



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

# Physics

## 普通物理学

第六版

# 习题分析与解答

■ 孙迺疆 胡盘新



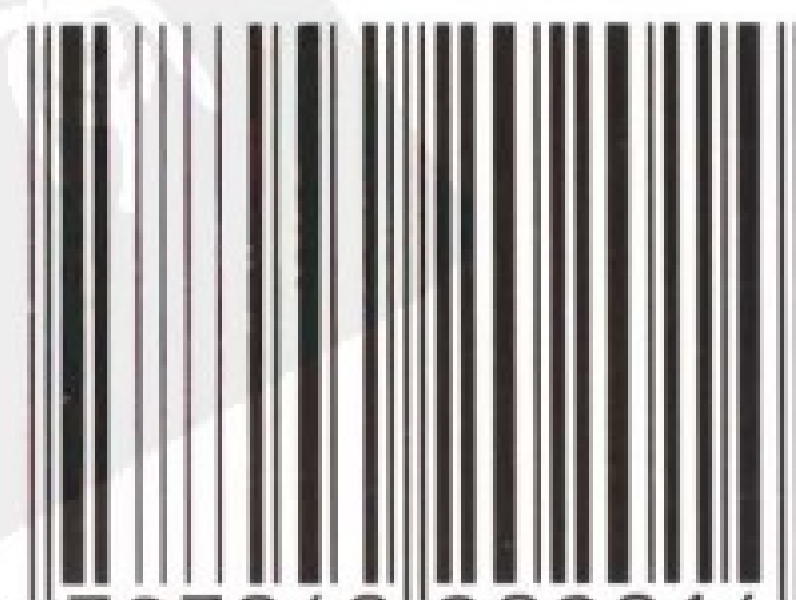
高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

# Physics

普通物理学（第六版）  
（程守洙、江之永主编）教学包

- ☐ 普通物理学（第六版）（上册）
- ☐ 普通物理学（第六版）（下册）
- ☒ 普通物理学（第六版）习题分析与解答
- ☐ 普通物理学（第六版）思考题分析与拓展
- ☐ 普通物理学（第六版）学习指导
- ☐ 普通物理学（第六版）电子教案
- ☐ 中国高校物理课程网

ISBN 7-04-020201-8



9 787040 202014 >

定价 30.00 元

查询其他教学用书，敬请浏览  
[www.hep-st.com.cn](http://www.hep-st.com.cn)



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

# 普通物理学

第六版

## 习题分析与解答



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容简介

本书是为配合程守洙、江之永主编,胡盘新、汤毓骏、钟季康等修订的《普通物理学》(第六版)而编写的学习参考书。全书按主教材的章节顺序编排,在每章的开始先给出本章解题方法的归纳总结,然后对教材所有习题做了分析和解答。解题中注重分析解题的思路和方法,旨在启迪思维,提高分析问题和解决问题的能力,对有些习题还给出了不同的解题方法,有的还对结果进行了讨论,以开阅读者的思路。本书对于培养学生学习素质、提高学习能力将会有所帮助。

本书适合高等学校理工科各专业,特别是使用程守洙、江之永主编,胡盘新等修订的《普通物理学》(第六版)的学生作为学习参考书,也可供相关教师在教学中参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

普通物理学(第六版)习题分析与解答/孙迺疆,胡盘新

—北京:高等教育出版社,2006.12

ISBN 7-04-020201-8

I. 普... II. ①孙... ②胡... III. 普通物理学—  
高等学校—解题 IV. O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131183 号

策划编辑	刘伟	责任编辑	王文颖	封面设计	王凌波
责任绘图	杜晓丹	版式设计	王艳红	责任校对	刘莉
责任印制	毛斯璐				

---

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100011  
总 机 010-58581000  
经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 唐山市润丰印务有限公司

开 本 787×960 1/16  
印 张 26.25  
字 数 490 000

购书热线 010-58581118  
免费咨询 800-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landraco.com>  
<http://www.landraco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>  
版 次 2006 年 12 月第 1 版  
印 次 2006 年 12 月第 1 次印刷  
定 价 30.00 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20201-00

# 前言

著名理论物理学家索末菲 (A. Sommerfeld) 曾写信告诫他的学生海森伯 (W. K. Heisenberg 1932 年诺贝尔物理学奖获得者):“要勤奋地去做练习,只有这样,你才会发现,哪些你理解了,哪些你还没有。”

在大学物理课程学习的过程中,做习题是一个重要的教学环节。它不仅能检查学生对课程基本内容的理解和掌握的程度,还能巩固所学的知识,拓展并深化对基本概念和基本规律的理解,有利于提高分析问题和解决问题的能力。为了帮助学生掌握正确的解题方法,根除不求甚解地乱套公式、拼凑答案的不良习惯,我们配合程守洙、江之永主编,胡盘新(上海交通大学)、汤毓骏(东华大学)和钟季康(同济大学)修订的《普通物理学》(第六版)主教材,编写了这本《习题分析与解答》教学参考书。本书给出了《普通物理学》(第六版)全部习题的分析和解答。我们在解题中注重分析解题的思路和方法,旨在启迪思维,提高分析问题和解决问题的能力。对有些习题还给出了不同的解题方法,一题多解;有的还对结果进行了讨论,以开阔读者的思路。为了方便读者使用本书,我们把每章的习题进行分类,并指出本章的基本要求。

做习题是一个运用所学的知识去分析、解决问题的过程,是一个需要进行独立思考的过程。我们希望读者对相关的习题先经过独立思考的过程,再来阅读本书的习题分析和解答。

本书由孙迺疆(上海大学)和胡盘新(上海交通大学)主编,参加编写的还有庄良、葛永华、陈爱明等。本书的出版得到了高等教育出版社刘伟同志的大力支持,在此特致谢意。限于编者水平,书中难免存在错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编者

2006 年 7 月

# 目 录

<b>第一章</b>	<b>力和运动</b>	<b>1</b>
一、教学基本要求	.....	1
二、本章习题分类	.....	1
三、习题分析和解答	.....	1
<b>第二章</b>	<b>运动的守恒量和守恒定律</b>	<b>41</b>
一、教学基本要求	.....	41
二、本章习题分类	.....	41
三、习题分析和解答	.....	41
<b>第三章</b>	<b>刚体和流体的运动</b>	<b>84</b>
一、教学基本要求	.....	84
二、本章习题分类	.....	84
三、习题分析和解答	.....	84
<b>第四章</b>	<b>相对论基础</b>	<b>107</b>
一、教学基本要求	.....	107
二、本章习题分类	.....	107
三、习题分析和解答	.....	107
<b>第五章</b>	<b>气体动理论</b>	<b>119</b>
一、教学基本要求	.....	119
二、本章习题分类	.....	119
三、习题分析和解答	.....	119
<b>第六章</b>	<b>热力学基础</b>	<b>131</b>
一、教学基本要求	.....	131

二、本章习题分类 .....	131
三、习题分析和解答 .....	131
<b>第七章 静止电荷的电场</b>	<b>152</b>
一、教学基本要求 .....	152
二、本章习题分类 .....	152
三、习题分析和解答 .....	152
<b>第八章 恒定电流的磁场</b>	<b>203</b>
一、教学基本要求 .....	203
二、本章习题分类 .....	203
三、习题分析和解答 .....	203
<b>第九章 电磁感应 电磁场理论</b>	<b>240</b>
一、教学基本要求 .....	240
二、本章习题分类 .....	240
三、习题分析和解答 .....	240
<b>第十章 机械振动和电磁振荡</b>	<b>265</b>
一、教学基本要求 .....	265
二、本章习题分类 .....	265
三、习题分析和解答 .....	265
<b>第十一章 机械波和电磁波</b>	<b>293</b>
一、教学基本要求 .....	293
二、本章习题分类 .....	293
三、习题分析和解答 .....	293
<b>第十二章 光学</b>	<b>325</b>
一、教学基本要求 .....	325
二、本章习题分类 .....	325
三、习题分析和解答 .....	325
<b>第十三章 早期量子论和量子力学基础</b>	<b>367</b>
一、教学基本要求 .....	367
二、本章习题分类 .....	367

三、习题分析和解答 .....	367
<b>第十四章 激光和固体的量子理论</b> .....	<b>397</b>
一、教学基本要求 .....	397
二、本章习题分类 .....	397
三、习题分析和解答 .....	397
<b>第十五章 原子核物理和粒子物理简介</b> .....	<b>403</b>
一、教学基本要求 .....	403
二、本章习题分类 .....	403
三、习题分析和解答 .....	403

# 第一章

## 力和运动

### 一、教学基本要求

1. 掌握对质点运动的描述方法. 能分析质点作直线运动和平面内曲线运动时的位置矢量、位移、速度和加速度, 作圆周运动、曲线运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度.

2. 掌握应用微分和积分求运动量或运动方程的方法. 熟悉矢量的表示法和基本运算法则. 能用微积分方法求解一维变力作用下简单的质点动力学问题.

3. 理解伽利略相对性原理, 会运用伽利略坐标变换式和速度变换式分析相对运动的问题. 了解惯性力概念, 了解在非惯性系中分析质点动力学问题的基本方法.

4. 掌握牛顿三定律及其适用条件. 掌握用隔离体法分析质点的受力和解题的基本方法.

### 二、本章习题分类

1. 质点的直线运动
2. 由速度和加速度求运动学方程或由运动学方程求速度和加速度
3. 平面内质点的曲线运动, 切向加速度和法向加速度
4. 抛体运动
5. 相对运动
6. 恒力作用下的直线运动和曲线运动
7. 非惯性参考系中物体的运动
8. 变力问题

### 三、习题分析和解答

1. 质点的直线运动

1-1. 质点按一定规律沿  $x$  轴作直线运动,在不同时刻的位置如下:

$t/s$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$x/m$	3.00	3.14	3.29	3.42	3.57

- (1) 画出位置对时间的曲线;
- (2) 求质点在 1 s 末到 3 s 末这段时间内的平均速度;
- (3) 求质点在  $t=0$  时的位置.

分析: 根据质点在不同时刻的位置,可画出  $x-t$  曲线,或得到质点在这段时间内的运动规律,即运动学方程  $x(t)$ . 质点在一段时间内的平均速度对应  $x-t$  曲线在该时间间隔内割线的斜率; $v-t$  曲线下的面积是质点在一段时间内位移的大小;质点在  $t=0$  时的位置,可以由运动学方程  $x(t)$  得到,也可以将  $x-t$  曲线外推得到.

解: (1) 根据质点在不同时刻的位置,画出的  $x-t$  曲线如解图 1-1 所示,这是一条直线,其斜率为常数,因此这个质点所作的运动是不变方向的匀速直线运动.

(2) 由平均速度的定义,得到质点在 1 s 末到 3 s 末这段时间内平均速度的大小为

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} = \frac{3.57 - 3.00}{3.0 - 1.0} \text{ m/s} = 0.285 \text{ m/s}$$

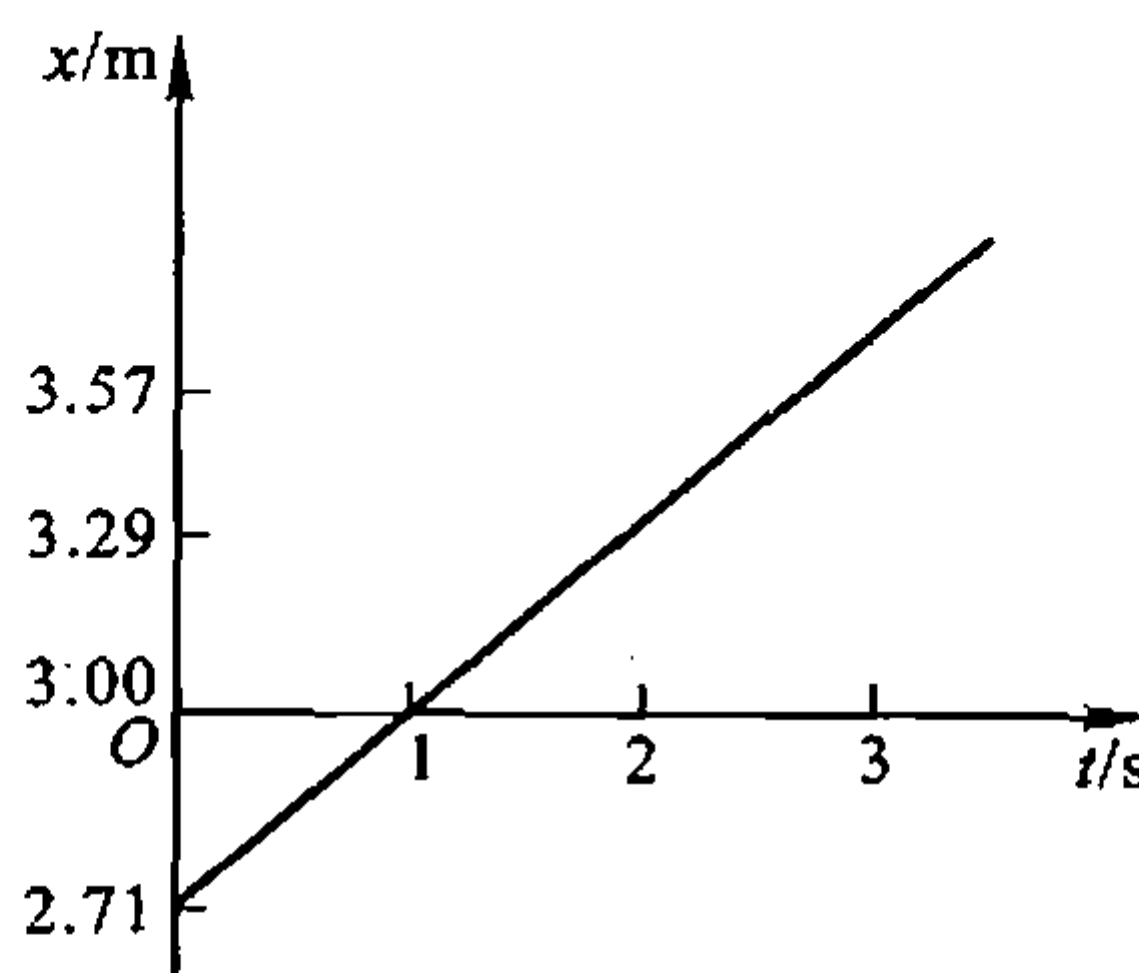
由  $x-t$  曲线的斜率为一常数可知,这个质点在任意时刻瞬时速度的大小与一段时间内平均速度的大小是相等的.

(3) 匀速直线运动的规律是  $x = x_0 + \bar{v}t$

代入  $t=1.0 \text{ s}$ ,  $x_1=3.00 \text{ m}$ , 得

$$x_0 = x_1 - \bar{v}t_1 = 3.00 \text{ m} - 0.29 \times 1 \text{ m} = 2.71 \text{ m}$$

即  $t=0$  时质点在 2.71 m 处.



解图 1-1

1-2. 一质点沿  $Ox$  轴运动,坐标与时间的变化关系为  $x = 4t - 2t^3$ , 式中  $x$ 、 $t$  分别以 m、s 为单位,试计算:

- (1) 在最初 2 s 内的平均速度,2 s 末的瞬时速度;
- (2) 1 s 末到 3 s 末的位移、平均速度;
- (3) 1 s 末到 3 s 末的平均加速度;此平均加速度是否可用  $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2}{2}$  计算?
- (4) 3 s 末的瞬时加速度.

分析：质点沿  $Ox$  轴作直线运动时，其位移、速度、加速度等矢量的方向都可以用标量的正或负表示。本题中，质点的运动学方程  $x$  是  $t$  的三次函数，因此在质点的运动过程中，位移和速度都将变换方向，而加速度随时间  $t$  作线性变化。所以，质点作匀变加速直线运动。

解：(1) 在最初 2 s 内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_0}{\Delta t} = \frac{(4 \times 2 - 2 \times 2^3) - 0}{2 - 0} \text{ m/s} = -4 \text{ m/s}$$

由运动学方程可得瞬时速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = 4 - 6t^2$$

2 s 末的瞬时速度为

$$v_2 = (4 - 6t^2) \big|_{t=2} = (4 - 6 \times 2^2) \text{ m/s} = -20 \text{ m/s}$$

“-”号表示质点向  $Ox$  轴负方向运动。

(2) 1 s 末到 3 s 末的位移为

$$\Delta x = x_3 - x_1 = [(4 \times 3 - 2 \times 3^3) - (4 \times 1 - 2 \times 1^3)] \text{ m} = -44 \text{ m}$$

1 s 末到 3 s 末的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{x_3 - x_1}{\Delta t} = \frac{-44 - 0}{3 - 1} \text{ m/s} = -22 \text{ m/s}$$

“-”号表示质点向  $Ox$  轴负方向运动。

(3) 1 s 末到 3 s 末的平均加速度的大小为

$$\bar{a} = \frac{v_3 - v_1}{\Delta t} = \frac{[(4 - 6 \times 3^2) - (4 - 6 \times 1^2)]}{3 - 1} \text{ m/s}^2 = -24 \text{ m/s}^2$$

式中“-”号表示质点的加速度沿向  $x$  轴负方向。

本题中的加速度  $a = \frac{dv}{dt} = -12t$  随  $t$  作线性变化，用  $\bar{a} = \frac{a_1 + a_3}{2}$  虽可求得与 (3) 相同的计算结果，但这只是在  $a-t$  为线性关系时的特例，不具有普遍性。比如，当  $a = At^2$  时，两种算法的结果不可能一致。所以，用  $\bar{a} = \frac{a_1 + a_3}{2}$  求质点运动的平均加速度是错误的。

(4) 3 s 末的瞬时加速度

$$a_3 = -12t \big|_{t=3} = -12 \times 3 \text{ m/s}^2 = -36 \text{ m/s}^2$$

“-”号表示质点向  $Ox$  轴负方向运动。

讨论：

① 质点沿  $Ox$  轴正方向运动的最大位置

$$\text{令 } \frac{dx}{dt} = v = 4 - 6t^2 = 0, \text{ 得 } t = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.82 \text{ s},$$

$$x_{\max} = \left[ 4 \times \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \times \left( \frac{2}{3} \right)^{3/2} \right] \text{ m} = 2.18 \text{ m}$$

② 质点沿  $Ox$  轴正方向运动的最大速度

$$\text{令 } \frac{dv}{dt} = -12t = 0, \text{ 得 } t = 0 \text{ s}, v_{\max} = v_0 = 4 \text{ m/s.}$$

下表给出质点在各时间段的直线运动状态:

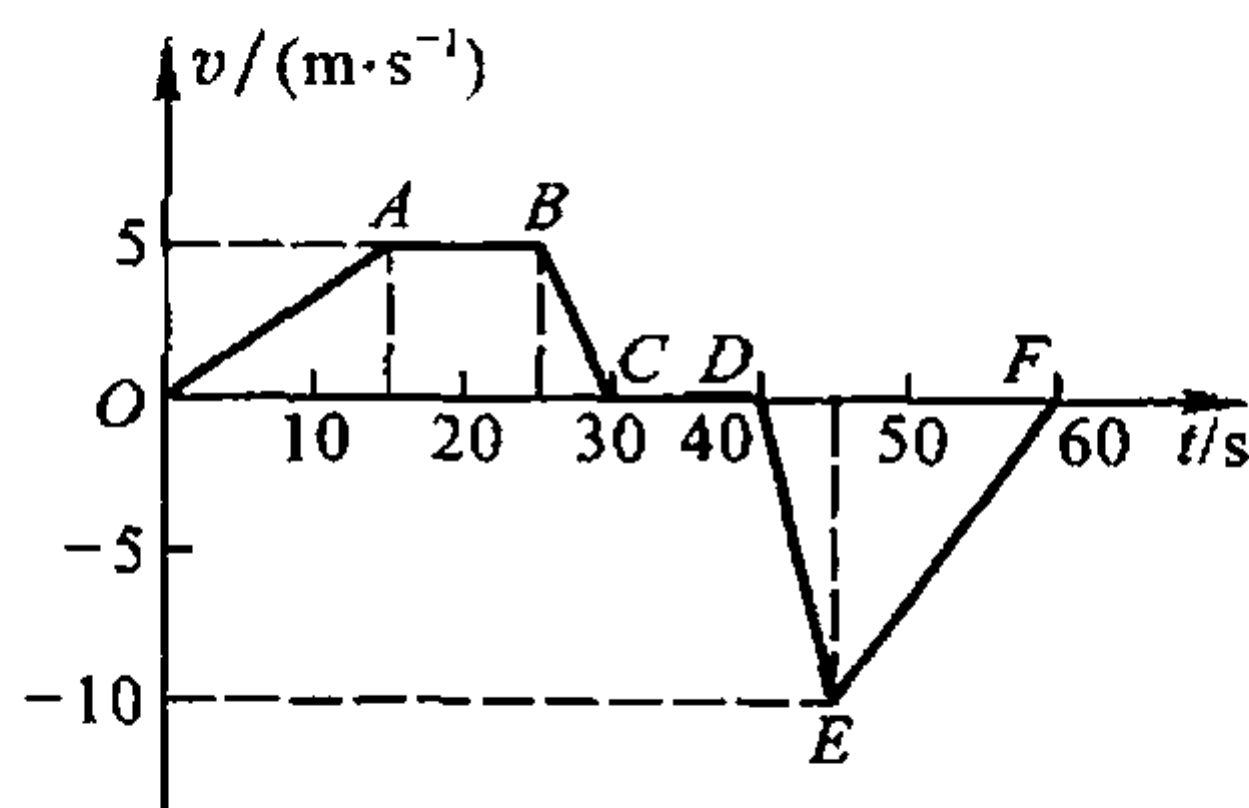
$t/\text{s}$	0	0.82	1.41	$>1.41$
$x/\text{m}$	0	2.18	0	$<0$
$v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	4	0	-8	$<0$
$a/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	0	-9.80	-16.97	$<0$

由表可以看出,质点以初速度  $v_0 = 4 \text{ m/s}$  向  $Ox$  轴正方向运动后,在  $0.82 \text{ s}$  时到达最大位置  $x = 2.18 \text{ m}$ ,速度为 0,然后向  $Ox$  轴负方向作加速运动.在这一时刻后,质点的位移与路程是不相等的.

1-3. 一辆汽车沿着笔直的公路行驶,速度和时间的关系如图中折线  $OABCDEF$  所示.

(1) 试说明图中  $OA, AB, BC, CD, DE, EF$  等线段各表示什么运动?

(2) 根据图中的曲线与数据,求汽车在整个行驶过程中所走过的路程、位移和平均速度.



习题 1-3 图

分析: 在直线运动的  $v-t$  图中,曲线的斜率给出质点在某时刻运动的加速度,曲线下的面积给出质点在这段时间内的位移.题图中  $OA, BC, DE, EF$  的斜率为定值,表示质点作匀变速直线运动; $AB$  斜率为零,表示质点作匀速直线运动; $CD$  速度为零,表示质点处于静止状态; $DEF$  下的面积为负值,表示质点在这段时间内的位移沿  $x$  轴反方向.

解: (1) 在  $v-t$  图的  $OA, AB, BC, CD, DE, EF$  六个过程中,根据各段曲线可得知速度的大小和方向,根据各段曲线的斜率可得到相应的加速度,并判断汽车的运动状态,如下表所示.

$$\begin{aligned} \text{(2) 路程 } s &= |S_{OABC}| + |S_{DEF}| \\ &= \frac{1}{2} \times (30 + 10) \times 5 \text{ m} + \frac{1}{2} \times 20 \times 10 \text{ m} \\ &= 100 \text{ m} + 100 \text{ m} = 200 \text{ m} \end{aligned}$$



即 
$$v_B = \sqrt{\left(\frac{5}{2}b\right)^2 - t^2} - \frac{3}{2}b \quad (1)$$

得加速度 
$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = -\frac{2t}{\sqrt{25b^2 - 4t^2}} \text{ m/s}^2$$

(2) 据题意, 在  $t_1 = 2b$  时,  $v_B = 0$ , 即质点  $B$  停止. 此时质点  $A$  恰好追上质点  $B$ , 即有  $x_{A1} = x_{B1}$ . 由直线 1 可知, 质点  $A$  作  $v_{A0} = 0$  的匀加速直线运动. 由于  $A$ 、 $B$  从同一地点出发, 可设  $x_{A0} = x_{B0} = 0$ . 所以, 有

$$x_{A1} = \frac{1}{2}a_A t_1^2 = x_{B1} \quad (2)$$

由(1)式  $v_B = \frac{dx_B}{dt}$ , 积分可得

$$\begin{aligned} x_{B1} &= \int_0^{2b} v_B dt = \int_0^{2b} \sqrt{\left(\frac{5}{2}b\right)^2 - t^2} dt - \int_0^{2b} \frac{3}{2}b dt \\ &= \frac{25}{8}b^2 \arcsin 0.8 - \frac{3}{2}b^2 = 1.4b^2 \text{ m} \end{aligned}$$

从(2)式可得

$$a_A = \frac{2x_{B1}}{t_1^2} = \frac{2x_{B1}}{(2b)^2} = \frac{2 \cdot 8b^2}{4b^2} = 0.7 \text{ m/s}^2$$

$AB$  两质点同时从同一地点出发直到相遇, 在相同的时间间隔内所经历的位移是相同的, 这就是  $v-t$  曲线下的面积(位移的几何意义). 由圆弧 2 的半个弓形面积求得  $x_{B1}$ , 可避免积分, 同样可求得  $a_A$ . 由解图 1-4b 可知

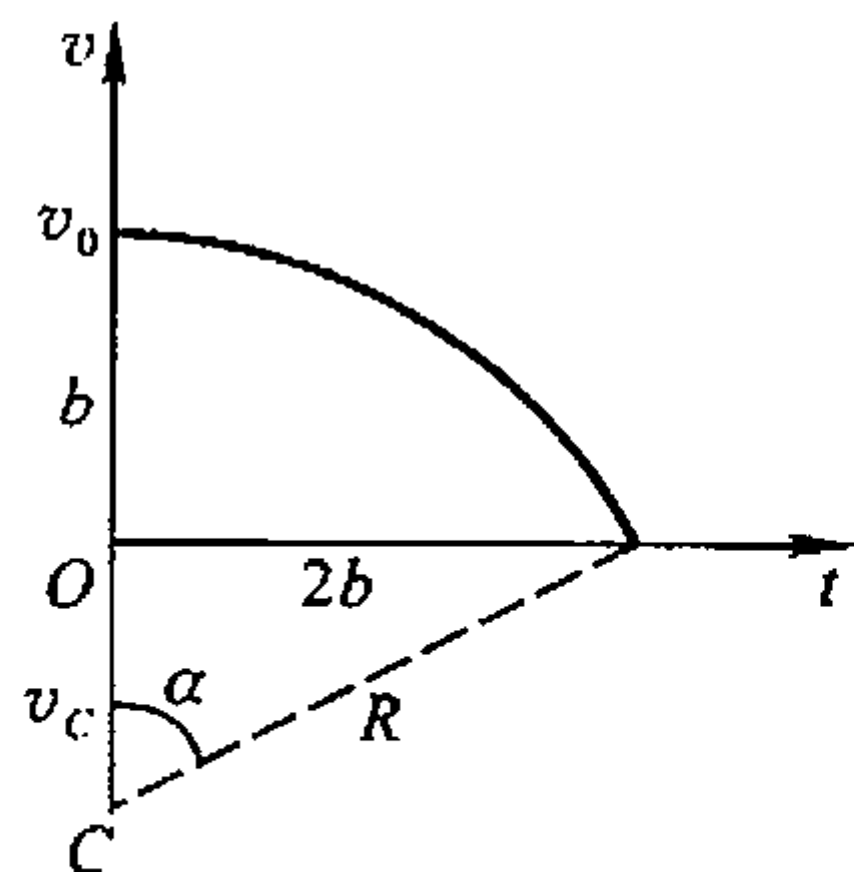
$$\alpha = \arcsin \frac{2b}{R} = \arcsin 0.8 = 53.1^\circ$$

$$x_B = s = \frac{1}{2}[R^2\alpha - 2b(R-b)] = 1.4b^2 \text{ m} = x_A$$

(3) 质点  $A$  的运动速度为 
$$v_A = a_A t \quad (3)$$

令(1)、(3)两式相等, 
$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}b\right)^2 - t^2} - \frac{3}{2}b = 0.7t$$

解得  $A$ 、 $B$  速度相同的时刻 
$$t = 1.08b \text{ s}$$

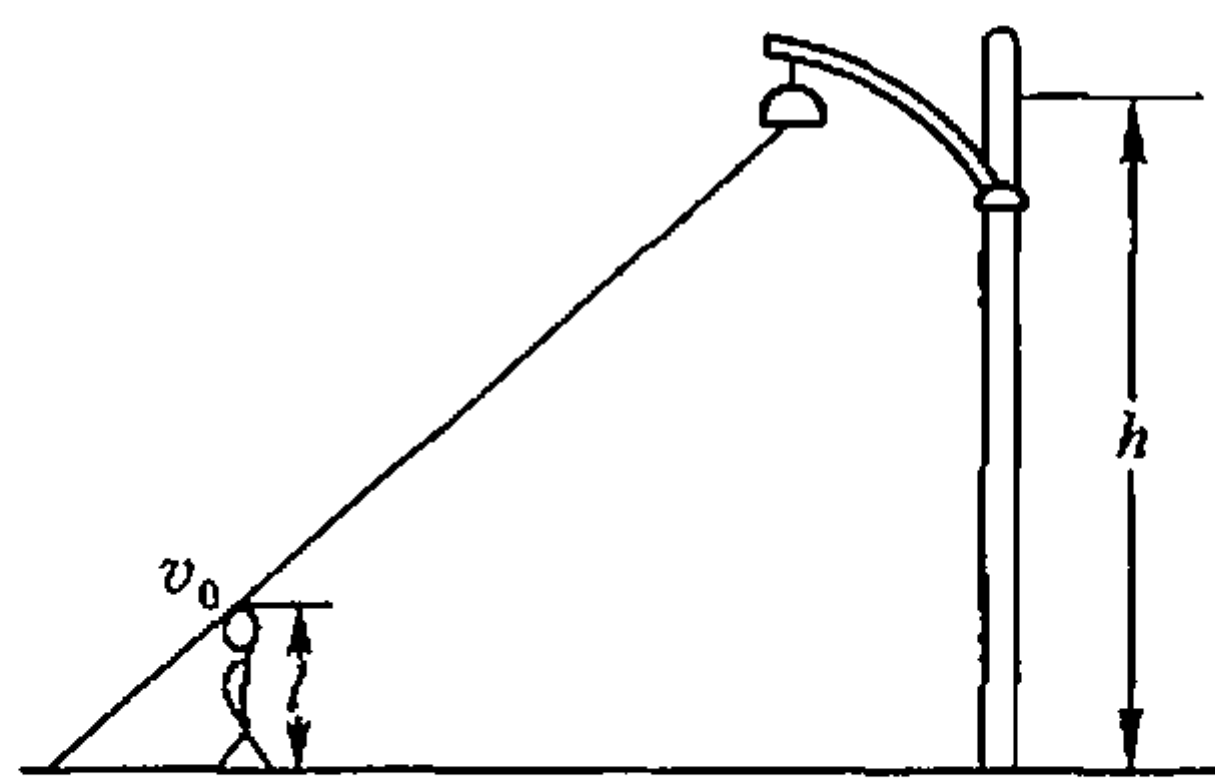


解图 1-4b

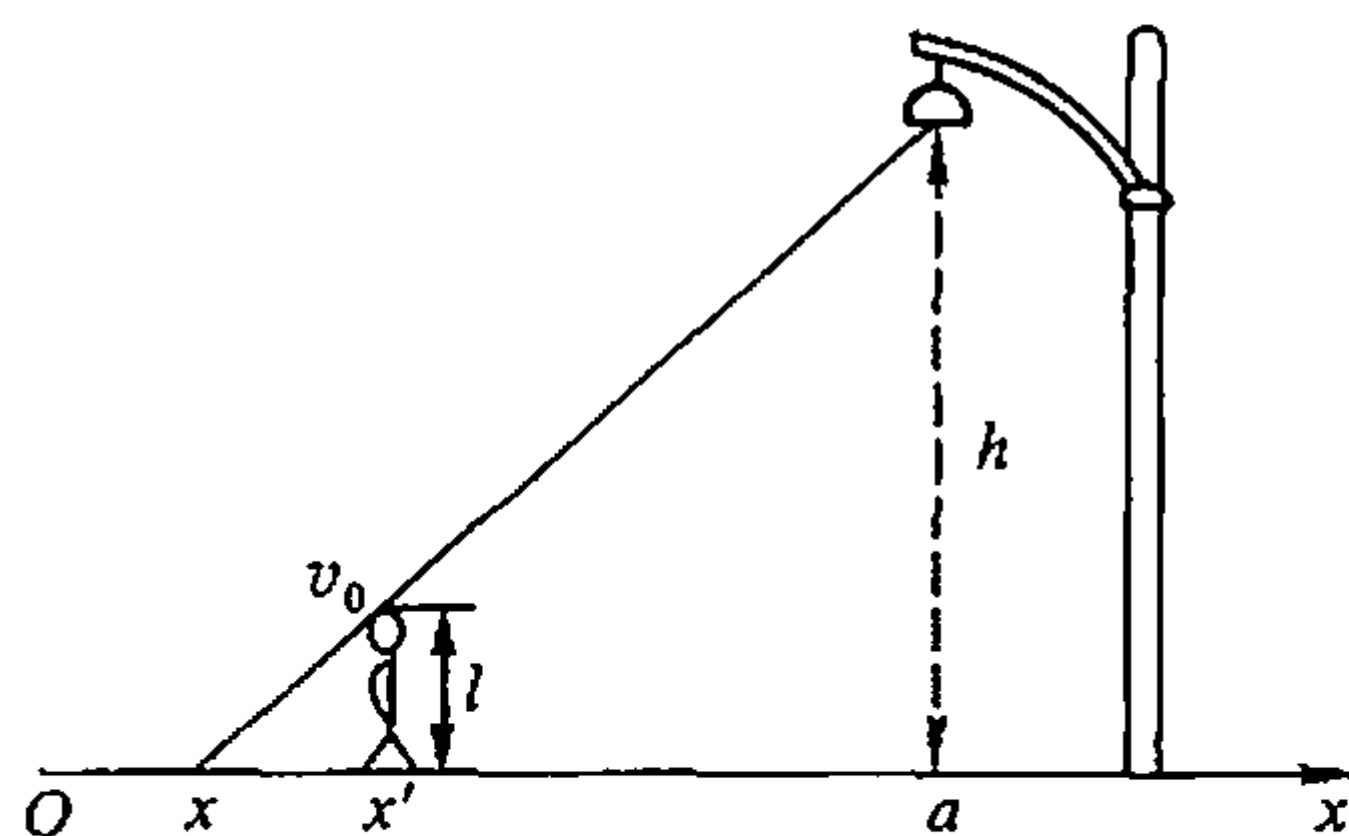
1-5. 路灯距地面的高度为  $h$ , 一个身高为  $l$  的人在路上匀速运动, 速度为  $v_0$ , 如图所示, 求:

- (1) 人影中头顶的移动速度;
- (2) 影子长度增长的速率.

分析：利用相似三角形的几何关系，建立起人影中头顶点的运动学方程后，即可求得人影中头顶的移动速度和影子长度的变化规律。



习题 1-5 图



解图 1-5

解：(1) 如解图 1-5 所示。设  $t$  时刻人位于  $x'$  处，人影的头顶点位于  $x$  处，由几何关系可得

$$\frac{a-x}{h} = \frac{x'-x}{l}$$

即有

$$x = \frac{hx' - al}{h-l}$$

人影的头顶点移动的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{h}{h-l} \frac{dx'}{dt} = \frac{h}{h-l} v_0$$

式中  $\frac{dx'}{dt} = v_0$ ，是人的运动速度。由于  $\frac{h}{h-l} > 1$ ，所以  $v > v_0$ ，即人影的头顶点移动得比人快。

(2) 人影的长度为

$$x' - x = x' - \frac{hx' - al}{h-l} = \frac{al - hx'}{h-l}$$

人影长度的变化率为  $\frac{d}{dt}(x' - x) = -\frac{l}{h-l} v_0$

上述变化率小于零表明，随着人接近路灯，人影长度将变短。

**1-6.** 一长为 5 m 的梯子，顶端斜靠在竖直的墙上。设  $t=0$  时，顶端离地面 4 m，当顶端以 2 m/s 的速度沿墙面匀速下滑时，求：

(1) 梯子下端的运动方程和速度；并画出  $x-t$  和  $v-t$  图（设梯子下端与上端离墙角的距离分别为  $x$  和  $y$ ）。

(2) 在  $t=1$  s 时，下端的速度。

分析：梯子的长度在运动过程中保持不变。将梯子的两端视作质点，则两

质点分别作直线运动. 由几何关系建立梯子底端的运动学方程后, 即可求解.

解: (1) 取坐标  $Oxy$ , 坐标原点位于墙角, 如解图 1-6 所示. 设  $t=0$  时, 梯子两端的坐标分别为  $x_0, y_0$ , 在梯子的运动过程中, 其两端满足关系:

$$x^2 + y^2 = L^2 \quad (1)$$

$$y = y_0 - v_y t = 4 - 2t \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式, 得  $x^2 + (4 - 2t)^2 = 5^2$

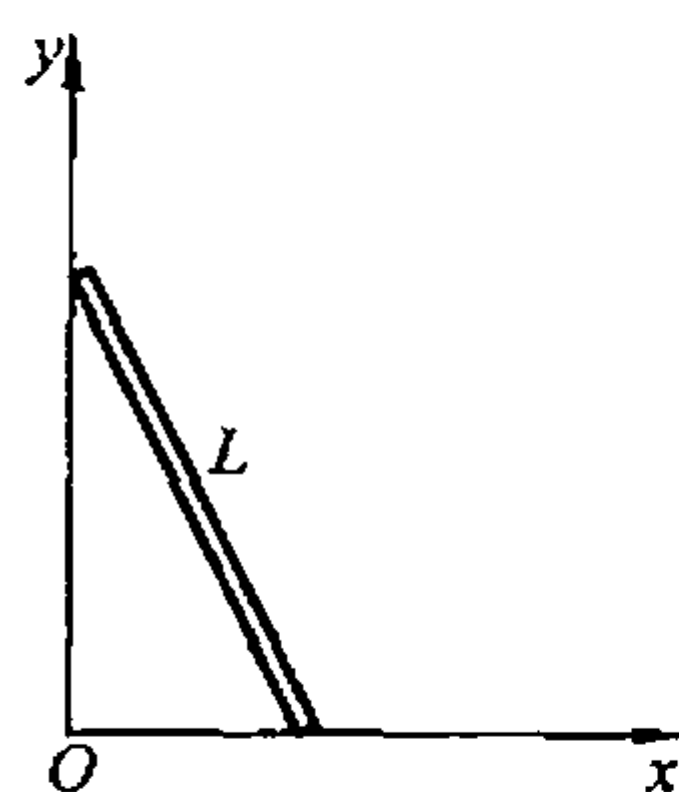
解(3)式, 得梯子底端的运动方程为

$$x = \sqrt{9 + 16t - 4t^2}$$

速度为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{8 - 4t}{\sqrt{9 + 16t - 4t^2}} = 2 \frac{y}{x}$$

(2) 将  $t = 1 \text{ s}$  代入上式, 解得  $v_{x1} = \frac{4}{\sqrt{21}} \text{ m/s}$



解图 1-6

1-7. 在离水面高度为  $h$  的岸边, 有人用绳子拉船靠岸, 船在离岸边  $s$  距离处. 当人以  $v_0$  的速率匀速收绳时, 试求船的速率与加速度各有多大.

分析: 在用绳子拉船靠岸的过程中, 船始终沿水面向岸运动, 运动方向不变. 如解图 1-7a 所示, 以收绳处为坐标原点,  $t$  时刻船位于  $P_1$ , 位置矢量为  $\mathbf{r}_1$ , 模的大小为  $|\mathbf{r}_1| = r_1$ , 这就是  $t$  时刻绳的长度.  $t + \Delta t$  时刻船位于  $P_2$ , 位置矢量为  $\mathbf{r}_2$ . 在  $\Delta t$  时间内, 船的位移为  $\Delta \mathbf{r}$ , 位置矢量模的变化为  $\Delta |\mathbf{r}| = \Delta r$ , 应注意  $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta r$ . 因绳长以恒定速率  $v_0$  变短, 所以在  $\Delta t$  时间内绳子的缩短量为恒定的  $\Delta r$ , 由图可知, 这是  $\Delta \mathbf{r}$  沿绳方向的分量.

根据对船的位移的分析, 利用几何关系可建立起船的运动学方程, 从而得到船的速度、加速度与  $v_0$  的关系.

解 1: 如解图 1-7a 所示, 有

$$|\Delta \mathbf{r}| \cos \theta = \Delta r$$

$\Delta t \rightarrow 0$  时, 有

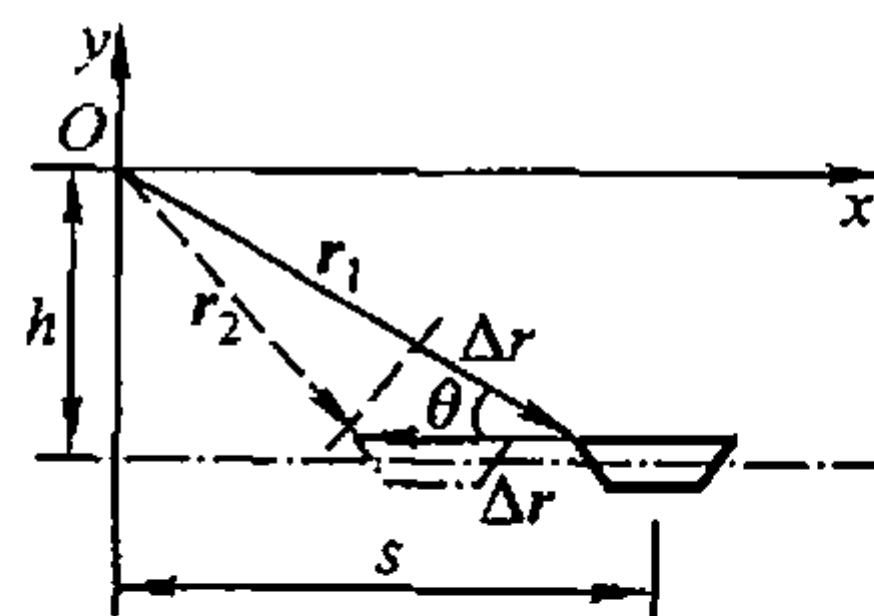
$$|d\mathbf{r}| \cos \theta = dr$$

船的速率为

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt}$$

收绳速率为

$$v_0 = \frac{dr}{dt} = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} \cos \theta = v \cos \theta$$



解图 1-7a

式中

$$\cos \theta = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + h^2}}$$

所以, 有

$$v = \frac{v_0}{\cos \theta} = v_0 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{s}$$

在图示坐标系中,  $\Delta r$  沿  $x$  轴负方向. 所以, 船的速度为

$$\boldsymbol{v} = -v_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} \boldsymbol{i} = -v_0 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{s} \boldsymbol{i}$$

式中“ $-$ ”号表示船是向岸靠拢的.

船的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -v_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{s} \right) \boldsymbol{i} = \frac{v_0^2 h}{s^3} \boldsymbol{i}$$

**解2:** 如解图 1-7b 所示, 在直角坐标系  $xOy$  中,  $t$  时刻船离岸边的距离为  $x = s$ , 船的位置矢量(运动方程)可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + (-h)\boldsymbol{j}$$

船的速度为  $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \boldsymbol{i} = v_x \boldsymbol{i}$

由于

$$x = \sqrt{r^2 - h^2}$$

所以

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{r^2 - h^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} \frac{dr}{dt}$$

因绳子的长度随时间而变短, 上式中  $\frac{dr}{dt} = -v_0$ .

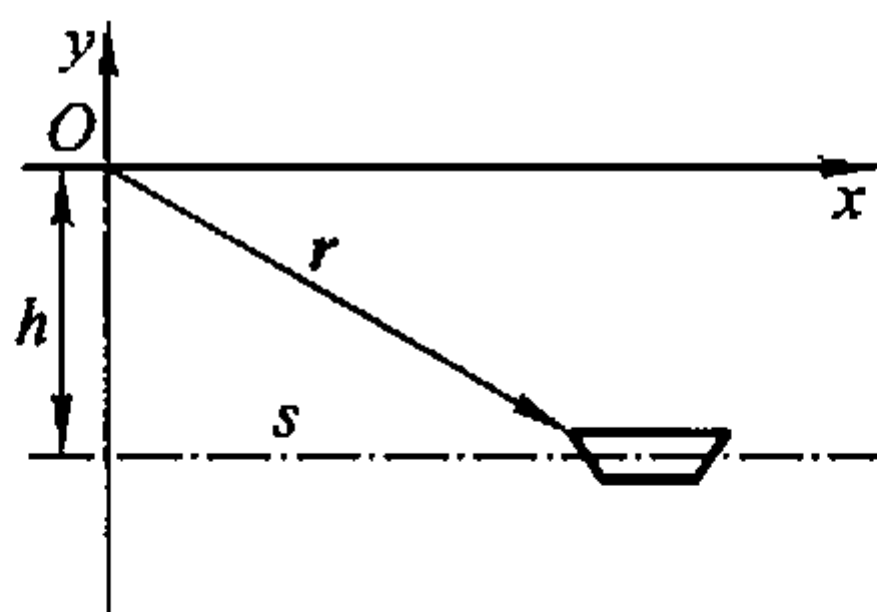
所以, 船的速度为

$$\boldsymbol{v} = -v_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} \boldsymbol{i} = -v_0 \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{s} \boldsymbol{i}$$

船的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{v_0^2 h}{s^3} \boldsymbol{i}$$

$\boldsymbol{v}$ 、 $\boldsymbol{a}$  同方向, 表明船是加速靠岸的.



解图 1-7b

### 3. 平面内质点的曲线运动, 切向加速度和法向加速度

**1-8.** 在质点运动中, 已知  $x = ae^{kt}$ ,  $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$ ,  $y|_{t=0} = b$ . 求质点的加速度和它的轨道方程.

**分析:** 求出  $x$  方向和  $y$  方向的加速度, 可以得到质点在平面内运动的总加速度; 利用积分, 代入  $y$  方向的初始位置, 可以得到质点在  $y$  方向的运动规律, 消去运动方程  $x(t)$  和  $y(t)$  中的时间参量  $t$ , 即可得到质点在平面内运动的轨道方程  $y(x)$ .

**解:**

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = ak^2 e^{kt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = bk^2 e^{-kt}$$

$$\mathbf{a} = ak^2 e^{kt} \mathbf{i} + bk^2 e^{-kt} \mathbf{j}$$

由  $y$  方向速度, 得

$$dy = -bke^{-kt} dt$$

对上式两边积分并代入初始条件

$$\int_b^y dy = -bk \int_0^t e^{-kt} dt$$

得

$$y = be^{-kt}$$

从  $x = ae^{kt}$ ,  $y = be^{-kt}$  两式中消去  $t$ , 得轨道方程

$$xy = ab$$

**1-9.** 按玻尔模型, 氢原子处于基态时, 它的电子围绕原子核作圆周运动, 电子的速率为  $2.2 \times 10^6$  m/s, 离核的距离为  $0.53 \times 10^{-10}$  m, 求电子绕核运动的频率和向心加速度.

**分析:** 根据题给条件可知, 电子绕原子核作匀速率的圆周运动(运动速率为常数), 由此可求得单位时间内绕核运动的周数即为频率.

$$\text{解: 频率 } \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{2.2 \times 10^6}{2 \times 3.14 \times 0.53 \times 10^{-10}} \text{ Hz} \approx 6.6 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(2.2 \times 10^6)^2}{0.53 \times 10^{-10}} \text{ m/s}^2 = 9.1 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$$

**1-10.** 一张致密光盘(CD)音轨区域的内半径  $R_1 = 2.2$  cm, 外半径  $R_2 = 5.6$  cm, 径向音轨密度  $N = 650$  条/mm. 在 CD 唱机内, 光盘每转一圈, 激光头沿径向向外移动一条音轨, 激光束相对光盘是以  $v = 1.3$  m/s 的恒定线速度运动的. 问:

(1) 这张光盘的全部放音时间是多少?

(2) 激光束到达离盘心  $r = 5.0$  cm 处时, 光盘转动的角速度和角加速度各是多少?

**分析:** 光盘作圆周运动的同时, 激光束沿光盘径向向外作直线运动, 因此激光束相对音轨作螺旋线运动, 速度  $v$  的切向分量远大于沿径向的分量. 在  $dt$  时间内, 激光头在作径向位移为  $dr$  的过程中, 读过的音轨数是  $Ndr$ , 相对音轨运动的长度为  $vdt = 2\pi rNdr$ , 对  $dt$  积分, 即可得到全部放音时间.

**解:** (1) 全部放音时间为

$$t = \int_0^T dt = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi rNdr}{v} = \frac{\pi N}{v} (R_2^2 - R_1^2) = 4.16 \times 10^3 \text{ s} \approx 69.4 \text{ min}$$

(2) 由于激光束的径向位移很小, 可近似认为相对每一音轨作圆周运动. 在离盘心  $r = 5.0$  cm 处时, 光盘转动的角速度近似为

$$\omega \approx \frac{v}{r} = \frac{1.3}{0.05} \text{ rad/s} = 26 \text{ rad/s}$$

考虑到激光束相对音轨运动的速率恒定,由角加速度的定义可得

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v}{r} \right) = -\frac{v}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

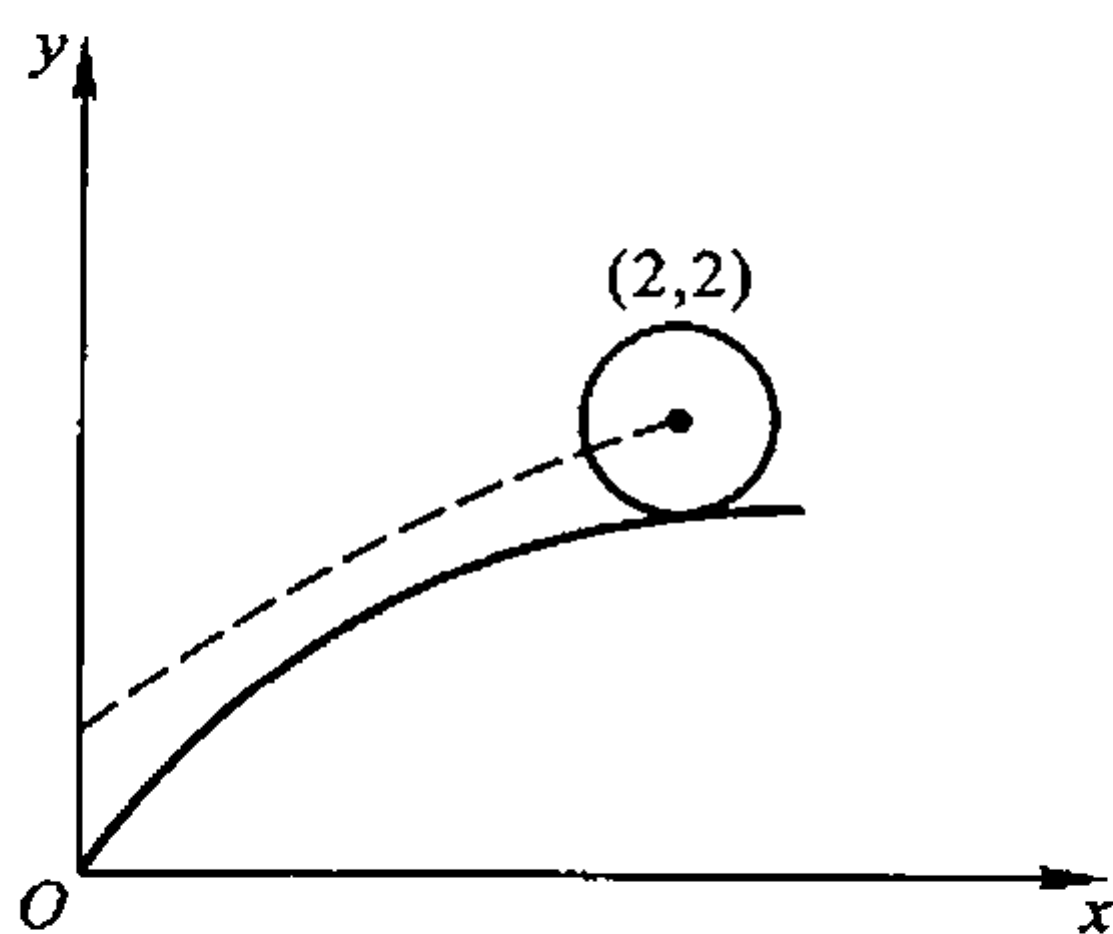
由分析可知

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v}{2\pi r N}$$

所以,激光束在离盘心  $r = 5.0 \text{ cm}$  处,光盘转动的角加速度为

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{v^2}{2\pi N r^3} = -\frac{1.3^2}{2\pi \times 650 \times 10^3 \times 0.05^3} \text{ rad/s}^2 \\ &= -3.31 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

\*1-11. 如图所示,一质点沿光滑的抛物线轨道,从起始位置(2,2)无初速地滑下. 问质点将在何处离开抛物线? 抛物线方程为  $y^2 = 2x$ , 式中  $x, y$  以  $\text{m}$  为单位.



习题 1-11 图

分析: 质点沿光滑抛物线轨道下滑时,具有法向加速度  $a_n$  和切向加速度  $a_t$ .  $a_n$  由轨道支持力和重力加速度  $g$  在轨道法向的分量  $g \cos \theta$  决定,  $a_t$  由  $g$  沿轨道切向的分量  $g \sin \theta$  决定,  $\theta$  是轨道的切线方向与  $Ox$  轴的夹角. 当轨道支持力为零时,质点沿轨道下滑的法向加速度  $a_n = g \cos \theta$ , 质点从该点处脱离轨道.

根据质点在轨道脱离点所满足的切向和法向加速度,利用抛物线在这一点的曲率半径关系式,可求出轨道上这点的坐标值.

解: 在轨道脱离点,质点的切向加速度和法向加速度的大小分别为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = g \sin \theta \quad (1)$$

$$\text{和} \quad a_n = g \cos \theta = \frac{v^2}{\rho} \quad (2)$$

式中  $\rho$  是抛物线在质点脱离处的曲率半径,为

$$\rho = \left| \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \right|$$

对  $y^2 = 2x$  的抛物线, 可求得一阶导数和二阶导数分别为

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{y^2 \cdot y} = -\frac{1}{2xy}$$

所以

$$\rho = (1 + y^2)^{3/2}$$

为了求得质点脱离处的坐标  $(x, y)$ , 先在上述方程中消去  $v$  和  $\rho$ . 由解图 1-11 可知, 质点沿轨道下滑  $ds$  时, 在  $y$  方向的位移为

$$dy = -ds \sin \theta$$

代入(1)式, 消去  $\sin \theta$ , 得

$$dv = g \sin \theta dt = -g \frac{dy}{ds} dt = -g \frac{dy}{v}$$

即

$$v dv = -g dy$$

两边积分

$$\int_0^v v dv = -g \int_{y_0}^y dy$$

得

$$v^2 = 2g(y_0 - y)$$

将  $\rho$  和  $v^2$  两式代入(2)式, 得

$$\cos \theta = \frac{2(y_0 - y)}{(1 + y^2)^{3/2}}$$

由解图 1-11 和  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$  可得

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

由上式两式相等, 代入  $y_0 = 2$ , 可得方程

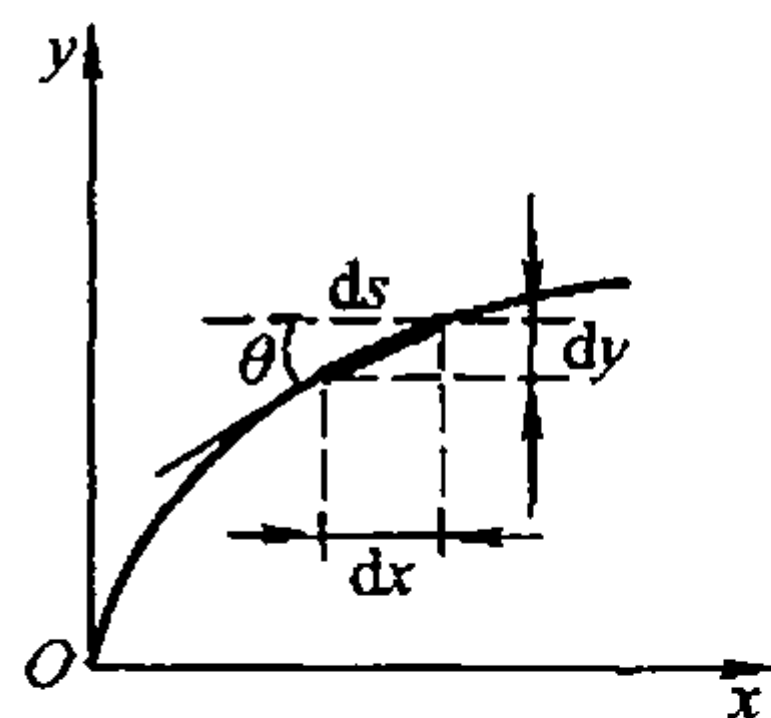
$$y^3 + 3y - 4 = 0$$

解方程可得

$$y = 1 \text{ m}$$

代入抛物线方程, 得

$$x = y/2 = 0.5 \text{ m}$$



解图 1-11

**1-12.** 一辆卡车为了超车, 以  $90 \text{ km/h}$  的速度驶入左侧逆行道时, 猛然发现前方  $80 \text{ m}$  处一辆汽车迎面驶来. 假定该汽车以  $65 \text{ km/h}$  的速度行驶, 同时也发现了卡车. 设两司机的反应时间都是  $0.70 \text{ s}$  (即司机发现险情到实际制动所经过的时间), 他们制动后的加速度都是  $-7.5 \text{ m/s}^2$ , 试问两车是否会相撞? 如果会相撞, 相撞时卡车的速度多大?

分析: 根据题意, 两司机从发现险情到制动开始起作用的  $0.70 \text{ s}$  内, 两车都

作匀速率直线运动;制动起作用后,两车都作匀减速直线运动. 在 80 m 内,若两车的速率均降为零,他们不会相撞,反之则将相撞.

解: 在最初的  $\Delta t_1 = 0.70$  s 内,两车都作匀速率直线运动. 设两车最初相距  $L = 80$  m, 卡车的初速率为  $v_{10} = 90$  km/h = 25 m/s, 汽车的初速率为  $v_{20} = 65$  km/h = 18 m/s, 在这 0.70 s 时间内他们行驶的路程为

$$s_{10} + s_{20} = (v_{10} + v_{20}) \Delta t_1 = (25 + 18) \times 0.7 \text{ m} = 30 \text{ m}$$

据题意,两车制动后的加速度都是  $a = 7.5$  m/s<sup>2</sup>, 卡车的速率降为零所行驶的路程为

$$s_1 = \frac{v_{10}^2}{2a} = \frac{25^2}{2 \times 7.5} \text{ m} = 41.7 \text{ m}$$

汽车的速率降为零时所行驶的路程为

$$s_2 = \frac{v_{20}^2}{2a} = \frac{18^2}{2 \times 7.5} \text{ m} = 21.6 \text{ m}$$

从发现险情到两车都安全停下,他们共需行驶的路程为

$$s = s_{10} + s_{20} + s_1 + s_2 = 93.3 \text{ m} > L = 80 \text{ m}$$

所以,两车将发生碰撞.

设从制动起作用后到两车发生碰撞的时间间隔为  $\Delta t_2$ , 有

$$L - (s_{10} + s_{20}) = \left( v_{10} \Delta t_2 - \frac{1}{2} a \Delta t_2^2 \right) + \left( v_{20} \Delta t_2 - \frac{1}{2} a \Delta t_2^2 \right)$$

代入相应数据,可得方程  $7.5 \Delta t_2^2 - 43 \Delta t_2 + 50 = 0$

解上述方程,可得  $\Delta t_2 = 1.62$  s (舍去  $\Delta t_2 = 4.11$  s)

所以,发生碰撞时卡车的速率为

$$v_1 = v_{10} - a \Delta t_2 = 25 \text{ m/s} - 7.5 \times 1.62 \text{ m/s} = 12.9 \text{ m/s} = 46 \text{ km/h}$$

\*1-13. 如图所示,杆 AB 以匀角速度  $\omega$  绕 A 点转动,并带动水平杆 OC 上的质点 M 运动. 设起始时刻杆在竖直位置,  $OA = h$ .

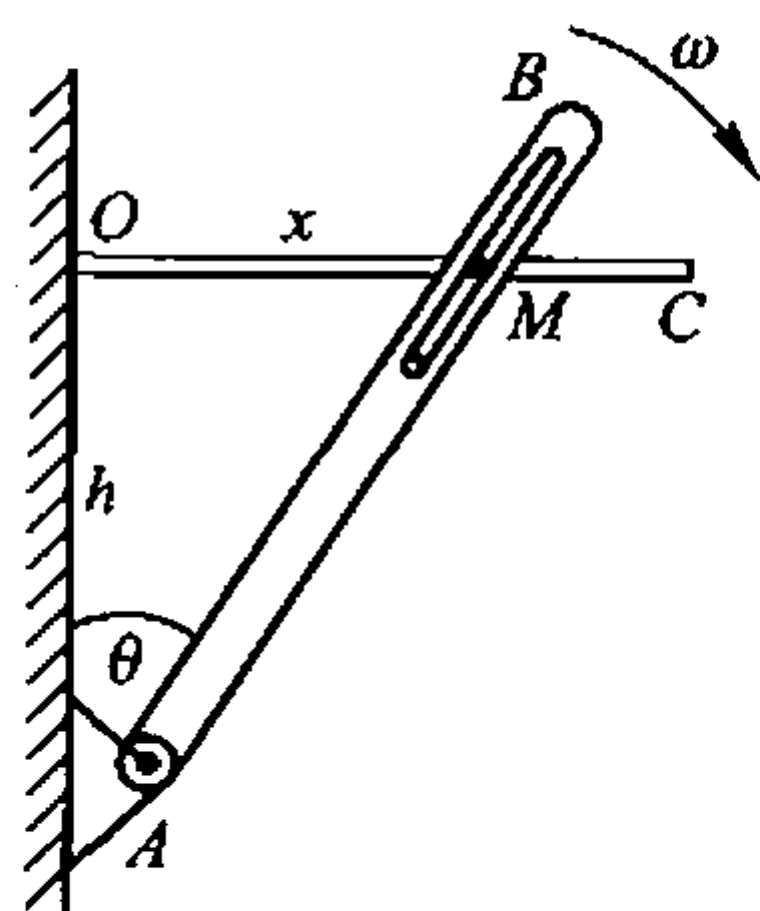
(1) 列出质点 M 沿水平杆 OC 的运动学方程;

(2) 求质点 M 沿杆 OC 滑动的速度和加速度的大小.

分析: 研究对象是质点 M. 在 AB 杆绕 A 点作匀角速转动的过程中, M 沿 OC 作直线运动. 通过确定任意时刻质点 M 的角位移  $\theta$  和沿直线的位移  $x$ , 由角量和线量关系以及几何关系即可得到 M 的直线运动方程.

解: (1)  $t$  时刻, AB 作匀角速圆周运动的角位置

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$



习题 1-13 图

因  $\theta_0 = 0$ , 所以

$$\theta = \omega t$$

由几何关系

$$x = h \tan \theta = h \tan \omega t$$

得  $M$  的运动学方程

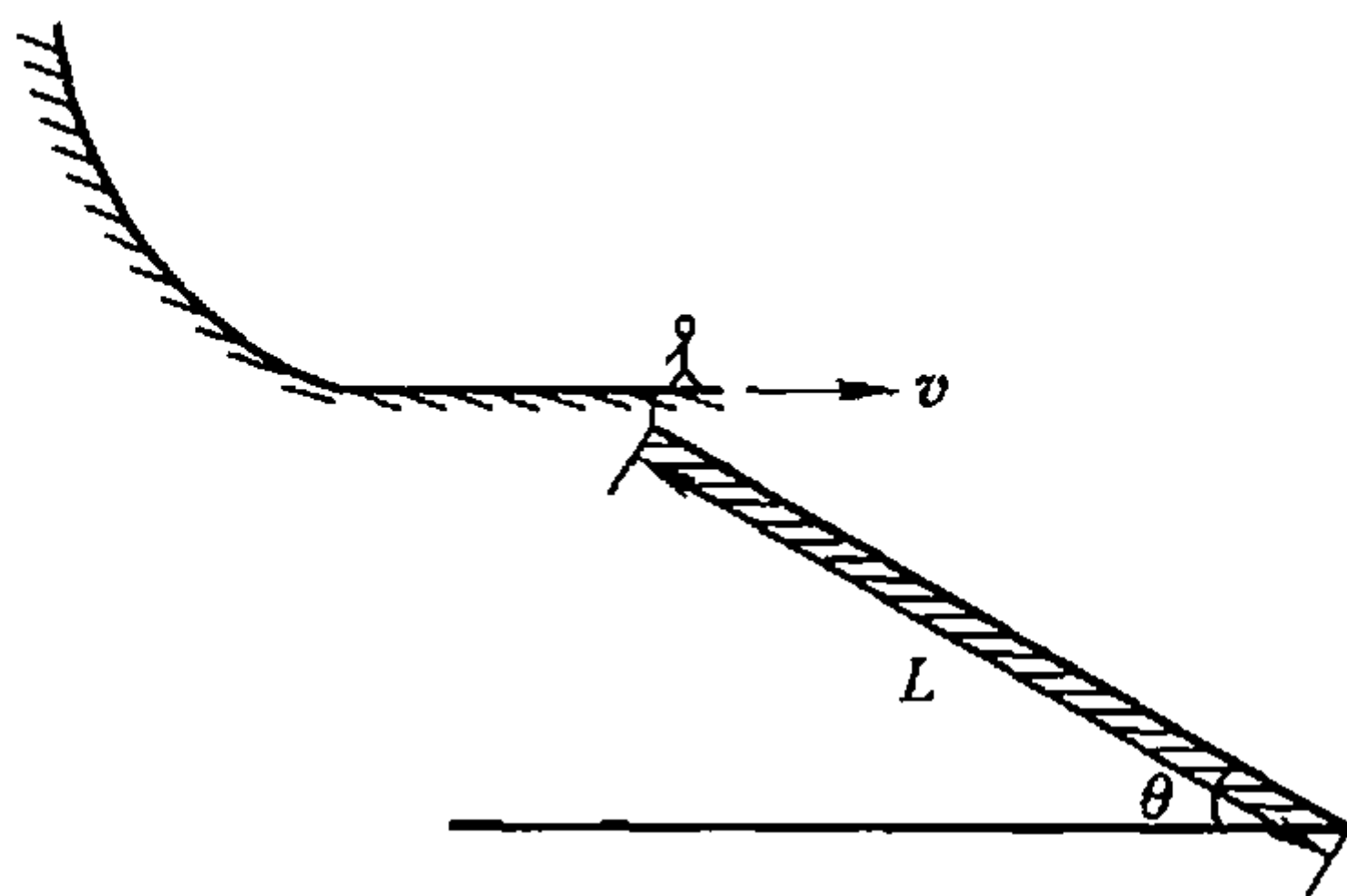
$$x = h \tan \omega t$$

(2)  $M$  沿杆滑动的速度大小为  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{h\omega}{\cos^2 \omega t}$

加速度的大小为  $a = \frac{dv}{dt} = 2h\omega^2 \sec^2(\omega t) \tan(\omega t)$

#### 4. 抛体运动

1-14. 滑雪运动员离开水平滑雪道飞入空中时的速率  $v = 110 \text{ km/h}$ , 着陆的斜坡与水平面成  $\theta = 45^\circ$  角, 如图所示.



习题 1-14 图

(1) 计算滑雪运动员着陆时沿斜坡的位移  $L$  (忽略起飞点到斜面的距离).

(2) 在实际的跳跃中, 运动员所达到的距离  $L = 165 \text{ m}$ , 此结果为何与计算结果不符?

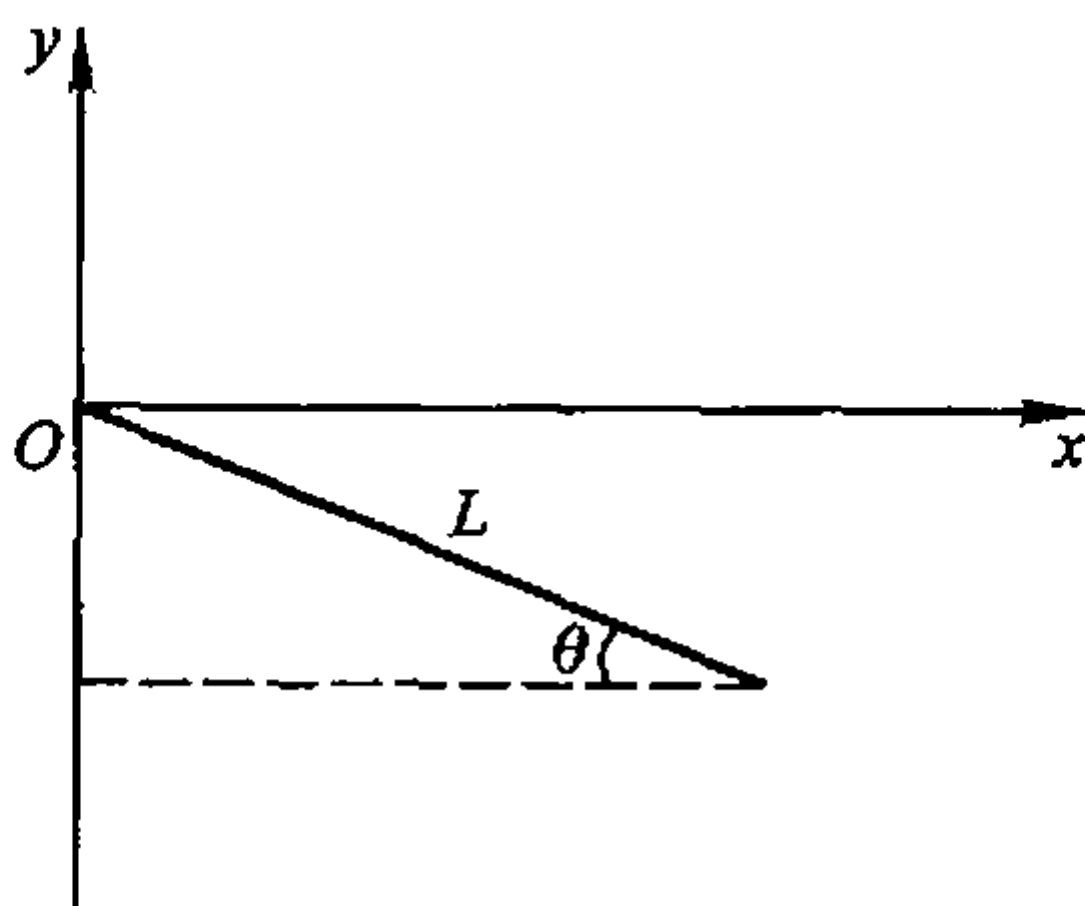
分析: 滑雪运动员离开水平滑雪道后, 在空中作平抛运动. 忽略空气阻力等因素, 由运动的叠加原理可知, 运动员在水平方向作匀速直线运动, 在垂直方向作自由落体运动.

解: 取坐标系如解图 1-14 所示,  $v = 110 \text{ km/h} = 30.6 \text{ m/s}$ .

(1) 设运动员着陆时的坐标为  $(x, y)$ , 时间为  $t$ , 则有

$$x = vt = L \cos \theta$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -L \sin \theta$$



解图 1-14

可解得

$$L = \frac{2v^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta} = 269 \text{ m}$$

(2) 在实际跳跃过程中,运动员将受到空气阻力、风力、风向等因素的影响. 所以,即使保持相同的起跳状态,结果总是小于理想情况下的计算结果.

**1-15.** 测量上抛物体两次经过两个给定点的时间,可以确定该处的重力加速度. 若物体两次经过水平线  $a$  的时间间隔为  $\Delta t_a$ ,而两次经过水平线  $b$  的时间间隔为  $\Delta t_b$ ,水平线  $a$  和  $b$  之间的高度差为  $h$ ,假定在物体运动的范围内重力加速度为常量,试求该重力加速度的大小.

**分析:** 在上抛运动中,物体从抛出位置上升至最高点处所需要的时间,和从最高点处自由下落到抛出处所需要的时间是相同的. 所以物体两次经过水平线  $a$  所需要的时间,是物体从最高点自由下落到  $a$  所需时间的 2 倍. 对水平线  $b$  也同样有这样的关系.

**解:** 设物体从最高点处自由下落到抛出处  $a$  点所需要的时间为  $t_a$ ,  $t_a = \Delta t_a / 2$ .

$$y_a - y_{\max} = -\frac{1}{2}gt_a^2$$

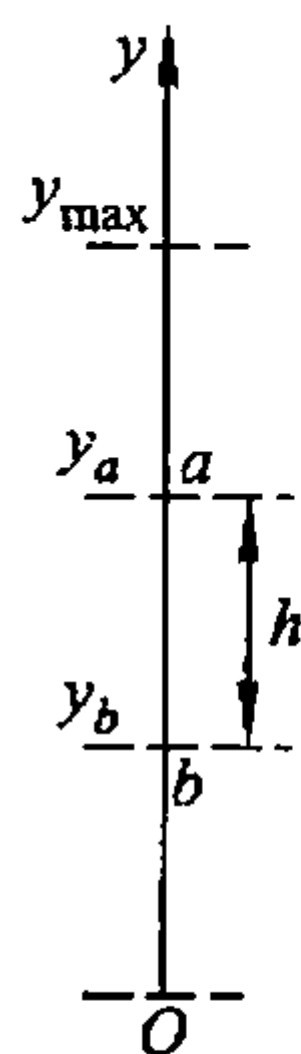
同理,物体从最高点处自由下落到抛出处  $y_b$  所需要的时间  $t_b = \Delta t_b / 2$ .

$$y_b - y_{\max} = -\frac{1}{2}gt_b^2$$

据题意,有  $h = y_a - y_b = \frac{1}{2}g(t_b^2 - t_a^2) = \frac{1}{2}g\left[\left(\frac{\Delta t_b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Delta t_a}{2}\right)^2\right]$

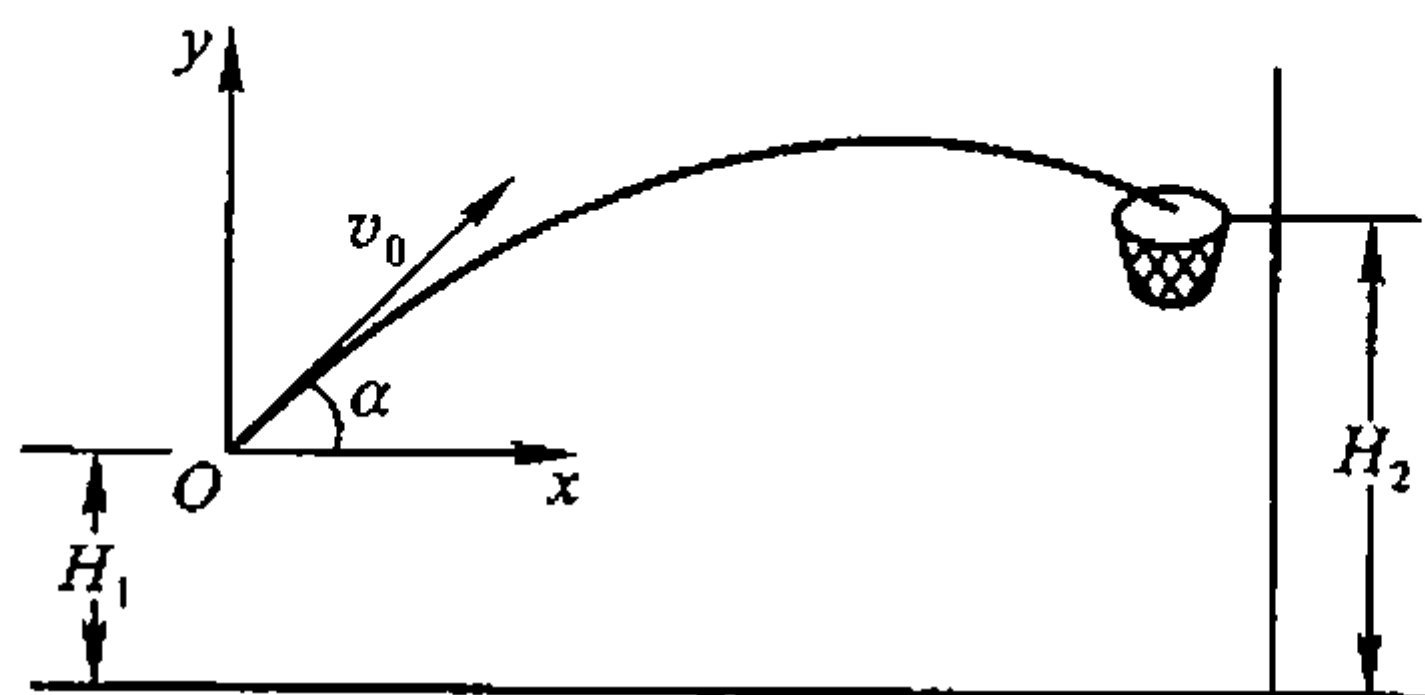
所以

$$g = \frac{8h}{(\Delta t_b)^2 - (\Delta t_a)^2}$$



解图 1-15

**1-16.** 在篮球运动员作立定投篮时,如以出手时球的中心为坐标原点,建立坐标系  $Oxy$  如图示. 设篮筐中心坐标为  $(x, y)$ , 出手高度为  $H_1$ , 球的出手速度为  $v_0$ , 试证球的出手角度  $\alpha$  应满足下式才能投入:



习题 1-16 图

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} \left( y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)} \right]$$

分析：将篮球视为质点，出手后篮球在空中的运动轨迹是抛物线。要使球能够投入篮筐，则篮筐的坐标 $(x, y)$ 应处于抛物线的下降段。根据运动的叠加原理，写出篮球的轨迹即抛物线方程，已知 $x, y$ 和 $v_0$ 即可求得 $\tan \alpha$ 。

解：在题图 1-16 的坐标系中，抛体的轨迹方程为

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

将上述方程改写为

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)$$

即

$$\tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gx} \tan \alpha + \left( 1 + \frac{2v_0^2}{gx^2} y \right) = 0$$

可解得

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} \left( y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)} \right]$$

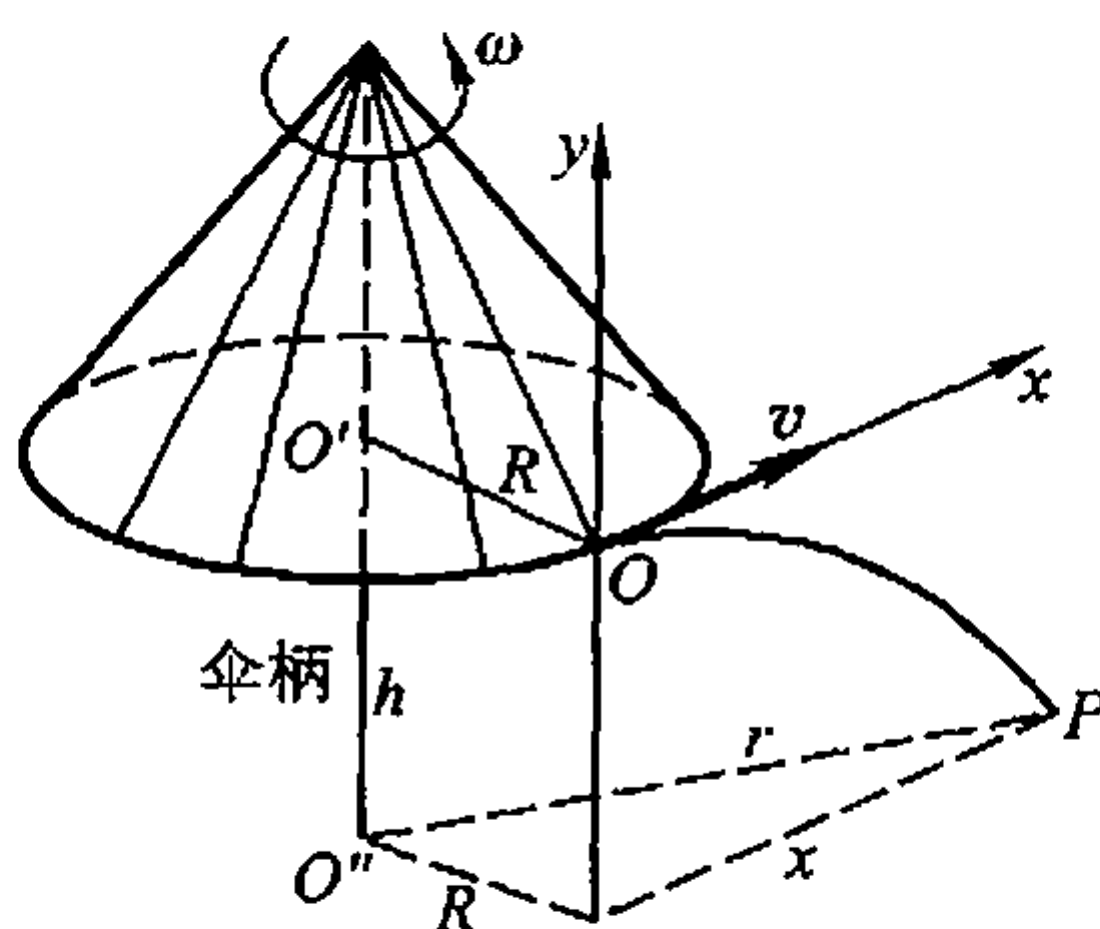
要求篮球自篮筐上方直接投中篮筐中心，在上式中应舍去“-”解。

1-17. 如图，一直立的雨伞，其边缘的半径为 $R$ ，离地面的高度为 $h$ 。当伞绕伞柄以角速度 $\omega$ 匀速旋转时，试证沿边缘飞出的水滴将落在地面上半径为

$$r = R \sqrt{1 + \frac{2h\omega^2}{g}}$$

的圆周上。

请构思一种旋转式洒水器的方案。



习题 1-17 图

分析：当伞绕伞柄以 $\omega$ 旋转时，原滞留在伞边缘的水滴将沿圆周的切向飞出，作平抛运动。由叠加原理可求得水滴自飞出点到落地点的水平距离。而伞柄中心至水滴落地点的水平距离可由几何关系得出。

解：在如图所示的坐标系中，水滴自飞出点到落地点的水平距离为

$$x = v_0 t \quad (1)$$

垂直方向作自由落体运动  $y = -h = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$

由角量和线量关系  $v_0 = R\omega \quad (3)$

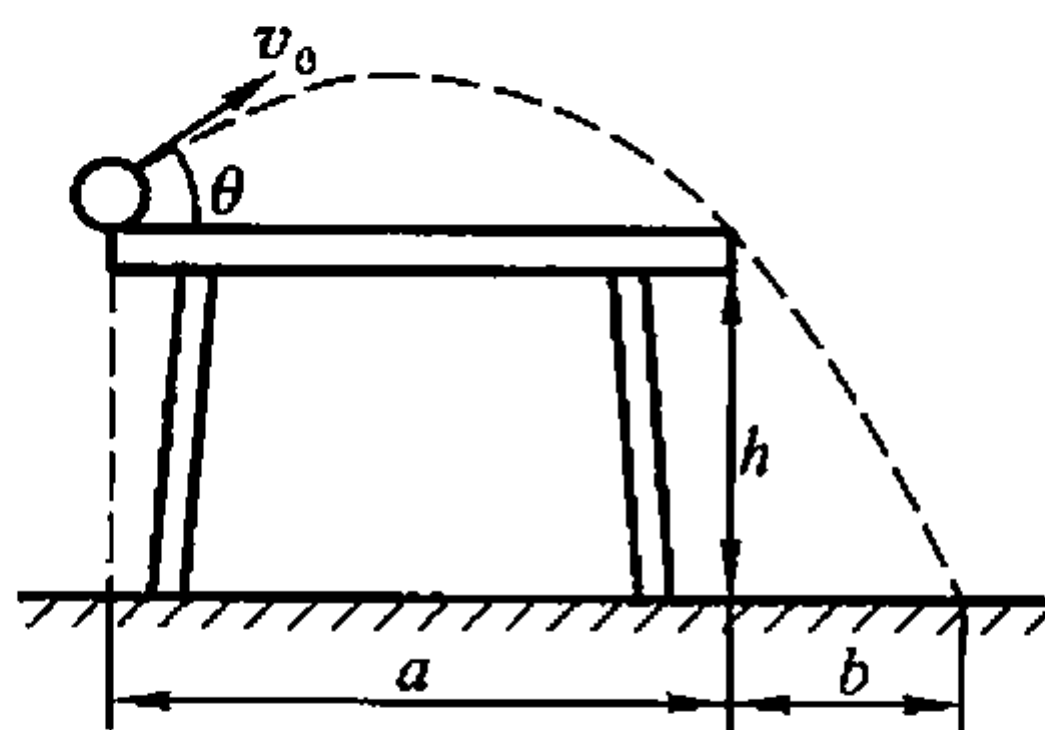
由(2)式,得  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

代入(1)式,得  $x^2 = \frac{2v_0^2 h}{g} = \frac{2R^2 \omega^2 h}{g}$

由图示几何关系得伞柄中心至水滴落地点的水平距离

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} = R \sqrt{1 + \frac{2h\omega^2}{g}}$$

**1-18.** 在图示乒乓球桌的一边,乒乓球作斜抛运动. 已知桌高  $h = 1.0 \text{ m}$ , 宽  $a = 2.0 \text{ m}$ . 欲使乒乓球能从桌面的另一边切过,并落在离该边水平距离  $b = 0.50 \text{ m}$  处. 求乒乓球的初速  $v_0$  和抛射角  $\theta$  各为多少?



习题 1-18 图

**分析:** 把乒乓球看作质点. 质点作斜抛运动的轨迹,先后经过球与桌边相切的点和球的落地点.

**解:** 取坐标  $xOy$ , 沿桌面向右为  $x$  轴正方向,  $y$  轴垂直于桌面向上, 坐标原点  $O$  位于球的发射处. 乒乓球的轨迹方程为

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (1)$$

将球的轨迹与桌边相切点的坐标值  $y = 0, x = 2.0 \text{ m}$  代入(1)式, 可得

$$v_0^2 = \frac{g}{\cos \theta \sin \theta} \quad (2)$$

将球的落地点坐标值  $y = -1.0 \text{ m}, x = a + b = 2.0 \text{ m} + 0.50 \text{ m} = 2.50 \text{ m}$ , 代入(1)式, 可得

$$v_0^2 \cos^2 \theta = \frac{5}{8}g \quad (3)$$

解(2)、(3)两式,得  $\tan \theta = \frac{8}{5}$ ,  $\theta = 58^\circ$ ,  $v_0 = 4.67 \text{ m/s}$

**1-19.** 跳伞运动员从 1 200 m 高空跳下,起初不打开降落伞作加速运动. 由于空气阻力的作用,会加速到一“终极速度”200 km/h 而开始匀速下降,下降到离地面 50 m 处时打开降落伞,很快速率会变为 18 km/h 而开始匀速下降着地. 若起初加速运动阶段的平均加速度按  $g/2$  计,此跳伞运动员在空中一共经历了多长时间?

**分析:** 本题已对跳伞运动员的下跳过程作了分阶段的简化:从高空下跳的起初阶段作初速  $v_0 = 0$  的匀加速直线运动,加速度大小为  $g/2$ ,直到下降速率为  $v_1 = 200 \text{ km/h} = 55.6 \text{ m/s}$ ;以后以  $v_1$  作匀速直线运动,下落至离地面高度 50 m;打开降落伞后落到地面的最后阶段作匀速直线运动,  $v_2 = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$ .

**解:** 取坐标如解图 1-19 所示,图中  $y_0 = 1\,200 \text{ m}$ ,  $y_2 = 50 \text{ m}$ . 在下跳的起初阶段,设经历的时间为  $t_1$ ,有

$$y_1 - y_0 = -\frac{1}{2}at_1^2, \quad a = \frac{g}{2} \quad (1)$$

$$v_1 = at_1 \quad (2)$$

在以  $v_1$  作匀速直线运动阶段,经历的时间为  $t_2$ ,有

$$y_2 - y_1 = -v_1 t_2 \quad (3)$$

在打开降落伞后,以  $v_2$  作匀速直线运动,下落至地面的阶段,经历的时间为  $t_3$ ,有

$$0 - y_2 = -v_2 t_3 \quad (4)$$

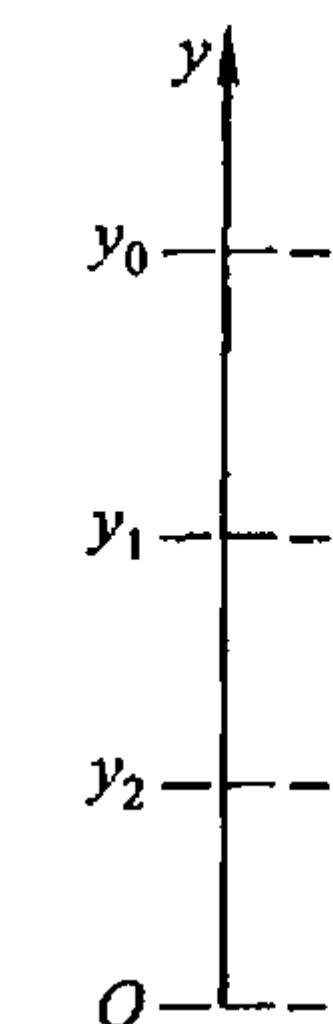
解上述方程,得

$$t_1 = \frac{2v_1}{g}, \quad t_2 = \frac{y_0 - y_2}{v_1} - \frac{v_1}{g}, \quad t_3 = \frac{y_2}{v_2}$$

$$y_1 = y_0 - \frac{v_1^2}{g}$$

跳伞运动员在空中一共经历的时间为

$$\Delta t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{v_1}{g} + \frac{y_0 - y_2}{v_1} + \frac{y_2}{v_2} = 34.6 \text{ s}$$



解图 1-19

## 5. 相对运动

**1-20.** 一列车以  $5 \text{ m/s}$  的速度沿  $Ox$  轴正方向行驶,某旅客在车厢中观察一个站在站台上的小孩竖直向上抛出的一球. 相对于站台上的坐标系来说,球的运动学方程为

$$x=0, \quad y=v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (v_0, g \text{ 是常量})$$

(1) 如果旅客用随车一起运动的坐标系  $O'x'y'$  来描写小球的运动, 已知  $O'x'$  轴与  $Ox$  轴同方向,  $O'y'$  轴与  $Oy$  轴相平行, 方向向上, 且在  $t=0$  时,  $O'$  与  $O$  相重合, 则  $x'$  和  $y'$  的表达式将是怎样的呢?

(2) 在  $O'x'y'$  坐标系中, 小球的运动轨迹又是怎样的?

(3) 从车上的旅客与站在车站上的观察者看来, 小球的加速度各为多少? 方向是怎样的?

分析: 研究对象是小球. 对小球运动的描述, 因参考系不同而不同. 本题中, 两参考系在  $x$  方向相对作匀速直线运动, 在经典力学范围内, 这两参考系的时、空变换关系满足伽利略坐标及速度变换式.

解: (1) 以  $Oxy$  为站台坐标系, 小孩位于坐标原点.  $O'x'y'$  为车厢上坐标系, 以  $v=5 \text{ m/s}$  的速度沿  $x$  轴正方向运动.

由伽利略坐标变换,  $t$  时刻车厢坐标系对小球运动的描述为

$$x' = x - vt = -5t \quad (1)$$

$$y' = y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

(2) 从(1)、(2)两式中消去  $t$ , 得

$$y' = -\frac{v_0}{v}x' - \frac{1}{2}g\frac{x'^2}{v^2} = -\frac{v_0}{5}x' - \frac{g}{50}x'^2 \quad (\text{SI})$$

即在车厢坐标系中, 小球运动的轨迹是抛物线.

(3) 在站台坐标系中:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = g, \quad \mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

在车厢坐标系中:

$$a'_x = \frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \quad a'_y = \frac{d^2y'}{dt^2} = g, \quad \mathbf{a}' = -g\mathbf{j}$$

可见

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

在这两参考系中加速度相同.

**1-21.** 设河面宽  $l=1 \text{ km}$ , 河水由北向南流动, 流速  $v=2 \text{ m/s}$ , 有一船相对于河水以  $v'=1.5 \text{ m/s}$  的速率从西岸驶向东岸.

(1) 如果船头与正北方向成  $\alpha=15^\circ$  角, 船到达对岸要花多少时间? 到达对岸时, 船在下游何处?

(2) 如果船到达对岸的时间为最短, 船头与河岸应成多大角度? 最短时间等于多少? 到达对岸时, 船在下游何处?

(3) 如果船相对于岸走过的路程为最短,船头与岸应成多大角度? 到对岸时,船又在下游何处? 要花多少时间?

分析: 船到达对岸所需时间取决于船相对于岸的速度  $u$ . 由于河水平行于岸的流速恒定,船相对于岸的速度  $u$  由船相对于水的速度  $v'$  和水相对于岸的速度  $v$  决定.

解: 研究对象是船,取岸为  $K$  系,水流为  $K'$  系.  $K$  系坐标  $Oxy$  如解图 1-21 所示.

(1) 由速度变换定理

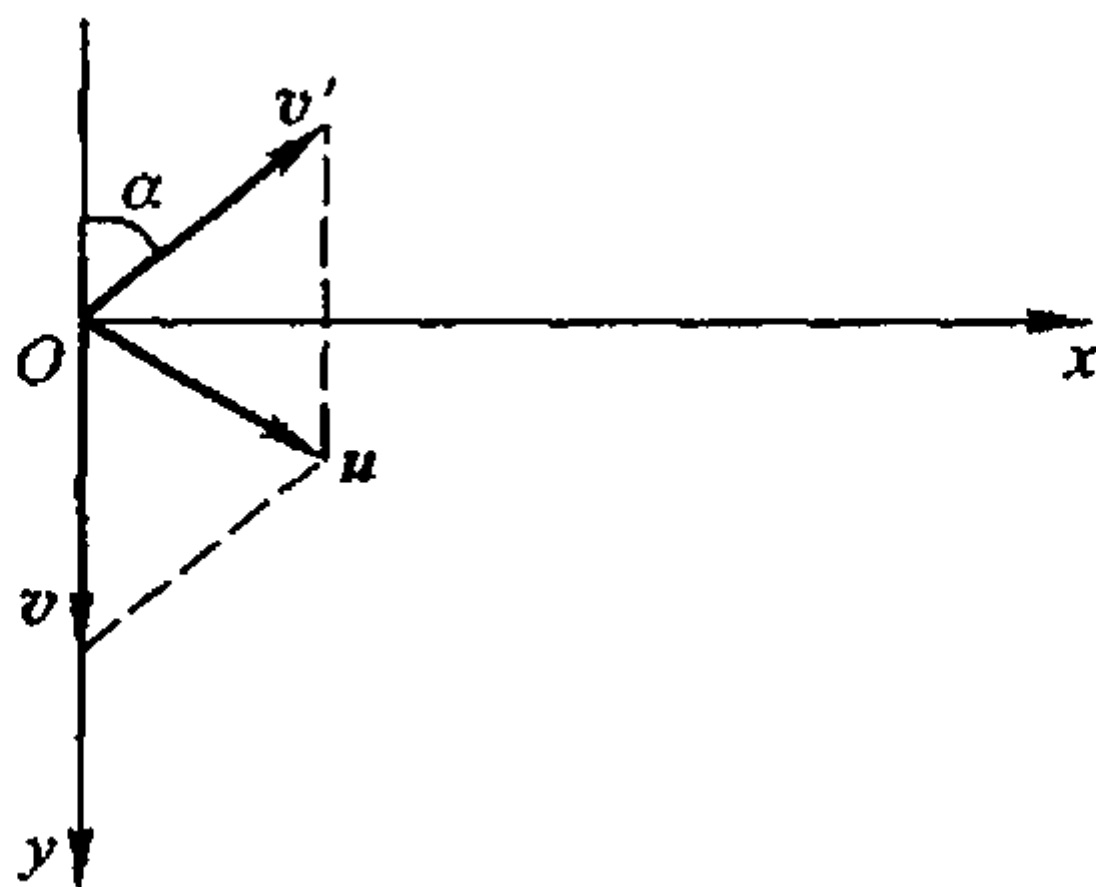
$$u_{\text{船岸}} = v'_{\text{船水}} + v_{\text{水岸}}$$

速度的分量为  $u_x = v' \sin \alpha$

$$u_y = v - v' \cos \alpha$$

$$x = l = u_x t = v' \sin \alpha t \quad (1)$$

$$y = u_y t = (v - v' \cos \alpha) t \quad (2)$$



解图 1-21

解得 
$$t = \frac{l}{v' \sin \alpha} = \frac{1 \times 10^3}{1.5 \times \sin 15^\circ} \text{ s} = 2.58 \times 10^3 \text{ s}$$

$$y_1 = (v - v' \cos \alpha) t = (2 - 1.5 \times \cos 15^\circ) \times 2.58 \times 10^3 \text{ m} = 1.42 \text{ km}$$

(2)  $v'$  一定时,欲使船能在最短时间内渡河,由(1)式可知,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  时,  $t$  最小. 即

$$t_{\min} = \frac{l}{v'} = \frac{1 \times 10^3}{1.5} \text{ s} = 667 \text{ s}$$

$$y_2 = \left( v - v' \cos \frac{\pi}{2} \right) t = vt = 1.33 \text{ km}$$

(3) 设船头与岸之间夹角为  $\theta$ ,则由(1)、(2)两式,得

$$y = (v - v' \cos \theta) t = (v - v' \cos \theta) \frac{l}{v' \sin \theta} \quad (3)$$

令  $\frac{dy}{d\theta} = 0$ , 得

$$\cos \theta = \frac{v'}{v} = 0.75, \quad \theta = 41.4^\circ$$

代入(3)式,得

$$y_3 = 0.88 \text{ km}$$

$$t = \frac{l}{v' \sin \theta} = 1010 \text{ s}$$

1-22. 设有一架飞机从  $A$  处向东飞到  $B$  处,然后又向西飞回  $A$  处,飞机相对于空气的速率为  $v'$ ,而空气相对于地面的速率为  $v_r$ ,  $A$ 、 $B$  之间的距离为  $l$ ,飞机相对空气的速率  $v'$  保持不变.

(1) 假定空气是静止的(即  $v_r = 0$ ),试证来回飞行时间为  $t_0 = 2l/v'$ .

(2) 假定空气的速度向东, 试证来回飞行时间为

$$t_1 = \frac{t_0}{1 - \left(\frac{v_r}{v'}\right)^2}$$

(3) 假定空气的速度向北, 试证来回飞行时间为

$$t_2 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{v'}\right)^2}}$$

分析: 飞机在  $AB$  两地间往返飞行, 相对地面的飞行速度因受风速影响而影响飞行时间. 由速度变换定理可得到不同风速情况下的飞行速度, 从而求出往返两地所需时间.

证: 以地面为  $K$  系, 空气为  $K'$  系, 飞机为研究对象.

由速度变换定理, 得

$$\mathbf{v}_{\text{机地}} = \mathbf{v}_{\text{机气}} + \mathbf{v}_{\text{气地}}$$

即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_r \quad (1)$$

(1) 当  $\mathbf{v}_r = 0$ , 由(1)式得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

单程时间

$$t_{AB} = t_{BA} = \frac{l}{v'} = \frac{l}{v}$$

往返时间

$$t_0 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{2l}{v'} = \frac{2l}{v}$$

(2) 当  $\mathbf{v}_r$  向东, 由(1)式得, 往程时速率  $v_{AB} = v' + v_r$

往程时间

$$t_{AB} = \frac{l}{v' + v_r}$$

返程时

$$v_{BA} = v' - v_r$$

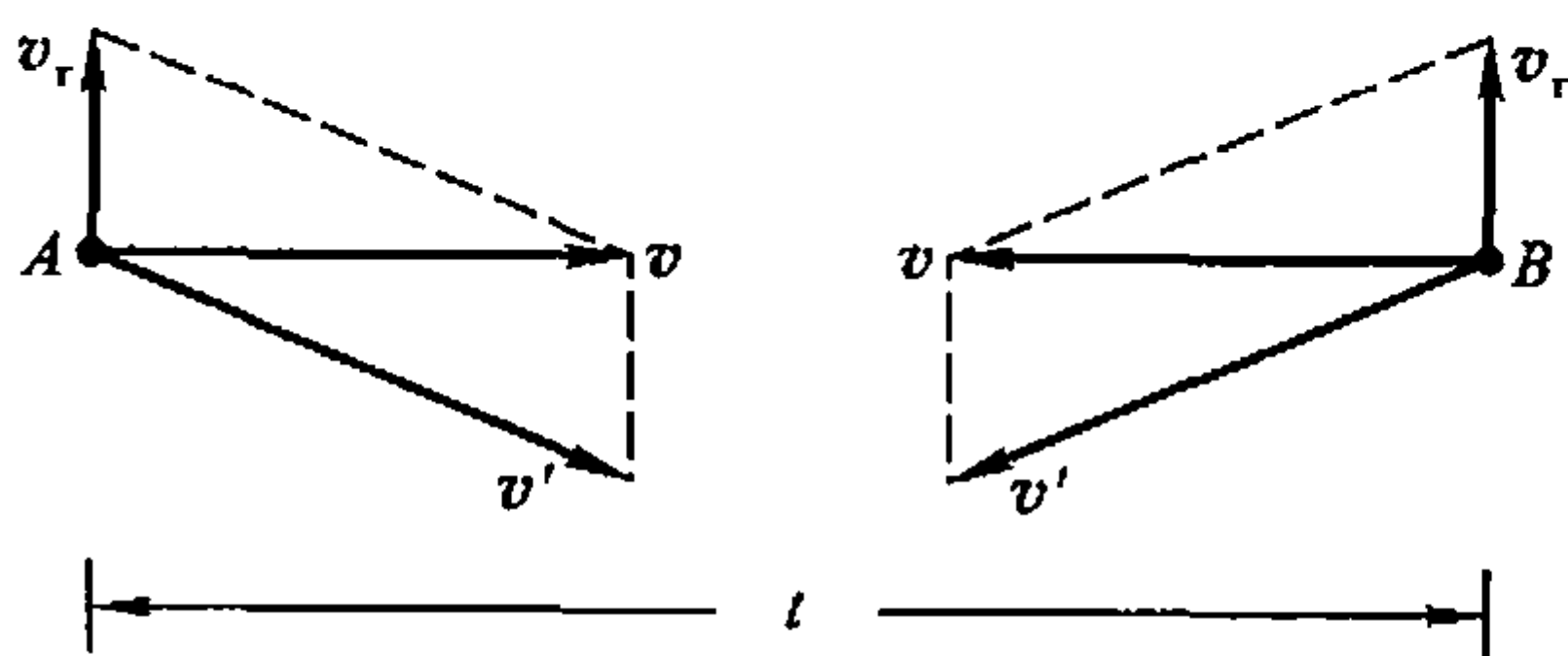
返程时间

$$t_{BA} = \frac{l}{v' - v_r}$$

往返时间

$$t_1 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{l}{v' + v_r} + \frac{l}{v' - v_r} = \frac{t_0}{1 - \left(\frac{v_r}{v'}\right)^2}$$

(3) 当  $\mathbf{v}_r$  向北, 如解图 1-22 所示, 可由速度的矢量关系, 得



解图 1-22

往程时速率

$$v = \sqrt{v'^2 - v_r^2}$$

往程时间

$$t_{AB} = \frac{l}{v} = \frac{l}{\sqrt{v'^2 - v_r^2}}$$

返程时速率

$$t_{BA} = \frac{l}{v} = \frac{l}{\sqrt{v'^2 - v_r^2}}$$

往返时间

$$t_2 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{v'}\right)^2}}$$

**1-23.** 一条河在某段直线岸边同一侧有  $A$ 、 $B$  两个码头,相距 1 km. 甲、乙两人需要从码头  $A$  到码头  $B$ ,再立即由  $B$  返回. 甲划船前去,船相对河水的速度为 4 km/h;而乙沿岸步行,步行速度也为 4 km/h. 如河水流速为 2 km/h,方向从  $A$  到  $B$ . 求:

(1) 在甲、乙两人都从码头  $B$  返回码头  $A$  的过程中,乙相对甲的速度是多少?

(2) 谁先回到码头  $A$ ? 先到达几分钟?

分析: 取河岸为参考系  $K$ ,河水为参考系  $K'$ ,甲相对岸的速度可由速度变换原理求得.

解: 设河水相对河岸的流速为  $v_{\text{水岸}}$ ,甲相对河水的速度为  $v_{\text{甲水}}$ ,则甲相对岸的速度为

$$v_{\text{甲}} = v_{\text{甲水}} + v_{\text{水岸}}$$

甲从码头  $A$  向码头  $B$  运动的速率为

$$v_{\text{甲1}} = v_{\text{甲水}} + v_{\text{水岸}} = 4 + 2 = 6 \text{ km/h}$$

甲从码头  $B$  返回码头  $A$  的速率为

$$v_{\text{甲2}} = v_{\text{甲水}} - v_{\text{水岸}} = 4 - 2 = 2 \text{ km/h}$$

乙相对岸的速率都是

$$v_{\text{乙}} = 4 \text{ km/h}$$

(1) 在甲、乙两人都从码头  $B$  返回码头  $A$  的过程中,乙相对甲的速率为

$$v_{\text{乙甲}} = v_{\text{乙岸}} - v_{\text{甲岸}} = v_{\text{乙岸}} - v_{\text{甲2}} = 4 \text{ km/h} - 2 \text{ km/h} = 2 \text{ km/h}$$

(2) 回到码头  $A$  时,甲用时为

$$t_{\text{甲}} = \frac{L}{v_{\text{甲1}}} + \frac{L}{v_{\text{甲2}}} = \frac{1}{6} \text{ h} + \frac{1}{2} \text{ h} = \frac{2}{3} \text{ h} = 40 \text{ min}$$

乙用时为

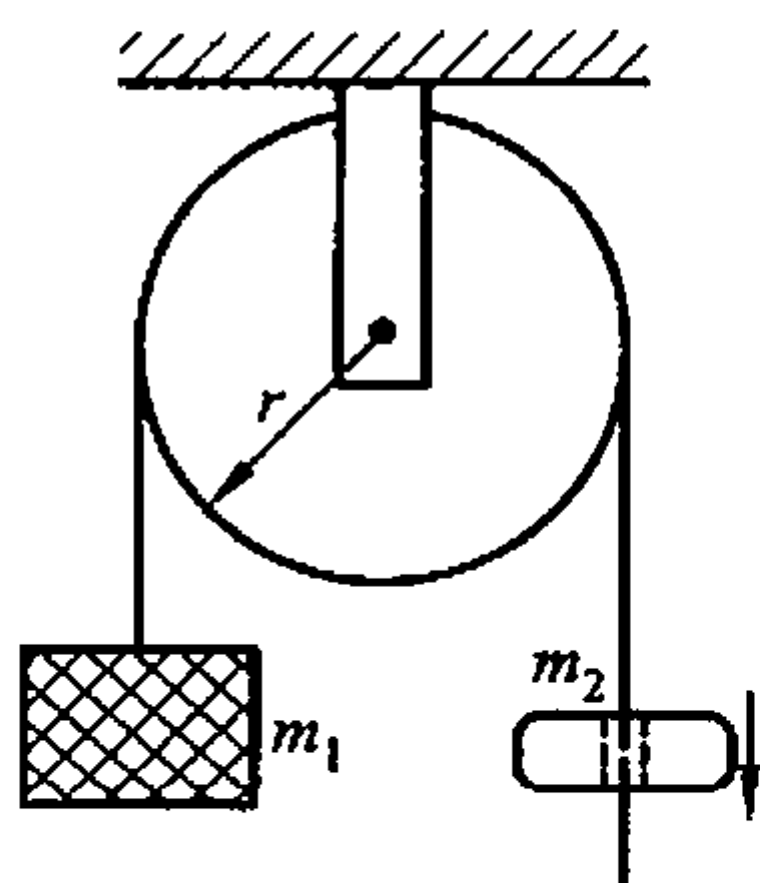
$$t_{\text{乙}} = \frac{2L}{v_{\text{乙}}} = \frac{2}{4} \text{ h} = \frac{1}{2} \text{ h} = 30 \text{ min}$$

所以,乙比甲先 10 分钟回到  $A$ .

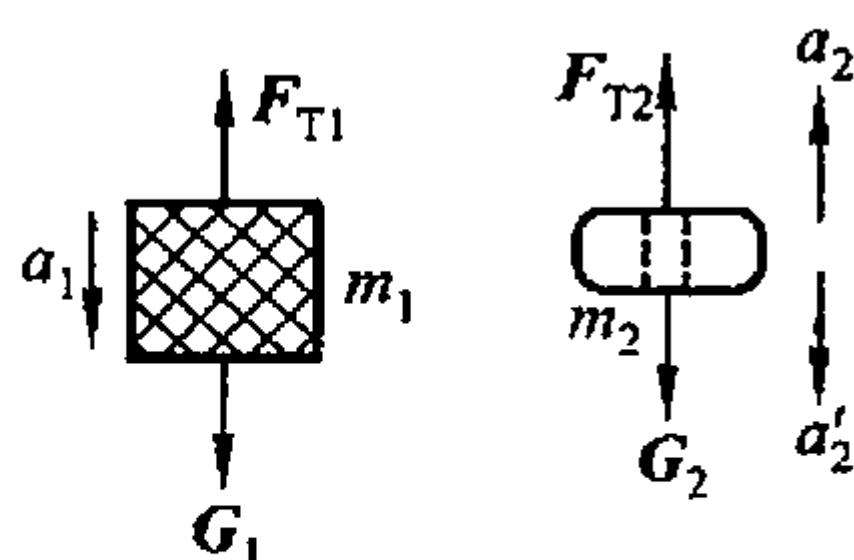
## 6. 恒力作用下的直线运动和曲线运动

**1-24.** 如图所示,一条轻绳跨过摩擦可被忽略的滑轮,在绳的一端挂一质量为  $m_1$  的物体,在另一侧有一质量为  $m_2$  的环. 求:当环相对于绳子以恒定的加速度沿绳向下滑动时,物体和环相对地面的加速度各是多少? 环与绳间的摩擦力多大?

**分析:** 分别对  $m_1$  和  $m_2$  作受力分析,设定轻绳及其连接物体运动的正方向,写出牛顿运动方程即可求解. 注意牛顿运动方程中的加速度都是相对地面(惯性系)的.



习题 1-24 图



解图 1-24

**解:** 对  $m_1$  和  $m_2$  作的受力分析见解图 1-24. 取  $m_1$  相对地面的加速度为  $a_1$ , 以向下为正方向,  $m_2$  相对地面的加速度为  $a_2$ , 向上为正方向. 设环相对绳的加速度大小为  $a_2'$ , 与  $a_2$  的假定方向相反, “轻绳”的质量  $m$  为零.

$$\text{对 } m_1, \text{ 有} \quad m_1 g - F_{T1} = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$\text{对 } m_2, \text{ 有} \quad F_{T2} - m_2 g = m_2 a_2 \quad (2)$$

$$\text{对“轻绳”, 有} \quad F_{T1} - F_{T2} = 0 \quad (3)$$

$m_2$  与绳间摩擦力的大小等于绳的拉力

$$F_{T2} = F_f \quad (4)$$

加速度  $a_1$ 、 $a_2$  和  $a_2'$  间的关系为

$$a_2 = -a_2' + a_1 \quad (5)$$

由(3)、(4)两式可知,对“轻绳”有

$$F_{T1} = F_{T2} = F_f$$

将(5)式代入(2)式,解(1)、(2)两式,可得

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2 a_2'}{m_1 + m_2}$$

$$a_2 = \frac{(m_1 - m_2)g - m_1 a_2'}{m_1 + m_2}$$

$$F_f = \frac{m_1 m_2 (2g - a'_2)}{m_1 + m_2}$$

1-25. 半径为  $r$  的光滑球被固定在水平面上, 设球的顶点为  $P$ .

(1) 将小物体自  $P$  点沿水平方向以初速度  $v_0$  抛出, 要使小物体被抛出后不与球面接触而落在水平面上, 其  $v_0$  为多大?

(2) 要使小物体自  $P$  点自由下滑而落到水平面上, 它脱离球面处离水平面有多高?

分析: 小物体沿光滑球面运动时, 所受的重力  $G$  是恒力, 受球面的支持力  $F_N$  是变力.

在球面顶点  $P$  处, 小物体受合力的方向指向球心, 其合加速度即为法向加速度. 小物体在  $P$  点的运动速度  $v_0$  越大, 受球面的支持力越小, 当  $F_N = 0$  时, 小物体在  $P$  点处作平抛运动.

当小物体自  $P$  点沿光滑球面自由下滑时, 随着  $\theta$  角的增大, 重力  $G$  的法向分量和 support 力  $F_N$  都将越来越小, 而  $G$  的切向分量将越来越大, 因此小物体的运动速率将变大, 沿光滑球面作变加速圆周运动. 当  $F_N = 0$  时, 小物体即离开球面作斜抛运动.

解: (1) 要使小物体自  $P$  点被水平抛出后不再与球面接触, 在  $P$  点处应有  $F_N = 0$ , 有

$$mg = m \frac{v_0^2}{r}$$

可得

$$v_0 = \sqrt{gr}$$

(2) 设小物体沿球面自由下滑到  $\theta$  角时离开球面, 脱离球面时的速率为  $v$ ,  $F_N = 0$ , 见解图 1-25, 应有

$$mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$mg \cos \theta = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

即有

$$v^2 = rg \cos \theta \quad (2)$$

脱离处距离水平面的高度为

$$h = r(1 + \cos \theta) \quad (3)$$

由于  $v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt}$ , 因此  $dt = \frac{rd\theta}{v}$ , (1) 式可重写为

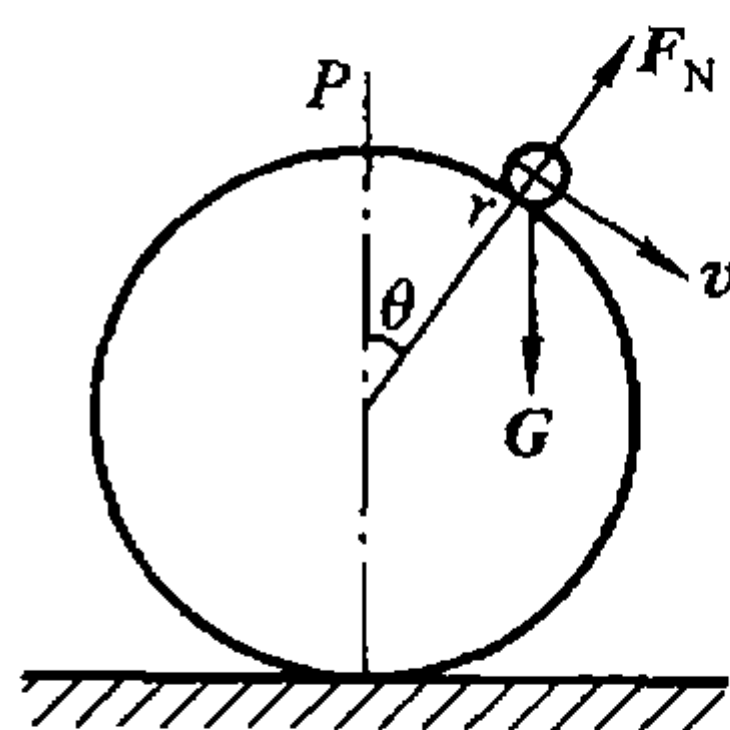
$$rg \sin \theta d\theta = v dv$$

两边积分

$$\int_0^\theta rg \sin \theta d\theta = \int_0^v v dv$$

得

$$v^2 = 2rg(1 - \cos \theta)$$



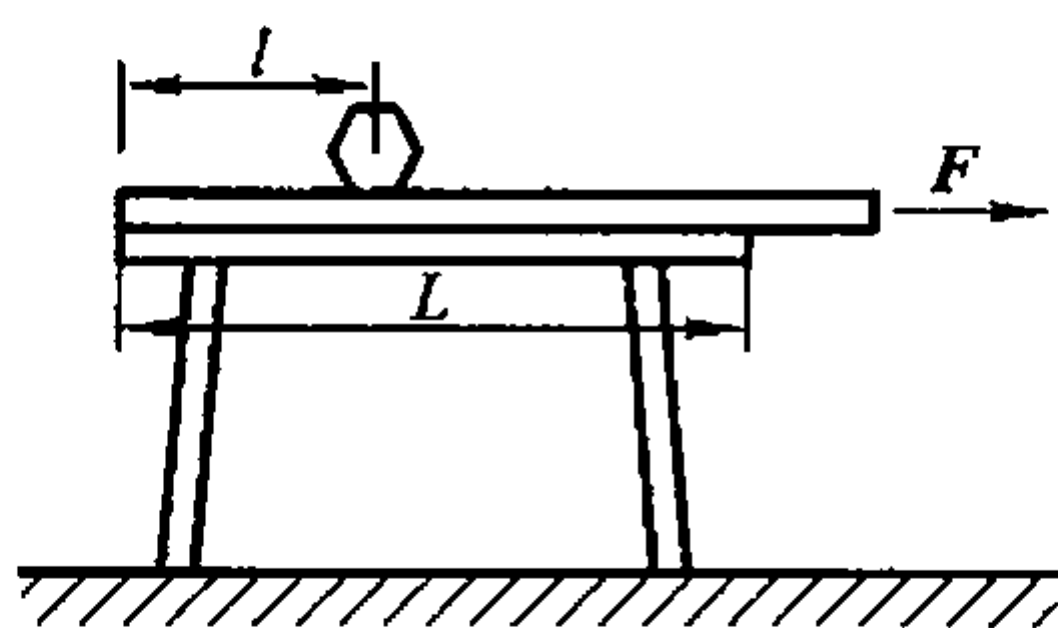
解图 1-25

上式与(2)式相等,得

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$h = r(1 + \cos \theta) = \frac{5}{3}r$$

1-26. 质量为  $m_1$  的木板静置于水平桌面上, 其一端与桌边对齐. 木板上放一质量为  $m_2$  的小瓶, 小瓶与板的该端相距为  $l$ , 桌面长为  $L$ , 如图所示. 现以水平恒力  $F$  作用于板上, 将板从瓶下水平地抽出. 为使小瓶不落地, 该力  $F$  至少为多大? (设各接触面间的摩擦因数均为  $\mu$ .)



习题 1-26 图

分析: 为了使木板能够从小瓶下面水平地抽出, 板的加速度  $a_1$  应大于小瓶的加速度  $a_2$ , 而要使板在抽离桌面时, 小瓶仍留在桌面, 则还应使板的位移为  $L$  时, 小瓶的位移小于  $(L-l)$ .

解: 分别对小瓶和木板作受力分析如解图 1-26 所示. 根据牛顿运动方程, 可对木板和小瓶列出以下方程:

$$F - F_1 - F_2 = m_1 a_1$$

$$F_{N1} - F_{N2} - m_1 g = 0$$

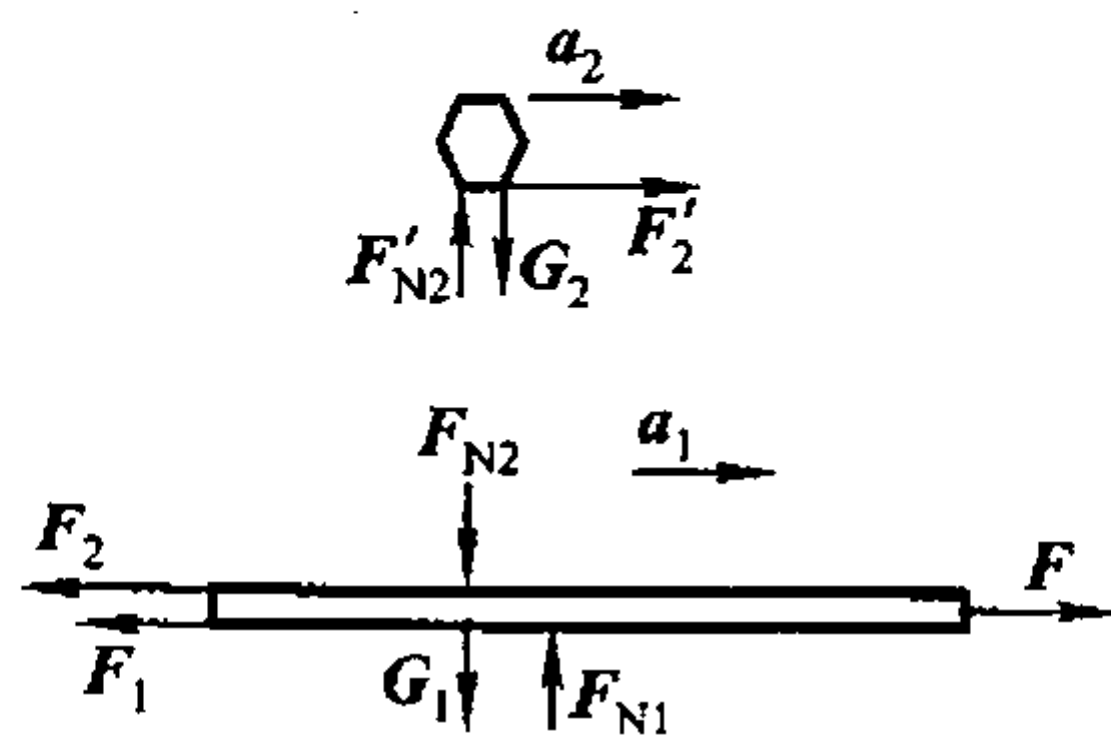
$$F'_2 = m_2 a_2$$

$$F'_{N2} - m_2 g = 0$$

$$L = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$L - l \geq \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$a_1 > a_2$$



解图 1-26

又

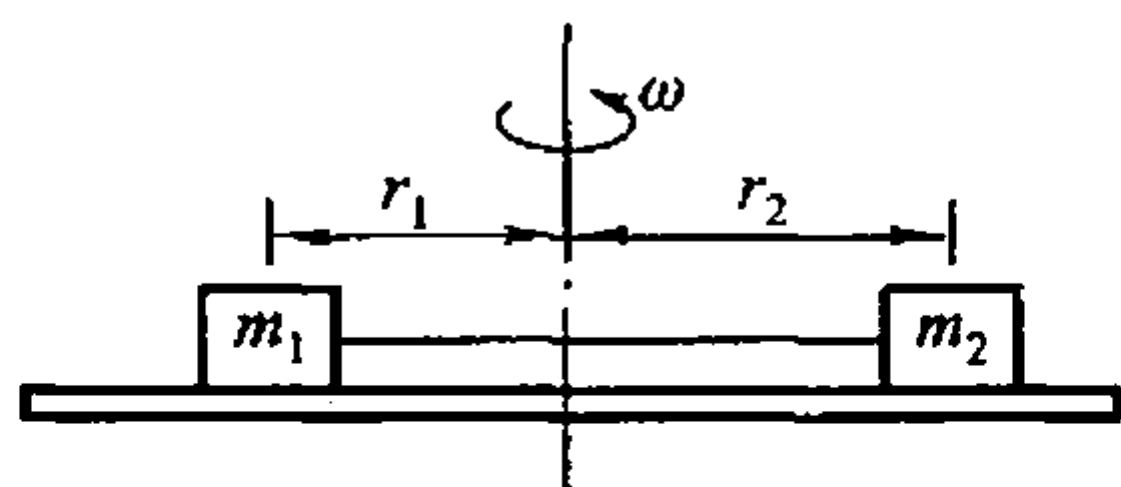
$$F_1 = \mu F_{N1} = \mu(m_1 + m_2)g$$

$$F_2 = F'_2 = \mu F'_{N2} = \mu F_{N2} = \mu m_2 g$$

解上述方程, 可得

$$F \geq 2\mu g \left[ m_1 + m_2 + \frac{m_1 l}{2(L-l)} \right]$$

1-27. 一条轻绳两端各系一小物体,其质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ,置于匀速转动的水平转盘上,两物体到盘心的距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ . 设  $m_2 > m_1, r_2 > r_1$ ,物体与转盘间的摩擦因数均为  $\mu$ . 试讨论在不同角速度时,物体所受的静摩擦力和绳子张力;求保持物体在圆盘上静止所允许的最大角速度.



习题 1-27 图

分析: 两物体相对圆盘静止并随圆盘作匀速率圆周运动,所需的合力来自静摩擦力和轻绳的张力. 角速度不同,所需的合力的大小也不同. 当所需的合力小于最大静摩擦力时,绳中的张力为零. 由于  $m_1$  和  $m_2$  到盘心的距离  $r_1 < r_2$ , 因此,静摩擦力  $F_2$  将先于  $F_1$  达到最大值.

解: 两物体的受力图如解图 1-27 所示.  $F_1$  和  $F_2$  为两物体所受的静摩擦力.

(1) 在  $\omega$  较小时,  $F_1$  和  $F_2$  均未达到最大静摩擦力,故  $F_T = 0$ , 此时

$$F_1 = m_1 \omega^2 r_1, \quad F_2 = m_2 \omega^2 r_2.$$

方向如图所示.

(2) 当  $\omega$  增至一定值  $\omega_1$  时,  $F_2$  首先达到最大静摩擦力,即

$$F_2 = F_{2\max} = \mu m_2 g$$

由于  $F_T$  仍为 0, 故  $\mu m_2 g = m_2 \omega_1^2 r_2$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu g}{r_2}}$$

此时

$$F_1 = m_1 \omega_1^2 r_1 = \frac{\mu m_1 g r_1}{r_2} < F_{1\max}$$

(3) 当  $\omega$  增至  $\omega > \omega_1$  以后,  $F_2 = F_{2\max} = \mu m_2 g$  保持不变,但需受绳的拉力才能相对圆盘静止. 应用牛顿运动方程,有

$$F_T + F_{2\max} = m_2 a_2 = m_2 \omega^2 r_2$$

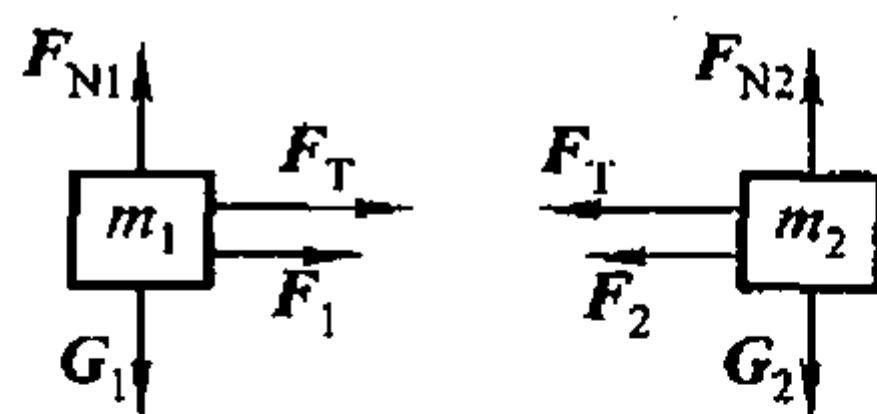
$$F_T + F_1 = m_1 a_1 = m_1 \omega^2 r_1$$

可以解得

$$F_1 = \mu m_2 g - (m_2 r_2 - m_1 r_1) \omega^2$$

$$F_T = m_2 (\omega^2 r_2 - \mu g)$$

(4) 当  $\omega$  继续增大到  $F_1$  达到最大值时,  $m_1$  的运动趋势是朝向  $m_2$  的, 因此  $F_{1\max}$  的方向将与解图 1-27 所示方向相反,  $|F_{1\max}| = \mu m_1 g$ . 相应的运动方程为



解图 1-27

$$F_T + F_{2\max} = m_2 a_2 = m_2 \omega^2 r_2$$

$$F_T - F_{1\max} = m_1 a_1 = m_1 \omega^2 r_1$$

可以解得

$$F_{1\max} = (m_2 r_2 - m_1 r_1) \omega^2 - \mu m_2 g$$

$$F_T = m_2 r_2 \omega^2 - \mu m_2 g$$

保持物体在圆盘上静止所允许的最大角速度为

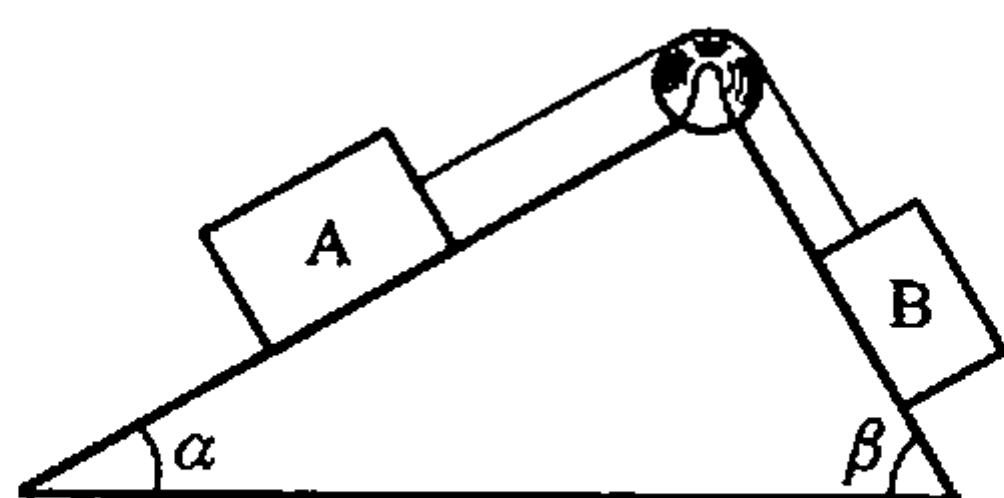
$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{\mu(m_1 + m_2)g}{m_2 r_2 - m_1 r_1}}$$

当  $\omega$  超过  $\omega_{\max}$  后,  $m_1$  和  $m_2$  将不能相对圆盘静止.

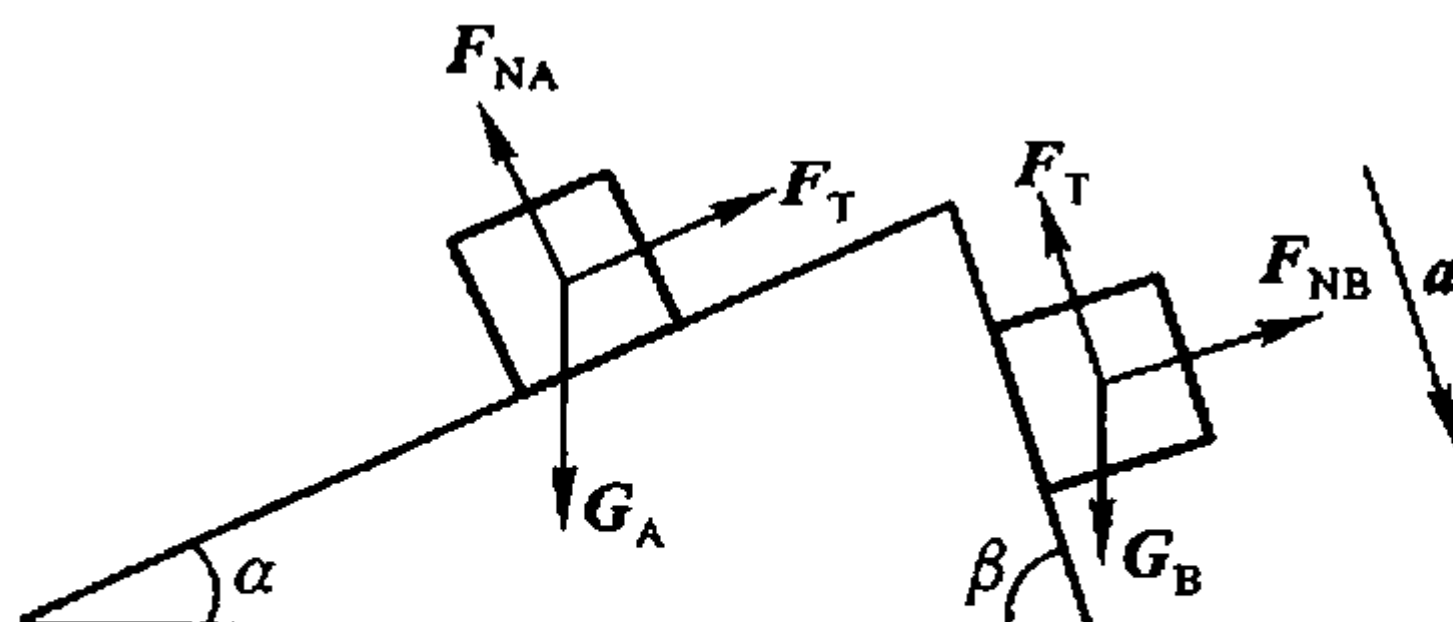
**1-28.** A、B 两个物体, 质量分别为  $m_A = 100 \text{ kg}$ ,  $m_B = 60 \text{ kg}$ , 装置如图所示. 两斜面的倾角分别为  $\alpha = 30^\circ$  和  $\beta = 60^\circ$ . 如果物体与斜面间无摩擦, 滑轮和绳的质量忽略不计, 问:

- (1) 系统将向哪边运动?
- (2) 系统的加速度是多大?
- (3) 绳中的张力多大?

**分析:** 由于轻绳不可伸长, 连接 A、B 两物体时, 不论向哪边运动, A、B 都将具有相同大小的加速度值. 对于斜面问题, 若不能直接判断系统的运动方向, 可先假定某一运动正方向, 并依此列方程, 由计算结果确定物体的实际运动方向.



习题 1-28 图



解图 1-28

**解:** 取两物体为研究对象. 分别作 A、B 两物体的受力分析见解图 1-28. 设系统沿图示方向运动. 两物体在运动方向上的动力学方程分别为

$$F_T - m_A g \sin \alpha = m_A a \quad (1)$$

$$m_B g \sin \beta - F_T = m_B a \quad (2)$$

解(1), (2)两式, 得

$$a = \frac{m_B g \sin \beta - m_A g \sin \alpha}{m_A + m_B} = 0.12 \text{ m/s}^2$$

$a > 0$ , 表示系统的实际运动方向与假定正方向一致. 从(1)式得

$$F_T = m_A g \sin \alpha + m_A a = 502 \text{ N}$$

**1-29.** 一辆铁路平车装有货物,货物与车底板之间的静摩擦因数为 0.25,如果火车以 30 km/h 的速度行驶,问要使货物不发生滑动,火车从刹车到完全静止所经过的最短路程是多少?

**分析:** 以货物为研究对象. 火车刹车前,货物相对火车静止,相对地的速度是 30 km/h. 由于刹车,火车的速度发生变化,具有加速度. 火车对货物的摩擦力(变力)也发生变化. 当火车对货物的摩擦力为最大静摩擦力时,货物处于相对火车不发生滑动的临界状态,此时所对应的加速度就是火车刹车所允许的最大加速度.

**解:** 由受力分析可知,在运动方向上,刹车后货物受最大静摩擦力的大小为

$$|F_{f\max}| = \mu m_{\text{货}} g = m_{\text{货}} a_{\text{货}}$$

$$a_{\text{货}} = \mu g$$

这也是货物与火车不发生相对滑动,火车所允许的最大加速度

$$a_{\text{货}} = a_{\text{车}} = \mu g$$

货物与火车作匀减速直线运动  $v_t^2 - v_0^2 = -2a_{\text{车}} s$

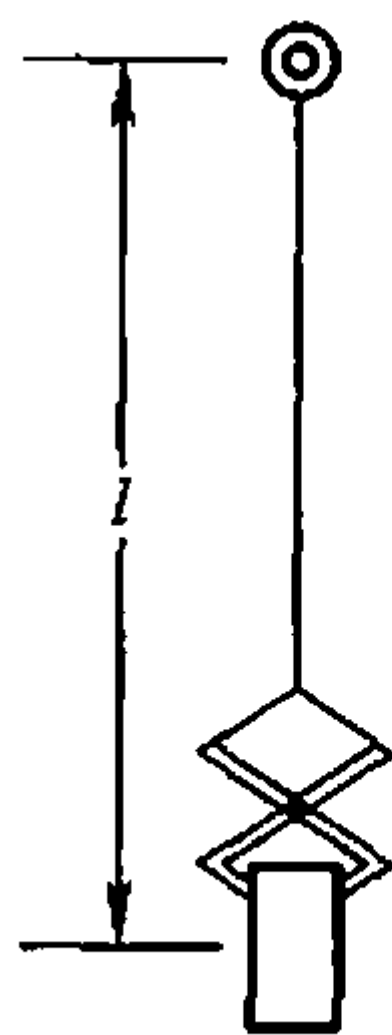
以  $v_t = 0$  代入上式,得  $s = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 14.2 \text{ m}$

**1-30.** 用一种钳子夹住一块质量  $m = 50 \text{ kg}$  的混凝土砌块起吊(如图). 已知钳子与砌块接触处的最大静摩擦因数  $\mu = 0.4$ . 问:

(1) 如果钳子匀速上升,为使砌块不从钳子口滑出,至少必须对砌块施加多大正压力?

(2) 如果钳子以  $0.2 \text{ m/s}^2$  的加速度上升,则对砌块施加的正压力至少要多大?

(3) 如果钳子在沿水平方向以  $4 \text{ m/s}$  的速度行驶时,上端悬挂点突然停止运动(设悬挂点到砌块重心之间的距离  $l = 4 \text{ m}$ ),为使砌块不从钳子口滑出,则对砌块施加多大正压力又至少要多大?

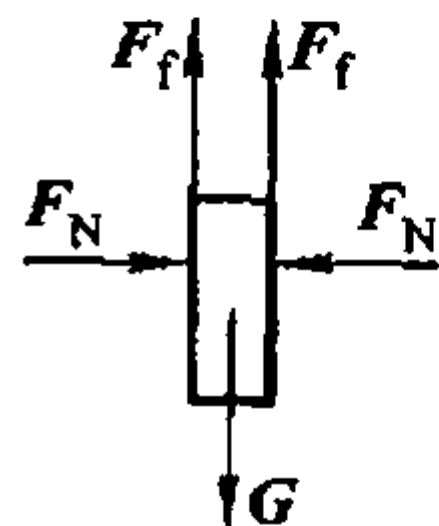


习题 1-30 图

**分析:** 砌块在运动过程中始终受重力和钳子的摩擦力. 根据受力分析和牛顿运动定律可求得砌块在各运动状态下所需的正压力.

**解:** 以砌块  $m$  为研究对象,设每一侧面受到的摩擦力为  $F_f$ ,作受力分析见解图 1-30. 取坐标向上为正. 设  $m$  以加速度  $a$  向上运动,由牛顿运动方程,得

$$2F_f - mg = ma, \quad F_f = \mu F_N \quad (1)$$



解图 1-30

得

$$F_N = \frac{m(g+a)}{2\mu} \quad (2)$$

(1) 钳子匀速上升时, 加速度  $a=0$ , 由(2)式, 可得  $F_N = \frac{mg}{2\mu} = 613 \text{ N}$

(2)  $a = 0.2 \text{ m/s}^2$  加速上升时, 由(2)式, 得  $F_N = \frac{m(g+a)}{2\mu} = 625 \text{ N}$

(3) 上端悬挂点突然停止水平运动时, 砌块  $m$  由于惯性作用不会停止运动, 将绕上端悬挂点在铅直面内沿半径为  $l=4 \text{ m}$  的圆弧摆动. 在悬挂点的垂线处, 砌块  $m$  的水平运动速率为  $v=4 \text{ m/s}$ , 这是砌块作圆周运动的最大速率.

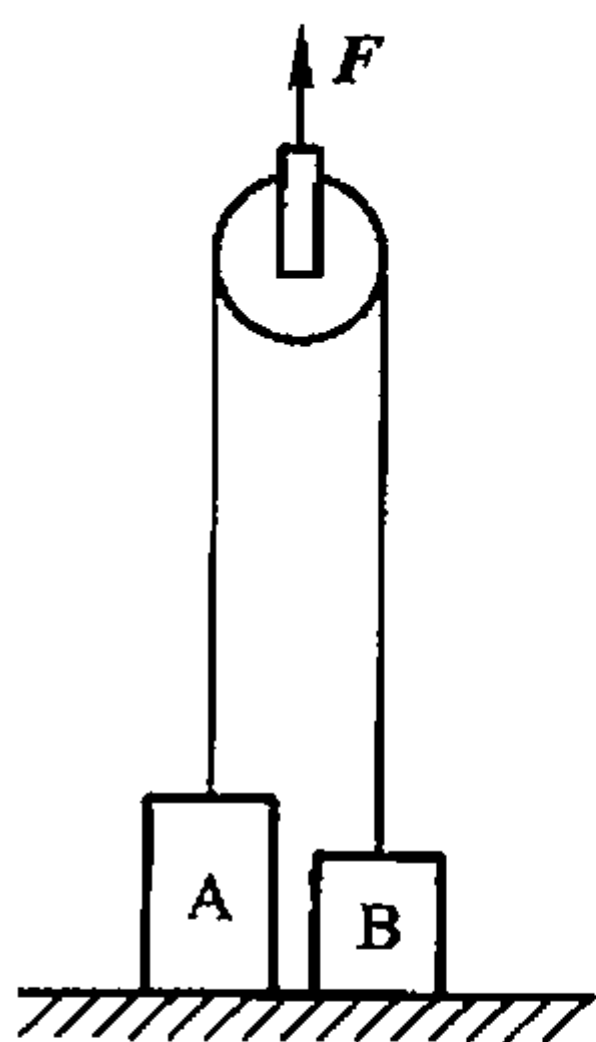
此时, 砌块  $m$  的运动方程为  $2F_f - mg \geq m \frac{v^2}{l}$  (3)

由(3)式可知, 这时的摩擦力  $F_f$  是至少和必须的, 式中  $F_f = \mu F_N$ .

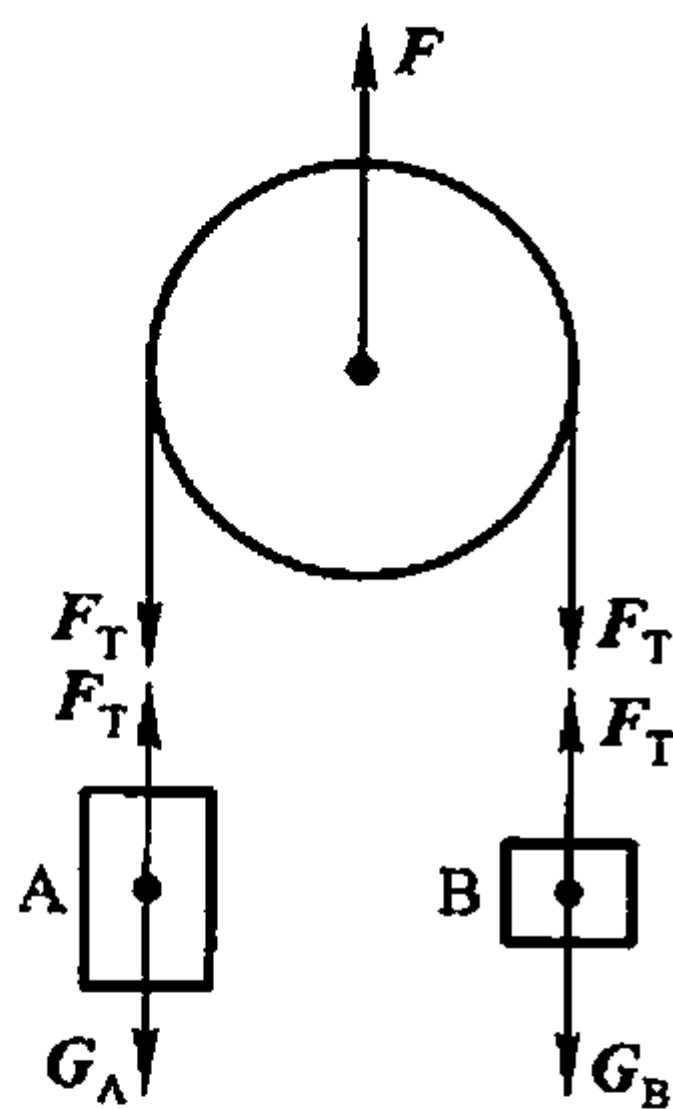
所以  $F_N \geq \frac{1}{2\mu} m \left( g + \frac{v^2}{l} \right) = 863 \text{ N}$

\*1-31. 一滑轮两边分别挂着 A 和 B 两物体, 它们的质量分别为  $m_A = 20 \text{ kg}$ ,  $m_B = 10 \text{ kg}$ , 今用力  $F$  将滑轮提起 (如图), 当  $F$  分别等于 (1)  $98 \text{ N}$ , (2)  $196 \text{ N}$ , (3)  $392 \text{ N}$ , (4)  $784 \text{ N}$  时, 求物体 A 和 B 的加速度以及两边绳中的张力 (滑轮的质量与摩擦不计).

分析: 不可伸长的轻绳在被拉紧时, 绳中的张力  $T$  处处相等. 物体 A 和 B 是否可被提起, 决定于各自所受的合力是否大于零.



习题 1-31 图



解图 1-31

解: 以 A 和 B 为研究对象, 在绳被拉紧时对 A 和 B 作受力分析, 如解图 1-31 所示.

对 A, 可被提起的条件是  $F_T - m_A g = m_A a_A > 0$  (1)

对 B, 可被提起的条件是  $F_T - m_B g = m_B a_B > 0$  (2)

因滑轮的质量为零,  $F - 2F_T = 0$  (3)

解(1)、(2)、(3)式,得 
$$a_A = \frac{F}{2m_A} - g > 0 \quad (4)$$

$$a_B = \frac{F}{2m_B} - g > 0 \quad (5)$$

(1)  $F = 98 \text{ N}$  时, (4)、(5)两式均不成立,表示 A 和 B 不能被提起,即

$$a_A = a_B = 0$$

由(3)式,绳中的张力为 
$$F_T = \frac{F}{2} = 49 \text{ N}$$

(2)  $F = 196 \text{ N}$  时,由(4)、(5)两式可知, A 和 B 仍不能被提起,即

$$a_A = a_B = 0$$

绳中的张力为 
$$F_T = \frac{F}{2} = 98 \text{ N}$$

(3)  $F = 392 \text{ N}$  时,由(4)、(5)两式可得

$$a_A = 0, \quad a_B = 9.8 \text{ m/s}^2$$

即 A 静止, B 加速上升. 绳中的张力为 
$$F_T = \frac{F}{2} = 196 \text{ N}$$

(4)  $F = 784 \text{ N}$  时,由(4)、(5)两式可得

$$a_A = 9.8 \text{ m/s}^2, \quad a_B = 29.4 \text{ m/s}^2$$

绳中的张力为 
$$F_T = \frac{F}{2} = 392 \text{ N}$$

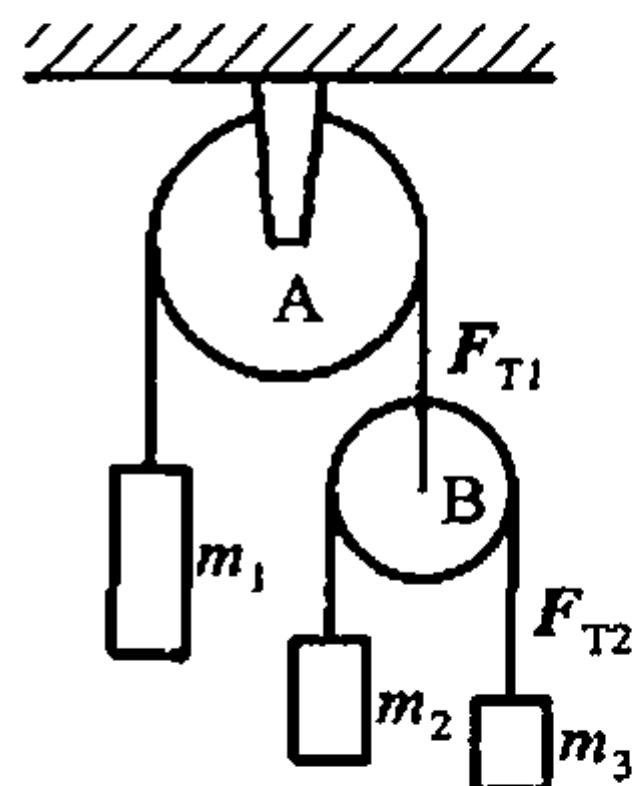
## 7. 非惯性参考系中物体的运动

\*1-32. 图中 A 为定滑轮, B 为动滑轮, 三个物体  $m_1 = 200 \text{ g}$ ,  $m_2 = 100 \text{ g}$ ,  $m_3 = 50 \text{ g}$ , 求:

(1) 每个物体的加速度;

(2) 两根绳子中的张力  $F_{T1}$  与  $F_{T2}$ . 假定滑轮及绳的质量以及摩擦均可忽略不计.

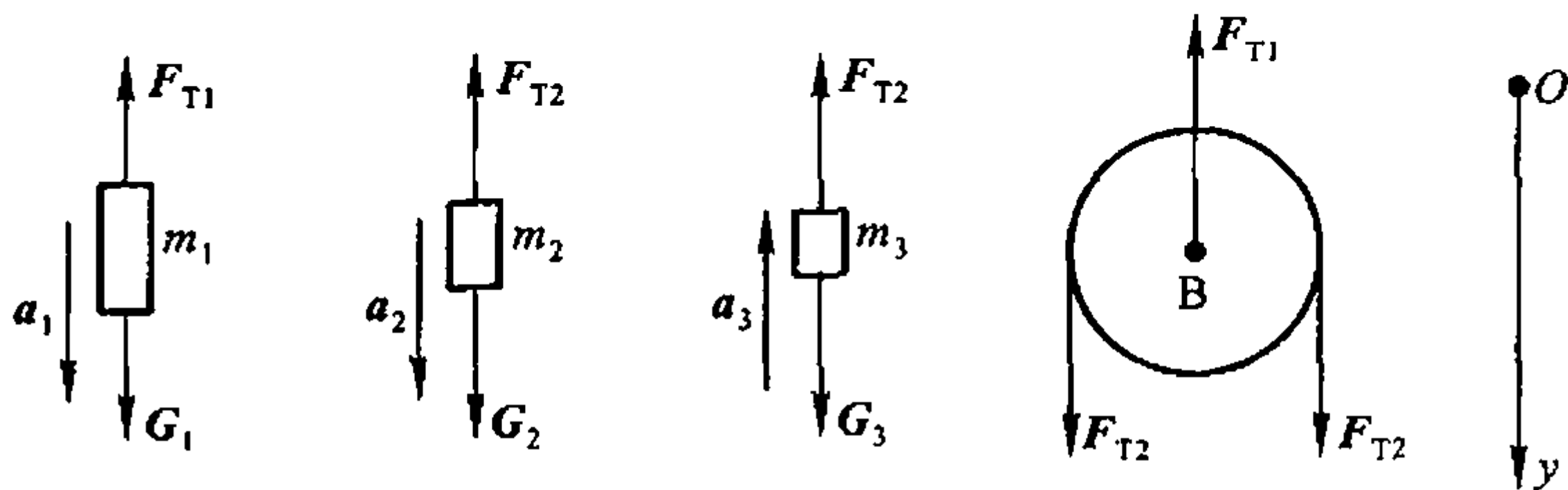
分析: 牛顿运动定律适用于惯性参考系. 本题中, 若以  $a_1, a_2, a_3$  分别表示  $m_1, m_2, m_3$  相对地面(惯性系)的加速度, 需注意  $m_2, m_3$  相对滑轮 B 的加速度不是对地加速度, 要运用相对运动的加速度关系处理  $a_2$  和  $a_3$ . 若取滑轮 B 为参考系(非惯性系), 则应注意添加相应的惯性力.



习题 1-32 图

解1: 以  $m_1, m_2, m_3$  为研究对象, 选“地面”参考系. 作受力分析如解图 1-32a. 设  $m_1, m_2$  向下,  $m_3$  向上运动, 对地的加速度分别为  $a_1, a_2$  和  $a_3$ . 由于轻绳不可伸长,  $m_2, m_3$  相对滑轮 B 的加速度大小相同, 以  $a'_2$  表示, 同理, 有

$$|a_1| = |a_{B地}|$$



解图 1-32a

$m_2$  对地的加速度

$$a_2 = a'_2 - a_1$$

$m_3$  对地的加速度

$$a_3 = a'_2 + a_1$$

对  $m_1$ :

$$m_1 g - F_{T1} = m_1 a_1 \quad (1)$$

对  $m_2$ :

$$m_2 g - F_{T2} = m_2 a_2 = m_2 (a'_2 - a_1) \quad (2)$$

对  $m_3$ :

$$F_{T2} - m_3 g = m_3 a_3 = m_3 (a'_2 + a_1) \quad (3)$$

由于不计滑轮质量,

$$F_{T1} - 2F_{T2} = 0 \quad (4)$$

解(1)、(2)、(3)、(4)式,得

$$a_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g = 1.96 \text{ m/s}^2$$

$$a'_2 = \frac{2m_1 (m_2 - m_3)}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g = 3.92 \text{ m/s}^2$$

$$F_{T1} = \frac{8m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g = 1.57 \text{ N}$$

$$F_{T2} = \frac{4m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g = 0.785 \text{ N}$$

$$a_2 = a'_2 - a_1 = 1.96 \text{ m/s}^2$$

$$a_3 = a'_2 + a_1 = 5.88 \text{ m/s}^2$$

三个物体的加速度均大于零表明,实际的运动状态与假设情况相同.

**解2:** 对  $m_1$  仍取地面参考系. 对  $m_2$ 、 $m_3$  取滑轮 B 为参考系(非惯性系),添加惯性力后使牛顿运动定律形式上成立. 对三个物体运动状态的假设同解 1. 受力分析如解图 1-32b. 设  $m_1$  对地的加速度为  $a_1$ ,  $m_2$  和  $m_3$  相对滑轮 B 的加速度大小为  $|a'_2|$ .

$m_2$  受惯性力为

$$F_{2\text{惯}} = m_2 a_1$$

$m_3$  受惯性力为

$$F_{3\text{惯}} = m_3 a_1$$

对  $m_1$ :

$$m_1 g - F_{T1} = m_1 a_1 \quad (1)$$

对  $m_2$ :

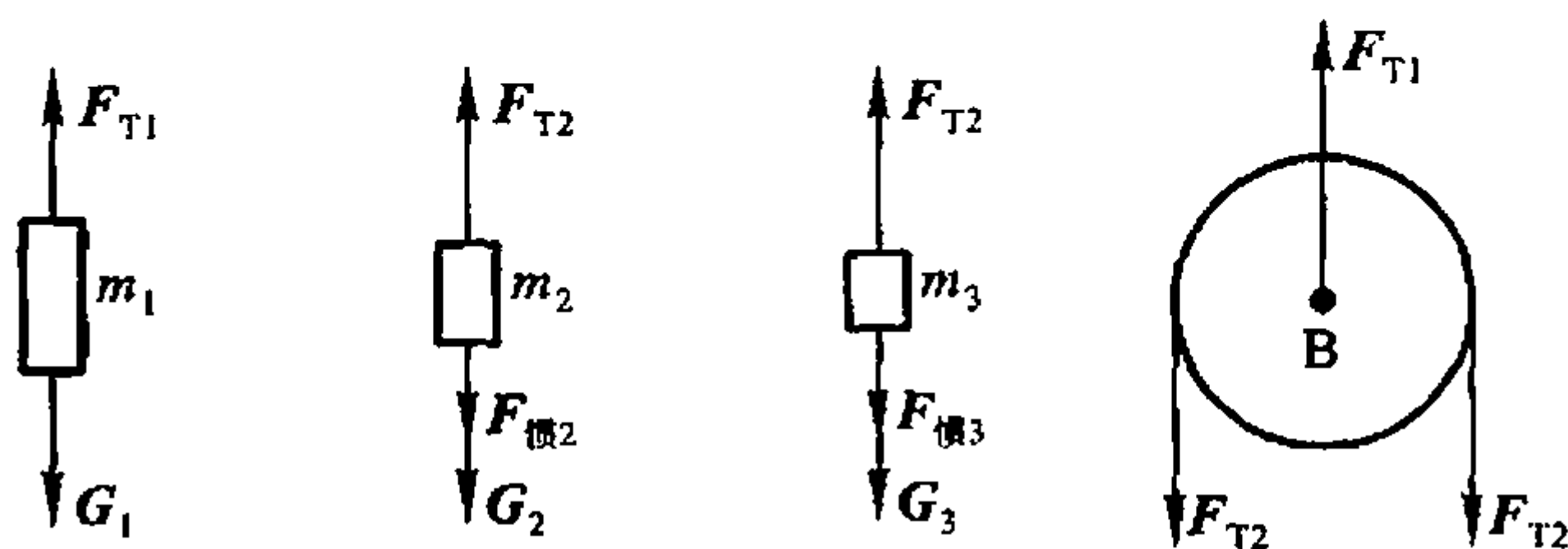
$$m_2 g - F_{T2} + m_2 a_1 = m_2 a'_2 \quad (2)$$

对  $m_3$ :

$$F_{T2} - m_3 g - m_3 a_1 = m_3 a'_2 \quad (3)$$

又

$$F_{T1} = 2F_{T2} \quad (4)$$



解图 1-32b

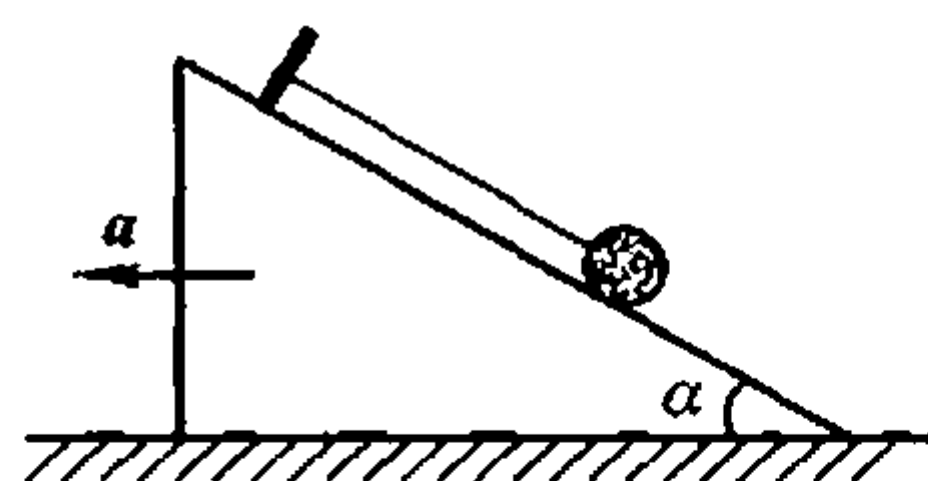
改写(2)、(3)式,得  $m_2g - F_{T2} = m_2(a'_2 - a_1)$  (2')

$m_3g - F_{T2} = -m_3(a'_2 + a_1)$  (3')

方程(1)、(2')、(3')、(4)与解 1 的方程完全相同.

1-33. 将质量为 10 kg 的小球挂在倾角  $\alpha = 30^\circ$  的光滑斜面上(如图).

(1) 当斜面以加速度  $a = \frac{1}{3}g$ , 沿如图所示的方向运动时, 求绳中的张力及小球对斜面的正压力.

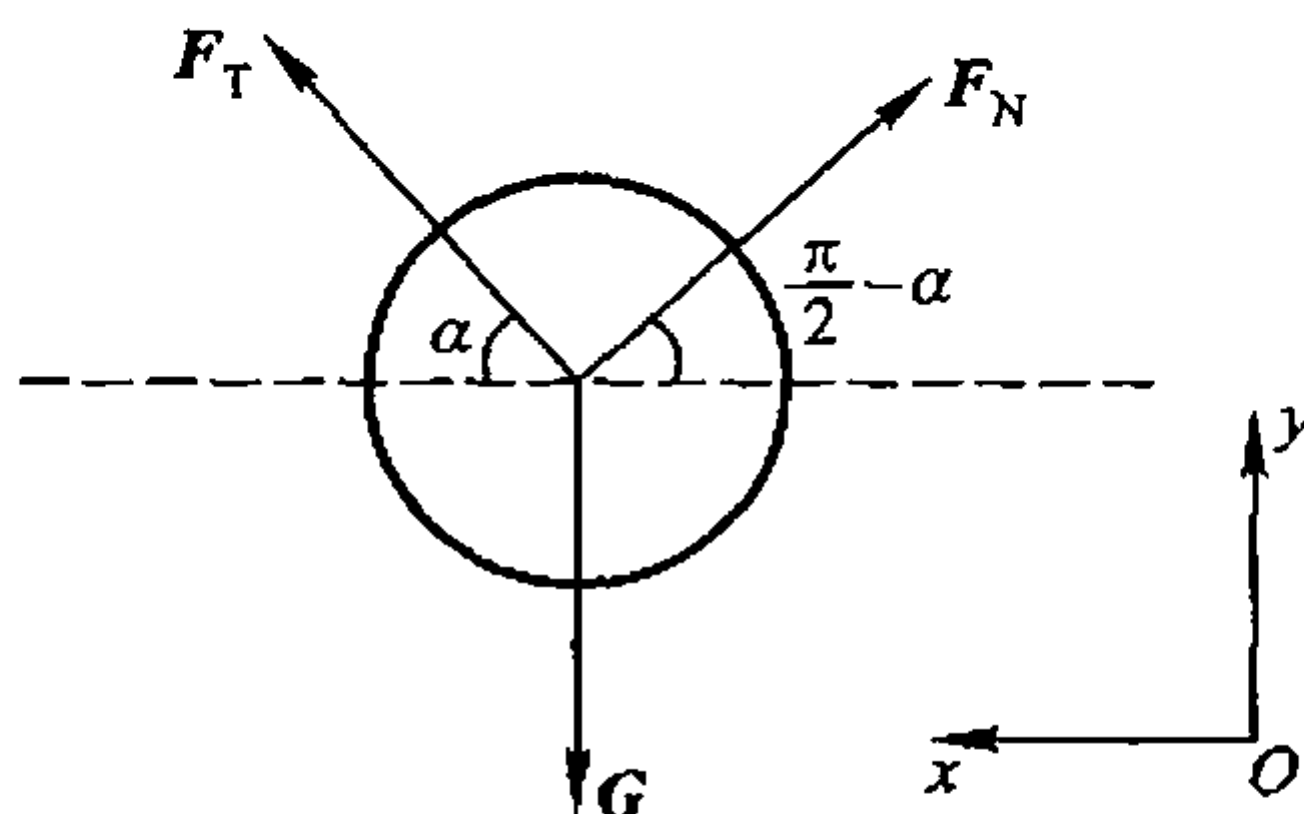


习题 1-33 图

(2) 当斜面的加速度至少为多大时, 小球对斜面的正压力为零?

分析: 以小球为研究对象. 取地面为参考系时, 小球与斜面之间无相对运动, 因而具有相同的对地加速度. 对小球作受力分析后, 可运用牛顿运动定律求解. 若取斜面为参考系(非惯性系)时, 小球相对斜面静止, 应添加惯性力求解.

解: (1) 取坐标和作小球的受力分析如解图 1-33. 由牛顿第二定律,



解图 1-33

$x$  方向, 有

$$F_T \cos \alpha - F_N \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = ma \quad (1)$$

$y$  方向, 有

$$F_T \sin \alpha + F_N \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - mg = 0 \quad (2)$$

解方程, 可得

$$F_T = \frac{mg}{6}(3 + \sqrt{3}) = 77.3 \text{ N}$$

$$F_N = \frac{mg}{6}(3\sqrt{3}-1) = 68.5 \text{ N}$$

(2) 对(1)、(2)两式,令  $F_N = 0$ , 得  $F_T \cos \alpha = ma$

$$F_T \sin \alpha - mg = 0$$

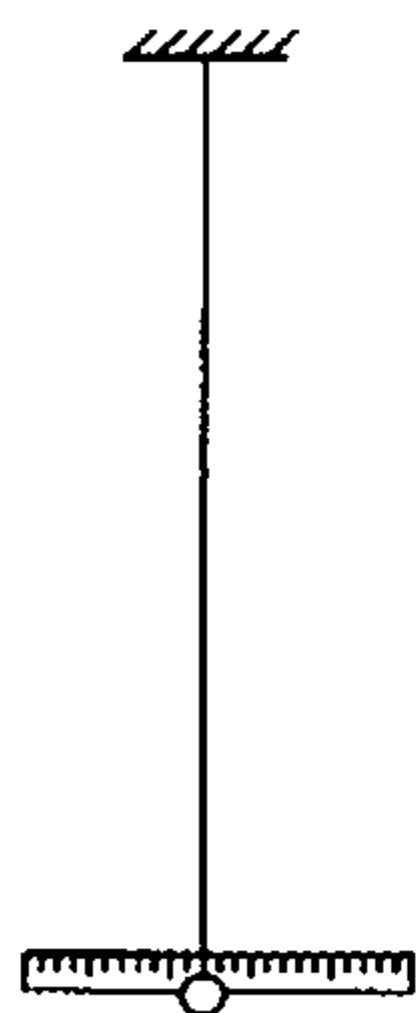
即

$$\tan \alpha = \frac{g}{a}, \quad a = \frac{g}{\tan \alpha} = 17.0 \text{ m/s}^2$$

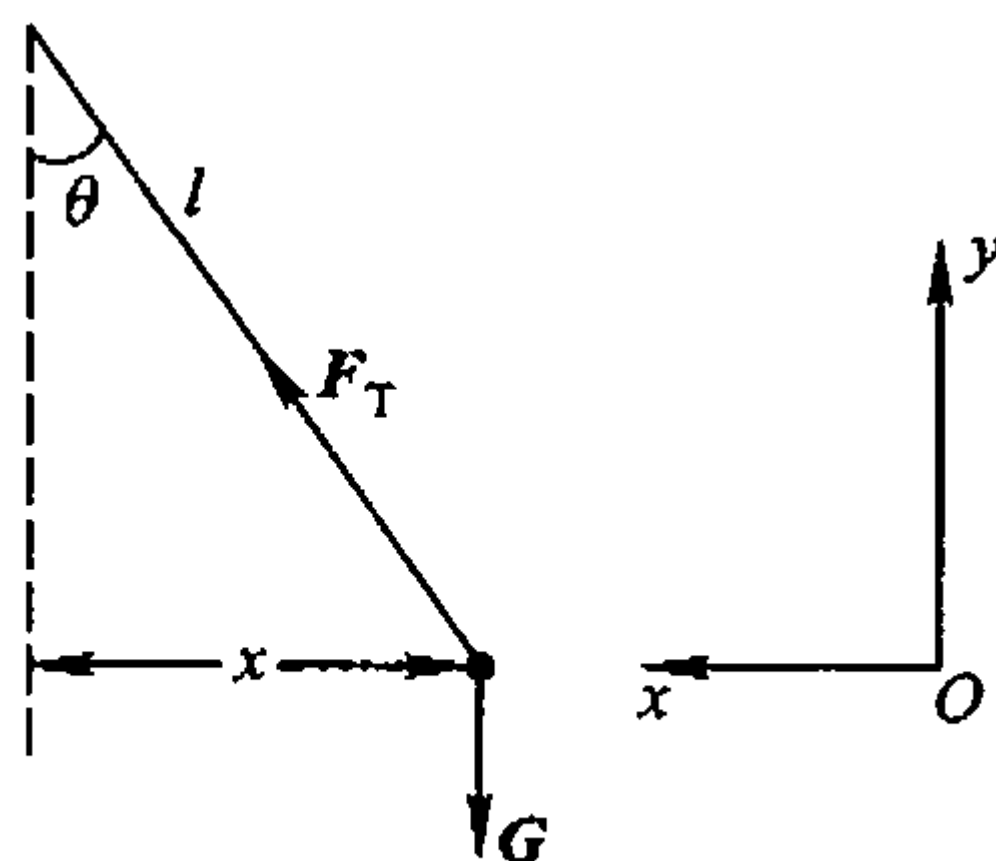
取斜面参考系时, (1)式应改为  $F_T \cos \alpha - F_N \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - ma = 0$ , (2)式不变, 结果相同.

**1-34.** 利用一挂在车顶的摆长为  $l$  m 的单摆和附在下端的米尺(如图), 怎样测出车厢的加速度? (单摆的偏角很小.)

**分析:** 车厢以加速度  $a$  沿直线运动时, 摆球相对车厢静止, 因此相对地面参考系的水平加速度也是  $a$ . 在地面参考系分析时, 摆球受重力和摆绳的拉力, 这两力的合力使摆球获得对地的加速度. 在车厢参考系(非惯性)分析时, 摆球除受有重力、摆绳的拉力外, 在水平方向上还受惯性力, 三者平衡的结果, 形成摆角  $\theta$ . 车厢对地的加速度不同, 摆角也不同.



习题 1-34 图



解图 1-34

**解:** 在地面参考系中, 以摆球  $m$  为研究对象. 对摆球的受力分析如解图 1-34. 摆角为  $\theta$  时, 摆球受拉力  $F_T$  和重力  $G$ , 合力沿  $x$  方向, 加速度为  $a$ . 根据牛顿运动定律, 列出如下方程:

$x$  方向

$$F_T \sin \theta = ma$$

$y$  方向

$$F_T \cos \theta - mg = 0$$

解上两式, 得

$$a = g \tan \theta$$

因为  $\theta$  很小, 得

$$\tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x}{l}$$

所以,有

$$a \approx \frac{x}{l}g$$

在米尺上读出  $x$  值,即可得到车厢的加速度.

## 8. 变力问题

\*1-35. 摩托快艇以速率  $v_0$  行驶,它受到的摩擦阻力与速度平方成正比,设比例系数为常数  $k$ ,则可表示为  $F = -kv^2$ . 设摩托快艇的质量为  $m$ ,当摩托快艇发动机关闭后,

- (1) 求速度  $v$  对时间的变化规律.
- (2) 求路程  $x$  对时间的变化规律.
- (3) 证明速度  $v$  与路程  $x$  之间有如下关系:

$$v = v_0 e^{-k'x}$$

式中的  $k' = \frac{k}{m}$ .

- (4) 如果  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ,经  $15 \text{ s}$  后,速度降为  $v_t = 10 \text{ m/s}$ ,求  $k'$ .

- (5) 画出  $x, v, a$  随时间变化的图形.

分析: 快艇在与速度平方成正比的摩擦阻力作用下运动,它的加速度也是变化的. 解这类一维变力作用下的动力学问题,在对物体作受力分析后,需应用牛顿运动定律的微分形式. 通过解微分方程,得到  $v(t), x(t)$  关系函数. 在作微、积分运算时需注意正确运用数学方法,如统一积分变量、确定积分上下限等.

解: (1) 快艇运动满足的动力学方程为  $F = -kv^2 = m \frac{dv}{dt}$

即 
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2 = -k'v^2, \quad k' = \frac{k}{m}$$

分离变量并积分,代入积分上下限 
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t k' dt$$

得 
$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k't \quad (1)$$

即 
$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 k' t} = \frac{v_0}{1 + v_0 k t / m} \quad (2)$$

(2) 由速度的定义, (2) 式可表示为 
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + v_0 k' t}$$

分离变量并积分,代入上下限 
$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + v_0 k' t} dt$$

得 
$$x = \frac{1}{k'} \ln(1 + v_0 k' t) \quad (3)$$

(3) 由(2)式和(3)式可得  $xk' = \ln(1 + v_0 k' t) = \ln \frac{v_0}{v}$

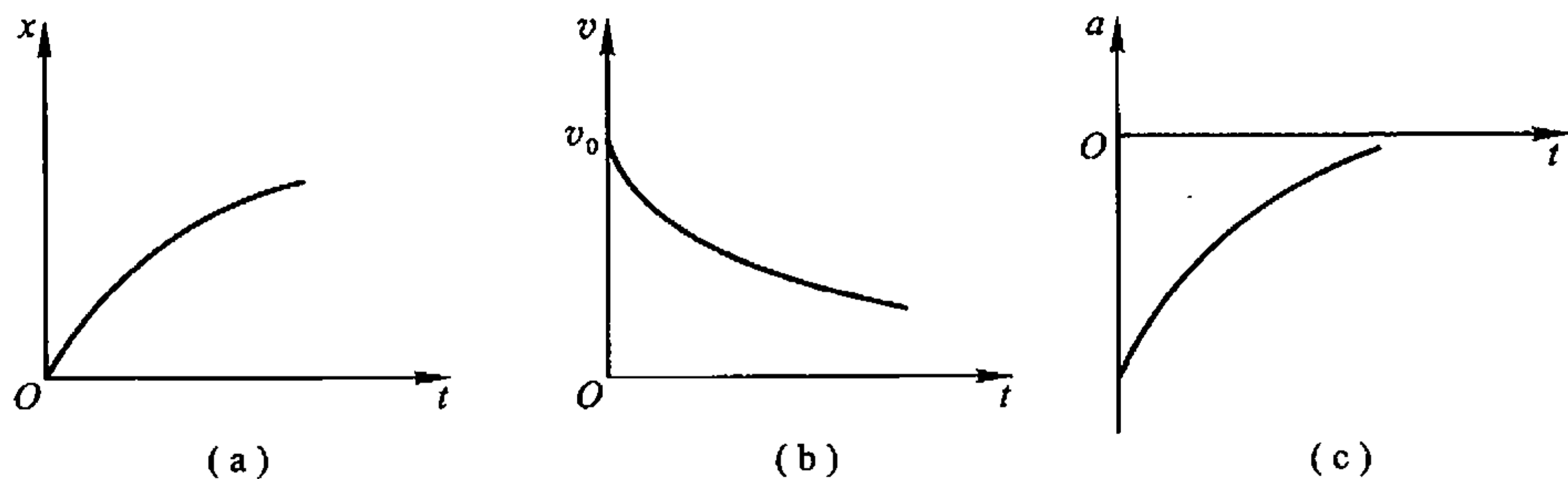
即

$$v = v_0 e^{-k'x}$$

得证.

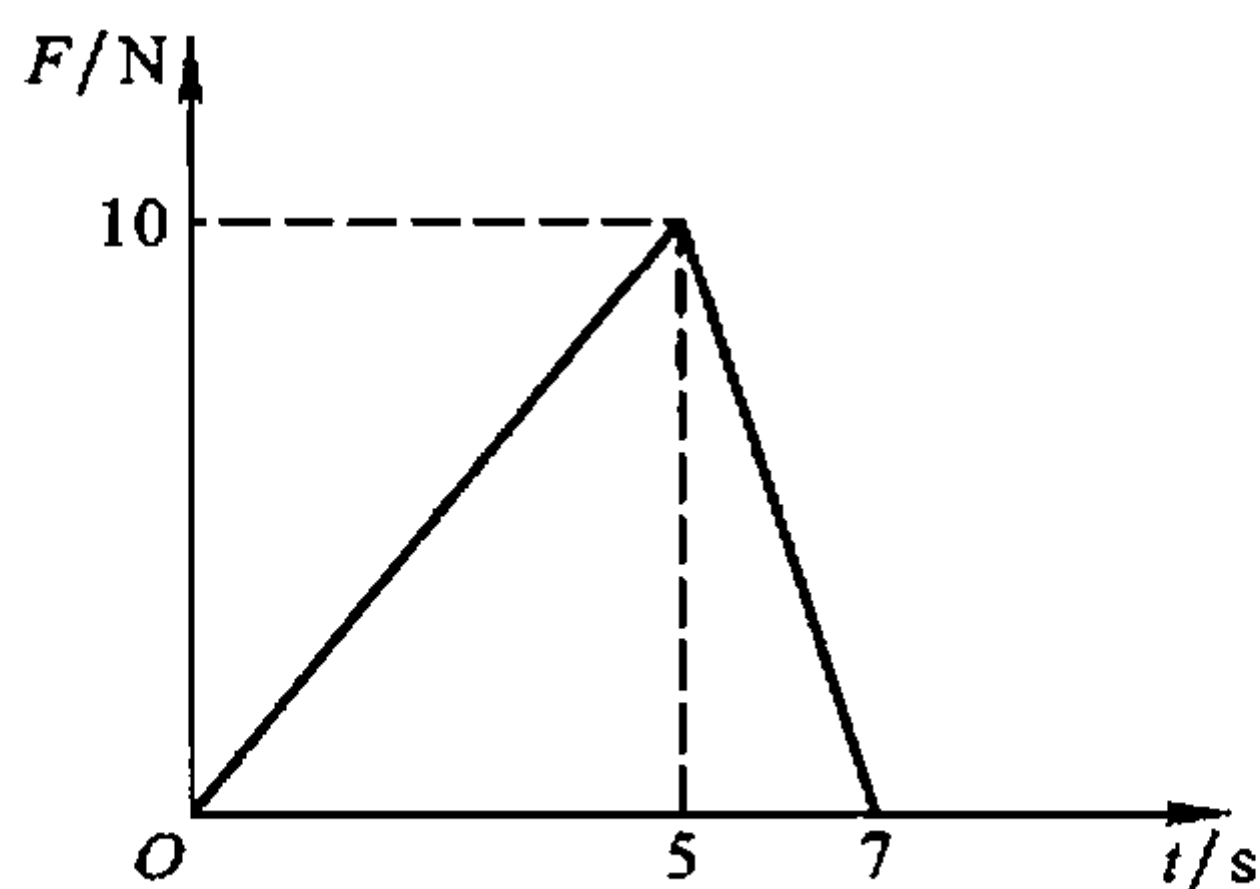
(4) 将数值代入(1)式,得  $k' = \frac{1}{300} \text{ m}^{-1}$

(5)  $x, v, a$  随时间变化曲线见解图 1-35.



解图 1-35

1-36. 一质点的质量为 1 kg, 沿  $Ox$  轴运动, 所受的力如图所示.  $t=0$  时, 质点静止在坐标原点, 试求此质点第 7 s 末的速度和坐标.



习题 1-36 图

分析: 质点在变力  $F$  的作用下将改变运动状态. 已知  $F$  和质点的质量  $m$ , 可以得到加速度  $a$ . 利用  $a$  与  $v$  以及  $v$  与  $\Delta x$  的积分关系, 可求得  $v(t)$  和  $x(t)$ . 由于  $F-t$  为分段连续函数, 故加速度  $a$  和速度  $v$  随时间  $t$  的变化关系也都是分段连续函数, 在求相关的积分时需注意这一点.

解: 在  $t=0 \sim 5 \text{ s}$  区间内,

$$F_1 = m \frac{dv}{dt} = k_1 t, \quad k_1 = \frac{10}{5} = 2$$

可得

$$dv = \frac{k_1}{m} t dt = 2t dt$$

对上式积分,有

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t 2t dt$$

据题意,  $t=0$  时  $v_0=0$ , 故有

$$v = t^2$$

$t=5$  s 时的速度为

$$v_5 = 25 \text{ m/s}$$

由

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2$$

可得

$$dx = t^2 dt$$

对上式积分,有

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t t^2 dt$$

据题意,  $t=0$  时  $x_0=0$ , 故有

$$x = \frac{t^3}{3}$$

$t=5$  s 时的坐标为

$$x_5 = \frac{125}{3} = 41.67 \text{ m}$$

在  $t=5 \sim 7$  s 区间内,

$$F_2 = m \frac{dv}{dt} = k_2(t-7), \quad k_2 = -\frac{10}{2} = -5$$

可得

$$dv = \frac{k_2}{m}(t-7) dt = -5(t-7) dt$$

对上式积分,有

$$\int_{v_5}^v dv = -5 \int_5^t (t-7) dt$$

可得

$$v = v_5 - 2.5t^2 + 35t - 112.5$$

$t=7$  s 时的速度为

$$v_7 = (25 - 2.5 \times 7^2 + 35 \times 7 - 112.5) \text{ m/s} = 35 \text{ m/s}$$

由  $v = \frac{dx}{dt}$  可得

$$dx = (-2.5t^2 + 35t - 87.5) dt$$

对上式积分,有

$$\int_{x_5}^x dx = \int_5^t (-2.5t^2 + 35t - 87.5) dt$$

可得

$$x = x_5 - 0.83t^3 + 17.5t^2 - 87.5t + 104.17$$

$t=7$  s 时的坐标为

$$\begin{aligned} x_7 &= (41.67 - 0.83 \times 7^3 + 17.5 \times 7^2 - 87.5 \times 7 + 104.17) \text{ m} \\ &= 106.15 \text{ m} \end{aligned}$$

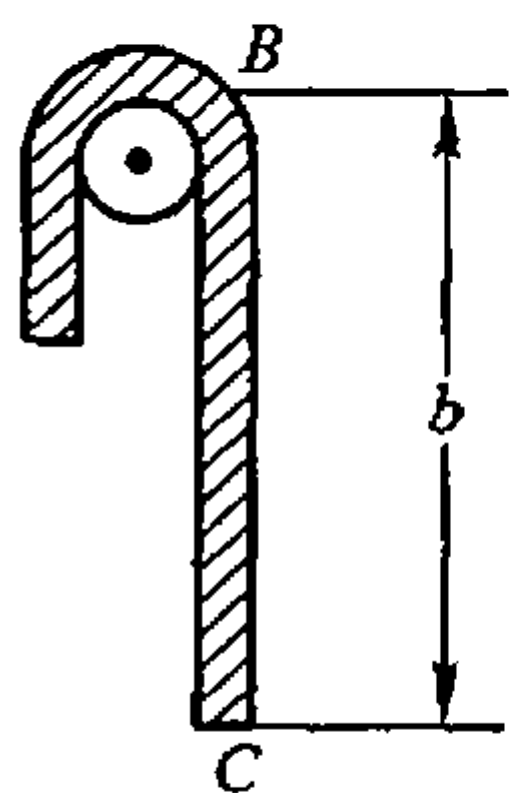
所以,  $t=7$  s 时的坐标为  $x_7 = 106.15$  m, 速度为  $v_7 = 35$  m/s.

**1-37.** 一根长为  $L$ 、质量均匀的软绳,挂在一半径很小的光滑木钉上,如图.

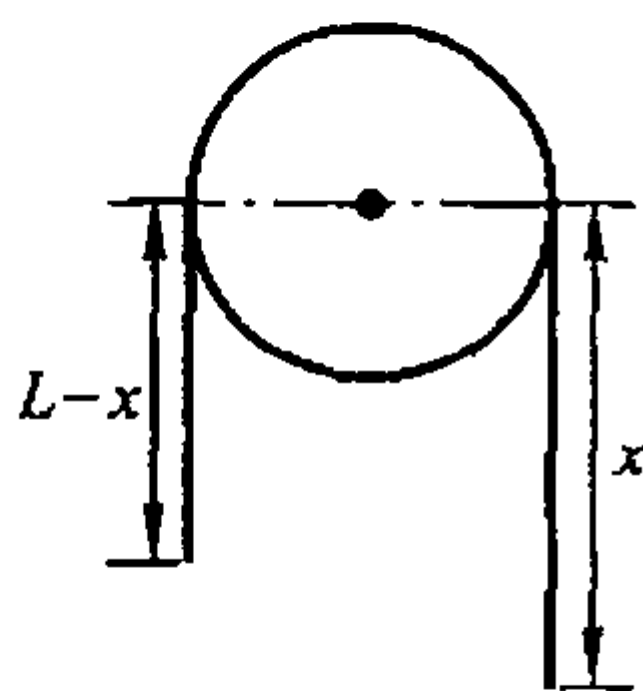
开始时,  $BC = b$ . 试证当  $BC = \frac{2}{3}L$  时,绳的加速度为  $a = \frac{g}{3}$ , 速度为

$$v = \sqrt{\frac{2g}{L} \left( -\frac{2}{9}L^2 + bL - b^2 \right)}$$

分析：由于软绳的质量均匀分布(质量密度  $\rho_l$  为常数)，木钉两侧的软绳所受的重力正比于各自的下垂长度。当两侧的下垂长度不同时，软绳因受力不平衡将发生单向运动，在运动过程中，各侧软绳因下垂长度的变化所受重力也将变化。由于光滑木钉对绳的支持力始终垂直于绳的运动方向，在假设软绳不可伸长的情况下，绳上各部分具有相同大小的速度和加速度值。因此软绳的运动相当于变力作用下的直线运动。运用重力做功的动能定理或机械能守恒定律也可求解本题。



习题 1-37 图



解图 1-37

**解 1：**以软绳为研究对象，如解图 1-37 所示，设软绳向右侧下滑，某时刻右侧的下垂长度为  $x$ ，左侧的下垂长度为  $(L-x)$ 。质量线密度为  $\rho_l = \frac{m}{L}$ 。由牛顿运动定律得

$$m_x g - m_{L-x} g = \rho_l x g - \rho_l (L-x) g = ma \quad (1)$$

所以，软绳在运动方向受合力为

$$\begin{aligned} F_{\text{合}} &= \rho_l (2x - L) g \\ (2x - L) g &= La \end{aligned} \quad (2)$$

即

$$x = \frac{2}{3}L \text{ 时,} \quad a = \frac{1}{3}g$$

由(2)式，作变量代换，得

$$a = \frac{(2x - L)}{L} g = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

积分，并代入上下限

$$\int_0^v v dv = \int_b^{\frac{2}{3}L} \frac{g}{L} (2x - L) dx$$

得

$$v = \sqrt{\frac{2g}{L} \left( -\frac{2}{9}L^2 + bL - b^2 \right)}$$

得证

**解 2：**软绳在下滑过程中只有重力做功。在  $t$  时刻，软绳受重力为  $\rho_l (2x - L) g$ ，

下滑过程中重力作的功:

$$A = \int_b^{\frac{2}{3}L} \rho_l g (2x - L) dx$$

根据动能定理:

$$\int_b^{\frac{2}{3}L} \rho_l g (2x - L) dx = \frac{1}{2} m v^2$$

得

$$v = \sqrt{\frac{2g}{L} \left( -\frac{2}{9} L^2 + bL - b^2 \right)}$$

**1-38.** 飞机作特技表演,在竖直平面内以匀速率  $v$  作半径为  $R$  的圆周运动. 设飞机驾驶员的质量为  $m$ ,试求他施于飞机坐垫的压力有多大?

**分析:** 飞机驾驶员施于飞机坐垫的压力和坐垫(包括靠背)对驾驶员的支撑力是一对作用力和反作用力. 由对飞机驾驶员在圆周上任意位置时的受力分析可知,他是在重力和坐垫支撑力的合力的作用下作匀速率圆周运动的. 根据牛顿运动定律,写出飞机驾驶员在切向和法向的运动方程,可以得到飞机作特技表演时,飞机驾驶员状态.

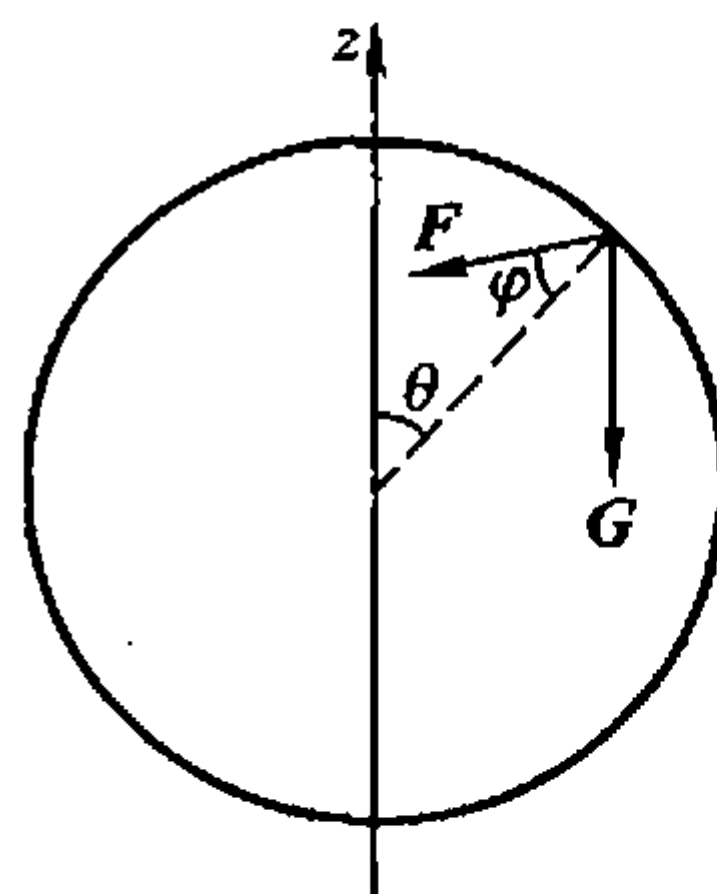
**解:** 设坐垫对驾驶员的支撑力为  $F$ ,与圆轨道法线方向的夹角为  $\varphi$ ,如解图 1-38 所示.

切向  $F \sin \varphi - mg \sin \theta = 0$

法向  $F \cos \varphi + mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$

得  $F = m \sqrt{g^2 - 2 \frac{v^2}{R} g \cos \theta + \left( \frac{v^2}{R} \right)^2}$

$$\tan \varphi = \frac{g \sin \theta}{\frac{v^2}{R} - g \cos \theta}$$



解图 1-38

当  $\theta = \pi, \varphi = 0$ ,即驾驶员处于圆轨道的最低点处时,有

$$F = mg + \frac{mv^2}{R}$$

这时驾驶员对坐垫的压力(垂直作用力)最大,对应“超重”最大的情况.

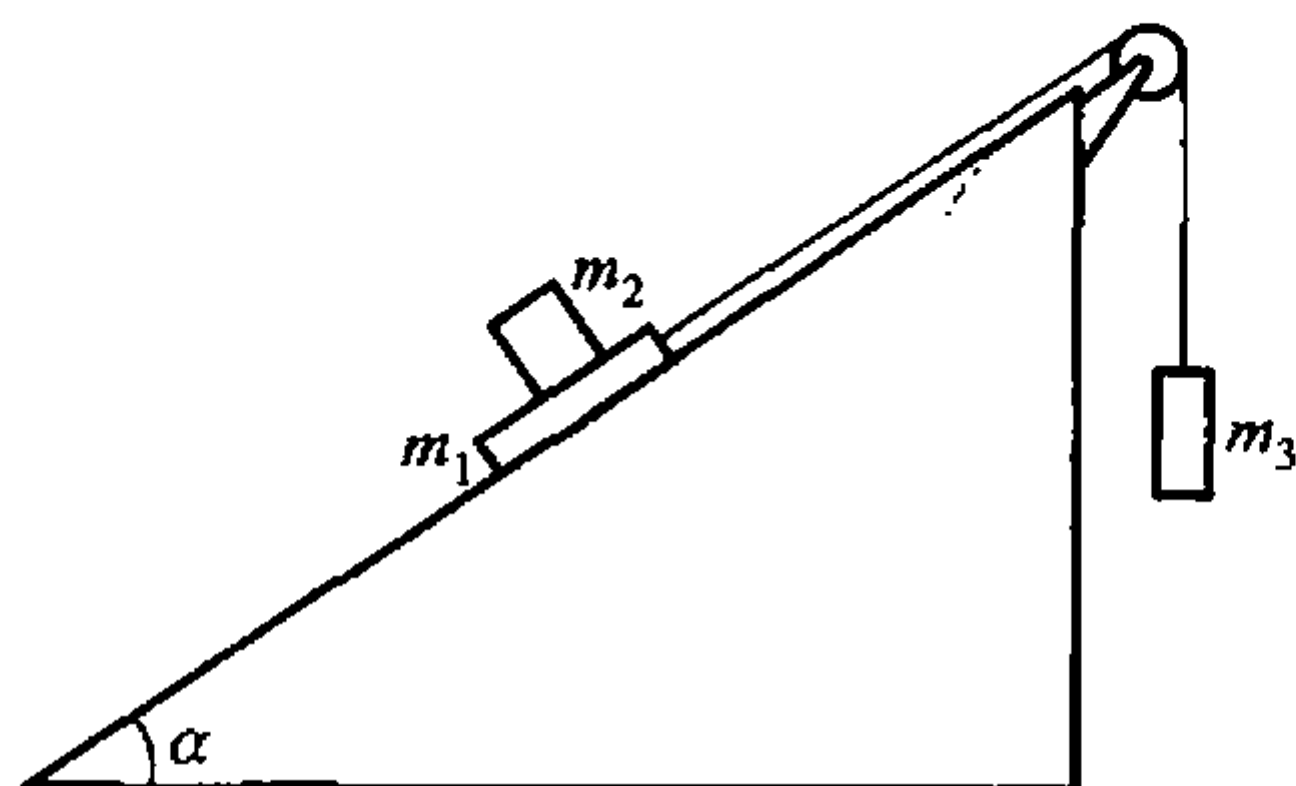
当  $\theta = 0, \varphi = \pi$ ,即驾驶员处于圆轨道的最高点处时,有

$$F = \frac{mv^2}{R} - mg$$

这时驾驶员对坐垫的压力最小,对应“失重”最甚状态. 在圆轨道的最高点处附近,如果飞机的飞行速度  $v$  不能使驾驶员对坐垫的压力  $F \geq 0$ ,则驾驶员将从坐

垫上脱落下来。

\*1-39. 在如图的力学系统中, 已知  $m_1 = 1.0 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2.0 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 3.5 \text{ kg}$ ,  $m_1$  与斜面间的摩擦因数  $\mu_1 = 0.1$ ,  $m_1$  与  $m_2$  之间的滑动摩擦因数  $\mu_2 = 0.8$ , 不计绳和滑轮的质量及摩擦, 试编写一计算机程序分别画出  $m_1$  与  $m_2$  的加速度对斜面倾角  $\theta$  的关系曲线图, 并分析在什么倾角范围内  $m_2$  相对  $m_1$  是静止的。

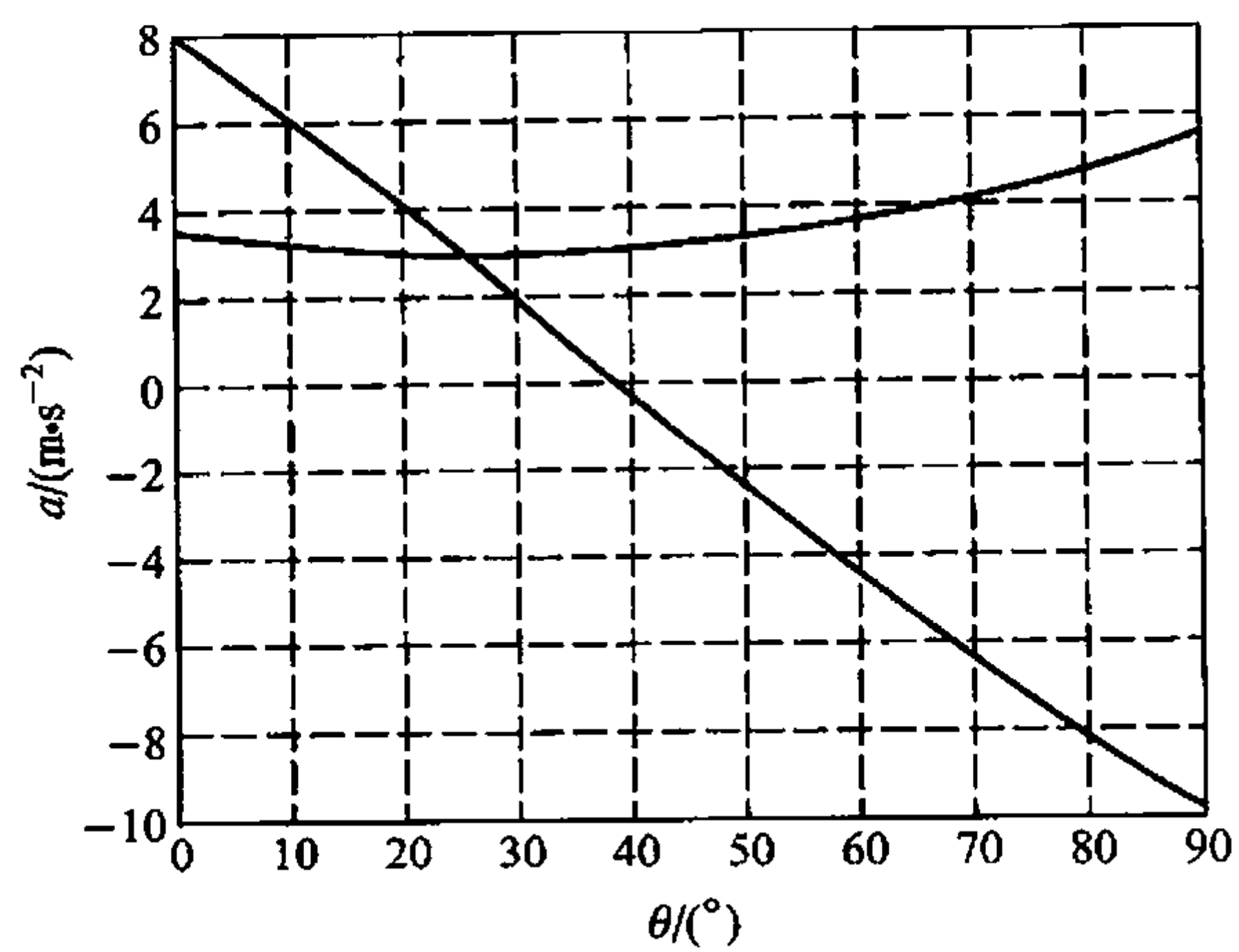


习题 1-39 图

#### 参考程序

```
clear
eq1 = 'F1 - F2 = m1 * g * cos(alfa)'; % 对 m1 列方程
eq2 = '-mu1 * F1 - mu2 * F2 + T - m1 * a1 = m1 * g * sin(alfa)'; % 对 m1 列方程
eq3 = 'F2 = m2 * g * cos(alfa)'; % 对 m2 列方程
eq4 = 'mu2 * F2 - m2 * a2 = m2 * g * sin(alfa)'; % 对 m2 列方程
eq5 = '-F - m3 * a1 = -m3 * g'; % 对 m3 列方程
[F1, F2, F, a1, a2] = solve(eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, 'F1, F2, F, a1, a2'); % 解上述方程组
m1 = 1; m2 = 2; m3 = 3.5; mu1 = 0.1; mu2 = 0.8; g = 9.8; % 给各参量赋值
a1 = subs(a1) % 写出 m1 的加速度作为 alfa 的函数
a2 = subs(a2) % 写出 m2 的加速度作为 alfa 的函数
alfa = 0:0.01:pi/2; % 角度的变化范围
angle = alfa * 180/pi; % 将角度从弧度变换为度
aa = subs(a1); % 计算 m1 的加速度
ab = subs(a2); % 计算 m1 的加速度
plot(angle, aa, 'k', angle, ab, 'b')
grid
xlabel('角度'); ylabel('加速度 / m/s^2')
```

运算结果如解图 1-39 所示.



解图 1-39

答:  $m_1$  与  $m_2$  的加速度曲线在  $25^{\circ}$  处相交, 因此倾角小于  $25^{\circ}$  时  $m_2$  相对  $m_1$  是静止的.

## 第二章

# 运动的守恒量和守恒定律

### 一、教学基本要求

1. 掌握功的概念,掌握质点的动能定理和动量定理,理解质点系的内力和外力,了解质心概念和质心运动定理.
2. 掌握机械能守恒定律及其适用条件,质点系的功能原理,理解保守力做功的特点和势能的概念.
3. 掌握动量守恒定律及其适用条件,理解碰撞和力的成因.
4. 掌握质点的角动量守恒定律及其适用条件.

### 二、本章习题分类

1. 动量定理和动量守恒定律的应用
2. 功和动能定理
3. 保守力的功、势能、功能原理和机械能守恒定律的应用
4. 质心运动定理和动量守恒定律
5. 运动守恒定律的综合应用
6. 质点的角动量和角动量守恒定律

### 三、习题分析和解答

1. 动量定理和动量守恒定律的应用

2-1. 三艘质量相等的小船鱼贯而行,速度均等于  $v$ . 如果从中间船上同时以速度  $u$  把两个质量均为  $m$  的物体分别抛到前后两船上,速度  $u$  的方向和  $v$  在同一直线上. 问抛掷物体后,这三艘船的速度如何变化?

分析: 不计水的流速以及阻力,以每艘船和从船上抛出的或接受的物体为系统,则在水平方向各系统都不受外力. 因此,在水平面内各系统的动量守恒. 注意各艘船的速度和从船上抛出或接受物体的速度均应相对同一惯性参考系.

解：取水平坐标轴  $Ox$  固定于岸，坐标轴的正方向与  $v$  一致。设各艘船的质量为  $m_0$ ，抛出或接受物的质量为  $m$ ，分别对三艘船系统运用水平方向的动量守恒定律。

对中间船和抛出物：向前抛出物体对岸的速度为  $v+u$ ，向后抛出物体对岸的速度为  $v-u$ 。设抛出物体后，中间船对岸的速度为  $v_2$ ，有

$$(m_0 + 2m)v = m_0v_2 + m(v+u) + m(v-u)$$

得

$$v_2 = v$$

中间船的速度不变，即中间船系统质心的运动状态不变。

对前方船和接受物系统：设接受物体后，前方船的速度为  $v_1$ ，有

$$m_0v + m(v+u) = (m_0 + m)v_1$$

$$v_1 = v + \frac{m}{m_0 + m}u$$

对方后船和接受物系统：设接受物体后，后方船的速度为  $v_3$ ，有

$$m_0v + m(v-u) = (m_0 + m)v_3$$

$$v_3 = v - \frac{m}{m_0 + m}u$$

2-2. 质量为  $m$  的小球在水平面内逆时针作速率为  $v_0$  的匀速圆周运动，试求小球在经过：(1)  $1/4$  圆周，(2)  $1/2$  圆周，(3)  $3/4$  圆周，(4) 整个圆周的过程中的动量改变。试从冲量的计算得出结果。

分析：小球在水平面内作匀速圆周运动时，动量的大小不变，但方向时刻在变化。运用动量定理时应注意分析力和动量在每一时刻的大小和方向。

解：取坐标如解图 2-2 所示。设圆周半径为  $R$ ，由圆心向外的单位矢量为  $e_n$ 。

$$\text{小球受合外力} \quad F = -m \frac{v_0^2}{R} e_n$$

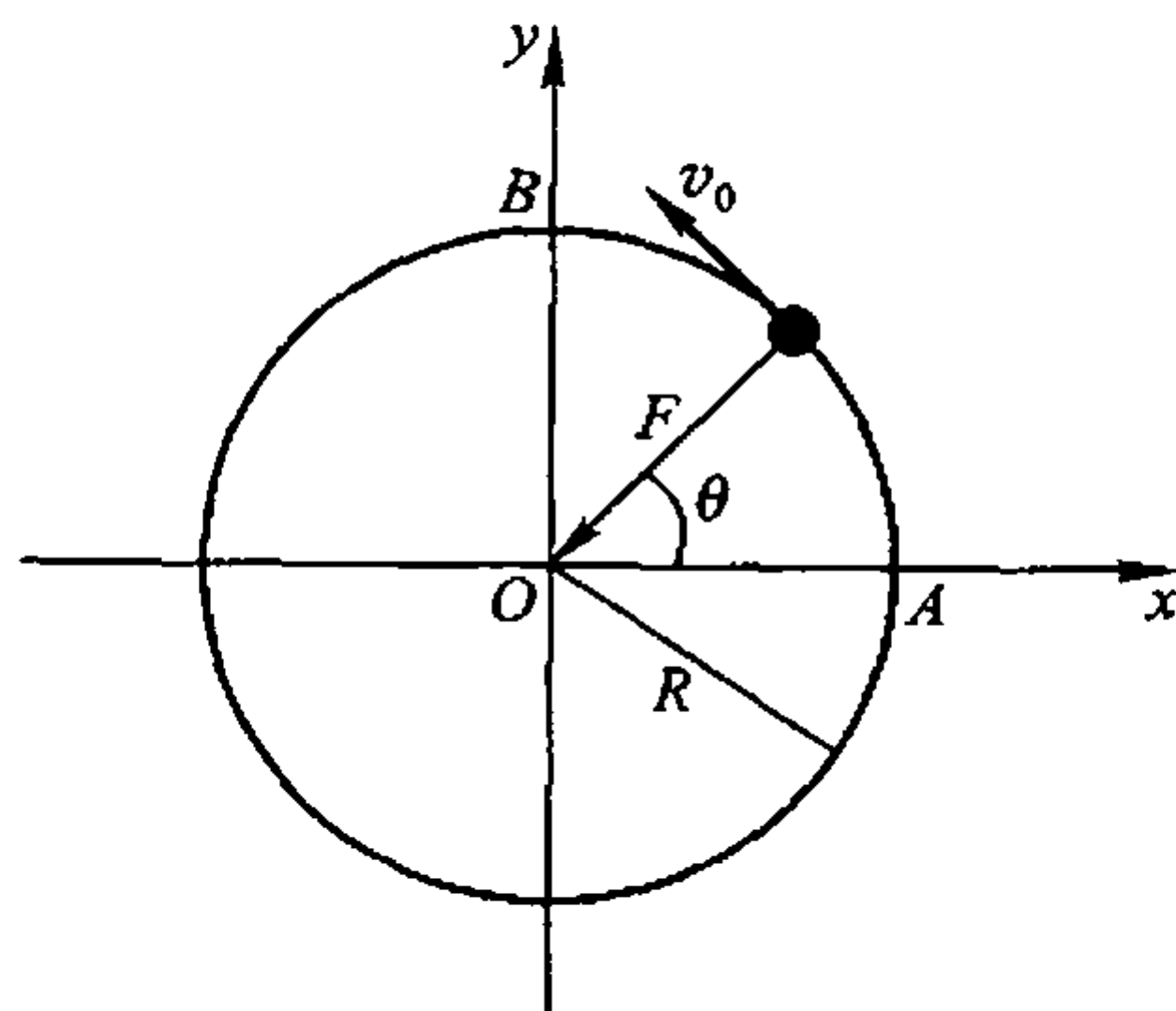
设小球作匀速圆周运动的角速度为  $\omega$ ， $t=0$  时小球位置为  $(R, 0)$ 。  $t$  时刻外力在  $x, y$

轴的分量为  $F_x = -m \frac{v_0^2}{R} \cos \omega t$

$$F_y = -m \frac{v_0^2}{R} \sin \omega t$$

冲量  $I$  在  $x, y$  方向的分量为

$$I_x = \int F_x dt = -m \frac{v_0^2}{R} \int_0^t \cos \omega t dt = -\frac{mv_0^2}{\omega R} \int_0^\theta \cos \theta d\theta \quad (1)$$



解图 2-2

$$I_y = \int F_y dt = -\frac{mv_0^2}{\omega R} \int_0^\theta \sin \theta d\theta = mv_0(\cos \theta - 1) \quad (2)$$

式中

$$v_0 = \omega R, \quad \theta = \omega t$$

根据动量定理

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = \Delta p_x \mathbf{i} + \Delta p_y \mathbf{j} \quad (3)$$

由(1),(2),(3)式可解得小球在各过程中,动量变化的大小和方向.

