

算例 6-001

连接 – 承受斜坡荷载的线性连接单元

例题注释

在本例中，一个斜坡荷载被施加在无阻尼单自由度的结构。斜坡荷载具有一个有限的上升时间 t_r ，超过这一时间后，将保持一个恒定值。结构在选定的两个时间处的位移将与基于 Chopra 1995 发表的理论的手算结果进行对比。由于对比的输出时间一个是 t_r 以内的，另一个是 t_r 以外的。

对于这个模型我们假设了以下属性：

$$k = \text{弹簧刚度} = 4 \text{ k/in}$$

$$m = \text{质量} = 1 \text{ k-sec}^2/\text{in}$$

从以上两个参数，可以计算出结构的周期 T 为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{4}} = \pi \text{ 秒}$$

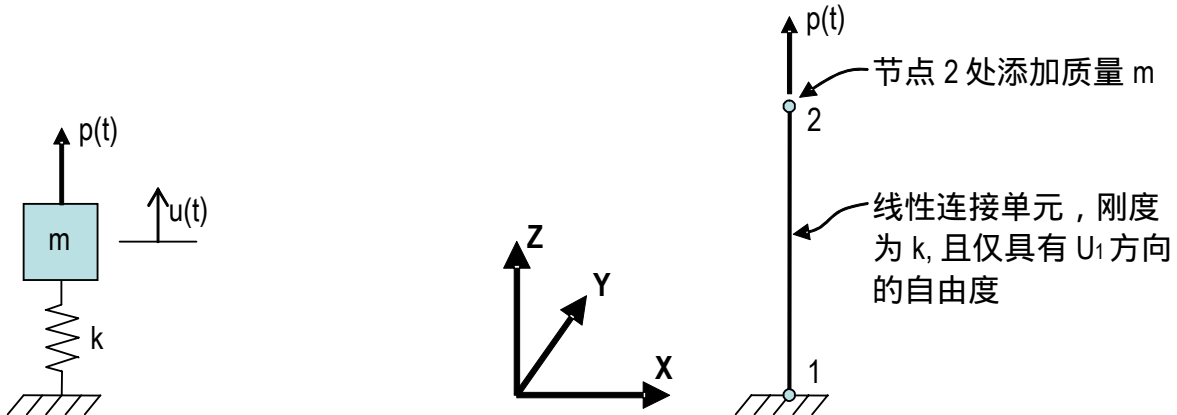
在本例分析中，建立了两个不同的荷载工况，并在其中分别使用了两个不同的斜坡上升时间参数 t_r 。在工况 A, t_r 等于结构的周期, $t_r = T = \pi$ 。在工况 B, t_r 等于结构周期的一半, $t_r = T/2 = \pi/2$ 。

SAP2000 模型中包含了一个两节点的线性连接单元，线性连接单元的一端是固定的，另一端是自由的。如下一页图所示，连接单元模型是在 XZ 平面，它的长度方向（局部坐标 1 轴）是平行于全局坐标 Z 轴。连接单元的长度被任意指定为 10in。

模型唯一被激活的自由度是 U_z 。类似的，线性连接单元的唯一激活的自由度，也就是其非零属性是 U_1 方向（轴向）。

质量 m 和坡形荷载 $p(t)$ 被施加在连接单元的自由端，也就是图中所示的节点 2。

几何、属性和荷载参数

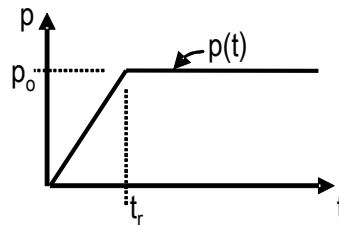


荷载

$$p(t) = \begin{cases} p_o(t/t_r), & t = t_r \\ p_o, & t = t_r \end{cases}$$

$$p_o = 8 \text{ kips}$$

$$t_r = \begin{cases} \pi \text{ sec}, & (\text{Case A}) \\ \pi / 2 \text{ sec}, & (\text{Case B}) \end{cases}$$



