

课件及资料均由‘好实惠网络’提供。其他的均为倒卖
好实惠客服qq:737182994

2017

高 教 版

● 严格依据最新考研
管理类联考大纲编写

MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力

数学高分指南 (第9版)

考点精析 + 基础题型 + 强化题型 + 专题点睛 + 阶梯训练

2016 版热销 **8万** 册

▲ 登录作者博客 <http://www.chenjian.cc> 留言 100%回复 配套全书视频讲解

▲ 大纲解析人讲数学 130 余种题型全覆盖 收录最新六年真题及必备公式

主编 陈剑

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 幂学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

高等教育出版社

前 言

为了帮助报考管理类硕士研究生招生考试的考生更好地复习、备考数学,作者对历年来的数学试题进行了研究,将其归纳、分类、整理。在此基础上,按照最新《考试大纲》的要求编写了这本《MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学高分指南》。

本书已经是第九版,也是重大变革的里程碑版本。在保持优点、特色的前提下,继续定位精品辅导教材,努力体现创新教学理念,激发学生自主学习能力,打破常规应考模式,提高灵活应试能力。本书的特色如下:

1. 适应不同层次的考生,优化知识体系,体现出因材施教、分层次学习的特点

全书按照《考试大纲》的要求分为算术、代数、几何、数据分析四大部分,每部分按考试内容又分为若干章节,每章分为考试要点剖析、基础过关题型、强化突破题型、核心专题点睛和阶梯化精炼题五小节。考试要点剖析可以快速引您洞察考向,一览考纲全貌;基础过关题型帮您短期夯实基础,拾起遗忘多年的考点;强化突破题型迅速令您居高临下,彻底打通考试难点;核心专题点睛领您直击考点,有的放矢;阶梯化精炼题使您融会贯通,打通经脉,考试尽在掌握之中。总之,每章先将有关基本概念、基础知识总结归纳成条,然后再讲述该节的常考题型及解题方法并进行技巧归纳。

2. 题型全面,涵盖命题 130 多种考试题型

数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好考纲范围内的各类常考题型及解题思路、方法、技巧,就能以不变应万变,遇到类似题型就能很快确立思路,进而达到条件反射,形成快速简捷的解题套路,从容应考,轻取高分,收到触类旁通的效果。掌握好这些题型及其解题思路、方法、技巧,也就使你掌握了未来命题的题型及解题思路、方法和技巧。因而本书能起到指航引路、预测未来考向的作用。

3. 注重基础,只有根深才能叶茂,高分是硬道理

本书特别强调对《考试大纲》所划定的基本概念和基础知识的正确理解和熟练应用。对于数学知识,管理类联考不同于普通的硕士研究生招生考试,它不要求考生有全面系统的数学理论知识,而是选择考生将来学习课程所必需的数学知识和能力加以考查。因而考查的主要是基本概念、基础知识和基本运算能力。近年来相当一部分考生在联考中数学失误,究其原因,恰恰是对考纲中所规定的基本概念、基础知识和基本运算能力的理解与掌握上存在欠缺。鉴于此,针对参

加联考的考生中有相当数量的考生数学概念比较模糊、基础知识遗忘较多、基本运算不熟练的特点,本书题目较多且讲述方式是由浅入深,分析透彻,解答详尽,尽量做到题精而易懂。因而本书是数学打牢基础、夯实概念的必备辅导书。

4. 习题配置是衡量辅导书的核心标准,是将知识转化为考试能力的重要桥梁

本书不提倡题海战,做题的目的是为了提高成绩,而很多考生盲目做题,浪费时间精力,并且成绩没有提高。所以本书的习题都是精心挑选的,并且特别强调习题解答和一题多解。管理类联考数学试题中也有综合拔高题,求解这类题目常需同时运用多个知识点。本书十分注意这类题的解题方法、技巧归纳,较好地体现了管理类联考数学考试属于选拔性考试的特点和要求。此外,本书还注意提高考生的快速、准确计算能力。为激活思维、开阔思路、简化计算,对有些计算题除给出计算的通法外,还经常一题多解。为避免常犯错误,在不少例题后加写“注意”一项,望读者细心揣摩,这有益于理解基本概念、掌握基础知识、提高运算能力。

5. 注重技巧,发散思维,秒杀制胜

管理类联考中的数学试题都是选择题,而选择题往往有多种方法求解。用什么方法使之能以最快的速度找到答案,就变得极为重要,这也是赢得时间取胜的关键。为此,本书介绍了作者在长期教学实践中积累的简化计算方法。本书能展现“庖丁解牛”“善出奇兵”“出奇制胜”“一招制敌”等精华,帮助读者提高解题的准确率,且以最快的速度求出答案,达到“快、准、狠”之目的。

此外,真题是考试复习的方向,对考试有很重要的导向,本书附上历年真题,让广大考生能够找到身临其境的感觉,在有限的时间抓住重点,有的放矢,查漏补缺。同时,本书附上数学核心公式,帮助大家归纳整理考试所用到的公式。

在编写本书时,编者参阅了有关书籍,引用了一些例子,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢。在修订过程中,衷心感谢以下读者的宝贵建议和鼎力支持,他们是:胡云琦、袁立岩、江永平、金鑫、黄醴湘、李顺、杨增光等。尤其要感谢金鑫为本书的校对工作付出了很多努力,为本书的顺利出版做出了突出贡献,功不可没。同时也一并感谢 qqimwfe、gedamisi、liliacheng、df1、future21st、zpstick、nscnd、睡袋、檬檬檬、麦子在肩等广大网友的热心支持。

由于编者水平有限,兼之时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请读者批评指正。欢迎大家通过作者博客(<http://www.chenjian.cc>)、微博(<http://weibo.com/myofficer>)、邮箱(myofficer@sina.com)、YY备考万人群(群号:7201531)、YY学习频道(频道号:16386652)等网络平台获取本书最新信息、互动学习经验、答疑解惑,最大程度利用好本书。

陈 剑

2016年1月于北京

目 录

本书使用指南	1
数学应试指导	4
充分性判断题型说明	14

第一部分 算 术

第一章 实数、绝对值、比和比例	18
第一节 考试要点剖析	19
第二节 基础过关题型	24
第三节 强化突破题型	28
第四节 核心专题点睛	33
第五节 阶梯化精炼题	41
第二章 应用题	54
第一节 考试要点剖析	55
第二节 基础过关题型	59
第三节 强化突破题型	65
第四节 核心专题点睛	73
第五节 阶梯化精炼题	77

第二部分 代 数

第三章 整式、分式和函数	96
第一节 考试要点剖析	97
第二节 基础过关题型	101
第三节 强化突破题型	106
第四节 核心专题点睛	112
第五节 阶梯化精炼题	117
第四章 方程和不等式	128
第一节 考试要点剖析	129
第二节 基础过关题型	132
第三节 强化突破题型	138
第四节 核心专题点睛	144
第五节 阶梯化精炼题	146
第五章 数列	163
第一节 考试要点剖析	164
第二节 基础过关题型	167

第三节	强化突破题型	171
第四节	核心专题点睛	175
第五节	阶梯化精炼题	180

第三部分 几 何

第六章	平面几何	200
第一节	考试要点剖析	201
第二节	基础过关题型	204
第三节	强化突破题型	209
第四节	核心专题点睛	214
第五节	阶梯化精炼题	226
第七章	解析几何	238
第一节	考试要点剖析	239
第二节	基础过关题型	242
第三节	强化突破题型	246
第四节	核心专题点睛	253
第五节	阶梯化精炼题	259
第八章	立体几何	270
第一节	考试要点剖析	271
第二节	基础过关题型	272
第三节	强化突破题型	274
第四节	核心专题点睛	277
第五节	阶梯化精炼题	279

第四部分 数 据 分 析

第九章	排列组合	292
第一节	考试要点剖析	293
第二节	基础过关题型	295
第三节	强化突破题型	300
第四节	核心专题点睛	305
第五节	阶梯化精炼题	312
第十章	概率初步	323
第一节	考试要点剖析	324
第二节	基础过关题型	329
第三节	强化突破题型	336
第四节	核心专题点睛	346
第五节	阶梯化精炼题	353
第十一章	数据描述	366
第一节	考试要点剖析	367

第二节 基础过关题型	368
第三节 强化突破题型	370
第四节 核心专题点睛	373
第五节 阶梯化精炼题	377
 附录一 历年真题	 384
2016 年管理类专业学位全国联考综合能力数学真题	384
2015 年管理类专业学位全国联考综合能力数学真题	387
2014 年在职管理类全国联考综合能力数学真题	390
2014 年管理类专业学位全国联考综合能力数学真题	393
2013 年在职管理类全国联考综合能力数学真题	396
2013 年管理类专业学位全国联考综合能力数学真题	400
2012 年在职管理类全国联考综合能力数学真题	403
2012 年管理类专业硕士学位联考综合能力数学真题	406
2011 年在职管理类专业硕士学位联考综合能力数学真题	409
2011 年管理类专业学位全国联考综合能力数学真题	412
 附录二 数学核心考点公式	 415

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 幂学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

本书使用指南

为提升整个教学辅导的服务品质,增强备考效果,打造优秀教学品牌,现特推出统一教学资料,由考试大纲解析人亲自编撰,以权威性、实用性、高效性著称,好的成果不敢独享,愿与行业内的各位师生一起分享。编排时,基础过关题型主要围绕基本考试要点来展开,让考生在短时间内快速拾起遗忘的考点;强化突破题型则主要突出知识点的应用,从解题和反命题的角度推动思维能力的提升;核心专题点睛则将综合性比较强的、在题型中无法充分展开的考点进行归纳总结,加强考点的内在联系。

一、统一教学模式,更贴近考生

为避免不同老师授课使学生无所适从,特统一教学资料、教学进度、教学内容,做到学生听课更加系统、全面,力争达到不同老师“无缝对接”的高标准。

二、优化教学课时进度安排

为方便学生听课、补课,特实行数学模块化教学,但可在编排的框架下进行自由发挥,其进度安排如下:第一轮是复习的基础阶段,主要学习每章的第一节与第二节,并对应做每章的基础能力题目;第二轮是复习的强化阶段,主要学习每章的第三节与第四节,并对应做每章的综合提高题。基础班注意控制讲课的难度和深度,关键问题要细化,必考知识点要反复强调,授课老师在基础阶段知识点与例题讲解的时间分配是五五开;系统阶段注意授课的技巧性与方法的实用性,难点问题要深入浅出地进行讲解,授课老师在系统阶段知识点与例题讲解的时间是三七开。总之,数学要想立竿见影,必须多方配合,老师、助教、班主任、学生要共同努力。具体辅导课时安排如下:

1. 算术课时安排:(两天 4 次课,计 16 课时)

课次	学习内容	说明	备注
第一次	第一章 实数、绝对值、比和比例	基础知识	方法导学
第二次	第一章、第二章	概念、性质及运算	质数合数
第三次	第二章 应用题	常考题型	方法思路
第四次	第二章 应用题	常考题型	思路培养

2. 代数课时安排:(两天 4 次课,计 16 课时)

课次	学习内容	说明	备注
第一次	第三章 整式、分式和函数	常用公式、定理	活学活用

续表

课次	学习内容	说明	备注
第二次	第四章 方程和不等式	抛物线、指数、对数	相关应用
第三次	第四章、第五章	根、解集	思路培养
第四次	第五章 数列	等差、等比	公式应用

3. 几何课时安排:(两天 4 次课,计 16 课时)

课次	几何	说明	备注
第一次	第六章 平面几何	考点公式较多	图形变换
第二次	第六章、第七章	理解公式与考点	注意公式应用
第三次	第七章 解析几何	对称问题	培养观察
第四次	第七章、第八章	体积与表面积	内切球、外接球

4. 数据分析课时安排:(两天 4 次课,计 16 课时)

课次	数据分析	说明	备注
第一次	第九章 排列组合	基础知识	注意授课技巧
第二次	第九章 排列组合	解题方法	开阔思路
第三次	第十章 概率初步	古典概率、伯努利	基本题型
第四次	第十章、第十一章	公式、直方图	意义

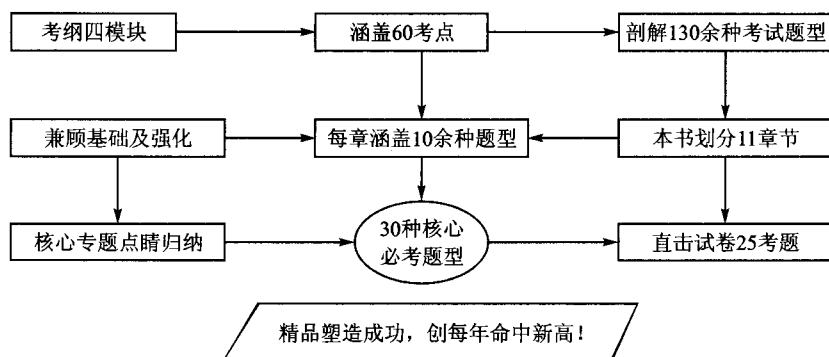
三、课堂模式标准化,创精品授课规范

课堂(三个小时)	内容	说明	备注
前十分钟	温习上次课内容	为新内容做铺垫	温故知新
中间两个半小时	学习新内容	互动气氛、授课节奏	表达方式
最后十分钟	本次重点总结	浓缩精华、高度概括	言简意赅
最后一分钟	布置作业	预告下次课内容	注意课程衔接

四、全书符号说明

- (1) 重点的符号:▲、△.
- (2) 加星号*的考点属于系统复习的内容.
- (3) 标注了解的内容,如果没有时间可以不用看.

五、全书知识体系框架



六、使用时间及安排

阶段	时间	学习内容	精练	建议
基础	10~12周 (2~3个月)	第一节、第二节 (平均每周一章)	第五节 基础题 重点复习	全书配视频讲解
系统	10~12周 (2~3个月)	第三节、第四节 (平均每周一章)	第五节 提高题 (视频讲解)	定期重复总结

注:基础题为中等难度,建议所有考生都做,提高题为拔高题的难度,建议考MPAcc、MAud及学有余力,想得高分的考生做。基础题在考试中占80%,难题在考试中占20%。

七、重要网址及备考群

博客:www.chenjian.cc(留言100%回复,全书视频讲解)

微博:weibo.com/myofficer(通知最新信息)

邮箱:myofficer@sina.com

QQ群:212270307,176966564

YY群:7201531

YY学习频道:16386652(直播视频讲解)

总之,面对来自生活和工作的压力,要做的不是抱怨与绝望,而是要奋力拼搏。当我们用全新的视角去观察,用心去体会时,能够发现有很多值得我们去做了并能使自己闪光的地方。考研之路,我们将与您携手并肩,您的理想将在您的共同努力下实现。这是我们的信心,也将是您的信心!因为我们的自信,让您更加自信!在此,代表各位老师祝所有考生金榜题名!

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程
6大(太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)
名校护航,配套电子讲义,好实惠客服:737182994

数学应试指导

管理类联考综合能力考试将数学、逻辑和写作合为一份综合能力测试卷,这将更有利于考生在数学、逻辑和写作之间取得平衡.可以说,如果数学考不好,综合能力一门课就会跟别人产生 40 分的差距!大家同时要重视英语的学习,否则即使分数大大超过了名牌大学的面试线,但因为英语不够国家线而被拒之门外,这是非常令人惋惜的.每年这样的例子都有很多,希望大家在复习中一定要引以为戒.在数学的复习中,很多同学,尤其是工龄长和学文科的考生,容易产生畏惧心理,还有些同学数学基础很薄弱,在复习的时候可能会遇到理解障碍,但是一定要坚持不懈、持之以恒.要想不断创造奇迹,就要克服三重困难:第一层次的困难是不会选择;第二层次的困难是不坚持选择;第三层次的困难是要不断地选择.平凡中创造奇迹需要孜孜以求,有了远大的目标计划,成功已向你展示.下面就针对数学的复习详细地谈谈高分应试技巧.

一、综合能力数学部分考试大纲

(一) 算术

1. 整数

- (1) 整数及其运算
- (2) 整除、公倍数、公约数
- (3) 奇数、偶数
- (4) 质数、合数

2. 分数、小数、百分数

3. 比与比例

4. 数轴与绝对值

(二) 代数

1. 整式

- (1) 整式及其运算
- (2) 整式的因式与因式分解

2. 分式及其运算

3. 函数

- (1) 集合

(2) 一元二次函数及其图像

(3) 指数函数、对数函数

4. 代数方程

(1) 一元一次方程

(2) 一元二次方程

(3) 二元一次方程

5. 不等式

(1) 不等式的性质

(2) 均值不等式

(3) 不等式求解

一元一次不等式(组)、一元二次不等式、简单绝对值不等式、简单分式不等式

6. 数列、等差数列、等比数列

(三) 几何

1. 平面图形

(1) 三角形

(2) 四边形(矩形、平行四边形、梯形)

(3) 圆与扇形

2. 空间几何体

(1) 长方体

(2) 柱体(2012年考纲将“圆柱体”改为“柱体”)

(3) 球体

3. 平面解析几何

(1) 平面直角坐标系

(2) 直线方程与圆的方程

(3) 两点间距离公式与点到直线的距离公式

(四) 数据分析

1. 计数原理

(1) 加法原理、乘法原理

(2) 排列与排列数

(3) 组合与组合数

2. 数据描述

(1) 平均值

(2) 方差与标准差

(3) 数据的图表表示: 直方图、饼图、数表

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

3. 概率

- (1) 事件及其简单运算
- (2) 加法公式
- (3) 乘法公式
- (4) 古典概型
- (5) 伯努利概型

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程
6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)
名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

二、大纲解析

1. 试卷题型比例

问题求解:15 小题,每小题 3 分,共 45 分.

条件充分性判断题:10 小题,每小题 3 分,共 30 分.

综合能力试卷结构如下表所示:

科目	数学	逻辑	写作	合计
分值	$25 \times 3 = 75$ 分	$30 \times 2 = 60$ 分	$30 + 35 = 65$ 分	200 分
题量	$15 + 10 = 25$	30	2(600 字 + 700 字)	52
考试时间	70 分钟	50 分钟	60 分钟	180 分钟
单题用时	2 分 40 秒	1 分 50 秒	2.5 秒/字	—
时间弹性	大	中	中	—
难度	大	中	中	—
拉分差距	大	中	中	—

2. 大纲变化情况

(1) 题型灵活

根据对大纲样卷的分析,不难发现近年考试考题灵活性加大. 题型已经向纵深方向发展,较少出现一眼看出的常规题型,这需要考生对所学知识点彻底做到融会贯通和举一反三,对各知识点要形成联系密切的网络结构.

(2) 新加知识点

数学新加了函数、立体几何、数据分析考点. 如何把握新加考点的复习广度和深度,给考生复习带来了挑战. 尤其在缺乏相关练习资料的情况下,如何做到庖丁解牛的分析,更好地应对新考点带来的新复习任务,这需要考生深刻领悟新《考试大纲》精神,明确考试方向.

(3) 出题以点带面

从考纲分析中可以发现,题目的综合性更强了,通过一题涉及多个知识点,要求在复习中注重各个知识点之间的联系.

(4) 难度和运算量有较大提升

从整个考试分析发现,试题的难度和运算量有较大提升,对考生的运算能力和数学分析能力要求很高.

(5) 实用性加强

从今年新加的考点,尤其是“数据分析”中我们可以发现该知识点和在读的 MBA 课程中的《管理经济学》的统计章节知识有类似之处,可见,现在的考试更具有实用性和适用性。

3. 难度问题

(1) 水涨船高,特别是在录取额度不变、名校额度有限的情况下,会造成竞争比以往更为激烈,复试分数线相应提高。

(2) 从现在开始大家应该重新看待初等数学的分量,加大初等数学的复习力度,因为初等数学覆盖面大、范围广,尤其新增部分,很多考生对充分性判断题不会做。初等数学涵盖初中和高中六年的知识,面大、量多、范围广,考生复习很难抓住重点,同时初等数学的解题技巧性极强,加大技巧性训练越来越重要。特别是综合能力考试三个小时三部分内容,压力大、时间紧、题量大。

(3) 数学考试范围变化不一定会降低考试难度,考试范围和难度之间没有必然的联系,范围的窄化并不一定意味着考试难度的降低。可以考的知识点减少了,考题数量和分值却没有变化,考试的难度相对还会提高。

4. 数学还是主战场

数学在考试中占了 75 分,是客观题中单题分值最高的,也是最容易拉开档次的。文科类和外语类专业的考生更要学好数学,因为你们也面对着和同样专业背景考生的竞争,只有学好数学才能占得先机。

5. 名校竞争会加剧

部分因怕微积分和线性代数、概率论的考生会因此次大纲调整转而选择报考名校,此前害怕数学,担心拉分,现在只考初等数学,这部分内容相对熟悉,会增强信心转而报考名校。名校提前面试使笔试门槛降低,越来越多的人参与名校竞争。

6. 报考人数会有所增长

自大纲变化后,因感觉数学容易了,部分原打算考其他硕士学位考试的考生会选择报考管理类考试;部分大龄考生也有信心选择报考管理类考试。如此一来,报名人数会递增,因录取人数相对固定,分子不变,分母加大,所以竞争会加剧;并且当年高考扩招的本科生现在具备了报考条件,也会导致报名人数增加。

总之,大纲数学部分内容的调整势必对相当一部分同学产生影响,但它是一把双刃剑,看似变简单,但未必容易,大家应保持一个良好的心态来面对。基于此,及时推出《MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学高分指南》备考资料,满足大家的需要。

三、数学高效复习方法

1. 参考书的选择——与其博览群书,不如精读一本

参考书的选择是复习前要做的重要准备工作,它不仅关系到复习进度的快慢和效率,更重要的是对解题思路的影响,因为在数学做题中,技巧很关键。在考试中,要在 70 分钟内做完 25 道选择题,平均一道题 2 分钟左右,所以大家平时做题时,一定要养成良好的解题习惯,提高解题速度。下面就大家的数学基础层次来推荐一些参考书目。

基础较差、有些考点没学过,或者工龄较长、学过的知识大部分遗忘了的考生,对于这种零基础的情况,数学要分块复习,一块一块地突破。数学可以分为四块,即初等代数、排列组合、概率和几何。首先把《考试大纲》认真看一遍,接下来可以看看本书。本书层次分明,既适合补基础,也适合系统强化。这也是备考者必备的辅导书,因为每年的考题都能从其中找到出题的影子。

大家在复习中要注意,关键在于如何用这些书。参考书不能贪多,有一至两本即可。选定了这主要的一两本书后,就要充分利用,把书读透;如果时间充裕,看两三遍最好。每本书都有自己的体系,与其博览群书,不如精读一本。往年的考题是最好的复习资料,从中可以把握命题思路和命题方向。切记,基础越差,越想拿高分,资料越少越好!

2. 重视大纲,把握考试方向

从每年考纲的变化中都能预测出考题的出题方向和侧重点。每年考纲都会增删一部分知识点,对于新增的考点,一般出题的可能性比较大。针对新大纲的变化,首先,建议大家将大纲好好研究一遍,尤其要用心研究考纲新增的考点。数学部分依然是主要部分,提高解题的熟练程度,巧妙、快速地解题依然是拿高分的关键。

充分重视《考试大纲》,做到逐条分析,潜心研究,全面复习。大纲实际上就是教育部考试中心为考生所划的复习范围,考生应参照《考试大纲》,全面复习,不留遗漏,这是复习的基本对策。要认真阅读《考试大纲》,并结合近几年来来的试题,了解数学考题的题型、分数分布和难度特点,准确定位。通过复习比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法。要重视和加深对基本概念、基本定理和基本方法的复习和理解,并要熟悉常见考点的题型和解题思路。虽然仅达到这一点还得不到高分,但这是取得好成绩的基础和前提。所以,一定要按照《考试大纲》准确把握好数学的基本概念、基本方法、基本定理,即数学中的“三基”。

3. 复习阶段的划分

准备复习的时间因人而异,一般复习时间在5~9个月,如果基础不好,可以早点准备复习;如果基础较好,或者上一年参加过考试,对知识点的印象比较深刻,5个月的复习时间足够了。所以大家可以根据自己的实际情况制订一个学习计划,然后一鼓作气,冲刺到成功!下面详细地说明一下复习阶段的划分。

基础阶段。这段时间一般需要两三个月,主要任务是将各科准备好的参考书详细地看两遍;如果基础较差,或者工龄较长,可以边复习边上辅导班,根据辅导业绩选择一个较好的辅导班,通过辅导老师的指点,跟着讲课进度,一步一个脚印把基础夯实。基础越牢固,到后面强化的时候越轻松。在基础阶段复习的时候,一定要注重概念,如果遇到暂时理解不了的概念,可以问问老师、同学,及时解决问题,否则问题会越积越多,影响后面的复习进度。

在基础阶段复习时,要结合辅导教材和前一年的大纲,先吃透基本概念、基本方法和基本定理。数学是一门逻辑性极强的演绎科学,只有对基本概念深入理解、对基本定理和公式牢牢记住,才能找到解题的突破口和切入点。对近几年数学答卷的分析表明,考生失分的一个重要原因就是基本概念、定理记不全、记不牢、理解不准确,基本解题方法掌握不好。

强化阶段。一般需要两个月左右,在复习的过程中要开始注重公式应用,要以做题为主,充分利用历年试题,重视总结归纳解题思路、套路和经验。数学考试不需背诵,也不要自

由发挥,全部任务就是解题,而基本概念、公式、结论等也只有在反复练习中才会真正理解与巩固。做题时特别要强调分析研究题目和解题思路。数学试题千变万化,其知识结构却基本相同,题型也相对固定,往往存在明显的解题套路,熟练掌握后既能提高正确率,又能提高解题速度。

冲刺阶段。一般在考试前一个月左右,在这个阶段要注意查漏补缺,针对考纲看看自己哪些知识点没有复习到,尤其是考纲上新增的考点。有了前两个阶段的强化复习,要初步进行综合性试题和应用题训练,数学考试会出现一些应用到多个知识点的综合性试题和应用型试题。这类试题一般比较灵活,难度也要大一些。在数学强化阶段复习期间,可以不将它们作为强化重点,但也应逐步进行一些训练,积累解题思路,同时这也有利于对所学知识的消化吸收,彻底弄清楚有关知识的纵向与横向联系,转化为自己真正掌握的东西。在这个阶段要开始慢慢提高做题速度,即要注重解题技巧,尤其是做选择题的技巧。因为对于选择题,正确选项已经列出来了,我们所要做的只是将正确选项挑出来,没必要一步步去计算求解。当复习进入最后冲刺阶段时,如何充分利用临考前的这段时间进行有效的复习,应该说对每一位考生都是至关重要的,如何高效地利用好这段时间,是冲刺成功的关键,所以提醒大家注意以下几点:

首先,要合理有序地安排复习时间。在最后冲刺阶段,各科的复习都进入关键时刻,一定要注意合理安排各科的复习时间,切忌连续多天复习同一门课程,至少对数学而言,若长期不做题,很难一下就进入解题状态。因此,不论你的数学已复习得多好,仍应坚持每天(或至少考试前每两天)安排一段时间复习数学,时间的长短可根据自己已复习的情况而定。

其次,仍要以练为主,练看结合、夯实基础、查漏补缺。从最近几年的考题来看,试题的覆盖面非常广,几乎所有章节均有涉及,但现阶段的复习若再一遍一遍地去重复已经多次复习过的内容,不仅十分单调,而且很难发现自己在掌握知识上的缺陷,而通过适量的做题去查漏补缺,实践证明是行之有效的。练习题的选择不应贪多求难,建议可以找上一年刚考过的试题做一下,这样可全面系统地了解自己复习的现状。然后可选择一些合适的模拟试题做一做、看一看、想一想。模拟试题应能真实地反映可能考查的各个知识点,以及各个知识点之间的各种可能的内在联系,千万不要去追求难、怪、偏题,这样是达不到模拟训练效果的,弄不好还会严重挫伤自信心。建议以《MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力考前冲刺》为主线进行复习。

最后,要不断归纳总结,整体把握,形成体系。要善于归纳总结,知识只有在形成体系后才容易把握。对于自己平时做题过程中出现的各种各样的概念、计算方法方面的错误要归纳总结,对于自己在做题过程中常见的典型题型的解题思路、方法和技巧更要善于去归纳总结。

综上所述,将以上复习阶段的划分情况简要归纳如下:

基础阶段:根据老师的进度一步一个脚印地复习,切忌急于求成、浮躁。

强化阶段:将知识系统化,大脑要对整个数学体系有明朗的脉络。

冲刺阶段:最好以周为单位,每周安排两套模拟(周二和周五),每周订计划,要有复习重点(指自己的薄弱点),每月要有题型归纳。

3个月搞定基础,2个月完成强化,1个月进行冲刺,1个月查漏补缺,最后取高分。

4. 数学试卷结构及命题策略(非常重要)

数学考试 25 个考题对应的试卷结构及命题策略可简洁地概括为:一个中心、两个基本点,即三大块+一小块,具体如下:

一个中心:文字应用题,7 个题左右,计 21 分左右,约占 $1/3$ 的考试比重. 主要对应考纲的考点有:分数、小数、百分数、比与比例、集合、函数、方程(组)、不等式(组)、数列. 常考题型为:工程问题、比例问题、路程速度、浓度、画饼、植树、利润、阶梯形价格、线性规划、不定方程等.

第一个基本点:几何题,5~6 个题,计 15~18 分,约占 $1/4$ 的考试比重. 其中平面几何约 3 个考题,解析几何约 3 个考题,立体几何约 1 个考题. 主要对应考纲的考点有:平面几何:三角形、平行四边形、矩形、梯形、圆. 解析几何:距离公式、直线与直线位置关系、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系. 立体几何:长方体、圆柱体、球体. 常考题型为:平面几何主要考查面积(尤其阴影面积)的计算与三角形形状的判断,解析几何主要考查位置关系、距离及对称,立体几何主要考查体积与表面积.

第二个基本点:数据分析题,5~6 个题,计 15~18 分,约占 $1/4$ 的考试比重. 其中排列组合约 3 个考题,概率约 3 个考题,数据描述约 1 个考题. 主要对应考纲的考点有:加法原理、乘法原理、排列及排列数、组合及组合数、古典概型、事件关系及运算、伯努利试验、平均值、方差与标准差、直方图. 常考题型见本书第九、十、十一章第二节.

其他知识点,3~4 个题,计 9~12 分,约占 $1/6$ 的考试比重. 主要对应考纲的考点有:绝对值、方程的根、不等式的解集、因式分解、指数与对数.

四、复习建议

为了使大家更好地复习,养成良好的做题习惯,形成一个正确的思维定势,下面就给出复习中的一些建议.

第一,要重视基础. 每一道题都是由基本的定理、定义、公式构成的,它们的不同组合就形成了不同的问题,多层次的组合形成不同复杂程度的问题. 所以这些定理、定义、公式是解题的基础,而熟练掌握和深刻理解这些内容就成为解题成功的关键. 为了熟练掌握并牢固记忆和理解所有的定理、定义和公式,一定要先复习所有的公式、定理和定义,然后再做大量的基础题. 做这些基础题时能做到一看便知其过程,心算就能得到其结果,这样就说明真正掌握了基础习题的内容. 这些题表面看起来简单、目标单一,但它们主要帮助我们熟悉和掌握定理、定义和公式. 千万别小看这些习题,如果把整个习题看成一座城堡,则定理、定义和公式等可比作砖瓦,而基础习题就可看成砖瓦垒起的一堵墙,熟练掌握一道基础习题就相当于直接拥有一堵墙. 这样,我们就能随心所欲地构建城堡,就像搭积木一样方便.

所以说,数学解题能力的提高,是一个不断积累、循序渐进的过程. 只有深入理解基本概念,牢牢记住基本定理和公式,才能找到解题的突破口和切入点. 分析近几年考生的数学答卷可以发现,考生失分的一个重要原因就是基本概念、定理理解不准确,数学中最基本的方法掌握不好,给解题带来思维上的困难. 数学的概念和定理是组成数学试题的基本元件,数学思维过程离不开数学概念和定理,因此,正确理解和掌握好数学概念、定理和方法是取得好成绩的基础和前提.

第二,要加强解综合性试题和应用题能力的训练,力求在解题思路有所突破。综合题的考查内容可以是同一学科的不同章节,也可以是不同学科的内容。在解综合题时,迅速地找到解题的切入点是关键的一步,为此需要熟悉规范的解题思路,考生应能够看出面前的题目与曾经见到过的题目的内在联系。因此必须在复习备考时对所学知识进行重组,搞清有关知识的纵向与横向联系,并转化为自己真正掌握的东西,注意各章节之间的内在联系,注意综合性典型考题的分析,提高自己解决综合性问题的能力。数学有其自身的规律,其表现的一个重要特征是各知识点之间、各科目之间的联系非常密切,这种相互之间的联系给综合命题创造了条件。尽管考试千变万化,但是知识结构基本相同,题型相对固定。提炼题型的目的是为了提高解题的针对性,形成思维定势,进而提高解题速度和准确性。

第三,重视历年试题的强化训练。通过对历年真题试题类型、特点、思路进行系统的归纳总结,可以估计一下考试难度,对自己的水平有一个准确定位,还可以有意识地重点培养解题思路。对于那些具有很强的典型性、灵活性、启发性和综合性的题,要特别注重解题思路 and 技巧的培养。强化训练要反复进行,学习数学,要积累一定数目的题量。提倡精练,即反复做一些典型的题,做到一题多样、一题多变,要训练抽象思维能力。对一些基本定理的证明、基本公式的推导,以及一些基本练习题,要做到“熟能生巧”。

第四,合理安排学习计划,强迫自己完成计划。不用担心时间够不够用,只要你想到了,任何时候都不算晚。当你想到时,确定好自己的大目标,再分割成小块,分步实现。实现这些小目标块时,一定要不折不扣,持之以恒。我们需要合理安排时间,制订出合理的学习计划。但最重要的也是最简单的,要“严格遵守自己的诺言”,克服贪玩、贪睡、懒惰、悲观、消极的思想与习惯。总之,持之以恒地完成制订的计划是所有方法中最重要的。

最后,就是学习的瓶颈问题。一般来说,大家在学习的时候都会或多或少地碰到瓶颈问题,也就是说觉得某一门课好像再学,成绩也不会有明显的提高,好像已经学到了极限。如果你出现了这种状态,那么你的学习就到了最关键的攻坚战的阶段,这时候如果你能够突破瓶颈,水平一定会有质的飞跃。突破瓶颈的方法很多,最重要的一点就是一定改变学习方法,因为每个人的智力水平差别不大,只要方法对路,就不会跟别人相差很远的。

总之,数学根本并不可怕,只要方法对路,会提高很快。所以大家在平时复习的时候,一定要对自己充满信心。遇到难题的时候千万不要气馁,只要踏踏实实地复习,在经过一段时间的磨炼之后,你会发现数学的规律。

五、临场必读——答题技巧

俗话说“台上三分钟,台下十年功”。经过冲刺阶段的奋力拼搏,胜败将取决于考场之中,成败在此一举。很多考生平时复习得挺好,但在考场上没有发挥好,功亏一篑。所以说,这个过程中的一些答题技巧千万不容忽视。

第一,确定做题顺序。首先要分析一下试卷结构,试卷的试题顺序是:先是数学(由条件充分性判断和问题求解构成),满分是75分,限定时间60~70分钟完成;然后是逻辑推理,满分60分,限定时间50分钟完成;最后是两篇作文,满分65分,限定时间60分钟完成。有以下几种常见的答题顺序,我们来逐一分析利弊。

(1) 按照试卷结构的顺序做题,即先做数学,再做逻辑,最后写作文。这种做题顺序适合数学基础比较扎实的考生,因为只有基础牢固,才能在规定的时间将数学做完,不至于占用

后面逻辑和写作的时间。如果基础不太好,那么 25 道数学题在规定时间内完不成,一旦占用后面的时间,则会导致在做逻辑题的时候分析仓促,匆忙作答肯定会大量失分,然后因为心里还在惦记数学和逻辑,所以在写作文的时候,精力不够集中,导致写作质量下降,最后会使综合能力这门考试满盘皆输。所以大家一定要结合自己的能力选择合适的做题顺序。

(2) 先做逻辑,然后做数学,最后写作文。这种顺序适合上考场前自己对数学没有太大信心的考生。这类考生先趁着大脑清醒,一发下试卷,不受任何干扰,先完成逻辑,这样能提高逻辑的得分;然后去做数学,尽自己的能力使会做的题一定要拿分,不会做的题先将明显错误的选项排除掉,实在没时间就凭运气随便选一个;最后将作文写好。这种做题方法是一种保守的答卷方法,它可以保证此门考试过“温饱线”,如果运气好,可以达到“小康”。

(3) 先写作文,然后做数学,最后做逻辑。这种顺序适合考试的作文题目正好是你平时练过的,或者你对作文题目很熟悉,这样你可以一气呵成先完成作文。写完作文后,接着做数学,一定要注意把握好考试时间,也就是说在做逻辑的时候千万不能匆忙得出结论,不要造成前松后紧的被动局面。

以上是三种常见的做题顺序,大家在考试时根据自己的特点进行选择,找一个自己最有利于发挥的顺序,即先做自己的强项,保证会做的都得分,然后再做那些自己没有把握的题目,实在不行就碰碰运气。

第二,在考试的时候要有所放弃,千万不要贪求数量,而要注重答题正确率。一定要记住稳中求快,会做的一定一定要拿分!在考试的时候,先通观整个试题,迅速客观地评估自己的实力,明确哪些分数是必得的,哪些是可能得到的,哪些是根本得不到的,再采取不同的应对方式,才能镇定自如,进退有据,最终从整体上获胜。

第三,保持良好的考场心态。其实最重要的是看考生如何以一种平常心去面对它。考试的时候不要去想自己花了很多工夫一定会考好甚至是超常发挥,也不要去想如果考不好会怎么样,不要给自己太大的压力。只要走进考场,面带笑容,对自己说“我已经尽力而为了,不论结果如何都无怨无悔”。考试的时候千万不要因为遇到难题而没有勇气往下做,要知道,你觉得题目难,大多数考生也会觉得难,关键是看谁能坚持到最后。

第四,要记住做选择题的技巧及捷径,即要以最少的题给条件挑选出答案!做选择题的时候,可以巧妙地运用图示法和赋值法。这两种方法很有效。有的考生平时用得很多,但考试一紧张就忘了,而用一些常规的方法去硬算,结果既浪费了时间又容易出错。一般来说,题目的结果不会特别复杂,一旦出现了很复杂的结果,就需要重点检查一下。如果遇到自己不会做和没有把握的题目,千万不要留空白,可以随便选上一个选项,说不定正好能选对。下面谈谈快速求解单项选择题的几种方法。

推演法:它适用于题干中给出的条件是解析式子,通过题干的已知条件进行求解,这种方法适合问题求解题型。

图示法:它适用于题干中给出的函数具有某种特性,例如奇偶性、周期性或者给出的事件是两个事件的情形,用图示法做就显得格外简单。这种方法尤其适合求解概率中随机事件之间的关系问题。

举反例排除法:排除了 4 个,剩下的那个就是正确的答案,这种方法适用于题干中给出的函数是抽象函数的情况或者没有限定变量的范围的题目。

逆推法:所谓逆推法就是假定被选的 5 个答案中某一个正确,然后做逆推,如果得到的

结果与题设条件或尽人皆知的正确结果矛盾,则否定这个备选答案.

赋值法:也就是说将备选的一个答案用具体的数字代入,如果与假设条件或众所周知的事实发生矛盾则予以否定.这种方法在做充分性判断的时候很有用,通过将题给条件的变量进行赋值来判断条件的充分性,既节省考试时间,又不容易出错.

总之,要加强综合解题能力的训练,力求在解题思路上有突破. 管理类硕士研究生考试的试题与教科书上习题的不同点在于,前者是在对基本概念、基本定理、基本方法充分理解的基础上的综合应用,有较大的灵活性,往往一个命题覆盖多个内容,涉及概念、直观背景、推理和计算.许多考生往往难以适应,其突出感觉是没有思路,这正是考生考前准备时应解决的突破口.考虑到数学学科的特点,要求考生自己将所有的解题思路都琢磨出来是十分困难的,这方面通常可以通过求教有经验的老师,参加有较好信誉的辅导班,或者阅读有关的辅导书解决.必须强调的是,辅导班或辅导书只是学习的一种手段,最终解决问题还要靠自己动手动脑.要充分利用一切学习机会,力求对常见的考题类型、题型、思路、特点有一个系统的把握,并在此基础上自己动手做一定数量的综合性练习题,温故而知新,不断提高自己的分析解题能力.

但愿本书能助你成功,金榜题名,这是笔者的最大心愿!

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

充分性判断题型说明

条件充分性判断题是管理类联考的特有题目,来源于 GMAT 考试的命题思路,旨在考查考生的逆向推导和全面分析能力,往往结合数学和逻辑推理的知识来进行求解,对考生的要求较高,很多考生在考试中条件充分性判断题错误率极高.下面详述一下这类题目的答题要点:

一、充分性与必要性命题定义

对两个命题 A 和 B 而言,若由命题 A 成立,肯定可以推出命题 B 也成立(即 $A \Rightarrow B$ 为真命题),则称命题 A 是命题 B 成立的充分条件,或称命题 B 是命题 A 成立的必要条件.

【注意】 A 是 B 的充分条件可以巧妙的理解为:有 A 必有 B ,无 A 时 B 不定.

二、题目设计与各选项含义

这类题目的特征是,题干给一个待定的命题,下面给出两个条件,本类题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论,即只要分析条件是否充分即可,而不必考虑条件是否必要.阅读条件(1)和(2)后选择:

- (A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分.
- (B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分.
- (C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分.
- (D) 条件(1)充分,条件(2)也充分.
- (E) 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

▲以上规定全书都适用,以后不再重复说明.

三、选项的图示描述

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------------------|
| (1) \checkmark | (2) \times | (A) |
| (1) \times | (2) \checkmark | (B) |
| (1) \times | (2) \times | (1)+(2)联(合)立 \checkmark (C) |
| (1) \checkmark | (2) \checkmark | (D) |
| (1) \times | (2) \times | (1)+(2)联(合)立 \times (E) |

注:“ \checkmark ”表示充分,“ \times ”表示不充分,“+”表示两条件需要联合.

四、对考生的挑战

1. 运算方面,每个条件要推导判断,至少要运算两次.
2. 准确度上要求高,即使一个条件判断正确,另一个条件判断错误,就会选错.只有当

两个条件都判断正确,才能得分.

3. 无论怎么做都有备选答案,对考生而言,不易检查.
4. 容易设置陷阱题目,很容易出现“差之毫厘,谬以千里”的情况.

五、常用的求解方法

1. 自下而上,即由条件带入题干

若由条件可推导出题干,则条件是题干的充分条件,解法一是解“条件充分性判断”型题的最基本的解法,应熟练掌握.其特征是至少运算两次.

2. 自上而下,先把题干成立的数值或范围算出,再比较条件(1)和(2)

这也叫题干等价推导法(寻找题干结论的充分必要条件),即:要判断 A 是否是 B 的充分条件,可找出 B 的充要条件 C ,再判断 A 是否是 C 的充分条件.其特征是只需运算一次即可.

六、解题相应的技巧

1. 特殊值法

可以对条件取特值,代入题干验证.注意的是,如果在条件中取一个特值,满足题干成立,但不能说明这个条件一定充分,但如果在条件中取一个特值,不满足题干成立,则一定能说明这个条件不充分,也即是特殊值只能证伪,不能证真.

2. 特殊反例法

由条件中的特殊值或条件的特殊情况入手,推导出与题干矛盾的结论,从而得出条件不充分的选择.

【注意】此种方法绝对不能用在条件具有充分性的肯定性的判断上.

3. 当条件给定的参数范围落入题干成立范围时,即判断该条件充分.也即是条件的范围是题干成立的子集,才充分.

4. 对条件做不同标记,这样方便答题.

5. 当发现所给的两个条件是矛盾关系时,备选答案范围为 $A、B、D、E$.

6. 当发现所给的条件是包含关系时,比如条件(2)的范围包含条件(1)的范围,备选答案范围为 $A、D、E$.

7. 当确定条件(1)(2)具备充分性,条件(2)(1)未定的情况时,备选答案范围为 $A(B)、D$.

8. 当确定条件(1)(2)不具备充分性,条件(2)(1)未定的情况时,备选答案范围为 $B(A)、C、E$.

【注意】考试中,很多考生不敢选 E 而导致丢掉应该得到的分数,所以在确定无误的情况下,要能够果敢的选 E .

七、小测试

1. $x \geq 5$.

- (1) $x = 5$. (2) $x > 5$.

2. $x > 5$.

(1) $x \geq 5$. (2) $x \geq 6$.

3. $3 < x \leq 5$.

(1) $x \geq 4$. (2) $x < 5$.

4. $x = \pm 5$.

(1) $x = 5$. (2) $x = -5$.

5. $(x+3)(x-5) = 0$.

(1) $x = \pm 5$. (2) $x > 0$.

6. $(x+3)(x-5) = 0$.

(1) $x = \pm 5$. (2) $x = \pm 3$.

7. $(x+3)(x-5) = 0$.

(1) $x = -3$. (2) $x = 5$.

8. $(a+3)(b-5) = 0$.

(1) $a = -3$. (2) $|b| = 5$.

9. $x^2 = 9$.

(1) $x = 3$. (2) $x = -3$.

10. $a + b \neq 5$.

(1) $a \neq 2$. (2) $b \neq 3$.

答案:1—5DBCDC 6—10EDADE,读者朋友们,你们做对了几道?

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

第一部分 算 术

【画龙】本部分在考试中占8~9个考题(数学共25题),其中第一章占2个考题,主要围绕质数、合数等重要实数概念及绝对值和比例的化简计算.第二章占6~7个考题,文字应用题是命题的核心,也是考试中“兵家必争”之地,是决定联考成败的关键章节.

【点睛】本部分建议用三周时间复习,其中第一章一周时间,1~2天温习第一节的考试要点,1~2天再做第二节和第三节例题,2~3天做第五节的练习题.第二章用两周的时间复习,2~4天温习第一节的考试要点,2~4天再做第二节和第三节例题,4~6天做第五节的练习题.

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

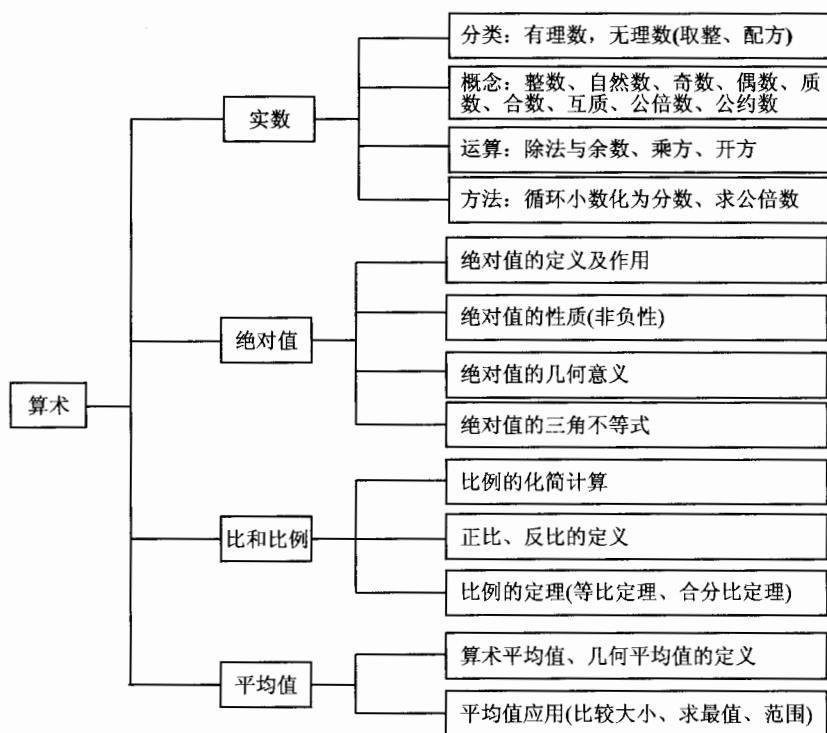
名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

第一章 实数、绝对值、比和比例

【大纲考点】1. 整数 (1) 整数及其运算,(2) 整除、公倍数、公约数,(3) 奇数、偶数,(4) 质数、合数;2. 分数、小数、百分数;3. 比与比例;4. 数轴与绝对值.

【命题剖析】对于实数的计算,不仅要掌握整数的运算技巧、分数的运算技巧、比例的运算技巧等;更要从一定高度对各块数学知识做一个综合归纳,例如特殊的求和变形方法及技巧. 本章命题主要体现在五个方面:1. 考查概念型的题目,主要围绕奇数、偶数、质数、合数、公倍数和公约数来展开;2. 考查计算型的题目,主要围绕很长一串数字的化简计算及比例定理的应用;3. 有理数与无理数的性质及其化简;4. 利用绝对值的几何意义进行化简计算;5. 平均值的定义及求最值的应用.

【知识体系】



【备考建议】对于教师,建议课时控制在4~5个课时(每个课时45分钟,下同);对于考生,建议在学习时要注意概念的理解及应用,不要死记硬背概念和公式,要通过做题来加深对概念和公式的掌握.

第一节 考试要点剖析

一、实数

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

1. 数的概念与性质

(1) 整数与自然数

整数 \mathbf{Z} : $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$.

自然数 \mathbf{N} : $0, 1, 2, \cdots$.

整数 \mathbf{Z} $\left\{ \begin{array}{l} \text{正整数 } \mathbf{Z}^+ \\ 0 \\ \text{负整数 } \mathbf{Z}^- \end{array} \right\}$ 自然数 \mathbf{N} (最小的自然数为 0)

(2) 质数与合数

质数: 如果一个大于 1 的正整数, 只能被 1 和它本身整除 (只有 1 和其本身两个约数), 那么这个正整数叫做质数 (质数也称素数).

合数: 一个正整数除了能被 1 和本身整除外, 还能被其他的正整数整除 (除了 1 和其本身之外, 还有其他约数), 这样的正整数叫做合数.

▲质数与合数有如下重要性质:

① 质数和合数都在正整数范围, 且有无数多个.

② 2 是唯一的既是质数又是偶数的整数, 即是唯一的偶质数. 大于 2 的质数必为奇数. 质数中只有一个偶数 2, 最小的质数为 2.

③ 若正整数 a, b 的积是质数 p , 则必有 $a=p$ 或 $b=p$.

④ 1 既不是质数也不是合数.

⑤ 如果两个质数的和或差是奇数, 那么其中必有一个是 2; 如果两个质数的积是偶数, 那么其中也必有一个是 2.

⑥ 最小的合数为 4. 任何合数都可以分解为几个质数的积, 能写成几个质数的积的正整数就是合数.

互质数: 公约数只有 1 的两个数称为互质数, 如 9 和 16.

(3) 奇数与偶数

奇数: 不能被 2 整除的数.

偶数: 能被 2 整除的数. 注意, 0 属于偶数.

整数 \mathbf{Z} $\left\{ \begin{array}{l} \text{奇数: } 2n \pm 1 \\ \text{偶数: } 2n \end{array} \right.$

【注意】两个相邻整数必为一奇一偶. 除了最小质数 2 是偶数外, 其余质数均为奇数.

(4) 分数与小数的

分数: 将单位“1”平均分成若干份, 表示这样的一份或几份的数叫做分数.

小数: 实数的一种特殊的表现形式. 所有分数都可以表示成小数, 小数中的圆点叫做小数点, 它是一个小数的整数部分和小数部分的分界号. 其中整数部分是零的小数叫做纯小

数,整数部分不是零的小数叫做带小数.

(5) 整除、倍数、约数

数的整除:当整数 a 除以非零整数 b ,商正好是整数而无余数时,则称 a 能被 b 整除或 b 能整除 a .

倍数,约数:当 a 能被 b 整除时,称 a 是 b 的倍数, b 是 a 的约数.

最小公倍数:几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数,其中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数.

最小公倍数的表示:数学上常用方括号表示.如 $[12,18,20]$ 即 12、18 和 20 的最小公倍数.

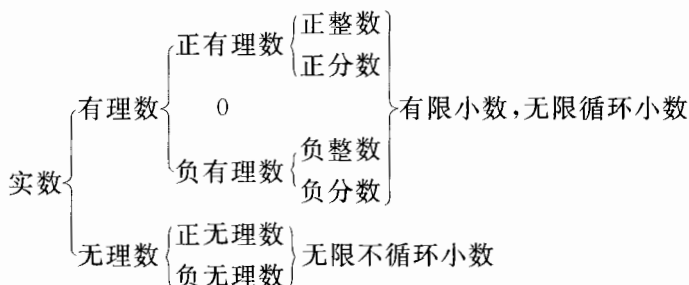
最小公倍数的求法:求几个自然数的最小公倍数,有两种方法:

① 分解质因数法.先把这几个数分解质因数,再把它们一切公有的质因数和其中几个数公有的质因数以及每个数的独有的质因数全部连乘起来,所得的积就是它们的最小公倍数.例如,求 $[12,18,20]$,因为 $12=2^2 \times 3$, $18=2 \times 3^2$, $20=2^2 \times 5$,其中三个数的公有的质因数为 2,两个数的公有质因数为 2 与 3,每个数独有的质因数为 5 与 3,所以, $[12,18,20]=2^2 \times 3^2 \times 5=180$. (可用短除法计算)

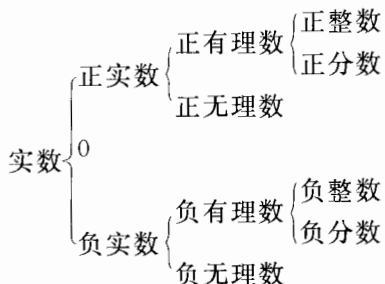
② 公式法.由于两个数的乘积等于这两个数的最大公约数与最小公倍数的积.即 $(a,b) \times [a,b]=a \times b$. 所以,求两个数的最小公倍数,就可以先求出它们的最大公约数,然后用上述公式求出它们的最小公倍数.例如,求 $[18,20]$,即得 $[18,20]=18 \times 20 \div (18,20)=18 \times 20 \div 2=180$. 求几个自然数的最小公倍数,可以先求出其中两个数的最小公倍数,再求这个最小公倍数与第三个数的最小公倍数,依次求下去,直到最后一个为止.最后所得的那个最小公倍数,就是所求的几个数的最小公倍数.

2. 实数的分类

(1) 实数包括有理数和无理数



(2) 按性质符号分类



3. 常见整除的特点

能被 2 整除的数:个位为 0,2,4,6,8. \triangle

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

能被 3 整除的数:各数位数字之和必能被 3 整除. \triangle

能被 4 整除的数:末两位(个位和十位)数字必能被 4 整除.

能被 5 整除的数:个位为 0 或 5. \triangle

能被 6 整除的数:同时满足能被 2 和 3 整除的条件.

能被 8 整除的数:末三位(个位、十位和百位)数字必能被 8 整除.

能被 9 整除的数:各数位数字之和必能被 9 整除. \triangle

能被 10 整除的数:个位必为 0.

能被 11 整除的数:从右向左,奇数位数字之和减去偶数位数字之和能被 11 整除(包括 0).

能被 12 整除的数:同时满足能被 3 和 4 整除的条件.

二、绝对值

▲考试要求:理解绝对值定义及其几何意义,掌握其性质及其运算法则,会求解含有绝对值的等式或不等式的计算问题.

1. 定义

正数的绝对值是它本身;负数的绝对值是它的相反数;零的绝对值还是零.

2. 数学描述

实数 a 的绝对值定义为:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases}$$

其几何意义是一个实数 a 在数轴上所对应的点到原点的距离值.

3. 绝对值的性质

(1) 对称性: $|-a| = |a|$, 即互为相反数的两个数的绝对值相等.

(2) 等价性: $\sqrt{a^2} = |a|$, $|a|^2 = |a^2| = a^2 (a \in \mathbf{R})$.

(3) 自比性: $-|a| \leq a \leq |a|$, 推而广之,

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(4) 非负性: 即 $|a| \geq 0$, 任何实数 a 的绝对值非负.

推而广之, 具有非负性的数还有正偶数次方(根式), 如 $a^2, a^4, \dots, \sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \dots$

▲考点规则: 若干个具有非负性质的数之和等于零时, 则每个非负数应该为零; 有限个非负数之和仍为非负数.

4. 基本不等式 \triangle

适合不等式 $|x| < a (a > 0)$ 的所有实数所对应的就是全部与原点距离小于 a 的点, 即, $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a (a > 0)$. 同理可得, $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a (a > 0)$.

5. 三角不等式

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

左边等号成立的条件： $ab \leq 0$ 且 $|a| \geq |b|$ ；

右边等号成立的条件： $ab \geq 0$ 。

推而广之，同样有 $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$ 。

左边等号成立的条件： $ab \geq 0$ 且 $|a| \geq |b|$ ；

右边等号成立的条件： $ab \leq 0$ 。

【注意】考试要求掌握等号成立条件的判断。

三、比和比例

1. 比

两个数相除，又称为这两个数的比，即 $a:b = \frac{a}{b}$ 。其中 a 叫做比的前项， b 叫做比的后项。相

除所得商叫做比值，记作 $a:b = \frac{a}{b} = k$ 。在实际应用中，常将比值表示成百分数，称为百分比。

2. 比例

相等的比称为比例，记作 $a:b = c:d$ 或 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。其中 a 和 d 称为比例外项， b 和 c 称为比例内项。当 $a:b = b:c$ 时，称 b 为 a 和 c 的比例中项，显然当 a, b, c 均为正数时， b 是 a 和 c 的几何平均值。

3. 正比

若 $y = kx$ (k 不为零)，则称 y 与 x 成正比， k 称为比例系数。

【注意】并不是 x 和 y 同时增大或减小才称为正比。比如当 $k < 0$ 时， x 增大时， y 反而减小。

4. 反比

若 $y = k/x$ (k 不为零)，则称 y 与 x 成反比， k 称为比例系数。

5. 比例的基本性质

$$(1) a:b = c:d \Leftrightarrow ad = bc.$$

$$(2) a:b = c:d \Leftrightarrow b:a = d:c \Leftrightarrow b:d = a:c \Leftrightarrow d:b = c:a.$$

6. 重要定理

(1) 更比定理：

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

(2) 反比定理：

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

(3) 合比定理：

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

(4) 分比定理：

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

(5) 合分比定理:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm mc}{b \pm md} \xrightarrow{m=1} \frac{a \pm c}{b \pm d}.$$

(6) 等比定理:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} \quad (b+d+f \neq 0).$$

7. 增减性变化关系 ($a, b, m > 0$)

若 $\frac{a}{b} > 1$, 则 $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$. 注意, 反之也成立.

若 $0 < \frac{a}{b} < 1$, 则 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$. 注意, 反之也成立.

四、平均值

1. 算术平均值

设 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 称

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

为这 n 个数的算术平均值, 简记为 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

2. 几何平均值

设 n 个正数 x_1, x_2, \dots, x_n , 称 $x_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ 为这 n 个正数的几何平均值, 简记为 $x_g =$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

【注意】几何平均值是对于正数而言.

3. 基本定理 (\triangle)

当 x_1, x_2, \dots, x_n 为 n 个正数时, 它们的算术平均值不小于它们的几何平均值, 即

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (x_i > 0, i=1, \dots, n).$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时, 等号成立. \therefore

4. 定理的应用

(1) 当 $n=2$ 时, 正数 x_1, x_2 的几何平均值 $\sqrt{x_1 x_2}$ 称为 x_1, x_2 的比例中项.

(2) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b > 0$).

(3) $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ($a > 0$), 即对于正数而言, 互为倒数的两个数之和不小于 2, 且当 $a=1$

时取得最小值 2.

第二节 基础过关题型

【题型 1】考查质数、合数、奇数、偶数的性质

【思路点拨】掌握并灵活应用考查质数、合数、奇数、偶数的性质。

【例 1】记不超过 15 的质数的算术平均数为 M ，则与 M 最接近的整数是()。

- (A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 11 (E) 6

【解析】首先求出不超过 15 的质数为：2, 3, 5, 7, 11, 13，然后根据平均数的公式：

$$\frac{2+3+5+7+11+13}{6} \approx 6.83 \approx 7, \text{ 从而选 B.}$$

【例 2】20 以内的质数中，两个质数之和还是质数的共有()种。

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

【解析】20 以内的质数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19，由于大于 2 的质数一定为奇数，要保证两数之和还是质数，则必须有一个为偶数 2，所以另一个可能为 3, 5, 11, 17。共有 4 种情况，选 C。

【例 3】某人左右两手分别握了若干颗石子，左手中石子数乘 3 加上右手中石子数乘 4 之和为 29，则右手中石子数为()。

- (A) 奇数 (B) 偶数 (C) 质数 (D) 合数 (E) 以上结论均不正确

【解析】根据题意得到：左 $\times 3$ + 右 $\times 4 = 29$ (奇数)，可以得到：右 $= (29 - \text{左} \times 3) / 4$ 为整数，所以当左手中的石子数为 3 或 7 时，才能整除，得到右手中的石子数为 5 或 2。因为 2 和 5 都是质数，从而选 C。

【评注】如果这个题目问：左手中石头数，又如何分析？

【例 4】一班同学围成一圈，每位同学的一侧是一位同性同学，而另一侧是两位异性同学，则这班的同学人数()。

- (A) 一定是 4 的倍数 (B) 不一定是 4 的倍数 (C) 一定不是 4 的倍数
(D) 一定是 2 的倍数，不一定是 4 的倍数 (E) 以上结论均不正确

【解析】根据题意得到同学的排列规律：……男男女女男男女女……，也就是说有偶数个男生和偶数个女生，并且男生的人数等于女生的人数，所以全班人数一定是 4 的倍数，从而选 A。

【题型 2】整除及倍数

【思路点拨】记住常见整除的特点，尤其掌握被 2, 3, 5, 9 整除的特征。

【例 5】三个数的和是 312，这三个数分别能被 7, 8, 9 整除，而且商相同，则最大的数与最小的数相差()。

- (A) 18 (B) 20 (C) 22 (D) 24 (E) 26

【解析】由于三个数分别能被 7, 8, 9 整除，而且商相同，所以可设这三个数分别是 $7n$, $8n$, $9n$ 。又由于三个数的和是 312，可得 $7n + 8n + 9n = 312$ ，解得 $n = 13$ ，故最大的数与最小的数相差 26。所以选 E。

【例 6】有()个四位数满足下列条件:它的各位数字都是奇数;它的各位数字互不相同;它的各位数字都能整除它本身。

- (A) 10 (B) 7 (C) 8 (D) 5 (E) 6

【解析】奇数有 1, 3, 5, 7, 9, 如果选中 1, 3, 5, 7 组成四位数, 则无法被 3 整除; 如果选中 1, 3, 5, 9 组成四位数, 只要 5 放在个位, 1, 3, 9 分别放在十位、百位、千位(排序), 则均能满足题干, 所以有 6 个; 同理, 其他均不满足, 因此共有 6 个数, 选 E。

【题型 3】公倍数与公约数

【思路点拨】如果用 a 和 b 表示两个正整数, 则这两个数的最大公约数与最小公倍数关系是: $(a, b) \times [a, b] = a \times b$. 其中 (a, b) 表示最大公约数, $[a, b]$ 表示最小公倍数。

【例 7】两个正整数甲数和乙数的最大公约数是 6, 最小公倍数是 90. 如果甲数是 18, 那么乙数是 m , 则 m 的各个数位之和为()。

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

【解析】根据结论: 两个数的最大公约数与最小公倍数的乘积等于这两数的乘积. 则它们的最大公约数与最小公倍数的乘积为 $6 \times 90 = 540$, 则乙数为 $540 \div 18 = 30$. 故乙的各个数位之和为 3, 所以选 B。

【例 8】甲、乙、丙三人沿着 200 米的环形跑道跑步, 甲跑完一圈要 1 分 30 秒, 乙跑完一圈要 1 分 20 秒, 丙跑完一圈要 1 分 12 秒. 三人同时、同向、同地起跑, 当三人第一次在出发点相遇时, 甲、乙、丙三人各跑的圈数之和为()。

- (A) 27 (B) 30 (C) 36 (D) 39 (E) 42

【解析】首先求出三人时间的最小公倍数: $[90, 80, 72] = 720$ (秒), 则每人跑的圈数为:

甲跑了: $720 \div 90 = 8$ (圈), 乙跑了: $720 \div 80 = 9$ (圈), 丙跑了 $720 \div 72 = 10$ (圈), 所以三人跑的圈数之和为 $8 + 9 + 10 = 27$ (圈), 所以选 A。

【题型 4】考查绝对值的非负性质

【思路点拨】掌握两点: (1) 有限个非负数之和为零, 则每个非负数必等于零; (2) 有限个非负数之和仍然为非负数。

【例 9】已知 $|x - y + 1| + (2x - y)^2 = 0$, 那么 $\log_2 x =$ ()。

- (A) 1 (B) 0 (C) 5 (D) 16 (E) -1

【解析】根据非负性质, 得到 $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x - y = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$ 得到 $\log_2 1 = 0$, 选 B。

【例 10】 x, y, z 满足条件 $|x^2 + 4xy + 5y^2| + \sqrt{z + \frac{1}{2}} = -2y - 1$, 则 $(4x - 10y)^z$ 等于()。

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (D) 2 (E) $\frac{1}{2}$

【解析】将原式变形为 $(x + 2y)^2 + y^2 + \sqrt{z + \frac{1}{2}} + 2y + 1 = 0$,

配方得到 $(x + 2y)^2 + (y + 1)^2 + \sqrt{z + \frac{1}{2}} = 0$, 再根据非负性质, 得到

$$\begin{cases} z + \frac{1}{2} = 0, \\ y + 1 = 0, \\ x + 2y = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} z = -\frac{1}{2}, \\ y = -1, \\ x = 2, \end{cases}$$

则 $(4x - 10y)^z = (4 \times 2 + 10)^{-\frac{1}{2}} = 18^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, 从而选 C.

【题型 5】对形如 $\frac{|x|}{x}$ 或 $\frac{x}{|x|}$ 的表达式分析

【思路点拨】根据公式 $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 进行求解分析.

【例 11】已知 $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} = 1$, 则 $\left(\frac{|abc|}{abc}\right)^{2015} \div \left(\frac{bc}{|ab|} \cdot \frac{ac}{|bc|} \cdot \frac{ab}{|ca|}\right)$ 的值为 ().

- (A) 1 (B) -1 (C) ± 1 (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

【解析】根据 $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} = 1$, 得到 a, b, c 中两正一负. 不妨令 $a > 0, b > 0, c < 0$, 代入 $(-1) \div \left(\frac{ab}{|ab|} \cdot \frac{bc}{|bc|} \cdot \frac{ac}{|ca|}\right) = -1$, 从而选 B.

【例 12】若 $\frac{x}{y} = 3$, 则 $\frac{|x+y|}{x-y}$ 的值为 ().

- (A) 2 (B) -2 (C) ± 2 (D) 3 (E) ± 3

【解析】由 $\frac{x}{y} = 3$ 得到 $x = 3y$, 则 $\frac{4|y|}{2y} = \frac{2|y|}{y} = \begin{cases} 2, & y > 0, \\ -2, & y < 0, \end{cases}$ 故选 C.

【题型 6】一般比例式计算问题

【思路点拨】一般比例的有关试题都可通过设出比例系数的方法得到解决, 否则解题过程随试题难度的增大, 将变得越来越复杂、繁琐.

【例 13】设 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6$, 则使 $x + y + z = 74$ 成立的 y 值是 ().

- (A) 24 (B) 36 (C) $\frac{74}{3}$ (D) $\frac{37}{2}$ (E) 26

【解析】这是典型的比例问题, 可利用比例系数去求解. 由已知有 $\frac{1}{x} = 4k, \frac{1}{y} = 5k, \frac{1}{z} = 6k$, 即

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4k}, \\ y = \frac{1}{5k}, \\ z = \frac{1}{6k} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{6k} = 74 \Leftrightarrow k = \frac{1}{120}, \text{代入 } y = \frac{1}{5k} = \frac{120}{5} = 24, \text{从而选 A.}$$

【另解】 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6 \Rightarrow x : y : z = \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = 15 : 12 : 10$, 又 $x + y + z = 74$, 故得到 $y = 24$.

【题型 7】考查正比反比问题

【思路点拨】正比反比问题要引入比例系数来分析, 注意比例系数 $k \neq 0$.

【例 14】已知 $y = y_1 - y_2$, 且 y_1 与 $\frac{1}{2x^2}$ 成反比例, y_2 与 $\frac{3}{x+2}$ 成正比例. 当 $x = 0$ 时, $y = -3$, 又当 $x = 1$ 时, $y = 1$, 那么 y 的 x 表达式是().

- (A) $y = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{x+2}$ (B) $y = 3x^2 - \frac{6}{x+2}$ (C) $y = 3x^2 + \frac{6}{x+2}$
(D) $y = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{x+2}$ (E) $y = -3x^2 - \frac{3}{x+2}$

【解析】根据题目得到 $y_1 = \frac{k_1}{\frac{1}{2x^2}} = 2k_1x^2$, $y_2 = \frac{3k_2}{x+2}$, 得到 $y = 2k_1x^2 - \frac{3k_2}{x+2}$, 根据过 $(0, -3)$ 和 $(1, 1)$ 点, 列出方程组

$$\begin{cases} -3 = -\frac{3}{2}k_2, \\ 1 = 2k_1 - \frac{3 \times k_2}{3} = 2k_1 - k_2, \end{cases} \quad \text{解出 } k_1 = \frac{3}{2}, k_2 = 2, \text{ 从而 } y = 3x^2 - \frac{6}{x+2}, \text{ 选 B.}$$

【注意】考试时可以采用特值验证的方法求解. 可以验证当 $x = 0$ 时, $y = -3$.

【题型 8】考查平均值的基本定义和概念

【思路点拨】首先掌握平均值的计算公式, 此外注意在几何平均值的概念中, 要求每个元素都要为正数, 而在算术平均值中无此规定.

【例 15】三个实数 $1, x-2$ 和 x 的几何平均值等于 $4, 5$ 和 -3 的算术平均值, 则 x 的值为().

- (A) -2 (B) 4 (C) 2 (D) -2 或 4 (E) 2 或 4

【解析】由题意得到 $\sqrt[3]{1(x-2)x} = \frac{4+5-3}{3} \Rightarrow x = -2$ 或 $x = 4$, 但 $x = -2$ 要舍掉, 选 B.

【评注】注意在几何平均值的概念中, 要求每个元素都要为正数, 所以舍掉不符合要求的数.

【例 16】 x, y 的算术平均值是 2 , 几何平均值也是 2 , 则 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{y}}$ 的几何平均值是().

- (A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\frac{1}{2}$

【解析】根据题目得到 $x = y = 2$, 从而 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{y}}$ 的几何平均值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 从而选 D.

【评注】若告知 n 个数的几何平均值和算术平均值相等, 则这 n 个数相等, 其值等于算术平均值或几何平均值.

第三节 强化突破题型

【题型 1】有理数、无理数

【思路点拨】首先要能根据特征辨别有理数与无理数,其次对无理式进行配方化简,并能求出无理数的整数部分和小数部分.

【例 1】在 $-\frac{2}{3}, 0, \sqrt{3}, -3.14, \frac{\pi}{2}, \sqrt{4}, -0.1010010001\cdots$ (每两个 1 之间依次多一个 0), $\log_2 8$ 这 8 个实数中,无理数有()个.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 1

【解析】对实数分类,不能被表面形式迷惑,而应从最后结果特征判断. 首先明确无理数的概念,即“无限不循环小数叫做无理数”. 一般来说,用根号表示的数不一定就是无理数,如 $\sqrt{4}=2$ 是有理数,关键在于这个形式上带根号的数的最终结果是不是无限不循环小数. 同样,用对数符号表示的数也不一定就是无理数,如 $\log_2 8=3$ 等. 而 $-0.1010010001\cdots$ 尽管有规律,但它是无限不循环小数,是无理数. $\frac{\pi}{2}$ 是无理数,而不是分数. 在上面所给的实数中,只有 $\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, -0.1010010001\cdots$ 这三个数是无理数,其他五个数都是有理数,故选 B.

【例 2】已知 x 是无理数,且 $(x+1)(x+3)$ 是有理数,则下列叙述有()个正确:(1) x^2 是有理数;(2) $(x-1)(x-3)$ 是无理数;(3) $(x+2)^2$ 是有理数;(4) $(x-1)^2$ 是无理数.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1 (E) 0

【解析】(1) $x^2=(x+1)(x+3)-4x-3$, 由于 $(x+1)(x+3)$ 为有理数, $4x$ 为无理数, 3 为有理数,故 x^2 是无理数;(2) $(x-1)(x-3)=(x+1)(x+3)-8x$, 同理可得 $(x-1)(x-3)$ 是无理数;(3) $(x+2)^2=(x+1)(x+3)+1$, 可得 $(x+2)^2$ 是有理数;(4) $(x-1)^2=(x+1)(x+3)-6x-2$, 可得 $(x-1)^2$ 是无理数,选 B.

【例 3】设整数 a, m, n 满足 $\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$, 则 $a+m+n$ 的取值有()种.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1 (E) 无数种

【解析】由 $\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$, 得到 $a^2-4\sqrt{2}=(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2=m+n-2\sqrt{m\cdot n}$, 从而有 $\begin{cases} m\cdot n=8(m>n), \\ m+n=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=8, n=1, \\ a=\pm 3, \end{cases}$ 则 $a+m+n$ 的取值有 2 种, 选 A.

【题型 2】整数的除法

【思路点拨】掌握数的除法等式: 被除数 \div 除数 = 商 \cdots 余数 \Rightarrow 被除数 = 除数 \times 商 + 余数. 当余数为 0 时, 称为整除.

【例 4】若 n 是一个大于 100 的正整数, 则 n^3-n 一定有约数().

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 12

【解析】根据定理: 连续两个整数乘积一定能被 2! 整除, 连续 3 个整数乘积一定能被 3!

整除,连续 4 个整数乘积一定能被 $4!$ 整除, ..., 连续 k 个整数乘积能被 $k!$ 整除. 从而得到 $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ 表示 3 个连续整数, 故能被 $3!$ 整除, 所以选 B.

【评注】本题也可以采用特值法来验证选项.

【例 5】正整数 N 的 8 倍与 5 倍之和, 除以 10 的余数为 9, 则 N 的最末一位数字为().

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 9 (E) 7

【解析】 $8N + 5N = 13N$, 能被 10 除余 9, 说明 $13N$ 的个位为 9, 得到 N 的个位为 3, 选 B.

【例 6】1531 除以某质数, 余数得 13, 这个质数的各数位之和为().

- (A) 7 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 8

【解析】将 $1531 - 13 = 1518$ 分解得到 $1531 - 13 = 23 \times 11 \times 6$, 故这个质数为 23, 所以选 D.

【评注】在分解因式的时候, 一定要分解出比 13 大的质数, 因为除数要比余数大.

【题型 3】余数

【思路点拨】余数可以分为两大类, 一类是同余, 一类是不同余. 对于同余问题, 可以转化为整除分析.

【例 7】一个盒子装有不大于 200 颗糖, 每次 2 颗, 3 颗, 4 颗或 6 颗的取出, 最终盒内都只剩下一颗糖, 如果每次以 11 颗的取出, 那么正好取完, 则盒子里共有 m 颗糖, m 的各个数位之和为().

- (A) 8 (B) 10 (C) 4 (D) 12 (E) 6

【解析】每次 2 颗, 3 颗, 4 颗或 6 颗的取出, 最终盒内都只剩下 1 颗糖, 可得糖的数量减 1 后能被 2、3、4、6 整除. 由 2、3、4、6 的最小公倍数为 12, 则糖的数量减 1 能被 12 整除, 可设糖的数量为 $12k + 1$. 又由每次以 11 颗的取出, 正好取完, 说明糖的数量为 11 的倍数, 根据 $12k + 1 = 11k + (k + 1) \Rightarrow k + 1 = 11 \Rightarrow k = 10$, 因此共有 121 颗糖, 选 C.

【例 8】一盒围棋子, 4 只 4 只数多 3 只, 6 只 6 只数多 5 只, 15 只 15 只数多 14 只, 这盒围棋子在 150~200 之间. 则这盒围棋子 11 只的数, 最后余()只.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

【解析】由题可得, 棋子的数量被 4 除余 3、被 6 除余 5、被 15 除余 14, 由于余数均比除数少 1, 故棋子的数量加 1 则能被 4、6、15 整除. 又 4、6、15 的最小公倍数为 60, 并且棋子的数量介于 150~200 之间, 所以棋子的数量为 $60 \times 3 - 1 = 179$. 由于 179 除以 11 余 3, 故如果 11 只的数, 则最后余 3 只, 故选 B.

【题型 4】循环小数

【思路点拨】把纯循环小数化成分数, 并不像有限小数那样, 用 10、100、1000 等做分母, 而要用 9、99、999 等这样的数做分母, 其中“9”的个数等于一个循环节数字的个数; 一个循环节的数字所组成的数, 就是这个分数的分子, 如 $0.\dot{a}\dot{b} = \frac{ab}{99}$.

【例 9】纯循环小数 $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c}$ 写成最简分数时, 分子与分母之和是 58, 这个循环小数是().

(A) $0.\dot{5}6\dot{7}$ (B) $0.\dot{5}3\dot{7}$ (C) $0.\dot{5}1\dot{7}$ (D) $0.\dot{5}6\dot{9}$ (E) $0.\dot{5}6\dot{2}$

【解析】 $0.\dot{a}b\dot{c}$ 化为分数时是 $\frac{abc}{999}$, 当化为最简分数时, 因为分母大于分子, 所以分母大于 $58 \div 2 = 29$, 即分母是大于 29 的两位数, 由 $999 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, 推知 999 大于 29 的两位数约数只有 37, 所以分母是 37, 分子是 $58 - 37 = 21$. 因为 $\frac{21}{37} = \frac{21 \times 27}{37 \times 27} = \frac{567}{999}$, 所以这个循环小数是 $0.\dot{5}6\dot{7}$, 选 A.

【例 10】 $0.\dot{a}b\dot{c}$ 是一个纯循环小数 (a, b, c 表示数字), 已知小数点右边前 1000 位上, 各数字之和是 4664, 且字母 a, b, c 中表示的数字有两个是相等的. 求 a, b, c 的乘积为 ().

(A) 72 (B) 76 (C) 64 (D) 56 (E) 84

【解析】从题目中可知, 该循环小数的循环节是“ abc ”, 因此可以写下小数点右边前 1000 位上的数字, 依次为 $abcbcbcbcb \dots$, 用 $1000 \div 3 = 333(\text{商}) \dots 1$, 求出前 1000 位中有 333 组“ abc ”并余 1, 即知第 1000 位上的字母为 a , 所以前 1000 位中出现了 $333 + 1 = 334$ 个 a , 333 个 b 和 333 个 c . 已知这些数位上的数字之和是 4664, 用 $4664 \div 333 = 14 \dots 2$, 求出每组中 $a + b + c = 14$, 而余数 2 也就是第 1000 位上的 a , 因此 $a = 2, b + c = 14 - 2 = 12$. 根据条件“字母 a, b, c 中表示的数字有两个是相等的”, 先假设 b, c 中有一个与 a 相等, 那么另一个必定为 $12 - 2 = 10$, 但我们知道在一个数位上只能有一个数字, 显然不可能出现 10, 原来的假设不成立, 而只有当 $b = c = 12 \div 2 = 6$ 时才符合题意. 因此得到: $a = 2, b = c = 6$, 选 A.

【题型 5】非负性的应用

【思路点拨】主要考查根号内的表达式要求为非负的, 当根号里面的表达式互为相反数时, 则这个数必然为零.

【例 11】设 x, y, z 满足 $|3x + y - z - 2| + (2x + y - z)^2 = \sqrt{x + y - 2002} + \sqrt{2002 - x - y}$, 试求 $x + y + z$ 的值为 ().

(A) 4006 (B) 4004 (C) 4012 (D) 4016 (E) 4002

【解析】由 $x + y - 2002 \geq 0$ 且 $2002 - x - y \geq 0$, 可得 $x + y = 2002$.

由此可得等式右边的值为零. 那么原方程可化为: $|3x + y - z - 2| + (2x + y - z)^2 = 0$.

由非负性可得 $3x + y - z - 2 = 0, 2x + y - z = 0$.

由以上解得 $x = 2, y = 2000, z = 2004$, 故选 A.

【评注】此题等式右边其实隐藏了两等式必为零的条件, 利用这个条件, 又可推导右边两个被开方数必为 0 的结果, 从而得解. 隐藏解题条件是常见的出题方式.

【题型 6】绝对值的几何意义

【思路点拨】绝对值的几何意义: 一个数的绝对值, 是数轴上表示它的点到原点的距离. 两个数的差的绝对值的几何意义: $|a - b|$ 表示在数轴上, 数 a 和数 b 之间的距离.

【例 12】已知 $\frac{8x+1}{12} - 1 \leq x - \frac{x+1}{2}$, 关于 $|x-1| - |x-3|$ 的最值, 下列说法正确的是 ().

(A) 最大值为 1, 最小值为 -1 (B) 最大值为 2, 最小值为 -1

(C) 最大值为 2, 最小值为 -2 (D) 最大值为 1, 最小值为 -2

(E) 无最大值和最小值

【解析】 $\frac{8x+1}{12} - 1 \leq x - \frac{x+1}{2} \Rightarrow \frac{8x-11}{12} \leq \frac{x-1}{2}$, 得到 $8x-11 \leq 6x-6 \Rightarrow 2x \leq 5$,

解得 $x \leq \frac{5}{2}$.

当 $x \leq 1$ 时, $|x-1| - |x-3| = 1-x - (3-x) = -2$;

当 $1 < x \leq \frac{5}{2}$ 时, $|x-1| - |x-3| = x-1 - (3-x) = 2x-4$, 当 $x = \frac{5}{2}$ 时, 有最大值 1.

所以当 $x \leq \frac{5}{2}$, $|x-1| - |x-3|$ 的最大值是 1, 最小值是 -2, 选 D.

【题型 7】考查三角不等式的应用

【思路点拨】根据三角不等式 $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ 进行分析解题, 是每年考试的重点, 难点和热点问题, 处理方法可以从绝对值的运算法则、性质或绝对值的几何意义入手, 也可以用分类后画图像的方法处理. 注意三角不等式推广, 有限个实数之和的绝对值不大于它们的绝对值之和.

【例 13】已知 $|2x-a| \leq 1$, $|2x-y| \leq 1$, 则 $|y-a|$ 的最大值为().

(A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) 4 (E) 5

【解析】根据三角不等式 $|y-a| = |(2x-a) - (2x-y)| \leq |2x-a| + |2x-y| \leq 1 + 1 = 2$, 从而选 C.

【例 14】已知 $x \in [2, 5]$, $|a| = 5-x$, $|b| = x-2$, 则 $|b-a|$ 的取值范围是().

(A) $[-3, 5]$ (B) $[0, 5]$ (C) $[1, 3]$ (D) $[3, 5]$ (E) $[0, 3]$

【解析】首先根据 $|b-a| \leq |a| + |b| = 3$, 排除 A、B、D. 当 $x = 3.5$ 时, 再由 $|b-a|$ 的最小值可以取到 0, 故选择 E.

【例 15】已知 $|a| \neq |b|$, $m = \frac{|a| - |b|}{|a-b|}$, $n = \frac{|a| + |b|}{|a+b|}$, 则 m, n 之间的关系().

(A) $m > n$ (B) $m < n$ (C) $m = n$ (D) $m \leq n$ (E) 无法确定

【解析】根据 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 得 $n = \frac{|a| + |b|}{|a+b|} \geq 1$.

又由 $|a-b| \geq ||a| - |b||$, 得 $m = \frac{|a| - |b|}{|a-b|} \leq 1$, 因此 $n \geq m$, 从而选 D.

【评注】当 a, b 同号且 $|a| > |b|$ 时, $m = n = 1$.

【题型 8】比例定理

【思路点拨】主要掌握合分比与等比定理的应用. 在比例运算中, 要注意的是分母保证有意义, 所以不要忘记讨论分母的取值情况.

【例 16】若非零实数 a, b, c, d 满足等式 $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{a+b+c} = n$, 则 n 的值为().

(A) -1 或 $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) -1 (E) -1 或 $\frac{1}{3}$

【解析】方法一：由 $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{a+b+c} = n$,

所以当 $a+b+c+d \neq 0$ 时,由等比定理得 $n = \frac{a+b+c+d}{3(a+b+c+d)} = \frac{1}{3}$;

当 $a+b+c+d = 0$ 时,将 $b+c+d = -a$ 代入得 $n = \frac{a}{b+c+d} = \frac{a}{-a} = -1$, 故选 E.

方法二：由 $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{a+b+c} = n$, 得到如下等式:

$$a = (b+c+d)n, b = (a+c+d)n, c = (a+b+d)n, d = (a+b+c)n,$$

四个式相加得到

$$a+b+c+d = (a+b+c+d)3n \Rightarrow (a+b+c+d)(3n-1) = 0,$$

所以得到 $a+b+c+d = 0$ 或 $n = \frac{1}{3}$, 从而 $n = -1$ 或 $\frac{1}{3}$, 故选 E.

【评注】该题的难点是容易漏掉第二种情况,因此在比例计算时,不要忘记讨论分母的情况.

【题型 9】利用平均值定理求最值

【思路点拨】先验证给定函数是否满足最值三条件:(1) 各项均为正,(2) 乘积(或者和)为定值,(3) 等号能否取到;然后利用平均值公式求出最值. 可总结为口诀“一正二定三相等”.

【例 17】求函数 $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ ($x > 0$) 的最小值为().

(A) $3\sqrt[3]{9}$ (B) $2\sqrt[3]{9}$ (C) $\sqrt[3]{9}$ (D) $4\sqrt[3]{9}$ (E) 6

【解析】 $y = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}$,

当 $\frac{3x}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2}$ 时,即 $x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ 时取到最小值,故选 A.

【评注】此题的变形拆分是解题的关键,在拆分时,为了保证取到最值,要进行平均拆分.

【例 18】已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $x + y = 4$, 则 $3^x + 3^y$ 的最小值是().

(A) $3\sqrt{2}$ (B) 18 (C) 9 (D) $2\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{6}$

【解析】 $3^x + 3^y \geq 2\sqrt{3^x 3^y} = 2\sqrt{3^{x+y}} = 2\sqrt{3^4} = 18$, 从而选 B.

【例 19】若 $x > 0, y > 0$, 且 $x + 2y = 4$, 则 $\lg x + \lg y$ 的最大值是().

(A) $\lg 2$ (B) $2\lg 2$ (C) $\frac{1}{2}\lg 2$ (D) $3\lg 2$ (E) $\lg 3$

【解析】根据 $4 = x + 2y \geq 2\sqrt{2xy}$, 得到 $\sqrt{2} \geq \sqrt{xy}$, $xy \leq 2$,

从而 $\lg x + \lg y = \lg xy \leq \lg 2$, 选 A.

第四节 核心专题点睛

一、二次根式

一般地,形如 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 的代数式叫做二次根式. 根号下含有字母、且不能够开得尽方的式子称为无理式. 例如 $3a + \sqrt{a^2 + b} + 2b$, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 等是无理式, 而 $\sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$, $x^2 + \sqrt{2}xy + y^2$, $\sqrt{a^2}$ 等是有理式.

1. 分母(子)有理化

把分母(子)中的根号化去,叫做分母(子)有理化. 为了进行分母(子)有理化,需要引入有理化因式的概念. 两个含有二次根式的代数式相乘,如果它们的积不含有二次根式,就说这两个代数式互为有理化因式,如 $a\sqrt{x} + b\sqrt{y}$ 与 $a\sqrt{x} - b\sqrt{y}$, $a\sqrt{x} + b$ 与 $a\sqrt{x} - b$ 互为有理化因式.

分母有理化的方法是分母和分子都乘以分母的有理化因式,化去分母中的根号的过程;而分子有理化则是分母和分子都乘以分子的有理化因式,化去分子中的根号的过程.

在二次根式的化简与运算过程中,二次根式的乘法可参照多项式乘法进行,运算中要运用公式 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$); 而对于二次根式的除法,通常先写成分式的形式,然后通过分母有理化进行运算;二次根式的加减法与多项式的加减法类似,应在化简的基础上去括号与合并同类二次根式.

2. 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的意义

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

【例1】关于 $\sqrt{3} \div (3 - \sqrt{3})$, 下列说法正确的为().

- (A) 其数值为有理数 (B) 其数值小于1 (C) 其数值大于 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
(D) 其数值大于2 (E) 其数值大于1小于2

【解析】方法一: $\sqrt{3} \div (3 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

方法二: $\sqrt{3} \div (3 - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$, 故选 E.

【例2】下列表达式正确的为().

- (A) $\sqrt{12} - \sqrt{11} > \sqrt{11} - \sqrt{10}$ (B) $\sqrt{12} + \sqrt{10} > 2\sqrt{11}$
(C) $\frac{2}{\sqrt{6} + 4} = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{6} + 4} > 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$
(E) 以上表达式均不对

【解析】因为 $\sqrt{12} - \sqrt{11} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{11}}{1} = \frac{(\sqrt{12} - \sqrt{11})(\sqrt{12} + \sqrt{11})}{\sqrt{12} + \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$,

$$\sqrt{11}-\sqrt{10}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{1}=\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}},$$

又 $\sqrt{12}+\sqrt{11}>\sqrt{11}+\sqrt{10}$, 所以 $\sqrt{12}-\sqrt{11}<\sqrt{11}-\sqrt{10}$.

即 $\sqrt{12}+\sqrt{10}<2\sqrt{11}$, 所以 A 和 B 均错误.

$$\text{因为 } 2\sqrt{2}-\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1}=\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{2}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}},$$

又 $4>2\sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{6}+4>\sqrt{6}+2\sqrt{2}$, 得 $\frac{2}{\sqrt{6}+4}<2\sqrt{2}-\sqrt{6}$, 故 C 与 D 均不正确, 选 E.

【例 3】化简 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2014}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2016}$ 的结果为().

(A) $5-2\sqrt{3}$ (B) $5-\sqrt{6}$ (C) $6-2\sqrt{6}$ (D) $5+2\sqrt{6}$ (E) $5-2\sqrt{6}$

【解析】 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2014}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2016}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2014}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2014}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$
 $=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^{2014}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$, 故选 E.

【例 4】已知 a, b 为有理数, 若 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=a\sqrt{5}+b$, 则 $2014a+2015b$ 为().

(A) 2016 (B) -2016 (C) 2014 (D) -2014 (E) 1

【解析】由 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=\sqrt{5}-2=a\sqrt{5}+b$, 得到 $a=1, b=-2$,
 所以 $2014a+2015b=-2016$, 选 B.

【例 5】已知 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 则 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值为().

(A) 289 (B) -289 (C) 169 (D) -169 (E) 1

【解析】因为 $x+y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=10$,

$$xy=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1,$$

所以 $3x^2-5xy+3y^2=3(x+y)^2-11xy=3\times 10^2-11=289$, 故选 A.

二、公倍数、公约数及应用

1. 公约数和最大公约数

几个数公有的约数, 叫做这几个数的公约数; 其中最大的一个, 叫做这几个数的最大公约数. 例如: 12 的约数有 1, 2, 3, 4, 6, 12; 18 的约数有 1, 2, 3, 6, 9, 18. 12 和 18 的公约数有 1, 2, 3, 6. 其中 6 是 12 和 18 的最大公约数, 记作 $(12, 18)=6$.

2. 公倍数和最小公倍数

几个数公有的倍数, 叫做这几个数的公倍数; 其中最小的一个, 叫做这几个数的最小公倍数. 例如: 12 的倍数有 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...; 18 的倍数有 18, 36, 54, 72, 90, 12 和 18 的公倍数有 36, 72, 其中 36 是 12 和 18 的最小公倍数, 记作 $[12, 18]=36$.

3. 互质数

如果两个数的最大公约数是 1, 那么这两个数叫做互质数.

【例 6】用一个数去除 30、60、75，都能整除，这个数最大是 m ，另一个数用 3、4、5 除都能整除，这个数最小是 n ，则 $m+n=(\quad)$ 。

- (A) 55 (B) 75 (C) 80 (D) 85 (E) 95

【解析】因为所求的数去除 30、60、75 都能整除，所以所求的数是 30、60、75 的公约数。

又因为要求符合条件的最大的数，所以就是求 30、60、75 的最大公约数。则

$$5 \overline{) 30 \ 60 \ 75}$$

$$3 \overline{) 6 \ 12 \ 15}$$

$$2 \ 4 \ 5, \quad (30, 60, 75) = 5 \times 3 = 15, \text{ 所以 } m = 15.$$

另一个数是 3、4、5 的公倍数，且是最小的公倍数。因为 $[3, 4, 5] = 3 \times 4 \times 5 = 60$ ，所以用 3、4、5 除都能整除的最小的数是 60，故 $n = 60$ 。所以 $m+n=75$ ，选 B。

【例 7】有三根铁丝，长度分别是 120 厘米、180 厘米和 300 厘米。现在要把它们截成相等的小段，每根都不能有剩余，每小段最长为 a 厘米，一共可以截成 b 段，则 $a+b=(\quad)$ 。

- (A) 55 (B) 65 (C) 60 (D) 70 (E) 75

【解析】因为要截成相等的小段，且无剩余，所以每段长度必是 120、180 和 300 的公约数。

$$30 \overline{) 120 \ 180 \ 300}$$

$$2 \overline{) 4 \ 6 \ 10}$$

$$2 \ 3 \ 5$$

又要求每段尽可能长，故每段长度就是 120、180 和 300 的最大公约数。

$$(120, 180, 300) = 30 \times 2 = 60, \text{ 所以 } a = 60.$$

$$120 \div 60 + 180 \div 60 + 300 \div 60 = 2 + 3 + 5 = 10 (\text{段}). \text{ 因此 } b = 10, \text{ 故 } a+b=70, \text{ 选 D.}$$

【例 8】加工某种机器零件，要经过三道工序。第一道工序每个工人每小时可完成 3 个零件，第二道工序每个工人每小时可完成 10 个，第三道工序每个工人每小时可完成 5 个，要使加工生产均衡，三道工序总共至少分配 (\quad) 个工人。

- (A) 15 (B) 16 (C) 19 (D) 20 (E) 25

【解析】要使加工生产均衡，各道工序生产的零件总数应是 3、10 和 5 的公倍数。要求三道工序“至少”要多少工人，要先求 3、10 和 5 的最小公倍数。

$$5 \overline{) 3 \ 10 \ 5}$$

$$3 \ 2 \ 1$$

$$[3, 10, 5] = 5 \times 3 \times 2 \times 1 = 30, \text{ 所以各道工序均应加 30 个零件.}$$

则每道工序安排的人分别为 $30 \div 3 = 10$ (人)， $30 \div 10 = 3$ (人)， $30 \div 5 = 6$ (人)，因此总共至少 $10+3+6=19$ 人，选 C。

【例 9】一次会餐供有三种饮料。餐后统计，三种饮料共用了 65 瓶；平均每 2 个人饮用一瓶 A 饮料，每 3 人饮用一瓶 B 饮料，每 4 人饮用一瓶 C 饮料。问参加会餐的人数是 (\quad) 人。

- (A) 36 (B) 40 (C) 60 (D) 72 (E) 84

【解析】由题意可知，参加会餐人数应是 2、3、4 的公倍数。

因为 $[2, 3, 4] = 12$ ，所以参加会餐人数应是 12 的倍数。又因为 $12 \div 2 + 12 \div 3 + 12 \div 4 = 6 + 4 + 3 = 13$ (瓶)，所以可见 12 个人要用 6 瓶 A 饮料，4 瓶 B 饮料，3 瓶 C 饮料，共用 13 瓶饮料。

而 $65 \div 13 = 5$ ，因此参加会餐的总人数应是 12 的 5 倍， $12 \times 5 = 60$ (人)，选 C。

【例 10】两个数的最大公约数是 4, 最小公倍数是 252, 其中一个数是 28, 则另一个数的各个数位之和是()。

- (A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

【解析】设所求的数为 x , 则有 $4 \mid \frac{x}{y} \frac{28}{7}$, 得 $x = 4 \times y$, 又因为 4 是 x 和 28 的最大公约数, $(y, 7) = 1$, 所以 $4 \times y \times 7$ 是 x 和 28 的最小公倍数。

所以 $x \times 28 = 4 \times 252$, 则 $x = 4 \times 252 \div 28 = 36$, 因此要求的数是 36, 故选 C。

【评注】通过本题的解答过程, 不难发现: 如果用 a 和 b 表示两个自然数, 那么这两个自然数的最大公约数与最小公倍数关系是: $(a, b) \times [a, b] = a \times b$. 这样, 求两个数的最小公倍数的问题, 即可转化成先求两个数的最大公约数, 再用最大公约数除两个数的积, 其结果就是这两个数的最小公倍数。

【例 11】甲每 5 天进城一次, 乙每 9 天进城一次, 丙每 12 天进城一次, 某天三人在城里相遇, 那么下次相遇至少要()。

- (A) 60 天 (B) 180 天 (C) 270 天 (D) 300 天 (E) 360 天

【解析】下次相遇要多少天, 也即求 5, 9, 12 的最小公倍数, 可用代入法, 也可直接求. 显然 5, 9, 12 的最小公倍数为 $5 \times 3 \times 3 \times 4 = 180$, 所以选 B。

【例 12】三位采购员定期去某商店, 甲每隔 9 天去一次, 乙每隔 11 天去一次, 丙每隔 7 天去一次, 三人星期二第一次在商店相会, 下次相会是()。

- (A) 星期一 (B) 星期二 (C) 星期三 (D) 星期四 (E) 星期五

【解析】此题乍看上去是求 9, 11, 7 的最小公倍数的问题, 但这里有一个关键词, 即“每隔”, “每隔 9 天”也即“每 10 天”, 所以此题实际上是求 10, 12, 8 的最小公倍数. 10, 12, 8 的最小公倍数为 $5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 120$. $120 \div 7 = 17$ 余 1, 所以下一次相会则是在星期三, 选 C。

【例 13】赛马场的跑马道 600 米长, 现有甲、乙、丙三匹马, 甲 1 分钟跑 2 圈, 乙 1 分钟跑 3 圈, 丙 1 分钟跑 4 圈. 如果这三匹马并排在起跑线上, 同时往一个方向跑, 请问经过() 分钟, 这三匹马自出发后第一次并排在起跑线上。

- (A) $1/2$ (B) 1 (C) 6 (D) 12 (E) 16

【解析】此题是一道有迷惑性的题, “1 分钟跑 2 圈”和“2 分钟跑 1 圈”是不同概念, 不要等同于去求最小公倍数的题. 显然 1 分钟之后, 无论甲、乙、丙跑几圈都回到了起跑线上, 所以选 B。

三、绝对值

绝对值是数学中的一个重要的基本概念. 一个数的绝对值就是数轴上表示这个数的点与原点的距离, 记作 $|a|$. 由绝对值的几何意义, 可知绝对值是非负数. 现将考试中针对绝对值的几种常见的解题方法列举如下:

1. 利用绝对值的定义解题

根据绝对值的意义, 即 $|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x < 0). \end{cases}$

【例 14】条件充分性判断: $|1 + |1 + x|| = -x$.

$$(1) x < -1, \quad (2) x < 2.$$

【解析】由(1)因为 $x < -1$, 所以 $1+x < 0$, 得到 $|1+x| = -(1+x)$, 从而 $|1+|1+x|| = |1-(1+x)| = |-x| = -x$, 充分; 对于条件(2), 显然 $x=0$ 时不充分, 故选 A.

【评注】要去掉绝对值符号, 利用定义, 必须知道绝对值里面的式子的符号, 利用绝对值的代数意义去掉绝对值符号, 从而解决问题. 这是解绝对值问题的最常用方法.

2. 利用分类讨论的思想方法解题

所谓零点分段法, 是指: 若数 x_1, x_2, \dots, x_n 分别使含有 $|x-x_1|, |x-x_2|, \dots, |x-x_n|$ 的代数式中相应绝对值为零, 称 x_1, x_2, \dots, x_n 为相应绝对值的零点, 零点 x_1, x_2, \dots, x_n 将数轴分为 $n+1$ 段, 利用绝对值的意义化去绝对值符号, 得到代数式在各段上的简化式, 从而化为不含绝对值符号的一般不等式来解, 即令每项等于零, 得到的值作为讨论的分区点, 然后再分区间讨论绝对值不等式, 最后应求出解集的并集. 零点分段法是解含绝对值符号的不等式的常用解法, 这种方法主要体现了化归、分类讨论等数学思想方法, 它可以把求解条理化、思路直观化.

【例 15】 $|x-1|+|x-3|=4-2x$, 其非负整数解有()个.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 无数个

【解析】当 $x \geq 3$ 时, 原式 $= (x-1) + (x-3) = 2x-4 = 4-2x$, 解得 $x=2 < 3$, 舍掉;

当 $1 < x < 3$ 时, 原式 $= (x-1) + (3-x) = 2 = 4-2x$, 解得 $x=1$, 舍掉;

当 $x \leq 1$ 时, 原式 $= (1-x) + (3-x) = 4-2x$, 即 $x \leq 1$ 均成立;

故非负整数解为 0 或 1, 只有 2 个, 选 C.

【评注】要去掉两个绝对值的符号, 就要同时确定两个绝对值里的代数式的正负号, 可以利用零点分段法, 用分类讨论的思想方法来解.

3. 利用公式法解题

【例 16】已知 $ab < 0$, 求 $a^2|b| - b^2|a| + ab(|a| - |b|) = ()$.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) -1

【解析】原式 $= |a|^2|b| - |b|^2|a| + ab(|a| - |b|)$
 $= |a||b|(|a| - |b|) + ab(|a| - |b|)$
 $= (|a| - |b|)(|ab| + ab) = (|a| - |b|)(-ab + ab) = 0$, 选 A.

【评注】如用定义, 则要分两种情形进行分类讨论, 比较麻烦. 若根据 $|a|^2 = a^2$, $|a||b| = |ab|$ 先变形, 则可避免分类讨论. 当然, 本题也可以取特值求解.

4. 利用绝对值的三角不等式解题

【例 17】求方程 $|x-2| + |x-3| = 1$ 的整数根的个数为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 无数个

【解析】原方程可化为: $|x-2| + |x-3| = |(x-2)-(x-3)|$, 则 $(x-2)(x-3) \leq 0$, 解得 $2 \leq x \leq 3$, 因此原方程有 2 个整数根, 选 C.

【评注】一般是分区间讨论求解; 亦可利用数形结合法求解. 但若注意到 $(x-2)-(x-3)=1$, 再利用性质: 若 $|a|+|b|=|a-b|$, 则 a 与 b 异号.

5. 利用平方法解题

对于两边都含有“单项”绝对值的不等式,利用 $|x|^2 = x^2$ 可在两边脱去绝对值符号来解,这样解题要比按绝对值定义去讨论脱去绝对值符号解题更为简捷,解题时还要注意不等式两边变量与参变量的取值范围,如果没有明确不等式两边均为非负数,需要进行分类讨论,只有不等式两边均为非负数(式)时,才可以直接用两边平方去掉绝对值,尤其是解含参数不等式时更必须注意这一点.

【例 18】已知有理数 t 满足 $|1-t|=1+|t|$, 则 $|t-2006|-|1-t|$ 的值为().

(A) 2000 (B) 2001 (C) 2002 (D) 2005 (E) 2006

【解析】原等式两边平方得 $1-2t+t^2=1+2|t|+t^2$, 所以 $|t|=-t$, 即 $t \leq 0$.

所以 $|t-2006|-|1-t| = -(t-2006)-(1-t)=2005$, 故选 D.

【评注】一般是分区间,求出满足条件的 t 的值,再代入求值. 实际上,平方法是去绝对值的一种常用方法.

6. 利用观察法解题

【例 19】满足 $|a-b|+ab=1$ 的非负整数对 (a,b) 的个数是().

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

【解析】由 $|a-b|+ab=1$ 且 a,b 为非负整数,观察得

$$\begin{cases} |a-b|=1, \\ ab=0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} |a-b|=0, \\ ab=1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=0, \\ b=1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=1, \\ b=1, \end{cases}$$

从而 (a,b) 的非负整数对为 $(1,0), (0,1), (1,1)$, 故选 C.

四、用绝对值的几何意义解题

利用绝对值的几何意义思考有关绝对值的问题,可使某些利用绝对值的代数定义难以解决的问题,简明直观地获得妙解. $|a|$ 的几何意义是:数轴上表示 a 的点到原点的距离; $|a-b|$ 的几何意义是:数轴上表示数 a,b 的两点的距离. 对于某些问题用绝对值的几何意义来解,直观简捷,事半功倍.

1. 形如 $|x-a|+|x-b|$

$|x-a|+|x-b|$ 表示 x 到 a 的距离与 x 到 b 的距离之和.

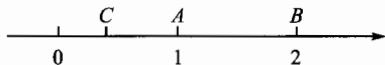
【例 20】设 x 为实数,关于 $y=|x-1|+|x-2|$,叙述正确的有()个.

I. y 没有最大值; II. 只有一个 x 使 y 取到最小值;

III. 有无穷多个 x 使 y 取到最大值; IV. 有无穷多个 x 使 y 取到最小值.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】由绝对值的几何意义知 $|x-1|$ 表示 x 到 1 的距离, $|x-2|$ 表示 x 到 2 的距离.



如上图,设点 A , 点 B 表示 1, 2, 点 C 表示 x , 点 C 可移动.

当点 C 在 A 的左侧时, $|x-1|=CA$, $|x-2|=CB>1$;

当点 C 在 B 的右侧时, $|x-1|=CA>1$, $|x-2|=CB$;

当点 C 在 A 、 B 之间时, $|x-1|=CA$, $|x-2|=CB$; 有 $CA+CB=AB=1$.

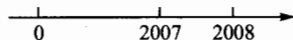
显然, 要使 $|x-1|+|x-2|$ 最小, 点 C 应在点 A 与点 B 两点之间, 即 $1 \leq x \leq 2$.

这时, $|x-1|+|x-2|=(x-1)+[-(x-2)]=x-1+2-x=1$. 因此 I 和 IV 正确, 选 C.

【例 21】已知 a 是有理数, $|a-2007|+|a-2008|$ 的最小值是().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 2007 (E) 2008

【解析】由绝对值的几何意义知, $|a-2007|+|a-2008|$ 表示数轴上的一点到表示数 2007 和 2008 两点的距离的和, 要使和最小, 则这点必在 2007 ~ 2008 之间(包括这两个端点) 取值(如图所示), 故 $|a-2007|+|a-2008|$ 的最小值为 1, 故选 B.



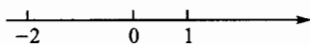
【例 22】方程 $|x-1|+|x+2|=4$ 的解的个数为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 无数个

【解析】把数轴上表示 x 的点记为 P , 由绝对值的几何意义知, 当 $-2 \leq x \leq 1$ 时, $|x-1|+|x+2|$ 恒有最小值 3, 所以要使 $|x-1|+|x+2|=4$ 成立, 则点 P 必在 -2 的左边或 1 的右边, 且到 -2 或 1 的点的距离均为 $\frac{1}{2}$ 个单位(如图所示), 故方程 $|x-1|+|x+2|=4$ 的解为

$$x_1 = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \text{ 和 } x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

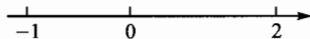
选 C.



【例 23】若 $|x+1|+|2-x|=3$, 则 x 的取值范围包含() 个整数.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】由绝对值的几何意义知, $|x+1|+|x-2|$ 的最小值为 3, 此时 x 在 $-1 \sim 2$ 之间(包括两 endpoint) 取值(如图所示), 故 x 的取值范围是 $-1 \leq x \leq 2$. 故选 E.



【例 24】对于实数 x , 若 $|x+2|+|x-4|>a$ 恒成立, 则 a 的取值范围中包含() 个非负整数.

(A) 6 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】由绝对值的几何意义知, $|x+2|+|x-4|$ 的最小值为 6, 而对于任意数 x , $|x+2|+|x-4|>a$ 恒成立, 所以 a 的最值范围是 $a < 6$. 选 A.

2. 形如 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$

$|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 表示 x 到 a 、 b 、 c 的距离之和.

【例 25】求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】根据绝对值的几何意义知， $|x-1|$ ， $|x-2|$ ， $|x-3|$ 分别表示 x 到 1， x 到 2， x 到 3 的距离。 $|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 是在 x 处于 1 和 3 之间（包括 1 和 3）时有最小值，即当 $1 \leq x \leq 3$ 时。又因为 2 处于 1 和 3 之间，所以 $|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值是在 $|x-1|+|x-3|$ 取最小值的基础上 $|x-2|$ 取最小值，即 $|x-2|=0$ ，则 $x=2$ 。

这时， $|x-1|+|x-2|+|x-3|=|2-1|+|2-2|+|2-3|=2$ ，选 C。

【例 26】方程 $|x+1|+|x+99|+|x+2|=1996$ 共有（ ）个解。

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】当 x 在 $-99 \sim -1$ 之间（包括这两个端点）取值时，由绝对值的几何意义知， $|x+1|+|x+99|=98$ ， $|x+2| < 98$ 。此时， $|x+1|+|x+99|+|x+2| < 1996$ ，故 $|x+1|+|x+99|+|x+2|=1996$ 时， x 必在 $-99 \sim -1$ 之外取值，故方程有 2 个解，选 C。

【例 27】 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$ 的最小值为（ ）。

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】根据绝对值的几何意义知， $|x-1|$ ， $|x-2|$ ， $|x-3|$ ， $|x-4|$ 分别表示 x 到 1， x 到 2， x 到 3， x 到 4 的距离。

$|x-1|+|x-4|$ 是在 $1 \leq x \leq 4$ 之间有最小值， $|x-2|+|x-3|$ 是在 $2 \leq x \leq 3$ 之间有最小值。

所以 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$ 是在 $2 \leq x \leq 3$ 之间有最小值。

这时， $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|=x-1+x-2+[-(x-3)]+[-(x-4)]=4$ 。
选 E。

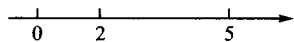
3. 形如 $|x-a|-|x-b|$

$|x-a|-|x-b|$ 表示 x 到 a 的距离与 x 到 b 的距离之差。

【例 28】 $|x-2|-|x-5|$ 的最大值和最小值分别为（ ）。

(A) 3, 4 (B) 3, -7 (C) 4, -3 (D) 4, -5 (E) 3, -3

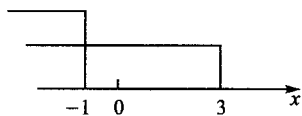
【解析】把数轴上表示 x 的点记为 P 。由绝对值的几何意义知， $|x-2|-|x-5|$ 表示数轴上一点到表示数 2 和 5 两点的距离的差，当 P 点在 2 的左边时，其差恒为 -3；当 P 点在 5 的右边时，其差恒为 3；当 P 点在 2~5 之间（包括这两个端点）时，其差在 -3~3 之间（包括这两个端点）（如图所示），因此， $|x-2|-|x-5|$ 的最大值和最小值分别为 3 和 -3。
选 E。



【例 29】满足关系式 $|x-3|-|x+1|=4$ 的 x 的取值范围是（ ）。

(A) $x \leq -2$ (B) $x \leq 1$ (C) $x \geq -1$ (D) $x \geq 1$ (E) $x \leq -1$

【解析】原式可化为 $|x-3|-|x-(-1)|=4$ ，它表示在数轴上点 x 到点 3 的距离与到点 -1 的距离的差为 4，由图可知，小于等于 -1 的范围内的 x 的所有值都满足这一要求。



所以原式的解为 $x \leq -1$ ，选 E。

第五节 阶梯化精炼题

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

基础能力题

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

扫码有视频

一、问题求解题

1. 下列说法正确的是().

- (A) 有理数中, 零的意义仅表示没有
- (B) 正有理数和负有理数组成了全体有理数
- (C) 0.9 既不是整数, 也不是分数, 因此它不是有理数
- (D) 只有 1 的倒数等于本身
- (E) 0 既不是正数, 也不是负数

2. 下列叙述错误的有()个.

- (1) 整数就是自然数和零
- (2) 整数和分数统称为有理数
- (3) 正整数、0 和负整数统称整数
- (4) 整数不能只分成奇数和偶数两部分
- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

3. 下列说法正确的是().

- (A) 小数都是有理数
- (B) 无限小数都是无理数
- (C) 无理数是开方开不尽的数
- (D) 零的平方根和立方根都是零
- (E) 对数是无理数

4. 在 $(\sqrt{110})^0, 3.14, (\sqrt{3})^3, (\sqrt{3})^{-2}, \log_2 4, e, \pi$ 这 7 个数中, 无理数的个数是().

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 1

5. 计算 $(-1)^{2004} + (\sqrt{3} + 2)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 的结果为().

- (A) $\frac{7}{4}$
- (B) -3
- (C) -2
- (D) $\frac{9}{4}$
- (E) 2

6. 若 $(ab^3)^3 < 0$, 则 a 与 b 的关系是().

- (A) 异号
- (B) 同号
- (C) $a > 0, b < 0$
- (D) $a < 0, b > 0$
- (E) 不能确定

7. 已知 $-1 < b < a < 0$, 那么 $a+b, a-b, a+1, a-1$ 的大小关系是().

- (A) $a+b < a-b < a-1 < a+1$
- (B) $a+1 > a+b > a-b > a-1$
- (C) $a-1 < a+b < a-b < a+1$
- (D) $a+b > a-b > a+1 > a-1$
- (E) 以上结论均不正确

8. 已知实数 $a = 2014^2 - 2015 \times 2013$, 则 $a^{2015} + \frac{1}{a^{2015}} = ()$.

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 0

9. 计算 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2014}\right)\left(1 - \frac{1}{2015}\right) = ()$.

(A) $\frac{1}{2013}$ (B) $\frac{1}{2014}$ (C) $\frac{1}{2015}$ (D) $\frac{2014}{2015}$ (E) $\frac{2}{2015}$

10. 把无理数 $\sqrt{5}$ 记为 a ,它的小数部分记作 b ,则 $a-\frac{1}{b}$ 等于().

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 (E) 3

11. 若正数 a 的倒数等于其本身,负数 b 的绝对值等于3,且 $c < a, c^2 = 36$,则代数式 $2(a-2b^2)-5c$ 的值为().

(A) 5 (B) 6 (C) -6 (D) 4 (E) -4

12. a, b, x, y 是10(包括10)以内的无重复的正整数,那么 $\frac{a-b}{x+y}$ 的最大值是().

(A) $1\frac{2}{5}$ (B) $1\frac{4}{5}$ (C) 2 (D) $2\frac{1}{3}$ (E) 3

13. 若 y 与 $x-1$ 成正比,比例系数为 k_1 ; y 又与 $x+1$ 成反比,比例系数为 k_2 ,且 $k_1:k_2=2:3$,则 x 的值为().

(A) $\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (C) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ (D) $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ (E) $-\frac{\sqrt{10}}{2}$

14. 对任意实数 $x \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{7})$,代数式 $|1-2x| + |1-3x| + |1-4x| + \dots + |1-10x|$ 的值为().

(A) 10 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. 计算 $|1-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-2| + |2-\sqrt{5}| + \dots + |\sqrt{99}-10|$ 结果为().

(A) $\sqrt{99}-\sqrt{2}$ (B) 9 (C) $\sqrt{99}-1$ (D) $10-\sqrt{2}$ (E) 6

16. 适合关系式 $|3x-4| + |3x+2|=6$ 的整数 x 的个数是().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

17. 若 $(x-y-2)^2 + |xy-3|=0$,则 $(\frac{3x}{x-y} - \frac{2x}{x-y}) \div \frac{1}{y}$ 的值等于().

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$ (E) 1

18. 已知 $x^2-6x+|y-3|=2x-16$,则 $\frac{x}{x^2+xy+y^2}=()$.

(A) $\frac{4}{37}$ (B) $\frac{4}{27}$ (C) $\frac{8}{37}$ (D) $\frac{4}{47}$ (E) $\frac{8}{47}$

19. 代数式 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|abc|}{abc}$ 可能的取值有()个.

(A) 4个 (B) 3个 (C) 2个 (D) 1个 (E) 5个

20. 两个正数 m 和 n 满足 $\frac{m}{n}=t(t>1)$,若 $m+n=s$,则 m, n 中较小的数可以表示为().

(A) $\frac{s}{1+t}$ (B) $\frac{s}{1-t}$ (C) $\frac{t}{1+s}$ (D) $\frac{t}{1-s}$ (E) $\frac{-s}{1+t}$

21. 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{m}{4} \neq 0$, 那么式子 $\frac{x^2 + y^2 + m^2}{xy + ym + mx}$ 的值是().

- (A) $\frac{27}{26}$ (B) $\frac{29}{26}$ (C) $\frac{26}{29}$ (D) 1 (E) 2

22. 已知 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a}$ (a, b, c 互不相等), 求 $x + y + z$ 的值为().

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) ± 1 (D) -1 (E) 0

23. 一个正分数的分子减少 25%, 而分母增加 25%, 则新分数比原来分数减少的百分率是().

- (A) 30% (B) 35% (C) 40% (D) 50% (E) 60%

24. 在一家三口人中, 每两个人的平均年龄加上余下一人的年龄分别得到 47, 61, 60, 那么这三个人中最大年龄与最小年龄的差是().

- (A) 28 (B) 27 (C) 26 (D) 25 (E) 24

二、条件充分性判断题

1. $m = \sqrt{3} - 2$.

(1) $m = \frac{\sqrt{3}-3}{2+\sqrt{3}}$ (2) $m = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

2. $\sqrt{(5-x)(x-3)^2} = (x-3)\sqrt{5-x}$.

(1) $x \geq 3$. (2) $x \leq 6$.

3. $m = -2\sqrt{6}$.

(1) $m = 4\sqrt{24} - 6\sqrt{54} + 3\sqrt{96} - 2\sqrt{150}$. (2) $m = 4\sqrt{24} - 6\sqrt{54} + 2\sqrt{96}$.

4. $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \sqrt{5}$.

(1) $x = \sqrt{5}$. (2) $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. $\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$.

(1) $x \leq 5$. (2) $x > 3$.

6. $a + b = 1$.

(1) $b = \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{1-a^2}}{a+1}$. (2) $b = \frac{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{1-a^2}}{a-1}$.

7. $m = 1$.

(1) $m = \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|2-x|}{2-x} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{|x-2|}}$. (2) $m = \frac{|x-2|}{x-2} - \frac{|2-x|}{2-x} - \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{|x-2|}}$.

8. $\frac{|x-1|}{1-x} + \frac{|x-2|}{x-2}$ 的值为 -2.

(1) $1 < x < 2$. (2) $2 < x < 3$.

$$9. \frac{|a|}{a+a^2} = -\frac{1}{a+1}.$$

$$(1) a < 0.$$

$$(2) a < -1.$$

$$10. 2x + y = -4.$$

$$(1) |x+3| + \sqrt{4-2y} = \sqrt{2y-4}.$$

$$(2) |x+3| - \sqrt{4-2y} = -\sqrt{2y-4}.$$

11. 方程的整数解有 5 个.

$$(1) \text{ 方程为 } |x+1| + |x-3| = 4.$$

$$(2) \text{ 方程为 } |x+1| - |x-3| = 4.$$

12. 已知 $x < 0 < z, xy > 0$, 则 $|x+z| + |y+z| - |x-y|$ 的值为 0.

$$(1) |y| > |z| > |x|.$$

$$(2) |x| > |z| > |y|.$$

13. x 和 y 的算术平均值为 5, 且 \sqrt{x} 和 \sqrt{y} 的几何平均值为 2.

$$(1) x=4, y=6.$$

$$(2) x=2, y=8.$$

基础能力题详解

一、问题求解题详解

1. E; A 中零的意义不仅仅表示没有, 还表示绝对值中最小的数, 还表示正负数的分界点; B 中缺少一个 0; C 中 0.9 是有限小数, 是有理数; D 中 -1 的倒数也为它本身.

2. C; (1) 自然数已经包含了 0, 所以是错误的, 改成整数包括自然数和负整数就对了; (2) 正确的; (3) 正确的; (4) 整数按照奇偶性只能分为奇数和偶数.

3. D; A 中小数分为有限小数和无限小数, 其中无限不循环小数为无理数, 所以是错误的; B 中无限小数中无限循环小数属于有理数, 所以是错误的; C 中无理数是无限不循环小数, 所以该选项说法是错误的; E 中对数有可能为有理数, 如 $\log_2 2 = 1$.

4. B; 根据无理数和有理数的定义即可判断出: $(\sqrt{3})^3, e, \pi$ 是无理数.

$$5. C; (-1)^{2004} + (\sqrt{3}+2)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1+1-4 = -2.$$

6. A; 由题意得 $a^3 b^9 < 0$, 即得 a, b 异号.

7. C; 方法一: 因为 $-1 < b < a < 0$, 所以 $a+b < a-b$, 因为 $b > -1$, 所以 $a-1 < a+b$, 又因为 $-b < 1$, 所以 $a-b < a+1$, 综上得 $a-1 < a+b < a-b < a+1$.

方法二: 取 $b = -0.8, a = -0.2$.

$$8. B; \text{利用 } a = 2014^2 - 2015 \times 2013 = 2014^2 - (2014+1)(2014-1) = 1,$$

$$\text{代入求出 } a^{2015} + \frac{1}{a^{2015}} = 2.$$

$$9. C; \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2014}\right) \left(1 - \frac{1}{2015}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2014}{2015} = \frac{1}{2015}.$$

$$10. D; \sqrt{5} \text{ 的小数部分为 } b = \sqrt{5} - 2, \text{ 所以 } a - \frac{1}{b} = \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} = -2.$$

11. E; 因为 $a=1, b=-3, c=-6$, 所以 $2(a-2b^2)-5c=2[1-2\times(-3)^2]-5\times(-6)=2(1-18)+30=-34+30=-4$.

12. D; 对于正分数而言, 分母变小比分子变大对分数的值有更大的作用, 所以有

$$\begin{cases} x+y=1+2=3, \\ a-b=10-3=7, \end{cases} \text{ 于是 } \frac{a-b}{x+y} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

13. D; 方法一: 由 $y=k_1(x-1)$ ①及 $y=\frac{k_2}{x+1}$ ②, 用①除以②, $1=\frac{k_1}{k_2}(x-1)(x+1)$, 即 $x^2-1=\frac{3}{2}, x^2=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

方法二: 可令 $k_1=2, k_2=3$, 则有 $y=2(x-1)=\frac{3}{x+1}$, 所以得 $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

14. C; 因为 $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{7}$ 得 $7x < 1$ 和 $8x > 1$, 从而

原式 $= (1-2x) + (1-3x) + \cdots + (1-7x) + (8x-1) + (9x-1) + (10x-1) = 6-3=3$.

15. B; 根据绝对值的定义得 $|1-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-2| + |2-\sqrt{5}| + \cdots + |\sqrt{99}-10| = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (10-\sqrt{99}) = 10-1=9$.

16. C; 因为 $|3x-4| + |3x+2|=6$, 所以 $|x-\frac{4}{3}| + |x+\frac{2}{3}|=2$, 由绝对值的几何意义, $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$, 因为 x 是整数, 所以 $x=0$ 或 1 .

17. A; $(x-y-2)^2 + |xy-3|=0$ 可知 $x-y=2, xy=3$;

所以 $(\frac{3x}{x-y} - \frac{2x}{x-y}) \div \frac{1}{y} = \frac{xy}{x-y} = \frac{3}{2}$.

18. A; 因为 $x^2-6x+|y-3|=2x-16$, 所以 $(x-4)^2 + |y-3|=0$, 根据非负性, 得 $x=4, y=3$. 从而 $\frac{x}{x^2+xy+y^2} = \frac{4}{37}$.

19. B; 讨论 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|abc|}{abc}$ 的取值, 实质是讨论 a, b, c 正负, 分情况讨论如下:

$$a, b, c \text{ 两正一负: } \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|abc|}{abc} = 0;$$

$$a, b, c \text{ 两负一正: } \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|abc|}{abc} = 0;$$

$$a, b, c \text{ 为三负时: } \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|abc|}{abc} = -4;$$

a, b, c 为三正时, $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} + \frac{|abc|}{abc} = 4$, 所以可能情况有三种. 或者对上述四种情况 a, b, c 分别取特值, 也可以快速求解.

20. A; 两个正数 $\frac{m}{n} = t (t > 1), m+n=s$, 可得 $m > n$ 且 $nt+n=s$, 因此较小的数可表

示为 $n = \frac{s}{1+t}$.

21. B; 令 $x=2k, y=3k, m=4k$, 代入 $\frac{x^2+y^2+m^2}{xy+ym+mx} = \frac{4k^2+9k^2+16k^2}{6k^2+12k^2+8k^2} = \frac{29}{26}$.

【评注】本题也可以取特值求解, 可令 $x=2, y=3, m=4$ 代入求解.

22. E; 设 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a} = k$, 则 $x=(a-b)k, y=(b-c)k, z=(c-a)k$, 所以 $x+y+z=(a-b)k+(b-c)k+(c-a)k=(a-b+b-c+c-a)k=0$.

【评注】本题也可以取特值求解, 可令 $x=a-b, y=b-c, z=c-a$ 代入求解.

23. C; 方法一: 设原分数为 $\frac{a}{b}$, 由题得到新分数为 $\frac{0.75a}{1.25b}$, 从而 $\left(\frac{a}{b} - \frac{0.75a}{1.25b}\right) \div \frac{a}{b} = 40\%$.

方法二: (特值法) 假定原分数为某一特值, 可设原分数为 $1 = \frac{100}{100}$, 由题得到新分数为 $\frac{75}{125} = 0.6$, 从而 $1 - 0.6 = 40\%$.

24. A; 设这三个人的年龄分别为 a, b, c , 由题目可知:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} + c = 47, \\ \frac{a+c}{2} + b = 61, \\ \frac{b+c}{2} + a = 60, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} a+b+2c=94 \text{ ①}, \\ a+c+2b=122 \text{ ②}, \\ b+c+2a=120 \text{ ③}, \end{cases}$$

②-①, $b-c=28$.

【评注】或者让三式两两相减取差距最大的即可, 得到: $b-c=28$.

二、条件充分性判断题

1. B; 由(1) $m = \frac{\sqrt{3}-3}{2+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-3)(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 5\sqrt{3}-9$, 不充分;

由(2) $m = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \sqrt{3}-2$, 充分.

2. E; 由题, $x-3 \geq 0$ 和 $5-x \geq 0$, 得到 $3 \leq x \leq 5$, 两个条件单独均不充分, 联合起来也不充分.

3. B; 由(1) $m = 4\sqrt{24} - 6\sqrt{54} + 3\sqrt{96} - 2\sqrt{150} = 4 \cdot 2\sqrt{6} - 6 \cdot 3\sqrt{6} + 3 \cdot 4\sqrt{6} - 2 \cdot 5\sqrt{6} = -8\sqrt{6}$, 不充分; 由(2) $m = 4\sqrt{24} - 6\sqrt{54} + 2\sqrt{96} = 4 \cdot 2\sqrt{6} - 6 \cdot 3\sqrt{6} + 2 \cdot 4\sqrt{6} = -2\sqrt{6}$, 充分.

4. B; 先将题干化简:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{4x}{2} = 2x, \end{aligned}$$

从而可以看出条件(2)充分.

5. B; 题干只需 $x > 2$ 即可, 所以条件(2)充分.

6. A; 由(1)可得, 分子 $\sqrt{a^2-1} \geq 0$ 且 $\sqrt{1-a^2} \geq 0 \Rightarrow a = \pm 1$, 又分母不能为零, 故 $a = 1$, $b = 0$, 充分; 同理由(2)可得: $a = -1, b = 0$, 不充分.

7. D; 由于根号里面要保证非负和分母有意义, 故两个条件都要求 $x > 2$.

由(1) $m = \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|2-x|}{2-x} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{|x-2|}} = 1 - 1 + 1 = 1$, 充分;

由(2) $m = \frac{|x-2|}{x-2} - \frac{|2-x|}{2-x} - \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{|x-2|}} = 1 - (-1) - 1 = 1$, 充分.

8. A; 当 $1 < x < 2$ 时, $x-1 > 0, x-2 < 0$, 所以 $\frac{|x-1|}{1-x} + \frac{|x-2|}{x-2} = -1 - 1 = -2$,

故条件(1)充分, (2)不充分.

9. B; 由 $\frac{|a|}{a+a^2} = -\frac{1}{a+1} \Rightarrow \frac{|a|}{a(1+a)} = -\frac{1}{a+1} \Rightarrow a < 0$ 且 $a \neq -1$, 故条件(2)充分.

10. D; 由(1), 因为要使根号里面非负, 可得 $y = 2$, 又 $|x+3| = 0$, 得到 $x = -3$, 从而 $2x + y = 2 \times (-3) + 2 = -4$, 充分; 同理, 条件(2)也充分.

11. A; 由绝对值的几何意义, 由(1), $|x+1| + |x-3|$ 表示 x 到 -1 与 3 的距离之和, 故当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, $|x+1| + |x-3| = 4$, 所以整数解有 5 个, 充分;

由(2), $|x+1| - |x-3|$ 表示 x 到 -1 与 3 的距离之差, 故当 $x \geq 3$ 时, $|x+1| - |x-3| = 4$, 整数解有无数个, 不充分.

12. D; 方法一: 由(1) 因为 $x < 0 < z, xy > 0, |y| > |z| > |x|$, 所以 $x+z > 0, y+z < 0, x-y > 0$.

所以 $|x+z| + |y+z| - |x-y| = 0$, 充分; 同理, 条件(2)也充分.

方法二: 利用数轴画图: $x < 0 < z, xy > 0, |y| > |z| > |x|$, 可知: $x+z > 0, y+z < 0, x-y > 0$, 所以 $|x+z| + |y+z| - |x-y| = x+z-y-z-x+y = 0$; 同理, 条件(2)也充分.

13. B; 本题考查平均值的定义, 由题得到 $x+y=10, xy=16$, 故条件(2)充分.

综合提高题

一、问题求解



扫码看视频

1. 已知 a, b, c, d 均为正数, 且 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$ 的值为().

(A) $\frac{a^2}{d^2}$ (B) $\frac{c^2}{d^2}$ (C) $\frac{a+b}{c+d}$ (D) $\frac{b^2}{d^2}$ (E) $\frac{c}{a}$

2. 已知 x_1, x_2, \dots, x_n 的几何平均值为 3, 前面 $n-1$ 个数的几何平均值为 2, 则 x_n 的值是().

(A) $\frac{9}{2}$ (B) $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ (C) $2\left(\frac{3}{2}\right)^n$ (D) $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (E) $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

3. 已知 $x > 0$, 函数 $y = \frac{2}{x} + 3x^2$ 的最小值是().

- (A) $2\sqrt{6}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) 6 (E) $6\sqrt{2}$

4. 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 满足 $a_1 = 7, a_9 = 8$, 且对任何 $n \geq 3, a_n$ 为前 $n-1$ 项的算术平均值, 则 $a_2 =$ ().

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

5. 某厂加工一批零件, 甲车间加工这批零件的 20%, 乙车间加工剩下的 25%, 丙车间加工再余下的 40%, 还剩 3600 个零件没有加工, 这批零件一共有().

- (A) 9000 个 (B) 9500 个 (C) 9800 个 (D) 10000 个 (E) 12000 个

6. 下列说法正确的是().

- (A) 103 是质数, 437 也是质数 (B) 103 是合数, 437 是质数
(C) 103 是合数, 437 也是合数 (D) 103 是质数, 437 是合数
(E) 以上均不正确

7. 一个两位质数, 将它的十位数字与个位数字对调后仍是一个两位质数, 我们称它为“无暇质数”, 则 50 以内的所有“无暇质数”之和等于().

- (A) 87 (B) 89 (C) 99 (D) 109 (E) 119

8. 一个数 a 为质数, 并且 $a+20, a+40$ 也都是质数, 则以 a 为边长的等边三角形面积是().

- (A) $\frac{19}{2}\sqrt{3}$ (B) $\frac{13}{2}\sqrt{3}$ (C) $\frac{49}{4}\sqrt{3}$ (D) $\frac{25}{4}\sqrt{3}$ (E) $\frac{9}{4}\sqrt{3}$

9. 设 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则 $\frac{a^5 + a^4 - 2a^3 - a^2 - a + 2}{a^3 - a} =$ ().

- (A) -2 (B) 2 (C) 1 (D) -1 (E) 0

10. a, b, c 都是质数, c 是一位数, 且 $a \times b + c = 1993$, 那么 $a + b + c$ 的和是().

- (A) 194 (B) 187 (C) 179 (D) 204 (E) 213

11. 一个自然数被 2 除余 1, 被 3 除余 2, 被 5 除余 4, 满足此条件的介于 100~200 的自然数有()个.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. 有四个小朋友, 4 人年龄逐个相差一岁, 四人年龄的乘积是 360. 则四人现在年龄之和为().

- (A) 14 (B) 16 (C) 22 (D) 20 (E) 18

13. 用 210 个大小相同的正方形拼成一个长方形, 有()种不同的拼法.

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

14. 已知 $600 \times a = b^4$, a, b 是正整数, a 的最小值为().

- (A) 1350 (B) 1250 (C) 1150 (D) 1050 (E) 1450

15. 王老师领一班同学去种树, 学生恰好平均分成三组, 如果老师与学生每人种树一样多, 则共种了 572 棵, 且每人种树多于 2 棵而不超过 20 棵. 那么, 这个班有学生()人, 每人种树()棵.

- (A) 51, 11 (B) 46, 11 (C) 46, 13 (D) 51, 13 (E) 52, 9

16. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 99 \times 100$ 的积,末尾有()个连续的零.
 (A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 28 (E) 19
17. 要使乘积 $195 \times 86 \times 72 \times 380 \times \square$ 的末五位都是零, \square 中应填入的自然数最小值是().
 (A) 115 (B) 105 (C) 120 (D) 125 (E) 225
18. 把若干个自然数 $1, 2, 3, \dots$, 乘到一起,如果已知这个乘积的最末十三位恰好都是零,那么最后出现的自然数最小应该是().
 (A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 55
19. 如果两个大于 1 的整数之和是 31,两数的积可以整除 750,那么这两数之差是().
 (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 19 (E) 15
20. 已知 $|x+2| + |1-x| = 9 - |y-5| - |1+y|$, 则 $x+y$ 的最大值与最小值为().
 (A) 5, -4 (B) 5, -3 (C) 6, -2 (D) 5, -2 (E) 6, -3
21. $|x-2| + |x-1| + |x-3|$ 的最小值是().
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
22. 一箱书,平均分给 6 个小朋友,多余 1 本;平均分给 8 个小朋友,也多余 1 本;平均分给 9 个小朋友,也多余 1 本.这箱书最少有 m 本,则 m 的各个数位之和为().
 (A) 10 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 9

二、条件充分性判断题

1. 已知 n 与 m 均为整数,则能确定 n 与 m 都是奇数.
 (1) $2014 + m$ 是奇数. (2) $11n + 28m$ 是偶数.
2. 如果 b, c 是 2 个连续的奇数,有 $a + b = 30$.
 (1) $10 < a < b < c < 20$. (2) a, b 和 c 为质数.
3. 能确定 $\frac{2n}{5}$ 是整数.
 (1) $m = \sqrt{5} + 2, m + \frac{1}{m}$ 的整数部分是 n . (2) n 为整数,且 $\frac{13n}{10}$ 是整数.
4. $x^{101} + y^{101}$ 可取两个不同的值.
 (1) 实数 x, y 满足条件 $(x+y)^{99} = -1$.
 (2) 实数 x, y 满足条件 $(x-y)^{100} = 1$.
5. $a = b = 0$.
 (1) $|a| = a, |b| = b$, 且 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b} = 1$.
 (2) 设 a, b 是有理数, m 是无理数, 且 $a + bm = 0$.
6. $|x-2| + |1+x| = 3$.
 (1) $x < \frac{\pi}{2}$. (2) $x > 0$.

$$7. \left| \frac{2x-1}{3} \right| \leq \frac{2-x}{3}.$$

$$(1) -1 < x < \frac{1}{2}.$$

$$(2) \frac{1}{2} < x < 2.$$

$$8. \left| \frac{3}{2x-1} \right| = \frac{3}{1-2x}.$$

$$(1) x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

$$(2) x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

9. 10^k 除以 m 的余数为 1.

(1) 既约分数 $\frac{n}{m}$ 满足 $0 < \frac{n}{m} < 1$.

(2) 分数 $\frac{n}{m}$ 可以化为小数部分的一个循环节有 k 位数字的纯循环小数.

综合提高题详解

一、问题求解题

1. C; 方法一: 将 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 平方, 得 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$, 由合分比定理: $\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{c^2+d^2}{d^2}$,

交换两内项: $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{b^2}{d^2}$, 开平方根: $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{b}{d}$.

研究 C 选项: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 由合分比定理: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, 交换两内项: $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$,

从而有 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$.

