

管理类联考网络课堂本店唯一QQ:2408863085, 后续重要资料+押题信息均以此QQ发送

考试名家指导
MBA/MPA/MPAcc 联考同步复习指导系列

MBA MPA MPAcc

2015版

数学分册

适用管理类专业:

MBA · MPA · MPAcc · 审计 · 工程管理 · 旅游管理 · 图书情报

袁进 等编著

- ◎ 内含2009年10月~2014年1月
共十套联考数学真题及详解
- ◎ 真正贴近联考数学真题难度
- ◎ 有效提高不同基础考生应试水平
- ◎ 书中所有练习均配有详解

第13版



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

请认准一手资料店铺地址: <http://jiazhupian.taobao.com>

≡ 考试名家指导

管理类联考网络课堂本店唯一QQ:2408863085, 后续重要资料+押题信息均以此QQ发送

MBA/MPA/MPAcc 联考同步复习指导系列

MBA MPA 2015 版 MPAcc

数学分册

袁进 等编著

第13版



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

请认准一手资料店铺地址：<http://jitahupan.taobao.com>

本书是根据最新 MBA、MPA、MPAcc 考试大纲的要求,按照新的体例结构重新编写而成的。全书分为三部分:第一部分包含了 MBA、MPA、MPAcc 数学考试的必备基础知识、基本内容和基本题型,可以帮助考生尽快掌握大纲所要求的基本数学知识;第二部分在详细研究、系统整理历年联考试题的基础上,对历年的数学试题及典型例题进行了归纳分类,给出了典型例题的解题方法和常用技巧;第三部分附录 A 提供了 2009 年 10 月至 2014 年 1 月十套全国联考数学真题及解析。

通过本书的复习,考生可以了解 MBA、MPA、MPAcc 数学考试的基本知识点和题型,以及考试的广度和深度,做到复习时目标明确,心中有数,在较短的时间内快速提高自己的数学应试能力。

本书适用于参加每年 1 月份 MBA、MPA、MPAcc 等专业的管理类联考和 10 月份在职 MBA、MPA、MPAcc 等专业的管理类联考的考生。

图书在版编目(CIP)数据

2015MBA、MPA、MPAcc 联考同步复习指导系列·数学
分册 / 袁进等编著. —13 版. —北京:机械工业出版社,
2014. 1 (2014. 3 重印)

(MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考同步复习指导
系列)

ISBN 978-7-111-45430-4

I. ①2… II. ①袁… III. ①高等数学—研究生—入
学考试—自学参考资料 IV. ①G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 000780 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:杨晓昱 责任印制:杨 曦

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

2014 年 3 月第 13 版·第 4 次印刷

184mm×260mm·23.5 印张·582 千字

20001—25000 册

标准书号:ISBN 978-7-111-45430-4

定价:49.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销 售 一 部:(010)68326294

机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销 售 二 部:(010)88379649

机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010)88379203

封面无防伪标均为盗版

从 书 序

这是一套针对 MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考选拔性应试的必备丛书。

本套丛书由北京大学、清华大学、中国人民大学、北京理工大学、西安交通大学、北京交通大学、上海交通大学、同济大学等高校的 MBA、MPA、MPAcc 辅导名师和资深命题专家联合编写,分为“考研英语(二)专项训练系列”、“MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考同步复习指导系列”、“MBA、MPA、MPAcc 联考模拟试卷系列”3 个系列,共 12 本。本套丛书具有以下特点:

一、一流的编写者队伍

本套丛书的编写者均是从全国 MBA 辅导名师中精心挑选出来的。他们多年来一直从事 MBA 考前辅导和命题研究工作,既能把握考生需求与应试精髓,又能洞悉 MBA 命题规律与趋势。

讲课↔著书↔研究,紧密结合,相互推动,在讲课中实践,在著书中提炼,在研究中升华。这是一流应试辅导丛书品质保证的基石。

二、紧扣 MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考最新考试大纲

丛书紧扣最新考试大纲,精心研制的例题与习题在难度上等同或略高于真题,在题型设置上与大纲保持一致,其中《数学分册》(针对管理类联考)中含有许多作者原创性的考试应对技巧和经验介绍。我们不鼓励“题海战术”,而是立足于帮助考生在深入研究最新考试大纲和历年试题的基础上,准确把握 MBA、MPA、MPAcc 联考的难点、重点和命题趋势。

三、体系明晰,精讲精练,为考生提供标准化解决方案

“考研英语(二)专项训练系列”适用于所有参加英语(二)考试的专业学位硕士考生,包括《英语阅读理解 100 篇精粹》、《满分翻译与写作》、《英语历年真题精解》3 本书。该系列图书实用性强,可以使考生针对英语弱项进行专项强化提高,快速突破英语难关。

“MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考同步复习指导系列”包括《英语分册》、《数学分册》(管理类联考适用)、《逻辑分册》、《写作分册》、《面试分册》、《数学高分速成》(管理类联考适用)、《数学高分速成》(经济类联考适用)7 本书。该体系与最新考试大纲相配套,精讲精练,突出应考难点与重点,洞悉历年试题,强化训练提高,应试针对性极强。

“MBA、MPA、MPAcc 联考模拟试卷系列”包括《英语分册》、《综合能力分册》(管理类联考适用)2 本书,严格按照 MBA、MPA、MPAcc 联考最新考试大纲和命题趋势精心设计,融会了众多作者多年教学、辅导、命题研究的心血和智慧,考点分布合理,试卷难度等同或略高于真题

难度。

一套好的辅导教材,需要具备四个要素:一是严格遵循最新考试大纲;二是具有前瞻性,能针对正式的考试;三是作者真正透彻了解联考的要求,内容的难度与联考试卷相符或略高;四是满足考生的需求,突显了为考生备考服务的宗旨。

本套丛书很好地体现了这四方面的要求,每道试题都是众多辅导名师和专家教学经验的结晶。往届高分考生的经验说明,“三道题做一遍不如一道题做三遍”,“三本书各读一遍不如一本书读三遍”。通过对本套丛书的认真阅读和演练,相信考生必将会为顺利考入名校打下坚实的基础。

希望通过我们不懈的努力和二十多位 MBA 联考辅导专家的倾情奉献,能够为考生顺利突破联考助一臂之力。

丛书编委会

第13版前言

在 MBA、MPA、MPAcc 联考中,作为最重要的一门考试科目,数学的重要地位使广大考生不敢忽视。但是,由于数学考试内容多、时间紧,每年都有许多考生因为数学考试成绩不好而败走麦城。因此,一本好的复习参考书对久离书本的考生来说无疑是雪中送炭。纵观 MBA 联考数学辅导教材,鱼龙混杂,既有结构严谨、内容详实的权威教材,也不乏毫无新意、东拼西凑的平庸之作。为感谢广大考生多年来对本书的支持与厚爱,本次再版,我们对本书进行了精心的修订,以适应不同考生的需求,使广大考生尽快掌握考试内容,在短期内提高应试能力。

本书由基础篇、强化篇和附录三部分组成。第一部分基础篇涉及大纲规定的基本考试内容和题型。掌握了基础篇的内容和练习,考生就可轻松取得数学总分 75 分中的 50 分。这部分的特点是:

(1) 遵从由浅入深、简单易懂、精讲精练、突出重点的原则,能帮助基础薄弱的考生尽快掌握大纲所要求的数学知识。

(2) 淡化抽象和复杂的数学概念、定理,注重解题思路与方法的准确、快捷,以适应 MBA、MPA、MPAcc 数学考试的特点。本部分包含了编写者从多年教学研究中总结出来的一些简单快捷的解题方法,有助于考生提高解题效率。

这部分可作为 MBA、MPA、MPAcc 考前辅导基础班的教材,也可供自学者在自学时使用。

第二部分强化篇在详细研究、系统整理历年 MBA 联考试题的基础上,对历年数学试题及典型例题进行了归纳分类,给出了典型例题的解题方法和常用技巧。第二部分的章节均按基本内容提要、典型例题及历年真题解析、练习、参考答案及解析的体例进行编排。这部分的特点是:

(1) 基本内容提要。简要概括本节学习及考查的内容,切中本节考试重点,使广大考生在备考复习过程中目标明确,有的放矢。

(2) 典型例题及历年真题解析。对 MBA 历年数学真题进行了分类和归纳,试题是无限的,而题型是有限的,掌握好常考题型及解题思路、方法与技巧,就能以不变应万变,达到触类旁通的效果。

(3) 练习、参考答案及解析。本部分所有的练习题都给出了相应的分析过程,便于考生进一步熟悉题型和解题方法。

为了使广大考生能尽快了解 MBA、MPA、MPAcc 数学联考的主要内容及考试重点,合理地确定自己的复习方案,本书将 2009 年 10 月至 2014 年 1 月全国联考数学真题及解析,放在附录 A 中。将大纲中新增考点数据描述放在附录 B 中,供读者参考。

本书与《数学高分速成》(机械工业出版社出版)相配套。读透这两本书,考生就可以从纵向、横向上把握整个知识体系,在联考中得心应手,取得高分。

由于时间仓促,本书在编写中难免有疏漏之处,欢迎批评指正。

在本书的编写过程中,马雅莉、周保源、李亚莉、马建科、王丹红、崔保军、贾晓明、杨雅林、张淑静、张作铨也进行了部分资料的整理及编写工作,在此一并致谢。

袁 进

条件充分性判断题的解题说明

定义 由条件 A 成立, 就可以推出结论 B 成立 (即 $A \Rightarrow B$), 则称 A 是 B 的充分条件. 若由条件 A , 不能推出结论 B 成立 (即 $A \nRightarrow B$), 则称 A 不是 B 的充分条件.

解题说明: 本题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中的结论, 阅读每小题中的条件 (1) 和条件 (2) 后进行选择.

- (A) 条件 (1) 充分, 但条件 (2) 不充分
- (B) 条件 (2) 充分, 但条件 (1) 不充分
- (C) 条件 (1) 和 (2) 单独都不充分, 但条件 (1) 和条件 (2) 联合起来充分
- (D) 条件 (1) 充分, 条件 (2) 也充分
- (E) 条件 (1) 和 (2) 单独都不充分, 条件 (1) 和条件 (2) 联合起来也不充分

例 1 (条件充分性判断) 方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$

(1) $x = -1$

(2) $x = 2$

解 由条件 (1) $x = -1$, 可知 $x^2 - 3x - 4 = (-1)^2 - 3 \times (-1) - 4 = 0$

即由条件 (1) $x = -1$ 推出 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 成立, 所以条件 (1) 充分.

由条件 (2) $x = 2$, 得 $x^2 - 3x - 4 = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6 \neq 0$, 因此条件 (2) 不充分.

故此题应选 A.

例 2 (条件充分性判断) 要使 $\frac{1}{a} \geq 1$.

(1) $a \leq 1$

(2) $a \geq 1$

解 由 $a \leq 1$, 不能推出 $\frac{1}{a} \geq 1$, 例如取 $a = -1$, 即条件 (1) 不充分. 由 $a \geq 1$, 则知 $\frac{1}{a} \leq 1$, 也

不能推出 $\frac{1}{a} \geq 1$ 成立, 即条件 (2) 也不充分. 考虑将条件 (1) 与 (2) 联合, 若 $a \leq 1$ 且 $a \geq 1$, 则

$a = 1$, 则 $\frac{1}{1} = 1$ 成立, 即条件 (1) 和 (2) 单独都不充分, 但条件 (1) 和 (2) 联合起来充分.

故此题应选 C.

目 录

丛书序

第13版前言

条件充分性判断题的解题说明

第一部分 基础篇

第一章 整数、有理数、实数	3
第一节 整数	3
第二节 有理数	7
第三节 实数	10
第四节 练习	13
第五节 参考答案及解析	15
第二章 整式、分式	18
第一节 整式	18
第二节 分式	23
第三节 练习	26
第四节 参考答案及解析	28
第三章 平均值、绝对值	31
第一节 平均值	31
第二节 绝对值	33
第三节 练习	36
第四节 参考答案及解析	38
第四章 方程与不等式	41
第一节 一元二次方程	41
第二节 一元二次不等式及其解法	44
第三节 练习	48
第四节 参考答案及解析	50
第五章 数列	54
第一节 基本概念	54

第二节 等差数列	55
第三节 等比数列	58
第四节 练习	62
第五节 参考答案及解析	63
第六章 应用题	67
第一节 比和比例	67
第二节 行程问题	69
第三节 工程问题	71
第四节 练习	73
第五节 参考答案及解析	75
第七章 平面几何与立体几何	79
第一节 三角形	79
第二节 四边形	82
第三节 圆	84
第四节 立体几何	86
第五节 练习	89
第六节 参考答案及解析	91
第八章 平面解析几何	95
第一节 基本公式	95
第二节 直线方程	96
第三节 圆的方程	100
第四节 练习	103
第五节 参考答案及解析	104
第九章 排列与组合	107
第一节 基本原理	107
第二节 排列	108
第三节 组合	109
第四节 四类典型问题	110
第五节 练习	114
第六节 参考答案及解析	116
第十章 概率初步	119
第一节 事件的运算	119
第二节 事件的概率及基本公式	120
第三节 古典概型的概率计算	121
第四节 条件概率及乘法公式	123

第五节 事件的独立性及独立试验序列概型	124
第六节 练习	129
第七节 参考答案及解析	131

第二部分 强化篇

第十一章 集合与函数	137
第一节 集合	137
第二节 函数	138
第三节 练习	141
第四节 参考答案及解析	142
第十二章 整数、有理数、实数	145
第一节 基本内容提要	145
第二节 典型例题及历年真题解析	145
第三节 练习	150
第四节 参考答案及解析	151
第十三章 整式及分式	154
第一节 基本内容提要	154
第二节 典型例题及历年真题解析	154
第三节 练习	161
第四节 参考答案及解析	162
第十四章 绝对值、平均值	166
第一节 基本内容提要	166
第二节 典型例题及历年真题解析	166
第三节 练习	173
第四节 参考答案及解析	174
第十五章 方程与不等式	178
第一节 基本内容提要	178
第二节 典型例题及历年真题解析	178
第三节 练习	185
第四节 参考答案及解析	187
第十六章 数列	191
第一节 基本内容提要	191
第二节 典型例题及历年真题解析	191
第三节 练习	196
第四节 参考答案及解析	198

第十七章 应用题	202
第一节 基本内容提要	202
第二节 典型例题及历年真题解析	202
第三节 练习	212
第四节 参考答案及解析	214
第十八章 平面几何与立体几何	219
第一节 基本内容提要	219
第二节 典型例题及历年真题解析	220
第三节 练习	229
第四节 参考答案及解析	231
第十九章 平面解析几何	235
第一节 基本内容提要	235
第二节 典型例题及历年真题解析	236
第三节 练习	245
第四节 参考答案及解析	247
第二十章 排列与组合	251
第一节 基本内容提要	251
第二节 典型例题及历年真题解析	251
第三节 练习	256
第四节 参考答案及解析	258
第二十一章 概率初步	261
第一节 基本内容提要	261
第二节 典型例题及历年真题解析	262
第三节 练习	269
第四节 参考答案及解析	271

第三部分 附 录

附录 A 2009 年 10 月至 2014 年 1 月十套全国联考数学真题及解析	277
附录 B 数据描述	362

管理类联考网络课堂本店唯一QQ:2408863085, 后续重要资料+押题信息均以此QQ发送

第一部分

2015版 ▶▶

MBA MPA MPAcc联考同步复习指导系列

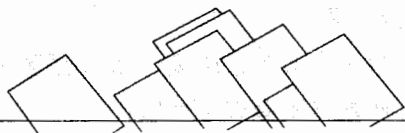
基础篇

- 第一章 整数、有理数、实数
- 第二章 整式、分式
- 第三章 平均值、绝对值
- 第四章 方程与不等式
- 第五章 数列
- 第六章 应用题
- 第七章 平面几何与立体几何
- 第八章 平面解析几何
- 第九章 排列与组合
- 第十章 概率初步

请认准一手资料店铺地址：<http://jitahupan.taobao.com>

第一章

整数、有理数、实数



第一节 整数

一 整除及带余除法

整数包括正整数、负整数和零. 两个整数的和、差、积仍然是整数,但是用一个不等于零的整数去除另一个整数所得的商不一定是整数,因此,我们有以下整除的概念:

定义 1.1 设 a, b 是任意两个整数,其中 $b \neq 0$,如果存在一个整数 q ,使得等式

$$a = bq$$

成立,则称 b 整除 a 或 a 能被 b 整除,记作 $b|a$,此时我们把 b 叫做 a 的因数,把 a 叫做 b 的倍数. 如果这样的 q 不存在,则称 b 不整除 a ,记作 $b \nmid a$.

由定义 1.1 可知, $\frac{a}{b}$ 是整数的充分必要条件是 $b \neq 0$,且 $b|a$.

整除具有如下性质:

(1) 如果 $c|b, b|a$,则 $c|a$.

(2) 如果 $c|b, c|a$,则对任意的整数 m, n 有 $c|(ma + nb)$.

定理 1.1(带余除法) 设 a, b 是两个整数,其中 $b > 0$,则存在整数 q, r 使得

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

成立,而且 q, r 都是唯一的. q 叫做 a 被 b 除所得的不完全商, r 叫做 a 被 b 除所得到的余数.

由整除的定义及带余除法可知,若 $b > 0$,则 $b|a$ 的充分必要条件是带余除法中余数 $r = 0$.

用带余除法,我们可将整数集合分类. 若取 $b = 2$,则整数可分为 $2k$ 或 $2k + 1$ (即偶数和奇数两大类). 若取 $b = 3$,则整数可分为 $3k, 3k + 1, 3k + 2$ 三大类.

二 质数、合数及算术基本定理

在正整数中,1 的正因数只有它本身,因此,在整数中 1 占有特殊的地位. 任何一个大于 1 的整数,都至少有两个正因数,即 1 和这个整数本身. 将大于 1 的整数,按照它们含有正因数

的个数分类,就得到关于质数和合数的概念.

定义 1.2 一个大于 1 的整数,如果它的正因数只有 1 和它本身,则称这个整数是质数(或素数);一个大于 1 的整数,如果除了 1 和它本身,还有其他正因数,则称这个整数是合数(或复合数).

由定义 1.2 可知,除了最小质数 2 是偶数外,其余质数都是奇数.

质数 P 具有以下性质:

(1) 若 P 是一质数, a 是任一整数,则 a 能被 P 整除或 P 与 a 互质(P 与 a 的最大公因数是 1).

(2) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个整数, P 是质数,若 $P | a_1 a_2 \cdots a_n$, 则 P 一定能整除其中一个 a_k .

定理 1.2 (算术基本定理) 任一大于 1 的整数能表示成质数的乘积,即对于任一整数 $a > 1$, 有

$$a = P_1 P_2 \cdots P_n, \quad P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_n,$$

其中, P_1, P_2, \dots, P_n 是质数,且这样的分解式是唯一的.

三 最大公因数和最小公倍数

定义 1.3 设 a, b 是两个整数,若整数 d 满足 $d | a$ 且 $d | b$, 则称 d 是 a, b 的一个公因数. 整数 a, b 的公因数中最大的公因数叫做 a, b 的最大公因数,记为 (a, b) . 若 $(a, b) = 1$, 则称 a, b 互质.

定义 1.4 设 a, b 是两个整数,若 d 是整数,满足 $a | d$ 且 $b | d$, 则称 d 是 a, b 的公倍数. a, b 的所有公倍数中最小的正整数叫做 a, b 的最小公倍数,记为 $[a, b]$.

定理 1.3 设 a, b 是任意两个正整数,则有:

(1) a, b 的所有公倍数就是 $[a, b]$ 的所有倍数,即若 $a | d$ 且 $b | d$, 则 $[a, b] | d$.

(2) $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$. 特别地,当 $(a, b) = 1$ 时,有 $[a, b] = ab$.

(3) 若 $a | bc$ 且 $(a, b) = 1$, 则 $a | c$.

例 1.1 从 1 到 120 的自然数中,能被 3 整除或被 5 整除的个数是 ()

- (A) 64 (B) 48 (C) 56
(D) 46 (E) 72

解 1 到 120 中,能被 3 整除的数可表为 $3k, k = 1, 2, \dots, 40$; 能被 5 整除的数可表为 $5k, k = 1, 2, \dots, 24$; 3 和 5 的最小公倍数 $[3, 5] = 15$, 既能被 3 整除,又能被 5 整除的数一定是 15 的倍数,可表为 $15k, k = 1, 2, \dots, 8$, 从而能被 3 整除或被 5 整除的个数为 $40 + 24 - 8 = 56$ (个).

答案是 C.

例 1.2 当整数 n 被 6 除时,其余数为 3,则下列哪一项不是 6 的倍数? ()

- (A) $n - 3$ (B) $n + 3$ (C) $2n$
(D) $3n$ (E) $4n$

解 由已知 $n = 6k + 3$, 这里 k 是整数,

从而 $n-3=6k+3-3=6k$, $n+3=6k+3+3=6(k+1)$

$$2n=2(6k+3)=12k+6=6(2k+1)$$

$$4n=4(6k+3)=6(4k+2)$$

即 $n-3, n+3, 2n, 4n$ 都是 6 的倍数.

而 $3n=3(6k+3)=6(3k+1)+3$, 其余数 $r=3$, 即 $3n$ 不是 6 的倍数.

答案是 D.

例 1.3 n 为任意正整数, 则 $n^3 - n$ 必有约数(因数) ()

(A) 4 (B) 5 (C) 6

(D) 7 (E) 8

解 $n^3 - n = (n^2 - 1)n = (n-1)n(n+1)$, 在三个连续的整数中必有一个是 3 的倍数, 在两个连续的整数中必有一个是 2 的倍数(即偶数),

因此 $3 | (n^3 - n)$, $2 | (n^3 - n)$,

从而 $[3, 2] = 6$ 可整除 $n^3 - n$, 即 6 是 $n^3 - n$ 的约数.

答案是 C.

例 1.4 两个正整数的最大公约数是 6, 最小公倍数是 90, 满足条件的两个正数组成的数对在前面的数对共有 ()

(A) 1 对 (B) 2 对 (C) 3 对

(D) 4 对 (E) 5 对

解 设所求两个整数为 a, b , 由已知 $(a, b) = 6$, $[a, b] = 90$, 从而

$$ab = a, b = 90 \times 6 = 540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5.$$

即 $a = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90, b = 2 \times 3 = 6$

或 $a = 2 \times 3 \times 5 = 30, b = 2 \times 3 \times 3 = 18$

答案是 B.

例 1.5 三个质数之积恰好等于它们和的 5 倍, 则这三个质数之和为 ()

(A) 11 (B) 12 (C) 13

(D) 14 (E) 15

解 设三个质数分别为 P_1, P_2, P_3 , 由已知 $P_1 P_2 P_3 = 5(P_1 + P_2 + P_3)$, 即 $5 | P_1 P_2 P_3$, 由于 5 是质数, 从而 5 一定整除 P_1, P_2, P_3 中的一个.

不妨设 $5 | P_1$, 又由于 P_1 是质数, 可知 $P_1 = 5$, 因此, $5P_2 P_3 = 5(5 + P_2 + P_3)$,

得 $P_2 P_3 = 5 + P_2 + P_3$, 由穷举法, 得 $P_2 = 2, P_3 = 7$.

则 $P_1 + P_2 + P_3 = 5 + 2 + 7 = 14$.

答案是 D.

例 1.6 (条件充分性判断) $(a, b) = 30, [a, b] = 18900$.

(1) $a = 2100, b = 270$

(2) $a = 140, b = 810$

6
解题说明:本题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中的结论,阅读条件(1)和条件(2)后进行选择.

- (A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分
 (B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分
 (C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分
 (D) 条件(1)充分,条件(2)也充分
 (E) 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

注:详见本书目录前的“条件充分性判断题的解题说明”. 全书不再一一说明.

解 由条件(1), $a = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$, $b = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$,

从而知 $(a, b) = 2 \times 3 \times 5 = 30$, $[a, b] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 18900$

即条件(1)是充分的.

由条件(2), $a = 2 \times 2 \times 5 \times 7$, $b = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$,

从而知 $(a, b) = 2 \times 5 = 10$, $[a, b] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 11340$

即条件(2)不充分.

答案是 A.

例 1.7 (条件充分性判断) m 为偶数.

(1) 设 n 为整数, $m = n(n+1)$.

(2) 在 $1, 2, 3, \dots, 1988$ 这 1988 个自然数中每相邻两个数之间任意添加一个加号或减号, 设这样组成的运算式的结果是 m .

解 由条件(1), $m = n(n+1)$, 连续两个整数中, 正好一个奇数一个偶数, 从而 m 是偶数. 条件(1)是充分的.

由条件(2), 在 $1, 2, 3, \dots, 1988$ 中有 994 个偶数, 994 个奇数, 其运算式的结果一定是偶数, 从而条件(2)也是充分的.

答案是 D.

例 1.8 (条件充分性判断) 自然数 n 的各位数字之积为 6.

(1) n 是除以 5 余 3, 且除以 7 余 2 的最小自然数.

(2) n 是形如 2^{4m} (m 是正整数) 的最小自然数.

解 由条件(1), $n = 5k_1 + 3$, $n = 7k_2 + 2$,

因此, $5k_1 + 3 = 7k_2 + 2$, $7k_2 = 5k_1 + 1$. 满足 $7 \mid 5k_1 + 1$ 的最小正整数 $k_1 = 4$,

从而 $n = 5 \times 4 + 3 = 23$, $2 \times 3 = 6$, 即条件(1)是充分的.

由条件(2), 应取 $m = 1$, $2^{4m} = 2^4 = 16$, 即 $n = 16$, $1 \times 6 = 6$, 条件(2)也是充分的.

答案是 D.

第二节 有理数

一 有理数的基本概念

整数和分数统称为有理数. 任何一个有理数都可以写成分数 $\frac{m}{n}$ 的形式(m, n 均为整数, $n \neq 0$). 因为分数与有限小数和无限循环小数可以互化, 所以又称有理数为有限小数和无限循环小数. 若 $(m, n) = 1$, 则称 $\frac{m}{n}$ 为既约分数.

两个有理数的和、差、积、商(分母不等于零)仍然是一个有理数.

二 有理数的计算

例 2.1 $\frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9}\right)}{0.1 + 0.2 + 0.3 + \cdots + 0.9}$ 的值是 ()

- (A) $\frac{2}{81}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{9}{2}$
(D) $\frac{81}{2}$ (E) $\frac{13}{9}$

解 分子 $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

分母 $= \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{10} = \frac{9}{2}$

所以原式 $= \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{2}{81}$

答案是 A.

例 2.2 $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99}\right) \left(1 - \frac{1}{99}\right) =$ ()

- (A) $\frac{50}{97}$ (B) $\frac{52}{97}$ (C) $\frac{47}{98}$
(D) $\frac{47}{99}$ (E) $\frac{50}{99}$

解 $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{98}\right) \left(1 + \frac{1}{99}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{99}{98} \times \frac{100}{99} = 50$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{98}\right) \left(1 - \frac{1}{99}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{97}{98} \times \frac{98}{99} = \frac{1}{99}$$

从而原式 = $\frac{50}{99}$

答案是 E.

例 2.3 $\frac{1}{13 \times 15} + \frac{1}{15 \times 17} + \cdots + \frac{1}{37 \times 39} =$ ()

(A) $\frac{1}{37}$ (B) $\frac{1}{39}$ (C) $\frac{1}{40}$

(D) $\frac{2}{41}$ (E) $\frac{2}{39}$

解 $\frac{1}{13 \times 15} + \frac{1}{15 \times 17} + \cdots + \frac{1}{37 \times 39} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{17} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{37} - \frac{1}{39} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{37} - \frac{1}{39} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{39} \right) = \frac{1}{39}$

答案是 B.

例 2.4 有一个正的既约分数, 如果其分子加上 24, 分母加上 54 后, 其分数值不变, 那么此既约分数的分子与分母的乘积等于 ()

(A) 24 (B) 30 (C) 32

(D) 36 (E) 38

解 设此分数为 $\frac{x}{y}$, 则由已知 $\frac{x+24}{y+54} = \frac{x}{y}$

整理得 $\frac{x}{y} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$

因为 $(4, 9) = 1$, 即 $x = 4, y = 9, xy = 36$

答案是 D.

例 2.5 小王利用计算机设计了一个计算程序, 输入和输出的数据如下表:

输入	...	1	2	3	4	5	...
输出	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$...

那么, 当输入数据是 8 时, 输出的数据是 ()

(A) $\frac{8}{61}$ (B) $\frac{8}{63}$ (C) $\frac{8}{65}$

(D) $\frac{8}{67}$

(E) $\frac{8}{69}$

解 输出数据的分子等于输入数据. 输出数据的分母第1个为2, 第2个为 $2+3=5$, 第3个为 $5+5=10$, 第4个为 $10+7=17$, \dots , 依次为前一个数的分母加上一个奇数 $(2n-1)$.

因此, 第6个数为 $\frac{6}{26+(2 \times 6-1)} = \frac{6}{37}$, 第7个数为 $\frac{7}{37+(2 \times 7-1)} = \frac{7}{50}$,

第8个数为 $\frac{8}{50+(2 \times 8-1)} = \frac{8}{65}$.

答案是C.

例2.6 (条件充分性判断) $x=11$

$$(1) x = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11}{1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11}$$

$$(2) x = \frac{1-2+3-4+5-6+\dots+2005-2006+2007}{(2008+2006+\dots+4+2)-(2007+2005+\dots+3+1)}$$

解题说明: 本题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中的结论, 阅读条件(1)和条件(2)后进行选择.

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

注: 详见本书目录前的“条件充分性判断题的解题说明”. 全书不再一一说明.

解 由条件(1), 分子 $= \frac{11 \times (1+11)}{2} = 66$,

分母 $= (1-2) + (3-4) + (5-6) + (7-8) + (9-10) + 11 = -5 + 11 = 6$.

从而 $x = \frac{66}{6} = 11$, 即条件(1)是充分的.

由条件(2), 分子 $= (1-2) + (3-4) + \dots + (2005-2006) + 2007 = -1003 + 2007 = 1004$,

分母 $= (2008-2007) + (2006-2005) + \dots + (2-1) = 1004$.

从而 $x=1$, 条件(2)不充分.

答案是A.

例2.7 (条件充分性判断) 新分数比原来分数减少的百分率是30%.

(1) 分子减少25%, 分母增加25%.

(2) 分子减少25%, 分母增加20%.

解 设新分数为 $\frac{x_1}{y_1}$, 原分数为 $\frac{x}{y}$, 则需判断哪一个条件可推出 $\frac{\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}}{\frac{x}{y}} = 0.3$.

由条件(1), $x_1 = 0.75x, y_1 = 1.25y$, 得

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}}{\frac{x}{y}} = 1 - \frac{0.75}{1.25} = 1 - 0.6 = 0.4$$

由条件(2), $x_1 = 0.75x, y_1 = 1.2y$, 得

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}}{\frac{x}{y}} = 1 - \frac{0.75}{1.2} = 0.375$$

即条件(1)和条件(2)都不充分.

答案是E.

第三节 实数

一 实数的基本概念

无限不循环小数被称为无理数. 有理数和无理数统称实数.

画一条水平直线, 在直线上取一点表示0(叫做原点), 选取某一长度作为单位长度, 规定直线上向右的方向为正方向, 就得到图1-1所示的数轴.

数轴上的点与实数之间存在着一一对应关系, 即对于数轴上的每一个点都可以找到唯一的实数与它对应; 反过来, 对于每一个实数都可以在数轴上找到一个确定的点与它对应. 因此图1-1被称为实数轴.

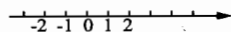


图 1-1

任意两个实数的和、差、积、商(除数不等于零)仍然是实数.

二 实数 x 的整数部分 $[x]$ 和小数部分 $\{x\}$

定义 3.1 对于任意实数 x , 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数; 令 $[x] = x - \{x\}$, 称 $[x]$ 是 x 的整数部分, $\{x\}$ 是 x 的小数部分.

例如, $[\pi] = 3, [e] = 2, [-\pi] = -4, [\frac{2}{3}] = 0, [-2.5] = -3, [3.7] = 3$

$\{\pi\} = 0.14159\cdots, \{\sqrt{2}\} = 0.414\cdots, \{-2.5\} = 0.5, \{3.7\} = 0.7$

由定义可得出下列简单性质:

$$1. x = [x] + \{x\}$$

$$2. 0 \leq \{x\} < 1$$

例 3.1 下列各式中正确的是 ()

(A) 两个无理数的和是无理数

(B) 两个无理数的乘积是无理数

(C) 两个无理数的乘积是有理数

(D) 一个有理数和一个无理数的乘积是无理数

(E) 一个有理数和一个无理数相加减, 其结果是无理数

解 两个无理数的和或差不一定是无理数. 例如, $a = 2 - \sqrt{3}$, $b = 2 + \sqrt{3}$, 则 $a + b = 4$ 是有理数; 两个无理数的乘积或商不一定是无理数, 例如, $a = 2 - \sqrt{3}$, $b = 2 + \sqrt{3}$, 则 $ab = 2^2 - 3 = 1$ 是有理数, 若 $a = 3 - \sqrt{3}$, $b = 2 + \sqrt{3}$, 则 $ab = 3 + \sqrt{3}$ 是无理数. 因此 A, B, C 都不正确.

一个有理数和一个无理数的乘积可能是有理数, 也可能是无理数. 例如, $a = 0$, $b = 2 + \sqrt{5}$, 则 $ab = 0$ 是有理数, 若 $a \neq 0$, a 为有理数, b 为无理数, 则 ab 一定是无理数. 因此 D 不正确.

一个有理数和一个无理数相加减, 其结果一定是无理数. 即 E 是正确的.

答案是 E.

例 3.2 等式 $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$ 成立的条件是 ()

(A) a 是任意实数

(B) $a > 0$

(C) $a < 0$

(D) $a \geq 0$

(E) $a \leq 0$

解 对于任意实数 a , $\sqrt{a^2}$ 都有意义; 当 $a \geq 0$ 时, \sqrt{a} 才有意义.

因此, 当 $a \geq 0$ 时, $\sqrt{a^2} = a$, $(\sqrt{a})^2 = a$,

从而 $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$ 成立.

答案是 D.

例 3.3 已知 $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$, 则 $a^2b - ab^2$ 的值为 ()

(A) $4\sqrt{2}$

(B) $3\sqrt{2}$

(C) $-4\sqrt{2}$

(D) $-3\sqrt{2}$

(E) -1

解 由已知 $ab = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$, $a - b = (3 + 2\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$,

因此, $a^2b - ab^2 = ab(a - b) = 1 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

答案是 A.

例 3.4 设 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 则 $ab - \sqrt{5} =$ ()

(A) 3

(B) 2

(C) -1

(D) -2

(E) 0

$$\text{解} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{而 } 2 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3,$$

$$\text{因此, } a = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right] = 2, \quad b = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{即 } ab - \sqrt{5} = 2 \times \frac{-1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} = -1.$$

答案是 C.

$$\text{例 3.5} \quad \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}} \right) \times (1+\sqrt{2005}) = \quad (\quad)$$

(A) 2003

(B) 2004

(C) 2005

(D) 2006

(E) 2007

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2005}} \right) \times (1+\sqrt{2005}) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(\sqrt{2005}-\sqrt{2004})}{(\sqrt{2005}+\sqrt{2004})(\sqrt{2005}-\sqrt{2004})} \right] \times \\ & (1+\sqrt{2005}) \\ &= (\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2005}-\sqrt{2004})(1+\sqrt{2005}) \\ &= (-1+\sqrt{2005})(1+\sqrt{2005}) = 2005-1=2004. \end{aligned}$$

答案是 B.

$$\text{例 3.6} \quad (\text{条件充分性判断}) \quad x = \sqrt{3} - 1$$

$$(1) x = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$$

$$(2) x = \sqrt{4-\sqrt{12}}$$

解题说明: 本题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中的结论, 阅读条件(1)和条件(2)后进行选择.

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

注: 详见本书目录前的“条件充分性判断题的解题说明”. 全书不再一一说明.

$$\text{解} \quad \text{由条件(1), } x = \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{3+2\sqrt{15}+5} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{5},$$

即条件(1)不充分.

由条件(2), $x = \sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1$,

从而条件(2)是充分的.

答案是 B.

例 3.7 (条件充分性判断) $a = b = 0$

(1) $ab \geq 0, \left(\frac{1}{2}\right)^{a+b} = 1$

(2) a, b 是有理数, α 是无理数, 且 $a + b\alpha = 0$

解 由条件(1), $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b} = 1$, 则 $a + b = 0$, 而 $ab \geq 0$ 则必有 $a = b = 0$,

因此, 条件(1)是充分的.

由条件(2), $a = -b\alpha$, 若 $b \neq 0$, 则 $-b\alpha$ 是无理数, 与 a 是有理数矛盾, 从而 $b = 0$, 因此, $a = 0$,

即条件(2)也是充分的.

答案是 D.

例 3.8 等式 $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ 成立.

(1) $x > 3$

(2) $x < 3$

解 要使 $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ 成立, 则 $x+1 \geq 0$, 且 $x-2 > 0$,

因此, $x \geq -1$ 且 $x > 2$, 从而 $x > 2$,

即条件(1)充分, 但条件(2)不充分.

答案是 A.

第四节 练习

一 问题求解

- 一个合数最少有多少个正因数? ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6
- 每一个合数都可以写成 k 个质数的乘积, 在小于 100 的合数中, k 的最大值为 ()
(A) 3 (B) 4 (C) 5

- (D)6 (E)7
3. 50 能被 25 整除, 25 能被 5 整除, 所以 50 是 25 和 5 的 ()
 (A)公约数 (B)最大公约数 (C)公倍数
 (D)最小公倍数 (E)以上答案均不正确
4. 若整数 n 既能被 6 整除, 又能被 8 整除, 则它还可以被下列哪一项整除? ()
 (A)10 (B)12 (C)14
 (D)18 (E)22
5. 当正整数 k 被 12 除时, 其余数是 3, 下列哪一项被 12 除时, 其余数等于 6? ()
 ① $2k$ ② $6k$ ③ $4k+6$
 (A)① (B)② (C)③
 (D)①和② (E)① ② ③
6. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} =$ ()
 (A) $\frac{99}{100}$ (B) $\frac{97}{100}$ (C) $\frac{98}{99}$
 (D) $\frac{97}{99}$ (E) $\frac{93}{100}$
7. $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{17 \times 19} =$ ()
 (A) $\frac{8}{19}$ (B) $\frac{9}{19}$ (C) $\frac{28}{29}$
 (D) $\frac{27}{29}$ (E) $\frac{23}{29}$
8. 下面结论正确的是 ()
 (A)两个有理数的和为正数时, 这两个数都是正数
 (B)两个有理数的和为负数时, 这两个数都是负数
 (C)两个有理数的和一定大于其中一个加数
 (D)两个有理数的和可能等于零
 (E)两个有理数的商不一定是有理数(除数不为 0)
9. 四个各不相同的整数 a, b, c, d , 它们的积 $abcd = 9$, 那么 $a + b + c + d =$ ()
 (A)0 (B)6 (C)8
 (D)12 (E)不确定
10. 已知 $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, 则 $x^4 - 9x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 =$ ()
 (A)0 (B)-1 (C)1
 (D)-2 (E)2
11. 已知三个质数的倒数和为 $\frac{1879}{3495}$, 则这三个质数的和为 ()

- (A)244 (B)243 (C)242
(D)241 (E)240

二 条件充分性判断

12. 整数 n 是 35 的倍数.

- (1) n 是 5 的倍数 (2) n 是 7 的倍数

13. 整数 n 是 140 的倍数.

- (1) n 是 10 的倍数 (2) n 是 14 的倍数

14. $(a, b) = 12, [a, b] = 180$.

- (1) $a = 60, b = 36$ (2) $a = 12, b = 180$

15. 正整数 m 是偶数.

- (1) m 被 3 除时, 其余数为 2

- (2) m 被 6 除时, 其余数为 4

16. $[x], [y], [z]$ 分别表示不超过 x, y, z 的最大整数, 则 $[x - y - z]$ 可以取值的个数是 3 个.

- (1) $[x] = 5, [y] = 3, [z] = 1$

- (2) $[x] = 5, [y] = -3, [z] = -1$

第五节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. B.

解析 一个合数至少有 3 个正因数.

2. D.

解析 若 a 是合数, 则 $a = P_1 P_2 \cdots P_k$, 这里 P_1, P_2, \cdots, P_k 都为质数, 且 $k \geq 2$. 要使 k 最大, 只要 P_1, P_2, \cdots, P_k 取最小质数 $P = 2$ 即可, 从而 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64 < 100$, 即 $k = 6$ 为最大值.

3. C.

解析 $25 \mid 50$ 且 $5 \mid 25$, 根据整除的性质 $5 \mid 50$, 即 50 是 25 和 5 的公倍数.

4. B.

解析 $6 \mid n$ 且 $8 \mid n$, 从而 n 是 6 和 8 的公倍数, 即 n 一定是 $[6, 8] = 24$ 的倍数, 因此选项中 24 的因数即为 n 的因数.

5. E.

解析 由已知 $k = 12m + 3$ (m 为整数), 从而

$$2k = 24m + 6 = 12(2m) + 6$$

$$6k = 6(12m + 3) = 12(6m + 1) + 6$$

$$4k + 6 = 4(12m + 3) + 6 = 12(4m + 1) + 6$$

即 $2k, 6k, 4k + 6$ 被 12 除时, 其余数都等于 6.

6. A.

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}$$

7. B.

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{17 \times 19} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{19}\right) = \frac{9}{19} \end{aligned}$$

8. D.

解析 可举例说明选项 A, B, C 都不正确. 两个有理数的商 (除数不为 0) 一定是有理数, 即 E 也是不正确的.

9. A.

解析 满足条件的 a, b, c, d 只能是 1, 3, -1, -3 四个数,因此 $a + b + c + d = 1 + 3 + (-1) + (-3) = 0$.

10. C.

解析 由已知得 $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$,两边平方可得 $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$,因此 $x^4 - 9x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 10x^2 - 9x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 2 = 1$

11. D.

解析 设三个质数为 P_1, P_2, P_3 , 则 $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = \frac{1879}{3495}$,而 $3495 = 3 \times 5 \times 233$, 即 $P_1 = 3, P_2 = 5, P_3 = 233$.则 $P_1 + P_2 + P_3 = 3 + 5 + 233 = 241$.

二 条件充分性判断

12. C.

解析 由条件(1), 取 $n = 15$, 则 n 是 5 的倍数, 但 n 不是 35 的倍数, 因此条件(1)不充分.

由条件(2), 取 $n=14$, 则知条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2), 则 n 一定是 $[5, 7] = 35$ 的倍数.

13. E.

解析 分别取 $n=20$ 和 $n=28$, 可知条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2), 则可知 n 是 $[10, 14] = 70$ 的倍数, 而不一定是 140 的倍数 (例如取 $n=70$), 即条件(1)和条件(2)联合也不充分.

14. D.

解析 由条件(1), $a=60=2 \times 2 \times 3 \times 5, b=36=2 \times 2 \times 3 \times 3$,

从而 $(a, b) = 2 \times 2 \times 3 = 12, [a, b] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$,

即条件(1)是充分的.

由条件(2), $a=12=2 \times 2 \times 3, b=180=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$,

从而 $(a, b) = 2 \times 2 \times 3 = 12, [a, b] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$,

即条件(2)也是充分的.

15. B.

解析 令 $m=5$, 则 $m=1 \times 3 + 2$, 即知条件(1)不充分.

由条件(2), $m=6 \times k + 4 = 2(3k + 2)$, 即 m 是偶数, 从而条件(2)是充分的.

16. D.

解析 由条件(1), $5 \leq x < 6, 3 \leq y < 4, 1 \leq z < 2$,

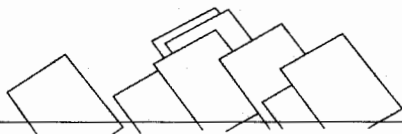
从而 $5 \leq x < 6, -4 < -y \leq -3, -2 < -z \leq -1, -1 < x - y - z < 2$,

即 $[x - y - z]$ 可以取值的为 $-1, 0, 1$ 三个数, 因此条件(1)是充分的.

同理可得条件(2)也是充分的.

第二章

整式、分式



第一节 整式

一 一元 n 次多项式的定义

定义 1.1 设 n 是一个非负整数, a_0, a_1, \dots, a_n 都是实数, 多项式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

被称为实系数多项式. 若 $a_n \neq 0$, 则被称为一元 n 次实系数多项式, 简称为 n 次多项式. 我们用 $f(x), g(x), \dots$ 代表多项式. 例如

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ 是一个三次多项式,

$g(x) = x^2 + 5$ 是一个二次多项式,

$h(x) = -5$ 是一个零次多项式(零次多项式就是只有常数项 $a_0 \neq 0$ 的单项式).

若 $f(x)$ 的所有系数均为零, 则称其为零多项式, 零多项式不规定次数, 记为 $f(x) \equiv 0$.

两个多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ 的和、差、积仍然是一个多项式, 但两个多项式的商不一定是一个多项式. 因此, 整除就成了两个多项式之间的一种特殊的关系.

二 整除及带余除法

定义 1.2 对任意两个多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

若存在多项式

$$h(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

使等式

$$f(x) = h(x)g(x)$$

成立, 则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 记为 $g(x) \mid f(x)$.

用 $g(x) \nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

当 $g(x) \mid f(x)$ 时, $g(x)$ 就称为 $f(x)$ 的因式, $f(x)$ 称为 $g(x)$ 的倍式.

整除具有以下性质:

1. 若 $h(x) \mid g(x)$, 且 $g(x) \mid f(x)$, 则 $h(x) \mid f(x)$. (传递性).
2. 若 $h(x) \mid g(x)$, 且 $h(x) \mid f(x)$, 则 $h(x) \mid u(x)g(x) + v(x)f(x)$.

这里 $u(x), v(x)$ 为任意两个多项式.

定理 1.1 (带余除法) 对任意两个实系数多项式 $f(x), g(x)$ ($g(x)$ 不是零多项式), 一定存在多项式 $q(x), r(x)$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立, 这里 $r(x)$ 为零多项式或 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数, 且 $q(x)$ 和 $r(x)$ 都是唯一的. $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得商式, $r(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式.

例 求 $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x - 8$ 除以 $g(x) = x^2 + 2x + 1$ 的商式和余式.

解 用竖式做除法, 类似于多位数除法.

$$\begin{array}{r} 4x-3 \\ x^2+2x+1 \overline{) 4x^3+5x^2-3x-8} \\ \underline{4x^3+8x^2+4x} \\ -3x^2-7x-8 \\ \underline{-3x^2-6x-3} \\ -x-5 \end{array}$$

得商式 $q(x) = 4x - 3$, 余式 $r(x) = -x - 5$

即

$$4x^3 + 5x^2 - 3x - 8 = (4x - 3)(x^2 + 2x + 1) + (-x - 5)$$

由整除的定义及带余除法知, 对任意多项式 $f(x), g(x)$ ($g(x)$ 不是零多项式), $g(x) \mid f(x)$ 的充要条件是带余除法中余式为零.

三 余数定理及一次因式与根的关系

定理 1.2 (余数定理) 用一次多项式 $x - a$ 去除多项式 $f(x)$, 所得的余式是一个常数, 这个常数值等于函数值 $f(a)$.

例 $x + 1$ 除 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$, 所得余式是

$$r(x) = f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3 = 5$$

定理 1.3 (一次因式与根的关系) a 是 $f(x)$ 的根的充分必要条件是 $(x - a) \mid f(x)$.

例 $x = 2$ 是 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的根的充分条件是 $x - 2 \mid ax^3 + bx^2 + cx + d$

四 多元多项式及多项式的因式分解

两个变量以上的整式称为多元多项式. 多元多项式的和、差、积仍为多元多项式. 常用的公式为:

$$(1) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(2) (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(3) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(4) (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

例 1.1 如果 $x+1$ 整除 $x^3 + a^2x^2 + ax - 1$, 则 $a =$ ()

- (A) 0 (B) 2 或 -1 (C) -1
(D) 2 (E) -2 或 1

解 由已知 $x^3 + a^2x^2 + ax - 1 = q(x)(x+1)$

方程两边取 $x = -1$, 则 $(-1)^3 + a^2(-1)^2 + a(-1) - 1 = 0$,

从而 $a^2 - a - 2 = 0$, $a = 2$ 或 $a = -1$.

答案是 B.

例 1.2 若 $x^2 + x + m$ 被 $x+5$ 除, 余式为 -3 , 则 $m =$ ()

- (A) 21 (B) 22 (C) -22
(D) -23 (E) 23

解 由已知 $x^2 + x + m = q(x)(x+5) + (-3)$

令 $x = -5$, 则得 $(-5)^2 - 5 + m = -3$,

因此, $m = -23$.

答案是 D.

例 1.3 设 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 能被 $x^2 + h^2$ ($h \neq 0$) 整除, 则 a, b, c, d 间的关系为 ()

- (A) $ab = cd$ (B) $ac = bd$ (C) $ad = bc$
(D) $a + b = cd$ (E) 以上均不正确

解 用带余除法

$$\begin{array}{r} ax+b \\ x^2+h^2 \overline{) ax^3+bx^2+cx+d} \\ \underline{ax^3+ah^2x} \\ bx^2+(c-ah^2)x+d \\ \underline{bx^2+bh^2} \\ (c-ah^2)x+(d-bh^2) \end{array}$$

因为 $x^2 + h^2 \mid ax^3 + bx^2 + cx + d$, 从而余式 $(c - ah^2)x + (d - bh^2)$ 为零多项式,

即 $c - ah^2 = 0$, 且 $d - bh^2 = 0$, 得 $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, 即 $ad = bc$.

答案是 C.

例 1.4 将多项式 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 因式分解为 $(2x-1)q(x)$, 则 $q(x)$ 等于 ()

- (A) $(x+2)(2x-1)^2$ (B) $(x-2)(x+1)^2$

(C) $(2x+1)(x^2-2)$

(D) $(2x-1)(x+2)^2$

(E) $(2x+1)^2(x-2)$

解 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = (2x-1)q(x)$, 两个多项式相等, 变量 x 取任意值, 其所得值都相等.

令 $x = -2$, 则 $-5q(-2) = 2 \times (-2)^4 - (-2)^3 - 6 \times (-2)^2 - (-2) + 2 \neq 0$

因此 $x+2$ 不是 $q(x)$ 的因式, 则知 A 和 D 均不正确.

令 $x = 2$, 则 $3q(2) = 2 \times 2^4 - 2^3 - 6 \times 2^2 - 2 + 2 = 0$,

从而 $x-2$ 是 $q(x)$ 的因式, 答案只可能是 B 或 E.

又由于 $x = -1$ 时, $-3q(-1) = 2 \times (-1)^4 - (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 + 1 + 2 = 0$

即 $x+1$ 是 $q(x)$ 的因式.

答案是 B.

例 1.5 如果多项式 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 6$ 含有一次因式 $x+1$ 和 $x - \frac{3}{2}$, 则 $f(x)$ 的另外一个一次因式是 ()

(A) $x-2$

(B) $x+2$

(C) $x-4$

(D) $x+4$

(E) 以上结论均不正确

解 由已知 $x^3 + px^2 + qx + 6 = (x+1)(x - \frac{3}{2})(x+a)$

令 $x = 0$

可得 $-\frac{3}{2}a = 6$, 即 $a = -4$,

从而另一个因式为 $x-4$.

答案是 C.

例 1.6 若 $x^4 + x^3 + ax^2 + bx - 1$ 除以 $x^2 + x + 1$, 余式为 $2x - 5$, 则 $a + b =$ ()

(A) 10

(B) 11

(C) 12

(D) 22

(E) 36

解 用带余除法

$$\begin{array}{r} x^2 + (a-1) \\ x^2 + x + 1 \overline{) x^4 + x^3 + ax^2 + bx - 1} \\ \underline{x^4 + x^3 + x^2} \\ (a-1)x^2 + bx - 1 \\ \underline{(a-1)x^2 + (a-1)x + (a-1)} \\ (b-a+1)x + (-1-a+1) \end{array}$$

得 $\begin{cases} b-a+1=2 \\ -a=-5 \end{cases}$

从而 $a=5, b=6$

答案是 B.

例 1.7 无论 x, y 取何值, $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 40$ 的值都是 ()

- (A) 正数 (B) 负数 (C) 零
(D) 非负数 (E) 非正数

解 原式 $= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 12y + 36 + 3 = (x-1)^2 + (y+6)^2 + 3$

从而无论 x, y 取何值, 都有 $(x-1)^2 + (y+6)^2 + 3 > 0$.

答案是 A.

例 1.8 若 $x^2 - 3x + 2xy + y^2 - 3y - 40 = (x+y+m)(x+y+n)$, 则 m, n 的值分别为 ()

- (A) $m=8, n=5$ (B) $m=8, n=-5$ (C) $m=-8, n=5$
(D) $m=-8, n=-5$ (E) 以上结论均不正确

解 $(x+y+m)(x+y+n) = x^2 + (m+n)x + 2xy + y^2 + (m+n)y + mn$, 从而有

$$\begin{cases} m+n = -3 \\ mn = -40 \end{cases} \text{ 成立}$$

解得 $m = -8$ 或 $m = 5$.

当 $m = -8$ 时, 可得 $n = 5$,

当 $m = 5$ 时, 可得 $n = -8$.

因 m, n 对称, 可取 $m = -8, n = 5$.

答案是 C.

例 1.9 (条件充分性判断) $a = b = c = d$ 成立.

(1) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da = 0$

(2) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = 0$

解 由条件(1), $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da = 0$

即 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 = 0$

从而 $a = b = c = d$ 成立, 即条件(1)充分.

在条件(2)中, 取 $a = -1, b = -1, c = 1, d = 1$

则有 $(-1)^4 + (-1)^4 + 1^4 + 1^4 - 4 \times (-1) \times (-1) \times 1 \times 1 = 0$

但显然 $a = b = c = d$ 不成立, 因此, 条件(2)不充分.

答案是 A.

例 1.10 (条件充分性判断) $x-2$ 是多项式 $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b$ 的因式.

(1) $a=1, b=2$

(2) $a=2, b=3$

解) 若 $x-2$ 是 $f(x)$ 的因式, 即 $f(x) = (x-2)q(x)$

因此, $f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 2a + b = 0$, 即必有 $16 - 2a + b = 0$,

因此, 条件(1)和条件(2)单独和联合起来都不充分.

答案是 E.

例 1.11 (条件充分性判断) 实数 a, b, c 中至少有一个大于零.

$$(1) x, y, z \in \mathbf{R}, a = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2}, b = y^2 - 2z + \frac{\pi}{3}, c = z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$$

$$(2) x \in \mathbf{R} \text{ 且 } |x| \neq 1, a = x - 1, b = x + 1, c = x^2 - 1$$

解) 由条件(1), $a + b + c = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (\pi-3) > 0$

由 $a + b + c > 0$, 可知 a, b, c 中至少有一个大于零, 即条件(1)是充分的.

由条件(2), $abc = (x^2 - 1)^2 > 0$, 知 a, b, c 中至少有一个大于零, 即条件(2)也是充分的.

答案是 D.

例 1.12 (条件充分性判断) 能唯一确定一个关于 x 的二次三项式 $f(x)$ 的解析式.

$$(1) f(2) = f(3)$$

$$(2) f(4) = 6$$

解) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$

则由条件(1), $f(2) = f(3)$, 即 $4a + 2b + c = 9a + 3b + c$

由条件(2), $f(4) = 6$, 即 $16a + 4b + c = 6$

显然, 两个条件单独都不能唯一确定 a, b, c , 联合起来也不能唯一确定 a, b, c .

答案是 E.

第二节 分式

一 分式的概念

定义 2.1 用 A, B 表示两个整式, $A \div B$ 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式. 如果 B 中含有字母, 则称

$\frac{A}{B}$ 为分式, 其中 A 叫做分式的分子, B 叫做分式的分母.

要注意以下几点:

1. 分式有意义的条件: 分母不等于零.
2. 分式无意义的条件: 分母等于零.
3. 分式的值等于零的条件: 分子等于零且分母不等于零.

分式的基本性质与分数的基本性质类似.

二 分式的计算

例 2.1 已知 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, 则 $\frac{2a^2 - 3bc + b^2}{a^2 - 2ab - c^2} =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$
(D) $\frac{19}{24}$ (E) $\frac{7}{22}$

解 设 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$, 则 $a = 2k, b = 3k, c = 4k$

$$\text{因此 } \frac{2a^2 - 3bc + b^2}{a^2 - 2ab - c^2} = \frac{2 \times 4k^2 - 3 \times 3k \times 4k + 9k^2}{4k^2 - 2 \times 6k^2 - 16k^2} = \frac{-19k^2}{-24k^2} = \frac{19}{24}$$

答案是 D.

例 2.2 当 $x = 2005, y = 1949$ 时, 代数式 $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - 2xy + y^2} \times \frac{y - x}{x^2 + y^2}$ 的值为 ()

- (A) -3954 (B) 3954 (C) -56
(D) 56 (E) 128

$$\text{解 } \frac{x^4 - y^4}{x^2 - 2xy + y^2} \times \frac{y - x}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(y - x)}{(x - y)^2(x^2 + y^2)} = -(x + y)$$

当 $x = 2005, y = 1949$ 时, 原式 $= -(2005 + 1949) = -3954$

答案是 A.

例 2.3 若 $a + b + c \neq 0, \frac{2a + b}{c} = \frac{2b + c}{a} = \frac{2c + a}{b} = k$, 则 k 的值为 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) -2
(D) -3 (E) 1

$$\text{解 } \text{由已知 } \begin{cases} 2a + b = kc \\ 2b + c = ka \\ 2c + a = kb \end{cases}$$

因此 $3(a + b + c) = k(a + b + c)$.

若 $a + b + c \neq 0$, 则 $k = 3$.

答案是 B.

例 2.4 已知 $a + b + c = 0$, 则 $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 的值等于 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) -2 (E) -3

解) 由已知 $a+b=-c, a+c=-b, b+c=-a$

$$\begin{aligned} \text{得 } a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ = \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \\ = \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \\ = -3 \end{aligned}$$

答案是 E.

例2.5 $\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}=\frac{4}{21}$ 的解是 ()

- (A) 3 (B) -7 (C) 3 或 -7
(D) 3 或 7 (E) 7

解) 原式 = $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{4}{21}$

即 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}=\frac{4}{21}$

整理得 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}=\frac{4}{21}, x^2+4x-21=0.$

解得 $x=-7$ 或 $x=3$.

答案是 C.

例2.6 (条件充分性判断) 已知 $abc \neq 0$, 则 $\frac{ab+1}{b}=1$.

(1) $b+\frac{1}{c}=1$ (2) $c+\frac{1}{a}=1$

解) 条件(1)和条件(2)单独都不是充分的.

联合条件(1)和条件(2), $b=1-\frac{1}{c}=\frac{c-1}{c}, a=\frac{1}{1-c},$

因此, $\frac{ab+1}{b}=a+\frac{1}{b}=\frac{1}{1-c}+\frac{c}{c-1}=\frac{1-c}{1-c}=1.$

答案是 C.

例2.7 (条件充分性判断) 当 n 为自然数时, 有 $x^{6n}+\frac{1}{x^{6n}}=2$.

(1) $x+\frac{1}{x}=-1$ (2) $x+\frac{1}{x}=1$

解) 由条件(1), 可得 $x^2+x+1=0$

方程两边同乘 $(x-1)$,

$$\text{即 } (x-1)(x^2+x+1)=0,$$

$$\text{得 } x^3-1=0, x^3=1$$

$$\text{因此, } x^{6n} + \frac{1}{x^{6n}} = (x^3)^{2n} + \frac{1}{(x^3)^{2n}} = 1+1=2 \text{ 成立,}$$

从而条件(1)是充分的.

$$\text{由条件(2), } x^2-x+1=0$$

$$\text{得 } (x+1)(x^2-x+1)=0, x^3+1=0, x^3=-1$$

$$\text{即 } x^{6n} + \frac{1}{x^{6n}} = (x^3)^{2n} + \frac{1}{(x^3)^{2n}} = 1+1=2 \text{ 成立,}$$

因此,条件(2)也是充分的.

答案是 D.

例 2.8 (条件充分性判断) $f(x) \neq 2$

$$(1) f(x) = \frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$$

$$(2) f(x) = x^2-2x+4$$

解 由条件(1),

$$f(x) = \frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} = \frac{2(x^2+x+1)+1}{x^2+x+1} = 2 + \frac{1}{x^2+x+1}$$

因为 $\frac{1}{x^2+x+1} \neq 0$, 从而 $f(x) \neq 2$ 成立,

即条件(1)是充分的.

$$\text{由条件(2), } f(x) = x^2-2x+4 = (x^2-2x+1)+3 = (x-1)^2+3 \geq 3,$$

即 $f(x) \neq 2$ 成立.

因此,条件(2)也是充分的.

答案是 D.

第三节 练习

一 问题求解

1. 若 $x^4+2x^3+ax^2-bx+1$ 除以 x^2-1 所得余式为 $2x-1$, 则 $ab =$ ()

- (A) 0 (B) 2 (C) 3
(D) -3 (E) 6

2. ax^2+bx+1 与 $3x^2-4x+5$ 的积不含 x 的一次方项和三次方项, 则 $a-b =$ ()

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{5}$

3. 在多项式 $x^2 + 7x + 6, x^2 - 2x - 3, 2x^2 + 6x + 4, x^2 - 6x + 5, 2x^2 + x - 1$ 中含有因式 $x + 1$ 的多项式共有 ()

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个

(D) 4 个 (E) 5 个

4. 已知 $x - y = 5, z - y = 10$, 则 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ 的值为 ()

(A) 50 (B) 75 (C) 100

(D) 105 (E) 110

5. 当 $x = \sqrt{2}$ 时, 分式 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1}$ 的值为 ()

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{5}{3}$ (C) 2

(D) -2 (E) 1

6. 已知 $4x - 3y - 6z = 0, x + 2y - 7z = 0$, 则 $\frac{2x^2 + 3y^2 + 6z^2}{x^2 + 5y^2 + 7z^2} =$ ()

(A) -1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$ (E) 1

7. 多项式 $x^2 + x + m$ 能被 $x + 5$ 整除, 则此多项式也能被下列多项式整除的是 ()

(A) $x - 6$ (B) $x + 4$ (C) $x + 6$

(D) $x - 4$ (E) $x + 2$

8. 已知 $x = \frac{a+1}{a-1}$, 则 $\frac{x+1}{x} =$ ()

(A) $\frac{a}{2a+2}$ (B) $\frac{2a}{a+1}$ (C) $\frac{2a}{a-1}$

(D) $\frac{a}{2a-2}$ (E) $\frac{a}{a+1}$

9. 若分式 $\frac{3}{x^2+x-6} + \frac{2}{x^2+5x+6}$ 与 $\frac{4}{x^2-4}$ 相等, 则 $x =$ ()

(A) -3 (B) -4 (C) 4

(D) 1 (E) 10

10. $x^2 + x - 6$ 是多项式 $2x^4 + x^3 - ax^2 + bx + a + b - 1$ 的因式, 则 a, b 分别为 ()

(A) 16, 3 (B) 16, 5 (C) 3, 16

(D) 5, 16 (E) -5, 16

二 条件充分性判断

11. 多项式 $f(x)$ 除以 $x+1$ 所得余式为 2.

(1) 多项式 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 所得的余式是 $x+5$

(2) 多项式 $f(x)$ 除以 x^2-2x-3 所得的余式是 $x+3$

12. $x+1$ 能整除 $x^3+a^2x^2+ax-1$.

(1) $a=2$

(2) $a=-1$

13. $\frac{2x^2-3yz+y^2}{x^2-2xy-z^2} = \frac{19}{24}$

(1) $x:y:z=3:4:5$

(2) $x:y:z=2:3:4$

14. $a^2b-b^2a=4\sqrt{2}$

(1) $a=4+3\sqrt{2}, b=4-3\sqrt{2}$

(2) $a=3+2\sqrt{2}, b=3-2\sqrt{2}$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. A.

解析 由已知 $x^4+2x^3+ax^2-bx+1=q(x)(x^2-1)+(2x-1)$

取 $x=1$, 则 $1+2+a-b+1=1$

取 $x=-1$, 则 $1-2+a+b+1=-3$

得 $a=-3, b=0$,

因此 $ab=0$

2. C.

解析 $(ax^2+bx+1)(3x^2-4x+5)=3ax^4+(3b-4a)x^3+(5a+3-4b)x^2+(5b-4)x+5$

由已知 $5b-4=0$ 且 $3b-4a=0$

得 $b=\frac{4}{5}, a=\frac{3}{5}$

因此 $a-b=-\frac{1}{5}$

3. D.

解析 多项式 $f(x)$ 含有因式 $x+1$ 的充分必要条件是 $f(-1)=0$,

分别取 $f(x)$ 为 x^2+7x+6 , x^2-2x-3 , $2x^2+6x+4$, x^2-6x+5 , $2x^2+x-1$

可知, $(-1)^2+7 \times (-1)+6=0$, $(-1)^2-2 \times (-1)-3=0$,

$2 \times (-1)^2+6 \times (-1)+4=0$, $(-1)^2-6 \times (-1)+5 \neq 0$, $2 \times (-1)^2+(-1)-1=0$,

因此,除 x^2-6x+5 不含有因式 $x+1$ 外,其余多项式都含有因式 $x+1$.

4. B.

$$\begin{aligned}\text{解析 } x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx &= \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx) \\ &= \frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \\ &= \frac{1}{2}(5^2+10^2+5^2)=75\end{aligned}$$

5. A.

$$\text{解析 } \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+3}{x^4-1} = \frac{5}{4-1} = \frac{5}{3}$$

6. E.

$$\text{解析 } \text{由已知} \quad \begin{cases} 4x-3y-6z=0 \\ 4x+8y-28z=0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \quad \begin{cases} y=2z \\ x=3z \end{cases}$$

$$\text{从而} \quad \frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2} = \frac{18z^2+12z^2+6z^2}{9z^2+20z^2+7z^2} = \frac{36}{36} = 1$$

7. D.

解析 由题意 $x^2+x+m=q(x)(x+5)$,

方程两边取 $x=-5$,

得 $(-5)^2+(-5)+m=0$, 即 $m=-20$,

从而 $x^2+x-20=(x-4)(x+5)$, $x-4$ 能整除 x^2+x-20 .

8. B.

$$\text{解析 } \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{a-1}{a+1} = \frac{a+1+a-1}{a+1} = \frac{2a}{a+1}$$

9. E.

$$\text{解析 } \text{由题意} \quad \frac{3}{(x-2)(x+3)} + \frac{2}{(x+2)(x+3)} = \frac{4}{(x-2)(x+2)},$$

整理得 $3(x+2)+2(x-2)=4(x+3)$, 得 $x=10$.

10. A.

解析 由已知 $2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1=q(x)(x^2+x-6)$

方程两边取 $x=2$ 及 $x=-3$,

$$\text{得} \begin{cases} 2 \times 2^4 + 2^3 - 4a + 2b + a + b - 1 = 0 \\ 2 \times (-3)^4 + (-3)^3 - 9a - 3b + a + b - 1 = 0 \end{cases}$$

因此 $a = 16, b = 3$.

二 条件充分性判断

11. B.

解析 题干要求 $f(x) = q(x)(x+1) + 2$, 即 $f(-1) = 2$.

由条件(1), $f(x) = q(x)(x-2)(x+1) + (x+5)$, 得 $f(-1) = 4$, 因此条件(1)不充分.

由条件(2), $f(x) = q(x)(x^2 - 2x - 3) + (x+3)$, 得 $f(-1) = 2$, 因此条件(2)是充分的.

12. D.

解析 题干要求 $x^3 + a^2x^2 + ax - 1 = q(x)(x+1)$

即 $(-1)^3 + a^2(-1)^2 + a(-1) - 1 = 0$

可得 $a = 2$ 或 $a = -1$

因此, 条件(1)和条件(2)都是充分的.

13. B.

解析 由条件(1), 令 $x = 3k, y = 4k, z = 5k$,

$$\frac{2x^2 - 3yz + y^2}{x^2 - 2xy - z^2} = \frac{18k^2 - 60k^2 + 16k^2}{9k^2 - 24k^2 - 25k^2} = \frac{-26}{-40} = \frac{13}{20} \neq \frac{19}{24}$$

即条件(1)不充分.

由条件(2), 令 $x = 2k, y = 3k, z = 4k$,

$$\frac{2x^2 - 3yz + y^2}{x^2 - 2xy - z^2} = \frac{8k^2 - 36k^2 + 9k^2}{4k^2 - 12k^2 - 16k^2} = \frac{-19}{-24} = \frac{19}{24}$$

因此条件(2)是充分的.

14. B.

解析 由条件(1) $ab = 16 - 18 = -2, a - b = 6\sqrt{2}$

从而 $a^2b - b^2a = ab(a - b) = -2 \times 6\sqrt{2} = -12\sqrt{2} \neq 4\sqrt{2}$

即条件(1)不充分.

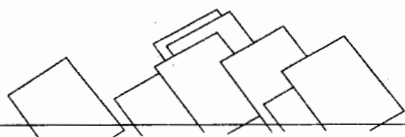
由条件(2) $ab = 9 - 8 = 1, a - b = 4\sqrt{2}$

从而 $a^2b - b^2a = ab(a - b) = 1 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

即条件(2)是充分的.

第三章

平均值、绝对值



第一节 平均值

定义 1.1 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为 n 个数, 称 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值, 记为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

定义 1.2 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 n 个正实数, 称 $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ 为这 n 个数的几何平均值, 记为 $x_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$.

例 1.1 (2006 年) 如果 x_1, x_2, x_3 三个数的算术平均值为 5, 则 $x_1 + 2, x_2 - 3, x_3 + 6$ 与 8 的算术平均值为 ()

- (A) $3\frac{1}{4}$ (B) $6\frac{1}{2}$ (C) 7
(D) $9\frac{1}{5}$ (E) 以上答案均不正确

解

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 5$$

则可知

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

因此

$$\frac{(x_1 + 2) + (x_2 - 3) + (x_3 + 6) + 8}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + 13}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

答案是 C.

例 1.2 求 3, 8, 9 这三个数的算术平均值和几何平均值.

解 3, 8, 9 的算术平均值为 $\bar{x} = \frac{3+8+9}{3} = \frac{20}{3}$;

几何平均值为 $x_g = \sqrt[3]{3 \times 8 \times 9} = \sqrt[3]{216} = 6$.

例 1.3 已知 x_1, x_2, x_3 的算术平均值为 a , y_1, y_2, y_3 的算术平均值为 b , 则 $2x_1 + 3y_1$,

$2x_2 + 3y_2, 2x_3 + 3y_3$ 的算术平均值为 ()

(A) $2a + 3b$ (B) $\frac{2}{3}a + b$ (C) $6a + 9b$

(D) $2a + b$ (E) 以上结论均不正确

解 由已知 $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = a, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = b$

得 $x_1 + x_2 + x_3 = 3a, y_1 + y_2 + y_3 = 3b$

因此 $\frac{2x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 3y_2 + 2x_3 + 3y_3}{3}$

$$= \frac{2(x_1 + x_2 + x_3) + 3(y_1 + y_2 + y_3)}{3} = \frac{6a + 9b}{3} = 2a + 3b$$

答案是 A.

例 1.4 (条件充分性判断) 两个数 a, b 的几何平均值的 3 倍大于它的算术平均值.

(1) a, b 满足 $a^2 + b^2 < 34ab$ (2) a, b 均为正数

解 条件(2)只是保证题干有意义,从而此题答案只可能选 C 或 E.

题干要求 $3\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2}$

$36ab > (a+b)^2, a^2 + b^2 < 34ab$ 与条件(1)一致

答案为 C.

例 1.5 (条件充分性判断) $x_1, x_2 + 1, x_3 + 2, x_4 + 3, x_5 + 4$ 的算术平均值是 $\bar{x} + 2$.

(1) 如果 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的算术平均值是 \bar{x}

(2) 如果 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的算术平均值是 $\bar{x} + 1$

解 由条件(1) $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \bar{x}$

则

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5\bar{x}$$

从而

$$\frac{x_1 + (x_2 + 1) + (x_3 + 2) + (x_4 + 3) + (x_5 + 4)}{5} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (1 + 2 + 3 + 4)}{5} = \frac{5\bar{x} + 10}{5} = \bar{x} + 2$$

即条件(1)是充分的.

由条件(2)

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \bar{x} + 1$$

则

$$\frac{x_1 + (x_2 + 1) + (x_3 + 2) + (x_4 + 3) + (x_5 + 4)}{5} = \frac{5\bar{x} + 15}{5} = \bar{x} + 3$$

即条件(2)不充分.

答案是 A.

第二节 绝对值

定义 2.1 实数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } a = 0 \text{ 时} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

实数的绝对值有以下五条常用的性质:

1. $|(\quad)| \geq 0$

2. $|-(\quad)| = |(\quad)|$

3. $|(\quad)| < \delta \Leftrightarrow -\delta < (\quad) < \delta$

$|(\quad)| > \delta \Leftrightarrow (\quad) > \delta \text{ 或 } (\quad) < -\delta$

$|(\quad)| = \delta \Leftrightarrow (\quad) = \pm \delta$

4. $\sqrt{(\quad)^2} = |(\quad)|$

5. $|a+b| \leq |a| + |b|$, 当且仅当 a, b 同号时等式成立.

注: 这里 (\quad) 表示任意的函数表达式

例 2.1 实数 a, b, c 在数轴上的位置如图 3-1 所示, 图中 O 为原点, 则代数式 $|a+b| - |b-a| + |a-c| + c =$ (\quad)

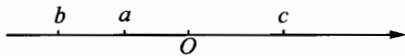


图 3-1

(A) $a - 2b$

(B) $-a - 2c$

(C) $3a$

(D) $-3a + 2c$

(E) $2b + 2c$

解 由图 3-1 知 $c > 0, b < a < 0$, 因此 $a+b < 0, b-a < 0, a-c < 0$,

由绝对值定义,

$$|a+b| - |b-a| + |a-c| + c = -a-b+b-a+c-a+c = -3a+2c$$

答案是 D.

例 2.2 已知 $|x-y+1| + (2x-y)^2 = 0$, 则 $\log_y x =$ (\quad)

(A) 0

(B) 1

(C) -1

(D) 2

(E) -2

解 由绝对值性质 $|x-y+1| \geq 0$, 又由于 $(2x-y)^2 \geq 0$, 从而由已知, 这两式都必须等于零,

即

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

得

$$x = 1, y = 2$$

因此

$$\log_y x = \log_2 1 = 0$$

答案是A.

例2.3 若 $\left| \frac{2x-1}{3} \right| = \frac{1-2x}{3}$ 成立, 则 x 的取值范围是 ()

(A) $x > \frac{1}{2}$ (B) $x = \frac{1}{2}$ (C) $x < \frac{1}{2}$

(D) $x \geq \frac{1}{2}$ (E) $x \leq \frac{1}{2}$

解 由已知得

$$\frac{2x-1}{3} \leq 0,$$

即

$$x \leq \frac{1}{2}$$

答案是E.

例2.4 设 a, b 为实数, 若 $ab < |ab|$, 则一定有 ()

(A) $a < 0, b < 0$ (B) $a > 0, b < 0$ (C) $a < 0, b > 0$

(D) $ab < 0$ (E) $ab \geq 0$

解 若 $ab < |ab|$, 则 a, b 中任何一个都不等于零.又当 $ab > 0$ 时, $ab = |ab|$, 因此 a, b 只能一正一负, 即 $ab < 0$.

答案是D.

例2.5 已知 $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} = 1$, 则 $\left(\frac{bc}{|ab|} \times \frac{ac}{|bc|} \times \frac{ab}{|ca|} \right) \div \left(\frac{|abc|}{abc} \right)^{2007} =$ ()

(A) 1 (B) -1 (C) 2

(D) -2 (E) $\frac{1}{2}$

解 由已知 $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} = 1$, a, b, c 只能是两正一负, 不妨设 $a > 0, b > 0, c < 0$,

则

$$\begin{aligned} & \left(\frac{bc}{|ab|} \times \frac{ac}{|bc|} \times \frac{ab}{|ca|} \right) \div \left(\frac{|abc|}{abc} \right)^{2007} \\ &= \frac{bc \times ac \times ab}{ab \times (-bc) \times (-ca)} \div \left(\frac{-abc}{abc} \right)^{2007} \\ &= 1 \div (-1) = -1 \end{aligned}$$

答案是B.

例2.6 不等式 $|3x - 12| \leq 9$ 的整数解的个数是

()

(A)7

(B)6

(C)5

(D)4

(E)3

解 由 $|3x - 12| \leq 9$, 得 $-9 \leq 3x - 12 \leq 9$, $3 \leq 3x \leq 21$, 因此 $1 \leq x \leq 7$,从而 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 为不等式的 7 个正整数解.

答案是 A.

例2.7 (条件充分性判断) $|x - 4| - |x - 3| \leq a$ 对任意 x 都成立.(1) $a \geq 1$ (2) $a < 1$

解

$$|x - 4| - |x - 3| = \begin{cases} 1, & x < 3 \\ -2x + 7, & 3 \leq x \leq 4 \\ -1, & x > 4 \end{cases}$$

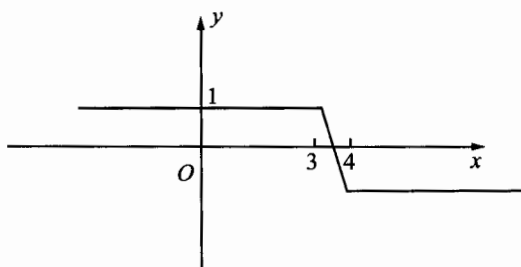
因此, 函数 $|x - 4| - |x - 3|$ 的图形如图 3-2 所示.

图 3-2

即对任意 x , $|x - 4| - |x - 3| \leq 1$ 成立,即当 $a \geq 1$ 时, $|x - 4| - |x - 3| \leq a$ 对任意 x 都成立.

答案是 A.

例2.8 (条件充分性判断) 方程 $|1 - x| + |1 + x| = a$ 无解.(1) $a = 1$ (2) $a < 2$

解

$$|1 - x| + |1 + x| = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

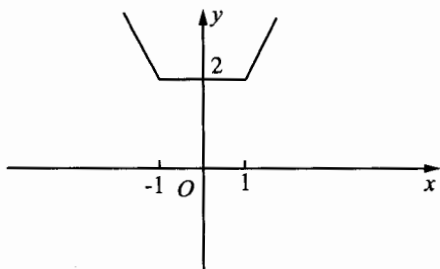
因此, 函数 $|1 - x| + |1 + x|$ 的图形如图 3-3 所示.

图 3-3

因此,当 $a=1$ 或 $a<2$ 时, $|1-x|+|1+x|=a$ 均无解,

即条件(1)和条件(2)都是充分的.

答案是 D.

例 2.9 (条件充分性判断) $\frac{|a|}{a} - \frac{|b|}{b} = -2$ 成立.

(1) $a < 0$

(2) $b > 0$

解 这类题答案只能是 C 或 E.

若条件(1)、(2)同时成立,

则 $\frac{|a|}{a} - \frac{|b|}{b} = \frac{-a}{a} - \frac{b}{b} = -1 - 1 = -2$

即题干正确.

答案是 C.

例 2.10 (条件充分性判断) 方程 $f(x)=1$ 有且仅有一个实根.

(1) $f(x)=|x-1|$

(2) $f(x)=|x-1|+1$

解 由(1)得 $|x-1|=1$, 从而 $x-1=\pm 1$, 方程有两个实根 $x_1=2, x_2=0$, 所以条件(1)不充分.

由(2) $|x-1|+1=1$, 得 $|x-1|=0$, 即 $x-1=0, x=1$, 所以条件(2)充分.

答案是 B.

第三节 练习

一 问题求解

1. 已知 $(x-2)^2 + |y-1| = 0$, 那么 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$ 的值是 ()

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) 4

(D) 3 (E) 以上答案均不正确

2. 使得 $\frac{2}{|x-2|-2}$ 不存在的 x 是 ()

(A) 4 (B) 0 (C) 4 或 0

(D) 1 (E) 以上答案均不正确

3. 若 $|x-3|=3-x$, 则 x 的取值范围是 ()

- (A) $x > 0$ (B) $x = 3$ (C) $x < 3$
 (D) $x \leq 3$ (E) $x > 3$

4. 满足关系式 $\frac{|x-1|-1}{x-2} = 0$ 的 x 是 ()

- (A) 0 (B) 2 (C) 0 或 2
 (D) 0 或 -2 (E) 2 或 -2

5. 若 $|a| = \frac{1}{2}$, $|b| = 1$, 则 $|a+b| =$ ()

- (A) $\frac{3}{2}$ 或 0 (B) $\frac{1}{2}$ 或 0 (C) $-\frac{1}{2}$
 (D) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{1}{2}$ 或 -1

6. 已知 $\frac{|x+y|}{x-y} = 2$, 则 $\frac{x}{y}$ 等于 ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ 或 3
 (D) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$ (E) 3 或 $\frac{1}{2}$

7. 不等式 $|x+1|(2x-1) \geq 0$ 的解集为 ()

- (A) $x \geq \frac{1}{2}$ (B) $x \leq -1$ 或 $x \geq \frac{1}{2}$
 (C) $x = -1$ 或 $x \geq \frac{1}{2}$ (D) $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$
 (E) 以上结论均不正确

8. 如果 a, b, c 是非零实数, 且 $a+b+c=0$, 那么 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的所有可能的值为 ()

- (A) 0 (B) 1 或 -1 (C) 2 或 -2
 (D) 0 或 -2 (E) 3

9. 已知 x_1, x_2, \dots, x_n 的几何平均值为 3, 前 $n-1$ 个数的几何平均值为 2, 则 x_n 的值为 ()

- (A) $\frac{9}{2}$ (B) $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ (C) $2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
 (D) $3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (E) $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

10. 已知 a, b, c 是三个正整数, 且 $a > b > c$, 若 a, b, c 的算术平均值为 $\frac{14}{3}$, 几何平均值为 4, 且 b, c 之积恰为 a , 则 a, b, c 的值依次为 ()
 (A) 6, 3, 2 (B) 12, 6, 2 (C) 10, 5, 2
 (D) 8, 4, 2 (E) 以上结论均不正确

二 条件充分性判断

11. $|a| + |b| + |c| - |a+b| + |b-c| - |c-a| = a+b-c$

(1) a, b, c 在数轴上的位置如图 3-4 所示

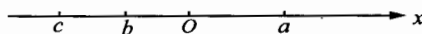


图 3-4

(2) a, b, c 在数轴上的位置如图 3-5 所示

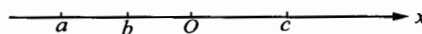


图 3-5

12. $|x|(1-2x) > 0$

(1) $x < 0$ (2) $0 < x < \frac{1}{2}$

13. $|x+1| + |x-3| \leq a$ 有解

(1) $a = 1$ (2) $a = 2$

14. $|2-x| + |1+x| = 3$

(1) $x < 2$ (2) $x > -1$

15. 不等式 $|ax+2| < 6$ 的解为 $-1 < x < 2$

(1) $a = 2$ (2) $a = -1$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. B.

解析 由已知 $x=2, y=1$, 因此 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.

2. C.

解析 使得所给分式不存在的 x 应满足 $|x-2| - 2 = 0$,

从而 $|x-2| = 2$, 即 $x-2=2$ 或 $x-2=-2$, 得 $x=4$ 或 $x=0$.

3. D.

解析 由已知 $x-3 \leq 0$, 从而 $x \leq 3$.

4. A.

解析 所求 x 满足 $\begin{cases} |x-1|-1=0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x-1=1 \text{ 或 } x-1=-1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

因此, $x=0$ 为所给分式方程的解.

5. D.

解析 由已知 $a = \pm \frac{1}{2}, b = \pm 1$, 从而 $|a+b|$ 的可能取值为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

6. C.

解析 由已知 $|x+y|=2(x-y)$, 即 $x+y=2x-2y$ 或 $x+y=2y-2x$,

从而 $x=3y$ 或 $3x=y$, 即 $\frac{x}{y}=3$ 或 $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$.

7. C.

解析 由于 $|x+1| \geq 0$, 仅当 $x=-1$ 时 $|x+1|=0$,

从而不等式的解集为 $x=-1$ 或 $2x-1 \geq 0$, 即 $x=-1$ 或 $x \geq \frac{1}{2}$.

8. A.

解析 由已知 a, b, c 应为两正一负或两负一正的实数, 由对称性可设 $a > 0, b > 0, c < 0$,

得 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = 0$

若设 $a < 0, b < 0, c > 0$,

也得 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|} = 0$

9. D.

解析 由题意 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = 3$, 即 $x_1 x_2 \cdots x_n = 3^n$,

由 $\sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = 2$, 即 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} = 2^{n-1}$,

因此 $x_n = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = \frac{3^n}{2^{n-1}} = 3 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$.

10. D.

解析 由已知 $\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} = \frac{14}{3} \\ \sqrt[3]{abc} = 4 \\ bc = a \end{cases}$

即 $\begin{cases} a+b+c = 14 \\ abc = 64 \\ bc = a \end{cases}$

解得 $a=8, b=4, c=2$

二 条件充分性判断

11. E.

解析 由条件(1),

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| + |b-c| - |c-a| = a-b-c-a-b+b-c+c-a = -a-b-c$$

由条件(2),

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| - |a+b| + |b-c| - |c-a| &= -a-b+c+a+b+c-b-c+a \\ &= c-b+a = a-b+c \end{aligned}$$

由此可知,条件(1)和条件(2)都不充分.

由于条件(1)与条件(2)相互矛盾,从而条件(1)和条件(2)不能联合.

12. D.

解析 题干要求 $x \neq 0$ 且 $1-2x > 0$, 即 $|x|(1-2x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$, 因此

条件(1)和条件(2)都是充分的.

13. E.

$$\text{解析 } |x+1| + |x-3| = \begin{cases} -2x+2, & x < -1 \\ 4, & -1 \leq x \leq 3 \\ 2x-2, & x > 3 \end{cases}$$

因此,函数 $|x+1| + |x-3|$ 的图形如图 3-6 所示.即 $|x+1| + |x-3| \geq 4$,当 $a=1$ 及 $a=2$ 时, $|x+1| + |x-3| \leq a$ 无解.

14. C.

$$\text{解析 } |2-x| + |1+x| = \begin{cases} -2x+1, & x < -1 \\ 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$$

函数 $|2-x| + |1+x|$ 的图形如图 3-7 所示.即当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $|2-x| + |1+x| = 3$.

从而条件(1)和条件(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合是充分的.

15. E.

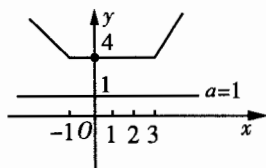
解析 由条件(1), $|2x+2| < 6$, 则 $-6 < 2x+2 < 6$, 从而其解为 $-4 < x < 2$, 即条件(1)不充分.由条件(2), $|-x+2| < 6$, 则 $-6 < -x+2 < 6$, 其解为 $-4 < x < 8$, 条件(2)也不充分. 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

图 3-6

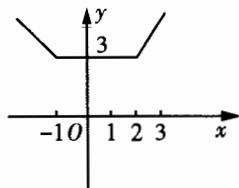
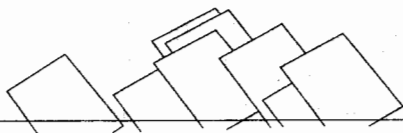


图 3-7

第四章

方程与不等式



第一节 一元二次方程

形如 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的方程为一元二次方程, 其考点为:

(一) 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 它的解为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 其中 $\Delta = b^2 - 4ac$

称为一元二次方程根的判别式.