(1) 经 $\frac{1}{4}$ 圆周,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

$$I_x = -mv_0 - 0, \quad I_y = 0 - mv_0$$

即

$$\mathbf{I} = \Delta m \mathbf{v} = -mv_0 \mathbf{i} - mv_0 \mathbf{j}$$

$\Delta \mathbf{p}$  的大小为

$$|\Delta \mathbf{p}| = I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{2}mv_0$$

$\Delta \mathbf{p}$  的方向(用与  $x$  轴正方向的夹角  $\alpha$  表示)

$$\alpha = \pi + \arctan \frac{I_y}{I_x} = \frac{4}{3}\pi$$

(2) 经 $\frac{1}{2}$ 圆周,  $\theta = \pi$ 时,

$$I_x = 0, \quad I_y = -mv_0 - mv_0$$

即

$$\mathbf{I} = -2mv_0 \mathbf{j}$$

$\Delta \mathbf{p}$  的大小

$$|\Delta \mathbf{p}| = I = 2mv_0$$

$\Delta \mathbf{p}$  的方向

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}$$

(3) 经 $\frac{3}{4}$ 圆周,  $\theta = \frac{3}{2}\pi$ 时,

$$I_x = mv_0 - 0, \quad I_y = 0 - mv_0$$

即

$$\mathbf{I} = mv_0 \mathbf{i} - mv_0 \mathbf{j}$$

$\Delta \mathbf{p}$  的大小

$$|\Delta \mathbf{p}| = I = \sqrt{2}mv_0$$

$\Delta \mathbf{p}$  的方向

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

(4) 经整个圆周,  $\theta = 2\pi$ 时,

$$I_x = 0, \quad I_y = 0$$

即

$$\mathbf{I} = \Delta m \mathbf{v} = 0$$

$\Delta \mathbf{p}$  的大小

$$|\Delta \mathbf{p}| = I = 0$$

$\Delta \mathbf{p}$  的方向

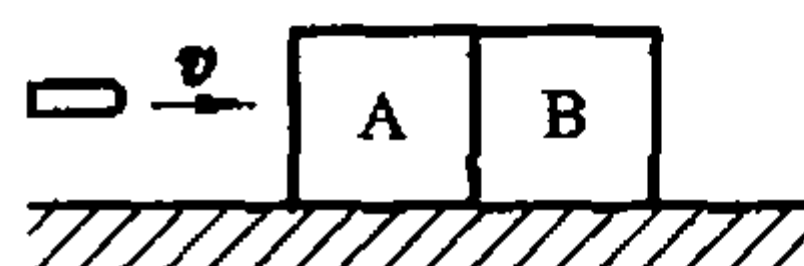
$$\alpha = 0$$

由计算结果看出,小球运动一周时虽有  $\Delta \mathbf{p} = 0$ ,但在每一时刻的动量都不相同. 因此,在外力作用下小球运动一周的过程中,它的动量是不守恒的.

2-3. 如图所示两块并排的木块 A 和 B,质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ,静止地放置

在光滑的水平面上,一子弹水平地穿过两木块,设子弹穿过两木块所用的时间分别为  $\Delta t_1$  和  $\Delta t_2$ ,木块对子弹的阻力为恒力  $F$ ,试求子弹穿出后,木块 A 和 B 的速率.

分析:木块 A 和 B 在子弹对木块的摩擦力作用下由静止开始运动.在  $\Delta t_1$  时间内,A 和 B 一起作加速运动.当子弹穿入 B 后,子弹对 B 的摩擦力使 B 继续加速运动,而 A 则以子弹穿出 A 时的速度在光滑水平面上作匀速直线运动.经时间  $\Delta t_2$  子弹穿出 B 后,B 也将以大于 A 的速度作匀速直线运动.



习题 2-3 图

解:设子弹穿出 A 时,A 和 B 的运动速度为  $v_1$ ,根据动量定理,在  $\Delta t_1$  时间内有

$$F\Delta t_1 = (m_1 + m_2)v_1$$

得

$$v_1 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2}$$

对木块 B,在  $\Delta t_2$  时间内有  $F\Delta t_2 = m_2v_2 - m_2v_1$

得

$$v_2 = \frac{F\Delta t_2}{m_2} + v_1 = F\left(\frac{\Delta t_2}{m_2} + \frac{\Delta t_1}{m_1 + m_2}\right)$$

2-4. 一质点的运动轨迹如图所示.已知质点的质量为 20 g,在 A、B 两点处的速率都为 20 m/s,  $v_A$  与  $Ox$  轴成  $45^\circ$ ,  $v_B$  垂直于  $Oy$  轴,求质点由 A 点到 B 点这段时间内,作用在质点上外力的总冲量.

分析:质点受到大小和方向都不断变化的外力的持续作用,从 A 点运动到 B 点.根据动量定理,在这个过程中,外力作用在质点上的总冲量等于质点动量的增量.

解:根据动量定理,外力作用在质点上的总冲量为

$$\boldsymbol{I} = \Delta \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_B - m\boldsymbol{v}_A$$

在题给坐标系中,有

$$I_x = \Delta p_x = -mv_B - mv_A \cos 45^\circ$$

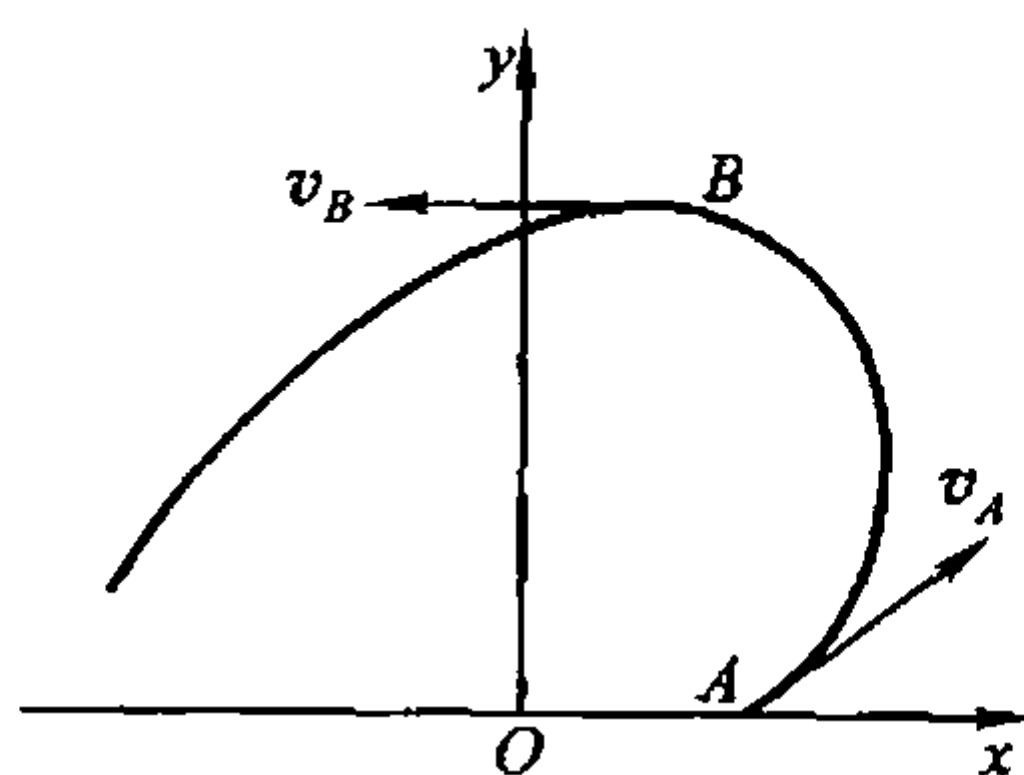
$$I_y = \Delta p_y = 0 - mv_A \sin 45^\circ$$

所以,总冲量  $I$  的大小为

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = m \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + \sqrt{2}v_A v_B} = 0.739 \text{ N} \cdot \text{s}$$

总冲量  $I$  与  $x$  轴正方向的夹角为

$$\theta = \pi + \arctan \frac{I_y}{I_x} \approx 202.5^\circ$$



习题 2-4 图

2-5. 一颗子弹从枪口飞出的速度是  $300 \text{ m/s}$ , 在枪管内子弹所受合力的大小由下式给出:

$$F = 400 - \frac{4 \times 10^5}{3} t$$

其中  $F$  以  $\text{N}$  为单位,  $t$  以  $\text{s}$  为单位.

(1) 画出  $F-t$  图;

(2) 计算子弹行经枪管长度所花费的时间, 假定子弹到枪口时所受的力变为零;

(3) 求该力冲量的大小;

(4) 求子弹的质量.

分析: 子弹在枪膛内所受的合力是作用时间极短, 大小变化极快的变力. 该合力的冲量使子弹获得动量.

解: (1) 根据题意, 画出  $F-t$  图如解图 2-5 所示. 合力  $F$  随时间  $t$  线性衰减.

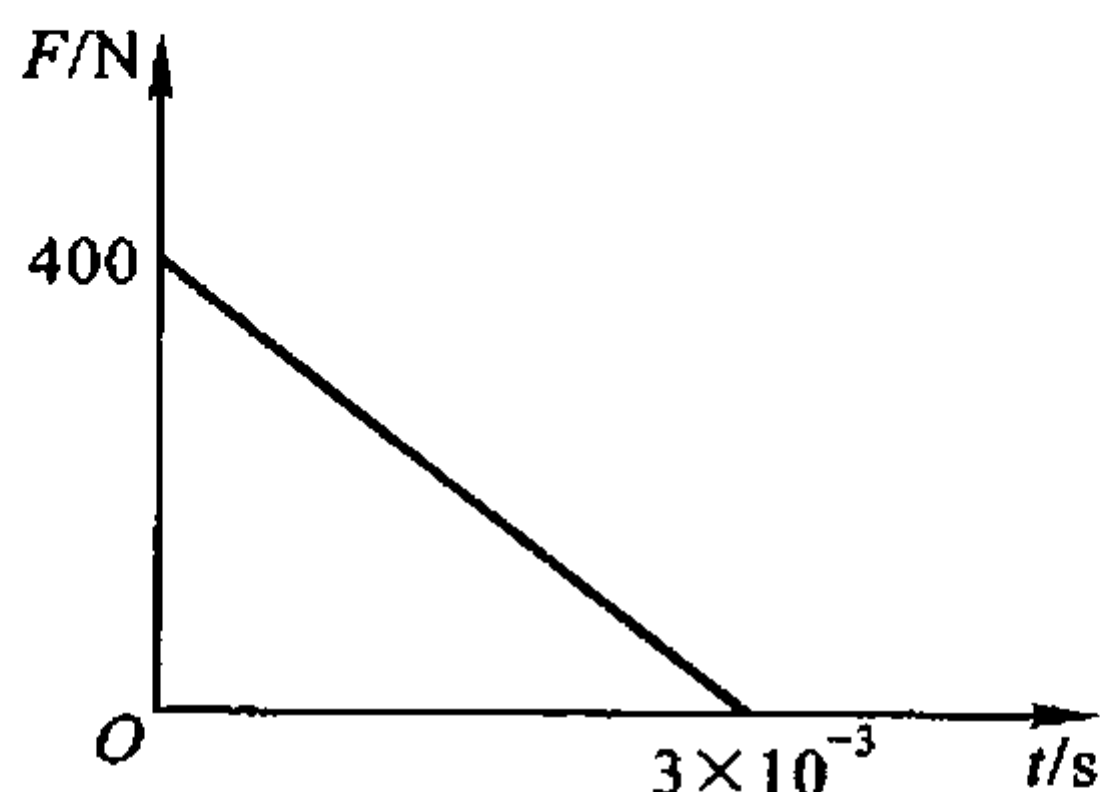
(2) 根据假定, 子弹在枪口时所受合力为零,

即 
$$F = 400 - \frac{4 \times 10^5}{3} t = 0$$

得子弹行经枪管长度所花费的时间  $t = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$ .

(3) 子弹所受冲量的大小为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t F dt = \int_0^{0.003} \left( 400 - \frac{4 \times 10^5}{3} t \right) dt \\ &= 0.6 \text{ N} \cdot \text{s} \end{aligned}$$



解图 2-5

子弹所受冲量的大小也可以由  $F-t$  图的面积求得,

$$I = \Delta S_{F-t} = \frac{1}{2} \times 400 \times 3 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s} = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s}$$

(4) 根据动量定理,  $I = \Delta p = mv - 0$

得子弹的质量

$$m = \frac{I}{v} = \frac{0.6 \text{ N} \cdot \text{s}}{300 \text{ m/s}} = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

2-6. 某物体上有一变力  $F$  作用, 它随时间变化的关系如下: 在  $0.1 \text{ s}$  内,  $F$  均匀地由  $0$  增加到  $20 \text{ N}$ ; 又在以后  $0.2 \text{ s}$  内,  $F$  保持不变; 再经  $0.1 \text{ s}$ ,  $F$  又从  $20 \text{ N}$  均匀地减少到  $0$ .

(1) 画出  $F-t$  图;

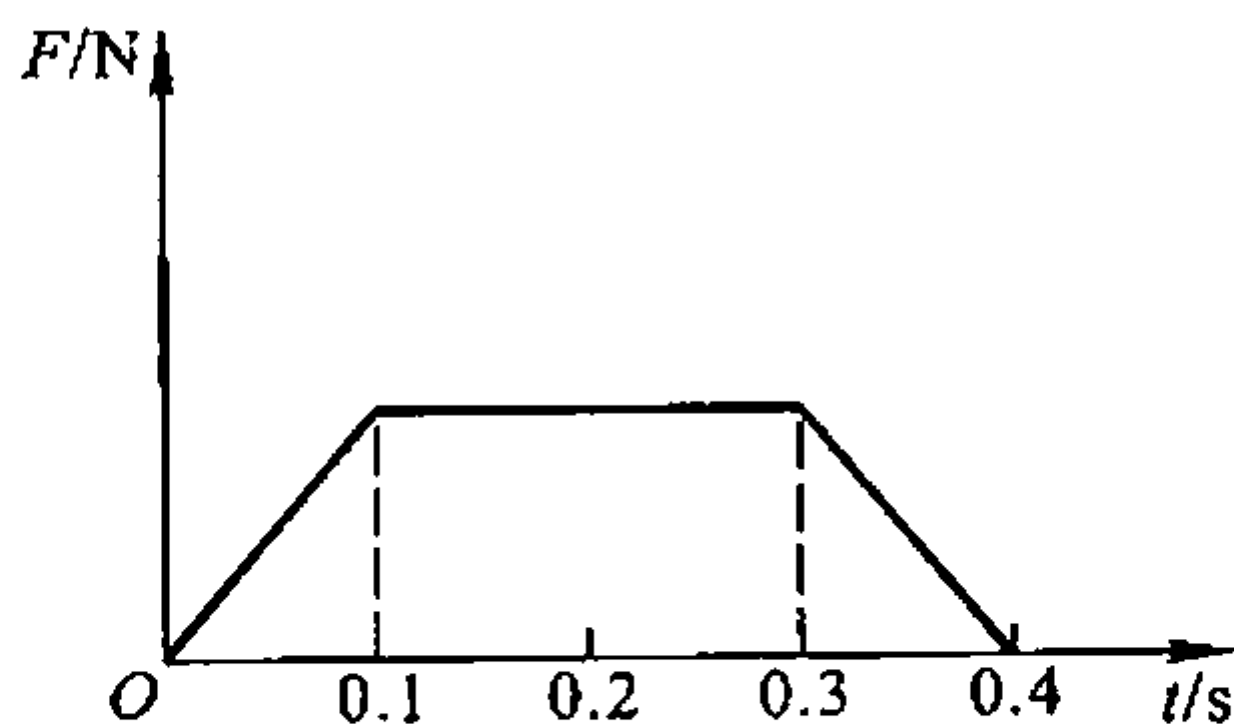
(2) 求这段时间内力的冲量及力的平均值;

(3) 如果物体的质量为  $3 \text{ kg}$ , 开始速度为  $1 \text{ m/s}$ , 与力的方向一致, 问在力刚

变为 0 时,物体速度为多大?

分析: 物体受一维变力作用,利用动量定理解题.

解: (1)  $F-t$  图如解图 2-6 所示.



解图 2-6

(2) 在 0.4 s 时间内,力的冲量可由  $F-t$  图的面积求得.

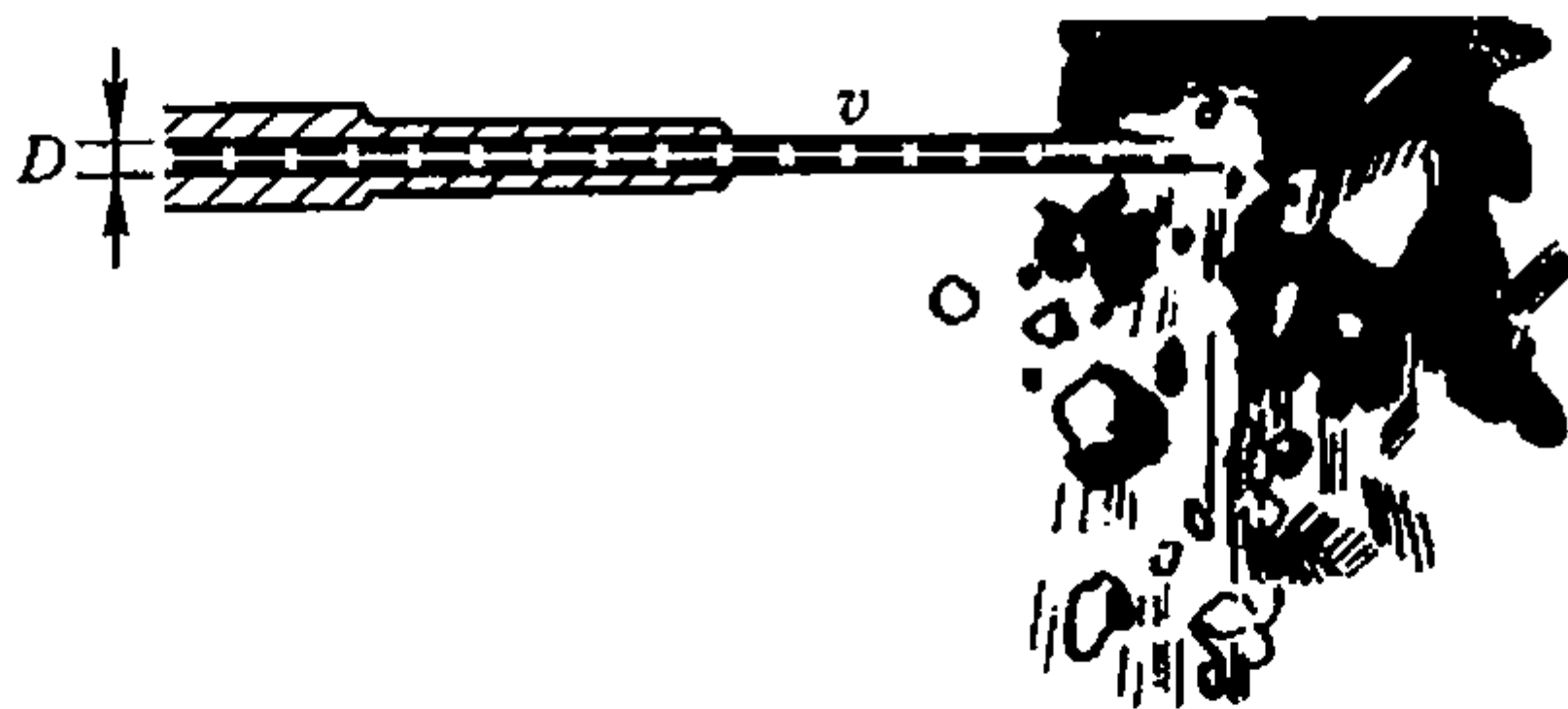
$$I = \Delta S_{F-t} = 2 \times \left( \frac{1}{2} \times 20 \times 0.1 \right) \text{ N} \cdot \text{s} + 20 \times 0.2 \text{ N} \cdot \text{s} = 6 \text{ N} \cdot \text{s}$$

力的平均值由  $I = \bar{F} \Delta t$ , 得  $\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = 15 \text{ N}$

(3) 由动量定理  $I = mv_2 - mv_1$

得 
$$v_2 = \frac{I + mv_1}{m} = \frac{6 + 3 \times 1}{3} \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

2-7. 水力采煤是用高压水枪喷出的强力水柱冲击煤层,如图所示. 设水柱直径  $D = 30 \text{ mm}$ , 水速  $v = 56 \text{ m/s}$ , 水柱垂直射在煤层表面上, 冲击煤层后的速度为零, 求水柱对煤的平均冲力.

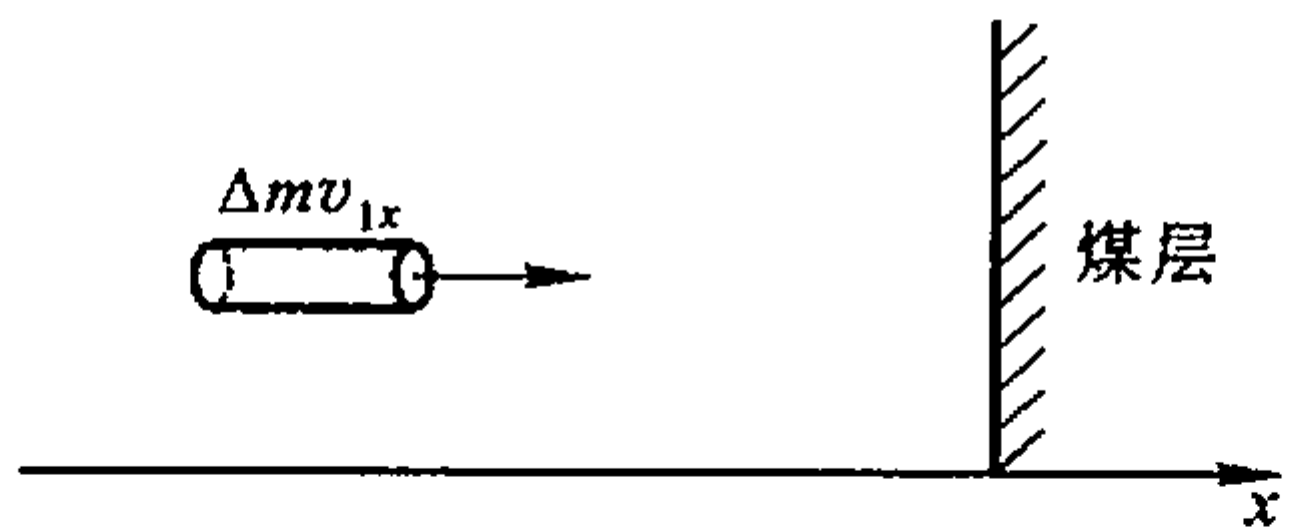


习题 2-7 图

分析: 水柱对煤的平均冲力,作用在煤层上. 根据动量定理可知,水柱对煤层平均冲力的大小,等于单位时间内煤层动量的增量. 由于煤层动量的增量无法直接得到,而单位时间内水柱动量的增量是可知的,所以,利用牛顿第三定律,可以通过煤层对水柱的平均冲力来求解.

解：取坐标如解图 2-7 所示， $\Delta t$  时间内射向煤层的水柱质量为

$$\Delta m = \rho \Delta V = \frac{1}{4} \rho \pi D^2 \Delta x$$



解图 2-7

煤层对水柱的平均冲力为

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{\Delta m v_{2x} - \Delta m v_{1x}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m v_{1x}}{\Delta t} = -\frac{1}{4} \rho \pi D^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_{1x} \\ &= -\frac{1}{4} \rho \pi D^2 v_{1x}^2 = -2.22 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

水柱对煤层的平均冲力  $\bar{F}' = -\bar{F} = 2.22 \times 10^3 \text{ N}$

**2-8.** 在一光滑的水平面上，把质量分别为  $m'$  和  $m$  的两个质点分别放在自由长度为  $l_0$  的弹簧的两端，压紧弹簧使两质点靠近，在弹簧的长度为  $l$  ( $l < l_0$ ) 时，突然松手。求：质点  $m'$  对质点  $m$  的相对速度（设弹簧劲度系数为  $k$ ）。

**分析：**取光滑水平面上的轻弹簧、 $m'$  和  $m$  为系统时，弹性力是系统的保守内力，在突然松手后的运动过程中，系统在水平方向不受外力，因此系统的总动量守恒，其质心保持静止，同时也满足机械能守恒条件。

**解：**突然松手后， $m'$  和  $m$  运动方向相反，设它们相对水平面（惯性系）的速度大小分别为  $v'$  和  $v$ 。因系统的总动量守恒，有

$$0 = m'v' - mv$$

得

$$v' = \frac{m}{m'}v$$

由机械能守恒，得 
$$\frac{1}{2}k(l_0 - l)^2 = \frac{1}{2}m'v'^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

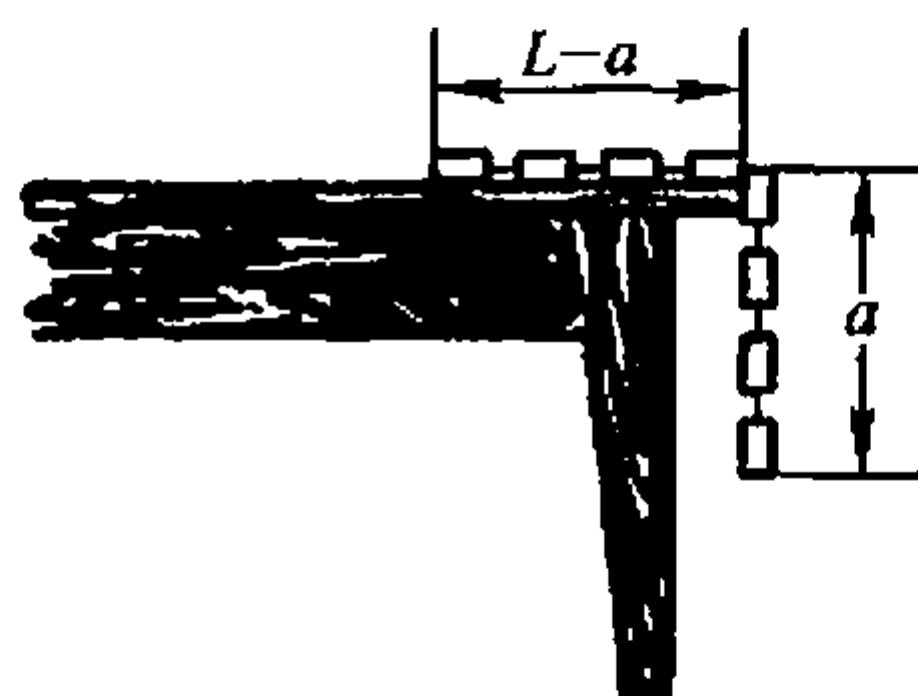
由以上两式，得 
$$v = (l_0 - l) \sqrt{\frac{km'}{m(m+m')}}$$

质点  $m'$  对质点  $m$  的相对速度为

$$v_{m'-m} = v' + v = (l_0 - l) \sqrt{\frac{k(m+m')}{mm'}}$$

## 2. 功和动能定理

**2-9.** 一链条,总长为  $L$ ,放在光滑的桌面上,其中一端下垂,长度为  $a$ ,如图所示. 假定开始时链条静止. 求链条刚刚离开桌边时的速度.



习题 2-9 图

**分析:** 质量均匀分布的链条,由于下垂部分受重力而引起整体运动. 与题 1-37 类似,是在变力作用下的运动,也称落链问题. 可以运用牛顿运动定律和动能定理等方法分析求解.

**解 1:** 用动能定理解题. 设某时刻链条下垂部分的长度为  $y$ , 质量线密度为  $\rho_l$ . 下垂部分受重力  $F = \rho_l g y$ , 这是一个变力.

$$\text{滑落过程中,重力做功} \quad A = \int_a^L F dy = \frac{1}{2} \rho_l g (L^2 - a^2)$$

$$\text{根据动能定理} \quad A = \frac{1}{2} m v^2 - 0 = \frac{1}{2} \rho_l L v^2$$

$$\text{得} \quad v = \sqrt{\frac{g}{L} (L^2 - a^2)}$$

**解 2:** 用牛顿运动定律解题. 下垂部分所受的重力  $F = \rho_l g y$  使链条整体运动,根据牛顿运动定律

$$F = ma$$

即

$$\rho_l g y = \rho_l L \frac{dv}{dt}$$

$$g y = L \frac{dv}{dt} = L \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = L v \frac{dv}{dy}$$

$$\int_0^v v dv = \frac{g}{L} \int_a^L y dy$$

$$\text{得} \quad v = \sqrt{\frac{g}{L} (L^2 - a^2)}$$

**讨论:** 若考虑桌面与链条之间有摩擦,设摩擦因数为  $\mu$ .

(1) 当下垂长度为多少时,链条可以下滑?

(2) 链条离开桌面时速度多大?

**解答:** (1) 设下垂部分长为  $l_0$ , 则桌面上的链条受摩擦力为

$$F_f = \mu \rho_l (L - l_0) g$$

由牛顿运动定律

$$F - F_f = \rho_l l_0 g - \mu \rho_l (L - l_0) g = ma$$

恰可下滑,有

$$a = 0$$

得

$$l_0 = \frac{\mu}{1 + \mu} L$$

(2) 设某时刻向下移动  $y$ , 重力做功

$$A_G = \int_{l_0}^L \rho_l g y dy = \frac{1}{2} \rho_l g (L^2 - l_0^2) = \frac{\rho_l g L^2 (1 + 2\mu)}{2(1 + \mu)^2}$$

摩擦力做功  $A_f = \int_{l_0}^L -\mu \rho_l (L - y) g dy = -\frac{1}{2} \mu \rho_l g (L - l_0)^2$

由动能定理  $A_G + A_f = \frac{1}{2} m v^2 - 0 = \frac{1}{2} \rho_l L v^2$

得  $v = \sqrt{\frac{gL}{1 + \mu}}$

**2-10.** 以铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板内的深度成正比. 在铁锤击第一次时, 能将小钉击入木板内 1 cm, 问击第二次时能击入多深. 假定铁锤两次打击铁钉时的速度相同.

**分析:** 取铁锤和铁钉为系统时, 击打过程可视为完全非弹性碰撞的过程, 系统的动量守恒. 由于锤的质量远大于钉的质量, 击打前后, 铁锤的速度几乎不变. 假定每次打击铁钉后, 铁锤都静止, 那么, 将小钉击入木板内的过程, 是将铁锤的动能  $E_k$  全部转化为铁钉克服木板阻力的功的过程. 这个过程可运用动能定理求解.

**解:** 设铁锤二次打击铁钉前的速度都是  $v_0$ , 打击后共同运动的速度为  $v$ , 铁锤的质量为  $m_0$ , 铁钉的质量为  $m$ , 击打前后铁锤和铁钉系统的动量守恒, 即

$$m_0 v_0 = (m_0 + m) v$$

因为  $m_0 \gg m$ , 故有  $v = v_0$

所以, 铁锤二次打击铁钉后, 动能的增量也相同, 即

$$\Delta E_{k1} = \Delta E_{k2} = 0 - E_k = -E_k$$

设木板对铁钉的阻力为  $F = -kx$ , 第一次击入深度为  $x_1$ , 如解图 2-10 所示.

则阻力的功为  $A_1 = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} -kx dx = -\frac{1}{2} k x_1^2$

如解图 2-10 所示, 第二次击钉后, 达深度  $x_2$ , 则有

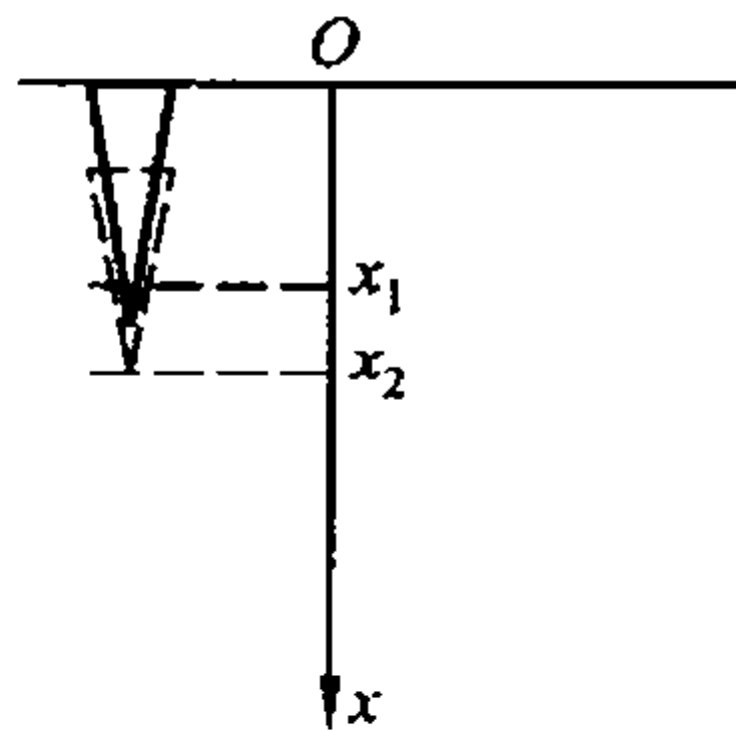
$$A_2 = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

由题给条件和动能定理可知,  $A_1 = A_2 = -E_k$

解上述方程, 得  $x_2 = \sqrt{2} x_1$

代入  $x_1 = 1 \text{ cm}$ , 得第二次击入深度

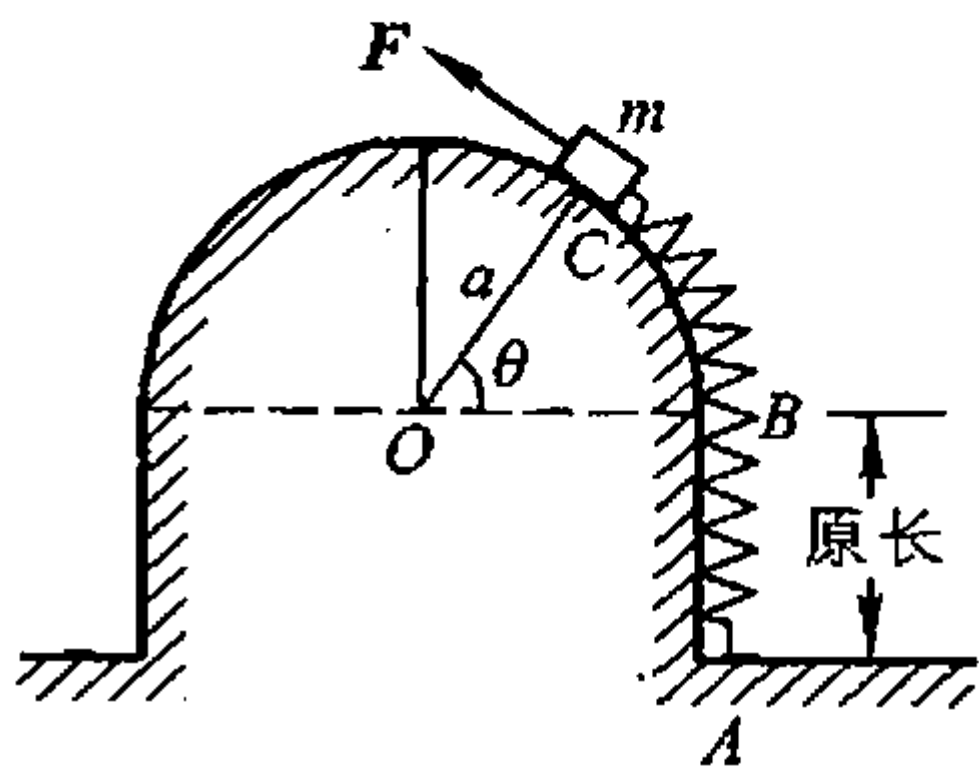
$$x_2 - x_1 = \sqrt{2} x_1 - x_1 = 0.414 \text{ cm}$$



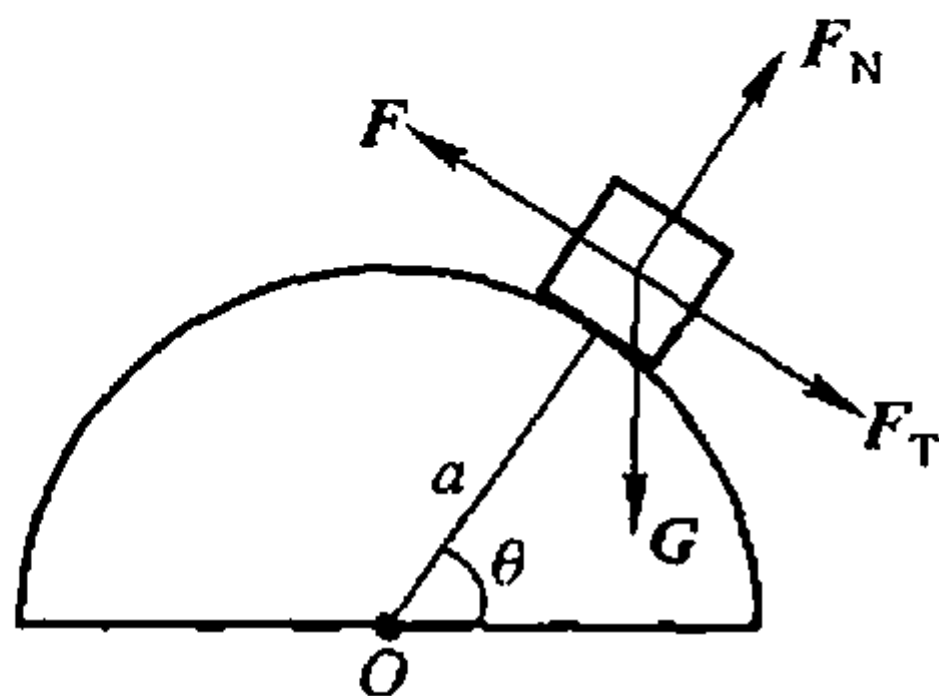
解图 2-10

2-11. 一弹簧, 劲度系数为  $k$ , 一端固定在  $A$  点, 另一端连一质量为  $m$  的物体, 靠在光滑的半径为  $a$  的圆柱体表面上, 弹簧原长为  $AB$  (如图). 在变力  $F$  作用下, 物体极缓慢地沿表面从位置  $B$  移到  $C$ , 求力  $F$  所作的功.

分析: “物体极缓慢地运动” 意即物体在运动过程的每一时刻都处于力的平衡状态, 运动速度为零. 在物体沿圆柱表面移动过程中, 变力  $F$  所作的功就是其沿圆柱表面的切向分量的功.



习题 2-11 图



解图 2-11

解: 对物体的受力分析如解图 2-11 所示, 其中弹性力的大小可写为  $F_T = ks = ka\theta$ .

根据题意, 应有

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_N + \mathbf{G} + \mathbf{F}_T = 0$$

即

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{F}_N + \mathbf{G} + \mathbf{F}_T)$$

物体沿圆柱表面从  $B$  移到  $C$ , 变力  $F$  的功为

$$A = \int_B^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_B^C (\mathbf{F}_N + \mathbf{G} + \mathbf{F}_T) \cdot d\mathbf{s}$$

其中, 因  $\mathbf{F}_N \perp d\mathbf{s}$ , 所以

$$\mathbf{F}_N \cdot d\mathbf{s} = 0$$

重力沿圆弧切向的元功

$$-\mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = mga \cos \theta d\theta$$

弹性力的元功

$$-\mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{s} = ka^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad A &= - \int_0^\theta \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} - \int_0^\theta \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\theta mga \cos \theta d\theta + \int_0^\theta ka^2 \theta d\theta \\ &= mga \sin \theta + \frac{1}{2} ka^2 \theta^2 \end{aligned}$$

令  $C, B$  间的高度差和弧长分别为  $h$  和  $l$ , 则有  $h = a \sin \theta, l = a\theta$ ,

$$A = mgh + \frac{1}{2} kl^2$$

可见, 变力  $F$  的功等于物体、地球、弹簧系统中, 重力势能和弹性势能的增量.

2-12. 质量  $m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg}$  的小球, 系于绳的一端, 绳的另一端固结在  $O$  点, 绳长为  $1 \text{ m}$  (如图). 今将小球拉升至水平位置  $A$ , 然后放手, 求当小球经过圆弧上  $B, C, D$  点时的 (1) 速度, (2) 加速度, (3) 绳中的张力. 假定空气阻力不

计,  $\theta = 30^\circ$ .

分析: 小球下摆的轨迹是圆弧, 下摆过程中重力作正功, 张力不作功. 利用动能定理可求出小球在各处的速率. 注意小球作变速率圆周运动, 加速度有法向分量也有切向分量.

解: (1) 小球在任意  $\theta$  位置时, 重力做功

$$\begin{aligned} A &= \int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = \int mgl \cos \theta ds \\ &= \int_0^\theta mgl \cos \theta d\theta = mgl \sin \theta \end{aligned}$$

由动能定理

$$A = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

得

$$v = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

各点的速率为

$$v_B = \sqrt{2gl \sin 30^\circ} = 3.13 \text{ m/s}$$

$$v_C = \sqrt{2gl \sin 90^\circ} = 4.43 \text{ m/s}$$

$$v_D = \sqrt{2gl \sin 120^\circ} = 4.12 \text{ m/s}$$

(2) 小球在  $\theta$  位置时的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t = g \cos \theta, \quad a_n = \frac{v^2}{l} = 2g \sin \theta$$

加速度大小

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

加速度与切向的夹角

$$\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_t}$$

各点的加速度为

$$a_{Bt} = g \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}g, \quad a_{Bn} = 2g \sin 30^\circ = g$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bt}^2 + a_{Bn}^2} = 12.96 \text{ m/s}^2, \quad \alpha_B = \arctan \frac{a_{Bn}}{a_{Bt}} = 49^\circ 6'$$

$$a_{Ct} = 0, \quad a_{Cn} = 2g$$

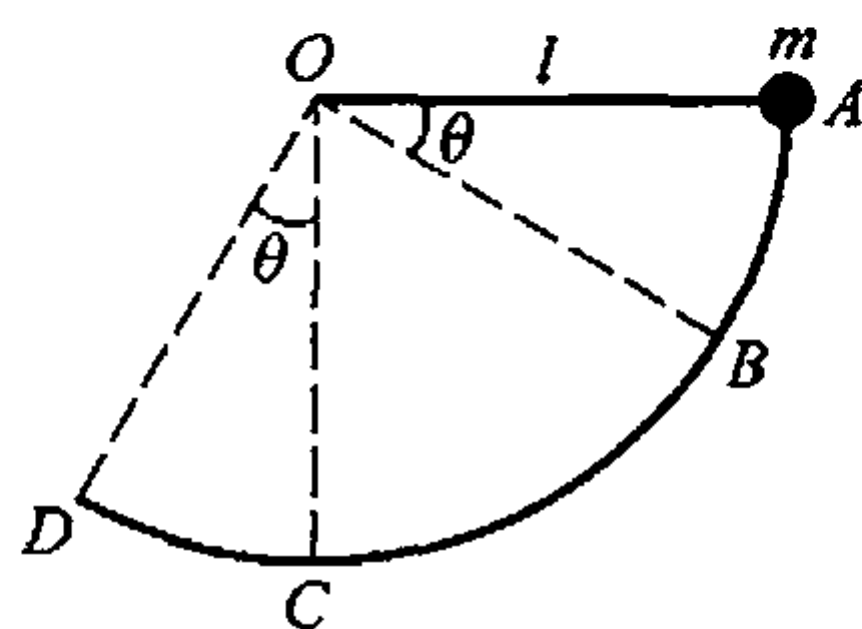
$$a_C = 19.6 \text{ m/s}^2, \quad \alpha_C = \arctan \frac{a_{Cn}}{a_{Ct}} = 90^\circ$$

$$a_{Dt} = g \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}g, \quad a_{Dn} = 2g \sin 120^\circ = \sqrt{3}g$$

$$a_D = 17.7 \text{ m/s}^2, \quad \alpha_D = \arctan \frac{a_{Dn}}{a_{Dt}} = -73.9^\circ$$

(3) 小球在  $\theta$  位置时的法向运动方程为

$$F_T - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{l} = 2mg \sin \theta$$



习题 2-12 图

绳中的张力

$$F_T = 3mg \sin \theta$$

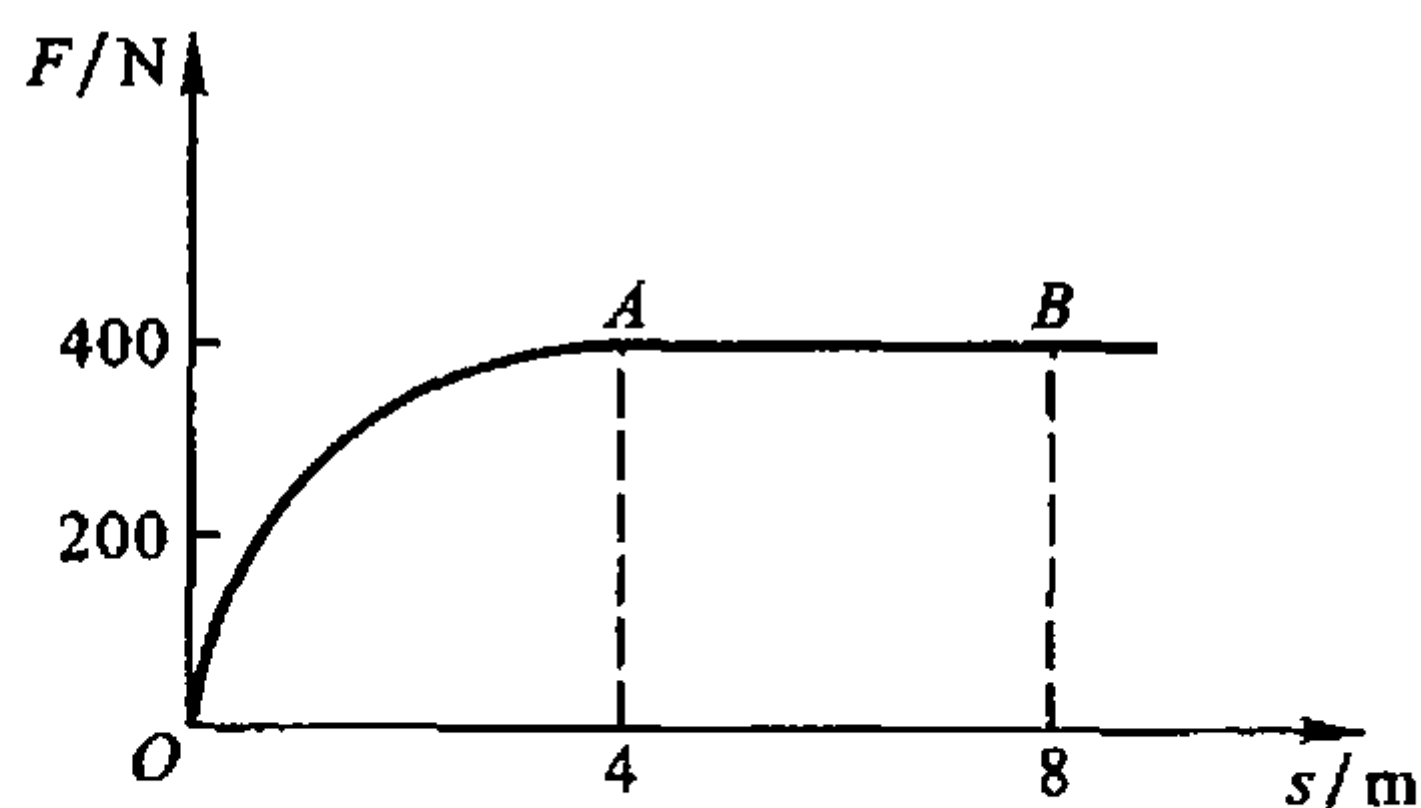
所以

$$F_{TB} = 3mg \sin 30^\circ = 8.82 \times 10^{-2} \text{ N}$$

$$F_{TC} = 3mg \sin 90^\circ = 0.176 \text{ N}$$

$$F_{TD} = 3mg \sin 120^\circ = 0.153 \text{ N}$$

2-13. 某汽车启动后, 牵引力的变化如图所示, 若两坐标轴的单位长度分别为 100 N 和 1 m, 则曲线  $OA$  恰好是个  $\frac{1}{4}$  的圆周. 问汽车运动 7 m, 牵引力所作的功有多大? (此功也可由图中曲线  $OB$  对  $s$  轴覆盖的面积求出, 这种图叫做示功图.)



习题 2-13 图

分析: 功是力对空间的累积效果. 功的几何意义就是示功图所围面积.

解 1: 牵引力做功

$$A = \int F \cdot ds = \int F ds$$

曲线  $OAB$  对  $s$  的关系, 即牵引力随距离的函数关系. 由图可得该函数为

$$F = \begin{cases} 100 \sqrt{s(8-s)} & (0 \leq s \leq 4) \\ 4 \times 10^2 & (4 \leq s) \end{cases}$$

式中,  $s$  的单位为 m,  $F$  的单位为 N. 所以

$$\begin{aligned} A &= \int F ds = \int_0^4 100 \sqrt{s(8-s)} ds + \int_4^7 4 \times 10^2 ds \\ &= 400\pi \text{ N} \cdot \text{m} + 1200 \text{ N} \cdot \text{m} = 2.46 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

解 2: 在  $0 \sim 7 \text{ m}$  内牵引力所作的功, 在示功图上即为图上  $\frac{1}{4}$  个圆和一个矩形面积之和. 圆的半径为

$$R = \sqrt{(s-4)^2 + F^2}, \quad 0 \leq s \leq 4, \quad 0 \leq F \leq 400$$

式中,  $s$  的单位为 m,  $F$  的单位为 N. 所围面积为

$$S = \frac{1}{4} \pi R^2 + R \Delta s = \frac{\pi}{4} \times 400 \times 4 \text{ N} \cdot \text{m} + 400 \times 3 \text{ N} \cdot \text{m} \\ = 400\pi \text{ J} + 1200 \text{ J} = 2.46 \times 10^3 \text{ J}$$

两种方法所得结果相同.

**2-14.** 设作用在质量为  $2 \text{ kg}$  的质点上的力是  $F = (3i + 5j) \text{ N}$ . 当质点从原点移动到位矢为  $r = (2i - 3j) \text{ m}$  处时, 此力所作的功有多大? 它与路径有无关系? 如果此力是作用在质点上唯一的力, 则质点的动能将变化多少?

**解:** 质点从  $(0, 0)$  移动到  $(2, -3)$  作的功为

$$A = F \cdot r = (3i + 5j) \cdot (2i - 3j) = -9 \text{ J}$$

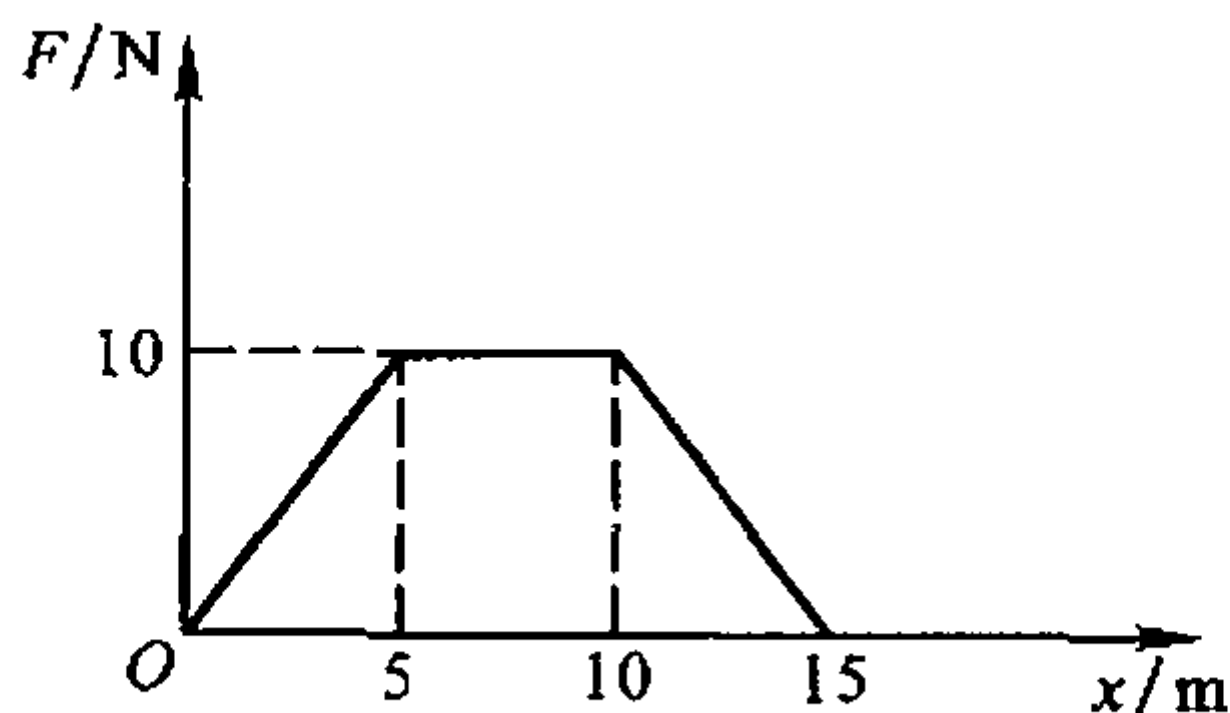
设质点从  $(0, 0)$  先移动到  $(2, 0)$ , 再移动到  $(2, -3)$ , 此力作的功为

$$A = A_x + A_y = F \cdot xi + F \cdot yj = (3i + 5j) \cdot 2i + (3i + 5j) \cdot (-3)j \\ = 6 - 15 = -9 \text{ J}$$

结果相同, 可见此力作的功与路径无关.

由动能定理, 质点的动能的变化量为  $\Delta E_k = A = -9 \text{ J}$

**2-15.** 质量为  $2 \text{ kg}$  的物体, 在沿  $x$  方向的变力作用下, 在  $x = 0$  处由静止开始运动. 设变力与  $x$  的关系如图所示. 试由动能定理求物体在  $x = 5, 10, 15 \text{ m}$  处的速率.



习题 2-15 图

**解 1:** 由  $F-x$  图, 写出  $F(x)$  函数,

$$F(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 5) \\ 10 & (5 \leq x \leq 10) \\ 30 - 2x & (10 \leq x \leq 15) \end{cases}$$

式中,  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $F$  的单位为  $\text{N}$ . 根据动能定理,

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = \Delta E_k$$

$$x = 5 \text{ m 时, 有} \quad A_1 = \int_0^5 2x dx = 25 = \frac{1}{2} mv_5^2 - 0$$

得  $x = 5 \text{ m}$  处的速率

$$v_5 = 5 \text{ m/s}$$

$x = 10 \text{ m}$  时, 有 
$$A_2 = \int_0^5 2x dx + \int_5^{10} 10 dx = 25 \text{ N} \cdot \text{m} + 50 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= 75 \text{ J} = \frac{1}{2}mv_{10}^2 - 0$$

得

$$v_{10} = 8.66 \text{ m/s}$$

$x = 15 \text{ m}$  时, 有

$$A_3 = A_1 + A_2 + \int_{10}^{15} (30 - 2x) dx = 25 \text{ N} \cdot \text{m} + 50 \text{ N} \cdot \text{m} + 25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= 100 \text{ J} = \frac{1}{2}mv_{15}^2 - 0$$

得

$$v_{15} = 10.0 \text{ m/s}$$

解 2: 由  $F-x$  图面积求功.

$$A_1 = S_1 = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \text{ N} \cdot \text{m} = 25 \text{ J}$$

$$A_2 = S_1 + S_2 = 25 \text{ N} \cdot \text{m} + (5 \times 10) \text{ N} \cdot \text{m} = 75 \text{ J}$$

$$A_3 = S_1 + S_2 + S_3 = 75 \text{ N} \cdot \text{m} + \frac{1}{2} \times (15 - 10) \times 10 \text{ N} \cdot \text{m} = 100 \text{ J}$$

**2-16.** 一质量为  $m$  的陨石从距地面高  $h$  处, 由静止开始落向地面. 设地球半径为  $R$ , 引力常数为  $G_0$ , 地球质量为  $m'$ , 忽略空气阻力. 求:

(1) 陨石下落过程中, 万有引力作的功是多少?

(2) 陨石落地的速度?

分析: 将地球作为一个质量均匀分布的球体, 陨石所受到的引力指向地心. 陨石从高处落下, 万有引力作正功, 陨石-地球系统的引力势能减小, 转为陨石落地时的动能(将地球视为静止).

解: (1) 陨石所受的万有引力为

$$\boldsymbol{F} = -G_0 \frac{m'm}{(R+r)^2} \boldsymbol{e}_r$$

式中  $\boldsymbol{e}_r$  是由地球中心指向陨石的单位矢量,  $r$  为陨石离地面的高度.

取陨石落向地面的微小位移为  $d\boldsymbol{r}'$ , 与  $\boldsymbol{e}_r$  的方向相反,  $d\boldsymbol{r}' = -d\boldsymbol{r}$ , 则万有引力作的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_h^0 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}' = - \int_h^0 G_0 m' m \frac{dr}{(R+r)^2} \\ &= G_0 m' m \left. \frac{1}{(R+r)} \right|_h^0 = \frac{G_0 m' m h}{R(R+h)} \end{aligned}$$

(2) 根据动能定理,  $A = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - 0$

陨石落地时的速度 
$$v = \sqrt{\frac{2G_0 m' h}{R(R+h)}}$$

### 3. 保守力的功、势能、功能原理和机械能守恒定律的应用

2-17. 有一保守力  $\mathbf{F} = (-Ax + Bx^2)\mathbf{i}$ , 沿  $x$  轴作用于质点上, 式中  $A, B$  为常量,  $x$  以 m 计,  $F$  以 N 计.

(1) 取  $x=0$  时  $E_p=0$ , 试计算与此力相应的势能;

(2) 求质点从  $x=2$  m 运动到  $x=3$  m 时势能的变化.

分析: 势能属于保守力相互作用系统, 是由相对位置决定的函数. 空间某点的势能值是相对零势能点的, 数值上等于从该点将质点移动到势能零点时, 保守力所作的功.

解: (1) 已知势能零点位于坐标原点, 则  $x$  处的势能

$$E_{px} = A_{x0} = \int_x^0 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \mathbf{i} = \int_x^0 (-Ax + Bx^2) dx = \frac{A}{2}x^2 - \frac{B}{3}x^3$$

(2) 质点由  $x=2$  m 运动到  $x=3$  m 时, 势能的增量为

$$\Delta E_p = E_p|_{x=3} - E_p|_{x=2} = \frac{5}{2}A - \frac{19}{3}B$$

保守力做的功为 
$$A = \int_2^3 F dx = -\left(\frac{5}{2}A - \frac{19}{3}B\right)$$

可见, 保守力做的功等于势能增量的负值,

即 
$$A = -\Delta E_p$$

2-18. 一质量为  $m$  的质点作平面运动, 其位矢为  $\mathbf{r} = a\cos \omega t \mathbf{i} + b\sin \omega t \mathbf{j}$ , 式中  $a, b$  为正值常量, 且  $a > b$ . 问:

(1) 此质点作的是什么运动? 其轨迹方程怎样?

(2) 质点在  $A$  点( $a, 0$ )和  $B$  点( $0, b$ )时的动能有多大?

(3) 质点所受作用力  $\mathbf{F}$  是怎样的? 当质点从  $A$  点运动到  $B$  点时, 求  $\mathbf{F}$  的分力  $F_x \mathbf{i}$  和  $F_y \mathbf{j}$  所作的功.

(4)  $\mathbf{F}$  是保守力吗? 为什么?

分析: 一个力是否为保守力, 可由其做功是否与路径有关来判断.

解: (1) 由位矢方程可知, 质点在  $x, y$  方向的运动方程分别为

$$x(t) = a\cos \omega t, \quad y(t) = b\sin \omega t \quad (1)$$

消去  $t$ , 得轨迹方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

质点作轨迹为椭圆的曲线运动.

(2) 对运动方程(1)式分别求时间变化率, 得

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = b\omega \cos \omega t \quad (2)$$

从(1), (2)两式中消去  $t$ , 得

$$\mathbf{v} = -\frac{a\omega y}{b}\mathbf{i} + \frac{b\omega x}{a}\mathbf{j}$$

速度的大小

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}}$$

质点在  $A(a, 0)$  的动能:

$$E_{kA} = \frac{1}{2} m \omega^2 \left( \frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} \right) \Big|_{x=a, y=0} = \frac{1}{2} m \omega^2 b^2$$

质点在  $B(0, b)$  的动能:

$$E_{kB} = \frac{1}{2} m \omega^2 \left( \frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} \right) \Big|_{x=0, y=b} = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

(3) 质点所受作用力

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + m \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} = -m\omega^2 x \mathbf{i} - m\omega^2 y \mathbf{j} = -m\omega^2 \mathbf{r} \quad (3)$$

可见, 质点所受作用力方向指向坐标原点, 是有心力.

力的两个分量分别为  $F_x = -m\omega^2 x$ ,  $F_y = -m\omega^2 y$

质点从  $A(a, 0)$  点到  $B(0, b)$  点时,

$$F_x \text{ 做功} \quad A_x = \int_a^0 F_x dx = \int_a^0 -m\omega^2 x dx = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

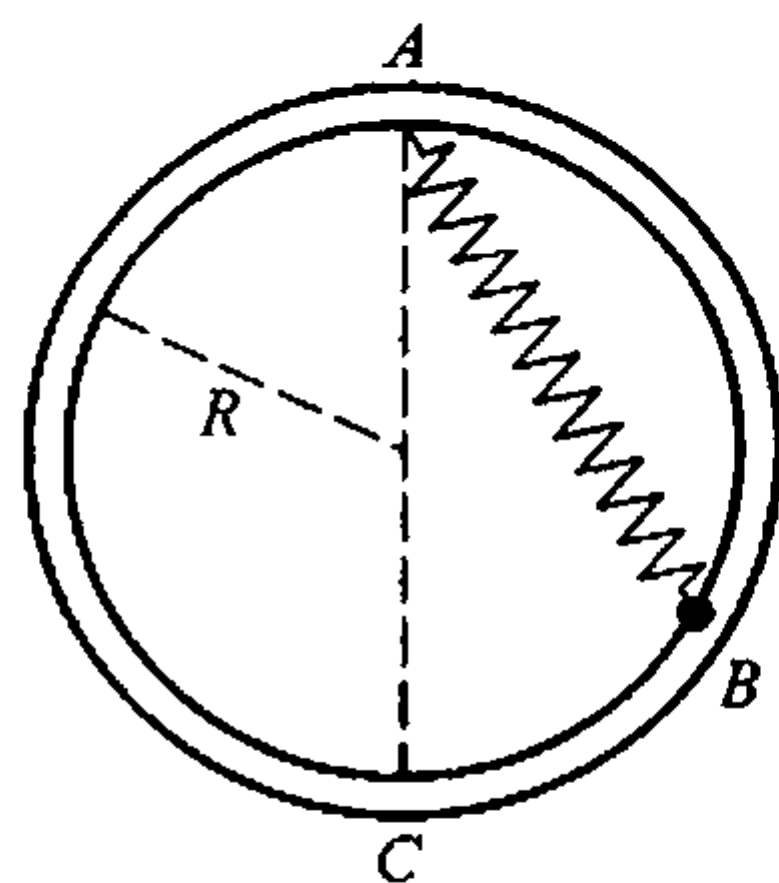
$$F_y \text{ 做功} \quad A_y = \int_0^b F_y dy = \int_0^b -m\omega^2 y dy = -\frac{1}{2} m \omega^2 b^2$$

(4) 考察质点从任意  $C(x_1, y_1)$  点运动到任意  $D(x_2, y_2)$  点,  $\mathbf{F}$  作的功

$$\begin{aligned} A &= A_x + A_y = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy \\ &= \int_{x_1}^{x_2} -m\omega^2 x dx + \int_{y_1}^{y_2} -m\omega^2 y dy \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 (x_2^2 + y_2^2) \end{aligned}$$

可见,  $\mathbf{F}$  的功只与始末位置有关, 与路径无关, 是保守力. 从问题(3)的计算结果已可看出这一点.

2-19. 一根原长  $l_0$  的弹簧, 当下端悬挂质量为  $m$  的重物时, 弹簧长  $l = 2l_0$ . 现将弹簧一端悬挂在竖直放置的圆环上端  $A$  点. 设环的半径  $R = l_0$ . 把弹簧另一端所挂重物放在光滑圆环的  $B$  点, 如图所示. 已知  $AB$  长为  $1.6R$ . 当重物在  $B$  点无初速地沿圆环滑动时, 试求:



习题 2-19 图

- (1) 重物在  $B$  点的加速度和对圆环的正压力;
- (2) 重物滑到最低点  $C$  时的加速度和对圆环的正压力.

**分析:** 取重物  $m$ 、地球和弹簧为系统时, 圆环对重物的支持力  $F_N$  是外力. 由于圆环光滑, 因此在重物  $m$  沿圆环的运动过程中, 支持力  $F_N$  不作功. 重物所受的重力和弹性力是系统的保守内力. 所以, 系统的机械能守恒. 由于重物沿圆环作圆周运动, 因此, 在解题时宜用自然坐标.

**解:** 由弹簧的静平衡条件  $F - mg = k\Delta l - mg = 0$

$$\Delta l = 2l_0 - l_0 = l_0 = R$$

得 
$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{mg}{R} \quad (1)$$

对重物的受力分析如解图 2-19 所示. 在圆环的任意位置处, 重物的运动方程为,

切向 
$$mg \sin 2\theta - F \sin \theta = ma_t \quad (2)$$

法向 
$$F_N + F \cos \theta - mg \cos 2\theta = ma_n = m \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

(1) 重物在  $B$  点所受弹性力  $F$  为

$$F_B = k\Delta l_B = k(1.6R - R) = 0.6mg$$

由题给条件和解图 2-19 可得

$$\cos \theta = \frac{AB}{2R} = 0.8$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = 0.6$$

根据题意  $v_B = 0$ , 有  $a_{nB} = 0$

所以, 重物在  $B$  点的加速度

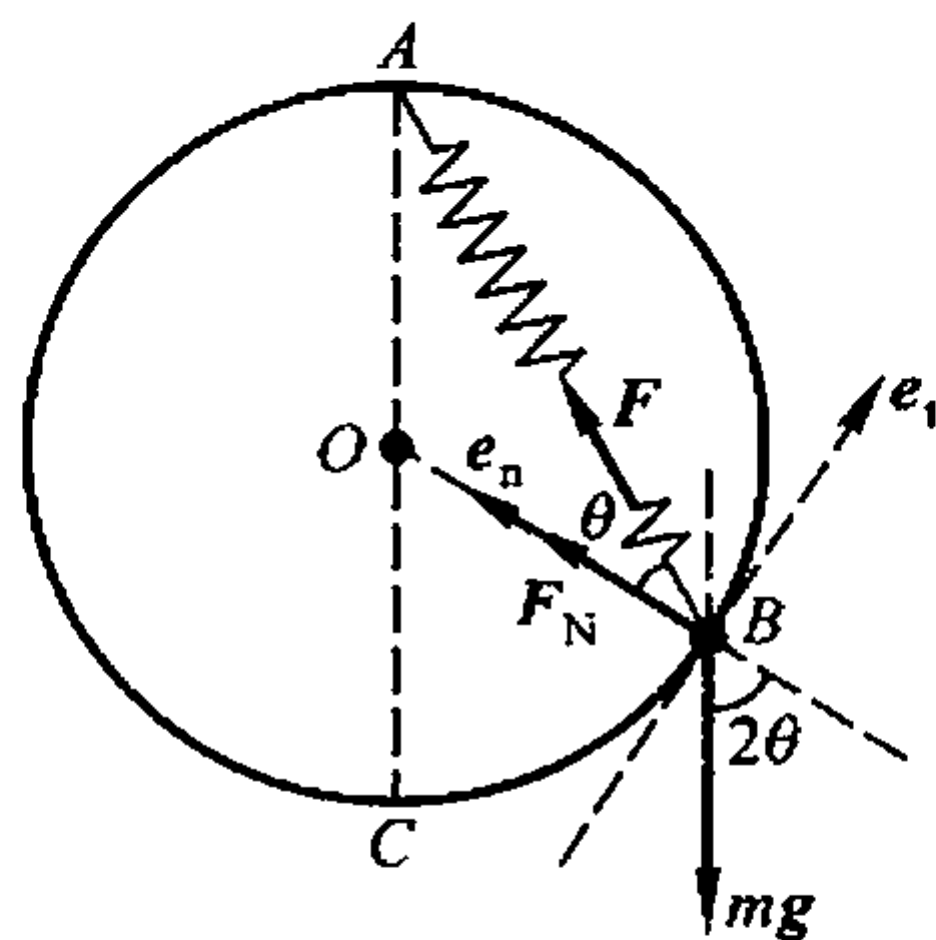
$$\begin{aligned} a_B &= a_{tB} = g(\sin 2\theta - 0.6 \sin \theta) \\ &= g \sin \theta (2 \cos \theta - 0.6) = 5.88 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

由(3)式得

$$F_{NB} = mg \cos 2\theta - 0.6mg \cos \theta = -0.20mg$$

“-”表示  $F_N$  与图示方向相反.

重物对圆环的正压力  $F'_{NB} = -F_{NB} = 0.20mg \text{ N}$



解图 2-19

方向沿圆环径向指向环心。

(2) 重物在 C 点时,由解图 2-19 可知,

$$\theta = 0, \quad F_c = k(2R - l_0) = mg$$

代入(2)、(3)两式,得  $a_{cC} = 0, \quad F_{NC} = m \frac{v_c^2}{R}$  (4)

对重物  $m$ 、地球和弹簧系统,机械能守恒。分别以重物在 B 点和 C 点为始态和末态,有

$$E_{kB} + E_{pB} = E_{kC} + E_{pC}$$

选 C 点为重力势能零点,上式为

$$0 + \frac{1}{2}k(1.6R - l_0)^2 + mg(2R - 1.6R\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}k(2R - l_0)^2 \quad (5)$$

由(4)、(5)两式,可得  $F_{NC} = 0.80mg, \quad v_c = \sqrt{0.8gR}$

重物在 C 点的加速度  $a_c = a_{nC} = \frac{v_c^2}{R} = 0.8g = 7.84 \text{ m/s}^2$

方向指向环心。

重物对圆环的正压力  $F'_{NC} = -F_{NC} = -0.80mg \text{ N}$

方向与 N 相反,竖直向下。

**2-20.** 一根特殊弹簧,在伸长  $x$  (m) 时,沿它伸长的反方向的作用力为  $(52.8x + 38.4x^2)$  (N)。

(1) 试求把弹簧从  $x = 0.50 \text{ m}$  拉长到  $x = 1.00 \text{ m}$  时,外力克服弹簧力所需作的总功。

(2) 将弹簧的一端固定,在另一端拴一质量为  $2.17 \text{ kg}$  的物体,然后把弹簧拉到  $x = 1.00 \text{ m}$ ,开始无初速地释放物体,试求弹簧缩回到  $x = 0.50 \text{ m}$  时物体的速率。

**分析:** 在弹簧的质量不计,或者非常缓慢地被拉长的情况下,外力的功在数值上与弹性力的功相等。当弹簧连接物体构成系统时,在没有外力和摩擦力等非保守力作功的情况下,拉长的弹簧所具有的弹性势能转换为缩回时物体的动能。所以,可以用机械能守恒定律或者运用动能定理计算弹簧缩回时物体的速率。

**解:** (1) 在弹簧被拉长的过程中,弹性力的功

$$A_1 = - \int_{0.50}^{1.00} F dx = - \int_{0.50}^{1.00} (52.8x + 38.4x^2) dx = -31 \text{ J}$$

外力的功

$$A' = -A_1 = 31 \text{ J}$$

(2) 在弹簧由  $x = 1.00 \text{ m}$  缩回到  $x = 0.50 \text{ m}$  的过程中,弹性力作功为  $A_2$ ,并

有  $A_2 = -A_1 = 31 \text{ J}$ .

由动能定理 
$$A_2 = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

得物体在  $x = 0.50 \text{ m}$  处的速率

$$v = \sqrt{\frac{2A_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 31}{2.17}} \text{ m/s} = 5.35 \text{ m/s}$$

**2-21.** 一质点沿  $x$  轴运动, 势能为  $E_p(x)$ , 总能量为  $E$  恒定不变, 开始时位于原点, 试证明当质点到达坐标  $x$  处所经历的时间为:

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}}$$

解: 机械运动总能量  $E = E_p(x) + E_k(x)$

即 
$$E_k(x) = \frac{1}{2}mv^2 = E - E_p(x)$$

所以 
$$v = \sqrt{\frac{2[E - E_p(x)]}{m}} = \frac{dx}{dt}$$

对上式分离变量后积分, 并注意到  $t = 0$  时  $x = 0$ , 则质点到达坐标  $x$  处所经历的时间  $t$  为

$$t = \int_0^t dt = \int_0^x \frac{1}{v} dx = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2[E - E_p(x)]}{m}}}$$

得证.

**2-22.** 一双原子分子的势能函数为

$$E_p(r) = E_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$$

式中  $r$  为两原子间的距离, 试证明:

(1)  $r_0$  为分子势能极小时的原子间距;

(2) 分子势能的极小值为  $-E_0$ ;

(3) 当  $E_p(r) = 0$  时, 原子间距为  $\frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$ ;

(4) 画出势能曲线简图.

分析: 势能函数的最小值对应系统的稳定平衡位置. 通过对势能函数求极值的方法即可求解.

解: (1) 令

$$\frac{dE_p(r)}{dr} = 0$$

可得

$$r = r_0$$

并且, 有

$$\left. \frac{d^2 E_p(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0} > 0$$

所以  $r_0$  为分子势能极小时的原子间距.

(2) 将  $r = r_0$  代入势能函数, 可得分子势能极小值为

$$E_p(r) \big|_{r=r_0} = -E_0$$

(3) 解方程

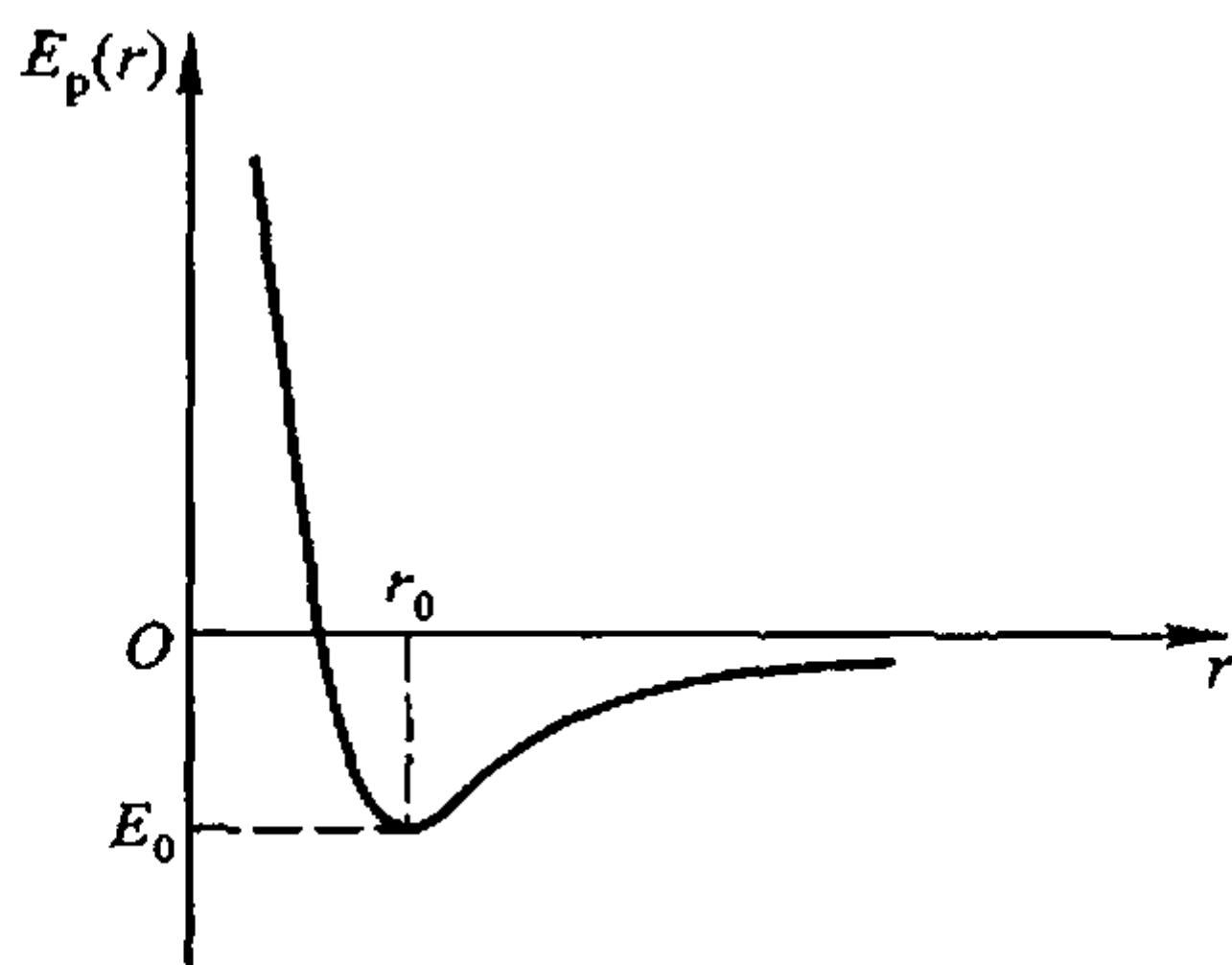
$$E_p(r) = 0$$

可得

$$r = \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$$

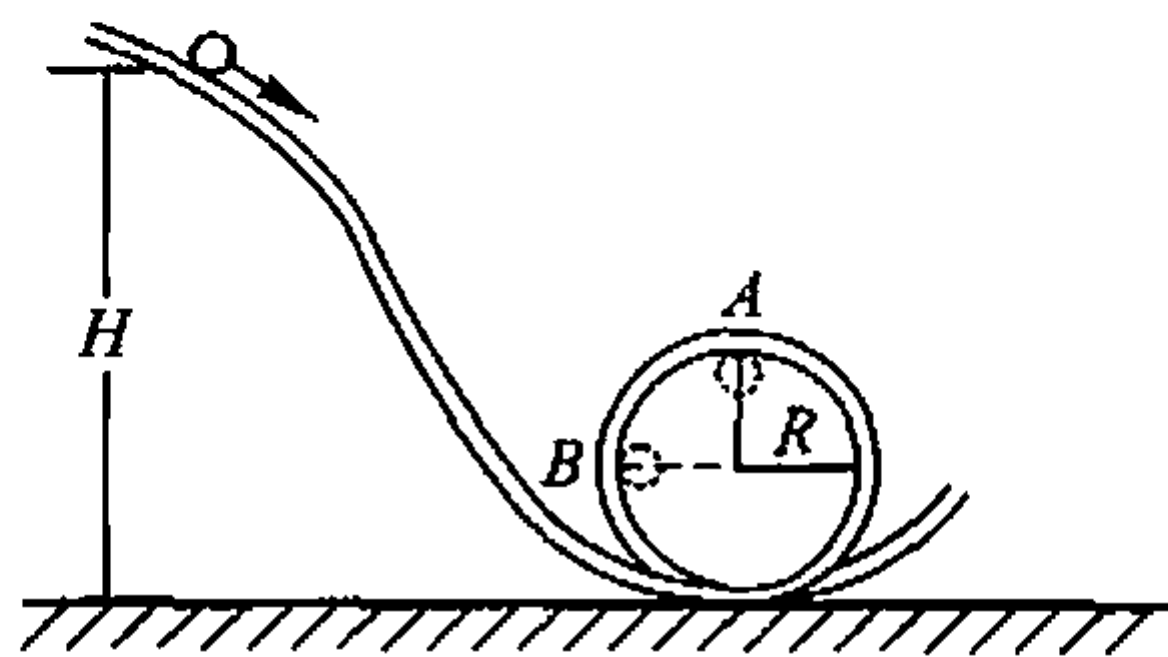
(4) 取下列数据, 可确定势能曲线的变化趋势. 势能曲线简图如解图 2-22 所示.

$r$	$r \rightarrow 0$	$r = \frac{r_0}{\sqrt[6]{2}}$	$r = r_0$	$r \rightarrow +\infty$
$E_p(r)$	$E_p(r) \rightarrow +\infty$	$E_p(r) = 0$	$E_p(r) = -E_0$	$E_p(r) \rightarrow 0$



解图 2-22

2-23. 小球的质量为  $m$ , 沿着光滑的弯曲轨道滑下, 轨道的形状如图.



习题 2-23 图

(1) 要使小球沿圆形轨道运动一周而不脱离轨道,问小球至少应从多高  $H$  的地方滑下?

(2) 小球在圆圈的最高点  $A$  受到哪几个力的作用?

(3) 如果小球由  $H=2R$  的高处滑下,小球的运动将如何?

分析:取小球、地球为系统时,光滑轨道作用于小球的支持力是外力,但在小球运动过程中支持力不作功,因此系统机械能守恒. 小球恰可沿圆形轨道运动一周而不脱离轨道,则要求小球在最高点  $A$  具有恰可作圆周运动所需的最小机械能.

解1:(1) 由受力分析(解图 2-23),可得小球在圆形轨道上任意点  $D$  的运动方程.

$$\text{法线方向} \quad F_N - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

$$\text{支持力} \quad F_N \geq 0 \quad (2)$$

小球从  $H$  高度滑到  $D$  点过程中,系统机械能守恒. 选圆形轨道最低点  $C$  为势能零点,则有

$$mgH = mg(R - R \cos \theta) + \frac{1}{2}mv^2 \quad (3)$$

解(1)、(2)、(3)三式,得

$$H \geq R - \frac{3}{2}R \cos \theta \quad (4)$$

$$\text{对最高点 } A, \text{ 应有 } \theta = \pi, \text{ 所以 } H \geq R + \frac{3}{2}R = \frac{5}{2}R$$

即小球至少应从  $H = \frac{5}{2}R$  处滑下. 此时有

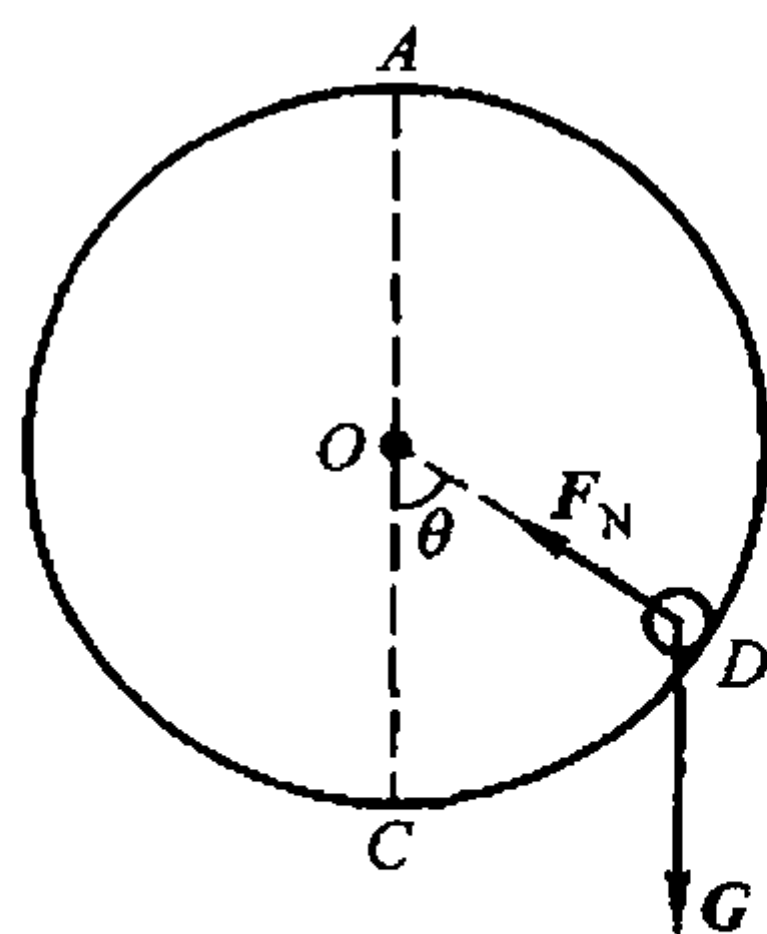
$$F_N = 0, \quad m \frac{v^2}{R} = mg$$

这就是小球恰可沿圆形轨道运动一周而不脱离轨道的动力学要求.

(2) 小球在圆形轨道最高点  $A$  的受力与开始下滑高度  $H$  有关. 当  $H > \frac{5}{2}R$  时,小球受重力和支持力,方向竖直向下. 当  $H = \frac{5}{2}R$  时,小球只受重力.

(3) 当  $H < \frac{5}{2}R$  时,小球将不能绕圆轨道到达  $A$  点.  $H = 2R$  时,小球将在圆轨道的某点处脱离轨道作抛体运动. 在脱离点,  $F_N = 0$ . 将  $H = 2R$  代入(4)式,并取等号,得

$$\theta = 131.8^\circ$$



解图 2-23

由(1)式可得,小球脱离轨道时的速率为  $v = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$ .

**解2:** (1) 对小球和地球组成的系统,机械能守恒. 取圆环最低处为重力势能零点. 设小球在最高点具有速率  $v$ , 有

$$mgH = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2$$

小球恰可作圆周运动,在最高点仅由重力提供向心力,即

$$mg = m \frac{v^2}{R}$$

解上述两式,得

$$H = \frac{5}{2}R$$

问题(2)、(3)同解1.

**2-24.** 一弹簧原长为  $l_0$ , 劲度系数为  $k$ , 上端固定, 下端挂一质量为  $m$  的物体, 先用手托住, 使弹簧不伸长.

(1) 如将物体托住慢慢放下, 达静止(平衡位置)时, 弹簧的最大伸长和弹性力是多少?

(2) 如将物体突然放手, 物体到达最低位置时, 弹簧的伸长和弹性力各是多少? 物体经过平衡位置时的速度是多少?

**分析:** 物体悬挂于弹簧下端, 受重力和弹性力作用. 取物体, 弹簧和地球为系统时,  $A_e + A_{id} = 0$ , 所以, 系统的机械能守恒. 本题涉及重力势能和弹性势能, 解题中需正确选取势能零点.

**解:** (1) 慢慢放下的物体将静止在受合外力为零的平衡位置. 设此时弹簧的静伸长量为  $x_0$ . 取坐标  $Ox$  向下为正, 以平衡位置为坐标原点.

因受力平衡, 有  $-kx_0 + mg = 0$

得弹簧的静伸长量  $x_0 = \frac{mg}{k}$

弹簧作用于物体的弹性力大小为

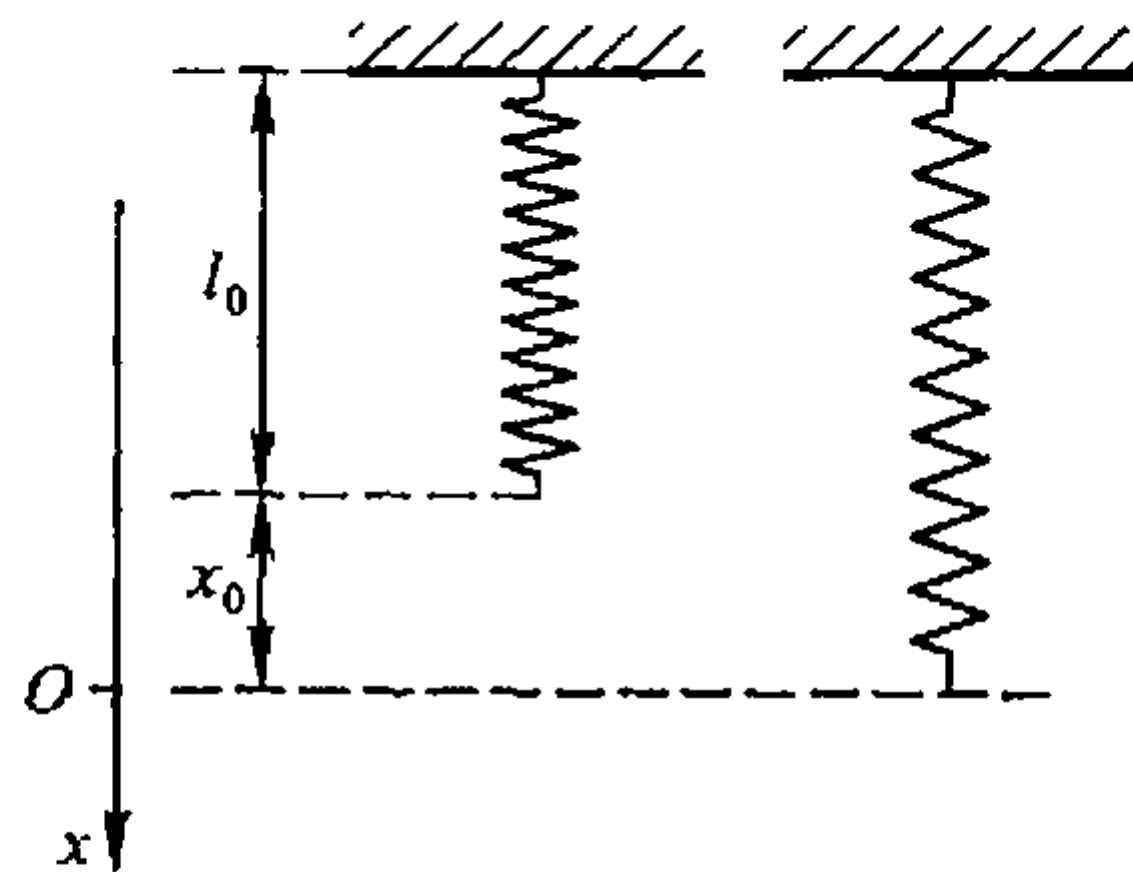
$$F = kx_0 = mg$$

(2) 突然放手后, 设物体最低可到达  $x$  处. 以“放手”位置和  $x$  处为系统的始态和末态, 在此过程中, 系统的机械能守恒. 选平衡位置为重力势能零点, 弹簧原长处为弹性势能零点. 有

$$mgx_0 = -mgx + \frac{1}{2}k(x_0 + x)^2$$

弹簧的伸长量为

$$x_0 + x = \frac{2mg}{k}$$



解图 2-24

弹性力大小为

$$F = k(x_0 + x) = 2mg$$

设物体在平衡位置时的速度为  $v$ , 仍由机械能守恒定律

$$mgx_0 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

得

$$v = g \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{gx_0}$$

#### 4. 质心运动定理和动量守恒定律

**2-25.** 一小船质量为 100 kg, 船头到船尾共长 3.6 m. 现有一质量为 50 kg 的人从船尾走到船头时, 船头将移动多少距离? 假定水的阻力不计.

**分析:** 不计水的阻力时, 人、船系统在水平方向因不受外力而动量守恒. 运用动量守恒规律时, 需注意各物体的速度应相对同一惯性参考系. 需分清人相对船的位移、速度, 与人和船相对岸的位移、速度两者之间的区别. 运用质心运动定理同样可解本题.

**解 1:** 取坐标  $Ox$  固定于岸, 坐标轴正方向由船尾指向船头. 设船的质量为  $m_0$ , 相对岸的运动速度为  $v_0$ , 人的质量为  $m$ , 相对船的运动速度为  $v$ , 相对岸的速度为  $(v_0 + v)$ . 开始时, 人船相对静止. 取人和船为系统.

系统的水平动量守恒  $0 = m_0 v_0 + m(v + v_0)$

得

$$v_0 = -\frac{m}{m + m_0}v \quad (1)$$

式中“ $-$ ”号表示船的运动方向与人的运动方向相反.

设人相对船的位移为  $l$ , 从船尾到船头所需时间为  $t$ ,

有

$$l = \int_0^t v dt \quad (2)$$

设船对岸的位移为  $L$ , 有

$$L = \int_0^t v_0 dt \quad (3)$$

将(1)式代入(3)式, 并利用(2)式, 得

$$L = \int_0^t -\frac{m}{m + m_0}v dt = -\frac{m}{m + m_0}l = -1.2 \text{ m}$$

船头沿  $x$  轴反方向相对岸移动了 1.2 m.

**解 2:** 运用质心运动定理计算.

取人和船为系统. 由于系统在水平方向不受外力, 因此, 系统质心的加速度  $a_{Cx} = 0$ , 质心将保持原来的运动状态不变, 即保持静止. 取固定的坐标系  $Ox$  同解 1. 设  $x_c$  为质心位置, 人的位置为  $x$ , 船的质心位置为  $X$ .

根据质心的定义

$$x_c = \frac{m_0 X + mx}{m_0 + m}$$

并有  $\Delta x_c = 0$ , 即 
$$\Delta x_c = \frac{m_0 \Delta X + m \Delta x}{m_0 + m} = 0$$

船头移动的距离 
$$\Delta X = -\frac{m}{m_0} \Delta x \quad (1)$$

由于  $\Delta x$  是人对岸的位移, 根据运动的相对性, 应有

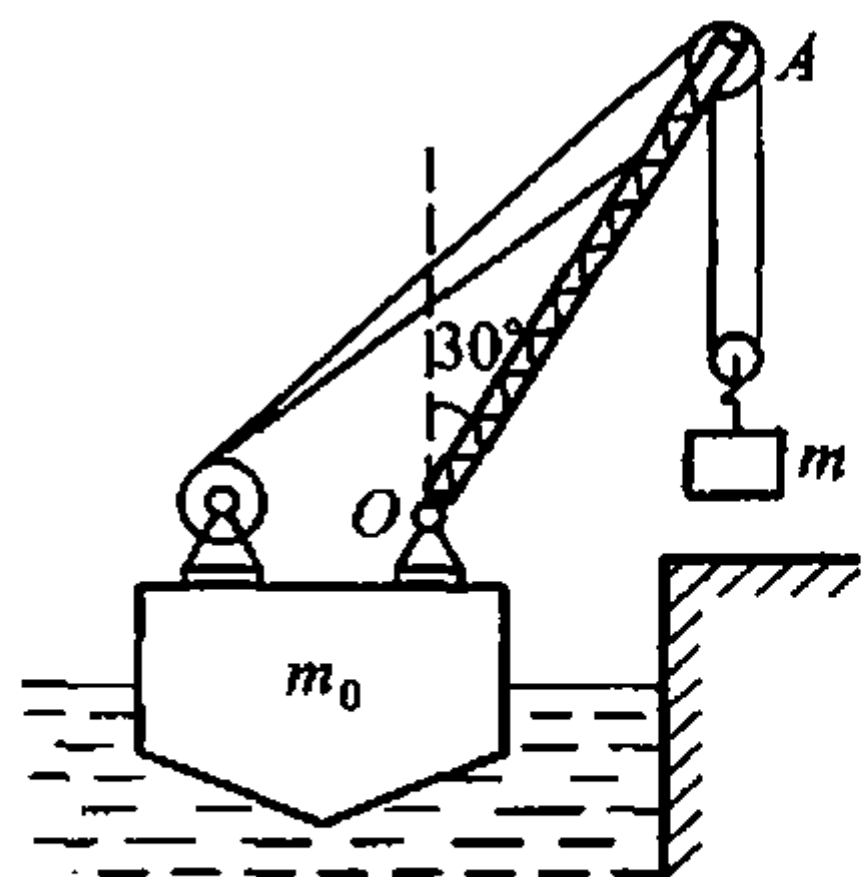
$$\Delta x = l + \Delta X \quad (2)$$

式中  $l$  是人相对船的位移.

将(2)式代入(1)式, 得 
$$\Delta X = -\frac{m}{m + m_0} l$$

与解 1 结果相同.

**2-26.** 如图, 一浮吊质量  $m_0 = 20 \text{ t}$ , 由岸上吊起  $m = 2 \text{ t}$  的重物后, 再将吊杆  $OA$  与竖直方向间的夹角  $\theta$  由  $60^\circ$  转到  $30^\circ$ . 设杆长  $l = OA = 8 \text{ m}$ , 水的阻力与杆重忽略不计. 求浮吊在水平方向移动的距离, 并指明朝那边移动.



习题 2-26 图

**分析:** 取浮吊和重物为系统. 在水平方向, 系统动量守恒.

**解:** 设浮吊相对岸的速度为  $u$ , 重物相对浮吊的水平速度为  $v$ , 相对岸的水平速度为  $(u + v)$ . 设开始时浮吊和重物相对静止. 取重物的运动方向为正方向.

由动量守恒定律

$$0 = m_0 v_0 + m(v + u)$$

得浮吊相对岸的速度

$$u = -\frac{m}{m + m_0} v \quad (1)$$

式中“-”号表示浮吊的运动方向与重物相反, 即向岸移动.

设重物相对浮吊船的水平位移为  $s$ , 完成此位移所需时间为  $t$ .

$$s = \int_0^t v dt = l(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) \quad (2)$$

设浮吊船对岸的位移为  $s_0$ , 有 
$$s_0 = \int_0^t u dt \quad (3)$$

将(1)式代入(3)式, 并利用(2)式, 得

$$\begin{aligned} s_0 &= \int_0^t -\frac{m}{m + m_0} v dt = \int_0^s -\frac{m}{m + m_0} ds \\ &= -\frac{m}{m + m_0} l(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) = -0.266 \text{ m} \end{aligned}$$

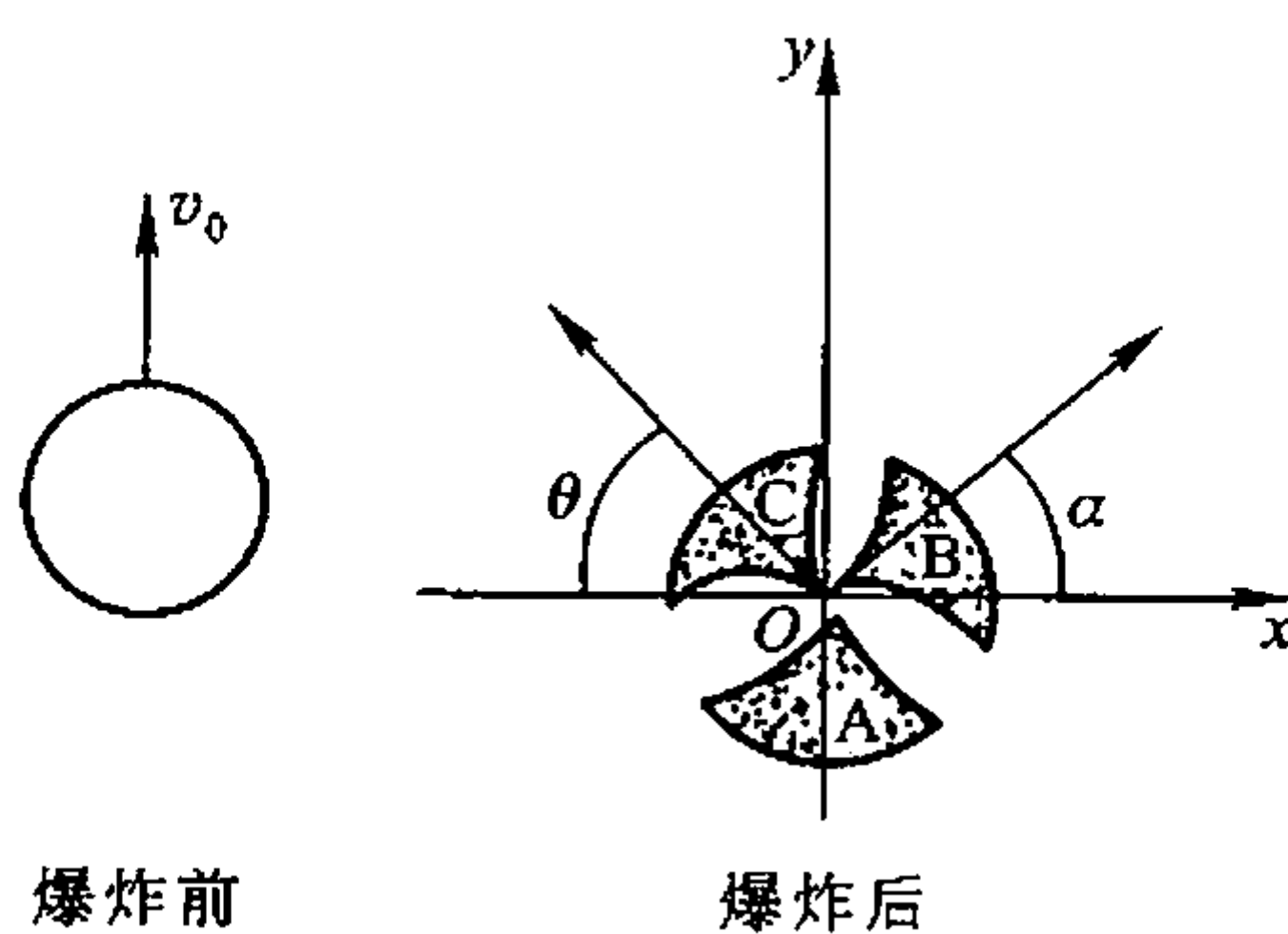
浮吊朝岸移动了 0.266 m.

用质心运动定理求解本题的方法可参照上题.

**2-27.** 一炮弹竖直向上发射, 初速度为  $v_0$ , 在发射后经时间  $t$  在空中自动爆炸, 假定分成质量相同的 A、B、C 三块碎片. 其中 A 块的速度为零; B、C 两块的速度大小相同, 且 B 块速度方向与水平成  $\alpha$  角, 求 B、C 两碎块的速度(大小和方向).

**分析:** 取炮弹为系统. 因爆炸时的内力远大于重力, 炮弹所受重力可忽略不计. 所以爆炸前后炮弹的动量守恒. 应用动量守恒定律时要注意动量的矢量性.

**解:** 以炮弹为系统, 取坐标  $Oxy$ . 设爆炸前炮弹的速度为  $v'_0$ , 爆炸后, B、C 两块速度的大小均为  $v$ , 并分别与  $x$  轴成  $\alpha$  角和  $\theta$  角, 如解图 2-27 所示.



解图 2-27

三块碎片的质量均为  $m$ . 因爆炸前后炮弹的动量守恒, 有

$$x \text{ 方向} \quad 0 = mv \cos \alpha - mv \cos \theta$$

$$y \text{ 方向} \quad 3mv'_0 = mv \sin \alpha + mv \sin \theta$$

$$v'_0 = v_0 - gt$$

$$\text{可得} \quad v = \frac{3(v_0 - gt)}{2 \sin \alpha}, \quad \theta = \alpha$$

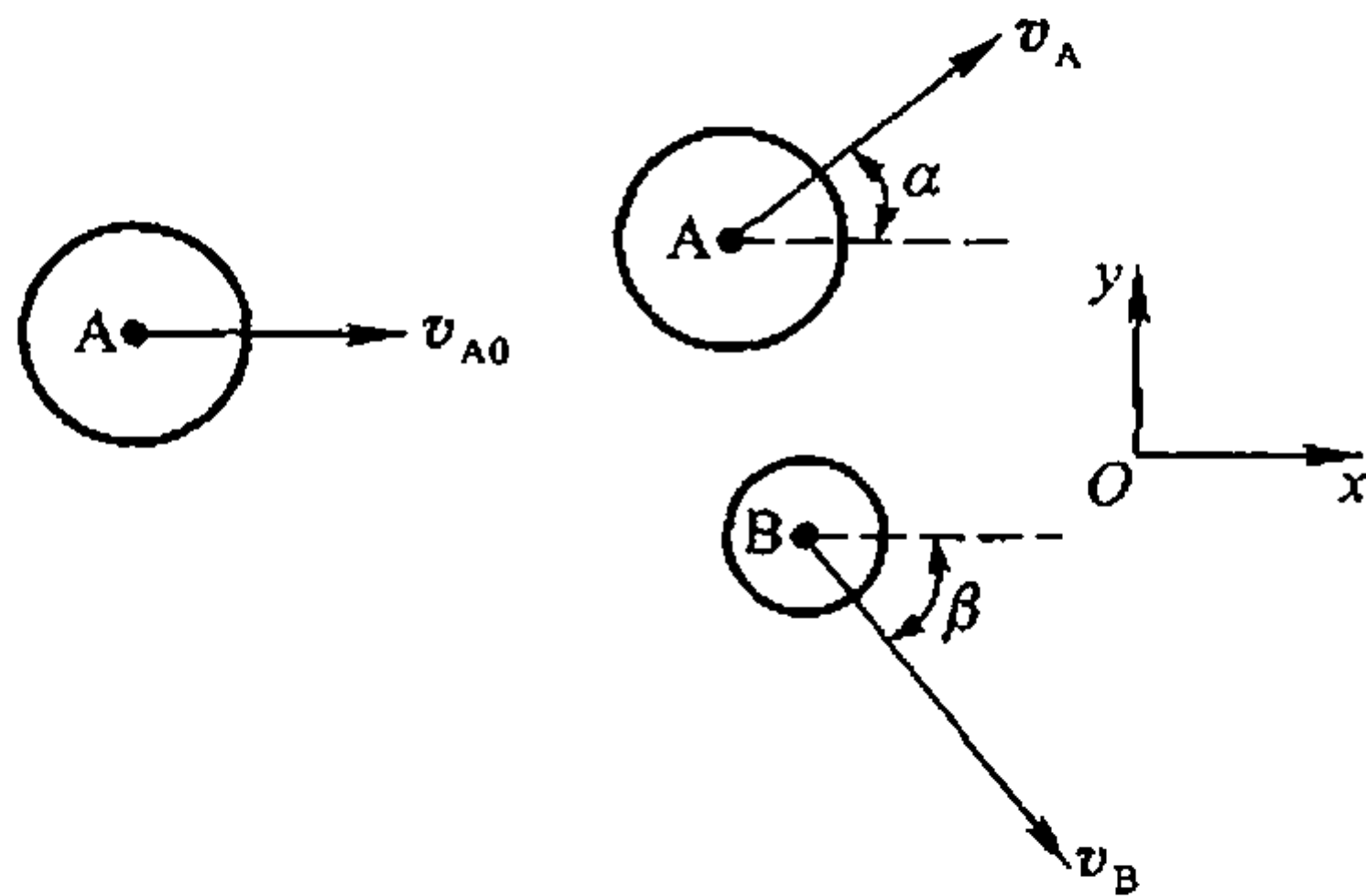
## 5. 运动守恒定律的综合应用

**2-28.** 质量为  $7.20 \times 10^{-23}$  kg、速度为  $6.0 \times 10^7$  m/s 的粒子 A, 与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 相碰, 假定这碰撞是完全弹性碰撞, 碰撞后粒子 A 的速率为  $5 \times 10^7$  m/s, 求:

- (1) 粒子 B 的速率及偏转角;
- (2) 粒子 A 的偏转角.

分析：碰撞与打击、爆炸、分裂等过程具有作用力强、变化大而相互作用时间极短的特点。在这过程中，相互碰撞物体所受的外力，如重力、阻力等通常都远小于相互作用内力而可忽略，所以相碰系统的总动量守恒。对于完全弹性碰撞过程，由于没有机械能损失，因此机械能守恒。要注意对动量守恒规律矢量性的处理。

解：取 A、B 两粒子为系统。取坐标  $Oxy$  如解图 2-28 所示。设 A 的质量为  $m'$ ，碰前速度为  $v_{A0}$ ，沿  $x$  轴正方向，碰后速度为  $v_A$ ，与  $x$  轴正方向的夹角为  $\alpha$ 。B 的质量为  $m$ ，碰后速度为  $v_B$ ，与  $x$  轴正方向夹角为  $\beta$ 。



解图 2-28

由动量守恒，有

$x$  方向

$$m'v_{A0} = mv_B \cos \beta + m'v_A \cos \alpha \quad (1)$$

$y$  方向

$$0 = m'v_A \sin \alpha - mv_B \sin \beta \quad (2)$$

由机械能守恒

$$\frac{1}{2}m'v_{A0}^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}m'v_A^2 \quad (3)$$

由(3)式，得

$$v_B^2 = \frac{m'(v_{A0}^2 - v_A^2)}{m} \quad (4)$$

解(1)、(2)、(4)式，可得

$$\cos \alpha = \frac{(m' + m)v_A^2 + (m' - m)v_{A0}^2}{2m'v_{A0}v_A}$$

$$\sin \beta = \frac{m'v_A}{mv_B} \sin \alpha$$

代入数据，得

$$v_B = 4.69 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$\cos \alpha = 0.925, \quad \sin \beta = 0.8094$$

$$\alpha = 22^\circ 20', \quad \beta = 54^\circ 4'$$

2-29. 一质量为  $m$  的中子与一质量为  $m'$  的原子核作完全弹性碰撞, 如中子的初始动能为  $E_0$ , 试证明在碰撞过程中中子动能损失的最大值为  $4mm'E_0/(m'+m)^2$ .

分析: 作完全弹性碰撞的粒子系统动量守恒, 机械能也守恒. 由于碰撞而相互转移的动量是矢量, 因此中子碰撞原子核后的动能变化与碰撞方式有关, 也即与碰撞后中子的散射角度有关.

解: 设中子为 A、原子核为 B, 并取为系统. 取坐标  $Oxy$ . 设碰前中子 A 的速度为  $v_{A0}$  沿  $x$  轴正方向, 碰后的速度为  $v_A$ , 与  $x$  轴正方向的夹角(散射角)为  $\alpha$ . 碰前原子核 B 静止, 碰后的速度为  $v_B$ , 与  $x$  轴正方向的夹角为  $\beta$ , 与解图 2-28 所示情况相同. 由动量守恒,

$$x \text{ 方向} \quad mv_{A0} = m'v_B \cos \beta + mv_A \cos \alpha \quad (1)$$

$$y \text{ 方向} \quad 0 = mv_A \sin \alpha - m'v_B \sin \beta \quad (2)$$

$$\text{由机械能守恒} \quad \frac{1}{2}mv_{A0}^2 = E_0 = \frac{1}{2}m'v_B^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (3)$$

$$\text{因碰撞, 中子动能损失} \quad \Delta E_{km} = \frac{1}{2}m(v_{A0}^2 - v_A^2) = E_0 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (4)$$

$$\text{由(1), 得} \quad \cos^2 \beta = \left[ \frac{\sqrt{2mE_0} - mv_A \cos \alpha}{m'v_B} \right]^2 \quad (1)'$$

$$\text{由(2), 得} \quad \sin^2 \beta = \left[ \frac{mv_A \sin \alpha}{m'v_B} \right]^2 \quad (2)'$$

$$(1)' + (2)' \text{ 得} \quad (m'v_B)^2 = 2mE_0 - 2mv_A \sqrt{2mE_0} \cos \alpha - (mv_A)^2$$

$$\text{由(3)式, 得} \quad (m'v_B)^2 = 2m'E_0 - mm'v_A^2$$

$$\text{即} \quad 2m'E_0 - mm'v_A^2 = 2mE_0 - 2mv_A \sqrt{2mE_0} \cos \alpha - (mv_A)^2$$

$$\text{整理可得} \quad v_A^2 - \frac{2\sqrt{2mE_0}}{m+m'}v_A \cos \alpha + 2\frac{m-m'}{m(m+m')}E_0 = 0$$

$$\text{上式可表示为} \quad v_A^2 - Bv_A \cos \alpha + C = 0 \quad (5)$$

$$\text{其中,} \quad B = \frac{2\sqrt{2mE_0}}{m+m'}, \quad C = 2\frac{m-m'}{m(m+m')}E_0$$

对(5)式, 令  $\frac{dv_A}{d\alpha} = 0$ , 可得  $\sin \alpha = 0$ , 据题意应取  $\alpha = \pi$ .

因  $\left. \frac{d^2v_A}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\pi} > 0$ , 所以  $v_A$  有极小值. 由(4)式可知, 此时中子动能损失  $\Delta E_{km}$  为最大.

将  $\alpha = \pi$  代入(2)式, 得  $\beta = 0$ . 即  $\Delta E_{km}$  为最大的碰撞方式是对心碰撞. 碰撞后中子沿原入射方向被散射回去. 由(5)式可得中子的反弹速度

$$v_A = \frac{m' - m}{m' + m} \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$$

代入(4)式即可证得中子动能损失的最大值为

$$\Delta E_{km} = E_0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{4mm'E_0}{(m+m')^2}$$

由于中子 A 动能损失的最大值为原子核 B 所获取,因此通过求解 B 的最大动能,同样可得证.

**2-30.** 地面上竖直安放着一个劲度系数为  $k$  的弹簧,其顶端连接一静止的质量为  $m'$  的物体. 有个质量为  $m$  的物体,从距离顶端为  $h$  处自由落下,与  $m'$  作完全非弹性碰撞. 求证弹簧对地面的最大压力为

$$F_{\max} = (m' + m)g + mg \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m' + m)g}}$$

**分析:** 完全非弹性碰撞的特点是,相互碰撞的物体在碰撞后以共同速度运动. 由于碰撞时间极短,可认为在碰撞瞬间  $m'$ 、 $m$  所受外力远小于相互碰撞的作用力. 因此,在碰撞过程中,相碰物体的动量守恒. 碰撞后,在压缩弹簧的过程中, $m$ 、 $m'$ 、弹簧和地球系统的机械能守恒.

**解:**  $m$  作自由落体运动,碰撞前的速度大小为

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

取坐标  $Ox$  向下为正,坐标原点位于弹簧的平衡位置处. 取  $m$  和  $m'$  为碰撞系统. 设碰撞后两物体的共同速度为  $u$ ,由动量守恒

$$mv = (m + m')u \quad (2)$$

设  $m'$  静止于弹簧上时,弹簧的压缩量为  $x_0$ ,

$$m'g - kx_0 = 0 \quad (3)$$

选  $m$ 、 $m'$ 、弹簧和地球为系统,在压缩弹簧的过程中系统的机械能守恒. 选平衡位置即坐标原点为重力势能零点,弹簧的原长处为弹性势能零点. 分别取  $m$ 、 $m'$  相碰后瞬间和弹簧被压缩至最大值  $x$  时刻为系统的始末状态. 根据机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}(m + m')u^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 - (m + m')gx \quad (4)$$

最大弹性力即为弹簧对地面的最大压力

$$F_{N\max} = k(x + x_0) \quad (5)$$

将(1)、(2)、(3)式代入(4)式,得

$$x = \frac{mg}{k} \pm \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + m')g}}$$

舍去“-”，代入(5)式，得

$$F_{N\max} = (m + m')g + mg \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + m')g}}$$

**2-31.** 一个球从  $h$  高处自由落下，掉在地板上。设球与地板碰撞的恢复系数为  $e$ 。试证：

$$(1) \text{ 该球停止回跳需经过的时间为 } t = \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

$$(2) \text{ 在上述时间内，球经过的路程是 } s = \frac{1+e^2}{1-e^2} h.$$

**分析：**取球与地面为系统时，该系统在碰撞过程中的动量守恒。由于  $e \neq 1$ ，说明小球与地面碰撞前后有机械能损失，最终球将停止跳动。以地面为惯性参考系，碰撞前后地面的速度均为零。因此，每次球的回跳速度都将等比地小于碰前速度，比例系数即为恢复系数。注意恢复系数定义式中的各速度都相对惯性系，而“分离速度”和“接近速度”都是相对速度。球在相邻两次碰撞的时间间隔内作竖直上抛运动，系统的机械能守恒。

**解：**取坐标向下为正。球自  $h$  高度首次自由下落，碰地前的速度  $v_{10}$  可由系统机械能守恒定律求得

$$v_{10} = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

落到地面所需时间，由  $h = \frac{1}{2}gt_0^2$ ，得

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2)$$

设碰后球的速度为  $v_1$ ，地面在碰撞前后的速度为零，即  $v_{20} = v_2 = 0$ 。

由恢复系数定义

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

得

$$v_1 = -ev_{10} \quad (3)$$

“-”号表示  $v_1$  与  $v_{10}$  反向。碰地后球的回跳高度由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1$$

得

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{e^2 v_{10}^2}{2g} = e^2 h$$

从首次下落到再次下落与地面相碰前的时间间隔为

$$t_1 = \frac{2v_1}{g} = \frac{2ev_{10}}{g} = \frac{2e}{g} \sqrt{2gh}$$

同理可得以后各次的回跳高度

$$h_2 = e^2 h_1 = e^4 h, \quad h_3 = e^2 h_2 = e^6 h, \quad \dots$$

相邻两次与地面相碰的时间间隔

$$t_2 = \frac{2e \sqrt{2gh_1}}{g} = \frac{2e^2 \sqrt{2gh}}{g}, \quad t_3 = \frac{2e \sqrt{2gh_2}}{g} = \frac{2e^3 \sqrt{2gh}}{g}, \quad \dots$$

注意到上两式中各项均成比例关系, 比例系数分别为  $e^2$  和  $e$ .

所以, 球停止回跳需经过的时间为

$$\begin{aligned} t &= t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots \\ &= \frac{\sqrt{2gh}}{g} + \frac{2e \sqrt{2gh}}{g} + \frac{2e^2 \sqrt{2gh}}{g} + \frac{2e^3 \sqrt{2gh}}{g} + \dots \\ &= \frac{\sqrt{2gh}}{g} + \frac{2e \sqrt{2gh}}{g} (1 + e + e^2 + \dots) = \frac{1+e}{1-e} \frac{\sqrt{2gh}}{g} \end{aligned}$$

停止回跳前经过的路程是

$$\begin{aligned} s &= h + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \dots \\ &= h + 2e^2 h + 2e^4 h + \dots = \frac{1+e^2}{1-e^2} h \end{aligned}$$

计算中利用了等比级数的求和公式

$$a + aq + aq^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1$$

**2-32.** 一电梯以  $1.5 \text{ m/s}$  匀速上升, 一静止于地上的观察者自某点将球自由释放. 释放处比电梯的底板高  $6.4 \text{ m}$ . 球和地板间的恢复系数为  $0.5$ . 问球第一次回跳的最高点与释放处的距离?

**分析:** 本题在利用恢复系数处理碰撞问题时, 需注意与上题的不同之处: 电梯底板与球碰撞前后的速度不变.

**解:** 选地面参考系, 取坐标  $Oy$  向上为正, 坐标原点于地面, 也取作重力势能零点. 球与电梯底板碰撞前, 作自由落体运动. 设释放处坐标为  $y_0$ ,  $t$  时刻球与电梯底板在  $y$  处相碰.

球的位移为 
$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2$$

设  $t=0$  时, 电梯位于  $y'_0$ , 则有 
$$y - y'_0 = v_0 t$$

据题意 
$$y_0 - y'_0 = H = 6.4 \text{ m}$$

小球与电梯底板碰撞前的速度 
$$v_{10} = -gt$$

碰撞前后电梯的速度不变 
$$v_{20} = v_2 = v_0 = 1.5 \text{ m/s}$$

设球的回跳速度为  $v_1$ , 由恢复系数定义, 得

$$v_1 = v_0 - e(v_{10} - v_0)$$

设球的回跳的高度为  $y_2$ , 由机械能守恒, 得

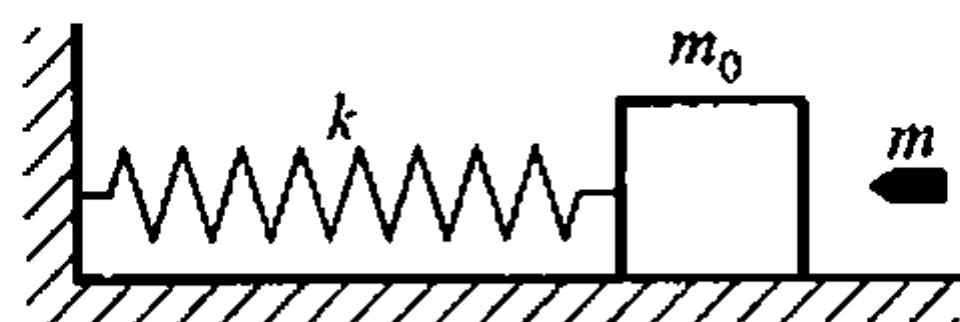
$$mgy_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy$$

第一次回跳的最高点与释放处间距  $\Delta H = y_0 - y_2$

解上述方程, 可得  $t = 1 \text{ s}$ ,  $v_1 = 7.15 \text{ m/s}$

$$\Delta H = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2g}v_1^2 = 2.29 \text{ m}$$

**2-33.** 如图是一种测定子弹速度的方法. 子弹水平地射入一端固定在弹簧上的木块内, 由弹簧压缩的距离求出子弹的速度. 已知子弹质量是  $0.02 \text{ kg}$ , 木块质量是  $8.98 \text{ kg}$ . 弹簧的劲度系数是  $100 \text{ N/m}$ , 子弹射入木块后, 弹簧被压缩  $10 \text{ cm}$ . 设木块与平面间的动摩擦因数为  $0.2$ , 求子弹的速度.



习题 2-33 图

**分析:** 子弹的运动过程有两个阶段, 第一阶段: 子弹射入木块并开始具有共同运动的速度, 是完全非弹性碰撞过程, 子弹与木块系统的动量守恒; 第二阶段: 子弹、木块共同压缩弹簧, 取子弹、木块和弹簧为系统时, 摩擦力是外力, 用功能原理可解得子弹的速度.

**解:** 设  $m$ 、 $m_0$  分别为子弹和木块的质量, 子弹射入木块前的速度为  $v$ , 与木块的共同运动速度为  $u$ . 碰撞过程中, 子弹与木块系统的动量守恒.

$$mv = (m + m_0)u \quad (1)$$

对子弹、木块和弹簧系统, 运用功能原理,

$$A_{\text{外}} = \Delta E_k + \Delta E_p \quad (2)$$

在弹簧被压缩  $x$  的过程中, 摩擦力做功为

$$A_{\text{外}} = -\mu(m + m_0)gx$$

$$(2) \text{ 式为 } -\mu(m + m_0)gx = \left[ 0 - \frac{1}{2}(m + m_0)u^2 \right] + \left[ \frac{1}{2}kx^2 - 0 \right]$$

将(1)式代入上式, 并代入数据, 得

$$v = \frac{m_0 + m}{m} \sqrt{\frac{kx^2}{m_0 + m} + 2\mu gx} = 319.2 \text{ m/s}$$

**2-34.** 一质量为  $m$  的铁块静止在质量为  $m_0$  的劈尖上, 劈尖本身又静止在水平桌面上. 劈尖与地面的夹角为  $\alpha$ , 设所有接触都是光滑的. 当铁块位于高出桌面  $h$  处时, 这个铁块-劈尖系统由静止开始运动. 当铁块落到桌面上时, 劈尖的速度有多大?

**分析:** 对铁块、劈尖和地球系统, 外力不做功, 铁块和劈尖间的相互作用力

是成对内力,其总功为零. 所以,系统的机械能守恒. 对铁块和劈尖系统,由于水平方向不受外力,因而水平方向的动量守恒. 解题过程中需注意动量的矢量性和相对性.

解: 取桌面为惯性参考系,并取坐标  $Oxy$ , 如解图 2-34 所示.

设铁块相对桌面的速度为  $\boldsymbol{v}$ , 相对劈尖的速度为  $\boldsymbol{v}'$ ,  $\boldsymbol{v}$  的水平分量沿  $x$  轴正方向, 劈尖相对桌面的速度为  $\boldsymbol{u}$ , 朝  $x$  轴负方向运动. 有

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

$$v_x = v'_x - u = v' \cos \alpha - u$$

$$v_y = v'_y = v' \sin \alpha$$

铁块和劈尖系统在水平方向的动量守恒

$$-m_0 u + m(v' \cos \alpha - u) = 0 \quad (1)$$

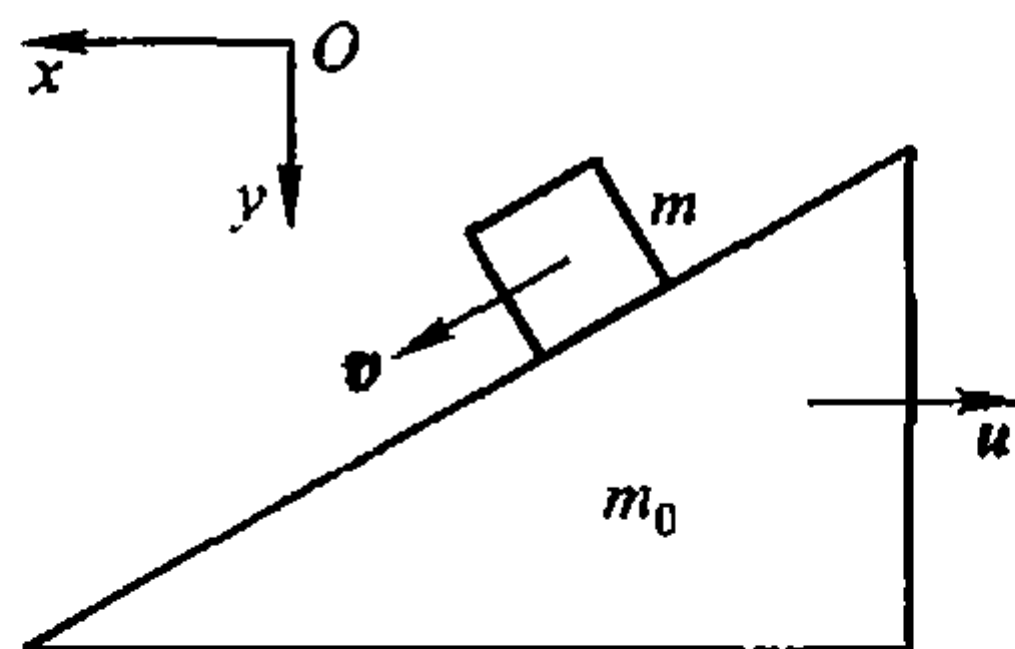
对铁块、劈尖和地球系统,机械能守恒. 选桌面为重力势能零点.

$$mgh = \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (2)$$

其中

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (v' \cos \alpha - u)^2 + v'^2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{解上述方程,可得 } u = m \cos \alpha \sqrt{\frac{2gh}{(m + m_0)(m \sin^2 \alpha + m_0)}}$$



解图 2-34

2-35. 在图示系统中,两个摆球并列悬挂,其中摆球 A 质量为  $m_1 = 0.4 \text{ kg}$ , 摆球 B 的质量为  $m_2 = 0.5 \text{ kg}$ . 摆线竖直时, A 和 B 刚好相接触. 现将 A 拉过  $\theta_1 = 40^\circ$  后释放,当它和 B 碰撞后恰好静止. 求:

(1) 当 B 再次与 A 相碰后, A 能摆升的最高位置  $\theta_2$ ;

(2) 碰撞的恢复系数.

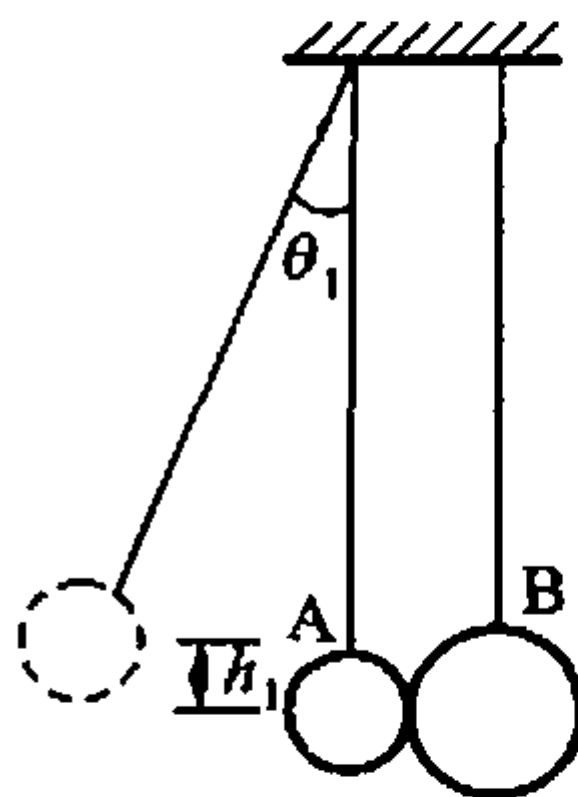
分析: A、B 两球在同一水平线上作对心碰撞,并且在水平方向不受其他外力,故碰撞中两球的动量守恒. 各球在运动过程中,摆线的拉力始终不作功,因此球和地球系统的机械能守恒. 两球之间碰撞的恢复系数是一常数.

解: 取向右为两球的运动正方向,取两球相碰处为重力势能零点. 设摆线长为  $l$ , 则题图 2-35 中,

$$h_1 = l(1 - \cos \theta_1) \quad (1)$$

释放 A 球后,由机械能守恒可知, A 球碰前的速度  $v_{A0}$  满足

$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{A0}^2 \quad (2)$$



习题 2-35 图

碰撞前, B 球静止  $v_{B0} = 0$ . 碰撞后, A 球静止  $v_A = 0$ , 设 B 球的碰后速度为  $v_B$ . 因碰撞中两球在水平方向的动量守恒,

$$m_1 v_{A0} - 0 = m_2 v_B - 0 \quad (3)$$

得

$$v_B = \frac{m_1}{m_2} v_{A0} = \frac{4}{5} v_{A0}$$

和两球相碰的恢复系数

$$e = \frac{v_B - v_A}{v_{A0} - v_{B0}} = \frac{v_B}{v_{A0}} = \frac{m_1}{m_2} = 0.8 \quad (4)$$

两球碰撞后, B 球以速度  $v_B$  被向右弹出. 由机械能守恒可知, 当 B 球回到竖直位置向左与 A 球再次碰撞前的速度为  $-v_B$ . 再次碰撞后, 设 B 球的速度为  $v'_B$ , A 球的速度为  $v'_A$ , 并设它们的方向相同, 即向左运动, 由动量守恒,

$$m_2 (-v_B) = m_2 (-v'_B) + m_1 (-v'_A) \quad (5)$$

由恢复系数为

$$e = 0.8 = \frac{v'_A - v'_B}{v_B} \quad (6)$$

可得

$$v'_A = v_B = 0.8 v_{A0}, \quad v'_B = 0.2 v_B$$

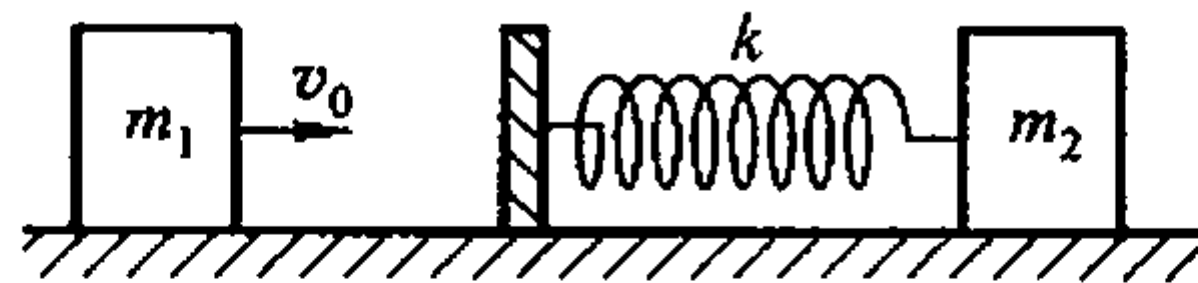
A 球在再次碰后, 上升到最高点过程中的机械能守恒, 有

$$m_1 gl(1 - \cos \theta_2) = \frac{1}{2} m_1 v'^2_A \quad (7)$$

解(1)、(2)和(7)式, 代入数据后, 得

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= 0.36 + 0.64 \cos \theta_1 \\ \theta_2 &= 31^\circ 46' \end{aligned}$$

**2-36.** 如图所示, 轻弹簧的一端与质量为  $m_2$  的物体连接, 另一端与一质量可忽略的挡板相连, 它们静止在光滑的桌面上. 弹簧的劲度系数为  $k$ . 今有一质量为  $m_1$ , 速度为  $v_0$  的物体向弹簧运动并与挡板发生正面碰撞. 求弹簧被压缩的最大距离.



习题 2-36 图

**分析:** 将  $m_2$  和轻弹簧看作一个整体, 在与  $m_1$  的碰撞过程中形变很大. 从碰撞开始, 到弹簧最大限度地被压缩, 并  $m_1$  和  $m_2$  以相同速度运动的整个过程, 是完全非弹性碰撞过程,  $m_1$  和连接弹簧的  $m_2$  系统的动量守恒. 在这个过程中,  $m_1$  的动能部分地转化为弹簧的形变势能. 若以  $m_1$ 、 $m_2$  和弹簧为系统, 则由于弹性力是保守内力, 系统在整个过程中满足机械能守恒条件. 需注意,  $m_1$  和  $m_2$  的

动能并不守恒.

解: 设弹簧被压缩的最大值为  $x$  时,  $m_1$  和  $m_2$  以相同速度  $v$  运动.

动量守恒

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v$$

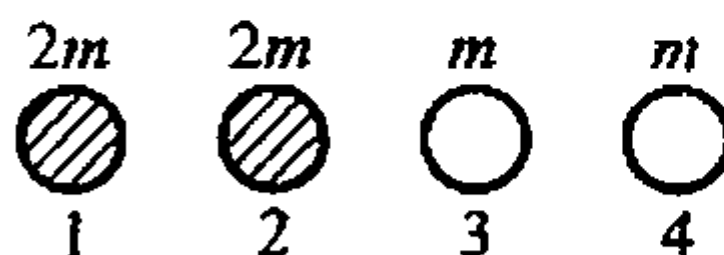
机械能守恒

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

得

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

2-37. 大小相同, 质量分别为  $m$  和  $2m$  的四个球 (如图所示) 静止在光滑水平面上. 使左边的第一个质量为  $2m$  的球以速度  $v$  与第二个球作弹性碰撞, 求各球的最终速度.



习题 2-37 图

分析: 同一光滑水平面上的四个球作对心的弹性碰撞, 每两个球之间的每一次碰撞, 都满足动量守恒条件. 由于碰撞是弹性的, 因此在两球间的每次碰撞过程中, 机械能也守恒. 所以, 在四球间相互反复碰撞后的最终状态, 四个球的总动量应等于 1 号球的初动量, 四个球的总动能应等于 1 号球的初动能.

解: 质量为  $m_1$ , 速度为  $v_1$  的球与质量为  $m_2$ , 速度为  $v_2$  的球作对心弹性碰撞时, 满足动量守恒和机械能守恒条件 (恢复系数  $e = 1$ ). 设碰后的速度分别为  $v'_1$  和  $v'_2$ , 有

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

和

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

可得

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$v'_2 = \frac{(m_1 - m_2) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

运用(1)式和(2)式于四球间的各次碰撞:

1 号球和 2 号球的质量相同, 且  $v_2 = 0$ , 有  $v'_1 = 0, v'_2 = v_1 = v$ . 即 1 号和 2 号球首次相碰后交换动量, 1 号球静止, 2 号球以  $v$  向右与 3 号球相碰.

2 号球的质量是 3 号球的 2 倍, 碰前 3 号球静止. 碰撞后 2 号球的速度由(1)式求得, 为  $\frac{v}{3}$ , 向右, 3 号球的速度由(2)式求得, 为  $\frac{4}{3}v$ , 向右与 4 号球相碰.

3 号球和 4 号球的质量相同, 碰前 4 号球静止. 碰撞后它们交换动量, 即 3 号球静止, 4 号球以  $\frac{4}{3}v$  的速度向右作匀速直线运动.

2 号球与 3 号球相碰后的速度为  $\frac{v}{3}$ , 方向向右, 将与静止的 3 号球再次相碰.

由(1)式和(2)式得到碰撞后2号球的速度为 $\frac{v}{9}$ ,继续向右运动,3号球的速度为 $\frac{4}{9}v$ ,向右运动.

由于 $\frac{v}{9} < \frac{4}{9}v < \frac{4}{3}v$ ,因此2号球追不上3号球,3号球也不可能再与4号球相碰撞.2号球、3号球和4号球将以各自的速度向右作匀速直线运动.

所以,各球的最终速度是:1号球静止;2号球为 $\frac{v}{9}$ ;3号球为 $\frac{4}{9}v$ ;4号球为 $\frac{4}{3}v$ .三个运动着的球的动量和动能都来自1号球.

**2-38.** 图中所示是大型蒸汽打桩机示意图.铁塔高40 m,锤的质量为10 t.现将长达38.5 m的钢筋混凝土桩打入地层.已知桩的质量为24 t,其横截面为 $0.25 \text{ m}^2$ 的正方形,桩的侧面单位面积所受的泥土阻力为 $k = 2.65 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ .

(1) 桩依靠自重能下沉多深?

(2) 桩稳定后把锤提高1 m,然后让锤自由下落而击桩.假定锤与桩发生完全非弹性碰撞,一锤能打下多深?

(3) 当桩已下沉35 m时,一锤又能打下多深?假定此时锤与桩的碰撞不是完全非弹性碰撞,而是锤在击桩后要反跳5 cm.

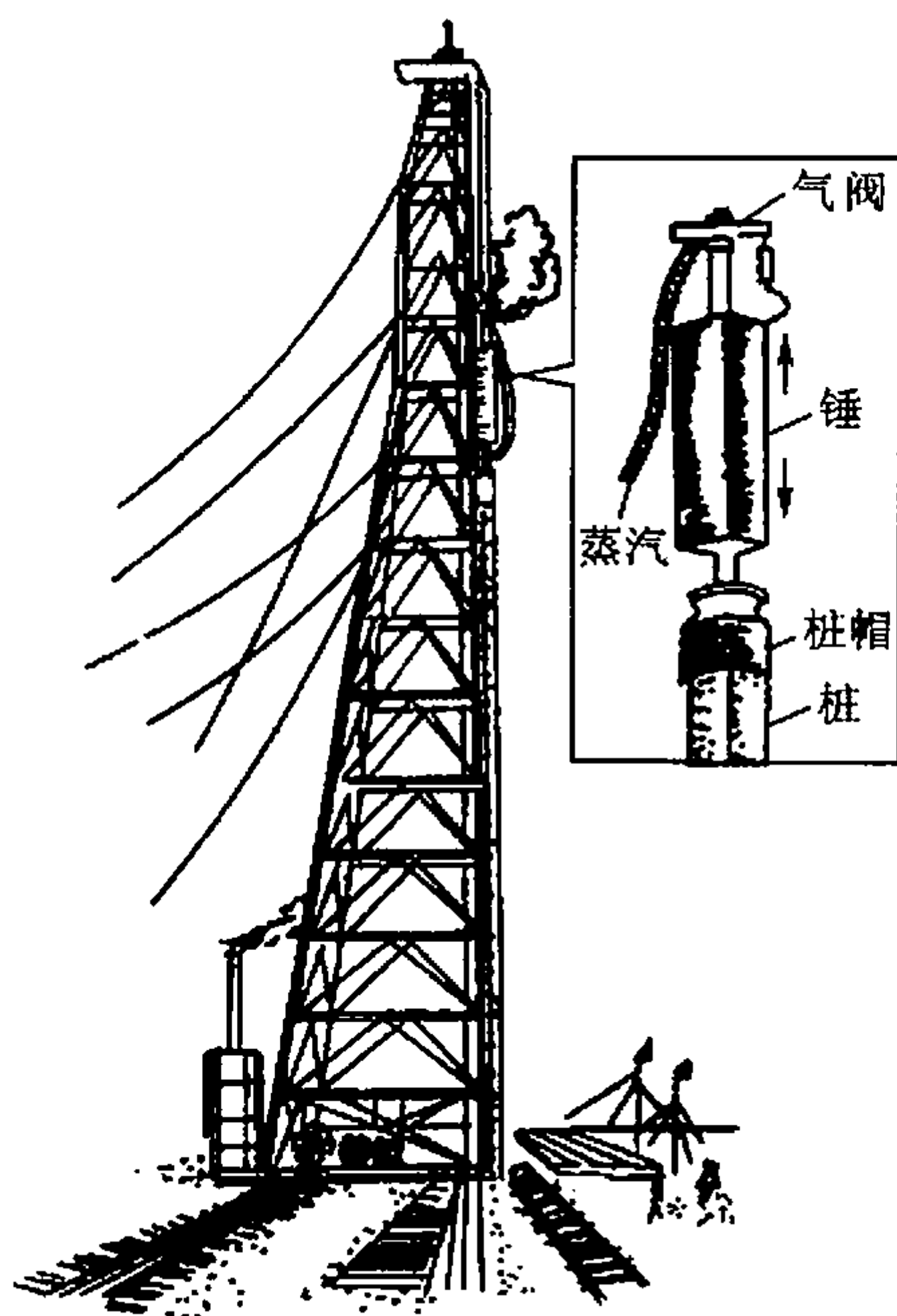
**分析:** 桩依靠自重下沉的过程是缓慢的,在下沉过程中,重力克服泥土的阻力做功,方向相反.泥土对桩的阻力正比于桩下沉的深度,是一个变力.在锤与桩的碰撞过程中,冲击力远大于桩所受的重力和泥土的阻力,因此锤和桩系统的动量守恒.

**解:** 取坐标 $Ox$ ,向下为正,原点位于地面.设桩的侧面是4个矩形,进入地下 $x$ 深度时,侧面积为 $S = 4x\sqrt{S_1}$ , $S_1$ 为桩的横截面积.桩所受阻力的大小为

$$kS = 4kx\sqrt{S_1}$$

(1) 桩依靠自重下沉 $x$ 深度时,由分析可知,阻力的功在数值上与重力的功相等.

设桩的质量为 $m_0$ ,有



习题2-38图

$$A_{\text{重}} = m_0 g x \quad (1)$$

桩下沉  $x_1$  深度时阻力做的功大小为

$$A_{\text{阻}} = \left| - \int_0^{x_1} F dx \right| = \int_0^{x_1} 4kx\sqrt{S_1} dx = 2k\sqrt{S_1}x_1^2 \quad (2)$$

$$A_{\text{重}} = A_{\text{阻}} \quad (3)$$

得

$$x_1 = \frac{m_0 g}{2k\sqrt{S_1}} = 8.88 \text{ m}$$

(2) 设锤的质量为  $m$ , 打击速度为  $v_{10}$ , 对锤与地球系统, 机械能守恒. 有

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{10}^2 \quad (4)$$

设桩和锤作完全非弹性碰撞后, 共同运动速度为  $v$ , 由动量守恒定律, 得

$$mv_{10} = (m + m_0)v \quad (5)$$

设桩运动至  $x_2$  处静止, 对锤和桩运用动能定理, 有

$$A_{\text{重}} + A_{\text{阻}} = \Delta E_k = 0 - E_k \quad (6)$$

其中,

$$A_{\text{阻}} = - \int_{x_1}^{x_2} F dx = -2k\sqrt{S_1}(x_2^2 - x_1^2)$$

$$A_{\text{重}} = (m + m_0)g(x_2 - x_1)$$

$$E_k = \frac{1}{2}(m + m_0)v^2$$

解(4)、(5)、(6)式, 可得

$$x_2 = 9.07 \text{ m}$$

一锤能打下的深度

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0.19 \text{ m}$$

(3) 当桩已下沉 35 m 时, 若将锤提至最大高度, 则距桩的高度  $h_3$  为

$$h_3 = 40 \text{ m} - (38.5 - 35) \text{ m} = 36.5 \text{ m}$$

设锤自由下落  $h_3$  距离, 击桩锤时的打击速度为  $v'_{10}$ , 有

$$mgh_3 = \frac{1}{2}mv'^2_{10} \quad (7)$$

设击桩后桩的速度为  $v_2$ , 锤的反跳速度为  $v_1$ , 因动量守恒, 有

$$mv'_{10} = -mv_1 + m_0v_2 \quad (8)$$

锤的反跳速度  $v_1$ , 可由机械能守恒定律得到, 已知反跳到高度  $h_2 = 5 \text{ cm}$ ,

$$mgh_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (9)$$

桩由  $x_2 = 35 \text{ m}$  运动到  $x_3$  深处, 对桩运用动能定理, 有

$$m_0g(x_3 - x_2) - 2k\sqrt{S_1}(x_3^2 - x_2^2) = -\frac{1}{2}m_0v_2^2 \quad (10)$$

解(7)、(8)、(9)、(10)式, 得

$$x_3 = 35.98 \text{ m}$$

从最高处, 一锤能打下的深度为

$$\Delta x = x_3 - x_2 = 0.98 \text{ m}$$

若锤的提起高度为  $h'_3 = 1 \text{ m}$ , 则可得

$$x'_3 = 35.04 \text{ m}, \quad \Delta x' = x'_3 - x_2 = 0.04 \text{ m}$$

**2-39.** 火箭起飞时, 从尾部喷出的气体的速度为  $3\,000 \text{ m/s}$ , 每秒喷出的气体质量为  $600 \text{ kg}$ . 若火箭的质量为  $50 \text{ t}$ . 求火箭得到的加速度.

**分析:** 火箭在飞行过程中通过不断地喷出气体来获得加速度, 因此火箭整体的质量在飞行中不断变化, 从这个意义上说, 火箭飞行是变质量物体的运动问题. 在火箭的飞行过程中, 如果所受外力可以忽略, 以某时刻的火箭主体和喷射物作为质点系统, 动量守恒. 如果所受外力不可忽略, 比如在起飞阶段, 则应该用质点系统的动量原理来处理. 本题讨论火箭起飞时的情况, 必须考虑重力. 应注意正确运用动量原理和速度的相对性关系.

**解:** 设火箭从地面竖直向上发射, 以向上为运动正方向. 取  $t$  时刻的火箭和喷射物为质点系统, 质量分别为  $m$  和  $dm$ , 它们相对地面的速度为  $v$ .  $t$  时刻后, 喷射物以相对速度  $u$  “从尾部喷出”, 相对地面的速度为  $(v - u)$ .

$$t \text{ 时刻, 系统整体的动量为 } p(t) = (m + dm)v \quad (1)$$

$t + dt$  时刻, 系统整体的动量为

$$p(t + dt) = m(v + dv) + dm(v - u) \quad (2)$$

在  $dt$  时间内, 火箭和喷射物受重力

$$F = -(m + dm)g \quad (3)$$

$$\text{根据动量原理, 有 } Fdt = dp = p(t + dt) - p(t) \quad (4)$$

将(1)、(2)、(3)式代入(4)式, 并略去高阶小量  $dm dt$ , 可得

$$mdv = udm - mgdt$$

所以, 火箭主体的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{u}{m} \frac{dm}{dt} - g = \frac{3\,000}{50 \times 10^3} \times 600 \text{ m/s}^2 - 9.8 \text{ m/s}^2 = 26.2 \text{ m/s}^2$$

## 6. 质点的角动量和角动量守恒定律

**2-40.** 电子质量为  $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 在半径为  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$  的圆周上绕氢核作匀速运动, 已知电子的角动量为  $h/2\pi$ , 求它的角速度.

**分析:** 质点的角动量对某确定的参考点才有确定的意义. 在本题的氢原子模型中, 对基态电子运动的描述, 以原子核作为参考点, 具有确定的轨道半径和轨道角动量的大小.

**解:** 设电子质量为  $m$ , 绕氢核作匀速率圆周运动的速率为  $v$ , 基态的电子轨道半径为  $r$ . 则电子对氢核的角动量

$$L = mvr$$

已知基态电子的角动量为

$$L = \frac{h}{2\pi}$$

所以

$$v = \frac{h}{2\pi mr}$$

电子的绕核运动的角速度为

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v}{r} = \frac{h}{2\pi mr^2} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (5.3 \times 10^{-11})^2} \text{ rad/s} \\ &= 4.13 \times 10^{16} \text{ rad/s}\end{aligned}$$

**2-41.** 试证质点在有心力场中运动时,因所受作用力处处指向“力心”这一点,则在相等的时间内,它对力心的位矢在空间将扫过相等的面积.

**分析:** 质点受有心力作用,对力心而言,质点受外力矩为零. 因此质点对力心的角动量守恒. 位矢扫过的面积速度相等,此即开普勒第二定律.

**证明:** 设由“力心” $O$  指向质点的位矢为  $\mathbf{r}$ , 质点所受合外力为  $\mathbf{F}$ . 据题意,  $\mathbf{F}$  处处指向“力心”, 即  $\mathbf{F}$  与  $\mathbf{r}$  的夹角处处为  $\pi$ . 因此,  $\mathbf{F}$  对“力心”的力矩为

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

所以

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 = \text{恒量}$$

即质点对“力心”角动量的大小和方向都不变.

如解图 2-41 所示,  $\mathbf{L}$  垂直于质点的运动平面. 设质点的质量为  $m$ , 某时刻, 位矢  $\mathbf{r}$  和质点运动速度  $\mathbf{v}$  的夹角为  $\alpha$ . 质点对“力心”角动量的大小为

$$L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = mrv \sin \alpha$$

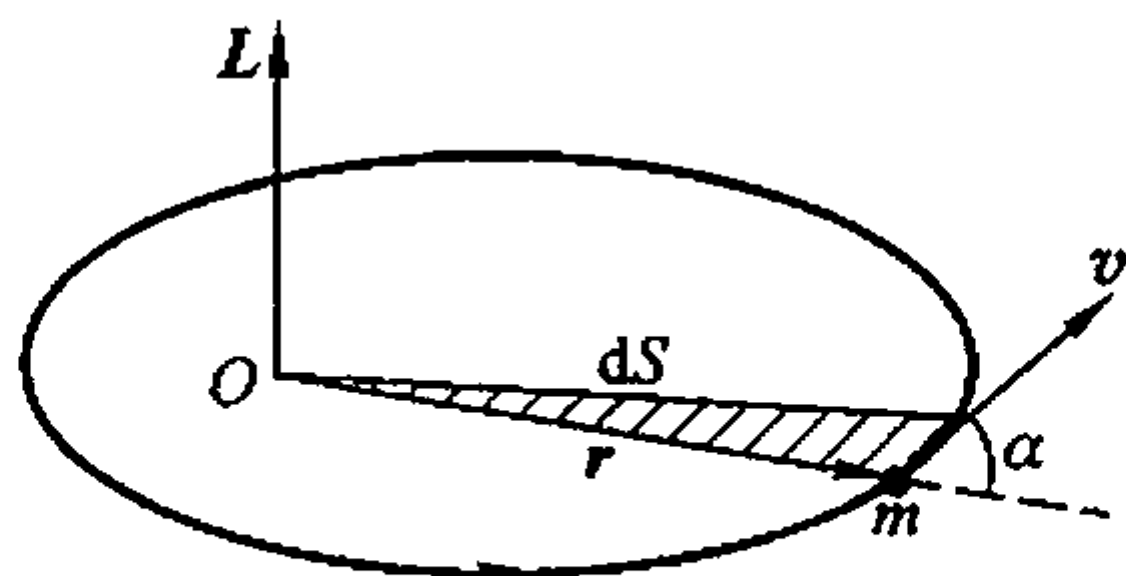
$dt$  时间内位矢扫过的面积  $dS$  为

$$dS = \frac{1}{2} r |d\mathbf{r}| \sin \alpha = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$$

单位时间内, 位矢扫过的面积为

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{L}{2m} = \text{常量}$$

可见, 在相等的时间内, 位矢在空间扫过的面积相等, 为一常数. 问题得证.



解图 2-14

**2-42.** 当地球处于远日点时, 到太阳的距离为  $1.52 \times 10^{11} \text{ m}$ , 轨道速度为  $2.93 \times 10^4 \text{ m/s}$ . 半年后, 地球处于近日点, 到太阳的距离为  $1.47 \times 10^{11} \text{ m}$ . 求:

(1) 地球在近日点时的轨道速度;

(2) 两种情况下,地球的角速度.

分析: 地球和太阳间的万有引力是有心力. 取太阳为参考系,将地球视为质点,则太阳中心是有心力的“力心”. 有心力对“力心”的力矩为零,因此地球对太阳中心的角动量守恒. 由于万有引力是保守力,因此太阳、地球系统的机械能守恒. 在椭圆轨道的近日点和远日点,地球的速度  $v$  与由“力心”指向它的位矢  $r$  相互垂直.

解: 设地球质量为  $m$ , 在远日点的位矢大小为  $r_1$ , 速度的大小为  $v_1$ , 在近日点的位矢大小为  $r_2$ , 速度的大小为  $v_2$ . 根据角动量守恒,有

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2$$

(1) 地球在近日点时的轨道速度  $v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2} = 3.03 \times 10^4 \text{ m/s}$

(2) 地球在远日点的角速度  $\omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = 1.93 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$

地球在近日点的角速度  $\omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = 2.06 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$

2-43. 一质量为  $m$  的宇宙飞船绕行星作圆周运动, 圆的半径为  $R_0$ , 速率为  $v_0$ , 因火箭爆发, 给飞船增加了向外的径向速度分量  $v_r$  ( $< v_0$ ), 于是它的轨迹成为椭圆.

(1) 试证引力可写成

$$|F| = \frac{mv_0^2 R_0}{r^2}$$

(2) 试用  $R_0$ 、 $v_0$  以及  $v_r$  写出椭圆方程.

分析: 因火箭爆发, 飞船所受到的沿径向向外的冲力, 对行星中心不形成力矩. 在飞船的运动过程中始终受到行星的万有引力作用, 指向“力心”, 即行星的中心. 所以, 飞船在火箭爆发前后的运动过程中, 对行星中心的角动量守恒. 取火箭爆发后的飞船、行星为系统, 由于不受外力, 没有非保守内力, 所以系统的机械能也是守恒的.

解: 设行星质量为  $m_0$ .

(1) 飞船在作圆周运动时的向心力由引力  $F_1$  提供. 圆周轨道半径为  $R_0$ , 速率为  $v_0$  时, 有

$$|F_1| = G \frac{m_0 m}{R_0^2} = m \frac{v_0^2}{R_0}$$

即  $Gm_0 = v_0^2 R_0$  (1)

飞船在椭圆轨道运行时, 仍受行星的引力  $F$ , 设飞船在椭圆轨道上位矢大小为  $r$

时,有

$$|F| = G \frac{m_0 m}{r^2} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式即可得  $|F| = \frac{mv_0^2 R_0}{r^2}$

问题得证.

(2) 飞船在火箭爆发前后对行星中心的角动量守恒. 设火箭爆发后飞船在椭圆轨道的近(远)星点的矢径大小为  $r$ , 垂直于矢径的速度大小为  $v$ . 有

$$L = mR_0 v_0 = mrv \quad (3)$$

火箭爆发时, 飞船在圆轨道  $R_0$  处, 由于增加了向外的径向速度分量  $v_r$ , 因此飞船的速度大小为  $\sqrt{v_0^2 + v_r^2}$ . 在火箭爆发后, 对飞船、行星系统的机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{m_0 m}{r} = \frac{1}{2}m(v_0^2 + v_r^2) - G \frac{m_0 m}{R_0} \quad (4)$$

由(1)、(3)、(4)式消去  $m_0$ 、 $v$ , 得

$$v_0^2 R_0^2 \left( \frac{1}{r} \right)^2 - 2v_0^2 R_0 \left( \frac{1}{r} \right) + (v_0^2 - v_r^2) = 0 \quad (5)$$

解(5)式, 得近星点矢径大小  $r_1 = \frac{R_0 v_0}{v_0 + v_r}$

远星点矢径大小  $r_2 = \frac{R_0 v_0}{v_0 - v_r}$

飞船椭圆轨道的半长轴为  $a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{R_0 v_0^2}{v_0^2 - v_r^2}$

半焦距为  $c = \frac{r_2 - r_1}{2} = \frac{R_0 v_0 v_r}{v_0^2 - v_r^2}$

半短轴为  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{R_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 - v_r^2}}$

将  $a, b$  代入椭圆方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

可得  $\frac{x^2}{\left( \frac{R_0 v_0^2}{v_0^2 - v_r^2} \right)^2} + \frac{y^2}{\frac{R_0^2 v_0^2}{v_0^2 - v_r^2}} = 1$

2-44. 一质量为  $m_0$  以速率  $v_0$  运动的粒子, 碰到一质量为  $2m_0$  静止的粒子. 结果, 质量为  $m_0$  的粒子偏转了  $45^\circ$ , 并具有末速  $\frac{v_0}{2}$ . 求质量为  $2m_0$  的粒子偏

转后的速率和方向.

分析: 相碰撞粒子系统的动量守恒.

解: 以相互碰撞的两粒子为系统. 设碰前  $m_0$  的速度沿  $x$  轴正方向, 碰撞后的速率为  $v_A = \frac{v_0}{2}$ , 与  $x$  轴正方向的夹角为  $\alpha = 45^\circ$ , 具有沿  $y$  轴正方向的速度分量. 设碰撞后  $2m_0$  的速度为  $v_B$ , 与  $x$  轴正方向的夹角为  $\beta$ , 处第四象限. 由动量守恒定律,

$$x \text{ 方向} \quad m_0 v_0 = m_0 v_A \cos \alpha + 2m_0 v_B \cos \beta \quad (1)$$

$$y \text{ 方向} \quad 0 = m_0 v_A \sin \alpha - 2m_0 v_B \sin \beta \quad (2)$$

$$\text{解(1)、(2)两式, 得} \quad v_B = \frac{v_0}{4} \sqrt{5 - 4 \cos \alpha} = 0.368 v_0 \text{ m/s}$$

$$\sin \beta = \frac{v_0}{4v_B} \sin \alpha = 0.480$$

$$\beta = -28^\circ 41'$$

2-45. 角动量为  $L$ , 质量为  $m$  的人造地球卫星, 在半径为  $r$  的圆轨迹上运行. 试求它的动能、势能和总能量.

分析: 人造地球卫星作圆周运动时只受引力作用, 对“力心”无外力矩; 引力是保守力. 所以, 卫星对“力心”的角动量守恒, 引力系统的机械能守恒.

$$\text{解: 由角动量 } L = mvr, \text{ 得} \quad v = \frac{L}{mr}$$

$$\text{卫星动能为} \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$$

卫星-地球系统的势能为

$$E_p = -G \frac{mm_0}{r} = -\frac{L^2}{mr^2}$$

$$\text{机械能为} \quad E = E_k + E_p = -\frac{L^2}{2mr^2}$$

2-46. 地球同步卫星在发射初期沿椭圆轨道运行, 距地面的近地点和远地点分别为 190 km 和 36 500 km. 以后, 卫星将在远地点处加速, 将轨道修正为圆形, 而成为同步卫星. 求:

(1) 卫星沿椭圆轨道运行的周期;

(2) 卫星沿圆形轨道运行的轨道半径和速率(地球半径为 6 371 km).

分析: 以地球为参考系, 利用卫星对地球中心的角动量守恒定律、开普勒第二定律和地球-卫星系统的机械能守恒定律, 求得地球同步卫星沿椭圆轨道运

行的周期.

解: (1) 设地球质量为  $m_E$ , 卫星质量为  $m$ , 卫星在椭圆轨道的近地点距地球中心为  $r_1$ , 速度为  $v_1$ , 远地点距地球中心  $r_2$ , 速度为  $v_2$ , 卫星在这两处的速度均垂直于这两处的矢径. 由卫星对地球中心的角动量守恒, 有

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2 = L \quad (1)$$

由地球-卫星系统的机械能守恒定律, 有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mm_E}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mm_E}{r_2}$$

即

$$v_1^2 - v_2^2 = 2Gm_E \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2)$$

由开普勒第二定律(习题2-41), 有

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{v_1 r_1}{2} = \frac{v_2 r_2}{2}$$

可得

$$v_1^2 - v_2^2 = 4 \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

由(2)、(3)两式, 有

$$\left( \frac{dS}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}Gm_E \left( \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \quad (4)$$

椭圆面积为  $S = \pi ab$ , 式中  $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ ,  $b = \sqrt{r_1 r_2}$ .

设卫星运行一周的时间为  $T$ , 有

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 可得卫星运行周期为

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}} = \frac{\pi(r_1 + r_2)^{3/2}}{\sqrt{2Gm_E}}$$

利用地球表面物体  $m_0$  受力  $G\frac{m_E m_0}{R^2} = m_0 g$ , 可消去  $Gm_E$ , 即

$$Gm_E = R^2 g$$

$R$  为地球半径,  $R = 6371 \text{ km}$ . 所以, 卫星运行周期可表示为

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{R\sqrt{g}} = \frac{\pi(r_1 + r_2)^{3/2}}{R\sqrt{2g}} \quad (6)$$

代入数据,  $r_1 = 6371 \text{ km} + 190 \text{ km} = 6561 \text{ km}$ ,  $r_2 = 6371 \text{ km} + 36500 \text{ km} = 42871 \text{ km}$ , 可得

$$\begin{aligned} T &= \frac{3.14 \times (6561 \times 10^3 + 42871 \times 10^3)^{3/2}}{6371 \times 10^3 \times \sqrt{2 \times 9.8}} \text{ s} \\ &= 38691 \text{ s} = 10.75 \text{ h} \end{aligned}$$

(2) 地球同步卫星的运行周期为 24 h, 设圆形轨道半径为  $x$  (轨道距地球中心), 在式(6)中, 以  $a = x$  代入, 可得

$$x = \left( \frac{TR\sqrt{g}}{2\pi} \right)^{2/3} = \left( \frac{24 \times 3\,600 \times 6\,371 \times 10^3 \times \sqrt{9.8}}{2 \times 3.14} \right)^{2/3} \text{ m}$$

$$= 42\,222 \text{ km}$$

即地球同步卫星离地球表面的高度为

$$h = x - R = 35\,851 \text{ km}$$

同步卫星绕地运行的速率为

$$v = \frac{2\pi x}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 4.22 \times 10^7}{24 \times 3\,600} \text{ m/s}$$

$$= 3.07 \times 10^3 \text{ m/s}$$

卫星沿圆形轨道运行的轨道半径由

$$G \frac{mm_E}{x^2} = m \frac{v^2}{x}$$

和

$$Gm_E = R^2 g, \quad v = \frac{2\pi x}{T}$$

同样可得

$$x = \frac{TR\sqrt{g}}{2\pi}$$

## 第三章

# 刚体和流体的运动

### 一、教学基本要求

1. 掌握刚体绕定轴的转动定律,理解转动惯量概念.
2. 理解刚体绕定轴转动中的能量关系.
3. 掌握刚体绕定轴转动的角动量守恒定律及其适用条件.
4. 理解理想液体的性质,定常流动的伯努利方程.

### 二、本章习题分类

1. 力矩的计算,转动定律的应用
2. 刚体转动中的功与能
3. 刚体的角动量定理和角动量守恒定律的应用
4. 角动量守恒定律和机械能守恒定律的综合应用
5. 刚体的进动及其他
6. 伯努利方程的应用

### 三、习题分析和解答

1. 力矩的计算,转动定律的应用

**3-1.** 一飞轮直径为  $0.30\text{ m}$ , 质量为  $5.00\text{ kg}$ , 边缘绕有绳子, 现用力拉绳子的一端, 使其由静止均匀地加速, 经  $0.5\text{ s}$  转速达  $10\text{ r/s}$ . 假定飞轮可看作实心圆柱体, 求:

- (1) 飞轮的角加速度及在这段时间里转过的转数;
- (2) 拉力及拉力所作的功;
- (3) 从拉动后  $t = 10\text{ s}$  时飞轮的角加速度及轮边缘上一点的速度和加速度.

**分析:** 飞轮在拉力的作用下, 均匀地加速转动, 角加速度为常数. 由转动定律可知拉力的力矩恒定. 利用转动定律和力矩做功的规律, 正确应用角量与线

量的关系即可求解本题.

解: 已知  $\omega_0 = 0, \omega = 2\pi n$

(1) 由  $\omega = \omega_0 + \alpha t$ , 得  $\alpha = \frac{\omega}{t} = 1.26 \times 10^2 \text{ rad/s}^2$

飞轮转过的角度

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 5\pi \text{ rad}$$

飞轮转过的转数

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 2.5 \text{ 转}$$

(2) 由转动定律

$$M = FR = J\alpha = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\alpha$$

则拉力为

$$F = \frac{1}{2}mR\alpha = 47 \text{ N}$$

拉力矩的功

$$A = M\theta = FR\theta = 111 \text{ J}$$

(3) 当  $t = 10 \text{ s}$  时, 飞轮的角速度

$$\omega = \alpha t = 1.26 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

飞轮边缘一点的速度

$$v = R\omega = 1.89 \times 10^2 \text{ m/s}$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 2.38 \times 10^5 \text{ m/s}^2$$

切向加速度

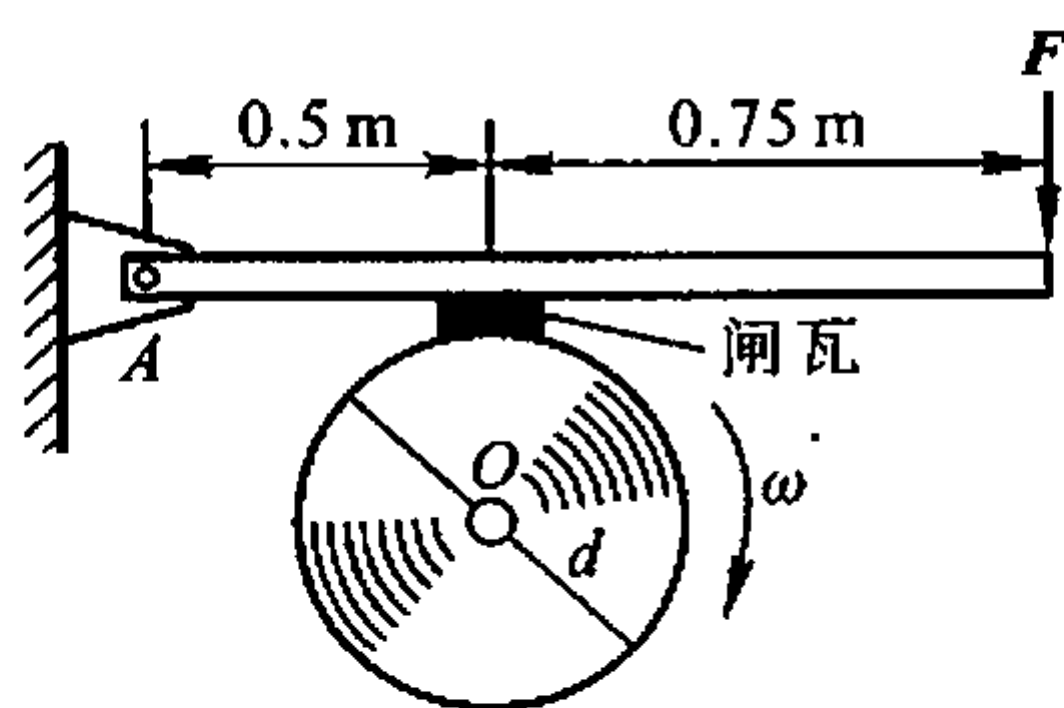
$$a_t = R\alpha = 18.9 \text{ m/s}^2$$

总加速度大小

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 2.38 \times 10^5 \text{ m/s}^2$$

方向几乎与  $a_n$  相同.

3-2. 飞轮的质量为  $60 \text{ kg}$ , 直径为  $0.50 \text{ m}$ , 转速为  $1000 \text{ r/min}$ , 现要求在  $5 \text{ s}$  内使其制动, 求制动力  $F$ . 假定飞轮与闸瓦间的摩擦因数  $\mu = 0.4$ , 飞轮的质量全部分布在轮的外周上. 尺寸如图所示.



习题 3-2 图

分析: 本题的研究对象是飞轮, 直接施力者是制动杆. 摩擦力对飞轮  $O$  点的力矩使飞轮被制动. 制动杆受飞轮通过闸瓦施加的反作用力  $F_N'$  和制动力  $F$ , 对  $A$  点的合力矩为零. 所以, 分别对飞轮和制动杆作受力和力矩分析, 即可求解.

解：受力分析如解图 3-2 所示。  
对制动杆的 A 点，力矩平衡

$$F(l_1 + l_2) - F'_N l_1 = 0$$

飞轮所受摩擦力矩大小为

$$M = rF_f = \mu F_N \frac{d}{2}$$

式中  $F_N = F'_N$ ,  $d$  为飞轮的半径。

由转动定律

$$M = J\alpha$$

式中飞轮的转动惯量为

$$J = m \frac{d^2}{4}$$

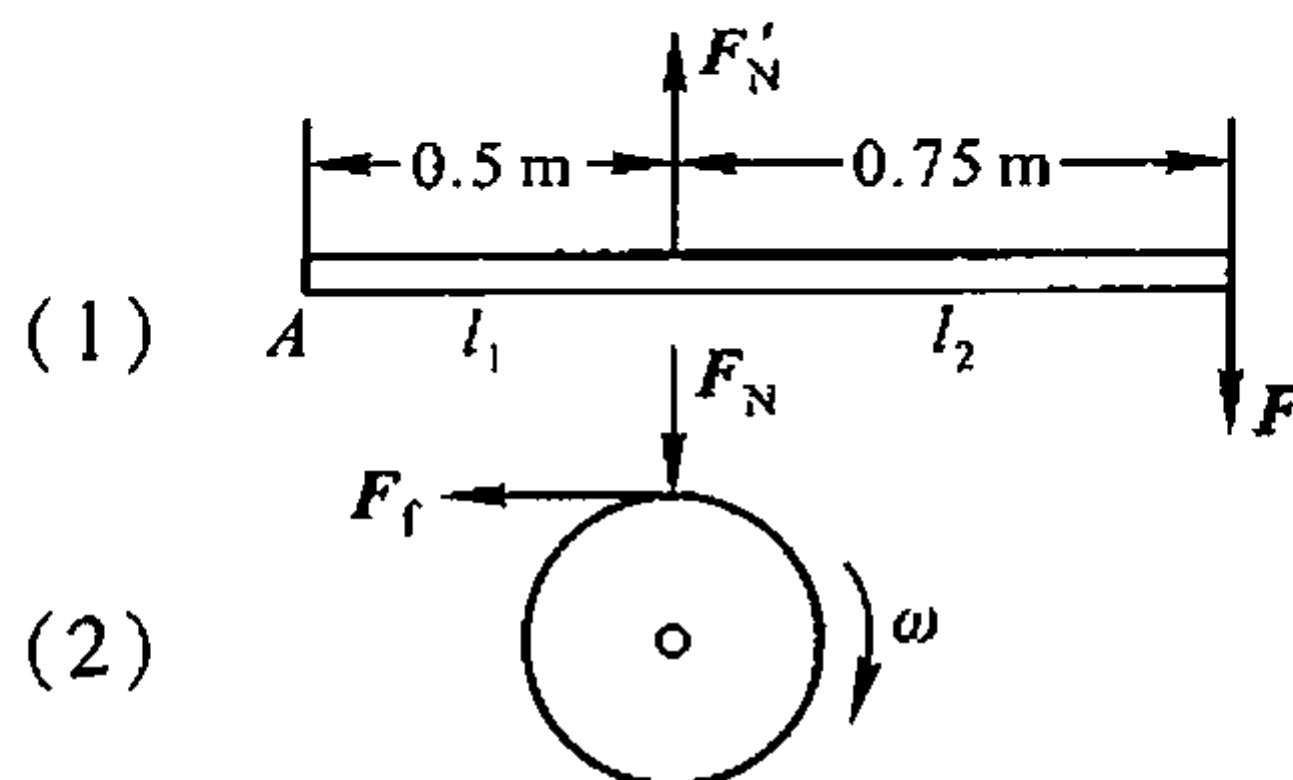
由于飞轮所受力矩恒定，因此转动的角加速度为常数，为

$$\alpha = \left| \frac{\omega - \omega_0}{t} \right| = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t} \quad (4)$$

式中  $\omega_0 = 2\pi n$ ,  $t = 5 \text{ s}$  时,  $\omega = 0$ 。

解以上方程，并代入数据，得

$$F = \frac{l_1}{l_1 + l_2} \frac{md}{2\mu} \alpha = 314 \text{ N}$$

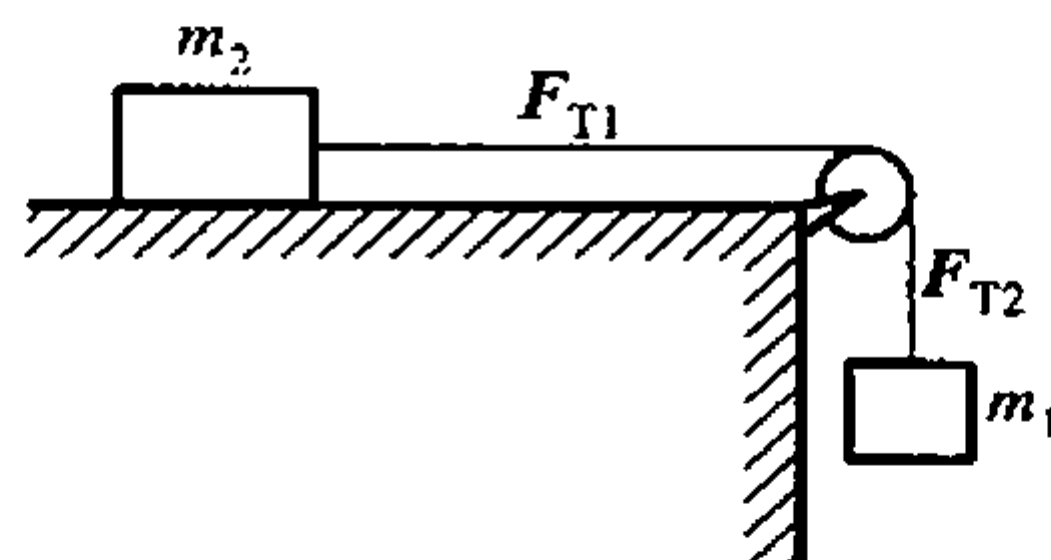


解图 3-2

3-3. 如图所示，两物体 1 和 2 的质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ，滑轮的转动惯量为  $J$ ，半径为  $r$ 。

(1) 如物体 2 与桌面间的摩擦因数为  $\mu$ ，求系统的加速度  $a$  及绳中的张力  $F_{T1}$  和  $F_{T2}$ （设绳子与滑轮间无相对滑动）；

(2) 如物体 2 与桌面间为光滑接触，求系统的加速度  $a$  及绳中的张力  $F_{T1}$  和  $F_{T2}$ 。



习题 3-3 图

分析：滑轮受两边绳子的拉力对转轴的力矩，作定轴转动，与绳相连接的两物体作平动。根据转动定律和牛顿运动定律，可分别得到它们的运动规律。由于绳子不可伸长且与滑轮无相对滑动，因此，滑轮两边绳子的张力不相等，两物体具有相同大小的速度和加速度。物体加速度的大小与滑轮边缘点的切向加速度大小相等。

解：(1) 对两物体和滑轮的受力分析，如解图 3-3 所示。

设物体的加速度大小为  $a$ ，滑轮角加速度为  $\alpha$ ，并设  $m_1$  向下为运动正方向。

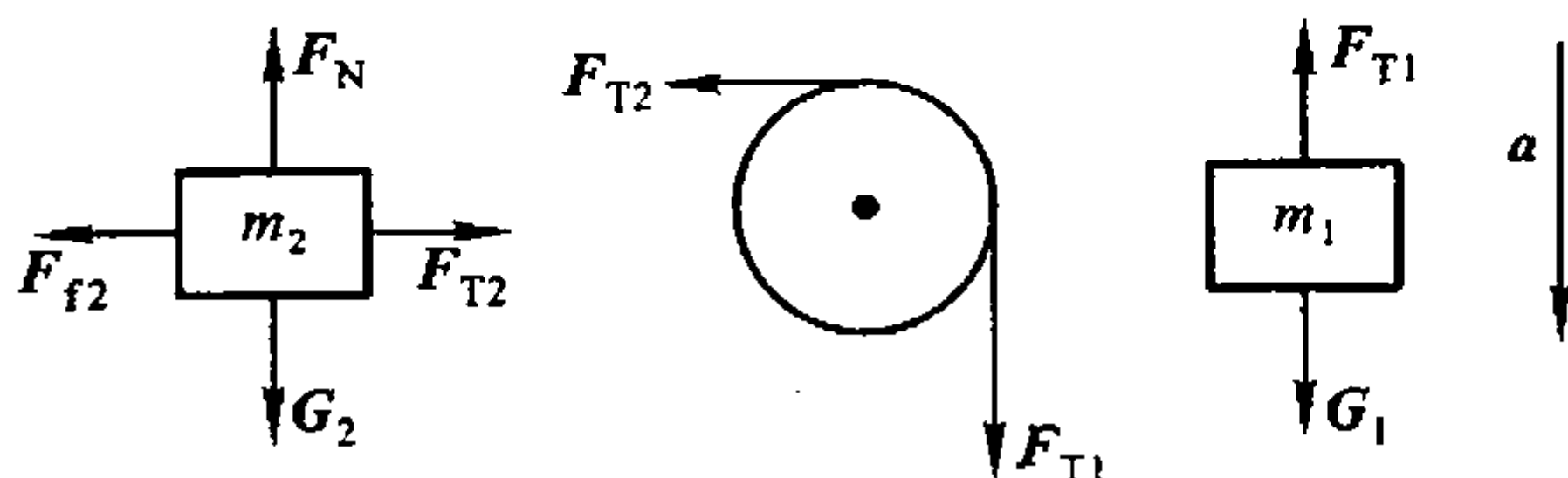
由牛顿运动定律

$$m_1 g - F_{T1} = m_1 a \quad (1)$$

$$F_{T2} - F_{f2} = m_2 a, F_{f2} = \mu m_2 g \quad (2)$$

由转动定律

$$F_{T1} r - F_{T2} r = J\alpha \quad (3)$$



解图 3-3

$$a = a_1 = \alpha r \quad (4)$$

可解得

$$a = \frac{(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$F_{T1} = \frac{m_1(m_2 + \mu m_2 + J/r^2)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$F_{T2} = \frac{m_2(\mu m_1 + m_1 + \mu J/r^2)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

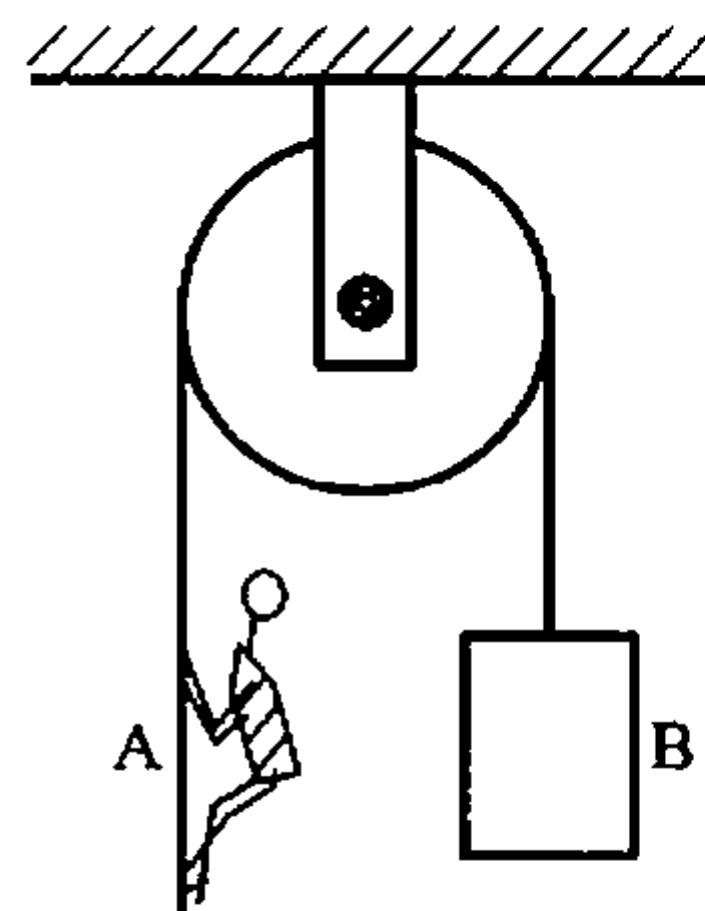
(2) 将  $\mu = 0$  代入以上结果即可。

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$F_{T1} = \frac{m_1(m_2 + J/r^2)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$F_{T2} = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

3-4. 一轻绳绕过一定滑轮, 滑轮轴光滑, 滑轮的质量为  $\frac{m}{4}$ , 均匀分布在其边缘上. 绳子的一端有一质量为  $m$  的人 A 抓住了绳端, 而在绳的另一端系了一质量为  $\frac{m}{2}$  的重物 B, 如图所示. 设人从静止开始相对于绳以匀速向上爬时, 绳与滑轮间无相对滑动, 求重物 B 上升的加速度? (已知滑轮对过滑轮中心且垂直于轮面的轴的转动惯量  $J = mR^2/4$ .)



习题 3-4 图

分析: 轻绳与滑轮无相对滑动, 对滑轮有力矩作用, 因此两边轻绳的张力不相等. 轻绳不可伸长, 使人和重物有大小相同的加速度, 并与滑轮边缘点的切向加速度大小相等.

解: 设人的加速度大小为  $a$ , 方向向下, 重物的加速度  $a$  方向向上. 设定滑轮的半径为  $R$ , 以逆时针为转动的正方向, 角加速度为  $\alpha$ . 两边轻绳的拉力分别为  $F_{T1}$  和  $F_{T2}$ . 分别作人和重物的受力图、滑轮受力矩的隔离图如解图 3-4 所

示. 对人、重物和滑轮分别有

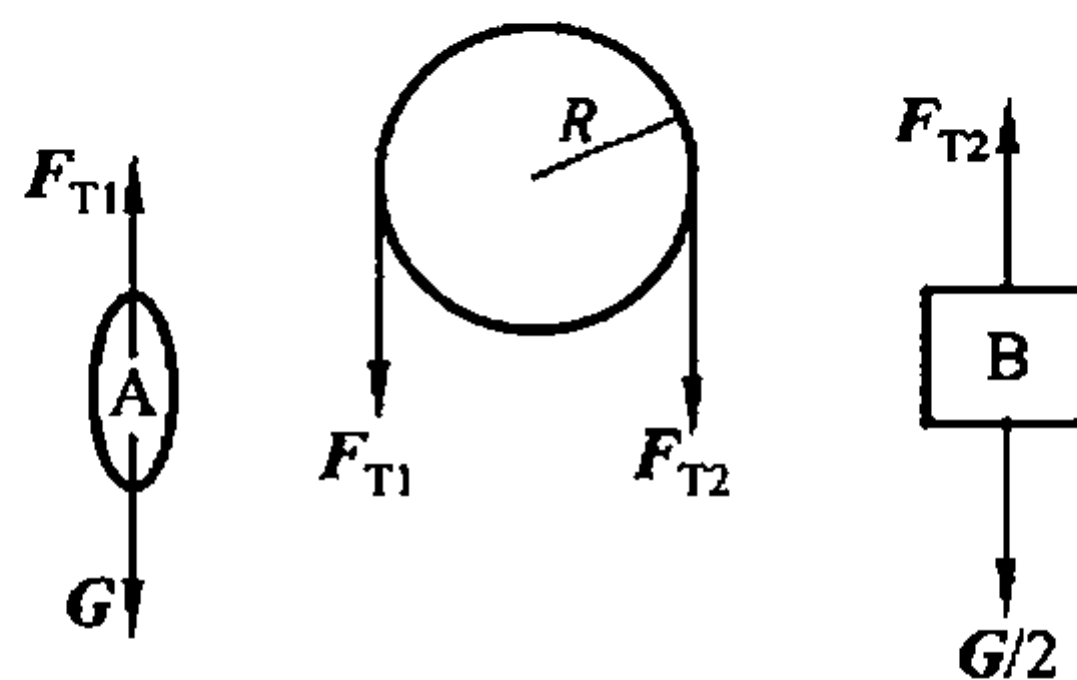
$$mg - F_{T1} = ma$$

$$F_{T2} - \frac{m}{2}g = \frac{m}{2}a$$

$$RF_{T1} - RF_{T2} = J\alpha \quad \left( J = \frac{m}{4}R^2 \right)$$

$$a = R\alpha$$

解上述方程可得  $a = \frac{2}{7}g$



解图 3-4

3-5. 半径分别为  $r_A$  和  $r_B$  的圆盘, 同轴地粘在一起, 可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动, 对轴的转动惯量为  $J$ , 两圆盘边缘都绕有轻绳, 绳子下端分别挂有质量为  $m_A$  和  $m_B$  的物体 A 和物体 B, 如图所示. 若物体 A 以加速度  $a_A$  上升. 证明物体 B 的质量

$$m_B = \frac{Ja_A + m_A r_A^2 (g + a_A)}{r_A r_B g - r_B^2 a_A}$$

分析: 两圆盘作为整体绕定轴转动, 有确定的转动惯量, 角加速度由圆盘整体所受合外力矩决定. 两圆盘的半径不同, 因此物体 A 和 B 加速度的大小也不相同.

证: 设 A 的加速度大小为  $a_A$ , 方向向上, B 的加速度  $a_B$  方向向下, 圆盘整体以顺时针为转动正方向, 角加速度为  $\alpha$ . 两边轻绳的拉力分别为  $F_{TA}$  和  $F_{TB}$ . 分别作 A 和 B 的受力图和圆盘整体受力矩的隔离图如解图 3-5 所示. 对 A、B 和圆盘整体分别有

$$F_{TA} - m_A g = m_A a_A$$

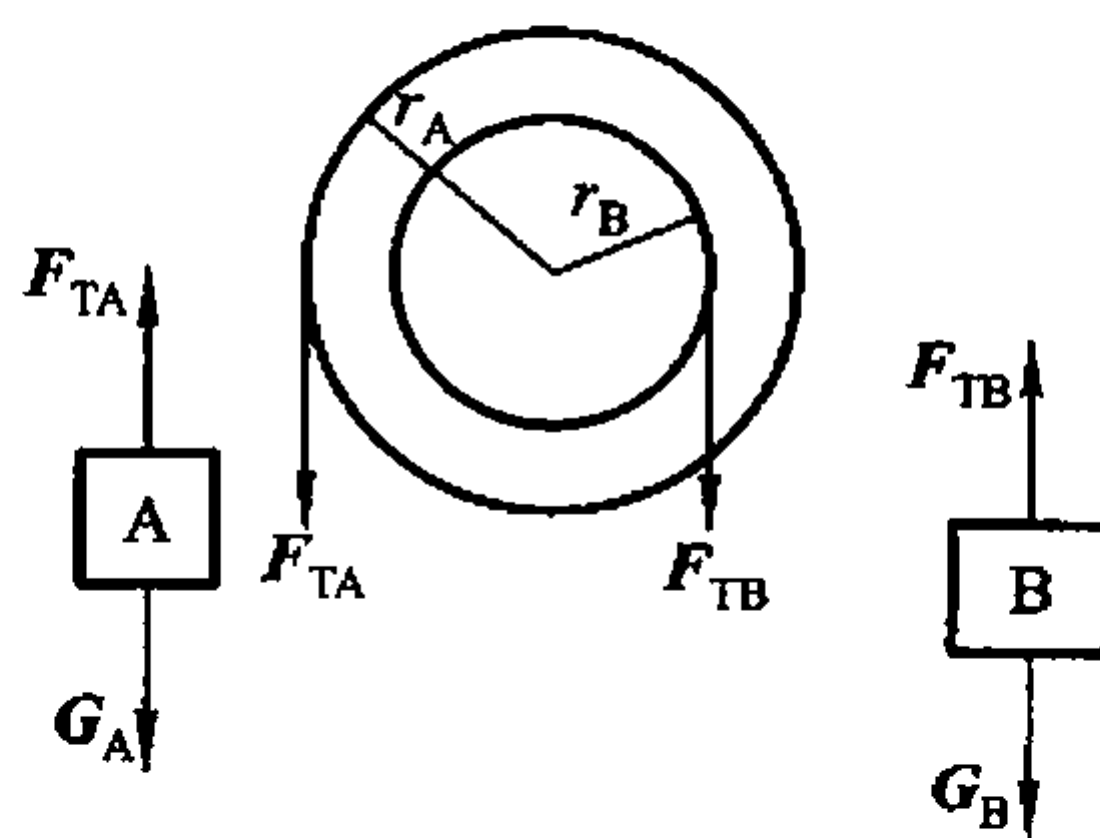
$$m_B g - F_{TB} = m a_B$$

$$r_B F_{TB} - r_A F_{TA} = J\alpha$$

$$\alpha = \frac{a_A}{r_A} = \frac{a_B}{r_B}$$

解上述方程可证得

$$m_B = \frac{Ja_A + m_A r_A^2 (g + a_A)}{r_A r_B g - r_B^2 a_A}$$



解图 3-5

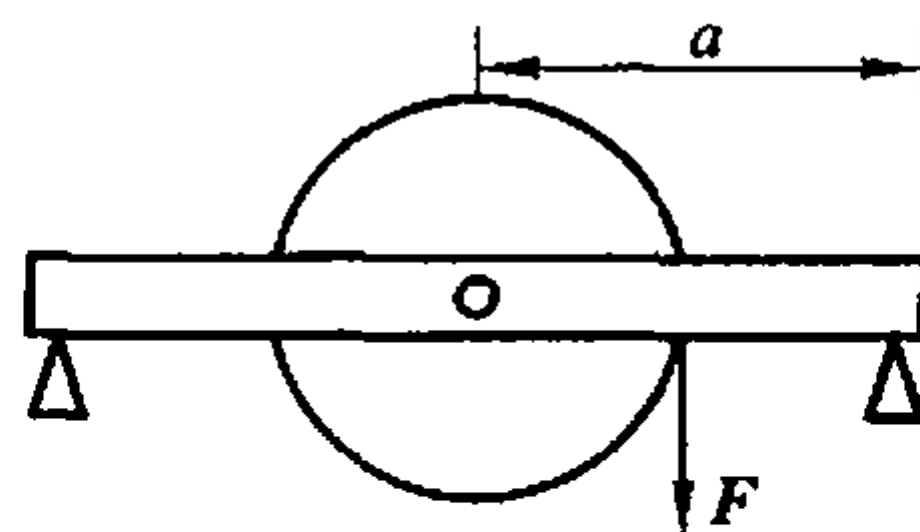
3-6. 质量为  $m$ 、半径为  $r$  的均质圆盘, 其中心装有固定轴, 该轴套装在长为  $2a$  的横梁的中心圆孔内. 在圆盘的边缘绕以绳子, 并施加一力  $F$  的作用时(如

图), 横梁受力矩为  $\alpha F_N$ ,  $\alpha$  是一常数,  $F_N$  为横梁对固定轴的支撑力. 求圆盘角速度的变化率  $d\omega/dt$ , 并证明横梁两端所受的支撑力分别为

$$\frac{1}{2}(F + mg)\left(1 - \frac{\alpha}{a}\right); \quad \frac{1}{2}(F + mg)\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$$

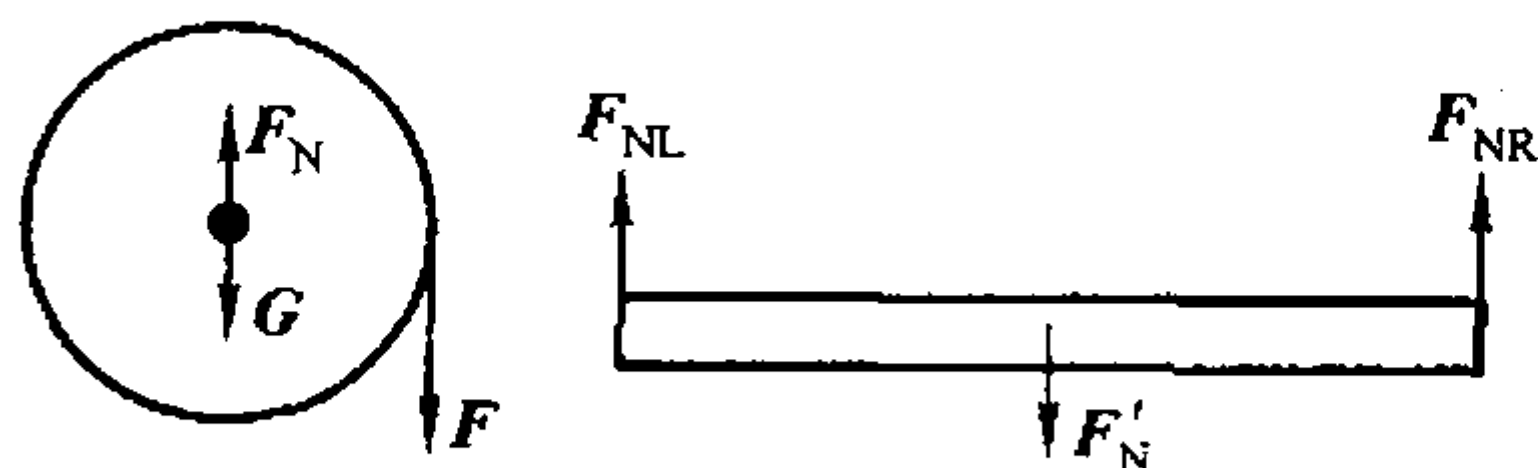
又问: 如果逐渐增大  $F$ , 则横梁的左端是否会上翘.

分析: 圆盘转动时, 横梁受到的力矩  $\alpha F_N$  是圆盘的轴因摩擦而作用于横梁的, 拉绳时, 这个力矩有使横梁左端翘起的趋势. 圆盘转动时所受的摩擦力矩的大小也为  $\alpha F_N$ . 分别对圆盘和横梁作受力和对确定点所受力矩的分析, 由力的平衡和转动定律求解本题.



习题 3-6 图

解: 分别对圆盘和横梁作受力分析, 如解图 3-6 所示. 已知横梁对固定轴的支撑力为  $F'_N$ , 则固定轴对横梁的反作用力为  $F'_N$ , 两者的大小相等, 有



解图 3-6

对圆盘有

$$F_N = F'_N$$

$$F_N - F - mg = 0$$

以顺时针为圆盘转动正方向, 有

$$rF - \alpha F_N = J \frac{d\omega}{dt}$$

圆盘的角加速度

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{rF - \alpha F_N}{J} = \frac{rF - \alpha(F + mg)}{mr^2/2}$$

对横梁(不计质量), 因受力平衡, 有

$$F_{NL} + F_{NR} - F'_N = 0,$$

即

$$F'_N = F_N = F_{NL} + F_{NR} = F + mg$$

对横梁右端, 因受力矩平衡, 有

$$\alpha F_N + 2aF_{NL} - aF'_N = 0$$

对横梁左端, 有

$$\alpha F_N - 2aF_{NR} + aF'_N = 0$$

解上述方程, 可得

$$F_{NR} = \frac{1}{2}(F + mg)\left(1 + \frac{\alpha}{a}\right)$$

$$F_{NL} = \frac{1}{2}(F + mg) \left( 1 - \frac{\alpha}{a} \right)$$

命题得证.

如果逐渐增大  $F$ , 对圆盘的转动仍应有

$$rF - \alpha F_N > 0, \text{ 即 } \alpha F_N < rF$$

横梁的左端若会上翘, 对横梁右端应有

$$\alpha F_N - aF'_N > 0, F'_N = F + mg$$

即

$$\alpha F_N > a(F + mg)$$

$$rF > a(F + mg)$$

由于  $r < a$ , 上述结果不成立. 所以, 如果逐渐增大  $F$ , 横梁的左端是不会上翘的.

3-7. 一轴承光滑的定滑轮, 质量为  $m_0 = 2.00 \text{ kg}$ , 半径为  $R = 0.10 \text{ m}$ , 一根不能伸长的轻绳, 一端固定在定滑轮上, 另一端系有一质量为  $m = 5.00 \text{ kg}$  的物体, 如图所示. 已知定滑轮的转动惯量为  $J = m_0 R^2 / 2$ . 其初角速度为  $\omega_0 = 10.0 \text{ rad/s}$ , 方向垂直纸面向里. 求:

- (1) 定滑轮的角加速度;
- (2) 定滑轮的角速度变化到  $\omega = 0$  时, 物体上升的高度;
- (3) 当物体回到原来位置时, 定滑轮的角速度.

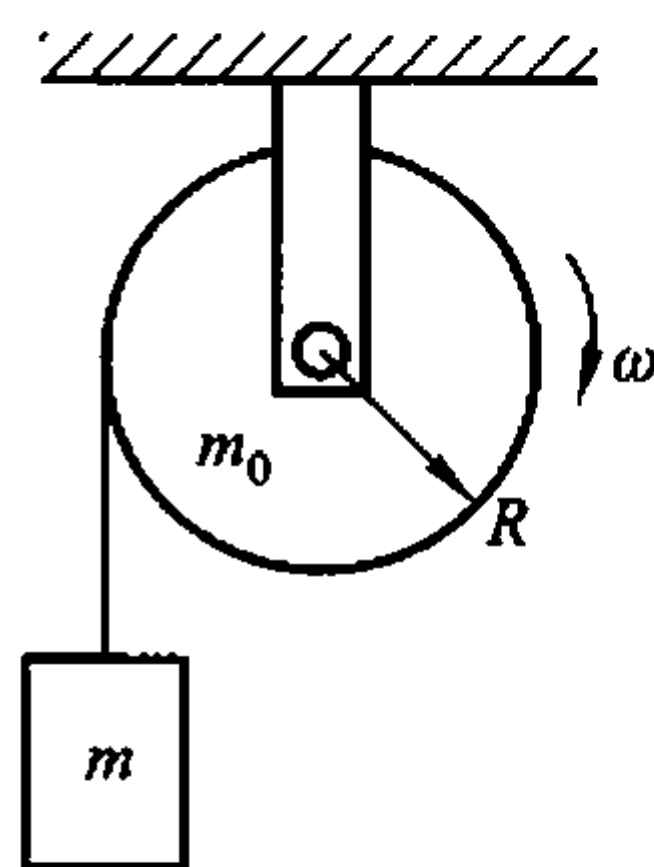
解: (1) 根据对物体和定滑轮运动的受力分析, 可有

$$mg - F_T = ma$$

$$F_T R = J\alpha$$

$$a = R\alpha$$

$$J = m_0 R^2 / 2$$



习题 3-7 图

解上述方程, 得

$$\alpha = \frac{mgR}{mR^2 + J} = \frac{2mg}{(2m + m_0)R} = 81.7 \text{ rad/s}^2$$

(2) 由于定滑轮作匀角加速运动, 因此有

$$\omega = \omega_0 - \alpha t$$

设定滑轮的角速度由  $\omega_0 = 10.0 \text{ rad/s}$  变化到  $\omega = 0$  所需时间为  $t$ , 可有

$$10.0 - 81.7t = 0$$

得

$$t = 0.122 \text{ s}$$

定滑轮在  $t$  时间内转过的角度为

$$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 = 0.612 \text{ rad}$$

所以, 物体的上升的高度为  $h = R\theta = 6.12 \times 10^{-2} \text{ m}$

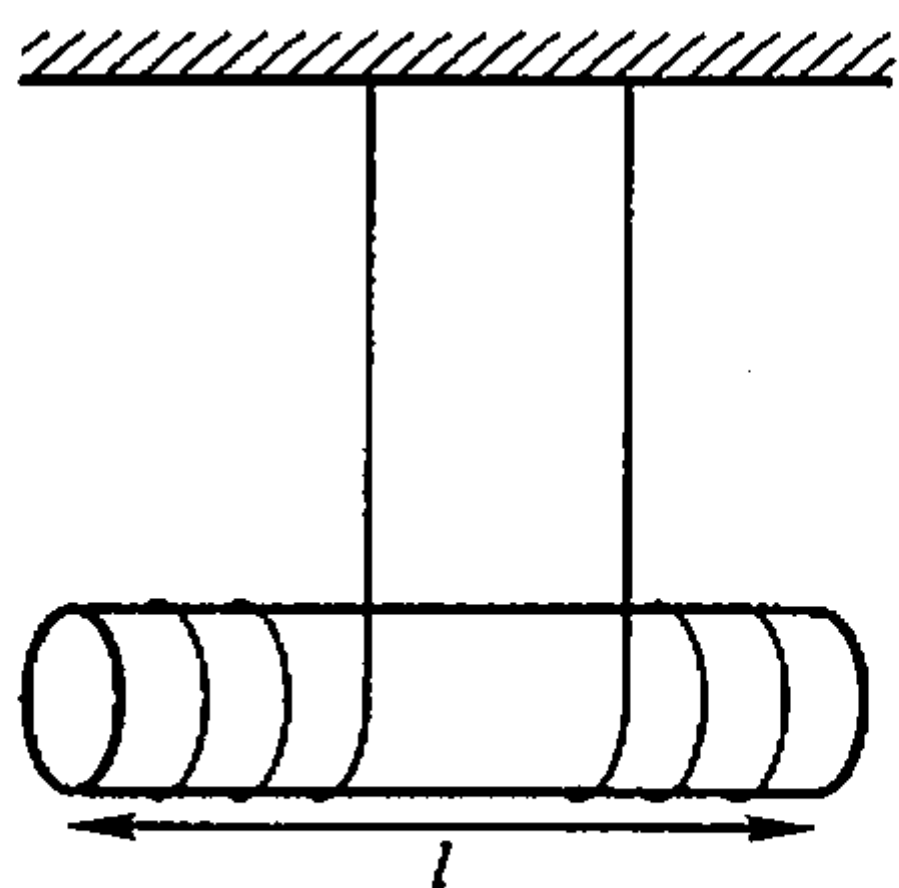
(3) 物体回到原来位置时,定滑轮的角速度为

$$\omega = \sqrt{2\alpha\theta} = 10.0 \text{ rad/s}$$

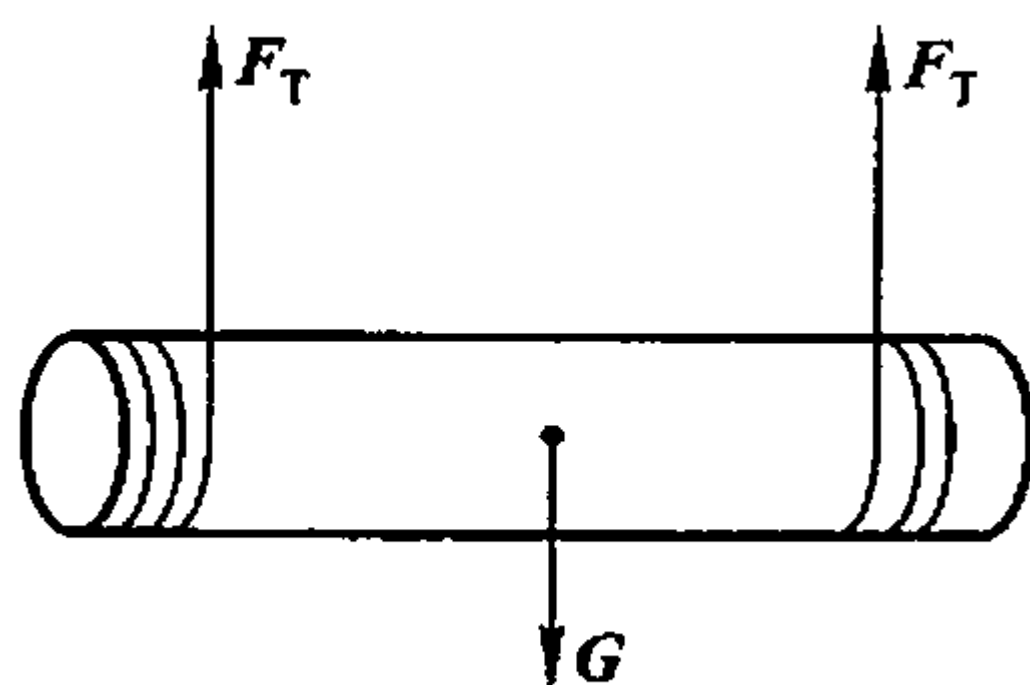
3-8. 如图所示,一圆柱体质量为  $m$ 、长为  $l$ 、半径为  $R$ ,用两根轻软的绳子对称地绕在圆柱两端,两绳的另一端分别系在天花板上. 现将圆柱体从静止释放,试求:

- (1) 它向下运动的线加速度;
- (2) 向下加速运动时,两绳的张力.

分析: 圆柱体相对两绳子作纯滚动时,圆柱体的运动可看作质心轴的平动与圆柱体绕质心轴的转动的叠加.



习题 3-8 图



解图 3-8

解: 对圆柱体作受力分析,如解图 3-8. 设圆柱体质量均匀分布,质心的线加速度为  $a_c$ ,圆柱体绕质心轴转动的角加速度为  $\alpha$ ,两绳子的张力均为  $F_T$ .

