算例 6-012

连接单元 – 频率相关连接

问题描述

本例是一个单自由度系统，用于测试频率相关连接的性能。基于不同荷载频率进行了稳态分析。将不同荷载频率下的连接单元变形与基于 Chopra 1995 一书理论的独立手算结果进行了对比。

该 SAP2000 模型由一个标签为节点 1 的单节点和一个连接单元组成。在 XZ 平面内建立模型，分析中只有 U_z 自由度是活动的。频率相关连接单元模拟为节点 1 的单节点连接单元。这意味着连接单元的一端接地，一端与节点 1 相连。将连接单元定位为其局部 2 轴与 Z 轴正向平行。这是单节点连接单元的默认方向。只定义了连接单元的 U_1 自由度方向的属性。

连接单元刚度从 0 Hz 频率下的 80 k/in 到 1 Hz 频率下的 200 k/in 发生线性变化。连接单元滞回阻尼特性从 0 Hz 频率下的 1 k/in 到 1 Hz 频率下的 5k/in 发生线性变化。

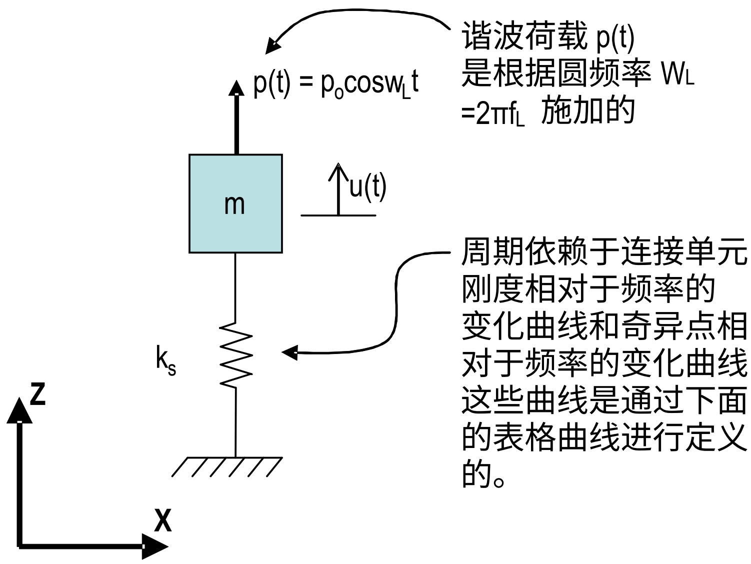
节点 1 上施加了 U_Z 方向的 0.03 kip-sec^2/in 大小的平动质量。只在节点 1 的正 U_Z 方向施加了 100kip 的节点荷载。