(1) $\Delta < 0$ 时, $ax^2 + bx + c = 0$ 无实根;

(2) $\Delta = 0$ 时, $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的实根;

(3) $\Delta > 0$ 时, $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实根.

(二) 韦达定理

设方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根为 x_1, x_2 , 则有
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

证明 由已知 x_1, x_2 是 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ 的两根

即 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$$x^2 + (-x_1 - x_2)x + (-x_1) \cdot (-x_2) = 0$$

因此 $-x_1 - x_2 = \frac{b}{a}, \quad (-x_1)(-x_2) = \frac{c}{a}$

即可得韦达定理.

例 1.1 若 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个根, 求下列各式的值.

(1) $x_1^2 + x_2^2$ (2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ (3) $x_1^3 + x_2^3$ (4) $|x_1 - x_2|$

解 x_1, x_2 是 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个根, 由根与系数的关系

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(1) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$(2) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1 x_2} = \frac{7}{1} = 7$$

$$(3) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 3 \times (7 - 1) = 18$$

$$(4) |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

例 1.2 已知 $k > 0$, 且方程 $3kx^2 + 12x + k = -1$ 有两个相等的实根, 则 k 的值等于 ()

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $\pm 2\sqrt{3}$ (C) 3 或 -4
(D) -4 (E) 3

解 由已知
$$\begin{cases} k > 0 \\ \Delta = 12^2 - 4 \times 3k(k+1) = 0 \end{cases}$$

解得

$$k = 3$$

答案是 E.

例 1.3 若 m 为不等于零的实数, 则方程 $x^2 + mx - m^2 = 0$ 的根的情况是 ()

- (A) 有两个相等的实数根 (B) 有两个不相等的实数根
(C) 有三个实数根 (D) 没有实数根
(E) 不能确定

解 $\Delta = m^2 - 4 \times (-m^2) = 5m^2$, 而 $m \neq 0$,

因此 $\Delta = 5m^2 > 0$, 即方程有两个不相等的实数根.

答案是 B.

例 1.4 已知方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1^2 + x_2^2 =$ ()

- (A) 18 (B) 22 (C) 50
(D) 36 (E) -50

解 由根与系数的关系
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = 7 \end{cases}$$

则

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6^2 - 2 \times 7 = 22$$

答案是 B.

例 1.5 已知方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 有两个不相同的正根, 则 m 的取值范围是 ()

- (A) $m > 0$ (B) $m < 1$ (C) $-1 < m < 0$
(D) $m < -1$ (E) $0 < m < 1$

解 由已知
$$\begin{cases} \Delta = (-2)^2 + 4m > 0 \\ x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1 x_2 = -m > 0 \end{cases}$$

从而 $m < 0$ 且 $m > -1$ 成立,
即 m 的取值范围是 $-1 < m < 0$.
答案是 C.

例 1.6 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2(m+1)x + (3m^2 + 4mn + 4n^2 + 2) = 0$ 有实根,
则 m, n 的值为 ()

(A) $m = -1, n = \frac{1}{2}$ (B) $m = \frac{1}{2}, n = -1$

(C) $m = \frac{1}{2}, n = 1$ (D) $m = 1, n = -\frac{1}{2}$

(E) 以上答案均不正确

解 方程有实根, 则 $\Delta \geq 0$,
即 $4(m+1)^2 - 4(3m^2 + 4mn + 4n^2 + 2) \geq 0$ 成立,
整理可得 $(2n+m)^2 + (m-1)^2 \leq 0$
因此 $m = 1, n = -\frac{1}{2}$

答案是 D.

例 1.7 (条件充分性判断) 关于 x 的方程 $ax^2 + (2a-1)x + (a-3) = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) $a < 3$ (2) $a \geq 1$

解 题干要求 $a \neq 0$, 且 $\Delta = (2a-1)^2 - 4a(a-3) > 0$, 即 $a > -\frac{1}{8}$,

所以 a 的取值范围是 $(-\frac{1}{8}, 0) \cup (0, +\infty)$.

因此, 条件(1)不充分, 条件(2)充分.

答案是 B.

例 1.8 (条件充分性判断) 方程 $x^2 + (5-a)x + (a-2) = 0$ 有两个不相等的负实根.

(1) $a > 2$ (2) $a < 5$

解 设 x_1, x_2 是方程两根, 则方程有两个不相等的负实根,

等价于
$$\begin{cases} \Delta = (5-a)^2 - 4(a-2) > 0 \\ x_1 + x_2 = -(5-a) < 0 \\ x_1 x_2 = a-2 > 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a < 3 \text{ 或 } a > 11 \\ a < 5 \\ a > 2 \end{cases}$$

即

$$2 < a < 3$$

从而条件(1)和条件(2)单独都不充分,且联合起来也不充分.

答案是E.

例1.9 (条件充分性判断) $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 1$.(1)若 α, β 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两个实根(2)若 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个实根

解 由条件(1)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

因此

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = (-1)(-1) = 1$$

即条件(1)是充分的.

由条件(2)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

因此

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -1$$

条件(2)不充分.

答案是A.

例1.10 (条件充分性判断) 一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两个根的差的绝对值为4.

$$(1) \begin{cases} b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$(2) b^2 - 4c = 16$$

解 设 x_1, x_2 为 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根,

则

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 x_2 = c$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{b^2 - 4c}$$

若条件(1)成立,则有

$$b^2 - 4c = 16, |x_1 - x_2| = 4$$

若条件(2)成立,则有

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{16} = 4 \text{ 也成立.}$$

答案是D.

第二节 一元二次不等式及其解法

形如 $ax^2 + bx + c > 0$ (≥ 0 , < 0 或 ≤ 0) ($a \neq 0$)的不等式为一元二次不等式. 关于一元二次不等式的最重要解法就是抛物线法.

(一) $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)代表一条抛物线,若 $a > 0$,则抛物线开口向上(见图4-1);

若 $a < 0$, 则抛物线开口向下 (见图 4-2).

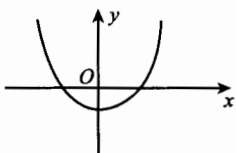


图 4-1

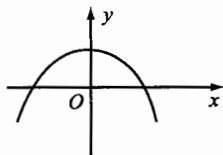


图 4-2

(二)一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 即为抛物线与坐标轴 x 轴的交点的横坐标, 因而

(1) 若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0, a > 0$ 时, 抛物线如图 4-3 所示; $a < 0$ 时, 抛物线如图 4-4 所示.

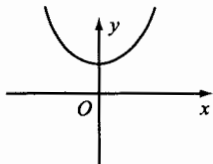


图 4-3

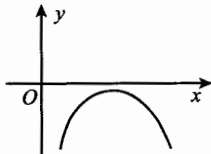


图 4-4

(2) 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0, a > 0$ 时, 抛物线如图 4-5 所示; $a < 0$ 时, 抛物线如图 4-6 所示.

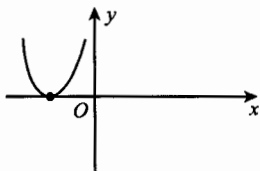


图 4-5

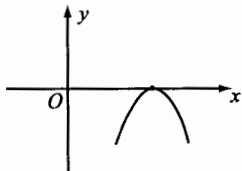


图 4-6

(3) 若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0, a > 0$ 时, 抛物线如图 4-7 所示; $a < 0$ 时, 抛物线如图 4-8 所示.

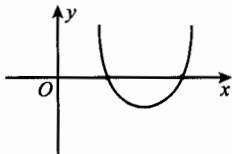


图 4-7

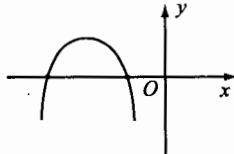


图 4-8

例 2.1 解下列不等式.

(1) $-x^2 + 5x > 6$

(2) $x^2 + x + \frac{1}{4} \leq 0$

(3) $x + 2 < 2x^2$

解 (1) $-x^2 + 5x - 6 > 0, a = -1 < 0$, 抛物线开口向下, $-x^2 + 5x - 6 = 0$ 的解为 $x_1 = 2, x_2 = 3$, 从而抛物线如图 4-9 所示.

即 $-x^2 + 5x - 6 > 0$ 的解集为 $2 < x < 3$.

(2) $x^2 + x + \frac{1}{4} \leq 0$, 等价于 $4x^2 + 4x + 1 \leq 0, a = 4 > 0$, 抛物线开口向上, $4x^2 + 4x + 1 = 0$ 的解

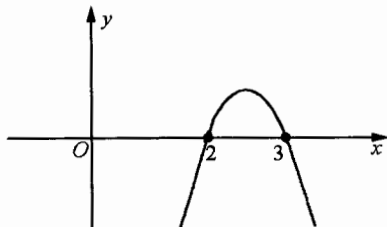


图 4-9

为 $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = -\frac{1}{2}$, 抛物线如图4-10所示.

从而 $x^2 + x + \frac{1}{4} \leq 0$ 的解为 $x = -\frac{1}{2}$.

(3) $2x^2 - x - 2 > 0$, $a = 2 > 0$, 抛物线开口向上, $2x^2 - x - 2 = 0$ 的根为 $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4}$, 即 $x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$, 抛物线如图4-11所示.

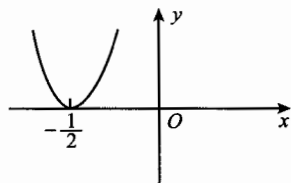


图 4-10

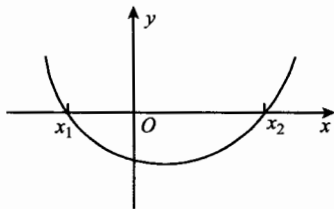


图 4-11

从而 $2x^2 - x - 2 > 0$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{4}) \cup (\frac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty)$.

例2.2 求解不等式 $|x^2 - 5x| > 6$.

解 原不等式等价于 $x^2 - 5x > 6$ 或 $x^2 - 5x < -6$.

对于 $x^2 - 5x - 6 > 0$, 可得解集为 $x < -1$ 或 $x > 6$.

对于 $x^2 - 5x + 6 < 0$, 可得解集为 $2 < x < 3$.

因此, $|x^2 - 5x| > 6$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (6, +\infty)$.

例2.3 已知对于任意实数 x , 不等式 $(a+2)x^2 + 4x + (a-1) > 0$ 都成立, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ (B) $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$
 (C) $(-2, 2)$ (D) $(2, +\infty)$
 (E) 以上结论都不正确

解 若 $a+2=0$, 即 $a=-2$, 不等式为 $4x-3 > 0$

解得 $x > \frac{3}{4}$, 不满足已知要求.

因此

$$a+2 > 0$$

且

$$\Delta = 4^2 - 4(a+2)(a-1) < 0 \text{ 成立}$$

得

$$\begin{cases} a > -2 \\ a^2 + a - 6 > 0 \end{cases}$$

因此, a 的取值范围为 $(2, +\infty)$

答案是 D.

例2.4 已知 $-2x^2 + 5x + c \geq 0$ 的解为 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$, 则 $c =$ ()

(A) $\frac{1}{3}$

(B) 3

(C) $-\frac{1}{3}$

(D) -3

(E) $\frac{1}{2}$

解 由已知 $x = -\frac{1}{2}, x = 3$ 是方程 $-2x^2 + 5x + c = 0$ 的两个根,

将 $x = 3$ 代入方程, $-2 \times 3^2 + 5 \times 3 + c = 0$, 得 $c = 3$.

答案是 B.

例 2.5 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\lg(3 + 2x - x^2)}$ 的定义域为

()

(A) $[2, 3]$

(B) $(2, 3)$

(C) $[2, 1 + \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$

(D) $(2, 1 + \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$

(E) 以上结论均不正确

解 由 $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 3 + 2x - x^2 > 0 \\ 3 + 2x - x^2 \neq 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2 \\ -1 < x < 3 \\ x \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

即 $2 \leq x < 3$ 且 $x \neq 1 + \sqrt{3}$, 定义域为 $[2, 1 + \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3)$.

答案为 C.

例 2.6 (条件充分性判断) $3 - 2x^2 > x$ 成立.

(1) $-2 < x < 0$

(2) $1 < x < 2$

解 原不等式为 $2x^2 + x - 3 < 0$, 方程 $2x^2 + x - 3 = 0$ 的根为 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$,

即 $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 1$.

抛物线如图 4-12 所示.

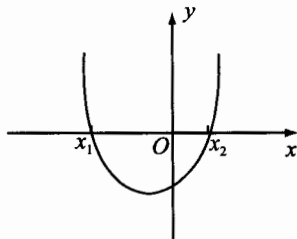


图 4-12

从而 $3 - 2x^2 > x$ 的解集为 $-\frac{3}{2} < x < 1$.

条件(1)和条件(2)都不充分, 联合起来也不充分.

答案是 E.

例 2.7 (条件充分性判断) 实数 k 的取值范围是 $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$.

(1) 关于 x 的方程 $kx + 2 = 5x + k$ 的根是非负实数

(2) 抛物线 $y = x^2 - 2kx + (7k - 10)$ 位于 x 轴上方

解 由条件(1), $(k - 5)x = k - 2, x = \frac{k - 2}{k - 5} \geq 0$

解得 $k > 5$ 或 $k \leq 2$

因此条件(1)不充分.

由条件(2), $\Delta = (-2k)^2 - 4(7k - 10) < 0$ 成立,

整理得 $k^2 - 7k + 10 < 0, 2 < k < 5.$

条件(2)也不充分.

答案是 E.

例 2.8 (条件充分性判断) 自然数 n 满足 $4n - n^2 - 3 > 0$.

(1) 自然数 n 加上 2 后是一个完全平方数

(2) 自然数 n 减去 1 后是一个完全平方数

解 不等式 $4n - n^2 - 3 > 0$ 的解集为 $1 < n < 3$, 若 n 为自然数, 则必须 $n = 2$.

由条件(1), 令 $n = 23$, 则 $23 + 2 = 5^2$, 但 $n \neq 2$

由条件(2), 令 $n = 17$, 则 $17 - 1 = 4^2$, 但 $n \neq 2$

因此, 条件(1)和条件(2)单独都不充分,

联合条件(1)和条件(2),
$$\begin{cases} n + 2 = k_1^2 \\ n - 1 = k_2^2 \end{cases}$$

这里 k_1, k_2 都是正整数, 且显然有 $k_1 > k_2$,

从而 $k_1^2 - k_2^2 = (k_1 + k_2)(k_1 - k_2) = 3$,

则
$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 1 \\ k_1 + k_2 = 3 \end{cases}$$

得 $k_1 = 2, n = 2$

答案是 C.

第三节 练习

一 问题求解

1. 方程 $kx^2 - 3x + 2 = 0$ 有两个相等的实数根, 则必有 ()

(A) $k = 0$

(B) $k \geq 0$

(C) $k = \frac{9}{8}$

$$(D) k = -\frac{9}{8} \quad (E) k < 0$$

2. 关于 x 的方程 $mx^2 - 2(3m-1)x + 9m-1 = 0$ 有两个实数根, 则 m 的取值范围是

()

$$(A) m \leq \frac{1}{5} \quad (B) m \leq \frac{1}{5} \text{ 且 } m \neq 0 \quad (C) 0 < m < \frac{1}{5} \text{ 或 } m < 0$$

$$(D) m \geq \frac{1}{5} \quad (E) 0 < m < 5$$

3. 如果方程 $2x^2 - mx - 4 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 且 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$, 则实数 $m =$

()

$$(A) -8 \quad (B) 8 \quad (C) 4$$

$$(D) -4 \quad (E) 6$$

4. 方程 $x^2 - 2\sqrt{5}x - 3 = 0$ 的解的情况是

()

(A) 没有实根 (B) 有两个正根 (C) 有两个负根

(D) 有两异号根, 且正根的绝对值大

(E) 有两异号根, 且负根的绝对值大

5. 不等式 $\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$ 的解集为

()

$$(A) x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 3$$

$$(B) -2 < x < 0 \text{ 或 } x > 3$$

$$(C) x < -2 \text{ 或 } x > 0$$

$$(D) x < 0 \text{ 或 } x > 3$$

(E) 以上结论均不正确

6. 若 $ax^2 - x + 3 > 0$ 的解集为 $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, 则 $a =$

()

$$(A) 1 \quad (B) -1 \quad (C) 0$$

$$(D) 2 \quad (E) -2$$

7. 若方程 $2x^2 - (a+1)x + (a+3) = 0$ 的两根之差为 1, 则 a 的值是

()

$$(A) 9 \text{ 和 } -3$$

$$(B) 9 \text{ 和 } 3$$

$$(C) -9 \text{ 和 } 3$$

$$(D) -9 \text{ 和 } -3$$

$$(E) 9 \text{ 和 } -2$$

8. 当 $m < -1$ 时, 方程 $(m^3+1)x^2 + (m^2+1)x = m+1$ 的根的情况是

()

(A) 两负根

(B) 两异号根且负根绝对值大

(C) 无实根

(D) 两异号根且正根绝对值大

(E) 以上结论均不正确

9. 若方程 $2x^2 + 3x + 5m = 0$ 的一个根大于 1, 另一个根小于 1, 则 m 的取值范围是

()

$$(A) m < -1$$

$$(B) |m| < 1$$

$$(C) 0 < m < 1$$

$$(D) m \leq -1$$

(E) 以上结论均不正确

10. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2(m-2)x + m^2 + 4 = 0$ 有两个实根, 且这两个根的平方和比两根的积大 21, 则 $m =$ ()

(A) 17 (B) -1 (C) 17 和 -1

(D) 1 和 -17 (E) -17

11. 函数 $f(x) = \frac{\lg(2x^2 + 5x - 12)}{\sqrt{x^2 - 3}}$ 的定义域是 ()

(A) $(-\infty, 4] \cup [5, +\infty)$

(B) $(-\infty, 4)$

(C) $(-\infty, -4) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

(D) $(-\infty, -3) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

(E) $(\sqrt{3}, +\infty)$

二 条件充分性判断

12. 不等式 $(x-2)(x+2) > 1$ 成立.

(1) $x < 2$

(2) $x > 3$

13. 不等式 $|x+2| \geq |x|$ 成立.

(1) $x \geq -1$

(2) $x \geq 1$

14. 方程 $4x^2 - 4(m-1)x + m^2 = 7$ 的两根之差的绝对值大于 2.

(1) $1 < m < 2$

(2) $-5 < m < -2$

15. $|9x^2 - 6x| > 1$

(1) $x \in \left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}, \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$

(2) $x \in \left(0, \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)$

16. $|x-2| - |2x+1| > 1$

(1) $x \in [-2, -1]$

(2) $x \in [-1, 0]$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. C.

解析 由已知 $k \neq 0$ 且 $(-3)^2 - 8k = 0$, 解得 $k = \frac{9}{8}$.

2. B.

解析 由已知 $m \neq 0$ 且 $[-2(3m-1)]^2 - 4m(9m-1) \geq 0$,

整理得 $m \neq 0$ 且 $m \leq \frac{1}{5}$.

3. A.

解析 由韦达定理
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m}{2} \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$$

得
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{m}{4} = 2$$

因此 $m = -8$.

4. D.

解析 由 $\Delta = (-2\sqrt{5})^2 + 12 > 0$, 知方程有两个不相等的实根 x_1, x_2 .

根据韦达定理
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sqrt{5} \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

可知 x_1, x_2 是两异号实根, 且正根的绝对值大.

5. A.

解析 不等式等价于
$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ x(x+2) < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-3 < 0 \\ x(x+2) > 0 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 3 \\ x < -2 \text{ 或 } x > 0 \end{cases}$$

即 $x < -2$ 或 $0 < x < 3$.

6. E.

解析 由已知 $x = -\frac{3}{2}, x = 1$ 是方程 $ax^2 - x + 3 = 0$ 的两根,

将 $x = 1$ 代入方程, $a \times 1^2 - 1 + 3 = 0, a = -2$

7. A.

解析 设 x_1, x_2 为方程两根, 不妨设 $x_1 > x_2$,

由韦达定理
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{a+1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{a+3}{2} \end{cases}$$

从而 $x_1 - x_2 = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4} - 2(a+3)}$

由已知 $\frac{(a+1)^2}{4} - 2(a+3) = 1$, 解得 $a = 9$ 或 $a = -3$.

8. D.

解析 当 $m < -1$ 时, $\Delta = (m^2 + 1)^2 + 4(m^3 + 1)(m + 1) > 0$, 因此方程有两个不等的实数

根. 再由韦达定理, 设 x_1, x_2 为方程两根, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m^2 + 1}{m^3 + 1} \\ x_1 x_2 = -\frac{m + 1}{m^3 + 1} \end{cases}$$

当 $m < -1$ 时, $x_1 + x_2 > 0$ 且 $x_1 x_2 < 0$, 即 x_1, x_2 为两异号根且正根绝对值大.

9. A.

解析 $y = 2x^2 + 3x + 5m$ 为开口向上的抛物线, 由已知, 抛物线图形如图 4-13 所示.

即 $2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 5m < 0$ ($y = 2x^2 + 3x + 5m$ 在 $x = 1$ 时函数值小于零), 因此 $m < -1$.

10. B.

解析 由已知方程有两个实根 x_1, x_2 , 因此

$$\Delta = 2^2 \times (m - 2)^2 - 4(m^2 + 4) \geq 0, \text{ 解得 } m \leq 0.$$

再由韦达定理及已知条件 $(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 = 21$,

$$\text{得 } (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 21, 4(m - 2)^2 - 3(m^2 + 4) = 21$$

解得 $m = 17, m = -1$, 从而 $m = -1$.

11. C.

解析 $f(x)$ 的定义域为不等式组 $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 12 > 0 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases}$ 的解,

$$\text{可得 } \begin{cases} (-\infty, -4) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \\ (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \end{cases}$$

因此, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -4) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

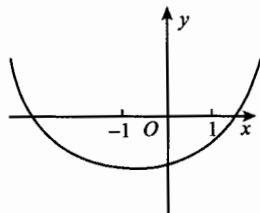


图 4-13

二 条件充分性判断

12. B.

解析 题干中不等式可化为 $x^2 - 5 > 0$, 其解集是 $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$.

因为 $x < 2$ 不是其解集的子集, 因此条件(1)不充分, 而 $x > 3$ 是其解集的子集, 即条件(2)是充分的.

13. D.

解析 题干不等式等价于 $(x + 2)^2 \geq x^2$, 从而得其解集为 $x \geq -1$.

由于 $x \geq -1$ 及 $x \geq 1$ 都是其解集的子集, 从而条件(1)和条件(2)都是充分的.

14. D.

解析 设 x_1, x_2 是题干中方程的两个根, 由韦达定理及题干条件

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(m-1)^2 - (m^2-7)} > 2$$

$$\text{即 } -2m + 8 > 4, m < 2$$

由于 $1 < m < 2$ 及 $-5 < m < -2$ 都是 $m < 2$ 的子集, 从而条件(1)和条件(2)都是充分的.

15. E.

解析 题干中不等式等价于 $9x^2 - 6x > 1$ 或 $9x^2 - 6x < -1$,

整理得 $9x^2 - 6x - 1 > 0$ 或 $9x^2 - 6x + 1 < 0$, 解得解集为 $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}, +\infty\right)$.

条件(1)及条件(2)中 x 的取值范围都不是解集的子集, 从而条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2)也不充分.

16. C.

$$\text{解析 } |x-2| - |2x+1| = \begin{cases} x+3, & x < -\frac{1}{2} \\ -3x+1, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ -x-3, & x > 2 \end{cases}$$

其图形如图 4-14 所示.

即 $|x-2| - |2x+1| > 1$ 的解集为 $-2 < x < 0$.

条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2)得 $x = -1 \in (-2, 0)$, 即答案为 C.

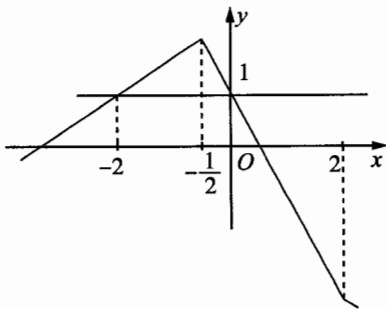
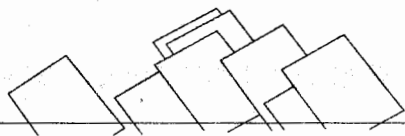


图 4-14

第五章

数 列



第一节 基 本 概 念

定义 1.1 依一定次序排成的一列数称为数列, 数列中的每一个数称为数列的项, 第 n 个数称为第 n 项(第一项也称为首项), 通常记为 a_n . 若数列的项数是有限的, 则称它为有穷数列, 否则称为无穷数列. 数列的一般表达形式为:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \text{ 简记为 } \{a_n\}.$$

如果数列中的第 n 项 a_n 与 n 的关系可以用一个公式来表示, 则称这个公式为通项公式. 知道了数列的通项公式, 就可以求出这个数列中的任意一项.

例如, 若数列为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, 则通项公式为 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

若通项公式是

$$a_n = 2n + 1, n = 1, 2, \dots, 7$$

则数列 $\{a_n\}$ 是 $3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$.

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和记为 S_n , 即 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

例 1.1 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 2n + 5$, 则 $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} =$ _____.

解 $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = S_{n+3} - S_n = (n+3)^2 + 2(n+3) + 5 - n^2 - 2n - 5 = 6n + 15$

例 1.2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2 + 3^{n-1}$, 求通项公式, 并判断 29 和 162 是否是该数列中的项.

解 当 $n = 1$ 时,

$$a_1 = S_1 = 2 + 3^{1-1} = 3$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2 + 3^{n-1}) - (2 + 3^{n-2}) = 3^{n-1} - 3^{n-2} = 2 \times 3^{n-2}$$

将 $n = 1$ 代入得 $a_1 = 2 \times 3^{-1}$, 与 $a_1 = 3$ 不相等, 从而通项公式为:

$$a_n = \begin{cases} 3, & n=1 \\ 2 \times 3^{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

设 $a_n = 29$, 则 $2 \times 3^{n-2} = 29$, $3^{n-2} = 29/2$, n 不是自然数, 因此 29 不是数列中的项.

设 $a_n = 162$, 则 $2 \times 3^{n-2} = 162$, $3^{n-2} = 81 = 3^4$, 所以 $n=6$, 故 $a_6 = 162$.

例 1.3 (条件充分性判断) $a_1 = \frac{1}{3}$.

(1) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 2$

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 3a_2$

解 条件(1)和(2)单独都不充分. 联合条件(1)和条件(2),

则有 $2 = 6a_1$, $a_1 = \frac{1}{3}$

故答案是 C

第二节 等 差 数 列

定义 2.1 如果数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 d , 使 $a_{n+1} - a_n = d (n=1, 2, \dots)$, 就称这个数列是等差数列, d 称为公差. 等差数列的一般表达式为: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$

1. 常数列 c, c, \dots, c, \dots 是公差 $d=0$ 的等差数列.

2. 等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

3. 等差数列的前 n 项和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

4. a, b, c 成等差数列 $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$.

5. 若 S_n 是等差数列的前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍成等差数列.

6. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 如果 $m+n=s+t$, 则有 $a_m + a_n = a_s + a_t$.

例 2.1 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 4n^2 + n$, 则下面正确的是 ()

(A) $\{a_n\}$ 是等差数列

(B) $a_n = 2$

(C) $a_n = 2n + 3$

(D) $S_{10} = 411$

(E) 以上均不正确

解 $a_n = S_n - S_{n-1} = (4n^2 + n) - [4(n-1)^2 + (n-1)] = 8n - 3 (n \geq 2)$

且 $a_1 = S_1 = 4 + 1 = 5$ 也满足 $a_n = 8n - 3$ 的通项公式,

$$a_{n+1} - a_n = 8(n+1) - 3 - (8n - 3) = 8$$

为常数, 因此, $\{a_n\}$ 是公差 $d=8$ 的等差数列.

答案是 A.

例 2.2 设 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(1) 若 $a_2 + a_3 + a_{10} + a_{11} = 48$, 求 $a_6 + a_7$ 和 S_{12} .

(2) 若 $S_5 = 30, S_{10} = 120$, 求 S_{15} .

解 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d .

(1) 由 $a_2 + a_3 + a_{10} + a_{11} = 48$,

$$a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 9d + a_1 + 10d = 48, 2a_1 + 11d = 24$$

因此 $a_6 + a_7 = a_1 + 5d + a_1 + 6d = 2a_1 + 11d = 24$

$$S_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2} = 6(a_1 + a_1 + 11d) = 6 \times (2a_1 + 11d) = 6 \times 24 = 144$$

(2) $S_5 = 30, S_{10} - S_5 = 120 - 30 = 90, S_{15} - S_{10} = S_{15} - 120$, 也是等差数列,

$$\text{即 } 90 - 30 = (S_{15} - 120) - 90$$

$$\text{因此 } S_{15} = 270$$

例 2.3 在 -12 和 6 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成和为 -21 的等差数列, 则 n 为 ()

(A) 4 (B) 5 (C) 6

(D) 7 (E) 8

解 由已知 -12, $a_1, a_2, \dots, a_n, 6$ 成等差数列

$$\text{且 } S_{n+2} = \frac{(n+2)(-12+6)}{2} = -21$$

$$\text{因此 } -6(n+2) = -42, \quad n=5$$

答案是 B.

例 2.4 如果数列 $x, a_1, a_2, \dots, a_m, y$ 和数列 $x, b_1, b_2, \dots, b_n, y$ 都是等差数列, 则 $(a_2 - a_1)$ 与 $(b_2 - b_1)$ 的比值为 ()

(A) $\frac{n}{2m}$ (B) $\frac{n+1}{2m}$ (C) $\frac{n+1}{2(m+1)}$

(D) $\frac{n+1}{m+1}$ (E) 以上结论均不正确

解 设等差数列 $x, a_1, a_2, \dots, a_m, y$ 的公差是 d_1 , 等差数列 $x, b_1, b_2, \dots, b_n, y$ 的公差是 d_2 ,

$$\text{则 } \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} = \frac{d_1}{2d_2},$$

$$\text{由 } y = x + (m+2-1)d_1, \quad y = x + (n+2-1)d_2$$

$$\text{可得 } (m+1)d_1 = (n+1)d_2$$

$$\text{因此 } \frac{d_1}{d_2} = \frac{n+1}{m+1}, \quad \frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} = \frac{n+1}{2(m+1)}$$

答案是 C.

例 2.5 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = p$, $a_{n-9} + a_{n-8} + \cdots + a_n = q$, 则该数列的前 n 项和 S_n 等于 ()

(A) $\frac{n}{12}(p+q)$ (B) $\frac{n}{18}(p+q)$ (C) $\frac{n}{20}(p+q)$

(D) $\frac{n}{24}(p+q)$ (E) $\frac{3n}{20}(p+q)$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) + (a_{n-9} + a_{n-8} + \cdots + a_n) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_9 + a_{n-8}) + (a_{10} + a_{n-9}) \\ &= 10(a_1 + a_n) \\ &= p + q \end{aligned}$$

即

$$a_1 + a_n = \frac{p+q}{10}$$

因此

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{20}(p+q)$$

答案是 C.

例 2.6 (条件充分性判断) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项和 $S_{13} = 52$.

(1) $a_4 + a_{10} = 8$ (2) $a_2 + 2a_8 - a_4 = 8$

解 设首项为 a_1 , 公差为 d , 则题干要求

$$\frac{13(a_1 + a_{13})}{2} = 52, \text{ 即 } 2a_1 + 12d = 8$$

由条件(1), $a_1 + 3d + a_1 + 9d = 8$, 条件(1)是充分的

由条件(2), $a_1 + d + 2(a_1 + 7d) - (a_1 + 3d) = 8$

从而 $2a_1 + 12d = 8$, 条件(2)也充分

答案是 D.

例 2.7 (条件充分性判断) 等差数列 $\{a_n\}$ 前 11 项和 $S_{11} = 22$.

(1) $a_6 = 2$ (2) $a_4 + a_8 = 4$

$$\text{解} \quad S_{11} = \frac{11 \times (a_1 + a_{11})}{2}, \text{ 要使 } S_{11} = 22, \text{ 即要求 } a_1 + a_{11} = 4, 2a_1 + 10d = 4.$$

由条件(1), $a_1 + 5d = 2$, 因此 $2a_1 + 10d = 4$

即条件(1)是充分的.

由条件(2), $a_4 + a_8 = a_1 + 3d + a_1 + 7d = 2a_1 + 10d = 4$

即条件(2)也充分.

答案是 D.

例 2.3 (条件充分性判断) 在等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中, $\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{4}{3}$.

(1) $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 前 n 项的和之比为 $(7n+1):(4n+27)$

(2) $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 前 21 项的和之比为 5:3

解 设 S_n, T_n 分别表示等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 前 n 项的和.

由条件(1),
$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+27}$$

$$\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{\frac{1}{2}(a_{11} + a_{11})}{\frac{1}{2}(b_{11} + b_{11})} = \frac{\frac{1}{2}(a_1 + a_{21})}{\frac{1}{2}(b_1 + b_{21})} = \frac{\frac{21}{2}(a_1 + a_{21})}{\frac{21}{2}(b_1 + b_{21})} = \frac{S_{21}}{T_{21}} = \frac{7 \times 21 + 1}{4 \times 21 + 27} = \frac{148}{111} = \frac{4}{3}$$

因此条件(1)是充分的.

由条件(2),
$$\frac{S_{21}}{T_{21}} = \frac{5}{3},$$

可推知
$$\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{S_{21}}{T_{21}} = \frac{5}{3} \neq \frac{4}{3}$$

因此条件(2)不充分.

答案是 A.

第三节 等 比 数 列

定义 3.1 如果数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 $q \neq 0$, 使 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (n=1, 2, \dots)$, 则称 $\{a_n\}$ 是等比

数列, q 称为数列的公比. 等比数列的一般表达式为: $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}, \dots$

1. 常数列 $c, c, \dots, c, \dots (c \neq 0)$ 是公比 $q=1$ 的等比数列.

2. 等比数列的通项公式 $a_n = a_1q^{n-1}$.

3. 等比数列的前 n 项和 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

4. 若 a, b, c 成等比数列, 则 $b^2 = ac$.

5. $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 也是等比数列.

6. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 如果 $m+n=s+t$, 则有 $a_m a_n = a_s a_t$.

例 3.1 已知等比数列 $a, -\frac{4}{3}, b, -\frac{16}{27}, \frac{32}{81}, \dots$, 则 $a+b =$ ()

(A) $\frac{26}{9}$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) $-\frac{16}{9}$

(D) $-\frac{7}{3}$

(E) 2

解 由已知 公比 $q = \frac{32}{81} \div \left(-\frac{16}{27}\right) = -\frac{2}{3}$

从而 $a \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}, b = \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}$

得 $a = 2, b = \frac{8}{9}, a + b = \frac{26}{9}$

答案是 A.

例 3.2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3 + 2^n$, 则这个数列是

()

(A) 等差数列

(B) 等比数列

(C) 既非等差数列, 又非等比数列

(D) 既是等差数列, 又是等比数列

(E) 无法判定

解 由已知 $a_1 = S_1 = 3 + 2 = 5$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (3 + 2^n) - (3 + 2^{n-1}) = 2^{n-1}$

将 $n = 1$ 代入 $a_1 = 2^{1-1} = 1$, 与 $a_1 = S_1 = 5$ 不相等, 从而通项公式为 $a_n = \begin{cases} 5, & n = 1 \\ 2^{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$

这个数列既非等差数列, 也非等比数列.

答案是 C.

例 3.3 已知数列 $-1, a_1, a_2, -4$ 成等差数列, $-1, b_1, b_2, b_3, -4$ 成等比数列, 则 $\frac{a_2 - a_1}{b_2} =$

()

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{3}$

解 由 $-1, a_1, a_2, -4$ 成等差数列, 则 $-4 = (-1) + 3d$

得公差

$d = -1$

由 $-1, b_1, b_2, b_3, -4$ 成等比数列,

得

$-4 = (-1)q^4$

即公比

$q^2 = 2, b_2 = (-1)q^2 = -2$

因此

$\frac{a_2 - a_1}{b_2} = \frac{d}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

答案是 A.

例 3.4 三个不相同的非零实数 a, b, c 成等差数列, 又 a, c, b 恰成等比数列, 则 $\frac{a}{b} =$

()

- (A) 2 (B) 4 (C) -4
(D) -2 (E) 3

解 a, b, c 成等差数列, 则 $b = \frac{a+c}{2}$

a, c, b 成等比数列, 则有 $ab = c^2$

由 $c = 2b - a$

得 $(2b - a)^2 = ab$

整理可知 $a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

即 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 4 = 0$

解得 $\frac{a}{b} = 4$ 或 $\frac{a}{b} = 1$

因为 $a \neq b$, 所以 $\frac{a}{b} = 4$.

答案是 B.

例 3.5 7 个数排成一排, 奇数项成等差数列, 偶数项成等比数列, 且奇数项的和与偶数项的积的差为 42, 首项、末项、中间项之和为 27, 则中间项为 ()

- (A) -2 (B) -1 (C) 0
(D) 1 (E) 2

解 由已知, 可设这 7 个数为

$$a_1, a_2, a_1 + d, a_2q, a_1 + 2d, a_2q^2, a_1 + 3d$$

满足
$$\begin{cases} (a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d) - a_2(a_2q)(a_2q^2) = 42 \\ a_1 + a_1 + 3d + a_2q = 27 \end{cases}$$

整理得
$$\begin{cases} 4a_1 + 6d - (a_2q)^3 = 42 \\ 2a_1 + 3d + a_2q = 27 \end{cases}$$

消去 a_1, d 得 $(a_2q)^3 + 2(a_2q) - 12 = 0$

解得 $a_2q = 2$

答案是 E.

例 3.6 (条件充分性判断) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 = 10$, 则 a_4 的值一定是 1.

(1) $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_4 + a_6 = 2$

(2) $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_4 + a_6 = \frac{5}{4}$

解 由条件(1)

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 10 \\ a_4 + a_6 = 2 \end{cases}$$

得

$$\text{公差 } d = -\frac{4}{3}, \quad a_1 = \frac{19}{3}$$

从而

$$a_4 = \frac{19}{3} + 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{3} \neq 1$$

即条件(1)不充分.

由条件(2)

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 10 \\ a_4 + a_6 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

设公比为 q , 则

$$\begin{cases} a_1(1+q^2) = 10 \\ a_1(1+q^2)q^3 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

得

$$q = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 8$$

所以

$$a_4 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$$

条件(2)充分.

答案是 B.

例 3.7 (条件充分性判断) 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_{4n} =$

30.

$$(1) S_n = 2$$

$$(2) S_{3n} = 14$$

解 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2),

由 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, S_{4n} - S_{3n}$ 成等比数列,

得

$$(S_{2n} - S_n)^2 = S_n(S_{3n} - S_{2n})$$

因此

$$(S_{2n} - 2)^2 = 2(14 - S_{2n})$$

解得

$$S_{2n} = 6.$$

从而

$$S_n = 2, \quad S_{2n} - S_n = 4, \quad S_{3n} - S_{2n} = 8$$

则有

$$S_{4n} - S_{3n} = 16$$

即

$$S_{4n} = 16 + 14 = 30$$

答案是 C.

例 3.8 (条件充分性判断) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 使 $S_n > 10^5$ 的最小的 n 值为 8.

$$(1) \text{ 首项 } a_1 = 4$$

$$(2) \text{ 公比 } q = 5$$

解 答案只能为 C 或 E

联合条件(1)和条件(2), $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{4(1-5^n)}{-4} = 5^n - 1 > 10^5$, n 的最小值为 8.

答案是 C.

第四节 练习

一 问题求解

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 - 4n$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ ()

- (A) $3n - 4$ (B) $4n - 5$ (C) $5n - 6$
(D) $6n - 7$ (E) 以上答案均不正确

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_3 + a_6 + a_9 = 27$, 则前 9 项的和 $S_9 =$ ()

- (A) 66 (B) 87 (C) 99
(D) 271 (E) 324

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_m = n$, $a_n = m$ ($m \neq n$), 则 $a_{m+n} =$ ()

- (A) $n - m$ (B) $m - n$ (C) $m + n$
(D) 0 (E) mn

4. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列, 已知 $a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$, 则 $a_3 + a_5 =$ ()

- (A) -5 (B) -4 (C) -3
(D) 3 (E) 4

5. S_n 是公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和, 且 $S_n \neq 0$, $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 是 ()

- (A) 公比为 nq 的等比数列 (B) 公比为 q^n 的等比数列
(C) 公比为 q^{-n} 的等比数列 (D) 公比为 q 的等比数列
(E) 不是等比数列

6. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_1, 2S_2, 3S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为 ()

- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$
(D) 3 (E) $\frac{1}{3}$

7. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 4n^2 + n - 2$, 则它的通项公式是 ()

- (A) $a_n = 8n - 3$ (B) $a_n = 8n + 5$
(C) $a_n = \begin{cases} 3, & n=1 \\ 8n-3, & n \geq 2 \end{cases}$ (D) $a_n = \begin{cases} 3, & n=1 \\ 8n+5, & n \geq 2 \end{cases}$

(E) 以上答案均不正确

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_2 + a_5 + a_8 = 33$, 则 $a_3 + a_6 + a_9 =$ ()

(A) 30 (B) 27 (C) 24

(D) 21 (E) 20

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $S_n = 36$, $S_{2n} = 54$, 则 S_{3n} 等于 ()

(A) 63 (B) 68 (C) 76

(D) 89 (E) 92

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_7 + a_8 = 21$, 则 S_{14} 等于 ()

(A) 132 (B) 144 (C) 147

(D) 154 (E) 157

二 条件充分性判断

11. $a_1 b_2 = 15$.

(1) $-9, a_1, -1$ 成等差数列

(2) $-9, b_1, b_2, b_3, -1$ 成等比数列

12. 数列 $\{\lg a_n\}$ 是等差数列.

(1) $a_n > 0 (n \in \mathbf{N})$

(2) $\{a_n\}$ 成等比数列

13. 等式 $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ 成立.

(1) a, b, c 互不相等, 且它们的倒数成等差数列

(2) a, b, c 互不相等, 且 $a:b = 1:\frac{2n}{m+n}, b:c = \frac{2m}{m+n}:1$

14. $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} = 10$ 成立.

(1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 a_6 = 9$

(2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5^2 a_6^2 = 81$

15. 数列 a, b, c 是等差数列, 不是等比数列.

(1) a, b, c 满足关系式 $2^a = 3, 2^b = 6, 2^c = 12$

(2) $a = b = c$

第五节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. D.

解析 $a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 4 \times 1 = -1$,

$n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 4n - [3(n-1)^2 - 4(n-1)] = 6n - 7$

将 $n=1$ 代入 $a_n=6n-7$, 得 $a_1=6 \times 1 - 7 = -1$, 与 $a_1 = -1$ 相符.

则通项公式 $a_n=6n-7$.

2. C.

解析 设首项为 a_1 , 公差为 d , 由已知条件得

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 6d = 39 \\ a_1 + 2d + a_1 + 5d + a_1 + 8d = 27 \end{cases}$$

整理解得 $d = -2, a_1 = 19, S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} = 9(19 - 8) = 99$.

3. D.

解析 设首项为 a_1 , 公差为 d , 由已知

$$\begin{cases} a_1 + (m-1)d = n \\ a_1 + (n-1)d = m \end{cases}$$

解得 $d = -1, a_1 = n + m - 1$, 因此

$$a_{m+n} = a_1 + (m+n-1)d = n + m - 1 + (m+n-1)(-1) = 0$$

4. A.

解析 $a_2 \cdot a_4 = a_3^2, a_4 \cdot a_6 = a_5^2$,

则原式为 $(a_3 + a_5)^2 = 25$

$a_3 + a_5 = \pm 5$ (由于本题为单选题, 答案中只有 -5), 从而 $a_3 + a_5 = -5$.

5. B.

解析 设首项为 a_1 , 公比为 q , 分两种情况

(1) $q=1$, 则 $S_n = na_1, S_{2n} - S_n = na_1, S_{3n} - S_{2n} = na_1$

从而 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 是公比为 1 的等比数列.

(2) $q \neq 1$, 则

$$\frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = \frac{\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}} = \frac{(1-q^{2n}) - (1-q^n)}{1-q^n} = \frac{(1-q^n)(1+q^n) - (1-q^n)}{1-q^n} = q^n$$

$$\text{同理 } \frac{S_{3n} - S_{2n}}{S_{2n} - S_n} = \frac{\frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} - \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}} = \frac{(1-q^{3n}) - (1-q^{2n})}{(1-q^{2n}) - (1-q^n)} = \frac{(1-q^n)(1+q^n+q^{2n}) - (1-q^n)}{(1-q^n)q^n} = q^n$$

综合(1)和(2), 可知 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 是公比为 q^n 的等比数列.

6. E.

解析 设首项为 a_1 , 公比为 q ,

由已知条件 $2S_2 = \frac{S_1 + 3S_3}{2}$,

即 $2(a_1 + a_1q) = \frac{a_1 + 3(a_1 + a_1q + a_1q^2)}{2}$

整理得 $4 = 3 + 3q$,

即

$$q = \frac{1}{3}.$$

7. C.

解析 由已知 $a_1 = S_1 = 4 \times 1^2 + 1 - 2 = 3$,当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n^2 + n - 2 - [4(n-1)^2 + (n-1) - 2] = 8n - 3$ 将 $n=1$ 代入 $a_n = 8n - 3$ 与 $a_1 = 3$ 不符, 从而其通项为

$$a_n = \begin{cases} 3, & n=1 \\ 8n-3, & n \geq 2 \end{cases}$$

8. B.

解析 设首项为 a_1 , 公差为 d ,

由已知条件

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 6d = 39 \\ a_1 + d + a_1 + 4d + a_1 + 7d = 33 \end{cases}$$

解得

$$d = -2, a_1 = 19,$$

从而

$$a_3 + a_6 + a_9 = a_1 + 2d + a_1 + 5d + a_1 + 8d = 3a_1 + 15d = 27$$

9. A.

解析 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 也是等比数列.从而 $(S_{2n} - S_n)^2 = S_n(S_{3n} - S_{2n})$,即 $(54 - 36)^2 = 36(S_{3n} - 54)$, 得 $S_{3n} = 63$.

10. C.

解析 设首项为 a_1 , 公差为 d ,

由已知

$$a_1 + 6d + a_1 + 7d = 21,$$

即

$$2a_1 + 13d = 21$$

从而

$$S_{14} = \frac{14(a_1 + a_{14})}{2} = 7(a_1 + a_1 + 13d) = 7 \times 21 = 147$$

二 条件充分性判断

11. C.

解析 条件(1)与条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2),

$$a_1 = \frac{-9 + (-1)}{2} = -5, -1 = (-9)q^4 (q \text{ 为条件(2)中的公比})$$

得 $q^2 = \frac{1}{3}, b_2 = (-9)q^2 = -3$, 因此 $a_1 b_2 = 15$ 成立.

12. C.

解析 条件(1) $a_n > 0$ 仅是为了保证题干中 $\lg a_n$ 是有意义的, 故此题答案只可能选 C 或 E.

联合条件(1)和条件(2),

$$\lg a_{n+1} - \lg a_n = \lg \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lg q \text{ 为常数 } (q \text{ 为条件(2)中的公比}),$$

从而知 $\{\lg a_n\}$ 为等差数列.

13. D.

解析 题干要求推出 $(a-b)c = (b-c)a$, 即 $2ac = ab + bc$.

由条件(1), $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等差数列, 即 $\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2}$,

整理即得 $2ac = ab + bc$, 因此条件(1)是充分的.

由条件(2), $a = \frac{m+n}{2n}b, c = \frac{m+n}{2m}b$,

从而 $2ac = \frac{(m+n)^2}{2nm}b^2, ab + bc = \frac{m+n}{2n}b^2 + \frac{m+n}{2m}b^2 = \frac{(m+n)^2}{2nm}b^2$,

即条件(2)也是充分的.

14. E.

解析 取等比数列 $a_n = -3 (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 a_n 满足条件(1)和条件(2), 但题干无意义, 从而答案只能选 E.

15. A.

解析 由条件(1), $a = \log_2 3, b = \log_2 6, c = \log_2 12$,

从而 $a + c = \log_2 3 + \log_2 12 = \log_2 6^2 = 2\log_2 6 = 2b$,

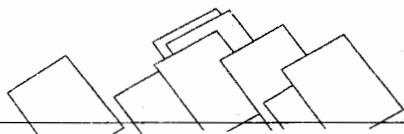
即 $b = \frac{a+c}{2}$, a, b, c 为等差数列, 但 $b^2 \neq ac$.

因此 a, b, c 不是等比数列, 可知条件(1)是充分的.

取 $a = b = c = 1$, 则 $1, 1, 1$ 既是等差数列, 又是等比数列, 因此条件(2)不充分.

第六章

应用题



第一节 比和比例

两个数相除,又叫做这两个数的比, a 和 b 的比($b \neq 0$)记为 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$ 的值叫 a 与 b 的比值.

表示两个比相等的式子叫做比例,记为 $a:b=c:d$.

例1.1 某商品单价上调10%后,再降回原价,问下降的百分比是多少?

解) 设该商品原价为 $a \xrightarrow{\text{上调 } 10\%} 1.1a \xrightarrow{\text{降回原价}} a$

则下降百分比为 $\frac{1.1a - a}{1.1a} = \frac{1}{11} \approx 9\%$

注:在求解有关百分比的习题时,明确所求百分比是哪两个量的比值是十分重要的.

例1.2 一个分数的分子减少25%,而分母增加25%,则新分数比原来分数减少的百分率是 ()

(A)40% (B)45% (C)50%

(D)60% (E)55%

解) 设原分数分子为 $x \xrightarrow{\text{减少 } 25\%} 0.75x$

原分数分母为 $y \xrightarrow{\text{增加 } 25\%} 1.25y$

则新分数比原来分数减少的百分率是

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{0.75x}{1.25y}}{\frac{x}{y}} = 1 - \frac{0.75}{1.25} = \frac{50}{125} = 0.4 = 40\%$$

答案是 A.

例1.3 已知 $y = y_1 - y_2$,且 y_1 与 $\frac{1}{x^2}$ 成反比例, y_2 与 $\frac{1}{x+2}$ 成正比例.当 $x=1$ 时, $y = -\frac{1}{2}$;又

当 $x=0$ 时, $y = -\frac{3}{2}$. 那么 y 可用 x 来表示的式子是 ()

$$(A) y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+2}$$

$$(B) y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{x+2}$$

$$(C) y = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x+2}$$

$$(D) y = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x+2}$$

(E) 以上答案均不正确

解) 由题意

$$y_1 \times \frac{1}{x^2} = k_1, \quad y_2 = k_2 \times \frac{1}{x+2}$$

从而

$$y = y_1 - y_2 = k_1 x^2 - \frac{k_2}{x+2}$$

当 $x=1$ 时, $y = -\frac{1}{2}$; 当 $x=0$ 时, $y = -\frac{3}{2}$

可知

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = k_1 - \frac{k_2}{3} \\ -\frac{3}{2} = -\frac{k_2}{2} \end{cases}$$

即

$$k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = 3$$

因此

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x+2}$$

答案是 B.

例 1.4 (条件充分性判断) 某公司得到一笔贷款共 68 万元, 用于下属三个工厂的设备改造, 结果甲、乙、丙三个工厂按比例分别得到 36 万元、24 万元和 8 万元.

(1) 甲、乙、丙三个工厂按 $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$ 的比例分配贷款

(2) 甲、乙、丙三个工厂按 9:6:2 的比例分配贷款

解) 设甲、乙、丙三个工厂依次分别获得贷款 x, y, z 万元.

由条件(1)

$$x:y:z = \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$$

可设

$$x = \frac{1}{2}t, y = \frac{1}{3}t, z = \frac{1}{9}t, \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}t = 68, t = 72$$

可知

$$x = 36, y = 24, z = 8$$

从而条件(1)充分.

由条件(2)

$$x:y:z = 9:6:2$$

可设

$$x = 9t, y = 6t, z = 2t$$

可知

$$9t + 6t + 2t = 68, t = 4, x = 9t = 36, y = 6t = 24, z = 2t = 8$$

从而条件(2)也充分.

答案是 D.

第二节 行程问题

行程问题中的三大要素为距离、速度、时间,建立这三大要素之间的关系式是解决这类问题的关键.

例2.1 甲、乙两汽车从A、B两地相向而行,甲车速度是乙车速度的 $\frac{11}{9}$.若甲出发1小时后,乙再出发,则经6小时后,甲、乙两车在途中相遇.若甲、乙两车同时出发,经过6小时30分钟,它们未相遇,且相距5千米.则A、B两地距离()千米.

- (A) 565 (B) 655 (C) 675 (D) 765 (E) 856

解 设A、B两地相距 S 千米,乙车速度是 x 千米/小时,则甲车速度为 $\frac{11}{9}x$ 千米/小时.

$$\begin{cases} \left(\frac{11}{9}x\right) \times 7 + x \times 6 = S \\ \left(\frac{11}{9}x + x\right) \times 6 \frac{1}{2} + 5 = S \end{cases}$$

由题意

由此可解得 $x = 45$.

$$\text{则} \quad S = 655, \quad \frac{11}{9}x = 55.$$

即甲车速度为55千米/小时,乙车速度为45千米/小时,A、B两地距离655千米.

答案是B.

例2.2 快、慢两列车的长度分别为160米和120米,它们相向行驶在平行轨道上.若坐在慢车上的人见整列快车驶过的时间是4秒,那么坐在快车上的人见整列慢车驶过的时间是()

- (A) 3秒 (B) 4秒 (C) 5秒
(D) 6秒 (E) 以上结论均不正确

解 设快车速度为 v_1 米/秒,慢车速度为 v_2 米/秒.

由题意, $\frac{160}{v_1 + v_2} = 4$,即 $v_1 + v_2 = 40$,因此, $\frac{120}{v_1 + v_2} = 3$ (秒)为所求时间.

答案是A.

例2.3 在一条公路上,汽车A、B、C分别以80公里/小时、70公里/小时、50公里/小时的速度匀速行驶,汽车A从甲站开向乙站,同时汽车B、汽车C从乙站出发与汽车A相向而行开往甲站,途中汽车A与汽车B相遇2小时后再与汽车C相遇,那么甲、乙两站相距()公里.

- (A) 2010 (B) 2005 (C) 1690
(D) 1950 (E) 1876

解) 设甲、乙两站相距 S 公里, 由题意,

$$\frac{S}{80+70} + 2 = \frac{S}{80+50}$$

解得 $S = 1950$ (公里).

答案是 D

例 2.4 甲、乙两人分别从相距 27 公里的 A 、 B 两地同时出发, 相向而行, 3 小时相遇, 相遇后两人各用原来的速度继续前进, 甲到达 B 地比乙到达 A 地快 1 小时 21 分, 则甲、乙两人的速度分别为() 公里/小时.

- (A) 6, 3 (B) 5, 4 (C) 7, 2
(D) 3, 6 (E) 4, 5

解) 设甲、乙两人的速度分别为 v_1 公里/小时, v_2 公里/小时.

$$\text{由已知 } v_1 + v_2 = 9, \quad \frac{3v_1}{v_2} - \frac{3v_2}{v_1} = 1 \frac{21}{60},$$

代入整理, 得 $v_1^2 + 31v_1 - 180 = 0$,

解得 $v_1 = 5$ (公里/小时),

因此 $v_2 = 9 - 5 = 4$ (公里/小时).

答案是 B

例 2.5 某人乘长途客车中途下车, 客车开走 10 分钟后, 发现将一行李遗忘在客车上, 情急之下, 马上乘出租车前去追赶, 若客车速度为 75 公里/小时, 出租车速度可达 100 公里/小时, 价格为 1.2 元/公里, 那么该乘客想追上他的行李, 要付的出租费至少应为() 元.

- (A) 90 (B) 85 (C) 80
(D) 75 (E) 60

解) 乘客追上他的行李所需时间为 $\frac{75 \times \frac{1}{6}}{100 - 75} = 0.5$ (小时)

所以, 追赶过程中走过的距离为 $100 \times \frac{1}{2} = 50$ (公里)

从而付的出租车费至少为 $50 \times 1.2 = 60$ (元).

答案是 E

例 2.6 (条件充分性判断) 一轮船沿河航行于相距 48 公里的两码头间, 则往返一共需 10 小时 (不计到达码头后停船的时间).

(1) 轮船在静水中的速度是 10 公里/小时

(2)水流的速度是2公里/小时

解) 条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2), 则

轮船顺水流行驶需 $\frac{48}{10+2} = 4$ (小时), 逆水流行驶需 $\frac{48}{10-2} = 6$ (小时),

从而往返共需 $4 + 6 = 10$ (小时).

答案是 C.

第三节 工程问题

工程量、工程速度、工程所用时间是工程问题的三大要素, 同行程问题类似, 解决这类问题就是要建立它们之间的关系式.

例3.1 某工程队原计划用6天时间挖水渠800米, 结果前两天就完成了计划的40%, 照这个进度施工, 若仍施工6天, 可挖水渠()米.

- (A) 860 (B) 960 (C) 980
(D) 1020 (E) 1120

解) 前两天每天挖渠长为 $\frac{800 \times 40\%}{2} = 160$ (米).

施工6天可挖水渠 $160 \times 6 = 960$ (米).

答案是 B.

例3.2 有一项工程, 甲队单独做24天完成, 乙队单独做30天完成. 甲、乙两队共同做8天后, 余下由丙队独做, 又做了6天才完成, 这个工程由丙队独做, 需要()天完成.

- (A) 10 (B) 12 (C) 14
(D) 15 (E) 20

解) 工程量设为1, 则甲每天完成 $\frac{1}{24}$, 乙每天完成 $\frac{1}{30}$.

甲、乙两队共同做8天后, 余工程量 $1 - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{30}\right) \times 8 = \frac{2}{5}$.

设丙每天完成 $\frac{1}{x}$,

则 $\frac{1}{x} \times 6 = \frac{2}{5}$, 即 $x = 15$ (天)

即丙队独做需要15天完成.

答案是 D.

例 3.3 甲、乙两队共同合作,3 天内完成工程的一半,余下的工程由甲队单独做 1 天,再由乙队单独做 6 天后全部完成,则甲、乙两队单独完成工程所需的天数分别为 ()

- (A) 12, 15 (B) 12, 10 (C) 10, 15
(D) 10, 12 (E) 12, 14

解 设工程量为 1, 甲单独做每天完成 $\frac{1}{x}$, 乙单独做每天完成 $\frac{1}{y}$.

由已知
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times 3 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 10, \\ y = 15. \end{cases}$$

答案是 C.

例 3.4 (条件充分性判断) 某项工程,由甲、丙合做 5 天能完成全部工程的 $\frac{2}{3}$.

- (1) 此工程由甲、乙两队合做 6 天完成,如果单独做,甲比乙快 5 天完成
(2) 此工程由乙、丙两队合作 10 天完成,如果单独做,丙比乙慢 15 天完成

解 设甲、乙、丙单独做每天分别完成工程量的 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$. 按题干要求推出 $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{15}$.

由条件(1),
$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times 6 = 1, x + 5 = y$$

解得
$$x = 10, y = 15.$$

由条件(2),
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10} \quad z = y + 15,$$

解得
$$y = 15, z = 30.$$

因此条件(1)和(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2)可知, $x = 10, z = 30$,

从而
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

答案是 C.

例 3.5 (条件充分性判断) 一个蓄水池装有两个水管,一个进水管,一个出水管,则两管齐开,将空水池注满需要 50 小时.

- (1) 单开进水管,20 小时可以将空水池注满
(2) 单开出水管 30 小时,可以将满池水放完

解 条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2),设蓄水池的容量为 1,则进水管的进水速度为 $\frac{1}{20}$,出水管的放水

速度为 $\frac{1}{30}$,

两管齐开放满水池需 $\frac{1}{\frac{1}{20} - \frac{1}{30}} = 60$ (小时).

条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

答案是 E.

第四节 练习

一 问题求解

- 班上 $\frac{2}{5}$ 的女生和 $\frac{1}{2}$ 的男生参加了保险,且班级 120 人中男生是女生的 $\frac{7}{5}$ 倍,那么班级中参加保险的人数约占全班人数的 ()
(A)40% (B)42% (C)44%
(D)46% (E)45%
- 原价 a 元可购 5 件衬衫,现价 a 元可购 8 件衬衫,则该衬衫降价的百分比是 ()
(A)25% (B)37.5% (C)40%
(D)60% (E)45%
- 已知 A 股票上涨的 0.16 元相当于该股票原价的 16%,B 股票上涨的 1.68 元也相当于其原价的 16%,则这两种股票原价相差 ()
(A)8 元 (B)9.5 元 (C)10 元
(D)10.5 元 (E)9 元
- 甲与乙的比是 3:2,丙与乙的比是 2:3,则甲与丙的比是 ()
(A)1:1 (B)3:2 (C)2:3
(D)9:4 (E)8:5
- 某班学生中, $\frac{3}{4}$ 的女生和 $\frac{3}{5}$ 的男生是共青团员,若女生团员人数是男生团员人数的 $\frac{5}{6}$,则该班女生人数与男生人数的比为 ()
(A)5:6 (B)2:3 (C)3:2
(D)4:5 (E)5:4
- 李先生投资 2 年期、3 年期和 5 年期三种国债的投资额的比为 5:3:2.后又以与前次相同的投资总额全部购买 3 年期国债,则李先生两次对 3 年期国债的投资额占两次总投资额的 ()

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{7}{10}$

(C) $\frac{13}{20}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{5}{7}$

7. 一辆汽车从 A 地出发按某一速度行驶,可在预定的时间到达 B 地,但在距 B 地 180 公里处意外受阻 30 分钟,因此,继续行驶时,车速每小时必须增加 5 公里,才能准时到达 B 地,则汽车后来的速度是 ()

(A) 40 公里/小时

(B) 45 公里/小时

(C) 50 公里/小时

(D) 55 公里/小时

(E) 以上答案均不正确

8. 王先生和李先生同时驾车自 A 市到 B 市,两市相距 500 公里. 王先生的车速较李先生快 20 公里/小时,结果王先生早到 1 小时 15 分钟. 王先生的车速是李先生的 ()

(A) 2 倍

(B) $\frac{3}{2}$ 倍(C) $\frac{5}{4}$ 倍(D) $\frac{7}{4}$ 倍(E) $\frac{9}{4}$ 倍

9. A、B 两架飞机同时从相距 1755 公里的两机场起飞匀速相向飞行,经过 45 分钟后在途中到达相同地点. 如果 A 机的速度是 B 机的 $1\frac{1}{4}$ 倍,那么两飞机的速度差是 ()

(A) 250 公里/小时

(B) 260 公里/小时

(C) 270 公里/小时

(D) 280 公里/小时

(E) 285 公里/小时

10. 甲单独做 15 天可以完成某项工作,乙单独做 10 天就可完成. 假设甲先做了 12 天后再由乙接下去做,乙要完成该项工作还需做 ()

(A) $\frac{1}{5}$ 天(B) $\frac{3}{4}$ 天(C) $\frac{4}{5}$ 天

(D) 2 天

(E) $1\frac{2}{5}$ 天

11. 某项工程,若甲队单独做,会比乙队单独做多用 5 天完成. 如果两队同时做,6 天就可全部完成. 则甲队单独做一天可以完成工程量的 ()

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{1}{12}$

(E) 以上答案均不正确

二 条件充分性判断 ①

12. 某班男生人数比女生人数少.

(1) 男生中共青团员的人数是全班人数的 20%

(2) 女生中共青团员的人数是全班人数的 52%

13. 商店换季大甩卖, 某种上衣价格下降 60%.

(1) 原来买 2 件的钱, 现在可以买 5 件

(2) 原来的价格是现在价格的 2.5 倍

14. A 、 B 两地相距 S 公里, 甲、乙两人同时分别从 A 、 B 两地出发. 甲每小时走的距离与乙每小时走的距离之比为 3:2.

(1) 甲、乙相向而行, 两人在途中相遇时, 甲走的距离与乙走的距离之比为 3:2

(2) 甲、乙同向而行, 甲追上乙时, 乙走的距离为 $2S$

15. 车间准备加工 1000 个零件, 每小组完成的定额数可以唯一确定.

(1) 按定额平均分配给 6 个小组, 则不能完成任务

(2) 按比定额多 2 个的标准把加工任务平均分给 6 个小组, 则可超额完成任务

16. 整个队列的人数是 57.

(1) 甲、乙两人排队买票, 甲后面有 20 人, 而乙前面有 30 人

(2) 甲、乙两人排队买票, 甲、乙之间有 5 人

第五节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. D.

解析 设班上女生人数为 x , 男生人数为 y ,

则 $y = \frac{7}{5}x$, 从而

$$\frac{\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y}{x + y} = \frac{\frac{2}{5}x + \frac{7}{10}x}{x + \frac{7}{5}x} = \frac{11}{24} \approx 0.46$$

2. B.

解析 $\frac{\frac{a}{5} - \frac{a}{8}}{\frac{a}{5}} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) \times 5 = 0.375$

3. B.

解析 设 A 股票原价为 x 元, B 股票原价为 y 元,

则由已知

$$\begin{cases} 0.16 = 0.16x \\ 1.68 = 0.16y \end{cases}$$

解得 $x = 1, y = 10.5$, 从而 $y - x = 9.5$ (元).

4. D.

解析 设甲、乙、丙分别为 x, y, z , 则 $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \frac{z}{y} = \frac{2}{3}$

因此 $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

5. B.

解析 设女生人数为 x , 男生人数为 y , 则由已知

$$\frac{3}{4}x = \frac{5}{6} \times \frac{3}{5}y$$

因此

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

6. C.

解析 设 2 年期、3 年期和 5 年期的投资额分别为 x, y, z ,

由已知 $x:y:z = 5:3:2$, 从而可设 $x = 5t, y = 3t, z = 2t$, 则

$$\frac{y + (x + y + z)}{2(x + y + z)} = \frac{3t + 10t}{20t} = \frac{13}{20}$$

7. B.

解析 设 A 地到 B 地距离为 S 公里, 原车速为 v 公里/小时, 则由已知条件

$$\frac{S}{v} = \frac{S - 180}{v} + \frac{1}{2} + \frac{180}{v + 5}$$

整理得

$$\frac{180}{v} = \frac{1}{2} + \frac{180}{v + 5}, v^2 + 5v - 1800 = 0.$$

解得

$$v = 40, v + 5 = 45 \text{ (公里/小时)}.$$

8. C.

解析 设李先生的车速为 v 公里/小时, 则王先生的车速为 $(v + 20)$ 公里/小时, 由已知条件

$$\frac{500}{v} = \frac{500}{v + 20} + 1 \frac{1}{4}$$

整理得

$$v^2 + 20v - 8000 = 0, (v - 80)(v + 100) = 0,$$

得

$$v = 80, v + 20 = 100,$$

从而

$$\frac{v + 20}{v} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}.$$

9. B.

解析 设 B 机的速度是 v 公里/小时, 则 A 机的速度是 $\frac{5}{4}v$, 由已知条件

$$\left(v + \frac{5}{4}v\right) \times \frac{3}{4} = 1755 (\text{公里})$$

解得

$$v = 1040,$$

因此

$$\frac{5}{4}v - v = \frac{1}{4} \times 1040 = 260 (\text{公里/小时}).$$

10. D.

解析 设工程量为1, 则甲每天完成工程量的 $\frac{1}{15}$, 乙每天可完成工程量的 $\frac{1}{10}$, 由已知

$$\frac{1 - \frac{1}{15} \times 12}{\frac{1}{10}} = 2 (\text{天})$$

11. C.

解析 设工程量为1, 乙队每天可完成工程量的 $\frac{1}{x}$, 则甲队每天可完成工程量的 $\frac{1}{x+5}$,

从而由已知

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}\right) \times 6 = 1$$

整理得

$$x^2 - 7x - 30 = 0, (x-10)(x+3) = 0,$$

即

$$x = 10, \frac{1}{x+5} = \frac{1}{15}.$$

二 条件充分性判断 ④

12. B.

解析 设女生人数为 x , 男生人数为 y , 题干要求推出 $y < x$.

由条件(1)不能推出 $y < x$, 即条件(1)不充分,

由条件(2) $x \geq 0.52(x+y)$, 因此 $x \geq \frac{13}{12}y > y$, 即条件(2)是充分的.

13. D.

解析 设原价每件为 a 元, 现在每件为 b 元, 题干要求推出 $\frac{a-b}{a} = 0.6$, 即 $b = 0.4a$.

由条件(1) $2a = 5b$, 可得 $b = 0.4a$, 因此条件(1)是充分的.

由条件(2) $a = 2.5b$, 也可得 $b = 0.4a$, 因此条件(2)也是充分的.

14. D.

解析 设甲的速度为 v_1 公里/小时, 乙的速度为 v_2 公里/小时, 题干要求推出 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$,

由条件(1), 设 t 小时后两人相遇, 则有 $\frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{3}{2}$, 即 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$, 从而条件(1)是充分的.

由条件(2), 当乙走的距离为 $2S$ 时, 甲走的距离应为 $3S$,

从而 $\frac{3S}{2S} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2}$, 也有 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$ 成立, 条件(2)也是充分的.

15. E.

解析 设定额为 n (n 为正整数), 题干要求推出 n 能唯一确定.

由条件(1), $6n < 1000, n < 166.6$ (个), 因此 n 不能唯一确定.

由条件(2), $6(n+2) > 1000$, 解得 $n > 164.7$, 即 n 也不能被唯一确定.

联合条件(1)和条件(2)可得 $164.7 < n < 166.6$, 即 $n = 165$ 或 $n = 166$, 从而 n 也不能唯一确定.

16. E.

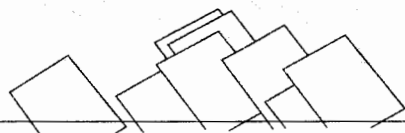
解析 条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2), 若甲在乙前, 则整个队列共有 45 人的; 若甲在乙后, 则整个队列共有 57 人.

所以联合条件(1)和条件(2)不充分.

第七章

平面几何与立体几何



第一节 三角形

一 三角形的性质

1. 任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边.
2. 三个内角和为 180° .
3. 三角形的三条角平分线、三条中线、三条高(或其延长线)都相交于一点.
4. 三角形的面积 $S = \frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$.

二 直角三角形

1. 两条直角边的平方和等于斜边的平方.
2. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.
3. 若一个角为 30° , 则 30° 角所对的边等于斜边的一半.
4. 两直角边的乘积等于斜边与其高的乘积.

三 等腰三角形

1. 等腰三角形两底角相等,两腰上的中线相等,两底角平分线相等.
2. 顶角的平分线与底边的中线、高重合.
3. 等腰三角形是以底边的高所在直线为对称轴的轴对称图形.

四 两个三角形的全等 ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$)

1. 全等三角形的判定方法主要有以下三种:
 - (1) 两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(边角边).

(2) 两角及其夹边对应相等的两个三角形全等(角边角).

(3) 三边对应相等的两个三角形全等(边边边).

2. 全等三角形的性质

两个三角形全等,那么它们的对应边相等,对应角相等,对应的角平分线、中线、高相等,面积也相等.

五 两个三角形的相似($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$) ④

1. 满足下列条件之一的两个三角形相似.

(1) 有两角对应相等.

(2) 三条边对应成比例.

(3) 有一角相等,且夹这角的两边对应成比例.

2. 相似三角形的性质

(1) 对应角相等,对应边成比例.

(2) 对应边上的高与对应边成比例.

(3) 对应边上的中线与对应边成比例.

(4) 对应角的角平分线与对应边成比例.

(5) 面积比等于相似比的平方.

(6) 周长比等于相似比.

例 1.1 $\triangle ABC$ 中,三边长分别是 3, $1-2k$, 8, 则实数 k 的取值范围是 ()

(A) $-5 < k < -2$

(B) $k > -5$

(C) $k < -2$

(D) $k < 3$

(E) $-2 < k < -1$

解 根据三角形三边关系应有
$$\begin{cases} 3+1-2k > 8 \\ 3+8 > 1-2k \end{cases}$$

解得 $-5 < k < -2$.

答案是 A.

例 1.2 已知三条线段的长度分别为 a 、 b 、 c , 且 $c < b < a$, 满足下列哪个条件才能组成三角形 ()

(A) $a+b > c$

(B) $a+c > b$

(C) $a-b < c$

(D) $b-c < a$

(E) $a-b > c$

解 组成三角形的三边应满足任意两边之和大于第三边, 或任意两边之差小于第三边.

由 $a > b > c$, 得 $a+b > c$, 且 $a+c > b$.

若能满足 $b+c > a$, 则长度为 a 、 b 、 c 的三条线段可组成三角形.

答案是 C.

例 1.3 一个三角形的三条边长分别是 6、8、10, 那么最长边的高是 ()

- (A) 4 (B) 4.5 (C) 4.8
(D) 5 (E) 6

解 如图 7-1 所示, 由于 $6^2 + 8^2 = 10^2$, 可知 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 三角形面积 $S = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{10 \times h}{2}$.

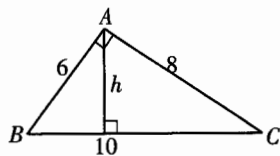


图 7-1

从而 $h = 4.8$.

答案是 C.

例 1.4 等腰直角三角形的面积是 10, 则其斜边的长是 ()

- (A) 15 (B) 20 (C) $2\sqrt{5}$
(D) $2\sqrt{10}$ (E) $4\sqrt{5}$

解 如图 7-2 所示, 三角形面积 $S = \frac{1}{2} \times 2b \times b = b^2 = 10$, $b = \sqrt{10}$. 斜边为 $2b = 2\sqrt{10}$.

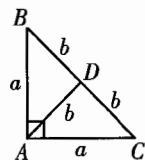


图 7-2

例 1.5 直角三角形的一个内角是 30° , 面积是 $10\sqrt{3}$, 则其斜边长是 ()

- (A) $\sqrt{10}$ (B) $2\sqrt{10}$ (C) $3\sqrt{10}$
(D) $3\sqrt{5}$ (E) $4\sqrt{5}$

解 如图 7-3 所示, 三角形面积

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times a = 10\sqrt{3}, \quad a = 2\sqrt{5}.$$

斜边长 $2a = 4\sqrt{5}$.

答案是 E.

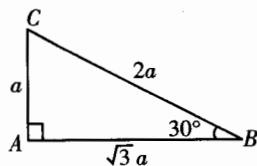


图 7-3

例 1.6 等腰直角三角形的斜边长为 5, 则它的直角边长为 ()

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
(D) $5\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{5}$

解 如图 7-4 所示, 等腰直角三角形边长之比为 $1:1:\sqrt{2}$, 从而设直角边长为 x , 则 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{5}$, 即 $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

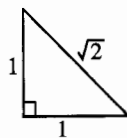


图 7-4

答案是 B.

例1.7 下面命题正确的是

()

- (A) 有两边和一角对应相等的两个三角形全等
 (B) 有一边对应相等的两个等边三角形全等
 (C) 有一角对应相等的两个等边三角形全等
 (D) 有一角对应相等的两个直角三角形全等
 (E) 以上结论均不正确

解 如果两个等边三角形一组对应边相等, 说明两个三角形的边都相等, 满足三条边对应相等, 因此, 这两个三角形全等. 应选 B.

例1.8 (条件充分性判断) $\triangle ABC$ 为直角三角形.(1) $\triangle ABC$ 的三边长之比为 $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.(2) $\triangle ABC$ 的三边长之比为 $3:4:5$.

解 由条件(1) 设三边长分别为 a, b, c , 则 $a:b:c = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$, 设 $a = k, b = \sqrt{2}k, c = \sqrt{3}k$ 满足 $a^2 + b^2 = c^2$. 从而条件(1) 充分.

同理可知条件(2) 也充分.

答案为 D.

例1.9 (条件充分性判断) 如图 7-5 所示, 则 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

(1) $\angle A = 90^\circ$ (2) $AD \perp BC$ **解** 若条件(1)和(2)同时成立,则 $\angle ADC = \angle BAC = 90^\circ$

$$\angle B + \angle C = \angle CAD + \angle C = 90^\circ$$

从而 $\angle B = \angle CAD$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DAC$ 中两角对应相等.从而 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

答案是 C.

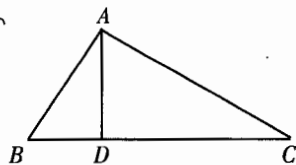


图 7-5

第二节 四 边 形

一 平行四边形

1. 平行四边形的性质与判定

(1) 两组对边分别平行的四边形称为平行四边形.

(2) 平行四边形的对边平行且相等, 对角相等, 对角线互相平分.

(3) 平行四边形的判定: 一组对边平行且相等的四边形; 两组对边分别相等的四边形; 两条对角线互相平分的四边形; 两组对角分别相等的四边形都是平行四边形.

(4) 如图 7-6 所示, 若平行四边形两边长分别为 a, b , 高为 h , 则面积 $= bh$, 周长 $= 2(a+b)$.

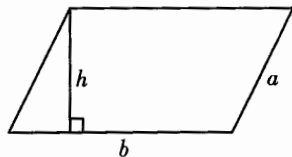


图 7-6

2. 矩形: 一个角是直角的平行四边形称为矩形. 矩形的四个角均是直角, 对角线相等.

3. 菱形: 一组邻边相等的平行四边形称为菱形. 菱形的四边都相等, 对角线相互垂直, 并且每一条对角线平分一组对角.

二 梯形

如图 7-7 所示, 上底是 a , 下底是 b , 高是 h ,

中位线 $MN = \frac{1}{2}(a+b)$, 面积 $= \frac{1}{2}(a+b)h$.

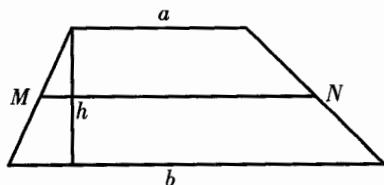


图 7-7

例 2.1 如图 7-8 所示, $ABCD$ 是边长为 a 的正方形, 点 P 在 BC 上运动, 则 $\triangle PAD$ 的面积为 ()

(A) $\frac{1}{2}a^2$

(B) $\frac{1}{3}a^2$

(C) $\frac{2}{3}a^2$

(D) $\frac{3}{4}a^2$

(E) $\frac{1}{4}a^2$

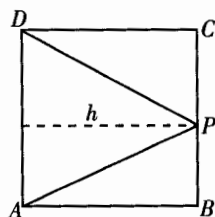


图 7-8

解 当 P 点在 BC 上运动时, $\triangle PAD$ 底边 AD 上的高 $h = a$ 永远成立,

因此 $\triangle PAD$ 的面积为 $\frac{1}{2}a \times a = \frac{1}{2}a^2$.

答案为 A.

例 2.2 平行四边形的一个角比它的邻角的 2 倍还大 15° , 则相邻两个内角为 ()

(A) $30^\circ, 75^\circ$

(B) $40^\circ, 95^\circ$

(C) $55^\circ, 125^\circ$

(D) $50^\circ, 115^\circ$

(E) $45^\circ, 105^\circ$

解 如图 7-9 所示 $\begin{cases} \angle 2 = 2\angle 1 + 15^\circ \\ \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ \end{cases}$

解得 $\angle 1 = 55^\circ, \angle 2 = 125^\circ$.

答案是 C.

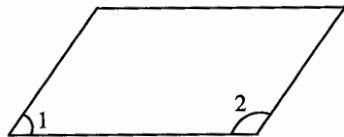


图 7-9

例 2.3 如图 7-10 所示, 在梯形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ, CD = 8, AD = 6$, 则 BC 的长是 ()

(A) $3\sqrt{3}$

(B) $3\sqrt{6}$

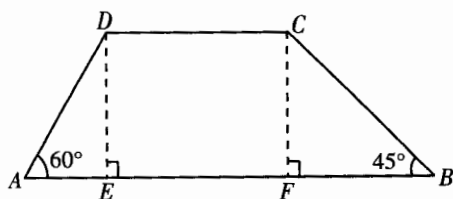


图 7-10

(C) $6\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{6}$

(E) 6

解 $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{DE}, DE = 3\sqrt{3}, \frac{CF}{CB} = \frac{1}{\sqrt{2}},$

从而 $CB = \sqrt{2} \times CF = \sqrt{2} \times DE = 3\sqrt{6}.$

答案是 B.

例 2.4 (条件充分性判断) 长与宽之比为 2:1 的矩形的面积增大为原来的 2 倍.

(1) 宽增大, 长不变, 使之成为正方形

(2) 宽增大为原来的 2 倍, 长缩小为原来的一半

解 设长为 $2x$, 宽为 x , 则矩形面积为 $S = 2x^2$.

由条件(1), 所得正方形边长为 $2x$, 此时面积 $S_1 = 4x^2$, 是原来的 2 倍. 故条件(1)充分.

由条件(2), 所得矩形长为原矩形宽的 2 倍, 即 $2x$, 所得矩形宽为原矩形长的一半为 x .

变化后面积 $S_2 = 2x^2 = S$, 没有改变. 所以条件(2)不充分.

故应选 A.

例 2.5 (条件充分性判断) 如图 7-11 所示, 在矩形 $ABCD$ 中, $BE = DF$, 能确定原矩形的面积与四边形 $AECF$ 的面积之比为 3:2.

(1) $BE:EA = 1:2$

(2) $AB = 6, BC = 3, CE = \sqrt{13}$

解 设边长 $CD = a, CB = b, BE = DF = x$, 则

题干要求推出 $\frac{ab}{(a-x)b} = \frac{3}{2}$

即 $a = 3x$

由条件(1), $\frac{x}{a-x} = \frac{1}{2}$, 可知 $a = 3x$

即条件(1)是充分的.

由条件(2), $AB = CD = a = 6, CB = b = 3, CE = \sqrt{13}$

由勾股定理 $BE = x = \sqrt{CE^2 - CB^2} = \sqrt{13 - 9} = 2$

从而 $a = 3x$ 成立, 因此条件(2)也是充分的.

答案为 D.

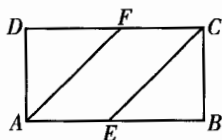


图 7-11

第三节 圆

与圆有关的几个重要概念:

1. 连接圆上任意两点的线段叫做弦; 经过圆心的弦叫做直径.

2. 弦到圆心的距离叫做弦心距.
3. 圆上任意两点间的部分叫做圆弧;任意一条直径的两个端点分圆成两条弧,每一条弧都叫做半圆.
4. 圆心相同、半径不相等的两个圆叫做同心圆;圆心不相同,半径相等的两个圆叫做等圆.
5. 顶点在圆心的角叫做圆心角;顶点在圆上、两边与圆相交的角叫做圆周角;直径所对的圆周角为直角.
6. 垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的弧.
7. 不在同一条直线的三个点可以确定一个圆.
8. 若圆的半径是 r , 则面积 $= \pi r^2$, 周长 $= 2\pi r$.

例 3.1 圆的半径缩小到原来的 $\frac{1}{3}$, 那么原来的面积是缩小后的面积的 ()

- (A) 3 倍 (B) 6 倍 (C) 9 倍 (D) 10 倍 (E) 12 倍

解 设圆的半径为 r , 则面积 $S_1 = \pi r^2$.

现半径是 $\frac{r}{3}$, 则面积为 $S_2 = \pi \left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \pi r^2$.

从而答案应为 C.

例 3.2 如图 7-12 所示, 在一个矩形内紧紧放入三个等圆, 每个圆的面积都是 1, 那么矩形的对角线长为 ()

- (A) $10\sqrt{\pi}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$ (C) $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$
 (D) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$ (E) $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}$

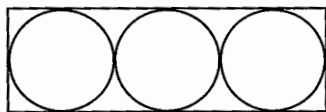


图 7-12

解 设圆的半径为 r , 则 $S = \pi r^2 = 1, r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$,

从而矩形的长为 $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$, 宽为 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$,

矩形的对角线长为 $\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{\pi} + \frac{4}{\pi}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}$.

答案是 E.

例 3.3 如图 7-13 所示, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 分别以 A, C 为圆心, 4 为半径画圆弧, 则阴影部分面积是 ()

- (A) $16 - 8\pi$ (B) $8\pi - 16$ (C) $4\pi - 8$
 (D) $32 - 8\pi$ (E) $8\pi - 32$

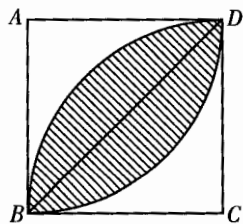


图 7-13

解 阴影部分的面积 $S = 2\left(\frac{\pi \times 4^2}{4} - \frac{1}{2} \times 4^2\right) = 8\pi - 16$.

答案为(B).

例 3.4 如图 7-14 所示, $AB = 10$ 厘米是半圆的直径, C 是 AB 弧的中点, 延长 BC 于 D , ABD 是以 AB 为半径的扇形, 则图中阴影部分的面积是() 平方厘米.

(A) $25\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ (B) $25\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ (C) $25\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

(D) $25\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ (E) 以上答案均不正确

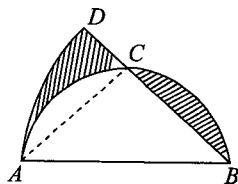


图 7-14

解 如图 7-14 所示, 连接 AC , 则

$\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = \frac{10}{\sqrt{2}}$ ($\triangle ABC$ 是等腰直角三角形)

阴影部分面积 = 扇形 ABD 的面积 - $\triangle ABC$ 的面积

$$= \frac{1}{8}\pi \times 10^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{100}{8}\pi - \frac{100}{4} = \frac{25}{2}\pi - 25 = 25\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

答案是 B.

例 3.5 (条件充分性判断) 圆的面积增大到原来的 9 倍.

(1) 圆的半径增大到原来的 3 倍

(2) 圆的周长增大到原来的 3 倍

解 设圆的半径为 r , 则面积 $S_1 = \pi r^2$.

由条件(1), 圆的半径为 $3r$, 则面积 $S_2 = \pi(3r)^2$, 是原来的 9 倍, 即条件(1)充分.

由条件(2), 圆的周长增大到 $3 \times 2\pi r = 6\pi r$, 即半径为 $3r$, 面积 $S_3 = (3r)^2 \pi = 9\pi r^2 = 9S_1$. 即条件(2)也充分.

答案为 D.

第四节 立体几何

一 长方体(图 7-15)

设三条棱长分别是 a, b, c ,

(1) 长方体的全面积 $S_{\text{全}} = 2(ab + bc + ca)$.

(2) 长方体的体积 $V = abc$.

(3) 长方体对角线的长 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

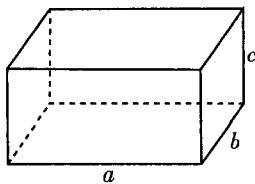


图 7-15

(4) 长方体的侧棱垂直于上、下底面, 且每一个矩形的侧面也垂直于底面.

当 $a=b=c$ 时, 长方体称为正方体(或立方体), 正方体的全面积 $S_{\text{全}}=6a^2$, 体积 $V=a^3$, 对角线长 $d=\sqrt{3}a$.

二 圆柱体(图 7-16) ④

设高为 h , 底面半径为 r ,

(1) 侧面积 $S_{\text{侧}}=2\pi rh$.

(2) 全面积 $S_{\text{全}}=2\pi r(h+r)$.

(3) 体积 $V=\pi r^2 h$.

(4) 当 $h=2r$ 时, 圆柱称作等边圆柱, 等边圆柱的轴截面是正方形, 非等边圆柱的轴截面为矩形.

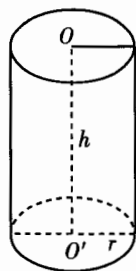


图 7-16

三 球体(图 7-17) ④

设球的半径为 r , 表面积 $S=4\pi r^2$, $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

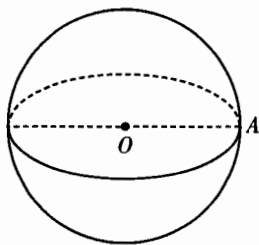


图 7-17

例 4.1 立方体的边长扩大为原来的 2 倍后, 体积比原来的体积大()倍.