圆柱体质心轴平动的加速度为  $a_c = R\alpha$

质心轴满足运动方程  $mg - 2F_T = ma_c$

由转动定律,得  $2F_TR = J\alpha$

其中,  $J$  为对质心轴的转动惯量  $J = \frac{1}{2}mR^2$

可解得  $F_T = \frac{1}{6}mg$

$$a_c = \frac{mg - 2F_T}{m} = \frac{2}{3}g$$

## 2. 刚体转动中的功与能

3-9. 某冲床上飞轮的转动惯量为  $4.00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 当它的转速达到 30 r/min 时, 它的转动动能是多少? 每冲一次, 其转速降到 10 r/min. 求每冲一

次飞轮对外所作的功.

分析: 利用飞轮的转动动能对外界做功.

解:  $n_1 = 30 \text{ r/min}$  时的转动动能为

$$E_{k1} = \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \left( \frac{2\pi \times 30}{60} \right)^2 \text{ J} = 1.97 \times 10^4 \text{ J}$$

$n_2 = 10 \text{ r/min}$  时的转动动能为

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J \omega_2^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \left( \frac{2\pi \times 10}{60} \right)^2 \text{ J} = 2.19 \times 10^3 \text{ J}$$

由转动动能定理, 得外力矩对飞轮做功为

$$A = E_{k2} - E_{k1} = -1.75 \times 10^4 \text{ J}$$

飞轮对外所作的功为

$$A' = -A = 1.75 \times 10^4 \text{ J}$$

**3-10.** 一脉冲星质量为  $1.5 \times 10^{30} \text{ kg}$ , 半径为  $20 \text{ km}$ , 自转速率为  $2.1 \text{ r/s}$ , 并且以  $1.0 \times 10^{-15} \text{ r/s}^2$  的变化率减慢. 问它的转动动能以多大的变化率减小? 如果这一变化率保持不变, 这个脉冲星经过多长时间就会停止自旋? 设脉冲星可看作匀质球体.

解: 设脉冲星的质量为  $m$ , 则角速度为  $\omega = 2\pi n$  时的转动动能为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} m r^2 \right) (2\pi n)^2 = \frac{4\pi^2}{5} m r^2 n^2$$

转动动能对时间的变化率

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{8\pi^2}{5} m r^2 n \frac{dn}{dt} = -1.99 \times 10^{25} \text{ J/s}$$

其中,  $\frac{dn}{dt} = -1.0 \times 10^{-15} \text{ r/s}^2$ . 对上式积分,

$$\int_{E_{k0}}^{E_k} dE_k = -1.99 \times 10^{25} \int_0^t dt$$

得任意时刻的转动动能:  $E_k = E_{k0} - 1.99 \times 10^{25} t$

将  $E_{k0} = \frac{4\pi^2}{5} m r^2 n_0^2 = 2.09 \times 10^{40} \text{ J}$  和  $E_k = 0$  代入上式, 得

$$t = \frac{E_{k0}}{1.99 \times 10^{25}} \text{ s} = 1.05 \times 10^{15} \text{ s}$$

### 3. 刚体的角动量定理和角动量守恒定律的应用

**3-11.** 如图所示, 一质量为  $m$  的球以速度  $v$  撞击质量为  $m_0$  的球拍后, 以反

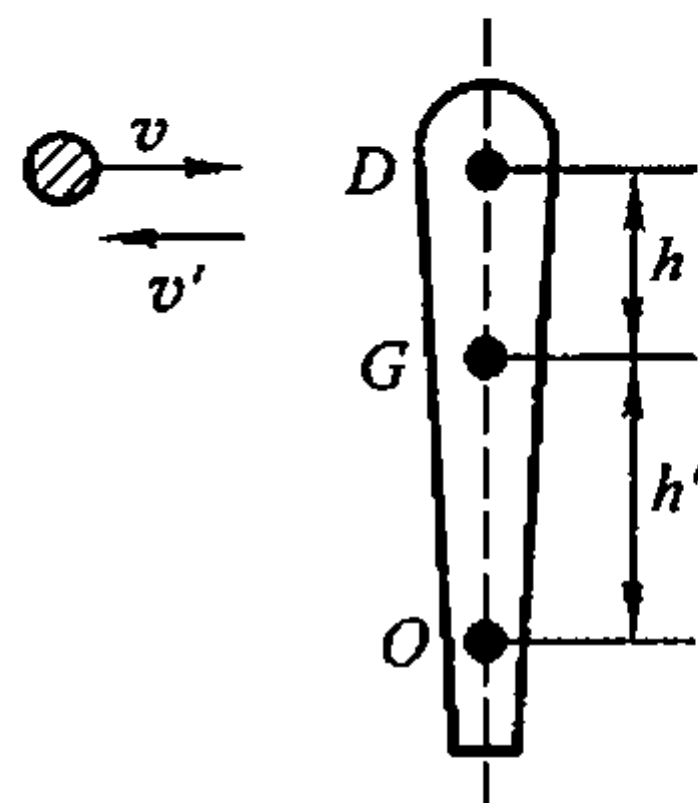
方向的速度  $v'$  被弹回. 设球拍围绕质心  $G$  的转动惯量为  $J_G$ , 试证受冲击后球拍围绕质心  $G$  的转动角速度为

$$\omega = hm(v + v')/J_G$$

分析: 取球和球拍为系统, 在球撞击球拍前后, 系统对球拍质心的角动量守恒.

解:  $mvh = J_G\omega - mv'h$

$$\omega = \frac{mh(v + v')}{J_G}$$



习题 3-11 图

3-12. 在自由转动的水平圆盘上, 站一质量为  $m$  的人. 圆盘的半径为  $R$ , 转动惯量为  $J$ , 角速度为  $\omega$ . 如果这人由盘边走到盘心, 求角速度的变化及此系统动能的变化.

分析: 取人和圆盘为定轴转动系统. 人与盘的相互作用内力不改变系统绕垂直轴转动的角动量. 故系统的角动量守恒.

解: 人站在盘边缘时, 与圆盘具有相同的角速度  $\omega$ . 此时, 系统的角动量为

$$L = (J + mR^2)\omega$$

设人走到盘心时, 系统的角速度为  $\omega'$ , 由于此时人已在转轴处, 对转轴的转动惯量为零, 所以,  $\omega'$  就是圆盘的角速度. 系统的角动量为

$$L' = J\omega'$$

系统角动量守恒, 有

$$(J + mR^2)\omega = J\omega'$$

得

$$\omega' = \frac{mR^2 + J}{J}\omega$$

角速度的变化为

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \frac{mR^2}{J}\omega$$

系统动能的变化为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}J\omega'^2 - \frac{1}{2}(J + mR^2)\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(mR^2 + J)}{J} mR^2 \omega^2$$

3-13. 在半径为  $R_1$ 、质量为  $m$  的静止水平圆盘上, 站一质量为  $m$  的人. 圆盘可无摩擦的绕通过圆盘中心的竖直轴转动. 当这人开始沿着与圆盘同心, 半径为  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ) 的圆周匀速地走动时, 设它相对圆盘的速度为  $v$ , 问圆盘将以多大的角速度旋转?

分析: 与上题分析的情况相同, 人和圆盘系统对转轴的角动量守恒. 但须注意守恒定律中的角速度  $\omega$  相对同一惯性参考系, 人对盘的速度 (角速度) 是相对速度 (相对角速度).

解: 人和圆盘都相对静止时, 系统的角动量为零. 即

$$L_0 = 0$$

人走动后,设圆盘的角速度为  $\omega$ ,则人对地的角速度为  $\omega'$ ,根据运动的相对性,有

$$\omega' = \frac{v}{R_2} + \omega$$

此时,系统的角动量为

$$L = J\omega + mR_2^2\omega'$$

式中,

$$J = \frac{1}{2}mR_1^2$$

由系统角动量守恒,得

$$0 = J\omega + mR_2^2\omega'$$

所以

$$\omega = -\frac{2R_2}{R_1^2 + 2R_2^2}v$$

“ $-$ ”表示圆盘转动方向与人走动方向相反。

**3-14.** 如图所示,转台绕中心竖直轴以角速度  $\omega_0$  作匀速转动. 转台对该轴的转动惯量  $J = 5 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . 现有砂粒以  $1 \text{ g/s}$  的速度落到转台,并粘在台面形成一半径  $r = 0.1 \text{ m}$  的圆. 试求砂粒落到转台,使转台角速度变为  $\frac{\omega_0}{2}$  所花的时间.

**分析:** 转台和落下的砂粒系统对竖直轴在转动平面内的力矩为零,因此,该系统的角动量守恒. 但随着砂粒的下落,系统对竖直轴的转动惯量将随时间而增大. 由此可求得角速度变为  $\frac{\omega_0}{2}$  所花的时间.

**解:** 取转台和落下的砂粒为系统.

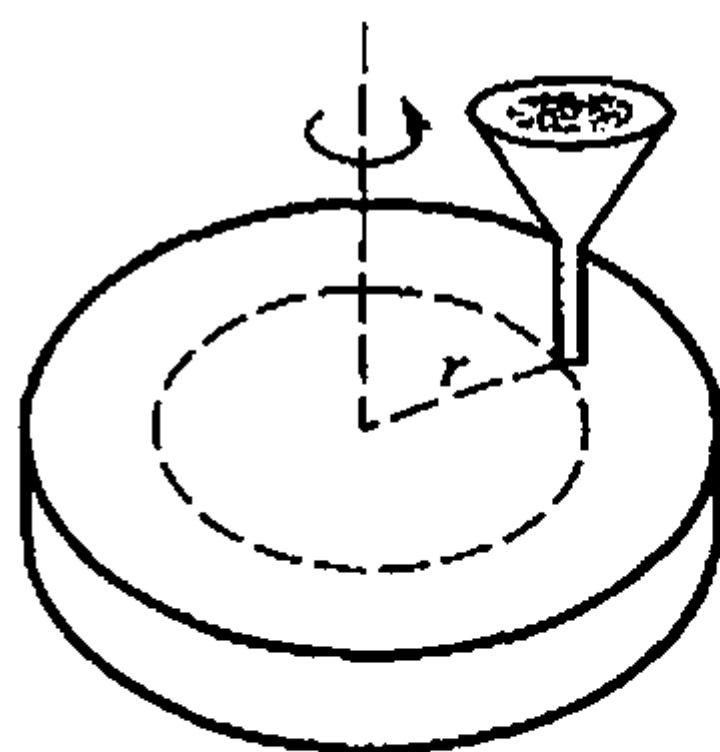
$t$  时刻,落下砂粒的质量为

$$m = kt, \quad k = 0.001 \text{ kg/s}$$

由角动量守恒,得

$$J\omega_0 = (J + mr^2)\omega$$

$$t = \frac{J(\omega_0 - \omega)}{kr^2\omega} = 5 \text{ s}$$



习题 3-14 图

**3-15.** 在一半径为  $R$ 、质量为  $m$  的静止水平圆盘的边上,站着一个质量为  $m'$  的人. 圆盘可绕通过中心的竖直轴转动,转轴与轴承之间的摩擦阻力可忽略不计. 当人沿圆盘的边缘走一周回到盘上原有位置时,圆盘将转过多大角度?

**分析:** 取人和圆盘为定轴转动系统. 系统的角动量守恒. 注意守恒定律中人和圆盘的角速度都相对于同一惯性参考系,人相对圆盘边缘走一周时,人相对地转过的角度与圆盘相对地转过的角度之和为  $2\pi$ .

解：人、圆盘系统对竖直轴的角动量守恒。开始时，人和圆盘都静止。设  $t$  时刻人相对地的角速度为  $\omega_1$ ，盘相对于地的角速度为  $\omega$ 。

由角动量守恒，得 
$$0 = J\omega + J_1\omega_1 = \frac{1}{2}mR^2\omega + m'R^2\omega_1$$

得 
$$\omega = -\frac{2m'}{m}\omega_1$$

“ $-$ ”号表示圆盘和人绕轴转动的角速度方向相反。上式可表示为

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2m'}{m} \frac{d\theta_1}{dt}$$

式中， $d\theta$  为  $dt$  时间内圆盘相对地转过的角度， $d\theta_1$  则为人相对地转过的角度。对

上式积分，可得 
$$\Delta\theta = -\frac{2m'}{m}\Delta\theta_1$$

人沿盘的边缘走一周时，应有  $\Delta\theta + (-\Delta\theta_1) = 2\pi$

所以，圆盘相对地转过的角度为

$$\Delta\theta = \frac{2m'}{m+2m'} \times 2\pi$$

3-16. 如图所示的打桩装置，半径为  $R$  的带齿轮转盘绕中心轴的转动惯量为  $J$ ，转动角速度为  $\omega_0$ ，夯锤的质量为  $m$ ，开始处于静止状态。当转盘与夯锤碰撞后，问夯锤的速度能有多大？

分析：以转盘与夯锤为系统。在碰撞过程中，由于相互作用的冲击内力很大，可认为夯锤所受的重力对转盘的轴心的力矩可以忽略，所以系统在碰撞过程中对转轴的角动量守恒。

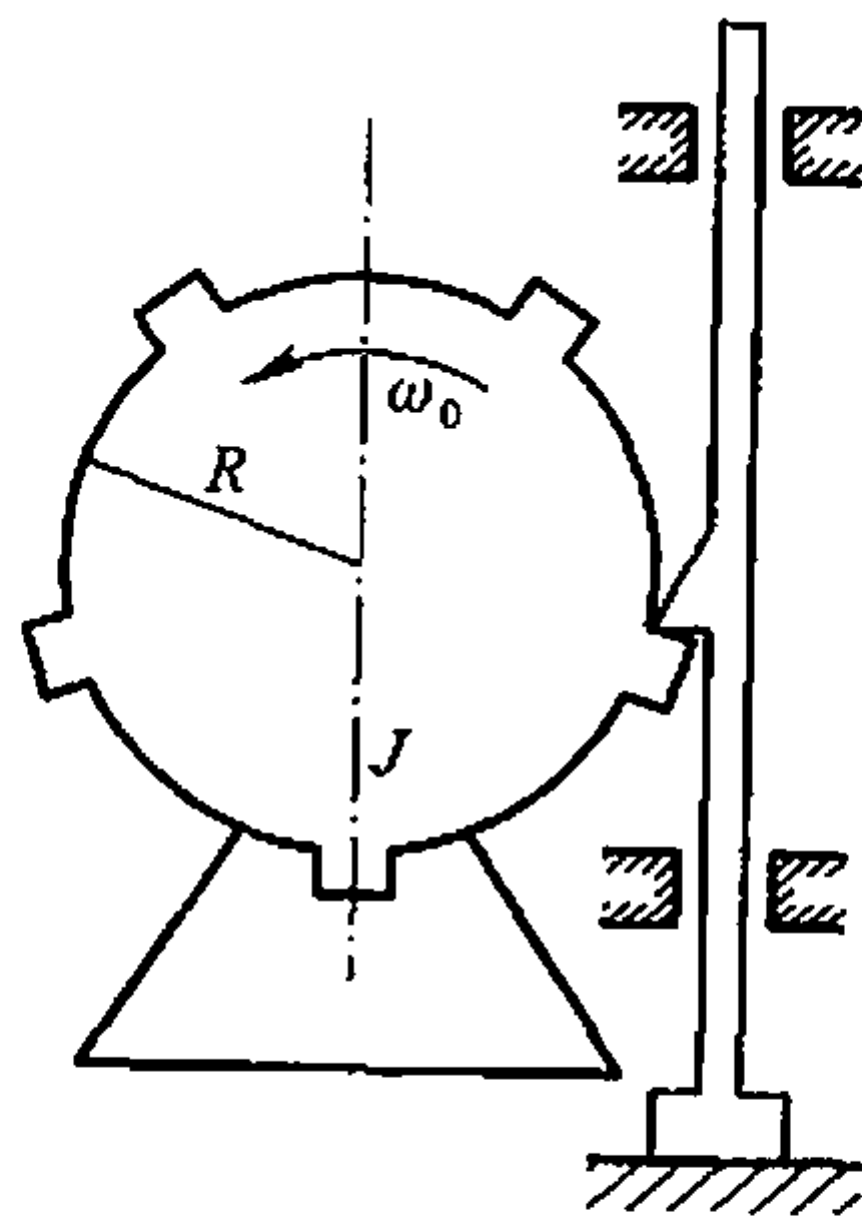
解：设碰撞后夯锤与转盘有相同的角速度  $\omega$ ，将夯锤视作质点。由系统的角动量守恒，

$$J\omega_0 = (mR^2 + J)\omega$$

得 
$$\omega = \frac{J\omega_0}{mR^2 + J}$$

夯锤向上运动的速度为

$$v = R\omega = \frac{JR\omega_0}{mR^2 + J}$$

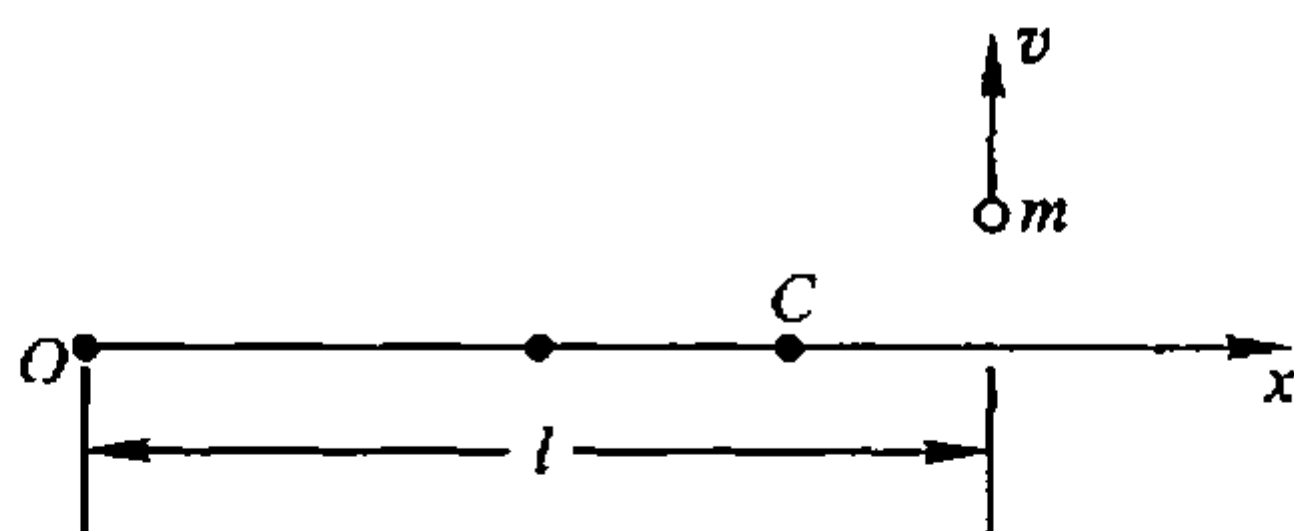


习题 3-16 图

3-17. 一个人站在—竹筏的一端用力向垂直于筏身方向水平跳出去。筏由于受到反冲作用就要旋转起来。假定人的质量为  $m = 60 \text{ kg}$ ，筏的质量  $m' = 500 \text{ kg}$ ，筏长  $10 \text{ m}$ ，人相对于岸的起跳速度为  $3 \text{ m/s}$ 。求竹筏所获得的角速度（假

定竹筏的转动惯量近似地可以用细杆的公式来计算,水的摩擦可以忽略不计)。

分析:人水平方向跳离竹筏时,人和竹筏系统的质心在水平面内不受外力,因此,质心将保持静止,并且对垂直于水平面的质心轴,系统的角动量守恒。



解图 3-17

解:先求出质心坐标.如解图 3-17 所示,取坐标轴  $Ox$  沿竹筏,坐标原点位于筏的一端,人位于筏的另一端.设筏长为  $l$ ,则质心的坐标为

$$x_c = \frac{ml + m'l/2}{m' + m} = 5.54 \text{ m}$$

对系统质心轴的角动量守恒,有

$$0 = mv(l - x_c) + J\omega$$

利用平行轴定理,得竹筏对系统质心轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{12}m'l^2 + m'\left(x_c - \frac{l}{2}\right)^2 = 4.31 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

得

$$\omega = -\frac{m(l - x_c)}{J}v = -0.186 \text{ rad/s}$$

“ $-$ ”号表示竹筏的转动方向与人跳离竹筏的方向相反。

**3-18.** 两滑冰运动员,质量分别为  $m_A = 60 \text{ kg}$ ,  $m_B = 70 \text{ kg}$ , 它们的速率  $v_A = 7 \text{ m/s}$ ,  $v_B = 6 \text{ m/s}$ , 在相距为  $1.5 \text{ m}$  的两平行线上相向而行,当两者最接近时,便拉起手来,开始绕质心作圆周运动并保持两者间的距离为  $1.5 \text{ m}$ . 求该瞬时:

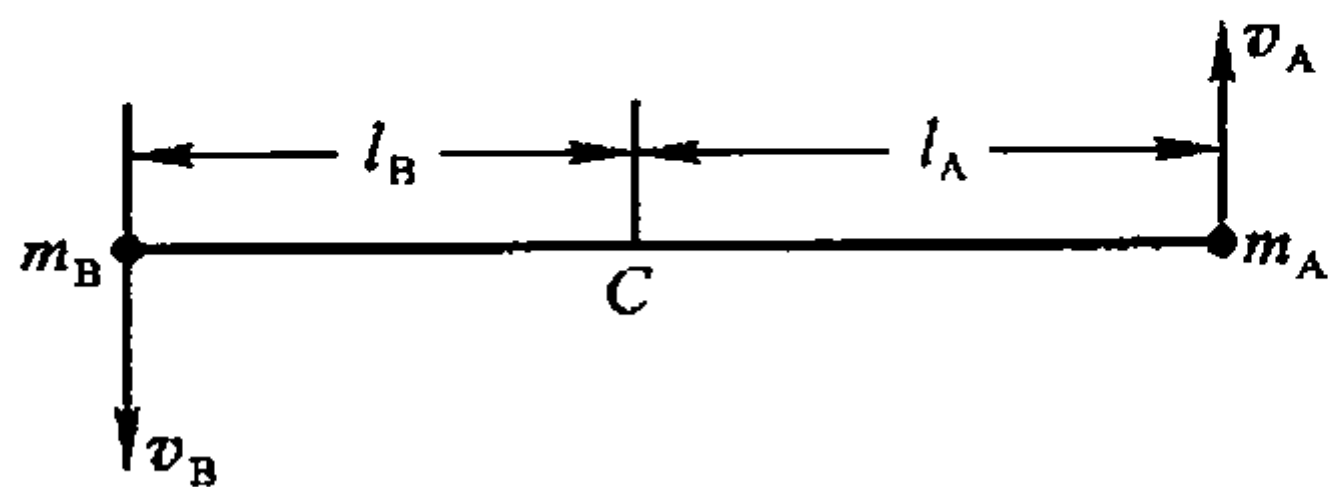
- (1) 系统的总角动量;
- (2) 系统的角速度;
- (3) 两人拉手前、后的总动能. 这一过程中能量是否守恒,为什么?

分析:忽略冰面的阻力,两运动员拉起手绕质心作圆周运动时,对质心轴没有外力矩作用,因此对质心轴的角动量守恒. 两人拉手前、后的动能为绕质心轴总的转动动能。

解:如解图 3-18 所示,设两运动员距质心分别为  $l_A, l_B$ , 有  $l_A + l_B = l$ , 且  $m_A l_A = m_B l_B$ , 可得  $l_A = 0.808 \text{ m}$ ,  $l_B = 0.692 \text{ m}$

- (1) 系统的总角动量

$$L = m_A l_A v_A + m_B l_B v_B = 630 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$



解图 3-18

(2) 对质心轴的转动惯量

$$J = m_A l_A^2 + m_B l_B^2 = 72.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

由角动量守恒定律

$$J\omega = m_A l_A v_A + m_B l_B v_B$$

得

$$\omega = \frac{m_A l_A v_A + m_B l_B v_B}{J} = 8.67 \text{ rad/s}$$

(3) 拉手前总动能

$$E_k = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = 2.73 \times 10^3 \text{ J}$$

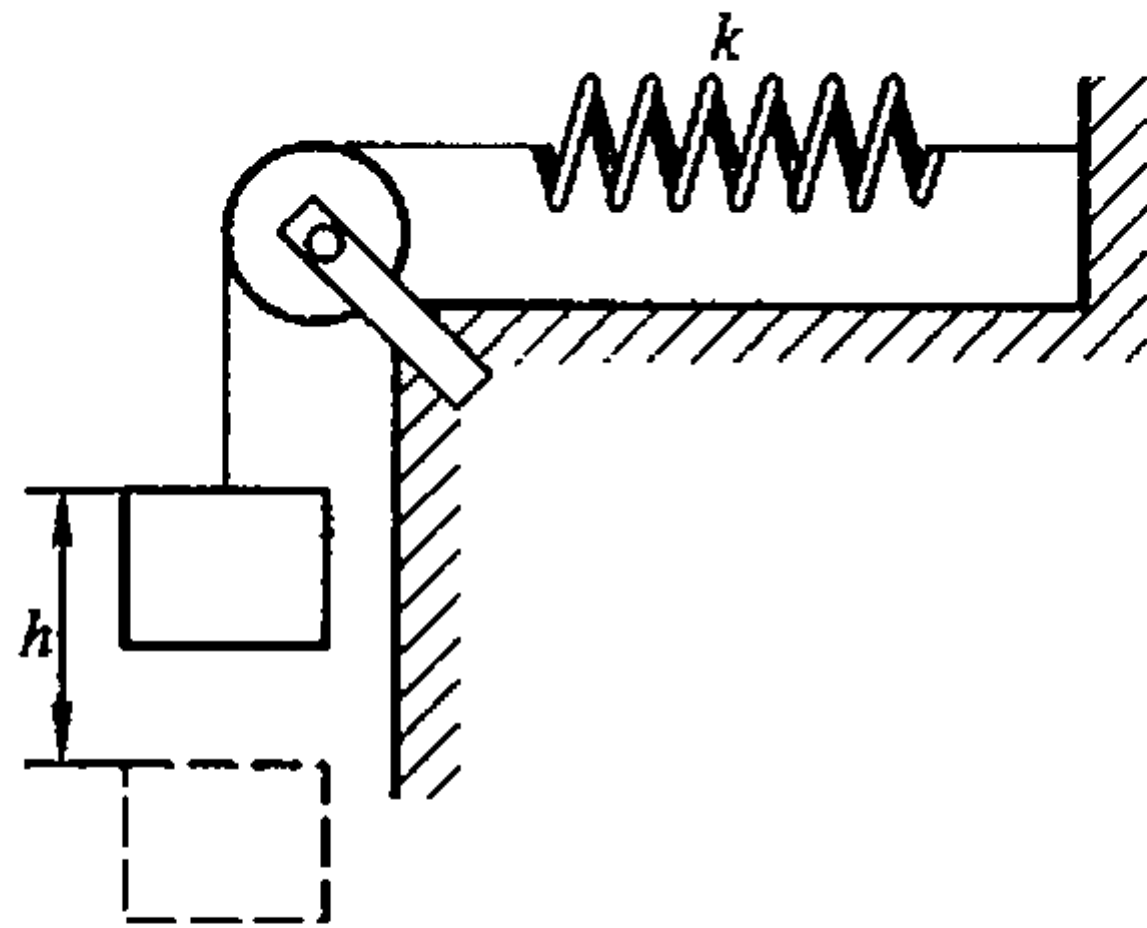
拉手后总动能

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = 2.73 \times 10^3 \text{ J}$$

在拉手前后,两运动员间的距离不变.对质心轴而言,既无外力矩的功也无非保守内力矩的功.所以,系统的机械能即动能守恒.

#### 4. 角动量守恒定律和机械能守恒定律的综合应用

**3-19.** 如图,弹簧的劲度系数  $k = 2.0 \times 10^3 \text{ N/m}$ , 轮子的转动惯量为  $0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 轮子半径  $r = 30 \text{ cm}$ . 当质量为  $60 \text{ kg}$  的物体下落  $40 \text{ cm}$  时的速率是多大? 假设开始使物体静止而弹簧无伸长.



习题 3-19 图

**分析:** 取弹簧、轮子、物体和地球为系统. 系统不受外力. 绳与滑轮间的摩擦力和绳的张力都是成对内力. 由于绳与滑轮间无相对滑动, 以及绳不可伸长, 这两对内力的功都为零.

所以, 利用机械能守恒定律即可求解. 也可由牛顿运动定律和转动定律求解.

**解 1:** 设下落物体的速度为  $v$ , 则轮子的转速为  $\omega = \frac{v}{r}$ , 因绳子不可伸长, 所以弹簧的伸长量即为物体下落的距离. 选物体下落  $40 \text{ cm}$  时的位置为重力

势能零点.

由机械能守恒定律,得

$$\frac{1}{2}kh^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh$$

式中  $h$  为物体下落的高度,  $m$  为物体的质量,  $J$  为轮子的转动惯量. 所以,

$$v = \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + J/r^2}} = 1.51 \text{ m/s}$$

解 2: 受力分析如解图 3-19, 并设物体运动方向如图.

$$mg - F_T = ma$$

$$F_T r - kx r = J\alpha$$

$$a = r\alpha$$

可解得

$$a = \frac{mg - kx}{m + J/r^2}$$

由  $a = \frac{dv}{dt}$ ,  $v = \frac{dx}{dt}$ , 得

$$\frac{dv}{a} = \frac{dx}{v}$$

$$v dv = a dx$$

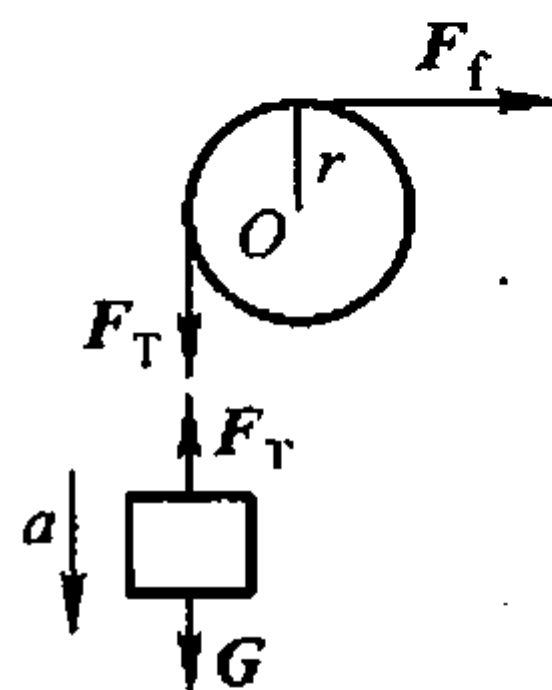
即

$$\int_0^v v dv = \int_0^x \frac{mg - kx}{m + J/r^2} dx$$

解得

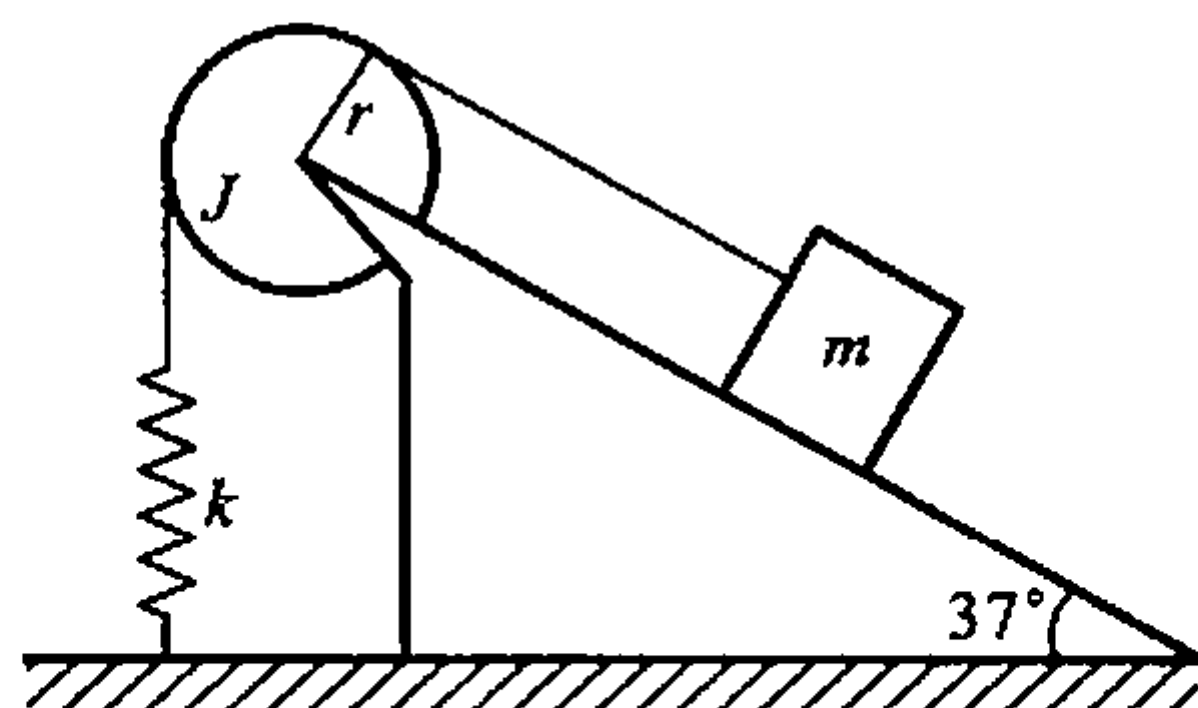
$$v = \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + J/r^2}}$$

从两种解法可见, 第一种简便, 这就是守恒定律的优越性.



解图 3-19

3-20. 如图, 滑轮的转动惯量为  $J = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 半径  $r = 30 \text{ cm}$ . 弹簧的劲度系数  $k = 20 \text{ N/m}$ , 重物的质量  $m = 2.0 \text{ kg}$ . 此滑轮-重物系统从静止开始启动, 开始时弹簧没有伸长, 如摩擦可忽略, 问物体能沿斜面滑下多远?



习题 3-20 图

分析: 在物体沿固定光滑斜面下滑的过程中, 由物体、弹簧、地球构成的系统的机械能守恒. 注意, 在物体沿斜面滑下的最远处, 物体的运动速度为零, 这

不是物体受合力为零的位置。

解：取物体的初始位置为重力势能零点，弹簧的原长为弹性势能零点。因绳子不可伸长，所以重物沿斜面滑下的最大距离  $x$  即为弹簧的最大伸长量。

由机械能守恒定律，有 
$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin\theta = 0$$

得物体能沿斜面滑下的最大距离为

$$x = \frac{2mg\sin\theta}{k} = 1.18 \text{ m}$$

3-21. 在上题中，当物体沿斜面滑下 1.00 m 时，它的速率为多大？

分析：物体沿斜面滑下未到达最远处时，具有平动动能，滑轮具有转动动能。

解：仍取物体的初始位置为重力势能零点，弹簧的原长为弹性势能零点。设物体在滑下  $l = 1.00 \text{ m}$  时的速度为  $v$ 。因绳子不可伸长，并与滑轮间无相对滑动，滑轮的角速度为

$$\omega = \frac{v}{r}$$

由机械能守恒定律，得

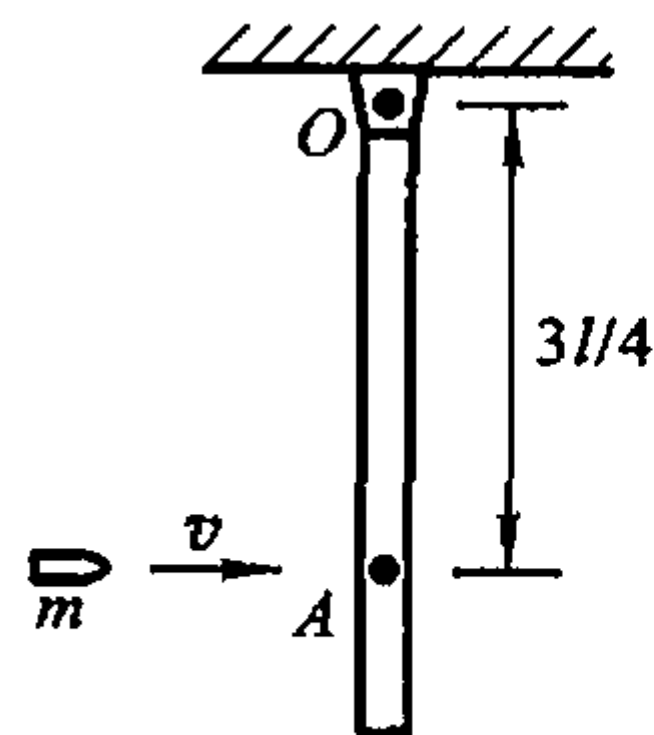
$$\frac{1}{2}kl^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgl\sin\theta = 0$$

代入数据，得 
$$v = \sqrt{\frac{2mgl\sin\theta - kl^2}{m + J/r^2}} = 0.689 \text{ m/s}$$

3-22. 一长  $l = 0.40 \text{ m}$  的均匀木棒，质量  $m' = 1.00 \text{ kg}$ ，可绕水平轴  $O$  在竖直面内转动，开始时棒自然竖直地悬垂。现有质量  $m = 8 \text{ g}$  的子弹以  $v = 200 \text{ m/s}$  的速率从  $A$  点射入棒中，假定  $A$  点与  $O$  点的距离为  $3l/4$ ，如图所示。求：

- (1) 棒开始运动时的角速度；
- (2) 棒的最大偏转角。

分析：子弹与棒的运动由两个过程组成。第一个过程对应子弹射入瞬间，为完全非弹性的碰撞过程，由子弹和棒构成的系统所受外力对轴的力矩为零，所以系统对轴的角动量守恒。第二个过程是子弹和棒一起摆动的过程，仍取子弹和棒为系统，在摆动过程中只有重力做功，利用动能定理可求出最大摆角。若取子弹、棒和地球为系统，则因系统不受外力以及系统内无非保守内力做功，系统的机械能守恒。注意，在第一个过程中由于存在轴对系统的作用力，因此不满足系统的动量守恒条件。



习题 3-22 图

解：(1) 取子弹和棒为系统。碰撞前系统对轴的角动量就是作匀速直线运

动的子弹对轴的角动量. 即

$$L_0 = \frac{3}{4}lmv$$

碰撞后系统对轴的角动量为

$$L = J\omega = \left[ m\left(\frac{3}{4}l\right)^2 + \frac{1}{3}m'l^2 \right] \omega$$

$\omega$  为子弹射入棒后二者开始共同运动的角速度.

由角动量守恒定律,

$$L = L_0$$

得

$$\omega = \frac{3mvl}{4J} = 8.89 \text{ rad/s}$$

(2) 取系统不变, 因摆动过程中只有重力做功, 利用动能定理求最大偏转角.

设棒从竖直位置开始的最大偏转角为  $\theta$ , 则棒的质心上升的高度  $h_1$  满足

$$h_1 = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}l\cos\theta$$

子弹上升的高度  $h_2$  为

$$h_2 = \frac{3}{4}l - \frac{3}{4}l\cos\theta$$

到最大摆角时, 重力作负功而系统静止. 对系统运用动能定理, 有

$$-mgh_2 - m'gh_1 = 0 - \frac{1}{2}J\omega^2$$

得

$$\cos\theta = \frac{2m'gl + 3mgl - 2J\omega^2}{2m'gl + 3mgl} = -0.076$$

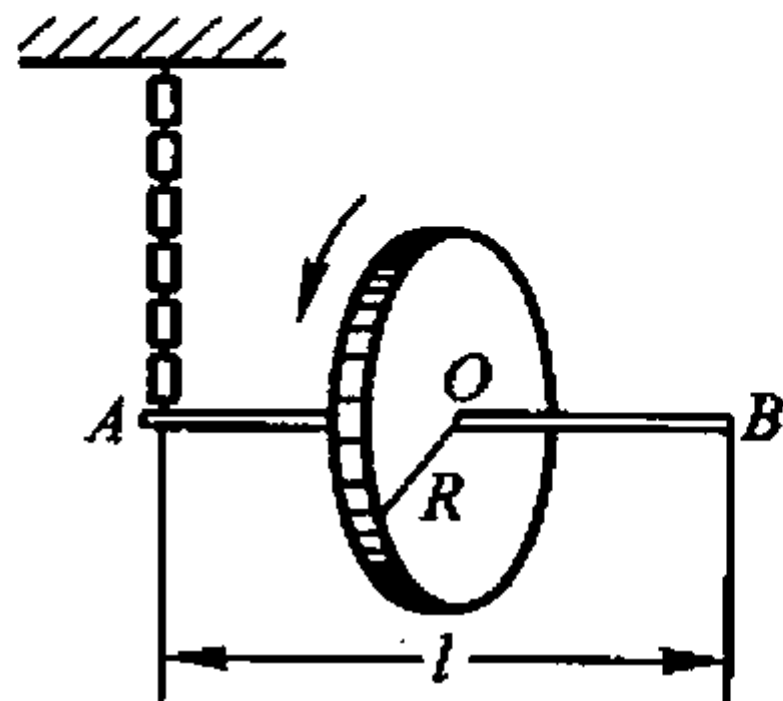
$$\theta = 94^\circ 21'$$

## 5. 刚体的进动及其他

**3-23.** 半径  $R = 30 \text{ cm}$  的轮子, 装在一根长  $l$  为  $40 \text{ cm}$  的轴的中部, 并可绕其转动, 轮和轴的质量共  $5 \text{ kg}$ , 系统的回转半径为  $25 \text{ cm}$ , 轴的一端  $A$  用一根链条挂起, 如果原来轴在水平位置, 并使轮子以  $\omega_0 = 12 \text{ rad/s}$  的角速度旋转, 方向如图所示, 求:

- (1) 该轮自转的角动量;
- (2) 作用于轴上的外力矩;
- (3) 系统的进动角速度, 并判断进动方向.

分析: 轮子以图示角速度绕水平轴  $AB$  旋转时, 自转角动量方向沿轴线向右. 轮子和轴受到的重力对  $A$  点的重力矩, 在  $AB$  轴所在的水平面内, 且垂直于轮子的自转



习题 3-23 图

角动量向里. 重力矩使系统的自转角动量发生变化, 其增量的方向与重力矩方向相同, 即自转角动量增量的方向与系统自转角动量的方向垂直. 其结果就是: 系统自转角动量的大小不变而方向变化. 系统将绕通过 A 点的竖直轴作进动, 回转方向沿重力矩的方向. 从题图的上方往下看, 系统沿逆时针方向回转, 回转轴与自转轴 AB 相垂直.

解: (1) 该轮自转的角动量为

$$L = J\omega = mr_{\text{回}}^2 \omega_{\text{回}} = 3.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

式中  $r_{\text{回}}^2$  为系统的回转半径,  $m$  为轮子和轴系统的质量.

(2) 轴上的外力矩即重力矩为  $M = mg \frac{l}{2} = 9.8 \text{ N} \cdot \text{m}$

(3) 进动的角速度为  $\omega_p = \frac{M}{J\omega_{\text{回}} \sin 90^\circ} = 2.61 \text{ rad/s}$

3-24. 一均质球, 绕着通过其中心的轴以一定的角速度转动着. 如果该球的半径减至原半径的  $\frac{1}{n}$ , 那么, 该球的动能增为原来的多少倍?

分析: 在球半径减小的过程中, 对中心轴的转动惯量将变小, 但角动量保持不变.

解: 设均质球的质量为  $m$ , 原半径为  $r$ , 则绕中心轴以角速度  $\omega$  转动时的角动量、转动动能和转动惯量分别为

$$L_0 = J\omega, \quad E_k = \frac{1}{2}J\omega^2, \quad J = \frac{2}{5}mr^2$$

在球的半径减小的过程中, 对中心轴的角动量守恒, 有

$$L_0 = J\omega = J'\omega'$$

式中  $J'$  和  $\omega'$  分别为球的质量  $m$  保持不变, 半径减至  $r/n$  时, 该球对中心轴的转动惯量和角速度

$$J' = \frac{2}{5}mr'^2 = \frac{2}{5}m\left(\frac{r}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}J$$

$$\omega' = \frac{J\omega}{J'} = n^2\omega$$

相应的转动动能为  $E'_k = \frac{1}{2}J'\omega'^2 = n^2E_k$

所以, 该球的动能增为原来的  $n^2$  倍.

## 6. 伯努利方程的应用

3-25. 一直径为  $D$  的大型圆筒水槽, 水深为  $h$ , 底面上开有一直径为  $d$  的小孔.

(1) 若水深不变, 求水从底面小孔流出的流速;

(2) 若水深随底面小孔流出的流量而减少, 求任意时刻水从底面小孔流出的流量(设  $D \gg d$ ).

分析: 将水槽内水的流动视为定常流动, 运用伯努利方程解题.

解: 如解图 3-25 所示, 选水槽底为水平参考面, 取流线  $AB$ , 在此流线上运用伯努利方程. 对于  $A$ 、 $B$  两点, 有

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho gh = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

因为  $A$ 、 $B$  两处都与大气相接触, 有  $p_A = p_B = p_0$ , 于是,

$$v_B^2 - v_A^2 = 2gh$$

(1) 据题意, 水面的高度不变, 即  $v_A \approx 0$ , 可得

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

(2) 设任意时刻的水深为  $y$ , 运用伯努利方程和连续性方程, 有

$$v_B^2 - v_y^2 = 2gy$$

和

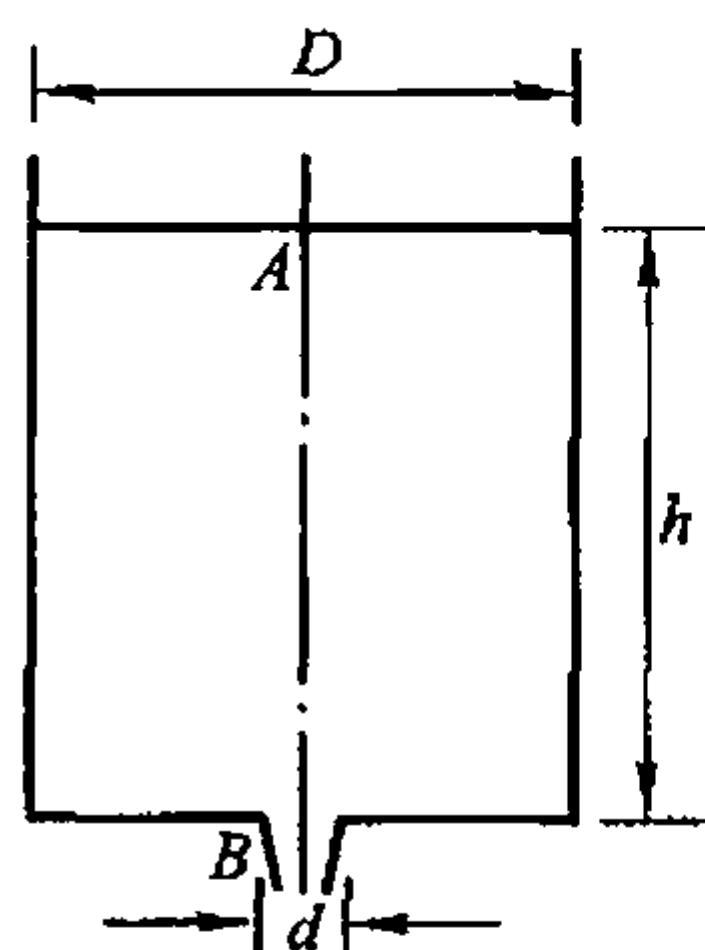
$$v_B S_B = v_y S_y, \quad \text{即 } v_B \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 = v_y \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2$$

可得到, 任意时刻水从底面小孔流出的质量流量为

$$q_m = \rho v_B S_B = \rho \pi v_B \left( \frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \rho \pi \sqrt{2gy} \frac{D^2 d^2}{\sqrt{D^4 - d^4}}$$

当  $D \gg d$  时, 有

$$q_m = \rho \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 \sqrt{2gy}$$



解图 3-25

3-26. 在重力场中有一个以匀角速度  $\omega$  旋转着的圆筒容器, 该容器内盛有密度为  $\rho$  的不可压缩性流体. 试求:

(1) 液体表面的状态;

(2) 液体内的压力分布.

分析: 取流体表面任一质元  $\Delta m$ , 分析其作匀速率圆周运动时所受合力, 由质点动力学可求得液面形状所满足的函数. 考虑质元相对非惯性系静止, 添加惯性力后, 由力的平衡, 也可求得液面形状和液体内的压力分布.

解: (1) 如解图 3-26a 所示, 液面的质元  $\Delta m$  受重力  $G = (\Delta m)g$  和其他部分流体对它的合力  $F$ . 由于旋转时  $\Delta m$  相对液面静止, 故合力  $F$  的方向沿液面法向, 不存在沿液面的切向分量, 设  $F$  与竖直方向的夹角为  $\theta$ . 取坐标轴  $Oz$  沿

圆筒的转轴, 原点  $O$  位于液面最低处. 旋转时  $\Delta m$  以径向  $r$  为半径, 以  $O'$  为圆心作匀速率圆周运动, 其向心加速度为

$$a_n = r\omega^2$$

根据牛顿运动定律, 有

$$F \sin \theta = (\Delta m) r \omega^2$$

$$F \cos \theta - (\Delta m) g = 0$$

由以上两式解得  $\tan \theta = \frac{r\omega^2}{g}$

因为  $\tan \theta = \frac{dz}{dr}$ , 所以有  $dz = \frac{r\omega^2}{g} dr$

对上式两边积分, 即  $\int_0^z dz = \frac{\omega^2}{g} \int_0^r r dr$

可得  $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$  (1)

这是一抛物线方程. 根据旋转圆筒的轴对称性可知, 匀角速旋转圆筒内流体的表面是旋转抛物面.

(2) 液体内的压力因液体受重力而随深度增大. 在惯性系中, 静止的理想流体内某一水平面上各点的压力都相同. 本题中流体随圆筒旋转, 相对筒静止的液面是旋转抛物面. 对流体内的某一水平面, 因各点距液面的高度沿径向变化, 因此压力沿径向有一分布. 在考虑质元受惯性力后, 可以用流体静力学求得此分布.

如解图 3-26b 所示, 取流体内  $z=0$  平面上的—小体元  $\Delta m = \rho \Delta S dr$ , 沿径向的截面积为  $\Delta S$ . 由小体元沿径向的受力平衡, 有

$$p(r) \Delta S + (\rho \Delta S dr) r \omega^2 - p(r + dr) \Delta S = 0$$

即  $dp(r) = p(r + dr) - p(r) = \rho r \omega^2 dr$  (2)

沿径向相距为  $dr$  的两点处, 因各自在竖直方向受力平衡, 有

$$p(r) = p_0 + \rho g z(r)$$

$$p(r + dr) = p_0 + \rho g z(r + dr)$$

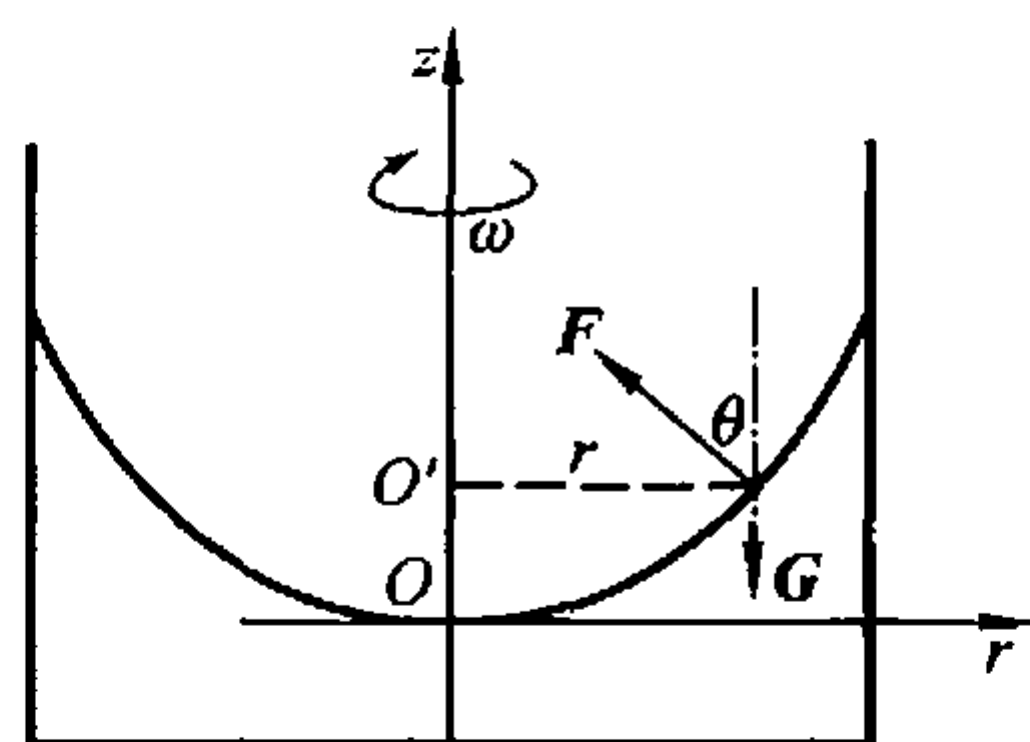
即  $dp(r) = p(r + dr) - p(r) = \rho g dz$  (3)

式中  $z(r)$  是  $r$  处液面坐标,  $p_0$  为大气压力.

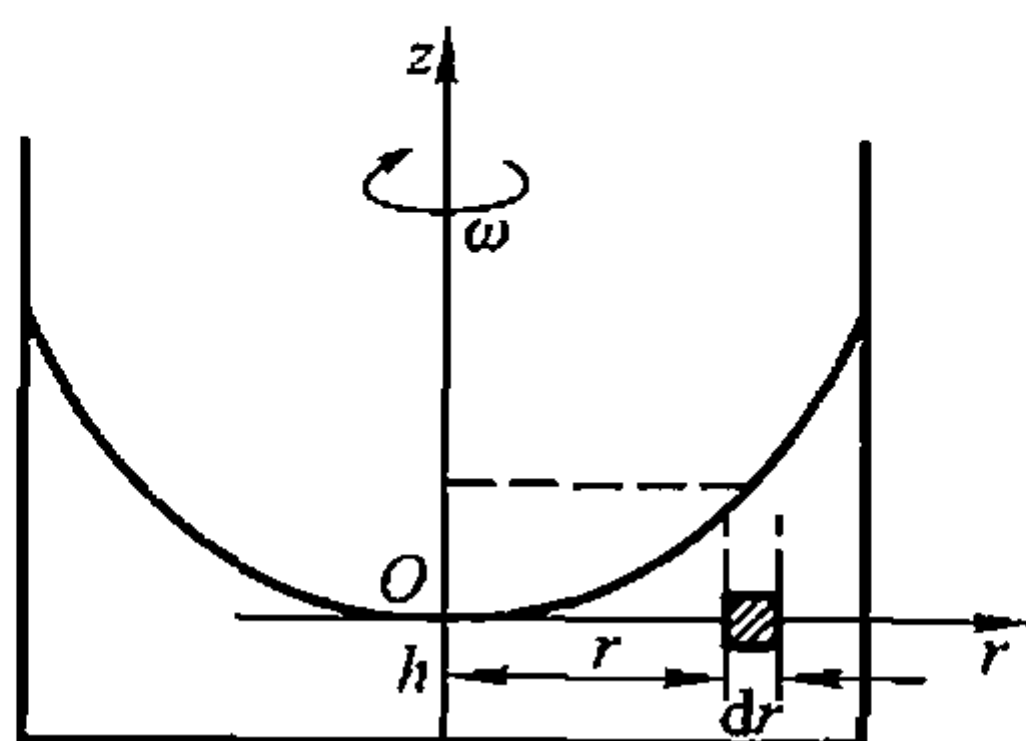
由(2)、(3)两式, 得  $dz = \frac{r\omega^2}{g} dr$  (4)

对上式积分, 同样可以得到流体的表面为一旋转抛物面, 即(1)式.

将(4)式代入(3)式并积分, 有



解图 3-26a



解图 3-26b

$$\int_{p_0}^p dp(r) = \rho \omega^2 \int_0^r r dr$$

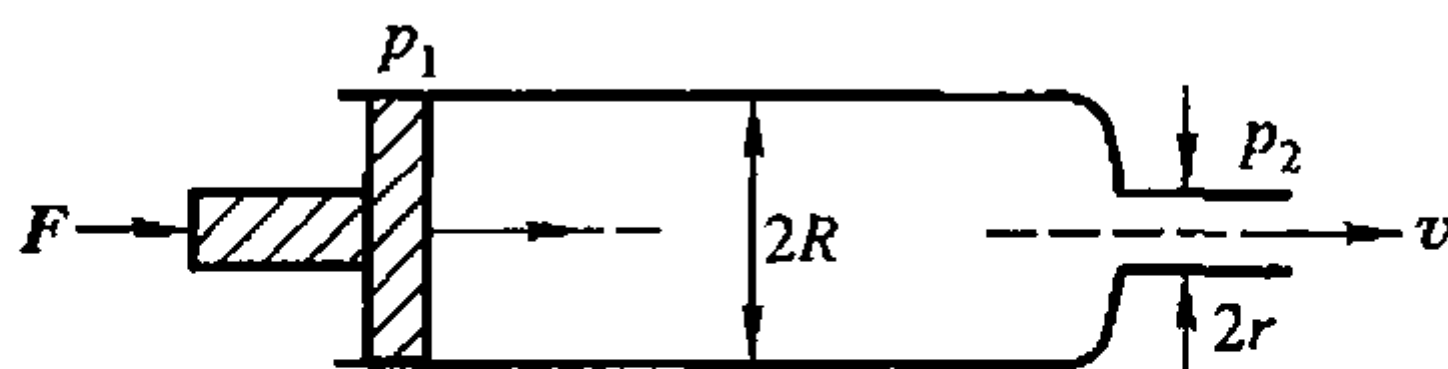
所以,在流体内  $z=0$  平面上压力沿径向的分布为

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$$

对流体内  $z=0$  平面下方垂直距离为  $h$  处的某平面,压力沿径向的分布应在上式的基础上再加一项  $\rho gh$ ,为

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \rho gh$$

**3-27.** 如图所示为一装有喷嘴的水枪,在活塞上施加力  $F$  时,水枪内部的水可以从喷嘴中喷出. 设水枪的半径为  $R$ ,喷嘴半径为  $r$ . 求施加力  $F$  时,水的喷出速度.



习题 3-27 图

**分析:** 对水枪沿轴线上的两点:活塞和喷嘴处,运用伯努利方程和连续性方程求解.

**解:**

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1)$$

式中

$$p_1 = p_0 + \frac{F}{S_1}, \quad p_2 = p_0$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (2)$$

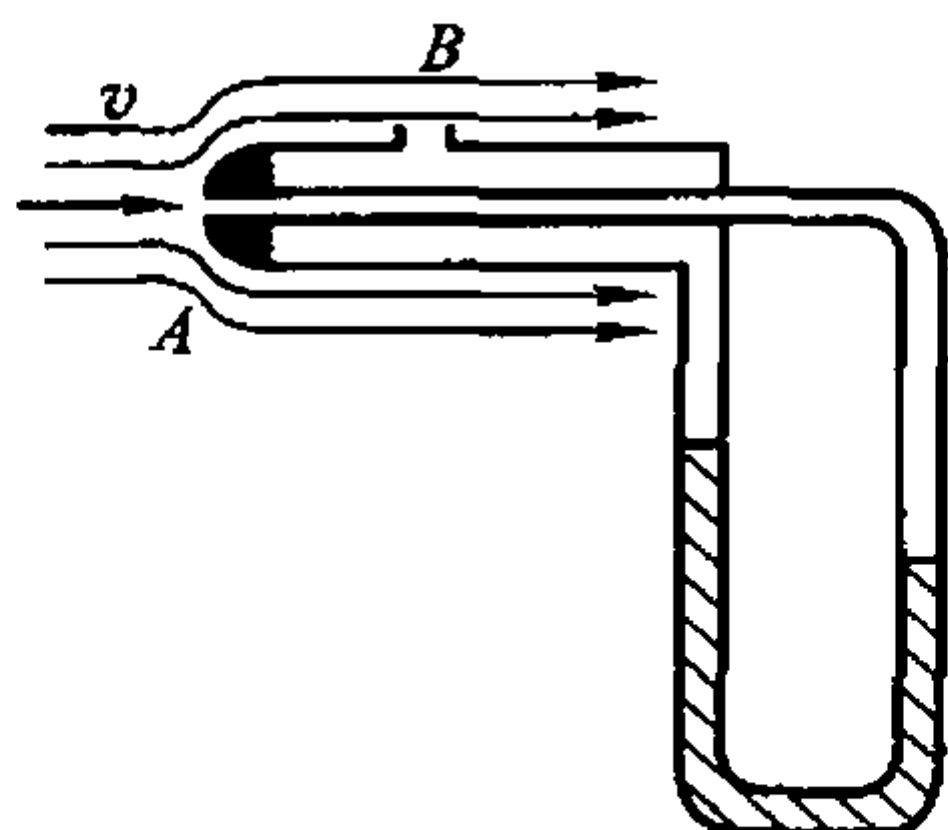
由(1)、(2)两式,可解得

$$v = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1 \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2F}{\rho \pi R^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)}}$$

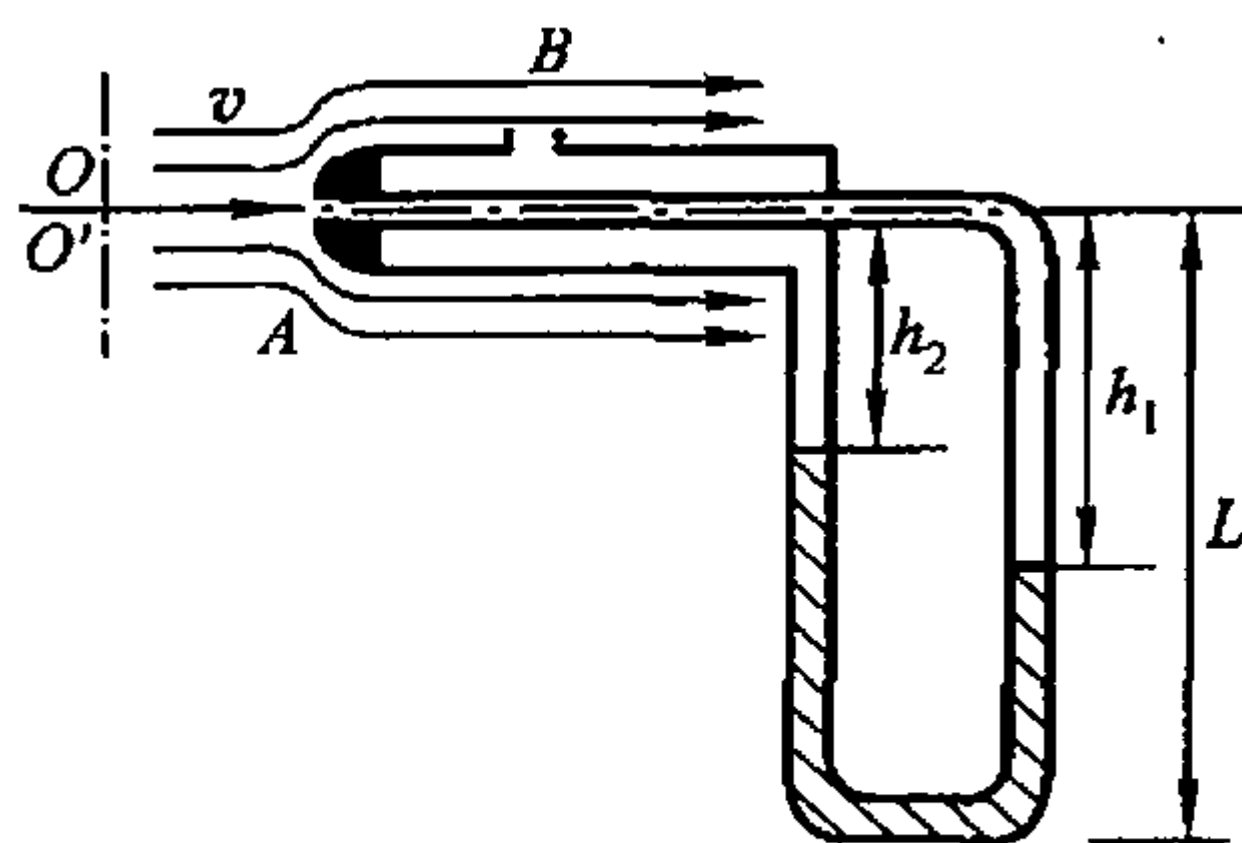
**3-28.** 将开口分别为  $A$  和  $B$  的玻璃管置于风里,管内盛有酒精液体,如图所示. 测得玻璃管内酒精液体两端的高度差为 30 mm 时的风速是多少? 设空气密度为  $1.21 \text{ kg/m}^3$ ,酒精的相对密度为 0.78.

**分析:** 本题中测量风速的装置称为皮托管. 开口  $A$  处的风速为零,称为驻点,开口  $B$  处的  $v$  是待测风速. 由于这两处的压力差,在与其相通的 U 形管中形成酒精液体的高度差. 因皮托管很细,可以认为  $B$  处的  $v$  与  $A$  所迎面相对远处

的  $v$  相同, 此外, 开口  $A$  和  $B$  应认为处于同一水平面 (图中为便于表达将  $B$  画于上方). 选定参考平面、确定考察的流线, 运用伯努利方程和酒精液体的平衡, 即可得到用高度差 (压力差) 表示的风速  $v$ .



习题 3-28 图



解图 3-28

解: 如解图 3-28 所示, 选定  $O'A$  为参考水平面,  $OO'$  为远处既同高又有相同流速的相邻的两点. 在稳定状态下, 因为管内空气静止, 所以  $A$  点和  $B$  点的压力分别为

$$p_A = p_0 - h_1 \rho g, \quad p_B = p_0 - h_2 \rho g$$

考察流线  $O'A$ , 由伯努利方程, 得

$$p_A = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

考察流线  $OB$ , 由伯努利方程, 得

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

式中  $p_0$  为大气压,  $\rho$  为空气密度. 由上述方程可解得

$$(h_1 - h_2) \rho g = -\frac{1}{2} \rho v^2 \quad (1)$$

由 U 形管中酒精液体的受力平衡, 有

$$p_B + \rho' g (L - h_2) = p_A + \rho' g (L - h_1)$$

式中  $\rho'$  为酒精液体密度. 整理可得

$$(h_1 - h_2) \rho g = -(h_1 - h_2) \rho' g \quad (2)$$

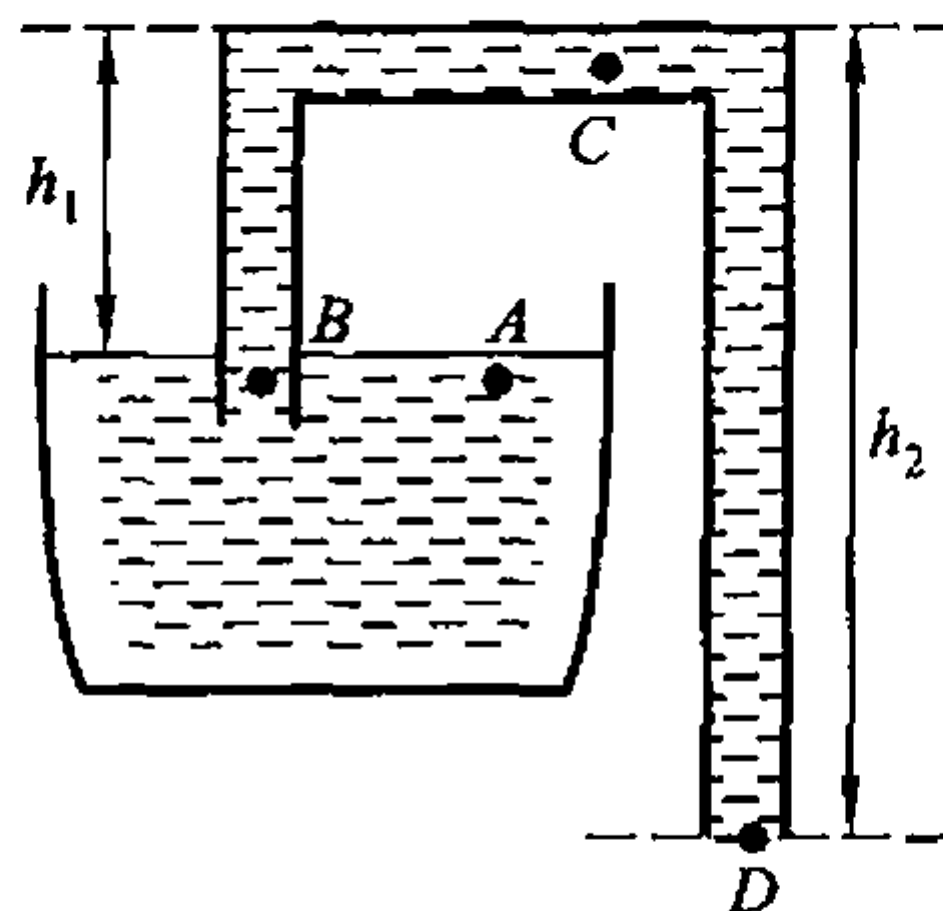
由 (1)、(2) 两式可解得

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2(h_1 - h_2)\rho'g}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 0.03 \times 0.78 \times 10^3 \times 9.8}{1.21}} \text{ m/s} \\ &= 19.47 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3-29. 在如图所示的虹吸管装置中, 已知  $h_1$  和  $h_2$ . 试问:

(1) 当截面均匀的虹吸管下端被塞住时,  $A, B$  和  $C$  处的压强各为多大?

(2) 当虹吸管下端开启时,  $A, B$  和  $C$  处的压强又各为多少? 这时水流出虹吸管的速率有多大?



习题 3-29 图

分析: 理想流体满足连续性方程  $Sv = \text{恒量}$ , 由于虹吸管的截面均匀, 因此管内液体的流速应处处相等. 以出水口的水平面为参考平面, 作流线连接

$ABC$  点至出水口, 在此流线上运用伯努利方程即可求解本题.

解: 如图所示, 取出水口的水平面为参考平面, 作流线连接  $ABC$  点至出水口. 设  $p_0$  为大气压, 在虹吸管下端开启情况下, 对此流线上运用伯努利方程, 对  $A, B$  两点, 有

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g(h_2 - h_1) = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g(h_2 - h_1) \quad (1)$$

对  $A, C$  两点, 有

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g(h_2 - h_1) = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho gh_2 \quad (2)$$

对  $A$  和出水口  $D$ , 有

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g(h_2 - h_1) = p_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2 \quad (3)$$

式中  $p_A = p_D = p_0$ .

(1) 当虹吸管下端被塞住时,  $v_A = v_B = v_C = 0$ . 由(1)、(2)两式可得

$$p_A = p_B = p_0, \quad p_C = p_0 - \rho gh_1$$

(2) 当虹吸管下端开启时,  $v_A \approx 0, v_B = v_C = v_D = v, p_A = p_D = p_0$ . 解上述(1)、(2)和(3)式, 可得

$$p_A = p_0, \quad p_B = p_0 - \rho g(h_2 - h_1), \quad p_C = p_0 - \rho gh_2$$

$$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

## 第四章

# 相对论基础

### 一、教学基本要求

1. 理解狭义相对论基本原理和洛伦兹坐标变换式.
2. 理解狭义相对论的时空观及其与经典力学时空观的差异. 理解同时性的相对性、长度收缩和时间延缓概念.
3. 理解狭义相对论中质量和速度、质量和能量的关系.

### 二、本章习题分类

1. 相对论时间和长度的计算
2. 相对论动力学问题的计算

### 三、习题分析和解答

1. 相对论时间和长度的计算

**4-1.** 在惯性系中,一次爆炸发生在坐标 $(x, y, z, t) = (6 \text{ m}, 0, 0, 0.2 \times 10^{-7} \text{ s})$ 处,一惯性参考系沿着 $x$ 的正方向以相对速度 $0.8c$ 运动. 假设在 $t = t' = 0$ 时两参考系的原点重合. 试求出运动参考系中观测者测得该事件的坐标.

分析: 惯性系 $K'$ 相对 $K$ 作匀速直线运动,  $v = 0.8c$ .

$$\text{解: } x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{6 - 0.8 \times 3 \times 10^8 \times 0.2 \times 10^{-7}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \text{ m} = 2 \text{ m}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

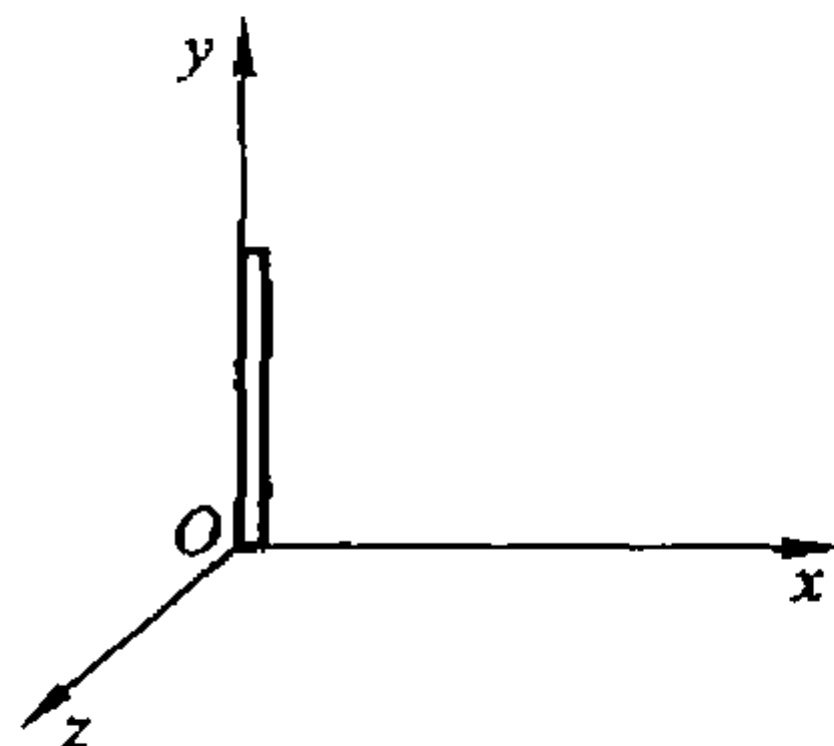
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{0.2 \times 10^{-7} - 0.8 \times 6 / (3 \times 10^8)}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \text{ s} = 0.67 \times 10^{-8} \text{ s}$$

4-2. 一米尺沿  $Oy$  轴方向放置, 如图所示. 有三个观察者对尺长作了测量:

(1) A 是沿着  $Ox$  轴的正方向以速度  $v = 0.8c$  运动的观测者;

(2) B 是沿着  $Oy$  轴的负方向以速度  $v = 0.8c$  运动的观测者;

(3) C 是沿着与  $Ox$  轴成  $45^\circ$  角的方向以速度  $v = 0.8c$  运动的观测者.



习题 4-2 图

对这些观测者而言, 他们各自测得的长度是多少?

分析: 相对论的“长度收缩”效应发生在沿运动长度的方向上.

解: (1) 米尺沿  $Oy$  轴方向放置, 而观测者 A 沿  $Ox$  轴运动, 在 A 的运动方向上米尺没有相对运动, 因此观测者 A 测得的米尺长度不变, 为  $L_A = 1 \text{ m}$ .

(2) 观测者 B 的运动方向平行于米尺的放置方向, 即米尺相对 B 沿长度方向运动, 因此观测者 B 测得的结果将有“长度收缩”效应. 米尺的“固有长度”  $L_0 = 1 \text{ m}$ .

$$L_B = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1.0 \times \sqrt{1 - 0.8^2} \text{ m} = 0.6 \text{ m}$$

(3) 米尺在相对观测者 C 运动的方向上, 有“固有长度”为  $L_{0//} = L_0 \cos 45^\circ$ , C 将测得“收缩”效应, 在垂直于 C 的运动方向上, 其长度为  $L_{\perp} = L_0 \sin 45^\circ$ , C 将测得长度不变. 所以

$$L_{//} = L_{0//} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1.0 \times \cos 45^\circ \sqrt{1 - 0.8^2} \text{ m} = 0.6 \cos 45^\circ \text{ m}$$

观测者 C 测得“米尺”的长度为

$$L_C = \sqrt{L_{//}^2 + L_{\perp}^2} = \sqrt{(0.6 \cos 45^\circ)^2 + (1.0 \sin 45^\circ)^2} \text{ m} = 0.82 \text{ m}$$

4-3. 一个质点在惯性系  $K'$  中作匀速圆周运动, 轨道方程为

$$x'^2 + y'^2 = a^2, \quad z' = 0$$

试证: 在惯性系  $K$  中的观察者测得该质点作椭圆运动, 椭圆的中心以速度  $v$  移动.

分析: 惯性系  $K'$  相对  $K$  作匀速直线运动, 圆周轨道相对  $K'$  静止, 圆心在  $K'$  系的坐标原点处.  $K$  系中的观察者测得该轨道在相对运动方向上的直径将较  $K'$  中的短, 在垂直于运动方向上的长度不变. 此即“长度收缩”效应.

证明: 设  $K'$ 、 $K$  系的对应坐标轴分别平行,  $K'$  系相对  $K$  系以速度  $v$  沿  $x$  轴正向运动,  $x, x'$  轴重合, 并  $t = t' = 0$  时坐标原点  $O, O'$  重合. 对  $K'$  系圆周轨道上某坐标为  $(x', y')$  的点,  $O'x'$  是固有长度, 在  $K$  系中测该段长度时, 由“长度收缩”效应, 得

$$x - vt = x' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

在垂直于运动方向上的长度不变  $y = y', z = z'$

代入 K' 系的轨道方程得

$$\left( \frac{x - vt}{a \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{a} \right)^2 = 1$$

所以,在 K 系中测得的轨迹是椭圆. 其半长轴为  $a$ , 半短轴为  $a \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ ,

椭圆的中心相对  $O'$  的移动速度即参考系 K 相对 K' 的运动速度  $v$ .

本题也可用洛伦兹坐标变换证明:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

代入 K' 系的轨道方程得

$$\left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)^2 + y^2 = a^2$$

即

$$\frac{(x - vt)^2}{a^2 \left[ 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

**4-4.** 一观察者测得运动着的米尺长 0.5 m, 问此尺以多大的速度接近观察者?

**分析:** 米尺的长度在相对静止的坐标系中测量为 1 m, 当米尺沿长度方向相对观察者运动时, 由于“长度收缩”效应, 观察者测得米尺的长度与相对运动的速度有关.

**解:** 设米尺的固有长度为  $L$ , 且  $L = 1.0$  m, 由“长度收缩”效应:

$$L' = L \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad v = c \sqrt{1 - \left(\frac{L'}{L}\right)^2}$$

得

$$v = 2.6 \times 10^8 \text{ m/s}$$

**4-5.** 一张宣传画 5 m 见方, 平行地贴于铁路旁边的墙上, 一高速列车以  $2 \times 10^8$  m/s 速度接近此宣传画, 这张画由司机测量将成为什么样子?

**分析:** 高速列车沿  $x$  方向运动, 在垂直于相对运动的方向上,  $y = y'$ , 由司机测量的画的高度不变.

解：由“长度收缩”效应： $L' = L \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 3.7 \text{ m}$

司机测量的尺寸为  $5 \times 3.7 \text{ m}^2$  的长方形。

4-6. 远方的一颗星以  $0.8c$  的速度离开我们，接受到它辐射出来的闪光按 5 昼夜的周期变化，求固定在此星上的参考系测得的闪光周期。

分析：以测量者“我们”为 K 系，星为 K' 系。K' 系中的闪光周期是同一地点，先后发生两闪光事件的时间间隔，为“固有时”。在 K 系，相邻两次闪光发生在两个不同的地点，由这两处的钟给出的时间间隔大于“固有时”。固定在 K 系的一个接收器所测得的闪光周期是以光速传递到的两次闪光的时间间隔。

解：设星在 K' 系的  $O'$ ，接收器在 K 系的  $O$ ，对应坐标轴分别平行，K' 系相对 K 系以速度  $0.8c$  沿  $x$  轴正向运动。 $t = t' = 0$  时  $O, O'$  重合，并由  $O'$  发出第一个闪光。

K' 系中，从计时开始到测得第二次闪光的时间间隔是“固有时”  $\tau_0$ ，由“时间延缓”，在 K 系的两只钟测得的时间间隔为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

K 系中，第二次闪光的发生地坐标为  $x = v\tau = \frac{v\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$O$  接收到相邻两次闪光的时间间隔（即 K 系接收器所记录的闪光周期）是

$$\Delta t = \tau + \frac{x}{c} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}(1 + \beta) = 5(\text{昼夜})$$

得  $\tau_0 = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} \Delta t = \frac{5}{3}(\text{昼夜})$

在星上测得的闪光周期为  $\frac{5}{3}$  昼夜。

4-7. 假设宇宙飞船从地球射出，沿直线到达月球，距离是  $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ ，它的速率在地球上被量得为  $0.30c$ 。根据地球上的时钟，这次旅行花多长时间？根据宇宙飞船所做的测量，地球和月球的距离是多少？怎样根据这个算得的距离，求出宇宙飞船上时钟所读出的旅行时间？

分析：以地球为 K 系，飞船为相对 K 系沿  $x$  轴正方向运动的 K' 系，月球位于 K 系  $x$  轴上。所以，地-月距离在 K 系中是“固有长度”，飞船上的钟所记录的“离开地球”和“到达月球”两事件的时间间隔为“固有时”。

解：设地球为 K 系，位于坐标原点  $O$ ，月球位于  $x$  轴上  $L_0$  处。飞船为 K' 系并位于  $O'$ ， $t = t' = 0$  时飞船匀速离开地球，相对 K 系以速度  $v$  沿  $x$  轴正向运动。

地球上的时钟显示的旅行时间为

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{3.84 \times 10^8}{0.3 \times 3 \times 10^8} \text{ s} = 4.27 \text{ s}$$

在飞船上测量地、月距离  $L$  时,  $K$  系的  $L_0$  是固有长度, 由“长度收缩”

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = 3.66 \times 10^8 \text{ m}$$

飞船上的时钟显示的旅行时间为

$$\Delta t' = \frac{L}{v} = \frac{3.66 \times 10^8}{0.3 \times 3 \times 10^8} = 4.07 \text{ s}$$

$\Delta t' < \Delta t$ , 即“动钟变慢”. 对于飞船而言, “离开地球”和“到达月球”两事件都发生在飞船上, 所以, 飞船时钟显示的时间间隔是“固有时”. 从“时间延缓”同样可验证  $\Delta t' < \Delta t$ .

**4-8.** 在  $K$  系中观察到两个事件同时发生在  $Ox$  轴上, 其间距离是  $1 \text{ m}$ , 在  $K'$  系中观察这两个事件之间的空间距离是  $2 \text{ m}$ , 求在  $K'$  系中这两个事件的时间间隔.

分析: 在  $K$  系中同时测得了两事件发生的距离  $\Delta x = 1 \text{ m}$ , 这是“运动长度”. 两事件在  $K'$  系中的距离  $\Delta x' = 2 \text{ m}$  是“固有长度”. 根据“长度收缩”效应, 可得到两参考系相对运动的速度. 由于“同时性的相对性”, 在  $K$  系中同时发生的两事件  $\Delta t = 0$ , 在  $K'$  系中不同时,  $\Delta t'$  可由洛伦兹变换求得.

解: 设  $K'$  系相对于  $K$  系以速度  $v$  沿  $x$  轴正向运动. 在  $K$  系,  $t_1 = t_2$ ,  $\Delta x = 1 \text{ m}$ , 在  $K'$  系,  $\Delta x' = 2 \text{ m}$ . 由“长度收缩”效应可得

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

得  $K'$  相对于  $K$  的运动速度为  $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta x'}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} c$

两事件在  $K'$  系中的时间间隔为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \left| \frac{-\frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right| = \frac{1}{c} \sqrt{(\Delta x')^2 - (\Delta x)^2} = 5.77 \times 10^{-9} \text{ s}$$

**4-9.** 在  $K$  系中观察到的两事件发生在空间同一地点, 第二事件发生在第一事件以后  $2 \text{ s}$ . 在另一相对  $K$  系运动的  $K'$  系中观察到第二事件是在第一事件  $3 \text{ s}$  之后发生的, 求在  $K'$  系中测量两事件之间的位置距离.

分析:  $K$  系中两事件发生在同一地点, 其时间间隔是“固有时”,  $K'$  系中测得这两事件的时间间隔大于“固有时”.

解：设  $K'$  系相对于  $K$  系以速度  $v$  沿  $x$  轴正向运动。

$$\text{由“时间延缓”} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (1)$$

得  $K'$  系相对  $K$  系的运动速度为

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2} \quad (2)$$

由洛伦兹变换, 得  $K'$  系中两事件的空间间隔

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3)$$

将(1)、(2)式代入(3)式, 并  $\Delta x = 0$ , 得

$$\Delta x' = \frac{-v\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = -v\Delta t' = -c \sqrt{(\Delta t')^2 - (\Delta t)^2} = -6.71 \times 10^8 \text{ m}$$

在  $K'$  系中测量两事件的位置距离为  $6.71 \times 10^8 \text{ m}$ . 若  $K'$  系相对于  $K$  系以速度  $v$  沿  $x$  轴负向运动, 该距离值不变。

**4-10.**  $\pi^+$  介子是一不稳定粒子, 平均寿命是  $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$  (在它自己参考系中测量)。

(1) 如果此粒子相对于实验室以  $0.8c$  的速度运动, 那么实验室坐标系中测量的  $\pi^+$  介子寿命为多长?

(2)  $\pi^+$  介子在衰变前运动了多长距离?

分析：在  $\pi^+$  介子自己参考系中平均寿命是“固有时”，即在同一地点粒子产生和衰变两事件的时间间隔；在实验室参考系中测量的  $\pi^+$  介子寿命大于“固有时”，是在不同地点发生两事件的时间间隔。

解：在  $\pi^+$  介子参考系中, 固有时为  $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。

(1) 在实验室中观测到  $\pi^+$  介子的寿命为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.6 \times 10^{-8}}{\sqrt{1-0.8^2}} \text{ s} = 4.33 \times 10^{-8} \text{ s}$$

(2) 在实验室参考系中测量到  $\pi^+$  介子的飞行距离为

$$\Delta x = v\tau = 10.4 \text{ m}$$

**4-11.** 地球上一观察者, 看见一飞船 A 以速度  $2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$  从他身边飞过, 另一飞船 B 以速度  $2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  跟随 A 飞行。求：

(1) A 上的乘客看到 B 的相对速度；

(2) B 上的乘客看到 A 的相对速度.

分析: 本题为一维情况下的相对论速度变换问题. 应注意确定研究对象、K 和 K' 参考系, 从而确定已知条件的属性.

解: (1) 设地球为 K 系, 飞船 A 为 K' 系. 以飞船 B 为研究对象. 已知 K' 系相对 K 系的速度为

$$v = 2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

飞船 B 在 K 系中的速度为

$$u_x = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

飞船 B 在 K' 系中的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = -1.125 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(2) 设地球为 K 系, 飞船 B 为 K' 系. 以飞船 A 为研究对象.

已知 K' 系相对 K 系的速度为

$$v = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

飞船 A 在 K 系中的速度为

$$u_x = 2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$$

飞船 A 在 K' 系中的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = 1.125 \times 10^8 \text{ m/s}$$

4-12. 两艘宇宙飞船相对某遥远的恒星以  $0.8c$  的速率向相反方向移开. 试用速度变换法则证明, 两飞船的相对速度是  $\frac{1.6}{1.64}c$ , 并与伽利略变换所得的结果进行比较.

分析: 确定 K、K' 参考系和研究对象后, 运用速度变换法则证明. 注意本题中两飞船的运动方向相反.

解: 设恒星为 K 系, 飞船 A 为 K' 系, 并沿  $x$  轴正方向运动. 取飞船 B 为研究对象, 沿  $x$  轴负方向运动.

飞船 B 在 K' 系中的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{-0.8c - 0.8c}{1 + \frac{0.8^2 c^2}{c^2}} = -\frac{1.6}{1.64}c$$

命题得证.

根据伽利略速度变换, 飞船 B 在 K' 系中的速度为

$$u'_x = u_x - v = -0.8c - 0.8c = -1.6c$$

$|u'_x| > c$ , 这说明伽利略变换对高速运动的问题不再适用.

**4-13.** 一原子核以  $0.5c$  的速度离开一观察者而运动. 原子核在它运动方向上向前发射一电子, 该电子相对于核有  $0.8c$  的速度; 此原子核又向后发射了一光子指向观察者. 对静止观察者来讲,

(1) 电子具有多大的速度?

(2) 光子具有多大的速度?

**分析:** 确定  $K, K'$  参考系和研究对象后, 运用速度变换法则求解电子相对静止观察者的速度.

**解:** 设观测者为  $K$  系, 原子核为  $K'$  系.

(1) 以电子为研究对象, 则据题意可知, 电子在  $K'$  系中的速度为

$$u'_x = 0.8c$$

$K'$  相对  $K$  系的运动速度为

$$v = 0.5c$$

电子在  $K$  系中的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{(0.8 + 0.5)c}{1 + \frac{(0.8 \times 0.5)c^2}{c^2}} = 0.93c$$

(2) 根据光速不变原理, 光子的速度为  $c$ .

或者, 以光子为研究对象, 以  $u'_x = -c$  代入上式, 可得  $u_x = -c$ . 对静止观察者来讲, 光子以速率  $c$  沿  $x$  轴负方向运动, 即向着观察者运动.

**4-14.** 如一观察者测出电子质量为  $2m_0$ , 问电子速度为多少? ( $m_0$  为电子的静止质量.)

**分析:** 利用相对论的质速关系解题.

**解:** 由质速关系, 电子相对观察者运动速度为  $v$  时, 观察者测出的电子质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0$$

解得

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0.866c$$

**4-15.** 某人测得一静止棒长为  $l$ , 质量为  $m$ , 于是求得此棒线密度为  $\rho_l = \frac{m}{l}$ .

假定此棒以速度  $v$  在棒长方向上运动,此人再测棒的线密度应为多少,若棒在垂直长度方向上运动,它的线密度又为多少?

分析: 本题涉及两个相对论效应: 沿棒长方向运动时的“长度收缩”效应和运动物体的“质速关系”.

解: 设棒沿  $x$  轴放置, 棒相对观测者沿  $x$  轴运动.

(1) 棒长  $l$  是固有长度. 观察者测得棒在运动方向( $x$  轴)的长度为

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1)$$

运动质量为

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

则线密度为

$$\rho_l' = \frac{m'}{l'} = \frac{m}{l \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{\rho_l}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(2) 棒在垂直于长度的方向上(沿  $y$  轴或  $z$  轴)运动时, 观察者测得的长度不变. 即  $l'' = l$ , 但棒的质量即运动质量仍由(2)式所示. 所以, 线密度为

$$\rho_l'' = \frac{m''}{l''} = \frac{m}{l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho_l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## 2. 相对论动力学问题的计算

**4-16.** 设电子的速度为(1)  $1.0 \times 10^6$  m/s; (2)  $2.0 \times 10^8$  m/s, 试计算电子的动能各是多少? 如用经典力学公式计算电子动能又各为多少?

分析: 当电子的运动速度接近光速时, 经典力学公式不再适用. 注意相对论的动能表达式与经典力学的动能表达式是不同的.

解: 设  $v_1 = 1.0 \times 10^6$  m/s,  $v_2 = 2.0 \times 10^8$  m/s.

由相对论的动能表达式得

$$E_{k1} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = 4.55 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_{k2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = 27.9 \times 10^{-15} \text{ J}$$

用经典力学公式  $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$ , 得

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 = 4.55 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_0 v_2^2 = 18.2 \times 10^{-15} \text{ J}$$

计算表明,电子的速度为  $1.0 \times 10^6 \text{ m/s}$  时,用经典力学公式计算得到的电子动能,在很高精度上与由相对论的动能表达式计算结果一致,而当电子的速度为  $2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  时,两者差别较大.

**4-17.** 两个氦核组成质量数为 4、原子量为 4.0015 u 的氦核. 试计算氦核放出的结合能.

**分析:** 两个氦核组成氦核后,氦核的静质量小于两个氦核的静质量,这就是质量亏损. 根据相对论质能关系,系统的质量变化时必有相应的能量变化. 本题中,这一能量就是氦核放出的结合能.

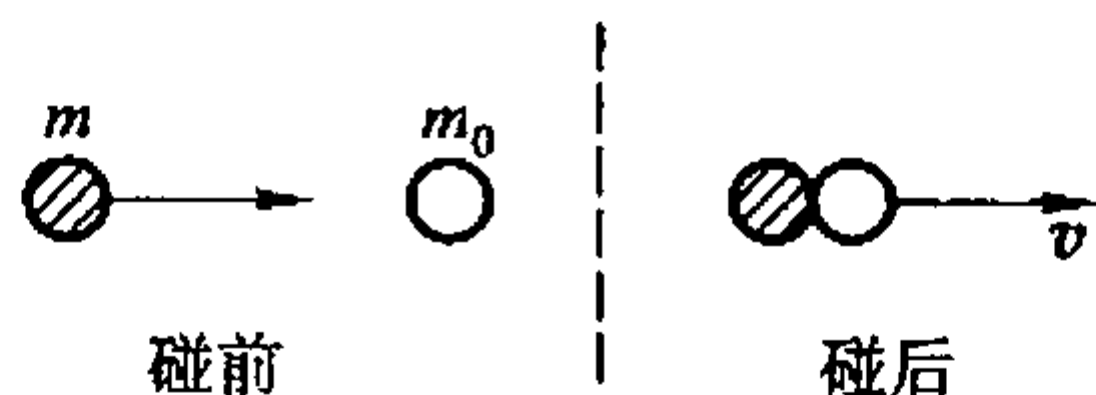
$$\begin{aligned} \text{解: } \Delta E &= (\Delta m) c^2 = (2m_{\text{He}} - m_{\text{He}}) c^2 \\ &= (2 \times 2.01355 \text{ u} - 4.0015 \text{ u}) c^2 \\ &= (2 \times 2.01355 - 4.0015) \times 1.66 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ &= 3.825 \times 10^{-12} \text{ J} = 23.88 \text{ MeV} \end{aligned}$$

**4-18.** 太阳由于向四面空间辐射能量,每秒损失了质量  $4 \times 10^9 \text{ kg}$ . 求太阳的辐射功率.

**分析:** 辐射功率即单位时间内的辐射能量,而辐射能量对应系统的质量亏损.

$$\text{解: } P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{(\Delta m) c^2}{t} = 4 \times 10^9 \times (3 \times 10^8)^2 \text{ W} = 3.6 \times 10^{26} \text{ W}$$

**4-19.** 如图所示,一个静止质量为  $m_0$ , 动能为  $5 m_0 c^2$  的粒子与另一个静止质量也为  $m_0$  的静止粒子发生完全非弹性碰撞. 碰撞后复合粒子的静止质量为  $m'_0$ , 并以速度  $v$  运动.



习题 4-19 图

(1) 碰撞前系统的总动量是多少?

(2) 碰撞前系统的总能量是多少?

(3) 复合粒子的速度  $v$  是多少?

(4) 给出静止质量为  $m'_0$  与  $m_0$  之间的关系.

**分析:** 在两粒子间的碰撞过程中,粒子系统在碰撞前后的总能量和总动量守恒. 利用系统的总能量和总动量守恒,以及各个粒子的相对论动量和能量关

系即可解题.

解: 根据运动粒子的总能量与动量间的关系

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \quad (1)$$

可知, 碰撞前运动粒子的动量为

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - (m_0c^2)^2} \quad (2)$$

其中, 总能量  $E$  为

$$E = E_k + m_0c^2 \quad (3)$$

式中  $E_k$  为运动粒子的动能.

(1) 设碰撞前系统内运动粒子的总能量为  $E_{10}$ , 据题意和(3)式可知

$$E_{10} = 5m_0c^2 + m_0c^2 = 6m_0c^2$$

由(2)式可知, 碰撞前系统内运动粒子的总动量  $p_{10}$  为

$$p_{10} = \frac{1}{c} \sqrt{E_{10}^2 - (m_0c^2)^2} = \sqrt{35}m_0c$$

由于碰撞前系统内另一粒子静止, 故  $p_{20} = 0$ .

所以, 碰撞前粒子系统的总动量为

$$p_0 = p_{10} + p_{20} = \sqrt{35}m_0c$$

(2) 碰撞前系统的总能量  $E_0$  应为两个粒子的总能量之和, 即

$$E_0 = E_{10} + E_{20} = 6m_0c^2 + m_0c^2 = 7m_0c^2$$

(3) 设碰撞后复合粒子的动量为  $p$ , 总能量为  $E$ , 质量为  $m$ , 运动速度为  $v$ . 根据动量守恒, 有

$$p = mv = p_0$$

根据总能量守恒, 有

$$E = mc^2 = E_0$$

所以,

$$v = \frac{p}{E}c^2 = \frac{p_0}{E_0}c^2 = \frac{\sqrt{35}m_0c}{7m_0c^2}c^2 = 0.85c$$

(4) 复合粒子的静止质量为  $m'_0$ , 由(1)式得

$$m'_0c^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2} = \sqrt{E_0^2 - (p_0c)^2} = \sqrt{14}m_0c^2$$

所以, 复合粒子的静止质量  $m'_0 = \sqrt{14}m_0$

由  $m'_0 > 2m_0$  可知, 碰撞前后粒子系统的静质量不守恒, 碰撞前运动粒子的部分动能转化为复合粒子的质量.

**4-20.** 质量为  $m_0$  的一个受激原子, 静止在参考系  $K$  中, 因发射一个光子而反冲, 原子的内能减少了  $\Delta E$ , 而光子的能量为  $h\nu$ . 试证:

$$h\nu = \Delta E \left( 1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2} \right)$$

分析：在受激原子发射一个光子后反冲的整个过程中，系统的总能量和总动量守恒。原子内能的减少量  $\Delta E$  对应原子静能之差。

解：设反冲原子的质量为  $m$ ，静止质量为  $m'$ ，运动能为  $mc^2$ ，反冲原子的速度为  $v$ 。

由能量守恒 
$$m_0 c^2 = h\nu + mc^2 \quad (1)$$

由动量守恒 
$$0 = p_{\text{原子}} + p_{\text{光子}} = -mv + \frac{h\nu}{c} \quad (2)$$

对反冲原子运用能量 - 动量关系，有

$$(mc^2)^2 = (mv)^2 c^2 + m'^2 c^4 \quad (3)$$

式中 
$$m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

原子内能的变化 
$$\Delta E = (m_0 - m') c^2 \quad (4)$$

将(1)、(2)两式代入(3)式，消去  $m$ ，得

$$(m_0^2 - m'^2) c^2 = 2m_0 h\nu$$

化简上式并利用(4)式，得

$$\Delta E (m_0 + m') = 2m_0 h\nu$$

即

$$h\nu = \frac{\Delta E}{2} \left( 1 + \frac{m'}{m_0} \right) = \Delta E \left( 1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right)$$

由结果可见，发射光子的能量小于原子内能的变化量  $\Delta E$  (原子静能之差)。其原因在于  $\Delta E$  除发射光子外，还有一部分转换为反冲原子的动能。

# 第五章

## 气体动理论

### 一、教学基本要求

1. 了解气体分子热运动的统计规律和统计研究方法,了解宏观量与微观量之间的区别与联系.
2. 掌握平衡状态概念,理想气体物态方程.
3. 理解压强、温度、内能概念,能量按自由度均分定理.
4. 理解麦克斯韦速率分布律,三种统计速率. 了解玻耳兹曼分布律.
5. 了解气体分子平均碰撞频率和平均自由程概念. 了解真实气体,范德瓦耳斯方程.

### 二、本章习题分类

1. 气体物态方程的应用
2. 统计方法
3. 理想气体内能、分子自由度的计算
4. 气体分子速率分布律的应用
5. 分子平均碰撞频率和平均自由程
6. 范德瓦耳斯方程的应用

### 三、习题分析和解答

1. 气体物态方程的应用

**5-1.** 有一水银气压计,当水银柱为 0.76 m 高时,管顶离水银液面为 0.12 m. 管的截面积为  $2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . 当有少量氮气混入水银管内顶部,水银柱高下降为 0.60 m. 此时温度为  $27^\circ\text{C}$ ,试计算有多少质量的氮气在管顶?(氮气的摩尔质量为  $0.004 \text{ kg/mol}$ , 0.76 m 水银柱压强为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ .)

**分析:** 水银气压计顶部混入氮气后,使水银柱高度下降. 将氮气视作理想

气体,运用理想气体物态方程求得混入水银管内的氦气质量.

解: 设管内氦气的压强为  $p$ , 管的截面为  $S$ , 水银的密度为  $\rho$ . 已知大气压强  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $l_1 = 0.76 \text{ m}$  和  $l_2 = 0.60 \text{ m}$  分别为氦气混入前、后的水银柱高度.

氦气混入前, 由水银柱受力平衡, 有  $p_0 S = \rho g S l_1$

可得水银密度  $\rho = \frac{p_0}{g l_1}$

氦气混入后, 由水银柱受力平衡, 有

$$p_0 S = p S + \rho g S l_2$$

可得  $p = \rho g (l_1 - l_2) = \frac{p_0}{l_1} (l_1 - l_2)$

氦气占据体积  $V = V_0 + \Delta V = S(l_0 + l_1 - l_2)$

式中  $l_0 = 0.12 \text{ m}$ .

由理想气体物态方程  $pV = \frac{m}{M} RT$

$$\begin{aligned} \text{得 } m &= M \frac{pV}{RT} = M \frac{p_0 S (l_1 - l_2) (l_0 + l_1 - l_2)}{l_1 RT} \\ &= 0.004 \times \frac{1.33 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-4} \times (0.76 - 0.60) \times (0.12 + 0.76 - 0.60)}{0.76 \times 8.31 \times (273 + 27)} \text{ kg} \\ &= 1.92 \times 10^{-6} \text{ kg} \end{aligned}$$

**5-2.** 一体积为  $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的容器中, 含有  $4.0 \times 10^{-5} \text{ kg}$  氮气和  $4.0 \times 10^{-5} \text{ kg}$  氢气, 它们的温度为  $30^\circ\text{C}$ , 试求容器中混合气体的压强.

分析: 由道尔顿分压定律可知, 平衡状态下混合气体(内部无化学反应)的总压强为各组分理想气体分压强之和.

解: 设氮、氢气体分压强分别为  $p_1$  和  $p_2$ . 由理想气体物态方程, 得

$$p_1 V = \frac{m_1 RT}{M_{\text{He}}}, \quad p_2 V = \frac{m_2 RT}{M_{\text{H}_2}}$$

总压强

$$p = p_1 + p_2 = \frac{RT}{V} \left( \frac{m_1}{M_{\text{He}}} + \frac{m_2}{M_{\text{H}_2}} \right) \approx 7.56 \times 10^4 \text{ Pa}$$

**5-3.** 一个封闭的圆筒, 内部被导热的、不漏气的可移动活塞隔为两部分. 最初, 活塞位于筒中央, 则圆筒两侧的长度  $l_1 = l_2$ . 当两侧各充以  $T_1, p_1$  与  $T_2, p_2$  的相同气体后, 问平衡时活塞将在什么位置上(即  $l_1/l_2$  是多少)? 已知  $p_1 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_1 = 680 \text{ K}$ ,  $p_2 = 2.026 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_2 = 280 \text{ K}$ .

分析：在活塞两侧充入相同的气体并达到平衡状态时，有相同的温度和压强。

解：设活塞两侧充入气体的摩尔质量为  $M$ ，左侧气体的质量为  $m_1$ ，体积为  $V_1$ ，右侧气体的质量为  $m_2$ ，体积为  $V_2$ ，活塞面积为  $S$ 。据题意，有  $V_1 = V_2$ 。设达到平衡状态时，活塞左侧气体的状态为  $(p_1, V_1, T_1)$ ，右侧气体的状态为  $(p_2, V_2, T_2)$ 。

根据理想气体物态方程，可有

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{m_1}{M} R = \frac{p V'_1}{T}$$

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{m_2}{M} R = \frac{p V'_2}{T}$$

可得

$$\frac{V'_1}{V'_2} = \frac{l'_1 S}{l'_2 S} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$$

所以，有

$$\frac{l'_1}{l'_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = \frac{7}{34}$$

$l'_1 < l'_2$ ，活塞移向左侧。

## 2. 统计方法

5-4. 20 个质点速率如下：2 个具有速率  $v_0$ ，3 个具有速率  $2v_0$ ，5 个具有速率  $3v_0$ ，4 个具有速率  $4v_0$ ，3 个具有速率  $5v_0$ ，2 个具有速率  $6v_0$ ，1 个具有速率  $7v_0$ 。试计算：

- (1) 平均速率；
- (2) 方均根速率；
- (3) 最概然速率。

解：根据  $\bar{v}$ 、 $\sqrt{v^2}$  和  $v_p$  的定义，可得

$$\begin{aligned} (1) \quad \bar{v} &= \frac{\sum_{i=1}^n v_i N_i}{N} \\ &= \frac{2(v_0) + 3(2v_0) + 5(3v_0) + 4(4v_0) + 3(5v_0) + 2(6v_0) + 7(v_0)}{20} \\ &= 3.65v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sqrt{v^2} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 N_i}{N}} = \sqrt{\frac{v_0^2 [2 + 3(2)^2 + 4(4)^2 + 3(5)^2 + 2(6)^2 + 7^2]}{20}} \\ &= 3.99v_0 \end{aligned}$$

(3) 20 个质点中出现速率为  $3v_0$  的概率最大, 有 5 个. 所以,  $v_p = 3v_0$ .

### 3. 理想气体内能、分子自由度的计算

5-5. 计算在 300 K 温度下氢、氧和水银蒸气分子的方均根速率和平均平动动能.

解:  $M_{\text{H}_2} = 2 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,  $M_{\text{O}_2} = 32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,  $M_{\text{Hg}} = 0.201 \text{ kg/mol}$

(1) 方均根速率

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$\sqrt{v_{\text{H}_2}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{H}_2}}} = 1934 \text{ m/s}$$

$$\sqrt{v_{\text{O}_2}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{O}_2}}} = 483 \text{ m/s}$$

$$\sqrt{v_{\text{Hg}}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{Hg}}}} = 193 \text{ m/s}$$

(2) 温度相同, 三种气体的平均平动动能相同.

$$\bar{w} = \frac{3}{2}kT = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

5-6. 求压强为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、质量为  $2 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 、容积为  $1.54 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的氧气分子的平均平动动能.

分析: 气体分子的平均平动动能是与分子质心平动自由度相关联的动能, 与热力学温度成正比. 分子质心平动自由度  $i = 3$ , 利用理想气体物态方程求出氧气处平衡态的温度  $T$ , 即可求解.

解: 由理想气体物态方程  $pV = \frac{m}{M}RT$

得氧气处平衡态的温度  $T = pV \frac{M}{Rm} = 3 \times 10^2 \text{ K}$

质心平动自由度  $i = 3$ , 所以平均平动动能

$$\bar{w} = \frac{3}{2}kT = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

5-7. 容器内贮有 1 mol 的某种气体, 今从外界输入  $2.09 \times 10^2 \text{ J}$  热量, 测得其温度升高 10 K, 求该气体分子的自由度.

分析: 容器的容积不变时, 从外界输入的热量全部转化为理想气体分子内能的增量. 理想气体的内能是温度  $T$  的单值函数, 并按自由度均分.

解：设气体分子的自由度为  $i$ 。外界输入的热量  $Q$  全部转化为理想气体分子内能的增量，即

$$Q = \Delta E$$

温度为  $T$  时，1 mol 理想气体的内能为  $E = \frac{i}{2}RT$

内能的增量为  $\Delta E = \frac{i}{2}R\Delta T$

得气体分子的自由度  $i = \frac{2Q}{R\Delta T} = 5$

该气体分子是双原子分子。

5-8. 水蒸气分解为同温度的氢气和氧气，即  $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \frac{1}{2}\text{O}_2$ ，也就是 1 mol 的水蒸气可分解成同温度的 1 mol 氢气和  $\frac{1}{2}$  mol 氧气，当不计振动自由度时，求此过程中内能的增量。

分析：将水蒸气与分解后的氢气和氧气都视为理想气体。理想气体的分子数一定时，其内能仅与温度有关。水蒸气分解为同温度的氢气和氧气，由于分子数增多而使内能增加。

水分子中氢和氧原子的结合相当稳定，将水蒸气分解为氢气和氧气的过程需要外界输入能量，这部分能量转换为系统增加的内能。

氢气是一种清洁能源，利用太阳能把水分解为燃料电池所必需的氧和氢，是“人类的理想技术之一”。

解：水蒸气的自由度  $i = 6$ ，温度为  $T$  时 1 mol 水蒸气的内能为

$$E_1 = \frac{6}{2}RT = 3RT$$

1 mol 氢气 ( $i = 5$ ) 和 0.5 mol 氧气 ( $i = 5$ ) 在温度为  $T$  时的内能为

$$E_2 = \frac{5}{2}RT + \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}RT = \frac{15}{4}RT$$

内能的增量为  $\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{3}{4}RT$

5-9. 1 mol 氢气，在温度为  $27^\circ\text{C}$  时。它的分子的平动动能和转动动能各为多少？

分析：刚性双原子分子的平动自由度为 3，转动自由度为 2。根据能量按自由度均分定理，分子的每一自由度都对应一份相同的能量  $\frac{1}{2}kT$ 。对理想气体，其

内能为分子的平动动能和转动动能之和.

解: 氢气为双原子分子.

分子的平均平动动能为

$$\bar{w} = \frac{3}{2}kT = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

1 mol 氢气分子的平动动能为

$$\frac{3}{2}RT = 3.74 \times 10^3 \text{ J}$$

分子的平均转动动能为

$$\frac{2}{2}kT = 4.14 \times 10^{-21} \text{ J}$$

1 mol 氢气分子的转动动能为

$$\frac{2}{2}RT = 2.49 \times 10^3 \text{ J}$$

1 mol 氢气分子的内能为平动动能和转动动能之和, 即

$$E_0 = \frac{5}{2}RT = 6.23 \times 10^3 \text{ J}$$

#### 4. 气体分子速率分布律的应用

**5-10.** 已知某理想气体分子的方均根速率为 400 m/s. 当其压强为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  时, 求气体的密度.

分析: 利用分子的方均根速率表达式和理想气体的物态方程求解.

解: 由方均根速率  $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ , 得  $\frac{RT}{M} = \frac{1}{3}v^2$

由理想气体的物态方程

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

可得

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{3p}{v^2} = \frac{3 \times 1.013 \times 10^5}{400^2} \text{ kg/m}^3 \\ &= 1.9 \text{ kg/m}^3 = 0.0019 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

**5-11.** 求速率大小在  $v_p$  与  $1.01 v_p$  之间的气体分子占总分子数的百分率.

分析: 在某一速率区间, 分布函数  $f(v)$  曲线下的面积, 表示分子速率在该速率区间内的分子数占总分子数的百分比. 速率区间很小时, 这个百分比可近似为矩形面积  $f(v) \Delta v = \frac{\Delta N}{N}$ , 函数值  $f(v)$  为矩形面积的高, 本题中可取为  $f(v_p)$ . 利

用  $v_p$  改写麦克斯韦速率分布律, 可进一步简化计算.

解: 
$$\frac{\Delta N}{N} = f(v) \Delta v$$

因 
$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

用  $v_p$  改写  $f(v) \Delta v$ , 有

$$f(v) \Delta v = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \Delta v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{v}{v_p} \right)^2 e^{-\left( \frac{v}{v_p} \right)^2} \left( \frac{\Delta v}{v_p} \right)$$

令 
$$W = \frac{v}{v_p}, \quad \Delta W = \frac{\Delta v}{v_p}$$

当  $v = v_p$  时,  $W = W_p = 1$ ,  $\Delta v = 0.01v_p$  时,  $\Delta W = \Delta W_p = 0.01$ .

所以, 在  $v_p \rightarrow 1.01v_p$  间隔内的分子数, 占总分子数的百分数为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= f(v_p) \Delta v = f(W_p) \Delta W_p = \frac{4}{\sqrt{\pi}} W_p^2 e^{-W_p^2} \Delta W_p \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \times 0.01 = 0.83\% \end{aligned}$$

5-12. 设  $N$  个粒子系统的速率分布函数为

$$dN_v = K dv \quad (v_0 > v > 0, K \text{ 为常量})$$

$$dN_v = 0 \quad (v > v_0)$$

- (1) 画出分布函数图;
- (2) 用  $N$  和  $v_0$  定出常量  $K$ ;
- (3) 用  $v_0$  表示出算术平均速率和方均根速率.

分析: 速率分布函数应满足归一化条件, 即  $\int_0^\infty f(v) dv = 1$ , 由此可确定分布函数的归一化常数.

解: (1) 设速率分布函数为  $f(v)$ , 应有  $\frac{dN_v}{N} = f(v) dv$ , 据题意, 有

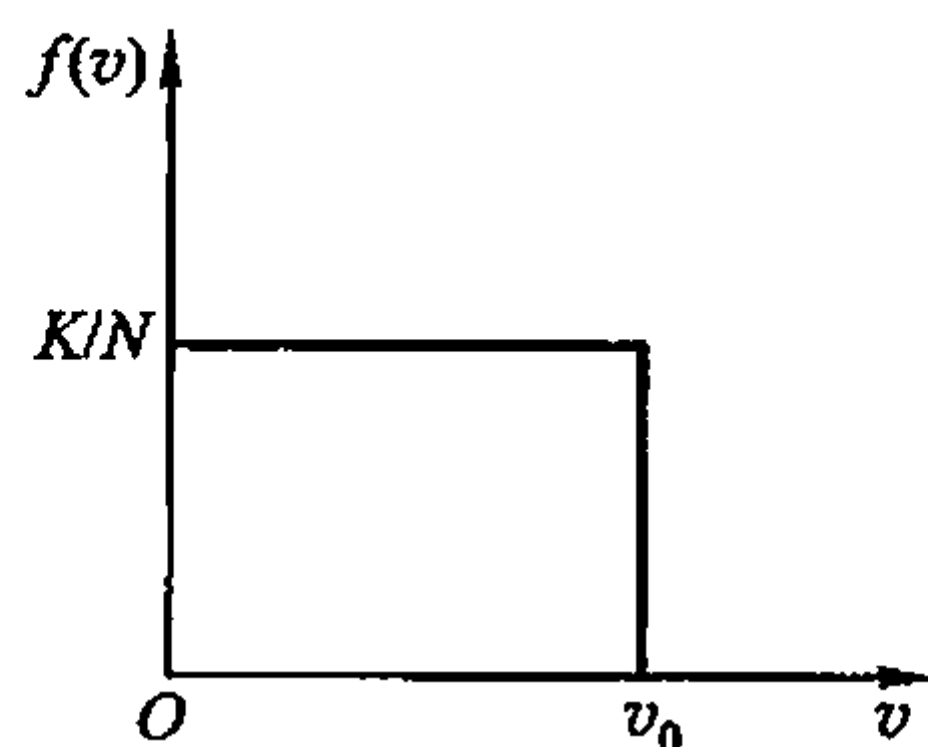
$$f(v) = \frac{dN_v}{N dv} = \begin{cases} K/N & (v_0 > v > 0) \\ 0 & (v > v_0) \end{cases}$$

分布函数  $f(v)$  如解图 5-12 所示.

(2) 按归一化条件, 有

$$\int_0^{v_0} f(v) dv = \int_0^{v_0} \frac{K}{N} dv = 1$$

得归一化常数 
$$K = \frac{N}{v_0}$$



解图 5-12

所以,速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} 1/v_0 & (v_0 > v > 0) \\ 0 & (v > v_0) \end{cases}$$

(3) 算术平均速率为

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{v_0} v \frac{1}{v_0} dv = \frac{v_0}{2}$$

方均根速率为  $\sqrt{\overline{v^2}} = \left[ \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_0^{v_0} v^2 \frac{1}{v_0} dv \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}$

**5-13.** 导体中自由电子的运动类似于气体分子的运动. 设导体中共有  $N$  个自由电子. 电子气中电子最大速率  $v_F$  叫做费米速率. 电子速率在  $v$  与  $v + dv$  之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \frac{4\pi v^2 A dv}{N} & (v_F > v > 0) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases}$$

式中  $A$  为常量.

(1) 由归一化条件求  $A$ ;

(2) 证明电子气中电子的平均动能  $\bar{w} = \frac{3}{5} \left( \frac{1}{2} m_e v_F^2 \right) = \frac{3}{5} E_F$ , 此处  $E_F$  叫做费米能.

解: (1) 由归一化条件

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = \int_0^{v_F} \frac{4\pi v^2 A dv}{N} = 1$$

得

$$A = \frac{3N}{4\pi v_F^3}$$

(2) 平均动能 
$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{2} m_e \overline{v^2} = \frac{1}{2} m_e \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv \\ &= \frac{1}{2} m_e \int_0^{v_F} \frac{4\pi v^2 A dv}{N} = \frac{3}{5} \left( \frac{1}{2} m_e v_F^2 \right) = \frac{3}{5} E_F \end{aligned}$$

**5-14.** 求氢气在 300 K 时分子速率在  $v_p - 10 \text{ m/s}$  与  $v_p + 10 \text{ m/s}$  之间的分子数所占百分率.

分析: 参见题 5-11 的分析. 本题中速率区间相对  $v_p$  对称,  $\Delta v = 20 \text{ m/s}$ . 在以  $v_p$  为中心的速率区间  $\Delta v$  内的分子数占总分子数的百分比, 可近似为矩形面积  $f(v_p) \Delta v = \frac{\Delta N}{N}$ .

解：在温度  $T = 300 \text{ K}$  时，氢气的最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = 1597 \text{ m/s}$$

利用  $v_p$  改写麦克斯韦速率分布律，可得

$$f(v_p) \Delta v = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v_p^2}{2kT}} v_p^2 \Delta v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \left( \frac{\Delta v}{v_p} \right)$$

所以，速率在  $v_p - 10 \text{ m/s}$  到  $v_p + 10 \text{ m/s}$  区间内的分子数占总分子数的百分比为

$$\frac{\Delta N}{N} = f(v_p) \Delta v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \left( \frac{20}{1597} \right) = 1.04 \%$$

**5-15.** 求上升到什么高度处，大气压强减到地面的 75 %。设空气的温度为  $0^\circ \text{C}$ ，空气的摩尔质量为  $0.0289 \text{ kg/mol}$ 。

分析：气体分子在重力场中按高度的分布满足玻尔兹曼分布律。在等温条件下，理想气体的压强随高度变化。

解：由  $p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} = 0.75p_0$

可得  $h = -\frac{RT}{Mg} \ln \frac{p}{p_0} = 2.31 \text{ km}$

**5-16.** 当地面上的气压为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、温度为  $0^\circ \text{C}$  时，求下面所给高度处的压力（假定可以不考虑因高度而引起的温度改变）。

- (1)  $500 \text{ m}$ ;
- (2)  $4000 \text{ m}$ ;
- (3)  $20 \text{ km}$ .

解：由  $p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$ ，式中  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ， $T = 273 \text{ K}$ ，空气  $M = 0.0289 \text{ kg/mol}$ ，可得

(1)  $h_1 = 500 \text{ m}$  时，

$$p_1 = 1.013 \times 10^5 \times \exp\left(-\frac{0.0289 \times 9.8 \times 500}{8.31 \times 273}\right) \text{ Pa} = 9.51 \times 10^4 \text{ Pa}$$

(2)  $h_2 = 4000 \text{ m}$  时，

$$p_2 = 1.013 \times 10^5 \times \exp\left(-\frac{0.0289 \times 9.8 \times 4000}{8.31 \times 273}\right) \text{ Pa} = 6.15 \times 10^4 \text{ Pa}$$

(3)  $h_3 = 20 \text{ km}$  时，

$$p_3 = 1.013 \times 10^5 \times \exp\left(-\frac{0.0289 \times 9.8 \times 2 \times 10^4}{8.31 \times 273}\right) \text{ Pa} = 8.32 \times 10^3 \text{ Pa}$$

## 5. 分子平均碰撞频率和平均自由程

**5-17.** 无线电所用的真空管真空度为  $1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$ , 试求在  $27^\circ\text{C}$  时单位体积中的分子数及分子平均自由程. 设分子的有效直径为  $3.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

解: 根据理想气体物态方程  $p = nkT$

可得气体分子数密度  $n = \frac{p}{kT} = 3.21 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$

分子的平均自由程  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 7.79 \text{ m}$

**5-18.** 设氮分子的有效直径为  $10^{-10} \text{ m}$ .

(1) 求氮气在标准状态下的平均碰撞次数;

(2) 如果温度不变, 气压降到  $1.33 \times 10^{-4} \text{ Pa}$ , 则平均碰撞次数又为多少?

分析: 气体分子处于平衡状态时, 其平均碰撞次数与分子数密度和分子的平均速率有关. 温度一定时, 平均碰撞次数正比于压强.

解: 标准状态为  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_0 = 273 \text{ K}$ , 氮气的摩尔质量  $M = 0.028 \text{ kg/mol}$ .

$$(1) \bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 p}{kT} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = 4d^2 p N_A \sqrt{\frac{\pi}{MRT}} = 5.43 \times 10^8 / \text{s}$$

(2)  $p = 1.33 \times 10^{-4} \text{ Pa}$ ,  $T = T_0 = 273 \text{ K}$  时,

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v} = 4d^2 p N_A \sqrt{\frac{\pi}{MRT}} = 0.71 / \text{s}$$

**5-19.** 在温度为  $0^\circ\text{C}$  和压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  下, 空气密度是  $1.293 \text{ kg/m}^3$ ,  $\bar{v} = 4.6 \times 10^2 \text{ m/s}$ ,  $\bar{\lambda} = 6.4 \times 10^{-8} \text{ m}$ , 求黏度.

解: 气体的黏度

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} = \frac{1}{3} \times 1.293 \times 6.4 \times 10^{-8} \times 4.6 \times 10^2 \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ &\approx 1.27 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

**5-20.** 由实验测定在标准状态下, 氧气的扩散系数为  $1.87 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , 根据该数据计算氧分子的平均自由程和分子的有效直径.

解: 气体的扩散系数为  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$ , 算术平均速率为  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ , 得

$$\bar{\lambda} = \frac{3D}{\bar{v}} = 3D \sqrt{\frac{\pi M_{\text{O}_2}}{8RT}} = 1.32 \times 10^{-7} \text{ m}$$

由分子的平均自由程  $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$  可得分子的有效直径为

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi \lambda p}} = 2.52 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

## 6. 范德瓦耳斯方程的应用

**5-21.** 设有遵守范德瓦耳斯方程的 1 mol 气体, 试建立起临界点温度与压强、体积之间的关系.

**分析:** 在  $p-V$  图上, 范德瓦耳斯等温线的拐点对应临界点. 根据拐点的性质, 求出常数  $a$  和  $b$  与等温线拐点处的  $p_K$  和  $V_K$  间的关系, 代回范德瓦耳斯方程即可建立起  $p_K$ 、 $V_K$  和  $T_K$  间的关系.

**解:** 1 mol 物质的临界等温线方程为

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT_K$$

式中  $V_m$  为 1 mol 气体可被压缩的体积,  $T_K$  为临界温度.

在拐点处, 要求上述方程满足条件:

$$\left.\frac{dp}{dV_m}\right|_{V_K} = 0 \quad \text{和} \quad \left.\frac{d^2p}{dV_m^2}\right|_{V_K} = 0$$

将临界等温线方程分别对  $V_m$  求一阶和二阶导数, 并令其为零, 建立起两个方程. 在这两个方程中,  $p = p_K$ ,  $V = V_K$ , 并有  $\frac{dp}{dV_m} = 0$ ,  $\frac{d^2p}{dV_m^2} = 0$ , 将  $a$  和  $b$  作为未知数, 可解得

$$a = 3V_K^2 p_K, \quad b = \frac{1}{3} V_K$$

代回临界的范德瓦耳斯等温线方程, 得

$$p_K V_K = \frac{3}{8} RT_K$$

**5-22.**  $\text{CO}_2$  的临界温度为  $31^\circ\text{C}$ , 临界压强为  $73 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 求 1 mol 的  $\text{CO}_2$  的临界体积.

**解:**  $T_K = 273 + 31 = 304 \text{ K}$ ,  $p_K = 73 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 利用上题结果,

可得

$$V_K = \frac{3RT_K}{8p_K} = 1.30 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

**5-23.**  $m = 10^{-3} \text{ kg}$  的氮气, 体积从  $0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  增大到  $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ . 求氮

分子间引力所作的功. 已知氮的  $a = 1.408 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$ .

分析: 范德耳斯方程考虑了气体分子之间的引力作用, 表现为内压强  $p_i = \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V_m^2}$ , 按功的定义, 即可求得分子间引力所作的功.

解: 氮分子间引力所作的功为

$$\begin{aligned} A_i &= - \int_{V_1}^{V_2} p_i dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2} dV = - \frac{m^2 a}{M^2} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \\ &= -0.323 \text{ J} \end{aligned}$$

5-24. 已知氮的临界压强  $p_K = 3.4 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $V_K = 0.9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$ , 求它的范德瓦耳斯修正量  $a$  及  $b$ .

解: 由题 5-21 已知,

$$a = 3V_K^2 p_K = 8.26 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^4/\text{mol}^2$$

$$b = \frac{1}{3} V_K = 3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}.$$

# 第六章

## 热力学基础

### 一、教学基本要求

1. 理解热力学第零定律,掌握热力学第一定律,掌握在典型过程中功、热量、内能改变量的计算方法.
2. 掌握简单循环过程的热机效率或制冷系数的计算方法.
3. 了解可逆过程和不可逆过程,了解卡诺定理.
4. 理解热力学第二定律及其统计意义. 理解熵增加原理和熵的玻耳兹曼表达式.

### 二、本章习题分类

1. 热力学第一定律的应用
2. 循环过程以及热机效率和制冷系数的计算
3. 热力学第二定律的应用
4. 熵的计算

### 三、习题分析和解答

#### 1. 热力学第一定律的应用

**6-1.** 1 mol 单原子理想气体从 300 K 加热至 350 K, (1) 容积保持不变; (2) 压强保持不变;问在这两过程中各吸收了多少热量? 增加了多少内能? 对外作了多少功?

**分析:** 理想气体的内能是温度  $T$  的单值函数,内能的增量  $\Delta E$  由始、末状态温度的增量  $\Delta T$  决定,与经历的准静态过程无关. 根据热力学第一定律可知,在等体过程中,系统从外界吸收的热量全部转变为内能的增量,在等压过程中,系统从外界吸收的热量部分转变为内能的增量,同时对外界作功.

**解:** 单原子理想气体自由度  $i=3$ ,  $C_{V,m} = \frac{3}{2}R$ .

(1) 等体升温过程:  $A_v = 0$

$$\Delta E = Q_v = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = C_{v,m}\Delta T = 6.23 \times 10^2 \text{ J}$$

(2) 等压膨胀过程:  $\Delta E = C_{v,m}(T_2 - T_1) = 6.23 \times 10^2 \text{ J}$

$$A_p = p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) = 4.16 \times 10^2 \text{ J}$$

$$Q_p = \Delta E + A = 1.039 \times 10^3 \text{ J}$$

或者  $Q_p = C_{p,m}\Delta T = \left(\frac{3}{2} + 1\right)R(T_2 - T_1) = 1.039 \times 10^3 \text{ J}$

6-2. 在 1 g 氮气中加进 1 J 的热量, 若氮气压强并无变化. 它的初始温度为 200 K, 求它的温度升高多少?

分析: 根据热力学第一定律, 氮气在等压过程中吸收的热量转化为对外作的功和内能的增量. 利用定压热容可直接求得理想气体在等压过程中温度的变化.

解: 氮气自由度  $i = 3$ ,  $M = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,  $C_{p,m} = \frac{5}{2}R = 2.5R$ .

由

$$Q_p = \frac{m}{M}C_{p,m}(T_2 - T_1)$$

得

$$\Delta T = \frac{Q_p M}{m C_{p,m}} = \frac{1 \times 4 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3} \times 2.5 \times 8.31} \text{ K} = 0.19 \text{ K}$$

6-3. 压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 体积为  $0.0082 \text{ m}^3$  的氮气, 从初始温度 300 K 加热到 400 K, 如加热时 (1) 体积不变; (2) 压强不变, 问各需热量多少? 哪一个过程所需热量大? 为什么?

分析: 利用过程的摩尔热容、理想气体的物态方程和热力学第一定律解题.

解: 氮气自由度  $i = 5$ ,  $C_{v,m} = \frac{5}{2}R$ ,  $C_{p,m} = \frac{7}{2}R$ . 设  $p_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V_1 = 0.0082 \text{ m}^3$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ .

(1) 等体过程中,  $A_v = 0$ , 由热力学第一定律和理想气体物态方程, 有

$$Q_v = \Delta E = \frac{m}{M}C_{v,m}\Delta T = \frac{p_1 V_1}{RT_1}C_{v,m}(T_2 - T_1) = 6.83 \times 10^2 \text{ J}$$

(2) 等压过程  $Q_p = \frac{m}{M}C_{p,m}\Delta T = \frac{p_1 V_1}{RT_1}C_{p,m}(T_2 - T_1) = 9.57 \times 10^2 \text{ J}$

可见

$$Q_p > Q_v$$

在两过程中, 始、末状态温度的变化  $\Delta T$  是相同的, 因此氮气内能的增量相同, 均为  $\Delta E = 6.83 \times 10^2 \text{ J}$ . 在等压膨胀过程中, 氮气吸收的热量  $Q_p$  除提高内能

外,还对外界做功为  $A_p = Q_p - \Delta E = 2.74 \times 10^2 \text{ J}$ , 而等体过程的  $A_v = 0$ .

**6-4.** 2 mol 氮气, 在温度为 300 K、压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  时, 等温地压缩到  $2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ . 求气体放出的热量.

**分析:** 理想气体在等温压缩过程中, 内能不变, 外界对系统作的功在量值上等于系统放出的热量.

**解:** 设  $p_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $p_2 = 2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ . 在等温过程中,  $\Delta E = 0$ . 由热力学第一定律, 得

$$Q_T = A_T = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = -3.46 \times 10^3 \text{ J}$$

“ $-$ ”号表示在氮气等温压缩的过程中, 向外界放出热量.

**6-5.** 质量为 1 kg 的氧气, 其温度由 300 K 升高到 350 K. 若温度升高是在下列 3 种不同情况下发生的: (1) 体积不变; (2) 压强不变; (3) 绝热. 问其内能改变各为多少?

**分析:** 理想气体内能的变化仅与温度的变化有关. 将氧气视作理想气体, 在三个不同的过程中, 由于温度的变化相同, 因此内能的变化也相同.

**解:** 氧气的自由度  $i = 5$ ,  $M = 32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .

$$\Delta E = \frac{m}{M} C_{v,m} (T_2 - T_1) = 3.25 \times 10^4 \text{ J}$$

**6-6.** 将 500 J 的热量传给标准状态下 2 mol 的氢.

(1) 若体积不变, 问此热量变为什么? 氢的温度变为多少?

(2) 若温度不变, 问此热量变为什么? 氢的压强及体积各变为多少?

(3) 若压强不变, 问此热量变为什么? 氢的温度及体积各变为多少?

**分析:** 利用热力学第一定律和理想气体的各等值过程特征解题.

**解:** 标准状态下 2 mol 氢气的宏观参量为  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_0 = 273 \text{ K}$ ,  $V_0 = 44.8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ . 氢气的自由度  $i = 5$ .

(1) 在等体过程中  $A_v = 0$ , 氢气吸收的热量全部转化为内能的增量.

所以 
$$Q_v = \Delta E = \frac{m}{M} C_{v,m} \Delta T = 2 \times \frac{5}{2} R \Delta T = 5 R \Delta T$$

得 
$$\Delta T = \frac{Q_v}{5R} = \frac{500}{5 \times 8.31} \text{ K} = 12 \text{ K}$$

$$T = T_0 + \Delta T = 273 \text{ K} + 12 \text{ K} = 2.85 \times 10^2 \text{ K}$$

(2) 在等温过程中  $\Delta E = 0$ , 氢气吸收的热量全部转化为对外界做功.

$$\text{由 } Q_T = A_T = \frac{m}{M}RT_0 \ln \frac{V}{V_0} = 2 \times 8.31 \times 273 \times \ln \frac{V}{V_0} = 4.537 \times 10^3 \times \ln \frac{V}{V_0}$$

$$\text{得 } V = V_0 e^{\frac{Q_T}{4.537 \times 10^3}} = 44.8 \times 10^{-3} \times e^{0.11} \text{ m}^3 = 0.05 \text{ m}^3$$

$$\text{由物态方程, 等温过程满足 } p_0 V_0 = pV$$

$$\text{所以 } p = \frac{V_0}{V} p_0 = \frac{44.8 \times 10^{-3}}{0.05} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 9.07 \times 10^4 \text{ Pa}$$

(3) 在等压过程中, 氢气吸收的热量一部分用于对外做功, 另一部分使氢气的内能增加.

$$\text{由 } Q_p = \frac{m}{M} C_{p,m} \Delta T = 2 \times \frac{7}{2} R \Delta T = 7R \Delta T$$

$$\text{得 } T = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{Q_p}{7R} = 273 \text{ K} + \frac{500}{7 \times 8.31} \text{ K} = 2.82 \times 10^2 \text{ K}$$

$$\text{由物态方程, 可有 } p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$$

$$\text{得 } V = V_0 + \Delta V = V_0 + \frac{1}{p} \frac{m}{M} R \Delta T = V_0 + \frac{2Q_p}{7p} = 4.6 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

**6-7.** 有一定量的理想气体, 其压强按  $p = \frac{c}{V^2}$  的规律变化,  $c$  是常量. 求气体从体积  $V_1$  增加到  $V_2$  所作的功. 该理想气体的温度是升高还是降低?

**分析:** 已知  $p(V)$  关系, 按功的定义  $A = \int p dV$  可求得功. 根据理想气体的物态方程和系统的初、末状态, 可确定该理想气体在体积增大的过程中, 温度是升高还是降低的.

$$\text{解: 系统对外做功 } A = \int p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V^2} dV = c \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

$$\text{由理想气体物态方程和 } p(V) \text{ 关系 } pV = \frac{m}{M} RT, \quad p = \frac{c}{V^2}$$

$$\text{得 } T(V) \text{ 关系为 } T = \frac{M}{m} \frac{c}{RV}$$

气体体积分别为  $V_1$  和  $V_2$  时的温度为

$$T_1 = \frac{M}{m} \frac{c}{RV_1}, \quad T_2 = \frac{M}{m} \frac{c}{RV_2}$$

$$\text{即 } \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

因为  $V_1 < V_2$ , 所以  $T_2 < T_1$ , 即气体的温度会降低.

6-8. 1 mol 氢, 在压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 温度为  $20^\circ\text{C}$  时, 其体积为  $V_0$ . 今使它经以下两个过程达到同一状态:

(1) 先保持体积不变, 加热使其温度升高到  $80^\circ\text{C}$ , 然后令它作等温膨胀, 体积变为原来的 2 倍;

(2) 先使它作等温膨胀至原体积的 2 倍, 然后保持体积不变, 加热到  $80^\circ\text{C}$ .

试分别计算以上两种过程中吸收的热量, 气体对外作的功和内能的增量, 并作出  $p-V$  图.

分析: 在  $p-V$  图中画出各过程曲线后, 根据热力学第一定律和理想气体物态方程求解.

解: 氢气的自由度  $i=5$ . 据题意, 在  $p-V$  图上表示的各过程曲线如解图 6-8 所示. 对各过程运用热力学第一定律  $Q = \Delta E + \int p dV$ , 有

(1)  $a \rightarrow b$  是等体过程,

$$Q_V = \Delta E = C_{V,m} \Delta T = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 60 \text{ J} \\ = 1.246 \times 10^3 \text{ J}$$

$b \rightarrow c$  是等温过程,

$$Q_T = A_T = RT_2 \ln \frac{2V_0}{V_0} = 8.31 \times (273 + 80) \times \ln 2 \text{ J} = 2.033 \times 10^3 \text{ J}$$

所以, 在  $a \rightarrow b \rightarrow c$  过程中, 氢气吸收的热量为

$$Q_1 = Q_V + Q_T = 1.246 \text{ J} + 2.033 \text{ J} = 3.279 \times 10^3 \text{ J}$$

对外界做功为

$$A_1 = A_T = 2.033 \times 10^3 \text{ J}$$

内能的增量为

$$\Delta E_1 = 1.246 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 在  $a \rightarrow d \rightarrow c$  过程中, 氢气先作等温膨胀过程, 然后作等体升压过程.

吸收的热量为  $Q_2 = Q_T + Q_V = RT_1 \ln \frac{2V_0}{V_0} + C_{V,m} \Delta T = 2.933 \times 10^3 \text{ J}$

在等温膨胀过程中, 对外界做功为

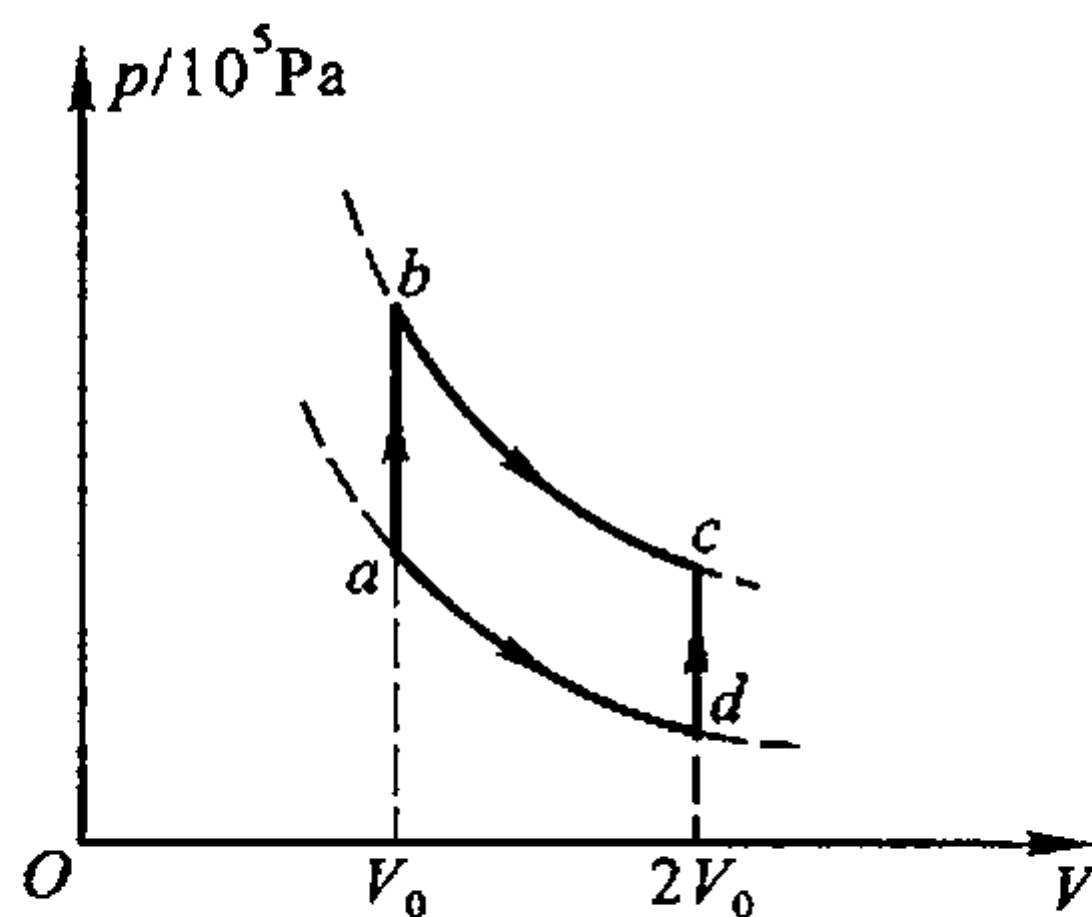
$$A_2 = A_T = RT_1 \ln \frac{2V_0}{V_0} = 1.687 \times 10^3 \text{ J}$$

在等体升压过程中, 内能的增量为

$$\Delta E_2 = C_{V,m} \Delta T = C_{V,m} (T_2 - T_1) = 1.246 \times 10^3 \text{ J}$$

虽然氢气所经历的过程不同, 但由于始、末状态的温差  $\Delta T$  相同, 因而内能的增量  $\Delta E$  相同,  $Q$  和  $A$  则与过程有关.

6-9. 理想气体作绝热膨胀, 由初状态  $(p_0, V_0)$  至末状态  $(p, V)$ .



解图 6-8

(1) 试证明在此过程中气体所作的功为

$$A = \frac{p_0 V_0 - pV}{\gamma - 1}$$

(2) 设  $p_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $V_0 = 0.001 \text{ m}^3$ ,  $p = 2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V = 0.00316 \text{ m}^3$ , 气体的  $\gamma = 1.4$ , 试计算气体所作的功为多少焦耳?

分析: 利用绝热过程方程  $pV^\gamma = C$  计算绝热过程的功.

解: (1) 绝热过程满足  $p_0 V_0^\gamma = pV^\gamma = C$

在由初状态  $(p_0, V_0)$  至末状态  $(p, V)$  的绝热膨胀过程中, 理想气体对外界做功

$$\begin{aligned} A &= \int p dV = \int_{V_0}^V \frac{p_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_0 V_0^\gamma}{(-\gamma + 1)} \frac{1}{V^{\gamma-1}} \Big|_{V_0}^V = \frac{p_0 V_0^\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{V_0^{\gamma-1}} - \frac{1}{V^{\gamma-1}} \right) \\ &= \frac{p_0 V_0 - pV}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

(2) 代入数据, 得  $A = 9.20 \times 10^2 \text{ J}$

**6-10.** 在一密闭的抽空气缸中, 有个劲度系数为  $k$  的弹簧, 下面吊着一个质量不计且没有摩擦的滑动活塞, 如图所示. 弹簧下活塞的平衡位置位于气缸的底部. 当活塞下面的空间引进一定量的摩尔定容热容为  $C_{V,m}$  的理想气体时, 活塞上升到  $h$ , 如图示. 弹簧作用在活塞上的力正比于活塞的位移. 如果该气体从原来的温度  $T$  升高到  $T_1$  并吸热  $Q$ , 问活塞所在的高度  $h'$  等于多少?

分析: 在密闭抽空的气缸中, 活塞只受弹性力和重力作用, 由于活塞的质量不计, 因此当活塞位于气缸底部时, 弹簧实际处于原长状态. 当充入理想气体后, 活塞上升, 弹簧被压缩, 弹性力的大小正比于弹簧的被压缩量. 在  $h$  高度, 活塞所受气体的压力和弹性力相平衡.

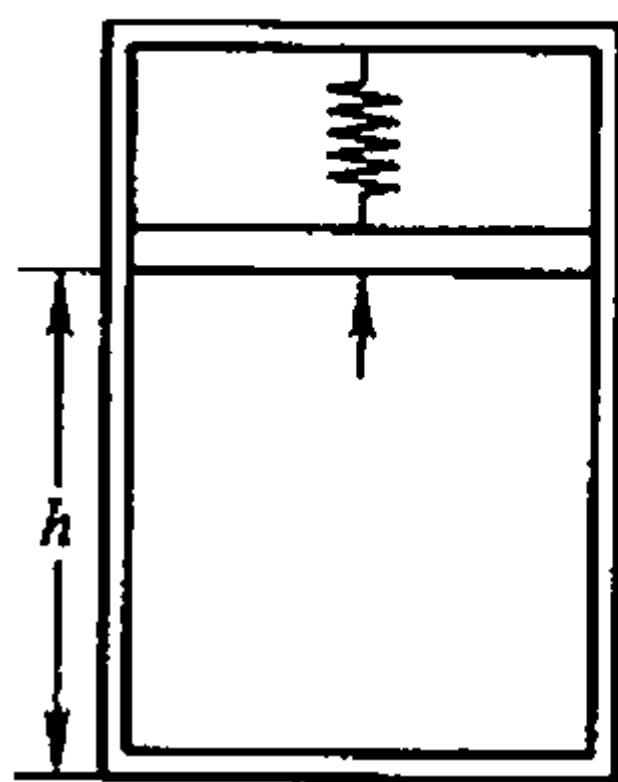
在理想气体吸收热量  $Q$ , 温度升高, 内能增加的过程中, 体积膨胀推动活塞做功, 使之上升到  $h'$ . 由于活塞与气缸壁无摩擦, 在这个做功的过程中, 气体对活塞的压力与弹簧对活塞的弹性力始终保持平衡, 是个准静态过程. 据此可求出压强  $p$ , 进而得到气体作的功. 利用热力学第一定律和理想气体物态方程, 得到  $h'$  和  $Q$  以及  $\Delta T$  的关系.

解: 取坐标  $Ox$  向上为正, 坐标原点位于气缸的底部. 设活塞的截面积为  $S$ . 在气体膨胀的过程中, 有

$$pS - F = 0$$

式中  $F$  是弹性力的大小, 为

$$F = kx$$



习题 6-10 图

所以

$$p = \frac{F}{S} = \frac{kx}{S}$$

气体推动活塞做功  $A = \int p dV = \frac{k}{S} \int_h^{h'} x dx = \frac{k}{2S} (h'^2 - h^2)$  (1)

气体温度升高,内能的增量为

$$\Delta E = \frac{m}{M} C_{v,m} (T_1 - T) \quad (2)$$

由热力学第一定律,在气体状态的变化过程中,有

$$Q = \Delta E + A = \frac{m}{M} C_{v,m} (T_1 - T) + \frac{k}{2S} (h'^2 - h^2) \quad (3)$$

设活塞在  $h$  位置时所受气体的压强为  $p_0$ ,弹性力为  $F_0$ . 有  $p_0 S - F_0 = 0, F_0 = kh$ . 这时理想气体的物态方程为

$$p_0 V_0 = p_0 Sh = kh^2 = \frac{m}{M} RT$$

即

$$\frac{m}{M} = \frac{kh^2}{RT}$$

代入(3)式,并解出  $h'$ ,得

$$h' = \sqrt{\frac{2Q}{k} + h^2 - \frac{2h^2}{RT} C_{v,m} (T_1 - T)}$$

**6-11.** 气缸内有单原子理想气体,若绝热压缩使其体积减半,问气体分子的平均速率变为原来速率的几倍? 若为双原子理想气体,又为几倍?

**解:** 设理想气体由初态  $(p_1, V_1, T_1)$  经绝热压缩过渡到达末态  $(p_2, V_2, T_2)$ , 其中  $V_2 = V_1/2$ . 由绝热过程方程  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$  可得

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}$$

理想气体分子的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \propto \sqrt{T}$

所以,平均速率之比为  $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$

(1) 单原子理想气体  $\gamma = \frac{5}{3}$ ,  $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = 2^{1/3} = 1.26$

(2) 双原子理想气体  $\gamma = \frac{7}{5}$ ,  $\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = 2^{1/5} = 1.15$

6-12. 一高压容器中含有未知气体,可能是  $N_2$  或  $Ar$ . 在 298 K 时取出试样,从  $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  绝热膨胀到  $6 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ,温度降到 277 K. 试判断容器中是什么气体?

分析: 已知气体始、末状态的温度和体积,利用绝热过程的  $T-V$  关系,求得  $\gamma$ ,由气体分子的自由度判断气体类别.

解: 设气体初、末态的温度和体积分别为  $(T_1, V_1)$  和  $(T_2, V_2)$ , 连接两状态的绝热方程为

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad \text{即} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

对上式等号两边取对数可得

$$\gamma = \frac{\ln \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2}}{\ln \frac{V_1}{V_2}}$$

代入数据,可解得

$$\gamma = 1.4$$

因为

$$\gamma = \frac{c_{p,m}}{c_{v,m}} = \frac{i+2}{i}$$

所以,  $i=5$ , 为双原子分子气体  $N_2$ .

6-13. (1) 有  $10^{-6} \text{ m}^3$  的 373 K 的纯水,在  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  的压强下加热,变成  $1.671 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的同温度下的水蒸气. 水的汽化热是  $2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$ . 问水变汽后,内能改变多少?

(2) 在标准状态下,  $10^{-3} \text{ kg}$  的 273 K 的冰化为同温度的水,试问内能改变多少? 标准状态下水与冰的比体积各为  $10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$  与  $\frac{11}{10} \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ . 冰的溶解热为  $3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$ .

分析: 在水吸收热量汽化为水蒸气,或者冰吸收热量融化为水的过程中,热力学第一定律,即包括热现象的能量守恒和转换的规律严格成立. 求得在这些过程中热力学系统吸收的热量和对外作的功,即可求得系统内能的增量.

解: (1) 已知纯水的汽化热  $\lambda = 2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$   
纯水的质量  $m = \rho V = 1 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 1 \times 10^{-3} \text{ kg}$   
纯水完全汽化需吸热  $Q = \lambda m = 2.26 \times 10^6 \times 1.0 \times 10^{-3} \text{ J} = 2.26 \times 10^3 \text{ J}$   
完全汽化后的水蒸气在等压条件下对外界作功

$A = p \Delta V = 1.013 \times 10^5 \times (1.671 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-6}) \text{ J} = 1.69 \times 10^2 \text{ J}$   
由热力学第一定律,水变汽后,内能改变

$$\Delta E = Q - A = 2.26 \times 10^3 \text{ J} - 1.69 \times 10^2 \text{ J} = 2.09 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 已知冰的溶解热  $L = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$ ,  $m = 1 \times 10^{-3} \text{ kg}$  的冰化为同温度的水,需吸热

$$Q = Lm = 3.34 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3} \text{ J} = 3.34 \times 10^2 \text{ J}$$

常压下,冰化为水后因体积变化而对外作的功为

$$\begin{aligned} A &= p\Delta V = 1.013 \times 10^5 \times \left(1 \times 10^{-3} - \frac{11}{10} \times 10^{-3}\right) \times 1 \times 10^{-3} \text{ J} \\ &= -1.01 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

内能改变  $\Delta E = Q - A = 3.34 \times 10^2 \text{ J} + 1.01 \times 10^{-2} \text{ J} = 3.34 \times 10^2 \text{ J}$

**6-14.** 容积为 20.0 L 的瓶子以速率  $v = 200 \text{ m/s}$  匀速运动,瓶子中充有质量为 100 g 的氦气. 设瓶子突然停止,且气体分子全部定向运动的动能都变为热运动动能,瓶子与外界没有热量交换. 求热平衡后氦气的温度、压强、内能及氦气分子的平均动能各增加多少?

**分析:** 容器内气体的温度是大量分子无规则热运动的平均效果. 在容器相对参考系作匀速直线运动的情况下,所有分子的热运动都叠加了一个整体定向运动的速度,并未增加或减少分子间碰撞的机会. 因此,容器内的气体分子仍然处于平衡状态,温度不会变化.

当容器突然停止运动时,分子定向运动的动能将通过与器壁以及分子间的碰撞而转换为热运动的能量. 热平衡后,容器内气体的温度、压强、内能及平均动能都有所增加.

**解:** 氦气自由度  $i = 3$ ,  $M = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .

整体定向运动的动能为  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 200^2 \text{ J} = 2 \times 10^3 \text{ J}$

容器突然停止运动时,理想气体分子整体定向运动的动能全部转变为内能.

所以内能的增量为  $\Delta E = E_k = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R \Delta T = 2 \times 10^3 \text{ J}$

氦气温度的增量为  $\Delta T = \frac{M}{3R} v^2 = \frac{4 \times 10^{-3}}{3 \times 8.31} \times 200^2 \text{ K} = 6.42 \text{ K}$

根据平衡态的物态方程  $pV = \frac{m}{M} RT$

由于容积  $V$  不变,温度升高使压强增大,即

$$\Delta p = \frac{m}{M} \frac{R \Delta T}{V} = \frac{m}{3V} v^2 = \frac{0.1}{3 \times 20.0 \times 10^{-3}} \times 200^2 \text{ Pa} = 6.67 \times 10^4 \text{ Pa}$$

氦气分子平均动能的增量为

$$\Delta \bar{\epsilon} = \frac{3}{2} k \Delta T = \frac{M}{2R} k v^2 = \frac{M}{2N_A} v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = 1.33 \times 10^{-22} \text{ J}$$

**6-15.** 将理想气体进行(1) 等温压缩,(2) 绝热压缩,求相应的体积弹性

模量  $K_T = -V(\partial p/\partial V)_T$ ,  $K_{\text{绝热}} = -V(\partial p/\partial V)_{\text{绝热}}$ , 设气体的比热比  $C_p/C_v = \gamma$ .

分析: 在理想气体的状态发生变化的过程中, 宏观参量  $p$ 、 $V$  和  $T$  通常都将随之变化. 气体在准静态过程中的每一状态, 都处于平衡状态, 满足物态方程. 对物态方程求全微分, 根据过程特征和热力学第一定律, 可得到过程方程, 并求出与该过程相对应的体积弹性模量.

解: 对理想气体的物态方程  $pV = \frac{m}{M}RT$  求全微分, 有

$$pdV + Vdp = \frac{m}{M}RdT$$

(1) 在等温压缩过程中,  $dT = 0$ . 有  $pdV + Vdp = 0$

即得 
$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{p}{V}$$

等温压缩过程的体积弹性模量为

$$K_T = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -V\left(-\frac{p}{V}\right) = p$$

(2) 在绝热压缩过程中,  $dQ = 0$ . 由对物态方程的全微分和热力学第一定律, 得到绝热过程方程

$$pV^\gamma = C$$

在绝热过程中,  $p$  和  $V$  满足关系

$$\gamma pV^{\gamma-1}dV + V^\gamma dp = 0$$

即得 
$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{绝热}} = -\frac{\gamma p}{V}$$

绝热压缩过程的体积弹性模量为

$$K_{\text{绝热}} = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{绝热}} = \gamma p = \gamma K_T$$

**6-16.** 气体中的音速由公式  $v = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_{\text{绝热}}}$  给出. 设空气为双原子气体, 摩尔质量为  $0.029 \text{ kg/mol}$ . 求下述情况下空气中的音速.

(1)  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $0^\circ\text{C}$ ; (2)  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $30^\circ\text{C}$ ; (3)  $3.039 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $0^\circ\text{C}$ .

分析: 声音在气体中传播时, 由于声音的振动速度很快, 气体各质元之间来不及发生热量的传递, 因而可以看作是一绝热过程.

解: 取  $1 \text{ mol}$  空气  $M = 0.029 \text{ kg/mol}$  为研究对象, 并  $M = \rho V = \text{常量}$ .

在声音传播过程中, 有  $Vd\rho + \rho dV = 0$

即 
$$d\rho = -\rho \frac{dV}{V}$$

根据绝热过程方程  $pV^\gamma = C$ , 有  $dp = -\gamma p \frac{dV}{V}$

可得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{绝热}} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

代入理想气体的物态方程

$$pV = RT$$

得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{绝热}} = \gamma \frac{RT}{\rho V} = \frac{\gamma RT}{M}$$

所以

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{绝热}}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 20 \sqrt{T}$$

可见,空气中的声速  $v$  仅与温度  $T$  有关.

(1) 当  $p = 1 \text{ atm}$ ,  $T = 273 \text{ K}$  时,  $v_1 = 330 \text{ m/s}$ ;

(2) 当  $p = 1 \text{ atm}$ ,  $T = 303 \text{ K}$  时,  $v_2 = 348 \text{ m/s}$ ;

(3) 当  $p = 3 \text{ atm}$ ,  $T = 273 \text{ K}$  时, 由于温度  $T$  与(1)相同, 故有  $v_3 = v_1 = 330 \text{ m/s}$ .

**6-17.** 声音在空气中的传播可以看作是一绝热过程. 它的速度可按公式

$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  计算, 式中  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ,  $p$  为空气的压强,  $\rho$  为空气的密度. 试证明声音在空气中的传播速度仅是温度的函数.

解: 把空气视为理想气体,  $pV = \frac{m}{M}RT$

得空气密度为

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

代入声音在空气中的传播速度

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

得

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

式中  $\gamma$ 、 $M$  和  $R$  均为常量. 所以, 空气中的声速  $v$  仅与温度  $T$  有关.

**\*6-18.** 1 mol 范德瓦耳斯气体, 初始体积为  $V_1$ , 向真空作绝热膨胀至体积为  $V_2$ .

(1) 求温度的增量  $\Delta T$ .

(2) 气体温度的变化是否是由于其内能变化了?

(3) 如果这是理想气体, 温度变化如何?

分析: 范德瓦耳斯气体的内能包括所有分子的动能之和以及所有分子间的引力势能之和. 气体向真空作绝热自由膨胀时, 与外界既无热量交换, 又不做功, 总内能不变. 但由于气体在体积膨胀的过程中, 气体分子反抗分子间引力作的功, 使分子间的总势能增大, 从而使分子热运动的总动能减小, 气体温度降低. 理想气体由于不考虑分子间相互作用势能, 所以向真空作绝热自由膨胀时,

内能、温度均不变。

解：(1) 在气体的体积从  $V_1$  变化到  $V_2$  的过程中，总内能不变，即

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

由于分子间引力做功，使气体分子的总势能增大而热运动总动能减小，即

$$\Delta E_p = -\Delta E_k \quad (1)$$

其中

$$\Delta E_k = C_{V,m} \Delta T \quad (2)$$

气体分子间的引力作用宏观表现为内压强  $p_i = \frac{a}{V^2}$ ，气体膨胀时需克服此内压强做功。根据功能原理可知，该保守内力的功等于气体系统分子间相互作用势能增量的负值，即

$$-p_i dV = -\frac{a}{V^2} dV = -dE_p$$

分子间相互作用势能的增量为

$$\Delta E_p = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV = a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

由(1)、(2)两式可得温度的增量为

$$\Delta T = \frac{a}{C_{V,m}} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

(2) 气体温度变化不是由于内能变化引起，而是由于分子热运动总动能减小引起的。

(3) 理想气体向真空作绝热自由膨胀时，内能、温度均不变。

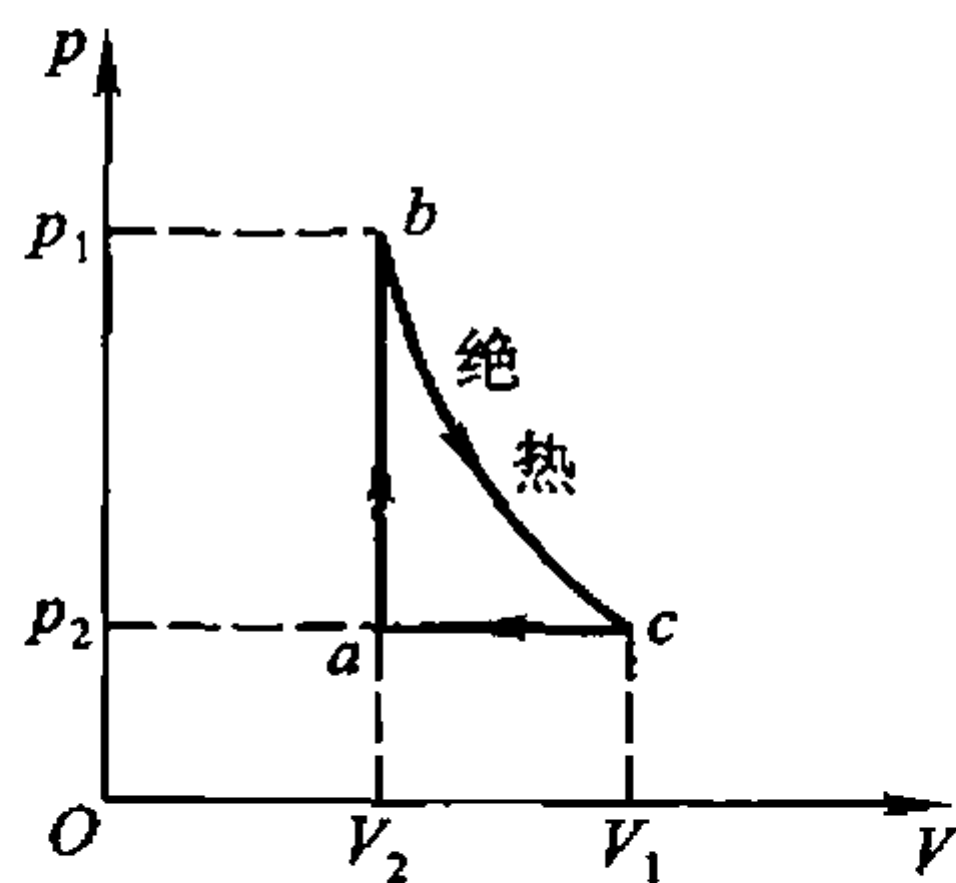
## 2. 循环过程以及热机效率和制冷系数的计算

6-19. 设有一以理想气体为工作物质的热机循环，如图所示，试证明其效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left( \frac{V_1}{V_2} \right) - 1}{\left( \frac{p_1}{p_2} \right) - 1}$$

分析：在  $a \rightarrow b$  等体过程中，系统从外界吸收的热量全部转为内能的增量，温度升高。在  $b \rightarrow c$  绝热过程中，系统减少内能，降低温度对外做功，与外界无热量交换。在  $c \rightarrow a$  等压压缩过程中，系统放出热量，温度降低，对外作负功。计算得出各过程的热量和功，根据热机循环效率的定义即可得证。

解：在  $a \rightarrow b$  等体过程中，系统从外界吸收的热量为



习题 6-19 图

$$Q_v = \frac{m}{M} C_{v,m} (T_b - T_a)$$

在  $c \rightarrow a$  等压压缩过程中, 系统放出热量的大小为

$$|Q_p| = \frac{m}{M} C_{p,m} (T_c - T_a).$$

$$\begin{aligned} \text{热机循环效率为} \quad \eta &= 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_p|}{Q_v} = 1 - \frac{C_{p,m} (T_c - T_a)}{C_{v,m} (T_b - T_a)} \\ &= 1 - \gamma \frac{(T_c - T_a)}{(T_b - T_a)} \end{aligned}$$

$$\text{由理想气体物态方程} \quad pV = \frac{m}{M} RT$$

得

$$T_c - T_a = \frac{M}{mR} (p_c V_c - p_a V_a) = \frac{M}{mR} (p_2 V_1 - p_2 V_2)$$

$$T_b - T_a = \frac{M}{mR} (p_b V_b - p_a V_a) = \frac{M}{mR} (p_1 V_2 - p_2 V_2)$$

所以, 该热机的循环效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{p_2 V_1 - p_2 V_2}{p_1 V_2 - p_2 V_2} = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right) - 1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - 1}$$

**6-20.** 1 mol 理想气体在 400 K 与 300 K 之间完成一卡诺循环, 在 400 K 的等温线上, 起始体积为  $0.0010 \text{ m}^3$ , 最后体积为  $0.0050 \text{ m}^3$ , 试计算气体在此循环中所作的功, 以及从高温热源吸收的热量和传给低温热源的热量.

**分析:** 卡诺循环的效率仅与高、低温热源的溫度  $T_1$  和  $T_2$  有关. 本题中, 求出等温膨胀过程吸收热量后, 利用卡诺循环效率及其定义, 便可求出循环的功和在等温压缩过程中, 系统向低温热源放出热量.

$$\text{解:} \quad Q_1 = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 8.31 \times 400 \times \ln 5 \text{ J} = 5.35 \times 10^3 \text{ J}$$

$$\text{由循环效率} \quad \eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{400} = 25\%$$

$$\text{可得} \quad A = \eta Q_1 = 1.34 \times 10^3 \text{ J}$$

$$\text{由 } A = Q_1 - |Q_2|, \text{ 得} \quad |Q_2| = Q_1 - A = 4.01 \times 10^3 \text{ J}$$

**6-21.** 一热机, 在 1000 K 和 300 K 的两热源之间工作. 如果 (1) 高温热源提高到 1100 K, (2) 低温热源降到 200 K, 求理论上的热机效率各增加多少? 为

了提高热机效率哪一种方案更好?

分析: 工作在两热源之间的热机是卡诺机. 卡诺热机循环的理论效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

解: 工作在 1 000 K 和 300 K 的两热源间的卡诺热机效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 70\%$$

情况(1): 高温热源温度提高到  $T'_1 = 1\,100\text{ K}$  时, 卡诺热机的效率为

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T'_1} = 72.7\%$$

情况(2): 低温热源温度降低到  $T'_2 = 200\text{ K}$ , 效率为

$$\eta_2 = 1 - \frac{T'_2}{T_1} = 80\%$$

计算表明:  $\eta_2 > \eta_1$ .

但以降低  $T_2$  来提高热机效率的方法通常是不可取的. 热机工作时一般以环境空气或流水为低温热源, 降低环境温度  $T_2$  需动用制冷机, 显然这是不经济的. 所以, 一般用提高高温热源温度的方法来提高热机的工作效率.

6-22. 有 25 mol 的某种气体, 作图示循环过程( $ac$  为等温过程).  $p_1 = 4.15 \times 10^5\text{ Pa}$ ,  $V_1 = 2.0 \times 10^{-2}\text{ m}^3$ ,  $V_2 = 3.0 \times 10^{-2}\text{ m}^3$ . 求:

(1) 各过程中的热量、内能改变以及所作的功;

(2) 循环的效率.

分析: 利用理想气体的物态方程和热力学第一定律, 求各过程的热量、内能增量以及所作的功.

对于一般热机的循环效率, 需注意在整个循环过程中, 系统从外界吸收的热量和向外界放出的热量. 在本题中, 设热机的工作物质为单原子分子气体.

解: 在  $a \rightarrow b$  等压过程中, 有  $p_1 = p_2$ . 利用理想气体物态方程可求出  $T_1$  和  $T_2$ .

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \quad p_1 V_2 = \frac{m}{M} R T_2$$

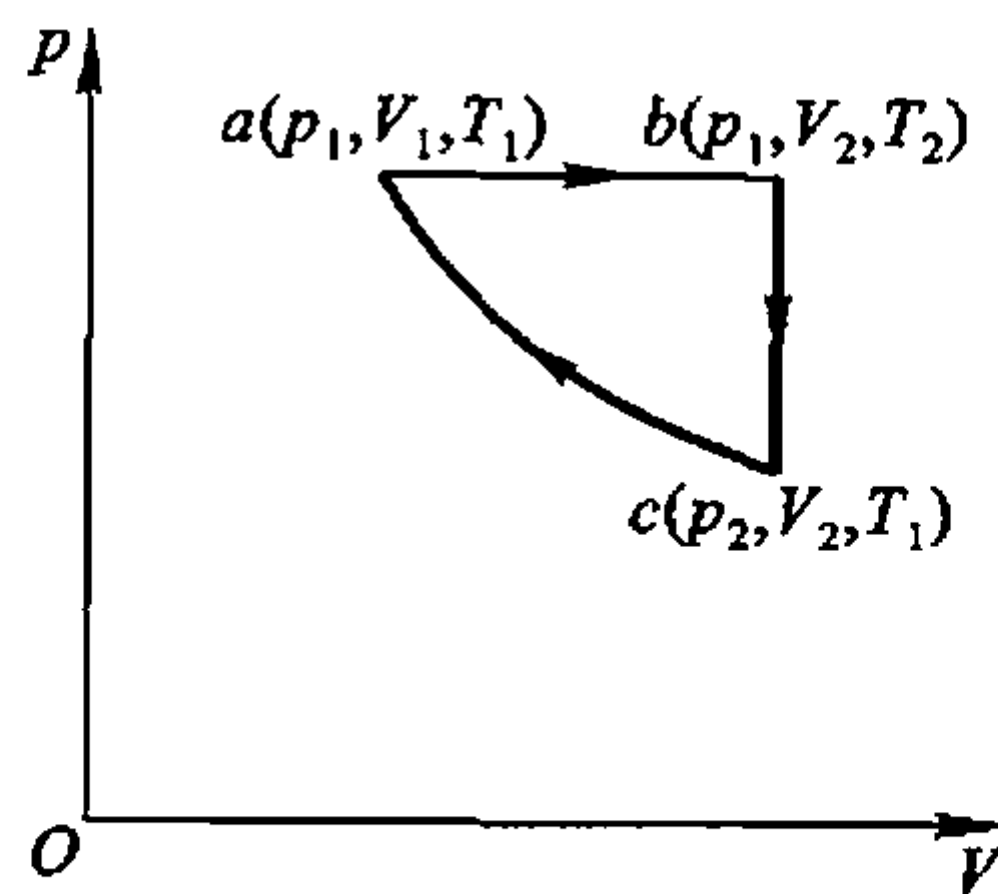
得

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

所以

$$T_1 = \frac{M p_1 V_1}{m R} = 40\text{ K}, \quad T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = 60\text{ K}$$

(1) 在  $a \rightarrow b$  等压膨胀过程中, 系统从外界吸收热量为



习题 6-22 图

$$Q_p = \frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1) = 10.4 \times 10^3 \text{ J}$$

内能的增量为  $\Delta E = \frac{m}{M} C_{v,m} (T_2 - T_1) = 6.23 \times 10^3 \text{ J}$

对外界做功为  $A_p = Q_p - \Delta E = 4.17 \times 10^3 \text{ J}$

在  $b \rightarrow c$  等体压缩过程中,  $A_v = 0$ , 系统向外界放出热量, 内能减小, 有

$$Q_v = \Delta E = \frac{m}{M} C_{v,m} (T_1 - T_2) = -6.23 \times 10^3 \text{ J}$$

在  $c \rightarrow a$  等温压缩过程中, 系统向外界放出热量, 内能不变,  $\Delta E = 0$ . 有

$$Q_r = A_r = \frac{mRT_1}{M} \ln \frac{V_1}{V_2} = -3.37 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 在整个循环过程中, 系统从外界吸收热量为  $Q_p$ , 向外界放出热量为  $|Q_v| + |Q_r|$ . 所以, 循环效率为

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_v| + |Q_r|}{Q_p} = 1 - \frac{(6.23 + 3.37) \times 10^3 \text{ J}}{10.4 \times 10^3 \text{ J}} = 7.7 \%$$

### 3. 热力学第二定律的应用

**6-23.** 两部可逆机串联起来, 如图所示. 可逆机 1 工作于温度为  $T_1$  的热源 1 与温度为  $T_2 = 400 \text{ K}$  的热源 2 之间, 可逆机 2 吸入可逆机 1 放给热源 2 的热量  $Q_2$ , 转而放热给  $T_3 = 300 \text{ K}$  的热源 3. 分别在 (1) 两部热机效率相等; (2) 两部热机做功相等的情况下求  $T_1$ .

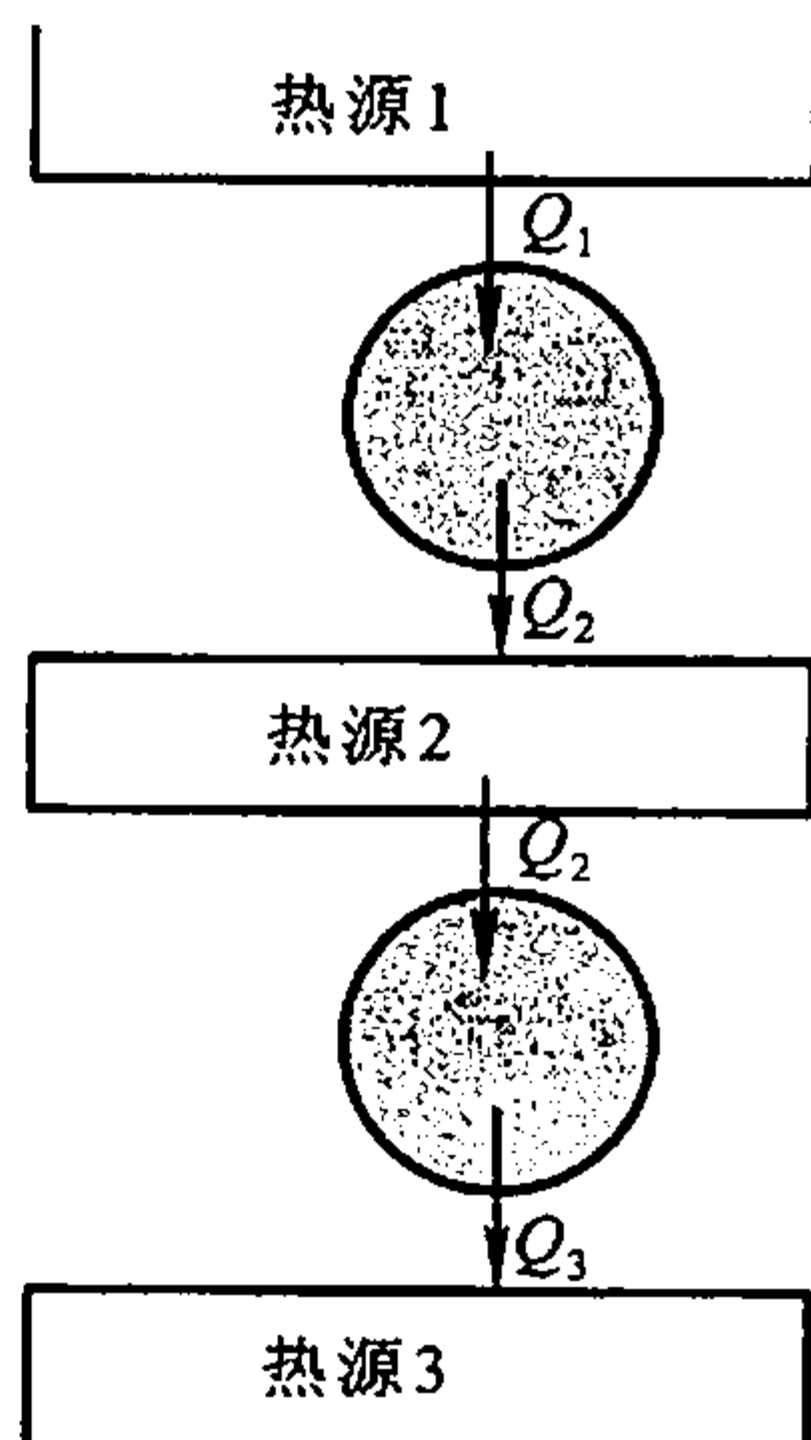
**分析:** 这两部分别工作于两个热源之间的可逆机都是理想的卡诺热机, 卡诺热机的效率仅与两热源的温度有关.

**解:** (1) 两部热机效率相等时, 有

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2 \\ \text{即} \quad 1 - \frac{T_2}{T_1} &= 1 - \frac{T_3}{T_2} \\ \text{得} \quad T_1 &= \frac{T_2^2}{T_3} = 533 \text{ K} \end{aligned}$$

(2) 两部热机做功相等时  $A = |Q_1| - |Q_2| = |Q_2| - |Q_3|$

$$\text{得} \quad 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \left( 1 - \frac{|Q_3|}{|Q_2|} \right)$$



习题 6-23 图

即

$$\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{T_2}{T_1} \left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)$$

$$T_1 - T_2 = T_2 - T_3$$

得

$$T_1 = 2T_2 - T_3 = 500 \text{ K}$$

**6-24.** 一热机每秒从高温热源 ( $T_1 = 600 \text{ K}$ ) 吸取热量  $Q_1 = 3.34 \times 10^4 \text{ J}$ , 做功后向低温热源 ( $T_2 = 300 \text{ K}$ ) 放出热量  $Q_2 = 2.09 \times 10^4 \text{ J}$ .

(1) 它的效率是多少? 它是不是可逆机?

(2) 如果尽可能地提高了热机的效率, 每秒从高温热源吸热  $3.34 \times 10^4 \text{ J}$ , 则每秒最多能作多少功?

**分析:** 根据卡诺定理, 在相同的高温热源 ( $T_1$ ), 与相同的低温热源 ( $T_2$ ) 之间工作的一切可逆机效率都相等, 有  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ . 非可逆机的效率  $\eta =$

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

**解:** (1) 该热机效率为  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 37 \%$

可逆机的效率为

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 50 \%$$

可见它不是可逆机.

(2) “尽可能地提高效率”是指热机的循环尽可能地接近理想的可逆循环工作方式. 据热机效率的定义, 可得理想热机每秒吸热  $Q_1$  时所做的功为

$$A = \eta_c Q_1 = 0.5 \times 3.34 \times 10^4 \text{ J} = 1.67 \times 10^4 \text{ J}$$

#### 4. 熵的计算

**6-25.** 一绝热容器被铜片分成两部分, 一边盛  $80^\circ\text{C}$  的水, 另一边盛  $20^\circ\text{C}$  的水, 经过一段时间后, 从热的一边向冷的一边传递了  $4186 \text{ J}$  的热量, 问在这个过程中的熵变是多少? 假定水足够多, 传递热量后的温度没有明显变化.

**分析:** 这是一个在绝热系统中发生的不可逆过程, 根据“熵增加原理”, 系统的总熵将增加. 由于铜片两边的水在传递热量的过程中保持各自的温度不变, 因此高温水放出热量  $\Delta Q$  时的熵减少  $\frac{\Delta Q}{T_1}$ , 低温水吸收热量  $\Delta Q$  时的熵增加

$$\frac{\Delta Q}{T_2}, \text{ 系统的总熵变 } \Delta S = -\frac{\Delta Q}{T_1} + \frac{\Delta Q}{T_2} > 0.$$

解：总熵变

$$\Delta S = -\frac{\Delta Q}{T_1} + \frac{\Delta Q}{T_2} = \left( -\frac{1}{273 \text{ K} + 80 \text{ K}} + \frac{1}{273 \text{ K} + 20 \text{ K}} \right) \times 4 \text{ 186 J} = 2.4 \text{ J/K}$$

6-26. 把质量为 5 kg、比热容(单位质量物质的热容)为 544 J/(kg·K)的铁棒加热到 300 °C, 然后浸入一大桶 27 °C 的水中. 求在此冷却过程中铁棒的熵变.

分析：把加热的铁棒浸入处于室温的水中后, 铁棒将向水传热而降低温度, 但“一大桶水”吸热后的水温并不会发生明显变化, 因而可以把“一大桶水”近似为恒温热源. 把铁棒和“一大桶水”一起, 视为与外界没有热和功作用的孤立系统, 根据热力学第二定律可知, 在铁棒冷却至最终与水同温度的不可逆过程中, 系统的熵将增加.

熵是态函数, 系统的熵变仅与系统的始、末状态有关而与过程无关. 因此, 求不可逆过程的熵变, 可以在始、末状态之间设计任一可逆过程. 此外, 系统的总熵变等于系统内各部分的熵变之和.

解：把铁棒与“一大桶水”取作孤立系统时, 在铁棒冷却的过程中, 系统的总熵为

$$\Delta S = \Delta S_{\text{铁}} + \Delta S_{\text{水}}$$

设铁棒的比热容为  $c$ . 当铁棒的质量为  $m$ , 温度变化  $dT$  时, 吸收(或放出)的热量为  $dQ = cmdT$ . 设铁棒经历一可逆的降温过程, 其温度连续地由  $T_1$  降为  $T_2$ . 在这过程中铁棒的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{铁}} &= \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cmdT}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= 544 \times 5 \times \ln \frac{300}{573} \text{ J/K} = -1 \text{ 760 J/K} \end{aligned}$$

“一大桶水”在等温吸热过程中的熵变为

$$\Delta S_{\text{水}} = \frac{\Delta Q}{T_2} = \frac{|cm\Delta T|}{T_2} = \frac{544 \times 5 \times (573 - 300)}{300} \text{ J/K} = 2 \text{ 475.2 J/K}$$

系统的总熵变为  $\Delta S = \Delta S_{\text{铁}} + \Delta S_{\text{水}} = 715.2 \text{ J/K} > 0$

6-27. 一固态物质, 质量为  $m$ , 熔点为  $T_m$ , 熔解热为  $L$ , 比热容为  $c$ . 如对它缓慢加热, 使其温度从  $T_0$  上升为  $T_m$ , 试求熵的变化. 假设供给物质的热量恰好使它全部熔化.

分析：固态物质吸热升温达熔点温度  $T_m$  后, 通常将在该温度上继续等温吸热并发生熔化. 固态物质全部熔化前后的熵变为两个分过程的熵变之和, 即固态吸热升温, 从  $T_0$  到  $T_m$ ; 在  $T_m$  条件下继续等温吸热并熔化.

解：固态物质吸热升温，从  $T_0$  到  $T_m$  的熵变为

$$\Delta S_1 = \int_{T_0}^{T_m} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_m} \frac{mcdT}{T} = mc \ln \frac{T_m}{T_0}$$

在  $T_m$  条件下继续吸热并熔化的熵变为

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_m} = \frac{mL}{T_m}$$

总熵变

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_m}{T_0} + \frac{mL}{T_m}$$

**6-28.** 试用“可逆过程中封闭体系的熵不变原理”导出卡诺循环的热效率公式。

分析：卡诺循环由两个等温过程和两个绝热过程构成，注意到其中可逆的绝热过程是等熵过程，同样可导出卡诺循环的热效率公式。

解：如解图 6-28 所示，设高温热源和低温热源的温度分别为  $T_1$  和  $T_2$ ，在  $a \rightarrow b$  的可逆等温膨胀过程中，系统从高温热源吸收热量为  $Q_1$ 。

由  $dQ = TdS$  得

$$Q_1 = \int dQ = T_1 \int_{S_a}^{S_b} dS = T_1 (S_b - S_a)$$

式中  $S_a$  和  $S_b$  分别为系统在状态  $a$  和状态  $b$  的熵。

由于  $b \rightarrow c$  是可逆的绝热膨胀过程，系统的熵变  $\Delta S = 0$ ，故有  $S_b = S_c$ 。

同理，在  $d \rightarrow a$  的可逆绝热压缩过程中，有  $S_d = S_a$ 。

在  $c \rightarrow d$  的可逆等温压缩过程中，系统向低温热源放出热量  $Q_2$  的大小为

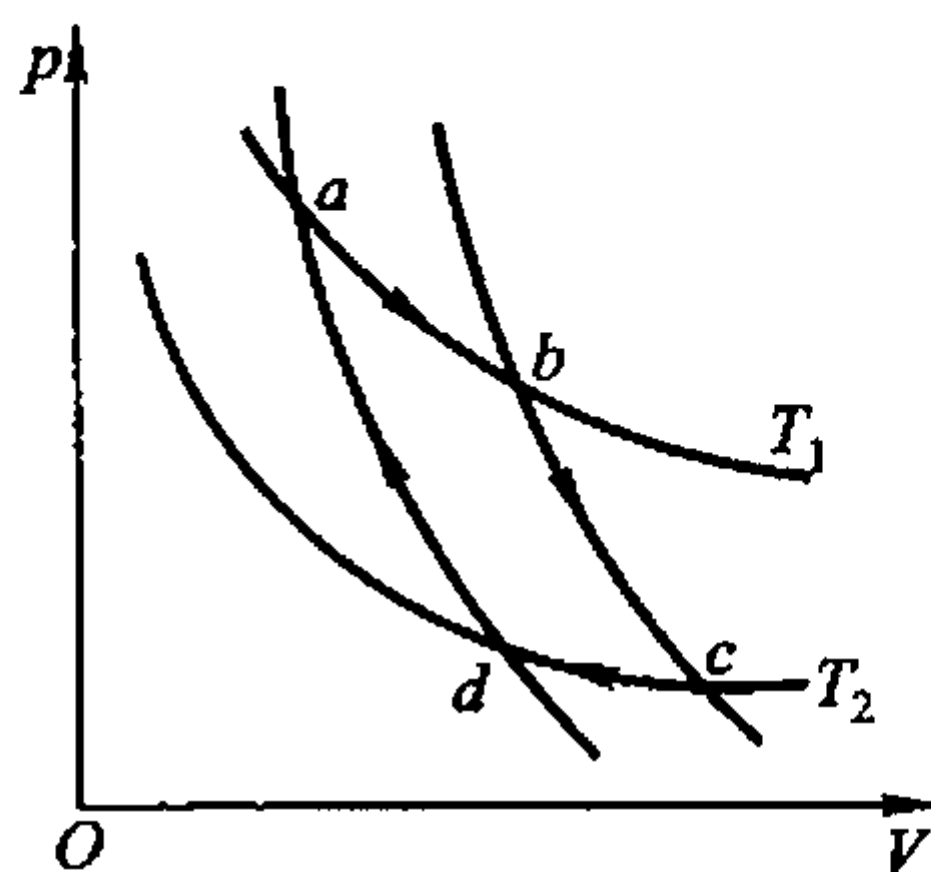
$$|Q_2| = \left| \int dQ \right| = T_2 \int_{S_c}^{S_d} dS = T_2 (S_c - S_d) = T_2 (S_b - S_a)$$

由热力学第一定律可知，在一循环过程中系统对外所作之功为

$$A = Q_1 - |Q_2| = (T_1 - T_2)(S_b - S_a)$$

循环的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$



解图 6-28

**6-29.** 将一块  $-20^\circ\text{C}$ 、 $10\text{ g}$  的冰放进  $30^\circ\text{C}$ 、 $100\text{ g}$  的水里，试求熵的变化。已知：冰的比热容为  $20.4 \times 10^2 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ，熔解热为  $3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$ ，水的比热容是常数 ( $4.19 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ )。

分析：把冰放进水中后，冰将吸热升温至  $0^\circ\text{C}$ ，在此温度等温吸热熔化为冰水，然后再吸热升温，最终  $10\text{ g}$  的冰水和  $100\text{ g}$  的水在某一温度达到平衡状态。

在冰化为水的这两个不可逆过程中, 100 g 的水始终是放热降温. 在此过程中, 若与外界没有热传递和功的作用, 则冰和水整体的熵将增加. 并且, 整体的总熵变应等于冰的熵变和水的熵变之和.

解: 设水的质量为  $m_1$ , 比热为  $c_1$ . 冰的质量为  $m_2$ , 比热为  $c_2$ , 熔解热为  $L$ , 冰的初始温度为  $T_1$ , 水的初始温度为  $T_2$ , 冰、水共存的温度为  $T_0$ , 最终的平衡温度为  $T_x$ .

冰升温至  $0^\circ\text{C}$  需吸热为  $Q_1 = c_2 m_2 \Delta T$

式中  $\Delta T = (T_0 - T_1) = 20\text{ K}$ ,  $T_0 = 273\text{ K}$ ,  $T_1 = 253\text{ K}$

冰熔化为冰水需等温吸热为  $Q_2 = Lm_2$

冰水达平衡温度需吸热为  $Q_3 = c_1 m_2 (T_x - T_0)$

100 g 的水达平衡温度需放热为

$$Q = c_1 m_1 (T_2 - T_x), \quad T_2 = 273\text{ K} + 30\text{ K} = 303\text{ K}$$

由于冰和水整体与外界隔绝, 故有  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

即  $c_1 m_1 (T_2 - T_x) = m_2 [c_2 \Delta T + L + c_1 (T_x - T_0)]$

$$\begin{aligned} \text{解得 } T_x &= \frac{c_1 m_1 T_2 - m_2 (c_2 \Delta T + L - c_1 T_0)}{c_1 (m_1 + m_2)} \\ &= \frac{4.19 \times 100 \times 303 - 10(2.04 \times 20 + 334 - 4.19 \times 273)}{4.19 \times (100 + 10)}\text{ K} \\ &= 292.1\text{ K} \end{aligned}$$

100 g 的水在达到平衡温度时的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \int \frac{dQ}{T} = c_1 m_1 \int_{T_2}^{T_x} \frac{dT}{T} = c_1 m_1 \ln \frac{T_x}{T_2} \\ &= 4.19 \times 10^3 \times 0.1 \times \ln \frac{292.1}{303}\text{ J/K} \\ &= -15.3\text{ J/K} \end{aligned}$$

冰的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= \int \frac{dQ}{T} = c_2 m_2 \int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T} + \frac{Lm_2}{T_0} + c_1 m_2 \int_{T_0}^{T_x} \frac{dT}{T} \\ &= m_2 \left( c_2 \ln \frac{T_0}{T_1} + \frac{L}{T_0} + c_1 \ln \frac{T_x}{T_0} \right) \\ &= 0.01 \times \left( 20.4 \times 10^2 \ln \frac{273}{253} + \frac{3.34 \times 10^5}{273} + 4.19 \times 10^3 \ln \frac{292.1}{273} \right)\text{ J/K} \\ &= 16.6\text{ J/K} \end{aligned}$$

冰和水整体的熵变为

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -15.3\text{ J/K} + 16.6\text{ J/K} = 1.3\text{ J/K}$$

所以, 整体的熵是增加的.

6-30. 一房间有  $N$  个气体分子, 半个房间的分子数为  $n$  的概率为

$$W(n) = \sqrt{\frac{2}{N_A}} e^{-2(n-N/2)^2/N}$$

(1) 写出这种分布的熵的表达式  $S = k \ln W$ ;

(2)  $n=0$  状态与  $n = \frac{N}{2}$  状态之间的熵变是多少?

(3) 如果  $N = 6 \times 10^{23}$ , 计算这个熵差.

解: (1) 把已知的分布概率代入玻耳兹曼熵的表达式  $S = k \ln W$ , 可得

$$S = k \ln W(n) = k \ln \left( \sqrt{\frac{2}{N_A}} e^{-2(n-N/2)^2/N} \right) = k \left( \ln \sqrt{\frac{2}{N_A}} - 2 \frac{\left(n - \frac{N}{2}\right)^2}{N} \right)$$

(2) 熵的变化

$$\Delta S = S_{N/2} - S_0 = k \ln \sqrt{\frac{2}{N_A}} - k \left( \ln \sqrt{\frac{2}{N_A}} - \frac{2 \times (-N/2)^2}{N} \right) = \frac{N}{2} k$$

(3)  $N = 6 \times 10^{23}$  时, 与  $n=0$  状态的熵差为

$$\Delta S = \frac{6 \times 10^{23} \times 1.38 \times 10^{-23}}{2} \text{ J/K} = 4.14 \text{ J/K}$$

6-31. 1 kg 水银, 初始温度为  $-100^\circ\text{C}$ . 如果加足够的热量使其温度升到  $100^\circ\text{C}$ , 问水银的熵变有多大? 水银的熔点为  $-39^\circ\text{C}$ . 熔解热为  $1.17 \times 10^4 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , 而比热容为  $138 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ .

分析: 固态水银的温度从  $-100^\circ\text{C}$  吸热升温为  $100^\circ\text{C}$  的液态水银, 其物态经历了三个阶段: 固态吸热升温至熔点; 在熔点温度等温吸热变为液态水银; 液态水银继续吸热升温. 整个过程的总熵变为三个分过程的熵变之和.

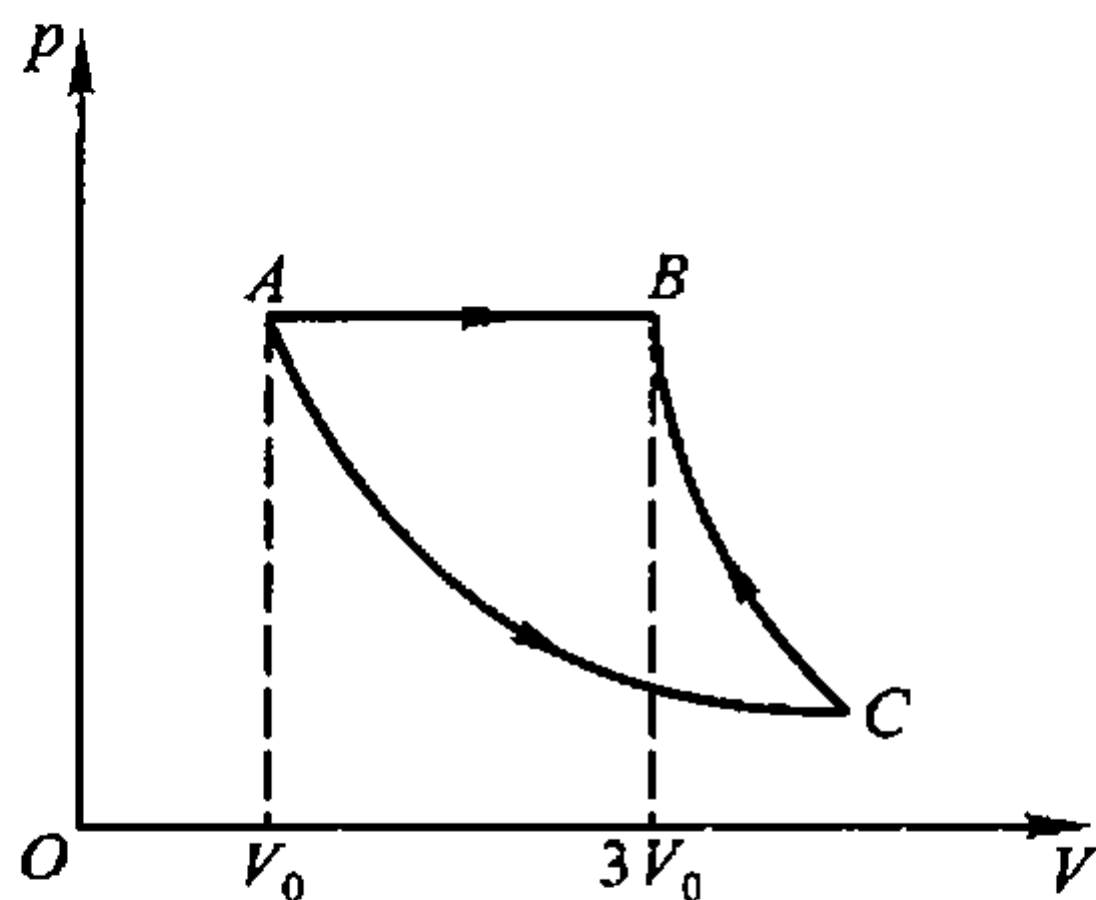
解: 设初始温度为  $T_0 = -100^\circ\text{C} = 173 \text{ K}$ , 熔点温度为  $T_1 = -39^\circ\text{C} = 234 \text{ K}$ , 最终温度为  $T_2 = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$ , 比热容为  $c$ , 熔解热为  $L$ , 水银质量为  $m$ .

整个过程的总熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 \\ &= \int_{T_0}^{T_1} \frac{mcdT}{T} + \frac{\Delta Q}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = m \ln \frac{T_1}{T_0} + \frac{mL}{T_1} + m \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= 1 \times \left( 138 \times \ln \frac{234}{173} + \frac{1.17 \times 10^4}{234} + 138 \times \ln \frac{373}{234} \right) \text{ J/K} = 156 \text{ J/K} \end{aligned}$$

6-32. 有 2 mol 的理想气体, 经过可逆的等压过程体积从  $V_0$  膨胀到  $3V_0$ . 求在这一过程中的熵变. 提示: 设想气体从初始状态到最终状态是先沿等温曲线, 然后沿绝热曲线(在这个过程中熵没有变化)进行的.

分析：熵是热力学系统的状态函数。系统在状态  $A$  和状态  $B$  之间的熵变  $\Delta S_{AB}$ ，与从状态  $A$  过渡到状态  $B$  所经历的过程无关。因此，可设计不同的可逆过程使系统状态从  $A$  过渡到  $B$  来计算  $\Delta S_{AB}$ 。既可直接经可逆的等压过程膨胀到  $B$ ，也可先经可逆的等温膨胀过程到  $C$ ，再经可逆的绝热过程压缩到  $B$ 。两条路径的熵变  $\Delta S_{AB}$  相同。



解图 6-32

解 1：如解图 6-32 所示。选择路径  $A \rightarrow C \rightarrow B$ 。系统状态从  $A(p_0, V_0)$  先经可逆的等温过程膨胀到  $C(p_c, V_c)$ ，再经可逆的绝热过程压缩到  $B(p_0, 3V_0)$ 。两可逆过程的总熵变为

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB}$$

在可逆的绝热过程  $C \rightarrow B$  中， $dQ = 0$ ，故  $\Delta S_{CB} = 0$ 。

所以

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_{V_0}^{V_c} p dV = \frac{mR}{M} \int_{V_0}^{V_c} \frac{dV}{V} = \frac{mR}{M} \ln \frac{V_c}{V_0} \quad (1)$$

$A \rightarrow C$  是等温过程，有

$$p_0 V_0 = p_c V_c$$

$C \rightarrow B$  是绝热过程，有

$$p_c V_c^\gamma = p_0 (3V_0)^\gamma$$

得

$$\left( \frac{V_c}{V_0} \right)^{\gamma-1} = 3^\gamma$$

即

$$\ln \frac{V_c}{V_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln 3 \quad (2)$$

把(2)式代入(1)式，并代入

$$\frac{m}{M} = 2, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{C_{p,m}}{R}$$

得总熵变为

$$\Delta S_{AC} = 2C_{p,m} \ln 3$$

解 2：选择路径  $A \rightarrow B$ 。

从初态  $A(p_0, V_0)$  直接经可逆的等压过程膨胀到  $B(p_0, 3V_0)$  的熵变为

$$\Delta S_{AB} = \int \frac{dQ_p}{T} = \frac{mC_{p,m}}{M} \int_{T_0}^{T_B} \frac{dT}{T} = \frac{mC_{p,m}}{M} \ln \frac{T_B}{T_0} \quad (3)$$

对等压过程  $A \rightarrow B$ ，有

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{3V_0}{T_B}$$

所以

$$T_B = 3T_0 \quad (4)$$

把(4)式代入(3)式，即可得

$$\Delta S_{AB} = 2C_{p,m} \ln 3$$

在  $A$  和  $B$  两状态之间选择不同的可逆过程计算熵变，结果是相同的。

# 第七章

## 静止电荷的电场

### 一、教学基本要求

1. 掌握电场强度概念,掌握利用叠加原理分析、求解电场强度的基本方法.
2. 掌握静电场的高斯定理,掌握利用高斯定理计算电场强度的条件和方法.
3. 掌握静电场的环路定理和电势的概念,理解用电势的叠加原理求电势的基本方法.
4. 理解电势与电场强度的关系.
5. 理解导体的静电平衡条件,能分析简单导体系统在静电平衡时的电荷分布、电场强度和电势.
6. 理解电介质的极化机理及其描述.
7. 理解电容器概念和典型的连接方式.了解电容器的充、放电过程.
8. 理解电场的能量和能量密度概念.

### 二、本章习题分类

1. 库仑定律和力的叠加原理的应用
2. 电场强度和电场强度的叠加原理的应用
3. 高斯定理的应用
4. 电势和电势的叠加原理的应用
5. 电势与电场强度的关系
6. 静电平衡条件的应用
7. 有电介质时的电场问题和电容的计算
8. 电场能量的计算

### 三、习题分析和解答

1. 库仑定律和力的叠加原理的应用

7-1. 在真空中,两个等值同号的点电荷相距0.01 m时的作用力为 $10^{-5}$  N,它们相距0.1 m时的作用力为多大? 两点电荷所带的电荷量是多少?

分析: 真空中点电荷间的相互作用力遵循库仑定律.

解: (1) 设两点电荷相距 $r_1$ 时的库仑力的大小为 $F_1$ ,相距 $r_2$ 时的库仑力的大小为 $F_2$ ,有

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_1^2}, \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_2^2}$$

$r_2 = 0.1$  m时的作用力大小为

$$F_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} F_1 = \left( \frac{0.01}{0.1} \right)^2 \times 10^{-5} \text{ N} = 10^{-7} \text{ N}$$

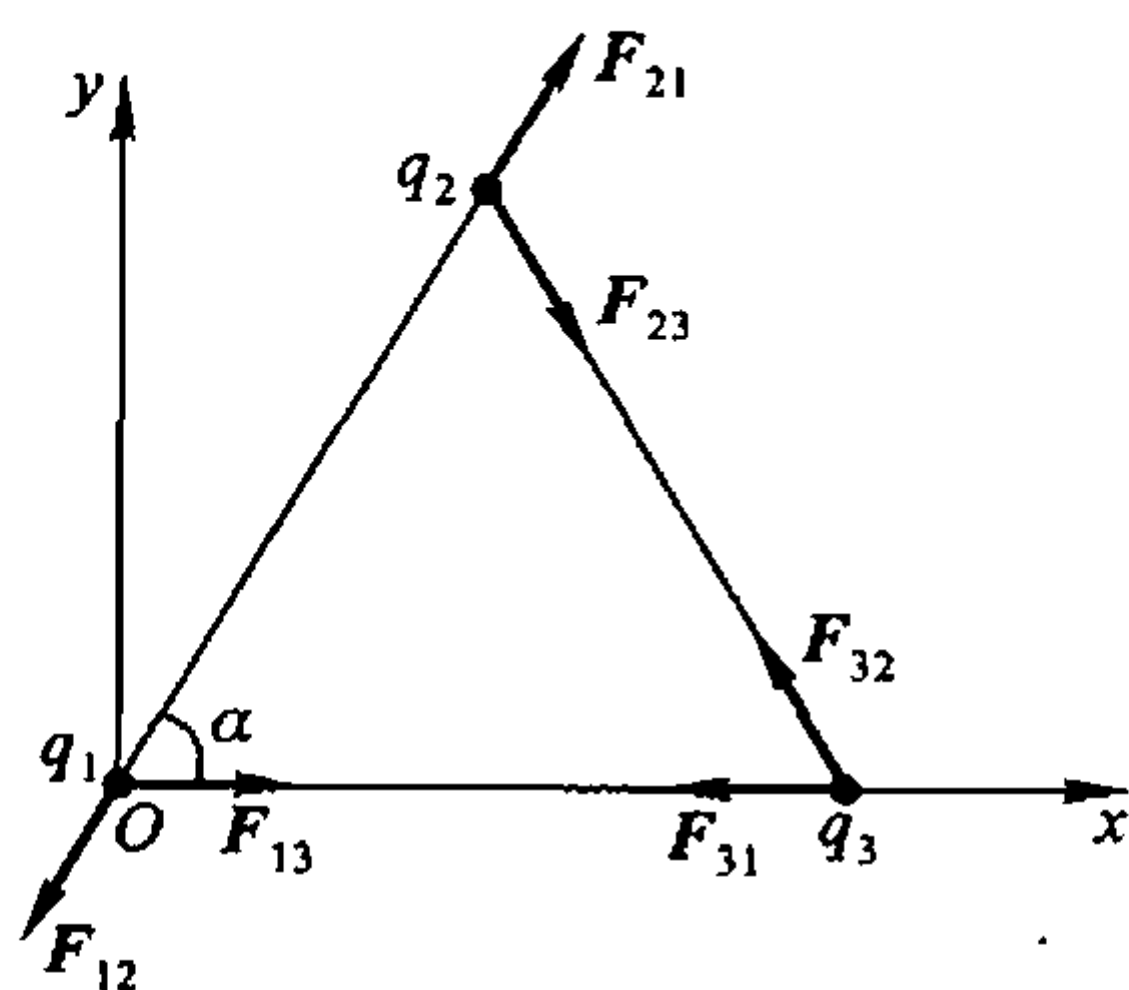
$$(2) \text{ 由 } F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_2^2}, \text{ 得 } q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r_2^2 F_2} = 3.33 \times 10^{-10} \text{ C}$$

7-2. 在边长为2 cm的等边三角形的顶点上,分别放置电荷量为 $q_1 = 1.0 \times 10^{-6}$  C、 $q_2 = 3 \times 10^{-6}$  C和 $q_3 = -1.0 \times 10^{-6}$  C的点电荷.

(1) 哪一个点电荷所受的力最大?

(2) 求作用在 $q_2$ 上力的大小和方向.

分析: 库仑定律给出真空中每对点电荷间的相互作用力,力的叠加原理给出每个点电荷所受合力.



解图 7-2

解: (1) 取直角坐标系  $Oxy$  如解图 7-2 所

示,图中 $\alpha = 60^\circ$ . 设 $q_1$ 、 $q_2$ 和 $q_3$ 所受的合力分别为 $F_1$ 、 $F_2$ 和 $F_3$ ,有

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{12} + F_{13} = -F_{12} \cos \alpha \mathbf{i} - F_{12} \sin \alpha \mathbf{j} + F_{13} \mathbf{i} \\ &= (F_{13} - F_{12} \cos \alpha) \mathbf{i} - F_{12} \sin \alpha \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1)$$

$$F_2 = F_{21} + F_{23} = (F_{21} + F_{23}) \cos \alpha \mathbf{i} + (F_{21} - F_{23}) \sin \alpha \mathbf{j} \quad (2)$$

$$F_3 = F_{31} + F_{32} = -(F_{31} + F_{32} \cos \alpha) \mathbf{i} + F_{32} \sin \alpha \mathbf{j} \quad (3)$$

$$q_1 \text{ 受的合力大小为 } F_1 = \sqrt{(F_{13} - F_{12} \cos \alpha)^2 + (F_{12} \sin \alpha)^2} \quad (4)$$

$$q_2 \text{ 受的合力大小为 } F_2 = \sqrt{[(F_{21} + F_{23}) \cos \alpha]^2 + [(F_{21} - F_{23}) \sin \alpha]^2} \quad (5)$$

$$q_3 \text{ 受的合力大小为 } F_3 = \sqrt{(F_{31} + F_{32} \cos \alpha)^2 + (F_{32} \sin \alpha)^2} \quad (6)$$

以 $a$ 表示等边三角形的边长,代入已知数据,可得每对点电荷间相互作用力的大小分别为

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} = 67.5 \text{ N}$$

$$F_{23} = F_{32} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 67.5 \text{ N}$$

$$F_{13} = F_{31} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 22.5 \text{ N}$$

将上述计算结果和  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  分别代入(4)、(5)和(6)式,可得

$$F_1 = 59.5 \text{ N}, \quad F_2 = 67.5 \text{ N}, \quad F_3 = 81.1 \text{ N}$$

$q_3$  受力为最大.

