

算例 2-016

壳 – 平面外失稳

例题注释

本例中使用了一个平板检测了壳单元的平面外稳定性。这块平板 24in 长，24in 宽，1in 厚。单位剪应力和弯曲应力分别是 τ 和 σ ，通过两个单独的工况施加在板的边缘。SAP2000 计算的失稳荷载 τ_{cr} 和 σ_{cr} 与手算结果进行了比较。

SAP2000 中的模型可以对面自动进行剖分，这使得很容易检验模型在不同剖分尺寸下的情况。在本例中，在两个模型中分别使用了 16X16 和 64X64 两种剖分形式。

SAP2000 中有一个专门的选项是用来添加面剖分后在面对象边缘出现的新节点的约束，当在其邻近的两个节点都有约束时，那么这一点就会自动添加一个相应的约束。本例中使用了这一功能。

本例中的约束方式如下 (参见下一页图):

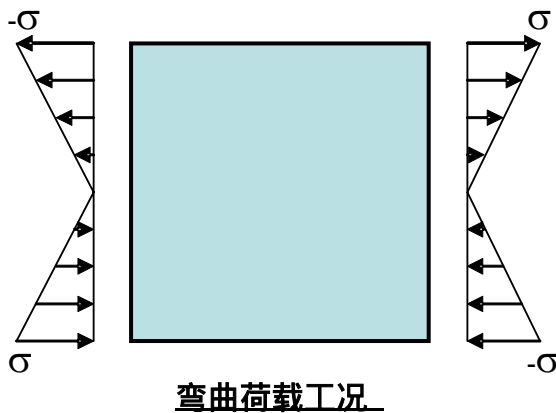
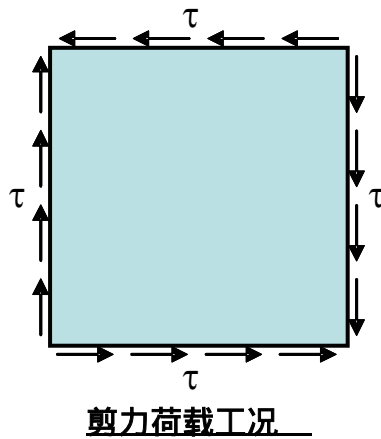
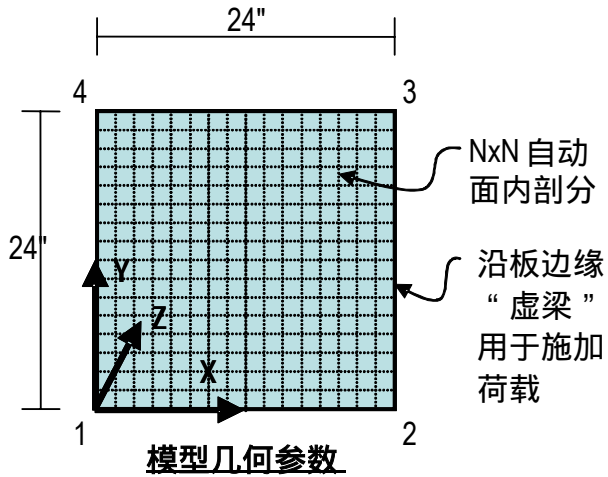
- 节点 1: U_x , U_y 和 U_z
- 节点 2, 3: U_z
- 节点 4: U_x 和 U_z (U_x 作为一个弹簧, 见后面详细论述)
- 所有自动剖分产生节点的自动约束: U_z

节点 4 的 U_x 弹簧约束的刚度是 1E9 kip/in。这样做的目的只是使在节点 1 和 4 之间产生的自动剖分节点只产生 U_z 的自动约束。如果在节点 4 上 U_x 方向是约束而不是弹簧，那么在节点 1 和 4 之间自动剖分产生的节点添加的约束就是 U_x 和 U_z 两个方向，这并不是一个理想的假设。

从面单元角点间环绕面单元建立了四个框架线单元。这些框架线单元的属性修改中所有的参数都设置成了 0，目的是使它们对结构的刚度、质量和自重都是没有影响的。框架单元别指定为会随着面剖分的情况自动进行剖分。所有施加在这些“虚拟”线对象的面边缘荷载都是分布荷载。当面进行自动剖分时，这些框架梁可以保证面边缘所承受的荷载都是分布荷载。