- (A) 5 (B) 6 (C) 7
(D) 8 (E) 9

解 设立方体的原边长为 a , 则现边长为 $2a$,

因此原来的体积 $V_1=a^3$, 现在体积 $V_2=(2a)^3=8a^3$,

即现在的体积比原来的体积大 7 倍.

所以选 C.

例 4.2 立方体的体对角线长度为 1, 则它的全面积是

()

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 2
(D) $3\sqrt{2}$ (E) 3

解 设立方体的边长为 a , 由已知 $1=\sqrt{3a^2}$, $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 从而全面积 $S=6a^2=2$

所以选 C.

例 4.3 长方体三条棱长的比是 3:2:1, 表面积是 88, 则最长的一条棱等于 ()

- (A) 8 (B) 11 (C) 12
(D) $2\sqrt{22}$ (E) 6

解 设三条棱长为 $3a, 2a, a$, 由题意 $2(3a \times 2a + 2a \times a + 3a \times a) = 88, 11a^2 = 44$

从而 $a = 2$, 最长棱长 $3a = 6$.

所以选 E.

例 4.4 长方体的三条棱长成等差数列, 最短的棱长为 a , 三条棱长的和为 $6a$, 那么它的全面积是 ()

- (A) $6a^2$ (B) $10a^2$ (C) $20a^2$
(D) $22a^2$ (E) $28a^2$

解 设三条棱长分别为 $a, a+d, a+2d$,

由已知 $a + a + d + a + 2d = 6a$, 则有 $d = a$,

因此全面积 $S = 2(a \times 2a + a \times 3a + 2a \times 3a) = 22a^2$

所以选 D.

例 4.5 圆柱体的侧面积扩大到原来的 8 倍, 高扩大到原来的 2 倍, 则底面半径扩大到原来的倍数是 ()

- (A) 2 (B) 4 (C) 8
(D) $\frac{2}{\pi}$ (E) $\frac{8}{\pi}$

解 设原来圆柱体的底面半径为 r , 高为 h , 侧面积为 S ,

扩大后的底面半径为 r_1 , 高为 h_1 , 侧面积为 S_1 ,

则由题意 $S_1 = 8S, h_1 = 2h$, 因此 $2\pi r_1 h_1 = 8 \times 2\pi r h$, 从而 $r_1 = 4r$.

所以选 B.

例 4.6 一张长是 12, 宽是 8 的矩形铁皮卷成一个圆柱体的侧面, 其高是 12, 则这个圆柱体的体积是 ()

- (A) $\frac{288}{\pi}$ (B) $\frac{192}{\pi}$ (C) 288
(D) 192 (E) 288π

解 圆柱体的侧面积为 $12 \times 8 = 96$, 高为 12, 因此 $2\pi r h = 96, r = \frac{4}{\pi}$

从而体积 $V = \pi r^2 h = \frac{192}{\pi}$.

所以选 B.

例 4.7 圆柱体的底面积为 1, 侧面展开图是一个正方形, 则其侧面积与底面积的比是()

- (A) 4π (B) 2π (C) π
(D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (E) $2\sqrt{3}\pi$

解 设圆柱体的底半径为 r , 高为 h , 则由已知条件 $\pi r^2 = 1, h = 2\pi r$

因此 $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, h = 2\sqrt{\pi}$

即其侧面积与底面积的比为 $\frac{h \times h}{\pi r^2} = 4\pi$

所以选 A.

例 4.8 球的体积增大到原来的 27 倍, 则其表面积扩大了 ()

- (A) 3 倍 (B) 10 倍 (C) 9 倍
(D) 8 倍 (E) 7 倍

解 设原来球半径为 r , 扩大后的球半径为 r_1 , 则 $27 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$, 从而 $r_1 = 3r$,

扩大后表面积为 $S_1 = 4\pi(3r)^2 = 9 \times (4\pi r^2)$

因此, 扩大后表面积是原面积的 9 倍, 即表面积扩大了 8 倍.

所以选 D.

第五节 练习

一 问题求解

1. 等边三角形的面积是 $16\sqrt{3}$, 则它的周长是 ()

- (A) 24 (B) 32 (C) $4\sqrt{3}$
(D) $12\sqrt{3}$ (E) $15\sqrt{3}$

2. 三条线段 $a=5, b=3, c$ 的值为整数, 由 a, b, c 为边可组成三角形 ()

- (A) 1 个 (B) 3 个 (C) 5 个
(D) 10 个 (E) 无数个

3. 一梯子的长度为 2.5 米, 原来梯子在距墙脚 0.7 米处靠放, 由于自重, 梯子向外滑出 x 米使梯顶的高度下降了 0.4 米(如图 7-18 所示, 梯子原来位置为 AB , 现在位置为 $A'B'$), 则 x 的值应该是 ()

- (A) 0.4 米 (B) 0.5 米 (C) 0.8 米
(D) 0.9 米 (E) 1.5 米

4. 矩形如图 7-19 所示, 其中阴影区域的面积与白色区域的面积之比是 ()

- (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{1}{4}$

5. 如图 7-20 所示, 半径为 r 的四分之一的圆 ABC 上, 分别以 AB 和 AC 为直径作两个半圆, 则阴影部分 a 和阴影部分 b 的关系为 ()

- (A) $a > b$ (B) $a < b$ (C) $a = b$ (D) $a \geq b$
(E) 以上结论均不正确

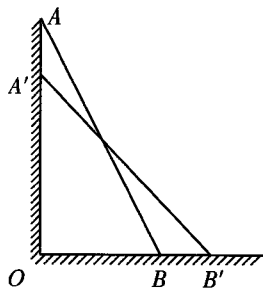


图 7-18

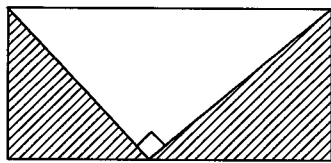


图 7-19

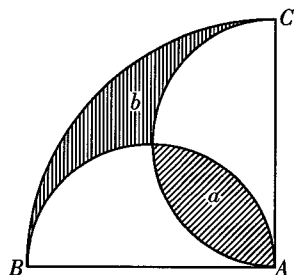


图 7-20

6. 菱形如图 7-21 所示, 高是 3, $\angle A = 60^\circ$, 则菱形的周长是 ()

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $6\sqrt{3}$ (C) 9 (D) $8\sqrt{3}$ (E) 27

7. 形如图 7-22 的铁皮, 正方形 $ABDE$ 的边长为 a , $\angle \alpha = 60^\circ$, $\angle \beta = 45^\circ$, 如果剪去 $\triangle ABC$, 剩下的铁皮与原来铁皮的面积比是 ()

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{5(5+\sqrt{5})}{22}$ (D) $\frac{5(5-\sqrt{3})}{22}$ (E) $5+\sqrt{3}$

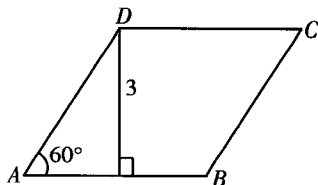


图 7-21

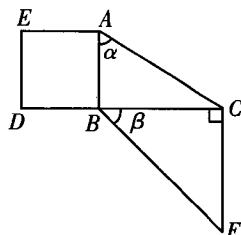


图 7-22

8. 长方体三个面的面积分别是 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$, 则它的体对角线的长为 ()

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{6}$ (E) $2\sqrt{2}$

二 条件充分性判断

9. 梯形如图 7-23 所示, 中位线 $MN = 6$, 则梯形的面积是 $24\sqrt{3}$.

- (1) $BC = 8$
(2) $\angle C = 60^\circ$

10. 菱形中的较小的内角是 60° .

(1) 菱形的一条对角线与边长相等

(2) 菱形的一条对角线是边长的 $\frac{4}{3}$ 倍

11. 如图 7-24 所示, 可以确定圆 O 的周长是 20π .

(1) $\triangle OXZ$ 的周长是 $20 + 10\sqrt{2}$

(2) 弧 XYZ 的长度是 5π

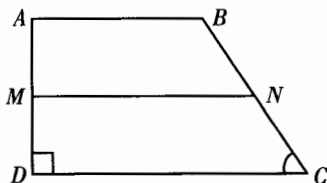


图 7-23

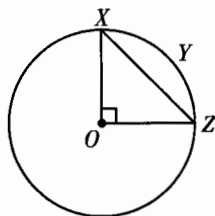


图 7-24

12. 长方体的全面积是 88.

(1) 长方体的共点三棱长之比为 $1:2:3$

(2) 长方体的体积是 48

13. 两圆柱体的侧面积相等, 则能求出它们体积之比为 $3:2$.

(1) 它们的底面半径分别是 6 和 4

(2) 它们的底面半径分别是 3 和 2

第六节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. A.

解析 如图 7-25 所示, 设等边三角形一边边长为 a ,

则底边高是 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

由已知 $\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = 16\sqrt{3}$,

解得 $a = 8$, 周长 $3a = 24$.

2. C.

解析 根据三角形三边关系应有

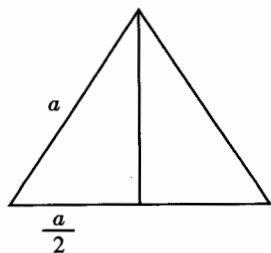


图 7-25

$$\begin{cases} 3+c>5 \\ 5+3>c \end{cases}$$

解得

$$2 < c < 8,$$

这样的整数 c 共可取 5 个值.

3. C.

解析 由已知条件 $AB = 2.5$ 米, $OB = 0.7$ 米, 从而

$$AO = \sqrt{(2.5)^2 - (0.7)^2} = 2.4 \text{ (米)}$$

$$OB' = \sqrt{(2.5)^2 - 2^2} = 1.5 \text{ (米)}$$

因此

$$x = BB' = 1.5 - 0.7 = 0.8 \text{ (米)}$$

4. B.

解析 设矩形的长为 a , 宽为 b , 则白色区域面积为 $\frac{1}{2}ab$,

从而

$$\frac{ab - \frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2}ab} = 1$$

5. C.

解析 分别用 a, b 表示 a 的阴影部分和 b 的阴影部分的面积,

由已知条件

$$b = \frac{1}{4}\pi r^2 - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 + a$$

可得 $b = a$.

6. D.

解析 设菱形边长为 a ,则有 $\sqrt{3} \times \frac{a}{2} = 3$, 得 $a = 2\sqrt{3}$,从而周长为 $4a = 8\sqrt{3}$.

7. D.

解析 由已知 $AB = a$, $\angle \alpha = 60^\circ$, $\angle \beta = 45^\circ$,可知 $BC = \sqrt{3}a$, $CF = \sqrt{3}a$,

从而剩下的铁皮与原铁皮的面积比是

$$\frac{a^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{3}a)^2}{a^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{3}a)^2 + \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}a} = \frac{5}{5 + \sqrt{3}} = \frac{5(5 - \sqrt{3})}{22}$$

8. D.

解析) 设长方体的三条棱长分别为 a, b, c .

$$\text{由} \quad \begin{cases} ab = \sqrt{2} \\ ac = \sqrt{3} \\ bc = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{可得} \quad a^2 = 1, b^2 = 2, c^2 = 3$$

$$\text{因此对角线} \quad d = \sqrt{1+2+3} = \sqrt{6}$$

二 条件充分性判断 ④

9. C.

解析) 条件(1)和条件(2)单独都不是充分的, 联合条件(1)和条件(2)

可得 $AD = 4\sqrt{3}$, 设 $AB = a$, 则 $DC = a + 4$,

从而 $\frac{a+a+4}{2} = 6$, 解得 $a = 4$,

梯形面积 $S = \frac{1}{2}(a+a+4) \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

10. A.

解析) 由条件(1), 如图 7-26 所示, $\triangle ABC$ 为等边三角形,

从而菱形中两个较大的内角都是 120° ,

即较小的内角是 60° ,

因此条件(1)是充分的.

由条件(2), 不能推出题干成立.

11. D.

解析) 设圆的半径为 r , 题干要求推出 $2\pi r = 20\pi$,

即要求推出 $r = 10$.

由条件(1), $\triangle OXZ$ 的周长为 $r+r+\sqrt{2}r = 20+10\sqrt{2}$,

即解得 $r = 10$,

因此条件(1)是充分的.

由条件(2), 弧 XYZ 的长度为 $\frac{1}{4} \times 2\pi r = 5\pi$,

可得 $r = 10$,

即条件(2)也是充分的.

12. C.

解析) 设长方体的三条棱长分别为 a, b, c . 条件(1)和条件(2)单独都不充分.

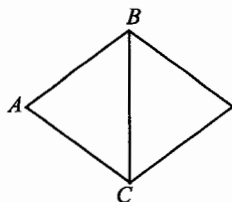


图 7-26

联合条件(1)和条件(2).

则有

$$\begin{cases} a=t, b=2t, c=3t \\ abc=48 \end{cases}$$

因此

$$a=2, b=4, c=6.$$

全面积

$$S=2(8+12+24)=88$$

13. D.

解析 设两圆柱体的底面半径分别为 r_1, r_2 , 高分别为 h_1, h_2 ,

由已知 $2\pi r_1 h_1 = 2\pi r_2 h_2$,

因此 $r_1 h_1 = r_2 h_2$,

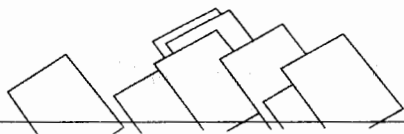
题干要求推出 $\frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \frac{3}{2}$,

$$\text{即 } \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2},$$

从而条件(1)和条件(2)都是充分的.

第八章

平面解析几何



第一节 基本公式

一 两点间的距离 ④

如图 8-1, 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 点 P_1 和 P_2 之间的距离记为 P_1P_2 , 则

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

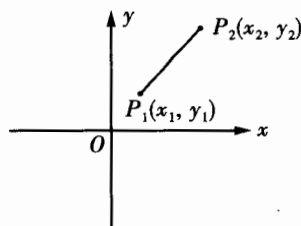


图 8-1

二 线段的定比分点坐标 ④

有向直线 l 上一点 P 将 l 上的有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ (图 8-2), $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 长度的比记为 λ , 即 $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$, 点 P 叫做 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的定比分点, 则有

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

特别当 $\lambda = 1$ 时, P 为 P_1P_2 中点, 此时

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

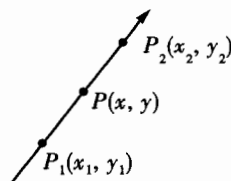


图 8-2

三 过两点的直线斜率公式 ④

1. 设直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则 l 的斜率 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2)$.

2. 若直线方程为 $Ax + By + C = 0 (B \neq 0)$, 则此直线斜率为 $k = -\frac{A}{B}$.

四 点到直线的距离公式 ④

设直线的方程为 $Ax + By + C = 0$, 点 $P(x_0, y_0)$, 则点 P 到直线的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

例 1.1 已知三角形 ABC 的三个顶点 $A(-1, -2), B(2, -1), C(-2, 1)$, 则此三角形为 ()

- (A) 非等腰直角三角形 (B) 等边三角形 (C) 等腰直角三角形
(D) 钝角三角形 (E) 以上结论都不正确

解 $AB = \sqrt{(2+1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{10}$

$$AC = \sqrt{(-2+1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20}$$

即 $BC^2 = AB^2 + AC^2$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

应选 C.

例 1.2 已知两点 $P_1(3, -2), P_2(-9, 4)$, 线段 P_1P_2 与 x 轴的交点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成比为 λ , 则有 ()

- (A) $\lambda = 2, P(1, 0)$ (B) $\lambda = -2, P(-1, 0)$ (C) $\lambda = -\frac{1}{2}, P(1, 0)$
(D) $\lambda = \frac{1}{2}, P(-1, 0)$ (E) 以上结论均不正确

解 设 $P(x, 0)$, 则有 $0 = \frac{-2+4\lambda}{1+\lambda}$, 得 $\lambda = \frac{1}{2}, x = \frac{3 + \frac{1}{2} \times (-9)}{1 + \frac{1}{2}} = -1$.

答案是 D.

例 1.3 已知 3 个点 $A(x, 5), B(-2, y), C(1, 1)$, 若点 C 是线段 AB 的中点, 则 ()

- (A) $x=4, y=-3$ (B) $x=0, y=3$ (C) $x=0, y=-3$
(D) $x=-4, y=-3$ (E) $x=3, y=-4$

解 由 $1 = \frac{x+(-2)}{2}, 1 = \frac{5+y}{2}$ 可得 $x=4, y=-3$

答案应选 A.

第二节 直线方程

一 直线方程的形式

1. 点斜式

已知点 $P(x_0, y_0)$ 和斜率 k , 方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

2. 两点式

已知直线上两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

3. 斜截式

已知斜率 k 和直线在 y 轴上的截距 b , 方程为 $y = kx + b$.

4. 截距式

已知 x 轴上的截距为 a , y 轴上的截距为 b , 方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

5. 一般式

$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$.

二 两条直线的关系 ④

设不重合的两条直线为

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

1. 两条直线相交

若 $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, 方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 有唯一解 (x_0, y_0) , 它就是 l_1 和 l_2 的交点.

2. 两条直线平行

$$l_1 // l_2 \iff A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

如果 l_1, l_2 存在斜率, 分别是 k_1, k_2 , 则

$$l_1 // l_2 \iff k_1 = k_2$$

3. 两条直线垂直

$$l_1 \perp l_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

如果 l_1, l_2 存在斜率, 分别是 k_1, k_2 , 则

$$l_1 \perp l_2 \iff k_1k_2 = -1$$

4. 两条直线的夹角

两条直线的夹角指两条直线所夹的不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的非负角 $\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 而 l_1 到 l_2 的角是指 l_1 按逆时针绕交点转到与 l_2 重合时所转的角 φ .

$$\tan \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$$

例 2.1 与直线 $l_1: x + 2y - 1 = 0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 且过点 $P(-1, 0)$ 的直线方程是 ()

(A) $y=3(x+1)$

(B) $y=3(x-1)$

(C) $y=2(x+1)$

(D) $y=-2(x+1)$ 或 $y=3(x-1)$

(E) $y=-3(x+1)$ 或 $y=\frac{1}{3}(x+1)$

解 由条件, 可设所求直线方程为 $y=k(x+1)$. 又知 l_1 的斜率 $k_1=-\frac{1}{2}$, 所以有

$$\left| \frac{k - (-\frac{1}{2})}{1 + (-\frac{1}{2})k} \right| = 1$$

即

$$k + \frac{1}{2} = 1 - \frac{k}{2} \text{ 或 } k + \frac{1}{2} = \frac{k}{2} - 1,$$

得

$$k = \frac{1}{3} \text{ 或 } k = -3,$$

从而所求直线有两条, 方程分别为

$$y = \frac{1}{3}(x+1) \text{ 和 } y = -3(x+1).$$

答案是 E.

例 2.2 已知平行四边形两条邻边所在的直线方程是 $x+y-1=0$, $3x-y+4=0$. 它的对角线的交点是 $M(3,3)$, 则这个平行四边形其他两条边所在的直线方程为 ()

(A) $3x-y+15=0, x+y-11=0$

(B) $3x-y-16=0, x+y-11=0$

(C) $3x-y+1=0, x+y-8=0$

(D) $3x-y-11=0, x+y-16=0$

(E) $3x-y+1=0, x+y-11=0$

解 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=-4 \end{cases}$ 的解为 $x=-\frac{3}{4}, y=\frac{7}{4}$, 即平

行四边形的一个顶点为 $A(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$, 设这个平行四边形其

他两边的交点为 $A'(x, y)$, 如图 8-3 所示, $M(3, 3)$ 是 AA'

的中点, 所以 $\frac{x + (-\frac{3}{4})}{2} = 3, \frac{y + \frac{7}{4}}{2} = 3$, 解得 $x = \frac{27}{4}, y = \frac{17}{4}$.

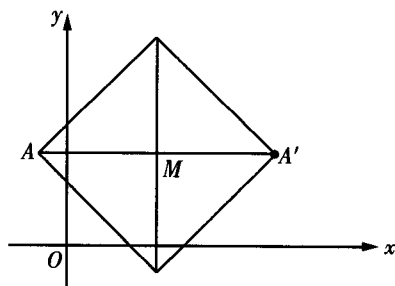


图 8-3

用点斜式, 所求两条边直线方程为 $y - \frac{17}{4} = -(x - \frac{27}{4})$, $y - \frac{17}{4} = 3(x - \frac{27}{4})$.

整理可得 $y+x-11=0, y-3x+16=0$.

答案是 B.

例 2.3 过点 $P(3, 0)$ 作直线 l , 使其被两直线 $l_1: 2x-y-2=0$ 和 $l_2: x+y+3=0$ 所截得的线段恰好被 P 点平分, 则直线 l 的方程是 ()

(A) $8x - y - 24 = 0$

(B) $7x - y - 21 = 0$

(C) $6x - y - 18 = 0$

(D) $9x - y - 27 = 0$

(E) $10x - y - 30 = 0$

解 如图 8-4 所示, 设所求直线 l 与 l_2 相交于 $A(x_1, y_1)$, l 与 l_1 相交于 $B(x_2, y_2)$.

线段 AB 的中点为 $P(3, 0)$, 因此 B 点坐标为 $(6 - x_1, -y_1)$.

因为 A, B 两点分别在直线 $x + y + 3 = 0$ 和 $2x - y - 2 = 0$ 上,

可得方程组
$$\begin{cases} x_1 + y_1 + 3 = 0 \\ 2(6 - x_1) + y_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

解得 A 点坐标为 $(\frac{7}{3}, -\frac{16}{3})$, B 点坐标为 $(\frac{11}{3}, \frac{16}{3})$.

由两点式可得直线方程是 $8x - y - 24 = 0$

答案是 A.

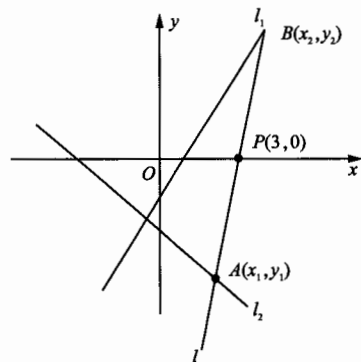


图 8-4

例 2.4 已知直线 l 的斜率为 $\frac{1}{6}$, 且和两坐标轴围成面积为 3 的三角形, 则 l 的方程为 ()

(A) $x - 5y + 6 = 0$

(B) $x + 5y + 6 = 0$

(C) $x - 5y + 6 = 0$ 或 $x + 5y + 6 = 0$

(D) $x - 6y + 6 = 0$ 或 $x - 6y - 6 = 0$

(E) 以上结论均不正确

解 如图 8-5 所示, 因为 l 的斜率为 $\frac{1}{6}$, 设 l 的方程为 $y = \frac{1}{6}x + b$, 与 x 轴交于 $(-6b, 0)$, 与 y 轴交于 $(0, b)$.

由已知 $\frac{1}{2}|-6b| \times |b| = 3$, 解得 $b = \pm 1$.

因此 l 的方程为 $y = \frac{1}{6}x \pm 1$, 即 $x - 6y + 6 = 0$ 或 $x - 6y - 6 = 0$.

答案是 D.

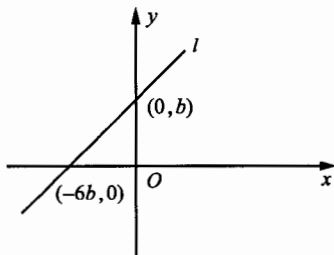


图 8-5

例 2.5 (条件充分性判断) 过点 $A(-2, m)$ 和 $B(m, 4)$ 的直线与直线 $2x + y - 1 = 0$ 平行.

(1) $m = -8$ (2) $m = 2$

解 过点 $A(-2, m)$ 和点 $B(m, 4)$ 的斜率是 $k_1 = \frac{4 - m}{m + 2}$,

而直线 $2x + y - 1 = 0$ 的斜率是 $k_2 = -2$,

因而要使题干成立, 则
$$\frac{4 - m}{m + 2} = -2$$

解得
$$m = -8.$$

答案是 A.

例 2.6 (条件充分性判断) 下面三条直线 $l_1: 4x + y = 4, l_2: mx + y = 0, l_3: 2x - 3my = 4$

不能构成三角形.

(1) $m = 2$ (2) $m = -2$

解 三条直线不能构成三角形等价于三条直线相交于一点或至少有两条平行(或重合), 因此有

(1) 若 l_1, l_2, l_3 相交于一点.

由 $\begin{cases} 4x + y = 4 \\ mx + y = 0 \end{cases}$ 解得交点 $\left(\frac{4}{4-m}, -\frac{4m}{4-m}\right) (m \neq 4)$,

并代入直线 $2x - 3my = 4$, 得 $m = \frac{2}{3}$ 或 $m = -1$.

(2) 当 l_1, l_2, l_3 中至少有两条平行(或重合).

若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $m = 4$;

若 $l_2 \parallel l_3$, 则 $m^2 = -\frac{2}{3}$ (不可能);

若 $l_1 \parallel l_3$, 则 $m = -\frac{1}{6}$.

从而当 $m = -1, m = -\frac{1}{6}, m = \frac{2}{3}, m = 4$ 时三条直线不能构成三角形.

即条件(1)和条件(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

答案是 E.

第三节 圆的方程

一 圆的方程的形式

1. 标准方程

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

其中, (x_0, y_0) 为圆心, r 为半径.

2. 一般方程

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

其中, 系数满足 $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

一般方程用配方法可化为标准方程

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

即圆心为 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 半径 $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

二 直线与圆的位置关系

直线 $l: Ax + By + C = 0$, 圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. 设圆心 $M(a, b)$ 到直线 l 的距离为 d .

又设方程组
$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

则有

1. 直线与圆相交 $\Leftrightarrow d < r$, 或方程组(I)有两组不同解.
2. 直线与圆相切 $\Leftrightarrow d = r$, 或方程组(I)有两组相同解.
3. 直线与圆相离 $\Leftrightarrow d > r$, 或方程组(I)无解.

例3.1 直线 $x + 2y - 3\sqrt{5} = 0$ 被圆 $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 20$ 截得弦为 AB , 则 AB 的长度为 ()

- (A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2 (E) 1

解 圆方程为 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, 圆心到直线的距离

$$d = \frac{|2 + 2 \times (-1) - 3\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 3$$

所以截得的弦长为

$$|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{25 - 9} = 8$$

答案是 A.

例3.2 过点 $M(-1, 1), N(1, 3)$, 圆心在 x 轴上的圆的方程为 ()

- (A) $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ (C) $x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$
(D) $x^2 + y^2 - 4x + 6 = 0$ (E) 以上答案均不正确

解 设圆心为 $(x_0, 0)$, 则方程为 $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$,

将 $M(-1, 1), N(1, 3)$ 代入方程可得 $x_0 = 2, r^2 = 10$

从而所求方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$

答案为 B.

例3.3 圆 $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ 到直线 $l: x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有 ()

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个 (E) 5 个

解 已知圆的圆心 $(-1, -2)$ 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|-1 - 2 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ (圆的半

径),从而知圆与直线 l 相割. 如图 8-6 所示,圆上有三个点到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$.

所以选 C.

例 3.4 若 $a^2 + b^2 - 2c^2 = 0$, 则直线 $ax + by + c = 0$ 被 $x^2 + y^2$

$= 1$ 所截得的弦长为

()

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\sqrt{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解 圆心 $(0,0)$ 到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离为 $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

由勾股定理,半弦长 $= \sqrt{1 - d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

从而弦长 $= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

答案是 D.

例 3.5 (条件充分性判断) 圆 O 过点 $A(1, -1), B(-1, 1)$, 且圆心在直线 $x + y - 2 = 0$ 上.

(1) 圆 O 的方程为 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$

(2) 圆 O 的方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

解 由条件(1),圆心的坐标为 $(-3, 1)$, 因为 $-3 + 1 - 2 \neq 0$, 即圆心不在直线 $x + y - 2 = 0$ 上, 条件(1)不充分.

由条件(2),圆心坐标为 $(1, 1)$, $1 + 1 - 2 = 0$, 即圆心在直线 $x + y - 2 = 0$ 上,

又由于

$$\begin{cases} (1-1)^2 + (-1-1)^2 = 4 \\ (-1-1)^2 + (1-1)^2 = 4 \end{cases}$$

即 $A(1, -1), B(-1, 1)$ 在圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 上. 因此条件(2)是充分的.

答案是 B.

例 3.6 (条件充分性判断) 圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ 与直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y = 7m+4$ ($m \in \mathbf{R}$) 恒相交.

(1) $m > 0$

(2) $m < 0$

解 题干要求圆心 $(1, 2)$ 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|(2m+1) + 2(m+1) - 7m - 4|}{\sqrt{(2m+1)^2 + (m+1)^2}} \leq 5,$$

整理得

$$|-3m - 1| \leq 5\sqrt{5m^2 + 6m + 2},$$

即

$$116m^2 + 144m + 49 \geq 0$$

不论 m 为何值, 不等式总是成立的.

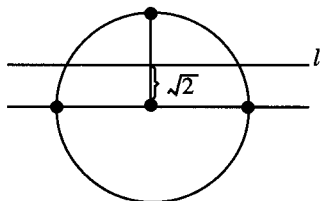


图 8-6

答案是 D.

第四节 练习

一 问题求解

1. 过两点 $(4, -1)$ 和 $(-2, 3)$ 的直线方程是 ()

- (A) $x - y = 3$ (B) $2x - 3y = 4$ (C) $2x + 3y = 5$
(D) $3x - 2y = 4$ (E) 以上答案均不正确

2. 如图 8-7 所示, 线段 AB 的长度是 ()

- (A) 6 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$
(D) $2\sqrt{6}$ (E) 5

3. 若点 P 为图 8-7 中线段 AB 的中点, 则点 P 在 x 轴的投影是 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) -2
(D) 3 (E) $\frac{1}{2}$

4. 点 $P(-1, -\sqrt{5})$ 到 x 轴的距离是 ()

- (A) 1 (B) $\sqrt{5}$ (C) $1 + \sqrt{5}$
(D) 6 (E) 3

5. 如图 8-8 所示, $A(2, 2)$, $B(0, 4)$, 则正方形 $ABCD$ 的面积是 ()

- (A) 2 (B) 4 (C) 8
(D) $4\sqrt{2}$ (E) $5\sqrt{2}$

6. 设点 (x_0, y_0) 在圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 的内部, 则直线 $l: x_0x + y_0y = 1$ 和圆 C ()

- (A) 不相交 (B) 有两个距离小于 2 的交点
(C) 有一个交点 (D) 有两个距离大于 2 的交点
(E) 以上答案均不正确

7. 已知点 $C(2, -3)$, $M(1, 2)$, $N(-1, -5)$, 则点 C 到直线 MN 的距离等于 ()

- (A) $\frac{17\sqrt{53}}{53}$ (B) $\frac{17\sqrt{55}}{55}$ (C) $\frac{19\sqrt{53}}{53}$ (D) $\frac{18\sqrt{53}}{53}$ (E) $\frac{19\sqrt{55}}{55}$

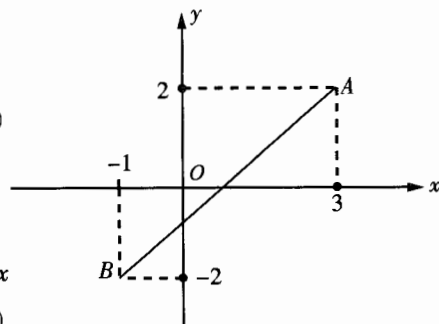


图 8-7

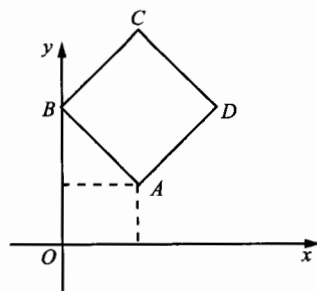


图 8-8

三 条件充分性判断 ④

8. $\frac{y+1}{x+2}$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

(1) 圆 O 的方程是 $x^2 + y^2 = 1$

(2) 动点 $P(x, y)$ 在圆 O 上运动

9. 圆 $x^2 + 2x + y^2 - ay = 1$ 的半径是 2.

(1) $a = 2$

(2) $a = 4$

10. 如图 8-9 所示, $\triangle OPQ$ 的面积 > 48 .

(1) P 的坐标是 $(6, 8)$

(2) Q 的坐标是 $(13, 0)$

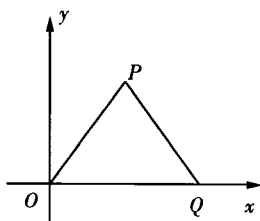


图 8-9

第五节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解 ④

1. C.

解析 根据直线方程的两点式, 所求直线方程为

$$\frac{y - (-1)}{(-1) - 3} = \frac{x - 4}{4 - (-2)}$$

整理得 $2x + 3y = 5$.

2. B.

解析 由已知 A 点坐标为 $(3, 2)$, B 点坐标为 $(-1, -2)$,

从而 AB 的长度为 $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$.

3. A.

解析 根据中点坐标公式, 设 P 点坐标为 (x, y) ,

$$\text{则 } x = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

即为 P 点在 x 轴上的投影.

4. B.

解析 点 $P(-1, -\sqrt{5})$ 到 x 轴的距离即为 $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$.

5. C.

解析 $ABCD$ 的面积为 $(AB)^2 = (2-0)^2 + (2-4)^2 = 8$.

6. A.

解析 圆心坐标为 $(0,0)$, 圆心到直线 l 的距离

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > 1 \quad (\text{由于 } x_0^2 + y_0^2 < 1)$$

从而知圆 C 与直线 l 不相交.

7. A.

解析 由直线方程的两点式, 直线 MN 的方程为

$$\frac{y-2}{2+5} = \frac{x-1}{1+1}, \quad 7x-2y-3=0$$

从而点 $C(2, -3)$ 到直线 MN 的距离为

$$d = \frac{|14+6-3|}{\sqrt{49+4}} = \frac{17}{\sqrt{53}} = \frac{17\sqrt{53}}{53}$$

二 条件充分性判断

8. C.

解析 条件(1)和条件(2)单独都不充分,联合条件(1)和条件(2), 令 $\frac{y+1}{x+2} = k$,则 $kx - y + 2k - 1 = 0$, 即动点 $P(x, y)$ 满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ kx - y + 2k - 1 = 0 \end{cases}$$

从而圆心 $(0,0)$ 到直线 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 的距离

$$d = \frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 1$$

整理得 $|2k-1| \leq \sqrt{k^2+1}$, $4k^2 - 4k + 1 \leq k^2 + 1$,解得 $0 \leq k \leq \frac{4}{3}$, k 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

9. E.

解析 由条件(1), 圆的一般式方程为 $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 1$, 因此

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3})^2$$

其半径 $r = \sqrt{3}$, 故条件(1)不充分.由条件(2), 圆的一般式方程为 $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 1$, 即

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{6})^2$$

其半径 $r = \sqrt{6}$, 故条件(2)不充分.

10. C.

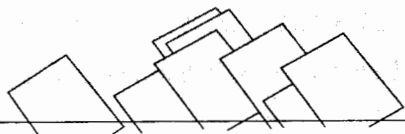
解析 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2),

$\triangle OPQ$ 的底边 $OQ = 13$, 底边 OQ 的高为 8,

从而 $\triangle OPQ$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 13 \times 8 = 52 > 48$.

第九章

排列与组合



第一节 基本原理

一 加法原理

如果完成一件事有 n 类办法,第 i 类办法有 m_i 种不同的方法($i=1,2,\cdots,n$),若不论用哪一类方法中的哪一种方法,都可以完成这件事,那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法.

二 乘法原理

如果完成一件事需要经过 n 个步骤,第 i 个步骤有 m_i 种不同方法($i=1,2,\cdots,n$),那么完成这件事共有 $N=m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同方法.

例 1.1 书架上层放有 6 本不同的语文书,下层放有 5 本不同的数学书,试求

- (1) 从中任取一本书,有多少种不同的取法?
- (2) 从中任取语文、数学各一本,有多少种不同取法?

解 (1) 任取一本书可由两种不同方法完成,即取一本语文书或取一本数学书,取语文书的办法有 6 种,取数学书的办法有 5 种,从而由加法原理,不同的取法共有

$$N=5+6=11(\text{种})$$

(2) 任取语文、数学书各一本,可由两个步骤完成,即先在上层书架取一本语文书,然后在下层书架取一本数学书. 取语文书的办法有 6 种,取数学书的办法有 5 种,从而由乘法原理,不同的取法共有

$$N=5 \times 6=30(\text{种})$$

例 1.2 用 1,2,3,4

- (1) 可组成多少个无重复数字的两位数?
- (2) 可组成多少个允许有重复数字的两位数?

解 (1) 分两步完成, 先取作为十位上的数字, 有 4 种不同选法. 再取作为个位上的数字, 有 3 种不同选法. 由乘法原理, 可组成无重复数字的两位数

$$N = 4 \times 3 = 12 (\text{个})$$

(2) 分两步完成, 先取作为十位上的数字, 有 4 种不同选法, 再选作为个位上的数字, 仍有 4 种不同选法, 由乘法原理, 可组成允许有重复数字的两位数

$$N = 4 \times 4 = 16 (\text{个})$$

第二节 排列

一 定义 ①

从 n 个不同的元素中, 任取 m 个元素 ($m \leq n$), 按照一定的顺序排成一列, 称为从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列. 所有这些排列的个数, 称为排列数, 记为 P_n^m 或记为 A_n^m .

当 $m = n$ 时, 即 n 个不同元素全部取出的排列数, 称为全排列, 记为 P_n^n 或 A_n^n .

由排列定义可知, 如果两个排列相同, 不仅这两个排列的元素完全相同, 而且元素排列的顺序也必须完全相同.

二 排列数公式 ②

记 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, 规定 $0! = 1! = 1$

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

$$P_n^n = n!$$

例 2.1 6 个人排成两排, 每排 3 人, 试问

(1) 有多少种不同的排法?

(2) 若甲不排前排, 有多少种不同的排法?

(3) 若甲、乙两人不排在同一排, 有多少种不同的排法?

解 (1) $P_6^6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ (种)

(2) 分两步完成:

第一步: 甲站位, 从后排三个位子中任取一个, 有 3 种不同站法.

第二步: 其余 5 人去站余下的五个位子, 有 $5!$ 种不同的站法.

由乘法原理, 共有 $3 \times 5! = 360$ 种不同排法.

(3) 分两类

第一类:甲站前排乙在后排,有 $3 \times 3 \times 4!$ 种不同的排法.

第二类:甲站后排乙在前排,有 $3 \times 3 \times 4!$ 种不同排法.

由加法原理,共有 $3 \times 3 \times 4! + 3 \times 3 \times 4! = 432$ 种不同排法.

例2.2 用0,1,2,3这4个数可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解法1 按条件要求,三位数中的百位数上不能是0,故百位数上只能排1,2,3,故有 $P_3^1 = 3$ 种排法.

十位数和个位数从余下的3个中任取2个,有 P_3^2 种排法,

由乘法原理,可知共有 $3 \times P_3^2 = 18$ (种)

解法2 先不考虑附加条件,然后再去掉不符合条件的排列,即 $P_4^3 - P_3^3 = 18$ (种).

此例题也可只用乘法原理完成.

第三节 组 合

一 定义

从 n 个不同元素中,任取 m 个元素 ($m \leq n$) 不论顺序组成一组,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合. 所有这些组合的个数,称为组合数,记为 C_n^m .

由组合的定义可知,如果两个组合中所包含的元素相同,则这两个组合相同.

二 组合数公式

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!}, C_n^0 = 1$$

组合数有下列性质

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$
2. $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

例3.1 某人欲从5种A股票和4种B股票中选购3种,其中至少有2种A股票的买法有 ()

- (A) 40 种 (B) 50 种 (C) 60 种
(D) 65 种 (E) 70 种

解 用加法原理至少有2种A股票的买法可分解为3A或2A1B.

3A的买法有 C_5^3 种,2A1B的买法有 $C_5^2 C_4^1$ 种,

从而总的买法有 $C_5^3 + C_5^2 C_4^1 = \frac{5!}{3! 2!} + \frac{5!}{2! 3!} \times 4 = 50$ (种)

答案是 B.

例 3.2 某灯泡厂生产一批灯泡 100 个, 如果其中有 2 个次品, 从中任取 3 个进行检验.

- (1) 共有多少种抽取方法?
- (2) “只有 1 个次品”的抽法有多少种?
- (3) “至多有 1 个次品”的抽法有多少种?

解: (1) $C_{100}^3 = 161700$ (种)

(2) $C_2^1 C_{98}^2 = 9506$ (种)

(3) $C_2^1 C_{98}^2 + C_2^0 C_{98}^3 = 161602$ (种)

第四节 四类典型问题

在加法原理, 乘法原理, 排列及组合的应用中常见的有以下四类问题.

一 摸球问题

例 4.1 袋中装有 6 只黑球, 4 只白球, 现从中任取 4 只球

- (1) 正好 2 只黑球, 2 只白球的不同取法共有多少种?
- (2) 至少有 3 只黑球的不同取法共有多少种?
- (3) 至多有 1 只黑球的不同取法共有多少种?

解: (1) 分两个步骤完成: 先在 6 只黑球中任取 2 只, 共有 C_6^2 种取法; 再在 4 只白球中任取 2 只, 共有 C_4^2 种取法. 由乘法原理, 不同取法为

$$C_6^2 C_4^2 = 90 \text{ (种)}$$

(2) 用加法原理, 可设计为两种方案, 3 黑 1 白或 4 黑, 从而不同取法共有

$$C_6^3 C_4^1 + C_6^4 = 80 + 15 = 95 \text{ (种)}$$

(3) 用加法原理, 可设计为两种方案, 1 黑 3 白或 4 白, 因此不同取法为

$$C_6^1 C_4^3 + C_4^4 = 24 + 1 = 25 \text{ (种)}$$

例 4.2 从 0, 1, 2, ..., 9 这十个数字中任取五个不同数字

- (1) 正好两个奇数, 三个偶数的不同取法有多少种?
- (2) 至多有两个奇数的取法有多少种?
- (3) 取出的数中含 5 但不含 3 的取法有多少种?

解 (1)分两个步骤完成,先在1,3,5,7,9这五个奇数中任取两个,共有 C_5^2 种取法;再在0,2,4,6,8这五个偶数中任取三个,共有 C_5^3 种取法.用乘法原理,总取法有

$$C_5^2 C_5^3 = 100(\text{种})$$

(2)用加法原理,可设计为三种方案,两奇三偶,一奇四偶或五偶,从而不同取法为

$$C_5^2 C_5^3 + C_5^1 C_5^4 + C_5^5 = 100 + 25 + 1 = 126(\text{种})$$

(3)先将5取出,再在0,1,2,4,6,7,8,9这八个数字中任取四个即可,因此不同取法为

$$C_8^4 = 70(\text{种})$$

二 排队问题

例4.3 某排共有七个座位,安排甲,乙,丙三人就座

(1)共有多少种不同就座方法?

(2)三人相邻(即三个座位相连)的就座方法共有多少种?

(3)三人不相邻(任意两人中间都有空座位)的就座方法共多少种?

解 将七个座位编号,如图9-1所示.

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

图 9-1

(1)分两个步骤:先为甲,乙,丙三人选三个位置,共有 C_7^3 种选法;再让三人就座,共有 $3!$ 种坐法,从而不同就座方法为

$$C_7^3 \cdot 3! = 210(\text{种}).$$

(2)分两个步骤:先为甲,乙,丙三人选三个位置,则有(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6),(5,6,7)5种选法;再让三人就座,有 $3!$ 种坐法,因此不同就座方法共有

$$5 \times 3! = 30(\text{种}).$$

(3)与(1),(2)类似,先为甲,乙,丙三人选三个位置,则有(1,3,5),(1,3,6),(1,3,7),(1,4,6),(1,4,7),(1,5,7),(2,4,6),(2,4,7),(2,5,7),(3,5,7)10种选法,再安排三人就座,有 $3!$ 种坐法,从而就座方法共有

$$10 \times 3! = 60(\text{种})$$

例4.4 袋中装有5只白球,6只黑球,依次取4只

(1)每次取1只(取后不放回),则共有多少种不同取法?

(2)每次取1只(取后放回),则共有多少种不同取法?

(3)每次取1只(取后不放回),则第二次取到白球的取法共有多少种?

(4)每次取1只(取后放回),则第二次取到白球的取法共有多少种?

解 这是一种典型的排队问题,设有四个位置(图9-2)

1	2	3	4
---	---	---	---

图 9-2

(1)分四个步骤完成,先取一个球放入1号位置,共有11种取法,再取一个球放入2号位置,共有10种取法;第3,4号位置分别有9,8种取法,因此不同取法为

$$11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7920(\text{种})$$

(2)分四个步骤完成,每个步骤都有11种取法,从而共有

$$11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641(\text{种})$$

(3)分四个步骤完成,先取一个白球放到第2号位置,共有5种取法,再依次取三个球分别放入1,3,4号位置,分别有10,9,8种取法,由乘法原理,不同取法为

$$5 \times 10 \times 9 \times 8 = 3600(\text{种})$$

(4)分四个步骤完成,先取一个白球放到第2号位置,共有5种取法;再分别依次取球放入1,3,4号位置,每个步骤都有11种取法,从而由乘法原理,总取法为

$$5 \times 11 \times 11 \times 11 = 6655(\text{种})$$

例4.5 由0,1,2,3,4,5

(1)可组成多少个无重复数字的不同三位偶数?

(2)可组成多少个不同的三位偶数(允许有重复数字)?

(3)可组成多少个能被5整除的三位数(允许有重复数字)?

解 设有三个位置(图9-3)

百位	十位	个位
----	----	----

图 9-3

(1)可设计为三种方案

1. 个位数字为0,有 $5 \times 4 = 20(\text{种})$

2. 个位数字为2,有 $4 \times 4 = 16(\text{种})$

3. 个位数字为4,有 $4 \times 4 = 16(\text{种})$

从而共有

$$20 + 16 + 16 = 52(\text{种})$$

(2)可设计为三种方案

1. 个位数字为0,有 $5 \times 6 = 30(\text{种})$

2. 个位数字为2,有 $5 \times 6 = 30(\text{种})$

3. 个位数字为4,有 $5 \times 6 = 30(\text{种})$

共有

$$30 + 30 + 30 = 90(\text{种})$$

(3)可设计为两种方案

1. 个位数字为0,有 $5 \times 6 = 30(\text{种})$

2. 个位数字为5,有 $5 \times 6 = 30(\text{种})$

则共有

$$30 + 30 = 60 (\text{种})$$

三 分房问题 ④

例4.6 10个人进入8个房间,共有多少种不同的进入方法?

解 将8个房间编号(图9-4)

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

图 9-4

分十个步骤,让10个人依次进入,每个人都有8种不同进法,从而共有 8^{10} 种不同的进入方法.

注: n 个人的生日问题、投信问题等都属于分房问题.在此类问题中,关键要分清什么是“人”,什么是“房”,不能颠倒.

例4.7 从4名候选人中,评选出1名三好学生,1名优秀干部,1名先进团员,若允许1人同时得几个称号,则不同的评选方案共有多少种?

解 一个称号必须给1个人,且只能给一个人,但允许1个人同时得几个称号.从而此问题可归纳为分房问题,这里称号是“人”,而人是“房”.

将4人编号(图9-5)

1	2	3	4
---	---	---	---

图 9-5

分三个步骤,依次评选三好学生、优秀干部及先进团员,则不同评选方案共有 4^3 种.

四 分组问题 ④

例4.8 分配9个人去完成甲、乙、丙三项任务

(1)甲任务需2人,乙任务需3人,丙任务需4人,则不同的选派方法共有多少种?

(2)甲任务需2人,乙任务需2人,丙任务需5人,则不同的选派方法共有多少种?

(3)甲、乙、丙三任务各需3人,则不同的选派方法共有多少种?

解 (1)分三个步骤完成,第一个步骤从9人中选出2人去完成甲任务,共有 C_9^2 种选法,再从剩下7人中选3人去完成乙任务,共有 C_7^3 种选法,最后派剩下4人去完成丙任务,共有 C_4^4 种选法.由乘法原理,不同的选派方法共有

$$C_9^2 C_7^3 C_4^4 (\text{种})$$

(2)与(1)类似共有 $C_9^2 C_7^2 C_5^5$ 种不同的选派方法.

(3)同(1)类似共有 $C_9^3 C_6^3 C_3^3$ 种不同的选派方法.

例 4.9 将 9 个人以下列三种方式分为三个小组, 则不同的分组方法各为多少种?

(1) 将 9 个人以 2, 3, 4 分为三组.

(2) 将 9 个人以 2, 2, 5 分为三组.

(3) 交 9 个人以 3, 3, 3 分为三组.

解 (1) 分三个步骤完成, 从 9 人中选出 2 人分为一组, 有 C_9^2 种分法, 再从剩下 7 人选中 3 人分成一组, 最后将剩下 4 人分一组, 由乘法原理, 不同分组方法共有

$$C_9^2 C_7^3 C_4^4 (\text{种})$$

(2) 分三个步骤完成[与(1)类似]共有 $C_9^2 C_7^2 C_5^5$ (种). 但由于有两个小组人数相同, 这样分组会出现重复, 从而正确答案为

$$\frac{C_9^2 C_7^2 C_5^5}{2!} (\text{种})$$

(3) 与(2)类似, 正确答案应为 $\frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{3!}$ (种)

例 4.10 将 9 个人以下列三种方式分为三个小组, 去完成三项不同任务, 则不同的分配方案各有多少种?

(1) 将 9 个人以 2, 3, 4 人为三组.

(2) 将 9 个人以 2, 2, 5 人为三组.

(3) 将 9 个人以 3, 3, 3 人为三组.

解 (1) 不同的分配方案为 $C_9^2 C_7^3 C_4^4 3!$ (种)

(2) 不同的分配方案为 $\frac{C_9^2 C_7^2 C_5^5}{2!} 3!$ (种)

(3) 不同的分配方案为 $\frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{3!} 3!$ (种)

第五节 练习

一 问题求解

1. 汽车上有 10 名乘客, 沿途设有 5 个车站, 乘客下车的不同方式共有 ()

(A) $10 \times C_5^1$ 种 (B) P_{10}^5 种 (C) 5^{10} 种

(D) 10^5 种 (E) 以上答案均不正确

2. 5 名学生争夺 3 项比赛冠军, 获得冠军的可能情况种数是 ()

(A) 5^3 (B) 3^5 (C) P_5^3

- (D) C_5^3 (E) 35
3. 从1分、2分、5分及1角的4枚硬币中,至少任取1枚,可以组成不同币值的种数是 ()
- (A) 10 (B) 12 (C) 13
(D) 14 (E) 15
4. 3个人坐在有8个座位的一排椅子上,若每个人的左右两边都有空座位,则不同坐法的种数是 ()
- (A) 24 (B) 23 (C) 22
(D) 25 (E) 26
5. 从1,2,3,4,...,20这20个自然数中任选3个不同的数,使它们成等差数列,这样的等差数列共有 ()
- (A) 90个 (B) 120个 (C) 200个
(D) 180个 (E) 200个
6. 100件产品中有3件次品,现从中任意抽出5件检验,其中至少有2件次品的抽法有 ()种.
- (A) $C_2^2 C_{97}^3$ (B) $C_3^2 C_{97}^3 + C_3^3 C_{97}^2$ (C) $C_3^2 C_{98}^3$
(D) $C_{100}^5 - C_3^1 C_{97}^4$ (E) C_{100}^5
7. 有5名男生,4名女生站成一排,男生不站排头和排尾的排法有 ()种.
- (A) $P_5^5 P_4^4$ (B) $P_4^2 P_7^7$ (C) $P_9^9 - P_5^1 P_8^8$
(D) $P_7^5 P_4^2$ (E) $P_5^4 P_7^2$
8. 4名学生和2名教师排成一排照相,2位教师不在两端,且要相邻的排法共有 ()种.
- (A) 72 (B) 108 (C) 144
(D) 288 (E) 136
9. 5个不同元素 $a_i (i=1,2,3,4,5)$ 排成一列,规定 a_1 不许排第一, a_2 不许排第二,不同的排法共有 ()种.
- (A) 64 (B) 72 (C) 84
(D) 78 (E) 62
10. 4个不同的小球放入甲、乙、丙、丁4个盒中,恰有1个空盒的放法有 ()种.
- (A) $C_4^1 C_4^2$ (B) $C_4^3 P_3^3$ (C) $C_4^1 P_4^4$
(D) $C_4^2 P_4^1$ (E) $C_4^3 C_4^2 P_3^3$

二 条件充分性判断

11. 4个人参加3项比赛,不同的报名法有 3^4 种.

(1) 每人至多报两项且至少报 1 项

(2) 每人报且只报 1 项

12. 将 4 本书分给甲、乙、丙 3 人, 不同的分配方法的种数是 $C_4^2 P_3^3$.

(1) 每人至少 1 本

(2) 甲只能分到 1 本

13. 有甲、乙、丙三项任务, 现从 10 人中选 4 人承担这三项任务, 不同的选派方法共有 2520 种.

(1) 甲项任务需 2 人承担, 乙和丙项任务各需 1 人承担

(2) 乙项任务需 2 人承担, 甲和丙项任务各需 1 人承担

第六节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. C.

解析 用乘法原理, 第一步, 安排第一个乘客下车, 有 5 种方式; 第二步, 安排第二个乘客下车, 也有 5 种方式; 依次类推, 10 名乘客下车的方式共有 5^{10} 种.

2. A.

解析 用乘法原理, 第一步, 让 5 名学生争夺第一项比赛冠军, 则获冠军的可能性有 5 种; 第二步, 让 5 名学生争夺第二项比赛冠军, 也有 5 种可能性; 第三步, 让 5 名学生争夺第三项比赛冠军, 也有 5 种可能性, 从而共有 $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ 种可能情况.

3. E.

解析 用加法原理, 正好取一枚的币值种数为 4, 正好取两枚的币值种数为 $C_4^2 = 6$, 正好取三枚的币值种数为 $C_4^3 = 4$, 正好取四枚的币值种数为 $C_4^4 = 1$, 从而不同种的币值种数共有 $4 + 6 + 4 + 1 = 15$ (种).

4. A.

解析 如图 9-6 所示, 将 8 个座位编号,

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

图 9-6

第一步: 从 8 个座位中选出 3 个, 要求选出来的每个座位的左右都有空座位, 共有 4 种 (从左到右) $(2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 7), (3, 5, 7)$.

第二步: 安排 3 个人去坐选好的 3 个座位, 共有 $3! = 6$ (种) 不同坐法, 从而由乘法原理共有

$$4 \times 6 = 24 (\text{种})$$

5. D.

解析 用穷举法,公差 $d=1$ 的取法共有 $(1,2,3), (2,3,4), \dots, (18,19,20)$,

公差 $d=2$ 的取法共有 $(1,3,5), (2,4,6), \dots, (16,18,20)$,

依次类推,公差 $d=9$ 的取法共有 $(1,10,19), (2,11,20)$,

而公差 $d=-1, d=-2, \dots, d=-9$ 分别与公差 $d=1, d=2, \dots, d=9$ 的取法相同.

因此,总取法为 $2(18+16+14+\dots+2) = 4(1+2+3+\dots+9) = 4 \times \frac{9(1+9)}{2} = 180 (\text{个})$.

6. B.

解析 2次3正的取法共有 $C_3^2 C_{97}^3$ 种,3次2正的取法共有 $C_3^3 C_{97}^2$ 种,

从而总取法为 $C_3^2 C_{97}^3 + C_3^3 C_{97}^2$ 种.

7. B.

解析 第一步,选1名女生站排头,则共有4种可能性;

第二步,再选1名女生站排尾,则有3种可能性;

第三步,让剩下的5男2女站位,则有 $7!$ 种可能性,

从而总排法为 $4 \times 3 \times 7! = P_4^2 P_7^7$.

8. C.

解析 如图9-7所示,将6个位置编号,

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

图 9-7

第一步,为2位老师选位置,则有 $(2,3), (3,4), (4,5)$ 3种排法;第二步,让2位老师站位,有 $2! = 2$ 种排法;第三步,让4名学生站位,有 $4!$ 种排法,从而所求为 $3 \times 2 \times 4! = 144 (\text{种})$.

9. D.

解析 5个不同元素排成一列,总排法为 $5!$ 种,

a_1 排第一的排法有 $4!$ 种,

同理 a_2 排第二的排法也有 $4!$ 种,

而 a_1 排第一且 a_2 排第二的排法有 $3!$ 种,

从而本题所求为 $5! - 4! - 4! + 3! = 78 (\text{种})$.

10. E.

解析 第一步,从4个盒中选出3个盒准备放入小球,共有 C_4^3 种选法;

第二步,从4个小球中选出2个小球放成一组,共有 C_4^2 种选法;

第三步,将三组小球(其中一组2个球,另两组各1个球)分别放入3个盒中,共有 P_3^3 种放法,

从而由乘法原理,总放法为 $C_4^3 C_4^2 P_3^3$ 种.

二 条件充分性判断

11. B.

解析 由条件(1), 4 个人依次去报名, 每个人有 $C_3^2 + C_3^1 = 6$ 种方式.

由乘法原理, 共有 6^4 种不同的报名方法. 从而条件(1) 不充分.

由条件(2), 4 个人依次报名, 每个人有 $C_3^1 = 3$ 种报名方式, 从而共有 3^4 种不同的报名法, 即条件(2) 是充分的.

12. A.

解析 由条件(1), 先从甲, 乙, 丙 3 人中选出 1 人准备分给 2 本书, 再从 4 本书中选出 2 本分给此人, 共有 C_4^2 种分法, 最后将剩余的 2 本书分给 2 人, 有 2 种分法.

由乘法原理, 总分法为 $3 \times C_4^2 \times 2 = C_4^2 P_3^3$, 即条件(1) 是充分的.

由条件(2), 可得分法为 $C_4^1 \times 2^3 \neq C_4^2 P_3^3$.

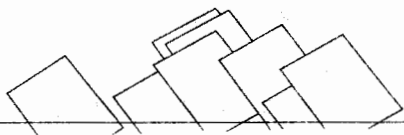
13. D.

解析 由条件(1), 从 10 人中依次选出 2, 1, 1 人分配承担甲, 乙, 丙三项任务, 从而不同的选派方法为 $C_{10}^2 C_8^1 C_7^1 = 2520$ (种).

同理, 由条件(2) 也可得选派方法为 2520 种.

第十章

概率初步



第一节 事件的运算

定义 1.1 做一个试验,每一种可能的结果称为一个基本事件,由这个试验中所有基本事件(即所有可能的结果)所构成的集合,称为样本空间,记为 Ω . 由样本空间 Ω 中的几个基本事件组成的集合就称为一个事件(随机事件),不包含任何基本事件的空集合 Φ ,称为不可能事件,称 Ω 为必然事件. 常用字母 A, B, C, \dots 表示事件.

[注:基本事件也被称为样本点.]

例 1.1 掷一颗骰子,观察出现的点数,则

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2\}$$

都为事件, A 表示掷出的点数为偶数. B 表示掷出的点数小于 3.

事件之间常见的关系和运算:

1. 包含关系, $A \subset B$ 称为事件 A 包含于事件 B 中 \Leftrightarrow 事件 A 发生必然导致事件 B 发生(或 A 发生,则 B 一定发生).

2. 对立关系, \bar{A} (A 不发生)称为 A 的对立事件或逆事件.

3. 互斥关系,若 A 与 B 不能同时发生,则称 A, B 是互斥的,也称 A, B 互不相容.

4. $A \cup B$ (或 $A + B$),表示两个事件 A 和 B 至少有一个发生(也称 A 发生或 B 发生).

5. $A \cap B$ (或 AB),表示两个事件 A 与 B 同时发生(也称 A 发生,并且 B 也发生).

6. $A - B$ (或 $A\bar{B}$),表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

各事件的关系及运算如图 10-1 所示.

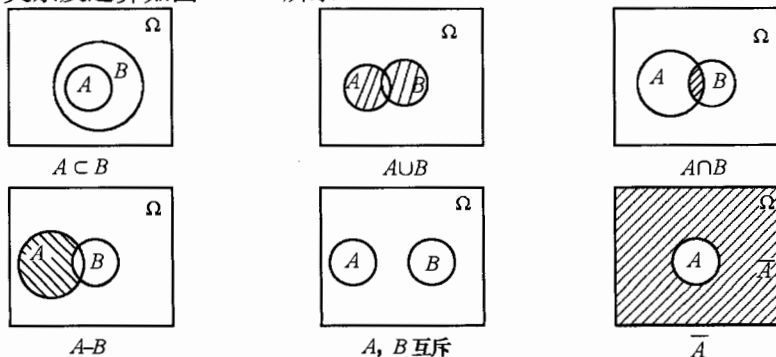


图 10-1

$$(4) A \cup \bar{A} = \Omega, A \bar{A} = \Phi.$$

(4) 德摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

请认准一手资料店铺地址：<http://j1tahupan.taobao.com>

例 2.1 若 $B \subset A, C \subset A$, 且 $P(A) = 0.9, P(\overline{B \cup C}) = 0.8$, 则 $P(A - BC) =$ ()

- (A) 0.1 (B) 0.3 (C) 0.5
(D) 0.7 (E) 0.9

解 由定理 2.1 的第 6 条, $P(A - BC) = P(A) - P(ABC) = 0.9 - P(ABC)$

由于 $B \subset A$, 则 $AB = B, P(ABC) = P(BC)$

再由已知

$$P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(BC) = 0.8$$

得 $P(BC) = 0.2$

因此 $P(A - BC) = 0.9 - 0.2 = 0.7$

答案是 D.

例 2.2 已知 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$ 且 $P(A - B) = 0.3$, 则 $P(\overline{A \cup B}) - P(A \cup B) =$ ()

- (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3
(D) 0.4 (E) 0.5

解 $P(\overline{A \cup B}) - P(A \cup B) = 1 - P(AB) - P(A) - P(B) + P(AB)$
 $= 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0.5 - 0.4 = 0.1$

答案是 A.

第三节 古典概型的概率计算

例 3.1 袋中装有 8 个白球及 5 个黑球.

(1) 从袋中任取 6 个球, 求所取的球恰好含 4 个白球、2 个黑球的概率.

(2) 从袋中任意地接连取出 5 个球, 如果每球被取出后不放回, 求最后取出的球是白球的概率.

解 (1) 从 13 个球中任取 6 个球, 这种取法共有 C_{13}^6 种,

设 $A = \{\text{恰好 4 个白球, 2 个黑球}\}$ 的取法为 $C_8^4 C_5^2$ (用乘法原理), 从而 $P(A) = \frac{C_8^4 C_5^2}{C_{13}^6}$.

(2) 设 $B = \{\text{最后取到为白球}\}$, 由乘法原理, 先从 8 个白球中任取一个 (放在最后位置), 再从剩下的 12 个球中依次取 4 次, 每次取一只分别放在前面位置, 则 B 的取法有 $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ 种, 这个试验中总取法有 $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$ 种, 从而,

$$P(B) = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9} = \frac{8}{13}$$

事实上,例 3.1 的做法可以推广到一般情况,即袋中装有 α 个白球和 β 个黑球.

(1)从袋中任取 $\alpha + \beta$ 个球, A 表示所取的球恰好含 α 个白球和 β 个黑球这一事件($\alpha \leq \alpha$, $\beta \leq \beta$), 则

$$P(A) = \frac{C_{\alpha}^{\alpha} C_{\beta}^{\beta}}{C_{\alpha+\beta}^{\alpha+\beta}}$$

(2)从袋中任意地接连取出 k ($k \leq \alpha + \beta$) 个球, 如果每球被取出后不放回, B 表示最后取出的球是白球这一事件, 则

$$P(B) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

例 3.2 将 n 个人等可能地分到 N ($n \leq N$) 间房中去, 试求下列事件的概率:

A = “某指定的 n 个房间中各有 1 人”

B = “恰有 n 间房中各有 1 人”

C = “某指定的房中恰有 m ($m \leq n$) 人”

解 将 n 个人等可能地分配到 N 间房中的每一间去, 共有 N^n 种分法(用乘法原理).

对于事件 A , 对固定的某 n 个房间, 第一个人可分配到其中的任一间, 因而有 n 种分法, 第 2 个人分配到余下 $n-1$ 间中的任意一间, 有 $n-1$ 种分法, 依此类推, 事件 A 包含的基本事件总数为 $n!$, 于是

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}$$

对于事件 B , 由于“恰有 n 间房”可在 N 间房中任意选取, 且并不是指定的, 故第一个步骤是从 N 间房中选取 n 个房间, 有 C_N^n 种选法. 对于选出来的 n 间房, 按上面的分析, 事件 B 共含有 $C_N^n n!$ 个基本事件, 因此

$$P(B) = \frac{C_N^n n!}{N^n}$$

对于事件 C , 由于“恰有 m 个人”可自 n 个人中任意选出, 并不是指定的, 因此第一步先选这 m 个人, 共有 C_n^m 中选法, 而其余 $n-m$ 个人可任意分配到其余 $N-1$ 间房中, 有 $(N-1)^{n-m}$ 种分法, 因此 C 包含的基本事件数为 $C_n^m (N-1)^{n-m}$, 因此

$$P(C) = \frac{C_n^m (N-1)^{n-m}}{N^n}$$

例 3.3 从 0, 1, 2, ..., 9 这十个数字中任意选出三个不同的数字, 求下列事件的概率

A_1 = “三个数字中不含 0 和 5”

A_2 = “三个数字中不含 0 或 5”

解 总的选法为 C_{10}^3 , 对于 A_1 , 不含 0 和 5, 即在剩余的 8 个数中任取 3 个, 共有 C_8^3 种取法, 因此

$$P(A_1) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$$

$$A_2 = \text{“三个数字中不含0”} \cup \text{“三个数字中不含5”} = C_1 \cup C_2$$

$$P(A_2) = P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 C_2) = \frac{C_9^3}{C_{10}^3} + \frac{C_9^3}{C_{10}^3} - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{14}{15}$$

第四节 条件概率及乘法公式

一 条件概率

在实际问题中,常常要计算在某个事件 A 已经发生的条件下,另一个事件 B 发生的概率,记为 $P(B|A)$.

在古典概型中,若事件 A 中包含 m 个不同的基本事件,事件 AB 中包含 k 个不同的基本事件,则 $P(B|A) = \frac{k}{m}$,一般也有:

定义 4.1 设 A, B 是两个随机事件,且 $P(A) > 0$,则称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率.

二 乘法公式

由条件概率公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$,立即可得下述定理.

定理 4.1(乘法公式) 对于任意的事件 A, B ,若 $P(A) > 0$,则

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

乘法公式可推广到多个事件的情形.

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件($n \geq 2$),且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$,则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

例 4.1 甲乙两班共有 70 名同学,其中女生 40 名,设甲班有 30 名同学,其中女生 15 名,则在碰到甲班同学的条件下,恰好碰到的是一名女同学的概率为 ()

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{2}{5}$

(E) $\frac{4}{5}$

解 设 $A = \text{“碰到甲班的同学”}$, $B = \text{“碰到的是女生”}$.

$$P(B|A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

所以选 A.

例 4.2 已知在 10 件产品中有 2 件次品,在其中任取两次,每次任取一件,做不放回抽样,求下列事件的概率:

- (1) 两件都是正品.
- (2) 两件都是次品.
- (3) 一件是正品,一件是次品.

解 设 A_1 = “第一次取出的是正品”, A_2 = “第二次取出的是正品”.

$$(1) P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

$$(2) P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

$$\begin{aligned} (3) P(A_1 \bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 A_2) &= P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) \\ &= P(A_1) P(\bar{A}_2 | A_1) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2 | \bar{A}_1) \\ &= \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{45} \end{aligned}$$

例 4.3 已知 $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{6}$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B})$ 等于 ()

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{12}$ (E) $\frac{3}{4}$

$$\text{解} \quad P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(B)} = \frac{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + P(AB)}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\text{由 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{6} \text{ 可得}$$

$$P(AB) = \frac{1}{18}$$

即

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{7}{12}$$

所以选 D.

第五节 事件的独立性及独立试验序列概型

一 事件的独立性

定义 5.1 若事件 A 和事件 B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A 和事件 B 相互独立(两两独立或独立).

若 A 与 B 独立, 则可推出 \bar{A} 与 \bar{B} , A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B 都是独立的. 事实上, 容易证明, 在 A 与 B , \bar{A} 与 \bar{B} , A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B 这四对事件中若其中一对独立, 则另外三对都独立.

定义 5.2 A, B, C 为三个事件, 若满足

$$P(AB) = P(A)P(B), P(AC) = P(A)P(C), P(BC) = P(B)P(C)$$

则称 A, B, C 两两独立.

定义 5.3 A, B, C 为三个事件, 若满足:

(1) A, B, C 两两独立

(2) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

则称 A, B, C 相互独立.

若事件 A, B, C 相互独立, 则 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 也相互独立, A 与 $B \cup C$ 也相互独立等等.

以上定义可推广到多个事件的情形.

定义 5.4 对于 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 若所有可能的组合

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

\vdots

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n) \quad (\text{这时 } 1 \leq i, j, k, \dots \leq n)$$

成立, 则称 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立.

性质 1 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则一定为两两独立; 而两两独立却不一定是相互独立的.

性质 2 如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n)$$

性质 2 在计算“ n 个独立事件至少有一个发生”的概率时非常有用.

例 5.1 (条件充分性判断) A, B, C 相互独立.

(1) A, B, C 两两独立.

(2) A 与 BC 独立.

解 A, B, C 两两独立, 不能推出 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. 不能保证 A, B, C 相互独立, 即条件(1)不充分.

由条件(2), $P(ABC) = P(A)P(BC)$ 也不能推出 A, B, C 相互独立.

联合条件(1)和(2), 则有 A, B, C 相互独立. 故答案为 C.

例 5.2 设 A, B, C 是三个相互独立的事件, 且 $0 < P(C) < 1$, 则在下列给出的五对事件中不相互独立的事件是 ()

(A) $\overline{A \cup B}$ 与 C

(B) \overline{AC} 与 \bar{C}

(C) \overline{AB} 与 \bar{C}

(D) $\overline{A-B}$ 与 \overline{C} (E) $A-AB$ 与 C

解 若 A, B, C 是相互独立的, 则由 A, B, C 这三个事件经过事件的运算组成的新的事件组中, 各事件中不含相同的字母, 都是相互独立的, 在此例中只有选项 (B) 的 \overline{AC} 与 \overline{C} , 两事件有相同字母 C , 从而它们是不独立的.

答案为 B.

例 5.3 设甲、乙两射手独立地对同一目标射击一次, 他们的命中率分别是 0.7 与 0.8, 求:

- (1) 两人同时击中目标的概率.
- (2) 至少有一人击中目标的概率.
- (3) 恰好有一人击中目标的概率.

解 设 $A =$ “甲击中目标”, $B =$ “乙击中目标”.

已知 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.8, P(AB) = P(A)P(B)$, 则

- (1) $P(AB) = P(A)P(B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$
- (2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$
- (3) $P(A \cup B \cup \overline{AB}) = P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B)$
 $= 0.7 \times 0.2 + 0.3 \times 0.8 = 0.38$

例 5.4 设有两门高射炮, 每一门击中飞机的概率都是 0.6, 则同时各发射一发炮弹而击中飞机的概率是多少? 若有一架敌机入侵领空, 欲以 99% 以上的概率击中它, 问至少需要配备多少门高射炮?

解 对射击问题, 我们视其为独立的.

设 $A_1 =$ 第一门炮击中, $A_2 =$ 第二门炮击中

则同时各发射一发炮弹而击中飞机的概率是

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 0.6 + 0.6 - 0.6 \times 0.6 = 0.84$$

设 $A_i =$ “第 i 门炮发射一发炮弹而击中敌机”

对第二问, 设需配备 n 门高射炮, 依题意 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) > 0.99$$

$$\begin{aligned} \text{则 } P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_n}) \\ &= 1 - (0.4)^n > 0.99, \quad (0.4)^n < 1 - 0.99 \end{aligned}$$

$$\text{解得 } n > \frac{\ln 0.01}{\ln 0.4} \approx 5.026, \text{ 取 } n = 6.$$

故至少需配备 6 门高射炮, 同时各发射一发炮弹, 可保证以 99% 以上的概率击中敌机.

二 独立试验序列概型 ④

进行 n 次试验, 如果每次试验的条件都相同, 且各次试验相互独立 (即每次试验的结果都不受其他各次试验结果发生情况的影响), 则称为 n 次重复独立试验.

定义 5.5 如果某试验的可能结果只有两个: A 与 \bar{A} , 且 $P(A) = p > 0, P(\bar{A}) = 1 - p > 0$, 则称这一试验为贝努利试验. 将贝努利试验独立地重复 n 次所得到的 n 次重复独立试验, 称为 n 重贝努利试验.

例 5.5 掷一颗骰子, 记 $A =$ “掷出的点数为 1 点”, $\bar{A} =$ “掷出的点数不是 1 点”, 则在每次试验中 $P(A) = \frac{1}{6}, P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$, 现将骰子连续掷 3 次, 问在这 3 次试验中 A 恰好发生了 0, 1, 2, 3 次的概率分别为多少?

解 设 $A_1 =$ “第一次掷出为 1 点”

$B_1 =$ “第二次掷出为 1 点”

$C_1 =$ “第三次掷出为 1 点”

k 表示 3 次试验中 A 发生的次数.

则在这 3 次试验中, A 发生了 0 次 (即一个 1 点也未掷出) 的概率为

$$\begin{aligned} P(k=0) &= P(\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1) \\ &= P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(\bar{C}_1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

A 发生了 1 次的概率为

$$\begin{aligned} P(k=1) &= P(A_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1 \cup \bar{A}_1 B_1 \bar{C}_1 \cup \bar{A}_1 \bar{B}_1 C_1) \\ &= P(A_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1) + P(\bar{A}_1 B_1 \bar{C}_1) + P(\bar{A}_1 \bar{B}_1 C_1) \\ &= P(A_1)P(\bar{B}_1)P(\bar{C}_1) + P(\bar{A}_1)P(B_1)P(\bar{C}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(C_1) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} \end{aligned}$$

A 发生了 2 次的概率为

$$\begin{aligned} P(k=2) &= P(A_1 B_1 \bar{C}_1 \cup A_1 \bar{B}_1 C_1 \cup \bar{A}_1 B_1 C_1) = P(A_1 B_1 \bar{C}_1) + P(A_1 \bar{B}_1 C_1) + P(\bar{A}_1 B_1 C_1) \\ &= P(A_1)P(B_1)P(\bar{C}_1) + P(A_1)P(\bar{B}_1)P(C_1) + P(\bar{A}_1)P(B_1)P(C_1) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-2} \end{aligned}$$

A 发生了 3 次的概率为

$$P(k=3) = P(A_1 B_1 C_1) = P(A_1)P(B_1)P(C_1) = P(A_1)P(B_1)P(C_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-3}$$

事实上,对贝努利试验,有:

定理 5.1 在 n 重贝努利试验中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

这一公式称为二项概率公式.

例如,连续射击 n 次,连续抛掷 n 次硬币,有放回抽样 n 次等都属于 n 重贝努利试验.

定理 5.2 (二项式定理)

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0$$

在二项展开式中,共有 $n+1$ 项,其一般项为

$$C_n^k a^k b^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

例 5.6 一批产品中一级品率为 0.3,现进行有放回地抽样,共抽取 10 个样品,求

(1) 10 个样品中恰有 2 个一级品的概率

(2) 10 个样品中至少有 2 个一级品的概率

解 这是一个 10 重贝努利试验,设 A = “抽到一级品”,则

$$P(A) = 0.3 \quad P(\bar{A}) = 0.7$$

(1) 设 B = “10 个样品中恰有 2 个一级品”,则

$$P(B) = C_{10}^2 (0.3)^2 (0.7)^8 \approx 0.2335$$

(2) 设 C = “10 个样品中至少有 2 个一级品”,则 \bar{C} = “10 个样品至多有一个一级品”.

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - C_{10}^0 (0.3)^0 (0.7)^{10} - C_{10}^1 (0.3)^1 (0.7)^9 \approx 0.8507$$

例 5.7 在 $(a+x)^{20}$ 中, $a^3 x^{17}$ 的系数为

()

(A) 1140

(B) 1160

(C) 980

(D) 760

(E) 540

解 $(a+x)^{20}$ 的一般项为 $C_{20}^k a^k x^{20-k}$

$$\text{从而 } a^3 x^{17} \text{ 系数为 } C_{20}^3 = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

答案是 A.

例 5.8 在 $(1-x^3)(1+x)^{10}$ 的展开式中,含 x^5 的项的系数为

()

(A) -297

(B) -252

(C) 297

(D) 207

(E) -207

解 $(x+1)^{10}$ 的一般式为 $C_{10}^k x^k$,

从而 $k=2, k=5$ 的项与 $(1-x^3)$ 的积产生 x^5 项,系数为 $C_{10}^5 + (-1)C_{10}^2 = 252 - 45 = 207$

答案是 D.

第六节 练习

一 问题求解

1. 某班级有 18 名男生, 12 名女生, 从中选举 3 名班干部, 则所选出的干部为 2 男 1 女以及至少 2 名女生的概率分别为 ()

(A) $\frac{C_{18}^2 C_{12}^1}{C_{30}^3}, \frac{C_{18}^1 C_{12}^2 + C_{12}^3}{C_{30}^3}$

(B) $\frac{C_{18}^2 P_{12}^2}{C_{30}^3}, \frac{C_{18}^1 C_{12}^2 + C_{12}^3}{C_{30}^3}$

(C) $\frac{C_{18}^2 C_{12}^1}{C_{30}^3}, \frac{C_{12}^1 C_{29}^2}{C_{30}^3}$

(D) $\frac{C_{18}^1 C_{12}^2}{C_{30}^3}, \frac{C_{18}^1 C_{12}^2 + C_{12}^3}{C_{30}^3}$

(E) 以上答案均不正确

2. 袋中有 5 个白球和 3 个黑球, 从中任取 2 个, 则取得两球同色的概率是 ()

(A) $\frac{C_3^1 C_3^2 + C_5^1}{C_8^2}$

(B) $\frac{C_3^1 C_3^1 + C_5^2}{C_8^2}$

(C) $\frac{C_3^2 + C_5^2}{C_8^2}$

(D) $\frac{C_3^2 + C_3^1 C_5^1}{C_8^2}$

(E) $\frac{C_3^2 C_5^1 + C_5^2}{C_8^2}$

3. 100 件产品中有 10 件次品, 现从中取出 5 件进行检验, 则所取的 5 件产品中至多有一件次品的概率为 ()

(A) $\frac{C_{90}^5 - C_{10}^5}{C_{100}^5}$

(B) $\frac{C_{90}^5 + C_{10}^1 C_{90}^4}{C_{100}^5}$

(C) $\frac{C_{90}^4 C_{10}^1 + C_{10}^5}{C_{100}^5}$

(D) $\frac{C_{90}^1 C_{99}^4}{C_{100}^5}$

(E) 以上均不正确

4. 一射手对同一目标独立地进行 4 次射击, 若至少命中一次的概率是 $\frac{80}{81}$, 则该射手的命中率是 ()

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{8}{9}$

5. 在贝努利试验中, 事件 A 出现的概率为 $\frac{1}{3}$, 则在此 3 重贝努利试验中, 事件 A 出现奇数次的概率是 ()

(A) $\frac{2}{27}$

(B) $\frac{8}{27}$

(C) $\frac{13}{27}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{33}{27}$

6. 甲、乙、丙三人各自去破译一个密码, 他们能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 则恰有一个译出的概率为 ()

(A) $\frac{11}{30}$

(B) $\frac{13}{30}$

(C) $\frac{17}{30}$

(D) $\frac{19}{30}$

(E) $\frac{23}{30}$

7. 某市电话号码由 8 位数字组成, 设每位数字可以为从 0 到 9 这 10 个数字中的任一个, 电话号码由 8 个不同数字组成的概率是 ()

(A) $\frac{P_{10}^8}{10^8}$

(B) $\frac{C_{10}^8}{10^8}$

(C) $\frac{P_{10}^8}{8^{10}}$

(D) $\frac{C_{10}^8}{8^{10}}$

(E) $\frac{C_{10}^8 C_{10}^2}{8^{10}}$

8. 打印一页文件, 甲出错的概率是 0.04, 乙出错的概率是 0.05, 从两人打印的文件中各任取一页, 其中恰有一页有错的概率是 ()

(A) 0.038

(B) 0.048

(C) 0.086

(D) 0.096

(E) 0.059

9. 已知 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(A \cup B) =$ ()

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{3}{5}$

10. 某人忘了电话号码的最后一位数字, 因而他随意地拨号, 则拨号不超过三次而接通所需电话的概率是 ()

(A) $\frac{1}{10}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{3}{10}$

(D) $\frac{2}{5}$

(E) $\frac{1}{2}$

三 条件充分性判断

11. 事件 A, B 的概率 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$, 则 $P(\bar{A}B) = \frac{1}{2}$

(1) $A \subset B$

(2) A 与 B 互斥

12. 甲、乙、丙三人各自去破译一个密码, 则密码能被破译的概率为 $\frac{3}{5}$.

(1) 甲、乙、丙三人能译出的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}$

(2) 甲、乙、丙三人能译出的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

第七节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. A.

解析 总选法为 C_{30}^3 , 设 A: 所选出的干部为 2 男 1 女,

则 A 的选法为 $C_{18}^2 C_{12}^1$, 从而 $P(A) = \frac{C_{18}^2 C_{12}^1}{C_{30}^3}$.

设 B: 所选出的干部中至少有 2 名女生,

则 B 的选法为 $C_{18}^1 C_{12}^2 + C_{12}^3$, 即 $P(A) = \frac{C_{18}^1 C_{12}^2 + C_{12}^3}{C_{30}^3}$.

2. C.

解析 从 8 个球中任取 2 个, 总取法为 C_8^2 ,

设 A: 取得两球同色 (两球都是白球或两球都是黑球),

则 A 的取法为 $C_5^2 + C_3^2$, 从而 $P(A) = \frac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2}$.

3. B.

解析 从 100 件产品中任取 5 件, 总取法为 C_{100}^5 ,

设 A: 5 件产品中至多有一件次品 (一次四正或五正),

则 A 的取法为 $C_{10}^1 C_{90}^4 + C_{90}^5$, 从而

$$P(A) = \frac{C_{10}^1 C_{90}^4 + C_{90}^5}{C_{100}^5}$$

4. D.

解析 设 A: 表示第 i 次命中目标 ($i=1, 2, 3, 4$), x 表示该射手的命中率,

则 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = x$,

由已知

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \frac{80}{81}$$

从而 $1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}) = 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}) = 1 - [P(\overline{A_1})]^4 = 1 - (1-x)^4 = \frac{80}{81}$

$$\text{得 } (1-x)^4 = \frac{1}{81}, x = \frac{2}{3}.$$

5. C

解析) 由已知 $P(A) = \frac{1}{3}, P(\bar{A}) = \frac{2}{3}, n=3$, 则所求事件的概率为

$$P(k=1 \cup k=3) = P(k=1) + P(k=3) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{12}{3^3} + \frac{1}{3^3} = \frac{13}{27}$$

6. B

解析) 用 A, B, C 分别表示甲能译出, 乙能译出, 丙能译出三个事件,

$$\text{则由已知 } P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } P(\text{恰有一个译出}) &= P(A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) = P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{30} \end{aligned}$$

7. A

解析) 由 10 个数字共可组成 10^8 个 8 位数字的电话号码, 其中电话号码由 8 个不同数字组成的个数为 P_{10}^8 , 从而所求事件概率为 $\frac{P_{10}^8}{10^8}$.

8. C

解析) 设 A : 甲出错, 设 B : 乙出错,

由已知 $P(A) = 0.04, P(B) = 0.05$, 则所求概率为

$$\begin{aligned} P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) &= P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) \\ &= 0.04 \times 0.95 + 0.96 \times 0.05 = 0.086 \end{aligned}$$

9. B

$$\text{解析) 由 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}, P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{可知 } P(AB) = \frac{1}{12}, P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{从而 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

10. C

解析) A_1, A_2, A_3 分别表示第一次, 第二次, 第三次拨号成功, 则所求事件的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

二 条件充分性判断

11. B

解析 由于 $P(\overline{AB}) = P(B - A) = P(B) - P(AB)$,

即题干要求推出 $P(AB) = 0$.

由条件(1), $A \subset B$,

则 $P(AB) = P(A) = \frac{1}{3} \neq 0$,

即条件(1)不充分.

由条件(2), $AB = \Phi$,

从而 $P(AB) = P(\Phi) = 0$.

故条件(2)充分.

12. E

解析 用 A, B, C 分别表示, 甲, 乙, 丙能破译三个事件, 题干要求推出

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{5}$$

即

$$1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{3}{5}$$

由条件(1), $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{7}$, 从而

$$1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{4}{7} \neq \frac{3}{5}$$

由条件(2), $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4}$, 从而

$$1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \neq \frac{3}{5}$$

即条件(1)和(2)都不充分.

第二部分

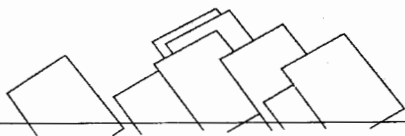
MBA MPA MPAcc联考同步复习指导系列

强 化 篇

- 第十一章 集合与函数
- 第十二章 整数、有理数、实数
- 第十三章 整式及分式
- 第十四章 绝对值、平均值
- 第十五章 方程与不等式
- 第十六章 数列
- 第十七章 应用题
- 第十八章 平面几何与立体几何
- 第十九章 平面解析几何
- 第二十章 排列与组合
- 第二十一章 概率初步

第十一章

集合与函数



第一节 集合

一 集合的概念

集合是数学中最基本的概念之一,是具有某种特定性质的事物的总体. 简单地说,所谓集合就是指作为整体看的一堆东西,通常用大写字母 A, B, C 等表示.

所谓给出一个集合就是规定这个集合是由哪些元素组成的. 因此给出一个集合的方式有两种,一种是列举出它全部的元素,一种是给出这个集合的元素所具有的特殊性质.

例 $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{x | 3 \leq x \leq 5, x \text{ 是实数}\}.$

不含有任何元素的集合称为空集,记为 Φ .

二 集合的基本运算

1. $A = B$ (A 与 B 有完全相同的元素).
2. $A \subset B$ (集合 A 的元素都是集合 B 的元素).
3. $A \cup B$ (属于集合 A , 或者属于集合 B 的全体元素所成的集合).
4. $A \cap B$ (既属于集合 A 又属于集合 B 的全体元素所成的集合).
5. \bar{A} (一般用 Ω 表示一个全集合, $A \subset \Omega$, \bar{A} 表示属于 Ω 但不属于 A 的元素组成的集合).

例 1.1 设 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 4\}$, 则 $\overline{A \cup B} =$ ()

- (A) $\{1, 6\}$ (B) $\{2, 3\}$ (C) $\{2, 6\}$
(D) $\{1, 2, 6\}$ (E) $\{2, 4, 6\}$

解 $A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, 则 $\overline{A \cup B} = \{2, 6\}.$

答案是 C.

例 1.2 若 $A = \{x | -4 < x < 4, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 7, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $\overline{A \cap B} =$ ()

- (A) $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ (B) $(-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$ (C) $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
 (D) $(-\infty, 0)$ (E) $[4, +\infty)$

解 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 4\} = [0, 4)$,

从而 $\overline{A \cap B} = (-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$.

答案是 B.

