

算例 6-003

连接单元 – GAP(缝) 单元

例题注释

本例题中使用了一个单榀、单层的钢框架用于验算 Gap(缝)连接单元。这种连接单元只传递压力作用；当承受拉力荷载时，它的刚度为零。在这个框架中，Gap(缝)连接单元被指定给右边的柱底。然后一个为 P (10 kips) 的竖直荷载被施加在梁的中心部位。一旦全部的荷载 P 被施加后，一个横向的荷载 V 将施加给结构，从右到左对结构施加一个推力。所有荷载 P 施加后 Gap(缝)连接单元的内力和所有荷载 V 施加后 Gap(缝)连接单元的上移值都将与手算结果进行比较。

模型是建立在 XZ 平面上的。只有 U_x , U_z 和 R_y 自由度是激活状态的。Gap(缝)单元在节点 2 处模拟成单节点连接单元。这意味着 Gap(缝)单元的一端是与地相连的另一端是与节点 2 相连的。Gap(缝)单元的指向是默认的其轴向 1 轴与全局坐标 Z 轴正向一致。这是单节点连接单元默认的指向。只有 U_1 方向的属性是被定义成 Gap(缝)单元的。

所有的三个框架单元具有相同的属性。Gap(缝)连接单元的受压刚度大约是其上面框架单元 2 轴向受压刚度的 100 倍。初始 Gap(缝)连接单元的宽度为 0in。

荷载是如下方式进行施加的。首先全部的 P 荷载被施加。然后，当荷载 P 保持最大值时，全部的荷载 V 被施加。本例使用不同的分析工况进行几次分析。在这里使用了非线性静力分析、非线性模态时程分析和非线性直接积分时程分析工况。参见后面题为分析工况概述一节可以得到更多信息。

本例中使用了两个不同的模型。在模型 A 中，Gap(缝)连接单元的线性有效刚度为 0。在模型 B 中，连接单元的线性有效刚度等于 Gap(缝)单元的非线性刚度。

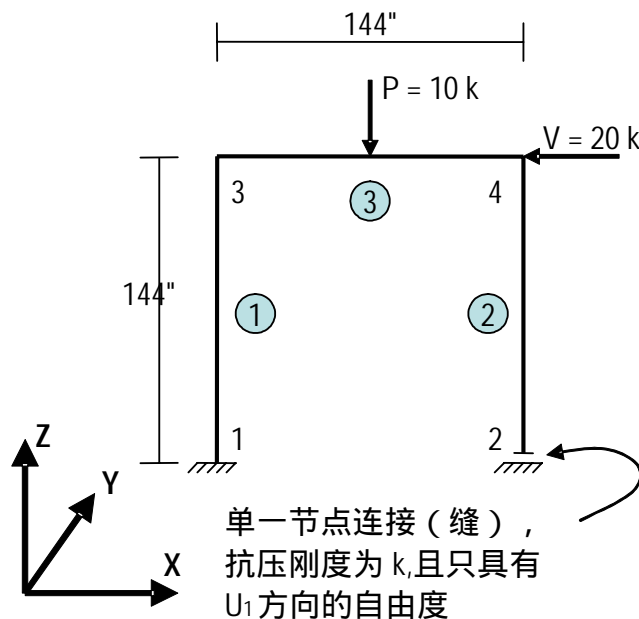
PROGRAM NAME: SAP2000
REVISION NO.: 0

Gap(缝)连接单元的线刚度只用于线性分析工况，在本例中为 P, V 分析工况的 MODAL 模态分析工况。Gap(缝)连接单元的线性有效刚度不会在其它工况中使用，不会直接影响其它工况。然而它对于名为 NLMHIST1 和 NLMHIST2 的非线性时程分析有间接的影响，因为这些这些工况的求解是基于 MODAL 模态分析的振型结果。

右图中显示的是应用于模态分析和模态时程分析的节点集中质量。

节点	节点质量 kip-s ² /in	
	DOF U _x	DOF U _z
2	0	0.001
3	0.3	0.1
4	0.3	0.1

几何、属性和荷载参数



连接属性(Gap U₁ DOF)

线性 K_e (模型 A) = 0 k/in
线性 K_e (模型 B) = 200,000 k/in
线性 C_e = 0 k-sec/in
非线性 K = 200,000 k/in
非线性 缝 = 0 in