PROGRAM NAME: SAP2000
REVISION NO.: 0

几何、属性和荷载参数



内部剖分参数

模型 A: 16x16

模型 B: 64x64

材料属性

$E = 29000 \text{ k/in}^2$

$\nu = 0.3$

截面属性

长度 = 24 in

宽度 = 24 in

厚度 = 1 in

节点 1 的约束

U_x, U_y, U_z

节点 2 和 3 的约束

U_z

节点 4 的约束

U_x, U_z 此处 U_x
为一弹簧约束

其它边界点约束

U_z

校验的 SAP2000 的技术特色

- 壳的失稳分析
- 自动添加约束的面单元的剖分 (NXN)
- 节点弹簧
- 框架属性修改
- 框架分布荷载
- 框架在节点处的细分

结果对比

手算的剪切失稳应力 τ_{cr} 是根据 Timoshenko and Gere 1961 中 320 页等式 8 - 3 和等式 j 以及 382 页的表 9 - 10。说算结果的弯曲失稳应力 σ_{cr} 是根据 Timoshenko and Gere 1961 中 320 页等式 8 - 3 和等式 j 以及 377 页的表 9 - 6。结果是按照薄板和厚板发表的。

注意手算结果没有考虑平面外剪切变形的影响。

薄板选项 (1in 厚的板)

输出参数	模型和剖分情况	SAP2000	手算解	差异百分比
τ_{cr} k/in ²	A - 16 x 16	435	425	+2.4%
	B - 64 x 64	425		0%
σ_{cr} k/in ²	A - 16 x 16	1179	1165	+1.2%
	B - 64 x 64	1163		-0.2%

厚板选项 (1in 厚的板)

输出参数	模型和剖分情况	SAP2000	手算解	差异百分比
τ_{cr} k/in ²	A - 16 x 16	416	425	-2.1%
	B - 64 x 64	408		-4%
σ_{cr} k/in ²	A - 16 x 16	1121	1165	-3.8%
	B - 64 x 64	1112		-4.5%

计算模型文件： Example 2-016a-thick, Example 2-016a-thin,
Example 2-016b-thick, Example 2-016b-thin,
Example 2-016c-thick, Example 2-016c-thin

结论

无论是对于薄板还是厚板，SAP2000 结果与手算结果之间的误差都是可以接受的。

厚板的选项相对薄板而言，具有较小的失稳应力，并且理论结果也是如此，这一区别原因是在于厚板分析中考虑了平面外剪切变形的影响，而手算结果和薄板求解都没有考虑这一点。

这些可以通过使用更小厚度的板对本例重新进行一次分析来证实，以致平面外剪切变形影响与弯曲变形相比是可以忽略的。模型 C 的板厚从 1in 减少为 0.01in。进行了这样的变化后，厚板和薄板的结果是完全一致的，并且与手算结果之间的误差也是可以接受的。模型 C 的结果如下表所示：

模型 C 计算结果 (板厚 0.01in , 剖分为 64x64)

输出参数	模型和剖分情况	SAP2000	手算解	差异百分比
τ_{cr} k/in ²	薄	0.0425	0.0425	0%
	厚	0.0425		0%
σ_{cr} k/in ²	薄	0.1163	0.1165	-0.2%
	厚	0.1162		-0.3%

手算过程

Reference: Timoshenko & Gere 1961

Equation 8-3 on page 320

Equation j and table 9-6 on page 377

Equation j and table 9-10 on page 382

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 t}, \quad K = 25.6 \text{ for a square plate under pure bending (Table 9-6)}$$

$$\tau_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 t}, \quad K = 9.34 \text{ for a square plate (Table 9-10)}$$

Case 1: 1 inch thick plate

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{29000 \times 1^3}{12(1-0.3^2)} = 2655.678$$

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = \frac{25.6 \times \pi^2 \times 2655.678}{24^2 \times 1} = \underline{\underline{1164.91 \text{ Ksi}}}$$

$$\tau_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = \frac{9.34 \times \pi^2 \times 2655.678}{24^2 \times 1} = \underline{\underline{425.01 \text{ Ksi}}}$$

Case 2: 0.01 inch thick plate

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{29000 \times 0.01^3}{12(1-0.3^2)} = 0.002655678$$

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = \frac{25.6 \times \pi^2 \times 0.002655678}{24^2 \times 0.01}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{cr} = 0.116491 \text{ Ksi}}}$$

$$\tau_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = \frac{9.34 \times \pi^2 \times 0.002655678}{24^2 \times 0.01}$$

$$\underline{\underline{\tau_{cr} = 0.042501 \text{ Ksi}}}$$