方法二: 令 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ($k \neq 0$) $\Rightarrow \begin{cases} a = bk, \\ c = dk, \end{cases}$ 代入,

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{b^2k^2+b^2}}{\sqrt{d^2k^2+d^2}} = \frac{\sqrt{1+k^2} \cdot b}{\sqrt{1+k^2} \cdot d} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{bk+b}{dk+d} = \frac{(1+k)b}{(1+k)d} = \frac{b}{d}.$$

2. C; 考查几何平均值的定义, 因为

$$\begin{cases} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = 3, \\ \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 \cdots x_n = 3^n, \\ x_1 x_2 \cdots x_{n-1} = 2^{n-1}, \end{cases} \text{相除得 } x_n = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

3. B; 根据几何平均数和算术平均数之间的性质, 有 $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 3x^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot 3x^2} = \sqrt[3]{3}$,

所以 y 的最小值为 B 选项.

【注意】为什么要拆成 2 个 $\frac{1}{x}$ 呢? 因为只有这样才能保证等号成立, 上述等式才成立.

4. C; 通过递推运算

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= \frac{a_1 + a_2}{2}, \\ a_4 &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \\ &\dots\dots \\ a_9 &= \frac{a_1 + \dots + a_8}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_3 = a_4 = \dots = a_9 = 8 \text{ 可以解得 } a_2 = 9, \text{ 所以答案为 C.}$$

5. D; $(1-20\%)(1-25\%)(1-40\%) = 0.8 \times \frac{3}{4} \times 0.6 = 0.36$, 总零件 $\frac{3600}{36\%} = 10000$ 个.

6. D; 对于一个不很大的自然数 $n(n > 1, n$ 为非完全平方数), 可用下面的方法去判断它是质数还是合数: 先找出一个大于 n 的最小的完全平方数 k^2 , 再写出 k 以内的所有质数; 若这些质数都不能整除 n , 则 n 是质数; 若这些质数中有一个质数能整除 n , 则 n 为合数.

本题中, 因为 $103 < 11^2$, 而 11 以内的质数 2, 3, 5, 7 都不能整除 103, 故 103 是质数.

$437 < 21^2$, 而 21 以内的质数有: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. 因为 $437 \div 19 = 23$, 所以 437 是合数.

7. D; 设“无暇质数”为 \overline{xy} .

根据题意, \overline{xy} 与 \overline{yx} 均为质数, 并且 \overline{yx} 也是“无暇质数”, 且 50 以内的分别是 11, 13, 17, 31, 37, 共计 5 个. 它们的和是 $11+13+17+31+37=109$.

8. E; 因为 20, 40 都是合数, 而 $a+20, a+40$ 又都是质数, 所以 $a \neq 2$.

又因为 $20 \div 3 = 6(\text{余} 2)$, 所以 a 不是被 3 除余 1 的数, 否则 $a+20$ 能被 3 整除, 即为合数, 与题意不符. 同理, a 不能是被 3 除余 2 的数, 否则 $a+40$ 为合数, 与题意不符.

因此 a 必是能被 3 整除的数, 且 a 又是质数, 所以 $a=3$. 等边三角形面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

9. A; 因为 $a(a+1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1$, 所以 $a^2 + a = 1$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{a^5 + a^4 - 2a^3 - a^2 - a + 2}{a^3 - a} &= \frac{a^3(a^2 + a) - 2a^3 - (a^2 + a) + 2}{a \cdot (a^2 - 1)} \\ &= \frac{a^3 - 2a^3 - 1 + 2}{-a^2} = \frac{1 - a^3}{-a^2} = -\frac{1 - a^3}{1 - a} = -(1 + a + a^2) = -(1 + 1) = -2. \end{aligned}$$

10. A; 在所有的质数中, 只有质数 2 是偶数. 这样, 根据数的奇偶运算规律可知 $a \times b + c = 1993$ 具有 $a \times 2 + c = 1993$ 或 $a \times b + 2 = 1993$ 两种组合形式.

当 $a \times 2 + c = 1993$ 时, c 的值是 3, 5 或 7, 则 a 的值应是 995, 994, 993, 因为 995, 994, 993 不是质数, 所以不合题意舍去.

当 $a \times b + 2 = 1993$ 时, c 的值是 2, $a \times b = 1991$, $1991 = 11 \times 181$, a 的值是 11 (或是 181), b 的值是 181 (或是 11). 2, 11, 181 均为质数, 符合题意, 这样 $a + b + c = 2 + 11 + 181 = 194$.

说明: 当 a, b, c 都是质数, $a \times b + c = 1994$, 这就是哥德巴赫猜想问题, 举世瞩目的陈氏定理: $1994 = 11 \times 181 + 3$.

11. B; 被 5 除余 4, 说明这个数的个位为 4 或 9; 被 2 除余 1, 说明是奇数, 故这个数的个位只能为 9. 经检验, 119 满足被 3 除余 2, 又由于 2, 3, 5 的最小公倍数为 30, 从而介于 100~200 的数有 119, 149, 179, 共三个数.

12. E; $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 3 \times 4 \times 5 \times 6$. 由于逐个大一岁, 所以四个小朋友的年龄分别是 3 岁, 4 岁, 5 岁, 6 岁, 所以四人年龄之和为 18 岁.

13. D; 根据题意, 可知将 n 个同样大小的正方形拼成长宽不一的各种长方形, 其面积不变, 可应用分解质因数的原理分解组合两个数的乘积形式.

分解: $210 = 1 \times 210 = 3 \times 70 = 5 \times 42 = 7 \times 30 = 2 \times 105 = 15 \times 14 = 21 \times 10 = 6 \times 35$. 因此, 共有 8 种拼法.

【注意】此题可用 210 的约数个数除以 2, 即为所得. 因为 $210 = 3 \times 5 \times 7 \times 2$, 所以, 210 的约数个数为 $C_1^0 + C_1^1 + C_1^2 + C_1^3 + C_1^4 = 2^4 = 16$ (个), 则 $16 \div 2 = 8$ (个).

14. A; 因为 $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$, 所以 $2^3 \times 3 \times 5^2 \times a = b^4$, b^4 的各个质因数的指数都应应为 4 的倍数, 故 $a = 2 \times 3^3 \times 5^2 = 1350$ 为最小值.

15. A; 依题意知, 种树总数 = 每人种树棵数 \times 师生总人数, 即 $572 = \text{每人种树棵数} \times (1 + \text{学生数})$, 而学生数恰好平均分成三组, 即学生数是 3 的倍数, 再加上王老师一人, 则师生总数被 3 除余 1.

下面先将 572 分解质因数: $572 = 2 \times 2 \times 11 \times 13$, 然后按照题意进行组合使之为两数之积.

若 $572 = 44 \times (1 + 12)$, $1 + 12 = 13$ 为师生总人数, 则每人种 44 棵, 这不符合题意.

若 $572 = 11 \times (1 + 51)$, $1 + 51 = 52$ 为师生总人数, 则每人种树 11 棵.

若 $572 = 2 \times (285 + 1)$, $285 + 1 = 286$ 为师生总人数, 则每人种树 2 棵, 这不符合题意.

因此, 这个班共有学生 51 人, 每人种树 11 棵.

16. B; 因为 $2 \times 5 = 10$, 这样含有质因数一个 2 和一个 5, 乘积末尾就有一个 0. 同时在这 100 个因数中, 含有质因数 2 的个数一定多于质因数 5 的个数, 所以只需知道乘积中含质因数 5 的个数就可知积的末尾连续 0 的个数. 这 100 个数中是 5 的倍数有 5, 10, 15, ..., 100 共有 20 个, 其中 25, 50, 75, 100 又是 25 的倍数, 它们各含有质因数 5 两个. 所以, 乘积中共有质因数 5 的个数是 $20 + 4 = 24$ 个. 因此, 乘积末尾共有 24 个连续的零.

17. D; 因为 $2 \times 5 = 10$, 说明乘数中只要含有质因数 2 和 5 各一个, 乘积的末尾就出现一个零. 根据乘积末尾五位都是零的条件, 可知乘积中应该含有质因数 2 和 5 至少各 5 个, 所以运用分解质因数解答. $195 \times 86 \times 72 \times 380 = 5 \times 39 \times 2 \times 43 \times 2 \times 2 \times 2 \times 9 \times 2 \times 2 \times 5 \times 19 = 9 \times 19 \times 39 \times 43 \times 2^6 \times 5^2$. 这样, 可知还缺 5^3 , 那么符合条件的自然数是 $125k (k \in \mathbf{N})$, 所以最小的 a 值是 125.

18. E; 因为一个自然数末尾零的个数是由这个数的约数中 2 的个数及 5 的个数决定的, 所以要使乘积值末尾有 13 个零, 就必须有 13 个因数 2 和 13 个因数 5. 显然, 在若干个连续自然数中, 2 的倍数比 5 的倍数多, 因此只要凑够 5 的个数就行了.

在 5, 10, 15, 20 中各含有一个因数 5; 25 中含有两个因数 5; 30, 35, 40, 45 中各含有一个因数 5; 50 中含两个因数 5; 55 中含有一个因数 5. 此时恰好有 13 个 5, 因而最后出现的自然数最小应是 55.

19. D; 设两数分别为 a 和 b , 由题意可知: $750 = (a \times b) \cdot n (n \text{ 为整数})$.

根据被除数 = 除数 \times 商的关系, 则有 $750 = (a \times b) \cdot n$. 这样, 运用分解质因数的原理进行分解, 再根据 $a + b = 31$ 进行组合. $750 = 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 = (6 \times 25) \times 5$.

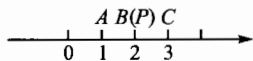
故这两个数分别为 25 和 6, 它们之差是: $25 - 6 = 19$.

20. E; 原方程变形得 $|x + 2| + |x - 1| + |y - 5| + |y + 1| = 9$,

因为 $|x + 2| + |x - 1| \geq 3$, $|y - 5| + |y + 1| \geq 6$, 而 $|x + 2| + |x - 1| + |y - 5| + |y + 1| = 9$,

所以 $|x+2|+|x-1|=3$, $|y-5|+|y+1|=6$, 得 $-2 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 5$, 故 $x+y$ 的最大值与最小值分别为 6 和 -3.

21. C; 设 $A(1), B(2), C(3), P(x)$, 如图所示, 求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值, 即是在数轴上求一点 P , 使 $AP+BP+PC$ 为最小, 显然, 当 P 与 B 重合, 即 $x=2$ 时, 其和有最小值 2.



22. A; 由题可得书的数量减 1 后能被 6、8、9 整除, 由 6、8、9 的最小公倍数为 72, 则书最少为 73 本, 各个数位之和为 10.

二、条件充分性判断题

1. E; 条件(1) 由偶数+奇数=奇数, 知 m 是奇数, 但无法确定 n 的情况, 故不充分; 条件(2) 由偶数+偶数=偶数, 偶数 \times 奇数(偶数)=偶数, 知 n 为偶数, 但无法确定 m 为奇数或为偶数; 两个条件联合得到 n 为偶数、 m 为奇数, 也不充分.

2. E; 显然两个条件需要联合分析, 可以得到 $b=17, c=19$, 而 $a=11$ 或 13, 得到 $a+b=28$ 或 30, 也不充分.

3. B; 条件(1) $m + \frac{1}{m} = \sqrt{5} + 2 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5}$, 由于 $\sqrt{5} < 2.5$, 故整数部分 $n=4$, 不充分; 条件(2) $\frac{13n}{10}$ 为整数, 所以 n 应该为 10 的倍数, 充分.

4. E; 条件 1 中, 令 $\begin{cases} x=0, \\ y=-1, \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=-3, \end{cases}$ 则 $x^{101}+y^{101}$ 可取 3 个不同的值, 所以条件 1 不充分; 条件 2 中, 令 $\begin{cases} x=0, \\ y=1, \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases}$ $x^{101}+y^{101}$ 取 3 个不同的值, 条件 2 不充分; 将条件 1 和条件 2 联合起来, $\begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=\pm 1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$ 此时 $x^{101}+y^{101}$ 只有一解, 所以联合起来也不充分.

5. D; 条件 1 中, 由 $|a|=a, |b|=b$, 得 $a \geq 0, b \geq 0$, 且 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b} = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow a=b=0$, 条件 2 中, 若 $b \neq 0$, 则 $a+bm$ 仍为无理数, 不可能等于 0, 故 $b=0$, 此时 $a=0$, 也充分.

6. C; 题干的几何意义为: $|x-2|+|x+1|=3$, 即在数轴上 x 到 2 的距离与到 -1 的距离之和为 3 的点, 因为点 -1 与点 2 的距离为 3, 所以点 x 在 $[-1, 2]$, 因此联合起来充分.

7. A; 根据绝对值的性质, 对不等式两边同时平方,

$$(2x-1)^2 \leq (2-x)^2 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1,$$

可知(1) 是充分的.

8. A; 根据绝对值的性质, 可知 $2x-1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$, 所以条件(1) 是充分的.

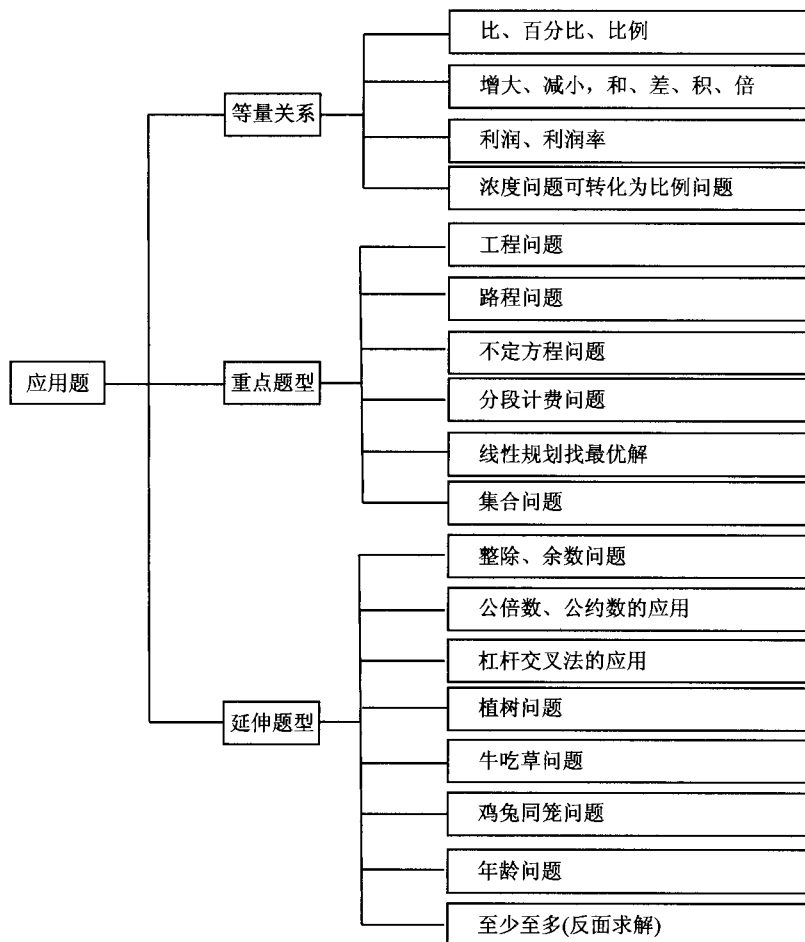
9. C; 由于满足条件(1) 的分数有很多, 无法确定题干, 不充分. 条件(2) 因为没有告诉是既约分数, 所以这样的分数有很多, 不一定能满足题干, 亦不充分. 将两个条件联合起来, 由于“一个循环节有 k 位数字”, 所以分母 m 是“ k 个 9”, 或既约分母 m 是“ k 个 3”, “ k 个 1”, 都能保证 10^k 除以 m 的余数为 1, 也就是 $\underbrace{100\cdots0}_{k\text{个}} \div \underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}} \text{ 余 } 1$, 或 $\underbrace{100\cdots0}_{k\text{个}} \div \underbrace{33\cdots3}_{k\text{个}} \text{ 余 } 1$, 可见联合充分.

第二章 应用题

【大纲考点】分数、小数、百分数，比与比例。

【命题剖析】应用题在考试中占据很大的分值和比重，考题数量较多，占总题量的 $\frac{1}{3}$ 左右，并且应用题的难度较大，出题灵活，所以在学习的时候要掌握基本的题型和方法，对考点和公式的应用要熟练。应用题主要考查的问题有商品打折问题、比和比例及平均值问题、路程问题、工程问题、溶液配比问题、集合问题等。但考试中有时应用题相对比较灵活，其难点是在较短的时间内把题目解出。一方面要掌握考试频率较高的重点类型应用题；另一方面，要能够对每年涌现的新题型活学活用，举一反三，这样才能游刃有余地应付考试。

【知识体系】



2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航，配套电子讲义，好实惠客服：737182994

【备考建议】对于教师,建议课时控制在10~12个课时(约三次课,每次3小时);对于考生,建议在学习时只要抓住各类问题的主要特点,恰当地建立等式(有些题目可不用建立等式)进行求解,有时等式列出来可以不进行求解,从选项验证也可节省很多时间.

第一节 考试要点剖析

一、利润问题

1. 利润=售价-进价;利润率= $\frac{\text{利润}}{\text{进价}} \times 100\% = \frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}} \times 100\% = \left(\frac{\text{售价}}{\text{进价}} - 1\right) \times 100\%$.
2. 售价=进价 $\times(1+\text{利润率})$ =进价+利润.

二、比、百分比、比例问题

1. 变化率= $\frac{\text{变化量}}{\text{变前量}} \times 100\% = \frac{|\text{现值}-\text{原值}|}{\text{原值}} \times 100\% = \left| \frac{\text{现值}}{\text{原值}} - 1 \right| \times 100\%$.

【注意】变化率包括增长率和下降率两个,所以上式用绝对值表示.

2. 增长率 $p\%$ $\xrightarrow{\text{原值 } a}$ 现值 $a(1+p\%)$; 下降率 $p\%$ $\xrightarrow{\text{原值 } a}$ 现值 $a(1-p\%)$.

【注意】一件商品先提价 $p\%$ 再降价 $p\%$, 或者先降价 $p\%$ 再提价 $p\%$, 回不到原价, 应该比原价小, 因为: $a(1+p\%)(1-p\%) = a(1-p\%)(1+p\%) < a$.

3. 恢复原值: 原值先降 $p\%$, 再增 $\frac{p\%}{1-p\%}$ 才能恢复原值; 或者先增 $p\%$ 再降 $\frac{p\%}{1+p\%}$ 才能恢复原值.

4. 甲比乙大 $p\% \Leftrightarrow \frac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{乙}} = p\% \Leftrightarrow \text{甲} = \text{乙}(1+p\%)$; 甲是乙的 $p\% \Leftrightarrow \text{甲} = \text{乙} \cdot p\%$.

【注意】甲比乙大 $p\% \neq$ 乙比甲小 $p\%$ (因为基准量不同), 甲比乙大 $p\% \Leftrightarrow$ 乙比甲小 $\frac{p\%}{1+p\%}$.

5. 比例性质: 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $ad = bc$.

6. 总量 = $\frac{\text{部分量}}{\text{对应占的比例}}$.

三、工程问题

1. 工作量 s 、工作效率 v 、工作时间 t 三者的关系:

工作量=工作效率 \times 工作时间($s=vt$); 工作时间= $\frac{\text{工作量}}{\text{工作效率}}$ ($t=\frac{s}{v}$);

工作效率= $\frac{\text{工作量}}{\text{工作时间}}$ ($v=\frac{s}{t}$)

2. 重要说明: 工作量: 对于一个题, 工作量往往是一定的, 可以将总的工作量看做“1”; 工作效率: 合作时, 总的效率等于各效率的代数和.

3. 重要结论:

若甲单独完成需要 m 天,乙单独完成需要 n 天;则

(1) 甲的效率为 $\frac{1}{m}$,乙的效率为 $\frac{1}{n}$;

(2) 甲乙合作的效率为 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$;

(3) 甲乙合作完成需要的时间为 $\frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{mn}{m+n}$.

【注意】上述公式也可以推广到多个,此处不再一一列举.

四、路程问题(与工程问题相似)

1. 路程 s 、速度 v 、时间 t 之间的关系:

$$s = vt, t = \frac{s}{v}, v = \frac{s}{t}.$$

2. 对于直线型的路程问题:

(1) 相遇

$$S_{\text{相遇}} = S_1 + S_2 = v_1 t + v_2 t = (v_1 + v_2)t.$$

(2) 追及

$$S_{\text{追及}} = S_1 - S_2 = v_1 t - v_2 t = (v_1 - v_2)t.$$

3. 对于圆圈型的路程问题:(从同一起点同时出发,周长为 s ,相遇一次时间为 t)

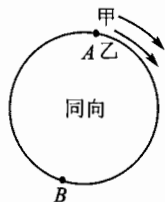
(1) 同向运动:

等量关系:(经历时间相同)

$$S = S_1 - S_2 = v_1 t - v_2 t = (v_1 - v_2)t.$$

甲乙每相遇一次,甲比乙多跑一圈,若相遇 n 次,则有 $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = n \cdot S$,

$$\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{S_{\text{乙}} + n \cdot S}{S_{\text{乙}}} = 1 + \frac{n \cdot S}{S_{\text{乙}}}.$$



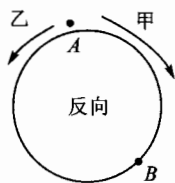
(2) 反向运动:

等量关系: $S = S_1 + S_2 = v_1 t + v_2 t = (v_1 + v_2)t$.

即:每相遇一次,甲与乙路程之和为一圈,若相遇 n 次有 $S_{\text{甲}} + S_{\text{乙}} = n \cdot S$

$$\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{n \cdot S - S_{\text{乙}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{n \cdot S}{S_{\text{乙}}} - 1.$$

【解题技巧】在做圆圈型追及相遇题时,在求第 k 次相遇情况时,可以将 $k-1$ 次相遇看成起点进行分析考虑.



4. 顺水、逆水问题:

$$v_{\text{顺水}} = v_{\text{船}} + v_{\text{水}}; v_{\text{逆水}} = v_{\text{船}} - v_{\text{水}}.$$

5. 相对速度(两个物体运动时,可将一个作为参照物,看成相对静止的)

$$\text{同向运动: } v_{\text{同向}} = v_1 - v_2; \text{相向运动: } v_{\text{相向}} = v_1 + v_2.$$

五、浓度问题

$$1. \text{ 溶液} = \text{溶质} + \text{溶剂}, \text{ 浓度} = \frac{\text{溶质}}{\text{溶液}} \times 100\% = \frac{\text{溶质}}{\text{溶质} + \text{溶剂}} \times 100\%.$$

2. 重要等量关系.

(1) 浓度不变准则:将溶液分成若干份,每份的浓度相等,都等于原来溶液的浓度;将溶液倒掉一部分后,剩余溶液的浓度与原溶液的浓度相等.

(2) 物质守恒准则:物质(无论是溶质、溶剂,还是溶液)不会增多也不会减少,前后都是守恒的.

3. 重要命题思路.

(1) “稀释”问题:特点是加溶剂,溶质不变,以溶质为基准进行求解.

(2) “浓缩”问题:也称“蒸发”问题,特点是减少溶剂,溶质不变,以溶质为基准进行求解.

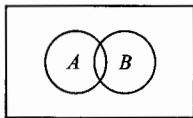
(3) “加浓”问题:特点是增加溶质,溶剂不变,以溶剂为基准进行求解.

(4) “混合”问题:用两种或多种溶液混合在一起,采用溶质或溶剂质量守恒分析,也可利用杠杆原理分析.

(5) “置换”问题:一般是用溶剂等量置换溶液,可以记住结论,原来溶液 v 升,倒出 m 升,再补等量的溶剂(水),则浓度为原来的 $\frac{v-m}{v}$.

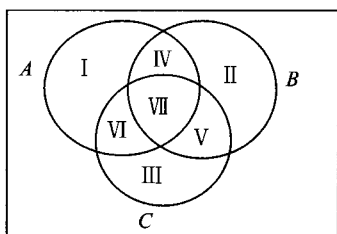
六、集合问题

1. 两个集合.



$$\text{公式: } A \cup B = A + B - A \cap B = \text{全集} - \bar{A} \cap \bar{B}.$$

2. 三个集合.



$$\text{公式: } A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - A \cap C + A \cap B \cap C = \text{全集} - \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}.$$

七、分段问题

分段计费是指不同的范围对应着不同的计费方式,在实际中应用很广泛,比如电费、水费、邮费、个税、话费、出租车费、销售提成等等. 解题思路的关键点有两个,一个是先计算每个分界点的值,确定所给的数值落入哪个范围;另外,对应选取正确的计费表达式,按照所给的标准进行求解.

八、不定方程

当方程或方程组中未知数较多,而无法通过解方程的角度来确定数值,这种方程称为不定方程. 不定方程必须结合所给的一些性质,如整除、奇数偶数、质数合数、范围大小等特征才能确定答案.

九、杠杆原理

当一个整体按照某个标准分为两部分时(或由两部分混合成一个整体),可以根据杠杆原理得到一种巧妙的求解方法:若分为甲乙两部分,则甲的数量:乙的数量=乙到支点的距离:甲到支点的距离.

十、年龄问题

年龄问题的特点有两个,一个是年龄的差值恒定;另一个是年龄同步增长.

【注意】年龄要选好参照年份;如果年龄计算得到矛盾,看看几年前是否还未出生,因为出生后才对年龄有影响.

十一、最值问题

最值问题是文字应用题的延伸部分,是将定值问题转化为动态问题的过程. 解数学问题应用题重点在过好三关:(1) 事理关——阅读理解,知道命题所表达的内容;(2) 文理关——将“问题情景”中的文字语言转化为符号语言,用数学关系式表述事件;(3) 数理关——由题意建立相关的数学模型,将实际问题数学化,并解答这一数学模型,得出符合实际意义的解答.

第二节 基础过关题型

【题型 1】比例问题

【思路点拨】根据题目所给数值先求出最简单整数比,再根据份额求出对应数值.

【例 1】一公司向银行借款 34 万元,欲按 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ 的比例分配给下属甲、乙、丙三车间进行技术改造,则甲车间应得().

- (A) 4 万元 (B) 8 万元 (C) 12 万元 (D) 18 万元 (E) 17 万

【解析】甲:乙:丙 = $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} = 9 : 6 : 2$, 故甲: $\frac{9}{17} \times 34 = 18$ 万元,从而选 D.

【例 2】奖金发给甲、乙、丙、丁四人,其中 $\frac{1}{5}$ 发给甲, $\frac{1}{3}$ 发给乙,发给丙的奖金数正好是甲、乙奖金之差的 3 倍,已知发给丁的奖金为 200 元,则这批奖金当为().

- (A) 1500 元 (B) 2000 元 (C) 2500 元 (D) 3000 元 (E) 3300 元

【解析】方法一:设总奖金为 $15x$.

$$3x + 5x + 6x + 200 = 15x, x = 200,$$

故总奖金为 3000 元.

方法二:总数 = 部分量/对应的比例

$$\frac{200}{1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{6}{15}\right)} = 3000,$$

从而选 D.

【例 3】某工厂人员由技术人员、行政人员和工人组成,共有男职工 420 人,是女职工的 $1\frac{1}{3}$ 倍,其中行政人员占全体职工的 20%,技术人员比工人少 $\frac{1}{25}$,那么该工厂有工人().

- (A) 200 人 (B) 250 人 (C) 300 人 (D) 350 人 (E) 400 人

【解析】女职工: $420 \div \frac{4}{3} = 315$ 人,技术:工人 = $24 : 25$.

$$(315 + 420) \times (1 - 20\%) \times \frac{25}{49} = 300 \text{ 人,从而选 C.}$$

【例 4】家中父亲体重与儿子体重的比,恰等于母亲体重与女儿体重的比. 已知父亲的体重与儿子体重之和为 125 千克,母亲体重与女儿体重之和为 100 千克、儿子比女儿重 10 千克,那么儿子的体重是().

- (A) 40 千克 (B) 50 千克 (C) 55 千克 (D) 60 千克 (E) 65 千克

【解析】由题得到: $\frac{\text{父}}{\text{子}} = \frac{\text{母}}{\text{女}}$, 则 $\frac{\text{父} + \text{子}}{\text{子}} = \frac{\text{母} + \text{女}}{\text{女}}$,

设儿子体重为 x 千克,则有 $\frac{125}{x} = \frac{100}{x - 10}$, 解得 $x = 50$, 选 B.

【评注】本题借助比例定理,大大简化了运算.

【题型 2】利润问题

【思路点拨】要选对基准量,注意折扣的变化与利润的关系.解题关键是要分清成本价,原销售价、“优惠价”和利润这几个概念,有些题目还会给出利润所占的百分比.

【例 5】某商店商品按原价提高 50% 后,7 折优惠,每售一套盈利 625 元,其成本 2000 元,问按优惠价售出比按原价售出多赚钱()元.

- (A) 110 (B) 115 (C) 120 (D) 125 (E) 130

【解析】此题是已知最终售价即“优惠价”,由此逆推,依所给条件去求原价,即可知盈亏.设原价为 x , 售价 = 成本 + 盈利 = $2000 + 625 = 2625$ (元),

$$x \cdot (1 + 50\%) \times 0.7 = 2625 \Rightarrow x = 2625 \div 0.7 \div 1.5 = 2500 \text{ 元.}$$

多赚: $2625 - 2500 = 125$ 元. 选 D.

【例 6】一种货币贬值 20%, 一年后需增值()才能保持原币值.

- (A) 18% (B) 20% (C) 22% (D) 24% (E) 25%

【解析】解此题的关键在于所求的百分比是比贬值后的币值为标准量的,只要明确了这个概念,不难得出正确的解法:应设需增值 x , 并假定原币值为 a , 依题意有:

$$a(1 - 20\%)(1 + x) = a, x = \frac{20}{80} = 25\%,$$

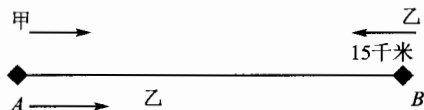
从而应选 E.

【题型 3】路程问题

【思路点拨】根据题意画图,找等量关系(一般是时间和路程),列方程求解.直线路程问题,此类问题是常考的问题,做题中可结合示意图来分析.

【例 7】A、B 两地相距 15 千米,甲中午 12 时从 A 地出发,步行前往 B 地,20 分钟后乙从 B 地出发骑车前往 A 地,到达 A 地后乙停留 40 分钟后骑车从原路返回,结果甲、乙同时到达 B 地.若乙骑车比甲步行每小时快 10 千米,则两人同时到达 B 地的时间为().

- (A) 下午 2 时 (B) 下午 2 时半 (C) 下午 3 时
(D) 下午 3 时半 (E) 下午 4 时



【解析】设甲每小时走 x 千米,则乙走 $10 + x$ 千米,从而有

$$\frac{15}{x} = \frac{30}{10 + x} + 1 \Rightarrow x = 5.$$

甲从 A 到 B 用 3 小时,故到达 B 的时间为 3 时,从而选 C.

【例 8】在一条与铁路平行的公路上有一行人与一骑车人同向行进,行人速度为 3.6 千米/小时,骑车人速度为 10.8 千米/小时.如果一列火车从他们的后面同向匀速驶来,它通过行人的时间是 22 秒,通过骑车人的时间是 26 秒,则这列火车的车身长为()米.

- (A) 186 (B) 268 (C) 168 (D) 286 (E) 188

【解析】设火车的速度为 v , 车长为 l , 由于 $3.6 \text{ 千米/小时} = 1 \text{ 米/秒}$, $10.8 \text{ 千米/小时} = 3 \text{ 米/秒}$, 则有
$$\begin{cases} \frac{l}{v-1} = 22, \\ \frac{l}{v-3} = 26 \end{cases} \Rightarrow l = 286, \text{ 故选 D.}$$

【例 9】两艘游艇, 静水中甲艇每小时行 3.3 千米, 乙艇每小时行 2.1 千米. 现在两游艇于同一时刻相向出发, 甲艇从下游上行, 乙艇从相距 27 千米的上游下行, 两艇于途中相遇后, 又经过 4 小时, 甲艇到达乙艇的出发地. 水流速度是每小时() 千米.

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4 (E) 0.5

【解析】两游艇相向而行的时候, 速度和等于他们在静水中的速度和, 所以他们从出发到相遇的时间为 $\frac{27}{3.3+2.1} = 5$ 小时, 相遇又经过 4 小时甲艇到达乙艇的出发地, 说明甲艇逆水行驶 27 千米需要 $5+4=9$ 小时, 那么甲艇逆水行驶的速度为 $\frac{27}{9} = 3$ 千米/小时, 则水流速度为 $3.3-3=0.3$ 千米/小时, 故选 C.

【题型 4】工程问题

【思路点拨】遇到此类问题, 通常将整个工程量(放水量)看成单位 1, 然后根据题干条件按比例求解. 通常假设总量(工程量, 放水量)=1 进行分析.

【重要公式】总效率=各效率代数和.

$$\text{工作效率} = \frac{\text{工作量}}{\text{工作时间}}, \text{总量} = \frac{\text{部分量}}{\text{其对应的比例}}.$$

【例 10】空水槽设有甲、乙、丙三个水管, 甲管 5 分钟可注满水槽, 乙管 30 分钟可注满水槽, 丙管 15 分钟可把满槽水放完. 若三管齐开, 2 分钟后关上乙管, 问水槽放满时, 甲管共开放了().

(A) 4 分钟 (B) 5 分钟 (C) 6 分钟 (D) 7 分钟 (E) 8 分钟

【解析】由题得到甲、乙、丙的效率分别为 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{30}$ 和 $\frac{1}{15}$.

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{30} - \frac{1}{15}\right) \times 2}{\frac{1}{5} - \frac{1}{15}} + 2 = \frac{15 - (6 + 1 - 2)}{3 - 1} + 2 = 7 \text{ 分钟, 从而选 D.}$$

【例 11】一项工程由甲、乙两合作 30 天可完成. 甲队单独做 24 天后, 乙队加入, 两队合作 10 天后, 甲队调走, 乙队继续做了 17 天才完成. 若这项工程由甲队单独做, 则需要().

(A) 60 天 (B) 70 天 (C) 80 天 (D) 90 天 (E) 100 天

【解析】设甲、乙单独各需 x, y 天完成.

$$\begin{cases} 30\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ 34 \times \frac{1}{x} + 27 \times \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 70, \text{ 从而选 B.}$$

【题型 5】年龄问题

【思路点拨】年龄问题的关键是选取参照年份. 年龄问题的特点有两个: 一个是差值恒定, 另一个是同步增长.

【例 12】哥哥 5 年前的年龄等于 7 年后弟弟的年龄, 哥哥 4 年后的年龄与弟弟 3 年前的年龄和是 35 岁, 求哥哥今年的年龄为().

- (A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

【解析】如果弟弟今年为 x 岁, 弟弟 7 年后是 $(7+x)$ 岁, 哥哥今年为 $(x+12)$ 岁, 哥哥 4 年后为 $(x+16)$ 岁, 弟弟 3 年前为 $(x-3)$ 岁.

列方程得 $x+16+x-3=35$, $x=11$, 哥哥今年: $11+12=23$ (岁), 从而选 B.

【例 13】今年王先生的年龄是他父亲年龄的一半, 他父亲的年龄又是他儿子的 15 倍, 两年后他们三人的年龄之和恰好是 100 岁, 那么王先生今年的岁数是().

- (A) 40 (B) 50 (C) 20 (D) 30 (E) 45

【解析】方法一: 设今年王先生年龄为 x , 则其父年龄为 $2x$, 其儿子年龄为 $\frac{2x}{15}$, 两年后王先生年龄为 $x+2$, 则其父年龄为 $2x+2$, 其儿子年龄为 $\frac{2x}{15}+2$.

又 $x+2+2x+2+\frac{2x}{15}+2=100$, 解得 $x=30$.

方法二: 今年三人年龄之比为 $1:\frac{15}{2}:15=2:15:30$,

今年三人年龄之和为 $100-2\times 3=94$, 故王先生年龄为 30, 选 D.

【例 14】甲对乙说:“我在你这个岁数时, 你刚 4 岁”, 乙对甲说:“我到你这个岁数时, 你已经退休 7 年了.”设退休年龄为 60 岁, 则甲现在的年龄是().

- (A) 44 岁 (B) 45 岁 (C) 46 岁 (D) 48 岁 (E) 50 岁

【解析】设甲现年 m 岁, 乙现年 n 岁.

对于甲说的话(相当于 $m-n$ 年前), 则 $n-(m-n)=4$. ①

对于乙说的话(相当于 $m-n$ 年后), 则 $m+m-n=67$. ②

①② 联立解得 $\begin{cases} m=46, \\ n=25, \end{cases}$ 故选 C.

【题型 6】杠杆原理—交叉法

【思路点拨】当一个整体按照某个标准分为两类时, 根据杠杆原理得到一种巧妙的方法, 即是交叉法. 该方法现上下分列出每部分的数值, 然后与整体数值相减, 减得的两个数值的最简整数比就代表每部分的数量比.

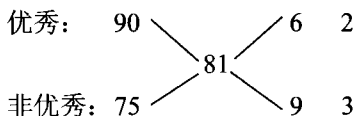
【例 15】公司有职工 50 人, 理论知识考核平均成绩为 81 分, 按成绩将公司职工分为优秀与非优秀两类, 优秀职工的平均成绩为 90 分, 非优秀职工的平均成绩是 75 分, 则非优秀职工的人数为().

- (A) 30 人 (B) 25 人 (C) 20 人 (D) 22 人 (E) 24 人

【解析】方法一: 设非优秀职工为 x 人.

$$81 \times 50 = 75x + 90 \times (50 - x) \Rightarrow x = 30 \text{ 人, 选 A.}$$

方法二:(交叉法)



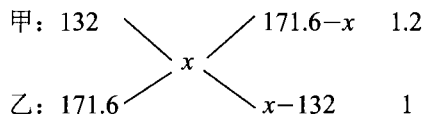
通过交叉得到优秀职工:非优秀职工=2:3,从而得到非优秀职工为30人,选A.

【例16】甲乙两组射手打靶,乙组平均成绩为171.6环,比甲组平均成绩高出30%,而甲组人数比乙组人数多20%,则甲、乙两组射手的总平均成绩是().

- (A) 140分 (B) 145.5分 (C) 150分 (D) 158.5分 (E) 160分

【解析】设总平均成绩为 x ,甲组成绩: $\frac{171.6}{1+30\%}=132$,

$$\text{乙} = \text{甲} \cdot (1+30\%).$$

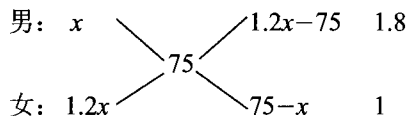


由 $\frac{171.6-x}{x-132} = \frac{1.2}{1}$ 得 $x=150$,从而选C.

【例17】(2001-1-4)某班同学在一次测验中,平均成绩为75分,其中男同学人数比女同学多80%,而女同学平均成绩比男同学高20%,则女同学的平均成绩为().

- (A) 83分 (B) 84分 (C) 85分 (D) 86分 (E) 88分

【解析】设男生成成绩为 x ,女生成绩为 $1.2x$.



由 $\frac{1.2x-75}{75-x} = \frac{1.8}{1}$ 得 $x=70$,女生平均成绩84分,从而选B.

【题型7】浓度问题

【思路点拨】根据溶质守恒,来分析浓度的变化.(1)“稀释”问题:特点是加“溶剂”,解题关键是找到始终不变的量(溶质);(2)“浓缩”问题:特点是减少溶剂,解题关键是找到始终不变的量(溶质);(3)“加浓”问题:特点是增加溶质,解题关键是找到始终不变的量(溶剂);(4)配制问题:是指两种或两种以上的不同浓度的溶液混合配制成新溶液(成品),解题关键是分析所取原溶液的溶质与成品溶质不变及溶液前后质量不变,找到两个等量关系.

【例18】要从含盐12.5%的盐水40千克中蒸去()千克水分才能制出含盐20%的盐水.

- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 12

【解析】设应蒸去水 x 千克,根据溶质守恒: $40 \times 12.5\% = (40-x)20\% \Rightarrow x=15$.
所以应蒸去15千克水分,从而选A.

【例19】有含盐8%的盐水40千克,要配制成含盐20%的盐水,须加()千克盐.

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 4

【解析】设须加盐 x 千克, 根据溶剂守恒: $40(100\% - 8\%) = (40 + x)(100\% - 20\%) \Rightarrow x = 6$. 所以须加盐 6 千克, 从而选 B.

【例 20】把甲杯子含盐 5% 的食盐水与乙杯子含盐 8% 的食盐水混合制成含盐 6% 的食盐水 600 千克, 则乙比甲少取() 千克.

- (A) 200 (B) 250 (C) 260 (D) 300 (E) 320

【解析】设取含盐 5% 的食盐水 x 千克则含盐 8% 的食盐水取 y 千克, 列表分析等量关系:

	食盐溶液	浓度	纯盐重量
原溶液 { 甲 5% 乙 8%	$\begin{cases} x \\ y \end{cases}$	$\begin{cases} 5\% \\ 8\% \end{cases}$	$\begin{cases} 5\% \cdot x \\ 8\% \cdot y \end{cases}$
	↓变化	↓变化	↓不变
成品	600	6%	$600 \times 6\%$

由题设:

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 5\%x + 8\%y = 600 \times 6\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 400, \\ y = 200. \end{cases}$$

所以取含盐 5% 的食盐水 400 千克, 含盐 8% 的食盐水 200 千克, 选 A.

【评注】本题也可用杠杆原理的交叉法求解.

【题型 8】植树问题

【思路点拨】对于直线问题, 如果长度为 l 米, 每隔 n 米植树, 则共有 $\frac{l}{n} + 1$ 棵树; 对于圆圈问题, 如果周长为 l 米, 每隔 n 米植树, 则共有 $\frac{l}{n}$ 棵树.

【例 21】一条长为 1200m 的道路的一边每隔 30m 已经挖好坑植树, 后又改为每隔 25m 植树. 则需要新挖坑 k 个, 需要填上 n 个, 则下列正确的为().

- (A) $k=41$ (B) $k=39$ (C) $n=30$ (D) $n=31$ (E) $n=32$

【解析】原来已经挖好 $1200/30 + 1 = 41$ 个坑, 现在需要 $1200/25 + 1 = 49$ 个坑, 原来可以利用的坑 $1200/150 + 1 = 9$ 个, 故需要新挖 $49 - 9 = 40$ 个, 需要填上 $41 - 9 = 32$ 个坑, 选 E.

【例 22】一块三角地, 在三个边上植树, 三个边的长度分别为 156 米、186 米、234 米, 树与树之间的距离均为 6 米, 三个角上都必须栽一棵树, 问共需植树().

- (A) 90 棵 (B) 93 棵 (C) 96 棵 (D) 99 棵 (E) 100 棵

【解析】156 边上种: $156 \div 6 + 1 = 27$, 186 边上种: $186 \div 6 + 1 = 32$, 234 边上种: $234 \div 6 + 1 = 40$, 所以共种: $27 + 32 + 40 - 3 = 96$ 棵, 选 C.

【评注】也可直接用周长 \div 间距来计算, 如 $\frac{156 + 186 + 234}{6} = 96$.

【例 23】果农将一块平整的正方形土地分割为四块同样大小的正方形土地, 并将果树均匀整齐地种在土地的所有边界上, 且在每块土地的四个角上都种上一棵果树, 该果农未经细算就购买了 60 棵果树, 如果仍按上述想法种植, 那他至少多买了() 棵果树.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】根据题意可知, 将正方形土地分割为四块小的正方形土地后, 共有 9 个顶点, 12 条边, 则种树总数可表示为 $12n + 9$ (n 为四块小正方形土地每边所种植的果树棵树, 其取值为 $n=0, 1, 2, \dots$), 当 $n=4$ 时, 种树总数为 57, 最接近 60, 故至少多买了 3 棵树, 选 D.

【题型 9】还原问题

【思路点拨】遇到“余下的 n/m 又 k 个”，最好从后往前倒着计算，否则直接计算运算量很大。

【例 24】一堆西瓜，第一次卖出总数的 $1/4$ 又 6 个，第二次卖出余下的 $1/3$ 又 4 个，第三次卖出余下的 $1/2$ 又 3 个，恰好卖完。问这堆西瓜原有()个。

- (A) 21 (B) 24 (C) 28 (D) 30 (E) 32

【解析】第三次卖出余下的 $1/2$ 又 3 个，恰好卖完，说明第三次卖了 6 个，第二次总共的瓜为 $(6+4) \div 2/3 = 15$ 个，第一次总数为 $(15+6) \div 3/4 = 28$ 个，选 C。

第三节 强化突破题型

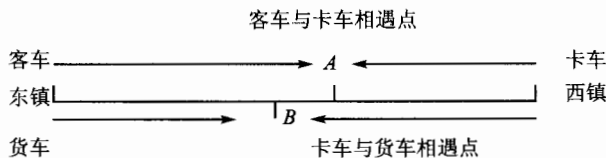
【题型 1】路程问题(圆圈型)

【思路点拨】强化题型主要掌握多次往返相遇问题及圆圈型路程问题。对于多次往返相遇问题，主要抓住两人的路程之和关系进行分析；对于圆圈型的路程，要分为同向和反向两类，借助两人路程之差或之和进行分析。

【例 1】客车、货车、卡车三辆车，客车每小时行 60 千米，货车每小时行 40 千米，卡车每小时行 50 千米。客车、货车从东镇，卡车从西镇，同时相向而行，卡车遇上客车后，2 小时后又遇上了货车。东西两镇相距()千米。

- (A) 333 (B) 330 (C) 990 (D) 1980 (E) 495

【解析】根据题意画图：

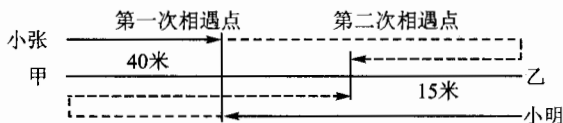


设路程为 S ，由题得 $\frac{S}{40+50} - \frac{S}{60+50} = 2$ ，得到 $S = 990$ ，选 C。

【例 2】小张、小明两人同时从甲、乙两地出发相向而行，两人在离甲地 40 米处第一次相遇，相遇后两人仍以原速继续行驶，并且在各自到达对方出发点后立即沿原路返回，途中两人在距乙地 15 米处第二次相遇。甲、乙两地相距()米。

- (A) 80 (B) 90 (C) 100 (D) 105 (E) 120

【解析】根据题意画图：



从图中可知，小张、小明两人第一次相遇时，共行的路程即是甲、乙两地之间的距离，这时，小张行了 40 米。当他们第二次相遇时，小张行了甲、乙间距离还多 15 米，小明行了两个甲、乙间距离少 15 米，合起来两个人共行了甲、乙间距离的 3 倍。因此小张从出发到第二次

相遇所行的路程应是他从出发到第一次相遇所行的路程的3倍,即可求出他从出发到第二次相遇所行的路程。

小张从出发到第二次相遇所行的路程为 $40 \times 3 = 120$ (米). 又知这段路程比甲、乙间距离多15米,甲、乙间距离 $120 - 15 = 105$ (米),选D.

【例3】甲乙两人从同一起跑线上绕300米跑道跑步,甲每秒跑6米,乙每秒跑4米.问第二次在起跑线追上乙时甲跑了()圈.

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

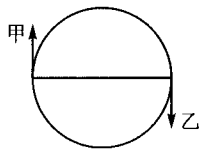
【解析】设乙跑 x 圈,甲跑 y 圈,因为两人相遇时间是一样的,所以 $x \times 300/4 = y \times 300/6$;

得到 $y/x = 3/2$; 就是说乙跑2圈到起跑线,甲正好跑3圈也到起跑线,根据这个比例的关系,所以2次在起跑线追上,只要6圈就可以了,选B.

【例4】在周长为400米的圆形跑道的一条直径的两端,甲、乙两人分别以每秒6米和每秒4米的速度骑自行车同时同向出发(顺时针)沿圆周行驶,经过()秒,甲第二次追上乙.

- (A) 300 (B) 320 (C) 280 (D) 270 (E) 240

【解析】如图,在出发的时候,甲、乙两人相距半个周长,根据路程差 \div 速度差 = 追及时间,就可求出甲第一次追上乙的时间. 当甲追上乙后,两人就可以看作同时同地出发,同向而行. 甲要追上乙,就要比乙多骑一圈400米,从而可求出甲第二次追上乙的时间.



甲第一次追上乙的时间: $400 \div 2 \div (6 - 4) = 100$ (秒),

甲第二次追上乙的时间: $400 \div (6 - 4) = 200$ (秒),

一共所用的时间 $100 + 200 = 300$ (秒),选A.

【评注】在环形跑道上行驶,两车同时同地同向出发,若再一次相遇,快行者必须比慢行者多行一圈,即路程差为环形跑道的周长.

【题型2】工程问题(进水放水问题、牛吃草问题)

【思路点拨】强化题型主要掌握效率出现正负的问题. 对于进水放水问题,先求出放水管和进水管的效率,然后得到总效率,进而得到时间. 对于牛吃草问题,先求出牛吃草和草生长的效率,再根据总效率求出时间.

【例5】一项工程,甲、乙、丙三人合作需要13天完成. 如果丙休息2天,乙就要多做4天,或者由甲、乙两人合作1天. 则这项工程由甲独做需要()天.

- (A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 28 (E) 20

【解析】丙2天的工作量,相当乙4天的工作量. 丙的工作效率是乙的工作效率的 $4 \div 2 = 2$ (倍),甲、乙合作1天,与乙做4天一样. 也就是甲做1天,相当于乙做3天,甲的工作效率是乙的工作效率的3倍. 他们共同做13天的工作量,由甲单独完成,甲需要26天. 选C.

【评注】事实上,当算出甲、乙、丙三人工作效率之比是3:1:2,就知甲做1天,相当于乙、丙合作1天. 三人合作需13天,其中乙、丙两人完成的工作量,可转化为甲再做13天来完成.

【例6】一个水池,上部装有若干同样粗细的进水管,底部装有一个常开的排水管,当打开4个进水管时,需要4小时才能注满水池;当打开3个进水管时,需要8小时才能注满水

池,现需要2小时内将水池注满,至少要打开进水管()。

- (A) 8个 (B) 7个 (C) 6个 (D) 5个 (E) 4个

【解析】设一个进水管的效率为 x , 排水管的效率为 y 。

$$\text{由题意得} \begin{cases} 4 \cdot 4 \cdot x - 4 \cdot y = 1, \\ 3 \cdot 8 \cdot x - 8 \cdot y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8}, \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

若要2小时注满水,设至少打开 n 个进水管,则

$$n \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

得 $n=6$, 选 C。

【评注】水管问题与工程问题是一样的。水池的注水或排水相当于一项工程,注水量或排水量就是工作量。单位时间里的注水量或排水量就是工作效率。至于又有注入又有排出的问题,不过是工作量有加有减罢了。因此,水管问题与工程问题的解题思路基本相同。

【题型3】浓度问题

【思路点拨】强化题型主要掌握溶剂置换溶液、多次蒸发、多次混合溶液问题。对于浓度多次变化问题,可以借助比例变化的方法进行求解,找到不变的因素,统一比例思考。

【例7】一瓶浓度为20%的消毒液倒出 $\frac{2}{5}$ 后,加满清水,再倒出 $\frac{2}{5}$ 后,又加满清水,此时消毒液的浓度为()。

- (A) 7.2% (B) 3.2% (C) 5.0% (D) 4.8% (E) 3.6%

【解析】一瓶浓度为20%的消毒液倒出 $\frac{2}{5}$ 后,加满清水,说明溶液跟原来一样多,溶质减少了 $\frac{2}{5}$,故浓度为原来的 $\frac{3}{5}$,再操作一次,浓度又为上次的 $\frac{3}{5}$,故最后浓度变为 $20\% \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = 7.2\%$,选 A。

【例8】一种溶液,蒸发掉一定量的水后,溶液的浓度为10%;再蒸发掉同样多的水后,溶液的浓度变为12%;第三次蒸发掉同样多的水后,溶液的浓度变为()。

- (A) 14% (B) 17% (C) 16% (D) 15% (E) 18%

【解析】溶液的浓度为10%,得到溶质:溶剂 $= 1:9 = 12:108$,随后再蒸发掉同样多的水后,溶液的浓度变为12%,得到溶质:溶剂 $= 12:88$;可以看出溶剂少了 $108 - 88 = 20$ 份,第三次蒸发掉同样多的水后,得到溶质:溶剂 $= 12:68$,故溶液的浓度变为 $12/(12+68) = 15\%$,选 D。

【例9】甲杯中有纯酒精12克,乙杯中有水15克,第一次将甲杯中的部分纯酒精倒入乙杯,使酒精与水混合。第二次将乙杯中的部分混合溶液倒入甲杯,这样甲杯中纯酒精含量为50%,乙杯中纯酒精含量为25%。则第二次从乙杯倒入甲杯的混合溶液是()克。

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

【解析】方法一:设第一次,从甲杯中倒入乙杯的酒精是 x 克。

则 $x/(15+x) = 25\%$,解得 $x=5$ (克),此时,乙杯中有混合溶液 $15+5=20$ (克),甲杯中有纯酒精7克,设第二次将乙杯中的混合溶液倒入甲杯中是 y 克,则 $(25\%y+7)/(7+y) = 50\%$,解得 $y=14$ 克。

方法二:第一次甲倒入乙以后,乙的浓度就是25%。

甲倒入乙的酒精为： $15 \div (1 - 25\%) - 15 = 5$ (克)，甲中剩余纯酒精： $12 - 5 = 7$ (克)。

第二次从乙倒入甲的溶液与甲中剩余 7 克纯酒精的比为 $(100 - 50) : (50 - 25) = 2 : 1$ 。

第二次从乙倒入甲的溶液有： $7 \times 2 = 14$ (克)，选 B。

【题型 4】分段计费

【思路点拨】对于分段计费问题，关键掌握两点：一是确定每段的边界值，来判断所给数值落入的区间；二是选取对应的计费表达式进行运算。

【例 10】税务部门规定个人稿费纳税办法是：不超过 800 元的不纳税，超过 800 元而不超过 4000 元的按超过 800 元部分的 14% 纳税，超过 4000 元的按全稿酬的 11% 纳税。已知甲纳税 550 元，乙纳税 420 元，则两人稿费相差()元。

(A) 900 (B) 1050 (C) 1200 (D) 1250 (E) 1300

【解析】先预测，考察一下： $4000 - 800 = 3200$ ， $3200 \times 14\% = 448$ 。

因为 $550 > 448$ ，所以甲的稿费超过 4000 元。设甲的稿费为 x 元，则 $11\% \cdot x = 550$ ，所以 $x = 5000$ 元。乙的稿费不超过 4000 元，乙的稿费为 $800 + \frac{420}{14\%} = 3800$ (元)，两人相差 1200 元，选 C。

【例 11】某市用水价格为：每户每月不超过 5 吨的部分按 4 元/吨收取，超过 5 吨不超过 10 吨的部分按 6 元/吨收取，超过 10 吨的部分按 8 元/吨收取。某户居民两个月共交水费 108 元，则该户居民这两个月用水总量最多为()吨。

(A) 21 (B) 24 (C) 17.25 (D) 21.33 (E) 22

【解析】该户将每月 4 元/吨的额度用完会产生水费 $4 \times 5 \times 2 = 40$ 元，每月 6 元/吨的额度会产生水费 $6 \times 5 \times 2 = 60$ 元，共有 $40 + 60 = 100$ 元。而实际多 $108 - 100 = 8$ 元，故 8 元/吨的额度用了 1 吨。故该户居民这两个月用水总量最多为 $5 \times 2 + 5 \times 2 + 1 = 21$ 吨，选 A。

【评注】如果求这两个月用水总量最少，则答案就为 C 选项。

【例 12】某公司按照销售人员营业额的不同，分别给予不同的销售提成，其提成规定如下。某员工在 2012 年 4 月份所得提成 770 元，则该员工该月的销售额为()元。

(A) 33125 (B) 26625 (C) 32625 (D) 33625 (E) 33525

销售额/元	提成率/%
不超过 10000	0
10000~15000	2.5
15000~20000	3
20000~30000	3.5
30000~40000	4
40000 以上	5

【解析】由题,先计算每段最多的提成:10000~15000 最多提成 $5000 \times 2.5\% = 125$ (元);15000~20000 最多提成 $5000 \times 3\% = 150$ (元);20000~30000 最多提成 $10000 \times 3.5\% = 350$,此时总和为 $125 + 150 + 350 = 625$ (元),剩下的 $770 - 625 = 145$ (元)是按照 4% 计算的,可以得到 $145/4\% = 3625$ (元),因此销售额为 $30000 + 3625 = 33625$ (元),选 D.

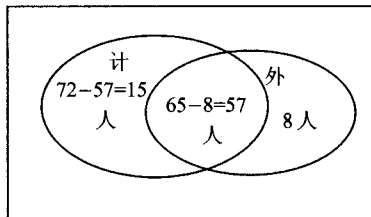
【题型 5】集合问题

【思路点拨】对于两个集合,公式为 $A \cup B = A + B - A \cap B$;对于三个集合,公式为 $A \cup B \cup C = A + B + C - (A \cap B + B \cap C + A \cap C) + A \cap B \cap C$.

【例 13】某单位有 90 人,其中 65 人参加外语培训,72 人参加计算机培训,已知参加外语培训而未参加计算机培训的有 8 人,则参加计算机培训而未参加英语培训的人数是().

- (A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15

【解析】根据文氏图得到, $72 - (65 - 8) = 15$ (人),选 E.



【评注】单位的 90 人可以分为四部分,只参加计算机培训的,只参加外语培训的,两个培训都参加的以及两个培训都没参加的.

【例 14】某公司员工有 200 人,每人至少参加一项培训,参加数学、外语、会计培训的人数分别为 130,110,90. 只参加数学和外语的有 35 人,只参加数学和会计的有 30 人,只参加外语和会计的有 25 人. 则三个都参加的人数为().

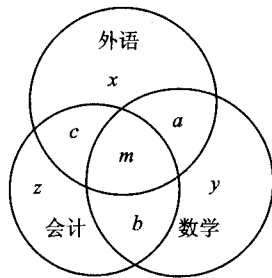
- (A) 10 (B) 13 (C) 15 (D) 20 (E) 16

【解析】设三个都参加的为 x 人,则有 $200 = 130 + 110 + 90 - 35 - 30 - 25 - 2x$,可解得 $x = 20$,选 D.

【例 15】某公司的员工中,参考数学、外语、会计培训的人数分别为 130,110,90. 又知只参加一种培训的人数为 140,三个都参加的人数为 30,则恰参加两项的人数为().

- (A) 45 (B) 50 (C) 52 (D) 65 (E) 100

【解析】方法一: $\frac{130 + 110 + 90 - 140 - 30 \times 3}{2} = 50$,选 B.



方法二:如图,有 $\begin{cases} a + x + c + m = 110, \\ b + y + a + m = 130, \\ c + z + b + m = 90, \end{cases}$ 则 $a + b + c = 50$.
 $\begin{cases} x + y + z = 140, \\ m = 30, \end{cases}$

【题型 6】不定方程

【思路点拨】列方程解应用题,一般都是未知数个数与方程的个数一样多,但如果方程(组)中未知数的个数多于方程的个数,此方程(组)称为不定方程(组).不定方程一般有无数解,但是结合题意,实际只要我们求出无数解中的特殊解,往往是求整数解.有时还要加上其他限制,这时的解就是有限和确定的了.考试中主要是涉及整系数不定方程的整数解,一般要借助整除、奇数偶数、范围等特征来确定数值.

【例 16】在年底的献爱心活动中,某单位共有 100 人参加捐款,经统计,捐款总额是 19000 元,个人捐款数额有 100 元,500 元和 2000 元三种.该单位捐款 500 元的人数为().

- (A) 13 (B) 18 (C) 25 (D) 30 (E) 38

【解析】设捐款 100 元的有 x 人,500 元的有 y 人,2000 元的有 z 人.

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 100x + 500y + 2000z = 19000, \end{cases} \quad \text{化简得 } 4y + 19z = 90, \text{ 根据整除, 解答出 } y = 13, \text{ 所以}$$

选 A.

【例 17】若 1 只兔子可换 2 只鸡,2 只兔子可换 3 只鸭,5 只兔子可换 7 只鹅.某人用 20 只兔子换得鸡鸭鹅共 30 只,并且鸭和鹅各至少 8 只.则鸡与鸭的总和比鹅多()只.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

【解析】设鸡有 x 只,鸭有 y 只,鹅有 z 只.

$$\begin{cases} x + y + z = 30, & (1) \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{7}z = 20, & (2) \end{cases}$$

方程(2)化简为 $21x + 28y + 30z = 840$. (3)

(1) $\times 30 - (3)$, 得 $9x + 2y = 60$, 根据 9 的倍数和奇偶性得到 $x = 4, y = 12, z = 14$, 所以鸡鸭鹅分别为 4、12、14 只, 故选 B.

【题型 7】线性优化

【思路点拨】线性规划应用非常广泛,解决的问题是:在资源的限制下,如何使用资源来完成最多的生产任务;或是给定一项任务,如何合理安排和规划,能以最少的资源来完成.如常见的任务安排问题、配料问题、下料问题、布局问题、库存问题.

图解法解决线性规划问题时,根据约束条件画出可行域是关键的一步.一般地,可行域可以是封闭的多边形,也可以是一侧开放的非封闭平面区域.第二是画好线性目标函数对应的平行直线系,特别是其斜率与可行域边界直线斜率的大小关系要判断准确.通常最优解在可行域的顶点(即边界线的交点)处取得,但最优整数解不一定是顶点坐标的近似值.它应是目标函数所对应的直线平移进入可行域最先或最后经过的那一整点的坐标.

解线性规划应用题步骤:(1) 设出决策变量,找出线性约束条件和线性目标函数;

(2) 利用图像在线性约束条件下找出决策变量,使线性目标函数达到最大(或最小).

【例 18】某公司有 60 万元资金,计划投资甲、乙两个项目,按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍,且对每个项目的投资不能低于 5 万元,对项目甲每投资 1 万元可

获得 0.4 万元的利润,对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润,该公司正确规划投资后,在这两个项目上共可获得的最大利润为()万元.

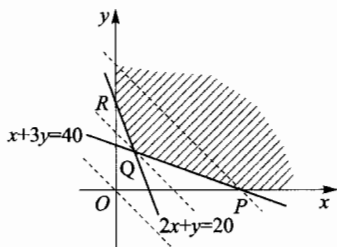
- (A) 36 (B) 31.2 (C) 30.4 (D) 24 (E) 28

【解析】对甲项目投资 24 万元,对乙项目投资 36 万元,可获最大利润 31.2 万元. 因为对乙项目投资获利较大,故在投资规划要求内(对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍)尽可能多地安排资金投资于乙项目,即对项目甲的投资等于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍时可获最大利润. 这是最优解法. 也可用线性规划的通法求解,选 B.

【例 19】汽车公司有两家装配厂,生产甲、乙两种不同型号的汽车. 已知 A 厂每小时可完成 1 辆甲型车和 2 辆乙型车;B 厂每小时可完成 3 辆甲型车和 1 辆乙型车. 欲制造 40 辆甲型车和 20 辆乙型车,则这两家工厂各工作()小时,才能使所费的总工作时数最少.

- (A) 4,12 (B) 6,8 (C) 5,11 (D) 4,10 (E) 6,10

【解析】设 A 厂工作 x h, B 厂工作 y h, 总工作时数为 t h, 则 $t = x + y$, 且 $x + 3y \geq 40$, $2x + y \geq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, 可行解区域如图. 而符合问题的解为此区域内的格子点(纵、横坐标都是整数的点称为格子点), 于是问题变为要在此可行解区域内, 找出格子点 (x, y) , 使 $t = x + y$ 的值为最小.



由图知当直线 $l: y = -x + t$ 过 Q 点时, 纵、横截距 t 最小, 但由于符合题意的解必须是格子点, 还必须看 Q 点是否是格子点. 解方程组 $\begin{cases} x + 3y = 40 \\ 2x + y = 20 \end{cases}$ 得到的 Q(4, 12) 为格子点, 故选 A.

【题型 8】至少至多问题

【思路点拨】在分析某对象至少(至多)时, 可转化为其余部分最多(最少)来分析.

【例 20】五名选手在一次数学竞赛中共得 404 分, 每人得分互不相等, 并且其中得分最高的选手得 90 分. 那么得分最少的选手至多得()分. (每位选手的得分都是整数)

- (A) 77 (B) 68 (C) 72 (D) 75 (E) 78

【解析】由题意可知其余的四个人的平均成绩为 $\frac{404 - 90}{4} = 78.5$ 分, 因为每位选手的得分都是整数, 所以这四个选手的得分分别是: 77, 78, 79, 80; 所以得分最少的选手至多得分为 77 分, 故选 A.

【例 21】某社团共有 46 人, 其中 40 人爱好戏剧, 38 人爱好体育, 35 人爱好写作, 30 人爱

好收藏,这个社团至少有()人以上四项活动都喜欢.

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 4

【解析】先分别求出每种不爱好的人数: $46-40=6$, $46-38=8$, $46-35=11$, $46-30=16$, 则至少参加4个活动的人 $=46-6-8-11-16=5$ 人,选A.

【评注】求至少有几项都喜欢,只需最多有几项不喜欢,即每人只喜欢三个项目时,此时不是四项都喜欢的人数最多.

【题型9】应用题的最值问题

【思路点拨】解答这类问题一般要利用数量关系,列出目标函数式,然后用函数有关知识和方法加以解决. 求最值的主要方法为二次函数的抛物线法、平均值定理法.

【例22】某租赁公司拥有汽车100辆.当每辆车的月租金为3000元时,可全部租出.当每辆车的月租金每增加50元时,未租出的车将会增加一辆.租出的车每辆每月需要维护费150元,未租出的车每辆每月需要维护费50元.

(1) 当每辆车的月租金定为3600元时,能租出()辆车.

- (A) 66 (B) 68 (C) 70 (D) 78 (E) 88

(2) 当每辆车的月租金定为()元时,租赁公司的月收益最大.

- (A) 3050 (B) 3150 (C) 3650 (D) 4050 (E) 4250

【解析】(1) 当每辆车的月租金定为3600元时,未租出的车辆数为 $\frac{3600-3000}{50}=12$,所以这时租出了 $100-12=88$ 辆车,选E.

(2) 设每辆车的月租金定为 x 元,则租赁公司的月收益为

$$f(x) = \left(100 - \frac{x-3000}{50}\right)(x-150) - \frac{x-3000}{50} \times 50,$$

$$\text{整理得 } f(x) = -\frac{x^2}{50} + 162x - 21000 = -\frac{1}{50}(x-4050)^2 + 307050.$$

所以当 $x=4050$ 时, $f(x)$ 最大,其最大值为 $f(4050)=307050$,选D.

【例23】用2160万元购得一块空地,计划建造一栋至少10层、每层2000平方米的楼房.经测算,如果将楼房建为 $x(x \geq 10)$ 层,则每平方米的平均建筑费用为 $560+48x$ (单位:元).为了使楼房每平方米的平均综合费用最少,该楼房应建为()层.

(注:平均综合费用=平均建筑费用+平均购地费用,平均购地费用= $\frac{\text{购地总费用}}{\text{建筑总面积}}$)

- (A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

【解析】建立平均综合费的函数关系,设楼房每平方米的平均综合费为 $f(x)$ 元,则

$$f(x) = (560 + 48x) + \frac{2160 \times 10000}{2000x} = 560 + 48x + \frac{10800}{x} \quad (x \geq 10, x \in \mathbf{Z}^+).$$

此处用平均值定理求最小值:

$$f(x) = 560 + 48x + \frac{10800}{x} \geq 560 + 2\sqrt{48x \cdot \frac{10800}{x}} = 560 + 2 \times 720 = 2000,$$

当且仅当 $48x = \frac{10800}{x}$ 时,等号成立,解得 $x=15$,选C.

第四节 核心专题点睛

一、鸡兔同笼

【例 1】一笼中的鸡和兔共 250 条腿,已知鸡的只数是兔的只数的 3 倍,则笼中共有 () 只鸡.

- (A) 50 (B) 75 (C) 100 (D) 125 (E) 150

【解析】鸡 2 条腿,兔子 4 条腿. 设鸡 x 只,兔 y 只,有 $2x + 4y = 250$,又 $x = 3y$ 代入, $10y = 250$,得到 $y = 25$,所以 $x = 3 \times 25 = 75$,故选 B.

【例 2】一段公路上共行驶 106 辆四轮汽车和两轮摩托车,它们共有 344 只车轮,则汽车与摩托车各有 () 辆.

- (A) 68,38 (B) 67,39 (C) 66,40 (D) 65,41 (E) 60,46

【解析】由已知得,设汽车为 x 辆,摩托车为 y 辆,则 $x + y = 106$, $4x + 2y = 344$,求得 $x = 66$, $y = 40$,选 C.

【例 3】5 分和 2 分硬币共 100 枚,总币值 4 元 1 角,则 5 分硬币比 2 分硬币多 () 枚.

- (A) 20 枚 (B) 30 枚 (C) 40 枚 (D) 50 枚 (E) 35 枚

【解析】设 5 分为 x 枚,2 分为 $100 - x$ 枚,则有 $5x + 2(100 - x) = 410 \Rightarrow x = 70$,故 5 分的硬币比 2 分的硬币多 $70 - 30 = 40$,故选 C.

二、进退并存问题

【例 4】单杠上挂着一条 4 米长的爬绳,小赵每次向上爬 1 米后又滑下半米来. 则小赵需 () 次才能爬上单杠.

- (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

【解析】第一次爬+滑 $= 1 - 0.5 = 0.5$;第二次爬+滑 $= 0.5 + 1 - 0.5 = 1$;第三次爬+滑 $= 1 + 1 - 0.5 = 1.5$;第四次爬+滑 $= 1.5 + 1 - 0.5 = 2$;第五次爬+滑 $= 2 + 1 - 0.5 = 2.5$;第六次爬+滑 $= 2.5 + 1 - 0.5 = 3$;第七次爬 $= 3 + 1 = 4$ 即可,选 B.

【例 5】小明爬 35 度的斜坡,坡长 40 米,他每次爬 10 米就歇一歇,但每歇一次就下滑 4 米,那么小明共需 () 次就爬到坡顶上了.

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) $20/3$ (E) 7

【解析】爬完第五次恰好在 30 米处,再爬一次即可,即爬了 6 次,选 C.

【例 6】青蛙从井底向上跳,井深 6 米,青蛙每次跳上 2 米,又滑下 1 米,则青蛙需 () 次方可跳出.

- (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

【解析】跳一次+滑一次 $= 1$ 米,4 次的时候恰好在 4 米处,再跳 2 米即可,故需要 5 次,选 C.

三、至少至多问题

【例 7】254 个志愿者来自不同的单位,任意两个单位的志愿者人数之和多于 20 人,且任

意两个单位的志愿者人数不同. 则这些志愿者所属的单位数最多有()个.

- (A) 17 (B) 15 (C) 14 (D) 12 (E) 18

【解析】任意两个单位的人数之和多于 20, 注定了最少的一个单位人数为 10, 后面说到求单位数最多为多少, 并且各个单位人数不一样, 那么说明各个单位的人数应该是 10, 11, 12, … 这样一个人数关系. 当然, 不可能这样一直写下去, 到这里可以看到, 这就是最常见的等差数列, 要求和, 使之和等于 254, 可以用代入的方法求和, 发现把 B 即 15 个单位代入, 总人数为 255 人, 多一个人, 这一个人无法处理, 因为他不可能独立成为一组, 也不能与前面的组合并, 因为每组人数不一样, 这样就决定了不能分 15 组, 只能分 14 组, 最后有一组不属于等差数列之内的, 人数多一些. 即 10, 11, 12, …, 22, 46, 共 14 组, 选 C, 最后一组人数为 46, 不属于等差数列之内.

【例 8】一副扑克牌有 52 张, 最上面一张是红桃 A, 如果每次把最上面的 10 张移到最下面而不改变它们的顺序及朝向, 则至少经过()次移动, 红桃 A 会出现在最上面.

- (A) 27 (B) 26 (C) 35 (D) 24 (E) 30

【解析】要使红桃 A 再次出现在最上面, 则移动的扑克牌的总张数应能同时被 10 和 52 整除, 即能被 260 整除, 故至少经过 26 次移动, 选 B.

【例 9】在拆迁时, 组织三个部门的人将长木锯成短木, 树木的粗细都相同, 只有长度不一样, 甲部门锯的树木是 2 米长, 乙部门锯的树木是 1.5 米长, 丙部门锯的树木是 1 米长, 都要求按 0.5 米长的规格锯开, 时间结束时, 三个部门正好把堆放的树木锯完, 张三那个部门共锯了 27 段, 李四那个部门共锯了 28 段, 王五那个部门共锯了 34 段, 请问张三属于哪个部门? 哪个部门锯得最慢? ()

- (A) 属于丙部门, 甲部门最慢 (B) 属于乙部门, 丙部门最慢
(C) 属于甲部门, 丙部门最慢 (D) 属于乙部门, 乙部门最慢 (E) 以上都不正确

【解析】由题目可知道, 在相同时间里, 李四所在的甲部门锯了 7 棵树, 共锯了 21 次; 张三锯了 27 段, 属于乙部门, 锯了 9 棵树, 锯了 18 次; 王五所在的丙部门锯了 17 棵树, 锯了 17 次; 因此选 B.

【例 10】科考队员在冰面上钻孔获取样本, 测量不同孔心之间的距离, 获得的部分数据分别为 1 米、3 米、6 米、12 米、24 米、48 米. 则科考队员至少钻了()个孔.

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

【解析】所测距离组成一个数列 1、3、6、12、24、48, 易知该数列中任一项均大于其前面所有项之和. 故这 6 条线段不可能组成封闭回路, 即 6 条线段最少 7 个端点, 故至少钻 7 个孔, 选 D.

【例 11】20 人参加百分制的考试, 及格线为 60 分, 20 人的平均成绩为 88 分, 及格率为 95%. 所有人得分均为整数, 且彼此得分不同. 则成绩排名第十的人最低考了()分.

- (A) 88 (B) 89 (C) 90 (D) 91 (E) 87

【解析】20 人总共失分 $(100 - 88) \times 20 = 240$, 由及格率为 95% 知只有 1 人不及格. 要使第十名失分尽量多(得分尽量低), 可使前 9 名失分尽量少, 设分别失分 0, 1, …, 8 分. 而从第 11 名至第 19 名亦是失分尽量少, 设第 10 名、第 11 名…第 19 名分别失分 $x, x+1, x+2, \dots, x+9$, 则可得 $(0 + 1 + \dots + 8) + [x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+9)] + 41 \leq 240$, 解得 x 最大为 11, 即第 10 名最少得分 89 分, 选 B.

【例 12】某社规定,每位主任都任职一届,一届任期 4 年,那么 10 年期间该社最多有()位主任任职。

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

【解析】第一年的时候第一届到期,中间 8 年是两届,最后一年有新的一位,只要保证开始就有一位校长刚刚退下,有一位校长刚刚上任即可,选 B。

【例 13】要把 1 米长的优质铜管锯成长 38 毫米和长 90 毫米两种规格的小铜管,每锯一次都要损耗 1 毫米铜管.设锯得的 38 毫米铜管为 m 段、90 毫米铜管为 n 段(m, n 为正整数),当所损耗的铜管最少时, $n-m$ 的值为()。

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

【解析】根据题意,有 $38m+90n+(m+n-1)=1000$, $39m+91n=1001$, 即 $3m+7n=77$. 要使损耗最少,就应尽可能多锯 90 毫米长的铜管,也就是说上面式中的 m 应尽可能小, n 尽可能大. 由于 m, n 都必须为整数,因而推知: $m=7, n=8$. 即 38 毫米的铜管锯 7 段,90 毫米的铜管锯 8 段时,损耗最少. 故选 A。

【评注】本题的关键点在于:要使损耗最少,应尽可能多锯 90 毫米长的铜管,但必须符合“两种铜管都有”、“两种铜管长度之和加上损耗部分长度应等于 1 米”两个条件. 列方程时可别忘掉那损耗的 1 毫米,而且损耗了几个“1 毫米”也不能算错,应该是“总段数-1”。

四、数字问题

【例 14】整数 64 具有可被它的个位数字所整除的性质. 则在 10 和 50 之间有()个整数具有这种性质。

- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 20

【解析】从个位数看起:个位 1, 2, 5 是都可以的,各有 4 个;

个位为 3, 十位数能被 3 除的只有一个(33);个位为 4, 隔 20 有一个,一共 2 个;

个位为 6, 一个(36);个位为 7, 没有;个位为 8, 一个(48);个位为 9, 没有。

这样一共是 $3 \times 4 + 1 + 2 + 1 + 1 = 17$, 选 C。

【例 15】一位长寿老人出生于 19 世纪 90 年代,有一年他发现自己年龄的平方刚好等于当年的年份,则这位老人出生于()年。

- (A) 1894 (B) 1892 (C) 1898 (D) 1896 (E) 1890

【解析】由 $43^2=1849$, $44^2=1936$, $45^2=2025$, 知道该人当年应为 44 岁,是 1936 年. 从而 $1936-44=1892$, 故选 B。

【例 16】有一个四位数,能被 72 整除,其千位与个位之和为 10,个位数是为质数的偶数,去掉千位与个位得到一个新数为质数,则这个四位数除以 11 余()。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】首先个位数既是质数又是偶数,只有 2,而个位数+千位数=10,所以千位数是 8。

而这个四位数能被 72 整除,说明既能被 8 整除,又能被 9 整除,说明中间两个数之和为 8 或 17,并且后三位是 8 的倍数. 又由中间两个数构成质数,故这个四位数为 8712,恰好能被 11 整除,余数为 0,选 A。

【例 17】一个小于 100 的整数,与 4 的差是 6 的倍数,与 4 的和是 7 的倍数. 满足此要求最大的数除以 11 的余数为()。

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

【解析】这道题可用试算法,因为要找最大的数,所以从大往小试算,与4的差是6的倍数最大为 $90+4=94$,恰好 $94+4=98$,可以被7整除.故94除以11的余数为6,选C.

【例 18】如果在一个两位数的两个数字之间添写一个零,所得的三位数是原来数的9倍,则原来两位数的各数位之积为().

- (A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 27

【解析】设原来数为 ab ,这样后来的数为 $a0b$,把数字展开可得 $100a+b=9\times(10a+b)$.解得 $5a=4b$,从而 $a=4, b=5$,所以原来的两位数为45,故各数位之积为20,选D.

【例 19】甲、乙、丙代表互不相同的3个正整数,并且满足:甲 \times 甲=乙+乙=丙 \times 135.那么甲最小是 m ,则 m 的各个数位之和为().

- (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) 12

【解析】题中要求丙与135的乘积为甲的平方数,而且是个偶数(乙+乙).分解 $135=5\times 3\times 3\times 3$,那么丙最小是 $2\times 2\times 5\times 3$,所以甲最小是: $2\times 3\times 3\times 5=90$,各数位之和为9,选C.

【例 20】在1~100这100个自然数中,所有不能被9整除的数的和是().

- (A) 4456 (B) 4446 (C) 4556 (D) 4356 (E) 4346

【解析】先求出1~100所有的自然数之和: $1+2+3+\cdots+100=\frac{1+100}{2}\cdot 100=5050$,

然后求出能被9整除的数之和: $9+18+\cdots+99=9(1+2+3+\cdots+11)=9\cdot\frac{1+11}{2}\cdot$

$11=594$,则两者相减就表示不能被9整除的数之和: $5050-594=4456$,所以选A.

【例 21】有四个连续整数,已知它们的和等于其中最大的与最小的两个整数的积,那么这四个数中最大的数有()种情况.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 无数种

【解析】设4个数 $a, a+1, a+2, a+3$,由题

$$a+a+1+a+2+a+3=a(a+3)\Rightarrow a_1=3, a_2=-2.$$

最大的数为 $3+3=6$ 或 $-2+3=1$.故有两种,选B.

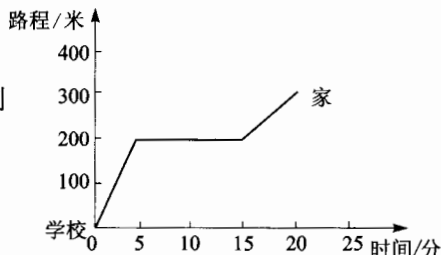
五、图表题

【例 22】图中描述了小明放学回家的行程情况,则下列叙述正确的有()个.

- (1) 小明放学后是径直回家
(2) 小明在路上逗留了10分钟
(3) 小明家离学校有300米路

- (4) 小明前5分钟的平均速度是每分钟40米

- (A) 0个 (B) 1个 (C) 2个 (D) 3个 (E) 4个



【解析】由于从5分钟到15分钟这段时间路程没有变化,说明小明没有径直回家,而是逗留了10分钟,因此(1)错误,(2)正确.从图中看出最后的路程是300米,所以离学校为300米,故(3)正确.前5分钟走了200米,可以得到速度为40米/分,(4)正确,故选D.

【例 23】有两种汽车,小车每辆车120元,可坐12人,大车每辆车160元,可坐18人.现

安排 40 个人去旅游,要求车尽量坐满,(1) 有()种可行的租车方案.(2) 租车最省钱的方案有()种.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

【解析】(1) 将可行的租车方案列表如下,选 D.

	大车辆数	小车辆数	可坐人数	租金/元
方案一	3	0	54	480
方案二	2	1	48	440
方案三	1	2	42	400
方案四	0	4	48	480

(2) 从上表可以看出:40 个人去旅游,租 1 辆大车、两辆小车最省钱,选 A.

第五节 阶梯化精炼题

基础能力题



扫码看视频

一、问题求解

1. 有 12 分米长的铁丝 12 根,18 分米长的铁丝 9 根,24 分米长的铁丝 10 根,要把它们截成一样长的铁丝,且不浪费,则截下的铁丝最长为 m 分米,可截 n 根,则 $m+n$ 为().

- (A) 97 (B) 98 (C) 99 (D) 100 (E) 101

2. 有一条道路,左边每隔 5 米种一棵杨树,右边每隔 6 米种一棵柳树,两端都种上树,共有 5 处是杨树与柳树相对.这条道路长()米.

- (A) 60 (B) 90 (C) 150 (D) 180 (E) 120

3. 从甲地到乙地原来每隔 45 米要装一根电线杆,加上两端的两根,一共有 53 根电线杆.现在改成每隔 60 米装一根电线杆,除两端的两根不需要移动外,中途还有()根不必移动.

- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

4. 大雪后的一天,小明和爸爸共同步测一个圆形花园的周长,他俩的起点和走的方向完全相同.小明每步长 54 厘米,爸爸每步长 72 厘米,由于两人脚印有重合的,所以各走完一圈后雪地上只留下 60 个脚印,则花园的周长为().

- (A) 2060 (B) 2160 (C) 2260 (D) 2360 (E) 2460

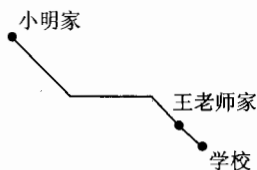
5. 小强骑自行车从甲地到乙地,去时以每小时 15 千米的速度前进,回时以每小时 30 千米的速度返回.小强往返过程中的平均速度是每小时()千米.

- (A) 22 (B) 24.5 (C) 22.5 (D) 20 (E) 25

6. 动物园的饲养员给三群猴子分花生.如果只分给第一群,则每只猴子可得 12 粒;如果只分给第二群,则每只猴子可得 15 粒;如只分给第三群,则每只猴子可得 20 粒.那么平均分给这三群猴子,每只猴子可得()粒.

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 10

7. 小明家到王老师家的路程为 3km, 王老师家到学校的路程为 0.5km, 为了使他能按时到校, 王老师每天骑自行车接小明上学. 已知王老师骑自行车的速度是步行速度的 3 倍, 每天比平时步行上班多用了 20min, 则王老师的骑自行车速度与步行速度相差 () km/h.



- (A) 5 (B) 8 (C) 7 (D) 9 (E) 10

8. 某校全体学生列队, 不论他们人数相等地分成 2 队、3 队、4 队、5 队、6 队、7 队、8 队、9 队, 都会多出 1 人. 那么该校至少有 m 名学生, 则 m 的各个数位之和为 ().

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 9

9. 母女俩今年的年龄共 35 岁, 再过 5 年, 母亲的年龄为女儿的 4 倍, 母亲今年 () 岁.

- (A) 29 (B) 30 (C) 31 (D) 32 (E) 33

10. 一条长为 1200m 的道路的一边每隔 30m 立一根电线杆, 另一边每隔 25m 栽一棵树, 如果在马路入口与出口处刚好同时有电线杆与树相对而立, 那么整条道路上两边同时有电线杆与树相对而立的地方共有 () 处.

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

11. 某部队进行急行军, 预计行 60 千米的路程可在下午 5 点钟到达, 后来由于速度比预计的加快了 $\frac{1}{5}$, 结果于 4 点钟到达, 这时的速度是 ().

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 14

12. 随着国民经济持续增长, 我国的铁路运输进行了 6 次提速. 已知北京至广州的路程 2208 千米, 第六次提速后的速度比第五次提速后的速度增加 20%, 时间却少用了 2 小时. 第六次提速后的速度为 () 千米/小时.

- (A) 184 (B) 200 (C) 220.8 (D) 225 (E) 230

13. 一件工作, 甲做 9 天可以完成, 乙做 6 天可以完成. 现在甲先做了 3 天, 余下的工作由乙继续完成. 乙需要做 () 天可以完成全部工作.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 3.5 (E) 4.5

14. 一件工作, 甲、乙两人合作 30 天可以完成. 现在共同做了 6 天后, 甲离开了, 由乙继续做了 40 天才完成. 如果这件工作由甲、乙单独完成, 相差 () 天.

- (A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

15. 某工程先由甲独做 63 天, 再由乙单独做 28 天即可完成; 如果由甲、乙两人合作, 需 48 天完成. 现在甲先单独做 42 天, 然后再由乙来单独完成, 那么乙还需要做 () 天?

- (A) 56 (B) 53 (C) 54 (D) 55 (E) 58

16. 一件工程, 甲队单独做 10 天完成, 乙队单独做 30 天完成. 现在两队合作, 其间甲队休息了 2 天, 乙队休息了 8 天 (不存在两队同一天休息). 则开始到完工共用了 () 天时间.

- (A) 12 (B) 14 (C) 11 (D) 13 (E) 15

17. 一项工程, 甲队单独做 20 天完成, 乙队单独做 30 天完成. 现在他们两队一起做, 其间甲队休息了 3 天, 乙队休息了若干天. 从开始到完成共用了 16 天. 则乙队休息了 () 天.

- (A) 5.5 (B) 3 (C) 4 (D) 3.5 (E) 4.5

18. 甲乙两项工作,张单独完成甲工作要 10 天,单独完成乙工作要 15 天;李单独完成甲工作要 8 天,单独完成乙工作要 20 天. 如果每项工作都可以由两人合作,那么这两项工作都完成最少需要()天.

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

19. 一件工作,甲独做要 12 天,乙独做要 18 天,丙独做要 24 天. 这件工作由甲先做了若干天,然后由乙接着做,乙做的天数是甲做的天数的 3 倍,再由丙接着做,丙做的天数是乙做的天数的 2 倍,终于做完了这件工作. 则总共用了()天.

- (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 22

二、条件充分性判断题

1. 甲数比丙数小.

(1) 甲数和乙数之比是 $2:3$,乙数和丙数之比是 $8:7$.

(2) 丙数是甲数与乙数之差的 120% .

2. 一个桶中装有 $\frac{3}{4}$ 的沙子,可以确定桶中现有的沙子可装 6 杯.

(1) 如果向桶中加入 1 杯沙子,则桶中的沙子将占其容量的 $\frac{7}{8}$.

(2) 如果从桶中取出 2 杯沙子,则桶中的沙子将占其容量的一半.

3. 可以确定小王现在的周薪.

(1) 小王的周薪增加了 8% .

(2) 小王的周薪比增加之前多了 40 元.

4. 某种货币经过一次贬值,在经过一次升值后,币值保持不变.

(1) 贬值 10% 后又升值 10% . (2) 贬值 20% 后又升值 25% .

5. 有三根木棒,分别长 8 厘米,12 厘米,20 厘米. 要把它们截成同样长的小棒,不许剩余,则每根小棒最长能有 k 厘米.

(1) $k=3$. (2) $k=4$.

6. $m+n=70$.

(1) 8,12,18 的最大公约数为 m . (2) 8,12,18 的最小公倍数为 n .

7. 老师将 301 个笔记本,215 支铅笔和 86 块橡皮分给班里同学,每个同学得到的笔记本、铅笔和橡皮的数量相同. 则每个同学拿到的笔记本、铅笔和橡皮的数量之和为 k .

(1) $k=14$. (2) $k=16$.

8. 两个数的最大公约数是 k ,最小公倍数是 504. 如果其中一个数是 42,那么另一个数各个数位之和为 9.

(1) $k=6$. (2) $k=7$.

9. 今年小明 5 岁,爸爸的年龄是小明的 7 倍,则再过 k 年爸爸的年龄是小明年齡的 3 倍.

(1) $k=11$. (2) $k=12$.

10. 在一个宴会上,每个客人都免费获得一份冰淇淋或一份水果沙拉,但不能同时获得

二者,可以确定有多少客人能获得水果沙拉.

(1) 在该宴会上,60%的客人都获得了冰淇淋.

(2) 在该宴会上,免费提供的冰淇淋和水果沙拉共 120 份.

11. 可以确定每杯葡萄酒的价格上涨了百分之几.

(1) 每杯葡萄酒的价格上涨了 0.5 元.

(2) 葡萄酒的价格上涨后每杯 7 元.

12. 王刚和赵宏一起工作,1 小时可打出 9000 字的文件,可以确定赵宏单独工作 1 小时打多少字.

(1) 王刚打字速度是赵宏打字速度的一半.

(2) 王刚单独工作 3 小时可以打 9000 字.

13. 张文从农场用车运输 1000 只鸡到鸡场,可以确定路程有多远.

(1) 张文的的车可运载 44 箱鸡蛋.

(2) 从农场到市场的距离为 200 千米.

14. 某一动画片由 17280 幅画面组成. 可以确定放映该动画片需要多少分钟.

(1) 该动画片在不受干扰的情况下每秒针滚动 24 幅画面.

(2) 放映该动画片的时间是该片倒带时间的 6 倍,两者共需 14 分钟.

基础能力题详解

一、问题求解题

1. A; 先求最大公约数 $(12, 18, 24) = 6$ (分米), 则可以截成 $12 \div 6 \times 12 + 18 \div 6 \times 9 + 24 \div 6 \times 10 = 91$ (根), 故 $m = 6, n = 91$, 则 $m + n = 97$.

2. E; 先求最小公倍数 $[5, 6] = 30$, 则道路长为 $30 \times (5 - 1) = 120$ (米).

3. B; 求出最小公倍数 $[45, 60] = 180$, 道路的长度为 $45 \times 52 = 2340$ 米, 所以两端的两根不需要移动外, 不需移动的为 $2340 \div 180 - 1 = 12$ (根) (减 1 的原因是除两端的两根不需要移动外).

4. B; 最小公倍数 $[54, 72] = 216$, 两人重合的脚印个数为 $60 \div (216 \div 54 + 216 \div 72 - 1) = 10$, 所以周长为 $216 \times 10 = 2160$ (厘米).

5. D; 不能用 $(15 + 30) \div 2$ 来计算平均速度, 因为往返的时间不相等. 只能用“总路程除以往返总时间”的方法求平均速度. 设甲乙两地全长为 1, 则去时所用时间为 $1/15$, 返回时间为 $1/30$; 所以, 往返的平均速度是 $\frac{1 + 1}{\frac{1}{15} + \frac{1}{30}} = 20$.

6. A; 设花生总粒数为单位“1”, 由题意可知, 第一、二、三群猴子的只数分别相当于花生总数的 $\frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$. 于是把所有花生分给这三群猴子, 平均每只可得花生 $1 \div \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} \right) = 5$.

7. E; 设王老师的步行速度为 x km/h, 则骑自行车的速度为 $3x$ km/h; 得 $\frac{3 + 3 + 0.5}{3x} - \frac{0.5}{x} = \frac{20}{60}$, 解得 $x = 5$, 王老师的步行速度及骑自行车的速度分别为 5 km/h 和 15 km/h.

8. D. 由题, 全体学生人数减 1 能被 2、3、4、5、6、7、8、9 整除, 所以求出最小公倍数 $[2、3、4、5、6、7、8、9]=2520$, 得到全校至少有 $m=2520+1=2521$ 名学生.

9. C; 5 年后母女俩年龄共: $35+10=45$, 5 年后母亲的年龄为 $45 \times \frac{4}{5}=36$ 岁. 即现在母亲年龄为 31 岁, 女儿年龄为 4 岁, 从而选 C.

10. C; 首先求出 30 与 25 的最小公倍数为 150, 则有 $1\ 200/150+1=9$.

11. C; 设预计的速度是 x , 结果是按 $\frac{6}{5}x$ 的速度行军的, 那么有 $\frac{60}{x} = \frac{60}{\frac{6}{5}x} + 1$, 解得 $x=10$, 所以这时的速度是 $\frac{6}{5}x=12$.

12. C; 设第五次提速后的速度为 x , 则第六次提速后的速度为 $(1+20\%)x=1.2x$, 则根据题意列方程得 $\frac{2208}{x} = \frac{2208}{1.2x} + 2$, 解得 $x=184$, 所以第六次提速后的速度是 220.8.

13. C; 方法一: 由题可以得到甲乙的工作效率分别为 $\frac{1}{9}$ 和 $\frac{1}{6}$, 则乙需要的天数为 $(1-3 \times \frac{1}{9}) \div \frac{1}{6} = 4$ 天, 故乙需要做 4 天可完成全部工作.

方法二: 9 与 6 的最小公倍数是 18. 设全部工作量是 18 份. 甲每天完成 2 份, 乙每天完成 3 份. 乙完成余下工作所需时间是 $(18-2 \times 3) \div 3 = 4$ (天).

方法三: 甲与乙的工作效率之比是 $6:9=2:3$. 甲做了 3 天, 相当于乙做了 2 天. 乙完成余下工作所需时间是 $6-2=4$ (天).

14. D; 共做了 6 天后, 原来, 甲做 24 天, 乙做 24 天; 现在, 甲做 0 天, 乙做 $40=(24+16)$ 天. 这说明原来甲 24 天做的工作, 可由乙做 16 天来代替. 因此甲乙的工作效率之比为 $2:3$; 如果乙独做, 所需时间是 50 天, 如果甲独做, 所需时间是 75 天, 故相差 25 天.

15. A; 先对比如下: 甲做 63 天, 乙做 28 天; 甲做 48 天, 乙做 48 天. 就知道甲少做 $63-48=15$ (天), 乙要多做 $48-28=20$ (天), 由此得出甲 3 天相当于乙 4 天. 所以甲先单独做 42 天, 比 63 天少做了 $63-42=21$ (天), 相当于乙要做, 因此乙还要做 $28+28=56$ (天).

16. C; 方法一: 设全部工作量为 30 份. 甲每天完成 3 份, 乙每天完成 1 份. 在甲队单独做 8 天, 乙队单独做 2 天之后, 还需两队合作 $(30-3 \times 8-1 \times 2) \div (3+1) = 1$ 天. 所以总共需要的天数是 $2+8+1=11$ 天.

方法二: 甲队做 1 天相当于乙队做 3 天. 在甲队单独做 8 天后, 还余下 (甲队) $10-8=2$ (天) 工作量. 相当于乙队要做 $2 \times 3=6$ (天). 乙队单独做 2 天后, 还余下 (乙队) $6-2=4$ (天) 工作量. 剩余的两队只需再合作 1 天即可, 所以总共需要的天数是 $2+8+1=11$ 天.

17. A; 方法一: 如果 16 天两队都不休息, 可以完成的工作量是 $16 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) = \frac{4}{3}$, 由于两队休息期间未做的工作量是 $\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$, 由于甲休息了 3 天, 故乙队休息期间未做的工作量是 $\frac{1}{3}-\frac{3}{20}=\frac{11}{60}$, 从而得到乙队休息的天数是 $\frac{11}{60} \div \frac{1}{30} = 5.5$ 天.

方法二: 设全部工作量为 60 份. 甲每天完成 3 份, 乙每天完成 2 份. 两队休息期间未做的

工作量是 $(3+2) \times 16 - 60 = 20$ (份), 因此乙休息天数是 $(20 - 3 \times 3) \div 2 = 5.5$ 天.

方法三: 甲队做2天, 相当于乙队做3天. 甲队休息3天, 相当于乙队休息4.5天. 如果甲队16天都不休息, 只余下甲队4天工作量, 相当于乙队6天工作量, 乙休息天数是 $16 - 6 - 4.5 = 5.5$ 天.

18. A; 很明显, 李做甲工作的工作效率高, 张做乙工作的工作效率高. 因此让李先做甲, 张先做乙. 设乙的工作量为60份(15与20的最小公倍数), 张每天完成4份, 李每天完成3份. 8天, 李就能完成甲工作. 此时张还余下乙工作 $(60 - 4 \times 8)$ 份. 由张、李合作需要 $(60 - 4 \times 8) \div (4 + 3) = 4$ 天. 从而总共需要 $8 + 4 = 12$ 天.

19. D; 方法一: 设甲用了 x 天, 乙用了 $3x$ 天, 丙用了 $6x$ 天. 由题可得 $\frac{1}{12}x + \frac{1}{18}3x + \frac{1}{24}6x = 1 \Rightarrow x = 2$, 所以总共用了 $2 + 6 + 12 = 20$ 天.

方法二: 可设总工作量为72份(12, 18, 24的最小公倍数), 甲每天做6份, 乙每天做4份, 丙每天做3份. 如果甲做1天, 乙就做3天, 丙就做 $3 \times 2 = 6$ 天. 此时完成了 $6 + 12 + 18 = 36$ 份, 相当于一半工作量; 从而说明甲做了2天, 乙做了 $2 \times 3 = 6$ 天, 丙做 $2 \times 6 = 12$ 天, 三人一共做了 $2 + 6 + 12 = 20$ 天.

【评注】本题整数化会带来计算上的方便. 12, 18, 24这三数有一个易求出的最小公倍数72. 可设全部工作量为72.

二、条件充分性判断题

1. E; 根据条件(1)可推知甲数与丙数之比为16:21, 但因为不知道数的正负, 所以并不能确定两数之大小关系(可举反例). 同理, 条件2也不充分.

2. D; 设这个桶的容量为 a 杯, 则桶中的沙子为 $\frac{3}{4}a$, 根据(1)可得: $\frac{3}{4}a + 1 = \frac{7}{8}a \Rightarrow a = 8$, 从而可以求出桶中的沙子是6杯, 所以(1)充分; 根据(2)可得 $\frac{3}{4}a - 2 = \frac{1}{2}a \Rightarrow a = 8$, 从而可以求出桶中的沙子是6杯, 所以(2)也充分.

3. C; 根据增加比例和增加的绝对数额可以求出增加之前的薪水, 再加上40即是目前的薪水.

4. B; 设币值为 a ($a \neq 0$), 由(1) $a(1 - 10\%)(1 + 10\%) = 0.99a$, 由(2) $a(1 - 20\%)(1 + 25\%) = a$.

5. B; 这三根木棒长度不同, 但要求把它们截成同样长的小棒, 不许剩余, 实际上就求它们的最大公约数, 8、12、20的最大公约数是4, 所以每根小棒最长能有4厘米.

6. E; 显然单独不充分, 联合起来, 最大公约数 $(8, 12, 18) = 2$, 故 $m = 2$; 最小公倍数 $[8, 12, 18] = 72$, 故 $n = 72$, 得到 $m + n = 74$, 均不充分.

7. A; 最大公约数 $(301, 215, 86) = 43$, 所以全班共有43人. 每人拿到笔记本: $301 \div 43 = 7$ (本), 每人拿到铅笔: $215 \div 43 = 5$ (支) 每人拿到橡皮: $86 \div 43 = 2$ (块), 则 $k = 7 + 5 + 2 = 14$.

8. A; 根据两个正整数之积 = 最大公约数 \times 最小公倍数, 可知: (1) 另一个数为 $504 \times 6 \div 42 = 72$, 各个数位之和为9, 充分; (2) 另一个数为 $504 \times 7 \div 42 = 84$, 各个数位之和为12, 不充分.

9. E;可先求出当爸爸年龄是小明年龄的3倍时,小明的年龄是多少岁: $(5 \times 7 - 5) \div (3 - 1) = 15$ (岁),故再过10年,爸爸的年龄是小明年龄的3倍.

10. C;设获得冰淇淋的客人人数为 x ,获得水果沙拉的客人人数为 y ,根据条件(1)可得 $60\%(x+y)=x$,根据条件(2)可得 $x+y=120$,所以,只有两个条件联立才能求出各自的值.这种题一般是不用解出来的,两个未知数,两个方程就可以说明问题了.

11. C;由条件(1)并不能求出所问,由条件(2)也不能,但是由条件(1)和条件(2)联立可知上涨前的价格为6.5元,上涨了0.5元,所以百分比也是可以求出的.

12. D;设赵宏的打字速度为每小时 x 字,由条件(1)可得到 $\frac{1}{2}x + x = 9000$,由条件(2)可得 $3000 + x = 9000$,所以两个条件都是充分的.

13. E;条件(1)和条件(2)和题目都无关,所以都是不充分的.

14. D. 由条件(1)和条件(2)都能确定出需要的时间,所以两个条件都是充分的.

综合提高题

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

扫码看视频

一、问题求解题

1. 甲、乙、丙3人合买一份礼物,他们商定按年龄比例分担费用.若甲的年龄是乙的一半,丙的年龄为甲年龄的三分之一,而甲、乙共花费了225元,则这份礼物的售价是()元.

- (A) 250 (B) 265 (C) 270 (D) 275 (E) 280

2. 从100人中调查对A、B两种2008年北京奥运会吉祥物的设计方案的意见,结果选中A方案的人数是全体接受调查人数的 $\frac{3}{5}$;选B方案的比选A方案的多6人,对两个方案都不喜欢的人数比对两个方案都喜欢的人数的 $\frac{1}{3}$ 多2人,则两个方案都不喜欢的人数是()人.

- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

3. 甲乙两位长跑爱好者沿着社区花园环路慢跑,如两人同时、同向,从同一点A出发,且甲跑9米的时间乙只能跑7米,则当甲恰好在A点第二次追及乙时,乙共沿花园环路跑了()圈.

- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

4. 甲跑11米所用的时间,乙只能跑9米,在400米标准田径场上,两人同时出发依同一方向,以上速度匀速跑离起点A,当甲第三次追及乙时,乙离起点还有()米.

- (A) 360 (B) 240 (C) 200 (D) 180 (E) 100

5. 某工程队计划用8天完成一项疏通河道的任务,施工中仅用两天时间就完成了工程的40%,问照此速度施工,可提前()完工.

- (A) 4天 (B) 3天 (C) 2天 (D) 1天 (E) 5天

6. 长途汽车从A站出发,匀速行驶,1小时后突然发生故障,车速降低了40%,到B站终点延误达3小时,若汽车能多跑50千米后,才发生故障,坚持行驶到B站能少延误1小时20分钟,那么A、B两地相距()千米.

- (A) 412.5 (B) 125.5 (C) 146.5 (D) 152.5 (E) 137.5

7. 某商店以每件 21 元的价格从厂家购入一批商品,若每件商品售价为 a 元,则每天卖出 $(350-10a)$ 件商品,但物价局限定商品出售时,商品加价不能超过进价的 20%,商店计划每天从该商品出售中至少赚 400 元. 则每件商品的售价最低应定为()元.

- (A) 21 (B) 23 (C) 25 (D) 26 (E) 以上均不正确

8. 一块正方形地板,用相同的小正方形瓷砖铺满,已知地板两对角线上共铺 101 块黑色瓷砖,而其余地面全是白色瓷砖,则白色瓷砖共用()块.

- (A) 1500 (B) 2500 (C) 2000 (D) 3000 (E) 2800

9. A、B、C、D、E 五个队参加排球循环赛,每两队只赛一场,胜者得 2 分,负者得 0 分,比赛结果是:A、B 并列第一;C 第三;D、E 并列第四;则 C 队得分为()分.

- (A) 2 分 (B) 3 分 (C) 5 分 (D) 6 分 (E) 4 分

10. 1994 年姐妹两人年龄之和是 55 岁.若干年前,当姐姐的年龄只有妹妹现在这么大时,妹妹的年龄恰好是姐姐年龄的一半,则姐姐是()年出生的.

- (A) 1961 (B) 1962 (C) 1964 (D) 1966 (E) 1970

11. 小玲从家去学校,如果每分钟走 80 米,结果比上课时间提前 6 分钟到校;如果每分钟走 50 米,则要迟到 3 分钟,小玲家到学校的路程有()米.

- (A) 1000 (B) 1150 (C) 1050 (D) 1100 (E) 1200

12. 某商品价格在今年 1 月降低 10%,此后由于市场供求关系的影响,价格连续三次上涨,使商品目前售价与 1 月份降低前的价格相同,则这三次价格的平均回升率是().

- (A) $\sqrt[4]{\frac{10}{9}}-1$ (B) $\sqrt[3]{\frac{10}{9}}-1$ (C) $\sqrt[3]{\frac{10}{3}}-1$ (D) $\sqrt{\frac{10}{9}}-1$ (E) $3\frac{1}{3}\%$

13. 一支科学考察队前往某条河流的上游去考察一个生态区.他们出发后以每天 17km 的速度前进,沿河岸向上游行进若干天后到达目的地,然后在生态区考察了若干天,完成任务后以每天 25km 的速度返回.在出发后的第 60 天,考察队行进了 24km 后回到出发点.试问:科学考察队在生态区考察了()天.

- (A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24

14. 某公交公司停车场内有 15 辆车,从上午 6 时开始发车(6 时整第一辆车开出),以后每隔 6 分钟再开出一辆.第一辆车开出 3 分钟后有一辆车进场,以后每隔 8 分钟有一辆车进场,进场的车在原有的 15 辆车后依次再出车.则到()时,停车场内第一次出现无车辆.

- (A) 11 时 10 分 (B) 11 时 20 分 (C) 11 时 30 分
(D) 11 时 40 分 (E) 11 时 50 分

15. 一项工程,甲独做需 10 天,乙独做需 15 天.现要求 8 天完成这项工程,且两人合作天数尽可能少,那么两人至少要合作()天.

- (A) 2 (B) 3 (C) 3.5 (D) 4 (E) 4.5

16. 一项工程,甲、乙、丙三人合作需要 13 天完成.如果丙休息 2 天,乙就要多做 4 天,或者由甲、乙两人合作 1 天.则这项工程由甲独做需要()天.

- (A) 22 (B) 26 (C) 24 (D) 25 (E) 28

17. 某项工作,甲组 3 人 8 天能完成工作,乙组 4 人 7 天也能完成工作.则甲组 2 人和乙组 7 人合作()天能完成这项工作.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 3.5 (E) 4.5

18. 制作一批零件,甲车间要 10 天完成,如果甲车间与乙车间一起做只要 6 天就能完成.乙车间与丙车间一起做,需要 8 天才能完成.现在三个车间一起做,完成后发现甲车间比乙车间多制作零件 2400 个.则丙车间制作了()个零件.

- (A) 5700 (B) 4100 (C) 5200 (D) 4200 (E) 4600

19. 搬运一个仓库的货物,甲需要 10 小时,乙需要 12 小时,丙需要 15 小时.有同样的仓库 A 和 B,甲在 A 仓库、乙在 B 仓库同时开始搬运货物,丙开始帮助甲搬运,中途又转向帮助乙搬运.最后两个仓库货物同时搬完.则丙帮助甲干了()个小时.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 3.5 (E) 5

20. 甲、乙两管同时打开,9 分钟能注满水池.现在,先打开甲管,10 分钟后打开乙管,经过 3 分钟就注满了水池.已知甲管比乙管每分钟多注入 0.6 立方米水,这个水池的容积是()立方米.

- (A) 27 (B) 30 (C) 33 (D) 36 (E) 39

21. 有一些水管,它们每分钟注水量都相等.现在打开其中若干根水管,经过预定的时间的 $\frac{1}{3}$,再把打开的水管数量增加一倍,就能按预定时间注满水池.如果开始时就打开 10 根水管,中途不增开水管,也能按预定时间注满水池.则开始时打开了()根水管.

- (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

22. 蓄水池有甲、丙两条进水管,和乙、丁两条排水管.要灌满一池水,单开甲管需 3 小时,单开丙管需要 5 小时.要排光一池水,单开乙管需要 4 小时,单开丁管需要 6 小时.现在水池内有六分之一的水,如按甲、乙、丙、丁、甲、乙……的顺序轮流打开 1 小时,则()小时后水开始溢出水池.

- (A) $27\frac{1}{20}$ (B) $29\frac{1}{20}$ (C) $28\frac{1}{30}$ (D) $21\frac{1}{40}$ (E) $20\frac{3}{4}$

23. 一个蓄水池,每分钟流入 4 立方米水.如果打开 5 个放水管,2.5 小时就把水池水放空,如果打开 8 个放水管,1.5 小时就把水池水放空.现在打开 13 个放水管,则要()分钟才能把水放空.

- (A) 52 (B) 54 (C) 56 (D) 58 (E) 60

24. 画展 9 点开门,但早有人排队等候入场.从第一个观众来到时起,每分钟来的观众人数一样多.如果开 3 个入场口,9 点 9 分就不再有人排队,如果开 5 个入场口,9 点 5 分就没有人排队.则第一个观众到达时间是 8 点()分.

- (A) 10 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 30

25. 一个水池,地下水从四壁渗入池中,每小时渗入水量是固定的.打开 A 管,8 小时可将满池水排空;如果打开 A, B 两管,4 小时可将水排空;如果打开 C 管,12 小时可将满池水排空.则打开 B, C 两管,要()小时才能将满池水排空.

- (A) 3 (B) 3.6 (C) 4 (D) 3.5 (E) 4.8

二、条件充分性判断题

1. 甲、乙两个人曾三次一同去买食盐,买法不同,由于市场波动,三次食盐价格不相同,三次购买,甲购买的食盐平均价格要比乙低.

(1) 甲每次购买 1 元钱的盐,乙每次买 1 kg 盐.

(2) 甲每次购买数量不等,乙每次购数恒定.

2. 可以确定某同学四门功课的总成绩.

(1) 已知任意两门课的平均成绩.

(2) 已知四门功课的平均成绩.

3. 三个数 $16, 2n-4, n$ 的算术平均数为 a , 能确定 $18 \leq a \leq 21$.

(1) $14 \leq n \leq 18$.

(2) $13 \leq n \leq 17$.

4. $x > 0, y > 0$, 能够确定 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$.

(1) x, y 的算术平均值为 6, 比例中项为 $\sqrt{3}$.

(2) x^2, y^2 的算术平均值为 7, 几何平均值为 1.

5. 设两个正整数的最大公约数为 15, 且一个数的 3 倍与另一个数的 2 倍之和为 225. 则这两个正整数之和为 k .

(1) $k=105$.

(2) $k=115$.

6. 有若干苹果, 两个一堆多一个, 3 个一堆多一个, 4 个一堆多一个, 5 个一堆多一个, 6 个一堆多一个, 则这堆苹果最少有 m 个.

(1) $m=121$.

(2) $m=61$.

7. 某次数学竞赛原定一等奖 10 人, 二等奖 20 人. 现将一等奖中最后 4 人调整为二等奖, 这样, 得二等奖的学生平均分提高了 1 分, 得一等奖的学生的平均分提高了 3 分. 那么, 原来一等奖平均分比二等奖平均分多 k 分.

(1) $k=10.5$.

(2) $k=11.5$.

8. 甲每分钟走 50 m, 乙每分钟走 60 m, 丙每分钟走 70 m, 甲乙两人从 A 地, 丙一人从 B 地同时相向出发, 丙遇到乙后 2 分钟又遇到甲, A、B 两地相距 n m.

(1) $n=3120$.

(2) $n=3020$.

9. 快、中、慢三辆车同时从同一地点出发, 沿同一公路追赶前面的一个骑车人. 这三辆车分别用 6 min, 10 min, 12 min 追上骑车人. 现在知道快车每小时走 24 km, 中车每小时走 20 km, 那么慢车每小时走 k km.

(1) $k=17$.

(2) $k=19$.

10. 一辆车从甲地开往乙地. 如果把车速提高 20%, 可以比原定时间提前 1 小时到达. 如果以原速行驶 120 km 后, 再将速度提高 25%, 则可提前 40 分钟到达. 那么甲、乙两地相距 k km.

(1) $k=270$.

(2) $k=290$.

11. 游船顺流而下每小时行 8 km, 逆流而上每小时行 7 km, 两船同时从同地出发, 甲船顺流而下, 然后返回. 乙船逆流而上, 然后返回, 经过 2 小时同时回到出发点, 在这 2 小时中, 有 k 小时甲、乙两船的航行方向相同.

(1) $k=0.2$.

(2) $k=0.3$.

12. 甲、乙两车分别从 A、B 两城同时相向而行, 第一次在离 A 城 30 km 处相遇. 相遇后两车又继续前行, 分别到达对方城市后, 又立即返回, 在离 A 城 42 km 处第二次相遇. 则 A、B 两城的距离为 k km.

(1) $k=66$.

(2) $k=60$.

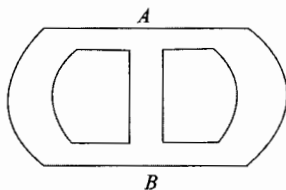
13. 甲、乙两车分别从 A、B 两地出发, 在 A、B 之间不断往返行驶, 已知甲车的速度是

15 km/h,乙车的速度是 35 km/h,并且甲、乙两车第二次相遇(两车同时到达同一地点叫相遇)的地点与第一次相遇的地点恰好相距 90 km. 那么 A、B 两地的距离等于 k km.

(1) $k=250$.

(2) $k=200$.

14. 如图,大圈是 400 m 跑道,由 A 到 B 的跑道长是 200 m,直线距离是 50 m. 父子俩同时从 A 点出发逆时针方向沿跑道进行长跑锻炼,儿子跑大圈,父亲每跑到 B 点便沿直线跑,父亲每 100 m 用 25 s,儿子每 100 m 用 20 s. 如果他们按这样的速度跑,则儿子在跑第 k 圈时,第一次与父亲在 A 点相遇.



(1) $k=3$.

(2) $k=4$.

15. 王经理总是上午 8 点钟乘公司的汽车去上班. 有一天,他 6 点 40 分就步行上班,而汽车仍按以前的时间从公司出发,去接经理,结果在路途中接到了他. 因此,王经理这天比平时提前 16 分钟到达公司. 那么汽车的速度是王经理步行速度的 k 倍.

(1) $k=9$.

(2) $k=11$.

16. 仓库里有两个货位,第一货位上有 78 箱货物,第二货位上有 42 箱货物,两个货位上各运走了相同的箱数之后,第一货位上的箱数还比第二货位上的箱数多 2 倍. 两个货位上各运走了 k 箱货物.

(1) $k=24$.

(2) $k=28$.

17. 一笔奖金分一等奖、二等奖和三等奖. 每个一等奖的奖金是每个二等奖奖金的 2 倍,每个二等奖奖金是每个三等奖奖金的 2 倍. 如果评一、二、三等奖各两人,那么每个一等奖的奖金是 308 元;如果评一个一等奖,两个二等奖,三个三等奖,那么一等奖的奖金是 m 元.

(1) $m=392$.

(2) $m=362$.

18. 甲、乙两个小朋友各有一袋糖,每袋糖都不到 20 粒. 如果甲给乙一定数量的糖后,甲的糖就是乙的糖粒数的 2 倍. 如果乙给甲同样数量的糖后,甲的糖就是乙的糖粒数的 3 倍. 那么甲、乙两个小朋友共有糖 m 粒.

(1) $m=22$.

(2) $m=24$.

19. 一小和二小有同样多的同学参加金杯赛. 学校用汽车把学生送往考场. 一小用的汽车,每车坐 15 人,二小用的汽车,每车坐 13 人,结果二小比一小要多派一辆汽车. 后来每校各增加一个人参赛,这样两校需要的汽车就一样多了. 最后又决定每校再各增加一人参加竞赛,二小又要比一小多派一辆汽车. 最后两校共有 m 人参加竞赛.

(1) $m=184$.

(2) $m=164$.

20. 今年祖父的年龄是小明年龄的 6 倍. 几年后,祖父年龄是小明年龄的 5 倍. 又过几年后,祖父年龄是小明年龄的 4 倍. 则祖父今年 m 岁.

(1) $m=72$.

(2) $m=66$.

综合提高题详解

一、问题求解题

1. A; 设甲的年龄为 x , 则乙、丙的年龄为 $2x$ 和 $x/3$, 所以丙的年龄为甲乙之和的 $x/9$, 所以丙出的钱应为 $225/9=25$ 元, 故物品的售价为 250 元.

2. D; 选 A 方案的人: $100 \times 3/5 = 60$ 人; 选 B 方案的人 $60 + 6 = 66$ 人; 设 A、B 都选的人有 x 人, 则: $66 + 60 - x = 100 - (x/3 + 2)$, $x = 42$ 人; A、B 都不选者: $42 \times 1/3 + 2 = 16$ 人.

3. A; 甲乙二人速度比: 甲速: 乙速 = 9:7, 无论在 A 点第几次相遇, 甲乙二人均沿环路跑了若干整圈, 又因为二人跑步的用时相同, 所以二人所跑的圈数之比, 就是二人速度之比, 第一次甲于 A 点追及乙, 甲跑 9 圈, 乙跑 7 圈, 第二次甲于 A 点追及乙, 甲跑 18 圈, 乙跑 14 圈.

4. C; 两人同时出发, 无论第几次追及, 二人用时相同, 所距距离之差为 400 米的整数倍, 二人第一次追及, 甲跑的距离: 乙跑的距离 = 2200:1800, 乙离起点尚有 200 米, 实际上偶数次追及于起点, 奇数次追及位置在中点(即离 A 点 200 米处).

5. B; 余下的工程, 计划用 $8 - 2 = 6$ 天完成.

现在的工作是为 $60\% = \frac{3}{5}$, 一天的进度为 $\frac{40\%}{2} = 20\% = \frac{1}{5}$.

需要天数 $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}} = 3$, 故提前 $6 - 3 = 3$ (天)完工.

6. E; 设原来车速为 V 千米/小时, 则有: $50/V(1 - 40\%) - 50/V = 1 + 1/3$; $V = 25$ (千米/小时), 再设原来需要 t 小时到达, 由已知有: $25t = 25 + (t + 3 - 1) \times 25 \times (1 - 40\%)$; 得到: $t = 5.5$ 小时, 所以: $25 \times 5.5 = 137.5$ 千米.

7. C; 设最低定价为 x 元, 已知: $x \leq 21(1 + 20\%)$; $(x - 21)(350 - 10x) \geq 400$;

由以上分析可知: $x \leq 25.2$; $(x - 25)(x - 31) \leq 0$; 所以 $x \leq 25.2$, 同时 $25 \leq x \leq 31$; 故 $25 \leq x \leq 25.2$.

8. B; 因为两对角线交叉处共用一块黑色瓷砖, 所以正方形地板的一条对角线上共铺 $(101 + 1)/2 = 51$ 块瓷砖, 因此该地板的一条边上应铺 51 块瓷砖, 则整个地板铺满时, 共需要瓷砖总数为 $51 \times 51 = 2601$, 故需白色瓷砖为: $2601 - 101 = 2500$ 块.

9. E; 整个比赛共有 20 分, A、B、C、D、E 可能得分结果是: 6, 6, 4, 2, 2, 故 C 队得 4 分.

10. A; 设若干年前, 妹妹的年龄为 x 岁, 则现在妹妹为 $2x$ 岁; 姐姐在“若干年前”那一年的年龄也为 $2x$ 岁, 则姐姐现在的年龄为 $3x$ 岁. 由 $2x + 3x = 55$, 可知, $x = 11$, 所以今年姐姐的年龄是 $3 \times 11 = 33$ (岁). 故姐姐是 1961 年出生的.

11. E; 本题属于盈亏问题, 提前 6 分钟和迟到 3 分钟, 所相差的距离, 是由于每分钟相差 30 米而造成的; 所以 $(80 \times 6 + 50 \times 3) \div (80 - 50) = 21$ (分钟); $80 \times (21 - 6) = 1200$ (米) 即小玲家到学校有 1200 米.

12. B; 设该商品原价为 a , $a - 10\%a = 90\%a$, 设平均回升率为 x , 则 $0.9a(1 + x)^3 = a$,

解得 $x = \sqrt[3]{\frac{10}{9}} - 1$, 所以选 B.

13. D; 本题属于不定方程问题. 设考察队到生态区用了 x 天, 回程用了 y 天, 考察了 $60 - x - y$ 天.

根据往返的路程相等得 $17x = 25(y - 1) + 24 \Rightarrow 25y = 17x + 1$, 由于 $25y$ 的个位为 0 或 5, 从而 $17x$ 的个位为 9 或 4, 得到 x 的个位为 7 或 2,

尝试 $x = 17, 12, 27, 22$, 经检验: $x = 22, y = 15$ 成立, 故考察了 $60 - 22 - 15 = 23$ 天.

14. C; 设从 6 时起 t 分钟时, 最后一辆车开出, 此时停车场内第一次出现无车辆.

这段时间出车 $\frac{t}{6} + 1$ 辆, 共进车 $\frac{t-3}{8}$ 辆(后面不加 1 了, 因为最后一辆进的车有可能直接发走, 不进停车场了, 或者最后时刻没有进车.) 从而有 $\frac{t}{6} + 1 > \frac{t-3}{8} + 15 \Rightarrow t > 327$, 由于 t 为 6 的倍数, (不用考虑 $t-3$ 为 8 的倍数, 因为不需要最后时刻一定进车), 故 t 取 330 分钟, 故到 11 时 30 分时, 停车场内最后一辆车(第 55 辆车)发出, 第一次出现无车辆.

15. B; 因为两人合作天数要尽可能少, 独做的应是工作效率较高的甲. 故设两人合作了 x 天, 甲单独做了 $8 - x$ 天. 由题, 所列方程如下 $\frac{1}{10}(8 - x) + (\frac{1}{10} + \frac{1}{15})x = 1 \Rightarrow x = 3$.

16. B; 丙 2 天的工作量, 相当乙 4 天的工作量. 丙的工作效率是乙的工作效率的 $4 \div 2 = 2$ (倍), 甲、乙合作 1 天, 与乙做 4 天一样. 也就是甲做 1 天, 相当于乙做 3 天, 甲的工作效率是乙的工作效率的 3 倍. 他们共同做 13 天的工作量, 由甲单独完成, 甲需要 26 天.

【评注】事实上, 当算出甲、乙、丙三人工作效率之比是 $3 : 2 : 1$, 就知甲做 1 天, 相当于乙、丙合作 1 天. 三人合作需 13 天, 其中乙、丙两人完成的工作量, 可转化为甲再做 13 天来完成.

17. B; 设这项工作的工作量是 1. 甲组每人每天能完成 $\frac{1}{24}$; 乙组每人每天能完成 $\frac{1}{28}$, 甲组 2 人和乙组 7 人每天能完成 $\frac{1}{24} \times 2 + \frac{1}{28} \times 7 = \frac{1}{3}$, 故合作 3 天能完成这项工作.

18. D; 方法一: 设总工作量为 1. 甲的效率为 $\frac{1}{10}$, 乙的效率为 $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$; 丙的效率为 $\frac{1}{8} - \frac{1}{15} = \frac{7}{120}$. 甲每天比乙多完成 $\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$, 因此这批零件的总数是 $2400 \times 30 = 72000$ 个, 丙车间制作的零件数目是 $72000 \times \frac{7}{120} = 4200$ 个.

方法二: 10 与 6 最小公倍数是 30. 设制作零件全部工作量为 30 份. 甲每天完成 3 份, 甲、乙一起每天完成 5 份, 由此得出乙每天完成 2 份. 乙、丙一起, 8 天完成. 乙完成 $8 \times 2 = 16$ 份, 丙完成 $30 - 16 = 14$ 份, 就知乙、丙工作效率之比是 $16 : 14 = 8 : 7$. 已知甲、乙工作效率之比是 $3 : 2 = 12 : 8$. 综合一起, 甲、乙、丙三人工作效率之比是 $12 : 8 : 7$. 所以丙制作的零件个数是 $2400 \div (12 + 8) \times 7 = 4200$ 个.

19. B; 设搬运一个仓库的货物的工作量是 1. 现在相当于三人共同完成工作量 2. 解本题的关键, 是先算出三人共同搬运两个仓库的时间. 本题计算当然也可以整数化, 设搬运一个仓库全部工作量为 60 份. 甲每小时搬运 6 份, 乙每小时搬运 5 份, 丙每小时搬运 4 份. 三

人共同搬完,需要 $60 \times 2 \div (6 + 5 + 4) = 8$ (小时). 从而甲需丙帮助搬运 $(60 - 6 \times 8) \div 4 = 3$ 小时.

20. A; 两个水管合作的效率为 $\frac{1}{9}$, 在第二种方式下, 甲前 10 分钟的注水量为 $1 - \frac{1}{9} \times 3 = \frac{2}{3}$, 从而得到甲每分钟注入水量是: $\frac{2}{3} \div 10 = \frac{1}{15}$, 乙每分钟注入水量是: $\frac{1}{9} - \frac{1}{15} = \frac{2}{45}$, 因此水池容积是: $0.6 \div \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{45}\right) = 27$ 立方米.

21. D; 增开水管后, 有原来 2 倍的水管, 注水时间是预定时间的 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ 是 $\frac{1}{3}$ 的 2 倍, 因此增开水管后的这段时间的注水量, 是前一段时间注水量的 4 倍. 设水池容量是 1, 前后两段时间的注水量之比为 1 : 4, 那么预定时间的 $\frac{1}{3}$ (即前一段时间) 的注水量是 $\frac{1}{5}$. 10 根水管同时打开, 能按预定时间注满水, 每根水管的注水量是 $\frac{1}{10}$, 预定时间的 $\frac{1}{3}$, 每根水管的注水量是 $\frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$, 要注满水池的 $\frac{1}{5}$, 需要水管 $\frac{1}{5} \div \frac{1}{30} = 6$ 根.

22. E; 先求出一个周期 (甲乙丙丁各工作一个小时) 的工作量: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{20 + 12 - 15 - 10}{60} = \frac{7}{60}$, 5 个周期后, 剩余工作量为 $\frac{5}{6} - \frac{7}{60} \times 5 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$. 从而得到甲还需 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ 小时就可以把水池注满. 因此总共需要 $20 \frac{3}{4}$ 小时, 水开始溢出.

23. B; 先计算 1 个放水管每分钟放出水量. 2.5 小时比 1.5 小时多 60 分钟, 多流入水 $4 \times 60 = 240$ (立方米). 时间都用分钟作单位, 1 个放水管每分钟放水量是 $240 \div (5 \times 150 - 8 \times 90) = 8$ (立方米), 8 个放水管 1 个半小时放出的水量是 $8 \times 8 \times 90$, 其中 90 分钟内流入水量是 4×90 , 因此原来水池中存有水 $8 \times 8 \times 90 - 4 \times 90 = 5400$ (立方米). 打开 13 个放水管每分钟可以放出水 8×13 , 除去每分钟流入 4, 其余将放出原存的水, 放空原存的 5400, 需要 $5400 \div (8 \times 13 - 4) = 54$ (分钟).

【评注】水池中的水, 有两部分, 原存有水与新流入的水, 就需要分开考虑, 解本题的关键是先求出池中原存有的水. 这在题目中却是隐含着的.

24. B; 设一个入场口每分钟能进入的观众为 1 个计算单位.

从 9 点至 9 点 9 分进入观众是 3×9 , 从 9 点至 9 点 5 分进入观众是 5×5 .

因为观众多来了 $9 - 5 = 4$ 分钟, 所以每分钟来的观众是 $(3 \times 9 - 5 \times 5) \div (9 - 5) = 0.5$.

9 点前来的观众是 $5 \times 5 - 0.5 \times 5 = 22.5$. 这些观众来到需要 $22.5 \div 0.5 = 45$ 分钟. 因此第一个观众到达时间是 8 点 15 分.

25. E; 设满水池的水量为 1. A 管每小时排出 $\frac{1}{8}$, A 管 4 小时排出 $\frac{1}{2}$. 由题打开 A, B 两管, 4 小时可将水排空, 故 B 管每小时排出 $\frac{1}{8}$. 因此, B, C 两管齐开, 每小时排水量是 $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$, 从而 B, C 两管齐开, 排光满水池的水, 所需时间是 4.8 小时.

二、条件充分性判断题

1. A; 设三次食盐价格分别为 a, b, c 元 / 千克.

由(1) 甲: $\frac{3}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$, 乙: $\frac{a+b+c}{3}$, 由平均值定理, 所以甲 \leq 乙.

注: $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ 表示调和平均值, 有 $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

由(2) 设甲每次购买 m, n, k kg 盐, 甲的平均价格: $\frac{ma + nb + kc}{m + n + k}$.

设乙每次购买 t kg 盐, 乙的平均价格: $\frac{t(a+b+c)}{3t} = \frac{a+b+c}{3}$.

固定参量比较是解决多参量比较问题有效方法. 取 $m=1, n=2, k=3$.

而 甲 - 乙 = $\frac{a+2b+3c}{6} - \frac{a+b+c}{3} = \frac{c-a}{6}$ 是不是大于 0 无法确定.

2. D; 条件(1) 因知任意两门的平均成绩, 可得 $C_4^2=6$ 个方程构成方程组, 用于确定 4 个未知数, 所以足以确定四门的总成绩.

条件(2) 可以推知 4 门课的总成绩, 所以是充分的.

3. C; 根据题意 $18 \leq \frac{16+2n-4+n}{3} = n+4 \leq 21 \Rightarrow 14 \leq n \leq 17$, 所以条件(1) 和条件(2) 都是不充分的, 但条件(1) 和条件(2) 联合之后是符合条件的.

4. D; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$, 由条件(1) 可知 $x+y=12, xy=3$, 推出条件(1) 是充分的.

条件(2) 可知 $xy=1, (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 14 + 2 = 16$, 所以条件(2) 也是充分的. 选 D.

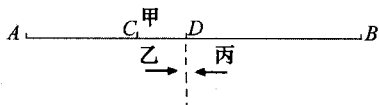
5. A; 设这两个正整数为 m 和 n . 因为 $(m, n)=15$, 故可设 $m=15a, n=15b$, 且 $(a, b)=1$. 又因为 $3m+2n=225$, 所以 $3a+2b=15$. 因为 a, b 是正整数, 所以可得 $a=1, b=6$ 或 $a=b=3$, 但 $(a, b)=1$, 所以取 $a=1, b=6$, 从而 $m+n=15(a+b)=15 \times 7=105$.

【评注】遇到这类问题常设 $m=15a, n=15b$, 且 $(a, b)=1$, 这样可把问题转化为两个互质数的求值问题.

6. B; 设这堆苹果最少有 m 个, 依题意得: $m-1$ 是 2, 3, 4, 5, 6 的最小公倍数, 因为 $[2, 3, 4, 5, 6]=60$, 所以 $m-1=60$, 即 $m=61$.

7. A; 设原来一等奖每人平均是 a 分, 二等奖每人平均是 b 分. 则有: $10a+20b=6 \times (a+3)+24 \times (b+1)$, 即: $a-b=10.5$. 也就是一等奖平均分比二等奖平均分多 10.5 分.

8. A; 如图, 当乙丙在 D 点相遇时, 甲已行至 C 点. 可先求出乙、丙相遇的时间, 也就是乙行距离 AD 的时间. 乙每分钟比甲多走 10 m, 多少分钟就多走了 CD 呢? 而 CD 的距离, 就是甲、丙 2 分钟共行的距离: $(70+50) \times 2 = 240$ (m). 于是可知, 乙行 AD 的时间是 $240 \div 10 = 24$ (min). 所以, AB 两地相距米数是 $(70+60) \times 24 = 3120$ (m).

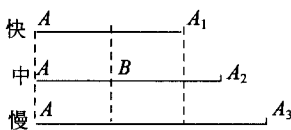


9. B;如下页图所示,A 点是三车的出发点,三车出发时骑车人在 B 点, A_1 、 A_2 、 A_3 分别为三车追上骑车人的地点.

快车 6 min 行 $24 \times \frac{6}{60} = 2.4$ km,中车 10min 行 $20 \times \frac{10}{60} = 3 \frac{1}{3}$ km. 所以骑车人的速度是每小时行: $(3 \frac{1}{3} - 2.4) \div (\frac{10}{60} - \frac{6}{60}) = 14$ km.

骑车人在快车出发后 6 min 共行 $14 \times \frac{6}{60} = 1.4$ km 这段时间快车走完 2.4 km 追上了他. 由此可见三辆车出发时,骑车人已走的路程是 $AB = 2.4 - 1.4 = 1$ km. 所以,慢车的速度是:

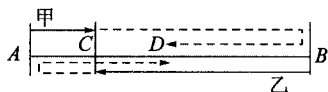
$$(1 + \frac{12}{60} \times 14) \div \frac{12}{60} = 19 \text{ km/h.}$$



10. A;首先必须考虑车速与时间的关系. 因为车速与时间成反比,当车速提高 20% 时,所用时缩短为原来的 $\frac{1}{1+20\%} = \frac{5}{6}$. 所以原速行驶全程需用: $1 \div (1 - \frac{5}{6}) = 6$ h. 同理,当车速提高 25% 时,所用时间缩短为原来的 $\frac{4}{5}$. 如果从开始就提高车速,行完全程就可提前: $6 \times (1 - \frac{4}{5}) = 1 \frac{1}{5}$ h. 现在只提前 40 min,少提前了 $1 \frac{1}{5} - \frac{40}{60} = \frac{8}{15}$ h. 这是因为前 120 km 是按原速行驶. 即若提高车速 25%,行 120 km 就可以提前 $\frac{8}{15}$ 小时. 所以,甲乙两地相距 $120 \times 1 \frac{1}{5} \div \frac{8}{15} = 270$ km.

11. E;关键是要理解上行与下行时间各占全部上下行总时间的百分之几. 因为两船 2 h 同时返回,则两船航程相等. 又上行船速是每小时行 7 km,下行船速是每小时行 8 km,说明上行时间是下行时间的 $\frac{8}{7}$. 则下行时间是 $2 \times \frac{7}{15} = \frac{14}{15}$ h,上行时间是 $\frac{16}{15}$ h. 所以可知,甲、乙两船航行方向相同时间是 $\frac{16}{15} - \frac{14}{15} = \frac{2}{15}$ h.

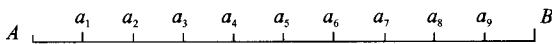
12. A;设两车第一次在 C 地相遇,第二次在 D 地相遇.



甲乙两车从开始到第一次 C 点相遇时,合起来行了一个全程. 此时甲行了 30 km,从第一次相遇到第二次 D 点相遇时,两车合起来行了两个全程. 在这两个全程中,乙共行 $(30 + 42)$ km,所以在合行一个全程中,乙行 $(30 + 42) \div 2 = 36$ km,即 A、B 两城的距离是 $30 + 36 = 66$ km.

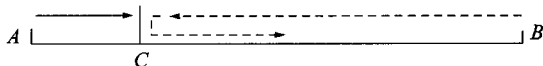
13. B;根据甲、乙两车的速度比为 3 : 7,可将 A、B 两地平均分成 10 份. 因为甲、乙两车速度之比为 3 : 7,所以甲每走 3 份,乙就走了 7 份. 于是它们第一次在 a_3 处相遇. 甲再走 4.5 份,乙走 10.5 份,在 a_7 与 a_8 之中点处甲被乙追上,这是第二次相遇.

两次相遇点相距 4.5 份,距离 90 km,所以,A、B 两地之间相距是 $90 \div \frac{4.5}{10} = 200$.



14. E;由于两人要求在起点 A 相遇,故每人跑整数圈,不妨令儿子跑 k 圈,父亲跑 m 圈,则儿子跑了 $400k$ 米,父亲跑了 $250m$ 米,根据时间相等得: $\frac{400k}{5} = \frac{250m}{4} \Rightarrow 32k = 25m$,故当 $k=25, m=32$ 时两人第一次都回到起点 A,所以都不充分.

15. A;如图,A 点表示王经理家,B 点表示公司,C 点表示汽车接王经理之处.



王经理比平时提前 16 min 到达公司,而这 16 min 实际上是汽车少走了 $2 \cdot AC$ 而剩下的时间,则汽车行 AC 路程需要 8 分钟,所以汽车到达 C 点接到王经理的时间是 7 点 52 分.王经理步行时间是从 6 点 40 分到 7 点 52 分,共行 72 min. 因此,汽车速度是王经理步行速度的 $72 \div 8 = 9$ (倍).

16. A;因为两堆货物各运走相同数量的货物之后,第一堆比第二堆货物多 2 倍.即此时第一堆货物是第二堆货物的 3 倍.所以,42 的 3 倍的积与 78 的差,就是两堆中各运走货物的箱数的 2 倍.故两个货位各运走的货物箱数是 $(42 \times 3 - 78) \div 2 = 24$ (箱).

17. A;可将二等奖和三等奖都换成一等奖.

一个二等奖相当于 $\frac{1}{2}$ 个一等奖;一个三等奖相当于 $\frac{1}{4}$ 个一等奖.奖金总数是 $308 \times (2 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2) = 1078$ (元)

如果评 1 个一等奖,2 个二等奖,3 个三等奖时,每个一等奖的奖金为: $1078 \div (1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3) = 392$ (元).