(2)  $q_2$  受合力的大小已由以上计算得出  $F_2 = 67.5 \text{ N}$ , 合力  $F_2$  的方向可由(2)式得出. 由于  $F_{21}$  和  $F_{23}$  大小相等, 故(2)式为

$$F_2 = F_{21} + F_{23} = (F_{21} + F_{23}) \cos \alpha i = 67.5 i \text{ N}$$

沿图示  $x$  轴正方向.

**7-3.** 在正方形的两个相对的角上各放置一点电荷  $Q$ , 在其他两个相对角上各置一点电荷  $q$ . 如果作用在  $Q$  上的力为零, 求  $Q$  与  $q$  的关系.

**分析:** 利用库仑定律和力的叠加原理求解本题. 根据电荷的对称分布, 选取合适的坐标系, 可简化运算.

**解:** 设正方形的边长为  $a$ , 以  $Q$  为原点取坐标  $Oxy$ . 如解图 7-3 所示.  $x$  轴上的点电荷  $Q$  受两个  $q$  的作用力具有对称性, 所受合力沿  $x$  轴. 即

$$F = F_x = F_Q + 2F_{qx}$$

其中

$$F_Q = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}a)^2}$$

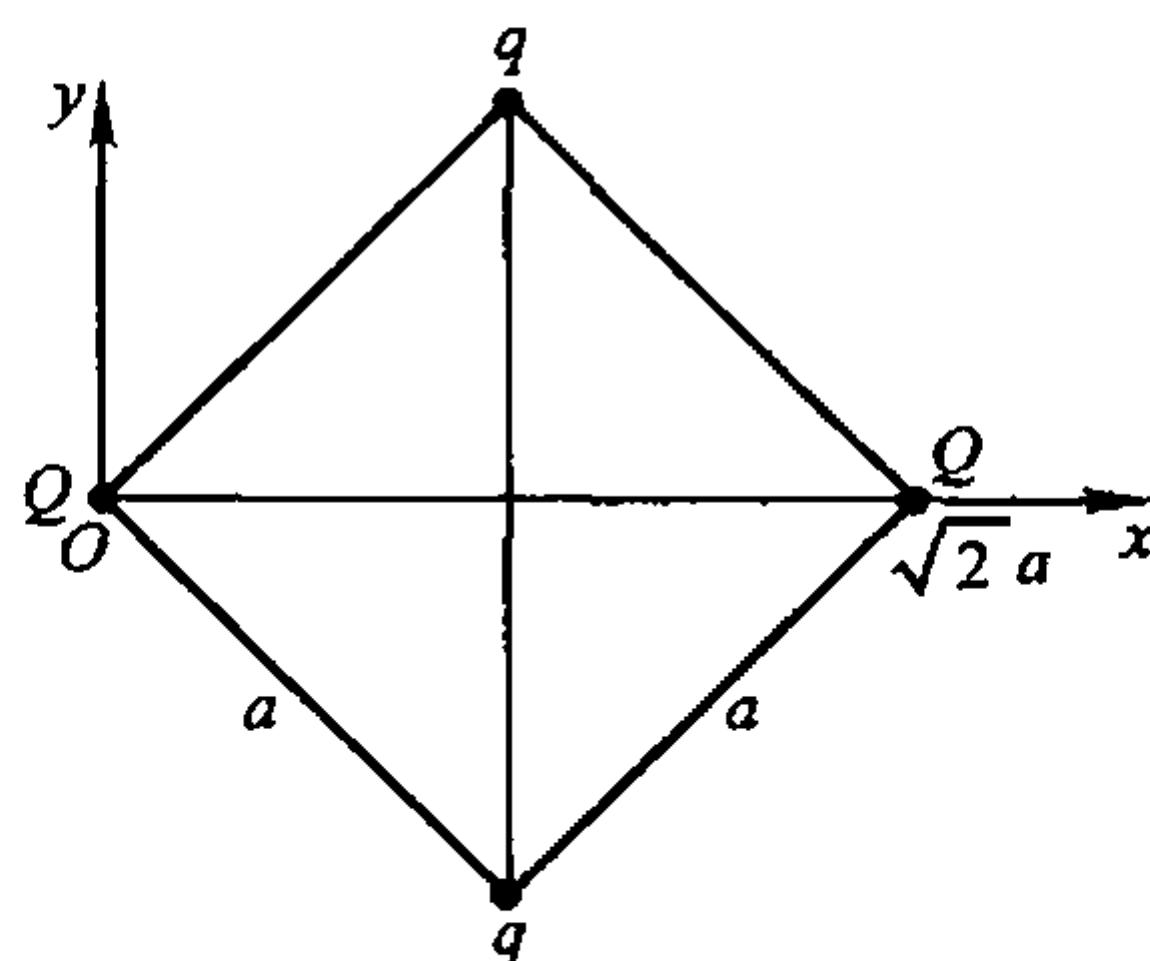
$$F_{qx} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos 45^\circ$$

所以

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}a)^2} + 2 \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos 45^\circ$$

令上式为零, 得

$$Q = -2\sqrt{2}q$$

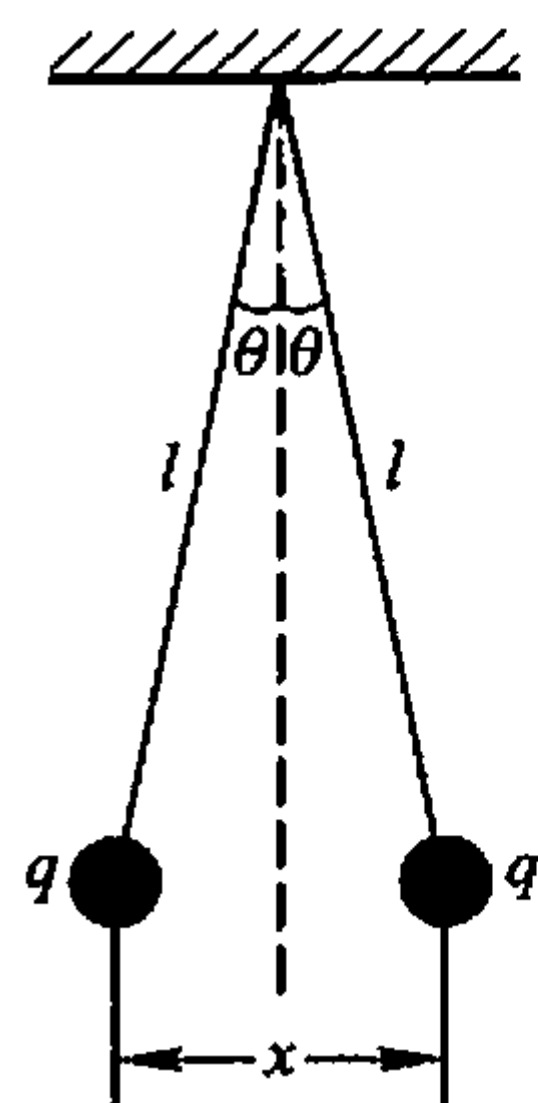


解图 7-3

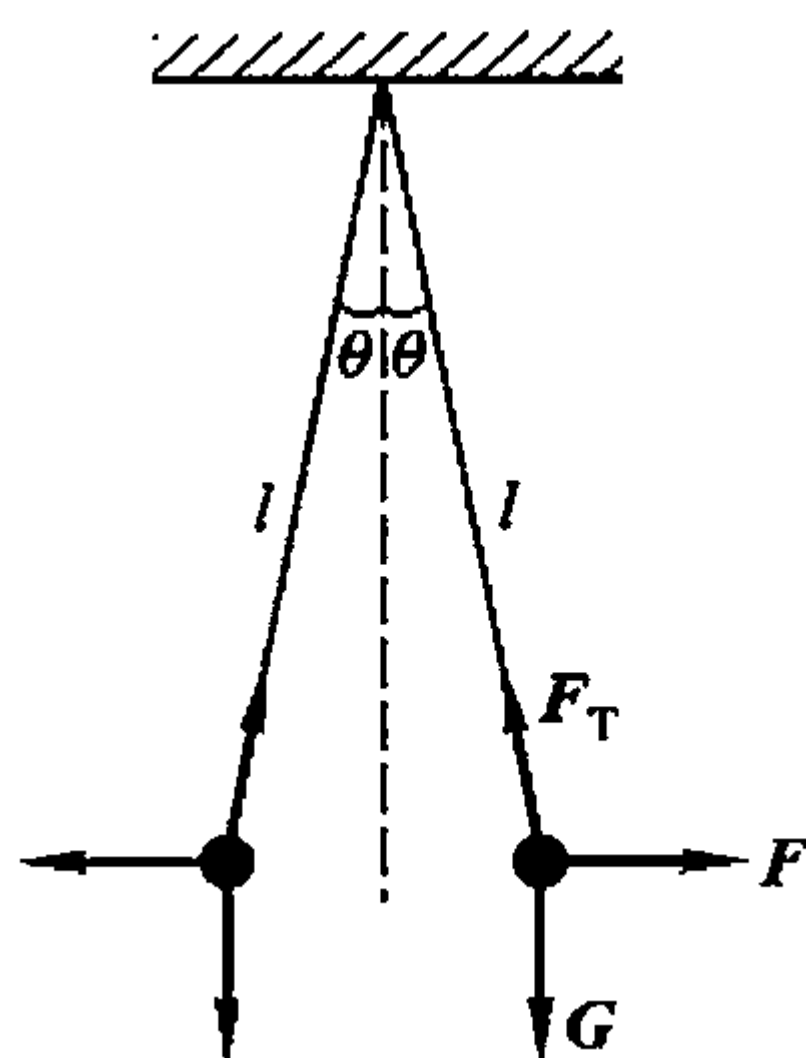
**7-4.** 为了验证库仑定律点电荷之间的作用力与距离的关系  $F \propto 1/r^n$  中  $n=2$ , 有人构思了如下的实验: 两相同的金属小球用两根相同长的悬线吊在  $O$  点上, 如图所示, 如果它们均带电荷  $q$ , 则可测定它们之间的排斥距离为  $x_1$ ; 如果它们均带电荷  $\frac{q}{2}$ , 则可测定它们之间的排斥距离为  $x_2$ , 图中  $\theta$  角很小. 请由此导

出库仑定律中的幂指数  $n$  与  $x_1, x_2$  的关系式。

分析：根据对带电小球的受力分析可知，小球在重力  $G$ 、悬线张力  $F_T$  和库仑力  $F$  的作用下处于平衡状态。由于悬线张角很小，作近似后求解。



习题 7-4 图



解图 7-4

解：带电小球受力如解图 7-4 所示。设小球受库仑力为

$$F_q = k \frac{q^2}{x^n}$$

受力平衡时，有  $F_T \sin \theta = F_q$ ， $F_T \cos \theta = mg$

得  $\tan \theta = \frac{F_q}{mg}$

因  $\theta$  很小，近似有  $\tan \theta \approx \frac{x}{2l}$ 。由上述方程可得

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{q_1^2 x_2^n}{q_2^2 x_1^n} = \frac{4x_2^n}{x_1^n}$$

即  $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n+1} = 4$

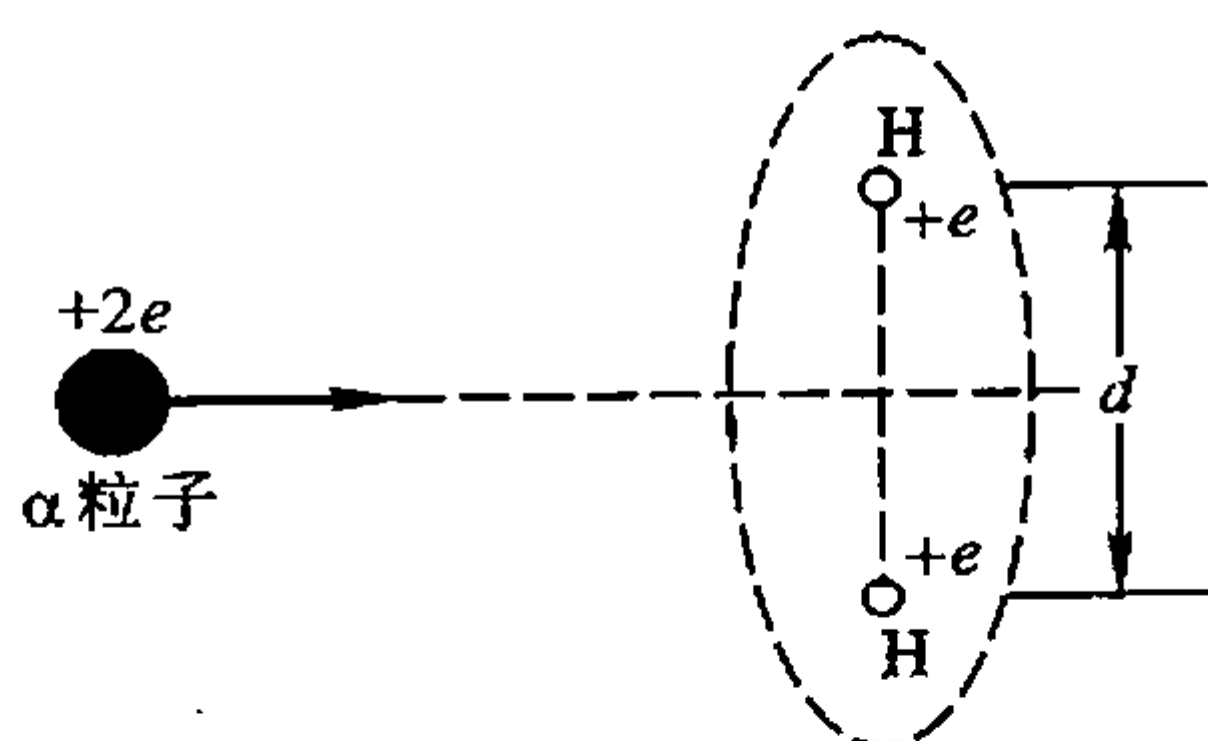
对上式等号两边取对数，可得  $n = \frac{\lg 4}{\lg \left(\frac{x_1}{x_2}\right)} - 1$

7-5.  $\alpha$  粒子快速通过氢分子中心，其轨迹垂直于两核的连线，两核的距离为  $d$ ，如图。问  $\alpha$  粒子在何处受到的力最大？假定  $\alpha$  粒子穿过氢分子中心时两核移动可忽略，同时忽略分子中电子的电场。

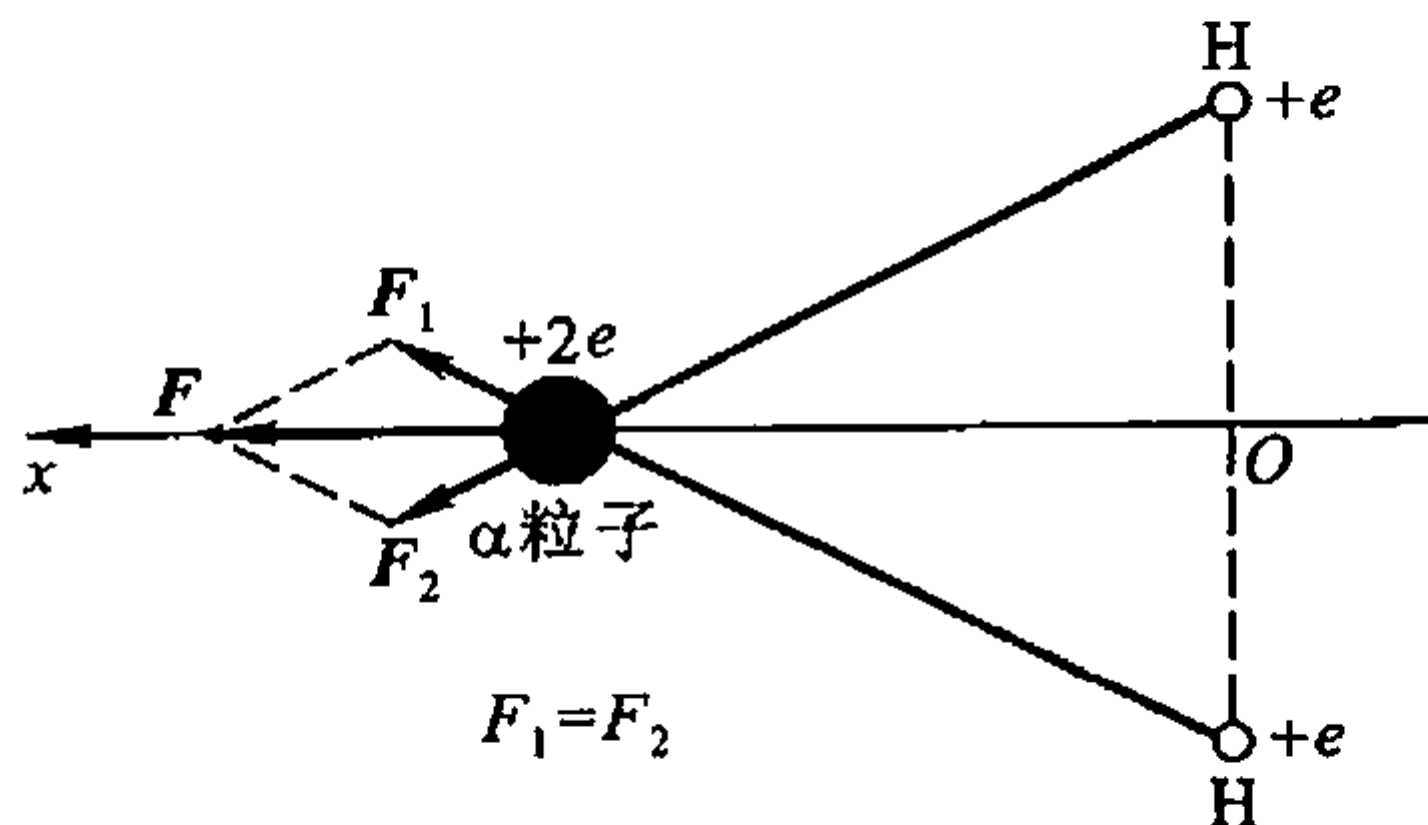
分析： $\alpha$  粒子受两氢核库仑斥力的合力沿水平方向。合力最大的位置由极值条件求出。

解：如解图 7-5 所示，沿水平方向建立  $x$  轴，向左为正向。由库仑定律，两

氢核对  $\alpha$  粒子作用的库仑力大小相等,为



习题 7-5 图



解图 7-5

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

合力的大小为

$$F = F_x = 2F_1 \cos \theta = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{8e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{(4x^2 + d^2)^{3/2}}$$

令  $\frac{dF}{dx} = 0$ , 即

$$\left[ \frac{1}{(4x^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{8x^2}{(4x^2 + d^2)^{5/2}} \right] = 0$$

解得  $\alpha$  粒子受力最大的位置  $x = \pm \frac{d}{2\sqrt{2}}$

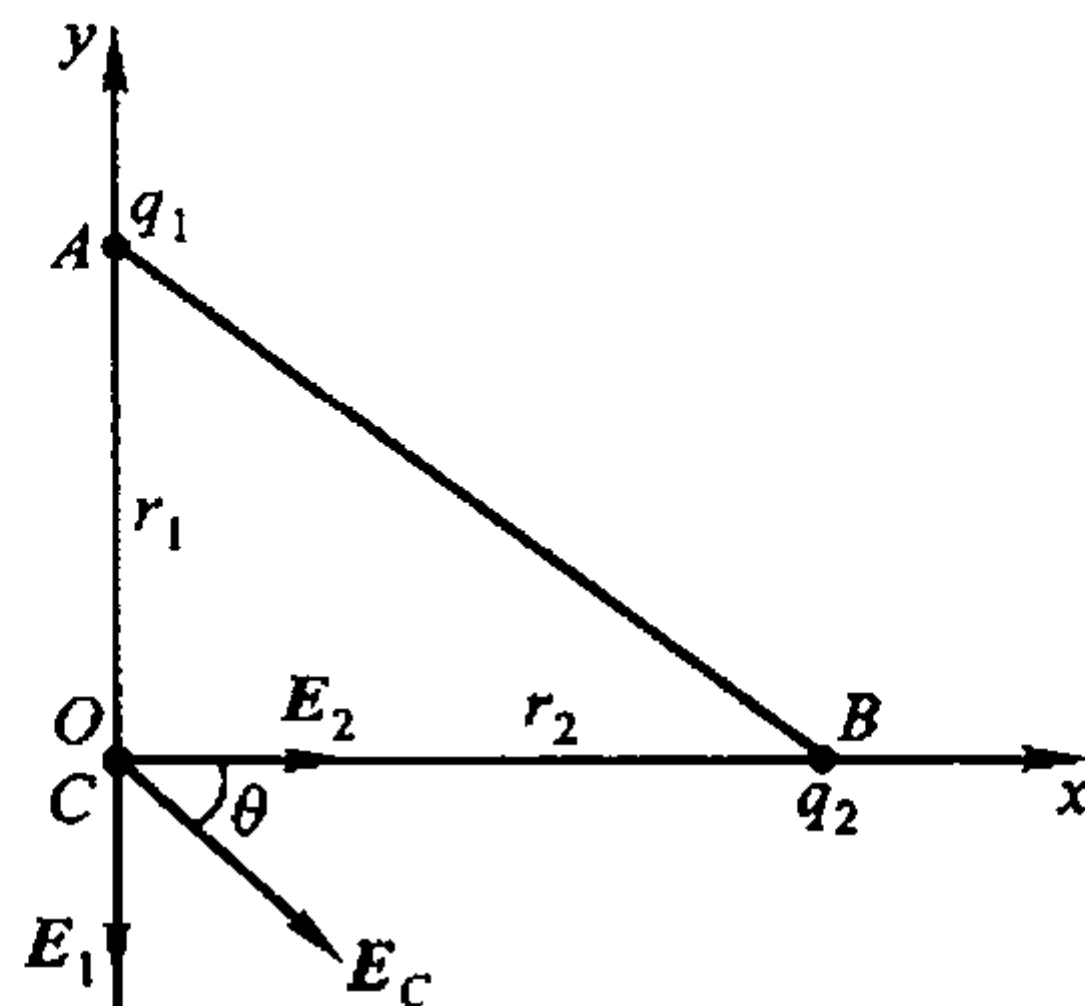
## 2. 电场强度和电场强度的叠加原理的应用

7-6. 在直角三角形  $ABC$  的  $A$  点, 放置点电荷  $q_1 = 1.8 \times 10^{-9} \text{ C}$ , 在  $B$  点放置点电荷  $q_2 = -4.8 \times 10^{-9} \text{ C}$ . 已知  $BC = 0.04 \text{ m}$ ,  $AC = 0.03 \text{ m}$ . 试求直角顶点  $C$  处的电场强度.

解: 如解图 7-6 所示. 以  $C$  为原点, 建立直角坐标  $Oxy$ . 令  $AC = r_1$ ,  $BC = r_2$ , 则  $q_1$ 、 $q_2$  在  $C$  点产生的电场强度分别为

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} (-j) = 1.8 \times 10^4 (-j) \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} i = 2.7 \times 10^4 i \text{ V/m}$$



解图 7-6

C 点的合场强为

$$\mathbf{E}_C = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \mathbf{i} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \mathbf{j}$$

$E_C$  的大小为

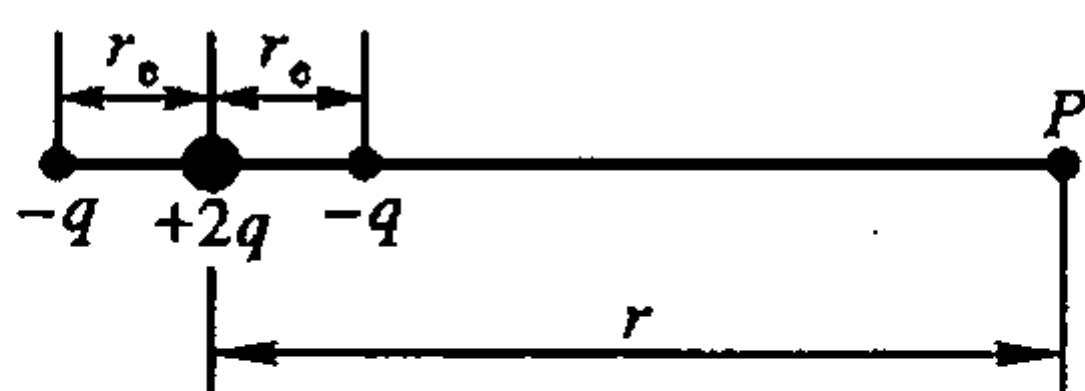
$$E_C = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 3.24 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$E_C$  与水平方向夹角为

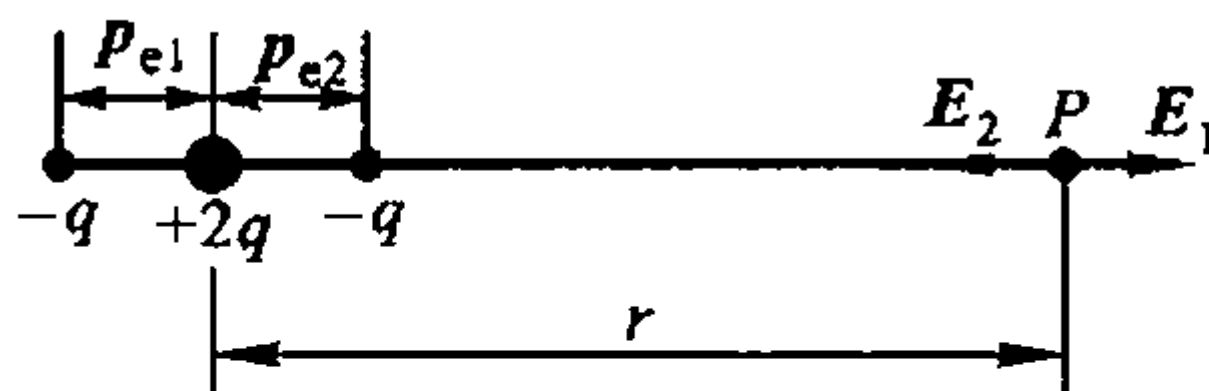
$$\theta = \arctan \frac{E_1}{E_2} = \arctan \frac{2}{3} = 33.7^\circ$$

7-7. 如图所示的电荷分布称为电四极子, 它由两个相同的电偶极子组成. 证明在电四极子轴线的延长线上离中心为  $r$  ( $r \gg r_e$ ) 的  $P$  点处的电场强度为

$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$ , 式中  $Q = 2qr_e^2$  称为这种电荷分布的电四极矩.



习题 7-7 图



解图 7-7

分析: 图示电四极子可看作两个反向电偶极子的组合,  $P$  点的场强为两个反向电偶极子在该点电场强度的叠加.

证: 已知电偶极子在其延长线上远场点 ( $r \gg r_e$ ) 的电场强度值为

$$E = \frac{p_e}{2\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qr_e}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

设两电偶极子在  $P$  点的场强分别为  $E_1$  和  $E_2$ , 如解图 7-7 所示,  $P$  点合场强的大小为

$$E = |E_2 - E_1| = \frac{qr_e}{2\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{r_e}{2}\right)^3} - \frac{qr_e}{2\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{r_e}{2}\right)^3}$$

整理并略去  $r_e$  的高次项, 可得

$$E = \frac{qr_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{3r^2 r_e}{r^6} = \frac{6qr_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

$E$  的方向指向电四极子.

7-8. 长  $l = 15 \text{ cm}$  的直导线  $AB$  上均匀地分布着线密度为  $\lambda = 5 \times 10^{-9} \text{ C/m}$  的电荷 (如图). 求:

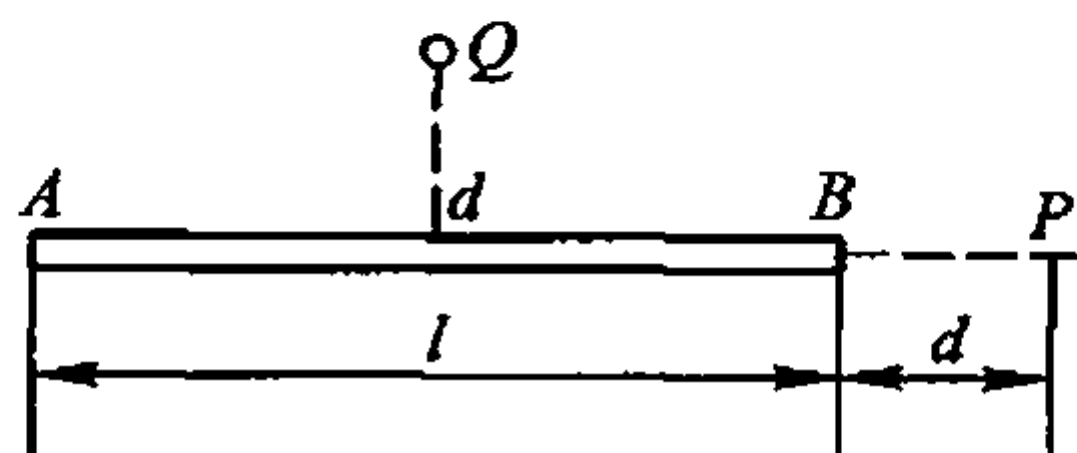
(1) 在导线的延长线上与导线一端  $B$  相距  $d = 5 \text{ cm}$  点  $P$  处的电场强度;

(2) 在导线的垂直平分线上与导线中点相距  $d = 5 \text{ cm}$  处  $Q$  点的电场强度.

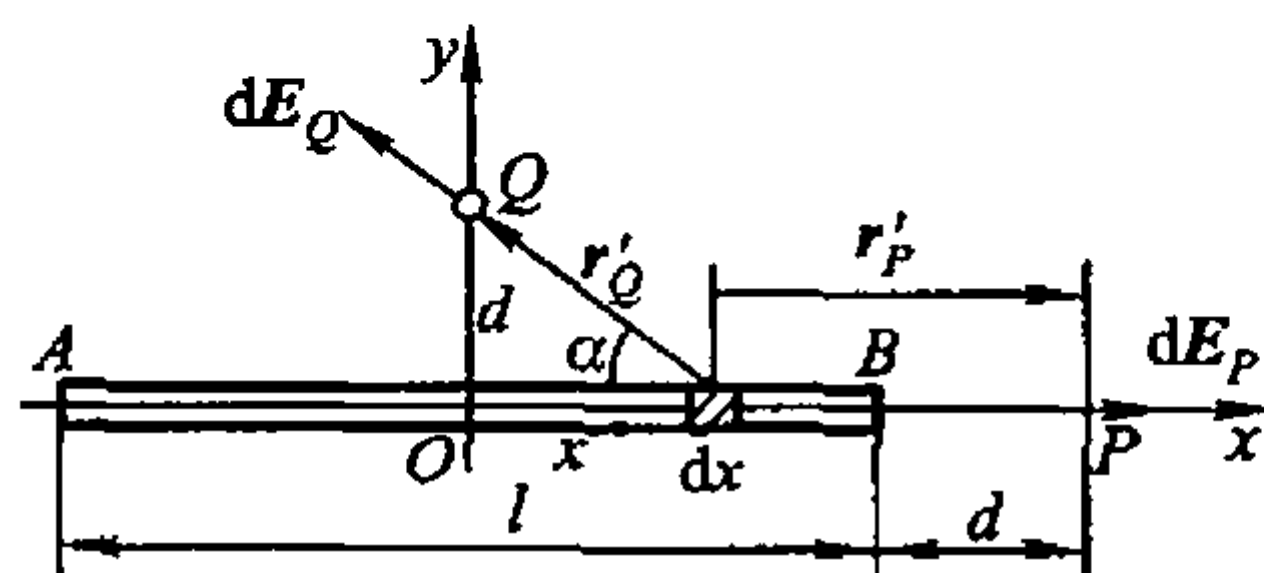
分析: 电荷连续分布的带电体在考察点的电场强度有确定的大小和方向.

通常应根据电荷分布建立坐标系, 写出电荷元  $dq$  在考察点的  $dE$ . 当各电荷元在考察点的电场强度  $dE$  的方向不同时, 应将  $dE$  按坐标进行分解, 写出分量式  $dE_x$  和  $dE_y$  等, 通过积分求出合场强的分量  $E_x$  和  $E_y$  等, 最后求得合场强  $E$ .

解题前应注意对电荷分布对称性的分析, 选择好适当的坐标系, 并注意确定积分运算的上下限.



习题 7-8 图



解图 7-8

解: 取坐标系  $xOy$ , 如解图 7-8 所示. 离  $O$  点  $x$  处的电荷元  $dq = \lambda dx$  在考察点所产生的电场强度为  $dE$ .

(1) 考察点  $P$  在导线的延长线上时, 有

$$dE_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_P'^2} i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\left(\frac{l}{2} + d - x\right)^2} i$$

带电直导线  $AB$  上所有电荷元在  $P$  的电场强度方向都相同, 因此,  $P$  处的电场强度为

$$\begin{aligned} E_P &= \int dE_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\left(\frac{l}{2} + d - x\right)^2} i \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{d} - \frac{1}{d+l} \right] i = 6.75 \times 10^2 i \text{ V/m} \end{aligned}$$

$E_P$  沿  $x$  轴正方向.

(2) 考察点  $Q$  在导线的垂直平分线上时, 有

$$dE_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r_Q'^2} e_{r_Q'}$$

式中  $e_{r_Q'}$  是从  $dq$  指向  $Q$  的单位矢量.

带电直导线  $AB$  上各电荷元在  $Q$  点的  $dE_Q$  方向并不相同, 因此需将  $dE_Q$  按坐标进行分解, 有

$$dE_{Qx} = dE_Q \cos \alpha$$

$$dE_{Qy} = dE_Q \sin \alpha$$

由电荷对  $Q$  点的对称性分布可知,  $E_{Qx} = 0$ .  $Q$  点的合场强  $E_Q$  沿  $y$  轴正方向,

即  $E_Q = E_{Qy} j$ . 所以,有

$$E_Q = \int dE_{Qy} = \int dE_Q \sin \alpha = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r_Q'^2} \sin \alpha$$

因为

$$r_Q' = \sqrt{d^2 + x^2}, \quad \sin \alpha = \frac{d}{r_Q'}$$

所以,可有

$$\begin{aligned} E_Q &= \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r_Q'^2} \sin \alpha = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{d^2 \sqrt{d^2 + x^2}} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\lambda l}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{1}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

代入数据,可得  $E_Q = 1.50 \times 10^3 \text{ V/m}$ , 或  $E_Q = 1.50 \times 10^3 j \text{ V/m}$

**7-9.** 一电偶极子原来与一均匀电场平行,将它转到与电场反平行时,外力做功  $0.1 \text{ J}$ . 问当此电偶极子与电场强度成  $45^\circ$  时,作用于它的力偶矩有多大?

解: 在均匀电场中电偶极子受力矩大小为  $M = p_e E \sin \theta$ . 在  $\theta$  由  $0^\circ$  转到  $180^\circ$  的过程中,外力功为

$$A = \int_0^\pi M d\theta = \int_0^\pi p_e E \sin \theta d\theta = 2p_e E = 0.1 \text{ J}$$

得

$$p_e E = \frac{A}{2} = 0.05 \text{ J}$$

当此电偶极子与场强成  $\theta = 45^\circ$  时,作用于它的力偶矩为

$$M = p_e E \sin \theta = \frac{A}{2} \sin \frac{\pi}{4} = 3.54 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

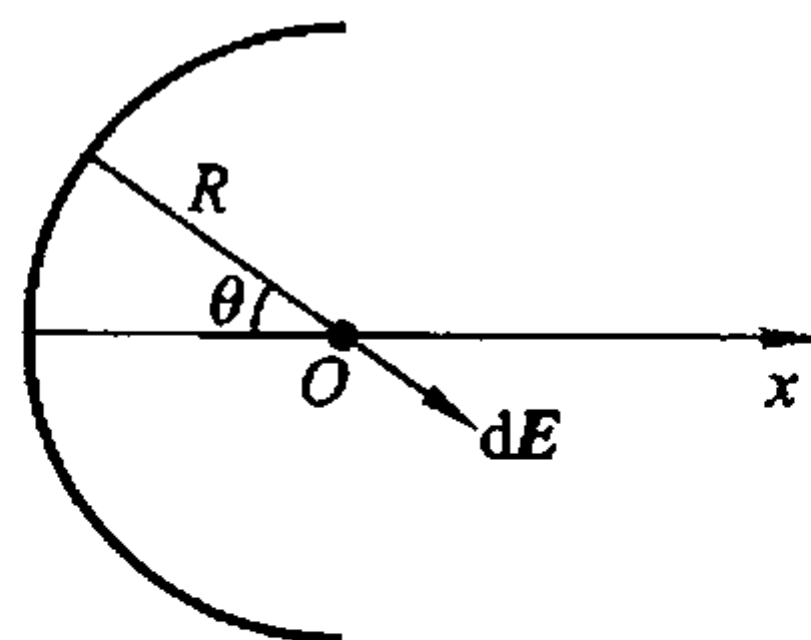
**7-10.** 用细绝缘线弯成的半圆形环,半径为  $R$ ,其上均匀地带正电荷  $Q$ ,求圆心  $O$  点处的电场强度.

分析: 根据电荷分布的对称性,注意选择好坐标系解题.

解: 如解图 7-10 所示,设  $Q > 0$ . 在半圆形环上任取一电荷元  $dq = \lambda dl$ ,在圆心  $O$  点处的电场强度的大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2}$$

方向如图所示. 式中  $\lambda = \frac{Q}{\pi R}$ ,  $dl = R d\theta$ .



解图 7-10

由电荷的对称分布可知,圆心  $O$  点处的电场强度沿  $x$  轴正方向. 有

$$E = \int dE_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \theta = 2 \times \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

7-11. 在真空中有一半径为  $R$  的均匀带电球面, 总带电量为  $Q (Q > 0)$ . 今在球面上挖去非常小的一块面积  $\Delta S$  (连同电荷), 且假设挖去后不影响原来的电荷分布, 求挖去  $\Delta S$  后球心处电场强度的大小和方向.

分析: 用“补偿法”, 并由电场的叠加原理解题.

解: 设  $Q > 0$ , 电荷面密度为  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ , 均匀带电的球面在球心处的电场强度为  $E_1$ .

在球面上挖去  $\Delta S$ , 相当于再使  $\Delta S$  带电荷量  $\Delta q = -\sigma \Delta S$ . 设  $\Delta q$  在球心处的电场强度为  $E_2$ . 由电场强度的叠加原理可知, 球心处的电场强度为

$$E = E_1 + E_2$$

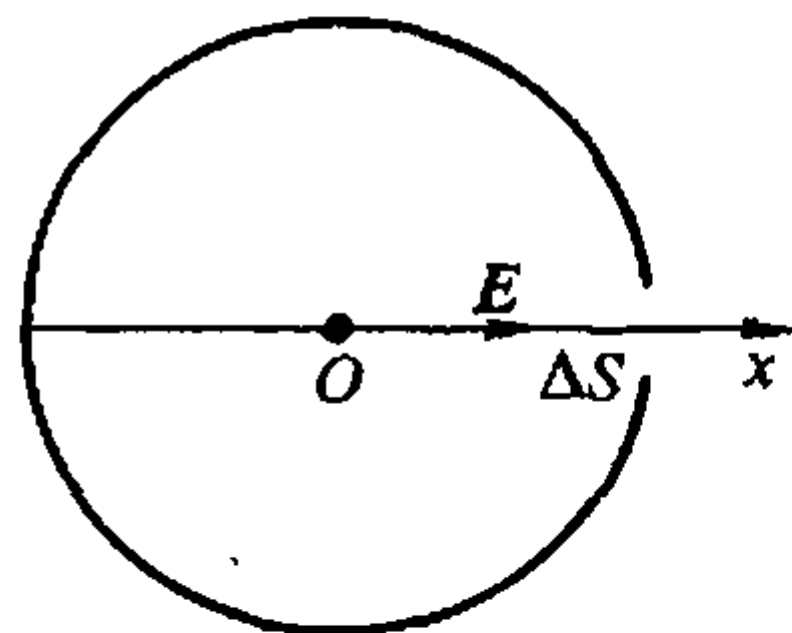
由于球面的电荷均匀分布, 在球心的电场强度  $E_1 = 0$ . 所以

$$E = E_2$$

由于  $E_2$  是由非常小的面积  $\Delta S$  上的负电荷产生的, 故可作点电荷电场处理, 即

$$E = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{R^2} = \frac{Q\Delta S}{(4\pi R^2)^2 \epsilon_0}$$

$E$  的方向指向  $\Delta S$  处, 如解图 7-11 所示, 指向  $x$  轴正方向.



解图 7-11

7-12. 一半径为  $r$  的半球面均匀带电, 电荷面密度为  $\sigma$ , 求球心处的电场强度.

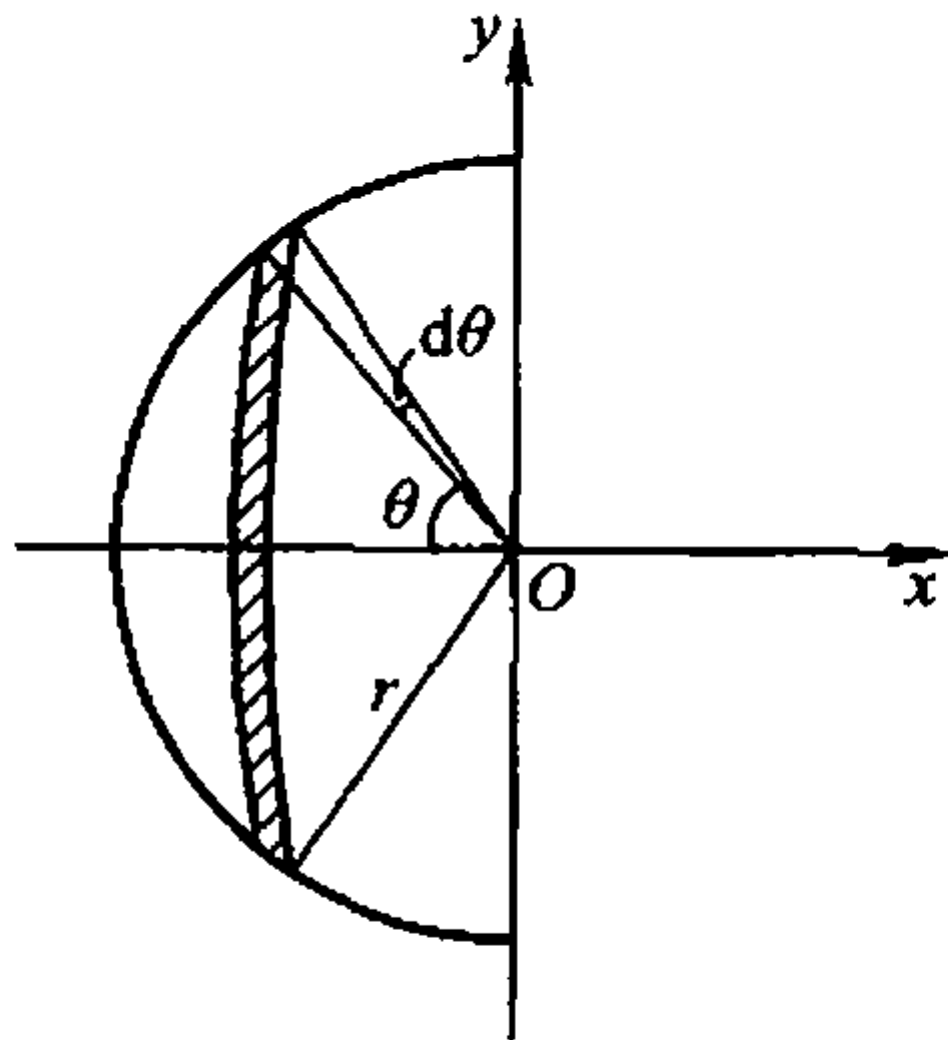
分析: 利用带电细圆环轴线上电场强度的结论和电场强度的叠加原理求解本题. 将均匀带电半球面看作是由无数个半径连续变化的同轴带电细圆环排列而成的, 由于带电细圆环在轴线上的电场强度方向都沿轴向, 因此均匀带电半球面在球心处的电场强度沿半球面的对称轴.

解: 如解图 7-12, 图中圆环对  $Ox$  轴对称, 所带电量为  $dq = \sigma dS = \sigma (2\pi r \sin \theta) r d\theta$ , 圆环半径为  $r \sin \theta$ , 环心在  $x$  处.

根据带电圆环轴线上的电场强度

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xq}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

作相对应的代换,  $x = r \cos \theta$ ,  $R = r \sin \theta$ ,  $x^2 + R^2 = r^2$  可得到细圆环在  $O$  点的电场强度为



解图 7-12

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \cos \theta \sigma 2\pi r^2 \sin \theta}{r^3} d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

球心处的电场强度为

$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

$E$  指向  $x$  轴正方向.

### 3. 高斯定理的应用

**7-13.** 设点电荷的分布是:在  $(0,0)$  处为  $5 \times 10^{-8} \text{ C}$ , 在  $(3 \text{ m}, 0)$  处为  $4 \times 10^{-8} \text{ C}$ , 在  $(0, 4 \text{ m})$  处为  $-6 \times 10^{-8} \text{ C}$ . 计算通过以  $(0,0)$  为球心, 半径等于  $5 \text{ m}$  的球面上的总  $E$  通量.

分析: 点电荷系统通过一闭合曲面的  $E$  通量由高斯定理给出.

解: 以  $(0,0)$  为球心, 半径为  $R = 5 \text{ m}$  作高斯闭合球面, 则三个点电荷均在球面内, 通过球面的总  $E$  通量为

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 q_i \\ &= \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} \times (5 \times 10^{-8} + 4 \times 10^{-8} - 6 \times 10^{-8}) \text{ V} \cdot \text{m} \\ &= 3.4 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

**7-14.** 如图所示, 在点电荷  $q$  的电场中, 取半径为  $R$  的圆形平面. 设  $q$  在垂直于平面并通过圆心  $O$  的轴线上点  $A$  处, 点  $A$  与圆心点  $O$  的距离为  $d$ . 试计算通过此平面的  $E$  通量.

分析: 点电荷的电场线在以点电荷为球心的球面上分布均匀, 呈球对称辐射状. 通过圆形平面的电场线一定通过以该电荷为顶点的球面锥体的球冠面. 找出球冠面与整个球面的关系, 即可求出通过该圆平面的  $E$  通量.

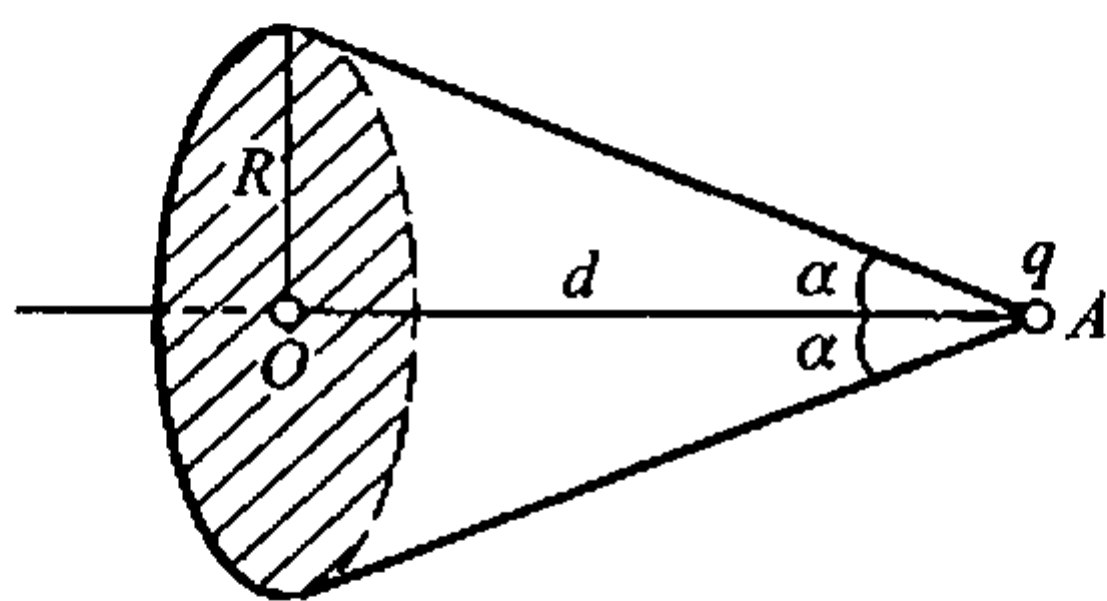
解: 设圆板边缘到点电荷的距离为  $r$ , 以点电荷为球心,  $r$  为半径作一球面. 该球面的面积为

$$S_0 = 4\pi r^2 = 4\pi(R^2 + d^2)$$

球冠面积为

$$S = 2\pi r(r - d) = 2\pi \sqrt{R^2 + d^2} (\sqrt{R^2 + d^2} - d)$$

通过整个球面  $S_0$  的  $E$  通量为  $\Psi_{S_0} = \oint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES_0 = \frac{q}{\epsilon_0}$



习题 7-14 图

通过球冠面  $S$  的  $E$  通量,也就是通过圆形平面的  $E$  通量,为

$$\Psi_S = \int_S E \cdot dS = ES$$

可得

$$\frac{\Psi_S}{\Psi_{S_0}} = \frac{ES}{ES_0} = \frac{S}{S_0}$$

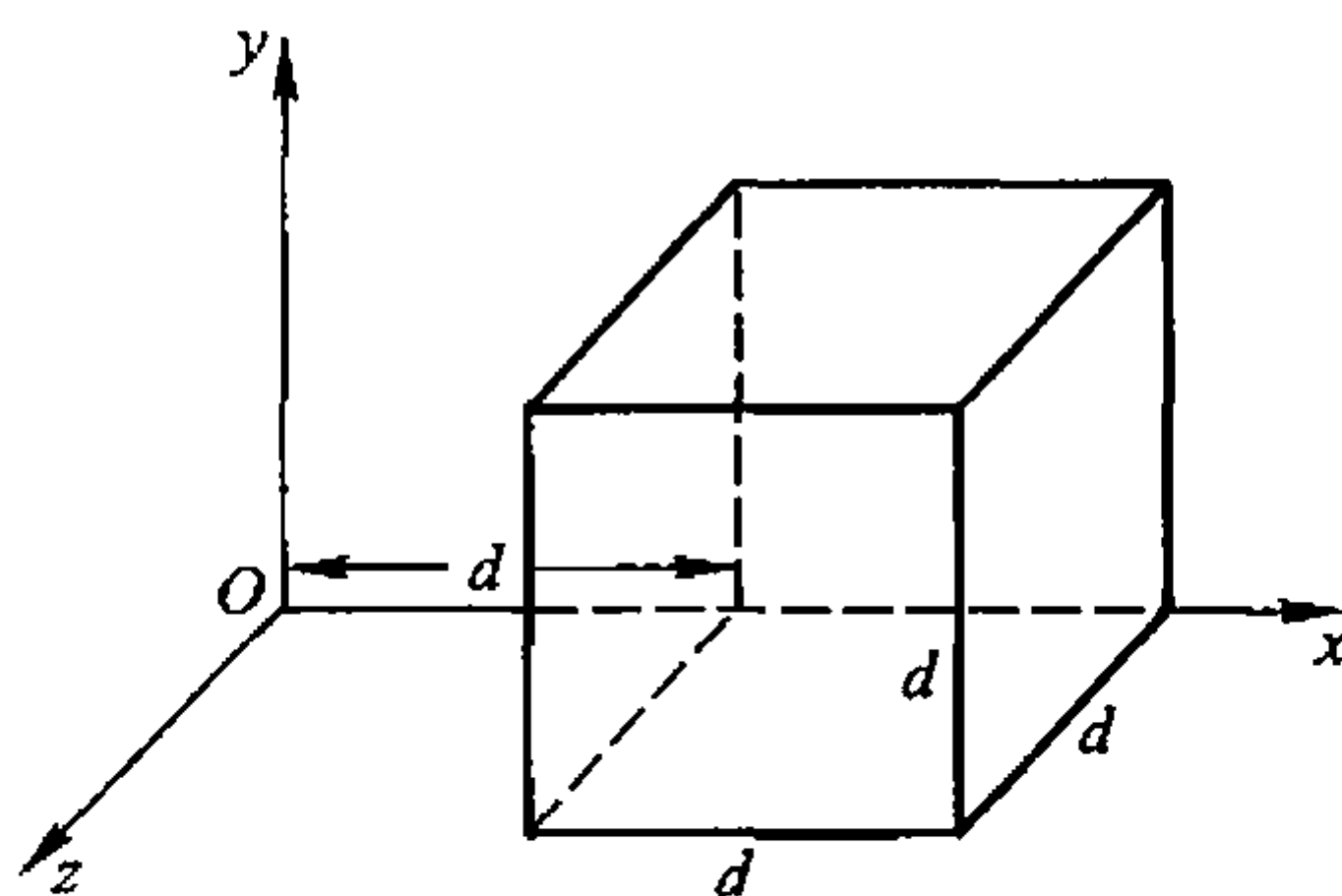
所以

$$\Psi_S = \Psi_{S_0} \frac{S}{S_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{(\sqrt{R^2 + d^2} - d)}{2\sqrt{R^2 + d^2}} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$$

7-15. 图中电场强度的分量为  $E_x = bx^{1/2}$ ,  $E_y = E_z = 0$ , 式中  $b = 800 \text{ N}/(\text{C} \cdot \text{m}^{1/2})$ ,  $d = 10 \text{ cm}$ . 试计算:

- (1) 通过立方体表面的总  $E$  通量;
- (2) 立方体内的总电荷量.

分析: 题给电场强度是沿  $x$  方向的非均匀电场. 通过立方体的上下前后四个侧面(面法线垂直于  $x$  轴)的电场强度通量为零; 通过立方体左右两个侧面(面法线与  $x$  轴平行)的  $E$  通量不为零, 且不相等. 在这两个面上的电场强度均匀分布. 根据高斯定理可以断定, 立方体内有激发静电场的源, 即电荷.



习题 7-15 图

解: (1) 通过立方体表面的总  $E$  通量, 就是通过立方体左右两个侧面的  $E$  通量.

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \Psi_{E_1} + \Psi_{E_2} = E_1 \cdot S + E_2 \cdot S \\ &= (E_2 - E_1)S = (b\sqrt{2d} - b\sqrt{d})d^2 = 1.05 \text{ Nm}^2/\text{C} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 由高斯定理 } \Psi_E = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ 得 } q = \epsilon_0 \Psi_E = 9.27 \times 10^{-12} \text{ C}$$

7-16. (1) 地球的半径为  $6.37 \times 10^6 \text{ m}$ , 地球表面附近的场强近似为  $100 \text{ V/m}$ , 方向指向地球中心, 试计算地球带的总电荷量;

(2) 在离地面  $1500 \text{ m}$  处, 场强降为  $24 \text{ V/m}$ , 方向仍指向地球中心. 试计算这  $1500 \text{ m}$  厚的大气层里的平均电荷密度.

分析: 设地球带电量为  $Q$ , 并把地球看作是表面均匀带电的导体球. 利用高斯定理求解.

解: (1) 贴近地球表面作与地球同心的高斯球面, 半径为  $R \approx R_E$ , 使地球表面的电荷全部为高斯面所包围. 由高斯定理

$$\oint_S E \cdot dS = -E4\pi R_E^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

代入  $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ,  $E = 100 \text{ V/m}$ . 得

$$Q = -4\pi\epsilon_0 ER_E^2 = -4.51 \times 10^5 \text{ C}$$

$Q < 0$ , 表明地球带负电.

(2) 设在离地球表面  $h$  高度以下的大气层中有电荷量为  $q$ , 均匀分布. 以地心为球心, 以  $r = R_E + h$  为半径作高斯球面  $S'$ . 在高斯面  $S'$  上的场强为  $E'$ , 方向仍指向地心. 根据高斯定理, 有

$$\oint_{S'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S}' = -E' 4\pi(R_E + h)^2 = \frac{q + Q}{\epsilon_0}$$

即得

$$E' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + Q}{(R_E + h)^2} = 24 \text{ V/m}$$

代入数据, 得

$$q = -4\pi\epsilon_0(R_E + h)^2 E' - Q = 3.43 \times 10^5 \text{ C}$$

$q > 0$ , 表明大气层带正电.

大气层体积为

$$V = \frac{4}{3}\pi[(R_E + h)^3 - R_E^3] = 7.65 \times 10^{17} \text{ m}^3$$

大气层平均电荷密度为  $\bar{\rho} = \frac{q}{V} = 4.48 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$

**7-17.** 在半径分别为 10 cm 和 20 cm 的两层假想同心球面中间, 均匀分布着电荷体密度为  $\rho = 10^{-9} \text{ C/m}^3$  的正电荷. 求离球心 5 cm、15 cm、50 cm 处的电场强度.

**分析:** 电荷的分布具有球对称性时, 它的电场也应具有球对称分布, 运用高斯定理可求出各点的电场强度的大小.

**解:** 以  $R_1$  和  $R_2$  分别表示均匀带电球壳的内、外半径.

设离球心  $r_1 = 0.05 \text{ m}$  处的电场强度为  $E_1$ , 在以  $r_1$  为半径的高斯球面  $S_1$  上,  $E_1$  的大小应该相同, 并处处与  $S_1$  的法线方向平行. 对  $S_1$  运用高斯定理, 有

$$\oint_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q = 0$$

所以, 离球心 5 cm 处的电场强度  $E_1 = 0$ .

以  $r_2 = 0.15 \text{ m}$  为半径作高斯球面  $S_2$ , 设  $S_2$  上各点的场强为  $E_2$ , 对  $S_2$  运用高斯定理, 有  $\oint_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = E_2 4\pi r_2^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$

式中  $\int \rho dV$  是  $S_2$  所围的电荷量

$$\int \rho dV = \int_{R_1}^{r_2} \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \rho (r_2^3 - R_1^3)$$

所以,离球心 15 cm 处的电场强度  $E_2$  的大小为

$$E_2 = \frac{\rho(r_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r_2^2} = 4.0 \text{ V/m}$$

$E_2$  的方向与  $S_2$  的法线方向一致,即沿径向向外.

以  $r_3 = 0.50 \text{ m}$  为半径作高斯球面  $S_3$  时,带电球壳在  $S_3$  内,对  $S_3$  运用高斯定理,有

$$\oint_{S_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{S} = E_3 4\pi r_3^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

式中  $\int \rho dV$  是  $S_3$  所围的电荷量,即带电球壳的全部电荷量,有

$$\int \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \rho (R_2^3 - R_1^3)$$

所以,离球心 50 cm 处的电场强度  $E_3$  的大小为

$$E_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r_3^2} = 1.05 \text{ V/m}$$

$E_3$  的方向与  $S_3$  的法线方向一致,沿径向向外.

**7-18.** 一个半径为  $R$  的球体内的电荷体密度为  $\rho = kr$ , 式中  $r$  是径向距离,  $k$  是常量. 求空间的电场强度分布,并画出  $E$  对  $r$  的关系曲线.

**分析:** 球体内的电荷沿径向非均匀分布,但具有球对称性. 运用高斯定理可求得空间各点的电场强度  $E$  随  $r$  的变化规律.

**解:** 在球体内作半径为  $r$  的同心高斯球面  $S_1$ , 设  $S_1$  上的电场强度为  $E_1$ , 对  $S_1$  运用高斯定理,有

$$\oint_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = E_1 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

式中  $\int \rho dV$  是  $S_1$  所围的电荷量

$$\int \rho dV = \int_0^r kr 4\pi r^2 dr = 4\pi k \int_0^r r^3 dr = \pi k r^4$$

所以,在球体内离球心  $r$  处的电场强度为

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \mathbf{e}_r \quad (0 < r < R)$$

在球外作半径为  $r$  的同心高斯球面  $S_2$ , 设  $S_2$  上的电场强度为  $E_2$ , 对  $S_2$  运用高斯定理,有

$$\oint_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

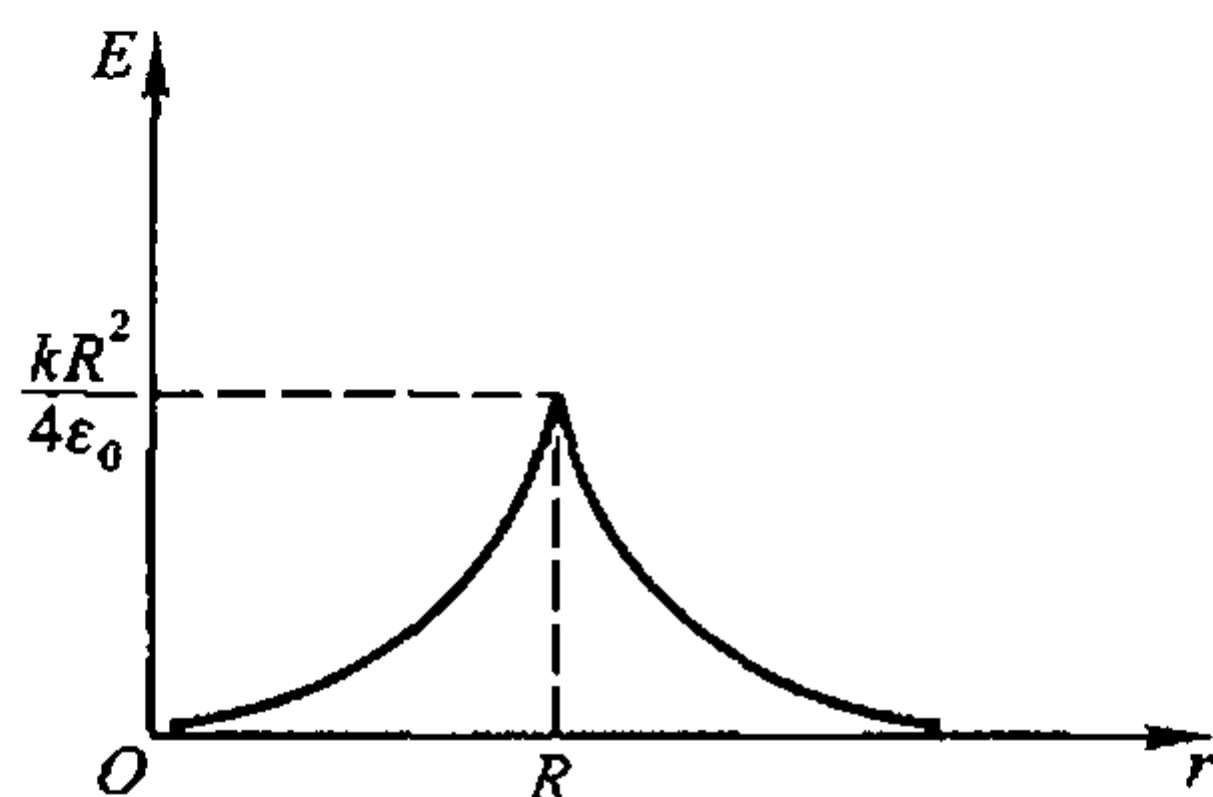
$S_2$  包围了整个球体

$$\int \rho dV = \int_0^R kr4\pi r^2 dr = 4\pi k \int_0^R r^3 dr = \pi k R^4$$

所以,在球体外离球心  $r$  处的电场强度为

$$E_2(r) = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} e_r \quad (r > R)$$

$E-r$  关系曲线如解图 7-18 所示.



解图 7-18

**7-19.** 厚度为 0.5 cm 的无限大平板均匀带电,电荷体密度为  $1.0 \times 10^{-4} \text{ C/m}^3$ . 求:

- (1) 薄层中央的电场强度;
- (2) 薄层内与其表面相距 0.1 cm 处的电场强度;
- (3) 薄层外的电场强度.

**分析:** 无限大均匀带电板对中央面对称,因此,在中央面两侧,带电板内外的电场强度相对板的中央面也应具有对称性. 可运用高斯定理求得带电板内外的电场分布.

如果把带电板看成是由无数厚度为  $dr$  的无限大均匀带电平板重叠而成的话,根据电场强度的叠加原理可知,空间各点的电场强度为各薄层在该点的电场强度的矢量和.

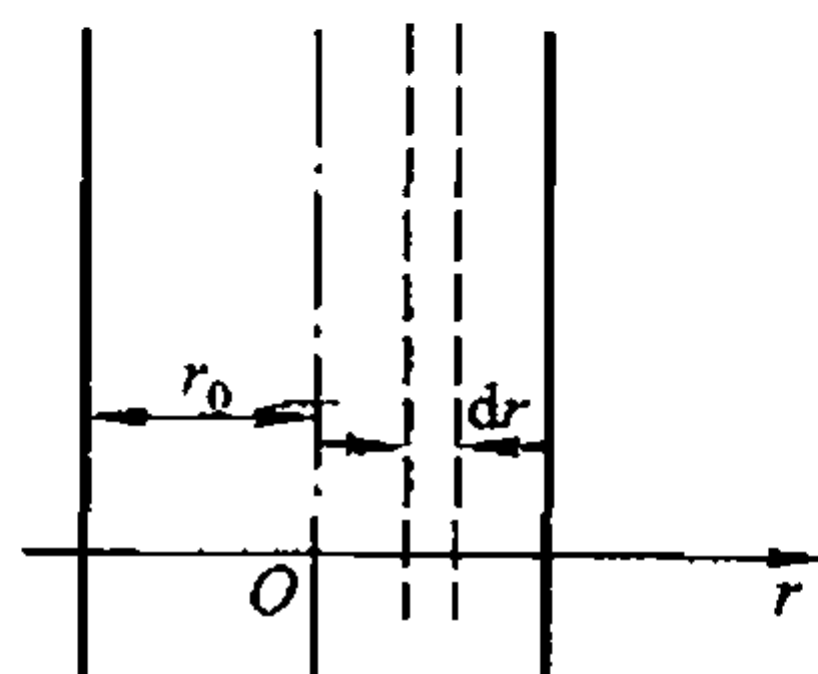
**解 1:** 利用电场强度叠加原理求解.

以带电板中央面为原点取坐标  $Or$  如解图 7-19a 所示. 在  $r$  处取厚度为  $dr$  的薄层平板,电荷面密度为  $\sigma = \rho dr$ ,其两侧均匀电场的大小为  $dE = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\rho dr}{2\epsilon_0}$ ,垂直于薄层向外.

- (1) 带电板中央的电场强度  $E_0$ .

在中央面左右两侧带电板完全对称,厚度都是  $r_0 = 0.25 \text{ cm}$ ,带电量相等. 它们在  $r=0$  处的场强大小相等、方向相反,  $E_0 = 0$ . 即

$$E_0 = E_{\text{左}} - E_{\text{右}} = \int_{-0.25}^0 \frac{\rho dr}{2\epsilon_0} - \int_0^{0.25} \frac{\rho dr}{2\epsilon_0} = 0$$



解图 7-19a

- (2) 与带电板表面相距 0.1 cm 处,即  $r = \pm(0.25 - 0.1) \text{ cm} = \pm 0.15 \text{ cm}$  处的电场强度  $E_{\pm 0.15}$ .

$$E_{+0.15} = E_{\text{左}} - E_{\text{右}} = \int_{-0.25}^{0.15} \frac{\rho}{2\epsilon_0} dr - \int_{0.15}^{0.25} \frac{\rho}{2\epsilon_0} dr = 1.69 \times 10^4 \text{ V/m}$$

方向与坐标轴正方向一致.

$$E_{-0.15} = E_{\text{左}} - E_{\text{右}} = \int_{-0.25}^{-0.15} \frac{\rho}{2\epsilon_0} dr - \int_{-0.15}^{0.25} \frac{\rho}{2\epsilon_0} dr = -1.69 \times 10^4 \text{ V/m}$$

沿坐标轴反方向.

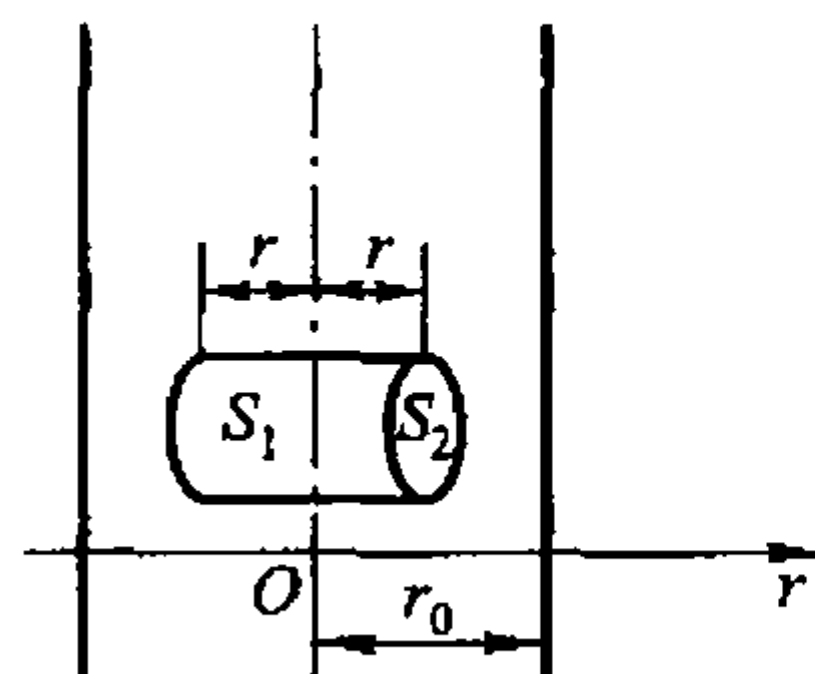
(3) 薄层外任意点的电场强度

$$E = \int_{-0.25}^{0.25} \frac{\rho dr}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(0.25 + 0.25) = 2.83 \times 10^4 \text{ V/m}$$

垂直于两侧板面向外.

解2: 运用高斯定理求解.

由于带电板对中央面左右对称, 因此可作具有同样对称性的圆柱形高斯面  $S$ , 如解图 7-19b 所示. 圆柱的两底面  $S_2$  距中央面都是  $r$ ,  $S_2$  的法线方向与面上的电场强度  $E$  方向一致, 圆柱侧面  $S_1$  的法线方向与带电板的  $E$  方向处处相垂直. 对  $S$  面运用高斯定理, 有



解图 7-19b

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2ES_2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV$$

式中  $\int \rho dV$  是闭合的圆柱面  $S$  所围的电荷量.

当  $r < r_0 = 0.25 \text{ cm}$  时,  $\int \rho dV = \rho S_2 \times 2r = 2\rho S_2 r$ , 当  $r > r_0$  时,  $\int \rho dV = 2\rho S_2 r_0$ .

所以, 带电板内外场强的大小为

$$E = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} \rho r & (|r| < r_0) \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \rho r_0 & (|r| > r_0) \end{cases}$$

(1) 带电板中央, 因  $r=0$ , 故有  $E_0=0$ .

(2) 带电板内  $r = \pm 0.15 \text{ cm}$  处,

$$E = \frac{\rho r}{\varepsilon_0} = \frac{1.0 \times 10^{-4} \times 0.15}{8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 1.69 \times 10^4 \text{ V/m}$$

(3) 带电板外任意处,

$$E = \frac{\rho r_0}{\varepsilon_0} = \frac{1.0 \times 10^{-4} \times 0.25}{8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 2.83 \times 10^4 \text{ V/m}$$

7-20. 在半径为  $R$ , 电荷体密度为  $\rho$  的均匀带电球内, 挖去一个半径为  $r$  的小球, 如图所示. 试求:  $O$ 、 $O'$ 、 $P$ 、 $P'$  各点的电场强度.  $O$ 、 $O'$ 、 $P$ 、 $P'$  在一条直线上.

分析: 将挖去小球的空腔看作是在原来均匀带电  $+\rho$  的球内, 填进一个均匀带  $-\rho$  的小球而构成的. 根据电场强度的叠加原理可知, 各点的电场强度应该是带  $+\rho$  的大球和带  $-\rho$  的小球单独在这些点的电场强度的矢量和. 每个带电球的电场强度可分别由高斯定理求得.

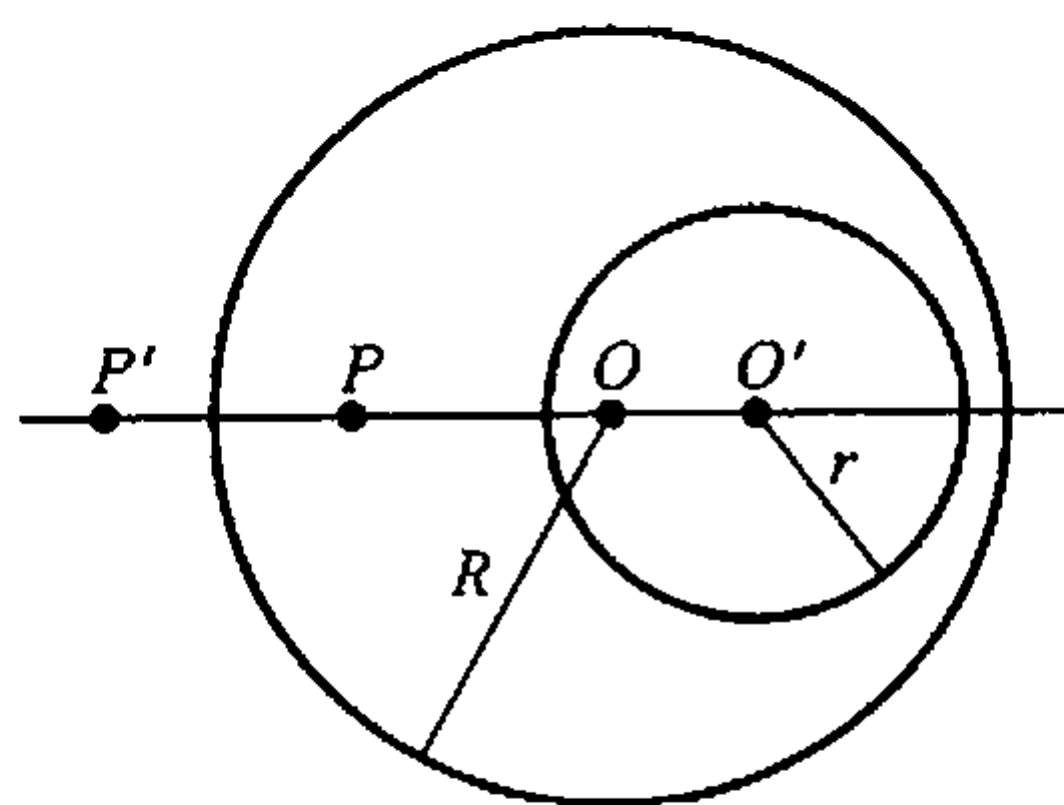
解: 设大、小带电球体的场强分别为  $E_1$  和  $E_2$ , 则各点的合场强为

$$E = E_1 + E_2$$

分别对大球和小球运用高斯定理, 可以得到  $E_1$  和  $E_2$  分别为

$$E_1 = \begin{cases} \frac{\rho l}{3\varepsilon_0} e_r & (l < R) \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 l^2} e_r & (l > R) \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{cases} -\frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} e_{r'} & (r' < r) \\ -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r'^2} e_{r'} & (r' > r) \end{cases}$$



习题 7-20 图

式中  $l$  和  $e_r$  分别是从小球中心  $O$  点出发的矢径大小和沿矢径向外的单位矢量,  $r'$  和  $e_{r'}$  则分别是从小球中心  $O'$  点出发的矢径大小和沿矢径向外的单位矢量.

$O$  点的电场强度  $E_0$ : 由于  $l=0$ , 故  $E_{10}=0$ . 所以, 有  $E_0 = E_{20}$ . 即

$$E_0 = E_{20} = -\frac{\rho r'_{O'O}}{3\varepsilon_0} e_{r'}$$

$O'$  点的电场强度  $E'_{0'}$ : 由于  $r'=0$ , 故  $E'_{20}=0$ . 所以, 有  $E'_{0'} = E'_{10'}$ . 即

$$E'_{0'} = E'_{10'} = \frac{\rho l_{OO'}}{3\varepsilon_0} e_r$$

$P$  点的电场强度  $E_P$ : 有  $E_P = E_{1P} + E_{2P}$ . 其中  $E_{1P}$  是大球内的场强,  $E_{2P}$  是小球外的场强. 故有

$$\begin{aligned} E_P &= E_{1P} + E_{2P} = \frac{\rho l_{OP}}{3\varepsilon_0} e_r - \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r_{OP}^2} e_{r'} \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left( l_{OP} - \frac{r^3}{r_{OP}^2} \right) e_r \end{aligned}$$

$P'$  点的电场强度  $E'_{P'}$ : 有  $E'_{P'} = E'_{1P'} + E'_{2P'}$ . 其中  $E'_{1P'}$  是大球外的场强,  $E'_{2P'}$  是小球外的场强. 故有

$$E'_{P'} = E'_{1P'} + E'_{2P'} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 l_{OP'}^2} e_r - \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 r_{OP'}^2} e_{r'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left( \frac{R^3}{l_{OP'}^2} - \frac{r^3}{r_{OP'}^2} \right) e_r$$

**7-21.** 半径为  $R$  的无限长直圆柱体内均匀带电, 电荷体密度为  $\rho$ , 求场强分布, 并作  $E-r$  曲线.

分析: 均匀带电无限长直圆柱体的电荷分布具有轴对称性, 它的电场也具有轴对称分布, 运用高斯定理可求出圆柱体内外的场强分布, 得到  $E-r$  曲线.

解: 在圆柱体内, 以  $r$  为半径作高为  $l$  的同轴闭合圆柱面  $S_1$ , 对  $S_1$  运用高斯定理, 有

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E2\pi rl = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 l$$

圆柱内, 离轴线  $r$  处的电场强度大小为

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \quad (r < R)$$

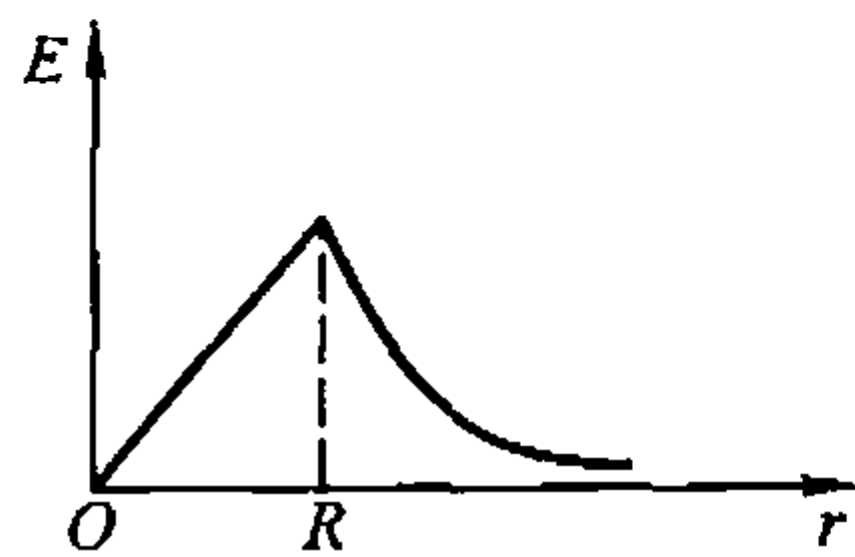
在圆柱体外, 以  $r$  为半径作高为  $l$  的同轴闭合圆柱面  $S_2$ , 对  $S_2$  运用高斯定理, 有

$$\oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E2\pi rl = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi R^2 l$$

圆柱外, 离轴线  $r$  处的电场强度大小为

$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

$E-r$  曲线见解图 7-21 所示.  $\rho > 0$  时,  $E$  的方向沿径向向外.



解图 7-21

#### 4. 电势和电势的叠加原理的应用

7-22. 点电荷  $q_1, q_2, q_3, q_4$  的电荷量各为  $4 \times 10^{-9} \text{ C}$ , 放置在一正方形的四个顶点上, 各顶点距正方形中心点  $O$  的距离均为  $5 \text{ cm}$ .

- (1) 计算点  $O$  处的电场强度和电势;
- (2) 将一试探电荷  $q_0 = 10^{-9} \text{ C}$  从无穷远移到点  $O$ , 电场力作功多少?
- (3) 问(2)中所述过程中  $q_0$  的电势能的改变为多少?

解: (1) 正方形顶点上的四个点电荷等量同号, 对角电荷在  $O$  点的电场强度大小相等、方向相反. 由电场强度的叠加原理可知,  $O$  点的合场强为零. 即

$$\mathbf{E}_O = 0$$

相对无穷远处, 每个点电荷在  $O$  点有相同的电势值, 由电势的叠加原理可知,  $O$  点的电势为

$$V_O = \sum V_{oi} = 4V_{o1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1}{r} = 2.88 \times 10^3 \text{ V}$$

式中  $r = 5 \text{ cm}$ , 是正方形顶点到中心的距离.

- (2) 将试探电荷  $q_0$  从无穷远移到点  $O$ , 电场力作功为

$$A_{\infty O} = -q_0(V_O - V_\infty) = -q_0 V_O = -2.88 \times 10^{-6} \text{ J}$$

电场力作负功.

- (3) 将试探电荷  $q_0$  从无穷远移到点  $O$  的过程中, 外力作正功, 使点电荷和试探电荷系统的电势能增加. 即  $A_{\infty O} = -\Delta W$

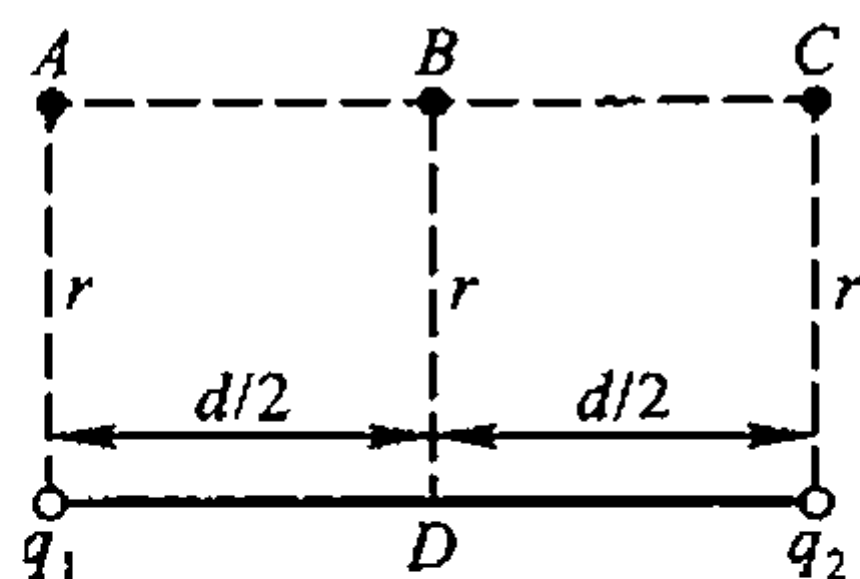
所以,有

$$\Delta W = -A_{\infty 0} = 2.88 \times 10^{-6} \text{ J}$$

7-23. 如图所示,已知  $r = 6 \text{ cm}$ ,  $d = 8 \text{ cm}$ ,  $q_1 = 3 \times 10^{-8} \text{ C}$ ,  $q_2 = -3 \times 10^{-8} \text{ C}$ . 求:

(1) 将电荷量为  $2 \times 10^{-9} \text{ C}$  的点电荷从  $A$  点移到  $B$  点,电场力作功多少?

(2) 将此点电荷从点  $C$  移到点  $D$ ,电场力作功多少?



习题 7-23 图

分析: 由电势的叠加原理求出源电荷  $q_1$ 、 $q_2$  在  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  四点处的电势  $V_A$ 、 $V_B$  和  $V_C$ 、 $V_D$  后,利用电势差求得电场力的功或系统电势能的变化.

解:

$$V_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + d^2}} = 1.8 \times 10^3 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}} = 0$$

$$V_C = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + d^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = -1.8 \times 10^3 \text{ V}$$

$$V_D = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{d}{2}\right)} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{d}{2}\right)} = 0$$

(1) 将点电荷由  $A$  点移到  $B$  点过程中,电场力作功为

$$A_{AB} = -q_0(V_B - V_A) = q_0 V_A = 3.6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

(2) 将点电荷从  $C$  点移到  $D$  点过程中,电场力作功为

$$A_{CD} = -q_0(V_D - V_C) = q_0 V_C = -3.6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

7-24. 试计算如图线性电四极子在很远处( $r \gg r_e$ )的电势.

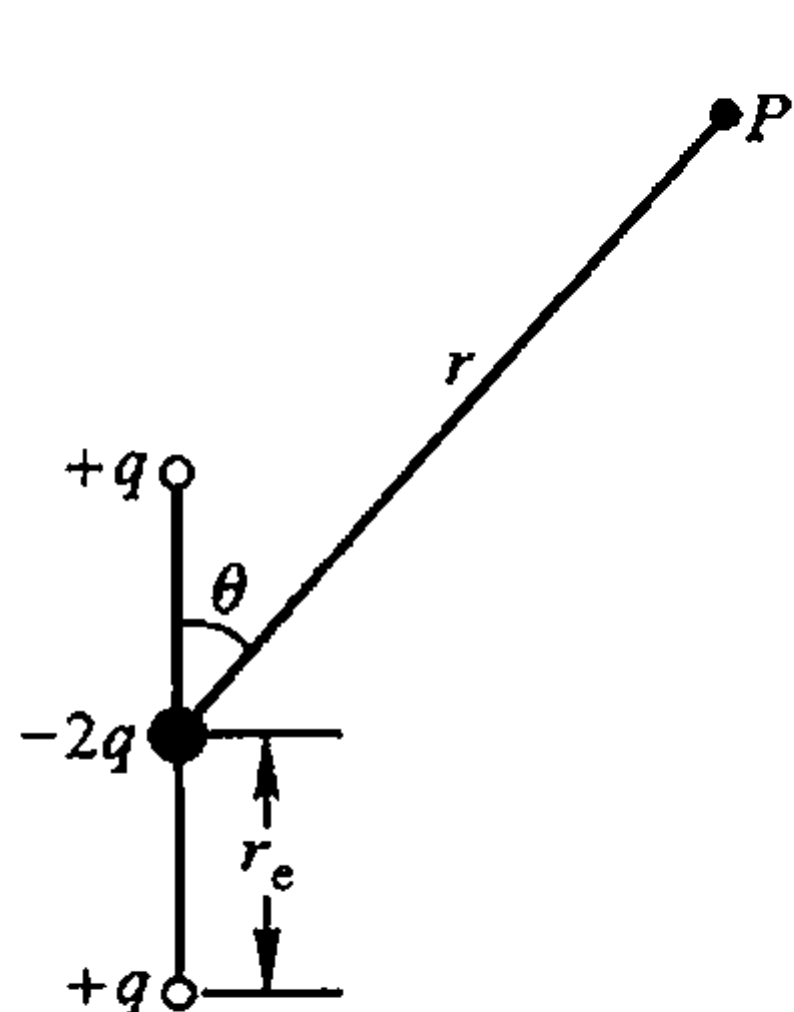
分析:  $P$  点的电势为四个点电荷在该点电势的叠加. 在  $P$  点远离四个点电荷情况下, $P$  点的电势近似为电四极子电势.

解: 如解图 7-24 所示,设两个正点电荷到  $P$  点的距离分别为  $r_1$ 、 $r_2$ ,负电荷到  $P$  点的距离为  $r$ .  $P$  点的电势为

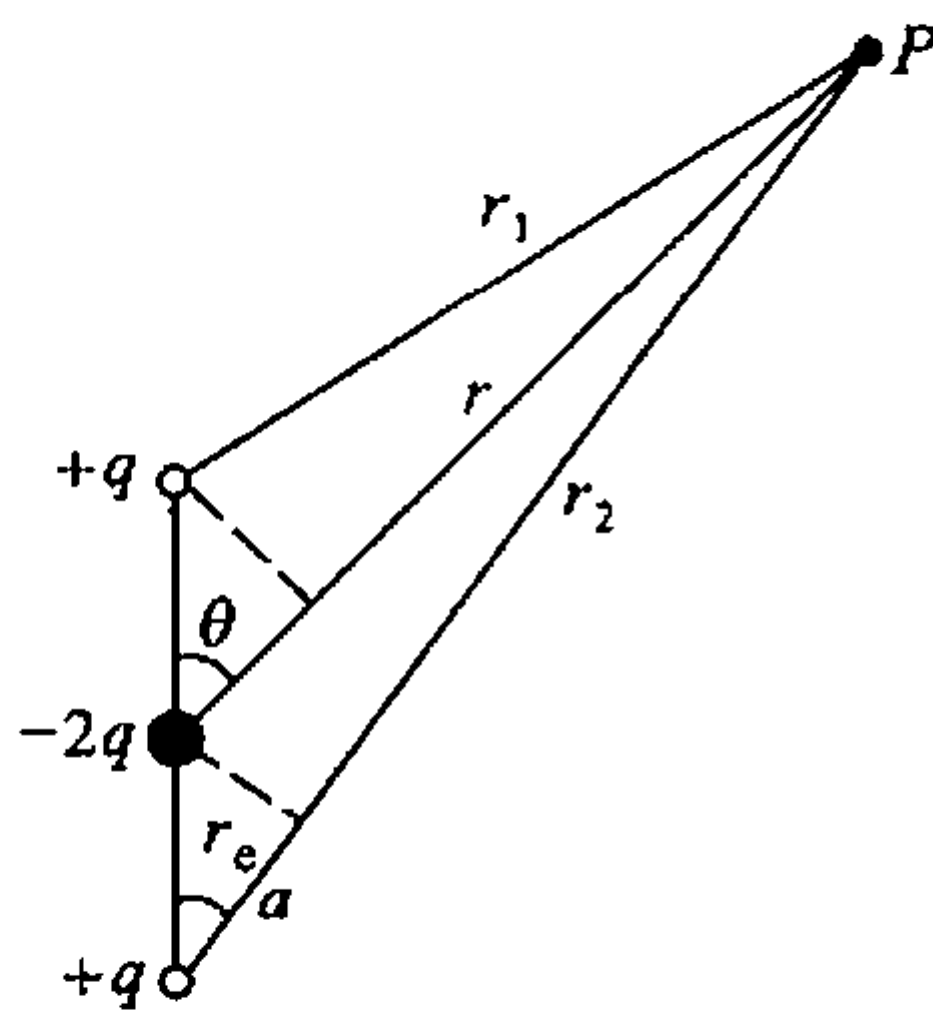
$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2} \right)$$

当  $P$  点为远场点  $r \gg r_e$  时,有

$$r_1 \approx r - a, r_2 \approx r + a, a \approx r_e \cos \theta$$



习题 7-24 图



解图 7-24

代入  $V_P$  并整理,得

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(r-a)} - \frac{2}{r} + \frac{1}{(r+a)} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qa^2}{r(r^2-a^2)} \approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{r_e^2 \cos^2 \theta}{r^3} \end{aligned}$$

7-25. 半径为 2 mm 的球形水滴具有电势 300 V. 求:

- (1) 水滴上所带的电荷量;
- (2) 如果两个相同的上述水滴结合成一个较大的水滴,其电势值为多少 (假定结合时电荷没有漏失)?

分析: 将带电水滴视作导体球,电荷均匀分布在球的表面. 利用均匀带电球面电势的结论求解.

解: (1) 均匀带电球面的电势为  $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

得

$$q = 4\pi\epsilon_0 r V = 66.7 \times 10^{-12} \text{ C}$$

(2) 设结合成的大水滴是半径为  $R$  的球体,应有

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

得大水滴的半径为

$$R = \sqrt[3]{2} r = 2.52 \text{ mm}$$

带电量为  $Q = 2q$  的大水滴电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R} = 476 \text{ V}$$

7-26. 两个同心球面,半径分别为 10 cm 和 30 cm. 小球面均匀带有  $10^{-8} \text{ C}$  正电荷,大球面带有  $1.5 \times 10^{-8} \text{ C}$  正电荷. 求离球心分别为 20 cm、50 cm 处的

电势.

分析: 由于同心带电球面的场强具有球对称性, 故可利用高斯定理求得场强  $E$  后, 再由电势定义  $V_A = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  求得  $V$ . 也可利用均匀带电球面的电势, 用电势的叠加原理求得各点的电势.

解 1: 设两球面半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ , 带电  $q_1$ 、 $q_2$ , 由高斯定理可求得电场分布为

$$E_0 = 0 \quad (r < R_1)$$

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_2 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_2)$$

$r_1 = 20$  cm 处的电势为

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{r_1}^{R_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{\infty} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 900 \text{ V} \end{aligned}$$

$r_2 = 50$  cm 处的电势为

$$V_2 = \int_{r_2}^{\infty} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 450 \text{ V}$$

解 2: 由各球面电势的叠加计算电势.

$r_1 = 20$  cm, 位于两球面之间, 电势为小球面电荷在  $r_1$  处的电势和大球面电势的代数和. 即

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 900 \text{ V}$$

$r_2 = 50$  cm, 位于两球面外, 电势为两球面在  $r_2$  的电势. 即

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 450 \text{ V}$$

7-27. 电荷  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的球体内, 试证离球心  $r$  处 ( $r < R$ ) 的电势为

$$V = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

分析: 均匀带电球体的场强具有球对称性, 可利用高斯定理先求得球体内和球体外电场强度, 然后根据电势定义求电势. 将球体分割为无数同心带电球壳, 利用带电球壳电势的结果, 由叠加原理同样可求得电势.

**解1:** 均匀带电球体的电场强度具有球对称性, 设球体内和球体外的电场强度分别为  $E_1$  和  $E_2$ , 由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

可以求得  $E_1$  和  $E_2$ . 式中  $\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

球内的场强为  $E_1 = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} e_0 \quad (0 \leq r \leq R)$

球外的场强为  $E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e_0 \quad (r \geq R)$

球体内  $r$  处的电势为

$$\begin{aligned} V &= \int_r^R E_1 \cdot dr + \int_R^\infty E_2 \cdot dr = \int_r^R \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

**解2:** 以  $r$  为半径作球面, 将带电球体分割成半径为  $r$  的球体和厚度为  $(R - r)$  的球壳两部分, 则  $r$  处的电势为这两部分带电体的电势  $V_1$  和  $V_2$  的代数和, 即  $V = V_1 + V_2$ .

$V_1$  是半径为  $r$  的球体表面的电势,

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

式中  $q$  是半径为  $r$  的球体所带的电荷量,

$$q = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Qr^3}{R^3}$$

所以

$$V_1 = \frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$V_2$  是厚为  $(R - r)$  带电球壳在其内表面的电势. 由于带电球面内的电势与表面的相同, 将球壳分割为无数厚度为  $dr$  的薄球壳, 则  $r$  处在每个薄球壳的内部. 每个薄球壳所带的电荷量为

$$dq = \rho 4\pi r^2 dr$$

电势为

$$dV_2 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} r dr$$

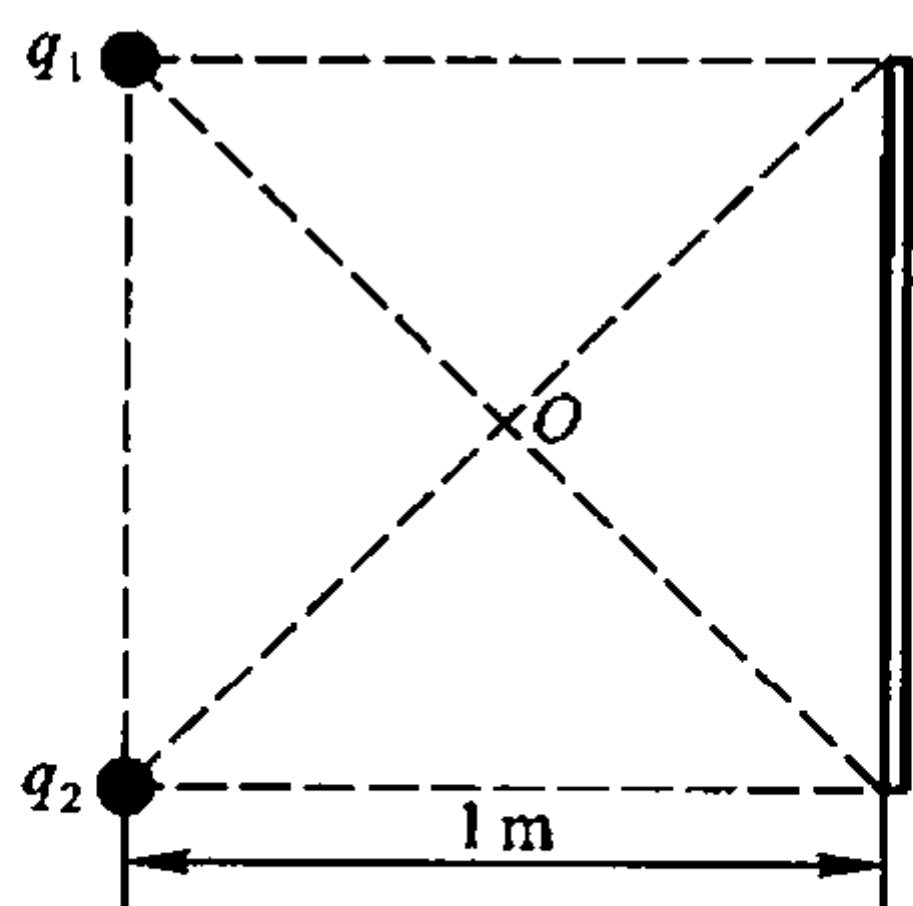
所以,

$$V_2 = \int dV_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \int_r^R r dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R^2 - r^2) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} (R^2 - r^2)$$

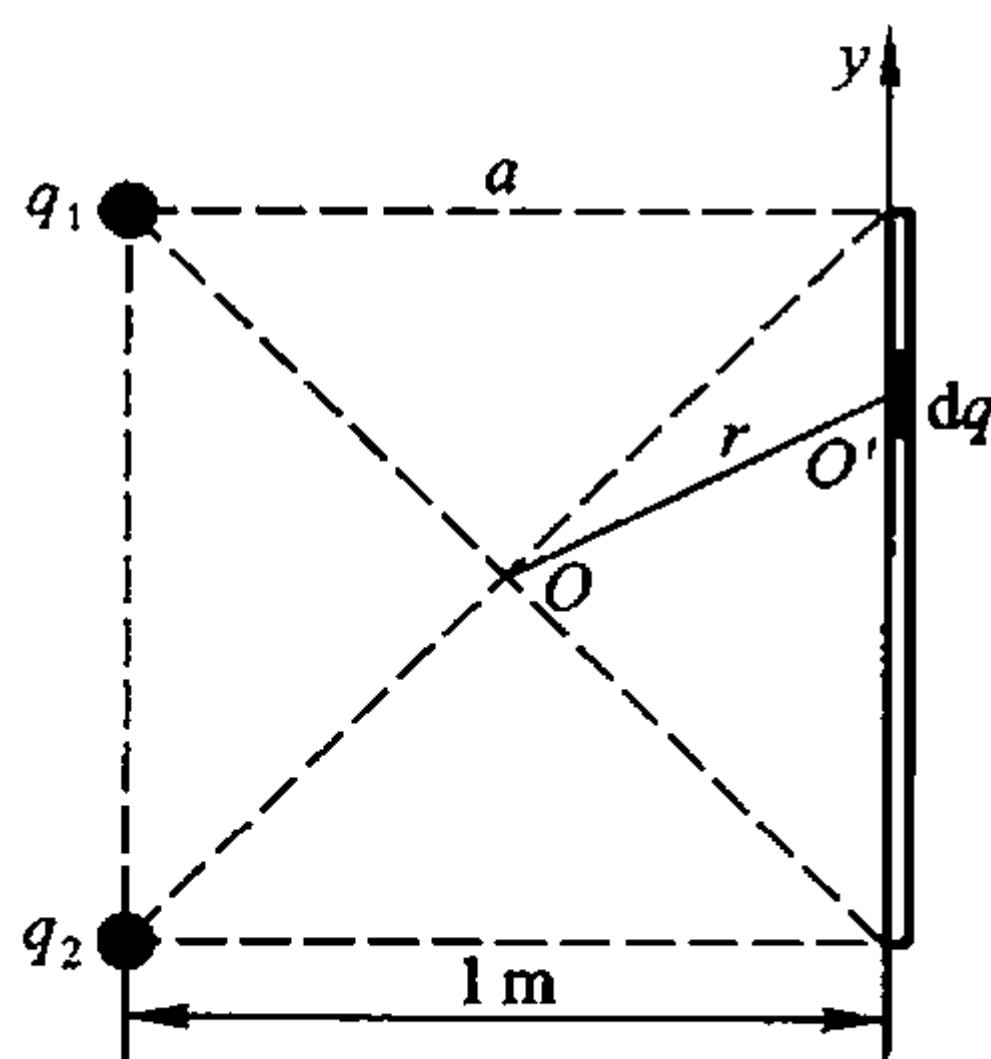
$$V = V_1 + V_2 = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

7-28. 如图所示,在边长为 1 m 的正方形的左上角有一点电荷  $q_1 = 10^{-12}$  C,左下角有一点电荷  $q_2 = -10^{-12}$  C,电荷量为  $Q = 10^{-11}$  C 的电荷均匀分布在右边的细线上. 求正方形中心的电势.

分析: 根据电势的叠加原理可知,正方形中心的电势为两点电荷和带电细线在中心电势的代数和. 由于两个点电荷等量异号,它们在中心处的电势之和为零,因此正方形中心的电势就是连续分布带电细线在中心处的电势.



习题 7-28 图



解图 7-28

解: 设正方形的边长为  $a$ , 取  $O'y$  轴沿带电细线, 如解图 7-28 所示. 在细线上取微元  $dy$ , 所带电荷量为  $dq = \lambda dy$ ,  $dq$  在  $O$  点的电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中

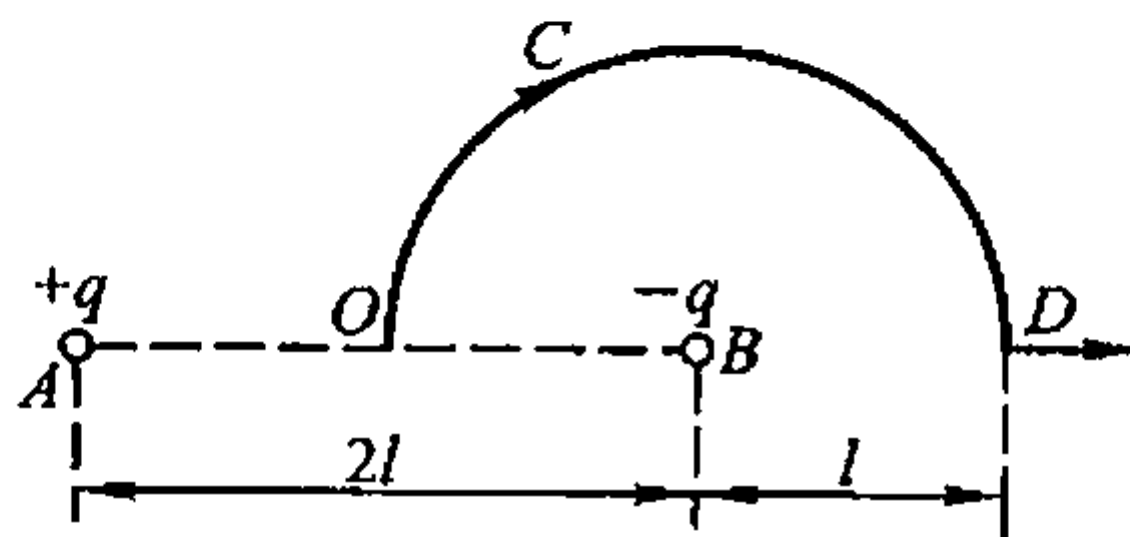
$$\lambda = \frac{Q}{a}, \quad r = \sqrt{y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$O$  点的电势为

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) = 0.16 \text{ V}$$

7-29.  $AB = 2l$ ,  $OCD$  是以  $B$  为中心、 $l$  为半径的半圆, 如图所示. 点  $A$  处有正电荷  $+q$ , 点  $B$  处有负电荷  $-q$ , 求:

(1) 把单位正电荷从  $O$  点沿  $OCD$  移到  $D$  点, 电场力对它作了多少功?



习题 7-29 图

(2) 把单位正电荷从  $D$  点沿  $AB$  的延长线移到无穷远处, 电场力对它作了多少功?

分析: 利用电场力的功和电势差的关系求解.

$$\text{解: (1) } V_O = 0, V_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{3l} - \frac{q}{l} \right) = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

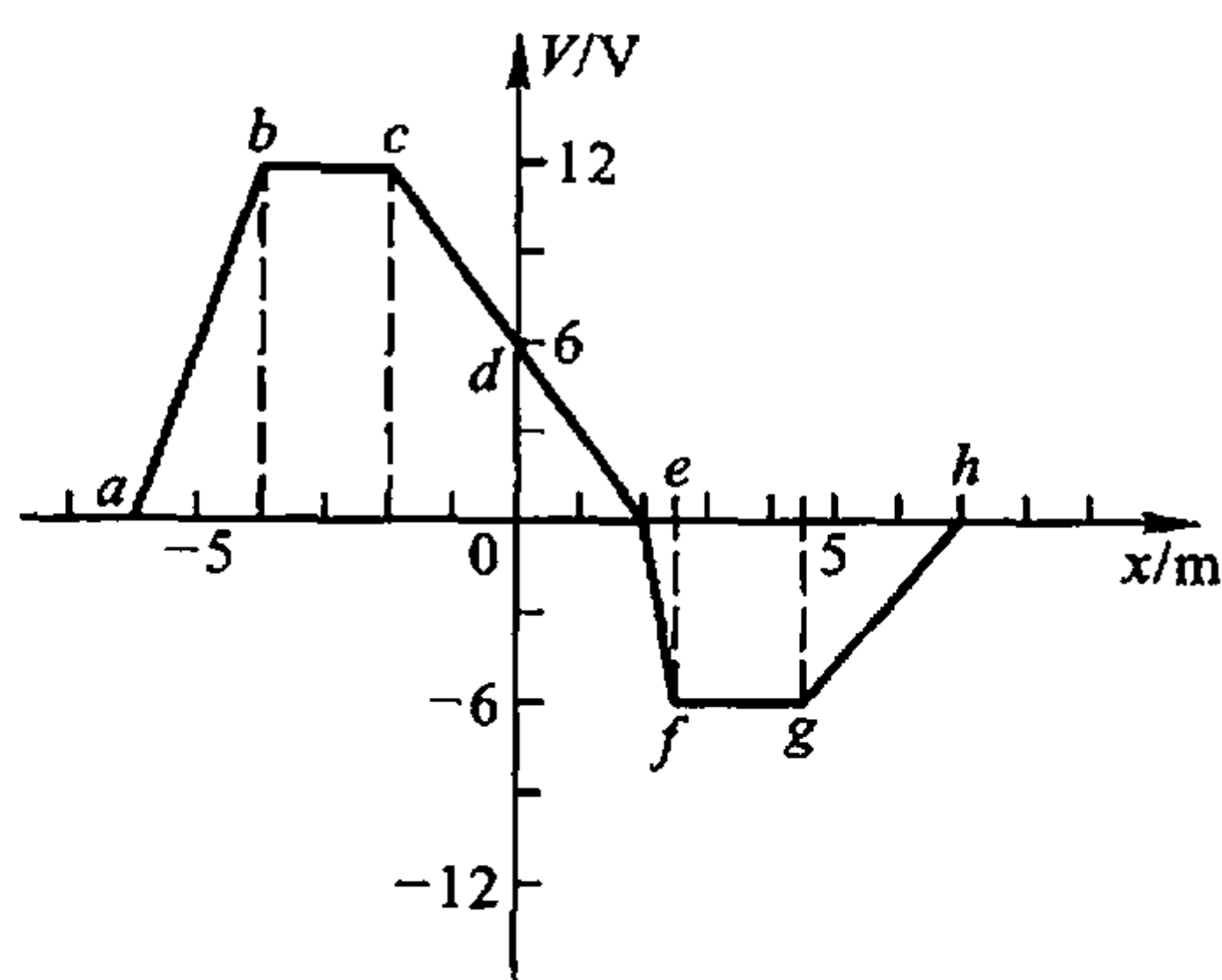
$$A_{OD} = q_0(V_O - V_D) = \frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

$$(2) V_\infty = 0, A_{D\infty} = q_0(V_D - V_\infty) = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

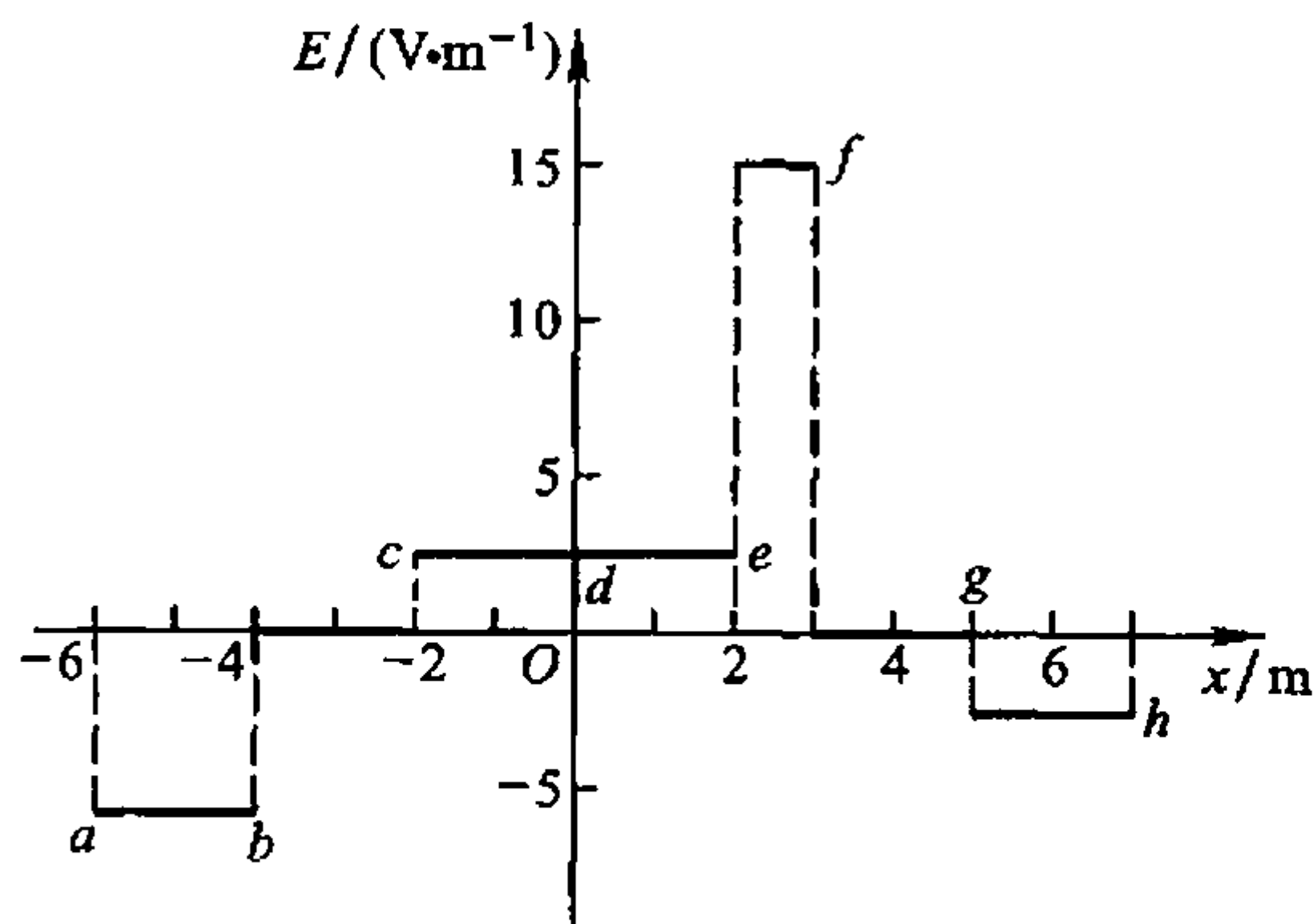
## 5. 电势与电场强度的关系

7-30. 设电势沿  $Ox$  轴的变化曲线如图所示. 试对所示各区间(忽略区间端点的情况)确定电场强度的  $x$  分量, 并作出  $E_x$  对  $x$  的关系图线.

分析: 已知电势分布函数, 由电场强度与电势的关系可求得场强沿  $x$  方向的分量.



习题 7-30 图



解图 7-30

解:

$$\text{在 } a-b \text{ 区间: } E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{12-0}{-4+6} \text{ V/m} = -6.0 \text{ V/m}$$

$$\text{在 } b-c \text{ 区间: } E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = 0$$

$$\text{在 } c-e \text{ 区间: } E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{0-12}{2+2} \text{ V/m} = 3.0 \text{ V/m}$$

$$\text{在 } e-f \text{ 区间: } E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{-6-0}{2.5-2} \text{ V/m} = 12 \text{ V/m}$$

在  $f-g$  区间:  $E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = 0$

在  $g-h$  区间:  $E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{0+6}{7-4.5} \text{ V/m} = -2.4 \text{ V/m}$

$E_x-x$  关系曲线如解图 7-30 所示.

**7-31.** 已知某空间区域的电势函数  $V = x^2 + 2xy$ , 求:

(1) 电场强度函数;

(2) 坐标点  $(2, 2, 3)$  的电势及其与原点的电势差.

分析: 利用电势与电场强度的关系求解.

解: (1)  $E = -\frac{\partial V}{\partial x}i - \frac{\partial V}{\partial y}j = -2(x+y)i - 2xj$

(2)  $V_{2,2,3} = 2^2 + 2 \times 2 \times 2 = 12 \text{ V}, V_0 = 0$

所以, 坐标点  $(2, 2, 3)$  的电势及其与原点的电势差为  $\Delta V = V_{2,2,3} - V_0 = 12 \text{ V}$ .

**7-32.** 一半径  $R = 8 \text{ cm}$  的圆盘, 其上均匀带有面密度为  $\sigma = 2 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$  的电荷, 求:

(1) 轴线上任一点的电势(用该点与盘心的距离  $x$  来表示);

(2) 从电场强度和电势的关系求该点的电场强度;

(3) 计算  $x = 6 \text{ cm}$  处的电势和电场强度.

分析: 利用电势的叠加原理, 带电圆盘轴线上  $x$  处的电势, 可视为圆盘平面上共轴的带电细圆环在  $x$  处电势的叠加; 对电势沿  $x$  轴线的分布函数  $V(x)$  求变化率得到  $E(x)$ .

解: (1) 在圆盘上以盘心为圆心, 取半径为  $r$ 、宽为  $dr$  的细圆环, 所带电荷量为

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

在轴线上  $x$  处的电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}}$$

整个圆盘轴线上  $x$  处的电势为

$$V = \int dV = \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x)$$

(2) 轴线上  $x$  处的电场强度为

$$E = -\frac{dV}{dx}i = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) i$$

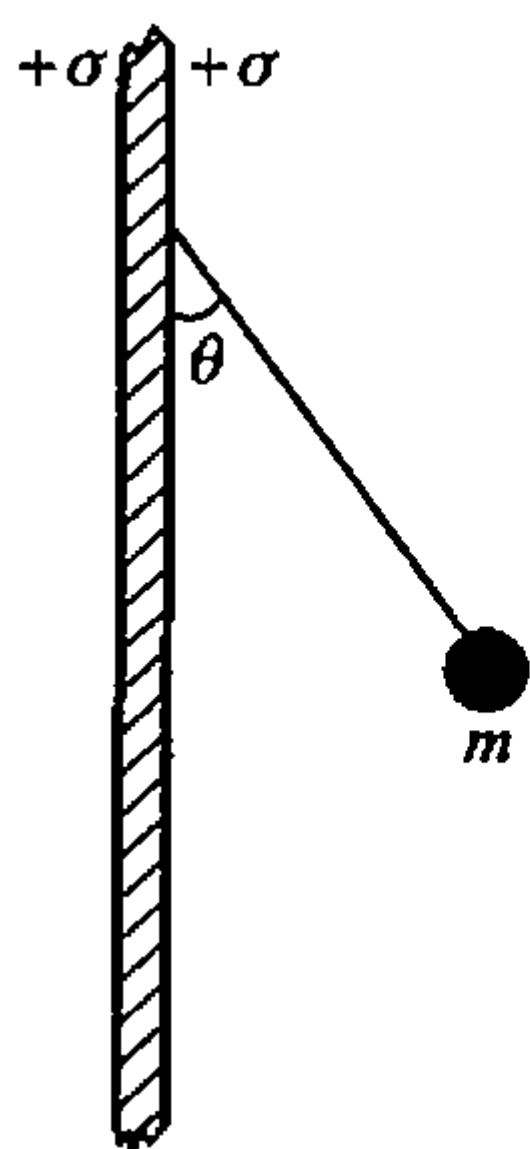
(3) 代入数据, 得  $x = 6 \text{ cm}$  处

$$V = 4.52 \times 10^4 \text{ V}, \quad E = 4.52 \times 10^5 \text{ i V/m}$$

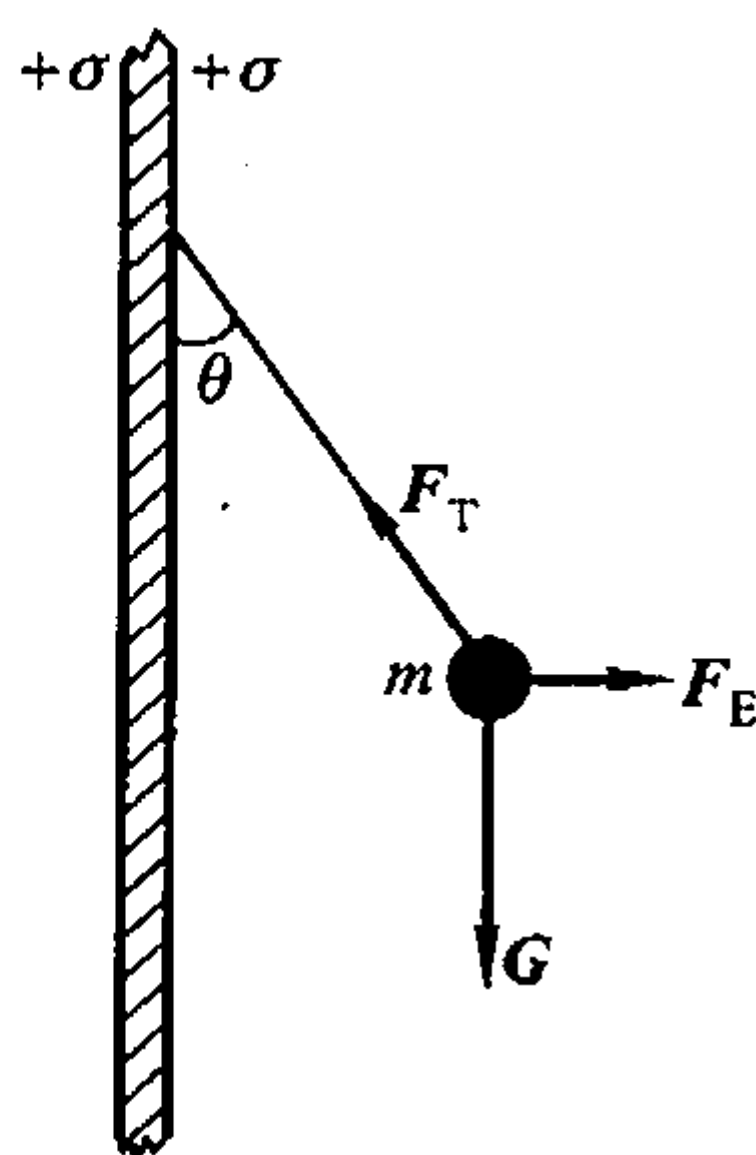
## 6. 静电平衡条件的应用

**7-33.** 有一块很大的带电板及一小球, 已知小球的质量为  $m = 1.0 \times 10^{-3} \text{ g}$ , 带有电荷量  $q = 2.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ . 小球悬挂在一丝线的下端, 平衡时悬线与板面间的夹角为  $30^\circ$ , 如图所示. 试计算带电板上的电荷面密度  $\sigma$ .

**分析:** 带电小球受静电力、悬线张力和重力而处于平衡状态, 所受静电力与带电板的电荷面密度有关. 对小球作受力分析, 列出受力平衡方程求解本题.



习题 7-33 图



解图 7-33

**解:** 如解图 7-33 所示, 小球受电场力  $F_E$ 、重力  $G$  和悬线张力  $F_T$  而平衡. 在水平和竖直方向上, 分别有

$$F_E - F_T \sin \theta = 0, \quad F_T \cos \theta - mg = 0$$

式中

$$F_E = qE = q \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

可解得

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 mg \tan \theta}{q} = 2.5 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

**7-34.** 一质量为  $m$ 、面积为  $S$  的均质薄金属盘, 放置在一无限大导体平板上, 平板水平放置. 最初盘和平板都不带电, 然后逐渐使它们带电. 问电荷面密度增加到何值时, 金属盘将离开平板?

**分析:** 使金属盘离开导体平板的条件是金属盘所受静电斥力大于所受重力.

**解:** 设无限大导体平板的电荷面密度为  $\sigma$  时, 金属盘将离开平板. 无限大

带电导体平板的电场强度为  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

金属盘所受的静电力为  $F = qE = \sigma S \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}$

金属盘受重力  $mg$ , 当  $F - mg > 0$  时, 金属盘将离开平板. 即

$$\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} > mg$$

得

$$\sigma > \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 mg}{S}}$$

7-35. 半径为  $r_1, r_2 (r_1 < r_2)$  的两个同心导体球壳互相绝缘, 现把  $+q$  的电荷量给予内球, 求:

- (1) 外球的电荷量及电势;
- (2) 把外球接地后再重新绝缘, 外球的电荷量及电势;
- (3) 然后把内球接地, 内球的电荷量及外球的电势的改变.

分析: 根据导体的静电平衡条件和性质, 确定各种情况下导体内、外表面的电荷分布, 是正确求解本题的前提.

解: (1) 内球带  $+q$  时, 与其绝缘的外球不带电, 但由于静电感应, 外球内表面将分布有电荷  $-q$ , 外表面分布有电荷  $+q$ , 外球的电势为  $V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$ .

(2) 外球接地后的电势  $V_2' = 0$ . 原分布在外球外表面的电荷由于接地而被中和, 因此外表面无电荷分布, 内表面仍分布有  $-q$ , 所以外球带电量为  $-q$ . 由于接地后已处于静电平衡状态, 外球与接地线上都没有电荷作宏观的定向移动, 因此剪断接地线重新将外球与地绝缘, 不会影响外球的带电量和电势  $V_2'$ .

(3) 在外球带电  $-q$ , 并与地绝缘的情况下, 把内球接地, 则  $V_1 = 0$ , 同时内球的带电量也变为  $q_1$  (待求). 因静电感应, 外球的电荷  $-q$  将重新分布. 静电平衡时, 外球内表面分布有  $-q_1$ , 外表面分布有  $(-q + q_1)$ . 由电势的叠加原理, 内球电势为

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{-q + q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = 0$$

得

$$q_1 = \frac{r_1}{r_2} q$$

外球的电势为

$$V_2'' = \frac{-q + q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{(r_1 - r_2)q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

相对(1)时外球的电势, 改变量为

$$\Delta V_2 = V_2'' - V_2 = \frac{(r_1 - r_2)q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{r_1 - 2r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} q$$

7-36. 点电荷  $q = 4.0 \times 10^{-10} \text{ C}$ , 处在导体球壳的中心, 壳的内外半径分别为  $R_1 = 2.0 \text{ cm}$  和  $R_2 = 3.0 \text{ cm}$ , 求:

- (1) 导体球壳的电势;
- (2) 离球心  $r = 1.0 \text{ cm}$  处的电势;
- (3) 把点电荷移开球心  $1.0 \text{ cm}$  后球心  $O$  点的电势及导体球壳的电势.

分析: 静电平衡时, 导体球壳内、外表面将感应出等量异号电荷  $-q$  和  $+q$ , 并均匀分布. 利用高斯定理可求得场强的分布, 并由电势的定义求得电势的分布. 也可利用电势的叠加原理求得  $V$  的分布.

解: 利用高斯定理可以得到静电平衡时各区域的电场分布为

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r < R_1)$$

$$E_2 = 0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_2)$$

- (1) 导体球壳的电势

$$V_{R_2} = \int_{R_2}^{\infty} E_3 \cdot dr = \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 120 \text{ V}$$

- (2) 离球心  $r = 1.0 \text{ cm}$  处的电势

$$\begin{aligned} V_r &= \int_r^{R_1} E_1 \cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dr + \int_{R_2}^{\infty} E_3 \cdot dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 300 \text{ V} \end{aligned}$$

- (3) 把点电荷移开球心  $1.0 \text{ cm}$ , 仍然在导体球壳内部. 导体球壳外表面的电荷分布没有变化, 故球壳电势与情况(1)相同, 为  $120 \text{ V}$ .

球心点  $O$  处的电势由叠加原理得

$$V_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 120 \text{ V} + 360 \text{ V} = 480 \text{ V}$$

7-37. 有直径为  $16 \text{ cm}$  及  $10 \text{ cm}$  的非常薄的两个铜制球壳, 同心放置时, 内球的电势为  $2700 \text{ V}$ , 外球带有电荷量为  $8.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ . 现把内球和外球接触, 两球的电势各变化多少?

分析: 根据内球的电势可求得内球所带电量. 当内、外球壳相接触并处于静电平衡状态时, 电荷全部转移到外球的外表面, 两球壳等电势.

解：已知内球半径为  $R_1 = 5 \text{ cm}$ ，外球半径为  $R_2 = 8 \text{ cm}$ 。设内球带电  $q_1$ ，外球带电  $q_2$ 。由高斯定理可以得到两球壳间和外球外部的场强  $E_1$ 、 $E_2$ 。由电势的定义，可写出内球的电势为

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{R_1}^{R_2} E_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^{\infty} E_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q_2 + q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 2700 \text{ V} \end{aligned}$$

得内球所带电量为  $q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_1 - \frac{R_1 q_2}{R_2} = 1.0 \times 10^{-8} \text{ C}$

$$\text{外球的电势为 } V_2 = \int_{R_2}^{\infty} E_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 2025 \text{ V}$$

两球相接触后，内外球的电势相等，为

$$V = V_2 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 2025 \text{ V}$$

即外球的电势不变。内球电势的变化为

$$\Delta V = V - V_1 = 2025 \text{ V} - 2700 \text{ V} = -675 \text{ V}$$

即

$$\Delta V = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

**7-38.** 半径为  $R_1 = 1.0 \text{ cm}$  的导体球，带有电荷  $q_1 = 1.0 \times 10^{-10} \text{ C}$ ，球外有一个内、外半径分别为  $R_2 = 3.0 \text{ cm}$ 、 $R_3 = 4.0 \text{ cm}$  的同心导体球壳，壳上带有电荷  $Q = 11 \times 10^{-10} \text{ C}$ ，试计算：

- (1) 两球的电势  $V_1$  和  $V_2$ ；
- (2) 用导线把球和壳连接在一起后  $V_1$  和  $V_2$  分别是多少？
- (3) 若外球接地， $V_1$  和  $V_2$  为多少？

分析：同心的带电导体球和球壳上的电荷，在静电平衡时均匀分布在导体的各个表面。根据场强的分布，可由电势定义式求出两球的电势  $V_1$  和  $V_2$ 。

若用导线把球和壳连接在一起后即成为整个导体，静电平衡时内球和球壳的电荷全部转移到球壳的外表面，导体成为等势体，球壳的电势不会发生变化。

若将外球壳接地，而导体球仍带电  $q_1$ ，则外球壳的电势为零，导体球与外球壳间的电势差不变。

解：(1) 静电平衡时，导体球壳内表面均匀分布有电荷  $-q_1$ ，外表面均匀分布有电荷  $q_1 + Q$ ，如解图 7-38 所示。由高斯定理可以得到各区域的电场分布为

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_2 = 0 \quad (R_2 < r < R_3)$$

$$E_3 = \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_3)$$

由电势定义式可求得导体球的电势  $V_1$  为

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{R_1}^{R_2} E_1 \cdot dr + \int_{R_2}^{R_3} E_2 \cdot dr + \int_{R_3}^{\infty} E_3 \cdot dr \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 3.3 \times 10^2 \text{ V} \end{aligned}$$

球壳的电势  $V_2$  为

$$V_2 = \int_{R_3}^{\infty} E_3 \cdot dr = \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 2.7 \times 10^2 \text{ V}$$

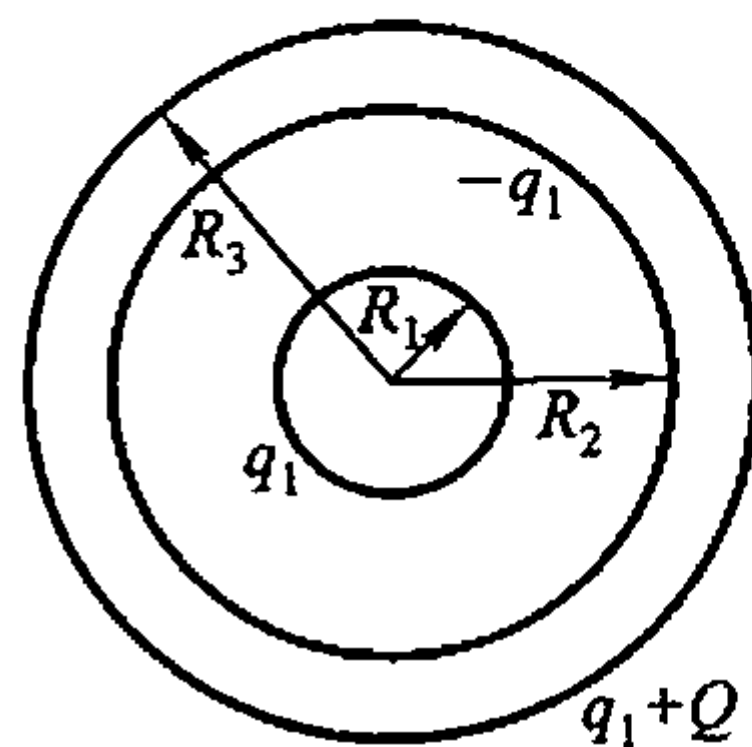
内球与外球壳间的电势差为  $\Delta V = V_1 - V_2 = 60 \text{ V}$

(2) 球和球壳连接为一体, 成为等势体, 电荷全部转移到球壳的外表面, 故有

$$V_1 = V_2 = \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 2.7 \times 10^2 \text{ V}$$

(3) 若将外球壳接地, 而导体球仍带电  $q_1$  时, 球壳的电势为  $V_2 = 0$ . 内球的电势即为内球与外球壳间的电势差.

$$V_1' = \Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2} \right) = 60 \text{ V}$$



解图 7-38

**7-39.** 三平行金属板 A、B、C 面积均为  $200 \text{ cm}^2$ , A、B 间相距  $4.0 \text{ mm}$ , A、C 间相距  $2.0 \text{ mm}$ , B 和 C 两板都接地. 如果使 A 板带正电  $3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ , 求: (1) B、C 板上感应电荷; (2) A 板的电势.

**分析:** 由于金属板的线度远大于板的间距, 因此金属板带电时, 板间的场强可近似为均匀电场. 静电平衡状态下, 金属板是等势体, 所以, 使 A 板带正电, B 和 C 两板都接地时, A 板与 B、C 两板间的电势差相同. 由于 A 板与 B、C 两板的间距不同, 故 A 板两侧的场强不同, 即 A 板两侧分布的电荷是不同的.

**解:** (1) 设 A 板的带电量为  $q$ , 静电平衡时, 在相对 B 板一侧分布有  $q_B$ , 在相对 C 板一侧分布有  $q_C$ , 并有

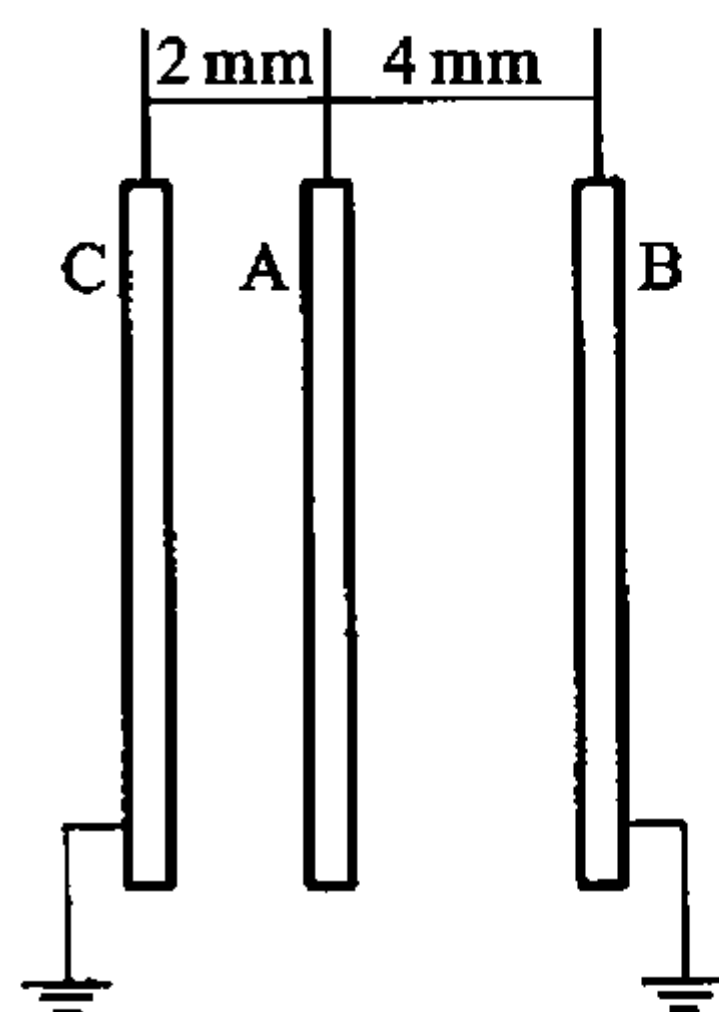
$$q = q_B + q_C$$

在 B、C 两板相对 A 板的面上则分布有感应电荷  $-q_B$  和  $-q_C$ .

设 A、B 两板间的场强为  $E_{AB}$ , A、C 两板间的场强为  $E_{AC}$ , 有

$$E_{AB} = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0} = \frac{q_B}{\epsilon_0 S} \text{ 和 } E_{AC} = \frac{\sigma_C}{\epsilon_0} = \frac{q_C}{\epsilon_0 S}$$

由于 A 板与 B、C 两板间的电势差相同,  $U_{AB} = U_{AC}$ , 即



习题 7-39 图

$$E_{AB} \cdot d_{AB} = E_{AC} \cdot d_{AC}$$

$$\text{可解得 } q_B = \frac{d_{AC}}{d_{AB} + d_{AC}} q = \frac{2 \times 10^{-3}}{(4+2) \times 10^{-3}} \times 3.0 \times 10^{-7} \text{ C} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$q_C = q - q_B = 2.0 \times 10^{-7} \text{ C}$$

所以, B 板上的感应电荷为  $-1.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ , C 板上的感应电荷为  $-2.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ .

$$(2) \text{ A 板的电势为 } V_A = E_{AB} \cdot d_{AB} = \frac{q_B}{\epsilon_0 S} \cdot d_{AB} = 2.26 \times 10^3 \text{ V}$$

**7-40.** 在盖革计数器中有一直径为 2 cm 的金属圆筒, 在圆筒轴线上有一条直径为 0.31 mm 的导线, 如果在导线与圆筒之间加上 850 V 的电压, 试分别求:

(1) 导线外表面附近处的电场强度大小;

(2) 圆筒内表面附近处的电场强度大小.

**分析:** 把金属圆筒和直导线看作是无限长的, 在带电情况下, 导线与圆筒之间的场强具有轴对称性. 利用高斯定理可以求得其间的场强分布, 进而求得其间的电势差.

**解:** 如解图 7-40 所示, 作同轴的圆柱形高斯面, 设直导线单位长度的所带电荷量为  $\lambda$ , 由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l$$

可以得到直导线和金属圆筒间场强的大小为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (R_1 < r < R_2) \quad (1)$$

直导线和金属圆筒间的电势差为

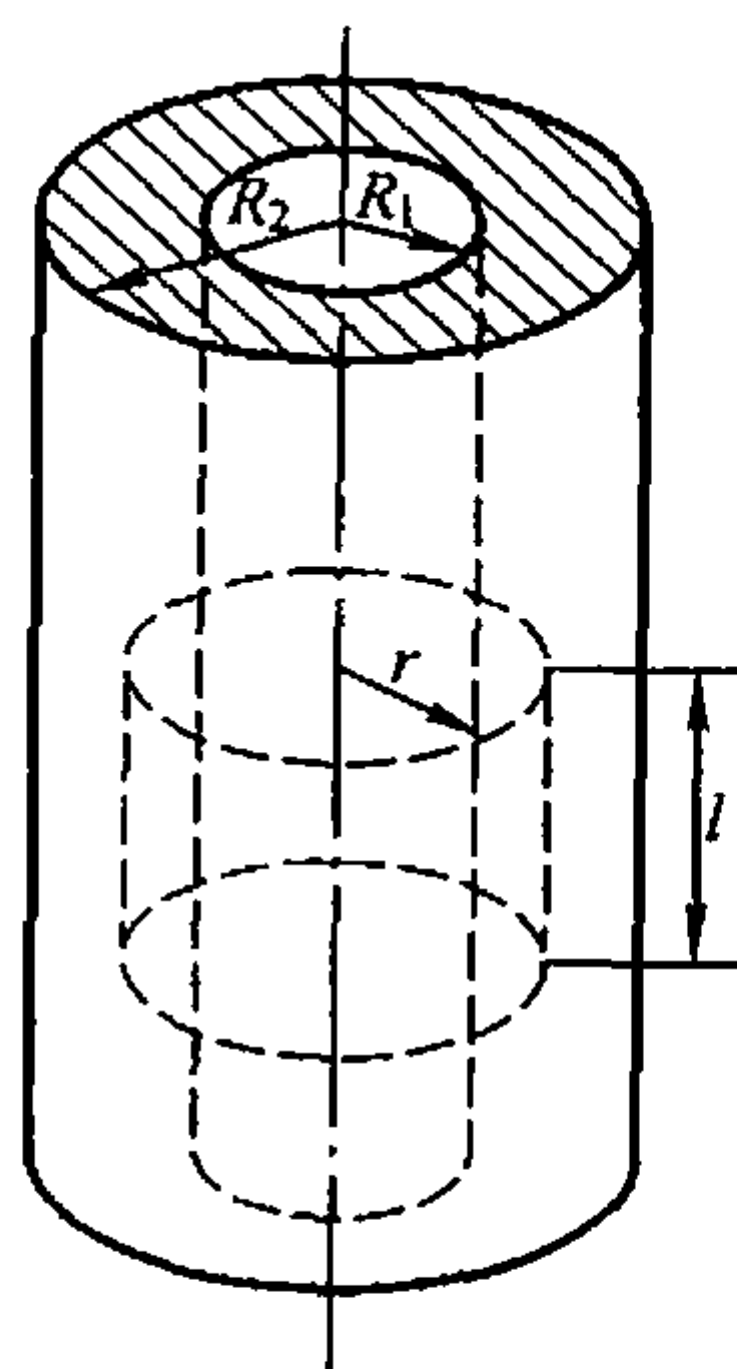
$$\begin{aligned} U_{12} &= V_{R_1} - V_{R_2} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式和(2)式可以得到在  $r$  处 ( $R_1 < r < R_2$ ) 的场强为

$$E = \frac{U_{12}}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

(1) 导线外表面附近处的场强  $E_1$  为

$$E_1 = \frac{U_{12}}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{850}{0.155 \times 10^{-3} \times \ln \frac{10}{0.155}} \text{ V/m} = 1.32 \times 10^6 \text{ V/m}$$



解图 7-40

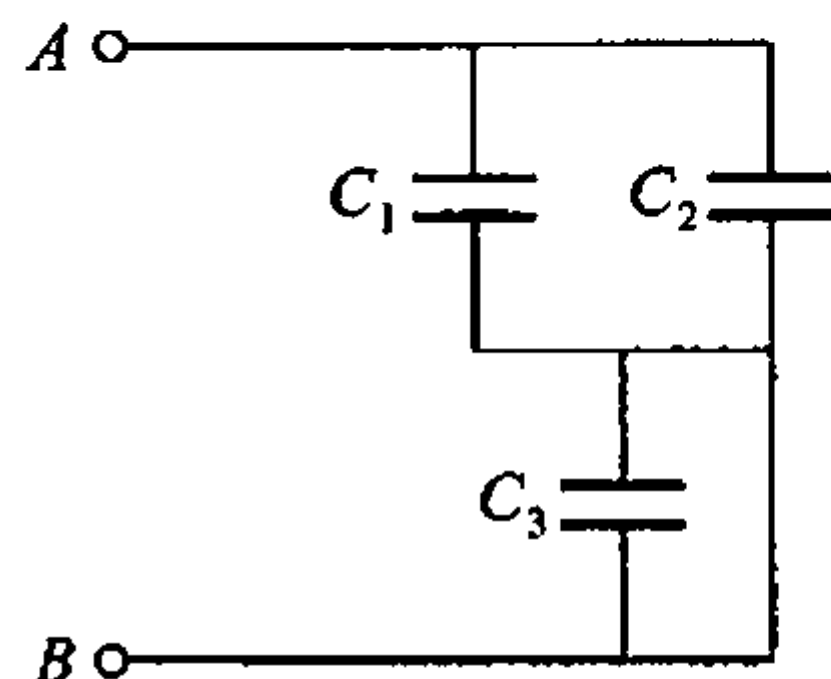
(2) 圆筒内表面附近处的场强  $E_2$  为

$$E_2 = \frac{U_{12}}{R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{850}{10 \times 10^{-3} \times \ln \frac{10}{0.155}} \text{ V/m} = 2.04 \times 10^4 \text{ V/m}$$

## 7. 有电介质时的电场问题和电容的计算

7-41. 如图,  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5.0 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 5.0 \mu\text{F}$ .

- (1) 求  $A$ 、 $B$  间的电容;
- (2) 在  $A$ 、 $B$  间加上 100 V 的电压, 求  $C_2$  上的电荷量和电压;
- (3) 如果  $C_1$  被击穿, 问  $C_3$  上的电荷量和电压各是多少?



习题 7-41 图

分析: 根据电容器的串、并联规律和导体系统的静电平衡状态求解.

解: (1)  $A$ 、 $B$  间的等效电容  $C_{AB}$  为  $C_1$  与  $C_2$  并联后再与  $C_3$  串联. 即

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3}$$

所以

$$C_{AB} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 3.75 \mu\text{F}$$

(2) 电容器带电时, 设  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  极板上的电荷分别为  $q_1$ 、 $q_2$  和  $q_3$ , 电势差分别为  $U_1$ 、 $U_2$  和  $U_3$ . 由导体系统的静电平衡状态可知, 它们应满足关系

$$q_1 + q_2 = q_3 = q$$

和

$$U_1 = U_2, \quad U_1 + U_3 = U_{AB}$$

由电容器定义式  $q = CU$ , 得

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 = C_3 U_3$$

即

$$(C_1 + C_2) U_2 = C_3 (U_{AB} - U_2)$$

得

$$U_2 = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U_{AB} = 25 \text{ V}$$

$$q_2 = C_2 U_2 = 1.25 \times 10^{-4} \text{ C}$$

(3) 若  $C_1$  被击穿, 则

$$U_{AB} = U_3 = 100 \text{ V}, \quad q_3 = C_3 U_3 = C_3 U_{AB} = 5.0 \times 10^{-4} \text{ C}$$

7-42. 平板电容器极板间的距离为  $d$ , 保持极板上的电荷不变, 把相对电容率为  $\epsilon_r$ 、厚度为  $\delta$  ( $\delta < d$ ) 的玻璃板插入极板间, 求无玻璃板时和插入玻璃板后极

板间电势差的比.

分析: 插入电介质板前后, 极板上电荷量保持不变. 插入后, 由于介质的极化, 介质内的电场强度将减弱, 使极板间的电势差减小.

解: 设电容器极板上电荷面密度为  $\sigma$ , 未插入玻璃板时极板间的电势差为  $U_0$ , 插入玻璃板后, 板间的电势差为  $U$ . 有

$$U_0 = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

$$U = E(d - \delta) + E'\delta = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - \delta) + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \delta$$

得 
$$\frac{U_0}{U} = \frac{\epsilon_r d}{\epsilon_r d - (\epsilon_r - 1)\delta}$$

7-43. 两个电容相同的平行板电容器, 串联后接入电动势为  $\mathcal{E}$  的电源, 若不切断电源, 在第二个电容器中充以相对电容率  $\epsilon_r = 7$  的电介质, 那么第一个电容器两极板间的电势差将改变多少倍?

分析: 串联电容器带电时, 由于静电感应, 各极板上电荷的量值相同, 电容量的电容器极板间的电势差小, 电容量小的电容器极板间的电势差则大.

解: 设两相同电容器的电容量为  $C_0$ , 串联接入电源时, 极板上有电荷量为  $q$ , 并且极板间的电势差相同. 有

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_0} + \frac{q}{C_0} = 2 \frac{q}{C_0}$$

在第二个电容器中充入介质后, 其电容量将变为  $\epsilon_r C_0$ . 由于与电源保持接触, 串联电容各极板的电荷量将变为  $q'$ , 有 
$$\mathcal{E} = U'_1 + U'_2 = \frac{q'}{C_0} + \frac{q'}{\epsilon_r C_0}$$

解以上两式, 可得

$$q' = \frac{7}{4}q, \quad \frac{U'_1}{U_1} = \frac{q'}{q} = \frac{7}{4} = 1.75$$

第一个电容器两极板间的电势差将变为原来的 1.75 倍.

7-44. 两个相同的电容器并联后, 用电压  $U$  的电源充电后切断电源, 然后在一个电容器中充满相对电容率为  $\epsilon_r$  的电介质. 求此时极板间的电势差.

分析: 并联电容器带电时, 两电容器极板间的电势差相等. 充电后切断电源, 则两电容极板的总电荷将保持不变. 改变其中一个电容器的电容量时, 总电荷将重新分布, 电容量大的电容器极板上将分布有较多的电量, 而两电容器极板间的电势差也将相应变小.

解: 设两相同电容器的电容量为  $C_0$ , 并联后的总电容量为

$$C = 2C_0$$

充电后,两电容极板的总电荷量为

$$Q = CU = 2C_0U$$

充入电介质电容器的电容量为  $\epsilon_r C_0$ , 并联的总电容量为

$$C' = \epsilon_r C_0 + C_0 = (\epsilon_r + 1)C_0$$

$$\text{极板间的电势差为 } U' = \frac{Q}{C'} = \frac{2C_0U}{\epsilon_r C_0 + C_0} = \frac{2U}{\epsilon_r + 1}$$

式中  $\epsilon_r > 1$ , 故  $U' < U$ .

**7-45.** 两个同心球壳组成的球形电容器, 半径为  $R_1$  和  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), 通过其中心的平面把它一分为二, 其中一半是空气, 另一半充满相对电容率为  $\epsilon_r$  的电介质. 试证明其电容等于用相对电容率为  $(1 + \epsilon_r)/2$  的电介质充满全部电容器的电容.

**分析:** 当两个导体球壳带有等量异号的电荷时, 在两球壳之间将建立起电场. 根据导体的静电平衡条件可知, 这时两个球壳各自都是等势体, 上、下半球壳间的电势差相等, 并且, 导体表面的场强都垂直于表面. 所以, 整个电容器由上、下两个半球形电容器并联而成.

**证:** 设充满空气的球形电容为  $C_0$ , 半球形空气电容器的电容则为  $C_0/2$ , 充满电介质  $\epsilon_r$  的球形电容器的电容为  $C'$ , 则半球形电介质电容器的电容为  $C'/2$ . 由于两者的形状完全相同, 故有

$$C' = \epsilon_r C_0 \quad \text{和} \quad C'/2 = \epsilon_r C_0/2$$

两半球形电容器并联后的电容量为

$$C = C_0/2 + C'/2 = (1 + \epsilon_r)C_0/2 = \epsilon_r' C_0$$

式中  $\epsilon_r' = (1 + \epsilon_r)/2$ .  $\epsilon_r' C_0$  即为用相对电容率为  $\epsilon_r'$  的电介质充满全部电容器的电容量.

**7-46.** 两块相互平行的大金属板, 板面积均为  $S$ , 间距为  $d$ , 用电源使两板分别维持在电势  $V$  和零电势. 现将第三块相同面积而厚度可略的金属板插在两板的正中间, 已知该板上原带有电荷量  $q$ , 求该板的电势.

**分析:** 插入带电的金属板后, 由于静电感应, 与电源相连接的两块金属板的电荷将发生变化, 但保持电势差不变. 插入的带电金属板上, 电荷  $q$  也不会平均地分布于两个表面. 但是, 在相邻两块金属板相对的两个面上的电荷应该是等量异号的. 所以, 插入的带电金属板两侧的均匀电场强度将不再相同.

**解 1:** 插入带电金属板 C 后, 根据静电平衡状态的要求, 可设各板电荷的分布如解图 7-46 所示. 设  $E_1 = E_{AC}$ ,  $E_2 = E_{CB}$ . 有

$$E_1 = \frac{q_A}{\epsilon_0 S}, \quad E_2 = \frac{q_A + q}{\epsilon_0 S}$$

A 板相对地的电势  $V$  不变, 有

$$\begin{aligned} V &= U_{AC} + U_{CB} = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} \\ &= \frac{q_A d}{2\epsilon_0 S} + \frac{(q_A + q)d}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_A d}{\epsilon_0 S} + \frac{qd}{2\epsilon_0 S} \end{aligned}$$

C 板相对地的电势为

$$V_C = U_{CB} = E_2 \frac{d}{2} = \frac{(q_A + q)d}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_A d}{2\epsilon_0 S} + \frac{qd}{2\epsilon_0 S}$$

由于

$$\frac{q_A d}{\epsilon_0 S} = V - \frac{qd}{2\epsilon_0 S}$$

所以, 得

$$V_C = \frac{1}{2}V - \frac{qd}{4\epsilon_0 S} + \frac{qd}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \left( V + \frac{q}{2\epsilon_0 S} d \right)$$

**解 2:** 插入金属板 C 后, 与电源相连接的是两个串联的相同的平行板电容器.

设  $C_1 = C_{AC}$ ,  $C_2 = C_{CB}$ . 有  $C_1 = C_2 = 2\epsilon_0 S/d$ . 并有  $U_{AC} = \frac{q_A}{C_1}$ ,  $U_{CB} = \frac{q_A + q}{C_2}$

电势差满足关系  $V = U_{AC} + U_{CB} = \frac{2q_A}{C_1} + \frac{q}{C_1}$

所以, 有

$$V_C = U_{CB} = \frac{q_A + q}{C_1} = \frac{1}{2}V - \frac{q}{2C_1} + \frac{q}{C_1} = \frac{1}{2} \left( V + \frac{q}{2\epsilon_0 S} d \right)$$

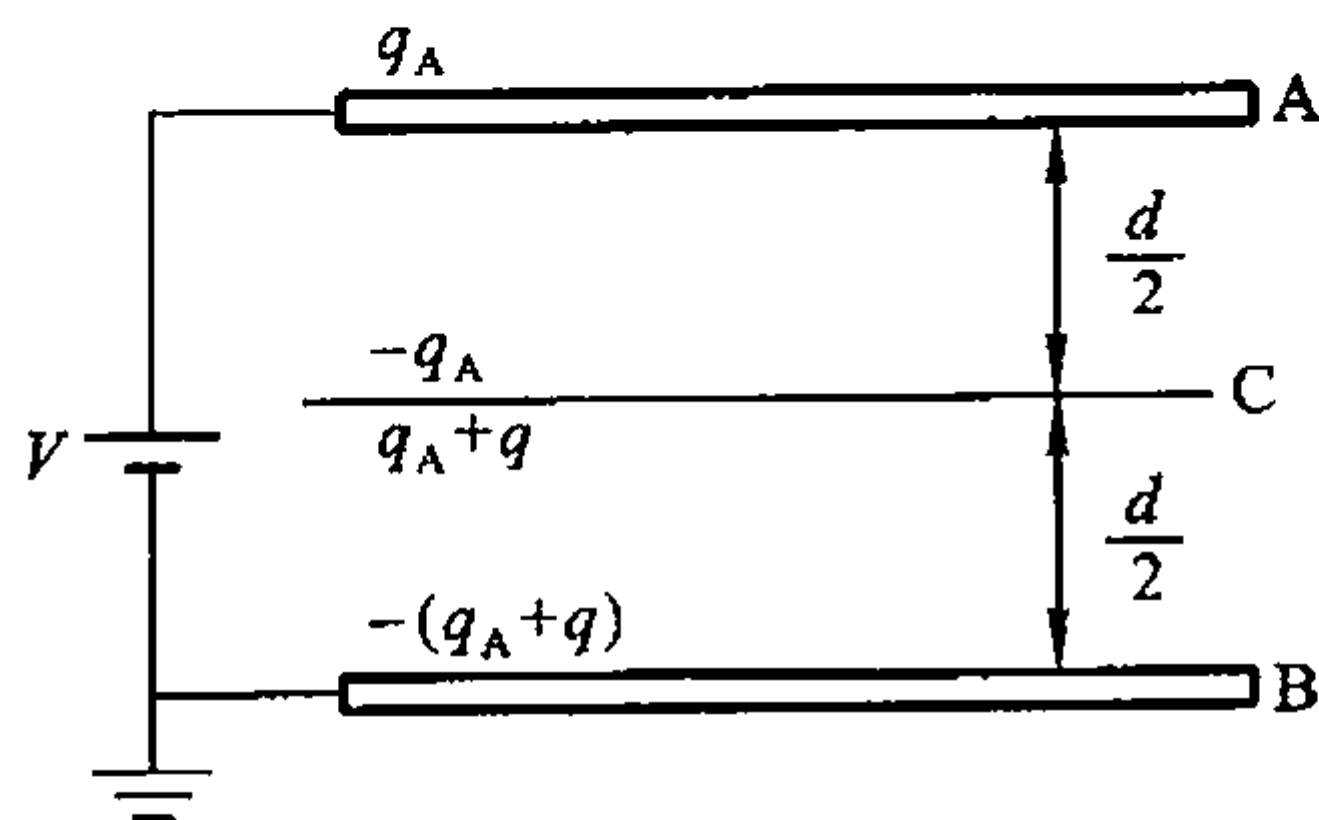
**7-47.** 一平板电容器(极板面积为  $S$ , 间距为  $d$ ) 中充满两种电介质(如图), 设两种电介质在极板间的面积比  $S_1/S_2 = 3$ , 试计算其电容. 如两电介质尺寸相同, 电容又如何?

**分析:** 平板电容器带电且处于静电平衡状态时, 两极板间的电势差处处相同, 由于两极板平行, 因此两种电介质中的电场强度也相同. 由于介质不同, 极板上对应分布有两种不同的自由电荷面密度. 所以, 两种介质中电位移矢量的大小不同.

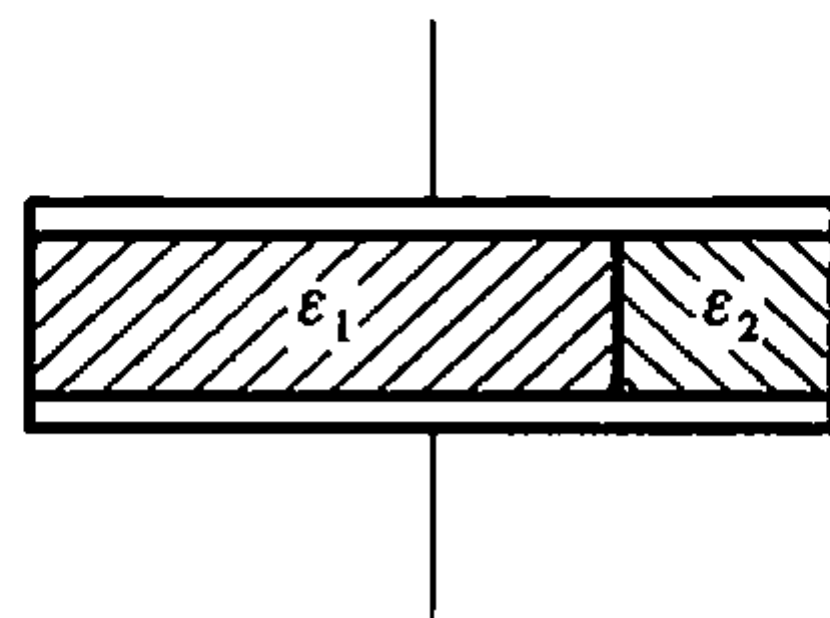
本题所示电容器, 也是两个不同介质电容器的并联.

**解 1:** 设电容器带电量为  $Q$ , 极板上对应两种电介质处的自由电荷面密度(均匀分布)分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ . 由高斯定理可得  $D_1 = \sigma_1$  和  $D_2 = \sigma_2$ .

即  $E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}$ ,  $E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$



解图 7-46



习题 7-47 图

因  $E_1 = E_2$ , 所以

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sigma_2$$

以  $S_1$  和  $S_2$  表示对应两种电介质的极板面积, 应有  $S_1 = 3S/4$ ,  $S_2 = S/4$ . 所以极板上的  $Q$  为

$$Q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \frac{3\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4\varepsilon_2} \sigma_2 S$$

极板间的电势差为  $U = E_1 d = E_2 d = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} d$

电容量为  $C = \frac{Q}{U} = \frac{(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4d} S$

如两电介质尺寸相同, 则有  $S_1 = S_2 = S/2$ .  $Q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_2} \sigma_2 S$ ,  $U$  的表式不变. 所以, 电容量为

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2d} S$$

解 2: 由平板电容器  $C = \varepsilon \frac{S}{d}$  可知, 并联的两电容器分别为

$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{3S}{4d}, \quad C_2 = \varepsilon_2 \frac{S}{4d}$$

并联电容为

$$C = C_1 + C_2 = \frac{(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4d} S$$

**7-48.** 平板电容器(极板面积为  $S$ , 间距为  $d$ )中间有两层厚度各为  $d_1$  和  $d_2$  ( $d = d_1 + d_2$ )、电容率各为  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  的电介质, 试计算其电容. 如  $d_1 = d_2$ , 则电容又如何?

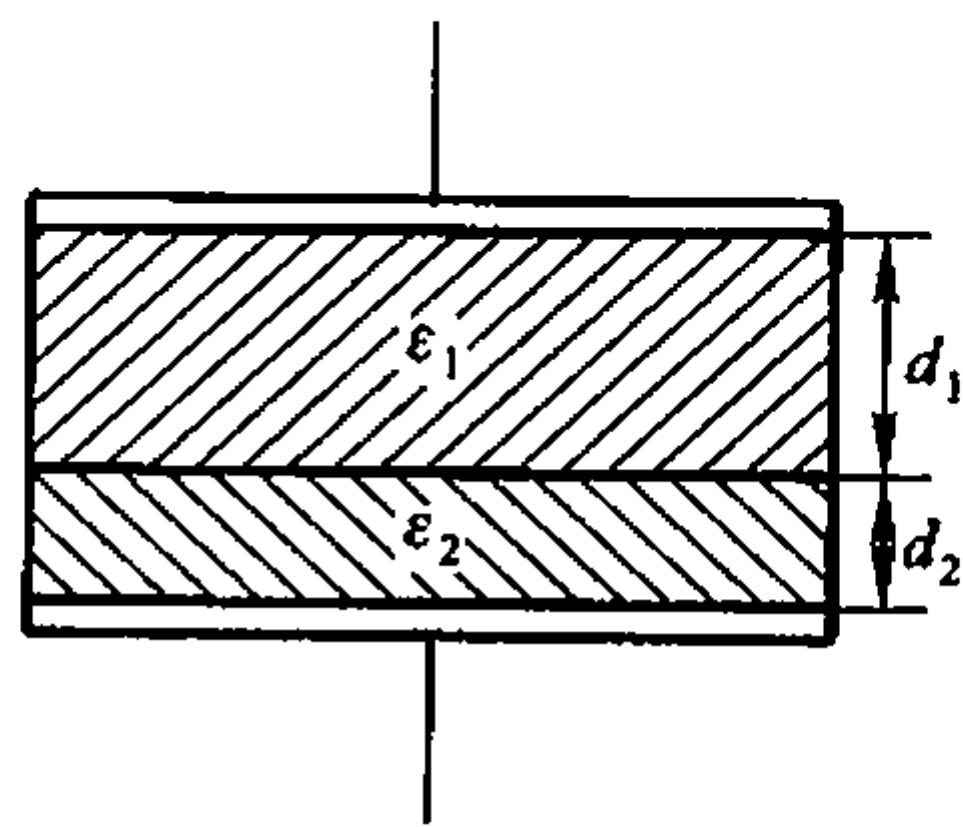
分析: 平板电容器带电时, 两极板都是等势体. 由于两种介质的界面平行于极板, 因此介质的分界面是等势面, 且没有自由电荷分布. 两极板上等量异号的自由电荷均匀分布. 所以, 在两种介质中电位移矢量相同, 但电场强度不同.

本题所示电容器, 也可视为两个不同电容器的串联.

解 1: 设极板上有自由电荷为  $Q$ , 由高斯定理可得

$$D_1 = D_2 = \sigma = \frac{Q}{S}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_1 S}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_2 S}$$



习题 7-48 图

极板间的电势差

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right) \frac{Q}{S}$$

电容量为  $C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$

$d_1 = d_2 = d/2$  时, 有  $C' = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d} S$

解2: 由平板电容器的电容公式  $C = \varepsilon \frac{S}{d}$  可知, 串联的两电容器分别为

$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{S}{d_1}, \quad C_2 = \varepsilon_2 \frac{S}{d_2}$$

串联电容为  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S}$

得  $C = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$

7-49. 一平行板电容器的电容为 100 pF, 极板的面积为 100 cm<sup>2</sup>, 极板间充满相对电容率为 5.4 的云母电介质, 当极板上电势差为 50 V 时, 求:

- (1) 云母中的场强  $E$ ;
- (2) 电容器极板上的自由电荷;
- (3) 云母电介质面上的极化面电荷.

解: (1) 充满电介质的平行板电容器电容为  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$

极板间的均匀电场强度大小为

$$E = \frac{U}{d} = \frac{CU}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{50 \times 100 \times 10^{-12}}{5.4 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-4}} \text{ V/m} = 1.05 \times 10^4 \text{ V/m}$$

(2) 电容器极板上的自由电荷为

$$Q_0 = CU = 100 \times 10^{-12} \times 50 \text{ C} = 5.0 \times 10^{-9} \text{ C}$$

(3) 设电容器上极板带正电荷(自由电荷), 则介质上表面的法线方向  $e_n$  与该处极化强度  $P$  的方向相反, 在电介质下表面处则方向相同. 由  $\sigma' = P \cdot e_n$  可得

电介质上表面的极化电荷

$$\begin{aligned} Q'_1 &= \sigma'_1 S = (P \cdot e_n) S = -P_n S = -PS \\ &= -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \sigma_0 S = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) Q_0 = -4.1 \times 10^{-9} \text{ C} \end{aligned}$$

电介质下表面的极化电荷

$$Q'_2 = \sigma'_2 S = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n) S = P_n S = PS$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Q_0 = 4.07 \times 10^{-9} \text{ C}$$

7-50. 有两块平行板, 面积各为  $100 \text{ cm}^2$ , 板上带有  $8.9 \times 10^{-7} \text{ C}$  的等值异号电荷, 两板间充以电介质, 已知电介质内部电场强度为  $1.4 \times 10^6 \text{ V/m}$ , 求:

- (1) 电介质的相对电容率;
- (2) 电介质面上的极化面电荷.

解: 设平行板间距为  $d$ , 极板带电时, 极板间的场强以均匀电场近似.

$$(1) \text{ 电介质内场强的大小为 } E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

得 
$$\epsilon_r = \frac{Q_0}{ES\epsilon_0} = \frac{8.9 \times 10^{-7}}{1.4 \times 10^6 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-4}} = 7.18$$

(2) 在电介质的两个平行于极板的表面上, 分布有等量异号的极化面电荷, 电荷量为

$$|Q'| = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Q_0 = 7.66 \times 10^{-7} \text{ C}$$

7-51. 一个  $10 \mu\text{F}$  的电容器充电到  $100 \text{ V}$  后, 通过  $R = 10 \text{ k}\Omega$  的电阻放电. 试求:

- (1) 刚开始时的电流;
- (2) 电荷量减少一半所需的时间;
- (3) 能量减少一半所需的时间.

解: 电容器充电到  $100 \text{ V}$  时, 极板上的电荷量为

$$Q = CU = 10 \times 10^{-6} \times 100 \text{ C} = 1 \times 10^{-3} \text{ C}.$$

电容器通过电阻放电的规律是

$$i = \frac{Q}{RC} e^{-t/RC}$$

$$(1) \text{ } t=0 \text{ 时的电流为 } i_0 = \frac{Q}{RC} = \frac{U}{R} = \frac{100 \text{ V}}{10 \times 10^3 \Omega} = 10 \times 10^{-3} \text{ A} = 10 \text{ mA}$$

(2) 将电流与电量的关系  $i = \frac{dq}{dt}$  代入电容器放电电流的表达式, 积分后可得

$$q = Qe^{-t/RC}$$

当  $q = Q/2$  时, 由上式可解得

$$t = RC \ln 2 = 10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} \times \ln 2 \text{ s} = 0.069 \text{ s}$$

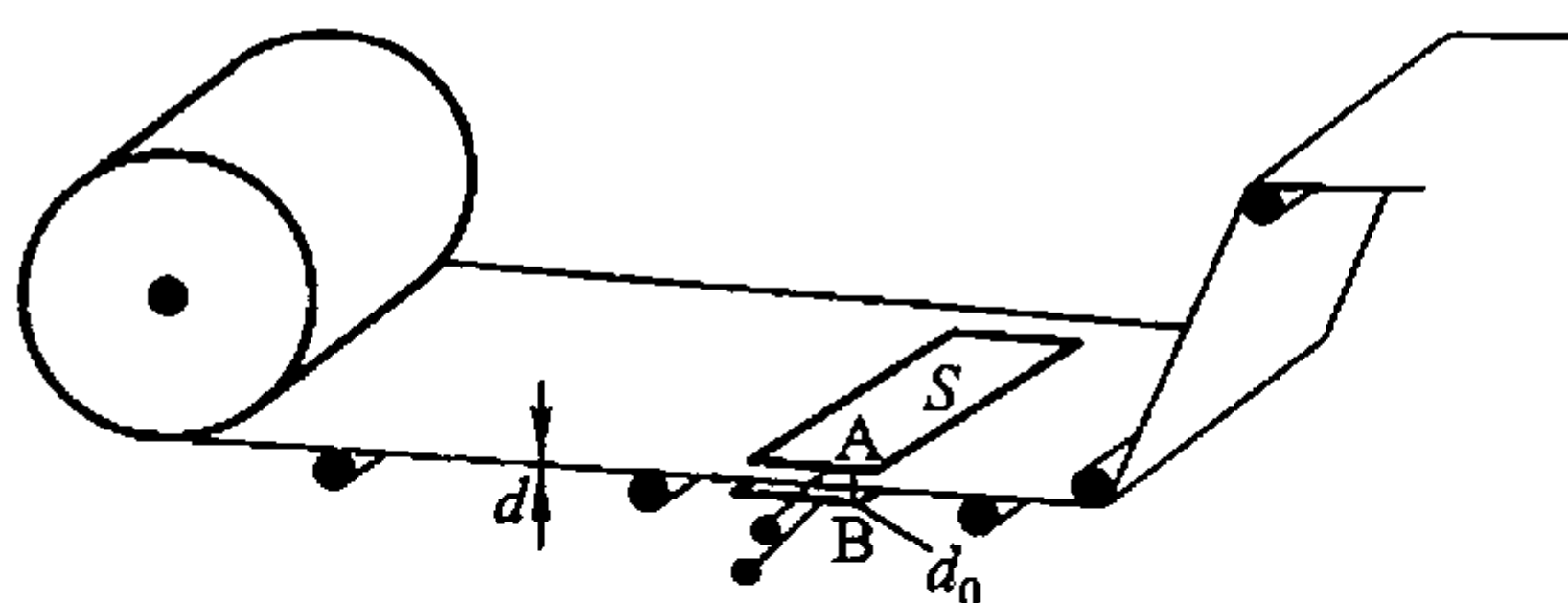
(3) 电容器充电后储有的能量为  $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ , 能量减为一半时, 有

$$W' = \frac{1}{2} W = \frac{1}{4} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2C} \left( \frac{Q}{\sqrt{2}} \right)^2$$

即放电至  $q = Q/\sqrt{2}$  时, 能量减半, 所需时间为

$$t = RC \ln \sqrt{2} \text{ s} = 0.035 \text{ s}$$

**7-52.** 为了实时检测纺织品、纸张等材料的厚度(待测材料可视作相对电容率为  $\epsilon_r$  的电介质), 通常在生产流水线上设置如图所示的传感装置, 其中 A、B 为平板电容器的导体极板,  $d_0$  为两极板间的距离, 试说明其检测原理, 并推出直接测量电容  $C$  与间接测量厚度  $d$  之间的函数关系, 如果要检测钢板等金属材料的厚度, 结果又将如何?



习题 7-52 图

**解:** 设电容器两极板 A、B 的面积均为  $S$ , 极板之间放入表面平行于极板, 厚度为  $d$ , 相对电容率为  $\epsilon_r$  的电介质片后, 相当于厚度为  $(d_0 - d)$  的空气电容器  $C_1$  和相同面积的厚度为  $d$  的介质电容器  $C_2$  的串联.

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{(d_0 - d)}$$

$$C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

串联电容为

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d + \epsilon_r (d_0 - d)}$$

可得介质片的厚度为

$$d = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \left( d_0 - \frac{\epsilon_0 S}{C} \right)$$

如果流水线上金属材料通过传感装置的速率不是很大, 在 A、B 之间的金属材料处于静电平衡状态, 其内部的场强为零. 这时 A、B 间的电容即为  $C_1$ , 为

$$C = C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{(d_0 - d)}$$

式中  $d$  为金属材料的厚度.

7-53. 一块相对电容率  $\epsilon_r = 5$  的扁平电介质, 垂直放置于电位移为  $D = 1 \text{ C/m}^2$  的均匀电场中, 已知电介质的体积为  $0.1 \text{ m}^3$ , 并且是均匀极化, 求:

(1) 电介质的电极化强度;

(2) 电介质总的电偶极矩.

分析: 电介质内任一点的电极化强度  $P$  与该点的合场强  $E$  成正比, 均匀极化时, 电介质内  $P$  的大小、方向不变. 垂直于均匀电场的电介质表面是等势面. 可根据  $D$ 、 $E$ 、 $P$  三者之间的关系求解本题.

解: (1) 在电介质中, 电位移矢量  $D$  与合场强  $E$  的方向相同, 量值上是  $E$  的  $\epsilon$  倍, 有

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

合场强  $E$  的大小为

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{8.85 \times 10^{-12} \times 5} \text{ V/m} = 2.26 \times 10^{10} \text{ V/m}$$

电介质内  $P$ 、 $E$  的方向相同, 有  $D = \epsilon_0 E + P$

所以 
$$P = D - \epsilon_0 E = D \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) = 0.8 \text{ C/m}^2$$

(2) 电介质总的电偶极矩为

$$\sum p_i = P \Delta V = 0.8 \times 0.1 \text{ C} \cdot \text{m} = 8 \times 10^{-2} \text{ C} \cdot \text{m}$$

7-54. 一扁平的电介质板 ( $\epsilon_r = 4$ ) 垂直放在一均匀电场里, 如果电介质表面上的极化电荷面密度为  $\sigma' = 0.5 \text{ C/m}^2$ , 求:

(1) 电介质里的电极化强度和电位移;

(2) 电介质板外的电位移;

(3) 电介质板里和板外的场强.

分析: 垂直于均匀电场的电介质表面是等势面, 极化电荷面密度由电极化强度  $P$  的法向分量决定. 根据有电介质时的高斯定理可知, 电介质内、外的电位移矢量  $D$  线连续,  $E$  为所有电荷激发的合场强.

解: (1) 由极化电荷面密度  $\sigma' = P \cdot e_n = P_n$  得

$$P = 0.5 \text{ C/m}^2$$

由  $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_r \epsilon_0 E$ , 可得 
$$E = \frac{P}{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}$$

所以 
$$D = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} P = 0.67 \text{ C/m}^2$$

(2) 根据有电介质时的高斯定理可知, 电介质内、外的电位移矢量  $D$  线连续, 在均匀电场中,  $D$  为常数. 所以, 电介质板内、外的电位移均为

$$D = 0.67 \text{ C/m}^2$$

(3) 电介质板内、外的合场强  $E$  的大小分别为

$$E_{\text{内}} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 1.88 \times 10^{10} \text{ N/C}$$

$$E_{\text{外}} = \frac{D}{\epsilon_0} = 7.53 \times 10^{10} \text{ N/C}$$

7-55. 在一平行板电容器的两板上带有等值异号的电荷, 两板间的距离为 5.0 mm, 充以  $\epsilon_r = 3$  的电介质, 电介质中的电场强度为  $1.0 \times 10^6 \text{ V/m}$ , 求:

- (1) 电介质中的电位移矢量;
- (2) 平板上的自由电荷面密度;
- (3) 电介质中的极化强度;
- (4) 电介质面上的极化电荷面密度;
- (5) 平行板上自由电荷及电介质面上极化电荷所产生的那一部分电场强度.

分析: 忽略平行带电平板的边缘效应时, 平行板电容器极板内的电场是均匀场, 极板上的自由电荷和与极板平行的介质表面的极化电荷都是均匀分布的.

解: 设上极板带正自由电荷, 则下极板带等量负自由电荷. 自由电荷面密度大小为  $\sigma_0$ .

(1) 已知介质中场强的大小, 由电位移矢量和场强关系, 以及电位移矢量大小与自由电荷面密度的关系, 得到介质中电位移矢量大小

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 3.0 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1.0 \times 10^6 \text{ C/m}^2 = 2.66 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

(2) 平板上自由电荷面密度大小  $\sigma_0 = D = 2.66 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$

(3) 介质中极化强度大小  $P = \sigma' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0 = 1.77 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$

(4) 介质上表面极化电荷面密度为

$$\sigma'_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n = -P = -1.77 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

介质下表面极化电荷面密度为

$$\sigma'_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n = P = 1.77 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

(5) 自由电荷在介质中的场强方向向下, 大小为

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{2.66 \times 10^{-5}}{8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 3.0 \times 10^6 \text{ V/m}$$

极化电荷在介质中的场强方向向上, 大小为

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = 2.0 \times 10^6 \text{ V/m}$$

介质中的合场强方向向下, 大小为

$$E = E_0 - E' = 1.0 \times 10^6 \text{ V/m}$$

与  $E = \frac{D}{\varepsilon}$  所得结果相同.

7-56. 两板相距为 5.0 mm 的平板电容器, 板上带有等值异号的电荷, 电荷的面密度为  $20 \mu\text{C}/\text{m}^2$ , 两板间平行于板面放置两片电介质, 一片为 2.0 mm 厚, 相对电容率为 3, 另一片为 3.0 mm 厚, 相对电容率为 4, 求:

- (1) 各电介质中的电位移矢量;
- (2) 各电介质中的电场强度;
- (3) 各电介质面上的极化电荷面密度.

解: (1) 利用高斯定理, 可得极板上自由电荷面密度的大小为

$$D_1 = D_2 = \sigma_0 = 20 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

(2) 在两种电介质中的电场强度与电位移矢量分别满足以下关系:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2$$

得 
$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0} = \frac{20 \times 10^{-6}}{3.0 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 7.53 \times 10^5 \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0} = \frac{20 \times 10^{-6}}{4.0 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 5.65 \times 10^5 \text{ V/m}$$

$D$ 、 $E$  的方向均由正极板指向负极板.

(3) 第一层电介质的上表面极化电荷面密度

$$\sigma'_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_n = - \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \right) \sigma_0 = -13.3 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

第二层电介质下表面的极化电荷面密度

$$\sigma'_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_n = \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \right) \sigma_0 = 15 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

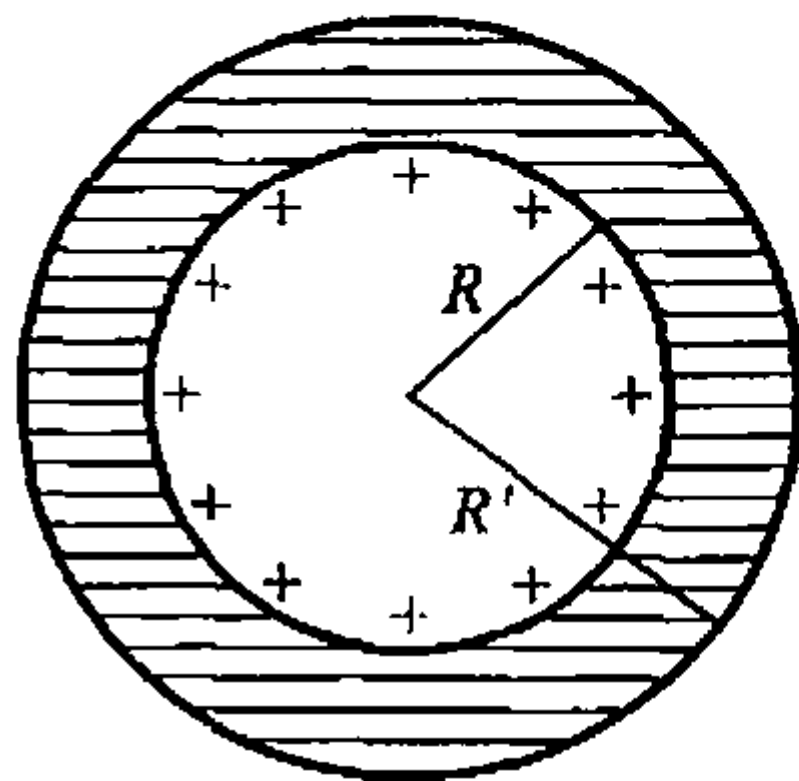
两种电介质交界面上净极化电荷面密度

$$\sigma' = -\sigma'_1 + (-\sigma'_2) = -1.7 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

7-57. 在半径为  $R$  的金属球之外包有一层均匀电介质层(如图), 外半径为  $R'$ . 设电介质的相对电容率为  $\varepsilon_r$ , 金属球的电荷量为  $Q$ , 求:

- (1) 电介质层内、外的场强分布;
- (2) 电介质层内、外的电势分布;
- (3) 金属球的电势.

分析: 由于介质层内、外电场的分布具有球对称性, 因此可以利用电介质中的高斯定理, 先求得电介质层内、外各点处的电位移  $D$ , 再由  $D$  得到电场强度  $E$ . 利用电势的定义或由电势的叠加原理求得电势的分布.



习题 7-57 图

解：以球心  $O$  为原点，作半径为  $r$  的同心球面  $S$ ，根据电介质中的高斯定理，

有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D 4\pi r^2 = Q$$

得

$$D = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi r^2} & (r \geq R) \end{cases}$$

$Q > 0$  时， $\mathbf{D}$  沿径向向外。在金属球内， $D = 0, E = 0$ 。

(1) 由  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  可知，在电介质层内，场强的大小为

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \quad (R \leq r \leq R')$$

在电介质层外，场强的大小为  $E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (r > R')$

(2) 电介质层内离球心  $r$  处的电势

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{R'} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R'}^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right) \quad (R \leq r \leq R') \end{aligned}$$

电介质层外离球心  $r$  处的电势

$$V_2 = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \quad (r > R')$$

(3) 金属球的电势

$$V_3 = \int_R^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_R^{R'} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R'}^\infty \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right)$$

7-58. 半径为  $R_0$  的导体球带有电荷  $Q$ ，球外有一层均匀电介质的同心球壳，其内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，相对电容率为  $\epsilon_r$  (如图)，求：

(1) 电介质内外的电场强度  $\mathbf{E}$  和电位移  $\mathbf{D}$ ；

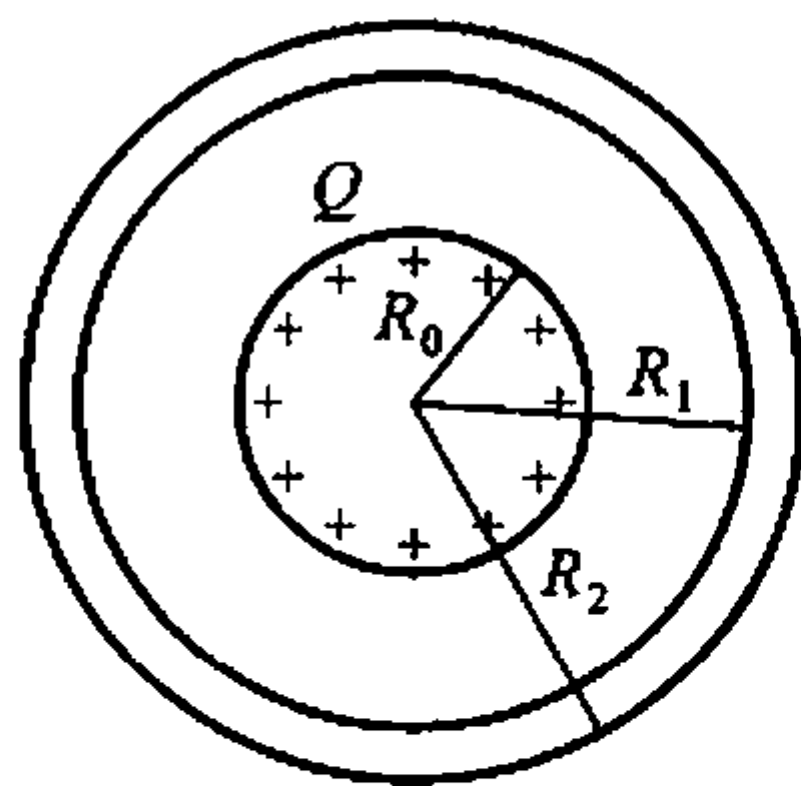
(2) 电介质内的极化强度  $\mathbf{P}$  和表面上的极化电荷面密度  $\sigma'$ 。

分析：带电导体球和球外同心的电介质球壳层内、外电场的分布具有球对称性。由电介质中的高斯定理可以得到空间各处连续分布的电位移矢量  $\mathbf{D}$ ，再由  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的关系得到各处的电场强度  $\mathbf{E}$ 。利用  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{P}$  的关系求得电介质内的极化强度  $\mathbf{P}$ 。

解：(1) 作半径  $r > R_0$  的同心高斯球面，

由

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = DS = Q$$



习题 7-58 图

得 
$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (R_1 > r > R_0, R_2 > r > R_1, r > R_2)$$

由  $D_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_1, D_2 = \varepsilon_0 E_2$ , 得电介质内外电场强度大小

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 > r > R_0, r > R_2)$$

若  $Q > 0$ , 则  $D, E$  方向均沿矢径向外, 反之则向内.

(2) 由  $P = D - \varepsilon_0 E$ , 得电介质内极化强度

$$P = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi \varepsilon_r r^2} e_r \quad (R_1 < r < R_2)$$

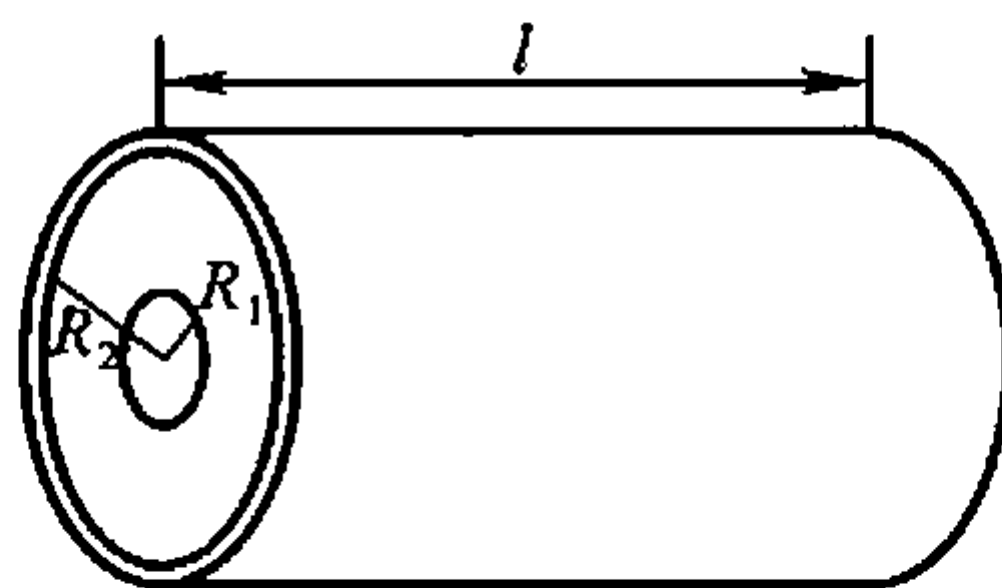
式中  $e_r$  是沿矢径向外的单位方向矢量. 可见, 在电介质层内的极化是非均匀的.

由  $\sigma' = P \cdot e_n$  得到电介质表面的极化电荷面密度:

在电介质内表面  $\sigma'_1 = P_n = -P_{r=R_1} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi \varepsilon_r R_1^2}$

在电介质外表面  $\sigma'_2 = P_n = P_{r=R_2} = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi \varepsilon_r R_2^2}$

**7-59.** 圆柱形电容器是由半径为  $R_1$  的导线和与它同轴的导体圆筒构成, 圆筒内半径为  $R_2$ , 长为  $l$ , 其间充满了相对电容率为  $\varepsilon_r$  的电介质(如图). 设导线沿轴线单位长度上的电荷为  $\lambda_0$ , 圆筒上单位长度的电荷为  $-\lambda_0$ , 忽略边缘效应. 求:



习题 7-59 图

(1) 电介质中的电场强度  $E$ 、电位移  $D$  和极化强度  $P$ ;

(2) 电介质表面的极化电荷面密度  $\sigma'$ .

分析: 忽略边缘效应时, 圆柱形电容器内的场强呈轴对称性分布, 可看作无限长的同轴导体系统. 利用介质内的高斯定理和  $D, E$  和  $P$  关系求解本题.

解: (1) 在电介质内部作同轴的高为  $L$  的闭合圆柱面  $S$ , 根据有电介质时的高斯定理,

$$\oint_S D \cdot dS = D 2\pi r L = \lambda_0 L$$

得

$$D = \frac{\lambda_0}{2\pi r} e_0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

因为  $D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$ , 有

$$E = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} e_0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

式中  $e_0$  是高斯面法向单位矢量. 由  $P = D - \epsilon_0 E$ , 得电介质内极化强度

$$P = D - \epsilon_0 E = \frac{(\epsilon_r - 1)\lambda_0}{2\pi\epsilon_r r} e_0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

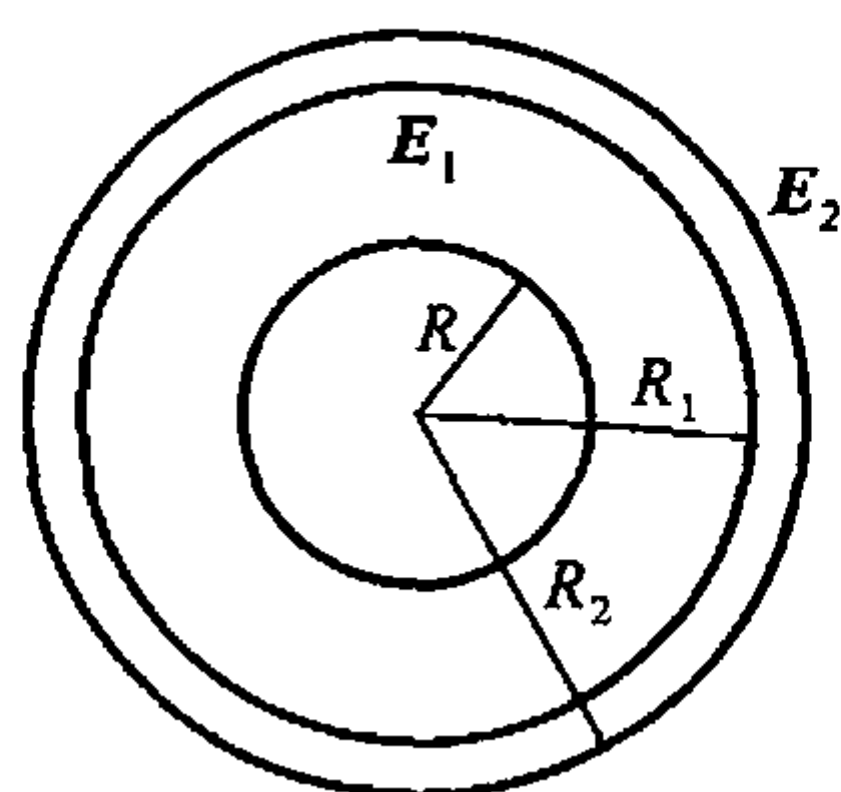
(2) 由  $\sigma' = P \cdot e_n$  得到电介质表面的极化电荷面密度

$$\text{电介质内表面}(r = R_1) \quad \sigma'_1 = P_n = -P_{r=R_1} = -\frac{\epsilon_r - 1}{2\pi\epsilon_r R_1} \lambda_0$$

$$\text{电介质外表面}(r = R_2) \quad \sigma'_2 = P_n = P_{r=R_2} = \frac{\epsilon_r - 1}{2\pi\epsilon_r R_2} \lambda_0$$

## 8. 电场能量的计算

7-60. 如图所示, 半径  $R = 2.0 \text{ cm}$  的导体球, 外套同心的导体球壳, 壳的内外半径分别为  $R_1 = 4.0 \text{ cm}$  和  $R_2 = 5.0 \text{ cm}$ , 球与壳之间是空气, 壳外也是空气, 当内球的电荷量为  $3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$  时,



习题 7-60 图

(1) 这个系统储藏了多少电能?

(2) 如果用导线把壳与球联在一起, 结果如何?

分析: 导体球带电并处于静电平衡状态时, 电场分布在导体球与球壳之间和球壳外部的整个空间, 是个具有球对称性分布的非均匀电场. 电场的能量储藏于电场空间, 利用高斯定理求得各处的场强  $E$ , 通过电能密度  $w_e$  对电场空间积分, 可求得电能. 利用电容器储能公式, 或者由电荷分布和各面的电势, 也可得到相同结果.

如果用导线把球壳与导体球联在一起, 在静电平衡状态时, 导体球所带电荷将全部分布在球壳的外表面. 球壳内 ( $r < R_2$ ) 的场强为零. 所以系统储藏的电能将减少.

解 1: 利用  $W_e = \int_V w_e dV$  求解.

(1) 当导体球所带电荷量为  $q$  时, 电场分布在导体球与球壳之间和球壳外部的整个空间, 即

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (R < r < R_1)$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r > R_2)$$

设这两部分电场的能量分别为  $W_1$  和  $W_2$ , 电场的能量密度分别为  $w_{e1}$  和  $w_{e2}$ , 有

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2, \quad w_{e2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_2^2$$

$$W_1 = \int_{V_1} w_{e1} dV = \int_R^{R_1} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$W_2 = \int_{V_2} w_{e2} dV = \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$$

系统储藏的电能为

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$$

(2) 用导线把球壳与导体球连接在一起, 在静电平衡状态时, 导体球所带电荷将全部分布在球壳的外表面. 球壳内部各处 ( $R_2 > r$ ) 的场强均为零, 球壳外表面的电荷分布及其场强  $E_2$  不变. 所以有

$$W' = W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} = 8.1 \times 10^{-5} \text{ J}$$

**解2:** 利用电容器的储能公式  $W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$  求解.

(1) 设导体球与同心的导体球壳间的电容为  $C_1$ , 导体球壳与无限远处的电容为  $C_2$ .  $C_1$  和  $C_2$  的串联构成整个系统的电容  $C$ ,

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{RR_1}{R_1 - R}, \quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2$$

串联电容为  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$ .

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = 1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$$

(2) 用导线把球壳与导体球联在一起后,  $C_1 = 0, C = C_2$ .

$$W' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} = 8.1 \times 10^{-5} \text{ J}$$

**解3:** 利用  $W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS$  求解.

(1) 根据电势的定义, 由  $E_1$  和  $E_2$  可以求得导体球表面的电势  $\varphi_1$  为

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_R^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_R^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \end{aligned}$$

导体球壳内、外表面的电势相等, 有

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

导体球表面的电荷面密度为  $\sigma_1 = q/S_1$ , 导体球壳内表面的电荷面密度为  $\sigma_2 = -q/S_2$ , 外表面的电荷面密度为  $\sigma_3 = q/S_3$ . 所以

$$W = \sum_i \frac{1}{2} \int_S \sigma_i \varphi_i dS = \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma \varphi dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} \sigma \varphi dS + \frac{1}{2} \int_{S_3} \sigma \varphi dS$$

令 
$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma_1 \varphi_1 dS = \frac{\varphi_1}{2} \int_{S_1} \sigma_1 dS = \frac{q\varphi_1}{2}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_{S_2} \sigma_2 \varphi_2 dS = \frac{\varphi_2}{2} \int_{S_2} \sigma_2 dS = -\frac{q\varphi_2}{2}$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_{S_3} \sigma_3 \varphi_3 dS = \frac{\varphi_3}{2} \int_{S_3} \sigma_3 dS = \frac{q\varphi_3}{2}$$

所以 
$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{q}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) = \frac{q\varphi_1}{2} = 1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$$

(2) 用导线把球壳与导体球连接在一起后, 导体球与球壳成为等势体, 电势为  $\varphi_3$ . 故有

$$W = W_3 = \frac{q\varphi_3}{2} = 8.1 \times 10^{-5} \text{ J}$$

**7-61.** 平行板空气电容器每极板的面积  $S = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , 极板间的距离  $d_1 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 在平行板之间有一个厚度为  $d_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 与地绝缘的平行铜板, 当电容器充电到电势差为 300 V 后与电源断开, 再把铜板从电容器中抽出. 问:

- (1) 电容器内电场强度是否变化?
- (2) 抽出铜板外界需作多少功?

**分析:** 电容器充电后与电源断开, 电容器极板上的电荷量保持不变. 忽略边缘效应的平行板电容器内部, 可近似为均匀电场. 静电平衡时, 导体板是一等势体, 其内部的场强为零.

**解:** (1) 铜板在平行板之间时, 电容器内电场强度为

$$E = \frac{U_1}{d_1 - d_2} = \frac{300 \text{ V}}{(3 - 1) \times 10^{-3} \text{ m}} = 1.5 \times 10^5 \text{ V/m}$$

铜板从平行板之间抽出后, 电容器内的电场强度为  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ , 由于极板上的电荷  $q$  保持不变, 因此场强  $E$  也保持不变.

铜板从平行板之间抽出后, 极板间的电势差为

$$U_2 = Ed_1 = \frac{U_1}{d_1 - d_2} d_1 = 450 \text{ V}$$

(2) 在抽出平行铜板的过程中, 外界所作之功转换为极板间电场能量的增量. 即

$$A = \Delta W = \frac{1}{2} q \Delta U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S d_2 = 2.99 \times 10^{-6} \text{ J}$$

**7-62.** 两个相同的空气电容器,其电容都是  $0.90 \times 10^{-9} \text{ F}$ ,都充电到电压为  $900 \text{ V}$  后断开电源,把其中之一浸入煤油( $\varepsilon_r = 2$ )中,然后把两个电容器并联,求:

- (1) 浸入煤油过程中损失的静电场能;
- (2) 并联过程中损失的静电场能.

**分析:** 电容器充电后与电源断开,电容器极板上的电荷量保持不变. 当其中之一充入电介质后,极板间的电势差将降低,电容量将增大,电场的能量将减少. 两个电容器并联后,极板上的电荷将重新分布,使并联电容器极板间的电势差一致,电场的能量也将减少.

**解:** (1) 设空气电容器的电容量为  $C$ ,极板上有电量  $Q$  时的静电能为

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$Q = C U = 0.90 \times 10^{-9} \times 900 \text{ C} = 8.1 \times 10^{-7} \text{ C}$$

充入煤油后,电容量为  $C' = \varepsilon_r C$ ,极板上有电量  $Q$  时的静电能为

$$W' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_r C}$$

充入煤油前、后,静电能的增量为

$$\Delta W = W' - W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2C} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right) = -1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$$

在充入煤油的过程中,电容器的静电能是减少的.

(2) 并联前两电容器的静电能为

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2C} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} + 1 \right) = \frac{1}{2} C U^2 \left( \frac{\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r} \right)$$

并联后的电容量为  $C'' = C + C' = (1 + \varepsilon_r) C$

极板上的总电荷量为  $Q'' = 2Q$ ,静电能为

$$W'' = \frac{1}{2} \frac{Q''^2}{C''} = \frac{2Q^2}{C(\varepsilon_r + 1)} = 2CU^2 \left( \frac{1}{\varepsilon_r + 1} \right)$$

并联前、后静电能的增量为

$$\Delta W = W'' - W = -\frac{1}{2} C U^2 \frac{(\varepsilon_r - 1)^2}{\varepsilon_r (\varepsilon_r + 1)} = -\frac{1}{12} C U^2 = -6.08 \times 10^{-5} \text{ J}$$

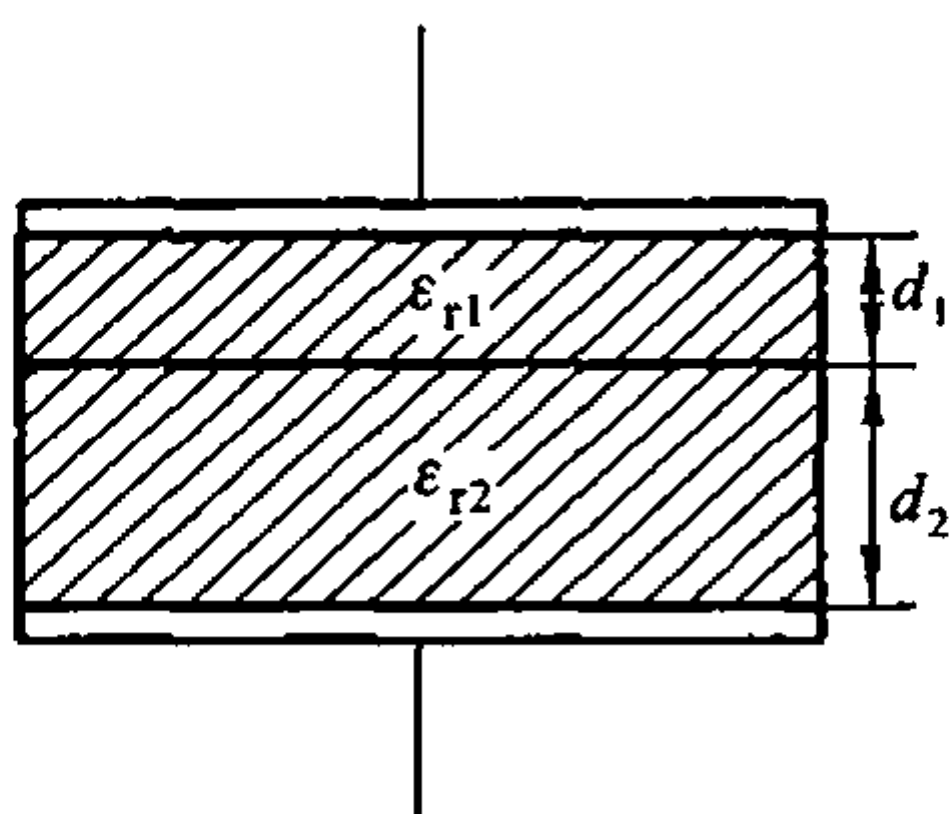
即并联过程中,损失的静电能为  $6.08 \times 10^{-5} \text{ J}$ .

**7-63.** 一平行板电容器有两层电介质,  $\varepsilon_{r1} = 4$ ,  $\varepsilon_{r2} = 2$ , 厚度为  $d_1 = 2.0 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 3.0 \text{ mm}$ , 极板面积为  $S = 40 \text{ cm}^2$ , 两极板间电压为  $200 \text{ V}$ . 计算:

(1) 每层电介质中的电场能量密度;

(2) 每层电介质中的总电能.

解: (1) 题给平板电容器内两层介质中的场强, 都可近似为均匀电场. 如解图 7-63 所示, 设两层介质中的电位移矢量和电场强度分别为  $D_1$ 、 $E_1$  和  $D_2$ 、 $E_2$ . 根据有介质的高斯定理可知, 电位移  $D$  在两层电介质中相等,  $D_1 = D_2$ , 即有



解图 7-63

$$\epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_{r2} E_2$$

两极板间的电势差为  $U = E_1 d_1 + E_2 d_2$

所以

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} d_2} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_1 = 5.0 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$$D_1 = D_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1 = 8.85 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

两层电介质中, 电场的能量密度分别为

$$w_1 = \frac{1}{2} D_1 E_1 = 1.11 \times 10^{-2} \text{ J/m}^3$$

$$w_2 = \frac{1}{2} D_2 E_2 = 2.21 \times 10^{-2} \text{ J/m}^3$$

(2) 两层电介质中的总能量分别为

$$W_1 = w_1 V_1 = w_1 d_1 S = 8.88 \times 10^{-8} \text{ J}$$

$$W_2 = w_2 V_2 = w_2 d_2 S = 2.66 \times 10^{-7} \text{ J}$$

显然, 这个电容器所储存的总电场能为

$$W = W_1 + W_2 = 8.88 \times 10^{-8} \text{ J} + 2.66 \times 10^{-7} \text{ J} = 3.55 \times 10^{-7} \text{ J}$$

利用  $W = \frac{1}{2} C U^2$ , 可以进一步求得这个电容器的电容量  $C$ .

7-64. 电容  $C_1 = 4 \mu\text{F}$  的电容器在 800 V 的电势差下充电, 然后切断电源,

并将此电容器的两个极板分别和原来不带电、电容为  $C_2 = 6 \mu\text{F}$  的电容器两极板相连,求:

- (1) 每个电容器极板所带电荷量;
- (2) 连接前后的静电场能.

分析: 电容器充电后再与电源断开,极板上的电荷量将保持不变. 将充电电容器与不带电的电容器并联后,极板上的电荷将分布在相连接的两个极板上,并成为等势体. 所以,静电平衡状态下,两个不同电容量的电容器极板上分布的电荷不相等. 并联的过程也是对不带电电容器的充电做功的过程,并联后电容器系统的静电能将减少.

解:  $C_1$  充电后极板上的电荷量为

$$Q = C_1 U_0 = 4 \times 10^{-6} \times 800 \text{ C} = 3.2 \times 10^{-3} \text{ C}$$

并联电容器的电容量为  $C = C_1 + C_2 = 10 \times 10^{-6} \text{ F}$

并联电容器两极板间的电势差为

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1 + C_2} = 320 \text{ V}$$

- (1) 并联后两电容器极板上分布的电量分别为

$$Q_1 = C_1 U = 1.28 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 U = 1.92 \times 10^{-3} \text{ C}$$

- (2) 并联前  $C_1$  的静电场能为

$$W_0 = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-6} \times 800^2 \text{ J} = 1.28 \text{ J}$$

并联电容器的静电场能为

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-6} \times 320^2 \text{ J} = 0.512 \text{ J}$$

7-65. 两个同轴的圆柱,长度都是  $l$ ,半径分别为  $R_1$  及  $R_2$ ,这两个圆柱带有等值异号电荷  $Q$ ,两圆柱之间充满电容率为  $\epsilon$  的电介质.

- (1) 在半径为  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) 厚度为  $dr$  的圆柱壳中任一点的电场能量密度是多少?

- (2) 这柱壳中的总电场能是多少?

- (3) 电介质中的总电场能是多少?

- (4) 从电介质中的总电场能求圆柱形电容器的电容.

分析: 在  $(R_2 - R_1) \ll l$  的情况下,同轴的圆柱体可近似为无限长,两圆柱间的场强呈现轴对称分布. 利用有电介质的高斯定理求出场强后即可求得电场能量密度. 由于轴对称分布的场强不是均匀电场,因此须由能量密度对两圆柱

间的场强空间积分求得电场能量. 此能量也即电容器储存的电能.

解: (1) 设圆柱上单位长度的带电量为  $\lambda$ ,  $\lambda = \frac{Q}{l}$ . 在介质中离轴  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) 处, 作半径为  $r$  的同轴圆柱形高斯面. 利用有电介质时的高斯定理, 求得该处的电位移为

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

电场强度为

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

在  $r$  处单位体积中电场的能量, 即厚度为  $dr$  的圆柱壳中任一点的电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon r^2} = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon l^2 r^2}$$

(2) 取厚度为  $dr$  的圆柱壳体积元  $dV = 2\pi r l dr$ , 在这柱壳中电场能量为

$$dW = w_e dV = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon l^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l r} dr$$

(3) 电介质中的总电场能为

$$W = \int dW = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l r} dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(4) 由  $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$  可得同轴圆柱形电容器的电容量为

$$C = \frac{Q^2}{2W} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

单位长度的电容量为  $C_l = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$

\*7-66. 试编写一计算机程序, 画出例题 7-1 的三电荷系统  $Ox$  轴线上的电势分布, 并与图 7-3 比较, 指出电势最大的位置对应于图 7-3 曲线的哪一点, 为什么?

答案: 电场力为零处的电势梯度 (即电场强度) 等于零.