生成了名为 SS1 的单个稳态分析工况。得到了荷载频率 f_L 为 0.12, 0.39 和 0.77 Hz 时的结果。

SAP2000 中设置了下表所示的频率相关连接单元特性。

f (Hz)	k (kip/in)	c_h (kip/in)
0.12	94.4	0.6
0.39	126.8	1.95
0.77	172.4	3.85

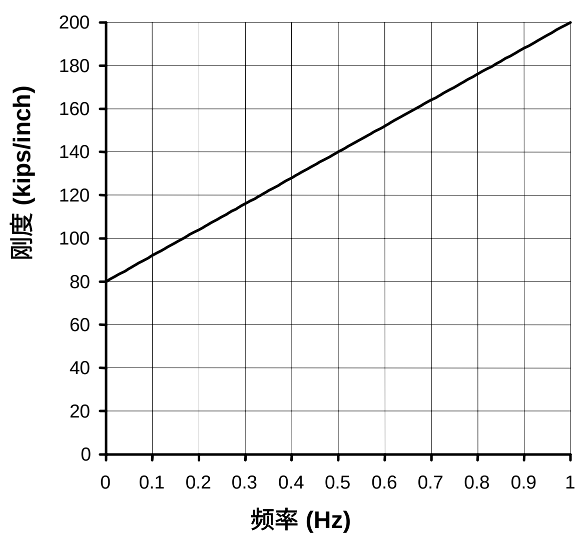
几何特性、属性和荷载

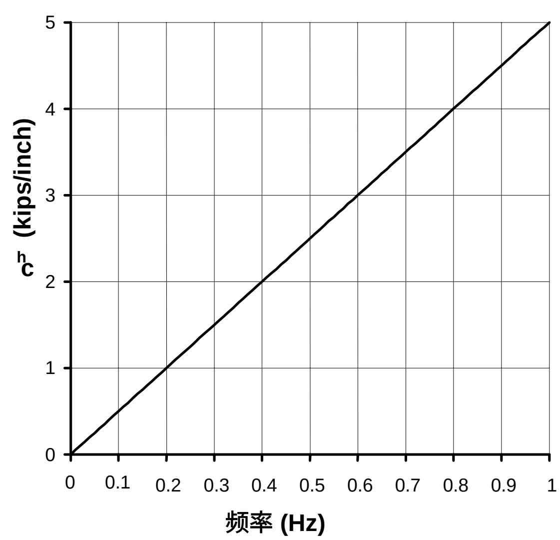


<u>节点质量</u>
$m = 0.03$ k-sec^2/in

<u>荷载</u>
$p_o = 100$ k
f_L = 不同的: 0.12, 0.39 和 0.77 rad/sec 在本例中进行了考虑

<u>激活自由度</u>
仅 U_z





关于独立手算方法的讨论

本例的独立手算过程采用了等效粘滞阻尼。为频率相关连接单元指定的阻尼和 SAP2000 分析所用的阻尼是与速度无关的滞回阻尼。因此，作为手算的一部分，必须将与速度无关的滞回阻尼转化为等效粘滞阻尼。

采用与速度无关的滞回阻尼的单自由度稳定分析运动方程为下面所示的公式（Chopra 1995 一书第 102 页公式 3.10.3）：

$$m\ddot{u} + \frac{c_h}{\omega_L}\dot{u} + ku = p_o \cos\omega_L t \qquad \text{Eqn. 1}$$