框架材料属性

$E = 29,900 \text{ k/in}^2$
 $\nu = 0.3$
 $G = 11,500 \text{ k/in}^2$

框架材料属性

$A = 10 \text{ in}^2$
 $I = 100 \text{ in}^4$
 $A_v = 2 \text{ in}^2$ (抗剪截面)

荷载

首先施加满载 P; 然后施加满载 V

激活自由度为

U_x, U_z, R_y

分析工况概述

下面是本例中使用的分析工况概述：

分析工况	说明
P	静力线性分析，在框架单元 3 中心施加全局坐标 Z 负方向 10 kip 重力荷载。
V	静力线性分析，在节点 2 施加全局坐标 X 负方向 20 kip 横向荷载。
MODAL	瑞兹向量模态分析工况，带有荷载 P 和荷载 V 初始荷载及连接单元。
NLMHIST1	<p>从零初始条件出发使用斜坡荷载施加荷载 P 的非线性模态时程分析工况。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 20 秒的斜坡荷载上升时间 • 所有振型 99.9%模态阻尼 • 20 个输出步数和 2 秒的输出步长 (40 秒的总输出时间). • 所有非线性分析的默认值 (容差)。
NLMHIST2	<p>在 NLMHIST1 分析工况末尾开始并使用斜坡荷载施加荷载 V 的非线性模态时程分析。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 40 秒的斜坡荷载上升时间 • 所有振型 99.9%模态阻尼 • 20 个输出步数和 4 秒的输出步长 (80 秒的总输出时间). • 所有非线性分析的默认值 (容差)，除了模型 B 中荷载收敛容差从 1E-05 降低到 1E-11 以外。
NLSTAT1	从零初始条件出发使用荷载 P 的非线性静力分析工况。所有非线性分析的默认值 (容差)。
NLSTAT2	在 NLSTAT1 分析工况末尾开始并使用荷载 V 的非线性静力分析。所有非线性分析的默认值 (容差)。
NLSTAT3	在 NLDHIST1 直接积分非线性时程分析工况末尾开始并使用荷载 V 的非线性静力分析。所有非线性分析的默认值 (容差)。

分析工况	说明
NLDHIST1	<p>在零初始条件开始并使用斜坡荷载施加荷载 P 的非线性直接积分时程分析。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 20 秒的斜坡荷载上升时间 • 400 个输出步数和 0.1 秒的输出步长 (40 秒的总输出时间). • 质量和比例阻尼被设置，在周期从 1 到 3.4 秒振型 99.9%模态阻尼 • 所有非线性分析的默认值 (容差)，除了最大迭代步数和迭代容差。最大迭代步数从 10 改为 100；迭代容差从 1E-04 降低到 1E-06。
NLDHIST2	<p>在 NLDHIST1 分析工况末开始并使用斜坡荷载施加荷载 P 的非线性直接积分时程分析。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 40 秒的斜坡荷载上升时间 • 800 个输出步数和 0.1 秒的输出步长 (80 秒的总输出时间). • 质量和比例阻尼被设置，在周期从 1 到 3.4 秒振型 99.9%模态阻尼 • 所有非线性分析的默认值 (容差)，除了最大迭代步数和迭代容差。最大迭代步数从 10 改为 100；迭代容差从 1E-04 降低到 1E-06。
NLDHIST3	<p>与 NLDHIST2 工况相同的直接积分非线性时程分析工况。不同之处是它是从静力非线性 NLSTAT1 工况开始，而不是从直接积分非线性 NLDHIST1 开始的。</p>

分析工况中斜坡荷载上升时间是通过荷载上升时间大约为结构周期的 10 倍这一规律来选择的。关注的周期假定为第一振型周期。下面表格显示的是两个模型中第一振型的周期。

模型	模态(线性)分析中 Gap(缝)单元的有效刚度 k/in	第一振型周期 S
A	0	3.42
B	200,000	1.90

荷载 P 首先施加，它将是 Gap(缝)连接单元总是在压力作用下。当 Gap(缝)连接单元的刚度为 200,000 k/in 时，结构的周期为 1.90 秒，这被用来定义荷载 P 施加所关注的周期。这个荷载的斜坡上升段时间被选为 20 秒，它大约是所关注周期的 10 倍。