参考程序

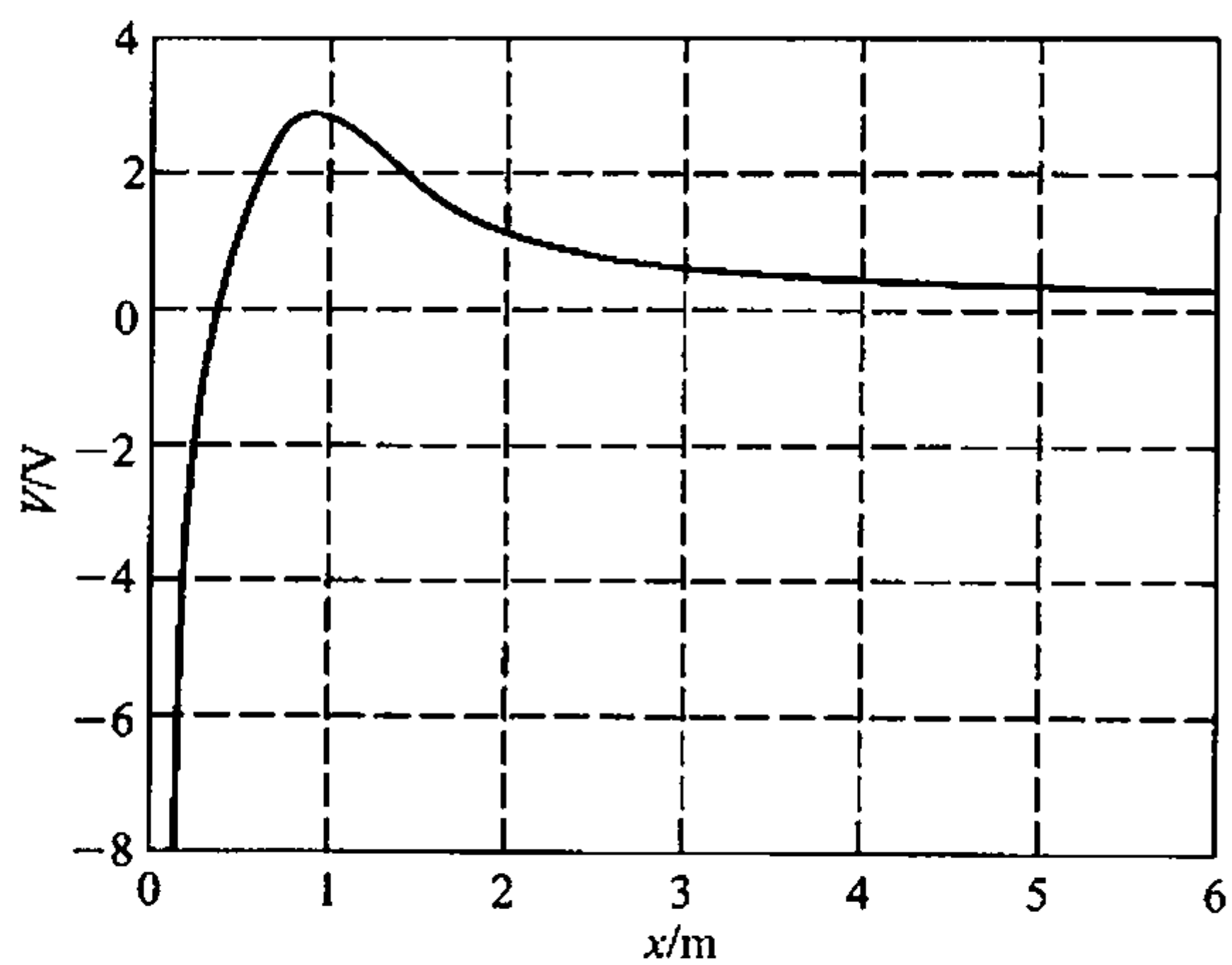
```
% 三电荷电势分布
clear
x = [0.1:0.1:6];
```

```

U = 2. / sqrt(0.25 + (x - 0.5 * sqrt(3)).^2) - 1. / x
plot(x,U,'b',[0,6],[0,0],'k')
xlabel('x/m');ylabel('U/V')

```

运算结果如解图 7-66 所示。



解图 7-66

# 第八章

## 恒定电流的磁场

### 一、教学基本要求

1. 理解恒定电流、电流密度和电动势概念. 理解一段含源电路的欧姆定律.
2. 掌握磁感应强度的概念, 掌握利用叠加原理分析、求解磁感应强度的基本方法.
3. 理解毕奥 - 萨伐尔定律. 掌握用恒定电流磁场的安培环路定理求磁感应强度的条件和方法.
4. 理解安培定律和洛伦兹力. 会分析磁场对载流导线和线圈的作用, 带电粒子在电磁场中所受作用及其运动.
5. 了解磁场力的功.
6. 理解有磁介质时的安培环路定理, 了解物质的磁性、磁化现象.

### 二、本章习题分类

1. 电流、电路的基本问题
2. 磁通量的计算
3. 磁感应强度的计算
4. 安培环路定理的应用
5. 洛伦兹力的应用
6. 安培力、磁矩和磁场力的功的计算
7. 有磁介质时的磁场和磁化强度的计算

### 三、习题分析和解答

1. 电流、电路的基本问题

8-1. 已知导线中的电流按  $I = t^2 - 0.5t + 6$  的规律随时间  $t$  变化, 式中电流和时间的单位分别为 A 和 s. 计算在  $t = 1$  s 到  $t = 3$  s 的时间内通过导线截面的

电荷量.

分析: 根据电流的定义式, 一段时间内通过导线截面的电量可由电流对时间的积分求得.

解: 由电流定义式  $I = \frac{dq}{dt}$

可得到  $dt$  时间内通过导线截面的电荷量为

$$dq = Idt = (t^2 - 0.5t + 6) dt$$

从  $t = 1 \text{ s}$  到  $t = 3 \text{ s}$  的时间内通过导线截面的电荷量为

$$q = \int_1^3 (t^2 - 0.5t + 6) dt = 18.7 \text{ C}$$

8-2. 在一个特制的阴极射线管中, 测得其射线电流为  $60 \mu\text{A}$ , 求每  $10 \text{ s}$  有多少个电子打击在管子的荧屏上.

解: 根据电流的定义式, 有  $I = \frac{dq}{dt} = e \frac{dN}{dt}$

式中  $e$  是电子电量,  $dN$  是  $dt$  时间内打击在管子荧屏上的电子数,

$$dN = \frac{1}{e} Idt$$

$10 \text{ s}$  内打击在管子荧屏上的电子数为

$$\Delta N = \int dN = \frac{I}{e} \int_0^{10} dt = \frac{I}{e} t \Big|_0^{10} = \frac{60 \times 10^{-6} \times 10}{1.60 \times 10^{-19}} = 3.75 \times 10^{15} \text{ 个}$$

8-3. 一铜棒的横截面积为  $20 \times 80 \text{ mm}^2$ , 长为  $2.0 \text{ m}$ , 两端的电势差为  $50 \text{ mV}$ . 已知铜的电导率  $\gamma = 5.7 \times 10^7 \text{ S/m}$ . 求:

- (1) 它的电阻;
- (2) 电流;
- (3) 电流密度;
- (4) 棒内的电场强度.

解: (1) 铜棒的电阻为

$$R = \frac{l}{\gamma S} = \frac{2.0}{5.7 \times 10^7 \times 20 \times 80 \times 10^{-6}} \Omega = 2.2 \times 10^{-5} \Omega$$

(2) 根据欧姆定律, 有

$$I = \frac{U}{R} = \frac{50 \times 10^{-3} \text{ V}}{2.2 \times 10^{-5} \Omega} = 2.3 \times 10^3 \text{ A}$$

(3) 铜棒内, 电流密度的大小为

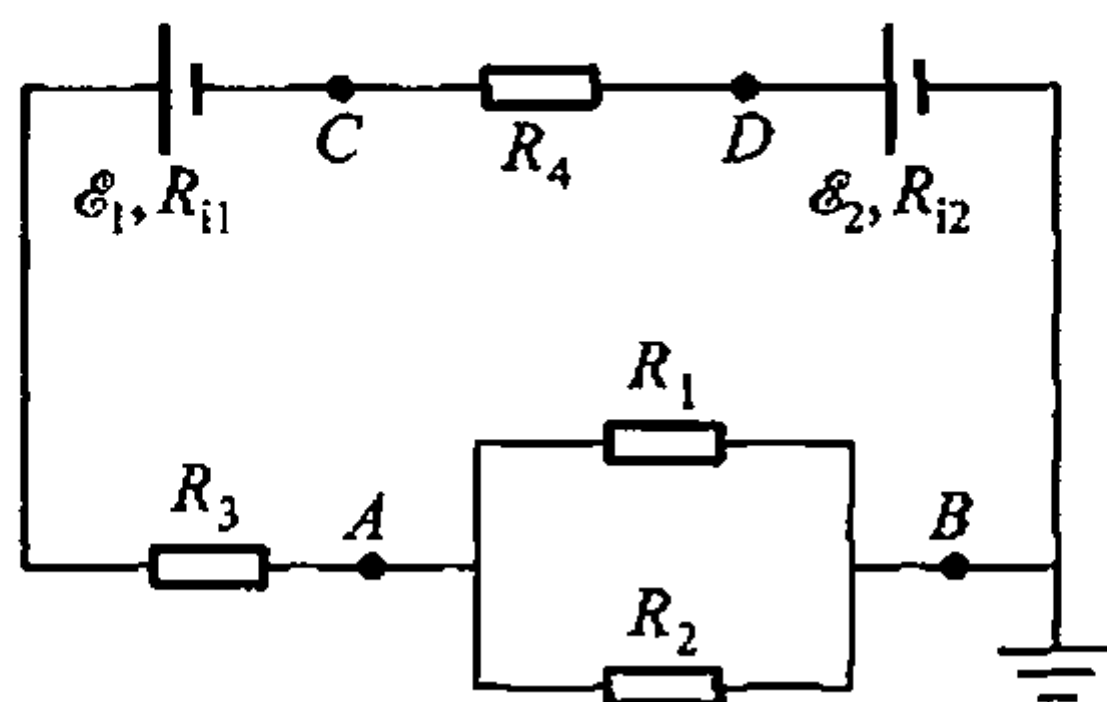
$$\delta = \frac{I}{S} = \frac{2.3 \times 10^3 \text{ A}}{20 \times 80 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1.4 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

(4) 铜棒内, 电场强度的大小为

$$E = \frac{U}{l} = \frac{50 \times 10^{-3} \text{ V}}{2.0 \text{ m}} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V/m}$$

8-4. 一电路如图所示, 其中  $B$  点接地,  $R_1 = 10.0 \Omega$ ,  $R_2 = 2.5 \Omega$ ,  $R_3 = 3.0 \Omega$ ,  $R_4 = 1.0 \Omega$ ,  $\mathcal{E}_1 = 6.0 \text{ V}$ ,  $R_{i1} = 0.40 \Omega$ ,  $\mathcal{E}_2 = 8.0 \text{ V}$ ,  $R_{i2} = 0.6 \Omega$ . 求:

- (1) 通过每个电阻中的电流;
- (2) 每个电池的端电压;
- (3)  $A$ 、 $D$  两点间的电势差;
- (4)  $B$ 、 $C$  两点间的电势差;
- (5)  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  各点处的电势.



习题 8-4 图

分析: 利用一段含源电路和闭合电路的欧姆定律求解本题. 注意根据取定的电路绕行方向确定电路中各点电势的高低变化.

解: 设  $R_1$  和  $R_2$  并联的等效电阻为  $R$ , 则题给电路可等效为单回路电路, 其中的电流处处相等, 设为  $I$ , 有

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \times 2.5}{10 + 2.5} \Omega = 2.0 \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_3 + R_4 + R_{i1} + R_{i2} + R} = 2.0 \text{ A}$$

(1) 通过  $R_3$  和  $R_4$  的电流为  $I_3 = I_4 = I = 2.0 \text{ A}$

由并联电阻  $R_1$  和  $R_2$  的分流关系, 有

$$I = I_1 + I_2$$

和

$$U_{AB} = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

可得, 通过  $R_1$  中的电流为  $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = 0.4 \text{ A}$

通过  $R_2$  中的电流为  $I_2 = I - I_1 = 1.6 \text{ A}$

(2) 电池 1 的端电压为  $U_1 = \mathcal{E}_1 - IR_{i1} = 5.2 \text{ V}$

电池 2 的端电压为  $U_2 = \mathcal{E}_2 - IR_{i2} = 6.8 \text{ V}$

(3) 取逆时针为回路的绕行方向, 相对电势零点, 写出  $A$ 、 $D$  间各点的电势高低变化, 有

$$V_D - IR_4 - IR_{i1} + \mathcal{E}_1 - IR_3 = V_A$$

所以,  $A$ 、 $D$  间的电势差为

$$U_{AD} = V_A - V_D = \mathcal{E}_1 - I(R_{i1} + R_3 + R_4) = -2.8 \text{ V}$$

(4) 仍取逆时针为回路的绕行方向,  $B$ 、 $C$  间各点的电势变化为

$$V_B - IR_{12} + \mathcal{E}_2 - IR_4 = V_C$$

所以,  $B$ 、 $C$  间的电势差为

$$U_{BC} = V_B - V_C = -\mathcal{E}_2 + I(R_{12} + R_4) = -4.8 \text{ V}$$

(5) 由于  $B$  点接地,  $V_B = 0$ . 各点的电势为

$$V_A = V_A - V_B = IR = 4.0 \text{ V}$$

$$V_C = U_{CB} = -U_{BC} = 4.8 \text{ V}$$

$$V_D = V_D - V_B = \mathcal{E}_2 - IR_{12} = 6.8 \text{ V}$$

## 2. 磁通量的计算

**8-5.** 在地球北半球的某区域, 磁感应强度的大小为  $4 \times 10^{-5} \text{ T}$ , 方向与铅直线成  $60^\circ$  角. 求:

(1) 穿过面积为  $1 \text{ m}^2$  的水平平面的磁通量;

(2) 穿过面积为  $1 \text{ m}^2$  的竖直平面的磁通量的最大值和最小值.

**分析:** 地球磁场整体是个非均匀场, 但相对  $1 \text{ m}^2$  的小区域来说, 可认为是均匀磁场.

**解:** (1) 取水平平面  $S_1$  的法线方向向上为正, 则该面积的法线方向与磁感应强度的夹角为  $60^\circ$ . 穿过的磁通量为

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_1 = BS_1 \cos 60^\circ = 2 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

(2) 取竖直平面  $S_2$  的法线方向向南为正时, 该面积的法线方向与磁感应强度的夹角为  $30^\circ$ . 穿过的磁通量最大, 为

$$\Phi_{\max} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_2 = BS_2 \cos 30^\circ = 3.46 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

取竖直平面  $S_3$  的法线方向向北为正时, 该面积的法线方向与磁感应强度的夹角为  $150^\circ$ . 穿过的磁通量最小, 为

$$\Phi_{\min} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_3 = BS_3 \cos 150^\circ = -3.46 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

**8-6.** 设一均匀磁场沿  $Ox$  轴正方向, 其磁感应强度值  $B = 1 \text{ Wb/m}^2$ . 求在下列情况下, 穿过面积为  $2 \text{ m}^2$  的平面的磁通量.

(1) 平面和  $yz$  面平行;

(2) 平面与  $xz$  面平行;

(3) 平面与  $Oy$  轴平行又与  $Ox$  轴成  $45^\circ$  角.

**解:** (1) 取  $yz$  面法线方向沿  $Ox$  轴正方向, 穿过该面积的磁通量为

$$\Phi_{yz} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos 0^\circ = 2 \text{ Wb}$$

(2)  $xz$  面法线方向垂直于  $\mathbf{B}$ , 故穿过该面积的磁通量为零. 即

$$\Phi_{xz} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos 90^\circ = 0$$

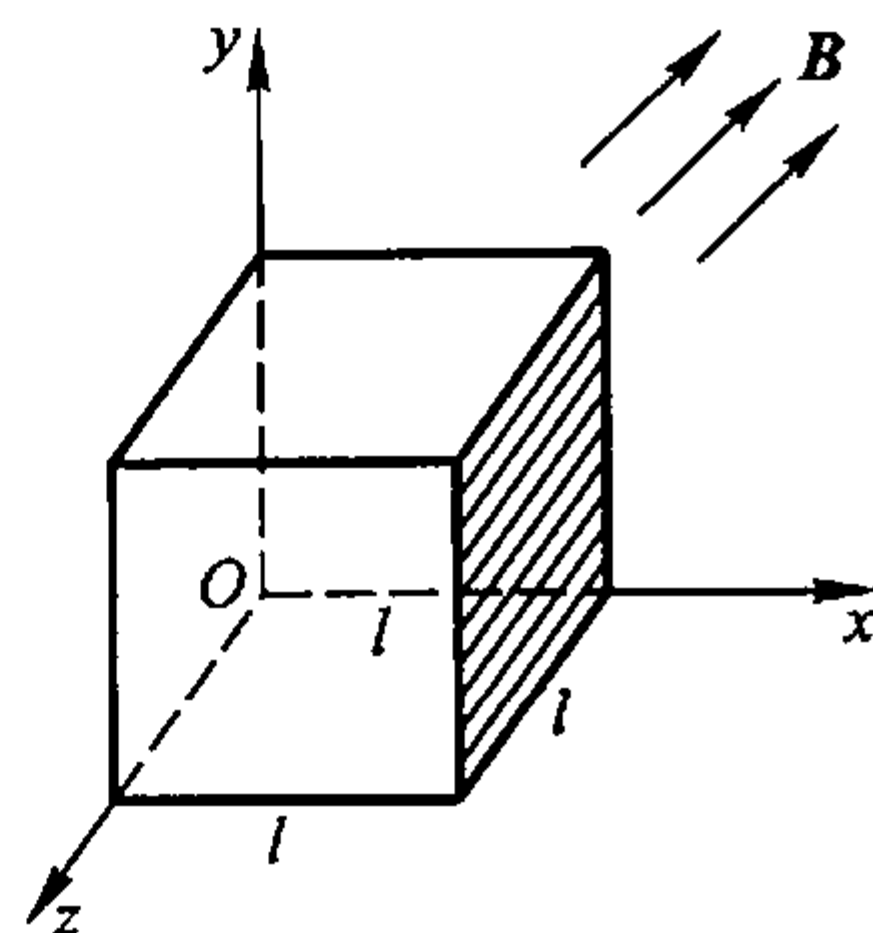
(3) 取面法线的正方向与  $Ox$  轴正方向的夹角为  $45^\circ$ . 通过该平面的磁通量为

$$\Phi_y = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos 45^\circ = 1.41 \text{ Wb}$$

8-7. 一边长为  $l=0.15 \text{ m}$  的立方体如图放置, 有一均匀磁场  $\mathbf{B} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}) \text{ T}$  通过立方体所在区域, 计算:

- (1) 通过立方体上阴影面积的磁通量;
- (2) 通过立方体六面的总磁通量.

分析: 磁感应线是闭合线, 通过任一闭合曲面的磁通量为零. 对于闭合曲面, 通常取其外表面的法线方向为正, 故阴影面的法线方向沿  $Ox$  轴正向.



习题 8-7 图

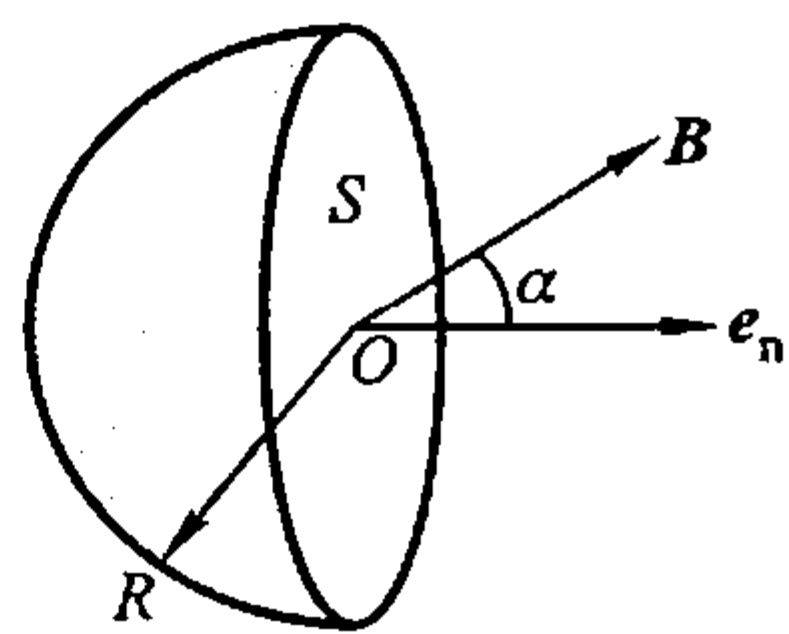
解: (1) 通过立方体上阴影面积的磁通量为

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}) \cdot (0.15)^2 \mathbf{i} \text{ Wb} = 0.135 \text{ Wb}$$

(2) 立方体的六个面构成闭合曲面, 由磁场的高斯定理可知, 通过立方体的总磁通量为零. 即  $\Phi = 0$ .

8-8. 在磁感应强度为  $\mathbf{B}$  的均匀磁场中, 有一半径为  $R$  的半球面,  $\mathbf{B}$  与半球面轴线的夹角为  $\alpha$ . 求通过该半球面的磁通量.

分析: 半球面非闭合, 若取凸面为半球面的正方向时, 磁场线  $\mathbf{B}$  穿进该面, 通过半球面的磁通量  $\Phi < 0$ ; 若取凹面为半球面的正方向, 则磁场线  $\mathbf{B}$  从该面穿出,  $\Phi > 0$ .



习题 8-8 图

解: 取凹面为半球面的正方向. 将  $\mathbf{B}$  分解为与半球面轴线平行的分量  $B_{//}$  和相垂直的分量  $B_{\perp}$ , 即

$$\mathbf{B} = B_{//} + B_{\perp}$$

通过半球面的磁通量为

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = (B_{//} + B_{\perp}) \cdot \mathbf{S} = B_{//} \cdot \mathbf{S} + B_{\perp} \cdot \mathbf{S}$$

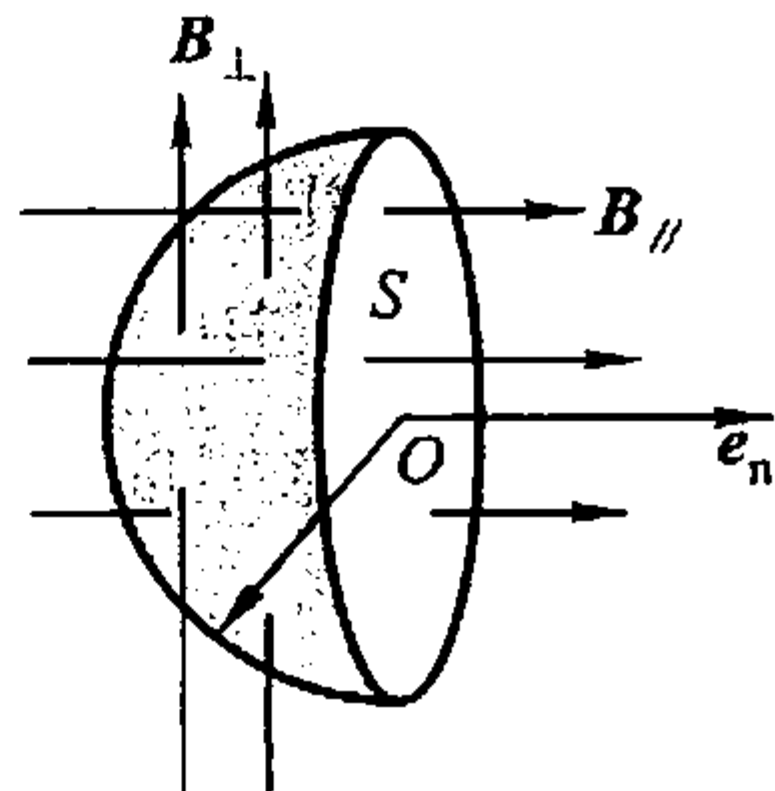
式中  $B_{//} = B \cos \alpha \mathbf{e}_n$ ,  $B_{\perp} = B \sin \alpha \mathbf{e}_{\perp}$ ,  $\mathbf{e}_{\perp}$  是垂直于  $\mathbf{e}_n$  的单位矢量. 如解图 8-8 所示, 显然有

$$B_{\perp} \cdot \mathbf{S} = 0$$

所以  $\Phi = B_{//} \cdot \mathbf{S} = B \cos \alpha \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{S}$

式中  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_n = \pi R^2$ , 就是半球面在其轴线上的投影面积.

所以  $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \pi R^2 \cos \alpha$

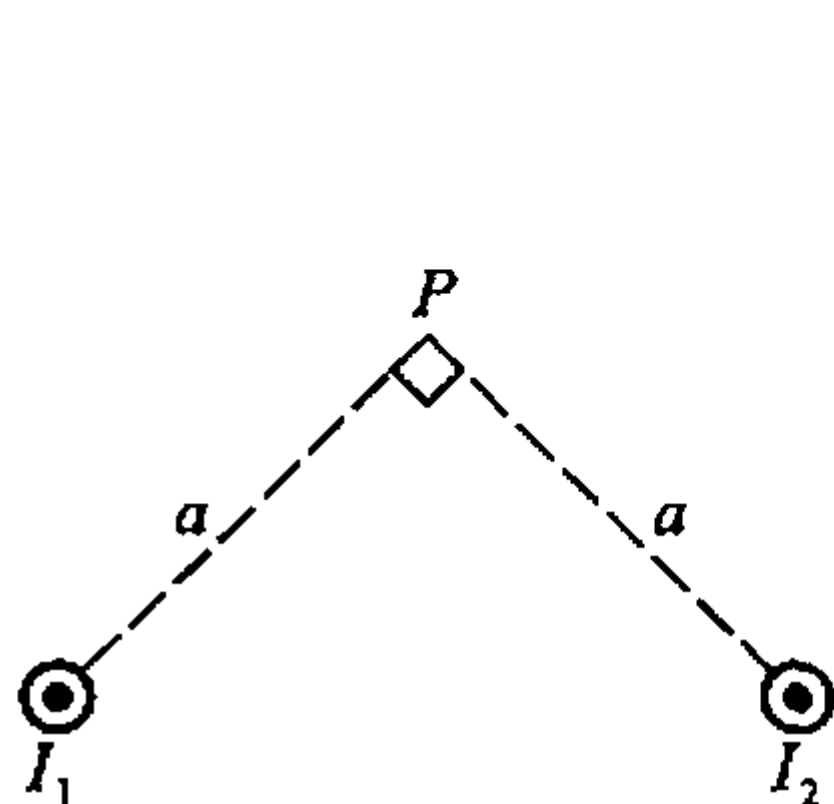


解图 8-8

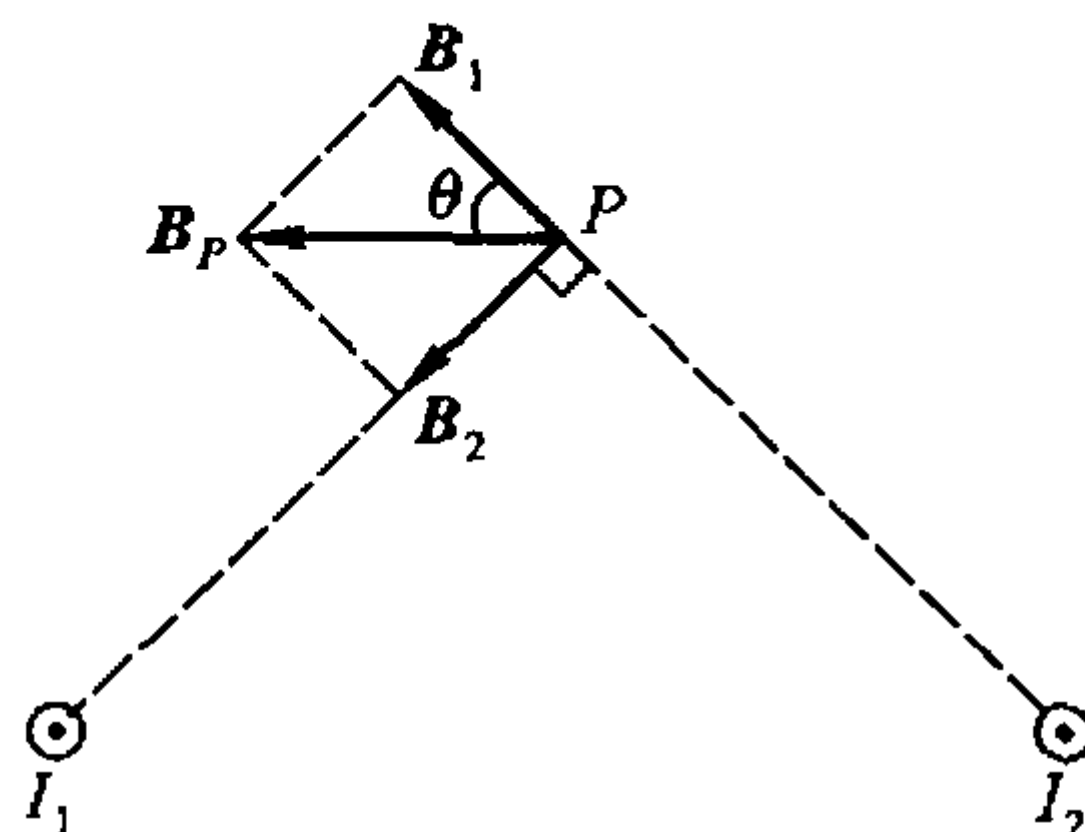
### 3. 磁感应强度的计算

**8-9.** 两根长直导线互相平行地放置在真空中, 如图所示, 其中通以同向的电流  $I_1 = I_2 = 10 \text{ A}$ . 试求  $P$  点的磁感应强度. 已知  $P$  点到两导线的垂直距离均为  $0.5 \text{ m}$ .

**分析:** 根据磁感应强度的叠加原理,  $P$  点的磁感应强度  $B_P$  为各电流在  $P$  点的磁感应强度的矢量和.



习题 8-9 图



解图 8-9

**解:** 设  $I_1, I_2$  到  $P$  点的垂直距离为  $a$ . 据题意, 无限长的直电流  $I_1 = I_2 = I$ , 在  $P$  点的磁感应强度大小相等, 为

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

$B_1$  和  $B_2$  的方向由右手螺旋法则确定, 如解图 8-9 所示. 总磁感应强度  $B_P$  的大小为

$$B_P = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{2} B_1 = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2\pi a} = 5.66 \times 10^{-6} \text{ T}$$

方向如解图 8-9 所示, 与  $B_1$  的夹角  $\theta$  为

$$\theta = \arctan \frac{B_2}{B_1} = 45^\circ$$

**8-10.** 如图所示的被折成钝角的长导线中通有  $20 \text{ A}$  的电流. 求  $A$  点的磁感应强度. 设  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 120^\circ$ .

**分析:** 根据磁感应强度的叠加原理,  $A$  点的磁感应强度为  $PO$  和  $OQ$  两直电流各自在  $A$  点的磁感应强度的矢量和. 运用一段直电流磁感应强度的结论解题.

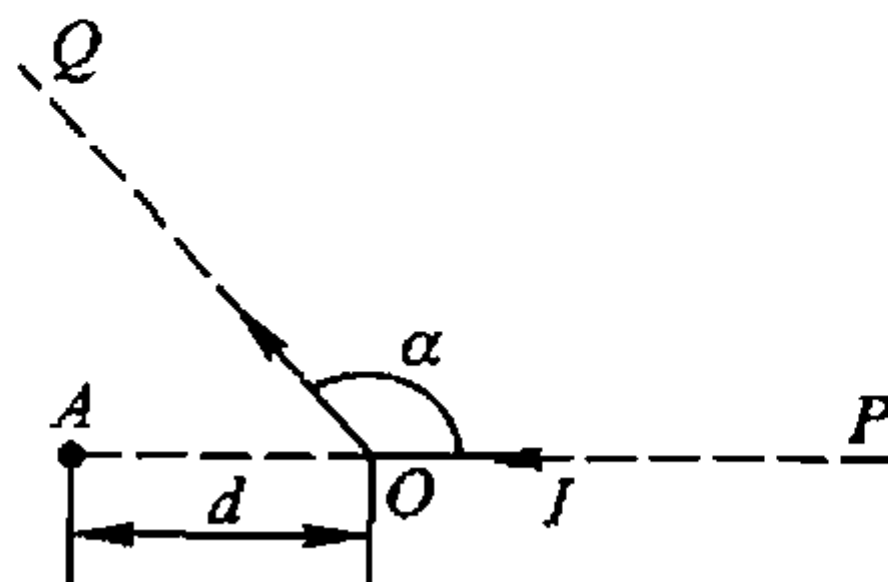
**解:** 由叠加原理可知  $B_A = B_{PO} + B_{OQ}$

由于  $A$  点位于  $PO$  段延长线上, 故  $B_{PO} = 0$ .

所以

$$B_A = B_{OQ}$$

$B_A$  的方向垂直纸面向外. 由一段直电流磁感应强度的结论可知



习题 8-10 图

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$

式中  $r$  是  $A$  点到直电流  $OQ$  的垂直距离,  $r = d \sin(\pi - \alpha) = 1.73 \text{ cm}$ , 直电流  $OQ$  对  $A$  的起始角  $\beta_1 = -\frac{\pi}{6}$ , 终止角  $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$ . 所以, 有

$$\begin{aligned} B_A = B_{OQ} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20}{4\pi \times 1.73 \times 10^{-2}} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \text{ T} = 1.73 \times 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

**8-11.** 高为  $h$  的等边三角形的回路载有电流  $I$ , 试求该三角形的中心处的磁感应强度.

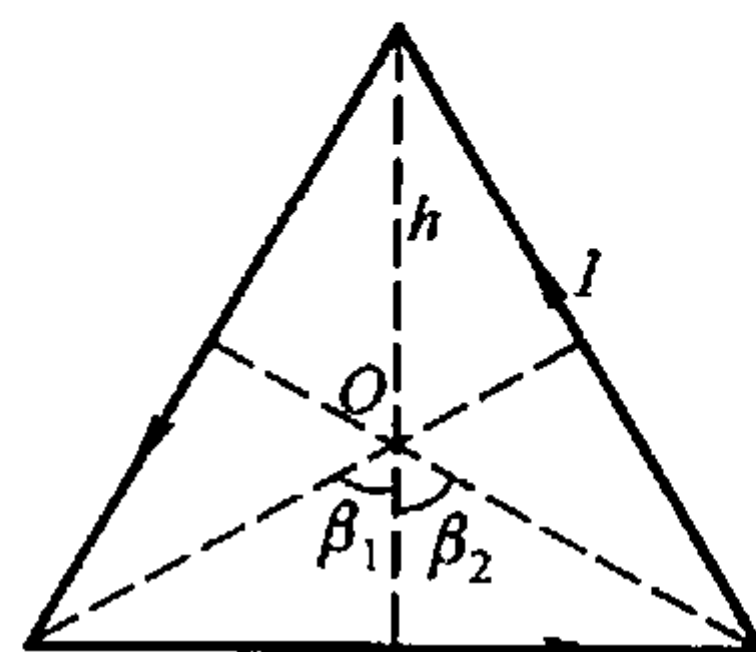
**分析:** 根据磁感应强度的叠加原理, 等边三角形的中心处  $O$  的磁感应强度为三段相同直电流的磁感应强度的矢量和. 由于三段直电流对  $O$  点对称分布, 所以各段直电流在  $O$  点的磁感应强度的大小相同, 并且, 方向也是相同的.

**解:** 如解图 8-11 所示,  $O$  点的磁感应强度  $B_0$  的大小为

$$B_0 = 3B_1$$

其方向为垂直纸面向外,  $B_1$  是一段直电流在  $O$  点的磁感应强度, 大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$



解图 8-11

由等边三角形的几何关系可知,  $\beta_1 = -\frac{\pi}{3}$ ,  $\beta_2 = \frac{\pi}{3}$ ,  $r = \frac{h}{3}$ . 所以, 有

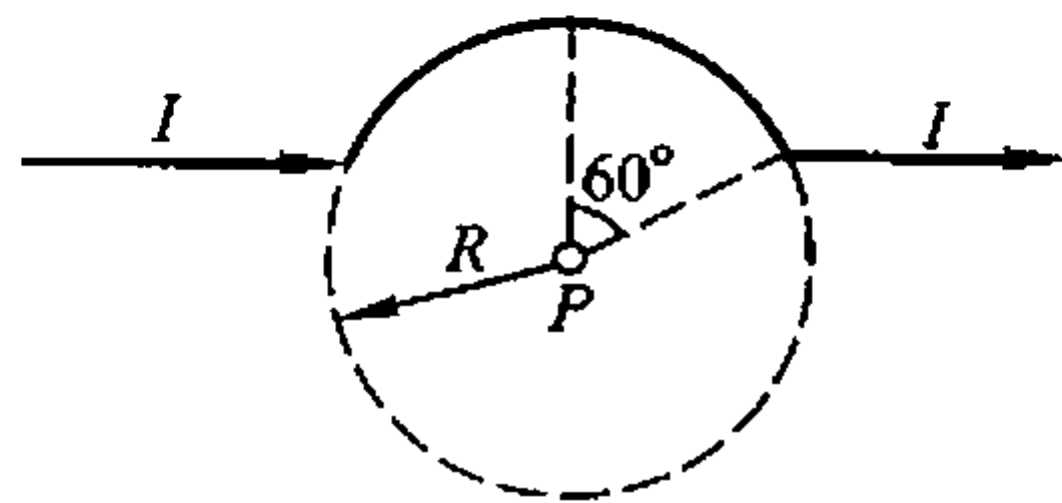
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) = \frac{3\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi h}$$

$O$  点的总磁感应强度大小为

$$B = 3B_1 = \frac{9\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi h}$$

**8-12.** 如图所示, 一根无限长直导线, 通有电流  $I$ , 中部一段弯成圆弧形, 求图中  $P$  点的磁感应强度的大小.

**分析:** 根据磁感应强度的叠加原理,  $P$  点的磁感应强度是两段直电流和一段圆弧形电流的磁感应强度的矢量和.



习题 8-12 图

解：三段电流与  $P$  点在同一平面内，根据电流的方向，由右手螺旋法则可知，它们在  $P$  点的磁感应强度方向相同，都垂直纸面向里。

由于  $P$  点相对整个电流对称，设一段直电流在  $P$  点的磁感应强度大小为  $B_1$ ，半个圆弧段电流在  $P$  点的磁感应强度大小为  $B_2$ ，有

$$B_P = 2B_1 + 2B_2$$

其中

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$

对左侧直电流，有  $r = R \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$ ， $\beta_1 = -90^\circ$ ， $\beta_2 = -60^\circ$

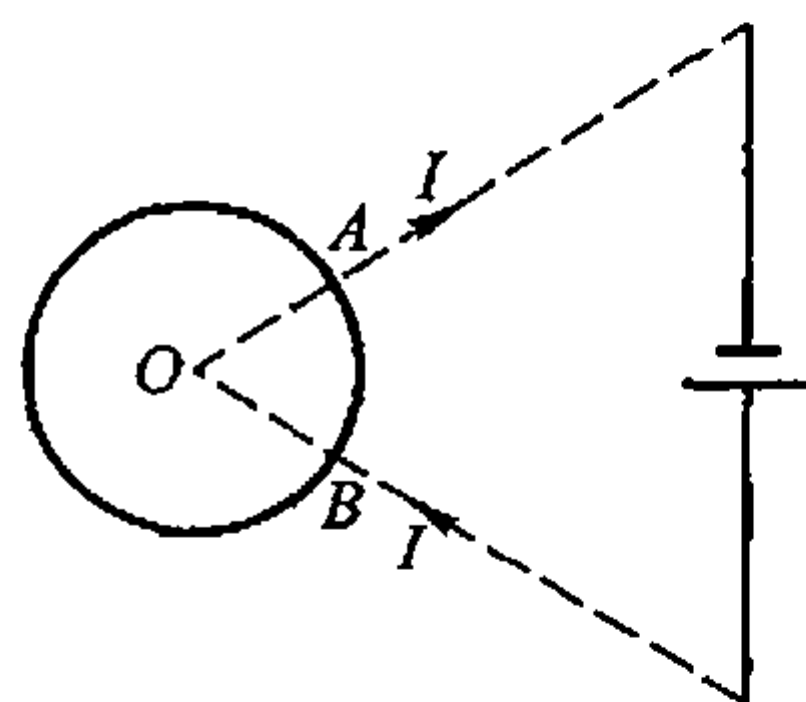
故有  $B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (2 - \sqrt{3})$

半个圆弧段电流在  $P$  点的磁感应强度是整个圆环电流在圆心处磁感应强度的  $1/6$ ，故有

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} \times \frac{1}{6} = \frac{\mu_0 I}{12R}$$

所以， $B_P = 2B_1 + 2B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (2 - \sqrt{3}) + \frac{\mu_0 I}{6R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$

**8-13.** 两根长直导线沿半径方向引到铁环上  $A$ 、 $B$  两点，并与很远的电源相连，如图所示。求环中心的磁感应强度。



习题 8-13 图

分析：长直电流沿环的径向流至  $B$  点后分流，沿环反向流动并汇聚于  $A$  点，然后再沿环的径向流向远处。所以，环心  $O$  的  $B$  应为四段电流的磁感应强度的矢量和。

由于两长直电流在其延长线上  $O$  的磁感应强度为零，故  $B_0$  仅由两段圆弧电流产生。但需考虑这两段圆弧电流的流向相反，大小也是不同的。

解：两段圆弧电流在  $O$  的磁感应强度方向相反，大小分别设为  $B_1$  和  $B_2$ 。设圆弧长度分别为  $l_1$  和  $l_2$ ，导线截面为  $S$ ，电阻率为  $\rho$ ，则两段圆弧导线的电阻分别为

$$R_1 = \rho l_1 / S, \quad R_2 = \rho l_2 / S$$

由

$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$

可得

$$I_1 l_1 = I_2 l_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} l_1 \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 l_1}{r^2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} l_2 \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 l_2}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 l_1}{r^2}$$

所以, 圆心处  $O$  处磁感应强度的大小为

$$B_0 = B_1 - B_2 = 0$$

**8-14.** 一密绕的圆形线圈, 直径是  $0.4 \text{ m}$ , 线圈中通有  $2.5 \text{ A}$  电流时, 在线圈中心处的  $B = 1.26 \times 10^{-4} \text{ T}$ . 问线圈有多少匝?

**分析:** 由于每匝线圈在圆心处磁感应强度的大小和方向都相同, 因此  $N$  匝密绕圆线圈在圆心处磁感应强度为单匝线圈的  $N$  倍.

**解:**  $N$  匝密绕线圈中心的磁感应强度为  $B = \frac{N\mu_0 I}{2R}$

所以, 线圈的匝数为  $N = \frac{2RB}{\mu_0 I} = 16$  匝

**8-15.**  $A$  和  $B$  为两个正交放置的圆形线圈, 其圆心相重合.  $A$  线圈半径  $R_A = 0.2 \text{ m}$ ,  $N_A = 10$  匝, 通有电流  $I_A = 10 \text{ A}$ .  $B$  线圈半径为  $R_B = 0.1 \text{ m}$ ,  $N_B = 20$  匝, 通有电流  $I_B = 5 \text{ A}$ . 求两线圈公共中心处的磁感应强度.

**分析:** 两线圈公共中心处的磁感应强度为各线圈在圆心的磁感应强度的矢量和.

**解:** 取坐标系  $Oxyz$ , 设  $A$  线圈在  $xOz$  平面内,  $B$  线圈在  $yOz$  平面内, 电流  $I_A$  和  $I_B$  的方向如解图 8-15 所示. 两线圈在圆心  $O$  处磁感应强度分别为

$$B_A = \frac{N_A \mu_0 I_A}{2R_A} \mathbf{j} = 3.14 \times 10^{-4} \mathbf{j} \text{ T}$$

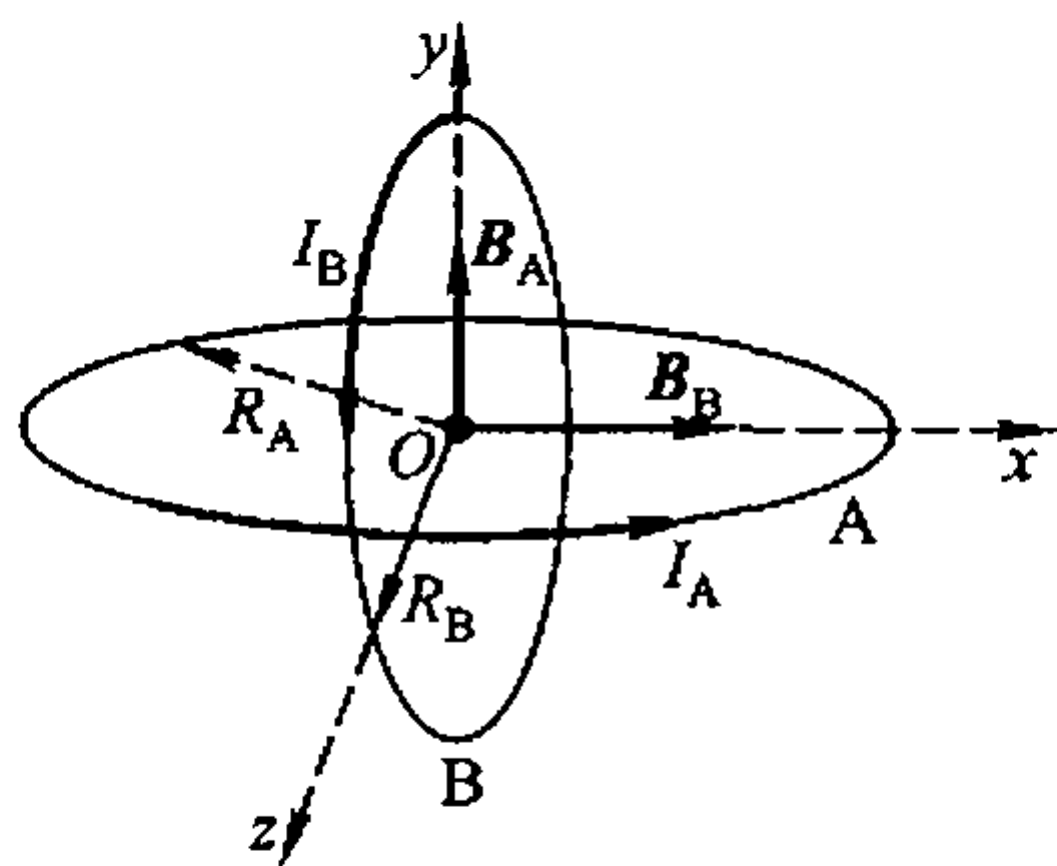
$$B_B = \frac{N_B \mu_0 I_B}{2R_B} \mathbf{i} = 6.28 \times 10^{-4} \mathbf{i} \text{ T}$$

由于  $B_A$  与  $B_B$  相垂直. 所以, 圆心  $O$  处  $B$  的大小为

$$B = \sqrt{B_A^2 + B_B^2} = 7.0 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$B$  与  $x$  轴正方向的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{B_A}{B_B} = 26.56^\circ$$

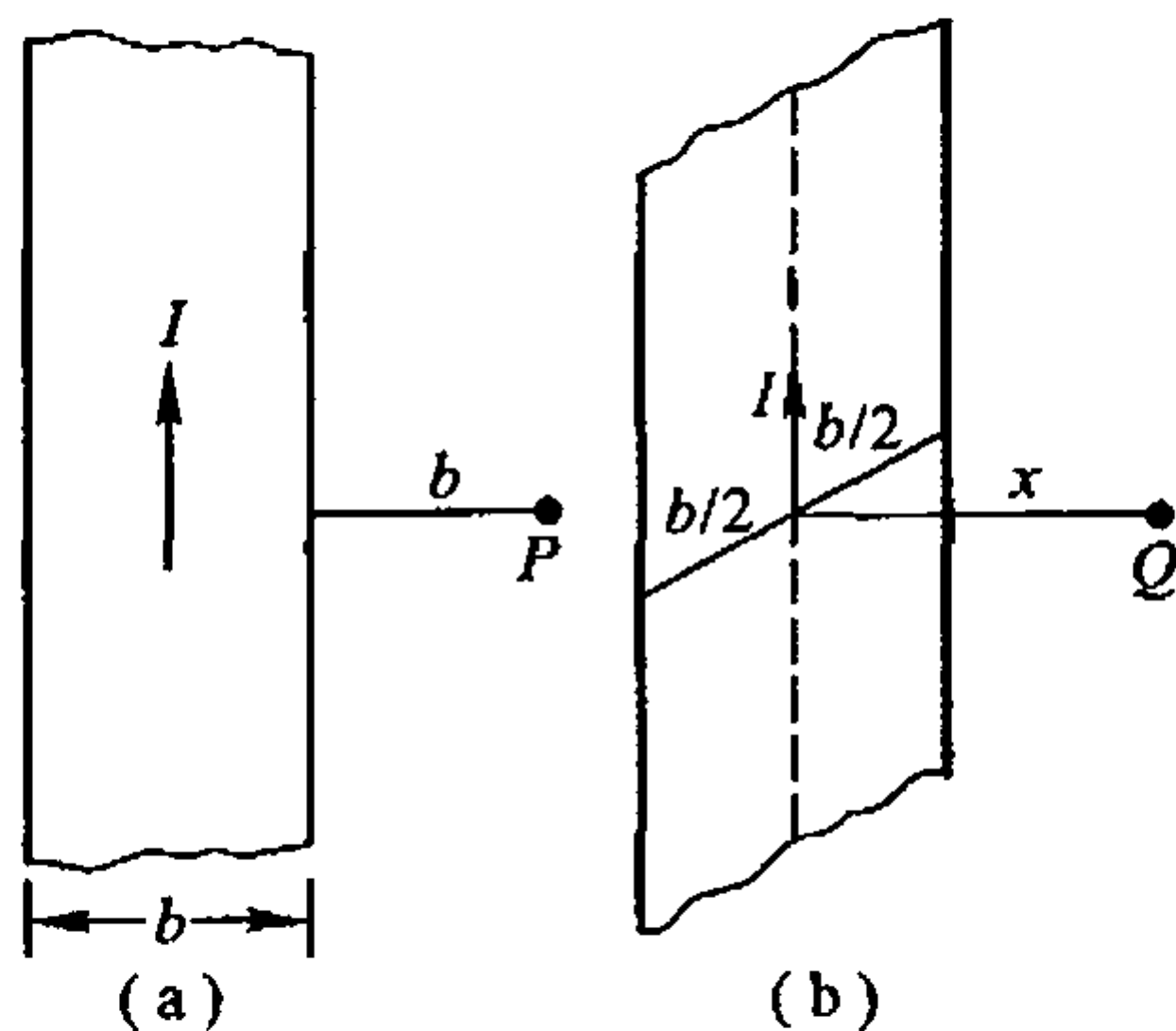


解图 8-15

**8-16.** 电流均匀地流过宽为  $b$  的无限长平面导体薄板, 电流为  $I$ , 沿板长方向流动. 求:

(1) 如图(a)所示, 在薄板平面内, 距板的一边为  $b$  的点  $P$  处的磁感应强度;

(2) 如图(b)所示, 通过板的中线并与板面垂直的直线上一点  $Q$  处的磁感应强度,  $Q$  点到板面的距离为  $x$ .



习题 8-16 图

分析：将宽度为  $b$  的无限长载流导体薄板视为由宽为  $dy$  的无限长载流细条平行排列而成。利用无限长载流直导线磁感应强度的规律和磁感应强度的叠加原理解题。

解：(1) 如解图 8-16a 所示，取坐标轴  $Oy$ ，坐标原点位于板的中线。在板上距原点  $y$  处取宽为  $dy$ 、电流为  $dI = Idy/b$  的无限长细条，该无限长直电流在  $P$  点的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi \left( \frac{b}{2} + b - y \right)} = \frac{\mu_0 I}{\pi b (3b - 2y)} dy$$

$dB$  的方向垂直纸面向里。

板上所有细条在  $P$  点磁感应强度的方向相同，所以有

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{dy}{3b - 2y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln 2$$

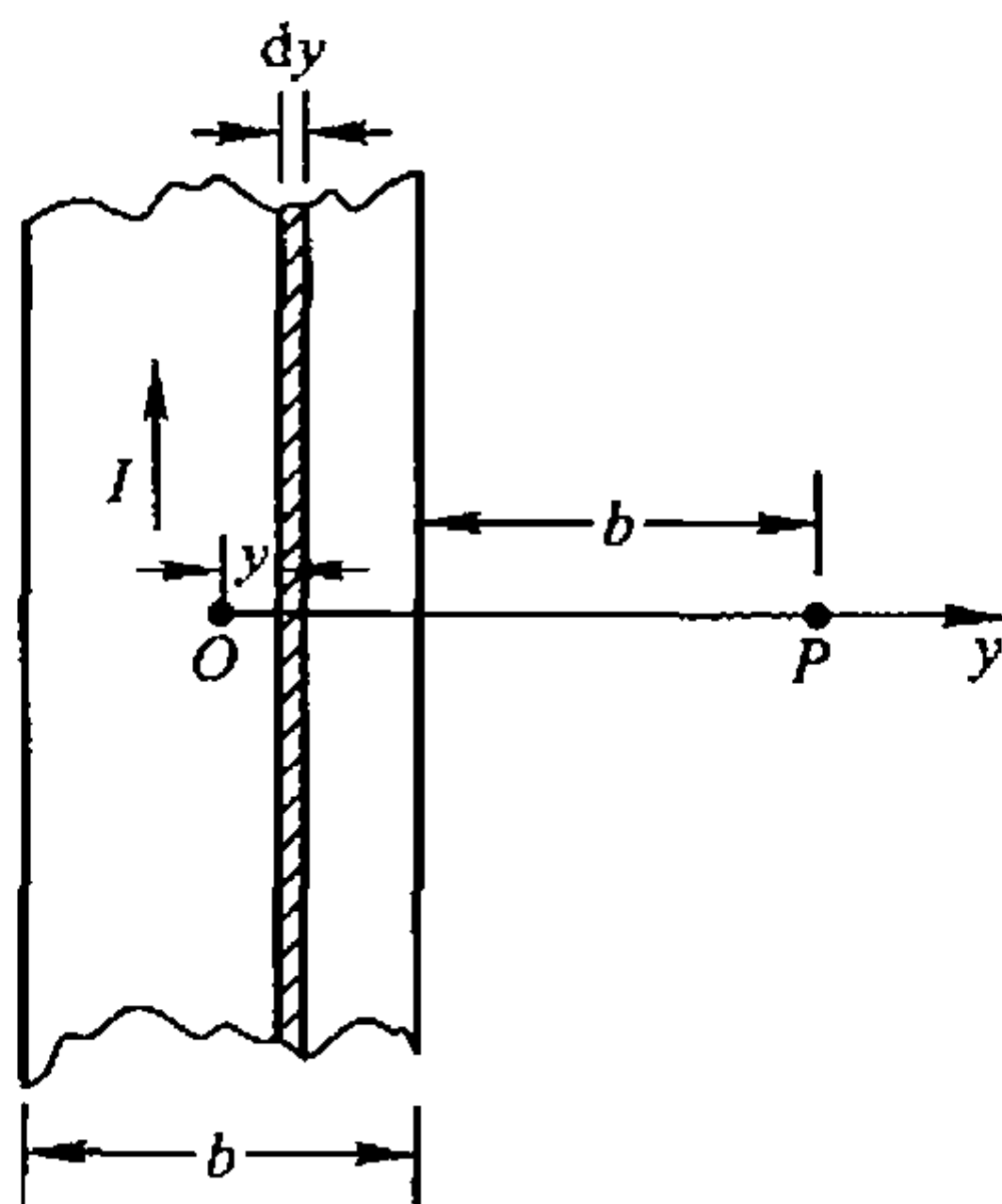
$B$  的方向垂直纸面向里。

(2) 取坐标系如解图 8-16b 所示。板上宽为  $dy$  的无限长载流细条在  $Q$  点的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r b} dy$$

$dB$  的方向与  $r$  垂直，在  $xOy$  平面内与  $y$  轴正方向成  $\theta$  角。在板上中线另一侧对称地取宽为  $dy'$  的载流细条，它在  $Q$  点磁感应强度  $dB'$  的大小与  $dB$  的相同，在  $xOy$  平面内与  $dB$  相对  $y$  轴正方向对称分布，即成  $-\theta$  角。由此对称性，根据叠加原理可知， $Q$  点的磁感应强度  $B$  沿  $y$  轴正方向，即有

$$B_x = 0, \quad B = B_y = \int dB_y = \int dB \cos \theta$$



解图 8-16a

式中  $dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi br} dy$ . 所以,  $Q$  点磁感应强度  $B$  的大小为

$$B = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi br} \cos \theta dy$$

利用几何关系统一积分变量, 有

$$r = x \sec \theta, y = x \tan \theta, dy = x \sec^2 \theta d\theta$$

代入上式, 有  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \int_{-\arctan(b/2x)}^{+\arctan(b/2x)} d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{2x}$

由上述结果可作以下讨论:

(a) 当  $x \gg b$ , 有

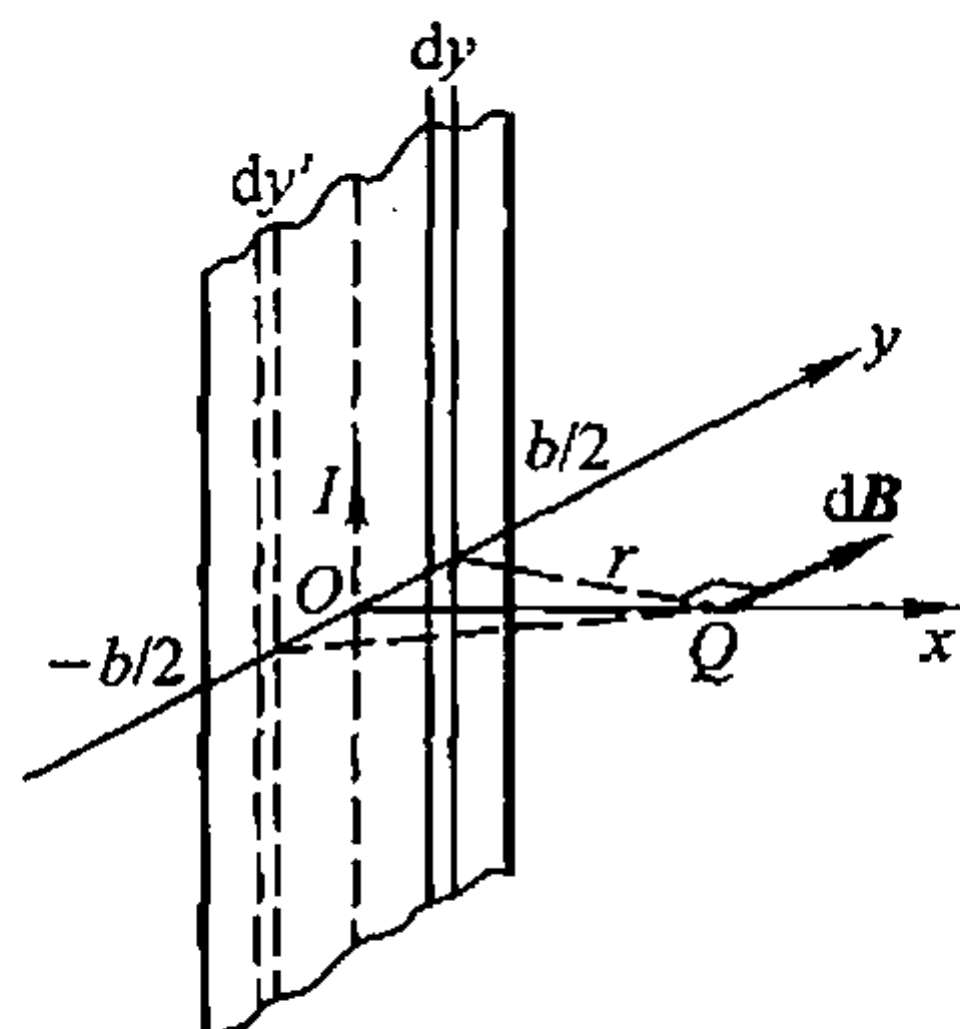
$$\arctan \frac{b}{2x} \approx \frac{b}{2x}, B \approx \frac{\mu_0 I}{\pi b} \cdot \frac{b}{2x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

这就是无限长直电流在  $x$  处的磁感应强度.

(b) 当  $x \ll b$ , 有

$$\arctan \frac{b}{2x} \approx \frac{\pi}{2}, B \approx \frac{\mu_0 I}{\pi b} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

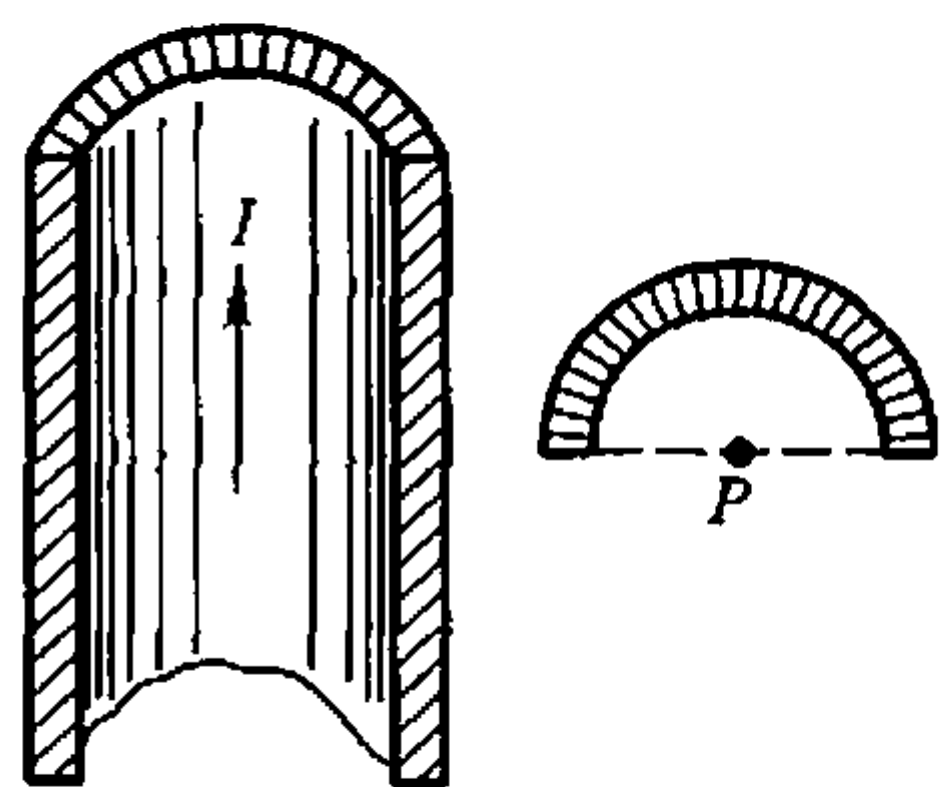
这就是无限大载流薄板在离板  $x$  处的磁感应强度.



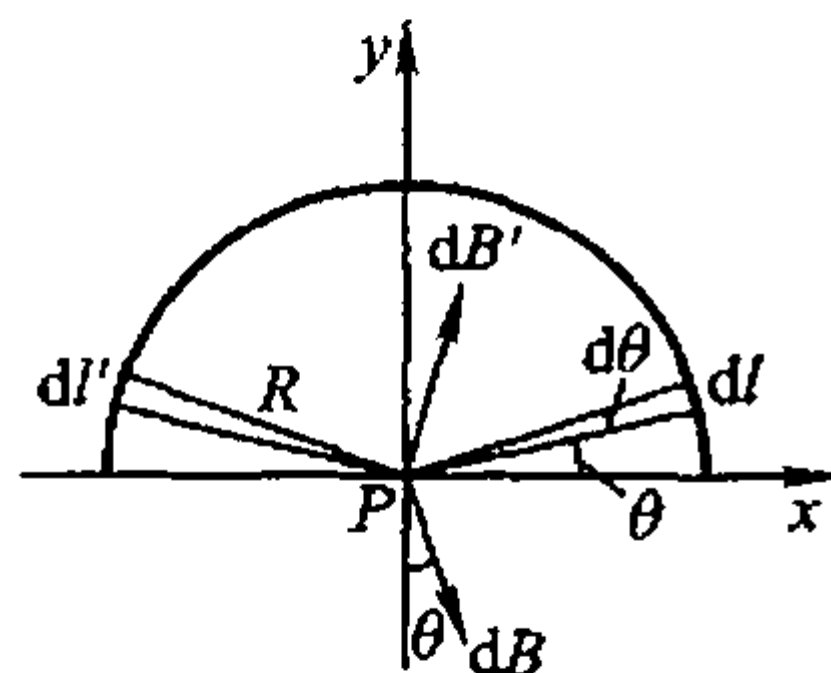
解图 8-16b

**8-17.** 在半径  $R = 1 \text{ cm}$  的“无限长”半圆柱形金属薄片, 有电流  $I = 5 \text{ A}$  自下而上通过, 如图所示. 试求圆柱轴线上一点  $P$  处的磁感应强度.

**分析:** 将无限长半圆柱面电流视为由宽为  $dl$  的无限长直电流排列而成. 利用无限长直电流的磁感应强度和叠加原理解题.



习题 8-17 图



解图 8-17

**解:** 在如解图 8-17 所示的坐标系中, 半圆柱面上宽为  $dl = R d\theta$  的无限长薄片条中有电流  $dI = IR d\theta / \pi R = Id\theta / \pi$ , 在轴线上  $P$  点处的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I d\theta}{2\pi^2 R}$$

$dB$  的方向如解图 8-17 所示. 若在半圆柱面上相对  $y$  轴对称地取另一薄片条

$dl'$ , 则  $dl'$  的直电流在  $P$  点的磁感应强度为  $dB'$ , 如解图 8-17 所示,  $dB'$  与  $dB$  相对  $x$  轴对称分布. 由磁感应强度的叠加原理可知, 无限长半圆柱面电流在  $P$  点的磁感应强度  $B$  沿  $x$  轴正方向, 即有

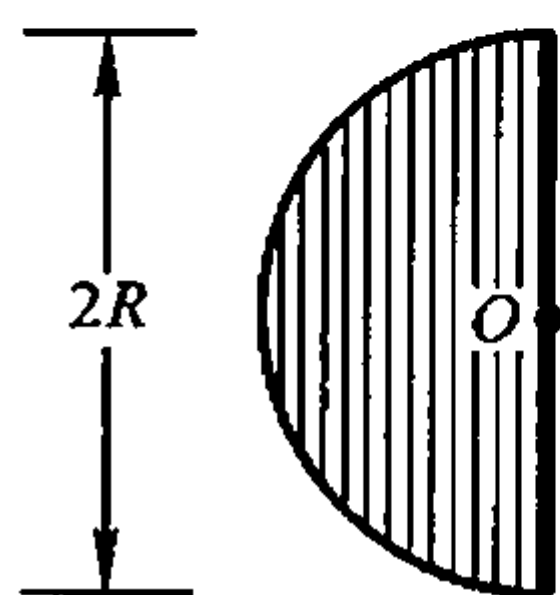
$$B_y = 0, \quad B = B_x = \int dB_x = \int dB \sin \theta$$

所以,  $P$  点磁感应强度  $B$  的大小为

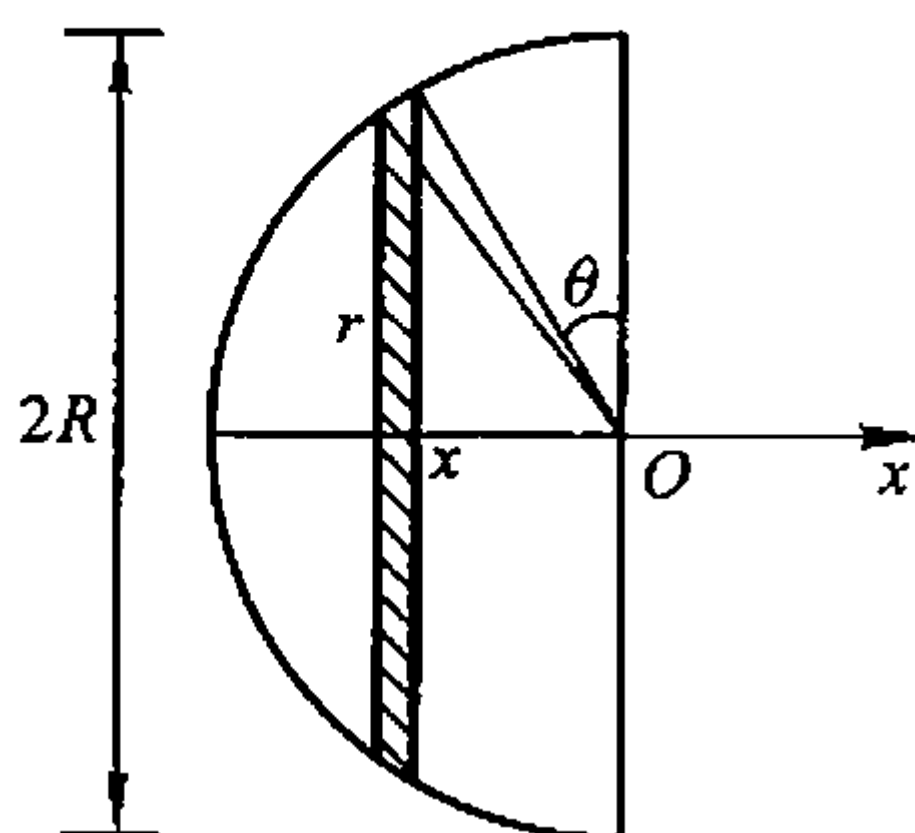
$$B_x = \int dB_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 6.37 \times 10^{-5} \text{ T}$$

**8-18.** 半径为  $R$  的木球上绕有细导线, 所绕线圈很紧密, 相邻的线圈彼此平行地靠着, 以单层盖住半个球面, 共有  $N$  匝, 如图所示. 设导线中通有电流  $I$ , 求球心  $O$  处的磁感应强度.

分析: 利用圆环电流在轴线上的磁感应强度和磁感应强度的叠加原理解题.



习题 8-18 图



解图 8-18

解: 一个圆环电流在轴线上场点的磁感应强度是沿轴向的, 半球面上紧密排列的  $N$  个同轴, 但半径  $r$  连续变化的圆电流, 在球心  $O$  (圆电流轴线上) 的磁感应强度的大小虽不相同, 但方向也都沿同一轴线.

如解图 8-18 所示, 取轴线沿  $x$  轴, 在轴线上  $x$  处圆环的半径为  $r = R \cos \theta$ , 由于线圈彼此平行地绕在球面上, 因此, 在弧长为  $dl$  的范围内, 有  $dN$  个圆电流

$$dN = \frac{N}{\pi R/2} dl = \frac{2N}{\pi R} R d\theta = \frac{2N}{\pi} d\theta$$

相应的圆环电流为

$$dI' = IdN = \frac{2NI}{\pi} d\theta$$

由圆电流在轴线上场点的磁感应强度可知,  $dN$  个圆电流在球心  $O$  的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 dI'}{2(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NIR^2 \cos^2 \theta}{\pi(x^2 + r^2)^{3/2}} d\theta$$

上式中  $x^2 + r^2 = R^2$ , 所以

$$dB = \frac{\mu_0 NI \cos^2 \theta}{\pi R} d\theta$$

半球面上  $N$  匝密绕线圈在  $O$  点的磁感应强度大小为

$$B = \int dB = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 NI \cos^2 \theta}{\pi R} d\theta = \frac{\mu_0 NI}{4R}$$

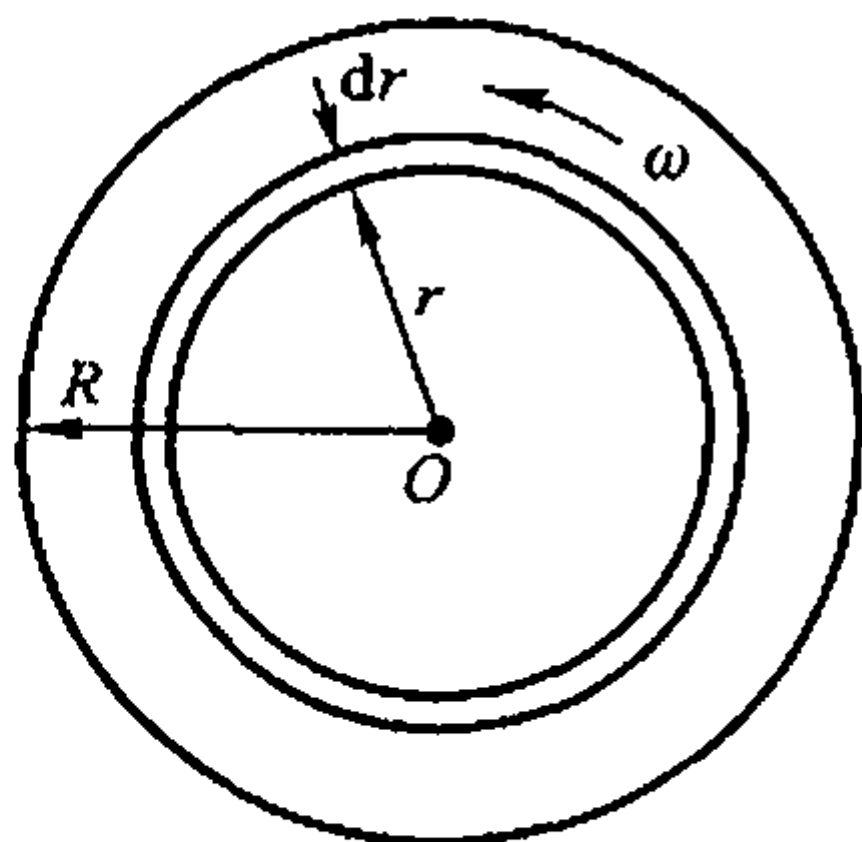
$B$  的方向沿  $x$  轴.

**8-19.** 一个塑料圆盘, 半径为  $R$ , 电荷  $q$  均匀分布于表面, 圆盘绕通过圆心垂直于盘面的轴转动, 角速度为  $\omega$ , 求圆盘中心处的磁感应强度.

**分析:** 旋转的带电圆盘可等效为由半径连续变化的同心载流圆环平铺而成. 由于各圆环电流在环心处的磁感应强度方向相同, 大小不同, 故盘心的磁感应强度为共面的所有圆电流在环心处磁感应强度的代数和.

**解:** 如解图 8-19 所示, 在圆盘上取半径为  $r$  宽为  $dr$  的细圆环, 环上的电量为

$$dq = \sigma 2\pi r dr = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2q}{R^2} r dr$$



解图 8-19

根据电流的定义  $dI = \frac{dq}{dt}$ ,  $dq$  就是在圆盘绕轴转动的一个周期  $T$  内, 垂直通过盘的径向宽为  $dr$  线段的电荷量. 所以, 有

$$dI = \frac{dq}{T} = \omega \frac{dq}{2\pi} = \frac{q\omega}{\pi R^2} r dr$$

圆电流  $dI$  在盘心的磁感应强度大小为

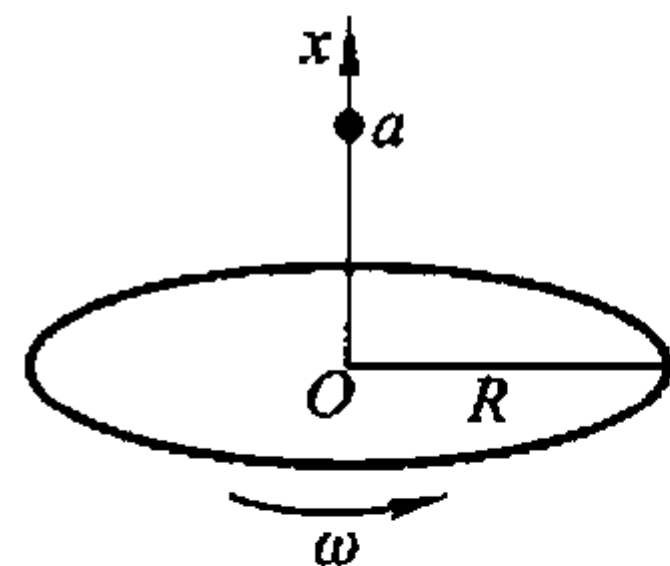
$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr$$

匀角速率转动的带电圆盘在盘心的磁感应强度大小为

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R}$$

$B$  的方向沿轴线, 与  $\omega$  成右手螺旋关系.

**8-20.** 如图所示, 半径为  $R$ , 电荷线密度为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 的均匀带电圆环, 绕圆心且与圆平面垂直的轴以角速度  $\omega$  转动, 求:



习题 8-20 图

(1) 圆心  $O$  处的磁感应强度  $B_0$ ;

(2) 轴线上距圆心为  $a$  处的一点的磁感应强度  $B$  的大小和方向.

**分析:** 绕圆心轴转动的均匀带电圆环相当于一个圆电流. 利用圆电流轴线上磁感应强度的结论解题.

**解:** 根据电流的定义, 等效圆电流为

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dl}{dt} = \lambda v = \lambda R \omega$$

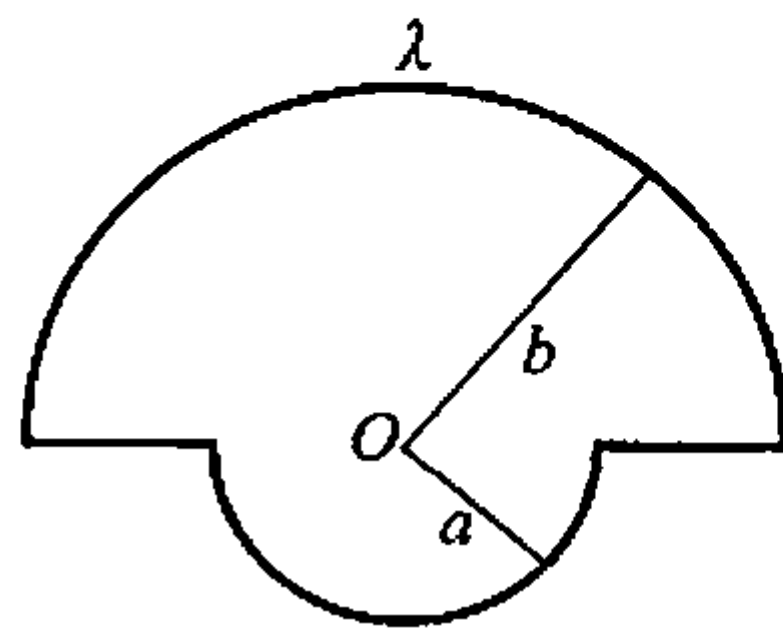
(1) 圆心  $O$  处磁感应强度  $B_0$  沿  $x$  轴正方向, 大小为

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2}$$

(2) 轴线上离圆心  $x$  的  $a$  点处的磁感应强度  $B$  沿  $x$  轴正方向, 大小为

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \lambda R^3 \omega}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

**8-21.** 如图所示, 有一闭合回路由半径为  $a$  和  $b$  的两个同心共面半圆连接而成, 其上均匀分布线密度为  $\lambda$  的电荷, 当回路以匀角速度  $\omega$  绕过  $O$  点垂直于回路平面的轴转动时, 求圆心  $O$  点的磁感应强度的大小.



习题 8-21 图

**分析:** 均匀带电的回路绕轴转动时, 可等效为三个绕轴的圆电流: 半径分别为  $a$  和  $b$  的半圆环电流和宽为  $(b-a)$  环面电流. 这三个电流在圆心的磁感应强度方向相同, 都沿轴向.

**解:** 分别设半径为  $a$  和  $b$  的半圆环电流为  $i_1$  和  $i_2$ ,

有 
$$i_1 = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dl}{dt} = \lambda v = \lambda a \omega, \quad i_2 = \lambda b \omega$$

设  $i_1$  和  $i_2$  在圆心的磁感应强度的大小分别为  $B_1$  和  $B_2$ ,

有 
$$B_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i_1}{2a} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 i_2}{2b} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4}$$

设宽为  $(b-a)$  环面电流为  $i_3$ , 则有

$$di_3 = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega 2\lambda dr}{2\pi} = \frac{\lambda\omega dr}{\pi}$$

设  $i_3$  在圆心的磁感应强度的大小  $B_3$ ,

$$B_3 = \int dB_3 = \int \frac{\mu_0 di_3}{2r} = \int_a^b \frac{\mu_0 \lambda \omega dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

所以, 圆心处磁感应强度的大小为

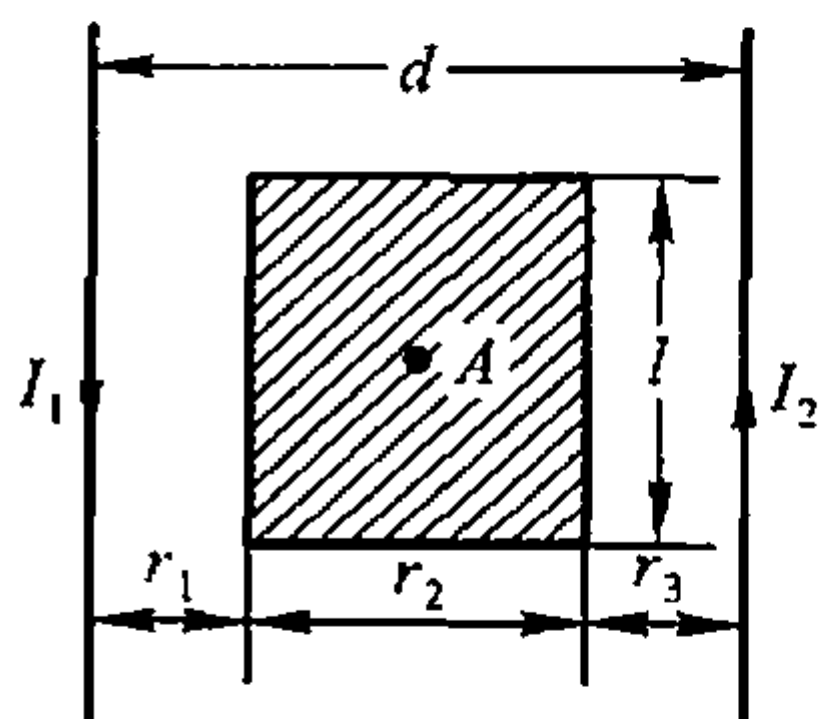
$$B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2} + \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

**8-22.** 两平行长直导线相距  $d = 40 \text{ cm}$ , 每根导线载有电流  $I_1 = I_2 = 20 \text{ A}$ , 电流流向如图所示. 求:

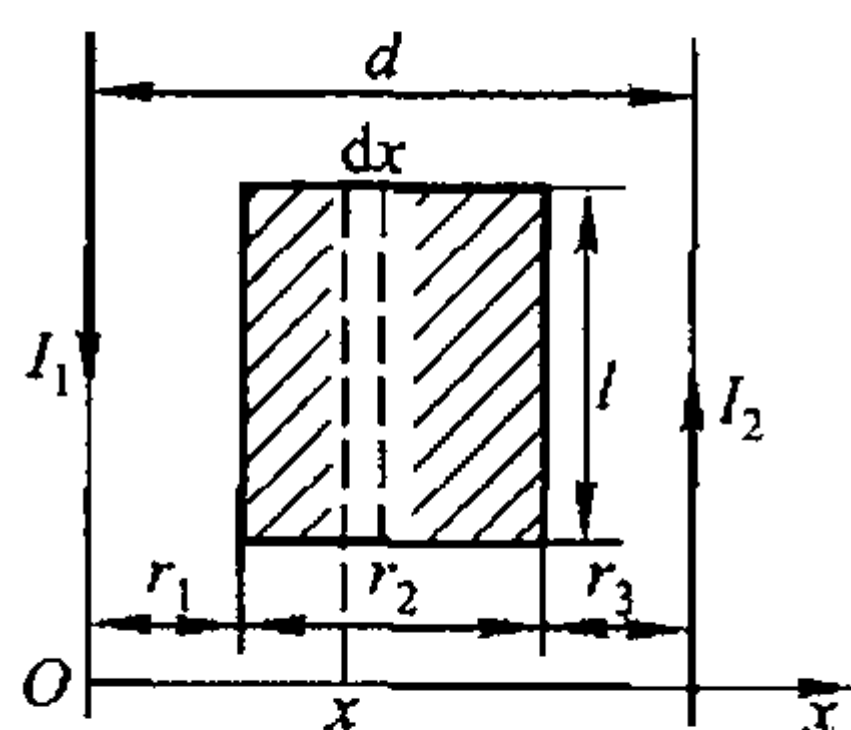
(1) 两导线所在平面内与该两导线等距的一点  $A$  处的磁感应强度;

(2) 通过图中斜线所示面积的磁通量 ( $r_1 = r_3 = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 25 \text{ cm}$ ).

分析: 两平行电流反向, 相对  $A$  对称分布, 故在  $A$  处的磁感应强度等大同向. 在两导线所在平面内的磁感应强度非均匀分布, 须运用积分求得通过矩形面积的磁通量.



习题 8-22 图



解图 8-22

解: 如解图 8-22 所示, 取坐标轴  $Ox$ . 设平面内场点  $P$  距  $I_1$  为  $x$ , 距  $I_2$  为  $(d-x)$ , 两电流在  $P$  点的磁感应强度为

$$B_P = B_{1P} + B_{2P} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d-x)}$$

$B_P$  的方向垂直纸面向外.

(1) 在离两导线等距离的点  $A$  处,  $x = \frac{d}{2}$ , 因  $I_1 = I_2$ , 得

$$B_A = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) = \frac{2\mu_0 I_1}{\pi d} = 4.0 \times 10^{-5} \text{ T}$$

(2) 取矩形面积的法线方向垂直纸面向外, 处处与非均匀磁感应强度  $B$  的方向一致, 通过面积元  $dS = ldx$  的磁通量为

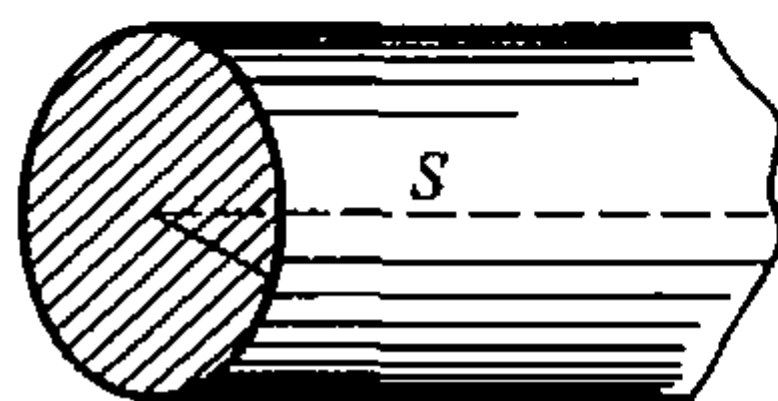
$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS \cos 0^\circ = B dS = B l dx$$

通过矩形面积的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int d\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B l dx = \int_{r_1}^{r_1+r_2} \left[ \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)} \right] l dx \\ &= \frac{\mu_0 I_1 l}{\pi} \ln \frac{r_1 + r_2}{r_1} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ Wb}\end{aligned}$$

#### 4. 安培环路定理的应用

**8-23.** 一根很长的铜导线, 载有电流 10 A, 在导线内部通过中心线作一平面  $S$ , 如图所示. 试计算通过导线中 1 m 长的  $S$  平面内的磁感应通量.



习题 8-23 图

**分析:** 无限长圆柱电流内  $\mathbf{B}$  的大小与轴线到场点的半径  $r$  成正比, 通过平面  $S$  的磁感应强度通量须由积分完成计算.

**解:** 无限长载流导线的磁感应强度具有轴对称性. 设电流  $I$  均匀分布在导线截面内, 如解图 8-23a 所示. 在导线内以  $r$  为半径, 作同轴的闭合回路  $L$ , 并运用安培环路定理, 有

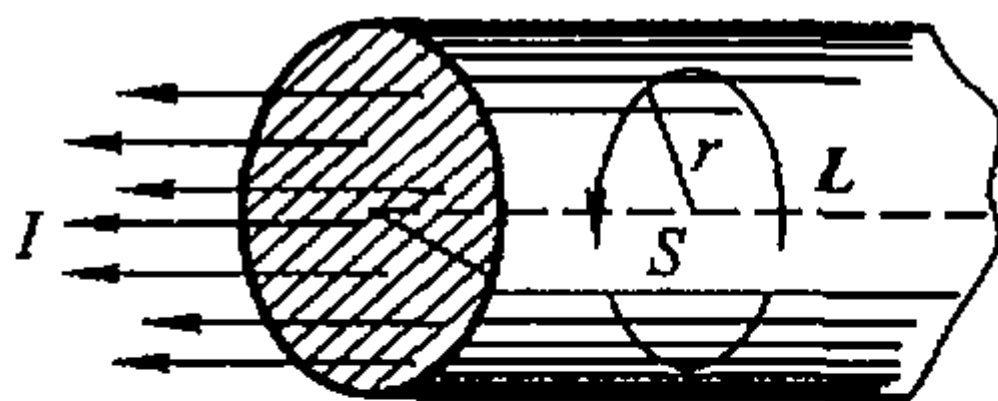
$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

可得导线内离轴线  $r$  处的磁感应强度大小为

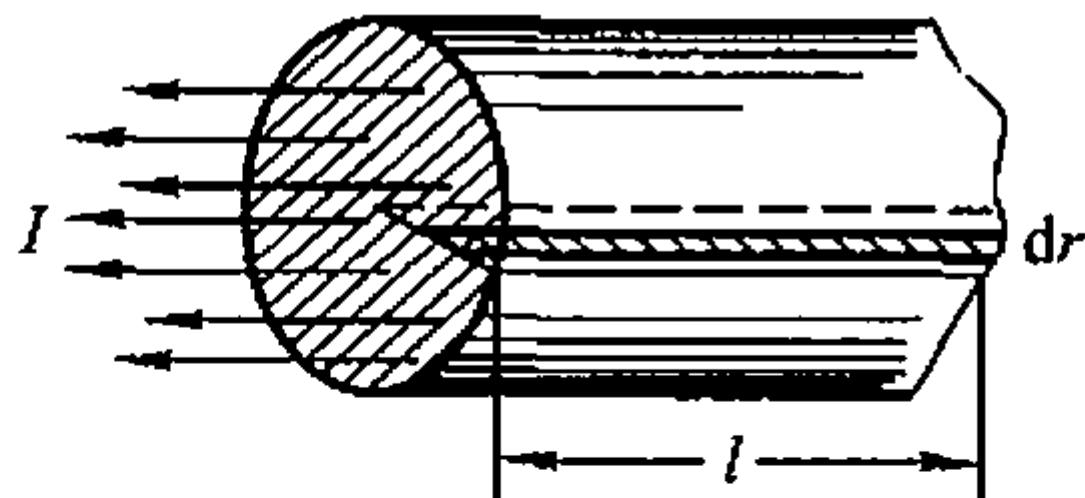
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

式中  $R$  为导线截面半径,  $\mathbf{B}$  的方向与  $L$  的绕向一致. 取  $S$  平面的法线方向与  $\mathbf{B}$  的相同, 则通过  $S$  平面上长为  $l$ , 宽为  $dr$  的面积元  $dS = l dr$  的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS \cos 0^\circ = B dS = B l dr$$



解图 8-23a



解图 8-23b

如解图 8-23b 所示, 可得通过矩形面积的磁通量为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^R B l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R^2} \int_0^R r dr = \frac{\mu_0 I l}{4\pi}$$

式中  $l$  取为 1 m, 可得

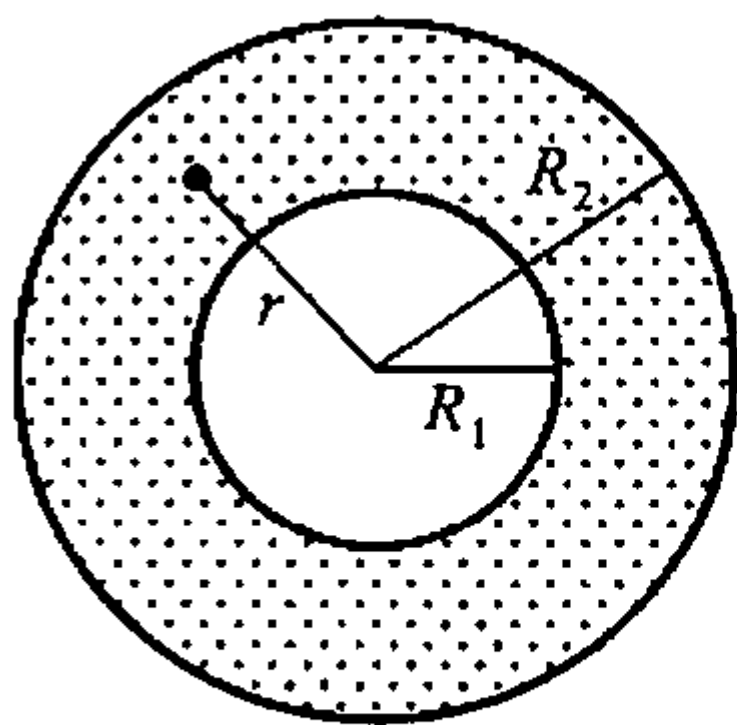
$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{4\pi} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

8-24. 如图所示的空心柱形导体半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 导体内载有电流  $I$ , 设电流  $I$  均匀分布在导体的横截面上. 求证导体内部各点 ( $R_1 < r < R_2$ ) 的磁感应强度  $B$  由下式给出:

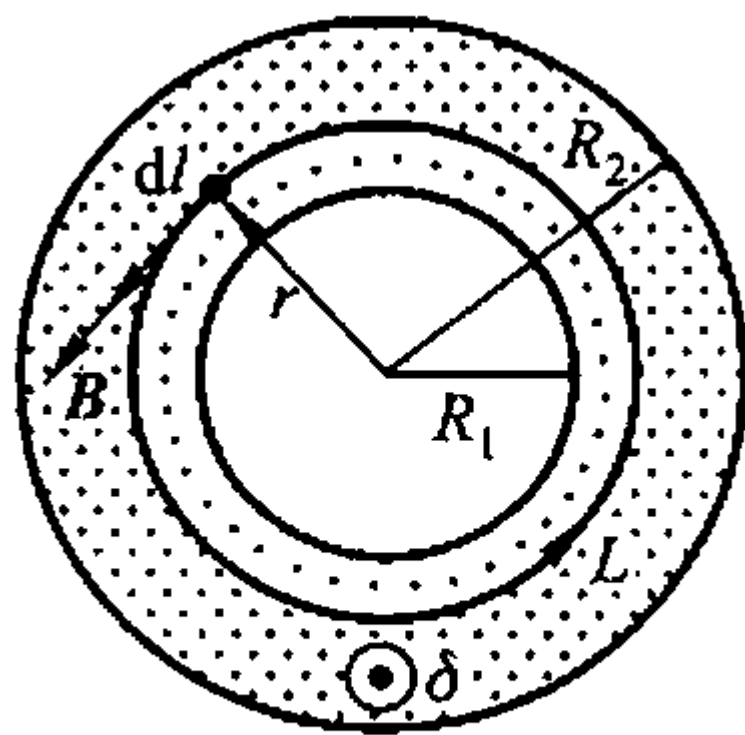
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r}$$

试以  $R_1 = 0$  的极限情形来检验这个公式.  $r = R_2$  时又怎样?

分析: 无限长空心柱形载流导体的磁感应强度具有轴对称性. 运用安培环路定理证明.



习题 8-24 图



解图 8-24

证明: 设导体横截面上的电流密度为  $\delta$ , 有

$$\delta = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

在导体内如解图 8-24 所示的截面上, 以圆柱轴线到考察点  $P$  的距离  $r$  为半径作同轴的闭合回路  $L$ , 令  $L$  的绕行方向与电流成右手螺旋关系. 根据电流分布的轴对称性可知, 磁感应线具有同样的轴对称分布, 在回路  $L$  上, 各处  $d\mathbf{l}$  的方向与  $\mathbf{B}$  的方向一致. 运用安培环路定理, 有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I'$$

式中  $I'$  是环路  $L$  所围电流,  $I' = \delta \pi(r^2 - R_1^2) = I \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$

所以, 离轴  $r$  处磁感应强度  $B$  的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I (r^2 - R_1^2)}{2\pi r (R_2^2 - R_1^2)} \quad (R_1 < r < R_2)$$

命题得证.

在上式中, 令  $R_1 = 0$ , 有

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_2^2}$$

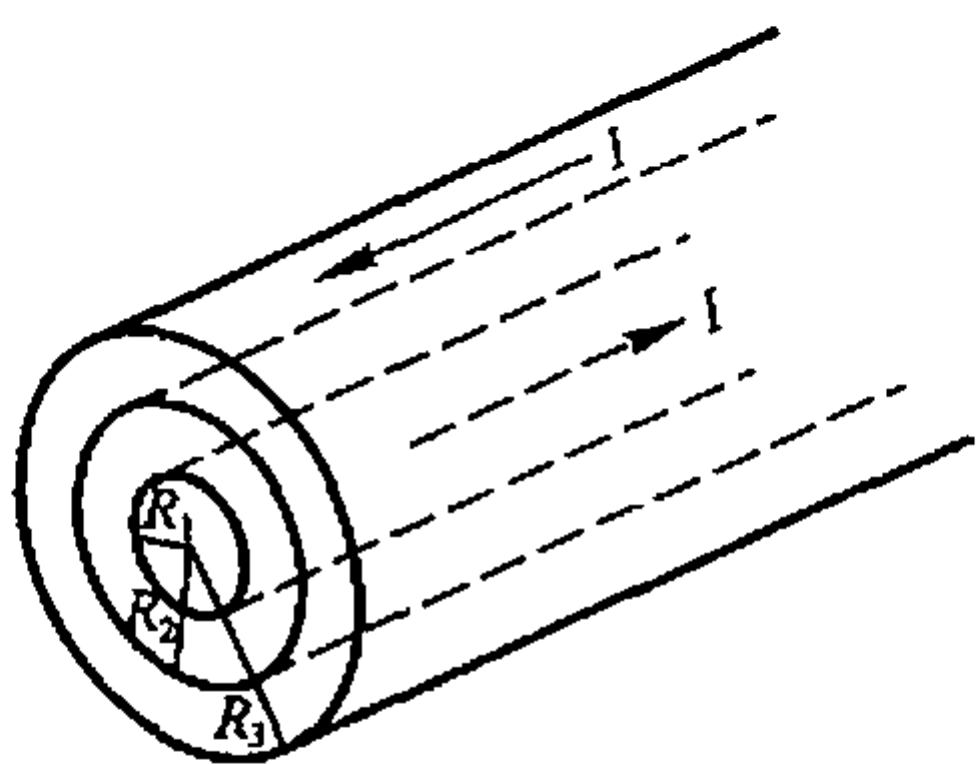
这是实心的柱形载流导线内离轴  $r$  处磁感应强度  $B$  的大小.

在导线表面,  $r = R_2$ , 磁感应强度  $B$  的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

**8-25.** 有一根很长的同轴电缆, 由一圆柱形导体和一同轴圆筒状导体组成, 圆柱的半径为  $R_1$ , 圆筒的内外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$ , 如图所示. 在这两导体中, 载有大小相等而方向相反的电流  $I$ , 电流均匀分布在各导体的截面上. 求:

- (1) 圆柱导体内各点 ( $r < R_1$ ) 的磁感应强度;
- (2) 两导体之间 ( $R_1 < r < R_2$ ) 的磁感应强度;
- (3) 外圆筒导体内 ( $R_2 < r < R_3$ ) 的磁感应强度;
- (4) 电缆外 ( $r > R_3$ ) 各点的磁感应强度.



习题 8-25 图

**分析:** 无限长同轴电缆电流的磁感应强度具有轴对称性. 运用安培环路定理求各处的磁感应强度.

**解:** (1) 在圆柱导体内, 以  $r$  ( $r < R_1$ ) 为半径, 作同轴的闭合回路  $L_1$ , 令  $L_1$  的绕行方向与圆柱内的电流成右手螺旋关系, 运用安培环路定理, 有

$$\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I'$$

式中  $I'$  是环路  $L_1$  所围电流,  $I' = \frac{I\pi r^2}{\pi R_1^2} = \frac{I r^2}{R_1^2}$

得圆柱内各点 ( $r < R_1$ ) 的磁感应强度  $B$  的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \quad (r < R_1)$$

(2) 在两导体之间, 以  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) 为半径, 作同轴的闭合回路  $L_2$ , 使  $L_2$  的绕行方向与圆柱电流  $I$  成右手螺旋关系, 运用安培环路定理, 有

$$\oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

(3) 在外圆筒导体内,以  $r (R_2 < r < R_3)$  为半径,作同轴的闭合回路  $L_3$ ,使  $L_3$  的绕行方向与圆柱电流  $I$  成右手螺旋关系,运用安培环路定理,有

$$\oint_{L_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 (I - I')$$

式中  $I'$  是环路  $L_3$  所围外圆筒导体内的电流,与圆柱电流  $I$  的流向相反.

$$I' = I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

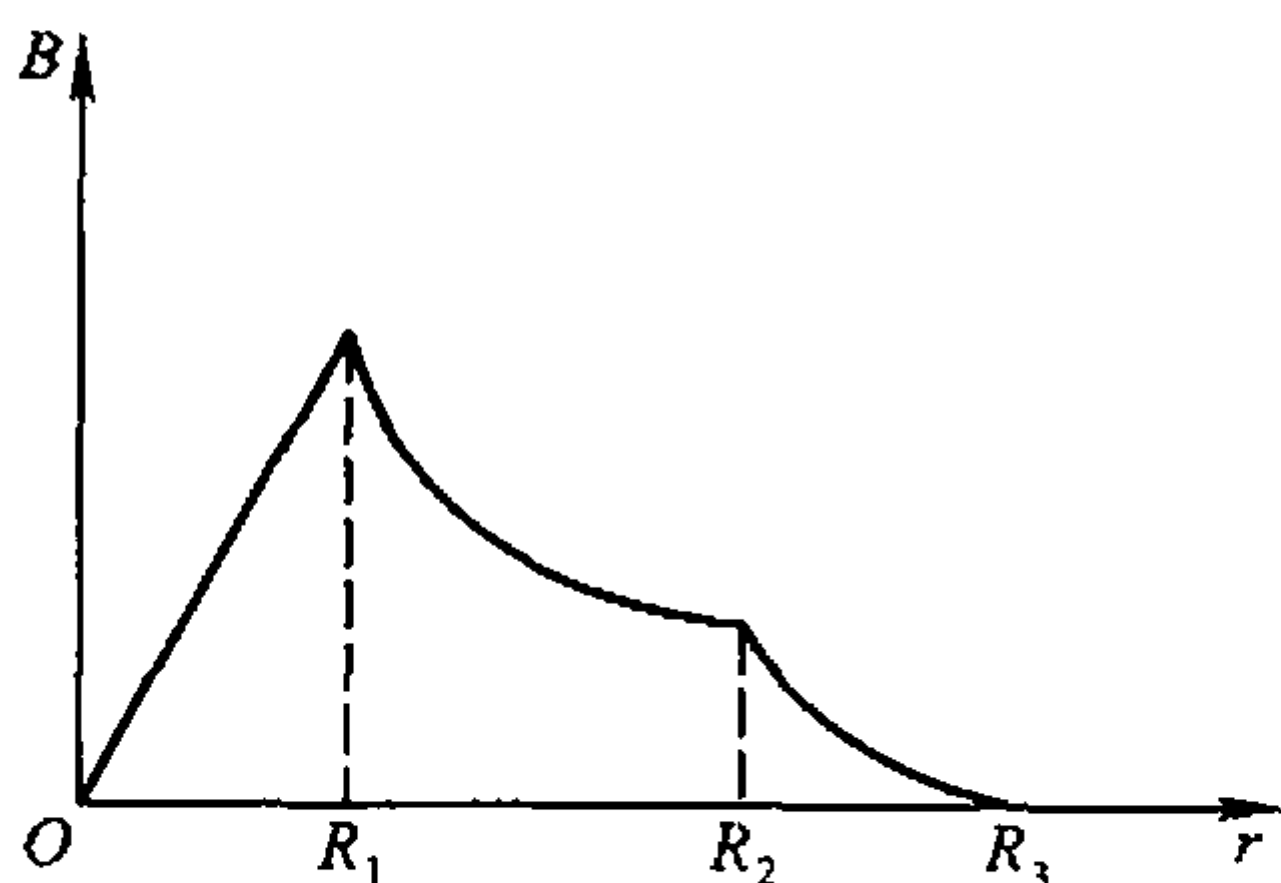
所以,有

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \quad (R_2 < r < R_3)$$

(4) 电缆外各点,以  $r (r > R_3)$  为半径,作同轴的闭合回路,并运用安培环路定理可以发现,环路所围电流的代数和为 0. 所以,有

$$B = 0 \quad (r > R_3)$$

根据以上(1)~(4)的计算结果,作  $B-r$  曲线如解图 8-25 所示.



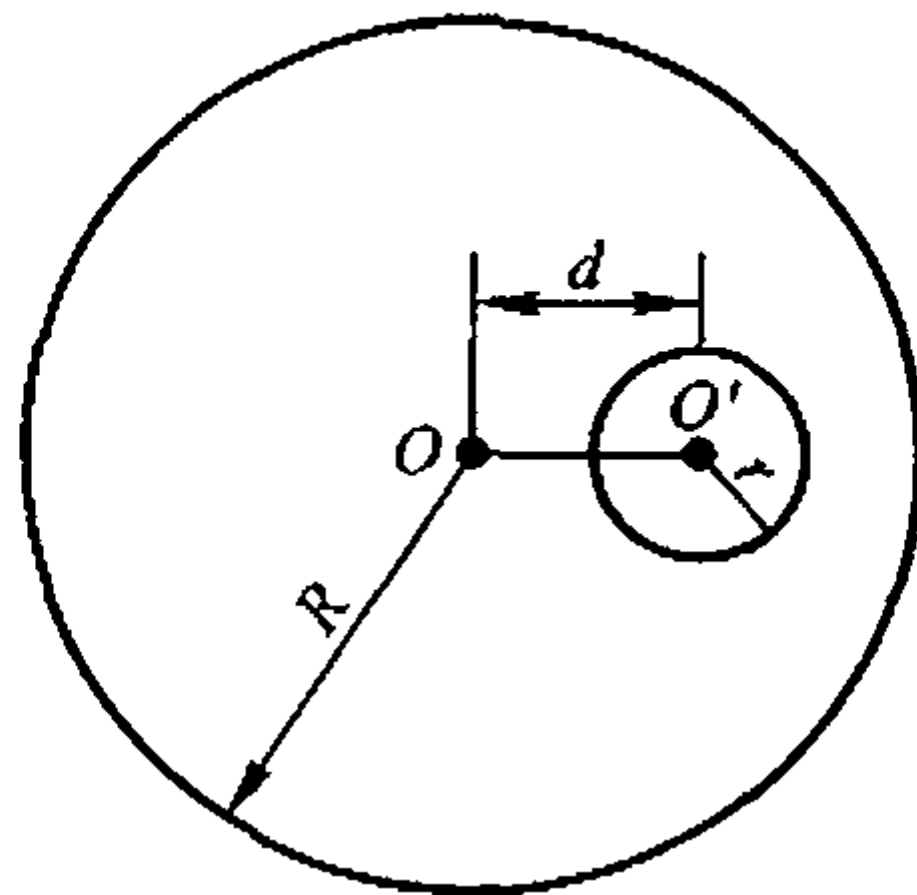
解图 8-25

**8-26.** 在半径为  $R$  的无限长金属圆柱体内部挖去一半径为  $r$  的无限长圆柱体,两柱体的轴线平行,相距为  $d$ ,如图所示. 今有电流沿空心柱体的轴线方向流动,电流  $I$  均匀分布在空心柱体的截面上.

(1) 分别求圆柱轴线上和空心部分轴线上的磁感应强度的大小;

(2) 当  $R = 1.0 \text{ cm}$ ,  $r = 0.5 \text{ mm}$ ,  $d = 5.0 \text{ mm}$  和  $I = 31 \text{ A}$  时,计算上述两处磁感应强度的值.

分析: 利用磁感应强度的叠加原理,将无限长空



习题 8-26 图

心柱体电流在各点的磁感应强度,等效为两个反向圆柱电流磁感应强度的矢量和. 两个反向无限长圆柱电流都具有轴对称性,因而各电流的磁感应强度都可由安培环路定理求得.

解: 设无限长金属圆柱体截面上(半径为  $R$ )均匀分布有电流为  $I_1$ ,无限长空心柱体部分的截面上(半径为  $r$ )均匀分布有与  $I_1$  流向相反的电流  $I_2$ . 它们在场点的磁感应强度分别为  $B_1$  和  $B_2$ ,由磁感应强度的叠加原理可知,有  $B = B_1 + B_2$ ,并且,有

$$I = I_1 - I_2$$

式中 
$$I_1 = \frac{IR^2}{R^2 - r^2}, \quad I_2 = \frac{Ir^2}{R^2 - r^2}$$

(1) 在圆柱轴线上  $O$  点处,  $B_1 = 0$ . 故有  $B_O = B_2$ . 以  $O'$  为圆心,以  $d$  为半径作安培环路,有

$$\oint_L B_2 \cdot dl = B_2 \cdot 2\pi d = \mu_0 I_2$$

所以,有 
$$B_O = B_2 = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d (R^2 - r^2)}$$

在空心部分轴线上  $O'$  点处,  $B_2 = 0$ . 故有  $B_{O'} = B_1$ . 以  $O$  为圆心,以  $d$  为半径作安培环路,有

$$\oint_L B_1 \cdot dl = B_1 \cdot 2\pi d = \mu_0 I'_1$$

式中  $I'_1$  是环路所围电流, 
$$I'_1 = \frac{I_1 d^2}{R^2} = \frac{I d^2}{R^2 - r^2}$$

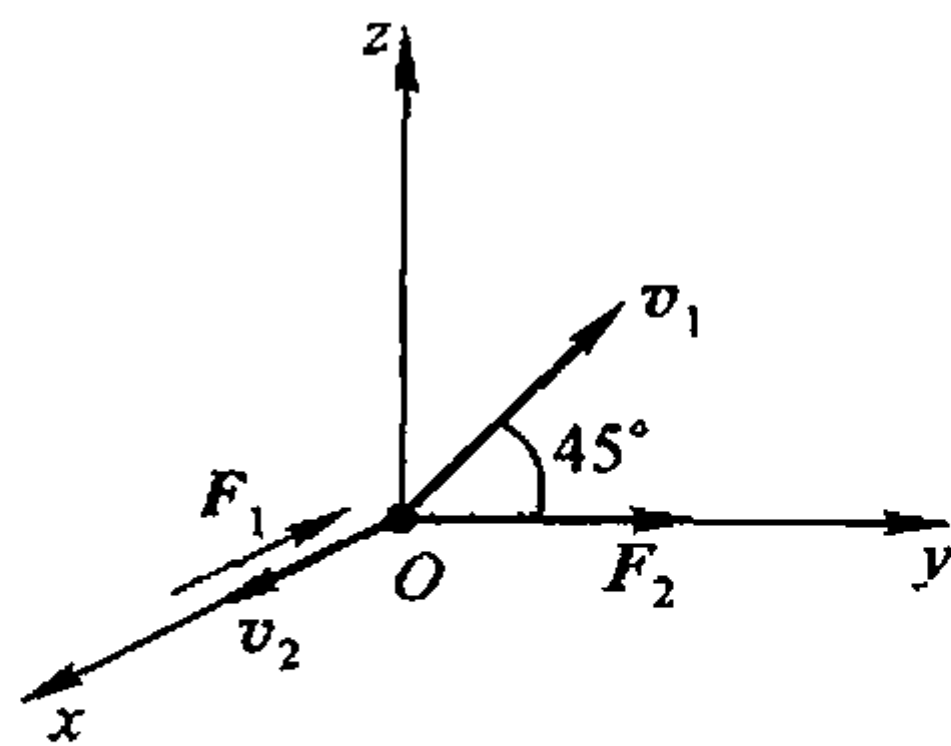
所以,有 
$$B_{O'} = B_1 = \frac{\mu_0 I d}{2\pi (R^2 - r^2)}$$

$B_O$  和  $B_{O'}$  均垂直于  $OO'$ , 方向相同.

(2) 代入数据,可得  $B_O = 3.11 \times 10^{-6} \text{ T}$ ,  $B_{O'} = 3.11 \times 10^{-4} \text{ T}$

## 5. 洛伦兹力的概念与应用

8-27. 一带有电荷量为  $4.0 \times 10^{-9} \text{ C}$  的粒子,在  $yz$  平面内沿着和  $Oy$  轴成  $45^\circ$  角的方向以速度  $v_1 = 3 \times 10^6 \text{ m/s}$  运动,它受到均匀磁场的作用力  $F_1$  逆  $Ox$  轴方向;当这个粒子沿  $Ox$  轴方向以速度  $v_2 = 2 \times 10^6 \text{ m/s}$  运动时,它受到沿  $Oy$  轴方向的作用力  $F_2 = 4 \times 10^2 \text{ N}$ . 求磁感应强度的大小和方向(如图).



习题 8-27 图

分析: 带电粒子在磁场中受磁场力,由洛伦兹力确定.

解: 根据  $F = qv \times B$  可以判断磁感应强度  $B$  沿  $Oz$  轴负方向.  $B$  的大小为

$$B = \frac{F_2}{qv_2 \sin \theta} = \frac{4 \times 10^2}{4.0 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^6 \times \sin 90^\circ} \text{ T} = 5 \times 10^4 \text{ T}$$

$$F_1 \text{ 的大小为} \quad F_1 = qv_1 B \sin 135^\circ = 4.24 \text{ N}$$

**8-28.** 一个电子射入  $B = (0.2\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})\text{T}$  的均匀磁场中, 当电子速度为  $\mathbf{v} = 5 \times 10^6 \mathbf{j} \text{ m/s}$  时, 求: 电子所受的磁场力.

**解:** 根据  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  可得电子所受磁场力为

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (-1.60 \times 10^{-19})(5 \times 10^6 \mathbf{j}) \times (0.2\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) \text{ N} = 1.6 \times 10^{-13} \mathbf{k} \text{ N}$$

$\mathbf{F}$  沿  $Oz$  轴正方向.

**8-29.** 一电子以  $1.0 \times 10^6 \text{ m/s}$  的速度进入一均匀磁场, 速度方向与磁场方向垂直. 已知电子在磁场中作半径为  $0.1 \text{ m}$  的圆周运动, 求磁感应强度的大小和电子的旋转角速度.

**解:** 根据  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  可知, 当  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{B}$  相垂直时, 电子受磁场力  $\mathbf{F}$  最大.  $\mathbf{F}$  使电子在垂直于  $\mathbf{B}$  的平面内作圆周运动, 即有

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

$$\text{得 } B \text{ 的大小为} \quad B = \frac{mv}{eR} = 5.69 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$\text{由} \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$$

可得电子作圆周运动的角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m} = 1.0 \times 10^7 \text{ rad/s}$$

**8-30.** 一质子以  $1.0 \times 10^7 \text{ m/s}$  的速度射入磁感应强度  $B = 1.5 \text{ T}$  的均匀磁场中, 其速度方向与磁场方向成  $30^\circ$  角. 计算:

- (1) 质子作螺旋运动的半径;
- (2) 螺距;
- (3) 旋转频率.

**分析:** 当质子速度  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{B}$  成一定角度时, 在平行于  $\mathbf{B}$  的方向上质子不受力, 作匀速直线运动, 在垂直于  $\mathbf{B}$  的方向上受磁场力而作匀速率圆周运动. 质子的运动轨迹为螺旋线.

**解:** (1) 质子作匀速率圆周运动的向心力

$$F = ev_{\perp} B = m \frac{v_{\perp}^2}{R}$$

圆周运动半径为  $R = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv \sin \theta}{eB} = 3.48 \times 10^{-2} \text{ m}$

(2) 螺距为  $h = v_{\parallel} T = v \cos \theta \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m v \cos \theta}{eB} = 0.38 \text{ m}$

(3) 旋转频率为  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{eB}{2\pi m} = 2.28 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$

**8-31.** 一电子在  $B = 2.0 \times 10^{-3} \text{ T}$  的均匀磁场中作半径  $R = 20 \text{ cm}$  的螺旋线运动,螺距  $h = 50 \text{ cm}$ . 已知电子的比荷  $e/m_e = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ ,求这个电子的速度.

解: 已知电子作螺旋运动的半径为

$$R = \frac{m_e v_{\perp}}{eB}$$

可得电子在垂直于  $B$  方向上的速度分量为

$$v_{\perp} = \frac{eRB}{m_e} = 7.04 \times 10^7 \text{ m/s}$$

由螺距  $h = v_{\parallel} T = v_{\parallel} \frac{2\pi m_e}{eB}$  可知,电子在平行于  $B$  方向上的速度分量为

$$v_{\parallel} = \frac{heB}{2\pi m_e} = 2.80 \times 10^7 \text{ m/s}$$

所以,电子速度  $v$  的大小为  $v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = 7.5 \times 10^7 \text{ m/s}$

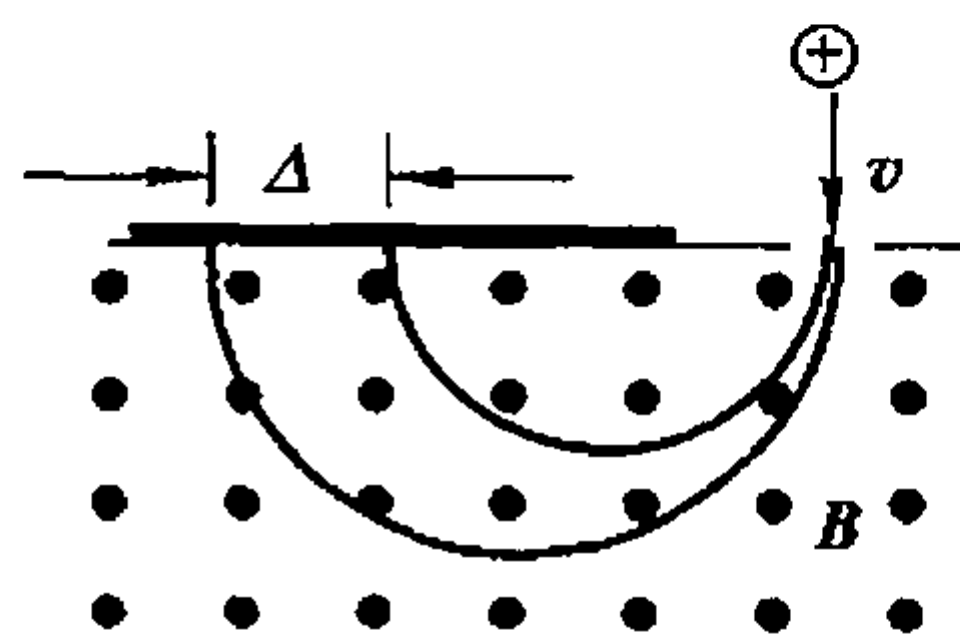
与  $B$  的夹角为  $\alpha = \arctan \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = 68.2^\circ$

**8-32.** 一束单价铜离子以  $1.0 \times 10^5 \text{ m/s}$  的速率进入质谱仪的均匀磁场,转过  $180^\circ$  后各离子打在照相底片上,如磁感应强度为  $0.50 \text{ T}$ ,试计算质量为  $63 \text{ u}$  和  $65 \text{ u}$  的两同位素分开的距离 ( $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).

分析: 垂直进入均匀磁场的两种同位素粒子,速率相同但质量不同,因此将作不同半径的匀速圆周运动. 打到照相底片时,粒子运动了半周,故分开的距离为两圆周轨迹的直径之差.

解: 如解图 8-32,带电粒子在磁场中作圆周运动轨迹的直径为

$$d = 2R = \frac{2mv}{eB}$$



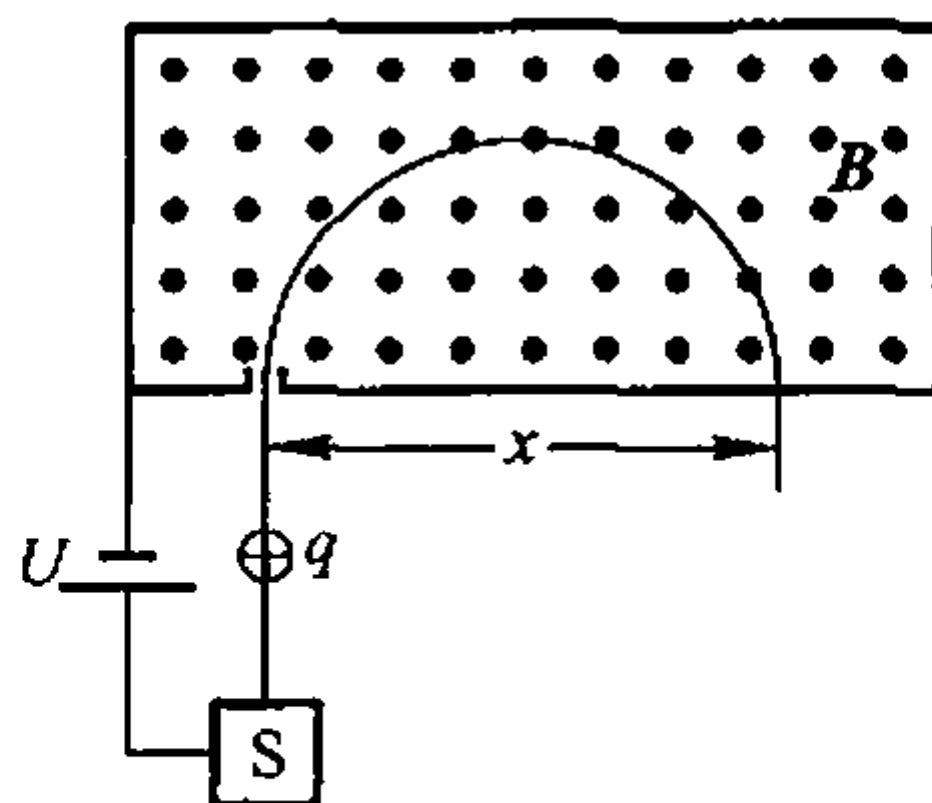
解图 8-32

两种同位素粒子分开的距离为

$$\Delta = d_1 - d_2 = 2(R_1 - R_2) = 2\left(\frac{m_1 v}{qB} - \frac{m_2 v}{qB}\right) = 8.4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

8-33. 图示为测定离子质量所用的装置. 离子源 S 产生一质量为  $m$ 、电荷量为  $+q$  的离子, 离子从源出来时的速度很小, 可以看作是静止的. 离子经电势差  $U$  加速后进入磁感应强度为  $B$  的均匀磁场, 在这磁场中, 离子沿一半圆周运动后射到离入口缝隙  $x$  远处的感光底片上, 并予以记录. 试证明离子的质量为

$$m = \frac{B^2 q x^2}{8U}.$$



习题 8-33 图

分析: 离子在装置内的运动由两个过程组成, 受电场力做功的加速阶段和进入均匀磁场后受磁场力作用的匀速率圆周运动. 由动能定理可求出离子进入磁场时的速率.

证: 设离子经电场加速后, 在磁场入口处的速度为  $v$ , 由动能定理, 有

$$qU = \frac{1}{2}mv^2$$

得

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

速率为  $v$  的离子垂直进入均匀磁场后, 受磁场力作用作匀速率圆周运动,

有

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

离子的轨道半径为 
$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{qB} m \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{qB} \sqrt{2qUm}$$

$$R = \frac{x}{2} \text{ 时,}$$

$$m = \frac{B^2 q x^2}{8U}$$

命题得证.

8-34. 在霍尔效应实验中, 宽  $1.0 \text{ cm}$ 、长  $4.0 \text{ cm}$ 、厚  $1.0 \times 10^{-3} \text{ cm}$  的导体沿长度方向载有  $3.0 \text{ A}$  的电流, 当磁感应强度  $B = 1.5 \text{ T}$  的磁场垂直地通过该薄导体时, 产生  $1.0 \times 10^{-5} \text{ V}$  的霍尔电压(在宽度两端). 试由这些数据求:

(1) 载流子的漂移速度;

(2) 每立方厘米的载流子数;

(3) 假设载流子是电子, 试就一给定的电流和磁场方向在图上画出霍尔电压的极性.

解: 已知导体的宽  $b = 1.0 \text{ cm}$ , 厚  $d = 1.0 \times 10^{-3} \text{ cm}$ , 如解图 8-34 所示. 由霍尔效应关系式可得

(1) 霍尔电场的电场强度为

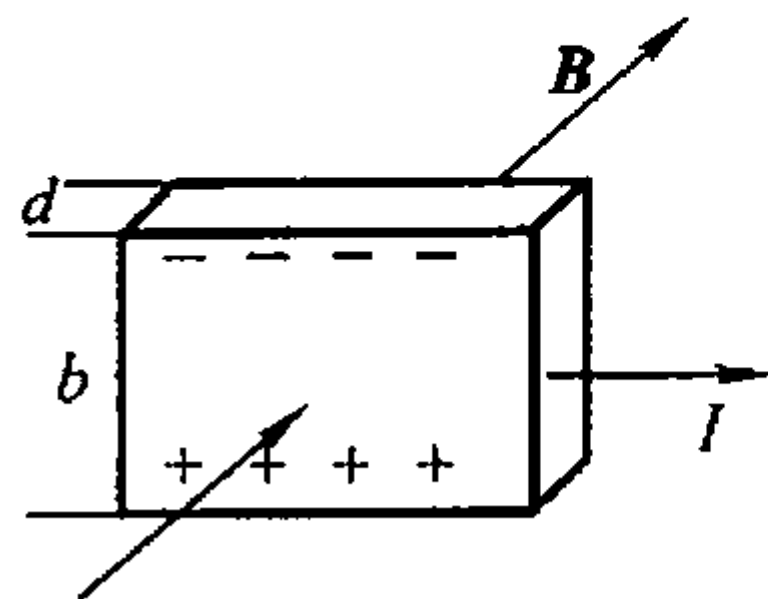
$$E_H = \frac{U}{b} = \frac{1.0 \times 10^{-5} \text{ V}}{1.0 \times 10^{-2} \text{ m}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

载流子的漂移速度为  $\bar{v} = \frac{E_H}{B} = 6.7 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

(2) 由于电流  $I = nq\bar{v}S = nq\bar{v}bd$ , 所以载流子密度为

$$n = \frac{I}{q\bar{v}bd} = 2.8 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

(3) 载流子为电子时, 电压极性如解图 8-34 所示.



解图 8-34

## 6. 安培力、磁矩和磁场力的功的计算

**8-35.** 彼此相距 10 cm 的三根平行的长直导线中各通有 10 A 同方向的电流, 试求各导线上每 1 cm 上作用力的大小和方向.

**分析:** 据题意, 三根平行长直导线处于等边三角形的三个顶角. 每一直电流都处在另二条直电流的磁场中. 因各电流及其间距相同, 所以各导线受安培力的大小相同. 由于各电流处的磁感应强度方向不同, 因此各导线受安培力的方向不同.

**解:** 设三根长直电流彼此相距为  $a$ , 据题意, 有  $I_1 = I_2 = I_3 = I$ .

考察电流  $I_1$  的受力: 设  $I_2$  和  $I_3$  在  $I_1$  处的磁感应强度分别为  $B_1$  和  $B_2$ , 它们的矢量和为  $B$ , 由解图 8-35 可知,  $B$  的方向在纸面内水平向左, 大小为

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi a}$$

在纸面内  $I_1$  处取电流元  $I_1 dl_1$ , 受安培力的大小为

$$dF_1 = I_1 dl_1 B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I^2}{2\pi a} dl_1$$

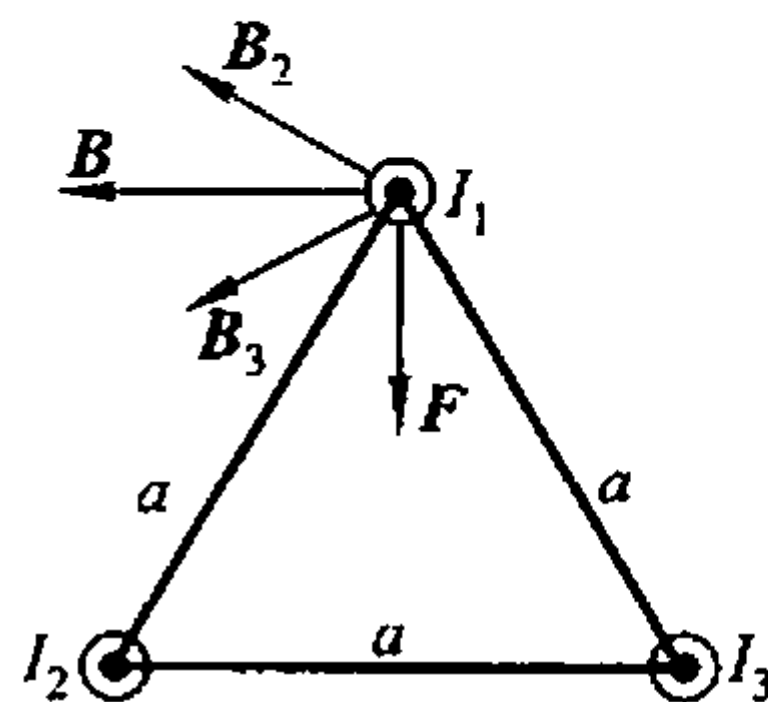
令  $dl_1 = 1 \text{ cm}$ , 得电流为  $I_1$  的导线上每厘米所受磁场力的大小为

$$dF_1 = 3.46 \times 10^{-6} \text{ N}$$

$dF_1$  的方向指向等边三角形的中心.

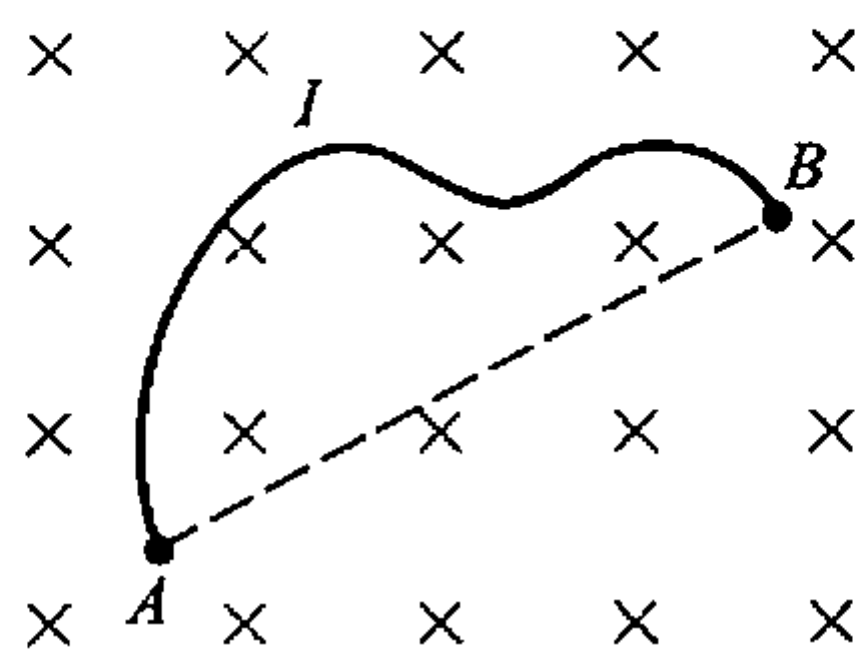
同样的分析也适用于其他两根导线电流,  $dF_2$ 、 $dF_3$  的方向均指向等边三角形中心.

也可以用两电流间相互作用力公式计算一导线受力后, 再求所受合力.



解图 8-35

8-36. 任意形状的一段导线  $AB$  如图所示, 其中通有电流  $I$ , 导线放在和匀强磁场  $B$  垂直的平面内. 试证明导线  $AB$  所受的力等于  $A$  到  $B$  间载有同样电流的直导线所受的力.



习题 8-36 图

分析: 在载流导线  $AB$  上取电流元  $Idl$ , 整根载流导线所受的力为各电流元所受安培力的矢量和.

证明 1: 在导线  $AB$  上任取电流元  $Idl$ , 所受安培力为

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}$$

整根载流导线  $AB$  受安培力为

$$\mathbf{F} = \int_A^B d\mathbf{F} = \int_A^B Idl \times \mathbf{B}$$

由于式中  $I$  和  $B$  与积分无关, 所以有

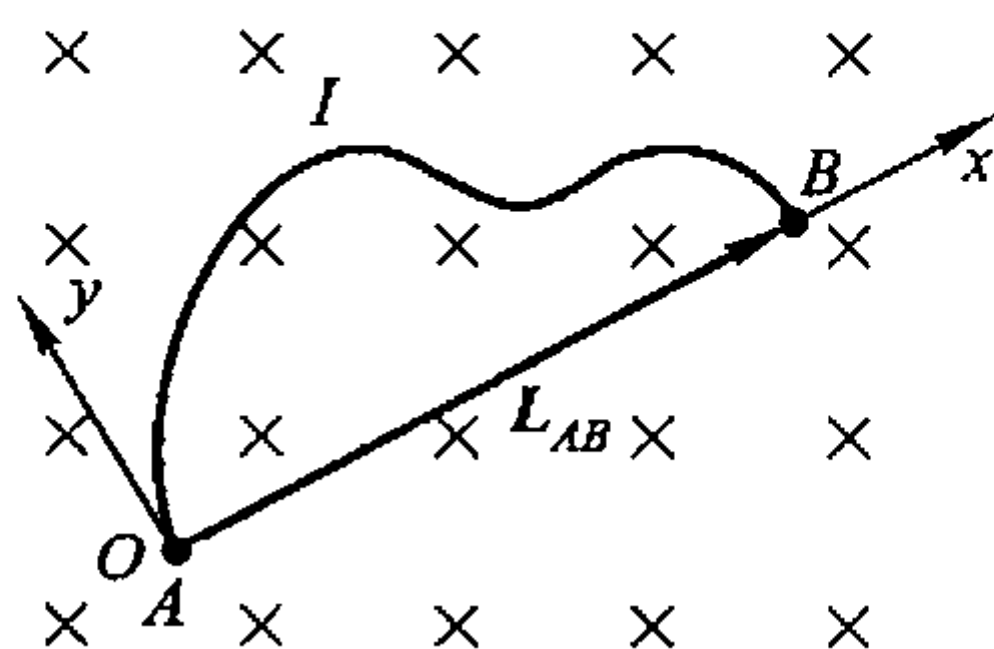
$$\mathbf{F} = \int_A^B Idl \times \mathbf{B} = I \left( \int_A^B dl \right) \times \mathbf{B}$$

式中  $(\int_A^B dl)$  是  $dl$  沿任意形状导线的矢量和, 这就是由  $A$  到  $B$  的有向直线段  $L_{AB} = L_{AB}\mathbf{i}$ , 如解图 8-36a 所示. 所以,

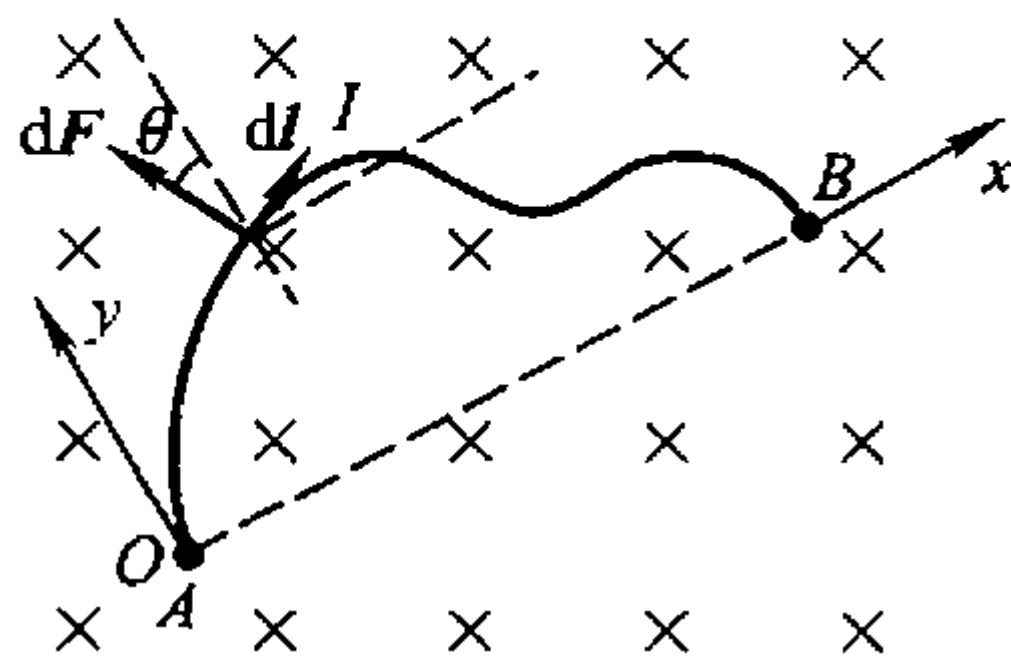
$$\mathbf{F} = I \left( \int_A^B dl \right) \times \mathbf{B} = I(L_{AB}\mathbf{i}) \times \mathbf{B} = IL_{AB} \times \mathbf{B}$$

$\mathbf{F}$  的方向垂直于  $L$  与  $B$  构成的平面沿  $y$  轴正方向, 即  $\mathbf{F} = IL_{AB}B\mathbf{j}$ .

可见, 在匀强磁场  $B$  中的一段任意载流导线所受的磁场力, 等于一段由  $A$  到  $B$  的长直电流  $L$  所受之力.



解图 8-36a



解图 8-36b

证明 2: 如解图 8-36b 所示, 电流元  $Idl$  受安培力的大小为  $dF = IBdl$ , 在  $x$  和  $y$  方向的分量分别为

$$dF_x = -IBdl \sin \theta = -IBdy, \quad dF_y = IBdl \cos \theta = IBdx$$

整段导线受力为

$$F_x = \int dF_x = -IB \int dy = 0$$

$$F_y = \int dF_y = IB \int_{x_A}^{x_B} dx = IB(x_B - x_A) = IB L_{AB}$$

即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_y = IL_{AB} B \mathbf{j}$$

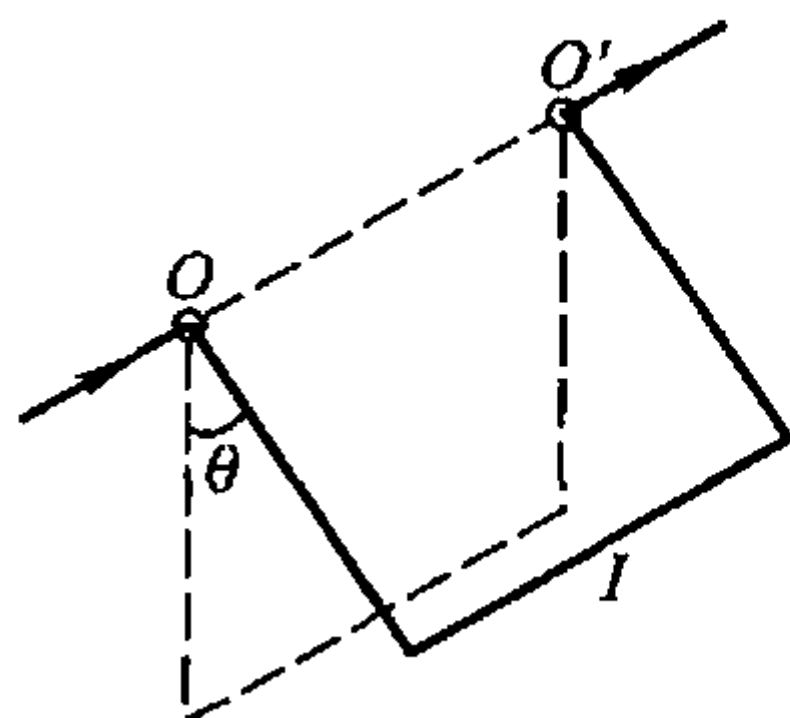
**证明 3:** 由于平面载流线圈在均匀磁场中受合力为零, 可添加一直电流由  $B$  到  $A$ , 构成一闭合载流线圈, 应有

$$\mathbf{F} = 0 = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA}$$

所以

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} = -IL_{BA} B \mathbf{j} = IL_{AB} B \mathbf{j}$$

**8-37.** 截面积为  $S$ 、密度为  $\rho$  的铜导线被弯成正方形的三边, 可以绕水平轴转动, 如图所示. 导线放在方向为竖直向上的匀强磁场中, 当导线中的电流为  $I$  时, 导线离开原来的竖直位置偏转一角度  $\theta$  而平衡. 求磁感应强度. 如  $S = 2 \text{ mm}^2$ ,  $\rho = 8.9 \text{ g/cm}^3$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $I = 10 \text{ A}$ , 匀强磁场的大小  $B$  应为多少?



习题 8-37 图

**分析:** 对  $OO'$  轴, 载流导线的重力矩和磁矩相平衡, 合外力矩为零.

**解:** 设正方形各边长度为  $l$ , 质量为  $m$ . 各边的重力对  $OO'$  轴的合力矩为

$$M_G = 2mg \frac{l}{2} \sin \theta + mgl \sin \theta = 2\rho l^2 S g \sin \theta$$

$M_G$  的方向由  $O$  指向  $O'$ .

对  $OO'$  轴的磁矩的大小为

$$M_m = F_m l \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = Il^2 B \cos \theta$$

$M_m$  的方向由  $O'$  指向  $O$ , 式中  $F_m = IlB$ , 是正方形相对  $OO'$  轴的平行边所受安培力.

重力矩和磁矩相平衡时, 有  $M_G = M_m$

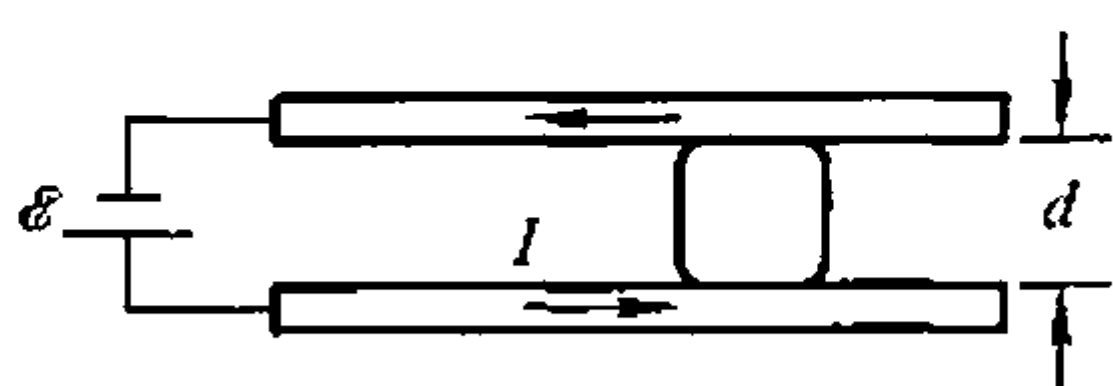
所以

$$B = \frac{2S\rho g}{I} \tan \theta = 9.35 \times 10^{-3} \text{ T}$$

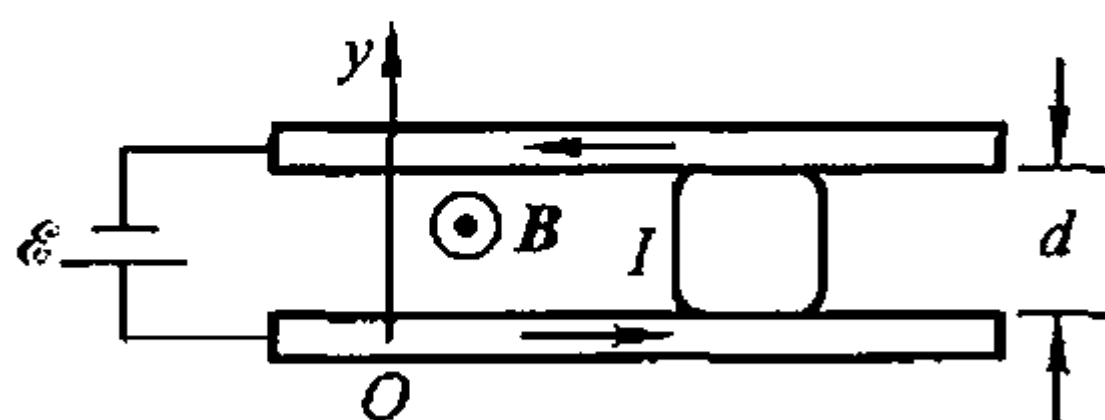
**8-38.** 如图所示是一种“电磁导轨炮”的原理图. 通以电流  $I$  后, 在两条平行导轨间可自由滑动的导电物体(如子弹)会被磁力加速而发射出去, 出口速度可以非常高. 设两条半径为  $r$  的圆柱形导轨的间距为  $d$ , 并可近似为半无限长. 试证明作用在导电物上的磁场力为

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d+r}{r}$$

**分析:** 平行导轨、导电物体与电源构成闭合回路. 导电物体受两条半无限长电流磁场的作用力而被发射.



习题 8-38 图



解图 8-38

解: 如解图 8-38 所示, 取坐标  $Oy$  轴向上为正, 坐标原点位于下导轨的轴线上. 两条半无限长导轨间  $y$  处的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{d + 2r - y} \right)$$

$B$  的方向垂直纸面向外.

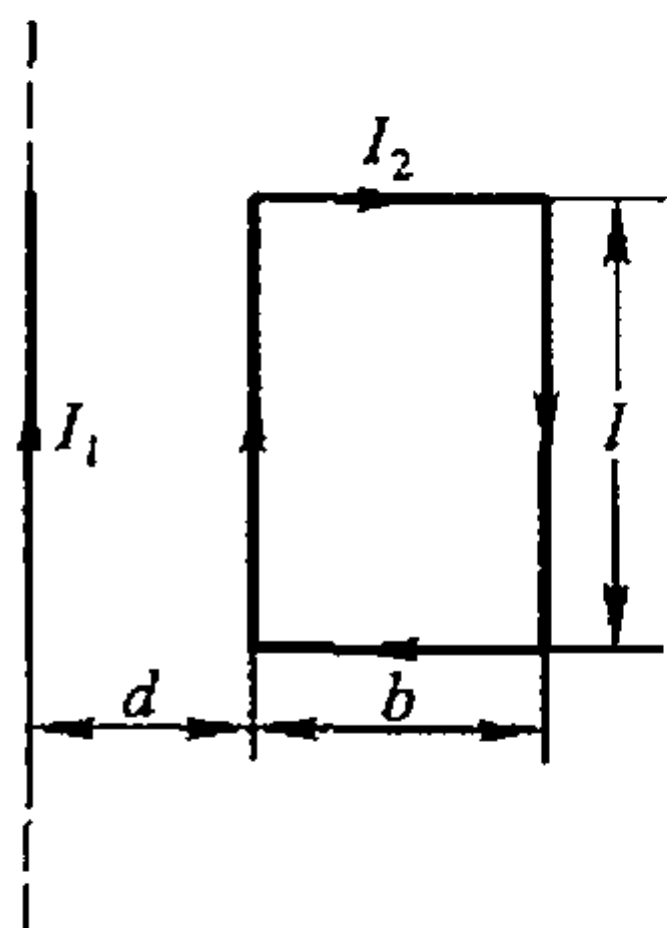
导电物体的宽度为  $d$ , 流过的电流为  $I$ , 受磁场力的大小为

$$F = \int dF = \int IB dy = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_r^{r+d} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{d + 2r - y} \right) dy = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d+r}{r}$$

$F$  的方向向右.

8-39. 如图所示, 在长直导线旁有一矩形线圈, 导线中通有电流  $I_1 = 20 \text{ A}$ , 线圈中通有电流  $I_2 = 10 \text{ A}$ . 已知  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 9 \text{ cm}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$ , 求矩形线圈上受到的合力是多少?

分析: 矩形线圈与无限长直电流  $I_1$  共面,  $I_1$  的磁感应强度  $B_1$  垂直于纸面向里, 随距离的增大而减小. 因此, 线圈的左右两条边所受磁场力的方向相反, 大小不同, 上下两条边所受磁场力的方向相反, 大小相同. 所以, 线圈所受合力在图示平面内向左.



习题 8-39 图

解: 线圈左段导线受力大小为

$$F_{\text{左}} = I_2 B_1 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

方向向左. 右段导线受力大小为

$$F_{\text{右}} = I_2 B'_1 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)}$$

方向向右. 线圈所受合力的大小为

$$F = F_{\text{左}} - F_{\text{右}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \left[ \frac{1}{d} - \frac{1}{(d+b)} \right] \approx 7.2 \times 10^{-4} \text{ N}$$

合力  $F$  的方向向左.

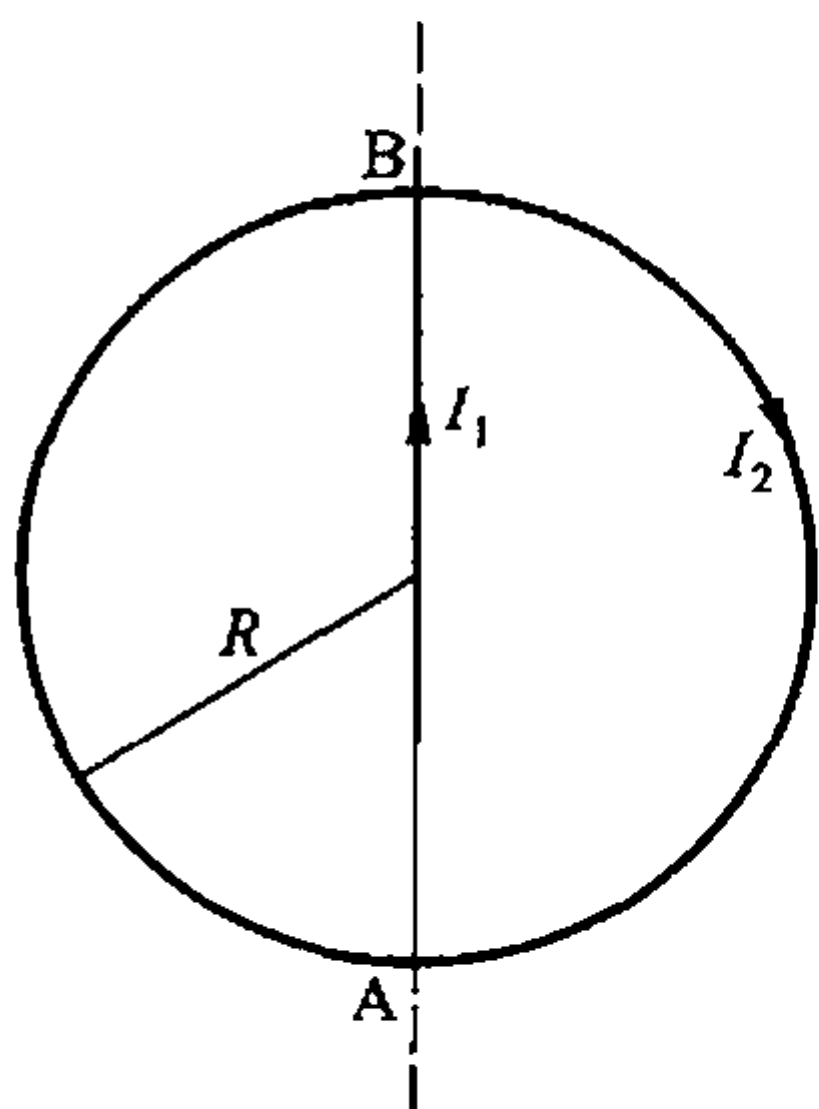
8-40. 半径为  $R$  的平面圆形线圈中载有电流  $I_2$ , 另一无限长直导线 AB 中

载有电流  $I_1$ .

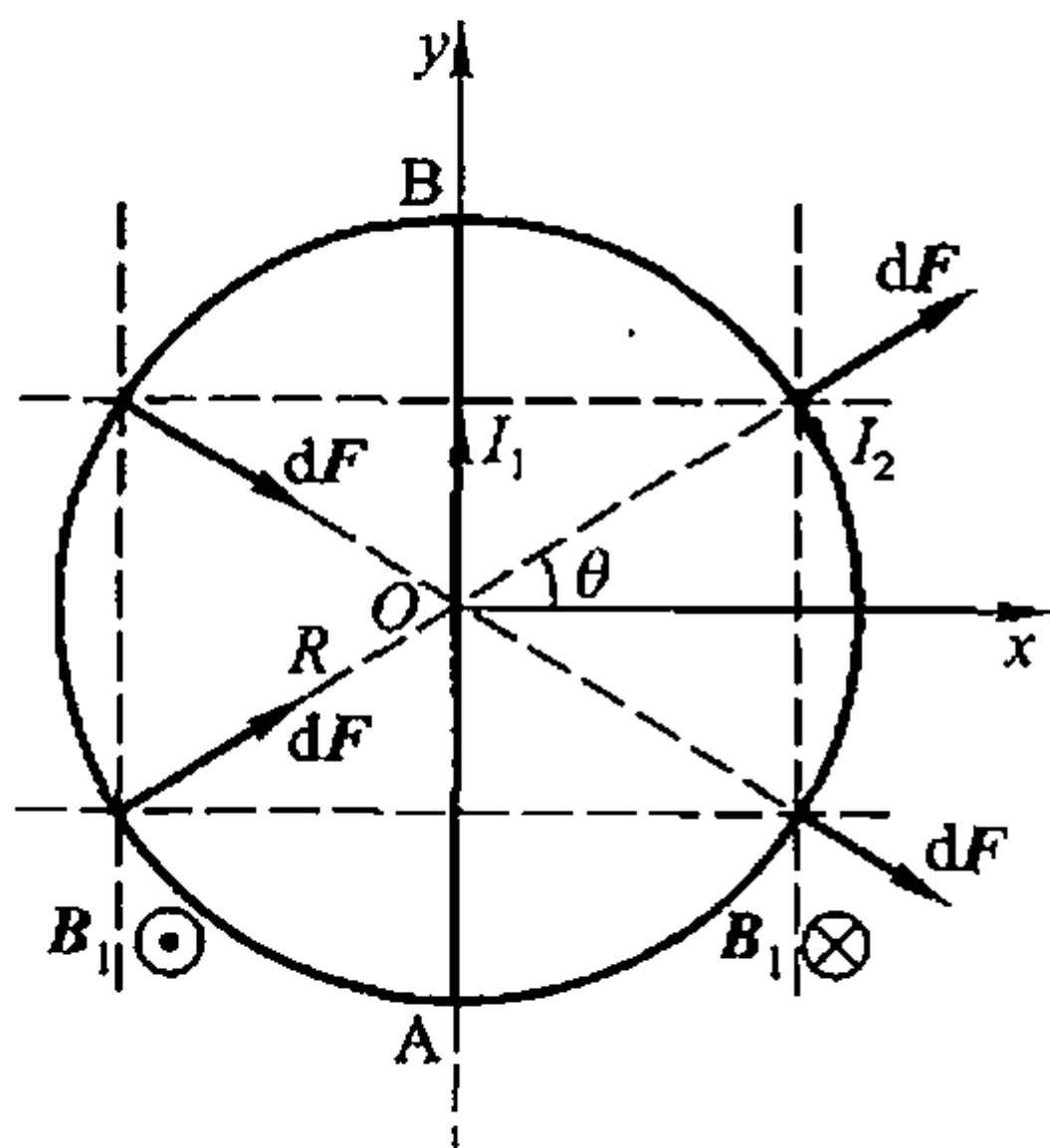
(1) 设 AB 通过圆心, 并和圆形线圈在同一平面内 (如图), 求圆形线圈所受的磁场力;

(2) 若 AB 与圆心相距  $d (d > R)$ , 仍在同一平面内, 求圆形线圈所受的磁场力.

分析: 圆形电流  $I_2$  在无限长载流导线  $I_1$  的非均匀磁场中, 根据圆线圈上各电流元受安培力的对称性, 分析并求出合力.



习题 8-40 图



解图 8-40a

解: (1) 如解图 8-40a 所示, 若在圆线圈上对称地取四个电流元  $I_2 dl$ , 很容易看出: 它们所处位置的磁感应强度  $B_1$  的方向相反, 大小相同, 为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R \cos \theta}$$

各电流元受力的方向不同, 但大小相同, 为

$$dF = I_2 B_1 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi R \cos \theta}$$

根据这个对称性分析可知, 整个圆线圈所受合力沿  $Ox$  轴正方向; 在  $Oy$  方向的合力为零, 即

$$F_y = 0, \quad F = F_x$$

对圆线圈上任一电流元所受磁力在  $Ox$  方向的分量  $dF_x$  积分, 即可得到整个圆线圈所受合力. 有

$$F = F_x = \int dF_x = \int dF \cos \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2}$$

即

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} i$$

(2) 如解图 8-40b 所示, 圆线圈在  $I_1$  的右侧时, 所有电流元处  $B_1$  的方向

一致,都垂直纸面向里,但  $B_1$  的大小随距离变化,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + R\cos\theta)}$$

圆线圈上对称的四个电流元  $I_2 dl$ ,所受磁场力的大小都可表示为

$$dF = I_2 B_1 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R d\theta}{2\pi(d + R\cos\theta)}$$

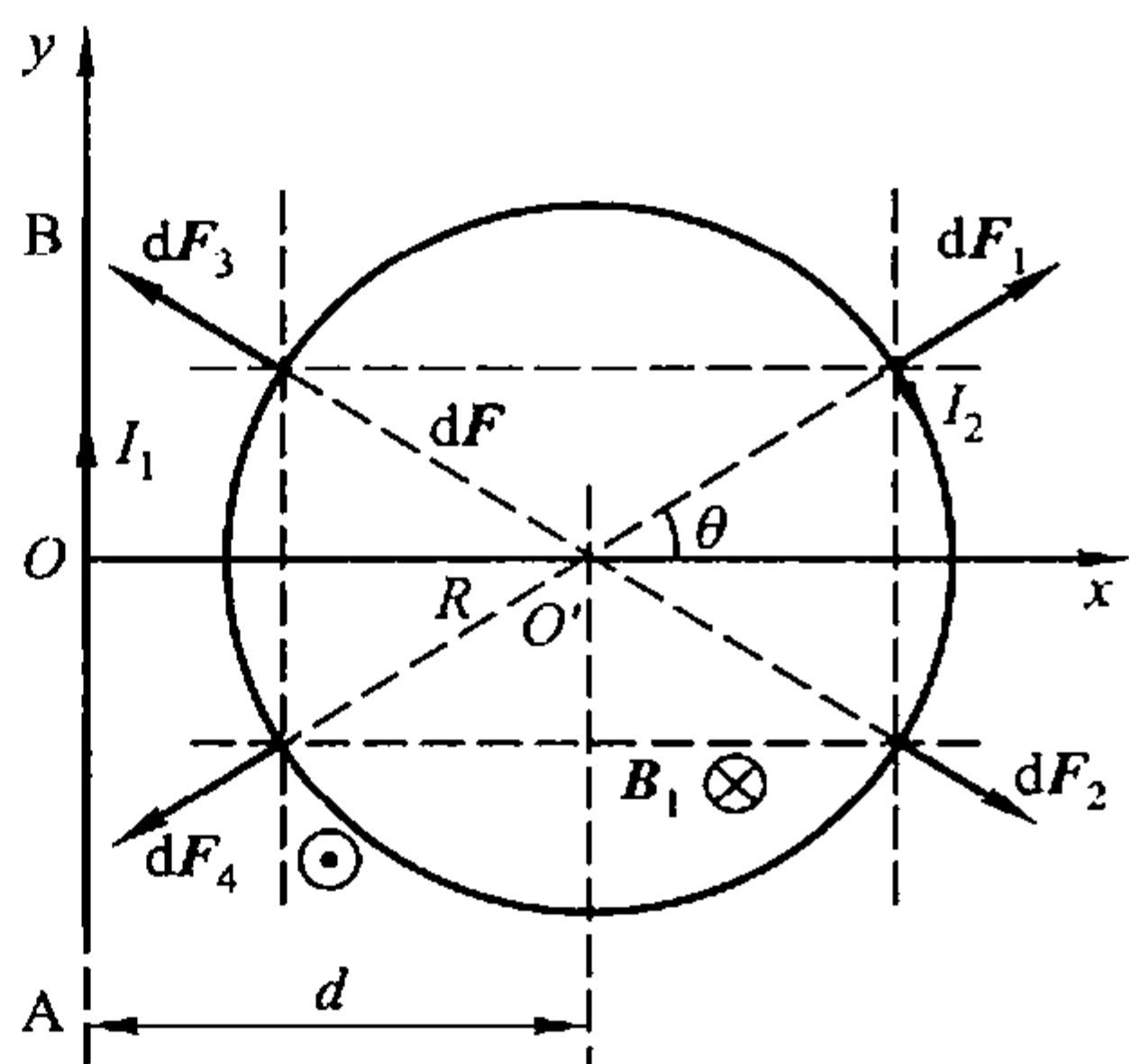
由解图 8-40b 可见,圆线圈上各电流元的受力  $dF$  仍有一定的对称性:都沿圆线圈的半径向外,同一  $x$  处的一对电流元  $dF$  的大小相同,如  $dF_1$  和  $dF_2$ ,  $dF_3$  和  $dF_4$ ,它们在  $Oy$  方向的合力为零. 所以,整个圆线圈在  $y$  方向所受合力为零,有

$$F_y = 0$$

圆线圈受合力在  $Ox$  方向,大小为

$$\begin{aligned} F &= F_x = \int dF_x = \int dF \cos\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos\theta d\theta}{2\pi(d + R\cos\theta)} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{d}{d + R\cos\theta}\right) d\theta \\ &= \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{2d}{\sqrt{d^2 - R^2}}\right) < 0 \end{aligned}$$

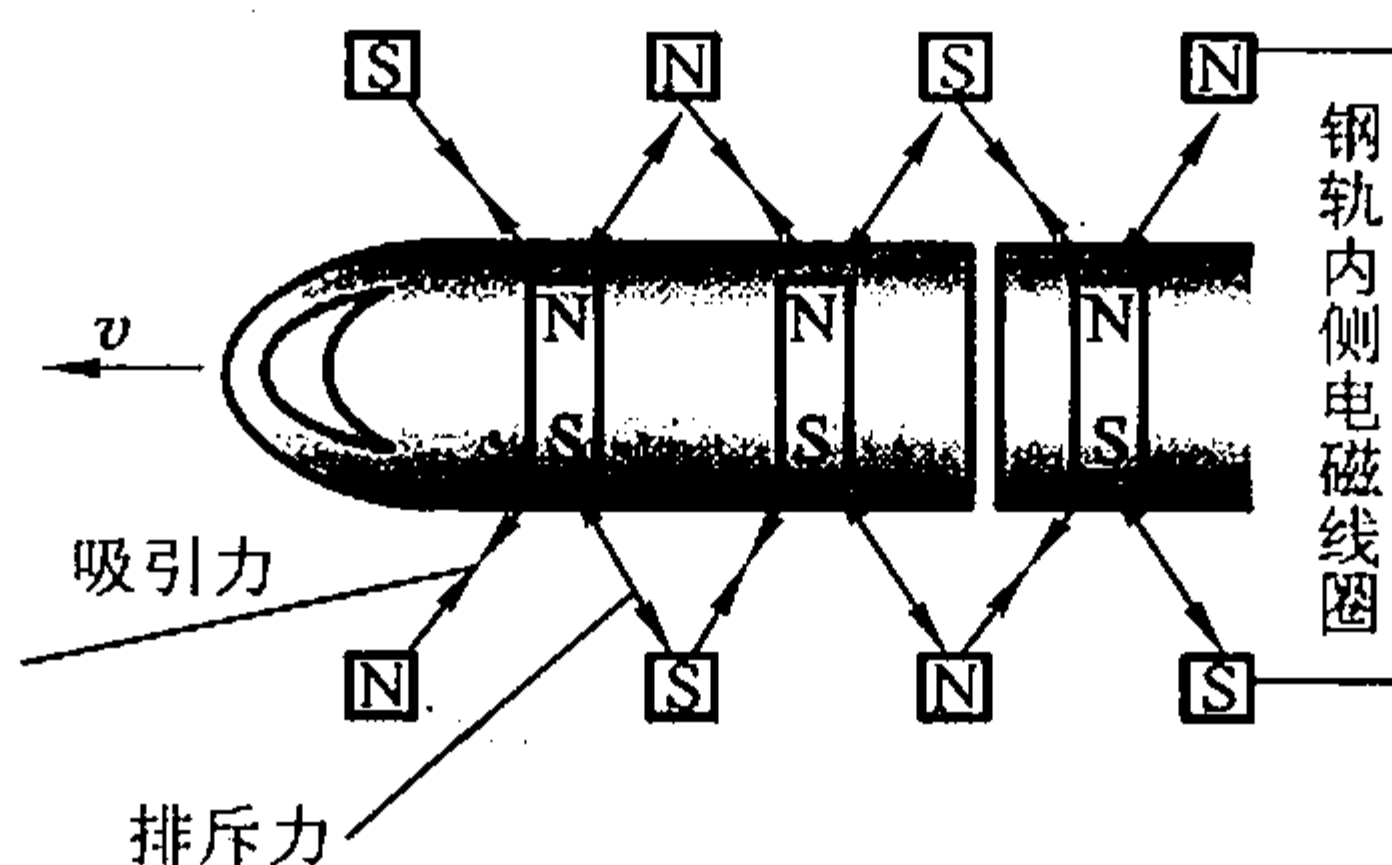
由于  $F_x < 0$ ,所以整个圆线圈受磁场力的方向沿  $Ox$  轴负向.



解图 8-40b

本题用到积分 
$$\int \frac{d\theta}{d + R\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{d^2 - R^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{d-R}{d+R}} \tan \frac{\theta}{2}\right)$$

**8-41.** 假定图中磁悬浮列车的速度达 400 km/h,列车上两相邻推进磁体的距离为 10.0 m,问钢轨内侧推进线圈的交变电流频率为多少才能对列车产生驱动力,使之高速前进?



习题 8-41 图

分析：在推进线圈中，交变电流的方向改变时，线圈磁场的极性也相应地变换，使磁悬浮列车向前运动 10 m. 在交变电流变化的一个周期时间内，磁悬浮列车向前运动两个磁体距离，即 20 m.

解：磁悬浮列车的速度为

$$v = \frac{400 \times 10^3}{3600} \text{ m/s} = 111 \text{ m/s}$$

交变电流的频率应为

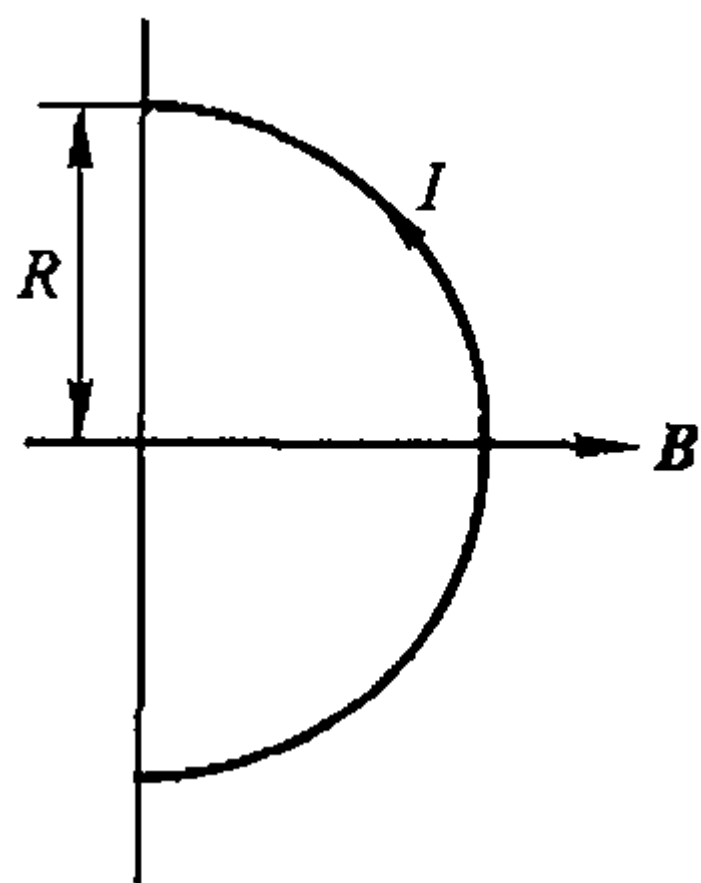
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{L} = \frac{111}{20} \text{ Hz} = 5.55 \text{ Hz}$$

8-42. 一半径为  $R=0.1 \text{ m}$  的半圆形闭合线圈，载有电流  $I=10 \text{ A}$ ，放在均匀磁场中，磁场方向与线圈面平行，如图所示. 已知  $B=0.5 \text{ T}$ . 求：

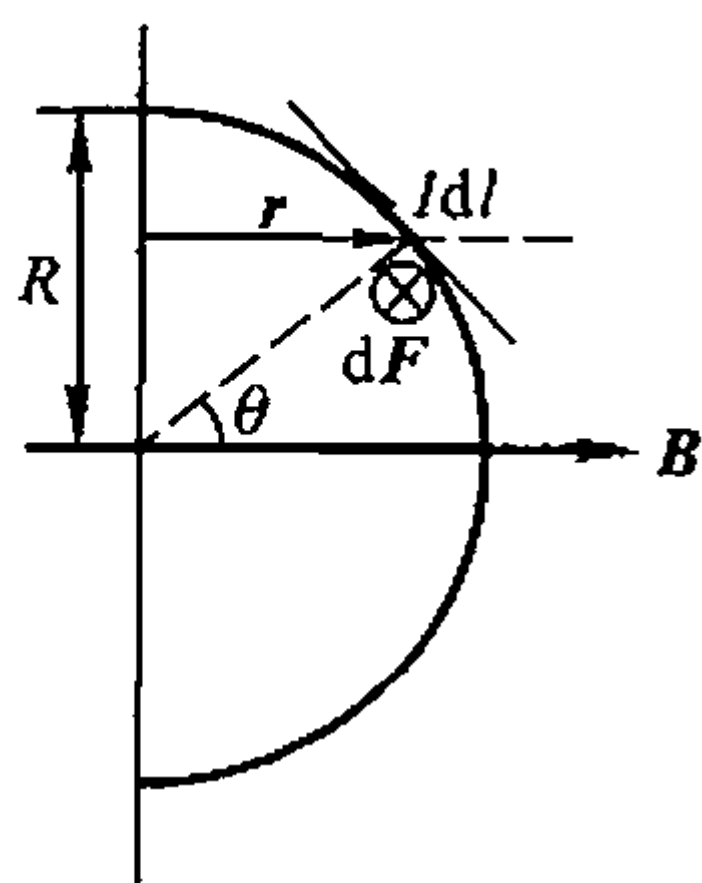
- (1) 线圈所受力矩的大小和方向(以直径为转轴)；
- (2) 若线圈受力矩的作用转到线圈平面与磁场垂直的位置，则力矩做功多少？

分析：在均匀磁场中，刚性载流线圈受磁力的合力为零. 对确定转轴的磁矩，可由力矩的定义求得，也可根据载流线圈的磁矩求得.

磁矩使线圈转到稳定平衡位置，即线圈平面法向  $\mathbf{e}_n$  与  $\mathbf{B}$  平行的位置. 在此过程中，为保持电流  $I$  不变，电源电动势作的功转化为线圈转动的机械能.



习题 8-42 图



解图 8-42

解：(1) 如解图 8-42 所示，在线圈的圆弧段上任取一个电流元  $Idl$ ，受磁场力为

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$d\mathbf{F}$  的方向如图所示，大小为

$$dF = IBdl\cos\theta$$

$d\mathbf{F}$  对转轴(线圈直径)的力矩为

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$$

由图可知,圆弧段上所有电流元所受的磁力  $dF$ ,对转轴的力矩  $dM$  的方向相同,都沿直径轴向上. 所以,整个线圈所受力矩的大小为

$$M = \int dM = IB \int r \cos \theta dl$$

由于  $r = R \cos \theta$ ,  $dl = R d\theta$ , 故有

$$M = \int dM = IB R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} B I \pi R^2 = 7.85 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

上述结果,用均匀磁场中载流线圈受磁矩  $M = m \times B$  同样可以求得,式中  $m = I S e_n$  为线圈的磁矩,  $e_n$  垂直线圈平面向外,  $M$  沿直径轴向上. 所以有

$$M = m B \sin \frac{\pi}{2} = I S B = \frac{1}{2} I B \pi R^2 = 7.85 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 保持  $I$  不变,磁矩做功为

$$A = I \Delta \Phi = I (B S - 0) = I B \frac{\pi R^2}{2} = 7.85 \times 10^{-2} \text{ J}$$

**8-43.** 如图所示,一矩形线圈可绕  $Oy$  轴转动,线圈中载有电流  $0.10 \text{ A}$ ,放在磁感应强度  $B = 0.50 \text{ T}$  的均匀磁场中,  $B$  的方向平行于  $Ox$  轴,求维持线圈在图示位置时的力矩.

**分析:** 维持线圈在图示位置所需的外力矩应与线圈所受磁矩的大小相等,方向相反.

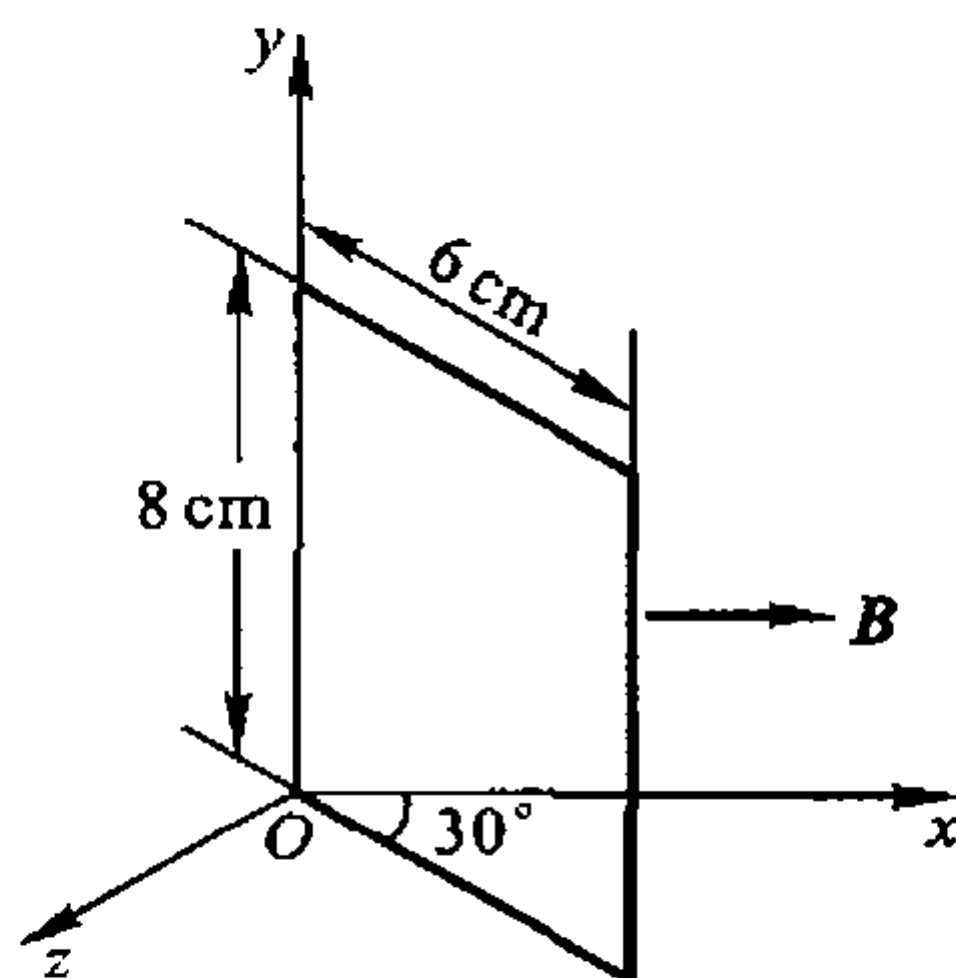
**解:** 设线圈中电流顺时针流动,线圈受磁矩大小为

$$M_m = m B \sin \alpha = I S B \sin 60^\circ = 2.08 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$M_m$  的方向沿  $y$  轴向下,外力矩  $M$  应与其等大、反向,即

$$M = -M_m$$

$M$  的方向沿  $y$  轴向上.



习题 8-43 图

**8-44.** 一螺线管长为  $30 \text{ cm}$ , 直径为  $15 \text{ mm}$ , 由绝缘的细导线密绕而成, 每厘米绕有  $100$  匝, 当导线中通以  $2.0 \text{ A}$  的电流后, 把此螺线管放到  $B = 4.0 \text{ T}$  的均匀磁场中. 求:

(1) 螺线管的磁矩;

(2) 螺线管所受力矩的最大值.

**解:** (1) 载流螺线管的磁矩

$$m = N I S = 30 \times 100 \times 2 \times \pi \left( \frac{15 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 \text{ A} \cdot \text{m}^2 = 1.06 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

(2) 螺线管所受力矩最大值为  $M_{\max} = mB \sin \frac{\pi}{2} \text{ N} \cdot \text{m} = 4.2 \text{ N} \cdot \text{m}$

## 7. 有磁介质时的磁场和磁化强度的计算

8-45. 一均匀磁化的介质棒, 其直径为 1 cm, 长为 20 cm, 磁化强度为 1 000 A/m. 求磁棒的磁矩.

解: 由磁化强度  $M = \frac{\sum m}{V}$

得磁棒的磁矩  $|\sum m| = MV = M\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 l = 1.57 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2$

8-46. 一均匀磁化棒, 直径为 2 cm, 长为 50 cm, 它的磁矩为  $10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . 求棒表面上磁化面电流线密度.

解: 铁棒的磁化面电流密度为  $\alpha_s = M = \frac{|\sum m|}{V} = 6.37 \times 10^7 \text{ A/m}$

8-47. 一均匀磁化棒的体积为  $1\,000 \text{ cm}^3$ , 其磁矩为  $800 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . 如棒内的磁感应强度为  $0.1 \text{ Wb/m}^2$ , 求棒内磁场强度的值.

解: 均匀磁化棒内的磁场强度、磁感应强度和磁化强度的关系为

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

式中

$$M = \frac{\sum m}{V}$$

设  $H$ 、 $B$ 、 $M$  三者方向相同, 有

$$H = \frac{B}{\mu_0} - \frac{|\sum m|}{V}$$

代入数据可得

$$H = -7.20 \times 10^5 \text{ A/m}$$

式中“-”表示  $H$  与  $B$  方向相反.

8-48. 螺绕环中心周长  $l = 10 \text{ cm}$ , 环上均匀密绕线圈  $N = 200$  匝, 线圈中通有电流  $I = 100 \text{ mA}$ .

(1) 求管内的磁感应强度  $B_0$  和磁场强度  $H_0$ ;

(2) 若管内充满相对磁导率  $\mu_r = 4\,200$  的磁性物质, 则管内的  $B$  和  $H$  是多少?

(3) 磁性物质内由导线中电流产生的  $B_0$  和由磁化电流产生的  $B'$  各是多少?

分析：均匀密绕螺绕环内的磁场强度  $H$  呈同心圆分布，可由安培环路定理求出。对于细螺绕环，管内的  $H$  可近似为均匀分布。在管内充满均匀磁介质时，可由  $B = \mu H$  得到  $B$ ，利用磁感应强度的叠加原理得到磁化电流产生的  $B'$ 。

解：在螺绕环内作半径为  $r$ ，圆心在环中心的圆形环路， $H$  沿此环路的积分为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = NI$$

得管内的磁场强度大小为

$$H = \frac{N}{2\pi r} I \approx nI$$

(1) 管内为真空时  $H_0$  的大小为

$$H_0 = H = nI = 200 \text{ A/m}$$

磁感应强度的大小为

$$B_0 = \mu_0 H_0 = 2.51 \times 10^{-4} \text{ T}$$

(2) 管内充满磁介质时，磁场强度  $H$  的大小不变，

$$H = nI = 200 \text{ A/m}$$

磁感应强度的大小为

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = 1.06 \text{ T}$$

(3) 磁介质内由导线电流产生的磁感应强度大小为

$$B_0 = 2.51 \times 10^{-4} \text{ T}$$

由磁感应强度的叠加原理可知，磁化电流产生的磁感应强度大小为

$$B' = B - B_0 \approx 1.06 \text{ T}$$

本题中， $B \gg B_0$ ，磁性物质内的磁感应强度主要由磁化电流产生。

**8-49.** 在螺绕环上密绕线圈共 400 匝，环的平均周长是 40 cm，当导线内通有电流 20 A 时，利用冲击电流计测得环内磁感应强度是 1.0 T，计算：

- (1) 磁场强度；
- (2) 磁化强度；
- (3) 磁化率；
- (4) 磁化面电流和相对磁导率。

解：在螺绕环内作半径为  $r$ ，圆心在环中心的圆形环路，由安培环路定理可

得  $H$  沿此环路的积分为  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = NI$

环内磁场强度的大小为

$$H = \frac{N}{2\pi r} I$$

当环的平均周长  $l$  远大于环的截面半径时， $2\pi r \approx l$ ，即  $H \approx NI/l = nI$ 。环内的磁场

强度大小可近似为常数。

(1) 环内磁场强度大小为

$$H = \frac{NI}{l} = nI = 2.0 \times 10^4 \text{ A/m}$$

(2) 由  $H = \frac{B}{\mu_0} - M$  得磁化强度的大小为

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = 7.76 \times 10^5 \text{ A/m}$$

(3) 由  $M = \chi_m H$  得磁化率为

$$\chi_m = \frac{M}{H} = 38.8$$

(4) 由  $M = \alpha_s$  得磁化面电流为

$$I_s = \alpha_s l = Ml = 3.10 \times 10^5 \text{ A}$$

与每匝对应的磁化面电流为

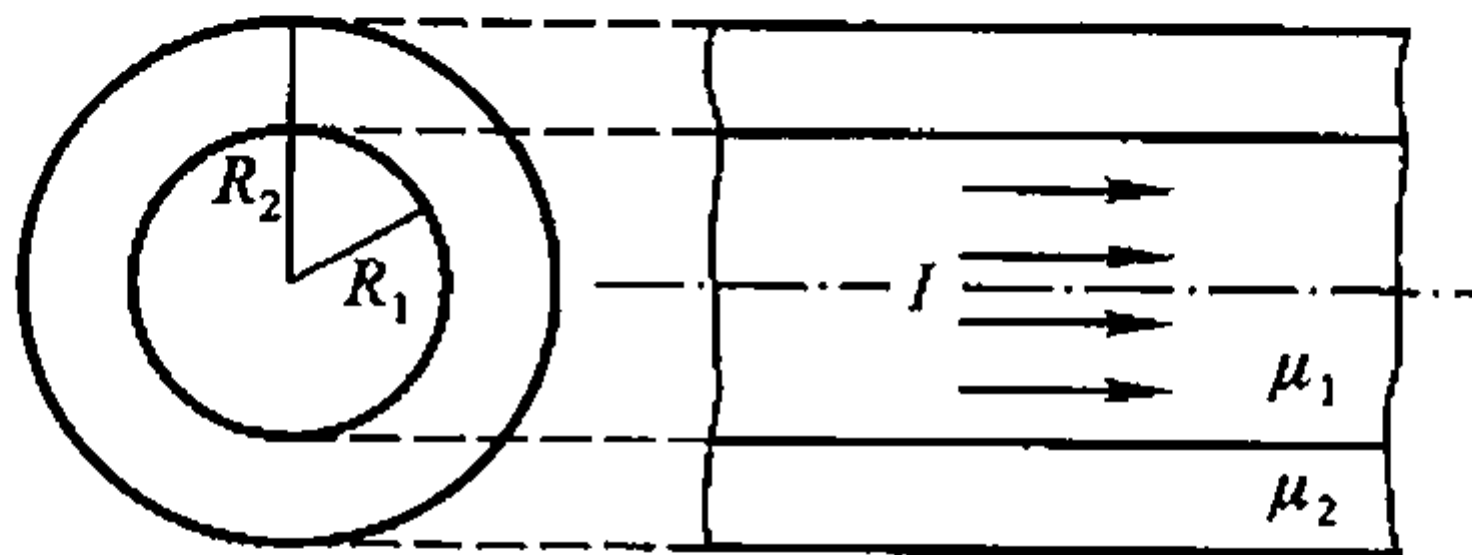
$$i_s = \frac{I_s}{N} = 775 \text{ A}$$

相对磁导率为

$$\mu_r = \chi_m + 1 = 39.8$$

8-50. 一磁导率为  $\mu_1$  的无限长圆柱形直导线, 半径为  $R_1$ , 其中均匀地通有电流  $I$ . 在导线外包一层磁导率为  $\mu_2$  的圆柱形不导电的磁介质, 其外半径为  $R_2$ , 如图所示. 试求:

- (1) 磁场强度和磁感应强度的分布;
- (2) 半径为  $R_1$  和  $R_2$  处表面上磁化面电流线密度.



习题 8-50 图

**分析:** 电流和磁介质的轴对称分布使空间磁场的分布具有轴对称性, 可用安培环路定理求得磁场强度  $H$ . 由于  $H$  的环流形式上与磁介质的磁化电流无关, 故  $H(r)$  是空间坐标的连续函数, 而  $B(r)$  则为分段连续函数. 磁介质界面的磁化面电流线密度由磁化强度  $M$  决定.

**解:** 以圆柱的轴线为圆心, 在垂直于轴线的平面内作半径为  $r$  的环路, 取环路的走向与传导电流  $I$  成右手螺旋关系, 对此环路运用安培环路定理, 有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = \sum I_{i\text{内}}$$

式中  $I_{i\text{内}}$  是环路所围导线内的电流。

(1) 在圆柱形导线内部, 取半径  $r (r < R_1)$  作安培环路, 环路所围传导电流为

$$I_1 = \frac{Ir^2}{R^2}$$

所以, 离轴线  $r (r < R_1)$  处的磁场强度  $H_1$  的大小为

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} \quad (r < R_1)$$

磁感应强度  $B_1$  的大小为

$$B_1 = \mu_1 H_1 = \frac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2} \quad (r < R_1)$$

在磁介质内, 作半径为  $r (R_1 < r < R_2)$  的安培环路, 环路所围传导电流为  $I_2 = I$ 。

所以, 磁介质内离轴线  $r$  处的磁场强度  $H_2$  的大小为

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

磁感应强度  $B_2$  的大小为  $B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$

在磁介质外, 作半径为  $r (r > R_2)$  的安培环路, 环路所围传导电流  $I_3 = I$ 。所以, 磁介质外离轴线  $r$  处的磁场强度  $H_3$  的大小为

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r} \quad (r > R_2)$$

磁感应强度  $B_3$  的大小为  $B_3 = \mu_0 H_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R_2)$

(2) 设  $\mu_{r1} > 1, \mu_{r2} > 1$ , 则由  $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}$  可知, 在磁介质中  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{H}$  同方向。取沿轴向 (即电流的流动方向) 的单位矢量为  $\mathbf{k}$ , 磁介质表面法线的单位矢量为  $\mathbf{e}_n$ 。在距轴线  $R_1$  处, 导线表面的磁化面电流线密度  $\alpha_{s1}$  为

$$\alpha_{s1} = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{e}_{n1} = -\frac{(\mu_{r1} - 1)}{2\pi R_1} I \mathbf{k}$$

$\alpha_{s1}$  与电流  $I$  的方向相反。

在磁导率为  $\mu_2$  的磁介质内表面  $R_1$  处,  $\mathbf{e}_{n2} = -\mathbf{e}_{n1}$ , 磁介质表面的磁化面电流线密度  $\alpha_{s2}$  为

$$\alpha_{s2} = \mathbf{M}_2 \times \mathbf{e}_{n2} = M_2 \mathbf{k} = \frac{(\mu_{r2} - 1)I}{2\pi R_1} \mathbf{k}$$

$\alpha_{s2}$  与电流  $I$  的方向相同。

在两种磁介质的界面  $R_1$  上,磁化面电流线密度的大小为

$$\alpha_s(R_1) = \alpha_{s2} - \alpha_{s1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\pi\mu_0 R_1} I$$

若  $\mu_2 > \mu_1$ , 在  $R_1$  界面上的磁化面电流与  $I$  同方向.

在磁导率为  $\mu_2$  的磁介质外表面  $R_2$  处,  $e_{n2}' = -e_{n2}$ , 界面上的磁化面电流线密度为

$$\alpha_{s2}' = M_2 \times e_{n2}' = -\frac{(\mu_{r2} - 1)}{2\pi R_2} Ik = -\frac{(\mu_2 - \mu_0)}{2\pi\mu_0 R_2} Ik$$

$\alpha_{s2}'$  与电流  $I$  的方向相反.

**8-51.** 铁环的平均直径为 15 cm, 截面积为 7 cm<sup>2</sup>, 在环上均匀地密绕线圈 500 匝.

(1) 当线圈中电流为 0.6 A, 铁的相对磁导率  $\mu_r = 800$  时, 铁心中的磁通量是多少?

(2) 当铁中的磁通量等于  $4.8 \times 10^{-4}$  Wb,  $\mu_r = 1200$  时, 线圈中通有多大的电流?

解: 铁环上单位长度的匝数为  $n = \frac{N}{l}$ ,  $l = \pi d$ ,  $d = 0.15$  m. 铁心中的磁场强度可认为在截面上均匀分布.

(1) 当线圈中电流为  $I_1 = 0.6$  A 时, 铁心中磁场强度  $H_1$  的大小为

$$H_1 = nI_1$$

磁感应强度  $B_1$  的大小为  $B_1 = \mu_1 H_1 = \mu_0 \mu_{r1} nI_1$

通过铁环截面的磁通量为

$$\Phi_{m1} = B_1 S = \frac{\mu_0 \mu_{r1} N I_1 S}{\pi d} = 4.48 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

(2) 利用上式可得  $I_2 = \frac{\Phi_{m2} \pi d}{\mu_0 \mu_{r2} N S} = 0.43$  A

**\*8-52.** 例题 8-4 说明了在实验室中用亥姆霍兹线圈能产生均匀磁场的原理.

(1) 写出线圈轴线上各点磁感应强度  $B$  的变化率函数;

(2) 试编写一计算机程序, 画出两线圈的距离分别是  $r = R, 0.9R$  和  $1.1R$  时线圈轴线上中心至  $0.1R$  范围内磁场变化率的曲线, 并比较所得的三条曲线, 说明为什么仅当  $r = R$  时在轴线上中点附近的磁场基本上是均匀的. (设线圈半径  $R = 0.2$  m, 线圈匝数  $N = 1000$  以及电流  $I = 1$  A.)

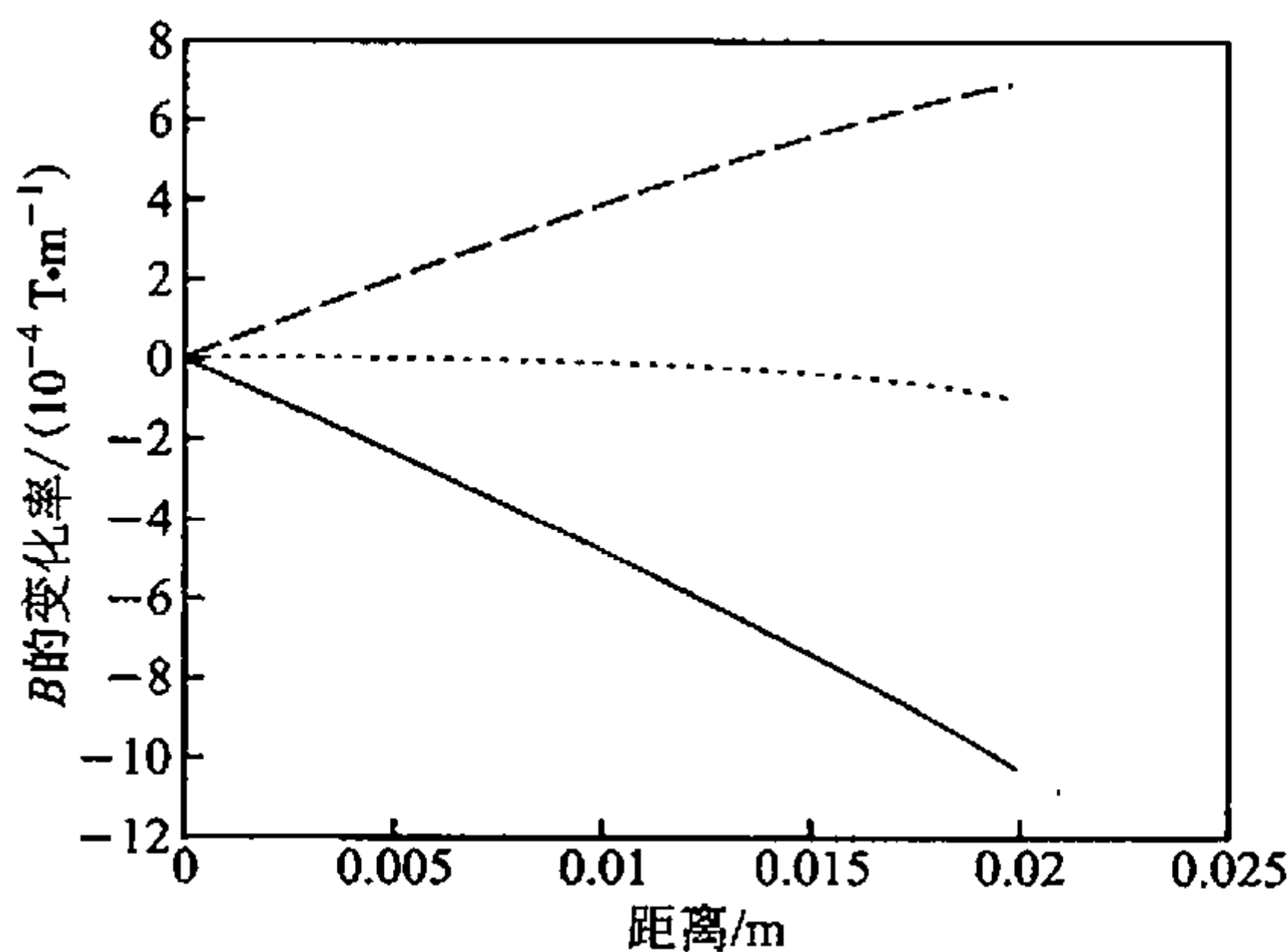
$$\text{解: (1)} \quad \frac{dB}{dx} = -\frac{3\mu_0 IR^2}{2} \left[ R^2 + \left( \frac{r}{2} + x \right)^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \left( \frac{r}{2} + x \right) + \left[ R^2 + \left( \frac{r}{2} - x \right)^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \left( \frac{r}{2} - x \right)$$

(2) 仅当  $r = R$  时在轴线上中点附近磁场变化率几乎为零, 其他情况则随位置几乎线性增大.

#### 参考程序

```
%亥姆后霍兹线圈的磁场的变化率
clear
mu0 = 4 * pi * 10^(-7); N = 1 000; I = 1; R = 0.2; % 设定电流线圈的各参量
A = mu0 * N * I * R^2/2;
r1 = R; r2 = 0.9 * R; r3 = 1.1 * R; % 假设两线圈分别等于, 小于和大于 R
dx = 0.001; % 设定位置步长
x = [0:dx:0.1 * R]; % 仅计算轴线中点附近的磁场(0 ~ 0.1R)
% 下面分别计算 r = R, 0.9R, 1.1R 时的磁场变化率, 即 dB/dx
Bx1 = -3 * A * ((R^2 + (r1/2 + x).^2).^(-5/2) * (r1/2 + x) - (R^2 + (r1/2 - x).^2).^(-5/2) * (r1/2 - x));
Bx2 = -3 * A * ((R^2 + (r2/2 + x).^2).^(-5/2) * (r2/2 + x) - (R^2 + (r2/2 - x).^2).^(-5/2) * (r2/2 - x)); %
Bx3 = -3 * A * ((R^2 + (r3/2 + x).^2).^(-5/2) * (r3/2 + x) - (R^2 + (r3/2 - x).^2).^(-5/2) * (r3/2 - x));
plot(x, Bx1, 'b', x, Bx2, 'k', x, Bx3, 'k:'); % 画出两线圈间磁场大小的曲线图
xlabel('距离/m'); ylabel('B 的变化率/T/m')
```

运算结果如解图 8-52 所示.



解图 8-52

# 第九章

## 电磁感应 电磁场理论

### 一、教学基本要求

1. 掌握法拉第电磁感应定律,理解动生电动势和感生电动势的概念和规律.
2. 理解自感系数和互感系数的定义和意义.
3. 理解磁能密度、磁场能量的概念,能分析、计算简单对称情况下磁场的能量.
4. 理解位移电流概念和全电流环路定理,麦克斯韦方程组积分形式及其物理意义.
5. 了解电磁场的物质性和电磁场量的相对性.

### 二、本章习题分类

1. 法拉第电磁感应定律和楞次定律的应用
2. 动生电动势的计算
3. 感生电动势和感生电场的计算
4. 自感和互感的计算
5. 磁能的计算
6. 位移电流和全电流环路定理的应用
7. 电磁场量的相对性

### 三、习题分析和解答

1. 法拉第电磁感应定律和楞次定律的应用

9-1. 如图所示,通过回路的磁场线与线圈平面垂直,且指向图面,设磁通量依如下关系变化:

$$\Phi = 6t^2 + 7t + 1$$

式中  $\Phi$  的单位为  $\text{mWb}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ . 求  $t=2$  时, 回路中的感生电动势的量值和方向.

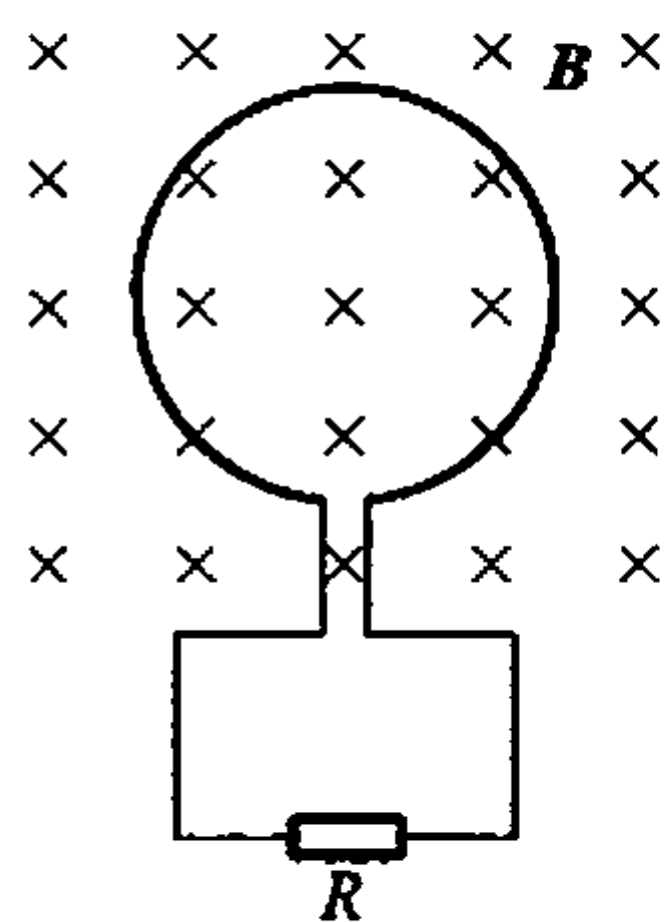
解: 取回路的绕行方向为顺时针, 在开始计时后, 通过图示回路的磁通量  $\Phi > 0$ .  $t$  时刻在回路中的感生电动势为

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -(12t+7) \times 10^{-3} \text{ V}$$

$t=2 \text{ s}$  时的电动势为

$$\mathcal{E}_i = -3.1 \times 10^{-2} \text{ V}$$

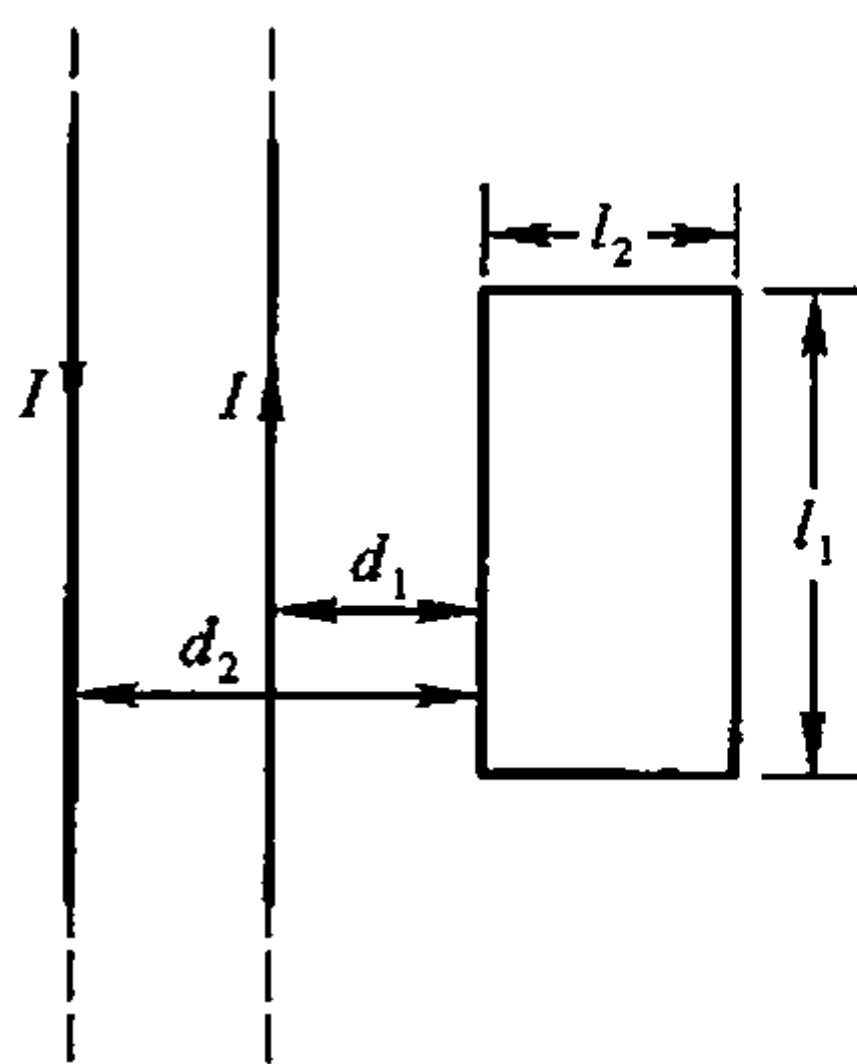
式中“ $-$ ”号表明, 电动势的方向与设定的回路绕行方向相反, 为逆时针方向. 这与用楞次定律判断电动势的方向相同. 因为通过回路的原磁通随时间而增加, 所以, 感生电动势的取向应使感生电流的磁通阻碍原磁通的增加, 即取逆时针方向.



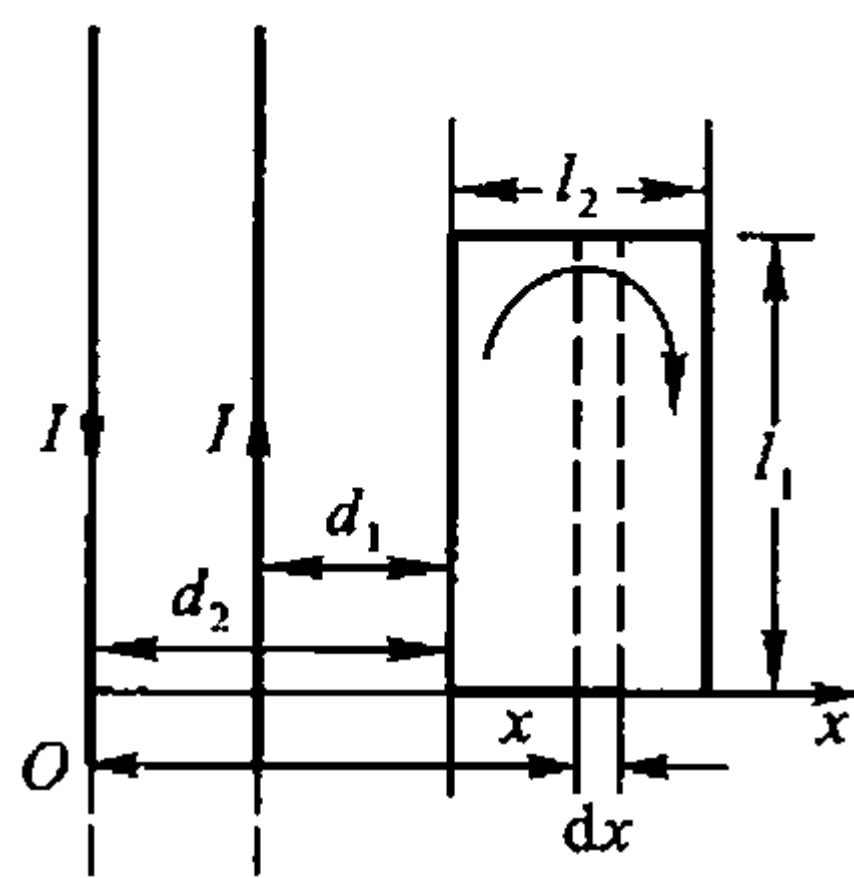
习题 9-1 图

9-2. 在两平行导线的平面内, 有一矩形线圈, 如图所示. 如导线中电流  $I$  随时间变化, 试计算线圈中的感生电动势.