第二节 函数

函数是一种关系,一般有三种表示:

$$\frac{x}{x+1}, y = \frac{x}{x+1}, f(x) = \frac{x}{x+1}$$

这三种表示代表同一个函数,其中 x 称为自变量, $\frac{x}{x+1}$, y 或 $f(x)$ 称为函数,一般记函数为 $y = f(x)$.

一 函数的定义域

使得函数有意义的自变量 x 的取值范围称为函数 $y = f(x)$ 的自然定义域,简称为定义域.

例 $y = \frac{x}{x+1}$ 的定义域为 $x \neq -1$.

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $[-2, 2]$.

二 函数值的计算

给定函数 $y = f(x)$,即给出了函数值的定义域,就可求出函数在定义域中的函数值.

例 $f(x) = \frac{x}{x+1}$, 则 $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $f(5) = \frac{5}{5+1} = \frac{1}{6}$, $f(t^2) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

三 函数的单调性与奇偶性

单调性:若函数 $y = f(x)$ 在其定义域的某个子集 I 上满足,对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时都有 $f(x_1) < f(x_2)$ [或 $f(x_1) > f(x_2)$], 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增函数(或减函数).

奇偶性:如果函数 $y = f(x)$ 在其定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$ [或 $f(-x) = -f(x)$], 则称 $f(x)$ 是偶函数[或奇函数].

四 反函数

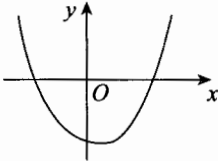
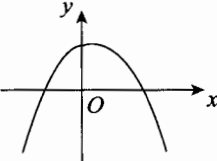
$y=3x-1$ 的反函数为 $x=3y-1$, 即 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$,

若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 互为反函数, 则其表示平面上以直线 $y=x$ 为对称轴的两条对称曲线.

五 一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 及其图像

形如 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的函数称为一元二次函数, 其性质与图像见表 11-1.

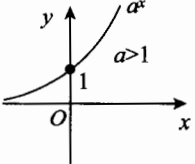
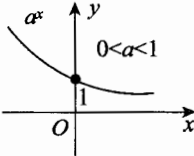
表 11-1

	$y=ax^2+bx+c(a > 0)$	$y=ax^2+bx+c(a < 0)$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$\{y \mid y \geq \frac{4ac-b^2}{4a}\}$	$\{y \mid y \leq \frac{4ac-b^2}{4a}\}$
图像		
顶点	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$	
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
奇偶性	$b=0$, 是偶函数 $b \neq 0$, 是非奇非偶函数	
单调性	递增区间 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 递减区间 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$	递增区间 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 递减区间 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$
最值	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时 $y_{\min} = \frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时 $y_{\max} = \frac{4ac-b^2}{4a}$

六 指数函数与对数函数

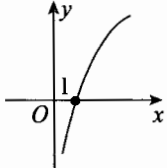
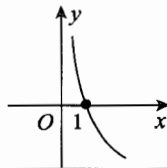
形如 $y=a^x(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的函数称为指数函数, 其图像与性质见表 11-2.

表 11-2

	$y = a^x (a > 1)$	$y = a^x (0 < a < 1)$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	
值域	$(0, +\infty)$	
图像	$x < 0, 0 < y < 1$ $x = 0, y = 1$ $x > 0, y > 1$ 	$x < 0, y > 1$ $x = 0, y = 1$ $x > 0, 0 < y < 1$ 
单调性	单调增函数	单调减函数

形如 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的函数称为对数函数, 对数函数是指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的反函数, 其性质与图像见表 11-3.

表 11-3

	$y = \log_a x (a > 1)$	$y = \log_a x (0 < a < 1)$
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	$(-\infty, +\infty)$	
图像	$0 < x < 1, y < 0$ $x = 1, y = 0$ $x > 1, y > 0$ 	$0 < x < 1, y > 0$ $x = 1, y = 0$ $x > 1, y < 0$ 
单调性	单调增函数	单调减函数

对数函数满足下面运算规律(式中 $M > 0, N > 0$):

$$(1) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(2) \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

$$(3) \log_a M^b = b \log_a M$$

$$(4) \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \text{ (换底公式)}$$

$$(5) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1, a^{\log_a M} = M$$

例 2.1 (2008 年) 一元二次函数 $x(1-x)$ 的最大值为

()

A. 0.05

B. 0.10

C. 0.15

D. 0.20

E. 0.25

解 $x(1-x) = x - x^2 = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{4} = 0.25$ 为最大值.

答案是 E.

例 2.2 (2008 年) 直角边之和为 12 的直角三角形面积的最大值等于 ()

A. 16 B. 18 C. 20

D. 22 E. 不能确定

解 设两直角边长度分别为 a, b ,

由已知 $a + b = 12$, 面积 $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(12 - a) = -\frac{1}{2}[(a - 6)^2 - 36]$

即当 $a = b = 6$ 时, $S = -\frac{1}{2} \times (-36) = 18$ 最大.

答案为 B.

例 2.3 (条件充分性判断) $|x - 1|^{2x+1} < 1$.

(1) $x \in (-3, -2)$

(2) $x \in (1, 2)$

解 题干等价于 $|x - 1|^{2x+1} < |x - 1|^0$

因此有 $\begin{cases} |x - 1| > 1 \\ 2x + 1 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 < |x - 1| < 1 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x > 2 \text{ 或 } x < 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ 0 < x < 2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

从而 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$

所以选 D.

第三节 练习

一 问题求解 ①

1. 已知 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 则 $\bar{A} \cap B =$ ()

(A) \emptyset (B) A (C) B (D) Ω (E) $\{2, 4\}$

2. 已知 $M = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, 则 $M \cup N$ 和 $\overline{M \cap N}$ 分别是 ()

(A) $[1, 3]$ 和 $(-2, +\infty)$ (B) $(1, 3)$ 和 $(-2, +\infty)$

(C) $(2, 4)$ 和 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ (D) $[-2, 4]$ 和 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

(E) 以上答案均不正确

3. 设 $S = \{(x, y) | xy > 0\}$, $T = \{(x, y) | x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$, 则

(A) $S \cup T = S$

(B) $S \cup T = T$

(C) $S \cap T = S$

(D) $S \cap T = \emptyset$

(E) $S \cup T = \{(x, y) | xy < 0\}$

4. 不等式 $\log_{(2x-1)}(x^2 - x + 1) < 0$ 的解集合为

(A) 空集合

(B) $(1, 2)$

(C) $(2, 4)$

(D) $(-1, 4)$

(E) 以上答案均不正确

5. 设 $a > 0, a \neq 1$. 如果 $y = a^x$ 的反函数的图像经过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, 那么 $a =$

(A) 16

(B) 4

(C) 3

(D) 2

(E) $\sqrt{2}$

6. 函数 $y = ax^2 - bx + c (a \neq 0)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增的充分必要条件是

(A) $a < 0$ 且 $b \geq 0$

(B) $a < 0$ 且 $b \leq 0$

(C) $a > 0$ 且 $b > 0$

(D) $a > 0$ 且 $b < 0$

(E) $a > 0$ 且 $b \leq 0$

7. 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像的对称轴为 $x = 2$, 其图像过点 $(4, 0)$, 则 $\frac{f(-2)}{f(2)} =$

(A) 3

(B) 2

(C) -3

(D) -2

(E) 1

二 条件充分性判断

8. $2^{3x^2+1} > 16^{2-x}$

(1) $x \in (0, 1)$

(2) $x \in (2, 3)$

9. (2009) $|\log_a x| > 1$

(1) $x \in [2, 4], \frac{1}{2} < a < 1$

(2) $x \in [4, 6], 1 < a < 2$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. C.

解析 注意到 $\bar{A} = \{0, 2, 4\} = B$, 从而 $\bar{A} \cap B = B$.

2. D.

解析 如图 11-1 所示, 在实数轴表示 M 和 N 的部分, 则知 $M \cup N = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, $M \cap N = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 从而 $\overline{M \cap N} = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 3\} = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

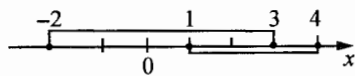


图 11-1

3. A.

解析 T 表示平面直角坐标系内第一象限上所有点的集合, 而 S 表示第一和第三象限上所有点的集合, 从而 $T \subset S$, $S \cup T = S$.

4. A.

解析 原不等式等价于 $\log_{(2x-1)}(x^2 - x + 1) < \log_{(2x-1)} 1$

$$\text{从而} \begin{cases} 2x-1 > 1 \\ 0 < x^2 - x + 1 < 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 0 < 2x-1 < 1 \\ x^2 - x + 1 > 1 \end{cases}$$

$$\text{因此} \begin{cases} x > 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ x < 0 \text{ 或 } x > 1 \end{cases}$$

即 不等式无解.

5. B.

解析 反函数是 $x = a^y$, 从而 $\frac{\sqrt{2}}{2} = a^{-\frac{1}{4}}$, 得 $a = 4$.

6. E.

解析 二次函数 $y = ax^2 - bx + c$ ($a \neq 0$) 在 x 充分大时单调递增, 只能是 $a > 0$ ($a < 0$ 时, 是单调减的).

函数在 $[0, +\infty)$ 单调增, 则要求对称轴 $x = -\frac{-b}{2a} = \frac{b}{2a}$ 不在 y 轴的右侧,

即 $\frac{b}{2a} \leq 0$, 所以有 $b \leq 0$.

7. C.

解析 由题意, $y = f(x)$ 的图像过点 $(4, 0)$, 即当 $x = 4$ 时, $f(4) = a \times 4^2 + b \times 4 + c = 0$,

又图像的对称轴为 $x = 2 = -\frac{b}{2a}$, 所以 $(4, 0)$ 的对称点 $(0, 0)$ 也在曲线 $y = f(x)$ 上,

函数有两个零点 $x = 0, x = 4$, 从而 $c = 0$.

$$f(x) = ax(x-4), \quad \frac{f(-2)}{f(2)} = \frac{-2(-2-4)a}{2(2-4)a} = -3.$$

条件充分性判断 ④

8. B.

解析 解有关指数函数(或对数函数)的方程不等式, 一般应化为同底的指数函数(或对数函

数), 题干为 $2^{3x^2+1} > 2^{4(2-x)}$, 即 $3x^2 + 1 > 4(2-x)$,

解不等式 $3x^2 + 4x - 7 > 0$, 得 $x \in (-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (1, +\infty)$,

即条件(2)是充分的, 但条件(1)不充分.

9. D.

解析 题干要求推出 $\log_a x > 1$ 或 $\log_a x < -1$

由条件(1), $y = \log_a x$, 如图 11-2 所示, 当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $\log_a x = -1$

若 $x \in [2, 4]$, 则必有 $\log_a x < -1$ 成立, 即条件(1)充分.

由条件(2), $y = \log_a x$, 如图 11-3 所示, 当 $x = a$ 时, $\log_a x = 1$

若 $x \in [4, 6]$, 则必有 $\log_a x > 1$ 成立, 即条件(2)也充分.

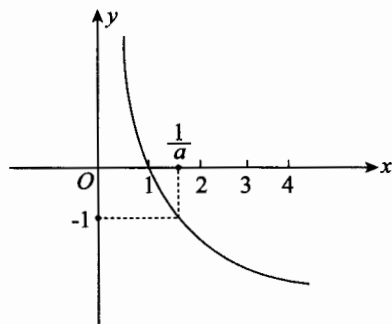


图 11-2

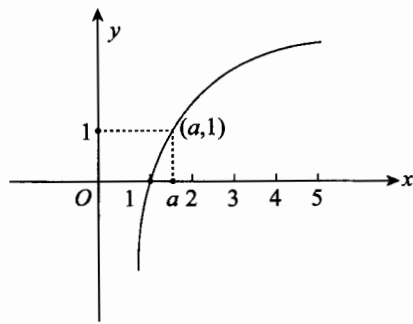
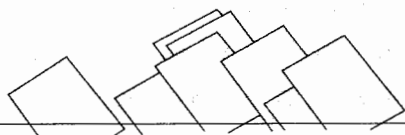


图 11-3

第十二章

整数、有理数、实数



第一节 基本内容提要

一 整数 ④

1. 整数可分为两类:偶数及奇数. 两个相邻的整数必有一偶一奇.
2. 大于1的整数可分为两类:质数及合数. 除了最小的质数2是偶数外,其余质数均为奇数. 任何一个大于1的整数都能分解成若干个质数之积.

二 有理数 ④

有理数可表示为 $\frac{n}{m}$ (n, m 都是整数, $m \neq 0$) 的形式. 两个有理数的和、差、积、商(分母不为零)仍然是一个有理数.

三 实数 ④

有理数和无理数统称为实数.

1. 实数与数轴上的点一一对应.
2. 任意两个实数可进行比较,即对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b, a = b, a > b$ 中有且只有一个关系成立.
3. 当实数 $a \neq 0$ 时, $a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
4. 在实数范围内,负实数无偶次方根.

第二节 典型例题及历年真题解析

一 问题求解 ④

例 2.1 已知 p, q 为质数,且 $5p^2 + 3q = 59$,则以 $p+3, 1-p+q, 2p+q-4$ 为边长的三角形

是

()

(A) 等边三角形

(B) 等腰但非等边三角形

(C) 直角三角形

(D) 钝角三角形

(E) 以上答案均不正确

解 由已知, $5p^2, 3q$ 为一奇一偶, 从而 p, q 为一奇一偶质数.若 $q=2$, 则 $5p^2=53$ 无解.因此得 $\begin{cases} p=2 \\ q=13 \end{cases}$ 则以 5, 12, 13 为边长的三角形是直角三角形 (由于 $5^2 + 12^2 = 13^2$ 成立).

所以选 C.

例 2.2 (2008 年) $\frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^8}{0.1 + 0.2 + 0.3 + \cdots + 0.9} =$ ()

(A) $\frac{85}{768}$ (B) $\frac{85}{512}$ (C) $\frac{85}{384}$ (D) $\frac{255}{256}$

(E) 以上结论均不正确

解 分母 $= 0.1 + 0.2 + 0.3 + \cdots + 0.9 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \cdots + \frac{9}{10} = \frac{1}{10}(1 + 2 + 3 + \cdots + 9)$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{9 \times (1+9)}{2} = 4.5$$

$$\text{分子} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{255}{256}$$

$$\text{因此, 原式} = \frac{255}{256} \times \frac{2}{9} = \frac{85}{384}$$

所以选 C.

例 2.3 (2008 年) $\frac{(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{32}) + \frac{1}{2}}{3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times \cdots \times 3^{10}} =$ ()

(A) $\frac{1}{2} \times 3^{19} + 3^{19}$ (B) $\frac{1}{2} + 3^{19}$ (C) $\frac{1}{2} \times 3^{19}$ (D) $\frac{1}{2} \times 3^9$

(E) 以上结论均不正确

解 分母 $= 3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times \cdots \times 3^{10} = 3^{1+2+3+\cdots+10} = 3^{\frac{10 \times (1+10)}{2}} = 3^{55}$

$$\text{分子} = (1+3)(1+3^2)(1+3^4)\cdots(1+3^{32}) + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1+3+3^2+3^3)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{32}) + \frac{1}{2} \\
 &= (1+3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^7)(1+3^8)\cdots(1+3^{32}) + \frac{1}{2} \\
 &= (1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{63}) + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1-3^{64}}{1-3} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3^{64}}{2}
 \end{aligned}$$

因此, 原式 $= \frac{3^{64}}{2 \times 3^{55}} = \frac{1}{2} \times 3^9$.

所以选 D.

例 2.4 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{9}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10} =$ ()

(A) $1 - \frac{1}{9!}$ (B) $1 - \frac{1}{10!}$ (C) $1 - \frac{9}{10!}$

(D) $1 - \frac{8}{9!}$ (E) $1 + \frac{8}{9!}$

解 注意到 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, 从而

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1 \times 2} + \frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{9}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10} \\
 &= (1 - \frac{1}{2!}) + (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + (\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) + \cdots + (\frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}) = 1 - \frac{1}{10!}
 \end{aligned}$$

所以选 B.

例 2.5 已知 x 是无理数, 且 $(x+1)(x+3)$ 是有理数, 则

- (1) x^2 是有理数 (2) $(x-1)(x-3)$ 是无理数
(3) $(x+1)^2$ 是有理数 (4) $(x-1)^2$ 是无理数

以上结论正确的有()个.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

解 由 x 是无理数, $(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3$ 是有理数

知 $x^2 = (x^2 + 4x + 3) - (4x + 3)$ 是无理数

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 = (x^2 + 4x + 3) - 8x \text{ 是无理数}$$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 4x + 3) - (2x + 2) \text{ 是无理数}$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = (x^2 + 4x + 3) - (6x + 2) \text{ 是无理数}$$

因此(2),(4)正确.

所以选 C.

例 2.6 设 x, y 是有理数, 且 $(x - \sqrt{2}y)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$, 则 $x^2 + 3y^2 =$ ()

(A)3 (B)4 (C)5

(D)6 (E)7

解 由 $(x - \sqrt{2}y)^2 = (x^2 + 2y^2) - 2\sqrt{2}xy = 6 - 4\sqrt{2}$.

得
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

将 $y = \frac{2}{x}$ 代入 $x^2 + 2y^2 = 6$

整理得 $x^4 - 6x^2 + 8 = 0, (x^2)^2 - 6x^2 + 8 = 0,$

从而 $x = \pm 2, y = \pm 1, x^2 + 3y^2 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 = 7$

所以选 E.

二 条件充分性判断

解题说明: 本题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中的结论, 阅读每小題中的条件

(1) 和条件(2)后进行选择.

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

注: 详见本书目录前的“条件充分性判断題的解题说明”. 下文不再一一说明.

例 2.7 (2008 年) m 是一个整数.

(1) 若 $m = \frac{p}{q}$, 其中 p 与 q 为非零整数, 且 m^2 是一个整数

(2) 若 $m = \frac{p}{q}$, 其中 p 与 q 为非零整数, 且 $\frac{2m+4}{3}$ 是一个整数

解 若 m^2 是整数, 则 $m = \frac{p}{q}$ 一定是整数. 因此条件(1)是充分的.

取 $m = \frac{5}{2}$, 可知 $\frac{2m+4}{3} = 3$ 是整数, 但 m 不是整数. 因此条件(2)不充分.

所以选 A.

例2.8 (2008年) $ab^2 < cb^2$

(1) 实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$

(2) 实数 a, b, c 满足 $a < b < c$

解 取 $a = b = c = 0$, 则 $a + b + c = 0$ 成立, 但 $ab^2 < cb^2$ 不成立. 因此条件(1)不充分.

取 $a = -1, b = 0, c = 1$, 则知条件(2)是不充分的.

联合条件(1)和条件(2)也是不充分的.

所以选 E.

例2.9 (2008年) $x > y$

(1) 若 x 和 y 都是正整数, 且 $x^2 < y$

(2) 若 x 和 y 都是正整数, 且 $\sqrt{x} < y$

解 若 x 和 y 都是正整数, $x^2 < y$, 则 $x < y$. 即条件(1)不充分.

也可取 $x = 1, y = 2$, 则知条件(1)和条件(2)都不充分, 联合起来也不充分.

所以选 E.

例2.10 (2008年) $a > b$

(1) a, b 为实数, 且 $a^2 > b^2$

(2) a, b 为实数, 且 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

解 取 $a = -2, b = -1$, 则 $a^2 > b^2$, 但 $a < b$. 因此条件(1)是不充分的.

由条件(2), $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$, 则 $2^a > 2^b$, 从而有 $a > b$ 成立, 即条件(2)是充分的.

所以选 B.

例2.11 若 x 和 y 是整数, 则 $xy + 1$ 能被 3 整除.

(1) 当 x 被 3 除时, 其余数为 1

(2) 当 y 被 9 除时, 其余数为 8

解 取 $x = 4, y = 1$, 则知条件(1)不充分.

取 $y = 17, x = 2$, 知条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2), 令 $x = 3q + 1, y = 9l + 8$,

则 $xy + 1 = (3q + 1)(9l + 8) + 1 = 27ql + 24q + 9l + 9 = 3(9ql + 8q + 3l + 3)$,

因此, $xy + 1$ 能被 3 整除.

所以选 C.

例2.12 (2008年) $\frac{n}{14}$ 是一个整数

(1) n 是一个整数, 且 $\frac{3n}{14}$ 也是一个整数

(2) n 是一个整数,且 $\frac{n}{7}$ 也是一个整数

解 取 $n=7$,则知条件(2)不充分

由条件(1),14 可以整除 $3n$,但 14 与 3 互质
从而 14 可以整除 n ,即条件(1)充分的.

所以选 A.

第三节 练习

一 问题求解

1. 若 $S_n = 1 - 2 + 3 + \cdots + (-1)^{n-1}n$,则 $S_{2006} + S_{2007} =$ ()

- (A) -1 (B) 0 (C) 2
(D) 1 (E) -2

2. $11 + 22 \frac{1}{2} + 33 \frac{1}{4} + \cdots + 77 \frac{1}{64} =$ ()

- (A) $306 \frac{1}{64}$ (B) $307 \frac{63}{64}$ (C) 308
(D) $308 \frac{1}{64}$ (E) $308 \frac{63}{64}$

3. $1 + 3 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{12} + \cdots + 17 \frac{1}{90} =$ ()

- (A) $81 \frac{1}{5}$ (B) $81 \frac{2}{5}$ (C) $82 \frac{1}{5}$
(D) $82 \frac{2}{5}$ (E) $83 \frac{1}{5}$

4. 有一个四位数,它被 131 除余 13,被 132 除余 130,则此数字的各位数字之和为 ()

- (A) 23 (B) 24 (C) 25
(D) 26 (E) 27

5. (2008 年) 一辆出租车有段时间的运营全在东西走向的一条大道上,若规定向东为正,向西为负,且知该车的行驶公里数依次为 $-10, +6, +5, -8, +9, -15, +12$,则将最后一名乘客送到目的地时,该车的位置 ()

- (A) 在首次出发地的东面 1 公里处 (B) 在首次出发地的西面 1 公里处
(C) 在首次出发地的东面 2 公里处 (D) 在首次出发地的西面 2 公里处
(E) 仍在首次出发地

二 条件充分性判断 ④

6. $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ 中至少有一个整数.

(1) a, b, c 是三个任意的整数

(2) a, b, c 是三个连续的整数

7. $4a^2 + 2a - 2 = -1$

(1) a 表示 $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ 的小数部分

(2) a 表示 $3-\sqrt{5}$ 的小数部分

8. 设 a, b, c 为有理数, 则 $a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 成立.

(1) $a=0, b=-1, c=1$

(2) $a=0, b=1, c=1$

9. $x^6 + y^6 = 400$

(1) $x = \sqrt{5+\sqrt{5}}, y = \sqrt{5-\sqrt{5}}$

(2) $(x+1)^2 + \sqrt{y-2\sqrt{2}} = 0$

10. 要使两个相邻正整数的值可以确定.

(1) 它们的平方和大于 61

(2) 若将它们都减去 1, 则所得两数之比小于 $\frac{6}{7}$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解 ④

1. D.

解析

$$S_{2006} = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2005 - 2006 = -1003$$

$$S_{2007} = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2005 - 2006 + 2007 = -1003 + 2007$$

因此

$$S_{2006} + S_{2007} = -1003 - 1003 + 2007 = 1$$

2. E.

$$\text{解析} \quad 11 + 22 \frac{1}{2} + 33 \frac{1}{4} + \cdots + 77 \frac{1}{64} = (11 + 22 + \cdots + 77) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{64} \right)$$

$$= 11 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 7) + \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^6} \right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 11 \times \frac{7 \times (1+7)}{2} + 1 - \frac{1}{64} = 308 \frac{63}{64}$$

3. B.

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad 1 + 3 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{12} + \cdots + 17 \frac{1}{90} &= (1 + 3 + 5 + \cdots + 17) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{90} \right) \\ &= \frac{9 \times (1+17)}{2} + \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} \right) \\ &= 81 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= 81 + \frac{2}{5} = 81 \frac{2}{5} \end{aligned}$$

4. C.

解析 设所求四位数为 n , 由已知

$$\begin{cases} n = 131k_1 + 13 \\ n = 132k_2 + 130 \end{cases}$$

$$\text{因此 } n = (131 + 1)k_2 + 130 = 131k_2 + k_2 - 1 + 131 = 131(k_2 + 1) + k_2 - 1$$

由带余除法商和余数的唯一性可得

$$\begin{cases} k_2 - 1 = 13 \\ k_2 + 1 = k_1 \end{cases}$$

因此, 所求四位数

$$n = 132 \times 14 + 130 = 1978$$

从而

$$1 + 9 + 7 + 8 = 25$$

5. B.

$$\text{解析} \quad -10 + 6 + 5 - 8 + 9 - 15 + 12 = -1$$

因此, 该车的位置在首次出发地的西面 1 公里处.



条件充分性判断

6. D.

解析 由条件(1), a, b, c 是三个任意的整数, 因此 a, b, c 中至少有两个奇数或两个偶数,

从而 $a+b, b+c, c+a$ 中至少有一个偶数, 即 $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ 中至少有一个是整数.

由条件(2), a, b, c 中正好有两个奇数或正好有两个偶数, 因此 $a+b, b+c, c+a$ 中至少有一个是偶数, 从而 $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ 中至少有一个是整数.

因此, 条件(1)和条件(2)都是充分的.

7. A.

解析) 题干要求 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 或 $a = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$

由条件(1), $\frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$, $a = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4} \right] = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,

即条件(1)是充分的.

由条件(2), $a = 3 - \sqrt{5} - [3 - \sqrt{5}] = 3 - \sqrt{5}$, 因此条件(2)不充分.

8. B.

解析) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$,

若 $a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c = \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, 则必须有 $a=0, b=1, c=1$ 成立.

9. A.

解析) 由条件(1), $x^2 = 5 + \sqrt{5}, y^2 = 5 - \sqrt{5}$,

因此 $x^2 + y^2 = 10, x^2 y^2 = 20$,

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 &= (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2 y^2 + y^4) = 10[(x^2 + y^2)^2 - 3x^2 y^2] \\ &= 10(100 - 60) = 400 \end{aligned}$$

因而, 条件(1)是充分的.

由条件(2), 得 $x = -1, y = 2\sqrt{2}$, 则 $x^6 + y^6 = (-1)^6 + (2\sqrt{2})^6 = 1 + 8^3 = 513$.

即条件(2)不充分.

10. C.

解析) 设相邻两个正整数为 $n, n+1$.

由条件(1), $n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1 > 61$,

即 $n^2 + n - 30 > 0$ 得 $n > 5$,

因此, 条件(1)不充分.

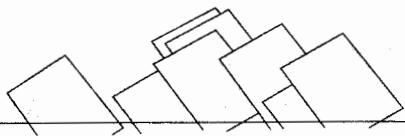
由条件(2), $\frac{n-1}{n} < \frac{6}{7}$, 得 $n < 7$,

因而, 条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2), 则有 $5 < n < 7$, 即 $n = 6$.

第十三章

整式及分式



第一节 基本内容提要

一 整式

1. 整式的和、差、积仍为整式.
2. 分解因式是处理整式运算的主要方法,常用方法包括提取公因式法、公式法、分组分解法和待定系数法.

3. 带余除法:若 $f(x), g(x) [g(x) \neq 0]$ 都是实数域上的关于 x 的多项式(即系数为实数),则存在唯一的 $q(x), r(x)$ 是实数域上的多项式,使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立,这里 $r(x) = 0$ 或者 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数. 特别地, $(x-a) | f(x)$ 的充分必要条件是

$$f(a) = 0.$$

4. 两个多项式相等,对应的系数全部相等;
两个多项式相等,取多项式中变量为任意值,所得函数值相等.

二 分式

1. 分式的分子和分母同乘以(或同除以)一个不为零的式子,分式的值不变.
2. 分式的加法及乘法运算都满足交换律、结合律等有关的运算法则.

第二节 典型例题及历年真题解析

一 问题求解

例 2.1 (2008 年) 若多项式 $f(x) = x^3 + a^2x^2 + x - 3a$ 能被 $x - 1$ 整除,则实数 $a =$ ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 0 或 1
(D) 2 或 -1 (E) 2 或 1

解 由已知 $x^3 + a^2x^2 + x - 3a = q(x)(x-1)$, 方程两边取 $x=1$,

则 $1 + a^2 + 1 - 3a = 0$, 解得 $a=1, a=2$.

所以选 E.

例 2.2 (2009 年) 若 $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^n = a_1(x-1) + 2a_2(x-1)^2 + \cdots + na_n(x-1)^n$, 则 $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n =$ ()

- (A) $\frac{3^n - 1}{2}$ (B) $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$ (C) $\frac{3^{n+1} - 3}{2}$
(D) $\frac{3^n - 3}{2}$ (F) $\frac{3^n - 3}{4}$

解 取 $x=2$, 则 $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$

所以选 C.

例 2.3 若 $4x^4 - ax^3 + bx^2 - 40x + 16$ 是完全平方式, 则 a, b 的值为 ()

- (A) $a=20, b=41$ (B) $a=-20, b=9$
(C) $a=20, b=40$ (D) $a=20, b=41$ 或 $a=-20, b=9$
(E) 以上答案均不正确

解 设 $4x^4 - ax^3 + bx^2 - 40x + 16$

$$\begin{aligned} &= (2x^2 + nx + m)^2 \\ &= 4x^4 + n^2x^2 + m^2 + 4nx^3 + 4mx^2 + 2nmx \\ &= 4x^4 + 4nx^3 + (4m + n^2)x^2 + 2nmx + m^2 \end{aligned}$$

若两个多项式相等, 则对应的系数全部相等, 从而

$$\begin{cases} m^2 = 16 \\ 2nm = -40 \\ 4m + n^2 = b \\ 4n = -a \end{cases}$$

解得

$$m = \pm 4, n = \mp 5,$$

从而有

$$a = 20, b = 41 \text{ 或 } a = -20, b = 9.$$

所以选 D.

例 2.4 已知多项式 $f(x)$ 除以 $x+2$ 所得余数为 1, 除以 $x+3$ 所得余数为 -1, 则多项式 $f(x)$ 除以 $(x+2)(x+3)$ 所得余式是 ()

- (A) $2x - 5$ (B) $2x + 5$ (C) $x - 1$
(D) $x + 1$ (E) $2x - 1$

解 由已知

$$\begin{cases} f(x) = q_1(x)(x+2) + 1 \\ f(x) = q_2(x)(x+3) + (-1) \end{cases}$$

则有 $f(-2) = 1, f(-3) = -1$, 设

$$f(x) = q(x)(x+2)(x+3) + ax + b$$

则

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = 1 \\ f(-3) = -3a + b = -1 \end{cases}$$

解得

$$a = 2, b = 5,$$

即所求余式为

$$2x + 5.$$

所以选 B.

例 2.5 (2008 年) 若 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, 则 $\triangle ABC$ 为

()

(A) 等腰三角形

(B) 直角三角形

(C) 等边三角形

(D) 等腰直角三角形

(E) 以上结果均不正确

解 由已知

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0,$$

则

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$$

因此

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0,$$

得

$$a = b = c$$

所以选 C.

例 2.6 当 $x = 1$ 时, $ax^2 + bx + 1$ 的值是 3, 则 $(a+b-1)(1-a-b) =$

()

(A) 1

(B) -1

(C) 2

(D) -2

(E) 0

解 当 $x = 1$ 时, $ax^2 + bx + 1 = a + b + 1 = 3$, 可得 $a + b = 2$

从而 $(a+b-1)(1-a-b) = (2-1)(1-2) = -1$

所以选 B.

例 2.7 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c , 满足 $a^4 + b^4 + c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, 则 $\triangle ABC$ 为

()

(A) 等边三角形

(B) 直角三角形

(C) 等腰直角三角形

(D) 等腰三角形

(E) 无法确定

解

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = 0$$

因此

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 0$$

即

$$a = b = c$$

$\triangle ABC$ 为等边三角形.

所以选 A.

例 2.8 若 $a^2 + a = -1$, 则 $a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a + 3$ 的值为

()

- (A) 7 (B) 8 (C) 9
(D) 10 (E) 12

解 由已知 $a^2 + a + 1 = 0$, 做带余除法

$$\begin{array}{r}
 a^2+a-5 \\
 a^2+a+1 \overline{) a^4+2a^3-3a^2-4a+3} \\
 \underline{a^4+a^3+a^2} \\
 a^3-4a^2-4a+3 \\
 \underline{a^3+a^2+a} \\
 -5a^2-5a+3 \\
 \underline{-5a^2-5a-5} \\
 8
 \end{array}$$

从而 $a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a + 3 = (a^2 + a - 5)(a^2 + a + 1) + 8$

若 $a^2 + a + 1 = 0$, 则 $a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a + 3 = 8$

所以选 B.

例 2.9 已知 x, y, z 为不相等的实数, 且 $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$, 则 $x^2 y^2 z^2 =$

()

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{3}$

解 此题可直接用代入法, 由已知 $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} \\ y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \end{cases}$

令 $y = 1$, 得 $z = -\frac{1}{2}$, $x = -2$, 因此

$$x^2 y^2 z^2 = (-2)^2 \times 1^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

所以选 A.

例 2.10 若 $a + b + c = 0$, 则 $\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} =$

()

- (A) 0 (B) 1 (C) -1
(D) 3 (E) -3

解 $b + c = -a$, $(b + c)^2 = a^2$

从而 $b^2 + c^2 - a^2 = -2bc$

同理 $c^2 + a^2 - b^2 = -2ac$

$$a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$$

因此

$$\text{原式} = \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = -\frac{a+b+c}{2abc} = 0$$

所以选 A.

注:此题可直接取 $a=b=1, c=-2$ 代入得到答案,下题类似.

例 2.11 若 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$, 则 $\frac{2x-3xy-2y}{x-2xy-y} =$ ()

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{9}{5}$

(D) 4 (E) 2

解

$$\frac{2x-3xy-2y}{x-2xy-y} = \frac{\frac{2}{y} - 3 - \frac{2}{x}}{\frac{1}{y} - 2 - \frac{1}{x}} = \frac{2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) - 3}{\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) - 2} = \frac{9}{5}$$

所以选 C.

例 2.12 (2008 年) 若 $a:b = \frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, 则 $\frac{12a+16b}{12a-8b} =$ ()

(A) 2 (B) 3 (C) 4

(D) -3 (E) -2

解 设 $a = \frac{1}{3}t, b = \frac{1}{4}t$,

则 $\frac{12a+16b}{12a-8b} = \frac{4t+4t}{4t-2t} = 4$

所以选 C.

三 条件充分性判断 ④

例 2.13 (2008 年) 方程 $\frac{a}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 0$ 有实根.

(1) 实数 $a \neq 2$ (2) 实数 $a \neq -2$

解 原方程为 $\frac{a+x-1+x+1}{x^2-1} = 0$, 即 $\frac{a+2x}{x^2-1} = 0$

因此 $a+2x=0$, 即 $x = -\frac{a}{2}$.

由于 $x^2-1 \neq 0$, 即 $a \neq \pm 2$ 时方程有实根 $x = -\frac{a}{2}$.

所以选 C.

例 2.14 $Ax^4 + Bx^3 + 1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除.

(1) $A=3, B=4$ (2) $A=3, B=-4$

解 要使题干成立, 即 $Ax^4 + Bx^3 + 1 = q(x)(x-1)^2$, 则必有 $A+B+1=0$ 成立 (取 $x=1$).

由条件(1) $A+B+1=3+4+1=8>0$

因此, 条件(1)不充分.

由条件(2) $A+B+1=3-4+1=0$

因此, 条件(2)充分.

所以选 B.

例 2.15 (2009 年) $2a^2 - 5a - 2 + \frac{3}{a^2 + 1} = -1$.

(1) a 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根

(2) $|a| = 1$

解 由条件(1), 将 $a^2 = 3a - 1$ 代入题干

则有 $2a^2 - 5a - 2 + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 4 + \frac{1}{a} = \frac{3a - 1 - 4a + 1}{a} = -1$

即条件(1)充分.

由条件(2), 取 $a = 1$

则 $2a^2 - 5a - 2 + \frac{3}{a^2 + 1} = 2 - 5 - 2 + \frac{3}{2} \neq -1$

因此条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.16 (2009 年) $\frac{a^2 - b^2}{19a^2 + 96b^2} = \frac{1}{134}$.

(1) a, b 均为实数, 且 $|a^2 - 2| + (a^2 - b^2 - 1)^2 = 0$

(2) a, b 均为实数, 且 $\frac{a^2 b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$

解 题干要求推出 $134a^2 - 134b^2 = 19a^2 + 96b^2$, 即 $a^2 = 2b^2$

由条件(1), $a^2 = 2, a^2 - b^2 - 1 = 0$, 得 $a^2 = 2, b^2 = 1$

即条件(1)充分.

由条件(2), $a^4 - a^2 b^2 - b^4 - b^4 = 0$

整理得 $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - b^2(a^2 + b^2) = (a^2 - 2b^2)(a^2 + b^2) = 0$

从而 $a^2 - 2b^2 = 0$, 即条件(2)也充分.

所以选 D.

例 2.17 $x = -1$ 或 $x = 8$

$$(1) x = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \quad (abc \neq 0)$$

$$(2) \frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$$

解 条件(1)和条件(2)单独都不充分,联合条件(1)和条件(2).

设

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a} = k$$

则

$$\begin{cases} a+b-c = kc \\ a-b+c = kb \\ -a+b+c = ka \end{cases}$$

从而

$$a+b+c = k(a+b+c)$$

若 $a+b+c=0$, 则有 $a+b=-c, a+c=-b, b+c=-a$,

因此

$$x = \frac{(-c)(-a)(-b)}{abc} = -1;$$

若 $a+b+c \neq 0$, 则有 $k=1$.

从而

$$a+b=2c, a+c=2b, b+c=2a,$$

因此

$$x = \frac{(2c)(2a)(2b)}{abc} = 8$$

联合条件(1)和条件(2)充分.

所以选 C.

例 2.13 (2008 年) 方程 $x^2 + mxy + 6y^2 - 10y - 4 = 0$ 的图形是两条直线.

$$(1) m = 7$$

$$(2) m = -7$$

解 题干要求 $x^2 + mxy + 6y^2 - 10y - 4 = (x + ay + 2)(x + by - 2)$ 成立,

比较方程两边系数, 当 $m = 7$ 时, $a = 6, b = 1$

当 $m = -7$ 时, $a = -1, b = -6$

因此条件(1)和条件(2)都是充分的.

所以选 D.

例 2.19 $\frac{a+b}{c+d} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$ 成立.

$$(1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ 且 } b, d \text{ 均为正数}$$

$$(2) \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ 且 } b, d \text{ 均为负数}$$

解 由条件(1), 令 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, 则 $a = bk, c = dk$,

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{bk+b}{dk+d} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{b^2k^2+b^2}}{\sqrt{d^2k^2+d^2}} = \frac{|b|}{|d|} = \frac{b}{d}$$

因此, 条件(1)是充分的.

同理, 可证明条件(2)也是充分的.

所以选 D.

第三节 练习

一 问题求解

1. 已知 $x^2 - 1 = 3x$, 则多项式 $3x^3 - 11x^2 + 3x + 2$ 的值为 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) -1
 (D) 0 (E) ± 1
2. 已知 $a + b + c = 0, abc = 8$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的值 ()
 (A) 大于零 (B) 等于零 (C) 大于等于零
 (D) 小于零 (E) 小于等于零
3. 若 $x^2 - 5x + 1 = 0$, 则 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 的值为 ()
 (A) 527 (B) 257 (C) 526
 (D) 256 (E) 356
4. 已知 $\frac{1}{a} = \frac{2}{x+y} = \frac{3}{y+a}$, 则 $\frac{4a+x}{3y}$ 的值为 ()
 (A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$
 (D) -1 (E) 0
5. 如果关于 x 的方程 $\frac{2}{x-3} = 1 - \frac{m}{x-3}$ 有增根, 则 m 的值等于 ()
 (A) -3 (B) -2 (C) -1
 (D) 3 (E) 0
6. 若 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, 则 $x^{97} + x^{98} + \cdots + x^{103}$ 的值是 ()

- (A) -1 (B) 0 (C) 1
(D) 2 (E) 3

二 条件充分性判断 ④

7. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 75$.

(1) $x - y = 5$ 且 $z - y = 10$

(2) $x - y = 10$ 且 $z - y = 5$

8. 当 $x \neq -1, x \neq -2$ 时, 有 $\frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{m}{x+1} + \frac{n}{x+2}$.

(1) $m = 2, n = -3$

(2) $m = -2, n = 3$

9. $m^2 - k^2$ 能够被 4 整除.

(1) $k = 2n, m = 2n + 2$ (n 为整数)

(2) $k = 2n + 2, m = 2n + 4$ (n 为整数)

10. $\frac{3x+2y}{3x-2y} = -17$.

(1) $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ (2) $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}$

11. $f(x) = (x-5)(x^2+11x+66)$.

(1) $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) - 7 \times 8 \times 9$

(2) $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) - 6 \times 7 \times 8$

12. 实数 x, y, z 中至少有一个大于零.

(1) a, b, c 是不全相等的任意实数, $x = a^2 - bc, y = b^2 - ac, z = c^2 - ab$

(2) $\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{c-a}{z} = xyz < 0$

13. (2009 年) 对于使 $\frac{ax+7}{bx+11}$ 有意义的一切 x 值, 这个分式为一个定值.

(1) $7a - 11b = 0$

(2) $11a - 7b = 0$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解 ④

1. D.

解析) 由已知 $x^2 - 3x - 1 = 0$, 做带余除法

$$\begin{array}{r}
 3x-2 \\
 x^2-3x-1 \overline{) 3x^3-11x^2+3x+2} \\
 \underline{3x^3-9x^2-3x} \\
 -2x^2+6x+2 \\
 \underline{-2x^2+6x+2} \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{即 } 3x^3 - 11x^2 + 3x + 2 = (3x - 2)(x^2 - 3x - 1)$$

$$\text{从而当 } x^2 - 3x - 1 = 0, 3x^3 - 11x^2 + 3x + 2 = 0$$

2. D.

解析)

$$(a + b + c)^2 = 0$$

即

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0$$

因而

$$ab + bc + ac = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

因为 $abc = 8$, 即 a, b, c 都不等于零,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = -\frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2)$$

从而

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 0.$$

3. A.

解析)

$$x^2 - 5x + 1 = 0, \text{ 即 } x \neq 0$$

可得

$$x + \frac{1}{x} = 5$$

从而

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 25, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 529$$

得

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 529 - 2 = 527$$

4. C.

解析) 令 $a = 1$, 得 $y = 2, x = 0$,

即可得

$$\frac{4a + x}{3y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

5. B.

解析) 方程两边都乘以 $x - 3$,

得

$$2 = x - 3 - m, \text{ 即 } x = 5 + m$$

方程有增根

即

$$x = 3, m = -2$$

6. A.

解析 由已知

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

得

$$x^2(x+1) + (x+1) = 0, \text{ 即 } (x+1)(x^2+1) = 0$$

因此

$$x = -1$$

从而

$$x^{97} + x^{98} + \cdots + x^{103} = -1$$

二 条件充分性判断 ④

7. D.

解析 题干可整理为 $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 150$.

由条件(1)

$$x - y = 5, z - y = 10, \text{ 可得 } z - x = 5. \text{ 代入题干得 } 5^2 + 10^2 + 5^2 = 150,$$

因此, 条件(1)是充分的.

由条件(2)

$$x - y = 10, z - y = 5, \text{ 可得 } z - x = -5. \text{ 代入题干得 } 10^2 + 5^2 + (-5)^2 = 150,$$

因此, 条件(2)也是充分的.

8. B.

解析 题干为

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{mx+2m+nx+n}{(x+1)(x+2)},$$

从而

$$\begin{cases} m+n=1 \\ 2m+n=-1 \end{cases}$$

解得

$$m = -2, n = 3$$

所以条件(2)充分, 条件(1)不充分.

9. D.

解析 由条件(1),

$$\begin{aligned} (2n+2)^2 - (2n)^2 &= (2n+2+2n)(2n+2-2n) \\ &= 2(4n+2) = 4(2n+1) \end{aligned}$$

即条件(1)充分.

由条件(2),

$$\begin{aligned} (2n+4)^2 - (2n+2)^2 &= (2n+4-2n-2)(2n+4+2n+2) \\ &= 2(4n+6) = 4(2n+3) \end{aligned}$$

即条件(2)也充分.

10. E.

解析 由条件(1), 可设 $x=3k, y=5k$, 从而 $\frac{3x+2y}{3x-2y} = \frac{9k+10k}{9k-10k} = -19$,

即条件(1)不充分.

由条件(2), $x=3k, y=7k$, 因此 $\frac{3x+2y}{3x-2y} = \frac{9k+14k}{9k-14k} = -\frac{23}{5}$,

条件(2)也不充分.

11. B.

解析 取 $x=-1, x=-2, x=-3, x=5$,

由条件(1), $f(5) \neq 0, f(-1)=f(-2)=f(-3)=-7 \times 8 \times 9$,

由条件(2), $f(5)=0, f(-1)=f(-2)=f(-3)=-6 \times 7 \times 8$,

而题干中 $f(5)=0$,

$$f(-1) = -6 \times (1 - 11 + 66) = -6 \times 56,$$

$$f(-2) = -7 \times 48,$$

$$f(-3) = -8 \times 42,$$

从而知条件(1)不充分, 条件(2)是充分的.

12. D.

解析 由条件(1),

$$x+y+z=a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]>0$$

从而 x, y, z 中至少有一个大于零.

因此, 条件(1)是充分的.

由条件(2), $a-b=x^2yz, b-c=xy^2z, c-a=xyz^2$

从而

$$a-b+b-c+c-a=0$$

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2=xyz(x+y+z)=0$$

而由 $xyz < 0$, 则得 $x+y+z=0$, x, y, z 中至少有一个大于零.

因此, 条件(2)也是充分的.

13. B.

解析

当 $bx+11 \neq 0$ 时, $\frac{ax+7}{bx+11}$ 有意义.

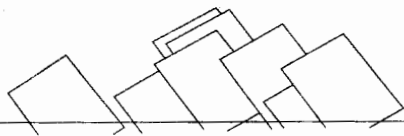
由条件(1), 取 $a=11, b=7$, 得 $\frac{ax+7}{bx+11} = \frac{11x+7}{7x+11} \neq$ 定值

由条件(2), 将 $a=\frac{7}{11}b$ 代入, 则得 $\frac{ax+7}{bx+11} = \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{7bx+77}{bx+11}\right) = \frac{7}{11}$ 为定值.

因此, 条件(1)不充分, 但条件(2)充分.

第十四章

绝对值、平均值



第一节 基本内容提要

一 绝对值 ④

绝对值的定义、非负性及绝对值的性质是初等数学中的一个重要部分,在联考中,以下三条尤其重要.

$$1. |(\quad)| = \begin{cases} (\quad), & \text{若}(\quad) \geq 0 \\ -(\quad), & \text{若}(\quad) \leq 0 \end{cases}$$

$$2. \sqrt{(\quad)^2} = |(\quad)|$$

3. $|a+b| \leq |a| + |b|$, 当且仅当 a, b 同号时等式成立, 这里, (\quad) 表示任意的一个数学表达式.

二 平均值 ④

关于几何平均值及算术平均值的定义是平均值中考查的主要内容. 另一方面也要注意几何平均值与算术平均值之间的关系, 即对于任意 n 个正实数 x_1, x_2, \dots, x_n , $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, 并且当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时, 等号成立. 这一关系可方便地用于求函数的最值问题.

第二节 典型例题及历年真题解析

一 问题求解 ④

例 2.1 (2008 年) $|3x+2| + 2x^2 - 12xy + 18y^2 = 0$, 则 $2y - 3x =$ (\quad)

- (A) $-\frac{14}{9}$ (B) $-\frac{2}{9}$ (C) 0
(D) $\frac{2}{9}$ (E) $\frac{14}{9}$

解 由已知 $|3x+2|+2(x-3y)^2=0$

得 $x=-\frac{2}{3}, y=-\frac{2}{9}$, 则 $2y-3x=\frac{14}{9}$

所以选 E.

例 2.2 (2009 年) 已知实数 a, b, x, y , 满足 $y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=1-a^2$ 和 $|x-2|=y-1-b^2$, 则 $3^{x+y}+3^{a+b}=(\quad)$

- (A) 25 (B) 26 (C) 27
(D) 28 (E) 29

解 由已知 $y=1-a^2-|\sqrt{x}-\sqrt{2}|$ 及 $y=|x-2|+1+b^2$

得 $1-a^2-|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=|x-2|+1+b^2$

整理得 $x=2, a=0, b=0, y=1$,

$$3^{x+y}+3^{a+b}=28$$

所以选 D.

例 2.3 (等式) $|2m-7|=|m-2|+|m-5|$ 成立

则实数 m 值的范围是 (\quad)

- (A) $2 \leq m \leq 5$ (B) $m \leq -2$ 或 $m \geq 5$
(C) $-2 < m < 5$ (D) $m \leq 2$ 或 $m \geq 5$
(E) $m \leq -5$ 或 $m \geq -2$

解 $|2m-7|=|m-2+m-5| \leq |m-2|+|m-5|$,

当且仅当 $m-2$ 与 $m-5$ 同号时等式成立, 从而有 $(m-2)(m-5) \geq 0$.

因而 $m \leq 2$ 或 $m \geq 5$.

所以选 D.

例 2.4 (2001 年) 已知 $\sqrt{x^3+2x^2}=-x\sqrt{2+x}$, 则 x 的取值范围是 (\quad)

- (A) $x < 0$ (B) $x \geq -2$ (C) $-2 \leq x \leq 0$ (D) $-2 < x < 0$

解 $\sqrt{x^3+2x^2}=\sqrt{x^2(x+2)}=|x|\sqrt{x+2}=-x\sqrt{x+2}$

则必有 $x \leq 0, x+2 \geq 0$ 同时成立, 即 $-2 \leq x \leq 0$.

所以选 C.

例 2.5 (2007 年) 如果方程 $|x|=ax+1$ 有一个负根, 那么 a 的取值范围是 (\quad)

- (A) $a < 1$ (B) $a = 1$ (C) $a > -1$
(D) $a < -1$ (E) 以上结论均不正确

解) $-x = ax + 1, (a+1)x = -1$, 由于 x 为负数, 即 $a+1 > 0, a > -1$ 成立.

所以选 C.

例 2.6 (2008 年) 设 $y = |x-2| + |x+2|$, 则下列结论正确的是 ()

- (A) y 没有最小值
 (B) 只有一个 x 使 y 取到最小值
 (C) 有无穷多个 x 使 y 取到最大值
 (D) 有无穷多个 x 使 y 取到最小值
 (E) 以上结论均不正确

$$\text{解) } y = |x-2| + |x+2| = \begin{cases} -2x, & x < -2 \\ 4, & -2 \leq x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

函数 $y = |x-2| + |x+2|$ 如图 14-1 所示

y 的最小值为 4, y 无最大值, 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, $y = 4$.

因此有无穷多个 x 使 y 取到最小值.

所以选 (D)

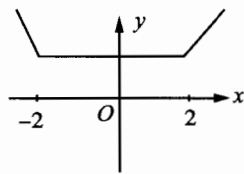


图 14-1

例 2.7 (2007 年) 设变量 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的算术平均值为 \bar{x} , 若 \bar{x} 是固定值, 则 $x_i (i=1, 2, \dots, 10)$ 中可以任意取值的变量有 ()

- (A) 10 个 (B) 9 个 (C) 2 个
 (D) 1 个 (E) 0 个

解) 由已知 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} = \bar{x}$ 为固定值, 因此 $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 10\bar{x}$ 为固定值,

当 x_1, x_2, \dots, x_{10} 10 个变量中 9 个任意取值时, 另一个就是固定的.

所以选 B.

例 2.8 (2009 年) 方程 $|x - |2x+1|| = 4$ 的根是 ()

- (A) $x = -5$ 或 $x = 1$ (B) $x = 5$ 或 $x = -1$ (C) $x = 3$ 或 $x = -\frac{5}{3}$
 (D) $x = -3$ 或 $x = \frac{5}{3}$ (E) 不存在

解) 原方程等价于 $x - |2x+1| = 4$ 或 $x - |2x+1| = -4$

若 $2x+1 \geq 0$, 则 $x - 2x - 1 = 4$ 或 $x - 2x - 1 = -4$

若 $2x+1 < 0$, 则 $x + 2x + 1 = 4$ 或 $x + 2x + 1 = -4$

$$\text{得 } x = 3 \text{ 或 } x = -\frac{5}{3}$$

所以选 C.

二 条件充分性判断

例 2.9 (2008 年) 三个实数 x_1, x_2, x_3 的算术平均值为 4.

(1) $x_1 + 6, x_2 - 2, x_3 + 5$ 的算术平均值为 4

(2) x_2 为 x_1 和 x_3 的等差中项, 且 $x_2 = 4$

解 由条件(1)

$$\frac{x_1 + 6 + x_2 - 2 + x_3 + 5}{3} = 4,$$

得

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

因此

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 1.$$

即条件(1)不充分.

由条件(2)

$$4 = \frac{x_1 + x_3}{2}$$

从而

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{4 + 8}{3} = 4$$

即条件(2)是充分的.

所以选 B.

例 2.10 (2005 年) a, b, c 的算术平均值是 $\frac{14}{3}$, 而几何平均值是 4.

(1) a, b, c 是满足 $a > b > c > 1$ 的三个整数, $b = 4$

(2) a, b, c 是满足 $a > b > c > 1$ 的三个整数, $b = 2$

解 取 $a = 5, b = 4, c = 2$

则 a, b, c 的算术平均值为 $\frac{a+b+c}{3} = \frac{5+4+2}{3} = \frac{11}{3} \neq \frac{14}{3}$

故条件(1)不充分.

取 $b = 2$, 则满足 $a > b > c > 1$ 的整数 c 不存在

因此条件(2)也不充分.

所以选 E.

例 2.11 (2003 年) 不等式 $|x-2| + |4-x| < S$ 无解.

(1) $S \leq 2$

(2) $S > 2$

解 令

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-2| + |4-x| \\ &= \begin{cases} -2x+6, & x < 2 \\ 2, & 2 \leq x \leq 4 \\ 2x-6, & x > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

则函数 $f(x)$ 如图 14-2 所示, $f(x)$ 最小值为 2.

$S \leq 2$ 时, $f(x) < 2$ 无解,

$S > 2$ 时, $f(x) < S$ 有解,

即条件(1)充分, 条件(2)不充分.

所以选 A.

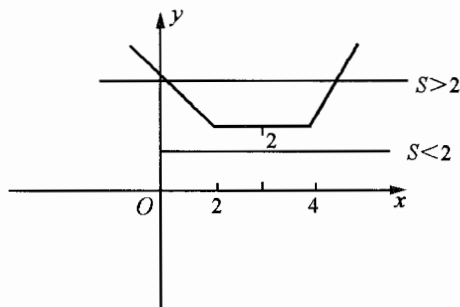


图 14-2

例 2.12 (2003 年) 可以确定 $\frac{|x+y|}{x-y} = 2$.

(1) $\frac{x}{y} = 3$

(2) $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

解 若条件(1)成立, 则

$$\frac{|x+y|}{x-y} = \frac{|3y+y|}{3y-y} = \frac{|4y|}{2y} = \pm 2$$

若条件(2)成立, 则

$$\frac{|x+y|}{x-y} = \frac{|x+3x|}{x-3x} = \frac{|4x|}{-2x} = \pm 2$$

从而条件(1)、(2)都不充分, 又因为(1)、(2)两条件矛盾, 不能选(C), 所以选 E.

例 2.13 (2004 年) x, y 是实数, $|x| + |y| = |x-y|$.

(1) $x > 0, y < 0$

(2) $x < 0, y > 0$

解 若条件(1)成立, 则

$$\text{左边} = |x| + |y| = x - y$$

$$\text{右边} = |x - y| = x - y$$

若条件(2)成立, 则

$$\text{左边} = |x| + |y| = -x + y = y - x$$

$$\text{右边} = |x - y| = -(x - y) = y - x$$

因此条件(1)、(2)都充分.

所以选 D.

例 2.14 (2004 年) $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$

(1) $a < 0, b > 0$

(2) $a > 0, b < 0$

解 当 $b < 0$ 时, \sqrt{b} 无意义,

因此条件(2)不充分.

当条件(1)成立时,

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = |a| \sqrt{b} = -a\sqrt{b}$$

即条件(1)充分.

所以选 A.

例 2.15 (2005 年) 实数 a, b 满足 $|a|(a+b) > a|a+b|$.

(1) $a < 0$ (2) $b > -a$

解 题干中有两要素 $a, a+b$, 条件(1)、(2)分别给出了每个要素满足的条件, 这种类型的题一般答案应为(C)或(E).

联合条件(1)和条件(2),

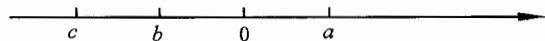
则 $|a|(a+b) = -a(a+b) > 0$, 而 $a|a+b| = a(a+b) < 0$

因此 $|a|(a+b) > a|a+b|$ 成立.

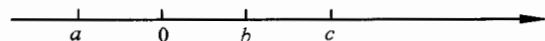
所以选 C.

例 2.16 (2006 年) $|b-a| + |c-b| - |c| = a$

(1) 实数 a, b, c 在数轴上的位置为



(2) 实数 a, b, c 在数轴上的位置为



解 在条件(1)下,

$$|b-a| + |c-b| - |c| = a - b + b - c + c = a$$

在条件(2)下,

$$|b-a| + |c-b| - |c| = b - a + c - b - c = -a$$

因而, 条件(1)充分, 但条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.17 (2008 年) 方程 $|x+1| + |x| = 2$ 无根.

(1) $x \in (-\infty, -1)$ (2) $x \in (-1, 0)$

解 由条件(1), 题干中方程为 $-x-1-x=2$, 因此 $x = -\frac{3}{2}$ 为方程的根.

即条件(1)不充分.

由条件(2), 题干中方程为 $x+1-x=2$, 即方程无根.

因此条件(2)是充分的.

所以选 B.

例 2.18 (2008 年) $f(x)$ 有最小值 2.

(1) $f(x) = \left| x - \frac{5}{12} \right| + \left| x - \frac{1}{12} \right|$

$$(2) f(x) = |x-2| + |4-x|$$

$$\text{解} \quad \text{由条件(1), } f(x) = \left| x - \frac{5}{12} \right| + \left| x - \frac{1}{12} \right| = \begin{cases} -2x + \frac{1}{2}, & x < \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{12} \leq x \leq \frac{5}{12} \\ 2x - \frac{1}{2}, & x > \frac{5}{12} \end{cases}$$

函数 $f(x)$ 如图 14-3 所示

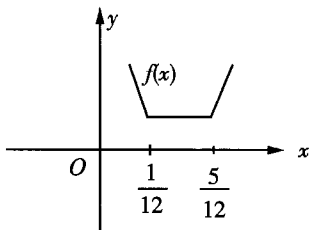


图 14-3

$f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$. 即条件(1)不充分.

$$\text{由条件(2), } f(x) = |x-2| + |4-x| = \begin{cases} -2x+6, & x < 2 \\ 2, & 2 \leq x \leq 4 \\ 2x-6, & x > 4 \end{cases}$$

函数 $f(x)$ 如图 14-4 所示

$f(x)$ 的最小值为 2. 因此条件(2)充分.

所以选 B.

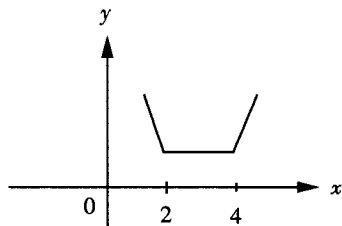


图 14-4

例 2.19 (2008 年) $\frac{b+c}{|a|} + \frac{c+a}{|b|} + \frac{a+b}{|c|} = 1$

(1) 实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$

(2) 实数 a, b, c 满足 $abc > 0$

解 取 $a=b=c=0$, 则知条件(1)不充分.

取 $a=b=c=1$, 则知条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2), a, b, c 三个实数中必有两个负数一个正数.

不妨设 $a < 0, b < 0, c > 0$, 则有 $\frac{b+c}{|a|} + \frac{c+a}{|b|} + \frac{a+b}{|c|} = \frac{-a}{-a} + \frac{-b}{-b} + \frac{-c}{c} = 1$ 成立.

所以选 C.

第三节 练习

一 问题求解

- (2002 年) 已知 $t^2 - 3t - 18 \leq 0$, 则 $|t+4| + |t-6| =$ ()
 (A) $2t-2$ (B) 10 (C) 3 (D) $2t+2$
- (2008 年) 设 a, b, c 为整数, 且 $|a-b|^{29} + |c-a|^{41} = 1$, 则 $|a-b| + |a-c| + |b-c| =$ ()
 (A) 2 (B) 3 (C) 4
 (D) -3 (E) -2
- 已知方程 $2x^2 - 2ax + 3a - 4 = 0$ 没有实根, 那么代数式 $\sqrt{a^2 - 8a + 16} + |2 - a|$ 的值是 ()
 (A) 2 (B) 5 (C) $2a - 6$
 (D) $6 - 2a$ (E) $2a$
- 已知 $f(x) = |x-1| - 2|x| + |x+2|$, 且 $-2 \leq x \leq 1$, 则 $f(x)$ 的最大值和最小值的和为 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2
 (D) 3 (E) -2
- $|x-1| - |2x+4| > 1$ 的解集合为 ()
 (A) $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ (B) $(-4, 1)$ (C) $(-1, 2)$
 (D) $(-4, 2)$ (E) $\left(-4, -\frac{4}{3}\right)$
- 若 $x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{7}\right)$, 则 $|1-2x| + |1-3x| + \cdots + |1-10x| =$ ()
 (A) 2 (B) 3 (C) 4
 (D) 5 (E) 6
- 已知 $|2x+1| + |2x-5| =$ 定值, 则 x 的取值范围为 ()
 (A) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ (B) $-1 \leq x \leq 1$ (C) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$
 (D) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ (E) 以上答案均不正确
- $y = 2x + |4-5x| + |1-3x| + 4$ 恒为常数, 则 x 的取值范围为 ()

$$(A) \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{5}$$

$$(B) \frac{1}{3} < x < \frac{4}{5}$$

$$(C) \frac{1}{3} \leq x < \frac{4}{5}$$

$$(D) \frac{1}{3} < x < 1$$

$$(E) \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

三 条件充分性判断 ④

9. 不等式 $\frac{1}{4} < |2x-1| < \frac{1}{2}$ 成立.

$$(1) \frac{1}{4} < x < \frac{3}{8}$$

$$(2) \frac{5}{8} < x < \frac{3}{4}$$

10. $|5-3x| - |3x-2| = 3$ 的解是空集.

$$(1) x > \frac{5}{3}$$

$$(2) \frac{7}{6} < x < \frac{5}{3}$$

11. $-x > -(y+1)$

$$(1) |x| < y$$

$$(2) -|y| < -x$$

12. $|\sqrt{x-2}-3| < 1$ 成立.

$$(1) 6 < x < 7$$

$$(2) 10 < x < 18$$

13. (2008 年) $a < -1 < 1 < -a$

$$(1) a \text{ 为实数}, a+1 < 0$$

$$(2) a \text{ 为实数}, |a| < 1$$

14. (2008 年) $|1-x| - \sqrt{x^2-8x+16} = 2x-5$

$$(1) x > 2$$

$$(2) x < 3$$

15. (2008 年) $-1 < x \leq \frac{1}{3}$.

$$(1) \left| \frac{2x-1}{x^2+1} \right| = \frac{1-2x}{1+x^2}$$

$$(2) \left| \frac{2x-1}{3} \right| = \frac{2x-1}{3}$$

16. 不等式 $\frac{|a-b|}{|a|+|b|} < 1$ 能成立.

$$(1) ab > 0$$

$$(2) ab < 0$$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解 ④

1. B.

解析 $t^2 - 3t - 18 \leq 0$, 则有 $-3 \leq t \leq 6$ 成立,

因此 $|t+4| + |t-6| = t+4+6-t=10$

2. A.

解析 直接用代入法, 取 $a=b=0, c=1$

则 $|a-b| + |a-c| + |b-c| = |0| + |-1| + |-1| = 2$

3. A.

解析 $2x^2 - 2ax + 3a - 4 = 0$ 无实根, 即 $(-2a)^2 - 8(3a-4) < 0$,

得 $2 < a < 4$,

从而 $\sqrt{a^2 - 8a + 16} + |2-a| = \sqrt{(a-4)^2} + |2-a| = |a-4| + |2-a| = 4-a+a-2=2$.

4. C.

解析 $f(x) = |x-1| - 2|x| + |x+2| = \begin{cases} 2x+3, & -2 \leq x \leq 0 \\ -2x+3, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $f(x)$ 如图 14-5 所示

即 $f(x)$ 在 $-2 \leq x \leq 1$ 区间, 最大值 $f(0) = 3$, 最小值 $f(-2) = -1$,
即, $3 + (-1) = 2$.

5. E.

解析 $|x-1| - |2x+4| = \begin{cases} x+5, & x < -2 \\ -3x-3, & -2 \leq x \leq 1 \\ -x-5, & x > 1 \end{cases}$ 函数如图 14-6 所示

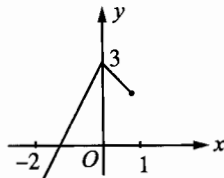


图 14-5

所示

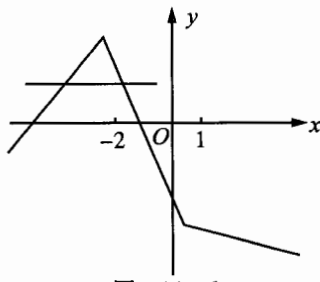


图 14-6

由 $x+5=1$, 得 $x=-4$, 由 $-3x-3=1$, 得 $x=-\frac{4}{3}$

从而 $|x-1| - |2x+4| > 1$ 的解集合为 $\left(-4, -\frac{4}{3}\right)$.

6. B.

解析 若 $x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{7}\right)$, 则

$$\begin{aligned} & |1-2x| + |1-3x| + |1-4x| + \cdots + |1-8x| + |1-9x| + |1-10x| \\ &= 1-2x+1-3x+1-4x+\cdots+1-7x+8x-1+9x-1+10x-1 \\ &= 6-3=3 \end{aligned}$$

7. D.

解析 $|2x+1| + |2x-5| = \text{定值}$, 则需 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x-5 \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x+1 \leq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \end{cases}$ 成立.

从而 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

8. A.

解析 若 $y = 2x + |4-5x| + |1-3x| + 4$ 恒为定值, 则需 $\begin{cases} 4-5x \geq 0 \\ 1-3x \leq 0 \end{cases}$ 成立,

因此 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{5}$.

二 条件充分性判断

9. D.

解析 题干等价于 $\begin{cases} |2x-1| < \frac{1}{2} \\ |2x-1| > \frac{1}{4} \end{cases}$

则

$$\begin{cases} \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ x > \frac{5}{8} \text{ 或 } x < \frac{3}{8} \end{cases}$$

因此 $\frac{1}{4} < |2x-1| < \frac{1}{2}$ 的解集合为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$

10. D.

解析 $|5-3x| - |3x-2| = \begin{cases} 3, & x < \frac{2}{3} \\ -6x+7, & \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{3} \\ -3, & x > \frac{5}{3} \end{cases}$

函数 $|5-3x| - |3x-2|$ 如图 14-7 所示

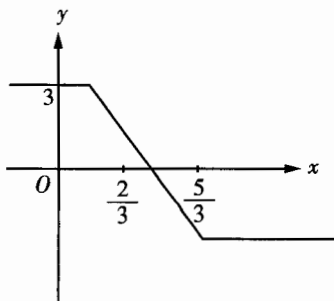


图 14-7

因此,当 $x > \frac{2}{3}$ 时 $|5-3x| - |3x-2| = 3$ 无解.

11. A.

解析 要使 $-x > -(y+1)$ 成立, 只需 $x < y+1$.

由条件(1), $|x| < y$, 即 $-y < x < y$.

因此条件(1)是充分的.

由条件(2), $-|y| < -x$, 得 $|y| > x$, 即 $y > x$ 或 $y < -x$, 不能推出 $y+1 > x$.

取 $y = -2, x = -1$, 则有 $|-2| = 2 > -1$, 但 $-1 = -2+1$, 即 $x = y+1$.

12. D.

解析 题干等价于 $-1 < \sqrt{x-2} - 3 < 1$, 即 $2 < \sqrt{x-2} < 4$.

得 $4 < x-2 < 16$, 即 $6 < x < 18$.

13. A.

解析 由条件(1), $a+1 < 0$, 则 $a < -1 < 1 < -a$ 成立.

即条件(1)是充分的.

由条件(2), $|a| < 1$, 即 $-1 < a < 1$

因此条件(2)不充分.

14. C.

解析 题干为 $|1-x| - \sqrt{(x-4)^2} = 2x-5$

$$\text{由于 } |1-x| - |x-4| = \begin{cases} -3, & x < 1 \\ 2x-5, & 1 \leq x \leq 4 \\ 3, & x > 4 \end{cases}$$

从而当 $1 \leq x \leq 4$ 时题干成立,

联合条件(1)和条件(2), 则 $2 < x < 3$ 是 $1 \leq x \leq 4$

的子集合

15. E.

解析 由条件(1), $2x-1 \leq 0, x \leq \frac{1}{2}$, 即条件(1)不充分.

由条件(2), $2x-1 \geq 0, x \geq \frac{1}{2}$, 即条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2), 得 $x = \frac{1}{2}$ 不属于 $-1 < x \leq \frac{1}{3}$

16. A.

解析 题干 $|a-b| < |a| + |b|$,

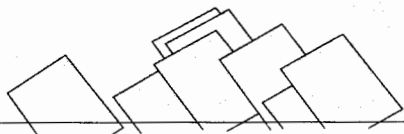
由于 $|a-b| = |a+(-b)| < |a| + |b| = |a| + |-b|$ 成立,

因此, 需 $a(-b) < 0$ 成立.

即 $ab > 0$, 即条件(1)充分, 条件(2)不充分.

第十五章

方程与不等式



第一节 基本内容提要

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 及一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($< 0, \geq 0, \leq 0$) ($a \neq 0$) 一直是历年初等数学部分考试中的重点. 主要题型及考点可归纳如下.

一 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

(1) 只讨论解的状况, 即方程是否有实数解? 有两个不同解还是两个相同的解? 此类型题只要考虑判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 即可.

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ 中系数已被确定 (即 a, b, c 均为常数), 讨论的是两根 x_1, x_2 的关系, 此类题型考查的是方程根与系数的关系,

$$\text{即 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad (\text{韦达定理})$$

(3) 若 $ax^2 + bx + c = 0$ 中系数 a, b, c 不全为固定的数值, 而讨论的是两根的关系, 此类题型既考虑判别式 Δ , 同时也需考虑韦达定理.

二 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($< 0, \geq 0, \leq 0$) ($a \neq 0$)

(1) 求一元二次不等式的解集合 (用抛物线解法为最佳).

(2) 知道了不等式的解集合, 确定系数 a, b, c 之间的关系或其数值.

第二节 典型例题及历年真题解析

一 问题求解

例 2.1 (1997 年) x_1, x_2 是方程 $6x^2 - 7x + a = 0$ 的两个实根, 若 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ 的几何平均值是

$\sqrt{3}$, 则 a 的值是

- (A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) -2 (E) -3

解 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ 的几何平均值为

$$\sqrt{\frac{1}{x_1 x_2}} = \sqrt{3}$$

从而由韦达定理 $\sqrt{\frac{6}{a}} = \sqrt{3}$, 得 $a = 2$.

所以选 A.

例 2.2 (1998 年) 若方程 $x^2 + px + 37 = 0$ 恰有两个正整数解 x_1, x_2 , 则 $\frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{p}$ 的值是

- (A) -2 (B) -1 (C) 0
(D) 1 (E) 2

解 由韦达定理

$$x_1 x_2 = 37, \quad x_1 + x_2 = -p,$$

由于 x_1, x_2 为正整数, 从而 $x_1 = 1, x_2 = 37, p = -38$

$$\frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{p} = \frac{2 \times 38}{-38} = -2$$

所以选 A.

例 2.3 (2000 年) 已知 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ 的根为 $x_1 = -1, x_2, x_3$, 则 $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} =$ ()

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$

解 $x_1 = -1$ 为方程的根, 其意思是 $x + 1$ 可以整除 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$,

从而原方程为

$$(x + 1)(x^2 + x - 6) = 0$$

即 x_2, x_3 是 $x^2 + x - 6 = 0$ 的两个根.

故

$$x_2 + x_3 = -1, \quad x_2 x_3 = -6, \quad \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} = \frac{1}{6}$$

所以选 A.

例 2.4 (2002 年) 已知方程 $3x^2 + 5x + 1 = 0$ 的两个根为 α, β , 则 $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} =$ ()

(A) $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$

解 由 $\alpha + \beta = -\frac{5}{3}, \alpha\beta = \frac{1}{3}$, 可知 α, β 同为负值.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 &= \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta}} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2 \\ &= 3[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + 2 = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

所以选 B.

例 2.5 (1998 年) 要使方程 $3x^2 + (m-5)x + (m^2 - m - 2) = 0$ 的两根分别满足 $0 < x_1 < 1$ 和 $1 < x_2 < 2$, 实数 m 的取值范围应是 ()

(A) $-2 < m < -1$

(B) $-4 < m < -1$

(C) $-4 < m < -2$

(D) $\frac{-1 - \sqrt{65}}{2} < m < -1$

(E) $-3 < m < 1$

解 令 $f(x) = 3x^2 + (m-5)x + (m^2 - m - 2)$

则 $f(x)$ 是图形开口向上的抛物线, 如图 15-1 所示

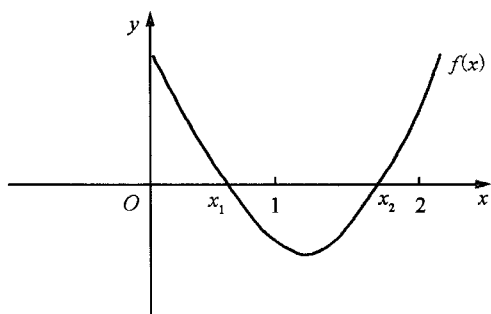


图 15-1

因此

$$\begin{cases} f(0) = m^2 - m - 2 > 0 \\ f(1) = m^2 - 4 < 0 \\ f(2) = m^2 + m > 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} m > 2 \text{ 或 } m < -1 \\ -2 < m < 2 \\ m > 0 \text{ 或 } m < -1 \\ -2 < m < -1 \end{cases}$$

因而

所以选 A.

例 2.6 (2001 年) 设 $0 < x < 1$, 则不等式 $\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} > 1$ 的解集是 ()

(A) $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$

(C) $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$

(D) $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1$

解 在已知条件下, 不等式等价于 $3x^2 - 2 < x^2 - 1$

即

$$2x^2 - 1 < 0$$

故有

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

由于要求 $0 < x < 1$, 从而解集为 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

所以选 A.

例 2.7 (2001 年) 已知 $-2x^2 + 5x + c \geq 0$ 的解为 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$, 则 c 为 ()

(A) $\frac{1}{3}$

(B) 3

(C) $-\frac{1}{3}$

(D) -3

解 $-2x^2 + 5x + c \geq 0$ 的解为 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$,

说明 $x = -\frac{1}{2}, x = 3$ 是 $-2x^2 + 5x + c = 0$ 的两根, 从而可知 $c = 3$.

所以选 B.

例 2.8 (2005 年) 满足不等式 $(x+4)(x+6)+3 > 0$ 的所有实数 x 的集合是 ()

(A) $[4, +\infty)$

(B) $(4, +\infty)$

(C) $(-\infty, -2]$

(D) $(-\infty, -1)$

(E) $(-\infty, +\infty)$

解 原不等式为

$$x^2 + 10x + 27 > 0$$

由于 $x^2 + 10x + 27 = 0$ 无实根,

从而, 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 总有 $(x+4)(x+6)+3 > 0$ 成立.

所以选 E.

例 2.9 (2008 年) 若方程 $x^2 + px + q = 0$ 的一个根是另一个根的 2 倍, 则 p 和 q 应满足 ()

- (A) $p^2 = 4q$ (B) $2p^2 = 9q$ (C) $4p = 9q^2$
(D) $2p = 3q^2$ (E) 以上结论均不正确

解 设 $x_1, 2x_1$ 是方程的两根

$$\text{则} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_1 = -p \\ x_1 \cdot 2x_1 = q \end{cases}$$

$$\text{从而} \quad 2\left(-\frac{p}{3}\right)^2 = q$$

$$\text{得 } 2p^2 = 9q$$

所以选 B.

例 2.10 (2008 年) 若 $y^2 - 2\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)y + 3 < 0$ 对一切正实数 x 恒成立, 则 y 的取值范围是 ()

- (A) $1 < y < 3$ (B) $2 < y < 4$ (C) $1 < y < 4$
(D) $3 < y < 5$ (E) $2 < y < 5$

解 由已知 $y > 0$, 不等式为 $y + \frac{3}{y} < 2\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

由于 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$ (算术平均值与几何平均值的关系),

即当 $x = 1$ 时, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 取最小值 2

解不等式 $y + \frac{3}{y} < 4$, $y^2 - 4y + 3 < 0$, 得 $1 < y < 3$

所以选 A.

例 2.11 (2009 年) $3x^2 + bx + c = 0 (c \neq 0)$ 的两个根为 α, β , 如果又以 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 为根的一元二次方程是 $3x^2 - bx + c = 0$, 则 b 和 c 分别为 ()

- (A) 2, 6 (B) 3, 4 (C) -2, -6
(D) -3, -6 (E) 以上结果都不正确

解 由韦达定理 $\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{3} \\ \alpha\beta = \frac{c}{3} \end{cases}$ 且 $\begin{cases} \alpha + \beta + \alpha\beta = \frac{b}{3} \\ (\alpha + \beta)\alpha\beta = \frac{c}{3} \end{cases}$

从而解得 $b = -3, c = -6$

所以选 D.

二 条件充分性判断

例 2.12 (2004 年) x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 2 = 0$ 的两个实根.

$$(1) k > \frac{1}{2} \quad (2) k = \frac{1}{2}$$

解 方程有两个实根, 即说明

$$\Delta = 4(k+1)^2 - 4(k^2 + 2) \geq 0$$

从而可解得

$$k \geq \frac{1}{2}$$

即条件(1)和条件(2)都是充分的.

所以选 D.

例 2.13 (2005 年) 方程 $4x^2 + (a-2)x + (a-5) = 0$ 有两个不等的负实根.

$$(1) a < 6 \quad (2) a > 5$$

解 设 x_1, x_2 是方程的两个根, 则

$$\begin{cases} \Delta = (a-2)^2 - 16(a-5) > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{2-a}{4} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a-5}{4} > 0 \end{cases}$$

题干要求

解得 $5 < a < 6$ 或 $a > 14$

所以选 C.

例 2.14 (2006 年) 方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 与 $x^2 - 2x - a = 0$ 有一公共实数解.

$$(1) a = 3 \quad (2) a = -2$$

解 若 $a = 3$, 则 $x^2 + ax + 2 = 0$ 有根 $x_1 = -1, x_2 = -2$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$ 有根 $x_1 = -1, x_2 = 3$,

从而两方程有一公共实数 $x = -1$,

因此条件(1)充分.

若 $a = -2$, 则 $x^2 - 2x + 2 = 0, \Delta = (-2)^2 - 8 < 0$ 无实根,

从而不可能有公共实数解, 即条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.15 (2003 年) 不等式 $(k+3)x^2 - 2(k+3)x + k - 1 < 0$, 对 x 的任意数值都成立.

$$(1)k=0 \quad (2)k=-3$$

解 由条件(1), $k=0$, 不等式变为 $3x^2 - 6x - 1 < 0$,

由于 $a > 0$, 抛物线开口向上, $3x^2 - 6x - 1 < 0$,

不可能对任意数值都成立, 即条件(1)不充分.

由条件(2), $k = -3$, 则不等式为 $-4 < 0$ 恒成立,

即条件(2)充分.

所以选 B.

例 2.16 (2007 年) 方程 $\sqrt{x-p} = x$ 有两个不相等的正根.

$$(1)p \geq 0 \quad (2)p < \frac{1}{4}$$

解 方程为 $x^2 - x + p = 0$, 设 x_1, x_2 为两根, 则 $x_1 x_2 = p > 0, \Delta = 1 - 4p > 0$ 同时成立, 从而 $0 < p < \frac{1}{4}, p = 0$ 不满足题意, 所以选 (E).

例 2.17 (2008 年) $\sqrt{1+x^2} < x+1$

$$(1)x \in [-1, 0] \quad (2)x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

解 $\sqrt{1+x^2} < x+1$ 等价于 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ (\sqrt{1+x^2})^2 < (x+1)^2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases}$

因此 $x > 0$, 从而条件(1)不充分, 但条件(2)充分.

所以选 B.

例 2.18 (2008 年) $(2x^2 + x + 3)(-x^2 + 2x + 3) < 0$

$$(1)x \in [-3, -2] \quad (2)x \in (4, 5)$$

解 题干等价于 $\begin{cases} 2x^2 + x + 3 > 0 \\ -x^2 + 2x + 3 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x^2 + x + 3 < 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases}$

因 $2x^2 + x + 3 > 0$ 的解集合为 $(-\infty, +\infty)$

从而题干等价于 $-x^2 + 2x + 3 < 0$

其解集合为 $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

条件(1)和条件(2)都是充分的.

所以答案是 D.

例 2.19 (2008 年) 方程 $2ax^2 - 2x - 3a + 5 = 0$ 的一个根大于 1, 另一个根小于 1.

$$(1)a > 3 \quad (2)a < 0$$

解 若 $a < 0$, $2ax^2 - 2x - 3a + 5$ 是一个开口向下的抛物线.

要使 $2ax^2 - 2x - 3a + 5 = 0$ 的一个根大于 1, 另一个根小于 1, 则需

$2a \times 1^2 - 2 \times 1 - 3a + 5 = -a + 3 > 0, a < 3$ 成立, 从而 $a < 0$.

若 $a > 0$, $2ax^2 - 2x - 3a + 5$ 是一个开口向上的抛物线, 要使题干成立, 则需

$$2a \times 1^2 - 2 \times 1 - 3a + 5 = -a + 3 < 0, a > 3 \text{ 成立, 从而 } a > 3.$$

即条件(1)和条件(2)都是充分的.

所以选 D.

例 2.20 (2008 年) $\alpha^2 + \beta^2$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$.

(1) α 与 β 是方程 $x^2 - 2ax + (a^2 + 2a + 1) = 0$ 的两个实根

$$(2) \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

解 由条件(1), $\Delta = (-2a)^2 - 4(a^2 + 2a + 1) \geq 0$, 得 $a \leq -\frac{1}{2}$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (2a)^2 - 2(a^2 + 2a + 1) = 2a^2 - 4a - 2 = 2[(a - 1)^2 - 2]$$

当 $a = 1$ 时方程无实根, 从而 $\alpha^2 + \beta^2$ 的最小值不等于 -4

令 $f(a) = 2a^2 - 4a - 2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 为其最小值

条件(1)是充分的.

由条件(2), 因 $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta = \frac{1}{2}$,

从而条件(2)也充分.

所以选 D.

例 2.21 (2009 年) $(x^2 - 2x - 8)(2 - x)(2x - 2x^2 - 6) > 0$

$$(1) x \in (-3, -2)$$

$$(2) x \in [2, 3]$$

解 取 $x = -\frac{5}{2}$, 则 $(x^2 - 2x - 8)(2 - x)(2x - 2x^2 - 6)$

$$= \left(\frac{25}{4} + 5 - 8\right) \left(2 + \frac{5}{2}\right) \left(-5 - \frac{50}{4} - 6\right) < 0$$

取 $x = 2$, 则 $(x^2 - 2x - 8)(2 - x)(2x - 2x^2 - 6) = 0$

从而条件(1)和条件(2)都不充分, 由于条件(1)与条件(2)矛盾, 不能选 C.

所以选 E.

第三节 练习

一 问题求解

1. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - (k - 2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0$ 的两个实根, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的最大

值为

()

(A) 18

(B) 31

(C) $\frac{50}{9}$

(D) 50

2. (2001 年) 已知关于一元二次方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 有两个相异实根, 则 k 的取值范围为

()

(A) $k > \frac{1}{4}$

(B) $k \geq \frac{1}{4}$

(C) $k > -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

(D) $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

3. 若 $x^2 + px + q = 0$ 的两根是 $x^2 + mx + n = 0$ 的两根的立方, 则 p 等于

()

(A) $m^3 + 3mn$

(B) $m^3 - 3mn$

(C) $n^3 - 3mn$

(D) $n^3 + 3mn$

(E) 以上答案均不正确

4. (1998 年) 一元二次不等式 $3x^2 - 4ax + a^2 < 0$ ($a < 0$) 的解集是

()

(A) $\frac{a}{3} < x < a$

(B) $x > a$ 或 $x < \frac{a}{3}$

(C) $a < x < \frac{a}{3}$

(D) $x > \frac{a}{3}$ 或 $x < a$

(E) $a < x < 3a$

5. (1999 年) 不等式 $(x^4 - 4) - (x^2 - 2) \geq 0$ 的解集是

()

(A) $x \geq \sqrt{2}$ 或 $x \leq -\sqrt{2}$

(B) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

(C) $x < -\sqrt{3}$ 或 $x > \sqrt{3}$

(D) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

6. $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $\frac{3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1} > k$ 恒成立, 则正数 k 的取值范围为

()

(A) $k < 2$

(B) $k > 2$

(C) $1 < k < 2$

(D) $k < 1$ 或 $k > 1$

(E) $0 < k < 2$

7. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + m^2x + n = 0$ 的两个实根, y_1, y_2 是关于 y 的方程 $y^2 + 5my + 7 = 0$ 的两个实根, 且 $x_1 - y_1 = 2, x_2 - y_2 = 2$, 则 m, n 的值为

()

(A) 2, -4

(B) 4, 19

(C) 4, 29

(D) -4, -29

(E) 以上答案均不正确

8. (2008 年) $x^2 + x - 6 > 0$ 的解集是

()

(A) $(-\infty, -3)$

(B) $(-3, 2)$

(C) $(2, +\infty)$

(D) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

(E) 以上结论均不正确

二 条件充分性判断

9. 对一个一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$, 其中 p, q 为已知常数, 且方程的两个整数根 x_1, x_2 是可以求得的.

(1) 甲看错了常数项, 解得两根是 -7 和 3

(2) 乙看错了一次项系数, 解得两根是 -3 和 4

10. 已知 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根, 且 $x_1^4 + 3x_2 = 5$ (其中 a, b, c 为常数且 $a \neq 0$).

(1) 常数 $a = 1, b = -1$

(2) 常数 $b = c$

11. $kx^2 - (k-8)x + 1$ 对一切实数 x 均为正值 (其中 $k \in \mathbf{R}$, 且 $k \neq 0$).

(1) $k = 5$

(2) $4 < k < 8$

12. 不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集为 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > \frac{1}{3}$.

(1) $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $-2 < x < 3$

(2) $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $-3 < x < 2$

13. (2008 年) 方程 $3x^2 + [2b - 4(a+c)]x + (4ac - b^2) = 0$ 有相等的实根

(1) a, b, c 是等边三角形的三条边

(2) a, b, c 是等腰直角三角形的三条边

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. A.

解析 $\Delta = -3k^2 - 16k - 16 \geq 0$

解得 $-4 \leq k \leq -\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= (k-2)^2 - 2(k^2 + 3k + 5) \\ &= -k^2 - 10k - 6 \\ &= -[(k+5)^2 - 25] - 6 \end{aligned}$$

由于 $k = -5$ 时, 方程无实根,

从而令 $f(k) = -k^2 - 10k - 6$

则 $f(-4) = -16 + 40 - 6 = 18$ 为最大值.