属性

$$k = 4 \text{ k/in}$$

$$m = 1 \text{ k-sec}^2/\text{in}$$

本例中分析工况概要

以下表格显示了本例中分析工况的主要情况：

分析工况	说明
P	在节点 2 处全局坐标负向施加 8 kip 荷载的线性静力分析工况
MODAL	一个特征向量模态分析工况
MHISTA	一个上升时间为 $t_r = T = \pi$ 秒的斜坡荷载无阻尼模态时程分析

分析工况	说明
DHISTA1	一个上升时间为 $t_r = T = \pi$ 秒的斜坡荷载无阻尼直接积分时程分析，使用的时间步长为 0.25 秒（大约为结构系统自然周期的 1/10）
DHISTA2	一个上升时间为 $t_r = T = \pi$ 秒的斜坡荷载无阻尼直接积分时程分析，使用的时间步长为 0.0025 秒
MHISTB	一个上升时间为 $t_r = T = \pi/2$ 秒的斜坡荷载无阻尼模态时程分析
DHISTB1	一个上升时间为 $t_r = T = \pi/2$ 秒的斜坡荷载无阻尼直接积分时程分析，使用的时间步长为 0.25 秒
DHISTB2	一个上升时间为 $t_r = T = \pi/2$ 秒的斜坡荷载无阻尼直接积分时程分析，使用的时间步长为 0.0025 秒
MHISTC	一个上升时间为 $t_r = T = \pi/2$ 秒的斜坡荷载巨大阻尼模态时程分析。这一工况在这个算例中讨论一节进行了描述。
DHISTC1	一个上升时间为 $t_r = T = \pi/2$ 秒的斜坡荷载巨大阻尼直接积分时程分析，使用的时间步长为 0.25 秒。这一工况在这个算例中讨论一节进行了描述。

在本例中斜坡荷载是仔细被挑选出来的，目的是能够很容易的与 Chopra (1995) 127 页到 129 页 4.5 节中图 4.5.2 发表的结果进行对比。就像 Chopra 1995 中讨论的一样，当斜坡荷载的上升时间是结构周期的几倍时，斜坡末端的速度 $\dot{u}(t_r)$ 是零，并且结构在荷载恒定期内是不会振动的。相反，如果斜坡荷载上升时间不是结构自振周期的几倍时，系统在荷载恒定期内是会振动的。

因此对于 MHISTA, DHISTA1 和 DHISTA2 分析工况，位移在斜坡荷载上升段后即 $t \geq t_r$ 将是一个恒量。对于模型 MHISTB 和 DHISTB1 斜坡荷载上升

段后的位移将是不一样的。对于模型 MHISTC 和 DHISTC1 后面将进行描述。

校验的 SAP2000 的技术特色

- 线性连接
- 特征值模态分析工况
- 模态时程分析工况
- 直接积分时程分析工况
- 斜坡荷载

结果对比

手算结果是根据 Chopra (1995) 126 页到 129 页 4.5 节发表的方法得到的。尤其是使用了公式 4.5.2 和 4.5.4b。

上升时间 $t_r = \pi$ 秒

输出参数	分析工况	SAP2000	手算解	差异百分比
U_z (节点. 2) in at $t = 1$ sec	MHISTA	0.34718	0.34718	0%
	DHISTA1 dt = 0.25 sec	0.34209		-1.5%
	DHISTA2 dt = 0.0025 sec	0.34718		0%
U_z (节点. 2) in at $t = 4$ sec	MHISTA	2.0000	2.0000	0%
	DHISTA1 dt = 0.25 sec	1.9979		-0.1%
	DHISTA2 dt = 0.0025 sec	2.0000		0%

上升时间 $t_r = \pi/2$ 秒

输出参数	分析工况	SAP2000	手算解	差异百分比
U _z (节点. 2) in at t = 1 sec	MHISTB	0.69436	0.69436	0%
	DHISTB1 dt = 0.25 sec	0.68419		-1.5%
	DHISTB2 dt = 0.0025 sec	0.69436		0%
U _z (节点. 2) in at t = 4 sec	MHISTB	0.74030	0.74031	0%
	DHISTB1 dt = 0.25 sec	0.72764		-1.7%
	DHISTB2 dt = 0.0025 sec	0.74030		0%

