

### 算例 3-003

#### 平面 – 静荷载下的曲梁

##### 例题注释

本例为一个曲线悬臂梁，用平面应力单元表示，在端部承受 X 向和 Y 向的单位力，以及绕 Y 向的单位弯矩，这几个力在不同的荷载工况中。将端部在荷载方向的位移与手算结果进行比较。

MacNeal and Harder 1985 中描述了该问题的基本几何特性、属性和荷载。该悬臂梁弯曲成 90 度的弓形。内径为 4.2 英寸，外径为 4.32 英寸。宽 0.2 英寸，中心线长度为 6.63 英寸。梁在 Y 向的厚度为 0.1 英寸。在 SAP2000 中建模时，该曲梁细分为 6 个面对象，每个对应 15 度角。

为该算例建立了两个模型：一个为 6x1 为网格，一个为 90x1 网格。模型中只有  $U_x$  和  $U_y$  自由度是活动的。

##### 荷载

下表定义了施加在面内的荷载。

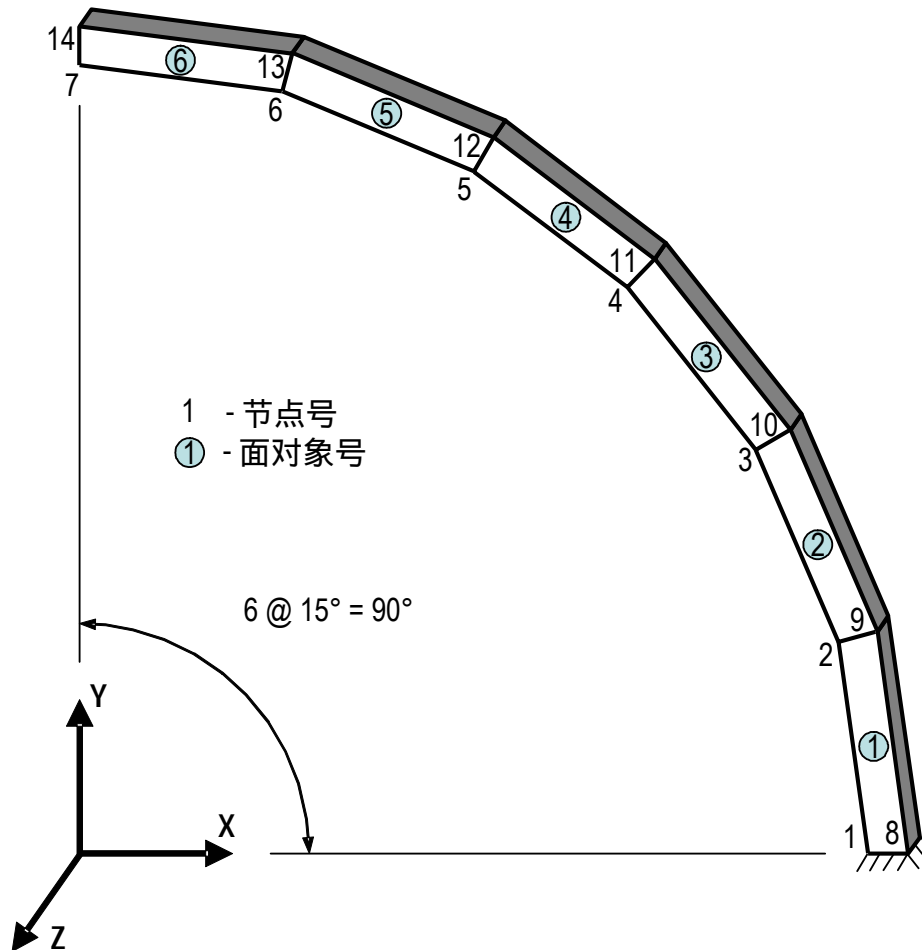
荷载工况	荷载
IN	在节点 7 和 14 处， $F_y = +0.5 \text{ lb}$

##### 校验的 SAP2000 的技术特色

- 使用平面应力单元的膜分析
- 节点力荷载

PROGRAM NAME: SAP2000  
 REVISION NO.: 2

## 几何特性和属性



几何性质  
 Inner radius = 4.12 in  
 Outer radius = 4.32 in  
 弧度 = 90°

材料属性  
 $E = 10,000,000 \text{ lb/in}^2$   
 $\nu = 0.25$   
 $G = 4,000,000 \text{ lb/in}^2$

截面属性  
 Thickness = 0.1 in

## 结果比较

Cook and Young 1985 第 244 页描述了使用单位力法得到的独立手算结果。  
MacNeal and Harder 1985 也有出版的独立结果。

模型和剖分	输出参数	SAP2000	独立结果	差异百分比
模型 A 6x1 网格	U <sub>y</sub> , in 节点 4 和 17 的平均 值	0.0854	0.0886	-4%
模型 B 90x1 网格		0.0886		0%

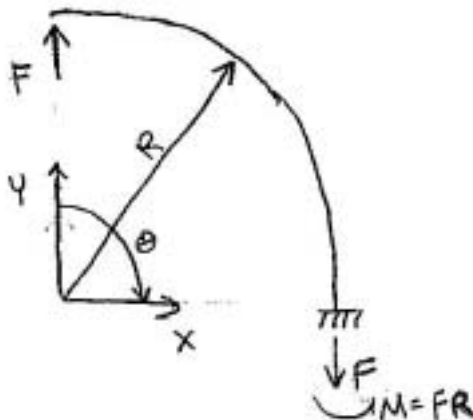
计算模型文件： Example 3-003a, Example 3-003b

## 结论

与独立结果相比，SAP2000 的结果可以接受。当剖分充分时，结果精确吻合。

手算过程

In-Plane Force



$$\begin{aligned}
 S &= \text{beam length} = R\theta \\
 ds &= R d\theta \\
 M(\theta) &= RF \cos \theta \\
 V(\theta) &= F \cos \theta \\
 R &= 4.22 \text{ in (centerline)} \\
 F &= 1 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_y = \int_0^L \frac{mM}{EI} ds + \int_0^L \frac{vV}{GA_v} ds + \int_0^L \frac{pP}{EA} ds$$

$$\Delta_y = \int_0^{\pi/2} \frac{R^3 F}{EI} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{RF}{GA_v} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{RF}{EA} \sin^2 \theta d\theta$$

$$\text{Noting that } \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta_y = \frac{\pi R^3 F}{4EI} + \frac{\pi RF}{4GA_v} + \frac{\pi RF}{4EA}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_y &= \frac{\pi \times 4.22^3 \times 1}{4 \times 10,000,000 \times \left( \frac{0.1 \times 0.2^3}{12} \right)} + \frac{\pi \times 4.22 \times 1}{4 \times 4,000,000 \times \left( \frac{2}{6} \times 0.2 \times 0.1 \right)} \\
 &\quad + \frac{\pi \times 4.22 \times 1}{4 \times 10,000,000 \times 0.2 \times 0.1}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_y = 0.088535 + 0.000050 + 0.000017$$

$$\Delta_y = 0.08860 \text{ in}$$