算例 6-005

连接单元 – 谐波荷载下的阻尼单元

问题描述

本例是一个由单自由度弹簧-质量-阻尼系统，承受谐波荷载。谐波荷载的频率设定为弹簧-质量-阻尼系统的频率。假定阻尼器提供 5%的临界阻尼。将不同的任意时刻的弹簧-质量-阻尼系统位移以及系统的稳态变形与手算的结果进行了比较，手算采用了 Chopra 1995 一书的公式。

SAP2000 的模型由一个单个节点和两个连接单元构成，节点编号为 1。一个连接单元是线性弹簧单元，另一个是阻尼单元。

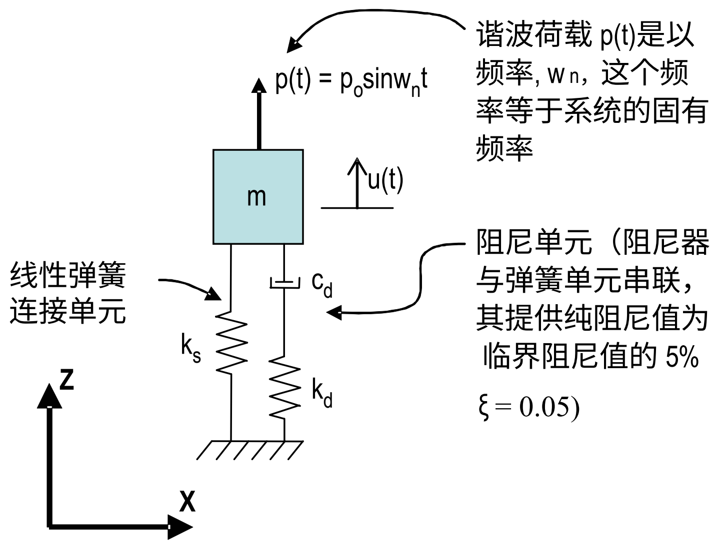
在 XZ 平面内建立模型，分析中只有 U_z 自由度是活动的。连接单元模拟为节点 1 的单节点连接单元。这意味着连接单元的一端接地，一端与节点 1 相连。将连接单元定位为其局部 1 轴与 Z 轴正向平行。这是单节点连接单元的默认方向。只定义了连接单元的 U_1 自由度。连接单元的刚度为 100k/in。对于线性分析，阻尼单元的刚度为零，对于非线性分析，刚度为 10000k/in，阻尼系数 c 为 1 kip-sec/in。阻尼指数设置为 1，意味着阻尼的力-速度特性为线性的。阻尼的这些属性的推导将在本例的后面部分进行推导。

对节点 1 指定了 U_z 方向 1 kip-sec^2/in 的平动质量。也在 U_z 方向指定了 10kip 的点荷载。

为了获得所需的阻尼单元非线性特性，必须进行非线性时程分析。对于本例，采用了名为 NLMHIST1 的模态时程分析工况和名为 NLDHIST1 的直接积分时程分析工况。为进行分析，定义了一个按照正弦函数变化的 10kip 的点荷载。

NLMHIST1 和 NLDHIST1 分析工况都采用 0.01 秒的步长，共 2550 步，生成 25.5 秒的结果，这是在 40 个加载循环中产生的。为 41 个荷载循环定义了正弦函数。

几何特性、属性和荷载



线性连接属性(U1 DOF)

线性 k_s = 100 k/in

阻尼器属性 (U1 DOF)

线性 k_d = 0 k/in

线性 c_d = 0 k-sec/in

非线性 k_d = 10,000 k/in

非线性 c_d = 1 k-sec/in

节点质量

m = 1 k-sec^2/in

荷载

p_o = 10 k

w_n = 10 radians/sec

激活自由度

U_z only

阻尼单元特性的推导

系统的自振频率 ω_n 为:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_s}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \text{ radians/sec}$$

阻尼的阻尼系数 c_d 为:

$$c_d = 2\zeta\omega_n m = 2 * 0.05 * 10 * 1 = 1 \text{ kip-sec/in}$$

如果需要阻尼单元的纯阻尼特性，如本例所描述的，可以将弹簧刚度 k_d 设置为足够大，以使弹簧效应可以被忽略。弹簧刚度应该足够大，以使弹簧阻尼器单元的特征时间（由 $\tau = c_d/k_d$ 确定）大约比 $1/\omega_n$ 小二到三个数量级。应当注意不能使 k_d 过大，因为会导致数值敏感。

对于本例，弹簧刚度（由 τ 确定）最初比 $1/\omega_n$ 小三个数量级。因此 τ 可以表示为：

$$\tau = \frac{c_d}{k_d} = \frac{1/\omega_n}{1{,}000}$$

求解得到 k_d :

$$k_d = 1{,}000\omega_n c_d = 1{,}000 * 10 * 1 = 10{,}000 \text{ k/in}$$

所测试的 SAP2000 技术要点：

- 阻尼连接单元
- 线性连接单元
- 非线性模态时程分析
- 非线性直接积分时程分析
- 节点力荷载

节点比较

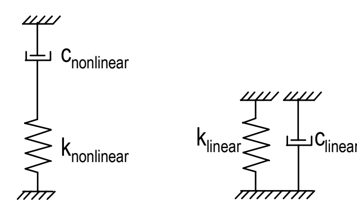
采用 Chopra 1995 一书第 70 页公式 3.2.6 得到了独立结果。