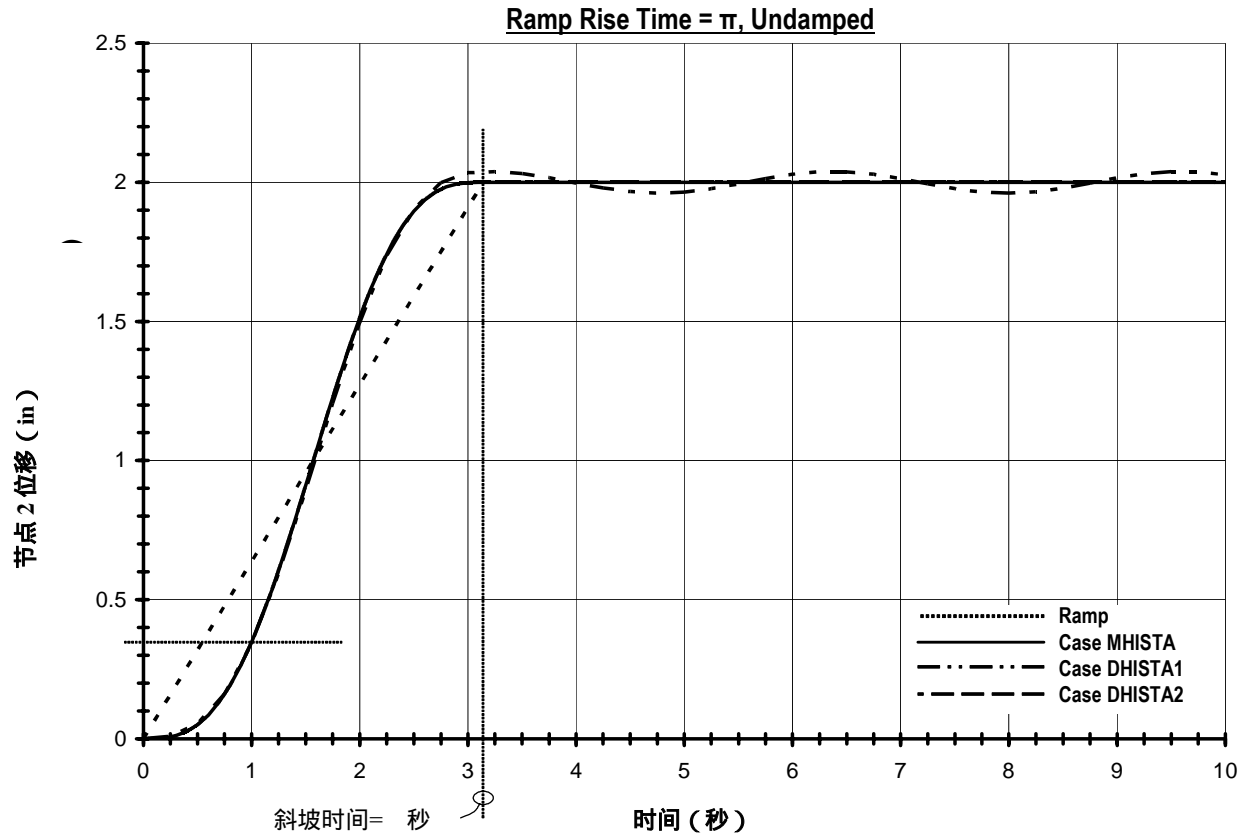
讨论

对于这个单自由度的问题，预期的结果是模态时程分析结果与理论结果将完全一致，并且直接积分时程分析方法在使用的时间步长逐渐减小时将收敛于理论值。

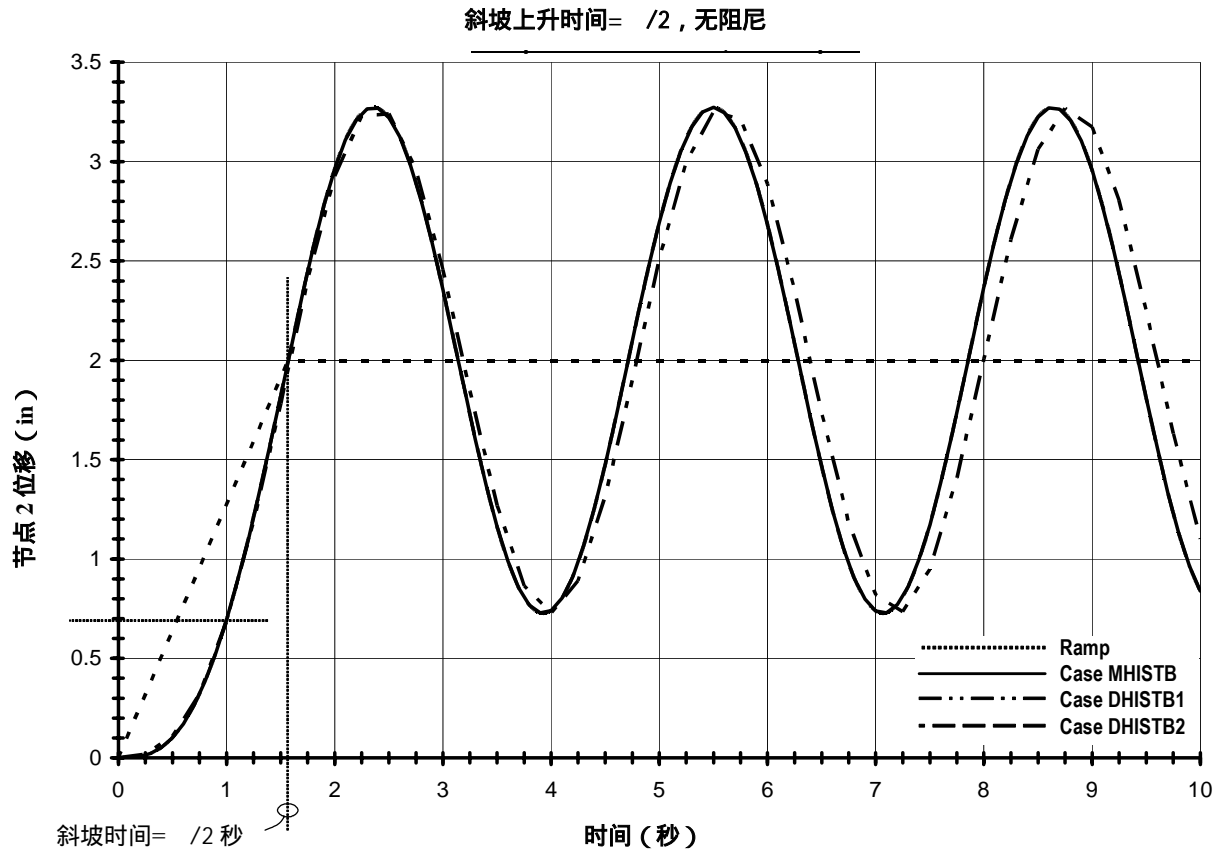
对于直接积分时程分析方法，一个典型的规则是时间步长不能大于所关注结构最小周期的十分之一。本例中 DHISTA1, DHISTB1 和 DHISTC1 分析工况输出 0.25 秒的时间步长就是使用这一规则找出来的。

下图中所示的是节点 2 时间与位移轨线，这时的工况是斜坡上升时间为 t_r ，等于结构自振周期 π 。就像预期的一样，并且与 Chopra 1995 讨论的相同，当时间超过 t_r 时，位移是个恒定值。MHISTA 和 DHISTA2 分析工况显示了与理论值完全相同的结果，而 DHISTA1 分析工况显示了与理论值之间可接受的误差。注意 DHISTA1 分析工况，当时间超过 t_r 后，位移几乎但并不完全是恒定值。DHISTA2 分析工况验证了在使用直接积分时程分析时时间步长减小时，结果的精度进一步增加。

斜坡上升时间= ，无阻尼



下图所示的是节点 2 时间与位移轨线，这时的工况是无阻尼的，并且斜坡上升时间为 t_r ，等于结构自振周期的一半 $\pi/2$ 。就像预期的一样，并且与 Chopra 1995 讨论的相同，当时间超过 t_r 时，位移是个恒定值。MHISTB 和 DHISTB2 分析工况显示了与理论值完全相同的结果，而 DHISTB1 分析工况显示了与理论值之间可接受的误差。



