算例 5-003

实体单元 –承受静荷载的曲梁

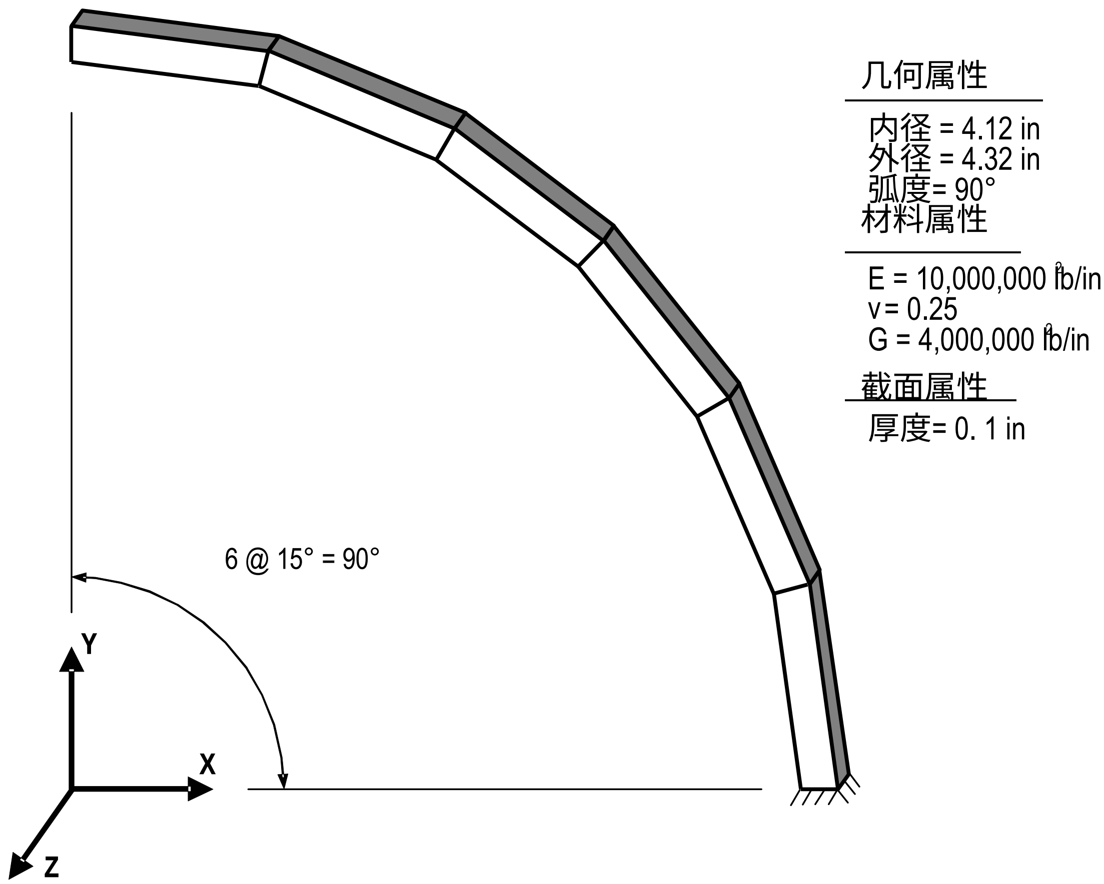
问题描述

此例中，一个用实体单元模拟的悬臂梁，承受在端部的面内和面外方向的单位力，分别在 Y 和 Z 方向。面内和面外的荷载在不同的工况中施加。端部在荷载方向的位移和手算结果进行了比较。

使用 MacNeal and Harder 1985 中的几何，属性和荷载。悬臂梁被弯曲成 90° 的拱。 其内半径为 4.12-in，外半径为 4.32-in。 这样其为 0.2-in 宽且在在中线约 6.63-in 长。 梁在 Y 方向为 0.1-in 厚。

本例考虑了不同剖分细度的三个模型。模型 A 使用 6X1X1 的剖分方法将曲梁剖分为六个实体对象，每个实体对象是 15° 的拱。模型 A 使用 90X1X1 的剖分方法将曲梁剖分为 90 个实体对象，每个实体对象是 1° 的拱。模型 A 使用 90X4X8 的剖分方法将曲梁剖分为 2880 个实体对象，每个实体对象是 1° 的拱。

