

算例 3-002

平面-静荷载下的直梁

问题描述

本例为一个直的悬臂梁，用平面应力单元表示，在端部承受 X 向和 Y 向的单位力，以及绕 Y 向的单位弯矩，这几个力在不同的荷载工况中。将端部在荷载方向的位移与手算结果进行比较。

重要的是要注意本例是一个测试和验证平面单元的极端情况。一般不用平面单元模拟高宽比为 2:1 的梁。

MacNeal and Harder 1985 中描述了该问题的基本几何特性、属性和荷载。该悬臂梁长 6 英寸、Z 向宽 0.2 英寸、Y 向宽 0.1 英寸。建立了 5 个不同模型，采用不同的剖分方式。按照 MacNeal and Harder 1985 中的建议，模型 A、B 和 C 分别使用 6x1 矩形、梯形和平行四边形单元。模型 D 从 6x1 矩形开始，并将每个矩形剖分为两个三角形。模型 E 从 6x1 矩形开始，然后将每个矩形剖分为四个三角形。模型 D 和 E 不包括在 MacNeal and Harder 1985 中。

为各个模型生成三个荷载工况。这三个荷载工况在宣布端部分别施加一个单位轴力、一个单位面内力和一个单位面内弯矩。面内弯矩按照 X 方向力偶施加。

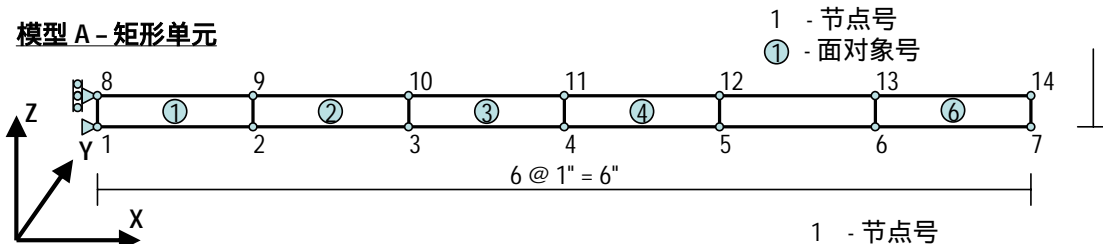
使用采用不包括支座局部泊松效应的单元梁理论推导出独立的解。在 SAP2000 中建立满足假定的梁。在 SAP2000 模型中， U_x 和 U_y 自由度是活动的，所有其他自由度都是不活动的。在固定端，节点 1 的 U_x 和 U_z 自由度被约束，节点 8 只有 U_x 自由度被约束，以避免在模型中引入不需要的局部泊松效应。而且，梁上施加面内剪力时，在节点 8 的端部荷载的反向施加一个面内力，大小等于施加的端部荷载的一半。节点 8 处施加的特殊荷载用于模拟不考虑局部泊松效应的支座。