18. B;甲给乙一定数量的糖之后,甲是乙的 2 倍,说明甲乙两个糖数之和是 3 的倍数;同理,乙给甲一定数量的糖后,甲是乙的 3 倍,这说明甲乙两个糖数之和又是 4 的倍数.所以,甲、乙两人糖粒总数一定是 12 的倍数.又每袋糖都不到 20 粒,所以甲乙两个糖数之和应为 12、24、36 中的一个数.经检验,当总糖数是 24 时,即甲为 17 粒、乙为 7 粒时,符合要求.即两个小朋友共有糖 24 粒.

19. A;原来二小比一小多一辆车,各增加一人后,两校所需车一样多.由此可见,一小增一人就要增加一辆车,所以原来汽车恰好全部坐满,即原来一小人数是 15 的倍数.后来又增加 1 人,这时二小又要多派一辆车,所以在第二次增加人数之前,二小的车也恰好坐满,即人数是 13 的倍数.因此,原来每校参加的人数都是 15 的倍数.而加 1 之后,是 13 的倍数,即求 15 的某个倍数恰等于 13 的倍数减 1.因为 $15 \times 6 = 90, 13 \times 7 = 91$,所以,两校各有 92 人参加竞赛.从而可知,两校共有 184 人参加竞赛.

20. A;因为今年祖父年龄是小明年龄的 6 倍.所以,年龄差是小明年龄的 5 倍,即一定是 5 的倍数.同理,又过几年后,祖父的年龄分别是小明年龄的 5 倍和 4 倍,可知年龄差也是 4 和 3 的倍数,而年龄差是不变的.由 3,4,5 的公倍数是 60,120,...可知,60 是比较合理的.所以,小明今年的年龄是 $60 \div (6 - 1) = 12$ (岁);祖父今年的年龄是 $12 \times 6 = 72$ (岁).

第二部分 代 数

【画龙】本部分在考试中占 5 个题目,其中第三章 1~2 个考题,主要围绕因式定理及因式分解,以及常见基本函数(二次,指数,对数). 第四章占 1~2 个考题,主要围绕韦达定理,根的特性及范围,不等式解集展开. 第五章约占 2 个题目,主要围绕数列的万能公式,通项及求和,以及基本的性质.

【点睛】本部分建议用三周时间复习,每章用一周时间. 每章先用 1~2 天温习第一节考点,接着用 1~2 天复习例题,其次用 3 天来做练习题. 本部分公式较多,符号较多,不要死记硬背公式,一定要通过做题,加深对公式的理解,达到灵活运用.

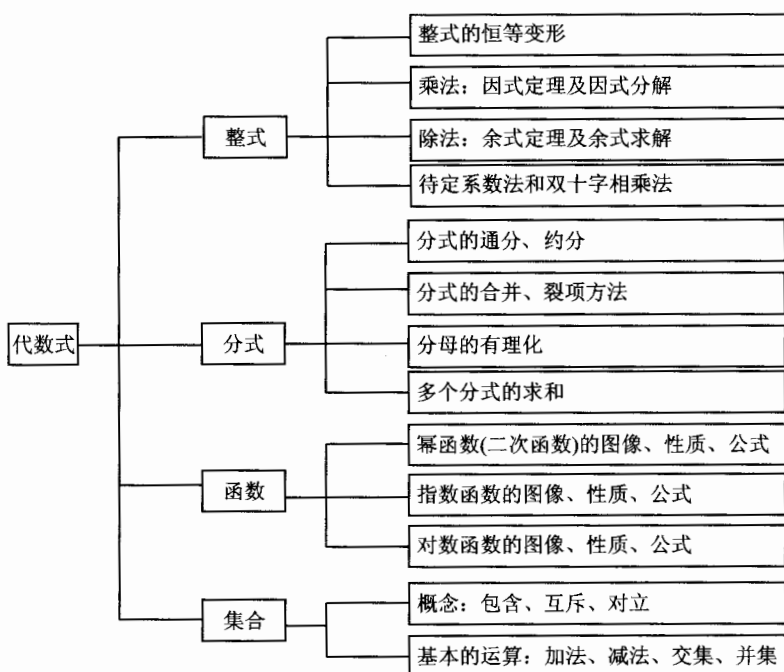
2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程
6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)
名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

第三章 整式、分式和函数

【大纲考点】1. 整式 (1) 整式及其运算, (2) 整式的因式与因式分解; 2. 分式及其运算; 3. 函数 (1) 集合, (2) 指数函数、对数函数.

【命题剖析】代数主要考查的是表达式的运算, 其内容包括: 乘法公式、整式的乘法和除法、整式的因式分解、分式的恒等变形(通分、约分); 函数主要掌握指数和对数, 对于管理类专业硕士, 三角函数和反三角函数不做要求. 本章在考试中的分值和题目较少, 一般 2 个题目左右, 但本章是学习数学的基础, 尤其是解方程和不等式的基础, 所以仍要引起重视.

【知识体系】



【备考建议】对于教师, 建议课时控制在 4~5 个课时(约一次课, 3 个小时); 对于考生, 建议在学习时要掌握表达式的运算规律, 尤其要具备逆向使用公式的能力; 对于指数和对数, 要将两者对比来学习, 通过两者的区别和联系更好的掌握图像、性质和相关公式. 此外, 本章使用特值法的场合很多, 所以注意特值法在表达式化简求值的巧妙应用.

第一节 考试要点剖析

一、基本定义

1. 单项式

数与字母的积这样的代数式叫做单项式,如, $3x^2$;单独一个数或一个字母也是单项式.其中单项式中的字母因数叫做单项式的系数;所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数;若单项式表示成 $ax^n y^m z^p$,那么 a 称为单项式 $ax^n y^m z^p$ 的系数, $n+m+p$ 叫做这个单项式的次数.

【注意】数与字母之间是乘积关系.

2. 多项式

几个单项式的和叫做多项式.在多项式中,每个单项式叫做多项式的项,其中不含字母的项叫做常数项.一个多项式有几项就叫做几项式.多项式中的符号,看作各项的性质符号;多项式中,次数最高项的次数,就是这个多项式的次数.例如, $ax^{n_1} y^{m_1} + bx^{n_2} y^{m_2} + cz^{n_3}$,此为3项式,若 $n_2 + m_2 > n_1 + m_1 > n_3$,则此多项式为 $n_2 + m_2$ 次式.

(1) 把一个多项式按某一个字母的指数从大到小的顺序排列起来,叫做把多项式按这个字母降幂排列.

(2) 把一个多项式按某一个字母的指数从小到大的顺序排列起来,叫做把多项式按这个字母升幂排列.

有两个或两个以上字母的多项式,排列时,要注意:要先确认按照哪个字母的指数来排列;然后再根据次字母的升幂还是降幂进行排列.

3. 整式

单项式和多项式统称为整式.

4. 分式

分式定义:用 A 、 B 表示两个整式, $A \div B$ 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式,如果除式 B 中含有字母,式子 $\frac{A}{B}$ 就叫做分式

分式 基本 性质	性质	分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不为零的整式,分式的值不变
	表示	$\frac{A}{B} = \frac{AM}{BM} \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$ (M 为不等于零的整式)
	应用	符号 法则
		分子、分母与分式本身的符号,改变其中任何两个,分式的值不变 $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
		约分
	通分	把一个分式的分子与分母的所有公因式约去叫做约分 把几个异分母的分式分别化成与原本的分式相等的同分母的分式叫做通分

续表

分式运算	加减法则	同分母:同分母的分式相加减,把分式的分子相加减,分母不变 $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ 异分母:异分母的分式相加减,先通分变为同分母的分式,然后再加减
	乘法法则	分式乘以分式,用分子的积做积的分子,分母的积做积的分母 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
	除法法则	分式除以分式,把除式的分子、分母颠倒位置后,与被除式相乘 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
	乘方法则	分式的乘方,把分式的分子、分母各自乘方 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
	繁分式	1. 可以利用除法法则进行运算 2. 可以用分式的基本性质化简繁分式

5. 最简分式

分式的分子与分母没有公因式时,叫做最简分式. 一个分式的最后形式必须是最简分式. 分式化为最简分式时通常采用约分的方法.

【注意】分式计算的几个原则及技巧:(1) 低级(加减)运算先通分;(2) 高级运算莫忘提式(公因式)约分;(3) 分母为因式积时要考虑拆开;(4) 涉及求未知数值,莫忘分母不为零;(5) 变形技巧为乘“1”.

6. 有理式

整式和分式统称有理式.

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

二、整式的除法

1. 从数的除法延伸到式子

数	式子
$\underbrace{a}_{\text{被除数}} = \underbrace{b}_{\text{除数}} \underbrace{c}_{\text{商}} + \underbrace{r}_{\text{余数}}$	$\underbrace{f(x)}_{\text{被除式}} = \underbrace{q(x)}_{\text{除式}} \underbrace{g(x)}_{\text{商式}} + \underbrace{r(x)}_{\text{余式}}$
(1) $r < b$ (2) $r = 0$ 时, a 能被 b 整除, 记为 $b \mid a$	(1) $r(x)$ 的次数小于 $q(x)$ 的次数 (2) $r(x) = 0$ 时, $f(x)$ 能被 $q(x)$ 整除, 记为 $q(x) \mid f(x)$
(3) 数式除法 $\begin{array}{r} 3 \\ 4 \overline{) 13} \\ \underline{12} \\ 1 \end{array}$	(3) 式子的除法 $\begin{array}{r} g(x) \\ q(x) \overline{) f(x)} \\ \underline{q(x)g(x)} \\ r(x) \end{array}$

整式 $f(x)$ 除以整式 $q(x)$ 的商式为 $g(x)$, 余式为 $r(x)$, 则有 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 并且 $r(x)$ 的次数要小于 $q(x)$ 的次数. 当 $r(x) = 0$ 时, $f(x) = q(x)g(x)$, 此时称 $f(x)$ 能被

$q(x)$ 整除,记做 $q(x) \mid f(x)$.

2. 因式定理

$f(x)$ 含有 $(ax - b)$ 因式 $\Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(ax - b)$ 整除 $\Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$;

尤其, $f(x)$ 含有 $(x - a)$ 因式 $\Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(x - a)$ 整除 $\Leftrightarrow f(a) = 0$.

3. 余式定理

多项式 $f(x)$ 除以 $(ax - b)$ 的余式为 $f\left(\frac{b}{a}\right)$;

尤其,多项式 $f(x)$ 除以 $(x - a)$ 的余式为 $f(a)$.

三、分解因式

1. 分解因式的概念

把一个多项式化成几个整式的积的形式,这种变形叫做分解因式(又叫因式分解).

- (1) 因式分解的实质是一种恒等变形,是一种化和为积的变形.
- (2) 因式分解与整式乘法是互逆的.
- (3) 在因式分解的结果中,每个因式都必须是整式.
- (4) 因式分解要分解到不能再分解为止.

2. 因式分解的基本方法

- (1) 运用公式法;
- (2) 分组分解法;
- (3) 十字相乘法;
- (4) 双十字相乘法.

3. 因式分解的一般步骤

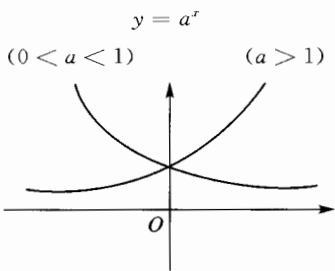
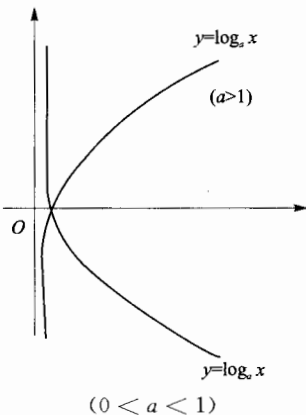
一提二套三分组.

四、指数函数及对数函数

1. 指数和对数运算公式

	指数	对数
定义	$a^b = N$	$\log_a N = b$ (b 叫做以 a 为底 N 的对数)
关系式	$a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b (a > 0, a \neq 1, N > 0)$	
运算性质	$(1) a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $(2) a^r \div a^s = a^{r-s}$ $(3) (a^r)^s = a^{rs}$ $(4) (ab)^r = a^r b^r$ $(5) a^0 = 1, a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $(a \neq 0)$	$(1) \log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$ $(2) \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ $(3) \log_a M^n = n \log_a M$ $(M > 0, N > 0, a > 0, a \neq 1)$ (4) (换底公式) $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$

2. 图像及性质

名称	指数函数	对数函数
表达式	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$
图像		
性质	(1) 定义域: \mathbf{R} ; (2) 值域: $(0, +\infty)$; (3) 恒过点 $(0, 1)$; (4) 当 $a > 1$ 时, 在 \mathbf{R} 上是增函数; 当 $0 < a < 1$ 时, 在 \mathbf{R} 上是减函数	(1) 定义域: $(0, +\infty)$; (2) 值域: \mathbf{R} ; (3) 恒过点 $(1, 0)$; (4) 当 $a > 1$ 时, 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数; 当 $0 < a < 1$ 时, 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
关系	$y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数, 两者图像关于 $y = x$ 对称	

五、集合的有关概念(了解)

1. 集合的概念

集合: 将能够确切指定的一些对象看成一个整体, 这个整体就叫做集合, 简称集.

元素: 集合中各个对象叫做这个集合的元素.

2. 常用数集及记法

非负整数集(自然数集): 全体非负整数的集合, 记作 \mathbf{N} .

正整数集: 非负整数集内排除 0 的集, 记作 \mathbf{N}^* .

整数集: 全体整数的集合, 记作 \mathbf{Z} .

有理数集: 全体有理数的集合, 记作 \mathbf{Q} .

实数集: 全体实数的集合, 记作 \mathbf{R} .

注: (1) 自然数集与非负整数集是相同的, 也就是说, 自然数集包括数 0.

(2) 非负整数集内排除 0 的集, 记作 \mathbf{N}^* . \mathbf{Q} 、 \mathbf{Z} 、 \mathbf{R} 等其他数集内排除 0 的集, 也是这样表示, 例如, 整数集内排除 0 的集, 表示成 \mathbf{Z}^* .

3. 集合的分类

有限集: 含有有限个元素的集合.

无限集: 含有无限个元素的集合.

规定:空集是不含任何元素的集合.

4. 元素与集合的关系

属于:如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;

不属于:如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.

5. 集合中元素的特性

确定性:按照明确的判断标准给定一个元素或者在这个集合里或者不在,不能模棱两可.

互异性:集合中的元素没有重复.

无序性:集合中的元素没有一定的顺序(通常用正常的顺序写出).

【注意】(1) 集合通常用大写的拉丁字母表示,如 A, B, C, P, Q 等,元素通常用小写的拉丁字母表示,如 a, b, c, p, q 等. (2) “ \in ”的开口方向,不能把 $a \in A$ 颠倒过来写.

第二节 基础过关题型

【题型 1】乘法公式

【思路点拨】乘法公式是在多项式乘法的基础上,将一般法则应用于特殊形式的多项式相乘,得出的既有特殊性、又有实用性的具体结论,在代数式的化简求值、恒等变形等方面有广泛的应用. 在学习乘法公式时,做到以下几点:1. 熟悉每个公式的结构特征,理解掌握公式;2. 根据待求式的特点,模仿套用公式;3. 对公式中字母的全面理解,灵活运用公式;4. 既能正用、又可逆用且能适当变形或重新组合,综合运用公式. 乘法公式常用的变形有:

$$(1) a^2 + b^2 = (a \pm b)^2 \mp 2ab, ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{(a^2 + b^2) - (a-b)^2}{2};$$

$$(2) (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2; (3) (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab;$$

$$(4) a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac).$$

【例 1】如果 $a^2 + b^2 + 2c^2 + 2ac - 2bc = 0$, 则 $a+b$ 的值为().

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) -2 (E) 2

【解析】 $a^2 + b^2 + 2c^2 + 2ac - 2bc = (a+c)^2 + (b-c)^2 = 0$, 根据非负性, 所以 $a = -c$, $b = c$, 从而 $a+b=0$, 故选 A.

【评注】也可以采用特值法求解.

【例 2】若 $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2$, 则 a, b, c 三者的关系为().

(A) $a+b=b+c$ (B) $a+b+c=1$ (C) $a=b=c$
(D) $ab=bc=ac$ (E) $abc=1$

【解析】 $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-c)^2 + (b-c)^2 + (a-b)^2] = 0,$$

所以得到 $a=b=c$, 选 C.

【例 3】已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 则 $\left|x - \frac{1}{x}\right| = ()$.

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 2 (E) $\sqrt{5}$

【解析】 $x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 3, \left| x - \frac{1}{x} \right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4} = \sqrt{5},$

故选 E.

【例 4】已知 x, y 满足 $x^2 + y^2 + \frac{5}{4} = 2x + y$, 求代数式 $\frac{xy}{x+y} = ()$.

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

【解析】由已知得 $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, 得 $x=1, y=\frac{1}{2}$, 原式 $= \frac{1}{3}$, 故选 A.

【例 5】已知 $(2010-a)(2008-a)=2009$, 那么 $(2010-a)^2 + (2008-a)^2 = ()$.

- (A) 4002 (B) 4012 (C) 4022 (D) 4020 (E) 4000

【解析】 $(2010-a)^2 + (2008-a)^2 = [(2010-a) - (2008-a)]^2 + 2(2010-a) \cdot (2008-a) = 4 + 2 \times 2009 = 4022$, 所以选 C.

【评注】(1) 建立两个连续奇数的方程组; (2) 视 $(2010-a) \cdot (2008-a)$ 为整体, 由平方和想到完全平方公式及其变形.

【例 6】若 x, y, z 为实数, 设 $A = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2}, B = y^2 - 2z + \frac{\pi}{3}, C = z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$, 则在 A, B, C 中 ().

- (A) 至少有一个大于零 (B) 至少有一个小于零 (C) 都大于零
(D) 都小于零 (E) 至少有两个大于零

【解析】 $A+B+C = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 + (\pi - 3) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (\pi - 3) > 0 \Rightarrow A, B, C$ 至少有一个大于 0, 故选 A.

【评注】记住一个结论: 若几个数之和大于零, 则至少有一个大于零; 若几个数之和小于零, 则至少有一个小于零. 此外, 本题也可以采用特殊值求解.

【题型 2】完全平方式

【思路点拨】完全平方式是平方公式的特殊应用, 主要借助平方公式来找到系数关系, 求出未知参数.

【例 7】已知 $x^2 - x + a - 3$ 是一个完全平方式, 求 $a = ()$.

- (A) $3\frac{1}{4}$ (B) $2\frac{1}{4}$ (C) $1\frac{1}{4}$ (D) $3\frac{3}{4}$ (E) $2\frac{3}{4}$

【解析】方法一: 因为 $x^2 - x + a - 3$ 是一个完全平方式, 所以

$$x^2 - x + a - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - 3\frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

即 $a - 3\frac{1}{4} = 0$, 得 $a = 3\frac{1}{4}$.

方法二: 因为 $x^2 - x + a - 3$ 是一个完全平方式, 所以方程 $x^2 - x + a - 3 = 0$ 有两个相等实根.

即 $\Delta = (-1)^2 - 4(a-3) = 0$, 所以 $1 - 4a + 12 = 0$, 解得 $a = 3\frac{1}{4}$, 选 A.

【评注】如果一个整式恰好是另一个整式的平方,那么这个整式叫做完全平方式. 解决这类问题,可用配方法或者用方程观点去解.

【例 8】若 $4x^4 - ax^3 + bx^2 - 40x + 16$ 是完全平方式,则 ab 等于().

- (A) 820 或 180 (B) -820 或 -180 (C) 820 或 -180
(D) -820 或 180 (E) ± 820 或 ± 180

【解析】根据题意,设 $4x^4 - ax^3 + bx^2 - 40x + 16 = (2x^2 + mx + 4)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = 4m, \\ b = 16 + m^2, \\ -40 = 8m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20, \\ b = 16 + 25 = 41, \end{cases} \text{ 此时 } ab = 820.$$

$$\text{或 } 4x^4 - ax^3 + bx^2 - 40x + 16 = (-2x^2 + mx + 4)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = -4m, \\ b = -16 + m^2, \\ -40 = 8m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -20, \\ b = 9, \end{cases} \text{ 此时 } ab = -180, \text{ 所以选 C.}$$

【评注】对于使用待定系数法求解平方式的时候,不要忘记讨论系数的符号. 此外,本题无需讨论常数项的正负符号,因为 $(a-b)^2 = (-a+b)^2$.

【题型 3】因式定理及因式分解

【思路点拨】因式分解是代数变形的重要工具,是学习分式、一元二次方程等知识的基础. 因式分解在数值计算、代数式的化简求值、不定方程(组)、代数等式的变形等方面有广泛的应用. 同时,通过因式分解的训练和应用,能使我们的观察能力、运算能力、变形能力、逻辑思维能力、探究能力得以提高. 因此,因式分解是学好代数的基础之一.

【例 9】若 $x^2 + xy + y = 14$, $y^2 + xy + x = 28$, 则 $x + y$ 的值为().

- (A) 6 或 -7 (B) 6 或 7 (C) -6 或 -7 (D) -6 或 7 (E) 6

【解析】由已知得 $(x+y)^2 + x + y - 42 = 0$, 分解得到 $(x+y+7)(x+y-6) = 0$, 故 $x+y+7=0$ 或 $x+y-6=0$, 所以 $x+y=6$ 或 -7 , 选 A.

【评注】恰当处理两个等式,分解关于 $x+y$ 的二次三项式. 代数式求值的常用方法是: (1) 代入字母的值求值; (2) 通过变形,寻找字母间的关系,代入关系求值; (3) 整体代入求值.

【例 10】已知多项式 $f(x) = x^3 + a^2x^2 + ax - 1$ 能被 $x+1$ 整除,则实数 a 的值为().

- (A) 2 或 -1 (B) 2 (C) -1 (D) ± 2 (E) ± 1

【解析】因为 $f(x)$ 能被 $(x+1)$ 整除,从而

$$f(-1) = -1 + a^2 - a - 1 = a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) = 0 \\ \Rightarrow a = -1 \text{ 或 } 2, \text{ 故选 A.}$$

【题型 4】表达式化简计算

【思路点拨】表达式的化简计算主要包括根号的化简变形、分子分母的约分化简、多项求和的裂项抵消化简等.

【例 11】已知 $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$, 求 $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right)$ 的值为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 0

【解析】方法一： $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) = \left(2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)\left(2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = 4$.

方法二：由于 $xy = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ ，故 $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) = 2 + xy + \frac{1}{xy} = 4$ ，选 D.

【例 12】 $\frac{(2 \times 5 + 2)(4 \times 7 + 2)(6 \times 9 + 2)(8 \times 11 + 2) \cdots (2014 \times 2017 + 2)}{(1 \times 4 + 2)(3 \times 6 + 2)(5 \times 8 + 2)(7 \times 10 + 2) \cdots (2013 \times 2016 + 2)}$ 的值为 ().

- (A) 1002 (B) 1008 (C) 1028 (D) 988 (E) 968

【解析】观察每个括号的数值，考虑一般性： $n(n+3)+2 = n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$ ，故原式 = $\frac{(3 \times 4)(5 \times 6)(7 \times 8)(9 \times 10) \cdots (2015 \times 2016)}{(2 \times 3)(4 \times 5)(6 \times 7)(8 \times 9) \cdots (2014 \times 2015)} = 1008$ ，选 B.

【例 13】 $\frac{2015^3 - 2 \times 2015^2 - 2013}{2015^3 + 2015^2 - 2016}$ 的值为 ().

- (A) $\frac{2013}{2015}$ (B) $\frac{2013}{2016}$ (C) $\frac{2012}{2015}$ (D) $\frac{2015}{2016}$ (E) $\frac{2011}{2016}$

【解析】设 $2015 = a$ ，则原式 = $\frac{a^3 - 2a^2 - (a-2)}{a^3 + a^2 - (a+1)} = \frac{(a-2)(a^2-1)}{(a+1)(a^2-1)} = \frac{a-2}{a+1} = \frac{2013}{2016}$ ，选 B.

【评注】观察分子、分母数字间的特点，用字母表示数，从一般情形考虑，通过分解变形，寻找复杂数值下隐含的规律.

【例 14】化简 $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \cdots + \frac{1}{x^2+201x+10100}$ 为 ().

- (A) $\frac{100}{(x-1)(x-101)}$ (B) $\frac{100}{(x+1)(x-101)}$
(C) $\frac{100}{(x+1)(x+101)}$ (D) $\frac{100}{(x-1)(x+101)}$
(E) $\frac{101}{(x-1)(x+101)}$

【解析】 $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \cdots + \frac{1}{x^2+201x+10100}$
= $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+100)(x+101)}$
= $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+100} - \frac{1}{x+101}\right)$
= $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+101} = \frac{100}{(x+101)(x+1)}$ ，故选 C.

【题型 5】指数的计算

【思路点拨】指数的核心在于两点：一个是指数基本公式的应用；另一个是转化形式，比如统一底数或指数，然后进行比较大小.

【例 15】若 $a=3^{555}$, $b=4^{444}$, $c=5^{333}$, 则 a, b, c 的大小关系是()。

- (A) $a > b > c$ (B) $b > c > a$ (C) $b > a > c$
(D) $c > b > a$ (E) $a > c > b$

【解析】 $a=3^{555}=(3^5)^{111}=243^{111}$, $b=4^{444}=(4^4)^{111}=256^{111}$,
 $c=5^{333}=(5^3)^{111}=125^{111}$, 所以 $b > a > c$, 故选 C。

【例 16】已知 $3^x + 3^{-x} = 4$, 则 $27^x + 27^{-x}$ 的值是()。

- (A) 64 (B) 60 (C) 52 (D) 48 (E) 36

【解析】因为 $3^x + 3^{-x} = 4$, 所以 $27^x + 27^{-x} = (3^x + 3^{-x})[(3^x)^2 - 3^x \cdot 3^{-x} + (3^{-x})^2] = 52$,
选 C。

【题型 6】对数的计算

【思路点拨】对数是指数的逆运算, 两者可以结合起来记忆。

【例 17】已知 $25^x = 2000$, $80^y = 2000$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 等于()。

- (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) 3

【解析】因为 $25^x = 2000$, $80^y = 2000 \Rightarrow x = \log_{25} 2000$, $y = \log_{80} 2000$,

所以 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\log_{25} 2000} + \frac{1}{\log_{80} 2000} = \log_{2000} 25 + \log_{2000} 80 = 1$, 故选 B。

【点拨】本题主要考查指对数互相转化及对数的倒数公式。

【例 18】设 $a = \pi^{0.3}$, $b = \log_{\pi} 3$, $c = 3^0$, 则 a, b, c 的大小关系是()。

- (A) $a > b > c$ (B) $b > c > a$ (C) $b > a > c$
(D) $a > c > b$ (E) $b > a > c$

【解析】因为 $a = \pi^{0.3} > \pi^0 = 1$, $b = \log_{\pi} 3 < \log_{\pi} \pi = 1$, $c = 3^0 = 1$,
从而有 $a > 1$, $b < 1$, $c = 1$, 所以 $a > c > b$, 选 D。

【例 19】若 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$, 则()。

- (A) $0 < a < b < 1$ (B) $0 < b < a < 1$ (C) $a > b > 1$
(D) $b > a > 1$ (E) $b > 1 > a$

【解析】方法一: 因为 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$, 所以 $0 > \log_2 a > \log_2 b$, 所以 $0 < b < a < 1$ 。

方法二: (特值法) 取 $\log_a 2 = -1$, $\log_b 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, 所以选 B。

【例 20】已知 $\lg(x+y) + \lg(2x+3y) - \lg 3 = \lg 4 + \lg x + \lg y$, 则 $x:y$ 的值为()。

- (A) 2 或 $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ 或 3 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) 3

【解析】原式化为:

$$\lg \frac{(x+y)(2x+3y)}{3} = \lg(4xy) \Rightarrow \frac{(x+y)(2x+3y)}{3} = 4xy \Rightarrow$$

$$2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0 \Rightarrow 2x = y \text{ 或 } x = 3y,$$

得 $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{x}{y} = 3$, 故选 B。

第三节 强化突破题型

【题型 1】有关整式的计算

【思路点拨】对于这类题目基本知识点比较少,但是其灵活性比较高,因此,在做题时一定要仔细观察原式、变化后的式子以及所要求解的问题,对于大多数问题,可以从所求的结论入手,进而向已知条件靠近.

【例 1】对任意实数 x , 等式 $ax - 4x + 5 + b = 0$ 恒成立, 则 $(a + b)^{2008}$ 为().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2^{1004}
(D) 2^{2008} (E) 2

【解析】方法一(基本解法): $ax - 4x + 5 + b = 0 \Leftrightarrow (a - 4)x + (5 + b) = 0$, 又任意实数 x 等式是恒成立的, 故有 $a = 4, b = -5$, 有 $a + b = -1$, 从而 $(a + b)^{2008} = 1$, 选 B.

方法二(特值法): 由于对任意实数 x , 等式 $ax - 4x + 5 + b = 0$ 恒成立, 那么可以取 $x = 1$, 那么原式转化为 $a - 4 + 5 + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$, 所以 $(a + b)^{2008} = 1$, 选 B.

【评注】对于这类整式题目的计算, 是比较灵活的, 只要抓住所要求的结论, 进而向上寻找到的关键的条件, 即可计算出来. 必要时可以考虑特殊值, 但要注意并不是所有的这类计算特殊值法都有效.

【例 2】当 a, b, c 取何值时, 多项式 $f(x) = 2x - 7$ 与 $g(x) = a(x - 1)^2 - b(x + 2) + c(x^2 + x - 2)$ 相等().

(A) $a = -\frac{11}{9}, b = \frac{5}{3}, c = \frac{11}{9}$ (B) $a = -11, b = 15, c = 11$

(C) $a = \frac{11}{9}, b = \frac{5}{3}, c = -\frac{11}{9}$ (D) $a = 11, b = 15, c = -11$

(E) 以上结论均不正确

【解析】可以利用多项式相等的定义, 即若两多项式相等, 必有对应项的系数相等, 两多项式的项数相等. 而由 $g(x) = a(x - 1)^2 - b(x + 2) + c(x^2 + x - 2) = (a + c)x^2 +$

$$(c - 2a - b)x + a - 2b - 2c, \text{ 有 } \begin{cases} a + c = 0, \\ c - 2a - b = 2, \\ a - 2b - 2c = -7, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{11}{9}, \\ b = \frac{5}{3}, \\ c = \frac{11}{9}, \end{cases} \text{ 故选 A.}$$

【评注】两多项式相等, 次数相等的项所对应的系数相等即可. 判断两多项式相等与否, 首先要看其项数是否相等, 这个两多项式相等的必要条件, 但不是充分条件.

【例 3】确定 m, b 的值为(), 使 $mx^4 + bx^3 + 1$ 能被 $(x - 1)^2$ 整除.

- (A) $m = 1, b = 4$ (B) $m = 3, b = -4$ (C) $m = -3, b = 4$
(D) $m = 1, b = -3$ (E) $m = 1, b = 3$

【解析】方法一(竖式除法):

$$\begin{array}{r}
 mx^2+(b+2m)x+(2b+3m) \\
 x^2-2x+1 \left\{ \begin{array}{l} mx^4+bx^3+0x^2+0x+1 \\ \hline mx^4-2mx^3+mx^2 \\ \hline (b+2m)x^3-mx^2+1 \\ \hline (b+2m)x^3-2(b+2m)x^2+(b+2m)x \\ \hline (2b+3m)x^2-(b+2m)x+1 \\ \hline (2b+3m)x^2-2(2b+3m)x+(2b+3m) \\ \hline (4m+3b)x+(1-2b-3m) \end{array} \right.
 \end{array}$$

即有 $\begin{cases} 4m+3b=0, \\ 1-2b-3m=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=3, \\ b=-4, \end{cases}$ 选 B.

方法二(待定系数法): $mx^4+bx^3+1=(mx^2+ax+1)(x-1)^2$, 即

$$mx^4+bx^3+1=mx^4+(a-2m)x^3+(m+1-2a)x^2+(a-2)x+1,$$

有 $\begin{cases} b=a-2m, \\ m+1-2a=0, \\ a-2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=-4, \\ m=3, \end{cases}$ 选 B.

【评注】解有关整式整除的题目,一般都可以从以上两种解法考虑.方法一比较容易理解,它是从数的竖式除法计算中延伸出来的一种解法,只要余式为零,那么两式子其中的一个就能被另一个整除;方法二也是解整式的一种常用技巧,其思想是采用了方程的思想,然后利用两个多项式相等即可求出待定参数.在假设另外一个式子时,要注意题目中所用到的技巧,方法二中并没有假设为 $mx^4+bx^3+1=(ax^2+cx+d)(x-1)^2$,可以考虑下为什么.

【例 4】已知 $(x^2+px+8)(x^2-3x+q)$ 的展开式中不含 x^2, x^3 项,则 p, q 的值为().

(A) $\begin{cases} p=2, \\ q=1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} p=3, \\ q=2 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} p=3, \\ q=-1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} p=1, \\ q=3 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} p=3, \\ q=1 \end{cases}$

【解析】 x^2 项的系数为 $8-3p+q$; x^3 项的系数为 $-3+p$.

因为展开式中不含 x^2, x^3 项,所以 $\begin{cases} 8-3p+q=0, \\ -3+p=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=3, \\ q=1, \end{cases}$ 故选 E.

【评注】如果全部展开,共有 9 项,项数比较多,在观察时容易出错.而本题我们可以通过对二次项、三次项系数的分析,直接确定二次项、三次项的系数,这样解题不仅方便,也可以避免观察时出错.

【题型 2】分式的化简

【思路点拨】分式化简的关键在于分解因式,所以因式分解是整式和分式的运算基础,要掌握常用的因式分解的方法.

【例 5】已知 $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x+3y+3z=0, \end{cases}$ 则分式 $\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}=()$.

(A) $-\frac{2}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $-\frac{4}{7}$ (E) $\frac{1}{7}$

【解析】方法一(基本解法):显然有 $\begin{cases} x=3y, \\ z=-2y, \end{cases}$ 故 $\frac{(3y)^2-y^2-(-2y)^2}{(3y)^2+y^2+(-2y)^2}=\frac{2}{7}$, 选 B.

方法二(特殊值法):显然 $x=3, y=1, z=-2$ 满足已知的方程组,故 $\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2}{7}$,

选 B.

【题型 3】有关恒等式的变形

【思路点拨】恒等式的题目,一般采用综合法和演绎法.前者的方法,是从结论入手,即寻找结论成立的条件,从后往前追寻条件,进而可以找到题目已知的条件恰好是结论成立的条件,这样就完成了,此法在分析问题中常用.演绎法,比较抽象,是从条件入手,从条件一步一步往下推导,进而推导到所给定的结论.

【例 6】(条件充分性判断)若 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 有 $x+y+z=0$.

(1) $a^x b^y c^z = a^y b^z c^x = a^z b^x c^y = 1$.

(2) a, b, c 均大于 1.

【解析】对 $a^x b^y c^z = 1$ 两边取自然对数,有 $x \ln a + y \ln b + z \ln c = 0$, 设 $\ln a = A, \ln b = B, \ln c = C$, 则 $Ax + By + Cz = 0$, 同理有 $Ay + Bz + Cx = 0, Az + Bx + Cy = 0$, 三个方程相加,得 $(A+B+C)(x+y+z)=0$, 则有 $A+B+C=0$ 或 $x+y+z=0$, 所以单独的条件(1)是不充分的,联合条件(2) $A>0, B>0, C>0$ 有 $A+B+C \neq 0$, 只有 $x+y+z=0$, 所以两条件联合起来充分,选 C.

【另解】由题得到: $a^x b^y c^z = 1, a^y b^z c^x = 1, a^z b^x c^y = 1$, 将三式相乘得到:

$a^{x+y+z} b^{x+y+z} c^{x+y+z} = (abc)^{x+y+z} = 1$, 又 a, b, c 均大于 1, 从而 $x+y+z=0$.

【例 7】已知 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, 那么 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = (\quad)$.

(A) 0

(B) 1

(C) 3

(D) 9

(E) 2

【解析】对 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$ 两边平方得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 9$, 又 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0$, 即 $ayz + bxz + cxy = 0$, 故有 $\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} = \frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 0$, 从而 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 9$, 选 D.

【评注】在解答此题时,显然结论中左边的式子是二次的,而已知条件都是一次的,因此需要对条件进行升高一次.此题的另外一个点是若 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, 则有 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2$, 这个可以作为一个结论以后使用.

【技巧】若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, 可得 $ab + bc + ac = 0$, 则 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

【题型 4】表达式取值情况的讨论

【思路点拨】对于表达式取值情况的讨论,一般要将其通过因式分解,变成乘积的形式,再借助等式两边数的特征,讨论满足题干要求的情况.

【例 8】已知 n 是正整数,且 $n^4 - 16n^2 + 100$ 是质数,则 n 有()种取值情况.

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 无数

【解析】 $n^4 - 16n^2 + 100 = n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2 = (n^2 + 10)^2 - 36n^2 = (n^2 + 6n + 10)$

$(n^2 - 6n + 10)$, 因 $n^2 + 6n + 10 \neq 1$, 而 $n^4 - 16n^2 + 100$ 为质数且 n 为正整数, 故 $n^2 - 6n + 10 = 1$, 即 $(n - 3)^2 = 0$ 得 $n = 3$, 选 A.

【评注】从因数分解的角度看, 质数只能分解成 1 和本身的乘积(也可从整除的角度看), 故对原式进行恰当的分解变形, 是解题的最自然思路.

【例 9】方程 $6xy + 4x - 9y - 7 = 0$ 的整数解有()种情况.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 无数

【解析】由 $(2x - 3)(2 + 3y) = 1$, 得 $\begin{cases} 2x - 3 = 1, \\ 2 + 3y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x - 3 = -1, \\ 2 + 3y = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$ (舍

去), 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$ 所以只有一种整数解, 选 A.

【例 10】设 x, y 为正整数, 且 $x^2 + y^2 + 4y - 96 = 0$, 则 xy 有()种取值情况.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 无数

【解析】由条件得 $(y + 2)^2 = 100 - x^2 \geq 0$, 所以 $x^2 \leq 100, x = 1, 2, \dots, 10$, 只有当 $x = 6$ 或 8 时, $(y + 2)^2$ 才是平方数, 此时 $y = 6$ 或 4 , 故 $xy = 36$ 或 32 , 所以选 B.

【评注】观察方程的特点, 利用整数解这个特殊条件, 运用因式分解或配方, 寻找解题突破口. 不定方程(组)的基本解法有: (1) 枚举法; (2) 配方法; (3) 因数分解、因式分解法; (4) 分离系数法. 运用这些方法解不定方程时, 都需灵活运用奇数偶数、质数合数、整除等与整数相关的知识.

【例 11】整数 x, y 满足不等式 $x^2 + y^2 + 1 \leq 2x + 2y$, 则 $x + y$ 有()种取值情况.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 无数

【解析】原不等式可化为 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$, 且 x, y 为整数, $(x - 1)^2 \geq 0$, $(y - 1)^2 \geq 0$,

所以可能的结果是 $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 1 = \pm 1, \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ y - 1 = \pm 1. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$ 则 $x + y = 1$ 或 2 或

3, 故选 C.

【评注】解题的关键是拆项与重组; 有些问题常常不能直接使用公式, 而需要创造条件, 使之符合乘法公式的特点, 才能使用公式. 常见的方法是: 分组、结合, 拆添项、字母化等. 完全平方公式逆用可得到两个应用广泛的结论: (1) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \geq 0$; 揭示式子的非负性, 利用非负数及其性质解题. (2) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

【题型 5】考查余式定理

【思路点拨】余式定理的描述如下: 多项式 $f(x)$ 除以 $x - a$ 的余式为 $f(a)$. 推论: 多项式 $f(x)$ 除以 $ax - b$ 的余式为 $f\left(\frac{b}{a}\right)$.

【例 12】设 $f(x)$ 为实系数多项式, 以 $x - 1$ 除之, 余数为 9; 以 $x - 2$ 除之, 余数为 16, 则 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 2)$ 的余式为().

- (A) $7x + 2$ (B) $7x + 3$ (C) $7x + 4$ (D) $7x + 5$ (E) $2x + 7$

【解析】已知 $f(1) = 9, f(2) = 16$, 设 $f(x) = (x-1)(x-2)q(x) + (ax+b)$, 有

$$\begin{cases} f(1) = a+b=9, \\ f(2) = 2a+b=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7, \\ b=2, \end{cases} \text{ 故余式为 } 7x+2, \text{ 选 A.}$$

【例 13】设多项式 $f(x)$ 除以 $x-1, x^2-2x+3$ 的余式分别依次为 $2, 4x+6$, 则 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2-2x+3)$ 的余式为().

- (A) $4x^2 + 12x - 6$ (B) $-4x^2 + 12x - 6$ (C) $-4x^2 + 12x + 6$
(D) $-4x^2 - 12x - 6$ (E) $4x^2 - 12x - 6$

【解析】根据题意, 设 $f(x) = (x-1)(x^2-2x+3)q(x) + a(x^2-2x+3) + 4x+6$, 再由 $f(1) = 2a+10=2 \Rightarrow a=-4$, 所以余式为 $-4x^2+12x-6$, 选 B.

【评注】本题的除式为 3 次方, 故余式可设为 2 次方, 但若设余式为 ax^2+bx+c , 则运算较为复杂, 从而将余式巧妙的表示为 $a(x^2-2x+3)+4x+6$.

【例 14】设多项式 $f(x)$ 被 x^2-1 除后的余式为 $3x+4$, 并且已知 $f(x)$ 有因式 x . 若 $f(x)$ 被 $x(x^2-1)$ 除后的余式为 px^2+qx+r , 则 $p^2-q^2+r^2=()$.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

【解析】 $f(x)$ 被 $x(x^2-1)$ 除的余式为 px^2+qx+r , 可令

$$f(x) = x(x^2-1)q(x) + px^2 + qx + r,$$

又 $f(x)$ 被 x^2-1 除的余式为 $3x+4$, 则 px^2+qx+r 被 x^2-1 除的余式为 $3x+4$, 则 $px^2+qx+r = p(x^2-1) + 3x+4$, 故 $f(x) = x(x^2-1)q(x) + p(x^2-1) + 3x+4$, 又 $f(x)$ 有因式 x , 由因式定理知 $f(0)=0 \Rightarrow 0-p+4=0 \Rightarrow p=4$, 故 $px^2+qx+r=4(x^2-1)+3x+4=4x^2+3x$, 所以 $p=4, q=3, r=0$. 于是 $p^2-q^2+r^2=16-9=7$, 选 E.

【题型 6】余式定理的应用

【思路点拨】可将余式定理进行逆用, 即将函数值 $f(a)$ 看成 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余式.

【例 15】设 $f(x)$ 是三次多项式, 且 $f(2) = f(-1) = f(4) = 3, f(1) = -9$, 则 $f(0) = ()$.

- (A) -13 (B) -12 (C) -9 (D) 13 (E) 7

【解析】根据 $f(2) = f(-1) = f(4) = 3$, 可设 $f(x) = a(x-2)(x+1)(x-4) + 3$, 将 $x=1$ 代入, 有 $f(1) = a \times (-1) \times 2 \times (-3) + 3 = -9 \Rightarrow a = -2$, 得

$$f(x) = -2(x-2)(x+1)(x-4) + 3,$$

故 $f(0) = -13$, 选 A.

【例 16】 $f(x)$ 为二次多项式, 且 $f(2004) = 1, f(2005) = 2, f(2006) = 7$, 则 $f(2008) = ()$.

- (A) 23 (B) 25 (C) 28 (D) 29 (E) 21

【解析】根据题意, 设 $f(x) = a(x-2004)(x-2005) + b(x-2004) + 1$,

$$f(2005) = b+1=2 \Rightarrow b=1, f(2006) = 2a+2b+1=7 \Rightarrow a=2,$$

故 $f(x) = 2(x-2004)(x-2005) + (x-2004) + 1$, 所以 $f(2008) = 29$, 选 D.

【题型 7】指数与对数函数

【思路点拨】指数函数与对数函数的运算关键在于转换为相同的底数, 这样就可以借助图像或公式进行相应的运算.

【例 17】关于 x 的函数 $y = \left(\lg \frac{x}{3}\right) \cdot \left(\lg \frac{x}{12}\right)$ 的最小值为().

- (A) $\lg^2 2$ (B) $\lg^2 4$ (C) $\lg 2$ (D) $-\lg^2 2$ (E) $-\lg^2 4$

【解析】 $y = (\lg x - \lg 3)(\lg x - \lg 12) = \lg^2 x - (\lg 3 + \lg 12)\lg x + \lg 3 \cdot \lg 12$, 看做二次函数, 所以当 $\lg x = \frac{\lg 3 + \lg 12}{2} = \lg 6$, 即 $x = 6$ 时, y 有最小值

$$\frac{4\lg 3\lg 12 - (\lg 3 + \lg 12)^2}{4} = \frac{-\lg^2 4}{4} = -\lg^2 2,$$

所以选 D.

【例 18】已知 $a = \log_m \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{1}{2}(\log_m x + \log_m y)$, $c = \frac{1}{2} \log_m (x+y)$, 则 $c > b \geq a$.

(1) $x > 2, y > 2$.

(2) $0 < m < 1$.

【解析】本题主要考查对数函数的单调性以及平均值之间的关系, 对 a, b, c 作变形, 转化成比较 $\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}, \sqrt{x+y}$ 的大小: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, 又由 $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 1$, 所以 $\sqrt{xy} > \sqrt{x+y}$; 从而得到 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} > \sqrt{x+y}$, 且当 $0 < m < 1$ 时, $y = \log_m x$ 为单调递减函数, 所以两个条件联合充分, 选 C.

【题型 8】整体代入求值

【思路点拨】在有些求代数式的值的问题中, 往往题目中并没有直接告诉字母的值, 而且通过已知条件很难求出未知数的值来, 通常进行整体代入, 求得代数式的值.

【例 19】已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$, 则代数式 $\frac{-3a+4ab+3b}{2a-3ab-2b}$ 的值为().

- (A) $-\frac{10}{7}$ (B) $\frac{10}{7}$ (C) $-\frac{10}{9}$ (D) $\frac{10}{9}$ (E) $-\frac{11}{7}$

【解析】 $a - b = -2ab$, 原式 = $\frac{-3(a-b)+4ab}{2(a-b)-3ab} = -\frac{10}{7}$, 故选 A.

【例 20】当 $x = -5$ 时, 代数式 $ax^4 + bx^2 + c$ 的值是 3, 则当 $x = 5$ 时, 代数式 $ax^4 + bx^2 + c$ 的值为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

【解析】 $a(-5)^4 + b(-5)^2 + c = 3$, 即 $5^4 a + 5^2 b + c = 3$.

当 $x = 5$ 时, 代数式 $ax^4 + bx^2 + c = 5^4 a + 5^2 b + c = 3$, 选 C.

【例 21】已知 $a^2 + bc = 14$, $b^2 - 2bc = -6$, 则 $3a^2 + 4b^2 - 5bc =$ ().

- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 19

【解析】原式 = $3(a^2 + bc) + 4(b^2 - 2bc) = 42 - 24 = 18$, 所以选 D.

【例 22】已知 $x = 2016$, 则 $|4x^2 - 5x + 1| - 4|x^2 + 2x + 2| + 3x + 7 =$ ().

- (A) -20160 (B) -20610 (C) -20162 (D) 20160 (E) -21600

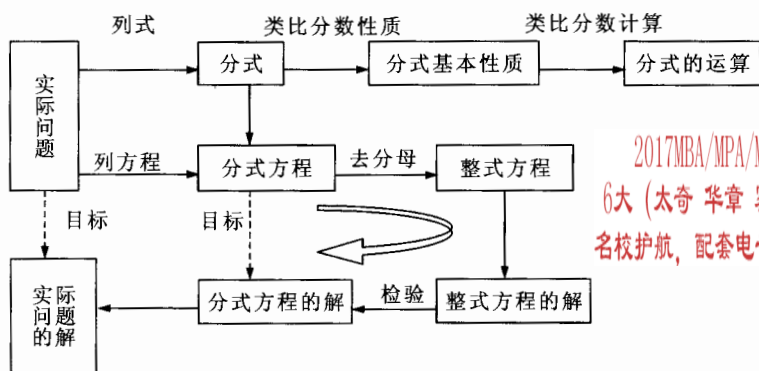
【解析】当 $x = 2016$ 时,

$$\text{原式} = 4x^2 - 5x + 1 - 4(x^2 + 2x + 2) + 3x + 7 = -10x = -20160,$$

选 A.

第四节 核心专题点睛

整式、分式的出现对于数学历史的发展具有重要的作用. 分式是不同于整式的另一类有理式, 是代数式中重要的基本概念; 相应地, 分式方程是一类有理方程, 解分式方程的过程比解整式方程更复杂些. 然而, 分式或分式方程更适合作为某些类型的问题的数学模型, 它们具有整式或整式方程不可替代的特殊作用. 关系图如下:



2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

一、因式分解

【解题思路】因式分解在整式计算、分式计算中常常涉及, 而且在解一元二次方程、一元二次不等式时, 最常用的一种方法就是利用十字相乘法求方程的根, 因此掌握因式分解的方法和技巧, 以及熟练地对一式子进行因式分解是十分必要的.

因式分解常用的方法:

1. 提公因式法

一般地, 如果多项式的各项有公因式(各项都含有的公共的因式叫做这个多项式各项的公因式), 可以把这个公因式提到括号外面, 将多项式写成因式乘积的形式, 这种分解因式的方法叫做提公因式法. 例如: $am + bm + cm = m(a + b + c)$.

具体方法: 当各项系数都是整数时, 公因式的系数应取各项系数的最大公约数; 字母取各项的相同的字母, 而且各字母的指数取次数最低的. 如果多项式的第一项是负的, 一般要提出负号, 使括号内的第一项的系数为正.

【例1】若 $x^3 + 5x^2 + 7x + a$ 有一因式 $x + 1$, 则其必含下列() 因式.

(A) $x - 1$ (B) $x - 2$ (C) $x + 2$ (D) $x - 3$ (E) $x + 3$

【解析】因为 $x^3 + 5x^2 + 7x + a$ 有一因式 $x + 1$,

所以当 $x + 1 = 0$, 即 $x = -1$ 时, $x^3 + 5x^2 + 7x + a = 0$, 得 $a = 3$.

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 + 7x + 3 &= x^3 + x^2 + 4x^2 + 4x + 3x + 3 \\ &= x^2(x + 1) + 4x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x + 1)(x + 1)(x + 3) = (x + 1)^2(x + 3), \text{ 故选 E.} \end{aligned}$$

【评注】由条件知, $x = -1$ 时多项式的值为零, 代入求得 a , 再利用原式有一个因式是

$x+1$, 分解时尽量出现 $x+1$, 从而分解彻底.

2. 运用公式法

常用的公式有:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \pm ab \pm bc \pm ac = \frac{1}{2}[(a \pm b)^2 + (a \pm c)^2 + (b \pm c)^2].$$

【例2】在多项式 $x+1, x+2, x+3, x^2+2x-3, x^2+2x-1, x^2+2x+3$, 有()个是多项式 $(x^2+2x)^4 - 10(x^2+2x)^2 + 9$ 的因式.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & (x^2+2x)^4 - 10(x^2+2x)^2 + 9 \\ &= [(x^2+2x)^2 - 9][(x^2+2x)^2 - 1] \\ &= (x^2+2x+3)(x^2+2x-3)(x^2+2x+1)(x^2+2x-1) \\ &= (x^2+2x+3)(x+3)(x-1)(x+1)^2(x^2+2x-1). \end{aligned}$$

其中 $x+1, x+3, x^2+2x+3, x^2+2x-1, x^2+2x-3$ 是多项式 $(x^2+2x)^4 - 10(x^2+2x)^2 + 9$ 的因式, 选 E.

3. 十字相乘法

用于分解 $abx^2 + (bp+aq)x + pq$ 型的式子. 这类二次三项式的特点是: 二次项的系数、常数项是两个数的积; 一次项系数是二次项系数的因数与常数项系数的因数乘积的和. 特殊情况时, 二次项的系数为 1. 分解出来, $abx^2 + (bp+aq)x + pq = (ax+p)(bx+q)$.

【例3】分解因式: (1) $7x^2 - 19x - 6$; (2) $6x^2 - 7x - 5$; (3) $x^2 - 13xy - 30y^2$; (4) $x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 6$.

$$\text{【解析】} (1) 7x^2 - 19x - 6 = (7x+2)(x-3).$$

$$(2) 6x^2 - 7x - 5 = (2x+1)(3x-5).$$

$$(3) x^2 - 13xy - 30y^2 = (x-15y)(x+2y).$$

$$(4) x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 6 = (x+y)^2 - (x+y) - 6 = (x+y-3)(x+y+2).$$

4. 拆项、补项法

拆项、补项法: 把多项式的某一项拆开或填补上互为相反数的两项(或几项), 使原式适合提公因式法、运用公式法或分组分解法进行分解. 要注意, 必须在与原多项式相等的原则上进行变形.

【例4】 $x^3 - 9x + 8$ 与 $x^9 + x^6 + x^3 - 3$ 必同时含有下列()个因式.

- (A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $x+3$ (D) $x-2$ (E) $x-1$

【解析】(1) 把 8 拆成 $-1+9$, 则有

$$x^3 - 9x + 8 = x^3 - 9x - 1 + 9 = (x^3 - 1) - (9x - 9) = (x-1)(x^2 + x - 8).$$

(2) 把 -3 拆成 $-1-1-1$, 有

$$x^9 + x^6 + x^3 - 3 = (x^9 - 1) + (x^6 - 1) + (x^3 - 1) = (x^3 - 1)(x^6 + 2x^3 + 3) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + 2x^3 + 3), \text{ 故选 E.}$$

5. 待定系数法

首先判断出分解因式的形式,然后设出相应整式的字母系数,求出字母系数,从而把多项式因式分解.

【例 5】如果 $x^4 - x^3 + mx^2 - 2mx - 2$ 能分解成两个整数系数的二次因式的积,则 m 的值为().

- (A) 1 或 2 (B) -1 或 2 (C) 1 或 -2 (D) ± 1 (E) ± 2

【解析】应当把 x^4 分成 $x^2 \cdot x^2$, 而对于常数项 -2, 可能分解成 $(-1) \times 2$, 或者分解成 $(-2) \times 1$, 由此分为两种情况进行讨论.

(1) 设原式分解为 $(x^2 + ax - 1)(x^2 + bx + 2)$, 其中 a, b 为整数, 去括号, 得 $x^4 + (a+b)x^3 + (ab+1)x^2 + (2a-b)x - 2$.

将它与原式的各项系数进行对比, 得 $a+b=-1, ab+1=m, 2a-b=-2m$.

解得 $a=-1, b=0, m=1$, 此时, 原式 $= (x^2 + 2)(x^2 - x - 1)$.

(2) 设原式分解为 $(x^2 + cx - 2)(x^2 + dx + 1)$, 其中 c, d 为整数, 去括号, 得 $x^4 + (c+d)x^3 + (cd-1)x^2 + (c-2d)x - 2$.

将它与原式的各项系数进行对比, 得

$$c+d=-1, m=-1, c-2d=-2m,$$

解得 $c=0, d=-1, m=-1$.

此时, 原式 $= (x^2 - 2)(x^2 - x + 1)$, 选 D.

二、一次因式检验法在解题中的应用

【解题思路】本技巧用于考试中快速判断因式, 对于方程和不等式尤为重要.

一次因式检验法: 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为一整系数 n 次多项式, 若 $ax - b$ 为 $f(x)$ 的整系数一次因式且 $(a, b) = 1$, 则 $a | a_n, b | a_0$.

【注】 $a | a_n$ 表示 a 为 a_n 的约数, 其他含义相同.

【例 6】 $f(x) = 6x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 5, a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, 则下列() 式子可能是 $f(x)$ 的因式.

- (A) $x-1$ (B) $x+2$ (C) $2x-1$ (D) $x+3$ (E) $3x+5$

【解析】利用整系数一次因式检验法.

若 $(px - q) | f(x)$, 则 $p | 6, q | 5$, 即 $p = 1, 2, 3, 6, q = \pm 1, \pm 5$, 所以 $(x+3) \nmid f(x)$, $(x+2) \nmid f(x)$. 又 $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, 若 $f(a) = 0$, 则 $a < 0$, 可知 $x-1$ 及 $2x-1$ 均不可能, 故唯有 $3x+5$ 可能是 $f(x)$ 的因式, 选 E.

【例 7】设 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, 则下列() 式子不可能是多项式 $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 5$ 的因式.

- (A) $x-1$ (B) $2x-1$ (C) $x+1$ (D) $5x-1$ (E) $x-5$

【解析】利用一次因式检验定理: 若 $f(x)$ 有 $px - q$ 的因式, $p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0, (p, q) = 1$,

则 $p \nmid 2, q \nmid 5$, 故若 $p \nmid 2$ 或 $q \nmid 5$, 则 $f(x)$ 必无 $px - q$ 的因式. 故 $5x - 1$ 一定不是 $f(x)$ 的因式, 选 D.

【例 8】设 k 为负整数, 若 $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + kx - 3$ 有整系数一次因式, 则 k 的数值为().

- (A) -2 (B) -1 (C) -3 (D) -5 (E) -11

【解析】设 $f(x)$ 的整系数一次因式为 $ax - b$, 则 $a \mid 1, b \mid -3$, 即 $ax - b$ 可能为 $x \pm 1, x \pm 3$.

$$(1) (x+1) \mid f(x) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow 1 + 2 + 1 - k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1 (\text{舍去}).$$

$$(2) (x-1) \mid f(x) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 2 + 1 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3 (\text{舍去}).$$

$$(3) (x+3) \mid f(x) \Rightarrow f(-3) = 0 \Rightarrow 81 + 54 + 9 + 3k - 3 = 0 \Rightarrow k = -47 (\text{舍去}).$$

(4) $(x-3) \mid f(x) \Rightarrow f(3) = 0 \Rightarrow 81 - 54 + 9 + 3k - 3 = 0 \Rightarrow k = -11$ (满足), 显然选 E.

【例 9】设 $a, b \in \mathbf{Z}^+, c \in \mathbf{Z}$, 若 $x^5 - ax^4 + x^3 - 2bx^2 + x + 2$ 有一次因式 $x - c$, 则 $a + b + c =$ ().

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 4 或 5 (E) 5 或 6

【解析】令 $f(x) = x^5 - ax^4 + x^3 - 2bx^2 + x + 2, (x-c) \mid f(x) \Rightarrow c \mid 2 \Rightarrow c = \pm 1, \pm 2$.

c	1	-1	2	-2
$f(c) = 0$	$a + 2b = 5$ $a = 1, b = 2$ 或 $a = 3, b = 1$	$a + 2b + 1 = 0$ (不合)	$4a + 2b = 11$ (不合)	$2a + b = -5$ (不合)

故 $a + b + c = 4$ 或 5 , 选 D.

三、双十字相乘法

分解二次三项式时, 常用十字相乘法. 对于某些二元二次六项式 $(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f)$, 也可以用十字相乘法分解因式. 例如, 分解因式 $2x^2 - 7xy - 22y^2 - 5x + 35y - 3$. 将上式按 x 降幂排列, 并把 y 当作常数, 于是上式可变形为 $2x^2 - (5 + 7y)x - (22y^2 - 35y + 3)$, 可以看作是 x 的二次三项式. 对于常数项而言, 它是关于 y 的二次三项式, 也可以用十字相乘法, 分解为

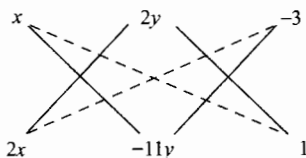
$$\begin{array}{cc} 2y & -3 \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & \times \\ & \diagup \quad \diagdown \\ -11y & 1 \end{array}$$

即 $-22y^2 + 35y - 3 = (2y - 3)(-11y + 1)$. 再利用十字相乘法对关于 x 的二次三项式分解

$$\begin{array}{cc} x & (2y-3) \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & \times \\ & \diagup \quad \diagdown \\ 2x & (-11y+1) \end{array}$$

所以,原式 $=[x+(2y-3)] \cdot [2x+(-11y+1)]=(x+2y-3)(2x-11y+1)$.

上述因式分解的过程,实施了两次十字相乘法.如果把这两个步骤中的十字相乘图合并在一起,可得到



它表示的是下面三个关系式: $(x+2y)(2x-11y)=2x^2-7xy-22y^2$;

$$(x-3)(2x+1)=2x^2-5x-3;$$

$$(2y-3)(-11y+1)=-22y^2+35y-3.$$

这就是所谓的双十字相乘法.用双十字相乘法对多项式 $ax^2+bxxy+cy^2+dx+ey+f$ 进行因式分解的步骤是:

(1) 用十字相乘法分解 $ax^2+bxxy+cy^2$,得到一个十字相乘图(有两列);

(2) 把常数项 f 分解成两个因式填在第三列上,要求第二、第三列构成的十字交叉之积的和等于原式中的 ey ,第一、第三列构成的十字交叉之积的和等于原式中的 dx .

则 $ax^2+bxxy+cy^2+dx+ey+f=(a_1x+c_1y+f_1)(a_2x+c_2y+f_2)$.

$$\begin{array}{ccc} a_1x & \times & c_1y \\ a_2x & \times & c_2y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f_1 & \times & f_2 \\ f_1 & \times & f_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1a_2=a, c_1c_2=c, f_1f_2=f, a_1c_2+a_2c_1=b, \\ c_1f_2+c_2f_1=e, a_1f_2+a_2f_1=d \end{array}$$

【例 10】若 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 能分解为两个一次因式的积,则 m 的值为().

(A) 1 (B) -1 (C) ± 1 (D) 2 (E) ± 2

【解析】 $x^2-y^2+mx+5y-6=(x+y)(x-y)+mx+5y-6$.

-6 可分解成 $(-2) \times 3$ 或 $(-3) \times 2$,因此,存在两种情况:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -1 \\ 1 & \times & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & \times & -3 \\ -3 & \times & 2 \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{ccc} 1 & \times & -1 \\ 1 & \times & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 3 & \times & -2 \\ -2 & \times & 3 \end{array}$$

由(1)可得 $m=1$,由(2)可得 $m=-1$,故选择 C.

【例 11】已知长方形的相邻两边分别为 x, y ,周长为 16,且满足 $x^2-2xy+y^2-x+y-2=0$,则长方形的面积为().

(A) 16 (B) 15 或 $\frac{63}{4}$ (C) 15 或 $\frac{65}{4}$ (D) 16 或 $\frac{65}{4}$ (E) 16 或 $\frac{63}{4}$

【解析】根据双十字相乘法得到 $(x-y-2)(x-y+1)=0$,

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -1 \\ 1 & \times & -1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} -2 & \times & 1 \\ 1 & \times & -2 \end{array}$$

所以 $x-y-2=0$ 或 $x-y+1=0$,又因为 $x+y=8$,解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3.5, \\ y=4.5 \end{cases}$,

所以长方形的面积为 15 或 $\frac{63}{4}$. 故选 B.

第五节 阶梯化精炼题

基础能力题



扫码看视频

一、问题求解题

1. $f(x) = x^2 + x - 1$, $g(x) = a(x+1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x-1)^2$, a, b, c 为何值时, $f(x) = g(x)$. ()
- (A) $a = -\frac{1}{4}, b = 1, c = -\frac{1}{4}$ (B) $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = -\frac{1}{2}$
(C) $a = \frac{1}{4}, b = 1, c = -\frac{1}{4}$ (D) $a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = -\frac{1}{2}$
(E) 以上结论均不正确
2. 若 x 和分式 $\frac{3x+2}{x-1}$ 都是整数, 那么 $x =$ ().
- (A) 2, 6 (B) 0, 2, 6 (C) -4 (D) -4, 0, 2, 6 (E) 0, -4
3. x 取 () 时, 分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 的值等于零.
- (A) 2 (B) -2 (C) ± 2 (D) 4 (E) ± 4
4. m 取 () 时, 分式 $\frac{2m+7}{m-1}$ 的值是正整数.
- (A) -8, 0, 4, 10, ± 2 (B) -8, 2, 4, 10 (C) -8, -2
(D) -8, -2, 0 (E) 0, 2, 4, 10
5. a 为 () 时, 有 $\frac{|a|-2}{a^2+a-6} = 0$.
- (A) -2 (B) ± 2 (C) 2 (D) -3 (E) 2 或 -3
6. 已知 $3a^2 + 2a + 5$ 是一个偶数, 那么整数 a 一定是 ().
- (A) 奇数 (B) 偶数 (C) 任意数
(D) 既可以是奇数, 也可以是偶数 (E) 质数
7. 多项式 $M = 4x^2 - 9x + 4a$, $N = 3x^2 - 9x + 4a$, 当 x 为任意一个有理数时, 下列结论正确的是 ().
- (A) M 的值必小于 N 的值 (B) M 的值必不大于 N 的值
(C) M 的值必大于 N 的值 (D) M 的值必不小于 N 的值
(E) M 的值等于 N 的值
8. 方程 $(x^2 - x - 1)^{x+10} = 1$ 的整数解有 () 个.
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
9. 若 $(2a-4)x^4 - bx^2 + x - ab$ 是关于 x 的二次三项式, 则这个二次三项式可能是 ().

- (A) $x^2 + x - 2$ (B) $-x^2 + x - 2$
 (C) $-x^2 + x + 2$ (D) $-x^2 + x - 1$
 (E) 以上结论均不正确

10. 已知 $abc < 0$, 且 $a + b + c = 0$, $x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{ab}{|ab|} + \frac{|bc|}{|bc|} + \frac{ac}{|ac|}$, $ax^3 + bx^2 + cx + 1$ 的值为().

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

11. 若 a, b, c 为互不相等的实数, 且 $abc = 1$, 那么 $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} =$ ().

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 0 或 1 (E) ± 1

12. 已知 $x - 2y = -2$, $b = -4089$, 则 $2bx^2 - 8bxy + 8by^2 - 8b$ 的值为().

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 2008

13. 已知 $a = 2017x + 2018$, $b = 2017x + 2019$, $c = 2017x + 2020$, 则多项式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac =$ ().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 2008

14. 已知 $x^2 - 2x - 1 = 0$, 则 $2001x^3 - 6003x^2 + 2001x - 7 =$ ().

- (A) -2008 (B) 0 (C) 1 (D) 2008 (E) 2009

二、条件充分性判断题

1. $x^4 + mx^2 - px + 2$ 能被 $x^2 + 3x + 2$ 整除.

(1) $m = -6, p = 3$.

(2) $m = 3, p = -6$.

2. $x^3 - 3px + 2q$ 能被 $x^2 + 2ax + a^2$ 整除.

(1) $p = -a^2, q = a^3$.

(2) $p = a^2, q = -a^3$.

3. x 为实数, 有 $\frac{x^{3n} - x^{-3n}}{x^n - x^{-n}} = 7$.

(1) $x^{2n} = 3 - 2\sqrt{2}$.

(2) $x^{2n} = 2 - \sqrt{3}$.

4. 已知 x, y, z 都是实数, 有 $x + y + z = 0$.

(1) $\frac{x}{a+b} = \frac{y}{b+c} = \frac{z}{c+a}$.

(2) $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a}$.

5. 若 x, y, z 均是不等于 1 的非零实数, 那么有 $z + \frac{1}{x} = 1$.

(1) $x + \frac{1}{y} = 1$.

(2) $y + \frac{1}{z} = 1$.

6. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{15}$.

(1) $x = 1$.

(2) $x \neq 1$.

7. 代数式 $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2$ 的值为 2.

(1) $x + \frac{1}{x} = 3$.

(2) $x - \frac{1}{x} = 3$.

8. $a(a+9) + (1+2a)(1-2a)$ 的值为 4.

$$(1) a + \frac{1}{a} = 3.$$

$$(2) a - \frac{1}{a} = 3.$$

9. 已知 $x + y \neq 0$, 则分式 $\frac{2x}{x+y}$ 的值保持不变.

(1) y 和 x 都扩大为原来的 3 倍.

(2) y 和 x 都扩大了原来的 3 倍.

$$10. \frac{1}{(x-1)x} + \frac{1}{x(x+1)} + \cdots + \frac{1}{(x+9)(x+10)} = \frac{11}{12}.$$

$$(1) x = 2.$$

$$(2) x = -11.$$

基础能力题详解

一、问题求解题

1. C; 显然有

$$\begin{aligned} g(x) &= a(x+1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x-1)^2 \\ &= (a+b+c)x^2 + (2a-2c)x + (a-b+c). \end{aligned}$$

$$\text{若 } f(x) = g(x), \text{ 则有 } \begin{cases} a+b+c=1, \\ 2a-2c=1, \\ a-b+c=-1, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=1, \\ c=-\frac{1}{4}. \end{cases}$$

2. D; 令 $t = \frac{3x+2}{x-1} = 3 + \frac{5}{x-1}$, x, t 均是整数, 所以 $x-1$ 应是 5 的约数, 又 $5 = 1 \times 5 = (-1) \times (-5)$, 则 $x-1 = 1, 5, -1, -5$, 所以 $x = 2, x = 6, x = 0, x = -4$.

3. A; 根据题意, 应有 $\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x + 2 \neq 0, \end{cases}$ 即 $x = 2$.

4. B; 同第 2 题, 有 $\frac{2m+7}{m-1} = 2 + \frac{9}{m-1}$, 有 $m-1 = 1, 9, -1, -9, 3, -3$, 即 $m = 2, m = 10, m = 0, m = -8, m = 4, m = -2$, 只有 $m = -8, m = 2, m = 10, m = 4$ 时, $\frac{2m+7}{m-1}$ 的值才是正整数.

5. A; 同第 3 题, 显然有 $\begin{cases} |a| - 2 = 0, \\ a^2 + a - 6 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a = -2$.

6. A; $3a^2 + 2a + 5$ 是偶数, 又 $2a$ 一定是偶数, 故 $3a^2 + 5$ 也必须是偶数, 即 $3a^2$ 应是奇数, 从而 a 应是奇数.

7. D; $M - N = (4x^2 - 9x + 4a) - (3x^2 - 9x + 4a) = x^2 \geq 0$, 故 $M > N$ 或 $M = N$.

8. D; 考虑到 $1^n = 1 (n \in \mathbf{R})$, $(-1)^{2k} = 1 (k \in \mathbf{Z})$, $x^0 = 1 (x \in \mathbf{R})$, $x = -10$ 是其一个整数解; 令 $x^2 - x - 1 = 1$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -1$; 再令 $x^2 - x - 1 = -1$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 而当 $x = 1$ 时有 $(x^2 - x - 1)^{x+10} = -1$, 故原方程的整数解为 $x = -10, x = -1, x = 0, x = 2$, 共 4 个.

9. B; 根据题意, 有 $\begin{cases} b \neq 0, \\ 2a - 4 = 0, \end{cases}$ 即为 $-bx^2 + x - 2b, -x^2 + x - 2$ 满足.

10. D; 根据题意, a, b, c 应该有两正一负, 故 $x=0, ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 1$, 那么选 D.

11. C; 由 $abc=1$ 知 $a = \frac{1}{bc}$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} &= \frac{\frac{1}{bc}}{\frac{1}{bc} \cdot b + \frac{1}{bc} + 1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{\frac{1}{bc} \cdot c + c + 1} = \\ \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{bc+b+1} &= 1. \end{aligned}$$

12. B; $2bx^2 - 8bxy + 8by^2 - 8b = 2b[(x-2y+2)^2 - 4x + 8y - 4 - 4] = 2b[0 - 4(x-2y+2)] = 0$.

13. D; $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = \frac{1}{2}[(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2] = 3$.

14. A; $2001x(x^2 - 2x - 1) - 2001(x^2 - 2x - 1) - 2001 - 7 = -2008$.

二、条件充分性判断题

1. A; $f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, 故 $f(-1) = f(-2) = 0$, 即有 $g(x) = x^4 + mx^2 - px + 2, g(-1) = g(-2) = 0$, 从而有 $\begin{cases} (-1)^4 + m \cdot (-1)^2 - p \cdot (-1) + 2 = 0, \\ (-2)^4 + m \cdot (-2)^2 - p \cdot (-2) + 2 = 0, \end{cases}$ 解得 $m = -6, p = 3$, 故只有条件(1)充分.

2. B; 设 $x^3 - 3px + 2q = (x^2 + 2ax + a^2)(x+b)$, 有 $x^3 - 3px + 2q = x^3 + (b+2a)x^2 + (2ab+a^2)x + a^2b$, 即 $\begin{cases} b+2a=0, \\ -3p=2ab+a^2, \\ 2q=a^2b, \end{cases}$ 消去 b , 有 $\begin{cases} p=a^2, \\ q=-a^3, \end{cases}$ 只有条件(2)充分.

3. A; $\frac{x^{3n} - x^{-3n}}{x^n - x^{-n}} = \frac{(x^n - x^{-n})(x^{2n} + 1 + x^{-2n})}{x^n - x^{-n}} = x^{2n} + 1 + x^{-2n}$. 条件(1), 有 $x^{-2n} = 3 + 2\sqrt{2}$, 故原式 $= 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} + 1 = 7$, 充分; 条件(2), 有 $x^{2n} = 2 - \sqrt{3}$, 故 $x^{-2n} = 2 + \sqrt{3}$, 原式 $= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 1 = 5$, 不充分.

4. B; 条件(1), 令 $\frac{x}{a+b} = \frac{y}{b+c} = \frac{z}{c+a} = t$, 则有 $x = (a+b)t, y = (b+c)t, z = (a+c)t$, 那么 $x+y+z = 2(a+b+c)t$, 不一定为 0, 不充分; 条件(2), 令 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a} = t$, 则有 $x = (a-b)t, y = (b-c)t, z = (c-a)t$, 有 $x+y+z = 0$, 充分.

5. C; 显然单独的两个条件都不充分, 考虑联合. 由条件(2)知, $y = \frac{z-1}{z}$ 代入到条件(1)中有 $x + \frac{z}{z-1} = 1$, 即 $x + \frac{z-1+1}{z-1} = x + 1 + \frac{1}{z-1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1-z$, 故

$z + \frac{1}{x} = 1$, 充分.

6. D; 左边 $\times (1-x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) = 1-x^{16}$, 同理

右边 $\times (1-x) = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{15}) = 1-x^{16} = \text{左边} \times (1-x)$,

故不论 x 的值为多少, $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) = 1+x+x^2+\cdots+x^{15}$ 总成立, 从而条件(1)和条件(2)都充分.

注: 记住公式 $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n$. 可将 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ 看成等比数列求和分析.

7. A; (1) $x + \frac{1}{x} = 3$, 则 $x^2 - 3x = -1$, 代入题干化简得 2, 正确.

(2) $x - \frac{1}{x} = 3$, 则 $x^2 - 3x = 1$, 代入题干化简得 $22x + 8 \neq 2$, 错误.

8. A; $a(a+9) + (1+2a)(1-2a) = -3(a^2-3a) + 1$

(1) $a + \frac{1}{a} = 3$, 则 $a^2 - 3a = -1$ 代入得 4; (2) $a - \frac{1}{a} = 3$, 则 $a^2 - 3a = 1$ 代入得 -2.

9. D; (1) 当 x, y 扩大为原来的 3 倍, $x \rightarrow 3x, y \rightarrow 3y$, $\frac{2 \times 3x}{3x+3y} = 2 \times \frac{3x}{3(x+y)} = \frac{2x}{x+y}$.

(2) x, y 都扩大了原来的 3 倍, 变为 $4x$ 和 $4y$, 同理, 分式数值不变.

10. D; 此题可利用公式 $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$, 化简后再进行求解.

原式 $= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10}\right) = \frac{11}{12}$, 即 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+10} =$

$\frac{11}{12}$, 解得: $x_1 = 2, x_2 = -11$.

综合提高题

一、问题求解题

1. 已知 x, y, z 都是正数, 且 $2^x = 3^y = 6^z$, 那么 $\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = (\quad)$.

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $\log_2 3$ (E) $\log_3 2$

2. 设多项式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的余式为 $2x^2 + x - 7$, 则以下说法中不正确的是().

(A) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的余式为 -4

(B) $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 3

(C) $f(x)$ 除以 $x-3$ 的余式为 14

(D) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式为 $7x-11$

(E) $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的余式为 $11x+19$

3. x^{12} 除以 $(x+1)^2$ 的余式是().

(A) $12x+11$ (B) $-12x+11$ (C) $-12x-11$



扫码看视频

- (D) $12x - 11$ (E) $11x - 12$
4. $x^{12} + 99$ 除以 $x^8 + x^4 + 1$ 的余式是().
 (A) $x^6 + 1$ (B) $x^3 + 2$ (C) $x^2 + 100$ (D) 100 (E) $x^2 - 3$
5. 多项式 $f(x) = x^{2000} + 3x^{90} - 5x^{18} + 7$ 除以 $x^3 - 1$ 的余式为().
 (A) $x - 5$ (B) $x + 5$ (C) $x^2 - 5$ (D) $x^2 + 5$ (E) $x^2 - 3$
6. 设 $x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$, a 是 x 的小数部分, b 是 $4 - x$ 的小数部分, 则 $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) =$ ().
 (A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1 (E) 6
7. 使得 $n^3 + 100$ 能被 $n + 10$ 整除的最大正整数 n 为().
 (A) 890 (B) 990 (C) 1000 (D) 1890 (E) 900
8. 已知 $a + b + c = 0$ 且 $\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} = 0$, 则 $\frac{bc+b-c}{b^2c^2} + \frac{ca+c-a}{a^2c^2} + \frac{ab+a-b}{a^2b^2}$ 的值为().
 (A) 90 (B) 0 (C) 10 (D) 1 (E) 100
9. 求 $(x^2 - xy) \div \frac{x^2 - 2xy + y^2}{y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2} =$ (), 其中 $x = -2, y = \frac{1}{2}$.
 (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{2}$
10. 已知 $x - y = 5$, 且 $z - y = 10$, 则整式 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ 的值为().
 (A) 105 (B) 75 (C) 55 (D) 35 (E) 25
11. 已知多项式 $2x^3 - x^2 - 13x + k$ 有一个因式 $2x + 1$, 则其必含有下列()个因式.
 (A) $x - 1$ (B) $x - 2$ (C) $x + 1$ (D) $x - 3$ (E) $x + 3$
12. 积 $\left(1 + \frac{1}{1 \times 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \times 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \times 5}\right) \left(1 + \frac{1}{4 \times 6}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{98 \times 100}\right) \left(1 + \frac{1}{99 \times 101}\right)$ 的整数部分为().
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
13. 已知 a, b, c, d 为互不相等的非零实数, 且 $ac + bd = 0$, 则 $ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)$ 的值等于().
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 0
14. 已知 $a - b = 3, a - c = \sqrt[3]{26}$, 则 $(c - b)[(a - b)^2 + (a - c)(a - b) + (a - c)^2]$ 的值为().
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 3.5 (E) 1
15. 解方程 $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15 = 0$, 有()个整数解.
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
16. 方程 $4x^2 - 4xy - 3y^2 = 5$ 的整数解有()种.
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
17. 若 $\frac{\lg x + \lg y}{\lg x} + \frac{\lg x + \lg y}{\lg y} + \frac{[\lg(x - y)]^2}{\lg x \lg y} = 0$, 则 $\log_5(x + y)$ 的值为().

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 0.5

18. 已知 $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3$, 则 $\frac{\left(a\sqrt{a} + \frac{1}{a\sqrt{a}} + 2\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 3\right)}{\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}}$ 的值为().

- (A) $200\sqrt{11}$ (B) $100\sqrt{7}$ (C) $100\sqrt{5}$ (D) $200\sqrt{3}$ (E) $200\sqrt{5}$

19. 已知 $x \in [-3, 2]$, 则 $f(x) = \frac{1}{4^x} - \frac{1}{2^x} + 1$ 的最大值与最小值之差为().

- (A) $56\frac{1}{2}$ (B) $56\frac{1}{4}$ (C) $55\frac{1}{4}$ (D) $55\frac{3}{4}$ (E) $53\frac{1}{2}$

二、条件充分性判断题

1. 已知 a, b, c 均是非零实数, 有 $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -3$.

- (1) $a + b + c = 0$. (2) $a + b + c = 1$.

2. 已知 a, b, c 均是不等于零的实数, 有 $\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0$.

- (1) $a + b + c = 0$. (2) $a^2 = b^2 = c^2$.

3. $\frac{x^4 - 33x^2 - 40x + 244}{x^2 - 8x + 15} = 5$ 成立.

- (1) $x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$. (2) $x = \sqrt{19 + 8\sqrt{3}}$.

4. $2m^3 - 5m^2 - 3 + \frac{3}{m^2 + 1}$ 的值是 -1 .

- (1) 实数 m 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根.
(2) 实数 m 是方程 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 的根.

5. $\frac{(a^2 - 4a + 4)(a^3 - 2)}{a^3 - 6a^2 + 12a - 8} - \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a - 2}$ 的值是正整数.

- (1) $a = 1$. (2) $a = -1$.

6. $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ 能被 $x + y + z$ 整除 ($xyz \neq 0, x + y + z \neq 0$).

- (1) $y + z = 0$. (2) $m = -3$.

7. $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = k$

- (1) $k = 4$. (2) $k = 3$.

8. $|4x^2 - 5x + 1| - 4|x^2 + 2x + 2| + 3x + 7 = -20100$.

- (1) $x = 2010$. (2) $x = 2012$.

9. 关于 x 的方程 $a^2x^2 - (3a^2 - 8a)x + 2a^2 - 13a = 15$ 至少有一个整数根.

- (1) $a = 3$. (2) $a = 5$.

10. 多项式 $2x^3 + ax^2 + 1$ 可分解因式为三个一次因式的乘积.

- (1) $a = -5$. (2) $a = -3$.

11. 已知: a, b, c 为互不相等的非零数, 则 a, b, c 成等差数列.

- (1) $(a - c)^2 = 4(b - a)(c - b)$. (2) $(a - c)^2 = -4(b + a)(c + b)$.

综合提高题详解

一、问题求解题

1. C; 由于 $2^x = 3^y = 6^z$, 取自然对数, 有 $x \ln 2 = y \ln 3 = z \ln 6$, 故 $\frac{z}{x} = \frac{\ln 2}{\ln 6}, \frac{z}{y} = \frac{\ln 3}{\ln 6}$, 从而 $\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = 1$.

2. E; 设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)q(x) + 2x^2 + x - 7$,

(A) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的余式是 $x-1$ 除 $2x^2 + x - 7$ 的余式, 为 -4 , 正确;

(B) $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式是 $x-2$ 除 $2x^2 + x - 7$ 的余式, 为 3 , 正确;

(C) $f(x)$ 除以 $x-3$ 的余式是 $x-3$ 除 $2x^2 + x - 7$ 的余式, 为 14 , 正确;

(D) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式为 $2x^2 + x - 7$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式, 所以余式为 $7x - 11$, 正确;

(E) $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的余式为 $2x^2 + x - 7$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的余式, 所以余式为 $11x - 19$, 错误, 因此选 E.

3. C; 设 $x^{12} = (x+1)^2 q(x) + a(x+1) + b$, 以 $x = -1$ 代入, 得 $1 = b$, 故有 $x^{12} - 1 = (x+1)^2 q(x) + a(x+1)$, 再除以 $x+1$, 得

$$x^{11} - x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = (x+1)q(x) + a,$$

以 $x = -1$ 代入, 得 $a = -12$, 故所求余式为 $-12(x+1) + 1 = -12x - 11$.

4. D; 令 $x^8 + x^4 + 1 = 0$, 则 $x^8 = -x^4 - 1$, 那么有

$$x^{12} + 99 = x^8 \cdot x^4 + 99 = (-x^4 - 1)x^4 + 99 = -x^8 - x^4 + 99 = (x^4 + 1) - x^4 + 99 = 100.$$

5. D; 考虑 $f(x) = q(x)(x^3 - 1) + r(x)$, 令 $x^3 - 1 = 0$, 即 $x^3 = 1$, 可由 $f(x)$ 求得余式 $r(x)$;

又 $f(x) = x^2(x^3)^{666} + 3(x^3)^{30} - 5(x^3)^6 + 7$, 所以 $f(x)$ 除以 $x^3 - 1$ 的余式为 $1^{666}x^2 + 3 \times 1^{30} - 5 \times 1^6 + 7 = x^2 + 5$.

6. D; 由 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 得

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = (a+b)^3.$$

a, b 分别为 x 和 $4-x$ 的小数部分, $a < 1, b < 1, x + (4-x) = 4$, 则 $a+b=1$. 代入计算得到.

$$7. A; n^3 + 100 = n^3 + 1000 - 900 = (n+10)(n^2 - 10n + 100) - 900,$$

于是若 $n+10 \mid n^3 + 100$, 则 $n+10 \mid 900$.

由于 $n+10 \leq 900$, 因此为使 n 最大, 取 $n+10=900$, 则 $n=890$.

8. B; 由 $a+b+c=0$, 得

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 = 0. \quad ①$$

由 $\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} = 0$, 得 $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) = 0$, 即

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0. \quad ②$$

① + ②, 得 $a^2(bc + b - c) + b^2(ac + c - a) + c^2(ab + a - b) = 0$.

由题可知 a, b, c 均不得 0, 所以两边同除以 $a^2 b^2 c^2$, 得

$$\frac{bc+b-c}{b^2 c^2} + \frac{ca+c-a}{a^2 c^2} + \frac{ab+a-b}{a^2 b^2} = 0.$$

9. B; 原式 $= x(x-y) \cdot \frac{y}{(x-y)^2} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{x^2} = \frac{y(x+y)}{x}$; 若 $x = -2, y = \frac{1}{2}$, 则

$$\text{有: 原式} = \frac{\frac{1}{2}(-2 + \frac{1}{2})}{-2} = \frac{3}{8}.$$

10. B; $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$,

$$\begin{cases} x-y=5, \\ z-y=10 \end{cases} \Rightarrow z-x=5, \text{代入计算, 可知选 B.}$$

11. D; 使用待定系数法, 设 $2x^3 - x^2 - 13x + k = (2x+1)(x^2 + ax + k)$,
则 $2x^3 - x^2 - 13x + k = 2x^3 + (2a+1)x^2 + (a+2k)x + k$.

$$\text{则} \begin{cases} 2a+1=-1, \\ a+2k=-13, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ k=-6. \end{cases}$$

则 $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = (2x+1)(x^2 - x - 6) = (2x+1)(x-3)(x+2)$, 故选 D.

12. A; 这道题要求 99 个括号里的数值的乘积, 当然不能用常规方法去实乘. 观察其特点: 每个分母是相邻奇数或偶数的积, 记为 $n(n+2)$; 每个括号的分子相加又都是 $n(n+2)+1 = (n+1)^2$, 于是, 设所求式子之积为 S , 则有

$$\begin{aligned} S &= \frac{2^2}{1 \times 3} \cdot \frac{3^2}{2 \times 4} \cdot \frac{4^2}{3 \times 5} \cdot \frac{5^2}{4 \times 6} \cdots \frac{99^2}{98 \times 100} \cdot \frac{100^2}{99 \times 101} \\ &= \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdots 99^2 \cdot 100^2}{1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdots 99^2 \times 100 \times 101} = \frac{200}{101} (1 < S < 2), \text{应选 A.} \end{aligned}$$

13. E; 原式 $= (abc^2 + a^2cd) + (abd^2 + b^2cd) = ac(bc + ad) + bd(ad + bc)$
 $= (ad + bc)(ac + bd) = (ad + bc) \times 0 = 0.$

【评注】利用因式分解, 先化简代数式, 上述的求值题变得十分容易了. 当然, 本题也可以采用特值法求解.

14. E; 所求的代数式中含有 $c-b$, 可以通过已知的 $a-b=3$ 与 $a-c=\sqrt[3]{26}$ 来推得 $c-b=3-\sqrt[3]{26}$.

$$\text{所以原式} = (3 - \sqrt[3]{26})[3^2 + \sqrt[3]{26} \times 3 + (\sqrt[3]{26})^2] = 3^3 - (\sqrt[3]{26})^3 = 27 - 26 = 1.$$

15. C; 将原方程左边分解因式, 可得 $(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x - 5) = 0$.

$(x+1)(x+3)(x-1)(x+5) = 0$, 由此得 $x+1=0$ 或 $x+3=0$, 或 $x-1=0$, 或 $x+5=0$
(原方程的解是 $-1, -3, 1, -5$).

16. C; 原方程可化为 $(2x-3y)(2x+y) = 5$.

因为 x, y 是整数, 故 $2x-3y$ 和 $2x+y$ 必是整数. 又因为 $5 = 5 \times 1 = (-5) \times (-1)$, 因此原方程可化为四个方程组:

$$\begin{cases} 2x-3y=1, \\ 2x+y=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2x-3y=5, \\ 2x+y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2x-3y=-1, \\ 2x+y=-5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2x-3y=-5, \\ 2x+y=-1. \end{cases}$$

解这四个方程组, 便可得原方程的四组解为

$$\begin{cases} x_1=2, & \begin{cases} x_2=1, \\ y_1=1; \end{cases} & \begin{cases} x_3=-2, \\ y_2=-1; \end{cases} & \begin{cases} x_4=-1, \\ y_3=-1; \end{cases} & \begin{cases} y_4=1. \end{cases} \end{cases}$$

所以选 C.

17. E; 去分母得 $(\lg x + \lg y)^2 + [\lg(x-y)]^2 = 0$.

则 $\begin{cases} \lg x + \lg y = 0, \\ \lg(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1, \\ x-y = 1. \end{cases}$

因为 $x, -y$ 是二次方程 $t^2 - t - 1 = 0$ 的两实根, 且 $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1, x > y$,

解得 $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 又 $x > 0$, 所以 $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此 $\log_5(x+y) = 0.5$.

18. E; 因为 $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = 9 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 7$,

所以 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 49 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 47$,

所以 $a\sqrt{a} + \frac{1}{a\sqrt{a}} = a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})[(a^{\frac{1}{2}})^2 - a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} + (a^{\frac{1}{2}})^2]$

$= \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left(a - 1 + \frac{1}{a}\right) = 3 \times 6 = 18$,

而 $\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{a} + 2 + \frac{1}{\sqrt{a}}} = \sqrt{5}$,

因此原式 $= \frac{(18+2) \times (47+3)}{\sqrt{5}} = \frac{20 \times 50}{\sqrt{5}} = 200\sqrt{5}$.

19. B; $f(x) = \frac{1}{4^x} - \frac{1}{2^x} + 1 = 4^{-x} - 2^{-x} + 1 = 2^{-2x} - 2^{-x} + 1 = \left(2^{-x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

因为 $x \in [-3, 2]$, 所以 $\frac{1}{4} \leq 2^{-x} \leq 8$.

则当 $2^{-x} = \frac{1}{2}$, 即 $x = 1$ 时, $f(x)$ 有最小值 $\frac{3}{4}$; 当 $2^{-x} = 8$, 即 $x = -3$ 时, $f(x)$ 有最大

值 57, 故最大值与最小值之差为 $56\frac{1}{4}$.

二、条件充分性判断题

1. A; $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c}$. 条件(1), 有 $a+c = -b, b+c = -a, a+b = -c$, 从而有 $\frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} = -3$, 充分; 条件(2), 有 $a+c = 1-b, b+c = 1-a, a+b = 1-c$, 从而 $\frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} = -3 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \neq -3$, 不充分.

2. A; 由条件(1) 知, $a = -(b+c)$, 代入 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}$ 中, 得 $\frac{1}{b^2+c^2-[-(b+c)]^2} =$

$\frac{1}{-2bc}$, 同理有 $\frac{1}{c^2+a^2-b^2} = -\frac{1}{2ac}$, $\frac{1}{a^2+b^2-c^2} = -\frac{1}{2ab}$, 故

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = -\frac{1}{2bc} + -\frac{1}{2ac} + -\frac{1}{2ab} = 0,$$

充分; 根据条件(2)可以得到 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \neq 0$, 不充分.

3. D; 由(1)和(2) 得到 $x^2-19=\pm 8\sqrt{3}$, 从而

$$x^4-33x^2-40x+244-5(x^2-8x+15)=x^4-38x^2+169=(x^2-19)^2-192=0.$$

4. A; (1) 因为实数 m 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根, 所以 $m^2-3m+1=0 \Rightarrow m^2+1=3m$,

$$\text{则 } 2m^3-5m^2-3+\frac{3}{m^2+1}=2m(m^2-3m+1)+m^2-2m-3+\frac{3}{3m}=m^2-3m+1+$$

$$m+\frac{3}{3m}-4=m+\frac{1}{m}-4=\frac{m^2+1}{m}-4=\frac{3m}{m}-4=-1. (2) \text{ 同理(1), 但是得不出结论, 选 A.}$$

5. D; 原式 $=\frac{a^3-2}{a-2}-\frac{a^3+1}{a-2}=-\frac{3}{a-2}$, 所以 $a-2=-1$ 或 -3 , 得 $a=\pm 1$.

6. D; 当 $x^3+y^3+z^3+mxyz$ 能被 $x+y+z$ 整除时, 它含有 $x+y+z$ 因式. 令 $x+y+z=0$, 得 $x=-(y+z)$, 代入原式其值必为 0. 即 $[-(y+z)]^3+y^3+z^3-myz(y+z)=0$, 把左边因式分解, 得 $-yz(y+z)(m+3)=0$, 因为 $yz \neq 0$, 所以当 $y+z=0$ 或 $m+3=0$ 时等式成立. 故当 x, y (或 y, z 或 x, z) 互为相反数时, m 可取任何值, 而当 $m=-3$ 时, x, y, z 不论取什么值, 原式都能被 $x+y+z$ 整除.

7. A; 设 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=x$, $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=y$. 那么 $x^3+y^3=40$, $xy=\sqrt[3]{400-196 \times 2}=2$.

因为 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, 所以 $40=(x+y)^3-6(x+y)$. 设 $x+y=u$, 得 $u^3-6u-40=0$.

$(u-4)(u^2+4u+10)=0$. 因为 $u^2+4u+10=0$ 没有实数根, 所以 $u-4=0$, $u=4$. 所以 $x+y=4$, 即 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$, 选 A.

8. A; 由(1), 当 $x=2010$ 时, 原式 $=4x^2-5x+1-4(x^2+2x+2)+3x+7=-10x=-20100$, 充分. 由(2), 同理计算, 不充分.

9. B; 将(1)(2) 条件分别代入计算. 由(1) $3x^2-x-12=0$, 解答出 x 不存在整数根, 所以不充分; 由(2) $5x^2-7x-6=0$, 解答出 $x=2$ 或 $x=-\frac{3}{5}$.

10. D; 条件(1), $a=-5$ 时, 有 $2x^3+ax^2+1=2x^3-5x^2+1=2x^3-x^2-4x^2+1=(2x-1)(x^2-2x-1)=(2x-1)(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$, 显然充分; 条件(2), $a=-3$ 时, $2x^3+ax^2+1=2x^3-3x^2+1=(2x+1)(x-1)^2$, 为三个一次因式的乘积, 充分.

11. A; 由(1) 得到: $(a-c)^2-4(b-a)(c-b)=0$,

$$a^2-2ac+c^2-4bc+4ac-4ab+4b^2=0,$$

$$\text{则 } (a+c)^2-4b(a+c)+4b^2=0,$$

$$\text{即 } (a+c-2b)^2=0, \text{ 得 } a+c-2b=0, \text{ 故充分; 由(2) 得 } (a-c)^2+4(b+a)(c+b)=0,$$

$$a^2-2ac+c^2+4bc+4ac+4ab+4b^2=0, \text{ 则 } (a+c)^2+4b(a+c)+4b^2=0,$$

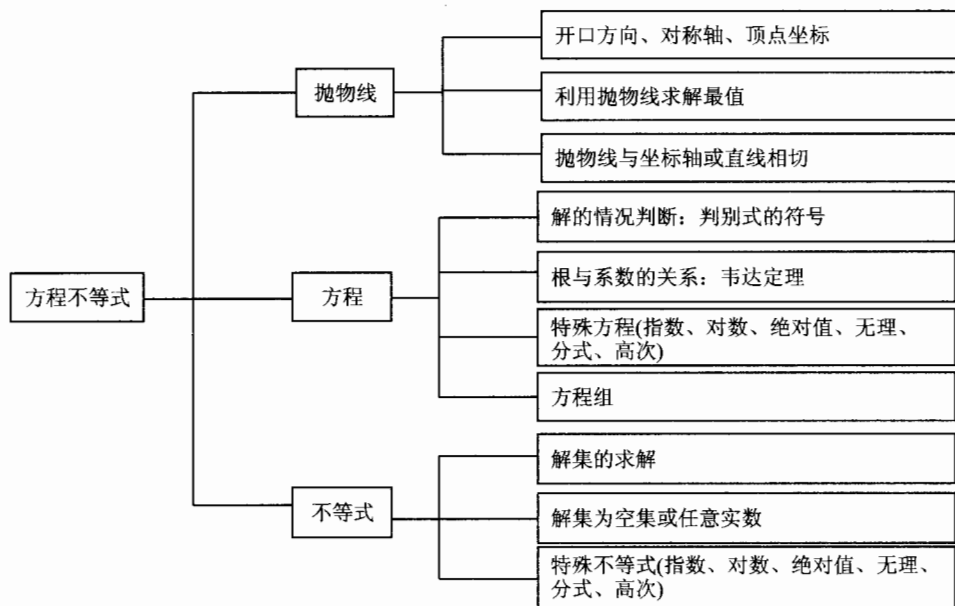
$$\text{即 } (a+c+2b)^2=0, \text{ 得 } a+c+2b=0, \text{ 不充分.}$$

第四章 方程和不等式

【大纲考点】1. 一元二次函数及其图像;2. 代数方程(1) 一元一次方程,(2) 一元二次方程,(3) 二元一次方程组;3. 不等式(1)不等式的性质,(2) 均值不等式,(3)不等式求解:一元一次不等式(组),一元二次不等式,简单绝对值不等式,简单分式不等式.

【命题剖析】方程:从历年考试中可以看出方程部分的重点是一元二次方程.在此类方程中主要从该方程的解法、根的判别、韦达定理、根的分布以及一元二次方程的应用等角度出题考查.不等式:对于不等式,主要是不等式的解法为重点,包括一元二次不等式,以及高次不等式、分式不等式、含绝对值的不等式.根据历年的考试规律发现,由于方程和不等式是建立数学表达式关系的基本问题,尤其在应用题中,往往要借助方程或不等式来进行求解.未来的考题方向主要围绕:一个基本(根与解集),两个定理(韦达定理与平均值定理),三个应用(最值、不定方程、线性规划).

【知识体系】



【备考建议】对于教师,建议课时控制在8个课时;对于考生,建议在学习时主要围绕以下几个方面:1. 考查计算型的题目,主要围绕方程的根与不等式的解集展开;2. 利用不等式的性质求解最值,尤其是应用题里面的最值问题;3. 考查较高层次的应用,比如不定方程与不定不等式(线性规划问题). 4. 考查二次函数的图像特征,尤其是在方程不等式的应用以及在求最值中的应用;5. 考查指数和对数的图像基本性质以及基本运算公式.

第一节 考试要点剖析

一、基本概念和定义

1. 方程、方程的解

含有未知数的等式称为方程,能使方程左右两端相等的未知数的值为方程的解.例如:对方程 $f(x)=g(x)$ 来说,若 a 值存在,且使得 $f(a)=g(a)$ 成立,则 $x=a$ 是方程 $f(x)=g(x)$ 的解.又如方程为 $f(x)=0$ 形式,其中 $f(x)$ 为代数多项式,则若存在 a ,使 $f(a)=0$ 成立,可称 a 为方程 $f(x)=0$ 的根.

2. 方程的元和次

“元”是指方程中所含未知数的个数,“次”是指方程中未知数最高的指数,比如:

$ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 这个关于 x 的方程称为一元二次方程.

3. 一元一次方程

含有一个未知数,且未知数的最高次数是 1 的方程,称为一元一次方程,其一般形式为:

$ax=b(a \neq 0)$, 方程的解为 $x=\frac{b}{a}$.

4. 一元二次方程

只含一个未知数,且未知数的最高次数是二次的方程.其一般形式为: $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$.

令 $\Delta=b^2-4ac$,此方程的解将依 Δ 值的不同分为如下三种情况:

(1) 当 $\Delta > 0$ 时,方程有两个不等实根,根的表达式为: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

(2) 当 $\Delta = 0$ 时,方程有两个相等实根 $x_1, x_2 = -\frac{b}{2a}$;

(3) 当 $\Delta < 0$ 时,方程无实根.

由于 Δ 在判断一元二次方程的解的三种情况时的重要作用,称 $\Delta=b^2-4ac$ 为一元二次方程的判别式.

5. 不等式的定义

用不等号连接的两个(或两个以上)解析式称为不等式,使不等式成立的未知数的取值称为不等式的解(不等号包括 $>$ 、 $<$ 、 \geq 、 \leq 、 \neq 五种).

6. 一元一次不等式定义

含有一个未知数且未知数的最高次数为一次的不等式.

一般形式为: $ax+b > 0(a \neq 0)$, 其解集可依据不等式性质直接求出.

$$ax > b(a \neq 0) \begin{cases} a > 0 \Rightarrow x > \frac{b}{a}, \\ a < 0 \Rightarrow x < \frac{b}{a}. \end{cases}$$

7. 一元二次不等式及其解法

(1) 设方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 有两个不等实根 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x < x_1$ 或 $x > x_2$, 则 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $x_1 < x < x_2$.

注意:若不等式二次项系数 $a<0$, 可化为正值再求解集.

若不等式带等号(即 \leq 或 \geq), 则只需在解集中增加两个根即可.

(2) 若方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等实根, 即 $x_1=x_2$, 则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x \neq x_1$ 的任意实数; 而 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集(其中 $a>0$).

(3) 若方程无实根, 即 $ax^2+bx+c=0$ 的解集为空集, 则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为全体实数 \mathbf{R} , 而 $ax^2+bx+c<0$ 的解集仍为空集(其中 $a>0$).

提示:一元二次不等式的解, 也可根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像求解.

二、重要结论

1. 归纳抛物线、方程、不等式的关系(Δ)

二次函数的图像: $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

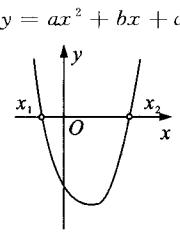
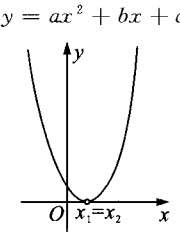
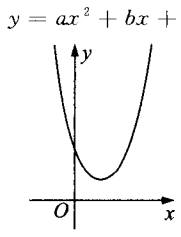
(1) 开口方向:由 a 决定, 当 $a > (<) 0$ 时, 开口向上(下);

(2) 对称轴:以 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴;

(3) 顶点坐标: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$;

(4) y 轴截距: $y=c$;

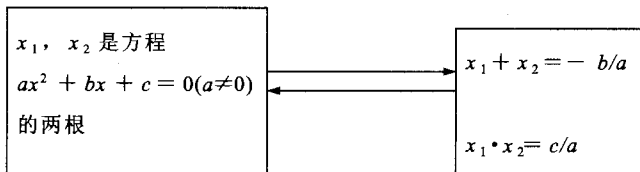
(5) 最值:当 $a > (<) 0$ 时, 有最小(大)值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$, 无最大(小)值.

类别	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图像			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根	有两相异实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x \mid x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	\mathbf{R}
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	\emptyset	\emptyset

【注意】表中只列出了 $a > 0$ 的情况.

2. 根与系数的关系(韦达定理)(Δ)

x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根, 则



【注意】韦达定理的扩展及其应用.

利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值.

$$(1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c} \text{ (与 } a \text{ 无关).}$$

$$(2) \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

$$(3) |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

$$(4) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

$$(5) x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

$$(6) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2].$$

3. 不等式的基本性质(注意等价关系)

(1) 传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;

(2) 同向相加性: $\left. \begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$;

(3) 同向皆正相乘性: $\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$;

(4) 皆正倒数性: $a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$;

(5) 皆正乘(开)方性: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 \quad (n \in \mathbf{Z}^+).$

4. 二元一次方程组

二元一次方程组的形式是 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$ 有三种解的情况:

(1) 如果 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, 则方程组有唯一解 (x, y) ;

(2) 如果 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, 则方程组有无穷多解;

(3) 如果 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, 则方程组无解.

【注意】可以将二元一次方程组的情况看作两条直线的位置关系. 上述三种情况分别对

应两条直线相交、重合、平行.

5. 含有绝对值的解法

解含有绝对值的不等式的关键是化去式中的绝对值符号,常用的方法如下.

(1) 平方法: $(|f(x)|)^2 = (f(x))^2$.

(2) 分段讨论法: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$

(3) 转化法: $|f(x)| < a (a > 0) \Leftrightarrow -a < f(x) < a; |f(x)| > a (a > 0) \Leftrightarrow f(x) < -a$ 或 $f(x) > a$.

第二节 基础过关题型

【题型 1】一次方程(组)

【思路点拨】对于方程组,最常考的是二元一次方程组和三元一次方程组,尤其在解应用题时,应用更广泛.

【例 1】若关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x + y = 5k, \\ x - y = 9k \end{cases}$ 的解也是二元一次方程 $2x + 3y = 6$ 的解,则 k 的值为().

- (A) $-\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{4}{3}$ (E) 1

【解析】由方程组得 $2x = 14k, y = -2k$. 代入 $2x + 3y = 6$, 得 $14k - 6k = 6$, 解得 $k = \frac{3}{4}$. 故选 B.

【例 2】解方程组 $\begin{cases} 2^{x+3} + 9^{y+1} = 35, \\ 8^{\frac{x}{3}} + 3^{2y+1} = 5, \end{cases}$ 求 xy 的值是().

- (A) $-\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $-\frac{4}{3}$ (E) -1

【解析】由题 $\Rightarrow \begin{cases} 8 \times 2^x + 9 \times 9^y = 35, \\ 2^x + 3 \times 9^y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 4, \\ 9^y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 故 $xy = -1$, 选 E.

【评注】虽然本题涉及指数,但将指数看成一个整体,可以转化为方程组求解.

【题型 2】抛物线

【思路点拨】主要掌握两方面的技能:一方面根据抛物线的图像来分析系数的符号;另一方面告知系数的符号,能够画出抛物线,并能判断所经过的象限.

【例 3】已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如下页图所示,则 a, b, c 满足().

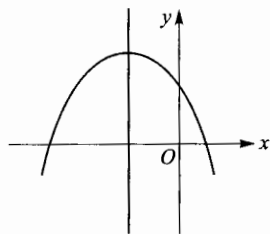
- (A) $a < 0, b < 0, c > 0$ (B) $a < 0, b < 0, c < 0$
(C) $a < 0, b > 0, c > 0$ (D) $a > 0, b < 0, c > 0$
(E) $a > 0, b > 0, c > 0$

【解析】首先根据开口向下,可以得到 $a < 0$,再根据对称轴在 y 轴左侧,可以得到 $b < 0$,

再根据 y 轴的截距为正,可以得到 $c > 0$,从而选 A.

【例 4】已知函数 $y = x^2 - 4ax$, 当 $1 \leq x \leq 3$ 时,是单调递增的函数,则 a 的取值范围是().

- (A) $(-\infty, \frac{1}{2}]$ (B) $(-\infty, 1]$ (C) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
(D) $(\frac{3}{2}, +\infty)$ (E) $(-\infty, \frac{3}{2})$



【解析】抛物线的单调性主要根据开口方向与对称轴来判断,本题抛物线开口向上,因此对称轴应该在所给区间的左侧时,图像在 $1 \leq x \leq 3$ 是单调增的,所以 $2a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$, 选 A.

【例 5】若 $A(-\frac{25}{4}, y_1)$, $B(-\frac{5}{4}, y_2)$, $C(\frac{1}{4}, y_3)$ 为抛物线 $y = x^2 + 4x - 5$ 上的三点,则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是().

- (A) $y_1 < y_2 < y_3$ (B) $y_2 < y_3 < y_1$ (C) $y_3 < y_1 < y_2$
(D) $y_1 < y_3 < y_2$ (E) $y_3 < y_2 < y_1$

【解析】由已知 $a = 1 > 0$,因此抛物线开口向上,因为对称轴为 $x = -2$,所以 $x > -2$ 时, y 随 x 的增大而增大. 由 $x_2 = -\frac{5}{4} > -2$, $x_3 = \frac{1}{4} > -2$, 且 $x_2 < x_3$, 所以 $y_2 < y_3$.

又因为 $|(-\frac{25}{4}) - (-2)| > |\frac{1}{4} - (-2)|$, 所以点 $A(-\frac{25}{4}, y_1)$ 到对称轴 $x = -2$ 的距离大于 $C(\frac{1}{4}, y_3)$ 到对称轴 $x = -2$ 的距离, 所以 $y_3 < y_1$, 即 $y_2 < y_3 < y_1$, 故选 B.

【错解】由 $a = 1 > 0$, 抛物线开口向上, 显然 y 随 x 的增大而增大, 又因为 $-\frac{25}{4} < -\frac{5}{4} < \frac{1}{4}$, 所以 $y_1 < y_2 < y_3$, 故选 A.

【评注】在二次函数 $y = x^2 + 4x - 5$ 中, 当自变量 x 增大时, y 随之变化的值是不确定的, 在对称轴两侧, 函数值变化是不同的. 在对称轴的右侧部分的抛物线是上升的, 也就是说, 当 $x > -2$ 时, y 随 x 的增大而增大, 错解忽视了“ y 随 x 的增大而增大”的前提条件.

【例 6】设 $-1 \leq x \leq 1$, 函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$, 当 $0 < a < 2$ 时, 则().

- (A) $f(x)$ 最大值是 $4+a$, 最小值 $3-\frac{a^2}{4}$ (B) $f(x)$ 最大值是 $4+a$, 最小值 $4-a$
(C) $f(x)$ 最大值是 $4-a$, 最小值 $4+a$ (D) $f(x)$ 最大值是 $4+a$, 最小值 $\frac{5}{4}a^2 + 3$
(E) $f(x)$ 最大值是 $\frac{5}{4}a^2 + 3$, 最小值 $4+a$

【解析】 $f(x) = x^2 + ax + 3 = (x + \frac{a}{2})^2 + 3 - \frac{a^2}{4}$, $0 < a < 2$, $-1 < -\frac{a}{2} < 0$. 可知 $f(x)$ 最大值是 $f(1) = 4+a$, $f(x)$ 最小值是 $f(-\frac{a}{2}) = 3 - \frac{a^2}{4}$, 故选 A.

【题型 3】韦达定理

【思路点拨】利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值.

【例 7】解某个一元二次方程,甲看错了常数项,解得两根为 8 和 2,乙看错了一次项,解得两根为 -9 和 -1,则正确解为().

- (A) -8 和 -2 (B) 1 和 9 (C) -1 和 9 (D) 3 和 -3 (E) -1 和 -9

【解析】由于甲把常数项看错了,不影响两根之和: $x_1 + x_2 = 8 + 2 = 10$. 由于乙把一次项系数看错了,不影响两根之积: $x_1 x_2 = (-9)(-1) = 9$. 所以得到正确方程为 $x^2 - 10x + 9 = 0$, 选择 B.

【例 8】若方程 $3x^2 - 8x + a = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 , 若 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ 的算术平均值为 2, 则 a 的值为().

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$ (E) 2

【解析】由题 $\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2x_1 x_2} = \frac{\frac{8}{3}}{2 \cdot \frac{a}{3}} = \frac{4}{a} = 2$, 得 $a = 2$, 选 E.

【例 9】若方程 $x^2 + px + 37 = 0$ 恰好有两个正整数解 x_1 和 x_2 , 则 $\frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{p}$ 的值为().

- (A) -2 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) 2

【解析】由题得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = 37, \end{cases} x_1, x_2 \in \mathbf{N}$, 因为 37 是质数, 所以 $x_1 = 1, x_2 = 37$ 或 $x_1 = 37, x_2 = 1$. 所以 $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 37, \\ x_1 + x_2 = 38 = -p, \end{cases}$ 得 $p = -38$.

$$\frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{p} = \frac{x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2) + 1}{p} = \frac{37 + 38 + 1}{-38} = -2.$$

从而选 A.

【例 10】 x_1, x_2 是方程 $x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0$ 的两实根, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的最大值是().

- (A) 16 (B) 19 (C) $\frac{14}{3}$ (D) 18 (E) 2

【解析】 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (k-2)^2 - 2(k^2 + 3k + 5) = -k^2 - 10k - 6 = -(k+5)^2 + 19$, 根据 $\Delta \geq 0$, 求出 $(k-2)^2 - 4(k^2 + 3k + 5) \geq 0, -4 \leq k \leq -\frac{4}{3}$, $k = -4$ 时, $(x_1^2 + x_2^2)_{\max} = 18$. 从而选 D.

【评注】此题注意判别式限制 k 的取值范围, 如果没有求出 k 的范围, 容易选错误答案 B.

【题型 4】无理方程

【思路点拨】解无理方程, 一般通过方程两边同时乘方, 使之转化为有理方程, 从而求出方程的解. 注意: 解无理方程时, 由于方程两边乘方相同次数, 未知数的取值范围可能会扩大, 有产生增根的可能. 因此, 最后必须进行验根.

【例 11】无理方程 $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$ 的所有实根之积为().

- (A) 12 (B) 14 (C) 48 (D) 36 (E) 24

【解析】含一个根式的无理方程,可将根式留在等式的一边,把不含等号的其他项全部移到等号的另一边,再将方程两边同时平方.同样,这种思想方法也适用于含有两个根式的方程,只要将 $\sqrt{x-3}$ 移到等号的右边,然后两边平方,就可以化去一个根式,再按照只含一个根式的无理方程的解法继续运算.

将 $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$ 移项,得 $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$, 两边平方,得 $2x+1 = 4 + x - 3 + 4\sqrt{x-3}$, 化简得 $x = 4\sqrt{x-3}$, 两边平方,得 $x^2 = 16(x-3)$, 解方程,得 $x_1 = 12$, $x_2 = 4$.

经检验, $x_1 = 12$, $x_2 = 4$ 都是原方程的根,则 $x_1 x_2 = 48$, 选 C.

【注意】解无理方程时,经过乘方运算可能会扩大方程中的未知数的取值范围,有可能产生增根,所以解得的根必须代入原方程进行检验.

【题型 5】解分式方程

【思路点拨】1. 分式方程的解法

解分式方程的关键是:方程两边都乘以最简公分母,将分式方程转化为整式方程.

2. 分式方程的增根问题

(1) 增根的产生:分式方程本身隐含着分母不为 0 的条件,当把分式方程转化为整式方程后,方程中未知数允许取值的范围扩大了,如果转化后的整式方程的根恰好使原方程中分母的值为 0,就会出现不适合原方程的根——增根;

(2) 验根:因为解分式方程可能出现增根,所以解分式方程必须验根.

【例 12】分式方程 $\frac{2x^2-2}{x-1} + \frac{6x-6}{x^2-1} = 7$ 的实根个数是().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】当方程中含有未知数的两个分式除数字系数外互为倒数时,可以用换元法解这个分式方程. 设 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$, 则原方程可化为 $2y + \frac{6}{y} = 7$, 去分母,得 $2y^2 - 7y + 6 = 0$, 解得 $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = 2$.

当 $y = \frac{3}{2}$ 时, $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{3}{2}$, 即 $2x^2 - 3x + 1 = 0$, 有 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$;

当 $y = 2$ 时, $\frac{x^2-1}{x-1} = 2$, 即 $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x_3 = x_4 = 1$.

显然 $x = 1$ 是增根,应舍去,故 $x = \frac{1}{2}$, 选 B.

【评注】在解分式方程时,一定要注意增根问题,所以解出转化后方程的所有解时,最后一定要进行验证.

【例 13】已知关于 x 的方程 $\frac{1}{x^2-x} + \frac{k-5}{x^2+x} = \frac{k-1}{x^2-1}$ 无解,那么 $k = ()$.

- (A) 3 或 6 (B) 6 或 9 (C) 3 或 9 (D) 3、6 或 9 (E) 1 或 3

【解析】两边同乘以 $x(x+1)(x-1)$, 得 $(x+1)+(k-5)(x-1)=x(k-1)$, 解得 $x=\frac{6-k}{3}$. 原方程的增根可能是 0、1、-1, 当 $x=0$ 时, $\frac{6-k}{3}=0$, 则 $k=6$; 当 $x=1$ 时, $\frac{6-k}{3}=1$, 则 $k=3$; 当 $x=-1$ 时, $\frac{6-k}{3}=-1$, 则 $k=9$. 所以当 $k=3, 6, 9$ 时方程无解, 选 D.

【评注】解题的关键在于理解增根的意义. 无论是分式方程的根, 还是分式方程的增根, 均是去分母后所得到的整式方程的根. 而这个整式方程的根如果是分式方程的增根, 则代入原方程的分母后, 至少有一个为零.

【题型 6】一元一次(二次)不等式(组)

【思路点拨】解出每一个不等式, 根据交集的情况得到不等式组的解集.

【例 14】不等式组 $\begin{cases} x-1 \leq a^2, \\ x-4 \geq 2a \end{cases}$ 有解, 则实数 a 的取值范围是().

- (A) $-1 \leq a \leq 3$ (B) $a \leq -1$ 或 $a \geq 3$ (C) $a < -1$ 或 $a > 3$
(D) $-1 < a < 3$ (E) $a \leq -3$ 或 $a \geq 1$

【解析】 $\begin{cases} x-1 \leq a^2, \\ x-4 \geq 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq a^2+1, \\ x \geq 2a+4 \end{cases} \Rightarrow 2a+4 \leq a^2+1 \Rightarrow a^2-2a-3 \geq 0$, 所以 $a \leq -1$ 或 $a \geq 3$, 选 B.

【例 15】不等式组 $\begin{cases} x-2(x-3) > 4, \\ \frac{x}{3}-(x-2) > \frac{1}{6} \end{cases}$ 中, 包含()个非负整数解.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 无数

【解析】 $\begin{cases} x-2(x-3) > 4, \\ \frac{x}{3}-(x-2) > \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x > -2, \\ -\frac{2}{3}x > -\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x < \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow x < 2$, 所以包含两个非负整数解, 选 C.

【例 16】若使函数 $f(x)=\frac{\lg(2x^2+5x-12)}{\sqrt{x^2-3}}$ 有意义, 则 x 的取值范围包括()个正整数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 无数

【解析】 $\begin{cases} 2x^2+5x-12 > 0, \\ x^2-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ 或 } x > \frac{3}{2}, \\ x > \sqrt{3} \text{ 或 } x < -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x > \sqrt{3} \text{ 或 } x < -4$, 故选 E.

【题型 7】分式不等式

【思路点拨】遇到分式不等式, 当不确定分母的符号时, 不要轻易去掉分母, 而应该通过移项通分合并求解. 另外, 还应该注意分母要有意义.

【例 17】不等式 $\frac{2x-1}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$ 的解集中包含()个质数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 4 (E) 无数

【解析】原不等式可化为 $\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} > 0$, 整理得 $\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+1)} > 0$, 由于 x^2-x+2 恒大于零, 故可转化为 $(x-1)(x+1) > 0$, 从而得到 $x < -1$ 或 $x > 1$, 包含无数个质数, 故选 E.

【例 18】 $b < a$ 时, 不等式 $\frac{x-a}{x-b} > 1$ 的解是().

- (A) $\{x \mid x < b\}$ (B) $\{x \mid x > b\}$ (C) $\{x \mid x > a\}$
(D) $\{x \mid x < a\}$ (E) 以上均不正确

【解析】原不等式可变为 $\frac{x-a}{x-b} - 1 > 0$, 即 $\frac{b-a}{x-b} > 0$. 因为 $b < a$, 所以 $x-b < 0$, 即 $x < b$. 所以选 A.

【例 19】如果 x 满足 $\frac{x-1}{3x-2} < 0$, 那么化简 $\sqrt{4-12x+9x^2} - \sqrt{x^2-2x+1}$ 的结果是().

- (A) $2x-1$ (B) $1-2x$ (C) $3-4x$
(D) $4x-3$ (E) 以上均不正确

【解析】因为 $(x-1)(3x-2) < 0$, 所以 $\frac{2}{3} < x < 1$.

所以 $\sqrt{4-12x+9x^2} - \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(3x-2)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$
 $= 3x-2 - (1-x) = 4x-3$. 所以选 D.

【例 20】若 $a > 0, b > 0$, 则不等式 $-b < \frac{1}{x} < a$ 等价于().

- (A) $-\frac{1}{b} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{a}$ (B) $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{b}$
(C) $x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{b}$ (D) $x < -\frac{1}{b}$ 或 $x > \frac{1}{a}$
(E) 以上均不正确

【解析】由题可得

$$\begin{aligned} -b < \frac{1}{x} < a &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + b > 0, \\ \frac{1}{x} - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+bx}{x} > 0, \\ \frac{1-ax}{x} < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(bx+1) > 0, \\ x(1-ax) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ 或 } x < -\frac{1}{b}, \\ x > \frac{1}{a} \text{ 或 } x < 0 \end{cases} \Rightarrow x < -\frac{1}{b} \text{ 或 } x > \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

故选 D.

第三节 强化突破题型

【题型 1】关于公共根

【思路点拨】遇到公共根的问题,可以先假设公共根为 x_0 , 然后代入每个方程,解出公共根,再求解其他参数.

【例 1】方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 与 $x^2 - 2x - a = 0$ 有一公共实数解,则 a 满足().

- (A) $a = 2$ (B) $a = 2$ 或 $a = -3$ (C) $a = -2$
(D) $a = -2$ 或 $a = 3$ (E) $a = 3$

【解析】设方程的公共根为 x_0 , 则有 $\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 2 = 0, \\ x_0^2 - 2x_0 - a = 0, \end{cases}$ 两式相减 $\Rightarrow (a+2)(x_0+1) = 0$.

(1) $a+2=0, a=-2$, 两个方程都变为 $x^2 - 2x + 2 = 0$, 无实根.

(2) $x_0+1=0, x_0=-1$, 代入第一方程, $a=3$, 第一方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 的两个根为 -1 和 -2 ; 第二个方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的两个根为 -1 和 3 , 因此 $a=3$. 选 E.

【题型 2】方程根的分布(通过图像判定)

【思路点拨】方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的情况有以下几种:

- (1) 方程有两个正根 $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ \Delta \geq 0. \end{cases}$
(2) 方程有两个负根 $\begin{cases} x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ \Delta \geq 0, \end{cases}$ 可简化为 a, b, c 同号且 $\Delta \geq 0$.
(3) 方程有一正根一负根 $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 < 0, \\ \Delta > 0, \end{cases}$ 可简化为 a, c 异号即可.

若再要求 |正根| > |负根|, 有 $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 < 0, \\ \Delta > 0. \end{cases}$

【技巧】画出题干条件中的图像,然后根据区间讨论端点函数值与零的关系,列不等式求解.采用图像法分析,通常隐含了 Δ 与零的关系.

【例 2】关于 x 的方程 $(m-2)x^2 - (3m+6)x + 6m = 0$, 若有两个异号根,且负根绝对值大于正根,则 m 的取值范围为().

- (A) $-\frac{2}{5} \leq m < 0$ (B) $-\frac{2}{5} \leq m < 1$ (C) $-\frac{2}{5} \leq m < 10$
(D) $\frac{2}{5} \leq m < 10$ (E) $0 < m < 2$

【解析】根据题目得

$$\begin{cases} x_1 x_2 < 0, \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6m}{m-2} < 0, \\ \frac{3m+6}{m-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 2, \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2,$$

故选 E.

【评注】为何本题不用考虑判别式的符号？（因为 ac 异号时， $\Delta = b^2 - 4ac$ 必大于 0）

【例 3】已知方程 $2(k+1)x^2 + 4kx + 3k - 2 = 0$ 有两个负实根，则实数 k 的取值范围中包含（ ）个整数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】要原方程有两个负实根，必须：

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + k - 2 \leq 0, \\ -\frac{4k}{2(k+1)} < 0, \\ \frac{3k-2}{2(k+1)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq k \leq 1, \\ k > 0 \text{ 或 } k < -1, \\ k > \frac{2}{3} \text{ 或 } k < -1 \end{cases}$$

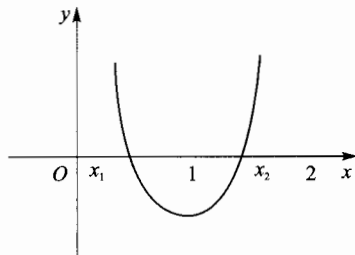
$\Leftrightarrow -2 \leq k < -1$ 或 $\frac{2}{3} < k \leq 1$ ，因此实数 k 的取值范围是 $\{k \mid -2 \leq k < -1 \text{ 或 } \frac{2}{3} < k \leq 1\}$.

1}. 选 C.

【例 4】要使 $3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2 = 0$ 的两根分别满足： $0 < x_1 < 1$ ， $1 < x_2 < 2$ ，则实数 m 的取值范围为（ ）.

- (A) $-2 \leq m < 0$ (B) $-2 \leq m < -1$ (C) $-2 < m < -1$
(D) $-1 < m < 2$ (E) $1 < m < 2$

【解析】设 $f(x) = 3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2 = 0$ ，因为 $f(x)$ 开口向上，图形大致如右图：



$$\text{所以 } \begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(2) > 0 \end{cases} \quad (\text{此时没有必要写 } \Delta > 0),$$

$$\begin{cases} m^2 - m - 2 > 0, \\ 3 + m - 5 + m^2 - m - 2 < 0, \\ 12 + 2(m-5) + m^2 - m - 2 > 0, \end{cases} \quad \text{得 } -2 < m < -1, \text{ 选 C.}$$

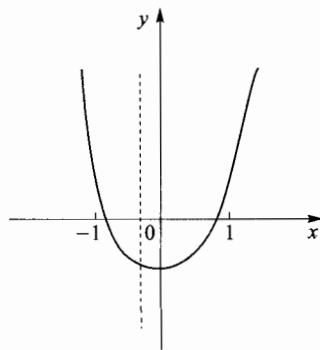
【例 5】 m 取（ ）时，方程 $x^2 + (m-2)x + m = 0$ 的两实根均在开区间 $(-1, 1)$ 内.

- (A) $\frac{1}{2} < m \leq 4 + 2\sqrt{3}$ (B) $-\frac{1}{2} < m \leq 4 - 2\sqrt{3}$
(C) $-\frac{1}{2} < m \leq 4 + 2\sqrt{3}$ (D) $\frac{1}{2} < m \leq 4 - 2\sqrt{3}$

(E) 以上结论均不正确

【解析】设 $f(x) = x^2 + (m-2)x + m$ ，根据题目得

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \\ -1 < -\frac{m-2}{2 \times 1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - 4m \geq 0, \\ 1 - m + 2 + m > 0, \\ 1 + m - 2 + m > 0, \\ -2 < -m + 2 < 2 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 4 \geq 0, \\ 3 > 0, \\ 2m > 1, \\ -4 < -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 - 2\sqrt{3} \text{ 或 } m \geq 4 + 2\sqrt{3}, \\ m > \frac{1}{2}, \\ 0 < m < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \leq 4 - 2\sqrt{3}, \text{ 选 D.}$$

【题型 3】绝对值方程

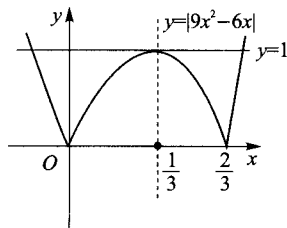
【思路点拨】遇到绝对值方程,如果分段讨论运算量会比较大.通过图像来分析交点的情况得到方程根的情况.

【例 6】关于方程 $|9x^2 - 6x| = 1$ 的根,说法正确的为().

- (A) 只有一个正实根 (B) 只有两个负实根
(C) 共有 4 个不相等的实根 (D) 有一个正根和一个负根
(E) 只有一个负实根

【解析】画出 $y = |9x^2 - 6x|$ 和 $y = 1$ 的图像,如右图所示.

根据交点情况可以看出,共有三个交点,其中一负两正,只有一个负实根,故选 E.



【题型 4】超越方程(指数,对数)的问题

【思路点拨】一般遇到超越方程的问题,都要先经过换元,转化成常见的一元二次方程进行讨论分析,在换元的过程中,一定要注意换元前后变量的取值范围的变化.尤其在解对数方程的时候,还要注意定义域.

【例 7】方程 $4^{-|x-1|} - 4 \times 2^{-|x-1|} = a$ 有实根,则 a 的取值范围是().

- (A) $a \leq -3$ 或 $a \geq 0$ (B) $a \leq -3$ 或 $a > 0$ (C) $-3 \leq a < 0$
(D) $-3 \leq a \leq 0$ (E) 以上答案都不对

【解析】令 $t = 2^{-|x-1|}$, 由于 $|x-1| \geq 0$, 所以 $0 < t \leq 1$. 化为 $t^2 - 4t = a$, 即 $(t-2)^2 = a+4$. $0 < t \leq 1 \Rightarrow -2 < t-2 \leq -1 \Rightarrow 1 \leq (t-2)^2 < 4$, 得到 $1 \leq a+4 < 4$, $-3 \leq a < 0$, 选 C.

【例 8】方程 $(\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x = 6$ 的所有实根之积为().

- (A) 2 (B) 4 (C) -2 (D) -4 (E) ± 4

【解析】令 $t = (\sqrt{2}+1)^x \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 6$, 即 $t^2 - 6t + 1 = 0$. 解得 $t = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $t_1 = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2 \Rightarrow x = 2$, $t_2 = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow x = -2$, 故选 D.

【评注】 $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ 与 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 互为倒数, 即 $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1$.

【例 9】方程 $\log_x 25 - 3\log_{25} x + \log_{\sqrt{x}} 5 - 1 = 0$ 的所有实根之积为().

- (A) $\frac{1}{25}$ (B) $\sqrt[3]{5}$ (C) $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ (D) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ (E) $5\sqrt[3]{5}$

【解析】 $\log_x 25 - 3\log_{25} x + \log_{\sqrt{x}} 5 - 1 = 0$, $2\log_x 25 - 3\log_{25} x - 1 = 0$, 令 $t = \log_{25} x$, $\frac{2}{t} - 3t - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 3t^2 - t = 0 \Rightarrow 3t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+1)(3t-2) = 0$, 得 $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{2}{3}$.

$\log_{25} x = -1 \Rightarrow x_1 = 25^{-1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{25}$, $\log_{25} x = \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = 25^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = 5\sqrt[3]{5}$, 故选 C.

【例 10】方程 $\log_{0.5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$ 的所有实根之积为().

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) $6\sqrt{2}$

【解析】由换底公式 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \frac{\lg x^2}{\lg 0.5x} - \frac{14\lg x^3}{\lg 16x} + \frac{40\lg \sqrt{x}}{\lg 4x} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{2\lg x}{-\lg 2 + \lg x} - \frac{42\lg x}{4\lg 2 + \lg x} + \frac{20\lg x}{2\lg 2 + \lg x} = 0, \text{ 令 } \lg x = y \Rightarrow$$

$$\frac{2y}{y - \lg 2} - \frac{42y}{y + 4\lg 2} + \frac{20y}{y + 2\lg 2} = 0, y \left(\frac{1}{y - \lg 2} - \frac{21}{y + 4\lg 2} + \frac{10}{y + 2\lg 2} \right) = 0,$$

$$y \cdot \left[\frac{2y^2 - 3y\lg 2 - 2\lg^2 2}{(y - \lg 2)(y + 4\lg 2)(y + 2\lg 2)} \right] = 0, y \cdot \frac{(y - 2\lg 2)(2y + \lg 2)}{(y - \lg 2)(y + 4\lg 2)(y + 2\lg 2)} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ 或 $2\lg 2$ 或 $-\frac{1}{2}\lg 2 \Rightarrow \lg x = 0$ 或 $2\lg 2$ 或 $-\frac{1}{2}\lg 2 \Rightarrow x = 1$ 或 4 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 选 B.

【题型 5】指数对数不等式

【思路点拨】遇到对数不等式, 要注意两个问题, 一个是对数的定义域, 另一个是对数的单调性.

【例 11】不等式 $\log_2 \left(x + \frac{1}{x} + 6 \right) \leq 3$ 的解集中包含()个整数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 6 (E) 无数个

【解析】由 $\log_2 \left(x + \frac{1}{x} + 6 \right) \leq 3 \Leftrightarrow 0 < x + \frac{1}{x} + 6 \leq 8$. 当 $x > 0$ 时, $0 < x^2 + 1 + 6x \leq$

$8x \Rightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow x=1$. 当 $x < 0$ 时, $8x \leq x^2 + 1 + 6x < 0 \Rightarrow -3 - 2\sqrt{2} < x < -3 + 2\sqrt{2}$.

综上: $\{x | -3 - 2\sqrt{2} < x < -3 + 2\sqrt{2} \text{ 或 } x=1\}$ 包含 6 个整数解, 故选 D.

【例 12】当关于 x 的方程 $\log_4 x^2 = \log_2 (x+4) - a$ 的根在区间 $(-2, -1)$ 时, 实数 a 的取值范围中包含()个整数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 6 (E) 无数个

【解析】方程化为 $a = \log_2 \frac{x+4}{-x}$, 由于 $-2 < x < -1$, 所以 $1 < \frac{x+4}{-x} < 3$, 从而 a 的取值范围

为 $(0, \log_2 3)$, 包含一个整数解, 选 B.

【评注】由于 $x < 0$, 得到 $\log_1 x^2 = \log_2 (-x)$.

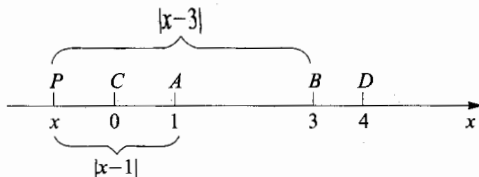
【题型 6】绝对值不等式

【思路点拨】遇到绝对值不等式的时候, 要根据绝对值里面表达式的符号去掉绝对值符号. 也可以借助几何意义分析求解.

【例 13】解不等式 $|x-1| + |x-3| > 4$.

【解析】采用常规的分段讨论法求解很麻烦, 故利用几何意义求解. 如图 $|x-1|$ 表示数轴上坐标为 x 的点 P 到坐标为 1 的点 A 之间的距离 $|PA|$, 即 $|PA| = |x-1|$; $|x-3|$ 表示 x 轴上点 P 到坐标为 3 的点 B 之间的距离 $|PB|$, 即 $|PB| = |x-3|$. 所以不等式 $|x-1| + |x$

$-3| > 4$ 的几何意义即为 $|PA| + |PB| > 4$. 由 $|AB| = 2$ 可知, 点 P 在点 C (坐标为 0) 的左侧或点 P 在点 D (坐标为 4) 的右侧. 所以解得 $x < 0$, 或 $x > 4$.



【例 14】不等式 $x^2 - x - 5 > |2x - 1|$ 的解集中包含()个 10 以内的质数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 无数

【解析】当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 原不等式变形为 $x^2 - x - 5 > 2x - 1$, 即

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4 \text{ (因为 } x \geq \frac{1}{2} \text{)};$$

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式变形为 $x^2 - x - 5 > 1 - 2x$, 即

$$x^2 + x - 6 > 0 \Rightarrow x < -3 \text{ (因为 } x < \frac{1}{2} \text{)}.$$

综上所述, 原不等式的解为 $x < -3$ 或 $x > 4$. 故包含两个 10 以内的质数 5 和 7, 选 C.

【例 15】不等式 $|x^2 - x - 4| > 2$ 的解集中包含()个 10 以内的质数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

【解析】 $|y| > 2$, 即 $y > 2$ 或 $y < -2$, 所以可以把原不等式分为两个不等式:

$$x^2 - x - 4 > 2, \quad \textcircled{1}$$

$$x^2 - x - 4 < -2. \quad \textcircled{2}$$

解①得 $x > 3$, $x < -2$; 解②得 $-1 < x < 2$, 故包含 5, 7 两个质数, 选 C.

【题型 7】解集为空集或为任意实数

【思路点拨】对于一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < (>) 0$ 解集为任意实数的充要条件是

$$\begin{cases} a < (>) 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

【注意】若系数 a 中含有参数, 不要忘记讨论系数 a 为零的情况.

【例 16】关于 x 的二次不等式 $ax^2 + (a-1)x + a-1 < 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 求 a 的取值范围.

【解析】由题意知, 要使原不等式的解集为 \mathbf{R} , 必须 $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta < 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} a < 0, \\ (a-1)^2 - 4a(a-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 3a^2 - 2a - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a > 1 \text{ 或 } a < -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{1}{3},$$

因此 a 的取值范围是 $a \in (-\infty, -\frac{1}{3})$.

【注意】本题若无“二次不等式”的条件,还应考虑 $a=0$ 的情况,但对本题 $a=0$ 时式子不恒成立.

【例 17】已知 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围中包含 () 个整数.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5

【解析】若 $a^2-1=0$, 即 $a=1$ 或 $a=-1$ 时, 原不等式的解集分别为 \mathbf{R} 和 $\left\{x \mid x < \frac{1}{2}\right\}$; 若 $a^2-1 \neq 0$, 即 $a \neq \pm 1$ 时, 要使原不等式的解集为 \mathbf{R} , 必须

$$\begin{cases} a^2-1 < 0, \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-1 < 0, \\ (a-1)^2-4(a^2-1)(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{5} < a < 1.$$

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{5}, 1\right) \cup \{1\} = \left(-\frac{3}{5}, 1\right]$. 选 B.