分析: 导线中的电流  $I$  随时间变化时, 通过固定闭合回路的磁通量也随时间变化, 在闭合回路内将产生感生电动势. 空间的磁感应强度  $B$  是两根长直导线激发的合场强.



习题 9-2 图



解图 9-2

解: 取坐标轴  $Ox$ , 如解图 9-2 所示. 两电流在  $x$  处的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d_2+d_1)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$B$  的方向垂直纸面向里.

取顺时针为回路的绕行方向, 通过面元  $dS = l_1 dx$  的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cdot dS = \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d_2+d_1)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right] l_1 dx$$

通过矩形线圈的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{d_2}^{d_2+l_2} \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d_2+d_1)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right] l_1 dx \\ &= \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \left( \ln \frac{d_1+l_2}{d_1} - \ln \frac{d_2+l_2}{d_2} \right)\end{aligned}$$

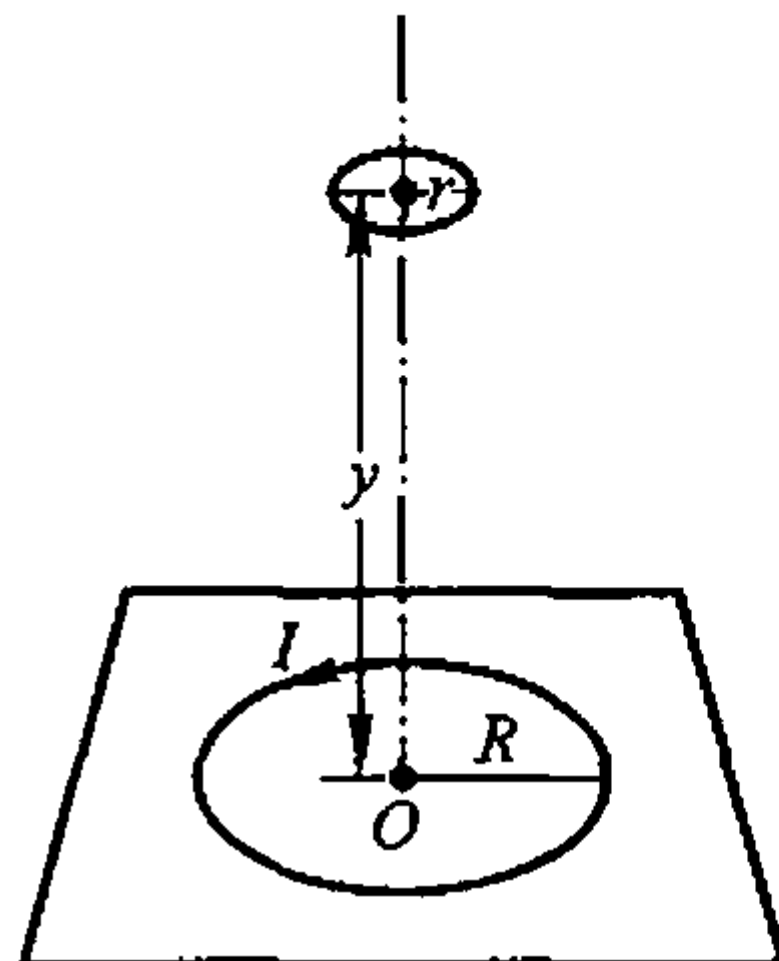
矩形线圈中的感生电动势为

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \left( \ln \frac{d_1+l_2}{d_1} - \ln \frac{d_2+l_2}{d_2} \right) \frac{dI}{dt}$$

当  $\frac{dI}{dt} > 0$  时, 有  $\mathcal{E}_i < 0$ , 表明回路中感生电动势的方向与绕行方向相反, 为逆

时针. 若  $\frac{dI}{dt} < 0$ , 则有  $\mathcal{E}_i > 0$ , 回路中感生电动势的方向与绕行方向一致.

**9-3.** 如图, 具有相同轴线的两个导线回路, 小的回路在大的回路上面距离  $y$  处,  $y$  远大于回路的半径  $R$ , 因此当大回路中有电流  $I$  按图示方向流过时, 小回路所围面积  $\pi r^2$  之内的磁场几乎是均匀的. 现假定  $y$  以匀速  $v = dy/dt$  而变化.



习题 9-3 图

- (1) 试确定穿过小回路的磁通量  $\Phi$  和  $y$  之间的关系;
- (2) 当  $y = NR$  时 ( $N$  为整数), 小回路内产生的感生电动势;

- (3) 若  $v > 0$ , 确定小回路内感应电流的方向.

**分析:** 大回路中有电流  $I$  时, 其轴线上的磁感应强度随轴 ( $y$ ) 变化, 但在垂轴小面积内的磁感应强度可近似为均匀的. 所以通过小回路所围面积的磁通量可由  $y$  处的均匀磁场得出. 当小回路沿轴向运动时, 磁通量随  $y$  变化, 在小回路中将产生电动势.

**解:** 取坐标轴  $Oy$  向上为正, 取小回路的绕行方向与大回路电流流向相同, 即小回路的面法向向上.

- (1) 大回路电流在  $y$  处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

$B$  的方向向上.  $y \gg R$  时, 有

$$B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2y^3}$$

通过小回路的磁通量为

$$\Phi = B \cdot S = B \pi r^2 = \frac{\mu_0 I \pi r^2 R^2}{2y^3}$$

$\Phi$  随小回路的位置  $y$  而变小.

(2) 小回路以匀速  $v = \frac{dy}{dt}$  运动时, 小回路中的电动势为

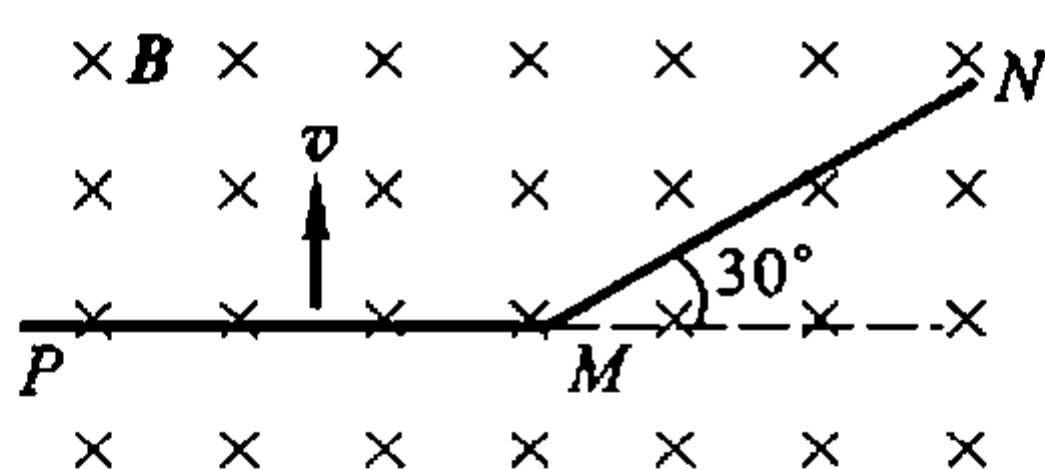
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\mu_0 I \pi r^2 R^2}{2y^4} \frac{dy}{dt} = \frac{3\mu_0 I \pi r^2 R^2}{2y^4} v$$

$y = NR$  时的电动势为  $\mathcal{E}_i \Big|_{y=NR} = \frac{3\mu_0 I \pi r^2}{2R^2 N^4} v$ .

(3)  $v = \frac{dy}{dt} > 0$  时, 小回路向上运动.  $\mathcal{E}_i > 0$  表明, 这时小回路中电动势的绕行方向与大回路电流的绕向相同. 在小回路中以感生电流的磁通“补偿”因向上运动而减少的原磁通, 这正是楞次定律所阐明的.

## 2. 动生电动势的计算

9-4.  $PM$  和  $MN$  两段导线, 其长均为 10 cm, 在  $M$  处相接成  $30^\circ$  角, 若使导线在均匀磁场中以速度  $v = 15 \text{ m/s}$  运动, 方向如图, 磁场方向垂直纸面向里, 磁感应强度为  $B = 25 \times 10^{-2} \text{ T}$ . 问  $P$ 、 $N$  两端之间的电势差为多少? 哪一端电势高?



习题 9-4 图

分析: 一段导线上的电动势与导线两端的电势差在数值上相等, 但电动势的方向由电源内部指向电势升高的方向, 而电势差则指向电势降落的方向.

解: 设运动导线上的动生电动势沿  $P \rightarrow M \rightarrow N$ , 即

$$\mathcal{E}_{PN} = \mathcal{E}_{PM} + \mathcal{E}_{MN}$$

式中  $\mathcal{E}_{PM}$  是导线  $PM$  上的动生电动势

$$\mathcal{E}_{PM} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_{PM} = vBl_{PM} \cos \pi = -vBl_{PM}$$

$\mathcal{E}_{MN}$  是导线  $MN$  上的动生电动势

$$\mathcal{E}_{MN} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_{MN} = vBl_{MN} \cos 150^\circ = -vBl_{MN} \cos 30^\circ$$

两式中  $l_{PM} = l_{MN}$ , 所以有

$$\mathcal{E}_{PN} = \mathcal{E}_{PM} + \mathcal{E}_{MN} = -vBl_{PM}(1 + \cos 30^\circ) = -7.0 \times 10^{-3} \text{ V}$$

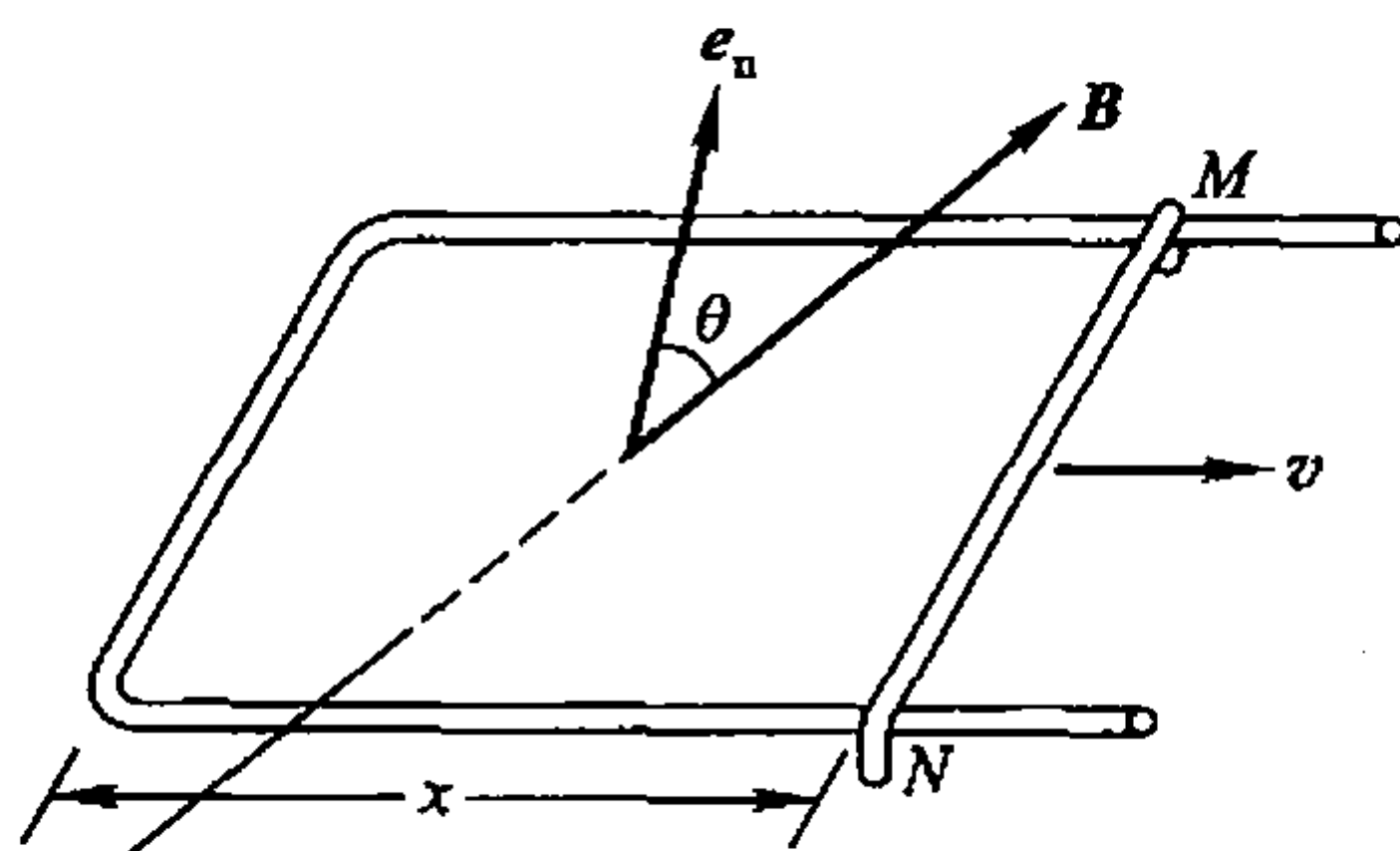
式中“-”号表明, 导线上的动生电动势方向与所设正方向相反, 由  $N$  指向  $P$ , 即沿  $N \rightarrow M \rightarrow P$ .

$P$ 、 $N$  两端间的电势差为

$$U_{PN} = V_P - V_N = -\mathcal{E}_{PN} = 7.0 \times 10^{-3} \text{ V}$$

即运动导线上  $P$  端的电势高。

**9-5.** 一均匀磁场与矩形导体回路面法线单位矢量  $e_n$  间的夹角为  $\theta = \frac{\pi}{3}$  (如图), 已知磁感应强度  $B$  的大小随时间线性增加, 即  $B = kt$  ( $k > 0$ ), 回路的  $MN$  边长为  $l$ , 以速度  $v$  向右运动, 设  $t=0$  时,  $MN$  边在  $x=0$  处. 求任意时刻回路中感应电动势的大小和方向.



习题 9-5 图

**分析:** 运动导线与框架形成闭合回路, 通过回路的磁通量既随磁感应强度的大小  $B$  变化, 也随  $l$  的运动而变化, 即随时间  $t$  变化.

**解:** 回路的面法线方向  $e_n$  表明, 回路的绕行方向为逆时针.

$t$  时刻通过回路的磁通量为

$$\Phi = B \cdot S = B S \cos \theta = k t l x \cos \theta$$

任意时刻  $t$  的电动势为

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -kl \cos \theta \frac{d}{dt}(tx) = -kl \cos \theta \left( t \frac{dx}{dt} + x \right)$$

由于  $v = \frac{dx}{dt}$ ,  $x = vt$ , 所以, 上式为

$$\mathcal{E}_i = -kl \cos \theta (vt + vt) = -2klvt \cos \theta$$

式中“ $-$ ”号表示, 在任意时刻回路中电动势都沿顺时针方向.

**9-6.** 如图所示, 一长直导线通有电流  $I = 0.5 \text{ A}$ , 在与其相距  $d = 5.0 \text{ cm}$  处放有一矩形线圈, 共 1000 匝. 线圈以速度  $v = 3.0 \text{ m/s}$  沿垂直于长导线的方向向右运动时, 线圈中的动生电动势是多少? (设线圈长  $l = 4.0 \text{ cm}$ , 宽  $b = 2.0 \text{ cm}$ ).

**分析:** 闭合回路在长直载流导线的非均匀磁场中运动时, 由于通过回路的磁通量发生变化而产生电动势. 这个电动势也就是回路在运动时, 与电流平行

的两条边因切割磁场线而产生的动生电动势。

解：取坐标轴  $Ox$ ，取顺时针为线圈内电动势的绕行方向。如解图 9-6 所示。无限长直电流在线圈平面内磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$B$  的方向垂直纸面向里。

解 1：如解图 9-6a 所示，线圈运动到图示位置时，动生电动势由两长边因切割磁感应线而产生，对单匝线圈，有

$$\mathcal{E}_i = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB_1 l - vB_2 l$$

式中  $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+b)}$

所以，单匝线圈内的电动势为

$$\mathcal{E}_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} lv - \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+b)} lv$$

线圈内总电动势为

$$\mathcal{E} = N\mathcal{E}_i = N \frac{\mu_0 I lv}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+b} \right) = 6.86 \times 10^{-5} \text{ V}$$

$\mathcal{E}$  沿顺时针绕向。

解 2：如解图 9-6b 所示，设  $t$  时刻矩形线圈的两边距长直电流分别为  $x'$  和  $x' + b$ ，通过回路的磁通链数为

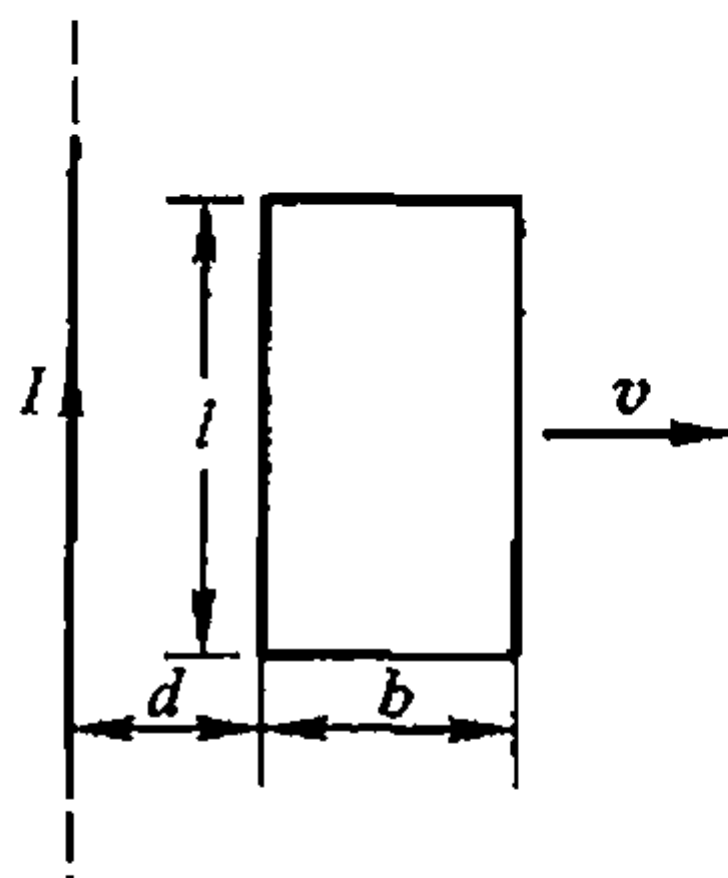
$$\Psi = N\Phi = N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_{x'}^{x'+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = N \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{x' + b}{x'}$$

感生电动势为

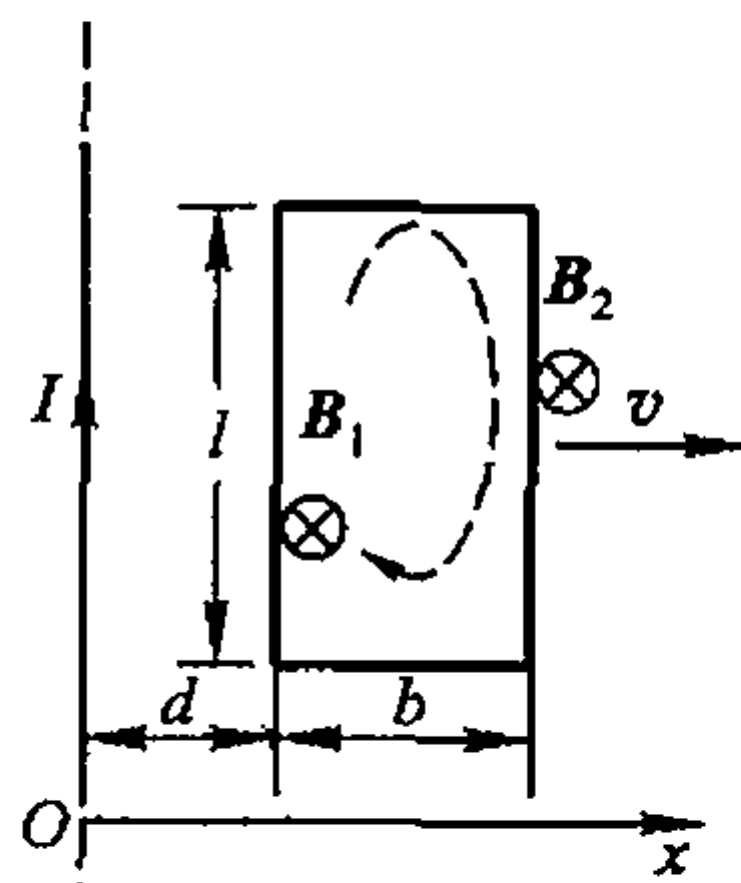
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = N \frac{\mu_0 I l b}{2\pi x'(x' + b)} \frac{dx'}{dt} = N \frac{\mu_0 I l b}{2\pi x'(x' + b)} v$$

$x' = d$  时，有  $\mathcal{E}|_{x'=d} = N \frac{\mu_0 I l b}{2\pi d(d+b)} v = 6.86 \times 10^{-5} \text{ V}$

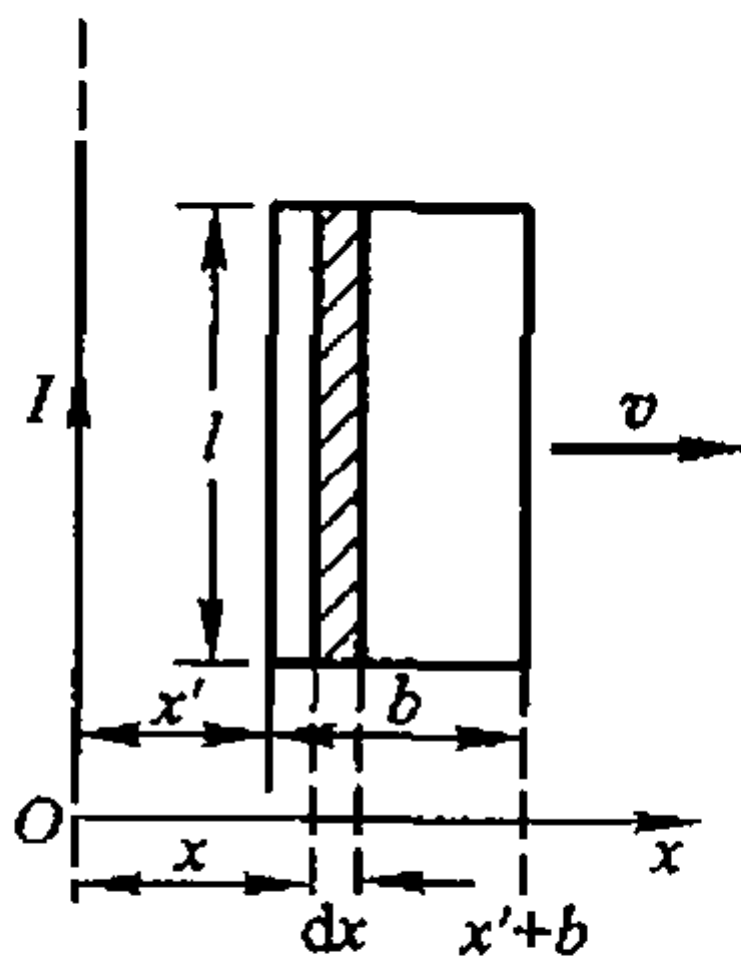
$\mathcal{E} > 0$ ，表明电动势的绕行方向与设定方向一致，即顺时针绕向。



习题 9-6 图



解图 9-6a



解图 9-6b

9-7. 如图所示，导线  $MN$  在导线架上以速度  $v$  向右滑动。已知导线  $MN$  的长为  $50 \text{ cm}$ ， $v = 4.0 \text{ m/s}$ ， $R = 0.20 \Omega$ ，磁感应强度  $B = 0.50 \text{ T}$ ，方向垂直回路平面。试求

(1)  $MN$  运动时所产生的动生电动势；

(2) 电阻  $R$  上所消耗的功率;

(3) 磁场作用在  $MN$  上的力.

分析: 导线  $MN$  在运动中因切割磁感应线而产生的动生电动势, 也就是由于导线的运动而使通过回路的磁通量发生变化所产生的电动势. 这个电动势在回路中形成电流并受安培力, 同时, 在电阻上消耗能量. 这个能量来自外力克服安培力, 使导线  $MN$  能匀速运动而作的功.

解: (1)  $MN$  运动时的动生电动势为

$$\mathcal{E}_i = vBl = 1 \text{ V}$$

$\mathcal{E}_i$  由  $N$  指向  $M$ .

(2) 电阻  $R$  所消耗的功率为

$$P_i = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = 5 \text{ W}$$

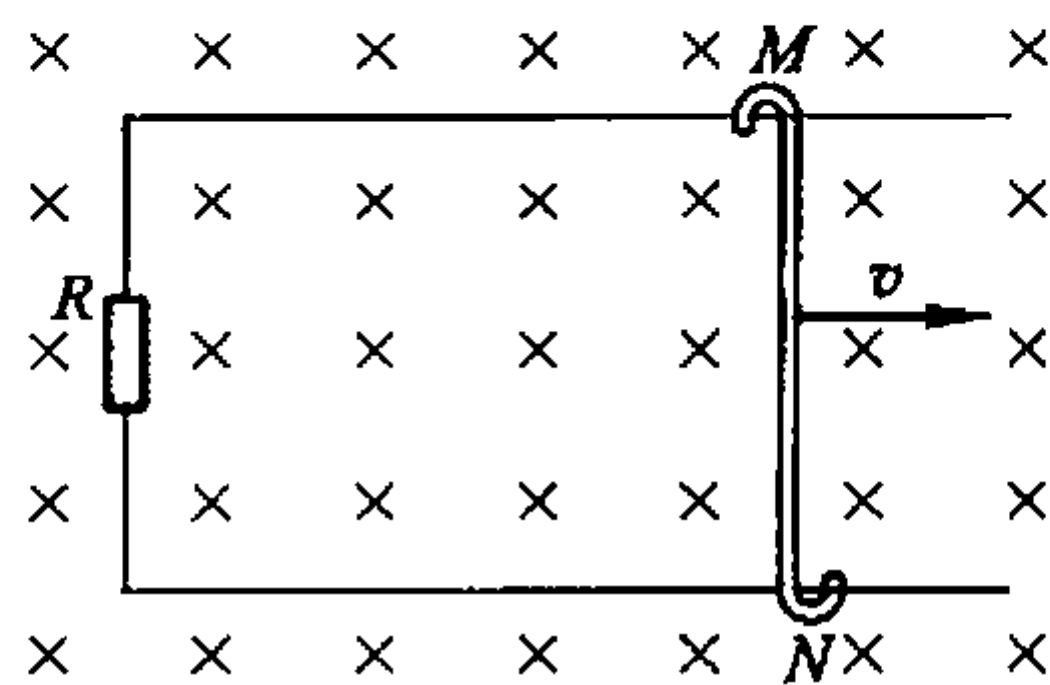
(3) 磁场作用在  $MN$  上的安培力为

$$F = IBl = \frac{1}{R}v(Bl)^2 = 1.25 \text{ N}$$

$F$  的方向向左.

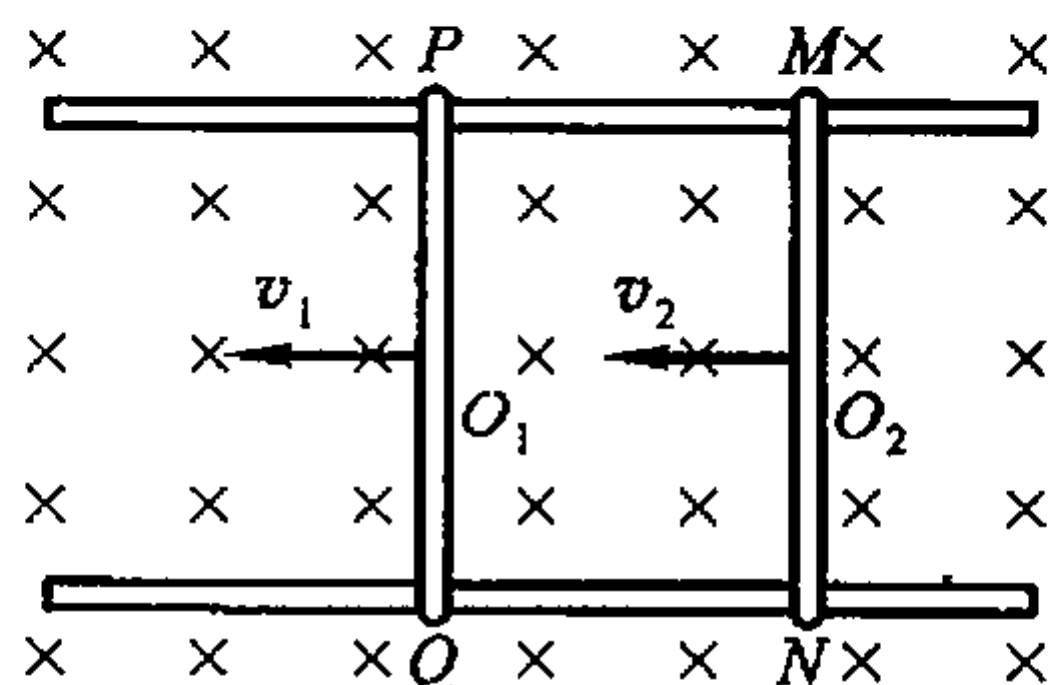
所以, 要使导线  $MN$  能以速度  $v$  向右匀速运动, 需对导线  $MN$  施以向右的力  $F'$ ,  $F'$  与安培力  $F$  的大小相等, 方向相反.  $F'$  的功率为

$$P' = F' \cdot v = 1.25 \times 4 \text{ W} = 5 \text{ W}$$



习题 9-7 图

9-8. 如图所示,  $PQ$  和  $MN$  为两根金属棒, 各长  $1 \text{ m}$ , 电阻都是  $R = 4 \Omega$ , 放置在均匀磁场中, 已知  $B = 2 \text{ T}$ , 方向垂直纸面向里. 当两根金属棒在导轨上分别以  $v_1 = 4 \text{ m/s}$  和  $v_2 = 2 \text{ m/s}$  的速度向左运动时, 忽略导轨的电阻. 试求:



习题 9-8 图

(1) 在两棒中动生电动势的大小和方向, 并在图上标出;

(2) 金属棒两端的电势差  $U_{PQ}$  和  $U_{MN}$ ;

(3) 两金属棒中点  $O_1$  和  $O_2$  之间的电势差.

分析: 金属棒  $PQ$  和  $MN$  在运动中因切割磁感应线产生两个动生电动势, 与导轨形成有源回路. 根据回路中各点电势的变化, 可得到任意两点间的电势差.

解: (1) 根据动生电动势  $\mathcal{E}_i = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$

可知,  $PQ$  上动生电动势的大小为

$$\mathcal{E}_{PQ} = v_1 Bl = 8 \text{ V}$$

由  $P$  指向  $Q$ .

$MN$  上动生电动势的大小为  $\mathcal{E}_{MN} = v_2 Bl = 4 \text{ V}$

由  $M$  指向  $N$ . 如解图 9-8a 所示.

(2) 两根运动金属棒与导轨形成有源回路, 取逆时针为回路的绕行方向, 回路中的电流为

$$I_i = \frac{\sum \mathcal{E}_i}{\sum R_i} = \frac{\mathcal{E}_{PQ} - \mathcal{E}_{MN}}{2R} = \frac{8 - 4}{2 \times 4} \text{ A} = 0.5 \text{ A}$$

$I_i > 0$ , 即电流流向与设定的回路绕行方向一致.

$PQ$  间的电势差由

$$V_P + \mathcal{E}_{PQ} - I_i R = V_Q$$

可得

$$U_{PQ} = V_P - V_Q = I_i R - \mathcal{E}_{PQ} = -6 \text{ V}$$

$MN$  间的电势差由

$$V_N - \mathcal{E}_{MN} - I_i R = V_M$$

可得

$$U_{MN} = -\mathcal{E}_{MN} - I_i R = -6 \text{ V}$$

(3) 由于  $O_1$  和  $O_2$  分别为两金属棒的中点, 因此可作等效回路图如解图 9-8b 所示. 由

$$V_P + \frac{\mathcal{E}_{PQ}}{2} - I_i \frac{R}{2} = V_{O1}$$

和

$$V_{O2} - \frac{\mathcal{E}_{MN}}{2} - I_i \frac{R}{2} = V_M$$

式中  $V_P = V_M$ , 可得  $O_1, O_2$  间的电势差为

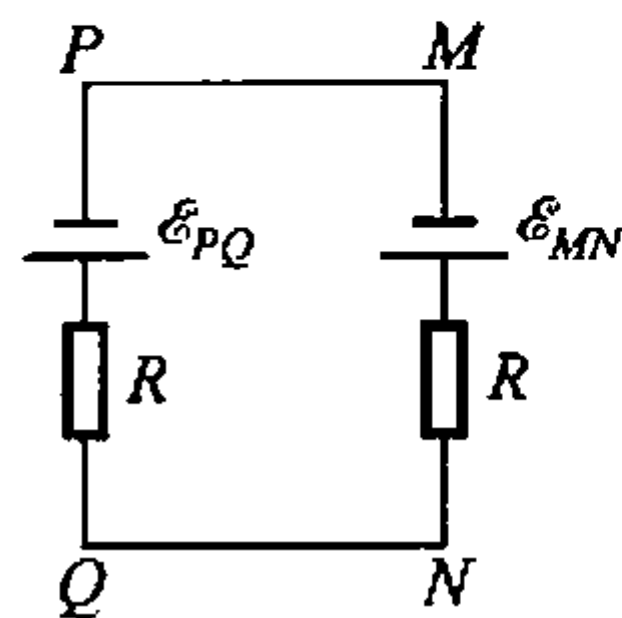
$$U_{12} = V_{O1} - V_{O2} = 0$$

即两金属棒中点  $O_1$  和  $O_2$  等电势.

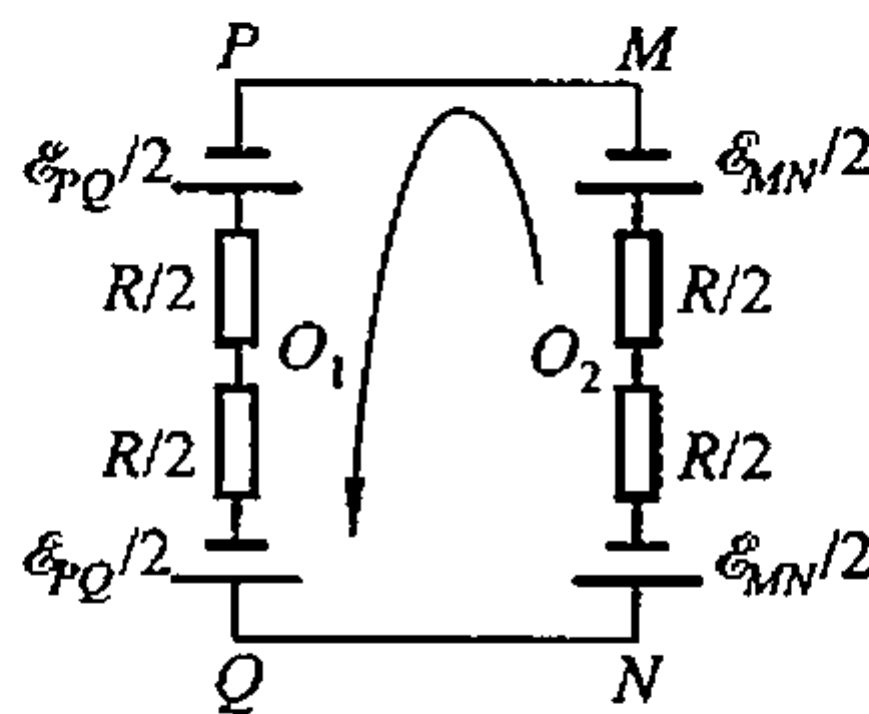
由于  $P, M$  和  $Q, N$  分别等电势, 而两金属棒的电阻和棒上的电动势均匀分布, 因此它们中点间的电势差必然为零.

**9-9.** 一导线  $PQ$  弯成如图的形状(其中  $MN$  是一半圆, 半径  $r = 0.10 \text{ m}$ ,  $PM$  和  $NQ$  段的长度均为  $l = 0.10 \text{ m}$ ), 在均匀磁场 ( $B = 0.50 \text{ T}$ ) 中绕轴线  $PQ$  转动, 转速  $n = 3600 \text{ r/min}$ . 设电路的总电阻(包括电表  $M$  的内阻)为  $1000 \Omega$ , 求导线中的动生电动势和感应电流的频率以及它们的最大值各是多少.

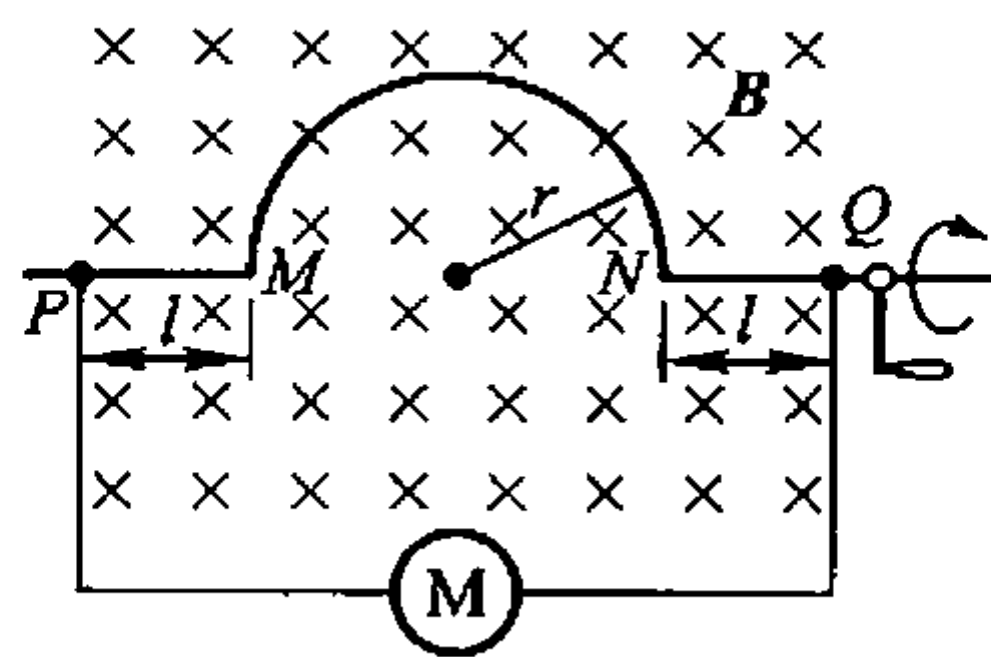
**分析:** 在半圆导线绕轴线转动的过程中, 通过整个回路的磁通量发生了变化, 因此在回路中产生的电动势为动生电动势.



解图 9-8a



解图 9-8b



习题 9-9 图

解：半圆导线转动的角速度为

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi n}{60} = 120\pi \text{ rad/s}$$

式中  $\nu$  是单位时间内转动的周数, 即频率, 为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$$

设开始转动时, 半圆导线处在图示位置, 取回路的绕行方向为顺时针, 则  $t$  时刻通过该回路的磁通量为

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS_1 + BS_2 \cos \omega t$$

式中  $S_1$  是回路的矩形部分面积,  $S_2$  是回路的半圆导线所围面积,  $S_2 = \frac{\pi r^2}{2}$ .

回路中的电动势为

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS_2 \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_m \sin \omega t$$

感应电流为

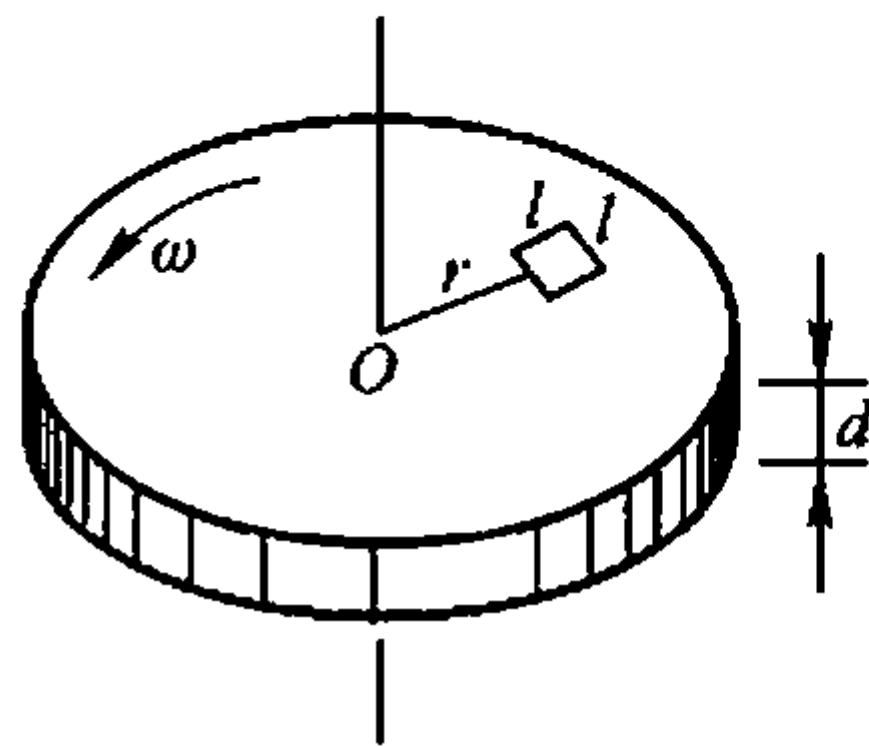
$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = I_m \sin \omega t$$

交变动生电动势和交变感应电流的最大值分别为

$$\mathcal{E}_m = BS_2 \omega = \frac{B\pi r^2 \omega}{2} = 2.96 \times 10^{-4} \text{ V}$$

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = 2.96 \times 10^{-7} \text{ A}$$

**9-10.** 一电磁“涡流”制动器由一电导率为  $\gamma$  和厚度为  $d$  的圆盘组成, 此盘绕通过其中心的轴旋转, 且有一覆盖面积为  $l^2$  的磁场  $\mathbf{B}$  垂直于圆盘. 如图所示, 若面积  $l^2$  在离轴  $r$  处, 当圆盘角速度为  $\omega$  时, 试说明使圆盘慢下来的道理.



习题 9-10 图

解：设  $\mathbf{B}$  垂直于圆盘向下. 圆盘旋转时, 被磁场覆盖部分产生沿径向的动生电动势

$$\mathcal{E}_i = \int \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \int_r^{r+l} \omega r B dr = (r + \frac{1}{2}l) l B$$

$\mathcal{E}_i$  沿径向指向圆心, 式中  $v = r\omega$ ,  $d\mathbf{l} = -dr$ . 所以, 圆盘被磁场覆盖部分可等效为一个电源, 其内阻为

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{ld} = \frac{1}{\gamma d}$$

由于圆盘其他部分的电阻很小, 故流经被磁场覆盖部分的电流可表示为

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \gamma d \left( r + \frac{l}{2} \right) l B$$

$I$  沿半径向圆心方向流动.

被磁场覆盖部分的电流  $I$  受磁场的安培力  $dF = Idl \times B$ , 其方向垂直于半径, 与圆盘的转动方向相反, 对中心轴阻力矩的大小为

$$M = \int r dF = \int_r^{r+l} rIBdr = \gamma dl^2 B^2 \left( r^2 + \frac{3}{2}rl + \frac{7}{12}l^2 \right)$$

由  $M = -\frac{d\omega}{dt}$  可知, 圆盘转动的角速度  $\omega$  将变慢.

若  $B$  垂直于圆盘向上, 由同样的分析, 仍可得到圆盘所受磁力矩使圆盘慢下来的结论.

### 3. 感生电动势和感生电场的计算

9-11. 有一螺线管, 每米有 800 匝. 在管内中心放置一绕有 30 圈的半径为 1 cm 的圆形小回路, 在 0.01 s 时间内, 螺线管中产生 5 A 的电流. 问小回路中产生的感生电动势为多少?

分析: 相对圆形小回路, 可以认为题给螺线管内的磁感应强度是均匀分布的. 当螺线管中的电流变化时, 通过小回路的磁通量也相应变化, 因而形成感生电动势.

解: 螺线管内的均匀磁感应强度大小为

$$B = \mu_0 n I$$

通过小回路的磁通链数为  $\Psi = N\Phi = NBS = \mu_0 N n I \pi r^2$

小回路中的电动势为

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Psi}{dt} = N\mu_0 n \pi r^2 \frac{dI}{dt} = 4.74 \times 10^{-3} \text{ V}$$

式中  $N = 30, n = 800, r = 0.01 \text{ m}, \frac{dI}{dt} = \frac{5 \text{ A}}{0.01 \text{ s}} = 500 \text{ A/s}$

9-12. 电子感应加速器中的磁场在直径为 0.50 m 的圆柱形区域内是均匀的, 若磁场的变化率为  $1.0 \times 10^{-2} \text{ T/s}$ . 试计算离中心距离为 0.10 m、0.50 m、1.0 m 处各点的感生场强.

分析: 感应加速器利用感生电场来加速电子. 圆柱形区域内的匀强磁场随时间变化时, 在圆柱形区域内、外都将激发同心圆分布的感生电场. 根据场分布的对称性, 选取过场点的同轴圆形回路, 可求得各处的感生电场.

解: 以圆柱形轴线到考察点的距离  $r$  为半径, 作闭合回路  $L$ , 所围面积为  $S$ ,  $S$  的法向与  $B$  的方向一致. 设  $L$  上各点感生电场  $E$  的方向处处沿  $L$  的切向. 根据感生电动势的规律, 有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

由对称性可知,在  $L$  上各点处  $E$  的大小不变,并由于均匀磁场的变化率为常量,故有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E 2\pi r = - \frac{dB}{dt} \int_S dS = - \frac{dB}{dt} \pi r^2$$

即可得

$$E = \begin{cases} -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} & (r < R) \\ -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} & (r > R) \end{cases}$$

上述结果表明,当均匀磁场的变化率  $\frac{dB}{dt} < 0$  时,  $E$  的电场线与  $L$  的绕向一致,即处处沿  $L$  的切线方向,当  $\frac{dB}{dt} > 0$  时,则相反.

在圆柱形区域内、外各点处感生电场  $E$  的大小为

$$r_1 = 0.10 \text{ m 时}, r_1 < R, \quad |E_1| = \frac{r_1}{2} \frac{dB}{dt} = 5.0 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$$r_2 = 0.50 \text{ m 时}, r_2 > R, \quad |E_2| = \frac{R^2}{2r_2} \frac{dB}{dt} = 6.25 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$$r_3 = 1.0 \text{ m 时}, r_3 > R, \quad |E_3| = \frac{R^2}{2r_3} \frac{dB}{dt} = 3.13 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

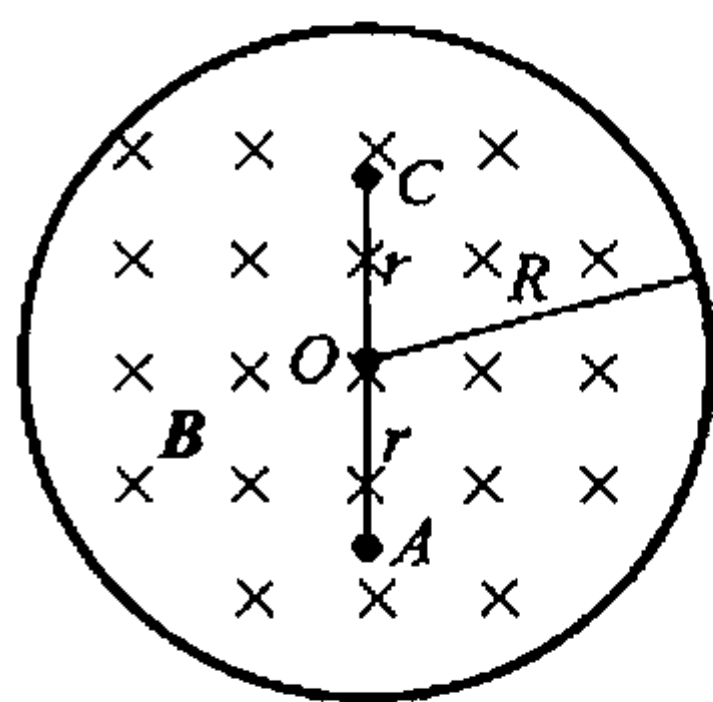
**9-13.** 如图表示一个限定在半径为  $R$  的圆柱体内的均匀磁场  $B$ ,  $B$  以  $1 \times 10^{-2} \text{ T/s}$  的恒定变化率减少,电子在磁场中  $A$ 、 $O$ 、 $C$  各点处时,求它所获得的瞬时加速度(大小和方向). 设  $r = 5.0 \text{ cm}$ .

**分析:** 圆柱形区域内的均匀磁场  $B$  随时间变化时,在圆柱形区域内、外都将激发轴对称分布的感生电场. 根据场分布的对称性,选取过场点的同心圆形回路,可求得各处的感生电场. 电子受圆柱区域内感生电场的作用,获得加速度.

**解:**  $A$ 、 $C$  两点在同一半径的圆周上,由对称性可知,在这两点处感应电场  $E$  的大小相同. 以  $r$  为半径,作顺时针的闭合回路  $L$ ,则  $L$  所围面积  $S$  与  $B$  同方向,设  $L$  上各点  $E$  的方向处处沿  $L$  的切向. 根据

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

可得  $A$ 、 $C$  两处的感应电场为



习题 9-13 图

$$E = E_A = E_C = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$

据题意, 
$$\frac{dB}{dt} = -10^{-2} \text{ T/s} < 0$$

所以 
$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = -\frac{5 \times 10^{-2}}{2} \times (-10^{-2}) \text{ V/m} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$E > 0$  表明, 在 A、C 两处感应电场  $E$  的方向与顺时针绕向  $L$  的切线方向一致.

在 O 点处, 由于  $r=0$ , 故有  $E_O = 0$

电子在 A、C 两处受电场力为

$$F_e = -eE$$

设电子的质量为  $m_e$ , 因受感生电场力而获得的瞬时加速度为

$$a = \frac{F_e}{m_e} = -\frac{e}{m_e} E$$

瞬时加速度的大小为

$$a = \frac{e}{m_e} E = \frac{1.602 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}} \times 2.5 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2 = 4.4 \times 10^7 \text{ m/s}^2$$

在 A、C 两处电子的瞬时加速度  $a$  与该两处的  $E$  反方向. 电子在 O 点处不受力, 故  $a_O = 0$ .

**9-14.** 一电子在电子感应加速器中沿半径为 1.0 m 的轨道作圆周运动, 如它每转一周动能增加 700 eV, 试计算电子轨道内磁通量的平均变化率.

**分析:** 电子在感应加速器中受磁场力作用而作圆周运动, 受感生电场力而沿轨道的切向加速运动. 为使电子在固定轨道上被加速, 感应加速器中的磁场沿径向呈不均匀分布, 其平均磁感应强度为  $\bar{B}$ . 根据质点的动能定理可知, 感生电场力作的功等于电子运动一周后动能的增量.

**解:** 电子绕轨道运动一周, 感生电场力的功等于电子动能的增量,

有 
$$A = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -e \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \Delta E_k$$

由电磁感应定律, 有 
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\bar{\Phi}}{dt}$$

式中  $\bar{\Phi} = \bar{B} \cdot \mathbf{S} = \bar{B} \cdot S, S = \pi R^2$ . 所以

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dt} = \frac{\Delta E_k}{e} = \frac{700 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ Wb/s} = 700 \text{ Wb/s}$$

轨道所围面积内的平均磁感应强度  $\bar{B}$  的变化率为

$$\frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{1}{S} \frac{d\bar{\Phi}}{dt} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{d\bar{\Phi}}{dt} = \frac{700}{3.14 \times 1} \text{ T/s} = 223 \text{ T/s}$$

#### 4. 自感和互感的计算

**9-15.** 在长为 60 cm、直径为 5.0 cm 的空心纸筒上绕多少匝才能得到自感为  $6.0 \times 10^{-3}$  H 的线圈?

解: 由于纸筒的长度远大于直径, 因此绕成的线圈可视为无限长螺线管. 设螺线管的线圈匝数为  $N$ , 有电流  $I$  时, 管内磁感应强度大小为

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

通过整个螺线管的磁通链数为

$$\Psi = NBS = \mu_0 \frac{N^2}{l} I \pi \frac{d^2}{4}$$

自感系数为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi d^2}{4l}$$

线圈匝数为

$$N = \sqrt{\frac{4Ll}{\mu_0 \pi d^2}} = 1.2 \times 10^3 \text{ 匝}$$

**9-16.** 一线圈的自感  $L = 0.05$  mH, 通过线圈的电流为  $I = 0.8$  A, 当电源切断后, 电流实际上是在  $120 \mu\text{s}$  内下降到零. 求线圈中自感电动势的平均值.

解: 线圈中自感电动势的平均值为

$$\bar{\mathcal{E}}_L = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -0.05 \times 10^{-3} \times \left( -\frac{0.8}{120 \times 10^{-6}} \right) \text{ V} = 0.33 \text{ V}$$

**9-17.** 已知一个空心密绕的螺绕环, 其平均半径为 0.10 m, 横截面积为  $6 \text{ cm}^2$ , 环上共有线圈 250 匝, 求螺绕环的自感. 又若线圈中通有 3 A 的电流时, 再求线圈中的磁通量及磁链数.

分析: 对截面线度远小于平均半径的螺绕环, 环内的磁感应强度可近似均匀.

解: 当螺绕环通有电流  $I$  时, 环内磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI$$

式中  $n$  为螺绕环单位长度的匝数  $n = \frac{N}{2\pi R}$

通过整个螺绕环的磁通链数为

$$\Psi = NBS = N\mu_0 nIS$$

螺绕环的自感系数为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 NnS = \mu_0 \frac{N^2}{2\pi R} S = 7.5 \times 10^{-5} \text{ H}$$

当  $I = 3 \text{ A}$  时,通过一匝线圈的磁通量为

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N}{2\pi R} IS = \mu_0 n IS = 9.0 \times 10^{-7} \text{ Wb}$$

通过整个螺绕环的磁通链数为

$$\Psi = NBS = N\mu_0 n IS = 2.25 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

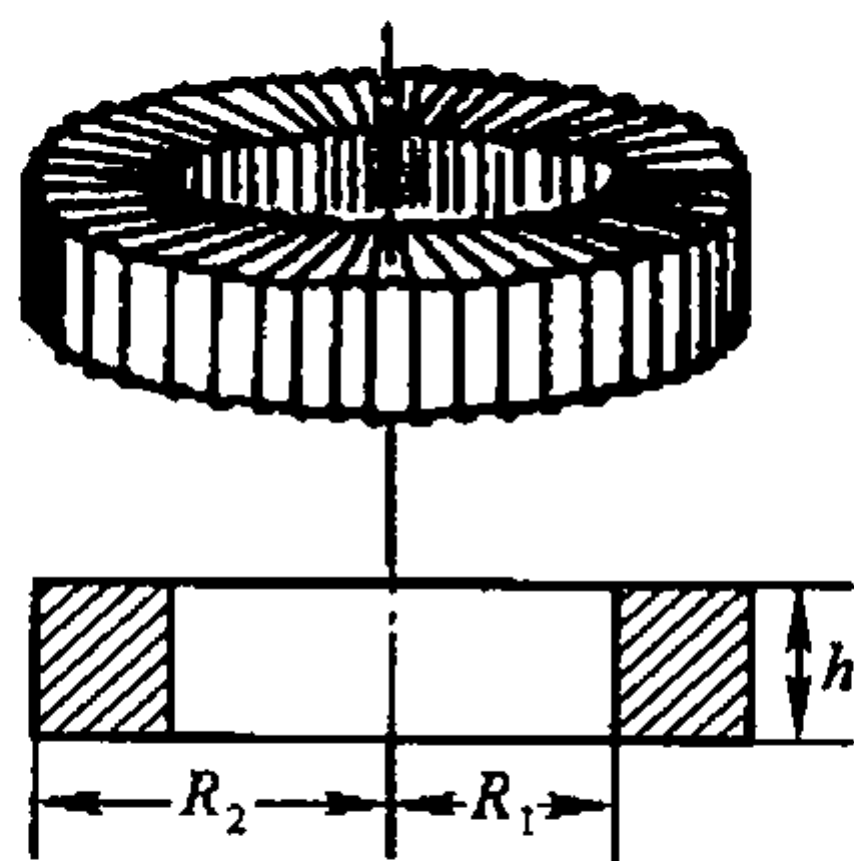
**9-18.** 一截面为长方形的螺绕管,其尺寸如图所示,共有  $N$  匝,求此螺绕管的自感.

**分析:** 螺绕环内的磁感应强度沿半径方向非均匀分布.

**解:** 设螺绕环中通有电流  $I$ ,根据安培环路定理,可有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = NI$$

可得到管内距轴线  $r$  处的磁场强度和磁感应强度的大小



习题 9-18 图

$$H = \frac{NI}{2\pi r}, \quad B = \mu H = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

通过螺绕管的磁通链数为

$$\Psi = N\Phi = N \int_S B dS = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

螺绕环的自感系数为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

**9-19.** 一圆形线圈 A 由 50 匝细线绕成,其面积为  $4 \text{ cm}^2$ ,放在另一个匝数为 100 匝、半径为 20 cm 的圆形线圈 B 的中心,两线圈同轴.设线圈 B 中的电流在线圈 A 所在处所激发的磁场可看作是均匀的.求:

- (1) 两线圈的互感;
- (2) 当线圈 B 中的电流以  $50 \text{ A/s}$  的变化率减小时,线圈 A 内磁通量的变化率;
- (3) 线圈 A 中的感生电动势.

**分析:** 两线圈间的互感系数  $M$  在线圈形状、相对位置不变,周围没有铁磁物质的情况下是个常数.由于本题中线圈的面积  $S_A \ll S_B$ ,且线圈 A 位于共面的线圈 B 的中心,因此可将 B 在 A 处的磁场看作是均匀的.设线圈 B 中有电流  $I_B$ ,可得到通过线圈 A 的磁通链数.

**解:** (1) 当线圈 B 中有电流  $I_B$  时,其圆心处的磁感应强度为

$$B = N_B \frac{\mu_0 I_B}{2R}$$

通过线圈 A 的磁通链数为

$$\Psi_A = N_A B S_A = N_A N_B \frac{\mu_0 I_B}{2R} S_A$$

互感系数为  $M = \frac{\Psi_A}{I_B} = N_A N_B \frac{\mu_0}{2R} S_A = 6.28 \times 10^6 \text{ H}$

(2) 当  $\frac{dI_B}{dt} = -50 \text{ A/s}$  时, 线圈 A 中磁通链数的变化率为

$$\frac{d\Psi_A}{dt} = N_A N_B \frac{\mu_0}{2R} S_A \frac{dI_B}{dt} = -3.14 \times 10^{-4} \text{ Wb/s}$$

(3) 线圈 A 中的感生电动势为  $\varepsilon_A = \left| -M \frac{dI}{dt} \right| = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$

**9-20.** 两个共轴圆线圈, 半径分别为  $R$  及  $r$ , 匝数分别为  $N_1$  和  $N_2$ , 相距为  $d$ . 设  $r$  很小, 则小线圈所在处的磁场可以视为均匀的. 求两线圈的互感系数.

分析: 由于大线圈在小线圈处的磁场可视为均匀, 因此设大线圈中有电流  $I$  时, 可求得通过小线圈的磁通链数.

解: 当大线圈中有电流  $I$  时, 在小线圈处(轴线上)磁感应强度的大小为

$$B = N_1 \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

通过小线圈的磁通链数为

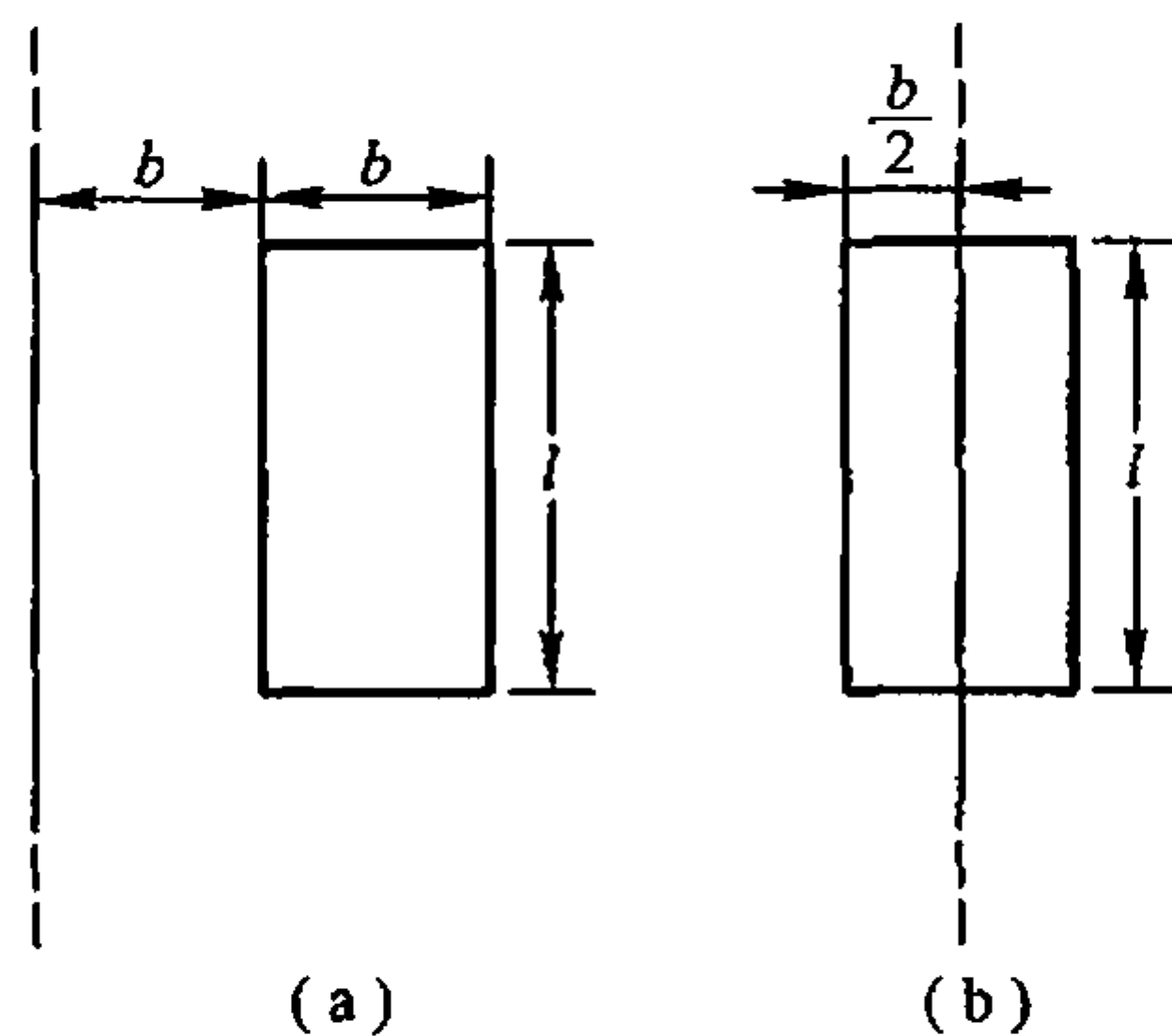
$$\Psi = N_2 B S = N_1 N_2 \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \pi r^2$$

两线圈的互感系数为

$$M = \frac{\Psi}{I} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 \pi R^2 r^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

**9-21.** 一矩形线圈长  $l = 20 \text{ cm}$ , 宽  $b = 10 \text{ cm}$ , 由 100 匝表面绝缘的导线绕成, 放置在一根长直导线的旁边, 并和直导线在同一平面内, 该直导线是一个闭合回路的一部分, 其余部分离线圈很远, 其影响可略去不计. 求图(a)、(b)两种情况下, 线圈与长直导线间的互感.

分析: 两回路间的互感系数决定于两者的相对位置和所处的介质环境, 与回路中是否载有电流无关. 可通过计算长直电流在矩形线圈中的磁通链数, 求得互感系数.



习题 9-21 图

解：取坐标轴  $Ox$  垂直于长直电流向右为正方向，坐标原点位于长直电流处。当长直电流为  $I$  时，在  $x$  处的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

在图(a)中，通过矩形线圈的磁通链数为

$$\Psi_a = N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_b^{2b} N \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = N \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln 2$$

互感系数为

$$M_a = \frac{\Psi_a}{I} = N \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln 2 = 2.8 \times 10^{-6} \text{ H}$$

在图(b)中，矩形线圈相对长直导线对称，通过矩形线圈的磁通链数为零。所以，有

$$\Psi_b = 0$$

互感系数为

$$M_b = 0$$

## 5. 磁能的计算

9-22. 有一个平绕于圆筒上的螺旋线圈，长 10 cm，直径 1 cm，共有线圈 1 000 匝，用 32 号漆包线绕制，漆包线的电阻是  $247 \Omega/\text{km}$  ( $20^\circ\text{C}$ )。若把此线圈接在电动势为 2 V 的蓄电池上。问：

- (1) 线圈的自感和电阻各是多少？电路的时间常数是多少？
- (2) 线圈中通电开始时的电流增长率是多少？
- (3) 线圈中的电流达到稳定后，恒定电流是多少？
- (4) 在稳定后线圈中所储存的磁能及磁能密度各是多少？

分析：线圈与蓄电池相连接构成闭合电路。在电路接通并建立起电流的过

程中,线圈中产生阻碍电流增长的电动势. 电路的时间常数由线圈的电阻  $R$  和线圈的自感系数  $L$  决定. 将线圈近似为无限长螺线管,当电流恒定时,螺线管中的磁场是均匀的,并具有磁场的能量.

解: (1) 无限长螺线管的自感系数为

$$L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 \pi \frac{N^2 D^2}{4l} = 9.86 \times 10^{-4} \text{ H}$$

线圈的电阻为

$$R = \rho l' = \rho N \pi D = 247 \times 10^3 \times 1000 \times 3.14 \times 1 \times 10^{-2} \Omega = 7.76 \Omega$$

电路的时间常数为  $\tau = \frac{L}{R} = 1.27 \times 10^{-4} \text{ s}$

(2) 由  $RL$  电路中电流随时间的变化规律

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

得电流随时间的变化率为

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right] = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$t=0$  时的电流增长率为

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{L} = 2.03 \times 10^3 \text{ A/s}$$

(3)  $t \rightarrow \infty$  时,线圈中的电流达到稳定,有

$$I_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} = 0.258 \text{ A}$$

(4) 稳定后线圈中的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2 = 3.28 \times 10^{-5} \text{ J}$$

磁能密度为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{W_m}{\frac{1}{4} \pi D^2 l} = 4.18 \text{ J/m}^3$$

**9-23.** 一个螺线管的自感为  $10 \text{ mH}$ ,通过线圈的电流为  $4 \text{ A}$ ,求它所储存的磁能.

解: 螺线管的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = 8.0 \times 10^{-2} \text{ J}$$

**9-24.** 有一段  $10$  号铜线,直径为  $2.54 \text{ mm}$ ,单位长度的电阻为  $3.28 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$ ,在此铜线上载有  $10 \text{ A}$  的电流,试计算:

(1) 铜线表面处的磁能密度有多大?

(2) 该处的电能密度是多少?

分析: 铜线表面处的电、磁能密度由该处的  $E$  和  $B$  决定. 设电流在铜线横截面上均匀分布, 利用安培环路定理和欧姆定律的微分形式可求得铜线表面处的  $E$  和  $B$ , 进而求出该处的电、磁能密度.

解: (1) 由安培环路定理可知, 铜线表面处的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

表面处的磁能密度为

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{\pi d} \right)^2 = 0.988 \text{ J/m}^3$$

(2) 设铜线中的电流密度大小为  $\delta$ , 电阻率为  $\rho$ , 取单位长度为  $l = 1 \text{ m}$ , 则在铜线中和表面处恒定电场  $E$  的大小为

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \rho \delta = \rho \frac{I}{S} = R \frac{I}{l} = R_0 I$$

式中  $\gamma$  是铜线的电导率,  $R_0$  为铜线单位长度的电阻.

铜线表面处的电能密度为

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} (IR_0)^2 = 4.76 \times 10^{-15} \text{ J/m}^3$$

9-25. 一根长直导线, 其  $\mu \approx \mu_0$ , 载有电流  $I$ , 已知电流均匀分布在导线的横截面上. 试证: 单位长度导线内所储存的磁能为  $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$ .

分析: 无限长直载流导线在导线内、外的磁感应强度按轴对称(导线截面为圆形)分布, 但分布规律有所不同. 利用磁能密度对磁场空间的积分求解本题.

解: 由安培环路定律, 可得无限长直载流导线内的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I \quad (r < R)$$

导线内的磁能密度为

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$$

取导线内长为  $l$  的同轴薄圆柱体元  $dV = 2\pi r l dr$

其磁能为  $dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} r^3 dr$

长为  $l$  的导体内的磁能为

$$W_m = \int dW_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} l$$

所以,单位长度导线内储存的磁能为

$$W'_m = \frac{W_m}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

**9-26.** 假定从地面到海拔  $6 \times 10^6$  m 的范围内,地磁场为  $5 \times 10^{-5}$  T,试粗略计算在此区域内地磁场的总磁能.

**分析:** 根据假定,在从地面到高度为  $h = 6 \times 10^6$  m 的范围内,地磁场为均匀磁场.

**解:** 地磁场的磁能密度为  $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

均匀分布在半径分别为  $R_{\text{地球}}$  和  $(R_{\text{地球}} + h)$  的球壳区域内,  $R_{\text{地球}} = 6400$  km. 此区域内地磁场的总磁能为

$$W_m = w_m \Delta V = \frac{B^2}{2\mu_0} \frac{4}{3} \pi \left[ (R_{\text{地球}} + h)^3 - R_{\text{地球}}^3 \right] = 6.85 \times 10^{18} \text{ J}$$

## 6. 位移电流和全电流环路定理的应用

**9-27.** 试证明平行板电容器中的位移电流可写为  $I_d = C \left( \frac{dU}{dt} \right)$ , 式中  $C$  是电容器的电容,  $U$  是两极板间的电势差. 如果不是平行板电容器, 上式可以应用吗? 如果是圆柱形电容器, 其中的位移电流密度和平板电容器时有何不同?

**分析:** 电容器极板上的电荷  $Q$  发生变化时, 极板间的电势差  $U$ 、电位移矢量值  $D$ 、电位移通量  $\Psi_d$  均随之变化.

**证:** 设平板电容器上极板的电荷量  $Q$  随时间变化. 将圆柱形闭合高斯面用于上极板, 使高斯面的上底位于导体极板内, 下底位于两极板之间, 上、下底面的面积均与极板面积  $S$  相同. 由介质中的高斯定理,

有 
$$\Psi_d = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot S = Q$$

根据电容的定义, 有 
$$C = \frac{Q}{U}$$

代入上式可得 
$$\Psi_d = CU$$

当极板上的电荷  $Q$  随时间变化时, 位移电流为

$$I_d = \frac{d\Psi_d}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

对圆柱形电容器,在两圆柱面间,作同轴的高为  $l$  的高斯面,由介质中的高斯定理,有

$$\Psi_d = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r l = \lambda l$$

根据电容的定义,有  $C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda l}{U}$

即  $\Psi_d = \lambda l = CU$

当圆柱面上单位长度的带电量  $\lambda$  随时间发生变化时,位移电流同样可表示为

$$I_d = \frac{d\Psi_d}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

由以上证明过程可知,电容器中的位移电流  $I_d = \frac{d\Psi_d}{dt} = C \frac{dU}{dt}$  不但对平行板电容器适用,对其他电容器也是适用的.

平行板电容器内的电位移矢量的大小为

$$D = \frac{Q}{S} = \sigma$$

$\sigma$  为极板上自由电荷的面密度,位移电流密度的大小为

$$\delta_d = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

圆柱形电容器内的电位移矢量的大小为

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$\lambda$  为单位长度的自由电荷量,位移电流密度的大小为

$$\delta_d = \frac{dD}{dt} = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\lambda}{dt}$$

由以上讨论可知,平行板电容器内的位移电流密度垂直于极板均匀分布,即大小和方向都相同. 圆柱形电容器内的位移电流密度垂直于轴线对称分布,与垂轴半径  $r$  成反比.

**9-28.** 在一对巨大的圆形极板(电容  $C = 1.0 \times 10^{-12}$  F)上,加上频率为 50 Hz、峰值为 174 000 V 的交变电压,计算极板间位移电流的最大值.

**解:** 设平行板电容器的极板上充有电荷  $q$  时,极板间的电势差为  $u$ . 设  $u = U_m \cos \omega t$ ,  $U_m$  为交变电压的峰值,  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu = 50$  Hz 为交变电压的变化频率.

将圆柱形闭合高斯面用于上极板,使高斯面的上底位于导体极板内,下底位于两极板之间,上、下底面的面积均与极板面积  $S$  相同. 由介质中的高斯定理,有

$$\Psi_d = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot S = Q$$

根据电容的定义,有

$$C = \frac{Q}{U}$$

所以,有

$$\Psi_d = CU$$

当极板上的电荷  $Q$  随时间变化时,忽略电容器的边缘效应,位移电流分布在极板之间,为

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{d\Psi_d}{dt} = C \frac{dU}{dt} = C \frac{d}{dt}(U_m \cos \omega t) \\ &= -C\omega U_m \sin \omega t = -I_{dm} \sin \omega t \end{aligned}$$

式中  $I_{dm} = C\omega U_m = 2\pi\nu CU_m$ , 是位移电流的最大值,代入数据可得

$$I_{dm} = 2\pi\nu CU_m = 5.47 \times 10^{-5} \text{ A}$$

**9-29.** 有一平板电容器,极板是半径为  $R$  的圆形板,现将两极板由中心处用长直引线连接到一远处的交变电源上,使两极板上的电荷量按规律  $q = q_0 \sin \omega t$  变化. 略去极板边缘效应,试求两极板间任一点的磁场强度.

**分析:** 不计边缘效应时,圆形平板电容器内的位移电流均匀分布,与长直引线中的传导电流构成连续的全电流. 本题中全电流的磁场具有轴对称性,利用全电流定律可求得两极板间任一点的磁场强度.

**解:** 由于全电流在两极板间的磁场强度分布具有轴对称性,取两板间离中心轴线半径为  $r$  ( $r < R$ ) 的磁场线为积分环路,根据全电流定律,可有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dD}{dt} \cdot \pi r^2$$

可得

$$H = \frac{r}{2} \frac{dD}{dt}$$

对平行板电容器,有  $D = \sigma = \frac{q}{S} = \frac{q_0 \sin \omega t}{\pi R^2}$

所以

$$H = \frac{r}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{q_0 \sin \omega t}{\pi R^2} \right) = \frac{r}{2\pi R^2} \omega q_0 \cos \omega t$$

极板间的磁场强度随  $r$  增大,这是全电流在  $r$  处激发的总磁场.

**9-30.** 为了在一个  $1.0 \mu\text{F}$  的电容器内产生  $1.0 \text{ A}$  的瞬时位移电流,加在电容器上的电压变化率应是多大?

**解:** 根据电容的定义  $C = \frac{q}{U}$ ,有

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

式中  $I$  是导线中的传导电流.

当电容器极板上的电荷发生变化时,根据全电流连续可知,在极板内、外的位移电流之和在数值上与传导电流相等,即  $I = I_d$ .

当电容器的边缘效应可以被忽略时,可认为位移电流分布在极板间,为

$$I_d = I = C \frac{dU}{dt}$$

即有

$$\frac{dU}{dt} = \frac{I_d}{C} = 1.0 \times 10^6 \text{ V/s}$$

9-31. 一圆形极板电容器,极板的面积为  $S$ ,两极板的间距为  $d$ . 一根长为  $d$  的极细的导线在极板间沿轴线与两板相连,已知细导线的电阻为  $R$ ,两极板外接交变电压  $U = U_0 \sin \omega t$ ,求:

- (1) 细导线中的电流;
- (2) 通过电容器的位移电流;
- (3) 通过极板外接线中的电流;
- (4) 极板间离轴线为  $r$  处的磁场强度. 设  $r$  小于极板的半径.

分析: 根据全电流连续可知,接线中的传导电流  $I_c$  在数值上与两极板间细导线中的传导电流  $I_R$  和所有位移电流  $I_d$  之和相等,即  $I_c = I_R + I_d$ . 不计电容器的边缘效应时,可认为位移电流分布在极板间,并且,本题中全电流激发的磁场具有轴对称性.

解: (1) 根据欧姆定律可知,细导线中的传导电流为

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t$$

(2) 电容器的位移电流为

$$\begin{aligned} I_d &= S\delta_d = \frac{d(S\sigma)}{dt} = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt} = CU_0\omega \cos \omega t \\ &= \frac{\epsilon_0 S}{d} U_0\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

式中  $\delta_d$  是极板间位移电流密度的大小,  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ ,  $\epsilon_0$  是真空的介电常数.

(3) 极板外接线中的电流是传导电流  $I_c$ , 为

$$I_c = I_R + I_d = \frac{U_0}{R} \sin \omega t + \frac{\epsilon_0 S}{d} U_0\omega \cos \omega t$$

(4) 由于全电流激发的磁场具有轴对称性,在极板间取离轴线  $r$  ( $r < \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ ) 为半径的磁场线为全电流定律的积分回路,有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = I_R + I'_d = I_R + \frac{I_d}{S} \pi r^2$$

得

$$H = \frac{U_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{rR} \sin \omega t + \frac{\varepsilon_0 \pi r \omega}{d} \cos \omega t \right]$$

## 7. 电磁场量的相对性

**9-32.** 利用电磁场量间的变换关系式, 证明  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  和  $E^2 - c^2 B^2$  是不变量.

分析: 电磁场作为一个统一的整体, 在一个惯性系中有六个分量, 在不同的惯性系之间, 这些电磁场量满足洛伦兹变换.

证: 设电磁场在惯性系  $K$  中的电磁场量为  $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$ , 在相对  $K$  系沿  $x$  轴正方向以速度  $v$  运动的惯性系  $K'$  中的电磁场量为  $(E'_x, E'_y, E'_z, B'_x, B'_y, B'_z)$ . 它们满足洛伦兹变换关系, 有

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(\beta E_z/c + B_y), & B'_z &= \gamma(-\beta E_y/c + B_z) \end{aligned}$$

式中  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\beta = v/c$ . 由以上变换关系, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z \\ &= E_x B_x + \gamma^2 (\beta E_y E_z/c + E_y B_y - \beta^2 E_z B_z - v B_y B_z) + \\ &\quad \gamma^2 (-\beta E_y E_z/c - \beta^2 E_y B_y + E_z B_z - v B_y B_z) \\ &= E_x B_x + \gamma^2 (1 - \beta^2) E_y B_y + \gamma^2 (1 - \beta^2) E_z B_z \\ &= E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

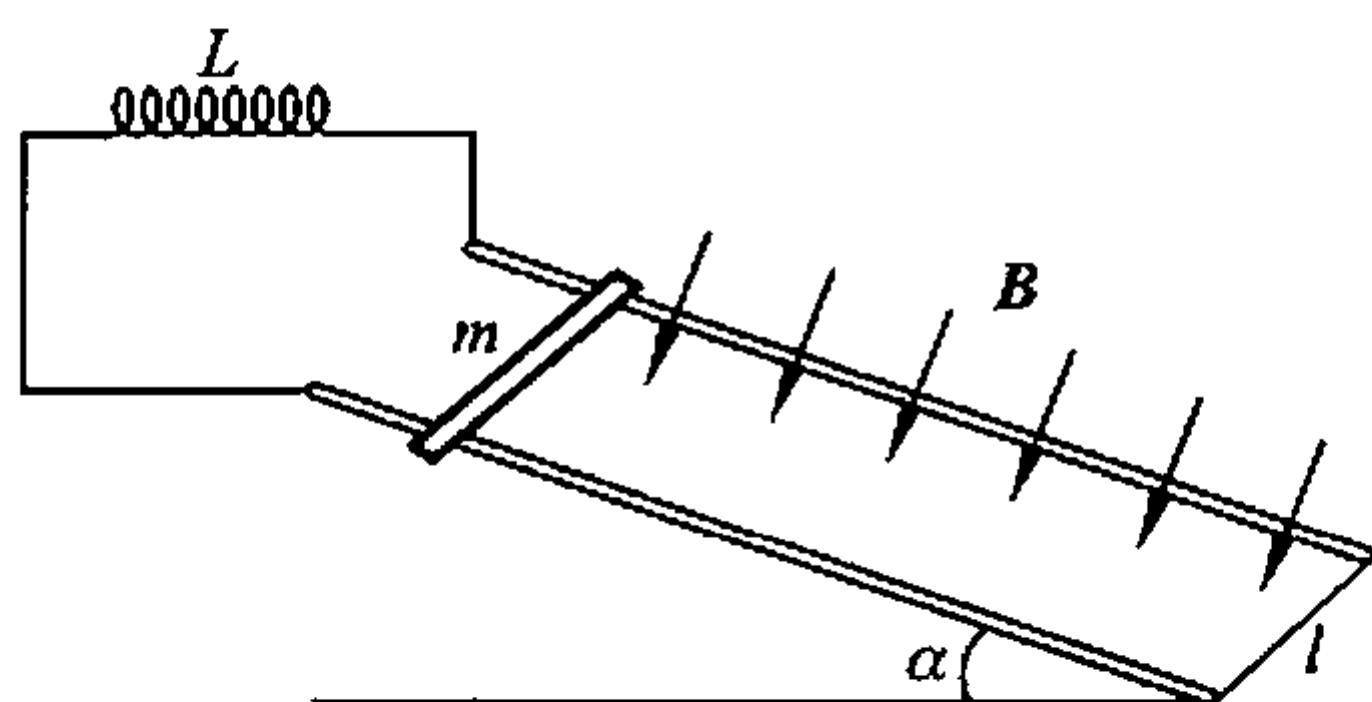
即  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  是不变量. 同理, 有

$$\begin{aligned} E'^2 - c^2 B'^2 &= E'^2_x + E'^2_y + E'^2_z - c^2 B'^2_x - c^2 B'^2_y - c^2 B'^2_z \\ &= E_x^2 - c^2 B_x^2 + \gamma^2 (E_y^2 + v^2 B_z^2 - 2v E_y B_z + E_z^2 + v^2 B_y^2 + 2v E_z B_y) - \\ &\quad c^2 \gamma^2 (\beta^2 E_y^2/c^2 + B_z^2 - 2\beta E_y B_z/c + \beta^2 E_z^2/c^2 + B_y^2 + 2\beta E_z B_y/c) \\ &= E_x^2 - c^2 B_x^2 + \gamma^2 (1 - \beta^2) E_y^2 + \gamma^2 (1 - \beta^2) E_z^2 + \gamma^2 (v^2 - c^2) B_z^2 + \\ &\quad \gamma^2 (v^2 - c^2) B_y^2 \\ &= E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - c^2 B_x^2 - c^2 B_y^2 - c^2 B_z^2 \\ &= E^2 - c^2 B^2 \end{aligned}$$

即  $E^2 - c^2 B^2$  也是不变量. 证毕.

**\*9-33.** 在一  $B = 0.2 \text{ T}$ , 方向垂直于轨道面向下的均匀磁场中, 有一长

$l = 1 \text{ m}$  质量  $m = 0.1 \text{ kg}$  的金属杆,沿一倾角  $\alpha = 30^\circ$  金属滑道由静止下滑,若滑道与自感系数  $L = 0.5 \text{ H}$  的线圈相连.



习题 9-33 图

(1) 试编写一计算机程序,考察该金属杆的运动速度及线圈内电流随时间的变化关系;

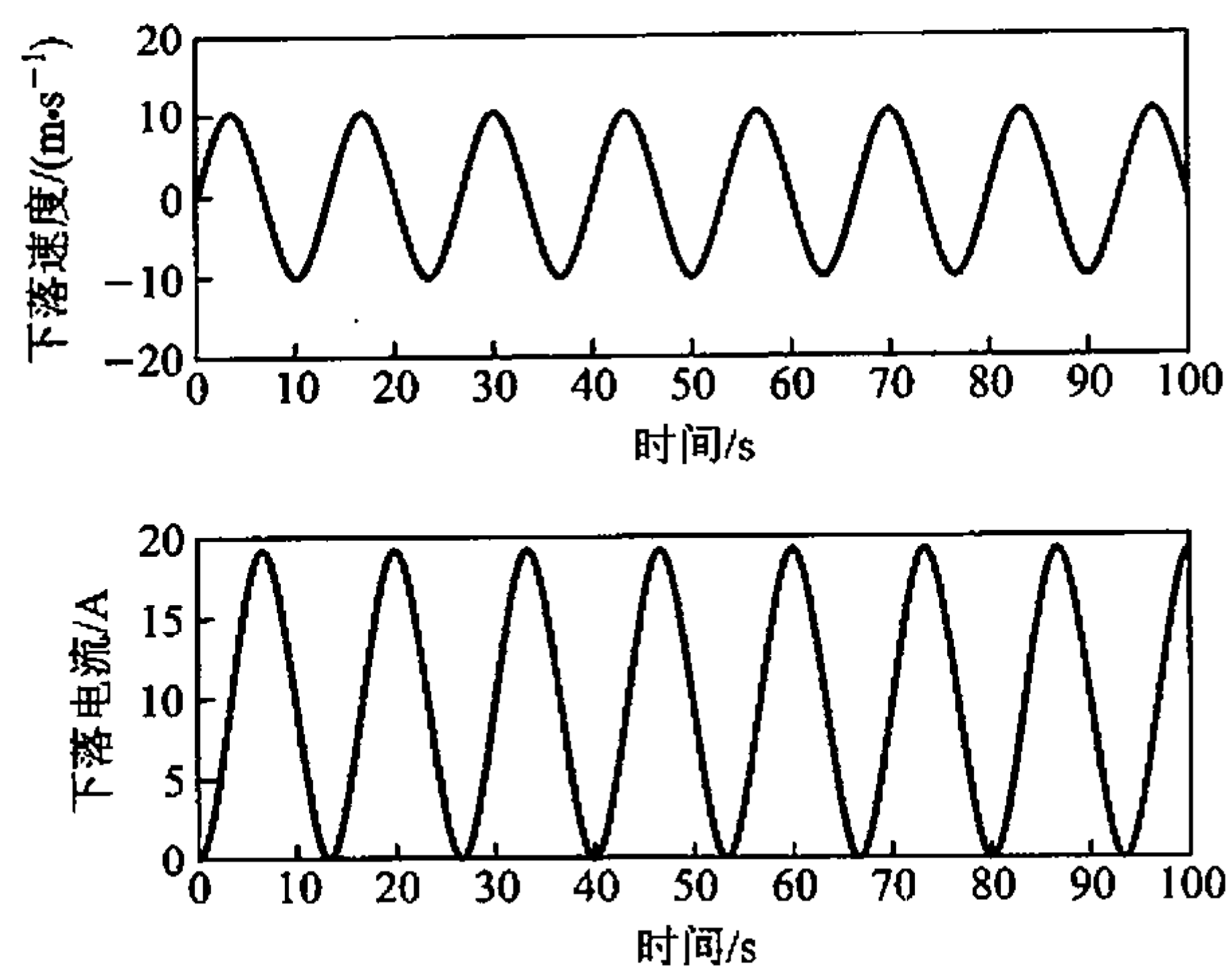
(2) 如果改变自感系数  $L$  的大小,金属杆的运动速度及线圈内的电流将如何变化?

答:(1) 速度及电流均随时间作振荡;(2) 振荡周期随  $L$  的增大而有所增长.

#### 参考程序

```
% 金属杆的运动速度及线圈内电流
clear
global m a L g sita B;                                     % 定义全局变量
m = 0.1; a = 1; L = 0.1; g = 9.8; sita = pi/6; B = 0.05;   % 输入已知条件
tspan = [0 100];                                           % 设定积分时间
y0 = [0 0]';                                               % 初时条件 t = 0, 金属杆从静止下落
[t, y] = ode23('indctn', tspan, y0);                       % 求解名为“indctn”的微分方程
subplot(2, 1, 1)
plot(t, y(:, 1), 'k');                                     % 下落速度对时间的曲线图
xlabel('时间(s)'); ylabel('下落速度(m/s)');
subplot(2, 1, 2)
plot(t, y(:, 2), 'b');                                     % 下落电流对时间的曲线图
xlabel('时间(s)'); ylabel('线圈电流(A)');
% 感应线运动的微分方程:  $m(dv/dt) = mgsin\alpha - Bai$ ;  $L(di/dt) = Bav$ 
function yp = indctn(t, y)
global m a L g sita B;                                     % 定义全局变量
% 写入金属杆运动和回路电流的微分方程
yp = [g * sin(sita) - B * a * y(2)/m B * a * y(1)/L]';
```

运算结果如解图 9-33 所示。



解图 9-33

# 第十章

## 机械振动和电磁振荡

### 一、教学基本要求

1. 掌握简谐运动的基本特征,描述简谐运动的能量、特征量及各量之间的关系.
2. 掌握用解析法、旋转矢量法及图形法分析物体谐振动状态(相位和相位差)的方法.
3. 掌握一维简谐运动合成的规律.了解“拍”现象.了解李萨如图形.
4. 理解电磁振荡规律.
5. 了解阻尼振动、受迫振动和共振现象.

### 二、本章习题分类

1. 谐振动的运动学问题
2. 谐振动的动力学问题
3. 阻尼和受迫振动
4. 电磁振荡
5. 简谐运动的合成

### 三、习题分析和解答

1. 谐振动的运动学问题

10-1. 一小球与轻弹簧组成的系统,按

$$x = 0.05 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

的规律振动,式中  $t$  以 s 为单位,  $x$  以 m 为单位. 试求:

- (1) 振动的角频率、周期、振幅、初相、速度及加速度的最大值;
- (2)  $t = 1\text{ s}, 2\text{ s}, 10\text{ s}$  等时刻的相位各为多少?
- (3) 分别画出位移、速度、加速度与时间的关系曲线.

分析: 根据题给运动学方程可知,系统作简谐运动.

解: (1) 将小球的运动学方程与谐振动的一般形式  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$  作比较, 可得

$$A = 0.05 \text{ m}, \quad \omega = 8\pi = 25.12 \text{ rad/s}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.25 \text{ s}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

小球振动的速度为

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = -0.05 \times 8\pi \sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -0.4\pi \sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

小球振动速度最大值的绝对值为速度振幅  $v_m$ ,

$$v_m = A\omega = 0.4\pi = 1.26 \text{ m/s}$$

小球振动的加速度为

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -0.05 \times (8\pi)^2 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -3.2\pi^2 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned}$$

小球振动加速度最大值的绝对值为加速度振幅  $a_m$ ,

$$a_m = A\omega^2 = 3.2\pi^2 = 31.6 \text{ m/s}^2$$

(2)  $t = 1 \text{ s}$  时的相位为

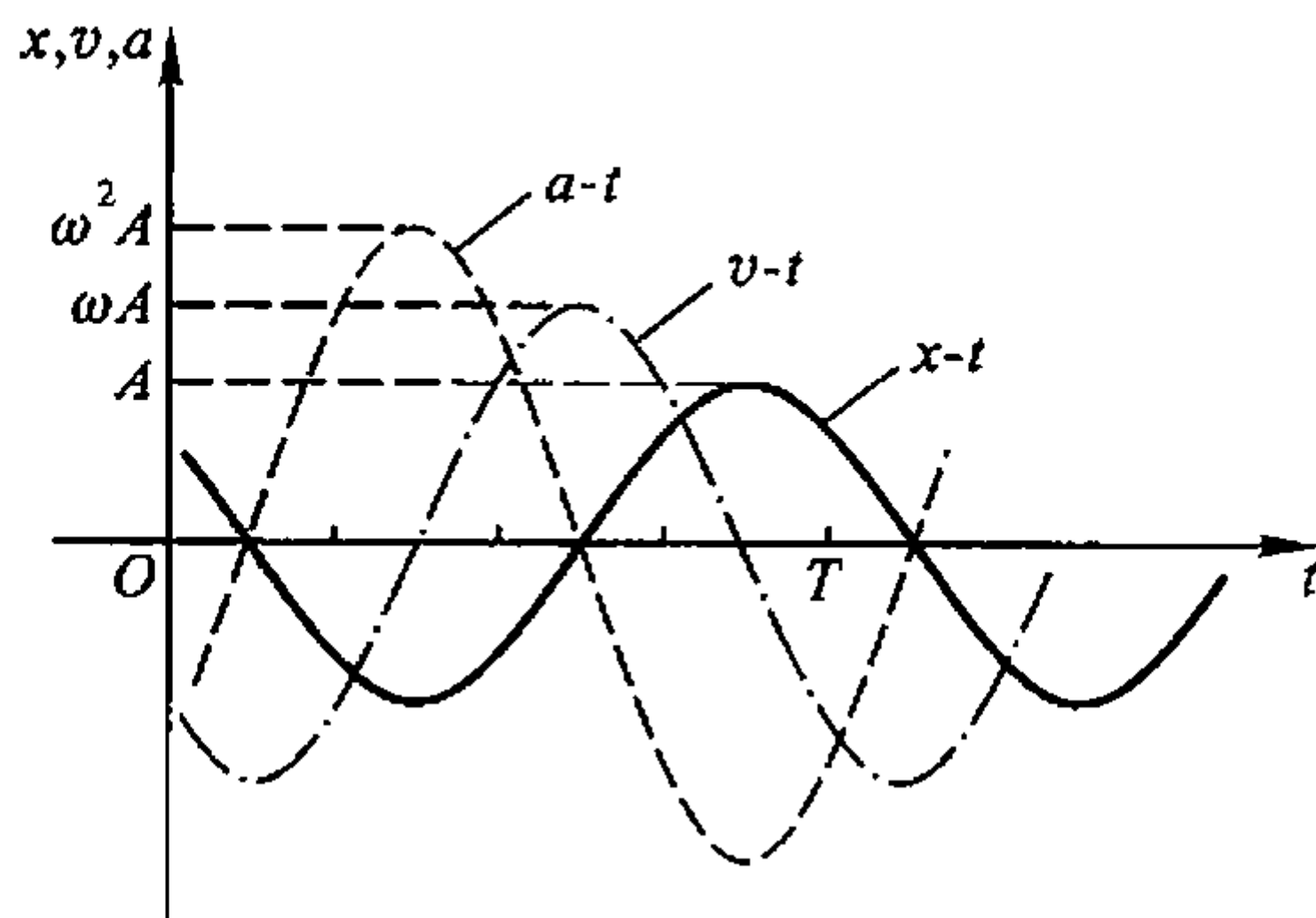
$$\varphi|_{t=1} = (\omega t + \varphi)|_{t=1} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{25\pi}{3}$$

$t = 2 \text{ s}$  时的相位为

$$\varphi|_{t=2} = (\omega t + \varphi)|_{t=2} = 16\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{49\pi}{3}$$

$t = 10 \text{ s}$  时的相位为

$$\varphi|_{t=10} = (\omega t + \varphi)|_{t=10} = 80\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{241\pi}{3}$$

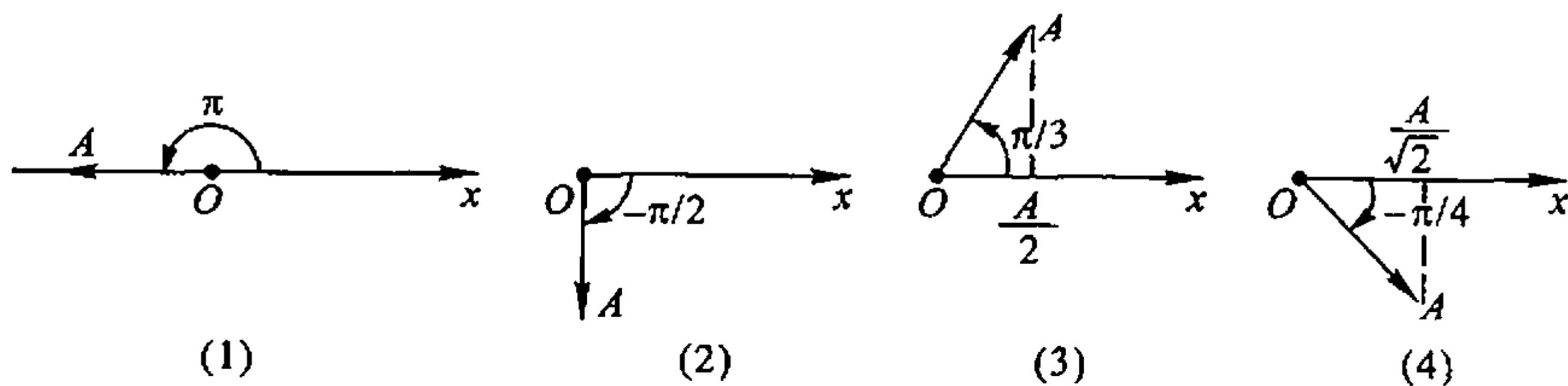


解图 10-1

(3)  $x(t)$ 、 $v(t)$ 、 $a(t)$  曲线如解图 10-1 所示。

**10-2.** 有一个和轻弹簧相连的小球,沿  $x$  轴作振幅为  $A$  的谐振动,周期为  $T$ . 其运动学方程用余弦函数表示. 若  $t=0$  时,球的运动状态为(1)  $x_0 = -A$ ; (2) 过平衡位置向  $x$  正方向运动; (3) 过  $x = \frac{A}{2}$  处向  $x$  负方向运动; (4) 过  $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$  处向  $x$  正方向运动. 试用矢量图示法确定相应的初相位的值,并写出振动表达式.

**解:** 由题给条件可知,对同一个简谐运动系统,由于所处的初始状态不同,小球作频率相同但初相不同的谐振动. 各谐振动对应的旋转矢量图见解图 10-2.



解图 10-2

(1)  $x_0 = -A, v_0 = 0; \varphi = \pm \pi.$

振动表达式为  $x = A \cos(\omega t + \pi) \text{ (SI)}$

(2)  $x_0 = 0, v_0 = v_{\max} > 0; \varphi = -\pi.$

振动表达式为  $x = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$

(3)  $x_0 = \frac{A}{2}, v_0 < 0; \varphi = \frac{\pi}{3}.$

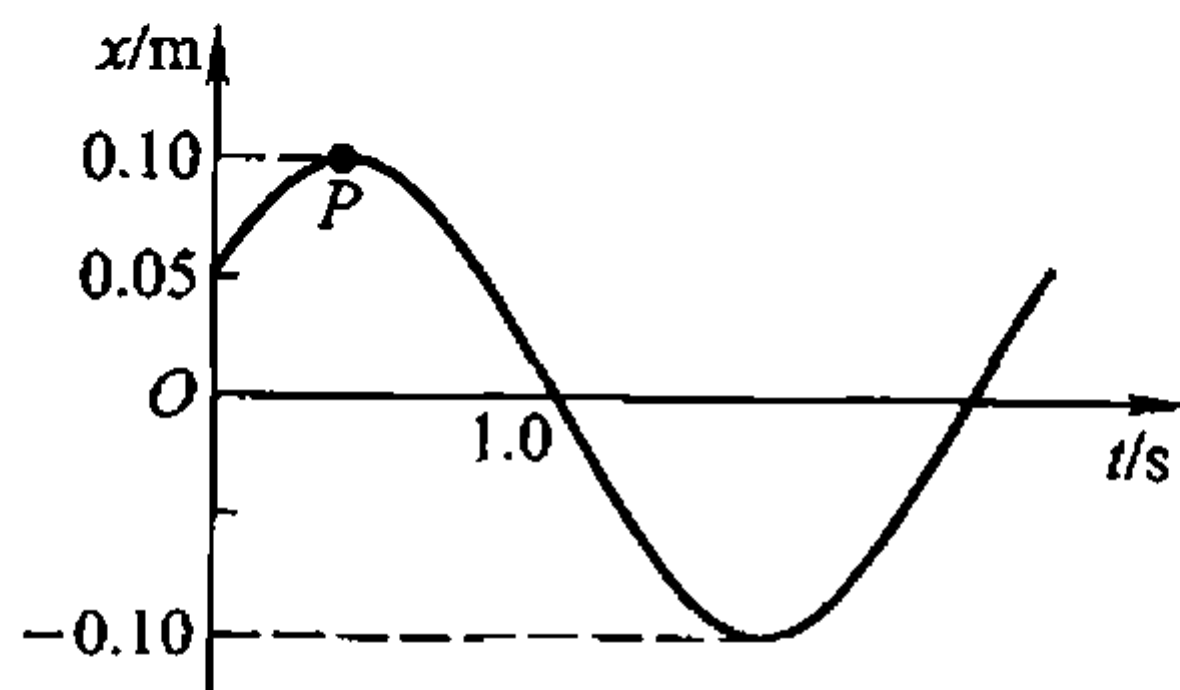
振动表达式为  $x = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (SI)}$

(4)  $x_0 = \frac{A}{\sqrt{2}}, v_0 > 0; \varphi = -\frac{\pi}{4}.$

振动表达式为  $x = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$

**10-3.** 一振动质点的振动曲线如图所示, 试求:

- (1) 运动学方程;
- (2) 点  $P$  对应的相位;
- (3) 从振动开始到达点  $P$  相应位置所需



习题 10-3 图

的时间.

解: (1) 设质点振动的运动学方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ (m)}$$

据题图可知,  $A = 0.10 \text{ m}$ ,  $x_0 = \frac{A}{2} = 0.05 \text{ m}$ ,  $v_0 > 0$ , 可有

$$0.05 = 0.10 \cos \varphi$$

得

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

由于  $v_0 = -A\omega \sin \varphi > 0$ , 故有  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

由题图,  $t = 1 \text{ s}$  时,  $x_1 = 0$ , 有  $\omega t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

可得

$$\omega = \frac{5\pi}{6}$$

所以, 质点振动的运动学方程为

$$x = 0.10 \cos\left(\frac{5}{6}\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (m)}$$

(2) 点  $P$  位于质点正方向位移的最大值处, 其对应的相位为零, 即

$$\varphi_P = \frac{5}{6}\pi t - \frac{\pi}{3} = 0$$

(3) 由  $\varphi_P = 0$  可得从振动开始到达点  $P$  相应位置所需的时间为

$$t = \frac{\pi}{3} \times \frac{6}{5\pi} \text{ s} = \frac{2}{5} \text{ s} = 0.4 \text{ s}$$

**10-4.** 一质量为  $10 \text{ g}$  的物体作简谐运动, 其振幅为  $24 \text{ cm}$ , 周期为  $4.0 \text{ s}$ , 当  $t = 0$  时, 位移为  $+24 \text{ cm}$ . 求:

- (1)  $t = 0.5 \text{ s}$  时, 物体所在位置;
- (2)  $t = 0.5 \text{ s}$  时, 物体所受力的方向与大小;
- (3) 由起始位置运动到  $x = 12 \text{ cm}$  处所需的最少时间;
- (4) 在  $x = 12 \text{ cm}$  处, 物体的速度、动能以及系统的势能和总能量.

分析: 已知简谐运动的振幅  $A$  和角频率  $\omega$  (可由  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  得到), 根据物体的初始运动状态  $x_0$  和  $v_0$  即可得到初相  $\varphi$ , 并写出谐振动的运动方程. 谐振动物体在任意时刻的运动状态都与谐振动的相位相对应. 作为保守力系统, 谐振动系统的机械能守恒.

解: 据题意, 谐振动的振幅  $A = 24 \text{ cm}$ , 周期  $T = 4.0 \text{ s}$ , 故  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .

由简谐运动的初始位移  $x_0 = A = 24 \text{ cm}$  可知, 初始振动速度  $v_0 = 0$ . 所以, 振动初相  $\varphi = 0$ . 简谐运动表达式为

$$x = 0.24 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) (\text{m})$$

(1)  $t = 0.5 \text{ s}$  时, 有  $x|_{t=0.5} = 0.24 \cos\left(\frac{\pi \times 0.5}{2}\right) \text{ m} = 0.17 \text{ m}$

$t = 0.5 \text{ s}$  时, 物体的位移在  $x$  轴正方向, 距平衡位置  $0.17 \text{ m}$  处.

(2)  $t = 0.5 \text{ s}$  时, 物体的加速度为

$$a|_{t=0.5} = \frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_{t=0.5} = -0.24 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi \times 0.5}{2}\right) = -0.419 \text{ m/s}^2$$

物体所受力为

$$F|_{t=0.5} = ma|_{t=0.5} = -4.19 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$t = 0.5 \text{ s}$  时, 物体受力的方向与位移的方向相反, 指向平衡位置.

(3) 物体在  $x = 12 \text{ cm}$  的相位  $\varphi|_{x=0.12}$ , 由  $0.12 = 0.24 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$  得

$$\varphi|_{x=0.12} = \frac{\pi t}{2} = \pm \frac{\pi}{3}$$

由于物体是从起始时刻的最大位移处向平衡位置方向运动, 故运动至  $x = 12 \text{ cm}$  时的速度  $v < 0$ , 其相位  $\varphi$  应取  $\varphi|_{x=0.12} = \frac{\pi}{3}$ . 所以, 所需最少时间为

$$t = \frac{2}{3} = 0.67 \text{ s}$$

(4) 在  $x = 12 \text{ cm}$  处, 物体的速度为

$$v|_{x=0.12} = \frac{dx}{dt} \Big|_{x=0.12} = -0.24 \times \frac{\pi}{2} \times \sin \frac{\pi}{3} \text{ m/s} = -0.326 \text{ m/s}$$

物体的动能为

$$E_k|_{x=0.12} = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{x=0.12} = 5.31 \times 10^{-4} \text{ J}$$

物体的势能为

$$E_p|_{x=0.12} = \frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x=0.12} = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Big|_{x=0.12} = 1.78 \times 10^{-4} \text{ J}$$

谐振系统的机械能为

$$E = E_k + E_p = (5.31 + 1.78) \times 10^{-4} \text{ J} = 7.09 \times 10^{-4} \text{ J}$$

## 2. 谐振动的动力学问题

\*10-5. 在一平板上放质量为  $m = 1.0 \text{ kg}$  的物体, 平板在竖直方向作简谐

振动, 周期为  $T = 0.5 \text{ s}$ , 振幅  $A = 0.02 \text{ m}$ . 试求:

- (1) 在位移最大时物体对平板的正压力;
- (2) 平板应以多大振幅作振动才能使重物开始跳离平板.

分析: 物体受重力  $G$  与平板支持力  $F_N$  的合力, 在竖直方向上作谐振动. 作谐振动物体的加速度  $a$  与物体的位移  $x$  成正比而反向.

解: 如解图 10-5 所示, 取坐标轴向上为物体位移  $x$  的正方向. 图(a)表示物体处于平衡位置, 图(b)中物体处于位移最大位置  $A$ , 图(c)中物体处于  $-A$  处.

(1) 如图(b)所示, 物体在  $A$  处时, 所受合力方向向下. 设物体受平板支持力为  $F_{N1}$ , 有

$$F_{N1} - mg = ma_1 = -mA\omega^2$$

得

$$F_{N1} = m(g - A\omega^2) = m\left(g - \frac{4A\pi^2}{T^2}\right) = 6.64 \text{ N}$$

在振动的最高处时物体对平板的正压力  $F'_{N1}$  与  $F_{N1}$  大小相等, 方向相反.

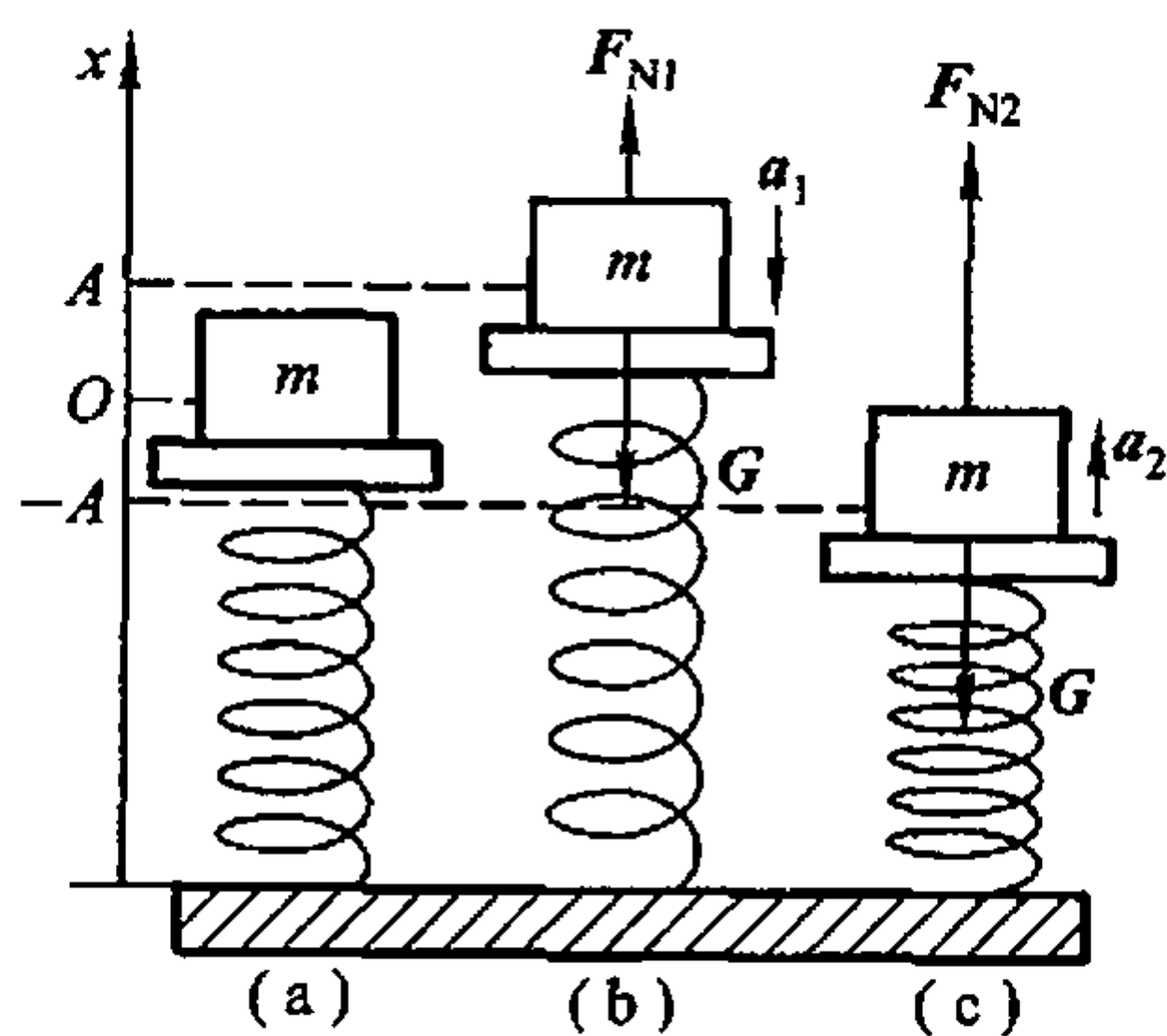
如图(c)所示, 物体在  $-A$  处时, 所受合力方向向上. 设物体受平板支持力为  $F_{N2}$ , 有

$$F_{N2} - mg = ma_2 = mA\omega^2$$

得

$$F_{N2} = m(g + A\omega^2) = m\left(g + \frac{4A\pi^2}{T^2}\right) = 12.96 \text{ N}$$

在振动的最低处时物体对平板的正压力  $F'_{N2}$  与  $F_{N2}$  大小相等, 方向相反. 可见, 在位移最大时物体对平板的正压力小于在最低处时的正压力.



解图 10-5

(2) 物体跳离平板时, 受平板支持力为零. 由(1)的结果可知, 当振幅增大时物体将于最高处跳离平板, 即  $F_{N1} = 0$ . 所以有

$$-mg = -mA\omega^2$$

得

$$A = \frac{g}{\omega^2} = 0.062 \text{ m}$$

**10-6.** 图示的提升运输设备,重物的质量为  $1.5 \times 10^4 \text{ kg}$ ,当重物以速度  $v = 15 \text{ m/min}$  匀速下降时,机器发生故障,钢丝绳突然被轧住.此时,钢丝绳相当于劲度系数  $k = 5.78 \times 10^6 \text{ N/m}$  的弹簧.求因重物的振动而引起钢丝绳内的最大张力.

**分析:** 重物匀速下降时所受的合外力为零.钢丝绳被轧住时,重物在惯性和钢丝绳弹性力的交互作用下开始以该位置为平衡位置,作上下的简谐运动.谐振动的初始速度即重物原来的匀速下降速度,也即振动速率的最大值.

**解:** 简谐运动系统的固有频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 19.6 \text{ rad/s}$$

谐振动速率的最大值为

$$v_m = A\omega = 15 \text{ m/min} = 0.25 \text{ m/s}$$

谐振动的振幅为

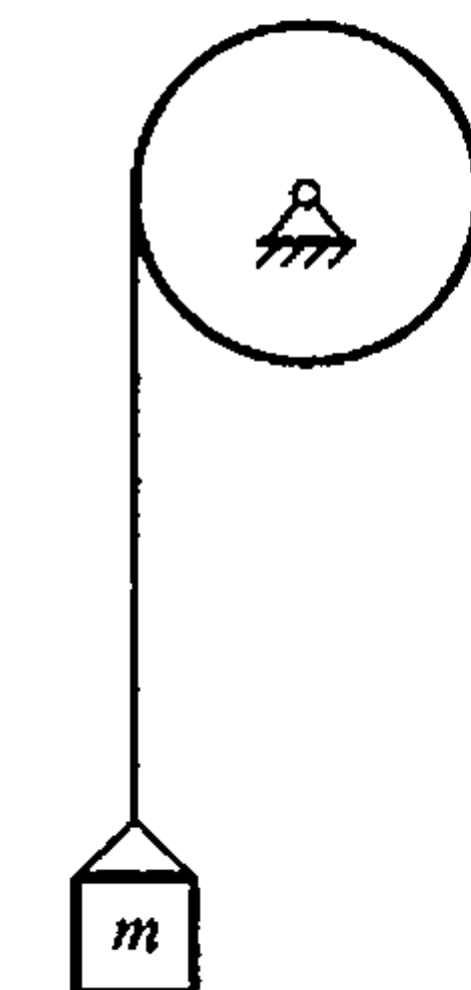
$$A = v_m / \omega = 1.28 \times 10^{-2} \text{ m}$$

重物在最低处时,受钢丝绳的拉力  $T$  和重力  $mg$  的合力方向向上,此时的拉力有最大值  $T_{\max}$ . 有

$$T_{\max} - mg = mA\omega^2$$

得

$$T_{\max} = m(g + A\omega^2) = 2.21 \times 10^5 \text{ N}$$



习题 10-6 图

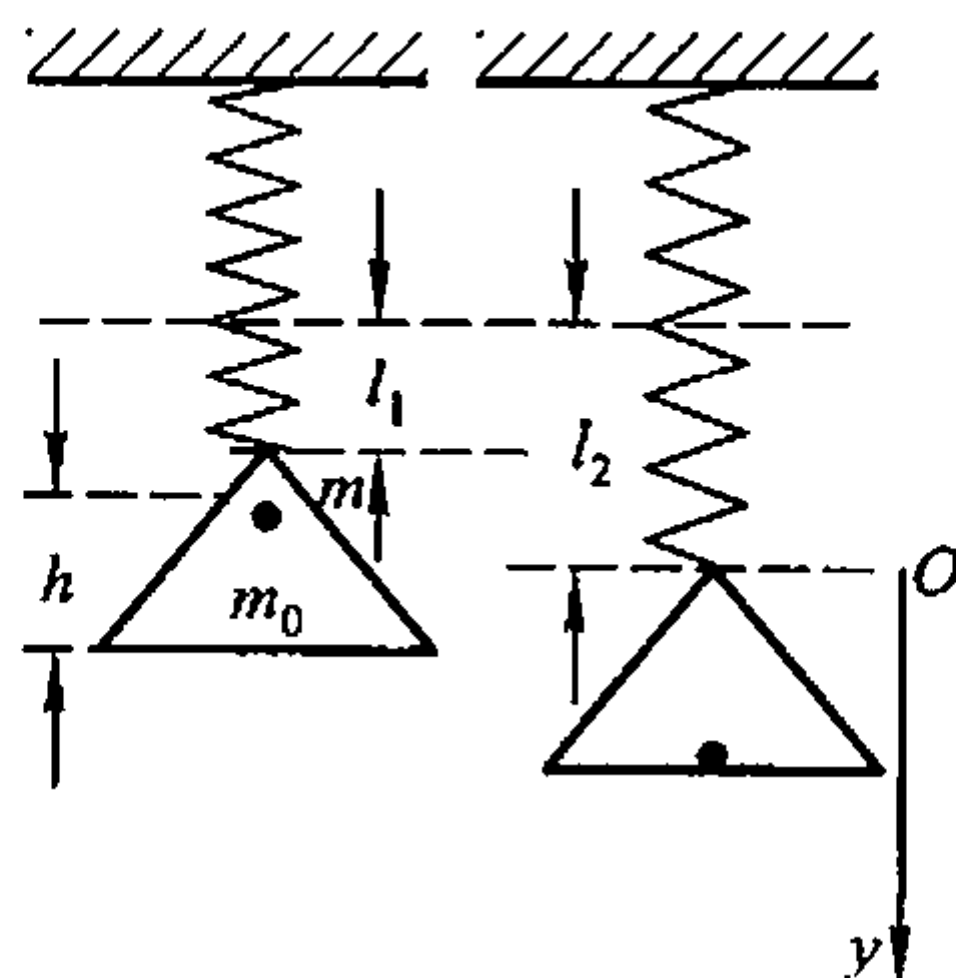
**10-7.** 一质量为  $m_0$  的盘子系于竖直悬挂的轻弹簧下端,弹簧的劲度系数为  $k$ ,现有一质量为  $m$  的物体自离盘  $h$  高处自由落下掉在盘上,没有反弹,以物体掉在盘上的瞬时作为计时起点,求盘子的运动学方程.(取物体掉在盘子后的平衡位置为坐标原点,位移以向下为正).

**分析:**  $m$ 、 $m_0$  一起振动的固有频率决定于  $k$  和  $(m + m_0)$ ,振动的初始速率  $u_0$  由  $m$  和  $m_0$  的完全非弹性碰撞决定,振动的初始位移则为空盘原来的平衡位置.

**解:** 取坐标轴  $Oy$  向下为正,如解图 10-7 所示,设空盘静止时轻弹簧的伸长量为  $l_1$ ,有

$$m_0 g - kl_1 = 0$$

取坐标原点  $O$  于  $m$ 、 $m_0$  一起振动时的平衡位置处,设平衡时轻弹簧的伸长量为  $l_2$ ,有



解图 10-7

$$(m + m_0)g - kl_2 = 0$$

$m$  和  $m_0$  一起振动的角频率为  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m}}$

初始位置为  $y_0 = -(l_2 - l_1) = -mg/k$

由动量守恒, 有  $mv_0 = (m + m_0)u_0$

式中  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , 可得  $m$  和  $m_0$  振动的初始速度  $u_0$  为

$$u_0 = \frac{m}{m + m_0}v_0 = \frac{m}{m + m_0}\sqrt{2gh}$$

由  $m, m_0$  一起振动时  $y_0 < 0, u_0 > 0$  可知, 谐振动对应的旋转矢量在第三象限. 所以,  $m$  和  $m_0$  一起振动的振幅  $A$  为

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{u_0}{\omega}\right)^2} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m_0 + m)g}}$$

初相  $\varphi$  为  $\varphi = \arctan\left(\frac{-u_0}{\omega x_0}\right) + \pi = \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m_0 + m)g}} + \pi$

所以, 盘子的运动学方程为

$$\begin{aligned} y &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m_0 + m)g}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_0 + m}}t + \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m_0 + m)g}} + \pi\right) \end{aligned}$$

**10-8.** 一个水平面上的弹簧振子, 弹簧的劲度系数为  $k$ , 所系物体的质量为  $m_0$ , 振幅为  $A$ . 有一质量为  $m$  的小物体从高度  $h$  处自由下落. 当振子在最大位移处, 物体正好落在  $m_0$  上, 并粘在一起, 这时系统的振动周期、振幅和振动能量有何变化? 如果小物体是在振子到达平衡位置时落在  $m_0$  上, 这些量又怎样变化?

**分析:** 质量为  $m$  的小物体粘到振子  $m_0$  上, 使振子的质量变为  $(m + m_0)$ , 从而改变了系统的固有频率、振动周期, 这与  $m_0$  在何处被  $m$  粘上无关. 但  $m$  和  $m_0$  一起振动的振幅决定于作为新振子的初始运动状态, 即粘上瞬间的位置和水平运动速度. 在粘连过程中若有振动机械能的损耗, 将使振幅变小.

**解:** 设  $m$  落下前的系统为 1, 落下后的系统为 2. 由于系统的固有频率决定于振子质量和弹簧的劲度系数  $k$ , 故有

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m_0}} = \frac{2\pi}{T_1}, \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{m_0 + m}} = \frac{2\pi}{T_2}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m}{k}} > T_1 \end{aligned}$$

所以, 振子质量变为  $(m + m_0)$  后, 系统的振动周期  $T_2$  将比原来的振动周期

$T_1$  大,这与  $m_0$  在何处被  $m$  粘上无关.

(1) 当  $m_0$  在最大位移处被  $m$  粘住时,新振子  $(m+m_0)$  的初始位置为  $x_{20} = A_1$ ,初始速率  $v_{20} = 0$ . 系统 2 的振幅为

$$A_2 = \sqrt{x_{20}^2 + \left(\frac{v_{20}}{\omega_2}\right)^2} = A_1$$

振动能量为 
$$E_2 = \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 = E_1$$

所以,系统 2 的振幅和振动能量不变.

(2) 当  $m_0$  运动至平衡位置时有最大速率

$$v_{1\max} = A_1 \omega_1$$

在此弹簧的原长处被  $m$  粘住,这是新振子  $(m+m_0)$  的初始位置,也是平衡位置,有  $x_{20} = 0$ . 由于  $m$  的落下速度没有水平分量,所以,新振子的初始速率  $v_{20}$  可由水平方向动量守恒求得.

$$m_0 v_{1\max} = (m_0 + m) v_{20}$$

$$v_{20} = \frac{m_0 v_{1\max}}{m_0 + m} = \frac{m_0 A_1 \omega_1}{m_0 + m}$$

$v_{20}$  也是系统 2 的最大振动速率,即  $v_{20} = A_2 \omega_2$

所以,系统 2 的振幅为

$$A_2 = \frac{m_0 A_1}{m_0 + m} \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_0 A_1}{m_0 + m} \sqrt{\frac{m_0 + m}{m_0}} = \sqrt{\frac{m_0}{m_0 + m}} A_1 < A_1$$

振动能量为 
$$E_2 = \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{m_0}{m_0 + m}\right)A_1^2 < E_1$$

所以,系统 2 的振幅和振动能量均变小.

**10-9.** 一弹簧振子作谐振动,振幅  $A = 0.20 \text{ m}$ ,如弹簧的劲度系数  $k = 2.0 \text{ N/m}$ ,所系物体的质量  $m = 0.50 \text{ kg}$ ,试求:

(1) 当动能和势能相等时,物体的位移是多少?

(2) 设  $t = 0$  时,物体在正最大位移处,达到动能和势能相等处所需的时间是多少?(在一个周期内.)

解:(1) 振子作谐振动时,有  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

动能和势能分别为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

动能和势能相等时,有  $\tan^2(\omega t + \varphi_0) = 1$

即  $(\omega t + \varphi_0) = \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \quad (j=0, 1, 2, \dots)$

动能和势能相等时的位移为

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A = \pm 0.14 \text{ m}$$

或者,由动能和势能相等时,有  $E_p = \frac{1}{2} E$ , 即  $\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} kA^2\right)$ ,

得  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$

(2) 据题意可有  $x_0 = A, v_0 = 0$ , 得  $\varphi_0 = 0$ .

所以,谐振动表达式为  $x = A \cos \omega t$

式中  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.0}{0.5}} \text{ rad/s} = 2 \text{ rad/s}$

当  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$  时,动能和势能相等,即有

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} A = A \cos \omega t$$

$$\omega t = 2t = (2j+1) \frac{\pi}{4} \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

所以,在开始计时后的一个周期内,动能和势能相等的时刻为

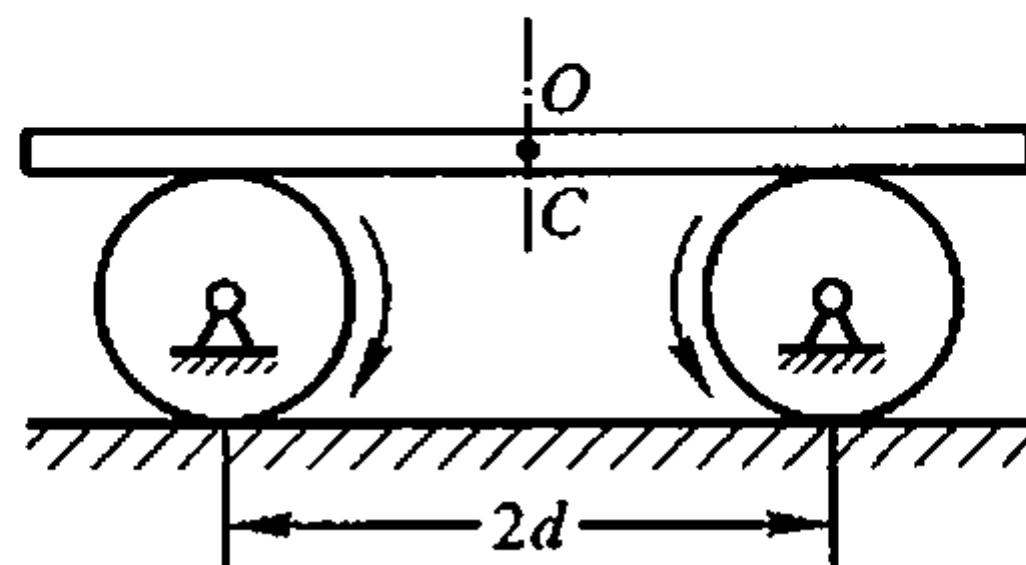
$$t_1 = \frac{\pi}{8} = 0.39 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{3\pi}{8} = 1.2 \text{ s}$$

$$t_3 = \frac{5\pi}{8} = 2.0 \text{ s}$$

$$t_4 = \frac{7\pi}{8} = 2.7 \text{ s}$$

**10-10.** 如图所示,两轮的轴互相平行,相距为  $2d$ ,其转速相同,转向相反.将质量为  $m$  的匀质木板放在两轮上,木板与两轮间的摩擦因数均为  $\mu$ .当木板偏离对称位置后,它将如何运动?如果是作谐振动,其周期是多少?若两轮均沿图示的相反方向旋转,木板将如何运动?



习题 10-10 图

分析：研究对象是木板。在竖直方向，木板因受力平衡而无运动。在水平方向，木板受到方向相反的两个摩擦力的作用。当木板质心  $C$  偏离对称位置  $O$  时，受两轮的支持力和摩擦力的大小都不相等，但两支持力对  $C$  的力矩平衡。由此可得到木板在水平方向所受合力，并判断木板的运动方式。

解：如解图 10-10a 所示，因木板在竖直方向无运动，有

$$F_{N1} + F_{N2} - mg = 0$$

设  $C$  偏离  $O$  一微小距离  $x$ ，由对  $C$  的力矩平衡，有

$$F_{N1}(d+x) - F_{N2}(d-x) = 0$$

由以上两式得

$$F_{N1} = \frac{d-x}{2d}mg, \quad F_{N2} = \frac{d+x}{2d}mg$$

木板在水平方向所受摩擦力的合力为

$$F_f = F_{f1} - F_{f2} = \mu F_{N1} - \mu F_{N2} = -\frac{\mu mg}{d}x$$

根据牛顿运动定律，可有

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu g}{d}x = -\omega^2x$$

式中

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}}$$

所以，木板将沿  $x$  方向作谐振动，振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

若两轮均沿图示的相反方向旋转，木板所受摩擦力如解图 10-10b 所示。根据牛顿运动定律，有

$$F = F_{f2} - F_{f1} = \mu F_{N2} - \mu F_{N1} = \frac{\mu mg}{d}x$$

即

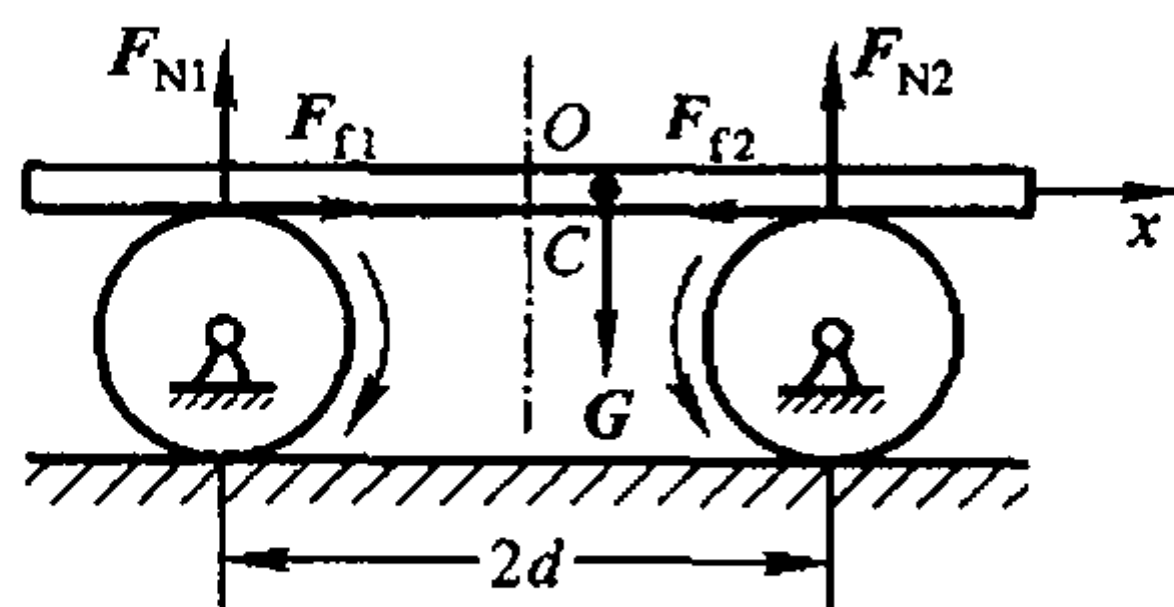
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu g}{d}x$$

木板将沿  $x$  方向作加速运动。利用  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} =$

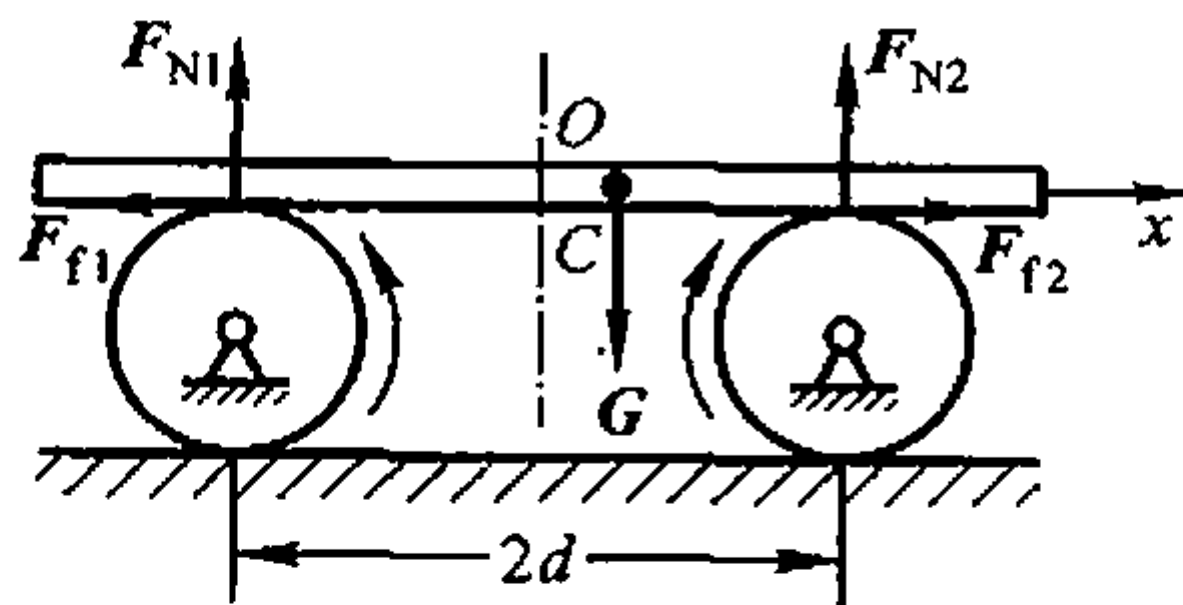
$\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$  改写上式，有

$$v dv = \frac{\mu g}{d}x dx$$

设  $t=0$  时，木板的质心  $C$  静止于  $x_0$  处，于是有



解图 10-10a



解图 10-10b

$$\int_0^v v dv = \int_{x_0}^x \frac{\mu g}{d} x dx$$

得

$$v = \sqrt{\frac{\mu g}{d} (x^2 - x_0^2)}$$

**10-11.** 由长为  $l$  的轻杆与半径为  $r$  的匀质圆盘组成两个摆, 其中一个摆的圆盘与杆固定连接, 如图(a); 另一个摆的圆盘装在杆端的光滑转轴上, 可相对地自由转动, 如图(b). 当两摆作微小振动时, 试求它们的周期.

**分析:** 图(a)中的轻杆与圆盘固定连接成为复摆, 绕  $O$  轴摆动. 图(b)中的圆盘装在杆端的光滑转轴上, 轻杆绕  $O$  轴摆动时, 圆盘只作平动, 相当于质量集中在轻杆端的质点, 所以图(b)的钟摆可视为单摆.

**解:** 设圆盘的质量为  $m$ , 图(a)的圆盘绕  $O$  轴的转动惯量为  $J$ . 由平行轴定理, 有

$$J = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2$$

绕  $O$  轴作小角度为  $\theta$  的摆动时, 对  $O$  轴的力矩为

$$M = -mgl \sin \theta \approx -mgl\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}\theta = -\omega^2\theta$$

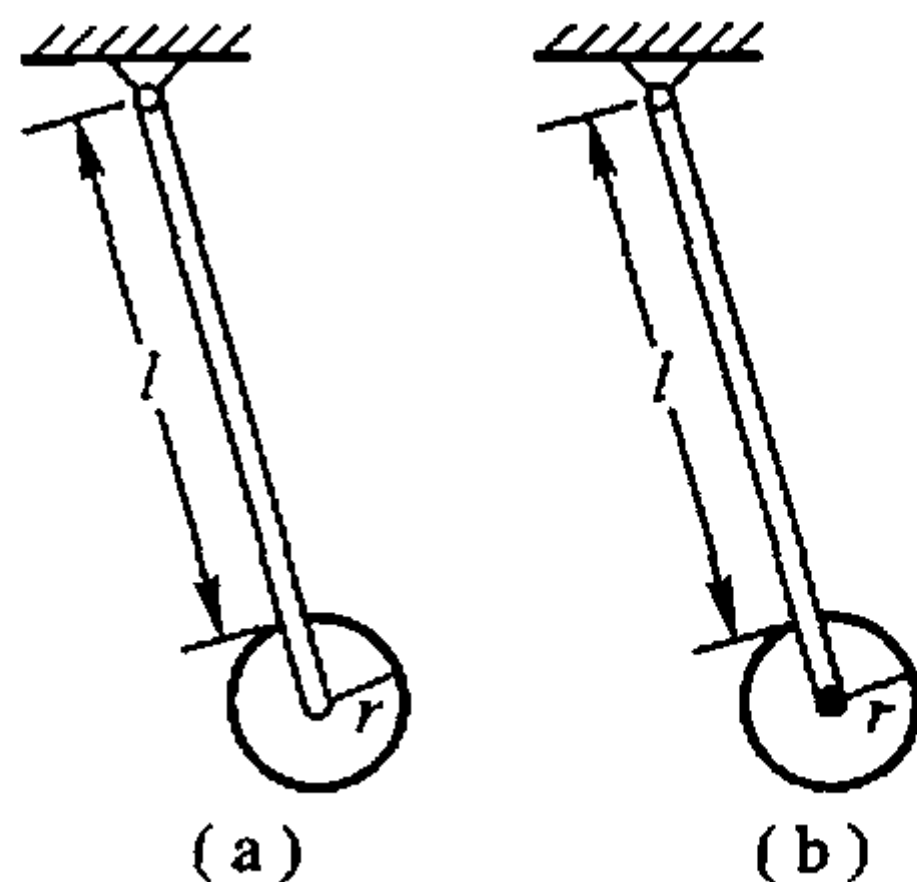
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \frac{2\pi}{T_a}$$

所以, 图(a)摆的周期为

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^2 + 2l^2}{2gl}}$$

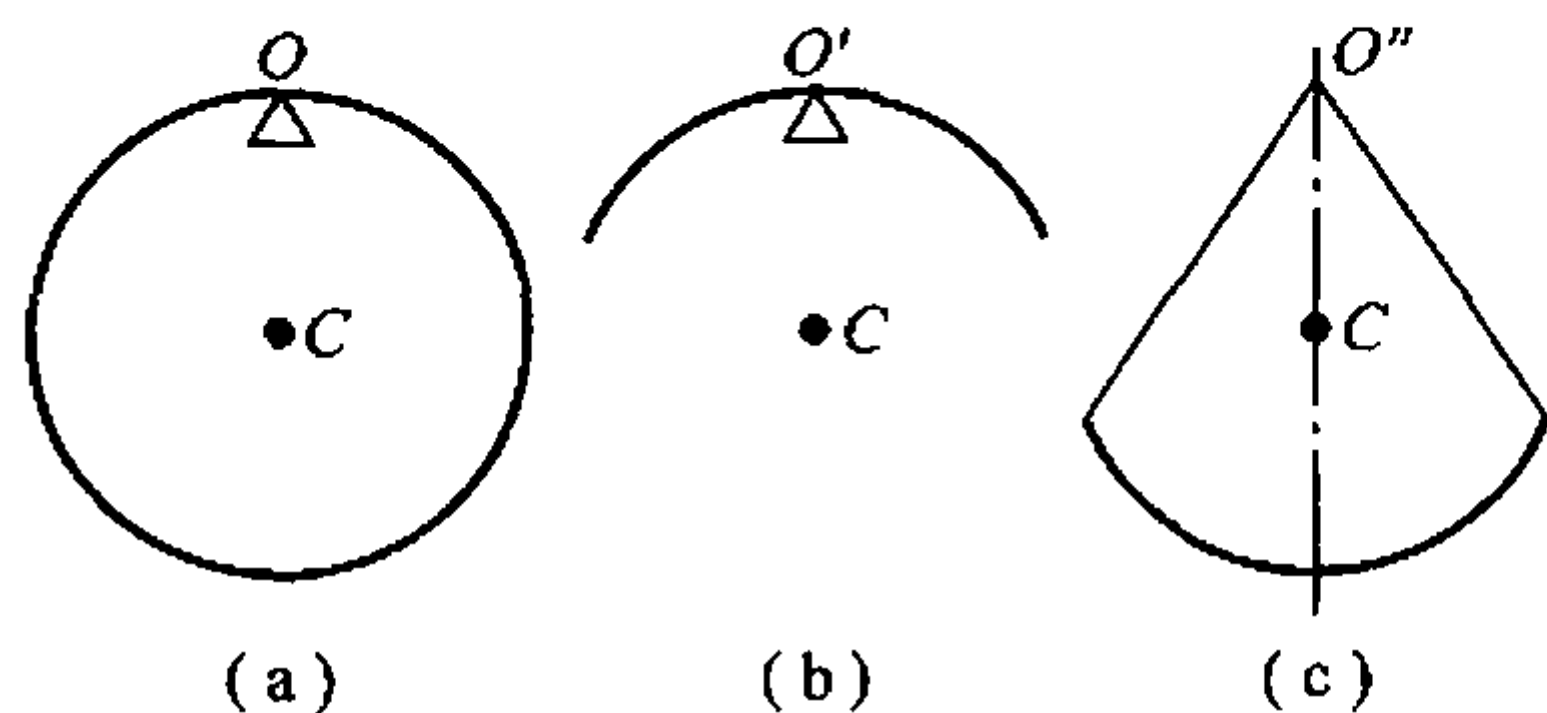
图(b)摆的周期即单摆的周期为  $T_b = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

由  $T_a > T_b$  可知, 圆盘固定连接的摆的周期长些.



习题 10-11 图

**10-12.** 如图所示的三个摆, 其中图(a)是半径为  $R$  的匀质圆环, 悬挂在  $O$  点并且垂直于纸面的摆动, 图(b)和图(c)是同样圆环中对  $OC$  轴对称截取的一部分, 分别悬挂在  $O'$  和  $O''$  点, 可各绕过  $O'$  和  $O''$  点且垂直于纸面的轴线摆动, 如悬线的质量不计, 摆角都不大, 比较它们的摆动周期.



习题 10-12 图

**分析：**根据复摆对轴的转动惯量、复摆质心对轴的力矩求得小摆角时的摆动周期。

**解：**设匀质圆环的线密度为  $\rho_l$ ，相对  $OC$  轴对称地取一段圆弧，如解图 10-12 所示，质元  $dm = \rho_l dl$  对  $O$  的转动惯量为

$$dJ = r^2 dm$$

由于  $r = 2R \cos \theta$ ， $dm = \rho_l R d\varphi = 2\rho_l R d\theta$

所以  $dJ = (2R \cos \theta)^2 (\rho_l 2R d\theta) = 8\rho_l R^3 \cos^2 \theta d\theta$

这段对称圆弧对  $O$  的转动惯量为

$$J = \int dJ = 2 \times 8\rho_l R^3 \int_0^{\theta_0} \cos^2 \theta d\theta = 16\rho_l R^3 \int_0^{\theta_0} \cos^2 \theta d\theta$$

设这段对称圆弧的质心  $C$  相对  $O$  轴的距离为  $y_c$ ，有

$$y_c = \frac{\int y dm}{\int dm}$$

其中  $y = r \cos \theta = 2R \cos^2 \theta$ ，所以，有

$$y_c = \frac{2R \int_0^{\theta_0} \cos^2 \theta d\theta}{\int_0^{\theta_0} d\theta} = \frac{2R \int_0^{\theta_0} \cos^2 \theta d\theta}{\theta_0}$$

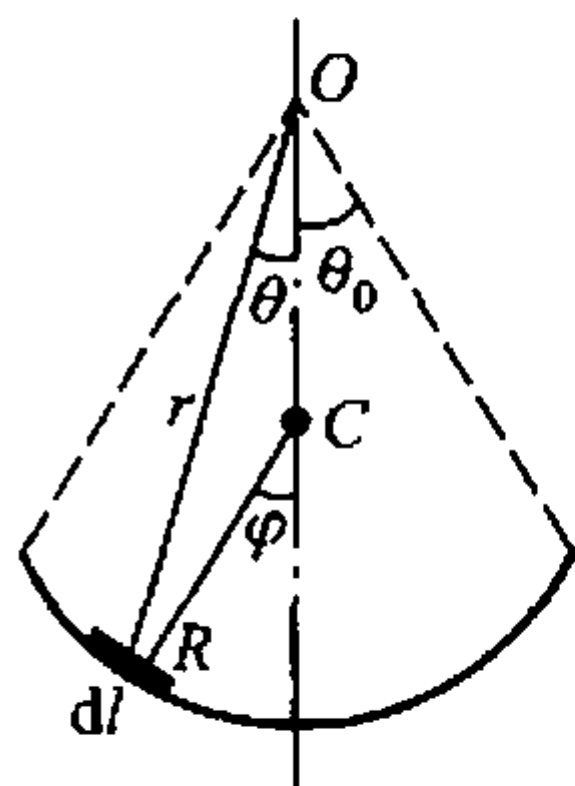
这段圆弧复摆对  $O$  轴的摆动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgy_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{16\rho_l R^3 \int_0^{\theta_0} \cos^2 \theta d\theta}{4\rho_l R \theta_0 g} \cdot \frac{\theta_0}{2R \int_0^{\theta_0} \cos^2 \theta d\theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

式中

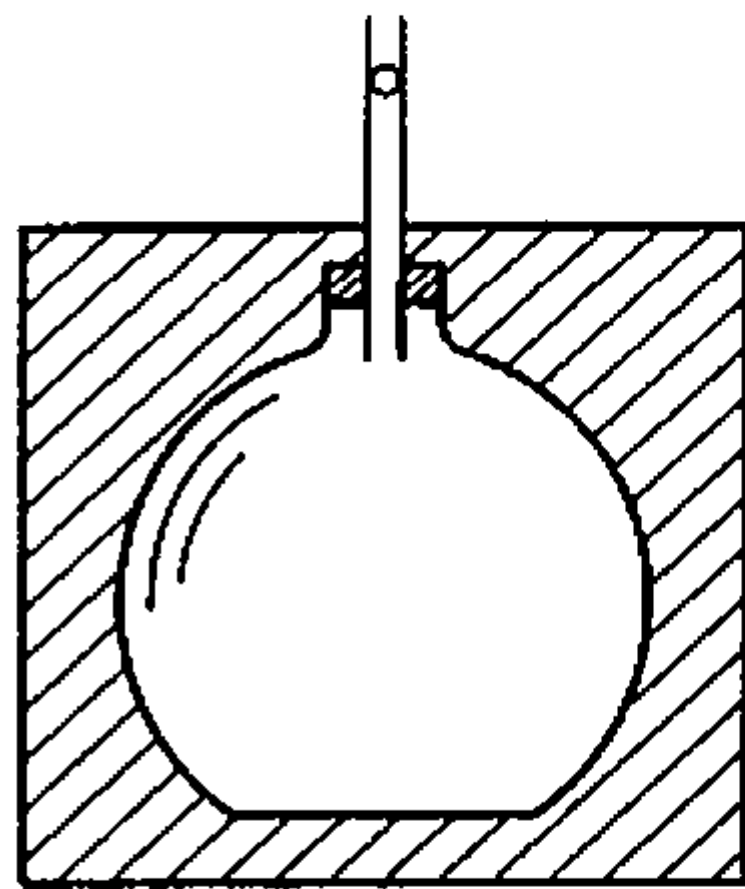
$$m = \int dm = 2\rho_l R \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta = 4\rho_l R \int_0^{\theta_0} d\theta = 4\rho_l R \theta_0$$

这个周期与  $\theta_0$ 、 $m$  和  $y_c$  无关，只与  $R$  和  $g$  有关，所以，在小角度摆动情况下，题给三个摆的摆动周期是相同的。



解图 10-12

10-13. 如图所示,绝热容器上端有一截面积为  $S$  的玻璃管,管内放有一质量为  $m$  的光滑小球作为活塞.容器内储有体积为  $V$ 、压强为  $p$  的某种气体,设大气压强为  $p_0$ .开始时将小球稍向下移,然后放手,则小球将上下振动.如果测出小球作谐振动时的周期  $T$ ,就可以测定气体的比热容比  $\gamma$ . 试证明



习题 10-13 图

$$\gamma = \frac{4\pi^2 mV}{pS^2 T^2}$$

(假定小球在振动过程中,容器内气体进行的过程可看作准静态绝热过程.)

分析: 小球位置的变化与容器内气体状态的变化相对应,根据对小球发生微小位移时的受力和容器内气体的绝热变化过程证明.

解: 设小球受力平衡时,容器内气体状态为  $(p, V)$ , 有

$$p_0 S + mg - pS = 0$$

小球偏离平衡位置  $x$  时,设容器内气体状态为  $(p_1, V_1)$ , 有

$$p_0 S + mg - p_1 S = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{pS - p_1 S}{m}$$

容器内气体的状态由  $(p, V)$  变为  $(p_1, V_1)$  的过程,满足绝热过程方程,

$$p_1 V_1^\gamma = p(V - xS)^\gamma = pV^\gamma$$

式中  $V_1 = V - xS$  是容器内气体被压缩后的体积,压缩后的压强为

$$p_1 = p \left( 1 - \frac{xS}{V} \right)^{-\gamma}$$

小球作微小位移时,有  $xS \ll V$ ,上式可写为

$$p_1 = p \left( 1 + \gamma \frac{xS}{V} \right)$$

所以,小球的运动方程为  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\gamma p S^2}{mV} x = -\omega^2 x$

上式表明,小球将作谐振动,角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p S^2}{mV}}$$

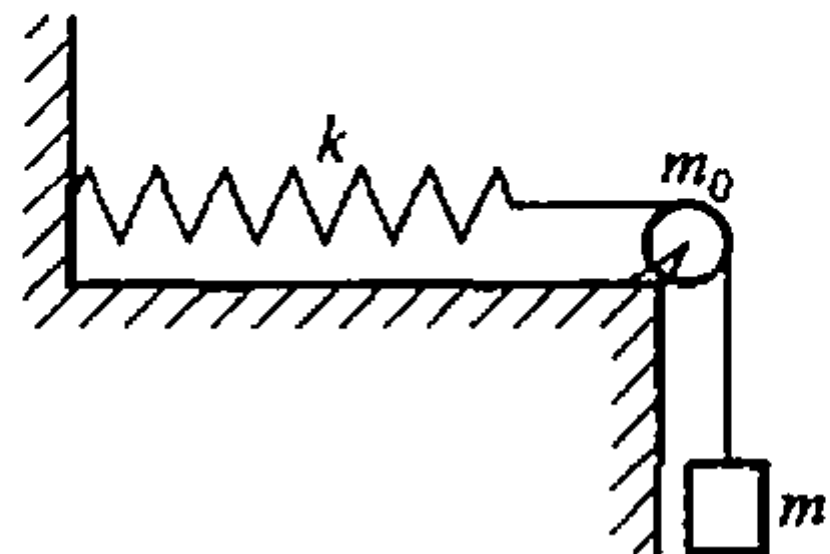
振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma p S^2}}$$

所以,比热容比  $\gamma$  为

$$\gamma = \frac{mV}{p} \left( \frac{2\pi}{TS} \right)^2 = \frac{4\pi^2 mV}{pS^2 T^2}$$

\*10-14. 如图所示, 轻质弹簧的一端固定, 另一端系一轻绳, 轻绳绕过滑轮连接一质量为  $m$  的物体, 绳在轮上不打滑, 使物体上下自由振动. 已知弹簧的劲度系数为  $k$ , 滑轮的半径为  $R$ , 转动惯量为  $J$ . 试用能量法:



习题 10-14 图

(1) 证明物体作简谐运动;

(2) 求物体的振动周期;

(3) 设  $t=0$  时, 弹簧无伸缩, 物体也无初速, 写出物体的振动表达式, 设向下为坐标轴正方向.

分析: 一物体是否作谐振动, 可从动力学方法和能量分析方法作出判断. 动力学的分析方法由对物体的受力分析入手, 根据牛顿运动方程写出物体运动所满足的微分方程, 与谐振动的微分方程作比较后得出判断. 本题用能量法进行判断, 首先需确定振动系统, 确定系统的机械能是否守恒, 然后需确定振动物体的平衡位置和相应的势能零点, 再写出物体在任意位置时的机械能表达式, 并将其对时间求一阶导数后与简谐振动的微分方程作比较, 最后作出是否作简谐振动的判断.

解: (1) 取地球、轻弹簧、滑轮和质量为  $m$  的物体为系统. 在物体上下自由振动的过程中, 系统不受外力, 系统内无非保守内力做功, 所以系统的机械能守恒.

取弹簧的原长处为弹性势能原点, 取物体受合力为零的位置为振动的平衡位置, 也即  $Ox$  坐标轴的原点, 如解图 10-14(a) 所示.

设物体在平衡位置时, 弹簧的伸长量为  $b$ , 由解图 10-14(b) 可知, 有

$$mg - F_{T1} = 0, \quad F_{T1}R - F_{T2}R = 0, \quad F_{T2} = kb$$

得

$$b = \frac{mg}{k}$$

当物体  $m$  偏离平衡位置  $x$  时, 其运动速率为  $v$ , 弹簧的伸长量为  $(x + b)$ , 滑轮转动的角速度为  $\omega$ . 由系统的机械能守恒, 可得方程

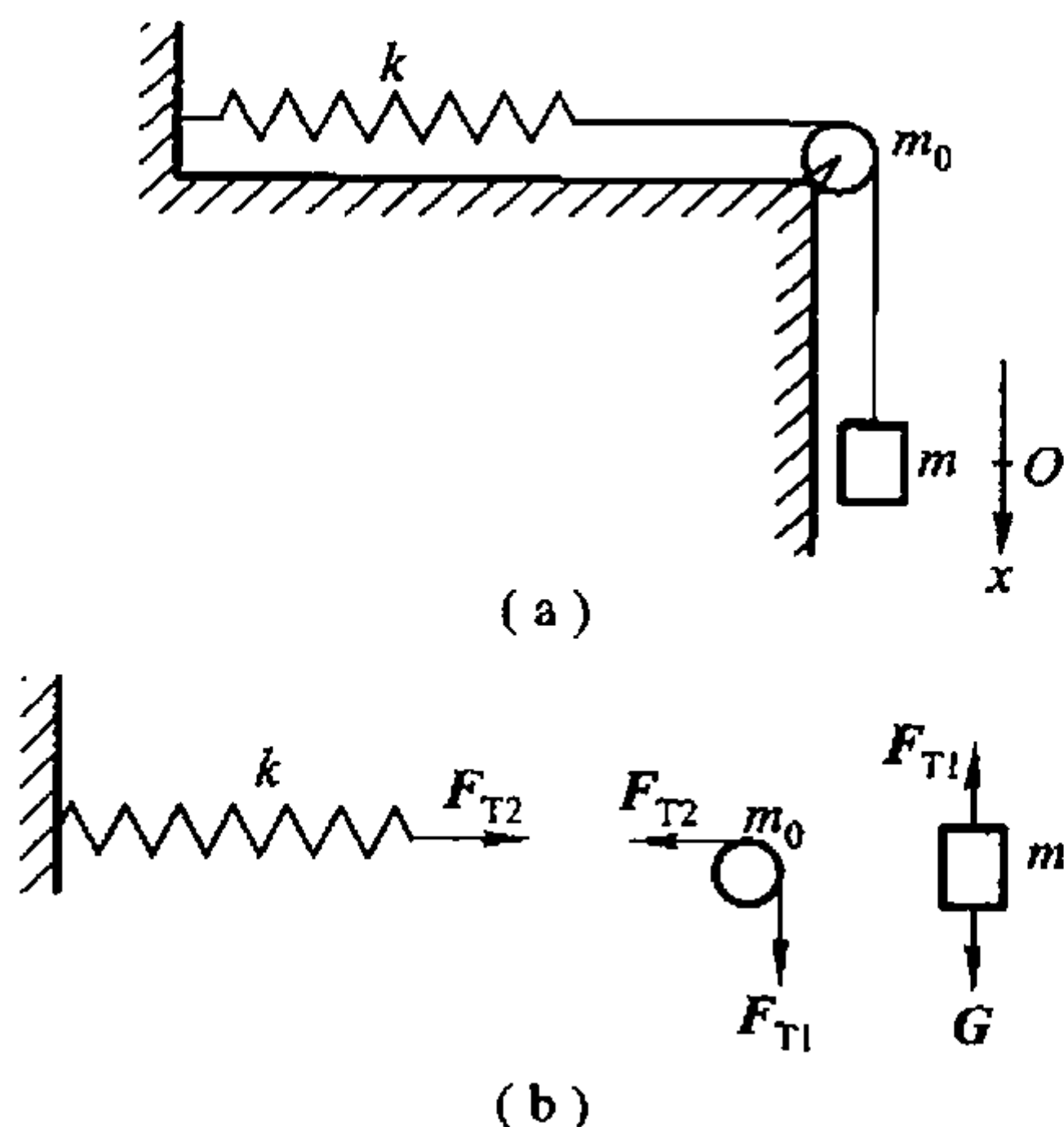
$$\frac{1}{2}k(x+b)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgx = \text{常量}$$

式中角速度  $\omega$  为  $\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R} \frac{dx}{dt}$

将机械能守恒式对时间  $t$  求一阶导数, 得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m + J/R^2}x = -\omega^2x$$

上式即为谐振动所满足的微分方程, 式中  $\omega$  为谐振动的角频率,



解图 10-14

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + J/R^2}} = R \sqrt{\frac{k}{mR^2 + J}}$$

物体的运动规律可表示为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

(2) 物体的振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{mR^2 + J}{k}}$$

(3) 当  $t=0$  时, 弹簧无伸缩, 物体也无初速, 即  $x_0 = -b, v_0 = 0$ , 可得

$$-b = A \cos \varphi, \quad 0 = -A\omega \sin \varphi$$

得

$$A = b = \frac{mg}{k}, \quad \varphi_0 = \pi$$

所以, 物体的谐振动表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = \frac{mg}{k} \cos\left(R \sqrt{\frac{k}{mR^2 + J}} t + \pi\right)$$

**10-15.** 一台摆钟每天快 1 分 27 秒, 其等效摆是  $l = 0.991 \text{ m}$ , 摆锤可上下移动以调节周期, 假定将此摆当作质量集中在摆锤中心的单摆来考虑, 则应将摆锤移动多少距离才能使钟走得正确?

**分析:** 摆钟以摆锤的摆动次数为计时单位, 每个摆动周期为 2 s. 以单摆来考虑的话, 其等效摆长短, 则每个摆动周期短, 每天摆动的次数增多, 表现为摆钟每天比标准钟要快.

**解:** 对单摆的周期  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  微分, 可得

$$2 \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta l}{l}$$

即

$$2 \frac{T - T'}{T} = \frac{l - l'}{l}$$

式中  $T'$  和  $l'$  分别为非标准摆钟的周期和等效摆长. 由上式得等效摆长为

$$l = \frac{l'}{2 \frac{T'}{T} - 1}$$

设标准钟每天摆动的次数为  $n$ , 有

$$n = \frac{24 \times 3600}{T} = \frac{24 \times 3600}{2} = 43200$$

非标准钟每天摆动的次数为  $n'$ , 有

$$n' = \frac{24 \times 3600}{T'} = n + \frac{87}{2} = 43243.5$$

由于  $\frac{T'}{T} = \frac{n}{n'}$ , 故有

$$l = \frac{l'}{2 \frac{T'}{T} - 1} = \frac{l'}{2 \frac{n}{n'} - 1} = \frac{0.991}{2 \times \frac{43\,200}{43\,243.5} - 1} \text{ m} = 0.993 \text{ m}$$

所以, 有  $\Delta l = l - l' = 0.993 \text{ m} - 0.991 \text{ m} = 0.002 \text{ m}$

即, 应将摆锤移动, 使等效摆长增长 2 mm, 才能使钟走得正确.

### 3. 阻尼和受迫振动

**10-16.** 质量为  $m = 5.88 \text{ kg}$  的物体, 挂在弹簧上, 让它在竖直方向上作自由振动. 在无阻力情况下, 其振动周期为  $T = 0.4\pi \text{ s}$ ; 在阻力与物体运动速度成正比的某一介质中, 它的振动周期为  $T' = 0.5\pi \text{ s}$ . 求当速度为  $0.01 \text{ m/s}$  时, 物体在阻尼介质中所受的阻力.

分析: 在小阻尼情况下, 物体振动的“周期”变长, 振幅变小. 由阻尼振动的周期得到阻尼因子  $\beta$  和阻力系数  $\gamma$  后, 即可求得阻力.

解: 由阻尼振动周期  $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

得阻尼因子为

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2} = 3 \text{ rad/s}$$

阻力系数为

$$\gamma = 2\beta m = 35.3 \text{ kg/s}$$

阻力为

$$F = \gamma v = 0.353 \text{ N}$$

**10-17.** 一摆在空中振动, 某时刻, 振幅为  $A_0 = 0.03 \text{ m}$ , 经  $t_1 = 10 \text{ s}$  后, 振幅变为  $A_1 = 0.01 \text{ m}$ . 问: 由振幅为  $A_0$  时起, 经多长时间, 其振幅减为  $A_2 = 0.003 \text{ m}$ ?

分析: 阻尼振动的振幅随时间衰减, 衰减的快慢程度与阻尼因子有关. 利用阻尼振动的振幅关系求解.

解: 阻尼振动的振幅为  $A = A_0 e^{-\beta t}$

将  $t = 0, A = A_0 = 0.03 \text{ m}$ , 和  $t_1 = 10 \text{ s}, A = A_1 = 0.01 \text{ m}$  代入上式, 得

$$\beta = \frac{1}{t_1} \ln \frac{A_0}{A_1} = \frac{1}{10} \ln 3$$

振幅减为  $A_2 = 0.003 \text{ m}$  时, 由  $A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}$ , 得所需时间为

$$t_2 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{A_0}{A_2} = 21 \text{ s}$$

**10-18.** 火车在行驶,每当车轮经过两根铁轨的接缝时,车轮就受到一次冲击,从而使装在弹簧上的车厢发生上下振动. 设每段铁轨长 12.6 m,如果车厢与载荷的总质量为 55 t,车厢下的减振弹簧每受 10 kN(即 1 t 质量的重力)的载荷将被压缩 0.8 mm. 试问火车速率多大时,振动特别强?(这个速率称为火车的危险速率.) 目前,我国铁路提速已超过 140 km/h,试问如何解决提速问题.

**分析:** 火车以速率  $v$  匀速行驶时,周期性地受到铁轨接缝处的撞击,当此撞击频率趋近车厢振动系统的固有频率时,系统将发生共振现象,这时车厢的振动特别强.

**解:** 已知车厢的质量为  $m = 55 \times 10^3 \text{ kg}$ ,弹簧的劲度系数为

$$k = \frac{mg}{b} = \frac{10 \times 10^3}{(0.8 \times 10^{-3}) \text{ N/m}} = 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}$$

车厢振动的固有角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.25 \times 10^7}{55 \times 10^3}} \text{ rad/s} = 15 \text{ rad/s}$$

当火车以速率  $v$  匀速行驶时,受撞击的角频率为

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{v}{l}$$

式中  $l = 12.6 \text{ m}$  为每段铁轨的长度. 当  $\omega = \omega_0$  时,车厢将发生共振,这时的速率即危险速率为

$$v = \frac{l}{2\pi} \omega_0 = \frac{12.6}{2\pi} \times 15 = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$$

解决火车提速问题的措施之一是采用长轨无缝铁轨.

#### 4. 电磁振荡

**10-19.** 把一个电感器接在一个电容器上,此电容器的电容可用旋转旋钮来改变. 我们想使  $LC$  振荡的频率与旋钮旋转的角度作线性变化,如果旋钮旋转  $180^\circ$  角,振荡频率就自  $2.0 \times 10^5 \text{ Hz}$  变到  $4.0 \times 10^5 \text{ Hz}$ . 若  $L = 1.0 \times 10^{-3} \text{ H}$ ,试求电容  $C$  的变化范围.

**分析:**  $LC$  振荡电路的频率决定于自感系数  $L$  和电容量  $C$  的乘积, $L$  一定时,可通过改变电容器的电容量来改变频率. 令频率随角度线性变化,可得到电容量随角度变化的函数关系,并确定它在一定频率范围内电容量的变化范围.

**解:**  $LC$  电路振荡频率为  $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ . 令频率  $\nu$  与角度  $\theta$  成线性关系,为

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \theta_0 + k\theta$$

将  $\theta = 0, \nu = \nu_0 = 2.0 \times 10^5 \text{ Hz}$ ;  $\theta = \pi, \nu = \nu_m = 2\nu_0 = 4.0 \times 10^5 \text{ Hz}$  代入上式, 有

$$\nu_0 = \theta_0 = 2.0 \times 10^5 \text{ Hz}, \quad \nu_m = \nu_0 + k\pi = 4.0 \times 10^5 \text{ Hz}$$

所以

$$k = \frac{\nu_m - \nu_0}{\pi} = \frac{\nu_0}{\pi}$$

$$\nu = \theta_0 + k\theta = \nu_0 \left( 1 + \frac{\theta}{\pi} \right)$$

得到  $C$  与角度  $\theta$  的函数关系为

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L \nu^2} = \frac{1}{4L\nu_0^2 (\pi + \theta)^2}$$

$\theta = 0$  时的电容量为

$$C_0 = \frac{1}{4\pi^2 L \nu_0^2} = 633 \text{ pF}$$

$\theta = \pi$  时的电容量为

$$C_\pi = \frac{1}{16\pi^2 L \nu_0^2} = 158 \text{ pF}$$

电容  $C$  的变化范围为

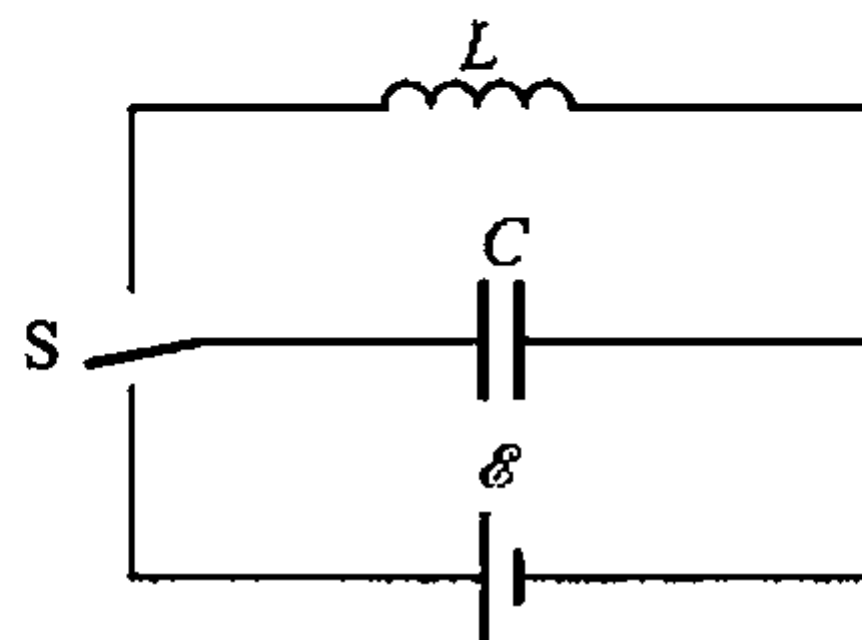
$$\Delta C = C_0 - C_\pi = 475 \text{ pF}$$

**10-20.** 如图所示, 将开关  $S$  撤下后, 电容器即由电池充电, 放手后, 电容器即经由线圈  $L$  放电.

(1) 若  $L = 0.01 \text{ H}$ ,  $C = 1.0 \mu\text{F}$ ,  $\mathcal{E} = 1.4 \text{ V}$ , 求  $L$  中的最大电流(电阻极小, 可略);

(2) 当分布在电容和电感间的能量相等时, 电容器上的电荷为多少?

(3) 从放电开始到电荷第一次为上述数值时, 经过了多少时间?



习题 10-20 图

**分析:** 充电后的电容器与线圈构成  $LC$  电磁振荡电路. 不计电路的阻尼时, 电容器极板上的电荷量随时间按谐振动的规律变化. 振荡电路的固有振动频率由  $L$  和  $C$  的乘积决定, 振幅和初相位由系统的初始状态决定. 任意时刻电路的状态都可由振荡的相位决定.

**解:** 无阻尼  $LC$  电磁振荡的规律为

$$q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

式中  $q$  为  $t$  时刻电容器极板上的电荷量,  $Q_0$  为电容器极板上电荷量的最大值的绝对值, 即振幅. 由题给条件可知

$$Q_0 = CU = C\mathcal{E} = 1.0 \times 10^{-6} \times 1.4 \text{ C} = 1.4 \times 10^{-6} \text{ C}$$

系统的固有振动角频率为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(1) 电路中的充放电电流  $i$  为

$$i = \frac{dq}{dt} = -Q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = -I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

式中  $I_m$  为电流的最大值.

$$\begin{aligned} I_m &= Q_0 \omega = C \varepsilon \frac{1}{\sqrt{LC}} = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= 1.4 \times \sqrt{\frac{1.0 \times 10^{-6}}{0.01}} \text{ A} = 1.4 \times 10^{-2} \text{ A} \end{aligned}$$

(2) 分布在电容和电感间的能量相等时,有

$$\frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} L i^2$$

即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2C} Q_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) &= \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2C} Q_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

可得一个周期内电场能和磁场能相等时的相位为

$$(\omega t + \varphi) = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

电场能和磁场能相等时电容器上的电荷量为

$$q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} Q_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon C = \pm 1.0 \times 10^{-6} \text{ C}$$

(3) 以开始放电为计时零点,有  $q_0 = Q_0, i_0 = 0$ , 所以  $\varphi_0 = 0$ . 从开始放电到第一次电场能和磁场能相等所需时间由  $\omega t = \frac{\pi}{4}$

得

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi \sqrt{LC}}{4} = 7.85 \times 10^{-5} \text{ s}$$

**10-21.** 由一个电容  $C = 4.0 \mu\text{F}$  的电容器和一个自感为  $L = 10 \text{ mH}$  的线圈组成的  $LC$  电路,当电容器上电荷的最大值  $Q_0 = 6.0 \times 10^{-5} \text{ C}$  时开始作无阻尼自由振荡. 试求:

(1) 电场能量和磁场能量的最大值;

(2) 当电场能量和磁场能量相等时,电容器上的电荷量.

分析: 无阻尼  $LC$  电磁振荡电路内,电容器极板上的电荷量和电路中的电流都按简谐运动的规律变化. 电容器内的电能和电感内的磁能相互转换,总电磁能守恒.

解: 由题给初始条件可知,振荡电路中,电容器极板上电荷量的初相  $\varphi_0 = 0$ . 所以,有

$$q = Q_0 \cos \omega t$$

式中  $\omega$  为振荡电路的固有角频率  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(1) 电场能和磁场能的最大值相等,即为电路的总电磁能.

$$W = \frac{1}{2C}Q_0^2 = 4.5 \times 10^{-4} \text{ J}$$

(2) 电场能量和磁场能量相等时,有

$$\frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2}Li^2$$

式中

$$i = \frac{dq}{dt} = -Q_0\omega \sin \omega t$$

可得

$$\frac{1}{2C}Q_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2C}Q_0^2 \sin^2 \omega t$$

所以,一个周期内电场能和磁场能相等时的相位为

$$\varphi = \omega t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

电场能量和磁场能量相等时电容器上的电荷量为

$$q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}Q_0 = \pm 4.3 \times 10^{-5} \text{ C}$$

## 5. 简谐运动的合成

**10-22.** 一质点同时参与两个在同一直线上的谐振动:

$$x_1 = 0.04 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right), \quad x_2 = 0.03 \cos\left(2t - \frac{5}{6}\pi\right)$$

试求其合振动的运动学方程(式中  $x$  以 m 计,  $t$  以 s 计).

**分析:** 这是两个振动方向相同( $Ox$  轴),振动频率相同的谐振动的合成,合振动仍为  $x$  轴上同频率的谐振动. 利用旋转矢量图法判断出两振动的相位差,即可得到合振动的振幅和相位,并写出合振动的运动学方程.

**解:** 这两个谐振动的相位在任何时刻都反相,由旋转矢量图可知,合矢量  $A$  在  $A_1$  方位如解图 10-22 所示. 所以,合振幅为

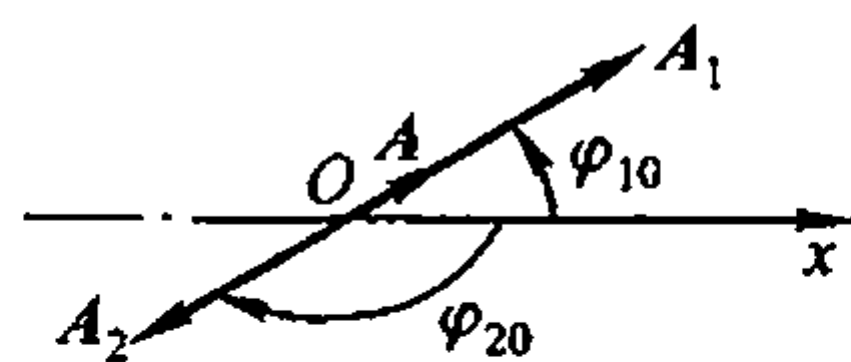
$$A = |A_1 - A_2| = 0.04 \text{ m} - 0.03 \text{ m} = 0.01 \text{ m}$$

初相位为

$$\varphi_0 = \varphi_{10} = \frac{\pi}{6}$$

合振动的运动学方程为

$$x = x_1 + x_2 = 0.01 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{m})$$



解图 10-22

10-23. 一个质点同时参与两个同方向同频率的简谐运动,其振动方程为

$$x_1 = 0.3 \cos\left(0.5\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) (\text{m})$$

$$x_2 = 0.4 \cos(0.5\pi t + \varphi_{20}) (\text{m})$$

试问:

(1)  $\varphi_{20}$  为何值时合振动的振幅最大? 其值为多少?

(2) 若合振动的初相  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ , 则  $\varphi_{20}$  为何值?

分析: 当两个同方向( $Ox$  轴), 同频率的谐振动同相时, 其合振动的振幅最大, 反相时合振动的振幅最小. 合振动的初相可根据旋转矢量图上合矢量的方位确定.

解: (1) 当两振动同相时, 合振动的振幅最大. 所以, 有

$$\varphi_{20} = -\frac{\pi}{6}$$

合振幅最大, 为  $A = A_1 + A_2 = 0.3 \text{ m} + 0.4 \text{ m} = 0.7 \text{ m}$

(2) 若合振动的初相  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ , 在旋转矢量图上合矢量  $A$  的方位与  $A_1$  相反,

即  $A$  与  $A_2$  的方位相同, 所以, 应有  $\varphi_{20} = \frac{\pi}{6}$

合振幅最小, 为  $A = |A_1 - A_2| = 0.4 \text{ m} - 0.3 \text{ m} = 0.1 \text{ m}$

10-24. 三个同方向、同频率的谐振动为

$$x_1 = 0.1 \cos\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{m})$$

$$x_2 = 0.1 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{m})$$

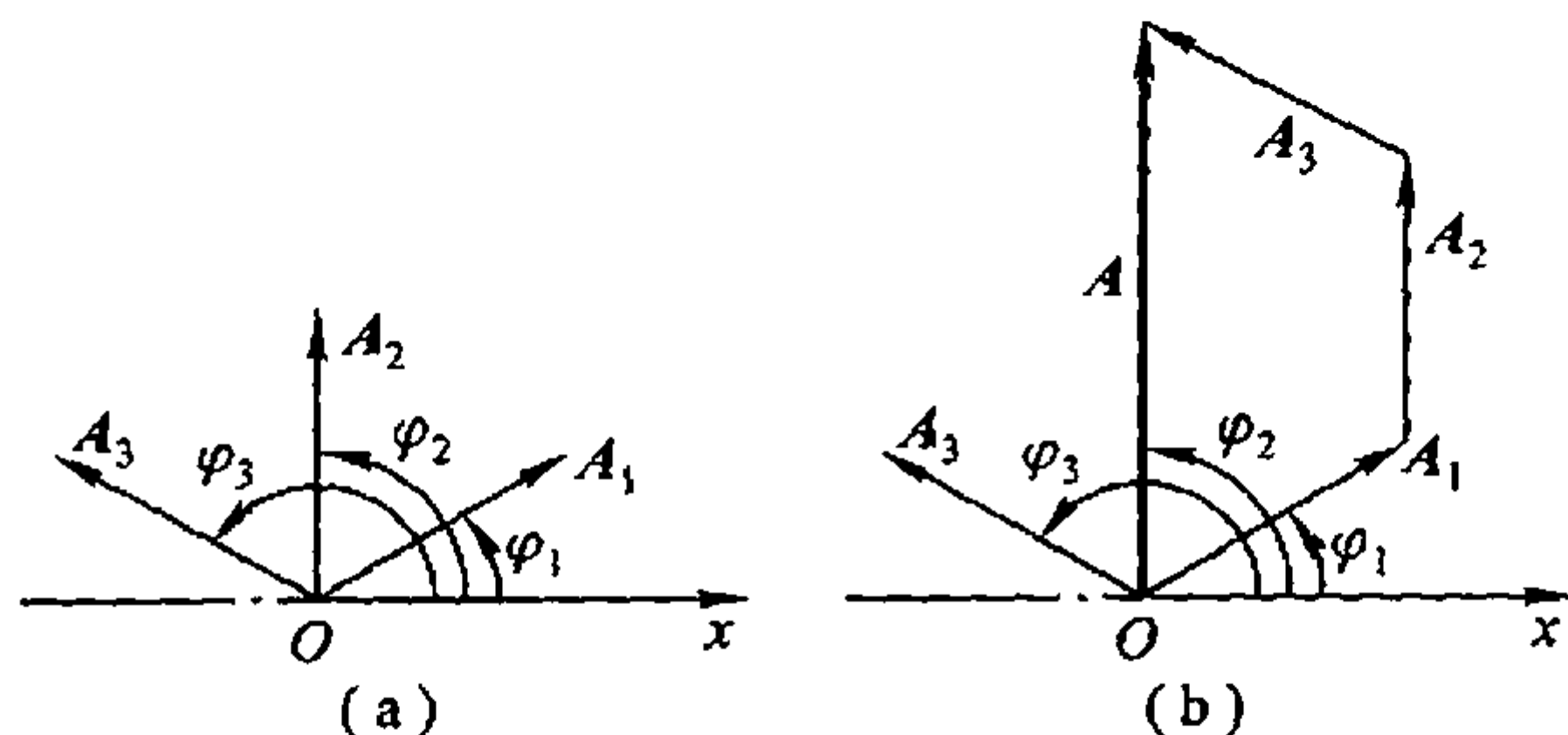
$$x_3 = 0.1 \cos\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) (\text{m})$$

试利用旋转矢量法求出合振动的表达式.

分析: 三个同方向、同频率的谐振动与旋转矢量图上三个以相同角速度旋转的矢量相对应. 合矢量的模与合振幅相对应, 合矢量与  $Ox$  轴正向的夹角与合振动的初相位相对应. 合振动仍为  $x$  方向的、频率相同的谐振动.

解: 由于三个谐振动的振幅相同, 因此, 旋转矢量图上三个旋转矢量  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_3$  的模相等, 均为  $0.1 \text{ m}$ . 又由于三个谐振动间的初相差相等, 故旋转矢量图上  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_2$ 、 $A_3$  间的夹角相等, 均为  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ .  $t=0$  时刻的旋转矢量如解图 10-24(a) 所示.

如解图 10-24(b) 所示, 矢量和  $A$  的模, 即合振动的振幅为



解图 10-24

$$A = 2A_2 = 0.2 \text{ m}$$

合振动的初相位, 即  $t=0$  时刻  $A$  与  $Ox$  轴正向的夹角为

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

所以, 合振动的表达式为  $x = 0.2 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{SI})$

**10-25.** 当两个同方向的谐振动合成为一个振动时, 其振动表达式为

$$x = A \cos 2.1t \cos 50.0t$$

式中  $t$  以  $s$  为单位. 求各分振动的角频率和合振动的拍的周期.

**分析:** 两个同振幅、同方向、频率稍有差异的简谐运动合成时, 合振动以两分振动的“平均频率”振动, 合振幅以缓慢的“拍频”变化, 产生“拍”现象.

**解:** 两个同振幅、同方向、频率很接近的谐振动的合成可表示为

$$x = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos(\bar{\omega}t + \varphi) = A(t) \cos(\bar{\omega}t + \varphi)$$

式中  $A(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ , 是以  $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$  为角频率随时间缓慢变化的因子,  $\bar{\omega} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$  为合振动的频率.

由于在  $A(t)$  变化的一个周期内, 合振动的振幅有两次达极大和极小值, 因此, 合振幅  $|A(t)|$  的变化周期  $\tau$  决定于  $\frac{|\Delta\omega|}{2} \tau = \pi$ , 所以, 拍频为

$$\nu_{\text{拍}} = \frac{1}{\tau} = \frac{|\Delta\omega|}{2\pi} = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\pi} = |\nu_2 - \nu_1|$$

拍的周期为

$$\tau = \frac{1}{\nu_{\text{拍}}} = \frac{2\pi}{|\Delta\omega|} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$$

由合振动表达式, 有

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 2.1, \quad \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 50.0$$

解得

$$\omega_1 = 47.9 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 52.1 \text{ rad/s}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = 1.5 \text{ s}$$

**10-26.** 一架钢琴的“中音 C”有些不准,为了校准的需要,取一标准的 256 Hz 音叉一起弹响,在 1 min 内听到 24 拍. 试求待校正钢琴此键音的频率.

**分析:** 利用“拍”现象校音. 拍频等于两同方向谐振动的频率之差,当两谐振动的频率完全一致时,合振幅不随时间变化,“拍”现象消失.

**解:** 设音叉振动的频率为  $\nu_1$ , 待校键音的频率为  $\nu_2$ , 由拍频

$$\nu_{\text{拍}} = |\nu_2 - \nu_1| = \frac{60}{24} \text{ Hz} = 2.5 \text{ Hz}$$

得

$$\nu_2 = \nu_1 \pm 2.5 = (256 \pm 2.5) \text{ Hz}$$

即待校键音的频率为 258.5 Hz 或 253.5 Hz.

**10-27.** 设一质点的位移可用两个谐振动的叠加来表示:

$$x = A \sin \omega t + B \sin 2\omega t$$

(1) 写出这质点的速度和加速度表达式;

(2) 这质点的运动是不是谐振动?

(3) 画出其  $x-t$  图线.

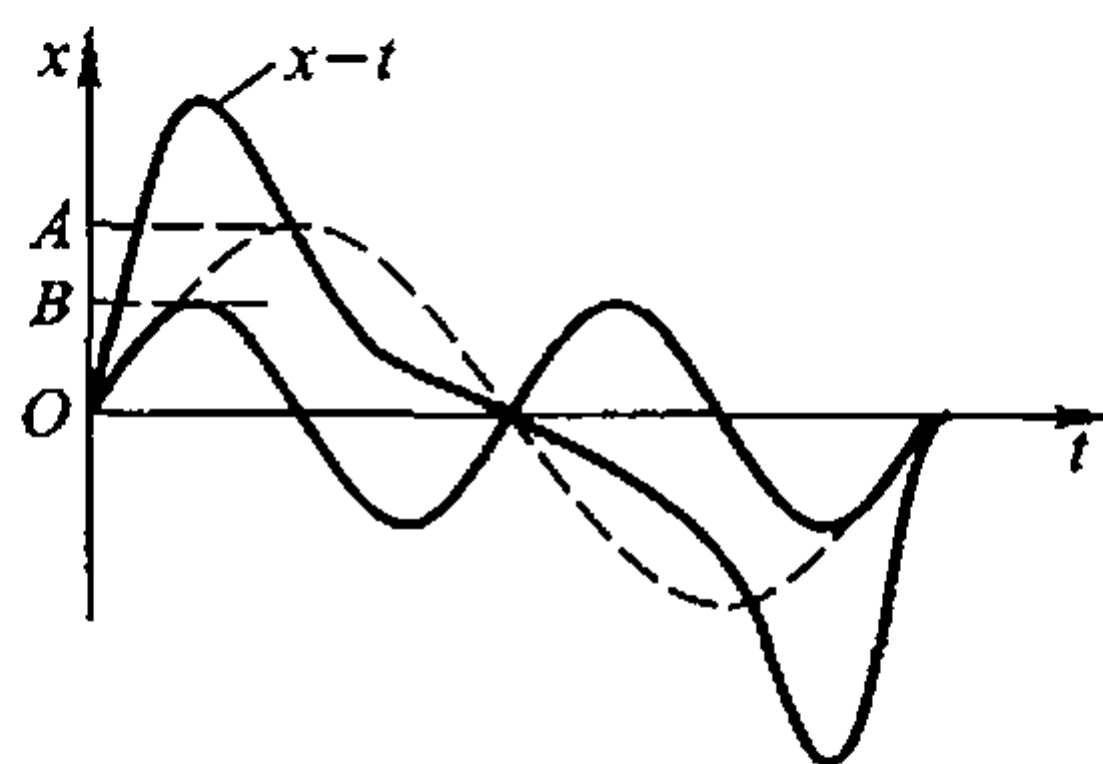
**分析:** 质点的一般周期运动都可表示为不同振幅、不同角频率的谐振动之和.

**解:** (1) 质点的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t + 2B\omega \cos 2\omega t$$

质点的加速度为

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t - 4B\omega^2 \sin 2\omega t \\ &= -\omega^2 [x + 3B \sin 2\omega t] \end{aligned}$$



解图 10-27

(2) 由于加速度  $a$  与质点的位移  $x$  不具备谐振动的特征:  $a = -\omega^2 x$ , 所以, 质点不作谐振动.

(3) 根据两个谐振动曲线画出的  $x-t$  图线见解图 10-27.

**10-28.** 质量为 0.1 kg 的质点同时参与互相垂直的两个振动, 其振动表达式分别为

$$x = 0.06 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right) (\text{m})$$

$$y = 0.03 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) (\text{m})$$

求:(1) 质点的运动轨迹;(2) 质点在任一位置所受的作用力.

分析: 质点同时受到  $x$  和  $y$  方向振动的作用, 其运动轨迹在  $xOy$  平面内, 质点所受之力满足力的叠加原理.

解: (1) 质点的运动轨迹可由振动表达式消去参量  $t$  得到. 对  $t$  作变换, 令  $t' = t - \frac{1}{2}$ , 两振动表达式可改写为

$$x = 0.06 \cos\left(\frac{\pi}{3}t' + \frac{\pi}{2}\right) = -0.06 \sin \frac{\pi}{3}t'$$

$$y = 0.03 \cos \frac{\pi}{3}t'$$

将两式平方后相加, 得质点的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{(0.06)^2} + \frac{y^2}{(0.03)^2} = 1$$

所以, 质点的运动轨迹是一椭圆.

(2) 质点运动的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$

式中

$$a_x = 0.06 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin \frac{\pi}{3}t' = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 x$$

$$a_y = -0.03 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cos \frac{\pi}{3}t' = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 y$$

所以, 有

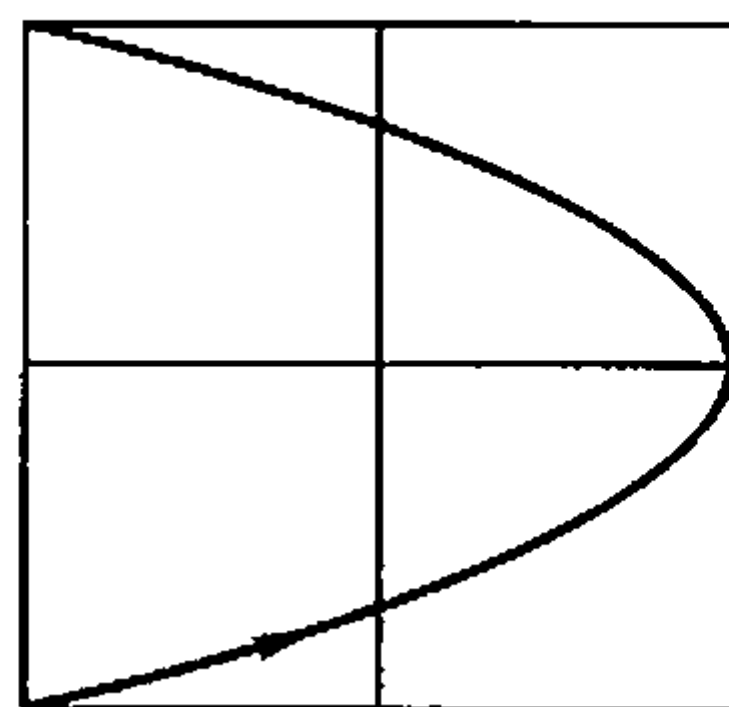
$$\mathbf{a} = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \mathbf{e}_r$$

质点在任一位置所受的作用力为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -0.11\mathbf{e}_r$$

10-29. 图示为在  $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$  的荧光屏上的李萨如图形. 已知水平方向( $x$  方向)的振动为  $50 \text{ Hz}$ ,  $t=0$  时的光点位于左下角. 试写出  $x$ 、 $y$  方向的谐振动方程.

分析: 图示稳定的李萨如图形是  $x$  方向和  $y$  方向的谐振动合成的轨迹, 并且两方向振动的频率成整数比. 由合成轨迹可见,  $x$  方向完成一次完整振动时,  $y$  方向仅完成半次振动, 由此可确定它们的频率之比为  $2:1$ . 由于李萨如图形的显示区域为正方形, 因此可确定两互相垂直振动的振幅相等. 根据初始时



习题 10-29 图

刻光点的位置,可确定两振动的初相.

解: 设  $x$  方向谐振动的角频率为  $\omega_x$ ,  $y$  方向谐振动的角频率为  $\omega_y$ , 应有

$$\omega_x = 2\omega_y$$

即

$$\omega_x = 2\pi\nu_x = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_y = 2\pi\nu_y = 50\pi \text{ rad/s}$$

设两互相垂直振动的振幅分别为  $A_x$  和  $A_y$ , 有

$$A_x = A_y = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

设两振动的初相分别为  $\varphi_{x0}$  和  $\varphi_{y0}$ , 则  $x$ 、 $y$  方向谐振动的表达式为

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_{x0}) = 0.1 \cos(100\pi t + \varphi_{x0}) \text{ (m)}$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_{y0}) = 0.1 \cos(50\pi t + \varphi_{y0}) \text{ (m)}$$

由于  $t=0$  时,  $x_0 = -A_x = -0.1 \text{ m}$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $y_0 = -A_y = -0.1 \text{ m}$ ,  $v_{y0} = 0$ , 所以, 有

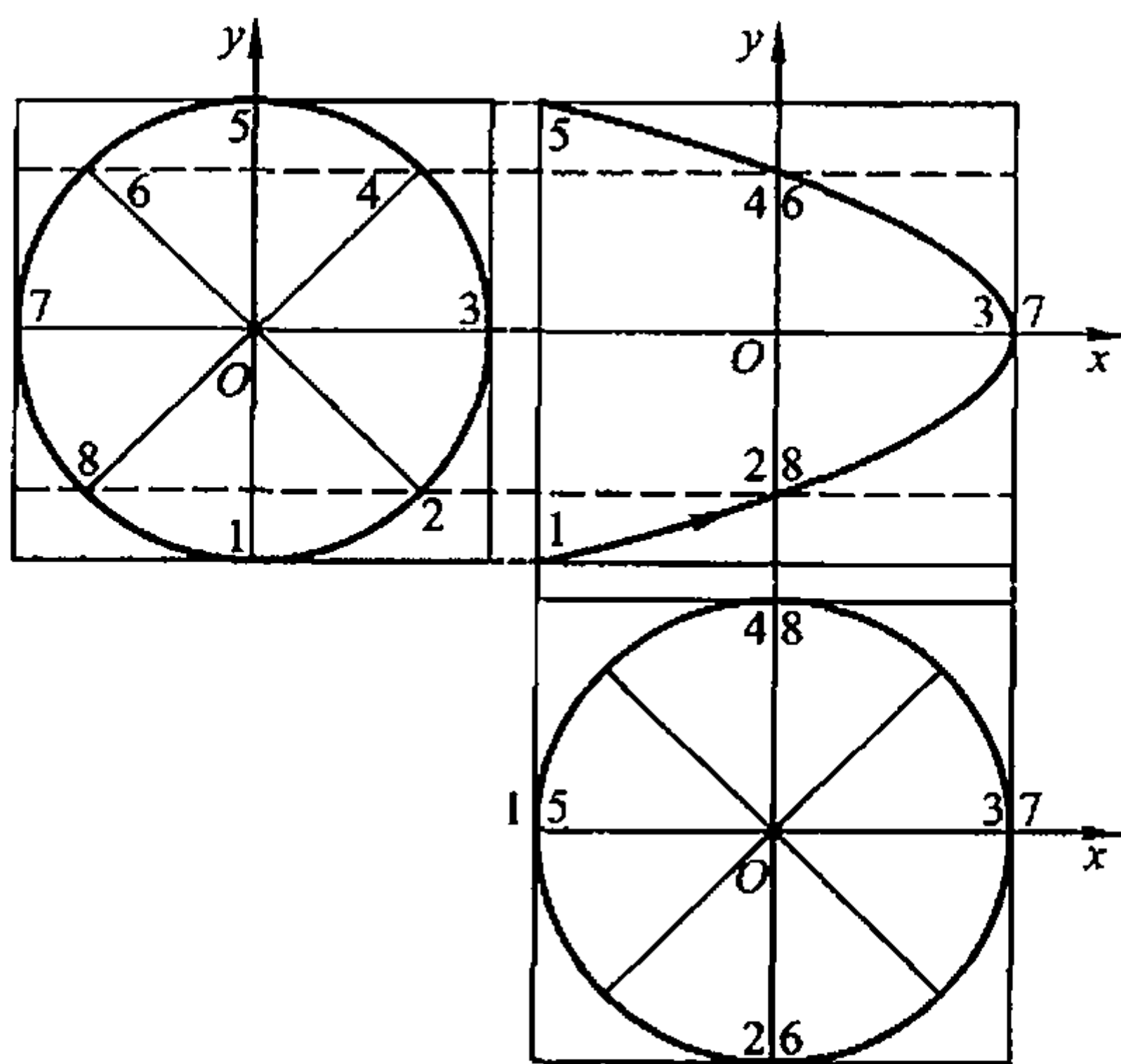
$$\varphi_{x0} = \varphi_{y0} = \pi$$

由此可得  $x$ 、 $y$  方向谐振动的表达式为

$$x = 0.1 \cos(100\pi t + \pi) \text{ (m)}$$

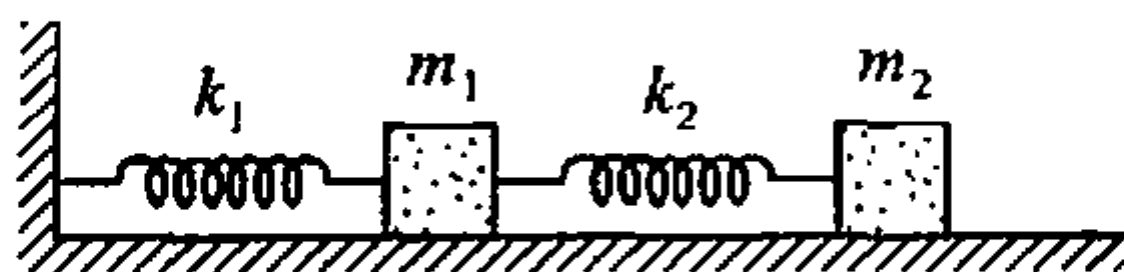
$$y = 0.1 \cos(50\pi t + \pi) \text{ (m)}$$

用旋转矢量合成的李萨如图形如解图 10-29 所示.



解图 10-29

**\* 10-30.** 在工程上常常用多个弹簧振子的串联来描述一个实际的力学系统,例如一列火车是多节车厢挂接在一起,每节车厢可看作是一个弹簧振子. 分析由多个振子串联系统的运动是很有意义的工作. 为简单起见,试对两个弹簧振子串联的振动作一描述. 设两个振子弹簧的劲度系数相同均为  $0.5 \text{ N/m}$ , 物体的质量分别为  $0.5 \text{ kg}$  和  $1 \text{ kg}$ .



习题 10-30 图

- (1) 写出两弹簧振子的运动方程;
- (2) 编写一计算机程序,求解该运动方程组并画出两弹簧振子的位移曲线图;
- (3) 从所得的结果是否可以判断两弹簧振子作什么性质的振动(周期振动或混沌)?

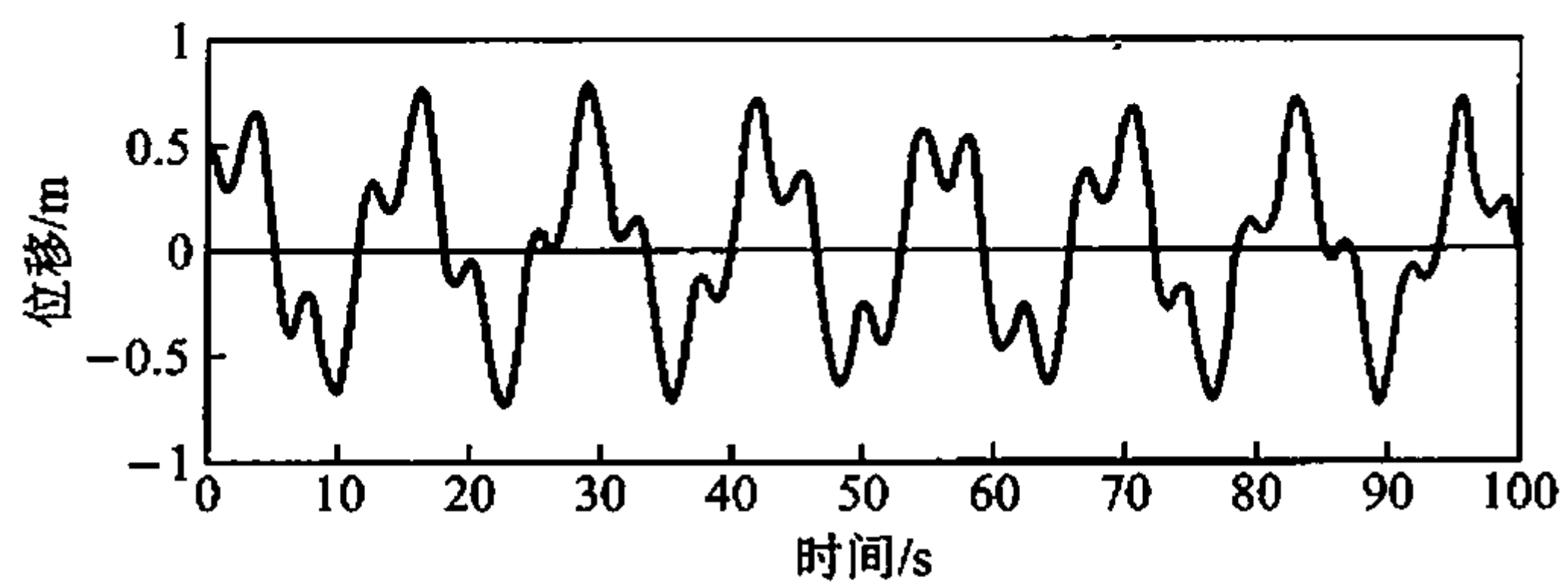
答案: (1) 
$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{-k_1 x_1}{m_1} + \frac{k_2 (x_2 - x_1)}{m_1}; \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{k_2 (x_1 - x_2)}{m_2}.$$

(2) 两弹簧振子的位移曲线如解图 10-30 所示.

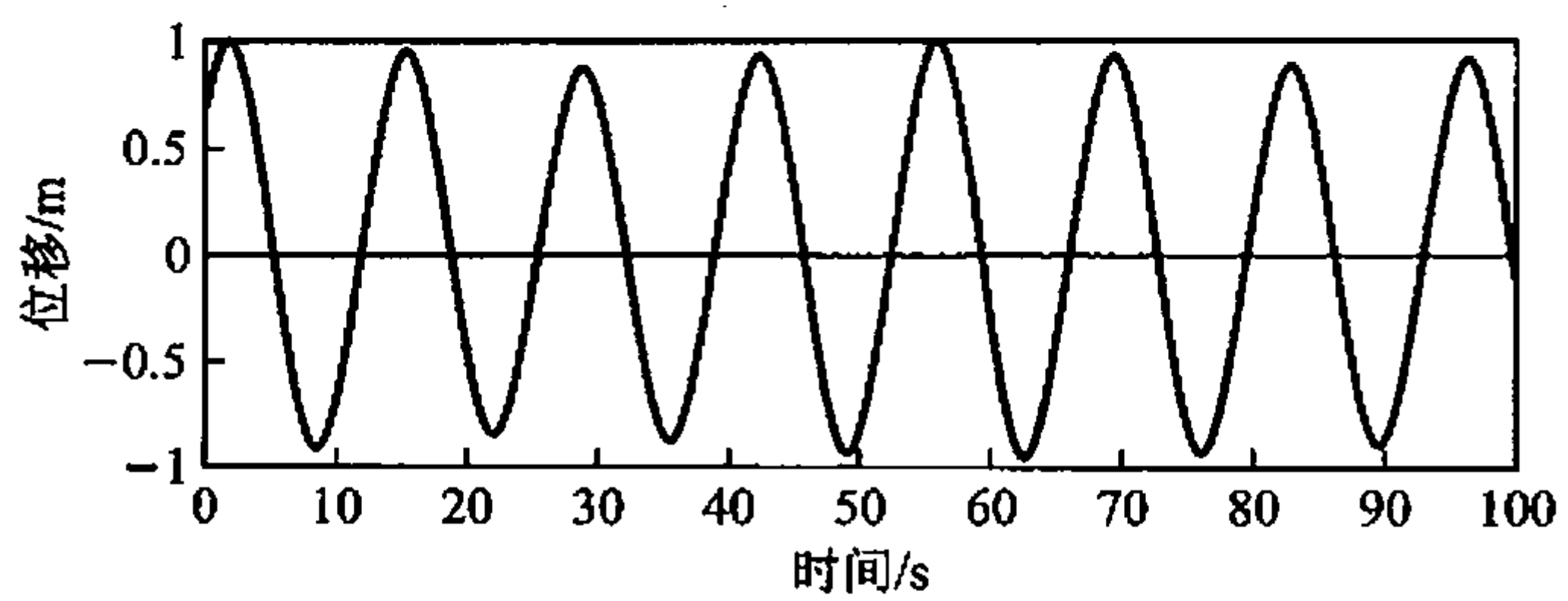
(3) 是不同周期振动的叠加,线性方程所描写的系统是不可能产生混沌的.

#### 参考程序

```
% 两弹簧振子串联的振动分析
clear
global k1 k2 m1 m2;                                     % 全局变量
k1 = 0.5; k2 = 0.5; m1 = 0.5; m2 = 1;                  % 两振子参数
v10 = 0.1; x10 = 0.5; v20 = 0.4; x20 = 0.4;            % 初时条件
y0 = [x10 v10 x20 v20]';
tmax = 100;                                              % 积分时间范围
tspan = [0 tmax];
[t,y] = ode23('lstc',tspan,y0);                         % 解微分方程
subplot(2,1,1)
plot(y(:,1))                                             % 画出第一个振子的位移曲线
xlabel('时间(s)'); ylabel('位移(m)');
subplot(2,1,2)
plot(y(:,3))                                             % 画出第二个振子的位移曲线
xlabel('时间(s)'); ylabel('位移(m)');
function vx = lstc(t,y)
global k1 k2 m1 m2;
x1 = y(1); v1 = y(2); x2 = y(3); v2 = y(4);
% y(1), y(2), y(3), y(4) 分别为两振子的位移和速度
vx = [v1 - k1 * x1 / m1 + k2 * (x2 - x1) / m1 v2 k2 * (x1 - x2) / m2]'; % 写入运动方程
```



(a)  $m_1$  的位移曲线



(b)  $m_2$  的位移曲线

解图 10-30

# 第十一章

## 机械波和电磁波

### 一、教学基本要求

1. 掌握建立平面简谐波波函数的方法和波函数的物理意义,理解波的能量传播特征.
2. 掌握描述波动的特征量和描述能量传播特征的物理量及其关系.
3. 理解惠更斯原理.
4. 理解波的叠加原理和相干波概念. 理解波的干涉的相位差和波程差条件. 理解驻波及其形成条件,驻波与行波的区别.
5. 理解机械波的多普勒效应. 了解电磁波的多普勒效应.
6. 了解电磁波的产生及其性质.

### 二、本章习题分类

1. 波动的特征量和各量之间的关系
2. 已知有关物理量或波形曲线,建立波动表达式
3. 波的能量
4. 电磁波
5. 波的干涉和驻波
6. 多普勒效应

### 三、习题分析和解答

1. 波动的特征量和各量之间的关系

11-1. (1) 在标准状态下,声音在空气中的速率为  $331 \text{ m/s}$ ,空气的比热容比  $\gamma$  是多少?

(2) 地震造成的纵扰动  $15 \text{ min}$  传播了  $5\,000 \text{ km}$ ,试估算传播扰动岩石的弹性模量. 假定岩石的平均密度是  $2\,700 \text{ kg/m}^3$ .

(3) 人眼所能见到的光(可见光)的波长范围为 400 nm(属于紫光)至 760 nm(属于红光). 求可见光的频率范围( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ).

解: (1) 空气中的声波是纵波, 其传播速率仅是温度的函数(参见习题 6-17)为  $u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ , 在标准状态下, 空气的比热容比  $\gamma$  为

$$\gamma = \frac{u^2 M}{RT} = \frac{331^2 \times 29 \times 10^{-3}}{8.31 \times 273} = 1.40$$

(2) 设地震纵波在岩石中的传播速率由  $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  给出, 可得岩石的弹性模量  $E$  为

$$E = \rho u^2 = 2700 \times \left( \frac{5000 \times 10^3}{15 \times 60} \right)^2 \text{ N/m}^2 = 8.33 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

(3) 真空中, 各种频率可见光的传播速率均为  $c$ .  
紫光频率(波长为 400 nm)为

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \times 10^8}{400 \times 10^{-9}} \text{ Hz} = 7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

红光频率(波长为 760 nm)为

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \times 10^8}{760 \times 10^{-9}} \text{ Hz} = 3.95 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

11-2. 一横波沿绳子传播时的波动方程式为

$$y = 0.05 \cos(10\pi t - 4\pi x)$$

$x, y$  的单位为 m,  $t$  的单位为 s.

(1) 求此波的振幅、波速、频率和波长.