2. C.

解析 $\Delta = [-(2k+1)]^2 - 4k^2 = 4k+1 > 0$, 得 $k > -\frac{1}{4}$,

再由 $k^2 \neq 0$, 得 k 的取值范围为 $k > -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$.

3. B.

解析 设 $x^2 + mx + n = 0$ 的两根是 x_1, x_2 , 则 x_1^3, x_2^3 是 $x^2 + px + q = 0$ 的两根, 从而

$$\begin{aligned} p &= -(x_1^3 + x_2^3) = -(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] \\ &= m(m^2 - 3n) = m^3 - 3mn \end{aligned}$$

4. C.

解析 $3x^2 - 4ax + a^2 = 0$ 的两根为 $x_1 = a, x_2 = \frac{a}{3}$

因为 $a < 0$, 解集为 $a < x < \frac{a}{3}$.

5. A.

解析 原不等式为 $(x^2 - 2)(x^2 + 1) \geq 0$

即 $x^2 - 2 \geq 0$

解得 $x \geq \sqrt{2}$ 或 $x \leq -\sqrt{2}$.

6. E.

解析 不等式的分母 $x^2 + x + 1$ 恒大于零, 因此不等式为

$$3x^2 + 2x + 2 > k(x^2 + x + 1)$$

整理得

$$(3-k)x^2 + (2-k)x + (2-k) > 0$$

要使不等式恒成立, 必须满足条件

$$\begin{cases} 3-k > 0 \\ \Delta = (2-k)^2 - 4(3-k)(2-k) < 0 \end{cases}$$

解得 $k < 2$, 因为 k 为正数, 所以 $0 < k < 2$.

7. E.

解析 由已知 $x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) = 4$, 即知 $-m^2 + 5m = 4$,

得 $m = 1$ 或 $m = 4$, 若 $m = 1, y^2 + 5my + 7 = 0$ 无实根,

从而必有 $m = 4$.

再由 $(y_1 + 2)(y_2 + 2) = n$,

当 $m = 4$ 时,

$$y^2 + 20y + 7 = 0$$

即 $y_1 + y_2 = -20, y_1 y_2 = 7$, 得 $n = -29$.

8. D.

解析 $x^2 + x - 6$ 代表一条开口向上的抛物线, $x^2 + x - 6 = 0$ 的两根为 $x = -3, x = 2$.

因此 $x^2 + x - 6 > 0$ 的解集合为 $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

二 条件充分性判断

9. C.

解析 由条件(1), 知 $x_1 + x_2 = -p$, 即 $p = -(-7 + 3) = 4$,

由条件(2), 知 $x_1 x_2 = q$, 即 $q = -3 \times 4 = -12$,

从而(1)、(2)单独都不充分, 但(1)、(2)合起来方程为 $x^2 + 4x - 12 = 0$,

原方程两根是 $-6, 2$.

10. C.

解析 条件(1)没有给出 c 的值, 从而不能研究方程的根.

条件(2)只给出 $b = c$, 无具体数值, 从而也不充分.

若(1)、(2)联合起来, 可知 $a = 1$, 且 $b = c = -1$.

方程为 $x^2 - x - 1 = 0, x_1^2 = x_1 + 1$,

$x_1^4 + 3x_2 = (x_1 + 1)^2 + 3x_2 = x_1^2 + 2x_1 + 1 + 3x_2 = (x_1^2 - x_1 - 1) + 3(x_1 + x_2) + 2 = 5$.

11. D.

解析 $kx^2 - (k-8)x + 1 > 0$ 对一切实数 x 都成立,

则必有 $k > 0$, 且 $\Delta = (8-k)^2 - 4k < 0$ 成立,

解得 $4 < k < 16$, 而 $k = 5, 4 < k < 8$ 均是其子集,

故条件(1)、(2)都是充分的.

12. A.

解析 由条件(1)知 $a > 0$, 且 $x = -2, 3$ 是 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根,

即

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = -2 + 3 = 1 \\ \frac{c}{a} = -2 \times 3 = -6 \end{cases}$$

即 $b = -a, c = -6a$,

因而不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 等价于 $-6ax^2 - ax + a < 0, -6x^2 - x + 1 < 0$,

其解为 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > \frac{1}{3}$,

故条件(1)充分.

用类似方法可推出条件(2)不充分.

13. A.

解析 题干要求 $\Delta = [2b - 4(a + c)]^2 - 12(4ac - b^2) = 0$

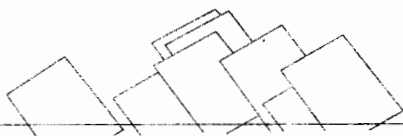
由条件(1), $a = b = c$, 得 $\Delta = (2b - 8b)^2 - 12(4b^2 - b^2) = 0$

由条件(2), 设 $a = c = 1, b = \sqrt{2}$, 则 $\Delta \neq 0$

因此条件(1)充分, 但条件(2)不充分.

第十六章

数 列



第一节 基 本 内 容 提 要

1. 由数列前 n 项和 S_n , 讨论数列的通项公式 a_n 以及相关问题是数列中的一个重要问题. 本问题主要是考虑 S_n 与 a_n 之间的关系.

2. 等差数列及等比数列的通项公式 a_n 以及前 n 项和公式 S_n 是数列中的两个最重要公式. 对于等差数列, $a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$; 对于等比数列, $a_n = a_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. 这里 a_1 表示数列中第一项, d 表示等差数列公差, q 表示等比数列公比 ($q \neq 1$).

3. 三个数 a, b, c 成等差数列 $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$; 三个数 a, b, c 成等比数列 $\Rightarrow b^2 = ac$. 若 $b^2 = ac$ 且 $b \neq 0 \Rightarrow a, b, c$ 成等比数列是数列中最重要的一个考点.

第二节 典 型 例 题 及 历 年 真 题 解 析

一 问题求解

例2.1 (2001年) 若 $2, 2^x - 1, 2^x + 3$ 成等比数列, 则 $x =$

(A) $\log_2 5$

(B) $\log_2 6$

(C) $\log_2 7$

(D) $\log_2 8$

解 由

$$(2^x - 1)^2 = 2(2^x + 3)$$

可得

$$(2^x)^2 - 4(2^x) - 5 = 0$$

令 $2^x = t$ 则

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

得 $t = 5, t = -1$

故 $t = 5$, 即 $2^x = 5 \quad x = \log_2 5$

所以选 A.

例 2.2 (2003 年) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 $S_n = 4n^2 + n - 2$, 则它的通项 a_n 是 ()

- (A) $3n - 2$ (B) $4n + 1$ (C) $8n - 2$
(D) $8n - 1$ (E) 以上结论均不正确

解 $a_1 = S_1 = 3$, 代入 (A), (B), (C), (D) 中知答案均不正确

所以选 E.

例 2.3 (2006 年) 若 $6, a, c$ 成等差数列, 且 $36, a^2, -c^2$ 也成等差数列, 则 $c =$ ()

- (A) -6 (B) 2 (C) 3 或 -2
(D) -6 或 2 (E) 以上结论都不正确

解 由题意

$$a = \frac{6+c}{2}$$

且

$$a^2 = \frac{36 + (-c^2)}{2}$$

从而

$$\left(\frac{6+c}{2}\right)^2 = \frac{36 - c^2}{2}$$

整理可得

$$c^2 + 4c - 12 = 0$$

解得 $c = -6$ 或 $c = 2$.

所以选 D.

例 2.4 (2008 年) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_3 + a_{10} + a_{11} = 64$, 则 $S_{12} =$ ()

- (A) 64 (B) 81 (C) 128
(D) 192 (E) 188

解 由已知 $a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 9d + a_1 + 10d = 64$

因此 $2a_1 + 11d = 32, S_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2} = 6(2a_1 + 11d) = 192$

所以选 D.

例 2.5 (2008 年) 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{3}{2}a_n - 3$, 那么这个数列的通项公式 ()

(A) $a_n = 2(n^2 + n + 1)$

(B) $a_n = 3 \times 2^n$

(C) $a_n = 3n + 1$

(D) $a_n = 2 \times 3^n$

(E) 以上结果均不正确

解 由 $a_1 = S_1 = \frac{3}{2}a_1 - 3$, 得 $a_1 = 6$.

由 $a_1 + a_2 = S_2 = \frac{3}{2}a_2 - 3$, 可得 $a_2 = 18$.

一般地, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{2}a_n - 3 - \frac{3}{2}a_{n-1} + 3$, 整理得 $a_n = 3a_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$.

因此, $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 6$, 公比 $q = 3$ 的等比数列. 即 $a_n = 2 \times 3^n$.

所以选 D.

二 条件充分性判断

例 2.6 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(1) 点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y = 2x + 1$ 上

(2) 点 $Q_n(n, S_n)$ 都在抛物线 $y = x^2 + 1$ 上

解 由条件(1), 得

$$a_n = 2n + 1, \quad a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2$$

a_n 是公差为 2 的等差数列, 所以条件(1)充分.

由条件(2), 得

$$S_n = n^2 + 1$$

则 $a_1 = S_1 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$$

将 $n=1$ 代入 $a_1 = 1 \neq 2$, 所以通项公式

$$a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 2n - 1, & n \geq 2 \end{cases}$$

故 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 所以条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.7 (2003 年) $\frac{a+b}{a^2+b^2} = -\frac{1}{3}$.

(1) $a^2, 1, b^2$ 成等差数列

(2) $\frac{1}{a}, 1, \frac{1}{b}$ 成等比数列

解 令 $a = b = 1$,

则知条件(1)和条件(2)单独都不充分, 且联合起来也不充分.

因此选 E.

例 2.8 (2003 年) 数列 $\{a_n\}$ 的前 k 项和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 与随后 k 项和 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}$ 之比与 k 无关.

$$(1) a_n = 2n - 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$(2) a_n = 2n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

解 由条件(1) $a_n = 2n - 1$ 是等差数列可知

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = S_k = \frac{k(1 + 2k - 1)}{2} = k^2$$

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k} = S_{2k} - S_k = \frac{2k(1 + 4k - 1)}{2} - k^2 = 4k^2 - k^2 = 3k^2$$

因此,二者之比为 $\frac{k^2}{3k^2} = \frac{1}{3}$, 与 k 无关,即条件(1)是充分的.

由条件(2) $a_n = 2n$ 是等差数列可知

$$S_k = \frac{k(2 + 2k)}{2} = k(1 + k)$$

$$S_{2k} - S_k = k(1 + 3k)$$

因此,二者之比为 $\frac{1+k}{1+3k}$, 与 k 有关,即条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.9 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

(1) 设 $f(x) = \log_2 x$, 数列 $f(1), f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n), f(2^{n+1})$ 是等差数列.

(2) 数列 $\{b_n\}$ 中, $S_{n+1} = 4b_n + 2$, $b_1 = 1$, 且 $a_n = b_{n+1} - 2b_n$

解 由条件(1), $f(1) = \log_2 1 = 0$, $f(2^{n+1}) = \log_2 2^{n+1} = n + 1$,

$n + 1 = 0 + (n + 2 - 1)d$, 得条件(1)中,公差 $d = 1$,

即条件(1)中数列是首项为 0, 公差为 1 的等差数列.

因此

$$f(a_1) = \log_2 a_1 = 0 + d = 1 \text{ 得 } a_1 = 2$$

$$f(a_2) = \log_2 a_2 = 0 + 2d = 2 \text{ 得 } a_2 = 2^2$$

\vdots

$$f(a_n) = \log_2 a_n = 0 + nd = n \text{ 得 } a_n = 2^n$$

即 a_1, a_2, \cdots, a_n 是等比数列, 从而条件(1)是充分的.

由条件(2), $b_1 = 1$, $b_1 + b_2 = S_2 = 4b_1 + 2 = 6$, 得 $b_2 = 5$,

再由

$$b_1 + b_2 + b_3 = S_3 = 4b_2 + 2, \text{ 得 } b_3 = 16$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = S_4 = 4b_3 + 2, \text{ 得 } b_4 = 44$$

从而 $a_1 = b_2 - 2b_1 = 3$, $a_2 = b_3 - 2b_2 = 6$, $a_3 = b_4 - 2b_3 = 12$,

即 a_1, a_2, a_3, \cdots 为公比为 2 的等比数列, 条件(2)也充分.

所以选 D.

例 2.10 (2008 年) $S_6 = 126$.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 10(3n+4)$ ($n \in \mathbf{N}$)

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}$)

解 由条件(1), $a_1 = 70, a_2 = 100$,

对任意 $n \in \mathbf{N}, a_n - a_{n-1} = 10(3n+4) - 10[3(n-1)+4] = 30$,

从而 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 70$, 公差 $d = 30$ 的等差数列. 因此

$$S_6 = \frac{6 \times (a_1 + a_6)}{2} = 3 \times (70 + 70 + 5 \times 30) = 870$$

即条件(1)不充分.

由条件(2), $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 2$, 公比 $q = 2$ 的等比数列. 因此

$$S_6 = \frac{2 \times (1 - 2^6)}{1 - 2} = 2 \times (2^6 - 1) = 126$$

即条件(2)是充分的.

所以选 B.

例 2.11 (2008 年) $S_2 + S_5 = 2S_8$.

(1) 等比数列前 n 项的和为 S_n , 且公比 $q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

(2) 等比数列前 n 项的和为 S_n , 且公比 $q = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

解 由题干要求

$$\frac{a_1(1-q^2)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 2 \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}$$

整理得 $1+q^3=2q^6$.

由条件(1), $q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ 代入, $1 + \left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3 = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $2\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^6 = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

由条件(2), $q = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 代入, $1 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 \neq 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6$

因此, 条件(1)是充分的, 条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.12 (2009 年) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 对任意正整数 n , 有 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 2^n - 1$

解 由条件(1)

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 &= 2^2 + (2^2)^2 + \cdots + (2^2)^n \\ &= \frac{2^2(1-4^n)}{1-4} = \frac{4}{3}(4^n - 1) \neq \frac{1}{3}(4^n - 1), \end{aligned}$$

由条件(2),

$$S_n = 2^n - 1,$$

$$a_1 = S_1 = 1, a_1 + a_2 = S_2 = 3, a_1 + a_2 + a_3 = S_3 = 7.$$

得

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \cdots, a_n = 2^{n-1}$$

$$\text{从而 } a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1 + 4 + 16 + \cdots + (2^2)^{n-1} = \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{1}{3}(4^n - 1).$$

因此条件(1)不充分,条件(2)充分.

所以选 B

第三节 练习

一 问题求解

1. 三个数顺序排成等比数列,其和为 114,这三个数依前面的顺序又是某等差数列的第 1、4、25 项,则此三个数的各位上的数字之和为 ()

- (A) 24 (B) 33 (C) 24 或 33
(D) 22 或 33 (E) 24 或 35

2. (2002 年) 设 $3^a = 4, 3^b = 8, 3^c = 16$, 则 a, b, c ()

- (A) 是等比数列,但不是等差数列
(B) 是等差数列,但不是等比数列
(C) 既是等比数列,也是等差数列
(D) 既不是等比数列,也不是等差数列

3. (2001 年) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 0,但第 3、4、7 项构成等比数列,则 $\frac{a_2 + a_6}{a_3 + a_7} =$ ()

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

4. (2001 年) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 2, a_{11} = 6$; 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列,若 $b_2 = a_3, b_3 = \frac{1}{a_2}$, 则满足 $b_n > \frac{1}{a_{26}}$ 的最大的 n 是 ()

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

5. (1998 年) 已知 a, b, c 三个数成等差数列, 又成等比数列, 设 α, β 是方程 $ax^2 + bx - c = 0$ 的两个根, 且 $\alpha > \beta$, 求 $\alpha^3\beta - \alpha\beta^3$.

6. (2002 年) 若 $\alpha^2, 1, \beta^2$ 成等比数列, 而 $\frac{1}{\alpha}, 1, \frac{1}{\beta}$ 成等差数列, 则 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} =$ ()

(A) $-\frac{1}{2}$ 或 1 (B) $-\frac{1}{3}$ 或 1 (C) $\frac{1}{2}$ 或 1 (D) $\frac{1}{3}$ 或 1

7. 一个等差数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为 $S_6 = 48$, 在这 6 项中, 奇数项之和与偶数项之和的比为 7:9, 则公差 d 的值为 ()

(A) 3 (B) -3 (C) 2 (D) -2 (E) 4

8. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和等于 2, 紧接在后面的 $2n$ 项和等于 12, 再紧接其后的 $3n$ 项和为 S , 则 S 等于 ()

(A) 112 (B) 112 或 -378

(C) -122 或 378 (D) -378

(E) -112

9. 四个数, 前三个数成等差数列, 它们的和为 12, 后三个数成等比数列, 它们的和是 19, 则这四个数之积为 ()

(A) 432 或 -18000 (B) -432 或 18000

(C) -432 或 -18000 (D) 432 或 18000

(E) 以上答案均都不正确

二 条件充分性判断

10. 实数 a, b, c 成等比数列.

(1) 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 有两相等实根

(2) $\lg a, \lg b, \lg c$ 成等差数列

11. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其 S_{10} 的值可唯一确定.

(1) $a_5 + a_6 = a_7 - a_5 = 48$

(2) $2a_m \cdot a_n = a_m^2 + a_n^2 = 18$

12. $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_n > 0$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10}$ 的值为常数.

(1) $a_5 a_6 = 81$ (2) $a_4 a_7 = 27$

13. (2008 年) $a_1 a_8 < a_4 a_5$.

(1) $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_1 > 0$

(2) $\{a_n\}$ 为等差数列, 且公差 $d \neq 0$

14. (2009 年) $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $S_{19} : T_{19} = 3 : 2$.

(2) $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是等差数列

(2) $a_{10} : b_{10} = 3 : 2$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. C.

解析 设三个数为 a_1, a_1q, a_1q^2 , 由已知 $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 114$

从 $a_1q = a_1 + 3d, a_1q^2 = a_1 + 24d$ 消去 d 可得

$$q^2 - 8q + 7 = 0$$

即 $q = 7, q = 1$, 分别代入

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = 114$$

得 $a_1 = 2, a_1 = 38$, 从而这三个数依次是 2, 14, 98 或 38, 38, 38.

即此三个数各位上的数字之和为 $2 + 1 + 4 + 9 + 8 = 24$ 或 $3 + 8 + 3 + 8 + 3 + 8 = 33$.

2. B.

解析 由题意 $a = \log_3 4, b = \log_3 8, c = \log_3 16$,

从而 $a + c = \log_3 4 + \log_3 16 = \log_3 64 = 2\log_3 8 = 2b$

即 a, b, c 成等差数列.

而 $b^2 = (\log_3 8)^2 \neq \log_3 4 \times \log_3 16 = ac$, 即 a, b, c 不是等比数列.

3. A.

解析 由已知第 3、4、7 项构成等比数列, 即

$$(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 6d)$$

化解得

$$a_1 = -\frac{3}{2}d$$

因此

$$\frac{a_2 + a_6}{a_3 + a_7} = \frac{2a_1 + 6d}{2a_1 + 8d} = \frac{2 \times \left(-\frac{3}{2}d\right) + 6d}{2 \times \left(-\frac{3}{2}d\right) + 8d} = \frac{3d}{5d} = \frac{3}{5}$$

4. B.

解析 由 $\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 2 \\ a_{11} = a_1 + 10d = 6 \end{cases}$

可知 $d = \frac{1}{2}, a_1 = 1$

因此 $a_{26} = a_1 + 25d = 1 + \frac{25}{2} = \frac{27}{2}$

$$b_2 = a_3 = 2, b_3 = \frac{1}{a_2} = \frac{2}{3}, q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{1}{3}$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 6 \cdot q^{n-1} = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > \frac{2}{27}, \text{ 则 } n = 4.$$

5.

解析 由已知 $b = \frac{a+c}{2}$ 且 $b^2 = ac$, 得 $a = b = c \neq 0$.

原方程可化为 $x^2 + x - 1 = 0$

由韦达定理 $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$

从而

$$\begin{aligned} \alpha^3\beta - \alpha\beta^3 &= \alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha - \beta \\ &= |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

6. B.

解析 由已知 $1 = \alpha^2\beta^2$ 且 $1 = \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta}$

若 $\alpha\beta = 1$, 则 $\alpha + \beta = 2, \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2$

若 $\alpha\beta = -1$, 则 $\alpha + \beta = -2, \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6$

因此 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = 1$ 或 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = -\frac{1}{3}$

7. C.

解析 由 $S_6 = 48 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2}$ 可得 $2a_1 + 5d = 16$,

再由 $\frac{a_1 + a_3 + a_5}{a_2 + a_4 + a_6} = \frac{3a_1 + 6d}{3a_1 + 9d} = \frac{7}{9}$ 可得 $2a_1 - 3d = 0$.

得 $d = 2$

8. B.

解析 取 $n = 1$, 则有 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_1q + a_1q^2 = 12 \end{cases}$

解得 $q = 2$ 或 $q = -3$,

从而 $S = a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 = a_1q^3(1 + q + q^2)$

即 $S = 112$ 或 $S = -378$.

9. A.

解析 设前三个数为 $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d$, 则知 $3a_1 + 3d = 12$ 即 $a_1 + d = 4$, 后三个数为

$$(a_1 + d), (a_1 + d)q, (a_1 + d)q^2$$

$$(a_1 + d) + (a_1 + d)q + (a_1 + d)q^2 = 19$$

即

$$4 + 4q + 4q^2 = 19$$

$$\text{解得 } q = \frac{3}{2}, q = -\frac{5}{2}$$

$$\text{由 } a_1 + 2d = (a_1 + d)q$$

$$\text{可解得 } d = 2, d = -14, \text{ 因而 } a_1 = 2, a_1 = 18$$

这四个数为 2, 4, 6, 9 或 18, 4, -10, 25.

则这四个数的积为

$$2 \times 4 \times 6 \times 9 = 432 \text{ 或 } 18 \times 4 \times (-10) \times 25 = -18000$$

二 条件充分性判断

10. B.

解析 题干要求推出 $b^2 = ac$ 且 $b \neq 0$ 取 $a = 1, b = c = 0$, 则知条件(1)不充分.

$$\text{由条件(2)可知 } a > 0, b > 0, c > 0, \lg b = \frac{\lg a + \lg c}{2}$$

因此 $b^2 = ac$, 且 $b \neq 0$, 从而条件(2)是充分的.

11. A.

解析 设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q

$$\text{由条件(1), } a_1 q^4 + a_1 q^5 = a_1 q^6 - a_1 q^4 = 48$$

$$\text{得 } 1 + q = (q + 1)(q - 1), \text{ 从而 } q = 2, a_1 = 1$$

因此 S_{10} 的值可以唯一确定. 条件(1)是充分的.

$$\text{由条件(2), } (a_m - a_n)^2 = 0, a_m = a_n, q = 1, a_n = \pm 3$$

$$\text{即 } S_{10} = 10 \times 3 = 30 \text{ 或 } S_{10} = 10 \times (-3) = -30$$

条件(2)不充分.

12. D.

$$\text{解析 } \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10} = \log_3 (a_1 a_2 \cdots a_{10})$$

若条件(1)成立, 则有

$$\log_3 (a_1 a_2 \cdots a_{10}) = \log_3 (a_5 a_6)^5 = \log_3 3^{20} = 20$$

为常数.

若条件(2)成立,则有

$$\log_3(a_1 \cdots a_{10}) = \log_3(a_4 q_7)^5 = \log_3 3^{15} = 15$$

为常数,即条件(1)、(2)都是充分的.

13. B.

解析 设等差数列 $\{a_n\}$, 首项 a_1 , 公差 d .

$$\text{则 } a_1 a_8 = a_1(a_1 + 7d) = a_1^2 + 7a_1 d$$

$$a_4 a_5 = (a_1 + 3d)(a_1 + 4d) = a_1^2 + 7a_1 d + 12d^2$$

$$a_1 a_8 < a_4 a_5 \quad \text{等价于 } d \neq 0.$$

从而条件(1)不充分. 但条件(2)充分.

14. C.

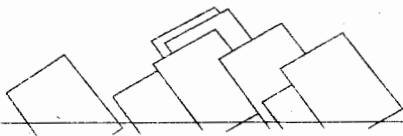
解析 由条件(1), 设 $a_n = 1, b_n = 1$, 则 $S_{19}:T_{19} = 1:1$

即条件(1)不充分, 显然条件(2)也不充分.

$$\text{联合条件(1)和条件(2), } \frac{2a_{10}}{2b_{10}} = \frac{a_1 + a_{19}}{b_1 + b_{19}} = \frac{\frac{19(a_1 + a_{19})}{2}}{\frac{19(b_1 + b_{19})}{2}} = \frac{S_{19}}{T_{19}} = \frac{3}{2} \text{ 成立.}$$

第十七章

应 用 题



第一节 基 本 内 容 提 要

一 一元 n 次多项式的定义 ④

在联考的数学试题中,比和比例这部分的应用题是一个十分重要的考点;其次为行程问题、工程问题及一般的一元二次方程或二元一次方程组的有关应用题,同时也要注意联考还会涉及一些简单的算术问题.不论考查哪一种类型的应用题,重要的是要将题中所给要素用数学表达式表示,建立变量间的关系式,用较简捷的方法得出答案.

第二节 典 型 例 题 及 历 年 真 题 解 析

一 问题求解 ④

例 2.1 (1999 年) 甲、乙、丙三名工人加工完成一批零件,甲工人完成了总件数的 34%,乙、丙两工人完成的件数之比是 6:5,已知丙工人完成了 45 件,则甲工人完成了 ()

- (A) 48 件 (B) 51 件 (C) 60 件
(D) 63 件 (E) 132 件

解 设总件数为 a ,甲完成了 $0.34a$,丙完成了 45 件,乙完成了 b ,且 $\frac{b}{45} = \frac{6}{5}$

即 $b = 54$,从而 $0.66a = 45 + 54 = 99$, $a = 150$,甲完成了 $0.34a = 51$ (件)

所以选 B.

例 2.2 (2001 年) 一商店把某商品按标价的九折出售,仍可获利 20%,若该商品的进价为每件 21 元,则该商品每件的标价为 ()

- (A) 26 元 (B) 28 元 (C) 30 元 (D) 32 元

解 设每件标价为 x , 售价为 $0.9x$, 则

$$\frac{0.9x - 21}{21} = 0.2$$

解得 $x = 28$.

所以选 B.

例 2.3 (2001 年) 一公司向银行借款 34 万元, 欲按 $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$ 的比例分配给下属甲、乙、丙三车间进行技术改造, 则甲车间应得 ()

(A) 4 万元 (B) 8 万元 (C) 12 万元 (D) 18 万元

解 $\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}t = 34$, 得 $t = 36$

从而甲可得 $\frac{1}{2}t = 18$ 万元

所以选 D.

例 2.4 (2004 年) 装一台机器需要甲、乙、丙三种部件各一件, 现库中存有这三种部件共 270 件, 分别用甲、乙、丙库存件数的 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{2}{3}$ 装配若干机器, 那么原来库存有甲种部件的件数是 ()

(A) 80 (B) 90 (C) 100
(D) 110 (E) 以上均不正确

解 设甲、乙、丙库存数分别为 x, y, z , 则由题意

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x = \frac{3}{4}y = \frac{2}{3}z \\ x + y + z = 270 \end{cases}$$

解得 $x = 100$.

所以选 C.

例 2.5 (2004 年) 某工厂生产某种新型产品, 一月份每件产品销售的利润是出厂价的 25% (利润 = 出厂价 - 成本), 二月份每件产品出厂价降低了 10%, 成本不变, 销售件数比一月份增加 80%, 则利润增长 ()

(A) 6% (B) 8% (C) 15.5%
(D) 25.5% (E) 以上结论均不正确

解 设一月份每件出厂价 a 元, 每件成本 b 元, 销售量为 x 件, 由已知一月份利润

$$L_1 = xa - xb = 0.25xa$$

即可知

$$b = 0.75a$$

二月份每件出厂价为 $0.9a$ 元, 每件成本 b 元, 销售量为 $1.8x$,

二月份利润

$$L_2 = 0.9a \times 1.8x - 0.75a \times 1.8x = 0.27xa$$

则

$$\frac{L_2 - L_1}{L_1} = \frac{0.27xa - 0.25xa}{0.25xa} = 0.08 = 8\%$$

所以选 B.

例 2.6 (2005 年) 某公司二月份产值为 36 万元, 比一月份产值增加了 11 万元, 比三月份产值减少了 7.2 万元, 第二季度产值为第一季度的 1.4 倍. 该公司上半年产值的月平均值为 ()

(A) 40.51 万元

(B) 41.68 万元

(C) 48.25 万元

(D) 50.16 万元

(E) 52.16 万元

解 由题意一月份产值为 25 万元, 二月份产值为 36 万元, 三月份产值为 43.2 万元, 第一季度产值为

$$25 + 36 + 43.2 = 104.2 \text{ (万元)}$$

第二季度产值为

$$104.2 \times 1.4 = 145.88 \text{ (万元)}$$

因此, 上半年产值的月平均值为

$$\frac{145.88 + 104.2}{6} = 41.68 \text{ (万元)}$$

所以选 B.

例 2.7 (2006 年) 某电子产品一月份按原定价的 80% 出售, 能获利 20%, 二月份由于进价降低, 按原定价的 75% 出售, 却能获利 25%, 那么二月份进价是一月份进价的百分之 ()

(A) 92

(B) 90

(C) 85

(D) 80

(E) 75

解 一月份定价为 x , 售价为 $0.8x$, 进价为 y_1 ,

二月份售价为 $0.75x$, 进价为 y_2 ,

由题意

$$\frac{0.8x - y_1}{y_1} = 0.2, \quad \frac{0.75x - y_2}{y_2} = 0.25$$

得

$$y_1 = \frac{8}{12}x, \quad y_2 = \frac{75}{125}x, \quad \frac{y_2}{y_1} = 90\%$$

所以选 B.

例2.8 (2009年) 一家商店为回收资金,把甲、乙两件商品均以480元一件卖出,已知甲商品赚了20%,乙商品亏了20%,则商店盈亏结果为 ()

- (A)不亏不赚 (B)亏了50元 (C)赚了50元
(D)赚了40元 (E)亏了40元

解 设甲商品成本为 a 元,乙商品成本为 b 元

由已知 $1.2a = 480$ (元), $0.8b = 480$ (元)

从而 $a = 400$ (元), $b = 600$ (元),即商店亏了40元

所以选 E.

例2.9 (1999年) 一项工程由甲、乙两队一起做30天可以完成.甲单独做24天后,乙队加入,两队一起做10天后,甲队调走,乙队继续做了17天才完成,若这项工程由甲队单独做需 ()

- (A)60天 (B)70天 (C)80天
(D)90天 (E)100天

解 甲队每天完成 $\frac{1}{x}$,乙队每天完成 $\frac{1}{y}$ (工程量看作1)

则

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{30}, \quad \frac{24}{x} + \frac{10}{30} + 17 \times \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{x} \right) = 1$$

解得 $x = 70$.

所以选 B.

例2.10 (2006年) 甲、乙两项工程分别由一、二工程队负责完成.晴天时,一队完成甲工程需要12天,二队完成乙工程需要15天.雨天时,一队的效率是晴天时的60%,二队的效率是晴天时的80%,结果两队同时开工并同时完成各自的工程.那么,在这段工期内,雨天的天数为 ()

- (A)8天 (B)10天 (C)12天
(D)15天 (E)以上结论均不正确

解 甲队晴天时每天完成 $\frac{1}{12}$ (效率),雨天时效率为 $\frac{1}{12} \times 0.6$.

乙队晴天时每天完成 $\frac{1}{15}$,雨天时效率为 $\frac{1}{15} \times 0.8$.

设晴天天数为 a ,雨天天数为 b ,

则

$$\begin{cases} \frac{1}{12}a + \frac{1}{12} \times 0.6b = 1 \\ \frac{1}{15}a + \frac{1}{15} \times 0.8b = 1 \end{cases}$$

解得 $b = 15$.

所以选 D.

例 2.11 (2004 年) 甲、乙两人同时从同一地点出发相背而行, 1 小时后分别到达各自的终点 A 和 B. 若从原地出发, 互换彼此的目的地, 则甲在乙到达 A 之后 35 分钟到达 B, 则甲的速度和乙的速度之比是 ()

- (A) 3:5 (B) 4:3 (C) 4:5
(D) 3:4 (E) 以上结论均不正确

解 设甲的速度为每小时 x , 乙的速度为每小时 y . 两人同时从 O 点出发, 则 OA 的距离为 x , OB 的距离为 y .

依题意

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} - \frac{35}{60}$$

令 $\frac{x}{y} = t$, 可解得 $t = \frac{3}{4}$.

所以选 D.

例 2.12 (2005 年) 一支部队排成长度为 800 米的队列行军, 速度为 80 米/分钟. 在队首的通讯员以 3 倍于行军的速度跑步到队尾, 花 1 分钟传达首长命令后, 立即以同样的速度跑回到队首, 在其往返全过程中通讯员所花费的时间为 ()

- (A) 6.5 分钟 (B) 7.5 分钟 (C) 8 分钟
(D) 8.5 分钟 (E) 10 分钟

解 通讯员从队首跑步到队尾所花时间为 $\frac{800}{80 + 3 \times 80} = 2.5$ (分钟),

通讯员从队尾跑步到队首所花时间为 $\frac{800}{3 \times 80 - 80} = 5$ (分钟),

共花费时间 $2.5 + 1 + 5 = 8.5$ (分钟).

所以选 D.

注: (1) 若两物体相向而行, 则相对速度为两速度之和.

(2) 若两物体同向而行, 则相对速度为两速度之差.

例 2.13 (2008 年) 一批物资分别随 16 列货车从甲站紧急调往 600 公里以外的乙站, 每列车速为 125 公里/小时, 若两列相邻的货车在运行中的间隔不得小于 25 公里, 则这批物资全部到达乙站最少需要的小时数为 ()

- (A) 7.4 (B) 7.6 (C) 7.8
(D) 8 (E) 8.2

解 每一列车从甲站到乙站时间为 $\frac{600}{125} = 4.8$ (小时), 第二列车在第一列车到乙站后至少还需 $\frac{25}{125} = \frac{1}{5}$ (小时) 才能到乙站, 以此类推, 第三列车在第一列车到乙站后至少需 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ (小时) 才能到乙站……, 第十六列货车在第一列车到乙站后至少需 $15 \times \frac{1}{5} = 3$ (小时) 才能到达乙站, 从而这批物资全部到达乙站至少需 $4.8 + 3 = 7.8$ (小时)

所以选 C.

例 2.14 (2009 年) 一艘轮船往返航行于甲、乙两码头之间, 若船在静水中的速度不变, 则当这条河的水流速度增加 50% 时, 往返一次所需时间比原来将 ()

- (A) 增加了 (B) 减少半小时 (C) 不变
(D) 减少一小时 (E) 无法判断

解 设甲、乙两码头相距 s , 船在静水中的速度为 v_1 , 水流速度原为 v_2

$$\text{则原往返一次所需时间为 } \frac{s}{v_1 + v_2} + \frac{s}{v_1 - v_2} = \frac{2v_1 s}{v_1^2 - v_2^2}$$

$$\text{现往返一次所需时间为 } \frac{s}{v_1 + 1.5v_2} + \frac{s}{v_1 - 1.5v_2} = \frac{2v_1 s}{v_1^2 - (1.5v_2)^2}$$

从而往返一次所需时间比原来增加了

所以选 A.

例 2.15 一个容器盛满 20 升的酒精, 倒出一部分后注满水, 第二次倒出与前次同量的混合液, 再注满水, 此时容器内的水是纯酒精的 3 倍, 则第一次倒出酒精的数量为 ()

- (A) 10 升 (B) 15 升 (C) 20 升
(D) 25 升 (E) 30 升

解 设第一次倒出为 x 升, 则第二次倒出的纯酒精为 $\frac{20-x}{20} \times x$.

依题意

$$\frac{20 - x - \frac{20 - x}{20} \times x}{20} = \frac{1}{4}$$

解得 $x = 10$.

所以选 A.

例 2.16 有某种纯农药一桶, 倒出 8 升后, 用水补满, 然后又倒出 4 升, 再用水补满, 此时测得桶中纯农药和水之比是 18:7, 求桶的容积.

解 设桶的容积为 x 升, 则第二次倒出的纯农药为 $\frac{x-8}{x} \times 4$.

由题意

$$\frac{x-8-\frac{x-8}{x} \times 4}{x} = \frac{18}{25}$$

解得 $x=40$ (升).

例 2-17 有一座水库, 在单位时间内有一定量的水流进, 同时也向外放水. 按现在的放水量, 水库中的水可用 40 天. 因最近水源地降雨, 流入水库的水量增加 20%, 如果放水量增加 10%, 则仍可用 40 天. 如果按原放水量放水, 可使用多少天?

解 设原水库中水量为 a , 每天流进的水量为 b , 每天放出的水量为 c ,

则由题意知

$$a+40b=40c$$

且

$$a+40 \times 1.2b=40 \times 1.1c$$

可得 $c=2b, a=40b$

如果按原放水量放水, 可使用 x 天,

则 x 满足

$$a+x \times 1.2b=xc$$

即

$$40b+1.2bx=2bx$$

得 $x=50$ (天).

例 2-18 (2008 年) 王女士以一笔资金分别投入股市和基金, 但因故需抽回一部分资金. 若从股市中抽回 10%, 从基金中抽回 5%, 则其总投资额减少 8%, 若从股市和基金的投资额中各抽回 15% 和 10%, 则其总投资额减少 130 万元, 其总投资额为 ()

- (A) 1000 万元 (B) 1500 万元 (C) 2000 万元
(D) 2500 万元 (E) 3000 万元

解 设王女士投资股市 x 万元, 投资基金 y 万元, 由已知

$$\begin{cases} 0.1x+0.05y=0.08(x+y) \\ 0.15x+0.1y=130 \end{cases}$$

从而解得 $y=400$ (万元), $x=600$ (万元), 即 $x+y=1000$ (万元)

所以选 A.

例 2-19 (2008 年) 某电镀厂两次改进操作方法, 使用锌量比原来节约 15%, 则平均每次节约 ()

- (A) 42.5% (B) 7.5% (C) $(1-\sqrt{0.85}) \times 100\%$
(D) $(1+\sqrt{0.85}) \times 100\%$ (E) 以上结论均不正确

解 设原来用锌量为 x , 每次节约 a ,

则 $x(1-a)^2=0.85x, 1-a=\sqrt{0.85},$

因此

$$a=(1-\sqrt{0.85}) \times 100\%$$

所以选 C.

例 2.20 (2008 年) 若用浓度 30% 和 20% 的甲、乙两种食盐溶液配成浓度为 24% 的食盐溶液 500 克, 则甲、乙两种溶液应各取 ()

- (A) 180 克和 320 克 (B) 185 克和 315 克 (C) 190 克和 310 克
(D) 195 克和 305 克 (E) 200 克和 300 克

解 设甲、乙两种溶液应各取 x 克, y 克, 则

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0.3 \times x + 0.2 \times y = 0.24 \times 500 \end{cases}$$

解得 $y = 300$ (克), $x = 200$ (克).

所以选 E.

三 条件充分性判断

例 2.21 (2003 年) 某城区 2001 年绿地面积较上年增加了 20%, 人口却负增长, 结果人均绿地面积比上年增长了 21%.

- (1) 2001 年人口较上年下降了 0.826% (2) 2001 年人口较上年下降了 10%

解 设 2000 年绿地面积为 x , 则 2001 年绿地面积为 $1.2x$; 2000 年人口为 y , 2001 年人口为 y_1 .

题干要求推出 $\frac{1.2x}{y_1} = 1.21 \frac{x}{y}$,

由条件(1)

$$y_1 = 0.99174y$$

代入

$$\frac{1.2x}{0.99174y} = 1.21 \frac{x}{y}$$

即条件(1)充分.

由条件(2)

$$y_1 = 0.9y$$

代入

$$\frac{1.2x}{0.9y} = 1.33 \frac{x}{y}$$

即条件(2)不充分.

因此答案为 A.

例 2.22 (2004 年) A 公司 2003 年 6 月份的产值是 1 月份产值的 a 倍.

- (1) 在 2003 年上半年, A 公司月产值的平均增比率为 $\sqrt[5]{a}$

- (2) 在 2003 年上半年, A 公司月产值的平均增比率为 $\sqrt[6]{a} - 1$

解 设公司一月份的产值是 b , 月平均增比率为 x , 则哪一个可以推出

$$b(1+x)^5 = ab$$

即 $x = \sqrt[5]{a} - 1$.

因而条件(1)、(2)都不充分.

所以选 E.

例 2.23 公共汽车上原有乘客若干人, 在甲站有人下车后 (无人上车), 车上所留乘客

中,女乘客与男乘客人数之比为 1:12.

(1) 原有乘客中,女乘客与男乘客人数之比为 1:3

(2) 在甲车站,女乘客人数中 75% 下车,而男乘客均留在车上

解 设原有男乘客 x 人,女乘客 y 人,在甲站男乘客有 a 人下车,女乘客有 b 人下车,

需推出
$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{1}{12}.$$

显然条件(1)、(2)单独都不充分,若将(1)、(2)联合,则有

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{y-0.75y}{3y-0} = \frac{0.25}{3} = \frac{1}{12}.$$

所以选 C.

例 2.24 甲、乙两人分工合作,1 小时可录入电脑 9000 字,可以确定乙单独工作 1 小时可录入多少字.

(1) 甲的录入速度是乙的 50%

(2) 甲单独工作的效率是两人合作时录入效率的 $\frac{1}{3}$

解 若乙每小时可录 a 字,甲每小时可录 b 字,

由条件(1) $b = 2a$

可得 $a + 2a = 9000$

从而求出 a ,即条件(1)充分.

由条件(2)

$$b = (a + b) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 9000$$

可求出 b ,从而求出 a ,即条件(2)也是充分的.

所以选 D.

例 2.25 (2008 年) 1 满杯酒容积为 $\frac{1}{8}$ 升.

(1) 瓶中有 $\frac{3}{4}$ 升酒,再倒入 1 满杯酒可使瓶中的酒增至 $\frac{7}{8}$ 升

(2) 瓶中有 $\frac{3}{4}$ 升酒,再从瓶中倒出 2 满杯酒可使瓶中的酒减至 $\frac{1}{2}$ 升

解 由条件(1),1 满杯酒 $= \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$ (升),即条件(1)是充分的.

由条件(2),1 满杯酒 $= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}$ (升),即条件(2)也是充分的.

所以选 D.

例 2.26 (2008 年) 管径相同的 3 条不同管道甲、乙、丙同时向某基地容积为 1000 立方米的油罐供油. 丙管道的供油速度比甲管道供油速度快.

(1) 甲、乙同时供油 10 天可灌满油罐

(2) 乙、丙同时供油 5 天可灌满油罐

解 设甲每天可供油 $\frac{1}{x}$, 乙每天可供油 $\frac{1}{y}$, 丙每天可供油 $\frac{1}{z}$ (这里设油罐总容积为 1).

由条件(1), $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$

由条件(2), $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{5}$

即条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2), 则有

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{1}{10}$$

从而 $\frac{1}{z} > \frac{1}{x}$. 即丙管道的供油速度比甲管道供油速度快.

所以选 C.

例 2.27 (2008 年) 本学期, 某大学的 a 个学生, 或者付 x 元的全额学费或者付半额学

费. 付全额的学生所付的学费占这 a 个学生所付学费总额的比率是 $\frac{1}{3}$.

(1) 在这 a 个学生中, 20% 的人付全额学费

(2) 这 a 个学生本学期共付 9120 元学费

解 设付全额学费的学生为 b 人, 则付半额学费的为 $(a-b)$ 人, 题干要求推出

$$bx = \frac{1}{3} \left[bx + (a-b) \frac{x}{2} \right]$$

即 $a = 5b$.

由条件(1), $b = 0.2a$, 从而 $a = 5b$, 条件(1)是充分的.

由条件(2), $(a-b) \frac{x}{2} + bx = 9120$, 不能推出 $a = 5b$, 因此条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.28 (2008 年) 一件含有 25 张一类贺卡和 30 张二类贺卡的邮包的总重量 (不计包装质量) 为 700 克.

(1) 一类贺卡重量是二类贺卡重量的 3 倍

(2) 一张一类贺卡与两张二类贺卡的总重量是 $\frac{100}{3}$ 克

注: 条件(1)不严格, 应注明所指重量是单张卡的重量, 还是贺卡总重量.

解 设每张一类卡重量为 a 克, 每张二类卡重量为 b 克. 则题干要推出 $25a + 30b = 700$ (克)

由条件(1), $a = 3b$, 不能推出题干, 因此条件(1)不充分.

由条件(2), $a + 2b = \frac{100}{3}$, 也不能推出题干, 因此条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2), 则可得 $b = \frac{20}{3}, a = 20$

因此 $25a + 30b = 25 \times 20 + 30 \times \frac{20}{3} = 700$ (克).

所以选 C.

第三节 练习

一 问题求解

1. (1997 年) 某投资者以 2 万元购买甲、乙两种股票, 甲股票的价格为 8 元/股, 乙股票的价格为 4 元/股, 它们的投资额之比是 4:1, 在甲、乙股票价格分别为 10 元/股和 3 元/股时, 该投资者全部抛出这两种股票, 他共获利 ()

- (A) 3000 元 (B) 3889 元 (C) 4000 元
(D) 5000 元 (E) 2300 元

2. (1998 年) 银行的一年期定期存款利率为 10%, 某人于 1991 年 1 月 1 日存入 10000 元, 1994 年 1 月 1 日取出, 若按复利计算, 他取出的本金和利息共计是 ()

- (A) 10300 元 (B) 10303 元 (C) 13000 元
(D) 13310 元 (E) 14641 元

3. (1997 年) 某商品打九折会使销售量增加 20%, 则这一折扣会使销售额增加的百分比是 ()

- (A) 18% (B) 10% (C) 8%
(D) 5% (E) 2%

4. (1999 年) 容器内装满铁质或木质的黑球与白球, 其中 30% 是黑球, 60% 的白球是铁质的, 则容器中木质白球的百分比是 ()

- (A) 28% (B) 30% (C) 40%
(D) 42% (E) 70%

5. (2003 年) 某工厂人员由技术人员、行政人员和工人组成, 共有男职工 420 人, 是女职工的 $1\frac{1}{3}$ 倍, 其中行政人员占全体职工的 20%, 技术人员比工人少 $\frac{1}{25}$, 那么该工厂有工人 ()

- (A) 200 人 (B) 250 人 (C) 300 人
(D) 350 人 (E) 400 人

6. (2001 年) 两地相距 351 公里, 汽车已行驶了全程的 $\frac{1}{9}$, 试问再行驶多少公里, 剩下的路程是行驶的路程的 5 倍 ()

- (A) 19.5 公里 (B) 21 公里 (C) 21.5 公里 (D) 22 公里

7. (2006 年) 某人以 6 公里/小时的平均速度上山, 上山后立即以 12 公里/小时的平均速度原路返回, 那么此人在往返过程中的每小时平均所走的公里数为 ()

(A)9 (B)8 (C)7

(D)6 (E)以上结论均不正确

8. (2002 年) A, B 两地相距 15 公里, 甲中午 12 时从 A 地出发, 步行前往 B 地, 20 分钟后乙从 B 地出发骑车前往 A 地, 到达 A 地后乙停留了 40 分钟后骑车从原路返回, 结果甲、乙同时到达 B 地, 若乙骑车比甲出行每小时快 10 公里, 则两人同时到达 B 地的时间是 ()

(A)下午 2 时 (B)下午 2 时半

(C)下午 3 时 (D)下午 3 时半

9. (2006 年) 甲、乙两仓库储存的粮食重量之比为 4:3, 现从甲库中调出 10 万吨粮食, 则甲、乙两仓库库存粮吨数之比为 7:6, 甲仓库原有粮食的吨数为 ()

(A)70 (B)78 (C)80

(D)85 (E)以上结论均不正确

10. (2007 年) 甲、乙、丙三人进行百米赛跑(假设他们的速度不变), 当甲到终点时, 乙距离终点还有 10 米, 丙距离终点还有 16 米, 则当乙到达终点时, 丙离终点还差() 米.

(A) $\frac{22}{3}$ (B) $\frac{20}{3}$ (C) $\frac{15}{3}$

(D) $\frac{10}{3}$ (E)以上结论均不正确

11. (2007 年) 甲、乙两队修一条公路, 甲单独施工需要 40 天完成, 乙单独施工需要 24 天完成, 现在两队同时从两端开始施工, 在距离公路中点 7.5 公里处会合完工, 则公路长度为() 公里.

(A)60 (B)70 (C)80

(D)90 (E)100

12. (2007 年) 某地水费的收费标准如下: 每户每月使用不超过 5 吨, 按 4 元/吨收费; 若超过 5 吨则按更高的标准收费. 9 月份张家的用水量比李家多 50%, 两家的水费分别为 90 元和 55 元, 则超过 5 吨的收费标准是 ()

(A)5 元/吨 (B)5.5 元/吨 (C)6 元/吨

(D)6.5 元/吨 (E)7 元/吨

13. (2008 年) 某产品有一等品、二等品和不合格品三种, 若在一批产品中一等品件数和二等品件数的比是 5:3, 二等品件数和不合格件数的比是 4:1, 则该产品的不合格率约为 ()

(A)7.2% (B)8% (C)8.6%

(D)9.2% (E)10%

14. (2008 年) 完成某项任务, 甲单独做需要 4 天, 乙单独做需要 6 天, 丙单独做需要 8 天. 现甲、乙、丙三人依次一日一轮换地工作, 则完成该项任务共需的天数为 ()

(A) $6\frac{2}{3}$ (B) $5\frac{1}{3}$ (C)6

(D) $4\frac{2}{3}$ (E)4

15. (2008 年) 将价值 200 元的甲原料与价值 480 元的乙原料配成一种新原料. 若新原

料每千克的售价分别比甲、乙原料每千克的售价少 3 元和多 1 元,则新原料的售价是 ()

- (A) 15 元 (B) 16 元 (C) 17 元
(D) 18 元 (E) 19 元

16. (2009 年) 在某次实验中,三个试管各盛水若干克,现将浓度为 12% 的盐水 10 克倒入 A 管中,混合后取 10 克倒入 B 管中,混合后再取 10 克倒入 C 管中,结果是 A、B、C 三个试管中盐水的浓度分别为 6%, 2%, 5%, 那么三个试管中原来盛水最多的试管及其盛水量各是

- (A) A 试管, 10 克 (B) B 试管, 20 克 (C) C 试管, 30 克
(D) B 试管, 40 克 (E) C 试管, 50 克

二 条件充分性判断

17. 某班同学在一次测验中,全班平均分为 75 分,女生的平均成绩为 84 分,这比男生的平均成绩高 20%,全班人数可求.

- (1) 男生比女生多 80%, 女生得分之和为 1200 多分
(2) 男生共有 27 人

18. 一艘轮船发生漏水事故,发现时已漏进水 600 桶,且每分钟还将漏进 24 桶水,甲、乙两台抽水机,要在 50 分钟内把水排完.

- (1) 甲机每分钟排水 22 桶,乙机每分钟排水 14 桶
(2) 甲机每分钟排水 20 桶,乙机每分钟排水 18 桶

19. 某企业人均利税今年上半年比去年同期增长了 50%.

- (1) 某企业今年上半年利税额比去年同期增加 40%, 而员工人数比去年同期减少 20%
(2) 某企业今年上半年利税额比去年同期减少 10%, 而员工人数比去年同期减少 40%

20. 某种货币经过一次贬值,再经过一次升值后,币值保持不变.

- (1) 贬值 10% 后又升值 10%. (2) 贬值 20% 后又升值 25%.

21. (2008 年) 1 千克鸡肉的价格高于 1 千克牛肉的价格.

- (1) 一家超市出售袋装鸡肉与袋装牛肉,一袋鸡肉的价格比一袋牛肉的价格高 30%
(2) 一家超市出售袋装鸡肉与袋装牛肉,一袋鸡肉比一袋牛肉重 25%

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. A.

解析 设甲为 x 股,乙为 y 股

则

$$\frac{8x}{4y} = \frac{4}{1}, 8x + 4y = 20000$$

从而可得

$$x = 2000, y = 1000$$

可获利

$$2000 \times 10 + 1000 \times 3 - 20000 = 3000(\text{元})$$

2. D.

解析) 所求为

$$10000 \times (1 + 0.1)^3 = 13310$$

3. C.

解析) 设原价为 a , 现售价为 $0.9a$, 原销售量为 b , 现销售量为 $1.2b$, 则销售额增加的百分比为

$$\frac{1.2b \times 0.9a - ab}{ab} = 1.08 - 1 = 0.08 = 8\%$$

4. A.

解析) 由题意, 白球占 70%, 从而木质白球的百分比是

$$0.7 \times 0.4 = 0.28 = 28\%$$

5. C.

解析) 设技术人员为 x , 行政人员为 y , 工人为 z .

由题意

$$x + y + z = 420 + 420 \div 1 \frac{1}{3} = 735(\text{人})$$

$$x = 0.2 \times 735, \quad y = \frac{24}{25}z$$

从而可解得 $z = 300(\text{人})$.

6. A.

解析) 设还需行驶 x 公里

$$\text{则} \quad 351 - 351 \times \frac{1}{9} - x = 5(351 \times \frac{1}{9} + x)$$

解得 $x = 19.5(\text{公里})$.

7. B.

解析) 上山路程为 S , 则总时间为 $\frac{S}{6} + \frac{S}{12}$,

从而每小时平均所走的公里数为

$$\frac{2S}{\frac{S}{6} + \frac{S}{12}} = \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = 2 \times \frac{12}{3} = 8$$

8. C.

解析 设甲每小时速度为 x 公里, 乙每小时速度为 $(x+10)$ 公里.

由题意
$$\frac{15}{x} = \frac{30}{x+10} + 1$$

解得 $x=5$, 则到达 B 地的时间是下午 3 时.

9. C.

解析 设甲仓库原有 x 吨, 乙仓库原有 y 吨.

则
$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}, \quad \frac{x-10}{y} = \frac{7}{6}$$

可得 $x=80$ (吨).

10. B.

解析 甲、乙、丙三人速度的比为 $100:90:84$, 则有

$$\frac{84}{90} = \frac{100-x}{100}$$

解得
$$x = \frac{20}{3} \text{ (米)}.$$

11. A.

解析 设甲每天完成工程量的 $\frac{1}{40}$, 乙每天完成工程量的 $\frac{1}{24}$, 两队合作 a 天可完成. 公路全
程长度为 x 公里, 则有

$$\frac{1}{40}a + \frac{1}{24}a = 1$$

$$a = 15 \text{ (天)}$$

$$\frac{x}{24} \times 15 - \frac{x}{40} \times 15 = 15 \text{ (公里)}$$

解得 $x=60$ 公里.

12. E.

解析 设李家用水 a 吨, 张家用水 $1.5a$ 吨, 超过 5 吨的收费标准为 b 元, 则有

$$(1.5a - a)b = 90 - 55 = 35$$

即 $ab=70$, 由于

$$4 \times 5 + (a - 5)b = 55 \quad (\text{按李家水费计算})$$

则有 $b=7$ (元).

13. C.

解析 设一等品、二等品和不合格品的件数分别为 a, b, c ,

由已知
$$\frac{a}{b} = \frac{5}{3}, \quad \frac{b}{c} = \frac{4}{1}$$

因此

$$\frac{c}{a+b+c} = \frac{\frac{1}{4}b}{\frac{5}{3}b+b+\frac{1}{4}b} = \frac{3}{35} \approx 8.6\%$$

14. B.

解析 由已知甲、乙、丙每天完成工程量分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$, 因此

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+4+3+6+4}{24} = \frac{23}{24}$$

$$\frac{1}{24} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$$

即共需要的天数是 $5\frac{1}{3}$.

15. C.

解析

此考题很不严格, 应变为: 若新原料每千克售价分别比甲、乙原料每千克的售价少 3 元和多 1 元才能使总价值不变, 则新原料的售价是 ()

设新原料的售价是 x , 则甲原料是 $x+3$, 乙原料是 $x-1$, 则

$$\frac{200}{x+3} + \frac{480}{x-1} = \frac{680}{x}$$

整理得

$$120x = 2040, \quad x = 17(\text{元})$$

16. C.

解析

设 A, B, C 三管中原分别有水 x 克, y 克, z 克.

由已知 $\frac{0.12 \times 10}{x+10} = 0.06$, $\frac{0.06 \times 10}{y+10} = 0.02$, $\frac{0.02 \times 10}{z+10} = 0.005$

得 $x=10, y=20, z=30$

条件充分性判断

17. D.

解析 由条件(1), 女生得分之和为 1200 多分, 知女生人数应为 15 人, 则男生应为 $15 \times 1.8 = 27$ (人), 代入题干验证完全正确, 即条件(1)充分.

由条件(2), 男生平均成绩应为 $\frac{84}{1.2} = 70$ (分).

$$70 \times 27 + 84x = 75(x + 27) \quad (x \text{ 为女生人数})$$

可得 $x=15$, 条件(2)也充分.

18. D.

解析 50 分钟内应排出漏水的总量为 $600 + 24 \times 50 = 1800$ (桶),若两台抽水机效率之和不小于 $1800 \div 50 = 36$ (桶), 则条件(1)和(2)都充分.

19. B.

解析 设去年同期利税额为 a , 员工为 b . 今年上半年利税额为 a_1 , 员工人数为 b_1 , 则需推出

$$\frac{a_1}{b_1} = 1.5 \frac{a}{b}$$

由条件(1)

$$a_1 = 1.4a, \quad b_1 = 0.8b$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1.4a}{0.8b} = 1.75 \frac{a}{b}$$

由条件(2)

$$a_1 = 0.9a, \quad b_1 = 0.6b$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{0.9a}{0.6b} = 1.5 \frac{a}{b}$$

因此条件(1)不充分, 条件(2)充分.

20. B.

解析 由条件(1), 设原币值为 $a \rightarrow 0.9a \rightarrow 1.1 \times 0.9a = 0.99a$,由条件(2), 设原币值为 $a \rightarrow 0.8a \rightarrow 1.25 \times 0.8a = a$,

从而条件(1)不充分, 条件(2)充分.

21. C.

解析 条件(1)和条件(2)单独都不充分. 联合条件(1)和条件(2),设一袋牛肉重 b 千克, 价格为 a 元, 则一袋鸡肉重 $1.25b$ 千克, 价格为 $1.3a$ 元.

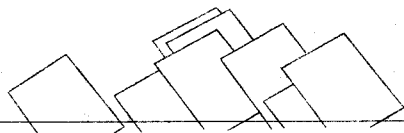
因此

$$\frac{1.3a}{1.25b} : \frac{a}{b} = \frac{1.3}{1.25} > 1$$

从而 1 千克鸡肉的价格高于 1 千克牛肉的价格.

第十八章

平面几何与立体几何



第一节 基本内容提要

一 三角形

1. 直角三角形两直角边 a, b 的平方和等于斜边 c 的平方, 即 $a^2 + b^2 = c^2$.
2. 直角三角形中特殊角 $30^\circ, 45^\circ$ 的边角关系, 如图 18-1 所示.

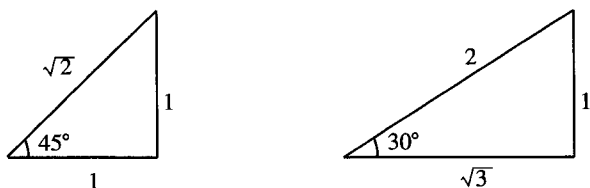


图 18-1

3. 如图 18-2 所示, 直角三角形 ABC 斜边上的中点 D 到三个顶点的距离相等.
4. 如图 18-3 所示, 等腰三角形 ABC 中, 顶角 A 的角平分线、底边 BC 的中线及高三线合一.

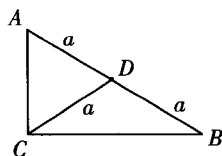


图 18-2

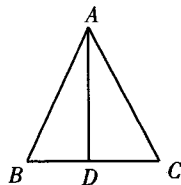


图 18-3

二 平行四边形

1. 平行四边形对角线互相平分.
2. 菱形的四条边都相等, 两条对角线互相垂直平分, 每一条对角线平分一组对角.
3. 平行四边形是矩形的充分必要条件是两对角线相等.

三 梯形 ④

1. 梯形的面积 $S = \frac{1}{2}(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}$, 中位线长度等于 $\frac{1}{2}(\text{上底} + \text{下底})$.

2. 梯形是等腰梯形的充分必要条件是两对角线相等.

常用的梯形辅助线添加方法是将梯形分割成我们熟悉的三角形和平行四边形, 再利用三角形和平行四边形的有关知识来解决问题.

四 圆 ④

1. 半径为 r 的圆的面积 $S = \pi r^2$, 周长 $l = 2\pi r$.

2. 过不在同一直线上的三点可以作且只可以作一个圆.

3. 垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对的两条弧.

五 立体几何 ④

1. 长方体

2. 圆柱体

3. 球体

第二节 典型例题及历年真题解析

一 问题求解 ④

例 2.1 (1998 年) 在四边形 $ABCD$ 中, 设 AB 的长为 8, $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 3 : 7 : 4 : 10$, $\angle CDB = 60^\circ$, 则 $\triangle ABD$ 的面积是 ()

(A) 8

(B) 32

(C) 4

(D) 16

(E) 18

解

如图 18-4 所示, 设 $\angle A = 3t$, $\angle B = 7t$, $\angle C = 4t$, $\angle D = 10t$,

则 $3t + 7t + 4t + 10t = 360^\circ$,

可得 $\angle A = 45^\circ$, $\angle ADC = 150^\circ$.

从而 $\angle ADB = 90^\circ$.

即 $\triangle ADB$ 为等腰直角三角形, 斜边 $AB = 8$, 则 AB 边上的高 $h = 4$,

面积 $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$.

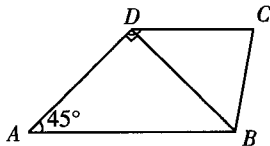


图 18-4

所以选 D.

例 2.2 (1999 年) 如图 18-5 所示, 半圆 ADB 以 C 为圆心, 半径为 1, 且 $CD \perp AB$, 分别延长 BD 和 AD 至 E 和 F , 使得圆弧 AE 和 BF 分别以 B 和 A 为圆心, 则图中阴影部分的面积为

()

- (A) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ (B) $(1 - \sqrt{2})\pi$ (C) $\frac{\pi}{2} - 1$
(D) $\frac{3\pi}{2} - 2$ (E) $\pi - 1$

解 如图 18-5 所示, $S_{\text{阴影}} = 2(S_{\text{扇形}ABE} - S_{\triangle CBD} - S_{\frac{1}{4}\text{圆}ACD})$

$$= 2\left(\frac{1}{8} \times \pi \times 2^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

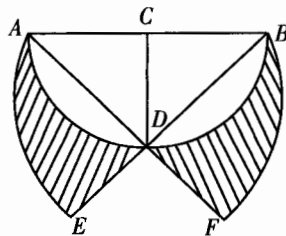


图 18-5

所以选 C.

例 2.3 (2000 年) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 并且 $a = c = 1$, 若 $(b-x)^2 - 4(a-x)(c-x) = 0$ 有相同实根, 则 $\triangle ABC$ 为

()

- (A) 等边三角形 (B) 等腰三角形 (C) 直角三角形 (D) 钝角三角形

解 将 $a = c = 1$ 代入并展开, $(b-x)^2 - 4(a-x)(c-x) = 0$
 则有 $3x^2 + (2b-8)x + (4-b^2) = 0$,
 方程有两相同的实根, 即

$$\Delta = (2b-8)^2 - 12(4-b^2) = 0,$$

解得

$$b = 1$$

所以选 A.

例 2.4 如图 18-6 所示, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AB = BC = 10$ 厘米, D 是半圆周上的中点, BC 是半圆的直径, 图中阴影部分的面积是

()

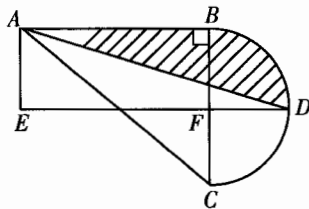


图 18-6

- (A) $25\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ 平方厘米 (B) $25\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ 平方厘米
(C) $25\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ 平方厘米 (D) $50\left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ 平方厘米
(E) 以上结论均不正确

解) 如图 18-6 所示, 作辅助线 $DE \parallel AB$ 且 $AE \perp DE$, 则图中阴影部分面积

$$\begin{aligned} S &= S_{\frac{1}{4}\text{圆}BDF} + S_{\text{矩形}ABEF} - S_{\triangle ADE} \\ &= \frac{1}{4} \times \pi \times 5^2 + 10 \times 5 - \frac{1}{2} \times 15 \times 5 \\ &= 25 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

所以选 A.

例 2.5 如图 18-7 所示, $AB \parallel CD$, $EG \perp AB$, 垂足为 G , 若 $\angle 1 = 50^\circ$, 则 $\angle E$ 为 ()

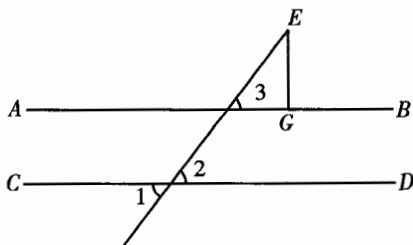


图 18-7

- (A) 30° (B) 40° (C) 50°
(D) 60° (E) 以上答案均不正确

解) $\angle 3 = \angle 2 = \angle 1 = 50^\circ$,

从而 $\angle E = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

所以选 B.

例 2.6 已知菱形的一条对角线是另一条对角线的 2 倍, 且面积为 S , 则这个菱形的边长为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{S}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3S}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5S}}{2}$
(D) $\frac{\sqrt{6S}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{7S}}{2}$

解) 如图 18-8 所示, 设较短的对角线长为 x , 则较长的对角线为 $2x$.

$$S = \frac{1}{2} x \times 2x = x^2.$$

又因为菱形的对角线互相垂直平分, 从而

$$\text{菱形的边长} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + x^2} = \sqrt{\frac{5x^2}{4}} = \frac{\sqrt{5S}}{2}.$$

所以选 C.

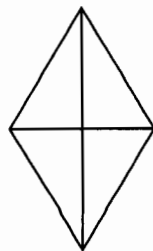


图 18-8

例 2.7 (2008 年) 如图 18-9 所示, 正方形 $ABCD$ 的四条边与圆 O 相切, 而正方形 $EFGH$ 是圆 O 的内接正方形. 已知正方形 $ABCD$ 面积为 1, 则正方形 $EFGH$ 的面积是 ()

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (E) $\frac{1}{4}$

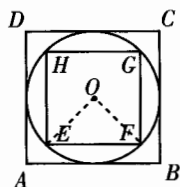


图 18-9

解 由已知 $AB=1$, 圆 O 的半径 $r=\frac{1}{2}$,

$$(EF)^2 = (OF)^2 + (OE)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

即正方形 $EFGH$ 的面积是 $\frac{1}{2}$.

所以选 B.

例 2.8 (2008 年) P 是以 a 为边长的正方形, P_1 是以 P 的四边中点为顶点的正方形, P_2 是以 P_1 的四边中点为顶点的正方形, \dots , P_i 是以 P_{i-1} 的四边中点为顶点的正方形, 则 P_6 的面积为 ()

- (A) $\frac{a^2}{16}$ (B) $\frac{a^2}{32}$ (C) $\frac{a^2}{40}$
(D) $\frac{a^2}{48}$ (E) $\frac{a^2}{64}$

解 如图 18-10 所示, P 的面积 $S_P = a^2$,

$$P_1 \text{ 的面积 } S_{P_1} = (AB)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2},$$

$$P_2 \text{ 的面积 } S_{P_2} = (CD)^2 = \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2^2},$$

以此类推, P_6 的面积 $S_{P_6} = \frac{a^2}{2^6} = \frac{a^2}{64}$.

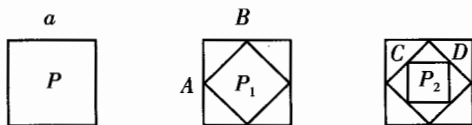


图 18-10

所以选 E.

例 2.9 (2008 年) 方程 $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ 的两根分别为等腰三角形的腰 a 和底 b ($a < b$), 则该等腰三角形的面积是 ()

- (A) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{11}}{8}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

解 由已知 $(x-1)(x-\sqrt{3})=0$, 即 $a=1, b=\sqrt{3}$.

等腰三角形的高 $h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

因此 三角形的面积 $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以选 C.

例 2.10 (2008 年) 如图 18-11 所示, 长方形 $ABCD$ 中, $AB=10$ 厘米, $BC=5$ 厘米, 以 AB 和 AD 分别为半径作 $\frac{1}{4}$ 圆, 则图中阴影部分的面积为 ()

(A) $25 - \frac{25}{4}\pi$ 平方厘米

(B) $25 + \frac{125}{2}\pi$ 平方厘米

(C) $50 + \frac{25}{4}\pi$ 平方厘米

(D) $\frac{125}{4}\pi - 50$ 平方厘米

(E) 以上结果均不正确

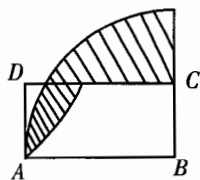


图 18-11

解 阴影部分面积

$$S = \frac{1}{4} \times 10^2 \pi - \left(10 \times 5 - \frac{1}{4} \times 5^2 \pi \right) = \frac{100}{4} \pi - 50 + \frac{25}{4} \pi = \frac{125}{4} \pi - 50 \text{ (平方厘米)}$$

所以选 D.

例 2.11 (1998 年) 圆柱体的底面半径和高的比是 1:2, 若体积增加到原来的 6 倍, 底面半径和高的比保持不变, 则底面半径 ()

(A) 增加到原来的 $\sqrt{6}$ 倍

(B) 增加到原来的 $\sqrt[3]{6}$ 倍

(C) 增加到原来的 $\sqrt{3}$ 倍

(D) 增加到原来的 $\sqrt[3]{3}$ 倍

(E) 增加到原来的 6 倍

解 设圆柱体的底面半径为 r_1 , 则高为 $2r_1$, 原体积 $V_1 = \pi \times r_1^2 \times 2r_1 = 2\pi r_1^3$, 变化后的体积为 V_2 , 设变化后底面半径为 r_2 , 高为 $2r_2$,

由题意 $V_2 = 6V_1$, 即 $2\pi r_2^3 = 12\pi r_1^3, r_2^3 = 6r_1^3, r_2 = \sqrt[3]{6}r_1$

因此底半径增加到原来的 $\sqrt[3]{6}$ 倍.

所以选 B.

例 2.12 球的内接正方体的边长为 $\sqrt{2}$, 则此球的表面积是 ()

(A) 2π

(B) $2\sqrt{2}\pi$

(C) $4\sqrt{2}\pi$

(D) 6π

(E) 8π

解 球的内接正方体的体对角线等于球的直径,

因此,球的直径 $2R = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$,

所求表面积 $S = 4\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6\pi$.

所以选 D.

例 2.13 如果一个圆柱的底面直径和高都与球的直径相等,则圆柱和球的体积之比为

()

(A) 1:2 (B) 3:1 (C) 3:2

(D) 2:3 (E) 以上答案都不正确

解 设球的半径为 r , 则球的体积 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi r^3$,

由已知圆柱底面半径为 r , 高 $h = 2r$, 可知圆柱体积 $V_{\text{柱}} = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$,

从而 $V_{\text{柱}}:V_{\text{球}} = 2\pi r^3:\frac{4}{3}\pi r^3 = 3:2$

所以选 C.

二 条件充分性判断

例 2.14 (2008) $\triangle ABC$ 的面积保持不变.

(1) 底边 AB 增加了 2 厘米, AB 上的高 h 减少了 2 厘米

(2) 底边 AB 扩大了 1 倍, AB 上的高 h 减少了 50%

解 如图 18-12 所示, 设底边 $AB = b$, AB 上的高 $CD = h$.

由条件(1),

$\triangle ABC$ 原来的面积 $S = \frac{1}{2}bh$,

现在的面积 $S_1 = \frac{1}{2}(b+2)(h-2) = \frac{1}{2}(bh+2h-2b-4)$, 不一定与 S 相等.

由条件(2),

$\triangle ABC$ 原来的面积 $S = \frac{1}{2}bh$,

现在的面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2b \times 0.5h = \frac{1}{2}bh = S$.

因此条件(1)不充分, 条件(2)充分.

所以选 B.

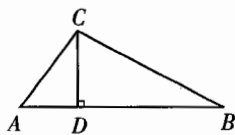


图 18-12

例2.15 如图 18-13 所示, $ABCD$ 是正方形, $\triangle ABA_1$, $\triangle BCB_1$, $\triangle CDC_1$, $\triangle DAD_1$ 是四个全等的直角三角形, 能确定正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积是 $4 - 2\sqrt{3}$.

(1) 正方形 $ABCD$ 的边长为 2

(2) $\angle ABA_1 = 30^\circ$

解 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 若联合条件(1)和条件(2), 在直角三角形 AA_1B 中, 由于 $\angle ABA_1 = 30^\circ$, 从而直角边 $AA_1 = 1$, $A_1B = \sqrt{3}$,

$$\text{三角形面积 } S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{正方形 } A_1B_1C_1D_1 \text{ 的面积 } S = 2^2 - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

所以选 C.

例2.16 等腰三角形的面积为 $8\sqrt{2}$.

(1) 等腰三角形两边长为 4 和 6

(2) 等腰三角形两边长为 3 和 5

解 条件(1)成立时, 满足条件的三角形有两个.

当腰为 4, 底边是 6 时, 底边高为 $\sqrt{7}$, 从而面积是 $3\sqrt{7}$.

当腰为 6, 底边为 4 时, 其面积是 $8\sqrt{2}$. 从而条件(1)不充分.

同理, 满足条件(2)的等腰三角形也有两个, 面积分别是 $2.5\sqrt{2.75}$ 和 $1.5\sqrt{22.75}$, 即条件(2)也不充分.

所以选 E.

例2.17 如图 18-14 所示, AB 是直角三角形的斜边, CD 是高, 则有 $BC = 5\sqrt{13}$.

(1) $AD = 12, DB = 13$

(2) $AD = 13, DB = 12$

解 设 $CD = x, BC = y, AC = z$, 由条件(1)可知

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 13^2 \\ z^2 - x^2 = 12^2 \\ y^2 + z^2 = 25^2 \end{cases}$$

解得

$$y = 5\sqrt{13},$$

由条件(2)可知

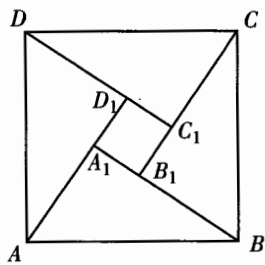


图 18-13

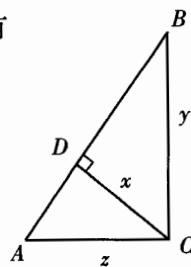


图 18-14

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 12^2 \\ z^2 - x^2 = 13^2 \\ y^2 + z^2 = 25^2 \end{cases}$$

解得

$$z = 5\sqrt{13}, BC = y = 10\sqrt{3}$$

则条件(1)充分, 条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.18 如图 18-15 所示, 矩形的两边分别为 a, b , 则 $a:b=4:3$.

(1) 矩形的对角线长等于 a 的 $\frac{1}{3}$ 倍与 b 的和

(2) 矩形的对角线长等于 a 的一半与 b 的和

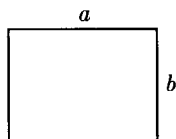


图 18-15

解 对角线的长为 $\sqrt{a^2 + b^2}$

由条件(1), $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{3}a + b$,

即 $a^2 + b^2 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{3}ab + b^2$, 因此 $\frac{8}{9}a^2 = \frac{2}{3}ab$.

$a:b=3:4$, 条件(1)不充分.

由条件(2), $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}a + b$, 则 $a^2 + b^2 = \frac{1}{4}a^2 + ab + b^2$,

因此 $a:b=4:3$,

即条件(2)是充分的.

所以选 B.

例 2.19 如图 18-16 所示, 在圆 O 中, CD 是直径, AB 是弦, $AB \perp CD$ 于 M , 则 $AB=12$ 厘米.

(1) $CD=15$ 厘米

(2) $OM:OC=3:5$

解 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2),

$OC=AO=7.5$ (厘米), $OM=\frac{3}{5}OC=4.5$ (厘米).

在 $\triangle AOM$ 中, $AM = \sqrt{7.5^2 - 4.5^2} = 6$ (厘米),

由于 $AB \perp CD$, $AM=MB=6$ (厘米), 即 $AB=12$ (厘米).

所以选 C.

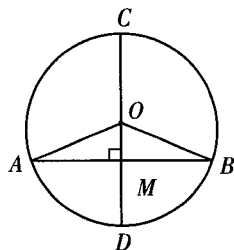


图 18-16

例 2.20 三个球中, 最大球的体积是另外两个球体积和的 3 倍.

(1) 三个球的半径之比为 $1:2:3$

(2) 大球的半径是另两球的半径之和

解 设三个球的体积依次为 V_1, V_2, V_3

题干要求推出 $V_3 = 3(V_1 + V_2)$

由条件(1), 三个球的半径依次为 $r, 2r, 3r$

$$\text{因此 } V_3 = \frac{4}{3}\pi(3r)^3 = 36\pi r^3,$$

$$3(V_1 + V_2) = 3\left[\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi(2r)^3\right] = 36\pi r^3$$

由条件(2), 设三个球的半径依次为 $1, 1, 2$

$$\text{则 } V_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi, \quad 3(V_1 + V_2) = 6 \times \frac{4}{3}\pi = \frac{24}{3}\pi$$

所以条件(1)是充分的, 条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.21 圆柱体积是正方体体积的 $\frac{4}{\pi}$ 倍.

(1) 圆柱的高与正方体的高相等

(2) 圆柱的侧面积与正方体的侧面积相等

解 条件(1)和条件(2)单独都无法确定圆柱与正方体的体积之间的关系.

将条件(1)和条件(2)联合, 设正方体棱长为 a ,

由条件(1), 圆柱体高 $h = a$, 又设圆柱底面半径为 r ,

$$\text{则有 } S_{\text{正方体侧}} = 4a^2, S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi ra$$

$$\text{由条件(2), } 4a^2 = 2\pi ra, \text{ 得 } r = \frac{2a}{\pi}$$

$$\text{从而 } \frac{V_{\text{圆柱}}}{V_{\text{正方体}}} = \frac{\pi\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 a}{a^3} = \frac{4}{\pi}.$$

所以选 C.

例 2.22 一个高为 $3r$, 底面半径为 $2r$ 的无盖圆柱形容器内装有水, 水面高为 r , 要使水能从容器内溢出.

(1) 向桶内放入 49 颗半径为 $\frac{r}{2}$ 的实心钢球

(2) 向桶内放入一个棱长为 $2r$ 的实心正方体钢块

解 圆柱形容器的体积为 $V_1 = \pi \times (2r)^2 \times 3r = 12\pi r^3$,

$$\text{原有水的体积 } V_2 = \pi \times (2r)^2 \times r = 4\pi r^3.$$

$$\text{由条件(1), 放入桶内的实心钢球体积共为 } V_3 = 49 \times \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{r}{2}\right)^3 = \frac{49}{6}\pi r^3$$

$$\text{从而 } V_2 + V_3 = 4\pi r^3 + \frac{49}{6}\pi r^3 = \frac{73}{6}\pi r^3 > V_1,$$

即水能从容器中溢出,因此条件(1)是充分的.

由条件(2),放入桶内的实心正方体钢块体积为 $V_4 = (2r)^3 = 8r^3$,

从而 $V_2 + V_4 = 4\pi r^3 + 8r^3 < 12\pi r^3 = V_1$

因此,水不能从容器中溢水,即条件(2)不充分.

所以选 A.

第三节 练习

一 问题求解

1. 如果三角形的一个角等于其他两个角的差,则这个三角形一定是 ()

- (A) 等腰三角形 (B) 锐角三角形 (C) 直角三角形
(D) 钝角三角形 (E) 无法确定

2. (2009 年) 直角三角形 ABC 的斜边 $AB = 13$ 厘米,直角边 $AC = 5$ 厘米,把 AC 对折到 AB 上去与斜边相重合,点 C 与点 E 重合,折痕为 AD (如图 18 - 17 所示),则图中阴影部分的面积为() 平方厘米.

- (A) 20 (B) $\frac{40}{3}$ (C) $\frac{38}{3}$
(D) 14 (E) 12

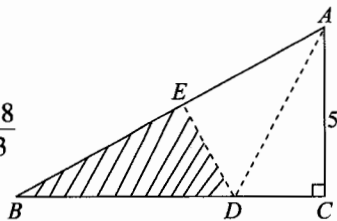


图 18 - 17

3. 将一张形状为平行四边形的纸片折一下,使得折痕平分这个平行四边形的面积,则这样的折纸方法共有 ()

- (A) 1 种 (B) 2 种 (C) 4 种
(D) 8 种 (E) 无数种

4. 如图 18 - 18 所示,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 120^\circ$, $AB = 8$,则 CD 的长为 ()

- (A) $4\sqrt{6}$ (B) $\frac{8}{3}\sqrt{6}$
(C) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (D) $4\sqrt{2}$
(E) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

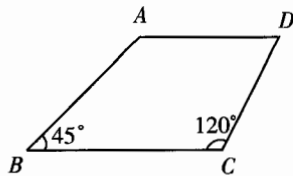


图 18 - 18

5. 如图 18 - 19 所示,直角梯形的一腰与下底长都为 40,且它们的夹角为 60° ,则梯形的中位线长为 ()

- (A) 30 (B) 60 (C) 40

- (D) 50 (E) 80

6. 若一圆与一正方形的面积相等, 则

- (A) 它们的周长相等
(B) 圆周长是正方形周长的 π 倍
(C) 正方形周长长
(D) 圆周长是正方形周长的 $2\sqrt{\pi}$ 倍
(E) 以上结论均不正确

()

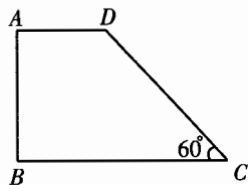


图 18-19

7. 如图 18-20 所示, QOR 为一圆周的 $\frac{1}{4}$, $OTPS$ 为长方形, $PS = 6$,

$PT = 8$, 则圆弧 QR 的长度是

- (A) 5π (B) 10π (C) 15π
(D) 20π (E) 24π

()

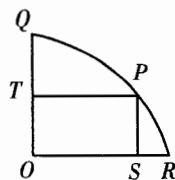


图 18-20

8. 如图 18-21 所示, $ABCD$ 是一个正方形, 面积是 25, $BMNC$ 是一个矩形, $BM = 8$, 则矩形 $BMNC$ 的对角线长是 ()

- (A) 13 (B) $\sqrt{79}$
(C) $\sqrt{89}$ (D) $\sqrt{93}$
(E) $\sqrt{107}$

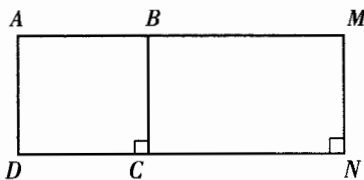


图 18-21

9. 内接于半圆 O 的正方形 $ABCD$ 的周长与半圆形周界长之比为 ()

- (A) $\frac{8}{5}\sqrt{5}:\sqrt{\pi}$ (B) $\frac{4}{5}\sqrt{5}:\pi$ (C) $4\sqrt{5}:(5+\pi)$
(D) $4\sqrt{5}:(10+\pi)$ (E) $8\sqrt{5}:(10+5\pi)$

10. 在半径为 R 的圆内, 它的内接正三角形、内接正方形的边长之比为 ()

- (A) $1:\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ (C) $1:2$
(D) $3:2$ (E) $\sqrt{2}:1$

11. 两个同心球, 一个直径为 4, 另一个直径为 2, 则两个同心球之间部分的体积是 ()

- (A) 2π (B) $\frac{28}{3}\pi$ (C) $\frac{16}{3}\pi$
(D) $\frac{48}{3}\pi$ (E) $\frac{80}{3}\pi$

12. 两个球形器, 若将大球中溶液的 $\frac{2}{5}$ 倒入小球中, 正巧可装满小球, 那么大球与小球半径之比等于 ()

- (A) $5:3$ (B) $8:3$ (C) $\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{2}$
(D) $\sqrt[3]{20}:\sqrt[3]{5}$ (E) 以上答案均不正确

三 条件充分性判断

13. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的外角, 则 $\angle BAC = 20^\circ$.
 (1) $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = 4 : 2 : 3$ (2) $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = 2 : 4 : 3$
14. 菱形的一边和等腰直角三角形的直角边相等, 则菱形和三角形面积比是 $\sqrt{3} : 1$.
 (1) 菱形的一角为 60° (2) 菱形的一角为 120°
15. 圆外切正方形和内接正方形的相似比是 $\sqrt{2} : 1$.
 (1) 若圆半径为 1 (2) 若圆半径为 2
16. 若 $ABCD$ 为等腰梯形, 则梯形的中位线与高的比为 $2 : 1$.
 (1) 等腰梯形的底角为 45° (2) 等腰梯形的高等于上底
17. 可以确定一个长方体的体积.
 (1) 已知长方体的全面积 (2) 已知长方体的体对角线的长
18. 一个直径为 32 厘米的圆柱体盛水容器中, 放入一个实心铁球后, 水面升高了 9 厘米.
 (1) 铁球直径是 12 厘米 (2) 铁球的表面积是 144π (厘米) 2

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. C.

解析 设三角形的三个内角为 $\angle A, \angle B, \angle C$,

依题意有 $\angle A = \angle B - \angle C$,

又因为 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

从而 $\angle B - \angle C + \angle B + \angle C = 180^\circ$, 得 $\angle B = 90^\circ$,

则此三角形为直角三角形.

2. B.

解析 由于 $\angle ACB = \angle DEB = 90^\circ$, $\angle B$ 为公用角

因此 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBE$ 相似, $\triangle ABC$ 的面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$,

设 $\triangle DBE$ 的面积为 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} = (\text{相似比})^2 = \left(\frac{12}{13-5}\right)^2$

即得 $S_2 = \frac{40}{3}$.

3. E.

解析 只要折痕过平行四边形对角线的交点, 都能平分这个平行四边形的面积. 因此, 有无数种折线的方法.

4. B.

解析 如图 18-22 所示, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E, 过 D 作 $DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于 F.

在直角三角形 ABE 中, $\angle B = 45^\circ$, $AB = 8$, 则 $AE = 4\sqrt{2}$.

由 $AD \parallel BC$, 可知 $DF = AE = 4\sqrt{2}$.

在直角三角形 DCF 中, $DF = 4\sqrt{2}$, $\angle DCF = 60^\circ$, 所以 $CD = \frac{8}{3}\sqrt{6}$.

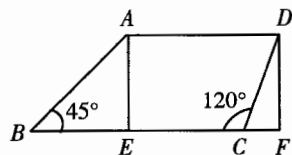


图 18-22

5. A.

解析 如图 18-23 所示, 作 $DP \perp BC$ 于 P.

因为 $\angle C = 60^\circ$, 从而 $\angle PDC = 30^\circ$, $PC = \frac{1}{2}CD = 20$,

由 $BC = CD = 40$, 可知 $PB = BC - CP = 20$,

从而 $AD = BP = 20$, $\frac{1}{2}(AD + BC) = 30$,

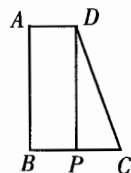


图 18-23

6. C.

解析 设圆与正方形的面积为 S , 则正方形的边长为 \sqrt{S} , 周长为 $4\sqrt{S}$.

设圆的半径为 r , $\pi r^2 = S$, $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$, 周长为 $2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{S\pi}$,

从而 $4\sqrt{S} > 2\sqrt{S\pi}$.