斜坡荷载经常被使用在模型中用以进行时程分析。斜坡荷载经常在添加其它时程分析荷载（地震、风、爆炸及相关荷载）之前作为重力荷载添加给结构。在这些工况中，已经说明了在荷载上升时间 t_r 段后，荷载将保持一个恒定值。我们推荐用户通过使用高阻尼值来达到这一点，像临界阻尼值的 99.9%，在斜坡荷载被使用为重力荷载的分析部分。MHISTC 和 DHISTC1 分析工况证明了这一点。

MHISTC 分析工况与 MHISTB 相同，除了模型的阻尼从临界阻尼的 0%变为临界阻尼的 99.9%以外。DHISTC1 分析工况与 DHISTB1 相同，除了模型添加了临界阻尼的 99.9%的阻尼以外。

如下所示，DHISTC1 分析工况中比例阻尼系数模拟临界阻尼的 99.9%。对于两个不同的频率阻尼比假设为 0.999。这些频率是这个单自由度体系的自然周期 $1/\pi$ ，并且任意选定频率为 1。质量和刚度比例系数分别为 α 和 β ，然后如下所示进行了计算，这里 d_1 和 d_2 是阻尼值， f_1 和 f_2 是频率：

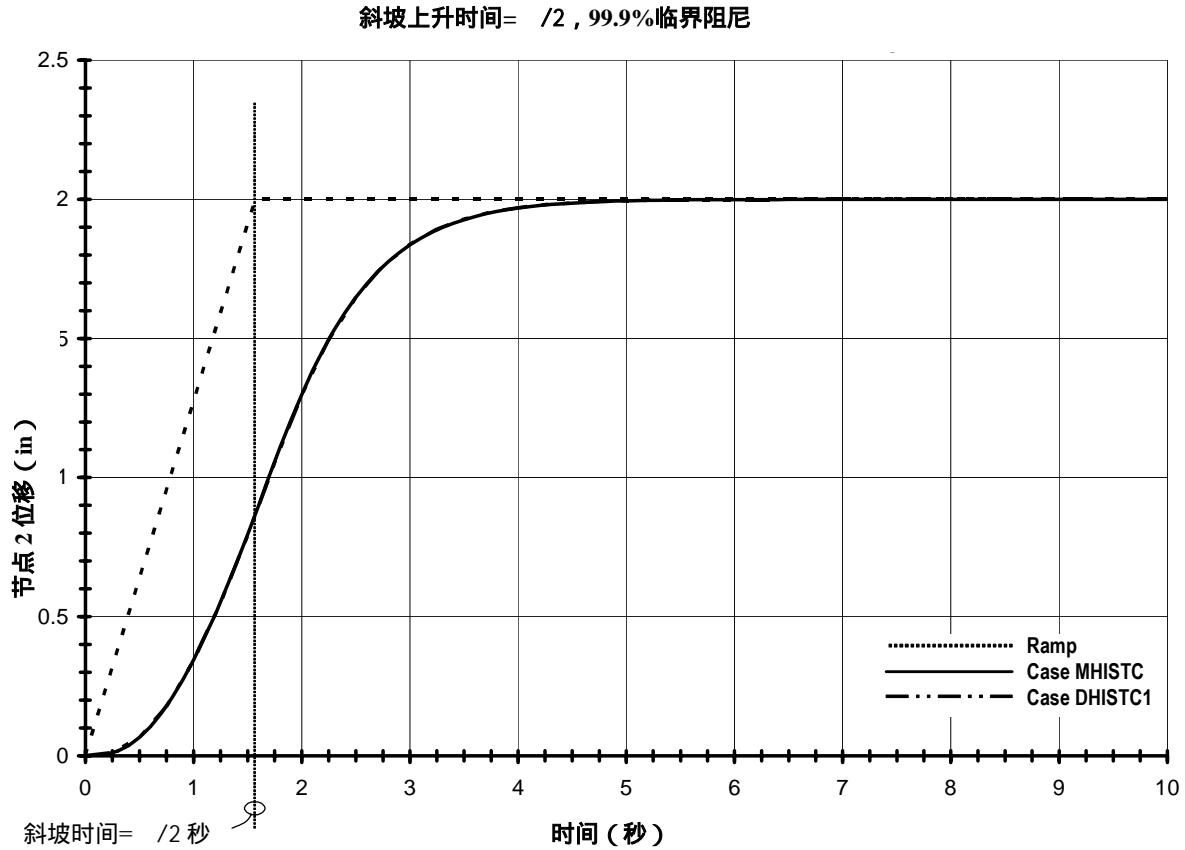
$$\alpha = \frac{4\pi (f_1^2 f_2 d_2 - f_2^2 f_1 d_1)}{f_1^2 - f_2^2} = \frac{4\pi \left(\frac{1}{\pi^2} * 1 * 0.999 - 1^2 * \frac{1}{\pi} * 0.999 \right)}{\frac{1}{\pi^2} - 1^2}$$