(2) 求绳子上各质点振动的最大速度和最大加速度.

(3) 求  $x = 0.2 \text{ m}$  处的质点在  $t = 1 \text{ s}$  时的相位, 它是原点处质点在哪一时刻的相位?

(4) 分别画出  $t = 1 \text{ s}, 1.25 \text{ s}, 1.50 \text{ s}$  各时刻的波形.

分析: 平面简谐波在弹性介质中传播时, 介质中各质点作位移方向、振幅、频率都相同的谐振动, 振动的相位沿传播方向依次落后, 以速度  $u$  传播. 把绳中横波的表达式与波动表达式相比较, 可得到波的振幅、波速、频率和波长等特征量.  $t$  时刻、 $x > 0$  处质点的振动相位与  $t$  时刻前  $x = 0$  处质点的振动相位相同.

解: (1) 将绳中横波的表达式

$$y = 0.05 \cos(10\pi t - 4\pi x)$$

与标准波动表达式

$$y = A \cos(2\pi \nu t - 2\pi x / \lambda + \varphi_0)$$

比较可得

$$A = 0.05 \text{ m}, \quad \nu = 5 \text{ Hz}, \quad \lambda = 0.5 \text{ m}$$

并有

$$u = \lambda \nu = 2.5 \text{ m/s}, \quad \varphi_0 = 0$$

(2) 各质点振动的最大速度为  $v_m = \omega A = 0.5\pi = 1.57 \text{ m/s}$

各质点振动的最大加速度为  $a_m = \omega^2 A = 5\pi^2 = 49.3 \text{ m/s}^2$

(3)  $x = 0.2 \text{ m}$  处质点在  $t = 1 \text{ s}$  时的相位为

$$\varphi(0.2 \text{ m}, 1 \text{ s}) = (10\pi \times 1 - 4\pi \times 0.2) = 9.2\pi$$

这是  $t$  时刻前, 坐标原点  $x = 0$  处质点的振动相位, 即有

$$\varphi(0 \text{ m}, t \text{ s}) = (10\pi t - 4\pi \times 0) = 9.2\pi$$

得

$$t = 0.92 \text{ s}$$

(4)  $t = 1 \text{ s}$  时的波动方程为

$$y = 0.05 \cos(10\pi - 4\pi x) = 0.05 \cos 4\pi x \text{ (m)}$$

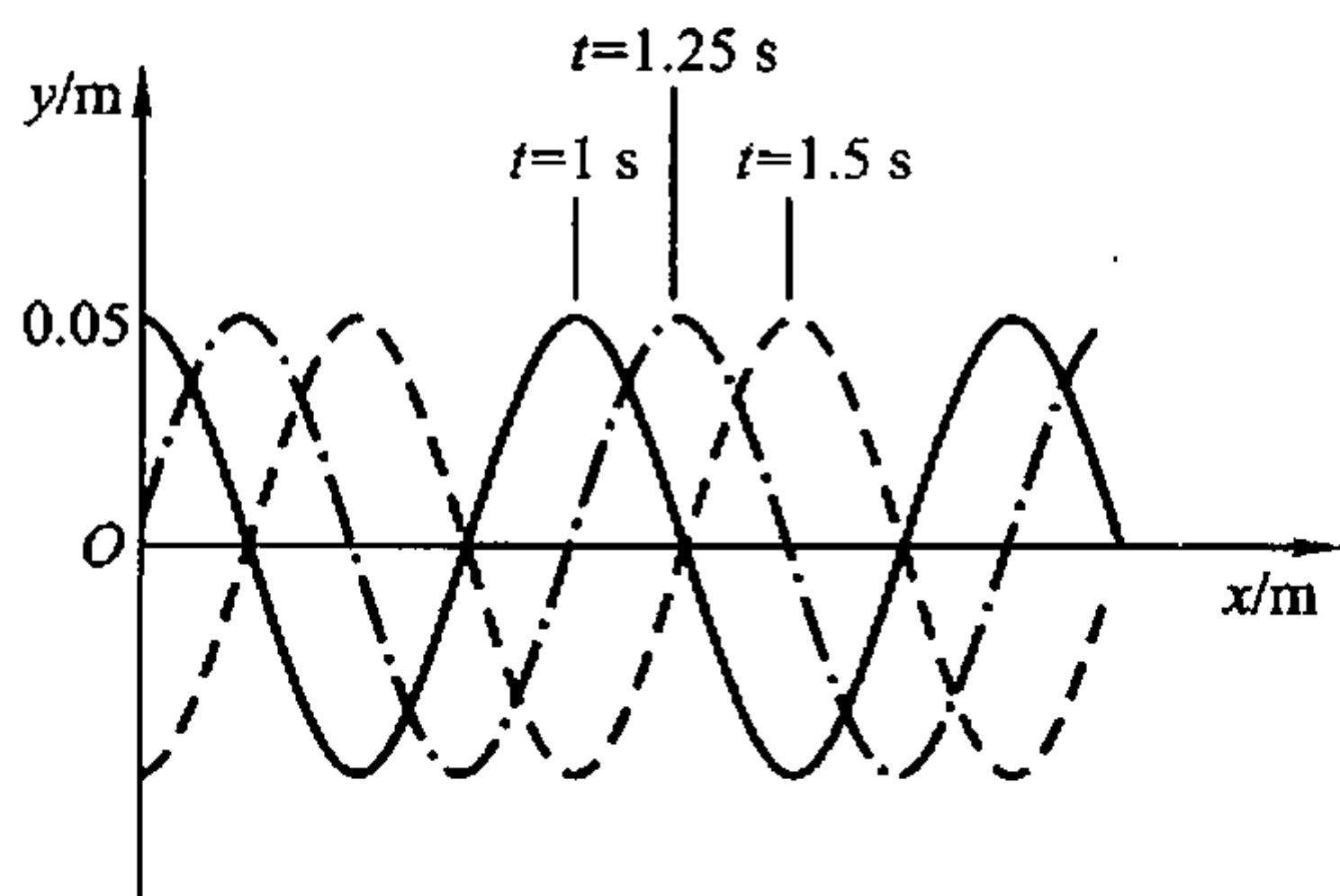
$t = 1.25 \text{ s}$  时的波动方程为

$$y = 0.05 \cos(12.5\pi - 4\pi x) = 0.05 \sin 4\pi x \text{ (m)}$$

$t = 1.50 \text{ s}$  时的波动方程为

$$y = 0.05 \cos(15\pi - 4\pi x) = -0.05 \cos 4\pi x \text{ (m)}$$

各时刻的波形曲线  $y-x$ , 如解图 11-2 所示.



解图 11-2

### 11-3. 设有一平面简谐波

$$y = 0.02 \cos 2\pi \left( \frac{t}{0.01} - \frac{x}{0.3} \right)$$

$x, y$  以  $\text{m}$  计,  $t$  以  $\text{s}$  计.

(1) 求振幅、波长、频率和波速.

(2) 求  $x = 0.1 \text{ m}$  处质点振动的初相位.

解: (1) 将波动表达式

$$y = 0.02 \cos 2\pi \left( \frac{t}{0.01} - \frac{x}{0.3} \right)$$

与标准波动方程  $y = A \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$

比较可得  $A = 0.02 \text{ m}$ ,  $\lambda = 0.3 \text{ m}$ ,  $\nu = 100 \text{ Hz}$ ,  $\varphi_0 = 0$

并有  $u = \lambda\nu = 30 \text{ m/s}$

(2)  $x = 0.1 \text{ m}$  处质点在  $t = 0$  时刻振动的初相位为

$$\varphi_0|_{0.1} = 2\pi\left(\frac{0}{0.01} - \frac{0.1}{0.3}\right) = -\frac{2\pi}{3}$$

## 2. 根据已知有关物理量或波形曲线建立波动表达式

**11-4.** 一平面简谐波沿  $x$  轴正向传播, 振幅  $A = 0.1 \text{ m}$ , 频率  $\nu = 10 \text{ Hz}$ , 当  $t = 1.0 \text{ s}$  时,  $x = 0.1 \text{ m}$  处的质点  $a$  的振动状态为  $y_a = 0$ , 而  $v_a = \left(\frac{dy}{dt}\right)_a < 0$ ; 此时  $x = 20 \text{ cm}$  处的质点  $b$  的振动状态为  $y_b = 5.0 \text{ cm}$ ,  $v_b > 0$ .  $a$ 、 $b$  两质点的间距小于一个波长. 求波的表达式.

**分析:** 在平面简谐波传播的过程中,  $a$ 、 $b$  两质点都作谐振动. 由于两质点的间距小于一个波长, 因此在任意时刻它们的相位差小于  $2\pi$ . 根据  $t$  时刻质点  $a$  和  $b$  的振动状态, 可以确定两质点振动的相位和相位差, 坐标原点处质点振动的初相位, 以及波长  $\lambda$ .

**解:** 设波的表达式为

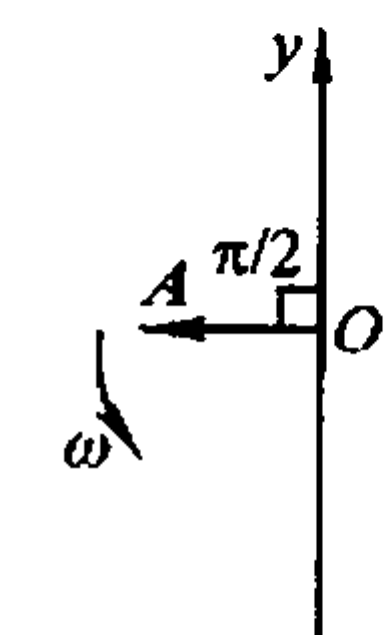
$$y = A \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) = 0.1 \cos\left(20\pi t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) (\text{m})$$

将  $x_a = 0.1 \text{ m}$  代入波的表达式, 可得质点  $a$  的振动表达式为

$$y_a = 0.1 \cos\left(20\pi t - \frac{0.2\pi}{\lambda} + \varphi_0\right) (\text{m})$$

据题意,  $t = 1.0 \text{ s}$  时,  $y_a = 0$ ,  $v_a = \left(\frac{dy}{dt}\right)_a < 0$ , 由解图 11-4a 的旋转矢量图可知, 这时刻, 质点  $a$  正由平衡位置向位移的负方向运动, 有

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2}$$



解图 11-4a

即有

$$\varphi_a = 20\pi \times 1.0 - \frac{0.2\pi}{\lambda} + \varphi_0 = \left(20 - \frac{0.2}{\lambda}\right)\pi + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

将  $x_b = 0.2 \text{ m}$  代入波的表达式, 可得质点  $b$  的振动表达式为

$$y_b = 0.1 \cos\left(20\pi t - \frac{0.4\pi}{\lambda} + \varphi_0\right) (\text{m})$$

据题意,  $t = 1.0 \text{ s}$  时,  $y_b = 5.0 \text{ cm}$ ,  $v_b > 0$ , 由解图 11-4b 的旋转矢量图可知, 这时

刻,质点  $b$  的相位为  $\varphi_b = -\frac{\pi}{3}$

即有

$$\varphi_b = 20\pi \times 1.0 - \frac{0.4\pi}{\lambda} + \varphi_0 = \left(20 - \frac{0.4}{\lambda}\right)\pi + \varphi_0 = -\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

根据波的表式,可得  $a$ 、 $b$  两质点的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_b - x_a) \quad (3)$$

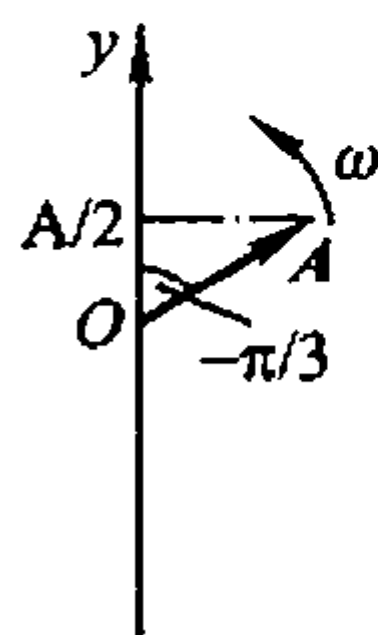
式中“ $-$ ”号表示质点  $b$  的相位落后于质点  $a$  的相位.

由(1)、(2)、(3)式可解得

波长为  $\lambda = 0.24 \text{ m}$

坐标原点处质点振动的初相为  $\varphi_0 = -\frac{2}{3}\pi$

所以,波的表达式为  $y = 0.1 \cos\left(20\pi t - \frac{25\pi}{3}x - \frac{2}{3}\pi\right) (\text{m})$



解图 11-4b

**11-5.** 已知一沿  $x$  轴正向传播的平面余弦波在  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时的波形如图所示,

且周期  $T = 2 \text{ s}$ .

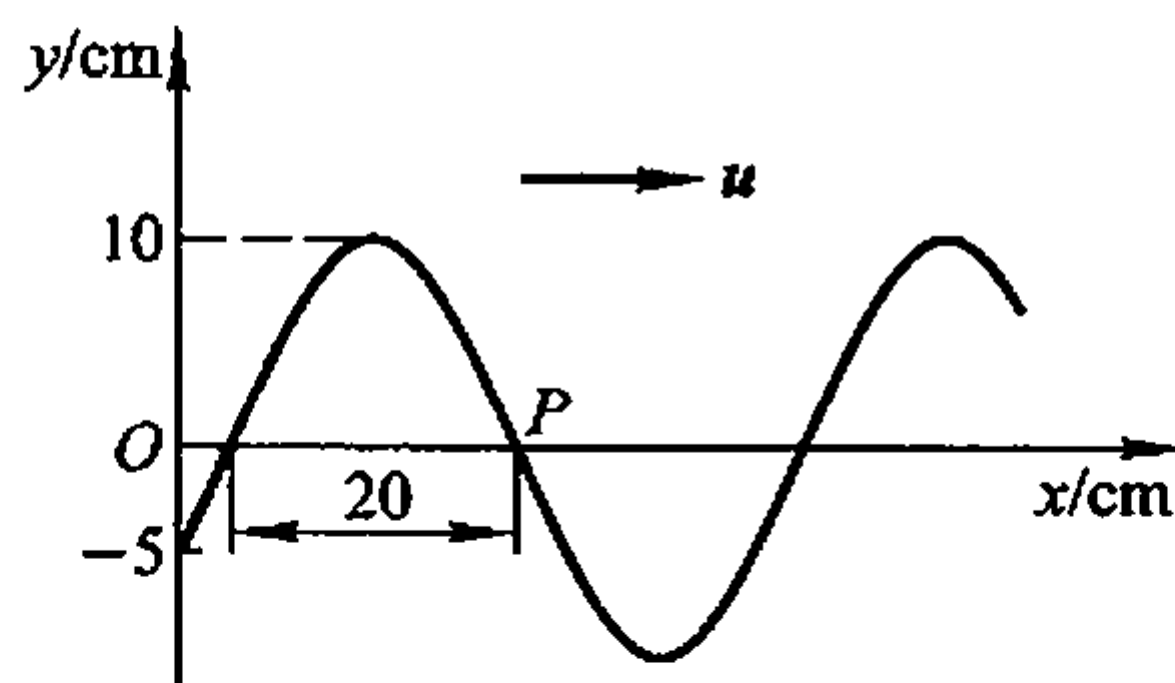
(1) 写出  $O$  点和  $P$  点的振动表达式;

(2) 写出该波的波动表达式;

(3) 求  $P$  点离  $O$  点的距离.

分析: 根据波形曲线可知波长和振幅, 由

$u = \frac{\lambda}{T}$  可得到波速. 将波形曲线沿波的传播方



习题 11-5 图

向稍作平移,即可确定  $O$  点和  $P$  点在  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时的振动状态,并得到  $O$  点振动的初相,从而确定波动表达式和波线上各点的振动表达式.

解: 由波形曲线可得

$$A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad \lambda = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

并且,有  $u = \frac{\lambda}{T} = \frac{40}{2} \text{ m/s} = 0.2 \text{ m/s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$

(1) 设波动表达式为  $y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$

由  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时  $O$  点的振动状态:  $y_{O1} = -\frac{A}{2}, v_{O1} < 0$ , 利用旋转矢量图可得,该

时刻  $O$  点的振动相位为  $\frac{2\pi}{3}$ , 即

$$\varphi_{O_1} = [\omega t + \varphi_0] \Big|_{t=\frac{1}{3}s} = \frac{\pi}{3} + \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$$

由此可得  $O$  点的振动初相为  $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

将  $x=0, \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$  代入波动表达式, 即得  $O$  点的振动表达式, 为

$$y_O = 0.1 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (m)}$$

同样, 由  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时  $P$  点的振动状态:  $y_{P_1} = 0, v_{P_1} > 0$ , 利用旋转矢量图可得, 该

时刻  $P$  点的振动相位为  $-\frac{\pi}{2}$ , 即

$$\varphi_{P_1} = \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \Big|_{t=\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi x_P}{0.2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

可得

$$x_P = 0.233 \text{ m}$$

将  $x_P = 0.233 \text{ m}, \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$  代入波动表达式, 即得  $P$  点的振动表达式, 为

$$y_P = 0.1 \cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) \text{ (m)}$$

(2) 波动表达式为

$$y = A \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] = 0.1 \cos\left[\pi(t - 5x) + \frac{\pi}{3}\right] \text{ (m)}$$

(3)  $P$  点离  $O$  点的距离为  $x_P = 0.233 \text{ m}$

**11-6.** 一平面波在介质中以速度  $u = 20 \text{ m/s}$  沿  $x$  轴负方向传播, 已知  $a$  点的振动表达式为

$$y_a = 3 \cos 4\pi t$$

$t$  的单位为  $\text{s}$ ,  $y$  的单位为  $\text{m}$ .

(1) 以  $a$  为坐标原点写出波动表达式.

(2) 以距  $a$  点  $5 \text{ m}$  处的  $b$  点为坐标原点, 写出波动表达式.

解: (1) 由于平面波沿  $x$  轴负方向传播, 根据  $a$  点的振动表式, 并以  $a$  为坐标原点时的波动表达式为  $y = 3 \cos 4\pi \left(t + \frac{x}{20}\right) \text{ (m)}$

(2) 若  $b$  点位于  $a$  点左侧  $5 \text{ m}$  处, 如解图 11-6(a) 所示, 将  $x_b = -5 \text{ m}$  代入上述波动表达式中, 得到  $b$  点的振动规律为

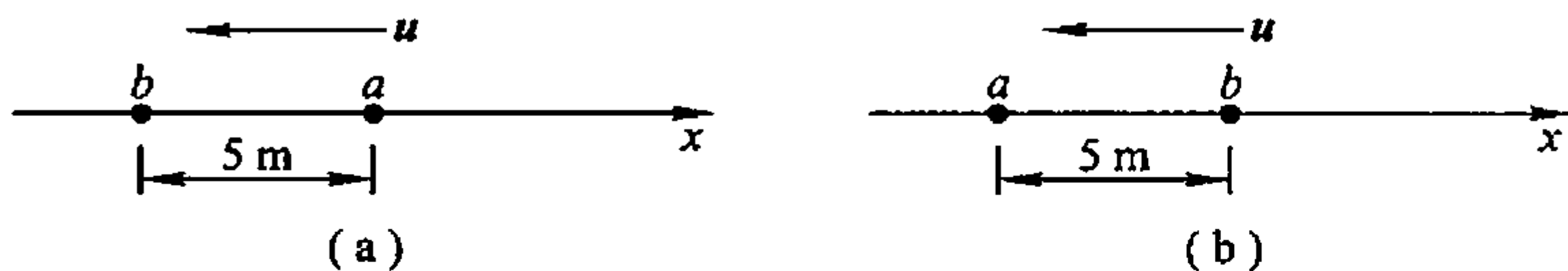
$$y_b = 3 \cos\left(4\pi t - 4\pi \frac{5}{20}\right) = 3 \cos(4\pi t - \pi) \text{ (m)}$$

“ $-\pi$ ”表明  $b$  点的振动相位比  $a$  点落后  $\pi$ .

若  $b$  点位于  $a$  点右侧  $5\text{ m}$  处,如解图 11-6(b)所示,则  $b$  点的振动规律为

$$y_b = 3\cos\left(4\pi t + 4\pi\frac{5}{20}\right) = 3\cos(4\pi t + \pi) \text{ (m)}$$

即  $b$  点的振动相位比  $a$  点超前  $\pi$ .



解图 11-6

由  $a$  点的振动表达式可知,  $\omega = 2\pi\nu = 4\pi$ ,  $\nu = 2\text{ Hz}$ , 波长  $\lambda = \frac{u}{\nu} = 10\text{ m}$ . 所以, 距  $a$  点  $5\text{ m}$  处的  $b$  点无论是在  $a$  点的左侧还是在  $a$  点的右侧, 距  $a$  点的波程均为半波长, 振动的相位均与  $a$  点反相.

以  $b$  点为坐标原点建立坐标系  $Ox'$ , 坐标轴正方向与  $x$  轴一致时, 波动表达式为

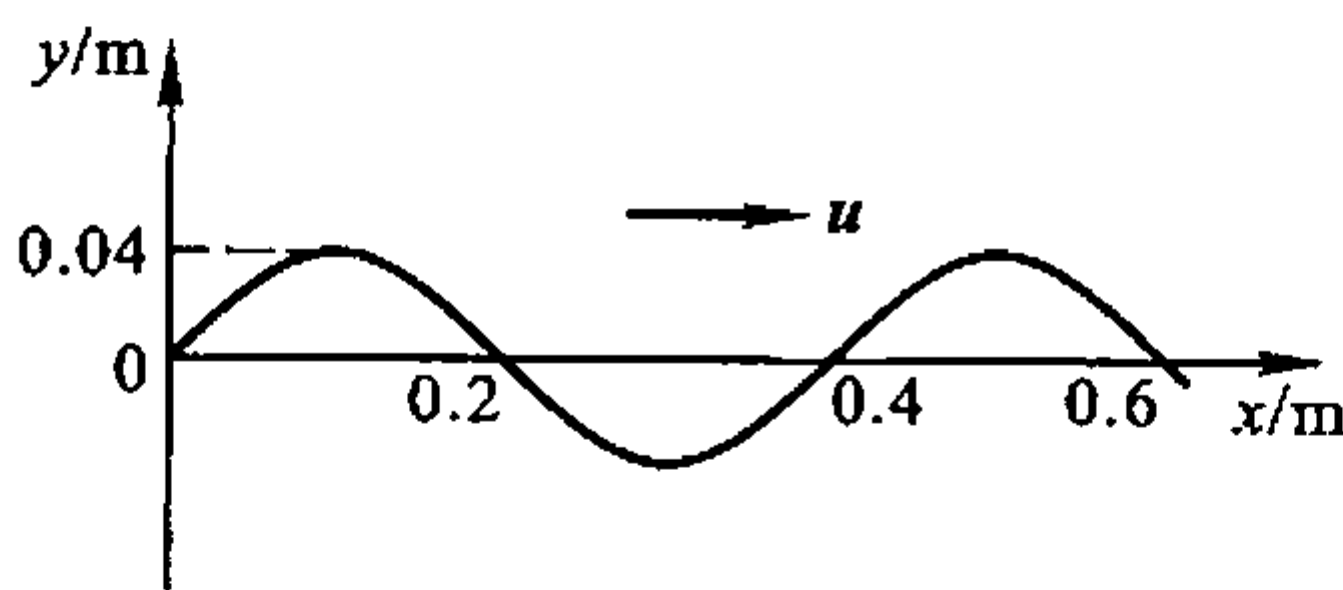
$$y = 3\cos\left[4\pi\left(t + \frac{x'}{20}\right) \pm \pi\right] \text{ (m)}$$

式中取“ $+$ ”时,  $Ox'$  轴的坐标原点位于解图 11-6(b) 的  $b$  点, 取“ $-$ ”时,  $Ox'$  轴的坐标原点位于解图 11-6(a) 的  $b$  点.

**11-7.** 一平面简谐波在  $t=0$  时的波形曲线如图所示, 波速  $u=0.08\text{ m/s}$ .

(1) 写出该波的波动表达式;

(2) 画出  $t = \frac{T}{8}$  时的波形曲线.



习题 11-7 图

**分析:** 根据  $t=0$  时刻的波形曲线, 求出  $O$  点处质点振动的初相  $\varphi_0$ , 写出  $O$  点的振动表达式, 即可根据波的传播方向写出波动表达式. 将波形曲线沿传播方向平移  $\frac{\lambda}{8}$  即为  $t = \frac{T}{8}$  时的波形曲线.

**解:** (1) 由波形曲线可知  $A=0.04\text{ m}$ ,  $\lambda=0.4\text{ m}$ .

由  $u = \lambda\nu$ , 得

$$\nu = 0.2 \text{ Hz}, \quad \omega = 2\pi\nu = 0.4\pi \text{ rad/s}$$

$t = 0$  时,  $x = 0$  处质点的运动状态为  $y_0 = 0, v_0 < 0$ , 根据旋转矢量图可知,

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

所以,  $O$  点处质点的振动表达式为

$$y_O(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.04\cos\left(0.4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{m})$$

波动表达式为

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right] = 0.04\cos\left[0.4\pi\left(t - \frac{x}{0.08}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \\ &= 0.04\cos\left(0.4\pi t - 5\pi x + \frac{\pi}{2}\right) (\text{m}) \end{aligned}$$

(2) 波动传播相位, 即有

$$\Delta\left(\omega t - \omega \frac{x}{u}\right) = 0$$

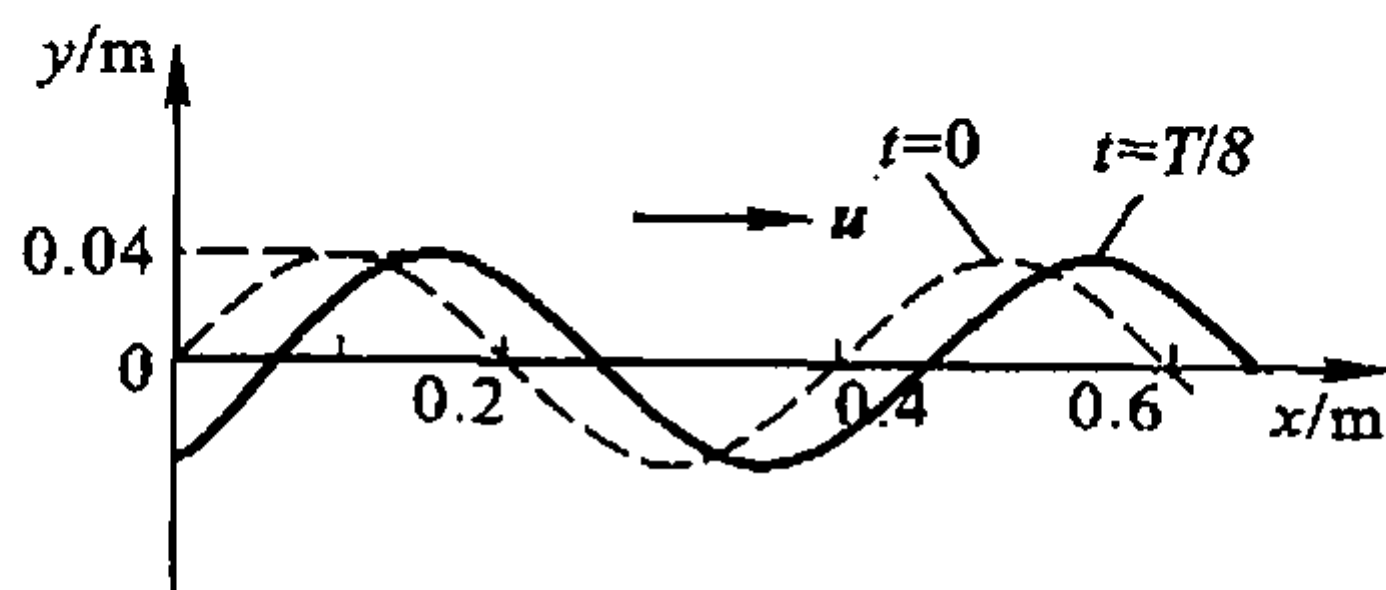
即

$$\Delta t - \frac{\Delta x}{u} = 0$$

$\Delta t = \frac{T}{8}$  时, 有

$$\Delta x = u\Delta t = \frac{\lambda}{T} \frac{T}{8} = \frac{\lambda}{8}$$

所以, 将波形曲线沿传播方向平移  $\frac{\lambda}{8}$  即为  $t = \frac{T}{8}$  时的波形曲线, 如解图 11-7 所示.



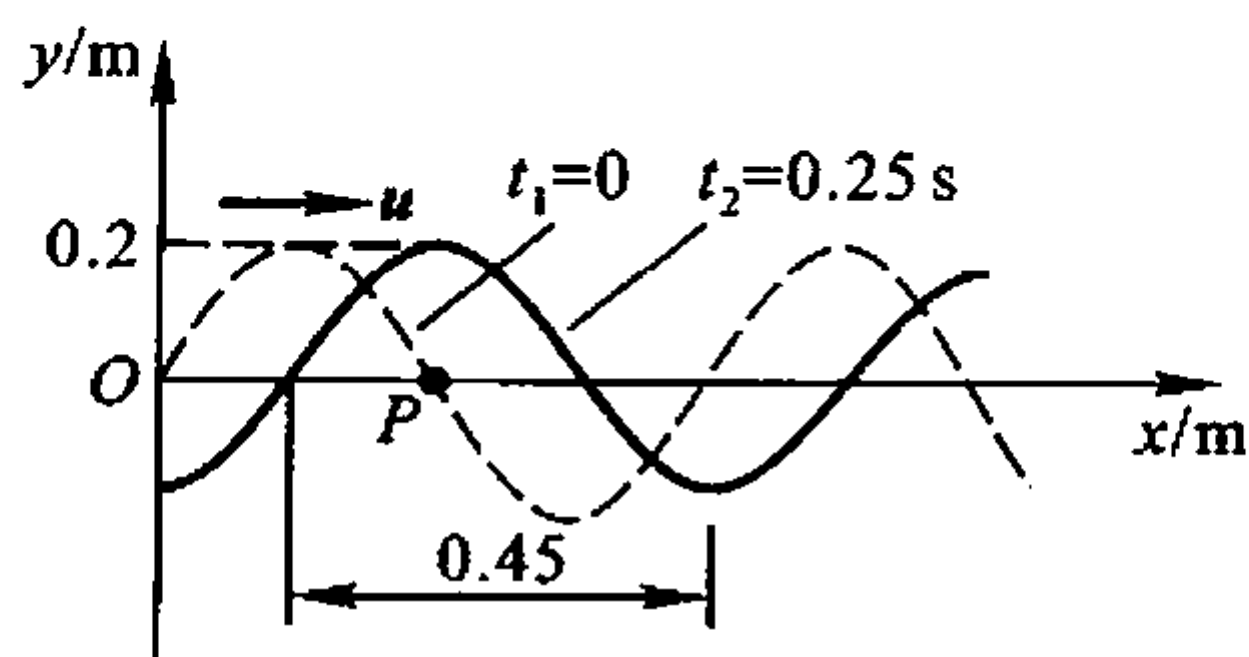
解图 11-7

**11-8.** 一列沿  $x$  正向传播的简谐波, 已知  $t_1 = 0$  和  $t_2 = 0.25 \text{ s}$  时的波形如图所示. 试求:

- (1)  $P$  的振动表达式;
- (2) 此波的波动表达式;
- (3) 画出  $O$  点的振动曲线.

解: 从波形图可得波的振幅为  $A = 0.2 \text{ m}$

根据相距为  $\Delta x = 0.45 \text{ m}$  两质点的相位差为  $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$  可得波长为



习题 11-8 图

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} |\Delta x| = 0.6 \text{ m}$$

根据波形曲线平移  $\frac{\lambda}{4}$  的时间间隔为  $\Delta t = 0.25 \text{ s}$ , 可得振动周期和振动频率为

$$T = \frac{\Delta t}{|\Delta x|} \lambda = 1 \text{ s}, \quad \nu = \frac{1}{T} = 1 \text{ Hz}$$

波的传播速度为  $u = \lambda \nu = 0.6 \text{ m/s}$

(1)  $t=0$  时,  $P$  点的振动状态为  $y_P(0) = 0, v_P(0) > 0$ , 由旋转矢量图可知,  $\varphi_{P0} = -\frac{\pi}{2}$ . 所以,  $P$  点的振动表达式为

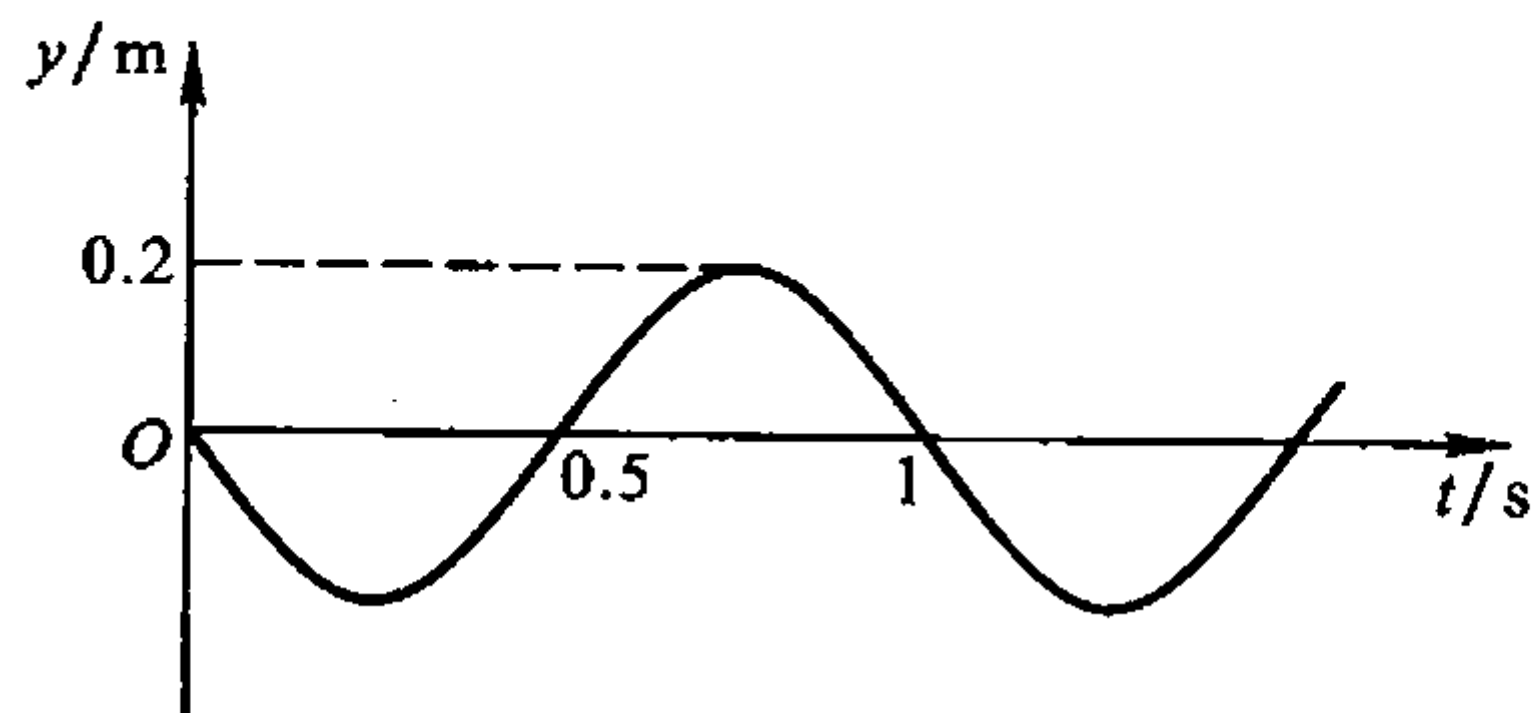
$$y_P = 0.2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) (\text{m})$$

(2)  $t=0$  时,  $O$  点的振动状态为  $y_O(0) = 0, v_O(0) < 0$ , 由旋转矢量图可知,  $\varphi_{O0} = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . 所以,  $O$  点的振动表达式为

$$y_O = 0.2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{m})$$

波动表达式为  $y = 0.2 \cos\left[2\pi\left(t - \frac{x}{0.6}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$   
 $= 0.2 \cos\left(2\pi t - \frac{10}{3}\pi x + \frac{\pi}{2}\right) (\text{m})$

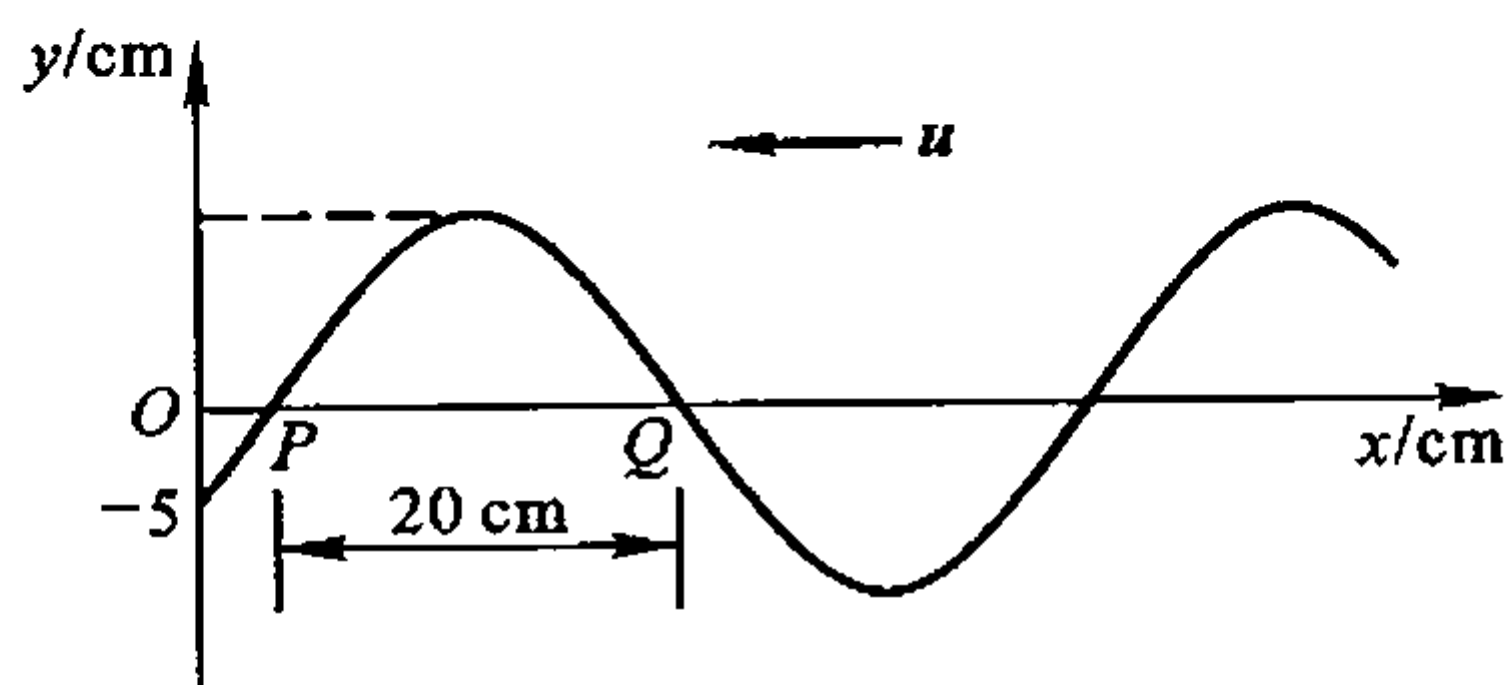
(3)  $O$  点的振动曲线  $y_O(t)$  如解图 11-8 所示.



解图 11-8

11-9. 已知一沿  $x$  轴负方向传播的平面余弦波, 在  $t = \frac{1}{3}$  s 时的波形如图所示, 且周期  $T = 2$  s.

- (1) 写出  $O$  点的振动表达式;
- (2) 写出此波的波动表达式;
- (3) 写出  $Q$  点的振动表达式;
- (4)  $Q$  点离  $O$  点的距离多大?



习题 11-9 图

解: 由波形曲线可得

$$A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad \lambda = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

并且, 有

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{40}{2} \text{ m/s} = 0.2 \text{ m/s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$$

$$(1) \text{ 设波动表达式为 } y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

由  $t = \frac{1}{3}$  s 时  $O$  点的振动状态:  $y_{O_1} = -\frac{A}{2}$ ,  $v_{O_1} > 0$ , 利用旋转矢量图可得, 该

时刻  $O$  点的振动相位为  $-\frac{2\pi}{3}$ , 即

$$\varphi_{O_1} = [\omega t + \varphi_0] \big|_{t=\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3} + \varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}$$

由此可得  $O$  点的振动初相为  $\varphi_0 = -\pi$

将  $x = 0$ ,  $\varphi_0 = -\pi$  代入波动表达式, 即得  $O$  点的振动表达式, 为

$$y_O = 0.1 \cos(\pi t - \pi) \text{ (m)}$$

(2) 根据  $O$  点的振动表达式和波的传播方向, 可得波动表达式为

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] = 0.1 \cos [\pi(t + 5x) - \pi] \text{ (m)}$$

(3) 由  $t = \frac{1}{3}$  s 时  $Q$  点的振动状态:  $y_{Q_1} = 0$ ,  $v_{Q_1} < 0$ , 利用旋转矢量图可得, 该

时刻  $Q$  点的振动相位为  $\frac{\pi}{2}$ , 即

$$\varphi_{Q_1} = \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \Big|_{t=\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi x_Q}{0.2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

可得

$$x_Q = 0.233 \text{ m}$$

将  $x_Q = 0.233 \text{ m}$ ,  $\varphi_0 = -\pi$  代入波动表达式, 即得  $Q$  点的振动表达式, 为

$$y_Q = 0.1 \cos \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right) (\text{m})$$

(4)  $Q$  离  $O$  点的距离为  $x_Q = 0.233 \text{ m}$

### 3. 波的能量

**11-10.** 一正弦式声波, 沿直径为  $0.14 \text{ m}$  的圆柱形管行进, 波的强度为  $9.0 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$ , 频率为  $300 \text{ Hz}$ , 波速为  $300 \text{ m/s}$ . 问:

(1) 波中的平均能量密度和最大能量密度是多少?

(2) 每两个相邻的、相位差为  $2\pi$  的同相面间有多少能量?

**分析:** 波的传播过程也是能量的传播过程, 波的能量同样具有空间和时间的周期性. 波的强度即能流密度, 为垂直通过单位面积的、对时间平均的能流. 注意能流、平均能流、能流密度、能量密度、平均能量密度等概念的联系和区别.

**解:** (1) 波中的平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{I}{u} = \frac{9.0 \times 10^{-3}}{300} \text{ J/m}^3 = 3.0 \times 10^{-5} \text{ J/m}^3$$

最大能量密度为  $w_m = 2\bar{w} = 6.0 \times 10^{-5} \text{ J/m}^3$

(2) 每两个相邻的、相位差为  $2\pi$  的同相面间的能量为

$$W = \bar{w}V = \bar{w}\lambda S = \bar{w} \frac{u}{\nu} \pi r^2 = 4.62 \times 10^{-7} \text{ J}$$

**11-11.** 一平面简谐声波的频率为  $500 \text{ Hz}$ , 在空气中以速度  $u = 340 \text{ m/s}$  传播. 到达人耳时, 振幅  $A = 10^{-4} \text{ cm}$ , 试求人耳接收到声波的平均能量密度和声强 (空气的密度  $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ).

**解:** 人耳接收到声波的平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 = 6.37 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3$$

人耳接收到声波的声强为

$$I = \bar{w}u = 2.16 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

**11-12.** 一波源以 35 000 W 的功率向空间均匀发射球面电磁波,在某处测得波的平均能量密度为  $7.8 \times 10^{-15} \text{ J/m}^3$ ,求该处离波源的距离. 电磁波的传播速度为  $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

分析: 电磁波的能量在真空中传播时无损耗,通过以波源为中心的球面(面积  $A = 4\pi r^2$ )的平均功率与波源的平均辐射功率相等.

解: 以波源到测量处的距离  $r$  为半径作球面,通过该球面的平均辐射功率  $\bar{S}$  处处相同,所以,单位时间内通过整个球面的能量为

$$\bar{P} = \bar{S} \cdot A = \bar{S} \cdot 4\pi r^2$$

$$r = \sqrt{\bar{P}/(4\pi\bar{S})} = \sqrt{\bar{P}/(4\pi\bar{w}u)}$$

代入数据,得

$$r = \sqrt{\bar{P}/(4\pi\bar{w}u)} = \sqrt{\frac{35\,000}{4\pi \times 7.8 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}} \text{ m} = 3.45 \times 10^4 \text{ m}$$

**11-13.** 一扬声器的膜片,半径为 0.1 m,使它产生 1 kHz、40 W 的声辐射,则膜片的振幅应为多大? 已知该温度下空气的密度为  $1.29 \text{ kg/m}^3$ ,声速为 344 m/s.

解: 设圆形扬声器膜片的面积为  $S$ ,平均声辐射功率(平均能流)为  $\bar{P}$ ,则膜片单位面积的平均辐射功率(声强)为

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \frac{\bar{P}}{\pi r^2}$$

由  $I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$ ,可得膜片的振幅为

$$A = \sqrt{\frac{2I}{\rho\omega^2 u}} = \sqrt{\frac{2\bar{P}}{\rho\omega^2 u\pi r^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 40}{1.29 \times (2\pi \times 1\,000)^2 \times 344 \times \pi \times 0.1^2}} \text{ m} = 0.38 \text{ mm}$$

**11-14.** 两人轻声说话时的声强级为 40 dB,闹市中的声强级为 80 dB,问闹市中的声强是轻声说话时声强的多少倍?

分析: 根据声强级  $I_L$  与声强  $I$  的关系求解.

解: 由声强级  $I_L$  与声强  $I$  的关系  $I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ ,可得声强级为  $I_L$  时的声强为

$$I = I_0 10^{\frac{I_L}{10}}$$

设闹市中的声强为  $I_1$ ,两人轻声说话时的声强为  $I_2$ ,则闹市中的声强与轻声说话时声强的比值为

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 10^{\frac{I_{L1}}{10}}}{I_0 10^{\frac{I_{L2}}{10}}} = \frac{10^{\frac{80}{10}}}{10^{\frac{40}{10}}} = 10^{\frac{80-40}{10}} = 10^4 \text{ 倍}$$

**11-15.** 距一点声源 10 m 的地方,声音的声强级是 20 dB,若不计介质对声波的吸收,求:

- (1) 距离声源 5.0 m 处的声强级;
- (2) 距声源多远,声音就听不见了.

**分析:** 点声源发射的声波为球面波. 不计介质对声波的吸收时,接收处声波振幅的大小,与声源到接收处的距离成反比.

**解:** 介质中某处的声强正比于该处质点振动的振幅的平方,即  $I \propto A^2$ .

对球面波,有  $A \propto A_0/r$ , 即有  $I \propto A^2 \propto \frac{A_0^2}{r^2}$

设 10 m 处的声强为  $I_{10}$ , 5.0 m 处的声强为  $I_5$ , 有

$$\frac{I_5}{I_{10}} = \frac{A_5^2}{A_{10}^2} = \frac{r_{10}^2}{r_5^2} = \frac{10^2}{5^2} = 4$$

- (1) 由声强级的定义,可得距离声源 5.0 m 处的声强级  $I_{L5}$  为

$$\begin{aligned} I_{L5} &= 10 \lg \frac{I_5}{I_0} = 10 \lg \left( \frac{I_5}{I_{10}} \times \frac{I_{10}}{I_0} \right) \\ &= I_{L10} + 10 \lg \frac{I_5}{I_{10}} = 20 + 10 \lg 4 = 26 \text{ dB} \end{aligned}$$

式中  $I_{L10}$  为距离声源 10 m 处的声强级.

- (2) 设距声源  $x$  (m) 处的声强为  $I_x$ , 应有

$$\frac{I_x}{I_{10}} = \frac{A_x^2}{A_{10}^2} = \frac{r_{10}^2}{r_x^2} = \frac{10^2}{x^2}$$

$x$  (m) 处的声强级  $I_{Lx}$  为

$$I_{Lx} = 10 \lg \frac{I_x}{I_0} = 10 \lg \left( \frac{I_x}{I_{10}} \times \frac{I_{10}}{I_0} \right) = I_{L10} + 10 \lg \frac{I_x}{I_{10}} = 20 + 10 \lg \left( \frac{10}{x} \right)^2$$

在  $x$  处听不见声音,即令

$$I_{Lx} = 0$$

可得

$$\lg x = 2$$

所以,得

$$x = 100 \text{ m}$$

**11-16.** 一扬声器发出的声波,在 6 m 远处的强度为  $1.0 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$ ,频率是 2 000 Hz,设没有反射,而且扬声器向各方向均匀地发射.

- (1) 在 30 m 处的声强为多大?

(2) 6.0 m 处的位移振幅为多大?

(3) 6.0 m 处的压强振幅为多大?

分析: 据题意可知, 扬声器向各方向均匀地发射球面波.

解: (1) 设距扬声器 30 m 和 6 m 处的声强分别为  $I_{30}$  和  $I_6$ , 对球面波, 有

$$\frac{I_{30}}{I_6} = \frac{A_{30}^2}{A_6^2} = \frac{r_6^2}{r_{30}^2} = \frac{6^2}{30^2} = \frac{1}{25}$$

式中  $A_{30}$  和  $A_6$  分别为距扬声器 30 m 和 6 m 处质点振动的振幅. 所以, 距扬声器 30 m 处的声强为

$$I_{30} = \frac{1}{25} I_6 = \frac{1}{25} \times 1.0 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2 = 4.0 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

(2) 根据声强与位移振幅的关系  $I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$ , 有

$$I_6 = \frac{1}{2} \rho A_6^2 \omega^2 u$$

所以, 距扬声器 6 m 处的位移振幅为

$$A_6 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I_6}{\rho u}} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 2000} \sqrt{\frac{2 \times 1.0 \times 10^{-3}}{1.29 \times 331}} \text{ m} = 1.72 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(3) 根据声强与压强振幅的关系  $I = \frac{p_m^2}{2\rho u}$ , 有  $I_6 = \frac{p_{m6}^2}{2\rho u}$ , 可得 6.0 m 处的压强振幅为

$$p_{m6} = \sqrt{2\rho u I_6} = \sqrt{2 \times 1.29 \times 331 \times 1.0 \times 10^{-3}} \text{ N/m}^2 = 0.924 \text{ N/m}^2$$

**11-17.** 两个频率相同的声源, 一个为在空气中传播声波, 一个为在水中传播声波.

(1) 如果两个声波的强度相等, 它们的声压振幅之比是多少?

(2) 如果两个声波的声压振幅相等, 它们的强度比是多少?

(3) 它们的声强级之差是多少?

已知空气密度  $\rho_1 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ , 水的密度  $\rho_2 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 声波在空气中的速度  $u_1 = 340 \text{ m/s}$ , 声波在水中的速度  $u_2 = 1490 \text{ m/s}$ .

解: 简谐声波的强度可表示为

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho u}$$

式中  $p_m = \rho u A \omega$  为声压振幅. 声波在空气中和在水中传播时声强的比值为

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{p_{m1}^2 (\rho u)_2}{p_{m2}^2 (\rho u)_1}$$

式中  $\frac{(\rho u)_2}{(\rho u)_1} = \frac{1 \times 10^3 \times 1490}{1.29 \times 340} = 3.40 \times 10^3$  是水和空气的特性阻抗之比.

(1) 当两简谐声波强度相等时,  $I_1 = I_2$ , 声压振幅之比为

$$\frac{p_{m2}}{p_{m1}} = \sqrt{\frac{(\rho u)_2}{(\rho u)_1}} = \sqrt{3.40 \times 10^3} = 58.3$$

(2) 当两简谐声波声压振幅相等时,  $p_{m1} = p_{m2}$ , 其声强之比为

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{(\rho u)_1}{(\rho u)_2} = \frac{1}{3.40 \times 10^3} = 2.94 \times 10^{-4}$$

(3) 设声波在空气中的声强级为  $I_{L1}$ , 在水中的声强级为  $I_{L2}$ , 它们的声强级之差为

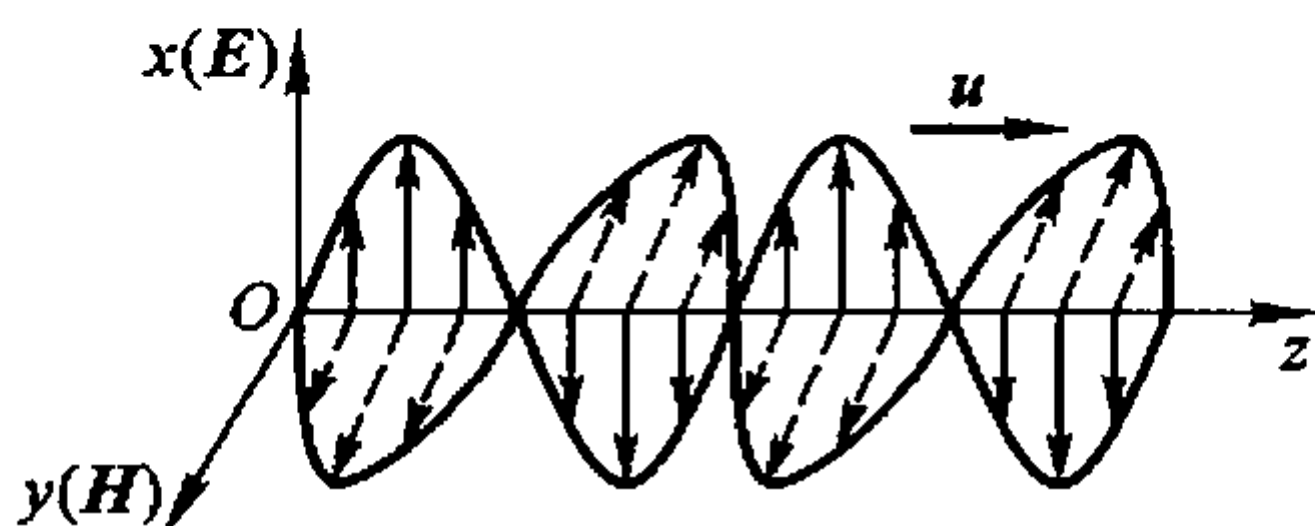
$$\begin{aligned} I_{L1} - I_{L2} &= 10 \lg \frac{I_1}{I_0} - 10 \lg \frac{I_2}{I_0} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2} \\ &= 10 \lg \frac{1}{2.94 \times 10^{-4}} \text{ dB} = 35.4 \text{ dB} \end{aligned}$$

#### 4. 电磁波

11-18. 如图所示, 一个平面电磁波在真空中传播, 设某点的电场强度为

$$E_x = 900 \cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (V/m)}$$

试求这一点的磁场强度表示式. 又在该点前方  $a$  m 和该点后方  $a$  m 处 (均沿  $z$  轴计算), 电场强度和磁场强度的表达式各如何?



习题 11-18 图

分析: 平面电磁波在空间各点的  $E$ 、 $H$  和波的传播方向遵循右手螺旋关系, 根据平面电磁波的幅值关系可求得  $E$  和  $H$  的振幅, 并且,  $E$  和  $H$  的相位相同.

解: 根据平面电磁波  $E$  和  $H$  的量值关系可得, 真空中各点处磁场强度的振幅均为

$$H_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{4\pi \times 10^{-7}}} \times 900 \text{ A/m} = 2.39 \text{ A/m}$$

在已知电场强度的点, 其相应的磁场强度为

$$H_y = H_0 \cos \left( 2\pi\nu t + \frac{\pi}{6} \right) = 2.39 \cos \left( 2\pi\nu t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ (A/m)}$$

在该点前方  $a$  m 处的电场强度为

$$E_{ax} = 900 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{a}{c} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ (V/m)}$$

磁场强度为  $H_{ay} = 2.39 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{a}{c} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ (A/m)}$

在该点后方  $a$  m 处的电场强度为

$$E_{a'x} = 900 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t + \frac{a}{c} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ (V/m)}$$

磁场强度为  $H_{a'y} = 2.39 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t + \frac{a}{c} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ (A/m)}$

**11-19.** 在地球上测得太阳的平均辐射强度  $\bar{S} = 1.4 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ . 设太阳到地球的平均距离约为  $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ , 试求太阳的总辐射能量. 若太阳光垂直照射某物体表面而被全部反射, 试求该物体所受的辐射压力.

**分析:** 电磁波具有能量和动量. 太阳光照射物体表面时, 对物体施加的压力即为辐射压力.

**解:** 以太阳到地球的平均距离  $r$  为半径作球面, 则单位时间内通过该球面的太阳总辐射能为

$$\bar{P} = 4\pi r^2 \bar{S} = 3.96 \times 10^{26} \text{ W}$$

太阳光被物体全部反射时, 物体单位面积所受的辐射压力为

$$p = \frac{2\bar{S}}{c} = 9.3 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

**11-20.** 有一氦-氖激光管, 它所发射的激光功率为  $10 \text{ mW}$ . 设发出的激光为圆柱形光束, 圆柱截面的直径为  $2 \text{ mm}$ . 试求激光的最大电场强度  $E_0$  和磁感应强度  $B_0$ .

**分析:** 将激光束视作平面电磁波, 其能量分布在圆柱形截面内. 利用真空中平面电磁波的平均辐射强度和幅值关系, 求得振幅  $E_0$  和  $B_0$ , 即为激光束的最大电场强度  $E_0$  和磁感应强度  $B_0$ .

**解:** 激光的平均辐射强度为

$$\bar{S} = \frac{\bar{P}}{\pi r^2} = \frac{10 \times 10^{-3}}{\pi \times (1 \times 10^{-3})^2} \text{ W/m}^2 = 3.18 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

由

$$\bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

得  $E_0 = \sqrt{2\mu_0 c S} = \sqrt{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \times 3.18 \times 10^3} \text{ V/m} = 1.55 \times 10^3 \text{ V/m}$

$$B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0 = \frac{E_0}{c} = 5.17 \times 10^{-6} \text{ T}$$

**11-21.** 一雷达发射装置发出一圆锥形的辐射束,而辐射能量是均匀分布于锥内各方向的.圆锥顶的立体角为  $0.01 \text{ sr}$ ,距发射装置  $1 \text{ km}$  处的电场强度的最大值  $E_0$  是  $10 \text{ V/m}$ . 试求:

(1) 磁场强度的最大值  $H_0$ .

(2) 这圆锥体内的最大辐射功率.

**解:** (1) 磁场强度的最大值即为磁场强度波动表达式的振幅. 利用真空中平面电磁波的幅值关系,可有

$$H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 c} = \frac{10}{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8} \text{ A/m} = 2.65 \times 10^{-2} \text{ A/m}$$

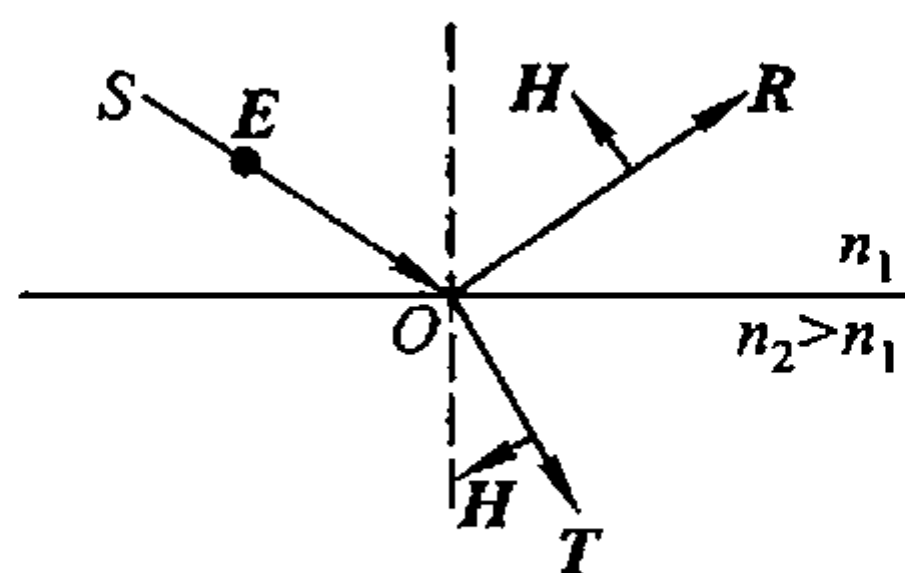
(2) 圆锥顶的立体角为  $\Omega = \frac{A}{r^2}$ ,  $A$  是高为  $r$  的圆锥体的底面积. 在  $r = 1 \text{ km}$  处,该圆锥体的底面积为

$$A = \Omega r^2 = 1 \times 10^4 \text{ m}^2$$

圆锥体内的最大辐射功率(能流的最大值)为

$$P_0 = SA = E_0 H_0 A = 2.65 \times 10^3 \text{ W}$$

**11-22.** 一束平面单色光  $SO$ , 从折射率为  $n_1$  的介质射向折射率为  $n_2$  的介质 ( $n_2 > n_1$ ), 在分界面上的入射点  $O$  处分解成一束反射光  $OR$  和一束透射光  $OT$ , 已知入射光的  $E$  矢量垂直于入射面, 反射光和透射光的  $H$  矢量均在入射面内, 方向如图所示. 试标出反射光和透射光的  $E$  矢量方向.



习题 11-22 图

若入射的平面单色光在  $O$  点的振动表达式为  $E = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , 试写出在入射点处  $O$  反射光(振幅为  $E_R$ )和透射光(振幅为  $E_T$ )的振动表达式.

**分析:** 根据反射光和透射光中  $H$  的方向, 由  $S = E \times H$  可确定相应的反射光中电场振动  $E_R$  和透射光中电场振动  $E_T$  的方向(右手螺旋法则). 当光波由光疏介质射向光密介质, 并入射角很小或很大时, 电磁场的边界理论给出了在界面的反射光波中  $E_R$  与入射光波的  $E$  反相, 即在  $O$  点的  $E_R$  发生“半波损失” ( $n_2 > n_1$ ) 的结论.

**解:** 由  $S = E \times H$  可得  $E_R$  和  $E_T$  的方向, 如解图 11-22 所示.

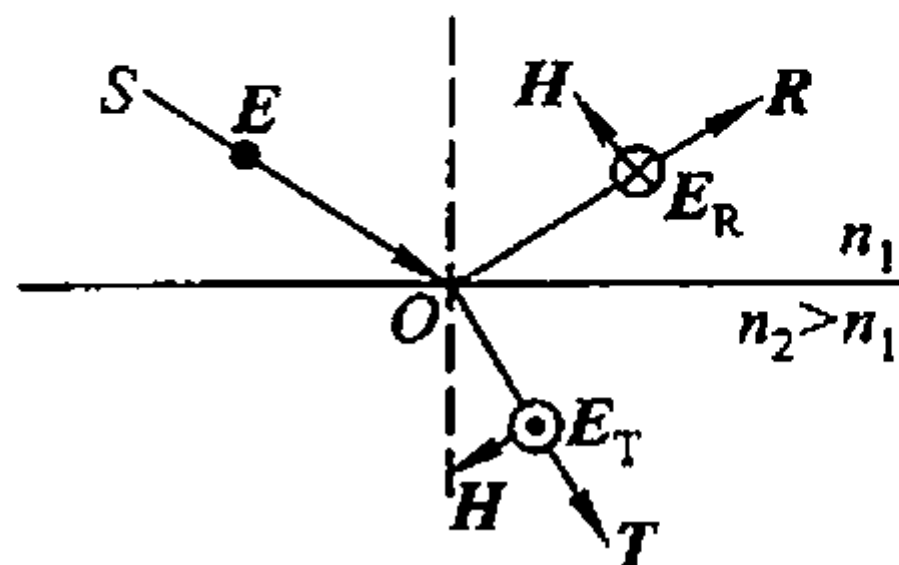
在  $O$  点处的反射光中, 电场振动  $E_R$  相对入射光中的  $E$  反相, 所以, 反射光

中电场振动的表达式为

$$E_{\text{反}} = E_R \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

由电磁场的边界理论可知,在  $O$  点处的透射光中,电场振动  $E_T$  相对入射光不发生“半波损失”,所以振动表达式为

$$E_{\text{透}} = E_T \cos(\omega t + \varphi)$$



解图 11-22

## 5. 波的干涉和驻波

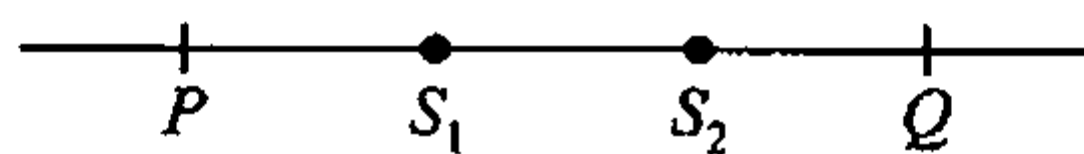
**11-23.** 设  $S_1$  和  $S_2$  为两相干波源,相距  $\frac{\lambda}{4}$ ,  $S_1$  的相位比  $S_2$  的相位超前  $\frac{\pi}{2}$ .

若两波在  $S_1 S_2$  连线方向上的强度相同均为  $I_0$ ,且不随距离变化,问  $S_1 S_2$  连线上在  $S_1$  外侧各点的合成波的强度如何? 又在  $S_2$  外侧各点的强度如何?

分析: 在  $S_1 S_2$  连线上各点处,合成波的振幅决定于两相干波在各点分振动的相位差和分振幅. 合成波的强度正比于振幅的平方.

解: 设  $P$  为  $S_1$  外侧任一点,  $Q$  为  $S_2$  外侧任一点,如解图 11-23 所示. 设  $S_1$  的初相  $\varphi_1 = 0$ ,据题意,  $S_2$  的初相为  $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ . 据题意,可取  $S_1 S_2$  连线上两相干波的振幅  $A_1 = A_2 = A$ .

设  $S_1, S_2$  到  $P$  点的距离分别为  $r_P$  和  $r'_P = r_P + \frac{\lambda}{4}$ ,则  $P$  点的两个振动分别为



解图 11-23

$$y_{1P} = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_P + \varphi_1\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_P\right)$$

$$y_{2P} = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r'_P + \varphi_2\right) = A \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_P + \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

相位差为

$$\Delta\varphi_P = \varphi_{2P} - \varphi_{1P} = \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_P + \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\right] - \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_P\right) = -\pi$$

$P$  点的合振幅为

$$A_P = |A_1 - A_2| = 0$$

所以,在  $S_1$  外侧的各点因干涉相消,波的强度为零,即  $I_P = 0$ .

对  $S_2$  外侧任一点  $Q$ ,设  $S_1, S_2$  到  $Q$  点的距离分别为  $r_Q$  和  $r'_Q = r_Q - \frac{\lambda}{4}$ ,则  $Q$  点的两个振动分别为

$$y_{1Q} = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_Q + \varphi_1\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_Q\right)$$

$$y_{2Q} = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r'_Q + \varphi_2 \right) = A \cos \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \left( r_Q - \frac{\lambda}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

相位差为

$$\Delta\phi_Q = \phi_{2Q} - \phi_{1Q} = \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \left( r_Q - \frac{\lambda}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \right] - \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r_Q \right) = 0$$

$Q$  点的合振幅为

$$A_Q = A_1 + A_2 = 2A$$

所以,在  $S_2$  外侧的各点因干涉相长,波的强度  $I \propto (2A)^2$ , 即  $I = 4I_0$ . 干涉加强时,合成波的强度为单列波的强度的四倍.

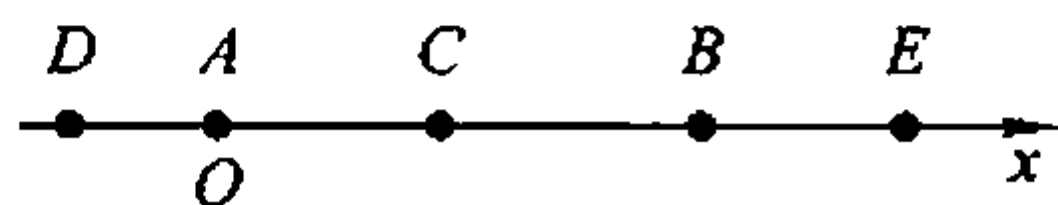
**11-24.** 同一介质中的两个波源位于  $A$ 、 $B$  两点,其振幅相等,频率都是 100 Hz, 相位差为  $\pi$ ,若  $A$ 、 $B$  两点相距为 30 m,波在介质中的传播速度为 400 m/s,试求  $AB$  连线上因干涉而静止的各点的位置.

分析:  $AB$  连线上因干涉而静止的各点的合振幅为零,两个相干波在这些点振动的相位差满足干涉相消条件,为  $\pi$  的奇数倍.

解: 取坐标轴  $Ox$  如解图 11-24 所示. 据题意,可设  $A$  的初相  $\varphi_A = 0$ ,  $B$  的初相为  $\varphi_B = \pi$ .

由  $u = \lambda\nu$ , 可得

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = 4 \text{ m}, \quad \omega = 2\pi\nu = 400\pi \text{ rad/s}$$



解图 11-24

考察  $AB$  连线间的  $C$  点,两波引起的振动分别为

$$y_{AC} = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_A \right] = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

$$y_{BC} = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x'}{u} \right) + \varphi_B \right] = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{(x-L)}{u} \right) + \pi \right]$$

式中  $x'$  是在与  $Ox$  轴平行的、以  $B$  为原点的坐标系中  $C$  的坐标,  $L = 30 \text{ m}$ .

两振动因干涉而使  $C$  点静止的相位差应为

$$\Delta\varphi_C = \varphi_{BC} - \varphi_{AC} = (2k+1)\pi$$

$$\text{即} \quad \Delta\varphi_C = \left[ \omega \left( t + \frac{(x-L)}{u} \right) + \pi \right] - \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (2x-L) + \pi = (2k+1)\pi$$

解得

$$x = 2k + 15, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7$$

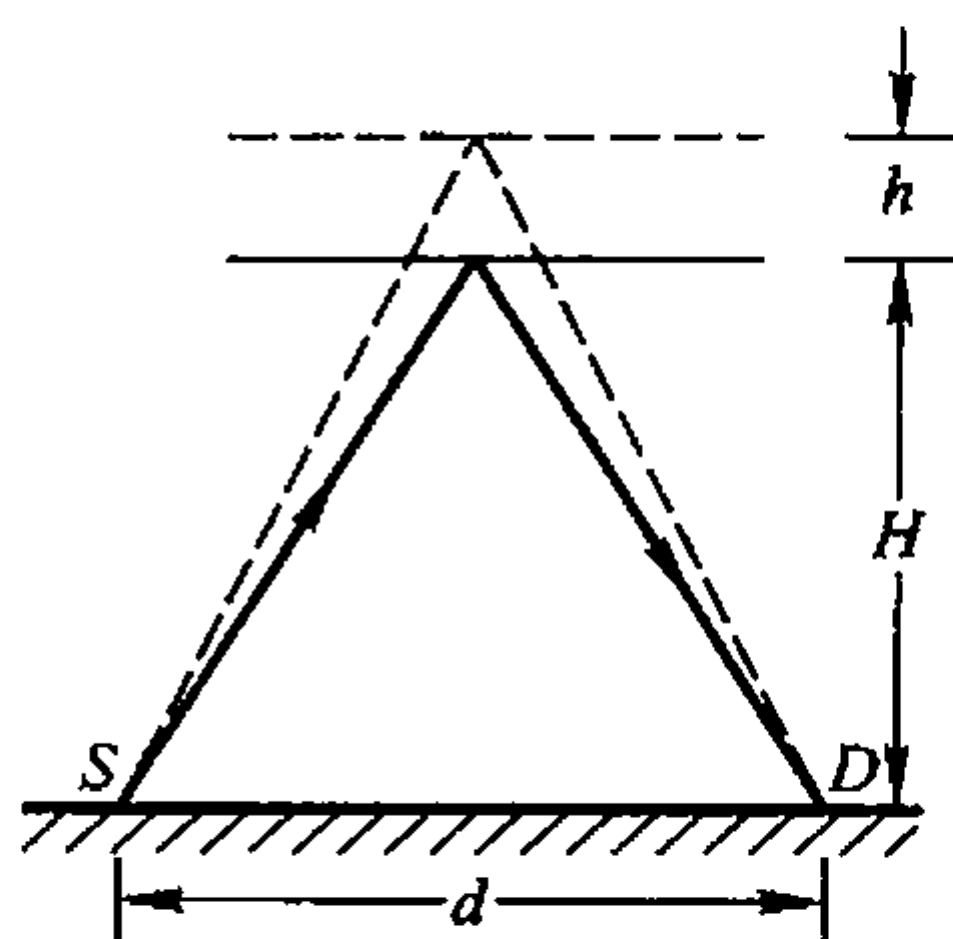
即  $AB$  连线间因干涉而静止的点距  $A$  点为  $(1, 3, 5, \dots, 29) \text{ m}$ , 共有 15 个.

在  $A$ 、 $B$  两点外侧连线上的其他任意点,比如  $D$  点和  $E$  点,  $A$ 、 $B$  两相干波的传播方向相同,并且在这些点处均为同相叠加,是干涉加强区域,所以在  $A$ 、 $B$  两点外侧的连线上没有静止点.

**11-25.** 地面上波源  $S$  与  $D$  处高频率波探测器之间的距离为  $d$ , 从  $S$  直接发出的波与从  $S$  发出经高度为  $H$  的水平层反射后的波, 在  $D$  处加强, 反射线及入射线与水平层所成的角度相同, 当水平层逐渐升高  $h$  距离时, 在  $D$  处测不到讯号, 不考虑大气的吸收. 试求此波源  $S$  发出波的波长.

**分析:** 波源  $S$  发出的波, 经不同的传播路径后在  $D$  处相遇, 形成  $D$  处的振动加强或减弱的干涉现象.

**解:** 设  $S$  发出的波经  $H$  水平层反射至  $D$  处的波程为  $d_1$ , 经  $(H+h)$  水平层反射至  $D$  处的波程为  $d_2$ , 而直达  $D$  处的波程为  $d$ .



习题 11-25 图

据题意, 直达波与经  $H$  水平层反射后的波在  $D$  处干涉加强, 波程差为

$$\delta_1 = d_1 - d = k\lambda$$

当水平反射层升高  $h$ , 直达波与经水平层反射后的波在  $D$  处无讯号, 即干涉相消, 波程差为

$$\delta_2 = d_2 - d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

波程差的变化为

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2}$$

根据几何关系, 有

$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + H^2}, \quad \frac{d_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (H+h)^2}$$

可得波长为

$$\lambda = 2[\sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - \sqrt{4H^2 + d^2}]$$

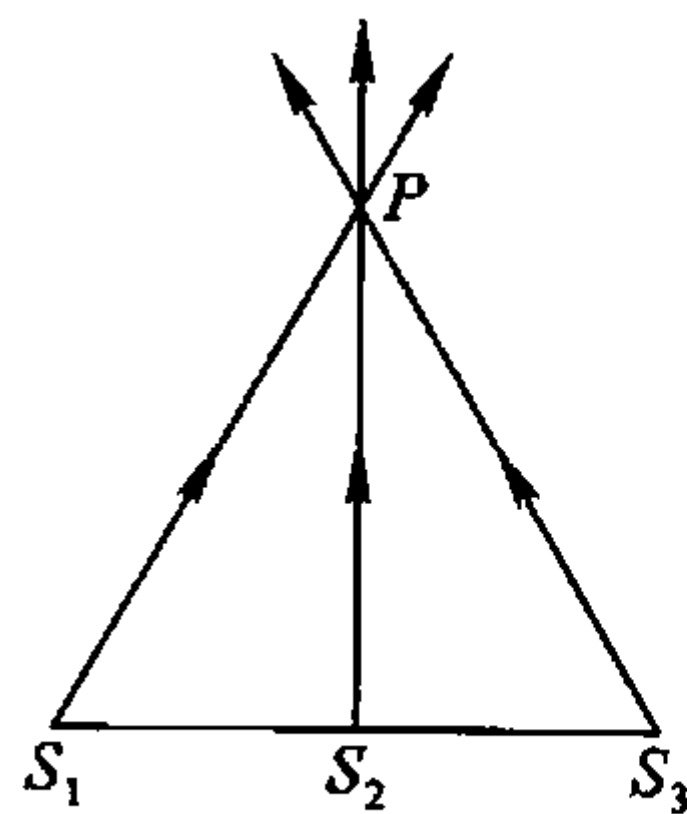
**11-26.** 如图所示, 三个同频率、振动方向相同(垂直纸面)的简谐波, 在传播过程中于  $P$  点相遇, 若三个简谐波各自单独在  $S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$  的振动表达式分别为

$$y_1 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_2 = A\cos \omega t$$

$$y_3 = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

如  $S_2P = 4\lambda$ ,  $S_1P = S_3P = 5\lambda$  ( $\lambda$  为波长), 求  $P$  点的合振动表达式(设传播过程中各波的振幅不变).



习题 11-26 图

**分析:** 据题意可知,  $S_1$  和  $S_3$  的振动是反相的, 它们到  $P$  点的波程相同, 因此在  $P$  点的合振动相消. 所以,  $P$  点的振动由  $S_2$  引起, 相

位落后  $8\pi$ .

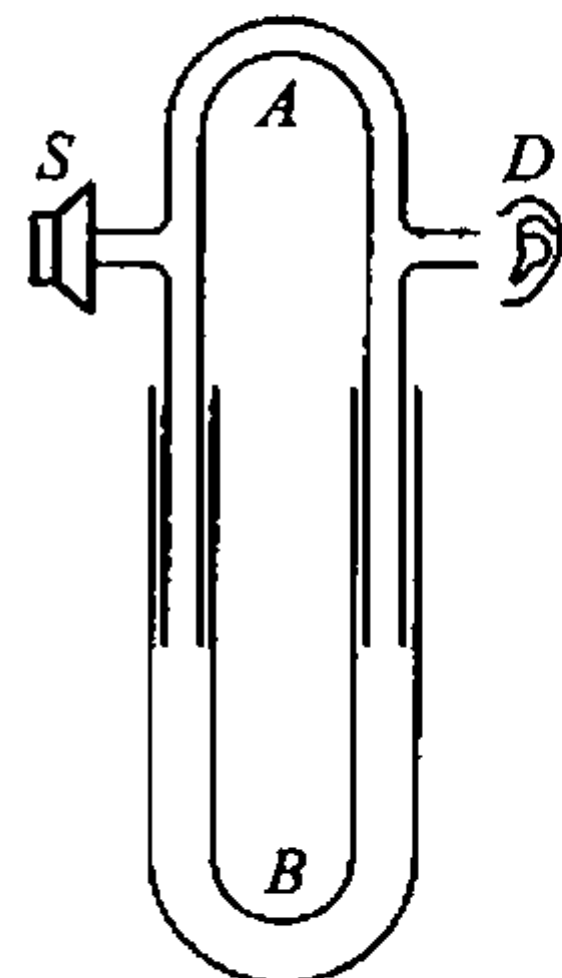
解: 在  $P$  点处,  $S_1$  和  $S_3$  的振动反相, 振幅相同的两振动叠加后完全抵消. 所以, 由  $S_2$  引起的振动为

$$y_P = y_{2P} = A \cos(\omega t - 8\pi) = A \cos \omega t$$

11-27. 图为声音干涉仪, 用以演示声波的干涉.  $S$  处为扬声器,  $D$  处为声音探测器, 如耳或话筒, 路径  $SBD$  的长度可以变化, 但路径  $SAD$  是固定的, 干涉仪内有空气, 且知声音强度在  $B$  的第一位置时为极小值 100 单位, 而渐增至  $B$  距第一位置为  $0.0165 \text{ m}$  的第二位置时, 有极大值 900 单位. 求:

(1) 声源发出的声波频率;

(2) 抵达探测器的两波的相对振幅 (设声波在传播过程中振幅不变).



习题 11-27 图

解: (1) 设  $B$  在第一位置时  $D$  处干涉极小的波程差为

$$\delta_1 = (2k-1) \frac{\lambda}{2}$$

设  $B$  移动了  $d$ , 在第二位置时  $D$  处出现干涉极大, 波程差为

$$\delta_2 = \delta_1 + 2d = k\lambda$$

所以, 在  $D$  处相继出现干涉极小和极大的过程中, 波程差的变化为

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = 2d = \frac{\lambda}{2}$$

得声波的波长为  $\lambda = 4d = 4 \times 0.0165 \text{ m} = 6.60 \times 10^{-2} \text{ m}$

空气中的声速为  $u = 331 \text{ m/s}$ , 所以,  $S$  发出的声波频率为

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = 5015 \text{ Hz}$$

(2) 设抵达探测器  $D$  处的两列相干波的振幅分别为  $A_1$  和  $A_2$ , 由  $I \propto A^2$  可知, 干涉相消时的声强  $I_1$  和干涉相长时的声强  $I_2$  的比值为

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{|A_1 - A_2|^2}{(A_1 + A_2)^2}$$

即有

$$\frac{|A_1 - A_2|}{A_1 + A_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{100}{900}} = \frac{1}{3}$$

可得两波的相对振幅为

$$A_1 : A_2 = 2 : 1$$

11-28. 两个波在一很长的弦线上传播, 设其波动表达式为

$$y_1 = 0.06 \cos \frac{\pi}{2} (0.020x - 8.0t)$$

$$y_2 = 0.06 \cos \frac{\pi}{2} (0.020x + 8.0t)$$

用 SI 单位. 求:

(1) 合成波的表达式;

(2) 波节和波腹的位置.

分析: 两列传播方向相反的相干波可以合成为驻波. 根据驻波表达式求波节和波腹的位置.

解: (1) 将两个波的表达式按

$$y = A \cos \left( \omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

的形式改写为

$$y_1 = 0.06 \cos \left( 4\pi t - \frac{2\pi}{200} x \right)$$

和

$$y_2 = 0.06 \cos \left( 4\pi t + \frac{2\pi}{200} x \right)$$

这两个波在弦线上的传播方向相反,  $\omega = 4\pi \text{ rad/s}$ ,  $\lambda = 200 \text{ m}$ .

$$\begin{aligned} \text{合成波为 } y = y_1 + y_2 &= \left( 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \omega t \\ &= 0.12 \cos 0.01\pi x \cos 4\pi t \end{aligned}$$

这是个驻波.

(2) 驻波的波节和波腹的位置由  $|0.12 \cos 0.01\pi x|$  确定.

在波节处, 有

$$\cos 0.01\pi x = 0$$

$$0.01\pi x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

波节点位置为

$$x = 50(2k+1) \text{ m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

在波腹处, 有

$$|\cos 0.01\pi x| = 1$$

$$0.01\pi x = k\pi$$

波腹点位置为

$$x = 100k \text{ m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

11-29. 若在弦线上的驻波表达式为

$$y = 0.2 \sin 2\pi x \cos 20\pi t \text{ (SI)}$$

求形成该驻波的两行波的表达式.

分析: 弦线上的驻波由传播方向相反的两相干行波叠加而成. 写出两行波的一般表达式, 将其合成, 并将合成波与弦线上的驻波表达式相比较, 得到各行

波的振幅、波长、振动周期以及坐标原点处质点的振动初相,即可确定两行波的表达式.

解: 设弦线上两同振幅的相干波相向而行,在  $x=0$  处的振动初相分别为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ ,波动表达式分别为

$$y_1 = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_1 \right)$$

和 
$$y_2 = A \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_2 \right)$$

在弦线上形成的合成波即驻波为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \cos \left( \omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right)$$

将上式与弦线上的驻波表达式相比较,应有

$$\cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) = \sin 2\pi x$$

$$\cos \left( \omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right) = \cos 20\pi t$$

$$2A = 0.2 \text{ m}$$

可得  $A = 0.1 \text{ m}$ ,  $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$ ,  $\lambda = 1 \text{ m}$ . 并有

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 0$$

可解得 
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

所以,两行波表达式分别为

$$y_1 = 0.1 \cos \left( 20\pi t - 2\pi x + \frac{\pi}{2} \right) (\text{m})$$

和 
$$y_2 = 0.1 \cos \left( 20\pi t + 2\pi x - \frac{\pi}{2} \right) (\text{m})$$

**11-30.** 在一根弦线上,有一列沿  $x$  轴正方向传播的简谐波,其频率  $\nu = 50 \text{ Hz}$ ,振幅  $A = 0.04 \text{ m}$ ,波速  $u = 100 \text{ m/s}$ . 已知弦线上离坐标原点  $x_1 = 0.5 \text{ m}$  处的质点在  $t = 0$  时刻的位移为  $+A/2$ ,且沿  $y$  轴负方向运动. 当传播到  $x_2 = 10 \text{ m}$  处固定端时,被全部反射. 试写出:

(1) 入射波和反射波的波动表达式;

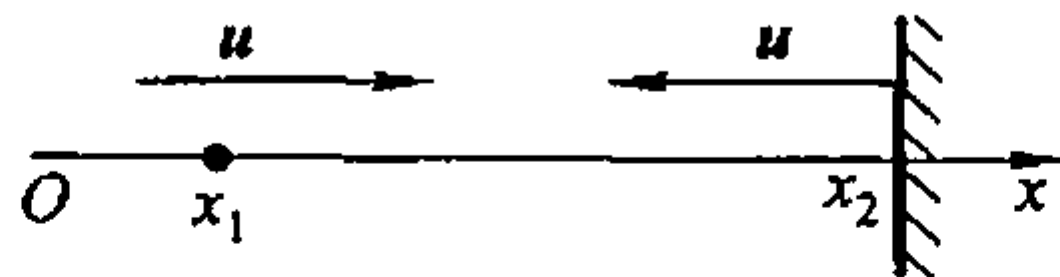
(2) 入射波和反射波叠加的合成波在  $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$  区间内波腹和波节处各点的坐标;

(3) 合成波的平均能流.

**分析：**根据弦线上已知质点的振动状态，推出原点处质点振动的初相，即可写出入射波的表达式。根据入射波在反射点的振动，考虑反射时的相位突变，可写出反射波的表达式。据题意，入射波和反射波的能量相等，因此，在弦线上形成驻波的平均能流为零。

**解：**沿弦线取坐标  $Ox$ ，如解图 11-30 所示。根据题给数据可得

$$\omega = 2\pi\nu = 100\pi \text{ rad/s}, \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = 2 \text{ m}.$$



解图 11-30

(1) 设原点处质元的初相为  $\varphi_0$ ，入射波表达式为

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

据题意可知，在  $x_1 = 0.5 \text{ m}$  处质元的振动初相为  $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ ，即有

$$\varphi_1 = \left( -\frac{100\pi \times 0.5}{100} + \varphi_0 \right) = \left( -\frac{\pi}{2} + \varphi_0 \right) = \frac{\pi}{3}$$

可得

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi$$

所以，入射波表达式为

$$y = 0.04 \cos \left[ 100\pi \left( t - \frac{x}{u} \right) + \frac{5\pi}{6} \right] = 0.04 \cos \left[ 100\pi t - \pi x + \frac{5\pi}{6} \right] (\text{m})$$

入射波在  $x_2$  处的振动表达式为

$$\begin{aligned} y_{x_2} &= 0.04 \cos \left[ 100\pi \left( t - \frac{x_2}{u} \right) + \frac{5\pi}{6} \right] = 0.04 \cos \left[ 100\pi \left( t - \frac{10}{100} \right) + \frac{5\pi}{6} \right] \\ &= 0.04 \cos \left[ 100\pi t + \frac{5\pi}{6} \right] (\text{m}) \end{aligned}$$

考虑半波损失，反射波在  $x_2$  处质点的振动表达式为

$$y'_{x_2} = 0.04 \cos \left[ 100\pi t + \frac{5\pi}{6} + \pi \right] = 0.04 \cos \left[ 100\pi t + \frac{11\pi}{6} \right] (\text{m})$$

反射波引起坐标原点处质点振动的相位比  $x_2$  处落后  $\omega \frac{x_2}{u}$ ，所以，由反射波引起的坐标原点处质点的振动表达式为

$$y'_0 = 0.04 \cos \left[ 100\pi t - 100\pi \frac{x_2}{u} + \frac{11\pi}{6} \right] = 0.04 \cos \left[ 100\pi t + \frac{11\pi}{6} \right] (\text{m})$$

所以，反射波的波动表达式为

$$y' = 0.04 \cos \left[ 100\pi \left( t + \frac{x}{u} \right) + \frac{11\pi}{6} \right] = 0.04 \cos \left[ 100\pi t + \pi x + \frac{11\pi}{6} \right] (\text{m})$$

(2) 入射波与反射波的传播方向相反，可改写为

$$y = 0.04 \cos \left[ 100\pi t - \pi x + \frac{5\pi}{6} \right] = 0.04 \cos \left[ \left( 100\pi t + \frac{4\pi}{3} \right) - \left( \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{ (m)}$$

$$y' = 0.04 \cos \left[ 100\pi t + \pi x + \frac{11\pi}{6} \right] = 0.04 \cos \left[ \left( 100\pi t + \frac{4\pi}{3} \right) + \left( \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{ (m)}$$

叠加后合成为驻波

$$y = y + y' = 0.08 \cos \left( \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( 100\pi t + \frac{4\pi}{3} \right) \text{ (m)}$$

波腹和波节的坐标决定于驻波表达式中的振幅因子  $\left| \cos \left( \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \right|$ .

$$\text{当 } \left| \cos \left( \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \right| = 1, \text{ 有 } \pi x + \frac{\pi}{2} = k\pi$$

在  $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$  区间内, 有  $x = k - \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots, 10$

即波腹的坐标为  $(0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5) \text{ m}$ .

$$\text{当 } \cos \left( \pi x + \frac{\pi}{2} \right) = 0, \text{ 有 } \pi x + \frac{\pi}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

在  $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$  区间内, 有  $x = k, k = 0, 1, 2, \dots, 10$

即波节的坐标为  $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \text{ m}$ .

(3) 合成波为驻波, 没有能量的定向传播, 因此, 平均能流密度为零.

**11-31.** 两人各执长为  $l$  的绳的两端, 以相同的频率和振幅在绳上激起振动, 右端的人的振动比左端的人的振动相位超前  $\varphi_0$ , 试以中点为坐标原点描写合成波的情况. 由于绳子很长, 不必考虑反射, 并设绳上的波速为  $u$ .

**分析:** 两人在绳上激起波的振动频率和振幅相同, 在任意时刻右端的振动都比左端的振动相位超前  $\varphi_0$ , 据此求得两列波在绳的中点的振动初相后, 即可得到波的表达式, 并求得合成波.

**解:** 设绳左端的振动为  $y_L = A \cos \omega t$ , 则右端的振动为  $y_R = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . 取坐标轴  $Ox$  沿绳自左向右, 则左端的振动在绳上激起的波沿  $x$  轴正方向传播, 右端的振动在绳上激起的波则沿  $x$  轴反方向传播. 设两列波在绳的中点即  $x$  轴坐标原点处的振动初相分别为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ , 则两列波可分别表示为

$$y_1 = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_1 \right], \quad y_2 = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \varphi_2 \right]$$

在  $x = -l/2$  处, 应有

$$y_1 \left( -\frac{l}{2}, t \right) = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{l}{2u} \right) + \varphi_1 \right] = y_L = A \cos \omega t$$

可得

$$\varphi_1 = -\omega \frac{l}{2u}$$

在  $x = l/2$  处, 应有

$$y_2\left(\frac{l}{2}, t\right) = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{l}{2u}\right) + \varphi_2\right] = y_R = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

可得

$$\varphi_2 = \varphi_0 - \omega \frac{l}{2u}$$

所以, 两列波的表达式为

$$y_1 = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) - \omega \frac{l}{2u}\right] = A \cos\left[\left(\omega t - \omega \frac{l}{2u} + \frac{\varphi_0}{2}\right) - \left(\omega \frac{x}{u} + \frac{\varphi_0}{2}\right)\right]$$

$$y_2 = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) - \omega \frac{l}{2u} + \varphi_0\right] = A \cos\left[\left(\omega t - \omega \frac{l}{2u} + \frac{\varphi_0}{2}\right) + \left(\omega \frac{x}{u} + \frac{\varphi_0}{2}\right)\right]$$

合成波为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\omega \frac{x}{u} + \frac{\varphi_0}{2}\right) \cos\left(\omega t - \omega \frac{l}{2u} + \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

**11-32.** 一平面简谐波沿  $x$  轴正方向传播, 在  $t=0$  时, 原点  $O$  处质元的振动是经过平衡位置向负方向运动. 在距离原点  $O$  为  $x_0 = \frac{11\lambda}{4}$  处有波密介质反射面, 波被垂直界面反射. 设入射波和反射波的振幅都为  $A$ , 频率为  $\nu$ . 试求:

- (1) 入射波和反射波的波动表达式;
- (2) 合成波的波动表达式;
- (3) 在 orig 点到反射面间各个波节和波腹点的坐标;
- (4) 距反射面为  $\frac{\lambda}{6}$  的  $Q$  点处质元的合振动表达式.

**分析:** 根据  $t=0$  时  $O$  处质元的振动状态, 可写出入射波的表达式. 根据入射波经界面反射回  $O$  处的波程和反射时的相位突变, 可得到反射波在  $O$  点的振动和反射波的表达式. 两波合成为驻波, 根据波腹点和波节点条件确定它们的坐标值. 将  $Q$  点的坐标代入合成波表达式, 即得  $Q$  点的合振动表达式.

**解:** 取  $x$  轴如解图 11-32 所示.

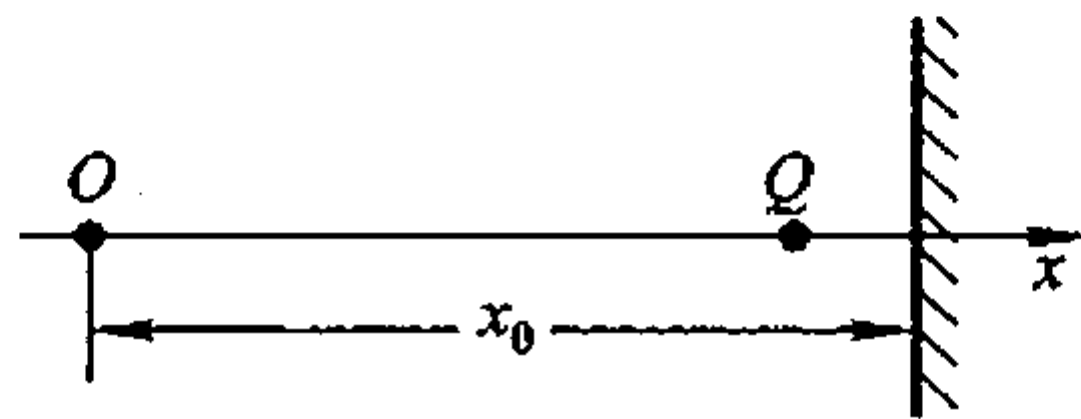
- (1) 设入射波在原点  $O$  的振动为

$$y_{10} = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

由于  $t=0$  时,  $y_{00}=0$ ,  $v_{00}<0$ , 所以,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

原点  $O$  的振动表达式为

$$y_{10} = A \cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2}\right)$$



解图 11-32

入射波的表达式为  $y_1 = A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$

反射波在  $O$  点的振动比入射波在  $O$  点的振动相位落后

$$\frac{2\pi}{\lambda}(2x_0) + \pi = 12\pi$$

式中  $2x_0$  是入射波由  $O$  点传向反射面后, 反射回  $O$  点所经历的波程,  $\pi$  是由于反射时发生相位突变而附加的相位. 所以, 反射波在  $O$  点的振动为

$$y_{20} = A \cos \left( 2\pi \nu t - 12\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

反射波的表达式为

$$y_2 = A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t + \frac{x}{\lambda} \right) - 12\pi + \frac{\pi}{2} \right] = A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t + \frac{x}{\lambda} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

(2) 合成波的波动表达式(驻波)为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \left( 2\pi \nu t + \frac{\pi}{2} \right)$$

(3) 在原点到反射面间, 波腹点坐标满足的条件为  $\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi$ , 可得

$$x = \frac{1}{2}k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 5$$

即波腹点的坐标为  $\left( 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \frac{5\lambda}{2} \right)$ .

波节点坐标满足的条件为  $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , 可得

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 5$$

即波节点的坐标为  $\left( \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \frac{9\lambda}{4}, \frac{11\lambda}{4} \right)$ .

(4)  $Q$  点的坐标为  $x_Q = \frac{11\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} = \frac{31\lambda}{12}$

合振动表达式为  $y_Q = 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{31\lambda}{12} \right) \cos \left( 2\pi \nu t + \frac{\pi}{2} \right)$   
 $= 2A \cos \frac{31}{6} \pi \sin 2\pi \nu t = \sqrt{3}A \sin 2\pi \nu t$

## 6. 多普勒效应

11-33. (1) 火车以  $90 \text{ km/h}$  的速度行驶, 其汽笛的频率为  $500 \text{ Hz}$ . 一个人站在铁轨旁, 当火车从他身旁驶过时, 他听到的汽笛声的频率变化是多大? 设声

速为 340 m/s.

(2) 若此人坐在汽车里,而汽车在铁轨旁的公路上以 54 km/h 的速率迎着火车行驶. 试问此人听到汽笛声的频率为多大?

分析: 当波源和观察者相对静止介质沿两者的连线运动时,观察者接收到的频率由多普勒频率公式  $\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S$  给出. 当观察者向着波源运动时,单位时间内接收到的完整波数增多,当波源向着观察者运动时,静止介质中的波长变短,在这两种情况下  $v_S$  和  $v_R$  取正值,反之则取负值.

解: 声波在空气中声波的传播速率为  $u$ ,波源的频率(汽笛)为  $\nu_S$ ,波源(火车)运动的速率为  $v_S = \frac{90 \times 10^3}{3600} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$ ,观察者的运动速率为  $v_R = \frac{54 \times 10^3}{3600} \text{ m/s} = 15 \text{ m/s}$ .

当波源和观察者沿两者的连线运动时,观察者接收到的频率为

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S$$

(1) 观察者不动  $v_R = 0$ ,火车向着观察者运动,  $v_S > 0$ .

观察者接收到的频率为

$$\nu_1 = \left( \frac{u}{u - v_S} \right) \nu_S = \left( \frac{340}{340 - 25} \right) \times 500 \text{ Hz} = 540 \text{ Hz}$$

当火车离观察者而去时,  $v_S < 0$ .

观察者接收到的频率为

$$\nu_2 = \left( \frac{340}{340 + 25} \right) \times 500 \text{ Hz} = 466 \text{ Hz}$$

观察者接收到的频率变化为  $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 74 \text{ Hz}$

(2) 汽车迎着火车,两者相对接近时,  $v_R > 0, v_S > 0$ .

车中的观察者接收到的频率为

$$\nu = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S = \frac{340 + 15}{340 - 25} \times 500 \text{ Hz} = 563.5 \text{ Hz}$$

**11-34.** 正在报警的警钟,每隔 0.5 s 钟响一声,一声接一声地响着. 有一个人在以 60 km/h 的速度向警钟行驶的火车中,问这个人在 1 min 内听到几响?

解: 设声音在空气中的传播速率为  $u = 340 \text{ m/s}$ ,据题意,相对空气静止的警钟(波源)频率为

$$\nu_S = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5} \text{ Hz} = 2 \text{ Hz}$$

观察者(火车中的人)接近警钟的速率为

$$v_R = \frac{60\,000}{3\,600} \text{ m/s} = 16.7 \text{ m/s}$$

火车中的人接收到的频率为

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u} \nu_S = \frac{340 + 16.7}{340} \times 2 \text{ Hz} = 2.1 \text{ Hz}$$

人在 1 min 内听到报警钟响的次数为  $N = \nu_R \times 60 = 126$

**11-35.** 蝙蝠利用超声波脉冲导航可以在洞穴中飞来飞去. 若蝙蝠发射的超声频率为 39 kHz, 在朝着表面平坦的墙壁飞扑期间, 它的运动速率为空气中声速的  $\frac{1}{40}$ . 试问蝙蝠接收到的反射脉冲的频率是多少?

**分析:** 蝙蝠作为运动声源接近墙壁时, 引起墙壁振动的频率高于蝙蝠发射的频率, 这是由于空气中的波长变短. 蝙蝠作为运动的观察者接收来自墙壁的反射波时, 接收到的频率高于墙壁的振动频率, 这是由于蝙蝠在接近墙壁的运动中, 单位时间内接收到的完整波数增多了.

**解:** 设空气中的声速为 340 m/s, 蝙蝠的运动速率为  $\frac{340}{40} \text{ m/s} = 8.5 \text{ m/s}$ . 蝙蝠在朝着墙壁飞扑的过程中, 墙壁作为接收器接收到的振动频率为

$$\nu_{R1} = \frac{u}{u - v_S} \nu_S = \frac{340}{340 - 8.5} \times 39 \times 10^3 \text{ Hz} = 40 \times 10^3 \text{ Hz}$$

蝙蝠接收到墙壁反射脉冲的频率为

$$\nu_{R2} = \frac{u + v_R}{u} \nu_{R1} = \frac{340 + 8.5}{340} \times 40 \times 10^3 \text{ Hz} = 41 \times 10^3 \text{ Hz}$$

**11-36.** 一声源的频率为 1 080 Hz, 相对于地以 30 m/s 的速率向右运动. 在其右方有一反射面相对于地面以 65 m/s 的速率向左运动. 设空气中的声速为 331 m/s. 求:

- (1) 声源在空气中发出声音的波长;
- (2) 每秒钟到达反射面的波数;
- (3) 反射波的速率;
- (4) 反射波的波长.

**分析:** 运动反射面作为观察者, 其接收到的频率即为运动声源相对运动观察者接近时, 观察者接收到的频率.

**解:** (1) 在运动声源前方空气分子的振动频率为

$$\nu_1 = \frac{u}{u - v_S} \nu_S = \frac{331}{331 - 30} \times 1\,080 \text{ Hz} = 1\,188 \text{ Hz}$$

在运动声源前方空气中的波长为

$$\lambda_1 = \frac{u}{\nu_1} = \frac{u - v_s}{\nu_s} = \frac{331 - 30}{1080} \text{ m} = 0.28 \text{ m}$$

在运动声源后方空气分子的振动频率为

$$\nu_1' = \frac{u}{u - (-v_s)} \nu_s = \frac{331}{331 + 30} \times 1080 \text{ Hz} = 990 \text{ Hz}$$

在运动声源后方空气中的波长为

$$\lambda_1' = \frac{u}{\nu_1'} = \frac{u + v_s}{\nu_s} = \frac{331 + 30}{1080} \text{ m} = 0.33 \text{ m}$$

(2) 每秒到达反射面的波数,即运动着的反射面“接收”到的频率,为

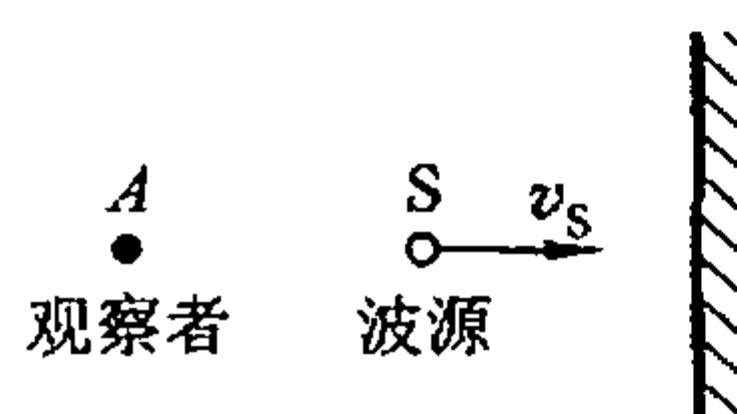
$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_s} \nu_s = \frac{331 + 65}{331 - 30} \times 1080 \text{ Hz} = 1421 \text{ Hz}$$

(3) 反射波的速率即反射波在空气中的传播速度,为  $u = 331 \text{ m/s}$

(4) 反射波的波长为  $\lambda_2 = \frac{u - v_R}{\nu_R} = \frac{331 - 65}{1421} \text{ m} = 0.187 \text{ m}$

11-37. 试计算:

(1) 一波源 S(振动的频率为 2040 Hz) 以速度  $v_s$  向一反射面接近(见图), 观察者在 A 点听得拍音频率为  $\Delta\nu = 3 \text{ Hz}$ , 求波源移动的速度  $v_s$ , 设声速为 340 m/s.



习题 11-37 图

(2) 若(1)中波源没有运动, 而反射面以速度  $v = 0.20 \text{ m/s}$  向观察者接近. 所听得拍音频率为  $\Delta\nu = 4 \text{ Hz}$ , 求波源的频率.

分析: 运动波源接近固定反射面而背离观察者时, 观察者既接收到直接来自波源的声波, 也接收到来自固定反射面的声波, 两声波在 A 点的振动合成为拍.

当波源相对观察者静止, 而反射面接近波源和观察者时, 观察者接收到直接来自波源的声波频率无多普勒效应, 但反射面反射的频率和观察者接收到的反射波频率都发生多普勒效应, 因此, 两个不同频率的振动在 A 点也将合成为拍.

解: (1) 波源远离观察者而去, 观察者接收到来自波源的声波频率为

$$\nu_{R1} = \frac{u}{u - (-v_s)} \nu_s = \frac{u}{u + v_s} \nu_s$$

观察者相对反射面静止, 接收到来自反射面的声波频率  $\nu_{R2}$ , 就是固定反射面接收到的声波频率, 这时的波源以  $v_s$  接近反射面.

$$\nu_{R2} = \frac{u}{u - v_S} \nu_S$$

A 处观察者听到的拍频为

$$\Delta\nu = |\nu_{R2} - \nu_{R1}| = \frac{u}{u - v_S} \nu_S - \frac{u}{u + v_S} \nu_S = \frac{2uv_S \nu_S}{u^2 - v_S^2}$$

可得方程为

$$\Delta\nu v_S^2 + 2uv_S \nu_S - \Delta\nu u^2 = 0$$

解方程可得

$$v_S = \frac{u\nu_S}{\Delta\nu} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta\nu}{\nu_S} \right)^2} - 1 \right)$$

因为  $\Delta\nu \ll \nu_S$ , 所以, 有

$$v_S = \frac{u\nu_S}{\Delta\nu} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\nu}{\nu_S} \right)^2 + \cdots - 1 \right) = \frac{u\Delta\nu}{2\nu_S} = \frac{340 \times 3}{2 \times 2040} \text{ m/s} = 0.25 \text{ m/s}$$

(2) 波源相对观察者静止, 波源直接传向观察者的声波频率就是波源的频率

$$\nu'_{R1} = \nu_S$$

反射面接近固定波源时, 接收到的声波频率为(相当于观察者)

$$\nu' = \frac{u + v}{u} \nu_S$$

式中  $v$  为反射面接近波源的速率.

观察者接收到运动反射面的反射波频率为(反射面相当于波源接近观察者)

$$\nu'_{R2} = \frac{u}{u - v} \nu' = \frac{u + v}{u - v} \nu_S$$

A 处观察者听到的拍频为

$$\Delta\nu' = |\nu'_{R2} - \nu'_{R1}| = \frac{u + v}{u - v} \nu_S - \nu_S = \frac{2v}{u - v} \nu_S$$

得波源的频率为

$$\nu_S = \frac{u - v}{2v} \Delta\nu' = \frac{340 - 0.2}{2 \times 0.2} \times 4 \text{ Hz} = 3398 \text{ Hz}$$

**11-38.** 一固定的超声波探测器, 在海水中发出一束频率  $\nu = 30000 \text{ Hz}$  的超声波, 被向着探测器驶来的潜艇反射回来, 反射波与原来的波合成后, 得到频率为  $241 \text{ Hz}$  的拍. 求潜艇的速率. 设超声波在海水中的波速为  $1500 \text{ m/s}$ .

分析: 潜艇接近固定的超声波波源时, 接收到的超声波频率有多普勒效应, 同时, 作为反射波源接近探测器, 探测器接收到的反射波频率仍有多普勒效应. 所以, 探测器接收到的超声波和发射的超声波的振动合成为拍.

解: 潜艇接收到的超声波频率为

$$\nu_R = \frac{u + v}{u} \nu_S$$

式中  $v$  是潜艇相当于观察者接近固定波源时的速率.

潜艇作为波源以速率  $v$  接近固定探测器并反射超声波, 探测器接收到的频率为

$$\nu'_R = \frac{u}{u-v} \nu_R = \frac{u}{u-v} \frac{u+v}{u} \nu_S = \frac{u+v}{u-v} \nu_S$$

反射波与发射波的合振动为拍, 拍频为

$$\Delta\nu = |\nu'_R - \nu_S| = \frac{u+v}{u-v} \nu_S - \nu_S = \frac{2v}{u-v} \nu_S$$

潜艇速率为

$$v = \frac{u\Delta\nu}{2\nu_S + \Delta\nu} = \frac{1\,500 \times 241}{2 \times 30\,000 + 241} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$

# 第十二章

## 光 学

### 一、教学基本要求

1. 掌握几何光学的基本定律,理解近轴光线成像的规律和分析方法.
2. 掌握对杨氏双缝干涉和薄膜等厚干涉光程差的分析方法,确定干涉条纹位置的规律. 理解半波损失概念. 了解迈克耳孙干涉仪的工作原理.
3. 理解惠更斯-菲涅尔原理,掌握用半波带法分析单缝夫琅禾费衍射的条纹位置.
4. 掌握光栅方程,理解缝宽对光栅衍射光强的影响.
5. 理解衍射对光学仪器分辨本领的影响. 了解晶体的 X 射线衍射.
6. 掌握马吕斯定律和布儒斯特定律. 了解双折射现象.

### 二、本章习题分类

1. 几何光学
2. 双缝干涉条纹的计算
3. 薄膜干涉条纹的计算
4. 单缝衍射和光栅衍射
5. 光学仪器的分辨率
6. 晶体的 X 射线衍射
7. 光的偏振
8. 双折射现象

### 三、习题分析和解答

#### 1. 几何光学

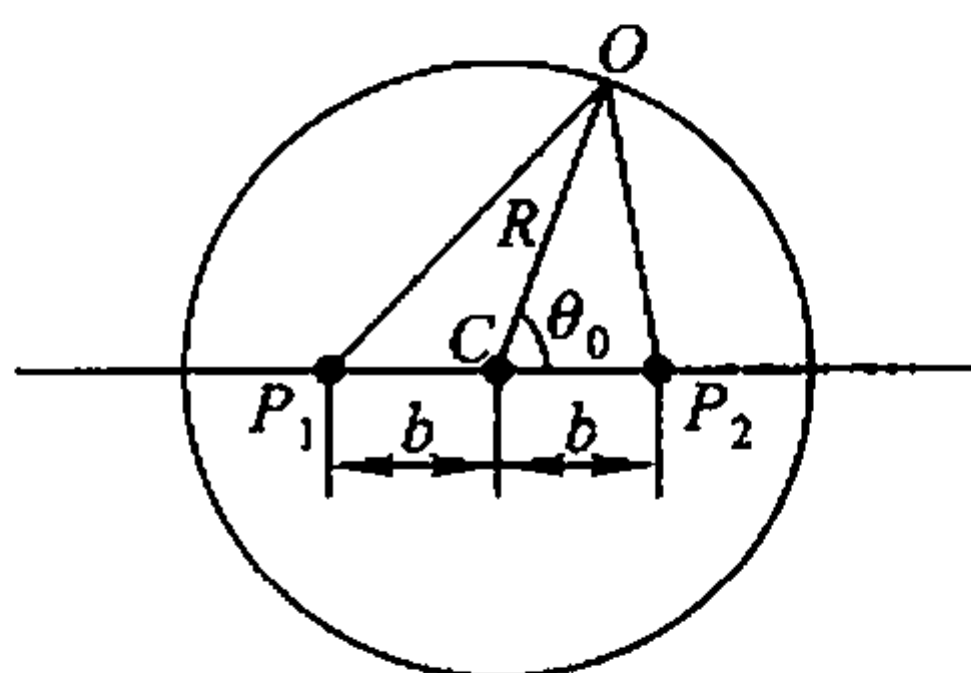
12-1. 一半径为  $R$  的反射球面内,  $P_1$ 、 $P_2$  两点相对于球心  $C$  对称,与球心间距为  $b$ ,设光线自  $P_1$  发出经  $O$  点反射后过  $P_2$  点. 试利用费马原理计算  $\theta_0$  为

何值时,  $P_1O + OP_2$  的光程为极小.

分析: 根据费马原理, 从  $P_1$  点发出, 经球面上  $O$  点反射到  $P_2$  点的实际光线, 其光程取所有可能光线光程的极值.

解: 根据解图 12-1 所示的几何关系, 可得  $P_1OP_2$  的光程为

$$\begin{aligned}[P_1OP_2] &= [P_1O] + [OP_2] \\ &= (b^2 + R^2 + 2bR\cos\theta_0)^{1/2} + \\ &\quad (b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta_0)^{1/2}\end{aligned}$$



解图 12-1

根据费马原理, 经球面反射的实际光线的光程  $[P_1OP_2]$  应满足

$$\frac{d[P_1OP_2]}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{2bR(-\sin\theta_0)}{(b^2 + R^2 + 2bR\cos\theta_0)^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{-2bR(-\sin\theta_0)}{(b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta_0)^{1/2}} = 0$$

即要求  $\cos\theta_0 = 0$ , 即  $\theta_0 = \pm 90^\circ$ ; 或要求  $\sin\theta_0 = 0$ , 即  $\theta_0 = 0, \pi$ .

12-2. 一个人身高 1.8 m, 如果此人能够从竖直放置的平面镜中看到自己的全身, 这个平面镜应有多高? 如何放置? 试作图表示之. 假设他的眼睛位于头顶下方 10 cm 处.

分析: 根据光的反射定律可知, 自头顶和脚发出的光线, 经平面镜反射后若能进入这人的眼睛, 他就可以看到自己全身的像, 如解图 12-2 所示.

解: 设人的身高为  $l$ , 头顶到眼睛的距离为  $y$ , 平面镜的长度为  $L$ , 置于离地  $h$  高度. 如解图 12-2 所示, 应有

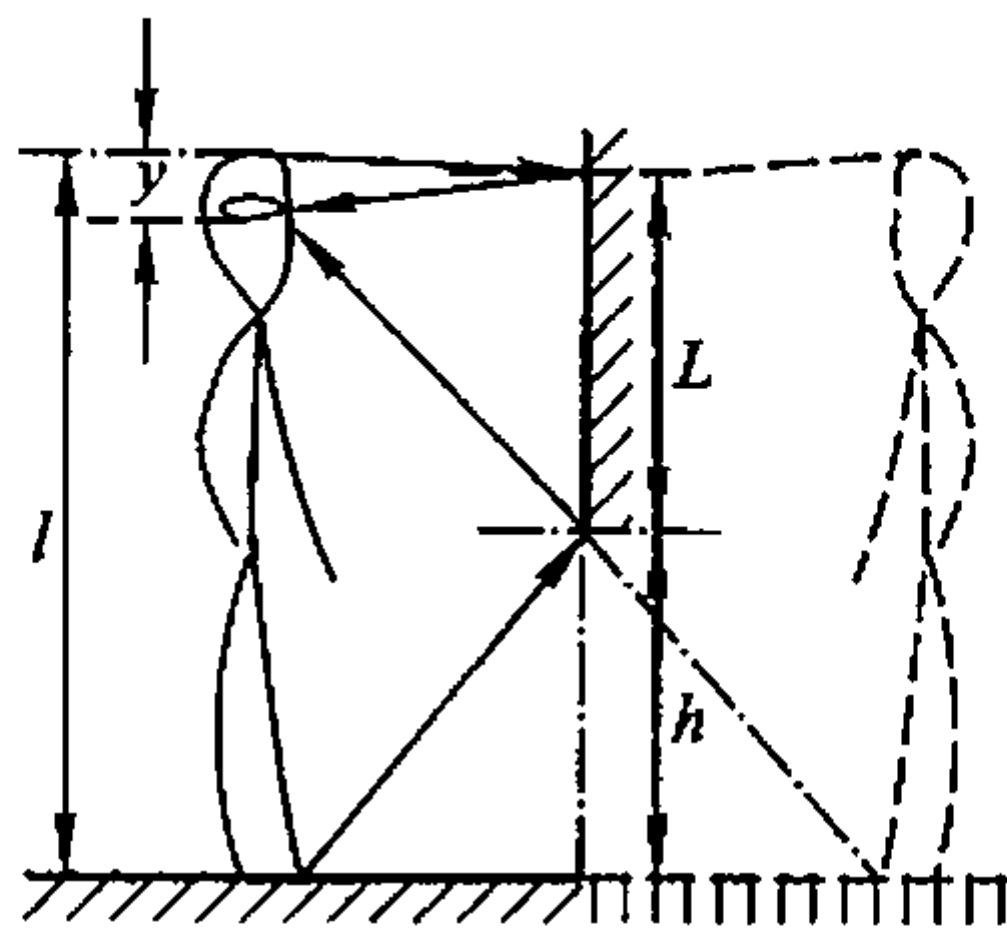
$$L + h = l - \frac{y}{2} = 1.8 \text{ m} - 0.05 \text{ m} = 1.75 \text{ m}$$

$$h = \frac{l - y}{2} = \frac{1.8 - 0.1}{2} \text{ m} = 0.85 \text{ m}$$

所以, 平面镜的长度为

$$L = 1.75 \text{ m} - 0.85 \text{ m} = 0.9 \text{ m}$$

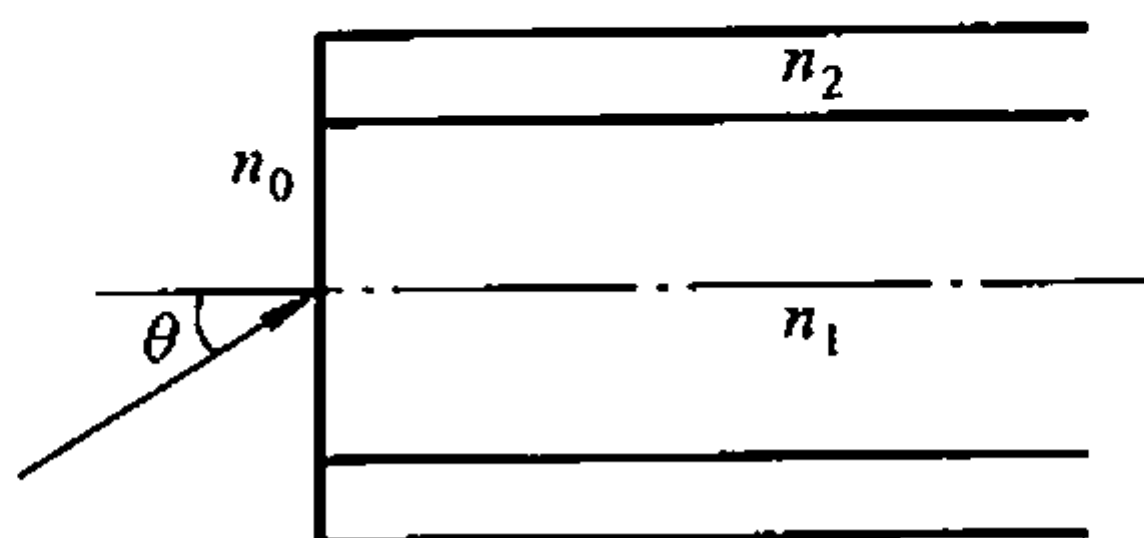
置于离地  $h = 0.85 \text{ m}$  高度处.



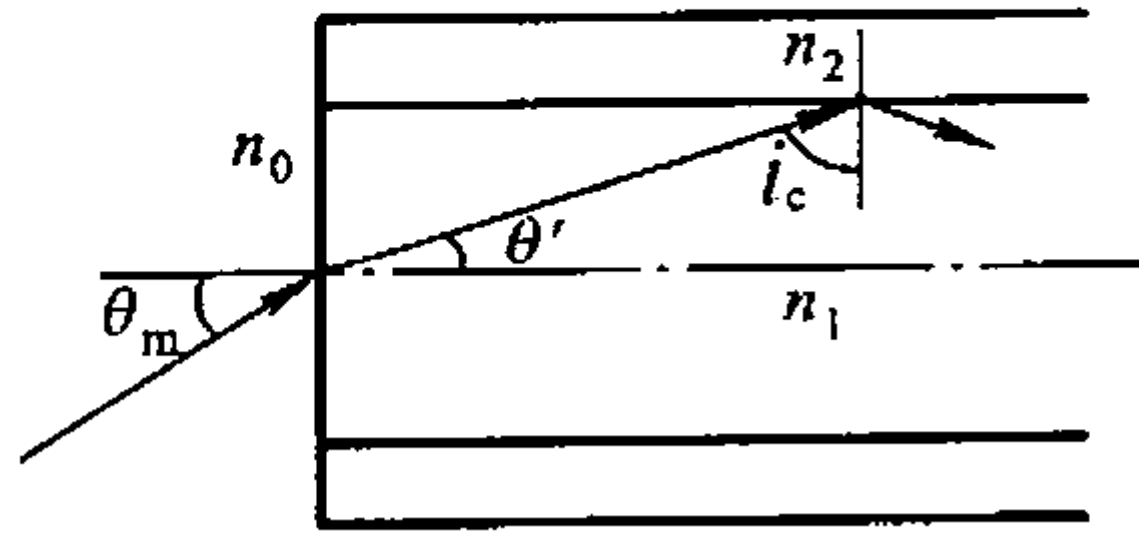
解图 12-2

12-3. 设光导纤维内层材料的折射率  $n_1$ , 外层材料的折射率  $n_2$  ( $n_1 > n_2$ ). 光纤外介质的折射率为  $n_0$  ( $n_0 < n_2$ ). 若使光线能在纤维中传播, 其最大入射角为多大?

分析: 利用光的折射定律和全反射的条件求解.



习题 12-3 图



解图 12-3

解：如解图 12-3 所示，设光线在纤维端面的最大入射角为  $\theta_m$ ，折射角为  $\theta'$ ，在内、外层材料界面发生全反射时的临界角为  $i_c$ 。根据折射定律，有

$$n_0 \sin \theta_m = n_1 \sin \theta'$$

根据全反射条件，有

$$n_1 \sin i_c = n_2$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - i_c$$

有

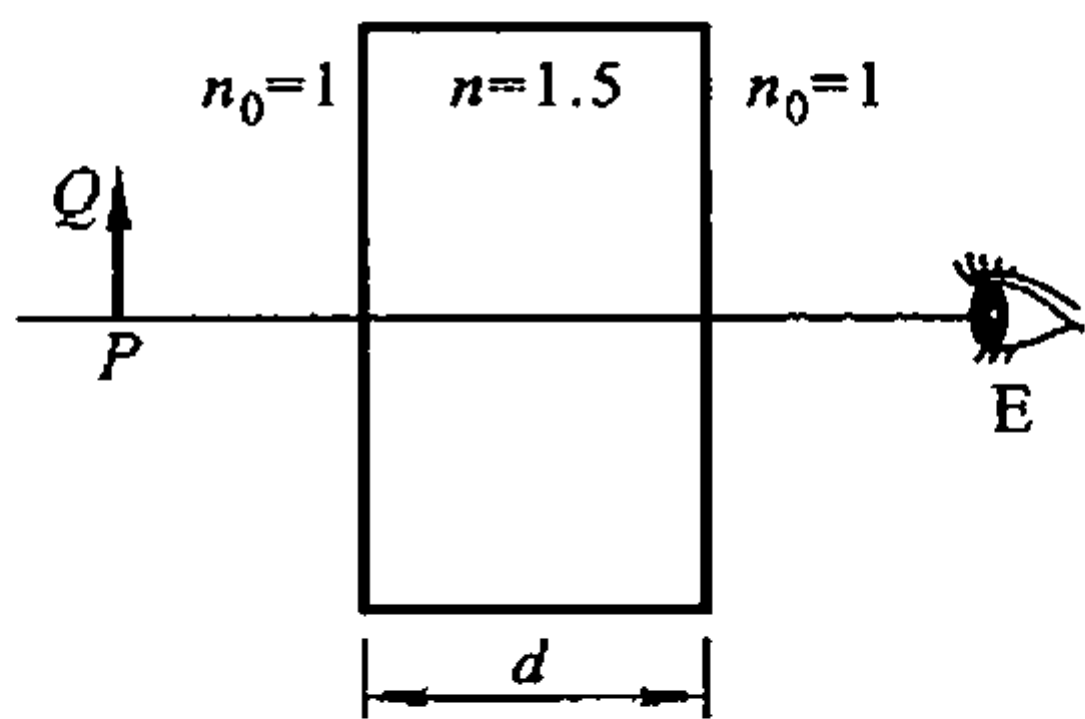
$$n_0 \sin \theta_m = n_1 \cos i_c = \sqrt{n_1^2 - n_1^2 \sin^2 i_c} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

得

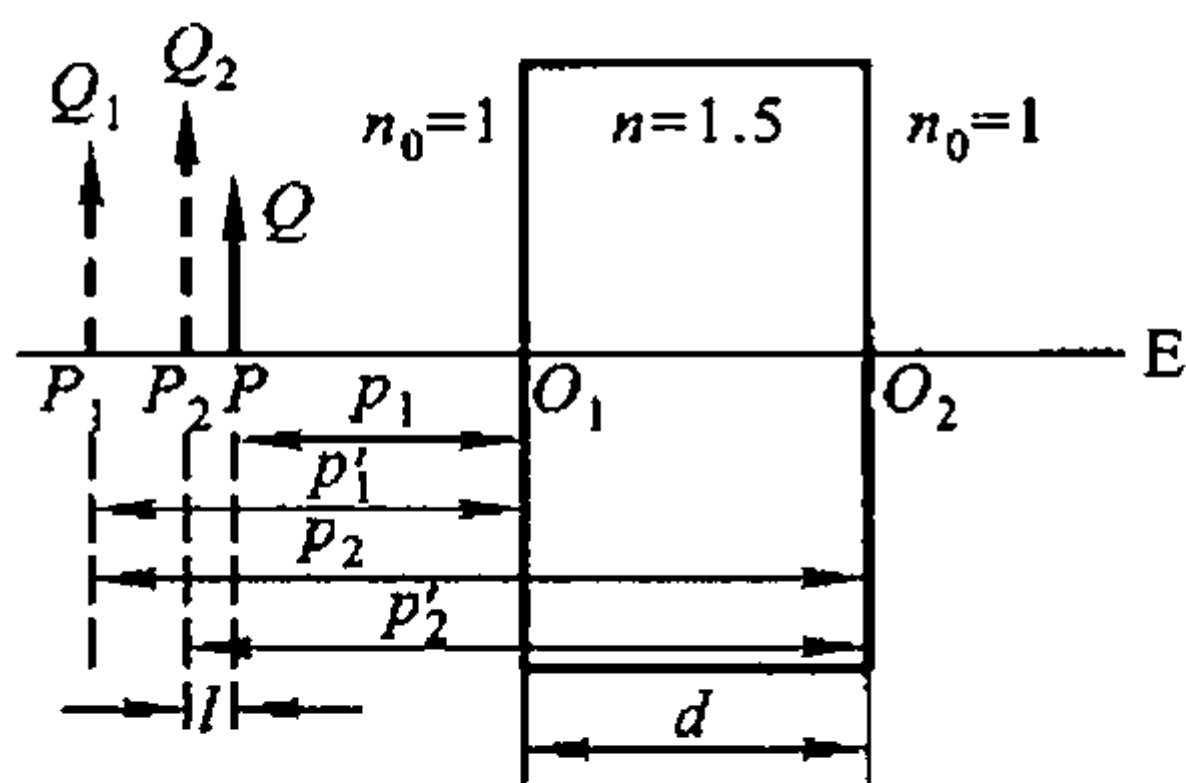
$$\theta_m = \arcsin \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}$$

12-4. 眼睛 E 和物体 PQ 之间有一折射率为 1.5 的玻璃平板，如图所示，平板的厚度  $d$  为 30 cm。求物体 PQ 的像与物体之间的距离为多少？（平板周围为空气。）

分析：物体 PQ 经平板玻璃前、后表面两次折射成虚像  $P'Q'$ ，根据折射定律可知，它们位于玻璃的同一侧。平板玻璃的表面可视为曲率半径  $r_1 = r_2 = r \rightarrow \infty$  的曲面，利用折射球面的成像规律，对两个表面逐次成像，求解本题。



习题 12-4 图



解图 12-4

解：如解图 12-4 所示，设 PQ 是一垂直于玻璃表面法线放置的小物体，以玻璃的法线为主轴，玻璃前、后表面与主轴的交点分别为  $O_1$ 、 $O_2$ 。设物体对玻璃前表面的物距为  $p_1$ ，像距为  $p'_1$ ，由于玻璃表面是平面， $r = \infty$ ，根据物像公式，有

根据符号法则有物距  $p = 10 \text{ cm}$ , 凹面镜的焦距为

$$f = \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \times 30 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

可得像距为

$$p' = \frac{fp}{p-f} = \frac{15 \times 10}{10-15} \text{ cm} = -30 \text{ cm}$$

$$\beta = \frac{p'n}{pn'} = \frac{-30}{10} = -3$$

$p' < 0$  表示像在凹面镜顶点的右侧,  $\beta = -3$  表示经凹面镜反射所成之像是正立的, 并且比物放大 3 倍. 这是个放大、正立的虚像.

**12-6.** 一只装在汽车上的凸面镜, 曲率半径为  $40 \text{ cm}$ , 一物体在镜前方  $10.0 \text{ cm}$  处. 求像的位置和放大倍数.

**分析:** 将球面反射看作  $n = -n'$  时球面折射的特例, 可由折射球面的成像规律求解.

**解:** 凸球面反射时,  $r < 0$ , 有

$$f = f' = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2} \times (-40) \text{ cm} = -20 \text{ cm}$$

球面反射时的物像公式为

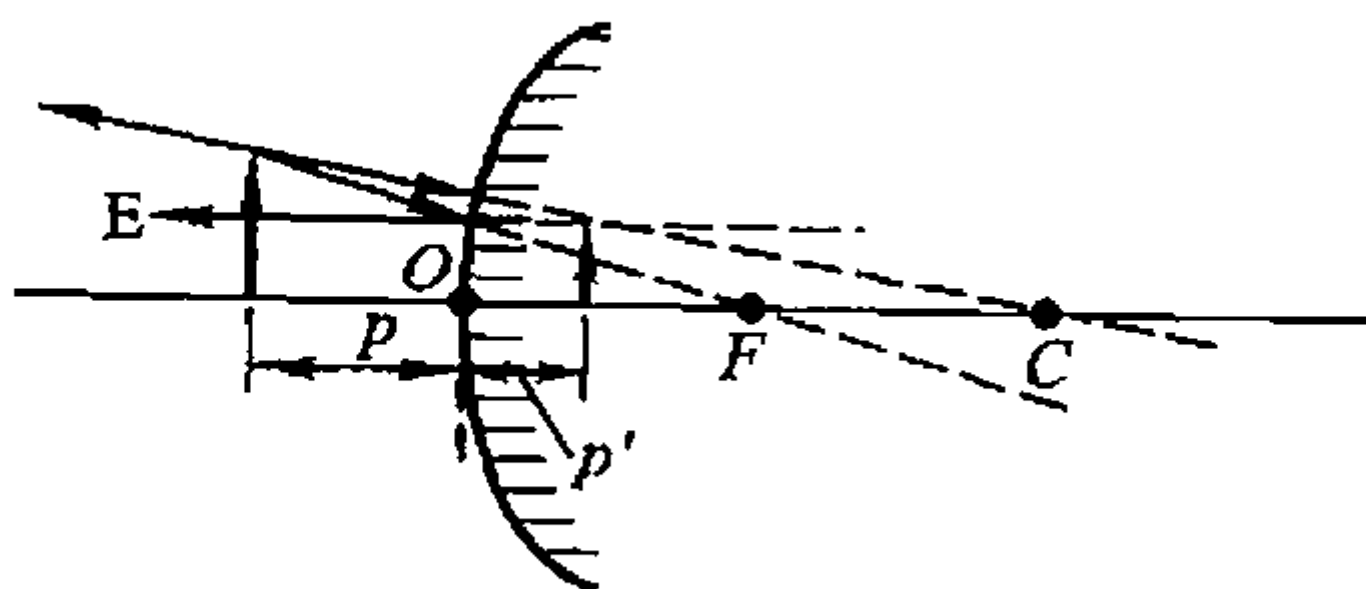
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

式中  $p = 10 \text{ cm}$ , 可得像距为

$$p' = \frac{fp}{p-f} = \frac{(-20) \times 10}{10 - (-20)} \text{ cm} = -6.67 \text{ cm}$$

$$\beta = \frac{p'}{p} = \frac{-6.67}{10} = -0.667$$

$p' < 0$  表示像在凸面镜顶点的右侧,  $\beta = -0.667$  表示经凸面镜反射所成之像是正立、缩小的虚像, 如解图 12-6 所示.



解图 12-6

**12-7.** 一光源与屏间的距离为  $1.6 \text{ m}$ , 用焦距为  $30 \text{ cm}$  的凸透镜插在两者

根据符号法则有物距  $p = 10 \text{ cm}$ , 凹面镜的焦距为

$$f = \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \times 30 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

可得像距为

$$p' = \frac{fp}{p-f} = \frac{15 \times 10}{10-15} \text{ cm} = -30 \text{ cm}$$

$$\beta = \frac{p'n}{pn'} = \frac{-30}{10} = -3$$

$p' < 0$  表示像在凹面镜顶点的右侧,  $\beta = -3$  表示经凹面镜反射所成之像是正立的, 并且比物放大 3 倍. 这是个放大、正立的虚像.

**12-6.** 一只装在汽车上的凸面镜, 曲率半径为  $40 \text{ cm}$ , 一物体在镜前方  $10.0 \text{ cm}$  处. 求像的位置和放大倍数.

**分析:** 将球面反射看作  $n = -n'$  时球面折射的特例, 可由折射球面的成像规律求解.

**解:** 凸球面反射时,  $r < 0$ , 有

$$f = f' = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2} \times (-40) \text{ cm} = -20 \text{ cm}$$

球面反射时的物像公式为

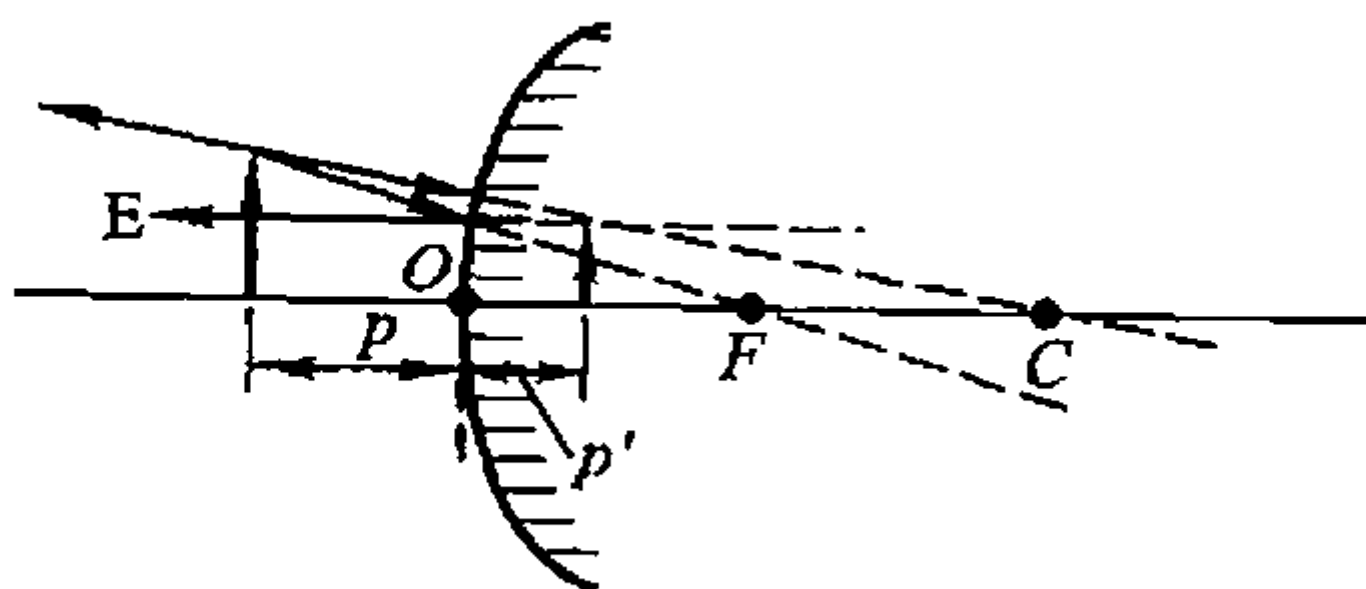
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

式中  $p = 10 \text{ cm}$ , 可得像距为

$$p' = \frac{fp}{p-f} = \frac{(-20) \times 10}{10 - (-20)} \text{ cm} = -6.67 \text{ cm}$$

$$\beta = \frac{p'}{p} = \frac{-6.67}{10} = -0.667$$

$p' < 0$  表示像在凸面镜顶点的右侧,  $\beta = -0.667$  表示经凸面镜反射所成之像是正立、缩小的虚像, 如解图 12-6 所示.



解图 12-6

**12-7.** 一光源与屏间的距离为  $1.6 \text{ m}$ , 用焦距为  $30 \text{ cm}$  的凸透镜插在两者

之间,透镜应放在什么位置才能使光源成像于屏上?

分析: 置于空气中的薄凸透镜,其物方焦距和像方焦距相对透镜对称分布于两侧,有  $f=f'$ . 解题中需注意正确运用薄透镜成像规律中有关量的符号规则.

解: 设光源与屏的间距为  $L$ ,对透镜的物距为  $p$ ,像距为  $p'$ ,由薄透镜的成像公式,有

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$$

据题意,应有

$$p' = L - p$$

解方程可得

$$p^2 - pL + Lf = 0$$

或

$$p^2 - 1.6p - 0.48 = 0$$

解得

$$p_1 = 40 \text{ cm}, \quad p'_1 = 120 \text{ cm}$$

$$p_2 = 120 \text{ cm}, \quad p'_2 = 40 \text{ cm}$$

12-8. 一个等曲率的双凸透镜,两球面的曲率半径均为 3 cm,中心厚度 2 cm,玻璃的折射率为 1.5. 将透镜放在水面上,在透镜下 4 cm 处有一物体  $Q$ ,试计算最后在空气中像的位置.(水的折射率为 1.33.)

分析: 对厚透镜的物像关系,不能简单地套用薄透镜的成像公式求解. 可用逐次成像的方法,分别对两个球面运用折射球面的成像规律. 在计算中需注意相对每个球面的物方和像方的区别,以及顶点  $O_2$  的平移.

解: 如解图 12-8 所示,取凸透镜下表面和上表面与主轴的交点分别为  $O_1$ 、 $O_2$ ,对凸透镜的两个表面逐次成像.

设水的折射率为  $n_1$ ,玻璃的折射率为  $n'_1$ ,空气的折射率为  $n_0$ . 对  $O_1$ ,  $Q$  点的物距为  $p_1 = 4 \text{ cm}$ ,像距为  $p'_1$ . 由折射球面的成像规律,有

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n'_1}{p'_1} = \frac{n'_1 - n_1}{r_1}$$

即

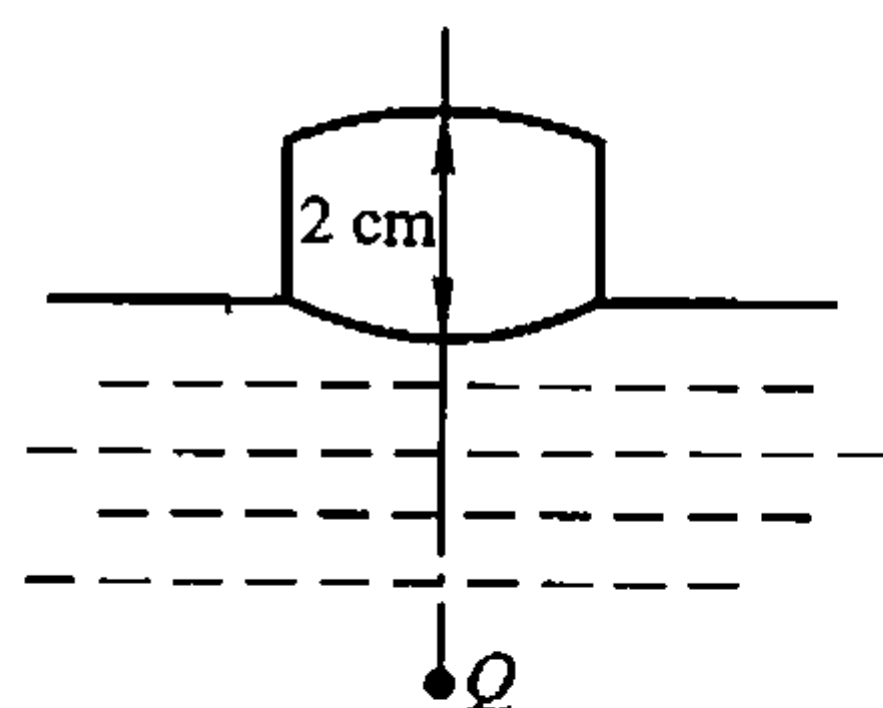
$$\frac{1.33}{4} + \frac{1.50}{p'_1} = \frac{1.50 - 1.33}{3}$$

可得

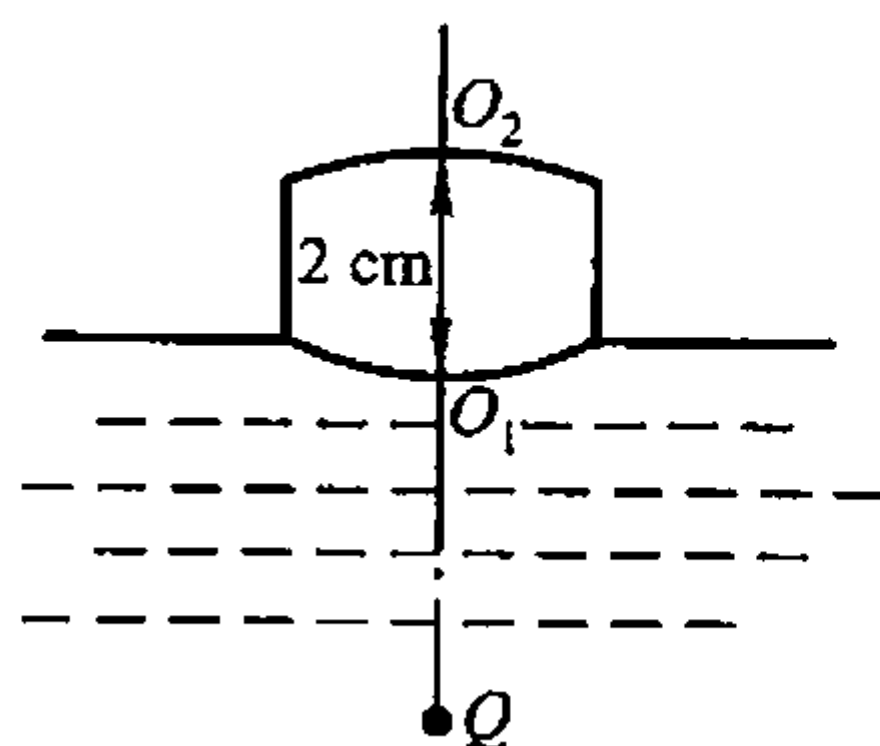
$$p'_1 = -5.4 \text{ cm}$$

对  $O_2$ ,  $p'_1$  是物,物距为  $p_2 = |p'_1| + d$ ,设像距为  $p'_2$ ,有

$$\frac{n'_1}{p_2} + \frac{n_0}{p'_2} = \frac{n_0 - n'_1}{r_2}$$



习题 12-8 图



解图 12-8

$$\text{即 } \frac{1.50}{5.4+2} + \frac{1.00}{p_2'} = \frac{1.00-1.50}{-3}$$

$$\text{可解得 } p_2' = -27.75 \text{ cm}$$

所以,  $Q$  点对凸透镜最后的像  $p_2'$  成在凸透镜上表面顶点  $O_2$  的下方 27.75 cm 处.

## 2. 双缝干涉条纹的计算

**12-9.** 在双缝干涉实验中, 两缝的间距为 0.6 mm, 照亮狭缝  $S$  的光源是汞弧灯加上绿色滤光片. 在 2.5 m 远处的屏幕上出现干涉条纹, 测得相邻两明条纹中心的距离为 2.27 mm. 试计算入射光的波长. 如果所用仪器只能测量  $\Delta x \geq 5 \text{ mm}$  的距离, 则对此双缝的间距  $d$  有何要求?

**分析:** 使用绿色滤光片以获得单色光. 屏幕上  $P$  点的明暗情况取决于从双缝发出的相干光在该点的光程差. 在双缝干涉装置中, 屏幕上可观察的明、暗条纹所对应的衍射角  $\theta$  都很小, 因此光强近似为等间距分布. 由相邻两明条纹或者暗条纹中心的间隔可求得波长.

**解:** 在屏幕上取坐标轴  $Ox$ , 向上为正, 坐标原点位于关于双缝的对称中心.

$$\text{屏幕上第 } k \text{ 级明纹中心的位置为 } x = \pm k \frac{D}{d} \lambda$$

第  $k$  级与第  $k+1$  级明纹中心的间隔为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = (k+1) \frac{D}{d} \lambda - k \frac{D}{d} \lambda = \frac{D\lambda}{d}$$

代入已知数据, 得

$$\lambda = \frac{\Delta x}{D} d = \frac{2.27 \times 10^{-3}}{2.5} \times 0.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 545 \text{ nm}$$

如果所用仪器只能测量相邻两明(暗)纹中心的间隔  $\Delta x \geq 5 \text{ mm}$ , 则此双缝的间距  $d$  应进一步减小, 由  $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda \geq 5 \text{ mm}$  可得

$$d = \frac{D\lambda}{\Delta x} \leq \frac{2.5 \times 545 \times 10^{-9}}{5 \times 10^{-3}} \text{ m} = 0.27 \text{ mm}$$

**12-10.** 在双缝干涉实验中, 两缝相距 1 mm, 屏离缝的距离为 1 m, 若所用光源含有波长 600 nm 和 540 nm 两种光波. 试求:

- (1) 两光波分别形成的条纹间距;
- (2) 两组条纹之间的距离与级数之间的关系;
- (3) 这两组条纹有可能重合吗?

分析：两种光波在双缝干涉实验中形成各自的干涉条纹，它们的中央明纹在  $x=0$  处重合，中央明纹两侧各级明、暗条纹中心的位置因波长不同而互相错开。当短波长的某一级次条纹位置处于长波长低一级次条纹位置内侧时，两组干涉条纹发生重叠。

解：已知  $d=1\text{ mm}$ ,  $D=1\text{ m}$ ,  $\lambda_1=540\text{ nm}$ ,  $\lambda_2=600\text{ nm}$ .

(1) 两光波分别形成的条纹间距  $\Delta x_1$  和  $\Delta x_2$  为

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \frac{D}{d}\lambda_1 = \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \times 540 \times 10^{-9}\text{ m} \\ &= 5.4 \times 10^{-4}\text{ m} = 0.54\text{ mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x_2 &= \frac{D}{d}\lambda_2 = \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \times 600 \times 10^{-9}\text{ m} \\ &= 6.0 \times 10^{-4}\text{ m} = 0.60\text{ mm}\end{aligned}$$

(2) 在两光波各自的干涉条纹中，第  $k$  级明纹中心的位置分别为

$$x_{1k} = k \frac{D}{d}\lambda_1, \quad x_{2k} = k \frac{D}{d}\lambda_2$$

它们的间隔为

$$\Delta x_k = k \frac{D}{d}(\lambda_2 - \lambda_1) = k \frac{D}{d}\Delta\lambda = k \times 6 \times 10^{-5}\text{ m} = 6k \times 10^{-2}\text{ mm}$$

不同波长、相同级数条纹的间隔  $\Delta x_k$  随着干涉级数  $k$  的增大而增大。

(3) 在两组干涉条纹中，当  $\lambda_2$  的  $k$  级和  $\lambda_1$  的  $(k+1)$  级条纹重合时，有

$$(k+1) \frac{D}{d}\lambda_1 = k \frac{D}{d}\lambda_2$$

得

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{540}{600 - 540} = 9$$

从  $\lambda_2=600\text{ nm}$  的  $k=9$  级开始，都将有  $x_{1(k+2)} < x_{2(k+1)}$ ，即两组条纹重合。

**12-11.** 用很薄的云母片( $n=1.58$ )覆盖在双缝实验中的一条缝上，这时屏幕上的零级明条纹移到原来的第七级明条纹的位置上，如果入射光波长为  $550\text{ nm}$ ，试问此云母片的厚度为多少？（假设光通过云母片时不考虑折射引起的光线偏折。）

分析：在一条缝上覆盖云母片后，由于两条缝光线在屏幕上  $O$  点的光程差发生了变化，因此  $O$  点处不再是零级明条纹。据题意可知，屏幕上干涉条纹整体平移的距离为七个条纹间隔。

解：如解图 12-11 所示，覆盖云母片前， $O$  点处是零级明纹位置，有

$$r_2 - r_1 = 0$$

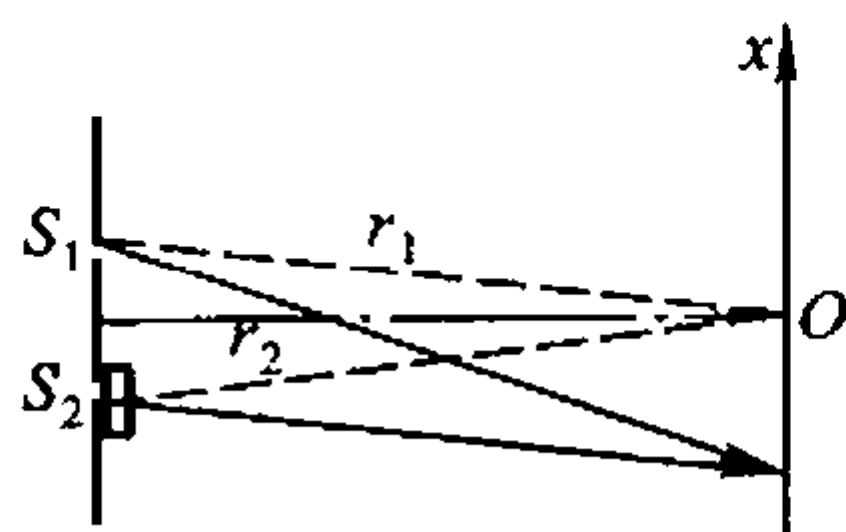
由于云母片很薄，忽略光线在其中的偏折，设其厚度为  $e$ 。覆盖云母片后，零

级明纹下移,  $O$  点处成为第七级明纹位置, 有

$$r_2' - r_1 = 7\lambda$$

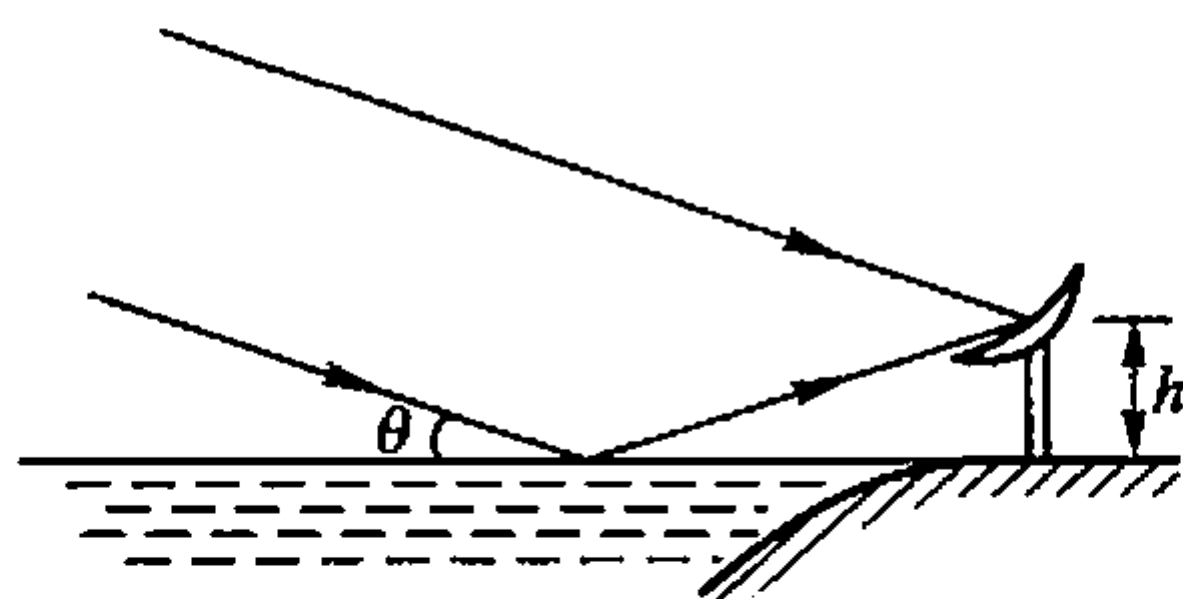
$$\text{即 } [(r_2 - e) + ne] - r_1 = (r_2 - r_1) + (n - 1)e = (n - 1)e = 7\lambda$$

$$\text{所以 } e = \frac{7\lambda}{n - 1} = 6.64 \times 10^{-3} \text{ mm}$$



解图 12-11

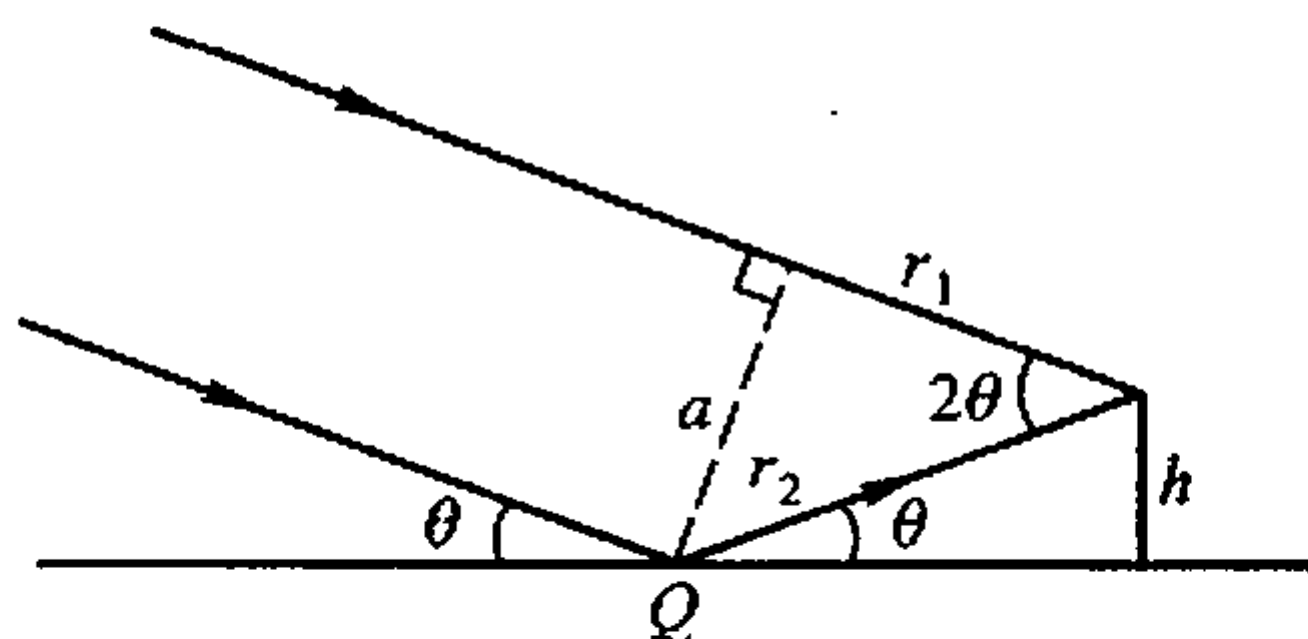
**12-12.** 一射电望远镜的天线设在湖岸上, 距湖面高度为  $h$ , 对岸地平线上方有一恒星刚在升起, 恒星发出波长为  $\lambda$  的电磁波. 试求当天线测得第一级干涉极大时恒星所在的角位置  $\theta$  (提示: 作为劳埃德镜干涉分析).



习题 12-12 图

**分析:** 天线接收到的电磁波一部分直接来自恒星, 另一部分来自经湖面的反射波. 由于恒星位于对岸地平线上方, 入射于湖面的掠射角  $\theta$  很小, 反射时将发生“半波损失”. 这两部分电磁波是相干波, 在接收天线处的波程差随  $\theta$  而变. 在恒星升起的过程中, 射电望远镜所接收到的电磁波由于干涉, 其强度时而加强, 时而减弱.

**解:** 来自远方恒星的电磁波可视为平面波. 如解图 12-12 所示, 反射波在  $Q$  点反射时有“半波损失”.  $h$  处的天线测得第一级干涉极大时, 有



解图 12-12

$$\delta = r_2 - r_1 + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

根据图示的几何关系, 可有

$$r_1 = r_2 \cos 2\theta$$

$$h = r_2 \sin \theta$$

所以

$$\delta = r_2 (1 - \cos 2\theta) + \frac{\lambda}{2} = 2h \sin \theta + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

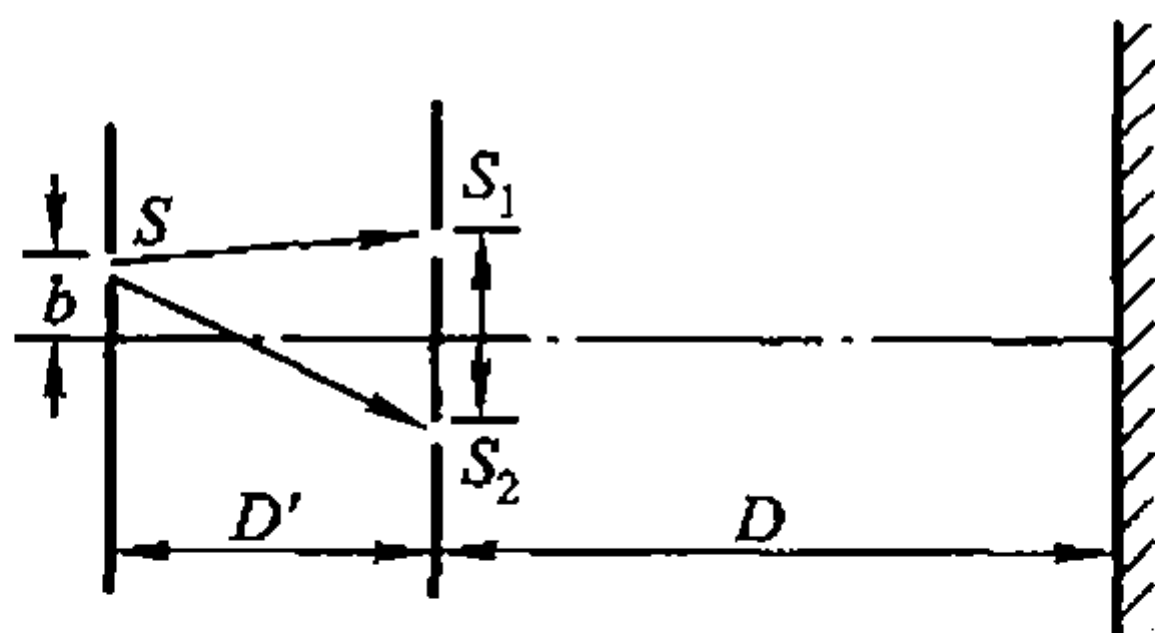
由于

$$\sin \theta \approx \theta$$

所以,解得

$$\theta = \frac{\lambda}{4h}$$

\*12-13. 在杨氏双缝实验中,如缝光源与双缝之间的距离为  $D'$ , 缝光源离双缝对称轴的距离为  $b$ , 如图所示 ( $D' \gg d, b$ ). 求在这种情况下明纹的位置. 试比较这时的干涉图样和缝光源在对称轴时的干涉图样.

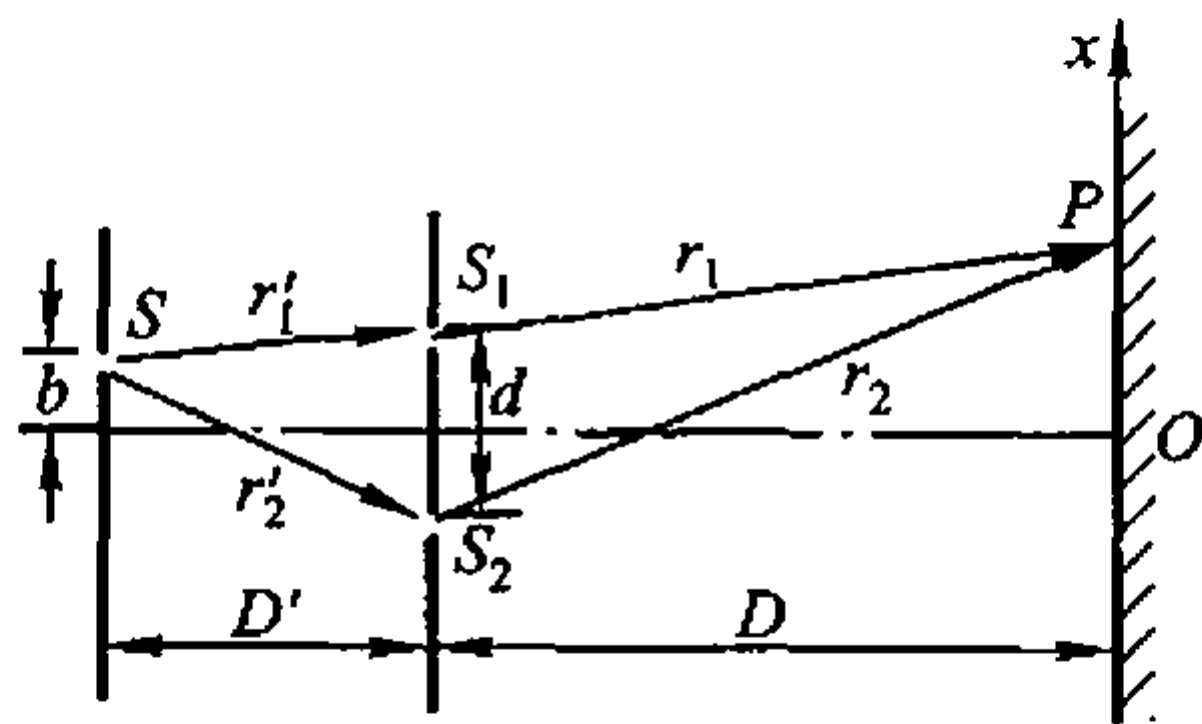


习题 12-13 图

分析: 当缝光源  $S$  偏离双缝的  $S_1$  和  $S_2$  对称轴为  $b$  时, 光程差  $\delta' = SS_2 - SS_1$ , 与  $S$  在双缝对称轴上时的干涉图样相比较, 屏上光程差为零的中央明条纹将偏离对称轴, 整个干涉图样有一与  $b$  和  $D'$  相关的平移量.

在图示杨氏双缝实验装置中, 中央明条纹位于双缝对称轴的下方.

若  $\delta'$  大于光波的相干长度, 将不出现干涉现象.



解图 12-13

解: 如解图 12-13 所示, 设入射光波长为  $\lambda$ , 缝光源  $S$  在  $b$  处时, 屏上  $P$  处为第  $k$  级明纹中心, 光程差为

$$\delta = \delta_0 + \delta' = k\lambda$$

式中  $\delta' = r_2' - r_1'$  是  $S$  到  $S_1$  和  $S_2$  的光程差,  $\delta_0 = r_2 - r_1$  是  $S_1$  和  $S_2$  到  $P$  的光程差.

根据题意 ( $D' \gg d, b$ ), 有

$$\delta' = r'_2 - r'_1 \approx \frac{b}{D'}$$

杨氏双缝实验装置满足条件  $D \gg d$ , 有

$$\delta_0 = r_2 - r_1 \approx \frac{x_P}{D}$$

所以, 对第  $k$  级明纹中心, 有

$$\delta = \delta_0 + \delta' \approx \frac{x_P}{D} + \frac{b}{D'} = k\lambda$$

$k=0$  时,  $P$  为中央明条纹中心, 可得

$$x_P = -\frac{D}{D'}b$$

所以, 相对缝光源  $S$  在  $b=0$  处时的情况, 干涉图样将向  $x$  轴负方向平移  $\frac{D}{D'}b$ .

### 3. 薄膜干涉条纹的计算

**12-14.** 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上, 油膜覆盖在玻璃板上, 所用单色光的波长可以连续变化, 观察到 500 nm 与 700 nm 这两个波长的光在反射中消失. 油的折射率为 1.30, 玻璃的折射率为 1.50, 试求油膜的厚度.

**分析:** 油膜覆盖在玻璃板上, 因此, 在油膜上表面和下表面反射的光波都发生  $\pi$  的相位突变. 所以, 在反射光的光程差中, 没有附加的光程差项  $\frac{\lambda}{2}$ .

**解:** 设薄油膜的厚度为  $e$ ,  $\lambda_1 = 500$  nm,  $\lambda_2 = 700$  nm. 已知空气的折射率为  $n_1 = 1.00$ , 油膜和玻璃的折射率分别为  $n_2 = 1.30$  和  $n_3 = 1.50$ , 有  $n_1 < n_2 < n_3$ .

反射光干涉极小时的光程差满足条件

$$2en_2 = (2k_1 + 1)\frac{\lambda_1}{2} = (2k_2 + 1)\frac{\lambda_2}{2}$$

由于  $\lambda_1 < \lambda_2$ , 并且, 在这两波长之间未出现其他波长光波的干涉极小, 应有

$$k_2 = k_1 - 1$$

即有

$$(2k_1 + 1)\frac{\lambda_1}{2} = (2k_1 - 1)\frac{\lambda_2}{2}$$

可得

$$k_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = 3$$

所以

$$e = \frac{(2k_1 + 1)\lambda_1}{4n_2} = \frac{(2 \times 3 + 1) \times 500}{4 \times 1.30} \text{ nm} = 673 \text{ nm}$$

**12-15.** 白光垂直照射在空气中厚度为  $0.40\text{ }\mu\text{m}$  的玻璃片上, 玻璃的折射率为 1.50. 试问在可见光范围内 ( $\lambda = 400 \sim 700\text{ nm}$ ), 哪些波长的光在反射中增强? 哪些波长的光在透射中增强?

**分析:** 玻璃的折射率大于空气的折射率, 因此, 在玻璃片上表面的反射光在反射时有  $\pi$  的相位突变, 而在下表面的反射光没有. 所以, 在反射光的光程差中应考虑附加的光程差项  $\frac{\lambda}{2}$ . 由光能守恒可知, 透射光的干涉现象与反射光的互补, 在反射中干涉减弱的光波, 在透射中加强.

**解:** 设波长为  $\lambda$  的光波在玻璃片的上、下表面反射加强, 有

$$2en + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

得

$$\lambda = \frac{4ne}{2k-1}$$

在可见光范围内, 反射加强的光波波长对应  $k = 3$  (其他值均在可见光范围外). 所以,

$$\lambda = \frac{4 \times 1.50 \times 0.40 \times 10^3}{2 \times 3 - 1} \text{ nm} = 480 \text{ nm}$$

在玻璃片的上、下表面反射减弱 (即透射加强) 的光波满足条件

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

即

$$\lambda = \frac{2ne}{k}$$

在可见光范围内, 透射加强的光波波长为

$$k = 2 \text{ 时, } \lambda_1 = \frac{2ne}{2} = 600 \text{ nm}$$

$$k = 3 \text{ 时, } \lambda_2 = \frac{2ne}{3} = 400 \text{ nm}$$

**12-16.** 白光垂直照射到空气中一厚度为  $380\text{ nm}$  的肥皂水膜上. 试问水膜表面呈现什么颜色? (肥皂水的折射率看作 1.33.)

**分析:** 肥皂水膜置于空气中, 其折射率大于空气的折射率, 因此, 在反射光的光程差中应考虑附加的光程差项  $\frac{\lambda}{2}$ . 水膜表面呈现的颜色与反射加强光波的波长相对应.

**解:** 设波长为  $\lambda$  的光波在肥皂水膜的上、下表面反射加强, 有

$$2en + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

得

$$\lambda = \frac{4ne}{2k-1}$$

在可见光范围内,反射加强的光波波长分别对应  $k=2$  和  $k=3$ , 为

$$\lambda_1 = 674 \text{ nm} \quad (k=2) \text{ 红色}$$

$$\lambda_2 = 404 \text{ nm} \quad (k=3) \text{ 紫色}$$

水膜表面呈现紫红色.

**12-17.** 在棱镜( $n_1 = 1.52$ )表面镀一层增透膜( $n_2 = 1.30$ ). 如使此增透膜适用于  $550.0 \text{ nm}$  波长的光,膜的厚度应取何值?

**分析:** “增透膜”使给定波长的透射光波通过干涉得到加强,在反射光中该光波一定是干涉相消的. 由于增透膜的上方介质  $n_0$  是空气,下方介质  $n_1$  是玻璃,有  $n_1 > n_2 > n_0$ ,因此在增透膜上、下表面的反射光波在反射时均有  $\pi$  的相位突变. 所以,在反射光的光程差中不存在附加的光程差项  $\frac{\lambda}{2}$ ,而在透射光的光程差中则需考虑附加该项,这是光波在膜的下表面向膜内反射时发生  $\pi$  的相位突变而产生的.

**解 1.** 透射光干涉加强. 光程差为

$$\delta = 2en_2 + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k=1,2,3,\dots)$$

得

$$e = (2k-1) \frac{\lambda}{4n_2}$$

$k=1$  时为最小膜厚  $e_1 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{550}{4 \times 1.30} \text{ nm} = 105.8 \text{ nm}$

$k=2,3,\dots$  时,膜的厚度为最小膜厚的奇数倍,即  $e = (2k-1)e_1$  时,仍可对  $550.0 \text{ nm}$  波长的光透射加强.

**解 2.** 反射光干涉减弱. 光程差为

$$\delta = 2en_2 = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k=0,1,2,3,\dots)$$

即

$$e = (2k+1) \frac{\lambda}{4n_2}$$

$k=0$  时为最小膜厚  $e_1 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{550}{4 \times 1.30} \text{ nm} = 105.8 \text{ nm}$

**12-18.** 彩色电视发射机常用三基色的分光系统,如图所示,系用镀膜方法进行分色,现要求红光的波长为  $650 \text{ nm}$ ,绿光的波长为  $520 \text{ nm}$ . 设基片玻璃的折射率  $n = 1.50$ ,膜材料折射率  $n' = 2.12$ . 试求膜的厚度.

分析：由题图可知，白光以  $45^\circ$  角入射于薄膜，利用两薄膜的“增反”干涉，分别使三基色中的红光和绿光反射加强，从而实现“分光”作用。因  $n' > n$ ，在膜的上表面反射的光波在反射时有  $\pi$  的相位突变，而在下表面反射的光波则没有  $\pi$  相位突变。所以，在反射光的光程差中需附加光程差项  $\frac{\lambda}{2}$ 。

解：设入射角为  $i$ ，膜的厚度为  $e$ ，反射光干涉加强的光程差为

$$\delta = 2e \sqrt{n'^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

得 
$$e = \frac{(2k-1)\lambda}{4 \sqrt{n'^2 - \sin^2 i}} = \frac{(2k-1)\lambda}{4 \sqrt{2.12^2 - 0.5}} = \frac{(2k-1)\lambda}{8}$$

$k=1$  时对应膜的最小厚度  $e_1$ ，
$$e_1 = \frac{\lambda}{8}$$

使红光  $\lambda_R = 650 \text{ nm}$  反射加强的最小膜厚  $e_{1R}$  为

$$e_{1R} = \frac{\lambda_R}{8} = \frac{650}{8} \text{ nm} \approx 81.25 \text{ nm}$$

使绿光  $\lambda_G = 520 \text{ nm}$  反射加强的最小膜厚  $e_{1G}$  为

$$e_{1G} = \frac{\lambda_G}{8} = \frac{520}{8} \text{ nm} = 65 \text{ nm}$$

由于干涉互补，利用透射光的干涉减弱，同样可解。

**12-19.** 利用劈尖的等厚干涉条纹可以测量很小的角度。今在很薄的劈尖玻璃板上，垂直地射入波长为  $589.3 \text{ nm}$  的钠光，相邻暗条纹间距离为  $5.0 \text{ mm}$ ，玻璃的折射率  $1.52$ ，求此劈尖的夹角。

分析：单色平行光垂直入射于劈尖薄膜时，在薄膜的上、下表面反射或透射的相干光波，在薄膜表面附近形成等厚的干涉条纹。

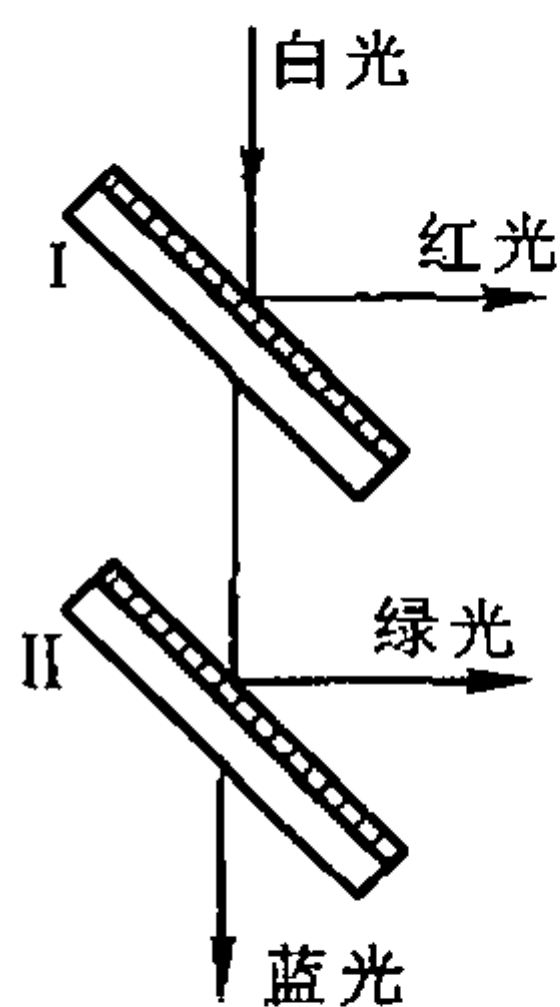
劈尖玻璃板的两界面是平面，其等厚干涉条纹平行于棱边，呈现明暗相间、等间隔分布的特点。相邻明条纹或相邻暗条纹的间隔决定于劈尖角，厚度差为劈尖膜介质内的半波长。

解：设劈尖角为  $\theta$ ，相邻暗条纹的间距为  $l$ ，厚度差为  $\Delta e$ 。

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2n}$$

由相邻条纹的间距和劈尖角的几何关系，可有

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{\Delta e}{l} = \frac{\lambda}{2nl}$$



习题 12-18 图

得劈尖角为

$$\theta = \frac{589.3 \times 10^{-9}}{2 \times 1.52 \times 5.0 \times 10^{-3}} \text{ rad} = 3.88 \times 10^{-5} \text{ rad} = 8''$$

**12-20.** 制造半导体元件时,常需要精确地测定硅片上的二氧化硅( $\text{SiO}_2$ )薄膜的厚度,这时可把二氧化硅薄膜的一部分腐蚀掉,使它成为劈尖,利用等厚干涉条纹测出其厚度. 已知的 Si 的折射率为 3.42,  $\text{SiO}_2$  的折射率为 1.5. 用氦氛激光( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ )垂直照射,在反射光中观察到在腐蚀区域内有 8 条暗纹,求  $\text{SiO}_2$  薄膜的厚度.

**分析:** 如解图 12-20 所示,二氧化硅( $n_2$ )劈尖膜的上方介质( $n_1$ )是空气,下方介质( $n_3$ )是硅,有  $n_1 < n_2 < n_3$ ,在劈尖膜的上、下表面反射的光波在反射时都有  $\pi$  相位突变,在它们的光程差中无附加光程差项  $\frac{\lambda}{2}$ . 所以,二氧化硅劈尖膜的棱边是亮纹. 由于在腐蚀区域内有 8 条暗纹,所以在  $\text{SiO}_2$  薄膜的均匀厚度区域、劈尖膜的最高处应为一亮区.

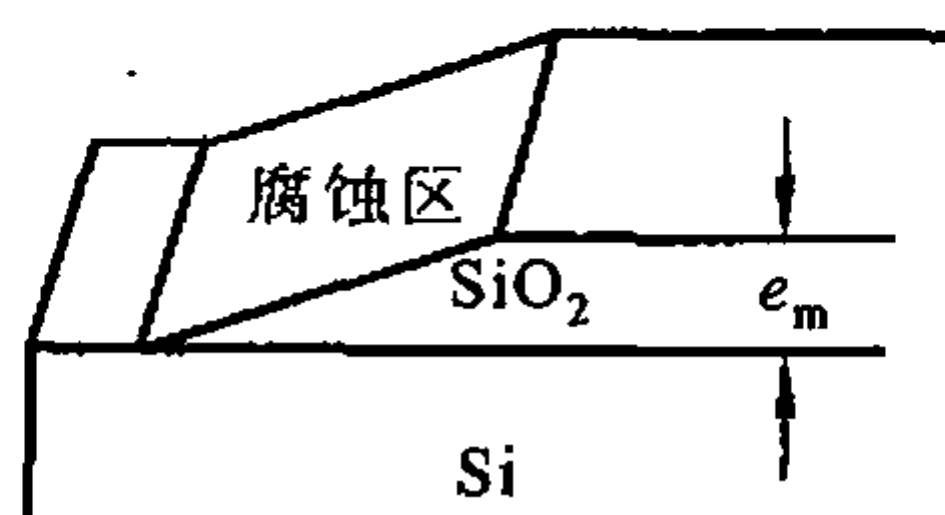
**解:** 设反射光中第  $k$  级亮条纹对应的膜厚为  $e$ , 其光程差为

$$2n_2e = k\lambda \quad (k=0,1,2,3,\dots,8)$$

$k=8$  与  $\text{SiO}_2$  薄膜的均匀膜厚  $e_m$  相对应. 所以,从劈尖膜棱边的明条纹到最高处的亮区范围内可有 8 条暗纹.

由上式可得  $\text{SiO}_2$  薄膜的厚度为

$$e_m = \frac{8\lambda}{2n_2} = \frac{8 \times 632.8 \times 10^{-9}}{2 \times 1.5} \text{ m} = 1.69 \times 10^{-6} \text{ m} = 1.69 \mu\text{m}$$



解图 12-20

**12-21.** 使用单色光来观察牛顿环,测得某一明环的直径为 3.00 mm,在它外面第五个明环的直径为 4.60 mm,所用平凸透镜的曲率半径为 1.03 m,求此单色光的波长.

**分析:** 单色平行光垂直入射于牛顿环实验装置时,在空气层上、下表面反射或透射的相干光波,相干形成明暗相间、内疏外密、呈同心圆分布的干涉条纹. 条纹的级次为内低外高. 反射光的明、暗条纹与透射光的互补.

**解:** 设单色光的波长为  $\lambda$ , 平凸透镜的曲率半径为  $R$ , 反射光中第  $k$  级明环半径为  $r_k$ , 有

$$r_k^2 = \frac{2k-1}{2} R\lambda$$

第  $k+5$  级明环半径为  $r_{k+5}^2 = \frac{2(k+5)-1}{2} R \lambda$

即有  $r_{k+5}^2 - r_k^2 = 5R\lambda$

所以,得  $\lambda = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5R} = \frac{2.30^2 - 1.50^2}{5 \times 1.03 \times 10^3} \text{ mm} = 5.90 \times 10^{-4} \text{ mm} = 590 \text{ nm}$

**12-22.** 一柱面平凹透镜 A, 曲率半径为  $R$ , 放在平玻璃片 B 上, 如图所示. 现用波长为  $\lambda$  的单色平行光自上方垂直地往下照射, 观察 A 和 B 间空气薄膜的反射光的干涉条纹, 如空气薄膜的最大厚度  $d = 2\lambda$ .

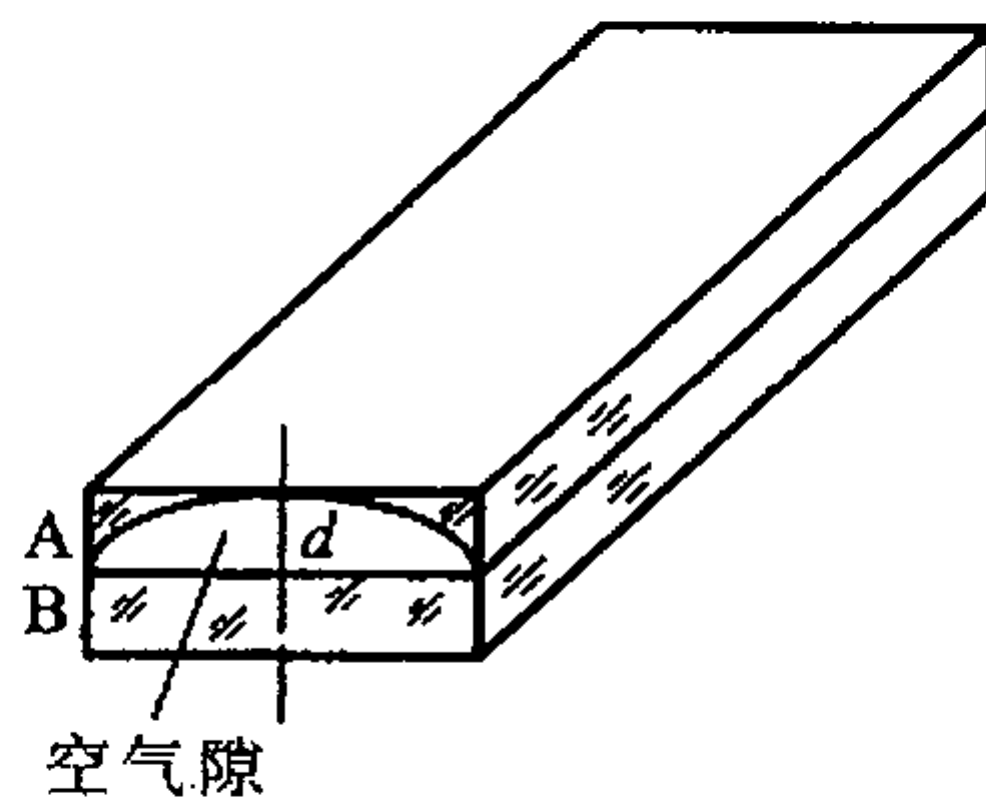
(1) 分析干涉条纹的特点(形状、分布、级次高低), 作图表示明条纹;

(2) 求明条纹距中心线的距离  $r$ ;

(3) 共能看到多少明条纹;

(4) 若将玻璃片 B 向下平移, 条纹如何移动?

若将玻璃片移动了  $\frac{\lambda}{4}$ , 问这时还能看到几条明条纹?



习题 12-22 图

**分析:** 在空气层上、下表面反射的相干光波, 在空气层厚度相同处的光程差相同, 因此形成的等厚干涉条纹平行于柱面轴线, 呈现明暗相间、内疏外密的分布. 由于光程差中含有“半波损失”项, 因此, 在柱面透镜的两棱边和空气层最高处是暗条纹. 条纹的级次为内高外低.

**解:** 在空气层厚度为  $e$  处, 从上、下表面反射光的光程差为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

(1) 暗条纹满足条件:

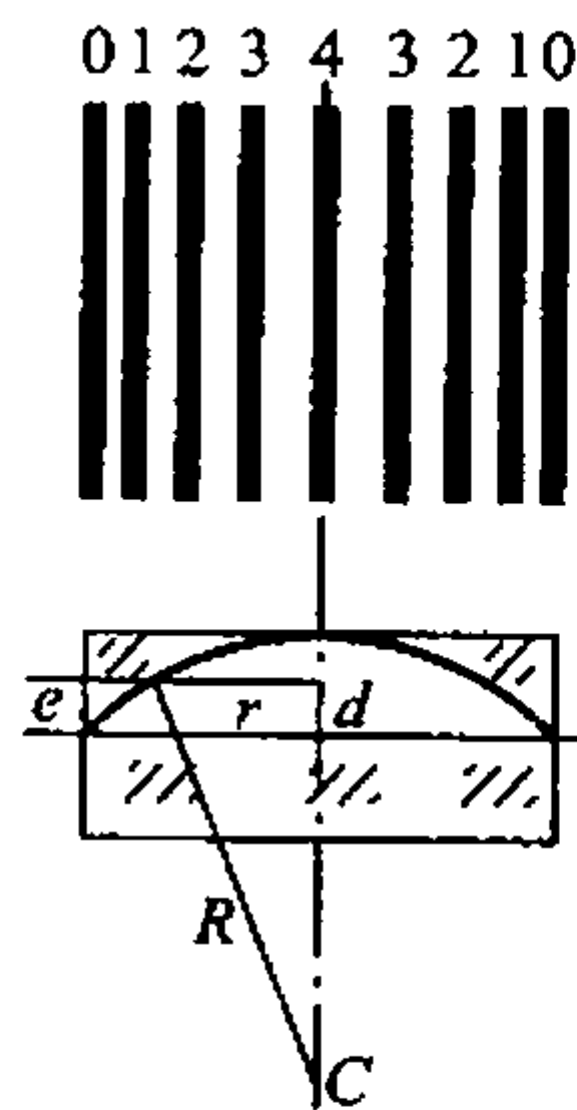
$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

在柱面透镜的两棱边处  $e=0$ , 为  $k=0$  的暗条纹, 在空气层的最高处  $e=d=2\lambda$ , 为  $k=4$  的暗条纹. 所以, 暗条纹级次的取值为  $k=0, 1, 2, 3, 4$ .

在  $k=4$  的中央暗条纹两侧, 对称分布有包括棱边各 4 条暗纹, 共出现 9 条暗纹, 级次呈内高外低分布.

明条纹满足条件:  $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

相邻两暗条纹之间为明条纹, 根据暗条纹的分布可知, 共可出现 8 条明纹, 它们的级次为  $k=1, 2, 3, 4$ .



解图 12-22

相邻两明条纹或相邻两暗条纹的厚度差为空气中的半波长,据此可知,干涉条纹的分布是中间疏而两侧密.

干涉条纹的分布情况见解图 12-22 上部,图中实线表示暗条纹,相邻两暗条纹之间为明条纹.

(2) 如解图 12-22 所示,设中心线到一侧第  $k$  级明纹的距离为  $r$ ,根据图示几何关系,有

$$r^2 = R^2 - [R - (d - e)]^2$$

由于  $d \ll R, e \ll R$ ,可得  $r^2 \approx 2R(d - e)$

将上式代入明条纹满足条件,得

$$r = \sqrt{2Rd - (2k - 1)R \frac{\lambda}{2}}$$

(3) 在中央暗条纹两侧,对称分布有各 4 条明纹,共可出现 8 条明纹.

(4) 若将 B 下移,则第  $k$  级条纹所对应的膜厚  $e_k$  将随之外移. 所以,干涉条纹将向两侧移动,同时中心线的光强也逐渐由暗转为明,即由原来的暗条纹逐渐变为明条纹.

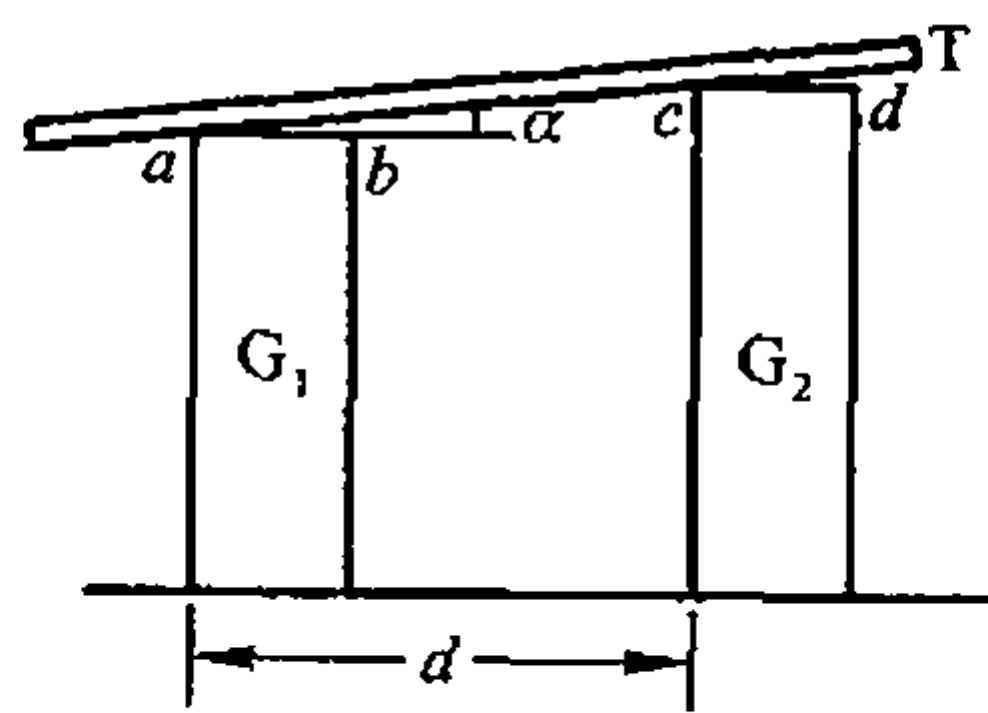
B 下移  $\frac{\lambda}{4}$  时,反射光的光程差增加  $\frac{\lambda}{2}$ ,所以,中心线变为第 5 级明条纹,而透镜两边缘处空气膜的厚度为  $e = \frac{\lambda}{4}$ ,成为第 1 级明纹. 这时,视场中出现 9 条明纹,8 条暗纹.

**12-23.** 如图所示,  $G_1$  和  $G_2$  是两块块规(块规是两个端面经过磨平抛光,达到相互平行的钢质长方体),  $G_1$  的长度是标准的,  $G_2$  是同规格待校准的复制品(两者长度差在图中是夸大的).  $G_1$  和  $G_2$  放置在平台上,用一块样板平玻璃 T 压住.

(1) 设垂直入射光的波长  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ ,  $G_1$  与  $G_2$  相隔  $d = 5 \text{ cm}$ , T 与  $G_1$  以及 T 与  $G_2$  间的干涉条纹的间隔都是  $0.5 \text{ mm}$ . 试求  $G_1$  与  $G_2$  的长度差.

(2) 如何判断  $G_1$ 、 $G_2$  哪一块比较长一些?

(3) 如果 T 与  $G_1$  间的干涉条纹的间距是  $0.5 \text{ mm}$ , 而 T 与  $G_2$  间的干涉条纹的间距是  $0.3 \text{ mm}$ ,则说明了什么问题?



习题 12-23 图

**分析:** 利用空气劈尖的干涉原理和条纹分布特征来鉴定待测块规.

**解:** (1) T 与两块规间都出现干涉条纹,说明两块规的长度不相等,与平板玻璃之间形成了空气劈尖,产生等厚干涉条纹;干涉条纹间隔相等,说明两空气

劈尖的夹角  $\alpha$  相同, 两块规的端面是平行平面.

设块规  $G_1$  的长度为  $h_1$ , 块规  $G_2$  的长度为  $h_2$ , 由图示几何关系, 考虑到  $\alpha$  很小, 有  $\tan\alpha \approx \sin\alpha$ , 可得两块规端面的长度差为

$$\Delta h = h_2 - h_1 = d \sin\alpha$$

由于在空气劈尖的干涉条纹中, 相邻两明条纹或相邻两暗条纹所对应的空气膜的厚度差  $\Delta e$ , 等于空气中的半波长. 设相邻两明或两暗条纹的间距为  $l$ , 可有

$$\Delta e = l \sin\alpha = \frac{\lambda}{2}$$

所以, 两块规端面的长度差为

$$\Delta h = \frac{d\lambda}{2l} = \frac{5 \times 10^{-2} \times 589.3 \times 10^{-9}}{2 \times 0.5 \times 10^{-3}} \text{ m} = 2.95 \times 10^{-5} \text{ m}$$

(2) 在反射光中, 空气劈的棱边处是暗条纹. 当暗条纹出现在  $a$ 、 $c$  两处时, 块规的长度  $h_2 > h_1$ ; 当暗条纹出现在  $b$ 、 $d$  两处时, 块规的长度  $h_2 < h_1$ .

(3) 设  $T$  与  $G_1$  间干涉条纹的间距为  $l_1$ , 空气劈尖的夹角为  $\alpha_1$ ,  $T$  与  $G_2$  间干涉条纹的间距为  $l_2$ , 空气劈尖的夹角为  $\alpha_2$ , 应有

$$\Delta e = l_1 \sin\alpha_1 = l_2 \sin\alpha_2 = \frac{\lambda}{2}$$

$l_1 > l_2$  时, 有  $\alpha_1 < \alpha_2$ . 说明  $G_2$  的  $cd$  端面与底面不平行,  $d$  端低于  $c$  端.

**\* 12-24.** 一实验装置如图所示, 一块平板玻璃片上放一油滴. 当油滴展开成油膜时, 在单色光(波长  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ) 垂直照射下, 从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹(用读数显微镜观察), 已知玻璃的折射率  $n_1 = 1.50$ , 油膜的折射率  $n_2 = 1.20$ .

(1) 当油膜中心最高点与玻璃片的上表面相距  $h = 1.2 \text{ } \mu\text{m}$  时, 描述所看到的条纹情况. 可以看到几条明条纹, 明条纹所在处的油膜的厚度是多少? 中心点的明暗如何?

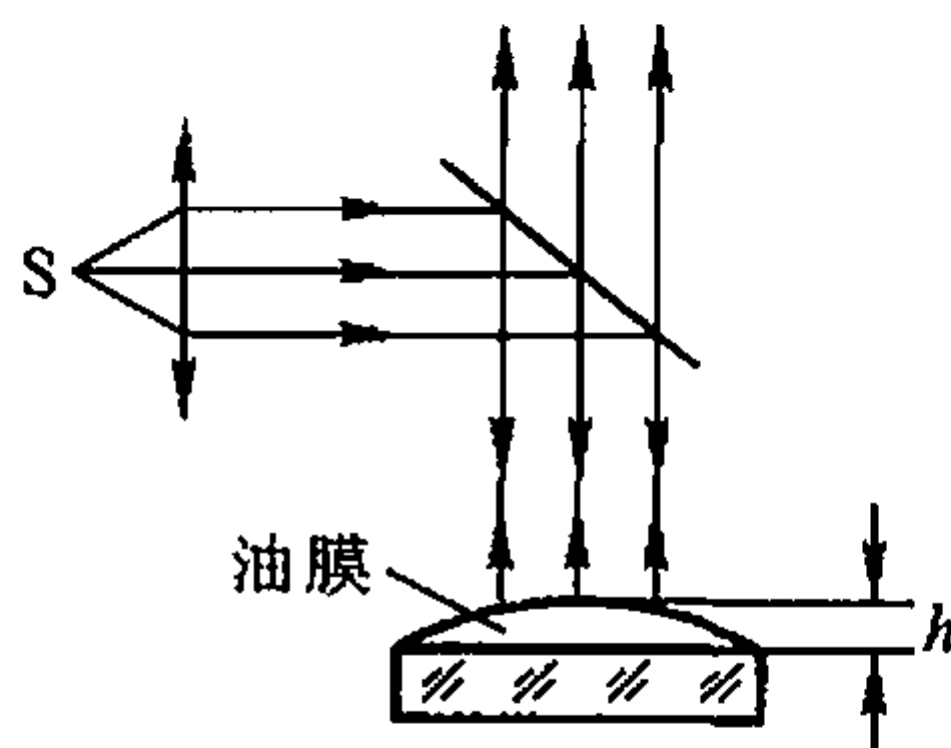
(2) 当油膜继续摊展时所看到条纹情况将如何变化? 中心点的情况如何变化?

**分析:** 从油膜的上、下界面反射的光波因相干形成等厚条纹. 空气、油膜、玻璃的折射率依次增大, 因此, 在油膜两界面的反射光波在反射时都有  $\pi$  相位突变, 所以, 在油膜边缘处出现明条纹.

**解:** (1) 在反射光中, 干涉明条纹所满足的光程差为

$$\delta = 2n_2 h = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

式中  $h$  为第  $k$  级干涉明条纹所对应油膜的厚度, 可表示为



习题 12-24 图

$$h_k = k \frac{\lambda}{2n_2} = k \times \frac{0.6}{2 \times 1.2} \mu\text{m} = 0.25k \mu\text{m}$$

即相邻两明条纹之间,油膜厚度的增量是  $0.25 \mu\text{m}$ ,明条纹与相邻暗条纹间油膜的厚度差是  $0.125 \mu\text{m}$ . 由上式可以得到各级次的明条纹和它们所对应的油膜厚度分别为:

$k=0$  时,  $h_0=0$ ,这是油膜边缘的零级明条纹;

$k=1$  时,  $h_1=0.25 \mu\text{m}$ ,为第 1 级明条纹中心;

$k=2$  时,  $h_2=0.50 \mu\text{m}$ ,为第 2 级明条纹中心;

$k=3$  时,  $h_3=0.75 \mu\text{m}$ ,为第 3 级明条纹中心;

$k=4$  时,  $h_4=1.00 \mu\text{m}$ ,为第 4 级明条纹中心.

共有 5 个明条纹.

在反射光中,干涉暗条纹所满足的光程差为

$$\delta = 2n_2h = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

暗条纹分布在相邻两明条纹之间,从油膜外缘向内,依次可见的暗纹级次为  $k=0,1,2,3,4$ ,也有 5 个暗条纹. 第 4 级明条纹内侧是第 4 级暗条纹,其对应油膜的厚度为  $1.125 \mu\text{m}$ .

油膜中心最高点的厚度为  $h_m=1.2 \mu\text{m}$ ,与第 4 级暗纹中心的膜厚  $1.125 \mu\text{m}$  相比较,更接近第 5 级明条纹中心的膜厚  $1.25 \mu\text{m}$ . 所以,油膜中心最高点介于明、暗之间,偏向于明.

(2) 随着油膜的摊展,中心点的膜厚不断减小,将由半明半暗状态向暗、明、暗、明状态交替变化. 其他明、暗条纹则因其对应的膜厚向中心移动而向内收缩,始终为亮的边缘明条纹则向外扩展,相邻条纹的间隔变大,视场内呈现的条纹数不断减少,直至膜厚趋于零,过渡为玻璃上的增反膜.

**12-25.** 迈克耳孙干涉仪可以用来测量光谱中非常接近的两谱线的波长差. 其方法是先将干涉仪调整到零光程差,再换上被测光源,这时在视场中出现被测光的清晰的干涉条纹,然后沿一个方向移动  $M_2$ ,将会观察到视场中干涉条纹逐渐变得模糊以至消失. 如再继续向同一个方向移动  $M_2$ ,干涉条纹又会逐渐清晰起来. 设两次出现最清晰条纹期间, $M_2$  移过的距离为  $0.289 \text{ mm}$ ,已知钠黄光的波长大约是  $589 \text{ nm}$ . 试计算两谱线的波长差  $\Delta\lambda$ .

**分析:** 以等厚干涉测量为例进行分析. 如解图 12-25 所示,将干涉仪调整到图(a)状态时,视场中心  $O$  点处的光程差为零. 这是个零级明条纹,两侧分布有平行等间隔的明、暗等厚干涉条纹,条纹间隔正比于波长. 换上被测光源后,由于含有两种波长非常接近的光波,因此视场中出现两套干涉条纹,它们的零级

明条纹在  $O$  处重叠,其他相同级次的明条纹间稍有错位,整个视场中可呈现清晰的明和暗的光强分布. 移动  $M_2$  时,两套条纹均将向左平移,如图(b)和图(c)所示,同一级次的两明条纹的间隔也将随之增大. 在  $M_2$  连续移动的过程中,当长波长光波的一个明条纹和短波长光波的一个暗条纹重叠于  $O$  点处时,视场将变得模糊,当短波长的明条纹比长波长的多移动 1 条时,  $O$  点处又为两个明条纹所重叠,视场又由模糊变得清晰.

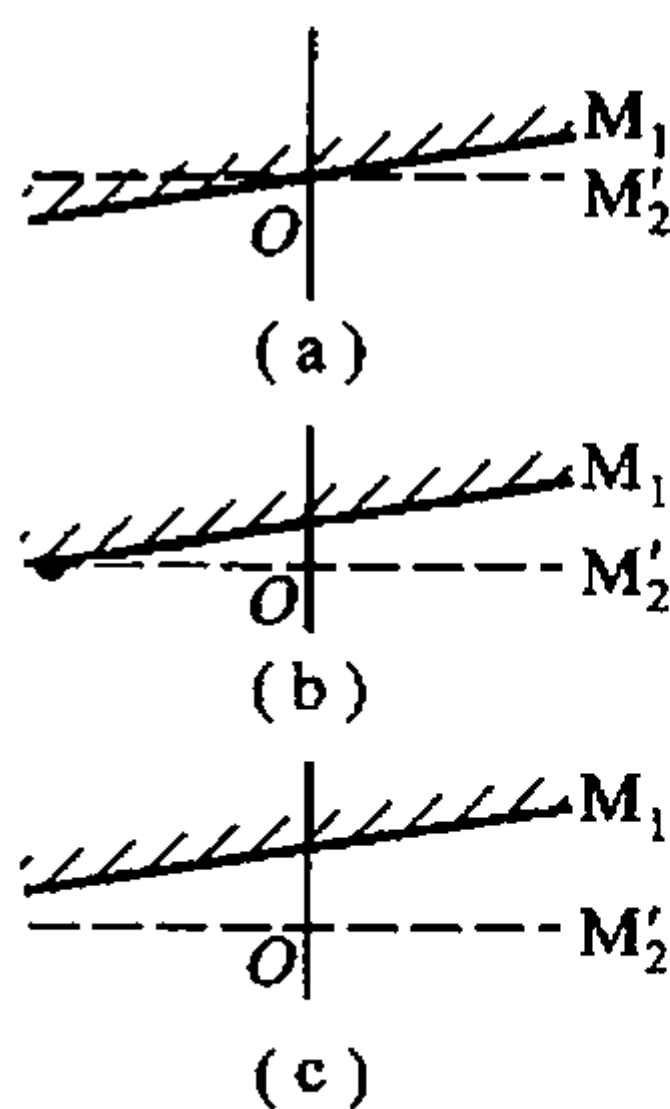
当然,当两个零级明条纹重叠于  $O$  点处时,整个视场是最清晰的. 随着  $M_2$  的移动,这个区域被移出了视场. 以后虽也可周期性地出现  $O$  点处两个明条纹重叠的情况,但视场中明、暗光强的清晰程度将下降. 当  $M_2$  沿一个方向进一步移动,使光程差大于光的波列长度时,干涉现象消失,整个视场为均匀亮度.

解: 设  $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$ , 未知波长为  $\lambda_2$ , 并设  $\lambda_2 > \lambda_1$ . 据题意,在视场中先后两次出现“清晰”的过程中,  $M_2$  移动的距离为  $d$ , 设此时在  $O$  点处重叠的两个明条纹为  $\lambda_1$  的第  $(k+1)$  级和  $\lambda_2$  的第  $k$  级,有

$$\delta = 2d = (k+1)\lambda_1 = k\lambda_2$$

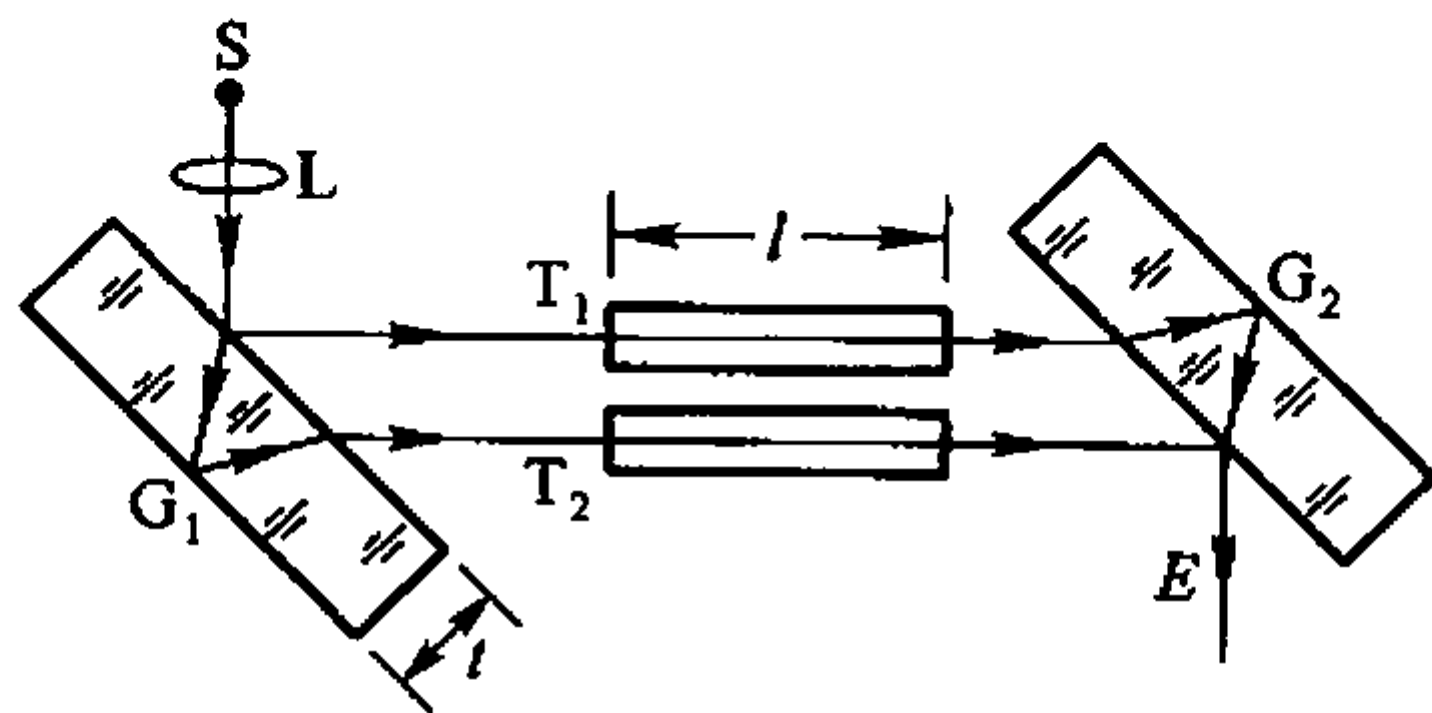
可解得 
$$\lambda_2 = \frac{2d\lambda_1}{2d - \lambda_1} = \frac{2 \times 0.289 \times 10^{-3} \times 589 \times 10^{-9}}{2 \times 0.289 \times 10^{-3} - 589 \times 10^{-9}} \text{ m} = 589.6 \text{ nm}$$

两谱线的波长差  $\Delta\lambda$  为 
$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.6 \text{ nm}$$



解图 12-25

**12-26.** 常用雅敏干涉仪来测定气体在各种温度和压力下的折射率,干涉仪的光路如图,  $S$  为光源,  $L$  为聚光透镜,  $G_1$ 、 $G_2$  为两块等厚而且互相平行的玻璃板,  $T_1$ 、 $T_2$  为等长的两个玻璃管, 长度为  $l$ . 进行测量时. 先将  $T_1$ 、 $T_2$  抽空, 然后将待测气体徐徐导入一管中, 在  $E$  处观察干涉条纹的变化, 即可求出待测气体的折射率, 例如某次测量某种气体时, 将气体徐徐放入  $T_2$  管中, 气体达到标准状态时, 在  $E$  处共看到有 98 条干涉条纹移动, 所用的黄光波长为  $589.3 \text{ nm}$  (真空中),  $l = 20 \text{ cm}$ , 求该气体在标准状态下的折射率.



