 0 \quad -\infty < x < +\infty$

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F_1(x) + F_2(x)] = 2$

方法 2. 不难直接验证: (1) $0 \leq F_1(x)F_2(x) \leq 1$; (2) $F_1(x)F_2(x)$ 单调不减;

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F_1(x)F_2(x)] = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F_1(x)F_2(x)] = 1$

(4) $F_1(x)F_2(x)$ 右连续

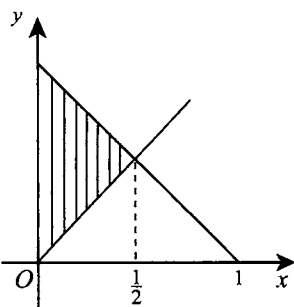
方法 3. 设 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 且 X_1 和 X_2 相互独立, 不难验证 $X = \max(X_1, X_2)$ 的分布函数就是 $F_1(x)F_2(x)$.

总之, 答案应选 (D).

二

1.【简解】 $P\{X + Y \leq 1\} = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} 6x dy = \int_0^{\frac{1}{2}} 6x(1-2x) dx = \frac{1}{4}.$$



2.【简解】 本题是数四 2004 年考题, 考查均匀分布, 二维随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度, 当年的得分率仅为 0.204. 主要的困难在于对条件概率密度的理解.

(I) 根据题意有 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 然后写出, 当 $0 < x < 1$ 时,

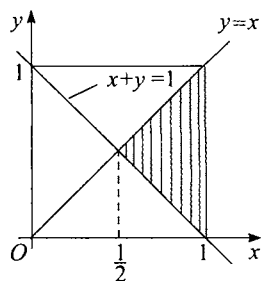
$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 因此, 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 进一步}$$

推得当 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ 时,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(II) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(III) P\{X+Y > 1\} = \iint_{x+y>1} f(x, y) dx dy \\ = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x \frac{1}{x} dy = 1 - \ln 2$$



3.【简解】 本题是2001年数三的考题，考查两个随机变量函数的分布和均匀分布。

设 U 的分布函数为 $F(u)$ ，则

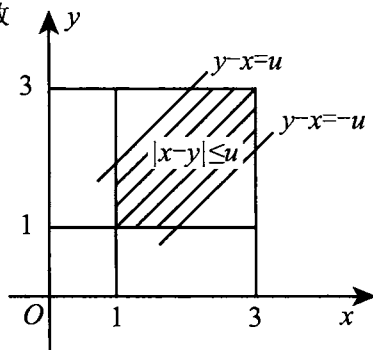
$$F(u) = P\{U \leq u\} = P\{|X-Y| \leq u\}$$

$$= \iint_{|x-y| \leq u} f(x, y) dx dy$$

$$\text{其中 } f(x, y) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 < u < 2 \text{ 时, } F(u) = 1 - \frac{1}{4}(2-u)^2$$

$$\text{最后得到 } p(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



4.【简解】 本题是2003年数三的考题，考查一个离散型和一个连续型两个随机变量的函数的分布，随机变量的独立性等。

先求分布函数

$$G(u) = P\{U \leq u\} = P\{X+Y \leq u\}$$

$$= P\{X=1\}P\{X+Y \leq u | X=1\} + P\{X=2\}P\{X+Y \leq u | X=2\}$$

$$= 0.3P\{1+Y \leq u\} + 0.7P\{2+Y \leq u\}$$

$$= 0.3F(u-1) + 0.7F(u-2), \text{其中 } F(y) \text{ 为 } Y \text{ 的分布.}$$

$$\text{由此得 } g(u) = 0.3f(u-1) + 0.7f(u-2)$$

三

1.【简解】 本题是2011年数三的考题，考查二维均匀分布，边缘密度和条件密度等知识点。

首先把 G 的表达式写出 $G: 0 \leq y \leq x \leq 2-y$

$$\text{然后写出 } f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2-y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{再求出 (I) } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{最后求 (II) } f_{X|Y}(x | y) = \frac{F(x, y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0$$

$$\text{其中 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$f_Y(y) > 0$ 等价于 $0 \leq y \leq 1$

所以当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-y)}, & 0 \leq y \leq x \leq 2-y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【评注】 我们也可以把 G 表示成 $G: 0 < y < x < 2-y$. 这样得到的 $f_X(x)$ 和 $f_{X|Y}(x|y)$ 表达式中会少一些等号, 两种答案是等价的, 因为概率密度是不受个别值点的变化而影响性质.

