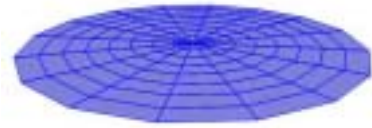


## 算例 2-015

### 壳 – 各项异性板

#### 算例描述



本例使用平的圆板，测试各项异性板。板半径 48 in、2 in 厚，沿周边固定（钳住）。板网格划分 8x16（径向乘切向）。板上施加 0.2 kips 均布竖向（面外）面荷载。板中心竖向变形和板边缘指定点的弯矩与文献 Ugural 1981 中第 6 章理论手算解比较。同样的理论在文献 Timoshenko and Woinowsky-Krieger 1959 中 11 章介绍。

本例中各项异性特性在文献 Ugural 1981 中 141 页公式 6.1 定义：

$$\sigma_x = \frac{E'_x}{1 - \nu_x \nu_y} (\epsilon_x + \nu_y \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E'_y}{1 - \nu_x \nu_y} (\epsilon_y + \nu_x \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

其中,

$E'_x$  和  $E'_y$  = 弹性模量

$G$  = 剪切模量

$\nu_x$  和  $\nu_y$  = 波松比, 且  $\nu_x = \frac{E'_x}{E'_y} \nu_y$

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  = 正应力和剪应力

$\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  和  $\gamma_{xy}$  = 正应变和剪应变

从上述公式看出很明显这个板弯曲问题材料属性用四个常数定义，即， $E'_x$ ,  $E'_y$ ,  $\nu_y$  和  $G$ 。

本例中绕 X 方向旋转板的刚度假定是 Y 方向的两倍。换言之，绕 Y 轴的弯曲刚度是绕 X 轴的两倍。因此  $E'_x$  等于  $2E'_y$ 。本例中这些参数取：

$$E'_x = 30,000 \text{ k/in}^2$$

$$E'_y = 15,000 \text{ k/in}^2$$

$$\nu_y = 0.2$$

$$G = 6,600 \text{ k/in}^2$$

使用两个不同模型来模拟正交各项异性特性。模型 A 中使用正交各项异性属性。模型 B 中除了各向异性属性外还有壳单元的适当刚度修正。模型中使用的属性和修正计算在本例后面描述。

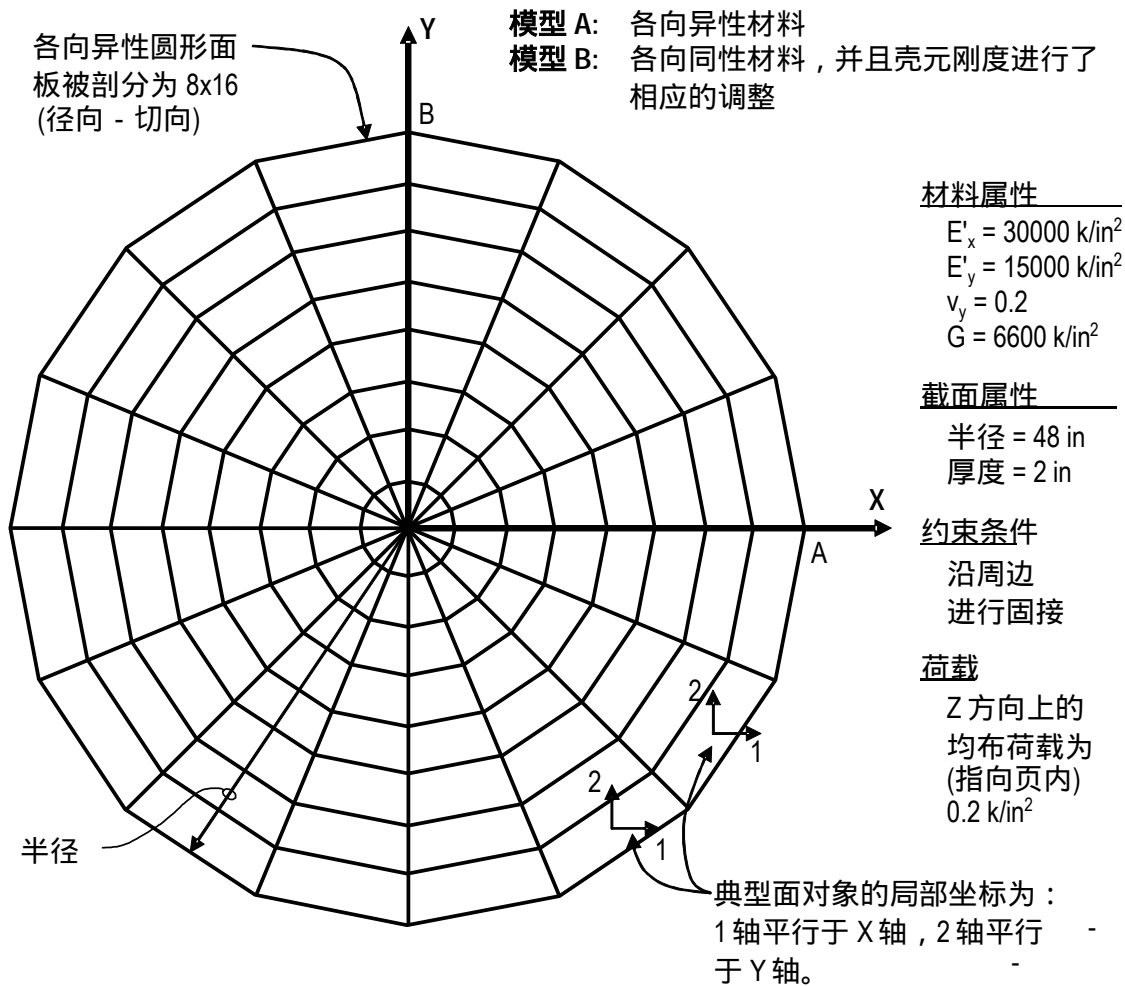
壳单元的局部坐标轴按缺省方向，1 轴正向和全局 X 轴正向一致，2 轴正向与全局 Y 轴正向一致。