习题 12-26 图

分析：干涉仪的光路对称分布，当两管内同为真空时，在  $E$  处的光程差为零。当待测气体导入一管时， $E$  处光程差发生变化，导致干涉条纹移动。

解：设导入气体的折射率为  $n$ ，气体导入一管并处于平衡状态后， $E$  处的光程差为

$$\delta = nl - l = 98\lambda$$

可得气体的折射率为

$$n = 1 + \frac{98\lambda}{l} = 1.00029$$

#### 4. 单缝衍射和光栅衍射

12-27. 有一单缝，宽  $a = 0.10 \text{ mm}$ ，在缝后放一焦距为  $50 \text{ cm}$  的会聚透镜，用平行绿光 ( $\lambda = 546.0 \text{ nm}$ ) 垂直照射单缝，试求位于透镜焦面处的屏幕上的中央明条纹及第二级明纹宽度。

分析：单缝夫琅禾费衍射光强的各级明条纹宽度为相邻两个暗纹中心之间的距离，中央明条纹的宽度为各级明条纹宽度的 2 倍。

解：设光屏上第  $k$  级暗条纹的位置为  $x$ 。单缝夫琅禾费衍射暗纹条件为

$$a \sin \theta = \pm k\lambda$$

因  $\theta$  很小，有

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f}$$

即

$$x_k = \pm k \frac{f}{a} \lambda$$

$k = 1$  时，可得中央明条纹的宽度为

$$\Delta x_0 = x_1 - x_{-1} = 2 \frac{f}{a} \lambda = 5.46 \text{ mm}$$

第  $k$  级明条纹的宽度为

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = (k+1) \frac{f}{a} \lambda - k \frac{f}{a} \lambda = \frac{f}{a} \lambda$$

与  $k$  无关，即各级明条纹的宽度均相等，为

$$\Delta x_2 = \Delta x_k = \frac{f}{a} \lambda = 2.73 \text{ mm}$$

中央明条纹的宽度为各级明纹宽度的两倍，即  $\Delta x_0 = 2\Delta x_k$ 。

12-28. 波长为  $\lambda$  的单色平行光沿着与单缝衍射屏成  $\alpha$  角的方向入射到宽度为  $a$  的单缝上，试求各级衍射极小的衍射角  $\theta$  值。

分析：平行光以  $\alpha$  角斜入射于单缝时，中央明条纹中心的位置将移至透镜

焦平面与副光轴的交点  $O'$  上, 如解图 12-28 所示. 其他各级明、暗条纹也将相应地向上平移.

在单缝前方, 平行光的同相面为  $AB$ , 到达单缝两边缘处的子波已有光程差  $AA'$ . 所以, 在考虑  $\theta$  方向衍射波的最大光程差时, 需附加这一光程差.

解: 当平行光以图示  $\alpha$  角斜入射时, 衍射波在  $\theta$  方向的最大光程差为

$$\delta = a \sin \theta - a \sin \alpha$$

$\delta = 0$  是单缝衍射中央明条纹的中心, 即  $\theta = \alpha$ .

$\delta$  等于半波长的偶数倍时为衍射极小, 有

$$\delta = a \sin \theta - a \sin \alpha = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, \dots)$$

各极小对应的衍射角  $\theta$  为

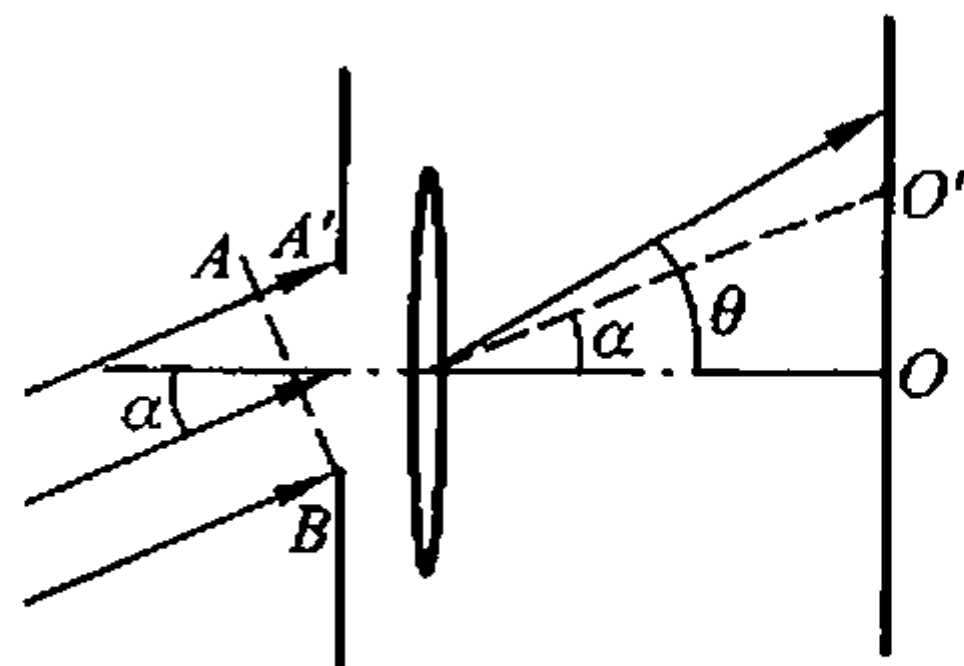
$$\theta = \arcsin \left( \pm k \frac{\lambda}{a} + \sin \alpha \right)$$

由于衍射角  $\theta$  的分布范围为  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 因而在屏上中央明条纹下方出现的条纹数将多于上方.

当平行光以  $-\alpha$  角斜入射时, 中央明条纹和其他明暗条纹都将相应地向下平移. 衍射波在  $\theta$  方向的最大光程差应为

$$\delta = a \sin \theta + a \sin \alpha$$

这时在屏上中央明条纹下方出现的条纹数将少于上方.



解图 12-28

**12-29.** 在复色光照射下的单缝衍射图样中, 其中某一波长的第 3 级明纹位置恰与波长  $\lambda = 600 \text{ nm}$  的单色光的第 2 级明纹位置重合, 求这光波的波长.

分析: 复色平行光垂直入射于单缝后, 各种波长的光波形成各自的衍射图样, 它们的中央明条纹中心都重叠在透镜的焦点处, 但各级次的明、暗条纹间隔与波长成正比. 在观察屏上就会出现短波长高级次和长波长低级次明条纹重叠的现象, 重叠处有相同的光程差.

解: 设未知波长  $\lambda$  的第 3 级明纹与已知波长  $\lambda_0$  的第 2 级明纹在  $\theta$  方向重合, 它们的光程差相等, 根据单缝衍射的明纹条件

$$a \sin \theta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

可有

$$(2 \times 3 + 1) \frac{\lambda}{2} = (2 \times 2 + 1) \frac{\lambda_0}{2}$$

得

$$\lambda = \frac{5}{7} \lambda_0 = \frac{5}{7} \times 600 \text{ nm} = 428.6 \text{ nm}$$

**12-30.** 用波长  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$  的混合光垂直照射单缝. 在衍射图样中,  $\lambda_1$  的第  $k_1$  级明纹中心位置恰与  $\lambda_2$  的第  $k_2$  级暗纹中心位置重合, 求  $k_1$  和  $k_2$ , 试问  $\lambda_1$  的暗纹中心位置能否与  $\lambda_2$  的暗纹中心位置重合?

解: 当  $\lambda_1$  的第  $k_1$  级明纹与  $\lambda_2$  的第  $k_2$  级暗纹位置重合时, 这两个条纹在  $\theta$  方向上的光程差相等, 即有

$$a \sin \theta = (2k_1 + 1) \frac{\lambda_1}{2} = k_2 \lambda_2$$

得 
$$\frac{2k_1 + 1}{2k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{7}{4}$$

使上式成立, 可取  $k_1 = 3, k_2 = 2$ .

当取  $k_1 = 6, k_2 = 10, \dots$  值时, 上式虽也成立, 但单缝衍射的光强已很弱.

若  $\lambda_1$  的第  $k_1$  级暗纹与  $\lambda_2$  的第  $k_2$  级暗纹位置重合, 有

$$a \sin \theta = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$$

得 
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{7}{4}$$

使上式成立, 可取  $k_1 = 7, k_2 = 4$ .

**12-31.** 利用单缝衍射的原理可以测量位移以及与位移联系的物理量, 如热膨胀、形变等, 把需要测量位移的对象和一标准直边相连, 同另一固定的标准直边形成一单缝, 这个单缝宽度变化能反映位移的大小, 如果中央明纹两侧的正、负第  $k$  级暗(亮)纹之间距离的变化为  $dx_k$ ,

证明: 
$$dx_k = -\frac{2k\lambda f}{a^2} da$$

式中  $f$  为透镜的焦距,  $da$  为单缝宽度的变化 ( $da \ll a$ ).

分析: 单缝衍射图样相对中央明纹中心对称分布, 单缝的缝宽  $a$  越小, 则明、暗条纹越宽, 条纹的间距越大, 衍射越显著. 缝宽  $a$  改变  $da$  时, 条纹间距等都将相应地发生变化.

证: 以  $x_k$  表示中央明纹两侧第  $k$  级暗纹之间距离, 则屏上第  $k$  级暗条纹的坐标为  $x_k/2$ , 有

$$a \sin \theta \approx a \frac{x_k}{2f} = k\lambda$$

$$x_k = \frac{2k\lambda f}{a}$$

两边取微分, 得

$$dx_k = -\frac{2k\lambda f}{a^2} da$$

命题得证. 式中“-”号表明, 若缝宽变小,  $da < 0$ , 则有  $dx_k > 0$ , 即缝宽越小, 衍射越显著.

**12-32.** 一光栅宽为 2.0 cm, 共有 6 000 条缝. 如用钠光(589.3 nm)垂直入射, 在哪些角度出现光强极大? 如钠光与光栅的法线方向成  $30^\circ$  角入射, 试问: 光栅光谱线将有什么变化?

**分析:** 单色平行光垂直入射于光栅时, 直接利用光栅方程可求得主极大对应的衍射角.

当单色平行光倾斜入射时, 到达光栅相邻两透光缝的光波已有一光程差, 因此零级主极大将偏离透镜的主光轴. 由于衍射角分布在  $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$  范围内, 因此在零级主极大两侧可呈现的主极大数不对称.

**解:** 设光栅宽度为  $L$ , 可得光栅常数为

$$a + b = \frac{L}{N}$$

由光栅方程

$$(a + b) \sin \theta = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

可得光强主极大出现的角度为

$$\theta = \arcsin\left(\frac{N\lambda k}{L}\right) = \arcsin(0.176k)$$

在  $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$  范围内, 计算所得光强主极大的级次  $k$  和衍射角  $\theta$ , 列于以下表中:

$k$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$	$\pm 4$	$\pm 5$
$\theta$	$0^\circ$	$\pm 10^\circ 11'$	$\pm 20^\circ 42'$	$\pm 32^\circ 2'$	$\pm 45^\circ$	$\pm 62^\circ 8'$

平行光以  $\theta'$  角倾斜入射时的光栅方程为

$$(a + b)(\sin \theta - \sin \theta') = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

式中的人射角  $\theta'$  和衍射角  $\theta$  均由透镜主光轴起算, 逆时针为正, 顺时针为负. 可得光强主极大出现的角度为

$$\theta = \arcsin\left(\frac{N\lambda k}{L} + \sin \theta'\right) = \arcsin(0.176k + 0.5)$$

在  $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$  范围内, 计算所得光强主极大的级次  $k$  和衍射角  $\theta$ , 列于以下表中:

$k$	0	-1	-2	-3	-4	-5
$\theta$	$30^\circ$	$18^\circ 51'$	$8^\circ 25'$	$1^\circ 45'$	$-11^\circ 57'$	$-22^\circ 35'$
$k$	-6	-7	-8	1	2	
$\theta$	$-34^\circ 7'$	$-47^\circ 32'$	$-66^\circ 7'$	$42^\circ 36'$	$58^\circ 36'$	

由以上计算可见,在零级主极大两侧,可呈现的最高级次主极大是不对称的.

**12-33.** 已知一个每厘米刻有 4 000 条缝的光栅,利用这个光栅可以产生多少个完整的可见光谱( $\lambda = 400 \sim 760 \text{ nm}$ )?

**分析:** 平行可见光垂直入射于光栅时,可形成光栅的衍射光谱.各波长光波的零级主极大都非相干地重叠在透镜的焦点处,形成白色的中央主极大.其两侧对称地按波长由短到长排列同一级次的主极大,形成该级次的光谱,即从紫色到红色的光谱.

当高级次光谱中紫光的主极大与低一级次光谱中某波长的主极大处于同一衍射角时,这两个可见光谱开始发生重叠,在重叠处有相同的光程差.

**解:** 据题意可得光栅常数为

$$a + b = \frac{L}{N} = \frac{1 \times 10^{-2}}{4\,000} \text{ m} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

设  $\lambda$  为可见光中红光的波长(最大波长),在光栅方程

$$(a + b) \sin \theta = k\lambda$$

中,令  $\sin \theta = 1$  可得红光主极大的最高级次

$$k = \frac{a + b}{\lambda} = \frac{2.5 \times 10^{-6}}{760 \times 10^{-9}} = 3.29$$

取整数,  $k = 3$ .

所以,在中央主极大一侧,可以有三个从紫色到红色的可见光谱.

设在  $\theta$  角,第  $(k + 1)$  级光谱的紫光( $\lambda_0 = 400 \text{ nm}$ )与第  $k$  级光谱中红光的主极大( $\lambda = 760 \text{ nm}$ )重叠,有

$$(a + b) \sin \theta = k\lambda = (k + 1)\lambda_0$$

可得

$$k = \frac{\lambda_0}{\lambda - \lambda_0} = \frac{400}{760 - 400} = 1.1$$

可见光的第二级与第三级光谱将发生重叠,即不重叠的完整光谱是  $k = 1$  的第一级光谱.

**12-34.** 波长  $600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射在一光栅上,第二级明条纹出现在  $\sin \theta = 0.20$  处,第四级缺级,试问:

(1) 光栅上相邻两缝的间距  $(a + b)$  有多大?

(2) 光栅上狭缝可能的最小宽度  $a$  有多大?

(3) 按上述选定的  $a$ 、 $b$  值, 试问在光屏上可能观察到的全部明条纹级数是多少?

分析: 光栅的多光束干涉主极大光强受单缝衍射光强的调制. 干涉主极大位置由光栅方程决定, 干涉主极大与单缝衍射极小在位置上重合时, 该级干涉主极大不存在, 为缺级.

解: (1) 由光栅方程  $(a+b)\sin\theta = k\lambda$ , 根据第二级明条纹衍射角  $\sin\theta_2 = 0.20$ , 可得光栅常数为

$$a+b = \frac{k\lambda}{\sin\theta} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{0.20} \text{ m} = 6 \times 10^{-6} \text{ m}$$

(2) 根据缺级条件  $(a+b)\sin\theta = k\lambda$  和  $a\sin\theta = k'\lambda$

因第四级缺级, 有  $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'} = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \dots$

可得  $a = \frac{a+b}{4} = \frac{6 \times 10^{-6}}{4} \text{ m} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$

(3) 在光栅方程中, 令  $\sin\theta = 1$ , 可解得  $k = 10$ .

在光屏上可观察到的主极大谱线级次为  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$ . 共有 15 条主极大谱线.

$k = \pm 4, \pm 8$  的主极大谱线缺级,  $k = \pm 10$  的主极大谱线因处在  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  处而实际不可见.

\*12-35. 波长为 500 nm 的单色光, 垂直入射在光栅上, 如要求第一级谱线的衍射角为  $30^\circ$ , 问光栅每毫米应刻几条线? 如果单色光不纯, 波长在 0.5 % 范围内变化, 则相应的衍射角变化范围  $\Delta\theta$  如何? 又如光栅上下移动而保持光源不动, 衍射角  $\theta$  有何变化?

分析: 根据第一级谱线的衍射角可求得光栅常数. 根据光栅方程可知, 在同一级光谱中, 衍射角  $\theta$  正比于波长  $\lambda$ . 对光栅方程求微分, 可得到第  $k$  级谱线中  $\Delta\lambda$  和  $\Delta\theta$  的关系.

解: 第一级谱线满足方程

$$(a+b)\sin\theta_1 = \lambda$$

光栅每毫米的刻线数  $N$  为

$$N = \frac{1}{a+b} = \frac{\sin\theta_1}{\lambda} = \frac{0.5}{500 \times 10^{-6}} = 1\,000$$

对光栅方程

$$(a+b)\sin\theta_k = k\lambda$$

两边微分, 有

$$(a+b)\cos\theta_k \Delta\theta_k = k\Delta\lambda$$

得 
$$\Delta\theta_k = \frac{k\Delta\lambda}{(a+b)\cos\theta_k} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \tan\theta_k$$

上式表明,光栅分开两谱线的角距离与光栅常数成反比,与谱线主极大的级次成正比. 将  $\theta_1 = 30^\circ$  和  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.5\%$  代入上式,可得

$$\Delta\theta_1 = 0.5 \times 10^{-2} \times \tan 30^\circ = 2.89 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.17^\circ$$

光栅上下移动时,若透镜的位置不变,并保持平行光垂直入射于光栅,光栅的夫琅禾费衍射性质不变,所以各级主极大的衍射角不会变化.

**12-36.** 一个平面光栅,当用光垂直照射时,能在  $30^\circ$  角的衍射方向上得到  $600 \text{ nm}$  的第二级主极大,并能分辨  $\Delta\lambda = 0.05 \text{ nm}$  的两条光谱线,但不能得到第三级主极大,计算此光栅的透光部分的宽度  $a$  和不透光部分的宽度  $b$  以及总缝数.

分析: 根据光栅方程和缺级条件可求得光栅的参数,根据光栅的分辨本领可求得被光照射到的总缝数  $N$ .

解: 据题意,在  $\theta = 30^\circ$  方向上得到  $\lambda = 600 \text{ nm}$  的第二级主极大,根据光栅方程,有

$$(a+b)\sin\theta_2 = 2\lambda$$

得 
$$a+b = \frac{2\lambda}{\sin\theta_2} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{\sin 30^\circ} \text{ m} = 2.4 \times 10^{-6} \text{ m}$$

由第三级缺级,可知 
$$\frac{a+b}{a} = 3$$

得 
$$a = \frac{a+b}{3} = \frac{2.4 \times 10^{-6}}{3} \text{ m} = 8 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$b = (a+b) - a = 1.6 \times 10^{-6} \text{ m}$$

光栅分辨本领为 
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$$

所以,光栅被光照射到的总缝数为

$$N = \frac{\lambda}{k\Delta\lambda} = \frac{600}{2 \times 0.05} = 6000 \text{ 条}$$

**12-37.**  $N$  根天线沿一水平直线等距离排列组成天线列阵,每根天线发射同一波长  $\lambda$  的球面波,从第 1 根天线到第  $N$  根天线,相位依次落后  $\frac{\pi}{2}$ ,相邻天线间的距离  $d = \frac{\lambda}{2}$ ,如图所示. 求在什么方向(即与天线列阵法线的夹角  $\theta$  为多少)上,天线列阵发射的电磁波最强.

分析：将每根天线发射的球面波视为子波，则  $N$  根天线组成的列阵可视为光栅。光栅常数为相邻两天线的间隔  $d$ 。相邻两天线的相位差可等效成附加的波程差。

解：设在与天线列阵法线成  $\theta$  角的方向上， $N$  个同频率、同方向的电磁波因干涉而加强。两根相邻天线在  $\theta$  方向的波程差为

$$\delta = d \sin \theta + \delta'$$

式中  $d = \frac{\lambda}{2}$ ， $\delta'$  为附加的波程差，由相邻天线间的相位依次落后

$\frac{\pi}{2}$  可知，

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\delta'$$

得

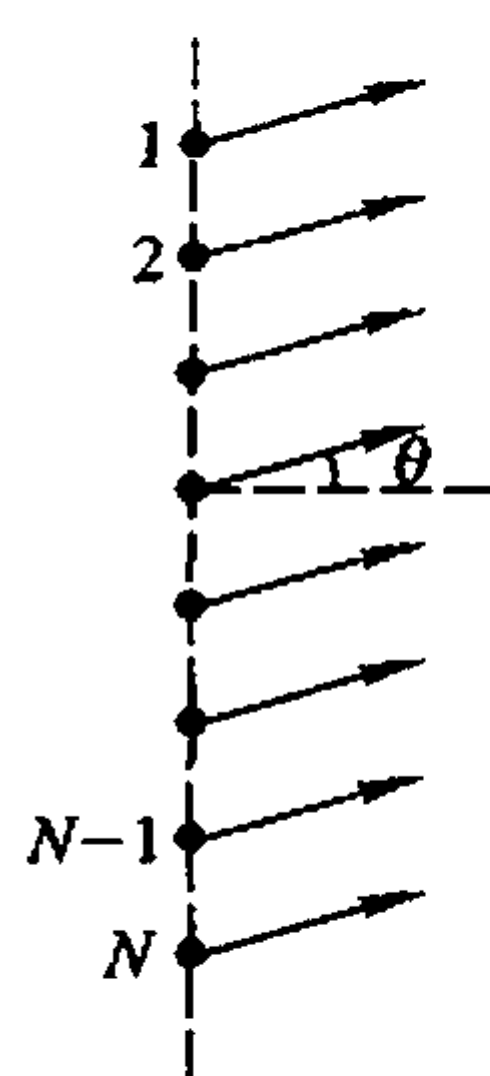
$$\delta' = \frac{\lambda}{4}$$

所以，波程差满足  $\frac{\lambda}{2} \sin \theta + \frac{\lambda}{4} = k\lambda \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

时，有干涉主极大。与天线列阵法线的夹角  $\theta$  为

$$\theta = \arcsin\left(2k - \frac{1}{2}\right)$$

$k=0$  时， $\theta_0 = -30^\circ$ ，这是零级主极大的方向，即电磁波最强的方向。



习题 12-37 图

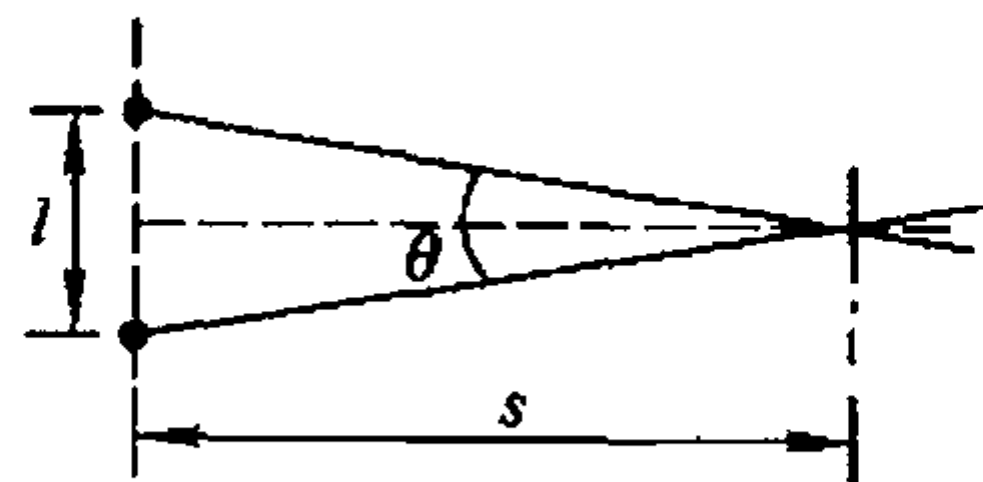
## 5. 光学仪器的分辨率

12-38. 在迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距 1.2 m，试问汽车离人多远的地方，眼睛才可能分辨这两盏前灯？假设夜间人眼瞳孔直径为 5.0 mm，而入射光波长  $\lambda = 550.0 \text{ nm}$ 。

分析：远处车灯对眼睛瞳孔形成夫琅禾费圆孔衍射，在视网膜上形成的两个艾里斑恰可分辨时，应满足瑞利准则，即两个艾里斑中心对人眼瞳孔中心的张角  $\theta$  与人眼的最小可分辨角  $\theta_R$  相等。

解：如解图 12-38 所示，设两灯距离为  $l$ ，人与车之间距离为  $s$ 。恰可分辨时，两车灯对瞳孔的最小分辨角为

$$\theta \approx \frac{l}{s}$$



解图 12-38

根据瑞利准则，有

$$\theta = \theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d} = \frac{l}{s}$$

可得 
$$s = \frac{ld}{1.22\lambda} = \frac{1.2 \times 5.0 \times 10^{-3}}{1.22 \times 550.0 \times 10^{-9}} \text{ m} = 8.94 \times 10^3 \text{ m}$$

**12-39.** 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为  $4.84 \times 10^{-6} \text{ rad}$ , 由它们发出的光波波长  $\lambda = 550.0 \text{ nm}$ . 望远镜物镜的口径至少要多大, 才能分辨出这两颗星?

**分析:** 根据瑞利准则, 恰可分辨时的角距离即为最小分辨角. 最小分辨角正比于所用光波波长, 反比于光学仪器孔径.

**解:** 设所需望远镜物镜的直径为  $d$ , 恰可分辨时的角距离为  $\theta_R$ . 由

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

得 
$$d = 1.22 \frac{\lambda}{\theta_R} = 1.22 \times \frac{550.0 \times 10^{-9}}{4.84 \times 10^{-6}} \text{ m} = 13.9 \text{ cm}$$

**12-40.** 一观察者通过缝宽为  $0.5 \text{ mm}$  的单缝, 观察位于正前方  $1 \text{ km}$  远处发出波长为  $500 \text{ nm}$  的单色光的两盏灯灯丝, 两灯丝都与单缝平行, 它们所在的平面与观察方向垂直, 则人眼能分辨的两灯丝最短距离是多少?

**分析:** 远处的光源、单缝和人眼的晶状体(透镜)构成单缝的夫琅禾费衍射, 在视网膜上形成光强分布. 根据瑞利准则, 两个不相干的单缝衍射光强分布, 恰可分辨时的角距离即为单缝衍射中央明纹的半角宽度,

**解:** 如解图 12-40 所示, 设人眼能分辨的两灯丝最小间距为  $\Delta x$ , 两灯丝距人眼(单缝)为  $l$ , 单缝宽为  $a$ , 单缝衍射的第一级暗纹中心对应的衍射角为  $\theta$ . 有

$$a \sin \theta \approx a\theta = \lambda$$

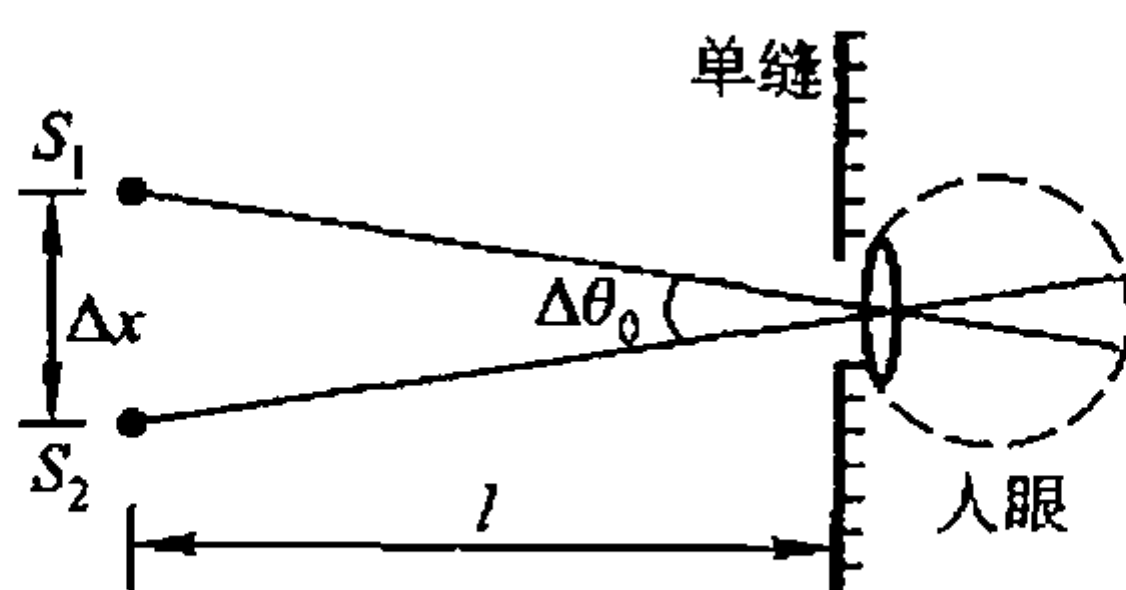
中央明纹的半角宽度为 
$$\Delta\theta_0 = \theta = \frac{\lambda}{a}$$

恰可分辨时, 有 
$$\Delta\theta_0 = \theta_R$$

$\theta_R$  为最小分辨角. 由图示的几何关系可知

$$\Delta\theta_0 = \frac{\Delta x}{l}$$

所以, 得 
$$\Delta x = \frac{\lambda}{a} l = \frac{500 \times 10^{-9}}{0.5 \times 10^{-3}} \times 1 \times 10^3 \text{ m} = 1 \text{ m}$$



解图 12-40

**12-41.** 已知地球到月球的距离是  $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ , 设来自月球的光的波长为  $600 \text{ nm}$ , 若地球上用物镜直径为  $1 \text{ m}$  的一天文望远镜观察时, 刚好将月球正面一

环形山上的两点分辨开,则该两点的距离为多少?

解: 设地球到月球的距离是  $L$ , 环形山上两点的距离为  $\Delta x$ , 望远镜的物镜直径为  $d$ . 望远镜恰可分辨两点时的张角为  $\theta_R$ , 有

$$\Delta x = L\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d} L = 1.22 \times \frac{600 \times 10^{-9}}{1} \times 3.84 \times 10^8 \text{ m} = 281 \text{ m}$$

**12-42.** 一直径为 2 mm 的氦氖激光束射向月球表面, 其波长为 632.8 nm. 已知月球和地面的距离为  $3.84 \times 10^5 \text{ km}$ . 试求:

(1) 在月球上得到的光斑的直径有多大?

(2) 如果这激光束经扩束器扩展成直径为 2 m, 则在月球表面上得到的光斑的直径将为多大? 在激光测距仪中, 通常采用激光扩束器这是为什么?

分析: 激光束受通光孔径的衍射作用, 从激光器发出后存在一定程度的发散, 在月球表面形成圆孔衍射图样. 艾里斑角半径  $\theta_1$  的大小可反映发散的程

度. 解: (1) 设激光束直径为  $d$ , 地面至月球表面距离为  $L$ , 在月球表面, 激光束形成艾里斑的直径为  $D$ , 则有  $D = 2L\theta_1$ .

艾里斑的角半径  $\theta_1$  为  $\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{d}$

所以, 有 
$$D = 1.22 \frac{2L\lambda}{d}$$
$$= 1.22 \times \frac{2 \times 3.84 \times 10^8 \times 632.8 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-3}} \text{ m} = 2.96 \times 10^5 \text{ m}$$

(2) 若激光束扩束为  $d'$ , 则艾里斑直径为

$$D' = \frac{d}{d'} D = \frac{2 \times 10^{-3}}{2} \times 2.96 \times 10^5 \text{ m} = 296 \text{ m}$$

使用激光扩束器可减小激光束的发散, 使激光束的光能集中, 方向性更好, 有利于提高测距精度.

## 6. 晶体的 X 射线衍射

**12-43.** 用方解石分析 X 射线谱, 已知方解石的晶面间距为  $3.029 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 今在  $43^\circ 26'$  和  $40^\circ 42'$  的掠射方向上观察到两条主最大谱线, 求这两条谱线的波长.

分析: 在布拉格条件中,  $d$  是晶面间距,  $\theta$  是掠射角. 在以晶面为镜面的反射线方向上, 两晶面反射光线间的干涉形成 X 射线的主最大谱线. 对于给定的晶体取向 (即确定的晶面间距  $d$ ), 以不同的掠射角入射时, 只能出现满足布拉格

条件的相应波长的主最大谱线. 由于  $\sin \theta \leq 1$ , 所以, 满足布拉格条件的 X 射线的极限波长为  $\lambda \leq \lambda_c = 2d$ .

解: 据题意,  $d = 3.029 \times 10^{-1} \text{ nm}$

由布拉格条件  $2d \sin \theta = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$

$k = 1$  时, 两条谱线的波长可以为

$$\lambda_1 = 2d \sin \theta_1 = 2 \times 3.029 \times 10^{-1} \times \sin(43^\circ 26') \text{ nm} = 0.416 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 2d \sin \theta_2 = 2 \times 3.029 \times 10^{-1} \times \sin(40^\circ 42') \text{ nm} = 0.395 \text{ nm}$$

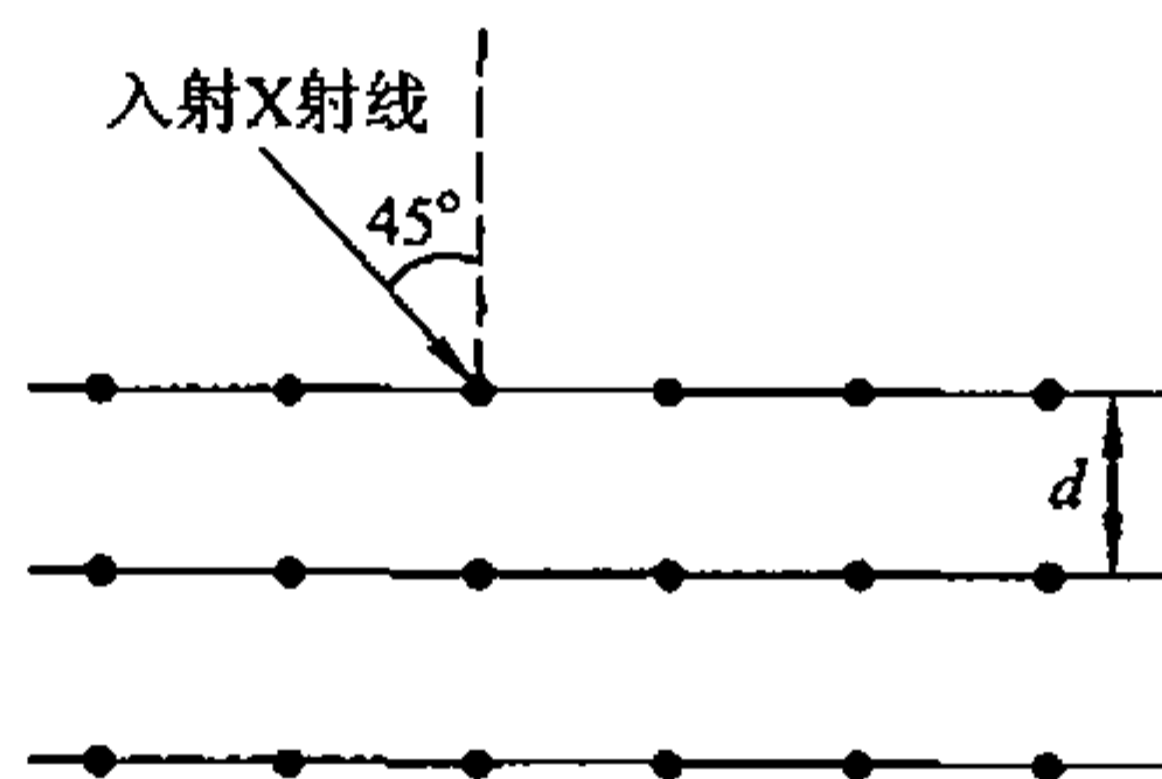
$k = 2$  时, 两条谱线的波长可以为

$$\lambda_1 = d \sin \theta_1 = 3.029 \times 10^{-1} \times \sin(43^\circ 26') \text{ nm} = 0.208 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = d \sin \theta_2 = 3.029 \times 10^{-1} \times \sin(40^\circ 42') \text{ nm} = 0.197 \text{ nm}$$

.....

12-44. 如果图中入射 X 射线束不是单色的, 而是含有由 0.095 nm 到 0.130 nm 这一波带中的各种波长. 晶体的晶面间距  $d = 0.275 \text{ nm}$ , 问与图中所示晶面族相联系的衍射的 X 射线束能否产生?



习题 12-44 图

分析: 本题中, 给定了晶面间距  $d$  和掠射角  $\theta$ , 在晶面反射的方向上, 只能出现符合布拉格条件波长的 X 射线束.

解: 设  $\lambda_1 = 0.095 \text{ nm}$ ,  $\lambda_2 = 0.130 \text{ nm}$ ,  $d = 0.275 \text{ nm}$ .

由布拉格条件

$$2d \sin \theta = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

级次  $k$  的取值范围为

$$\frac{2d \sin \theta}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{2}d}{\lambda_2} < k < \frac{2d \sin \theta}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{2}d}{\lambda_1}$$

计算可得

$$2.99 < k < 4.09$$

$k$  只能取整数. 所以, 可出现 X 射线束的波长为

$$k = 3 \text{ 时, } \lambda = \frac{2d \sin \theta}{3} = 0.130 \text{ nm}$$

$k=4$  时,

$$\lambda' = \frac{2d \sin \theta}{4} = 0.097 \text{ nm}$$

\* 12-45. 光栅衍射的光强分布函数为

$$I = I' \left( \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2$$

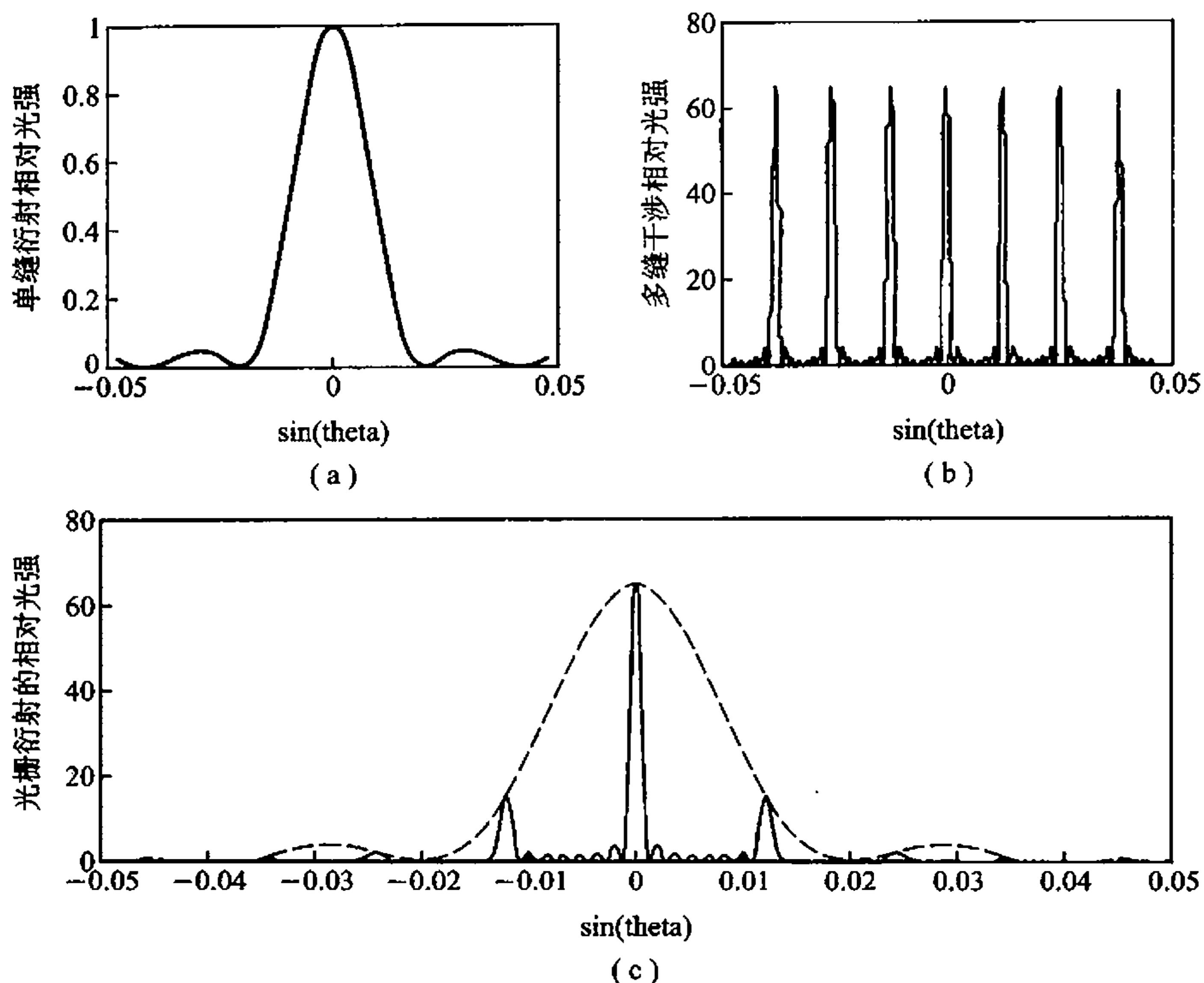
每一缝的光强  $I'$  可写为  $I' = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$ , 其中  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ ,  $u = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta$ .

试编写一计算机程序, 画出 8 缝光栅 ( $N=8$ ) 衍射的相对光强分布图 (即  $I/I_0 - \sin \theta$  曲线,  $\theta$  为衍射角), 并观察单缝衍射对多缝干涉的调制作用. (设缝宽  $a = 8 \times 10^{-6} \text{ m}$ , 光栅常数  $d = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 波长  $\lambda = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ .)

参考程序

```
% 单缝衍射对多缝干涉的调制
clear
clf
a = 0.8e-5; d = 4e-5; lamda = 5e-7; % 缝宽, 缝间距, 波长
N = input('请输入缝数 N = '); % 输入缝数
theta = -0.015 * pi : 0.00001 : 0.015 * pi; % 衍射角度变化范围
phi = 2 * pi * d * sin(theta) / lamda; % 将衍射角转化为位相角
u = pi * a * sin(theta) / lamda;
I0 = (sinc(u)).^2; % 计算单缝相对光强
Id = (sin(N * phi/2) ./ sin(phi/2)).^2; % 计算多缝相对光强
I = I0 * Id; % 单缝衍射对多缝干涉调制后的光强
subplot(2,2,1)
plot(sin(theta), I0, 'b') % 画出单缝衍射相对光强的分布
xlabel('sin(theta)'); ylabel('单缝衍射相对光强');
subplot(2,2,2)
plot(sin(theta), Id, 'k') % 画出 N 缝光栅相对光强的分布
xlabel('sin(theta)'); ylabel('多缝干涉相对光强');
subplot(2,1,2)
plot(sin(theta), N * N * I0, 'b', sin(theta), I, 'k')
% 画出单缝衍射对多缝干涉调制后的光强分布图
xlabel('sin(theta)'); ylabel('光栅衍射的相对光强');
```

运算结果如解图 12-45 所示.



解图 12-45

## 7. 光的偏振

**12-46.** 使自然光通过两个偏振化方向成  $60^\circ$  角的偏振片, 透射光强为  $I_1$ . 今在这两个偏振片之间再插入另一偏振片, 它的偏振化方向与前两个偏振片均成  $30^\circ$  角, 则透射光强为多少?

分析: 利用马吕斯定律求解.

解: 设自然光的光强为  $I_0$ , 三个偏振片分别为 A、B、C, 依次排列, A 和 C 偏振化方向间的夹角为  $\theta_1 = 60^\circ$ , A 和 B 偏振化方向间的夹角与 B 和 C 间的夹角相等, 为  $\theta_2 = 30^\circ$ .

自然光入射于起偏器 A 后的透射光是光强为  $\frac{I_0}{2}$  的线偏振光.

设透过 A 的线偏振光光强为  $I_A$ ,  $I_A = \frac{I_0}{2}$ . 据题意, 未插入 B 时, 透过 C 的光强为  $I_1$ .

根据马吕斯定律, 应有

$$I_1 = I_A \cos^2 \theta_1 = \frac{I_0}{2} \cos^2 60^\circ = \frac{1}{8} I_0$$

在 A 和 C 之间插入 B 后, 设透过 B 的光强为  $I_B$ , 透过 C 的光强为  $I_2$ . 有

$$I_B = I_A \cos^2 \theta_2 = \frac{I_0}{2} \cos^2 30^\circ = \frac{3}{8} I_0$$

$$I_2 = I_B \cos^2 \theta_2 = \frac{3}{8} I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{9}{32} I_0$$

所以

$$I_2 = \frac{9}{32} I_0 = \frac{9}{4} I_1 = 2.25 I_1$$

**12-47.** 如果起偏振器和检偏器的偏振化方向之间的夹角为  $30^\circ$ .

(1) 假定偏振片是理想的, 则非偏振光通过起偏振器和检偏器后, 其出射光强与原来光强之比是多少?

(2) 如果起偏振器和检偏器分别吸收了 10 % 的可通过光线, 则出射光强与原来光强之比是多少?

**分析:** 利用马吕斯定律求解. 实际的偏振器通常都有吸收光能和表面反射光能的情况, 所以, 实际透过偏振器的光能小于理想偏振片情况.

**解:** 设非偏振光的两个互相垂直光振动的光强分别为  $I_s$  和  $I_p$  ( $I_s \neq I_p$ ), 有

$$I_0 = I_s + I_p$$

设起偏振器  $P_1$  的偏振化方向与  $I_s$  光振动方向之间的夹角为  $\theta$ , 则与  $I_p$  振动方向之间的夹角为  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , 如解图 12-47 所示.

(1) 通过理想起偏振器  $P_1$  的光强为

$$I_1 = I_s \cos^2 \theta + I_p \sin^2 \theta$$

通过理想检偏器  $P_2$  后的透射光强为

$$I_2 = I_1 \cos^2 30^\circ = (I_s \cos^2 \theta + I_p \sin^2 \theta) \cos^2 30^\circ$$

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{(I_s \cos^2 \theta + I_p \sin^2 \theta) \cos^2 30^\circ}{I_s + I_p}$$

当非偏振光为自然光时, 有  $I_s = I_p = \frac{I_0}{2}$ ,

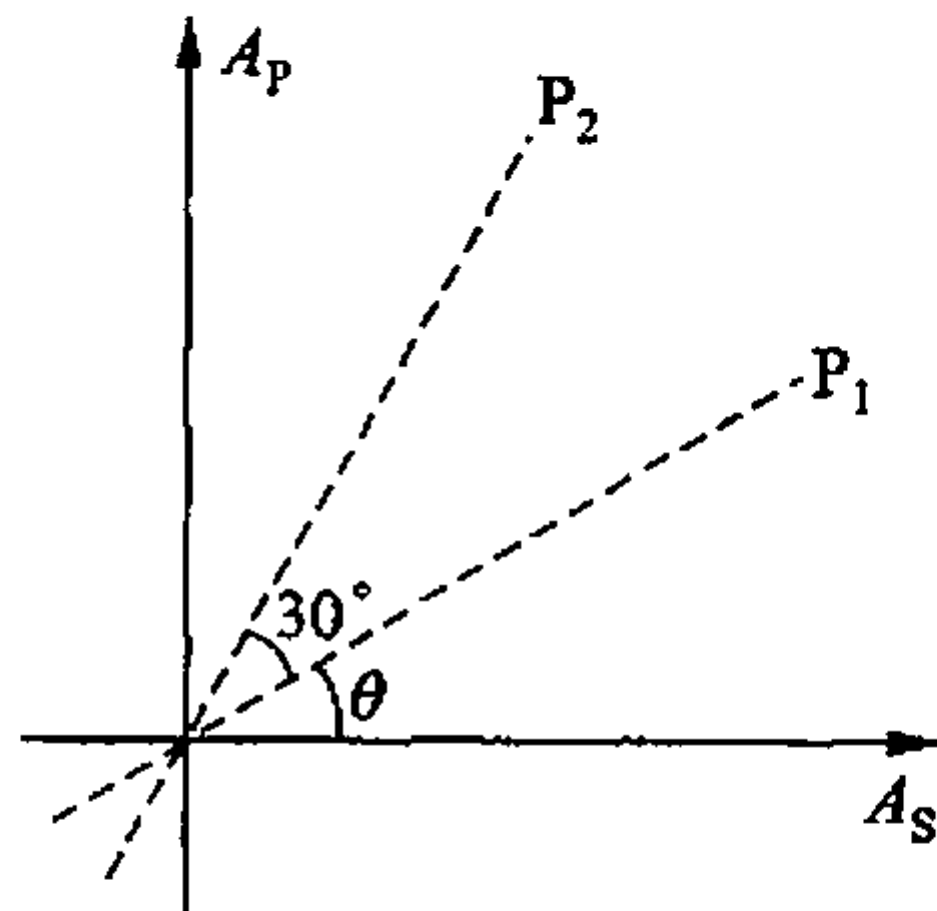
$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{2} \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 0.375$$

(2)  $P_1$  吸收 10 % 的光能时,

$$I'_1 = (1 - 0.1) I_1 = (1 - 0.1) (I_s \cos^2 \theta + I_p \sin^2 \theta)$$

$P_2$  也吸收 10 % 的光能时,

$$I'_2 = (1 - 0.1) I'_1 \cos^2 30^\circ = (1 - 0.1)^2 (I_s \cos^2 \theta + I_p \sin^2 \theta) \cos^2 30^\circ$$



解图 12-47

当非偏振光为自然光时,有

$$I'_2 = \frac{1}{2} I_0 (1 - 0.1)^2 \cos^2 30^\circ$$

$$\frac{I'_2}{I_0} = \frac{1}{2} (1 - 0.1)^2 \cos^2 30^\circ = 0.304$$

**12-48.** 自然光和线偏振光的混合光束,通过一偏振片时,随着偏振片以光的传播方向为轴转动,透射光的强度也跟着改变,如最强和最弱的光强之比为6:1,那么入射光中自然光和线偏振光的强度之比为多大?

**分析:** 偏振片的偏振化方向平行于混合光束中的线偏振光振动方向时,透射光最强,两方向互相垂直时的透射光强最小.

**解:** 设混合光束中的自然光光强为  $I_0$ , 线偏振光光强为  $I_1$ , 透射光强最大值为  $I_{\max}$ , 最小值为  $I_{\min}$ , 有

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_0 + I_1, \quad I_{\min} = \frac{1}{2} I_0$$

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{I_0 + 2I_1}{I_0} = 6$$

所以,有 
$$5I_0 = 2I_1, \quad \frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{5}$$

**12-49.** 水的折射率为 1.33, 玻璃的折射率为 1.50. 当光由水中射向玻璃而反射时,起偏振角为多少? 当光由玻璃射向水面而反射时,起偏振角又为多少?

**分析:** 利用布儒斯特定律求解本题.

**解:** 设布儒斯特角为  $\alpha$ , 水的折射率为  $n_1$ , 玻璃的介质率为  $n_2$ .

当光从水中射向玻璃而反射起偏时,由布儒斯特定律  $\tan \alpha = \frac{n_2}{n_1}$ ,

可得起偏角为 
$$\alpha_1 = \arctan \frac{n_2}{n_1} = 48^\circ 26'$$

当光从玻璃射向水中而反射起偏时,由布儒斯特定律  $\tan \alpha = \frac{n_1}{n_2}$ ,

可得起偏角为 
$$\alpha_2 = \arctan \frac{n_1}{n_2} = 41^\circ 34'$$

**12-50.** 怎样测定不透明电介质(例如珐琅)的折射率? 今测得釉质的起偏振角  $i_B = 58.0^\circ$ , 试求它的折射率.

分析：根据布儒斯特定律，可以用自然光入射于不透明介质，由反射光成为振动方向完全垂直于入射面的线偏振光所对应的人射角，来确定该介质的折射率。

解：设珐琅的折射率为  $n$ ，在空气 ( $n_1 = 1$ ) 中观察从珐琅表面反射的光。当反射光是振动方向完全垂直于入射面的线偏振光时，布儒斯特定律为

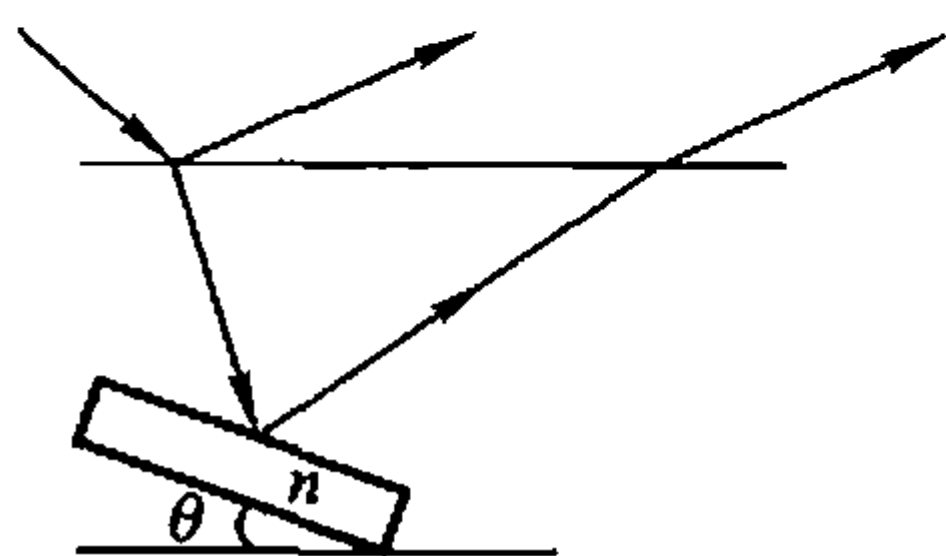
$$\tan i_B = n$$

可得

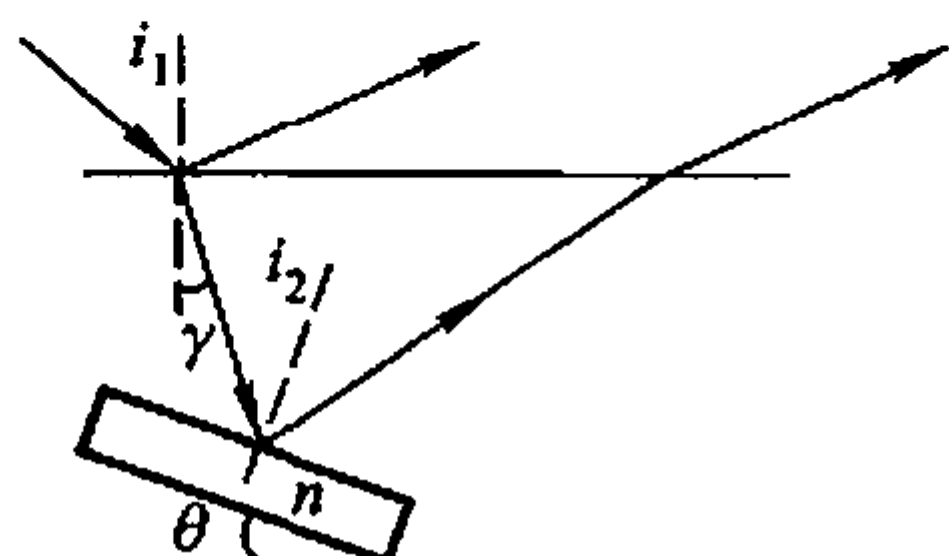
$$n = \tan 58.0^\circ = 1.60$$

12-51. 如图所示，一块折射率  $n \approx 1.50$  的平面玻璃浸在水中，已知一束光入射到水面上时反射光是完全偏振光。若要使玻璃表面的反射光也是完全偏振光，则玻璃表面与水平面的夹角  $\theta$  应多大？

分析：从水面反射的完全偏振光，由两部分反射光组成：从水面直接反射的完全偏振光和从玻璃表面反射后再经水面透射的完全偏振光。所以，自然光在水面的人射角是起偏角，部分偏振光在水中玻璃上的人射角也是起偏角。



习题 12-51 图



解图 12-51

解：如解图 12-51 所示，设自然光由空气射向水面的人射角为  $i_1$ ，折射角为  $\gamma$ ，部分偏振光在水中玻璃上的人射角为  $i_2$ 。

根据布儒斯特定律，有

$$\tan i_1 = n_{\text{水}} = 1.33$$

和

$$\tan i_2 = \frac{n}{n_{\text{水}}} = \frac{1.50}{1.33}$$

可得

$$i_1 = 53.06^\circ, \quad i_2 = 48.44^\circ$$

由于

$$i_1 + \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad i_2 = \gamma + \theta$$

所以，有

$$\theta = i_1 + i_2 - \frac{\pi}{2}$$

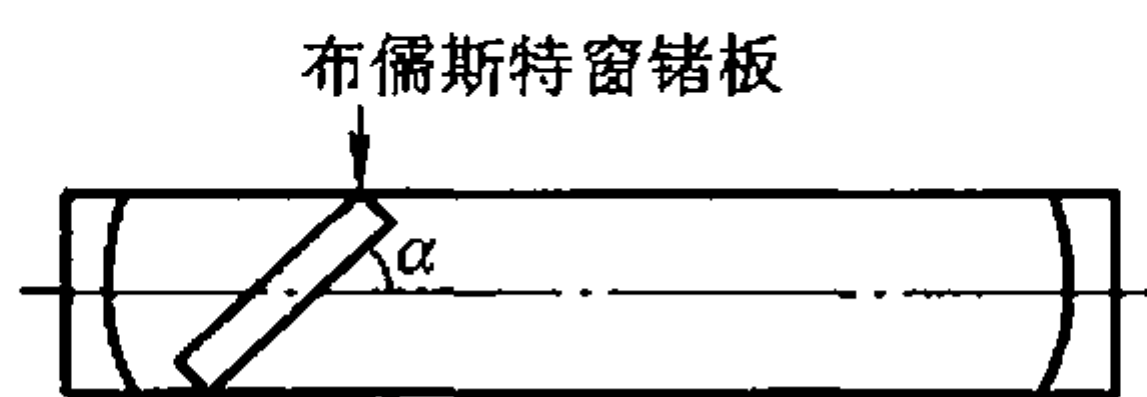
解得

$$\theta = 11.5^\circ = 11^\circ 30'$$

12-52. 二氧化碳激光器谐振腔的布儒斯特窗一般用锗来制成，使能对  $10.6 \mu\text{m}$  附近的红外激光有较大的透射率。如果锗的折射率为 4.5，试计算用锗

制成的布儒斯特窗与谐振腔轴线所成之角  $\alpha$ 。

分析：沿轴向传播的光，在锗板表面以布儒斯特角入射时，振动方向垂直于入射面的光振动，被反射出管外，透射光被反射镜反射回腔内。经端面反射镜的多次反射，腔内垂直于入射面的光



习题 12-52 图

振动被抑制，而振动方向平行于入射面的透射光损耗很小，并可在多次通过腔内激活介质的过程中得到放大，最终输出为偏振性很好的激光束。

解：设锗板的折射率为  $n$ ， $i_0$  为沿轴向传播的光在锗板表面入射的布儒斯特角，有

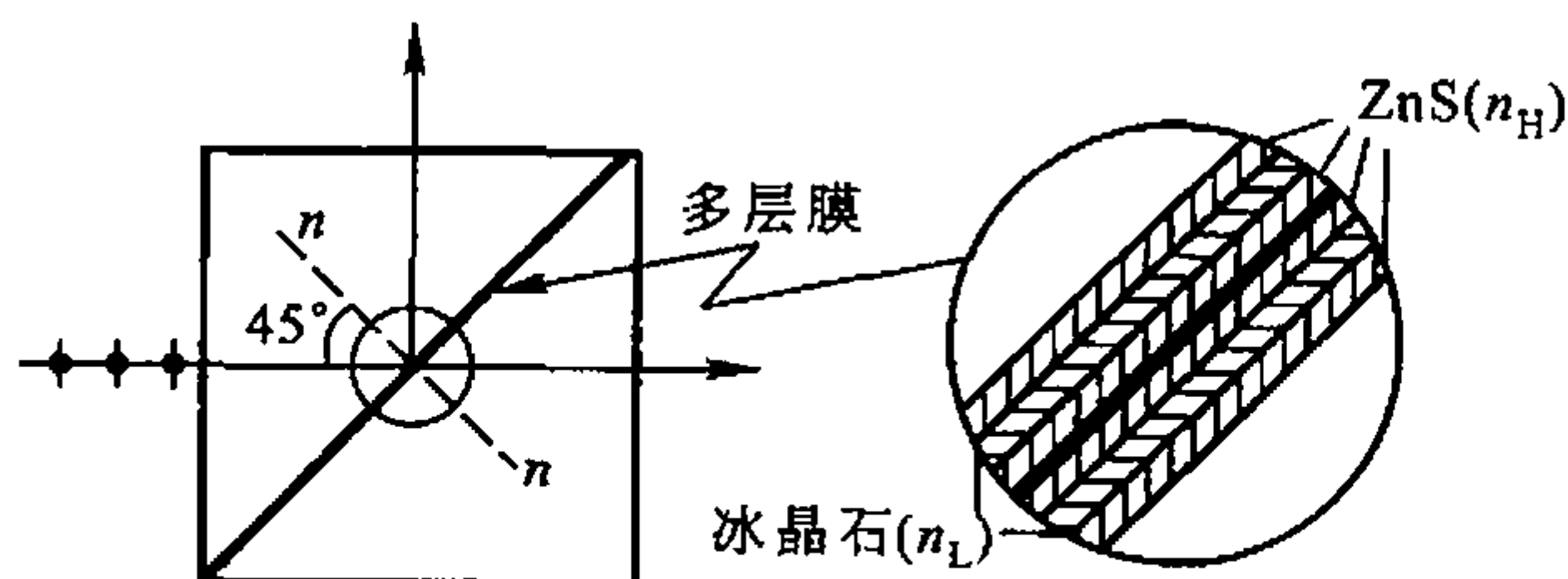
$$\tan i_0 = n$$

$$i_0 = \arctan n = \arctan 4.5 = 77.47^\circ = 77^\circ 28'$$

所以

$$\alpha = 90^\circ - i_0 = 12^\circ 32'$$

12-53. 偏振分束器可把入射的自然光分成两束传播方向互相垂直的偏振光，其结构如图所示。两个等边直角玻璃棱镜的斜面合在一起，两斜面间有一多层膜。多层膜是由高折射率材料（硫化锌  $n_H = 2.38$ ）和低折射率材料（冰晶石  $n_L = 1.25$ ）交替镀膜而成。如用氩离子激光（ $\lambda = 514.5 \text{ nm}$ ）以  $45^\circ$  角入射到多层膜上。



习题 12-53 图

- (1) 为使从膜层反射的光为线偏振光，玻璃棱镜的折射率应取多少？
- (2) 画出反射光和透射光的振动方向。
- (3) 为使透射光的偏振度最大，高折射率层和低折射率层的厚度的最小值是多少？

分析：光束在玻璃棱镜内，以  $45^\circ$  角入射到玻璃-高折射率膜层界面后，依次在各膜层界面按满足光的折射定律和反射定律的方向传播。为使从各膜层反射的光为光振动垂直于入射面的线偏振光，在各膜层表面，光束的入射角都应是布儒斯特角（玻璃与膜的界面除外）。当设置的各膜层厚度，使其两界面波长为  $\lambda$  的反射光满足干涉加强条件时，垂直于入射面的该波长的光振动在反射中

因干涉而加强,在透射光中则被减弱. 当安排的膜层很多时(一般为10层左右,取奇数层),透射光中只剩下振动方向平行于入射面的波长为 $\lambda$ 的光振动. 这样,便可从一束单色光中得到两束传播方向互相垂直的偏振光.

解:(1) 如解图12-53,沿光的传播方向,设薄膜按折射率为 $n_H \rightarrow n_L \rightarrow n_H \rightarrow n_L \rightarrow \dots$ 的顺序排列. 光束以 $i = 45^\circ$ 由折射率为 $n$ 的玻璃入射于高折射率( $n_H$ )薄膜,在 $n_H$ 和 $n_L$ 中的折射角分别为 $r_H$ 和 $r_L$ .

根据折射定律,在 $n - n_H$ 界面,有

$$n \sin i = n_H \sin r_H$$

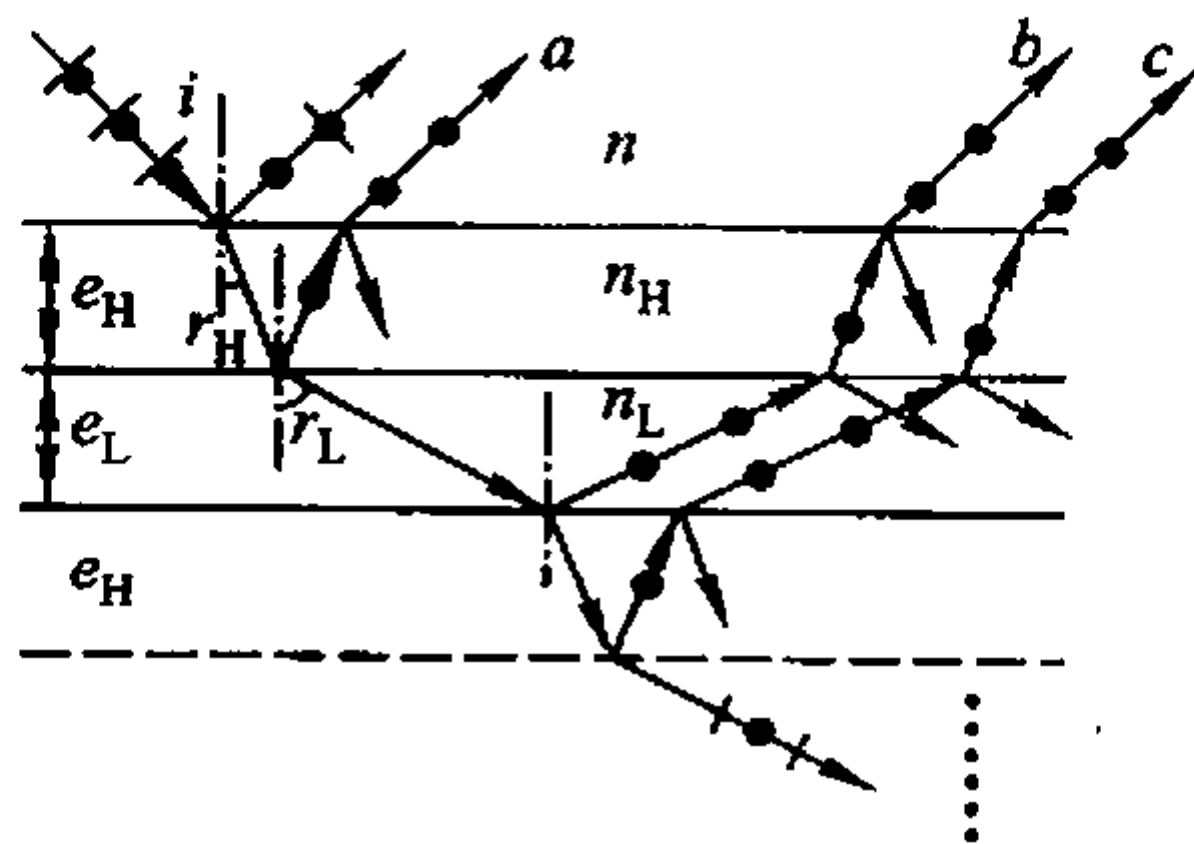
在 $n_H \rightarrow n_L$ 界面的入射角即为 $r_H$ ,并按要求,应为布儒斯特角,有

$$\tan r_H = \frac{n_L}{n_H}$$

所以,玻璃棱镜的折射率为

$$\begin{aligned} n &= \frac{n_H}{\sin i} \sin r_H = \frac{n_H}{\sin i} \sin \left[ \arctan \left( \frac{n_L}{n_H} \right) \right] \\ &= \frac{2.38}{\sin 45^\circ} \sin \left[ \arctan \left( \frac{1.25}{2.38} \right) \right] = 1.57 \end{aligned}$$

(2) 由于各膜层的界面相互平行且交替排列,根据布儒斯特定律可知,光束在各膜层界面的入射角都是相应的布儒斯特角. 因此,在各膜层界面的反射光都是光振动方向垂直于入射面的偏振光. 反射线都相互平行,并且与折射光线相垂直,如解图12-53所示.



解图12-53

(3) 设 $n_H$ 膜层厚度为 $e_H$ , $n_L$ 膜层厚度为 $e_L$ .

在 $n_H$ 膜两界面波长为 $\lambda$ 的反射光干涉加强时(如图中 $b$ 和 $c$ ),光程差为

$$2e_H \sqrt{n_H^2 - n_L^2 \sin^2 r_L} + \frac{\lambda}{2} = k_1 \lambda \quad (k_1 = 1, 2, \dots)$$

同理,在 $n_L$ 膜两界面波长为 $\lambda$ 的反射光干涉加强时(如图中 $a$ 和 $b$ ),光程差为

$$2e_L \sqrt{n_L^2 - n_H^2 \sin^2 r_H} + \frac{\lambda}{2} = k_2 \lambda \quad (k_2 = 1, 2, \dots)$$

为简化  $e_H$  和  $e_L$  的表达式,将满足布儒斯特定律时,反射角和折射角的关系

$r_H + r_L = \frac{\pi}{2}$  代入光在两种界面的折射定律,有

$$n \sin i = n_H \sin r_H = n_H \cos r_L$$

和

$$n_H \sin r_H = n_L \sin r_L = n_L \cos r_H$$

则有

$$\begin{aligned} \sqrt{n_H^2 - n_L^2 \sin^2 r_L} &= n_H \sqrt{1 - \sin^2 r_H} \\ &= n_H \cos r_H = \frac{n_H n}{n_L} \sin i \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \sqrt{n_L^2 - n_H^2 \sin^2 r_H} &= n_L \sqrt{1 - \sin^2 r_L} \\ &= n_L \cos r_L = \frac{n_L n}{n_H} \sin i \end{aligned}$$

所以,有

$$e_H = (2k_1 - 1) \frac{n_L}{4n_H n \sin i} \lambda \quad (k_1 = 1, 2, \dots)$$

和

$$e_L = (2k_2 - 1) \frac{n_H}{4n_L n \sin i} \lambda \quad (k_2 = 1, 2, \dots)$$

取  $k_1 = 1$  和  $k_2 = 1$  可得高、低折射率膜层的最小厚度分别为

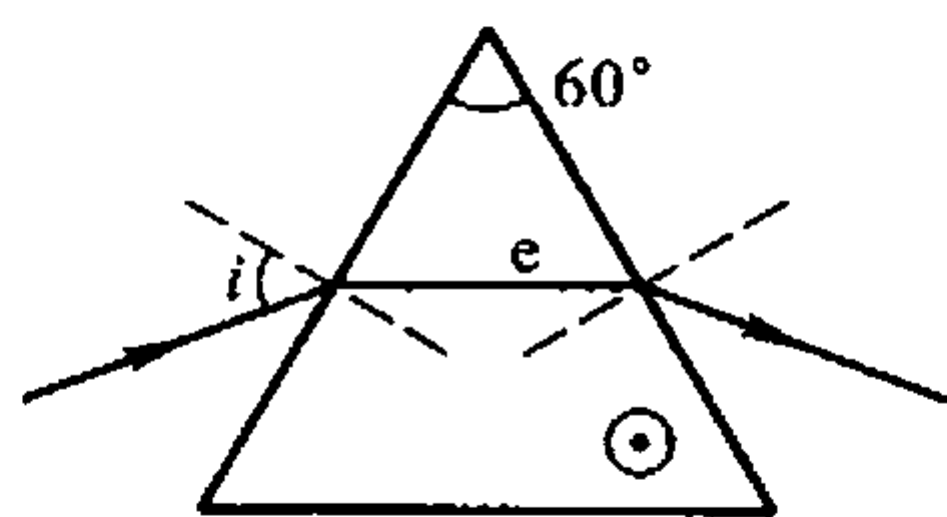
$$e_H = \frac{1.25 \times 514.5}{4 \times 2.38 \times 1.57 \times \sin 45^\circ} \text{ nm} = 61 \text{ nm}$$

和

$$e_L = \frac{2.38 \times 514.5}{4 \times 1.25 \times 1.57 \times \sin 45^\circ} \text{ nm} = 221 \text{ nm}$$

## 8. 双折射现象

**12-54.** 用方解石切割成一个  $60^\circ$  的正三角棱镜,光轴垂直于棱镜的正三角形截面. 设非偏振光的人射角为  $i$ , 而  $e$  光在棱镜内的折射线与镜底边平行如图所示,求入射角  $i$ ,并在图中画出  $o$  光的光路. 已知  $n_o = 1.49$ ,  $n_e = 1.66$ .



习题 12-54 图

**分析:** 非偏振光垂直于光轴方向入射到方解石晶体时,在晶体中垂直于光轴的平面内, $o$  光和  $e$  光的传播速度相差最大,有  $v_e > v_o$ . 两条光线的主平面不平行, $o$  光的振动方向垂直于  $o$  光的主平面, $e$  光的振动方向平行于  $e$  光的主平面,都是线偏振光. 在晶体中, $o$  光的球对称波面和  $e$  光的以光轴为对称轴的旋转椭球波面在光轴方向上相切,因此,在垂直于光轴的平面(即纸面)内, $o$  光和  $e$  光的子波波面都可表示成以入射点为圆心的同心圆弧,大圆弧与  $e$  光的波面对应.

解：入射光线垂直于光轴入射时，晶体内两条折射光线都在图示的平面内。在这个平面内，e光对应其主折射率，为一常数。所以，对e光运用折射定律，有

$$\sin i = n_e \sin r_e$$

式中  $i$  为空气中的入射角， $r_e$  为 e 光在晶体内的折射角。据题图可知  $r_e = 30^\circ$ ，所以

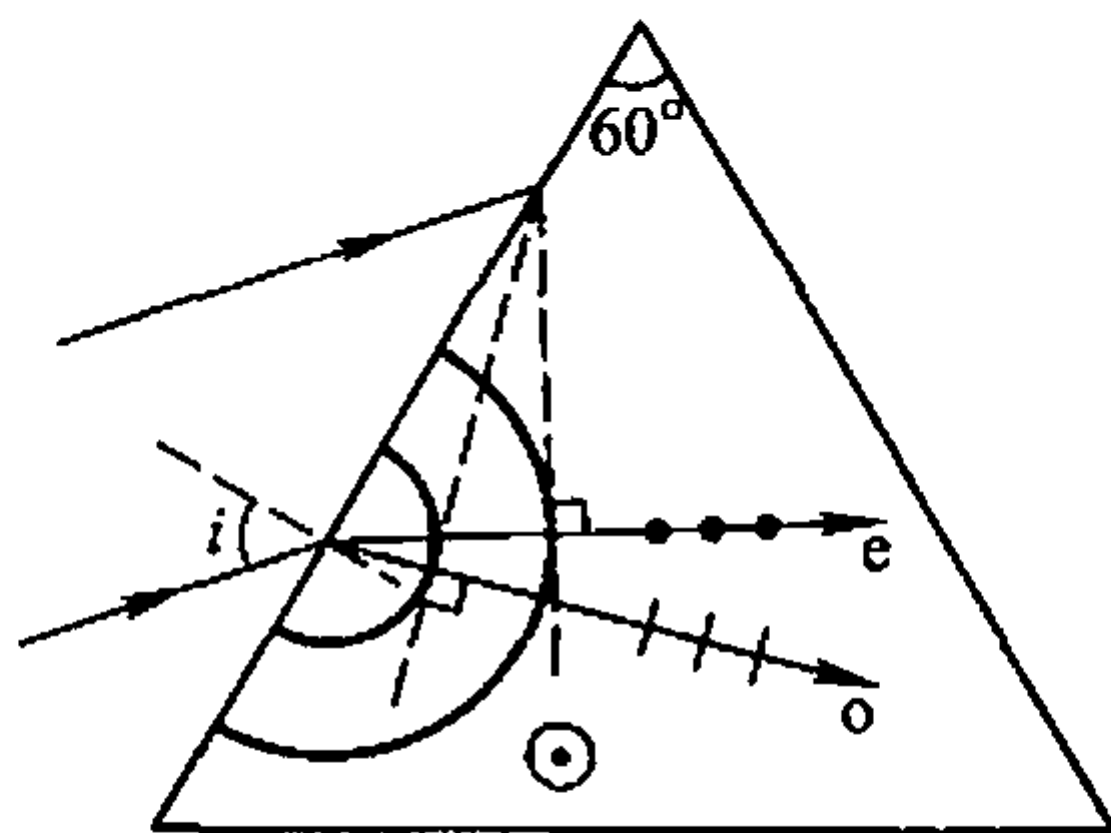
$$i = \arcsin(n_e \sin r_e) = \arcsin(1.49 \times \sin 30^\circ) \\ = 0.84 \text{ rad} = 48^\circ 10'$$

对 o 光运用折射定律，有

$$\sin i = n_o \sin r_o$$

式中  $r_o$  为 o 光在晶体内的折射角，为

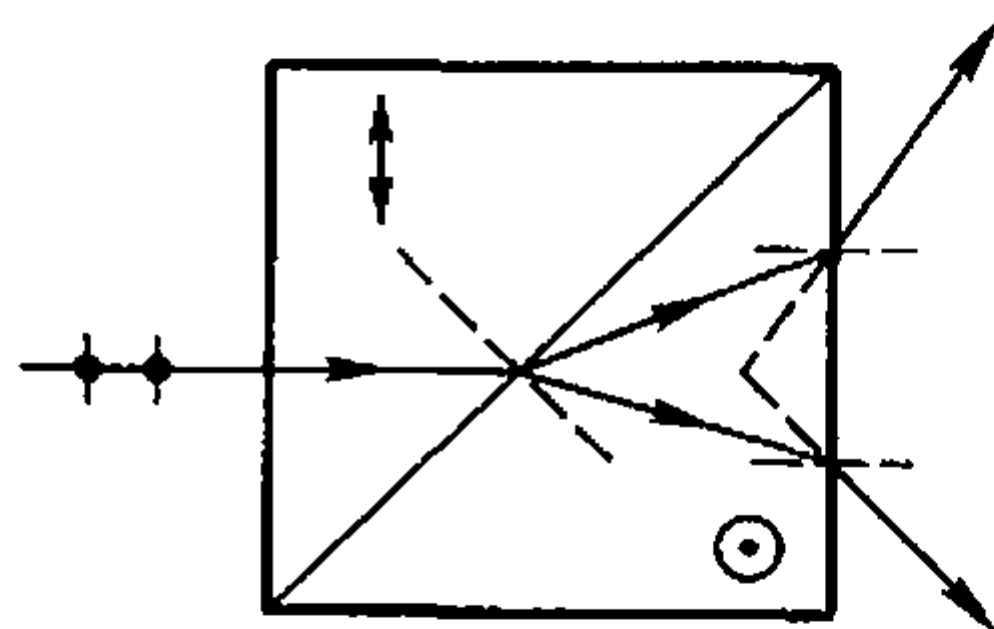
$$r_o = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n_o}\right) = \arcsin\left(\frac{0.74}{1.66}\right) = 0.47 \text{ rad} = 26^\circ 40'$$



解图 12-54

12-55. 如图所示的渥拉斯顿棱镜是由两个  $45^\circ$  的方解石棱镜组成的。光轴方向如图所示，以自然光入射，求两束出射光线间的夹角和振动方向。已知： $n_o = 1.66$ ， $n_e = 1.49$ 。

分析：如解图 12-55 所示，对 ABD 棱镜，自然光垂直于光轴并垂直于晶体表面入射，在晶体内，o 光和 e 光分别以  $v_o$  和  $v_e$  沿原方向传播， $v_o < v_e$ 。对 CBD 棱镜，来自左边棱镜的光束也垂直于光轴入射，但对 BD 表面是斜入射，因此在垂直于光轴的平面内，o 光和 e 光的传播方向将分开，这与上题情况类似。在左、右两棱镜中的 e 光都与主折射率相对应，以最大速率  $v_e$  传播。但需注意，左边棱镜 ABD 中 o 光和 e 光的主平面重合，而右边棱镜 CBD 中 o 光和 e 光的主平面不重合；左边棱镜中的 o 光，在右边棱镜中成为 e 光，左边的 e 光，则成为右边的 o 光。当两光线从 CBD 棱镜出射后，相当于从光密介质进入光疏介质，所以两光线将分得更开。



习题 12-55 图

解：如解图 12-55 所示，在 BD 界面，来自左边棱镜的光束以  $i = 45^\circ$  入射。如前所述，入射于 BD 的 o 光，折射成 e 光，设折射角为  $i_o$ ，入射的 e 光，则折射成 o 光，设折射角为  $i_e$ 。根据折射定律，有

$$n_e \sin i = n_o \sin i_o \text{ 和 } n_o \sin i = n_e \sin i_e$$

$$\text{可解得 } i_o = \arcsin\left(\frac{n_e \sin i}{n_o}\right) = \arcsin\left(\frac{1.49 \times \sqrt{2}}{1.66 \times 2}\right) = 0.69 \text{ rad} = 39^\circ 24'$$

$$\text{和 } i_e = \arcsin\left(\frac{n_o \sin i}{n_e}\right) = \arcsin\left(\frac{1.66 \times \sqrt{2}}{1.49 \times 2}\right) = 0.91 \text{ rad} = 51^\circ 58'$$

由解图 12-55 可知,  $CBD$  棱镜中的  $o$  光在  $DC$  界面的入射角  $i_{o1}$  为

$$i_{o1} = i - i_o = 45^\circ - 39^\circ 24' = 5^\circ 36'$$

$e$  光在  $DC$  界面的入射角  $i_{e1}$  为

$$i_{e1} = i_e - i = 51^\circ 58' - 45^\circ = 6^\circ 58'$$

经  $DC$  界面折射后, 这两个偏振光束在空气中的折射角分别设为  $i_{o2}$  和  $i_{e2}$ , 再次运用折射定律, 有

$$n_e \sin i_{e1} = \sin i_{e2} \text{ 和 } n_o \sin i_{o1} = \sin i_{o2}$$

可解得

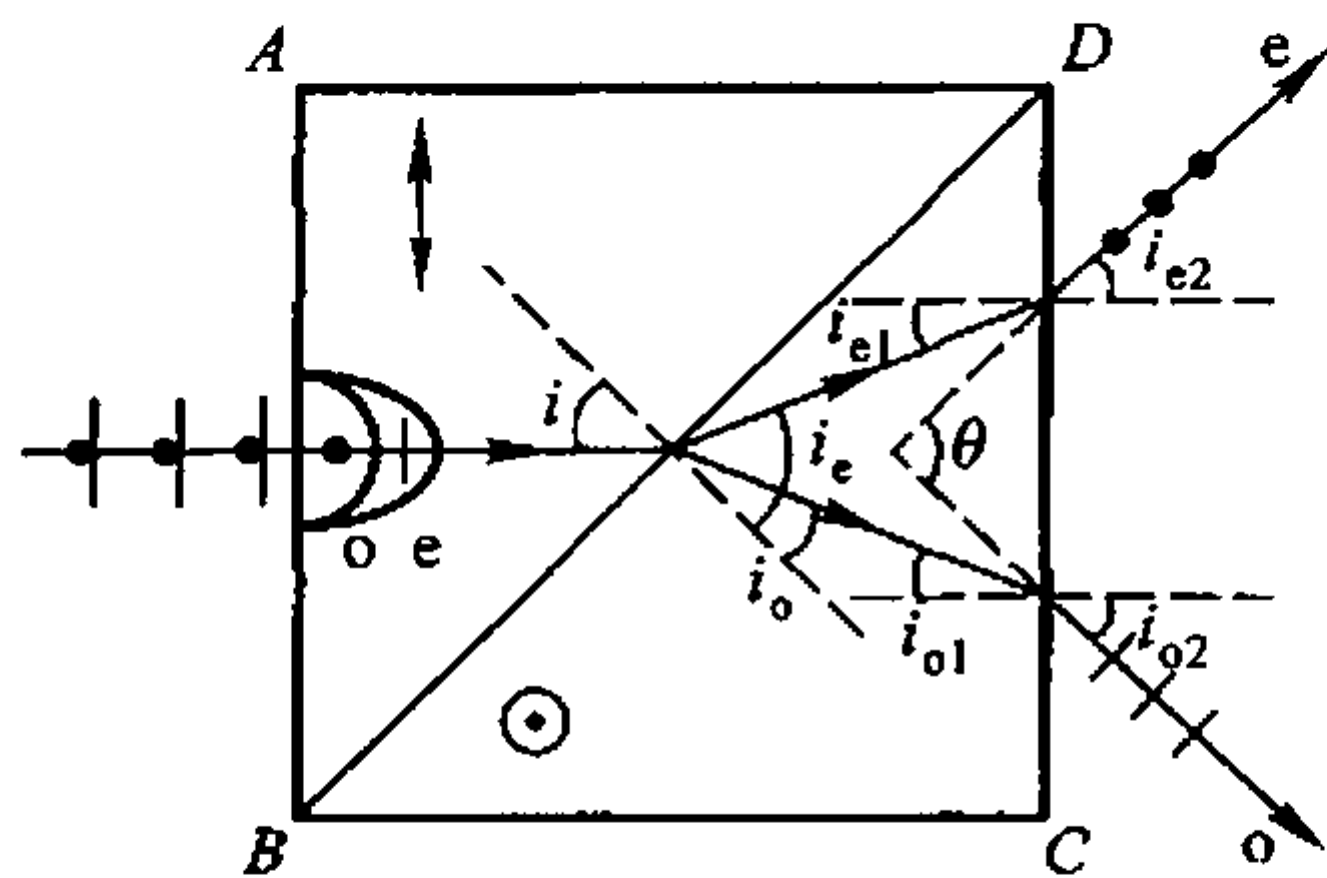
$$\begin{aligned} i_{e2} &= \arcsin(n_e \sin i_{e1}) \\ &= \arcsin(0.18) = 0.18 \text{ rad} = 10^\circ 25' \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} i_{o2} &= \arcsin(n_o \sin i_{o1}) \\ &= \arcsin(0.16) = 0.16 \text{ rad} = 9^\circ 19' \end{aligned}$$

所以, 两束出射光线间的夹角为

$$\theta = i_{e2} + i_{o2} = 19^\circ 44'$$

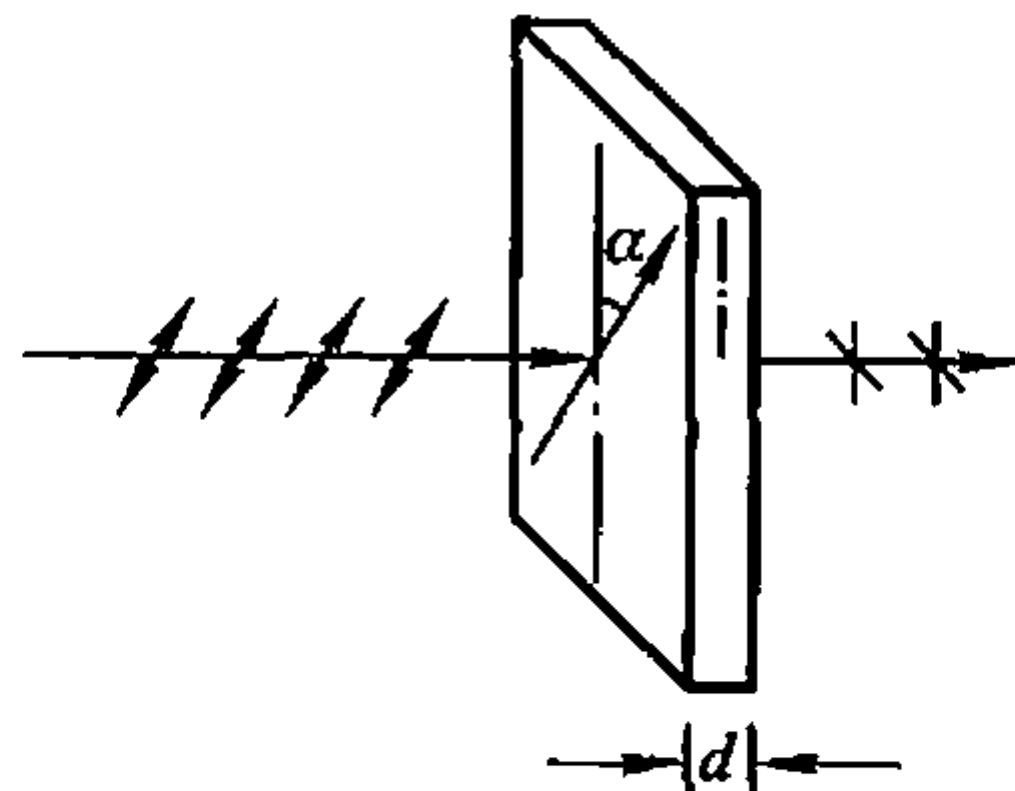


解图 12-55

**12-56.** 线偏振光垂直入射于双折射晶片, 晶片的光轴与晶面平行, 如图.

入射光的光振动方向与晶片的光轴之间的夹角为  $\alpha$ , 则偏振光在晶片内将分成振动面相互垂直的  $o$  光和  $e$  光. 适当选择晶片的厚度, 使透过晶片的  $o$  光和  $e$  光的相位差  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ , 这样的晶片称为四分之一

波片. 已知石英晶片对钠黄光 ( $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ ) 的两个主折射率  $n_e = 1.553$ ,  $n_o = 1.541$ . 求石英晶片制成  $\frac{1}{4}$  波片的最小厚度.



习题 12-56 图

**分析:** 入射偏振光的振动方向既有平行于光轴的分量, 也有垂直于光轴的分量, 在晶片内将激发出  $o$  光和  $e$  光. 由于入射光线垂直于晶片表面和光轴, 因此,  $o$  光和  $e$  光在晶体内将沿原方向即垂直于光轴的方向分别以  $v_o$  和  $v_e$  传播. 在石英晶体内  $v_o > v_e$ , 与主折射率  $n_o$  和  $n_e$  相对应, 所以, 传播一段距离  $d$  产生的光程差为  $(n_e - n_o)d$ .

**解:** 设石英晶片的厚度为  $d$ ,  $o$  光和  $e$  光波长的为  $\lambda$ , 通过  $\frac{1}{4}$  波片产生的光程差为

$$\delta = (n_e - n_o)d = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

$k=0$ , 对应  $\frac{1}{4}$  波片的最小厚度  $d_0$ .

$$d_0 = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = \frac{589.3 \times 10^{-9}}{4 \times (1.553 - 1.541)} \text{ m} = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.012 \text{ mm}$$

**12-57.** 一厚度为  $10 \mu\text{m}$  的方解石晶片, 其光轴平行于表面, 放置在两正交偏振片之间, 晶片的光轴与第一偏振片的偏振化方向夹角为  $45^\circ$ , 若要使波长  $600 \text{ nm}$  的光通过上述系统后呈现极大, 晶片的厚度至少需磨去多少.

**分析:** 如解图 12-57 所示, 经起偏器  $P_1$  透射的线偏振光 (振幅为  $A$ ), 其振动方向平行于  $P_1$  的透光方向, 与晶片光轴成  $45^\circ$ , 在晶片内形成传播方向相同但振动方向互相垂直的  $o$  光 (振幅为  $A_o$ ) 和  $e$  光 (振幅为  $A_e$ ).

在方解石晶片内,  $o$  光 ( $A_o$ ) 和  $e$  光 ( $A_e$ ) 以主折射率  $n_o$  ( $1.66$ ) 和  $n_e$  ( $1.49$ ) 相对应的速率  $v_o$  和  $v_e$  传播,  $v_o < v_e$ , 因此, 通过晶片  $d$  后, 这两束互相垂直的偏振光之间有一与晶片厚度  $d$  有关的相位差  $\Delta\varphi_0$ .

当  $A_o$  和  $A_e$  再垂直入射于检偏器  $P_2$  时, 它们与  $P_2$  透光方向平行的光振动分量  $A_{2o}$  和  $A_{2e}$  可以透过, 但方向相反, 因此, 又附加了相位  $\pi$ .

所以,  $A_{2o}$  和  $A_{2e}$  是两个振动方向相同、频率相同、相位差恒定的相干光. 当总相位差  $\Delta\varphi$  等于  $2\pi$  的整数倍时, 经  $P_2$  的透射偏振光将因干涉而呈现极大.

**解:** 设晶片厚度为  $d$ , 两互相垂直的偏振光  $A_o$  和  $A_e$  在晶片后表面时的相位差为

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

由于通过  $P_2$  的  $A_{2o}$  和  $A_{2e}$  又附加有相位  $\pi$ . 所以, 在  $P_2$  方向振动的  $A_{2o}$  和  $A_{2e}$  之间总的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi$$

干涉加强时有

$$\Delta\varphi = 2k\pi$$

所以, 能够呈现透射的偏振光干涉极大的晶片厚度为

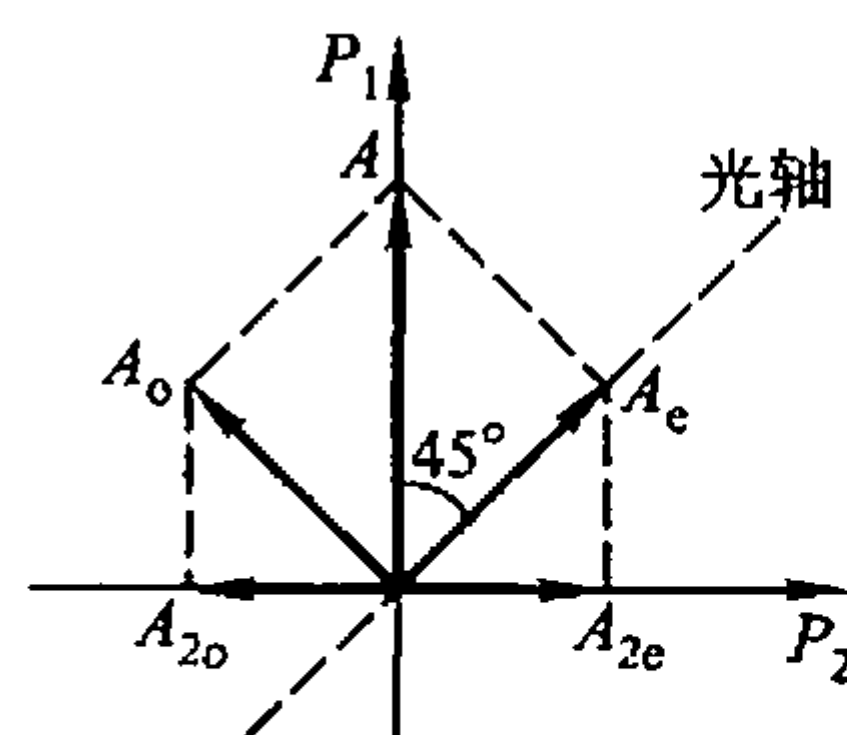
$$\begin{aligned} d &= (2k-1) \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)} = (2k-1) \frac{600 \times 10^{-3}}{2 \times (1.66 - 1.49)} \mu\text{m} \\ &= 1.76(2k-1) \mu\text{m} \end{aligned}$$

取  $k=3$ , 有

$$d = 1.76 \times 5 \mu\text{m} = 8.8 \mu\text{m}$$

因此, 需要磨去的晶片厚度为

$$\Delta = 10 \mu\text{m} - 8.8 \mu\text{m} = 1.2 \mu\text{m}$$



解图 12-57

# 第十三章

## 早期量子论和量子力学基础

### 一、教学基本要求

1. 理解黑体辐射、光电效应、康普顿效应和氢原子光谱等的实验规律,经典理论解释的困难和早期量子论的解释.
2. 理解戴维孙-革末实验规律,德布罗意的物质波假设. 理解物质波的波粒二象性和不确定关系.
3. 理解波函数及其概率解释. 理解薛定谔方程及其对一维无限深势阱、一维势垒和隧道效应的量子力学描述.
4. 理解氢原子的能量和角动量量子化,电子自旋. 理解原子的壳层结构.

### 二、本章习题分类

1. 黑体辐射规律的应用
2. 光电效应和康普顿效应关系式的应用
3. 玻尔氢原子理论的应用
4. 德布罗意波和不确定关系的应用
5. 波函数的计算

### 三、习题分析和解答

1. 黑体辐射规律的应用

**13-1.** 估测星球表面温度的方法之一是:将星球看成黑体,测量它的辐射峰值波长  $\lambda_m$ ,利用维恩位移定律便可估计其表面温度. 如果测得北极星和天狼星的  $\lambda_m$  分别为  $0.35\ \mu\text{m}$  和  $0.29\ \mu\text{m}$ ,试计算它们的表面温度.

**分析:** 根据维恩位移定律,与黑体辐射本领极大值相对应的波长  $\lambda_m$  与绝对温度  $T$  的乘积为一不变的常数可知,当辐射曲线的最高峰向短波方向移动时,黑体的温度升高.

解：根据维恩位移定律  $T\lambda_m = b$   
 可得北极星的表面温度为

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{m1}} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.35 \times 10^{-6}} \text{ K} = 8.28 \times 10^3 \text{ K}$$

天狼星的表面温度为

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{m2}} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.29 \times 10^{-6}} \text{ K} = 9.99 \times 10^3 \text{ K}$$

13-2. 在加热黑体过程中,其单色辐出度的峰值波长由  $0.69 \mu\text{m}$  变化到  $0.50 \mu\text{m}$ ,求总辐出度改变为原来的多少倍?

分析：根据黑体被加热前后辐射的峰值波长之比,由维恩位移定律可得到其温度之比. 斯特藩-玻尔兹曼定律给出了黑体的总辐出度与绝对温度的四次方成正比,由此可求得黑体被加热前后的总辐出度之比.

解：设  $\lambda_{m1} = 0.69 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_{m2} = 0.50 \mu\text{m}$ . 根据维恩位移定律  $T\lambda_m = b$ ,可得黑体温度之比为

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} = \frac{0.69}{0.50} = 1.38$$

根据斯特藩-玻尔兹曼定律  $M_0 = \sigma T^4$

可得黑体总辐出度之比为  $\frac{M_{02}}{M_{01}} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = (1.38)^4 = 3.63$  倍

13-3. 假设太阳表面温度为  $5800 \text{ K}$ ,太阳半径为  $6.96 \times 10^8 \text{ m}$ . 如果认为太阳的辐射是稳定的,求太阳在一年内由于辐射,它的质量减小了多少?

分析：根据狭义相对论的质能关系,太阳在辐射能量的同时,其质量必有相应的变化. 已知太阳表面温度时,根据斯特藩-玻尔兹曼定律,可求得太阳通过其表面辐射出的总功率,从而求得与一年内辐射能量相应的质量亏损.

解：太阳通过其表面辐射出的总功率为

$$P = M_0 S = \sigma T^4 4\pi R^2$$

太阳在一年内辐射出的总能量为

$$\Delta E = P \Delta t$$

太阳在一年内的质量亏损为

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4 \Delta t}{c^2} \\ &= \frac{4\pi \times (6.96 \times 10^8)^2 \times 5.67 \times 10^{-8} \times (5.8 \times 10^3)^4 \times 3600 \times 24 \times 365}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg} \\ &= 1.37 \times 10^{17} \text{ kg} \end{aligned}$$

\*13-4. 黑体的温度  $T_1 = 6\,000\text{ K}$ , 问  $\lambda_1 = 0.35\text{ }\mu\text{m}$  和  $\lambda_2 = 0.70\text{ }\mu\text{m}$  的单色辐出度之比等于多少? 当温度上升到  $T_2 = 7\,000\text{ K}$  时,  $\lambda_1$  的单色辐出度增加到原来的多少倍?

分析: 普朗克成功地解释了黑体辐射的实验规律, 给出了黑体的光谱辐射出射度(单色辐射本领)随辐射波长而变化的公式. 利用普朗克公式求解本题.

解: 利用普朗克公式  $M_\lambda(T) = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$  可得.

(1) 温度为  $T_1$  时,  $\lambda_1 = 0.35\text{ }\mu\text{m} = 0.35 \times 10^{-6}\text{ m}$  和  $\lambda_2 = 0.70\text{ }\mu\text{m} = 0.70 \times 10^{-6}\text{ m}$  的单色辐出度之比为

$$\frac{M_{\lambda_1}(T_1)}{M_{\lambda_2}(T_1)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT_1}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT_1}} - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT_1}} - 1 &= \exp\left(\frac{hc}{\lambda_1 kT_1}\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.35 \times 10^{-6} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 6 \times 10^3}\right) - 1 \\ &= \exp 6.86 - 1 = 956.6 - 1 = 955.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT_1}} - 1 &= \exp\left(\frac{hc}{\lambda_2 kT_1}\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.7 \times 10^{-6} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 6 \times 10^3}\right) - 1 \\ &= \exp 3.43 - 1 = 30.9 - 1 = 29.9 \end{aligned}$$

$$\text{所以, 有 } \frac{M_{\lambda_1}(T_1)}{M_{\lambda_2}(T_1)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT_1}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT_1}} - 1} = 2^5 \times \frac{29.9}{955.6} = 1.0013$$

(2) 当温度上升到  $T_2 = 7\,000\text{ K}$  时,  $\lambda_1$  的单色辐出度为

$$M_{\lambda_1}(T_2) = 2\pi hc^2 \lambda_1^{-5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT_2}} - 1}$$

与温度为  $T_1$  时  $\lambda_1$  单色辐出度的比值为

$$\frac{M_{\lambda_1}(T_2)}{M_{\lambda_1}(T_1)} = \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT_1}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT_2}} - 1}$$

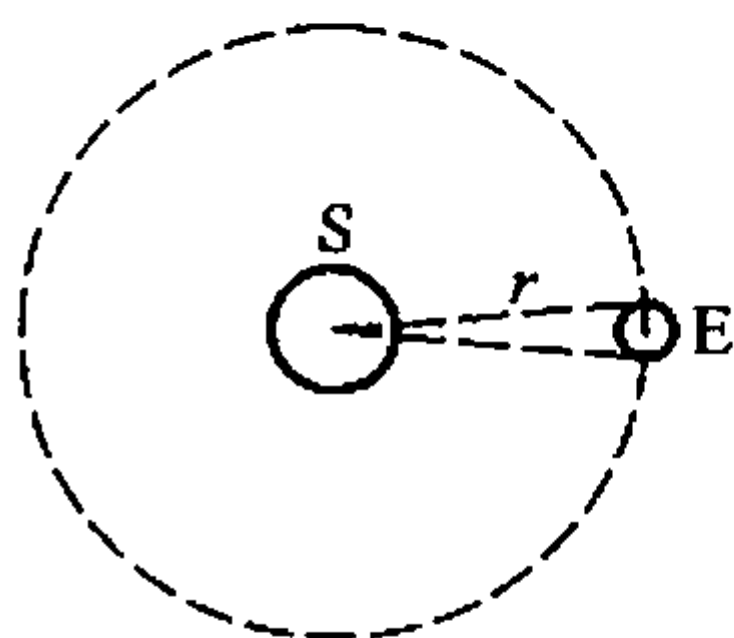
$$\begin{aligned} \text{式中 } e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT_2}} - 1 &= \exp\left(\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.35 \times 10^{-6} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 7 \times 10^3}\right) - 1 \\ &= \exp 5.88 - 1 = 358.8 - 1 = 357.8 \end{aligned}$$

$$\text{所以, 有 } \frac{M_{\lambda_1}(T_2)}{M_{\lambda_1}(T_1)} = \frac{955.6}{357.8} = 2.67$$

\*13-5. 假定太阳和地球都可以看成黑体, 如太阳表面温度  $T_s = 6\,000\text{ K}$ , 地球表面各处温度相同, 试求地球的表面温度(已知太阳的半径  $R_s = 6.96 \times 10^5\text{ km}$ ,

太阳到地球的距离  $r = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$ ).

分析: 根据题给简化模型, 太阳在单位时间内辐射的能量均匀分布在以  $r$  为半径的球面上, 单位时间内地球所接受到的辐射能量(功率), 可等效为均匀分布在过地心的地球截面上, 如解图 13-5 所示. 根据斯特藩-玻尔兹曼定律, 由太阳表面的辐出度(单位面积辐射的功率), 可得到太阳的辐射总功率. 根据地球接受到的辐射功率, 再由斯特藩-玻尔兹曼定律, 可求得地球的表面温度.



解图 13-5

解: 太阳辐射的总功率为

$$P_S = M_S(T_S)S = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$$

在半径为  $r$  的球面上, 单位面积上的太阳辐射功率为  $\frac{P_S}{4\pi r^2}$ , 地球接受太阳辐射的等效截面为  $S_E = \pi R_E^2$ ,  $R_E$  为地球半径. 因此, 地球接受到的辐射功率为

$$P_E = \frac{P_S}{4\pi r^2} S_E = \frac{\sigma 4\pi R_S^2 T_S^4}{4\pi r^2} \pi R_E^2 = \frac{\sigma \pi R_S^2 T_S^4}{r^2} R_E^2$$

根据斯特藩-玻尔兹曼定律, 地球表面单位面积辐射的功率(辐出度)为

$$M_E(T_E) = \sigma T_E^4 = \frac{P_E}{4\pi R_E^2} = \frac{\sigma R_S^2 T_S^4}{4r^2}$$

所以, 地球表面的温度为

$$T_E = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2r}} = 6 \times 10^3 \times \sqrt{\frac{6.96 \times 10^8}{2 \times 1.496 \times 10^{11}}} \text{ K} = 289 \text{ K}$$

13-6. 有一空腔辐射体, 在壁上有一直径为  $0.05 \text{ mm}$  的小圆孔, 腔内温度为  $7500 \text{ K}$ . 试求在  $500 \sim 501 \text{ nm}$  的微小波长范围内单位时间从小孔辐射出来的能量.

分析: 空腔壁上的小圆孔可视作黑体, 其辐出度随辐射波长的变化关系, 由普朗克公式给出. 在  $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$  波长范围内, 小圆孔单位面积的辐出度可近似表示为  $M_\lambda(T)\Delta\lambda$ , 其与小孔面积的乘积即为从小孔辐射的功率.

解: 在  $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$  波长范围内, 小圆孔单位面积的辐出度为

$$M_\lambda(T)\Delta\lambda = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{\Delta\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

设小圆孔的面积为  $S$ , 则从小圆孔辐射的功率(单位时间辐射的能量)为

$$\begin{aligned} P = M_\lambda(T)\Delta\lambda S &= 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{\Delta\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \left( \frac{1}{4} \pi d^2 \right) \\ &= \frac{(c\pi d)^2 h \Delta\lambda}{2\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \end{aligned}$$

$$\text{式中 } \frac{(c\pi d)^2 h \Delta \lambda}{2\lambda^5} = \frac{(3 \times 10^8 \times 3.14 \times 5 \times 10^{-5})^2 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 1 \times 10^{-9}}{2 \times (500 \times 10^{-9})^5} \text{ J/s}$$

$$= 2.36 \times 10^{-2} \text{ J/s}$$

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 = \exp\left(\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{500 \times 10^{-9} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 7.5 \times 10^3}\right) - 1$$

$$= \exp 3.84 - 1 = 46.7 - 1 = 45.7$$

所以,有

$$P = M_\lambda(T) \Delta \lambda S = \frac{(c\pi d)^2 h \Delta \lambda}{2\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

$$= \frac{2.36 \times 10^{-2}}{45.7} \text{ J/s} = 5.06 \times 10^{-4} \text{ J/s}$$

## 2. 光电效应和康普顿效应关系式的应用

**13-7.** 钾的光电效应红限波长为  $\lambda_0 = 0.62 \mu\text{m}$ , 求:

- (1) 钾的逸出功;
- (2) 在波长  $\lambda = 330 \text{ nm}$  的紫外光照射下, 钾的遏止电势差.

**解:** 由爱因斯坦光电效应方程  $h\nu = E_{\text{km}} + A$ , 可得

(1)  $E_k = 0$  时, 入射光子的能量最小, 等于材料的逸出功, 对应光子的红限频率, 有

$$A = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.62 \times 10^{-6}} \text{ J} = 3.21 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.01 \text{ eV}$$

(2) 产生光电效应时, 阴、阳电极间的反向电场阻止光电子向阳极运动, 电场力的功等于光电子的最大动能时, 光电流为零, 这时电极间的电势差为遏止电势差  $U_a$ . 所以有

$$E_{\text{km}} = eU_a$$

即

$$U_a = \frac{E_{\text{km}}}{e} = \frac{h\nu - A}{e} = \frac{h(\nu - \nu_0)}{e} = \frac{hc}{e} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

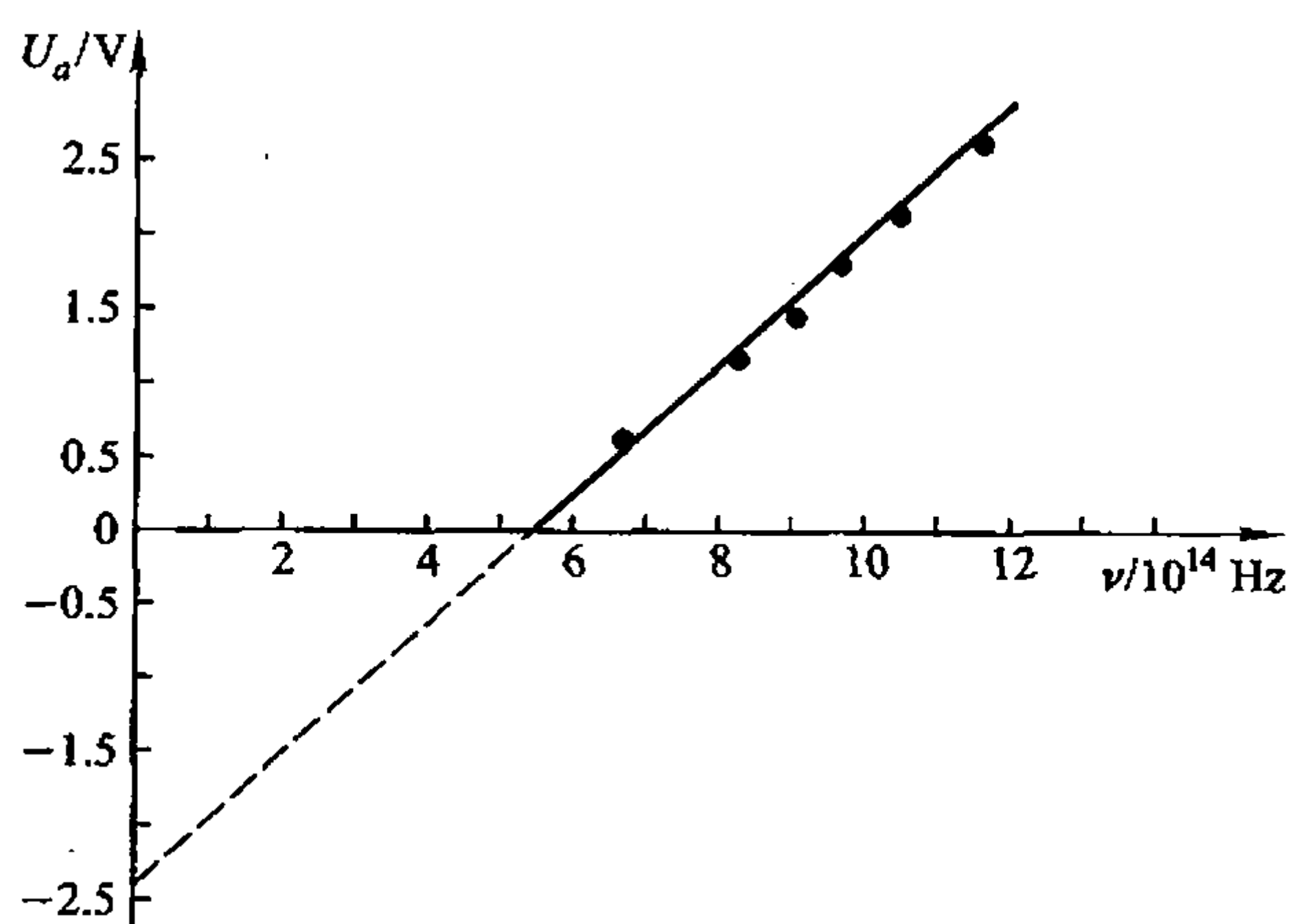
$$= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.602 \times 10^{-19} \times 1 \times 10^{-9}} \left( \frac{1}{330} - \frac{1}{620} \right) \text{ V} = 1.76 \text{ V}$$

**13-8.** 在光电效应实验中, 有个学生测得某金属的遏止电势差  $U_a$  和入射光波长  $\lambda$  的对应关系如表中所列. 画出遏止电势差与入射光频率的曲线, 并求出:

- (1) 普朗克常量  $h$ ;
- (2) 该金属的逸出功;
- (3) 该金属的光电效应红限波长和频率.

$\lambda/\text{nm}$	$U_a/\text{V}$
253.6	2.60
283.0	2.11
303.9	1.81
330.2	1.47
366.3	1.10
435.8	0.57

解：(1) 利用真空中  $c = \lambda\nu$  关系, 将实验数据转换为  $U_a - \nu$  关系, 如下表所示, 画出的实验曲线如解图 13-8.



解图 13-8

$\lambda/\text{nm}$	$\nu/10^{14} \text{ Hz}$	$U_a/\text{V}$
253.6	11.8	2.60
283.0	10.6	2.11
303.9	9.87	1.81
330.2	9.09	1.47
366.3	8.19	1.10
435.8	6.88	0.57

图示实验曲线可用直线方程表示为

$$U_a = k\nu - U_0$$

式中  $k$  为直线斜率.

将直线方程与光电效应方程

$$E_{\text{km}} = h\nu - A$$

相比较,有

$$eU_a = ek\nu - eU_0$$

由于  $E_{km} = eU_a$ , 故有

$$U_a = \frac{h\nu}{e} - \frac{A}{e}$$

即

$$h = ek, \quad A = eU_0$$

由实验数据可得直线斜率  $k$ , 有

$$k = \frac{\Delta U}{\Delta \nu} = \frac{2.60 - 0.57}{(11.8 - 6.88) \times 10^{14}} \text{ V} \cdot \text{s} = 4.13 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

所以, 普朗克常量为

$$h = ek = 1.602 \times 10^{-19} \times 4.13 \times 10^{-15} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.61 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

(2) 该金属的逸出功为

$$A = eU_0$$

式中  $U_0$  为实验曲线对纵坐标轴的截距, 由图可得截距

$$-U_0 = U_y - k\nu = 2.60 \text{ V} - 4.13 \times 10^{-15} \times 11.8 \times 10^{14} \text{ V} = -2.27 \text{ V}$$

所以, 逸出功为

$$A = eU_0 = 2.27 \text{ eV}$$

(3) 实验曲线与横坐标轴的交点对应该金属的红限频率, 即  $U_a = 0$  时,  $k\nu_0 = U_0$ . 所以

$$\nu_0 = \frac{U_0}{k} = \frac{2.27}{4.13 \times 10^{-15}} \text{ Hz} = 5.50 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

红限波长为

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 545.5 \text{ nm}$$

**13-9.** 铝的逸出功为 4.2 eV. 今用波长为 200 nm 的紫外光照射到铝表面上, 发射的光电子的最大初动能为多少? 遏止电势差为多大? 铝的红限波长是多大?

**解:** 根据光电效应方程  $h\nu = E_{km} + A$   
可得光电子的最大初动能为

$$E_{km} = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A = 3.23 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV}$$

由最大初动能与遏止电势差关系  $E_{km} = eU_a$

得

$$U_a = \frac{E_{km}}{e} = 2.0 \text{ V}$$

由逸出功与红限关系

$$A = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

可得铝的红限波长为

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A} = 296 \text{ nm}$$

**13-10.** 能引起人眼视觉的最小光强约为  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ , 如瞳孔的面积约为  $0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , 计算每秒平均有几个光子进入瞳孔到达视网膜上. 设光的平均波长为  $550 \text{ nm}$ .

**分析:** 根据爱因斯坦光子理论, 一束光波可看作一束光子流, 每个光子的能量为  $h\nu$ , 一束光的能量为  $Nh\nu$ ,  $N$  为单位时间内通过面积  $S$  的平均光子数.

**解:** 设最小光强为  $I$ , 瞳孔的面积为  $S$ , 单位时间内垂直进入瞳孔单位面积的平均光子数为  $n$ . 则根据光强的定义, 有

$$I = nh\nu = \frac{Nh\nu}{S} = \frac{Nhc}{S\lambda}$$

所以, 每秒平均进入瞳孔的光子数为

$$N = \frac{IS\lambda}{hc} = \frac{1 \times 10^{-12} \times 0.5 \times 10^{-4} \times 550 \times 10^{-9}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 138$$

**\*13-11.**  $100 \text{ W}$  钨丝灯在  $1800 \text{ K}$  温度下工作, 假定可视其为黑体, 试计算每秒内在  $500 \sim 500.1 \text{ nm}$  波长间隔内发射的光子数.

**分析:** 斯特藩-玻尔兹曼定律给出了黑体的总辐出度与绝对温度的四次方成正比的关系, 总辐出度与黑体辐射面积的乘积即为黑体辐射的总功率.

普朗克公式给出了黑体在一定温度下的单色辐出度与波长的关系, 当  $\Delta\lambda$  很小时, 在此范围内的单色辐出度  $M_\lambda(T)$  可近似为常数,  $M_\lambda(T)\Delta\lambda$  即为单位时间内, 从黑体单位面积辐射的, 波长范围为  $\Delta\lambda$  的能量. 根据爱因斯坦的光子理论, 此辐射能量是量子化的, 每个能量子即光子的能量是  $h\nu$ .

**解:** 设钨丝灯的辐射面积(黑体辐射面积)为  $S$ , 由斯特藩-玻尔兹曼定律, 可得钨丝灯的功率为

$$P = \sigma T^4 S = 100 \text{ W}$$

钨丝灯的辐射面积为

$$S = \frac{P}{\sigma T^4}$$

由普朗克公式, 可得到在温度为  $T$  时, 黑体在  $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$  波长范围内辐射的功率为

$$P(\Delta\lambda, T) = M_\lambda(T) \Delta\lambda S = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \Delta\lambda S$$

式中  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $\Delta\lambda = 0.1 \text{ nm}$ .

根据爱因斯坦光子理论, 黑体在  $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$  波长范围内辐射的功率, 即为单位时间内发射出的  $N$  个光子的总能量, 每个光子的能量为  $E = h\nu$ . 所以, 有

$$P(\Delta\lambda, T) = NE = Nh\nu = \frac{Nhc}{\lambda}$$

整理上述关系式, 可得

$$N = \frac{P(\Delta\lambda, T)\lambda}{hc} = \frac{2\pi c\Delta\lambda P}{\sigma T^4 \lambda^4} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

代入数据可算得上式中

$$\begin{aligned} \frac{2\pi c\Delta\lambda P}{\sigma(T\lambda)^4} &= \frac{2 \times 3.14 \times 3 \times 10^8 \times 0.1 \times 10^{-9} \times 100}{5.67 \times 10^{-8} \times (1.8 \times 10^3 \times 500 \times 10^{-9})^4} = 5.06 \times 10^{20} \\ e^{hc/\lambda kT} - 1 &= \exp\left(\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{500 \times 10^{-9} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 1.8 \times 10^3}\right) - 1 \\ &= 9.02 \times 10^6 \end{aligned}$$

所以,每秒在 500 ~ 500.1 nm 波长间隔内发射的光子数为

$$N = \frac{5.06 \times 10^{20}}{9.02 \times 10^6} = 5.61 \times 10^{13}$$

**13-12.** 如果一个光子的能量等于一个电子的静止能量,问该光子的频率、波长和动量各是多少? 在电磁波谱中属于何种射线?

**解:** 设电子的静止质量为  $m_{e0}$ , 相应的静止能量为  $E_{e0}$ , 一个光子的能量为  $E$ . 有

$$E_{e0} = m_{e0}c^2, \quad E = h\nu$$

据题意,  $E = E_{e0}$ , 即有

$$m_{e0}c^2 = h\nu$$

所以,这个光子的频率为

$$\nu = \frac{m_{e0}c^2}{h} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{6.63 \times 10^{-34}} \text{ Hz} = 1.24 \times 10^{20} \text{ Hz}$$

光子波长为  $\lambda = \frac{c}{\nu} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m} = 2.43 \times 10^{-3} \text{ nm}$

光子动量为  $p = \frac{E}{c} = m_{e0}c = \frac{h}{\lambda} = 2.73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

在电磁波谱中属于  $\gamma$  射线.

**13-13.** 已知 X 射线的光子能量为 0.60 MeV, 在康普顿散射后波长改变了 20 %, 求反冲电子获得的能量和动量.

**分析:** 在康普顿散射中,入射光子和自由电子在相互作用过程中的能量和动量守恒. 已知入射光子的能量,在求得散射光子的能量后,即可由能量守恒定律求得反冲电子的能量(动能). 由于散射光子波长的增量  $\Delta\lambda$  与散射角  $\varphi$  有关,因此可先求出散射光子的动量,并由动量守恒定律求得反冲电子的动量.

**解:** 设入射光子的能量为  $E_0$ , 散射光子的能量为  $E_\varphi$ , 反冲电子的能量为  $E_e$ , 入射光子的波长为  $\lambda_0$ , 散射光子的波长为  $\lambda$ . 则有

$$E_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = (1 + 0.2)\lambda_0 = 1.2\lambda_0$$

$$\text{散射光子的能量为 } E_\varphi = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{1.2\lambda_0} = \frac{E_0}{1.2}$$

根据能量守恒定律,有  $E_0 = E_\varphi + E_e$   
得反冲电子的能量为

$$E_e = E_0 - E_\varphi = \left(1 - \frac{1}{1.2}\right)E_0 = \left(1 - \frac{1}{1.2}\right) \times 0.60 \text{ MeV} = 0.10 \text{ MeV}$$

设沿  $x$  轴正方向入射的 X 射线光子的动量为  $p_0$ , 如解图 13-13 所示, 若求得散射光子的动量  $p_\varphi$ , 即可运用动量守恒定律可求得反冲电子所获动量  $p_e$ . 利用散射光子波长的改变  $\Delta\lambda$  与散射角  $\varphi$  的关系, 可先求出散射角  $\varphi$ .

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 0.2\lambda_0 = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

式中  $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ , 为电子的康普顿波长.

$$\varphi = 2\arcsin \sqrt{\frac{0.2\lambda_0}{2\lambda_c}} = 2\arcsin \sqrt{\frac{0.2hc}{2\lambda_c E_0}}$$

$$= 2\arcsin \sqrt{8.5 \times 10^{-2}} \text{ rad} = 0.59 \text{ rad} = 33.96^\circ$$

设反冲电子所获动量  $p_e$  与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ ,  $p_0$  和  $p_\varphi$  的大小分别为

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0} \text{ 和 } p_\varphi = \frac{h}{\lambda}$$

根据动量守恒定律,有  $0 = p_\varphi \sin \varphi - p_e \sin \theta$

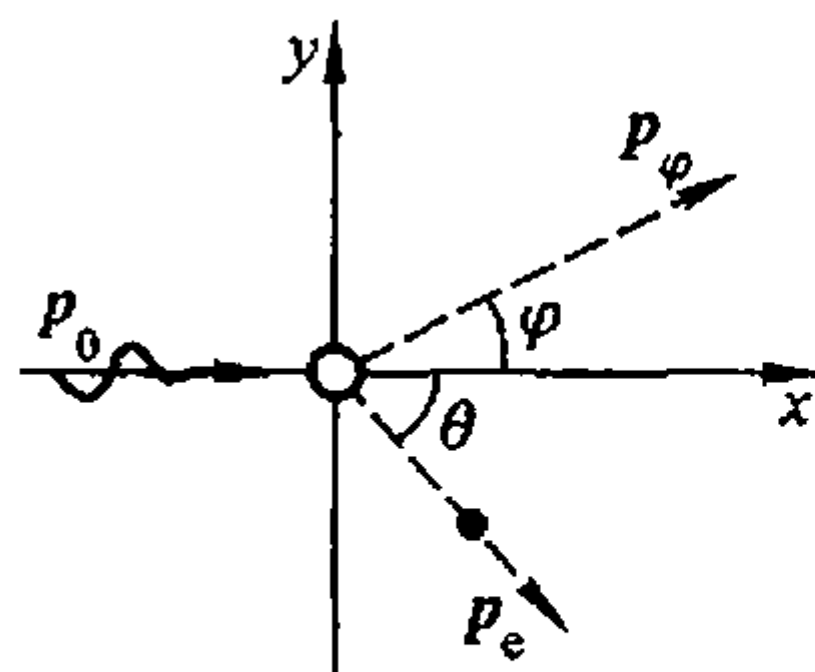
和  $p_e^2 = p_\varphi^2 + p_0^2 - 2p_0 p_\varphi \cos \varphi$

可解得反冲电子所获动量的大小为

$$\begin{aligned} p_e &= \sqrt{p_\varphi^2 + p_0^2 - 2p_0 p_\varphi \cos \varphi} \\ &= \frac{h}{\lambda\lambda_0} \sqrt{\lambda^2 + \lambda_0^2 - 2\lambda\lambda_0 \cos \varphi} \\ &= \frac{h}{1.2\lambda_0} \sqrt{1.2^2 + 1 - 2 \times 1.2 \cos \varphi} \\ &= \frac{E_0}{1.2c} \sqrt{2.44 - 2.4 \cos \varphi} = 1.78 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

与  $x$  轴的夹角为

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin \left( \frac{p_\varphi \sin \varphi}{p_e} \right) = \arcsin \left( \frac{E_0}{1.2cp_e} \sin \varphi \right) \\ &= \arcsin 0.83 \text{ rad} = 0.99 \text{ rad} = 56.57^\circ \end{aligned}$$



解图 13-13

13-14. 在康普顿散射中,入射 X 射线的波长为  $3 \times 10^{-3} \text{ nm}$ . 反冲电子的速率为  $0.6c$ ,求散射光子的波长和散射方向.

分析: 在康普顿散射中,入射光子和自由电子在相互作用过程中的能量守恒,动量也守恒. 根据能量守恒定律可知,反冲电子的动能等于入射光子与散射光子的能量之差. 由散射光子的能量可得到散射光子的波长. 利用散射光子的波长改变量与散射角的关系,可求得散射方向  $\varphi$ .

解: 设电子的静止质量为  $m_0$ ,运动质量为  $m$ . 根据相对论可知,电子在相互作用过程中所获动能为

$$\begin{aligned}\Delta E &= mc^2 - m_0c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) m_0c^2 \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} - 1 \right) m_0c^2 = 0.25m_0c^2\end{aligned}$$

设入射光子的能量为  $E_0$ ,波长为  $\lambda_0$ ,散射光子的能量为  $E_\varphi$ ,波长为  $\lambda$ ,根据能量守恒定律,散射光子能量为  $E_\varphi = E_0 - \Delta E$

即 
$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} - \Delta E$$

可得散射光子的波长为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{hc\lambda_0}{hc - \Delta E\lambda_0} = \frac{h\lambda_0}{h - 0.25m_0c\lambda_0} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{-12}}{6.63 \times 10^{-34} - 0.25 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8 \times 3 \times 10^{-12}} \text{ m} \\ &= 4.34 \times 10^{-12} \text{ m} = 4.34 \times 10^{-3} \text{ nm}\end{aligned}$$

因为 
$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

式中  $\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ ,是电子的康普顿波长. 所以,得散射角为

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\arcsin \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_c}} = 2\arcsin \sqrt{\frac{1.34 \times 10^{-3}}{2 \times 2.43 \times 10^{-3}}} \text{ rad} \\ &= 2\arcsin 0.53 \text{ rad} = 1.11 \text{ rad} = 63.34^\circ\end{aligned}$$

13-15. 以  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  的可见光和  $\lambda_2 = 0.04 \text{ nm}$  的 X 射线与自由电子碰撞,在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  的方向上观察散射光.

(1) 计算两种情况下,波长的相对改变量  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$  之比和电子获得的动能之比;

(2) 欲获得明显的康普顿效应,应如何选取入射光?

解: 设入射光的波长为  $\lambda_0$ , 散射光的波长为  $\lambda$ , 在散射角  $\theta = \frac{\pi}{2}$  的方向上, 散射光波长的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\pi}{4} \\ &= 2 \times 2.43 \times 10^{-3} \times \frac{1}{2} \text{ nm} = 2.43 \times 10^{-3} \text{ nm}\end{aligned}$$

散射角一定时,  $\Delta\lambda$  是一与散射物质无关的常数.

设入射光子的能量为  $E_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$ , 散射光子的能量为  $E_\varphi = h\nu_\varphi = \frac{hc}{\lambda}$ , 电子获得的动能为  $\Delta E$ . 根据能量守恒定律, 可得电子获得的动能为

$$\Delta E = E_0 - E_\varphi$$

即 
$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = hc \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0} = hc \frac{\Delta\lambda}{(\lambda_0 + \Delta\lambda)\lambda_0}$$

(1) 当  $\lambda_0$  是可见光  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  时, 波长的相对改变量为

$$V = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{\Delta\lambda}{400}$$

电子所获动能为 
$$\Delta E_1 = hc \frac{\Delta\lambda}{(\lambda_1 + \Delta\lambda)\lambda_1}$$

当  $\lambda_0$  是 X 射线  $\lambda_2 = 0.04 \text{ nm}$  时, 波长的相对改变量为

$$X = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{0.04}$$

电子所获动能为 
$$\Delta E_2 = hc \frac{\Delta\lambda}{(\lambda_2 + \Delta\lambda)\lambda_2}$$

所以, 两者波长的相对改变量之比为

$$\frac{V}{X} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{0.04}{400} = 1 \times 10^{-4}$$

两者电子所获动能之比为

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2} = \frac{(\lambda_2 + \Delta\lambda)\lambda_2}{(\lambda_1 + \Delta\lambda)\lambda_1} \approx \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 = 1 \times 10^{-8}$$

(2) 由(1)的计算结果可见, 可见光与自由电子碰撞的康普顿效应是非常微弱的, 波长的相对改变量只是用 X 射线时的万分之一, 而电子所获动能仅为用 X 射线时的亿分之一.

所以, 要获得明显的康普顿效应, 应选择短波长的 X 射线.

### 3. 玻尔氢原子理论的应用

**13-16.** 在基态氢原子被外来单色光激发后发出的巴耳末系中, 仅观察到三条谱线, 试求:

- (1) 外来光的波长;
- (2) 这三条谱线的波长.

**分析:** 在氢原子光谱中, 原子由高能态  $n$  向  $m=2$  的低能态跃迁所辐射的光谱线属巴耳末系. 仅能观察到的三条谱线, 应为  $E_5 \rightarrow E_2, E_4 \rightarrow E_2, E_3 \rightarrow E_2$  跃迁所产生的. 因此, 外来光子的能量应能将原子从基态激发到  $E_5$  态. 当然, 在跃迁中也可能产生  $E_5 \rightarrow E_4, E_5 \rightarrow E_3, E_4 \rightarrow E_3$  等谱线, 但它们不属于巴耳末系.

**解:** 以  $m$  表示氢原子的低能级,  $n$  表示氢原子的高能级, 根据氢原子光谱的实验规律, 当原子由高能态  $n$  向低能态  $m$  跃迁时, 其发射光子的频率为

$$\nu_{mn} = Rc \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

- (1) 把原子从基态  $m=1$  激发到  $n=5$  的能级所需能量为

$$E = E_5 - E_1 = h\nu_{15}$$

式中  $\nu_{15}$  为外来光子的频率  $\nu_{15} = Rc \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{5^2} \right) = Rc \left( \frac{24}{25} \right)$ .

所以, 外来光子的波长为

$$\lambda_{15} = \frac{c}{\nu_{15}} = \frac{25}{24R} = \frac{25}{24 \times 1.097 \times 10^7} \text{ m} = 95.0 \text{ nm}$$

- (2) 巴耳末系 ( $m=2$ ) 的波长可表示为

$$\lambda_{2n} = \frac{c}{\nu_{2n}} = \frac{1}{R} \left( \frac{4n^2}{n^2 - 4} \right)$$

当原子由  $n=3, 4, 5$  能态, 向  $m=2$  能态跃迁, 可激发三条巴耳末系谱线, 波长分别为

$$\begin{aligned}\lambda_{23} &= \frac{1}{R} \left( \frac{4 \times 3^2}{3^2 - 4} \right) = 656 \text{ nm} \\ \lambda_{24} &= \frac{1}{R} \left( \frac{4 \times 4^2}{4^2 - 4} \right) = 486 \text{ nm} \\ \lambda_{25} &= \frac{1}{R} \left( \frac{4 \times 5^2}{5^2 - 4} \right) = 434 \text{ nm}\end{aligned}$$

**13-17.** 在气体放电管中, 高速电子撞击原子发光. 如高速电子的能量为  $12.2 \text{ eV}$ , 轰击处于基态的氢原子, 试求氢原子被激发后所能发射的光谱线波长.

**分析:** 高速电子通过碰撞使处于基态的氢原子被激发到高能态. 当氢原子

由高能态跃迁到低能态或基态时,放出光子. 在此过程中除遵循能量守恒定律外,还遵循频率条件.

解: 氢原子的能级可表示为  $E_n = \frac{E_1}{n^2}$

式中  $E_1$  为氢原子基态的能量  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ .

设高速电子的能量为  $E$ , 在把基态氢原子激发到高能态  $E_n$  的过程中, 遵循能量守恒定律. 有

$$E = E_n - E_1 = \frac{E_1}{n^2} - E_1 = 12.2 \text{ eV}$$

可得 
$$n = \sqrt{\frac{E_1}{E + E_1}} = \sqrt{\frac{-13.6}{12.2 - 13.6}} = 3.1$$

$n$  只能取整数. 所以, 高速电子可将氢原子从基态激发到  $E_3$  能级.

根据跃迁的频率条件, 处于激发态的氢原子可能发生的跃迁为  $E_3 \rightarrow E_1$ 、 $E_3 \rightarrow E_2$  和  $E_2 \rightarrow E_1$ . 可发射光子的频率可表示为

$$\nu_{mn} = \frac{1}{h}(E_n - E_m)$$

式中  $n > m$ ,  $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ ,  $E_m = \frac{E_1}{m^2}$ .

可发射光子的波长为

$$\lambda_{mn} = \frac{c}{\nu_{mn}} = \frac{hc}{E_n - E_m} = \frac{hc}{E_1(m^2 - n^2)} = -91.2 \times \frac{n^2 m^2}{(m^2 - n^2)} \text{ nm}$$

所以, 跃迁为  $E_3 \rightarrow E_1$  时, 光子的波长为

$$\lambda_{13} = -91.2 \times \frac{3^2}{(1 - 3^2)} \text{ nm} = 102.6 \text{ nm}$$

跃迁为  $E_3 \rightarrow E_2$  时, 光子的波长为

$$\lambda_{23} = -91.2 \times \frac{3^2 \times 2^2}{(2^2 - 3^2)} \text{ nm} = 656.6 \text{ nm}$$

跃迁为  $E_2 \rightarrow E_1$  时, 光子的波长为

$$\lambda_{12} = -91.2 \times \frac{2^2}{(1 - 2^2)} \text{ nm} = 121.6 \text{ nm}$$

**13 - 18.** 试计算氢原子各线系的最长的波长  $\lambda_{\text{lm}}$  和最短的波长  $\lambda_{\text{sm}}$ .

分析: 氢原子由各激发态  $E_n$  向低能级  $E_k$  跃迁所激发光子的谱线, 因  $E_k$  不同而分属不同的线系. 能级差越大, 对应的谱线的波长越短.  $n \rightarrow \infty$  时,  $E_\infty \rightarrow 0$ , 与  $E_k$  的能级差最大, 与最短的波长  $\lambda_{\text{sm}}$  相对应, 当  $n - k = 1$ , 能级差最小, 与最长的波长  $\lambda_{\text{lm}}$  相对应.

解：氢原子各线系谱线的波数为

$$\tilde{\nu} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

式中  $n > k$ , 相应的波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\tilde{\nu}} = \frac{1}{R} \frac{n^2 k^2}{(n^2 - k^2)} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \frac{n^2 k^2}{(n^2 - k^2)} \text{ m} \\ &= 91.2 \times \frac{n^2 k^2}{(n^2 - k^2)} \text{ nm} \end{aligned}$$

对各线系,  $n \rightarrow \infty$  时, 与最短的波长  $\lambda_{\text{sm}}$  相对应, 有

$$\lambda_{\text{sm}}(k) = 91.2 \times \frac{k^2}{\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)} \text{ nm} = 91.2 k^2 \text{ nm}$$

$n - k = 1$  时, 与最长的波长  $\lambda_{\text{lm}}$  相对应, 有

$$\lambda_{\text{lm}}(n, k) = 91.2 \times \frac{n^2 k^2}{(n + k)(n - k)} \text{ nm} = 91.2 \times \frac{n^2 k^2}{(n + k)} \text{ nm}, \quad n = k + 1$$

计算可得氢原子各线系最长和最短的波长如下表所示:

光谱谱系		最短的波长 $\lambda_{\text{sm}}$	最长的波长 $\lambda_{\text{lm}}$
莱曼系	$k = 1$	91.2 nm	121.6 nm
巴耳末系	$k = 2$	364.8 nm	656.6 nm
帕邢系	$k = 3$	820.8 nm	1.876 $\mu\text{m}$
布拉开系	$k = 4$	1.459 $\mu\text{m}$	4.053 $\mu\text{m}$
普丰德系	$k = 5$	2.280 $\mu\text{m}$	7.462 $\mu\text{m}$
哈弗莱系	$k = 6$	3.283 $\mu\text{m}$	12.38 $\mu\text{m}$

**13-19.** 动能为 20 eV 的电子, 与处于基态的氢原子相碰, 使氢原子激发. 当氢原子回到基态时, 辐射出波长为 121.6 nm 的光谱. 试求碰撞后电子的速度.

**分析:** 假设电子与孤立的氢原子相碰, 由于电子质量远小于原子的质量, 因此相碰后氢原子整体没有宏观运动. 在碰撞过程中, 系统的能量守恒, 即光子的能量与碰撞后电子的动能之和等于碰撞前电子的动能. 在电子能量不很大的情况下, 可不考虑相对论效应.

**解:** 设波长为  $\lambda = 121.6 \text{ nm}$  光子的能量  $\Delta E$  为

$$\begin{aligned} \Delta E &= h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{121.6 \times 10^{-9}} \text{ J} \\ &= 1.644 \times 10^{-18} \text{ J} = 10.26 \text{ eV} \end{aligned}$$

设相碰前、后电子的动能分别为  $E_0$  和  $E_1$ , 根据能量守恒定律, 相碰后电子的动能为

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 - \Delta E = 20 \text{ eV} - 10.26 \text{ eV} = 9.74 \text{ eV} \\ &= 9.74 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.56 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

电子的动能为  $E_1 = \frac{1}{2} m_0 v^2$

式中  $m_0$  为电子的静止质量. 可得碰撞后电子的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2E_1}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.56 \times 10^{-18}}{9.11 \times 10^{-31}}} \text{ m/s} = 1.85 \times 10^6 \text{ m/s}$$

**13-20.** 对于氢原子中处于基态时的电子, 试求:

- (1) 电子绕行速率  $v$  与光速  $c$  之比值;
- (2) 电子绕行频率与可见光谱频率的比值.

**分析:** 根据玻尔的氢原子理论, 氢原子中的电子受库仑力作用, 作稳定的轨道运动而不辐射能量, 但轨道运动的角动量必须是量子化的.

**解:** 处于基态氢原子中的电子受原子核的库仑力作用, 在半径为  $r_1$  的圆周轨道上作匀速率圆周运动, 其绕核运动速率为  $v_1$ , 有

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_1^2} = m_0 \frac{v_1^2}{r_1}$$

根据玻尔的氢原子理论, 电子作稳定的绕核圆周运动, 必须满足轨道角动量的量子化条件. 基态轨道角动量为

$$L_1 = m_0 v_1 r_1 = \hbar$$

可得

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2}$$

和

$$v_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar}$$

(1) 由于  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , 改写  $v_1$  表达式, 有

$$v_1 = \frac{e^2 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \hbar} = \frac{e^2 c}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

所以, 基态电子绕行速率  $v$  与光速  $c$  的比值为

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{c} &= \frac{e^2}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{4 \times 3.14 \times 1.05 \times 10^{-34}} \sqrt{\frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12}}} \\ &= 7.3 \times 10^{-3} = \frac{1}{137} \end{aligned}$$

(2) 基态电子绕行频率为

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{v_1}{2\pi r_1} = \frac{m_0 e^4}{2\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3} = \frac{m_0 e^4}{4\epsilon_0^2 \hbar^3} \\ &= \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^4}{4 \times (8.85 \times 10^{-12})^2 \times (6.63 \times 10^{-34})^3} \text{ Hz} = 6.54 \times 10^{15} \text{ Hz}\end{aligned}$$

可见光的频率在  $10^{14}$  Hz 量级, 故电子绕行频率约为可见光频率的 10 倍.

#### 4. 德布罗意波和不确定关系的应用

**13-21.** 一束带电粒子经 206 V 电压加速后, 测得其德布罗意波长为  $2.0 \times 10^{-3}$  nm, 已知该粒子所带的电荷量与电子电荷量相等, 求这粒子的质量.

**解:** 因加速电压  $U$  较低, 带电粒子的能量不很大, 故不必考虑相对论效应. 设粒子的质量为  $m_0$ , 经加速后的动量值为  $p$ , 则动能为

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = eU$$

德布罗意波长为 
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}}$$

粒子的质量为 
$$m_0 = \frac{h^2}{2eU\lambda^2} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

**13-22.** 设电子与光子的波长均为 0.50 nm. 试求两者的动量之比以及动能之比.

**分析:** 根据德布罗意关系  $\lambda = \frac{h}{p}$ , 具有相同波长  $\lambda$  的粒子有相同的动量  $p$ . 光子的动能即光子的总能量  $E_\varphi = h\nu$ . 电子的动能  $E_e$  是否应考虑相对论动能表达式, 可先考察其静能  $m_0 c^2$  与  $p_e c$  的大小, 若  $p_e c \ll m_0 c^2$ , 可不考虑相对论效应, 即电子的动能为  $E_e = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m_0}$ , 否则需用相对论的动能表达式.

**解:** 设电子与光子的动量分别为  $p_e$  和  $p_\varphi$ , 因  $\lambda_e = \lambda_\varphi$ , 故由  $\lambda = \frac{h}{p}$  可得

$$p_e = p_\varphi = p$$

电子与光子具有相同的动量, 两者的动量之比为 1.

光子的动能可表示为

$$E_\varphi = h\nu = c \frac{h}{\lambda} = cp = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{0.50 \times 10^{-9}} \text{ J} = 3.978 \times 10^{-16} \text{ J} = 2.486 \text{ keV}$$

电子的静能为

$$m_0 c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 8.20 \times 10^{-14} \text{ J} = 0.512 \text{ MeV}$$

对比上述两式,有

$$pc = p_e c \ll m_0 c^2$$

所以,电子的动能为

$$E_e = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m_0}$$

两者的动能之比为  $\frac{E_e}{E_\varphi} = \frac{p}{2cm_0} = \frac{h}{2\lambda cm_0} = 2.43 \times 10^{-3}$

可见,当电子和光子的动量相同时,电子的动能远小于光子的动能.

**13-23.** 若一个电子的动能等于它的静能,试求该电子的速率和德布罗意波长.

分析: 参照上题的分析,在本题中电子的动能与静能相等,必须考虑相对论效应.

解: 设电子的运动质量为  $m$ , 静止质量为  $m_0$ , 运动速度为  $v$ . 根据相对论,电子的动能等于它的静能时,有

$$mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2$$

可得电子的运动质量为

$$m = 2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

可解得

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0.866c = 2.6 \times 10^8 \text{ m/s}$$

所以,该电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{3}m_0 c} = 1.4 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

**13-24.** 设一电子被电势差  $U$  加速后打在靶上,若电子的动能全部转为一个光子的能量,求当这光子相应的光波波长为 500 nm(可见光)、0.1 nm(X射线)和 0.000 1 nm( $\gamma$ 射线)时,加速电子的电势差各是多少?

解: 加速电子的动能为  $E_{ke} = eU$

光子的能量为

$$E_\varphi = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

电子的动能全部转为一个光子的能量,即有

$$E_{ke} = E_\varphi$$

所以  $U = \frac{hc}{e\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{\lambda \times 1.6 \times 10^{-19}} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{\lambda}$

光子的波长为  $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$  时(可见光)

$$U_1 = \frac{hc}{e\lambda_1} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{500 \times 10^{-9}} \text{ V} = 2.48 \text{ V}$$

光子的波长为  $\lambda_2 = 0.1 \text{ nm}$  时(X 射线)

$$U_2 = \frac{hc}{e\lambda_2} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{0.1 \times 10^{-9}} \text{ V} = 1.24 \times 10^4 \text{ V}$$

光子的波长为  $\lambda_3 = 0.0001 \text{ nm}$  时( $\gamma$  射线)

$$U_3 = \frac{hc}{e\lambda_3} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{0.0001 \times 10^{-9}} \text{ V} = 1.24 \times 10^7 \text{ V}$$

**13-25.** 在戴维孙-革末实验中,已知简单立方晶体的晶格常量  $a = 0.3 \text{ nm}$ , 电子经  $100 \text{ V}$  电压加速,求各极大值所在的方向.

**分析:** 戴维孙-革末实验用电子束对晶体的衍射,证实了电子具有波动性.

电子束在晶面上散射加强的程差,与用 X 射线对晶体衍射的分析方法相同,可由布拉格公式  $2d\sin\theta = k\lambda$  给出, $d$  为晶面间距, $\theta$  为电子束对面间距为  $d$  的晶面的掠射角.

对晶格常量为  $a$  的简单立方晶体,当电子束的入射线与散射线之间的夹角为  $\varphi$  时,布拉格公式应表示为  $a\sin\varphi = k\lambda$  或  $a\sin 2\theta = k\lambda, \varphi = \pi - 2\theta$ .

**解:** 设电子束垂直投射于晶面,散射加强的方向与晶面法向的夹角为  $\varphi$ . 已知晶格常量为  $a$ . 根据布拉格公式,有

$$a\sin\varphi = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

经  $100 \text{ V}$  电压加速的电子运动速度并不大,动能可表示为

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = eU$$

式中  $m$  为电子的静止质量.

因此,电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2me}\sqrt{U}} = \frac{1.225}{\sqrt{U}} \text{ nm}$$

所以,在电子的散射线中,各极大值所在的方向与入射线的夹角  $\varphi$  为

$$\varphi = \arcsin\left(k \frac{\lambda}{a}\right) = \arcsin\left(k \frac{1.225 \times 10^{-9}}{a \sqrt{U}}\right) = \arcsin(0.408k)$$

可得  $k=0$  时,  $\varphi=0$ ;  $k=1$  时,  $\varphi=24.1^\circ$ ;  $k=2$  时,  $\varphi=54.7^\circ$ .

**13-26.** 把热中子窄束射到简单立方晶体上,由布拉格衍射图样可以求得热中子的能量,若晶体的原子间距为  $0.18 \text{ nm}$ ,第一级加强时掠射角为  $30^\circ$ ,试求这些热中子的能量.

**分析:** 常温下的中子称为热中子,由于能量较低(动能),在讨论其波动性时,可不考虑相对论效应. 对简单立方晶体作简化处理,将原子间距视为晶格常

量,则用晶格常量和晶面掠射角的布拉格公式为  $a \sin 2\theta = k\lambda$ .

解: 设晶格常量为  $a$ , 热中子束对晶面的掠射角为  $\theta$ , 则中子束在两相邻晶面散射加强的程差为

$$a \sin 2\theta = k\lambda$$

式中  $\lambda$  为热中子的波长. 与  $\lambda$  相对应的热中子的动量和能量(动能)分别为

$$p = \frac{h}{\lambda} \text{ 和 } E = E_k = \frac{p^2}{2m_n}$$

式中  $m_n$  为中子的质量.

由上两式可得热中子的能量为 
$$E = \frac{1}{2m_n} \left( \frac{h}{k a \sin 2\theta} \right)^2$$

$k=1, \theta=30^\circ$  时, 有

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2 \times 1.67 \times 10^{-27}} \left( \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.18 \times 10^{-9} \times \sin 60^\circ} \right)^2 \text{ J} \\ &= 5.42 \times 10^{-21} \text{ J} = 3.38 \times 10^{-2} \text{ eV} \end{aligned}$$

**13-27.** 设粒子在沿  $x$  轴运动时, 速率的不确定量为  $\Delta v = 1 \text{ cm/s}$ , 试估算下列情况下坐标的不确定量  $\Delta x$ :

- (1) 电子;
- (2) 质量为  $10^{-13} \text{ kg}$  的布朗粒子;
- (3) 质量为  $10^{-4} \text{ kg}$  的小弹丸.

解: 根据不确定度关系, 粒子沿  $x$  轴运动的动量和坐标的不确定量为

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta x \cdot m \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

即 
$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 0.01m} = \frac{5.25 \times 10^{-33}}{m}$$

可得, (1) 电子的坐标不确定量为

$$\Delta x \geq \frac{5.25 \times 10^{-33}}{9.11 \times 10^{-31}} \text{ m} = 5.76 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(2) 布朗粒子的坐标不确定量为

$$\Delta x \geq \frac{5.25 \times 10^{-33}}{1 \times 10^{-13}} \text{ m} = 5.25 \times 10^{-20} \text{ m}$$

(3) 小弹丸的坐标不确定量为

$$\Delta x \geq \frac{5.25 \times 10^{-33}}{1 \times 10^{-4}} \text{ m} = 5.25 \times 10^{-29} \text{ m}$$

**13-28.** 作一维运动的电子, 其动量不确定量是  $\Delta p_x = 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , 能将

这个电子约束在内的最小容器的大概尺寸是多少?

分析: 根据电子动量的不确定范围, 由不确定度关系, 估算出电子坐标的范围.

解: 由不确定度关系  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

得 
$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-25}} \text{ m} = 5.25 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.525 \text{ nm}$$

这个范围约为玻尔半径( $0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$ )的 10 倍. 所以, 最小容器的线度约为 5 个基态氢原子沿直线排列的长度.

**13-29.** 氦氖激光器所发出的红光波长为  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , 谱线宽度  $\Delta\lambda = 10^{-9} \text{ nm}$ . 试求该光子沿运动方向的位置不确定量(即波列长度).

分析: 根据光子的谱线宽度可知其动量的不确定量, 利用不确定度关系可知光子位置的不确定量, 这与波列长度相对应.

解: 由光子的动量与波长关系  $p = \frac{h}{\lambda}$ , 可得光子动量不确定量的大小为

$$|\Delta p| = \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

根据不确定关系 
$$\Delta x \Delta p = \Delta x \cdot \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda \geq \frac{\hbar}{2}$$

可得到光子沿运动方向(光波的传播方向), 位置的不确定量为

$$\Delta x \geq \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = \frac{(632.8 \times 10^{-9})^2}{4 \times 3.14 \times 1 \times 10^{-18}} \text{ m} = 31.9 \times 10^3 \text{ m}$$

可见, 激光的波列长度远大于普通光源发光的波列长度, 所以, 激光的相干性能是远优于普通光波的.

**13-30.** 如果钠原子所发出的黄色谱线( $\lambda = 589 \text{ nm}$ )的自然宽度为  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 1.6 \times 10^{-8}$ , 计算钠原子相应该波长状态的平均寿命.

解: 原子辐射光子的能量为  $E = h\nu$  时, 光子谱线的波长为  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ . 当激发态能级有一不确定量  $\Delta E$  时, 其辐射光子的谱线有相应的不确定量  $\Delta\nu$ , 即

$$\Delta E = h\Delta\nu$$

根据能量-时间的不确定度关系 
$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

可有 
$$\Delta E \Delta t = h\Delta\nu \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

所以,原子在与波长  $\lambda$  相对应的激发态的时间不确定量,即平均寿命为

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2h\Delta\nu} = \frac{1}{4\pi\Delta\nu} = \frac{1}{4\pi\nu} \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{\lambda}{4\pi c} \frac{\nu}{\Delta\nu}$$

代入钠原子的有关数据,可得

$$\Delta t \geq \frac{589 \times 10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 3 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-8}} \text{ s} = 9.77 \times 10^{-9} \text{ s}$$

**13-31.** 利用不确定关系估算氢原子基态的结合能和第一玻尔半径(提示:写出总能量的表达式,然后利用不确定关系分析使能量为最小的条件).

解:作为粗略估算,设氢原子中的电子在半径为  $r$  的圆周轨道上运动,动量

为  $p$ ,总能量为 
$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

由于电子的平均动量和位置的平均值均为 0,故可取  $\Delta p \approx p, \Delta x \approx r$ .

根据不确定关系,应有 
$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

作为估算,这里取 
$$\Delta x \Delta p = rp = \hbar$$

即有 
$$p = \frac{\hbar}{r}$$

这样,总能量可表示为

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

基态的  $r$  应使  $E$  有最小值,即有

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

可解出氢原子基态半径,即玻尔半径为

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \\ &= \frac{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times (1.05 \times 10^{-34})^2}{9.11 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^2} \text{ m} = 0.526 \times 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

氢原子基态总能量为

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2mr_1^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = -\frac{me^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} = -\frac{me^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} = -13.6 \text{ eV}$$

**13-32.** 如果某球形病毒的直径为 5 nm. 密度为  $1.2 \text{ g/cm}^3$ . 试估算病毒的最小速率.

解:病毒的质量为 
$$m = \rho V = \frac{4}{3} \pi \rho \left( \frac{D}{2} \right)^3 = \frac{1}{6} \pi \rho D^3$$

设病毒位置的不确定量为  $\Delta x = D$ , 动量的不确定量为  $\Delta p$ , 根据坐标和动量的不确定关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

可得

$$\Delta p = m \Delta v \geq \frac{\hbar}{2 \Delta x} = \frac{\hbar}{2D}$$

病毒速率的不确定量为

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2mD} = \frac{3\hbar}{\pi \rho D^4} = 0.13 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

速率  $v$  与其不确定量  $\Delta v$  之间, 应满足条件:  $v \geq \Delta v$ , 所以, 病毒的最小速率应以其不确定量为估算值, 即

$$v \approx \Delta v = 0.13 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

## 5. 波函数的计算

13-33. 试计算在宽度为 0.1 nm 的无限深势阱中  $n = 1, 2, 10, 100, 101$  各能态电子的能量. 如果势阱宽为 1.0 cm 又如何?

解: 电子被束缚在一维无限深势阱中时的能级为

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = n^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2} = n^2 E_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

当  $a_1 = 0.1 \text{ nm}$  时, 式中  $E_1$  为

$$\begin{aligned} (E_1)_{a_1} &= \frac{\hbar^2}{8ma^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (0.1 \times 10^{-9})^2} \text{ J} \\ &= 6.03 \times 10^{-18} \text{ J} = 37.7 \text{ eV} \end{aligned}$$

当  $a_2 = 1.0 \text{ cm}$  时, 式中  $E_1$  为

$$\begin{aligned} (E_1)_{a_2} &= \frac{\hbar^2}{8ma^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (1 \times 10^{-2})^2} \text{ J} \\ &= 6.03 \times 10^{-34} \text{ J} = 3.77 \times 10^{-15} \text{ eV} \end{aligned}$$

下表列出计算所得各能态的能量值.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 10$	$n = 100$	$n = 101$
$(E_n)_{a_1}/\text{eV}$	37.7	150.8	$3.77 \times 10^3$	$3.77 \times 10^5$	$3.85 \times 10^5$
$(E_n)_{a_2}/\text{eV}$	$3.77 \times 10^{-15}$	$1.509 \times 10^{-14}$	$3.77 \times 10^{-13}$	$3.77 \times 10^{-11}$	$3.85 \times 10^{-11}$

13-34. 一维无限深势阱中粒子的定态波函数为  $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$ . 试求:

(1) 粒子处于基态时;

(2) 粒子处于  $n=2$  的状态时, 在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间找到粒子的概率.

解: 粒子在一维无限深势阱中出现的概率密度正比于波函数模的平方, 即

$$|\psi_n|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(1) 粒子在  $n=1$  的基态时出现的概率密度为

$$|\psi_1|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a}$$

在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间找到粒子的概率为

$$\int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_1|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{3}} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = 0.195$$

(2) 粒子处于  $n=2$  的状态时, 在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间找到粒子的概率为

$$\int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_2|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{3}} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx = 0.402$$

13-35. 一维运动的粒子处于如下波函数所描述的状态:

$$\psi(x) = \begin{cases} Axe^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

式中  $\lambda > 0$ .

(1) 求波函数  $\psi(x)$  的归一化常数  $A$ ;

(2) 求粒子的概率分布函数;

(3) 在何处发现粒子的概率最大?

解: (1) 在整个一维空间, 粒子出现的概率为 1, 据此归一化条件, 可求出波函数的归一化常数. 令

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = 1$$

$$\begin{aligned} \text{可有} \quad \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx &= A^2 \left( -\frac{1}{2\lambda} x^2 e^{-2\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\infty} 2x e^{-2\lambda x} dx \right) \\ &= \frac{A^2}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-2\lambda x} dx = \frac{A^2}{\lambda} \left( -\frac{1}{2\lambda} x e^{-2\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda x} dx \right) \\ &= \frac{A^2}{2\lambda^2} \left( -\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1 \end{aligned}$$

得归一化常数为

$$A = 2\lambda^{\frac{3}{2}}$$

所以,归一化的波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 2\lambda^{\frac{3}{2}}xe^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(2) 设粒子的概率分布函数为  $w(x)$ , 有

$$w(x) = |\psi(x)|^2 = \begin{cases} 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(3) 由概率分布函数对位置求极值, 即令

$$\frac{dw(x)}{dx} = 0$$

可得方程

$$8\lambda^3 xe^{-2\lambda x}(1 - \lambda x) = 0$$

解方程, 得

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \infty, \quad x_3 = \frac{1}{\lambda}$$

将这三个位置坐标代回  $w(x)$ , 即可得到发现粒子的概率最大的位置为  $x = \frac{1}{\lambda}$ .

**13-36.** 一维无限深势阱中的粒子的波函数, 在边界处为零, 这种定态物质波相当于两端固定的弦中的驻波, 因而势阱宽度  $a$  必须等于德布罗意半波长的整数倍. 试利用这一条件导出能量量子化公式

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2}n^2$$

解: 设势阱中的粒子的德布罗意波波长为  $\lambda$ . 据题意, 势阱宽度  $a$  必须等于德布罗意半波长的整数倍, 即

$$a = \frac{n\lambda}{2}$$

粒子的动量为

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

粒子的能量为

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$$

得证.

**13-37.** 一个质子在一维无限深势阱中, 阱宽  $a = 10^{-14}$  m.

(1) 质子的零点能量有多大?

(2) 由  $n=2$  态跃迁到  $n=1$  态时, 质子放出多大能量的光子?

解: 一个质子在一维无限深势阱的能量为

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2}n^2 = n^2 E_1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

式中  $E_1$  为质子的最小能量, 阱宽  $a = 10^{-14}$  m 时,

$$E_1 = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (1 \times 10^{-14})^2} \text{ J} = 3.29 \times 10^{-13} \text{ J}$$

(1) 一维无限深势阱中质子的零点能量即为最小能量  $E_1$ ,

$$E_1 = 3.29 \times 10^{-13} \text{ J}$$

(2) 质子由  $n=2$  态跃迁到  $n=1$  态时, 放出光子的能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (2^2 - 1)E_1 = 3 \times 3.29 \times 10^{-13} \text{ J} = 9.87 \times 10^{-13} \text{ J}$$

**\*13-38.** 能量为 30 eV 的电子入射在高为 40 eV 的方势垒, 如果势垒的宽度为 (1) 1.0 nm, (2) 0.1 nm, 求电子穿透该势垒的概率各为多少? 比较 (1)、(2) 的结果能得出什么启示?

分析: 电子的能量  $E = 30 \text{ eV}$  小于势垒高度  $U_0 = 40 \text{ eV}$  时, 由于隧道效应, 可以一定的概率穿越隧道, 此概率的大小, 用贯穿系数描述.

解: 设势垒的宽度为  $a$ , 将贯穿系数表示为

$$\begin{aligned} T &= \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} a \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{2 \times \sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (40 - 30) \times 1.6 \times 10^{-19}}}{1.05 \times 10^{-34}} a \right] \\ &= \exp(-3.25 \times 10^{10} a) \end{aligned}$$

(1) 当  $a_1 = 1.0 \text{ nm}$  时,

$$T_1 = \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} a_1 \right] = \exp(-32.52) = 7.52 \times 10^{-15}$$

(2) 当  $a_2 = 0.1 \text{ nm}$  时,

$$T_2 = \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} a_2 \right] = \exp(-3.25) = 3.9 \times 10^{-2}$$

由 (1)、(2) 的结果可见, 电子以相同的能量, 穿透高于自身能量的相同势垒的概率, 与势垒的宽度有关, 当势垒宽度很大时, 穿透的概率趋于零, 这与经典力学的结论相符, 即电子将完全被反射回去.

**\*13-39.** 如果将玻尔理论应用于太阳-地球的两粒子系统, 假定地球在万有引力的作用下绕太阳作半径为  $r = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$  的圆轨道运动. 由于这个系统的引力势能函数与氢原子的电势能函数有相似的数学形式, 因此太阳-地球系统的玻尔理论解与氢原子也有相似的数学形式.

(1) 写出太阳-地球系统的能量量子化关系式;

(2) 计算太阳-地球系统的“玻尔半径”;

(3) 求地球在目前轨道上运动的轨道量子数;

(4) 从上面三个计算结果, 你能得出关于经典物理与量子物理有什么关系.

(地球的质量  $m_e \approx 6 \times 10^{24}$  kg, 太阳的质量  $m_s \approx 2 \times 10^{30}$  kg.)

分析: 将太阳-地球作为两粒子系统, 与电子-原子核两粒子构成的氢原子系统相似. 太阳-地球间的引力势能函数与电子-原子核间的电势能函数的数学形式也相似. 因此, 若将太阳与原子核、地球与电子、万有引力势能与电势能作代换, 则由玻尔理论得到太阳-地球系统的结果应与氢原子的相似. 当然, 在太阳-地球系统中, 不考虑其他行星对地球的引力, 以太阳为参考系.

解: 设太阳的质量为  $m_s$ , 地球的质量为  $m_e$ , 电子的质量为  $m$ . 将太阳-地球和原子核-电子系统的相关量作比照, 如下表所示.

	氢原子	太阳-地球	对照关系
势能	$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$	$U(r) = -G \frac{m_s m_e}{r}$	$e^2 \leftrightarrow m_s m_e$ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow G$
总能量	$E = \frac{p^2}{2m} + U(r)$	$E = \frac{p^2}{2m_e} + U(r)$	$m \leftrightarrow m_e$

氢原子的能量为 
$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2}$$

定态轨道半径为 
$$r_n = n^2 r_1 = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

玻尔半径为 
$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

(1) 作代换, 可得太阳-地球系统的能量量子化关系式为

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{G^2 m_s^2 m_e^3}{2\hbar^2} = -\frac{1}{n^2} \frac{Gm_s m_e}{2a_0}$$

(2) 对氢原子的玻尔半径  $r_1$  作代换, 可得地球的“玻尔半径”  $a_0$ , 并代入数据, 得

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{Gm_s m_e^2} = \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30} \times (6 \times 10^{24})^2} \text{ m} = 2.3 \times 10^{-140} \text{ m}$$

(3) 由地球运动轨道半径  $r_n = 1.5 \times 10^{11}$  m, 求得对应的轨道量子数为

$$n = \sqrt{\frac{r_n}{a_0}} = \sqrt{\frac{1.5 \times 10^{11}}{2.3 \times 10^{-140}}} = 2.55 \times 10^{75}$$

(4) 根据玻尔理论对氢原子和太阳-地球系统所作的对照结果可知, 在量子数很大的极限情况下, 量子系统的行为趋于经典系统的结果, 这也称为“对应原理”.

\*13-40. 设线性谐振子处在基态和第一激发态的波函数为

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} x e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

其中  $\alpha = \sqrt{\frac{4\pi^2 mk}{h^2}}$ ,  $k$  为劲度系数. 求在这两状态时概率最大的位置.

解: 由于波函数模的平方为粒子出现的概率密度, 因此, 可由线性谐振子在基态的波函数得到其概率分布函数为  $w_0(x) = |\psi_0|^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2}$

令 
$$\frac{dw_0(x)}{dx} = \frac{d|\psi_0|^2}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \right) = 0$$

可得  $x=0$ , 并可得 
$$\left. \frac{d^2 |\psi_0|^2}{dx^2} \right|_{x=0} < 0$$

所以, 线性谐振子处在基态时概率分布的最大值在  $x=0$  处.

由线性谐振子在第一激发态的波函数得到其概率分布函数为

$$w_1(x) = |\psi_1|^2 = \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\alpha^2 x^2}$$

令 
$$\frac{dw_1(x)}{dx} = \frac{d|\psi_1|^2}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} \right) = 0$$

可得  $x = \pm \frac{1}{\alpha}$ , 并可得 
$$\left. \frac{d|\psi_1|^2}{dx} \right|_{x=\pm \frac{1}{\alpha}} < 0$$

所以, 线性谐振子处在第一激发态时概率分布的最大值在  $x = \pm \frac{1}{\alpha}$  处.

13-41. 假设氢原子处于  $n=3, l=1$  的激发态. 则原子的轨道角动量在空间有哪些可能取向? 计算各可能取向的角动量与  $z$  轴之间的夹角.

解: 氢原子处于  $n=3, l=1$  的激发态时, 轨道角动量的大小为

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{1 \times (1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$$

轨道角动量的空间取向由  $L$  在  $z$  轴(磁场方向)上的投影  $L_z$  决定, 大小为  $m_l \hbar$ , 即

$$L_z = m_l \hbar, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

式中  $m_l$  为磁量子数,  $l=1$  时,  $m_l$  只能取 0 和  $\pm 1$  三个值, 即

$$L_z = \hbar, \quad L_z = 0, \quad L_z = -\hbar$$

所以,氢原子处于  $n=3, l=1$  的激发态时,其轨道角动量  $L$  与  $z$  轴正方向(磁场方向)的夹角分别为  $\frac{\pi}{4}(m_l=1)$ ,  $\frac{\pi}{2}(m_l=0)$  和  $\frac{3}{4}\pi(m_l=-1)$ .

**13-42.** 试说明钾原子中电子的排列方式,并和钠元素的化学性质进行比较.

解:电子在原子中的分布遵从泡利不相容原理和能量最小原理.

钾原子共有 19 个电子,其排列方式为:  $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^1$ .

钠原子共有 11 个电子,其排列方式为:  $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$ .

钠和钾最外层都只有一个电子(价电子),都属于活泼元素,有相似的化学性质.

**13-43.** 氢原子在  $n=2, l=1$  能态的径向概率分布可写成  $P(r) = A r e^{-\frac{r}{2a_0}}$ , 其中  $A$  是  $\theta$  的函数,而与  $r$  无关,试证明  $r=2a_0$  处概率有极大值.

解:令 
$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{d}{dr}(A r e^{-\frac{r}{2a_0}}) = 0$$

有 
$$A e^{-\frac{r}{2a_0}} - A r \frac{1}{2a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} = 0$$

即得 
$$r = 2a_0$$

\* **13-44.** 氢原子的径向波函数及概率密度函数如下表所示,  $a_0$  是玻尔半径. 试编写一计算机程序,在平面上描绘出氢原子  $1s, 2s$  和  $3s$  态的电子概论分布图(即电子云).

电子状态	径向波函数 $R_{nl}(r)$	径向概率密度 $ R_{nl}(r) ^2 r^2$
$1s$ ( $n=1, l=0$ )	$\frac{2}{a_0^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r}{a_0}}$	$\frac{4r^2}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$
$2s$ ( $n=2, l=0$ )	$\frac{1}{2\sqrt{2}a_0^{\frac{3}{2}}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$	$\frac{r^2}{8a_0^3} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}$
$3s$ ( $n=3, l=0$ )	$\frac{2}{81\sqrt{3}a_0^{\frac{3}{2}}} \left(27 - \frac{18r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$	$\frac{4r^2}{19683a_0^3} \left(27 - \frac{18r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2}\right)^2 e^{-\frac{2r}{3a_0}}$

#### 参考程序

% 氢原子的电子概率分布图

clear

for i=1:400;

k=(i-1)/25;

% k=r/a0, a0 是玻尔半径

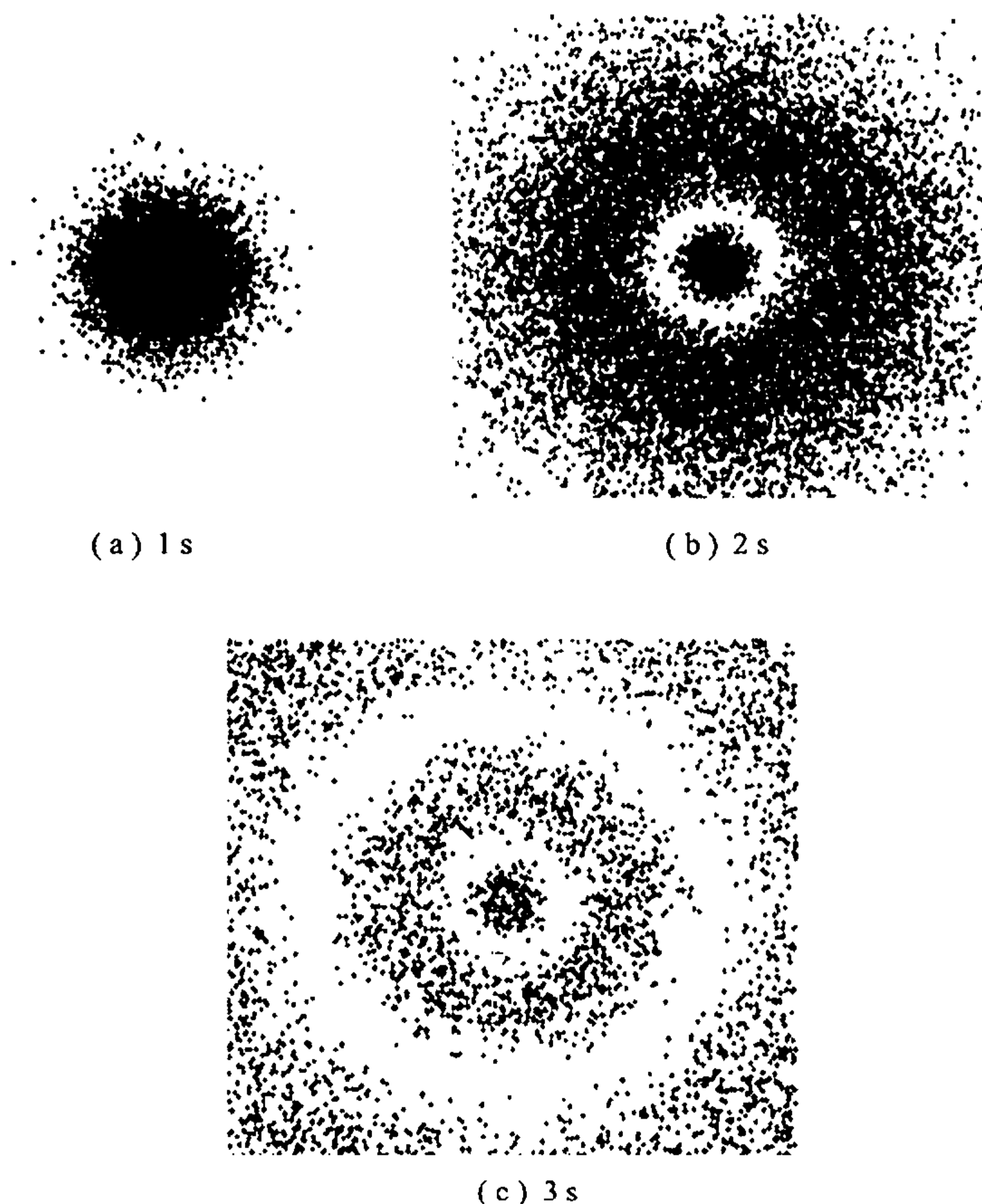
% p(i)=round(500\*4\*k.\*k.\*exp(-2\*k)); % 1s 氢原子径向概率密度函数

```

% p(i) = round(500 * k * k * (2 - k)^2 * exp(-k)/8);
% 2 s 氢原子径向概率密度函数
p(i) = round(500 * 4 * k * k * (27 - 18 * k + 2 * k * k)^2 * exp(-2 * k/3)/19683);
% 3 s 氢原子径向概率密度函数
theta = (2 * pi * rand(p(i),1))^1;
% 电子随机的角位置
r = k * ones(p(i),1);
% 电子可能的径向位置
x = r * cos(theta);
% 将电子的位置换算为直角坐标(x)
y = r * sin(theta);
% 将电子的位置换算为直角坐标(y)
plot(x(1,:),y(1,:), 'b. ')
% 逐点描出氢原子的电子概率分布图
hold on
end
axis([-10 10 -10 10])
xlabel('x');ylabel('y')

```

运算结果如解图 13-44 所示。



解图 13-44

## 第十四章

# 激光和固体的量子理论

### 一、教学基本要求

1. 了解形成激光的基本条件,激光的特征及其基本应用.
2. 了解固体能带结构的基本概念,了解半导体的导电机构.
3. 了解超导电性.

### 二、本章习题分类

1. 激光原理
2. 半导体基础知识

### 三、习题分析和解答

#### 1. 激光原理

**14-1.** 已知 Ne 原子的某一激发态和基态的能量差  $E_2 - E_1 = 16.7 \text{ eV}$ , 试计算  $T = 300 \text{ K}$  时在热平衡条件下, 处于两能级上的原子数的比.

**解:** 在热平衡状态下, 物质中的原子在各能级上的分布服从玻尔兹曼分布律, 即在温度为  $T$  时, 原子处于能级  $E_i$  上的原子数  $N_i$  为

$$N_i = A e^{-E_i/kT}$$

设  $T = 300 \text{ K}$  时, 处于基态  $E_1$  上的原子数为  $N_1$ , 处于激发态  $E_2$  上的原子数为  $N_2$ , 有

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} = e^{-645} \approx 0$$

在室温时, Ne 原子基本上都处于基态.

**14-2.** 计算氢原子第一激发态  $E_2 (n=2)$  与基态  $E_1 (n=1)$  之间的能量差, 用 eV 为单位. 设火焰(温度为  $2700 \text{ K}$ )中含有  $10^{20}$  个氢原子, 如果火焰中氢原

子能级按玻尔兹曼分布律分布,求氢原子处于能级  $E_2$  的原子个数  $n_2$ . 设火焰中每秒放射的光子数为  $10^8 n_2$ ,求发光的功率. 用 W 为单位.

解: 根据氢原子的能量表达式,两能级之差为

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) \\ &= -Rhc \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 1.636 \times 10^{-18} \text{ J} = 10.16 \text{ eV} \end{aligned}$$

在  $T = 2700 \text{ K}$  的热平衡状态下,在  $n = 10^{20}$  个氢原子中,设有  $n_1$  个处于基态,  $n_2$  个处于能级  $E_2$ . 由玻尔兹曼分布律,有

$$n_1 = Ae^{-\frac{E_1}{kT}}$$

$$n_2 = Ae^{-\frac{E_2}{kT}}$$

即

$$n_1 = n_2 e^{(E_2 - E_1)/kT}$$

并有

$$n_1 + n_2 = n$$

即

$$n_2 \left[ e^{(E_2 - E_1)/kT} + 1 \right] = n$$

可得

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{n}{e^{(E_2 - E_1)/kT} + 1} \approx \frac{n}{e^{(E_2 - E_1)/kT}} \\ &= \frac{10^{20}}{e^{1.636 \times 10^{-18} / (1.38 \times 10^{-23} \times 2700)}} = 8.5 \end{aligned}$$

所以,在火焰内处于能级  $E_2$  的原子个数为 8.5 个.

由于在火焰中,每秒内从  $E_2$  向  $E_1$  跃迁的原子所发射的光子数为  $N' = n_2 \times 10^8$  个,每个光子的能量为  $E = h\nu$ ,所以,单位时间内放射光子的总能量,即发光功率为

$$\begin{aligned} P &= N'E = 10^8 n_2 h\nu = 10^8 n_2 (E_2 - E_1) \\ &= 10^8 \times 8.5 \times 1.636 \times 10^{-18} \text{ W} = 1.4 \times 10^{-9} \text{ W} \end{aligned}$$

**14-3.** 如果光在增益介质中通过 1 m 后,光强增大至两倍,若介质的增益系数  $G$  可视为常数,试求  $G$ .

解: 设  $I_0$  为通过增益介质前的光强,通过增益介质  $x$  长度的光强为

$$I = I_0 e^{Gx}$$

据题意,  $x = 1 \text{ m}$  时,  $I = 2I_0$ , 即可得

$$G = \frac{1}{x} \ln \frac{I}{I_0} = \ln 2 \text{ m}^{-1} = 0.69 \text{ m}^{-1}$$

**14-4.** 已知 He-Ne 激光器的输出功率为 4 mW, 输出端反射镜的透射率为

1%, 毛细管直径为 1 mm, 求腔内能量密度.

分析: 激光器的两个反射镜与封闭在毛细管(放电管)内的工作介质一起构成光学谐振腔. 理想情况下, 一个反射镜的反射率为 100%, 输出端的另一个反射镜是部分透射的, 透射部分成为可利用的激光. 谐振腔的一个重要作用就是选频, 只允许沿轴线来回反射产生的相干光波满足干涉极大条件, 形成激光, 而其他波长的光不能存在于谐振腔内.

当谐振腔内的平均能流为  $P$  时, 因布儒斯特窗的作用, 能向输出端反射镜传播的平均能流为  $\frac{P}{2}$ , 透射而输出的激光功率为  $P' = \frac{P}{2} \times 1\%$ .

解: 设谐振腔内的平均能量密度为  $w_0$ , 平均能流为  $P$ , 以光速  $c$  传播, 毛细管(谐振腔)的截面积为  $S$ , 直径为  $d$ , 输出端反射镜的能流透射率为  $T$ , 激光器的输出功率为  $P'$ . 有

$$P = w_0 c S = w_0 c \pi \frac{d^2}{4}$$

和

$$P' = \frac{1}{2} P T$$

所以

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{P}{cS} = \frac{2P'}{cST} = \frac{8P'}{c\pi d^2 T} \\ &= \frac{8P'}{c\pi d^2 T} = \frac{8 \times 4 \times 10^{-3}}{3 \times 10^8 \times 3.14 \times (1 \times 10^{-3})^2 \times 0.01} \text{ J/m}^3 \\ &= 3.4 \times 10^{-3} \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

## 2. 半导体基础知识

14-5. 从能带结构来看, 导体、半导体和绝缘体有什么不同?

答: 绝缘体的禁带比半导体宽, 常温下若从满带激发到空带的电子数微不足道, 宏观上就表现为物质的导电性能差. 半导体的禁带宽度较小, 满带中的电子只需较小的能量就能激发到空带中, 宏观上表现为在常温下有比绝缘体大而比金属导体小的电导率.

对金属导体而言, 有的价带未被电子填满, 是未满带, 如一价金属; 有的虽然价带中所有的量子态都被电子占满, 成为满带, 但禁带宽度为零, 满带与较高的空带相交叠, 电子可以自由地占据空带, 如二价金属; 还有的是未满带与空带相交叠. 在外电场的作用下, 未满带中的电子都能参与导电过程, 因此未满带也称为导带.

能带理论在阐明固体的导电机构、合金的某些性质及金属的结合能等方面取得了重大成就, 但它毕竟是一种近似理论, 不能解释涉及电子相互作用的许多现象.

**14-6.** 半导体的导电机构是什么? 适当掺入杂质和加热都能使半导体的电导率增加, 这两种处理本质上有无不同?

答: 本征半导体在极低温度下, 价带是满带. 受到热激发或光照后, 满带中的部分电子会越过禁带跃迁到空带, 使空带成为导带, 满带中因缺少了电子而形成带正电的空穴. 导带中的电子和满带中的空穴都是载流子, 在外电场作用下都能作定向运动而形成电流. 这种由电子-空穴对的产生而形成的混合型导电称为本征导电. 在一定温度下, 电子-空穴对的产生和复合同时存在并处于动态平衡, 此时半导体具有一定的载流子浓度, 从而具有一定的电导率. 温度升高时, 载流子浓度增加, 电导率增大.

杂质半导体由于掺有微量杂质, 在禁带中产生附加的杂质能级. 掺入施主杂质的 n 型半导体, 施主能级位于禁带上方靠近导带底. 施主能级上的电子激发到导带成为导电载流子所需的能量远小于从满带跃迁到导带所需能量. 同理, 掺入受主杂质的 p 型半导体, 受主能级通常位于禁带下方. 满带中的电子跃迁到受主能级, 在满带中形成能导电的空穴所需的能量远小于本征半导体形成电子-空穴对所需能量. 因此, 掺杂后的半导体可分为以导带中的电子为主要载流子的 (n 型半导体) 电子型导电和以满带中的空穴为主要载流子的 (p 型半导体) 空穴型导电两种类型. 由于掺杂半导体产生载流子所需能量很小, 其载流子浓度 (多数载流子) 远大于在同一温度下产生的电子-空穴对浓度 (少数载流子). 因此, 室温下杂质半导体的电导率主要由杂质电离产生的载流子浓度决定. 当温度升高时, 本征激发也加剧, 同样将使电导率增大, 所以, 在达到一定温度时, 无论是 p 型还是 n 型半导体都将转变为本征导电.

**14-7.** 在室温下 n 型锗的霍尔系数  $R_H = 100 \text{ cm}^3/\text{C}$ , 求载流子浓度.

解: 由 n 型半导体的霍尔系数  $R_H = \frac{1}{en_n}$

可得 
$$n_n = \frac{1}{eR_H} = 6.25 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

**14-8.** p 型半导体与 n 型半导体接触后形成 p-n 结, n 区的电子能否无限地向 p 区扩散?

答: p 型半导体与 n 型半导体在原子尺度上“接触”后, 由于“界面”两侧的自由电子和空穴存在浓度差而相互向对方区域扩散. 在相互扩散的同时, 建立起了由 n 侧指向 p 侧的电场, 阻碍电子和空穴继续扩散. 动态平衡时, 净扩散电流为零. 交界处形成一电偶层, 此即 p-n 结. 从能带角度看, 由于 n 侧的电势高于 p 侧, p-n 结区域的能带弯曲, 对电子和空穴都形成阻碍继续扩散的势垒.

因此“交界处”两侧的电子和空穴都不可能无限地向对方区域扩散。

**14-9.** 已知  $\text{NiO}$  的禁带宽度  $E_g = 1.8 \text{ eV}$ , 若在本征导电区电阻率  $\rho = Ae^{E_g/2kT}$ , 计算由 300 K 到 310 K 电阻的平均温度系数(即温度变化 1 °C 时电阻的相对变化值)。

**分析:** 半导体的电阻率随温度的升高而下降。根据电阻率可求出温度系数, 根据平均值的定义即可求出一段温度变化范围内的平均温度系数。

**解:** 设温度系数为  $\alpha$ , 据定义  $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$

由已知电阻率, 可得  $\frac{d\rho}{dT} = \left( -\frac{E_g}{2kT^2} \right) \rho$

即  $\alpha = -\frac{E_g}{2kT^2}$

在  $\Delta T = T_2 - T_1$  范围内, 温度系数的平均值为

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \frac{1}{\Delta T} \int_{T_1}^{T_2} \alpha dT = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_1}^{T_2} \left( -\frac{E_g}{2kT^2} \right) dT \\ &= -\frac{E_g}{2kT_1 T_2} = -0.11 \text{ K}^{-1}\end{aligned}$$

**14-10.** 已知  $\text{CdS}$  和  $\text{PbS}$  的禁带宽度分别为 2.43 eV 和 0.3 eV, 试计算它们的本征光电导的吸收限, 并由此说明为什么  $\text{CdS}$  可用在可见光到 X 射线的短波方面, 而  $\text{PbS}$  却可有效地用在红外方面。

**分析:** 本征光电导是指: 在光的照射下, 半导体中的电子吸收光子的能量, 从满带向空带跃迁, 形成光生载流子, 从而使电导增大的现象。形成本征光电导的前提是: 入射光子的能量不小于半导体的禁带宽度。

**解:** 据分析, 形成本征光电导应满足:

$$h\nu \geq E_g \quad \text{或} \quad \lambda \leq \frac{ch}{E_g}$$

$$\text{对 CdS:} \quad \lambda_1 \leq \frac{ch}{E_{g1}} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{2.43 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 510 \text{ nm}$$

$$\text{对 PbS:} \quad \lambda_2 \leq \frac{ch}{E_{g2}} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{0.3 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 4140 \text{ nm}$$

可见, 由于  $\text{PbS}$  的禁带宽度小于  $\text{CdS}$  的, 在红外长波段至 X 射线的短波段都可引起  $\text{PbS}$  的本征光电导; 而对  $\text{CdS}$  是在可见光到 X 射线波段。

**14-11.** 制造半导体元件的纯净锗必须仅含有  $10^{-9}$  杂质原子, 若将锗的结

构看作为立方点阵,晶格常量设为  $0.5 \text{ nm}$ ,试估计杂质原子之间的距离.

解: 设杂质原子在纯净锗内均匀分布, 锗原子数密度为  $n_1$ , 杂质原子数密度为  $n_2$ . 据题意, 有

$$\frac{n_2}{n_1} = 10^{-9}$$

将锗的结构假设为立方点阵, 设锗的晶格常量为  $a_1$ , 杂质原子间距为  $a_2$ , 对单位体积, 应有

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{n_1}}, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{n_2}}$$

所以,

$$a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{n_1}{n_2}} = 0.5 \text{ } \mu\text{m}$$

**14-12.** 已知  $T=0 \text{ K}$  时纯硅能吸收的辐射的最长波长是  $1.09 \text{ } \mu\text{m}$ , 求硅的禁带宽度, 以  $\text{eV}$  为单位.

分析: 当光子的能量大于或等于纯硅的禁带宽度时, 可被满带中的电子所吸收, 并跃迁到空带.

解: 设硅的禁带宽度为  $E_g$ , 有

$$E_g = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

可得

$$E_g = h \frac{c}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.09 \times 10^{-6} \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 1.14 \text{ eV}$$

# 第十五章

## 原子核物理和粒子物理简介

### 一、教学基本要求

1. 了解原子核的基本性质,结合能和放射性衰变规律.
2. 了解粒子物理与宇宙学基础知识.

### 二、本章习题分类

1. 原子核的基本性质
2. 原子核的放射性衰变规律
3. 哈勃定律的应用

### 三、习题分析和解答

1. 原子核的基本性质

**15-1.**  ${}^3_1\text{H}$  原子的质量是  $3.016\,05\,\text{u}$ ,  ${}^3_2\text{He}$  原子质量是  $3.016\,03\,\text{u}$ , 试计算:

- (1) 这两个原子的核的质量(以  $\text{u}$  计);
- (2) 结合能(以  $\text{MeV}$  计).

(要达到足够准确度以便相互作比较.)

**分析:** 为了求出核质量,必须从原子质量中扣除电子的质量. 一个稳定核的静质量小于它的各组成核子的静质量之和,其差额即为原子核质量亏损. 对应的能量为原子核的结合能.

**解:** (1) 用原子质量单位  $\text{u}$  表示时,电子的质量为

$$m_e = \frac{9.1 \times 10^{-31}}{1.660\,566 \times 10^{-27}} \text{u} = 5.48 \times 10^{-4} \text{u}$$

所以,  ${}^3_1\text{H}$  原子核的质量为

$$\begin{aligned} m_1({}^3_1\text{H}) &= 3.016\,05\,\text{u} - 1 \times 5.48 \times 10^{-4} \text{u} \\ &= 3.015\,50 \text{u} \end{aligned}$$

${}^3_2\text{He}$  原子核的质量为

$$m_2({}^3_2\text{He}) = 3.016\,03\,\text{u} - 2 \times 5.48 \times 10^{-4}\,\text{u} = 3.014\,93\,\text{u}$$

(2) 用原子质量单位  $\text{u}$  表示的质子质量为

$$m_p = 1.007\,277\,\text{u}$$

中子质量为

$$m_n = 1.008\,665\,\text{u}$$

质量亏损为

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_X$$

结合能为

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

所以,  ${}^3_1\text{H}$  原子核的结合能为

$$\Delta E_1 = (m_p + 2m_n - m_1)c^2 = 8.495\,9\,\text{MeV}$$

${}^3_2\text{He}$  原子核的结合能为

$$\Delta E_2 = (2m_p + m_n - m_2)c^2 = 7.732\,8\,\text{MeV}$$

**15-2.**  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  核的比结合能近似为  $8\,\text{MeV/核子}$ .

(1) 铅的这一同位素的总结结合能多少?

(2) 总结结合能相当于多少个核子的静质量?

(3) 总结结合能相当于多少个电子的静质量?

解: (1) 总结结合能  $\Delta E$  等于比结合能  $\varepsilon$  与质量数(核子数)  $A$  的乘积, 即  $\Delta E = \varepsilon A$ . 所以,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  核的总结结合能为

$$\Delta E = \varepsilon A = 8 \times 208\,\text{MeV} = 1\,644\,\text{MeV}$$

(2) 每个核子对应的静能为  $m_0c^2$ ,  $m_0$  为核子的静质量. 所以, 与  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  核的总结结合能相当的核子静能数  $n$  为

$$n = \frac{\Delta E}{m_0c^2} = \frac{1\,644 \times 10^6 \times 1.602 \times 10^{-19}}{1.66 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2} \approx 1.76$$

(3) 每个电子对应的静能为  $m_{e0}c^2$ . 所以, 与  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  核的总结结合能相当的电子静能数  $n_e$  为

$$n_e = \frac{\Delta E}{m_{e0}c^2} = \frac{1\,644 \times 10^6 \times 1.602 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2} \approx 3.21 \times 10^3$$

**15-3.** 质子的电荷密度分布如图所示, 它的平均密度约为每立方飞米一个量子电荷单位( $\text{e/fm}^3$ ). 试计算:

(1) 以  $\text{C/m}^3$  表示这一电荷密度;

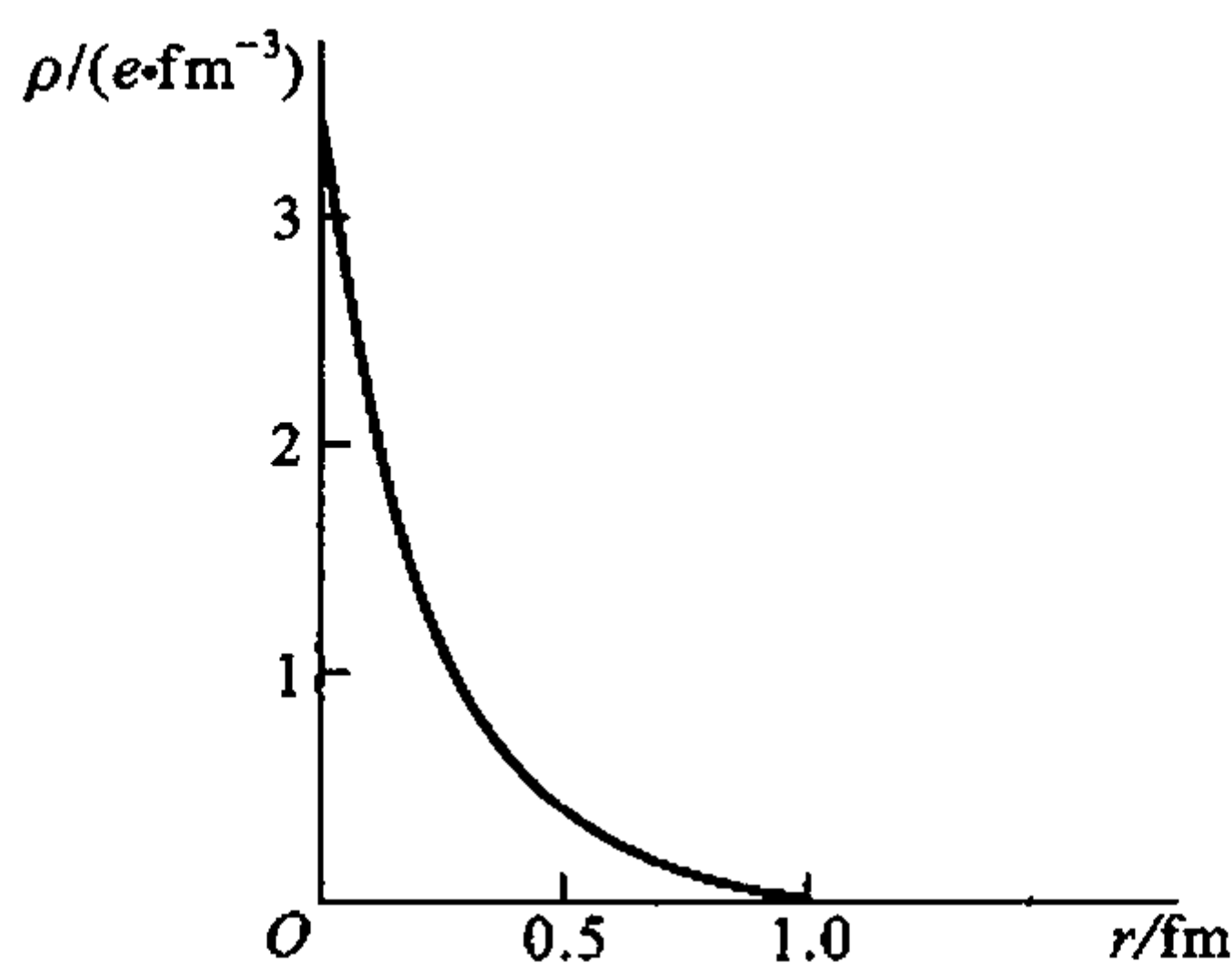
(2) 离质子中心  $1\,\text{fm}$  远处, 电势为多少伏特?

解: (1) 平均电荷密度

$$\rho = \frac{e}{1\,\text{fm}^3} = \frac{1.60 \times 10^{-19}}{(10^{-15})^3}\,\text{C/m}^3 = 1.60 \times 10^{26}\,\text{C/m}^3$$

(2) 假定质子的电荷是球形对称分布的, 由图示电荷密度分布可知, 电荷分布在半径为 1 fm 的球体内. 所以, 离质子中心 1 fm 处即球表面处的电势为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} = 1.44 \times 10^6 \text{ V}$$



习题 15-3 图

15-4. 核 ${}^5_3\text{Li}$  的寿命约为  $10^{-21}$  s.

(1) 应用不确定关系估计这个核的总能量的不确定度.

(2) 这个不确定度对测量核质量的精度 ( $10^{-31}$  kg) 会产生什么影响?

解: (1) 由不确定度关系, 核的总能量的不确定度为

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = 0.329 \text{ MeV}$$

(2) 核的总能量的不确定度对应核的质量的不确定度为

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \geq 5.859 \times 10^{-31} \text{ kg} = 3.528 \times 10^{-4} \text{ u}$$

由于核总能量的不确定度所对应的核质量的不确定度, 与核质量的测量精度 ( $10^{-31}$  kg) 同数量级, 故此时无法精确测量核 ${}^5_3\text{Li}$  的质量.

15-5. (1)  ${}^6_2\text{He}$  核的质量是 6.017 79 u.  ${}^6_3\text{Li}$  核的质量是 6.013 48 u, 试分别计算两核的结合能和比结合能.

(2) 在  ${}^6_2\text{He} \rightarrow {}^6_3\text{Li} + e^- + \bar{\nu}_e$  衰变中, 如果  ${}^6_3\text{Li}$  近似不动, 则电子和反中微子所得的总能量是多少?

解: (1) 由原子核质量亏损  $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_x$

得  $\Delta m({}^6_2\text{He}) = 2m_p + 4m_n - m({}^6_2\text{He}) = 0.031 42 \text{ u}$

$$\Delta m({}^6_3\text{Li}) = 3m_p + 3m_n - m({}^6_3\text{Li}) = 0.034 35 \text{ u}$$

结合能为

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

所以,  ${}^6_2\text{He}$  核的结合能为

$$\Delta E({}_2^6\text{He}) = \Delta m({}_2^6\text{He})c^2 = 29.31 \text{ MeV}$$

$${}_3^6\text{Li} \text{ 核的结合能为 } \Delta E({}_3^6\text{Li}) = \Delta m({}_3^6\text{Li})c^2 = 32.05 \text{ MeV}$$

$$\text{比结合能为 } \varepsilon = \frac{\Delta E}{A}$$

所以,  ${}_2^6\text{He}$  核的比结合能为

$$\varepsilon({}_2^6\text{He}) = \frac{\Delta E}{A} = \frac{29.31}{6} = 4.89 \text{ MeV/核子}$$

$${}_3^6\text{Li} \text{ 核的比结合能为 } \varepsilon({}_3^6\text{Li}) = \frac{\Delta E}{A} = \frac{32.0}{6} = 5.34 \text{ MeV/核子}$$

(2) 在  ${}_2^6\text{He}$  核的  $\beta^-$  衰变中放出高速电子和反中微子  $\bar{\nu}_e$ , 而转变为  ${}_3^6\text{Li}$  核, 衰变前后核的结合能之差即为电子和反中微子所得的总能量.

所以

$$\Delta E({}_3^6\text{Li}) - \Delta E({}_2^6\text{He}) = 32.05 \text{ MeV} - 29.31 \text{ MeV} = 2.74 \text{ MeV}$$

## 2. 原子核的放射性衰变规律

**15-6.** 放射性  ${}_{86}^{226}\text{Ra}$  的半衰期为  $1.6 \times 10^3 \text{ a}$ , 如果某样品在时刻  $t$  含有  $3.0 \times 10^{16}$  个核. 求该时刻核素的放射性强度是多少?

解: 已知放射性  ${}_{86}^{226}\text{Ra}$  的半衰期  $T_{1/2} = 1.6 \times 10^3 \text{ a}$ , 可得  ${}_{86}^{226}\text{Ra}$  的衰变常数为

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$$

$t=0$  时刻原子核的数目  $N_0$  为  $N_0 = Ne^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} \text{放射性强度为 } A &= \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N = \frac{0.693}{T_{1/2}} N \\ &= \frac{0.693 \times 3.0 \times 10^{16}}{1.6 \times 10^3 \times 365 \times 86400 \times 3.7 \times 10^{10}} \text{ Ci} \\ &= \frac{4.12 \times 10^5}{3.7 \times 10^{10}} \text{ Ci} = 11 \times 10^{-6} \text{ Ci} = 11 \mu\text{Ci} \end{aligned}$$

**15-7.** 一放射样品含  ${}_{11}^6\text{C}$   $3.5 \mu\text{g}$ , 半衰期为  $20.4 \text{ min}$ .

(1) 求最初的核数量;

(2) 样品最初及  $8 \text{ h}$  后的放射性强度各是多少?

(3)  $8 \text{ h}$  后放射性核还有多少?

解: (1) 设样品质量为  $m$ , 最初的核数量为  $N_0$ , 则应有

$$m = AN_0 u = 1.66 \times 10^{-27} AN_0 \text{ kg}$$

式中  $A$  为样品质量数. 所以, 有

$$N_0 = \frac{m}{1.66 \times 10^{-27} A} = \frac{3.5 \times 10^{-9}}{1.66 \times 10^{-27} \times 11} = 1.92 \times 10^{17}$$

(2) 由样品的半衰期可得衰变常数为

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{20.4 \times 60} = 5.66 \times 10^{-4}$$

样品在最初( $t_0 = 0$ )时刻的放射性强度为

$$A_0 = \lambda N_0 e^{-\lambda t_0} = \lambda N_0 = 1.085 \times 10^{14} \text{ Bq} = 2.933 \times 10^3 \text{ Ci}$$

样品在 8 h 时的放射性强度为

$$\begin{aligned} A &= \lambda N_0 e^{-\lambda t} = 1.085 \times 10^{14} \times \exp(-5.66 \times 10^{-4} \times 8 \times 3600) \\ &= 9.04 \times 10^6 \text{ Bq} = 2.44 \times 10^{-4} \text{ Ci} \end{aligned}$$

(3) 8 h 时样品中的放射性核数为

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = 1.92 \times 10^{17} \times \exp(-5.66 \times 10^{-4} \times 8 \times 3600) = 1.60 \times 10^{10}$$

**15-8.** 利用 $^{14}\text{C}$ 的放射性可以测定古生物遗骸的年代. 如测得古墓遗骸骨 100 g 中 $^{14}\text{C}$ 的 $\beta^-$ 衰变率为 900/min,  $^{14}\text{C}$ 的半衰期为 5370 a. 大气中 $^{14}\text{C}$ 与 $^{12}\text{C}$ 数目之比为  $1.3 \times 10^{-12}$ . 求此墓的年代.

解: 根据衰变定律

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

和衰变常数

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$$

可得衰变时间为

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = -\frac{T_{1/2}}{0.693} \ln \frac{N}{N_0}$$

式中是  $N_0$  是生物体刚死亡时 $^{14}\text{C}$ 原子的数目,  $N$  则是目前遗骸骨中 $^{14}\text{C}$ 原子的数目.

对衰变定律求微分可得衰变率的大小, 即放射性强度为

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N$$

根据测定数据可知,

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| = 900 \times 60 \times 24 \times 365 / \text{a} = 4.7304 \times 10^8 / \text{a}$$

所以, 目前 100 g 遗骸骨中 $^{14}\text{C}$ 原子的数目  $N$  为

$$N = \frac{1}{\lambda} \left| \frac{dN}{dt} \right| = \frac{T_{1/2}}{0.693} \left| \frac{dN}{dt} \right| = \frac{5370}{0.693} \times 4.7304 \times 10^8 = 3.6655 \times 10^{12}$$

根据“ $^{14}\text{C}$  鉴年法”可知, 生物体刚死亡时骸骨 100 g 中 $^{14}\text{C}$ 原子的数目  $N_0$ , 与现今仍然存活同类生物体内的 $^{14}\text{C}$ 原子数是相同的.

$$N_0 = 1.3 \times 10^{-12} \times \frac{100 \times 6.022 \times 10^{23}}{12} = 6.5238 \times 10^{12}$$

式中  $1.3 \times 10^{-12}$  是大气中恒定的  $^{14}\text{C}$  与  $^{12}\text{C}$  数目之比,  $12 \text{ g/mol}$  是碳的摩尔质量,  $6.022 \times 10^{23}$  是阿伏伽德罗常量.

将已求得的  $N$  和  $N_0$ , 代入衰变时间表达式, 可得

$$t = -\frac{5370}{0.693} \ln \frac{3.6655 \times 10^{12}}{6.5238 \times 10^{12}} \text{ a} = 4467 \text{ a}$$

所以, 这古墓约是公元前 2400 多年的.

### 3. 哈勃定律的应用

**15-9.** 类星体是离地球非常遥远而又十分明亮的天体. 利用多普勒效应测量它发出的光谱位移, 可以测出它的运动速度. 今测得某一类星体从地球的退行速度为  $0.55c$ .

(1) 问这类星体离地球多远?

(2) 假定这一类星体从大爆炸以来就以  $0.55c$  的速度运动, 试估算一下, 大宇宙的年龄.

解: (1) 根据哈勃定律

$$v = H_0 r \quad (H_0 = 1.78 \times 10^{-18} / \text{s})$$

可得

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{0.55 \times 3 \times 10^8}{1.78 \times 10^{-18}} \text{ m} = 9.27 \times 10^{25} \text{ m} = 9.8 \times 10^9 \text{ l. y. (光年)}$$

(2) 假定从大爆炸以来宇宙就一直膨胀着, 则由哈勃时间可得大宇宙的年龄为

$$T = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{1.78 \times 10^{-18}} \text{ s} = 5.6 \times 10^{17} \text{ s} = 1.78 \times 10^{10} \text{ a}$$