其中 c_h 为滞回阻尼系数，ω_L 为荷载频率。

本例的采用等效粘滞阻尼的运动方程为：

$$m\ddot{u} + c_v\dot{u} + ku = p_o \cos\omega_L t \qquad \text{Eqn. 2}$$

其中 c_v 为粘滞阻尼系数，该粘滞阻尼系数的定义为：

$$c_v = 2\xi\omega_n m = 2\xi\sqrt{km} \qquad \text{Eqn. 3}$$

其中 ξ 为等效粘滞阻尼系数（临界阻尼的一部分）。 ω_n 为系统自振频率，m 为质量，k 为刚度。

由方程 1、2，很容易得到：

$$c_h = c_v\omega_L \qquad \text{Eqn. 4}$$

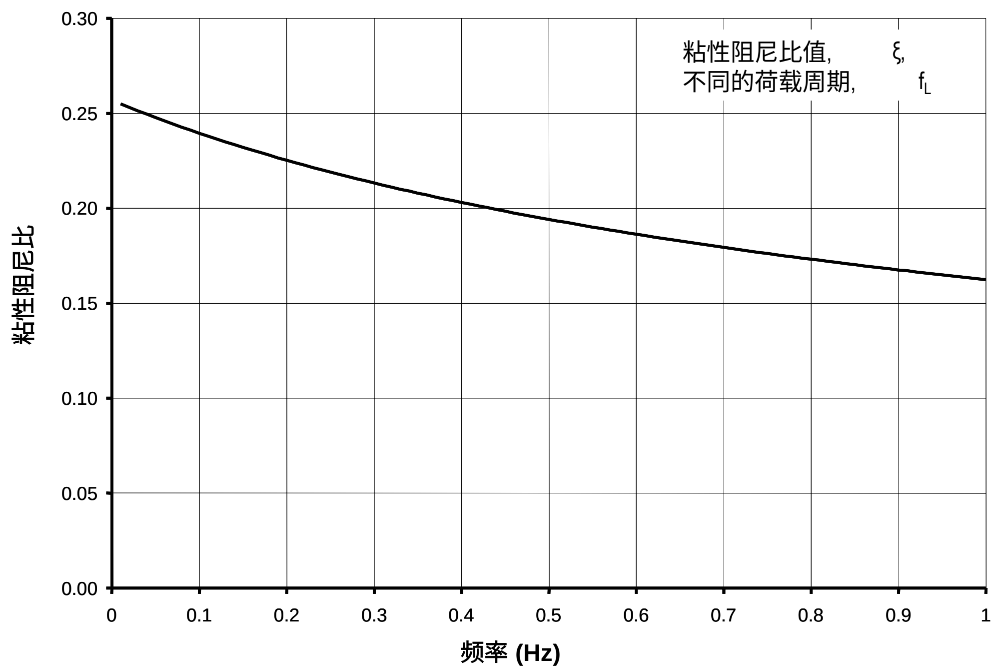
因此，

$$c_h = 2\xi\omega_L\sqrt{km} \qquad \text{Eqn. 5}$$

整理方程 5，可得粘滞阻尼系数 ξ 的表达式，该表达式包含粘滞阻尼系数和频率项：

$$\xi = \frac{c_h}{2\omega_L \sqrt{km}} = \frac{c_h}{4\pi f_L \sqrt{km}} \qquad \text{Eqn. 6}$$

采用方程 6 计算手算，并将频率从 $f_L = 0.01$ 变化到 $f_L = 1$ 时的结果绘于下图中。



所测试的 **SAP2000** 技术要点：

- 频率相关连接单元
- 稳态分析

结果比较

采用了 Chopra 1995 一书第 3.2 节 68 至 69 页的公式和原理进行手算得到了独立结果。另外，采用公式 3.2.4 计算来响应的真实部分（有荷载状态）和假想部分（无荷载状态）。由真实部分和假想部分的平方和的平方根计算出响应的数值结果。

荷载频率	连接单元变形	SAP2000	独立结果	差值百分比
0.12 Hz	U_1 真实部分 (in)	1.05947	1.05947	0%
	U_1 假想部分 (in)	-0.00674	-0.00674	0%
	U_1 数值结果 (in)	1.05949	1.05949	0%
0.39 Hz	U_1 真实部分 (in)	0.78958	0.78958	0%
	U_1 假想部分 (in)	-0.01216	-0.01216	0%
	U_1 数值结果 (in)	0.78967	0.78967	0%
0.77 Hz	U_1 真实部分 (in)	0.58213	0.58213	0%
	U_1 假想部分 (in)	-0.01305	-0.01305	0%
	U_1 数值结果 (in)	0.58227	0.58227	0%

计算模型文件: Example 6-011

结论

SAP2000 的结果与独立结果完全吻合。

手算过程

Reference: Chopra 1995
Section 3.2, pages 68-69

$$\text{Real Component} = C = \frac{P_o}{K} \frac{1-(\omega_L/\omega_n)^2}{[1-(\omega_L/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_L/\omega_n)]^2}$$

$$\text{Imaginary Component} = D = \frac{P_o}{K} \frac{-2\xi\omega/\omega_n}{[1-(\omega_L/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_L/\omega_n)]}$$

As derived in the example write-up:

$$\xi = \frac{C_n}{4\pi f_L \sqrt{Km}}$$

$$\omega_L = 2\pi f_L$$

Note that C_n and K vary with f_L

At $f_L = 0.12$ Hz

$K = 94.4$ K/in

$C_n = 0.6$ K/in

$$\varepsilon = \frac{C_n}{4\pi f_L \sqrt{Km}} = \frac{0.6}{4\pi \times 0.12 \sqrt{94.4 \times 0.03}}$$

$\varepsilon = 0.236436$

$$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{94.4/0.03} = 56.095157 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_L = 2\pi f_L = 2\pi \times 0.12 = 0.24\pi \text{ rad/sec}$$

$$1-(\omega_L/\omega_n)^2 = 1-(0.24\pi/56.095157)^2$$
$$= 0.999819$$

$$2\varepsilon(\omega_L/\omega_n) = 2 \times 0.236436 \times (0.24\pi/56.095157)$$
$$= 0.006356$$

$$\text{Real} = \frac{P_o}{K} \frac{1-(\omega_L/\omega_n)^2}{[1-(\omega_L/\omega_n)^2]^2 + [2\varepsilon(\omega_L/\omega_n)]^2}$$

$$= \frac{100}{94.4} \frac{0.999819}{0.999819^2 + 0.006356^2}$$

Real = 1.059471 in for $f_L = 0.12$ Hz

$$\text{Imaginary} = \frac{P_o}{K} \frac{-2\xi(\omega_L/\omega_n)}{[1-(\omega_L/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_L/\omega_n)]^2}$$

$$= \frac{100}{94.4} \frac{-0.006356}{0.999819^2 + 0.006356^2}$$

$$\underline{\text{Imaginary} = -0.006735 \text{ in for } f_L = 0.12 \text{ Hz}}$$

$$\text{Magnitude} = \sqrt{\text{Real}^2 + \text{Imaginary}^2}$$

$$= \sqrt{1.059471^2 + (-0.006735)^2}$$

$$\underline{\text{Magnitude} = 1.059492 \text{ in for } f_L = 0.12 \text{ Hz}}$$