荷载 V 在荷载 P 施加完成后开始施加于结构，它将引起 Gap(缝)连接单元的上升。当 Gap(缝)连接单元的刚度为 0 k/in 时，结构的周期为 3.42 秒，这被用来定义荷载 V 施加所关注的周期。这个荷载的斜坡上升段时间被选为 40 秒，它大约是所关注周期的 10 倍。

模型 B 的 NLMHIST2 分析工况需要 200 输出步数 (合计 800 秒)，模型 A 的 NLMHIST2 分析工况需要 20 输出步数 (合计 80 秒)。这一情况出现是因为模型 B 使用了 Gap(缝)的有效刚度为 200,000 k/in 及每个振型 99.9% 的阻尼。当 Gap(缝)连接单元缝隙分开后，它的有效刚度变为 0，结构周期也变长。因为模型阻尼系数是个恒定值，所以临界阻尼在阻尼比中占的比率增加以致周期加长，因此超过了系统的阻尼。对于模型 B，这个超阻尼是当 Gap(缝)连接分开后出现，并将持续到 NLMHIST2 分析得到最终值。

模型 B 的 NLMHIST2 分析工况还需要修改力的收敛容差为 1E-11,而不是默认的 1E-05。下面的公式，它是用于解决模态非线性时程分析的公式，帮助解释了修改收敛容差的基本原理。

$$\mathbf{K}_L \mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_N \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{r}_N(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{K}_N \mathbf{u}(t)$$

在前面的等式中 K_L 是所有线性单元，包括连接单元的线性自由度的刚度值； K_N 是所有连接单元非线性自由度的线性有效刚度； C 是比例阻尼矩阵； M 是质量对角矩阵； r 是荷载施加矢量； r_N 是从连接单元非线性自由度在时间 T 使用交互作用计算出的荷载矢量。

在前面的等式中，如果 K_N 与其它相比较非常大，为了获得一个精确的 r_N 表述，相对力的迭代容差需要非常小。这就是模型 B 的 NLMHIST2 分析工况需要力迭代容差为 $1E-11$ 的原因。

非线性直接积分时程分析工况需要最大迭代容差的数量为 100，而不是 10，并且迭代容差为 $1E-06$ 而不是 $1E-04$ 。把迭代容差减少到 $1E-06$ ，可以减少结果的轻微扰动（高频率影响）。

对于这个特定的算例，将最大迭代步数增加至 100，使运行时间减少了很多倍。使用默认的最大迭代步数 10 时，程序必须把时间步长从指定的 0.1 秒降低到 $1E-07$ 秒左右的时间才能求解这个问题。当设置迭代步数为 100 时，程序就不必使时间步长必须低于 0.1 秒才能解决这一问题。

校验的 SAP2000 技术特色

- Gap(缝) 连接单元
- 力控制非线性静力分析
- 非线性模态时程分析
- 非线性直接积分时程分析
- 框架节点荷载
- 节点力荷载
- 节点质量指定
- 时程分析斜坡荷载

结果对比

手算方法是使用 Cook and Young (1985) 244 页描述的单位荷载方法计算出来的。 结果被分为模型 A 和模型 B 进行输出。

模型 A 结果 (Gap(缝) $K_e = 0$ k/in)

输出参数	分析工况	SAP2000	手算解	差异百分比
荷载 P 满载后 连接单元的内 力 kip	NLMHIST1	-4.534	-4.534	0%
	NLSTAT1	-4.534		0%
	NLDHIST1	-4.534		0%
荷载 V 满载后 连接单元的变 形 inch	NLMHIST2	3.917	3.917	0%
	NLSTAT2	3.917		0%
	NLSTAT3	3.917		0%
	NLDHIST2	3.917		0%
	NLDHIST3	3.917		0%

模型 B 结果 (Gap(缝) $K_e = 200,000$ k/in)

输出参数	分析工况	SAP2000	手算解	差异百分比
荷载 P 满载后 连接单元的内 力 kip	NLMHIST1	-4.534	-4.534	0%
	NLSTAT1	-4.534		0%
	NLDHIST1	-4.534		0%
荷载 V 满载后 连接单元的变 形 inch	NLMHIST2	3.917	3.917	0%
	NLSTAT2	3.917		0%
	NLSTAT3	3.917		0%
	NLDHIST2	3.917		0%
	NLDHIST3	3.917		0%