模型 A 的结果

输出参数	分析工况	SAP2000	独立结果	差值百分比
U_z (节点 1) 位移 at t = 0.50 sec in	NLMHIST1	-0.10488	-0.10488	0%
	NLDHIST1	-0.10483		-0.05%
U_z (节点 1) 位移 at t = 5.00 sec in	NLMHIST1	-0.88875	-0.88858	+0.02%
	NLDHIST1	-0.88834		-0.03%
U_z (节点 1) 位移 at t = 11.00 sec in	NLMHIST1	0.99453	0.99497	-0.04%
	NLDHIST1	0.99454		-0.04%
稳态变形 in	NLMHIST1	0.99971	1.00000	-0.03%
	NLDHIST1	0.99964		-0.04%

模型 B 是用来证明采用稳态分析工况可以得到稳态结果。因为稳态分析过程是一个线性过程，而阻尼单元对于线性和非线性分析的表现是不同的，因此模型 A 和 B 中的阻尼单元特性不同。

右图是非线性和线性分析用到的阻尼单元特性。对于非线性分析，阻尼单元与弹簧单元串连，采用指定的非线性弹簧刚度和阻尼系数。与之形成对比的是，在线性分析中，阻尼与弹簧并联，采用指定的线性弹簧刚度和阻尼系数。这种差别在大多数连接单元中会出现。



Damper Properties for Nonlinear Analyses

Damper Properties for Linear Analyses

模型 B 只采用了阻尼连接单元，没有采用线性连接单元。阻尼的线性弹簧刚度设为 100k/in，阻尼系数设为 1 k-sec/in。在稳态分析工况中没有定义滞回阻尼。如果在稳态工况中定义了滞回阻尼，将用该阻尼取代为阻尼单元指定的阻尼。

下表列出了从模型 B 中得到的结果。结果之间吻合的很好。

模型 B 的结果

输出参数	分析工况	SAP2000	独立结果	差值百分比
频率 = 1.5915 sec 时的稳态变形 in	SS1	1.00000	1.00000	0%

计算模型文件: Example 6-005a,Example 6-005b

结论

与独立结果比较，SAP2000 的结果可以接受。

手算过程

Reference: Chopra 1995
Sections 3.2.1 through 3.2.2
pages 68 through 72
In particular,
Equation 3.2.6 on page 70

$$u(t) = \frac{P_o}{K}\frac{1}{2\varepsilon}\left[e^{-\varepsilon\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\omega_D t\right) - \cos\omega_n t\right]$$

where,

ε = damping ratio

$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2}$

As indicated on page 68 of Chopra 1995 the steady state solution is given by the last term of the equation above

$$u(t)_{\text{steady state}} = \frac{-P_o}{K}\frac{1}{2\varepsilon}\cos\omega_n t$$

and the maximum value of the steady state solution occur when $\cos\omega_n t = -1$

$$u(t)_{\text{steady state max}} = \frac{P_o}{K}\frac{1}{2\varepsilon}$$

Maximum Steady State Solution

$$U = \frac{P_o}{K}\ \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{10}{100} \times \frac{1}{2 \times 0.05}$$

$$u = 1 \text{ inch}$$

Solutions at a specified time

$$\frac{P_o}{K}\ \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{10}{100} \times \frac{1}{2 \times 0.05} = 1 \text{ inch}$$

$$\omega_o = \omega_n\sqrt{1-\varepsilon^2} = 10\sqrt{1-0.05^2} = 9.9874922\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\varepsilon\omega_n = 0.05 \times 10 = 0.5 \text{ rad/sec}$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{0.05}{\sqrt{1-0.05^2}} = 0.0500626$$

Thus

$$u(t) = e^{-0.5t}\left[\cos(9.9874922t) + 0.0500626\sin(9.9874922t)\right] - \cos(10t)$$

At $t = 0.50$ sec

$$u(0.50) = e^{-0.25}\left[\cos(4.9937461) + 0.0500626\sin(4.9937461)\right] - \cos(5)$$

$$u(0.50) = -0.10488 \text{ in}$$

At $t = 5.00$ sec

$$u(5.00) = e^{-2.5}\left[\cos(49.937461) + 0.0500626\sin(49.937461)\right] - \cos(50)$$

$$u(5.00) = -0.88858 \text{ in}$$

At $t = 11.00$ sec

$$u(11.00) = e^{-5.5}\left[\cos(109.8624142) + 0.0500626\sin(109.8624142)\right] - \cos(110)$$

$$u(11.00) = 0.99497 \text{ in}$$