### 各项异性材料属性 (模型 A)

模型 A 中，使用各项异性材料。这里常量  $E'_x$ ， $E'_y$ ， $\nu_y$  和  $G$  直接输入到模型材料定义中。在 SAP2000 中，这些常数分别称为 1 方向弹性模量 (e1)、2 方向弹性模量 (e2)、12 平面波松比 (u12)、12 平面剪切模量。

对厚板模型，面外剪切模量  $g_{13}$  和  $g_{23}$  设为等于各项同性厚板中使用的  $G$ ，与各项同性厚板，与各项异性厚板一样， $\nu_{13}$  和  $\nu_{23}$  的面刚度修正设为  $1E+04$ ，面外剪切变形忽略。这和薄板求解与手算解是一致的。

## 几何，属性和加载



## 对各项异性模型材料属性和刚度修正 (模型 B)

模型 B 使用各项同性材料属性，并对壳单元进行适当刚度修正。各项同性材料属性  $E$  和  $\nu$  (弹性模量和波松比) 设为如下：

$$E = E'_x = 30000 \text{ k/in}^2$$

$$\nu = \sqrt{\nu_x \nu_y} = \sqrt{0.4 * 0.2} = 0.2828$$

注意所有壳单元的局部 1 轴方向与全局坐标 X 轴平行，局部 2 轴与全局 Y 轴平行，刚度修正系数  $m_{11}$ ,  $m_{22}$  和  $m_{12}$  计算如下：

$$m_{11} = \frac{E'_y}{E} = \frac{15000}{30000} = 0.5$$

$$m_{22} = \frac{E'_x}{E} = \frac{30000}{30000} = 1.0$$

$$m_{12} = \sqrt{m_{11}m_{22}} \left( \frac{G_{orthotropic}}{G_{for H = \sqrt{D_x D_y}}} \right)$$

注意前面公式中使用的  $H$ ,  $D_x$  和  $D_y$  在文献 Ugural 1981 中 142 页公式 6.6 a 和 6.8 中定义。 $G_{orthotropic}$  是各项异性模型（模型 A）中的  $G$ ，本例中是  $6600 \text{ k/in}^2$ 。注意这与各项同性模型（模型 B）中使用的剪切模量不同，在 SAP2000 中是用  $E$  和  $\nu$  计算的：

$$G_{isotropic} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{30000}{2(1+0.2828)} = 11693 \text{ k/in}^2$$

$H$  中需要的  $G$  等于  $\sqrt{D_x D_y}$ ， $G_{for H = \sqrt{D_x D_y}}$ ，可以用文献 Ugural 1981 中理论计算，为  $8268 \text{ k/in}^2$ 。因此壳单元刚度修正  $m_{12}$  为：

$$m_{12} = \sqrt{1.0 * 0.5} \left( \frac{6600}{8268} \right) = 0.5645$$

对厚板模型， $\nu_{13}$  和  $\nu_{23}$  面对象刚度修改设为  $1E+04$ ，面外剪切变形忽略。这与手算解协调。

## SAP2000 测试的技术特性

- 壳的板弯曲分析
- 正交各项异性材料
- 面刚度修正

## 结果比较

手算解使用文献 Ugural 1981 中第 6 章介绍的理论计算。文献 Timoshenko and Woinowsky-Krieger 1959 中 11 章介绍了累似的描述。对薄板和厚板选项分别表示。