属性

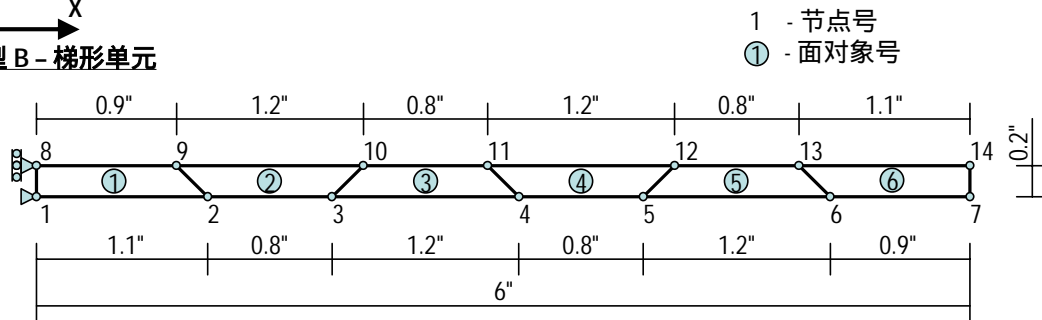
Software Verification

PROGRAM NAME: SAP2000
REVISION NO.: 2

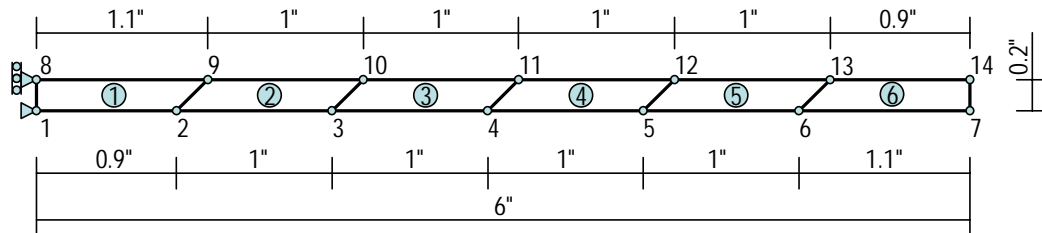
模型 A - 矩形单元



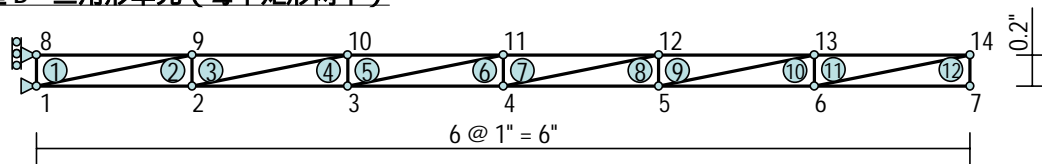
模型 B - 梯形单元



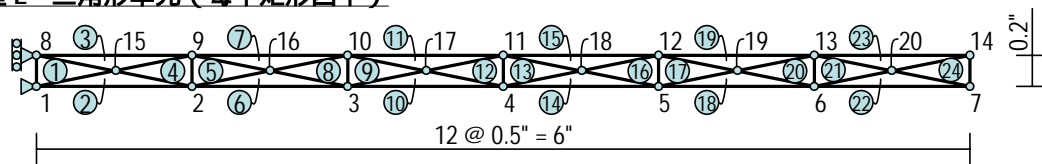
模型 C - 平行四边形单元



模型 D - 三角形单元 (每个矩形两个)



模型 E - 三角形单元 (每个矩形四个)



属性

$$E = 10,000,000 \text{ lb/in}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$G = 3,846,154 \text{ lb/in}^2$$

$$\text{面单元厚度} = 0.1 \text{ in}$$

荷载

为各个模型施加了下表所列的荷载。

荷载工况	荷载类型	荷载
1	轴向拉伸	节点 7、14 处, $F_x = +0.5 \text{ lb}$
2	面内	节点 7、14 处, $F_z = +0.5 \text{ lb}$ 节点 8 处, $F_z = -0.5 \text{ lb}$
3	面内弯曲	节点 7 处, $F_x = -5 \text{ lb}$, 节点 14 处, $F_x = +5 \text{ lb}$

校验的 SAP2000 的技术特色

- 使用平面应力单元的膜分析
- 平面单元方面比率效应
- 矩形平面单元几何扭曲效应
- 节点力荷载

结果对比

对包含不相容弯曲模式和不包含不相容弯曲模式的平面单元分别列出了 SAP2000 的结果。Cook and Young 1985 第 244 页描述了手算的独立结果。MacNeal and Harder 1985 也有出版的独立结果。

包括不相容模型选项 (6x1 网格)

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	独立结果	差异百分比
荷载工况 1 轴向拉伸	A- 矩形	U _x 节点 4 和 17 的平均 值 in	3.000E-05	3.000E-05	0%
	B - 梯形		3.000E-05		0%
	C - 平行四边形		3.000E-05		0%
	D - 三角形 2		3.000E-05		0%
	E - 三角形 4		3.000E-05		0%
荷载工况 2 面内剪切和 弯曲	A- 矩形	U _z 节点 4 和 17 的平均 值 in	0.1073	0.1081	-1%
	B - 梯形		0.0238		-78%
	C - 平行四边形		0.0861		-20%
	D - 三角形 2		0.0035		-97%
	E - 三角形 4		0.0070		-94%
荷载工况 3 面内弯曲	A- 矩形	U _x 节点 4 和 17 的平均 值 in	9.000E-04	9.000E-04	0%
	B - 梯形		1.466E-04		-84%
	C - 平行四边形		7.614E-04		-15%
	D - 三角形 2		0.282E-04		-97%
	E - 三角形 4		0.585E-04		-94%