【例 18】若 $\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3} < 1$ 对于一切实数 x 都成立, 则 k 的范围中有 () 个整数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

【解析】因为 $4x^2+6x+3$ 恒大于 0, 所以

$$2x^2+2kx+k < 4x^2+6x+3.$$

即 $2x^2+(6-2k)x+3-k > 0$, 对于任意 x 恒成立. 所以 $\Delta < 0$, 即 $(6-2k)^2-4 \cdot 2(3-k) < 0$, 解之得 $1 < k < 3$. 选 (B).

【题型 8】无理不等式

【思路点拨】无理不等式基本解法是去掉根号, 在遇到偶次方根时不要忘记定义域.

【例 19】不等式 $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$ 的解集中包含 () 个整数.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 无数

【解析】由根号有意义 $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \end{cases}$ 得 $-1 \leq x \leq 3$. 原不等式变形为

$$2\sqrt{3-x} > 2\sqrt{x+1} + 1.$$

由于两边均非负, 故两边平方后, 整理得 $7-8x > 4\sqrt{x+1}$, 此时要求

$$7-8x > 0 \Rightarrow x < \frac{7}{8},$$

再平方可得 $(7-8x)^2 > 16(x+1)$, 所以 $64x^2-128x+33 > 0$, 得到

$$x > \frac{8+\sqrt{31}}{8} \text{ 或 } x < \frac{8-\sqrt{31}}{8}.$$

综上所述, 原不等式解集为 $-1 \leq x < \frac{8-\sqrt{31}}{8}$, 故包含 -1 和 0 两个整数解, 选 C.

第四节 核心专题点睛

绝对值方程、不等式的常规解法需要分段讨论,计算量大,容易出错.下面介绍一种简便的方法:通过函数图像交点情况进行直观比较,快速简捷,尤其对于选择题更加有效.

一、形如 $|ax+b|\pm|cx+d|\geq(\leq)e$ 的图像巧解

【例1】不等式 $|x-1|-|2x+4|\geq 1$ 的解集为 ().

- (A) $-4\leq x\leq -\frac{4}{3}$ (B) $-4\leq x\leq -\frac{1}{3}$ (C) $-2\leq x\leq -\frac{4}{3}$
(D) $-1\leq x\leq -\frac{1}{3}$ (E) 以上结论均不正确

【解析】先按照一般方法求解:

根据零点 $x=1, x=-2$ 将数轴分为三个区段,分别讨论求解.

(1) 当 $x\leq -2$ 时,得到 $x+5\geq 1$, 解为 $-4\leq x\leq -2$;

(2) 当 $-2<x\leq 1$ 时,得到 $-3x-3\geq 1$, 解为 $-2<x\leq -\frac{4}{3}$;

(3) 当 $x>1$ 时,得到 $-x-5\geq 1$, 解为空集.

综上所述,可得不等式的解集为 $-4\leq x\leq -\frac{4}{3}$, 选 A.

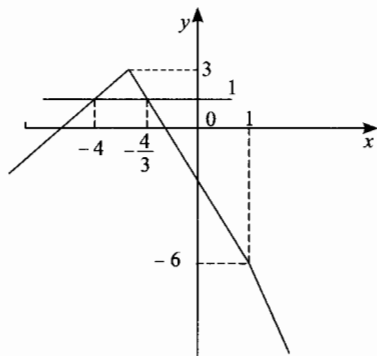
按照上述方法求解显然比较复杂,下面就介绍一种简便的方法.

可以通过函数图像来简便分析,画出函数 $y=|x-1|-|2x+4|$ 的图像. 因为无论如何分段展开,去掉绝对值以后表达式都是一次函数,在平面直角坐标系上为直线,根据两点确定一条直线,并且直线发生改变的点就是函数的零点,从而可以很容易画出该函数图像. 具体步骤如下.

第一步:找出函数的零点,定出该点坐标;本题零点所对应的坐标为 $(1, -6)$ 和 $(-2, 3)$.

第二步:连接两点坐标得到一条线段,这条线段表示的就是 $-2<x<1$ 的函数图像.

第三步:两侧图像的趋势判断是根据 $x\rightarrow\infty$ 来决定的,即去掉 x 后面的常数, x 的系数要保留;本题得到 $|x|-|2x|=-|x|<0$, 从而两侧的图像都是向下的. 完整的图像如右图所示.



$y=|x-1|-|2x+4|\geq 1$ 就表示该图像位于 $y=1$ 上方的部分,根据图像得到当 $-4\leq x\leq -\frac{4}{3}$ 时, $y=|x-1|-|2x+4|\geq 1$.

【评注】此方法适用于 $|ax+b|\pm|cx+d|\geq(\leq)e$ 这样的题目. 注意在画 $y=|ax+b|\pm|cx+d|$ 的图像,判断趋势的时候,将 b 和 d 去掉,然后根据 $|ax|\pm|cx|$ $\begin{cases} >0, \text{图像向上,} \\ =0, \text{图像水平, 求解.} \\ <0, \text{图像向下} \end{cases}$

第四章 方程和不等式

形如 $|ax+b| \pm |cx+d|$ 图像汇总

										绝对值图像特点									
										加	减	加	减						
加法	两 x 系数相等	前 常数小	$y= x+2 + x-1 $		前 常数大	$y= x+2 + 2x-1 $		x 相等	x 不等	常小上 常大下	平底锅 向上	开							
			$y= x+a + x+b $			$y= x+2 + 2x-1 $													
	前 x 系数小 (默认)	前 常数小	$y= x-2 + 2x+1 $			$y= x+2 + 2x-1 $													
			$y= x+2 + 2x-1 $			$y= x+2 + 2x-1 $													
减法	两 x 系数相等	前 常数小	$y= x-1 - x+2 $		前 常数大	$y= x+1 - x-2 $		x 相等	x 不等	常小下 常大上	前小下 前小上	平							
			$y= x+1 - x+2 $			$y= x+1 - x-2 $													
	前 x 系数小	前 常数小	$y= x-2 - 2x+1 $			$y= x+2 - 2x-1 $													
			$y= x+2 - 2x-1 $			$y= x+2 - 2x-1 $													
	前 x 系数大	前 常数小	$y= 2x-1 - x+2 $			$y= 2x+1 - x-2 $													
			$y= 2x+1 - x-2 $			$y= 2x+1 - x-2 $													
	两 x 系数不等	前 常数小	$y= x-2 - 2x+1 $			$y= x+2 - 2x-1 $													
			$y= x+2 - 2x-1 $			$y= x+2 - 2x-1 $													
草图步骤口诀																			
以上图像两端斜率相反 (倾角对称)																			

二、高次可分解因式不等式的巧解(\triangle)

“数轴穿线法”用于解一元高次不等式非常方便,其解题步骤如下:

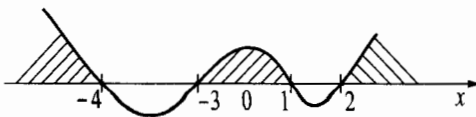
- (1) 分解因式,化成若干个因式的乘积;
- (2) 作等价变形,便于判断因式的符号,例如 x^2+1 , x^2+x+1 , x^2-3x+5 等,这些因式的共同点是无论 x 取何值,式子的代数值均大于零;
- (3) 由小到大、从左到右标出与不等式对应的方程的根;
- (4) 从右上角起,“穿针引线”;
- (5) 重根的处理,依“奇穿偶不穿”原则;
- (6) 画出解集的示意区域,从左到右写出解集.

【例2】解不等式 $(x-2)(x+3)(x+4)(x-1) > 0$.

【解析】令 $f(x) = (x-2)(x+3)(x+4)(x-1) = 0$, 解得 $f(x)$ 的零点 $-4, -3, 1$ 和 2 .
 $f(x)$ 的零点 $-4, -3, 1$ 和 2 把实数轴分成若干个区间,先确定函数在各自区间里的正负号,再确定不等式的解.

具体步骤如下:

- (1) 将高次因式分解为若干一次项系数为正数的一次因式,并将各个一次因式的根(零点)从



小到大依次标在数轴上.

(2) 从最大的根的右上开始划一曲线,使之依次通过各个根. x 轴上边的使不等式大于零; x 轴下边的使不等式小于零. 零点使不等式等于零.

这样可得出 原不等式的解集为 $(-\infty, -4) \cup (-3, 1) \cup (2, +\infty)$.

【例 3】分式不等式 $\frac{2x^2+x+14}{x^2+6x+8} \leq 1$ 的解集中包括()个整数.

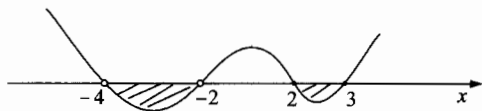
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 无数

【解析】遇到高次方可分解因式的不等式问题,一般方法是等价变形来求解,此方法比较麻烦,并且容易出错. 我们可以采用简捷的穿线方法求解此题目.

原不等式可化简为 $\frac{2x^2+x+14}{x^2+6x+8} - 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x^2+6x+8} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x+2)(x-2)(x-3) \leq 0, \\ (x+2)(x+4) \neq 0. \end{cases}$$

穿线解法:



所以 $-4 < x < -2$ 或 $2 \leq x \leq 3$, 选 B.

第五节 阶梯化精炼题



扫码看视频

基础能力题

一、问题求解题

1. 已知方程 $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ 有三个根 x_1, x_2, x_3 , 其中 $x_1 = -1$, 则 $|x_2 - x_3|$ 等于().

(A) 2 (B) 1 (C) $\sqrt{5}$ (D) 3 (E) $\sqrt{7}$

2. 已知方程 $3x^2 + 5x + 1 = 0$ 的两个根为 α, β , 则 $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = ()$.

(A) $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ (E) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

3. 方程 $x^2 - 2x + c = 0$ 的两根之差的平方等于 16, 则 c 的值是().

(A) 3 (B) -3 (C) 6 (D) 0 (E) 2

4. 已知方程 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ 的根为 $x_1 = -1, x_2, x_3$, 则 $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ 的值是().

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) 1

5. 方程 $(x^2 + x - 1)^{x+1} = 1$ 的所有整数解的个数是().
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 1
6. 已知不等式 $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 的解集为 $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$, 关于 x 的不等式 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 的解集是().
 (A) $x \in (-6, -3)$ (B) $x \in (-\infty, -2)$
 (C) $x \in (-\infty, -5)$ (D) $x \in (-\infty, -3)$
 (E) 以上结论均不正确
7. 一元一次不等式组 $\begin{cases} x+2 > \frac{x-9}{6} + \frac{x+5}{2}, \\ 6 - (\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3}) > \frac{x}{6} \end{cases}$ 的解集是().
 (A) $-3 < x < 14$ (B) $-3 < x < 16$
 (C) $-13 < x < 14$ (D) $-31 < x < 14$
 (E) 以上结论均不正确
8. 分式不等式 $\frac{3x+1}{x-3} < 1$ 的解集是().
 (A) $-3 < x < 3$ (B) $-2 < x < 3$
 (C) $-13 < x < 3$ (D) $-3 < x < 14$
 (E) 以上结论均不正确
9. 若 $a^2 + 11a + 16 = 0, b^2 + 11b + 16 = 0 (a \neq b)$, 则 $\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = ()$.
 (A) $\pm \frac{1}{4}\sqrt{57}$ (B) $\pm \frac{1}{4}\sqrt{56}$ (C) $\pm \frac{1}{4}\sqrt{55}$ (D) $\pm \frac{1}{4}\sqrt{54}$ (E) $\pm \frac{1}{4}\sqrt{53}$
10. 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 2 = 0$ 的两个实数根, 且 $(x_1+1)(x_2+1) = 8$, 则 k 的值是().
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 1
11. 已知 a, b 是方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的两个根, b, c 是方程 $x^2 - 8x + 5m = 0$ 的两个根, 则 $m = ()$.
 (A) 0 或 3 (B) 1 或 5 (C) 0 或 5 (D) 1 或 2 (E) 2 或 5
12. 设 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + ax + a = 2$ 的两个实数根, 则 $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1)$ 的最大值为().
 (A) 1 (B) $-\frac{63}{8}$ (C) $-\frac{63}{6}$ (D) $-\frac{63}{4}$ (E) 2
13. 已知方程 $x^2 + 5x + k = 0$ 的两实根的差为 3, 则实数 k 的值为().
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8
14. 关于 x 的方程 $\lg(x^2 + 11x + 8) - \lg(x+1) = 1$ 的解为().
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 3 或 2 (E) 4
15. 已知方程 $ax + by = 11$ 有两组解 $\begin{cases} x=5, \\ y=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=1, \\ y=-4, \end{cases}$ 则 $\log_9 a^b$ 为().
 (A) -1 (B) -5 (C) -7 (D) -1 或 -5 (E) 1

16. 已知不等式 $x^2 - ax + b < 0$ 的解集是 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则不等式 $x^2 + bx + a > 0$ 的解集是().

- (A) $x \neq 3$ (B) $x \neq 2$ (C) $x \neq 1$ (D) $x \in \mathbf{R}$ (E) $x \neq -1$

17. 不等式 $2x^2 + (2a - b)x + b \geq 0$ 的解集为 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$, 则 $a + b =$ ().

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 2

18. 若不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $-2 < x < 3$, 则不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集为().

- (A) $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{3}$ (B) $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 1$
(C) $x < -1$ 或 $x > 1$ (D) $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > \frac{1}{3}$ (E) $1 < x < 3$

19. 设 $0 < x < 1$, 不等式 $\frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} > 1$ 的解集是().

- (A) $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $x < -1$ 或 $x > 1$
(D) $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{4}$ (E) $-1 < x < 1$

20. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{2x+5}{3} > x-5, \\ \frac{x+3}{2} < x+a \end{cases}$ 只有 5 个整数解, 则 a 的取值范围是().

- (A) $-6 < a < -\frac{11}{2}$ (B) $-6 \leq a < -\frac{11}{2}$
(C) $-6 < a \leq -\frac{11}{2}$ (D) $-6 \leq a \leq -\frac{11}{2}$ (E) $a \geq 1$

二、条件充分性判断题

1. 若 $xy = -6$, 那么 $xy(x+y)$ 的值可以唯一确定.

- (1) $x - y = 5$. (2) $xy^2 = 18$.

2. $x^2 - y^2$ 的值可唯一确定.

- (1) $x + y = 2x$. (2) $x + y = 0$.

3. $x^2y + xy^2$ 的值可以唯一确定.

- (1) $(\log_m x)^2 + 2\log_m x \log_m y + (\log_m y)^2 = \frac{1}{2}\log_m 2 \log_m 4$.

- (2) $x^3 - x^2 + 2x = 2$.

4. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根满足 $x_1 x_2 < 0$.

- (1) $a + b + c = 0$, 且 $a < b$. (2) $a + b + c = 0$, 且 $b < c$.

5. 能确定 $2m - n = 4$.

- (1) $\begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} mx + ny = 8, \\ nx - my = 1 \end{cases}$ 的解.

$$(2) m, n \text{ 满足 } \begin{cases} 2m+n=16, \\ m+2n=17. \end{cases}$$

6. 方程 $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ 有两个不相等的正根.

$$(1) m > 4.$$

$$(2) m > 3.$$

基础能力题详解

一、问题求解题

$$1. C; x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = x^2(x+1) - 3x(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2 - 3x + 1).$$

因为 $x_1 = -1$, 故 x_2, x_3 是 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根, $x_2 + x_3 = 3, x_2 \cdot x_3 = 1$.

$$|x_2 - x_3| = \sqrt{(x_2 - x_3)^2} = \sqrt{(x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

$$2. B; \text{方法一: 首先根据 } \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \frac{\beta}{\alpha} + 2 + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + 2 \text{ 和韦达定理}$$

$$\text{可知 } \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \frac{25}{3}, \text{ 且 } \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以选 B.}$$

方法二: 首先因为所求是两个根式, 一定是大于 0 的, 所以排除 A, D; 且 $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ 的值一定是大于 1 的, 所以只有 B 大于 1.

$$3. B; (x_1 - x_2)^2 = 16 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 - 4c = 16 \Rightarrow c = -3.$$

4. A; 因为 -1 是方程的一个根, 所以必有 $(x+1)$ 的因式, 所以原式表达为 $(x+1) \cdot (x^2 + x - 6) = 0$, 即 x_2, x_3 是 $x^2 + x - 6 = 0$ 的两个根, 通过韦达定理或直接求解均可得到所求.

5. C; 原方程有整数解的条件有且只有以下 3 种:

① $x+4=0$ 而 $x^2+x-1 \neq 0$, 此时 $x=-4$ 是方程的一个整数解;

② $x^2+x-1=1$, 解之得 $x=-2$ 或 $x=1$, 即原方程有两个整数解;

③ $x^2+x-1=-1$ 而 $x+4$ 为偶数, 解 $x^2+x-1=-1$ 得 $x=0$ 或 -1 . 显然仅当 $x=0$ 时 $x+4=4$ 为偶数. 故原方程此时仅有一个整数解.

综上所述知方程的解共有 $1+2+1=4$ 个.

$$6. D; \text{原不等式即为 } (a+b)x < 3b-2a, \text{ 由已知, 它的解为 } x < -\frac{1}{3}, \text{ 则必然 } a+b > 0,$$

$$\text{从而 } x < \frac{3b-2a}{a+b}, \text{ 所以 } \frac{3b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3}, \text{ 得 } a=2b.$$

因为 $a+b > 0$, 所以 $3b > 0$, 所以 $b > 0$. 将 $a=2b$ 代入所求解的不等式中, 得 $-bx-3b > 0$, 即 $bx < -3b$.

因为 $b > 0$, 所以 $x < -3$, 所以所求的解集为 $x \in (-\infty, -3)$.

$$7. A; \text{原不等式组 } \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+12 > x-9+3x+15, \\ 72-3(x-2)-8 > 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -6, \\ -5x > -70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 14. \text{ 所以, 原不等式组的解集为 } \{x | -3 < x < 14\}.$$

$$8. B; \text{原不等式 } \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1-x+3}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-3} < 0$$

$0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) < 0$, 所以原不等式的解为 $-2 < x < 3$.

9. A; 由已知 a, b 是方程 $x^2 + 11x + 16 = 0$ 的两根. 所以 $\begin{cases} a+b=-11, \\ ab=16, \end{cases}$ 因此 $a < 0$,

$b < 0$, 而 $\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{ab}} = \frac{1}{4}(a-b) = \pm \frac{1}{4} \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{121 - 64} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{57}$.

10. E; 由题意得 $\Delta = [2(k+1)]^2 - 4(k^2 + 2) \geq 0$, 得 $k \geq \frac{1}{2}$. ①

又 $x_1 + x_2 = 2(k+1)$, $x_1 x_2 = k^2 + 2$,

所以 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = k^2 + 2 + 2(k+1) + 1 = k^2 + 2k + 5$.

由已知得 $k^2 + 2k + 5 = 8$, 解得 $k = -3, k = 1$. ②

由 ①② 得 $k = 1$.

11. A; 由已知 $b^2 - 4b + m = 0$ ①, $b^2 - 8b + 5m = 0$ ②

① - ② 得 $4b - 4m = 0$,

得 $b = m$. ③

将 ③ 代入 ① 得 $m^2 - 4m + m = 0$, 得 $m = 0$ 或 $m = 3$.

12. B; $\Delta = a^2 - 4(a-2) = a^2 - 4a + 8 = (a-2)^2 + 4 > 0$,

因此对于任意实数 a , 原方程总有两个实数根. 由根与系数的关系得

$x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = a - 2$,

则 $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = -2(x_1 + x_2)^2 + 9x_1 x_2 = -2a^2 + 9a - 18 = -2\left(a - \frac{9}{4}\right)^2 -$

$\frac{63}{8}$,

当 $a = \frac{9}{4}$ 时原式有最大值 $-\frac{63}{8}$.

13. A; $\Delta = 5^2 - 4k \geq 0$, 得 $k \leq \frac{25}{4}$.

设两实根为 α, β , 不妨令 $\alpha > \beta$, 则 $\alpha - \beta = 3$.

于是 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 9$, 由韦达定理 $\alpha + \beta = -5$, $\alpha\beta = k$,

得 $(-5)^2 - 4k = 9$, 所以 $k = 4$, 又因为 $4 \in \left(-\infty, \frac{25}{4}\right]$, 所以 $k = 4$.

14. A; $\lg(x^2 + 11x + 8) = \lg(x+1) + \lg 10 = \lg 10(x+1)$,

则 $x^2 + 11x + 8 = 10(x+1)$, $x^2 + x - 2 = 0$, 所以 $x = 1$ 或 $x = -2$.

经检验, $x = -2$ 是增根, 舍去, 所以原方程的解为 $x = 1$.

15. A; 由 $\begin{cases} 5a + 2b = 11, \\ a - 4b = 11, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = -2. \end{cases}$ 所以 $\log_9 a^b = \log_9 3^{-2} = \log_9 \frac{1}{9} = -1$.

16. C; 依题意, 方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两根为 $x_1 = -1, x_2 = 2$.

由 $-1 + 2 = a$, $(-1) \cdot 2 = b$, 得 $a = 1, b = -2$,

则不等式 $x^2 + bx + a > 0$, 即 $x^2 - 2x + 1 > 0$, 即 $(x-1)^2 > 0$.

所以 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 1$, 即解集为 $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

17. B; 方法一: 与解 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$ 对应的不等式是 $(x-1)(x-2) \geq 0$, 即 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$, 亦即 $2x^2 - 6x + 4 \geq 0$.

对比系数, 得 $\begin{cases} 2a-b=-6, \\ b=4, \end{cases}$ 则 $a=-1, b=4$, 所以 $a+b=-1+4=3$.

方法二: $2x^2 + (2a-b)x + b = 0, x_1=1, x_2=2$,

$$\begin{cases} 1+2=-\frac{2a-b}{2}, \\ 1 \cdot 2 = \frac{b}{2}, \end{cases} \quad \text{解得 } a=-1, b=4. \text{ 所以 } a+b=3.$$

18. D; 因为 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解为 $-2 < x < 3$, 所以 $a > 0$.

由于 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 -2 和 3 , 则 $-2+3=-\frac{b}{a}, -2 \cdot 3 = \frac{c}{a}$, 得

$b=-a < 0, c=-6a < 0$, 由 $cx^2 + bx + a < 0$, 得

$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} > 0$, 即 $x^2 + \frac{-a}{-6a}x + \frac{a}{-6a} > 0$, 即

$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} > 0$, 所以 $6x^2 + x - 1 > 0$, 所以 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > \frac{1}{3}$.

19. A; 因为 $0 < x < 1$, 所以 $x^2 - 1 < 0$.

去分母, 得 $3x^2 - 2 < x^2 - 1$,

$2x^2 < 1, x^2 < \frac{1}{2}, |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

再由 $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 得 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以, 所求解集为 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

20. C; 解不等式组, 得 $\begin{cases} x < 20, \\ x > 3-2a, \end{cases}$ 不等式组只有 5 个整数解, 即解只能是 $x=15, 16,$

$17, 18, 19$, a 的取值范围是 $\begin{cases} 3-2a \geq 14, \\ 3-2a < 15, \end{cases}$ 得 $-6 < a \leq -\frac{11}{2}$.

二、条件充分性判断题

1. B; 方法一: (1) 中的方程 $x-y=5$ 与 $xy=-6$ 联立成二次方程组可解出 x, y 的值, 但是因为 $xy=-6$ 是一个二次方程, 解得 x 和 y 的值各有两个, 所以值不唯一, 因此 (1) 不充分; 虽然 (2) 中的 $xy^2=18$ 与 $xy=-6$ 所联立成的方程组也是二次的, 但解方程仅可得到一对 x, y 值, 所以可以求得 $xy(x+y)$ 的唯一值, 所以 (2) 充分.

方法二: $xy^2 = xyy = -6y = 18 \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-3. \end{cases}$ 所以 (2) 是充分的.

2. D; 由 (1) 可得 $x-y=0$, 从而得到 $x^2-y^2=0$; 由 (2) 也可得出 $x^2-y^2=(x+y) \cdot (x-y)=0$, 所以条件 (1) 和条件 (2) 都是充分的.

3. E; 根据对数函数的性质, 由(1)可得 $(\log_m xy)^2 = (\log_m 2)^2 \Rightarrow \log_m xy = \pm \log_m 2 \Rightarrow \log_m xy = \log_m 2$ 或者 $\log_m \frac{1}{2} \Rightarrow xy = 2$ 或 0.5 .

由(2)得到 $(x-1)(x^2+2)=0 \Rightarrow x=1$.

所以任何一个条件都是不能确定的, 联立后也不能唯一确定.

提示: 方程的问题最重要的是找出变量, 列出方程. 对某些方程作适当的变形, 注意总结规律.

4. C; 由 $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow ac < 0$; 根据条件(1) $a+b+c=0 \Rightarrow b=-a-c > a \Rightarrow a < -\frac{c}{2}$, 无法确定 a 和 c 的符号; 根据条件(2) $a+b+c=0 \Rightarrow b=-a-c < c \Rightarrow a > -2c$, 也无法确定 a 和 c 的符号; 联合两个条件, 得到 $a+b+c=0$, 且 $a < b < c \Rightarrow a < 0, c > 0$, 此时判别式必然大于零, 满足.

5. D; 由条件(1)可得 $\begin{cases} 2m+n=8, \\ 2n-m=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=3, \\ n=2, \end{cases}$ 则 $2m-n=4$, 充分; 由条件(2) 解得 $\begin{cases} m=5, \\ n=6, \end{cases}$ 可知 $2m-n=4$, 也充分.

6. D; 由题干得 $\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4(m^2 - 4) > 0, \\ x_1 + x_2 = 2m > 0, \\ x_1 x_2 = m^2 - 4 > 0, \end{cases}$ 解得 $m > 2$, 因此两个条件均充分.



2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

综合提高题

6大 (太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

一、问题求解题

1. 已知不等式 $ax^2 + 4ax + 3 \geq 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 则 a 的取值范围是().

(A) $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ (B) $[0, \frac{3}{4}]$ (C) $(0, \frac{3}{4}]$ (D) $[0, \frac{3}{4})$ (E) $(0, \frac{3}{4})$

2. 若分式 $\frac{2x^2 + 2kx + 3}{x^2 + x + 2}$ 的值恒大于 1, 那么实数 k 的取值范围中包含() 个整数.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

3. x_1, x_2 是方程 $x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0$ 的两个实根, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围是().

(A) $(-\infty, 19]$ (B) $[\frac{50}{9}, 18]$ (C) $[\frac{25}{9}, 16]$ (D) $[\frac{25}{9}, 18]$ (E) $[\frac{50}{9}, 16]$

4. 关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 的两实根为 α 和 β , 且 $3\alpha + 2\beta = 20$, 则 m 为().

(A) 16 (B) 14 (C) -14 (D) -16 (E) 18

5. 已知方程 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ 的根为 $x_1 = -1, x_2, x_3$, 则 $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} =$ ().

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{3}$

6. 已知 m, n 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个实根, 则 $2m^2 + 4n^2 - 6n$ 的值为().
 (A) 4 (B) 12 (C) 15 (D) 17 (E) 18
7. 已知方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两实根之比为 $3:4$, 判断式 $\Delta = 2$, 则其两个实根的平方和为().
 (A) 50 (B) 40 (C) 45 (D) 60 (E) 30
8. 已知 x_1, x_2 是方程 $4x^2 - (3m - 5)x - 6m^2 = 0$ 的两实根, 且 $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{3}{2}$, m 的值为().
 (A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 1 或 5 (E) 2
9. 关于 x 的方程 $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$ 的解为().
 (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -1 或 2 (E) 0
10. 关于 x 的方程 $4^{x-\frac{1}{2}} + 2^x = 1$ 的解为().
 (A) $\log_2(\sqrt{3}+1)$ (B) $2\log_2(\sqrt{3}-1)$
 (C) $\log_2(\sqrt{3}-1)$ (D) 1 (E) 2
11. 若关于 x 的方程 $(m-2)x^2 - (3m+6)x + 6m = 0$ 有一正一负实根, m 的取值范围是().
 (A) $-\frac{2}{5} \leq m < 0$ (B) $-\frac{2}{5} \leq m < 1$ (C) $-\frac{2}{5} \leq m < 2$
 (D) $\frac{2}{5} \leq m < 2$ (E) $0 < m < 2$
12. 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是().
 (A) $x < 1$ 且 $x \neq -1$ (B) $x < 1$ 且 $x \neq -2$ (C) $x < 1$ 且 $x \neq -3$
 (D) $x < 1$ (E) $x > 1$
13. 不等式 $\frac{9x-5}{x^2-5x+6} \geq -2$ 的解集为().
 (A) $x < 2$ 或 $x > 5$ (B) $-2 < x < 3$ (C) $x < -2$ 或 $x > 3$
 (D) $x < 2$ 或 $x > 3$ (E) $2 < x < 3$
14. 不等式 $|\sqrt{x-2} - 3| < 1$ 的解集是().
 (A) $6 < x < 18$ (B) $-6 < x < 18$ (C) $1 \leq x \leq 7$
 (D) $-2 \leq x \leq 3$ (E) $2 < x < 3$
15. 指数不等式 $(0.2)^{x^2-3x-2} > 0.04$ 的解集为().
 (A) $6 < x < 18$ (B) $-11 < x < 4$ (C) $1 < x < 4$
 (D) $-1 < x < 4$ (E) $1 < x < 3$
16. 不等式 $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} > 29$ 的解集为().
 (A) $x < -\log_3 \frac{2}{3}$ 或 $x > 2$ (B) $x < \log_3 \frac{2}{3}$ 或 $x > 2$
 (C) $x < \log_3 \frac{2}{3}$ 或 $x > 12$ (D) $-1 < x < 4$ (E) $1 < x < 4$
17. 不等式 $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x + 1} < \log_{\frac{1}{2}} x - 1$ 的解集是().

(A) $0 < x < \frac{1}{8}$ (B) $0 < x < \frac{1}{4}$ (C) $1 < x < 4$

(D) $2 < x < 4$ (E) $1 < x < 3$

18. 已知方程 $x^2 - 4x + a = 0$ 有两个实根, 其中一根小于 3, 另一根大于 3, a 的取值范围是().

(A) $a \leq 3$ (B) $a > 3$ (C) $a < 3$ (D) $0 < a < 3$ (E) $a \neq 1$

19. 若不等式 $|x+1| + |x-3| \leq a$ 有解, 则 a 的取值范围是().

(A) $0 < a \leq 4$ (B) $a \geq 4$ (C) $0 < a \leq 2$ (D) $a \geq 2$ (E) $a \geq 1$

20. 已知 a, b, c, d 都是正实数, 且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 给出下列四个不等式: ① $\frac{a}{a+b} > \frac{c}{c+d}$,

② $\frac{a}{a+b} < \frac{c}{c+d}$, ③ $\frac{b}{a+b} > \frac{d}{c+d}$, ④ $\frac{b}{a+b} < \frac{d}{c+d}$, 其中正确的是().

(A) ①③ (B) ①④ (C) ②④ (D) ②③ (E) ③④

21. 已知 a, b, c 满足 $a < b < c$, $ab + bc + ac = 0$, $abc = 1$, 则().

(A) $|a+b| > |c|$ (B) $|a+b| < |c|$
(C) $|a+b| = |c|$ (D) $|a+b|$ 与 $|c|$ 的大小关系不能确定
(E) 以上都不正确

22. 设关于 x 的方程 $ax^2 + (a+2)x + 9a = 0$ 有两个不等的实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 1 < x_2$, 那么 a 的取值范围是().

(A) $-\frac{2}{7} < a < \frac{2}{5}$ (B) $a > \frac{2}{5}$
(C) $a < -\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{11} < a < 0$ (E) $a \geq 2$

23. 设 a, b 是正整数, 且满足 $56 \leq a+b \leq 59$, $0.9 < \frac{a}{b} < 0.91$, 则 $b^2 - a^2$ 等于().

(A) 171 (B) 177 (C) 180 (D) 182 (E) 192

24. 若方程 $\frac{2x+a}{x-2} = -1$ 的解是正数, 则 a 的取值范围是().

(A) $a < 2$ 且 $a \neq -4$ (B) $a \leq 2$ 且 $a \neq -4$
(C) $a < -2$ 且 $a \neq -4$ (D) $a \leq -2$ 且 $a \neq -4$
(E) $a > 2$ 且 $a \neq 4$

25. 若 x_1, x_2 都满足条件 $|2x-1| + |2x+3| = 4$ 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2$ 的取值范围是().

(A) $(-2, 0)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(-2, 0)$ (D) $[-2, 0)$ (E) $[-1, 0)$

26. 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根, 则判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与平方形式 $M = (2ax_0 + b)^2$ 的大小关系是().

(A) $\Delta > M$ (B) $\Delta = M$ (C) $\Delta < M$ (D) 不能确定 (E) 与 b 有关

27. 已知 $b^2 - 4ac$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个实数根, 则 ab 的取值范围为().

(A) $ab \geq \frac{1}{8}$ (B) $ab \leq \frac{1}{8}$ (C) $ab \geq \frac{1}{4}$ (D) $ab \leq \frac{1}{4}$ (E) $ab \leq \frac{1}{2}$

28. 若 m, n 都是正实数, 方程 $x^2 + mx + 2n = 0$ 和方程 $x^2 + 2nx + m = 0$ 都有实数根, 则 $m + n$ 的最小值是 ().

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

29. 方程 $x^2 - (a + 8)x + 8a - 1 = 0$ 有两个整数根, 则整数 a 有 () 个取值.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

30. 关于 x 的方程 $x^2 + (n + 1)x + 2n - 1 = 0$ 的两根为整数, 则整数 n 有 () 种.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

31. 关于 x 的方程 $kx^2 - (k - 1)x + 1 = 0$ 有有理根, 求整数 k 有 () 种.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

二、条件充分性判断题

1. 方程 $x^2 + px + 1 = 0$ 的两实根为 x_1, x_2 , 则 $|x_1 - x_2| = \Delta$ (Δ 为判别式).

- (1) $p = \sqrt{5}$. (2) $p = \pm 2$.

2. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (4m + 1)x + 2m - 1 = 0$, 则 $|m| = -m$.

- (1) 方程两实根 x_1, x_2 满足 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$.

- (2) 方程两实根 x_1, x_2 满足 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

3. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 4x + m - 1 = 0$, 则 $|m| = m$.

- (1) α, β 为方程的两实根, $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$.

- (2) α, β 为方程的两实根, $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = 1$.

4. 已知 m, n 是有理数, 则 $m + n = 3$.

- (1) 方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有一个根是 $\sqrt{5} - 2$.

- (2) 方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有一个根是 $\sqrt{5} + 2$.

5. 不等式 $\sqrt{2-x} < x-1$ 成立.

- (1) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$. (2) $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

6. 不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$ 成立.

- (1) 实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 0$.

- (2) 实数 x, y, z 满足 $xyz < 0$.

7. 不等式 $\frac{2m+n}{m+n} > \frac{2m+q}{m+q}$ 成立.

- (1) 若 $a > 1$, 则 $\log_a n < \log_a q < \log_a m$. (2) 若 $0 < a < 1$, 则 $\log_a m < \log_a q < \log_a n$.

8. 不等式 $|x-3| - |x+1| \leq a$ 的解集是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

- (1) $a = 1$.

- (2) $a < 1$.

9. 已知 x, y, z 为正实数, 则 $(x+y)(y+z)$ 的最小值为 2.

- (1) $xyz(x+y+z) = 1$.

- (2) $xyz(x+y+z) = 2$.

10. 若关于 x 的方程 $\sqrt{2x+1} = x+m$ 有两个不等实根.

$$(1) \frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{4}. \quad (2) \frac{1}{4} \leq m < 1.$$

$$11. \sqrt{4-12x+9x^2} - \sqrt{x^2-2x+1} = 4x-3.$$

$$(1) \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}. \quad (2) \frac{3}{4} \leq x < 1.$$

12. 一元二次方程 $(k^2+1)x^2 - (4-k)x + 1 = 0$ 的一个根大于 1, 另一个根小于 1.

$$(1) k = -1. \quad (2) k = 0.$$

13. 关于 x 的不等式 $|ax + a + 2| < 2$ 有且只有一个整数解.

$$(1) a^2 = 4. \quad (2) a^2 = 9.$$

综合提高题详解

一、问题求解题

1. B; 由(1) 当 $a=0$ 时, $3 \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立.

由(2) 当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ (4a)^2 - 12a \leq 0. \end{cases}$ 所以 $0 < a \leq \frac{3}{4}$.

由(1), (2) 得 $0 \leq a \leq \frac{3}{4}$, 所以正确答案是 B.

2. C; 原式中分母恒大于 0, 所以等价于 $2x^2 + 2kx + 3 > x^2 + x + 2$, 即保证 $x^2 + (2k-1)x + 1 > 0$, 又可知 $\Delta = (2k-1)^2 - 4 < 0$, 得 $-\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$, 从而 k 取 0, 1.

$$\begin{aligned} 3. \text{ B; } x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (k-2)^2 - 2(k^2 + 3k + 5) \\ &= k^2 - 4k + 4 - 2k^2 - 6k - 10 = -k^2 - 10k - 6 \\ &= -(k+5)^2 + 19 \leq 19, \text{ 此解法不对, 注意 } k \text{ 还有限制范围.} \end{aligned}$$

由 $\Delta \geq 0$, $(k-2)^2 - 4(k^2 + 3k + 5) \geq 0$ 得到 $-4 \leq k \leq -\frac{4}{3}$, 从而得

$$x_1^2 + x_2^2 = -(k+5)^2 + 19, k \in \left[-4, -\frac{4}{3}\right].$$

当 $k = -4$ 时, $(x_1^2 + x_2^2)_{\max} = 18$; 当 $k = -\frac{4}{3}$ 时, $(x_1^2 + x_2^2)_{\min} = \frac{50}{9}$.

所以 $(x_1^2 + x_2^2) \in \left[\frac{50}{9}, 18\right]$.

4. D; 由 $\Delta = (-6)^2 - 4m \geq 0$, 得 $m \leq 9$.

由韦达定理 $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = m$, 因为 $3\alpha + 2\beta = \alpha + 2(\alpha + \beta) = \alpha + 2 \cdot 6 = 20$, 所以 $\alpha = 8$, $\beta = -2$, $m = \alpha\beta = 8 \cdot (-2) = -16$.

5. B; 方法一: 将 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 分解因式, 得

$$\begin{aligned} (x^3 + x^2) + (x^2 - 5x - 6) &= x^2(x+1) + (x+1)(x-6) \\ &= (x+1)(x^2 + x - 6) = (x+1)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

不妨令 $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, 所以 $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

方法二: 利用竖式除法

$$\begin{array}{r}
 x^2+x-6 \\
 x+1 \overline{) x^3+2x^2-5x-6} \\
 \underline{x^3+x^2} \\
 x^2-5x \\
 \underline{x^2+x} \\
 -6x-6 \\
 \underline{-6x-6} \\
 0
 \end{array}$$

则有 $(x+1)(x^2+x-6)=0$.

对于 $x^2+x-6=0$,也可由韦达定理 $x_2+x_3=-1, x_2 \cdot x_3=-6$,得

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2+x_3}{x_2x_3} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}.$$

6. B;由韦达定理 $m+n=3, mn=1$.

又 $(m+n)^2=9, m^2+n^2+2mn=9$,则 $m^2+n^2=9-2 \cdot 1=7$. 所以

$$\begin{aligned}
 2m^2+4n^2-6n &= 2m^2+2n^2+2n^2-6n \\
 &= 2(m^2+n^2)+2n(n-3)=2(m^2+n^2)+2n(-m) \\
 &= 2(m^2+n^2)-2mn=2 \cdot 7-2 \cdot 1=12.
 \end{aligned}$$

7. A;设两个实根分别为 $x_1=3k, x_2=4k$. 依韦达定理, $3k+4k=-a, 3k \cdot 4k=b$, 即 $7k=-a, a=-7k, b=12k^2$. 因为 $\Delta=a^2-4b=2$, 所以 $(-7k)^2-4 \cdot 12k^2=2$.

解得 $k=\pm\sqrt{2}$, 所以 $x_1^2+x_2^2=9k^2+16k^2=25k^2=50$.

8. D;因为 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=\frac{3}{2}$, 所以 $x_1, x_2 \neq 0$. 又 $x_1 \cdot x_2 = -\frac{6m^2}{4} < 0$ (依题意 $m \neq 0$), 则

$\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = -\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{2}$, 得 $x_1 = -\frac{3}{2}x_2$. 因为 $x_1+x_2 = \frac{3m-5}{4}$, 所以, 解出

$$x_2 = \frac{5-3m}{2}, x_1 = -\frac{3(5-3m)}{4}.$$

于是 $x_1x_2 = -\frac{3(5-3m)^2}{8} = -\frac{6m^2}{4}$, 整理得 $m^2-6m+5=0$, 则 $m=1$ 或 5 .

当 $m=1$ 时, 有 $2x^2+x-3=0$; 当 $m=5$ 时, 有 $2x^2-5x-75=0$. 因为二者的判别式均大于零, 所以 $m=1$ 或 $m=5$ 为所求.

9. D; $2 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$, 令 $t=2^x$, 得 $2t^2-9t+4=0$. 又 $(t-4)(2t-1)=0$, 解得 $t=4$ 或 $t=\frac{1}{2}$, 即 $2^x=4$ 或 $2^x=\frac{1}{2}$. 所以 $x=2$ 或 $x=-1$.

10. C; $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 2 = 0$, 令 $t=2^x$, 则 $t^2+2t-2=0$.

$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4 \cdot (-2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$, 其中 $-1-\sqrt{3}$ 舍去, 则 $2^x = \sqrt{3}-1$. 所以 $x =$

$\log_2(\sqrt{3}-1)$.

11. E; 只需 $x_1 \cdot x_2 = \frac{6m}{m-2} < 0$ 即可, 得 $0 < m < 2$, 此时 Δ 必大于 0, 故选 E.

注: 当 $ac < 0$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

12. A; 原不等式 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x > 0, \\ 1-|x| > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+x < 0, \\ 1-|x| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ |x| < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < -1, \\ |x| > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < -1, \\ x < -1 \text{ 或 } x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1 \text{ 或 } x < -1 \Leftrightarrow x < 1 \text{ 且 } x \neq -1$.

13. D; 原不等式 $\Leftrightarrow \frac{9x-5}{x^2-5x+6} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x+7}{x^2-5x+6} \geq 0$.

对于 $2x^2-x+7$, 其判别式 $\Delta < 0$, 故恒有 $2x^2-x+7 > 0$, 则 $x^2-5x+6 > 0$, 则 $x < 2$ 或 $x > 3$, 解集为 $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$.

14. A; 原不等式 $\Leftrightarrow -1 < \sqrt{x-2} - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{x-2} < 4$ (这里可以实施平方运算)
 $\Leftrightarrow 4 < x-2 < 16 \Leftrightarrow 6 < x < 18$, 所以, 解集为 $\{x | 6 < x < 18\}$.

15. D; $(0.2)^{x^2-3x-2} > (0.2)^2$, 因为 $y = (0.2)^x$ 单调递减, 所以 $x^2-3x-2 < 2$, 即 $(x-4)(x+1) < 0$, 解得 $-1 < x < 4$.

16. B; $3 \cdot 3^x + \frac{18}{3^x} > 29$, 所以 $3 \cdot (3^x)^2 - 29 \cdot 3^x + 18 > 0$.

设 $t = 3^x$, 则 $3t^2 - 29t + 18 > 0$, 解得 $t < \frac{2}{3}$ 或 $t > 9$.

所以 $3^x < \frac{2}{3}$ 或 $3^x > 9$, 所以 $x < \log_3 \frac{2}{3}$ 或 $x > 2$.

17. A; 设 $t = \log_{\frac{1}{2}} x$, 则有

$$\sqrt{t+1} < t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1 \geq 0, \\ t-1 > 0, \\ t+1 < (t-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1, \\ t > 1, \\ t < 0 \text{ 或 } t > 3. \end{cases}$$

因为 $t > 3$, 所以 $\log_{\frac{1}{2}} x > 3$, 即 $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, 所以 $0 < x < \frac{1}{8}$, 解集为 $\{x | 0 < x < \frac{1}{8}\}$.

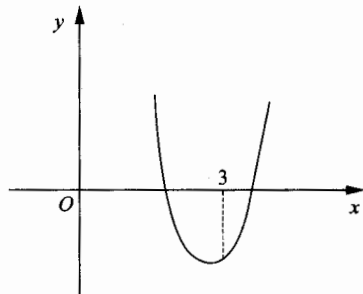
18. C; 方法一: 依题意, $\Delta = (-4)^2 - 4a > 0$, 得 $a < 4$.

不妨设 $x_1 < 3, x_2 > 3$, 则 $x_1 - 3 < 0, x_2 - 3 > 0$.

从而 $(x_1 - 3)(x_2 - 3) < 0$, 即 $x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 < 0$.

依韦达定理, 得 $a - 3 \cdot 4 + 9 < 0$, 所以 $a < 3$.

方法二: 设 $f(x) = x^2 - 4x + a$, 依题意, 必有 $f(3) < 0$,
 即 $3^2 - 4 \times 3 + a < 0$, 所以 $a < 3$.



19. B. 方法一:

当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, $x+1 \geq 0, x-3 \leq 0$, 所以 $|x+1| + |x-3| = x+1+3-x = 4$.

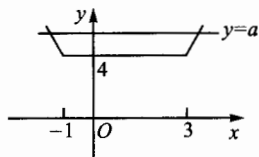
当 $x < -1$ 时, $|x-3| = 3-x > 4$.

当 $x > 3$ 时, $|x+1| = x+1 > 4$.

因此, 对一切实数 x , 恒有 $|x+1| + |x-3| \geq 4$,

所以原不等式有解, 必须 $a \geq 4$. 故选 B.

方法二: 画出 $y = |x+1| + |x-3|$ 与 $y = a$ 的图像:



可以看出 $a \geq 4$ 时,有解.

20. D; 因 a, b, c, d 都是正实数,所以

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 > \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a} > \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{c}{c+d},$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 < \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} < \frac{c+d}{d} \Rightarrow \frac{b}{a+b} > \frac{d}{c+d}.$$

21. A; 因为 $(ab + bc + ac)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a + b + c) = 0$, 所以

$$a + b + c = -\frac{1}{2}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) < 0.$$

因为 $a < b < c$, 所以 $a < 0$, 又 $abc = 1 > 0$, 所以 $b < 0, c > 0$, 所以

$$|a + b| = -a - b > c = |c|.$$

22. D; 易知 $a \neq 0$, 原方程可变形为 $x^2 + \left(1 + \frac{2}{a}\right)x + 9 = 0$, 记 $y = x^2 + \left(1 + \frac{2}{a}\right)x + 9$,

则这个抛物线开口向上, 因 $x_1 < 1 < x_2$, 故当 $x = 1$ 时, $y < 0$.

$$\text{即 } 1 + \left(1 + \frac{2}{a}\right) + 9 < 0, \text{ 解得 } -\frac{2}{11} < a < 0.$$

23. B; 由题设得: 由 $a + b \leq 59$ 及 $0.9b < a$ 得 $0.9b + b < 59$, 再由 $a + b \geq 56$ 及 $0.91b > a$ 得 $0.91b + b > 56$, 所以 $b = 30, 31$.

当 $b = 30$ 时, 由 $0.9b < a < 0.91b$, 得 $27 < a < 28$, 这样的正整数 a 不存在.

当 $b = 31$ 时, 由 $0.9b < a < 0.91b$, 得 $27 < a < 29$, 所以 $a = 28$, 故 $b^2 - a^2 = 177$.

24. A; 解方程 $\frac{2x+a}{x-2} = -1$ 得 $x = \frac{2-a}{3} > 0$, 所以 $a < 2$, 但 $x \neq 2$, 即 $\frac{2-a}{3} \neq 2$,

所以 $a \neq -4$, 故 $a < 2$ 且 $a \neq -4$.

25. D; $|2x-1| + |2x+3| = 4$, 两边都除以 2 得 $|x - \frac{1}{2}| + |x + \frac{3}{2}| = 2$.

$|x - \frac{1}{2}|$ 表示数轴上表示数 x 的点到表示 $\frac{1}{2}$ 的点之间的距离, $|x + \frac{3}{2}|$ 表示数轴上

表示数 x 的点到表示数 $-\frac{3}{2}$ 的点之间的距离, 显然, 当 $x < \frac{3}{2}$ 或 $x > \frac{1}{2}$ 时,

$$|x - \frac{1}{2}| + |x + \frac{3}{2}| > \left| \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| = 2,$$

而当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, $|x - \frac{1}{2}| + |x + \frac{3}{2}| = 2$, 又 $x_1 < x_2$, 所以 $-\frac{3}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2}$,

故 $-2 \leq x_1 - x_2 < 0$.

26. B; 令 $d = M - \Delta = (2ax_0 + b)^2 - (b^2 - 4ac)$

$$= 4a^2x_0^2 + 4ax_0b + b^2 - b^2 + 4ac = 4a(ax_0^2 + bx_0 + c).$$

因 x_0 是 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 所以 $d = 0$, 即 $\Delta = M$.

27. B; 因为方程有实数解, 故 $b^2 - 4ac \geq 0$. 由题意有 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = b^2 - 4ac$ 或者 $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = b^2 - 4ac$. 令 $u = \sqrt{b^2 - 4ac}$ 则得 $2au^2 - u + b = 0$ 或 $2au^2 + u + b = 0$, 因为 $u = \sqrt{b^2 - 4ac}$ 是其解, 所以方程的判别式非负, 即 $1 - 8ab \geq 0$, 即 $ab \leq \frac{1}{8}$.

28. B; 因方程有实根, 故 $\begin{cases} m^2 - 8n \geq 0, \\ 4n^2 - 4m \geq 0, \end{cases}$ 因此有 $m^4 \geq 64n^2 \geq 64m$, 则 $m(m^3 - 64) \geq 0$, 因 $m > 0$, 则 $m^3 \geq 64$, $m \geq 4$, 得 m 最小值是 4. 又 $n^4 \geq m^2 \geq 8n$, 得 $n \geq 2$, 即 n 的最小值为 2, 故 $m + n$ 的最小值为 6.

29. A; 原方程变为 $(x - a)(x - 8) = 1$, 则 $\begin{cases} x - a = 1, \\ x - 8 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - a = -1, \\ x - 8 = -1, \end{cases}$ 解得 $x = 9$ 或 7 , $a = 8$.

30. B; 因为 $x^2 + (n + 1)x + 2n - 1 = 0$ 的两根为整数, 所以它的判别式为完全平方式, 故可设 $\Delta = (n + 1)^2 - 4(2n - 1) = k^2$ (k 为非负整数), 即 $(n - 3)^2 - k^2 = 4$ 满足上式的 n, k 只能是下列情况之一:

$$\begin{cases} n - 3 + k = 4, \\ n - 3 - k = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} n - 3 + k = -1, \\ n - 3 - k = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} n - 3 + k = 2, \\ n - 3 - k = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} n - 3 + k = -2, \\ n - 3 - k = -2. \end{cases}$$

解得 $n = 1, 5$.

31. B; ① 当 $k = 0$ 时, $x = -1$, 方程有有理根.

② 当 $k \neq 0$ 时, 因方程有有理根, 所以若 k 是整数, 则 $\Delta = (k - 1)^2 - 4k = k^2 - 6k + 1$ 必为完全平方数, 即存在非负整数 m , 使 $k^2 - 6k + 1 = m^2$.

$$\text{配方得 } (k - 3)^2 - m^2 = 8 \Rightarrow (k - 3 + m)(k - 3 - m) = 8.$$

由 $k - 3 + m$ 与 $k - 3 - m$ 是奇偶性相同的整数, 其积为 8, 所以它们均为偶数,

$$\text{又 } k - 3 + m > k - 3 - m, \text{ 从而有 } \begin{cases} k - 3 + m = 4, \\ k - 3 - m = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k - 3 + m = -2, \\ k - 3 - m = -4. \end{cases}$$

得 $k = 6$ 或 $k = 0$ (舍去).

综合 ①② 可知, 方程 $kx^2 - (k - 1)x + 1 = 0$ 有有理根, 整数 k 的值为 $k = 0$ 或 $k = 6$.

二、条件充分性判断题

1. D; 设方程的两根为 x_1, x_2 , 则由题干可得 $|x_1 - x_2| = \sqrt{\Delta} = \Delta \Rightarrow \Delta = 0$ 或 1. 从而有 $\Delta = p^2 - 4 = 0$ 或 $1 \Rightarrow p^2 = 4$ 或 5. 故两个条件均充分.

2. D; 由条件(1) 及韦达定理可得 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4m + 1}{1 - 2m} = -1 \Rightarrow m = -1$; 由条件(2) 及韦达定理可得 $\frac{4m + 1}{1 - 2m} = 1 \Rightarrow m = 0$. 经验证, 方程的判别式均为正, 故都充分.

3. A; 由条件(1) 得 $|\alpha - \beta| = \sqrt{16 - 4(m - 1)} = 2\sqrt{2}$, 即得 $m = 3$; 由条件(2) 得 $(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 1$, 再结合题干得 $\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = m - 1$, 解得 $m = 16$. 但由于判别式 $\Delta = 16 - 4(m - 1) \geq 0$, 则只能取 $m = 3$, 则(1)充分.

4. A; (1) 由求根公式知, 当一根为 $\sqrt{5} - 2$ 时, 另一根为 $-2 - \sqrt{5}$, 再由韦达定理知 $(\sqrt{5} - 2)(-2 - \sqrt{5}) = n$, $(\sqrt{5} - 2) + (-2 - \sqrt{5}) = -m$, 解得 $n = -1, m = 4$, 则 $m + n = 3$, 充分; (2) 由求根公式知, 当一根为 $\sqrt{5} + 2$ 时, 另一根为 $2 - \sqrt{5}$, 再由韦达定理知 $(\sqrt{5} + 2)(2 - \sqrt{5}) = n$, $(\sqrt{5} + 2) + (2 - \sqrt{5}) = -m$, 解得 $n = -1, m = -4$, 则 $m + n = -5$, 不充分.

$$5. A; \text{由题干得} \begin{cases} \sqrt{2-x} < x-1 \Rightarrow x^2 - x - 1 > 0, \\ 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2, \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x \leq 2.$$

6. C; 显然单独不充分, 联合分析: $\begin{cases} x+y+z=0, \\ xyz < 0 \end{cases}$ 可知 x, y, z 中两正一负,

$$\text{不妨令 } x > 0, y > 0, z < 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + xz}{xyz} = \frac{xy + (x+y)z}{xyz} = \frac{xy - (x+y)^2}{xyz} = \frac{-\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{3}{4}y^2}{xyz} > 0.$$

$$7. D; \frac{2m+n}{m+n} > \frac{2m+q}{m+q} \Rightarrow \frac{m(q-n)}{(m+n)(m+q)} > 0.$$

由(1) 当 $a > 1$ 时, 以 a 为底的对数函数单调递增 $\Rightarrow 0 < n < q < m \Rightarrow q - n > 0$ 成立.

由(2) 当 $0 < a < 1$, 对数单调递减 $\Rightarrow 0 < n < q < m \Rightarrow q - n > 0$ 成立.

8. A; 令 $f(x) = |x-3| - |x+1|$.

当 $x < -1 \Rightarrow f(x) = 4, x > 3 \Rightarrow f(x) = -4, -1 \leq x \leq 3, f(x) = -2x + 2$.

$$(1) a = 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2 \leq 1, \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \text{ 或 } x > 3, \text{ 即得 } x \geq \frac{1}{2}.$$

(2) $a < 1 \Rightarrow f(x) < 1$ 不能取到 $x = \frac{1}{2}$, 则不成立.

9. A; 由题干 $(x+y)(y+z) = xy + y^2 + yz + xz = y(x+y+z) + xz$, 由(1) 得 $y(x+y+z) = \frac{1}{xz}$, 所以 $(x+y)(y+z) = \frac{1}{xz} + xz \geq 2$, 最小值为 2, 充分.

$$\text{由(2) 得 } y(x+y+z) = \frac{2}{xz},$$

所以 $(x+y)(y+z) = \frac{2}{xz} + xz \geq 2\sqrt{2}$, 不充分.

$$10. A; \text{方法一: 原方程可化为} \begin{cases} x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0, \\ x \geq -m. \end{cases}$$

令 $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1$, 要使方程在 $[-m, +\infty)$ 上有两个不相等的实根,

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = 4(m-1)^2 - 4(m^2 - 1) > 0, \\ f(-m) \geq 0, \\ -(m-1) > -m, \end{cases} \text{ 从而可解得 } \frac{1}{2} \leq m < 1.$$

方法二: (数形结合) 设 $y_1 = \sqrt{2x+1}, y_2 = x+m$, 在同一坐标系中作出两个函数的图像:

由方程 $x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$ 得两图像相切时,

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 4(m^2 - 1) = 0,$$

解得 $m=1$, 从而由图可知 $\frac{1}{2} \leq m < 1$ 时原方程有两个不相等的实根.

$$11. B; \sqrt{4-12x+9x^2} - \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(3x-2)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = |3x-2| - |x-1| = 4x-3, \text{ 得到 } \frac{2}{3} \leq x \leq$$

1 时成立, 所以(2) 的范围充分.

12. D; 原方程有一个大于 1 的根和一个小于 1 的根, 相当于抛物线 $y = (k^2 + 1)x^2 - (4-k)x + 1$ 与 x 轴的两个交点分在点(1,0) 的两旁, 因为 $k^2 + 1 > 0$, 抛物线开口向上, 所以当 $x=1$ 时, y 值小于 0 即可, 即

$$(k^2 + 1) - (4-k) + 1 < 0.$$

$$k^2 + k - 2 < 0,$$

$$(k+2)(k-1) < 0,$$

得 $-2 < k < 1$, 所以整数 k 的值只有 -1 和 0 .

13. D; 由题可得 $-a-4 < ax < -a$.

若 $a=0$, 则 $-4 < 0 < 0$, 不等式无解, 不合题意舍去.

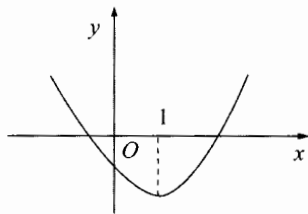
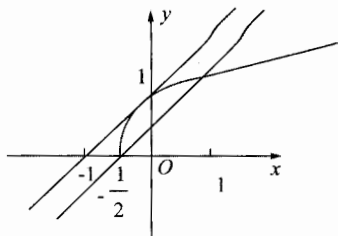
若 $a > 0$, 则 $-1 - \frac{4}{a} < x < -1$.

因为不等式有唯一整数解, 所以 $-3 \leq -1 - \frac{4}{a} < -2$, 即 $1 < \frac{4}{a} \leq 2$. 得 $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{4} < 1$, 即 $2 \leq a < 4$, 因此整数 a 值只能为 2 或 3.

若 $a < 0$ 则 $-1 < x < -1 - \frac{4}{a}$, 因为不等式有唯一整数解, 所以 $0 < -1 - \frac{4}{a} \leq 1$, 即 $1 < \frac{4}{-a} \leq 2$, 得 $\frac{1}{2} \leq \frac{-a}{4} < 1$, 即 $-4 < a \leq -2$, 因此整数 a 的值为 -2 或 -3 .

综上所述, a 的整数值为 ± 2 或 ± 3 .

另解: 由(1) $a = \pm 2$, 当 $a=2$ 时, 有 $|2x+4| < 2 \Rightarrow |x+2| < 1 \Rightarrow -3 < x < -1$, 故 x 只有一个整数 -2 , 当 $a=-2$ 时, 有 $|-2x| < 2 \Rightarrow -1 < x < 1$, 故 x 只有一个整数解 0 , 从而充分. 由(2) $a = \pm 3$, 当 $a=-3$ 时, 有 $|3x+5| < 2 \Rightarrow -\frac{7}{3} < x < -1$, 故 x 只有一个整数解 -2 , 当 $a=3$ 时, 有 $|-3x-1| < 2 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{3}$, 故 x 只有一个整数解 0 , 从而充分.

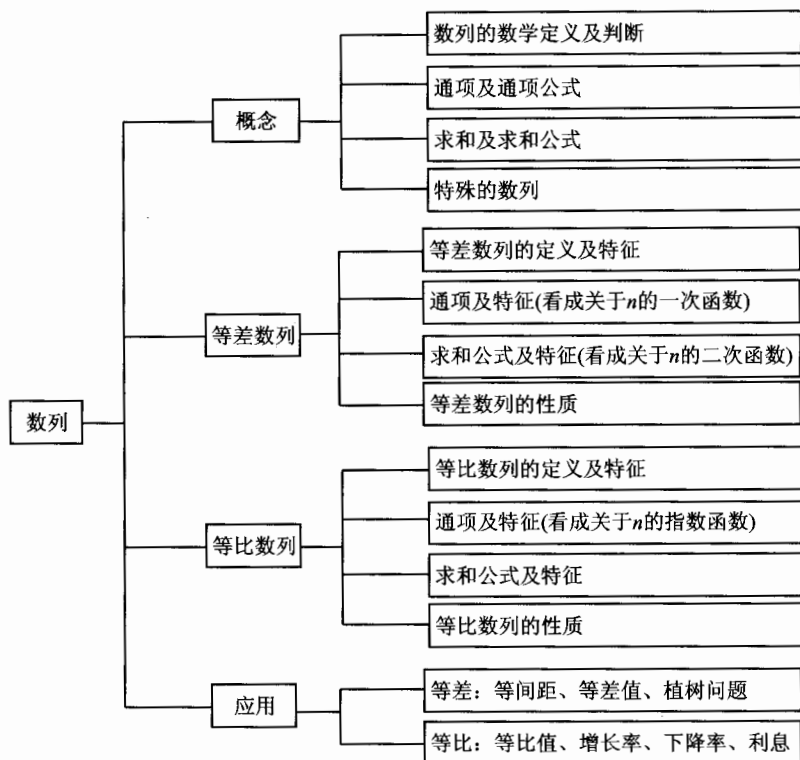


第五章 数 列

【大纲考点】数列、等差数列、等比数列。

【命题剖析】数列每年考 2~3 题,近年来对数列的考查逐渐由考查定义、概念向综合能力演变,试题灵活多变,从而向考生提出了更高的要求.只了解一般概念、会用几个基本公式已不可能达到联考的要求.试题大致分两类,一类是纯数列知识的基本计算题;另一类是中等以上难度的综合题应用题.从知识点看,近几年主要的命题热点有:(1) 关于等差、等比数列的概念、性质、通项公式、前 n 项和公式的应用是必考内容.(2) 从 a_n 到 S_n ,从 S_n 到 a_n 的关系推导计算.(3) 某些简单的递推式问题.(4) 应用前述公式解应用题.从解题思想方法的规律看,主要有:(1) 方程思想的应用,利用公式列方程(组),例如,等差、等比数列中的“知三求三”问题.(2) 函数思想的应用.(3) 待定系数法、分类讨论等方法的应用.

【知识体系】



【备考建议】对于教师,建议课时控制在 4~5 个课时;对于考生,在复习过程中,一定要重视数列这部分知识,对其要看成既是重点,又是难点,要适当地多花一点精力和时间,多做一些有益的练习,以求真正掌握这部分知识的精髓,达到一定的熟练程度.掌握数列一章,要深刻理解概念,重点抓住性质定理,学会灵活使用公式,熟练掌握规律,记住典型题型.

第一节 考试要点剖析

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

一、基本定义

1. 数列的定义

按一定次序排列的一列数叫做数列.

一般形式: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, 简记为 $\{a_n\}$.

【注意】它可以理解为以正整数集(或它的有限子集)为定义域的函数. 运用函数的观念分析和解决有关数列问题, 是一条基本思路. 递推是数列特有的表示法, 它更能反映数列的特征.

2. 通项公式

$a_n = f(n)$ (第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系).

【注意】并非每一个数列都可以写出通项公式; 有些数列的通项公式也并非唯一的.

3. 数列前 n 项和

记为 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

4. 数列的分类

(1) 按项分类

有穷数列, 项数有限; 无穷数列, 项数无限.

(2) 按 a_n 的增减性分类

递增数列 ($a_n > a_{n-1}$); 递减数列 ($a_n < a_{n-1}$); 摆动数列 (例: $-1, 1, -1, 1, \dots$); 常数数列 (例: $6, 6, 6, \dots$); 有界数列; 无界数列.

5. 递推公式

a_n 与其前后项之间的关系式称为递推公式.

若已知数列的递推关系式及首项, 可以写出其他项, 因此递推公式是确定数列的一种重要方式.

二、 a_n 与 S_n 的关系(数列的万能公式)

1. 已知 a_n , 求 S_n

公式: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

2. 已知 S_n , 求 a_n

$$a_n = \begin{cases} a_1 = S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$$

三、等差数列

1. 定义

如果在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} - a_n = d$ (常数) ($n \in \mathbf{N}$), 则称数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, d 为公差.

2. 通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_k + (n-k)d = dn + (a_1 - d).$$

当公差 d 不为零时, 可将其抽象成关于 n 的一次函数 $f(n) = dn + (a_1 - d)$, 其斜率为一次项系数 d , 一次函数各项系数之和为首项, 在 y 轴上的截距为 $(a_1 - d)$.

如: $a_n = 3n - 5$, 可知其通项公式的数列是一个等差数列, 且公差是 3, 首项为 -2.

3. 前 n 项和公式(重点)

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n.$$

当公差 d 不为 0 时, 可将其抽象成关于 n 的二次函数 $f(n) = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$.

其特点如下:

- (1) 常数项为零, 过零点;
- (2) 开口方向由 d 的符号决定;
- (3) 二次项系数为半公差 $\left(\frac{d}{2}\right)$;
- (4) 对称轴 $x = \frac{1}{2} - \frac{a_1}{d}$ (求最值);

(5) 若 d 不为零, 则等差数列的前 n 项和只能为二次函数; 若 d 等于零, 则退化成一次函数. 二次函数各项系数之和是首项.

【评注】等差数列的前 n 项和的解析表达式是不含常数项的二次函数. 如 $S_n = 3n^2 - 5n$, 可以肯定, S_n 是等差数列的前 n 项之和的表达式, 这一个等差数列的公差是 6, 首项是 -2.

【注意】如果 S_n 是一个含有常数项的二次函数, 则常数项被加在首项, 其余各项不变, 所以第一项与其余项不再构成等差数列, 但从第二项以后的各项仍然构成等差数列, 其特点仍符合上述规律.

如: $S_n = 2n^2 - 3n + 4$, $a_1 = S_1 = 3$, 以后的各项仍为等差数列, 公差为 4, 即 $S_n = 2n^2 - 3n + 4$ 所形成的数列为 3, 3, 7, 11, 15, 19, ...

【应用】如果一个数列的通项公式是 n 的一次函数, 则它的和为 n 的二次函数; 如果它的通项公式是 n 的二次函数, 则它的和为 n 的三次函数, 以此类推.

4. 等差数列的性质

$$(1) a_n = a_m + (n-m)d, d = \frac{a_n - a_m}{n - m}.$$

(2) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则数列 $\{\lambda a_n + b\}$ (λ, b 为常数) 为公差为 λd 的等差数列; 若 $\{b_n\}$ 也是公差为 d 的等差数列, 则 $\{\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n\}$ (λ_1, λ_2 为常数) 也是等差数列, 且公差为 $\lambda_1 d + \lambda_2 d$.

(3) 下标成等差数列且公差为 m 的项 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots$ 组成的数列仍是等差数列, 公差为 md .

(4) 若 $m, n, l, k \in \mathbf{Z}^+, m+n=l+k$, 则 $a_m + a_n = a_l + a_k$.

【注意】可以将此公式推广到多个, 但要满足两个成立条件: 一是下标之和要分别相等, 二是等号两端的项数要分别相等. 如 $a_2 + a_8 + a_{12} = a_4 + a_7 + a_{11} \neq a_6 + a_{16}$ (因为项数不同).

(5) 若 S_n 为等差数列的前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍为等差数列, 其公差为 $n^2 d$.

(6) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n (n \in \mathbf{Z}^+)$,

则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd, \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$ (a_n, a_{n+1} 为中间两项);

若数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n-1 (n \in \mathbf{Z}^+)$,

则 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n, \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{n-1}{n}, S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ (a_n 为中间项).

四、等比数列

1. 定义

如果在数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (常数), 则称数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, q 为公比.

2. 通项

$$a_n = a_1 q^{n-1} = a_k q^{n-k} = \frac{a_1}{q} q^n.$$

【注意】可以将其抽象成一个指数函数, 其中底数等于公比.

3. 前 n 项和公式

$$S_n = \begin{cases} na_1 (q=1), \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} (q \neq 0 \text{ 且 } q \neq 1). \end{cases}$$

【注意】 $q \neq 1$ 时, $\frac{S_n}{S_m} = \frac{1-q^n}{1-q^m}$.

4. 所有项和 S

对于无穷递缩等比数列 ($|q| < 1, q \neq 0$), 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $q^n \rightarrow 0$,

从而存在所有项和为 $S = \frac{a_1}{1-q}$.

5. 等比数列的性质

(1) $a_n = a_m q^{n-m}$.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ (q 为常数) 是等比数列, 则数列 $\{\lambda_1 a_n\}$ (λ_1 为常数) 是公比为 q 的等比数列; 若 $\{b_n\}$ 也是公比为 q_2 的等比数列, 则 $\{\lambda_1 a_n \cdot \lambda_2 b_n\}$ (λ_1, λ_2 为常数) 也是等比数列且公比为 $q \cdot q_2$.

(3) 下标成等差数列且公差为 m 的项 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots$ 组成的数列仍是等比数列, 公比为 q^m .

(4) 若 $m, n, l, k \in \mathbf{Z}^+, m+n=l+k$, 则 $a_m \cdot a_n = a_l \cdot a_k$.

【注意】可以将此公式推广到多个, 但要满足两个成立条件: 一是下标之和要分别相等, 二是等号两端的项数要分别相等. 如 $a_2 \cdot a_8 \cdot a_{12} = a_4 \cdot a_7 \cdot a_{11} \neq a_6 \cdot a_{16}$ (因为项数不同).

(5) 若 S_n 为等比数列前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍为等比数列, 其公比为 q^n .

(6) 当 $q \neq 1$ 时, $\frac{S_m}{S_n} = \frac{1-q^m}{1-q^n}$.

【注意】等比数列任一个元素均不能为零. 不为零的常数列既成等差数列, 也成等比数列.

第二节 基础过关题型

【题型 1】等差数列

【思路点拨】主要掌握等差数列的定义、元素特征、求和公式以及通项公式.

【例 1】在 -12 和 6 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成和为 -21 的等差数列, 则 n 为().

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

【解析】 $\sum_{i=1}^{n+2} a_i = \frac{n+2}{2}(-12+6) = -21 \Rightarrow (n+2) \times (-6) = -42 \Rightarrow n=5$, 选 B.

【例 2】在等差数列 a_n 中 $a_4=9, a_9=-6$, 则满足 $S_n=54$ 的所有 n 的值为().

(A) 4 或 9 (B) 4 (C) 9 (D) 3 或 8 (E) 8

【解析】记公差为 d , 则有 $d = \frac{a_9 - a_4}{9-4} = -3, a_1 = a_4 + (4-1)d = 9 \Rightarrow a_1 = 18, S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = -\frac{3}{2}n^2 + \left(18 + \frac{3}{2}\right)n = 54 \Rightarrow n^2 - 13n + 36 = 0 \Rightarrow n = 4$ 或 9 , 故选 A.

【例 3】设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 如果 $a_2=9, S_4=40$, 常数 c 为() 时, 数列 $\{\sqrt{S_n+c}\}$ 成等差数列.

(A) 4 或 9 (B) 4 (C) 9 (D) 3 (E) 8

【解析】由 $a_2=9, S_4=40$, 得 $a_1=7, d=2$, 所以 $a_n=2n+5, S_n=n^2+6n, \sqrt{S_n+c} = \sqrt{n^2+6n+c}$, 因此当 $c=9$ 时, $\sqrt{S_n+c} = n+3$ 是等差数列, 选 C.

【题型 2】等比数列

【思路点拨】主要掌握等比数列的定义、元素特征、求和公式以及通项公式.

【例 4】等比数列 $\{a_n\}$ 中的 $a_5+a_1=34, a_5-a_1=30$, 那么 a_3 等于().

(A) 5 (B) -5 (C) -8 (D) 8 (E) ± 8

【解析】 $\begin{cases} a_5+a_1=34, \\ a_5-a_1=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=2, \\ a_5=32 \end{cases} \Rightarrow a_3^2=a_1 \cdot a_5=64, \Rightarrow a_3=8$, 因为 a_1, a_3, a_5 同号, 所以

$a_3=-8$ (舍), 故选 D.

【例 5】若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 下面四个命题中:

- ① 数列 $\{a_n^2\}$ 也是等比数列; ② 数列 $\{a_{2n}\}$ 也是等比数列;
③ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 也是等比数列; ④ 数列 $\{|a_n|\}$ 也是等比数列

正确命题的个数是().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 0

【解析】① $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_n^2 = a_1^2 q^{2n-2}$
令 $a_n^2 = b_n, a_1^2 = b_1$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} a_n = a_1 q^{n-1} \\ a_n^2 = b_n \end{matrix}} \right\} \Rightarrow b_n = b_1 (q^2)^{n-1}$ 成立.

② $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{2n} = a_1 q^{2n-1}$
令 $a_{2n} = b_n, a_1 q = b_1$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} a_n = a_1 q^{n-1} \\ a_{2n} = b_n \end{matrix}} \right\} \Rightarrow b_n = b_1 (q^2)^{n-1}$ 成立.

③ $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 q^{n-1}}$
令 $\frac{1}{a_n} = b_n, \frac{1}{a_1} = b_1$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} a_n = a_1 q^{n-1} \\ \frac{1}{a_n} = b_n \end{matrix}} \right\} \Rightarrow b_n = b_1 (q^{-1})^{n-1}$ 成立.

④ $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow |a_n| = |a_1 q^{n-1}| = |a_1| |q^{n-1}| = |a_1| |q|^{n-1}$
令 $|a_n| = b_n, |a_1| = b_1$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} a_n = a_1 q^{n-1} \\ |a_n| = b_n \end{matrix}} \right\} \Rightarrow b_n = b_1 |q|^{n-1}$ 成立, 故

选 D.

【例 6】等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和等于 2, 紧接在后面的 $2n$ 项和等于 12, 再紧接其后的 $3n$ 项和为 S , 则 S 等于().

- (A) 112 (B) 112 或 -378 (C) -112 或 378
(D) -378 (E) -112

【解析】

$$\begin{cases} S_n = 2, \\ S_{3n} - S_n = 12, \\ S_{6n} - S_{3n} = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_n = 2, \\ S_{3n} = 14, \\ S_{6n} = 14 + S. \end{cases}$$

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{1 - q^{3n}}{1 - q^n} = q^{2n} + q^n + 1 = 7 \Rightarrow q^n = -3 \text{ 或 } 2, \frac{S_{6n}}{S_{3n}} = \frac{1 - q^{6n}}{1 - q^{3n}} = 1 + q^{3n} = -26 \text{ 或 } 9,$$

即 $S_{6n} = 126$ 或 -364 , 又 $S_{6n} = S + 14 \Rightarrow S = S_{6n} - 14 \Rightarrow S = 112$ 或 -378 , 选 B.

【题型 3】等差数列和等比数列

【思路点拨】本类问题将等差和等比数列结合出题, 考查两者的性质, 属于综合题目.

【例 7】已知数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列, 则 $\frac{a_1 + a_3 + a_9}{a_2 + a_4 + a_{10}}$ 为().

- (A) $\frac{9}{10}$ (B) 4 (C) -4 (D) $\frac{13}{16}$ (E) 无法确定

【解析】由 a_1, a_3, a_9 成等比得 $a_1 \cdot a_9 = a_3^2, a_1(a_1 + 8d) = (a_1 + 2d)^2, a_1^2 + 8a_1d = a_1^2 + 4a_1d + 4d^2, a_1d = d^2 \Rightarrow a_1 = d, a_n = a_1 + (n-1)d = nd$,

$$\text{原式} = \frac{a_1 + a_3 + a_9}{a_2 + a_4 + a_{10}} = \frac{a_1 + a_3 + a_9}{a_1 + a_3 + a_9 + 3d} = \frac{(1+3+9)d}{(1+3+9+3)d} = \frac{13}{16}, \text{选 D.}$$

【例 8】如果数列 $x, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, y$ 和数列 $x, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, y$ 都是等差数列, 则

$(a_2 - a_1)$ 与 $(b_4 - b_2)$ 的比值为().

- (A) $\frac{n}{2m}$ (B) $\frac{n+1}{2m}$ (C) $\frac{n+1}{2(m+1)}$ (D) $\frac{n+1}{m+1}$ (E) $\frac{n-1}{m+1}$

【解析】设两数列的公差分别为 a 和 b , 则有

$$x, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, y \Rightarrow \frac{a_2 - a_1}{y - x} = \frac{a}{(m+1)a} \Rightarrow a_2 - a_1 = \frac{y - x}{m+1};$$

$$x, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, y \Rightarrow \frac{b_4 - b_2}{y - x} = \frac{2b}{(n+1)b} \Rightarrow b_4 - b_2 = \frac{2(y - x)}{n+1};$$

$$\Rightarrow \frac{a_2 - a_1}{b_4 - b_2} = \frac{n+1}{2(m+1)}, \text{ 选 C.}$$

【例 9】4 个数, 前 3 个数成等差数列, 它们的和为 12, 后 3 个数成等比数列, 它们的和是 19, 则这 4 个数之积为().

- (A) 432 或 -18000 (B) -432 或 18000 (C) -432 或 -18000
(D) 432 或 18000 (E) 以上都不正确

【解析】方法一: 设第 2 个数为 a , 第 3 个数为 b , 记第 1 个、第 4 个分别为 x_1, x_4 .

$$\text{由 } x_1 + b = 2a \Rightarrow x_1 = 2a - b \text{ 且 } x_1 + a + b = 12;$$

$$\text{由 } ax_4 = b^2 \Rightarrow x_4 = \frac{b^2}{a} \text{ 且 } x_4 + a + b = 19;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b + a + b = 12, \\ \frac{b^2}{a} + a + b = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 12, \\ \frac{b^2}{a} + a + b = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4, \\ b = 6 \text{ 或 } -10. \end{cases}$$

$$\text{若 } a = 4, b = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2a - b = 2, \\ x_4 = \frac{b^2}{a} = 9 \end{cases} \Rightarrow 2 \times 4 \times 6 \times 9 = 432,$$

$$\text{若 } a = 4, b = -10 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2a - b = 18, \\ x_4 = \frac{b^2}{a} = 25 \end{cases} \Rightarrow 18 \times 4 \times (-10) \times 25 = -18000.$$

即 4 数之积为 432 或 -18000.

方法二: 设这 4 个数为 a, b, c, d , 则前 3 个数之和 $a + b + c = 3b = 12 \Rightarrow b = 4$,

$$\text{后 3 个数之和 } b + c + d = 4 + c + \frac{c^2}{4} = 19 \Rightarrow c = 6 \text{ 或 } -10.$$

(1) 当 $c = 6$ 时, $a = 2, d = 9$, 有 $abcd = 2 \times 4 \times 6 \times 9 = 432$.

(2) 当 $c = -10$ 时, $a = 18, d = 25$, 有 $abcd = -18000$, 所以选 A.

【题型 4】特殊数列求和

【思路点拨】采用对通项裂项, 进而采用相消求和法. 这是分解与组合思想在数列求和中的具体应用. 裂项法的实质是将数列中的每项(通项)分解, 然后重新组合, 使之能消去一些项, 最终达到求和的目的. 通项分解(裂项)如 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

【例 10】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \dots + \frac{n}{n+1}$, 又 $b_n = \frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 99 项的和为().

(A) $\frac{208}{35}$ (B) $\frac{208}{25}$ (C) $\frac{198}{35}$ (D) $\frac{188}{35}$ (E) $\frac{198}{25}$

【解析】因为 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \cdots + \frac{n}{n+1} = \frac{n}{2}$, 所以

$$b_n = \frac{2}{\frac{n}{2} \cdot \frac{n+1}{2}} = 8 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

因此数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n = 8 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = 8 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{8n}{n+1} \text{ (裂项求和)}, \text{ 故 } S_{99} = \frac{8 \times 99}{100} = \frac{198}{25}, \text{ 选 (E).}$$

【例 11】数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, 若前 n 项的和为 10, 则项数 n 为

().

(A) 119 (B) 120 (C) 121 (D) 122 (E) 124

【解析】由于 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, 所以

$$S_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1 = 10.$$

得到 $n=120$, 故选 B.

【例 12】求 $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\cdots 1}_{n \uparrow 1}$ 之和.

【解析】由于 $\underbrace{111\cdots 1}_{k \uparrow 1} = \frac{1}{9} \times \underbrace{999\cdots 9}_{k \uparrow 9} = \frac{1}{9} (10^k - 1)$ (找通项及特征), 所以

$$\begin{aligned} & 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\cdots 1}_{n \uparrow 1} \\ &= \frac{1}{9} (10^1 - 1) + \frac{1}{9} (10^2 - 1) + \frac{1}{9} (10^3 - 1) + \cdots + \frac{1}{9} (10^n - 1) \text{ (分组求和)} \\ &= \frac{1}{9} (10^1 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - \frac{1}{9} \underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \uparrow 1} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - \frac{n}{9} = \frac{1}{81} (10^{n+1} - 10 - 9n). \end{aligned}$$

【注意】先根据数列的结构及特征进行分析, 找出数列的通项及其特征, 然后再利用数列的通项揭示的规律求数列的前 n 项和, 是一个重要的方法.

【题型 5】数列与方程结合命题

【思路点拨】数列和方程结合的考题关键在于方程两根的关系与数列元素的特点.

【例 13】设 α, β 是方程 $x^2 + 28x + 36 = 0$ 的两根, 则 α 与 β 的等差中项 A 和等比中项 G 分别等于().

(A) $A = 14, G = 6$ (B) $A = -14, G = \pm 6$ (C) $A = 14, G = 36$
(D) $A = -14, G = \pm 36$ (E) $A = 14, G = \pm 6$

【解析】由题得
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -28 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = -14 = A, \\ \alpha\beta = 36 \Rightarrow \pm \sqrt{\alpha\beta} = \pm 6 = G, \end{cases} \quad \text{选 B.}$$

【例 14】已知 a, b, c 既成等差又成等比, 设 α, β 是方程 $ax^2 + bx - c = 0$ 的两根, 且 $\alpha > \beta$, 求 $\alpha^3\beta - \alpha\beta^3$ 等于().

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{5}$ (E) 无法确定

【解析】因为既成等差又成等比的数列为非零的常数列, 从而 $a = b = c \neq 0$, 原方程化为 $x^2 + x - 1 = 0$, 根据韦达定理: $\alpha^3\beta - \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha\beta[(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)] = (-1)[(-1)(\alpha - \beta)]$, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5$, 从而 $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, 所以原式 $= \sqrt{5}$, 选 B.

【例 15】已知方程 $x^2 + 3x = 0$ 的一个根是某等差数列的公差, 另一根为此数列的首项, 且此等差数列的 a_4 是 a_3, a_5 的比例中项, 则 a_n 的前 100 项之和为().

- (A) -320 (B) 200 (C) -200 (D) 300 (E) -300

【解析】设 $a_3 = a_4 - d, a_5 = a_4 + d$, 则有 $a_4^2 = a_3a_5 = (a_4 - d)(a_4 + d) = a_4^2 - d^2 \Rightarrow d = 0$; 而方程 $x^2 + 3x = 0$ 的根为 $-3, 0$.

从而 $d = 0, a_1 = -3$, 则有 $a_n = -3$, 故前 100 项之和为 -300 , 选 E.

第三节 强化突破题型

【题型 1】已知前 n 项和 S_n 或通项 a_n 或递推关系中的部分, 求其他.

【思路点拨】根据公式分析: $a_n = \begin{cases} a_1 = S_1 (n=1), \\ S_n - S_{n-1} (n \geq 2). \end{cases}$

【例 1】已知 $S_n = 2n^2 - 3n + 1$, 求 a_n .

【解析】当 $n = 1$ 时, $a_1 = 0$; 当 $a \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n - 5$.

把 $n = 1$ 代入 $a_n = 4n - 5$, 得 $a_1 = -1 \neq 0$, 因此 $a_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ 4n - 5, & n \geq 2. \end{cases}$

【例 2】已知 $a_1 = 1, S_n = n^2 a_n$, 求 a_n 及 S_n .

【解析】 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$, 从而有 $a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$.

因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}, a_4 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}, a_5 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}, \dots$,

$a_n = \frac{(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{(n+1)n(n-1) \times \dots \times 4 \times 3} = \frac{2}{n(n+1)}$, 得 $S_n = n^2 a_n = \frac{2n}{n+1}$.

【例 3】已知 $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$, 求 a_1, a_{n-1} 和 a_n 的关系式及通项公式 a_n .

【解析】 $a_1 = S_1 = 4 - a_1 - \frac{1}{2^{1-2}} \Rightarrow a_1 = 1$,

$$\begin{cases} S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}, & \text{①} \\ S_{n+1} = 4 - a_{n+1} - \frac{1}{2^{(n+1)-2}} & \text{②} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} - \textcircled{1}: a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}}, \text{ 即 } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^n}.$$

将上式两边同乘以 2^n 得 $2^n a_{n+1} = 2^{n-1} a_n + 1$, 即 $2^n a_{n+1} - 2^{n-1} a_n = 1$, 显然, $\{2^{n-1} a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 因此 $2^{n-1} a_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$, 得 $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

【例 4】已知 $a_1 = 3$ 且 $a_n = S_{n-1} + 2^n$, 求 a_n 及 S_n .

【解析】因为 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 所以 $S_n - 2S_{n-1} = 2^n$, 得 $\frac{S_n}{2^n} - \frac{S_{n-1}}{2^{n-1}} = 1$. 设 $b_n = \frac{S_n}{2^n}$, 则 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 因此 $b_n = b_1 + n - 1$. 又因为 $b_1 = \frac{S_1}{2} = \frac{a_1}{2} = \frac{3}{2}$, 所以 $\frac{S_n}{2^n} = n + \frac{1}{2}$, 从而 $S_n = (2n+1)2^{n-1}$. 当 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n+3)2^{n-2}$.

$$\text{因此 } a_n = \begin{cases} 3 & (n=1), \\ (2n+3) \cdot 2^{n-2} & (n \geq 2), \end{cases} \quad S_n = (2n+1)2^{n-1}.$$

【题型 2】数列的最值

【思路点拨】等差数列前 n 项和 $S_n = an^2 + bn$, 其中 a, b 为系数. 当公差 d 不为 0 时, 可将其抽象成关于 n 的二次函数 $f(n) = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$, 借助抛物线分析最值.

【例 5】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 表示前 n 项和, 若 $a_1 = 13$, $S_3 = S_{11}$, 则 S_n 的最大值是 ().

- (A) 42 (B) 49 (C) 59 (D) 133 (E) 不存在

【解析】由 $S_3 = S_{11}$ 得 $n=7$ 是 S_n 抛物线的对称轴, 故 对称轴 $7 = \frac{1}{2} - \frac{a_1}{d} = \frac{1}{2} - \frac{13}{d} \Rightarrow d = -2$. 所以 S_n 的最大值 $S_7 = \frac{d}{2} \times 7^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \times 7 = -49 + 14 \times 7 = 49$, 从而选 B.

【例 6】设 $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, 则 $f(n) = \frac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$ 的最大值是 ().

- (A) 50 (B) $\frac{1}{50}$ (C) 100 (D) $\frac{1}{100}$ (E) 不存在

【解析】由等差数列求和公式得 $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, $S_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, 所以

$$f(n) = \frac{S_n}{(n+32)S_{n+1}} = \frac{n}{n^2 + 34n + 64} = \frac{1}{n + 34 + \frac{64}{n}} = \frac{1}{(\sqrt{n} - \frac{8}{\sqrt{n}})^2 + 50} \leq \frac{1}{50}.$$

因此当 $\sqrt{n} = \frac{8}{\sqrt{n}}$, 即 $n=8$ 时, $f(n)_{\max} = \frac{1}{50}$, 故选 B.

【例 7】在各项为正的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_3 = 36$, $a_2 + a_4 = 60$, $S_n > 400$, 则 n 的最小值是 ().

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

【解析】因为 $a_1 a_3 = a_1^2 q^2 = 36$, 所以 $a_1 q = \pm 6$. 又因为 $a_2 + a_4 = a_1 q(1 + q^2) = 60$, 且 $1 + q^2 > 0$, 所以 $a_1 q > 0$, 所以 $a_1 q = 6$, $1 + q^2 = 10$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ q = 3. \end{cases}$ 当 $a_1 = 2, q = 3$ 时, $S_n =$

$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(3^n-1)}{2} > 400 \Rightarrow 3^n > 401, \text{ 所以 } n \geq 6 (\text{因为 } 3^5 = 243, 3^6 = 729), \text{ 故选 C.}$$

【题型 3】数列的性质

【思路点拨】 对于等比数列: $a_m a_n = a_p a_q$, 对于等差数列 $a_m + a_n = a_p + a_q$ ($m+n=p+q$); 对于等比(差)数列, $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$ 也成等比(差)数列.

【例 8】 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中的 a_1 与 a_{10} 是方程 $x^2 - 3x - 5 = 0$ 的两个根, 那么 $a_3 + a_8$ 等于().

- (A) 3 (B) 4 (C) -3 (D) -4 (E) -3 或 3

【解析】 $\begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 3 \\ \text{又 } a_3 + a_8 = a_1 + a_{10} \end{cases} \Rightarrow a_3 + a_8 = 3, \text{ 选 A.}$

【例 9】 在各项均为正数的等比数列中, 若 $a_5 a_6 = 9$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10}$ 的值是().

- (A) 8 (B) 10 (C) 16 (D) 9 (E) 18

【解析】 设 $S = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{10}$, 由等比数列的性质 $m+n=p+q \Rightarrow a_m a_n = a_p a_q$ 和对数的运算性质 $\log_a M + \log_a N = \log_a M \cdot N$ 得

$$\begin{aligned} S &= (\log_3 a_1 + \log_3 a_{10}) + (\log_3 a_2 + \log_3 a_9) + \cdots + (\log_3 a_5 + \log_3 a_6) \\ &= (\log_3 a_1 \cdot a_{10}) + (\log_3 a_2 \cdot a_9) + \cdots + (\log_3 a_5 \cdot a_6) \\ &= \log_3 9 + \log_3 9 + \cdots + \log_3 9 = 10, \text{ 选 B.} \end{aligned}$$

【例 10】 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_n > 0$, $a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_2 a_8 = 25$, 则 $a_3 + a_5$ 是().

- (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 2.5

【解析】 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 a_2, a_3, a_4 是等比数列, 所以 $a_3^2 = a_2 a_4, a_5^2 = a_2 a_8$. 则 $a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_2 a_8 = (a_3 + a_5)^2 = 25$, 又 $a_n > 0$, 所以 $a_3 + a_5 = 5$, 选 A.

【评注】 在等比数列中, 两项之积常能用到, 在解题时应注意运用等比中项.

【例 11】 已知等差数列 $\{a_n\}$, S_n 为前 n 项和, 若 $S_4 = 30, S_8 = 90$, 则 S_{12} 为().

- (A) 150 (B) 160 (C) 180 (D) 190 (E) 200

【解析】 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8$ 也是等差数列.

则 $2(S_8 - S_4) = S_4 + (S_{12} - S_8)$, 即 $2(90 - 30) = 30 + (S_{12} - 90)$, 得 $S_{12} = 180$, 选 C.

【评注】 等差数列的前 n 项和也构成一个等差数列, 即 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \cdots$ 为等差数列, 公差为 $n^2 d$.

【例 12】 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 它们的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{5n+3}{2n-1}$, 则 $\frac{a_5}{b_5}$ 为().

- (A) $\frac{48}{13}$ (B) $\frac{49}{15}$ (C) $\frac{48}{17}$ (D) $\frac{49}{19}$ (E) $\frac{49}{17}$

【解析】 本题先用两种方法推导重要公式:

$$\text{方法一: } \frac{a_n}{b_n} = \frac{2a_n}{2b_n} = \frac{(a_1 + a_{2n-1})}{(b_1 + b_{2n-1})} = \frac{\frac{1}{2}(2n-1)(a_1 + a_{2n-1})}{\frac{1}{2}(2n-1)(b_1 + b_{2n-1})} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{10n-2}{4n-3}.$$

根据上述公式得到 $\frac{a_5}{b_5} = \frac{S_9}{T_9} = \frac{5 \times 9 + 3}{2 \times 9 - 1} = \frac{48}{17}$, 选 C.

方法二: 因为由 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{5n+3}{2n-1}$, 所以可设 $S_n = kn(5n+3)$, $T_n = kn(2n-1)$.

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = k\{n(5n+3) - (n-1)[5(n-1)+3]\} = k(10n-2)$,

$b_n = S_n - S_{n-1} = k\{n(2n-1) - (n-1)[2(n-1)-1]\} = k(4n-3)$,

因此 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{k(10n-2)}{k(4n-3)} = \frac{10n-2}{4n-3}$, 得 $\frac{a_5}{b_5} = \frac{48}{17}$.

【评注】方法二是根据等差数列的前 n 项和为二次函数这个特征来求解的. 本题记住公式: 等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前项和分别用 S_n 和 T_n 表示, 则 $\frac{a_k}{b_k} = \frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$.

【题型 4】数列中的应用题

【思路点拨】等比数列和应用题结合的考题关键在于找出公比.

【例 13】从 2 kg 质量分数为 20% 的盐水容器中倒出 1 kg 盐水, 然后加入 1 kg 水, 以后每次都倒出 1 kg 盐水, 然后再加入 1 kg 水, 第 5 次倒出的 1 kg 盐水中含盐()g?

(A) 12.5 (B) 25 (C) 37.5 (D) 15 (E) 10

【解析】每次倒出的盐的质量所成的数列为 $\{a_n\}$, 则

$$a_1 = 0.2 \text{ kg}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \text{ kg}, \quad a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 0.2 \text{ kg}.$$

由此可见:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 0.2 \text{ kg},$$

$$a_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} \times 0.2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 0.2 = 0.0125 \text{ kg},$$

选 A.

【评注】可记住一个结论: 装有 v 升纯酒精的容器, 每次倒出 a 升, 再用水加满, 再倒出 a 升, 再用水加满, 如此继续下去, 则第 n 次后容器里还剩纯酒精为 $v\left(1 - \frac{a}{v}\right)^n$.

【例 14】有一个细胞基团, 每小时消亡 2 个, 余下的每个分裂成 2 个, 设最初有细胞 7 个, 则 6 个小时后的细胞个数为()个.

(A) 186 (B) 188 (C) 192 (D) 196 (E) 198

【解析】本题考查递推公式. 设 n 个小时后的细胞个数为 a_n , 则有 $a_n = 2(a_{n-1} - 2)$, 变形为 $a_n - 4 = 2(a_{n-1} - 4)$, 得到 $\frac{a_n - 4}{a_{n-1} - 4} = 2$, 可以将其看作 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = 2$, b_n 看作公比为 2 的等比数列. $a_1 = (7-2) \times 2 = 10$, 又由 $b_1 = a_1 - 4 = 6$, 所以 $b_n = 6 \cdot 2^{n-1}$, 则 $a_n = b_n + 4 = 3 \cdot 2^n + 4$. 数 $a_6 = 196$, 选 D.

【评注】 a_1 并不为 7, a_1 等于 $(7-2) \times 2 = 10$.

第四节 核心专题点睛

数列可以看作特殊的函数,函数的自变量就是 n , 所以将数列与函数相关的性质结合起来, 就可以发现很多简便的方法. 本章的考试内容及考试要求为: (1) 理解数列的概念, 了解数列通项公式的意义, 了解递推公式是给出数列的一种方法, 并能根据递推公式写出数列的前几项; (2) 理解等差数列的概念, 掌握等差数列的通项公式与前 n 项和公式, 并能解决简单的实际问题; (3) 理解等比数列的概念, 掌握等比数列的通项公式与前 n 项和公式, 并能解决简单的实际问题.

等差、等比数列前 n 项和的推导过程给出的分别为倒序相加法和错项相减法, 此外要掌握裂项法、拆项法等, 在求数列前 n 项和时, 尽量转化为等差、等比数列来求. 解答数列综合题特别是应用题的关键是如何转化为数学问题, 运用观察、归纳、猜想等手段, 建立起有关等差、等比数列、递推数列的模型来解决. 凡涉及利息、产量、价格等与增长率有关的问题, 均可转化为相应的数列问题.

一、等差数列

1. 通项 $a_n = a_1 + (n-1)d = a_k + (n-k)d = dn + (a_1 - d)$.

当公差 d 不为零时, 可将其抽象成关于 n 的一次函数 $f(n) = dn + (a_1 - d)$, 其斜率为一次项系数 d , 一次函数系数之和为首项, 在 y 轴上的截距为 $(a_1 - d)$. 通过分析发现, 等差数列所有元素共线.

2. 若 S_n 为等差数列前 n 项和, 当 $d \neq 0$ 时, S_n 为关于 n 的常数项为 0 的二次函数, 这个特点也是判断所给的 S_n 表达式能否作为等差数列的标志.

例如 $S_n = 2n^2 - 3n$ 可以作为等差数列, 但 $S_n = 2n^2 - 3n + 1$ 因为有常数项存在, 不能作为等差数列.

3. 能够快速计算等差数列的 S_n 与 a_n . 如果 $S_n = an^2 + bn$, 很快得到公差为 $2a$, 进而得到通项公式.

例如 $S_n = 2n^2 - 3n$, 得到 $d = 4$, $a_n = 4n - 5$.

4. 等差中项: a, b, c 成等差数列 $\Leftrightarrow 2b = a + c$.

如三个数成等差数列这类问题, 除了设 $a, a+d, a+2d$ 外, 还可设 $a-d, a, a+d$; 4 个数成等差数列时, 可设 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$.

二、等比数列

1. 通项 $a_n = a_1 q^{n-1} = a_k q^{n-k} = \frac{a_1}{q} q^n$.

当公差 q 不为 1 时, 可将其抽象成关于以 q 为底的指数函数 $f(n) = \frac{a_1}{q} q^n$, 其系数为 $\frac{a_1}{q}$.

2. 前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n = k - kq^n$, 其中 $k = \frac{a_1}{1-q}$.

若 S_n 为等比数列前 n 项和, S_n 为关于 n 的指数函数, 并且常数项与指数项系数互为相

反数,这个特点也是判断所给的 S_n 表达式能否作为等比数列的标志.

例如 $S_n = 2^n - 1$ 可以作为等比数列,但 $S_n = 2^n + 1$ 因为常数项与指数项的系数不互为相反数,不能作为等比数列.

3. 等比中项:非零实数 a, b, c 成等比数列 $\Leftrightarrow b^2 = ac$, 即 $b = \pm \sqrt{ac}$.

如 3 个数或 4 个数成等比数列且又知积时,则 3 个数时设为 $\frac{a}{q}, a, aq$; 4 个数时可设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, a, aq$.

三、常用递推数列求解

递推公式为 $a_{n+1} = qa_n + f(n)$ ($q \neq 0, f(n)$ 是非零常数,或一、二次函数,或指数型函数)的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式的求法.

(1) 当 $f(n)$ 是一个非零常数 d 时, $a_{n+1} = qa_n + d$.

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【分析】把常数 3 分配成两个数相加到 a_{n+1} 和 a_n 上,变成 $a_{n+1} + c = q(a_n + c)$ 的形式.

【解析】 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \Rightarrow$ 当 $n \geq 2$ 时, $a_n + 3 = 2(a_{n-1} + 3) \Rightarrow a_n + 3 = (a_1 + 3)2^{n-1}$.

因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = 2^{n+1} - 3$, 验证知符合 $n = 1$.

所以, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n+1} - 3$.

一般地, 如果数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a, a_{n+1} = qa_n + d$ ($q \neq 0, 1$), 可以把这个数列的每项都加上一个常数 c , 使它变成公比为 q 的等比数列, 即 $\{a_n + c\}$ 是公比为 q 的等比数列. 设 $a_n + c = q(a_{n-1} + c)$ ($n \geq 2$), 则 $a_n = qa_{n-1} + (q-1)c$, 对比当 $n \geq 2$ 时, $a_n = qa_{n-1} + d$, 得 $c = \frac{d}{q-1}$. 可得到

$$a_n + \frac{d}{q-1} = \left(a + \frac{d}{q-1}\right) q^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(a + \frac{d}{q-1}\right) q^{n-1} - \frac{d}{q-1} \Rightarrow a_n = \frac{aq^n + (d-a)q^{n-1} - d}{q-1}.$$

【评注】这种数列是把等比数列的各项加上一个常数后得到的数列,或者说成是等比数列平移后的数列. 在通项公式上的表现是,相邻两项是一次函数的关系.

(2) $a_{n+1} = qa_n + an + b$ ($q \neq 1$) 型.

与处理(1)类似,令 $a_{n+1} + s(n+1) + t = q(a_n + sn + t)$, 则 $a_{n+1} = qa_n + (q-1)sn + (q-1)t - s$, 对比 $a_{n+1} = qa_n + an + b$, 得 $\begin{cases} (q-1)s = a, \\ (q-1)t - s = b, \end{cases}$ 可得到 s, t 的值.

与处理 $a_{n+1} = qa_n + an + b$ ($q \neq 1$) 型类似,也可求出 $a_{n+1} = qa_n + an^2 + bn + c$ 型(相当于 $f(n) = an^2 + bn + c$ 型)的数列的通项公式.

四、常用的技巧

1. 等差数列的前 n 项和公式与通项公式的快速转化

公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$, 前 n 项和公式是 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2} = na_1 + \frac{d}{2}n(n-1) = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$.

当 $d \neq 0$ 时,通项公式是关于 n 的一次函数,前 n 项和的公式是关于 n 的二次函数.对比

$$a_n = dn + (a_1 - d) \text{ 与 } S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n, \text{ 可知}$$

前 n 项和公式变成通项公式是把 n 降次;通项公式变成前 n 项和公式是把 n 升次.

$$\text{一般地, } a_n = an + b \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}an^2 + \left(b + \frac{1}{2}a\right)n,$$

$$S_n = an^2 + bn \Rightarrow a_n = 2an + b - a.$$

$$\text{特别地, } S_n = an^2 + bn + c \Rightarrow a_n = \begin{cases} a + b + c, & n = 1, \\ 2an + (b - a), & n \geq 2, \end{cases} \text{ 若 } c \neq 0, \text{ 则数列从第二项起成}$$

等差数列.

2. 等比数列的前 n 项和公式与通项公式的快速转化

公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 当 $q \neq 1$ 时,前 n 项和公式为

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{a_1}{q-1}q^n + \left(-\frac{a_1}{q-1}\right).$$

由等比数列的通项公式求其前 n 项和公式,公比等于 1 的比较简单,公比等于 2 或 $\frac{1}{2}$

比较常用,在后面将要表述.当公比 $q \neq 1$ 时,也可以是 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$,可用口诀记为:末项乘以公比减去首项,再把差除以 $(q-1)$.这主要描述了前 n 项和公式与通项公式的关系.

当 $S_n = aq^n + b$,且 $a + b = 0$ ($abq \neq 0, q \neq 1$) 时,对比 $S_n = \frac{a_1}{q-1}q^n + \left(-\frac{a_1}{q-1}\right)$ 知, $a = \frac{a_1}{q-1}$, 从而 $a_1 = a(q-1)$. 即 $S_n = aq^n + b$,且 $a + b = 0 \Rightarrow a_n = a(q-1)q^{n-1}$. 若 $S_n = aq^n +$

b ,且 $a + b \neq 0$, 则 $a_n = \begin{cases} aq + b, & n = 1, \\ a(q-1)q^{n-1}, & n \geq 2, \end{cases}$ 此时的 a_1 不符合 $a_n = a(q-1)q^{n-1}$.

3. 公比是 2 或 $\frac{1}{2}$ 的等比数列中,序号连续的项的求法

对于等比数列 $\{a_n\}$, 当公比 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$, 当 $q = 2$ 时, $S_n = 2a_n - a_1$, 若公比为 $\frac{1}{2}$, 则倒序后变为公比是 2, 因而可归纳为:公比为 2 或 $\frac{1}{2}$ 的等比数列中,序号连续的项的和,等于绝对值最大的加数的 2 倍减去绝对值最小的加数.

如: $1 + 2 + 4 + 8 = 2 \times 8 - 1 = 15$;

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2048} = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2048} = \frac{2047}{2048}.$$

4. 非常手段求等差、等比数列的公差、公比

数列的项的序号应取正整数,若以每项的序号为横坐标,该项的值为纵坐标来描点,则等差数列的图像是一条直线上一系列孤立的点.等比数列的图像是一条指数型函数图像上一系列孤立的点.因而也可以把这两种数列的图像拓展为连续曲线,利用曲线上其他的点来确定一次函数或指数型函数中的参数.基于这个观点,可以让数列的项的序号取正整数外的

其他数,有时处理起问题来会显得更方便.尤其是在做选择题时,不需要参考解题过程评分,利用这样的方式来处理更准更快.

【例 2】等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_2=10$, $S_4=36$, 则 $\{a_n\}$ 的公差是().

(A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4 (E) 3

【解析】按常规,列出一个关于首项 a_1 和公差 d 的二元一次方程组,消去首项 a_1 , 解出公差 d 即可.

但如此处理会更快些: $S_2=10 \Rightarrow a_{1.5}=5$, $S_4=36 \Rightarrow a_{2.5}=9$. 于是, $d = \frac{a_{2.5} - a_{1.5}}{2.5 - 1.5} = \frac{9 - 5}{1} = 4$. 选(C).

【注意】公差实质上是直线的斜率. 可以利用直线上两个点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的纵坐标之差除以对应的横坐标之差, 即 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2)$, 或 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 \neq x_2)$. 在数列中, 利用两个点 $M(m, a_m), N(n, a_n)$, 可得 $d = \frac{a_m - a_n}{m - n} (m \neq n)$ 或 $d = \frac{a_n - a_m}{n - m} (m \neq n)$.

5. 记住一些有用的结论

如在等差数列中, 若 $a_p = q, a_q = p$, 则 $a_{p+q} = 0$; 若 $S_m = n, S_n = m$, 则 $S_{m+n} = -(m+n)$.

五、数列中的常见错误

【例 3】求和: $1+3+3^2+\cdots+3^n$.

【解析】容易误解: $S_n = \frac{1 \cdot (1-3^n)}{1-3} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

在数列试题中, 项数也是考查的内容之一, 该题实质上是求等比数列 $1, 3, 3^2, \cdots, 3^n$ 的前 $n+1$ 项的和, 因此 $S_{n+1} = \frac{1 \cdot (1-3^{n+1})}{1-3} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$.

【例 4】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = 3^n + 2$, 求通项 a_n .

【解析】误解: $a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n + 2) - (3^{n-1} + 2) = 2 \cdot 3^{n-1}$, a_n 与 S_n 的关系应为 $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2), \end{cases}$ 而 $a_1 = S_1 = 5$, 所以正确答案应为 $a_n = \begin{cases} 5 & (n=1), \\ 2 \cdot 3^{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$

【例 5】设 4 个实数成等比数列, 其积为 2^{10} , 中间两项的和为 4, 试求公比 q 的值.

【解析】误解: 设这四个数分别为 $\frac{a}{t^3}, \frac{a}{t}, at, at^3$ (其中 $(A) t$ 为实数), 由题意可知

$$\begin{cases} a^4 = 2^{10}, & ① \\ \frac{a}{t} + at = 4, & ② \end{cases}$$

由①得 $a^2 = 2^5$. ③

由②得 $a = \frac{4t}{t^2 + 1}$, 代入③并整理, 得 $2t^4 + 3t^2 + 2 = 0$.

因为 $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0$, 所以 t^2 不存在, 即所求 $q = t^2$ 不存在.

【注意】类似这种解法在许多资料中都出现过. 产生错误的原因是, 把处理等差数列问题的方法错误地迁移到等比数列中来. 众所周知, 在等差数列中若有连续四项, 可设这四项

为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$. 同样在等比数列中若有连续四项, 可设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3$, 而这

种设法只有当各项同号时才可以使用. 无此条件时应设为 $\frac{a}{q}, a, aq, aq^2$, 则由题意可知

$$\begin{cases} a^4 q^2 = 2^{10}, \\ a + aq = 4, \end{cases} \text{ 解之得 } q = -\frac{1}{2} \text{ 或 } q = -2.$$

【例 6】已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 4n - 25$, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和.

【解析】由 $a_n = 4n - 25 < 0$ 且 $a_{n+1} = 4(n+1) - 25 \geq 0$ 得 $n=6$. 由此可知, 数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项为负值, 从第 7 项起以后的各项均为正值.

当 $n \leq 6$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是以 -21 为首项, 4 为公差的等差数列.

所以

$$\begin{aligned} |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| &= -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= -\left[n(-21) + \frac{n(n-1)}{2} \times 4\right] \\ &= -2n^2 + 23n. \end{aligned}$$

对于任意自然数 $n(n \geq 7)$, 数列 $\{a_n\}$ 是以 -21 为首项, 4 为公差的等差数列. 因此, $n \geq 7$,

$$\begin{aligned} |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| &= -(a_1 + a_2 + \cdots + a_6) + a_7 + a_8 + \cdots + a_n \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_6) \\ &= 2n^2 - 23n - 2(2 \times 6^2 - 23 \times 6) \\ &= 2n^2 - 23n + 132, \end{aligned}$$

所以

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = \begin{cases} -2n^2 + 23n & (n \leq 6), \\ 2n^2 - 23n + 132 & (n \geq 7). \end{cases}$$

【注意】(1) 误认为数列 $\{|a_n|\}$ 是以 21 为首项, -4 为公差的等差数列, 事实上, 对于任意的正整数 n , 数列 $\{|a_n|\}$ 不构成等差数列, 它只能分段考虑后才能构成等差数列.

(2) 在 $n \geq 7$ 的求和时, 误认为数列 $\{|a_n|\}$ 是以 3 为首项, 4 为公差的等差数列. 事实上, 在数列 $\{|a_n|\}$ 中, 3 是它的第 7 项, 而不是第 1 项.

【例 7】已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = \frac{3}{2}, S_3 = 4\frac{1}{2}$, 求 a_1 .

【解析】当 $q=1$ 时, $a_1 = a_2 = a_3$, 此时正好有 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 4\frac{1}{2}$, 适合题意.

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, 依题意有 } \begin{cases} a_1 q^2 = \frac{3}{2}, \\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 4\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 解之得 } q^2 = \frac{1}{4}, a_1 = 6, \text{ 綜上得 } a_1 = \frac{3}{2} \text{ 或 } a_1 = 6.$$

$a_1 = 6$.

【注意】等比数列前 n 项和公式中一定要考虑公式适用条件 $q=1$ 或 $q \neq 1$, 否则导致失误. 若 $q=1$, 则 $S_n = na_1$; 若 $q \neq 1$, 则 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

第五节 阶梯化精炼题



扫码看视频

基础能力题

一、问题求解题

1. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} = 200$, S_{17} 的值为().
(A) 580 (B) 240 (C) 850 (D) 200 (E) 300
2. $\{a_n\}$ 为等差数列, 共有 $2n+1$ 项, 且 $a_{n+1} \neq 0$, 其奇数项之和 $S_{\text{奇}}$ 与偶数项之和 $S_{\text{偶}}$ 之比为().
(A) $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n+2}{n}$ (B) $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n+1}{n}$
(C) $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = 1$ (D) $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = n$ (E) $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = n+1$
3. 已知等差数列 $a_3 = 2, a_{11} = 6$; 等比数列 $b_2 = a_3, b_3 = \frac{1}{a_2}$, 则满足 $b_n > \frac{1}{a_{26}}$ 的最大 n 值为().
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
4. 数列 $1, 3, 7, 15, \dots$ 的通项公式 a_n 等于().
(A) 2^n (B) $2^n + 1$ (C) $2^n - 1$ (D) 2^{n-1} (E) 2^{n+1}
5. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 对于所有的 $n \geq 2, n \in \mathbf{Z}^+$ 都有 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n^2$, 则有 $a_3 + a_5 =$ ().
(A) $\frac{61}{16}$ (B) $\frac{25}{9}$ (C) $\frac{25}{16}$ (D) $\frac{31}{15}$ (E) $\frac{3}{2}$
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2}} (n \geq 3)$, 则 $a_5 =$ ().
(A) $\frac{55}{12}$ (B) $\frac{13}{3}$ (C) 4 (D) 5 (E) $\frac{3}{4}$
7. $\sqrt{2}, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, \sqrt{11}, \dots$, 则 $4\sqrt{2}$ 是该数列中的().
(A) 第 9 项 (B) 第 10 项 (C) 第 11 项 (D) 第 12 项 (E) 第 13 项
8. 设 $a_n = -n^2 + 10n + 11$, 则数列 $\{a_n\}$ 从首项到第()项的和最大.
(A) 10 (B) 11 (C) 10 或 11 (D) 12 (E) 5
9. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 + a_5 = 4, a_n = 33$, 则 n 为().
(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51 (E) 52
10. 首项为 -24 的等差数列, 从第 10 项开始为正数, 则公差 d 的取值范围是().
(A) $d > \frac{8}{3}$ (B) $d < 3$ (C) $\frac{8}{3} \leq d < 3$ (D) $\frac{8}{3} < d \leq 3$

(E) $\frac{8}{3} < d < 3$

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{10} < 0, a_{11} > 0$ 且 $a_{11} > |a_{10}|$, S_n 为其 n 项和, 则().

(A) S_1, S_2, \dots, S_{10} 都小于 0, S_{11}, S_{12}, \dots 都大于 0

(B) S_1, S_2, \dots, S_{19} 都小于 0, S_{20}, S_{21}, \dots 都大于 0

(C) S_1, S_2, \dots, S_5 都小于 0, S_6, S_7, \dots 都大于 0

(D) S_1, S_2, \dots, S_{20} 都小于 0, S_{21}, S_{22}, \dots 都大于 0

(E) 以上结论均不正确

12. 数列 $1, 3, \dots, 82, \dots$ 是().

(A) 等差数列, 而不是等比数列 (B) 等比数列, 而不是等差数列

(C) 等差数列, 又是等比数列 (D) 既非等差数列, 也非等比数列

(E) 公比为 3 的等比数列

13. 在 a 和 b ($a \neq b$) 两数之间插入 n 个数, 使它们与 a, b 成等差数列, 则该数列的公差为().

(A) $\frac{b-a}{n}$ (B) $\frac{b-a}{n+1}$ (C) $\frac{a-b}{n+1}$ (D) $\frac{b-a}{n+2}$ (E) 不确定

14. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为前 n 项和, 且 $S_5 < S_6, S_6 = S_7 > S_8$, 则下列结论错误的是().

(A) $d < 0$ (B) $a_7 = 0$ (C) $S_9 > S_5$

(D) S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值 (E) $S_5 = S_8$

15. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的 4 个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n|$ 等于().

(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{3}{2}$

16. 若 $2^a = 3, 2^b = 6, 2^c = 12$, 则 a, b, c 构成().

(A) 等差数列 (B) 等比数列

(C) 既是等差数列也是等比数列 (D) 不是等差数列也不是等比数列

(E) 以上结论均不正确

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = P^n$ ($P \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}^+$), 那么数列 $\{a_n\}$ ().

(A) 是等比数列 (B) 当 $P \neq 0$ 时是等比数列

(C) 当 $P \neq 0, P \neq 1$ 时是等比数列 (D) 不是等比数列

(E) 是等差数列

18. 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 下列命题正确的个数为().

① $\{a_n^3\}, \{a_{3n}\}$ 是等比数列;

② 若 $a_n > 0$, 则 $\{\ln a_n\}$ 成等差数列;

③ $\{a_n \cdot a_n\}, \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 成等比数列;

④ $\{ca_n\}, \{a_n \pm k\}$ ($k \neq 0$) 成等比数列.

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

19. 公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则其公比 q 为().
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) -3
20. 在公比为整数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 如果 $a_1 + a_4 = 18, a_2 + a_3 = 12$, 则这个数列前 8 项的和为().
 (A) 513 (B) 512 (C) 510 (D) $\frac{225}{8}$ (E) 360
21. 三个负数 a, b, c 成等差数列, 又 a, d, c 成等比数列, 且 $a \neq c$, 则 b 与 d 的大小关系为().
 (A) $b > d$ (B) $b = d$ (C) $b < d$ (D) 不能确定 (E) $b \geq d$
22. 若正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, 且 a_3, a_5, a_6 成等差数列, 则 $\frac{a_3 + a_5}{a_4 + a_6} =$ ().
 (A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 不确定 (E) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
23. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 10 项和 $S_{10} = 10$, 前 20 项和 $S_{20} = 30$, 则前 30 项和 S_{30} 等于().
 (A) 40 (B) 50 (C) 70 (D) 80 (E) 60
24. 等差数列 $-6, -1, 4, 9, \dots$ 中的第 20 项为().
 (A) 89 (B) -101 (C) 101 (D) -89 (E) 90
25. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{15} = 33, a_{45} = 153$, 则 217 是这个数列的().
 (A) 第 60 项 (B) 第 61 项
 (C) 第 62 项 (D) 不在这个数列中
26. 在 -9 与 3 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成和为 -21 的等差数列, 则 n 为().
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8
27. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_7 = 42, a_{10} - a_3 = 21$, 则前 10 项的 S_{10} 等于().
 (A) 720 (B) 257 (C) 255 (D) 259 (E) 260
28. 等差数列中连续 4 项为 $a, x, b, 2x$, 那么 $a : b$ 等于().
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ 或 1 (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{2}$ 或 1
29. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2n^2 - 3n$, 而 $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ 组成一新数列 $\{c_n\}$, 其通项公式为().
 (A) $c_n = 4n - 3$ (B) $c_n = 8n - 1$ (C) $c_n = 4n - 5$
 (D) $c_n = 8n - 9$ (E) $c_n = 4n + 1$
30. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是等差数列, 其中 $a_1 = 25, b_1 = 75$, 且 $a_{100} + b_{100} = 100$, 则数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 100 项和为().
 (A) 9000 (B) 9800 (C) 10000 (D) 10500 (E) 15000
31. 若等比数列的前三项依次为 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}$, 则第四项为().
 (A) 1 (B) $\sqrt[6]{2}$ (C) $\sqrt[9]{2}$ (D) $\sqrt[8]{2}$ (E) $\sqrt[7]{2}$
32. 公比为 $\frac{1}{5}$ 的等比数列一定是().

- (A) 递增数列 (B) 摆动数列 (C) 递减数列
(D) 各项同号 (E) 各项为正
33. 已知 $1, \sqrt{2}, 2, \dots$ 为等比数列, 当 $a_n = 8\sqrt{2}$ 时, 则 $n = (\quad)$.
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
34. 已知等比数列的公比为 2, 前 4 项的和为 1, 则前 8 项的和等于 (\quad) .
(A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21 (E) 23
35. 设 A, G 分别是正数 a, b 的等差中项和等比中项, 则有 (\quad) .
(A) $ab \geq AG$ (B) $ab < AG$ (C) $ab \leq AG$
(D) AG 与 ab 的大小无法确定 (E) $ab = AG$
36. 一个等比数列前 n 项和 $S_n = ab^n + c, a \neq 0, b \neq 0$ 且 $b \neq 1, a, b, c$ 为常数, 那么 a, b, c 必须满足 (\quad) .
(A) $a + b = 0$ (B) $c + b = 0$
(C) $a + c = 0$ (D) $a + b + c = 0$
(E) $b + c = 0$
37. 若 a, b, c 成等比数列, a, x, b 和 b, y, c 都成等差数列, 且 $xy \neq 0$, 则 $\frac{a}{x} + \frac{c}{y}$ 的值为 (\quad) .
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
38. $11 + 22 \frac{1}{2} + 33 \frac{1}{4} + 44 \frac{1}{8} + 55 \frac{1}{16} + 66 \frac{1}{32} + 77 \frac{1}{64} = (\quad)$.
(A) $308 \frac{15}{16}$ (B) $308 \frac{31}{32}$ (C) $308 \frac{63}{64}$
(D) $308 \frac{127}{128}$ (E) $308 \frac{7}{8}$
39. 设 $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (2k+1)$, 则 $S_{100} + S_{101} = (\quad)$.
(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 (E) 0
40. 无限数列求和 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots$ 为 (\quad) .
(A) $2 - \sqrt{2}$ (B) $2 + \sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ (E) $\sqrt{2} - 2$

二、条件充分性判断题

1. 方程组 $\begin{cases} x + y = a, \\ y + z = 4, \\ z + x = 2, \end{cases}$ 得 x, y, z 等差.

(1) $a = 1$.

(2) $a = 0$.

2. 方程 $(a^2 + c^2)x^2 - 2c(a + b)x + b^2 + c^2 = 0$ 有实根.

(1) a, b, c 成等差数列.

(2) a, c, b 成等比数列.

3. 数列 $6, x, y, 16$, 则前三项成等差数列, 后三项成等比数列.

(1) $4x + y = 0$.

(2) x, y 是 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 的两个解.

4. 可以确定递增等比数列 $\{a_n\}$ 中 a_{11} 的值.

(1) $a_1 a_9 = 64$.

(2) $a_3 + a_7 = 20$.

5. 在数列 $\{d_n\}$ 中 $d_1 = 1, d_2 = 2$, 前 n 项之和 $S_n = a + bn + cn^2$, 可以确定 $b < c$.

(1) $a = 3$.

(2) $a = \frac{1}{5}$.

6. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比是 $\frac{1}{2}$.

(1) $a_3 + a_4 + a_5 = 14$.

(2) $a_4 + a_5 + a_6 = 7$.

7. 对于数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$ 的值可确定.

(1) $a_1 + a_2 + a_{99} + a_{100} = 10$.

(2) $a_1 + a_2 + a_{97} + a_{98} = 12$.

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项和为 $S_{13} = 91$.

(1) $a_1 + a_9 = 13$.

(2) $a_2 + 2a_8 - a_4 = 14$.

9. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

(1) 非零实数 $a, x, b, 2x$ 是等差数列中相邻的四项.

(2) 非零实数 $a, x, b, 2x$ 是等比数列中相邻的四项.

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$), $a_3 + a_6 + a_{10} + a_{13} = 32$, 则 $a_m = 8$.

(1) $m = 10$.

(2) $m = 8$.

11. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 1$.

(1) 对于任意正整数 n , 都有 $a_{n+1} > a_n$.

(2) $a_1 > 0$.

基础能力题详解

一、问题求解题

1. C; $a_3 + a_{15} = a_1 + a_{17} = a_7 + a_{11}$, 得 $a_1 + a_{17} = 100$, 故 $S_{17} = \frac{(a_1 + a_{17}) \cdot 17}{2} = 850$.

2. B; 由题目可看出奇数项有 $n+1$ 项, 偶数项有 n 项, 奇数项首项为 a , 公差为 $2d$,

$$S_{\text{奇}} = (n+1)a_1 + \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} 2d = (n+1)(a_1 + nd),$$

$$S_{\text{偶}} = (a_1 + d)n + \frac{n(n-1)2d}{2} = n(a_1 + nd).$$

所以 $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n+1}{n}$.

3. C; 等差数列的公差 $d = \frac{a_{11} - a_3}{11 - 3} = 1/2 \Rightarrow a_{26} = \frac{27}{2} \Rightarrow \frac{1}{a_{26}} = \frac{2}{27}$.

又由题设可知: $b_2 = a_3 = 2, b_3 = \frac{1}{a_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}, b_1 = 6$,

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > \frac{2}{27} \Rightarrow n < 5, \text{ 所以 } n \text{ 最大值为 } 4.$$

4. C; 观察此数列的规律, 显然有 $a_n = 2^n - 1$.

5. A; 根据 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n^2$ 及 $a_1 = 1$, 可以得到 $a_2 = 4, a_3 = \frac{9}{4}, a_4 = \frac{16}{9}, a_5 = \frac{25}{16}$, 那么

有 $a_3 + a_5 = \frac{9}{4} + \frac{25}{16} = \frac{61}{16}$.

6. A; 根据 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2}} \quad (n \geq 3)$, 有 $a_3 = 3 + \frac{1}{1} = 4, a_4 = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$,
 $a_5 = \frac{13}{3} + \frac{1}{4} = \frac{55}{12}$.

7. C; 观察此数列的特点, 可以得到通项公式为 $a_n = \sqrt{2 + 3(n-1)} = \sqrt{3n-1}$, 故 $4\sqrt{2} = \sqrt{32} = \sqrt{3 \times 11 - 1}$, 为第 11 项.

8. C; $a_n = -n^2 + 10n + 11 = -(n-11)(n+1)$, 显然 $a_{11} = 0$, 前 10 项均大于 0, 故前 10 项或前 11 项的和最大.

9. C; $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 + a_5 = 4$, 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $a_2 + a_5 = a_1 + a_6 = 4$, 所以

$$a_6 = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}, 5d = a_6 - a_1 = \frac{10}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{3},$$

$$\frac{a_n - a_1}{d} = \frac{33 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 49, \text{ 所以 } n = 49 + 1 = 50.$$

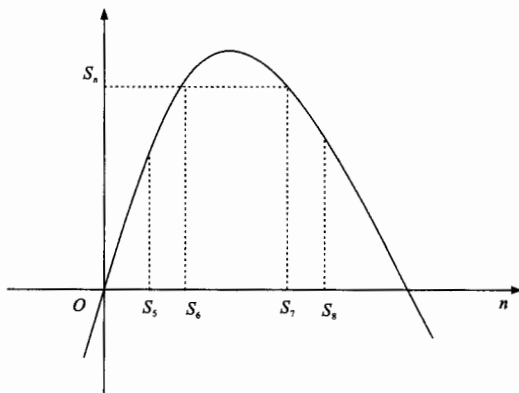
10. D; 根据题意有 $a_n = -24 + d(n-1)$, 那么有 $a_{10} = -24 + 9d > 0 \Rightarrow d > \frac{8}{3}$, 及
 $a_9 = -24 + 8d \leq 0 \Rightarrow d \leq 3$, 从而有 $\frac{8}{3} < d \leq 3$.

11. B; 显然 $S_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \times 19 = 19a_{10} < 0$, 而 $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = 10(a_{10} + a_{11}) > 0$.

12. D; 显然无法得到 $a_{n+1} - a_n = c$ 与 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = c$, 所以此数列既不是等差数列, 也不是等比数列.

13. B; 显然 a 为首项, 那么 b 为第 $n+2$ 项, 所以 $b = a + (n+1)d \Rightarrow d = \frac{b-a}{n+1}$.

14. C; 根据题意, 函数的图像可以画为:



故 $S_5 = S_8 > S_9$.

15. C; 根据题意, 方程的两个根为 $x^2 - 2x + m = 0$ 的两个根, 设为 x_1, x_2 ; 同理设 x_3, x_4

为 $x^2 - 2x + n = 0$ 的两个根,那么可以得到 x_1, x_3, x_4, x_2 是一个等差数列,故有 $x_1 = \frac{1}{4}$,

$$x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{7}{4}, \text{从而 } |m - n| = \left| \frac{1}{4} \times \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right| = \frac{1}{2}.$$

16. A;显然根据题意有 $a = \log_2 3, b = \log_2 6, c = \log_2 12$, 则有 $a + c = \log_2 3 + \log_2 12 = 2\log_2 6 = 2b$, 所以 a, b, c 构成等差数列.

17. D;显然 $P = 0$ 时, $S_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$, 显然不是等比数列;同理,当 $P = \pm 1$ 时也不是等比数列,所以 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

18. B; $\{a_n\}$ 是等比数列,那么显然有 $\{a_{3n}\}, \{a_n^3\}, \{a_{n+1} \cdot a_n\}, \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}, \{ca_n\} (c \neq 0)$ 仍然是等比数列,而 $\{a_n \pm k\} (k \neq 0)$ 不是等比数列;而 $\ln a_n = \ln(aq^{n-1}) = (n-1)\ln q + \ln a$, 一定是等差数列,从而①,②,③正确.

19. C;根据题意,有 $a_3 = a_2 + d, a_6 = a_2 + 4d$, 其中 $d \neq 0$, 则有 $a_3^2 = a_2 \cdot a_6$ 即 $a_2^2 + 2a_2d + d^2 = a_2(a_2 + 4d)$, 解得 $d = 2a_2, q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2 + d}{a_2} = \frac{a_2 + 2a_2}{a_2} = 3$.

20. C;根据题意,有 $\begin{cases} a_1 + a_1q^3 = 18, \\ a_1q + a_1q^2 = 12, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ q = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = 16, \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ (舍去), 故 $S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{2(1-2^8)}{1-2} = 510$.

21. C;显然 $d = \pm\sqrt{ac}$, 当 $d = \sqrt{ac}$ 时,显然有 $b < d$; 当 $d = -\sqrt{ac}$, 考虑, $-d > 0$ 及 $-b > 0, b = \frac{a+c}{2}$, 则 $-b = \frac{-a+(-c)}{2} \geq \sqrt{(-a)(-c)} = -d$, 即 $b \leq d$, 又 $a \neq c$, 所以 $b < d$, 故 $b < d$.

22. B;根据题意,有 $2a_3q^2 = a_3 + a_3q^3, q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去) 或 $q = 1$ (舍去), 又 $\frac{a_3 + a_5}{a_4 + a_6} = \frac{1+q^2}{q+q^3} = \frac{1}{q} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

23. C;根据题意,有 $\frac{S_{10}}{S_{20}-S_{10}} = \frac{S_{20}-S_{10}}{S_{30}-S_{20}}$, 即 $\frac{10}{30-10} = \frac{30-10}{S_{30}-30} \Rightarrow S_{30} = 70$.

24. A;显然此等差数列的通项公式为 $a_n = -6 + 5(n-1) = 5n - 11$, 所以 $a_{20} = 5 \times 20 - 11 = 89$.

25. B;根据题意,可以得到此数列的公差为 $\frac{153-33}{45-15} = 4$, 首项为 -23 , 故通项公式为 $a_n = 4n - 27$, 所以有 $4n - 27 = 217$, 解得 $n = 61$.

26. B;显然此数列共有 $n+2$ 项, 根据等差数列求和公式, 有 $S_{n+2} = \frac{-9+3}{2}(n+2) = -21$, 解得 $n = 5$.

27. C;根据题意,有 $\begin{cases} a_1 + a_1 + 6d = 42, \\ a_1 + 9d - (a_1 + 2d) = 21, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 12, \\ d = 3, \end{cases}$ 故 $S_{10} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = 120 + 45 \times 3 = 255$.

$$28. \text{ B; 显然有 } \begin{cases} b+a=2x, \\ b-a=2x-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x}{2}, \\ b=\frac{3x}{2}, \end{cases} \text{ 即 } a:b=1:3.$$

29. D; 显然新数列的首项是 a_1 , 公差是原数列公差的两倍, 而数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $d=4$, $a_1 - \frac{d}{2} = -3$, 即 $a_1 = -1$, 所以 $c_n = -1 + 8(n-1) = 8n - 9$.

30. C; 显然 $\{a_n + b_n\}$ 的前 100 项之和为 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 前 100 项之和的和, 则有 $S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \times 100 + \frac{b_1 + b_{100}}{2} \times 100 = \frac{a_1 + b_1 + a_{100} + b_{100}}{2} \times 100 = 10000$.

31. A; 显然此等比数列的通项为 $a_n = \sqrt{2} 2^{-\frac{1}{6}(n-1)} = 2^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}n}$, 故 $a_4 = 2^{\frac{2}{3} - \frac{4}{6}} = 1$.

32. D; 若 $a_1 > 1$, 显然此数列是递减数列; 若 $a_1 < -1$, 显然此数列是递增数列, 故此数列不一定是递增数列也不一定是递减数列, 由于 $q > 0$, 故各项同号, 从而选 D.

33. C; 显然此数列为 $a_n = 2^{\frac{n-1}{2}}$, $a_8 = 8\sqrt{2} = 2^{\frac{7}{2}}$, 故 $n=8$.

34. B; 根据题意, 有 $S_4 = 1 = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{15}$, 那么有 $S_8 = \frac{a_1(1-2^8)}{1-2} = 17$.

35. D; 根据题意, $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \pm \sqrt{ab}$, 若取 $G = \sqrt{ab}$, 有 $AG = \frac{a+b}{2} \sqrt{ab} \geq \sqrt{ab}$
 $\sqrt{ab} = ab$; 若取 $G = -\sqrt{ab}$, 则 $ab > 0 > AG$.

36. C; 等比数列前 n 项和为 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q} = ab^n + c$, 有 $a = -\frac{a_1}{1-q}$,
 $b = q, c = \frac{a_1}{1-q}$, 从而 $a + c = 0$.

37. B; 显然有 $b^2 = ac, a+b=2x, b+c=2y$, 则有

$$\frac{a}{x} + \frac{c}{y} = \frac{ay + cx}{xy} = \frac{\frac{1}{2}a(b+c) + \frac{1}{2}c(a+b)}{\frac{1}{4}(a+b)(b+c)} = 2 \times \frac{ab + 2ac + bc}{ab + 2ac + bc} = 2.$$

$$\begin{aligned} 38. \text{ C; } & 11 + 22 \frac{1}{2} + 33 \frac{1}{4} + 44 \frac{1}{8} + 55 \frac{1}{16} + 66 \frac{1}{32} + 77 \frac{1}{64} \\ &= 11 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \\ &= 11 \times 28 + \frac{63}{64} = 308 \frac{63}{64}. \end{aligned}$$

39. B; 依题意 $S_{100} = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + 197 - 199 + 201 = -2 \times 50 + 201 = 101$,
 $S_{101} = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + 201 - 203 = -2 \times 51 = -102$, 则 $S_{100} + S_{101} = -1$.

40. B; 可以看成是数列 $\{a_n = 2^{\frac{1-n}{2}}\}$ 的所有项和, 此数列的公比为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 故 $S = \frac{a_1}{1-q} =$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 + \sqrt{2}.$$

二、条件充分性判断题

1. B; 方法一: 根据条件解方程组. 由条件(1), 解出 $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}, z = \frac{5}{2}$, 不成等差数列, 不充分; 由条件(2), 解出 $x = -1, y = 1, z = 3$, 成等差数列, 充分.

方法二: 快速解法. 由题干入手, 若想使 x, y, z 成等差, 即 $x + z = 2y$ 成立, 从第三个方程得到 $y = 1$, 代入第二个方程得到 $z = 3$, 再代入第三个方程中, 得到 $x = -1$, 于是 $a = x + y = 0$.

2. B; 方法一: 方程有实根的条件是判别式 $\Delta \geq 0$, 又可求

$$\Delta = 4c^2(a+b)^2 - 4(a^2+c^2)(b^2+c^2) = -4(ab-c^2)^2 \Rightarrow \Delta \leq 0,$$

若题目成立则定有 $\Delta = 0 \Rightarrow c^2 = ab$, 所以 a, c, b 成等比数列.

方法二: 原式展开

$$a^2x^2 - 2acx + c^2 + c^2x^2 - 2bcx + b^2 = 0,$$

$$(ax - c)^2 + (cx - b)^2 = 0,$$

所以 $x = \frac{c}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow c^2 = ab$.

3. C; 由条件(1) 显然不能确定题设一定成立. 条件(2) $\Rightarrow x, y$ 的两组解, $x = 1, y = -4$ 或 $x = -4, y = 1$, 同样无法保证题设.

但通过两个的联立可得 $x = 1, y = -4$, 则可以使题设成立.

4. C; 根据数列的性质, 条件(1), 条件(2) 单独均不能确定这个等比数列. 且由条件(1) 可推出 $a_3a_7 = a_1a_9 = 64$, 因此两式联立可确定此数列.

5. D; 由题意可知: $S_1 = a + b + c = d_1 = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$,

$$S_2 = a + 2b + 4c = d_1 + d_2 = 3 \Rightarrow a + 2b + 4c = 3.$$

把所给条件 a 值代入可求出 b, c 值.

6. C; 两个条件, 单独任何一个都不能确定公比的值, 但两个条件联立可得公比为 $\frac{1}{2}$.

7. E; 此题的关键是题目并没有说明数列的特点, 即不知道是等差还是等比, 所以两个条件都是不充分的.

8. B; 由公式 $S_n = a_1n + \frac{n(n-1)}{2}d, S_{13} = 91 \Rightarrow a_1 + 6d = 7$.

由(1) $a_4 + a_9 = 13 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 13$, 不充分; 由(2) $a_2 + 2a_8 - a_4 = 14 \Rightarrow a_1 + 6d = 7$.

9. B; 由(1) 等差数列相邻四项, 则 $x - a = b - x = 2x - b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$;

由(2) 等比数列相邻四项, 则 $\frac{x}{a} = \frac{2x}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

10. B; 由等差数列性质得 $a_3 + a_{13} = a_6 + a_{10} = 2a_8$, 故由已知得 $4a_8 = 32 \Rightarrow a_8 = 8$, 由 $d \neq 0$, 故 $m = 8$.

11. C; 等比数列 $\{a_n\}, a_{n+1} > a_n, a_1 > 0 \Rightarrow q > 1$.

综合提高题



扫码看视频

一、问题求解

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 0, 但第三、第四、第七项构成等比数列, 则 $\frac{a_2 + a_6}{a_3 + a_7} = (\quad)$.