第四章 随机变量的数字特征

—

1. 【简解】 显然 X 是一个离散型随机变量, 取值范围为 $1, 2, 3, \dots$. 关键在于建立 X 的分布律. 生产线上每个产品的生产可以理解成一次试验, 而且是独立重复试验, 生产了 X 个产品停机, 就是说第 X 个产品是不合格, 而前 $X-1$ 产品全合格, 故 $P\{X=k\} = q^{k-1}p, k=1, 2, \dots, q=1-p$

$$EX = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}p = p \left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^k \right)' = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1}p = p \left[q \left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^k \right)' \right]' = \frac{2-p}{p^2}, DX = \frac{1-p}{p^2}.$$

2. 【简解】 如果将观察 X 理解为试验, 观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 理解为试验成功, 则 Y 表示独立地重复试验 4 次成功的次数, 即 $Y \sim B(4, p)$

$$\text{其中 } p = \{X > \frac{\pi}{3}\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2 = np(1-p) + (np)^2 = 5$$

3. 【简解】 问题(1)和(2)的求解在于乙箱中次品件数 X , 而 X 又取次于从甲箱中任取 3 件产品中所含的次品数

$$(1) P\{X=k\} = C_3^k C_3^{3-k} / C_6^3, k=0, 1, 2, 3.$$

$$\text{因此 } E(X) = \sum_{k=0}^3 kP\{X=k\} = \frac{3}{2}.$$

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率为

$$P(A) = \sum_{k=0}^3 P\{X=k\}P\{A|X=k\} = \frac{1}{20} \times 0 + \frac{9}{20} \times \frac{1}{6} + \frac{9}{20} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{20} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}.$$

$$4. 【简解】 P\{X > \sqrt{D(X)}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-1}$$

答案应填 e^{-1} .

5. 【简解】 本题是一个利用均匀分布, 随机变量的数学期望的应用题. 关键是求出利润的函

数 $g(X; a)$, 其中 a 是进货量.

当 $X > a$ 时, 进货全售出, 得利润 $500a$, 再去调剂获利 $300(X - a)$

当 $X \leq a$ 时, 销售得利 $500X$, 多余的削价处理亏损 $100(a - X)$

$$\text{所以 } g(X; a) = \begin{cases} 300X + 200a & a < x \leq 30 \\ 600X - 100a & 10 \leq x \leq a \end{cases}$$

$$E[g(X; a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x; a) f_X(x) dx \geq 9280, \text{ 其中 } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 10 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

解得 $20 \frac{2}{3} \leq a \leq 26$, 最小进货量为 21 单位.

【评注】 本题是 1998 年数四的考题. 这类考题在数三和数四应用题中时有出现. 下列的 6 题就是 1998 年数三的考题. 这类题的关键是求出利润的函数, 近几年数三与数一考题相对比较一致. 数四合并到数三, 此类“经济应用题”考得很少了.

6. **【简解】** 利润函数应为 $g(X, Y) = \begin{cases} 1000Y, & Y \leq X \\ 500(X + Y), & Y > X \end{cases}$

$$\text{而 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \leq x \leq 20, \quad 10 \leq y \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{每周利润的期望值 } E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy = 14166.67 \text{ 元}$$

二

1. **【简解】** 本题要求计算 $\text{cov}(X_1, Y)$ 和 $D(X_1 + Y)$, 其中 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

由于 X_1 与 Y 不是相互独立, 如果按定义来直接计算会比较复杂.

应该将 Y 中的 X_1 分离出来, 再用独立性来计算, 计算量减少.

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, Y) &= \text{cov}\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \text{cov}\left(X_1, \frac{1}{n} X_1\right) + \text{cov}\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sigma^2 + 0 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

答案应选(A).

三

1. **【简解】** ξ 与 η 不相关的充分必要条件是它们的相关系数 $\rho_{XY} = 0$

而 $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D(\xi)} \sqrt{D(\eta)}}$, 所以只要考察 $\text{cov}(\xi, \eta)$ 是否为 0.