不包括不相容模型选项（6x1 网格）

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	独立结果	差异百分比
荷载工况 1 轴向拉伸	A- 矩形	U _x 节点 7 和 14 的平均 值 in	3.000E-05	3.000E-05	0%
	B - 梯形		3.000E-05		0%
	C - 平行四边形		3.000E-05		0%
	D - 三角形 2		3.000E-05		0%
	E - 三角形 4		3.000E-05		0%
荷载工况 2 面内剪切和 弯曲	A- 矩形	U _z 节点 7 和 14 的平均 值 in	0.0101	0.1081	-91%
	B - 梯形		0.0030		-97%
	C - 平行四边形		0.0038		-96%
	D - 三角形 2		0.0035		-97%
	E - 三角形 4		0.0070		-94%
荷载工况 3 面内弯曲	A- 矩形	U _x 节点 7 和 14 的平均 值 in	0.840E-04	9.000E-04	-91%
	B - 梯形		0.206E-04		-98%
	C - 平行四边形		0.282E-04		-97%
	D - 三角形 2		0.282E-04		-97%
	E - 三角形 4		0.585E-04		-94%

计算模型文件： Example 3-002a-incomp, Example 3-002a-comp,
Example 3-002b-incomp, Example 3-002b-comp,
Example 3-002c-incomp, Example 3-002c-comp,
Example 3-002d-incomp, Example 3-002d-comp,
Example 3-002e-incomp, Example 3-002e-comp,
Example 3-002f-incomp, Example 3-002f-comp,
Example 3-002g-incomp

不相容弯曲模式选项

不使用不相容弯曲模式选项的模型在使用 6x1 剖分时的结果较差。当网格细分后，不使用不相容弯曲模式选项的模型的结果逐渐收敛到理论解。

例如，Example 3-002f-comp 模型具有矩形网格，不包括不相容模式选项，将 6x1 网格剖分到 240x4 网格。结果列于下表。它们与理论结果吻合的很好。

一般而言，建议用户总是使用不相容弯曲模式选项，因为这样可以在较粗糙的网格划分条件下得到可接受的结果。

不包括不相容弯曲模式 (240x4 网格)

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	独立结果
荷载工况 1 轴向拉伸	U_x in 节点 7 和 14 的平均值	3.000E-05	3.000E-05	0%
荷载工况 2 面内剪切和弯曲	U_z in 节点 7 和 14 的平均值	0.1068	0.1081	-1%
荷载工况 3 面内弯曲	U_x in 节点 7 和 14 的平均值	8.958E-04	9.000E-04	0%

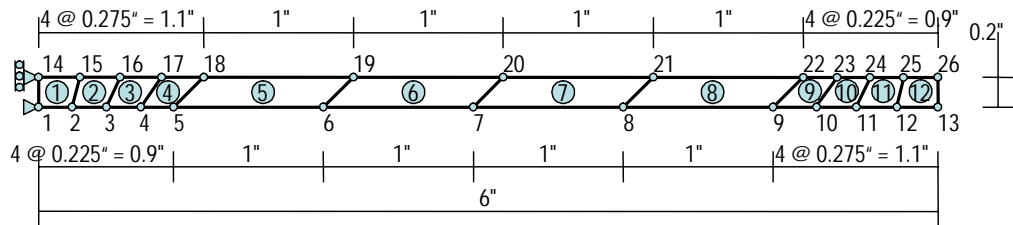
面内剪切和弯曲 (工况 2 和 3)

下面关于面内剪力和弯曲的描述中，只包括了使用不相容弯曲模式选项的模型。所描述的概念对使用不相容弯曲模式选项和不使用不相容弯曲模式选项的模型都适用。

面内剪切和弯曲结果对单元形状敏感。矩形单元的结果可以接受。梯形单元和三角形单元的结果不能接受。表面上看，平行四边形单元的结果显得不可接受。但是，下面的描述表明是模型 C 各端的梯形单元导致了不可接受的结果。

除了端部梯形单元被分成四个单元之外，模型 F 与模型 C 相同，如下图所示。模型 C 和 F 的平行四边形单元是相同的。

模型 F



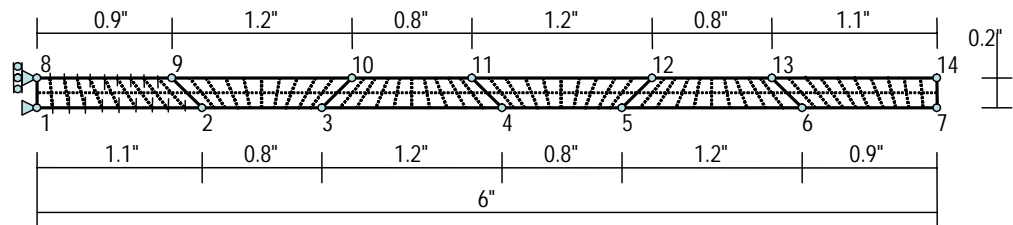
下表中显示了荷载工况 2 和 3 的结果。模型 F 的结果是可以接受的，它与独立结果的差别在 1%。比较模型 C 和 F 可看到模型 C 中不可接受的面内剪切和弯曲结果，这是由端部梯形单元，而不是平行四边形内部单元造成的。