At $f_L = 0.39$ Hz

$K = 126.8$ K/in

$C_h = 1.95$ K/in

$$\varepsilon = \frac{C_h}{4\pi f_L \sqrt{Km}} = \frac{1.95}{4\pi \times 0.39 \times \sqrt{126.8 \times 0.03}}$$

$$\varepsilon = 0.204005$$

$$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{126.8/0.03} = 65.012819 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_L = 2\pi f_L = 2\pi \times 0.39 = 0.78\pi \text{ rad/sec}$$

$$1 - (\omega_L/\omega_n)^2 = 1 - (0.78\pi/65.012819)^2$$
$$= 0.998579$$

$$2\varepsilon(\omega_L/\omega_n) = 2 \times 0.204005 \times (0.78\pi/65.012819)$$
$$= 0.015379$$

$$\text{Real} = \frac{P_o}{K} \frac{1 - (\omega_L/\omega_n)^2}{[1 - (\omega_L/\omega_n)^2]^2 + [2\varepsilon(\omega_L/\omega_n)]^2}$$

$$= \frac{100}{126.8} \frac{0.998579}{0.998579^2 + 0.015379^2}$$

Real = 0.789579 in for $f_L = 0.39$ Hz

$$\text{Imaginary} = \frac{P_o}{K} \frac{-2\xi(\omega_L/\omega_n)}{[1-(\omega_L/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_L/\omega_n)]^2}$$

$$= \frac{100}{126.8} \frac{-0.015379}{0.998579^2 + 0.015379^2}$$

$$\underline{\text{Imaginary} = -0.012160 \text{ in for } f_L = 0.39 \text{ Hz}}$$

$$\text{Magnitude} = \sqrt{\text{Real}^2 + \text{Imaginary}^2}$$

$$= \sqrt{0.789579^2 + (-0.012160)^2}$$

$$\underline{\text{Magnitude} = 0.789673 \text{ in for } f_L = 0.39 \text{ Hz}}$$

At $f_L = 0.77$ Hz

$K = 172.4$ k/in

$C_n = 3.85$ k/in

$$\xi = \frac{C_n}{4\pi f_L \sqrt{Km}} = \frac{3.85}{4\pi \times 0.77 \sqrt{172.4 \times 0.03}}$$

$\xi = 0.174957$

$$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{172.4/0.03} = 75.806772 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_L = 2\pi f_L = 2\pi \times 0.77 = 1.54\pi \text{ rad/sec}$$

$$1 - (\omega_L/\omega_n)^2 = 1 - (1.54\pi/75.806772)^2$$
$$= 0.995927$$

$$2\xi(\omega_L/\omega_n) = 2 \times 0.174957 \times (1.54\pi/75.806772)$$
$$= 0.022332$$

$$\text{Real} = \frac{P_o}{K} \frac{1-(\omega_L/\omega_n)^2}{[1-(\omega_L/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_L/\omega_n)]^2}$$

$$= \frac{100}{172.4} \frac{0.995927}{0.995927^2 + 0.022332^2}$$

Real = 0.582126 in for $f_L = 0.77$ Hz

$$\text{Imaginary} = \frac{P_o}{K} \frac{-2\xi(\omega_L/\omega_n)}{[1-(\omega_L/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_L/\omega_n)]^2}$$

$$= \frac{100}{172.4} \frac{-0.022332}{0.995927^2 + 0.022332^2}$$

$$\underline{\text{Imaginary} = -0.013053 \text{ for } f_L = 0.77\text{Hz}}$$

$$\text{Magnitude} = \sqrt{\text{Real}^2 + \text{Imaginary}^2}$$

$$= \sqrt{0.582126^2 + (-0.013053)^2}$$

$$\underline{\text{Magnitude} = 0.582272 \text{ in for } f_L = 0.77 \text{ Hz}}$$