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= \text{cov}(X + Y, X - Y) = \text{cov}(X, X) + \text{cov}(Y, X) - \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(Y, Y) \\ &= \text{cov}(X, X) - \text{cov}(Y, Y) = DX - DY = 0 \end{aligned}$$

答案应选(B).

2. **【简解】** 掷硬币结果不是正面向上就是反面向上. 所以 $X + Y = n$

从 $Y = n - X$ 不难看出相关系数为 -1 .

$$\text{事实上, } \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, n - X)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(n - X)}} = \frac{-D(X)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(X)}} = -1$$

答案应选(A)

3.【简解】 本题考查二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布, 协方差和相关系数.

(I) 首先要求 (X, Y) 的概率分布, 可将题设条件 $P(A) = \frac{1}{4}$ 表示为

$\begin{array}{c} Y \\ X \end{array}$	\bar{B}	B	
	0	1	
\bar{A} 0			
A 1			$\frac{1}{4}$

然后再根据

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{得 } P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{得 } P(B) = \frac{1}{6}$$

$\begin{array}{c} Y \\ X \end{array}$	\bar{B}	B	
	0	1	
\bar{A} 0			
A 1		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{6}$	

最后得

$\begin{array}{c} Y \\ X \end{array}$	0	1	
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	

(II) 考虑到 X, Y 和 XY 均服从 0-1 分布, 所以

$$E(X) = \frac{1}{4}, E(Y) = \frac{1}{6}, D(X) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, D(Y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36},$$

$$E(XY) = 0 \cdot P\{XY = 0\} + 1 \cdot P\{XY = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\frac{3}{16}} \sqrt{\frac{5}{36}}} = \frac{\frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{3}{16}} \times \sqrt{\frac{5}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

所以 X, Y 的相关系数为 $\rho_{XY} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

第五章 大数定律和中心极限定理

1.【简解】 $P\{|X - EX| \geq 2\} \leq \frac{DX}{2^2} = \frac{1}{2}$

答案应填 $\frac{1}{2}$

2.【简解】 本题是数三考题, 设 n 是所求箱数, 又设第 i 箱的重量是 X_i (千克) $i = 1, 2, \dots, n$. 显然 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布. 根据中心极限定理 $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从正态分布 $N(50n, 25n)$

$$P\{T_n \leq 5000\} = P\left\{\frac{T_n - 50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2)$$

由此可见 $\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$, 解得 $n < 98.0199$

答案最多可以装 98 箱.

3.【简解】 本题是数四的考题. 答案应选 (C)

4.【简解】 本题是数三的考题, 根据切比雪夫大数定律或者辛钦大数定律

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \text{ 依概率收敛于 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [DX_i + (EX_i)^2] = \frac{1}{2}$$

答案应填 $\frac{1}{2}$

5.【简解】 本题是数四的考题. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布、方差存在. 根据中心极限定理

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} \leq x\right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \leq x\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x) \end{aligned}$$

答案应选 (C).

第六章 数理统计的基本概念

1.【简解】 显然, $E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = D(X) = \sigma^2$

$$\begin{aligned} \text{方法 1: } Y &= \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 + X_{n+i}^2 + 4\bar{X}^2 + 2X_i X_{n+i} - 4X_i \bar{X} - 4X_{n+i} \bar{X}) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} X_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n X_i X_{n+i} - 4n\bar{X}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EY &= \sum_{i=1}^{2n} E(X_i^2) + 2 \sum_{i=1}^n E(X_i)E(X_{n+i}) - 4nE(\bar{X}^2) \\ &= 2n(\sigma^2 + \mu^2) + 2n\mu^2 - 4n\left(\frac{\sigma^2}{2n} + \mu^2\right) = 2(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\text{方法 2: } \bar{X}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{X}'' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n+i}$$

$$\text{显然有 } \bar{X}' + \bar{X}'' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i}) = 2\bar{X}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } E(Y) &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2\right] = E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}') + (X_{n+i} - \bar{X}'')]^2\right\} \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}')^2\right] + 0 + E\left[\sum_{i=1}^n (X_{n+i} - \bar{X}'')^2\right] = 2(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

方法3: 可以把 $(X_1 + X_{n+1}), (X_2 + X_{n+2}), \dots, (X_n + X_{n+i})$ 看成取自总体 $N(2\mu, 2\sigma)$ 的简单随机样本,

$$\text{其样本均值 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i}) = 2\bar{X}, \text{ 样本方差, } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2 = \frac{Y}{n-1}$$

$$\text{所以 } E(Y) = (n-1)E\left(\frac{Y}{n-1}\right) = (n-1) \cdot 2\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2$$

【评注】 显然方法3比较计算量小,这也是我们在命制本题时最希望考生能使用的解法.