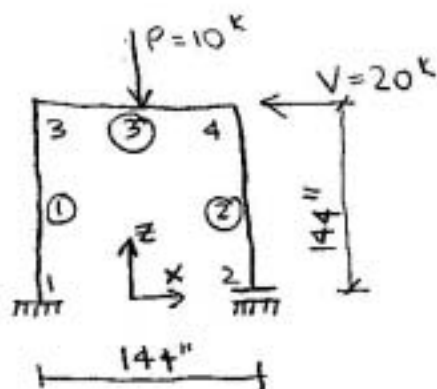
计算模型文件： Example 6-003a, Example 6-003b

结论

对于模型 A，此时 Gap(缝)单元有效刚度 K_e 为 0 k/in 和模型 B，此时 Gap(缝)单元有效刚度 K_e 为 200,000 k/in，SAP2000 的结果都显示了一个与手算结果之间可以接受的误差。当使用的足够小的收敛容差时，这种对比将得到完全一致的结果。

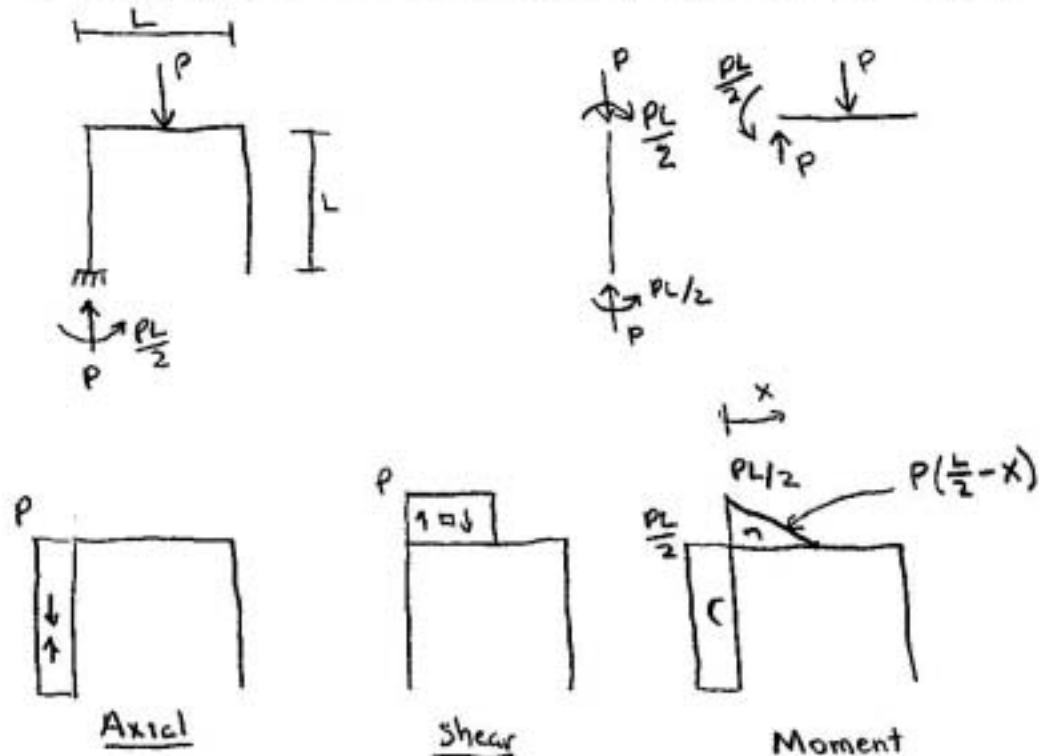
本例说明了使用上面的收敛容差，本例中 Gap(缝)单元的非线性分析问题可以有效地收敛。对于这个测试算例，因为手算结果的帮助很容易判断收敛容差是否有效。在其它情况下，必须要放大或缩小的收敛容差进行两次或更多的分析来验证结果是否一致。这是检验容差是否有效的好办法。