几何特性和属性



荷载

下表定义了施加于模型的面内和面外的荷载。

荷载工况	荷载
面内	F_y = +0.25 lb 在每个顶部的四个角点
面外	F_z = +0.25 lb 在每个顶部的四个角点

所测试的 SAP2000 技术特性

- 使用独立弯曲模型选项的实体对象的弯曲。
- 节点力荷载

结果比较

独立手算解使用 Cook 和 Young 1985 第 244 页描述的单位荷载方法。手算解还在 MacNeal 和 Harder 1985 中发表。

独立的弯曲模型

荷载工况和类型	模型和剖分	输出参数	SAP2000	手算解	误差
面内荷载工况	**A**- 6x1x1	U_y, in 顶部四个角点的平均值	0.0768	0.0886	-13%
	B- 90x1x1		0.0885		0%
	C- 90x4x8		0.0884		0%
面外荷载工况	**A**- 6x1x1	U_z, in 顶部四个角点的平均值	0.4062	0.5004	-19%
	B- 90x1x1		0.4773		-5%
	C- 90x4x8		0.4945		-1%

计算模型文件: Example 5-003a, Example 5-003b, Example 5-003c

结论

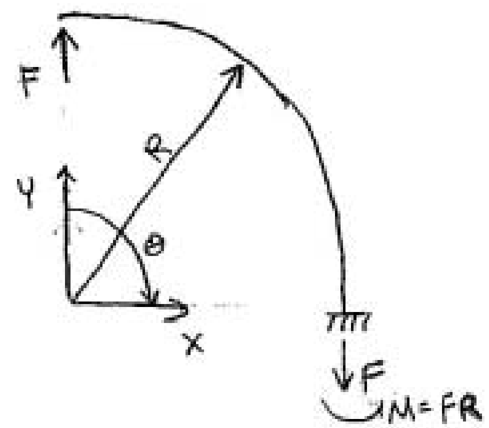
只要剖分充分，SAP2000 面内加载的结果和手算解的比较是可以接受的。

面内结果随着沿曲梁长度的剖分细度增加而精度增加。

面外结果随着沿曲梁长度的剖分细度和梁横截面内的剖分细度的增加而精度增加。横截面的剖分增强了梁的扭曲表现，这将对梁的面外结果有一定的影响。

手算过程

In - Plane Force



S = beam length = $R\theta$

$ds = R\,d\theta$

$M(\theta) = RF\cos\theta$

$V(\theta) = F\cos\theta$

$R = 4.22$ in (centerline)

$F = 1$ lb

$$\Delta_y = \int_0^L \frac{mM}{EI}ds + \int_0^L \frac{vV}{GA_v}ds + \int_0^L \frac{pP}{EA}ds$$

$$\Delta_y = \int_0^{\pi/2} \frac{R^3F}{EI}\sin^2\theta\,d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{RF}{GA_v}\cos^2\theta\,d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{RF}{EA}\sin^2\theta\,d\theta$$

Noting that $\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\Delta_y = \frac{\pi R^3 F}{4EI} + \frac{\pi RF}{4GA_v} + \frac{\pi RF}{4EA}$$

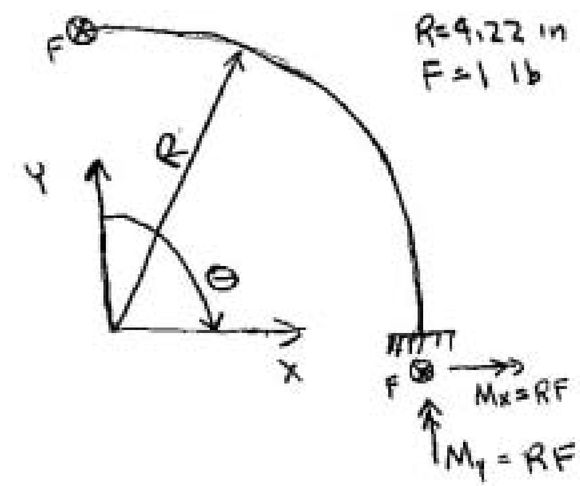
$$\Delta_y \frac{\pi \times 4.22^3 \times 1}{4 \times 10{,}000{,}000 \times \left(\frac{0.1 \times 0.2^3}{12}\right)} + \frac{\pi \times 4.22 \times 1}{4 \times 4{,}000{,}000 \times \left(\frac{5}{6} \times 0.2 \times 0.1\right)}$$