2.【简解】 求解这类问题关键在于熟记产生 χ^2 分布, t 分布和 F 分布的随机变量典型模式, 现 $X \sim t(n)$, 就可以将 X 表示成

$$X = \frac{Y_1}{\sqrt{Y_2/n}}$$

其中 $Y_1 \sim N(0, 1), Y_2 \sim \chi^2(n)$ 且 Y_1 与 Y_2 相互独立,

$$\text{所以 } Y = \frac{1}{X^2} = \frac{Y_2/n}{Y_1^2/1}$$

其中 $Y_1^2 \sim \chi^2(1), Y_2 \sim \chi^2(n), Y_1^2$ 与 Y_2 独立, 因此 $Y \sim F(n, 1)$

答案应选(C)

3.【简解】 本题是数三的考题, 主要考查 t 随机变量的典型模式:

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \text{ 其中要求 (1) } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立, (2) } X \sim N(0, 1), (3) Y \sim \chi^2(n)$$

为证明 $Z \sim t(z)$, 不妨设 $\chi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y_1 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6}), Y_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$

且 Y_1 与 Y_2 相互独立. 因此 $D(Y_1 - Y_2) = \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3} = \frac{\sigma^2}{2}$, 且 $(Y_1 - Y_2) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2})$

从而 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$, 把 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}$ 看成 X , 满足条件(2)

$\chi^2 = \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$ 且与 Y_2 独立, 当然也与 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}$ 独立. 如果把 χ^2 看成 $Y, Y \sim \chi^2(2)$, 满足条

件(3), χ^2 与 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}$ 独立. 满足条件(1). 总之

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}/2}} = \frac{X}{\sqrt{Y/2}} \sim t(2)$$

4.【简解】 本题是数三的考题. 由于 $X \sim N(0, 2^2)$, 则

$$(\frac{X_1}{2})^2 + \dots + (\frac{X_{10}}{2})^2 \sim \chi^2(10) \text{ 和 } (\frac{X_{11}}{2})^2 + \dots + (\frac{X_{15}}{2})^2 \sim \chi^2(5)$$

且相互独立, 故

$$\frac{[(\frac{X_1}{2})^2 + \dots + (\frac{X_{10}}{2})^2]/10}{[(\frac{X_{11}}{2})^2 + \dots + (\frac{X_{15}}{2})^2]/5} \sim F(10, 5)$$

答案应填服从 F 分布, 参数为 $(10, 5)$

5.【简解】 本题是数三考题

方法 1: X 和 Y 均服从 $N(0, 1)$, 故 X^2 和 Y^2 都服从 $\chi^2(1)$ 分布.

答案应选 (C).

方法 2: (A) 不成立, 因题中条件既没有 X 与 Y 相互独立, 也没有假定 (X, Y) 正态, 故就保证不了 $X+Y$ 正态.

(B) 和 (D) 均不成立, 因为没有 X 与 Y 的相互独立, 所以也没有 X^2 与 Y^2 相互独立, 答案应选 (C).

【评注】 我们可以小结正态分布一维和二维间的关系如下:

(1) 当 (X, Y) 正态时, X 与 Y 均正态, 且任何 $aX+bY$ 也正态.

反之, X 与 Y 均正态, 不能保证 (X, Y) 二维正态, 也不能保证 $aX+bY$ 正态.

如果对于任何 $aX+bY$ 均正态, 则 (X, Y) 二维正态.

(2) 当 X 与 Y 均正态且相互独立是指 (X, Y) 二维正态, 且相关系数 $\rho_{XY} = 0$.