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) 1

2. 若 a, b, c 成等比数列, 那么函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (b \neq 0)$ 的图像与 x 轴交点的个数为 (\quad) .

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 1 或 2 (E) -1 或 2

3. 已知 a, b, c 成等差数列, 则二次函数 $y = ax^2 + 2bx + c$ 的图像与 x 轴的交点个数为 (\quad) .

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 1 或 2 (E) 0 或 1

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_m + a_{m+10} = a, a_{m+50} + a_{m+60} = b (a \neq b), m$ 为常数, 且 $m \in \mathbf{Z}^+$, 则 $a_{m+125} + a_{m+135} = (\quad)$.

- (A) $2b - a$ (B) $\frac{b - a}{2}$ (C) $\frac{5b - 3a}{2}$ (D) $3b - 2a$ (E) $3b + 2a$

5. 若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且整个数列的和 $S = S_n + 2a_n$, 则 $\{a_n\}$ 公比为 (\quad) .

- (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

6. 在等差数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 - b_4 - b_8 - b_{12} + b_{15} = 2$, 则 $b_3 + b_{13} = (\quad)$.

- (A) 16 (B) 4 (C) -16 (D) -4 (E) -2

7. 设各项为实数的等比数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, S_{10} = 10, S_{30} = 70$, 则 $S_{40} = (\quad)$.

- (A) 150 (B) -200 (C) 150 或 -200
(D) 400 或 -50 (E) -150

8. 等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+27} (n \in \mathbf{Z}^+)$, 则 $\frac{a_6}{b_6}$ 的值为 (\quad) .

- (A) $\frac{7}{4}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{78}{71}$ (E) $\frac{5}{4}$

9. 若关于 x 的方程 $x^2 - x + a = 0$ 和 $x^2 - x + b = 0 (a \neq b)$ 的 4 个根组成首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $a + b$ 的值是 (\quad) .

- (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{11}{24}$ (C) $\frac{13}{24}$ (D) $\frac{31}{72}$ (E) $\frac{7}{8}$

10. 等差数列前 n 项和为 210, 其中前 4 项的和为 40, 后 4 项的和为 80, 则 n 值

为().

- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

11. 设数列 $1, 1+2, 1+2+3, \dots$ 的前 n 项的和为 S_n , 则 $S_n = ()$.

- (A) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (B) $\frac{n(n+1)(n-2)}{6}$
(C) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (D) $\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$

(E) 以上结论均不正确

12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $S_4 = 1, S_8 = 4$. 设 $S = a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$, 则 $S = ()$.

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

13. 已知首项为 1 的无穷等比数列的所有项之和为 3, q 为其公比, 则 $q = ()$.

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{2}$

14. 设无穷等比数列所有奇数项之和为 15, 所有偶数项之和为 -3 , a_1 为其首项, 则 $a_1 = ()$.

- (A) $\frac{68}{5}$ (B) $\frac{72}{5}$ (C) $\frac{78}{5}$ (D) $\frac{84}{5}$ (E) $\frac{73}{5}$

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2$, 如果 $P_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = ()$.

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{2}$

16. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 + a_5 + a_8 = 39$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_8 + a_9$ 的值是().

- (A) 117 (B) 114 (C) 111 (D) 108 (E) 110

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 各项和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \frac{1}{2}$, 则 a_1 的取值范围是().

- (A) $(0, +\infty)$ (B) $(-\infty, 1)$
(C) $(0, 1)$ (D) $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(E) 以上结论均不正确

18. 某工厂 4 年来的产量, 第一年到第三年增长的数量相同, 这三年的总产量为 1500 件. 第二年到第 4 年每年增长的百分比相同, 这三年的总产量为 1820 件, 则这 4 年的总产量为().

- (A) 3000 件 (B) 2280 件 (C) 2260 件 (D) 2240 件 (E) 2220 件

19. 已知数列 $1 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 5, \dots$, 则 255 是它的().

- (A) 第 14 项 (B) 第 15 项 (C) 第 16 项 (D) 第 18 项 (E) 第 20 项

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} = 20$, 则 $S_{16} = ()$.

- (A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90 (E) 100

21. 方程 $\frac{2+4+6+8+\dots+2n}{1+3+5+7+\dots+(2n-1)} = \frac{2000}{1999}$ 的正整数解是().

- (A) 1998 (B) 1999 (C) 2000 (D) 2001 (E) 2008

22. 设 n 为正整数, 在 1 与 $n+1$ 之间插入 n 个正数, 使这 $n+2$ 个数成等比数列, 则所

插入的 n 个正数之积等于()。

- (A) $(1+n)^{\frac{n}{2}}$ (B) $(1+n)^n$ (C) $(1+n)^{2n}$
(D) $(1+n)^{3n}$ (E) $(1+n^2)^{\frac{n}{2}}$

23. $S = \frac{1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2}{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7}$, 则 S 的数值为()。

- (A) $\frac{11}{51}$ (B) $-\frac{22}{51}$ (C) $\frac{22}{51}$ (D) $-\frac{11}{51}$ (E) $-\frac{22}{255}$

24. $\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2007}} + \frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2008}}\right) \cdot (1+\sqrt{2008}) =$
()。

- (A) 2003 (B) 2004 (C) 2005 (D) 2006 (E) 2007

25. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n = \frac{2n-3}{3^n}$, 数列前 n 项和为()。

- (A) $S_n = -\frac{n}{3^n}$ (B) $S_n = 1 - \frac{n}{3^n}$ (C) $S_n = -\frac{n}{3^{n-1}}$
(D) $S_n = -\frac{n}{3^{n+1}}$ (E) $S_n = -\frac{n+1}{3^{n+1}}$

26. $\frac{(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{32}) + \frac{1}{2}}{3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times \cdots \times 3^{10}} =$ ()。

- (A) $\frac{1}{2} \times 3^{10} + 3^{19}$ (B) $\frac{1}{2} + 3^{19}$ (C) $\frac{1}{2} \times 3^{19}$
(D) $\frac{1}{2} \times 3^9$ (E) 3^9

27. 已知某等差数列共有 10 项, 其奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差为()。

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

28. 若互不相等的实数 a, b, c 成等差数列, c, a, b 成等比数列, 且 $a+3b+c=10$, 则 $a=$ ()。

- (A) 4 (B) 2 (C) -2 (D) -4 (E) 0

29. 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = 15$, $a_1 a_2 a_3 = 80$, 则 $a_{11} + a_{12} + a_{13} =$ ()。

- (A) 120 (B) 105 (C) 90 (D) 75 (E) 70

30. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{S_6}{S_{12}} =$ ()。

- (A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{9}$ (E) $\frac{1}{6}$

31. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 7$, $a_4 = 15$, 则前 10 项的和 $S_{10} =$ ()。

- (A) 100 (B) 210 (C) 380 (D) 400 (E) 420

32. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_8 = 8$, 则该数列前 9 项和 S_9 等于()。

- (A) 18 (B) 27 (C) 36 (D) 45 (E) 46

33. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是公差为 1 的等差数列, 其首项分别为 a_1, b_1 , 且 $a_1 + b_1 = 5$, $a_1, b_1 \in \mathbf{Z}^+$. 设 $c_n = a_{b_n} (n \in \mathbf{Z}^+)$, 则数列 $\{c_n\}$ 的前 10 项和等于().
- (A) 55 (B) 70 (C) 85 (D) 100 (E) 110
34. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 + a_3 + a_5 = 9, a_6 = 9$, 则这个数列的前 6 项和等于().
- (A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48 (E) 50
35. 设 $f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+10}$, 则 $f(n)$ 等于().
- (A) $\frac{2}{7}(8^n - 1)$ (B) $\frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$ (C) $\frac{2}{7}(8^{n+3} - 1)$
- (D) $\frac{2}{7}(8^{n+4} - 1)$ (E) $\frac{2}{7}(8^n + 1)$
36. 如果 $-1, a, b, c, -9$ 成等比数列, 那么().
- (A) $b=3, ac=9$ (B) $b=-3, ac=9$ (C) $b=3, ac=-9$
- (D) $b=-3, ac=-9$ (E) $b=\pm 3, ac=9$
37. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_{10}=3$, 则 $a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 =$ ().
- (A) 81 (B) $27\sqrt[5]{27}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 243 (E) 9
38. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 前 n 项和为 S_n , 若数列 $\{a_n + 1\}$ 也是等比数列, 则 S_n 等于().
- (A) $2^{n+1} - 2$ (B) $3n$ (C) $2n$ (D) $3^n - 1$ (E) $2^n - 1$

二、条件充分性判断题

1. $a_1 b_2$ 的值为 -15 .
- (1) $-9, a_1, -1$ 成等差数列. (2) $-9, b_1, b_2, b_3, -1$ 成等比数列.
2. 已知数列 $\{c_n\}$, 其中 $c_n = 2^n + 3^n$, 则 $\{c_{n+1} - p c_n\}$ 为等比数列.
- (1) $p=2$. (2) $p=3$.
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=1$, 则 $a_n=33$.
- (1) $a_2 + a_5 = 4, n=50$. (2) $a_8 - a_2 = 14, n=15$.
4. $\{a_n\}$ 为等差数列, 其中 $a_{10}=210, a_{31}=-280$, 则前 n 项之和 S_n 取得最大值.
- (1) $n=19$. (2) $n=18$.
5. a, b, c 成等比数列.
- (1) 方程 $\frac{a}{4}x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等实根, 且 $b \neq 0, c \neq 0$.
- (2) 正整数 a, c 互质, 且最小公倍数为 b^2 .
6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0, a_1 = 9d$, 则 a_k 是 a_1 和 a_{2k} 的等比中项.
- (1) $k=2$. (2) $k=4$.
7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则此数列的首项为 6.
- (1) $a_3 = \frac{3}{2}$. (2) $S_3 = \frac{9}{2}$.
8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 其前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2008} = -2008$.
- (1) $a_1 = -2008$. (2) $\frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2$.

9. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则能确定数列 $\{b_n\}$ 也一定是等差数列.

(1) $b_n = a_n + a_{n+1}$. (2) $b_n = n + a_n$.

10. 方程 $(a^2 + c^2)x^2 - 2c(a+b)x + b^2 + c^2 = 0$ 有实根.

(1) a, b, c 成等差数列. (2) a, c, b 成等比数列.

11. 在数列 $\{d_n\}$ 中 $d_1 = 1, d_2 = 2$, 前 n 项之和 $S_n = a + bn + cn^2$, 可以确定 $b < c$.

(1) $a = 3$. (2) $a = \frac{1}{5}$.

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $a_m \neq 0, a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0$, 则 $S_{2m-1} = 38$.

(1) $m = 10$. (2) $m = 20$.

13. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 13 项和为 $S_{13} = 91$.

(1) $a_4 + a_9 = 13$. (2) $a_2 + 2a_8 - a_4 = 14$.

14. 已知 a, b, c 为非零实数, 则 a, b, c 成等比数列.

(1) 一元二次方程 $\frac{a}{4}x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等实根.

(2) a, c 为不相等的质数, a, c 的最小公倍数为 b^2 .

15. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差为 -2 , S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{10} = 520$.

(1) $a_4 = 55$. (2) a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项.

16. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则公比为 4

(1) 数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 的公比为 16. (2) $a_{n+2} = 16a_n$.

17. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 15$.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n(3n - 2)$.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n(3n - 1)$.

综合提高题详解

一、问题求解题

1. A; $a_3 \cdot a_7 = a_4^2 \Rightarrow (a_4 - d)(a_4 + 3d) = a_4^2 \Rightarrow a_4 = \frac{3}{2}d$,

所以 $\frac{a_2 + a_6}{a_3 + a_7} = \frac{2a_4}{2a_5} = \frac{a_4}{a_5} = \frac{\frac{3}{2}d}{\frac{3}{2}d + d} = \frac{3}{5}$.

2. A; 此函数关键是判断是否有实根, $\Delta = b^2 - 4ac$, 所以 a, b, c 成等比数列, 所以 $\Delta = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$.

3. D; 根据题意, 有 $2b = a + c$, 且 $\Delta = 4b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2 \geq 0$, 故有一个交点, 或两个交点.

4. C; $a_m + a_{m+10} = a \Rightarrow 2a_m + 10d = a, a_{m+50} + a_{m+60} = b \Rightarrow 2a_m + 110d = b$. 联立之后可解出 a_m 和 d 的值, 进而得到 $a_{m+125} + a_{m+135} = 2a_m + 260d$ 的值.

5. B; 根据题设已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S = S_n + 2a_n$, 可知此数列为递减的, $S = \frac{a_1}{1 - q}$, 且 $S_1 = a_1$, 推出 $\frac{a_1}{1 - q} = 3a_1 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$.

6. D; 由于 $b_1 - b_4 - b_8 - b_{12} + b_{15} = b_1 + b_{15} - (b_4 + b_{12}) - b_8 = 2$, 故 $b_8 = -2, b_3 + b_{13} = 2b_8 = -4$.

7. A; 根据题意, 有 $\frac{S_{10}}{S_{20} - S_{10}} = \frac{S_{20} - S_{10}}{S_{30} - S_{20}} \Rightarrow S_{20} = -20$ (舍) 或 $S_{20} = 30$, 从而 $\frac{S_{20} - S_{10}}{S_{30} - S_{20}} = \frac{S_{30} - S_{20}}{S_{40} - S_{30}} \Rightarrow S_{40} = -200$ (舍) 或 $S_{40} = 150$.

【注意】要根据公式 $\frac{S_m}{S_n} = \frac{1 - q^m}{1 - q^n} \Rightarrow \frac{S_{20}}{S_{10}} = 1 + q^{10} > 0$ 进行分析, 舍掉增根, 否则容易错选.

8. D; $\frac{a_6}{b_5} = \frac{a_1 + a_{11}}{b_1 + b_{11}} = \frac{S_{11}}{T_{11}} = \frac{78}{71}$.

9. D; 根据题意, 方程 $x^2 - x + a = 0$ 的两个根设为 x_1, x_2 , 同理设 x_3, x_4 为 $x^2 - x + b = 0$ 的两个根, 那么可以得到 x_1, x_3, x_4, x_2 是一等差数列, 故有 $x_1 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{5}{12}, x_4 = \frac{7}{12}, x_2 = \frac{3}{4}$, 从而 $a + b = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{31}{72}$.

10. B; 根据题意有 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 120 \Rightarrow a_1 + a_n = 30$, 那么有 $\frac{30}{2}n = 210 \Rightarrow n = 14$.

11. A; $S_n = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + \cdots + n)$

$$= 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2}$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

【评注】 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

12. B; 根据题意, 有 $S = S_{20} - S_{16}$, 而 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8, S_{16} - S_{12}, S_{20} - S_{16}$ 又是一个新的等差数列, 故 $S_{12} = 9, S_{16} = 18, S_{20} = 27$, 故 $S = 9$.

13. A; 根据题意, 有 $3 = S = \frac{1}{1-q} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$.

14. B; 根据题意, 有 $\begin{cases} S_{奇} = \frac{a_1}{1-q^2} = 15, \\ S_{偶} = \frac{a_1 q}{1-q^2} = -3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = \frac{72}{5}, \\ q = -\frac{1}{5}. \end{cases}$

15. D; 根据题意, $S_n = n^2$, 则 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$.

16. A; 由 $a_2 + a_5 + a_8 = 39$ 知, $a_5 = 13$, 所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 + a_9 = 9a_5 = 117$.

17. D; 根据题意, 有 $\frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{2}$ 及 $|q| < 1$ 且 $q \neq 0$, 则有 $|2a_1 - 1| < 1$ 且 $a_1 \neq \frac{1}{2}$, 解得 $0 < a_1 < 1$ 且 $a_1 \neq \frac{1}{2}$.

18. E; 根据题意前三年产量成等差数列, 后三年成等比数列, 则 $a_1 + a_2 + a_3 = 1500 \Rightarrow$

$a_2=500, a_2+a_3+a_4=a_2+a_2q+a_2q^2=1820$, 解得 $q=\frac{6}{5}$ 或 $q=-\frac{11}{5}$ (舍去), 则 $a_4=a_2q^2=720$, 则 $a_1+a_2+a_3+a_4=1500+720=2220$.

19. B; 显然此数列为 $a_n=n(n+2)$, 则令 $n(n+2)=255$, 解得 $n=15$ 或 $n=-17$ (舍去).

20. C; 由 $a_4+a_7+a_{10}+a_{13}=20$ 知 $a_1+a_{16}=10$, 故 $S_{16}=\frac{a_1+a_{16}}{2}\times 16=80$.

21. B; $\frac{2+4+6+8+\cdots+2n}{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}=\frac{2\frac{1+n}{2}n}{\frac{2n-1+1}{2}n}=\frac{n+1}{n}=\frac{2000}{1999}$, 得 $n=1999$.

22. A; 形成的新数列是 $n+2$ 项, 则 $a_2\cdots a_{n+1}=(a_1a_{n+2})^{\frac{n}{2}}=(n+1)^{\frac{n}{2}}$.

23. D; $S=\frac{1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-8^2+9^2-10^2}{2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7}$

$$=\frac{(1+2)(1-2)+(3+4)(3-4)+\cdots+(9-10)(9+10)}{\frac{1-2^8}{1-2}}$$

$$=-\frac{3+7+11+15+19}{2^8-1}=-\frac{11}{51}.$$

24. E; 利用平方差公式去分母 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$, 同理, 则

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2007}}+\frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2008}}\right)\cdot(1+\sqrt{2008})$$

$$=[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{2007}-\sqrt{2006})+(\sqrt{2008}-\sqrt{2007})](1+\sqrt{2008})$$

$$=(\sqrt{2008}-1)(1+\sqrt{2008})=2007.$$

25. A; $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{2n-5}{3^{n-1}}+\frac{2n-3}{3^n}$, $3S_n=-1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{2n-3}{3^{n-1}}$, 两者做差, 有 $2S_n=-1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{2n-3}{3^n}=\frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}-1-\frac{2n-3}{3^n}$

$$=-\frac{2n}{3^n}$$
, 即 $S_n=-\frac{n}{3^n}$.

26. D; $\frac{(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{32})+\frac{1}{2}}{3\times 3^2\times 3^3\times 3^4\cdots\times 3^{10}}$

$$=\frac{(3-1)(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{32})+(3-1)\frac{1}{2}}{2\times 3^{1+2+\cdots+10}}$$

$$=\frac{(3^{64}-1+1)}{2\times 3^{55}}=\frac{1}{2}3^9.$$

27. C; $a_{10} - a_9 + a_8 - a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 5d = 30 - 15 \Rightarrow d = 3$.

28. D; 根据题意, 有
$$\begin{cases} 2b = a + c, \\ a^2 = bc, \\ a + 3b + c = 10, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -4, \\ b = 2, \\ c = 8. \end{cases}$$

29. B; $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = 15, a_1 a_2 a_3 = 80$, 则 $a_2 = 5$, $a_1 a_3 = (5-d)(5+d) = 16$, 所以 $d=3, a_{12} = a_2 + 10d = 35, a_{11} + a_{12} + a_{13} = 105$.

30. A; 由等差数列的求和公式可得 $\frac{S_3}{S_6} = \frac{3a_1 + 3d}{6a_1 + 15d} = \frac{1}{3}$, 可得 $a_1 = 2d$ 且 $d \neq 0$, 所以

$$\frac{S_5}{S_{12}} = \frac{6a_1 + 15d}{12a_1 + 66d} = \frac{27d}{90d} = \frac{3}{10}.$$

31. B; $d = \frac{a_4 - a_2}{4 - 2} = \frac{15 - 7}{2} = 4, a_1 = 3$, 所以 $S_{10} = 210$.

32. C; 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_8 = 8$, 即 $a_1 + a_9 = 8$, 则该数列前 9 项和 $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 36$.

33. C; 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是公差为 1 的等差数列, 其首项分别为 a_1, b_1 , 且 $a_1 + b_1 = 5, a_1, b_1 \in \mathbf{Z}^+$. 设 $c_n = a_{b_n} (n \in \mathbf{Z}^+)$, 则数列 $\{c_n\}$ 的前 10 项和等于

$$a_{b_1} + a_{b_2} + \cdots + a_{b_{10}} = a_{b_1} + a_{b_1+1} + \cdots + a_{b_1+9}, a_{b_1} = a_1 + (b_1 - 1) = 4,$$

所以 $a_{b_1} + a_{b_1+1} + \cdots + a_{b_1+9} = 4 + 5 + 6 + \cdots + 13 = 85$.

34. B; $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 + a_3 + a_5 = 3a_3 = 9, a_3 = 3, a_6 = 9$. 所以 $d=2, a_1 = -1$, 则这个数列的前 6 项和等于 $\frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 24$.

35. D; 依题意, $f(n)$ 为首项为 2, 公比为 8 的前 $n+4$ 项求和, 根据等比数列的求和公式.

【评注】本题 n 并不是从 1 开始, 首项相当于 $n = -3$.

36. B; 由等比数列的性质可得 $ac = (-1) \times (-9) = 9, b \times b = 9$ 且 b 与奇数项的符号相同, 故 $b = -3$.

37. A; 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = 1, a_{10} = 3$, 所以

$$a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 = (a_2 a_9)(a_3 a_8)(a_4 a_7)(a_5 a_6) = (a_1 a_{10})^4 = 3^4 = 81.$$

38. C; 因数列 $\{a_n\}$ 为等比, 则 $a_n = 2q^{n-1}$, 因数列 $\{a_n + 1\}$ 也是等比数列, 则

$$(a_{n+1} + 1)^2 = (a_n + 1)(a_{n+2} + 1) \Rightarrow a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = a_n a_{n+2} + a_n + a_{n+2} \Rightarrow a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} \Rightarrow a_n(1 + q^2 - 2q) = 0 \Rightarrow q = 1, \text{ 即 } a_n = 2, \text{ 所以 } S_n = 2n.$$

二、条件充分性判断题

1. E; 显然单独的条件(1)和条件(2)均不成立, 考虑联合, 则 $a_1 = -5, b_2 = -3$, 则 $a_1 b_2 = 15$, 显然不充分.

2. D; 条件(1), $p=2$ 时, $c_{n+1} - pc_n = 2^{n+1} + 3^{n+1} - 2(2^n + 3^n) = 3^n$, 仍然是等比数列; 条件(2), $p=3$ 时, $c_{n+1} - pc_n = 2^{n+1} + 3^{n+1} - 3(2^n + 3^n) = -2^n$, 也是等比数列.

3. E; 条件(1), 可得 $a_1 = 1, d = \frac{2}{5}$, 则 $a_{50} = 1 + 49 \times \frac{2}{5} = \frac{103}{5}$, 不充分; 条件(2), 可得 $a_1 = 1, d = \frac{7}{3}$, 则 $a_{15} = 1 + 14 \times \frac{7}{3} = \frac{101}{3}$, 不充分, 联合亦不可以.

4. D; 易得 $a_{19} = 0$, 所以 $S_{18} = S_{19}$ 均为最大.

5. D; 由题干 a, b, c 成等比数列, 则 $b^2 = ac$. 由(1) 方程 $\frac{a}{4}x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等实根, 得到判别式 $\Delta = b^2 - ac = 0$, 充分. 由(2) 互质的两个数的最小公倍数为这两个数的乘积, 得到 $b^2 = ac$, 充分.

6. B; 由 a_k 是 a_1 和 a_{2k} 的等比中项, $a_k^2 = a_1 a_{2k} \Rightarrow (a_1 + (k-1)d)^2 = a_1(a_1 + (2k-1)d) \Rightarrow (k+8)^2 d^2 = 9d(2k+8)d \Rightarrow k = 4$.

7. E; 设等比数列为 q , 联合(1)和(2), 得 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 = \frac{3}{2q^2} + \frac{3}{2q} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, $\Rightarrow q = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 6$ 或者 $q = 1 \Rightarrow a_1 = a_3 = \frac{3}{2}$, 故不充分.

8. C; 先由(2) 得 $\frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = \frac{\frac{(2a_1 + 11d)12}{2}}{12} - \frac{\frac{(2a_1 + 9d)10}{2}}{10} = 2 \Rightarrow d = 2$,

则联合条件, 得

$$S_{2008} = \frac{1}{2}(a_1 + a_1 + 2007d) \times 2008 = \frac{1}{2}(-2008 - 2008 + 2007 \times 2) \times 2008 = -2008.$$

9. D; 由(1) $b_n - b_{n-1} = a_n + a_{n+1} - a_{n-1} - a_n = 2d$ 成等差, 充分. 条件(2) $b_n - b_{n-1} = n + a_n - [(n-1) + a_{n-1}] = 1 + (a_n - a_{n-1}) = 1 + d$ 成等差, 充分.

10. B; $\Delta = 4c^2(a+b)^2 - 4(a^2+c^2)(b^2+c^2) = -4(ab-c^2)^2 \Rightarrow \Delta \leq 0$, 若题设成立有, $\Delta = 0$, 即 $c^2 = ab, a, c, b$ 等比.

11. D; 由题意可知: $\begin{cases} S_1 = a + b + c = d_1 = 1 \Rightarrow a + b + c = 1, \\ S_2 = a + 2b + 4c = d_1 + d_2 = 3 \Rightarrow a + 2b + 4c = 3, \end{cases}$ 把条件所给 a 的值代入可求出 b, c 的值, 可以确定 $b < c$.

12. A; 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_{m-1} + a_{m+1} = 2a_m = a_m^2$, 解得 $a_m = 2$, 则 $S_{2m-1} = \frac{2m-1}{2}(a_1 + a_{2m-1}) = (2m-1)a_m = 4m - 2 = 38$, 解得 $m = 10$.

13. B; 由公式 $S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}d$ 得 $S_{13} = 91 \Rightarrow a_1 + 6d = 7$, 由(1) $a_4 + a_9 = 13 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 13$; 由(2) $a_2 + 2a_8 - a_4 = 14 \Rightarrow a_1 + 6d = 7$, 充分.

14. D; 由(1) 得到: 判别式 $\Delta = b^2 - 4 \cdot \frac{a}{4} \cdot c = 0 \Rightarrow b^2 = ac$, 充分; 由(2) a, c 为不相等的质数, 则 a, c 的最小公倍数为两数乘积, 故 $b^2 = ac$, 充分.

15. A; 由条件(1) 得 $a_1 = 61$, 进而得 $S_{10} = 520$, 可知充分; 由条件(2) 得 $(a_3 + 4d)^2 = a_3(a_3 + 6d)$, 再结合题干得 $a_1 = 20$, 从而 $S_{10} = 110$, 不充分.

16. E; 由条件(1) 数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 的公比 $\frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = q^2 = 16 \Rightarrow q = \pm 4$, 不充分; 由条件

(2) 得 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = q^2 = 16 \Rightarrow q = \pm 4$, 不充分.

17. D; 由条件(1) 得, $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10} = -1 + 4 - 7 + 10 + \cdots - 25 + 28 = 3 \times 5 = 15$, 充分; 由条件(2) 得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10} = -2 + 5 - 8 + 11 + \cdots - 26 + 29 = 3 \times 5 = 15$, 充分.

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

第三部分 几 何

【画龙】本部分在考试中占5~6个题目,其中第六章占2个题目,主要围绕图形的长度和面积计算,以及三角形形状的判断;第七章占2~3个考题,主要围绕三个距离(两点、点到直线、两平行直线),两个长度(弦长、切线长),三个位置关系(直线与直线、直线与圆、圆与圆),两类对称(中心对称、轴对称)。第八章占1个考题,主要围绕立体图形的表面积和体积计算。

【点睛】本部分是这几部分中相对容易拿分的内容,也是复习性价比较高的部分,属于低投入高产出的考点。本部分建议用五周时间复习,第六章用一周时间学习,第七章用两周时间学习,第八章用一周时间学习,最后再用一周时间系统归纳总结。

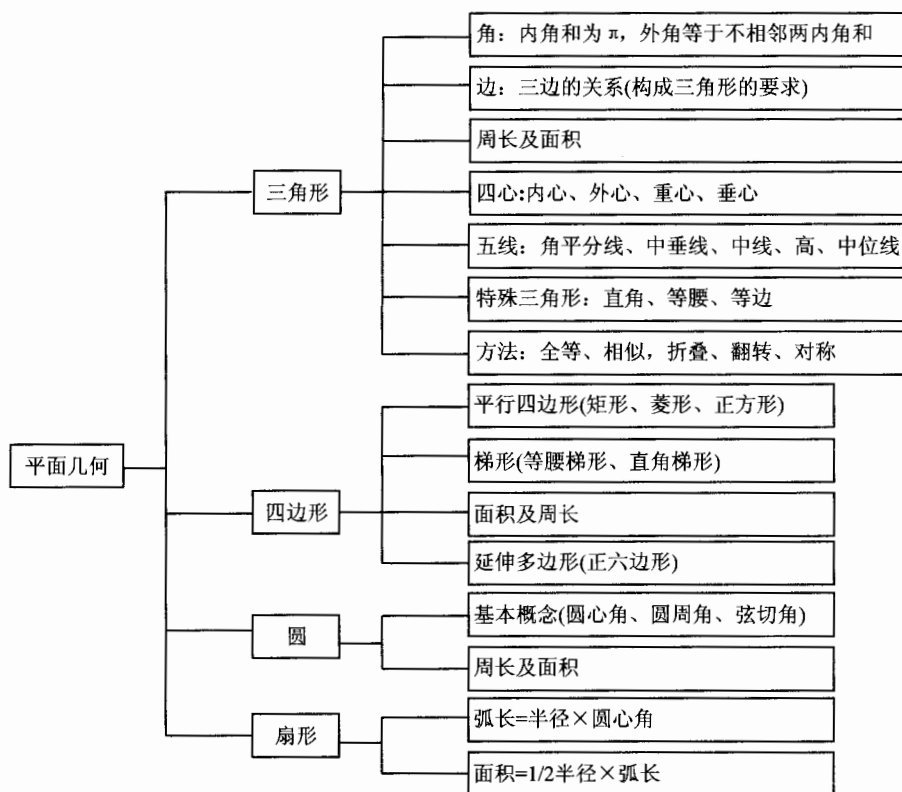
2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程
6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)
名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

第六章 平面几何

【大纲考点】平面图形：三角形、四边形(矩形、平行四边形、梯形)、圆形与扇形。

【命题剖析】几何是数学中的一个分支,与前面的实数、式子、方程和不等式等有很大的差别,它不仅要求一定的逻辑判断、推理能力,更要求对几何图形有一定的空间想象能力.简言之,它是建立在空间想象能力基础上的演绎推理和数学计算.平面几何主要考查三角形、四边形、圆形以及多边形等平面几何图形的角度、周长、面积等的计算和运用.命题主要围绕几何图形的面积计算.所考查的图形一般不会是简单的三角形、四边形或圆,而是由这些基本图形所构成的组合图形,只要能快速地把所求面积图形分解为熟悉的图形,问题就迎刃而解.因此考试的难点是对图形的拆分,考试一般考组合图形(阴影部分面积),这就要求考生能够快速地把所求复杂图形或拆分或割补成几个简单熟悉的图形.

【知识体系】



【备考建议】对于教师,建议课时控制在6个课时;对于考生,建议在学习时要注意几何的解题思路一般要建立在直观的图形基础上,从图形入手,找到已知量与所求量的关系(有时需要做辅助线),进而通过简单的计算即可找到正确答案.所以几何中的基本公式必须熟记、灵活应用.

第一节 考试要点剖析

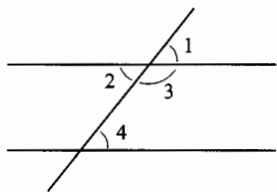
一、平行直线

1. 一直线和平行线夹的角

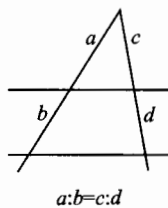
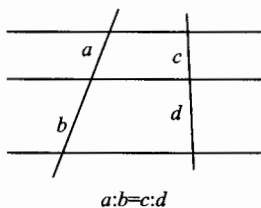
如下图所示: $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 同位角, 同位角相等;

$\angle 2$ 与 $\angle 4$ 是内错角, 内错角相等;

$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 同旁内角, 同旁内角互补.



2. 直线被一组平行线截得的线段成比例



二、三角形

1. 三角形的角

内角之和为 180° , 外角等于不相邻的两个内角之和.

2. 三边关系

任意两边之和大于第三边, 即 $a+b>c$; 任意两边之差小于第三边, 即 $a-b<c$.

3. 面积公式

$$S = \frac{1}{2}ah = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}ab\sin C, p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

其中, h 是 a 边上的高, C 是 a, b 边所夹的角, p 是三角形的半周长.

4. 特殊三角形(直角、等腰、等边)

(1) 直角三角形

勾股定理: $c^2 = a^2 + b^2$;

常用的勾股数: (3, 4, 5); (6, 8, 10); (5, 12, 13); (7, 24, 25); (8, 15, 17);

等腰直角三角形的三边之比: $1 : 1 : \sqrt{2}$;

内角为 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 的三边之比: $1 : \sqrt{3} : 2$;

(2) 等边三角形高与边的比: $\sqrt{3} : 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$.

【注意】等边三角形的面积: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 其中 a 为边长.

5. 三角形的全等、相似

三角形的全等, 数学语言表达就是两个三角形等价, 这样的两个三角形具有相同的边长、角、面积等.

三角形的相似, 重点考查的不再是判断两个三角形相似与否, 而是相似的性质(如下), 并且相似三角形的性质完全可以延伸到其他的相似图形.

(1) 相似三角形(相似图形)对应边的比相等(即为相似比), $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$.

(2) 相似三角形(相似图形)的高、中线、角平分线的比也等于相似比.

(3) 相似三角形(相似图形)的周长比等于相似比, 即 $\frac{C_1}{C_2} = k$.

(4) 相似三角形(相似图形)的面积比等于相似比的平方, 即 $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.

6. 三角形的“四心”

(1) 内心: 内切圆圆心, 三条角平分线的交点.

【应用】内心到三边距离相等.

(2) 外心: 外接圆圆心, 三条边的垂直平分线(中垂线)的交点.

【应用】外心到三个顶点距离相等.

(3) 重心: 三条中线的交点.

【应用】重心将中线分为 2:1 两段.

(4) 垂心: 三条高线的交点.

【注意】等边三角形的“四心”合一.

三、四边形

1. 平行四边形

平行四边形两边长是 a 、 b , 以 b 为底边的高为 h , 面积为 $S = bh$, 周长 $C = 2(a + b)$.

2. 矩形

矩形两边长为 a 、 b , 面积为 $S = ab$, 周长 $C = 2(a + b)$, 对角线 $l = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. 菱形

四边边长均为 a , 以 a 为底边的高为 h , 面积为 $S = ah = \frac{1}{2}l_1l_2$, 其中, l_1 、 l_2 分别为对角

线的长,周长为 $C=4a$.

4. 梯形

上底为 a , 下底为 b , 高为 h , 中位线 $l=\frac{1}{2}(a+b)$, 面积为 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$.

四、圆

1. 角的弧度

把圆弧长度和半径的比值称为对一个圆周角的弧度.

度与弧度的换算关系: $1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度}$.

几个常用的角:

角度	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°
弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π

2. 圆

圆的圆心为 O , 半径为 r , 则周长为 $C=2\pi r$, 面积是 $S=\pi r^2$.

五、扇形

1. 扇形弧长

$$l = r\theta = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r,$$

其中, θ 为扇形角的弧度数, α 为扇形角的角度, r 为扇形半径.

2. 扇形面积

$$S = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{1}{2}lr,$$

α 为扇形角的角度, r 为扇形半径, l 为扇形弧长.

【注意】扇形面积公式可以和三角形面积公式类比记忆.

六、正多边形

一般多边形的内角和(凸多边形): $(n-2) \cdot 180^\circ$, 其中 n 为多边形的边数.

一般多边形的面积计算: 连接各顶点和多边形中心, 分解为 n 个三角形, 有

$$S_{\text{多}} = \sum_{i=1}^n S_i.$$

【注意】2012 年真题出现过正六边形.

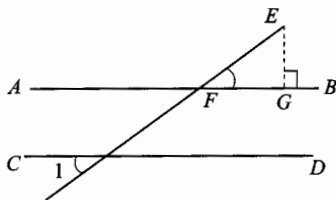
第二节 基础过关题型

【题型1】确定角度

【思路点拨】掌握并灵活应用平行线、特殊三角形、特殊四边形及圆形的性质，并能快速看出各图形之间的关系。

【例1】如图， $AB \parallel CD$ ， $EG \perp AB$ ，垂足为 G ，若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle E$ 等于()。

- (A) 30° (B) 40° (C) 50° (D) 60° (E) 75°

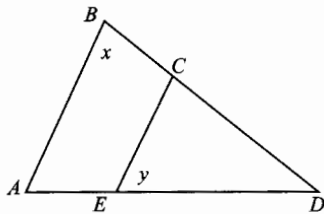


【解析】根据平行线的性质，内错角相等、同位角相等知 $\angle 1 = \angle EFB$ ，有 $\angle E = 90^\circ - \angle EFB = 40^\circ$ ，选 B。

【评注】注意一条直线和一组平行线相交所形成的角及各角之间的关系。

【例2】在图形中，若 $AB \parallel CE$ ， $CE = DE$ ，且 $y = 45^\circ$ ，则 x 等于()。

- (A) 45° (B) 60° (C) 67.5° (D) 112.5° (E) 135°

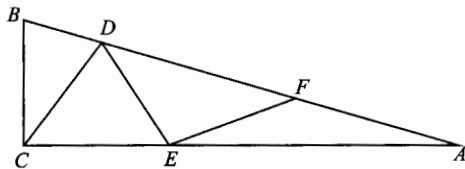


【解析】由 $y = 45^\circ$ ， $CE = DE$ ，可得 $\angle ECD = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ$ ；再根据 $AB \parallel CE$ 可得 $x = \angle ECD = 67.5^\circ$ ，选 C。

【评注】注意平行线与其他特殊图形结合所形成的角，不仅具有平行线角的关系，同时也要考虑到特殊图形角的关系。

【例3】如图，直角 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 为直角，点 E 和 D 、 F 分别在直角边 AC 和斜边 AB 上，且 $AF = FE = ED = DC = CB$ ，则 $\angle A$ 为()。

- (A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{9}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $\frac{\pi}{11}$ (E) $\frac{\pi}{12}$



【解析】根据 $AF = FE = ED = DC = CB$ 知， $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle DEF$ 及 $\triangle FEA$ 均是等腰三角形， $\angle A = \angle FEA$ ， $\angle EFD = \angle EDF$ ， $\angle EFD = 2\angle A$ ， $\angle B = \angle CDB$ ， $\angle CED =$

$\angle EFD + \angle EDF - \angle FEA = 3\angle A$, 同理 $\angle B = \angle CDB = \angle DCE + \angle DEC - \angle EDF = 4\angle A$, 有 $\angle B + \angle A = 5\angle A = \frac{\pi}{2}$, 故 $\angle A = \frac{\pi}{10}$, 选择 C.

【评注】在三角形中, 注意使用两角和是其第三个角的补角进行计算.

【例 4】如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 BC 边上一点, $BE = CD$, $CF = BD$, 那么 $\angle EDF$ 为().

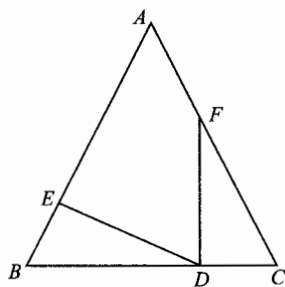
(A) $180^\circ - \angle A$

(B) $90^\circ - \angle A$

(C) $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

(D) $90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$

(E) $45^\circ - \frac{1}{2}\angle A$



【解析】由 $AB = AC$ 知, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $\angle B = \angle C$, 又有 $BE = CD$, $CF = BD$, 所以 $\triangle DEB \cong \triangle FDC$, 则 $\angle BDE = \angle CFD$, $\angle BED = \angle CDF$, 所以有 $\angle EDF = \angle B = \angle C$, 而 $\angle B = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$, 选 C.

【评注】对于三角形相似、全等也要注意其判定方法和性质.

【题型 2】求长度

【思路点拨】主要掌握基本图形的长度求解, 尤其利用三角形三边关系、全等及相似, 对角线的性质, 圆的相关定理进行解题.

【例 5】如图所示, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 中位线 EF 分别与 BD , AC 交于点 G , H , 若 $AD = 6$, $BC = 12$, 则 GH 为().

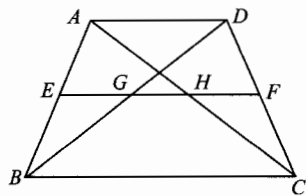
(A) 3

(B) 4

(C) 2

(D) 1.5

(E) 2.5



【解析】由题得, $EG = HF = \frac{1}{2}AD = 3$, $EF = 9 \Rightarrow GH = 3$,

选 A.

【例 6】等腰梯形的两底长分别为 a, b , 且对角线互相垂直, 它的一条对角线长是().

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

(B) $\sqrt{2}(a+b)$

(C) $\frac{1}{2}(a+b)$

(D) $(a+b)$

(E) $\frac{\sqrt{2}}{3}(a+b)$

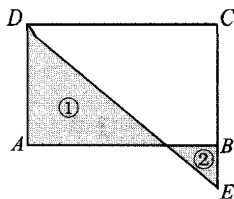
【解析】由于是等腰梯形, 且两对角线互相垂直, 则根据对角线的交点将对角线分为两

部分,上部分等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 下半部分等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}b$, 故总长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

选 A.

【例 7】如图所示,长方形 $ABCD$ 的长是 10,宽是 6,阴影部分①的面积比阴影部分②的面积大 10,则 BE 的长为().

- (A) 3.5 (B) 4 (C) 4.5 (D) 5
(E) 6



【解析】由题意: $S_{\triangle DEC} = \text{②} + S_{\text{空白}} = \text{①} + S_{\text{空白}} - 10 = 60 - 10 = 50 \Rightarrow CE = 10 \Rightarrow BE = 4$, 选 B.

【题型 3】三角形的全等、相似

【思路点拨】首先掌握全等与相似的判断准则,当两个三角形相似时,面积之比等于相似比的平方.

【例 8】设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似,且 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$,若 $\triangle ABC$ 的面积是 $a-1$,则 $\triangle A'B'C'$ 的面积是 $a+1$,那么 a 的值为().

- (A) 2.6 (B) 3 (C) 3.6 (D) 4 (E) 6

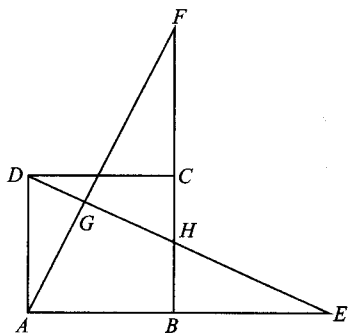
【解析】由题意, $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{a-1}{a+1} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = 2.6$, 选 A.

【例 9】正方形 $ABCD$ 边长为 1,延长 AB 到 E ,延长 BC 到 F ,使得 $BE = CF = 1$, DE 分别和 BC , AF 交于 H , G . 如图所示,则四边形 $ABHG$ 的面积为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{11}{20}$ (C) $\frac{9}{20}$
(D) $\frac{10}{21}$ (E) $\frac{11}{21}$

【解析】由 $\triangle ABF \cong \triangle DAE$, 可得 $\angle E = \angle F$, $\angle FHG = \angle EHB$, $\angle FGH = \angle HBE = 90^\circ$. $\text{Rt}\triangle FHG \sim \text{Rt}\triangle FBA$, $FH = 1.5$, $FA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 相似比 $\frac{FH}{FA} = \frac{1.5}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$,

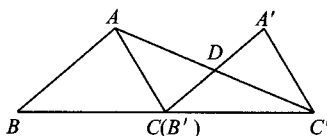
$\frac{S_{\triangle FGH}}{S_{\triangle FBA}} = \frac{9}{20}$. $\frac{S_{ABHG}}{S_{\triangle FBA}} = \frac{S_{\triangle FBA} - S_{\triangle FGH}}{S_{\triangle FBA}} = \frac{20 - 9}{20} = \frac{11}{20}$, 选 B.



【例 10】如图所示,已知 $\triangle ABC$ 的面积为 36,将 $\triangle ABC$ 沿 BC 平移到 $\triangle A'B'C'$,使 B' 和 C 重合,连接 AC' ,交 $A'C$ 于 D ,则 $\triangle C'DC$ 的面积为().

- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18 (E) 24

【解析】因为 $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 沿 BC 平移得到的,所以 $\triangle A'B'C'$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积,且 $AC \parallel A'C'$, $AC = A'C'$. 所以 $\triangle ACD \cong \triangle C'A'D$, 得 $CD = A'D$, $S_{\triangle C'DC} = S_{\triangle A'DC'} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 18$, 所以 $\triangle C'DC$ 的面积为 18, 选 D.



【评注】平移只改变图形的位置,不改变图形的大小和

形状,即经过平移,对应线段相等(不改变大小),对应角相等(不改变形状).容易知道,图形不论平移到何处,它与原图形总是全等的.只不过需要注意的是对应线段不一定总平行,还可能在同一条直线上.

【题型 4】判断三角形的形状

【思路点拨】主要借助三角形的内角关系以及三边关系所满足的条件,结合三角形的性质判断三角形的形状.重点掌握等边三角形、等腰三角形、直角三角形、等腰直角三角形的特征.

【例 11】 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 适合 $1 + \frac{b}{c} = \frac{b+c}{b+c-a}$, 则此三角形是().

- (A) 以 a 为腰的等腰三角形 (B) 以 a 为底的等腰三角形 (C) 等边三角形
(D) 直角三角形 (E) 钝角三角形

【解析】因为 $1 + \frac{b}{c} = \frac{b+c}{b+c-a}$, 所以 $b = a$, 因此此三角形是以 a 为腰的等腰三角形, 选 A.

【例 12】 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c , 且满足 $4a^2 + 4b^2 + 13c^2 - 8ac - 12bc = 0$, 则 $\triangle ABC$ 是().

- (A) 直角三角形 (B) 等腰三角形 (C) 等边三角形
(D) 等腰直角三角形 (E) 以上都不对

【解析】 $4a^2 + 4b^2 + 13c^2 - 8ac - 12bc = 4a^2 - 8ac + 4c^2 + 4b^2 - 12bc + 9c^2 = 4(a-c)^2 + (2b-3c)^2 = 0$,

根据非负性有 $a-c=0, 2b-3c=0$, 即 $a=c, 2b=3c$, 故三角形为等腰三角形, 选 B.

【题型 5】基本图形的面积

【思路点拨】主要掌握常见图形基本面积的计算方法, 因为复杂的图形都可以拆解出若干个基本的图形, 所以只要把基本的计算面积的方法掌握好, 其他复杂的面积求解问题也就很容易分析了.

【例 13】 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, \angle A = 15^\circ, BC = 1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为().

- (A) $\sqrt{2} + 1$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 1

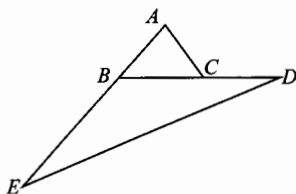
【解析】在 AC 上取点 D , 使 $BD = AD \Rightarrow CD = \sqrt{3}, BD = 2 \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, 选 C.

【例 14】已知等腰直角三角形 ABC 中 BC 为斜边, 周长为 $2\sqrt{2} + 4, \triangle BCD$ 为等边三角形, 则 $\triangle BCD$ 的面积为().

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $2\sqrt{3}$ (E) $5\sqrt{3}$

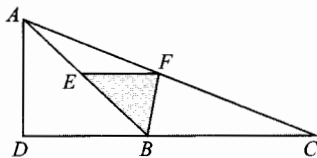
【解析】因为等腰直角三角形 ABC 中 BC 为斜边, 周长为 $2\sqrt{2} + 4$, 所以 $BC = 2\sqrt{2}, AB = AC = 2$, 又因为 $\triangle BCD$ 为等边三角形, 所以 $S_{\triangle BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 = 2\sqrt{3}$, 选 D.

- 【例 15】如图所示, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 1, $BE=2AB$, $BC=CD$, 则 $\triangle BDE$ 的面积等于 ().
- (A) 3 (B) 4 (C) 3.5 (D) 4.5 (E) 6



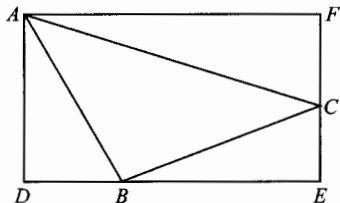
【解析】 $\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BE \cdot BD}{AB \cdot BC} = 4 \Rightarrow S_{\triangle BDE} = 4$, 故选 B.

- 【例 16】如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于 D , $BC=10$, $AD=8$, E, F 分别为 AB 和 AC 的中点, 那么 $\triangle EBF$ 的面积等于 ().
- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10



【解析】由题意, $S_{\triangle EBF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$, 选 E.

- 【例 17】如图所示, 矩形 $ADEF$ 的面积等于 16, $\triangle ADB$ 的面积等于 3, $\triangle ACF$ 的面积等于 4, 那么 $\triangle ABC$ 的面积等于 ().
- (A) 6 (B) 7 (C) 8.5 (D) 6.5 (E) 7.5



【解析】 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\text{矩形}}} = \frac{1}{2} \frac{BD}{DE} = \frac{3}{16} \Rightarrow BD = \frac{3}{8} DE$, 同理 $CF = \frac{1}{2} EF \Rightarrow S_{\triangle BCE} = 2.5 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 6.5$, 选 D.

- 【例 18】一个等腰梯形, 底角为 45° , 上底为 8, 下底为 12, 此梯形的面积等于 ().
- (A) 20 (B) 19 (C) 18 (D) 16 (E) 14

【解析】由题意, $h=2 \Rightarrow S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}(8+12)h=20$, 选 A.

- 【例 19】顺次连接任意四边形各边中点所得的四边形与原四边形面积之比是 ().
- (A) 1:2 (B) 1:4 (C) $\sqrt{2}$ (D) 1:3 (E) 1:8

【解析】不妨假设该四边形为正方形, 连接各边中点后仍然为正方形, 面积为原来面积的一半, 所以选 A.

第三节 强化突破题型

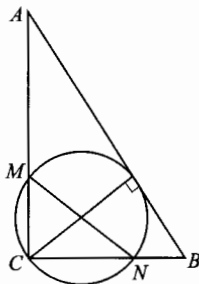
【题型 1】与圆相关的长度

【思路点拨】与圆相关的长度主要围绕弦长、切线、直径、弧长、周长等相关性质和结论进行分析。

【例 1】如图所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 10, AC = 8, BC = 6$,以点 C 到 AB 的垂线段为直径作圆,该圆交 AC 于点 M ,交 BC 于点 N ,则 MN 为 ().

- (A) 4 (B) 4.8 (C) 5
(D) 5.5 (E) 6

【解析】由题意, $\triangle ABC$ 为直角三角形 $\Rightarrow MN$ 为直径 (直径所对的圆周角为 90°) $\Rightarrow MN = \frac{AC \times BC}{AB} = 4.8$, 选 B.



【例 2】在圆 $x^2 + y^2 = 5x$ 内,过点 $P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 有 n 条弦的长度成等差数列,过点 P 的最小弦的长为数列的首项 a_1 ,最大弦的长为 a_n ,若公差 $d \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$,那么 n 的取值集合为 ().

- (A) {3,4,5} (B) {4,5,6} (C) {3,4,5,6}
(D) {4,5,6,7} (E) {5,6,7,8}

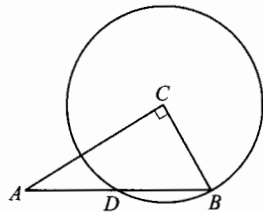
【解析】显然过点 P 的弦中,最长的为过点 P 的直径,长度是 5;最短的为垂直于过点 P 的直径的直线,长度是 4,所以 $a_1 = 4, a_n = 5$,有 $n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} = \frac{1}{d} \in [3, 6]$,从而 $n \in [4, 7]$,选 D.

【评注】此题的巧妙之处在于必须先找到最长、最短两条弦,然后利用 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 找到相关的 n 的值.不过还有个极易错的点,认为 $\frac{1}{d} \in [3, 6]$ 是 n 的取值范围,从而错选了 C.

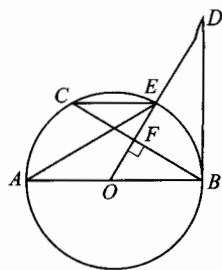
【例 3】如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AB = 10$,若以点 C 为圆心, CB 长为半径的圆恰好经过 AB 的中点 D ,则 AC 的长等于 ().

- (A) $5\sqrt{3}$ (B) 5 (C) $5\sqrt{2}$
(D) 6 (E) 7

【解析】本题考查圆中的有关性质,连接 CD ,因为 $\angle C = 90^\circ$, D 是 AB 中点, $AB = 10$,所以 $CD = \frac{1}{2} AB = 5$,所以 $BC = 5$,根据勾股定理得 $AC = 5\sqrt{3}$,故选 A.



【例 4】如图所示, AB 是 $\odot O$ 直径, $OD \perp$ 弦 BC 于点 F , 且交 $\odot O$ 于点 E , $\angle AEC = \angle ODB$. 当 $AB = 10, BC = 8$ 时, 则 BD 的长为 ().



- (A) 6.5 (B) 6 (C) 7

- (D) $\frac{20}{3}$ (E) $\frac{19}{3}$

【解析】因为 $\angle AEC = \angle ODB, \angle AEC = \angle ABC$ (圆周角相等),

所以 $\angle ABC = \angle ODB$. 因为 $OD \perp BC$, 所以 $\angle DBC + \angle ODB = 90^\circ$. 所以 $\angle DBC + \angle ABC = 90^\circ$, 即 $\angle DBO = 90^\circ$. 所以直线 BD 和 $\odot O$ 相切. 连接 AC . 因为 AB 是直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = 10, BC = 8$, 所以 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 6$.

因为直径 $AB = 10$, 所以 $OB = 5$. 由 BD 和 $\odot O$ 相切, 得 $\triangle ABC \sim \triangle ODB$. 所以 $\frac{AC}{OB} = \frac{BC}{BD}$. 即 $\frac{6}{5} = \frac{8}{BD}$, 解得 $BD = \frac{20}{3}$. 选 D.

【评注】本题首先要得到 BD 是圆的切线. 圆的切线有三种判定方法: ① 和圆只有一个公共点的直线是圆的切线; ② 到圆心的距离等于半径的直线是圆的切线; ③ 过半径外端且和这条半径垂直的直线是圆的切线.

【题型 2】三角形的四心、五线

【思路点拨】记住四心(内心、外心、重心、垂心)的定义及性质, 掌握五线(角平分线、中垂线、中线、高、中位线)的特征.

【例 5】有一个角是 30° 的直角三角形的小直角边长 a , 它的内切圆的半径为 ().

- (A) $\frac{1}{2}a$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{a}$ (C) a (D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}a$ (E) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$

【解析】由题意, $b = \sqrt{3}a, c = 2a \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$. 选 E.

【评注】本题考查直角三角形三边和内切圆半径的关系. 对于 $Rt\triangle$, 有 $r = \frac{a+b-c}{2}$.

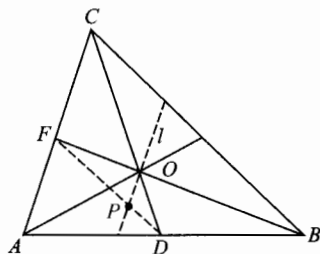
【例 6】 $\triangle ABC$ 中 $A(-1, 5), B(5, 5), C(6, -2)$, 则这个三角形的外心坐标为 ().

- (A) $(1, 2)$ (B) $(2, 1)$ (C) $(-1, 2)$ (D) $(2, -1)$ (E) $(1, -2)$

【解析】外心即三角形三条边中垂线的交点, 由 AB 中点 $(2, 5)$ 知 AB 的中垂线的方程为 $x - 2 = 0$. AC 的中垂线的方程为 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2$, 即 $x - y - 1 = 0$. $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$ 外心的坐标: $x = 2, y = 1$. 故选 B.

【例 7】 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 点 P 是 $\triangle ABC$ 的一个内点, 使得 $\triangle BCP$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半, $\triangle ACP$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{3}$, 则点 P ().

- (A) 在 $\triangle ABO$ 内 (B) 在 $\triangle BCO$ 内
(C) 在 $\triangle ACO$ 内 (D) 就是 O



(E) 在线段 AO 上

【解析】 $\triangle BCP$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半,说明 P 在 AB 、 AC 中点 DF 的连线上 $\triangle ACP$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{3}$,说明 P 到 AC 的距离是 B 到 AC 的距离的 $\frac{1}{3}$,从而点 P 在过 O 平行于 AC 的直线 l 上.于是点 P 是 DF 和 l 交点,它在 $\triangle ABO$ 内.故选 A.

【题型 3】四边形及多边形

【思路点拨】对于四边形及多边形,可以看出由多个三角形组成的图形,利用三角形的性质和结论进行分析和求解;另外要掌握常见四边形及多边形,如矩形、菱形、正方形、正六边形等重要结论.

【例 8】在四边形 $ABCD$ 中, AB 的长为 8, $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 3 : 7 : 4 : 10$, $\angle CDB = 60^\circ$, 则 $\triangle ABD$ 的面积是().

- (A) 22 (B) 18 (C) 20 (D) 14 (E) 16

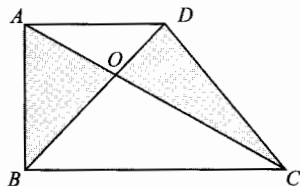
【解析】因为 $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 3 : 7 : 4 : 10$, 且 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ 得 $\angle CDB = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形, 所以 $S_{\triangle ABD} = 16$. 故选 E.

【题型 4】求面积

【思路点拨】计算平面图形的面积问题是常见题型,求平面阴影部分的面积是这类问题的难点.不规则阴影面积常常由三角形、四边形、弓形、扇形和圆、圆弧等基本图形组合而成,在解此类问题时,要注意观察和分析图形,会分解和组合图形.

【例 9】如图所示,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $S_{\triangle AOD} = 8$, 梯形的上底长是下底长的 $\frac{2}{3}$, 则阴影部分的面积是().

- (A) 24 (B) 25 (C) 26
(D) 27 (E) 28

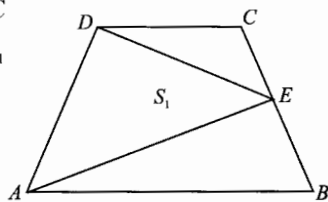


【解析】因为 $S_{\triangle AOD} = 8$, 已知梯形的上底长是下底长的 $\frac{2}{3}$,

$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$, 根据等高, $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{2}{3}$, 所以 $S_{\triangle BOC} = 18$, 所以 $S_{\text{阴影}} = 24$, 选 A.

【例 10】如图所示,在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 E 为 BC 的中点, 设 $\triangle DEA$ 的面积为 S_1 , 梯形 $ABCD$ 的面积为 S_2 , 则 S_1 与 S_2 的关系是().

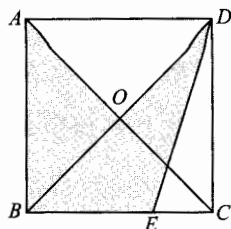
- (A) $S_1 = \frac{1}{3} S_2$ (B) $S_1 = \frac{2}{3} S_2$ (C) $S_1 = \frac{2}{5} S_2$
(D) $S_1 = \frac{1}{2} S_2$ (E) $S_1 = \frac{3}{5} S_2$



【解析】延长 DE 交 AB 延长线于 $G \Rightarrow S_{\triangle AEG} = S_2 - S_1 = \frac{AB + BG}{2} \times \text{高} = \frac{AB + CD}{2} \times \text{高} = \frac{1}{2} S_2 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} S_2$, 选 D.

【例 11】如图所示,正方形 $ABCD$ 中, $BE=2EC$, $\triangle AOB$ 的面积是 9, 则阴影部分的面积为()。

- (A) 28 (B) 26 (C) 21
(D) 20 (E) 18

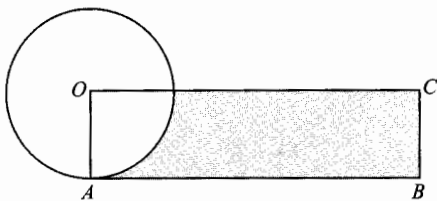


【解析】因为 $\triangle AOB$ 的面积是 9, 所以 $BC=6$, 又因为 $BE=2EC$, 所以 $BE=4, CE=2$, 所以 $S_{\text{阴影}}=36-S_{\triangle DEC}=21$, 选 C。

【例 12】如图所示,圆的周长是 12π , 圆的面积与长方形的面积相等, 则阴影面积等于()。

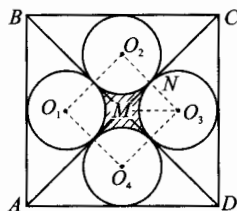
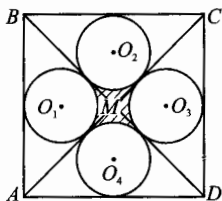
- (A) 27π (B) 28π (C) 29π (D) 30π (E) 36π

【解析】由题意, $2\pi r=12\pi \Rightarrow r=6 \Rightarrow S_{\text{阴}}=\frac{3}{4}S_{\text{圆}}=27\pi$, 选 A。



【例 13】如图所示,边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 M , 且分正方形为四个三角形, O_1, O_2, O_3, O_4 分别为 $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMD, \triangle DMA$ 的内切圆圆心, 则圆中阴影部分面积为()。

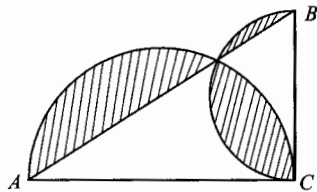
- (A) $\frac{(4-\pi)(3-2\sqrt{2})}{16}$ (B) $\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{16}$ (C) $\frac{4+\pi}{16}$
(D) $\frac{(4-\pi)(3-2\sqrt{2})}{8}$ (E) $\frac{(4-\pi)(3-2\sqrt{2})}{4}$



【解析】设圆 O_1 半径为 r , 连接 MO_3 与正方形 $O_1O_2O_3O_4$ 各边, $\triangle MNO_3$ 是等腰直角三角形, 如图所示, $\frac{1}{2}-r=\sqrt{2}r, r=\frac{\sqrt{2}-1}{2}, O_1O_2=\sqrt{2}-1, S_{\text{阴影}}=S_{\text{正方形}O_1O_2O_3O_4}-S_{\text{圆}O_1}=(\sqrt{2}-1)^2-\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}-1)^2=\frac{(4-\pi)(3-2\sqrt{2})}{4}$. 选 E。

【例 14】如图所示,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, AC=4, BC=2$, 分别以 AC, BC 为直径画半圆, 则图中阴影部分的面积为()。

- (A) $2\pi-1$ (B) $3\pi-2$ (C) $3\pi-4$
(D) $\frac{5}{2}\pi-3$ (E) $\frac{5}{2}\pi-4$



【解析】由图可知阴影部分的面积=半圆 AC 的面积+半圆 BC 的面积- $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积,

所以 $S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{5}{2}\pi - 4$, 故选 E.

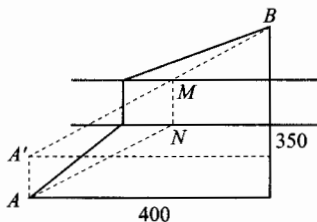
【题型 5】求距离的最值

【思路点拨】平面几何求距离的最值, 主要将图像通过平移转化为共线的情况, 借助两点之间直线最短来分析求解.

【例 15】一条由西向东流的河宽 50 米, A 与 B 两地分别位于河的南、北侧, B 在 A 的东 400 米, 北 350 米. 要在 A 与 B 间筑一条小路, 过河处架设和河垂直的浮桥, 则此路的最短距离(包括桥长)为().

- (A) 550 米 (B) 750 米 (C) 500 米
(D) 600 米 (E) 650 米

【解析】如图所示, 将点 A 向北侧平移 50 米, (河宽)到点 A', 连接 BA' 交河的北岸于点 M, MN 垂直于河岸交河的南岸于点 N. 则此路的最短路径为 BMNA, 最短距离(包括桥



长)为 $|BA'| + |AA'| = \sqrt{400^2 + 300^2} + 50 = 500 + 50 = 550$ (米), 故选 A.

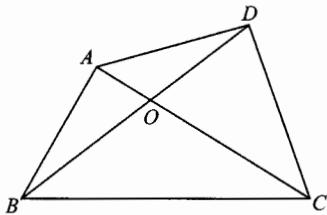
【题型 6】求面积的最值

【思路点拨】首先根据题目得到面积表达式, 然后借助平均值定理或者二次函数的抛物线特征求解最值.

【例 16】如图所示, 四边形 ABCD 的对角线 AC, BD 相交于点 O, $S_{\triangle AOB} = 4, S_{\triangle COD} = 9$, 则四边形 ABCD 面积的最小值为().

- (A) 22 (B) 25 (C) 28
(D) 30 (E) 32

【解析】设 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{OD}{OB} = \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle COB}}$, $S_{\triangle AOD} \times S_{\triangle COB} = S_{\triangle AOB} \times$



$S_{\triangle COD} = 36, S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COB} + 13 \geq 2\sqrt{S_{\triangle AOD}S_{\triangle COB}} + 13 = 2\sqrt{36} + 13 = 25$. 选 B.

【例 17】如图所示, 周长为 24 的矩形 ABCD, 将 $\triangle ABC$ 沿对角线 AC 折叠, 得到 $\triangle AB'C$ (点 B 变到点 B'), AB' 交 CD 于点 P. 则 $\triangle ADP$ 面积的最大值为().

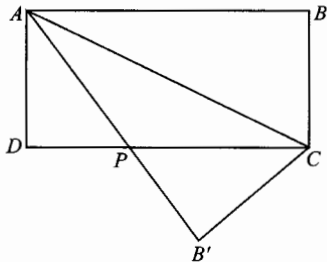
- (A) 18 (B) $18 - 2\sqrt{2}$ (C) $108 - 36\sqrt{2}$
(D) $100 - 72\sqrt{2}$ (E) $108 - 72\sqrt{2}$

【解析】设 $AB = x, DP = a$, 则 $AD = 12 - x, \angle ACD = \angle BAC = \angle B'AC, AP = PC = x - a$, $\triangle ADP$ 中, $(x - a)^2 = (12 - x)^2 + a^2, -2ax = 144 - 24x, a = 12 - \frac{72}{x}, S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2}AD$

$\times DP = \frac{1}{2}(12 - x)\left(12 - \frac{72}{x}\right) = -6\left(x + \frac{72}{x} - 18\right)$, 由 $x > 0$,

$\frac{72}{x} > 0$ 可知, $S_{\triangle ADP} \leq -6\left(2\sqrt{x \times \frac{72}{x}} - 18\right) = 108 - 72\sqrt{2}$. 当 $x = \frac{72}{x}$, 即 $x = 6\sqrt{2}$ 时, $S_{\triangle ADP}$

有最大值 $108 - 72\sqrt{2}$. 选 E.



第四节 核心专题点睛

平面几何涉及的范围是初高中部分简单的内容,在平面几何中,主要考查三角形、平行四边形、矩形、正方形、圆形等;平面几何的内容对于大多数人来说并不陌生,主要问题是图形想象能力的培养.

熟练掌握五大面积模型:等积,鸟头,蝶形,相似(含金字塔模型和沙漏模型),共边(含燕尾模型和风筝模型),掌握五大面积模型的各种变形.

一、等积模型

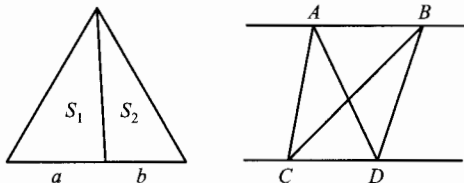
- ① 等底等高的两个三角形面积相等;
- ② 两个三角形高相等,面积比等于它们的底之比;
两个三角形底相等,面积比等于它们的高之比;

如下图 $S_1 : S_2 = a : b$

- ③ 夹在一组平行线之间的等积变形,如下图 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD}$;

反之,如果 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD}$,则可知直线 AB 平行于 CD .

- ④ 等底等高的两个平行四边形面积相等(长方形和正方形可以看作特殊的平行四边形);
- ⑤ 三角形面积等于与它等底等高的平行四边形面积的一半;
- ⑥ 两个平行四边形高相等,面积比等于它们的底之比;两个平行四边形底相等,面积比等于它们的高之比.

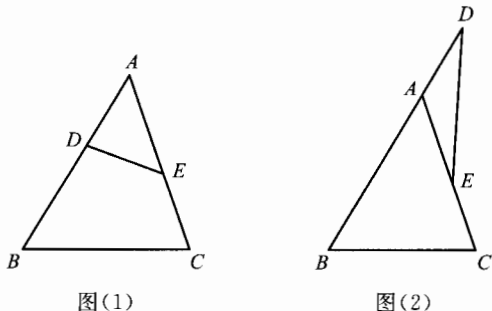


二、鸟头定理

两个三角形中有一个角相等或互补,这两个三角形叫做共角三角形.

共角三角形的面积比等于对应角(相等角或互补角)两夹边的乘积之比.

如图在 $\triangle ABC$ 中, D,E 分别是 AB,AC 上的点如图(1)(或 D 在 BA 的延长线上, E 在 AC 上),则 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ADE} = (AB \times AC) : (AD \times AE)$.



三、蝶形定理

任意四边形中的比例关系(“蝶形定理”):

① $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$ 或者 $S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$. ② $AO : OC = (S_1 + S_2) : (S_4 + S_3)$.

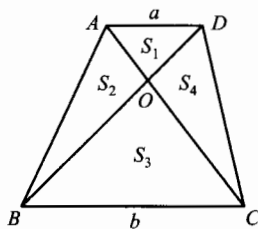
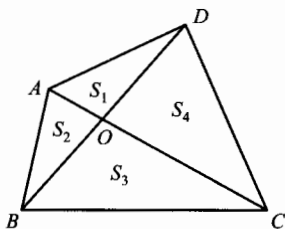
蝶形定理为我们提供了解决不规则四边形的面积问题的一个途径. 通过构造模型, 一方面可以使不规则四边形的面积关系与四边形内的三角形相联系; 另一方面, 也可以得到与面积对应的对角线的比例关系.

梯形中比例关系(“梯形蝶形定理”):

① $S_1 : S_3 = a^2 : b^2$.

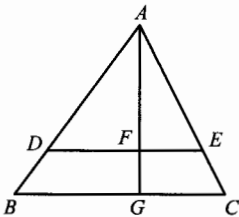
② $S_1 : S_3 : S_2 : S_4 = a^2 : b^2 : ab : ab$;

③ $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ 的对应份数为 $(a+b)^2$.



四、相似模型

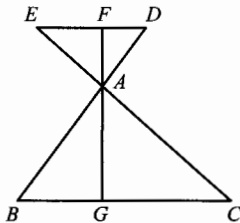
(一) 金字塔模型



① $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AF}{AG}$;

② $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = AF^2 : AG^2$.

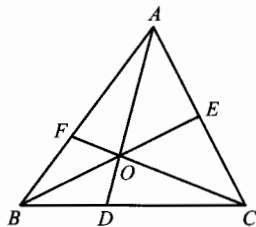
(二) 沙漏模型



五、共边定理(燕尾模型和风筝模型)

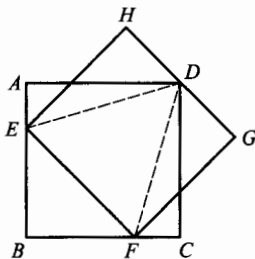
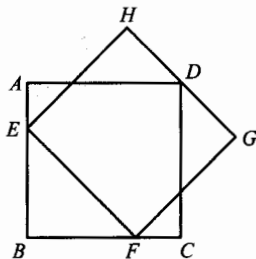
在三角形 ABC 中, AD, BE, CF 相交于同一点 O , 那么 $S_{\triangle ABO} : S_{\triangle ACO} = BD : DC$.

上述定理给出了一个新的转化面积比与线段比的手段, 因为 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ACO$ 的形状很像燕子的尾巴, 所以这个定理被称为燕尾定理. 该定理在许多几何题目中都有着广泛的运用, 它的特殊性在于, 它可以存在于任何一个三角形之中, 为三角形中的三角形面积对应底边之间提供互相联系的途径.



【例 1】如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, $AE=1.5$, $CF=2$. 长方形 $EFGH$ 的面积为().

- (A) 36 (B) 35 (C) 33 (D) 32 (E) 31

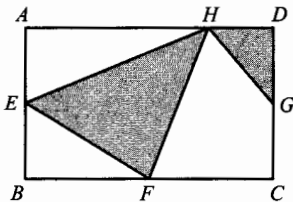


【解析】连接 DE, DF , 则长方形 $EFGH$ 的面积是三角形 DEF 面积的二倍。

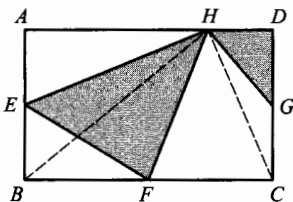
三角形 DEF 的面积等于正方形的面积减去三个三角形的面积, $S_{\triangle DEF} = 6 \times 6 - 1.5 \times 6 \div 2 - 2 \times 6 \div 2 - 4.5 \times 4 \div 2 = 16.5$, 所以长方形 $EFGH$ 面积为 33. 选 C.

【例 2】长方形 $ABCD$ 的面积为 36 cm^2 , E, F, G 为各边中点, H 为 AD 边上任意一点, 问阴影部分面积是().

- (A) 13.5 (B) 15.5 (C) 16.5 (D) 17.5 (E) 18.5



【解析】解法一: 寻找可利用的条件, 连接 BH, HC , 如下图:



可得 $S_{\triangle EHB} = \frac{1}{2} S_{\triangle AHB}$, $S_{\triangle FHB} = \frac{1}{2} S_{\triangle CHB}$, $S_{\triangle DHG} = \frac{1}{2} S_{\triangle DHC}$, 而 $S_{ABCD} = S_{\triangle AHB} + S_{\triangle CHB} +$

$S_{\triangle CHD} = 36$, 即 $S_{\triangle EHB} + S_{\triangle BHF} + S_{\triangle DHG} = \frac{1}{2} (S_{\triangle AHB} + S_{\triangle CHB} + S_{\triangle CHD}) = \frac{1}{2} \times 36 = 18$;

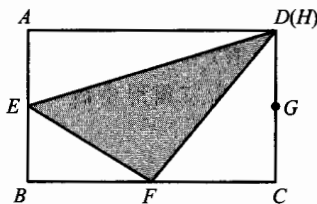
而 $S_{\triangle EHB} + S_{\triangle BHF} + S_{\triangle DHG} = S_{\text{阴影}} + S_{\triangle EBF}$,

$$S_{\triangle EBF} = \frac{1}{2} \times BE \times BF = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times AB \right) \times \left(\frac{1}{2} \times BC \right) = \frac{1}{8} \times 36 = 4.5.$$

所以阴影部分的面积是: $S_{\text{阴影}} = 18 - S_{\triangle EBF} = 18 - 4.5 = 13.5$.

解法二: 特殊点法. 找 H 的特殊点, 把 H 点与 D 点重合,

那么图形就可变成下图:

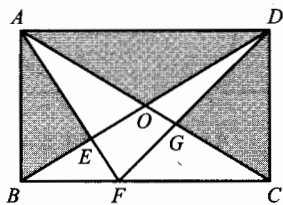


这样阴影部分的面积就是 $\triangle DEF$ 的面积,根据鸟头定理,则有

$$S_{\text{阴影}} = S_{ABCD} - S_{\triangle AED} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle CFD} = 36 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 36 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 36 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 36 = 13.5.$$

【例3】如图所示,长方形 $ABCD$ 内的阴影部分的面积之和为70, $AB=8$, $AD=15$, 四边形 $EFGO$ 的面积为().

- (A) 26 (B) 24 (C) 20 (D) 15 (E) 10



【解析】利用图形中的包含关系可以先求出三角形 AOE 、 DOG 和四边形 $EFGO$ 的面积之和,以及三角形 AOE 和 DOG 的面积之和,进而求出四边形 $EFGO$ 的面积.

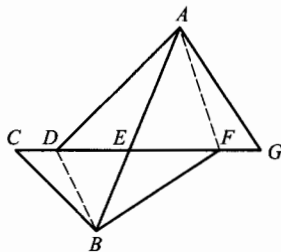
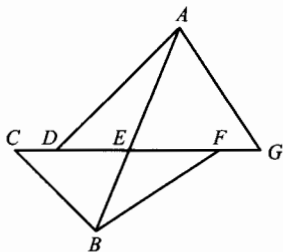
由于长方形 $ABCD$ 的面积为 $15 \times 8 = 120$,所以三角形 BOC 的面积为 $120 \times \frac{1}{4} = 30$,所以三角形 AOE 和 DOG 的面积之和为 $120 \times \frac{3}{4} - 70 = 20$;

又三角形 AOE 、 DOG 和四边形 $EFGO$ 的面积之和为 $120 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 30$,所以四边形 $EFGO$ 的面积为 $30 - 20 = 10$.

另解:从整体上来看,四边形 $EFGO$ 的面积=三角形 AFC 面积+三角形 BFD 面积-白色部分的面积,而三角形 AFC 面积+三角形 BFD 面积为长方形面积的一半,即60,白色部分的面积等于长方形面积减去阴影部分的面积,即 $120 - 70 = 50$,所以四边形的面积为 $60 - 50 = 10$. 选E.

【例4】如图,已知 $CD=5$, $DE=7$, $EF=15$, $FG=6$, 线段 AB 将图形分成两部分,左边部分面积是38,右边部分面积是65,那么三角形 ADG 的面积是().

- (A) 40 (B) 35 (C) 33 (D) 32 (E) 31



【解析】连接 AF , BD .

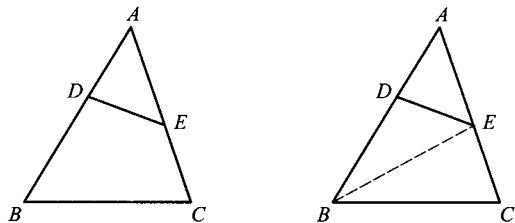
根据题意可知, $CF = 5 + 7 + 15 = 27$; $DG = 7 + 15 + 6 = 28$;

所以, $S_{\triangle BEF} = \frac{15}{27} S_{\triangle CBF}$, $S_{\triangle BEC} = \frac{12}{27} S_{\triangle CBF}$, $S_{\triangle AEG} = \frac{21}{28} S_{\triangle ADG}$, $S_{\triangle AED} = \frac{7}{28} S_{\triangle ADG}$, 于是:

$$\frac{21}{28} S_{\triangle ADG} + \frac{15}{27} S_{\triangle CBF} = 65; \quad \frac{7}{28} S_{\triangle ADG} + \frac{12}{27} S_{\triangle CBF} = 38;$$

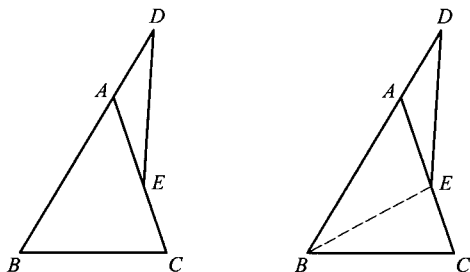
可得 $S_{\triangle ADG} = 40$. 故三角形 ADG 的面积是40. 选A.

【例 5】如图在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 上的点, 且 $AD : AB = 2 : 5, AE : AC = 4 : 7, S_{\triangle ADE} = 16 \text{ cm}^2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
(A) 56 (B) 65 (C) 66 (D) 70 (E) 72



【解析】连接 $BE, S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABE} = AD : AB = 2 : 5 = (2 \times 4) : (5 \times 4), S_{\triangle ABE} : S_{\triangle ABC} = AE : AC = 4 : 7 = (4 \times 5) : (7 \times 5)$, 所以 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = (2 \times 4) : (7 \times 5)$, 设 $S_{\triangle ADE} = 8$ 份, 则 $S_{\triangle ABC} = 35$ 份, $S_{\triangle ADE} = 16 \text{ cm}^2$, 所以 1 份是 2 cm^2 , 35 份就是 70 cm^2 , $\triangle ABC$ 的面积是 70 cm^2 . 由此我们得到一个重要的定理, 共角定理: 共角三角形的面积比等于对应角 (相等角或互补角) 两夹边的乘积之比. 选 D.

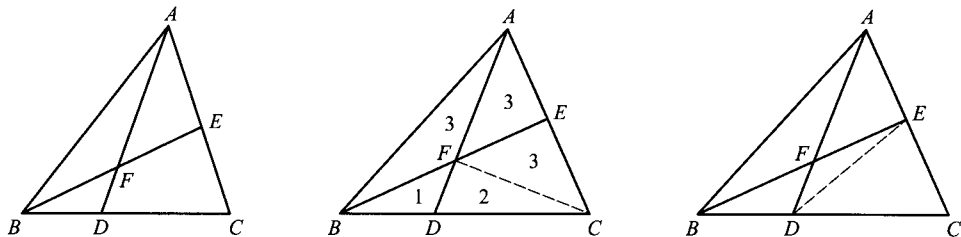
【例 6】如图在 $\triangle ABC$ 中, D 在 BA 的延长线上, E 在 AC 上, 且 $AB : AD = 5 : 2, AE : EC = 3 : 2, S_{\triangle ADE} = 12 \text{ cm}^2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ().
(A) 30 (B) 35 (C) 43 (D) 48 (E) 50



【解析】连接 $BE, S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABE} = AD : AB = 2 : 5 = (2 \times 3) : (5 \times 3), S_{\triangle ABE} : S_{\triangle ABC} = AE : AC = 3 : (3 + 2) = (3 \times 5) : [(3 + 2) \times 5]$, 所以 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = (3 \times 2) : [5 \times (3 + 2)] = 6 : 25$, 设 $S_{\triangle ADE} = 6$ 份, 则 $S_{\triangle ABC} = 25$ 份, $S_{\triangle ADE} = 12 \text{ cm}^2$, 所以 1 份是 2 cm^2 , 25 份就是 50 cm^2 , $\triangle ABC$ 的面积是 50 cm^2 . 选 E.

【例 7】如图, 三角形 ABC 的面积是 1, E 是 AC 的中点, 点 D 在 BC 上, 且 $BD : DC = 1 : 2, AD$ 与 BE 交于点 F . 则四边形 $DFEC$ 的面积等于 ().

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{5}$



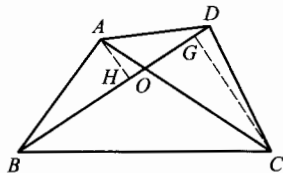
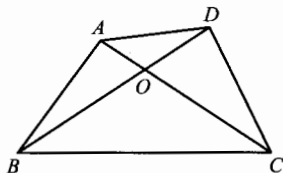
【解析】方法一: 连接 CF , 根据燕尾定理, $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{AE}{EC} = 1$, 设 $S_{\triangle BDF} = 1$

份,则 $S_{\triangle DCF} = 2$ 份, $S_{\triangle ABF} = 3$ 份, $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle EFC} = 3$ 份,如图所示,所以 $S_{DCEF} = \frac{5}{12} S_{\triangle ABC}$
 $= \frac{5}{12}$.

方法二:连接 DE ,由题目条件可得到 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$, $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$,所以 $\frac{BF}{FE} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{1}{1}$, $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times S_{\triangle DEB} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}$,而 $S_{\triangle CDE} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$.所以四边形 $DFEC$ 的面积等于 $\frac{5}{12}$.选 A.

【例 8】四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O (如图所示).如果三角形 ABD 的面积等于三角形 BCD 的面积 $\frac{1}{3}$,且 $AO = 2$, $DO = 3$,那么 CO 的长度是 DO 的长度的 () 倍.

- (A) 1.2 (B) 1.4 (C) 1.6 (D) 1.8 (E) 2



【解析】在本题中,四边形 $ABCD$ 为任意四边形,对于这种“不良四边形”,无外乎两种处理方法:(1)利用已知条件,向已有模型靠拢,从而快速解决;(2)通过画辅助线来改造不良四边形.看到题目中给出条件 $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BCD} = 1 : 3$,这可以向模型一蝶形定理靠拢,于是得出一种解法.又观察题目中给出的已知条件是面积的关系,转化为边的关系,可以得到第二种解法,但是第二种解法需要一个中介来改造这个“不良四边形”,于是可以作 AH 垂直 BD 于 H , CG 垂直 BD 于 G ,面积比转化为高之比.再应用结论:三角形高相同,则面积之比等于底边之比,得出结果.请注意比较两种解法,使学生体会到蝶形定理的优势,从而主观上愿意掌握并使用蝶形定理解决问题.

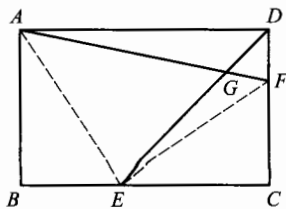
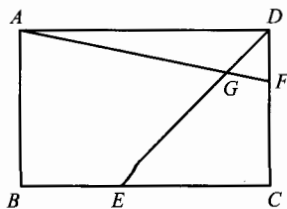
解法一:因为 $AO : OC = S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BDC} = 1 : 3$,所以 $OC = 2 \times 3 = 6$,因此 $OC : OD = 6 : 3 = 2 : 1$.

解法二:作 $AH \perp BD$ 于 H , $CG \perp BD$ 于 G .

因为 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD}$,所以 $AH = \frac{1}{3} CG$,则 $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{3} S_{\triangle DOC}$,得 $AO = \frac{1}{3} CO$,有 $OC = 2 \times 3 = 6$,因此 $OC : OD = 6 : 3 = 2 : 1$.选 E.

【例 9】如图,长方形 $ABCD$ 中, $BE : EC = 2 : 3$, $DF : FC = 1 : 2$,三角形 DFG 的面积为 2 cm^2 ,则长方形 $ABCD$ 的面积为 ().

- (A) 72 (B) 74 (C) 76 (D) 78 (E) 82



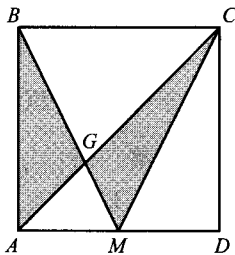
【解析】连接 AE, FE .

因为 $BE : EC = 2 : 3, DF : FC = 1 : 2$, 所以 $S_{\triangle DEF} = \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) S_{\text{长方形} ABCD} = \frac{1}{10} S_{\text{长方形} ABCD}$.

因为 $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} S_{\text{长方形} ABCD}, AG : GF = \frac{1}{2} : \frac{1}{10} = 5 : 1$, 所以 $S_{\triangle AGD} = 5 S_{\triangle GDF} = 10 \text{ cm}^2$, 所以 $S_{\triangle AFD} = 12 \text{ cm}^2$. 因为 $S_{\triangle AFD} = \frac{1}{6} S_{\text{长方形} ABCD}$, 所以长方形 $ABCD$ 的面积是 72 cm^2 . 选 A.

【例 10】如图, 正方形 $ABCD$ 面积为 $3 \text{ cm}^2, M$ 是 AD 边上的中点. 则图中阴影部分的面积为().

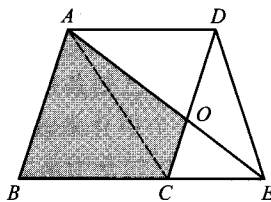
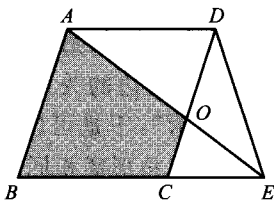
- (A) 1.2 (B) 1.4 (C) 1.6 (D) 1
(E) 0.8



【解析】因为 M 是 AD 边上的中点, 所以 $AM : BC = 1 : 2$, 根据梯形蝶形定理可以知道 $S_{\triangle AMG} : S_{\triangle ABG} : S_{\triangle MCG} : S_{\triangle BCG} = 1^2 : (1 \times 2) : (1 \times 2) : 2^2 = 1 : 2 : 2 : 4$, 设 $S_{\triangle AGM} = 1$ 份, 则 $S_{\triangle MCD} = 1 + 2 = 3$ 份, 所以正方形的面积为 $1 + 2 + 2 + 4 + 3 = 12$ 份, $S_{\text{阴影}} = 2 + 2 = 4$ 份, 所以 $S_{\text{阴影}} : S_{\text{正方形}} = 1 : 3$, 所以 $S_{\text{阴影}} = 1 \text{ cm}^2$. 选 D.

【例 11】已知 $ABCD$ 是平行四边形, $BC : CE = 3 : 2$, 三角形 ODE 的面积为 6 cm^2 . 则阴影部分的面积是() cm^2 .

- (A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 24 (E) 26

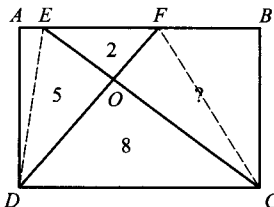
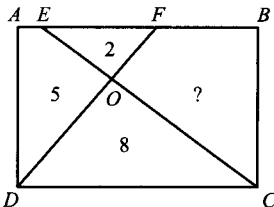


【解析】连接 AC .

由于 $ABCD$ 是平行四边形, $BC : CE = 3 : 2$, 所以 $CE : AD = 2 : 3$, 根据梯形蝶形定理, $S_{\triangle ODE} : S_{\triangle AOC} : S_{\triangle DOE} : S_{\triangle AOD} = 2^2 : 2 \times 3 : 2 \times 3 : 3^2 = 4 : 6 : 6 : 9$, 所以 $S_{\triangle AOC} = 6 (\text{cm}^2)$, $S_{\triangle AOD} = 9 (\text{cm}^2)$, 又 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} = 6 + 9 = 15 (\text{cm}^2)$, 阴影部分面积为 $6 + 15 = 21 (\text{cm}^2)$. 选 B.

【例 12】如图, 长方形 $ABCD$ 被 CE, DF 分成四块, 已知其中 3 块的面积分别为 2、5、 8 cm^2 , 那么余下的四边形 $OFBC$ 的面积为() cm^2 .

- (A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

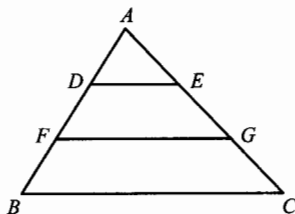


【解析】连接 DE, CF . 四边形 $EDCF$ 为梯形, 所以 $S_{\triangle BOD} = S_{\triangle FOC}$, 又根据蝶形定理, $S_{\triangle BOD} \cdot S_{\triangle FOC} = S_{\triangle BOF} \cdot S_{\triangle COD}$, 所以 $S_{\triangle BOD} \cdot S_{\triangle FOC} = S_{\triangle BOF} \cdot S_{\triangle COD} = 2 \times 8 = 16$, 所以 $S_{\triangle BOD} = 4 (\text{cm}^2)$, $S_{\triangle ECD} = 4 + 8 = 12 (\text{cm}^2)$. 那么长方形 $ABCD$ 的面积为 $12 \times 2 = 24 \text{ cm}^2$, 四边形

OFBC 的面积为 $24 - 5 - 2 - 8 = 9(\text{cm}^2)$. 选 B.

【例 13】如图, $\triangle ABC$ 中, DE, FG, BC 互相平行, $AD = DF = FB$, 则 $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形 } DEGF} : S_{\text{四边形 } FGCB} = ()$.

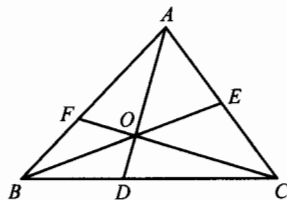
- (A) 1 : 3 : 5 (B) 1 : 2 : 5 (C) 1 : 3 : 4 (D) 1 : 3 : 6 (E) 2 : 3 : 5



【解析】设 $S_{\triangle ADE} = 1$ 份, 根据面积比等于相似比的平方, 所以 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle AFG} = AD^2 : AF^2 = 1 : 4$, $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = AD^2 : AB^2 = 1 : 9$, 因此 $S_{\triangle AFG} = 4$ 份, $S_{\triangle ABC} = 9$ 份, 进而有 $S_{\text{四边形 } DEGF} = 3$ 份, $S_{\text{四边形 } FGCB} = 5$ 份, 所以 $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形 } DEGF} : S_{\text{四边形 } FGCB} = 1 : 3 : 5$, 选 A.

【例 14】如下图, 三角形 ABC 中, $BD : DC = 4 : 9$, $CE : EA = 4 : 3$, 则 $AF : FB = ()$.

- (A) 27 : 17 (B) 27 : 14 (C) 25 : 16 (D) 28 : 15 (E) 27 : 16

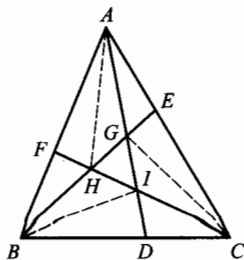
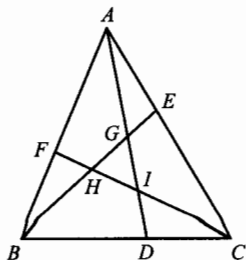


【解析】根据燕尾定理得 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOC} = BD : CD = 4 : 9 = 12 : 27$, $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} = AE : CE = 3 : 4 = 12 : 16$, (都有 $\triangle AOB$ 的面积要统一, 所以找最小公倍数) 所以 $S_{\triangle AOC} : S_{\triangle BOC} = 27 : 16 = AF : FB$, 选 E.

【点评】本题关键是把 $\triangle AOB$ 的面积统一, 这种找最小公倍数的方法, 在用比例解题中屡见不鲜, 如果能掌握它的转化本质, 我们就能达到四两拨千斤的巨大力量!

【例 15】如下图, 三角形 ABC 中, $AF : FB = BD : DC = CE : AE = 3 : 2$, 且三角形 ABC 的面积是 1, 则三角形 ABE 的面积、三角形 AGE 的面积、三角形 GHI 的面积分别为 ().

- (A) $\frac{1}{5}, \frac{8}{95}, \frac{1}{19}$ (B) $\frac{2}{5}, \frac{6}{95}, \frac{1}{19}$ (C) $\frac{2}{5}, \frac{8}{95}, \frac{2}{19}$
(D) $\frac{1}{5}, \frac{8}{95}, \frac{1}{19}$ (E) $\frac{2}{5}, \frac{8}{95}, \frac{1}{19}$



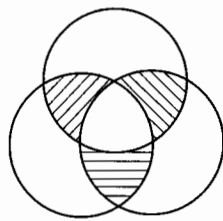
【解析】连接 AH 、 BI 、 CG 。

由于 $CE:AE=3:2$, 所以 $AE=\frac{2}{5}AC$, 故 $S_{\triangle ABE}=\frac{2}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{5}$; 根据燕尾定理, $S_{\triangle ACG}:S_{\triangle ABG}=CD:BD=2:3$, $S_{\triangle BCG}:S_{\triangle ABG}=CE:EA=3:2$, 所以 $S_{\triangle ACG}:S_{\triangle ABG}:S_{\triangle BCG}=4:6:9$, 则 $S_{\triangle ACG}=\frac{4}{19}$, $S_{\triangle BCG}=\frac{9}{19}$; 那么 $S_{\triangle AGE}=\frac{2}{5}S_{\triangle ACG}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{19}=\frac{8}{95}$; 同样分析可得 $S_{\triangle ACH}=\frac{9}{19}$, 则 $EG:EH=S_{\triangle ACG}:S_{\triangle ACH}=4:9$, $EG:EB=S_{\triangle ACG}:S_{\triangle ACB}=4:19$, 所以 $EG:GH:HB=4:5:10$, 同样分析可得 $AG:GI:ID=10:5:4$, 所以 $S_{\triangle BIE}=\frac{5}{10}S_{\triangle BAE}=\frac{5}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$, $S_{\triangle GHI}=\frac{5}{19}S_{\triangle BIE}=\frac{5}{19}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{19}$. 选 E.

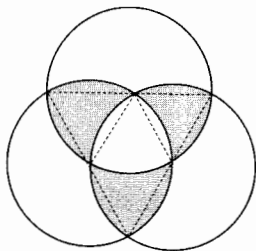
六、面积的和差

【例 16】如图所示, 三个圆的半径是 5 厘米, 这三个圆两两相交于圆心. 则三个阴影部分的面积之和为().

- (A) $\frac{25\pi}{2}$ (B) $\frac{23\pi}{2}$ (C) 12π
(D) 13π (E) 11π



【解析】如图所示, 连接其中一个阴影部分的三点构成一个等边三角形, 从图中会发现: 每一块阴影部分面积 = 正三角形面积 + 两个弓形面积 - 一个弓形面积 = 扇形面积. 所以可求出以这个小阴影部分为主的扇形面积, 再乘 3, 就是阴影的总面积. 故选 A.



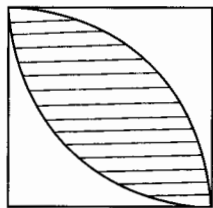
七、分块编号求解

将图形按形状、大小分类, 并设其面积为未知数, 通过建立方程或方程组解出阴影部分面积的方法.

【例 17】如图, 正方形的边长为 2, 分别以两个对角顶点为圆心、以 2 为半径画弧, 则图中阴影部分的面积为().

- (A) $2\pi-4$ (B) $\pi-2$ (C) $2\pi+2$ (D) $2\pi-2$ (E) $4-\pi$

【解析】设阴影部分的面积为 x , 剩下的两块形状、大小相同的部分每块面积为 y , 则图中正方形的面积是 $x+2y$, 而 $x+y$ 是以半径为 2 的圆面积的 $\frac{1}{4}$, 故有 $x+2y=2^2$, $x+y=\frac{\pi}{4}2^2$. 解得 $x=(\frac{\pi}{2}-1)2^2$, 即阴影部分的面积是 $(\frac{\pi}{2}-1)2^2$.



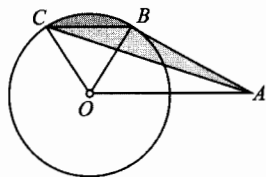
【评注】本题虽可以转化为规则图形的面积和差计算阴影部分面积,但在作图中比较麻烦,因此可以根据图形中隐含的数量关系来构造方程求解。

八、等量变形法

此法就是通过等量变换、平移、旋转、割补等方法将不规则的图形转化为面积相等的规则图形,再利用规则图形的面积公式计算出所求的不规则图形的面积。简言之,就是通过“面积相等”的这个关联,根据已知的量来求解未知的量。常用如等底同高的两三角形面积相等,同底等高的两三角形的面积相等,高、底分别成比例的两图形面积也为高、底比的积等。

【例 18】如图所示, A 是半径为 1 的 $\odot O$ 外的一点, $OA = 2$, AB 是 $\odot O$ 的切线, B 是切点, 弦 $BC \parallel OA$, 连结 AC , 则阴影部分的面积等于()。

- (A) $\frac{5\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ (E) $\frac{\pi}{12}$

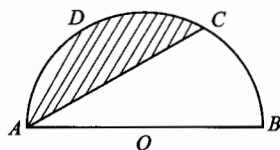


【解析】连结 OB 、 OC 。因为 $BC \parallel OA$, 所以 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC}$, 所以 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OBC}$ 。因为 AB 是 $\odot O$ 的切线, 所以 $\angle ABO = 90^\circ$, 因为 $OB = 1$, $OA = 2$, 所以 $\angle OBC = \angle BOA = 60^\circ$, 所以 $\angle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$, 所以扇形 OBC 是圆的 $\frac{1}{6}$ 。所以 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OBC} = \frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{\pi}{6}$ 。故选 D。

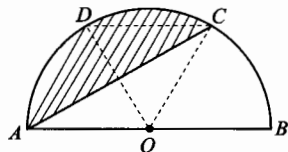
【评注】一个图形的面积不易或难以求出时,可改求与其面积相等的图形面积,便可以使原来不规则的图形转化为规则图形。

【例 19】如图所示, 点 C 、 D 是以 AB 为直径的半圆 O 上的三等分点, $AB = 12$, 则图中由弦 AC 、 AD 和 \widehat{CD} 围成的阴影部分图形的面积为()。

- (A) 6π (B) 7π (C) 8π (D) 9π (E) 10π



【解析】连结 CD 、 OC 、 OD , 可以看出 $AB \parallel CD$, 则 $\triangle ACD$ 和 $\triangle OCD$ 的面积相等, 所以图中阴影部分的面积就等于扇形 OCD 的面积。易得 $\angle COD = 60^\circ$, 故 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OCD} = \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi \cdot 6^2 = 6\pi$ 。故选 A。

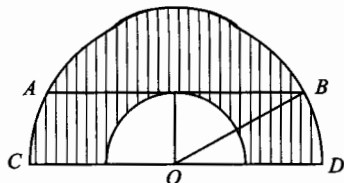
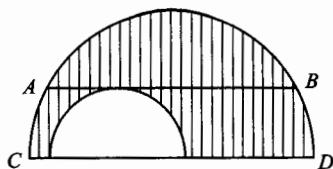


【例 20】已知两个半圆, AB 是小半圆的切线, 又是大半圆的弦, $AB = 24$ 且 $AB \parallel CD$, 则图中阴影部分的面积为()。

- (A) 72π (B) 144π (C) 72 (D) 144 (E) 124

【解析】设大半圆、小半圆的半径分别为 R 、 r , 将小半圆平移到其圆心与大半圆圆心 O 重合, 如图所示, $R^2 - r^2 = 12^2$ 。图中阴影部分面积就是大半圆与小半圆所夹部分面积。 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{大半圆}} - S_{\text{小半圆}} = \frac{\pi}{2}R^2 - \frac{\pi}{2}r^2 = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{2} \times 144 = 72\pi$ 。选 A。

【评注】在大半圆中, 任意移动小半圆的位置, 阴影部分面积都保持不变, 所以可将小半圆移动至两个半圆同圆心位置。



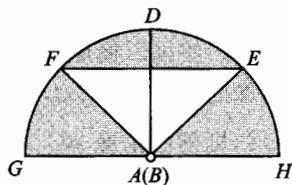
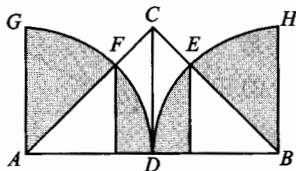
九、割补法

割补法涉及“割”与“补”。“割”，即把一整体的图形分成一些易求解的小图形，然后再将所求结果根据割的情况进行组合；“补”，就是把一个不规则图形补成一个规则、易求解的图形，再处理掉补的那一小块即可，有时需要把“割”“补”联合使用，题目才易求解。

【例 21】如图所示， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， D 为 AB 的中点， $AB=2$ ，扇形 ADG 和 BDH 分别是以 AD 、 BD 为半径的圆的部分，则阴影部分的面积为()。

- (A) $\frac{1}{2}(\pi+1)$ (B) $\frac{1}{2}(\pi-2)$ (C) $\frac{1}{3}(\pi-1)$
(D) $\frac{1}{2}(\pi+2)$ (E) $\frac{1}{2}(\pi-1)$

【解析】将扇形 BDH 绕点 D 按顺时针方向旋转 180° 变成下图， $S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} - S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\pi \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}(\pi-1)$ 。故选 E。

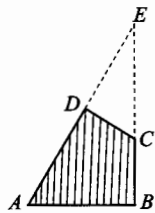


【评注】从表面上看图形异常繁杂，由于两扇形是同一圆的 $\frac{1}{4}$ ，若将其中一个扇形割下来，补在另一个扇形的旁边，构成半圆，如右图，则阴影面积便可得。

【例 22】如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ， $CD=1$ ， $\angle A=60^\circ$ ， $\angle B=\angle D=90^\circ$ ，则四边形 $ABCD$ 所在阴影部分的面积为()。

- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

【解析】延长 BC 、 AD ，交于点 E ，因为 $\angle A=60^\circ$ ， $\angle B=90^\circ$ ，所以 $\angle E=30^\circ$ ，又 $\angle EDC=90^\circ$ ，所以 $CE=2CD$ ， $DE=\sqrt{3}$ ，易求得 $BE=2\sqrt{3}$ ，所以 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}AB \cdot BE - \frac{1}{2}CD \cdot DE = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。故选 A。



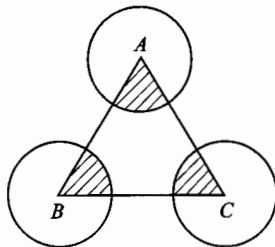
【评注】将不规则图形补成特殊图形，利用特殊图形的面积求出原不规则图形的面积。

十、整体思想

将所求的几个零散图形重新组合成一个整体，看成规则图形来思考。

【例 23】如图所示， $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 两两不相交，且半径都是 0.5cm ，则图中的三个扇形的面积之和为()。

- (A) $\frac{\pi}{12}\text{cm}^2$ (B) $\frac{\pi}{8}\text{cm}^2$ (C) $\frac{\pi}{6}\text{cm}^2$ (D) $\frac{\pi}{4}\text{cm}^2$ (E) $\frac{1}{2}\pi\text{cm}^2$



【解析】由于不知道每块阴影部分的圆心角的度数，所以部分求和无法实现，而三个阴影部分它们半径相同，圆心角的和是 180° ，将三个拼在一起用整体的方法求就很容易了。

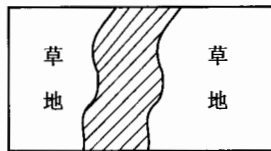
$$\text{所以 } S_{\text{阴影}} = \frac{0.5^2 \times \pi}{2} = \frac{\pi}{8}, \text{ 应选 B.}$$

十一、构造封闭图形

将开放的面通过平移变换转化为相连的图形来思考。

【例 24】如图所示，在一块矩形草地上，有一条弯曲的柏油小路(小路任何地方的水平宽度都是 1 个单位，竖直宽度为 20)，则阴影部分面积为()。

- (A) 16 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21



【解析】弯曲的柏油小路在计算时难度比较大，如果采用平移的方法求解就可以将草地拼成一个封闭的长方形，只要用大的长方形减去小的长方形即为阴影部分面积，阴影部分的水平宽度是大长方形的宽度减去小长方形，竖直长度是长方形的长度。所以阴影部分面积 $= 20 \times 1 = 20$ ，选 D。

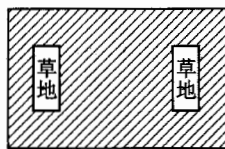
【例 25】如图所示，在一块长为 a 、宽为 b 的矩形草地上，有一条弯曲的柏油小路(小路任何地方的水平宽都是 c 个单位)，则阴影部分草地的面积为()。

- (A) $ac - bc$ (B) $ab - ac$ (C) $ab + bc$
(D) $ac + bc$ (E) $ab - bc$



【解析】(1) 将“小路”沿着左右两个边界“剪去”；(2) 将左侧的草地向右平移 c 个单位得到一个新的矩形。由于新矩形的纵向宽仍然为 b ，水平方向的长变成了 $(a - c)$ ，所以草地的面积为 $b(a - c) = ab - bc$ 。选 E。

除了这几种常用的解法外，还有同一法、向量法、尺规法等，可依据题目的类型和特点选择恰当的方法。几何题目对解题者的要求比较高，光靠逻辑思维能力是不够的，还要有良好的图形感及图形变化的想象能力，当然解决几何问题的最好方法是逻辑思维能力与图形想象能力结合使用。



第五节 阶梯化精炼题

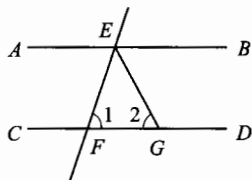


基础能力题

一、问题求解题

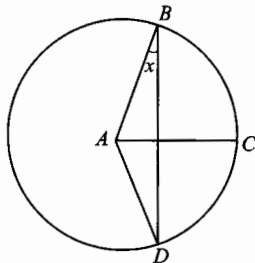
1. 如图所示, $AB \parallel CD$, 直线 EF 分别交 AB 、 CD 于 E 、 F , EG 平分 $\angle BEF$, 若 $\angle 1 = 72^\circ$, 则 $\angle 2$ 为().

(A) 36° (B) 48° (C) 54° (D) 60° (E) 72°



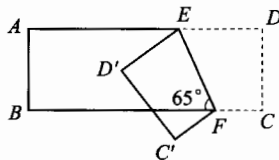
2. 如图所示, 点 A 是圆的圆心, 且 $AB = BC = CD$, 问 x 的值是().

(A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 75°



3. 如图所示, 长方形纸片沿 EF 折叠后, 若 $\angle EFB = 65^\circ$, 则 $\angle AED'$ 为().

(A) 50° (B) 55° (C) 60° (D) 65° (E) 70°



4. 若圆 C 的面积值是周长的 2 倍, 则该圆的面积是().

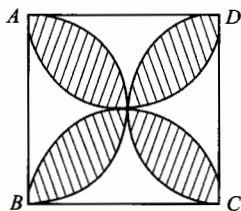
(A) 4 (B) 8 (C) 4π (D) 8π (E) 16π

5. 正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 以 AB 、 BC 、 CD 、 DA 分别为直径画半圆, 这四个半圆弧所围成的阴影部分的面积为().

(A) $(\pi - 2)a^2$ (B) $(\pi - 1)a^2$ (C) $\frac{\pi - 2}{2}a^2$

(D) $\frac{\pi-1}{2}a^2$

(E) $\frac{\pi-2}{4}a^2$



6. 如图所示, 四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 BC, CD 上, $DF = FC, CE = 2EB$, 已知 $S_{\triangle ADF} = m, S_{\text{四边形} AECF} = n (n > m)$, 则 $S_{\text{四边形} ABCD}$ 等于().

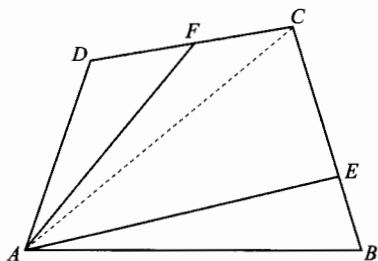
(A) $\frac{3n-m}{2}$

(B) $\frac{3n+m}{2}$

(C) $\frac{3n+3m}{2}$

(D) $\frac{3n-3m}{2}$

(E) $\frac{3n+2m}{2}$



7. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, 且有如下关系: $-c^2 + a^2 + 2ab - 2bc = 0$, 则此三角形的形状为().

(A) 等腰三角形

(B) 等边三角形

(C) 等腰直角三角形

(D) 直角三角形

(E) 以上结论均不正确

8. 如图所示, 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 45^\circ$, AE 为 BC 边上的高, 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折后得 $\triangle AB'E$, 则 $\triangle AB'E$ 与四边形 $AECD$ 重叠部分的面积为().

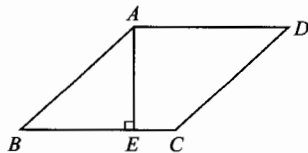
(A) $\sqrt{2} - 1$

(B) $2 - \sqrt{2}$

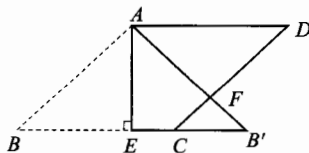
(C) $2\sqrt{2} - 2$

(D) $2\sqrt{2} - 1$

(E) $2 + \sqrt{2}$



(a)



(b)

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AC > AB$, AD 是高, M 是 BC 的中点, $BC = 8, DM = \sqrt{3}$, 则 AD 的长度为().

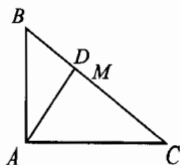
(A) $\sqrt{11}$

(B) $\sqrt{12}$

(C) $\sqrt{13}$

(D) $\sqrt{14}$

(E) 3



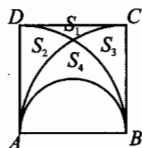
10. 图中大三角形分成 5 个小三角形, 面积分别为 40, 30, 35, x , y , 则 $x = ()$.

- (A) 72 (B) 70 (C) 68 (D) 66 (E) 64



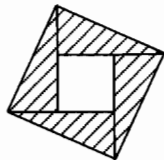
11. 图中 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 以 AB 为直径的半圆以及以 AB 为半径的两个 $\frac{1}{4}$ 圆在正方形中划分出小面积 S_1, S_2, S_3, S_4 , 则 $S_4 - S_1 = ()$.

- (A) $\frac{4}{3}\pi - 2$ (B) $3\pi - 2$ (C) $\frac{8}{3}\pi - 4$ (D) $\frac{3}{2}\pi - 4$ (E) $\pi + 2$



12. 如图所示, 由四个相同的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形. 若大正方形的面积是 13, 小正方形的面积是 1, 直角三角形的较长直角边为 a , 较短直角边为 b , 则 $a^3 + b^4$ 的值为 $()$.

- (A) 35 (B) 43 (C) 89 (D) 97 (E) 90



13. 半径分别为 2, 4, 6 的三个圆两两外切, 则以这三个圆的圆心为顶点的三角形是 $()$.

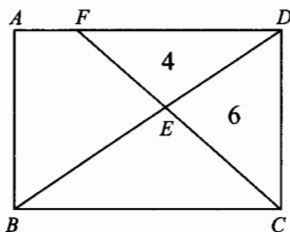
- (A) 锐角三角形 (B) 直角三角形 (C) 等腰三角形
(D) 钝角三角形 (E) 等边三角形

14. 小明测量一条河水的深度, 他把一根竹竿插到离岸边远 1.5m 的水底, 竹竿高出水面 0.5m, 把竹竿的顶端拉向岸边, 竿顶和岸边的水面刚好相齐, 河水的深度为 $()$.

- (A) 2m (B) 4m (C) 6m (D) 8m (E) 5m

15. 如图所示, BD, CF 将长方形 $ABCD$ 分成 4 块, $\triangle DEF$ 的面积是 4, $\triangle CED$ 的面积是 6, 则四边形 $ABEF$ 的面积是 $()$.

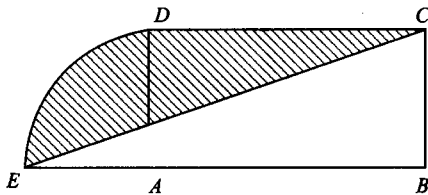
- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 14



二、条件充分性判断题

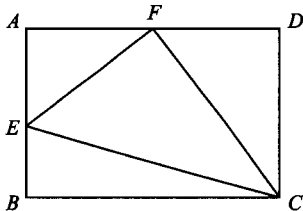
1. 如图所示,设计一个商标图案(图中阴影部分),在长方形 $ABCD$ 中, $AB=2BC$, 以点 A 为圆心, AD 为半径作半圆,则商标图案面积为 $\pi+2$.

- (1) 图案面积比空白面积小 $4-\pi$. (2) 图案面积比矩形面积小 $4-\pi$.



2. 梯形 $ABCD$ 被对角线分为 4 个小三角形, O 为对角线 AC 、 BD 的交点,且 $AD \parallel BC$, 已知 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COD$ 的面积分别为 25 和 35,那么梯形的面积是 144.

- (1) 梯形为等腰梯形. (2) 梯形为直角梯形.



3. 矩形 $ABCD$ 中, $\angle EFC = 90^\circ$, CF 平分 $\angle DCE$, 则矩形的面积为 96.

- (1) $S_{\triangle CDF} : S_{\triangle FAE} = 16 : 9$. (2) $CD = 8$.

4. 如右图,在 $\square ABCD$ 中, $AB = 10$, $AD = 6$, 在 AB 上取一点 F , 使 $\triangle CBF \sim \triangle CDE$.

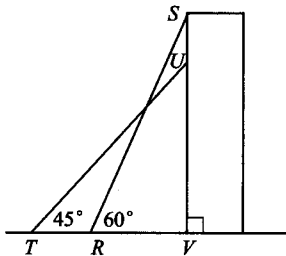
- (1) E 是 AD 的中点. (2) $BF = 1.8$.

5. 若 $\triangle ABC$ 的边长均为整数,周长为 11,在所有可组成的三角形中,最大的边长为 5.

- (1) 其中一边长为 4. (2) 其中一边长为 3.

6. 在下面的图形中,线段 RS 和 TU 表示一个斜靠在墙 SV 上的梯子的两个不同位置. 有 $TV - RV = 5(\sqrt{2} - 1)$.

- (1) TU 的长为 10. (2) RV 的长为 5.

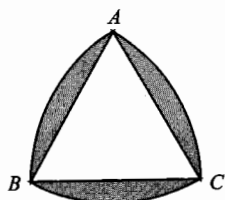


7. 图中 $\triangle ABC$ 为正三角形,边长为 a , \widehat{AB} 、 \widehat{BC} 、 \widehat{CA} 分别是以 C 、 A 、 B 为圆心, a 为半

径的弧,则图中阴影部分的面积为 $\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(1) $a = 2$.

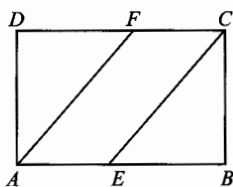
(2) $a = 1$.



8. 在矩形 $ABCD$ 中, $BE = DF$, 能确定原矩形面积与四边形 $AECF$ 的面积之比为 $3 : 2$.

(1) $BE : EA = 1 : 2$.

(2) $AB = 6, BC = 3, CE = \sqrt{13}$.



9. 菱形的一边和等腰直角三角形的直角边相等, 则菱形和三角形的面积之比是 $\sqrt{3} : 1$.

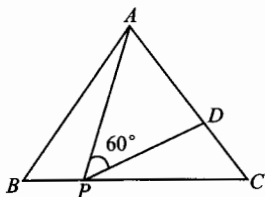
(1) 菱形的一角为 60° .

(2) 菱形的一角为 120° .

10. 如图所示, 在等边三角形 ABC 中, P 为 BC 上一点, D 为 AC 上一点, 且 $\angle APD = 60^\circ$, 则三角形 ABC 的边长为 3.

(1) $BP = 1, CD = \frac{2}{3}$.

(2) $BP = 2, CD = \frac{4}{3}$.



基础能力题详解

一、问题求解题

1. $C; \angle 1 = 72^\circ \Rightarrow \angle FEB = 108^\circ \Rightarrow \angle FEG = 54^\circ \Rightarrow \angle 2 = 54^\circ$.

2. B ; 由 $AB = BC = CD$ 可得, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 都是等边三角形, 且 $\square ABCD$ 是菱形, 所以 AC 与 BD 相互垂直, 因此 $x = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

3. A ; 根据折叠原理,

$$\angle D'EF = \angle DEF, \angle EFC' = \angle EFC = \angle EFB + \angle C'FB = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ,$$

$$\text{故 } \angle D'EF = 180^\circ - \angle EFC' = 65^\circ, \angle AED' = 180^\circ - 2\angle D'EF = 50^\circ.$$

4. E ; 设此圆的半径为 r , 则有 $2 \times 2\pi r = \pi r^2 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow S = 16\pi$.

5. C; 显然一个“花瓣”的面积为一个半圆的面积减去一个直角三角形的面积, 则阴影部分的面积为 $4 \times \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) = \frac{\pi - 2}{2} a^2$.

6. B; 显然 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle AFC} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle ABE}$, 而 $S_{\triangle AFC} = S_{\triangle ADF} = m, S_{\triangle ACE} = S_{\text{四边形}AECF} - S_{\triangle AFC} = n - m, S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACE} = \frac{n - m}{2}$, 故 $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{3n + m}{2}$.

7. A; $-c^2 + a^2 + 2ab - 2bc = (a - c)(a + c + 2b) = 0$, 显然 $a + c + 2b \neq 0$ ($a, b, c > 0$), 只有 $a = c$ 原式才为零, 故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

8. C; 显然有 $AE = BE = \sqrt{2}, CE = 2 - \sqrt{2}, B'C = 2\sqrt{2} - 2$, 而 $\triangle AEB'$ 与 $\triangle FCB'$ 是等腰直角三角形, 所以重叠部分的面积为 $S_{AECF} = S_{\triangle AEB'} - S_{\triangle FCB'} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2} - 2$.

9. C; 根据直角三角形的射影定理, $AD^2 = CD \cdot DB = (CM + DM)(BM - DM) = (BM + DM)(BM - DM) = BM^2 - DM^2 = 13$, 从而 $AD = \sqrt{13}$.

10. B; 如果两个三角形等高, 则面积比等于底边比. $(x + 35) : y = 30 : 40 = 3 : 4$, 而 $70 : y = 35 : x$, 解出 $x = 70$.

$$11. D; \text{由} \begin{cases} S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 - \frac{\pi}{2}, (1) \\ S_2 + S_4 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, (2) \\ S_3 + S_4 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (3) \end{cases} \Rightarrow (3) + (2) - (1) \Rightarrow S_4 - S_1 = \frac{3}{2}\pi - 4.$$

$$12. B; \text{由方程组} \begin{cases} a^2 + b^2 = 13, \\ (a - b)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^4 = 43.$$

13. B; 因为三个圆两两相切, 圆心构成的三角形即为, 两两半径加和, 故此三边分别为 $2 + 4 = 6, 2 + 6 = 8, 4 + 6 = 10$, 即为 $6, 8, 10$, 故此, 此三角形为直角三角形.

14. A; 将其放到一个直角三角形中计算. 此直角三角形的斜边是竹竿的长, 设为 x m. 一条直角边是 1.5 , 另一条直角边是 $(x - 0.5)$ m. 根据勾股定理, 得 $x^2 = 1.5^2 + (x - 0.5)^2$, 得 $x = 2.5$.

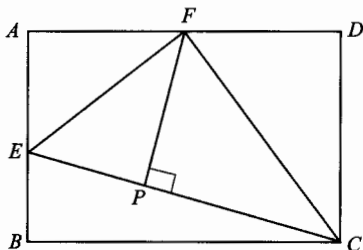
15. C; 有 $\triangle DEF$ 和 $\triangle DEC$ 等高, 面积的比等于底边的比得到 $EF : EC = 4 : 6 = 2 : 3$, 再由 $\triangle DEF \sim \triangle BEC$, 根据相似三角形面积的比等于相似比的平方得到 $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle BEC} = 4 : 9$, 得到 $S_{\triangle BEC} = 9$, 即 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD} = 6 + 9 = 15$, 从而 $S_{ABEF} = 15 - S_{\triangle DEF} = 11$, 即为 11 .

二、条件充分性判断题

1. A; 设矩形的宽为 x , 则阴影部分的面积为 $\frac{1}{4}\pi x^2 + 2x \cdot x - \frac{1}{2}(3x) \cdot x = \frac{1}{4}(\pi + 2)x^2$, 空白部分的面积为 $\frac{3}{2}x^2$, 矩形面积为 $2x^2$. 条件(1), 有 $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}(\pi + 2)x^2 = 4 - \pi \Rightarrow x = 2$, 可得商标图案面积为 $\pi + 2$; 条件(2), 有 $2x^2 - \frac{1}{4}(\pi + 2)x^2 = 4 - \pi \Rightarrow x \neq 2$, 不充分.

2. D; 条件(1), 显然有 $S_{\triangle AOD} = 35$, 而 $\triangle ABO$ 与 $\triangle ABC$ 同底, 所以其高的比为 $5:12$, 则 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 高的比为 $5:7$, 又 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, 故 $S_{\triangle COD} = 49$, 所以梯形的面积为 144 , 充分; 同理, 条件(2)也充分.

3. C; 如下图, 过 F 做 CE 的垂线 FP , 有 $\text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle CPF$, $\angle CFP = \angle CFD$, $CP = CD = 8$, 又 $\angle EFC = 90^\circ$, 则 $\angle EFP = \angle FCP = \angle AFE$, 从而 $\text{Rt}\triangle AFE = \text{Rt}\triangle PFE$. 显然单独的条件(1)、(2)显然不充分, 考虑联合, 则有 $S_{\triangle CFP} : S_{\triangle EFP} = 16 : 9$, 故有 $\frac{EP}{CP} = \frac{9}{16} = \frac{EP}{8} \Rightarrow EP = \frac{9}{2}$, 根据射影定理有 $PF^2 = EP \cdot CP \Rightarrow PF = 6$, 故 $AD = 2PF = 12$, 所以矩形面积为 $12 \times 8 = 96$, 充分.



4. C; 要想 $\triangle CBF \sim \triangle CDE$, 已知 $\angle B = \angle D$, 故再知道一个角相等或者 $\angle B$ 两边对应成比例即可. 又 $AB = 10, AD = 6$, 则从边长角度考虑. 只要 $\frac{DE}{CD} = \frac{BF}{BC}$, 显然单独的条件(1)、(2)不充分, 考虑联合. 有 $DE = 3$, 经演算, 恰好满足 $\frac{DE}{CD} = \frac{BF}{BC}$, 从而 $\triangle CBF \sim \triangle CDE$.

5. D; 条件(1), 显然另外两边和为 7 , 所有能构成三角形整数对为 $(2, 4, 5), (3, 4, 4)$, 最大边长为 5 , 充分; 同理, 条件(2)中, 能构成三角形的整数对为 $(3, 3, 5), (3, 4, 4)$, 最大边长也是 5 , 充分.

6. D; 条件(1), 有 $RS = TU = 10$, 又 $\angle UTV = 45^\circ, \angle SRV = 60^\circ$, 可求得 $TV = 5\sqrt{2}$, $RV = 5$, 所以 $TV - RV = 5(\sqrt{2} - 1)$, 充分; 由条件(2), $RV = 5$, 亦可求出 $RS = 10$, 也即 $TU = 10$, 所以 $TV = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$, $TV - RV = 5(\sqrt{2} - 1)$, 也充分.

7. B; 采用整体的思路来求解.

$$S = 3S_{\text{扇形}ABC} - 3S_{\triangle ABC} = 3 \times \frac{\pi}{6} \times a^2 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)a^2,$$

显然条件(1)不充分, 条件(2)充分.

8. D; 设边长 $CD = a, CB = b, BE = DF = x$, 则题干要求推出 $\frac{ab}{(a-x)b} = \frac{3}{2}$, 即 $a = 3x$.

由条件(1), $\frac{a}{a-x} = \frac{1}{2}$, 可知 $a = 3x$, 即条件(1)是充分的.

由条件(2), $AB = CD = a = 6, CB = b = 3, CE = \sqrt{13}$, 由勾股定理, $BE = x = \sqrt{CE^2 - CB^2} = \sqrt{13 - 9} = 2$, 从而 $a = 3x$ 成立, 因而条件(2)也是充分的.

9. D; 由条件(1), 设菱形的边长为 1 , 菱形的面积相当于两个等边三角形的面积, 从而菱

形的面积 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 等腰直角三角形面积 $= \frac{1}{2}$, 即二者面积之比为 $\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 1$, 条件(1)充分. 由条件(2)可知, 菱形的另一个角为 60° , 因此条件(2)也充分.

10. A; 由题知, $\angle APB + \angle BAP = 120^\circ$, 所以 $\angle BAP = \angle CPD$, $\angle B = \angle C = 60^\circ$, 则 $\triangle ABP \sim \triangle PCD$, $\frac{AB}{CP} = \frac{BP}{CD}$. 设 $AB = x$, 利用三角形的相似. 则由条件(1), $CP = x - 1$, $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}}$, 得 $x = 3$, 即条件(1)是充分的. 由条件(2), $CP = x - 2$, $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{\frac{4}{3}}$, 解得 $x =$

6, 即条件(2)不充分.

综合提高题

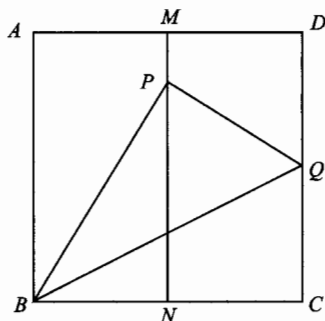


扫码看视频

一、问题求解题

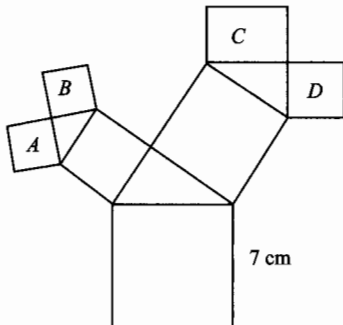
1. 如图所示, 已知正方形纸片 $ABCD$, M 、 N 分别是 AD 、 BC 的中点, 把 BC 边向上翻折, 使点 C 恰好落在 MN 上的点 P 处, BQ 为折痕, 则 $\angle PBQ$ 等于().

- (A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 75°



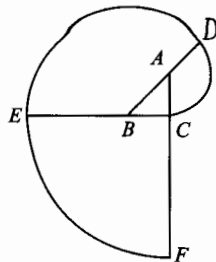
2. 如图所示的图形中, 所有的四边形都是正方形, 所有的三角形都是直角三角形, 其中最大的正方形的边长为 7, 则正方形 A 、 B 、 C 、 D 的面积和是().

- (A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51 (E) 52



3. 如图所示, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle ACB = 90^\circ$, 曲线 $CDEF$ 叫做“等腰直角

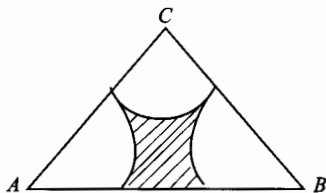
三角形的渐开线",其中 \widehat{CD} , \widehat{DE} , \widehat{EF} 的圆心依次按 A, B, C 循环. 如果 $AC = 1$, 那么由曲线 $CDEF$ 和线段 CF 围成图形的面积为().



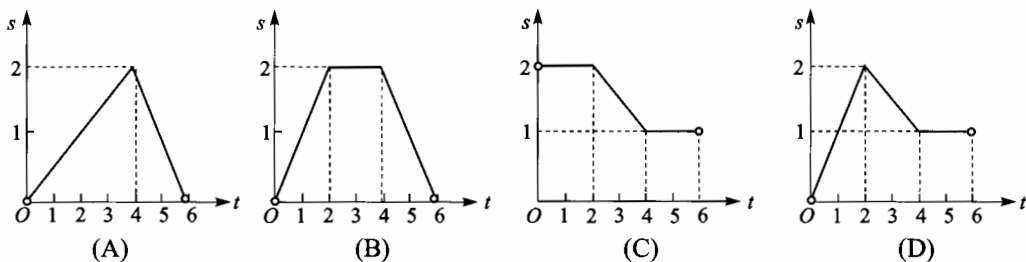
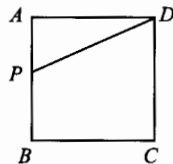
- (A) $\frac{(12+7\sqrt{2})\pi}{4}$ (B) $\frac{(9+5\sqrt{2})\pi+2}{4}$
 (C) $\frac{(12+7\sqrt{2})\pi+2}{4}$ (D) $\frac{(9+5\sqrt{2})\pi}{4}$
 (E) 以上答案均不正确

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 2$, 分别以 A, B, C 为圆心, 以 $\frac{1}{2}AC$ 为半径画弧, 三条弧与边 AB 所围成的阴影部分的面积是().

- (A) $\frac{4-\pi}{2}$ (B) $\pi-2$ (C) $4-\pi$ (D) $\frac{6-\pi}{2}$ (E) $\frac{8-\pi}{2}$



5. 如图所示, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2cm 的正方形, 动点 P 在 $ABCD$ 的边上沿 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的路径以 1cm/s 的速度运动 (点 P 不与 A, D 重合). 在这个运动过程中, $\triangle APD$ 的面积 $S(\text{cm}^2)$ 随时间 $t(\text{s})$ 的变化关系用图像表示, 正确的为().



(E) 以上结论均不正确

6. 已知 $k \geq 0$, 且 $a-b=2k$, $a^2+b^2+c^2=2k^2$, $a^2c^2+b^2c^2=k^4+2k^2$, 则以 a, b, c 为边的三角形是().

- (A) 直角三角形 (B) 等边三角形 (C) 等腰三角形
 (D) 等腰直角三角形 (E) 不存在

7. $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=3$, $\angle A=x$, 当 x 在 $(0, \pi)$ 中变化时, 该三角形 BC 边上的中线长取值的范围是().

- (A) $(0, 5)$ (B) $(1, 4)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(2, 5)$ (E) $(3, 5)$

8. 已知三角形的三边 a, b, c 满足等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$, 这个三角形的外接圆面积与内切圆面积之比为().

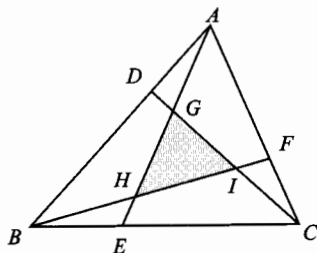
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

9. 已知 a, b 为两圆的半径, 且 a, b 不相等, c 为两圆的圆心距, 若方程 $x^2 - 2ax + b^2 - (b-a)c = 0$ 有相等的实数根, 则两圆().

- (A) 外离 (B) 外切 (C) 相交
(D) 内切 (E) 内含

10. 如图, $\triangle ABC$ 中 $BD = 2DA, CE = 2EB, AF = 2FC$, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是阴影三角形面积的()倍.

- (A) 5 (B) 6 (C) 7
(D) 8 (E) 9



二、条件充分性判断题

1. 如图所示, 在直角三角形中, $AB = BC$, 点 D 是 BC 边上的一点, 有 $\angle DAC = 15^\circ$.

- (1) $AB + BD = AD + CD$. (2) $BD = CD$.

2. 如图所示, 若 $S_{\triangle ABC} = 1$, 则 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{6}$.

- (1) $S_{\triangle BDE} = S_{\triangle DEC}$. (2) $S_{\triangle DEC} = S_{\triangle ACE}$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 能确定 AC 边上的高为 $\frac{28}{5}$.

- (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 5, BC = 7$.
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, BC 边上的高为 4.

4. 如图所示, $ABCD$ 是正方形, $\triangle ABA_1, \triangle BCB_1, \triangle CDC_1, \triangle DAD_1$ 是四个全等的直角三角形, 能确定正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积是 $4 - 2\sqrt{3}$.

- (1) 正方形 $ABCD$ 的边长为 2.
(2) $\angle ABA_1 = 30^\circ$.

5. 如图所示, 矩形 $ABCD$ 面积为 6, $BE = DF$, 能确定 $S_{\triangle BEC} = 1$.

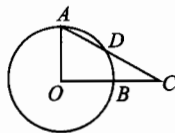
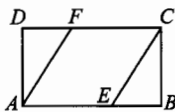
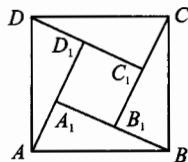
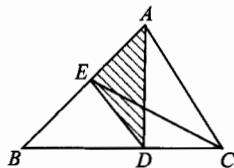
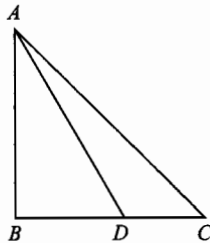
- (1) $BE : EA = 1 : 2$.
(2) $AB = 3, CE = \sqrt{5}$.

6. 如图所示, 圆 O 的两条半径 $OA \perp OB$, AC 与 OB 的延长线交于点 C , AC 与圆 O 交于点 D , 可以确定 $CD = 7.5$.

- (1) 圆 O 的直径为 15, $\angle OAC = 60^\circ$.
(2) $\angle OAC = 2\angle OCA, AC = 15$.

7. 直线 $(m-1)x + 2my + 1 = 0$ 与直线 $(m+3)x - (m-1)y + 1 = 0$ 互相垂直.

- (1) $m = 3$. (2) $m = 1$.



综合提高题详解

一、问题求解题

1. B; 根据题意, 可知 $\triangle BCQ \cong \triangle BPQ$, 有 $BC = BP, \angle CBQ = \angle PBQ$, 在 $\triangle BNP$ 中, $BN =$

$\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP$, 从而 $\angle BNP = 30^\circ$, 则 $\angle PBN = 60^\circ$, 又 $\angle CBQ = \angle PBQ$, 则 $\angle PBQ = 30^\circ$.

2. B; 设 A 、 B 、 C 、 D 的边长分别为 x 、 y 、 z 、 w , 则根据勾股定理, 有 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 7^2$, 而 x^2 、 y^2 、 z^2 、 w^2 恰为 A 、 B 、 C 、 D 的面积, 故其面积和为 49.

3. C; 显然所求图形的面积为 $S_{\triangle ABC} + S_{\text{扇形}CAD} + S_{\text{扇形}DBE} + S_{\text{扇形}ECF}$, 即

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{135^\circ}{360^\circ} \pi \times 1^2 + \frac{135^\circ}{360^\circ} \pi (\sqrt{2} + 1)^2 + \frac{90^\circ}{360^\circ} \pi (\sqrt{2} + 1 + 1)^2 = \frac{(12 + 7\sqrt{2})\pi + 2}{4}.$$

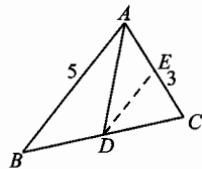
4. A; 阴影部分面积是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积减去一个半圆的面积, 即 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 = \frac{4 - \pi}{2}$.

5. B; 根据点 P 的运动, 当其走 $A \rightarrow B$ 过程中, 面积是随时间增加而增大的, 并且当点 P 与点 B 重合时 $\triangle APD$ 的面积最大; 走 $B \rightarrow C$ 过程中, $\triangle APD$ 的面积是不变的; 走 $C \rightarrow D$ 过程中, $\triangle APD$ 的面积是随时间的增加而减小的.