手算过程

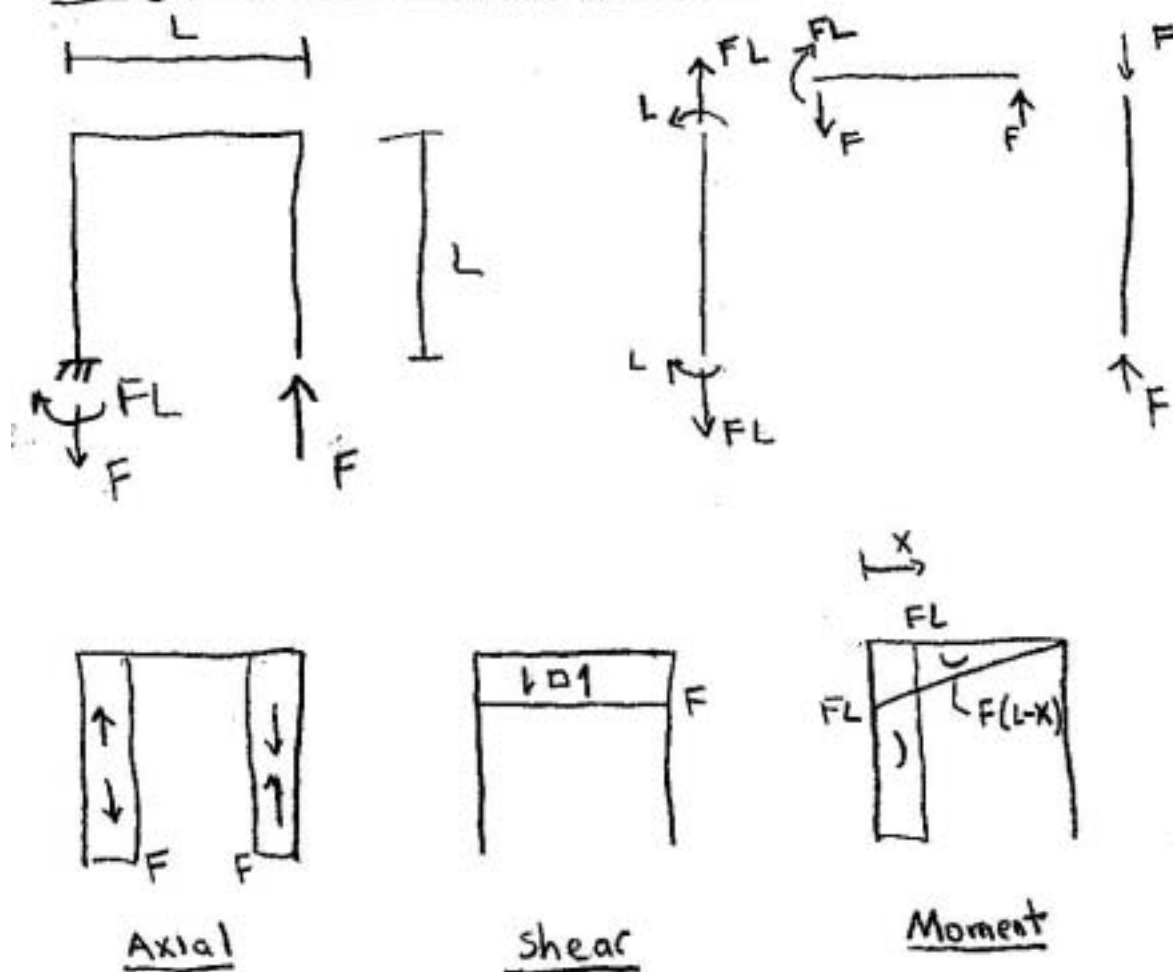


$$\begin{aligned}
 A &= 10 \text{ in}^2 \\
 I &= 100 \text{ in}^3 \\
 A_v &= 2 \text{ in}^2 \\
 E &= 29900 \text{ Ksi} \\
 \nu &= 0.3 \\
 G &= 11500 \text{ Ksi}
 \end{aligned}$$

Analyze For Load P with Joint 2 unrestrained



Analyze for Load = F in Z direction at Joint 2



When considering as virtual load F is equal to 1.