$$\alpha = 3.0312 \text{ (质量比例系数)}$$

$$\beta = \frac{f_2 d_2 - f_1 d_1}{\pi (f_2^2 - f_1^2)} = \frac{1 * 0.999 - \frac{1}{\pi} * 0.999}{\pi \left(1^2 - \frac{1}{\pi^2} \right)}$$

$$\beta = 0.2412 \text{ (刚度比例系数)}$$

下图中所示的是节点 2 位移时间轨线，此时分析工况的阻尼为临界阻尼的 99.9%，并且斜坡荷载的上升时间 t_r 为结构自振周期的二分之一。斜坡荷载表现如期望的在其达到最大值后，它将保持恒定值。注意，由于阻尼的原因，到达最大值得位置比斜坡荷载上升时间要大一些。因此当使用这种方法添加重力荷载时，分析时间需要在上升时间后一个周期后开始，这一时间足够长是重力荷载稳定下来。这些分析中没有提供手算的理论结果。



计算模型文件: Example 6-001

结论

SAP2000 结果显示了在使用模态时程分析时结果与手算结果完全相同，也显示了使用直接积分时程分析方法与手算结果之间可以接受的误差。在直接积分时程分析中，当时间步长减小时，时程分析的结果将收敛于手算方法的理论值。

手算过程：

Reference: Chopra 1995
Section 4.5 on pages 126-129

Equation 4.5.2

$$u(t) = \frac{P_0}{K} \left(\frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_r} \right) \quad t \leq t_r$$

Equation 4.5.4b

$$u(t) = \frac{P_0}{K} \left\{ 1 - \frac{1}{\omega_n t_r} \left[\sin \omega_n t - \sin \omega_n (t - t_r) \right] \right\} \quad t \geq t_r$$

$$P_0 = 8 \text{ K}$$

$$K = 4 \text{ K/in}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ rad/sec}$$

Case 1: $t_r = \pi$ seconds

$$u(1 \text{ sec}) = \frac{8}{4} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\sin(2 \times 1)}{2\pi} \right) = \underline{\underline{0.34718 \text{ in}}}$$

$$u(4 \text{ sec}) = \frac{8}{4} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \left[\sin(2 \times 4) - \sin[2(4 - \pi)] \right] \right\}$$

$$\underline{\underline{u(4 \text{ sec}) = 2 \text{ in}}}$$

Case 2: $t_r = \frac{\pi}{2}$ seconds

$$U(1 \text{ sec}) = \frac{8}{4} \left(\frac{1}{\pi/2} - \frac{\sin(2 \times 1)}{2 \times \pi/2} \right) = \frac{8}{4} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\sin(2)}{\pi} \right)$$

$$\underline{\underline{U(1 \text{ sec}) = 0.69436 \text{ in}}}$$

$$U(4 \text{ sec}) = \frac{8}{4} \left\{ 1 - \frac{1}{2 \times \pi/2} \left[\sin(2 \times 4) - \sin \left[2 \left(4 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right] \right\}$$

$$U(4 \text{ sec}) = 2 \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \left[\sin(8) - \sin(8 - \pi) \right] \right\}$$

$$\underline{\underline{U(4 \text{ sec}) = 0.74031 \text{ in}}}$$