### 薄板选项 (8x16 网格划分)

输出参数	模型	SAP2000	手算解	百分误差
$U_z$ (中心) in	A – 各项异性	-1.077	-1.069	+0.7%
	B – 各项同性*	-1.077		+0.7%
$M_{11}$ (节点 A) k-in/in	A -各项异性	-81.54	-80.71	+1.0%
	B –各项同性*	-81.54		+1.0%
$M_{22}$ (节点 A) k-in/in	A -各项异性	-16.20	-16.14	+0.4%
	B –各项同性*	-16.19		+0.3%
$M_{11}$ (节点 B) k-in/in	A -各项异性	-15.94	-16.14	-1.2%
	B –各项同性*	-15.94		-1.2%
$M_{22}$ (节点 B) k-in/in	A -各项异性	-39.70	-40.35	-1.6%
	B –各项同性*	-39.70		-1.6%

\* 各项同性模型使用面对象刚度修正来模拟正交各项异性行为。

## 厚板选项 (8x16 网格划分)

输出参数	模型	SAP2000	手算解	误差百分比
$U_z$ (中心) in	A – 各项异性	-1.074	-1.069	+0.5%
	B – 各项同性*	-1.074		+0.5%
$M_{11}$ (节点 A) k-in/in	A -各项异性	-89.84	-80.71	+11.3%
	B –各项同性*	-89.84		+11.3%
$M_{22}$ (节点 A) k-in/in	A -各项异性	-16.10	-16.14	-0.2%
	B –各项同性*	-16.10		-0.2%
$M_{11}$ (节点 B) k-in/in	A -各项异性	-14.13	-16.14	-12.5%
	B –各项同性*	-14.13		-12.5%
$M_{22}$ (节点 B) k-in/in	A -各项异性	-43.31	-40.35	+7.3%
	B –各项同性*	-43.31		+7.3%

\* 各项同性模型使用面对象刚度修正模拟各项异性行为。

文件:           Example 2-015a-thick, Example 2-015a-thin,  
                  Example 2-015b-thick, Example 2-015b-thin  
                  Example 2-015c-thick  
                  Example 2-015d-thick

## 结论

对薄板选项 SAP2000 结果与手算解是一致的。对厚板选项是接近一致的，可以通过网格细分有效改进。

模型 C (各项异性厚板) 和 D (各项同性厚板) 使用 16x32 网格划分 (径向乘切向)。下表显示对 16x32 网格划分的厚板结果。结果显示比 8x16 网格划分改进很多。

## 厚板选项 (16x32 网格划分)

输出参数	模型	SAP2000	手算解	误差百分比
$U_z$ (中心) in	C – 各项异性	-1.070	-1.069	+0.1%
	D – 各项同性*	-1.070		+0.1%
$M_{11}$ (节点 A) k-in/in	C -各项异性	-83.61	-80.71	+3.6%
	D –各项同性*	-83.61		+3.6%
$M_{22}$ (节点 A) k-in/in	C -各项异性	-16.34	-16.14	+1.2%
	D –各项同性*	-16.34		+1.2%
$M_{11}$ (节点 B) k-in/in	C -各项异性	-15.96	-16.14	-1.1%
	D –各项同性*	-15.95		-1.2%
$M_{22}$ (节点 B) k-in/in	C -各项异性	-41.68	-40.35	+3.3%
	D –各项同性*	-41.68		+3.3%

\* 各项同性模型使用面对象刚度修正来模拟正交各项异性行为。

## 手算

Solution is based on theory presented in Chapter 6 of Ugural 1981. Similar discussion also is available in Chapter 11 of Timoshenko and Woinowsky-Krieger 1959.

Using the nomenclature in Ugural 1981:

$$E'_x = 30000 \text{ Ksi}$$

$$E'_y = 15000 \text{ Ksi}$$

$$\nu_y = 0.2$$

$$\nu_x = \frac{\nu_y E'_x}{E'_y} = \frac{0.2 \times 30000}{15000} = 0.4$$

$$G = 6600 \text{ Ksi}$$

Using equations 6.11 on page 143 of Ugural 1981:

$$D_x = \frac{E'_x t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} = \frac{30000 \times 2^3}{12(1-0.2 \times 0.4)} = 21739.13$$

$$D_y = \frac{E'_y t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} = \frac{15000 \times 2^3}{12(1-0.2 \times 0.4)} = 10869.57$$

$$D_{xy} = \frac{\nu_y E_x' t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} = \frac{0.2 \times 30000 \times 2^3}{12(1-0.2 \times 0.4)} = 4347.83$$