6. E; 显然 $a^2 + b^2 + c^2 = 2k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$, $a - b = 2k \Rightarrow k = \frac{a - b}{2}$, 所以, $a^2 c^2 + b^2 c^2 = k^4 + 2k^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 2 \times \frac{(a - b)^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2 \times \frac{(a - b)^2}{4} = 0$, 即 $a = b$, 且 $a^2 + b^2 = c^2$, 但 $a = b$ 时, $k = 0$, 此时 $a = b = c = 0$, 故三角形不存在.

7. B; 考虑其极限情况, 当 $x = 0$ 时, 中线应该为 4; 当 $x = \pi$ 时, 中线为 1, 故 $f(x)$ 的取值范围是 $(1, 4)$.

另解: 如图作 AC 中点 E , 连接 DE , 在 $\triangle ADE$ 中, 由三角形三边关系得 $DE - AE < AD < DE + AE$, 即 $\frac{5 - 3}{2} < AD < \frac{5 + 3}{2}$,



从而 $1 < AD < 4$.

8. C; 由 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, 即 $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$.

因为 $a + b + c \neq 0$, 所以 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

所以 $(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) = 0$,

所以 $(a - b)^2 = (b - c)^2 = (c - a)^2 = 0$, 得 $a = b = c$, 因此这个三角形是等边三角形, 其外接圆的半径为内切圆半径的 2 倍, 故面积为 4 倍.

【评注】要证明以 a 、 b 、 c 为边的三角形是等边三角形, 只要能证明 $a = b = c$ 即可, 题中给出了关于 a 、 b 、 c 的关系式, 利用因式分解将它变形, 再利用非负数的性质即可.

9. B; 对于方程 $x^2 - 2ax + b^2 - (b - a)c = 0$ 有相等实根, 有 $\Delta = 4a^2 - 4b^2 + 4(b - a)c = 0$, 即 $(a - b)(a + b - c) = 0$, 得到 $c = a + b$, 所以两圆外切.

10. C; 如图, 连接 AI , $S_{\triangle BCI} : S_{\triangle ABI} = CF : AF = 1 : 2$, 所以, $S_{\triangle ACI} : S_{\triangle BCI} : S_{\triangle ABI} = 1 : 2 : 4$, 那么, $S_{\triangle BCI} = \frac{2}{1 + 2 + 4} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{7} S_{\triangle ABC}$.

同理可知 $\triangle ACG$ 和 $\triangle ABH$ 的面积也都等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{2}{7}$, 所以阴影三角形的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 $1 - \frac{2}{7} \times 3 = \frac{1}{7}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积是阴影三角形面积的 7 倍.

【评注】同底等高的三角形面积相同,运用面积的转化求解.

二、条件充分性判断题

1. A;条件(1), $AB + BD = AD + CD \Rightarrow 2BD + CD = AD + CD \Rightarrow 2BD = AD$, 即在直角三角形 ABD 中, $2BD = AD$, 故 $\angle BAD = 30^\circ$, 有 $\angle DAC = 15^\circ$, 充分;条件(2), $BD = CD$, 即 $BD = \frac{1}{2}AB$, 从而不能得到 $\angle BAD = 30^\circ$, 故不充分.

2. C;条件(1), $S_{\triangle BDE} = S_{\triangle DEC} \Rightarrow BD = CD$, 显然不能推出 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{6}$;条件(2), $S_{\triangle DEC} = S_{\triangle ACE}$, 也不能得到 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{6}$;考虑联合, 有 $S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACE} \Rightarrow BE = 2AE$, 故 $\triangle ADE$ 的底 AE 是 $\triangle BDE$ 的底 BE 的 $\frac{1}{2}$, 高相等, 所以面积为 $\triangle BDE$ 面积的 $\frac{1}{2}$. 得 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, 充分.

3. C;显然单独的条件(1)、(2)不能推出 AC 边上的高为 $\frac{28}{5}$, 两条件联立, 则有 $S = \frac{1}{2}BC \cdot h_{BC} = \frac{1}{2}AC \cdot h_{AC}$, 即 $\frac{1}{2} \times 4 \times 7 = \frac{1}{2} \times 5 \cdot h_{AC}$, 故 $h_{AC} = \frac{28}{5}$.

4. C;条件(1) $AB = 2$ 但得不到 A_1B_1 的长度, 故不能推出 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积;条件(2), 只得到 $AA_1 = \frac{1}{2}AB$, $A_1B = \sqrt{3}AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, 亦不能得到 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积. 联立, 则得 $AD_1 = \sqrt{3}$, $AA_1 = 1$, 故 $A_1D_1 = \sqrt{3} - 1$, $S = (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$.

5. D;条件(1), 设 $AE = 2x$, $BE = x$. 则 $S_{\square ABCD} = (2x + x) \times BC = 3x \cdot BC$,
 $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}BE \cdot BC = \frac{1}{2}x \cdot BC = \frac{1}{6}S_{\square ABCD} = 1$, 充分;条件(2), 由 $AB = 3$, 得 $BC = 2$, 则
 $BE = \sqrt{CE^2 - BC^2} = \sqrt{5 - 4} = 1$. 故 $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}BE \cdot BC = 1$, 充分.

6. D;条件(1) 连接 OD , 则 $\angle OAD = 60^\circ$, $OA = OD$, 故 $\triangle AOD$ 为正三角形, $AD = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 15 = 7.5$, 满足;条件(2), 由 $\angle OAC + \angle OCA = 90^\circ$, $\angle OAC = 60^\circ$. 同理, $\triangle AOD$ 为正三角形, $AD = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 15 = 7.5$.

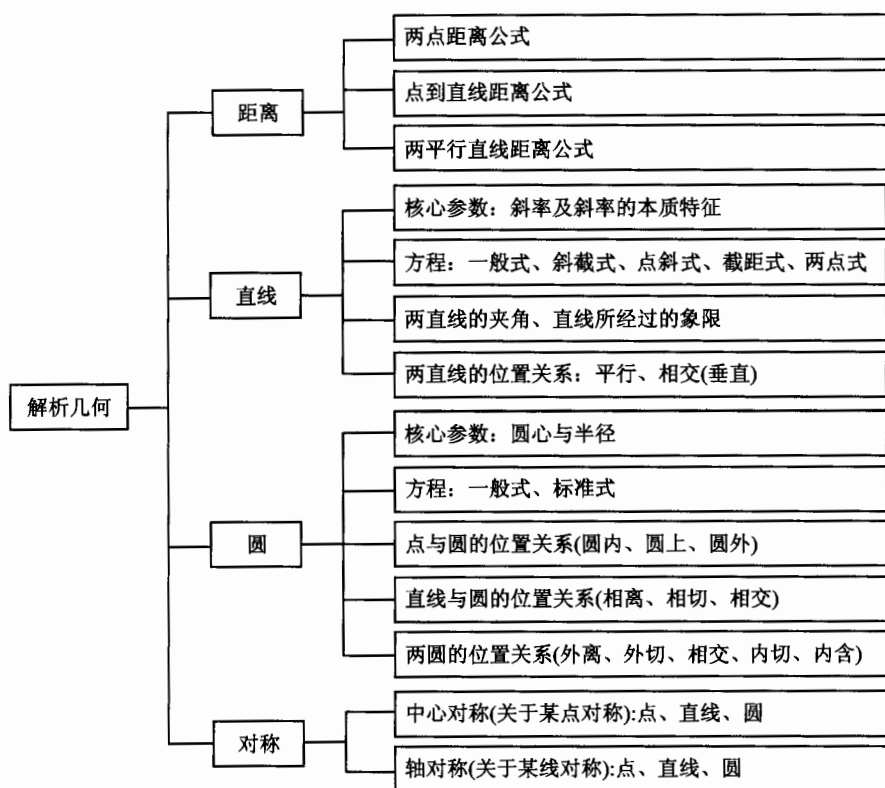
7. D;要直线 $(m-1)x + 2my + 1 = 0$ 与直线 $(m+3)x - (m-1)y + 1 = 0$ 互相垂直, 则需要 $(m-1)(m+3) + 2m[-(m-1)] = 0$, 解得 $m = 3$ 或 $m = 1$, 显然都充分.

第七章 解析几何

【大纲考点】1. 平面直角坐标系;2. 直线方程与圆的方程;3. 两点间距离公式与点到直线的距离公式.

【命题剖析】解析几何是将平面图像放在平面直角坐标系中来研究,通过方程来确定图像的位置. 从命题来看,主要考查的是在平面直角坐标系中直线、圆、直线与直线的位置关系、直线与圆的位置关系. 本部分一般考 3 个题目,命题方向主要体现在 4 个方面:一个是根据已知条件求出方程表达式;二是确定所给图像经过的象限情况;三是确定位置关系(直线与直线、直线与圆、圆与圆);四是考查对称问题(中心对称与轴对称).

【知识体系】



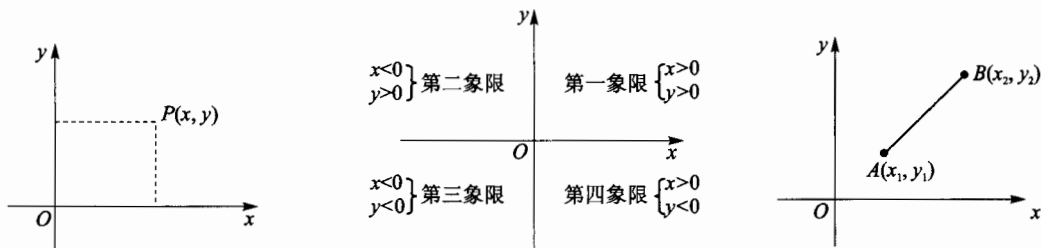
【备考建议】对于教师,建议课时控制在 6 个课时;对于考生,建议在学习时,一定要会画图,因为解析几何考试一般是不给图像的. 只要将图像画出来,采用数形结合的方法,很容易求解题目.

第一节 考试要点剖析

一、平面直角坐标系

1. 点

点在平面直角坐标系中的表示: $P(x, y)$



两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 之间的距离: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

【评注】当已知直线 l 的斜率为 k 时, 可以将上述公式变形为

$$d = \sqrt{(1+k^2)(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_1| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |y_2 - y_1|.$$

2. 线段的定比分点

设 A, B 是两个不同点, 它们的坐标依次为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, P 是线段 AB 上的一点, 并且分 AB 的定比为 λ ($\overline{AP} = \lambda \overline{PB}$), 则 P 的坐标为 $\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$.

【注意】中点坐标公式: 两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

二、平面直线

1. 直线的倾斜角和斜率

(1) 倾斜角: 直线与轴正方向所成的夹角称为倾斜角, 记为 α . 其中要求 $\alpha \in [0, \pi)$.

(2) 斜率: 倾斜角的正切值为斜率, 记为 $k = \tan \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

(3) 两点斜率公式: 设直线 l 上有两个点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$.

2. 直线方程的几种形式

(1) 点斜式: 过点 $P(x_0, y_0)$, 斜率为 k 的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

(2) 斜截式: 斜率为 k , 在 y 轴上的截距为 b (即过点 $P_0(0, b)$) 的直线方程为 $y = kx + b$.

(3) 两点式: 过两个点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线方程为 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$,

$x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

(4) 截距式:在 x 轴上的截距为 a (即过点 $P_1(a, 0)$), 在 y 轴上的截距为 b (即过点 $P_2(0, b)$) 的直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a \neq 0, b \neq 0$.

(5) 一般式: $ax + by + c = 0, a, b$ 不全为零.

3. 点到直线的距离

点 (x_0, y_0) 到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离 $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

4. 两条直线的位置关系

直线形式 位置关系	斜截式 $l_1: y = k_1x + b_1$ $l_2: y = k_2x + b_2$	一般式 $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$
平行 $l_1 \parallel l_2$	$k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1 \neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
垂直 $l_1 \perp l_2$ (相交的特殊情况)	$k_1 k_2 = -1$	$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

【注意】两条直线的交点求解方法: 若直线 $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 相交, 则它们的交点坐标为方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ 的唯一一个实数解.

5. 两平行直线的距离

直线 $ax + by + c_1 = 0$ 与直线 $ax + by + c_2 = 0$ 的距离 $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

6. 两直线的夹角公式(了解)

若两条直线的斜率分别为 k_1, k_2 , 两直线的夹角为 α , 则有 $\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$.

三、圆

1. 圆的方程

(1) 标准方程

当圆心为 (x_0, y_0) , 半径为 r 时, 圆的标准方程为 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. 特别地, 当圆心在原点 $(0, 0)$ 时, 圆的标准方程为 $x^2 + y^2 = r^2$.

(2) 一般方程: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

配方后得 $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$, 要求 $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

圆心坐标 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, 半径 $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} > 0$.

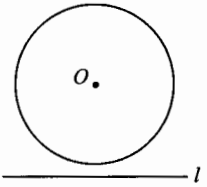
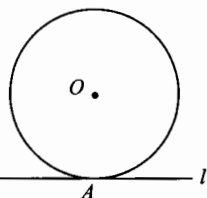
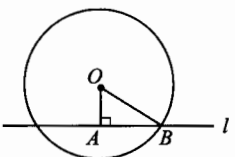
2. 点与圆的关系

点 $P(x_p, y_p)$, 圆 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

点的坐标代入圆的方程: $(x_p - x_0)^2 + (y_p - y_0)^2$ $\begin{cases} < r^2, & \text{点在圆内,} \\ = r^2, & \text{点在圆上,} \\ > r^2, & \text{点在圆外.} \end{cases}$

3. 直线与圆的位置关系


直线 $l: y = kx + b$, 圆 $O: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, d 为圆心 (x_0, y_0) 到直线 l 的距离.

直线与圆的位置关系	图形	成立条件 (几何表示)	成立条件 (代数式表示)
相离		$d > r$	方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$ 无实根, 即 $\Delta < 0$
相切		$d = r$	方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$ 有两个相等的实根, 即 $\Delta = 0$
相交		$d < r$	方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$ 有两个不等的实根, 即 $\Delta > 0$

【注意】在直线与圆的位置关系中, 常常用到一个重要的三角形: $\text{Rt}\triangle OAB$ (见上表第三个图) 做计算.

4. 圆与圆的关系

圆 $O_1: (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$, 圆 $O_2: (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$ (不妨设 $r_1 > r_2$), d 为圆心 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的圆心距.

两圆的位置关系	图形	成立条件 (几何表示)	内公切线条数	外公切线条数
外离		$d > r_1 + r_2$	2	2

续表

两圆的 位置关系	图形	成立条件 (几何表示)	内公切线 条数	外公切线 条数
外切		$d = r_1 + r_2$	1	2
相交		$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	0	2
内切		$d = r_1 - r_2$	0	1
内含		$d < r_1 - r_2$	0	0

第二节 基础过关题型

【题型 1】中点坐标公式

【思路点拨】利用公式求解即可.

【例 1】已知三个点 $A(x, 5), B(-2, y), C(1, 1)$, 若点 C 是线段 AB 的中点, 则().

- (A) $x = 4, y = -3$ (B) $x = 0, y = 3$ (C) $x = 0, y = -3$
(D) $x = -4, y = -3$ (E) $x = 3, y = -4$

【解析】点 C 是 AB 的中点, 根据中点坐标公式, 有

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}(x - 2), \\ 1 = \frac{1}{2}(5 + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -3, \end{cases} \text{ 故选 A.}$$

【题型 2】距离

【思路点拨】解析几何中的距离公式主要包括两点间的距离公式、点到直线的距离公式、两平行线的距离公式.

【例2】已知线段AB的长为12,点A的坐标是 $(-4,8)$,点B的横、纵坐标相等,则点B的坐标为().

- (A) $(-4, -4)$ (B) $(8, 8)$ (C) $(4, 4)$ 或 $(8, 8)$
(D) $(-4, -4)$ 或 $(8, 8)$ (E) $(4, 4)$ 或 $(-8, -8)$

【解析】设点B的坐标为 (x, x) ,根据题意有 $\sqrt{(x+4)^2 + (x-8)^2} = 12$,解得 $x = -4$ 或 $x = 8$,故选D.

【例3】已知点 $C(2, -3), M(1, 2), N(-1, -5)$,则点C到直线MN的距离等于().

- (A) $\frac{17\sqrt{53}}{53}$ (B) $\frac{17\sqrt{55}}{55}$ (C) $\frac{19\sqrt{53}}{53}$ (D) $\frac{18\sqrt{53}}{53}$ (E) 不能确定

【解析】直线MN的方程为 $y+5=\frac{2+5}{1+1}(x+1)$,即 $7x-2y-3=0$,故点C到直线MN的距离为 $\frac{|2 \times 7 + 2 \times 3 - 3|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2}} = \frac{17}{\sqrt{53}} = \frac{17\sqrt{53}}{53}$,选A.

【例4】正三角形ABC的两个顶点 $A(2, 0), B(5, 3\sqrt{3})$,则另一个顶点的坐标是().

- (A) $(8, 0)$ (B) $(-8, 0)$ (C) $(1, -3\sqrt{3})$
(D) $(8, 0)$ 或 $(-1, 3\sqrt{3})$ (E) $(6, 0)$ 或 $(-1, 3\sqrt{3})$

【解析】设点C坐标为 (x, y) ,则有 $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (3\sqrt{3})^2}$,解得 $\begin{cases} x=8, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=3\sqrt{3}, \end{cases}$ 选D.

【评注】如果改成直角三角形,又如何思考?

【例5】点 $A(3, 4), B(2, -1)$ 到直线 $y=kx$ 的距离之比为1:2.

- (1) $k = \frac{9}{4}$. (2) $k = \frac{7}{8}$.

【解析】条件(1)中, $y = \frac{9}{4}x$,即 $9x - 4y = 0$.点A到已知直线的距离 $d_A = \frac{|27 - 16|}{\sqrt{9^2 + 4^2}} = \frac{11}{\sqrt{97}}$,点B到已知直线的距离 $d_B = \frac{|18 + 4|}{\sqrt{9^2 + 4^2}} = \frac{22}{\sqrt{97}} = 2d_A$,条件(1)充分.

条件(2)中, $y = \frac{7}{8}x$,即 $7x - 8y = 0$.点A到已知直线的距离 $d_A = \frac{|21 - 32|}{\sqrt{7^2 + 8^2}} = \frac{11}{\sqrt{113}}$,点B到已知直线的距离 $d_B = \frac{|14 + 8|}{\sqrt{7^2 + 8^2}} = \frac{22}{\sqrt{113}} = 2d_A$,条件(2)充分.故选D.

【题型3】判断图像的形状、性质

【思路点拨】掌握各常见图形的几何性质及判定方法,包括几何判定与代数式的判定.

【例6】直线 $l: ax + by + c = 0$ 必不通过第三象限.

- (1) $ac \leq 0, bc < 0$. (2) $ab > 0, c < 0$.

【解析】条件(1),由 $bc < 0$ 知 $b \neq 0$,有 $y = -\frac{a}{b}x + \frac{-c}{b}$, $-\frac{a}{b} \leq 0, \frac{-c}{b} > 0$,当 $a \neq 0$

时,直线不过第三象限,当 $a=0$ 时,直线过第一、二象限,不过第三象限,充分;同理,条件(2), $-\frac{a}{b} < 0, c < 0$, 而 $\frac{-c}{b}$ 不确定,不充分. 故选 A.

【评注】注意遇到字母类型的题目要对字母的取值范围进行讨论研究,若在条件(1)中忽略了 $a=0$, 可能会选错. 此外,对于直线,若斜率为正,则必过一、三象限;若斜率为负,则必过二、四象限.

【例 7】方程 $x^2 + y^2 + 4mx - 2y + 5m = 0$ 表示圆的充分必要条件是().

- (A) $\frac{1}{4} < m < 1$ (B) $m < \frac{1}{4}$ 或 $m > 1$ (C) $m < \frac{1}{4}$
(D) $m > 1$ (E) $1 < m < 4$

【解析】 $x^2 + y^2 + 4mx - 2y + 5m = 0 \Rightarrow (x + 2m)^2 + (y - 1)^2 = 4m^2 + 1 - 5m$, 只要 $4m^2 + 1 - 5m > 0$ 即可, 得 $m < \frac{1}{4}$ 或 $m > 1$, 选 B.

【题型 4】解析几何面积

【思路点拨】解析几何要先根据所给的方程或表达式画出图像, 然后借助平面几何的知识来求解面积.

【例 8】由曲线 $|x| + |y| = 1$ 所围成的平面图形的面积是().

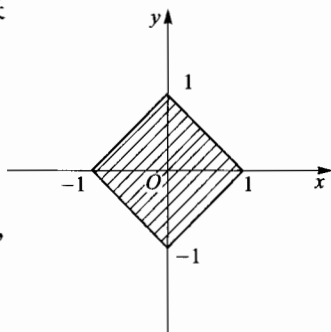
- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{3}$ (E) $2\sqrt{2}$

【解析】如图所示, 曲线可化成为 $\pm x \pm y = 1$, 表示一个边长为 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 的正方形, 故面积为 $(\sqrt{2})^2 = 2$, 故选 C.

【例 9】由曲线 $|x| + |2y| = 4$ 所围图形的面积为().

- (A) 12 (B) 14 (C) 16
(D) 18 (E) 8

【解析】根据绝对值的定义, $|x| + |2y| = 4$ 表示一个菱形, 其面积为 $S = \frac{2 \times 4^2}{2} = 16$, 选 C.



【评注】 $|ax - b| + |cy - d| = e$ 表示 $\begin{cases} a=c, & \text{为正方形,} \\ a \neq c, & \text{为菱形,} \end{cases}$ 所围

图形的面积均为 $S = \frac{2e^2}{ac}$ ($a, c, e > 0$), 其中 b 和 d 只影响图形的中心位置, 不影响面积.

【例 10】与两坐标轴围成的三角形面积为 2, 且在两个坐标轴上的截距之差的绝对值为 3 的直线有() 条.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 不确定

【解析】设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 则有 $\begin{cases} \frac{1}{2}|ab| = 2, \\ |a - b| = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -1, \\ b = -4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 4, \\ b = 1, \end{cases}$ 或

$\begin{cases} a = 1, \\ b = 4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -4, \\ b = -1, \end{cases}$ 共有 4 条直线, 选 D.

【例 11】过点 $M(-1, 1)$, $N(1, 3)$, 圆心在 x 轴上的圆的方程为().

(A) $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$

(B) $x^2 + y^2 - 4y + 6 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$

(D) $x^2 + y^2 + 4y + 6 = 0$

(E) $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$

【解析】设圆心为 $(x_0, 0)$, 圆的方程为 $(x - x_0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$, M 在圆上, 则

$$\begin{cases} (x+1)^2 + 1 = r^2, \\ (x-1)^2 + 9 = r^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=2, \\ r=\sqrt{10}, \end{cases} \text{ 故圆的方程为 } (x-2)^2 + y^2 = 10, \text{ 即 } x^2 - 4x + y^2 - 6 = 0. \text{ 选 E.}$$

【题型 5】直线与直线的位置关系

【思路点拨】直线与直线的位置关系重点掌握垂直关系的判断, 两条直线垂直不要忘记水平和竖直的特殊情况.

【例 12】 $(m+2)x + 3my + 1 = 0$ 与 $(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$ 相互垂直.

(1) $m = \frac{1}{2}$. (2) $m = -2$.

【解析】条件(1), 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 两直线的斜率分别为 $-\frac{5}{3}, \frac{3}{5}$, 有 $-\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = -1$, 故互相垂直; 条件(2), 当 $m = -2$ 时, 两直线分别为平行于 x 轴、 y 轴的直线, 显然是垂直的, 故选 D.

【评注】注意在求解有关直线位置关系问题的时候, 一定不要忽略平行于 x 轴、 y 轴的直线, 平行于 x 轴的直线斜率为 0, 平行于 y 轴的直线没有斜率(或为 ∞).

【例 13】已知定点 $A(2, -3), B(-3, -2)$, 直线 L 过点 $P(1, 1)$ 且与线段 AB 相交, 则直线 L 的斜率的取值范围是().

(A) $k \geq \frac{3}{4}$ 或 $k \leq -4$

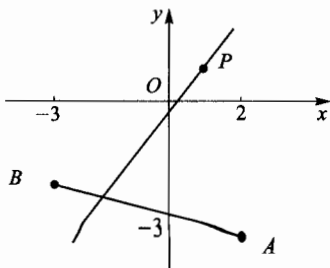
(B) $-4 \leq k \leq \frac{3}{4}$

(C) $k \geq \frac{3}{4}$ 或 $k \leq -\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{3}{4} \leq k \leq 4$

(E) $k \leq -\frac{3}{4}$ 或 $k \geq 4$

【解析】如图所示, $k_{PA} = \frac{-3-1}{2-1} = -4, k_{PB} = \frac{-2-1}{-3-1} = \frac{3}{4}$. 从 k_{PA} 到 k_{PB} 斜率的取值范围必须以斜率不存在(直线 $x=1$)为界限分开考虑. 斜率为负值时, 从 PA 开始直线倾斜角越来越小, 斜率也越来越小, $k \leq -4$. 斜率为正值时, 从 PB 开始直线倾斜角越来越大, 斜率也越来越大, $k \geq \frac{3}{4}$. 直线 L 的斜率的取值范围是 $k \geq \frac{3}{4}$ 或 $k \leq -4$. 选 A.



第三节 强化突破题型

【题型 1】求直线、圆的方程

【思路点拨】熟练掌握直线、圆的各表达式的形式、特点及求解的方法.

【例 1】过点 $A(2,1)$ 且在 x, y 轴上截距相等的直线有().

- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条 (E) 无数条

【解析】采用截距式方程, 设截距为 a , 有直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 点 $A(2,1)$ 在直线上, 有 $\frac{2}{a} + \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = 3$, 故直线方程为 $x + y - 3 = 0$, 还有一条过原点的直线, 共 2 条, 选 B.

【评注】注意, 求直线方程时, 要根据已知的条件, 巧用点斜式、斜截式、两点式、截距式等方程进行求解.

【例 2】直线 $l: 2x - y - 4 = 0$ 绕与 x 轴交点逆时针旋转 45° , 所得直线方程为().

- (A) $2x + y - 4 = 0$ (B) $3x - y + 6 = 0$ (C) $3x + y - 6 = 0$
(D) $3x + y + 4 = 0$ (E) $3x - y + 4 = 0$

【解析】根据 $2x - y - 4 = 0$ 可以知道, 直线与 x 轴的交点是 $(2, 0)$, 设直线 l, l' 的斜率分别为 k, k' , 则 $\tan 45^\circ = \frac{k' - k}{1 + kk'} = \frac{k' - 2}{1 + 2k'} = 1 \Rightarrow k' = -3$, 所以直线 l' 为 $y = -3(x - 2)$, 即 $3x + y - 6 = 0$, 选 C.

【例 3】到直线 $2x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 的点的集合是().

- (A) 直线 $2x + y - 2 = 0$ (B) 直线 $2x + y = 0$
(C) 直线 $2x + y = 0$ 或直线 $2x + y - 2 = 0$
(D) 直线 $2x + y = 0$ 或直线 $2x + y + 2 = 0$
(E) 直线 $2x + y - 1 = 0$ 或直线 $2x + y - 2 = 0$

【解析】方法一: 设点 (x, y) 为满足条件的点, 则有 $\frac{|2x + y + 1|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 得 $2x + y = 0$ 或 $2x + y + 2 = 0$, 选 D.

方法二: 考虑到满足条件的点的集合必为平行于 $2x + y + 1 = 0$ 的直线, 设所求直线为 $2x + y + c = 0$, 利用平行线间的距离公式, 有 $\frac{|1 - c|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 得到 $c = 2$ 或 $c = 0$, 直线方程为 $2x + y = 0$ 或 $2x + y + 2 = 0$, 选 D.

【例 4】一圆与 y 轴相切, 圆心在直线 $x - 3y = 0$ 上, 且在直线 $y = x$ 上截得的弦长为 $2\sqrt{7}$, 则此圆的方程为().

- (A) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$
(B) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$
(C) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 3$
(D) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ 或 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$$(E) (x-3)^2 + (y-1)^2 = 3 \text{ 或 } (x+3)^2 + (y+1)^2 = 3$$

【解析】根据题意,可以设圆的圆心为 $(3y_0, y_0)$, 半径为 r , 圆心到直线 $y=x$ 的距离为 d , 则有

$$\begin{cases} r = 3|y_0|, \\ d = \frac{|3y_0 - y_0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}, \\ r^2 - d^2 = (\sqrt{7})^2, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} r = 3, \\ y_0 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r = 3, \\ y_0 = -1 \end{cases}$, 故圆的方程为 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ 或 $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 9$.

9. 故选 D.

【评注】注意解此类题的最基本方法,先把题意读懂,找到一共有几个可列数量关系的条件,再根据条件假设所求直线(或圆)的方程,然后利用未用到的条件列出等量关系式,组成一个方程组,最后求解此方程组并检验解是否满足条件,从而找到正确答案.

【题型 2】直线与圆的位置关系

【思路点拨】判别直线与圆的位置关系的核心是比较圆心到直线的距离与半径的大小;在直线与圆的三种位置关系中,最重要的是相切,所以要重点掌握切线的相关考点.

【例 5】过点 $(-2, 0)$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 有两个交点,则斜率 k 的取值范围是().

(A) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (B) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (C) $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

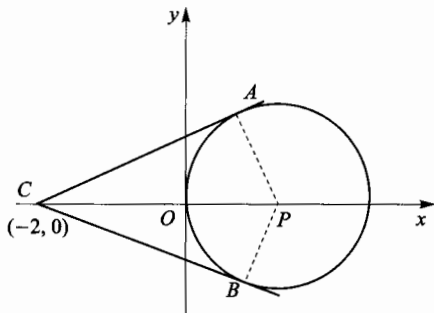
(D) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (E) $(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$

【解析】方法一(解析法):根据题意此直线应该为 $y=kx+2k$, 和圆有两个交点,那么方程 $x^2 + (kx+2k)^2 = 2x$, 即 $(k^2+1)x^2 + (4k^2-2)x + 4k^2 = 0$ 有两个不同的实数根,则有

$$4(2k^2-1)^2 - 4 \times 4k^2(k^2+1) = 4(1-8k^2) > 0, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{2}}{4} < k < \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 选 C.}$$

方法二(图解法):如右图,直线从 CB 按逆时针方向旋转,旋转到 CA , 在这一过程中,直线与圆有两个交点,除此之外就不是两个交点. 而 $\angle CAP = \angle CBP = \frac{\pi}{2}$, $\angle ACP = \angle BCP$, 而斜率恰是角的正切值,而 $PC=3, AP=r=1$, 故 $AC = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, 故斜率的最大值为 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, 最小值为 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, 故范围是

$$(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}), \text{ 选 C.}$$



【评注】注意求解图形之间的位置关系时,在更多的情况利用图解法更简单些.

【例6】直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 绕原点按逆时针方向旋转 30° 后所得直线 l' 与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 的位置关系是()。

- (A) 直线 l' 过圆心 (B) 直线 l' 与圆相交, 但不过圆心
(C) 直线 l' 与圆相切 (D) 圆心到直线 l' 的距离为 $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$
(E) 圆心到直线 l' 的距离为 $2\sqrt{3}$

【解析】根据题意, 先把直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 按逆时针方向旋转 30° , 所成的直线 l' 为 $y = \sqrt{3}x$, 再代入圆的方程, 转化为判断形成的新方程根的情况: 新方程为 $(x-2)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 3$, 即 $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = 0$, 方程的有两个相等的实数根, 选 C.

【评注】本题也可以根据圆心到直线的距离与半径的关系来判断。

【例7】圆 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 4 (a > 0)$ 及 $l: x-y+3=0$, 当 l 被圆截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, a 为()。

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $-\sqrt{2}-1$ (E) $\pm\sqrt{2}-1$

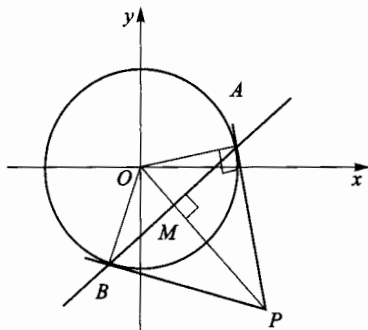
【解析】根据题意, 圆心到直线 l 的距离为 $d = \frac{|a-2+3|}{\sqrt{2}}$, 有 $d^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2$, 即 $\frac{a^2+2a+1}{2} + 3 = 4$, 解得 $a = \pm\sqrt{2}-1$, 又由 $a > 0$, 故选 C.

【评注】注意在直线和圆相交的情况下, 要利用好半径、圆心到直线的距离、半弦长所组成的三角形。

【例8】过点 $P(6, -8)$ 作 $x^2 + y^2 = 25$ 的两条切线, 分别切于 A, B 两点, 则点 P 到 AB 直线的距离为()。

- (A) 15 (B) 10 (C) $\frac{15}{2}$
(D) 5 (E) 6

【解析】如下图, $OP = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$, 则 $AP = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$, 设 $PM = x > 0$, 有 $AP^2 - MP^2 = OA^2 - OM^2$, 即 $(5\sqrt{3})^2 - x^2 = 25 - (10-x)^2$, 解得 $x = \frac{15}{2}$, 选 C.



【例9】圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 和直线 $(1+2\lambda)x + (1-\lambda)y - 3 - 3\lambda = 0$ 相交于两点。

$$(1) \lambda = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

$$(2) \lambda = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

【解析】根据直线与圆相交的条件: $d < r$, 即 $d = \frac{|3\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2}} < r = 2$,

$9\lambda^2 < 4[(1+2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2]$, 从而得到 $11\lambda^2 + 8\lambda + 8 > 0$, 即对任意的 λ 均成立, 条件(1)、(2)都充分. 故选 D.

【评注】对于直线和圆的位置关系, 只需要看圆心到直线的距离 d 与圆半径 r 的关系即可. 此外, 可借助方程恒过定点来思考, 将原直线方程写成 $(x+y-3) + \lambda(2x-y-3) = 0$,

可以得到 $\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2x-y-3=0, \end{cases}$ 解出定点 $(2, 1)$. 最简便的, 也可在原方程中令 $\lambda=1$ 和 $\lambda=-\frac{1}{2}$

解出定点 $(2, 1)$. 该点正好在圆内部, 故直线与圆恒有两个交点, 均充分.

【题型3】圆与圆的位置关系

【思路点拨】两圆的位置关系有五种: 相离、外切、相交、内切、内含. 判断方法主要借助两圆心的距离与两圆半径的关系来确定. 主要命题考点有公切线、公共弦长等.

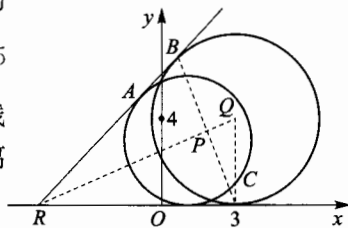
【例10】圆心分别在 $P(1, 3)$ 和 $Q(3, 4)$ 的两个圆都和 x 轴相切, 则它们的另一条公切线的斜率为().

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

【解析】如图所示, 两个圆的另一条公切线 AB (A, B 是切点) 交 x 轴于点 R . 直线 $PQ: y-3 = \frac{4-3}{3-1}(x-1)$, $x-2y+5=0$, 令 $y=0, x=-5$, 点 R 坐标为 $(-5, 0)$. 设过点 R 的公切线

方程为 $y=k(x+5)$, $kx-y+5k=0$, 圆心 $(1, 3)$ 到切线距离

$$\frac{|6k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = 3, k = \frac{4}{3} \text{ 或 } k=0 \text{ (舍)}. \text{ 选 D.}$$



【例11】设 A, B 是两个圆 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ 和 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 3$ 的交点, 则过 A, B 的直线方程为().

- (A) $4x+2y-9=0$ (B) $4x-2y+9=0$ (C) $2x-4y-9=0$
(D) $2x+4y-9=0$ (E) $2x-4y+9=0$

【解析】 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$ 两式相减得 $-2x + 4y + 9 = 0$. 选 C.

【评注】求相交两圆的公共弦(根轴)所在的直线方程, 如果解相交两圆的交点, 再用直线两点式方程, 计算量较大, 本例用的是过两曲线交点的曲线系方法, 一般而言, 过曲线 $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0$ 交点的曲线系方程是: $\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = 0 (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, 或 $f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0 (\lambda \in \mathbf{R})$. 前者表示过两曲线交点的所有曲线方程, 后者则表示过两曲线交点的除去 $f_2(x, y) = 0$ 的所有曲线方程. 本例解法中, 在过两圆交点的圆系方程 $(x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8) + \lambda(x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1) = 0$, 令 $\lambda = -1$ (即将两圆方程相减) 恰好消去二次项, 得到一条直线的方程, 这条直线通过两圆交点, 即为所求的相交两圆的公共弦(根轴)所在的直线方程.

【例 12】半径分别为 2 和 5 的两个圆, 圆心坐标分别为 $(a, 1)$ 和 $(2, b)$, 它们有 4 条公切线.

(1) 点 $P(a, b)$ 在圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 49$ 的里面.

(2) 点 $P(a, b)$ 在圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 49$ 的外面.

【解析】两个圆有 4 条公切线 \Leftrightarrow 两个圆相离 $\Leftrightarrow d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow \sqrt{(2-a)^2 + (b-1)^2} > 7 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 > 49$. 故选 B.

【题型 4】轴对称问题

【思路点拨】轴对称也可以转化为点的对称思考.

【例 13】点 $P(-3, -1)$ 关于直线 $3x + 4y - 12 = 0$ 的对称点 P' 是().

(A) $(2, 8)$ (B) $(1, 3)$ (C) $(8, 2)$ (D) $(3, 7)$ (E) $(7, 3)$

【解析】设 P' 为 (x_0, y_0) , 根据点关于直线对称的条件, 有

$$\begin{cases} 3 \times \frac{x_0 - 3}{2} + 4 \times \frac{y_0 - 1}{2} - 12 = 0, \\ \frac{y_0 + 1}{x_0 + 3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_0 = 3, \\ y_0 = 7, \end{cases} \quad \text{故 } P' \text{ 为 } (3, 7), \text{ 选 D.}$$

【评注】在解点关于直线对称的题目中, 始终要抓住: 对称轴是两对称点的中垂线, 即两点的中点在对称轴直线上; 两点连成的直线与对称轴垂直.

【例 14】点 $A(1, -1)$ 关于直线 $x + y = 1$ 的对称点 A' 的坐标是().

(A) $(2, 0)$ (B) $(1, 0)$ (C) $(-1, 0)$ (D) $(0, -2)$ (E) $(-1, 1)$

【解析】设 A' 为 (x_0, y_0) , 则有 $\begin{cases} \frac{1+x_0}{2} + \frac{y_0-1}{2} = 1, \\ (-1) \times \frac{y_0+1}{x_0-1} = -1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 0, \end{cases} \quad \text{故选 A.}$

【例 15】点 $M(-5, 1)$ 关于 y 轴的对称点 M' 与点 $N(1, -1)$ 关于直线 l 对称, 则直线 l 的方程是().

(A) $x - 2y + 3 = 0$ (B) $x - 2y - 3 = 0$ (C) $2x + y - 6 = 0$
(D) $2x - y + 6 = 0$ (E) $6x - y + 2 = 0$

【解析】显然有 $M' = (5, 1)$, 直线 l 过 $M'N$ 的中点 $(3, 0)$, 直线 $M'N$ 的斜率为 $\frac{-1-1}{1-5} = \frac{1}{2}$, 故直线 l 的斜率为 -2 , 因此直线 l 为 $y - 0 = -2(x - 3)$, 即 $2x + y - 6 = 0$, 故选 C.

【题型 5】中心对称问题

【思路点拨】如果图形(直线或曲线)关于点的对称, 称为图形的中心对称. 中心对称其实就是点的对称, 寻找到点的坐标关系, 就找到了方程的表达式.

【例 16】已知点 A 的坐标为 $(-1, 1)$, 直线 l 的方程为 $3x + y = 0$, 那么直线 l 关于点 A 的对称直线 l' 的方程为().

(A) $4x - y + 6 = 0$ (B) $4x + y + 6 = 0$ (C) $x - 3y + 4 = 0$
(D) $x + 3y + 4 = 0$ (E) $3x + y + 4 = 0$

【解析】从直线 l 任取两点,如 $(0,0)$ 、 $(-\frac{1}{3},1)$,它们关于点 A 的中心对称点分别为 $(-2,2)$ 、 $(-\frac{5}{3},1)$,故 l' 的方程为 $\frac{x+2}{-\frac{5}{3}+2} = \frac{y-2}{1-2}$,即 $3x+y+4=0$,选 E.

【评注】注意两直线关于某点中心对称,那么这两条直线必为平行直线,且该点到两直线的距离相等.因此,从这个角度考虑,只有 E 满足平行,故只能选 E.

【题型 6】对称的应用(光的反射)

【思路点拨】光的反射问题,首先要了解光的反射原理(即入射光线、反射光线、法线在同一平面上,入射角与反射角相等,法线垂直于平面,)实际上它也是对称的一个应用.对称问题不涉及方向问题,而光线是和方向有关的,因此在求解入射光和反射光时要注意光线的方向.

【例 17】光线经过点 $P(2,3)$ 照射在 $x+y+1=0$ 上,反射后经过点 $Q(3,-2)$,则反射光线所在的直线方程为().

- (A) $7x+5y+1=0$ (B) $x+7y-17=0$ (C) $x-7y+17=0$
(D) $x-7y-17=0$ (E) $7x-5y+1=0$

【解析】根据光的反射原理(对称原理)及反射光与入射光的特点,先找点 P 关于直线 $x+y+1=0$ 的对称点 P' ,为 $(-4,-3)$,那么 $P'Q$ 所在的直线方程就是反射光线所在的方程, $\frac{x+4}{3+4} = \frac{y+3}{-2+3}$,即 $x-7y-17=0$,选 D.

【评注】此题若求入射光线方程,则先求点 Q 的对称点 Q' ,再求 PQ' 所在的直线.

【例 18】有一条光线从点 $A(-2,4)$ 射到直线 $2x-y-7=0$ 后再反射到点 $B(5,8)$,则这条光线从点 A 到点 B 的长度为().

- (A) $4\sqrt{5}$ (B) $3\sqrt{5}$ (C) $6\sqrt{5}$ (D) $5\sqrt{5}$ (E) $5\sqrt{3}$

【解析】先找点 A 关于直线 $2x-y-7=0$ 的对称点 A' ,为 $(10,-2)$,根据对称原理,实际上光线所走的距离就是 $A'B$ 线段的长度,即 $A'B = \sqrt{(10-5)^2 + (-2-8)^2} = 5\sqrt{5}$,选 D.

【评注】此题是求解距离的,因此不涉及方向问题,不管找 A 的对称点还是 B 的对称点,都能找到正确的结果.

【题型 7】解析几何的最值问题

【思路点拨】解析几何的最值问题可以借助几何意义进行分析求解,然后再根据对应的位置得到答案.

【例 19】在圆 $x^2+y^2=4$ 上,与直线 $4x+3y-12=0$ 距离最小的点坐标是().

- (A) $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$ (B) $(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ (C) $(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$
(D) $(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ (E) $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$

【解析】设此点的坐标为 (x_0, y_0) , 则有
$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 4, \\ \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{3}{4}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = \frac{8}{5}, \\ y_0 = \frac{6}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = -\frac{8}{5}, \\ y_0 = -\frac{6}{5}, \end{cases}$$

选 A.

【例 20】若实数 x, y 满足条件: $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, 则 $x - 2y$ 的最大值是().

(A) $\sqrt{5}$ (B) 10 (C) 9 (D) $5 + 2\sqrt{5}$ (E) $2 + 5\sqrt{2}$

【解析】设 $x - 2y = k$, 此代表一族斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线, 截距为 $-\frac{k}{2}$. 因此只要直线与圆相切即可.

方法一: 把 $x = k + 2y$ 代入方程, 即 $(k + 2y)^2 + y^2 - 2(k + 2y) + 4y = 0$,
即 $5y^2 + 4ky + k^2 - 2k = 0, \Delta = 16k^2 - 20(k^2 - 2k) = 0, k = 0$ 或 $k = 10$,
故 k 的取值范围为 $0 \leq k \leq 10$, 选 B.

方法二: 由于直线与圆有交点, 圆心到直线的距离 $d = \frac{|5 - k|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}$, 得 $0 \leq k \leq 10$.

【例 21】已知动点 $P(x, y)$ 在圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为().

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) 1

【解析】由于 P 在圆上运动, 因此求 $\frac{y}{x}$ 并不容易. 试想, 令 $\frac{y}{x} = k \Rightarrow y = kx$, 实际上最大的 k 恰为直线 $y = kx$ 的斜率, 问题转化为求解直线与圆的位置关系.

方法一: 当直线与圆相切时 k 可以取到最大值、最小值. 即方程 $(x - 2)^2 + (kx)^2 = 1$ 有两个相等的实数根. 则 $\Delta = 16 - 4 \times 3 \times (k^2 + 1) = 0$, 得 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即最大值 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 选 C.

方法二: 根据圆心 $(2, 0)$ 到直线 $y = kx$ 的距离 $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = r = 1$, 得到 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【评注】思考 $\frac{y}{x}$ 的最小值怎么求, 或者 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是多少.

【例 22】动点 $P(x, y)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 则 $\frac{y+1}{x+2}$ 的最大值为().

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) 1

【解析】设 $\frac{y+1}{x+2} = k$, 可得 $y = k(x+2) - 1$, k 相当于 $(-2, -1)$ 与圆上某点的直线的斜率, 故相切则可取两个最值, $x^2 + [k(x+2) - 1]^2 - 1 = 0$, 即 $(1+k^2)x^2 + (4k^2 - 2k)x + 4k^2 - 4k = 0, \Delta = (4k^2 - 2k)^2 - 4(1+k^2)(4k^2 - 4k) = 0$, 解得 $k = 0, k = \frac{4}{3}$, 因此最大值为 $k = \frac{4}{3}$, 选 C.

第四节 核心专题点睛

在解析几何中,主要考查直线方程、两直线的位置关系、圆的方程、直线与圆的位置关系以及圆与圆的位置关系,考纲中不涉及抛物线与双曲线,所以解析几何这部分的内容并不难,关键是抓住解析几何的特点. 解析几何是连接平面图形与代数式的纽带,其数学思想是利用代数式解决几何问题,只要抓住这一关键点,那么解决问题时既可以考虑用代数方法(解析法),也可以考虑几何法(图形法),当然这两个方法并不是孤立的,更多情况是两个方法的联合使用,才能达到快速解题的效果.

一、中心对称

1. 定义

把一个图形绕某个点旋转 180° 后能与另一个图形重合,这两个图形关于这个点对称,这个点称为对称中心.

2. 性质

关于某个点成中心对称的两个图形,对称点的连线都经过对称中心,且被对称中心平分.

3. 点关于点对称

点 $P(x, y)$ 关于点 $M(a, b)$ 对称的点 Q 的坐标是 $Q(2a - x, 2b - y)$. (由中点坐标公式很容易得到). 如点 $(1, -4)$ 关于 $(-2, 0)$ 对称的点是 $(-5, 4)$.

4. 直线关于点对称

直线 $l: ax + by + c = 0$ 关于点 $P(x_0, y_0)$ 对称的直线为 l_1 的方程是 $a(2x_0 - x) + b(2y_0 - y) + c = 0$, 即 $ax + by - 2x_0a - 2y_0b - c = 0$.

推导过程:

方法一: 在直线 l 上任意取一点, 最好是特殊点. 如取 $M\left(0, -\frac{c}{b}\right)$, 则点 M 关于点 P 对称的点 N 的坐标是 $N\left(2x_0, 2y_0 + \frac{c}{b}\right)$. 点 $N \in l_1$. 根据中心对称的定义, $l_1 // l$. 可设直线 l_1 的方程为 $ax + by + d = 0$. 将点 N 坐标代入得 $2x_0a + b\left(2y_0 + \frac{c}{b}\right) + d = 0$. 于是 $d = -2x_0a - 2y_0b - c$, 所以 l_1 的方程是: $ax + by - 2x_0a - 2y_0b - c = 0$.

方法二: 在直线 l 上任意取两点并求出它们关于点 $P(a, b)$ 对称的点. 由两点式易得直线 l_1 的方程是: $ax + by - 2x_0a - 2y_0b - c = 0$.

方法三: 设直线为 l_1 上任意一点为 $M(x, y)$, 其关于点 $P(x_0, y_0)$ 对称的点 $M'(x', y')$ 在直线 l 上. 求出点 M' 的坐标后代入直线 $l: ax + by + c = 0$, 即得 l_1 的方程是: $ax + by - 2x_0a - 2y_0b - c = 0$.

【例 1】求直线 $l: 3x + y - 2 = 0$ 关于点 $A(-4, 4)$ 对称的直线 l' 方程.

【解析】方法一: 关于点 A 对称的两直线 l 与 l' 互相平行. 于是可设 l' 的方程为 $3x + y +$

$C=0$.

在直线 l 上任取一点 $M(0,2)$, 其关于点 A 对称的点 N 的坐标为 $N(-8,6)$.

因为点 N 在直线 l' 上, 所以 $3 \times (-8) + 6 + C = 0$, 得 $C = 18$, 故直线 l' 的方程为 $3x + y + 18 = 0$.

方法二: 在直线 $l: 3x + y - 2 = 0$ 上取两点 $M(0,2), N(1,-1)$ 易得它们关于点 $A(-4,4)$ 对称的点分别为 $M'(-8,6), N'(-9,9)$. 由两点式得直线 l' 的方程为 $3x + y + 18 = 0$.

方法三: 设直线为 l_1 上任意一点为 $M(x,y)$, 其关于点 $A(-4,4)$ 对称的点 $M'(-8-x, 8-y)$ 在直线 l 上. 即 $3 \times (-8-x) + (8-y) - 2 = 0$, 整理得直线 l' 的方程为 $3x + y + 18 = 0$.

特别地: 直线 $ax + by + c = 0$ 关于原点对称的直线方程是: $ax + by - c = 0$ (在上面的问题中令 $a = 0$ 且 $b = 0$ 即得). 如直线 $3x + y - 2 = 0$ 关于原点对称的直线方程是 $3x + y + 2 = 0$.

5. 曲线关于点对称

曲线 $f(x,y) = 0$, 关于点 $P(x_0, y_0)$ 对称的曲线方程是 $f(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$.

推导过程: 设所求曲线上任意一点 $M(x,y)$, 其关于点 $P(x_0, y_0)$ 对称的点 $M'(x', y')$ 在曲线 $f(x,y) = 0$ 上. 用点关于点对称的方法求出点 M' 的坐标后代入曲线 $f(x,y) = 0$ 中即得所求曲线方程.

特别地, 曲线 $f(x,y) = 0$ 关于原点 $(0,0)$ 对称的曲线方程是 $f(-x, -y) = 0$.

二、轴对称

1. 定义

把一个图形沿着某条直线对折以后能与另一个图形重合, 这两个图形关于这条直线对称. 这条直线叫做对称轴.

2. 性质

关于某条直线对称的两个图形, 对称线段平行且相等; 对称线段或其延长线相交, 交点一定在对称轴上; 对称点的连线都被对称轴垂直平分.

3. 点关于直线对称

点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $l: ax + by + c = 0$ 的对称点 Q 的坐标为 (x', y') , 根据轴对称的性质. 点 P 与点 Q 关于直线 l 对称, 则直线 l 垂直平分线段 PQ . 即线段 PQ 的斜率 $\frac{y' - y_0}{x' - x_0}$ 与直线 l 的斜率 $-\frac{a}{b}$ 之积为 -1 , 且线段 PQ 的中点 $(\frac{x' + x_0}{2}, \frac{y' + y_0}{2})$ 在直线 l 上. 因此 Q 的坐标可由以下方程组求得

$$\begin{cases} \frac{y' - y_0}{x' - x_0} \left(-\frac{a}{b} \right) = -1, \\ a \frac{x' + x_0}{2} + b \frac{y' + y_0}{2} + c = 0. \end{cases}$$

推导过程: 根据轴对称的性质, 点 P 与点 Q 关于直线 l 对称, 则斜率之积为 -1 , 且线段 PQ 的中点 $(\frac{x' + x_0}{2}, \frac{y' + y_0}{2})$ 在直线 l 上.

4. 直线关于直线对称

直线 $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 关于直线 $l: ax + by + c = 0$ 对称的直线 l_2 的方程的求法有两种情况:

(1) 平行: $l_1 // l$ 时

因为 l_1 与 l_2 关于 l 对称, 由对称的性质易知 $l_1 // l_2$, 且 l 到 l_1 与 l_2 的距离 d_1 与 d_2 相等. 可设 l_2 的方程为 $a_1x + b_1y + d = 0 (d \neq c_1)$,

在 l 上任取一点, 如 $R(0, -\frac{c}{b})$, 则点 R 到 l_1 与 l_2 的距离就是 l 到 l_1 与 l_2 的距离. 由点到直线的距离公式不难求出 $d = \frac{2b_1c}{b} - c_1$, 故 l_2 的方程为 $a_1x + b_1y + \frac{2b_1c}{b} - c_1 = 0$.

【例 2】求直线 $l_1: 2x - y - 3 = 0$ 关于 $l: 4x - 2y + 5 = 0$ 对称的直线 l_2 的方程.

【解析】由题意知 $l_1 // l$, l_1 与 l_2 关于 l 对称, 故 $l_1 // l_2$, 可设 l_2 的方程为 $2x - y + d = 0 (d \neq -3)$, 在直线 l 上任取一点 $(0, \frac{5}{2})$. 则 l 到 l_1 的距离 $d_1 = \frac{11}{2\sqrt{5}}$, l 到 l_2 的距离 $d_2 = \frac{|\frac{5}{2} + d|}{\sqrt{5}}$.

由 $d_1 = d_2$ 得 $\frac{11}{2\sqrt{5}} = \frac{|\frac{5}{2} + d|}{\sqrt{5}}$, 即 $d = 8$. 因此直线 l_2 的方程为 $2x - y + 8 = 0$.

(2) 相交: $l_1 \cap l = P$ 时, 有以下几种解法:

(a) 由 $l_1 \cap l = P$ 可求出交点坐标. 再找出 l_1 上任意一点 (点 P 除外) 关于 l 对称的点的坐标 (用点关于直线对称的方法), 再根据两点式求出直线 l_2 的方程.

(b) 由对称性可知 l_1 到 l 的角等于 l 到 l_2 的角, 且 l_2 过 l_1 与 l 的交点 P , 由到角公式易求出 l_2 的斜率, 求出交点 P 的坐标后, 可由点斜式求得直线 l_2 的方程.

(c) 用轨迹的思想求解. 通常设直线 l_2 上的任意一点 $M(x, y)$, 点 M 关于 l 对称的点为 $N(x_1, y_1)$, 则 $N \in l_1$, 用 x 和 y 表示出点 N 的坐标后, 代入 l_1 的方程中即得直线 l_2 的轨迹方程.

【例 3】求直线 $l_1: 2x + y - 4 = 0$ 关于直线 $l: 3x + 4y - 1 = 0$ 对称的直线 l_2 的方程.

【解析】方法一: 解方程组 $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$ 得 l_1 与 l 的交点 P 的坐标是 $(3, -2)$, 在直线 $l_1: 2x + y - 4 = 0$ 上任意取一点如 $M(2, 0)$, 点 M 关于直线 l 对称的点 N 的坐标是 $(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5})$, 由两点式易求得直线 l_2 的方程为 $2x + 11y + 16 = 0$.

方法二: 由已知易得直线 l_1 与 l 的斜率分别是 -2 、 $-\frac{3}{4}$, 由对称的性质知 l_1 到 l 的角等于 l 到 l_2 的角, 令直线 l_2 的斜率为 k , 由夹角公式得

$$\frac{-\frac{3}{4} + 2}{1 + (-2) \cdot (-\frac{3}{4})} = \frac{k - (-\frac{3}{4})}{1 - \frac{3}{4}k},$$
 解得

$k = -\frac{2}{11}$, 由方法一知 l_1 与 l 的交点 P 的坐标是 $(3, -2)$, 由点斜式易求得直线 l_2 的方程为 $2x + 11y + 16 = 0$.

方法三:在直线 l_2 上任取一点 $P(x, y)$, 其关于直线 l 对称的点 $P'(x', y')$, 由对称的性质知直线 l 垂直平分线段 PP' , 且点 P' 在直线 l_1 上. 即线段 PP' 的中点 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 在直线 l 上, 且直线 PP' 的斜率 $\frac{y'-y}{x'-x}$ 与直线 l 的斜率 $-\frac{3}{4}$ 之积为 -1 , 通过解方程组

$$\begin{cases} \frac{y'-y}{x'-x} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1, \\ 3 \cdot \frac{x+x'}{2} + 4 \cdot \frac{y+y'}{2} - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{得 } x' = \frac{7x-24y+6}{25}, y' = -\frac{24x+7y-8}{25}.$$

将 $P'(x', y')$ 的坐标代入直线 $l_1: 2x + y - 4 = 0$ 中即得直线 l_2 的方程为 $2x + 11y + 16 = 0$.

5. 曲线关于直线对称

曲线 $f(x, y) = 0$ 关于直线 $ax + by + c = 0$ 对称的曲线的方程是

$$f\left(x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}, y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}\right) = 0.$$

推导过程: 设所求曲线上任意一点 $M(x, y)$, 则 M 关于直线 $ax + by + c = 0$ 对称的点 $M'(x', y')$ 在曲线 $f(x, y) = 0$ 上. 由点关于直线对称的方法求出点 $M'(x', y')$ 的坐标后代入在曲线 $f(x, y) = 0$ 中即得所求曲线方程.

特别地: 圆关于直线 $ax + by + c = 0$ 对称的曲线的方程只需求出圆心(或中心)关于直线 $ax + by + c = 0$ 对称的点, 其他量不变, 易得轨迹方程.

三、特殊的对称

对称方式	点 $P(x_0, y_0)$	直线 $l: ax + by + c = 0$
关于 x 轴对称	$P'(x_0, -y_0)$	$l': ax - by + c = 0$
关于 y 轴对称	$P'(-x_0, y_0)$	$l': -ax + by + c = 0$
关于原点对称	$P'(-x_0, -y_0)$	$l': ax + by - c = 0$
关于 $y = x$ 对称	$P'(y_0, x_0)$	$l': ay + bx + c = 0$
关于 $y = -x$ 对称	$P'(-y_0, -x_0)$	$l': ay + bx - c = 0$

四、简单的线性规划问题

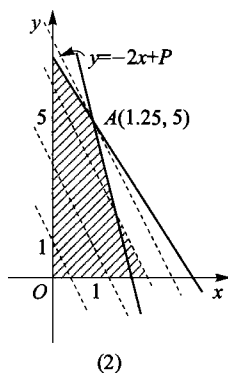
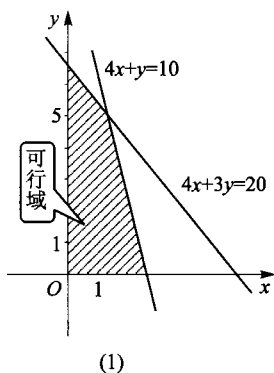
线性规划是利用数学为工具研究资源在一定条件下如何精打细算, 用最少的资源取得最大的经济效益, 它是数学规划中理论较完整、方法较成熟, 应用较广泛的一个分支, 并能解决科学研究、工程设计、经济管理等许多方面的实际问题.

做题中应注意: ①用图解法解决线性规划问题时, 分析题目的已知条件, 找出约束条件和目标函数是关键, 可先将题目中的量分类、列出表格, 理清头绪, 然后列出不等式组寻求约束条件, 并就题目所述找到目标函数; ②可行域就是二元一次不等式组所表示的平面区域.

【例 4】在约束条件 $\begin{cases} 4x + y \leq 10, \\ 4x + 3y \leq 20, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ 下, 则目标函数 $P = 2x + y$ 的最大值为().

- (A) 6 (B) 7 (C) 7.5 (D) 8 (E) 9

【解析】首先, 作出约束条件所表示的平面区域, 这一区域称为可行域, 如图所示. 其次, 将目标函数 $P = 2x + y$ 变形为 $y = -2x + P$ 的形式, 它表示一条直线, 斜率为 -2 , 且在轴上的截距为 P .



平移直线 $y = -2x + P$, 当它经过两直线 $4x + y = 10$ 与 $4x + 3y = 20$ 的交点 $A(\frac{5}{4}, 5)$ 时, 直线在 y 轴上的截距最大, 如图所示. 因此, 当 $x = \frac{5}{4}, y = 5$ 时, 目标函数取得最大值 $\frac{15}{2}$, 选 C.

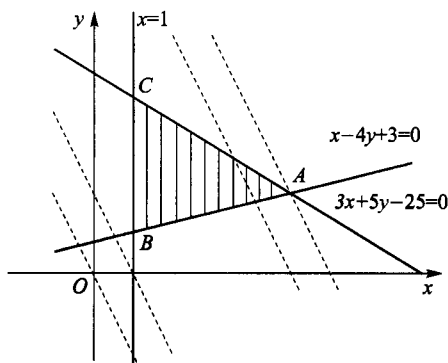
【评注】这类求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值问题, 通常称为线性规划问题. 其中 $(\frac{5}{4}, 5)$ 使目标函数取得最大值, 它叫做这个问题的最优解. 对于只含有两个变量的简单线性规划问题可用图解法来解决.

【注意】平移直线 $y = -2x + P$ 时, 要始终保持直线经过可行域(即直线与可行域有公共点).

【例 5】设 $z = 2x + y$, 式中变量 x, y 满足条件 $\begin{cases} x - 4y \leq -3, \\ 3x + 5y \leq 25, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 则 z 的最大值和最小值为().

- (A) 12, 4 (B) 10, 2 (C) 11, 3 (D) 12, 3 (E) 12, 2

【解析】由题意, 变量 x, y 所满足的每个不等式都表示一个平面区域, 不等式组则表示这些平面区域的公共区域. 由图知, 画出直线 $l: 2x + y = t, t \in \mathbf{R}$, 而且, 直线往右平移时, 随之增大. 由图像可知, 当直线 l 经过点 $A(5, 2)$ 时, 对应的 t 最大; 当直线 l 经过点 $B(1, 1)$ 时, 对应的 t 最小, 所以, $z_{\max} = 2 \times 5 + 2 = 12, z_{\min} = 2 \times 1 + 1 = 3$, 选 D.



【例 6】设 $z=6x+10y$, 式中 x, y 满足条件 $\begin{cases} x-4y \leq -3, \\ 3x+5y \leq 25, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 求 z 的最大值和最小值.

【解析】直线 l_0 与 AC 所在直线平行, 则由题知, 当 l 与 AC 所在直线 $3x+5y-25=0$ 重合时 z 最大, 此时满足条件的最优解有无数多个, 当 l 经过点 $B(1,1)$ 时, 对应 z 最小, 所以 $z_{\max}=6x+10y=50, z_{\min}=6 \times 1+10 \times 1=16$.

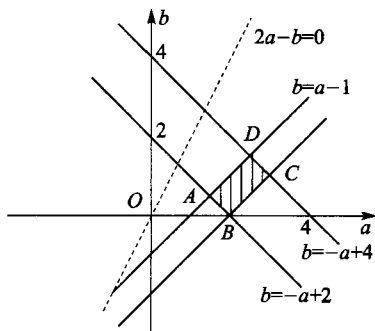
【评注】线性目标函数的最大值、最小值一般在可行域的顶点处取得; 线性目标函数的最大值、最小值也可在可行域的边界上取得, 即满足条件的最优解有无数多个.

【例 7】已知

$$\begin{cases} 1 \leq a-b \leq 2, \\ 2 \leq a+b \leq 4, \end{cases}$$

求 $t=4a-2b$ 的取值范围.

【解析】不等式组表示的平面区域如图所示, 作直线 $l_0: 4a-2b=0$, 作一组平行线 $l: 4a-2b=t$, 由图知 l 由 l_0 向右下方平移时, t 随之增大, 反之减小, 所以当 l 经过点 A 时 t 取最小值, 当 l 经过点 C 时 t 取最大值.



由 $\begin{cases} a-b=1, \\ a+b=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} a-b=2, \\ a+b=4 \end{cases}$ 分别得 $A(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), C(3,1)$, 所以

$$t_{\min}=4 \times \frac{3}{2}-2 \times \frac{1}{2}=5, t_{\max}=4 \times 3-2 \times 1=10, \text{ 所以, } t \in [5,10].$$

第五节 阶梯化精炼题

基础能力题



扫码看视频

一、问题求解题

1. 已知两点 $A(3, -2), B(-9, 4)$, 直线 AB 与 x 轴的交点 P 分 AB 所成的比等于().
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 3
2. 在 y 轴的截距为 -3 , 且与直线 $2x + y + 3 = 0$ 垂直的直线方程是().
(A) $x - 2y - 6 = 0$ (B) $2x - y + 3 = 0$ (C) $x - 2y + 3 = 0$
(D) $x + 2y + 6 = 0$ (E) $x - 2y - 3 = 0$
3. 方程 $(a-1)x + y + 2a + 1 = 0 (a \in \mathbf{R})$ 所表示的直线().
(A) 恒过定点 $(-2, 3)$ (B) 恒过定点 $(2, 3)$ (C) 恒过点 $(-2, 3)$ 和点 $(2, 3)$
(D) 都是平行直线 (E) 恒过定点 $(3, 2)$
4. 三直线 $ax + 2y + 8 = 0, 4x + 3y = 10, 2x - y = 10$ 相交于一点, 则 $a =$ ().
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2
5. 在圆心为 O , 半径为 15 的圆内有一点 P , 若 $OP = 12$, 则在过点 P 的弦中, 长度为整数的有().
(A) 14 条 (B) 24 条 (C) 12 条 (D) 13 条 (E) 26 条
6. 圆 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ 上到直线 $x + 4y - 11 = 0$ 的距离等于 1 的点的个数有().
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
7. 直线 $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 被圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 所截得的弦长为().
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) 2
8. 从原点向圆 $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$ 作两条切线, 则该圆夹在两条切线间的劣弧长为().
(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π (E) 6π
9. 过点 $(1, 0)$ 且与 $x - 2y - 2 = 0$ 平行的直线与两个坐标轴围成的面积为().
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) 1 (E) 2
10. 若三点 $A(1, a), B(5, 7), C(10, 12)$ 无法构成三角形, 则 $a =$ ().
(A) 3 (B) -3 (C) -2 (D) 1 (E) 2
11. 方程 $|x - 2y| = 5$ 与圆 $x^2 + y^2 = 8$ 有()个交点.
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
12. 方程 $|x - y| = 4$ 与 $|x| = 2$ 所围图形面积为().
(A) 28 (B) 40 (C) 36 (D) 32 (E) 42

二、条件充分性判断题

1. 直线 $l: ax + by + c = 0$ 恒过第一、二、三象限.

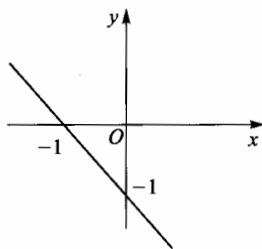
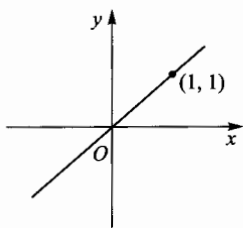
(1) $ab < 0$ 且 $bc < 0$.

(2) $ab < 0$ 且 $ac > 0$.

2. 已知直线 $ax + by + c = 0$, 可以得到 $a + b = 0$.

(1) 直线的图像如下:

(2) 直线的图像如下:



3. 点 $P(m-n, n)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{m^2 + n^2}$.

(1) 直线 l 的方程为 $\frac{x}{n} + \frac{y}{m} = -1$.

(2) 直线 l 的方程为 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

4. 直线 $(m-1)x + 2my + 1 = 0$ 与直线 $(m+3)x - (m-1)y + 1 = 0$ 互相垂直.

(1) $m = 3$.

(2) $m = 1$.

5. 过点 $P(-2, m)$ 和 $Q(m, 4)$ 的直线斜率等于 1.

(1) $m = 1$.

(2) $m = -1$.

6. 直线 l 的斜率为 $-\frac{a}{a+1}$.

(1) 直线 l 沿 y 轴负方向平移 $a+1$ ($a > 0$) 个单位, 再沿 x 轴正方向平移 a 个单位, 所得直线与直线 l 重合.

(2) 直线 l 沿 y 轴负方向平移 a ($a > 0$) 个单位, 再沿 x 轴正方向平移 $a+1$ 个单位, 所得直线与直线 l 重合.

7. 直线 $ax + by - c = 0$ 通过第一、二、三象限.

(1) $ab < 0$.

(2) $ac < -\frac{1}{2}$.

8. 圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 与两坐标轴都相切.

(1) $a = b$.

(2) $a = r$.

9. 直线 $y = 2x + k$ 和圆 $x^2 + y^2 = 4$ 有两个交点.

(1) $1 \leq k < \sqrt{5}$.

(2) $-1 < k < 2\sqrt{5}$.

10. A 点坐标为 $(2, 3)$, B 点坐标为 $(4, -5)$, 则 A、B 两点到 l 的距离相等.

(1) l 的方程为 $3x + 2y - 7 = 0$.

(2) l 的方程为 $4x + y - 7 = 0$.

基础能力题详解

一、问题求解

1. B; A 、 B 两点所在的直线方程是 $\frac{x+9}{3+9} = \frac{y-4}{-2-4}$, 与 x 轴的交点 P 为 $(-1, 0)$, 则点

$$P \text{ 分 } AB \text{ 所成的比为 } \lambda = \frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt{(-1-3)^2 + (0+2)^2}}{\sqrt{(-1+9)^2 + (0-4)^2}} = \frac{1}{2}.$$

2. A; 与直线 $2x + y + 3 = 0$ 垂直的直线其斜率必为 $\frac{1}{2}$, 故设此直线为 $y = \frac{1}{2}x + b$, 而它在 y 轴的截距为 -3 , 故 $b = -3$, 故直线方程为 $y = \frac{1}{2}x - 3$, 即 $x - 2y - 6 = 0$.

3. A; 直线 $(a-1)x - y + 2a + 1 = 0$ 可以理解为两条直线 $a(x+2) = 0$ 与 $x + y - 1 = 0$ 所成的直线族, 那么恒过两直线的交点 $(-2, 3)$.

4. B; 显然直线 $ax + 2y + 8 = 0$ 过 $4x + 3y = 10$ 与 $2x - y = 10$ 的交点 $(4, -2)$, 则 $4a - 2 \times 2 + 8 = 0 \Rightarrow a = -1$.

5. B; 显然过点 P 的弦中, 最短为垂直于过点 P 的半径, 最长的为圆的直径, 最短的弦为 18, 最长的为 30, 但考虑到对称性, 长度为 19~29 的各有两条, 故长度为整数的有 $11 \times 2 + 2 = 24$ 条.

6. D; 圆心到直线的距离 $d = \frac{|3 + 4 \times 3 - 11|}{\sqrt{1+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}} < 1$, 故距离等于 1 的点有 4 个, 在直线两边各有两个.

7. D; 圆心到直线的距离为 $d = \frac{|1-2|}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$, 故弦长为 $2\sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{3}$.

8. B; $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-6)^2 = 3^2$, 显然从原点向圆引的两条切线夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 故劣弧长为 $l = \frac{2\pi}{3}r = 2\pi$.

9. A; 因为所求直线与直线 $x - 2y - 2 = 0$ 平行, 所以设方程为 $x - 2y + c = 0$, 又经过 $(1, 0)$, 故 $c = -1$, 所求方程为 $x - 2y - 1 = 0$. 从而与两个坐标轴围成的面积为 $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

10. A; 三点 $A(1, a)$ 、 $B(5, 7)$ 、 $C(11, 13)$ 无法构成三角形, 说明三点共线, 即任意两点构成的直线斜率相等, 从而 $k_{AB} = \frac{7-a}{5-1} = k_{BC} = \frac{13-7}{11-5} \Rightarrow a = 3$.

11. E; $|x-2y| = 5$ 表示两条平行的直线 $x-2y = \pm 5$, 圆心为 $(0, 0)$, 半径为 $2\sqrt{2}$.

圆心到直线 $x-2y+5=0$ 的距离为 $d = \frac{|0+0+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \sqrt{5} < r$, 故有 4 个交点.

12. D; $|x-y| = 4$ 表示两条平行的直线 $x-y = \pm 4$, $|x| = 2$ 表示两条竖线 $x = \pm 2$, 所围图形为平行四边形, 其面积 $S = 4 \times 8 = 32$.

二、条件充分性判断题

1. D; l 恒过第一、二、三象限, 必须有 $b \neq 0$, 从而

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

条件(1) $ab < 0$ 且 $bc < 0$, 可以得到 $-\frac{a}{b} > 0$ 且 $-\frac{c}{b} > 0$, 显然恒过第一、二、三象限, 充分;

条件(2) $ab < 0$ 且 $ac > 0$, 可以得到 $-\frac{a}{b} > 0$, 而 a, c 同号, 故又有 $-\frac{c}{b} > 0$, 也充分.

2. A; 显然条件(1)中, 直线方程为 $x - y = 0$, 有 $a = 1, b = -1$, 充分; 条件(2), 直线方程为 $x + y + 1 = 0$, 显然不充分.

3. A; 条件(1), 根据点到直线的距离公式有

$$d = \frac{|m(m-n) + n^2 + mn|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \sqrt{m^2 + n^2},$$

充分; 条件(2), 有

$$d = \frac{|n(m-n) + mn - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{|mn - n^2|}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

不充分.

4. D; 直线 $(m-1)x + 2my + 1 = 0$ 与直线 $(m+3)x - (m-1)y + 1 = 0$ 互相垂直, 则需要 $(m-1)(m+3) + 2m[-(m-1)] = 0$, 解得 $m = 3$ 或 $m = 1$, 显然条件(1)、(2) 都充分.

5. A; 由直线的斜率公式可得, $1 = \frac{m-4}{-2-m}$, $m = 1$.

6. B; 直线移动斜率不变, 在移动过程中只要满足 $y/x = k$, 则移动后的直线与原直线重合. 条件(1)中, $y/x = -\frac{a+1}{a}$, 而条件(2)中, $y/x = -\frac{a}{a+1}$.

7. C; 直线经过一、二、三象限, 应满足: 斜率 $k > 0$; y 轴上的截距大于 0; x 轴上的截距小于 0. 得

$$-b/a > 0 \Rightarrow ab < 0;$$

$$y = \frac{c}{b} > 0 \Rightarrow bc > 0;$$

$$x = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow ac < 0.$$

$ab < 0$ 且 $ac < 0$.

8. C; 圆与两轴相切, 则圆心的 x 坐标与 y 坐标的绝对值相等, 且与半径相等.

9. D; 圆与直线有两个交点, $d < r, d = \frac{|0-0+k|}{\sqrt{4+1}} < r$, 得 $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$, (1) (2)

满足条件, 故选 D.

10. D; A、B 两点到 l 的距离相等, 有两种情况, 一种是直线与 AB 直线平行, 还有一种是直线过 AB 线段的中点, 这两种情况都能满足 A、B 两点到 l 的距离相等. 故两个条件都充分.

综合提高题



扫码看视频

一、问题求解题

1. 与圆 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 外切, 且与 y 轴相切的动圆圆心的轨迹方程为().
(A) $y^2 = 8x (x > 0)$ (B) $y = 0 (x < 0)$ (C) $y^2 = 8x (x > 0)$ 或 $y = 0 (x < 0)$
(D) $y^2 = 4x (x > 0)$ (E) $y^2 = 8x (x < 0)$ 或 $y = 0 (x > 0)$

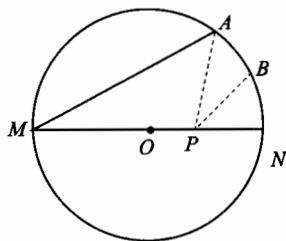
2. 已知两点 $M(1, \frac{5}{4})$, $N(-4, -\frac{5}{4})$, 给出下列方程:

- ① $4x + 2y - 1 = 0$ ② $x^2 + y^2 = 3$ ③ $x^2 + y^2 = 1$ ④ $4x - 2y = 1$

在方程上存在点 P 满足 $|MP| = |NP|$ 的有()个方程.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 0

3. 如图所示, MN 是 $\odot O$ 的直径, $MN = 2$, 点 A 在 $\odot O$ 上, $\angle AMN = 30^\circ$, 点 B 为弧 \widehat{AN} 的中点, 点 P 是直径 MN 上一动点, 则 $PA + PB$ 的最小值为().



- (A) $2\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$
(E) 1

4. 直线 $2x - y - 4 = 0$ 上有一点 P , 它与两定点 $A(4, -1)$ 、 $B(3, 1)$ 的距离之和最小, 则点 P 的坐标是().

- (A) $(5, 6)$ (B) $(\frac{5}{2}, 1)$ (C) $(6, 5)$ (D) $(2, 0)$ (E) $(5, -1)$

5. 已知实数 x, y 满足 $3x^2 + 2y^2 = 6x$, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值为().

- (A) $\frac{9}{2}$ (B) 4 (C) 5 (D) 2 (E) 6

6. 已知直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 过点 $(1, 2)$, 且 a, b 皆为正数. 那么直线与 x 轴和 y 轴所围的三角形面积的最小值为().

- (A) 2 (B) 4 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) 8

7. 有三个村庄坐落在三角形的顶点上. 三角形的三边长分别是 3 千米, 4 千米, 5 千米. 若在这个三角形内部造一个批发中心, 要求这个批发中心到三个村庄的距离平方和最小, 那么这个平方和是().

- (A) 13 (B) 15 (C) 14 (D) $\frac{48}{3}$ (E) $\frac{50}{3}$

8. 曲线 $|xy| + 6 = 3|x| + 2|y|$ 所围成图形的面积等于().

- (A) 12 (B) 16 (C) 24 (D) 4π (E) 8π

9. 直线 $x - 2y - 3 = 0$ 与圆 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ 交于 E, F 两点, 则 $\triangle EOF$ (O 是原点)的面积为().

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ (E) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

10. 自点 $A(-3, 3)$ 发射的光线 l 射到 x 轴上, 被 x 轴反射, 其反射光线所在的直线与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 相切, 则反射光线所在的直线方程为().

- (A) $4x + 3y + 3 = 0$ (B) $3x + 4y - 3 = 0$ (C) $3x - 4y + 3 = 0$
(D) $4x + 3y + 3 = 0$ 或 $3x - 4y + 3 = 0$ (E) $4x - 3y + 3 = 0$ 或 $3x - 4y - 3 = 0$

11. 点 $A(-1, 2)$ 关于直线 $x + y + 3 = 0$ 的对称点 A' 为().

- (A) $(-2, -5)$ (B) $(-5, -2)$ (C) $(2, -5)$
(D) $(-2, 5)$ (E) $(2, 5)$

12. 直线 l 与直线 $2x - y = 1$ 关于直线 $x + y = 0$ 对称, 则直线 l 的方程是().

- (A) $x - 2y = 1$ (B) $x + 2y = 1$ (C) $2x - y = 1$
(D) $2x + y = 1$ (E) $x - 2y = -1$

13. 直线 $l_1: x - y - 2 = 0$ 关于直线 $l_2: 3x - y + 3 = 0$ 对称的直线 l_3 的方程为().

- (A) $7x - y + 22 = 0$ (B) $x + 7y + 22 = 0$ (C) $x - 7y - 22 = 0$
(D) $7x + y + 22 = 0$ (E) $7x + y - 22 = 0$

14. 若 x, y 满足 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, 则 $2x - y$ 的最大值为().

- (A) $\sqrt{5}$ (B) 1 (C) 9 (D) $5 + 2\sqrt{5}$ (E) 0

15. 已知直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 过点 $(1, 2)$, 且 a, b 皆为正数, 那么直线与 x 轴和 y 轴所围的三角形面积的最小值为().

- (A) 2 (B) 4 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) 8

16. 若 $P(x, y)$ 在圆 $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 6$ 上运动, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值是().

- (A) 2 (B) $\sqrt{3} - 2$ (C) $\sqrt{3} + 2$ (D) $2 - \sqrt{3}$ (E) 6

17. 以圆 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限内的任意一点 (a, b) 为切点, 所作圆的切线与两坐标轴围成的三角形的最小面积等于().

- (A) $\frac{19}{20}$ (B) 1 (C) $\frac{21}{20}$ (D) $\frac{11}{10}$ (E) $\frac{23}{20}$

18. 直线 $3x - 4y + 4 = 0$ 与 $6x - 8y + 13 = 0$ 是一个圆的两条切线, 则该圆的面积是().

- (A) $\frac{\pi}{16}$ (B) $\frac{\pi}{8}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{16}$ (E) $\frac{\pi}{2}$

19. 圆 C_1 的方程为 $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$, 圆 C_2 的方程为 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = -1$, 则两圆有()个交点.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

二、条件充分性判断题

1. 直线 $y = \frac{x}{k} + 1$ 与两坐标轴所围成的三角形面积是 3.

- (1) $k = 6$. (2) $k = \frac{1}{6}$.

2. 点 $P(x, y)$ 到直线 $5x - 12y + 13 = 0$ 和直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 的距离相等.

- (1) 点 P 的坐标应满足 $32x - 56y + 65 = 0$. (2) 点 P 的坐标应满足 $7x + 4y = 0$.

3. 直线 $l_1: y=x$ 与 $l_2: ax-y=0 (a \in \mathbf{R})$ 夹角在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 内变动.

(1) $a \in (-\infty, -2-\sqrt{3})$.

(2) $a \in (-2+\sqrt{3}, +\infty)$.

4. 直线 $x_0x + y_0y = a^2$ 与圆 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 的位置关系相交.

(1) $M(x_0, y_0)$ 为圆 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 内异于圆心的一点.

(2) $M(x_0, y_0)$ 为圆 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 外一点.

5. 若直线 $y=k(x-1)$ 与抛物线 $y=x^2+4x+3$ 的两个交点都在第二象限.

(1) k 的取值范围是 $(-2, 1)$.

(2) k 的取值范围是 $(-3, -1)$.

6. 已知 $P(-2, -2)$ 、 $Q(0, -1)$, 平面上的一点 $R(2, m)$ 有 $|PR| + |RQ|$ 最小.

(1) $m=0$.

(2) $m=-\frac{4}{3}$.

7. 直线 $3x+y+a=0$ 平分圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$.

(1) $a=-1$.

(2) $a=1$.

8. 直线 $y=x+2$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=2$ 相切.

(1) $a=b$.

(2) $b-a=4$.

9. 半径分别为 3 和 4 的两个圆, 圆心坐标分别为 $(a, 1)$ 和 $(2, b)$, 则它们有 4 条公切线.

(1) 点 $P(a, b)$ 在圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=40$ 的外面.

(2) 点 $P(a, b)$ 在圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=50$ 的外面.

10. $a=4, b=2$.

(1) 点 $A(a+2, b+2)$ 与点 $B(b-4, a-6)$ 关于直线 $4x+3y-11=0$ 对称.

(2) 直线 $y=ax+b$ 垂直于直线 $x+4y-1=0$, 在 x 轴上的截距为 $-\frac{1}{2}$.

11. 动点 P 的轨迹是两个圆.

(1) 动点 P 的轨迹方程是 $|x|+1=\sqrt{1-(y-1)^2}$.

(2) 动点 P 的轨迹 $(|x|+|y|)^2=1$.

12. 动点 $P(x, y)$ 在圆 O 上运动, 则 $\frac{y+1}{x+2}$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

(1) 圆 O 的方程是 $x^2+y^2=1$.

(2) 圆 O 的方程是 $x^2+y^2=2$.

13. 圆 C 的半径为 $\sqrt{2}$.

(1) 圆 C 截 y 轴所得弦长为 2, 且圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2) 圆 C 被 x 轴分成两段弧, 其长之比为 3:1.

14. 一束光线经过点 $P(2, 3)$ 射到直线 $x+y+1=0$ 上, 反射后穿过点 $Q(1, 1)$.

(1) 入射光线的方程为 $5x+4y-2=0$.

(2) 入射光线的方程为 $5x-4y+2=0$.

15. 两圆的公切线共有 2 条.

(1) 圆 $x^2+y^2-2x=0$ 和圆 $x^2+y^2+4y=0$.

(2) 圆 $(x+2)^2+y^2=4$ 与圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$.

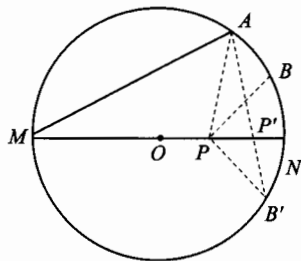
综合提高题详解

一、问题求解题

1. C; 设此圆的圆心为 (x_0, y_0) , 半径为 r , 则有 $\begin{cases} |x_0| = r, \\ \sqrt{(x_0 - 2)^2 + y_0^2} = r + 2, \end{cases}$ 化简消掉 r 后得 $y_0^2(y_0^2 - 8x_0) = 0$, 即 $y^2 = 8x (x > 0)$ 或 $y = 0 (x < 0)$.

2. B; 设 P 点为 (x, y) , 根据 $|MP| = |NP|$ 有 $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = (x + 4)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2$, 即 $2x + y + 3 = 0$, 故只要与此直线有交点就可以, 显然只有②④有交点.

3. D; 如右图所示, 做 B 关于 MN 对称的点 B' , 连接 AB' 交 MN 于点 P' , 当点 P 与点 P' 重合时, $PA + PB$ 最小. 此时 $\angle AMN = 30^\circ$, 有 $\angle AON = 60^\circ$, $\angle BON = \angle B'ON = 30^\circ$, 故 $\angle AOB' = 90^\circ$, 所以 $PA + PB = AB' = \sqrt{2}r = \sqrt{2}$.



4. B; 找点 $A(4, -1)$ 关于直线 $2x - y - 4 = 0$ 的对称点 A' , 连接 $A'B$ 与原直线的交点即为点 P . 点 A' 为 $(0, 1)$, 故直线 $A'B$ 为 $y = 1$, 两直线的交点为 $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

5. A; 根据 $3x^2 + 2y^2 = 6x$ 知, x 的取值范围为 $[0, 2]$ 及 $y^2 = 3x - \frac{3}{2}x^2$, $x^2 + y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$, 转化为求函数 $-\frac{1}{2}x^2 + 3x$ 在 $[0, 2]$ 的最大值, 显然当 $x = 2$ 时, 取最大值 4.

6. B; 直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 过点 $(1, 2)$, 得到 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$, 又根据均值不等式 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$, 从而 $ab \geq 8$, 所以面积 $S = \frac{1}{2}ab \geq 4$, 最小值为 4.

7. E; 将这个三个村庄放在坐标系中, 分别坐标为 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$. 设中心内部有个点为 (x, y) , 故 $x^2 + y^2 + (x - 4)^2 + y^2 + x^2 + (y - 3)^2 = 3x^2 - 8x + 16 + 3y^2 - 6y + 9$ 的最小值在 $x = \frac{4}{3}$, $y = 1$ 的时候取到, 最小值为 $\frac{50}{3}$.

8. C; $|xy| + 6 = 3|x| + 2|y| \Rightarrow (|x| - 2)(|y| - 3) = 0$
 $\Rightarrow |x| = 2, |y| = 3$, 表示边长为 4 与 6 的矩形, 所以面积为 24.

9. D; 圆心到直线的距离 $d = \frac{|2 + 6 - 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, 从而得到弦长 $EF = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - 5} = 4$, 再求出原点到直线的距离, 相当于三角形的高 $h = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$, 则 $\triangle EOF$ 的面积为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

10. E; 点关于 x 轴的对称点为 $A'(-3, -3)$, 显然验证发现满足这个点的有 $4x - 3y +$

$3=0$ 和 $3x-4y-3=0$, 又知道此题有两解, 那么应该选 E.

【评注】这类题目一般都是先求出对称点然后再求切线的.

$$11. \text{ B; 设 } A' \text{ 为 } (x_0, y_0), \text{ 则根据对称性质, 有 } \begin{cases} \frac{x_0-1}{2} + \frac{y_0+2}{2} + 3 = 0, \\ \frac{y_0-2}{x_0+1} = 1, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} x = -5, \\ y = -2. \end{cases}$$

12. A; 关于直线 $x+y=0$ 对称, 只要令原方程中的 x 换成 $-y$, 把 y 换成 $-x$ 即可, 即 $2(-y) - (-x) = 1 \Rightarrow x - 2y = 1$.

13. D; l_1 与 l_2 的交点为 $(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2})$, 任取 l_1 上的一点 $(2, 0)$, 其关于 l_2 的对称点为 $(-\frac{17}{5}, \frac{9}{5})$, 故 l_3 的方程为 $7x + y + 22 = 0$.

14. B; 令 $2x - y = c$, 只有直线和圆相切时 $2x - y$ 才能取到最大值, $d = \frac{|-2 - 2 - c|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = r = \sqrt{5} \Rightarrow c = 1$ 或 $c = -9$, 故 $2x - y$ 的最大值为 1.

15. B; 直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 过点 $(1, 2)$, 故有 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$, 再根据平均值定理, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$ 从而 $ab \geq 8$, 所以面积 $S = \frac{1}{2}ab \geq 4$, 最小值为 4.

16. C; 设 $\frac{y}{x} = k$, 即 $kx - y = 0$, 则由圆心 $(3, \sqrt{3})$ 到直线 $kx - y = 0$ 的距离为 $\sqrt{6}$ 得到 $\frac{|3k - \sqrt{3}|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{6}$, 则最大值 $k = \sqrt{3} + 2$.

17. B; 圆的切线问题与最值问题, 当三角形斜边最短时, 即斜边长为 2 时, 三角形面积为最小, 面积为 1.

18. A; 两平行线间的距离为 $d = \frac{|6.5 - 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2.5}{5} = 0.5$, 圆的半径为 $r = \frac{1}{4}$, 面积为 $\pi r^2 = \pi \times (\frac{1}{4})^2 = \frac{\pi}{16}$.

19. B; 圆 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$ 圆心坐标为 $(5, 3)$, 将圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y = -1$ 化为标准方程, 得到 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$, 圆心坐标为 $(2, -1)$.

圆心距为 $\sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5 = r_1 + r_2$, 故两圆外切.

二、条件充分性判断题

1. A; 直线 $y = \frac{x}{k} + 1$ 与两坐标轴的交点为 $(0, 1)$, $(-k, 0)$, 故围成的面积为 $\frac{1}{2} \times |-1| \cdot |-k| = 3 \Rightarrow k = \pm 6$, 只有条件(1)充分.

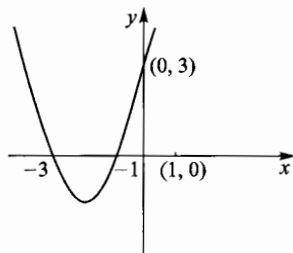
2. D; 根据题干, 有 $\frac{5x - 12y + 13}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{3x - 4y + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$, 化简得 $(32x - 56y + 65)(7x +$

$4y)=0$, 即 $32x-56y+65=0$ 或 $7x+4y=0$, 条件(1)、(2) 都充分.

3. A; 显然 l_1 的斜率为 $k_1=1$, l_2 的斜率为 $k_2=a$, 则 l_1 与 l_2 的夹角为 $\tan\alpha = \left| \frac{1-a}{1+a} \right|$, 即 $0 < \left| \frac{1-a}{1+a} \right| < \sqrt{3}$, 解得 $a > -2 + \sqrt{3}$ 或 $a < -2 - \sqrt{3}$, 且 $a \neq 1$.

4. B; 圆心到直线的距离为 $d = \frac{|a^2|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. 条件(1), M 在圆内有 $x_0^2 + y_0^2 < a^2$, 故 $d = \frac{|a^2|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} > a$, 直线和圆相离, 不充分; 同理条件(2), 有 $d = \frac{|a^2|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} < a$, 直线和圆相交, 充分.

5. B; 画图如右, 直线 $y=k(x-1)$ 恒过点 $(1,0)$, 当以过 $(1,0)$ 、 $(0,3)$ 两点的直线按逆时针方向旋转到与 x 轴重合时, 这样才在第二象限有两个交点. 故直线斜率应该在 $(-3,0)$ 之内, 显然单独条件(2) 满足, 选 B. (当然也可以从解析法考虑: $k(x-1) = x^2 + 4x + 3$ 有两个不等的负根, 且方程 $y = \left(\frac{y}{k} + 1\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{y}{k} + 1\right) + 3$, 有两个不等的正根).



6. B; 显然 R 不介于线段 PQ 之间, 故要使 $|PR| + |RQ|$ 最小, 须根据对称来求解. 做 $P(-2, -2)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点 P' , P' 为 $(6, -2)$, 即取 R 为 $P'Q$ 与 $x=2$ 的交点即可, 得 $m = -\frac{4}{3}$, 只有条件(2) 充分.

7. B; $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 化为一般方程为 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$, 得到圆心坐标为 $(-1, 2)$, 由题知, 直线 $3x + y + a = 0$ 过圆的圆心, 代入直线方程有 $3x + y + a = -3 + 2 + a = 0$, 解得 $a = 1$.

8. D; 圆心坐标为 (a, b) , 圆心到直线的距离为 $d = \frac{|a-b+2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$, 解得 $|a-b+2| = 2$, 故两个条件均充分, 选 D.

9. B; 两圆有 4 条公切线, 圆心距大于两圆半径之和, 故得到 $\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} > 3 + 4 = 7 \Rightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 > 49$. 由条件(1) 得 $(a-2)^2 + (b-1)^2 > 40$, 不充分; 由条件(2) 得 $(a-2)^2 + (b-1)^2 > 50$, 充分.

10. D; 由条件(1) 可得 $\begin{cases} 4 \times \frac{a+2+b-4}{2} + 3 \times \frac{b+2+a-6}{2} - 11 = 0, \\ \frac{a-6-(b+2)}{b-4-(a+2)} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1, \end{cases}$ 解得 $a = 4, b = 2$,

充分; 由条件(2) 得, 两直线垂直, 则 $a\left(-\frac{1}{4}\right) = -1, a = 4, y = ax + b$ 在 x 轴上的截距为 $-\frac{1}{2}$, 故其应过点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 则 $b = 2$, 也充分.

11. E; 条件(1), $|x| + 1 \geq 1$ 及 $\sqrt{1 - (y-1)^2} \leq 1$, 故只能 $|x| + 1 = 1$ 和 $\sqrt{1 - (y-1)^2} = 1$, 从而得 $x = 0$ 及 $y = 1$, 故只表示一个点 $(0, 1)$, 不充分.

条件(2), $|x| + |y| = 1$ 表示四条直线 $\pm x \pm y = 1$ 围成的正方形, 不充分.

12. A; 设 $\frac{y+1}{x+2} = k$, 可得 $y = k(x+2) - 1$, k 相当于 $(-2, -1)$ 与圆上某点的直线的斜率, 故相切则可取最值, 由(1)得到: $x^2 + [k(x+2) - 1]^2 - 1 = 0$, 即 $(1+k^2)x^2 + (4k^2 - 2k)x + 4k^2 - 4k = 0$, $\Delta = (4k^2 - 2k)^2 - 4(1+k^2)(4k^2 - 4k) = 0$, 解得 $k = 0, k = \frac{4}{3}$, 因此最大值为 $k = \frac{4}{3}$.

13. C; 单独条件都不成立. 两个条件联立, 设圆的方程为 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, 则有

$$\begin{cases} \frac{|x_0 - 2y_0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ 2\sqrt{r^2 - x_0^2} = 2 \quad \text{截 } y \text{ 轴的弦长为 } 2 \\ 2\sqrt{r^2 - x_0^2} = \sqrt{2}r \quad \text{截得 } x \text{ 轴分两段弧比为 } 3:1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = -1, \\ r = \sqrt{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 1, \\ r = \sqrt{2} \end{cases}, \text{ 充分.}$$

14. B; 根据光的反射原理, 先找 $Q(1, 1)$ 关于直线 $x+y+1=0$ 的对称点 Q' , 可得 Q' 为 $(-2, -2)$, 连接 PQ' 的直线就是入射光线, 即 $5x - 4y + 2 = 0$, 只有条件(2)充分.

15. D; 本题主要考查两圆的位置关系, 当两圆相交时, 公切线只有 2 条. 由(1), 圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + 4y = 0$, 配方得到圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 和圆 $x^2 + (y+2)^2 = 4$, 圆心距 $d = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, 由于 $2-1 < d < 2+1$, 故相交, 充分. 同理, 条件(2)也充分.

淘宝: mbaexam.taobao.com 旺旺: 小乖吖吖
MBA MPA MPAcc 交流QQ群: 90297000
考前押题发送QQ: 4006808202 (请关注)
非本店购买为翻录课程 售后无保障 举报送课程

第八章 立体几何

【大纲要求】空间几何体:长方体、柱体、球体.

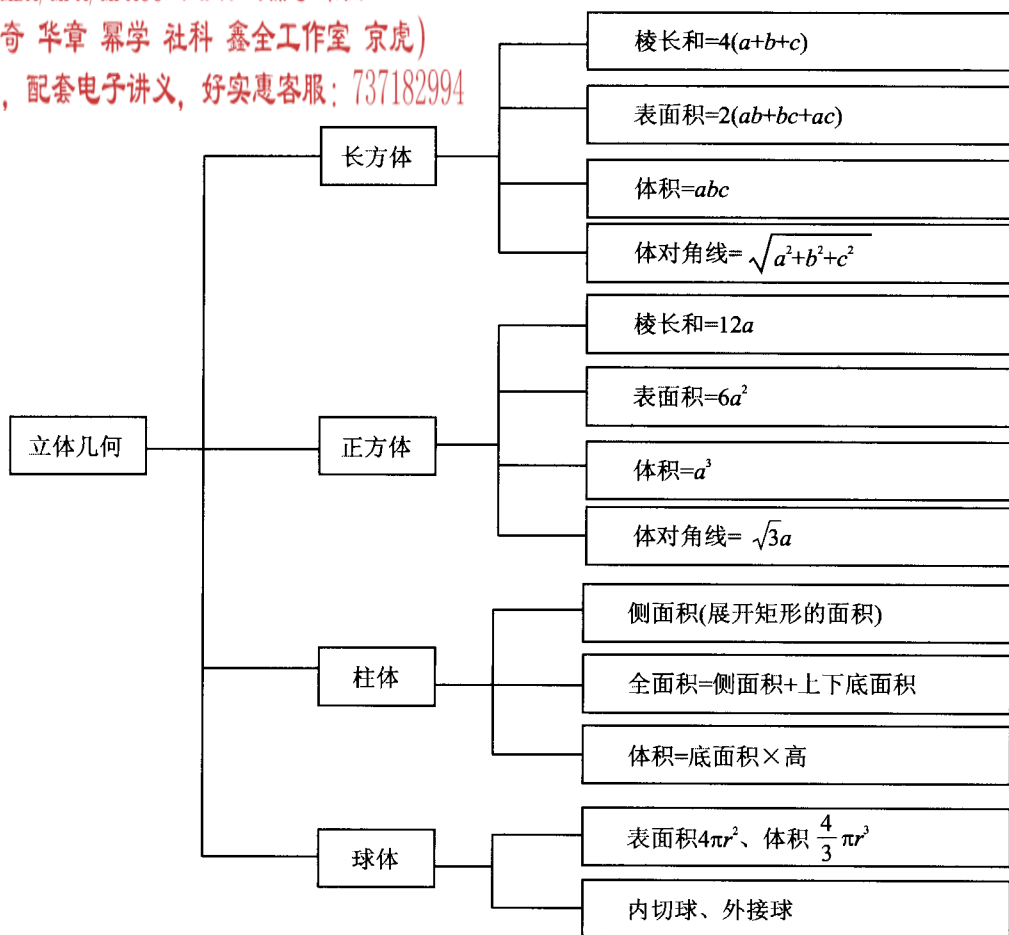
【备考要点】这部分主要考查长方体、柱体、球体等立体几何图形的表面积、体积以及和体积相关问题的求解,重点考查体积和表面积计算和运用.

【知识体系】

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航,配套电子讲义,好实惠客服:737182994



【备考建议】对于教师,建议课时控制在2个课时;对于考生,立体几何考试比较容易,建议在学习时要注意概念的理解及应用,尤其掌握表面积与体积的关系,不要死记硬背概念和公式,要通过做题来加深对概念和公式的掌握.

第一节 考试要点剖析

一、长方体

设3条相邻的棱边长是 a, b, c .

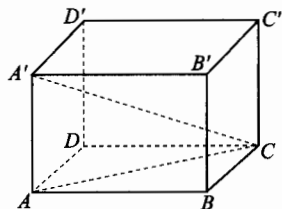
1. 全面积: $F = 2(ab + bc + ac)$.

2. 体积: $V = abc$.

3. 体对角线: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

4. 所有棱长和: $l = 4(a + b + c)$.

当 $a = b = c$ 时的长方体称为正方体, 且有 $S_{\text{全}} = 6a^2, V = a^3$,
 $d = \sqrt{3}a$.



二、柱体

1. 柱体的分类

圆柱: 底面为圆的柱体称为圆柱.

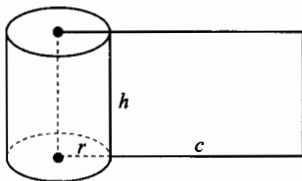
棱柱: 底面为多边形的柱体称为棱柱, 底面为 n 边形的就称为 n 棱柱.

2. 柱体的一般公式

无论是圆柱还是棱柱, 侧面展开图均为矩形, 其中一边长为底面的周长, 另一边为柱体的高.

侧面积: $S = \text{底面周长} \times \text{高}$ (展开矩形的面积).

体积: $V = \text{底面积} \times \text{高}$.



3. 对于圆柱的公式

设高为 h , 底面半径为 r .

体积: $V = \pi r^2 h$.

侧面积: $S = 2\pi r h$ (其侧面展开图为一个长为 $2\pi r$, 宽为 h 的长方形).

全面积: $F = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$.

三、球

设球的半径为 r .

1. 球的表面积 $S = 4\pi r^2$.

2. 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

四、长方体、正方体、圆柱与球的关系

设圆柱底面半径为 r , 球半径为 R , 圆柱的高为 h .

	内切球	外接球
长方体	无, 只有正方体才有	体对角线 $l = 2R$
正方体	棱长 $a = 2R$	体对角线 $l = 2R$ ($2R = \sqrt{3}a$)
圆柱	只有轴截面是正方形的圆柱才有, 此时有 $2r = h = 2R$	$\sqrt{h^2 + (2r)^2} = 2R$

【注意】(1) 在这些关系中, 一定要注意寻找几何关系时要利用几何体的轴截面;

(2) 关系是相互的, 可以说正方体的外接球, 也可以说球的内接正方体, 其实质是一样的.

第二节 基础过关题型

【题型 1】长方体(正方体)

【例 1】长方体的三条棱的比是 $3:2:1$, 表面积是 88, 则最长的一条棱等于().

(A) 8 (B) 11 (C) 12 (D) 14 (E) 6

【解析】设长方体三边分别为 $3a, 2a, a \Rightarrow 22a^2 = 88 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 3a = 6$, 选 E.

【例 2】长方体的 3 个侧面的面积分别为 $2\text{cm}^2, 6\text{cm}^2, 3\text{cm}^2$, 则长方体的体积为().

(A) 4cm^3 (B) 5cm^3 (C) 6cm^3 (D) 7.5cm^3 (E) 9cm^3

【解析】设长方体的三条棱长分别为 a, b, c , 则根据题意有
$$\begin{cases} ab = 2, \\ bc = 6, \\ ac = 3, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \\ c = 3, \end{cases}$$

或 $\begin{cases} a = -1, \\ b = -2, \\ c = -3 \end{cases}$ (舍去), 故 $V = abc = 6\text{cm}^3$, 选 C.

【例 3】已知某正方体的体对角线长为 a , 那么这个正方体的全面积是().

(A) $2\sqrt{2}a^2$ (B) $2a^2$ (C) $2\sqrt{3}a^2$ (D) $3\sqrt{2}a^2$ (E) $3a^2$

【解析】设正方体的棱长为 x , 故 $a = \sqrt{3x^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}a}{3}$, 故 $S = 6x^2 = 2a^2$, 从而选 B.

【例 4】长方体的体对角线长为 $\sqrt{14}$, 全面积为 22, 则长方体所有棱长之和为().

(A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 28 (E) 32

【解析】设三棱长分别为 a, b, c , 则根据题意, $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14, \\ 2ab + 2bc + 2ac = 22, \end{cases}$ 所以 $(a + b + c)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \Rightarrow a + b + c = 6$, 从而棱长之和为 $4(a + b + c) = 24$, 选 B.

【题型 2】圆柱体

【例 5】一个圆柱的侧面展开图是正方形,那么它的侧面积是下底面积的()倍。

- (A) 2 (B) 4 (C) 4π (D) π (E) 2π

【解析】由题意, $h = 2\pi r$, 所以 $\frac{S_{\text{侧}}}{S_{\text{底}}} = \frac{2\pi r \cdot h}{\pi r^2} = 4\pi$, 故选 C.

【例 6】圆柱体的底半径和高的比是 1:2,若体积增加到原来的 6 倍,底半径和高的比保持不变,则底半径().

- (A) 增加到原来的 $\sqrt{6}$ 倍 (B) 增加到原来的 $\sqrt[3]{6}$ 倍 (C) 增加到原来的 $\sqrt{3}$ 倍
(D) 增加到原来的 $\sqrt[3]{3}$ 倍 (E) 增加到原来的 6 倍

【解析】 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi r_2^2 h_2}{\pi r_1^2 h_1} = \frac{\pi r_2^2 \cdot 2r_2}{\pi r_1^2 \cdot 2r_1} = \frac{r_2^3}{r_1^3} = 6 \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{6}$, 故选 B.

【例 7】有两个半径分别为 6、8,深度相等的圆柱形容器甲和乙,把装满容器甲里的水倒入容器乙里,水深比容器深度的 $\frac{2}{3}$ 低 1,那么容器的深度为().

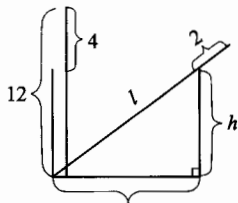
- (A) 9 (B) 9.6 (C) 10 (D) 12 (E) 9.9

【解析】设容器深度为 h , 则有水在容器乙的深度为 $\frac{2}{3}h - 1$, 则有 $V_{\text{甲}} = V_{\text{水}}$, 即 $\pi r_{\text{甲}}^2 h = \pi r_{\text{乙}}^2 \left(\frac{2}{3}h - 1\right) \Rightarrow h = 9.6$, 选 B.

【例 8】一个直圆柱形状的量杯中放有一根长为 12 cm 的细搅棒(搅棒直径不计),当搅棒的下端接触量杯下底时,上端最少可露出杯口边缘 2 cm,最多能露出 4 cm,则这个量杯的容积为()立方厘米。

- (A) 72π (B) 96π (C) 88π (D) 84π (E) 64π

【解析】 $h = 12 - 4 = 8\text{cm}$, $l = 12 - 2 = 10\text{cm}$, 则量杯的底面圆直径 $2r = \sqrt{l^2 - h^2} = 6\text{cm}$, 即 $r = 3\text{cm}$. 量杯的体积为 $\pi r^2 h = 3^2 \times 8\pi = 72\pi$, 故应选 A.



【例 9】圆柱轴截面的周长为 12, 则圆柱体积最大值为().

- (A) 6π (B) 8π (C) 9π (D) 10π (E) 12π

【解析】设圆柱的半径为 r , 高为 h , 则 $2r + h = 6$, 体积 $V = \pi r^2 h = \pi r^2 (6 - 2r) = \pi \cdot r \cdot r \cdot (6 - 2r)$, 根据平均值定理, 当 $r = 2$ 时, 体积有最大值 8π , 选 B.

【题型 3】球体

【例 10】两个球体容器,若将大球中的 $\frac{2}{5}$ 溶液倒入小球中,正巧可装满小球,那么大球

与小球的半径之比等于().

- (A) 5:3 (B) 8:3 (C) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{2}$ (D) $\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{5}$ (E) 5:2

【解析】 $\frac{V_{\text{大}}}{V_{\text{小}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, 选 C.

第三节 强化突破题型

【题型 1】棱柱

【思路点拨】主要掌握三棱柱与四棱柱的相关公式.

【例 1】一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1, 那么该棱柱的表面积为().

- (A) $4\sqrt{2}$ (B) $1 + 4\sqrt{2}$ (C) $2 + 4\sqrt{2}$ (D) $1 + 5\sqrt{2}$ (E) $6\sqrt{2}$

【解析】一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 的球面上. 正四棱柱的对角线长为球的直径, 现正四棱柱底面边长为 1, 设正四棱柱的高为 h , 则 $2R = 2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + h^2}$, 解得 $h = \sqrt{2}$, 那么该棱柱的表面积为 $2 + 4\sqrt{2}$, 选 C.

【评注】正四棱柱是上、下底面都是正方形, 且侧棱垂直于上、下底面的棱柱. 正方体都是正四棱柱, 但正四棱柱不都是正方体. 正四棱柱可以看成长方体分析.

【题型 2】体积比较

【思路点拨】根据侧面积或表面积的关系进行体积比较.

【例 2】圆柱体的高与正方体的高相等, 且它们的侧面积也相等, 则圆柱体的体积与正方体体积比值为().

- (A) $\frac{4}{\pi}$ (B) $\frac{3}{\pi}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$ (E) π

【解析】设正方体的棱长为 a , 圆柱的底面半径为 r , 从而有 $4a^2 = 2\pi ra \Rightarrow r = \frac{2}{\pi}a$, 故正方体的体积为 a^3 , 圆柱体的体积为 $\frac{4}{\pi}a^3$, 故两体积比为 $\frac{4}{\pi}$, 选 A.

【例 3】表面积相等的正方体、等边圆柱(轴截面是正方形)和球, 它们的体积分别为 V_1, V_2, V_3 , 则有().

- (A) $V_1 < V_3 < V_2$ (B) $V_3 < V_1 < V_2$ (C) $V_2 < V_3 < V_1$
(D) $V_1 < V_2 < V_3$ (E) $V_3 < V_2 < V_1$

【解析】由表面积相等, 有 $6a^2 = 6\pi r^2 = 4\pi R^2, r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}, R = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}a$, 所以 $V_1 = a^3, V_2 = \sqrt{\frac{4}{\pi}}a^3, V_3 = \sqrt{\frac{6}{\pi}}a^3$, 从而得到 $V_1 < V_2 < V_3$. 选 D.

【题型 3】切开,融合

【思路点拨】对于切开问题,新增加的表面积等于切面面积的 2 倍;对于拼接问题,减少的表面积等于重合面面积的 2 倍;对于融合问题,主要借助体积相等来得到表面积的关系.

【例 4】一个长方体的长宽高分别是 6、5、4,若把它切割成三个体积相等的小长方体,这三个小长方体表面积的和最大是().

- (A) 208 (B) 228 (C) 248 (D) 268 (E) 288

【解析】这个长方体的原表面积为 148,每切割一刀,增加两个面,切成三个体积相等的小长方体要切 2 刀,一共增加 4 个面.要求增加面积最大,应增加 4 个面积为 30 的面.所以三个小长方体的表面积和最大是 $148+6\times 5\times 4=268$,选 D.

【例 5】把一个正方体和一个等底面积的长方体拼成一个新的长方体,拼成的长方体的表面积比原来的长方体的表面积增加了 50.原正方体的表面积是().

- (A) 75 (B) 70 (C) 64 (D) 80 (E) 60

【解析】把一个正方体和一个等底面积的长方体拼成一个新的长方体,拼成的长方体的表面积比原来的长方体的表面积增加了 4 个正方形的面积,每块正方形的面积是 $50\div 4=12.5$,那么正方体的表面积是 $12.5\times 6=75$,选 A.

【例 6】把一个长、宽、高分别为 9、7、3 的长方体铁块和一个棱长是 5 的正方体铁块熔铸成一个圆柱体,这个圆柱体的底面直径是 10,高是().(π 取 3.14)

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

【解析】设圆柱的高为 h ,由题得,长方体的体积与正方体的体积之和等于最终的圆柱体的体积,故 $9\times 7\times 3+5^3=\pi\times 5^2\times h$,解得 $h=4$,故选 C.

【例 7】把一个大金属球表面涂漆,需油漆 2.4kg,若把这个金属球熔化,制成 64 个半径相等的小金属球(设损耗为零),将这些小金属球表面涂漆,需用油漆()kg.

- (A) 7.2 (B) 9.6 (C) 12 (D) 14.4 (E) 16.8

【解析】由题可得,大球的体积是一个小球的 64 倍,所以大球的半径是小球半径的 4 倍,从而大球的表面积是一个小球的 16 倍,那么 64 个小球的表面积就是大球表面积的 4 倍,因此用油漆的量为大球的 4 倍,得到用油漆 9.6kg,所以选 B.

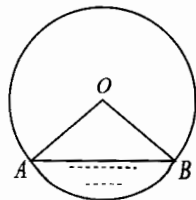
【评注】若将一个大金属球熔化为 n^3 个相同的小金属球,则表面为原来的 n 倍.

【题型 4】与水相关的体积计算

【思路点拨】主要借助水的体积变化来作为等量关系,列出等式,求出参数.

【例 8】一个两头密封的圆柱形水桶,水平横放时桶内有水部分占水桶一头圆周长的 $\frac{1}{4}$,则水桶直立时水的高度和桶的高度之比是().

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}$ (C) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$
(D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{\pi}{4}$

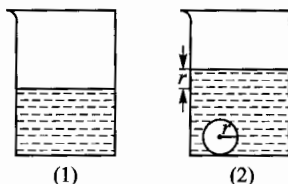


【解析】设桶高为 h , 水桶直立时水高为 l . 如图所示, 劣弧 AB 所对的圆心角为 90° , 因此 $S_{\text{阴}} = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2$, 由于桶内水的体积不变, 故 $V_{\text{水}} = \pi r^2 \cdot l = S_{\text{阴}} \cdot h = \left(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2\right)h$, 则 $\frac{l}{h} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$. 选 C.

【点睛】柱体的体积等于底面积乘以高, 两种方式的区别在于底面积不同, 根据水的体积相同来求出高度之比.

【例 9】如图所示, 一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水. 若放入一个半径为 r 的实心铁球, 水面高度恰好升高 r , 则 $\frac{R}{r}$ 为 ().

- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$



【解析】根据水增加的体积等于球的体积可得 $\pi R^2 r = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 选 A.

【例 10】长方体容器内装满水, 现有大、中、小三个铁球, 第一次把小球沉入水中, 第二次把小球取出, 把中球沉入水中, 第三次把中球取出, 把小球和大球一起沉入水中. 已知每次从容器中溢出的水量情况是: 第二次是第一次的 3 倍, 第三次是第一次的 2.5 倍. 则大球的体积是小球的 () 倍.

- (A) 3.5 (B) 4 (C) 4.5 (D) 5 (E) 5.5

【解析】假设小球的体积是 1, 则第一次溢出的水的体积也是 1, 根据第二次溢出的水是第一次的 3 倍, 可知第二次溢出的水是 3, 因为取出了小球, 则中球的体积为 4. 根据第三次溢出的水是第一次的 2.5 倍, 可知第三次溢出的水为 2.5, 因为取出了中球, 则大球的体积为 $2.5 + 4 - 1 = 5.5$. 因此大球的体积是小球的 5.5 倍, 故选 E.

【题型 5】内切球, 外接球

【思路点拨】正方体的内切球直径等于棱长, 等边圆柱的内切球直径等于圆柱的直径; 正方体与长方体的外接球直径等于体对角线长, 圆柱的外接球直径等于轴截面的对角线长.

【例 11】长方体的各顶点均都在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为 ().

- (A) 8π (B) 10π (C) 12π (D) 14π (E) 16π

【解析】长方体外接球直径长等于长方体体对角线长, 即 $2R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, 由 $S = 4\pi R^2 = 14\pi$, 选 D.

【例 12】球内有一个内接正方体, 若正方体棱长为 $2\sqrt{3}$, 则球的表面积为 ().

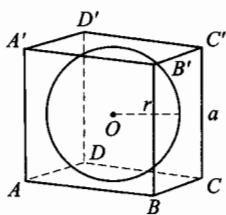
- (A) 4π (B) 32π (C) 36π (D) 48π (E) 60π

【解析】显然球的直径等于正方体的体对角线长,故有 $2r = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow r = 3$, 则球的表面积为 $S_{\text{球}} = 4\pi r^2 = 36\pi$, 选 C.

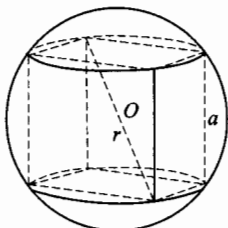
【例 13】棱长为 a 的正方体内切球、外接球、外接半球的半径分别为().

- (A) $\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{6}}{2}a$ (C) $a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{6}}{2}a$
(D) $\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{6}}{2}a$ (E) $\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{6}}{2}a$

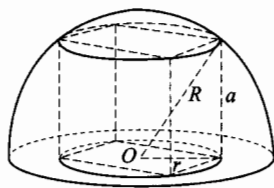
【解析】如图甲所示,正方体内切球半径为 $r = \frac{a}{2}$. 如图乙所示,正方体对角线 $L = 2r$, 又 $L = \sqrt{3}a$, 因此, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. 如图丙所示,正方体外接半球的球半径 $R = \sqrt{a^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. 选 E.



图甲



图乙



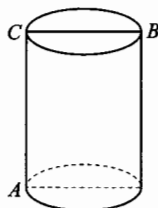
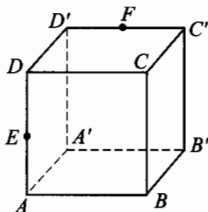
图丙

第四节 核心专题点睛

一、面距离

【例 1】正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的边长为 2, E, F 分别是棱 AD 和 $C'D'$ 的中点, 位于点 E 处的小虫要在这个正方体的表面上爬到 F 处, 它爬行的最短距离为().

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) 4 (C) $\sqrt{8}$ (D) $1 + \sqrt{5}$ (E) $\sqrt{10}$



【解析】如图所示, 将四边形 $A'ADD'$ 和四边形 $DD'C'C$ 展开到同一个平面上, 则最短距离为 $EF = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, 选 C.

【例 2】如图所示, 地上有一圆柱, 在圆柱下底面的点 A 处有一只蚂蚁, 它想沿圆柱表面爬行, 吃到上底面上与点 A 相对的点 B 处的食物 (π 的近似值取 3, 以下同).

(1) 当圆柱的高 $h = 12$ 厘米, 底面半径 $r = 3$ 厘米时, 蚂蚁沿侧面爬行时最短路程是().

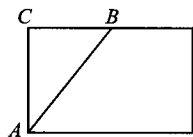
- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

(2) 当圆柱的高 $h = 3$ 厘米, 底面半径 $r = 3$ 厘米时, 蚂蚁沿侧面爬行也可沿 AC 到上底面爬行时, 最短路程是().

- (A) $2\sqrt{14}$ (B) 8 (C) 9 (D) $3\sqrt{10}$ (E) $3\sqrt{7}$

【解析】(1) 当蚂蚁沿侧面爬行, 将其展开, 连接 AB , 路程最短.

$AB = \sqrt{AC^2 + \widehat{CB}^2}$, 已知 π 取 3, 所以 $AC = 12$, $\widehat{CB} = 3\pi \approx 9$, 所以 $AB = 15$. 选 D.



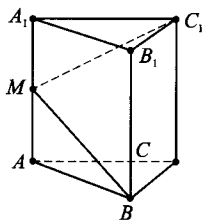
(2) 当蚂蚁沿侧面爬行同(1)的方法: 因为 $AC = 3$, $\widehat{BC} = 3\pi \approx 9$, 所以 $AB = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

当蚂蚁沿 AC 到上底面, 再沿直径 CB 爬行, 有 $AC + CB = 3 + 6 = 9$.

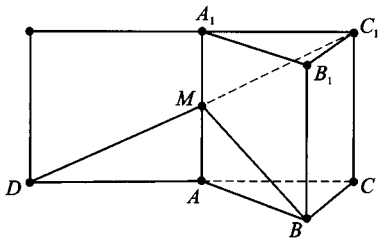
因为 $\sqrt{90} > 9$, 所以最短路程是经 AC 到上底面, 再沿直径 CB 爬行的总路程为 9. 选 C.

【例 3】如图所示, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = 2$, 由顶点 B 沿棱柱侧面经过棱 AA_1 到顶点 C_1 的最短路线与 AA_1 的交点记为 M , 则最短路线的长度为().

- (A) $2\sqrt{5}$ (B) 4 (C) 3 (D) $3\sqrt{3}$ (E) $3\sqrt{2}$



【解析】如图所示, 将侧面 AA_1B_1B 绕棱 AA_1 旋转 120° 使其与侧面 AA_1C_1C 在同一平面上, 点 B 运动到点 D 的位置, 连接 DC_1 交 AA_1 于点 M , 则 DC_1 就是由顶点 B 沿棱柱侧面经过棱 AA_1 到顶点 C_1 的最短路线, 其长为 $\sqrt{DC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. 选 A.



二、旋转

【例 4】矩形周长为 2, 将它绕其一边旋转一周, 所得圆柱体积最大时的矩形面积为().

- (A) $\frac{4\pi}{27}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{27}{4}$ (E) 2

【解析】设矩形的边长分别为 x 和 $1-x$, 则旋转后, 矩形的一边为半径, 一边为高, 故体

积 $V = \pi x^2(1-x) = \frac{1}{2}\pi \cdot x \cdot x \cdot (2-2x) \leq \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3$, 当 $x = \frac{2}{3}$ 时, 体积有最大值, 此时矩形的面积为 $\frac{2}{9}$. 选 C.

【评注】首先根据矩形旋转得到圆柱体, 写出体积表达式, 再借助平均值定理求解, 所用公式为 $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. 本题关键点在于要将 $x^2(1-x)$ 变形为 $\frac{1}{2}x \cdot x \cdot (2-2x)$, 其原因是要出现和为定值, 乘积才有最大值.

三、折叠、卷及加工图形

【例 5】一张长是 12, 宽是 8 的矩形铁皮卷成一个圆柱体的侧面, 其高是 12, 则这个圆柱体的体积是().

- (A) $\frac{288}{\pi}$ (B) $\frac{192}{\pi}$ (C) $\frac{288}{\pi}$ 或 $\frac{192}{\pi}$ (D) $\frac{96}{\pi}$ (E) 288π

【解析】 $2\pi r = 8 \Rightarrow r = \frac{4}{\pi} \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot h = \frac{192}{\pi}$, 选 B.

第五节 阶梯化精炼题

基础能力题



扫码看视频

一、问题求解题

1. 一个长方体纸盒, 长为 8, 宽是长的 $\frac{3}{4}$, 高是宽的一半, 则长方体的棱长总和是().
(A) 64 (B) 65 (C) 66 (D) 68 (E) 70
2. 一个长方体的长、宽、高的比是 $3:2:1$, 它的棱长总和是 48, 则长方体的表面积为().
(A) 66 (B) 77 (C) 75 (D) 78 (E) 88
3. 长方体不同的三个面的面积分别为 10、15 和 6. 这个长方体的体积是().
(A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36 (E) 38
4. 在一个长为 15, 宽为 12 的长方体水箱中, 有深为 10 的水, 如果在水中沉入一个棱长为 3 的正方体铁块, 那么水箱中水深为().
(A) 12.15 (B) 11.15 (C) 10.15 (D) 9.15 (E) 10
5. 一个长方体容器的底面是一个边长为 60 cm 的正方形, 容器里直立着一个高 1 m, 底面边长 15 cm 的长方体铁块, 这时容器里的水深 0.5 m. 如果把铁块取出, 容器里的水深是() cm.
(A) 44.875 (B) 46.875 (C) 48.875 (D) 49.875 (E) 50.875
6. 有一个长方体容器, 长为 30, 宽为 20, 高为 10, 里面的水深为 6 (最大面为底面), 如果把这个容器盖紧 (不漏水), 再朝左竖起来 (最小面为底面), 里面的水深是() 厘米.

- (A) 18 (B) 16 (C) 15 (D) 14 (E) 12

7. 将表面积分别为 54、96 和 150 的三个铁质正方体熔成一个大正方体(不计损耗),则这个大正方体的体积为()。

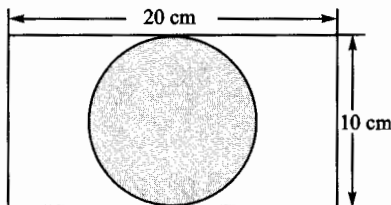
- (A) 176 (B) 186 (C) 196 (D) 206 (E) 216

8. 用一根长为 108 的铁丝做一个长、宽、高之比为 2:3:4 的长方体框,那么这个长方体的体积是()。

- (A) 648 (B) 658 (C) 668 (D) 678 (E) 688

9. 一个圆柱形容器的轴截面尺寸如图所示,将一个实心球放入该容器中,球的直径等于圆柱的高,现将容器注满水,然后取出该球(假设原水量不受损失),则容器中水面的高度为()。

- (A) $5\frac{1}{3}$ cm (B) $6\frac{1}{3}$ cm (C) $7\frac{1}{3}$ cm (D) $8\frac{1}{3}$ cm (E) $9\frac{1}{3}$ cm



10. 一个长方体,长和宽之比是 2:1,宽和高之比是 3:2,若长方体的全部棱长之和是 220,则长方体的体积是()。

- (A) 2 880 (B) 7 200 (C) 4 600 (D) 4 500 (E) 3 600

11. 把 60 升水倒入一个长 6 分米,宽 2.5 分米的长方体水箱内,正好倒满,这个水箱深为()分米。

- (A) 3.5 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. 一个长 1 m、宽 8 cm、高 5 cm 的长方体木料锯成长度都是 50 cm 的两段,表面积比原来增加()平方厘米。

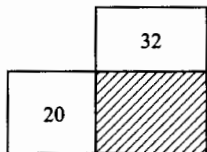
- (A) 80 (B) 75 (C) 70 (D) 68 (E) 60

13. 把一根长 4 m、宽 1.2 m、厚 0.6 m 的木料锯成体积相等的两个长方体,它的表面积最多增加 m 平方米,最少增加 n 平方米,则下列正确的为()。

- (A) $m=4.8$ (B) $n=4.8$ (C) $n=9.6$ (D) $m=1.44$ (E) $n=1.44$

14. 一个体积为 160 cm^3 的长方体中两个侧面的面积分别为 20 cm^2 和 32 cm^2 ,如图所示。则这个长方体底面的面积(即图中阴影部分的面积)为()。

- (A) 40 (B) 45 (C) 50 (D) 55 (E) 60



15. 某小学要修建一个游泳池,它的长是 40 m,宽是 20 m,池深是 1.2 m,把游泳池的四壁和底部都用边长为 4 dm 的白瓷砖铺盖一层,至少要用()块白瓷砖。

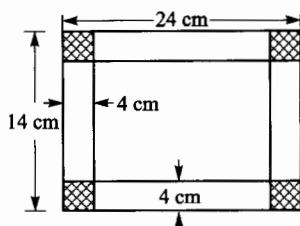
- (A) 6000 (B) 5900 (C) 5800 (D) 5700 (E) 5600

16. 一个正方体增高 3, 就得到一个底面不变的长方体, 它的表面积比原来的正方体的表面积增加 96, 则原来正方体的表面积为().

- (A) 368 (B) 372 (C) 382 (D) 384 (E) 386

17. 有一块长方形铁皮长 24 厘米, 宽 14 厘米, 如图所示. 剪掉同样的四个角(阴影部分), 再沿虚线折起, 做成一个无盖铁盒, 则这个铁盒的容积为().

- (A) 348 (B) 362 (C) 368 (D) 384 (E) 392



18. 一个长方体油桶装满汽油, 现将桶里的汽油倒入一个正方体容器内正好倒满, 已知长方体汽油桶高为 1, 底面长为 0.8, 宽为 0.64, 则正方体容器的棱长为().

- (A) 0.8 (B) 0.85 (C) 0.9 (D) 0.95 (E) 0.6

二、条件充分性判断题

1. 把长、宽、高分别为 5、4、3 的两个相同长方体粘合成一个大长方体, 则大长方体的表面积为 164.

- (1) 将两个最大的面粘合在一起. (2) 将两个最小的面粘合在一起.

2. 体育馆有一个长方体形状的游泳池, 长 50 米, 宽 30 米, 深 3 米, 现要在游泳池的各个面上抹上一层水泥, 则 22 吨水泥保证够用.

- (1) 每平方米用水泥 11 千克. (2) 每平方米用水泥 10 千克.

3. 长方体对角线长为 a , 则表面积为 $2a^2$.

- (1) 棱长之比为 1:2:3 的长方体. (2) 长方体的棱长均相等.

4. 长方体所有的棱长之和为 28.

- (1) 长方体的体对角线长为 $2\sqrt{6}$. (2) 长方体的全面积为 25.

5. 侧面积相等的两圆柱体, 它们的体积之比为 3:2.

- (1) 圆柱底半径分别为 6 和 4. (2) 圆柱底半径分别为 3 和 2.

6. 高为 2 的圆柱, 则底的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

- (1) 圆柱侧面展开图中母线与对角线夹角是 60° .
(2) 圆柱侧面展开图中母线与对角线夹角是 45° .

7. 球的表面积为原来的倍 $3\sqrt[3]{3}$.

- (1) 球体积为原来的 9 倍. (2) 球半径为原来的 3 倍.

8. 棱长为 a 的正方体的外接球与内切球的表面积之比为 3:1.

- (1) $a=10$. (2) $a=20$.

9. 若球的半径为 R , 则这个球的内接正方体表面积是 72.

(1) $R=3$.

(2) $R=\sqrt{3}$.

10. 如果圆柱的底面半径为 1, 则圆柱侧面展开图的面积为 6π .

(1) 高为 3.

(2) 高为 4.

基础能力题详解

一、问题求解题

1. D; 因为长方体一共有 12 条棱且互相平行的棱的长度是相等的, 所以长度为 8 的棱长有 4 条, 宽为 $8 \times 3/4$ 的棱长有 4 条, 高为 $8 \times 3/4 \times 1/2$ 的棱有 4 条. 因此棱长的总和为 $L=8 \times 4 + 8 \times \frac{3}{4} \times 4 + 8 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 4 = 68$, 棱长的总和为 68.

2. E; 设长方体的长、宽、高分别是 $3x, 2x, x$, 则 $48 = 4(3x + 2x + x) = 24x$, 得 $x=2$, 因此长方体的表面积 $= 2(6 \times 4 + 2 \times 4 + 6 \times 2) = 88$.

3. A; 长方体不同的三个面的面积分别为长 \times 宽、长 \times 高和宽 \times 高. 因此, $15 \times 10 \times 6 = (\text{长} \times \text{宽} \times \text{高}) \times (\text{长} \times \text{宽} \times \text{高})$, 所以这个长方体的体积是 30.

4. C; 铁块的体积为 27, 沉入水中后, 水上升的体积就是 27, 用这个体积除以水箱底面积就能得到水上升的高度. 则水深为 $3 \times 3 \times 3 \div (15 \times 12) + 10 = 10.15$.

5. B; 这里告诉的铁块高度是一个无用的条件, 首先计算使水面升高的铁块的体积是: $15 \times 15 \times (0.5 \times 100) = 11250$ (立方厘米), 这时可计算铁块使水面升高的高度: $11250 \div (60 \times 60) = 3.125$ (厘米), 则取出铁块后水的高度为 $50 - 3.125 = 46.875$ (厘米).

6. A; 水的形状在变化, 而水的体积没有变化. $30 \times 20 \times 6 \div (20 \times 10) = 18$.

7. E; 因为正方体的每一个面的面积相等, 所以三个正方体的每一个面面积是 9、16、25. 故三个正方体的棱长分别是 3、4、5 厘米. 则大正方体的体积只需将三个正方体的体积相加即可, 从而体积为 $27 + 64 + 125 = 216$.

8. A; 设棱长分别为 $2x, 3x, 4x$, 则有 $4(2x + 3x + 4x) = 108 \Rightarrow x=3$, 所以棱长分别为 6、9、12, 体积为 $V=6 \times 9 \times 12 = 648$.

9. D; 球的体积与下降水的体积相等, 设水面高度为 h , 则有 $\frac{4}{3}\pi r_{\text{球}}^3 = \pi r_{\text{柱}}^2(10-h) \Rightarrow h = 8\frac{1}{3}$.

10. D; 由题意, 长: 宽: 高 $= 6:3:2$, 设长、宽、高分别为 $6a, 3a, 2a$;

则 $4(6a + 3a + 2a) = 220 \Rightarrow a=5$, 故长、宽、高分别为 30, 15, 10, 体积为 4500.

11. C; 把 60 升水倒进水箱内正好倒满, 说明这个长方体水箱的容积是 60 升. 求水箱深多少立方分米, 就是求这个长方体的高是多少分米. $60 \text{ 升} = 60 \text{ 立方分米}$, $60 \div 6 \div 2.5 = 4$ (分米).

12. A; 锯成长度都是 50 厘米的两段, 增加的两个长方形的长和宽应该是原来长方体的宽和高. $8 \times 5 \times 2 = 80$ (平方厘米), 所以表面积比原来增加 80 平方厘米.

13. E; 最多增加的最大面积: $m = 4 \times 1.2 \times 2 = 9.6$ (平方米), 最少增加的面积: $n = 1.2 \times 0.6 \times 2 = 1.44$ (平方米).

14. A; 在长方体的六个面中, 有三组对面分别全等, 题设中所给出的三个面恰好是这三

组面的代表. 现要求出底面(阴影长方形)的面积. 由长方体的概念可知, 底面的面积是长方体的长和宽的乘积, 两个侧面的面积是长和高的乘积与宽和高的乘积. 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, h . 则由题意, $ah = 32, bh = 20, a \cdot b \cdot h = 160$. 那么 $160 = a \cdot b \cdot h = 20a$, $160 = abh = 32b$, 所以 $a = 8, b = 5$, 故所求底面面积为 $ab = 8 \times 5 = 40$.

15. B; 首先要知道这个游泳池共有五个面要铺瓷砖, 要先求出铺白瓷砖的面积总和, 有了面积和, 再求需要多少块白瓷砖. 需铺白瓷砖的总面积设为 S , 则 $S = 40 \times 20 + 2 \times 20 \times 1.2 + 2 \times 40 \times 1.2 = 800 + 48 + 96 = 944$, 所需白瓷砖为 $944 \div 0.4^2 = 5900$ (块).

16. D; 原正方体的高增加, 则它的面积扩大, 而扩大的这部分面积只有 4 个侧面的面积, 上下底面积并没有变化. 设正方体棱长为 x , 则 $96 = 4 \times 3x = 12x$, 得 $x = 8$, 得到正方体的表面积为 $6 \times 8^2 = 384$.

17. D; 由题意剪去四个角后, 长为 $24 - 4 \times 2 = 16$ (厘米), 宽为 $14 - 4 \times 2 = 14 - 8 = 6$ (厘米), 因此容积为 $16 \times 6 \times 4 = 384$ (立方厘米).

18. A; 由题意可知长方体油桶的体积与正方体油桶的体积正好相等, 设正方体容器的棱长为 x 米, 则 $0.64 \times 0.8 \times 1 = x^3$, 得 $x = 0.8$.

二、条件充分性判断题

1. B; 采用总面积减去粘合的面积来计算. 总表面积为 $S = (5 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 3) \times 2 = 94$, 若以最大的 5、4 为粘合面, 则 $S = 94 \times 2 - (5 \times 4) \times 2 = 148$; 若以最小的 4、3 为粘合面, 则 $S = 94 \times 2 - (4 \times 3) \times 2 = 164$.

2. D; 先求这个长方体游泳池的表面积. 要计算前、后、左、右、下这 5 个面的面积之和. 再根据每平方米用水泥的千克数, 算出这个游泳池共用水泥多少千克.

$$50 \times 30 + 50 \times 3 \times 2 + 30 \times 3 \times 2 = 1500 + 300 + 180 = 1980 \text{ (平方米)}$$

由条件(1) 得 $11 \times 1980 = 21780$ (千克) $= 21.78$ (吨), 所以 22 吨水泥够用. 同理条件(2) 也充分.

3. B; 设长方体长宽高分别为 x, y, z , 体对角线长 $a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 表面积 $S = 2xy + 2xz + 2yz = 2a^2 \Rightarrow xy + yz + xz = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow x = y = z$, 即长方体各边相等, 为立方体, 故条件(1) 错, 条件(2) 对.

4. C; 设长方体棱长为 a, b, c , 单独都不能成立, 联合(1) 与(2) 得 $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 24, \\ 2(ab + bc + ac) = 25 \end{cases} \Rightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 49 \Rightarrow a + b + c = 7$, 则棱长之和为 $4(a + b + c) = 28$, 成立.

5. D; 设两圆柱体底面半径分别为 R, r , 高分别为 H, h , 侧面积相等, 即 $2\pi RH = 2\pi rh \Rightarrow RH = rh$, 得体积比 $\pi R^2 H : \pi r^2 h = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$, 条件(1) 与条件(2) 都正确.

6. A; 圆柱体展开图为长方形, 边长分别为圆柱体高 $h = 2$ 和底面周长 $2\pi r = 2\sqrt{3}$, 根据直角三角形边之比为 $1 : \sqrt{3} : 2$, 则展开图母线与对角线夹角为 60° .

$$7. A; \text{令球半径为 } r, \text{ 则表面积 } S = 4\pi r^2, \text{ 体积 } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{S}{6} \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \frac{S^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{\pi}}.$$

由条件(1) 体积为原来的 9 倍,则 S 为原来的 $3\sqrt[3]{3}$ 倍,充分;由条件(2) 半径为原来的 3 倍,表面积为原来的 9 倍,不充分.