7. A.

解析 如图 18-24 所示, 由 $PS = 6$, $PT = 8$, 可知圆 O 的半径为 10,

则圆弧长为 $\frac{1}{4} \times 2\pi \times 10 = 5\pi$.

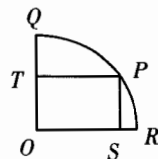


图 18-24

8. C.

解析 由题即可知 $BC = 5$, 因为 $BM = 8$,

则矩形 $BMNC$ 的对角线长是 $\sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$.

9. E.

解析 如图 18-25 所示, 设正方形的边长为 $2a$,

则圆半径 $OC = \sqrt{5}a$, 正方形的周长为 $8a$,

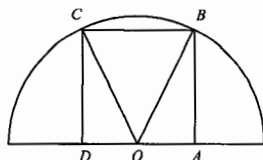


图 18-25

半圆形的周界长为 $2\sqrt{5}a + \frac{1}{2} \times 2\pi \times \sqrt{5}a = 2\sqrt{5}a + \sqrt{5}\pi a$,

即 $8a : (2\sqrt{5}a + \sqrt{5}\pi a) = 8\sqrt{5} : (10 + 5\pi)$.

10. B.

解析 内接正三角形的边长为 $\sqrt{3}R$, 内接正方形的边长为 $\sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$.

从而二者之比为 $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

11. B.

解析 $\frac{4}{3}\pi \times 2^3 - \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{28}{3}\pi$

12. C.

解析 设大球半径为 R , 小球半径为 r ,

由已知 $\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

从而 $R:r = \sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{2}$

二 条件充分性判断

13. A.

解析 如图 18-26 所示, 由条件(1), 设 $\alpha_1 = 4x, \alpha_2 = 2x, \alpha_3 = 3x$,

则 $4x + 2x + 3x = 360^\circ$, 从而 $x = 40^\circ, \alpha_1 = 160^\circ, \alpha_2 = 80^\circ, \alpha_3 = 120^\circ$,

α_1 是 $\angle BAC$ 的外角, 即 $\angle BAC = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$, 条件(1)充分.

由条件(2), 设 $\alpha_1 = 2x, \alpha_2 = 4x, \alpha_3 = 3x$.

解得 $\alpha_1 = 80^\circ, \alpha_2 = 160^\circ, \alpha_3 = 120^\circ, \angle BAC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

即条件(2)不充分.

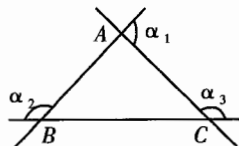


图 18-26

14. D.

解析 如图 18-27 所示, 若条件(1)成立,

则 $AB = AD = BD = a$.

菱形的另一对角线 $AC = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{3}a$,

从而菱形面积 $= \frac{1}{2}\sqrt{3}a \times a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

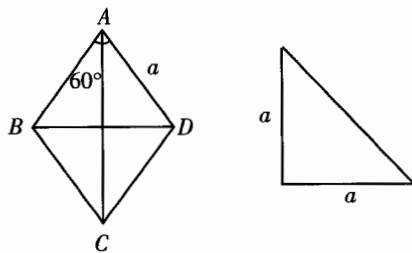


图 18-27

等腰直角三角形面积 $= \frac{1}{2}a^2$, 即二者面积之比为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 : \frac{1}{2}a^2 = \sqrt{3}:1$. 条件(1)充分.

由条件(2)可知, 菱形的另一角为 60° . 因此条件(2)也充分.

15. D.

解析 如图 18-28 所示, $AC = \frac{1}{2}AB$, $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形.

设 $CD = a$, 则 $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $AB = \sqrt{2}a$.

因此 $AB:CD = \sqrt{2}a:a = \sqrt{2}:1$, 与圆的半径无关.

因此条件(1)和条件(2)都是充分的.

16. C.

解析 如图 18-29 所示, AE 为梯形高, 作 $DF \perp BC$ 于 F .

条件(1)和条件(2)单独都不充分. 若联合条件(1)和条件(2), 则有

$$EF = AD = AE = DF = BE = CF.$$

设 $AD = a$, 可知 $AD + BC = a + 3a = 4a$,

因而中位线长 $= \frac{1}{2}(AD + BC) = 2a$, 即中位线与高之比为 $2a:a = 2:1$.

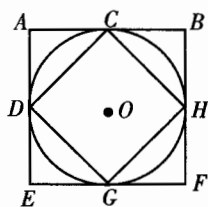


图 18-28

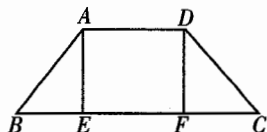


图 18-29

17. E.

解析 设长方体三条棱长为 a, b, c , 题干要求确定 $V = abc$.

由条件(1), 已知面积 $= 2(ab + ac + bc)$

由条件(2), 已知体对角线长 $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

因此条件(1)和(2)单独都不充分, 联合起来也不充分.

18. E.

解析 由已知圆柱体底面半径为 16 厘米, 设实心铁球半径为 R ,

题干要求推出实心铁球体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi \times 16^2 \times 9$

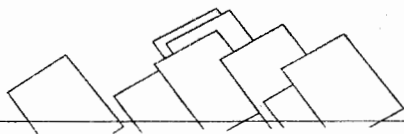
即 $R = 12$ (厘米)

由条件(1), $R = 6$ (厘米)

由条件(2), $4\pi R^2 = 144\pi$, 即 $R = 6$ (厘米)

第十九章

平面解析几何



第一节 基本内容提要

一 直线 ④

1. 点 $P(x_0, Y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2. 两平行直线 $Ax + By + C_1 = 0, Ax + By + C_2 = 0$ ($C_1 \neq C_2$) 之间的距离

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3. 两直线 $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$ 平行的充分必要条件是 $k_1 = k_2$.

两直线 $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$ 垂直的充分必要条件是 $k_1k_2 = -1$.

二 圆 ④

1. 当圆心为 (a, b) , 半径为 r 时, 圆的标准方程为

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

2. 圆的一般方程为

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

三 直线与圆的关系 ④

1. 直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系有: 相离、相切、相交.

利用圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的关系可判定圆与直线的位置.

$$d < r \Leftrightarrow \text{直线与圆相交};$$

$$d = r \Leftrightarrow \text{直线与圆相切};$$

$d > r \Leftrightarrow$ 直线与圆相离.

2. 垂直于弦的直径必平分弦; 圆的切线垂直于经过切点的半径.

四 两个圆的位置关系 ④

$$\text{圆 } C_1: (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2 \quad \text{圆 } C_2: (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2$$

若两圆的圆心距 $d = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2}$,

则 C_1 与 C_2 相交 $\Leftrightarrow |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$;

C_1 与 C_2 外相切 $\Leftrightarrow d = r_1 + r_2$;

C_1 与 C_2 内相切 $\Leftrightarrow d = |r_1 - r_2|$;

C_1 与 C_2 外离 $\Leftrightarrow d > r_1 + r_2$;

C_1 含在 C_2 内或 C_2 含在 C_1 内 $\Leftrightarrow 0 \leq d < |r_1 - r_2|$.

第二节 典型例题及历年真题解析

一 问题求解 ④

例 2.1 如图 19-1 所示, 四边形 $OABC$ 为正方形, $OA = 1$, $\angle AOx = 30^\circ$, 那么 OB 所在的直线方程是 ()

- (A) $x - y = 0$ (B) $y = (2 + \sqrt{3})x$
(C) $y = \sqrt{3}x$ (D) $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{2}$
(E) 以上均不正确

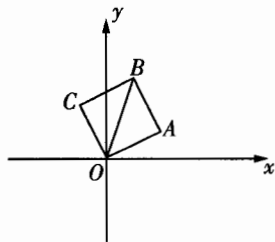


图 19-1

解 由已知 A 点坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, 设 B 点坐标为 (a, b)

由于 $AB = 1, OB = \sqrt{2}$,

$$\text{从而 } \begin{cases} \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{得 } a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

所以直线斜率 $k = \frac{b}{a} = 2 + \sqrt{3}$

从而 OB 所在的直线方程为 $y = (2 + \sqrt{3})x$.

所以选 B.

例 2.2 (1998 年) 设正方形 $ABCD$ 如图 19-2 所示, 其中 $A(2,1), B(3,2)$, 则边 CD 所在的直线方程是 ()

(A) $y = -x + 1$

(B) $y = x + 1$

(C) $y = x + 2$

(D) $y = 2x + 2$

(E) $y = -x + 2$

解 由题知 $CD \parallel AB$, AB 所在直线的斜率 $k_1 = \frac{2-1}{3-2} = 1$.

即 CD 所在直线的斜率 $k_2 = k_1 = 1$.

由正方形的性质得 $CA \perp BD$, $CA \parallel y$ 轴, $BD \parallel x$ 轴.

从而 D 点的坐标为 $(1,2)$.

由点斜式, CD 所在的直线方程为

$$y - 2 = (x - 1), \text{ 即 } y = x + 1.$$

所以选 B.

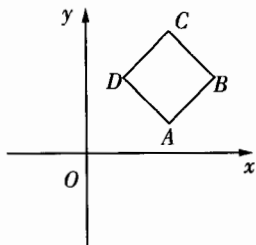


图 19-2

例 2.3 (1998 年) 设 AB 为圆 C 的直径, 点 A, B 的坐标分别是 $(-3,5), (5,1)$, 则圆 C 的方程是 ()

(A) $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 80$

(B) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$

(C) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 80$

(D) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$

(E) $x^2 + y^2 = 20$

解 $AB = \sqrt{(5+3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}$,

从而圆的半径 $R = \frac{|AB|}{2} = \sqrt{20}$.

又因为 C 为 AB 的中点, C 的坐标为 $\begin{cases} \frac{-3+5}{2} = 1 \\ \frac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$

可知, 圆 C 的方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$.

所以选 B.

例 2.4 (1999 年) 在直角坐标系中, O 为原点, 点 A, B 的坐标分别为 $(-2,0), (2,-2)$, 以 OA 为一边, OB 为另一边作平行四边形 $OACB$, 则平行四边形的边 AC 的方程是 ()

(A) $y = -2x - 1$

(B) $y = -2x - 2$

(C) $y = -x - 2$

(D) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

(E) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

解 如图 19-3 所示, C 在 y 轴上, 且坐标为 $(0, -2)$,

所以 AC 的方程为 $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-2} = 1$,

即 $y = -x - 2$.

所以选 C.

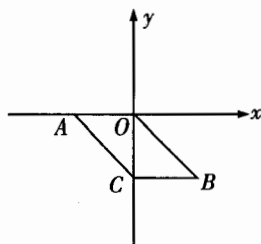


图 19-3

例 2.5 (2000 年) 在平面直角坐标系中, 以直线 $y = 2x + 4$ 为轴与原点对称的点的坐标是 ()

(A) $(-\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$ (B) $(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$

(C) $(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$ (D) $(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$

解 如图 19-4 所示, 设所求对称点 $A(x_0, y_0)$, 则

$$\begin{cases} \frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{2} \\ \frac{y_0}{2} = 2 \times \frac{x_0}{2} + 4 \end{cases}$$

从而解得 $x_0 = -\frac{16}{5}$, $y_0 = \frac{8}{5}$

所以选 A.

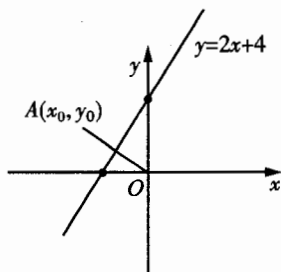


图 19-4

例 2.6 正三角形 ABC 的两个顶点为 $A(2, 0)$, $B(5, 3\sqrt{3})$, 则另一个顶点 C 的坐标是 ()

(A) $(8, 0)$ (B) $(-8, 0)$ (C) $(1, -3\sqrt{3})$

(D) $(8, 0)$ 或 $(-1, 3\sqrt{3})$ (E) $(-1, 3\sqrt{3})$

解 设 C 的坐标为 (a, b) , 则由 $|AB| = |AC| = |BC|$ 得

$$\begin{cases} |AB| = \sqrt{(5-2)^2 + (3\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6 \\ |AC| = \sqrt{(2-a)^2 + b^2} = 6 \\ |BC| = \sqrt{(5-a)^2 + (b-3\sqrt{3})^2} = 6 \end{cases}$$

整理得 $b = 0$ 或 $b = 3\sqrt{3}$, $a = 8$ 或 $a = -1$.

即另一顶点 C 的坐标为 $(8, 0)$ 或 $(-1, 3\sqrt{3})$.

所以选 D.

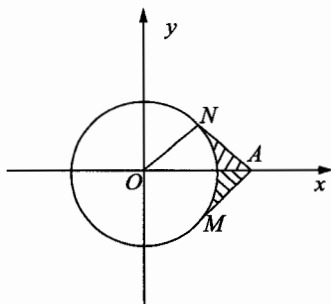


图 19-5

例 2.7 (2008 年) 过点 $A(2, 0)$ 向圆 $x^2 + y^2 = 1$ 作两条切线 AM 和 AN (如图 19-5 所示), 则两切线围成的面积 (图中阴影部分) 为

(A) $1 - \frac{\pi}{3}$

(B) $1 - \frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

(D) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

(E) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

解 连接 NO , $\triangle ANO$ 为直角三角形

$$ON = 1, OA = 2, AN = \sqrt{3}, \angle NOA = 60^\circ$$

$$\text{所求面积为 } 2\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 - \frac{1}{6} \pi \times 1^2\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

所以选 E.

例 2.3 (2009 年) 设直线 $nx + (n+1)y = 1$ (n 为正整数) 与两坐标轴围成的三角形面积 S_n ($n = 1, 2, 3, \dots, 2009$), 则 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{2009} =$ ()

(A) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2009}{2008}$

(B) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2008}{2009}$

(C) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2009}{2010}$

(D) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2010}{2009}$

(E) 以上结论都不正确

$$\text{解 由已知 } S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}, \dots$$

$$\text{从而 } S_1 + S_2 + \dots + S_{2009} = \frac{1}{2} \left(1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2009} \times \frac{1}{2010} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2009}{2010}$$

所以选 C.

例 2.9 已知定点 $A(2, -3)$, $B(-3, -2)$, 直线 l 过点 $P(1, 1)$ 且与线段 AB 相交于点 M , 则直线 l 的斜率 k 的取值范围为 ()

(A) $k \geq \frac{3}{4}$ 或 $k \leq -4$

(B) $-4 \leq k \leq \frac{3}{4}$

(C) $k \geq \frac{3}{4}$ 或 $k \leq -\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{3}{4} \leq k \leq 4$

(E) $k \leq -\frac{3}{4}$ 或 $k \geq 4$

$$\text{解 如图 19-6 所示, 直线 } PB \text{ 的斜率 } k_1 = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4},$$

$$PA \text{ 的斜率 } k_2 = \frac{1+3}{1-2} = -4,$$

$$\text{因此直线 } PM \text{ 的斜率 } k \text{ 的取值范围应为 } k \geq \frac{3}{4} \text{ 或 } k \leq -4.$$

所以选 A.

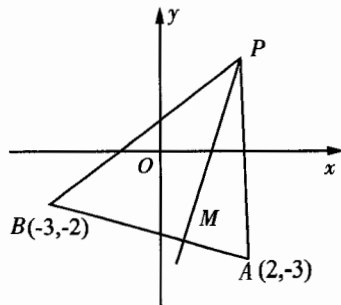


图 19-6

例 2.10 由曲线 $|x| + |y| = 1$, 所围成的平面图形的面积为

()

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2
(D) $\sqrt{3}$ (E) $2\sqrt{2}$

解 如图 19-7 所示, 由曲线 $|x| + |y| = 1$ 所围成的平面图形

为正方形 $ABCD$, 四边的方程分别为

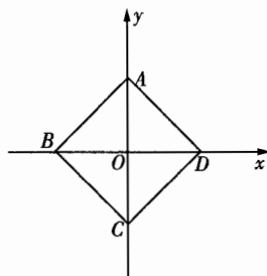
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = -1 - x \\ y = x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$


图 19-7

正方形边长 $a = \sqrt{2}$.

因此所围面积 $S = a^2 = 2$.

所以选 C.

例 2.11 与两坐标轴正方向围成的三角形面积为 2, 且在两坐标轴上的截距差为 3 的直线方程是 ()

- (A) $x + 2y - 2 = 0, 2x + y - 2 = 0$
(B) $x + 4y - 4 = 0, 4x + y - 4 = 0$
(C) $2x + 3y - 2 = 0, 3x + 2y - 3 = 0$
(D) $x - 2y + 2 = 0, 2x - y - 2 = 0$
(E) 以上答案均不正确

解 如图 19-8 所示, $a > 0, b > 0$.

则所求直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a+3} = 1$ 或 $\frac{x}{b+3} + \frac{y}{b} = 1$.

由已知条件其面积为 2, 从而有

$$\frac{1}{2}a(a+3) = 2 \text{ 或 } \frac{1}{2}b(b+3) = 2,$$

解得 $a = 1$ 或 $b = 1$.

从而直线方程为 $x + \frac{y}{4} = 1$ 或 $\frac{x}{4} + y = 1$,

即 $4x + y - 4 = 0$ 或 $x + 4y - 4 = 0$.

所以选 B.

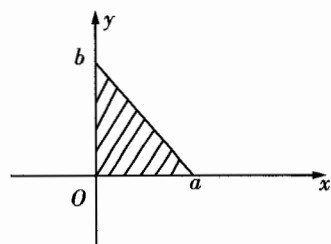


图 19-8

例 2.12 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上, 与直线 $4x + 3y - 12 = 0$ 距离最小的点的坐标是 ()

- (A) $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ (B) $(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ (C) $(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$
(D) $(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ (E) 以上答案均不正确

解 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆心坐标为 $(0,0)$, 半径 $r=2$,

圆心 $(0,0)$ 到直线 $4x + 3y - 12 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5} > 2$, 即直线与圆没有交点,

如图 19-9 所示, $ON \perp$ 直线 $4x + 3y - 12 = 0$, 即 ON 的斜率为 $\frac{3}{4}$,

从而 ON 所在的直线方程为 $y = \frac{3}{4}x$,

将 $y = \frac{3}{4}x$ 代入圆方程 $x^2 + y^2 = 4$,

解得 $x = \frac{8}{5}, y = \frac{6}{5}$.

所以选 A.

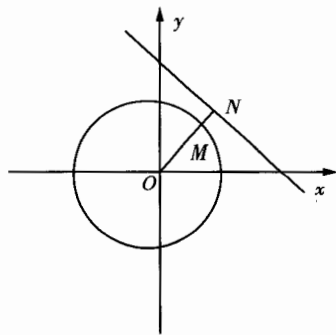


图 19-9

例 2.13 若实数 x, y 满足条件: $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, 则 $x - 2y$ 的最大值是 ()

(A) $\sqrt{5}$ (B) 10 (C) 9

(D) $5 + 2\sqrt{5}$ (E) $2 + 5\sqrt{2}$

解 由已知 x, y 满足 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$.

令 $x - 2y = k$,

则圆心 $(1, -2)$ 到直线 $x - 2y - k = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|1 + 4 - k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \leq \sqrt{5},$$

从而 $|5 - k| \leq 5, 0 \leq k \leq 10$

即 $x - 2y = k$ 的最大值是 10.

所以选 B.

例 2.14 (2009 年) 若圆 $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 与 x 轴交于 A 点, 与 y 轴交于 B 点, 则与此圆相切于劣弧 \widehat{AB} 中点 M (注: 小于半圆的弧称为劣弧) 的切线方程是 ()

(A) $y = x + 2 - \sqrt{2}$ (B) $y = x + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $y = x - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $y = x - 2 + \sqrt{2}$

(E) $y = x + 1 - \sqrt{2}$

解 如图 19-10 所示

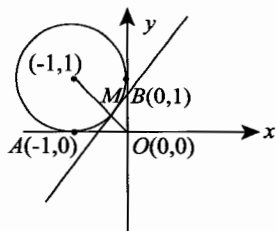


图 19-10

设所求切线方程为 $y = kx + b, k = \frac{1-0}{0-(-1)} = 1,$

因此有 $x - y + b = 0$

圆心 $(-1, 1)$ 到切线距离为 $\frac{|-1-1+1+b|}{\sqrt{2}} = 1$, 得 $b = 2 - \sqrt{2}$

因此所求方程为 $y = x + 2 - \sqrt{2}$.

所以选 A.

例 2.15 (2008 年) 以直线 $y + x = 0$ 为对称轴且与直线 $y - 3x = 2$ 对称的直线方程为

()

(A) $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

(B) $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

(C) $y = -3x - 2$

(D) $y = -3x + 2$

(E) 以上结果均不正确

解 如图 19-11 所示, 所求直线过 $y + x = 0$, 与

$y - 3x = 2$ 的交点为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 设 l 的斜率为 k , 则

$$\frac{k+1}{1+k(-1)} = \frac{-1-3}{1+(-1) \times 3}, \text{ 解得 } k = \frac{1}{3}.$$

因此, 所求直线方程 $l: y - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2})$,

$$\text{即 } y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

所以选 A.

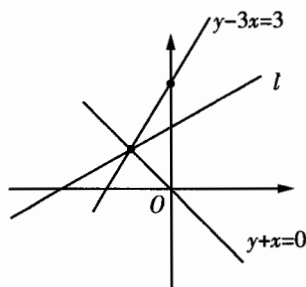


图 19-11

二 条件充分性判断

例 2.16 (2008 年) 如图 19-12 所示, 正方形 $ABCD$ 的面积为 1.

(1) AB 所在的直线方程为 $y = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) AD 所在的直线方程为 $y = 1 - x$

解 由条件(1), AB 所在的方程为 $y = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则知 AD 所在

的方程为 $y = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}$, 因此正方形 $ABCD$ 的面积

$$S = (OD)^2 + (OA)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

即条件(1)是充分的.

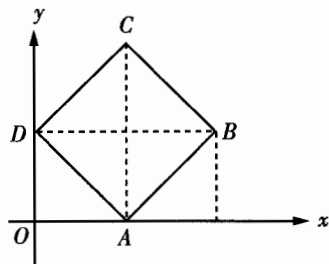


图 19-12

由条件(2), AD 所在的直线方程为 $y = 1 - x$, 则 AB 所在的方程为 $y = x - 1$, 因此正方形 $ABCD$ 的面积

$$S = (OD)^2 + (OA)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.17 (2008 年) 两直线 $y = x + 1, y = ax + 7$ 与 x 轴所围成的面积是 $\frac{27}{4}$.

(1) $a = -3$

(2) $a = -2$

解 在条件(1)下, $y = x + 1, y = -3x + 7$ 如图 19-13 所示.

因此所围成的面积 $S = \frac{1}{2} \times (\frac{7}{3} + 1) \times \frac{5}{2} = \frac{25}{6} \neq \frac{27}{4}$, 即条件(1)不充分.

由条件(2), $y = x + 1, y = -2x + 7$ 如图 19-14 所示

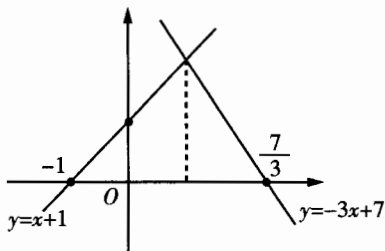


图 19-13

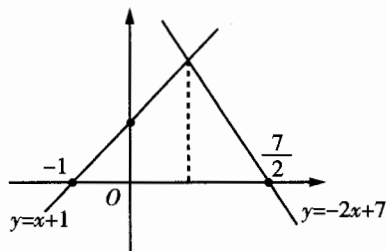


图 19-14

因此, 所围成的面积 $S = \frac{1}{2} \times (\frac{7}{2} + 1) \times 3 = \frac{27}{4}$, 即条件(2)是充分的.

所以选 B.

例 2.18 (2008 年) 动点 (x, y) 的轨迹是圆.

(1) $|x - 1| + |y| = 4$

(2) $3(x^2 + y^2) + 6x - 9y + 1 = 0$

解 $|x - 1| + |y| = 4$ 代表 4 条直线, 从而条件(1)不充分.

由条件(2), $x^2 + y^2 + 2x - 3y + \frac{1}{3} = 0, D^2 + E^2 - 4F = 2^2 + (-3)^2 - 4 \times \frac{1}{3} > 0$,

即 $3(x^2 + y^2) + 6x - 9y + 1 = 0$, 代表一个圆.

所以选 B.

例 2.19 (2008 年) $a = -4$

(1) 点 $A(1, 0)$ 关于直线 $x - y + 1 = 0$ 的对称点为 $A'(\frac{a}{4}, -\frac{a}{2})$

(2) 直线 $l_1: (2 + a)x + 5y = 1$ 与直线 $l_2: ax + (2 + a)y = 2$ 垂直

解 由条件(1), AA' 所在直线的斜率 $k_{AA'} = \frac{0 + \frac{a}{2}}{1 - \frac{a}{4}} = -1$

因此解得 $a = -4$. 即条件(1)是充分的.

由条件(2), $-\frac{2+a}{5} \times \frac{-a}{2+a} = -1$, $a = -2$ 或 $a = -5$. 即条件(2)不充分.

答案是 A.

例 2.20 (2008 年) 圆 $C_1: \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 与圆 $C_2: x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ 有交点.

$$(1) 0 < r < \frac{5}{2} \quad (2) r > \frac{15}{2}$$

解 $C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$,

C_1 与 C_2 有交点的充分必要条件是 $|r-5| \leq d \leq r+5$, 这里 d 是 C_1 与 C_2 的圆心距.

$$d = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 + (2 - 4)^2} = \frac{5}{2},$$

由于 $d \leq r+5$, 则需 $|r-5| \leq \frac{5}{2}$ 即可, 解得 $\frac{5}{2} \leq r \leq \frac{15}{2}$.

即条件(1)和条件(2)都不充分.

所以选 E.

例 2.21 动点 P 的轨迹是两个圆.

(1) 动点 P 的轨迹方程是 $|x| + 1 = \sqrt{1 - (y-1)^2}$

(2) 动点 P 的轨迹方程是 $(|x| + |y|)^2 = 1$

解 若 $P(x, y)$ 满足 $|x| + 1 = \sqrt{1 - (y-1)^2}$,

则只有 $x=0, y=1$, 从而条件(1)不充分.

由条件(2), $x^2 + y^2 + 2|xy| = 1$.

可知 $x^2 + y^2 + 2xy = 1$ 或 $x^2 + y^2 - 2xy = 1$, 都不是圆的方程, 即条件(2)也不充分.

所以选 E.

例 2.22 $a=4, b=3$

(1) 点 $A(a+2, b+2)$ 与点 $B(b-4, a-6)$ 关于直线 $4x+3y-11=0$ 对称

(2) 直线 $y=ax+b$ 垂直于直线 $x+4y-1=0$, 在 x 轴上的截距为 $-\frac{1}{2}$

解 由条件(1), $AB \perp$ 直线, $4x+3y-11=0$, 且 AB 的中点在直线 $4x+3y-11=0$ 上,

$$\text{所以有 } \begin{cases} \frac{a-6-(b+2)}{b-4-(a+2)} = \frac{3}{4} \\ 4 \times \frac{a+2+(b-4)}{2} + 3 \times \frac{(b+2)+(a-6)}{2} - 11 = 0 \end{cases}$$

整理得 $\begin{cases} a-b-2=0 \\ a+b-6=0 \end{cases}$ 得 $a=4, b=2$

即条件(1)不充分.

由条件(2), $a=4, 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b = 0$, 即 $b=2$

即条件(2)也不充分.

所以选 E.

第三节 练习

一 问题求解

1. 点 $P(-4, 2)$ 关于直线 $l: 2x - y + 1 = 0$ 的对称点 P' 的坐标是 ()

(A) $\left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{5}\right)$ (C) $\left(\frac{16}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

(D) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}\right)$ (E) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{5}\right)$

2. 经过两条直线 $2x + 3y + 1 = 0$ 和 $x - 3y + 4 = 0$ 的交点, 并且垂直于直线 $3x + 4y - 7 = 0$ 的直线方程为 ()

(A) $4x + 3y - 7 = 0$ (B) $4x - 3y + 9 = 0$ (C) $5x - 3y + 7 = 0$

(D) $5x + 3y + 9 = 0$ (E) $5x + 3y + 7 = 0$

3. 直线 l 经过点 $P(2, -5)$, 且点 $A(3, -2)$ 和点 $B(-1, 6)$ 到 l 的距离的比为 $1:2$, 则直线 l 的方程是 ()

(A) $x + y + 3 = 0$ 或 $17x + y - 29 = 0$ (B) $2x - y - 9 = 0$ 或 $17x + y - 29 = 0$

(C) $x + y + 3 = 0$ (D) $17x + y - 29 = 0$

(E) 以上结论均不正确

4. 设 $P(x, y)$ 为圆 $(x-3)^2 + y^2 = 4$ 上任意一点, 则 $\frac{y}{x}$ 的最小值是 ()

(A) 0 (B) -1 (C) $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$

(D) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (E) 1

5. 已知圆 C 的圆心 O 在直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x$ 上, 圆 C 与直线 $l_2: x - 2y - 4\sqrt{5} = 0$ 相切, 且过点 $A(2, 5)$, 则圆 C 的方程为 ()

(A) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$

(B) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

(C) $\left(x - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{5}\right)^2 = 16$

(D) $\left(x - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{5}\right)^2 = 25$

(E) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ 或 $\left(x - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{5}\right)^2 = 16$

6. 实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $\frac{x+y+2}{x-y+2}$ 的最大值和最小值分别为 ()

(A) $2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$

(B) $2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}$

(C) $3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}$

(D) $3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}$

(E) 以上结论均不正确

7. 圆 $(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 1$ 的切线方程中有一个是 ()

(A) $x - y = 0$

(B) $x + y = 0$

(C) $x = 0$

(D) $y = 0$

(E) $x - y = 1$

8. 已知直线 l 过点 $(-2, 0)$, 当直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 有两个交点时, 其斜率的取值范围为 ()

(A) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

(B) $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

(C) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(D) $(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$

(E) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

9. (2008 年) 点 $P_0(2, 3)$ 关于直线 $x + y = 0$ 的对称点是 ()

(A) $(4, 3)$

(B) $(-2, -3)$

(C) $(-3, -2)$

(D) $(-2, 3)$

(E) $(-4, -3)$

二 条件充分性判断

10. 直线 $l: 2mx - y - 8m - 3 = 0$ 和圆 $C: (x-3)^2 + (y+6)^2 = 25$ 相交.

(1) $m > 0$

(2) $m < 0$

11. 过点 $A(-2, m)$ 和 $B(m, 4)$ 的直线与直线 $2x + y - 1 = 0$ 平行.

(1) $m = -8$

(2) $m = 2$

12. 已知直线 l 过点 $(m, 0)$, 当直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 有两个交点时, 其斜率 k 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

(1) $m = -1$

(2) $m = -2$

13. 直线 $x + y = 0$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2$ 相切.

(1) $a = 0$

(2) $b = 2$

14. 直线 $ax + by + c = 0$ 被 $x^2 + y^2 = 1$ 所截得弦长为 $\sqrt{2}$.

(1) $a^2 + b^2 - 2c^2 = 0$

(2) $a^2 + b^2 - 3c^2 = 0$

15. (2009 年) 圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 和直线 $(1+2\lambda)x + (1-\lambda)y - 3 - 3\lambda = 0$ 相交于两点.

$$(1) \lambda = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$(2) \lambda = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. C.

解析 因为 P' 和 P 关于直线 l 对称, 所以直线 l 是线段 PP' 的垂直平分线, 因此 $PP' \perp l$, 且 PP' 的中点在 l 上, 因此设 $P'(x, y)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{y-2}{x+4} = -\frac{1}{2} \\ 2 \times \frac{x-4}{2} - \frac{y+2}{2} + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = \frac{16}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

即 P' 的坐标为 $(\frac{16}{5}, -\frac{18}{5})$.

2. B.

解析 由方程组 $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ x-3y+4=0 \end{cases}$,

解得两直线交点为 $(-\frac{5}{3}, \frac{7}{9})$,

$3x+4y-7=0$ 的斜率 $k_1 = -\frac{3}{4}$,

从而所求直线斜率 $k_2 = \frac{4}{3}$, 用点斜式得

$y - \frac{7}{9} = \frac{4}{3}(x + \frac{5}{3})$, 所求直线方程为 $4x - 3y + 9 = 0$.

3. A.

解析 设直线 l 的方程为 $y+5=k(x-2)$, 即 $kx-y-2k-5=0$,

$A(3, -2)$ 到直线 l 的距离为

$$d_1 = \frac{|k \times 3 - (-2) - 2k - 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k-3|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$B(-1, 6)$ 到直线 l 的距离为

$$d_2 = \frac{|k \times (-1) - 6 - 2k - 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|-3k - 11|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

因为 $d_1:d_2 = 1:2$, $\frac{|k-3|}{|-3k-11|} = \frac{1}{2}$,

解得 $k = -1$ 或 $k = -17$,

从而所求的直线方程为

$$x + y + 3 = 0 \text{ 或 } 17x + y - 29 = 0.$$

4. C.

解析 设 $\frac{y}{x} = k$, 则圆心 $(3, 0)$ 到直线 $kx - y = 0$ 的距离

$$d = \frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}} \leq 2$$

从而

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq k \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

5. E.

解析 设圆 C 的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

由已知

$$\begin{cases} a = 2b \\ (2-a)^2 + (5-b)^2 = r^2 \\ \frac{|a-2b-4\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = r \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = 1, r = 4$ 或 $a = \frac{26}{5}, b = \frac{13}{5}, r = 4$.

故所求圆的方程是

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16 \text{ 或 } \left(x - \frac{26}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{5}\right)^2 = 16.$$

6. A.

解析 令 $\frac{x+y+2}{x-y+2} = k$

则圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $(1-k)x + (1+k)y + 2(1-k) = 0$

有公共点, 从而圆心 $(0, 0)$ 到直线距离

$$d = \frac{|2(1-k)|}{\sqrt{(1-k)^2 + (1+k)^2}} \leq 1, \text{ 得 } 2 - \sqrt{3} \leq k \leq 2 + \sqrt{3}$$

7. C.

解析 圆心 $(1, -\sqrt{3})$ 到直线 $x = 0$ 的距离为 $d = 1$, 等于圆半径,

故 $x = 0$ 是圆的一条切线.

8. B.

解析 设直线的方程为 $y = k(x+2)$,圆的标准式为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 由已知圆心 $(1,0)$ 到直线的距离为

$$\frac{|k+2k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1, \text{ 即 } k^2 < \frac{1}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4} < k < \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

9. C.

解析 设 $P_0(2,3)$ 关于直线 $x+y=0$ 的对称点是 $P_1(x_1, y_1)$, 则

$$\begin{cases} \frac{y_1-3}{x_1-2} = 1 \\ \frac{x_1+2}{2} + \frac{y_1+3}{2} = 0 \end{cases}$$

解得 $x_1 = -3, y_1 = -2$.**二 条件充分性判断**

10. D.

解析 要使题干成立, 则需圆心到直线 l 的距离 $d = \frac{|6m+6-8m-3|}{\sqrt{4m^2+1}} \leq 5$ 成立,整理可得 $24m^2 + 3m + 4 \geq 0$ 解得 $m \in (-\infty, +\infty)$, 即不论 m 为何实数值, 直线 l 总与圆 C 相交.

条件(1)和条件(2)都充分.

11. A.

解析 过点 $A(-2, m)$ 和 $B(m, 4)$ 的直线的斜率是 $k_1 = \frac{4-m}{m+2}$,而直线 $2x+y-1=0$ 的斜率 $k_2 = -2$,因而 $\frac{4-m}{m+2} = -2$, 得 $m = -8$.

条件(1)充分, 条件(2)不充分.

12. B.

解析 设直线 l 的斜率为 k , 则 l 的方程为 $y = k(x-m)$,欲使 l 与圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 有两个交点, 则圆心 $(1,0)$ 到直线的距离

$$d = \frac{|-k+km|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$$

由条件(1), $\frac{|-2k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$, 解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < k < \frac{\sqrt{3}}{3}$, 条件(1)不充分.

由条件(2), $\frac{|-3k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$, 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{4} < k < \frac{\sqrt{2}}{4}$. 条件(2)充分.

13. C.

解析 条件(1)和条件(2)都不充分.

联合条件(1)和条件(2), 圆心(0,2)到直线 $x+y=0$ 的距离 $d = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

即直线与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2$ 相切.

14. A.

解析 圆心(0,0)到直线 $ax+by+c=0$ 的距离 $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

题干要求推出, 半弦长 $= \sqrt{1-d^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 成立.

由条件(1), $\sqrt{1-d^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

由条件(2), $\sqrt{1-d^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{2c^2}{3c^2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

即条件(1)充分, 但条件(2)不充分.

15. D.

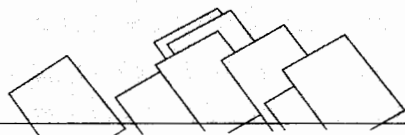
解析 题干要求圆心(1,2)到直线的距离 $d = \frac{|1+2\lambda+2-2\lambda-3-3\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(1-\lambda)^2}} < 2$

整理得 $11\lambda^2+8\lambda+8>0$, 由于 $\Delta=8^2-4\times 8\times 11<0$

从而对任意 λ , 不等式 $11\lambda^2+8\lambda+8>0$ 成立.

第二十章

排列与组合



第一节 基本内容提要

一 加法原理与乘法原理的联系与区别

加法原理与乘法原理都是讨论“做一件事”,确定“完成这件事所有的不同方法的种数”.

两个基本原理的本质区别在于“分类”和“分步”.

如果完成一件事有 n 类办法,各类方法相互独立、相互排斥,且不论用哪一类办法中的哪一种方法都能独立完成这件事,那么求完成这件事的方法数就用加法原理.

如果完成一件事须分 n 个步骤,各个步骤彼此相依、不可分割,且只有依次完成所有步骤才能完成这件事,则求完成这件事的方法就用乘法原理.

二 排列与组合的联系和区别

排列与组合的共同点,就是都要“从 n 个不同元素中,任取 m 个元素”.

排列与组合的本质区别就是排列要“按照一定的顺序排成一列”,而组合却是“不论怎样的顺序并成一组”.

第二节 典型例题及历年真题解析

一 问题求解

例 2.1 (1999 年) 从 0,1,2,3,5,7,11 这 7 个数字中每次取两个相乘,不同的积有

()

(A) 15 种

(B) 16 种

(C) 19 种

(D) 23 种

(E) 21 种

解 用穷举法,从左到右依次取两个数相乘,得

$$0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0, 0 \times 5 = 0, 0 \times 7 = 0, 0 \times 11 = 0$$

$$1 \times 2 = 2, 1 \times 3 = 3, 1 \times 5 = 5, 1 \times 7 = 7, 1 \times 11 = 11$$

$$2 \times 3 = 6, 2 \times 5 = 10, 2 \times 7 = 14, 2 \times 11 = 22$$

$$3 \times 5 = 15, 3 \times 7 = 21, 3 \times 11 = 33$$

$$5 \times 7 = 35, 5 \times 11 = 55$$

$$7 \times 11 = 77$$

因此不同的积有 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 1 = 16$ (种)

所以选 B.

例 2.2 (2000 年) 用 5 种不同的颜色涂在图 20-1 中 4 个区域里,每 1 个区域涂上 1 种颜色,且相邻区域的颜色必须不同,则共有不同的涂法 ()

(A) 120 种

(B) 140 种

(C) 160 种

(D) 180 种

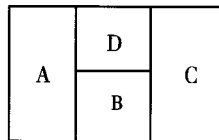


图 20-1

解 不妨设五种颜色为红,黑,白,黄,蓝,分四个步骤完成,先涂 A 区域共有 5 种涂法,可设 A 区域为红色.再涂 B 区域,有 4 种涂法,可设 B 区域为黑色.接着涂 D 区域,有 3 种涂法,可设为白色.最后涂 C 区域有 3 种涂法,可设为黄色,由乘法原理,共有不同涂法为

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180 \text{ (种)}$$

所以选 D.

例 2.3 (2000 年) 三个教师分配到 6 个班级任教,若其中一人教 1 个班,一人教 2 个班,一人教 3 个班,则共有分配方法 ()

(A) 720 种

(B) 360 种

(C) 120 种

(D) 60 种

解 将 6 个班以 1,2,3 分为三组,再分配 3 个老师任教,这是一个典型的分组问题,从而共有分配方法

$$C_6^1 C_5^2 C_3^3 \times 3! = 360 \text{ (种)}$$

所以选 B.

例 2.4 (2001 年) 将 4 封信投入 3 个不同的邮筒,若 4 封信全部投完,且每个邮筒至少投 1 封信,则共有投法 ()

(A) 12 种

(B) 21 种

(C) 36 种

(D) 42 种

解 投法共有

$$C_3^1 C_4^2 C_2^1 = 36 \text{ (种)}.$$

所以选 C.

例2.5 有卡片9张,将0,1,2,...,8这9个数字分别写在每张卡片上,现从中任取3张排成1个三位数,若6可当9用,则可组成不同的三位数()个.

- (A)602 (B)604 (C)606
(D)608 (E)610

解 可分四种情况:

- (1)含6且含0的三位数共有 $7 \times 2 \times 2 \times 2 = 56$ (个).
(2)含6不含0的三位数共有 $C_7^2 \times 3! \times 2 = 252$ (个).
(3)含0不含6的三位数共有 $C_7^2 \times 2 \times 2 = 84$ (个).
(4)不含6且不含0的三位数共有 $C_7^3 \times 3! = 210$ (个).

由加法原理,共有

$$56 + 252 + 84 + 210 = 602(\text{个}).$$

所以选 A.

例2.6 编号为1,2,3,4,5的5人入座编号也为1,2,3,4,5的5个座位,至多有两人对号的坐法有()种.

- (A)103 (B)105 (C)107
(D)106 (E)109

解 问题的正面有3种情况:全不对号;有且仅有1人对号;有且仅有2人对号,且每种情况较难处理.

而反面只有2种情况:全对号(4人对号时一定全对号);有且仅有三人对号.而全对号只有一种方法;3人对号时,可用乘法原理,第一步先从5人中选出3人有 C_5^3 种选法,其余两人不对号只有一种方法.因此,问题的反面情况共有

$$1 + C_5^3 \times 1 = 11(\text{种}).$$

5人全排列有 P_5^5 种,所以共有

$$P_5^5 - (1 + C_5^3) = 109(\text{种}).$$

应选 E.

例2.7 从长度为3,5,7,9,11的五条线段中,取3条作三角形,共能做成的不同三角形个数为 ()

- (A)4 (B)5 (C)6
(D)7 (E)8

解 (1)若最长边为7,另外两边只能是3和5,仅1种.

(2)若最长边为9,则另外两边可为3和7,5和7,共2种.

(3)若最长边为11,则另外两边可为3和9,5和9,7和9,7和5,共4种.

因此,可构成不同的三角形个数为

$$1+2+4=7(\text{种}).$$

所以选 D.

例 2.8 用 0,1,2,3,4,5,6 这 7 个数字可以组成无重复数字的四位偶数共()个.

- (A)400 (B)380 (C)410
(D)430 (E)420

解 没有重复数字的四位偶数,其首位不能是零,末位必须是偶数,所以可分为两类:一类末位数为 0,另一类为末位数为非零的偶数.

第一类,符合条件的四位数有 P_6^3 个,第二类符合条件的有 $3 \times 5 \times P_5^2$ 个.

所以共有 $P_6^3 + 3 \times 5 \times P_5^2 = 420(\text{个}).$

所以选 E.

例 2.9 (2008 年) 有 5 人报名参加 3 项不同的培训,每人都只报 1 项,则不同的报法有 ()

- (A)243 种 (B)125 种 (C)81 种
(D)60 种 (E)以上结论均不正确

解 这是一个典型的分房问题,相当于 5 个人进 3 个房间,因此不同的报法共有

$$3^5 = 243(\text{种}).$$

所以选 A.

例 2.10 (2008 年) 有两排座位,前排 6 个座位,后排 7 个座位. 若安排 2 人就座,规定前排中间 2 个座位不能坐,且此 2 人始终不能相邻而坐,则不同的坐法种数为 ()

- (A)92 (B)93 (C)94
(D)95 (E)96

解 11 个座位安排 2 人就座,总的坐法种数为

$$C_{11}^2 \times 2 = \frac{11!}{9! 2!} \times 2 = 110(\text{种}).$$

两个相邻的坐法共有 $8 \times 2 = 16(\text{种}).$

因此,有 $110 - 16 = 94(\text{种})$ 不相邻的坐法.

所以选 C.

例 2.11 (2008 年) 某班同学参加智力竞赛,共有 A,B,C 三题,每题或得 0 分或得满分,竞赛结果是无人得 0 分,三题全部答对的有 1 人,答对两题的有 15 人. 答对 A 题的人数和答对 B 题的人数之和为 29 人,答对 A 题的人数和答对 C 题的人数之和为 25 人,答对 B 题的人数和答对 C 题的人数之和为 20 人,那么该班的人数为 ()

- (A)20 (B)25 (C)30

(D)35

(E)40

解 由已知,如图 20-2 所示,全班人数可分为七部分,这里 A, B, C 分别代表只答对 A 题、 B 题、 C 题的人数, AB, AC, BC 分别代表答对其中两题的人数,

则 $ABC = 1$ (人), $AB + AC + BC = 15$ (人)

$$\text{且} \begin{cases} A + AB + AC + ABC + B + AB + BC + ABC = 29 \text{ (人)} \\ A + AB + AC + ABC + C + AC + BC + ABC = 25 \text{ (人)} \\ B + AB + BC + ABC + C + AC + BC + ABC = 20 \text{ (人)} \end{cases}$$

从而 $2(A + B + C) + 4(AB + AC + BC) + 6ABC = 74$ (人)

$A + B + C = 4$ (人), 全班人数为 $1 + 15 + 4 = 20$

所以选 A.

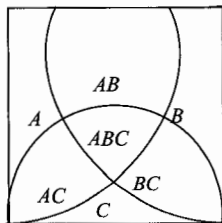


图 20-2

例 2.12 (2009 年) 湖中有四个小岛, 它们的位置恰好近似构成正方形的四个顶点, 若要修建三座桥将这四个小岛连起来, 则不同的建桥方案有()种

(A)12

(B)16

(C)18

(D)20

(E)24

解 如图 20-3 所示, 设 A, B, C, D 表示四小岛, 则建桥的设计共有以下四类:



图 20-3

而每类有四种方案, 从而共有 $4 \times 4 = 16$ (种)

所以选 B.

二 条件充分性判断 ④

例 2.13 (2008 年) 公路 AB 上各站之间共有 90 种不同的车票.

(1) 公路 AB 上有 10 个车站, 每两站之间都有往返车票

(2) 公路 AB 上有 9 个车站, 每两站之间都有往返车票

解 由条件(1), 在公路 AB 上各站之间共有

$$C_{10}^2 \times 2 = \frac{10!}{2! 8!} \times 2 = 90 \text{ (种)}$$

不同的车票, 即条件(1)是充分的.

由条件(2), 在公路 AB 上各站之间共有

$$C_9^2 \times 2 = \frac{9!}{2! 7!} \times 2 = 72 \text{ (种)}$$

不同的车票,即条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.14 $N = 125$

(1) 有 5 本不同的书, 从中选出 3 本送给 3 名同学, 每人一本, 共有 N 种不同的选法

(2) 书店有 5 种不同的书, 买 3 本送给 3 名同学, 每人一本, 共有 N 种不同的送法

解 由条件(1)

$$N = C_5^3 \times 3! = 60 (\text{种})$$

由条件(2), 每人必须送一本书且只能送一本书, 但同一种书可以送给多个人, 此类问题可归纳为分房问题, 这里人是“人”, 书是“房”, 因此不同送法为

$$N = 5^3 = 125 (\text{种})$$

所以选 B.

例 2.15 $N = 864$

(1) 从 1~8 这 8 个自然数中, 任取 2 个奇数, 2 个偶数, 可组成 N 个不同的四位数

(2) 从 1~8 这 8 个自然数中, 任取 2 个奇数, 作为千位和百位数字, 取 2 个偶数, 作为十位和个位数字, 可组成 N 个不同的四位数

解 由条件(1), 在 1~8 中共有 4 个奇数、4 个偶数, 任取 2 个奇数、2 个偶数可组成 $N = C_4^2 C_4^2 \times 4!$ 个不同的四位数.

即
$$N = 6 \times 6 \times 24 = 864$$

即条件(1)充分.

由条件(2)
$$N = C_4^2 \times 2 \times C_4^2 \times 2 = 6 \times 6 \times 4 = 144$$

即条件(2)不充分.

所以选 A.

第三节 练习

一 问题求解

1. 5 个男生 3 个女生排成一列, 要求女生不相邻且不可排两头, 共有()种排法.

- (A) 2880 (B) 2882 (C) 2884
(D) 2890 (E) 2600

2. 7 个人排成一排, 甲不在排头且乙不在排尾的排法共有()种.

- (A) 3620 (B) 3640 (C) 3720
(D) 3740 (E) 3820

3. 某校从 8 名教师中选派 4 名教师同时去 4 个边远地区支教(每地一人), 其中甲和乙不

同去,甲和丙只能同去或同不去,则不同的选派方案有()种.

- (A)300 (B)400 (C)500
(D)600 (E)700

4. 五个工程队承建某项工程的五个不同的子项目,每个工程队承建一项,其中甲工程队不能承建1号子项目,则不同的承建方案共有 ()

- (A) $C_4^1 C_4^4$ 种 (B) $C_4^1 P_4^4$ 种 (C) C_4^4 种
(D) P_4^4 种 (E) 以上结论均不正确

5. 从4台甲型、5台乙型电视机中任意取出3台,其中至少有甲型与乙型电视机各一台,则不同的取法共有()种.

- (A)140 (B)84 (C)70
(D)35 (E)24

6. 从由数字0,1,2,3,4,5所组成的没有重复数字的四位数中,不能被5整除的数共有 ()个.

- (A)186 (B)187 (C)190
(D)191 (E)192

7. 4位老师分别教4个班的课,考试时要求老师不在本班监考,则不同的监考方法共有 ()种.

- (A)8 (B)9 (C)10
(D)11 (E)12

8. (2008年) 某单位有90人,其中有65人参加外语培训,72人参加计算机培训,已知参加外语培训而没参加计算机培训的有8人,则参加计算机培训而没参加外语培训的人数为 ()

- (A)5 (B)8 (C)10
(D)12 (E)15

二 条件充分性判断

9. $N = 1260$

(1)有实验员9人,分成3组,分别为2、3、4人,去进行内容相同的实验,共有 N 种不同的分法

(2)有实验员9人,分成3组,分别为2、3、4人,去进行内容不同的实验,共有 N 种不同的分法

10. $N = 3600$

(1)7个人排成一排,甲在排头的排法共有 N 种

(2)7个人排成一排,甲不在排头也不在排尾的排法共有 N 种

11. $n=3$

(1) 若 $P_{2n+1}^4 = 140P_n^3$

(2) 若 $C_n^4 = P_n^3$

12. 从 11 名工人中选出 4 人排版, 4 人印刷, 则共有 185 种不同的选法.

(1) 11 名工人中 5 人只会排版, 4 人只会印刷

(2) 11 名工人中 2 名工人既会排版, 又会印刷

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. A.

解析 如图 20-4, 将 8 个座位编号

1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

图 20-4

第一个步骤为三位女生选三个座位, 从左到右, 共有 $(2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 7), (3, 5, 7)$ 四种选法. 第二个步骤让女生就座, 共有 $3!$ 种坐法. 第三个步骤让五位男生就座, 有 $5!$ 种坐法, 因此共有

$$4 \times 3! \times 5! = 2880 (\text{种})$$

2. C.

解析 7 个人排成一排, 总的排法有 P_7^7 种, 甲排在排头的排法有 P_6^6 种, 乙排在排尾的排法也有 P_6^6 种, 甲排在排头且乙排在排尾的排法有 P_5^5 种, 从而排法总数为

$$N = P_7^7 - P_6^6 - P_6^6 + P_5^5 = 3720 (\text{种}).$$

3. D.

解析 将甲、丙两人看成是一个元素, 有两种情况, 他们去或不去, 而甲、乙两人中又只能选一个人去:

甲被选去时, 有 $C_5^2 P_4^4 = 240 (\text{种})$

当甲未被选去时, 有 $P_6^4 = 360 (\text{种})$

所以共有不同的选法 $240 + 360 = 600 (\text{种}).$

4. B.

解析 甲工程队不能承建一号子项目, 则甲工程队只能承建其他 4 个项目中的一个, 共有 C_4^1 种, 其他四个工程队承建剩下的 4 个项目, 共有 P_4^4 种, 故由乘法原理, 不同的承建方案有

$C_4^1 P_4^4$ 种.

5. C.

解析 从 C_9^3 全体取法中去掉只取甲型或乙型的情况, 因此应有

$$C_9^2 - C_4^3 - C_5^3 = 70(\text{种}).$$

6. E.

解析 不能被 5 整除, 则个位数只可能是 1, 2, 3, 4 中的一个.

不含 0 时, 满足题意的四位数有

$$C_4^1 P_4^4 = 96(\text{个}).$$

含有 0 时, 有 $C_4^1 C_2^1 P_4^2 = 96(\text{个}).$

故共有 $96 + 96 = 192(\text{个}).$

7. B.

解析 设教师 A、B、C、D 分别教甲、乙、丙、丁四个班, A 有 3 种可能, 监考乙、丙或丁班. 若选定乙班, B、C 和 D 三人监考甲、丙和丁班, 有 3 种可能方法, 即总共有 $3 \times 3 = 9$ 种不同方法.

8. E.

解析 设 A 表示参加外语培训的人数, B 表示参加计算机培训的人数, 则如图 20-5 所示, 90 人分为四类, 从而

$$AB = 65 - 8 = 57(\text{人})$$

所求 $\overline{AB} = 72 - AB = 72 - 57 = 15(\text{人})$

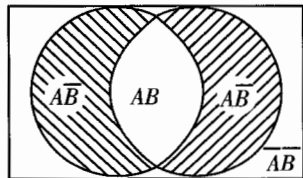


图 20-5

条件充分性判断

9. A.

解析 由条件(1) $N = C_9^2 C_7^3 C_4^4 = 1260$

即条件(1)是充分的.

由条件(2) $N = C_9^2 C_7^3 C_4^4 P_3^3 = 7560$

即条件(2)不充分.

10. B.

解析 由条件(1), 甲在排头的排法共有

$$N = P_6^6 = 720(\text{种})$$

从而条件(1)不充分.

由条件(2), 先排甲有 P_5^1 种不同方法, 再排余下的 6 人有 P_6^6 种, 所以应用乘法原理,

$$N = P_5^1 P_6^6 = 5 \times 720 = 3600.$$

即条件(2)充分.

11.

解析 由条件(1), 得

$$(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2) = 140n(n-1)(n-2)$$

$$\text{即 } n(n-1)(4n^2-35n+69) = 0$$

$$\text{即 } n=0, n=1, n=3, n=\frac{23}{4}$$

$$\text{因为 } \begin{cases} 2n+1 \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases}, \text{ 所以 } n=3.$$

即条件(1)是充分的.

由条件(2)

$$\frac{n!}{(n-4)!4!} = n(n-1)(n-2)$$

可得

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 24n(n-1)(n-2)$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3-24) = 0$$

即

$$n=0, n=1, n=27$$

由于 $n \geq 4$,从而 $n=27$, 条件(2)不充分.

12. C.

解析 此题只能选(C)或(E). 联合条件(1)和条件(2), 可分三类情况:(1) 从只会印刷的4人中任选2人 C_4^2 , 两样都会的人印刷 C_2^2 , 只会排版的5人中任选4人 C_5^4 ,

即

$$C_4^2 C_2^2 C_5^2$$

(2) 从只会印刷的4人中任选3人 C_4^3 , 两样都会的2人中选一人印刷 C_2^1 , 另外一个人只与只会排版的5人合在一起任选4人去排版 C_6^4 ,

即

$$C_4^3 C_2^1 C_6^4$$

(3) 只会印刷的人都选即 C_4^4 , 从其他7人中任选4人排版 C_7^4 ,

即

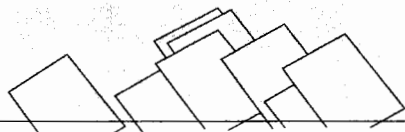
$$C_4^4 C_7^4$$

则共有

$$C_4^2 C_2^2 C_5^4 + C_4^3 C_2^1 C_6^4 + C_4^4 C_7^4 = 30 + 120 + 35 = 185 (\text{种}).$$

第二十一章

概率初步



第一节 基本内容提要

一 基本公式

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
3. $P(A \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$
4. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB)$
 $P(\bar{A} \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

二 两个基本概念

事件的互斥(不相容)与独立是概率中的两个重要概念,要注意以下几点.

1. A, B 互斥 $\Leftrightarrow AB = \Phi$
2. 若 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 则
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$
3. A, B 独立(两两独立或相互独立) $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
4. 若 A 与 B, \bar{A} 与 B, A 与 \bar{B}, \bar{A} 与 \bar{B} 四对事件中, 其中一对独立, 则另外三对都独立.
5. A, B, C 相互独立 $\Leftrightarrow A, B, C$ 两两独立, 且 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

三 独立试验序列

1. 在 n 重贝努利试验中, 事件 A 恰好发生 k 次的概率为
$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$
2. 若 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n)$$

第二节 典型例题及历年真题解析

一 问题求解

例 2.1 (1998 年) 有 3 个人,每人都以相同的概率被分配到 4 间房中的一间,某指定房中恰有 2 人的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{64}$ (B) $\frac{3}{64}$ (C) $\frac{9}{64}$
(D) $\frac{5}{32}$ (E) $\frac{3}{16}$

解 设 A = 某指定房间中恰有 2 人,这是一个典型的分房问题,3 个人随机分到 4 间房中共有 4^3 种等可能分法,而组成 A 的不同分法有 $C_3^2 C_3^1$ 种,

$$\text{从而} \quad P(A) = \frac{C_3^2 C_3^1}{4^3} = \frac{9}{64}$$

所以选 C.

例 2.2 (2000 年) 某剧院正在上演一部新歌剧,前座票价为 50 元,中座票价为 35 元,后座票价为 20 元,如果购到任何一种票是等可能的,现任意购买到两张票,则其值不超过 70 元的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$

解 总买法为:前前,前中,前后,中中,中后,后后

【这里“前中”表示一张前一一张中】共 6 种

票价不超过 70 元的买法:前后,中中,中后,后后共 4 种,从而所求概率为 $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

所以选 D.

例 2.3 (2001 年) 在共有 10 个座位的小会议室内随机地坐上 6 名与会者,则指定的 4 个座位被坐满的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{14}$ (B) $\frac{1}{13}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{11}$

解 用乘法原理,10 个座位随机地坐 6 名与会者,共有不同的坐法是 $C_{10}^6 \times 6!$,指定的 4 个座位被坐满的坐法是 $C_6^4 \times 4! \times C_2^2 \times 2!$

从而所求事件的概率是

$$P = \frac{C_6^4 \times 4! \times C_6^2 \times 2!}{C_{10}^6 \times 6!} = \frac{1}{14}$$

所以选 A.

例 2.4 (2001 年) 将一块各面均涂有红漆的正立方体锯成 125 个大小相同的小正立方体, 从这些小正立方体中随机抽取一个, 所取到的小正立方体至少有两面涂有红漆的概率是 ()

(A) 0.064

(B) 0.216

(C) 0.288

(D) 0.352

解 两面涂有红漆的小正立方体共有 $12 \times 3 = 36$ (个), 三面涂有红漆的小正立方体共有 $4 \times 2 = 8$ (个).

故所求概率为 $\frac{36+8}{125} = 0.352$

所以选 D.

例 2.5 (1999 年) 进行一系列独立的试验, 每次试验成功的概率为 P , 则在成功两次之前已经失败三次的概率为 ()

(A) $4P^2(1-P)^3$

(B) $4P(1-P)^3$

(C) $10P^2(1-P)^3$

(D) $P^2(1-P)^3$

(E) $(1-P)^3$

解 设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 分别表示第 1 次到第 5 次成功, 则所求事件

$$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_5 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_5 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 A_5 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 A_5$$

因此

$$P(A) = 4P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_5) = 4P^2(1-P)^3$$

所以选 A.

例 2.6 (2000 年) 某人将 5 个环一一投向一木栓, 直到有一个套中为止, 若每次套中的概率为 0.1, 则至少剩下一个环未投的概率是_____ (计算到小数点后四位).

解法 1 设 A_i 表示第 i 环套中 ($i=1, 2, 3, 4, 5$)

则所求事件为

$$A = A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4$$

因此

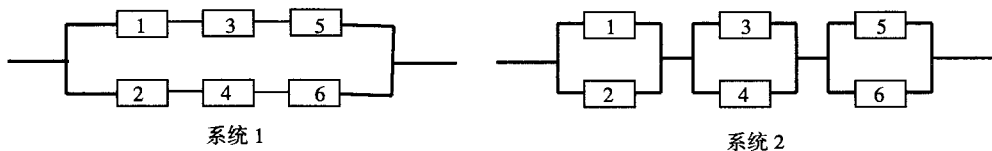
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4) \\ &= 0.1 + 0.9 \times 0.1 + (0.9)^2 \times 0.1 + (0.9)^3 \times 0.1 \\ &= 0.1 \times (1 + 0.9 + 0.9^2 + 0.9^3) \\ &= 0.3439 \end{aligned}$$

解法 2 可看作是 $n=4$ 的贝努利试验

设 A : 至少剩下一环未投 \bar{A} : 前 4 环一个都未投中

$$\text{则 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - C_4^0 (0.1)^0 \times (0.9)^4 = 1 - 0.6561 = 0.3439$$

例 2.7 设有 6 个元器件, 每个元器件正常工作的概率为 P , 且各元器件能否正常工作是相互独立的, 若按下列方式装配成两个系统, 则哪个系统能正常工作的概率大?



解 设 A_i 表示第 i 个元器件工作正常 ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)

则系统 1 工作正常的概率为

$$\begin{aligned} & P(A_1 A_3 A_5 \cup A_2 A_4 A_6) \\ &= P(A_1 A_2 A_3) + P(A_2 A_4 A_6) - P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6) \\ &= P^3 + P^3 - P^6 \\ &= P^3 (2 - P^3) \end{aligned}$$

系统 2 工作正常的概率为

$$\begin{aligned} & P[(A_1 \cup A_2)(A_3 \cup A_4)(A_5 \cup A_6)] \\ &= P(A_1 \cup A_2)P(A_3 \cup A_4)P(A_5 \cup A_6) \\ &= [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)]^3 \\ &= (P + P - P^2)^3 = P^3 (2 - P)^3 \end{aligned}$$

故系统 2 正常工作的概率比系统 1 大.

例 2.8 一头病牛服用某种药品后被治愈的可能性为 95%, 则服用这种药的 4 头病牛至少有 3 头被治愈的概率约为 ()

- (A) 0.97 (B) 0.98 (C) 0.99
(D) 0.991 (E) 以上答案均不正确

解 这是一个 4 重的贝努利试验.

设 A : 4 头病牛至少有 3 头被治愈,

$$\text{则 } P(A) = C_4^3 (0.95)^3 \times 0.05 + C_4^4 (0.95)^4 = (0.95)^3 \times (0.2 + 0.95) \approx 0.99$$

所以选 C.

例 2.9 (2008 年) 若以连续掷两枚骰子分别得到的点数 a 与 b 作为点 M 的横纵坐标, 则 $M(a, b)$ 落入圆 $x^2 + y^2 = 18$ 内 (不含圆周) 的概率是 ()

- (A) $\frac{7}{36}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{5}{18}$ (E) $\frac{11}{36}$

解 要使 (a, b) 落入圆 $x^2 + y^2 = 18$ 内, 即要求 $a^2 + b^2 < 18$, 掷两枚骰子 (a, b) 的总可能性为 $6 \times 6 = 36$ (种), 满足 $a^2 + b^2 < 18$ 的可能性为:

$(a, b) = (1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$ 共10种

从而所求概率为 $p = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

所以选D.

例2.10 (2008年) 若从原点出发的质点 M 向 x 轴的正向移动一个和两个坐标单位的概率分别是 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$, 则该质点移动3个坐标单位到达 $x=3$ 的概率是 ()

(A) $\frac{19}{27}$

(B) $\frac{20}{27}$

(C) $\frac{7}{9}$

(D) $\frac{22}{27}$

(E) $\frac{23}{27}$

解 设 A_i 表示第 i 次向 x 轴正向移动一个坐标单位($i=1, 2, 3$), B_i 表示第 i 次向 x 轴正向移动两个坐标单位, 则所求概率

$$\begin{aligned} P &= P(A_1 A_2 A_3 \cup A_1 B_2 \cup B_1 A_2) \\ &= P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 B_2) + P(B_1 A_2) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{20}{27} \end{aligned}$$

所以选B.

例2.11 (2008年) 某乒乓球男子单打决赛在甲、乙两选手间进行, 比赛采用7局4胜制. 已知每局比赛甲选手战胜乙选手的概率均为0.7, 则甲选手以4:1战胜乙选手的概率为 ()

(A) 0.84×0.7^3

(B) 0.7×0.7^3

(C) 0.3×0.7^3

(D) 0.9×0.7^3

(E) 以上结论均不正确

解 设 A_i 表示第 i 次甲胜($i=1, 2, 3, 4, 5$), 则 $P(A_i) = 0.7, p(\bar{A}_i) = 0.3$. 因此所求概率为

$$\begin{aligned} P &= P(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 A_5 \cup A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 A_5 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_5) \\ &= P(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 A_5) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_5) \\ &= P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(A_4)P(A_5) \\ &\quad + P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)P(A_5) \\ &= 4 \times (0.7)^4 \times (0.3) \end{aligned}$$

$$=0.84 \times (0.7)^3$$

所以选 A.

二 条件充分性判断

例 2.12 (2003 年) A, B 是两个随机事件, $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

(1) A 与 \bar{B} 互不相容

(2) \bar{A} 与 B 互不相容

解 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

题干要求推出 $P(AB) = P(B)$, 即 $B \subset A$.

由条件(1), 如图 21-1 所示

则 $A \subset B$.

由条件(2), 如图 21-2 所示

则 $B \subset A$.

从而条件(1)不充分, 条件(2)充分.

所以选 B.

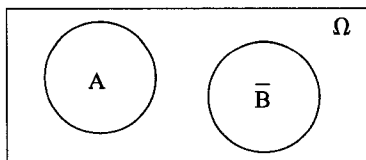


图 21-1

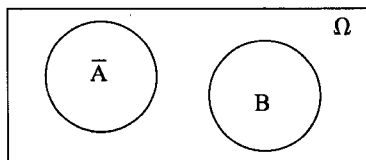


图 21-2

例 2.13 (2003 年) A, B, C 为随机事件, A 发生必导致 B, C 同时发生.

(1) $A \cap B \cap C = A$ (2) $A \cup B \cup C = A$

解 题干要求推出 $A \subset BC$, 由条件(1)可知 $A \subset BC$.

由条件(2),

可知 $B \subset CA$, 即条件(1)充分, 条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.14 (2007 年) $\min[P(A), P(B)] = 0$

(1) 事件 A, B 相互独立

(2) 事件 A, B 互不相容

解 由条件(1), $P(AB) = P(A)P(B)$,

由条件(2), $AB = \Phi$,

即 $P(AB) = 0$, 条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2),

则知 $P(AB) = P(A)P(B) = 0$,

从而 $P(A), P(B)$ 中至少有一个为零, 即 $\min[P(A), P(B)] = 0$,

所以选 C.

例 2.15 取出的三件产品中至少有一个次品的概率为 $\frac{137}{228}$.

(1) 共有 20 件产品

(2) 产品中有 15 件正品

解 条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2),

设 A : 三件产品中至少有一个次品

则 \bar{A} : 三件产品中全是正品

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = 1 - \frac{91}{228} = \frac{137}{228}.$$

所以选 C.

例 2.16 $P = \frac{3}{8}$

(1) 先后投掷 3 枚均匀的硬币, 出现 2 枚正面向上、一枚反面向上的概率为 P

(2) 甲、乙两人投宿 3 个旅馆, 恰好两人住在同一个旅馆的概率为 P

解 条件(1)可以看作是一个三重贝努利试验.

设 A : 正面向上,

则 \bar{A} : 正面向下, $P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2},$

则 2 枚正面向上、一枚反面而上的概率为 $C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$

即条件(1)充分.

由条件(2),

设 A : 两人同住一个旅馆,

两人投宿 3 个旅馆, 总的可能性有 $3^2 = 9$ (种), 两人同住一个旅馆的可能性有 $C_3^1 = 3$ (种).

从而 $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$ 即条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.17 某射手在一次射击中, 射中的环数低于 9 环的概率为 0.48.

(1) 该射手在一次射击中, 射中 10 环的概率为 0.24

(2) 该射手在一次射击中, 射中 9 环的概率为 0.28

解 设 A : 该射手射中 10 环

B : 该射手射中 9 环

则射中的环数低于 9 环的概率为

$$P_1 = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0.24 - 0.28 = 0.48$$

所以选 C.

例 2.18 (2008 年) 张三以卧姿射击 10 次, 命中靶子 7 次的概率是 $\frac{15}{128}$.

(1) 张三以卧姿打靶的命中率是 0.2

(2) 张三以卧姿打靶的命中率是 0.5

解 由条件(1), 所求概率 $p = C_{10}^7 \left(\frac{1}{5}\right)^7 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{C_{10}^7 \times 4^3}{5^{10}}$, 分母不可能化为 128, 即 $p \neq \frac{15}{128}$,

由条件(2), $p = C_{10}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = C_{10}^7 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{128}$,

从而条件(1)不充分, 条件(2)充分.

所以选 B.

例 2.19 (2008 年) 从含有 2 件次品, $n-2$ ($n>2$) 件正品的 n 件产品中随机抽查 2 件, 其中恰有 1 件次品的概率为 0.6.

(1) $n=5$

(2) $n=6$

解 由条件(1), 所求概率 $P = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5} = 0.6$.

由条件(2), 所求概率

$$P = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} = \frac{8}{15} \neq 0.6$$

因此条件(1)充分, 条件(2)不充分.

所以选 A.

例 2.20 (2008 年) 申请驾驶执照时, 必须参加理论考试和路考, 且两种考试均通过才能领到驾照. 若在同一批学员中有 70% 的人通过了理论考试, 80% 的人通过了路考, 则最后领到驾驶执照的人有 60%.

(1) 10% 的人两种考试都没有通过

(2) 20% 的人仅通过了路考

解 设 A 表示通过理论考试的人数, B 表示通过路考的人数, 则全体学员可分为如图 21-3 所示的四类.

由题干知 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.8$, 要求推出 $P(AB) = 0.6$.

由条件(1), $P(\overline{AB}) = 0.1$, 即

$$1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 0.1$$

因此 $P(AB) = 0.6$, 从而条件(1)是充分的.

由条件(2), $P(\overline{AB}) = P(B - A) = P(B) - P(AB) = 0.2$

则知 $P(AB) = 0.6$, 即条件(2)也是充分的.

所以选 D.

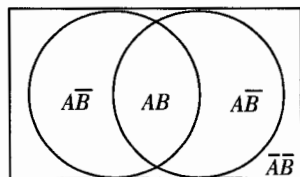


图 21-3

第三节 练习

一 问题求解

- (1998 年) 掷一枚不均匀硬币, 正面朝上的概率为 $\frac{2}{3}$, 若将此硬币掷 4 次, 则正面朝上 3 次的概率是 ()
 (A) $\frac{8}{81}$ (B) $\frac{8}{27}$ (C) $\frac{32}{81}$
 (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{26}{27}$
- (2000 年) 假设实验室器皿中产生 A 类细菌与 B 类细菌的机会相等, 且每个细菌的产生是相互独立的, 若某次发现产生了 n 个细菌, 则其中至少有一个 A 类细菌的概率是多少?
- (1999 年) 设 A_1, A_2, A_3 为三个独立事件, 且 $P(A_k) = P, (k=1, 2, 3, 0 < P < 1)$, 则这三个事件不全发生的概率是 ()
 (A) $1 - P^3$ (B) $3(1 - P)$ (C) $(1 - P)^3 + 3P(1 - P)$
 (D) $3P(1 - P)^3 + 3P^2(1 - P)$ (E) $3P(1 - P)^2$
- (1999 年) 若 $A \supset C, B \supset C, P(A) = 0.7, P(A - C) = 0.4, P(AB) = 0.5$, 则 $P(AB - C) =$ ()
 (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3
 (D) 0.4 (E) 0.5
- 对于任意二事件 A 和 B ()
 (A) 若 $AB \neq \Phi$, 则 A, B 一定独立 (B) 若 $AB \neq \Phi$, 则 A, B 一定不独立
 (C) 若 $AB = \Phi$, 则 A, B 一定独立 (D) 若 $AB \neq \Phi$, 则 A, B 有可能独立
 (E) 以上结论均不正确
- 某市电话号码由 8 位数字组成, 每位数字可以用 0, 1, 2, \dots , 9 十个数字中的任何一个, 则电话号码是由 8 个互不相同的数字组成的概率是 ()
 (A) $\frac{P_{10}^8}{10^8}$ (B) $\frac{C_{10}^8}{10^8}$ (C) $\frac{P_{10}^8}{8^{10}}$
 (D) $\frac{C_{10}^8}{8^{10}}$ (E) 以上均不正确
- 某射手射击一次, 击中目标的概率是 0.9, 他连续射击 4 次, 且各次是否击中相互之间没有影响, 则他第 2 次未击中, 其余 3 次都击中的概率是 ()
 (A) 0.0729 (B) 0.0792 (C) 0.0139

(D) 0.0579 (E) 0.0569

8. 有甲、乙、丙三批罐头, 每批 100 个, 其中各有一个是不合格的, 从每批中各抽出一个, 抽出的 3 个中恰有 1 个不合格的概率约为 ()

(A) 0.04 (B) 0.03 (C) 0.025
(D) 0.02 (E) 0.023

9. 一个不懂数学的人参加一次数学考试, 共有 30 个选择题, 每题有 5 个答案, 只有一个答案是正确的, 则此人答对 6 题的概率是 ()

(A) $C_{30}^6 \left(\frac{1}{5}\right)^6 \left(\frac{4}{5}\right)^{24}$ (B) $C_{30}^6 \left(\frac{1}{5}\right)^{24} \left(\frac{4}{5}\right)^6$ (C) $P_{30}^6 \left(\frac{1}{5}\right)^6 \left(\frac{4}{5}\right)^{24}$
(D) $C_{30}^6 \left(\frac{2}{5}\right)^6 \left(\frac{3}{5}\right)^{24}$ (E) $P_{30}^6 \left(\frac{1}{5}\right)^{24} \left(\frac{4}{5}\right)^6$

10. 设某家庭有 3 个孩子, 在已知至少有一个女孩子的条件下, 这个家庭中至少有一个男孩的概率是 ()

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{6}{7}$

11. 有 5 件正品和 2 件次品混合放在一起, 为了找出其中的 2 件次品, 需对它们一一进行不放回检验, 则恰好进行了 3 次检验就找出了 2 件次品的概率为 ()

(A) $\frac{1}{21}$ (B) $\frac{2}{21}$ (C) $\frac{3}{21}$ (D) $\frac{4}{21}$ (E) $\frac{5}{21}$

12. 盒子中有 4 只次品晶体管, 6 只正品晶体管, 随机抽取一只进行测试, 直到 4 只次品晶体管都找到为止, 则第 4 只次品在第五次测试中被发现的概率为 ()

(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{5}{123}$ (C) $\frac{4}{87}$ (D) $\frac{2}{105}$ (E) $\frac{3}{98}$

13. (2009 年) 在 36 人中, 血型情况如下: A 型血 12 人, B 型血 10 人, AB 型 8 人, O 型 6 人, 若从中随机选出两人, 则两人血型相同的概率是 ()

(A) $\frac{77}{315}$ (B) $\frac{44}{315}$ (C) $\frac{33}{315}$
(D) $\frac{9}{122}$ (E) 以上结论都不正确

条件充分性判断

14. 事件 A 与 B 相互独立.

(1) $P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(B) + P(A)P(B)$
(2) 事件 \bar{A} 与 \bar{B} 相互独立

15. 事件 A 和事件 B 同时发生的概率为 $\frac{1}{6}$.

(1) 事件 A 与 B 至少有一个发生的概率为 $\frac{5}{6}$

(2) 事件 A 与 B 中有且仅有一个发生的概率为 $\frac{2}{3}$

16. $a = 330$

(1) $\left(x + \frac{9}{x} - 6\right)^3$ 的展开式中, x 项的系数为 a

(2) $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^{10}$ 的展开式中, x^6 的系数为 a

17. $P = \frac{1}{9}$

(1) 将骰子先后抛掷 2 次, 抛出的骰子向上的点数之和为 5 的概率为 P

(2) 将骰子先后抛掷 2 次, 抛出的骰子向上的点数之和为 9 的概率为 P

18. 甲、乙两个各进行一次射击, 至少有 1 人击中目标的概率为 0.84.

(1) 在一次射击中, 甲击中目标的概率为 0.6, 乙击中目标的概率为 0.5

(2) 在一次射击中, 甲、乙击中目标的概率都是 0.6

第四节 参 考 答 案 及 解 析

一 问题求解

1. C.

解析 设 A = “正面朝上”, 这是一个 $n=4, P=P(A)=\frac{2}{3}$ 的贝努利试验,

因而正面朝上 (即 A 发生了 3 次) 3 次的概率为

$$C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = 4 \times \frac{8}{27} \times \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$$

2.

解析 这是一个 n 重贝努利试验, A = “产生 A 类细菌”, 则 A 至少发生一次的概率为

$$1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. A.

解析 $P(\overline{A_1 A_2 A_3}) = 1 - P(A_1 A_2 A_3) = 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1 - P^3$

4. B.

解析 $P(AB - C) = P(AB) - P(ABC) = 0.5 - P(ABC) = 0.5 - P(C)$ (因为 $C \subset AB$)

由 $P(A - C) = P(A) - P(C) = 0.4$

可得 $P(C) = 0.3$, 从而 $P(AB - C) = 0.5 - 0.3 = 0.2$

5. D.

解析 互斥与独立是两个没有关系的基本概念,

因此 $AB \neq \Phi$, A, B 有可能独立, 也有可能不独立,

同样 $AB = \Phi$, A, B 有可能独立, 也有可能不独立.

6. A.

解析 设 A : 电话号码由 8 个互不相同的数字组成, 由此 $0, 1, 2, \dots, 9$ 可以组成 10^8 种不同

的电话号码. A 包含的样本点为 P_{10}^8 . 因此 $P(A) = \frac{P_{10}^8}{10^8}$.

7. A.

解析 设 A_i : 表示第 i 次射中 ($i = 1, 2, 3, 4$).

则所求概率 $P = P(A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4) = (0.9)^3 \times 0.1 = 0.0729$

8. B.

解析 这是一个 $n = 3, P = \frac{1}{100} = 0.01$ 的贝努利试验, 所求概率为

$$C_3^1 \left(\frac{1}{100} \right) \left(\frac{99}{100} \right)^2 = 0.0294 \approx 0.03$$

9. A.

解析 这是一个 $n = 30, P = \frac{1}{5}$ 的贝努利试验, 答对 6 个题的概率为 $C_{30}^6 \left(\frac{1}{5} \right)^6 \left(\frac{4}{5} \right)^{24}$.

10. E.

解析 A 表示至少有一个女孩, B 表示至少一个男孩.

则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$,

而 $P(A) = \frac{1+3+3}{2^3} = \frac{7}{8}$, $P(AB) = \frac{3+3}{2^3} = \frac{6}{8}$,

从而 $P(B|A) = \frac{6}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{6}{7}$

11. B.

解析 设 A_i 表示第 i 次取到为次品 ($i = 1, 2, 3$), 则所求事件

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3) = P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 A_2) \\ &= \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

12. D

解析 设 A_i 表示第 i 次取到次品晶体管 ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 则所求事件

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 A_5 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 A_5 \cup A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 A_5) \\ &= P(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 A_5) \end{aligned}$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{105}$$

13. A

解析 所求事件的概率为 $p = \frac{C_{12}^2 + C_{10}^2 + C_8^2 + C_6^2}{C_{36}^2} = \frac{77}{315}$

三 条件充分性判断

14. D.

解析 由条件(1), $P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = 1 - P(B) + P(A)P(B)$

整理可得 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即条件(1)充分.

由条件(2), $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$

即 $1 - P(A) - P(B) + P(AB) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$

也可得 $P(AB) = P(A)P(B)$, 因此条件(2)也充分.

15. C.

解析 由条件(1), $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{5}{6}$

由条件(2), $P(\bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{3}$

条件(1)和(2)单独都不充分, 联合条件(1)和(2)可得 $P(AB) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

16. B.

解析 由条件(1), $\left(x + \frac{9}{x} - 6\right)^3 = \frac{(x-3)^6}{x^3}$, x 项的系数是 $(x-3)^6$ 展开式中 x^4 项系数.

即为 $C_6^4(-3)^{6-4} = 15 \times 9 = 135 \neq 330$.

由条件(2),

$$(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^{10} = \frac{(1+x)[1 - (1+x)^{10}]}{1 - (1+x)} = \frac{(x+1)^{11} - (1+x)}{x},$$

因此 x^6 的系数即为 $(x+1)^{11}$ 展开式中 x^7 的系数, 即为 $C_{11}^7 = 330$.

因此条件(1)不充分, 条件(2)充分.

17. D.

解析 将骰子先后抛掷2次, 总可能性共有36种.

点数之和为5的可能性为(1,4)(4,1)(2,3)(3,2)四种,

点数之和为9的可能性为(4,5)(5,4)(3,6)(6,3)四种.

从而两者的概率均为 $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

即条件(1)和条件(2)都充分.

18. B.

解析 设 A : 甲射中, B : 乙射中.

由条件(1), $P(A) = 0.6, P(B) = 0.5$

则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.5 - 0.6 \times 0.5 = 0.8$

由条件(2), $P(A) = P(B) = 0.6$

则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.6 - 0.6 \times 0.6 = 0.84$

从而条件(1)不充分, 条件(2)充分.

管理类联考网络课堂本店唯一QQ:2408863085, 后续重要资料+押题信息均以此QQ发送

第三部分

2015版 ▶▶

MBA MPA MPAcc联考同步复习指导系列

附 录

- 附录A 2009年10月至2014年1月十套全国联考数学真题及解析
- 附录B 数据描述

请认准一手资料店铺地址：<http://jitahupan.taobao.com>

附录 A 2009 年 10 月至 2014 年 1 月 十套全国联考数学真题及解析

2009 年 10 月在职攻读硕士学位全国联考 工商管理硕士综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(第 1~15 小题, 每小题 3 分, 共 45 分. 下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中, 只有一项是符合试题要求的, 请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

1. 已知某车间的男工人数比女工人数多 80%, 若在该车间一次技术考核中全体工人的平均成绩为 75 分, 而女工平均成绩比男工平均成绩高 20%, 则女工的平均成绩为() 分.

- (A) 88 (B) 86 (C) 84
(D) 82 (E) 80

2. 某人在市场上买猪肉, 小贩称得肉重为 4 斤. 但此人不放心, 拿出一个自备的 100 克重的砝码, 将肉和砝码放在一起让小贩用原秤复称, 结果重量为 4.25 斤. 由此可知顾客应要求小贩补猪肉() 两.

- (A) 3 (B) 6 (C) 4
(D) 7 (E) 8

3. 甲、乙两商店某种商品的进货价格都是 200 元, 甲店以高于进货价格 20% 的价格出售, 乙店以高于进货价格 15% 的价格出售, 结果乙店的售出件数是甲店的 2 倍. 扣除营业税后乙店的利润比甲店多 5400 元. 若设营业税率是营业额的 5%, 那么甲、乙两店售出该商品各为() 件.

- (A) 450, 900 (B) 500, 1000 (C) 550, 1100
(D) 600, 1200 (E) 650, 1300

4. 甲、乙两人在环形跑道上跑步, 他们同时从起点出发, 当方向相反时每隔 48 秒相遇一次, 当方向相同时每隔 10 分钟相遇一次. 若甲每分钟比乙快 40 米, 则甲、乙两人的跑步速度分别是() 米/分.

- (A) 470, 430 (B) 380, 340 (C) 370, 330
(D) 280, 240 (E) 270, 230

5. 一艘小轮船上午 8:00 起航逆流而上(设船速和水流速度一定), 中途船上一块木板落入

水中,直到 8:50 船员才以现这块重要的木板丢失,立即调转船头去追,最终于 9:20 追上木板.
由上述数据可以算出木板落水的时间是 ()

- (A) 8:50 (B) 8:30 (C) 8:25
(D) 8:20 (E) 8:15

6. 若 x, y 是有理数,且满足 $(1+2\sqrt{3})x + (1-\sqrt{3})y - 2 + 5\sqrt{3} = 0$, 则 x, y 的值分别为 ()

- (A) 1, 3 (B) -1, 2 (C) -1, 3
(D) 1, 2 (E) 以上结论都不正确

7. 设 a 与 b 之和的倒数的 2007 次方等于 1, a 的相反数与 b 之和的倒数的 2009 次方也等于 1. 则 $a^{2007} + b^{2009} =$ ()

- (A) -1 (B) 2 (C) 1
(D) 0 (E) 2^{2007}

8. 设 $y = |x-a| + |x-20| + |x-a-20|$, 其中 $0 < a < 20$, 则对于满足 $a \leq x \leq 20$ 的 x 值, y 的最小值是 ()

- (A) 10 (B) 15 (C) 20
(D) 25 (E) 30

9. 若关于 x 的二次方程 $mx^2 - (m-1)x + m-5 = 0$ 有两个实根 α, β , 且满足 $-1 < \alpha < 0$ 和 $0 < \beta < 1$, 则 m 的取值范围是 ()

- (A) $3 < m < 4$ (B) $4 < m < 5$ (C) $5 < m < 6$
(D) $m > 6$ 或 $m < 5$ (E) $m > 5$ 或 $m < 4$

10. 一个球从 100 米高处自由落下, 每次着地后又跳回前一次高度的一半再落下. 当它第 10 次着地时, 共经过的路程是 () 米. (精确到 1 米且不计任何阻力)

- (A) 300 (B) 250 (C) 200
(D) 150 (E) 100

11. 曲线 $x^2 - 2x + y^2 = 0$ 上的点到直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 的最短距离是 ()

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) 1
(D) $\frac{4}{3}$ (E) $\sqrt{2}$

12. 曲线 $|xy| + 1 = |x| + |y|$ 所围成的图形的面积为 ()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1
(D) 2 (E) 4

13. 如图 1 所示, 向放在水槽底部的口杯注水 (流量一定), 注满口杯后继续注水, 直到注满水槽, 水槽中水平面上升高度 h 与注水时间 t 之间的函数关系大致是 ()

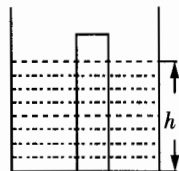
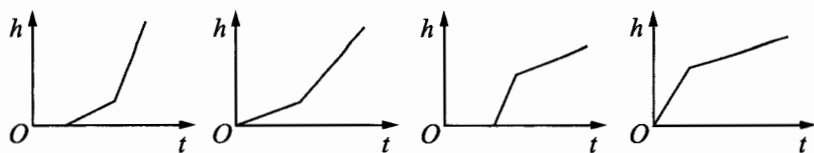


图 1

(A) (B) (C) (D) (E) 以上图形均不正确

14. 若将 10 只相同的球随机放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒子中, 则每个盒子不空的投放方法有 ()

(A) 72 (B) 84 (C) 96

(D) 108 (E) 120

15. 若以连续两次掷色子得到的点数 a 和 b 作为点 P 的坐标, 则点 $P(a, b)$ 落在直线 $x + y = 6$ 和两坐标轴围成的三角形内的概率为 ()

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{7}{36}$ (C) $\frac{2}{9}$

(D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{5}{18}$

二 条件充分性判断

(第 16 ~ 25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干所陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 在答题卡上将所选项的字母涂黑)

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. $a + b + c + d + e$ 的最大值是 133.