↑ Note: There is a typographical error in Ugural 1981 equation 6.11 for this item. The correct equation, shown here is deduced from equations 6.6 and 6.3

$$G_{xy} = \frac{G t^3}{12} = \frac{6600 \times 2^3}{12} = 4400$$

$$H = D_{xy} + 2G_{xy} = 4347.83 + 2 \times 4400 = 13147.83$$

From equation c on page 147 of Ugural 1981:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{8} (3D_x + 2H + 3D_y) \\ &= \frac{1}{8} (3 \times 21739.13 + 2 \times 13147.83 + 3 \times 10869.57) \\ &= 15515.22 \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{at center of plate } r = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

From equation 6.19 on page 147 of Ugural 1981

$$U_z = \frac{P_0}{64D_1} (a^2 - r^2)^2 = \text{deflection}$$

$$U_z = \frac{0.2}{64 \times 15515.22} (48^2 - 0^2)^2$$

$$\underline{U_z = 1.0692 \text{ in } \downarrow}$$

The bending moments are calculated using equations 6.20 on page 148 in Ugural 1981. Note that  $M_{11}$  is called  $M_x$  and  $M_{22}$  is called  $M_y$  in Ugural 1981.

$$M_{11} = \frac{P_0}{16D_1} [(D_x + D_{xy})(a^2 - r^2) - 2(D_x x^2 + D_{xy} y^2)]$$

$$M_{22} = \frac{P_0}{16D_1} [(D_x + D_{xy})(a^2 - r^2) - 2(D_y y^2 + D_{xy} x^2)]$$

Since we are getting moments at the edge of the plate,  $a = r = 48''$ , and the above equations reduce to

$$M_{11} = -\frac{P_0}{8D_1} (D_x x^2 + D_{xy} y^2)$$

$$M_{22} = -\frac{P_0}{8D_1} (D_y y^2 + D_{xy} x^2)$$

At Point A:

$$x = 48, y = 0$$

$$M_{11} = -\frac{P_0 D_x x^2}{8 D_1} = \frac{-0.2 \times 21739.13 \times 48^2}{8 \times 15515.22} = -80.71 \text{ K-in/in}$$

$$M_{22} = -\frac{P_0 D_{xy} x^2}{8 D_1} = \frac{-0.2 \times 4347.83 \times 48^2}{8 \times 15515.22} = -16.14 \text{ K-in/in}$$

At Point B:

$$x = 0, y = 48$$

$$M_{11} = -\frac{P_0 D_{xy} y^2}{8 D_1} = \frac{-0.2 \times 4347.83 \times 48^2}{8 \times 15515.22} = -16.14 \text{ K-in/in}$$

$$M_{22} = -\frac{P_0 D_y y^2}{8 D_1} = \frac{-0.2 \times 10869.57 \times 48^2}{8 \times 15515.22} = -40.35 \text{ K-in/in}$$

## Material Properties and Stiffness Modifiers for Isotropic Model

$$E = E'_x = 30000 \text{ Ksi}$$

$$V = \sqrt{V_x V_y} = \sqrt{0.2 \times 0.4} = 0.2828$$

$$G \text{ as calculated by SAP2000} = \frac{E}{2(1+V)} = \frac{30000}{2(1+0.2828)} = 11693$$

$$m_{11} = \frac{E'_x}{E} = \frac{30000}{30000} = 1$$

$$m_{22} = \frac{E'_y}{E} = \frac{15000}{30000} = 0.5$$

Now must back calculate the  $G$  required for  $H$  to equal  $\sqrt{D_x D_y}$ . Call this value of  $G'$ . From equations 6.11 on page 143 in Ugural 1981

$$H = D_{xy} + 2G_{xy} = D_{xy} + \frac{2G't^3}{12} = D_{xy} + \frac{G't^3}{6}$$

Equating  $H$  in the above equation with  $\sqrt{D_x D_y}$

$$D_{xy} + \frac{G't^3}{6} = \sqrt{D_x D_y}$$

$$G' = \frac{6}{t^3} (\sqrt{D_x D_y} - D_{xy})$$

$$G' = \frac{6}{2^3} (\sqrt{21739.13 \times 10869.57} - 4347.83)$$

$$G' = 8268 \text{ Ksi}$$

## Software Verification

PROGRAM NAME: SAP2000  
REVISION NO.: 0

$$m_{12} = \sqrt{m_{11} m_{22}} \left( \frac{G_{orthotropic}}{G \text{ if } H = \sqrt{I_x I_y}} \right)$$

$$m_{12} = \sqrt{1.0 \times 0.5} \left( \frac{6600}{8268} \right)$$

$$m_{12} = 0.5645$$