$$+ \frac{\pi \times 4.22 \times 1}{4 \times 10{,}000{,}000 \times 0.2 \times 0.1}$$

$$\Delta_y = 0.088535 + 0.000050 + 0.000017$$

$$\boxed{\Delta_y = 0.08860 \text{ in}}$$

Out-of-Plane Force

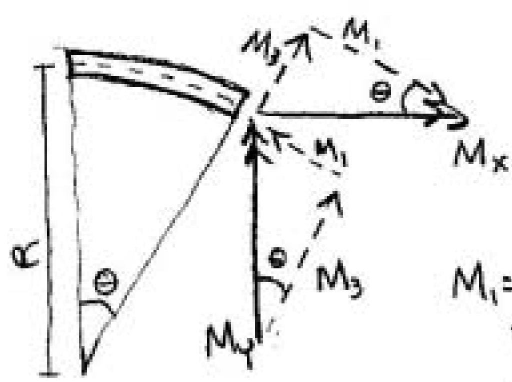


S = beam length $= R\theta$

$ds = R\,d\theta$

$M_x(\theta) = RF - RF\cos\theta$

$M_y(\theta) = RF\sin\theta$



M_1 = moment about local 1 axis = torsion

M_3 = moment about local 3 axis

$$M_1 = M_x\cos\theta - M_y\sin\theta$$
$$= RF\cos\theta - RF\cos^2\theta - RF\sin^2\theta$$
$$= RF\cos\theta - RF(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$M_1 = RF\cos\theta - RF$$
$$M_3 = M_x\sin\theta + M_y\cos\theta$$
$$= RF\sin\theta - RF\cos\theta\sin\theta + RF\cos\theta\sin\theta$$
$$M_3 = RF\sin\theta$$

$$\Delta_z = \int_0^L \frac{mM}{EI} ds + \int_0^L \frac{vV}{GA_v} ds + \int_0^L \frac{tT}{GJ} ds$$

$$\Delta_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3 F}{EI} \sin^2\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{GA_v} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3 F}{GJ} \left(\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1\right) d\theta$$

Note: $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{4}$

Note: $\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \sin\theta \Big|_0^{\pi/2} = 1$

$$\Delta_z = \frac{\pi R^3 F}{4EI} + \frac{\pi R}{2GA_v} + \frac{R^3 F}{GJ}\left(\frac{\pi}{4} - 2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Delta_z = \frac{\pi R^3 F}{4EI} + \frac{\pi R}{2GA_v} + \left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)\frac{R^3 F}{GJ}$$

From Roark and Young 1975
Item 4, Table 20, page 290

$$J = \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36\left(\frac{t/2}{b/2}\right)\left(1 - \frac{(t/2)^4}{12(b/2)^4}\right)\right]$$

$$J = 0.1 \times 0.05^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36\left(\frac{0.05}{0.1}\right)\left(1 - \frac{0.05^4}{12 \times 0.1^4}\right)\right]$$

$$J = 0.000045776$$

$$\Delta_z = \frac{\pi \times 4.22^3 \times 1}{4 \times 10{,}000{,}000 \times \left(\frac{0.2 \times 0.1^3}{12}\right)} + \frac{\pi \times 4.22}{2 \times 4{,}000{,}000 \times \left(\frac{5}{6} \times 0.1 \times 0.2\right)}$$

$$+ \left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)\frac{4.22^3 \times 1}{4{,}000{,}000 \times 0.000045776}$$

$$\Delta_z = 0.354143 + 0.000099 + 0.146193$$

$$\boxed{\Delta_z = 0.500435 \text{ in}}$$