(1) a, b, c, d, e 是大于 1 的自然数, 且 $abcde = 2700$

(2) a, b, c, d, e 是大于 1 的自然数, 且 $abcde = 2000$

17. 二次三项 $x^2 + x - 6$ 是多项式 $2x^4 + x^3 - ax^2 + bx + a + b - 1$ 的一个因式.

(1) $a = 16$

(2) $b = 2$

18. $2^{x+y} + 2^{a+b} = 17$

(1) a, b, x, y 满足 $y + |\sqrt{x} - \sqrt{3}| = 1 - a^2 + \sqrt{3}b$

(2) a, b, x, y 满足 $|x - 3| + \sqrt{3}b = y - 1 - b^2$

19. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

(1) $abc = 1$

(2) a, b, c 为不全相等的正数

20. 关于 x 的方程 $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{1-x}{2-x}$ 与 $\frac{x+1}{x-|a|} = 2 - \frac{3}{|a|-x}$ 有相同的增根.

(1) $a = 2$

(2) $a = -2$

21. 关于 x 的方程 $a^2x^2 - (3a^2 - 8a)x + 2a^2 - 13a + 15 = 0$ 至少有一个整数根.

(1) $a = 3$

(2) $a = 5$

22. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 18 项和 $S_{18} = \frac{19}{2}$.

(1) $a_3 = \frac{1}{6}, a_6 = \frac{1}{3}$

(2) $a_3 = \frac{1}{4}, a_6 = \frac{1}{2}$

23. $\triangle ABC$ 是等边三角形.

(1) $\triangle ABC$ 的三边满足 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$

(2) $\triangle ABC$ 的三边满足 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2 = 0$

24. 圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2 (r > 0)$ 相切.

(1) $r = 5 \pm 2\sqrt{3}$

(2) $r = 5 \pm 2\sqrt{2}$

25. 命中来犯敌机的概率是 99%.

(1) 每枚导弹命中率为 0.6

(2) 至多同时向来犯敌机发射 4 枚导弹

【 参考答案 】

一 问题求解

1. C

解析 设女工人数为 a , 平均成绩为 b , 则男工人数为 $1.8a$, 平均成绩为 c , $b = 1.2c$, 从而

$$\frac{ab + 1.8ac}{a + 1.8a} = 75$$

整理得 $3c = 210$, $b = 1.2c = 1.2 \times 70 = 84$ (分).

2. E

解析 4 斤 = 2000 克, 4.25 斤 = 2125 克, 设此人买到的猪肉实际重 x 克, 则有

$$\frac{2000}{x} = \frac{2125}{x + 100}$$

解得 $x = 1600$ (克),

因此 $2000 - 1600 = 400$ (克) = 8 (两).

3. D

解析 由已知甲店每件商品的售价为 240 元, 乙店每件售价为 230 元, 设甲店售出件数为 a , 则乙店售出件数为 $2a$, 从而

$$(230 - 200) \times 2a - (230 \times 2a \times 0.05) = (240 - 200) \times a - (240a \times 0.05) + 5400$$

整理得 $a = 600$ (件), $2a = 1200$ (件).

4. E

解析 设甲、乙的速度分别为 v_1, v_2 (米/分), 环形跑道全长为 S 米, 则有 $v_1 - v_2 = 40$, 及

$$\begin{cases} (v_1 + v_2) \times 0.8 = S \\ (v_1 - v_2) \times 10 = S \end{cases}$$

整理得 $v_2 = 230, v_1 = 270$.

5. D

解析 设静水中船速为 v_1 , 水流速度为 v_2 , 在轮船出发 t 分钟后木板落入水中, 则由已知

$$\frac{(50 - t)v_2 + (50 - t)(v_1 - v_2)}{v_2 + v_1 - v_2} = 30 \text{ (分钟)}$$

整理得 $50 - t = 30, t = 20$ (分钟).

6. C

解析 由已知 $(x + y - 2) + (2x - y + 5)\sqrt{3} = 0$, 从而必有

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

得 $x = -1, y = 3$.

7. C

解析 由已知条件, $\left(\frac{1}{a+b}\right)^{2007} = 1, \left(\frac{1}{-a+b}\right)^{2009} = 1$,

则有
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

解得 $b = 1, a = 0$

因此 $a^{2007} + b^{2009} = 1$

8. C

解析 由已知 $x - a \geq 0, x - 20 \leq 0, x - a - 20 \leq 0$,

因此 $y = x - a + 20 - x + a + 20 - x = 40 - x$,

当 $x = 20$ 时, y 取最小值 $40 - 20 = 20$,

9. B

解析 由题意知 $m \neq 0$, 可分两种情况考虑

(1) $m < 0, mx^2 - (m-1)x + m-5$ 如图 2 所示.

则有
$$\begin{cases} m + m - 1 + m - 5 < 0 \\ m - 5 > 0 \\ m - m + 1 + m - 5 < 0 \end{cases}$$

此不等式组无解.

(2) $m > 0, mx^2 - (m-1)x + m-5$ 如图 3 所示.

则有
$$\begin{cases} m + m - 1 + m - 5 > 0 \\ m - 5 < 0 \\ m - m + 1 + m - 5 > 0 \end{cases}$$

解得 $4 < m < 5$.

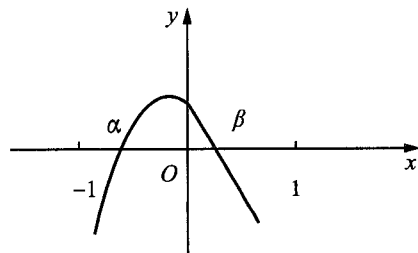


图 2

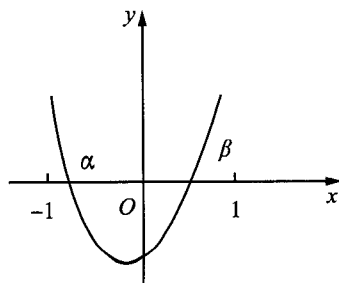


图 3

10. A

解析 所求路程 $S = 100 + 2 \times 50 + 2 \times 25 + \dots + 2 \times \frac{50}{2^8} = 100 + 100 \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^8} \right]$
 $= 100 + 200 \left(1 - \frac{1}{2^9} \right) \approx 300$ (米).

11. B

解析 所给圆方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 圆心 $(1, 0)$
 到直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 的距离

$$d = \frac{|3 - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{9}{5} > 1 \text{ (圆的半径)}$$

所给圆及直线位置如图 4 所示.

因此圆上的点到直线的最短距离为 $\frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$.

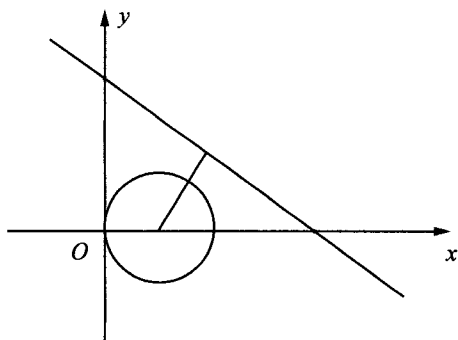


图 4

12. E

解析 分四种情况:

(1) $x \geq 0, y \geq 0$, 则有 $xy + 1 = x + y, (x-1)(y-1) = 0$,
 其表示两条直线 $x = 1, y = 1$.

(2) $x < 0, y \geq 0$, 则有 $-xy + 1 = -x + y, (x+1)(y-1) = 0$,
 表示 $x = -1, y = 1$ 两条直线.

(3) $x < 0, y < 0$, 则有 $xy + 1 = -x - y, (x+1)(y+1) = 0$,
 表示 $x = -1, y = -1$ 两条直线.

(4) $x \geq 0, y < 0$, 则有 $-xy + 1 = x - y, (x-1)(y+1) = 0$,
 表示 $x = 1, y = -1$ 两条直线.

因此, 曲线 $|xy| + 1 = |x| + |y|$ 所围成的图形如图 5 所示, 是以 2 为边长的正方形, 从而所求面积

$$S = 2^2 = 4$$

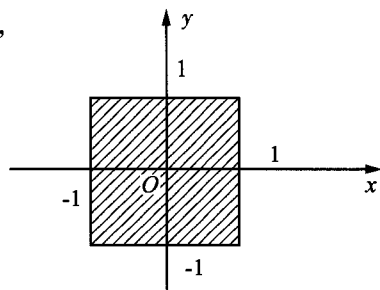


图 5

13. C

解析 在注满水杯前, $h = 0$, 注满水杯后, h 随时间 t 而增加, 当 h 超过水杯顶部位置时, 随时间 t 增加, h 也增加, 但此时由于水面宽度增加, h 增加速度较前缓慢, 从而应选 C.

14. B

解析 用穷举法, 将 10 只小球分为四组, 每组至少 1 个, 则共有下列 9 种分法

$(7, 1, 1, 1), (6, 2, 1, 1)$

$(5, 3, 1, 1), (5, 2, 2, 1)$

$(4, 4, 1, 1), (4, 3, 2, 1)$

$(4, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 1)$

$(3, 3, 2, 2),$

分别计算每种分法放入 4 个盒中的放入方式种数, 其中 $(7, 1, 1, 1), (4, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 1)$ 的放入方法均为 4 种; $(5, 3, 1, 1), (6, 2, 1, 1), (5, 2, 2, 1)$ 的放入方法均为 $4 \times 3 = 12$ (种); $(4, 4, 1, 1), (3, 3, 2, 2)$ 的放入方法均为 $C_4^2 = 6$ (种); 而 $(4, 3, 2, 1)$ 的放入方法有 $4! = 24$ (种),

从而,总方法为

$$4 \times 3 + 12 \times 3 + 6 \times 2 + 24 = 84 (\text{种})$$

15. E

解析 $P(a, b)$ 的总点数为 $6 \times 6 = 36$ (个), 满足 $a + b < 6$ 的点数有 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$ 共 10 个,

从而所求事件的概率为 $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

二 条件充分性判断 ④

16. B

解析 由条件(1), $abcde = 2700 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$.

要使 $a + b + c + d + e$ 取最大值, 则需 $a = 2, b = 2, c = 3, d = 3, e = 75$,
其最大值为 $2 + 2 + 3 + 3 + 75 = 85 \neq 133$,

由条件(2), $abcde = 2000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$,

令 $a = b = c = d = 2, e = 125$, 则最大值为 $2 + 2 + 2 + 2 + 125 = 133$,

从而条件(1)不充分, 即条件(2)充分.

17. E

解析 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2),

将 $a = 16, b = 2$ 代入题干,

若 $f(x) = 2x^4 + x^3 - 16x^2 + 2x + 16 + 2 - 1 = q(x)(x^2 + x - 6)$, 则 $f(2) = 0$ 且 $f(-3) = 0$,

但 $f(2) = 2 \times 2^4 + 2^3 - 16 \times 2^2 + 2 \times 2 + 17 = \text{奇数} \neq 0$,

因此, $x^2 + x - 6$ 不是 $f(x)$ 的因式.

18. C

解析 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2), 则有

$$|x - 3| + \sqrt{3}b + 1 + b^2 = 1 - a^2 + \sqrt{3}b - |\sqrt{x} - \sqrt{3}|$$

整理得 $|x - 3| + a^2 + b^2 + |\sqrt{x} - \sqrt{3}| = 0$,

从而 $x = 3, a = b = 0, y = 1, 2^{x+y} + 2^{a+b} = 17$ 成立.

19. C

解析 取 $a = b = c = 1$, 则知条件(1)不充分.

取 $a = 1, b = 4, c = 9$, 则知条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = bc + ac + ab$$

$$= \frac{bc+ac}{2} + \frac{ac+ab}{2} + \frac{bc+ab}{2} > \sqrt{bac^2} + \sqrt{bca^2} + \sqrt{acb^2} = \sqrt{c} + \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

注:中间不等式用到算术平均值与几何平均值的关系.

20. D

解析 方程 $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{1-x}{2-x}$, 解得 $x=2$ 为此方程的增根.

由条件(1), 题干中第2个方程为 $\frac{x+1}{x-2} = 2 - \frac{3}{2-x}$, 整理解得其增根 $x=2$.

因此条件(1)是充分的.

同理可知条件(2)也是充分的.

21. D

解析 由条件(1), 题干中方程为

$$9x^2 - 3x - 6 = 0$$

得 $x=1, x=-\frac{2}{3}$.

由条件(2), 题干中方程为

$$25x^2 - 35x = 0$$

得 $x=0, x=\frac{7}{5}$.

因此条件(1)及条件(2)都是充分的.

22. A

解析 设等差数列首项为 a_1 , 公差为 d , 题干要求推出 $\frac{18(a_1 + a_1 + 17d)}{2} = \frac{19}{2}$,

即 $18(2a_1 + 17d) = 19$

由条件(1), $\begin{cases} a_1 + 2d = \frac{1}{6} \\ a_1 + 5d = \frac{1}{3} \end{cases}$ 得 $d = \frac{1}{18}, a_1 = \frac{1}{18}$

从而 $18\left(2 \times \frac{1}{18} + 17 \times \frac{1}{18}\right) = 19$ 成立, 条件(1)是充分的.

由条件(2), $\begin{cases} a_1 + 2d = \frac{1}{4} \\ a_1 + 5d = \frac{1}{2} \end{cases}$ 得 $d = \frac{1}{12}, a_1 = \frac{1}{12}$

从而 $18\left(2 \times \frac{1}{12} + 17 \times \frac{1}{12}\right) \neq 19$, 条件(2)不是充分的.

23. A

解析 由条件(1), $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$, 则有

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] = 0$$

得 $a=b=c$, 因此条件(1)是充分的.

由条件(2)不能推出 $a=b=c$.

24. B

解析 题干中两圆的圆心距

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

两圆若相切, 则需

$$d = 5 + r \quad \text{或} \quad d = |r - 5|$$

从而

$$2\sqrt{2} = |r - 5|, \quad r - 5 = \pm 2\sqrt{2}$$

即

$$r = 5 \pm 2\sqrt{2}$$

25. E

解析 条件(1)与条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)与条件(2)也不充分.

2010 年管理类专业硕士学位全国联考 综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(第 1~15 小题, 每小题 3 分, 共 45 分. 下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中, 只有一项是符合试题要求的, 请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

1. 电影开演时观众中女士与男士人数之比为 5:4, 开演后无观众入场, 放映一个小时后, 女士的 20%, 男士的 15% 离场, 则此时在场的女士与男士人数之比为 ()

- (A) 4:5 (B) 1:1 (C) 5:4
(D) 20:17 (E) 85:64

2. 某商品的成本为 240 元, 若按该商品标价的 8 折出售, 利润率是 15%, 则该商品的标价为 ()

- (A) 276 元 (B) 331 元 (C) 345 元
(D) 360 元 (E) 400 元

3. 三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足 6 岁), 他们的年龄都是质数(素数), 且依次相差 6 岁, 他们的年龄之和为 ()

- (A) 21 (B) 27 (C) 33
(D) 39 (E) 51

4. 在右边的表格中每行为等差数列, 每列为等比数列, $x + y + z =$ ()

- (A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 3
(D) $\frac{7}{2}$ (E) 4

2	$\frac{5}{2}$	3
x	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
a	y	$\frac{3}{4}$
b	c	z

5. 如图 1, 在直角三角形 ABC 区域内部有座山, 现计划从 BC 边上某点 D 开凿一条隧道到点 A, 要求隧道长度最短. 若 AB 长为 5km, AC 长为 12km, 则所开凿的隧道 AD 的长度约为 ()

- (A) 4.12km (B) 4.22km (C) 4.42km
(D) 4.62km (E) 4.92km

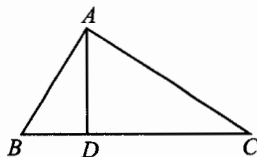


图 1

6. 某商店举行店庆活动, 顾客消费达到一定数量后, 可以在 4 种赠品中随机选取 2 个不同的赠品, 任意两位顾客所选赠品中, 恰有 1 件品种相同的概率是 ()

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

7. 多项式 $x^3 + ax^2 + bx - 6$ 的两个因式是 $x - 1$ 和 $x - 2$, 则第三个一次因式为 ()

(A) $x - 6$ (B) $x - 3$ (C) $x + 1$

(D) $x + 2$ (E) $x + 3$

8. 某公司的员工中, 拥有本科毕业证, 计算机考级证, 汽车驾驶证的人数分别为 130, 110, 90, 又知只有一种证的人数为 140, 三证齐全的人数为 30, 则恰有双证的人数为 ()

(A) 45 (B) 50 (C) 52

(D) 65 (E) 100

9. 甲商店销售某种商品, 该商品的进价每件 90 元, 若每件定价 100 元, 则一天内能售出 500 件. 在此基础上, 定价每增 1 元, 一天能少售出 10 件. 若甲商店获得最大利润, 则该商品的定价应为 ()

(A) 115 元 (B) 120 元 (C) 125 元

(D) 130 元 (E) 135 元

10. 已知直线 $ax - by + 3 = 0 (a > 0, b > 0)$ 过圆 $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 的圆心, 则 ab 的最大值为 ()

(A) $\frac{9}{16}$ (B) $\frac{11}{16}$ (C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{9}{8}$ (E) $\frac{9}{4}$

11. 某大学分配 5 名志愿者到西部 4 所中学支教, 若每所中学至少有一名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()

(A) 240 种 (B) 144 种 (C) 120 种

(D) 60 种 (E) 24 种

12. 某装置的启动密码是由 0~9 中的 3 个不同数字组成, 连续 3 次输入错误密码, 就会导致该装置永久关闭, 一个仅记得密码是由 3 个不同数字组成的人能够启动此装置的概率为 ()

(A) $\frac{1}{120}$ (B) $\frac{1}{168}$ (C) $\frac{1}{240}$

(D) $\frac{1}{720}$ (E) $\frac{3}{1000}$

13. 某居民小区决定投资 15 万元修建停车位, 据测算, 修建一个室内车位的费用为 5000 元, 修建一个室外车位的费用为 1000 元, 考虑到实际因素, 计划室外车位的数量不少于室内车位的 2 倍, 也不多于室内车位的 3 倍, 这笔投资最多可建车位的数量为 ()

(A) 78 (B) 74 (C) 72

- (D) 70 (E) 66

14. 如图 2, 长方形 $ABCD$ 的两边分别为 8m 和 6m , 四边形 $OEFG$ 的面积是 4m^2 , 则阴影部分的面积为 ()

- (A) 32m^2 (B) 28m^2 (C) 24m^2
(D) 20m^2 (E) 16m^2

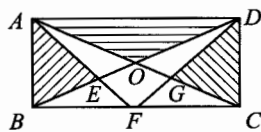


图 2

15. 在一次竞猜活动中, 设有 5 关, 如果连续通过 2 关就算闯关成功, 小王通过每关的概率都是 $\frac{1}{2}$, 他闯关成功的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$
(D) $\frac{4}{8}$ (E) $\frac{19}{32}$

条件充分性判断

(第 16~25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干所陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 在答题卡上将所选项的字母涂黑)

- (A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分
(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分
(C) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分
(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分
(E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. $a|a-b| \geq |a|(a-b)$

- (1) 实数 $a > 0$
(2) 实数 a, b 满足 $a > b$

17. 有偶数位来宾.

- (1) 聚会时所有来宾都被安排坐在一张圆桌周围, 且每位来宾与其邻座性别不同
(2) 聚会时男宾人数是女宾人数的两倍

18. 售出一件甲商品比售出一件乙商品利润要高.

- (1) 售出 5 件甲商品, 4 件乙商品, 共获利 50 元
(2) 售出 4 件甲商品, 5 件乙商品, 共获利 47 元

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d , $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12$, 则 $a_4 = 0$.

- (1) $d = -2$
(2) $a_2 + a_4 = 4$

20. 甲企业今年人均成本是去年的 60%.

(1) 甲企业今年总成本比去年减少 25%, 员工人数增加 25%

(2) 甲企业今年总成本比去年减少 28%, 员工人数增加 20%

21. 该股票涨了.

(1) 某股票连续三天涨 10% 后, 又连续三天跌 10%

(2) 某股票连续三天跌 10% 后, 又连续三天涨 10%

22. 某班有 50 名学生, 其中女生 26 名, 在某次选拔测试中, 有 27 名学生未通过, 则有 9 名男生通过.

(1) 在通过的学生中, 女生比男生多 5 人

(2) 在男生中未通过的人数比通过的人数多 6 人

23. 甲企业一年的总产值为 $\frac{a}{P}[(1+P)^{12} - 1]$.

(1) 甲企业 1 月份的产值为 a , 以后每月产值的增长率为 P

(2) 甲企业 1 月份的产值为 $\frac{a}{2}$, 以后每月产值的增长率为 $2P$

24. 设 a, b 为非负实数, 则 $a + b \leq \frac{5}{4}$.

(1) $ab \leq \frac{1}{16}$

(2) $a^2 + b^2 \leq 1$

25. 如图 3, 在三角形 ABC 中, 已知 $EF \parallel BC$, 则三角形 AEF 的面积等于梯形 $EBCF$ 的面积.

(1) $|AG| = 2|GD|$

(2) $|BC| = \sqrt{2}|EF|$

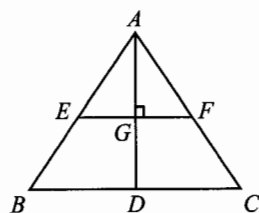


图 3

【 参考答案 】

一 问题求解

1. D

解析 设电影开始时, 女为 $5x$ 人, 男为 $4x$ 人,

从而

$$\frac{5x \times 0.8}{4x \times 0.85} = \frac{4}{3.4} = \frac{20}{17}$$

2. C

解析 设标价为 a 元, 则售价为 $0.8a$, 由已知

$$\frac{0.8a - 240}{240} = 0.15$$

解得 $a = 345$ (元)

3. C

解析 设三个儿童的年龄依次为 $P_1, P_2, P_3 (P_1 < 6)$,

若 $P_1 = 2$, 则 $P_2 = 2 + 6, P_3 = 8 + 6$, 不合题意.

若 $P_1 = 3$, 则 $P_2 = 3 + 6, P_3 = 9 + 6$, 不合题意.

取 $P_1 = 5$, 则 $P_2 = 5 + 6 = 11, P_3 = 11 + 6 = 17$,

即 P_1, P_2, P_3 皆为质数, 符合题意要求, 则三个儿童年龄和为

$$5 + 11 + 17 = 33$$

4. A

解析 由 $x, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ 为等差数列, $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, y$ 为等比数列及 $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, z$ 为等比数列,

$$\text{得} \quad \frac{5}{4} - x = \frac{3}{2} - \frac{5}{4}, y = \frac{5}{4} \times \frac{1}{2}, z = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{即} \quad x = 1, y = \frac{5}{8}, z = \frac{3}{8}, 1 + \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 2$$

5. D

解析 由已知 $BC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, 从而

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times AD \times 13$$

$$\text{解得} \quad AD = \frac{60}{13} \approx 4.62$$

6. E

解析 将 4 种赠品分别用 1, 2, 3, 4 编号,

任意 2 位顾客选赠品的总可能性为 $C_4^2 C_4^2 = 36$ (种).

A: 表示 2 位顾客所选赠品中恰有一件相同, 则 A 的可能性为 $C_4^1 \times 3 \times 2 = 24$,

从而所求概率为 $p = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

7. B

解析 若 $x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x-1)(x-2)(x-m)$,

令 $x = 0$

则有 $(-1) \times (-2) \times (-m) = -6$, 即 $m = 3$.

8. B

解析 如图 4 所示, 公司员工可被分为 8 部分, 为书写方便, 这里 A、B、C 分别代表仅有本科毕业证、仅有计算机等级证、仅有汽车驾驶证人数,

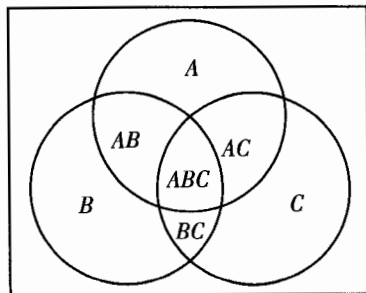


图 4

$$\text{由已知条件} \begin{cases} A + AB + AC + ABC = 130 \\ B + AB + BC + ABC = 110 \\ C + AC + BC + ABC = 90 \\ A + B + C = 140 \\ ABC = 30 \end{cases}$$

由前三个方程得 $A + B + C + 3ABC + 2(AB + AC + BC) = 330$

从而 $140 + 90 + 2(AB + AC + BC) = 330$

$$AB + AC + BC = 50 \text{ (人)}$$

9. B.

解析 设定价为 $100 + a$ (元), 由已知条件, 利润

$$\begin{aligned} l &= (100 + a)(500 - 10a) - 90(500 - 10a) \\ &= -10a^2 + 400a + 5000 \\ &= -10[(a - 20)^2 - 900] \end{aligned}$$

即当 $a = 20$ 时, 利润最大.

10. D

解析 所给圆为 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$, 由已知条件 $-2a - b + 3 = 0$, 即 $b = 3 - 2a$

$$\text{因此 } ab = a(3 - 2a) = -2a^2 + 3a = -2\left[\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right]$$

即当 $a = \frac{3}{4}$ 时, $ab = \frac{9}{8}$ 为其最大值.

11. A

解析 由题意知其中一所学校应分得 2 人, 另外 3 所各一人.

第一步, 选一所学校准备分得 2 人, 共有 C_4^1 种选法.

第二步, 从 5 人中选 2 人到这所学校, 共有 C_5^2 种选法.

第三步, 安排剩下 3 人去 3 所学校, 共有 $3!$ 种方式.

由乘法原理, 不同分配方案为 $C_4^1 C_5^2 \times 3! = 240$ (种).

12. C

解析 设 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示第 i 次输入正确,

则所求概率 $P = P(A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)$

$$= P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)$$

$$= \frac{1}{10 \times 9 \times 8} + \frac{719}{10 \times 9 \times 8} \times \frac{1}{719} + \frac{719}{10 \times 9 \times 8} \times \frac{718}{719} \times \frac{1}{718} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240}$$

13. B

解析 设建室内车位 x 个, 室外车位 y 个,

由题意求满足 $\begin{cases} 5000x + 1000y \leq 150000 \\ 2x \leq y \leq 3x \end{cases}$ 的最大 $x + y$.

$$\text{由 } \begin{cases} 5x + y \leq 150 \\ 2x \leq y \leq 3x \end{cases}$$

即 $7x \leq 150, 8x \geq 150$

则 x 的可能取值为 19, 20, 21,

取 $x = 19$, 得 $y = 55, 19 + 55 = 74$ 为满足题意的最多车位数.

14. B

解析 白色区域面积为 $\frac{1}{2}BF \cdot CD + \frac{1}{2}FC \cdot AB - 4 = \frac{1}{2}CD \cdot BC - 4 = 20$,

从而阴影面积为 $6 \times 8 - 20 = 28 (m^2)$.

15. E

解析 用 $A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 表示第 i 关闯关成功, 则小王的过关成功率

$$P(A_1 A_2 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 \cup A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 A_5 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 A_5 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 A_5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} = \frac{19}{32}$$

二 条件充分性判断

16. A

解析 由于 $|a - b| \geq a - b$

由条件(1) $|a| = a$

从而 $a|a - b| \geq |a|(a - b)$ 成立

则条件(1)充分

取 $a = -1, b = -2$, 而

$$a|a - b| = (-1) \times 1 = -1$$

$$|a|(a - b) = 1 \times 1 = 1$$

即条件(2)不充分.

17. A

解析 设男宾人数为 x , 女宾人数为 y , 题干要求推出 $x + y$ 为偶数.

由条件(1), 必有 $x = y$, 因此 $x + y = 2x$ 为偶数, 即条件(1)是充分的.

取 $y = 1, x = 2$, 则满足条件(2), 但 $1 + 2 = 3 \neq$ 偶数, 因此条件(2)不充分.

18. C

解析 设甲每件利润为 x 元, 乙每件利润为 y 元, 题干要求推出 $x > y$.

条件(1)和条件(2)单独都不充分,
联合条件(1)和条件(2),则有

$$\begin{cases} 5x + 4y = 50 \\ 4x + 5y = 47 \end{cases}$$

即 $x - y = 3, x > y$ 成立.

19. D

解析 设此等差数列的首项为 a_1 , 公差为 d ,

题干给出 $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 12$,

即 $2a_1 + 3d = 6$, 题干要求推出 $a_1 + 3d = 0$.

由条件(1), $d = -2$, 可得 $a_1 = 6$, 从而 $6 + 3 \times (-2) = 0$ 成立.

由条件(2), $a_1 + d + a_1 + 3d = 4$ 与 $2a_1 + 3d = 6$ 联立, 得 $d = -2, a_1 = 6$,

从而 $a_1 + 3d = 0$ 成立, 即条件(1)与条件(2)都是充分的.

20. D

解析 设甲企业去年总成本为 a_1 , 员工人数为 b_1 , 今年总成本为 a_2 , 员工人数为 b_2 ,

题干要求推出

$$\frac{a_2}{b_2} = 0.6 \frac{a_1}{b_1}$$

由条件(1), $a_2 = 0.75a_1, b_2 = 1.25b_1$, 因此

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{0.75a_1}{1.25b_1} = 0.6 \frac{a_1}{b_1}$$

由条件(2), $a_2 = 0.72a_1, b_2 = 1.2b_1$, 因此

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{0.72a_1}{1.2b_1} = 0.6 \frac{a_1}{b_1}$$

即条件(1)和条件(2)都是充分的.

21. E

解析 设该股票原价为 a , 现价为 b , 题干要推出 $b > a$.

由条件(1), $b = a(1 + 0.1)^3(1 - 0.1)^3 = a(1 - 0.01)^3 < a$

由条件(2), $b = a(1 - 0.1)^3(1 + 0.1)^3 = a(1 - 0.01)^3 < a$

因此, 条件(1)及条件(2)都不充分.

22. D

解析 设通过的女生人数为 x , 通过的男生人数为 y , 题干要求推出 $y = 9$.

由条件(1), $y + y + 5 = 23$, 得 $y = 9$ 成立, 因此条件(1)是充分的.

由条件(2), $y + (y + 6) = 24$, 得 $y = 9$ 成立, 条件(2)也充分.

23. A

解析 由条件(1), 甲1月份产值为 a , 则2月份为 $a(1 + P)$, 3月份为 $a(1 + P)^2, \dots$, 以此

类推 12 月份产值为 $a(1+P)^{11}$,

因此一年的总产值为

$$\begin{aligned} & a + a(1+P) + a(1+P)^2 + \cdots + a(1+P)^{11} \\ &= a \cdot \frac{1 - (1+P)^{12}}{1 - (1+P)} \\ &= \frac{a}{P} [(1+P)^{12} - 1] \end{aligned}$$

由条件(2), 一年的总产值为

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} + \frac{a}{2}(1+2P) + \frac{a}{2}(1+2P)^2 + \cdots + \frac{a}{2}(1+2P)^{11} \\ &= \frac{a}{2} \times \frac{1 - (1+2P)^{12}}{1 - (1+2P)} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{2P} [(1+2P)^{12} - 1] \end{aligned}$$

从而条件(1)是充分的, 条件(2)不充分.

24. C

解析 令 $a=0, b=5$, 则 $ab=0 < \frac{1}{16}$, 而 $a+b=5 > \frac{5}{4}$, 从而知条件(1)不是充分的.

令 $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 则 $a^2+b^2=1$, 而 $a+b=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} > \frac{5}{4}$, 即条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2), $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} < \frac{25}{16}$, 因此 $a+b < \frac{5}{4}$ 成立.

25. B

解析 由条件(1), 三角形 AEF 的面积 $S_1 = \frac{1}{2}EF \cdot AG = \frac{1}{2}EF \cdot 2GD = EF \cdot GD$,

梯形 $EBCF$ 的面积 $S_2 = \frac{1}{2}(EF+BC) \cdot GD$,

由于 $BC \neq EF$, 从而 $S_1 \neq S_2$, 因此条件(1)不充分.

由 $EF \parallel BC$, 则 $\triangle AEF$ 相似于 $\triangle ABC$, 从而 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$,

由条件(2), $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} = 2$,

因此

$$S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF} = S_{\triangle AEF}$$

(这里 $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积, $S_{\triangle AEF}$ 表示 $\triangle AEF$ 的面积)

即梯形 $EBCF$ 的面积与三角形 AEF 的面积相等.

2010年10月在职攻读硕士学位全国联考 工商管理硕士综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(第1~15小题,每小题3分,共45分.下列每题给出的A、B、C、D、E五个选项中,只有一项是符合试题要求的,请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

1. 若 $x + \frac{1}{x} = 3$, 则 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} =$ ()

A. $-\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4}$ E. $\frac{1}{8}$

2. 若实数 a, b, c 满足: $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, 则代数式 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ 的最大值是 ()

A. 21 B. 27 C. 29

D. 32 E. 39

3. 某地震灾区现居民住房的总面积为 a 平方米, 当地政府计划每年以 10% 的住房增长率建设新房, 并决定每年拆除固定数量的危旧房. 如果 10 年后该地的住房总面积正好比现有住房面积增加一倍, 那么, 每年应该拆除危旧房的面积是 () 平方米.

(注: $1.1^9 \approx 2.4$, $1.1^{10} \approx 2.6$, $1.1^{11} \approx 2.9$, 精确到小数点后一位.)

A. $\frac{1}{80}a$ B. $\frac{1}{40}a$ C. $\frac{3}{80}a$

D. $\frac{1}{20}a$ E. 以上结论都不正确

4. 某学生在军训时进行打靶测试, 共射击 10 次. 他的第 6, 7, 8, 9 次射击分别射中 9.0 环, 8.4 环, 8.1 环, 9.3 环, 他的前 9 次射击的平均环数高于前 5 次的平均环数. 若要使 10 次射击的平均环数超过 8.8 环, 则他第 10 次射击至少应该射中 () 环. (报靶成绩精确到 0.1 环)

A. 9.0 B. 9.2 C. 9.4

D. 9.5 E. 9.9

5. 某种同样的商品装成一箱, 每个商品的重量都超过 1 千克, 并且是 1 千克的整数倍, 去掉箱子重量后净重 210 千克, 拿出若干个商品后, 净重 183 千克, 则每个商品的重量为 () 千克.

- A. 1 B. 2 C. 3
D. 4 E. 5

6. 在一条与铁路平行的公路上有一行人与一骑车人同向行进, 行人速度为 3.6 千米/小时, 骑车人速度为 10.8 千米/小时. 如果一列火车从他们的后面同向匀速驶来, 它通过行人的时间是 22 秒, 通过骑车人的时间是 26 秒, 则这列火车的车身长为() 米.

- A. 186 B. 268 C. 168
D. 286 E. 188

7. 一件工程要在规定时间内完成. 若甲单独做要比规定的时间推迟 4 天完成, 若乙单独做要比规定的时间提前 2 天完成. 若甲、乙合作了 3 天, 剩下的部分由甲单独做, 恰好在规定时间内完成, 则规定时间为() 天.

- A. 19 B. 20 C. 21
D. 22 E. 24

8. 一次考试有 20 道题, 做对一题得 8 分, 做错一题扣 5 分, 不做不计分. 某同学共得 13 分, 则该同学没做的题数是 ()

- A. 4 B. 6 C. 7
D. 8 E. 9

9. 如图 1 所示, 小正方形的 $\frac{3}{4}$ 被阴影所覆盖, 大正方形的 $\frac{6}{7}$ 被阴影所覆盖, 则小、大正方形阴影部分面积之比为 ()

- A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{6}{7}$ C. $\frac{3}{4}$
D. $\frac{4}{7}$ E. $\frac{1}{2}$

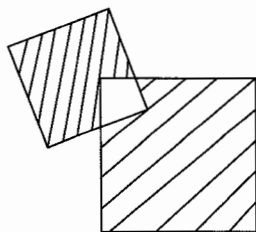


图 1

10. 直线 L 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 A, B 两点中点的坐标为 $(1, 1)$, 则直线 L 的方程为 ()

- A. $y - x = 1$ B. $y - x = 2$ C. $y + x = 1$
D. $y + x = 2$ E. $2y - 3x = 1$

11. 图 2 中, 阴影甲的面积比阴影乙的面积多 28cm^2 , $AB = 40\text{cm}$, CB 垂直 AB , 则 BC 的长为() cm . (π 取到小数点后两位.)

- A. 30 B. 32 C. 34
D. 36 E. 40

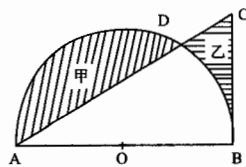


图 2

12. 若圆的方程是 $x^2 + y^2 = 1$, 则它的右半圆(在第一象限和第四象限内的部分)的方程是 ()

- A. $y - \sqrt{1 - x^2} = 0$ B. $x - \sqrt{1 - y^2} = 0$ C. $y + \sqrt{1 - x^2} = 0$
D. $x + \sqrt{1 - y^2} = 0$ E. $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_3, a_8 是方程 $3x^2 + 2x - 18 = 0$ 的两个根,则 $a_4 \cdot a_7 =$ ()

- A. -9 B. -8 C. -6
D. 6 E. 8

14. 某公司有9名工程师,张三是其中之一.从中任意抽调4人组成攻关小组,包括张三的概率是 ()

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{4}{9}$ E. $\frac{5}{9}$

15. 在10道备选试题中,甲能答对8题,乙能答对6题.若某次考试从这10道备选试题中随机抽出3道作为考题,至少答对2题才算合格,则甲乙两人考试都合格的概率是 ()

- A. $\frac{28}{45}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{14}{15}$
D. $\frac{26}{45}$ E. $\frac{8}{15}$

二 条件充分性判断

(第16~25小题,每小题3分,共30分.要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干所陈述的结论.A、B、C、D、E五个选项为判断结果,请选择一项符合试题要求的判断,在答题卡上将所选项的字母涂黑)

- (A)条件(1)充分,但条件(2)不充分
(B)条件(2)充分,但条件(1)不充分
(C)条件(1)和条件(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分
(D)条件(1)充分,条件(2)也充分
(E)条件(1)和条件(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. 12支篮球队进行单循环比赛,完成全部比赛共需11天.

- (1)每天每队只比赛1场.
(2)每天每队比赛2场.

17. $x_n = 1 - \frac{1}{2^n} (n=1, 2, \dots)$.

- (1) $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - x_n) (n=1, 2, \dots)$
(2) $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + x_n) (n=1, 2, \dots)$

18. 直线 $y = ax + b$ 经过第一、二、四象限.

- (1) $a < 0$

(2) $b > 0$

19. 不等式 $3ax - \frac{5}{2} \leq 2a$ 的解集是 $x \leq \frac{3}{2}$.

(1) 直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 与 x 轴的交点是 $(1, 0)$

(2) 方程 $\frac{3x-1}{2} - a = \frac{1-a}{3}$ 的根为 $x = 1$

20. $ax^3 - bx^2 + 23x - 6$ 能被 $(x-2)(x-3)$ 整除.

(1) $a = 3, b = -16$

(2) $a = 3, b = 16$

21. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 无实根.

(1) a, b, c 成等比数列, 且 $b \neq 0$

(2) a, b, c 成等差数列

22. 圆 C_1 是圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 14 = 0$ 关于直线 $y = x$ 的对称圆.

(1) 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 14 = 0$

(2) 圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2y - 6x - 14 = 0$

23. 直线 $y = k(x+2)$ 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的一条切线.

(1) $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

24. $C_{31}^{4n-1} = C_{31}^{n+7}$

(1) $n^2 - 7n + 12 = 0$

(2) $n^2 - 10n + 24 = 0$

25. $(\alpha + \beta)^{2009} = 1$

(1) $\begin{cases} x+3y=7 \\ \beta x+\alpha y=1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 3x-y=1 \\ \alpha x+\beta y=2 \end{cases}$ 有相同的解

(2) α 与 β 是方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两个根

【 参考答案 】

一 问题求解

1. E

解析) $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 1} = \frac{1}{3^2 - 1} = \frac{1}{8}$

2. B

$$\begin{aligned}\text{解析} \quad (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2 \\ &= 27 - (a+b+c)^2 \leq 27\end{aligned}$$

因此最大值为 27.

3. C

解析 设每年应该拆除危旧房的面积是 b 平方米.由题意, 一年后住房总面积应为 $a(1+0.1) - b$ 两年后住房总面积应为 $[a(1+0.1) - b]1.1 - b = a(1.1)^2 - b(1.1) - b$

以此类推十年后住房总面积为

$$a(1.1)^{10} - b(1.1)^9 - b(1.1)^8 - \cdots - b(1.1) - b = 2.6a - b \frac{1 - (1.1)^{10}}{1 - 1.1} = 2.6a - 16b$$

$$\text{从而 } 2.6a - 16b = 2a, b = \frac{3}{80}a.$$

4. E

解析 设十次射击的结果依次为 $x_1, x_2, \cdots, x_9, x_{10}$ 由已知 $x_6 = 9, x_7 = 8.4, x_8 = 8.1, x_9 = 9.3$,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_8 + x_9}{9} > \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}.$$

$$\text{因此 } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < \frac{5}{4}(9 + 8.4 + 8.1 + 9.3) = 43.5$$

$$\text{若 } \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}}{10} > 8.8$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_{10} > 88 - 34.8 = 53.2$$

$$\text{从而 } x_{10} > 9.7$$

5. C

解析 设箱中共有 y 个商品, 每个商品重量为 x 千克, 拿出 a 个商品

$$\text{由已知 } \begin{cases} xy = 210 (\text{千克}) \\ xy - xa = 183 (\text{千克}) \end{cases}$$

即 $xa = 27$ (千克), x, a 为正整数且 $x > 1, x$ 是 210 的因数, 从而 $x = 3$.

6. D

解析 设火车的车身为 x 米, 火车速度为 v 米/秒,由已知 行人速度为 $v_1 = 1$ 米/秒, 骑车人速度 $v_2 = 3$ 米/秒,

$$\text{因此 } \begin{cases} \frac{x}{v - v_1} = 22 (\text{秒}) \\ \frac{x}{v - v_2} = 26 (\text{秒}) \end{cases}$$

得 $x = 286$ (米)

7. B

解析 设规定时间为 a 天, 工程量为 1, 甲单独做需 x 天, 乙单独做需 y 天

$$[x = a + 4, y = a - 2]$$

$$\text{则 } 1 - \left(\frac{1}{a+4} + \frac{1}{a-2}\right) \times 3 = \frac{1}{a+4}(a-3)$$

整理得 $a = 20$

8. C

解析 设该同学做对 x 道题, 做错 y 道, 没做的题数为 z 道,

$$\text{由已知 } \begin{cases} x + y + z = 20 \\ 8x - 5y = 13 \end{cases} \quad (x, y, z \text{ 均为非负整数})$$

因为 $8x = 13 + 5y$ (y 为奇数且 $13 + 5y$ 是 8 的倍数)

由穷举法 $y = 7, x = 6, z = 7$

9. E

解析 设小正方形的面积为 a , 大正方形的面积为 b ,

$$\text{由已知 } \frac{1}{4}a = \frac{1}{7}b, \quad a = \frac{4}{7}b$$

$$\text{因此 } \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{6}{7}b} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{4}{7}b}{\frac{6}{7}b} = \frac{3}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{1}{2}$$

10. D

解析 点 $(1, 1)$ 满足直线 L 的方程, 从而 L 方程只能是

$y + x = 2$ (也可用图形解释)

11. A

解析 设阴影甲的面积为 $S_{\text{甲}}$, 阴影乙的面积为 $S_{\text{乙}}$, 图中白色区域面积为 $S_{\text{白}}$,

$$\text{则 } \begin{cases} S_{\text{甲}} + S_{\text{白}} = \frac{1}{2}\pi(20)^2 \\ S_{\text{乙}} + S_{\text{白}} = \frac{1}{2} \times 40 \times BC \\ S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}} + 28 \end{cases}$$

$$\text{因此 } 28 = \frac{1}{2}(3.14 \times 400 - 40BC), BC = 30(\text{cm})$$

12. B

解析 由 $x^2 + y^2 = 1$, 得 $x^2 = 1 - y^2$, 则右半圆为 $x = \sqrt{1 - y^2}$

$$\text{即 } x - \sqrt{1 - y^2} = 0$$

13. C

解析 由已知 $a_3 a_8 = \frac{-18}{3} = -6$, 而等比数列 $\{a_n\}$ 中

$$a_4 a_7 = a_3 a_8 = -6$$

14. D

解析 从9人中抽调4人, 总的可能性有 C_9^4 (种)

包括张三的可能性有 C_8^3 (种), 从而所求概率为

$$P = \frac{C_8^3}{C_9^4} = \frac{4}{9}$$

15. A

解析 $P(\text{甲合格且乙也合格}) = P(\text{甲合格})P(\text{乙合格})$

$$= \frac{C_8^3 + C_8^2 C_2^1}{C_{10}^3} \times \frac{C_6^3 + C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{14}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{28}{45}$$

三 条件充分性判断

16. A

解析 12支篮球队进行单循环比赛, 总共要进行 $C_{12}^2 = 66$ (场).

由条件(1), 每天赛6场, 完成比赛共需 $\frac{66}{6} = 11$ (天)

从而条件(1)是充分的, 但条件(2)不充分.

17. B

解析 题干要求 $x_1 = 1 - \frac{1}{2}, x_2 = 1 - \frac{1}{2^2}, x_3 = 1 - \frac{1}{2^3}, \dots$

由条件(1), $x_2 = \frac{1}{2}(1 - x_1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \neq 1 - \frac{1}{2^2}$,

由条件(2), $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}(1 + x_1) = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2, \dots$,

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

因此条件(1)不充分, 条件(2)充分.

18. C

解析 联合条件(1)和条件(2),

当 $a < 0, b > 0$ 时, 直线 $y = ax + b$ 的图像经过第一, 二, 四象限

19. D

解析 由条件(1), $\frac{1}{a} + \frac{0}{b} = 1$, 得 $a = 1$,

因此 $3 \times 1 \times x - \frac{5}{2} \leq 2 \times 1$ 的解为 $x \leq \frac{3}{2}$ 成立.

由条件(2), $\frac{3-1}{2} - a = \frac{1-a}{3}$, 得 $a = 1$,

同样有 $3ax - \frac{5}{2} \leq 2a$ 的解集是 $x \leq \frac{3}{2}$ 成立.

20. B

解析 题干要求 $ax^3 - bx^2 + 23x - 6 = q(x)(x-2)(x-3)$

$$\text{即 } \begin{cases} a \times 2^3 - b \times 2^2 + 23 \times 2 - 6 = 0 \\ a \times 3^3 - b \times 3^2 + 23 \times 3 - 6 = 0 \end{cases}$$

解得 $a = 3, b = 16$

因此条件(1)不充分, 条件(2)充分.

21. A

解析 题干要求 $b^2 - 4ac < 0$

由条件(1), $b^2 = ac, b^2 > 0, ac > 0$, 从而 $b^2 - 4ac < 0$

因此条件(1)是充分的.

取 $a = -1, b = 0, c = 1$,

$-x^2 + 1 = 0$ 有实根 $x = \pm 1$,

从而知条件(2)不充分.

22. B

解析 由反函数的几何意义, 圆 C_1 是圆 $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 14 = 0$ 关于直线 $y = x$ 的对称圆, 即 C_1 是 C_2 的反函数,

从而 C_1 的方程是: $y^2 + x^2 + 2y - 6x - 14 = 0$

因此条件(1)不充分, 但条件(2)充分.

23. D

解析 直线 $kx + 2k - y = 0$ 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的一条切线的充分必要条件为

$$\text{圆心}(0,0)\text{到直线的距离 } d = \frac{|2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, \text{ 因此 } 4k^2 = k^2 + 1,$$

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即条件(1)和条件(2)都是充分的.

24. E

解析 由条件(1), $(n-3)(n-4) = 0$, 得 $n = 3$ 或 $n = 4$

由条件(2), $(n-4)(n-6)=0$, 得 $n=4$ 或 $n=6$,

$$\text{取 } n=4, C_{31}^{4n-1} = C_{31}^{15} = \frac{31!}{15! \times 16!}$$

$$C_{31}^{n+7} = C_{31}^{11} = \frac{31!}{11! \times 20!}$$

$$C_{31}^{4n-1} \neq C_{31}^{n+7}$$

25. A

解析 由条件(1), 解得 $x=1, y=2, \beta=1, \alpha=0$, 从而 $(\alpha+\beta)^{2009}=1$ 成立, 即条件(1)是充分的.

由条件(2), $\alpha+\beta=-1$, 因此条件(2)不充分.

2011 年管理类专业硕士学位全国联考 综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(第1~15小题,每小题3分,共45分.下列每题给出的A、B、C、D、E五个选项中,只有一项是符合试题要求的.请在答题卡上将所选项的字母涂黑.)

1. 已知船在静水中的速度为28km/h,河水的流速为2km/h,则此船在相距78km的两地间往返一次所需时间是 ()

- (A) 5.9h (B) 5.6h (C) 5.4h
(D) 4.4h (E) 4h

2. 若实数 a, b, c 满足 $|a-3| + \sqrt{3b+5} + (5c-4)^2 = 0$, 则 $abc =$ ()

- (A) -4 (B) $-\frac{5}{3}$ (C) $-\frac{4}{3}$
(D) $\frac{4}{5}$ (E) 3

3. 某年级60名学生中,有30人参加合唱团,45人参加运动队,其中参加合唱团而未参加运动队的有8人,则参加运动队而未参加合唱团的有 ()

- (A) 15人 (B) 22人 (C) 23人
(D) 30人 (E) 37人

4. 现有一个半径为 R 的球体,拟用刨床将其加工成正方体,则能加工成的最大正方体的体积是 ()

- (A) $\frac{8}{3}R^3$ (B) $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$ (C) $\frac{4}{3}R^3$
(D) $\frac{1}{3}R^3$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{9}R^3$

5. 2007年,某市的全年研究与试验发展(R&D)经费支出300亿元,比2006年增长20%,该市的GDP为10000亿元,比2006年增长10%,2006年该市的R&D经费支出占当年GDP的 ()

- (A) 1.75% (B) 2% (C) 2.5%
(D) 2.75% (E) 3%

6. 现从5名管理专业、4名经济专业和1名财会专业的学生中随机派出一个3人小组,则

该小组中 3 个专业各有 1 名学生的概率为

()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$
(D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

7. 一所四年制大学每年的毕业生七月份离校,新生九月份入学,该校 2001 年招生 2000 名,之后每年比上一年多招 200 名,则该校 2007 年九月底的在校学生有

()

- (A) 14000 名 (B) 11600 名 (C) 9000 名
(D) 6200 名 (E) 3200 名

8. 将 2 个红球与 1 个白球随机地放入甲、乙、丙三个盒子中,则乙盒中至少有 1 个红球的概率为

()

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{8}{27}$ (C) $\frac{4}{9}$
(D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{17}{27}$

9. 如图 1, 四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 弧 AOB , BOC , COD , DOA 均为半圆, 则阴影部分的面积为

()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $1 - \frac{\pi}{4}$
(D) $\frac{\pi}{2} - 1$ (E) $2 - \frac{\pi}{2}$

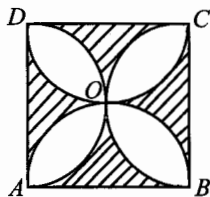


图 1

10. 3 个 3 口之家一起观看演出, 他们购买了同一排的 9 张连座票, 则每一家的人都坐在一起的不同坐法有

()

- (A) $(3!)^2$ 种 (B) $(3!)^3$ 种 (C) $3(3!)^3$ 种
(D) $(3!)^4$ 种 (E) $9!$ 种

11. 设 P 是圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上的一点, 该圆在点 P 的切线平行于直线 $x + y + 2 = 0$, 则点 P 的坐标为

()

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(1, -1)$ (C) $(0, \sqrt{2})$
(D) $(\sqrt{2}, 0)$ (E) $(1, 1)$

12. 设 a, b, c 是小于 12 的三个不同的质数(素数), 且 $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 8$, 则 $a + b + c =$

()

- (A) 10 (B) 12 (C) 14
(D) 15 (E) 19

13. 在年底的献爱心活动中, 某单位共有 100 人参加捐款, 经统计, 捐款总额是 19000 元, 个人捐款数额有 100 元、500 元和 2000 元三种, 该单位捐款 500 元的人数为

()

- (A) 13 (B) 18 (C) 25

- (D) 30 (E) 38

14. 某施工队承担开凿了一条长为 2400m 隧道的工程,在掘进了 400m 后,由于改进了施工工艺,每天比原计划多掘进 2m,最后提前 50 天完成了施工任务,原计划施工工期是 ()

- (A) 200 天 (B) 240 天 (C) 250 天
(D) 300 天 (E) 350 天

15. 已知 $x^2 + y^2 = 9$, $xy = 4$, 则 $\frac{x+y}{x^3 + y^3 + x + y} =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{6}$
(D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

二 条件充分性判断

(第 16~25 小题,每小题 3 分,共 30 分. 要求判断每题给出的条件(1)和条件(2)能否充分支持题干所陈述的结论. A, B, C, D, E 五个选项为判断结果,请选择一项符合试题要求的判断,在答题卡上将所选项的字母涂黑.)

- (A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分.
(B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分.
(C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分.
(D) 条件(1)充分,条件(2)也充分.
(E) 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

16. 实数 a, b, c 成等差数列.

- (1) e^a, e^b, e^c 成等比数列
(2) $\ln a, \ln b, \ln c$ 成等差数列

17. 在一次英语考试中,某班的及格率为 80%.

- (1) 男生及格率为 70%, 女生及格率为 90%
(2) 男生的平均分与女生的平均分相等

18. 如图 2, 等腰梯形的上底与腰均为 x , 下底为 $x+10$, 则 $x=13$.

- (1) 该梯形的上底与下底之比为 13:23
(2) 该梯形的面积为 216

19. 现有 3 名男生和 2 名女生参加面试, 则面试的排序法有 24 种.

- (1) 第一位面试的是女生
(2) 第二位面试的是指定的某位男生

20. 已知三角形 ABC 的三条边长分别为 a, b, c , 则三角形 ABC 是等腰直角三角形.

- (1) $(a-b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

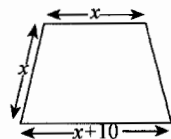


图 2

(2) $c = \sqrt{2}b$

21. 直线 $ax + by + 3 = 0$ 被圆 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 截得的线段长度为 $2\sqrt{3}$.

(1) $a = 0, b = -1$

(2) $a = -1, b = 0$

22. 已知实数 a, b, c, d 满足 $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$, 则 $|ac + bd| < 1$.

(1) 直线 $ax + by = 1$ 与 $cx + dy = 1$ 仅有一个交点

(2) $a \neq c, b \neq d$

23. 某年级共有 8 个班, 在一次年级考试中, 共有 21 名学生不及格, 每班不及格的学生最多有 3 名, 则(一)班至少有 1 名学生不及格.

(1) (二)班的不及格人数多于(三)班

(2) (四)班不及格的学生有 2 名

24. 现有一批文字材料需要打印, 两台新型打印机单独完成此任务分别需要 4 小时与 5 小时, 两台旧型打印机单独完成此任务分别需要 9 小时与 11 小时, 则能在 2.5 小时内完成此任务.

(1) 安排两台新型打印机同时打印

(2) 安排一台新型打印机与两台旧型打印机同时打印

25. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则该数列的公差为零.

(1) 对任何正整数 n , 都有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n$

(2) $a_2 \geq a_1$

【 参考答案 】

一 问题求解

1. B

解析 所求时间为 $\frac{78}{28-2} + \frac{78}{28+2} = 3 + 2.6 = 5.6$ (小时)

2. A

解析 由已知 $a = 3, b = -\frac{5}{3}, c = \frac{4}{5}$, 从而 $abc = -4$.

3. C

解析 设 A : 参加合唱团, B : 参加运动队, 则如图 3 所示

$\overline{A \cap B} = 8$ (人)

$AB = 30 - 8 = 22$ (人)

因此 $\overline{AB} = 45 - 22 = 23$ (人)

4. B

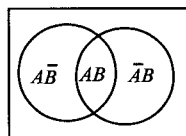


图 3

解析 所求最大正方体是球体的内接正方体, 设正方体边长为 a , 则 $\sqrt{3}a = 2R, a = \frac{2}{\sqrt{3}}R$

因此, 正方体的体积为 $a^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$

5. D

解析 设 2006 年 R&D 为 a 亿元, GDP 为 b 亿元,

由已知 $\begin{cases} a \times 1.2 = 300 \\ b \times 1.1 = 10000 \end{cases}$ 从而 $\frac{a}{b} = \frac{33}{1200} = 0.0275 = 2.75\%$

6. E

解析 总选派方法 $C_{10}^3 = 120$ (种), 3 个专业各有一名的选法为 $5 \times 4 \times 1 = 20$ 种,

因此所求概率为 $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

7. B

解析 2007 年九月底, 共有四个年级, 其人数依次为

$$2000 + 3 \times 200, 2000 + 4 \times 200, 2000 + 5 \times 200, 2000 + 6 \times 200.$$

从而总人数为 $4 \times 2000 + 18 \times 200 = 11600$ (人)

8. D

解析 3 个球放入甲, 乙, 丙三个盒子中, 总放法为 $3^3 = 27$ (种)

乙盒中至少有一个红球的放法为 $1 \times 3 + 2 \times 2 \times 3 = 15$ (种)

从而所求概率为 $\frac{15}{27} = \frac{5}{9}$

9. E

解析 所求面积 $S = 2 \left[1^2 - \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] = 2 - \frac{\pi}{2}$

10. D

解析 先将每家看作一个整体, 则共有 $3!$ 种排法, 而对于每个家庭, 又各有 $3!$ 种不同顺序坐法, 从而总不同坐法共有 $(3!)^4$

11. E

解析 设 P 点坐标为 (x_0, y_0) 则有 $x_0^2 + y_0^2 = 2$. 圆在 P 点的切线方程 l 为: $x + y + c = 0$,

圆心 $(0, 0)$ 到 l 的距离 $d = \frac{|c|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$, 即 $c = \pm 2$, 由 $x_0 + y_0 + 2 = 0$ 或 $x_0 + y_0 - 2 = 0$,

得 $(x_0, y_0) = (1, 1)$

12. D

解析 用穷举法 $a = 3, b = 5, c = 7$

因此 $a + b + c = 15$

13. A

解析 设捐款 100 元, 500 元, 2000 元的人数分别为 x, y, z

$$\text{则} \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 100x + 500y + 2000z = 19000 \end{cases}$$

$$\text{从而} \begin{cases} x + y + z = 100 \\ x + 5y + 20z = 190 \end{cases} \quad \text{得 } 4y = 90 - 19z, \text{用穷举法 } z = 2, y = 13$$

14. D

解析 设原计划每天施工 x 米, 则有

$$\frac{2400 - 400}{x} - \frac{2400 - 400}{x + 2} = 50 (\text{天}).$$

因此 $x = 8$, 原计划施工工期是 $\frac{2400}{8} = 300$ (天)

15. C

$$\text{解析} \quad \frac{x+y}{x^3+y^3+x+y} = \frac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)} = \frac{1}{x^2+y^2-xy+1} = \frac{1}{6}$$

二 条件充分性判断 ④

16. A

解析 由条件(1), $(e^b)^2 = e^a \cdot e^c$, 从而 $2b = a + c$, $b = \frac{a+c}{2}$, 即 a, b, c 是等差数列,由条件(2), $\ln b = \frac{\ln b + \ln c}{2} = \ln(ac)^{\frac{1}{2}}$, 即 $b = (ac)^{\frac{1}{2}}$ 知 a, b, c 为等比数列, 而不一定是等差数列,

从而条件(1)是充分的, 条件(2)不充分.

17. E

解析 设男生有 200 人, 女生 100 人, 男女平均成绩均为 70 分.

由条件(1)和条件(2)都不能推出及格率为 80%, 联合起来也不能推出题干.

18. D

解析 由条件(1), $\frac{x}{x+10} = \frac{13}{23}$, 得 $x = 13$, 即条件(1)是充分的.由条件(2), $\frac{x+x+10}{2} \cdot \sqrt{x^2-25} = 216$, 也可得 $x = 13$, 即条件(2)也是充分的.

19. B

解析 由条件(1), 面试排序法共有 $2 \times 4! = 48$ (种),由条件(2), 面试排序法共有 $1 \times 4! = 24$ (种).

即条件(2)充分,但条件(1)不充分.

20. C

解析 取 $a = b = c = 1$,

则知条件(1)不充分,条件(2)单独也不充分.

联合条件(1)和条件(2),则有 $(a-b)[(\sqrt{2}b)^2 - a^2 - b^2] = 0, (a-b)(b-a)(b+a) = 0$,

得 $b = a, a^2 + b^2 = c^2$,

从而 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

21. B

解析 由条件(1),直线为 $-y + 3 = 0$,圆心 $(2, 1)$ 到直线距离为 2,即此直线与圆相切,

故条件(1)不充分.

由条件(2),直线为 $-x + 3 = 0$,圆心到直线距离为 1,

故所截线段长度为 $2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$,即条件(2)是充分的.

22. A

解析 $(ac + bd)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - a^2d^2 - b^2c^2 + 2abcd =$

$1 - (ad - bc)^2 \leq 1, (ac + bd)^2 < 1$ 的充要条件为 $ad - bc \neq 0$

由条件(1),两直线不平行,从而 $-\frac{a}{b} \neq -\frac{c}{d}$,即 $ad - bc \neq 0$,条件(1)充分.

现取 $a = d = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 则满足 $a \neq c, a \neq b$

但 $ad - bc = 0$ 即 $|ac + bd| = 1$ 故条件(2)不充分.

23. D

解析 设 8 个班不及格人数分别为 x_1, x_2, \dots, x_8

则有 $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 21 (x_i \leq 3, i = 1, 2, \dots, 8)$

题干要求推出 $x_1 \geq 1$ 成立.

由条件(1), $x_2 > x_3$, 因此 $x_2 + x_3 \leq 5$,

从而 $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 16$,

若 $x_1 = 0$, 则 $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 16$ 是不可能的.

从而必有 $x_1 \geq 1$ 成立,即条件(1)是充分的.

由条件(2), $x_4 = 2$, 因此 $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 19$.

若 $x_1 = 0$, 则 $x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 19$ 是不可能的.

从而必有 $x_1 \geq 1$ 成立,即条件(2)也充分.

24. D

解析 设此任务工作量为 1, 两台新型打印机每小时分别完成工作量的 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{5}$,

两台旧型打印机每小时分别完成 $\frac{1}{9}$ 和 $\frac{1}{11}$.

由条件(1), $\frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = \frac{20}{9} < 2.5$ (小时).

由条件(2), $\frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}} = \frac{495}{199} < 2.5$ (小时).

25. C

解析 条件(1)和条件(2)单独都不充分,联合(1)和(2)
$$\begin{cases} \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \leq n \\ a_2 - a_1 \geq 0 \end{cases}$$

因此 $\begin{cases} a_1 + a_n \leq 2 \\ a_2 - a_1 \geq 0 \end{cases}$, 有 $\begin{cases} d \leq \frac{2 - 2a_1}{n - 1} \\ d \geq 0 \end{cases}$

从而必有 $d = 0$

2011 年 10 月在职攻读硕士学位全国联考 工商管理硕士综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(第 1~15 小题, 每小题 3 分, 共 45 分. 下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中, 只有一项是符合试题要求的, 请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

1. 已知某种商品的价格从一月份到三月份的月平均增长速度为 10%, 那么该商品三月份的价格是其一月份价格的 ()

- (A) 21% (B) 110% (C) 120% (D) 121% (E) 133.1%

2. 含盐 12.5% 的盐水 40 千克蒸发掉部分水分后变成了含盐 20% 的盐水, 蒸发掉的水分重量为 () 千克.

- (A) 19 (B) 18 (C) 17 (D) 16 (E) 15

3. 为了调节个人收入, 减少中低收入者的赋税负担, 国家调整了个人工资薪金所得税的征收方案. 已知原方案的起征点为 2000 元/月, 税费分九级征收, 前四级税率见下表:

级数	全月应纳税所得额 q (元)	税率 (%)
1	$0 < q \leq 500$	5
2	$500 < q \leq 2000$	10
3	$2000 < q \leq 5000$	15
4	$5000 < q \leq 20000$	20

新方案的起征点为 3500 元/月, 税费分七级征收, 前三级税率见下表:

级数	全月应纳税所得额 q (元)	税率 (%)
1	$0 < q \leq 1500$	3
2	$1500 < q \leq 4500$	10
3	$4500 < q \leq 9000$	20

若某人在新方案下每月缴纳的个人工资薪金所得税是 345 元, 则此人每月缴纳的个人工资薪金所得税比原方案减少了 () 元.

- (A) 825 (B) 480 (C) 345 (D) 280 (E) 135

4. 一列火车匀速行驶时,通过一座长为250米的桥梁需要10秒钟,通过一座长为450米的桥梁需要15秒钟,该火车通过长为1050米的桥梁需要()秒.

- (A) 22 (B) 25 (C) 28 (D) 30 (E) 35

5. 打印一份资料,若每分钟打30个字,需要若干小时打完.当打到此材料的 $\frac{2}{5}$ 时,打字效率提高了40%,结果提前半小时打完.这份材料的字数是()个.

- (A) 4650 (B) 4800 (C) 4950 (D) 5100 (E) 5250

6. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_2a_8 = 25$,且 $a_1 > 0$,则 $a_3 + a_5 =$ ()

- (A) 8 (B) 5 (C) 2 (D) -2 (E) -5

7. 某地区平均每天产生生活垃圾700吨,由甲、乙两个处理厂处理.甲厂每小时可处理垃圾55吨,所需费用为550元;乙厂每小时可处理垃圾45吨,所需费用为495元.如果该地区每天的垃圾处理费不能超过7370元,那么甲厂每天处理垃圾的时间至少需要()小时.

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

8. 若三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的三个不同实根 x_1, x_2, x_3 满足: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = 0$,则下列关系式中恒成立的是 ()

- (A) $ac = 0$ (B) $ac < 0$ (C) $ac > 0$ (D) $a + c < 0$ (E) $a + c > 0$

9. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $5a_7 - a_3 - 12 = 0$,则 $\sum_{k=1}^{15} a_k =$ ()

- (A) 15 (B) 24 (C) 30 (D) 45 (E) 60

10. 10名网球选手中有2名种子选手,现将他们分成两组,每组5人,则2名种子选手不在同一组的概率为 ()

- (A) $\frac{5}{18}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

11. 某种新鲜水果的含水量为98%,一天后的含水量降为97.5%.某商店以每斤1元的价格购进了1000斤新鲜水果,预计当天能售出60%,两天内售完.要使利润维持在20%,则每斤水果的平均售价应定为 ()

- (A) 1.20 (B) 1.25 (C) 1.30 (D) 1.35 (E) 1.40

12. 在8名志愿者中,只能做英语翻译的有4人,只能做法语翻译的有3人,既能做英语翻译又能做法语翻译的有1人.现从这些志愿者中选取3人做翻译工作,确保英语和法语都有翻译的不同选法共有 ()种.

- (A) 12 (B) 18 (C) 21
(D) 30 (E) 51

13. 如图1,若相邻点的水平距离与竖直距离都是1,则多边形ABCDE的面积为 ()

- (A) 7 (B) 8 (C) 9

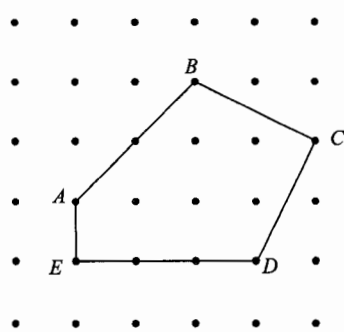


图 1

(D) 10 (E) 11

14. 如图2, 一块面积为400平方米的正方形土地被分割成甲、乙、丙、丁四个小长方形区域作为不同的功能区域, 它们的面积分别为128, 192, 48和32平方米. 乙的左小角划出一块正方形区域(阴影)作为公共区域, 这块小正方形的面积为()平方米.

(A) 16 (B) 17 (C) 18

(D) 19 (E) 20

15. 已知直线 $y = kx$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 有两个交点 A, B . 若 AB 的长度大于 $\sqrt{2}$, 则 k 的取值范围是()

(A) $(-\infty, -1)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 1)$

(D) $(1, +\infty)$ (E) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

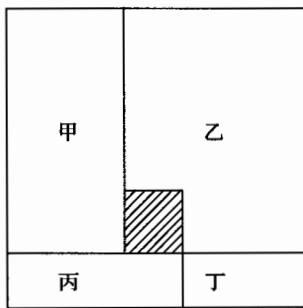


图 2

二 条件充分性判断

(第16~25题, 每小题3分, 共30分. 要求判断每题给出的条件(1)与条件(2)能否充分支持题干中陈述的结论. A, B, C, D, E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合题要求的判断, 请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. 某种流感在流行. 从人群中任意找出3人, 其中至少有1人患该种流感的概率为0.271.

(1) 该流感的发病率为0.3

(2) 该流感的发病率为0.1

17. 抛物线 $y = x^2 + (a+2)x + 2a$ 与 x 轴相切.

(1) $a > 0$

(2) $a^2 + a - 6 = 0$

18. 甲、乙两人赛跑, 甲的速度是6米/秒.

(1) 乙比甲先跑12米, 甲起跑后6秒追上乙

(2) 乙比甲先跑2.5秒, 甲起跑后5秒钟追上乙

19. 甲、乙两组射手打靶, 两组射手的平均成绩是150环.

(1) 甲组的人数比乙组人数多20%

(2) 乙组的平均成绩是171.6环, 比甲组的平均成绩高30%

20. 直线 l 是圆 $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ 的一条切线.

(1) $l: x - 2y = 0$

(2) $l: 2x - y = 0$

21. 不等式 $ax^2 + (a-6)x + 2 > 0$ 对所有实数 x 都成立.

(1) $0 < a < 3$

(2) $1 < a < 5$

22. 已知 $x(1-kx)^3 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ 对所有实数 x 都成立, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -8$.

(1) $a_2 = -9$

(2) $a_3 = 27$

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 1} (n=1, 2, \dots)$, 则 $a_2 = a_3 = a_4$.

(1) $a_1 = \sqrt{2}$

(2) $a_1 = -\sqrt{2}$

24. 已知 $g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $f(x) = |x-1| - g(x)|x+1| + |x-2| + |x+2|$, 则 $f(x)$ 是

与 x 无关的常数.

(1) $-1 < x < 0$

(2) $1 < x < 2$

25. 如图 3, 在直角坐标系 xOy 中, 矩形 $OABC$ 的顶点的坐标是 $(6, 4)$, 则直线 l 将矩形 $OABC$ 分成了面积相等的两部分.

(1) $l: x - y - 1 = 0$

(2) $l: x - 3y + 3 = 0$

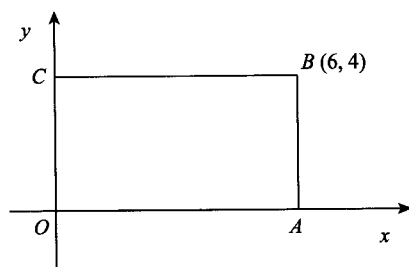


图 3

【参考答案】

一 问题求解

1. D

解析 设一月份的价格为 a , 则三月份的价格为 $(1.1)^2 a$

$$\frac{(1.1)^2 a}{a} = 1.21 = 121\%$$

2. E

解析 设蒸发掉的水分为 x 千克,

则有

$$40 \times 0.125 = (40 - x) \times 0.2$$

得 $x = 15$ (千克)

3. B

解析 由已知此人现每月工资为:

$$3500 + 1500 + 3000 = 8000 \text{ (元)}$$

原交税

$$500 \times 0.05 + 1500 \times 0.10 + 3000 \times 0.15 + 1000 \times 0.2 = 825 \text{ (元)}$$

从而 $825 - 345 = 480$ (元)

4. D

解析 设火车车长 x 米, 车速 y 米/秒.

由已知
$$\begin{cases} \frac{x+250}{y} = 10 \\ \frac{x+450}{y} = 15 \end{cases}$$

解得 $y = 40, x = 150$

从而 $\frac{150+1050}{40} = 30$ (秒)

5. E

解析 设这份材料的字数共 x 个, 若每分钟打 30 个字, 需 a 分钟打完,

由已知
$$\begin{cases} \frac{\frac{2}{5}x}{30} + \frac{\frac{3}{5}x}{30 \times 1.4} = a - 30 \\ \frac{x}{30} = a \end{cases}$$

代入整理得 $a = 175$

因此 $x = 175 \times 30 = 5250$

6. B

解析 在等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2 a_4 = a_3^2, a_2 a_8 = a_5^2$

因此 $a_3^2 + 2a_3 a_5 + a_5^2 = (a_3 + a_5)^2 = 25$

即 $a_3 + a_5 = 5$ 或 $a_3 + a_5 = -5$

又因为 $a_3 + a_5 = a_1 q^2 + a_1 q^4 > 0$ (若 $a_1 > 0$)

从而 $a_3 + a_5 = 5$

7. A

解析 设甲每天处理 x 吨, 乙每天处理 y 吨.

则
$$\begin{cases} x + y = 700 \\ \frac{550}{55} \times x + \frac{495}{45} \times y \leq 7370 \end{cases}$$

得
$$x \geq 330, \frac{330}{55} = 6 (\text{小时})$$

8. B

解析 由已知可设 $x_1 = 0$ 为 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的一个根, 即有 $d = 0$,

从而 $x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根,

由 $x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0$, 得 $b = 0$,

因此 $ax_2^2 + c = 0, x_2^2 = -\frac{c}{a} > 0, ac < 0$ 成立.

9. D

解析 由已知
$$5(a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) - 12 = 0$$

则有
$$a_1 + 7d = 3, S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2} \times 6 = 45$$

10. C

解析 将 10 个人分为两组, 每组 5 人, 总分法为 $\frac{C_{10}^5 C_5^5}{2!} = 126$ (种), 所求事件共有

$$\frac{C_8^4 C_4^4}{2!} \times 2 = 70 (\text{种})$$

从而概率

$$P = \frac{70}{126} = \frac{5}{9}$$

11. C

解析 设每斤水果的平均售价应定为 x 元.

则
$$1000 \times 0.6 \times x + 400 \times \frac{0.02}{2.5\%} \times x = 1000(1 + 20\%)$$

因此

$$x \approx 1.3$$

12. E

解析 不妨设①号志愿者既能做英语翻译又能做法语翻译, 可设计为两种方案

一、选出的 3 人中含①号的选法为 $C_2^2 = 21$ (种)

二、选出的 3 人中不含①号的选法为 $C_4^2 C_3^1 + C_4^1 C_3^2 = 30$ (种)

从而共有 $21 + 30 = 51$ (种)

13. B

解析 所求面积为 $3 \times 4 - 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 8$

14. A

解析 由已知丙区域宽为 4, 长为 12, 甲区域长 16, 宽 8,

从而小正方形边长为 $12 - 8 = 4, 4^2 = 16$

15. E

解析 圆方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$,

圆心 $(0,1)$ 到直线 $kx - y = 0$ 距离 $d = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$

由已知 $\sqrt{1^2 - d^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2 + 1}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

即 $\frac{k^2 + 1 - 1}{k^2 + 1} > \frac{1}{2}$

解得 $|k| > 1$,

因此 $k > 1$ 或 $k < -1$

二 条件充分性判断

16. B

解析 设流感发病率为 P .

题干要求 $1 - C_3^0 P^0 (1-P)^3 = 0.271$

即 $1 - (1-P)^3 = 0.271, P = 0.1$

因此条件(1)不充分,但条件(2)充分.

17. C

解析 题干要求 $\Delta = (a+2)^2 - 8a = 0$, 即 $a = 2$

条件(1)和条件(2)单独都不充分,联合条件(1)和条件(2)

则有 $\begin{cases} a > 0 \\ a = 2 \text{ 或 } a = -3 \end{cases}$

因此 $a = 2$

18. C

解析 设甲速度 v_1 , 乙速度 v_2 , 题干要求推出 $v_1 = 6$ 米/秒,

由条件(1), $\frac{12}{v_1 - v_2} = 6$,

由条件(2), $\frac{2.5v_2}{v_1 - v_2} = 5$.

因此条件(1)和(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2), 得 $v_2 = \frac{2}{3}v_1, 2v_1 = 12, v_1 = 6$

19. C

解析 设甲组人数为 a , 乙组人数为 b , 甲组平均成绩为 x , 乙组平均成绩为 y ,

题干要求推出 $\frac{ax+by}{a+b} = 150$

由条件(1), $a = 1.2b$.

由条件(2), $y = 171.6, x = \frac{171.6}{1.3} = 132$.

即条件(1)和条件(2)单独都不充分. 联合条件(1)和条件(2)

则有 $\frac{ax+by}{a+b} = \frac{1.2b \times 132 + b \times 171.6}{1.2b + b} = \frac{330}{2.2} = 150$

20. A

解析 圆方程为 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$,

题干要求推出, 圆心 $(1, -2)$ 到直线 l 的距离 $d = \sqrt{5}$

由条件(1), $d = \frac{|1+4|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}$ 成立, 即条件(1)是充分的.

由条件(2), $d = \frac{|2+2|}{\sqrt{4+1}} \neq \sqrt{5}$, 即条件(2)不是充分的.

21. E

解析 题干要求
$$\begin{cases} a > 0 \\ (a-6)^2 - 8a < 0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} a > 0 \\ 2 < a < 18 \end{cases}$$

从而 $2 < a < 18$, 因此条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2), 则 $1 < a < 3$ 也不充分.

22. A

解析 令 $x = 1$, 则题干要求 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (1-k)^3 = -8$, 即 $k = 3$.

由已知条件

$$x - 3kx^2 + 3k^2x^3 - k^3x^4 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

由条件(1), $-3k = a_2 = -9$, 则有 $k = 3$, 因此条件(1)是充分的.

由条件(2), $3k^2 = a_3 = 27$, 则有 $k = \pm 3$, 即条件(2)不充分.

23. D

解析 由条件(1), $a_2 = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}$.

同样可得 $a_3 = a_4 = \sqrt{2}$, 即条件(1)是充分的.

由条件(2), $a_2 = \frac{-\sqrt{2}+2}{-\sqrt{2}+1} = \frac{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = -\sqrt{2}$.

同样可得 $a_3 = a_4 = -\sqrt{2}$, 即条件(2)也是充分的.

24. D

解析 由条件(1), $f(x) = 1 - x + x + 1 + 2 - x + x + 2 = 6$

由条件(2), $f(x) = x - 1 - x - 1 + 2 - x + x + 2 = 2$

因此条件(1)和(2)都是充分的.

25. D

解析 由条件(1), 如图4所示, $x - y - 1 = 0$ 将矩形分为两梯形, 两梯形高都为4, 上底与下底分别都为1和5, 因此两部分面积相等.

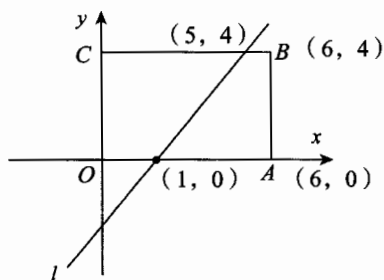


图 4

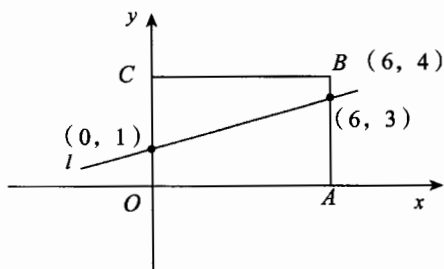


图 5

由条件(2), 如图5所示, 所分两部分面积都为 $\frac{(3+1) \times 6}{2} = 12$

即条件(1)和条件(2)都是充分的.

2012 年管理类专业硕士学位全国联考 综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(第 1~15 小题, 每小题三分, 共 45 分. 下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中, 只有一项是符合试题要求的. 请在答题卡上将所选的字母涂黑)

1. 某商品的定价为 200 元, 受金融危机的影响, 连续两次降价 20% 后的售价为 ()
 (A) 114 元 (B) 120 元 (C) 128 元
 (D) 144 元 (E) 160 元

2. 如图 1, $\triangle ABC$ 是直角三角形, S_1, S_2, S_3 为正方形, 已知 a, b, c 分别是 S_1, S_2, S_3 的边长, 则 ()

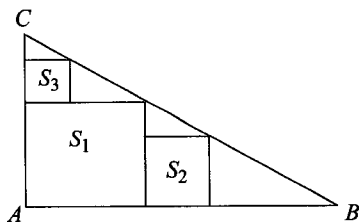


图 1

- (A) $a = b + c$ (B) $a^2 = b^2 + c^2$ (C) $a^2 = 2b^2 + 2c^2$
 (D) $a^3 = b^3 + c^3$ (E) $a^3 = 2b^3 + 2c^3$

3. 如图 2, 一个储物罐的下半部分是底面直径与高均是 20 米的圆柱形、上半部分(顶部)是半球形, 已知底面与顶部的造价是 400 元/平方米, 侧面的造价是 300 元/平方米, 该储物罐的造价是 ($\pi \approx 3.14$) ()

- (A) 56.52 万元 (B) 62.8 万元 (C) 75.36 万元
 (D) 87.92 万元 (E) 100.48 万元

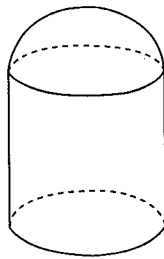


图 2

4. 在一次商品促销活动中, 主持人出示一个 9 位数, 让顾客猜测商品的价格, 商品的价格是该 9 位数中从左到右相邻的 3 个数字组成的 3 位数, 若主持人出示的是 513535319, 则顾客一次猜中价格的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$
 (D) $\frac{2}{7}$ (E) $\frac{1}{3}$

5. 某商店经营 15 种商品, 每次在橱窗内陈列 5 种, 若每两次陈列的商品不完全相同, 则

最多可陈列 ()

- (A) 3000 次 (B) 3003 次 (C) 4000 次
(D) 4003 次 (E) 4300 次

6. 甲、乙、丙三个地区的公务员参加一次测评,其人数和考分情况如下表:

人数 \ 分数 地区	6	7	8	9
甲	10	10	10	10
乙	15	15	10	20
丙	10	10	15	15

三个地区按平均分由高到低的排名顺序为 ()

- (A) 乙、丙、甲 (B) 乙、甲、丙 (C) 甲、丙、乙
(D) 丙、甲、乙 (E) 丙、乙、甲

7. 经统计,某机场的一个安检口每天中午办理安检手续的乘客人数及相应的概率如下表:

乘客人数	0 ~ 5	6 ~ 10	11 ~ 15	16 ~ 20	21 ~ 25	25 以上
概率	0.1	0.2	0.2	0.25	0.2	0.05

该安检口 2 天中至少有 1 天中午办理安检手续的乘客人数超过 15 人的概率是 ()

- (A) 0.2 (B) 0.25 (C) 0.4
(D) 0.5 (E) 0.75

8. 某人在保险柜中存放了 M 元现金,第一天取出它的 $\frac{2}{3}$,以后每天取出前一天所取的 $\frac{1}{3}$,共取了 7 次,保险柜中剩余的现金为 ()

- (A) $\frac{M}{3^7}$ 元 (B) $\frac{M}{3^6}$ 元 (C) $\frac{2M}{3^6}$ 元
(D) $[1 - (\frac{2}{3})^7]M$ 元 (E) $[1 - 7 \times (\frac{2}{3})^7]M$ 元

9. 在直角坐标系中,若平面区域 D 中所有点的坐标 (x, y) 均满足: $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 6$, $|y - x| \leq 3$, $x^2 + y^2 \geq 9$, 则 D 的面积是 ()

- (A) $\frac{9}{4}(1 + 4\pi)$ (B) $9(4 - \frac{\pi}{4})$ (C) $9(3 - \frac{\pi}{4})$
(D) $\frac{9}{4}(2 + \pi)$ (E) $\frac{9}{4}(1 + \pi)$

10. 某单位春季植树 100 棵,前 2 天安排乙组植树,其余任务由甲、乙两组用 3 天完成,已知甲组每天比乙组多植树 4 棵,则甲组每天植树 ()

- (A) 11 棵 (B) 12 棵 (C) 13 棵
(D) 15 棵 (E) 17 棵

11. 在两队进行的羽毛球对抗赛中,每队派出 3 男 2 女共 5 名运动员进行 5 局单打比赛.如果女子比赛安排在第二和第四局进行,则每队队员的不同出场顺序有 ()

- (A) 12 种 (B) 10 种 (C) 8 种
(D) 6 种 (E) 4 种

12. 若 $x^3 + x^2 + ax + b$ 能被 $x^2 - 3x + 2$ 整除,则 ()

- (A) $a = 4, b = 4$ (B) $a = -4, b = -4$ (C) $a = 10, b = -8$
(D) $a = -10, b = 8$ (E) $a = -2, b = 0$

13. 某公司计划运送 180 台电视机和 110 台洗衣机下乡,现在两种货车,甲种货车每辆最多可载 40 台电视机和 10 台洗衣机,乙种货车每辆最多可载 20 台电视机和 20 台洗衣机,已知甲、乙两种货车的租金分别是每辆 400 元和 360 元,则最少的运费是 ()

- (A) 2560 元 (B) 2600 元 (C) 2640 元
(D) 2680 元 (E) 2720 元

14. 如图 3,三个边长为 1 的正方形所覆盖区域(实线所围)的面积为 ()

- (A) $3 - \sqrt{2}$ (B) $3 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$ (C) $3 - \sqrt{3}$
(D) $3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $3 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

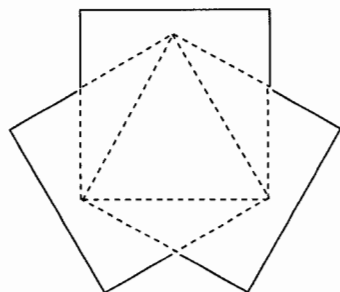


图 3

15. 在一次捐赠活动中,某市将捐赠的物品打包成件,其中帐篷和食品共 320 件,帐篷比食品多 80 件,则帐篷的件数是 ()

- (A) 180 (B) 200 (C) 220
(D) 240 (E) 260

二 条件充分性判断

(第 16 ~ 25 小题,每小题 3 分,共 30 分. 要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干所陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项为判断结果,请选择一项符合试题要求的判断,在答题卡上将所选择的字母涂黑)

- (A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分
(B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分
(C) 条件(1)和条件(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分

(E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. 一元二次方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 有两个不同实根.

(1) $b < -2$

(2) $b > 2$

17. 已知 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 分别为等比数列与等差数列, $a_1 = b_1 = 1$, 则 $b_2 \geq a_2$.

(1) $a_2 > 0$

(2) $a_{10} = b_{10}$

18. 直线 $y = ax + b$ 过第二象限.

(1) $a = -1$, $b = 1$

(2) $a = 1$, $b = -1$

19. 某产品由二道独立工序加工完成. 则该产品是合格品的概率大于 0.8.

(1) 每道工序的合格率为 0.81

(2) 每道工序的合格率为 0.9

20. 已知 m, n 是正整数, 则 m 是偶数.

(1) $3m + 2n$ 是偶数

(2) $3m^2 + 2n^2$ 是偶数

21. 已知 a, b 是实数, 则 $a > b$.