模型 F 结果
平行四边形单元
不包括不相容模式选项

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	独立结果
荷载工况 2 面内剪切和弯曲	U_z in 节点 7 和 14 的平均值	0.1075	0.1081	-1%
荷载工况 3 面内弯曲	U_x in 节点 7 和 14 的绝对值平均值	8.995E-04	9.000E-04	0%

可以使用梯形单元得到可接受的结果；但是，梯形单元对梯形腰的边线夹角和单元方面比率敏感。模型 G 与模型 B 类似，除了模型 B 中六个图形单元被细分为 10x2 单元，如下图所示。这进一步的剖分将各个梯形的边线角度从 90 度减小到 9 度，将方面比率从 5:1 减小到 1:1。

模型 G



下表中显示了荷载工况 2 和 3 的结果。模型 G 的结果是可以接受的，它与独立结果的差别在 1%。

模型 G 结果
梯形单元，60x2 网格
包括不相容模式选项

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	独立结果
荷载工况 2 面内剪切和弯曲	U_z in 节点 7 和 14 的平均值	0.1091	0.1081	+1%
荷载工况 3 面内弯曲	U_x in 节点 7 和 14 的绝对值平 均值	8.998E-04	9.000E-04	0%

结论

对于不相容弯曲模式和不包含不相容弯曲模式，SAP2000 的结果与独立结果在轴向拉伸上吻合很好。


对于使用不相容弯曲模式的模型，矩形和平行四边形单元的解得到的面内剪切和弯曲的 SAP2000 解是可以接受的，其他单元的解都是不理想的，无论是薄板选项还是厚板选项。面内剪切和弯曲显著时，不建议使用三角形单元。面内剪切和弯曲显著时，尽量使用矩形和平行四边形单元，而不使用梯形单元。当必须使用梯形单元时，要注意如下提示：

1. 总是使用 1 和 2 个单元宽的剖分。
2. 减小梯形对边角度。
3. 使用接近 1:1 的方面比率。
4. 仔细查看结果，以确定单元之间的应力连续性。

使用足够的网格划分时，不使用不相容弯曲模式选项的模型也可以得到可接受的结果。与使用不相容弯曲模式选项的模型相比，不使用不相容弯曲模式选项的模型需要很细的剖分才能得到可接受结果。

一般而言，对平面单元模型，总是需要使用不相容弯曲模式选项。

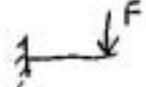
手算过程

Load Case 1 - Axial Extension 

$$\Delta = \int_0^L \frac{PP}{EA} dx = \int_0^L \frac{P}{EA} dx = \frac{PL}{EA}$$

$$\Delta = \frac{1 \times 6}{10,000,000 \times 0.2 \times 0.1}$$

$$\Delta = 0.00003 \text{ in}$$

Load Case 2 - In-Plane Bending and Shear 

$$\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx + \int_0^L \frac{vV}{GA_v} dx$$

$$= \int_0^L \frac{Fx^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{F dx}{GA_v}$$

$$= \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL}{GA_v}$$

$$= \frac{1 \times 6^3}{3 \times 10,000,000 \times \left(\frac{0.1 \times 0.2^3}{12}\right)} + \frac{1 \times 6}{3846154 \times \left(\frac{5}{6} \times 0.2 \times 0.1\right)}$$

$$\Delta = 0.10800 + 0.00009$$

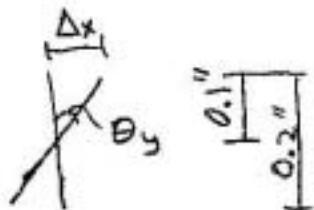
$$\Delta = 0.10809 \text{ in}$$

Load Case 3 - In-Plane Moment $\rightarrow M$

$$\theta_y = \int_0^L \frac{m M}{EI} = \int_0^L \frac{M}{EI} dx = \frac{ML}{EI}$$

$$\theta_y = \frac{1 \times 6}{10,000,000 \times \left(\frac{0.1 \times 0.2^3}{12} \right)}$$

$$\theta_y = 0.00900 \text{ radians}$$



$$\Delta x = 0.1 \sin \theta_y = 0.1 \theta_y = 0.1 \times 0.00900$$

$$\Delta x = 0.00090 \text{ in}$$