6.【简解】 本题是数三考题记 $S_X^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2$ 和 $S_Y^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2$

$$\begin{aligned} \text{则: } E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] &= E \left[\frac{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] \\ &= \frac{(n_1-1)E(S_X^2) + (n_2-1)E(S_Y^2)}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{(n_1-1)\sigma^2 + (n_2-1)\sigma^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2 \end{aligned}$$

答案应填 σ^2

7.【简解】 本题是数三考题.

$$E(S^2) = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-x} dx = 2$$

【答案】 2.

第七章 参数估计

1.【简解】 矩估计求唯一参数 θ , 所以只涉及一阶矩. 令样本矩等于总体矩即可以解出 θ .

(1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3} (\theta - x) dx = \frac{\theta}{2}$, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 令 $\frac{\theta}{2} = \bar{X}$, 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$.

$$(2) \text{ 由于 } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3} (\theta - x) dx = \frac{6\theta^2}{20},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{6\theta^2}{20} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{20}.$$

所以 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ 的方差为

$$D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{\theta^2}{5n}.$$

2.【简解】 最大似然估计法的关键在于写出似然函数 $L(\theta)$, 现在题设给出 $f(x; \theta)$, 则

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

似然函数为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} 2^n e^{-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, & x_i > \theta, \quad i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当 $x_i > \theta, i = 1, 2, \dots, n$ 时, $L(\theta) > 0$, 取对数, 得

$$\ln L(\theta) = n \ln 2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta).$$

因为

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 2n > 0,$$

所以 $L(\theta)$ 单调增加. 要取 $L(\theta)$ 最大, θ 越大、越好, 但 θ 必须满足 $\theta < x_i, i = 1, 2, \dots, n$. 因此, 当 θ 取 x_1, x_2, \dots, x_n 中的最小值时, $L(\theta)$ 取最大值, 所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

3.【简解】 先求矩估计值

$$E(X) = 0 \times \theta^2 + 1 \times 2\theta(1 - \theta) + 2 \times \theta^2 + 3 \times (1 - 2\theta) = 3 - 4\theta.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \times (3 + 1 + 3 + 0 + 3 + 1 + 2 + 3) = 2.$$

令 $E(X) = \bar{x}$, 即 $3 - 4\theta = 2$, 解得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta} = \frac{1}{4}$.

对于给定的样本值似然函数为 $L(\theta) = 4\theta^6(1 - \theta)^2(1 - 2\theta)^4$. 有

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6 \ln \theta + 2 \ln(1 - \theta) + 4 \ln(1 - 2\theta),$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1 - \theta} - \frac{8}{1 - 2\theta} = \frac{6 - 28\theta + 24\theta^2}{\theta(1 - \theta)(1 - 2\theta)}.$$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$ 解得

$$\theta_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12},$$

因 $\frac{7 \pm \sqrt{13}}{12} > \frac{1}{2}$ 不合题意, 所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{7 - \sqrt{13}}{12}$.

4.【简解】 矩估计要求出总体的矩, 这要求先求出总体 X 的密度函数 $f(x; \beta) = F'(x; \beta)$.

$$f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

有了概率密度 $f(x; \beta)$ 就不难写出似然函数 $L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta)$.

【详解】 (I) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \beta) dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{\beta}{x^{\beta+1}} dx = \frac{\beta}{\beta-1}$.

令 $\frac{\beta}{\beta-1} = \bar{X}$, 解得 $\beta = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$, 所以参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(II) 似然函数

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^n}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i > 1 (i = 1, 2, \cdots, n), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当 $x_i > 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, $L(\beta) > 0$, 取对数得

$$\ln L(\beta) = n \ln \beta - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

对 β 求导, 得 $\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i$, 令 $\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = 0$, 可得 $\beta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$.

故 β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$.

二

1. 【简解】 利用公式 $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ 就不难求得 $F(x)$ 和 $F_{\hat{\theta}}(x)$. 无偏性的讨论只需求出 $E(\hat{\theta})$.

$$(1) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) F_{\hat{\theta}}(x) &= P\{\hat{\theta} \leq x\} = P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq x\} \\ &= 1 - P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x\} P\{X_2 > x\} \cdots P\{X_n > x\} \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n = \begin{cases} 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $\hat{\theta}$ 的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x) = F'_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta. \end{cases}$$

因为 $E(\hat{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{\theta}}(x) dx = \int_{\theta}^{+\infty} 2nx e^{-2n(x-\theta)} dx = \theta + \frac{1}{2n} \neq \theta$, 所以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

2. 【简解】 区间估计不是经常考的一个考点, 一般都考单个正态总体方差已知条件下, 求期望值 μ 的置信区间问题, 置信区间为:

$$(\bar{x} - \mu_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \mu_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}),$$

其中 $P\{|U| < \mu_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha, U \sim N(0, 1)$.