Calculate z direction displacement at Joint 2
When Joint 2 is unrestrained

$$\Delta = \int \frac{P}{EA} dx + \int \frac{V}{GA_v} dx + \int \frac{M}{EI} dx$$

$$\Delta = -\frac{P}{EA} \int_0^L dx - \frac{P}{GA_v} \int_0^{L/2} dx - \frac{PL^2}{2EI} \int_0^L dx$$

$$- \frac{P}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{L}{2} - x\right)(L - x) dx$$

$$\Delta = -\frac{PL}{EA} - \frac{PL}{2GA_v} - \frac{PL^3}{2EI}$$

$$- \frac{PL}{2EI} \int_0^{L/2} dx + \frac{3PL}{2EI} \int_0^{L/2} x dx + \frac{P}{EI} \int_0^{L/2} x^2 dx$$

$$\Delta = -\frac{PL}{EA} - \frac{PL}{2GA_v} - \frac{PL^3}{2EI} - \frac{PL^3}{4EI}$$

$$+ \frac{3PL}{4EI} x^2 \Big|_0^{L/2} - \frac{P}{3EI} x^3 \Big|_0^{L/2}$$

$$\Delta = -\frac{PL}{EA} - \frac{PL}{2GA_v} - \frac{PL^3}{2EI} - \frac{PL^3}{4EI} + \frac{3PL^3}{16EI} - \frac{PL^3}{24EI}$$

$$\Delta = -\frac{PL}{EA} - \frac{PL}{2GA_v} - \frac{29PL^3}{48EI}$$

$$\Delta = \frac{-10 \times 144}{29900 \times 10} - \frac{10 \times 144}{2 \times 11500 \times 2} - \frac{29 \times 10 \times 144^3}{48 \times 29900 \times 100}$$

$$\Delta = -0.004816 - 0.031304 - 6.033552$$

$$\Delta = -6.069672 \text{ in } \downarrow$$

Calculate Force F required to return
Z direction displacement at Joint 2 to zero

$$\Delta = \int \frac{Pp}{EA} dx + \int \frac{Vv}{GA_v} dx + \int \frac{Mm}{EI} dx$$

$$\Delta = \frac{F}{EA} \int_0^L dx + \frac{F}{EA} \int_0^L dx + \frac{F}{GA_v} \int_0^L dx + \frac{FL^2}{EI} \int_0^L dx$$

$$+ \frac{F}{EI} \int_0^L (L-x)^2 dx$$

$$\Delta = \frac{2FL}{EA} + \frac{FL}{GA_v} + \frac{FL^3}{EI} + \frac{FL^2}{EI} \int_0^L dx$$

$$+ \frac{2FL}{EI} \int_0^L x dx + \frac{F}{EI} \int_0^L x^2 dx$$

$$\Delta = \frac{2FL}{EA} + \frac{FL}{GA_v} + \frac{FL^3}{EI} + \frac{FL^3}{EI} - \frac{2FL}{EI} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L + \frac{F}{EI} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L$$

$$\Delta = \frac{2FL}{EA} + \frac{FL}{GA_v} + \frac{FL^3}{EI} + \frac{FL^3}{EI} - \frac{FL^3}{EI} + \frac{FL^3}{3EI}$$

$$\Delta = \frac{2FL}{EA} + \frac{FL}{GA_v} + \frac{4FL^3}{3EI}$$

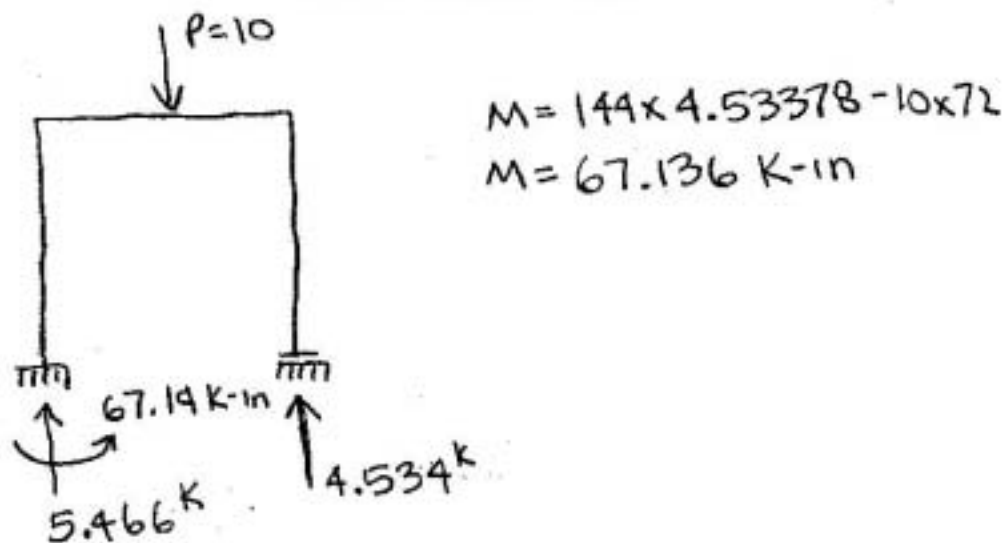
$$F = \frac{\Delta}{\frac{2L}{EA} + \frac{L}{GA_v} + \frac{4L^3}{3EI}}$$