8. D;内切球直径为正方体边长 a ,外接球直径为正方体的体对角线 $\sqrt{3}a$,可知 $r_{\text{内}} = \frac{a}{2}$, $r_{\text{外}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,表面积之比等于半径之比的平方,故比值与正方体的棱长没有关系.

9. A;球的内接正方体的体对角线就是球的直径,由此得出正方体的棱长,即可求出表面积. 正方体的棱长为 $\frac{2}{\sqrt{3}}R$,表面积为 $6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)^2 = 8R^2 = 72 \Rightarrow R = 3$, 条件(1)充分.

10. A;由条件(1) $S = 2\pi \times 1 \times 3 = 6\pi$;条件(2) $S = 2\pi \times 1 \times 4 = 8\pi$.



扫码看视频

综合提高题

一、问题求解

1. 棱长为 6 的正方体木块,把它锯成若干个棱长为 2 的小正方体,表面积增加了().

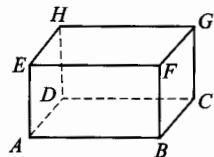
- (A) 402 (B) 412 (C) 422 (D) 432 (E) 442

2. 甲、乙两个圆柱体,甲的底面周长是乙的 2 倍,甲的高度是乙的 $\frac{1}{2}$,则甲的体积是乙的().

- (A) (B) 1 倍 (C) 2 倍 (D) 4 倍 (E) 1.5 倍

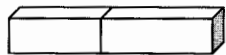
3. 如图所示,将一个横截面是正方形(面 $BCGF$)的长方体木料沿平面 $AEGC$ 分割成大小相同的两块,表面积增加了 30. 已知 EG 长为 5,分割后每块木料的体积是 18. 则原来长方体木料的表面积是().

- (A) 56 (B) 63 (C) 64 (D) 66 (E) 68



4. 一副扑克牌长 9 厘米、宽 6.5 厘米、高 2 厘米,现在要把相同的两副扑克牌放在一起包装(如图所示),请问包装盒的表面积至少是()平方厘米.

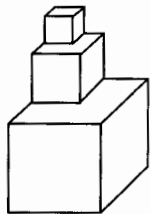
- (A) 262 (B) 282 (C) 302 (D) 241 (E) 322



5. 有一块边长为 4 的正方形钢板,现对其切割、焊接成一个长方体形无盖容器(切、焊损耗忽略不计). 有人应用数学知识作如下设计:在钢板的四个角处各切去一个小正方形,剩余部分围成一个长方体,该长方体的高是小正方形的边长. 当所得长方体容器的体积最大时,剪下的正方形边长为().

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 1

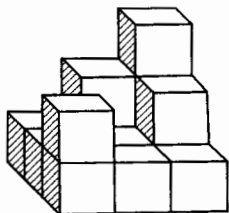
6. 如图所示,由三个正方体木块粘合而成的模型,它们的棱长分别为 1、2、4,要在表面涂刷油漆,如果大正方体的下面不涂油漆,则模型涂刷油漆的面积是().



- (A) 75 (B) 80 (C) 85 (D) 90 (E) 100

7. 用棱长是 1 的立方块拼成如图所示的立体图形, 则该图形的表面积是().

- (A) 42 (B) 44 (C) 46 (D) 48 (E) 50



8. 一个长方体, 如果将其表面涂成红色, 现在切成棱长为 1 小正方体 $5 \times 6 \times 7$ 个, 那么其中一面、二面、三面被涂成红色的小正方体各有 m, n, k 块, 则下列正确的为().

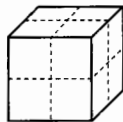
- (A) $m=84$ (B) $n=60$ (C) $k=10$ (D) $n+k=54$ (E) $m+k=102$

9. 一个正方体的棱长为 4, 在它的前、后、左、右、上、下各面中心各挖去一个棱长为 1 的正方体做成一种玩具, 则这个玩具的表面积为().

- (A) 105 (B) 110 (C) 115 (D) 120 (E) 125

10. 右图是一个表面被涂上红色的棱长为 10 的正方体木块, 如果把它沿虚线切成 8 个正方体, 这些小正方体中没有被涂上红色的所有表面的面积是().

- (A) 680 (B) 640 (C) 480 (D) 600 (E) 560



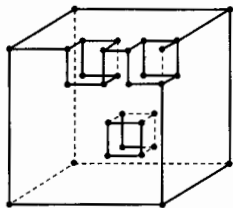
11. 一个底面长为 25, 宽为 20 的长方体容器, 里面盛有水. 当把一个正方体木块放入水中时, 木块一半浸入水中, 此时水面升高了 1, 则正方体木块的棱长是().

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

12. 一个正方体木块在它的 8 个角上分别切割一个小正方体. 若小正方体的棱长是原来大正方体棱长的 $\frac{1}{3}$, 则切完以后图形的体积是大正方体体积的().

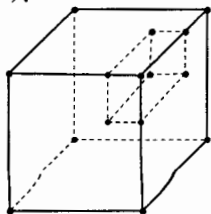
- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{23}{27}$ (C) $\frac{19}{27}$ (D) $\frac{8}{27}$ (E) $\frac{17}{27}$

13. 如图所示, 有一个边长为 20 的大正方体, 分别在它的角上、棱上、面上各挖掉一个大小相同的小立方体后, 表面积变为 2454, 那么挖掉的小立方体的棱长是().



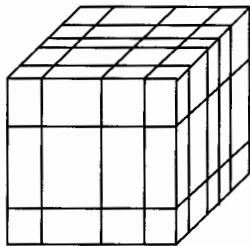
- (A) 2 (B) 1.5 (C) 2 (D) 3 (E) 4

14. 如图所示, 在一个棱长为 10 的立方体上截取一个长为 8, 宽为 3, 高为 2 的小长方体, 那么新的几何体的表面积是().



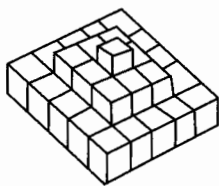
- (A) 560 (B) 580 (C) 600 (D) 630 (E) 640

15. 如图所示,一个正方体形状的木块,棱长为1,沿水平方向将它锯成3片,每片又锯成4长条,每条又锯成5小块,共得到大大小小的长方体60块,则这60块长方体表面积的和是().



- (A) 20 (B) 24 (C) 26 (D) 28 (E) 30

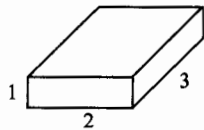
16. 图中形状是由3层没有缝隙的小立方块组成的. 如果它的外表面(包括底面)全都被涂成红色,那么把它们再分开成一个个小立方块时,有()个小立方块恰有三面是红色的?



- (A) 16 (B) 17 (C) 20 (D) 22 (E) 24

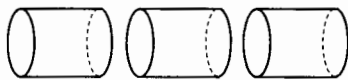
17. 用6块如图所示的长方体木块拼成一个大长方体,有许多种拼法,其中所得长方体中表面积最小是 m ,最大是 n ,则下列正确的为().

- (A) $m=66, n=112$ (B) $m=66, n=122$ (C) $m=72, n=122$
(D) $m=72, n=132$ (E) $m=72, n=112$



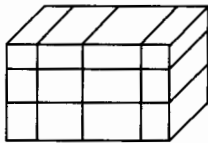
18. 把一根长为5的圆柱形钢材截成三段后如图所示,表面积比原来增加9.6,这根钢材原来的体积是().

- (A) 9 (B) 9.5 (C) 10 (D) 10.5 (E) 12



19. 一个长方体的宽和高相等,并且都等于长的一半. 将这个长方体切成12个小长方体,这些小长方体的表面积之和为600,则这个大长方体的体积为().

- (A) 210 (B) 220 (C) 240 (D) 250 (E) 260



20. 有一块边长24厘米的正方形厚纸,如果在它的四个角各剪去一个小正方形,就可以做成一个无盖的纸盒. 现在要使做成的纸盒容积最大,剪去的小正方形的边长应为()厘米.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

21. 一个长方体,有共同顶点的三个面的对角线长分别为 a, b, c ,则它的对角线长是().

- (A) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (C) $\frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
(D) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$ (E) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}}$

22. 高与底面直径相等的圆柱体轴截面的面积是 32, 那么它的侧面积是().

- (A) 16π (B) 32π (C) 48π (D) 64π (E) 72π

23. 正三棱柱内有一内切球, 半径为 R , 则这个正三棱柱的体积是().

- (A) $6\sqrt{3}R^3$ (B) $3\sqrt{3}R^3$ (C) $4\sqrt{2}R^3$ (D) $8\sqrt{3}R^3$ (E) $2\sqrt{6}R^3$

24. 若正三棱柱的底面边长为 3, 侧棱长为 $2\sqrt{6}$, 则该棱柱的外接球的表面积为().

- (A) 26π (B) 40π (C) 36π (D) 45π (E) 30π

二、条件充分性判断题

1. 一个棱长为 4 的正方体木块切割出棱长为 1 的正方体后的表面积不发生变化.

(1) 在它的一个角上割去一个小正方体. (2) 在它的一个面中心割去一个小正方体.

2. 圆柱的侧面积与下底面积之比为 $4\pi:1$.

(1) 圆柱的轴截面为正方形. (2) 圆柱的侧面展开图是正方形.

3. 侧棱长为 4 的正三棱柱的各顶点均在同一个球面上, 则该球的表面积为 28π .

(1) 底面边长为 3. (2) 底面边长为 4.

4. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 顶点 A, B, C, D 在半球的底面内, 顶点 A_1, B_1, C_1, D_1 在半球球面上, 则此半球的体积是 $\frac{\sqrt{6}\pi}{2}$.

(1) 半球半径为 $2\sqrt{2}$.

(2) 正方体棱长为 1.

综合提高题详解

一、问题求解

1. D; 把棱长 6 的正方体锯成棱长为 2 的正方体, 每锯一次的表面积可增加 $6 \times 6 \times 2 = 72$, 一共要锯 6 次, 则表面积增加 $72 \times 6 = 432$.

2. C; 由题意, $r_{\text{甲}} = 2r_{\text{乙}}$, $h_{\text{甲}} = \frac{1}{2}h_{\text{乙}}$, 所以 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\pi r_{\text{甲}}^2 \cdot h_{\text{甲}}}{\pi r_{\text{乙}}^2 \cdot h_{\text{乙}}} = 2$.

3. D; 由题意: 对角线所在长方形面积 = 15, 故高 $CG = 15 \div 5 = 3$. 又因为横截面是正方形, 故 $BC = CG = 3$. 而其体积为 $18 \times 2 = 36$, 故其边 $AB = 36 \div 3^2 = 4$; 原来这块长方体木料的表面积 $S = (4 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3) \times 2 = 66$.

4. D; 若使长方体包装盒的表面积最小, 应该两个最大的面重合在一起, 因此表面积为 $(9 \times 4 + 6.5 \times 4 + 9 \times 6.5) \times 2 = 241$.

5. B; 设切去正方形边长为 x , 则焊接成的长方体的底面边长为 $4 - 2x$, 高为 x , 因此 $V = (4 - 2x)^2 x = 1/4(4 - 2x)(4 - 2x)4x$ ($0 < x < 2$). 根据平均值定理, 当 $x = \frac{2}{3}$ 时, V 取最大值 $\frac{128}{27}$.

6. E; $4 \times 4 + (1 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 4) \times 4 = 100$.

7. C; 图形的表面积等于 $(9 + 7 + 7) \times 2 = 46$ 个小正方形的面积, 所以该图形表面积是 46.

8. E;三面涂红色的只有8个顶点处的8个立方体;两面涂红色的在棱长处,共 $(5-2) \times 4 + (6-2) \times 4 + (7-2) \times 4 = 48$ 块;一面涂红的表面中间部分: $(5-2) \times (6-2) \times 2 + (5-2) \times (7-2) \times 2 + (6-2) \times (7-2) \times 2 = 94$ 块,从而 $m=94, n=48, k=8$.

9. D;由于正方体棱长为4,从六个面的中心位置各挖去一个棱长为1的正方体,这样得到的玩具中心部分是实体(即没有挖透).原正方体的表面积为 $4^2 \times 6 = 96$.在它的六个面各挖去一个棱长为1的正方体后增加的面积为 $1^2 \times 4 \times 6 = 24$,这个玩具的表面积为 $96 + 24 = 120$.

10. D;因为切开后,表面积是原来的2倍,故没有涂颜色的面积相当于原来正方体的表面积: $10 \times 10 \times 6 = 600$.

11. B;当木块放入水中时,水面升高了1,即体积增加了 $25 \times 20 \times 1 = 500$,这就是木块浸入水中部分的体积.而这部分体积是木块体积的一半,故木块的体积为 $500 \times 2 = 1000$,则木块的棱长为10.

12. C;设大正方体的棱长为 a ,先求出切下来的8个正方体体积占原来的比例,则有

$$\frac{8 \cdot V_{\text{小正方形}}}{V_{\text{大正方形}}} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^3}{a^3} = \frac{8}{27}, \text{故剩余图形的体积为 } 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$$

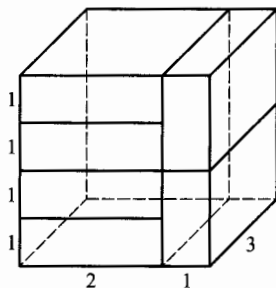
13. D;大立方体的表面积是 $20 \times 20 \times 6 = 2400$.挖掉了三个小正方体,反而多出了6个面(角上面积不变,棱边多2个面,面上多4个面),可以计算出每个面的面积: $(2454 - 2400) \div 6 = 9$,说明小正方体的棱长是3.

14. C;从三个方向(前后、左右、上下)考虑,新几何体的表面积仍为原立方体的表面积: $10 \times 10 \times 6 = 600$.

15. B;每切一刀,多出的表面积恰好是原正方体的2个面的面积.现在一共切了 $(3-1) + (4-1) + (5-1) = 9$ 刀,而原正方体一个面的面积 $1 \times 1 = 1$,所以表面积增加了 $9 \times 2 \times 1 = 18$.原来正方体的表面积为 $6 \times 1 = 6$,所以现在的这些小长方体的表积之和为 $6 + 18 = 24$.

16. A;最下面一层在每条边中间的3个是有3面是红色的,共有12个,中间一层是在4个顶点处有3个面是红色的,共有4个,所以共有16块.

17. A;如图,当重合的面越多越好,因此拼成棱长分别为3, 3, 4的大长方体时,表面积最小,此时表面积 $m = 2(3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 4) = 66$;当最小的面重合在一起时,所得长方体的表面积最大,此时大长方体的棱长分别为18, 1, 2, 表面积为 $n = 2(1 \times 18 + 1 \times 2 + 2 \times 18) = 112$.



18. E;将其切成三段后,表面积比原来增加了4个圆的面积,从而得到圆的面积为2.4,故圆柱的体积为 $2.4 \times 5 = 12$.

19. D;设宽和高为 x ,长为 $2x$,大长方体左(右)面面积为 x^2 ,则大长方体表面积为 $10x^2$.切成12个小长方体后,新增加的表面积为 $(3x + 2 \times 2x) \times 2 = 14x$,12个小长方体表面积之和为 $10x + 14x = 600, x = 25, V = 25 \times 10 = 250$.

20. D;设被剪去的小正方形边长(纸盒的高)为 h ,那么纸盒底面边长为 $24 - 2h$.容积 $V = (24 - 2h)(24 - 2h)h = \frac{1}{4}(24 - 2h)(24 - 2h)4h$,因为 $24 - 2h + 24 - 2h + 4h = 48$ (定数),根据平均值定理,当 $24 - 2h = 4h$ 时,即当 $h = 4$ 时, V 最大.

21. D; 令长宽高分别为 x, y, z , 则可得 $a^2 = x^2 + y^2, b^2 = x^2 + z^2, c^2 = y^2 + z^2$,

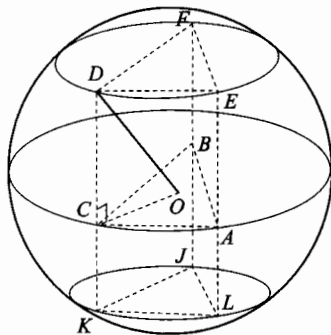
体对角线为 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$.

22. B; 高 h = 底面直径 d , 圆柱体截面积 $S_{\text{截}} = hd = d^2 = 32$, 则侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi d^2 = 32\pi$.

23. A; 因为 R 为半径, 所以正三棱柱高为 $2R$, 由于底面等边三角形的内切圆半径为 R , 从而得到底面边长 $2\sqrt{3}R$, 底面高为 $3R$, 所以正三棱柱体积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}R \times 3R \times 2R = 6\sqrt{3}R^3$.

24. C; 如图可知,

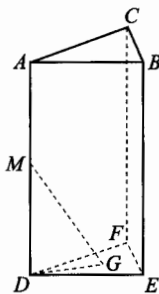
侧棱长 DK 为 $2\sqrt{6}$, 则 $CD = \sqrt{6}, OC = \frac{2}{3}\sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$, 所以 $R = \sqrt{CD^2 + OC^2} = 3, V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$.



二、条件充分性判断题

1. A; 由条件(1), 大正方体的角上割去一个小正方体后, 表面积并没有发生变化, 这是因为割去一个小正方体后只影响到大正方体的三个面, 其余的面没受到影响, 而这三个面所去掉的三个小正方形面积被“因割去小正方体后”多出来的三个小正方形面积所代替; 由条件(2), 在正方体的一个面上切割正方体后, 影响了正方体的 1 个面, 但比原来多出来 4 个面, 所以表面积发生变化, 从而选 A.

2. B; 圆柱的侧面积与下底面积之比为 $\frac{2\pi rh}{\pi r^2} = \frac{2h}{r}$, 由条件(1) $h = 2r$, 故 $\frac{2\pi rh}{\pi r^2} = \frac{2h}{r} = 4$ 不充分; 由条件(2) $h = 2\pi r$, 故 $\frac{2\pi rh}{\pi r^2} = \frac{2h}{r} = 4\pi$ 充分.



3. A; 由已知球的表面积为 28π , 球的表面积 $S = 4\pi r^2$, 故 $r = \sqrt{7}$, 由条件(1) 知 $DE = 3$, 因为 $\triangle DFE$ 为等边三角形, $DG = \sqrt{3}, DM = 2$, 由勾股定理知 $GM = \sqrt{7}$, 充分. 由条件(2) 知 $DE = 4$, 因为 $\triangle DFE$ 为等边三角形, $DG = \frac{4\sqrt{3}}{3}, DM = 2$ 由勾股定理知 GM 不等于 $\sqrt{7}$, 不充分.

4. B; 条件(1) $R = 2\sqrt{2}, V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{2})^3 = \frac{32}{3}\sqrt{2}\pi$, 不充分; 条件(2) $R = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}\pi$, 充分.

第四部分 数据分析

【画龙】本部分在考试中占5~6个题目,其中第九章占2个题目,主要围绕六大方法及八大技能展开。第十章占2~3个题目,主要围绕古典概型,独立事件及伯努利公式展开。第十一章占1个题目,主要围绕平均数、方差、直方图等展开。

【点睛】本部分是考生共有的弱项,也是丢分较多的考点,究其原因,本部分与前面内容最大的区别是:本部分研究动态的、变化的、随机的问題,而前几部分研究确定性的问題。本部分的运算量和公式是整个数学中最少的,只要掌握万变不离其宗的根本方法,还是很容易提高的。本部分建议用五周时间来学习,其中第九章用两周时间来学习,第十章用两周时间学习,再用一周进行整体的归纳总结及第十一章的学习。

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 幂学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

第九章 排列组合

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

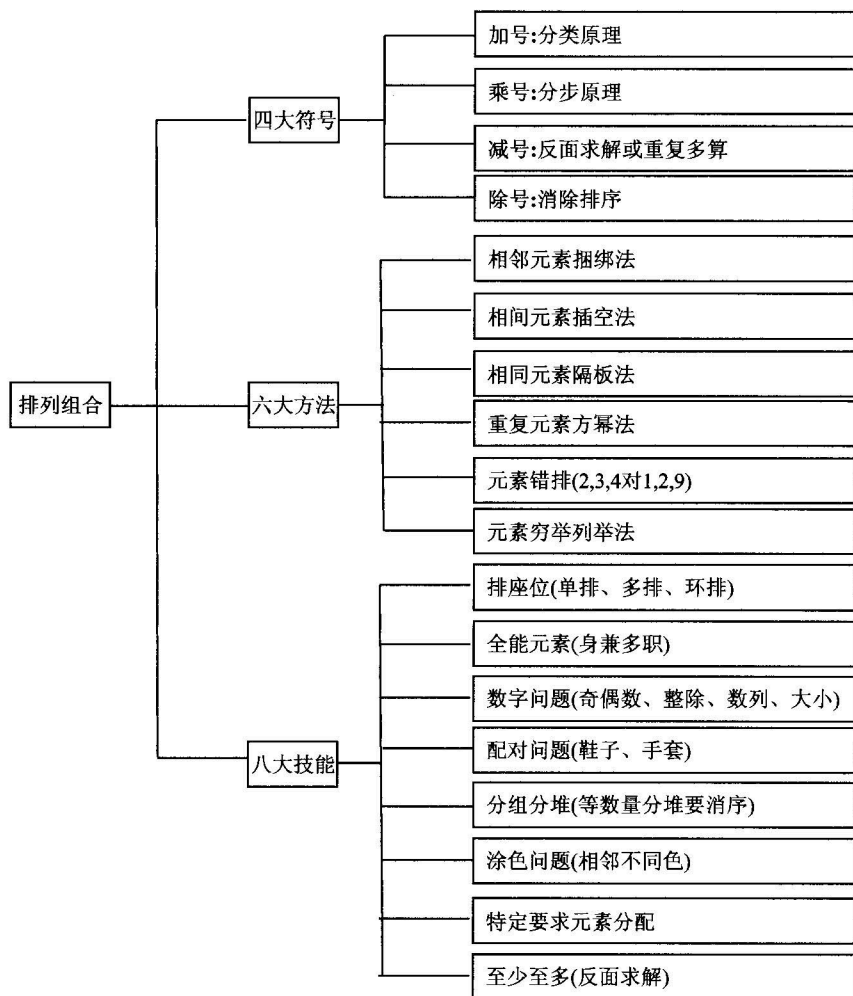
6大 (太奇 华章 幂学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

【大纲考点】(1) 加法原理、乘法原理;(2) 排列与排列数;(3) 组合与组合数。

【备考要点】掌握加法原理及乘法原理,并能用这两个原理分析并解决一些简单的问题。理解排列、组合的意义,掌握排列数、组合数的计算公式和组合数的性质,并能用它们解决一些简单的问题。排列、组合主要是为概率来服务的,因此是学好概率的前提。

【知识体系】



【备考建议】对于教师,建议课时控制在8个课时。对于考生,建议在学习时要注意排列组合主要解题方法:

- ① 优先法:特殊元素优先或特殊位置优先;
- ② 捆绑法(相邻问题);

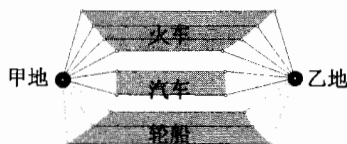
- ③插空法(不相邻问题);
- ④间接扣除法(对有限制条件的问题,先从总体考虑,再把不符合条件的所有情况去掉);
- ⑤多排问题单排法;
- ⑥相同元素分组可采用隔板法(适用与指标分配,每部分至少有一个);
- ⑦先选后排,先分再排(注意等分分组问题);
- ⑧涂色问题(先分步考虑至某一步时再分类);
- ⑨分组问题要注意区分是平均分组还是非平均分组,平均分成 n 组问题别忘除以 $n!$ 。

第一节 考试要点剖析

一、分类计数原理(加法原理)

如果完成一件事可以有 n 类办法,只要选择其中一类办法中的任何一种方法,就可以完成这件事;若第一类办法中有 m_1 种不同的方法,第二类办法中有 m_2 种不同的方法……第 n 类办法中有 m_n 种不同的办法,那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法。

例:从甲地到乙地,可以乘火车,也可以乘汽车,还可以乘轮船。一天中,火车有 4 班,汽车有 2 班,轮船有 3 班,那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法?

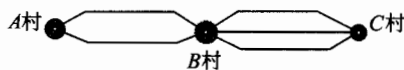


分析:从甲地到乙地有 3 类方法:第一类方法是乘火车,有 4 种方法;第二类方法是乘汽车,有 2 种方法;第三类方法是乘轮船,有 3 种方法;所以,从甲地到乙地共有 $4 + 2 + 3 = 9$ 种方法。

二、分步计数原理(乘法原理)

如果完成一件事,必须依次连续地完成 n 个步骤,这件事才能完成;若完成第一个步骤有 m_1 种不同的方法,完成第二个步骤有 m_2 种不同的方法……完成第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N = m_1 m_2 \cdots m_n$ 种不同的方法。

例:如右图,由 A 村去 B 村的道路有 2 条,由 B 村去 C 村的道路有 3 条,从 A 村经 B 村去 C 村时,共有多少种不同的走法?



分析:从 A 村经 B 村去 C 村有 2 步:

第一步:由 A 村去 B 村有 2 种方法;

第二步:由 B 村去 C 村有 3 种方法。

所以从 A 村经 B 村去 C 村共有 $2 \times 3 = 6$ 种不同的方法。

【注意】分类计数原理和分步计数原理,回答的都是有关做一件事的不同方法种数的问题。区别在于:分类计数原理针对的是“分类”问题,其中各种方法相互独立,每一种方法只属于某一类,用其中任何一种方法都可以做完这件事。分步计数原理针对的是“分步”问题,各个步骤中的方法相互依存,某一步骤中的每一种方法都只能做完这件事的一个步骤,只有各个步骤都完成才算做完这件事。

应用两种原理解题:① 分清要完成的事情是什么;② 是分类完成还是分步完成,“类”间互相独立,“步”间互相联系;③ 有无特殊条件的限制.

三、排列

1. 排列的定义

从 n 个不同元素中,任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素,按照一定顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

【注意】排列的定义包括两个方面:① 取出元素;② 按一定的顺序进行排列;而两个排列相同的条件是:① 元素完全相同;② 元素的排列顺序也相同.

2. 排列数

从 n 个不同元素中取出 m 个元素($m \leq n$)的所有排列的种数,称为从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列数,记作 P_n^m 或 A_n^m . 当 $m = n$ 时, P_n^n 称为全排列.

【注意】区别排列和排列数的不同:“一个排列”是指:从 n 个不同元素中,任取 m 个元素按照一定的顺序排成一列,不是数;“排列数”是指从 n 个不同元素中,任取 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数,是一个数. 所以符号 P_n^m 只表示排列数,而不表示具体的排列.

3. 排列数公式

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

说明:① 公式特征:第一个因数是 n , 后面每一个因数比它前面一个少 1, 最后一个因数是 $n-m+1$, 共有 m 个因数.

② 全排列:当 $n=m$ 时即 n 个不同元素全部取出的一个排列. 全排列数: $P_n^n = n(n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ ($n!$ 称为 n 的阶乘).

③ 规定 $P_n^0 = 1$, $0! = 1$.

四、组合

1. 组合的定义

从 n 个不同元素中,任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素并为一组,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

【注意】① 不同元素;② “只取不排”——无序性;③ 相同组合:元素相同.

2. 组合数

从 n 个不同元素中,取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数,称为从 n 个不同元素中,取出 m 个不同元素的组合数,记作 C_n^m .

$$(1) \text{ 组合数公式: } C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{P_n^m}{m!}$$

$$(2) \text{ 排列是先组合再排列: } P_n^m = C_n^m \cdot P_m^m = C_n^m \cdot m!$$

3. 组合数的性质

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

说明:

① 规定: $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$.

② 等式特点: 等式两边下标同, 上标之和等于下标;

③ 此性质作用: 当 $m > \frac{n}{2}$ 时, 计算 C_n^m 可变为计算 C_n^{n-m} , 能够使运算简化.

④ $C_n^x = C_n^y \Rightarrow x = y$ 或 $x + y = n$.

4. 常用组合恒等式

(1) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

(2) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$.

(3) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$.

第二节 基础过关题型

【题型1】准确分步及合理分类(两个原理的应用)

【解题提示】按事件发生的连贯过程分步, 做到分类标准明确、分步层次清楚, 不重不漏.

【例1】平面上4条平行直线与另外5条平行直线互相垂直, 则它们构成的矩形共有()个.

(A) 60 (B) 120 (C) 30 (D) 90 (E) 80

【解析】按构成矩形的过程可分为如下两步: 第一步先在4条平行线中任取两条, 有 C_4^2 种取法; 第二步再在5条平行线中任取两条, 有 C_5^2 种取法, 这样取出的四条直线构成一个矩形, 据乘法原理, 构成的矩形共有 $C_4^2 \cdot C_5^2 = 60$ 个, 因此选 A.

【例2】两次抛掷一枚骰子, 两次出现的数字之和为奇数的情况有()种.

(A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24 (E) 36

【解析】两次之和为奇数, 这可分为两种情况:

第一次为奇数, 第二次为偶数时, 有 $3 \times 3 = 9$ 种;

第一次为偶数, 第二次为奇数时, 有 $3 \times 3 = 9$ 种; 因此共有 18 种, 可选 C.

【例3】书架上放有3本不同的数学书, 5本不同的语文书, 6本不同的英语书. 问:

(1) 若从这些书中任取一本, 有多少种不同的取法?

(2) 若从这些书中, 取数学书、语文书、英语书各一本, 有多少种不同的取法?

(3) 若从这些书中取不同的科目的书两本, 有多少种不同的取法?

【解析】(1) 从书架上任取一本书, 可以有3类办法: 第一类办法是从3本不同数学书中任取1本, 有3种方法; 第二类办法是从5本不同的语文书中任取1本, 有5种方法; 第三类办法是从6本不同的英语书中任取一本, 有6种方法. 根据加法原理, 得到的取法种数是

$$N = m_1 + m_2 + m_3 = 3 + 5 + 6 = 14,$$

所以从书架上任取一本书的不同取法有14种.

(2) 从书架上任取数学书、语文书、英语书各1本, 需要分成三个步骤完成: 首先取1本数学, 有3种方法; 其次取1本语文书, 有5种方法; 最后取1本英语书, 有6种方法. 根据乘法原理, 得到不同的取法种数是

$$N = m_1 \times m_2 \times m_3 = 3 \times 5 \times 6 = 90,$$

所以从书架上取数学书、语文书、英语书各 1 本,有 90 种不同的方法.

(3) 从书架上任取不同科目的书两本,可以有 3 类办法:第一类办法是数学书、语文书各取 1 本,需要分两个步骤,有 3×5 种方法;第二类办法是数学书、英语书各取 1 本,需要分两个步骤,有 3×6 种方法;第三类办法是语文书、英语书各取 1 本,有 5×6 种方法,一共得到不同的取法种数是

$$N = 3 \times 5 + 3 \times 6 + 5 \times 6 = 63,$$

因此,从书架任取两本不同科目的书,其不同取法有 63 种.

【题型 2】约束元素的排列问题

【解题提示】解含有约束条件的排列组合问题,应按元素的性质进行分类,按事件发生的连贯过程分步,做到分类标准明确、分步层次清楚,不重不漏. 解含有特殊元素、特殊位置的题,采用特殊优先安排的策略.

【例 4】从 7 个不同的文艺节目中选 5 个编成一个节目单,如果某女演员的独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上,则共有()种不同的排法.

- (A) 2060 (B) 2080 (C) 2120 (D) 2160 (E) 2180

【解析】方法一:从特殊位置考虑时, $C_6^1 \cdot C_6^4 \cdot 4! = 2160$;

方法二:从特殊元素考虑时,若选中女演员,则 $C_1^1 \cdot C_6^4 \cdot 4!$;若不选:则为 $C_6^5 \cdot 5!$,因此,共有 $C_1^1 \cdot C_6^4 \cdot 4! + C_6^5 \cdot 5! = 2160$ 种;

方法三:(间接法) $C_7^5 \cdot 5! - C_1^1 \cdot 4! = 2160$. 选 D.

【题型 3】正难则反、等价转化策略

【解题提示】对某些排列组合问题,当从正面入手情况复杂,不易解决时,可考虑从反面入手,将其等价转化为一个较简单的问题来处理. 即采用先求总的排列数(或组合数),再减去不符合要求的排列数(或组合数),从而使问题获得解决的方法,其实它就是补集思想.

【例 5】从 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 10 个数中取出 3 个数,使和为不小于 10 的偶数,不同的取法有()种.

- (A) 46 (B) 48 (C) 50 (D) 51 (E) 53

【解析】从这 10 个数中取出 3 个不同的偶数的取法有 C_5^3 种;取 1 个偶数和 2 个奇数的取法有 $C_5^1 C_5^2$ 种. 另外,从这 10 个数中取出 3 个数,使其和为小于 10 的偶数,有 9 种不同取法(0,2,4;0,2,6;1,2,3;0,1,3;0,1,5;0,1,7;0,3,5;4,1,3;2,1,5).

因此,符合题设条件的不同取法有 $C_5^3 + C_5^1 C_5^2 - 9 = 51$ 种,因此选 D.

【题型 4】相邻问题

【解题提示】对于某几个元素要求相邻的排列问题,可先将相邻的元素“捆绑”起来看作一个元素与其他元素排列,然后再在相邻元素之间排列,其实这种方法就是将相邻的某几个元素优先考虑,让这些特殊元素合成一个元素,与普通元素排列后,再松绑.

【例 6】A,B,C,D,E 五人并排站成一排,如 A,B 必相邻,且 B 在 A 右边,那么不同排法有()种.

- (A) 24 (B) 60 (C) 90 (D) 120 (E) 140

【解析】将特殊元素 A, B 按 B 在 A 的右边“捆绑”看成一个大元素, 与另外三个元素全排列, 由 A, B 不能交换, 故不再“松绑”, 选 A.

【例 7】计划展出 9 幅不同的画, 其中 2 幅水彩画、3 幅油画、4 幅国画, 排成一行陈列, 要求同一品种的画必须连在一起, 并且水彩画不放在两端, 那么不同的陈列方式有()种.

- (A) 462 (B) 476 (C) 546 (D) 576 (E) 586

【解析】先把 3 种品种的画各看成整体, 而水彩画不能放在头尾, 故只能放在中间, 又油画与国画有 $2!$ 种放法, 再考虑油画与国画本身又可以全排列, 故排列的方法为 $2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2! = 576$, 故选 D.

【例 8】三名男歌唱家和两名女歌唱家联合举行一场音乐会, 演出的出场顺序要求两名女歌唱家之间恰有一名男歌唱家, 其出场方案共有().

- (A) 36 种 (B) 18 种 (C) 12 种 (D) 24 种 (E) 16 种

【解析】按要求出场顺序必须有一个小团体“女男女”, 因此先在 3 名男歌唱家中选一名 (有 C_3^1 种选法) 与 2 名女歌唱家组成一个团体, 将这个小团体视为一个元素, 与其余 2 名男歌唱家排列有 $3!$ 种排法, 最后小团体内 2 名女歌唱家排列有 $2!$ 种排法, 所以共有 $C_3^1 3! 2! = 36$ 种出场方案, 选 A.

【注意】用“捆绑”法解题比较简单, 实质是通过“捆绑”减少了元素, 它与下面要提到的“插空”法结合起来, 灵活度便更大了.

【题型 5】不相邻问题——采用“插空”策略

【解题提示】对于某几个元素不相邻的排列问题, 可先将其他元素排列好, 然后再将不相邻的元素在这些排好的元素之间及两端的空隙中插入.

【例 9】7 人站成一行, 如果甲、乙两人不相邻, 则不同的排法种数是()种.

- (A) 1440 (B) 3600 (C) 4320 (D) 4800 (E) 4900

【解析】先让甲、乙之外的 5 人排成一行, 有 $5!$ 种排法, 再让甲、乙两人在每两人之间及两端的六个间隙中插入, 有 P_6^2 种方法. 故共有 $5! C_6^2 \cdot 2! = 3600$ 种排法, 选 B.

【例 10】要排一个有 3 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单, 要求甲乙两个舞蹈节目相邻, 丙丁两个舞蹈节目不相邻, 则有()种不同排法.

- (A) 840 (B) 860 (C) 920 (D) 960 (E) 980

【解析】先将甲乙两个捆绑, 跟 3 个歌唱节目一起排列, 再将丙丁两个节目插入空位, 共有 $2! \times 4! \times C_5^2 \times 2! = 960$, 选 D.

【例 11】宿舍楼走廊上有照明灯一排 8 盏, 为节约用电又不影响照明, 要求同时熄掉其中 3 盏, 但不能同时熄掉相邻的灯, 则熄灯的方法有()种.

- (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

【解析】方法一: 将 8 盏灯依次编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 在所熄的三盏灯中, 若第 1 盏熄 1 号灯, 第 2 盏熄 3 号灯, 则第 3 盏可以熄 5, 6, 7, 8 号灯中的任意一盏, 共有 4 种熄法.

若第 1 盏熄 1 号灯, 第 2 盏熄 4 号灯, 则第 3 盏可以熄 6, 7, 8 号灯中的任意一盏.

以此类推, 得若 1 号灯熄了, 则共有 $4+3+2+1=10$ 种熄法.

若 1 号灯不熄, 第 1 盏熄的是 2 号灯, 第 2 盏熄的是 4 号灯, 则第 3 盏可以熄 6, 7, 8 号灯

中的任意一盏,共有 3 种熄法.

以此类推得,若第 1 盏灯熄的是 2 号灯,则共有 $3+2+1=6$ 种熄法.

同理,若第 1 盏熄的是 3 号灯,则共有 $2+1=3$ 种熄法.

同理,若第 1 盏熄的是 4 号灯,则有 1 种熄法.

综上所述共有: $10+6+3+1=20$ 种熄法.

方法二:可以假定 8 盏灯还未安装,其中 5 盏灯是亮着的,3 盏灯不亮. 这样原问题就等价于:将 5 盏亮着的灯与 3 盏不亮的灯排成一排,使 3 盏不亮的灯不相邻(灯是相同的). 5 盏亮着的灯之间产生 6 个间隔(包括两边),从中插入 3 个作为熄灭的灯,这就是经常解决的“不相邻”问题,采用“插入法”,得其答案为 $C_6^3=20$ 种. 故选 C.

【例 12】一排 6 张椅子上坐 3 人,每 2 人之间至少有一张空椅子,则共有()种不同的坐法.

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

【解析】可先让三人搬走 3 张椅子,此时剩下 3 张椅子,它们会产生 4 个空位,从 4 个空位中选取 3 个,让三人坐好即可,共有 $C_4^3 \times 3! = 24$,选 E.

【题型 6】排座位问题

【解题提示】把 n 个元素排成前后若干排的排列问题,若没有其他特殊要求,可采取统一排成一排的方法来处理.

【例 13】两排座位,第一排 3 个座位,第二排 5 个座位,若 8 位学生坐(每人一个座位),则不同的坐法种数是().

(A) C_8^3 (B) $2! \times 6!$ (C) $C_2^1 \times 3! \times 5!$ (D) $8!$ (E) $3! \times 5!$

【解析】因 8 名学生可在前后两排的 8 个座位中随意入座,再无其他条件,所以两排座位可看作一排来处理,其不同的坐法种数是 $8!$,故应选 D.

【例 14】6 个人站前后两排,每排 3 人的不同站法;6 个人站前后两排,每排 3 人,且甲不站后排的站法;6 个人站前后两排,每排 3 人,甲、乙不在同一排的不同站法分别有()种.

(A) 720,360,642 (B) 720,216,432 (C) 120,360,432

(D) 720,360,432 (E) 720,216,412

【解析】(1) 相当于 6 个人站一排(右边 3 个人再站后排),有 $6! = 720$ 种不同站法.

(2) 甲不站后排,从前排选一个位置给甲,有 C_3^1 种方法;剩下 5 个人站在其余 5 个位置,有 $5!$ 种不同站法,由乘法原理,甲不站后排的站法有 $C_3^1 5! = 360$ 种.

(3) 先将甲、乙两个人在前后两排全排列,有 $2!$ 种方法;从其他 4 个人中选出 2 个人与甲共 3 个人站在与甲同一排有 $C_4^2 3!$ 种方法;剩下 3 个人(包括乙)站另一排有 P_3^3 种不同站法. 由乘法原理可知,甲、乙不在同一排的不同站法有 $2! \cdot C_4^2 \cdot 3! \cdot 3! = 432$ 种,故选 D.

【评注】一般地,无条件多排问题可以像本例中 6 个人站前后两排、每排 3 人的不同站法解法那样用单排法解决.

【题型 7】数字问题

【思路点拨】数字问题主要涉及奇数、偶数、整除、数位大小等问题,可以采用元素位置法来进行分析.

【例 15】用 1,2,3,4,5,6 六个数字组成 6 的倍数且无重复数字的五位数有()个.

(A) 64 (B) 96 (C) 108 (D) 120 (E) 136

【解析】因为 $1+2+3+4+5+6=21$, 要使取出的 5 个数字之和是 3 的倍数, 只要是不取的数字是“3”或“6”, 即取 $(1,2,4,5,6)$ 或 $(1,2,3,4,5)$.

若取 $(1,2,4,5,6)$ 时, 从 2, 4, 6 三个数中取一个放末位, 有 C_3^1 种方法, 其余四个数字在前四个数位全排列, 有 $4!$ 种方法, 此时有 $C_3^1 4!$ 个符合条件的五位数.

若取 $(1,2,3,4,5)$ 时, 从 2, 4 两个数中取一个放末位, 有 C_2^1 种方法, 其余四个数字在前四个数位全排列, 有 $4!$ 种方法, 此时有 $C_2^1 4!$ 个符合条件的五位数. 由加法原理可知, 6 的倍数且无重复数字的五位数共有 $C_3^1 4! + C_2^1 4! = 72 + 48 = 120$ 个. 故选 D.

【例 16】从 1, 3, 5 三个奇数中任取两个, 0, 2, 4, 6 四个偶数中任取两个, 组成无重复的四位奇数和四位偶数的个数分别是().

(A) 360 和 360 (B) 189 和 189 (C) 180 和 162 (D) 180 和 198 (E) 156 和 162

【解析】(1) 从三个奇数中任选一个放在末位, 有 C_3^1 种方法; 再从其余两个奇数中任取一个, 有 C_2^1 种方法, 奇数的取法有 $C_3^1 C_2^1$ 种. 从四个偶数中任取两个按不含 0 与含 0 两类讨论:

①不含 0 时, 从 2, 4, 6 中任取两个有 C_3^2 种方法, 将选出的三个数字(包括前面取出的一个奇数)排在前三个数位上时有 $3!$ 种方法, 则共有 $C_3^2 3!$ 种方法.

②含 0 时, 从 2, 4, 6 中任取一个有 C_3^1 种方法, 将它与前面取出的一个奇数两个数字中任取一个排在千位上的方法有 C_2^1 种, 其余两个数字(包括 0)排在百位、十位两个数位上时有 $2!$ 种方法, 则共有 $C_3^1 C_2^1 2!$ 种方法.

综上, 组成无重复的四位奇数有 $C_3^1 C_2^1 (C_3^2 3! + C_3^1 C_2^1 2!) = 6 \times (18 + 12) = 180$ 个.

(2) 从三个奇数中任选两个, 有 C_3^2 种方法. 四个偶数中任取两个偶数按不含 0、含 0 且末位是 0、含 0 但末位不是 0 三类情况讨论:

①不含 0 的四位偶数 从 2, 4, 6 中任选一个放在末位, 有 C_3^1 种方法; 然后从余下的两个偶数中任选一个, 有 C_2^1 种方法; 将它与选出的两个奇数在前三个数位上全排列, 有 $3!$ 种方法, 共有 $C_3^1 C_2^1 3!$ 种方法.

②含 0 且末位是 0 的四位偶数 从 2, 4, 6 中任选一个, 有 C_3^1 种方法; 将它与前面选出的两个奇数这三个数字在前三个数位上全排列, 有 $3!$ 种方法, 因此, 共有 $C_3^1 3!$ 种方法.

③含 0 但末位不是 0 的四位偶数 从 2, 4, 6 中任选一个放在末位, 有 C_3^1 种方法; 然后从选出的两个奇数取一个放在千位, 有 C_2^1 种方法; 最后将余下的一个奇数与 0 在中间两个数位上全排列, 有 $2!$ 种方法, 因此, 共有 $C_3^1 C_2^1 2!$ 种方法.

综上所述, 组成无重复的四位偶数的个数是 $C_3^2 (C_3^1 C_2^1 3! + C_3^1 3! + C_3^1 C_2^1 2!) = 3 \times (36 + 18 + 12) = 198$. 故选 D.

【评注】一般地, 此类排列组合用先选后排法来解.

【例 17】用 1, 4, 5, x 四个数字组成四位数, 所有这些四位数中的数字的总和为 288, 则 x 为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解析】若 x 不为 0, 在每一个数位上 1, 4, 5, x , 出现的机会是均等的. 由于一共可以得到 24 个四位数, 所以每一个数字在每一个数位上出现 6 次, 于是得到 $6 \times 4 \times (1 + 4 + 5 + x) = 288$, 解得 $x = 2$. 若 x 为 0, 则无解. 故选 C.

【题型 8】穷举列举法

【思路点拨】当遇到对元素的约束条件无法采用组合且直接选取时,此时需要按照所给的约束条件进行列举,如果正面列举比较多,可从反面列举求解。

【例 18】四人进行篮球传球练习,要求每人接球后再传给别人,开始由甲发球,作为第一次传球,若第五次传球后,球又回到甲的手中,则共有传球方式()种。

- (A) 60 (B) 65 (C) 70 (D) 75 (E) 80

【解析】因为第四次传球不能传给甲,所以要分情况讨论:首先,第一次传球甲有 3 种选择:

(1) 第二次传球若回到甲手中①——第三次传球的人有 3 种选择③——第四次传球的人有 2 种选择,因为不能传给甲②。

(2) 第二次传球没有传给甲②——第三次传球传给了甲①——第四次传球的人有 3 种选择③。

(3) 第二次传球没有传给甲②——第三次传球也没有传给甲②——第四次传球的人有 2 种选择②,因为不能传给甲②。

综上所述:总传球次数为 $3 \times 1 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 60$, 故选 A。

第三节 强化突破题型

【题型 1】可重复元素问题

【思路点拨】解决“允许重复排列问题”要注意区分两类元素:一类元素可以重复,另一类不能重复。把不能重复的元素看作“人”,能重复的元素看作“房”,再利用乘法原理直接求解的方法称为“分房法”。一般地 n 个不同的元素没有限制地安排在 m 个位置上的排列数为 m^n 种。

【例 1】七名学生争夺五项冠军,每项冠军只有一人,获得冠军的可能的种数有()。

- (A) 7^5 (B) 5^7 (C) C_7^5 (D) $5!$ (E) $7!$

【解析】因同一学生可同时夺得几项冠军,故学生可重复排列。将七名学生看作七家“店”,五项冠军看作 5 名“客”,每个“客”有 7 种住宿法,由乘法原理得 7^5 种,故选 A。

【例 2】把 6 名实习生分配到 7 个车间实习,共有()种不同的分法。

- (A) $7!$ (B) C_7^6 (C) 6^7 (D) 7^6 (E) $6!$

【解析】完成此事共分六步:把第一名实习生分配到车间有 7 种分法。把第二名实习生分配到车间也有 7 种,分别依此类推,由分步计数原理可知,共有 7^6 种不同的排法,故选 D。

【例 3】某 7 层大楼一楼电梯上来 7 名乘客,他们到各自的楼层下电梯,则下电梯的方法有()种。

- (A) $7!$ (B) 7^5 (C) 6^7 (D) 7^6 (E) 7^7

【解析】某 7 层大楼一楼电梯上来乘客,每人有 6 个楼层可选择(一层除外),共有 6^7 种不同的方法,故选 C。

【题型 2】全能元素问题

【思路点拨】全能元素是指一个元素可以同时具备多个属性,在选取时,注意全能元素的归宿问题。

【例 4】在 8 名志愿者中,只能做英语翻译的有 4 人,只能做法语翻译的有 3 人,既能做英语翻译又能做法语翻译的有 1 人. 现从这些志愿者中选取 3 人做翻译工作,确保英语和法语都有翻译的不同选法共有()种.

- (A) 12 (B) 18 (C) 21 (D) 30 (E) 51

【解析】方法一:从正面计算,以全能的人是否被选中分为两类:

(1) 全能人被选中,只需从其他 7 人选 2 人即可,即 $C_7^2 = 21$;

(2) 全能人没有选中,那么 3 人中有可能有 2 英 1 法或者 1 英 2 法,即 $C_4^2 C_3^1 + C_4^1 C_3^2 = 30$. 故选法共有 51 种.

方法二:从反面计算,反面情况表示全是英语或全是法语. 则 $C_8^3 - C_4^3 - C_3^3 = 56 - 4 - 1 = 51$, 故选 E.

【例 5】将 0,1,2,3,4,5,6,7,8 九个数字写在九张卡片上,从中任取三张卡片,若 6 可当 9 来用,则可组成不同的三位数()个.

- (A) 600 (B) 602 (C) 604 (D) 608 (E) 610

【解析】以是否含 6 为标准可分为两类:不含 6 的三位数有 $C_7^1 C_7^2 \cdot 2!$ 个.

含 6 的三位数按是否有 0 分类,含 6 不含 0 的有 $2C_7^2 3!$ 个;含 6 同时又含 0 的有 $2C_7^1 C_2^2 2!$ 个. 符合条件的三位数有 $C_7^1 C_7^2 \cdot 2! + 2C_7^2 3! + 2C_7^1 C_2^2 2! = 294 + 252 + 56 = 602$ 个,故选 B.

【题型 3】对号与不对号

【思路点拨】元素对号入座只有 1 种排法,元素不对号入座可以记住答案:2 个不对号有 1 种方法,3 个不对号有 2 种方法,4 个不对号有 9 种方法,5 个不对号有 44 种方法. 具体推导过程可以见专题点晴内容.

【例 6】设有编号为 1,2,3,4,5 的 5 个小球和编号为 1,2,3,4,5 的 5 个盒子,现将这 5 个小球放入这 5 个盒子内,要求每个盒子内放一个球,且恰好有 1 个球的编号与盒子的编号相同,则这样的投放方法的总数为()种.

- (A) 20 (B) 30 (C) 45 (D) 60 (E) 130

【解析】要求恰好有 1 个球的编号与盒子的编号相同,用分步原理:先从 5 个里面选 1 个球使它的编号与盒子的编号相同,有 C_5^1 种,剩下 4 个球的编号与盒子的编号不同,有 9 种,故共有 45 种,因此,选 C.

【题型 4】相同元素的隔板法

【思路点拨】隔板法使用要求:

① n 个元素要相同;

② m 个分配对象不同,对应的公式:如果分配对象非空,即每个对象至少分一个,则有 C_{m-1}^{n-1} 种;如果分配对象允许空,则有 C_{m+n-1}^{m-1} 种.

【例 7】现有 10 个完全相同的球全部分给 7 个班级,每班至少 1 个球,则共有()种不同的分法.

- (A) 60 (B) 64 (C) 75 (D) 84 (E) 90

【解析】首先按照一般方法来分析,分为三类思考.

(1) 有 3 个班每个班分到 2 个球,其余 4 个班每班分到 1 个球,其分法种数为: $N_1 = C_7^3$.

(2) 有 1 个班分到 3 个球,1 个班分到 2 个球,其余 5 个班每班分到 1 个球,其分法种数为: $N_2 = C_7^1 C_6^1$.

(3) 有 1 个班分到 4 个球,其余的 6 个班每班分到 1 个球,其分法种数为: $N_3 = C_7^1$.

所以,10 个球的分法种数为: $N = N_1 + N_2 + N_3 = C_7^3 + C_7^1 C_6^1 + C_7^1 = 84$.

由上面解题过程可以明显感到对这类问题进行分类计算比较繁琐,若是上题中球的数目较多处理起来将更加困难,因此需要寻求一种新的模式解决问题,因此,创设了这样一种虚拟的情境——隔板.

将 10 个相同的球排成一行,10 个球之间出现了 9 个空档,现在用“挡板”把 10 个球隔成有序的 7 份,每个班级依次按班级序号分到对应位置的几个球(可能是 1 个、2 个、3 个、4 个).这样每个班级分到球的个数不在于它所排的位置,借助于这样的虚拟“挡板”分配物品的方法称为隔板法.



由上述情境分析知,分球的方法实际上为挡板的插法:即是在 9 个空之中插入 6 个“挡板”,其方法种数为: $N = C_9^6 = 84$. 故选 D.

【评注】由上述问题看到,这种隔板法解决起来非常简单,但也提醒大家,这类问题模型要求条件相当严格,必须具备以下 3 个条件:

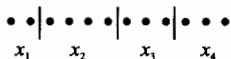
- (1) 所要分的物品规格必须完全相同.
- (2) 所要分的物品必须分完,决不允许有剩余.
- (3) 参与分物品的每个成员至少分到 1 个,决不允许出现分不到物品的成员.

【例 8】满足 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ 的正整数解的组数有()种.

- (A) 160 (B) 165 (C) 175 (D) 184 (E) 190

【解析】 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ 的正整数解的组数就可建立组合模型将 12 个完全相同的球排成一列,在它们之间形成 11 个空隙中任选三个插入 3 块隔板,把球分成 4 个组.每一种方法所得球的数目依次为 x_1, x_2, x_3, x_4 ,显然满足 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$,故 (x_1, x_2, x_3, x_4) 是方程的一组解.

反之,方程的任何一组解对应着唯一的一种在 12 个球之间插入隔板的方式(如下图所示),故方程的解和插板的方法一一对应.即方程的解的组数等于插隔板的方法数 $C_{11}^3 = 165$,故选 B.



【评注】本题若改为非负数解的个数,则将 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ 转化为 $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) = 12 + 4 = 16$,变为 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$ 分析正整数解的情况,故有 C_{15}^3 种,这样就巧妙推导了隔板法中分配对象允许空的公式了.

【例 9】将 10 块相同的糖分给 4 个小朋友,如果每人至少分 1 块糖,有 n 种分法,如果允许有人没有分到,则有 m 种分法,则 $m-n$ 的值为()。

- (A) 160 (B) 164 (C) 175 (D) 184 (E) 202

【解析】直接套用上述公式可得:如果每人至少分 1 块糖,有 $C_{10-1}^{4-1} = C_9^3 = 84$ 种分法;如果允许有人没有分到,则有 $C_{10+4-1}^{4-1} = C_{13}^3 = 286$ 种分法,从而 $m-n = 286 - 84 = 202$,因此选 E。

【题型 5】局部元素定序问题

【思路点拨】在对元素排列时,出现部分元素顺序固定(比如身高、大小等),要除以定序数量的阶乘,以消除排序。解题方法是:先将 n 个元素进行全排列有 $n!$ 种, m 个元素的全排列有 $m!$ 种。由于要求 m 个元素次序一定,因此只能取其中的某一种排法,可以利用除法起到去掉排序的作用,即若 n 个元素排成一列,其中 m 个元素次序一定,共有 $n! / m!$ 种排列方法。

【例 10】有 4 个男生,3 个女生,高矮互不相等,现将 7 个人排成一行,要求从左到右,女生从矮到高排列,有()种排法。

- (A) 660 (B) 680 (C) 720 (D) 840 (E) 860

【解析】先让 7 个人全排,有 $P_7^7 = 7!$ 种方法,再除以女生定序数 $3! = 3!$ 即可。从而有 $\frac{P_7^7}{P_3^3} = \frac{7!}{3!} = 840$ 种,因此选 D。

【另解】采用元素位置法。先在 7 个位置上任取 4 个位置排男生,有 $C_7^4 \cdot 4!$ 种排法,剩余的 3 个位置排女生,因要求“从矮到高”,只有一种排法,故共有 $C_7^4 \cdot 4! = 840$ 种。

【评注】如果本题再要求男生也从矮到高站,那么答案就为 $\frac{P_7^7}{P_3^3 P_4^4} = \frac{7!}{3! 4!} = 35$ 或者 $C_7^4 = 35$ 。

【题型 6】局部元素相同问题

【思路点拨】在对元素排列时,出现部分元素相同(没有区别),则要除以相同元素数量的阶乘,以消除排序。对含有相同元素求排列个数的方法是:设重集 S 有 k 个不同元素 a_1, a_2, \dots, a_k , 其中重复数为 n_1, n_2, \dots, n_k , 且 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, 则 S 的排列个数等于 $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ 。

【例 11】信号兵把红旗与白旗从上到下挂在旗杆上表示信号,现有 3 面红旗,2 面白旗,把这 5 面旗都挂上去,可表示不同信号的种数是()种。

- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 30 (E) 40

【解析】5 面旗全排列有 $P_5^5 = 5!$ 种挂法,由于 3 面红旗与 2 面白旗的分别全排列均只能作一次的挂法,故共有不同的信号种数是 $\frac{5!}{3! 2!} = 10$, 故选 A。

【例 12】有 2 个 a , 3 个 b , 4 个 c 共九个字排成一排,有()种排法。

- (A) 1160 (B) 1280 (C) 1220 (D) 1240 (E) 1260

【解析】可先将字母看成不同的,进行全排列,共有 $P_9^9 = 9!$ 种,再除以相同字母的排序,

从而可以得到 $\frac{P_9^9}{P_2^2 P_3^3 P_4^4} = \frac{9!}{2! 3! 4!} = 1260$ 种, 故选 E.

【评注】可以采用元素位置分析. 若将字母作为元素, 1-9 号位置作为位子, 那么这是一个“不尽相异元素的全排列”问题, 若转换角色, 将 1-9 号位置作为元素, 字母作为位子, 那么问题便转化成一个相异元素不许重复的组合问题, 即共有 $C_9^2 C_7^3 C_4^4 = 1260$ 种不同的排法.

【题型 7】分堆与分配问题

【思路点拨】如果分堆时, 出现相同数量的分堆, 要除以相同数量堆数的阶乘, 以消除排序. 对于分配问题, 先分堆, 再排序.

【例 13】不同的钢笔 12 支, 分 3 堆, 一堆 6 支, 另外两堆各 3 支, 有 () 种分法.

- (A) 9240 (B) 8280 (C) 9220
(D) 8240 (E) 9260

【解析】若 3 堆有序号, 则有 $C_{12}^6 C_6^3 C_3^3$, 但考虑有两堆都是 3 支, 无须区别, 故共有 $\frac{C_{12}^6 C_6^3 C_3^3}{2!} = 9240$ 种, 故选 A.

【例 14】把 12 支不同的钢笔分给 3 人, 一人得 6 支, 二人各得 3 支, 有 () 种分法?

- (A) $120C_{12}^6$ (B) $30C_{12}^6$ (C) $40C_{12}^6$
(D) $20C_{12}^6$ (E) $60C_{12}^6$

【解析】如上题, 先分堆: 有 $\frac{C_{12}^6 C_6^3 C_3^3}{2!} = 9240$ 种, 再将这三堆分配给三人, 有 $3!$ 种, 根据乘法原理, 共有 $\frac{C_{12}^6 C_6^3 C_3^3}{2!} 3! = 3C_{12}^6 C_6^3 = 60C_{12}^6$ 种, 故选 E.

【评注】本题亦可用“选位, 选项法”, 即: $C_3^1 C_{12}^6 C_6^3 = 60C_{12}^6$.

【题型 8】配对问题

【思路点拨】配对问题主要以鞋子或手套来作为命题对象, 核心在于成双或不成双. 对于成双问题很容易思考, 直接选取整双即可, 对于不成双问题, 要先取双, 然后从每双中取左右单只即可.

【例 15】10 双不同的鞋子, 从中任意取出 4 只, 求下列情况数:

- (1) 4 只鞋子没有成双的; (2) 4 只鞋子恰为两双; (3) 4 只鞋子恰有 1 双.
(A) 3360 (B) 45 (C) 150
(D) 1440 (E) 900

【解析】(1) 从 10 双鞋子中选取 4 双, 有 C_{10}^4 种取法, 每双鞋中各取一只, 分别有 2 种取法, 所以共有 $C_{10}^4 2^4 = 3360$ 种; 选 A.

(2) 从 10 双鞋子中选取 2 双, 有 C_{10}^2 种取法; 选 B.

(3) 从 10 双鞋子中选取 1 双, 有 C_{10}^1 种取法, 再选两双, 从每双鞋中各取一只, 分别有 2 种取法, 所以共有 $C_{10}^1 C_9^2 2^2 = 1440$ 种. 选 D.

【评注】对于本题, 可总结为: n 双不同的鞋子, 任取 $2r$ 只, 恰有 r 双的情况数为 C_n^r 种; 都不成双的情况数为 $C_n^{2r} \cdot 2^{2r}$.

第四节 核心专题点睛

一、排列组合策略

众所周知,排列组合应用题是数学的难点内容之一.为了能较熟练地运用这些方法和技巧解决实际问题,现把求解排列组合应用题的方法和技巧等总结为“八字诀”——“分、特、反、等、化、捆、插、推”.现介绍如下:

分——注意利用分类计数原理和分步计数原理解题.对于一个比较复杂的排列组合应用问题;通常情况下,可以通过“分类”、“分步”等手段分解成若干个易于解决的小问题,然后各个击破之.

特——从特殊的元素、特殊的位置入手解题.附条件的排列组合应用问题往往涉及一些特殊的元素或特殊的位置;对特殊的元素和特殊的位置作特殊的照顾,则容易找到通向成功之路的入口处.

反——利用“正难则反”的原则解题.当问题的正面情况错综复杂时,即正面进攻很难奏效时,可以考虑从问题的反面入手,有时会帮你进入“柳暗花明”的境界.

等——利用概率相等解题.充分利用各元素在每个位置上出现的概率相等,有时可以直捣题目结论.

化——注意用转化思想指导解题.许多排列组合应用问题,表面上看似乎是风马牛不相及,若能用转化的思想方法剥去其外包装,则会发现其本质是相同的,仅仅是问题的“情境”不同而已.转化思想是我们通向成功彼岸的指路明灯,对此要引起特别的重视.

捆——解决若干元素必须排在一起的重要解题技巧.

插——解决若干元素必须互不相邻的重要解题技巧.

推——运用递推关系解决排列组合应用问题.递推方法是把复杂问题化归为简单问题,未知问题转化为已知问题的重要手段之一,也是应用转化思想指导解题的重要体现.

三大原则:(1)先分类再分步;

(2)先特殊再一般;

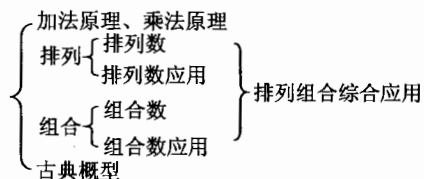
(3)先组合再全排列.

常用方法:捆绑、插空、隔板、排除、穷举法等.

常用数据: $C_n^0=1$, $C_n^1=n$, $C_4^2=6$, $C_5^2=10$, $C_6^2=15$, $C_6^3=20$, $C_7^3=35$,

$0!=1$, $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$.

知识结构:



若能对上述“八字诀”做到烂熟于心,又能对具体情况作具体分析,合理地选择方法和技巧,并综合运用之;则通常情况下能立于不败之地.下面通过几个例题的解答和评注,说明

“八字诀”的具体应用.

【例 1】从正方体的 6 个面中选取 3 个面,其中有两个面不相邻的选法共有().

(A) 8 种 (B) 12 种 (C) 16 种 (D) 20 种 (E) 30 种

【解析】由于正面考虑比较复杂,而问题的反面即为三个面两两相邻,一个顶点对应于一种取法,故用“正难则反”的方法解之,即 $C_6^3 - 8 = 20 - 8 = 12$ 种,故选 B.

【例 2】五个成年人和两个小孩(一男一女)排成一排照相,要求每个小孩两边都是成年人,且小女孩要和其母亲(五个成年人之一)排在一起,有()种不同的排法.

(A) 528 (B) 512 (C) 546 (D) 520 (E) 576

【解析】第一步:从其他四位成年人中,选出一人和小女孩的母亲排在小女孩的两侧,组成“成女母”的方法数为: $C_4^1 \cdot 2! = 8$.

第二步:把“成女母”看成一个成年人和另外三位成年人排成一排的方法数: $4! = 24$.

第三步:把小男孩插入相应的位置的方法数为: $C_3^1 = 3$.

所以,满足条件的排法数为: $8 \times 24 \times 3 = 576$,故选 E.

【评注】由于小女孩最为特殊,故首先照顾小女孩,即从特殊的元素入手;小女孩必须和母亲在一起,且两边都是成年人,故易想到用“捆”的技巧;由于小男孩必须排在两成年人之间,故可采用“插”的技巧.

二、不对号的详细推导过程

【例 3】编号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的 n 个人,坐到编号为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的 n 把椅子上,且每个人都不对号入座的方法数记为 x_n . 求 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

【解析】易见: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, 而且, n 个人坐到 n 把不同的椅子上的方法数为 P_n^n . 其中:

有且仅有 n 个对号入座的方法数为: 1.

有且仅有 $(n-1)$ 个人对号入座的方法数为: $C_n^1 x_1$.

有且仅有 $(n-2)$ 个人对号入座的方法数为: $C_n^2 x_2$.

有且仅有 $(n-3)$ 个人对号入座的方法数为: $C_n^3 x_3$.

.....

有且仅有 $(n-k)$ 个人对号入座的方法数为: $C_n^k x_k$.

.....

有且仅有 1 个人对号入座的方法数为: $C_n^{n-1} x_{n-1}$.

有且仅有 0 个人对号入座的方法数为: x_n .

所以, $P_n^n = 1 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x_2 + C_n^3 x_3 + \dots + C_n^{n-1} x_{n-1} + x_n$.

令 $n=4$ 可得: $24 = 1 + C_4^2 x_2 + C_4^3 x_3 + x_4 = 1 + 6 + 8 + x_4$, 所以, $x_4 = 9$.

令 $n=5$ 可得: $120 = 1 + C_5^2 x_2 + C_5^3 x_3 + C_5^4 x_4 + x_5 = 1 + 10 + 20 + 45 + x_5$, 所以, $x_5 = 44$.

令 $n=6$ 可得: $720 = 1 + C_6^2 x_2 + C_6^3 x_3 + C_6^4 x_4 + C_6^5 x_5 + x_6 = 1 + 15 \times 1 + 20 \times 2 + 15 \times 9 + 6 \times 44 + x_6$, 所以, $x_6 = 265$.

【评注】① 给出的问题本身就有点递推数列的“味道”,故选择递推方法解之.

② 在实施递推策略的过程中,注意到问题的反面,即至少有一人对号入座的问题已经

解决,故又使用了“正难则反”的解题策略.

③ 从理论上讲,上述给出的公式已彻底解决了 n 个元素对 n 个位置的错位排列问题.

【例 4】4 对夫妻排成一排照相,每对夫妻要排在一起的方法数为()种.

(A) 328 (B) 312 (C) 346 (D) 320 (E) 384

【解析】第一步:请每对夫妻各自手拉手(捆)的方法数为: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

第二步:把每对夫妻看成一个人排成一排的方法数为: $4! = 24$.



所以,满足条件的排法数为: $16 \times 24 = 384$. 故选 E.

【评注】由于每对夫妻要排在一起,故使用先捆后排的策略.

【例 5】4 对夫妻排成前后两排,每排 4 人,要求前后必须一男一女,使每对夫妻前后都不对号的排法有()种.

(A) 3520 (B) 3542 (C) 3456 (D) 3520 (E) 3576

【解析】第一步:对四对夫妻进行重新组合,建立 4 个新的临时家庭,使每个家庭一男一女,但不是夫妻,可知其方法数为 $x_4 = 9$ (相当于 4 男与 4 女不对号).

第二步:由上题知,对四个临时家庭进行排队,其方法数为 384. 所以,满足条件的排法数为: $9 \times 384 = 3456$. 故选 C.

【评注】本题看似复杂,但利用分步计数原理可以分解为两个小题.

三、排列组合中的涂色问题的解题策略

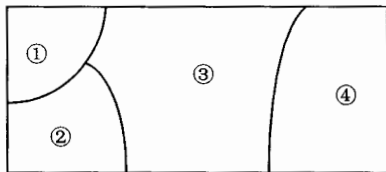
涂色问题有关的试题包含着丰富的数学思想. 解决涂色问题方法技巧性强且灵活多变,故这类问题利于培养创新思维能力、分析问题与观察问题能力.

1. 区域涂色问题

(1) 根据分步计数原理,对各个区域分步涂色,这是处理染色问题的基本方法.

【例 6】用 5 种不同的颜色给图中标①、②、③、④的各部分涂色,每部分只涂一种颜色,相邻部分涂不同颜色,则不同的涂色方法有()种.

(A) 240 (B) 220 (C) 236 (D) 320 (E) 246



【解析】先给①号区域涂色有 5 种方法,再给②号涂色有 4 种方法,接着给③号涂色方法有 3 种. 由于④号与①、②不相邻,因此④号有 4 种涂法,根据分步计数原理,不同的涂色方法有 $5 \times 4 \times 3 \times 4 = 240$, 选 A.

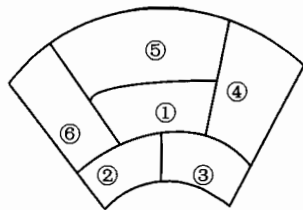
(2) 根据共用了多少种颜色进行分类讨论,分别计算各种情况数,再用加法原理求总数.

【例 7】四种不同的颜色涂在如图所示的①~⑥计 6 个区域,且相邻两个区域不能同色,则方法有()种.

- (A) 180 (B) 140 (C) 120 (D) 220 (E) 160

【解析】依题意只能选用4种颜色,要分五类:

- (1) ②与⑤同色、④与⑥同色,则有4!;
- (2) ③与⑤同色、④与⑥同色,则有4!;
- (3) ②与⑤同色、③与⑥同色,则有4!;
- (4) ③与⑤同色、②与④同色,则有4!;
- (5) ②与④同色、③与⑥同色,则有4!.



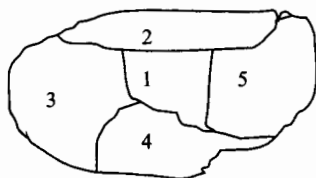
所以根据加法原理得涂色方法总数为 $5 \cdot 4! = 120$. 故选 C.

【例 8】如右图所示,一个地区分为 5 个行政区域,现给地图着色,要求相邻区域不得使用同一颜色,现有 4 种颜色可供选择,则不同的方法共有()种.

- (A) 128 (B) 92 (C) 86 (D) 72 (E) 76

【解析】依题意至少要用 3 种颜色.

- (1) 当用三种颜色时,区域 2 与区域 4 必须同色;
- (2) 区域 3 与区域 5 必须同色,故有 $C_4^3 \cdot 3!$ 种;
- (3) 当用四种颜色时,若区域 2 与区域 4 同色;
- (4) 若区域 3 与区域 5 不同色,有 4! 种;若区域 3 与区



域 5 同色,则区域 2 与区域 4 不同色,有 4! 种,故用四种颜色时共有 $2 \cdot 4!$ 种.

由加法原理可知满足题意的着色方法共有 $C_4^3 \cdot 3! + 2 \cdot 4! = 24 + 2 \times 24 = 72$, 故选 D.

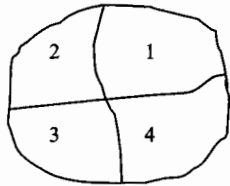
(3) 根据某两个不相邻区域是否同色分类讨论,从这两个不相邻区域同色与不同色入手,分别计算出两种情况数,再用加法原理求出总方法数.

【例 9】用红、黄、蓝、白、黑五种颜色涂在如图所示的四个区域内,每个区域涂一种颜色,相邻两个区域涂不同的颜色,如果颜色可以反复使用,共有()种不同的涂色方法.

- (A) 286 (B) 240 (C) 260 (D) 320 (E) 280

【解析】可把问题分为三类:

- (1) 四格涂不同的颜色,方法种数为 $C_5^4 \cdot 4!$;
- (2) 有且仅两个区域相同的颜色,即只有一组对角小方格涂相同的颜色,涂法种数为 $2C_5^2 C_4^2 \cdot 2!$;
- (3) 两组对角小方格分别涂相同的颜色,涂法种数为 $C_5^2 \cdot 2!$.



因此,所求的涂法种数为: $C_5^4 \cdot 4! + 2C_5^2 C_4^2 \cdot 2! + C_5^2 \cdot 2! =$

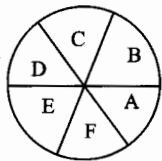
260, 故选 C.

(4) 根据相间区域使用颜色的种类分类,分别求出每种的情况数,再利用加法原理求总数.

【例 10】如图中 6 个扇形区域 A、B、C、D、E、F, 现给这 6 个区域着色,要求同一区域涂同一种颜色,相邻的两个区域不得使用同一种颜色,现有 4 种不同的颜色可用,则方法数为()种.

- (A) 786 (B) 740 (C) 760 (D) 720 (E) 732

【解析】(1) 当相间区域 A、C、E 着同一种颜色时,有 4 种着色方法,此时, B、D、F 各有 3 种着色方法,此时, B、D、F 各有 3 种着色方法,故有 $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$ 种方法.



(2) 当相间区域 A、C、E 着两种不同的颜色时,有 $C_4^2 C_4^2 \cdot 2!$ 种着色方

法,此时 B、D、F 有 $3 \times 2 \times 2$ 种着色方法,故共有 $C_3^2 C_4^2 \cdot 2! \times 3 \times 2 \times 2 = 432$ 种着色方法.

(3) 当相间区域 A、C、E 着三种不同的颜色时有 P_4^3 种着色方法,此时 B、D、F 各有 2 种着色方法. 此时共有 $C_4^3 \cdot 3! \times 2 \times 2 \times 2 = 192$ 种方法.

故总计有 $108 + 432 + 192 = 732$ 种方法,故选 E.

【评注】关于扇形区域涂色问题还可以用数列中的递推公式来解决.

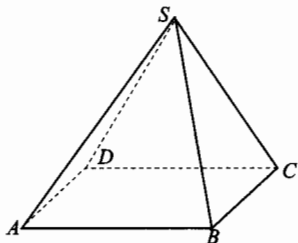
2. 点的涂色问题

主要分析思路有:

- (1) 可根据共用了多少种颜色分类讨论;
- (2) 根据相对顶点是否同色分类讨论;
- (3) 将空间问题平面化,转化成区域涂色问题.

【例 11】将一个四棱锥 $S-ABCD$ 的每个顶点染上一种颜色,并使同一条棱的两端点异色,如果只有 5 种颜色可供使用,那么不同的染色方法的总数是()种.

- (A) 486 (B) 440 (C) 460 (D) 420 (E) 480



【解析】方法一:满足题设条件的染色至少要用三种颜色.

(1) 若恰用三种颜色染色,可先从五种颜色中任选一种染顶点 S,再从余下的四种颜色中任选两种涂 A、B、C、D 四点,此时只能 A 与 C、B 与 D 分别同色,故有 $C_5^1 P_4^2 = 60$ 种方法.

(2) 若恰用四种颜色染色,可以先从五种颜色中任选一种颜色染顶点 S,再从余下的四种颜色中任选两种染 A 与 B,由于 A、B 颜色可以交换,故有 P_4^2 种染法;再从余下的两种颜色中任选一种染 D 或 C,而 D 与 C 中另一个只需染与其相对顶点同色即可,故有 $C_2^1 P_4^2 C_2^1 C_2^1 = 240$ 种方法.

(3) 若恰用五种颜色染色,有 $5! = 120$ 种染色法,

综上所述,满足题意的染色方法数为: $60 + 240 + 120 = 420$ 种,故选 D.

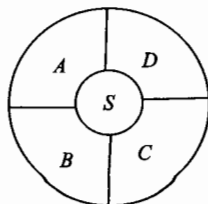
方法二:设想染色按 $S-A-B-C-D$ 的顺序进行,对 S、A、B 染色,有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 种染色方法. 由于 C 点的颜色可能与 A 同色或不同色,这影响到 D 点颜色的选取方法数,故分类讨论:

C 与 A 同色时(此时 C 对颜色的选取方法唯一),D 应与 A(C)、S 不同色,有 3 种选择;C 与 A 不同色时,C 有 2 种选择的颜色,D 也有 2 种颜色可供选择,从而对 C、D 染色有 $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$ 种染色方法.

由乘法原理,总的染色方法是 $60 \times 7 = 420$, 故选 D.

方法三:可把这个问题转化成相邻区域不同色问题:如图,对这五个区域用 5 种颜色涂色,有多少种不同的涂色方法?

解答略.



3. 线段涂色问题

对线段涂色问题,要注意对各条线段依次涂色,主要方法有:

- ①根据共用了多少颜色分类讨论;
- ②根据相对线段是否同色分类讨论.

【例 12】用红、黄、蓝、白四种颜色涂矩形 $ABCD$ 的四条边,每条边只涂一种颜色,且使相邻两边涂不同的颜色,如果颜色可以反复使用,共有()种不同的涂色方法.

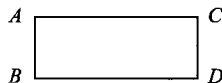
- (A) 84 (B) 90 (C) 60 (D) 80 (E) 110

【解析】方法一:(1)使用四种颜色共有 $4!$ 种;

(2)使用三种颜色涂色,则必须将一组对边染成同色,故有 $C_4^1 C_2^1 C_2^2 \cdot 2!$ 种;

(3)使用两种颜色时,则两组对边必须分别同色,有 $C_4^2 \cdot 2!$ 种.

因此,所求的染色方法数为 $4! + C_4^1 C_2^1 C_2^2 \cdot 2! + C_4^2 \cdot 2! = 84$ 种,故选 A.



方法二:涂色按 $AB-BC-CD-DA$ 的顺序进行,对 AB, BC 涂色有 $4 \times 3 = 12$ 种涂色方法.

由于 CD 的颜色可能与 AB 同色或不同色,这影响到 DA 颜色的选取方法数,故分类讨论:

当 CD 与 AB 同色时,这时 CD 对颜色的选取方法唯一,则 DA 有 3 种颜色可供选择;当 CD 与 AB 不同色时, CD 有两种可供选择的颜色, DA 也有两种可供选择的颜色,从而对 CD, DA 涂色有 $1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$ 种涂色方法.

由乘法原理可知,总的涂色方法数为 $12 \times 7 = 84$ 种,因此,选 A.

四、分组(堆)问题

分组问题是排列组合教学中的一个重点和难点.某些排列组合问题看似非分组问题,实际上可运用分组问题的方法来解决.

1. 基本的分堆问题

【例 13】六本不同的书,分为三堆,每堆两本,有()种分法.

- (A) 26 (B) 30 (C) 15 (D) 60 (E) 90

【解析】分堆与顺序无关,是堆合问题.分堆数是 $C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ (种),这 90 种分堆实际上重复了 6 次.不妨把六本不同的书写上 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个号码,考察以下两种分法:(1, 2)(3, 4)(5, 6)与(3, 4)(1, 2)(5, 6),由于书是均匀分堆的,三堆的本数一样,又与顺序无关,所以这两种分法是同一种分法.以上的分堆方法实际上加入了堆的顺序,因此还应取消分堆的顺序,即除以堆数的全排列数 $3!$,所以分法是 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{3!} = 15$ 种,因此选 C.

【例 14】六本不同的书,分为三堆,一堆一本,一堆二本,一堆三本,有()种分法.

- (A) 26 (B) 30 (C) 15 (D) 60 (E) 90

【解析】先分堆,方法是 $C_6^1 C_5^2 C_3^3$,那么还要不要除以 $3!$? 人们发现,由于每堆书的本数是不一样的,因此不会出现相同的分法,即共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ 种分法,故选 D.

【例 15】六本不同的书,分为三堆,一堆四本,另外两堆各一本,有()种分法.

(A) 26 (B) 30 (C) 15 (D) 60 (E) 90

【解析】先分堆,方法是 $C_6^4 C_2^2 C_1^1 = 30$ 种,那么其中有没有重复的分法呢? 人们发现,其中两堆书的本数都是一本,因此这两堆有了顺序,而与四本书的那一堆,由于书的本数不一样,不可能重复,所以实际分法是 $\frac{C_6^4 C_2^2 C_1^1}{2!} = 15$ 种,故选 C.

通过以上三个例题的分析,可以得出分堆问题的一般方法.

【评注】一般地, n 个不同的元素分成 p 堆,各堆内元素数目分别为 m_1, m_2, \dots, m_p , 其中 k 堆内元素数目相等,那么分堆方案是 $\frac{C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} C_{n-m_1-m_2}^{m_3} \dots C_{m_p}^{m_p}}{k!}$.

2. 先分堆后分配的问题

【例 16】将上面三个例题中的“分为三堆”改为“分给甲、乙、丙三人”,那么各有()种分法.

(A) 26 (B) 30 (C) 15 (D) 60 (E) 90

【解析】由于分配给三人,同一本书给不同的人是不同的分法,所以是排列问题. 实际上可看作“分为三堆,再将这三堆分给甲、乙、丙三人”,因此只要将分堆方法数再乘以 $3!$, 即答案分别为: $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{3!} 3! = 90$ 种, $C_6^4 C_2^2 C_3^3 3! = 360$ 种, $\frac{C_6^4 C_2^2 C_1^1}{2!} 3! = 90$ 种.

【评注】一般地,如果每个“不同的元素”和每个“接受单位”都有“归宿”,并且每个“接受单位”可接受的元素个数没有限制,那么实际上是先分堆后排列的问题,即分堆方案数乘以“接受单位”数的全排列数.

【例 17】六本不同的书,分给甲、乙、丙三人,每人至少一本,有()种分法.

(A) 426 (B) 530 (C) 540 (D) 560 (E) 480

【解析】六本书和甲、乙、丙三人都有“归宿”,即书要分完,人不能空手. 因此,考虑先分堆,后排列. 先分堆,六本书怎么分为三堆呢? 有三类分法:①每堆两本;②分别为一本、二本、三本;③两堆各一本,另一堆四本. 所以根据加法原理,分堆法是 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{3!} + C_6^1 C_5^2 C_3^3 + \frac{C_6^4 C_2^2 C_1^1}{2!} = 90$ 种. 再考虑排列,即再乘以 $3!$. 所以一共有 540 种不同的分法,故选 C.

3. 分堆问题的变形问题

【例 18】四个不同的小球放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒子中,恰有一个空盒的放法有()种.

(A) 144 (B) 134 (C) 150 (D) 160 (E) 124

【解析】恰有一个空盒,则另外三个盒子中小球数分别为 1, 1, 2. 实际上可转化为先将四个不同的小球分为三堆,两堆各 1 个,另一堆 2 个,分堆方法有 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{2!}$ 种,然后将这三堆再加上一个空盒进行全排列,即共有 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{2!} 4! = 144$ 种,故选 A.

【例 19】甲、乙、丙三项任务,甲需 2 人承担,乙、丙各需 1 人承担,从 10 人中选派 4 人承担这三项任务,不同的选法有()种.

(A) 2520 (B) 2530 (C) 2560 (D) 2660 (E) 2490

【解析】先考虑分堆,即10人中选4人分为三堆,其中两堆各一人,另一堆二人,共有 $\frac{C_{10}^1 C_9^1 C_8^2}{2!}$ 种分法.再考虑排列,甲任务需2人承担,因此2人的那个堆只能承担甲任务,而一个人的两堆既可承担乙任务又可承担丙任务,所以共有 $\frac{C_{10}^1 C_9^1 C_8^2}{2!} 2! = 2520$ 种不同的选法,故选A.

【例20】集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, A 为定义域, B 为值域,则从集合 A 到集合 B 的不同的函数有()个.

- (A) 26 (B) 30 (C) 36 (D) 60 (E) 90

【解析】由于集合 A 为定义域, B 为值域,即集合 A 、 B 中的每个元素都有“归宿”,而集合 B 的每个元素接受集合 A 中对应的元素的数目不限,所以此问题实际上还是先分堆后分配的问题.先考虑分堆,集合 A 中4个元素分为三堆,各堆的元素数目分别为1,1,2,则共有 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{2!}$ 种分堆方法.再考虑分配,即排列,再乘以 $3!$,所以共有 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{2!} 3! = 36$ 个不同的函数,故选C.

第五节 阶梯化精炼题



扫码看视频

基础能力题

一、问题求解题

1. 某班元旦联欢会原定的5个学生节目已排成节目单,开演前又增加了两个教师节目,如果将这两个教师节目插入原节目单中,那么不同插法的种数为().

- (A) 42 (B) 30 (C) 20 (D) 12 (E) 36

2. 从7人中选派5人到10个不同的交通岗的5个中参加交通协管工作,则不同的选派方法有().

- (A) $C_7^5 C_{10}^5 \cdot 5! \cdot 5!$ (B) $C_7^5 C_{10}^5 7!$ (C) $C_{10}^5 C_7^5$ (D) $C_7^5 C_{10}^5 \cdot 5!$ (E) $C_7^5 C_{10}^6 \cdot 7!$

3. 5个人分4张同样的足球票,每人至多分一张,而且票必须分完,不同的分法种数是().

- (A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 20

4. 某学生要邀请10位同学中的6位参加一项活动,其中有2位同学要么都请,要么都不请,共有()种邀请方法.

- (A) 48 (B) 60 (C) 75 (D) 90 (E) 98

5. 平面内有两组平行线,一组有 m 条,另一组有 n 条,这两组平行线相交,可以构成()个平行四边形.

- (A) C_n^2 (B) C_m^2 (C) $C_n^2 C_m^2$ (D) $P_n^2 P_m^2$ (E) $C_n^2 + C_m^2$

6. 在某次数学考试中,学号为 i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的同学考试成绩 $f(i) \in \{85, 87, 88, 90\}$,

93}, 且满足 $f(1) \leq f(2) < f(3) < f(4)$, 则这四位同学的考试成绩的所有可能情况有 () 种.

- (A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 25

7. 某班第一小组共有 12 位同学, 现在要调换座位, 使其中有 3 个人都不坐自己原来的座位, 其他 9 人的座位不变, 共有 () 种不同的调换方法.

- (A) 300 (B) 360 (C) 420 (D) 440 (E) 480

8. 某兴趣小组有 4 名男生, 5 名女生:

①从中选派 5 名学生参加一次活动, 要求必须有 2 名男生, 3 名女生, 且女生甲必须在内, 有 m 种选派方法;

②从中选派 5 名学生参加一次活动, 要求有女生但人数必须少于男生, 有 n 种选派方法;

③分成三组, 每组 3 人, 有 k 种不同分法, 则下列正确的为 ().

- (A) $m=32$ (B) $n=48$ (C) $k=180$ (D) $m+n=81$ (E) $m+k=300$

9. 用 0, 1, 2, 3, 4 这五个数字组成没有重复数字的四位数, 那么在这些四位数中, 偶数共有 ().

- (A) 120 个 (B) 96 个 (C) 60 个 (D) 36 个 (E) 48 个

10. 五种不同的商品在货架上排成一排, 其中 a, b 两种必须排在一起, 而 c, d 两种不能排在一起, 则不同的排法共有 ().

- (A) 24 种 (B) 20 种 (C) 44 种 (D) 48 种 (E) 56 种

11. 6 人站成一排照相, 其中甲, 乙, 丙三人要站在一起, 且要求乙, 丙分别站在甲的两边, 则不同的排法种数为 ().

- (A) 12 (B) 24 (C) 88 (D) 144 (E) 48

12. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字组成无重复数字且大于 345012 的六位数的个数是 ().

- (A) 360 (B) 270 (C) 269 (D) 245 (E) 300

13. 男生 24 名, 女生 20 名, 从中选出 3 男 2 女担任不同的班委, 则不同的班委会组织方案有 () 种.

- (A) $C_{24}^3 C_{20}^2$ (B) $C_{24}^3 + C_{20}^2$ (C) $C_{24}^3 C_{20}^2 + 5!$ (D) $C_{24}^3 C_{20}^2 5!$ (E) $C_{24}^3 C_{20}^2 2! \cdot 3!$

14. 某小组有 4 名男同学和 3 名女同学, 从这小组中选出 4 人完成三项不同的工作, 其中女同学至少选 2 名, 每项工作要有人去做, 那么不同的选派方法的总数是 ().

- (A) 648 (B) 864 (C) 1080 (D) 792 (E) 540

15. 某种产品有 4 只次品和 6 只正品, 每只产品均不相同且可区分. 今每次取出一只测试, 直到 4 只次品全部测出为止. 则最后一只次品恰好在第五次测试时发现的的不同情况种数是 ().

- (A) 240 (B) 144 (C) 576 (D) 720 (E) 1080

16. 在不大于 1000 的正整数中, 不含数字 3 的自然数的个数是 ().

- (A) 720 (B) 648 (C) 719 (D) 728 (E) 729

二、条件充分性判断题

1. 从 1,2,3,4,5 中随机取 3 个数(允许重复)组成一个三位数,则共有 19 种不同的取法.

(1) 取出的三位数的各位数字之和等于 9.

(2) 取出的三位数的各位数字之和等于 7.

2. 某小组有 8 名同学,从这小组男生中选 2 人,女生中选 1 人去完成三项不同的工作,每项工作应有一人,共有 180 种安排方法.

(1) 该小组中男生人数是 5 人.

(2) 该小组中男生人数是 6 人.

3. 从字母 $abcdefgh$ 选取 5 个不同的字母排成一排,含有 bc (其中 bc 相连且顺序不变)的不同的排列共有 N 种.

(1) $N=720$.

(2) $N=480$.

4. 某公司开晚会,定好了 6 个节目,由于节目较少,需要再添加 n 个团体节目,但要求先前已经排好的 6 个节目相对顺序不变,则所有不同的安排方法共有 504 种.

(1) $n=2$.

(2) $n=3$.

5. 可以组成 60 个不同的六位数.

(1) 用 1 个数字 1,2 个数字 2 和 3 个数字 3.

(2) 用 2 个数字 1,2 个数字 2 和 2 个数字 3.

6. 由 1,2,3,4,5,6 组成无重复的 6 位数,偶数有 108 个.

(1) 1 与 5 不相邻.

(2) 3 与 5 不相邻.

7. 男女学生共有 8 人,女生为 n 人.从男生中选取 2 人,且从女生中选取 1 人,共有 30 种不同的选法.

(1) $n=2$.

(2) $n=3$.

基础能力题详解

一、问题求解题

1. A;5 个学生有 6 个空,共有两种插法:(1) 两个老师不相邻,有 $C_6^2 \cdot 2!$ 种;(2) 两个老师相邻,有 $C_5^1 2!$ 种,共 $C_6^2 \cdot 2! + C_5^1 2! = 42$.

2. D;第一步,从 7 个人中选 5 个人为 C_7^5 ;第二步,从 10 个岗位选 5 个进行排列为 P_{10}^5 ,为 $C_7^5 P_{10}^5$.

3. A;由于 4 张票一样,所以只要 5 个人选 4 个人就行了,为 $C_5^4=5$.

4. E;分两种情况,两个人都被邀请为 C_4^4 ,两个人都没有参加为 C_6^6 ,共有 $C_4^4 + C_6^6 = 98$.

5. C;要构成平行四边形,只需要两组平行线就可以了,所以分别从两组平行线中各取两条平行线,取法为 $C_m^2 C_n^2$.

6. D;显然,一旦 4 个同学的分数选出,成绩由小到大顺序就固定了.有两种情况:(1) 4 个人成绩不一样,有 C_5^4 种;(2) 如果 1,2 同学成绩一样,有 C_3^3 种,共有 $C_5^4 + C_3^3 = 15$ 种.

7. D;第一步,从 12 个同学中选 3 个为 C_{12}^3 让其座位变化;第二步,假如选出的是甲,乙,

丙三个同学,他们调座位只有甲—乙,乙—丙,丙—甲,或甲—丙,乙—甲,丙—乙这两种情况,故共有 $2C_{12}^3 = 440$ 种.

8. D; (1) 第一步,4个男生中选2个为 C_4^2 ; 第二步,由于女生甲必在,则只需要在剩下4个女生中选2个为 C_4^2 , 故共有 $m = C_4^2 C_4^2 = 36$ 种;

(2) 共有两种情况,① 1个女生4个男生,为 $C_5^1 C_4^4$; ② 2个女生3个男生,为 $C_5^2 C_4^3$, 故共有 $n = C_5^1 C_4^4 + C_5^2 C_4^3 = 45$;

(3) 先从9个人中选3个为 C_9^3 , 再从剩下的6个人中选3个为 C_6^3 , 最后剩下3个人为一组为 C_3^3 ; 又由于前三步选入的过程中使选出的3组有了顺序,而题目本身要求这3组是没有顺序的平均分配,所以要除去3组的顺序,故共有 $k = \frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{3!} = 280$.

9. C; 若末位为0,则有 $P_4^4 = 24$ 个偶数; 末位不是0的偶数有 $C_2^1 C_3^1 C_3^2 \cdot 2! = 36$ 个,所以共有 $24 + 36 = 60$ 个数.

10. A; 插空法,将 a, b 捆绑成一个元素,与除 c, d 外的元素进行排列,然后将 c 和 d 插空,共有排列数为 $2! \cdot 2! \cdot C_3^2 \cdot 2!$.

11. E; 甲乙丙三人捆绑在一起看成一个元素,按要求共有 $2!$ 种,与其他元素一起的全排列共有 $2! \cdot 4! = 48$ 种.

12. C; 符合题意的数字个数为 $C_2^1 \cdot 5! + 4! + C_2^2 \cdot 2! + 1 = 269$.

13. D; 分三步完成,从24名男生中选出3人,从20名女生中选出2人,最后进行全排列,则不同的班委会组织方案有 $C_{24}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot 5!$.

14. D; 分两步完成,先从小组中选出4人,排列数为 $C_3^2 \cdot C_4^2 + C_3^3 \cdot C_4^1$, 选派方法为 $C_4^2 \cdot 3!$, 则总共的选派数为 $(C_3^2 \cdot C_4^2 + C_3^3 \cdot C_4^1) \cdot C_4^2 \cdot 3! = 792$.

15. C; 根据题意,前4次测试包括3只次品和1只正品,符合情况的测试情况数为 $C_4^3 \cdot C_6^1 \cdot 4! = 576$.

16. E; 不含3的数字分类求解:一位数不含3的有8个,两位数不含3的有 $C_8^1 C_9^1 = 72$ 个,三位数不含3的有 $C_8^1 C_9^1 C_9^1 = 648$ 个,四位数不含3的有1个(1000),共有 $8 + 72 + 648 + 1 = 729$.

二、条件充分性判断题

1. A; 由条件(1),显然满足条件的有 $(3, 3, 3), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (1, 3, 5), (2, 3, 4)$ 这五组,再考虑顺序,则有 $1 + 2 \times 3 + 23! = 19$; 由条件(2),同条件(1),满足条件的有 $(1, 3, 3), (2, 2, 3), (1, 1, 5), (1, 2, 4), 3 \times 3 + 3! = 15$.

2. D; 由条件(1)男生5人,女生3人,有 $C_5^2 C_3^3 3! = 180$, 充分; 由条件(2),男生6人,女生2人,有 $C_6^2 C_2^1 3! = 180$, 充分.

3. B; 根据题意,先从剩下的6个不同的字母中选出3个,然后进行排序,“bc”看成一个整体,共有 $C_6^3 4! = 480$ 种.

4. B; 条件一: $n=2$ 时分两种情况,第一种:2个团体节目相邻,有 $2! C_7^1$ 种; 第二种:2个团体节目不相邻,有 $C_7^2 \cdot 2!$ 种,两种之和显然不充分.

条件二: $n=3$ 时分三种情况,第一种:三个节目两两都不相邻,有 $C_7^3 \cdot 3!$ 种; 第二种:三

个团体节目中只有两个相邻,有 $3 \cdot 2! \cdot C_7^2 \cdot 2!$ 种;第三种:三个团体节目排在一起,有 $3! \cdot C_7^3$ 种,最后将三种情况相加,得 504 种,充分.

5. A;条件 1 相当于把这 6 个数放在排好顺序的 6 个方格中,首先从这 6 个方格中选出 3 个方格放 3,共有 $C_6^3=20$ 种放法;再从剩下的 2 个方格中选出 2 个方格放 2,共有 $C_3^2=3$ 种放法;最后一个放 1. 这样根据分布计数原理共有 $C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 1=60$, 所以可以组成 60 个不同的数,所以条件 1 充分;同理可以计算条件 2 为 $C_6^2 \cdot C_4^1 \cdot C_2^2=90$, 所以条件 2 不充分.

6. C;由(1),1 与 5 不相邻的六位数,偶数的个数有 $C_3^3 3! \cdot C_4^2 \cdot 2! = 216$ 个,不充分;同理,由(2),3 与 5 不相邻的六位数,偶数的个数有 $C_3^3 3! \cdot C_4^2 \cdot 2! = 216$ 个,不充分.

(1) 与(2)联合起来即 5 与 1,3 不相邻的六位数,偶数的个数有

$$3! \cdot 3! + 3! \cdot C_3^2 2! \cdot 2! = 36 + 72 = 108.$$

7. D;由条件(1),当 $n=2$ 时,男生有 $8-2=6$ 人,共有 $C_6^2 C_2^1=30$ 种选法,条件充分;

由条件(2),当 $n=3$ 时,男生有 $8-3=5$ 人,共有 $C_5^2 C_3^1=30$ 种选法,条件充分.



扫码看视频

综合提高题

一、问题求解题

1. 停车场上有一排七个停车位,现有四辆汽车需要停放,若要使三个空位连在一起,则停放方法数为().

- (A) $C_7^4 \cdot 4!$ (B) $C_7^3 \cdot 3!$ (C) $5!$ (D) $5! \cdot 3!$ (E) $C_7^5 \cdot 5!$

2. 五种不同商品在货架上排成一排,其中 A, B 两种必须连排,而 C, D 两种不能连排,则不同的排法共有().

- (A) 12 种 (B) 20 种 (C) 24 种 (D) 48 种 (E) 50 种

3. 6 张同排连号的电影票,分给 3 名教师与 3 名学生,若要求师生相间而坐,则不同的分法有().

- (A) $3! \cdot C_4^3 \cdot 3!$ (B) $3! \cdot 3!$ (C) $(C_4^3 \cdot 3!)^2$
(D) $2 \cdot 3! \cdot 3!$ (E) $4 \cdot 3! \cdot 3!$

4. 某人射出 8 发子弹,命中 4 发,若命中的 4 发中仅有 3 发是连在一起的,那么该人射出的 8 发,按“命中”与“不命中”报告结果,不同的结果有().

- (A) 720 种 (B) 480 种 (C) 24 种 (D) 20 种 (E) 100 种

5. 设 $x, y \in \mathbb{Z}^+$ 且 $x+y \leq 4$, 则在直角坐标系中满足条件的点 $M(x, y)$ 共有() 个.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

6. 7 人站一排,甲不站排头,也不站排尾,不同的站法种数有 m 种;甲不站排头,乙不站排尾,不同站法种数有 n 种,则 $|m-n|$ 为().

- (A) 120 (B) 160 (C) 180 (D) 200 (E) 220

7. 一部电影在相邻 5 个城市轮流放映,每个城市都有 3 个放映点,如果规定必须在一个城市的各个放映点放映完以后才能转入另一个城市,则不同的放映次序有() 种.

- (A) $(3!)^5$ (B) $(3!)^4 5!$ (C) $(3!)^3 (5!)^2$
(D) $(3!)^5 5!$ (E) $(3!)^3 5!$

8. 一天课表中,6节课要安排3门理科,3门文科,要使文、理科间排,不同的排课方法有 m 种;要使3门理科的数学与物理连排,化学不得与数学、物理连排,不同的排课方法有 n 种,则 $|m-n|$ 为().

- (A) 60 (B) 66 (C) 70 (D) 72 (E) 76

9. 某商场中有10个展架排成一行,展示10台不同的电视机,其中甲厂5台,乙厂3台,丙厂2台,若要求同厂的产品分别集中,且甲厂产品不放两端,则不同的陈列方式有()种.

- (A) 2400 (B) 2680 (C) 2800 (D) 2880 (E) 2480

10. 用数字0,1,2,3,4,5组成没有重复数字的四位数,其中三个偶数字连在一起的四位数有()个?

- (A) 30 (B) 20 (C) 28 (D) 35 (E) 40

11. 用数字0,1,2,3,4,5组成没有重复数字的四位数,十位数字比个位数字大的有()个.

- (A) 120 (B) 140 (C) 200 (D) 180 (E) 150

12. 用数字0,1,2,3,4,5组成没有重复数字的四位数,含有2和3并且2和3不相邻的四位数有()个.

- (A) 66 (B) 72 (C) 80 (D) 90 (E) 96

13. 某人制订了一项旅游计划,从7个旅游城市中选择5个进行游览.如果其中的城市A、B必选,并且在旅游过程中必须按先A后B的次序经过A、B两城市(A、B两城市可以不相邻),则不同的游览路线有()种.

- (A) 600 (B) 640 (C) 660 (D) 680 (E) 720

14. 从 $\{1,2,3,4,\dots,20\}$ 中任选3个不同的数,使这三个数成等差数列,这样的等差数列最多有().

- (A) 90个 (B) 180个 (C) 200个 (D) 120个 (E) 140个

15. 男女学生共有8人,从男生中选取2人,且从女生中选取1人,共有30种不同的选法,其中女生有().

- (A) 2人或3人 (B) 3人或4人 (C) 3人
(D) 4人 (E) 5人

16. 兰州某车队有装有A,B,C,D,E,F六种货物的卡车各一辆,把这些货物运到西安,要求装A种货物,B种货物与E种货物的车,到达西安的顺序必须是A,B,E(可以不相邻,且先发的车先到),则这六辆车发车的顺序有()种不同的方案.

- (A) 80 (B) 120 (C) 240 (D) 360 (E) 200

17. 用0,1,2,3,4这五个数字组成无重复数字的五位数,其中恰有一个偶数夹在两个奇数之间的五位数的个数是().

- (A) 48 (B) 36 (C) 28 (D) 12 (E) 20

18. 某药品研究所研制了5种消炎药 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 和4种退烧药 b_1, b_2, b_3, b_4 , 现从中取出两种消炎药和一种退烧药同时使用进行疗效实验,但又知 a_1, a_2 , 两种药必须同时使

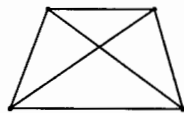
用,且 a_3, b_4 两种药不能同时使用,则不同的实验方案有()。

- (A) 27 种 (B) 26 种 (C) 16 种 (D) 14 种 (E) 20 种

19. 某池塘有 A, B, C 三只小船, A 船可乘 3 人, B 船可乘 2 人, C 船可乘 1 人, 今天 3 个成人和 2 个儿童分乘这些船只, 为安全起见, 儿童必须由成人陪同方能乘船, 他们分乘这些船只的方法共有()。

- (A) 120 种 (B) 81 种 (C) 72 种
(D) 27 种 (E) 30 种

20. 梯形的两条对角线把梯形分成四部分, 有五种不同的颜色给这四部分涂色, 每一部分涂一种颜色, 任何相邻(具有公共边)的两部分涂不同的颜色, 则不同的涂色方法有()。



- (A) 180 种 (B) 240 种 (C) 260 种 (D) 320 种 (E) 300 种

21. 从单词“equation”中选取 5 个不同的字母排成一排, 含有“qu”(其中“qu”相连且顺序不变)的不同的排列共有()。

- (A) 120 个 (B) 480 个 (C) 720 个 (D) 840 个 (E) 900

22. 将 5 枚相同的纪念邮票和 8 张相同的明信片作为礼品送给甲、乙两名学生, 全部分完且每人至少有一件礼品, 不同的分法是()。

- (A) 52 (B) 40 (C) 38 (D) 11 (E) 35

23. 设有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个球和编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子. 现将这五个球投入五个盒子内, 每个盒子放一个球, 并且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同, 则这样的投放方法总数为()。

- (A) 20 (B) 30 (C) 60 (D) 120 (E) 240

二、条件充分性判断题

1. 从集合 $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ 中任取 3 个元素分别作为直线方程 $Ax + By + C = 0$ 中的 A、B、C, 所得的经过坐标原点的直线有 k 条.

- (1) $k=30$. (2) $k=36$.

2. $m=20$.

(1) 有 50 张 3 元邮票和 30 张 5 元邮票, 用这些邮票能组成不同邮资 m 种.

(2) 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中任意选出三个数, 使它们的和为偶数, 则共有 m 种不同的选法.

3. 男女学生共有 8 人, 从男生中选取 2 人, 从女生中选取 1 人, 则共有 30 种不同的选法.

- (1) 其中女生有 2 人. (2) 其中女生有 3 人.

4. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中. 若每个信封放 2 张, 其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封, 则不同的方法共有 n 种.

- (1) $n=36$. (2) $n=18$.

5. 按要求把 12 个人分成 3 个相同的小组, 共有 13860 种不同的分法.

- (1) 各组人数分别为 2, 4, 6 个. (2) 平均分成 3 个小组.

6. 6 男 4 女站成一排, 则不同的排法共有 720×840 种.

- (1) 男生甲、乙、丙排序一定. (2) 任何 2 名女生都不相邻.

7. 用数字 0,1,2,3,4 组成没有重复数字的五位数,共有 24 个.

(1) 其中数字 1,2 相邻的偶数.

(2) 其中数字 1,2 相邻的奇数.

8. $N=125$.

(1) 在 5 本不同的书中选出 3 本送给 3 名同学,每人一本,共有 N 种不同的送法.

(2) 书店有 5 种不同的书,买 3 本送给 3 名同学,每人一本,共有 N 种不同的送法.

9. $m+n=46$.

(1) 一个口袋装有大小不同的 7 个白球和 1 个黑球,从中取出 3 个球,其中含有 1 个黑球的取法共有 m 种.

(2) 一个口袋装有大小不同的 7 个白球和 1 个黑球,从中取出 3 个球,其中不含有黑球的取法共有 n 种.

10. $N=864$.

(1) 从 1~8 这 8 个自然数中,任取 2 个奇数,2 个偶数,可组成 N 个不同的四位数.

(2) 从 1~8 这 8 个自然数中,任取 2 个奇数作千位和百位数字,取 2 个偶数作十位和个位数字,可以组成 N 个不同的四位数.

11. 把 n 个相同小球放入 3 个不同箱子,第一个箱子至少 1 个,第二个箱子至少 3 个,第三个箱子可以放空球,有 28 种情况.

(1) $n=8$.

(2) $n=9$.

综合提高题详解

一、问题求解题

1. C;要求 3 个空位连在一起,有 5 种,不同的汽车又有顺序,采用排列,故结果为 $54! = 5!$.

2. C;假设排 A、B、C、D、E,AB 连排,看成一个整体,自身有顺序,CD 不连排,采用插空,故结果为 $2! \cdot 2! \cdot C_3^2 \cdot 2! = 24$.

3. D;假设编号为 1,2,3,4,5,6,则奇数坐教师、偶数坐学生或者奇数坐学生、偶数坐教师,则结果为 $2 \cdot 3! \cdot 3!$.

4. D;连中在前 3 发的有 4 种不同的方法,同理连中在后 3 发的也是.连发在中间的,每次连发有 3 种不同的方法,有 4 种中间的连中,故总共有 $4+3+3+3+3+3+4=20$ 种.

5. E; $(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,1), (3,1)$ 共 6 个.

6. A;(1) 先排剩下的 6 个人,再把甲插到 5 个空位中的一个位置即可, $m=6! \cdot C_5^1 = 3600$;

(2) 乙站排头有 $6!$,甲站排尾有 $6!$,甲、乙均不在排头结尾,有 $C_5^2 \cdot 2! \cdot 5!$,故共有 $n=6! + 6! - 5! + C_5^2 \cdot 2! \cdot 5! = 3720$ (多加了一种甲在尾乙在头的情况,得减去).

7. D;3 个放映点放映有顺序为 $3!$,有 5 个城市轮放 $(3!)^5$,5 个城市有顺序,故结果为 $5! (3!)^5$.

8. D;将文理科插空排列,结果为 $m=2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ 种;采用插空法,先排 3 门文科,再把数学、物理(作为一整体)和化学插到里面,数学、物理本身还有顺序,结果为 $n=3! \cdot C_4^2 \cdot 2! \cdot 2! = 144$ 种,故 $|m-n|=144-72=72$.

9. D;不同厂家的电视机内部有顺序,并且甲厂的一定在中间,故总数为 $2! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! =$

2880 种.

10. A;千位为奇数,先从3个奇数中选1个 C_3^1 ,再排序,有 $C_3^1 3! = 18$ 个;同理千位为偶数,有 $C_3^1 3! - C_3^1 2! = 12$ 个,则共有 $m = 18 + 12 = 30$ 个.

11. E;一共可以组成 $C_6^4 \cdot 4! - C_3^3 \cdot 3! = 300$ 个四位数,由于数字不重复,则十位数字要么比个位大要么比个位小,各占一半,故有 $n = \frac{1}{2}(C_6^4 \cdot 4! - C_3^3 \cdot 3!) = 150$ 个.

12. A;另外两个数不含0,先对选出的两个数排序,然后把2、3插到3个空中,有 $C_3^2 2! \cdot C_3^2 \cdot 2! = 36$ 种;另外两个数含0,比如1,0这样的顺序,再把2、3插到3个空中,有 $C_3^1 C_3^2 \cdot 2! = 18$ 种;比如0,1这样的顺序,0前面必须有数字,故有 $2 \cdot 2! \cdot C_3^1 = 12$ 种;

从而共有 $36 + 18 + 12 = 66$ 种.

13. A;从7个旅游城市选5个,A、B必选,则有 $C_5^3 5!$ 种,按先A后B的顺序,则有 $\frac{1}{2} C_5^3 5! = 600$ 种.

14. B;方法一:假设组成的等差数列公差为 d ,当 $d=1$ 时,有18个; $d=2$ 时,有16个;……; $d=9$,有2个.考虑到公差 d 的正负,故共有 $2 \times (18 + \cdots + 2) = 180$.

方法二:把这20个数分为两组,奇数组和偶数组.可以考虑,从奇数组中任意选取2个数,总可以找到一个等差数列,同理从偶数组中任意选取2个数,同样可以找到一个等差数列,共可以组成等差数列为 $2 \cdot 2! \cdot C_{10}^2 = 180$ 个.

15. A;设女生有 n 个,则男生有 $8-n$ 个,则根据题意,有 $C_n^1 C_{8-n}^2 = 30$,解得 $n=2$ 或 $n=3$.

16. B;属于局部元素定序问题,先让6辆车全排列,然后除以3辆车的顺序,故 $\frac{6!}{3!} = 120$.

17. C;当这个偶数在千位时, $C_3^1 2! \cdot 2! = 12$;当这个偶数在百位时,偶数为0, $2! \cdot 2! = 4$,偶数不为0,0只能在个位, $C_2^1 2! = 4$;当这个偶数在十位时,同百位, $4+4=8$,故结果为 $12+4+4+8=28$.

18. D; a_1, a_2 共有4种选法;选 a_3 ,共有 $C_2^1 C_3^1 = 6$ 种选法;选 a_4, a_5 ,共有4种选法,共有 $4+6+4=14$ 种.

19. D;分为4种情况:(1) C船坐1成人,A船坐1成人、1儿童,B船坐1成人、1儿童,有 $C_3^1 C_2^1 C_2^1 = 12$ 种;(2) C船坐1成人,A船坐1成人、2儿童,B船坐1成人,有 $C_3^1 C_2^1 = 6$ 种;(3) C船不坐人,A船坐1成人、2儿童,B船坐2成人,有 $C_3^1 = 3$ 种;(4) C船不坐人,A船坐2成人、1儿童,B船坐1成人、1儿童,有 $C_3^2 C_2^1 = 6$ 种,共 $12+6+3+6=27$ 种.

20. C;涂4种颜色,有 $P_5^4 = 120$ 种;涂3种颜色,有 $2P_5^3 = 120$ 种;2种颜色,有 $P_5^2 = 20$ 种方法,共 $120+120+20=260$ 种.

21. B;先从剩下的6个不同的字母中选3个出来,然后进行排序,排序时,“qu”要看成是一个整体,共有 $C_6^3 4! = 480$ 种.

22. A;把5拆成 $0+5, 1+4, \cdots, 5+0$,共6种;同样8可以拆成 $0+8, \cdots, 8+0$,共9种;拆出来的数,每组中加数表示给第一个人的礼物,被加数表示给第二个人的礼物,则共有 $6 \times 9 - 2 = 52$ 种,有2种其中一个人是没礼物的.

23. A;只能有两个球的编号与盒子的编号是一样的,所以 $C_5^2 = 10$. 如果定1、2两个编号的球与盒子是一样的,那么3、4、5中的任何一个球都不能与盒子相同,即 $C_2^1 = 2$. 因为定了4号球在3号盒子就固定了,必须是5号球在4号盒子,3号球在5号盒子,又3号球不能

定在3号盒子,所以只能4和5的其中一个,即 $C_2^1=2$,所以就有 $10 \times 2 = 20$ 种.

二、条件充分性判断题

1. A;直线过原点,显然 $C=0$,故结果为 $C_6^2 \cdot 2! = 30$ 条.

2. E;条件(1),50张3元的,可以组成50种不同的邮资,显然不充分;条件(2),选3个偶数,结果为 $C_4^3=4$ 种,选1个偶数2个奇数,结果为 $C_4^1 C_5^2=40$,故 $m=44$,不充分.

3. D;由题干和条件(1)可知男生6人,则可得 $C_6^2 C_2^1=30$,所以充分;再虑条件(2),则可知男生5人,进而得 $C_5^2 C_3^1=30$,可知也充分.

4. B;由题意知1,2为一组,现只需把3,4,5,6均分两组,即 $\frac{C_4^2 C_2^2}{2!}$,于是共三组,再把它们安排到三个信封里,有 $3!$ 种方法,于是共可得 $\frac{C_4^2 C_2^2}{2!} \times 3! = 18$,再结合所给条件(1)和条件(2),可知条件(2)充分.

5. A;由条件(1)可知是不平均分組,即得 $C_{12}^2 C_{10}^4 C_6^6 = 13860$,可知充分;由条件(2)可知是平均分組问题,则得 $\frac{C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{3!} = 5775$,可知不充分.

6. D;由条件(1),因为共10个人,根据排列的定义得 $10!$;又知3个人顺序一定,所以需要除以他们之间的排序,即 $3!$,可得 $\frac{10!}{3!} = 720 \times 840$,由此可知充分;由条件(2)可知,先把无限制的男生全排列,即 $6!$,这时有7个空,再任选4个来安排女生,即 $C_7^4 \cdot 4!$,于是得 $6! \cdot C_7^4 \cdot 4! = 720 \times 840$,可知充分.

7. A;由题干及所给的条件(1)、(2)可知,两条件不可能同时充分,现考虑条件(1),

当0在末尾时,把1,2看作一个整体,然后乘以2,即 $2C_3^1 C_2^1 = 12$;

当2在末尾时,1肯定在十位,0不在首位,即 $C_2^1 C_2^1 = 4$;

当4在末尾时,把1,2看作一整体,然后乘以2,即 $2C_2^1 C_2^1 = 8$;

所以共有 $12+4+8=24$,则充分,于是可知条件(2)不充分.

8. B;由条件(1)可知,因为只有5本书,所以得 $P_5^3=5 \times 4 \times 3=60$;由条件(2)可知,因为每种书的数量不受限制,所以每个同学都可能5种书的任何一种,从而共有 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 种.

9. E;显然要联合条件(1)和条件(2)分析:由条件(1)得 $m=C_7^2=21$ (从7白球取出两个白球),由条件(2)得 $n=C_7^3=35$ (从7白球中取出3白球), $m+n=56$.

10. A;由条件(1)可知,从1~8这8个自然数中,含有4个奇数,4个偶数.从4个奇数中取出两个 C_4^2 ,从4个偶数中取出两个 C_4^2 ,再对4个数字进行全排列: $4!$,由乘法原理,得: $N=C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 4! = 864$;由条件(2)可知,从4个奇数中取出两个作为千位和百位: $C_4^2 \cdot 2!$,从4个偶数中取出两个作为十位和个位: $C_4^2 \cdot 2!$,由乘法原理,得 $N=C_4^2 \cdot 2! \cdot C_4^2 \cdot 2! = 144$.

11. E;方法一:有8个小球时,分两步完成;第一步,在第一个箱子放入1个小球,第二个箱子放入3个小球,还余下4个小球;第二步,将余下的4个小球随意放入3个箱子中,有四种情况:情况一:4个球在一起放入一个箱子,有3种;情况二:4个球分别放入两个箱子,

一个箱子里 3 个,一个箱子里 1 个,有 6 种;情况三:4 个球分别放入两个箱子,一个箱子里 2 个,另一个箱子里 2 个,有 3 种;情况四:4 个球分别放入三个箱子,一个箱子里 2 个,另两个箱子分别 1 个,有 3 种;共有 $3+6+3+3=15$ 种情况,条件 1 不充分;对于条件(2),同理可以计算有 9 个小球时有 21 种,条件 2 也不充分.

方法二:可以在第二个箱子先放入 8 个小球中的 2 个,小球剩 6 个放 3 个箱子,然后在第三个箱子放入 6 个小球之外的 1 个小球,则问题转化为把 7 个相同小球放 3 个不同箱子,每箱至少 1 个,即 $C_6^2=15$ 种;同理可以计算有 9 个小球时,有 $C_7^2=21$ 种,因此条件 1,条件 2 均不成立,联合之后也不成立.

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

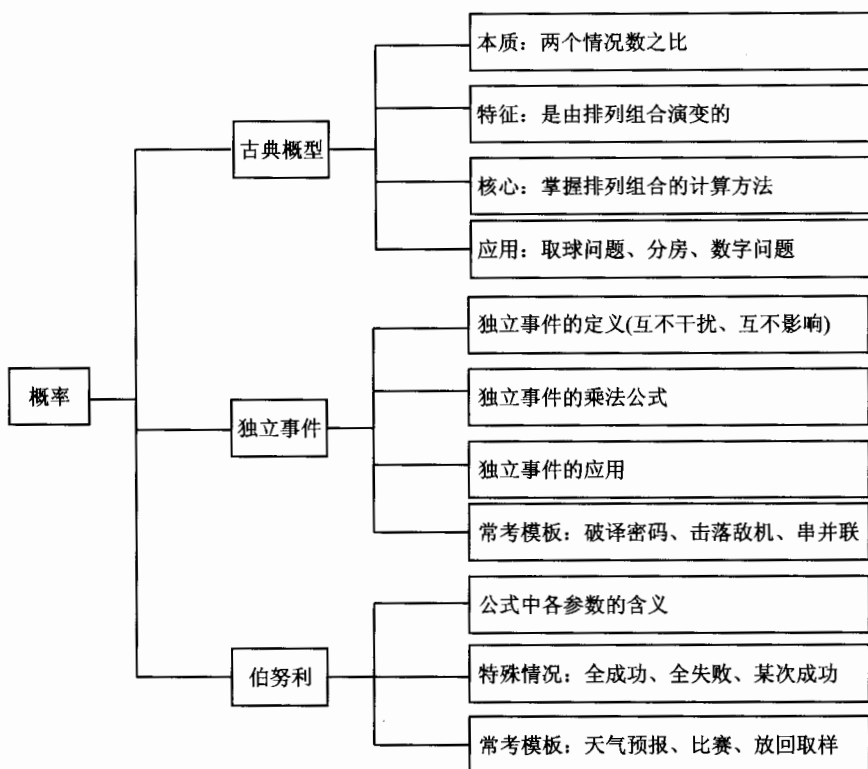
名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

第十章 概率初步

【大纲考点】(1) 事件及其简单运算;(2) 加法公式;(3) 乘法公式;(4) 古典概型;(5) 伯努利概型.

【备考要点】要理解样本空间、随机事件、基本事件、必然事件、不可能事件、和事件、积事件、互不相容事件、对立事件相关概念. 掌握常见古典概型的计算方法,理解求解思路,尤其要弄清楚与排列组合的关系;其次要理解独立事件的含义,掌握常考的独立事件模板,并能够举一反三灵活应用到做题中,最后要理解伯努利公式的含义和应用.

【知识体系】



【备考建议】对于教师,建议课时控制在6个课时;对于考生,建议在学习时要注意概念的理解及应用,古典概型是一种随机现象的数学模型,它要求所研究的样本空间是有限的,且各样本点的发生和出现是等可能的. 计算古典概率必须要知道样本点的总数和事件A所含的样本点数. 古典概率主要掌握五类基本问题(摸球问题、分球入盒问题、随机取数问题、抽签问题和分组问题). 另外要掌握事件的独立性问题 and 伯努利概型.

第一节 考试要点剖析

自然界发生的现象是多种多样的. 有一类现象, 在一定条件下必然要发生, 例如, 向上抛出一块石头必然下落, 同性电荷必然互相排斥, 等等. 这类现象称为确定性现象. 在自然界还存在着另一类现象, 例如, 在相同条件下抛同一枚硬币, 其结果可能是正面朝上, 也可能是反面朝上, 并且在每次抛币之前无法肯定抛掷的结果是什么; 用同一门炮向同一目标射击, 各次弹着点不尽相同, 在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置. 这类现象在一定的条件下可能出现这样的结果, 也可能出现那样的结果, 而在试验或观察之前不能预知确切的结果. 但人们经过长期实践并深入研究之后, 发现这类现象在大量重复试验或观察之下, 它的结果却呈现出某种规律性. 多次重复抛一枚硬币, 得到正面朝上的次数大致有一半; 同一门炮射击一定目标的弹着点按一定的规律分布, 等等. 我们把这种在大量重复试验或观测下, 其结果所呈现出的固有规律性, 称为统计规律性. 而把这种在个别试验中呈现出不确定性, 在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象, 称之为随机现象.

一、基本概念

1. 随机试验

我们遇到过各种试验, 在这里, 把试验作为一个含义广泛的术语, 它包括各种各样的科学试验, 甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 下面举一些试验性的例子:

E_1 : 抛一枚硬币, 观察正面 H 、反面 T 出现的情况.

E_2 : 将一枚硬币抛三次, 观察出现正面的次数.

E_3 : 抛一枚骰子, 观察出现的点数.

E_4 : 记录车站售票处一天内售出的车票数.

E_5 : 在一批灯泡中任意抽取一只, 测试它的寿命.

E_6 : 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

这些试验都具有以下的特点:

- (1) 可以在相同的条件下重复地进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中, 我们将具有上述三个特点的试验称为随机试验.

2. 样本空间

对于随机试验, 尽管在每次试验之前不能预知试验的结果, 但试验的一切可能的结果是已知的, 把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 S . 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点. 例如, 上面的 $E_1 \sim E_6$ 这 6 个随机试验的样本空间分别为:

$$S_1 = \{H, T\}; S_2 = \{0, 1, 2, 3\}; S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$S_4 = \{1, 2, \dots, n\}$; 这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数 n ;

$S_5 = \{t \mid t \geq 0\}$;

$S_6 = \{(x, y) \mid T_0 \leq x \leq y \leq T_1\}$; 这里 x 表示最低温度, y 表示最高温度, 并设这一地区的温度不会小于 T_0 , 也不会大于 T_1 .

3. 随机事件

在随机试验中, 可能发生也可能不发生的事情称为随机事件. 随机事件常用大写字母 A, B, C, \dots , 表示, 它是样本空间 S 的子集合. 在每次试验中, 当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时, 称事件 A 发生.

例如在 E_3 中, 如果用 A 表示事件“掷出奇点数”, 那么 A 是一个随机事件. 由于在一次投掷中, 当且仅当掷出的点数是 1, 3, 5 中的任何一个时才称事件 A 发生了, 所以我们把事件 A 表示为 $A = \{1, 3, 5\}$. 同样的, 若用 B 表示事件“掷出偶点数”, 那么 B 也是一个随机事件, 则把 B 表示为 $B = \{2, 4, 6\}$.

对于一个试验 E , 在每次试验中必然发生的事件, 称为 E 的必然事件; 在每次试验中都不发生的事件, 称为 E 的不可能事件. 例如在 E_3 中, “掷出的点数不超过 6”就是必然事件, 用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 而事件“掷出的点数大于 6”是不可能事件, 这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果, 所以用空集 \emptyset 表示. 对于一个试验 E , 它的样本空间 S 是 E 的必然事件; 空集 \emptyset 是不可能事件. 必然事件与不可能事件虽已无随机性可言, 但在概率论中, 常把它们当作两个特殊的随机事件, 这样是为了数学处理上的方便.

4. 事件间的关系与运算

因为事件是一个集合, 因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的. 下面给出这些关系和运算在概率中的提法, 并根据“事件发生”的含义, 给出它们在概率中的含义. 设试验 E 的样本空间为 S , 而 $A, B, A_k (k=1, 2, \dots)$ 是 S 的子集.

(1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 A 包含事件 B , 记为 $B \supset A$ 或者 $A \subset B$. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 互不相容事件(互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 是互斥的, 或称它们是互不相容的. 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 中的任意两个都互斥, 则称事件是两两互斥的.

(3) 对立事件

“ A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件, 记为 \bar{A} . A 和 \bar{A} 满足: $A \cup \bar{A} = S, A\bar{A} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = A$.

(4) 事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件, 记为 $A \cup B$. 事件 $A \cup B$ 发生意味着: 或事件 A 发生, 或事件 B 发生, 或事件 A 与事件 B 都发生.

事件的和可以推广到多个事件的情景. 设有 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 定义它们的和事件为 $\{A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 中至少有一个发生}\}$, 记为 $\bigcup_{k=1}^n A_k$.

(5) 事件的积

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件,记为 $A \cap B$,也简记为 AB . 事件 $A \cap B$ (或 AB) 发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生,即 A 与 B 都发生.

类似的,可以定义 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的积事件 $\bigcap_{k=1}^n A_k = \{A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 都发生}\}$.

(6) 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记为 $A - B$.

(7) 事件运算满足的定律

设 A, B, C 为事件,则有

交换律: $A \cup B = B \cup A$;

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(AB)C = A(BC)$.

分配律: $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$; $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$.

对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

二、概率的统计定义

1. 频率

设 E 为任一随机试验, A 为其中任一事件,在相同条件下,把 E 独立的重复做 n 次, n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为频数). 比值 $f_n(A) = n_A/n$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率.

人们在实践中发现:在相同条件下重复进行同一试验,当试验次数 n 很大时,某事件 A 发生的频率具有一定的“稳定性”,就是说其值在某确定的数值上下摆动. 一般说,试验次数 n 越大,事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值. 因此事件 A 发生的可能性的的大小就可以用这个数量指标来描述.

2. 概率的统计定义

设有随机试验 E , 若当试验的次数 n 充分大时,事件 A 的发生频率 $f_n(A)$ 稳定在某数 p 附近摆动,则称数 p 为事件的概率,记为: $P(A) = p$.

概率的这种定义,称为概率的统计定义. 统计定义是以试验为基础的,但这并不是说概率取决于试验. 值得注意的是事件 A 出现的概率是事件 A 的一种属性. 也就是说,完全决定于事件 A 本身的结果,是先于试验客观存在的. 概率的统计定义只是描述性的,一般不能用来计算事件的概率. 通常只能在 n 充分大时,以事件出现的频率作为事件概率的近似值.

3. 概率的性质

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$.

(2) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

(3) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

(4) 若 $AB = \emptyset$, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

(5) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

三、古典概型

1. 古典概型

随机试验 E 具有以下两个特征:

- (1) 样本空间的元素(即基本事件)只有有限个;
- (2) 每个基本事件出现的可能性是相等的,称 E 为古典概型试验.

2. 古典概率

在古典概型的情况下,事件 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数 } k}{\text{样本空间中基本事件总数 } n}.$$

【注意】计算古典概率时,首先要弄清随机试验是什么?即判断有限性和等可能性是否满足,其次要弄清样本空间是怎样构成的,构成样本空间的每个基本事件出现一定要等可能的.忽略了这一点,就会导致错误的结果.

古典概型研究的对象大致可分为三类问题:①摸球;②分房;③随机取数(电话号码)问题.这几类问题的解决方法将在典型例题或练习题中给出.

3. 互斥事件的概率求法(加法)

一般来讲,如果事件 A, B 互斥,那么事件 $A+B$ 发生(即 A, B 中有一个发生)的概率,等于事件 A, B 分别发生的概率的和.

如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 彼此互斥,那么事件 $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ 发生(即 A_1, A_2, \dots, A_n 中有一个发生)的概率,等于这 n 个事件分别发生的概率的和,即

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

【注意】由对立事件的意义可知: $A + \bar{A}$ 是一个必然事件,它的概率等于 1,又由于 A 与 \bar{A} 互斥,可以得到: $P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = 1$,对立事件的概率的和等于 1,同样 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

四、事件的独立性

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

1. 独立事件

如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率,则称这两事件是相互独立的.

2. 定义

若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称两事件 A 和 B 是相互独立的. 可将其理解为相互独立事件同时发生的概率, 即 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

3. 常用结论

(1) 如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 那么这 n 个事件同时发生的概率, 等于每个事件发生的概率的积, 即 $P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$.

(2) 如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 那么这 n 个事件都不发生的概率等于每个事件不发生的概率的积, 即 $P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n)$.

(3) 如果事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 那么这 n 个事件至少有一个发生的概率, 可以从其反面求解, 即等于每个事件发生的概率的积,

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}).$$

【注意】独立与互斥的区别: 两事件 A, B 独立, 则常有 $AB \neq \emptyset$, 即 A 与 B 非互斥; 事实上, 若 A 与 B 互斥, 则 $P(AB) = 0$, 而当 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 时, $P(A)P(B) > 0$, 可知 $P(AB) \neq P(A)P(B)$. 因此两事件互斥并不能得出这两个事件就独立的结论. 互斥事件与相互独立事件研究的都是两个事件的关系, 但互斥的两个事件是一次试验中的两个事件, 相互独立的两个事件是在两次试验中得到的, 注意区别.

五、伯努利公式

1. 独立重复试验

在相同条件下, 将某试验重复进行 n 次, 且每次试验中任何一事件的概率不受其他次试验结果的影响, 此种试验称为 n 次独立重复试验.

2. 伯努利公式

如果在一次试验中某事件发生的概率是 p , 那么在 n 次独立重复试验中这个事恰好发生 k 次的概率, 即

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n), \text{ 其中 } q=1-p.$$

【特殊】

$k=n$ 时, 即在 n 次独立重复试验中事件 A 全部发生, 概率为

$$P_n(n) = C_n^n p^n (1-p)^0 = p^n.$$

$k=0$ 时, 即在 n 次独立重复试验中事件 A 没有发生, 概率为

$$P_n(0) = C_n^0 p^0 (1-p)^n = (1-p)^n.$$

【理解】 n 次独立重复试验的特征:

- ① 试验的次数不止一次, 而是多次, 次数 $n \geq 1$;
- ② 每次试验的条件是一样的, 是重复性的试验序列;
- ③ 每次试验的结果只有 A 与 \bar{A} 两种 (即事件 A 要么发生, 要么不发生), 每次试验相互独立, 试验的结果互不影响, 即各次试验中发生的概率保持不变.

【应用】一般地, n 次独立重复试验中某事件至少发生 k 次的概率公式为

$$P_n(i \geq k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + C_n^{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} + \dots + C_n^n p^n (1-p)^0.$$

【模型】将一骰子掷 10 次观察出现 6 点的次数——10 重伯努利试验. 在装有 8 个正品, 2 个次品的箱子中, 有放回地取 5 次产品, 每次取一个, 观察取得次品的次数——5 重伯努利试验. 向目标独立地射击 n 次, 每次击中目标的概率为 P , 观察击中目标的次数—— n 重伯努利试验, 等等.

【评注】 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 即是二项式 $[p + (1-p)]^n$ 的展开式中第 $k+1$ 项的值, $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$ 也称为是二项分布公式. 概率 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$ 的分布称为二项分布或称为伯努利 (Bernoulli) 概型.

第二节 基础过关题型

【题型 1】摸球问题(取样问题)

【思路点拨】如果把题中的“白球”、“黑球”换为“正品”、“次品”或“甲物”、“乙物”等,就可以得到各种各样的“摸球问题”。不难发现,各个取样问题的解决,都可以归结为摸球问题。摸球问题具有典型意义,原因也正在于此。

【例 1】一袋中有 8 个大小形状相同的球,其中 5 个黑色球,3 个白色球。

(1) 从袋中随机地取出两个球,求取出的两球都是黑色球的概率。

(2) 从袋中不放回取两次,每次取一个球,求取出的两球都是黑色球的概率。

(3) 从袋中有放回取两次,每次取一个球,求取出的两球至少有一个是黑球的概率。

【解析】设 $A = \{\text{取出的两球是黑球}\}$, $B = \{\text{取出的两球是白球}\}$, $C = \{\text{取出的两个球至少有一个是黑球}\}$ 。

(1) 从 8 个球中取出两个,不同的取法有 C_8^2 种,从而 $P(A) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$;

(2) 由于是不放回的取球,球的数量在减少,所以必须逐次分析,从而 $P(A) = \frac{C_5^1}{C_8^1} \cdot \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{5}{14}$;

(3) 从反面计算概率: $P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{C_3^1}{C_8^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_8^1} = \frac{55}{64}$ 。

【例 2】甲、乙二人参加普法知识竞答,共有 10 个不同的题目,其中选择题 6 个,判断题 4 个。甲、乙二人依次各抽一题。

(1) 甲抽到选择题和乙抽到判断题的概率是多少?

(2) 甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少?

【解析】(1) 甲从选择题中抽到一题的可能结果有 C_6^1 个,乙依次从判断题中抽到一题的可能结果有 C_4^1 个,故甲抽到选择题、乙依次抽到判断题的可能结果有 $C_6^1 C_4^1$ 个;又甲、乙依次抽一题的可能结果有 $C_{10}^1 C_9^1$ 个,所以甲抽到选择题、乙依次抽到判断题的概率为 $\frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^1 C_9^1} = \frac{4}{15}$,所求概率为 $\frac{4}{15}$;

(2) 甲、乙二人依次都抽到判断题的概率为 $\frac{C_4^1 C_3^1}{C_{10}^1 C_9^1}$,故甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率为 $1 - \frac{C_4^1 C_3^1}{C_{10}^1 C_9^1} = \frac{13}{15}$,所求概率为 $\frac{13}{15}$;或 $\frac{C_6^1 C_5^1}{C_{10}^1 C_9^1} + \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^1 C_9^1} + \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^1 C_9^1} = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15}$,所求概率为 $\frac{13}{15}$ 。

【例 3】某班有两个课外活动小组,其中第一小组有足球票 6 张,排球票 4 张;第二小组有足球票 4 张,排球票 6 张。甲从第一小组的 10 张票中任抽 1 张,乙从第二小组的 10 张票中任抽 1 张。问

(1) 两人都抽到足球票的概率是多少?

(2) 两人中至少有 1 人抽到足球票的概率是多少?

【解析】记“甲从第一小组的 10 张票中任抽 1 张,抽到足球票”为事件 A ,“乙从第二小组的 10 张票中任抽 1 张,抽到足球票”为事件 B ;记“甲从第一小组的 10 张票中任抽 1 张,抽到排球票”为事件 \bar{A} ,“乙从第二小组的 10 张票中任抽 1 张,抽到排球票”为事件 \bar{B} ,于是 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P(\bar{A}) = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(\bar{B}) = \frac{3}{5}$.

由于甲(或乙)是否抽到足球票,对乙(或甲)是否抽到足球票没有影响,因此 A 与 B 是相互独立事件.

(1) 甲、乙两人都抽到足球票就是事件 $A \cdot B$ 发生,根据相互独立事件的概率乘法公式,得到 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$.

(2) 甲、乙两人均未抽到足球票(事件 $\bar{A} \cdot \bar{B}$ 发生)的概率为 $P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

所以,两人中至少有 1 人抽到足球票的概率为 $P = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$.

【例 4】从编号为 1,2,...,10 的 10 个大小相同的球中任取 4 个,则所取 4 个球的最大号码是 6 的概率为().

- (A) $\frac{1}{84}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{21}$ (E) $\frac{1}{20}$

【解析】从 10 个大小相同的球中任取 4 个有 C_{10}^4 种方法,若所取 4 个球的最大号码是 6,则有一个球号码是 6,另外三个球要从 1,2,3,4,5 号球中取 3 个,有 C_5^3 种方法,

所以, $P = \frac{C_5^3}{C_{10}^4} = \frac{1}{21}$, 故选 D.

【例 5】一袋中装有大小相同、编号分别为 1,2,3,4,5,6,7,8 的八个球,从中有放回地每次取一个球,共取 2 次,则取得两个球的编号和 不小于 15 的概率为().

- (A) $\frac{1}{32}$ (B) $\frac{1}{64}$ (C) $\frac{3}{32}$ (D) $\frac{3}{64}$ (E) $\frac{5}{64}$

【解析】从中有放回地取 2 次,所取号码共有 $8 \times 8 = 64$ 种,其中和 不小于 15 的有 3 种,分别是 (7,8), (8,7), (8,8), 故所求概率为 $P = \frac{3}{64}$, 故选 D.

【例 6】一个坛子里有编号为 1,2,...,12 的 12 个大小相同的球,其中 1~6 号球是红球,其余的是黑球,若从中任取两个球,则取到的都是红球,且至少有 1 个球的号码是偶数的概率,其概率是().