(1) $a^2 > b^2$

(2) $a^2 > b$

22. 在某次考试中, 3 道题中答对 2 道题即为及格. 假设某人答对各题的概率相同, 则此人及格的概率是 $\frac{20}{27}$.

(1) 答对各题的概率均为 $\frac{2}{3}$

(2) 3 道题全部答错的概率为 $\frac{1}{27}$

23. 已知三种水果的平均价格为 10 元/千克, 则每种水果的价格均不超过 18 元/千克.

(1) 三种水果中价格最低的为 6 元/千克.

(2) 购买重量分别是 1 千克、1 千克和 2 千克的三种水果共用了 46 元.

24. 某户要建一个长方形的羊栏, 则羊栏的面积大于 500 平方米.

(1) 羊栏的周长为 120 米.

(2) 羊栏对角线的长不超过 50 米.

25. 直线 $y = x + b$ 是抛物线 $y = x^2 + a$ 的切线.

(1) $y = x + b$ 与 $y = x^2 + a$ 有且仅有一个交点.

(2) $x^2 - x \geq b - a (x \in \mathbf{R})$

【参考答案】

一 问题求解

1. C

解析 两次降价 20% 后售价为 $200 \times (0.8)^2 = 128$ (元).

2. A

解析 图 1 中右边四个直角三角形两两都是相似的.

从而

$$\frac{c}{a-c} = \frac{a-b}{b},$$

整理得

$$bc = (a-b)(a-c),$$

即有 $a = b + c$ 成立.

3. C

解析 由已知, 底面半径与球半径 r 相等, $r = 10$ 米, 圆柱体高 $h = 20$ 米, 从而总造价是

$$\begin{aligned} & (\pi \times r^2 + \frac{1}{2} \times 4\pi r^2) \times 400 + 2\pi r \times h \times 300 \\ &= (\pi \times 10^2 + 2\pi \times 10^2) \times 400 + (2\pi \times 10 \times 20) \times 300 \\ &= 753600 \text{ (元)} = 75.36 \text{ (万元)} \end{aligned}$$

4. B

解析 总可能共有六种可能: 513, 135, 353, 535, 531, 319,

从而所求概率为 $\frac{1}{6}$.

5. B

解析 最多可陈列 $C_{15}^5 = \frac{15!}{5! 10!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3003$

6. E

解析 由已知 甲平均分 $= \frac{60+70+80+90}{40} = \frac{300}{40} = 7.5$

$$\text{乙平均分} = \frac{90+105+80+180}{60} = \frac{455}{60} \approx 7.58$$

$$\text{丙平均分} = \frac{60+70+120+135}{50} = \frac{385}{50} = 7.7$$

7. E

解析 由已知, 每天中午办理安检手续的乘客人数超过 15 人的概率

$$P = 0.25 + 0.2 + 0.05 = \frac{1}{2}$$

因此, 所求概率为 $1 - C_2^0 P^0 (1-P)^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0.75$

8. A

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad M - \left[\frac{2}{3}M + \frac{2}{3}M \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3}M \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \frac{2}{3}M \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 \right] \\ = M - \left[\frac{2}{3}M \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^6 \right) \right] = M - \left[M \left(1 - \frac{1}{3^7} \right) \right] \\ = \frac{M}{3^7} \end{aligned}$$

9. C

解析 平面区域 D (阴影部分) 如图 4 所示

$$\text{从而所求面积 } S = 6 \times 6 - \frac{1}{4} \pi \times 3^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 9 = 9 \left(3 - \frac{\pi}{4} \right)$$

10. D

解析 设甲组每天植树 x 棵, 乙组每天植树 y 棵.

$$\text{则有} \quad \begin{cases} 5y + 3x = 100 \\ x = y + 4 \end{cases}$$

解得 $y = 11, x = 15$.

11. A

解析 这是一个简单的排队问题(按排就坐).

分两个步骤完成, 一、先安排 2 女, 有 $2!$ 种

二、再安排 3 男, 有 $3!$ 种

从而共有 $2! \times 3! = 12$ (种)

12. D

解析 由已知 $x^3 + x^2 + ax + b = (\quad)(x-1)(x-2)$.

$$\text{分别取 } x=1, x=2, \text{ 得 } \begin{cases} 1+1+a+b=0 \\ 8+4+2a+b=0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \quad \begin{cases} a = -10 \\ b = 8 \end{cases}$$

13. B

解析 设用甲种货车 x 辆, 乙种货车 y 辆, 则

$$\text{求满足} \begin{cases} 40x + 20y \geq 180 \\ 10x + 20y \geq 110 \end{cases} \text{条件下, } 400x + 360y \text{ 的最小值.}$$

用穷举法得 $x=2, y=5$ 时 $400 \times 2 + 360 \times 5 = 2600$ (元) 最小.

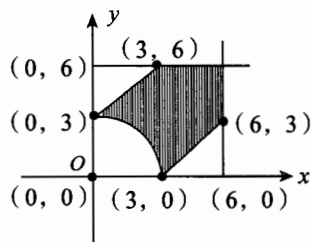


图 4

14. E

解析 所求面积应为三个边长为1的正方形面积减去最正中边长为1的等边三角形面积的2倍,再减去底边长为1,底角为 30° 的等腰三角形面积的3倍.

$$\text{即} \quad 3 - 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

15. B

解析 设帐篷 x 件,食品 y 件,

$$\text{则} \quad \begin{cases} x + y = 320 \\ x = y + 80 \end{cases}$$

$$\text{解得} \quad y = 120, x = 200$$

二 条件充分性判断

16. D

解析 题干要求 $b^2 - 4 > 0$,即 $b^2 > 4$, $b > 2$ 或 $b < -2$,

从而条件(1)和条件(2)都是充分的.

17. C

解析 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

由已知 $a_1 = b_1 = 1$,题干要求 $b_2 \geq a_2$,即 $1 + d \geq q$.

令 $q = 1, d = -1$,则知 $1 + d < q$,因此,条件(1)不充分.

令 $q = -2$,由 $a_1 q^9 = b_1 + 9d$ ($a_{10} = b_{10}$),得 $d = \frac{(-2)^9 - 1}{9}$,

因此 $1 + d = \frac{(-2)^9 + 8}{9} < q$,即条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2).

$$1 + d = \frac{q^9 + 8}{9} = \frac{q^9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}{9} \geq \sqrt[9]{q^9} = q \text{ 成立.}$$

18. A

解析 由条件(1), $y = -x + 1$,则如图5所示,

由条件(2), $y = x - 1$,如图6所示,

因此条件(1)是充分的,条件(2)不充分.

19. B

解析 由条件(1), $0.81 \times 0.81 = 0.6561 < 0.8$

由条件(2), $0.9 \times 0.9 = 0.81 > 0.8$

即条件(1)不充分,但条件(2)充分.

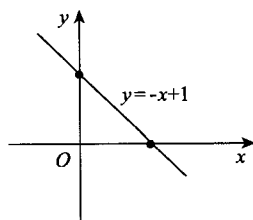


图 5

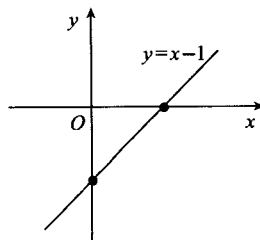


图 6

20. D

解析 由条件(1), $3m+2n$ 是偶数, 则知 $3m$ 为偶数, 从而 m 一定为偶数,由条件(2), $3m^2+2n^2$ 是偶数, 则 $3m^2$ 是偶数, 因此 m 一定为偶数,

从而条件(1)是充分的, 条件(2)也是充分的.

21. E

解析 令 $a = -2, b = -1$, 知条件(1)和条件(2)单独都不充分, 合起来也是不充分的.

22. D

解析 题干要求: 至少答对两题的概率是 $\frac{20}{27}$,即 $C_3^2 P^2 (1-P) + C_3^3 P^3 (1-P)^0 = 3P^2 (1-P) + P^3 = \frac{20}{27}$ (P 表示答对每个题的概率)由条件(1), $3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}$ 由条件(2), $C_3^0 (1-P)^3 = \frac{1}{27}$, 则 $P = \frac{2}{3}$ 与条件(1)相等.

23. D

解析 设三种水果每千克价格分别为 x, y, z 则 $\frac{x+y+z}{3} = 10$, 题干要求推出, $x \leq 18, y \leq 18, z \leq 18$ 由条件(1), 设 $x = 6$ 为最低, 则 $y + z = 24$. 从而 $y \leq 18, z \leq 18$ 由条件(2), $x + y + z + z = 46$, 得 $z = 16, x + y = 14$ 因此 $x \leq 18, y \leq 18$ 成立. 即条件(1)和条件(2)都是充分的.

24. C

解析 设长方形的羊栏长为 a , 宽为 b ,题干要求推出 $ab > 500$ 分别取 $a = 50, b = 10; a = 10, b = 50$,

则条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2), $\begin{cases} a+b=60 \\ \sqrt{a^2+b^2} \leq 50 \end{cases}$ 则有 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 3600, a^2 + b^2 \leq 2500$ 从而 $2ab \geq 1100, ab \geq 550 > 500$ 成立.

25. A

解析 直线 $y = x + b$ 与抛物线 $y = x^2 + a$ (其对称轴为 $x = 0$) 的关系只有三种可能性, 无交点、相切或相交两点.

由条件(1), 若有且仅有一个交点, 则必为相切, 因此条件(1)是充分的.

令 $a = 5, b = -5$, 则 $x^2 + 5 > x - 5$,如图 7 所示, $y = x^2 + 5$ 与 $y = x - 5$ 无交点.

即条件(2)不充分.

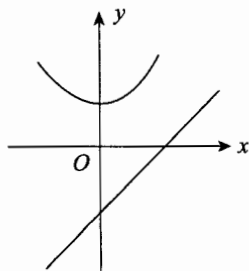


图 7

2012年10月在职攻读硕士学位全国联考 工商管理硕士综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(第1~15小题,每小题3分,共45分.下列每题给出的五个选项中,只有一项是符合试题要求的,请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

1. 将3700元奖金按 $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{2}{5}$ 的比例分给甲、乙、丙三人,则乙应得奖金 ()

- A. 1000 B. 1050 C. 1200
D. 1500 E. 1700

2. 设实数 x ,满足 $x+2y=3$,则 x^2+y^2+2y 的最小值为 ()

- A. 4 B. 5 C. 6
D. $\sqrt{5}-1$ E. $\sqrt{5}+1$

3. 若菱形两条对角线的长分别为6和8,则这个菱形的周长与面积分别为 ()

- A. 14,24 B. 14,48 C. 20,12
D. 20,24 E. 20,48

4. 第一季度甲公司的产值比乙公司的产值低20%,第二季度,甲公司的产值比第一季度增长了20%,乙公司的产值比第一季度增长了10%.第二季度甲、乙两公司的产值之比是 ()

- A. 96:115 B. 92:115 C. 48:55
D. 24:25 E. 10:11

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=4$, $a_4=8$.若 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{21}$,则 $n=$ ()

- A. 16 B. 17 C. 19
D. 20 E. 21

6. 如图1所示是一个简单电路图, S_1, S_2, S_3 表示开关,随机闭合 S_1, S_2, S_3 中的2个,灯泡 \otimes 发光的概率是 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{2}{3}$

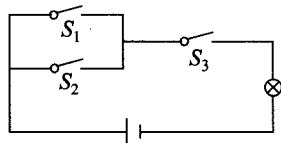


图 1

7. 设 $\{a_n\}$ 是非负等比数列,若 $a_3=1$, $a_5=\frac{1}{4}$,则 $\sum_{n=1}^8 \frac{1}{a_n} =$ ()

- A. 255 B. $\frac{255}{4}$ C. $\frac{255}{8}$
 D. $\frac{255}{16}$ E. $\frac{255}{32}$

8. 某次乒乓球单打比赛中, 先将 8 名选手等分为 2 组进行小组单循环赛, 若一位选手只打了 1 场比赛后就因故退赛, 则小组赛的实际比赛场数是 ()

- A. 24 B. 19 C. 12
 D. 11 E. 10

9. 甲、乙、丙三人同时在起点出发进行 1000 米自行车比赛, 假设他们各自的速度保持不变, 甲到终点时, 乙距终点还有 40 米, 丙距终点还有 64 米, 那么乙到达终点时, 丙距终点 () 米.

- A. 21 B. 25 C. 30
 D. 35 E. 39

10. 如图 2 所示, AB 是半圆 O 的直径, AC 是弦. 若 $|AB| = 6$, $\angle ACO = \frac{\pi}{6}$, 则弧 BC 的长度为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. π C. 2π
 D. 1 E. 2

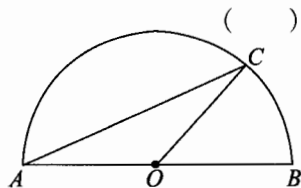


图 2

11. 在一次数学考试中, 某班前 6 名同学的成绩恰好成等差数列. 若前 6 名同学的平均成绩为 95 分, 前 4 名同学的成绩之和为 388 分, 则第 6 名同学的成绩为 () 分.

- A. 92 B. 91 C. 90
 D. 89 E. 88

12. 一满桶纯酒精倒出 10 升后, 加满水搅匀, 再倒出 4 升后, 再加满水, 此时, 桶中的纯酒精与水的体积之比是 2:3, 则该桶的容积是 () 升.

- A. 15 B. 18 C. 20
 D. 22 E. 25

13. 设 A 、 B 分别是圆周 $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$ 上使得 $\frac{y}{x}$ 取到最大值和最小值的点, O 是坐标原点, 则 $\angle AOB$ 的大小为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$
 D. $\frac{\pi}{6}$ E. $\frac{5\pi}{12}$

14. 若不等式 $\frac{(x-a)^2 + (x+a)^2}{x} > 4$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则常数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-1, 1)$

D. $(-1, +\infty)$ E. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

15. 某商场在一次活动中规定:一次购物不超过100元时没有优惠;超过100元而没有超过200元时,按该次购物全额9折优惠;超过200元时,其中200元按9折优惠,超过200元的部分按8.5折优惠.若甲、乙两人在该商场购买的物品分别付费94.5元和197元.则两人购买物品在举办活动前需要的付费总额是 ()元.

A. 291.5

B. 314.5

C. 325

D. 291.5 或 314.5

E. 314.5 或 325

二 条件充分性判断

(第16~25小题,每小题3分,共30分.要求判断每题给出的条件(1)与条件(2)能否充分支持题干中陈述的结论.A、B、C、D、E、F五个选项为判断结果,请选择一项符合试题要求的判断,在答题卡上将所选项的字母涂黑)

A. 条件(1)充分,但条件(2)不充分

B. 条件(2)充分,但条件(1)不充分

C. 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分

D. 条件(1)充分,条件(2)也充分

E. 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. 某人用10万元购买了甲、乙两种股票.若甲种股票上涨 $a\%$,乙种股票下降 $b\%$ 时,此人购买的甲、乙两种股票总值不变,则此人购买甲种股票用了6万元.

(1) $a=2, b=3$ (2) $3a-2b=0 (a \neq 0)$

17. 一项工作,甲、乙、丙三人各自独立完成需要的天数分别为3,4,6,则丁独立完成该项工作需要4天时间.

(1) 甲、乙、丙、丁四人共同完成该项工作需要1天时间

(2) 甲、乙、丙三人各做1天,剩余部分由丁独立完成

18. 设 a, b 为实数,则 $a^2 + b^2 = 16$.(1) a 和 b 是方程 $2x^2 - 8x - 1 = 0$ 的两个根(2) $|a-b+3|$ 与 $|2a+b-6|$ 互为相反数19. 直线 L 与直线 $2x+3y=1$ 关于 x 轴对称.(1) $L: 2x-3y=1$ (2) $L: 3x+2y=1$ 20. 直线 $y=kx+b$ 经过第三象限的概率是 $\frac{5}{9}$.(1) $k \in \{-1, 0, 1\}, b \in \{-1, 1, 2\}$ (2) $k \in \{-2, -1, 2\}, b \in \{-1, 0, 2\}$

21. 设 a, b 为实数, 则 $a=1, b=4$.

(1) 曲线 $y=ax^2+bx+1$ 与 x 轴的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$

(2) 曲线 $y=ax^2+bx+1$ 关于直线 $x+2=0$ 对称

22. 在一个不透明的布袋中装有 2 个白球、 m 个黄球和若干个黑球, 它们只有颜色不同, 则 $m=3$.

(1) 从布袋中随机摸出一个球, 摸到白球的概率是 0.2

(2) 从布袋中随机摸出一个球, 摸到黄球的概率是 0.3

23. 某商品经过八月份与九月份连续两次降价, 售价由 m 元降到了 n 元, 则该商品的售价平均每次下降了 20%.

(1) $m-n=900$

(2) $m+n=4100$

24. 如图 3 所示, 长方形 $ABCD$ 的长与宽分别为 $2a$ 和 a , 将其以顶点 A 为中心顺时针旋转 60° , 则四边形 $AECD$ 的面积为 $24-2\sqrt{3}$.

(1) $a=2\sqrt{3}$

(2) $\triangle AB_1B$ 的面积为 $3\sqrt{3}$

25. $x^2-x-5 > |2x-1|$

(1) $x > 4$

(2) $x < -1$

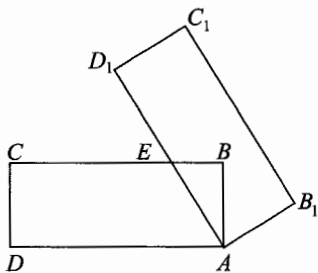


图 3

【参考答案】

一 问题求解

1. A

解析 由已知, 甲、乙、丙分别可得奖金 $\frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \frac{2}{5}t$

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t + \frac{2}{5}t = 3700, t = 3000$$

从而乙应得奖金 $\frac{1}{3}t = 1000$ (元)

2. A

解析 $x=3-2y$ 代入 x^2+y^2+2y

则有 $(3-2y)^2+y^2+2y=5y^2-10y+9=5(y-1)^2+4$

因此最小值为 4

3. D

解析 如图 4 所示, 菱形的四边都相等, 对角线相互垂直且平分. 从而由勾股定理, 边长 a

$$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5. \text{ 即周长为 } l = 20, \text{ 面积 } S = 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 24$$

4. C

解析 设第一季度乙公司的产值为 a , 甲公司的产值为 $0.8a$, 则第二季度甲公司的产值为 $0.8a \times 1.2$, 乙公司产值为 $1.1a$.

$$\text{因此} \quad \frac{0.8a \times 1.2}{1.1a} = \frac{0.96}{1.1} = \frac{96}{110} = \frac{48}{55}$$

5. D

解析 设首项 a_1 , 公差 d , 由已知 $\begin{cases} a_1 + d = 4 \\ a_1 + 3d = 8 \end{cases}$

$$\text{得 } a_1 = 2, d = 2, a_n = a_1 + (n-1)d = 2n$$

$$\begin{aligned} \text{从而} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \cdots + \frac{1}{2n \times 2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \right] \end{aligned}$$

$$\text{因为} \quad \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \right] = \frac{5}{21}, \quad 1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{20},$$

$$\text{得 } n = 20$$

6. E

解析 随机闭合 S_1, S_2, S_3 中的 2 个, 总方法有 $\langle S_1, S_2 \rangle, \langle S_1, S_3 \rangle, \langle S_2, S_3 \rangle$ 三种. 能使灯泡发光的有 $\langle S_1, S_3 \rangle, \langle S_2, S_3 \rangle$ 两种

$$\text{从而所求概率 } P = \frac{2}{3}$$

7. B

解析 设首项 a_1 , 公比 q

$$\text{由} \begin{cases} a_1 q^2 = 1 \\ a q^4 = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ 得 } q = \frac{1}{2}, a_1 = 4$$

则数列 $\{a_n\}$ 为 $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$

即 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 2 的等比数列

$$\sum_{n=1}^8 \frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{4}(1-2^8)}{1-2} = \frac{255}{4}$$

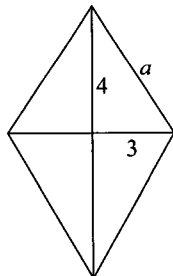


图 4

8. E

解析 不妨设甲、乙、丙、丁四人被分在一个小组. 甲与乙只打了一场后, 甲因故退赛, 则这一小组共打了 $1 + C_3^2 = 4$ (场), 而另一小组共打了 $C_4^2 = 6$ (场)

9. B

解析 设甲、乙、丙三人的速度分别为 V_1, V_2, V_3

$$\text{由已知 } \frac{1000}{V_1} = \frac{960}{V_2} = \frac{936}{V_3}$$

若乙到达终点时, 丙已行进了 x 米,

$$\text{则 } \frac{1000}{V_2} = \frac{x}{V_3}$$

$$\text{得 } x = 1000 \cdot \frac{V_3}{V_2} = 1000 \cdot \frac{936}{960} = 975$$

因此当乙到达终点时, 丙距终点还有 25 米.

10. B

解析 设圆半径为 r , 则 $r = |AO| = |OC| = 3$

因此 $\triangle AOC$ 为等腰三角形, $\angle CAO = \angle ACO = \frac{\pi}{6}$

则 $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle COB = 60^\circ$

从而弧 BC 的长度为 $2\pi r \cdot \frac{1}{6} = 2\pi \times 3 \times \frac{1}{6} = \pi$

11. C

解析 设首项 a_1 , 公差 d , 由已知

$$\begin{cases} \frac{6(a_1 + a_1 + 5d)}{2} = 95 \\ \frac{4(a_1 + a_1 + 3d)}{2} = 388 \end{cases}$$

$$\text{得 } d = -2, a_1 = 100$$

$$\text{因此 } a_6 = a_1 + 5d = 90 \text{ (分)}$$

12. C

解析 设桶的容积为 V , 第一次倒出 10 升后, 纯酒精为 $V - 10$, 浓度为 $\frac{V-10}{V}$

第二次倒出的 4 升中, 纯酒精为 $4 \times \frac{V-10}{V}$

$$\text{由已知 } \frac{V-10 - 4 \times \frac{V-10}{V}}{V} = \frac{2}{5}$$

$$\text{整理得 } V = 20$$

13. B

解析 所给圆的圆心为 $(3, \sqrt{3})$, 半径为 $\sqrt{3}$.

令 $\frac{y}{x} = k$, 则直线 $y = kx$ 与圆有公共点 (x, y) ,

从而圆心 $(3, \sqrt{3})$ 到直线 $kx - y = 0$ 的距离 d 满足

$$d = \frac{|3k - \sqrt{3}|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq k \leq \sqrt{3}$$

即 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$, 最小值为0,

如图5所示, $\angle AOB$ 是直线 $y = \sqrt{3}x$ 与 $y = 0$ (x 轴)的夹角, 从而是 $y = \sqrt{3}x$ 的倾斜角

因此 $\angle AOB = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

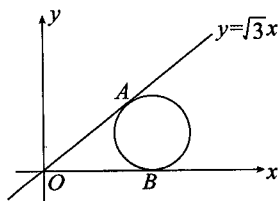


图 5

14. E

解析 原不等式可化为: $x^2 - 2x + a^2 > 0$

此不等式对于 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 必需 $1 + \sqrt{1 - a^2} < 0$ 或 $1 - a^2 < 0$,

因此 $|a| > 1$, 即 $a > 1$ 或 $a < -1$ 成立

15. E

解析 (1) 甲购买商品售价未超过100元, 则原商品的售价为94.5元

(2) 甲购买商品售价超过了100元, 为 x 元

$$0.9x = 94.5, x = 105(\text{元})$$

(3) 由已知, 乙购买商品售价已超过200元, 设为 y 元, 则

$$200 \times 0.9 + (y - 200) \times 0.85 = 197$$

得 $y = 220$ (元)

因此在举办活动前需付费总额为314.5元或325元

二 条件充分性判断

16. D

解析 设购买甲, 乙两种股票分别用了 x 万元和 y 万元

则 $\begin{cases} x + y = 10 \\ x(1 + a\%) + y(1 - b\%) = 10 \end{cases}$, 题干要求推出 $x = 6$

由条件(1) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 1.02x + 0.97y = 10 \end{cases}$ 得 $x = 6$, 即条件(1)是充分的

由条件(2) $\begin{cases} a\%x - b\%y = 0 \\ 3a = 2b \end{cases}$ 即 $\frac{2}{3}x - y = 0$

因此 $\begin{cases} \frac{2}{3}x - y = 0 \\ x + y = 10 \end{cases}$ 得 $x = 6$, 即条件(2)也是充分的

17. A

解析 设工程量为1, 甲, 乙, 丙分别每天完成的工程量为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, 设丁每天完成的工程量为 $\frac{1}{x}$, 题干要求推出 $x=4$.

由条件(1), $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{x} = 1$, 则 $\frac{1}{x} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$,

即条件(1)是充分的.

条件(2)显然不充分, 因为不确定丁需多少天完成剩余部分.

18. E

解析 由条件(1), $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=-\frac{1}{2} \end{cases}$,

则 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 16 + 1 = 17 \neq 16$, 因此条件(1)不充分.

由条件(2), 必有 $\begin{cases} a-b+3=0 \\ 2a+b-6=0 \end{cases}$ 得 $a=1, b=4$

从而 $a^2 + b^2 = 1^2 + 4^2 = 17 \neq 16$. 因此条件(2)也不充分

19. A

解析 如图6所示, 与直线 $2x+3y=1$ 关于对称的直线方程 l 必为

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1, \text{即 } 2x - 3y = 1$$

因此条件(1)充分, 但条件(2)不充分.

20. D

解析 满足条件(1)的直线共有9条, $k \in \{-1, 0, 1\}, b \in \{-1, 1, 2\}$ 过第三象限的有

$\begin{cases} k=-1 \\ b=-1 \end{cases}, \begin{cases} k=0 \\ b=-1 \end{cases}, \begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases}, \begin{cases} k=1 \\ b=1 \end{cases}, \begin{cases} k=1 \\ b=2 \end{cases}$ 共5条, 从而概率 $P = \frac{5}{9}$, 即条件(1)是充分的.

满足条件(2)的直线共有9条, $k \in \{-2, -1, 2\}, b \in \{-1, 0, 2\}$ 过第三象限的有

$\begin{cases} k=-2 \\ b=-1 \end{cases}, \begin{cases} k=-1 \\ b=-1 \end{cases}, \begin{cases} k=2 \\ b=-1 \end{cases}, \begin{cases} k=2 \\ b=0 \end{cases}, \begin{cases} k=2 \\ b=2 \end{cases}$ 共5条, 从而概率 $P = \frac{5}{9}$, 即条件(2)也是充分的

21. C

解析 由条件(1), $y = ax^2 + bx + 1$ 与 x 轴两交点即为方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 的两实根 x_1, x_2 .

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{3}$$

由韦达定理有 $\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4}{a}} = 2\sqrt{3}$

因此 $b^2 - 4a = 12a^2$, 即条件(1)不充分

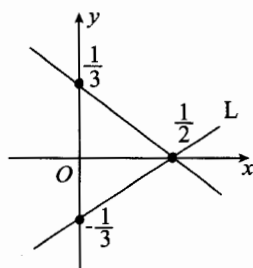


图 6

由条件(2), $y = ax^2 + bx + 1$ 的对称轴为 $x = -2$

即 $-\frac{b}{2a} = -2$, $4a = b$, 即条件(2)也不充分.

联合条件(1)和条件(2), $\begin{cases} b^2 - 4a = 12a^2 \\ 4a = b \end{cases}$ 则有 $a = 1, b = 4$

22. C

解析 不妨设袋中有 n 个黑球

由条件(1), $\frac{2}{2+m+n} = 0.2$

由条件(2), $\frac{m}{2+m+n} = 0.3$

即条件(1)和条件(2)单独都不充分.

联合条件(1)和条件(2), 解得 $m = 3, n = 5$

23. C

解析 题干要求推出 $m(1 - 0.2)^2 = n$

即 $0.64m = n$

条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合两条件, 则 $\begin{cases} m - n = 900 \\ m + n = 4100 \end{cases}$

得 $m = 2500, n = 1600$, $0.64 \times 2500 = 1600$ 成立

24. D

解析 $\triangle ABB_1$ 为等边三角形, 设 $BE = x$, 则 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$,

要求推出 $2a^2 - \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{3}a = (2 - \frac{\sqrt{3}}{6})a^2 = 24 - 2\sqrt{3}$

由条件(1), $(2 - \frac{\sqrt{3}}{6})(2\sqrt{3})^2 = (2 - \frac{\sqrt{3}}{6}) \times 12 = 24 - 2\sqrt{3}$, 即条件(1)充分

由条件(2), $\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = 3\sqrt{3}$, 即 $a^2 = 12, a = 2\sqrt{3}$

即条件(2)与条件(1)等价, 即条件(2)也充分

25. A

解析 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 题干为, $x^2 - 3x - 4 > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 4$

$x < \frac{1}{2}$ 时, 题干为, $x^2 + x - 6 > 0$, 解得 $x < -3$ 或 $x > 2$

因此条件(1)充分, 条件(2)不充分

2013 年管理类专业硕士学位全国联考 综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(第 1~15 小题, 每小题 3 分, 共 45 分. 下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中, 只有一项是符合试题要求的, 请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

1. 某工厂生产一批零件, 计划 10 天完成任务, 实际提前 2 天完成, 则每天的产量比计划平均提高了 ()

- (A) 15% (B) 20% (C) 25%
(D) 30% (E) 35%

2. 某工程由甲公司承包需 60 天完成, 由甲、乙两公司共同承包需 28 天完成, 由乙、丙两公司共同承包需 35 天完成. 则由丙公司承包完成该工程所需的天数为 ()

- (A) 85 (B) 90 (C) 95
(D) 100 (E) 105

3. 甲班共有 30 名学生. 在一次满分为 100 分的考试中, 全班的平均成绩为 90 分, 则成绩低于 60 分的学生最多有 ()

- (A) 8 名 (B) 7 名 (C) 6 名
(D) 5 名 (E) 4 名

4. 甲、乙两人同时从 A 点出发, 沿 400 米跑道同向匀速行走, 25 分钟后乙比甲少走了一圈. 若乙行走一圈需要 8 分钟, 则甲的速度是 (单位: 米/分钟)

- (A) 62 (B) 65 (C) 66
(D) 67 (E) 69

5. 甲、乙两商店同时购进了一批某品牌的电视机, 当甲店售出 15 台时, 乙店售出 10 台. 此时两店的库存之比为 8:7, 库存之差为 5, 甲、乙两商店的总进货量为 () 台

- (A) 75 (B) 80 (C) 85
(D) 100 (E) 125

6. 已知 $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$, 则 $f(8) =$ ()

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{16}$
(D) $\frac{1}{17}$ (E) $\frac{1}{18}$

7. 如图 1, 在直角三角形 ABC 中, $AC=4$, $BC=3$, $DE \parallel BC$, 已知梯型 $BCED$ 的面积为 3, 则 DE 的长为 ()

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}+1$ (C) $4\sqrt{3}-4$
(D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (E) $\sqrt{2}+1$

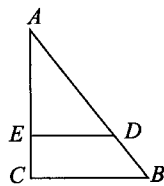


图 1

8. 点 $(0,4)$ 关于直线 $2x+y+1=0$ 的对称点为 ()

- (A) $(2,0)$ (B) $(-3,0)$ (C) $(-6,1)$
(D) $(4,2)$ (E) $(-4,2)$

9. 将体积为 $4\pi\text{cm}^3$ 和 $32\pi\text{cm}^3$ 的两个实心金属球熔化后铸成一个实心大球, 则大球的表面积是 ()

- (A) $32\pi\text{cm}^2$ (B) $36\pi\text{cm}^2$ (C) $38\pi\text{cm}^2$
(D) $40\pi\text{cm}^2$ (E) $42\pi\text{cm}^2$

10. 在 $(x^2+3x+1)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 ()

- (A) 5 (B) 10 (C) 45
(D) 90 (E) 95

11. 已知 10 件产品中有 4 件一等品, 从中任取 2 件, 则至少有一件一等品的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{15}$
(D) $\frac{8}{15}$ (E) $\frac{13}{15}$

12. 有一批物资需要装箱, 一名熟练工人装箱需要 10 天, 每天需要支付 200 元报酬, 一名普通工人装箱需要 15 天, 每天需支付 120 元. 由于场地限制最多同时可用 12 人装箱, 若要求在一天内完成装箱任务, 则支付的最少报酬为 ()

- (A) 1800 元 (B) 1840 元 (C) 1920 元
(D) 1960 元 (E) 2000 元

13. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 若 a_2 与 a_{10} 是方程 $x^2-10x-9=0$ 的两个根, 则 $a_5+a_7=$ ()

- (A) -10 (B) -9 (C) 9
(D) 10 (E) 12

14. 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$, 且过点 $(-1,1)$, 则 ()

- (A) $b=-2, c=-2$ (B) $b=2, c=2$ (C) $b=-2, c=2$
(D) $b=-1, c=-1$ (E) $b=1, c=1$

15. 确定两人从 A 地出发经过 B, C, 沿逆时针方向行走一圈回到 A 地的方案(如图 2). 若从 A 出发时每人均可选大路或山道, 经过 B, C 时, 至多有一人可以更改道路, 则不同的方案有 ()

- (A) 16 种 (B) 24 种 (C) 36 种
(D) 48 种 (E) 64 种

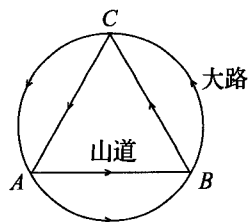


图 2

二 条件充分性判断

(第 16~25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干中陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 在答题卡上将所选项的字母涂黑)

- (A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分
- (B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分
- (C) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分
- (D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分
- (E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则方程 $f(x) = 0$ 有两个不同实根.

(1) $a + c = 0$

(2) $a + b + c = 0$

17. $\triangle ABC$ 的边长分别为 a, b, c , 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(1) $(c^2 - a^2 - b^2)(a^2 - b^2) = 0$

(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab$

18. $p = mq + 1$ 为质数.

(1) m 为正整数, q 为质数

(2) m, q 均为质数

19. 已知平面区域 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq 9\}$, D_1, D_2 覆盖区域的边界长度为 8π .

(1) $x_0^2 + y_0^2 = 9$

(2) $x_0 + y_0 = 3$

20. 三个科室的人数分别为 6, 3 和 2, 因工作需要, 每晚要安排 3 人值班, 则在两个月内可以使每晚的值班人员不完全相同.

(1) 值班人员不能来自同一科室

(2) 值班人员来自三个不同科室

21. 档案馆在一个库房中安装了 n 个烟火感应报警器, 每个报警器遇到烟火发出警报的概率均为 P , 该库房遇烟火发出警报的概率达到 0.999.

(1) $n = 3, P = 0.9$

(2) $n = 2, P = 0.97$

22. 已知 a, b 是实数, 则 $|a| \leq 1, |b| \leq 1$.

(1) $|a + b| \leq 1$

(2) $|a - b| \leq 1$

23. 某单位年终共发了 100 万元奖金,奖金金额分别是一等奖 1.5 万元,二等奖 1 万元,三等奖 0.5 万元,则该单位至少 100 人.

(1) 得二等奖的人数最多

(2) 得三等奖的人数最多

24. 设 x, y, z 为非零实数, 则 $\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z} = 1$

(1) $3x - 2y = 0$

(2) $2y - z = 0$

25. 设 $a_1 = 1, a_2 = k, a_{n+1} = |a_n - a_{n-1}| (n \geq 2)$, 则 $a_{100} + a_{101} + a_{102} = 2$.

(1) $k = 2$

(2) k 是小于 20 的正整数

【 参 考 答 案 】

一 问题求解

1. C

解析 设共生产 x 个零件, 则 $\frac{\frac{x}{8} - \frac{x}{10}}{\frac{x}{10}} = (\frac{1}{8} - \frac{1}{10}) \times 10 = \frac{1}{4} = 25\%$

2. E

解析 设工程量为 1, 甲每天完成 $\frac{1}{60}$, 乙每天完成 $\frac{1}{x}$, 丙每天完成 $\frac{1}{y}$.

则 $\begin{cases} \frac{1}{60} + \frac{1}{x} = \frac{1}{28} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{35} \end{cases}$ 因此 $\frac{1}{y} = \frac{1}{60} + \frac{1}{35} - \frac{1}{28} = \frac{1}{105}$

3. B

解析 设 x_1, x_2, \dots, x_{30} 分别为 30 个人的成绩,

则 $x_1 + x_2 + \dots + x_{30} = 2700$ (分)

若 $x_1 + x_2 + \dots + x_7 < 420$, 则 $x_8 + x_9 + \dots + x_{30} \geq 2280$ 是可能的,

但若 $x_1 + x_2 + \dots + x_8 < 480$, 则 $x_9 + x_{10} + \dots + x_{30} \geq 2220$ 是不可能的.

4. C

解析 设甲速度为 V_1 , 由已知乙速度为 $V_2 = \frac{400}{8} = 50$ 米/分钟, $\frac{400}{V_1 - 50} = 25$,

从而 $V_1 = 66$ 米/分钟

5. D

解析 设甲商店购进 x 台, 乙商店购进 y 台,

$$\text{则} \quad \begin{cases} \frac{x-15}{y-10} = \frac{8}{7} \\ (x-15) - (y-10) = 5 \end{cases} \quad \text{得 } x=55, y=45$$

6. E

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad f(8) &= \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{10 \times 11} + \cdots + \frac{1}{17 \times 18} \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{18} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

7. D

解析 由已知 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, 因此 $\frac{AE}{4} = \frac{DE}{3}$,

$$\text{由于 } \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times AE \times DE = 3, \text{ 则 } DE^2 = \frac{18}{4}, \text{ 从而 } DE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

8. E

$$\text{解析} \quad \text{设所求对称点为 } (x_0, y_0), \text{ 则} \quad \begin{cases} \frac{y_0-4}{x_0-0} = \frac{1}{2} \\ 2 \cdot \frac{x_0}{2} + \frac{y_0+4}{2} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得} \quad y_0 = 2, x_0 = -4$$

9. B

解析 设大实心球半径为 R , 则 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \text{cm}^3$,

$$\text{从而 } R = 3\text{cm}, \text{ 表面积 } S = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{cm}^2$$

10. E

解析 $(x^2+3x+1)^5$ 的一般项为 $C_5^k x^k (x+3)^k, (k=0,1,2,3,4,5)$, $C_5^1 x(x+3)$ 及 $C_5^2 x^2(x+3)^2$ 中含有 x^2 项, 其系数为 $C_5^1 + 9C_5^2 = 95$

11. B

$$\text{解析} \quad \text{所求概率为} \quad 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = 1 - \frac{15}{45} = \frac{2}{3}$$

12. C

解析 设熟练工人 x 人, 普通工人 y 人,

$$\text{则求} \quad \begin{cases} x+y \leq 12 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{15} \geq 1 \end{cases} \quad \text{条件下, } 200x + 120y \text{ 的最小值}$$

由 $\begin{cases} x+y \leq 12 \\ 3x+2y \geq 30 \end{cases}$, 得 $x \geq 6$, 取 $x=6, y=6$ 时(用穷举法)

报酬最少为: $200 \times 6 + 120 \times 6 = 1920$ (元)

13. D

解析

$$a_5 + a_7 = a_2 + a_{10} = 10$$

14. A

解析 由已知 $-\frac{b}{2} = 1, b = -2$,

又因为 $1 = (-1)^2 + 2 + c$, 得 $c = -2$

15. C

解析 分三个步骤 第一个步骤 两人从 A 到 B:

共有 $2 \times 2 = 4$ (种)

第二个步骤 两人从 B 到 C

共有 两人均不变, 或仅有一人变, 3 种

第三个步骤 两人从 C 到 A

共有 两人均不变或仅有一人变, 3 种

从而不同方案有 $4 \times 3 \times 3 = 36$ (种)

二 条件充分性判断

16. A

解析 题干要求 $b^2 - 4ac > 0$ (由已知 $a \neq 0$)

由条件(1), $a = -c, b^2 - 4ac = b^2 + 4c^2 > 0$, 即条件(1)充分

取 $b=2, a=c=-1$, 则 $b^2 - 4ac = 0$, 即条件(2)不充分.

17. B

解析 取 $a=b=c=1$, 则知条件(1)不是充分的.

由于 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab$, 即表明 a, b 一定是直角三角形的两直角边长, 从而条件(2)

充分.

18. E

解析 取 $m=3, q=5$, 则知答案必为 E.

19. A

解析 两圆心距为 $d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

由条件(1), $d=3$, 如图 3 所示圆心角 $\alpha = 120^\circ$

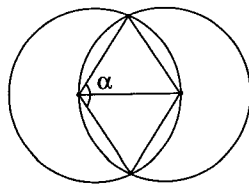


图 3

D_1, D_2 覆盖区域的边界长度为: $2 \times 2\pi \times 3 - 2 \times \frac{2\pi \times 3}{3} = 8\pi$

即条件(1)是充分的.

令 $x_0 = 6, y_0 = -3$, 则 $d = \sqrt{36+9} > 6$

即两圆相离, 因此条件(2)不充分.

20. A

解析 由条件(1), 共有 $C_6^1 C_3^1 C_2^1 + C_6^2 C_3^1 + C_6^2 C_2^1 + C_3^2 C_6^1 + C_3^2 C_2^1 + C_2^2 C_6^1 + C_2^2 C_3^1 > 60$ (种)

由条件(2), 共有 $C_6^1 C_3^1 C_2^1 = 36$ (种) < 60 (种)

则有条件(1)充分, 条件(2)不充分.

21. D

解析 由条件(1), $1 - C_3^0 \times (0.9)^0 \times (1 - 0.9)^3 = 1 - 0.001 = 0.999$

由条件(2), $1 - C_2^0 \times (0.97)^0 \times (1 - 0.97)^2 = 1 - 0.0003 = 0.9997 > 0.999$

即两个条件都是充分的

22. C

解析 取 $a = 3, b = -2$, 则知条件(1)不充分

取 $a = 3, b = 2$, 则知条件(2)不充分

联合条件(1)和条件(2), 则有 $\begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab \leq 1 \\ a^2 + b^2 - 2ab \leq 1 \end{cases}$

因此 $2(a^2 + b^2) \leq 2$, 即 $a^2 + b^2 \leq 1$, 则必有 $|a| \leq 1$, 且 $|b| \leq 1$

23. B

解析 设获得一等奖, 二等奖, 三等奖人数分别为 x, y, z , 未得奖人数为 q .

则有 $1. 5x + y + 0.5z = 100$ (万元)

题干要求推出 $x + y + z + q \geq 100$ (人)

由条件(1), 可设 $y = 40, x = 38, z = 6, q = 0$

则 $40 + 38 + 6 + 0 = 84 < 100$ (人)

因此条件(1)不充分.

由条件(2),

由于 $x + y + z = 100 - 0.5(x - z)$, 而 $x - z \leq 0$,

从而 $x + y + z \geq 100, x + y + z + q \geq 100$ (人)

24. C

解析 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合条件(1)和条件(2)

则有 $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ z = 2y \end{cases}, \frac{2x + 3y - 4z}{-x + y - 2z} = \frac{\frac{4}{3} + 3 - 8}{-\frac{2}{3} + 1 - 4} = 1$

25. D

解析 由条件(1),数列为 $1,2,1,1,0,1,1,0,1,1,0$,即从第三项开始,每相邻三项和都是2,从而 $a_{100} + a_{101} + a_{102} = 2$ 成立,即条件(1)充分.

由条件(2),数列为 $1,k,k-1,1,k-2,k-3,1,\dots,\dots,1,0,1,1,0,1,1,0,\dots$

若 $1 \leq k < 20$,则此数列从三十项后,每相邻三项和必为2,从而 $a_{100} + a_{101} + a_{102} = 2$ 成立.

2013年10月在职攻读硕士学位全国联考 工商管理硕士综合能力试卷数学试题

一 问题求解

(本大题共15小题,每小题3分,共45分.下列每题给出的五个选项中,只有一项是符合试题要求的,请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

1. 某公司今年第一季度和第二季度的产值分别比去年同期增长了11%和9%,且这两个季度产值的同比增加量相等.该公司今年上半年的产值同比增长了 ()

- (A) 9.5% (B) 9.9% (C) 10%
(D) 10.5% (E) 10.9%

2. 某高一年级男生人数占该年级学生人数的40%,在一次考试中,男、女的平均分数分别为75和80,则这次考试高一年级学生的平均分数为 ()

- (A) 76 (B) 77 (C) 77.5
(D) 78 (E) 79

3. 若实数 a, b, c 的算术均值为13,且 $a:b:c = \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$,那么 $c =$ ()

- (A) 7 (B) 8 (C) 9
(D) 12 (E) 18

4. 某物流公司将一批货物的60%送到了甲商场,100件送到了乙商场,其余的都送到了丙商场.若送到甲、丙两商场的货物数量之比为7:3,则该批货物共有()件.

- (A) 700 (B) 800 (C) 900
(D) 1000 (E) 1100

5. 不等式 $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ 的解集为 ()

- (A) (2, 3) (B) $(-\infty, 2]$ (C) $[3, +\infty)$
(D) $(-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$ (E) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

6. 老王上午8:00骑自行车离家去办公楼开会,若每分钟骑行150米,则他会迟到5分钟;若每分钟骑行210米,则他会提前5分钟.那么会议开始的时间为 ()

- (A) 8:20 (B) 8:30 (C) 8:45
(D) 9:00 (E) 9:10

7. 如图 1 所示, $AB = AC = 5$, $BC = 6$, E 是 BC 的中点, $EF \perp AC$, 则 $EF =$

()

(A) 1.2

(B) 2

(C) 2.2

(D) 2.4

(E) 2.5

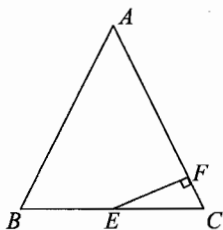


图 1

8. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{3}$ ($n \geq 1$), 则 $a_{100} =$ ()

(A) 1650

(B) 1651

(C) $\frac{5050}{3}$

(D) 3300

(E) 3301

9. 图 2 是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图, 空气质量指数小于 100 表示空气质量优良, 空气质量指数大于 200 表示空气重度污染. 某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 13 日中的某一天到达该市, 并停留 2 天, 此人停留期间空气质量都是优良的概率为 ()

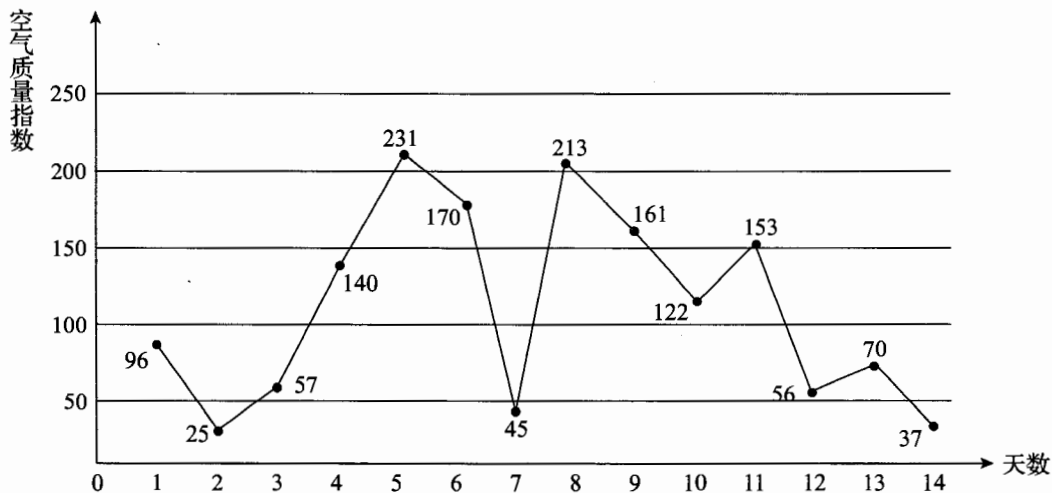


图 2

(A) $\frac{2}{7}$

(B) $\frac{4}{13}$

(C) $\frac{5}{13}$

(D) $\frac{6}{13}$

(E) $\frac{1}{2}$

10. 如图 3 所示, 在正方形 $ABCD$ 中, 弧 AOC 是四分之一圆周, O 是弧 AOC 的中点, $EF \parallel AD$, 若 $DF = a$, $CF = b$, 则阴影部分的面积为 ()

(A) $\frac{1}{2}ab$

(B) ab

(C) $2ab$

(D) $b^2 - a^2$

(E) $(b-a)^2$

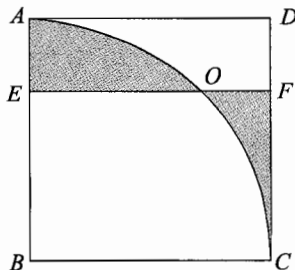


图 3

11. 甲、乙、丙三个容器中装有盐水,现将甲容器中盐水的 $\frac{1}{3}$ 倒入乙容器,摇匀后将乙容器中盐水的 $\frac{1}{4}$ 倒入丙容器,摇匀后再将丙容器中的盐水的 $\frac{1}{10}$ 倒入甲容器,此时甲、乙、丙三个容器中盐水的含盐量都是9千克,则甲容器中原来的盐水含盐量是()千克.

- (A)13 (B)12.5 (C)12
(D)10 (E)9.5

12. 在某次比赛中有6名选手进入决赛,若决赛设有1个一等奖,2个二等奖,3个三等奖,则可能的结果共有()种.

- (A)16 (B)30 (C)45
(D)60 (E)120

13. 将一个白木质的正方体的六个表面都涂上红漆,再将它锯成64个小正方体,从中任取3个,其中至少有1个三面是红漆的小正方体的概率是 ()

- (A)0.665 (B)0.578 (C)0.563
(D)0.482 (E)0.335

14. 福彩中心发行彩票的目的是为了筹措资金帮助福利事业,现在福彩中心准备发行一种面值为5元的福利彩票刮刮卡,方案设计如下:(1)该福利彩票的中奖率为50%;(2)每张中奖彩票的中奖奖金有5元和50元两种.假设购买一张彩票获得50元奖金的概率为 p ,且福彩中心筹得资金不少于发行彩票面值总和的32%,则 ()

- (A) $p \leq 0.005$ (B) $p \leq 0.01$ (C) $p \leq 0.015$
(D) $p \leq 0.02$ (E) $p \leq 0.025$

15. 某单位在甲、乙两个仓库中分别存放着30吨和50吨货物,现要将这批货物转运到A、B两地存放,A、B两地的存放量都是40吨.甲、乙两个仓库到A、B两地的距离(单位:公里)如表1所示,甲、乙两个仓库运送到A、B两地的货物重量如表2所示.若每吨货物每公里的运费是1元,则下列调运方案中总运费最少的是 ()

表1

	甲	乙
A	10	15
B	15	10

表2

	甲	乙
A	x	y
B	u	v

- (A) $x=30, y=10, u=0, v=40$ (B) $x=0, y=40, u=30, v=10$
(C) $x=10, y=30, u=20, v=20$ (D) $x=20, y=20, u=10, v=30$
(E) $x=15, y=25, u=15, v=24$

二 条件充分性判断

(第 16~25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干中陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 在答题卡上将所选项的字母涂黑.)

要求判断每题给出的条件(1)与条件(2)能否充分支持题干中陈述的结论. A、B、C、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 请在答题卡上将所选项的字母涂黑.

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. $m^2n^2 - 1$ 能被 2 整除.

(1) m 是奇数

(2) n 是奇数

17. 已知圆 $A: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$, 则圆 B 和圆 A 相切.

(1) 圆 $B: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$

(2) 圆 $B: x^2 + y^2 - 6x = 0$

18. 产品出厂前需要在外包装上打印某些标志, 甲、乙两人一起每小时可完成 600 件, 则可以确定甲每小时完成的件数.

(1) 乙的打件速度是甲的打件速度的 $\frac{1}{3}$

(2) 乙工作 5 小时可以完成 1000 件

19. 已知 $f(x, y) = x^2 - y^2 - x + y + 1$, 则 $f(x, y) = 1$.

(1) $x = y$

(2) $x + y = 1$

20. 设 a 是整数, 则 $a = 2$.

(1) 一元二次方程 $ax^2 + 8x + 6 = 0$ 有实根

(2) 一元二次方程 $x^2 + 5ax + 9 = 0$ 有实根

21. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 $a_2 = 2$.

(1) $a_1 + a_3 = 5$

(2) $a_1 \cdot a_3 = 4$

22. 甲、乙两人以不同的速度在环形跑道上跑步, 甲比乙快, 则乙跑一圈需要 6 分钟.

(1) 甲、乙相向而行, 每隔 2 分钟相遇一次

(2) 甲、乙同向而行, 每隔 6 分钟相遇一次

23. 设 a, b 为常数, 则关于 x 的一元二次方程 $(a^2 + 1)x^2 + 2(a + b)x + b^2 + 1 = 0$ 具有重实根(即两个相等的实数根).

(1) $a, 1, b$ 成等差数列

(2) $a, 1, b$ 成等比数列

24. 设直线 $y = x + b$ 分别在第一象限和第三象限与曲线 $y = \frac{4}{x}$ 相交于点 A 与点 B , 则能确定 b 的值.

(1) 已知以 AB 为对角线的正方形的面积

(2) 点 A 的横坐标小于纵坐标

25. 方程 $|x + 1| + |x + 3| + |x - 5| = 9$ 存在唯一解.

(1) $|x - 2| \leq 3$

(2) $|x - 2| \geq 2$

【 参考答案 】

一 问题求解

1. B

解析 设去年第一季度产值为 a , 第二季度产值为 b

由已知 今年第一季度产值为 $1.11a$, 第二季度产值为 $1.09b$

且 $0.11a = 0.09b$,

从而 $\frac{(1.11a + 1.09b) - (a + b)}{a + b} = \frac{0.11a + 0.09b}{a + b} = \frac{18}{100} \times \frac{11}{20} = 0.099 = 9.9\%$

2. D

解析 设高一年级共有学生 x 人,

由已知, 平均成绩为

$$\frac{75 \times 0.4x + 80 \times 0.6x}{x} = 30 + 48 = 78 (\text{分})$$

3. C

解析 设 $a = \frac{1}{2}t, b = \frac{1}{3}t, c = \frac{1}{4}t$,

则由 $\frac{\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}t}{3} = 13$

得 $t = 36$, 从而 $c = 36 \times \frac{1}{4} = 9$

4. A

解析 设这批货物共有 x 件,送丙商场 y 件.

$$\text{则 } \begin{cases} 100 + y = 0.4x \\ 0.6x = \frac{7}{3}y \end{cases}, \text{得 } x = 700(\text{件})$$

5. E

解析 由于 $x^2 - 2x + 3 > 0$ 的解集合为 $(-\infty, +\infty)$

从而不等式等价于 $x^2 - 5x + 6 > 0$, 得 $x < 2$ 或 $x > 3$

6. B

解析 设路程为 S , 会议开始时间为上午 8:00 后 t 分钟,

$$\text{则 } \frac{S}{150} = t + 5, \frac{S}{210} = t - 5, \text{解得 } t = 30(\text{分钟})$$

7. D

解析 连接 AE , 如图 4 所示,

由已知得 $BE = 3, AE = 4$

$\triangle ABE$ 的面积与 $\triangle ACE$ 的面积相等

$$\text{因此 } \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times EF$$

$$\text{得 } EF = \frac{12}{5} = 2.4$$

8. B

$$\text{解析 } a_1 = 1, a_2 = a_1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}, a_3 = a_2 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } a_{100} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{99}{3} \\ &= 1 + \frac{99 \times 50}{3} = 1651 \end{aligned}$$

9. B

解析 总可能性为 13, 所求事件的可能性为:

3月1日, 3月2日, 3月12日, 3月13日到达, 共四种.

$$\text{因此所求概率为 } \frac{4}{13}$$

(注: 此题不够严谨)

10. B

解析 作 OQ 垂直于 BC , 如图 5 所示

则在所求阴影面积与矩形 $OQCF$ 面积相等

$$\text{因此为 } (a+b)b - b^2 = ab$$

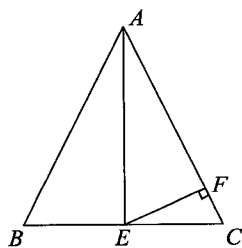


图 4

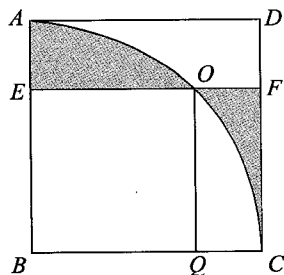


图 5

11. C

解析 设甲,乙,丙三个容器中原含盐量依次为 x_1 千克, x_2 千克, x_3 千克

$$\text{由已知: } \begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{10}[x_3 + \frac{1}{4}(x_2 + \frac{1}{3}x_1)] = 9 \\ \frac{3}{4}(x_2 + \frac{1}{3}x_1) = 9 \\ \frac{9}{10}[x_3 + \frac{1}{4}(x_2 + \frac{1}{3}x_1)] = 9 \end{cases}$$

因此 $x_3 + \frac{1}{4}(x_2 + \frac{1}{3}x_1) = 10$, 得 $\frac{2}{3}x_1 + 1 = 9, x_1 = 12$

12. D

解析 由乘法原理共 $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 6 \times 10 = 60$ (种)

13. E

解析 总取法为 C_{64}^3 , 取出的 3 个中没有三面是红漆的取法为 C_{56}^3 从而所求概率为 $1 - \frac{C_{56}^3}{C_{64}^3} = 1 - \frac{165}{248} \approx 0.335$

14. D

解析 设共发行彩票 x 张, 50 元的为 y 张, 5 元的为 z 张

$$\text{由已知 } \begin{cases} y + z = \frac{x}{2} \\ \frac{y}{x} = p \end{cases}$$

要求 $5x - 50y - 5z \geq 0.32 \times 5x$ 得 $5x - \frac{5}{2}x - 45px \geq \frac{8}{5}x$ 因此 $p \leq 0.02$

15. A

解析 求 $10x + 15u + 15y + 10v$ 的最小值由于 $10(x+u) + 10(y+v) + 5u + 5y = 300 + 500 + 5(u+y)$ 从而只要 $u+y$ 最小即可, 从而 $y=10, u=0$.

二 条件充分性判断

16. C

解析 令 $m=1, n=2, m^2 \cdot n^2 - 1 = 3$, 条件(1)不充分令 $m=2, n=1, m^2 \cdot n^2 - 1 = 3$, 条件(2)也不充分

联合条件(1)和条件(2),则 $m^2 \cdot n^2 - 1 = (mn - 1)(mn + 1) = \text{偶数}$
能被2整除

17. A

解析) $A: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 2^2$

由条件(1), $B: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

圆心 $(-2, -1)$ 到圆心 $(1, 3)$ 距离 $d = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = 5$

从而 A, B 外相切, 即条件(1)是充分的

由条件(2), $B: (x-3)^2 + (y-0)^2 = 3^2$

圆心 $(-2, -1)$ 到圆心 $(3, 0)$ 距离 $d = \sqrt{(-2-3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{26}$

从而 A, B 不可能相切, 条件(2)不充分

18. D

解析) 设甲每小时可完成 x 件, 乙每小时完成 y 件

$x + y = 600$, 题干要求确定 x 的值

由条件(1), $y = \frac{1}{3}x$, 从而 $\frac{1}{3}x + x = 600, x = 450$ (件)

由条件(2), $y = \frac{1000}{5} = 200$, 从而 $x = 400$ (件)

条件(1)和条件(2)都是充分的

19. D

解析) 由条件(1), $f(x, y) = f(x, x) = x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1$

由条件(2), $f(x, y) = f(x, 1-x) = x^2 - (1-x)^2 - x + (1-x) + 1 = 1$

因此条件(1)充分, 条件(2)充分.

20. E

解析) 由条件(1), $\Delta = 64 - 24a \geq 0, a \leq \frac{8}{3}$

由条件(2), $\Delta = 25a^2 - 36 \geq 0, a^2 \geq \frac{36}{25}$

取 $a = -2$, 则知条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

21. E

解析) 取 $a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = 4$,

则知条件(1)和条件(2)单独都不充分,

且联合起来也不充分.

22. C

解析) 设环形跑道长为 s , 甲的速度为 v_1 , 乙的速度为 v_2

$v_1 > v_2$, 题干要求推出 $\frac{s}{v_2} = 6$ (分钟)

由条件(1), $\frac{s}{v_1 + v_2} = 2$,

由条件(2), $\frac{s}{v_1 - v_2} = 6$,

即条件(1)和条件(2)单独都不充分

联合条件(1)和条件(2), 得 $v_1 = 2v_2, s = 6v_2$

从而 $\frac{s}{v_2} = \frac{6v_2}{v_2} = 6$ (分钟)

23. B

解析 题干要求推出 $\Delta = [2(a+b)]^2 - 4(a^2+1)(b^2+1) = 0$

整理得 $(ab-1)^2 = 0, ab = 1$

由条件(1), $a+b=2$ 即条件(1)不充分

由条件(2), $ab=1$ 成立, 即条件(2)是充分的

24. C

解析 如图6所示

由条件(1), b 的值无法唯一确定 ($b=0$, 除外)

由条件(2), 若 $b > 0$, 则 A 点的横坐标一定小于纵坐标.

因此条件(1), 条件(2)都不充分.

联合条件(1)和条件(2), 则 b 的值可唯一确定.

(注: 本题不够严谨)

25. A

解析 $|x+1| + |x+3| + |x-5| = \begin{cases} -3x+1, & x \leq -3 \\ -x+7, & -3 \leq x \leq -1 \\ x+9, & -1 \leq x \leq 5 \\ 3x-1, & x \geq 5 \end{cases}$

若 $|x+1| + |x+3| + |x-5| = 9$

则 $x=0$ 或 $x=-2$

由条件(1), $-1 \leq x \leq 5$, 则 $x=0$ 为唯一解

由条件(2), $x \geq 4$ 或 $x \leq 0$, 此时方程有两个解 $x=-2$ 或 $x=0$

因此条件(1)充分, 条件(2)不充分.

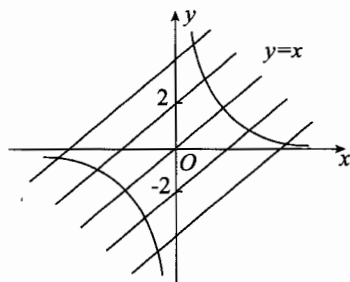


图 6

2014 年管理类专业硕士学位全国联考综合能力试卷

一 问题求解

(本大题共 15 小题,每小题 3 分,共 45 分. 下列每题给出的五个选项中,只有一项是符合试题要求的,请在答题卡上将所选项的字母涂黑)

1. 某部门在一次联欢活动中共设了 26 个奖,奖品均价为 280 元,其中一等奖单价为 400 元,其他奖品均价为 270 元,一等奖的个数为 ()

- (A)6 (B)5 (C)4 (D)3 (E)2

2. 某单位进行办公室装修,若甲、乙两个装修公司合做,需 10 周完成,工时费为 100 万元;甲公司单独做 6 周后由乙公司接着做 18 周完成,工时费为 96 万元. 甲公司每周的工时费为 ()

- (A)7.5 万元 (B)7 万元 (C)6.5 万元 (D)6 万元 (E)5.5 万元

3. 如图 1,已知 $AE = 3AB$, $BF = 2BC$. 若 $\triangle ABC$ 的面积是 2, 则 $\triangle AEF$ 的面积为 ()

- (A)14 (B)12 (C)10
(D)8 (E)6

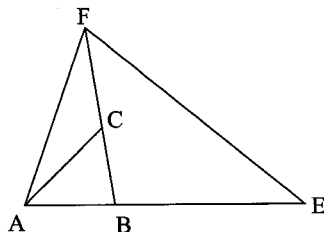


图 1

4. 某公司投资一个项目. 已知上半年完成了预算的 $\frac{1}{3}$, 下半年完成了剩余部分的 $\frac{2}{3}$, 此时还有 8 千万元投资未完成, 则该项

目的预算为

- (A)3 亿元 (B)3.6 亿元 (C)3.9 亿元 (D)4.5 亿元 (E)5.1 亿元

5. 如图 2, 圆 A 与圆 B 的半径均为 1, 则阴影部分的面积为

- (A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (E) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 某容器中装满了浓度为 90% 的酒精, 倒出一升后用水将容器注满, 搅拌均匀后又倒出一升, 再用水将容器注满. 已知此时的酒精浓度为 40%, 则该容器的容积是 ()

- (A)2.5 升 (B)3 升 (C)3.5 升
(D)4 升 (E)4.5 升

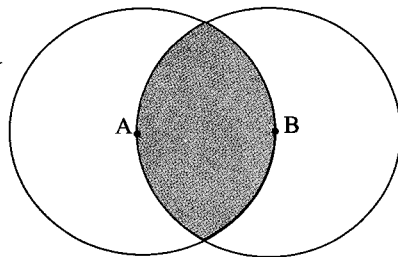


图 2

7. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_2 - a_5 + a_8 = 9$, 则 $a_1 + a_2$

$+ \dots + a_9 =$

- (A)27 (B)45 (C)54 (D)81 (E)162

8. 甲、乙两人上午 8:00 分别自 A, B 出发相向而行, 9:00 第一次相遇, 之后速度均提高了 1.5 公里/小时, 甲到 B、乙到 A 后都立刻沿原路返回, 若两人在 10:30 第二次相遇, 则 A, B 两地的距离为 ()

- (A) 5.6 公里 (B) 7 公里 (C) 8 公里
(D) 9 公里 (E) 9.5 公里

9. 掷一枚均匀的硬币若干次, 当正面向上次数大于反面向上次数时停止, 则在 4 次之内停止的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{3}{16}$ (E) $\frac{5}{16}$

10. 若几个质数(素数)的乘积为 770, 则它们的和为 ()

- (A) 85 (B) 84 (C) 28 (D) 26 (E) 25

11. 已知直线 l 是圆 $x^2 + y^2 = 5$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线, 则 l 在 y 轴上的截距为 ()

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) 5

12. 如图 3, 正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的棱长为 2, F 是棱 $C'D'$ 的中点, 则 AF 的长为 ()

- (A) 3 (B) 5 (C) $\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{3}$

13. 在某项活动中, 将 3 男 3 女 6 名志愿者随机地分成甲、乙、丙三组, 每组 2 人, 则每组志愿者都是异性的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{90}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{10}$
(D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{2}{5}$

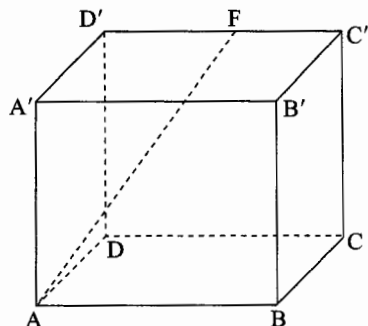


图 3

14. 某工厂在半径为 5cm 的球形工艺品上镀一层装饰金属, 厚度为 0.01cm. 已知装饰金属的原材料是棱长为 20cm 的正方体锭子, 则加工 10000 个该工艺品需要的锭子数最少为 (不考虑加工损耗, $\pi \approx 3.14$) ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 20

15. 某单位决定对 4 个部门的经理进行轮岗, 要求每位经理必须轮换到 4 个部门中的其他部门任职, 这不同的轮岗方案有 ()

- (A) 3 种 (B) 6 种 (C) 8 种 (D) 9 种 (E) 10 种

二 条件充分性判断

(第 16~25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干中陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 在答题卡上将所选项的字母涂黑)

要求判断每题给出的条件(1)与条件(2)能否充分支持题干中陈述的结论. A、B、C、D、E

五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 请在答题卡上将所选项的字母涂黑.

- (A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分
- (B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分
- (C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分
- (D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分
- (E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

16. 已知曲线 $l: y = a + bx - 6x^2 + x^3$, 则 $(a + b - 5)(a - b - 5) = 0$.

- (1) 曲线 l 过点 $(1, 0)$
- (2) 曲线 l 过点 $(-1, 0)$

17. 不等式 $|x^2 + 2x + a| \leq 1$ 的解集为空集.

- (1) $a < 0$
- (2) $a > 2$

18. 甲、乙、丙三人的年龄相同.

- (1) 甲、乙、丙的年龄成等差数列.
- (2) 甲、乙、丙的年龄成等比数列.

19. 设 x 是非零实数, 则 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$.

- (1) $x + \frac{1}{x} = 3$
- (2) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

20. 如图 4, O 是半圆的圆心, C 是半圆上的一点, $OD \perp AC$, 则能确定 OD 的长.

- (1) 已知 BC 的长
- (2) 已知 AO 的长

21. 方程 $x^2 + 2(a + b)x + c^2 = 0$ 有实根.

- (1) a, b, c 是一个三角形的边长
- (2) 实数 a, c, b 成等差数列

22. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则能确定 a, b, c

的值.

- (1) 曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$
- (2) 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = a + b$ 相切

23. 已知袋中有红、黑、白三种颜色的球若干个, 则红球最多.

- (1) 随机取出的一球是白球的概率为 $\frac{2}{5}$
- (2) 随机取出的两球中至少有一个黑球的概率小于 $\frac{1}{5}$

24. 已知 $M = \{a, b, c, d, e\}$ 是一个整数集合, 则能确定集合 M .

- (1) a, b, c, d, e 的平均值为 10

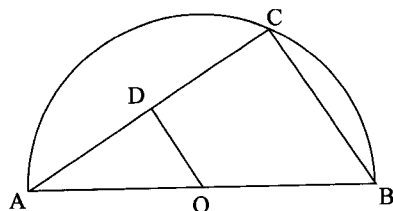


图 4

(2) a, b, c, d, e 的方差为 2

25. 已知 x, y 为实数, 则 $x^2 + y^2 \geq 1$.

(1) $4y - 3x \geq 5$

(2) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 5$

【参考答案】

一 问题求解

1. E

解析 设一等奖的个数为 x , 其他奖的个数为 y

$$\text{则} \begin{cases} x + y = 26 \\ \frac{400x + 270y}{26} = 280 \end{cases}, \text{得 } x = 2$$

2. B

解析 设甲每周工时费为 a 万元, 乙每周工时费为 b 万元

$$\text{则} \begin{cases} (a + b) \times 10 = 100 \\ 6a + 18b = 96 \end{cases}, \text{得 } a = 7 \text{ (万元)}$$

3. B

解析 如图 5 所示作 $AA' \perp BF$, $FF' \perp AE$, $AB = x$, $AE = 3x$

$$\text{则} \triangle ABF \text{ 的面积 } S_1 = \frac{1}{2} BF \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 2BC \cdot AA' = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{即} \frac{1}{2} AB \cdot FF' = 4, x \cdot FF' = 8$$

$$\text{从而所求面积 } S = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot FF' = 12$$

4. B

解析 设预算为 x 亿元.

$$\text{由已知} \quad \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x \cdot \frac{2}{3} + 0.8 = x$$

$$\text{得} \quad x = 3.6 \text{ (亿元)}$$

5. E

解析 如图 6 所示, 阴影面积

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \left(\frac{\pi}{6} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

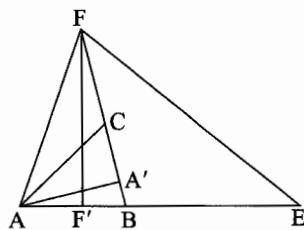


图 1

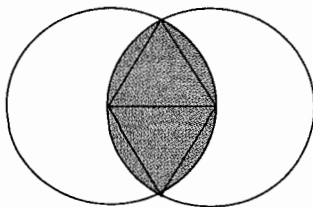


图 6

6. B

解析 设该容器的容积为 V .

$$\frac{0.9V - 0.9 - \frac{0.9V - 0.9}{V}}{V} = 0.4$$

得 $V = 3$.

7. D

解析 设首项为 a_1 , 公差为 d ,

由已知 $a_1 + d - (a_1 + 4d) + a_1 + 7d = 9$

从而 $a_1 + 4d = 9, a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = \frac{9(a_1 + a_1 + 8d)}{2} = \frac{9 \times 18}{2} = 81$

8. D

解析 设甲、乙两地路程为 s , 甲、乙两人速度分别为 v_1, v_2 .

$$\text{则} \begin{cases} v_1 + v_2 = S \\ (v_1 + 1.5 + v_2 + 1.5) \times 1.5 = 2s \end{cases}$$

得 $s + 3 = \frac{4}{3}s, s = 9$ (公里)

9. C

解析 A_1, A_2, A_3 分别表示第一, 二, 三次正面向上

所求概率 $P(A_1 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

10. E

解析 $770 = 2 \times 5 \times 7 \times 11$, 从而 $2 + 5 + 7 + 11 = 25$

11. D

解析 直线 l 的方程为 $y - 2 = k(x - 1), kx - y - k + 2 = 0$

圆心 $(0, 0)$ 到 l 的距离 $d = \frac{|-k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}, k = -\frac{1}{2}$

所求 y 截距为 $2 - k = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

12. A

解析 如图 7 所示, 连接 $A'F$

则 $A'F = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

从而 $AF = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$

13. E

解析 总分法为 $\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{3!} = 15$,

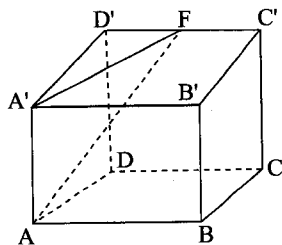


图 7

所求事件的分法为 $\frac{C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1}{3!} \cdot 3! = 6$

从而概率 $P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

14. C

解析) 共需金属 $10000 \left[\frac{4}{3} \pi (5.01)^3 - \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 \right] \approx 31000$

而每个锭子的体积为 $20^3 = 8000$

所以共需锭子个数为 $31000 \div 8000 \approx 4$ (个)

15. D

解析) 设4个部门的经理为甲、乙、丙、丁四人, 则甲有3种分配方法, 不妨设甲分到乙部门任职, 则乙也有3种分配方法, 而丙、丁只剩一种分配方案, 从而不同方案有 $3 \times 3 = 9$ (种)

三 条件充分性判断

16. A

解析) 由条件(1), $0 = a + b - 6 + 1$, 即 $a + b - 5 = 0$

由条件(2), $0 = a - b - 6 - 1$, 即 $a - b - 7 = 0$

因此条件(1)充分, 但条件(2)不充分.

17. B

解析) 取 $a = -1$, $|x^2 + 2x - 1| \leq 1$ 有解, 例 $x = 0$, 即条件(1)不充分.

由条件(2) $|x^2 + 2x + a| = |(x+1)^2 + (a-1)| \geq |a-1| > 1$ 对一切 x 成立

从而 $|x^2 + 2x + a| \leq 1$ 无解, 即条件(2)是充分的.

18. C

解析) 设甲、乙、丙的年龄分别为 a, b, c

则条件(1)和条件(2)单独都不充分, 联合两条件,

由 $2b = a + c, b^2 = ac$, 得 $a = b = c$

19. A

解析) 由条件(1), $(x + \frac{1}{x})^2 = 9, x^2 + \frac{1}{x^2} = 7, x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}) = 18$

由条件(2), $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9, (x + \frac{1}{x})^2 = 9$, 得 $x + \frac{1}{x} = \pm 3$

因此条件(1)充分, 但条件(2)不充分.

20. A

解析) $\triangle ADO$ 与 $\triangle ACB$ 相似, 从而 $\frac{OD}{BC} = \frac{AO}{AB} = \frac{1}{2}$

从而条件(1)是充分的, 但条件(2)不充分.

21. D

解析) 题干要求 $\Delta = 4(a+b)^2 - 4c^2 \geq 0$, 即 $(a+b-c)(a+b+c) \geq 0$

由条件(2), $2c = a + b$, 即 $(2c - c)(2c + c) = 3c^2 \geq 0$

因此条件(1)和条件(2)都是充分的.

22. C

解析 由条件(1), $\begin{cases} 0 = 0 + 0 + c \\ 1 = a + b + c \end{cases}$, 得 $c = 0, a + b = 1$

由条件(2), $ax^2 + bx + c = a + b$ 有两相等实根

即 $\Delta = b^2 - 4a(c - a - b) = 0$, 两条件单独都不充分,

联合条件(1)和条件(2) $\begin{cases} a + b = 1 \\ b^2 + 4a = 0 \end{cases}$, 得 $b = 2, a = -1$

23. C

解析 设袋中有红球 x 个, 黑球 y 个, 白球 z 个

由条件(1), $\frac{z}{x + y + z} = \frac{2}{5}$

由条件(2), $\frac{C_{x+z}^2}{C_{x+y+z}^2} > \frac{4}{5}$

由条件(1)和条件(2)单独都不充分. 联合条件(1)和条件(2)

令 $x + y + z = 5a$, 则 $z = 2a, 5C_{x+2a}^2 > 4C_{5a}^2$

得 $5(x + 2a)(x + 2a - 1) > 4 \times 5a(5a - 1)$

若 $x \leq 2a$, 则 $5(x + 2a)(x + 2a - 1) \leq 80a^2 - 20a$

而 $4 \times 5a(5a - 1) = 100a^2 - 20a$

$100a^2 < 80a^2$ 是不可能的.

从而 $x > 2a, x > y$ 且 $x > z$.

24. C

解析 由条件(1), $a + b + c + d + e = 50$. 不能确定集合 M .

由条件(2), $(a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2 + (c - \bar{x})^2 + (d - \bar{x})^2 + (e - \bar{x})^2 = 10$

(这里 \bar{x} 为 a, b, c, d, e 的平均值)也无法确定集合 M

事实上, $M = \{8 + n, 9 + n, 10 + n, 11 + n, 12 + n\}$, n 为任意整数都满足条件(2), 联合条件(1)和条件(2),

则有 $M = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.

25. A

解析 圆心 $(0, 0)$ 到直线 $4y - 3x - 5 = 0$ 的距离

$d = \frac{|1 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = 1$, 如图 8 所示

从而满足 $4y - 3x \geq 5$ 的点都满足 $x^2 + y^2 \geq 1$,

即条件(1)是充分的.

取 $x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}$, 则知条件(2)不充分.

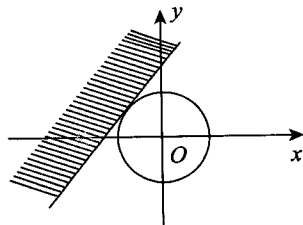


图 8

附录 B 数据描述

第一节 基本内容提要

一 平均值 ④

对于 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 我们称

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

是这 n 个数的算术平均值, 简称为平均值.

n 个数据 x_1, x_2, \dots, x_n 按大小顺序排列, 处于最中间位置的一个数据 (或最中间两个数据的平均值) 叫做这组数据的中位数.

一组数据中出现次数最多的那个数据叫做这组数据的众数 (众数可以不惟一).

平均数常用来反映数据的总体趋势. 众数用来反映数据的集中趋势. 中位数反映数据的中间值.

二 方差与标准差 ④

在一组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 中, 各数据与它们的平均数 \bar{x} 的差的平方的平均值称为这组数据的方差, 通常用“ S^2 ”表示, 即

$$S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$$

或

$$S^2 = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - n\bar{x}^2)$$

方差的算术平方根 $\sqrt{S^2}$ 称为 x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差.

方差用来反映数据的波动大小, 方差大, 波动大; 方差小, 波动小.

三 直方图 ④

将某一事件出现的次数叫做这一事件的频数. 当一组数据有 n 个数时, 频数之和为 n .

$$\text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{总频数之和}} \quad (\text{频率之和为 } 1)$$

将频数分布表中的结果直观形象地表示出来的图形, 叫做频率分布直方图, 在直方图中, 各小长方形面积表示相应各组的频率, 各小长方形面积之和为 1, 小长方形的高与频率成正比.

用圆代表总体,圆中的各个扇形分别代表总体中的不同部分,扇形的大小反映部分占总体的百分比的大小,这样的统计图叫做扇形统计图.

第二节 基本练习

1. 已知一组正数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的方差为 $S^2 = \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 20)$, 则关于数据 $x_1 + 2, x_2 + 2, x_3 + 2, x_4 + 2, x_5 + 2$ 的正确说法: ①方差为 S^2 ; ②平均数为 2; ③平均数为 4; ④方差为 $4S^2$. 其中正确说法是 ()

- (A) ①② (B) ①③ (C) ②④
(D) ③④ (E) 以上均不正确

2. 某同学 5 次上学途中所花的时间(单位:分钟)分别为 $x, y, 10, 11, 9$. 已知这组数据的平均值为 10, 方差为 2, 则 $|x - y| =$ ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3. 已知一组数据 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数是 2, 方差是 $\frac{1}{3}$, 那么另一组数据 $3x_1 - 2, 3x_2 - 2, 3x_3 - 2, 3x_4 - 2, 3x_5 - 2$ 的平均数和方差分别为 ()

- (A) 2, 5 (B) 2, 3 (C) 3, 4
(D) 4, 3 (E) 以上均不正确

4. 数据 $-1, 0, 3, 5, x$ 的方差是 $\frac{34}{5}$, 则 $x =$ ()

- (A) -2 或 5.5 (B) 2 或 5.5 (C) 4 或 11
(D) -4 或 -11 (E) 3 或 10

5. 图 1 是某班同学的一次体检中每分钟心跳次数的频数分布直方图(次数为整数), 已知该班只有 5 位同学的心跳每分钟 75 次, 请观察图, 指出下列说法错误的是 ()

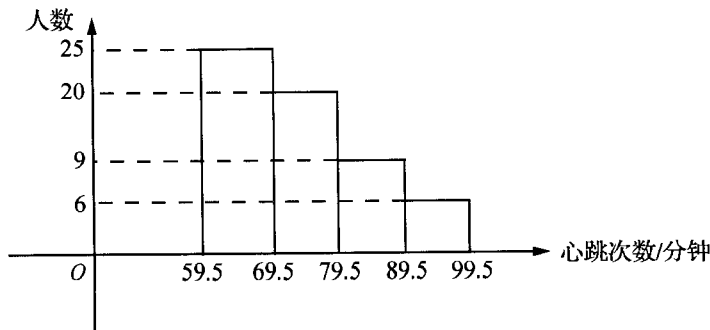


图 1

- (A) 数据 75 落在第二小组
 (B) 第四小组的频率为 0.1
 (C) 心跳每分钟 75 次的人数占该班体检人数的 $\frac{1}{12}$
 (D) 心跳每分钟 80 次以上的人数占该班体检人数的 $\frac{1}{5}$
 (E) 第二小组的频率为 $\frac{1}{3}$

6. 某校共有 2425 名学生, 其中各年级所占比例如图 2 所示, 则学生人数最多的年级有学生 ()

- (A) 1067 (B) 485 (C) 875
 (D) 1115 (E) 以上均不正确

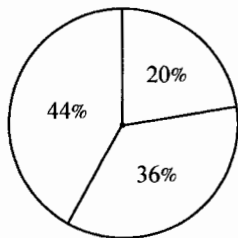


图 2

第三节 参 考 答 案 及 解 析

1. B

解析) 由已知 $5\bar{x}^2 = 20, \bar{x} = 2$, 因此 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$,

则新数据的平均值 $\frac{x_1 + 2 + x_2 + 2 + x_3 + 2 + x_4 + 2 + x_5 + 2}{5} = \frac{20}{5} = 4$,

方差为 $\frac{1}{5}[(x_1 + 2 - 4)^2 + (x_2 + 2 - 4)^2 + (x_3 + 2 - 4)^2 + (x_4 + 2 - 4)^2 + (x_5 + 2 - 4)^2] = S^2$.

2. D

解析) $x + y + 10 + 11 + 19 = 50$, 则 $x + y = 20$,

由 $\frac{1}{5}(x^2 + y^2 + 10^2 + 11^2 + 9^2 - 5 \times 10^2) = 2$, 得 $x^2 + y^2 = 208$.

从而 $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy, 2xy = 192$

即 $|x - y| = \sqrt{(x + y)^2 - 2xy} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} = \sqrt{208 - 192} = 4$

3. D

解析 由已知 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$,

$$\text{因此 } \frac{1}{5}(3x_1 - 2 + 3x_2 - 2 + 3x_3 - 2 + 3x_4 - 2 + 3x_5 - 2) = \frac{30 - 10}{5} = 4$$

$$\begin{aligned} 9 \times \frac{1}{5} [(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 + (x_4 - 2)^2 + (x_5 - 2)^2] \\ = 9 \times \frac{1}{5} = 3 \end{aligned}$$

4. A

$$\text{解析 } \frac{34}{5} = \frac{1}{5} [(-1)^2 + 0^2 + 3^2 + 5^2 + x^2 - 5x \left(\frac{-1 + 0 + 3 + 5 - x}{5} \right)^2]$$

解得 $x = -2$ 或 $x = 5.5$.

5. D

解析 数据 75 落在 69.5 到 79.5 中, 从而 (A) 是正确的. 从图 1 可知, 第四组频率为

$$\frac{6}{6 + 9 + 20 + 25} = \frac{6}{60} = 0.1, \text{ 故 (B) 正确.}$$

心跳每分钟 75 次的人数占总体检人数的 $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$, 因此 (C) 是正确的,第二小组的频率为 $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$, 即 (E) 是正确的.心跳每分钟 80 次以上的人数占体检人数的比为 $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$, 因此 (D) 是错误的.

6. A

解析 学生人数最多的年级占 44%, 故 $2425 \times 0.44 = 1067$.

管理类联考网络课堂本店唯一QQ:2408863085, 后续重要资料+押题信息均以此QQ发送

考试名家指导 2015

策划编辑: 孟玉琴

电脑制作: 张 静

编辑联系热线: 764124420(QQ)

MBA MPA MPAcc联考与经济类联考同步复习指导系列

英语分册 (英语二各专业适用)

▶ 数学分册 (管理类联考适用)

逻辑分册 (管理类联考、经济类联考均适用)

写作分册 (管理类联考、经济类联考均适用)

面试分册 (MBA联考适用)

数学高分速成 (管理类联考适用)

数学高分速成 (经济类联考适用)

考研英语 (二) 英语历年真题精解

考研英语 (二) 满分翻译与写作

模拟试卷——英语分册 (英语二各专业适用)

模拟试卷——综合能力分册 (管理类联考适用)

机工版老蒋英语精品系列

考研英语 (二) 核心词汇老蒋笔记 (正序版)

考研英语 (二) 核心词汇老蒋笔记 (蒋氏乱序版)

考研英语 (二) 阅读基本功长难句老蒋笔记

考研英语 (二) 高分阅读老蒋80篇

考研英语 (二) 热点作文老蒋40篇

考研英语 (二) 预测老蒋四套卷

专业学位硕士联考应试精点系列

逻辑精点 (管理类联考、经济类联考均适用)

写作精点 (管理类联考、经济类联考均适用)

逻辑历年真题精点 (管理类联考与经济类联考均适用)



袁进 从事数学研究及教学工作三十余年, 1991年至2001年应国外数学同行邀请, 先后在丹麦奥尔胡斯大学、哥本哈根大学, 德国科隆大学, 荷兰Leiden大学, 英国York大学, 白俄罗斯科学院及其他一些国家的大学讲学并从事数学研究工作, 两次获得英国皇家学会数学研究基金。

现为国内一流大学数学系教授, 全国著名MBA联考数学辅导专家, 其独特的激情授课法和行之有效的解题思路, 能迅速提高学生的数学水平, 深受广大考生的赞赏。

地址: 北京市百万庄大街22号

邮政编码: 100037

电话服务

社服务中心: 010-88361066

销售一部: 010-68326294

销售二部: 010-88379649

读者购书热线: 010-88379203

网络服务

教材网: <http://www.cmpedu.com>

机工官网: <http://www.cmpbook.com>

机工微博: <http://weibo.com/cmp1955>

封面无防伪标均为准

ISBN 978-7-111-45430-4

上架指导: 考试/MBA、MPA、MPAcc

ISBN 978-7-111-45430-4



9 787111 454304 >

机工唯一货源 定价: 40.00元 <http://jltahupan.taobao.com>