$$F = \frac{6.069672}{\frac{2 \times 144}{29900 \times 10} + \frac{144}{11500 \times 2} + \frac{4 \times 144^3}{3 \times 29900 \times 100}}$$

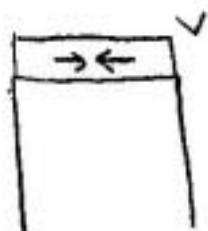
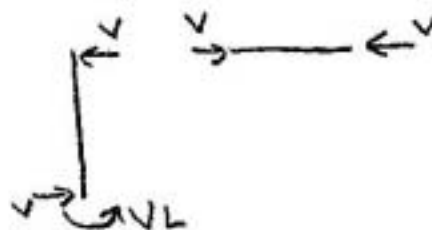
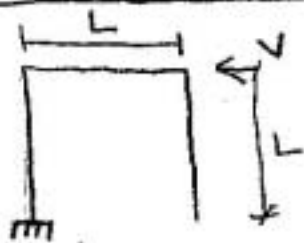
$$F = \frac{6.069672}{0.0009632 + 0.0062609 + 1.3315425}$$

$$F = 4.53378^k \quad \text{Reaction at joint 2 for } P=10^k$$

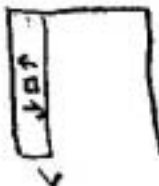
Plot reactions under load $P=10^k$



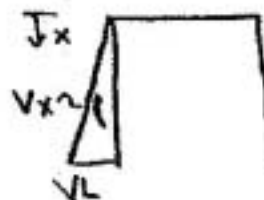
Analyze For Load V with Joint 2 Unrestrained



Axial



Shear



Moment

Calculate Z direction displacement under load V at Joint 2 when Joint 2 is unrestrained

$$\Delta = \int \frac{P_p}{EA} dx + \int \frac{V_v}{GA_v} dx + \int \frac{M_m}{EI} dx$$

$$\Delta = \frac{VL}{EI} \int_0^L x dx = \frac{VL}{EI} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L$$

$$\Delta = \frac{VL^3}{2EI}$$

$$\Delta = \frac{20 \times 144^3}{2 \times 29900 \times 100}$$

$$\Delta = 9.986569 \text{ in } \uparrow$$

Calculate Force F required to return Z direction displacement at joint 2 under load V to zero

$$F = \frac{\Delta}{\frac{2L}{EA} + \frac{L}{GA_v} + \frac{4L^3}{3EI}}$$

formula was previously derived for displacement under Load P

$$F = \frac{9.986569}{0.0009632 + 0.0062609 + 1.3315425}$$

$$F = 7.45953^k$$

However, once F reaches 4.53378^k joint 2 starts to uplift because the gap element carries no tension.

The horizontal load that causes F to be 4.53378^k and thus returns the reaction at joint 2 to zero kips is

$$H = \frac{4.53378}{7.45953} \times 20 = 12.15567^k$$

This still leaves $20 - 12.15567 = 7.84433^k$ to cause uplift at joint 2.

$$\Delta_{up} = \frac{V'L^3}{2EI} = \frac{7.84433 \times 144^3}{2 \times 29700 \times 100} = 3.91690 \text{ in } \uparrow$$

$$\underline{\underline{\text{Final uplift at joint 2} = 3.9169 \text{ in } \uparrow}}$$