现题给 $1-\alpha=0.95$, $P\{|U|<\mu_{\alpha/2}\}=P\{-\mu_{\alpha/2}<U<\mu_{\alpha/2}\}=2\Phi(\mu_{\alpha/2})-1=0.95$, $\Phi(\mu_{\alpha/2})=0.975$, 查得 $\mu_{\alpha/2}=1.96$. 将 $\sigma=1$, $n=16$, $\bar{x}=40$, 代入 $(\bar{x}-\mu_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\mu_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 得置信区间 $(40-1.96\times\frac{1}{4}, 40+1.96\times\frac{1}{4})$,

【答案】 (39.51, 40.49).

第八章 假设检验

1. **【详解】** 设该次考试的考生成绩为 X , 则 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$. 把从 X 中抽取的容量为 n 的样本均值记为 \bar{X} , 样本标准差记为 S . 本题就是要在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0:\mu=70$; $H_1:\mu\neq 70$.

由于 σ^2 未知, 故用 t 检验, 选用检验统计量.

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1).$$

现在 $\mu_0=70$, $n=36$.

拒绝域为

$$|t| = \frac{|\bar{x} - 70|}{s} \sqrt{36} \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(35).$$

由 $\bar{x}=66.5$, $s=15$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(35)=t_{0.975}(35)=2.0301$, 算得

$$|t| = \frac{|66.5 - 70|}{15} \sqrt{36} = 1.4 < 2.0301.$$

所以接受假设 $H_0:\mu=70$, 即在显著水平 0.05 下, 可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

	2011 年	2010 年	2009 年	2008 年	2007 年	2006 年	2005 年
1	P53,6	P38,5	P43,9	P68,6	P44,10	P36,3	P55,9
2	P113,4	P80,5	P88,1	P87,15	P55,10	P121,2	P120,1
3	P84,12	P74,11	P69,8	P122,6	P64,1	P105,11	P86,14
4	P65,2	P88,2	P110,2	P35,1	P47,1	P77,1	P105,10
5	P180,3	P185,8	P193,5	P181,4	P54,8	P177,3	P176,2
6	P196,2	P210,5	P182,5	P213,2	P98,2	P258,3	P256,1
7	P259,6	P254,2	P268,2	P258,5	P191,4	P53,7	P49,2
8	P269,4	P255,3	P264,11	P272,7	P216,6	P93,6	P68,7
9	P75,12	P50,3	P80,4	P121,3	P252,2	P110,1	P79,1
10	P121,4	P66,4	P123,7	P51,4	P258,4	P82,8	P80,2
11	P81,6	P99,4	P97,1	P112,3	P66,3	P190,3	P190,2
12	P99,5	P95,8	P94,7	P107,13	P80,3	P180,2	P179,1
13	P215,5	P193,6	P206,2	P205,1	P122,5	P251,1	P257,2
14	P269,5	P269,3	P281,6	P268,1	P103,8	P254,1	P275,1
15	P39,6	P123,8	P84,11	P37,4	P184,6	P91,4	P92,5
16	P81,7	P51,5	P115,7	P99,3	P252,3	P40,7	P114,5
17	P58,12	P72,10	P78,2	P83,10	P83,9	P117,9	P67,5
18	P35,2	P115,8	P60,15	P70,9	P106,12	P85,13	P60,14
19	P90,3	P104,9	P107,14	P118,10	P59,13	P102,7	P101,6
20	P188,1	P201,6	P200,5	P184,7	P114,6	P197,3	P212,1
21	P210,6	P214,4	P214,3	P198,4	P202,7	P208,3	P195,1
22	P272,8	P266,13	P265,12	P263,10	P209,4	P261,8	P260,7
23	P279,4	P281,7	P278,3	P280,5	P261,9	P277,1	P270,6
24					P278,2		