- (A) $\frac{1}{22}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{3}{22}$ (D) $\frac{2}{11}$ (E) $\frac{3}{11}$

【解析】从中任取两个球共有 $C_{12}^2 = 66$ 种取法,其中取到的都是红球,且至少有 1 个球的号码是偶数的取法有 $C_6^2 - C_3^2 = 12$ 种取法,概率为 $\frac{12}{66} = \frac{2}{11}$, 故选 D.

【题型 2】分球入盒问题(分房模型)

【思路点拨】分房问题主要考查可重复排列问题,核心是次方的运算特征.

【例 7】某宾馆有 6 间客房,现要安排 4 位旅游者,每人可以进住任意一个房间,且进住各房间是等可能的. 事件 A:指定的 4 个房间各有 1 人;事件 B:恰有 4 个房间各有 1 人;事件 C:指定的某房间中有 2 人;事件 D:一号房间有 1 人,二号房间有 2 人;事件 E:至少有 2 人在同一个房间,则下列叙述错误的为().

(A) $P(A) = \frac{1}{54}$

(B) $P(B) = \frac{5}{18}$

(C) $P(C) = \frac{29}{216}$

(D) $P(D) = \frac{1}{27}$

(E) $P(E) = \frac{13}{18}$

【解析】由于每人可以进住任一房间,进住哪一个房间都有 6 种等可能的方法,根据乘法原理,4 个人进住 6 个房间有 6^4 种方法,则

(1) 指定的 4 个房间中各有 1 人有 $4!$ 种方法, $P(A) = \frac{4!}{6^4} = \frac{1}{54}$.

(2) 恰有 4 个房间各有 1 人有 $C_6^4 4!$ 种方法, $P(B) = \frac{C_6^4 4!}{6^4} = \frac{5}{18}$.

(3) 从 4 人中选 2 人的方法有 C_4^2 种,余下的 2 人每人都可以去另外的 5 个房间中的任一间,有 5^2 种方法,则 $P(C) = \frac{C_4^2 \cdot 5^2}{6^4} = \frac{25}{216}$.

(4) 从 4 人中选 1 人去一号房间的方法有 C_4^1 种,从余下 3 人中选 2 人去二号房间的方法有 C_3^2 ,再余下的 1 人可去 4 个房间中的任一间,即 $P(D) = \frac{C_4^1 C_3^2 \cdot 4}{6^4} = \frac{1}{27}$.

(5) 从正面考虑情形较复杂,正难则反,“至少有 2 人在同一个房间”的反面是“没有 2 人在同一个房间,即恰有 4 个房间各有 1 人”, $P(E) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{13}{18}$. 综上所述,故选 C.

【评注】本题系统考查了带有约束条件的分房古典概型,通过本题能够掌握分房问题的各种考法.

【例 8】甲、乙、丙三名志愿者被随机地分到 A, B, C, D 四个不同的岗位服务,则

(1) 甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率为().

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{16}$

(D) $\frac{3}{16}$

(E) $\frac{5}{32}$

(2) 甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率为().

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{3}{8}$

(D) $\frac{1}{8}$

(E) $\frac{17}{32}$

【解析】方法一:三名志愿者被随机地分到四个不同的岗位服务,共有 $4^3 = 64$ 种不同的情况.

(1) 甲、乙两人同时参加 A 岗位服务有 4 种情况,所求概率为 $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$;故选 C.

(2) 甲、乙两人同时参加同一岗位服务有 $4 \times 4 = 16$ 种不同情况,所以,甲、乙两人不在同一岗位服务的概率是 $1 - \frac{16}{64} = \frac{3}{4}$. 故选 B.

方法二:甲、乙、丙分到每个岗位服务的概率都是 $\frac{1}{4}$.

(1) 甲参加 A 岗位服务的概率为 $\frac{1}{4}$, 乙参加 A 岗位服务的概率为 $\frac{1}{4}$, 两者独立, 所以甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$;

(2) 甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率为 $\frac{1}{16}$, 甲、乙两人同时参加 B, C, D 岗位服务的概率也都为 $\frac{1}{16}$, 且互斥, 所以甲、乙两人同时参加同一岗位的概率为:

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4},$$

因此, 甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率为 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

【评注】本题方法一是采用古典概型计算的, 方法二是借助独立事件求解的. 可以看出, 对于定概率的古典概型, 可以转化为独立事件求解.

【题型 3】随机取数问题(元素位置问题)

【思路点拨】遇到数字问题, 根据约束条件的情况可以转化为元素位置的方法进行思考.

【例 9】在 1~9 的整数中可重复地随机取 6 个数组成 6 位数, 求下列事件的概率:

- (1) 6 个数完全不同;
- (2) 6 个数不含奇数;
- (3) 6 个数中 5 恰好出现 4 次.

【解析】从 9 个数中允许重复地取 6 个数进行排列, 共有 9^6 种排列方法.

(1) 事件 $A = \{6 \text{ 个数完全不同}\}$ 的取法有 $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ 种取法, 故

$$P(A) = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{9^6} \approx 0.11.$$

(2) 事件 $B = \{6 \text{ 个数不含奇数}\}$ 的取法. 因为 6 个数只能在 2, 4, 6, 8 四个数中选, 每次有 4 种取法, 所以有 4^6 取法, 故 $P(B) = \frac{4^6}{9^6}$.

(3) 事件 $C = \{6 \text{ 个数中 5 恰好出现 4 次}\}$ 的取法. 因为 6 个数中 5 恰好出现 4 次可以是 6 次中的任意 4 次, 出现的方式有 C_6^4 种, 剩下的两种只能在 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 中任取, 共有 8^2 种取法, 故 $P(C) = \frac{C_6^4 8^2}{9^6}$.

【例 10】从数字 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个, 组成没有重复数字的三位数, 计算:

- (1) 三位数是 5 的倍数的概率;
- (2) 三位数是偶数的概率;
- (3) 三位数大于 400 的概率.

【解析】(1) 任取 3 个数组成没有重复数字的三位数有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 个, 而是 5 的倍数需要个位是 5, 有 $4 \times 3 = 12$ 个, 所以所求的概率为 $P_1 = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.

(2) 这个三位数是偶数, 则个位数是 2 或 4, 所求概率为 $P_2 = \frac{2}{5}$.

(3) 这个三位数大于 400, 则首位上是 4 或 5 之一, 所求概率为 $P_3 = \frac{2}{5}$.

【例 11】某班数学兴趣小组有 5 名男同学, 3 名女同学. 求下列事件的概率:

- (1) 8人排成一队,其中甲必须站在排头的概率?
 (2) 8人排成一队,其中甲不能站在排头与排尾的概率?
 (3) 8人排成一队,其中任何两名女同学都不能相邻的概率?

【解析】此题是关于古典概型中的排列问题. 所有基本事件的总数是8人的全排列,即 $8!$ 种;

$$(1) P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}.$$

(2) 是在(1)的基础上加深一步,可分两种方法来求. 第一种解法:8人全排列中扣除甲站在排头与排尾的情况,即 $8! - 2 \times 7!$. 第二种解法:甲在中间6个空位中任选一个,其余7人全排列. 即 $m = C_6^1 \cdot 7!$. 两种解法所得甲不能站在排头与排尾的概率都是 $P(B) = \frac{3}{4}$.

(3) 应利用插空法分两步来求得,首先是把5个男生排成一排共 $5!$ 种,这时有6个间隙,再把3个女生插入这6个间隙里有 $C_6^3 \cdot 3!$ 种,即 $m = 5! \cdot C_6^3 \cdot 3!$. 所以可得任何两名女同学都不能相邻的概率

$$P(C) = \frac{5! \times C_6^3 \cdot 3!}{8!} = \frac{5}{14}.$$

【例12】将一骰子连续抛掷三次,它落地时向上的点数依次成等差数列的概率为().

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{1}{18}$ (E) $\frac{1}{14}$

【解析】一骰子连续抛掷三次得到的数列共有 6^3 个,其中为等差数列有三类:

- (1) 公差为0的有6个;
 (2) 公差为1或-1的有8个;
 (3) 公差为2或-2的有4个,共有18个,成等差数列的概率为 $\frac{18}{6^3}$,故选B.

【评注】本题采用列举法求出成等差数列的情况数,在求解时,注意到公差可以为负.

【题型4】独立事件

【思路点拨】要掌握利用独立事件求解,恰有一个事件发生 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ 的概率,恰有两个事件发生 $AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C$ 的概率,三个事件都发生 ABC 的概率,至少有一个事件发生 $A \cup B \cup C$ 的概率, A, B, C 都不发生 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 的概率和 A, B, C 不都发生 \overline{ABC} 的概率.

【例13】甲、乙两人独立地解同一问题,甲解决这个问题的概率是 p_1 ,乙解决这个问题的概率是 p_2 ,那么恰好有1人解决这个问题的概率是().

- (A) $p_1 p_2$ (B) $p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$ (C) $1-p_1 p_2$
 (D) $1-(1-p_1)(1-p_2)$ (E) $1-p_1-p_2$

【解析】恰有一人解决就是甲解决乙没有解决或甲没有解决乙解决,故所求概率是 $p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$,故选B.

【例14】设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响. 已知在某一小时内,甲、乙都需要照顾的概率为0.05,甲、丙都需要照顾的概率为0.1,乙、丙都需要照顾的概率

为0.125,则

(1) 丙在这个小时内需要照顾的概率是().

(A) 0.2 (B) 0.25 (C) 0.5 (D) 0.8 (E) 0.6

(2) 在这个小时内至少有一台需要照顾的概率为().

(A) 0.3 (B) 0.4 (C) 0.5 (D) 0.6 (E) 0.7

【解析】(1) 记甲、乙、丙三台机器在一小时需要照顾分别为事件 A, B, C , 则 A, B, C 相互独立, 由题意得 $P(AB) = P(A)P(B) = 0.05, P(AC) = P(A)P(C) = 0.1, P(BC) = P(B)P(C) = 0.125$,

解得 $P(A) = 0.2; P(B) = 0.25; P(C) = 0.5$. 选 C.

所以甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是 0.2、0.25、0.5.

(2) 因为 A, B, C 相互独立, 所以 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 相互独立, 甲、乙、丙每台机器在这个小时内都不需要照顾的概率为

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.8 \times 0.75 \times 0.5 = 0.3.$$

这个小时内至少有一台需要照顾的概率为 $P = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = 1 - 0.3 = 0.7$. 选 E.

【例 15】某人对一目标进行射击, 每次命中率都是 0.25, 若使至少命中 1 次的概率不小于 0.75, 至少应射击()次. ($\lg 0.25 = -0.6, \lg 0.75 = -0.12$)

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

【解析】设要使至少命中 1 次的概率不小于 0.75, 应射击 n 次.

记事件 $A =$ “射击一次, 击中目标”, 则 $P(A) = 0.25$.

因为射击 n 次相当于 n 次独立重复试验,

所以事件 A 至少发生 1 次的概率为 $P = 1 - P_n(0) = 1 - 0.75^n$.

由题意, 令 $1 - 0.75^n \geq 0.75$, 故

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{1}{4}, n \geq \frac{\lg \frac{1}{4}}{\lg \frac{3}{4}} \approx 4.82,$$

因此 n 至少取 5. 所以要使至少命中 1 次的概率不小于 0.75, 至少应射击 5 次. 选 B.

【例 16】设有两门高射炮, 每一门击中飞机的概率都是 0.6, 则

(1) 同时射击一发炮弹而命中飞机的概率为().

(A) 0.64 (B) 0.68 (C) 0.74 (D) 0.78 (E) 0.84

(2) 若又一架敌机侵犯, 至少要以 99% 的概率击中它, 则需()门炮. ($2^{10} = 1024$)

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

【解析】(1) $P = 0.6 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 + 0.6 \times 0.4 = 0.84$. 选 E.

(2) 不妨设至少需要 x 门高炮才能完成任务, 则 $1 - 0.4^x \geq 0.99$, 即 $0.4^x \leq 0.01$, 得到 $x > 5$, 所以 $x = 6$. 选 C.

【例 17】三人独立地破译一个密码, 三人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$, 则密码能被译出的概率为().

(A) 0.4 (B) 0.5 (C) 0.6 (D) 0.7 (E) 0.8

【解析】令 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个人能译出密码}\}, i = 1, 2, 3; A = \{\text{密码能被译出}\}$, 所要求的概

率为

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 0.6.$$

选 C.

【例 18】甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球，命中率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 p ，且

乙投球 2 次均未命中的概率为 $\frac{1}{16}$ ，则

(1) 乙投球的命中率 p 为().

(A) 0.45 (B) 0.55 (C) 0.65 (D) 0.75 (E) 0.8

(2) 甲投球 2 次，至少命中 1 次的概率为().

(A) 0.45 (B) 0.55 (C) 0.65 (D) 0.75 (E) 0.8

(3) 若甲、乙两人各投球 2 次，则两人共命中 2 次的概率为().

(A) $\frac{3}{16}$ (B) $\frac{5}{16}$ (C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{7}{32}$ (E) $\frac{11}{32}$

【解析】(1) 方法一：设“甲投球一次命中”为事件 A ，“乙投球一次命中”为事件 B 。由题意得 $(1 - P(B))^2 = (1 - p)^2 = \frac{1}{16}$ 。解得 $p = \frac{3}{4}$ 或 $\frac{5}{4}$ (舍去)，所以乙投球的命中率为 $\frac{3}{4}$ 。

方法二：设“甲投球一次命中”为事件 A ，“乙投球一次命中”为事件 B 。由题意得 $P(\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{16}$ ，于是 $P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$ 或 $P(\bar{B}) = -\frac{1}{4}$ (舍去)，故 $p = 1 - P(\bar{B}) = \frac{3}{4}$ 。

所以乙投球的命中率为 $\frac{3}{4}$ 。选 D。

(2) 方法一：由题设和(1)知 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ 。故甲投球 2 次至少命中 1 次的概率为 $1 - P(\bar{A} \cdot \bar{A}) = \frac{3}{4}$ 。

方法二：由题设和(1)知 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ 。

故甲投球 2 次至少命中 1 次的概率为 $C_2^1 P(A)P(\bar{A}) + P(A)P(A) = \frac{3}{4}$ 。选 D。

(3) 由题设和(1)知，

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{4}, P(\bar{B}) = \frac{1}{4}.$$

甲、乙两人各投球 2 次，共命中 2 次有三种情况：甲、乙两人各中一次；甲中两次，乙两次均不中；甲两次均不中，乙中 2 次，其概率分别为

$$C_2^1 P(A)P(\bar{A}) \cdot C_2^1 P(B)P(\bar{B}) = \frac{3}{16},$$

$$P(A \cdot A)P(\bar{B} \cdot \bar{B}) = \frac{1}{64}, P(\bar{A} \cdot \bar{A})P(B \cdot B) = \frac{9}{64}.$$

所以甲、乙两人各投两次，共命中 2 次的概率为 $\frac{3}{16} + \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{11}{32}$ 。选 E。

第三节 强化突破题型

【题型 1】古典概型

【思路点拨】系统复习阶段的古典概型主要掌握综合性的古典概型计算,尤其涉及更多的分类方法,全面利用排列组合知识来分析题目。

【例 1】在试制牙膏时,需要选用两种不同的添加剂.现有芳香度分别为 0,1,2,3,4,5 的六种添加剂可供选用.根据试验原理,通常要随机选取两种不同的添加剂进行搭配试验.则

(I)所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和等于 4 的概率为().

- (A) $\frac{2}{15}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{15}$ (E) $\frac{1}{3}$

(II)所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和不小于 3 的概率为().

- (A) $\frac{2}{15}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{15}$ (E) $\frac{13}{15}$

【解析】设“所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和等于 4”的事件为 A,“所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和不小于 3”的事件为 B,则

(I)芳香度之和等于 4 的取法有 2 种:(0,4)、(1,3),故 $P(A) = \frac{2}{15}$. 选 A.

(II)从反面思考:芳香度之和等于 1 的取法有 1 种:(0,1);芳香度之和等于 2 的取法有 1 种:(0,2),故 $P(B) = 1 - \left(\frac{1}{C_6^2} + \frac{1}{C_6^2}\right) = \frac{13}{15}$. 选 E.

【例 2】一个盒子中有大小相同的 4 个红球,2 个白球.现从中不放回地先后摸球,直到 2 个白球都摸出为止.则

(1)摸球 2 次就完成的概率为().

- (A) $\frac{2}{15}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{15}$ (E) $\frac{1}{15}$

(2)摸球 4 次就完成的概率为().

- (A) $\frac{2}{15}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{15}$ (E) $\frac{7}{15}$

【解析】(1)因为两次都要摸得白球才能成立,所以概率 $P(A) = \frac{C_2^2}{C_6^2} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} = \frac{1}{15}$. 选 E.

(2)方法一:将球视为不同球,此时逐次取要考虑顺序:

$$\text{概率 } P = \frac{C_2^2 C_4^2 \cdot C_3^2 \cdot 2! \cdot 2!}{C_6^4 \cdot 4!} = \frac{1}{5}.$$

其中分子: C_2^2 表示取 2 个白球, C_4^2 表示取 2 个红球, C_3^2 表示红球从前 3 次中选 2 次,2! 表示两红球排序,2! 表示两白球排序. 分母: C_6^4 表示从 6 个球中取 4 个球,4! 表示排序.

方法二:将白球视为相同,将红球视为相同.对于逐次取样可以转化为位置思考,如图共有 6 个位置,其中第 4 个位置必须放白球,前 3 个位置选一个放白球,由于红球无要求,故可不考虑红球,

从而概率 $P = \frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{1}{5}$.

其中分子 C_3^1 表示从前 3 个位置选一个位置放白球, 分母 C_6^2 表示可以从 6 个位置选 2 个放白球. 选 B.

【评注】关键要理解在什么情况下摸球 4 次完成呢? 许多人会认为摸球 4 次, 得到 2 个白球这样考虑就错了, 因为题干中要求“直到 2 个白球都摸出为止”, 有终止限制. 另外, 对于逐次取样, 无论将球看成相同还是不同不影响概率.

【例 3】一个袋中有若干个大小相同的黑球、白球和红球. 从袋中任意摸出 2 个球, 至少得到 1 个白球的概率是 $\frac{7}{9}$. 若袋中共有 10 个球, 则白球的个数为().

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

【解析】记“从袋中任意摸出两个球, 至少得到一个白球”为事件 A, 设袋中白球的个数为 x , 则 $P(A) = 1 - \frac{C_{10-x}^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{9}$, 得到 $x = 5$, 故白球有 5 个. 选 C.

【例 4】袋中有若干个大小相同的黑球、白球和红球. 从袋中任意摸出 1 个球, 得到黑球的概率是 $\frac{2}{5}$. 设从袋中任意摸出 2 个球, 至少得到 1 个黑球的概率为 P , 则 P 的最大值为().

- (A) 0.4 (B) 0.5 (C) 0.6 (D) 0.7 (E) 0.8

【解析】设袋中有 n 个球, 其中 $\frac{2}{5}n$ 个黑球, 由于球的数量为整数, 故 $n \geq 5$,

从而记“从袋中任意摸出两个球, 至少有 1 个黑球”为事件 A, 则

$$P(A) = 1 - \frac{C_{\frac{3}{5}n}^2}{C_n^2} = 1 - \frac{\frac{3}{5}(\frac{3}{5}n-1)}{n-1} = 1 - \frac{3}{5} \left[\frac{3}{5} - \frac{\frac{2}{5}}{n-1} \right] = \frac{16}{25} + \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{n-1}. \text{ 故}$$

由 n 越小, P 越大, 从而 $n = 5$ 时, P 最大为 $\frac{7}{10}$, 选 D.

【例 5】一位国王的铸币大臣在每箱 10 枚的硬币中各掺入了一枚劣币, 国王怀疑大臣作弊, 他用了两种方式来检测. 方式一: 在 10 个箱子中各任意抽查一枚; 方式二: 在 5 个箱中各任意抽查两枚. 国王用方法一、二能发现至少一枚劣币的概率分别为 p_1 和 p_2 , 则().

- (A) $p_1 = p_2$ (B) $p_1 < p_2$ (C) $p_1 > p_2$
(D) 以上三种情况都有可能 (E) 无法确定

【解析】从反面思考, 考虑没有劣币的概率.

方式一: 每箱没有劣币的概率为 $\frac{9}{10}$, 故概率 $p_1 = 1 - 0.9^{10}$.

方式二: 每箱没有劣币的概率为 $\frac{C_9^2}{C_{10}^2} = 0.8$, 总事件的概率为 $p_2 = 1 - 0.8^5$,

作差得 $p_1 < p_2$, 故选 B.

【例 6】储蓄卡上的密码是一种四位数字号码, 每位上的数字可在 0 到 9 这 10 个数字中选取.

(I) 如果随意按下一个四位数字号码, 正好按对这张储蓄卡密码的概率有().

(II)某人忘记密码,则恰好第三次尝试成功的概率为().

(III)若连续输错3次,则银行卡将被锁定,若某人忘记密码,他能尝试成功的概率为().

- (A) $\frac{1}{10^4}$ (B) $\frac{3}{10^4}$ (C) $\frac{1}{720}$
(D) $\frac{5}{720}$ (E) $\frac{7}{10^4}$

【解析】(I)储蓄卡每位上的数字有从0~9共10种取法,这种号码共有 10^4 个;又由于是随意按下一个四位数字号码,按下其中哪一个号码的可能性都相等,可得正好按对这张储蓄卡的密码的概率是 $P_1 = \frac{1}{10^4}$. 选A.

(II)恰好第3次成功,表示前2次失败,第3次成功,从而概率

$$P_2 = \frac{10^4 - 1}{10^4} \times \frac{10^4 - 2}{10^4 - 1} \times \frac{1}{10^4 - 2} = \frac{1}{10^4}. \text{ 选A.}$$

【评注】无论第几次试成功的概率相同,都为 $P_2 = \frac{1}{10^4}$.

(III)若连续输错3次,银行卡将被锁定,说明有三次成功的情况:第一次尝试成功,第二次尝试成功,第三次尝试成功. 根据第(2)问知,由于每次试成功的概率相同,所以最后成功的概率为 $P_3 = \frac{3}{10^4}$. 选B.

【例7】甲、乙等五名奥运志愿者被随机地分到A,B,C,D四个不同的岗位服务,每个岗位至少有一名志愿者. 则

(I)甲、乙两人同时参加A岗位服务的概率 P_1 为().

(II)甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率 P_2 为().

(III)A岗位服务的人数为2的概率 P_3 为().

- (A) $\frac{1}{40}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{9}{10}$
(D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{3}{10}$

【解析】先求总情况数:将5人按2人、1人、1人、1人分成4堆,有 C_5^2 种,再安排到4个岗位,共有 $C_5^2 \cdot 4! = 240$ 种.

(I) $P_1 = \frac{3!}{C_5^2 4!} = \frac{1}{40}$, 其中,分子3!表示其他3人在B,C,D岗位排序. 即甲、乙两人同时参加A岗位服务的概率是 $\frac{1}{40}$. 选A.

(II)从反面思考,求甲乙在同一岗的概率. 可先让甲乙选1个岗,有 C_4^1 种,再将其他3人安排到剩下的3个岗,有3!种. 则甲、乙两人不在同一岗位服务的概率是 $P_2 = 1 - \frac{4!}{C_5^2 4!} = \frac{9}{10}$. 选C.

(III)有两人同时参加A岗位服务,先选2人安排到A岗,有 C_5^2 种,其余3人在剩下的3个岗,有3!种,则 $P_3 = \frac{C_5^2 3!}{C_5^2 4!} = \frac{1}{4}$. 选D.

【题型 2】独立事件

【思路点拨】求事件和的概率的方法是首先判断事件中每个事件之间是否两两互斥,如果互斥,求出每个事件的概率,最后利用互斥事件有一个发生的概率公式即可,如果不互斥必须通过其他途径变形求解.

(1) 互斥事件有一个发生的概率

求解这类问题的数学思想方法是:在给定的命题背景下,先判断事件之间是否互斥,并理解“和事件”的意义,计算出每个简单事件的概率,然后再利用互斥事件的概率计算公式进行加法运算.特别要注意的是,若事件 A 与 B 不是互斥事件而是相互独立事件,那么在计算 $P(A+B)$ 的值时绝对不可以使用 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 这个公式,只能从对立事件的角度出发,运用 $P(A+B)=1-P(\bar{A}\bar{B})$ 进行计算.

(2) 相互独立事件同时发生的概率

在同一随机试验中,两事件互斥是指两个不可能同时发生的事件;两事件相互独立是指其中的一个事件发生与否对另一个事件的发生没有影响.特别要注意:若事件 A 与 B 不是相互独立事件而是互斥事件,那么在计算 $P(AB)$ 的值时绝对不可以使用 $P(A \cdot B)=P(A)P(B)$ 这个公式,只能从对立事件的角度出发,运用 $P(A \cdot B)=1-P(\bar{A}+\bar{B})$ 进行计算.

【例 8】甲、乙两人进行射击比赛,在一轮比赛中,甲、乙各射击一发子弹.根据以往资料知,甲击中 8 环,9 环,10 环的概率分别为 0.6,0.3,0.1,乙击中 8 环,9 环,10 环的概率分别为 0.4,0.4,0.2.设甲、乙的射击相互独立.

(I) 在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中环数的概率为().

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4 (E) 0.5

(II) 在独立的三轮比赛中,至少有两轮甲击中的环数多于乙击中环数的概率为().

(A) 0.104 (B) 0.114 (C) 0.204 (D) 0.214 (E) 0.102

【解析】记 A_1, A_2 分别表示甲击中 9 环,10 环, B_1, B_2 分别表示乙击中 8 环,9 环, A 表示在一轮比赛中甲击中的环数多于乙击中的环数, B 表示在三轮比赛中至少有两轮甲击中的环数多于乙击中的环数, C_1, C_2 分别表示三轮中恰有两轮,三轮甲击中环数多于乙击中的环数.

(I) $A = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2$, $P(A) = P(A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2)$
 $= P(A_1 \cdot B_1) + P(A_2 \cdot B_1) + P(A_2 \cdot B_2) = P(A_1) \cdot P(B_1) + P(A_2) \cdot P(B_1) + P(A_2) \cdot$
 $P(B_2) = 0.3 \times 0.4 + 0.1 \times 0.4 + 0.1 \times 0.4 = 0.2$. 选(B).

(II) $B = C_1 + C_2$, $P(C_1) = C_3^2 [P(A)]^2 [1 - P(A)] = 3 \times 0.2^2 \times (1 - 0.2) = 0.096$,
 $P(C_2) = [P(A)]^3 = 0.2^3 = 0.008$,

$P(B) = P(C_1 + C_2) = P(C_1) + P(C_2) = 0.096 + 0.008 = 0.104$. 选 A.

【例 9】甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件,已知甲机床加工的零件是一等品,而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{4}$,乙机床加工的零件是一等品,而丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{12}$,甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\frac{2}{9}$.从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验,则至少有一个一等品的概率为().

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

【解析】先求出甲、乙、丙每台机床加工的零件是一等品的概率. 设 A, B, C 分别为甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的事件,

$$\text{由题设条件有} \begin{cases} P(A\bar{B}) = \frac{1}{4}, & P(A) \cdot [1 - P(B)] = \frac{1}{4}, \\ P(B\bar{C}) = \frac{1}{12}, & P(B) \cdot [1 - P(C)] = \frac{1}{12}, \\ P(AC) = \frac{2}{9}, & P(A) \cdot P(C) = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

$$\text{解得 } P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{2}{3}.$$

即甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率分别是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$.

记 D 为从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验却至少有一个一等品的事件, 则

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)][1 - P(C)] = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

故从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验, 至少有一个一等品的概率为 $\frac{5}{6}$. 选 E.

【例 10】甲乙两队参加知识竞赛, 每队 3 人, 每人回答一个问题, 答对者为本队赢得一分, 答错得零分. 假设甲队中每人答对的概率均为 $\frac{2}{3}$, 乙队中 3 人答对的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, 且各人正确与否相互之间没有影响.

(I) 则甲得 2 分的概率为().

- (A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{2}{3}$

(II) 用 A 表示“甲、乙两个队总得分之和等于 3”这一事件, 用 B 表示“甲队总得分大于乙队总得分”这一事件, 则 $P(AB)$ 为().

- (A) $\frac{11}{243}$ (B) $\frac{31}{243}$ (C) $\frac{34}{243}$ (D) $\frac{37}{243}$ (E) $\frac{39}{243}$

【解析】(I) 由题意知, 甲得 2 分的概率为 $P = C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$. 选 C.

(II) 方法一: 用 C 表示“甲得 2 分乙得 1 分”这一事件, 用 D 表示“甲得 3 分乙得 0 分”这一事件, 所以 $AB = C \cup D$, 且 C, D 互斥, 又

$$P(C) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left[\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right] = \frac{10}{3^4},$$

$$P(D) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3^5},$$

$$\text{由互斥事件的概率公式得 } P(AB) = P(C) + P(D) = \frac{10}{3^4} + \frac{4}{3^5} = \frac{34}{3^5} = \frac{34}{243}.$$

方法二: 用 A_k 表示“甲队得 k 分”这一事件, 用 B_k 表示“乙队得 k 分”这一事件, $k=0, 1, 2, 3$, 由于事件 A_3B_0, A_2B_1 为互斥事件, 故 $P(AB) = P(A_3B_0 \cup A_2B_1) = P(A_3B_0) +$

$$P(A_2B_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3^2} \times \frac{1}{2}\right) + C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} \times C_2^1 \times \frac{2}{3^2}\right) = \frac{34}{243}. \text{ 选 C.}$$

【例 11】某学校举行知识竞赛,第一轮选拔设有 A, B, C, D 四个问题,规则如下:

① 每位参加者的初始分均为 10 分,答对问题 A, B, C, D 分别加 1 分、2 分、3 分、6 分,答错任一题减 2 分;

② 每回答一题,计分器显示累计分数,当累计分数小于 8 分时,答题结束,淘汰出局;当累计分数大于或等于 14 分时,答题结束,进入下一轮;当答完四题,累计分数仍不足 14 分时,答题结束,淘汰出局;

③ 每位参加者按问题 A, B, C, D 顺序作答,直至答题结束.

假设甲对 A, B, C, D 回答正确的概率均为 $\frac{1}{2}$,且各题回答正确与否相互独立.

(I) 则甲能进入下一轮的概率为().

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{2}{5}$

(II) 用 n 表示甲本轮答题结束时答题的个数,则 $n=2, 3$ 的概率分别为().

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{5}$

【解析】设 A, B, C, D 分别为第一、二、三、四个问题. 用 $M_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示甲第 i 个问题回答正确, 用 $N_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示甲同学第 i 个问题回答错误, 则 M_i 与 N_i 是对立事件 ($i=1, 2, 3, 4$). 由题意得 $P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = P(M_4) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(N_1) = P(N_2) = P(N_3) = P(N_4) = \frac{1}{2}$.

(I) 记“甲同学能进入下一轮”为事件 Q , 则 $Q = M_1M_2M_3 + N_1M_2M_3M_4 + M_1N_2M_3M_4 + M_1M_2N_3M_4 + N_1M_2N_3M_4$,

由于每题答题结果相互独立, 因此

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(M_1M_2M_3 + N_1M_2M_3M_4 + M_1N_2M_3M_4 + M_1M_2N_3M_4 + N_1M_2N_3M_4) = \\ &= P(M_1M_2M_3) + P(N_1M_2M_3M_4) + P(M_1N_2M_3M_4) + P(M_1M_2N_3M_4) + P(N_1M_2N_3M_4) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}. \text{ 选 D.} \end{aligned}$$

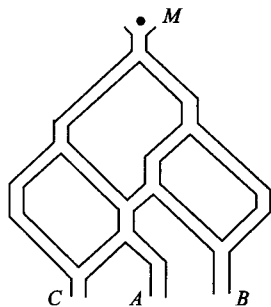
A	B	C	D
✓	✓	✓	
×	✓	✓	✓
✓	×	✓	✓
✓	✓	×	✓
×	✓	×	✓

(II) 由于每题答题结果相互独立, 所以 $P(n=2) = P(N_1N_2) = P(N_1)P(N_2) = \frac{1}{4}$,

$$P(n=3) = P(M_1M_2M_3) + P(M_1N_2N_3) = P(M_1)P(M_2)P(M_3) +$$

$$P(M_1)P(N_2)P(N_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \text{ 选 B.}$$

【例 12】如图,一个小球从 M 处投入,通过管道自上而下落到 A 或 B 或 C . 已知小球从每个叉口落入左右两个管道的可能性是相等的,某商家按上述投球方式进行促销活动,若投入的小球落到 A, B, C , 则分别设为一、二、三等奖.



(I) 若某人投 1 次,获得一、二、三等奖概率分别为多少?

(II) 若某人投 3 次,三个奖项均获得的概率为多少?

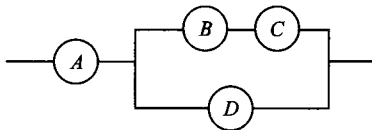
【解析】(I) 获得一等奖的概率为 $P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$;

获得二等奖的概率为 $P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$;

获得三等奖的概率为 $P_3 = 1 - P_1 - P_2 = \frac{7}{16}$.

(II) 若某人投 3 次,三个奖项均获得,说明三次分别获得一、二、三等奖,但是要注意排序,故概率 $P = P_1 P_2 P_3 \times 3! = \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{189}{2^{10}}$.

【例 13】如图,用 A, B, C, D 四类不同的元件连接成系统 N ,当元件 A 正常工作且元件 B, C 都正常工作,或当元件 A 正常工作且元件 D 正常工作时,系统 N 正常工作. 已知元件 A, B, C, D 正常工作的概率依次为 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$.



(I) 则元件 A, B, C 都正常工作的概率为().

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{2}{5}$

(II) 系统 N 正常工作的概率为().

- (A) $\frac{71}{120}$ (B) $\frac{73}{120}$ (C) $\frac{77}{120}$ (D) $\frac{79}{120}$ (E) $\frac{83}{120}$

【解析】(I) 元件 A, B, C 都正常工作的概率

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) P(B) P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}, \text{ 选 C.}$$

(II) 系统 N 正常工作可分为 A, B, C 都正常工作和 A, D 正常工作但 B, C 不都正常工作两种情况,前者概率 $\frac{3}{8}$, 后者的概率为

$$P(A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D) + P(A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D) + P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{30},$$

所以系统 N 正常工作的概率是 $\frac{3}{8} + \frac{7}{30} = \frac{73}{120}$, 选 B.

【题型 3】伯努利公式

【思路点拨】 n 次独立重复试验恰好发生 k 次的概率可用 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 求解. 如果不是相互独立事件, 则将它们转化为相互独立事件的积与互斥事件的和的混合形式求解. 对这个公式, 不能死记硬背, 要真正理解它所表示的含义, 特别要理解其中的 C_n^k 的意义.

【例 14】 某气象站天气预报的准确率为 80%, 计算:

(1) 5 次预报中恰有 4 次准确的概率约为().

(A) 0.32 (B) 0.41 (C) 0.34 (D) 0.45 (E) 0.48

(2) 5 次预报中至少有 4 次准确的概率约为().

(A) 0.82 (B) 0.63 (C) 0.64 (D) 0.74 (E) 0.78

【解析】(1) 根据 n 次独立重复试验中事件发生 k 次的概率公式, 5 次预报中恰有 4 次准确的概率 $P_5(4) = C_5^4 \times 0.8^4 \times (1-0.8)^{5-4} = 5 \times 0.8^4 \times 0.2 \approx 0.41$, 故选 B.

(2) 5 次预报中至少有 4 次准确的概率, 就是 5 次预报中恰有 4 次准确的概率与 5 次预报都准确的概率的和, 即

$P = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 \times 0.8^4 \times (1-0.8)^{5-4} + C_5^5 \times 0.8^5 \times (1-0.8)^{5-5} = 5 \times 0.8^4 \times 0.2 + 0.8^5 \approx 0.74$, 故选 D.

【例 15】 甲、乙两人各射击一次, 击中目标的概率分别是 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$. 假设两人射击是否击中目标没有影响. 试

(I) 求两人各射击 4 次, 甲恰好击中目标 2 次且乙恰好击中目标 3 次的概率;

(II) 假设某人连续 2 次未击中目标, 则停止射击. 问: 乙恰好射击 5 次后, 被终止射击的概率是多少?

【解析】(I) 设“甲恰好击中目标 2 次且乙恰好击中目标 3 次”为事件 B , 则

$$P(B) = C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot C_4^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

(II) 设“乙恰好射击 5 次后, 被终止射击”为事件 C , 由于乙恰好射击 5 次后被终止射击, 故必然是最后两次未击中目标, 第三次击中目标, 第一次及第二次至多有一次未击中目标.

$$\text{故 } P(C) = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_2^1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \right] \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{45}{1024}.$$

【例 16】 某射手每次射击击中目标的概率是 $\frac{2}{3}$, 且各次射击的结果互不影响.

(I) 假设这名射手射击 5 次, 求有 3 次连续击中目标, 另外 2 次未击中目标的概率;

(II) 假设这名射手射击 3 次, 每次射击, 击中目标得 1 分, 未击中目标得 0 分, 在 3 次射击中, 若有 2 次连续击中, 而另外 1 次未击中, 则额外加 1 分; 若 3 次全击中, 则额外加 3 分, 记 n 为射手射击 3 次后的总得分, 求 n 分别取 1, 2, 3 的概率.

【解析】(I) 设“第 i 次射击击中目标”为事件 $A_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$; “射手在 5 次射击中,

有3次连续击中目标,另外2次未击中目标”为事件A,则

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 A_2 A_3 \overline{A_4} \overline{A_5}) + P(\overline{A_1} A_2 A_3 A_4 \overline{A_5}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4 A_5) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}. \end{aligned}$$

(II)由题意可知,

$$\begin{aligned} P(n=1) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$P(n=2) = P(A_1 \overline{A_2} A_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

$$P(n=3) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

【例17】9粒种子分种在甲、乙、丙3个坑内,每坑3粒,每粒种子发芽的概率为0.5,若一个坑内至少有1粒种子发芽,则这个坑不需要补种;若一个坑内的种子都没发芽,则这个坑需要补种.

(I)求甲坑不需要补种的概率;

(II)求3个坑中恰有1个坑不需要补种的概率;

(III)求有坑需要补种的概率.

【解析】(I)因为甲坑内的3粒种子都不发芽的概率为 $(1-0.5)^3 = \frac{1}{8}$, 所以甲坑不需要补种的概率为 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$.

$$(II) 3 \text{ 个坑恰有一个坑不需要补种的概率为 } C_3^1 \times \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{21}{2^9}.$$

$$(III) \text{方法一: 因为3个坑都不需要补种的概率为 } \left(\frac{7}{8}\right)^3, \text{ 所以有坑需要补种的概率为 } 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{169}{512}.$$

$$\text{方法二: 3个坑中恰有1个坑需要补种的概率为 } C_3^1 \times \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{2^9}, \text{ 恰有2个坑需要补种的概率为 } C_3^2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{2^9},$$

$$3 \text{ 个坑都需要补种的概率为 } C_3^3 \times \left(\frac{1}{8}\right)^3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^0 = \frac{1}{2^9}.$$

【例18】设进入某商场的每一位顾客购买甲种商品的概率为0.5, 购买乙种商品的概率为0.6, 且购买甲种商品与购买乙种商品相互独立, 各顾客之间购买商品也是相互独立的.

(I)求进入商场的1位顾客购买甲、乙两种商品中的一种的概率;

(II)求进入商场的1位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种的概率;

(III)记n表示进入商场的3位顾客中至少购买甲、乙两种商品中的一种的人数, 分别求 $n=0, 1, 2, 3$ 的概率.

【解析】记A表示事件: 进入商场的1位顾客购买甲种商品;

记 B 表示事件:进入商场的 1 位顾客购买乙种商品;

记 C 表示事件:进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种;

记 D 表示事件:进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种.

$$(I) C = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B.$$

$$P(C) = P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \\ = 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6 = 0.5$$

$$(II) \bar{D} = \bar{A} \cdot \bar{B}.$$

$$P(\bar{D}) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2. P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 0.8.$$

$$(III) P(n=0) = 0.2^3 = 0.008. P(n=1) = C_3^1 \times 0.8 \times 0.2^2 = 0.096.$$

$$P(n=2) = C_3^2 \times 0.8^2 \times 0.2 = 0.384. P(n=3) = 0.8^3 = 0.512.$$

【例 19】甲、乙、丙三人按下面的规则进行乒乓球比赛:第一局由甲、乙参加而丙轮空,以后每一局由前一局的获胜者与轮空者进行比赛,而前一局的失败者轮空.比赛按这种规则一直进行到其中一人连胜两局或打满 6 局时停止.设在每局中参赛者胜负的概率均为 $\frac{1}{2}$,且各局胜负相互独立.求:

(I) 打满 3 局比赛还未停止的概率;

(II) 比赛停止时已打局数为 4 局和 5 局的概率.

【解析】令 A_k, B_k, C_k 分别表示甲、乙、丙在第 k 局中获胜.

(I) 由独立事件同时发生与互斥事件至少有一个发生的概率公式知,打满 3 局比赛还未停止的概率为

$$P(A_1 C_2 B_3) + P(B_1 C_2 A_3) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{4}.$$

(II) 比赛停止时已打局数为 4 局的概率

$$P = P(A_1 C_2 B_3 B_4) + P(B_1 C_2 A_3 A_4) = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{8}.$$

比赛停止时已打局数为 5 局的概率

$$P = P(A_1 C_2 B_3 A_4 A_5) + P(B_1 C_2 A_3 B_4 B_5) = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{1}{16}.$$

【例 20】某项考试按科目 A、科目 B 依次进行,只有当科目 A 成绩合格时,才可继续参加科目 B 的考试.已知每个科目只允许有一次补考机会,两个科目成绩均合格方可获得证书.现某人参加这项考试,科目 A 每次考试成绩合格的概率均为 $\frac{2}{3}$,科目 B 每次考试成绩合格的概率均为 $\frac{1}{2}$.假设各次考试成绩合格与否均互不影响.

(I) 求不需要补考就可获得证书的概率;

(II) 在考试过程中,假设不放弃所有的考试机会,求考试合格的概率.

【解析】设“科目 A 第一次考试合格”为事件 A_1 ,“科目 A 补考合格”为事件 A_2 ;“科目 B 第一次考试合格”为事件 B_1 ,“科目 B 补考合格”为事件 B_2 .

(I) 不需要补考就获得证书的事件为 $A_1 \cdot B_1$,注意到 A_1 与 B_1 相互独立,则 $P(A_1 \cdot B_1) = P(A_1) \times P(B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

(Ⅱ)不放弃所有的考试机会,考试合格包括四种情况:A合格B合格,A补考合格B合格,A合格B补考合格,A补考合格B补考合格,故概率

$$P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

【评注】本题第二问不能从反面求解,即不能从反面求两个科目都不合格的概率,因为题干要求只有A科目合格时才能参加科目B的考试.

第四节 核心专题点睛

本章概念性强、抽象性强、思维方法独特.因此要立足于基础知识、基本方法、基本问题的练习,恰当选取典型例题,构建思维模式,造就思维依托和思维的合理定势.求解古典概率问题,一般要做好三方面的工作:

一是判明问题性质,分辨所解的问题,是不是古典概率问题.如果问题所及的试验,具有以下两个基本特征:

- (1) 试验的样本空间的元素只有有限个;
- (2) 试验中每个样本点出现的可能性相同.那么,就可断定它是一个古典概率问题.

二是掌握古典概率的计算公式.如果样本空间包含的样本点的总数为 n ,事件 A 包含的样本点数为 k ,那么事件 A 的概率是

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}.$$

三是根据公式要求,确定 n 和 k 的数值.这是解题的关键性一步,计算方法灵活多变,没有一个固定的模式.古典概率的每一种解法大体都是围绕 n 和 k 的计算而展开的.当计算事件 A 的概率 $P(A)$ 比较困难时,有时计算对立事件 \bar{A} 的概率则要容易,有 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

对于 n 个互斥事件 A_1, A_2, \dots, A_n ,其加法公式为 $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.在应用题背景条件下,能否把一个复杂事件分解为若干个互相排斥或相互独立、既不重复又不遗漏的简单事件是解答这类应用题的关键,也是解决互斥事件有一个发生的概率的一个重要的指导思想.除了基础题型提到的古典概型外,还有以下两类常用的古典概型.

一、分组问题

【例1】随机地将15名新生平均分配到三个班中去,这15名新生有3名优等生,试求

- (1) 每一个班分到一名优等生的概率.
- (2) 这三名优等生分到同一个班的概率.

【解析】(1) 每一个班分到一名优等生的概率: $P_1 = \frac{3! \cdot C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5} = \frac{25}{91}.$

(2) 这三名优等生分到同一班的概率: $P_2 = \frac{C_3^1 C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5}{C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5} = \frac{6}{91}.$

【例2】8个篮球队中有两个强队,先任意将这8个队分成两个组(每组4个队)进行比赛,这两个强队被分在一个组内的概率是多少?

【解析】方法一：把分组视为有序分组，则 $P = \frac{C_2^1 C_6^2}{C_8^4} = \frac{3}{7}$ 。

方法二：把分组视为无序分组，则 $P = \frac{C_6^2}{\frac{C_8^4}{2!}} = \frac{3}{7}$ 。

二、抽签问题及应用

上述题型解法涉及分组问题。分组问题一直是排列、组合的难点问题，有许多学生对有序分与无序分往往模糊不清，特别是对那些学习困难的学生更是难以理解。再加上即便是式子列对，式子的运算也是比较麻烦的。有一些学生会出现式子正确而结果错误的情况。为此，提供一种解决此类问题的简单易行的方法——“抽签法”。事实上，诸如体育比赛中的分组问题，福利彩票中的抽奖问题，都是通过抽签的方式完成的。采用抽签法目的是使每个个体被抽到的概率相等。既然现实生活中的分组问题是通过抽签来完成的，那么完全可以从抽签的角度来分析和解决此类问题。

例 1 中，15 名新生需制作 15 个签，其中一班、二班、三班各 5 个（比如一班 1~5，二班 6~10，三班 11~15），这 15 名新生抽取 15 个签，共有 $P_{15}^{15} = 15!$ 种不同的抽取方法。

每一个班各有一名优生可采用如下的抽签方法：第一名优生抽取，有 15 种抽取方法；第二名优生只能从 10 个签中抽取，有 10 种（比如第一个抽到 13，第二个只能从 1~10 中抽取）；第三名优生只能从 5 个签中抽取，有 5 种；剩余的 12 个人抽取 12 个签有 12! 种。这样每一个班各有一名优等生的概率 $P_1 = \frac{15 \times 10 \times 5 \times 12!}{15!} = \frac{25}{91}$ 。用同样的方法可

求出这三名优生分到同一个班的概率 $P_2 = \frac{15 \times 4 \times 3 \times 12!}{15!} = \frac{6}{91}$ 。具体如下：

方法一（例 1）：15 人抽签有 15! 种。

（1）第一名优生抽取，有 15 种；第二名抽取，有 10 种；第三名抽取有 5 种；剩余 12 名抽取有 12! 种，于是每一个班各有一名优等生的概率 $P_1 = \frac{15 \times 10 \times 5 \times 12!}{15!} = \frac{25}{91}$ 。

（2）第一名优生抽取，有 15 种；第二名抽取，有 4 种；第三名抽取，有 3 种；剩余 12 名抽取有 12! 种，于是三名优生分到同一个班的概率 $P_2 = \frac{15 \times 4 \times 3 \times 12!}{15!} = \frac{6}{91}$ 。

若仅考虑这三名优等生的抽签方式可使运算更为简便。

方法二（例 1）：三名优生从 15 个签中任抽 3 个，有 P_{15}^3 种。

（1）第一名优生抽取，有 15 种；第二名抽取，有 10 种；第三名抽取有 5 种。于是每一个班各有一名优等生的概率 $P_1 = \frac{15 \times 10 \times 5}{P_{15}^3} = \frac{25}{91}$ 。

（2）第一名优生抽取，有 15 种；第二名抽取，有 4 种；第三名抽取，有 3 种。于是三名优生分到同一个班的概率 $P_2 = \frac{15 \times 4 \times 3}{P_{15}^3} = \frac{6}{91}$ 。

若用此法解例 2，可得概率 $P = \frac{8 \times 3 \times 6}{8!} = \frac{3}{7}$ 或 $P = \frac{8 \times 3}{8 \times 7} = \frac{3}{7}$ 。

此种解法避开了分组问题的有序无序问题，一是运算简便，二是便于操作，学习困难生

完全可以掌握,不失为一个妙法.以下再举一例.

【例 3】16 个国家足球队中有中、日、韩 3 个亚洲球队,抽签分成甲、乙、丙、丁 4 个小组(每组 4 个队),求

- (1) 每个组中至多有 1 个亚洲球队的概率?
- (2) 3 个亚洲球队被分在同一组内的概率?
- (3) 中、韩被分在同一组,日本被分在另一组内的概率?
- (4) 其中有两个亚洲球队被分在一组,第三支亚洲球队被分在另一组的概率?

【解析】三个亚洲球队从 16 个签中任抽 3 个,有 P_{16}^3 种.

(1) 第一个亚洲球队抽签,有 16 种;第二个亚洲球队抽签,有 12 种;第三个亚洲球队抽签,有 8 种.于是,每个组中至多有 1 个亚洲球队的概率为 $P_1 = \frac{16 \times 12 \times 8}{16 \times 15 \times 14} = \frac{16}{35}$.

(2) 第一个亚洲球队抽签,有 16 种;第二个亚洲球队抽签,有 3 种;第三个亚洲球队抽签,有 2 种,于是,3 个亚洲球队被分在同一组内的概率为 $P_2 = \frac{16 \times 3 \times 2}{16 \times 15 \times 14} = \frac{1}{35}$.

(3) 中国队抽签,有 16 种;韩国队抽签,有 3 种;日本队抽签,有 12 种.于是,中、韩被分在同一组,而日本被分在另一组内的概率为 $P_3 = \frac{16 \times 3 \times 12}{16 \times 15 \times 14} = \frac{6}{35}$.

(4) 第一支亚洲球队抽签,有 16 种;第二支亚洲球队抽签时有两种选择,若从第一支亚洲球队所在的组中抽取,有 3 种;而第三支亚洲球队只能从该组以外的 12 个签中抽取,有 12 种;第二个亚洲球队若不与第一支亚洲球队在一组,则有 12 种,此时第三支亚洲球队只能从两组中剩余的 6 个签中抽取,有 6 种.于是,两个亚洲球队被分在一组,而第三支亚洲球队被分在另一组的概率为 $P_4 = \frac{16(3 \times 12 + 12 \times 6)}{16 \times 15 \times 14} = \frac{18}{35}$.

【评注】当然第(4)小题也可用 $C_3^2 3!$ 来解决.笔者认为,抽签法应尽量淡化排列、组合作用,否则学生容易出现概念不清的错误.运用抽签法不仅可以解决有关分组问题中的概率问题,还可以解决其他类型的概率问题,下举 2 例.

【例 4】有红、黄、蓝三种颜色的旗帜各 3 面,在每种颜色的 3 面旗帜上分别有号码 1, 2, 3. 现任意抽取 3 面,它们的颜色与号码均不相同的概率是

红	黄	蓝
1	1	1
2	2	2
3	3	3

【解析】9 面旗帜抽 3 面,有 P_9^3 种;

颜色和号码均不同,可这样抽,抽第一面,有 9 种;第二面只能从第一面剩余的 8 种中抽取,有 8 种;同理,第三面有 7 种.于是三面颜色与号码均不相同的概率是 $P = \frac{9 \times 8 \times 7}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{14}$.

【例 5】(扑克牌问题)一副扑克牌共有 52 张(去掉大小王),现从中任意抽取 4 张,求

- (1) 4 张花色各不相同的概率?
- (2) 4 张花色均相同的概率?
- (3) 4 张数值相同的概率?
- (4) 4 张数值各不相同的概率?
- (5) 其中 2 张数值相同,另外 2 张数值也相同(4 张数值不全相同)的概率?

【解析】一副扑克牌可看成 52 张签,依次抽取 4 张共有 $P_{52}^4 = 52 \times 51 \times 50 \times 49$ 种.

(1) 四张花色各不相同可这样抽取,抽第一张有 52 种;抽第二张有 39 种;抽第三张有 26 种;抽第四张有 13 种. 于是,4 张花色各不相同的概率 $P_1 = \frac{52 \times 39 \times 26 \times 13}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{2197}{20825}$.

(2) 4 张花色均相同的概率 $P_2 = \frac{52 \times 12 \times 11 \times 10}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{44}{4165}$.

(3) 4 张数值相同的概率 $P_3 = \frac{52 \times 3 \times 2 \times 1}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{1}{20825}$.

(4) 4 张数值各不相同的概率 $P_4 = \frac{52 \times 48 \times 44 \times 40}{52 \times 51 \times 50 \times 49} = \frac{2816}{4165}$.

(5) 其中 2 张数值相同,另外 2 张数值也相同的概率 $P_5 = \frac{52 \times 3 \times 48 \times 3}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \times 3 = \frac{216}{20825}$.

【评注】抽签法,便于理解,便于操作,便于运算. 几乎用不到排列、组合数的运算. 老师容易讲解,学生容易掌握,特别是对学习比较困难的学生是比较适用的,大家不妨试一试.

第(5)问乘以 3 的原因是 1122,1212,1221,这三种顺序.

【例 6】袋中有 a 只黑球, b 只白球,除颜色不同外,其他方面没有差别. 现在把球随机地一只只摸出来,求第 k 次摸出的一只球是黑球的概率($1 \leq k \leq a+b$).

【解析】方法一:把 a 只黑球及 b 只白球都看作是不同的(例如设想把它们进行编号),若把摸出的球依次放在排列成一直线的 $a+b$ 个位置上,则可能的排列法相当于把 $a+b$ 个元素进行全排列,总数为 $(a+b)!$,把它们作为样本点全体. 符合要求的事件数为 $a \times (a+b-1)!$,这是因为第 k 次摸得黑球有 a 种取法,而另外 $a+b-1$ 次摸球相当于 $a+b-1$ 只球进行全排列,有 $(a+b-1)!$ 种构成法,故所求概率为

$$P_k = \frac{a \times (a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}.$$

这个结果与 k 无关. 回想一下,就会发觉这与我们平常的生活经验是一致的. 例如在体育比赛中进行抽签,对各队机会均等,与抽签的先后次序无关.

方法二:把 a 只黑球看作是没有区别的,把 b 只白球也看作是没有区别的. 仍把摸出的球依次放在排列成一直线的 $a+b$ 个位置上,因若把 a 只黑球的位置固定下来则其他位置必然是放白球,而黑球的位置可以有 C_{a+b}^a 种放法,以这种放法作为样本点. 符合要求的事件数为 C_{a+b-1}^{a-1} ,这是由于第 k 次取得黑球,这个位置必须放黑球,剩下的黑球可以在 $a+b-1$ 个位置上任取 $a-1$ 个位置,因此共有 C_{a+b-1}^{a-1} 种放法. 所以所求概率为 $P(A) = \frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a} = \frac{a}{a+b}$.

【评注】两种不同的解法答案相同,注意考察一下两种解法的不同,就会发现主要在于选取的样本空间不同. 在前一种解法中把球看作是“有个性的”,而在后一种解法中则对同色

球不加区别,因此在第一种解法中要顾及各黑球及各白球间的顺序而用排列,第二种解法则不注意顺序而用组合,但最后还是得出了相同的答案.

这种情况的产生并不奇怪,这说明对于同一随机现象,可以用不同的模型来描述,只要方法正确,结论总是一致的.在这个例子中,第二种解法中的每一个样本点是由第一种解法中的 $a! \cdot b!$ 个样本点合并而成的.

这个例子告诉我们,在计算样本点总数及有利事件数时,必须对同一个确定的样本空间考虑,因此其中一个考虑顺序,另一个也必须考虑顺序,否则结果一定不正确.

既然同一个随机现象可用不同的样本空间来描述,因此对同一个概率也常常有多种不同的求法,我们应逐步训练自己能采用最简便的方法解题,为此熟悉同一问题的多种不同解法是重要的.

三、几何概型

上述古典概率是在有限样本空间下进行的,为了克服这种局限性,可将古典概型推广.如果一个试验具有以下两个特点:

(1) 样本空间 S 是一个大小可以计量的几何区域(如线段、平面、立体).

(2) 向区域内任意投一点,落在区域内任意点处都是“等可能的”.那么,事件 A 的概率由下式计算:

$$P(A) = \frac{A \text{ 的计量}}{S \text{ 的计量}}.$$

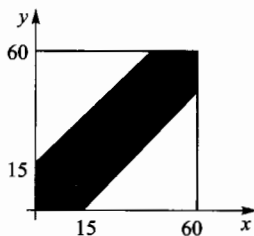
【例 7】在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上 $(0, 4)$ 上的所有实数,旋转陀螺,则陀螺停下来后,圆周与桌面的接触点位于 $[0.5, 1]$ 上的概率为().

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{10}$

【解析】由于陀螺及刻度的均匀性,它停下来时其圆周上的各点与桌面接触的可能性相等,且接触点可能有无穷多个,故 $P(A) = \frac{\text{区间}[0.5, 1] \text{ 的长度}}{\text{区间}[0, 4] \text{ 的长度}} = \frac{1/2}{4} = \frac{1}{8}$. 选 D.

【例 8】甲、乙两人约定于 6 时到 7 时之间在某处会面,并约定先到者应等候另一个人一刻钟,过时即可离去,求两人会面的概率.

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{5}{16}$ (D) $\frac{7}{16}$
(E) $\frac{9}{16}$



【解析】以 x 和 y 表示甲、乙两人到达约会地点的时间,则两人能会面的条件是 $|x - y| \leq 15$, 在平面上建立直角坐标系,如右图,则 (x, y) 的所有可能结果是边长为 60 的正方形,而可能会面的时间由图中阴影部分所表示,这是一个几何概型,两人能会面的概率为 $P = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}$. 选 D.

四、分房概率归纳总结

【解题提示】 n 个球在 N 个盒子中的分布,是一种理想化的概率模型,可用以描述许多

的随机试验,如生日、性别、意外事件、掷骰子、质点人格、旅客下站、住房分配、印刷错误等问题。

【例 9】将 n 个球随机地放入 N 个盒子中 ($n \leq N$) (设盒子的容量不限),求:

- (1) 每个盒子至多有一个球的概率;
- (2) 某个指定的盒子中恰有 m ($m < n$) 个球的概率;
- (3) 某指定 n 个盒子中各恰有一个球的概率;
- (4) 恰有 n 个盒子中各有一个球的概率;
- (5) 至少有两个球在同一个盒子中的概率。

【解析】先求 n 个球随机地放入 N 个盒子的方法总数。因为每个球都可以落入 N 个盒子中的任何一个,有 N 种不同的放法,所以 n 个球放入 N 个盒子共有

$$\underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_n = N^n$$

种不同的放法。设(1)~(5)个问题中对应事件分别为 A_1, A_2, \dots, A_5 , 则

(1) 第一个球可以放进 N 个盒子之一,有 N 种放法;第二个球只能放进余下的 $N-1$ 个盒子之一,有 $N-1$ 种放法;...第 N 个球只能放进余下的 $N-n+1$ 个盒子之一,有 $N-n+1$ 种放法;所以共有 $N(N-1)\cdots(N-n+1)$ 种不同的放法。故

$$P(A_1) = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}.$$

(2) 先从 n 个球中任选 m 个分配到指定的某个盒子中,共有 C_n^m 种选法;再将剩下的 $n-m$ 个球任意分配到剩下的 $N-1$ 个盒子中,共有 $(N-1)^{n-m}$ 种放法。所以 $P(A_2) = \frac{C_n^m (N-1)^{n-m}}{N^n}$ 。

$$(3) P(A_3) = \frac{n!}{N^n}.$$

$$(4) P(A_4) = \frac{P_N^n}{N^n}.$$

$$(5) P(A_5) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}.$$

【例 10】把 n 个不同的球随机地放入编号为 $1, 2, \dots, m$ 的 m 个盒子内,求 1 号盒恰有 r 个球的概率。

【解析】方法一:用独立重复试验的概率公式,把 1 个球放入 m 个不同的盒子内看成一次独立试验,其中放入 1 号盒的概率为 $P = \frac{1}{m}$ 。这样 n 个球放入 m 个不同的盒子内相当于做 n 次独立重复试验。由独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率公式知,1 号盒恰有 r 个球的概率

$$\begin{aligned} P_n(r) &= C_n^r p^r (1-p)^{n-r} \\ &= C_n^r \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^r \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-r} \\ &= \frac{C_n^r \cdot (m-1)^{n-r}}{m^n}. \end{aligned}$$

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

方法二:用古典概型把 n 个不同的球任意放入 m 个不同的盒子内共有 m^n 个等可能的结果. 其中 1 号盒内恰有 r 个球的结果数为 $C_n^r(m-1)^{n-r}$, 故所求概率 $P_n(r) = \frac{C_n^r(m-1)^{n-r}}{m^n}$.

【评注】 n 个球在 N 个盒子中的分布, 是一种理想化的概率模型, 可用以描述许多直观背景很不相同的随机试验, 如下列模型都可以转化求解:

(1) 生日:

n 个人的生日情形, 相当于 n 个球放入 $N=365$ 个盒子中的不同排列(设一年 365 天).

(2) 性别:

n 个人的性别分布, 相当于把 n 个球放入 $N=2$ 个盒子中.

(3) 掷骰子:

掷 n 颗骰子的可能结果, 相当于把 n 个球放入 $N=6$ 个盒子中.

(4) 质点入格:

n 个质点落于 N 个格子中时, 相当于 n 个球分入 N 个盒子中.

(5) 旅客下站:

一列火车中有 n 名旅客, 它在 N 个站上都停. 旅客下站时, 相当于 n 个球分到 N 个盒子中的各种情形.

(6) 住房分配:

n 个人被分配到 N 个房间中去住, 则人相当于球, 房间相当于盒子.

(7) 印刷错误:

n 个印刷错误在一本具有 N 页的书中的分布, 相当于 n 个球放入 N 个盒子中的一切可能分布(n 必须小于每一页的字数).

从上面所列举的部分试验, 不难看出分球入盒的模型的意义. 因而使该例成为古典概率中的典型问题之一, 为一类实际问题的求解, 提供了有效的途径. 为加深理解, 读者可利用本题的思想方法, 解答下列各题:

(1) 同时掷 4 颗质量均匀的骰子, 求出现完全不同的点数的概率(答案: $\frac{C_6^4 \cdot 4!}{6^4}$).

(2) 设每人生日在星期几是等可能的, 求 6 人生日都集中在一周中任意两天但不是都在同一天的概率. (答案: $\frac{C_7^2(2^6-2)}{7^6}$).

(3) 有 n 个质点, 每个质点都等可能地落于 $N(n \leq N)$ 个格子中的每一个. 试求每一格子至多含一点的概率(答案: $\frac{C_N^n n!}{N^n} = \frac{P_N^n}{N^n}$).

(4) 设有 n 个人, 每个人都等可能地被分配到 n 个房间中的任一间去住. 求恰有一个空房间的概率(答案: $\frac{C_n^1 \cdot C_n^2 \cdot (n-1)!}{n^n}$).

【例 11】某班级有 n 个人($n \leq 365$), 问至少有两个人的生日在同一天的概率有多大?

【解析】每人的生日可以是 365 天中的任意一天, 所以共有 365^n 种结果.

“至少有两个人的生日在同一天”的反面为“没有人在同一天”, 所以概率

$$P = 1 - \frac{C_{365}^n n!}{365^n}.$$

第五节 阶梯化精炼题

基础能力题



扫码看视频

一、问题求解题

1. 甲从正方形四个顶点中任意选择两个顶点连成直线,乙也从该正方形的四个顶点中任意选择两个连成直线,则所得的两条直线相互垂直的概率是().

- (A) $\frac{3}{18}$ (B) $\frac{4}{18}$ (C) $\frac{5}{18}$ (D) $\frac{6}{18}$ (E) $\frac{7}{18}$

2. 若以连续掷两次骰子分别得到的点数 m, n 作为 P 点的横、纵坐标,则 P 点在直线 $x+y=5$ 下方的概率为().

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{9}$ (E) $\frac{1}{9}$

3. 袋中有黑球 5 只,白球 4 只,从中随机取出 4 球,则取到 4 球中黑球、白球都有的概率为().

- (A) $\frac{11}{21}$ (B) $\frac{13}{21}$ (C) $\frac{17}{21}$ (D) $\frac{20}{21}$ (E) $\frac{19}{21}$

4. 10 张奖券中含一等奖 2 张、二等奖 3 张、三等奖 5 张,甲、乙、丙三人依次无放回地各抽 1 张,则三种奖各有 1 人抽到的概率为().

- (A) $\frac{3}{20}$ (B) $\frac{1}{24}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{3}{10}$

5. 将一颗骰子随机抛掷 2 次,则所得最大点数与最小点数之差等于 2 的概率为().

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{5}{27}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{8}{27}$ (E) $\frac{1}{3}$

6. 将一颗骰子随机抛掷 3 次,则所得最大点数与最小点数之差等于 2 的概率为().

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{5}{27}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{8}{27}$ (E) $\frac{1}{3}$

7. 两个实习生每人加工一个零件.加工为一等品的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$,两个零件是否加工为一等品相互独立,则这两个零件中恰有一个一等品的概率为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

8. 三张卡片上分别写上字母 E、E、B,将三张卡片随机地排成一行,恰好排成英文单词 BEE 的概率为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

9. 在数学选择题给出的 4 个答案中,恰有 1 个是正确的,某同学在做 3 道数学选择题时,随意地选定其中的正确答案,那么 3 道题都答对的概率是().

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{14}$ (C) $\frac{1}{64}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{4}$

10. 在 4 次独立重复试验中,随机事件 A 恰好发生 1 次的概率不大于其恰好发生两次的概率,则事件 A 在一次试验中发生的概率 P 的取值范围是().

- (A) $[0.4, 1)$ (B) $(0, 0.4]$ (C) $(0, 0.6]$ (D) $[0.6, 1)$ (E) $[0.5, 1)$

11. 一次测量中出现正误差和负误差的概率都是 $\frac{1}{2}$, 在 3 次测量中,恰好出现 2 次正误差的概率是 P_1 ;恰好出现 2 次负误差的概率是 P_2 , 则有().

- (A) $P_1 > P_2$ (B) $P_1 < P_2$ (C) $P_1 = P_2$

- (D) $P_1 + P_2 = 1$ (E) $P_1 + P_2 = \frac{1}{2}$

12. 有五条线段,长度分别为 1, 3, 5, 7, 9(单位:cm),从中任取三条,便能构成一个三角形的概率是().

- (A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.4 (D) 0.5 (E) 0.1

13. 某城市的发电厂有 5 台发电机组,每台发电机组在一个季度里停机维修率为 $\frac{1}{4}$. 已知两台以上机组停机维修,将造成城市断电. 则

- (1) 该城市在一个季度里停电的概率是().

- (A) $\frac{1}{1024}$ (B) $\frac{3}{1024}$ (C) $\frac{5}{1024}$ (D) $\frac{7}{1024}$ (E) $\frac{1}{512}$

- (2) 该城市在一个季度里断电的概率是().

- (A) $\frac{47}{512}$ (B) $\frac{49}{512}$ (C) $\frac{41}{512}$ (D) $\frac{53}{512}$ (E) $\frac{55}{1024}$

14. 将一枚均匀硬币抛掷 5 次.(1) 第一次、第四次出现正面,而另外三次都出现反面的概率为 P_1 ;(2) 两次出现正面,三次出现反面的概率为 P_2 , 则有().

- (A) $P_2 = 4P_1$ (B) $P_2 = 6P_1$ (C) $P_2 = 8P_1$

- (D) $P_2 = 10P_1$ (E) $P_2 = 12P_1$

15. 某公司聘请 6 名信息员,假定每个信息员提供的正确信息的概率均为 0.6,并按超过一半信息员提供的信息作为正确的决策,求公司能作出正确决策的概率是().

- (A) 7×0.6^5 (B) 8.4×0.6^5 (C) 8.2×0.6^5

- (D) 7.6×0.6^5 (E) 7.2×0.6^5

16. 从应届高中生中选出飞行员,已知这批学生体型合格的概率为 $\frac{1}{3}$, 视力合格的概率为 $\frac{1}{6}$, 其他几项标准合格的概率为 $\frac{1}{5}$, 从中任选一学生,则该生三项均合格的概率为(假设三项标准互不影响)().

- (A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{1}{90}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{7}{90}$ (E) $\frac{11}{90}$

17. 一道数学竞赛试题,甲解出它的概率为 $\frac{1}{2}$, 乙解出它的概率为 $\frac{1}{3}$, 丙解出它的概率为 $\frac{1}{4}$, 则由甲、乙、丙三人独立解答此题只有一人解出的概率为().

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{11}{24}$

18. 一出租车司机从饭店到火车站途中有六个交通岗,假设司机在各交通岗遇到红灯这一事件是相互独立的,并且概率都是 $\frac{1}{3}$,那么这位司机遇到红灯前,已经通过了两个交通岗的概率是().

- (A) $\frac{4}{27}$ (B) $\frac{5}{27}$ (C) $\frac{7}{27}$ (D) $\frac{1}{9}$ (E) $\frac{2}{27}$

19. 设 3 次独立重复试验中,事件 A 发生的概率相等.若 A 至少发生一次的概率为 $\frac{19}{27}$,则事件 A 发生的概率为().

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{2}{3}$

20. 将一枚硬币连掷 5 次,如果出现 k 次正面的概率等于出现 $k+1$ 次正面的概率,那么 k 的值为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

21. 有 45 名男生,5 名女生,从中任选 3 人参加某项活动,则至少有 1 名女生的概率为().

- (A) 0.15 (B) 0.40 (C) 0.32 (D) 0.28 (E) 0.26

22. 有 1 道习题,在半小时内甲能解出它的概率是 $\frac{1}{2}$,乙能解出它的概率是 $\frac{1}{3}$,两个人都试图独立地在半小时内解出它,则习题被解出的概率为().

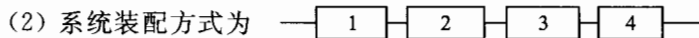
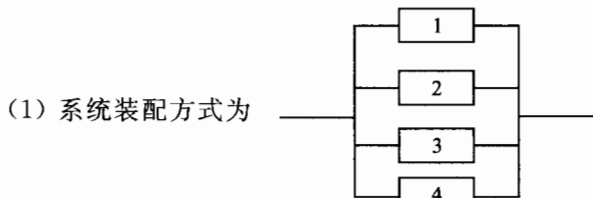
- (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

23. 某射击手射击 1 次,击中目标的概率是 0.9. 连续射击 4 次,且各次是否击中相互之间没有影响,则他第 2 次未击中,其余三次都击中的概率为().

- (A) 0.0729 (B) 0.0792 (C) 0.0139 (D) 0.0579 (E) 0.0569

二、条件充分性判断题

1. 设有 4 个元件,每个元件正常工作的概率是 $\frac{2}{3}$,且各元件是否正常工作是独立的,则系统工作正常的概率小于 $\frac{1}{2}$.



2. 甲、乙两人各自去破译一个密码,则密码能被破译的概率为 $\frac{3}{5}$.

(1) 甲、乙两人能破译出的概率分别是 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

(2) 甲、乙两人能破译出的概率分别是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

3. 将 m 个相同的球放入位于一排的 n 个格子中, 每格至多放一个球, 则 3 个空格相连的概率是 $\frac{3}{28}$.

(1) $m=5, n=8$.

(2) $m=4, n=7$.

4. 袋中有 5 个球, 其中白球 2 个, 黑球 3 个. 甲、乙两人依次从袋中各取一球, 记 A = “甲取到白球”, B = “乙取到白球”. 能确定 $p_1 = p_2$.

(1) 若取后放回, 此时记 $p_1 = P(A), p_2 = P(B)$.

(2) 若取后不放回, 此时记 $p_1 = P(A), p_2 = P(B)$.

5. 某三位数恰有两个数字相同的概率为 $\frac{3}{16}$.

(1) 由小于 10 的质数组成的可重复数字的三位数.

(2) 由小于 10 的合数组成的可重复数字的三位数.

6. 将 3 个不同的球随机放入 4 个不同杯子中, 则 $p = \frac{3}{8}$.

(1) 杯子中球数最大值为 1 的概率为 p .

(2) 杯子中球数最大值为 2 的概率为 p .

7. 袋中有红球、白球共 10 个, 任取 3 个, 至少有一个为红球的概率为 $\frac{7}{16}$.

(1) 白球有 6 个.

(2) 白球有 7 个.

8. 从口袋中摸出 2 个黑球的概率是 $\frac{1}{2}$.

(1) 口袋中装有大小相同、编号不同的 2 个白球和 3 个黑球.

(2) 口袋中装有大小相同、编号不同的 1 个白球和 3 个黑球.

9. $P = \frac{1}{9}$.

(1) 将骰子先后投掷 2 次, 抛出的骰子向上的点数之和为 5 的概率为 P .

(2) 将骰子先后投掷 2 次, 抛出的骰子向上的点数之和为 9 的概率为 P .

10. $P = \frac{3}{8}$.

(1) 先后投掷 3 枚均匀的硬币, 出现 2 枚正面向上, 一枚反面向上的概率为 P .

(2) 甲、乙两个人投宿 3 个旅馆, 恰好两人住在同一个旅馆的概率为 P .

11. 取出的三件产品中至少有 1 件次品的概率为 $\frac{137}{228}$.

(1) 共有 20 件产品.

(2) 产品中有 15 件正品.

12. 某射手在一次射击中, 射中的环数低于 9 环的概率为 0.48.

(1) 该射手在一次射击中, 射中 10 环的概率为 0.24.

(2) 该射手在一次射击中, 射中 9 环的概率为 0.28.

13. 甲、乙两人各进行一次射击, 至少有 1 人击中目标的概率为 0.84.

(1) 在一次射击中, 甲击中目标的概率为 0.6, 乙击中目标的概率是 0.5.

(2) 在一次射击中, 甲、乙分别击中目标的概率均为 0.6.

基础能力题详解

一、问题求解题

1. C; 正方形的4个顶点可以确定6条直线, 甲乙各自任选一条, 共有36个基本事件. 两条直线相互垂直的情况共有5种(4组邻边和对角线), 共10个基本事件, 所以概率为 $\frac{5}{18}$.

2. A; 连续两次掷骰子, 共包含 $6 \times 6 = 36$ 个基本事件, 事件 P 在 $x+y=5$ 下方, 共包含 $(1,1)(1,2)(1,3)(2,1)(2,2)(3,1)$ 6个基本事件, 故 $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

3. D; 从反面求解, 即摸到的球都是黑球或白球, 则 $P = 1 - \frac{C_5^4 + C_4^4}{C_9^4} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$.

4. C; 三种奖各有1人抽到的情况是先在每种奖券中各抽1张, 然后再给每个人去选择, 即 $C_2^1 C_3^1 C_5^1 3!$, 则概率为 $P = \frac{C_2^1 C_3^1 C_5^1 3!}{C_{10}^1 C_9^1 C_8^1} = \frac{1}{4}$.

【评注】当然此题也可将逐次无放回取样转化为一次取样来分析, 即 $P = \frac{C_2^1 C_3^1 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{4}$.

5. C; 最大点数与最小点数之差等于2的情况有: 第一种: 最小点数为1, 最大点数为3, 列举有: $(1,3), (3,1)$, 共有2种情况, 同理第二种: 最小点数为2, 最大点数为4; 第三种: 最小点数为3, 最大点数为5; 第四种: 最小点数为4, 最大点数为6; 合计为8种. 则概率 $P = \frac{8}{6 \times 6} = \frac{2}{9}$.

6. C; 最大点数与最小点数之差等于2的情况有: 第一种: 最小点数为1, 最大点数为3, 列举有: $(1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,1,2), (3,2,1), (1,3,3), (3,1,3), (3,3,1)$, 共有12种情况, 同理第二种: 最小点数为2, 最大点数为4; 第三种: 最小点数为3, 最大点数为5; 第四种: 最小点数为4, 最大点数为6; 合计为48种. 则概率 $P = \frac{48}{6 \times 6 \times 6} = \frac{2}{9}$.

7. B; 记两个零件中恰好有一个一等品的事件为 A , 则

$$P(A) = P(A_1^* A_2) + P(A_1 A_2^*) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12}.$$

8. E. 题中三张卡片随机地排成一行, 共有三种情况: BEE, EBE, EEB , 所以恰好排成英文单词 BEE 的概率为 $\frac{1}{3}$.

9. C; 每道题答对的概率为 $\frac{1}{4}$, 而答对每道题是相互独立的, 为3重伯努利试验, 故答对3道题的概率为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

10. A; 由于4次相互独立, 所以恰好发生一次的概率为 $C_4^1 p(1-p)^3$, 恰好发生两次的概率为 $C_4^2 p^2(1-p)^2$, 则 $C_4^1 p(1-p)^3 \leq C_4^2 p^2(1-p)^2 \Rightarrow 0.4 \leq p < 1$.

11. C; 由于3次测量相互独立, 为3重伯努利试验, 则恰好两次正误差为 $C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$

$=\frac{3}{8}$;同理,恰好两次负误差为 $C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, 则 $P_1 = P_2$.

12. B;显然只有(3,5,7),(3,7,9),(5,7,9)这3组可以构成三角形,则 $\frac{3}{C_5^3} = 0.3$.

13. A;(1)5台停机维修时相互独立,只有5台都停机维修才会造成停电,故为 $\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$.

D;(2)城市缺电有三种情况,分别为3,4,5台停机维修,则为 $C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{53}{512}$.

14. D;每次出现正面和反面的概率都为 $\frac{1}{2}$,并且每次抛掷相互独立,则

(1) $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{32}$; (2) $P_2 = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$, 故 $P_2 = 10P_1$.

15. A;由于每个信息员提供的信息相互独立,故可能有4个提供正确信息,概率为 $C_6^4(0.6)^4(0.4)^2$;可能有5个提供正确信息,概率为 $C_6^5(0.6)^5(0.4)$;也有可能是6个都提供正确信息,概率为 $C_6^6(0.6)^6$,故作出正确决策的概率为 $C_6^4(0.6)^4(0.4)^2 + C_6^5(0.6)^5(0.4) + C_6^6(0.6)^6 = 7 \times 0.6^5$.

16. B;由于三项标准互不影响,故将每项合格的概率相乘即可,则 $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{90}$.

17. E; $P = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$.

18. A;因为这位司机在第一、二个交通岗未遇到红灯,在第三个交通岗遇到红灯,所以 $P = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

19. C;设A发生的概率为 p ,则有 $1 - (1 - p)^3 = \frac{19}{27} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$.

20. B;显然正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$,则有 $C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = C_5^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-(k+1)}$, $\Rightarrow C_5^k = C_5^{k+1} \Rightarrow k = 2$.

21. D;至少有一名女生的对立事件为:一名女生也没有,即全为男生,所求概率为 $1 - \frac{C_{45}^3}{C_{50}^3} = 0.28$.

22. C; $A = \{\text{甲能解出题}\}, B = \{\text{乙能解出题}\}, P(A + B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

23. A;所求概率为 $0.9^3 \cdot (1 - 0.9) = 0.0729$.

二、条件充分性判断题

1. B; 由条件(1), $C_4^1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_4^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + C_4^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 > \frac{1}{2}$; 条件(2), $C_4^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 < \frac{1}{2}$.

2. E; 方法一: 可以分为甲译出乙未译出, 乙译出甲未译出或甲乙均译出, 故有条件(1), 译出概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; 条件(2), 译出概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

方法二: 密码能被破译, 其反面为甲乙两人均未译出, 故由条件(1), 概率为 $1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$; 由条件(2), 概率为 $1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

3. A. 由条件(1), $m = 5, n = 8$, 概率为 $\frac{C_5^1}{C_8^1} = \frac{3}{28}$; 由条件(2), $m = 4, n = 7$, $\frac{C_5^1}{C_7^1} = \frac{1}{7}$.

4. D; 条件(1), 显然 $P(A) = P(B) = \frac{2}{5} \Rightarrow p_1 = p_2$; 条件(2), $P(A) = \frac{2}{5}$, “乙取到白球”, 由于乙是后取, 所以分两种情况, 甲取白球时乙取白球, 或甲取黑球时乙取白球, 故概率为 $P(B) = \frac{C_3^1 C_2^1 + C_2^1}{C_5^1 C_4^1} = \frac{2}{5}$, 从而 $p_1 = p_2$.

5. E; 小于10的质数: 2、3、5、7, 小于10的合数: 4、6、8、9; 先从4个数里选两个, 这两个数 a, b 组成的符合条件的 $aab, aba, baa, abb, bab, bba$ 六种情况, 所以符合题干的概率 $p = \frac{C_4^2 \times 6}{4^3} = \frac{9}{16}$.

6. A; 由(1) 杯子中球数最大值为1, 说明4个杯子中选出3个杯子, 每个杯子各放一个球, 概率为 $P = \frac{C_4^3 \cdot 3!}{4^3} = \frac{3}{8}$, 充分; 由(2) 杯子中球数最大值为2, 说明有一个杯子放两个球, 还有一个杯子放一个球, 概率为 $P = \frac{C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot 2!}{4^3} = \frac{9}{16}$, 不充分.

7. E; 由(1), 若有6个白球, 则至少有一个红球的概率是 $P = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; 由(2), 若有7个白球, 则至少有一个为红球的概率是 $P = 1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$.

8. B; 由(1) 因为每个球不同, 所以摸出2个黑球概率: $\frac{P_3^2}{P_5^2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$;

由(2) 因为每个球不相同, 所以摸出2个黑球概率: $\frac{P_3^2}{P_4^2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

9. D; 由(1) 点数之和为5包括 {一个一点, 一个4点} + {一个2点, 一个3点},

$P = 2 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{9}$; 由(2) 点数之和为9包括 {一个6点, 一个3点} + {一

个5点,一个4点}, 概率 $P = 2 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{9}$.

10. A; 由(1) $P = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$; 由(2) 得 $P = \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$.

11. C; 3件产品至少有一件次品的对立事件为一件次品也没有, 即3件产品均为正品, 联合(1)和(2) 分析: $P = 1 - \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{137}{228}$, 充分.

12. C; 设 X 表示射中的环数, 则 $P(x < 9) = 1 - P(x \geq 9) = 1 - P(x = 9) - P(x = 9) - P(x = 10)$, 联合(1)和(2), 代入上式, 得 $P(x > 9) = 1 - 0.24 - 0.28 = 0.48$.

13. B; 设 $A = \{\text{至少有1人击中目标}\}$, $\bar{A} = \{\text{两人都没击中目标}\}$, 则 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

由(1) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - 0.6)(1 - 0.5) = 0.8$,

由(2) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - 0.6)^2 = 0.84$.



扫码看视频

综合提高题

一、问题求解

1. 在1, 2, 3, 4四个数中, 任选取两个数, 其中一个数是另一个数的2倍的概率为().

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{4}$

2. 由1, 2, 3, 4, 5五个数字组成无重复数字的五位数, 这个五位数能被2整除的概率为 P_1 , 能被3整除的概率为 P_2 , 则有().

- (A) $P_1 > P_2$ (B) $P_1 = P_2$ (C) $2P_1 = P_2$
(D) $P_1 + P_2 < 1$ (E) $P_1 + P_2 > 1$

3. 某城市私家汽车牌照的格式为“京 A Q □ — □ □ □”, 前1格是英文字母(除字母I、O外), 后3格为0~9这十个数字中的3个数字(数字允许重复), 则任意遇到一辆私家车, 牌照的后面3格中有且仅有2个连续“8”的概率是().

- (A) 0.009 (B) 0.01 (C) 0.012 (D) 0.018 (E) 0.02

4. 某市电话号码由8位数组成, 每位数字可以是0, 1, 2, ..., 9十个数字中的任何一个, 则电话号码是由8个互不相同的数字组成的概率是().

- (A) $\frac{C_{10}^8 \cdot 8!}{10^8}$ (B) $\frac{C_{10}^8}{10^8}$ (C) $\frac{C_{10}^8 \cdot 8!}{8^{10}}$ (D) $\frac{C_{10}^8}{8^{10}}$ (E) $\frac{C_{10}^8}{10^{10}}$

5. 在某一时期, 一条河流某处的年最高水位在各个范围内的概率如下:

年最高水位(m, 米)	$m < 10$	$10 \leq m < 12$	$12 \leq m < 14$	$14 \leq m < 16$	$m \geq 16$
概率	0.10	0.28	0.38	0.16	0.08

则在同一时期内, 河流的年最高水位在下列范围对应的概率, 正确的为().

- (A) $10 \leq m < 16$ 的概率为 0.79 (B) $m < 12$ 的概率为 0.38
(C) $m \geq 14$ 的概率为 0.20 (D) $m < 14$ 的概率为 0.28
(E) $m < 14$ 的概率为 0.29

6. 某一批花生种子,如果每 1 粒发芽的概率为 $\frac{4}{5}$,则播下 4 粒种子恰有 2 粒发芽的概率是().

- (A) $\frac{16}{625}$ (B) $\frac{96}{625}$ (C) $\frac{192}{625}$ (D) $\frac{256}{625}$ (E) $\frac{226}{625}$

7. 将 4 封不同的信投到 3 个信箱中,则 3 个信箱都不空的概率是().

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{9}{16}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{9}$

8. 在一条街道上顺次设有甲,乙,丙三处交通灯,若在 1 分钟内开放绿灯的时间分别为 25 秒,35 秒,45 秒,则某车在这条街上行驶,通过三处不需停车的概率为().

- (A) $\frac{35}{192}$ (B) $\frac{25}{192}$ (C) $\frac{35}{576}$ (D) $\frac{7}{64}$ (E) $\frac{3}{64}$

9. 甲,乙,丙三人独立向目标射击,击中目标的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$,现在他们同时开枪向目标射击一次,则恰有两发子弹击中目标的概率是().

- (A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{11}{24}$ (E) $\frac{7}{24}$

10. 甲,乙两人相约于 8~12 点在预定地点会面.先到的人等候另一人 30 分钟后离去,则甲,乙两人能会面的概率().

- (A) $\frac{11}{64}$ (B) $\frac{13}{64}$ (C) $\frac{19}{64}$ (D) $\frac{17}{64}$ (E) $\frac{15}{64}$

11. 在 7 局 4 胜制的乒乓比赛中,选手甲与选手乙的水平相当,则在两人的比赛中甲能以 4:2 的比分胜出的概率为().

- (A) $\frac{5}{32}$ (B) $\frac{15}{64}$ (C) $\frac{7}{32}$ (D) $\frac{13}{64}$ (E) $\frac{3}{16}$

12. 有 6 个人,每个人都以相同的概率被分配到 4 间房中的一间中,若分房时每个房间至少一个人,则某指定房间中恰有 2 人的概率为().

- (A) $\frac{9}{52}$ (B) $\frac{9}{26}$ (C) $\frac{9}{64}$ (D) $\frac{5}{32}$ (E) $\frac{3}{16}$

13. 有 6 个人,每个人都以相同的概率被分配到 4 间房中的一间中,则某指定房间中恰有 2 人的概率为().

- (A) $\frac{1245}{4096}$ (B) $\frac{1205}{4096}$ (C) $\frac{1415}{4096}$ (D) $\frac{1015}{4096}$ (E) $\frac{1215}{4096}$

14. 一个人有 10 把钥匙,其中只有 1 把钥匙能打开房门,随机逐个试验,则恰好第 3 次打开房门的概率为().

- (A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{7}$

15. 加工某种零件需经过三道工序.设第一、二、三道工序的合格率分别为 $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$,

且各道工序互不影响.

(1) 该种零件的合格率为();

(A) 0.4 (B) 0.5 (C) 0.6 (D) 0.7 (E) 0.8

(2) 从中任取 3 件, 恰好取到一件合格品的概率为().

(A) 0.169 (B) 0.179 (C) 0.189 (D) 0.192 (E) 0.194

(3) 从中任取 3 件, 至少取到一件合格品的概率为().

(A) 0.863 (B) 0.873 (C) 0.963 (D) 0.971 (E) 0.973

16. 某工厂生产甲、乙两种产品, 甲产品的一等品率为 80%, 二等品率为 20%; 乙产品的一等品率为 90%, 二等品率为 10%. 生产 1 件甲产品, 若是一等品则获得利润 4 万元, 若是二等品则亏损 1 万元; 生产 1 件乙产品, 若是一等品则获得利润 6 万元, 若是二等品则亏损 2 万元. 设生产各种产品相互独立.

(1) 记 X (单位: 万元) 为生产 1 件甲产品和 1 件乙产品可获得的总利润, 则下列概率正确的有() 个.

① $P(X=10)=0.72$, ② $P(X=5)=0.18$, ③ $P(X=2)=0.08$, ④ $P(X=-3)=0.02$

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个 (E) 4 个

(2) 生产 4 件甲产品所获得的利润不少于 10 万元的概率为().

(A) 0.8092 (B) 0.8192 (C) 0.8232 (D) 0.8492 (E) 0.8632

二、条件充分性判断题

1. 两批货物各 10 件, 在运输过程中每批会损坏 k 件, 设第一批货物中有 1 件次品, 第二批中有 2 件次品, 全部到达后, 从未损坏的货物中任取 1 件, 该产品是正品的概率为 0.85.

(1) $k=1$.

(2) $k=2$.

2. 任取一个正整数, 其平方数的末位数字是 n 的概率等于 0.2.

(1) $n=4$.

(2) $n=5$.

3. $p=\frac{25}{72}$.

(1) 有放回的取棋子. 棋子有三种颜色, 即 5 颗红色, 4 颗黄色, 3 颗白色. 两次都取到同一种颜色的概率 p .

(2) 不放回的取棋子. 棋子有三种颜色, 即 5 颗红色, 4 颗黄色, 3 颗白色. 两次都取到同一种颜色的概率 p .

4. 分别从集合 $A=\{1, 3, 6, 7, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中各取一个数 x, y , 则 $x+y \geq m$ 的概率为 $\frac{9}{25}$.

(1) $m=10$.

(2) $m=12$.

5. 一筐苹果中任取一个, 质量在 $[200\text{g}, 350\text{g}]$ 区间内的概率是 0.53.

(1) 质量小于 200g 的概率是 0.25. (2) 质量不小于 350g 的概率是 0.22.

6. 有一个篮球运动员投篮 n 次, 投篮命中率均为 $\frac{3}{5}$, 则这个篮球运动员投篮至少有一次投中的概率是 0.936.

(1) $n=3$.

(2) $n=4$.

7. 甲、乙两人下棋,甲不输的概率为 90%,则甲、乙两人下成和棋的概率为 50%.

(1) 乙获胜的概率是 40%.

(2) 甲获胜的概率是 40%.

8. 从 n 名男同学, m 名女同学中任选 3 名参加体能测试,则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率为 $\frac{3}{4}$.

(1) $n=5$.

(2) $m=2$.

9. 把 10 本书任意地放在书架上,其中指定的 n 本书彼此相邻的概率为 $\frac{1}{15}$.

(1) $n=3$.

(2) $n=4$.

综合提高题详解

一、问题求解题

1. C;任取两数有 $C_4^2=6$ 种,一个数是另一个数的 2 倍的有 (1,2)、(2,4) 两种,故概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2. E;(1) 能被 2 整除的,末尾一定是偶数,则概率 $P_1=\frac{C_2^1 4!}{5!}=\frac{2}{5}$;

(2) 能被 3 整除,各个数位数字之和是 3 的倍数即可,显然不管这 5 个数怎么排,始终能被 3 整除,故概率 $P_2=1$.

3. D;方法一:显然车牌号的总数为 $C_{26-2}^1 \times 10^3$,满足有且仅有两个连续“8”的总数为 $C_{26-2}^1 C_9^1 \cdot 2$,故概率为 $p=\frac{C_{26-2}^1 C_9^1 \cdot 2}{C_{26-2}^1 \times 10^3}=0.018$.

方法二:字母并不影响其概率,那么只要后三位数字一个是非 8 的,后面连续的两个是 8 的概率,是哪个数字的概率都是等可能的,为 $\frac{1}{10}$,显然概率为 $(1-\frac{1}{10}) \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 2=0.018$,故选择(D).

4. A;8 位数字每位有 10 种情况,所以共有 10^8 种情况,再由 8 个互不相同的数字有 P_{10}^8 种情况,所以概率为 $\frac{P_{10}^8}{10^8}$.

5. B;根据题干所给的表格,分别计算概率:

$$P(10 \leq m < 16) = P(10 \leq m < 12) + P(12 \leq m < 14) + P(14 \leq m < 16) \\ = 0.28 + 0.38 + 0.16 = 0.82;$$

$$P(m < 12) = P(m < 10) + P(10 \leq m < 12) = 0.10 + 0.28 = 0.38;$$

$$P(m \geq 14) = P(14 \leq m < 16) + P(m \geq 16) = 0.16 + 0.08 = 0.24;$$

$$P(m < 14) = 1 - P(m \geq 14) = 0.76.$$

$$6. B;4 \text{ 粒种子恰有 } 2 \text{ 粒发芽的概率 } P(k=2) = C_4^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{96}{625}.$$

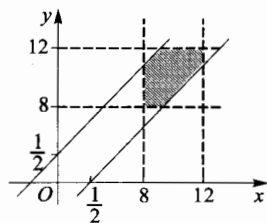
$$7. B; \text{先将 } 4 \text{ 封信分为三堆,然后放入 } 3 \text{ 个信箱,故概率 } P = \frac{C_4^2 3!}{3^4} = \frac{4}{9}.$$

8. A; 不需停车说明每个路口都遇到绿灯, 故概率 $P = \frac{25}{60} \cdot \frac{35}{60} \cdot \frac{45}{60} = \frac{35}{192}$.

9. D; 分为三类讨论, 概率 $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{24}$.

10. E; 以 x, y 分别表示甲、乙二人到达的时刻, 则 $8 \leq x \leq 12, 8 \leq y \leq 12$;

若以 (x, y) 表示平面上的点的坐标, 则所有基本事件可以用这平面上的边长为 4 的一个正方形: $8 \leq x \leq 12, 8 \leq y \leq 12$ 内所有点表示出来. 二人能会面的充要条件是 $|x - y| \leq \frac{1}{2}$; 如图, 所以概



率为: $P = \frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形 } ABCD \text{ 的面积}} = \frac{16 - 2 \left[\frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2} \right)^2 \right]}{16} = \frac{15}{64}$.

11. A; 等价于前 5 次甲胜了 3 次, 最后一次甲必须胜, $P = C_5^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{32}$.

【评注】此题学生很容易当成前 6 次甲胜 4 次的概率来做, 产生误导.

12. B; 先分堆, 再排序. 先求满足条件的分房方案种数, 第一步选 2 人放入指定房间, 有 C_6^2 种, 再将剩下 4 人分为 2, 1, 1 三堆, 有 C_4^2 种, 最后将其排序, 根据乘法原理, 共有 $C_6^2 C_4^2 3! = 540$. 再求出总情况数: 第一类, 按照 2, 2, 1, 1 分成四堆, 再排序, 有 $\frac{C_6^2 C_4^2}{2!} 4! = 1080$ 种, 第二类, 按照 3, 1, 1, 1 分成四堆, 再排序, 有 $C_6^3 4! = 480$ 种. 据加法原理可得: $n = 1080 + 480 = 1560$,

从而概率 $P = \frac{540}{1560} = \frac{9}{26}$.

13. E; 先求满足条件的分房方案种数, 第一步选 2 人放入指定房间, 有 C_6^2 种, 再将剩下 4 人任意放到三个房间中, 有 3^4 种, 根据乘法原理, 共有 $C_6^2 3^4$ 种. 再求出总情况数: 6 个人任意去 4 个房间, 有 4^6 种. 从而概率 $P = \frac{C_6^2 3^4}{4^6} = \frac{1215}{4096}$.

14. B; 基本常识, 开锁是无放回的随机抽样, 设 B_n 表示第 n 次首次打开了房门, $\overline{B_n}$ 表示第 n 次没有打开房门, 则: $P(B_k) = P(\overline{B_1} \overline{B_2} \cdots \overline{B_{k-1}} B_k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$, 即每次试开的概率都相同, 均为 $\frac{1}{10}$.

15. (1) D; $P = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{10}$;

(2) C; 该种零件的合格品率为 $\frac{7}{10}$, 由独立重复试验的概率公式得:

恰好取到一件合格品的概率为 $C_3^1 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10} \right)^2 = 0.189$,

(3) E; 方法一: 至少取到一件合格品的概率为 $1 - \left(\frac{3}{10} \right)^3 = 0.973$.

方法二: 至少取到一件合格品的概率为

$$C_3^1 \cdot \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10} \right)^2 + C_3^2 \left(\frac{7}{10} \right)^2 \cdot \frac{3}{10} + C_3^3 \left(\frac{7}{10} \right)^3 = 0.973.$$

16. (1) E; 由题设知, $P(X=10)=0.8 \times 0.9=0.72$, $P(X=5)=0.2 \times 0.9=0.18$,
 $P(X=2)=0.8 \times 0.1=0.08$, $P(X=-3)=0.2 \times 0.1=0.02$.

(2) B; 设生产的 4 件甲产品中一等品有 n 件, 则二等品有 $4-n$ 件.

由题设知 $4n - (4-n) \geq 10$, 解得 $n \geq \frac{14}{5}$, 又 $n \in \mathbf{N}$, 得 $n=3$, 或 $n=4$. 所求概率为
 $P=C_4^3 \times 0.8^3 \times 0.2 + 0.8^4 = 0.8192$.

二、条件充分性判断题

1. D; 每件产品损坏的概率相同, 均为 $\frac{k}{10}$; 若从第一批货物里面取未损坏的产品,
 $\frac{(10-k) \times 0.9}{10-k} = 0.9$, 若从第二批货物里面取未损坏的产品: $\frac{(10-k) \times 0.8}{10-k} = 0.8$, 故概率
 为 $\frac{1}{2} \times \frac{(10-k) \times 0.9}{10-k} + \frac{1}{2} \times \frac{(10-k) \times 0.8}{10-k} = 0.85$, 与 k 的取值无关.

【评注】本题可以用抽签原理解释, 因为损坏的有可能为正品, 有可能为次品, 所以正品
 率跟 k 值没有关系, 故概率为 $(0.9+0.8)/2=0.85$.

2. A; 正整数有无限多个, 考虑样本 $1 \sim 10$ 共 10 种情况即可. 条件(1), 平方后末位数字
 为 4, 这个数可以是 2 或 8, 故概率为 $\frac{2}{10}=0.2$, 充分; 条件(2), 平方后末位数字为 5, 这个数
 只能是 5, 故概率为 $\frac{1}{10}=0.1$, 不充分.

3. A; 由(1) $P=\frac{5^2+4^2+3^2}{12^2}=\frac{25}{72}$, 充分; 由(2) $P=\frac{5 \times 4+4 \times 3+3 \times 2}{12 \times 11}=\frac{19}{66}$, 不充
 分.

4. A; 由(1), 穷举 $x+y \geq 10$ 共有 9 种可能.

5. C; 由题干和所给条件知, 条件(1)、(2)单独都不充分, 现联合可得, 所求事件的概率
 为 $1-0.25-0.22=0.53$, 则充分.

6. A; 由题干及所给条件(1)和(2)知, 两条件不可能同时充分, 现考虑条件(1)可得这
 个篮球运动员投篮至少有一次投中的概率为 $1-\left(\frac{2}{5}\right)^3=0.936$, 则充分, 于是知条件(2)不
 充分.

7. B; 由于甲不输即为甲获胜或甲、乙二人下成和棋, 根据题干可知, 要求甲、乙二人下
 成和棋的概率, 需要知道甲获胜的概率, 再结合所给条件知(2)充分.

8. E; 由题干及所给条件知, 条件(1)和(2)单独都不充分, 现联合可得到的 3 名同学中
 既有男同学又有女同学的概率为 $\frac{C_3^1 C_2^2 + C_2^2 C_1^1}{C_3^3} = \frac{5}{7}$, 于是知不充分.

9. A; 根据题干, 然后观察所给条件, 可知(1)和(2)不可能同时充分, 而由条件(1)得概
 率为 $\frac{3! \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{15}$, 可知充分; 从而知(2)不充分.

第十一章 数据描述

【大纲考点】(1) 平均值;(2) 方差与标准差;(3) 数据的图表表示(直方图,饼图,数表)。

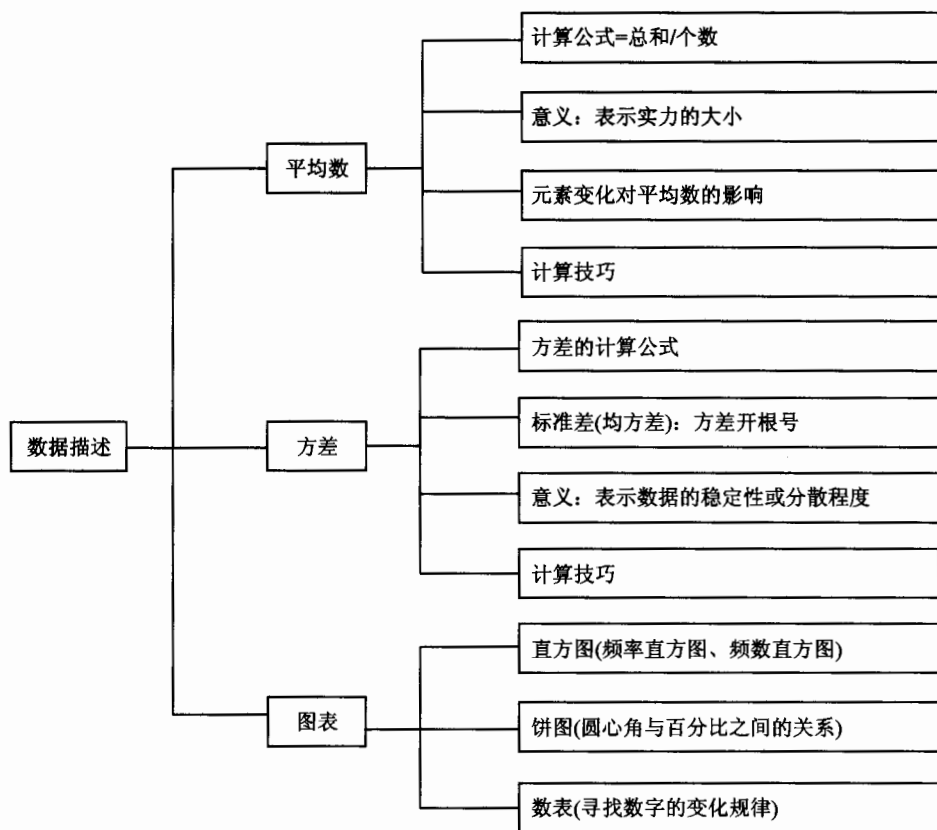
【备考要点】本章主要掌握平均值、方差、标准差的计算公式并理解它们的意义;其次,要掌握直方图(频数直方图和频率直方图)在数据描述中的含义,了解饼图的含义和基本数表的常识。

【知识体系】

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航,配套电子讲义,好实惠客服:737182994



【备考建议】对于教师,建议课时控制在2个课时;对于考生,建议在学习时要注意平均值、方差、标准差的概念理解及应用,不要死记硬背概念和公式;此外要掌握频数直方图和频率直方图的含义及其与条形图的区别,了解饼图和简单的数表知识。

第一节 考试要点剖析

一、平均值

设 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 称 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 为这 n 个数的平均值.

二、方差

设一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n , 其平均数为 \bar{x} , 则称

$$s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

为这个样本的方差.

三、标准差

因为方差与原始数据的单位不同, 且平方后可能夸大了离差的程度, 将方差的算术平方

根称为这组数据的标准差, 即 $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

四、方差和标准差的意义

方差的实质是各数据与平均数的差的平方的平均数. 标准差是方差的一个派生概念, 它的优点是单位和样本的数据单位保持一致, 给计算和研究带来方便.

方差和标准差用来比较平均数相同的两组数据波动的大小, 也用它描述数据的离散程度. 方差或标准差越大, 说明数据的波动越大, 越不稳定; 方差或标准差越小, 数据波动越小、越整齐、越稳定.

利用方差比较数据波动大小的方法和步骤: 先求平均数, 再求方差, 然后判断得出结论.

五、其他概念

1. 众数

出现次数最多的数称为众数.

2. 中位数

将数据由小到大排列, 若有奇数个数据, 则正中间的数为中位数; 若有偶数个数据, 则中间两个数的平均数为中位数.

六、直方图

1. 定义

把数据分为若干个小组, 每组的组距保持一致, 并在直角坐标系的横轴上标出每组的位

置(以组距作为底),计算每组所包含的数据个数(频数),以该组的“频率/组距”为高作矩形,这样得出若干个矩形构成的图叫做直方图.

2. 定义所包含的要点

(1) 组距的确定:一般是人为确定,不能太大也不能太小.

(2) 组数的确定:组数=极差/组距.

(3) 每组频率的确定:频率=频数/数据容量.

(4) 每组所确定的矩形的面积=组距 $\times \frac{\text{频率}}{\text{组距}}$ =频率.

(5) 频率直方图下的总面积等于1(各个矩形面积之和等于1)

(6) 分组时要遵循“不重不漏”的原则:“不重”是指某一个数据只能分在其中的某一组,不能在其他组中出现;“不漏”是指组别能够穷尽,即在所分的全部组别中每项数据都能分在其中的某一组,不能遗漏.

【注意】为了解决上述问题,分组时采用左闭右开的区间表示:[).

例如某数据分组时,其中的两组分别为[227,290)和[290,353),这样290这个数据就只存在于第二个区间中了,避免了290同时属于两个区间的情况发生.

3. 在直方图中,众数是最高矩形底边中点的横坐标;中位数左边和右边的直方图的面积相等;平均数是直方图的重心,它等于每个小矩形的面积乘以小矩形底边中点横坐标之和

七、饼图

饼图是一个划分为几个扇形的圆形统计图表,用于描述量、频率或百分比之间的相对关系.在饼图中,每个扇区的弧长(以及圆心角和面积)大小为其所表示的数量的比例.这些扇区合在一起刚好是一个完全的圆形.顾名思义,这些扇区拼成了一个切开的饼形图案.其所用公式为:某部分所占的百分比等于对应扇形所占整个圆周的比例.

第二节 基础过关题型

【题型1】平均数的计算

【例1】假设三个相异正整数中的最大数是54,则三个数的最小平均值是().

(A) 17 (B) 19 (C) 21 (D) 23 (E) 18

【解析】最大是54,取最小的正数,是1,2. 所以平均数是 $19=(1+2+54)/3$,选B.

【例2】在一次法律知识竞赛中,甲机关20人参加,平均80分,乙机关30人参加,平均70分,则两个机关参加竞赛的人总平均分是().

(A) 76 (B) 75 (C) 74 (D) 73 (E) 77

【解析】 $(20 \times 80 + 30 \times 70) \div (20 + 30) = 74$,选C.

【题型2】方差与标准差的计算

【例3】给出两组数据:甲组:20,21,23,24,26;乙组:100,101,103,104,106. 甲组,乙组的方差分别为 s_1^2, s_2^2 . 则下列正确的是().

(A) $s_1^2 > s_2^2$ (B) $s_1^2 < s_2^2$ (C) $s_1^2 = s_2^2$ (D) $s_1^2 \neq s_2^2$ (E) 无法确定

【解析】甲组： $\bar{x}_1 = 20 + (0 + 1 + 3 + 4 + 6)/5 = 22.8$ ，

乙组： $\bar{x}_2 = 100 + (0 + 1 + 3 + 4 + 6)/5 = 102.8$ ，

得 $s_1^2 = \frac{1}{5}[(2.8)^2 + (1.8)^2 + (0.2)^2 + (1.2)^2 + (3.2)^2]$ ，

$s_2^2 = \frac{1}{5}[(2.8)^2 + (1.8)^2 + (0.2)^2 + (1.2)^2 + (3.2)^2]$ ，

可得 $s_1^2 = s_2^2$ ，故选 C。

【评注】本题说明将每个数都加上相同一个数，方差不变。

【题型 3】饼图

【例 4】某工厂用 A、B、C 三台机器加工生产一种产品。对 2015 年第一季度的生产情况进行统计，图 1 是三台机器的产量统计图，图 2 是三台机器产量的比例分布图。（图中有部分信息未给出）

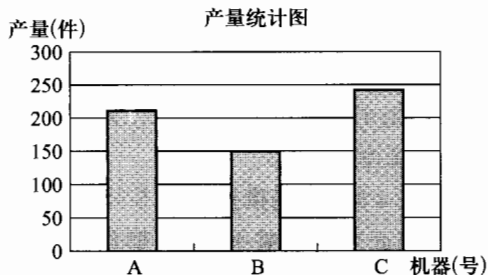


图 1

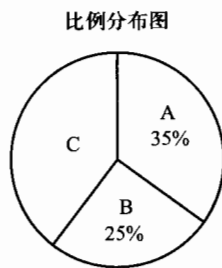


图 2

(1) 则 A 机器的产量为()；

(A) 180 (B) 190 (C) 200 (D) 210 (E) 240

(2) 则 C 机器的产量为()。

(A) 180 (B) 190 (C) 200 (D) 210 (E) 240

【解析】(1)由图 1 得到 B 机器的产量为 150 件，再根据图 2 中 A 机器和 B 机器的比例关系，可以得到 A 机器的产量为 210 件。选 D。

(2) C 机器产量的百分比为 40%。设 C 机器的产量为 x ，

由 $\frac{150}{25\%} = \frac{x}{40\%}$ ，得 $x = 240$ ，即 C 机器的产量为 240 件。选 E。

【例 5】国家规定“中小学生每天在校体育活动时间不低于 1 小时”。为此，某市就“你每天在校体育活动时间是多少”的问题随机调查了辖区内 300 名初中学生。根据调查结果绘制的统计图(部分)如图所示，其中分组情况是：

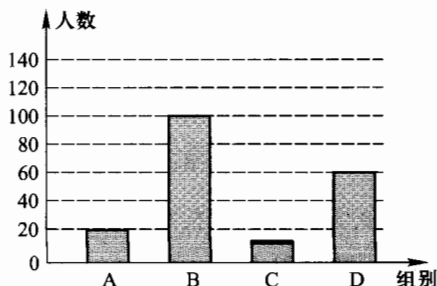
A 组： $t < 0.5h$ ； B 组： $0.5h \leq t < 1h$ ；

C 组： $1h \leq t < 1.5h$ ； D 组： $t \geq 1.5h$ 。

请根据上述信息解答下列问题：

(1) C 组的人数是多少？

(2) 若该辖区有 24 000 名初中学生，其中达国家规定体育活动时间的人约有多少？



【解析】(1) 从图中可以看出,数据共分4组,A组20人,B组100人,D组60人,故C组为 $300-20-100-60=120$ 人;(2) 达国家规定体育活动时间的人数占 $\frac{120+60}{300} \times 100\% = 60\%$. 所以,达国家规定体育活动时间的人约有 $24\,000 \times 60\% = 14\,400$ 人.

【题型4】数表

【例6】某农贸市场出售西红柿,当价格上涨时,供给量相应增加,而需求量相应减少,具体调查结果如下表:

表1 市场供给量

单价/(元·kg ⁻¹)	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
供给量/1000kg	50	60	70	75	80	90

表2 市场需求量

单价/(元·kg ⁻¹)	4	3.4	2.9	2.6	2.3	2
需求量/1000kg	50	60	65	70	75	80

根据以上提供的信息,市场供需平衡点(即供给量和需求量相等时的单价)应在区间().

- (A) (2.3, 2.6) (B) (2.4, 2.6) (C) (2.6, 2.8)
(D) (2.8, 2.9) (E) (2.7, 2.9)

【解析】从表中可以看出,当价格从2涨到4时,市场供给量从50增加到90;而当价格从4降到2时,市场需求量从50增加到80. 因此市场供需平衡点(即供给量和需求量相等时的单价)应在区间(2.6, 2.8),选C.

第三节 强化突破题型

【题型1】平均值的意义

【思路点拨】通过权重的方式可以快速求解平均值.

【例1】某人参加了4门功课考试,平均分是82分,若他计划下一门功课考完后,5门功课的平均分至少达到92分(每门功课均为150分总分),则他下门功课至少应得()分.

- (A) 122 (B) 126 (C) 128 (D) 130 (E) 132

【解析】设下门功课至少应得 x 分,则 $\frac{82 \times 4 + x}{5} \geq 92 \Rightarrow x \geq 132$, 选E.

【例2】某学生在军训时进行打靶测试,共射击10次. 他的第6、7、8、9次射击分别射中9.0环、8.4环、8.1环、9.3环,他的前9次射击的平均环数高于前5次的平均环数. 若要使10次射击的平均环数超过8.8环,则他第10次射击至少应该射中()环.(打靶成绩精确到0.1环)

- (A) 9.0 (B) 9.2 (C) 9.4 (D) 9.5 (E) 9.9

【解析】第6、7、8、9次射击的平均环数为 $\frac{9+8.4+8.1+9.3}{4} = 8.7$, 则前5次最多射击了 $8.7 \times 5 - 0.1$ 环. 要10次射击的平均环数超过8.8环,则总环数至少为 $8.8 \times 10 + 0.1$, 则最后一轮的射击至少要 $8.8 \times 10 + 0.1 - (8.7 \times 9 - 0.1) = 9.9$ 环,故选E.

【题型 2】方差与标准差的意义

【例 3】要从甲、乙、丙三位射击运动员中选拔一名参加比赛,在预选赛中,他们每人各打 10 发子弹,命中的环数如下:

甲:10,10,9,10,9,9,9,9,9,9.

乙:10,10,10,9,10,8,8,10,10,8.

丙:10,9,8,10,8,9,10,9,9,9.

根据这次成绩,应该选拔()去参加比赛.

(A) 甲 (B) 乙 (C) 丙 (D) 甲和乙 (E) 甲和丙

【解析】 $\bar{x}_{\text{甲}} = 9.3$, $\bar{x}_{\text{乙}} = 9.3$, $\bar{x}_{\text{丙}} = 9.1$, 丙应淘汰;

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{10} [(10-9.3)^2 + (10-9.3)^2 + \cdots + (9-9.3)^2] = 0.21,$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{10} [(10-9.3)^2 + (10-9.3)^2 + \cdots + (8-9.3)^2] = 0.81.$$

由于 $s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2$, 故选甲参加比赛, 选 A.

【题型 3】直方图

【思路点拨】直方图分为频数直方图和频率直方图, 主要考查读频数分布直方图的能力和利用图获取信息的能力; 此外, 要注意可利用列举法求概率.

【例 4】将容量为 n 的样本中的数据分成 6 组, 绘制频率分布直方图. 若第 1 组至第 6 组数据的频率之比为 2:3:4:6:4:1, 且前 3 组数据的频数之和等于 27, 则 n 等于().

(A) 50 (B) 55 (C) 60 (D) 65 (E) 80

【解析】设第 1 组至第 6 组数据的频率分别为 $2x, 3x, 4x, 6x, 4x, x$, 则 $2x+3x+4x+6x+4x+x=1$, 解得 $x=\frac{1}{20}$, 所以前 3 组数据的频率分别是 $\frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}$, 故前 3 组数据的频数之和等于 $\frac{2n}{20} + \frac{3n}{20} + \frac{4n}{20} = 27$, 解得 $n=60$, 选 C.

【评注】频数之和等于总人数, 频率之和等于 1.

【例 5】某班 50 名学生参加平均每周上网时间的调查, 由调查结果绘制了频数分布直方图(见下图), 根据图中信息回答下列问题:

(1) 则 a 的值为().

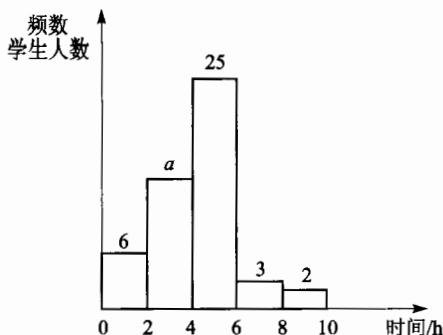
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 14

(2) 从上网时间在 6~10h 的 5 名学生中随机选取 2 人, 则其中至少有 1 人的上网时间在 8~10h 的概率为().

(A) 0.3 (B) 0.4 (C) 0.6 (D) 0.7 (E) 0.8

【解析】(1) 依题意 $a=50-6-25-3-2=14$, 得 a 的值为 14; 选 E.

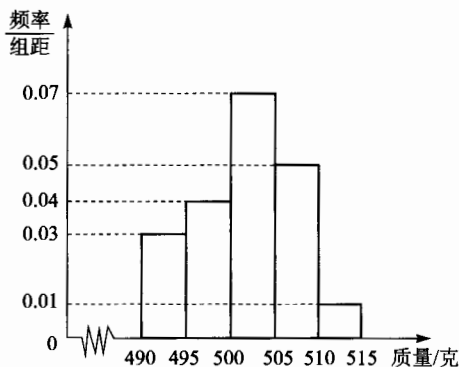
(2) 根据图中数据可以知道上网时间在 6~8h 的人数有 3 人, 上网时间在 8~10h 有 2 人, 所以从上网时间在 6~10h 的 5 名学生中随机选取 2 人共有 10 种可能.



从反面计算,2人上网时间都在6~8h的有 $C_2^3=3$ 种.

$P(\text{至少有1人的上网时间在} 8\sim 10\text{h})=1-3\div 10=0.7$. 选 D.

【例6】某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况,随即抽取该流水线上40件产品作为样本算出他们的质量(单位:g),质量的分组区间为(490,495],(495,500],…,(510,515],由此得到样本的频率分布直方图,如图所示.



(1) 根据频率分布直方图,则质量超过505g的产品数量为().

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

(2) 在上述抽取的40件产品中任取2件,设 n 为质量超过505g的产品数量,则有().

(A) $P(n=0)=\frac{67}{130}$ (B) $P(n=1)=\frac{53}{130}$ (C) $P(n=2)=\frac{17}{130}$

(D) $P(n=1)=\frac{51}{130}$ (E) $P(n=2)=\frac{11}{130}$

(3) 从流水线上任取5件产品,则恰有2件产品的质量超过505g的概率为().

(A) 0.9×0.7^3 (B) 0.8×0.7^3 (C) 1.2×0.7^3
(D) 0.6×0.7^3 (E) 0.7^4

【解析】(1) 根据频率分布直方图可知:质量超过505g的产品数量是 $(0.05+0.01)\times 5\times 40=12$ 件. 选 C.

(2) n 的可能取值是0,1,2.

$P(n=0)=\frac{C_{28}^2}{C_{40}^2}=\frac{63}{130}$, $P(n=1)=\frac{C_{28}^1C_{12}^1}{C_{40}^2}=\frac{56}{130}$, $P(n=2)=\frac{C_{12}^2}{C_{40}^2}=\frac{11}{130}$, 选 E.

(3) 该流水线上产品质量超过505g的概率是0.3,故恰好有2件产品的质量超过505g的概率为 $P=C_5^2 0.3^2 (1-0.3)^3=0.3087$, 选 A.

第四节 核心专题点睛

一、平均值

平均值又分为算术平均值、加权平均值、几何平均值等等.其中以算术平均值最常见,在考试中由于不允许使用计算器,所以计算量不会太复杂,掌握各种平均值解法就能很容易的解决问题.

【例1】在一次法律知识竞赛中,甲机关20人参加知识竞赛,平均分是80分,乙机关30人参加竞赛,平均分是70分,则两个机关参加竞赛的人的平均分是().

- (A) 76分 (B) 75分 (C) 74分 (D) 73分 (E) 72分

【解析】“两个机关参加竞赛的人的平均分”等于两个机关所得的总分数与总人数之商.

甲总分: $20 \times 80 = 1600$; 乙总分: $30 \times 70 = 2100$; 两个机关参加竞赛人的平均分为: $(20 \times 80 + 30 \times 70) \div (20 + 30) = 74$ 分. 所以选 C.

【例2】把自然数 $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 98, 99$ 分成三组,如果每组数的平均数刚好相等,那么此平均数为().

- (A) 55 (B) 60 (C) 45 (D) 50 (E) 40

【解析】“设每组数中各含有 a, b, c 个数字,由于‘每组数的平均数刚好相等’,根据算术平均值计算公式可得 $\frac{ax+bx+cx}{a+b+c} = x$,即所有数字的平均数=每组数的平均数.”

依题意:将自然数分成三组后每组的平均数相等,则此平均数应与 $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 98, 99$ 这 99 个自然数的平均数相等,即所求的平均数为 $S_{99}/99 = \frac{1+2+\dots+99}{99} = \frac{\frac{1+99}{2} \times 99}{99} = 50$; 所以选 D.

【例3】某车间进行季度考核,整个车间平均分是85分,其中 $2/3$ 的人得80分以上(含80分),他们的平均分是90分,则低于80分的人的平均分是().

- (A) 68 (B) 70 (C) 75 (D) 78 (E) 80

【解析】由题中“ $2/3$ 的人得80分以上(含80分),他们的平均分是90分”可知,将这部分人看成一个整体,其权重是 $2/3$, 平均值是90; 则“低于80分的人”又视为另一整体,其权重为 $1/3$.

解法一:特殊值法.假设整个车间总共有3人;根据题意,2人的得分在80分以上,则低于80分的有1人;其平均分为 $(85 \times 3 - 2 \times 90) \div 1 = 75$ 分. 所以选 C.

解法二:设低于80分的人的平均分是 x 分.由题意可知,两部分人的权重为 $2/3$ 和 $1/3$; 根据加权平均值计算公式: $\bar{x} = 90 \times (2/3) + (1/3)x = 85$; 解得 $x = 75$. 所以选 C.

【例4】某班有50个学生,在数学考试中,成绩是在前10名的学生的平均分比全班平均分高12分,那么其余同学的平均分比全班平均分低了()分.

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

【解析】由题中“50个学生,前10名的学生的平均分比全班平均分高12分”,可设全班

平均分为 x , 可得, 将前十名的看成一个整体, 其权重是 $10/50$, 平均值为 $12+x$; 将十名以外的视为另一整体, 其权重为 $1-10/50=40/50$, 平均值设为 y . 题目则求 $x-y$ 的值.

解法一: 列方程法. 设全班平均分为 x 分, 前十名外同学平均分为 y 分, 根据题意:

则 $50x=10(12+x)+40y$, 解得 $x-y=3$. 所以选 A.

解法二: 设全班平均分为 x 分, 前十名外同学平均分为 y 分, 根据加权平均值计算公式:

$$\frac{(x+12) \times 10 + 40y}{50} = x,$$

化简, 得 $x=3+y$, 即 $x-y=3$; 所以选 A.

解法三: 另辟蹊径、根据题意可知, 前 10 名学生的总成绩比全班的成绩高出的总分=其余同学的总分数比全班的成绩低的总分; 即其余同学比全班低的总分数为 $12 \times 10 = 120$ 分; 所以其余同学的平均分比全班平均分低了 $120 \div 40 = 3$ 分. 所以选 A.

【例 5】某项射击资格赛后的统计表明, 某国四名运动员中, 三名运动员的平均环数加上另一运动员的环数, 计算后得到的环数分别为 92, 114, 138, 160, 则此国四名运动员资格赛的平均环数是().

- (A) 63 (B) 126 (C) 168 (D) 252 (E) 256

【解析】设四名运动员的环数分别为 a, b, c, d , 则计算后得到的环数分别为 $\frac{b+c+d}{3}+a$,

$\frac{a+c+d}{3}+b$, $\frac{a+b+d}{3}+c$, $\frac{a+b+c}{3}+d$, 即相当于 92, 114, 138, 160.

对其求和得 $\frac{b+c+d}{3}+a+\frac{a+c+d}{3}+b+\frac{a+b+d}{3}+c+\frac{a+b+c}{3}+d=2(a+b+c+d)=92+114+138+160$, 根据算术平均值计算公式, 平均环数=总环数/人数 $=(a+b+c+d)/4=(92+114+138+160)/8=63$, 所以选 A.

【例 6】小王和小李一起到加油站给汽车加油, 小王每次加 50 升 93 汽油, 小李每次加 200 元 93 汽油, 如果汽油价格有升有降, 他们分别加了两次油, 那么给汽车所加汽油的平均价格较低的是().

- (A) 小王 (B) 小李 (C) 一样的 (D) 无法比较 (E) 以上都不对

【解析】题目中所求的是“给汽车所加汽油的平均价格较低的”, 这就要求先分别求出两人给汽车所加汽油的平均价格, 然后进行比较. 分别求出两人给汽车所加汽油的平均价格: 假设购买了两次汽油, 且两次汽油的价格分别为 a 元、 b 元, $a \neq b$, 则小王的平均价格为: $\bar{a} = \frac{50(a+b)}{50+50} = \frac{a+b}{2}$ 元;

小李的平均价格为: $\bar{b} = \frac{200+200}{\frac{200}{a}+\frac{200}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ 元, 比较大小(做商法): $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{(a+b)^2}{4ab} \geq$

$\frac{(2\sqrt{ab})^2}{4ab} = 1$, 当且仅当 $a=b$ 时, 取等号; 因为 $a \neq b$, 所以 $a > b$. 所以选 B.

二、方差

【例 7】某校 A、B 两队 10 名参加篮球比赛的队员的身高(单位:cm)如下表所示:

队员 队	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号
A 队	176	175	174	171	174
B 队	170	173	171	174	182

设两队队员身高的平均数分别为 \bar{x}_A, \bar{x}_B , 身高的方差分别为 S_A^2, S_B^2 , 则正确的选项是()。

- (A) $\bar{x}_A = \bar{x}_B, S_A^2 > S_B^2$ (B) $\bar{x}_A < \bar{x}_B, S_A^2 < S_B^2$
(C) $\bar{x}_A > \bar{x}_B, S_A^2 > S_B^2$ (D) $\bar{x}_A = \bar{x}_B, S_A^2 < S_B^2$
(E) $\bar{x}_A = \bar{x}_B, S_A^2 = S_B^2$

【解析】要计算方差, 必须先算平均数, 然后根据方差公式计算即可。且注意方差的单位是原单位的平方。

$$\bar{x}_A = \frac{1}{5}(176+175+174+171+174) = 174 \text{ cm}, \bar{x}_B = \frac{1}{5}(170+173+171+174+182) = 174 \text{ cm}.$$

$$S_A^2 = \frac{1}{5}[(176-174)^2 + (175-174)^2 + (174-174)^2 + (171-174)^2 + (174-174)^2] = 3.6 \text{ cm}^2;$$

$$S_B^2 = \frac{1}{5}[(170-174)^2 + (175-174)^2 + (174-174)^2 + (171-174)^2 + (174-174)^2] = 5.2 \text{ cm}^2;$$

所以 $\bar{x}_A = \bar{x}_B, S_A^2 < S_B^2$, 故选 D。

【例 8】如果一组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差是 2, 那么另一组数据 $3x_1, 3x_2, \dots, 3x_n$ 的方差是()。

- (A) 2 (B) 18 (C) 12 (D) 6 (E) 9

【解析】 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$, 则

$$\frac{3x_1 + 3x_2 + \dots + 3x_n}{n} = 3\bar{x},$$

$$\frac{(3x_1 - 3\bar{x})^2 + (3x_2 - 3\bar{x})^2 + \dots + (3x_n - 3\bar{x})^2}{n}$$

$$= 9 \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = 9S^2 = 18,$$

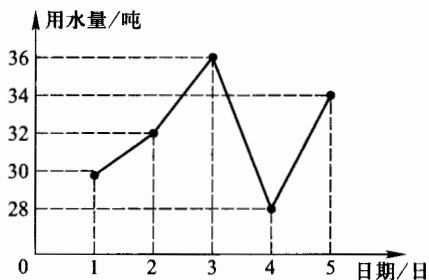
选 B。

【评注】本题得到的重要结论: 如果一组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数是 \bar{x} , 方差为 S^2 , 那么

- (1) 新数据 ax_1, ax_2, \dots, ax_n 的平均数是 $a\bar{x}$, 方差为 $a^2 S^2$;
(2) 新数据 $x_1 + b, x_2 + b, \dots, x_n + b$ 的平均数是 $\bar{x} + b$, 方差为 S^2 ;
(3) 新数据 $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ 的平均数是 $a\bar{x} + b$, 方差为 $a^2 S^2$ 。

三、图表

【例 9】某住宅小区六月份 1 日至 5 日每天用水量变化情况如图所示. 那么这 5 天平均每天的用水量是().



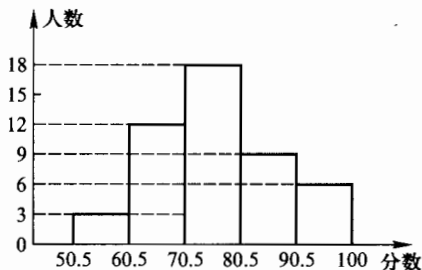
- (A) 30 吨 (B) 31 吨 (C) 32 吨 (D) 33 吨 (E) 35 吨

【解析】从统计图中得到数据,再运用求平均数公式: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ 即可求出,为

简单题. 由折线统计图知,这 5 天的平均用水量为: $\frac{30+32+36+28+34}{5} = 32$ (吨), 故选 C.

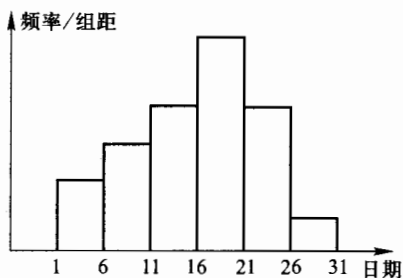
【例 10】某班学生参加知识竞赛,将竞赛所取得的成绩(得分取整数)进行整理后分成 5 组,并绘制成直方图,如下图所示,请结合直方图提供的信息,60.5~70.5 这一分数段的频率是().

- (A) 0.2 (B) 0.25 (C) 0.3 (D) 0.35 (E) 0.4



【解析】先求出全班总人数: $3+6+9+12+18=48$ (人), 即该班共有 48 名学生. 60.5~70.5 这一分数段的频数 12, 频率为 $12 \div 48 = 0.25$. 选 B.

【例 11】在学校开展的综合实践活动中,某班进行了小制作评比,作品上交时间为 5 月 1 日至 30 日,评委会把同学们上交作品的件数按 5 天一组分组统计,绘制了频率分布直方图(如图所示),已知从左到右各长方形高的比为 2:3:4:6:4:1,第三组的频数为 12,请解答下列问题:



(1) 本次活动共有()件作品参加评比.

(A) 60 (B) 55 (C) 50 (D) 45 (E) 40

(2) 经过评比,第三组、第四组和第六组分别有 6 件、10 件、2 件作品获奖,则这三组()组获奖率高.

(A) 第三组 (B) 第三组和第六组 (C) 第四组
(D) 第四组和第六组 (E) 第六组

【解析】(1) 依题意知第三组的频率为 $\frac{4}{2+3+4+6+4+1} = \frac{1}{5}$, 又因为第三组的频数为 12, 所以本次活动的参评作品数为 $\frac{12}{\frac{1}{5}} = 60$. 选 A.

(2) 第三组的获奖率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, 第四组的获奖率是 $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, 第六组上交的作品数量为 $60 \times \frac{1}{2+3+4+6+4+1} = 3$ (件), 所以第六组的获奖率为 $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, 显然第六组的获奖率高. 选 E.

第五节 阶梯化精炼题

基础能力题



扫码看视频

一、问题求解题

1. 从一组数据中取出 a 个 x_1 , b 个 x_2 , c 个 x_3 组成一个样本, 那么这个样本的平均数是().

(A) $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ (B) $\frac{a + b + c}{3}$ (C) $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{3}$
(D) $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}$ (E) 1

2. 在某项体育比赛中一位同学被评委所打出的分数为: 90, 89, 90, 95, 93, 94, 93. 去掉一个最高分和一个最低分后, 所剩数据的平均值和方差分别为().

(A) 92, 2 (B) 92, 2.8 (C) 93, 2 (D) 93, 2.5 (E) 93, 2.8

3. 某人 5 次上班途中所花的时间(单位: min)分别为 $x, y, 10, 11, 9$. 已知这组数据的平均数为 10, 方差为 2, 则 $|x - y|$ 的值为().

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. 甲、乙两名同学在相同条件下各射击 5 次, 命中的环数如下表, 那么下列结论正确的是().

甲	8	5	7	8	7
乙	7	8	6	8	6

- (A) 甲的平均数是 7, 方差是 0.8 (B) 乙的平均数是 7, 方差是 1.2
(C) 甲的平均数是 8, 方差是 1.2 (D) 乙的平均数是 8, 方差是 0.8
(E) 甲的平均数是 7, 方差是 1.2

5. 某校规定学生的学期体育成绩由三部分组成: 体育课外活动占 10%, 理论测试占 30%, 体育技能测试占 60%。一名同学的上述成绩依次为 90, 92, 73, 则该同学这学期的体育成绩为()。

- (A) 85.4 (B) 81.4 (C) 82.4 (D) 84 (E) 80.4

6. 甲、乙、丙三种糖果的价格分别为 5 元, 6 元, 7 元, 若将甲种糖 8 斤、乙种糖 7 斤、丙种糖 5 斤混到一起, 则售价应定为每斤() 元。

- (A) 5.55 (B) 5.85 (C) 5.65 (D) 5.75 (E) 5.8

7. 已知 $2, 4, 2x, 4y$ 四个数的平均数是 5; $5, 7, 4x, 6y$ 这四个数的平均数是 9, 则 $x^2 + y^2$ 的值是()。

- (A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 16 (E) 17

8. 以下各组数据中, 众数、中位数和平均数都相等的是()。

- (A) 7, 7, 8, 9 (B) 8, 9, 7, 8 (C) 9, 9, 8, 7
(D) 4, 2, 3, 5 (E) 8, 9, 7, 10

9. 一组数据的方差是 2, 将这组数据中的每一个数据都扩大 3 倍, 则所得一组新数据的方差是()。

- (A) 2 (B) 6 (C) 32 (D) 18 (E) 36

10. 一组数据有 10 个, 数据与它们的平均数的差依次为 $-2, 4, -4, 5, -1, -2, 0, 2, 3, -5$, 则这组数据的方差为()。

- (A) 0 (B) 104 (C) 10.4 (D) 3.2 (E) 32

11. 刘翔在出征奥运会前进行 110 米跨栏训练, 教练对他 10 次的训练成绩进行统计分析, 判断他的成绩是否稳定, 则教练需要知道刘翔这 10 次成绩的()。

- (A) 众数 (B) 方差 (C) 平均数 (D) 频数 (E) 中位数

二、条件充分性判断题

1. 数据 1, 2, 3, 4, x 的方差是 2.

(1) 数据 1, 2, 3, 4, x 的平均数是 2.

(2) $x = 0$.

2. 这组数据的方差是 3.5.

(1) 若一组数据是 10, 9, 11, 12, 13, 8, 10, 7.

(2) 若一组数据是 110, 109, 111, 112, 113, 108, 110, 107.

3. 对甲乙两学生的成绩进行抽样分析, 各抽取 5 门功课, 那么两人中各门功课发展较平稳的是甲.

(1) 甲的成绩为 70, 80, 60, 70, 90.

(2) 乙的成绩为 80, 60, 70, 84, 76.

4. 已知三种水果的平均价格为 10 元/千克, 则每种水果的价格均不超过 18 元/千克.

(1) 三种水果中价格最低的为 6 元/千克.

(2) 购买质量分别是 1 千克、1 千克和 2 千克的三种水果共用了 46 元.

基础能力题详解

一、问题求解题

1. D; $\bar{x} = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}$.

2. B; 由题意, $\bar{x} = \frac{1}{5}(90 + 90 + 93 + 93 + 94) = 92$, 则

$$S^2 = \frac{1}{5}[(90 - 92)^2 + (90 - 92)^2 + (93 - 92)^2 + (93 - 92)^2 + (94 - 92)^2] = 2.8.$$

3. D; 由题意,
$$\begin{cases} \frac{1}{5}(x + y + 30) = 10, \\ \frac{1}{5}[(x - 10)^2 + (y - 10)^2 + 0 + 1 + 1] = 2, \end{cases} \quad \text{所以 } |x - y| = 4.$$

4. E; $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{5}(8 + 5 + 7 + 8 + 7) = 7$,

$$S_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{5}[(8 - 7)^2 + (5 - 7)^2 + (7 - 7)^2 + (8 - 7)^2 + (7 - 7)^2] = 1.2.$$

5. E; $90 \times 10\% + 92 \times 30\% + 73 \times 60\% = 80.4$.

6. B; $\bar{x} = \frac{5 \times 8 + 6 \times 7 + 7 \times 5}{8 + 7 + 5} = 5.85$.

7. B; 由题意,
$$\begin{cases} 2x + 4y = 14, \\ 4x + 6y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 13.$$

8. B; B 选项中众数、中位数、平均值均为 8.

9. D; $S^2 = 9S_1^2 = 18$.

10. C; $S^2 = \frac{1}{10}[(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2 + 5^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2 + (-5)^2] = 10.4$.

11. B; 由方差的定义可知方差反映稳定性.

二、条件充分性判断题

1. D; 由(1)得 $x = 0 \Rightarrow S^2 = \frac{1}{5}[(0 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 2)^2 + (4 - 2)^2] = 2$, 充分; 同理(2)也充分.

2. D; 由(1)得 $\bar{x} = \frac{1}{8}(10 + 9 + 11 + 12 + 13 + 8 + 10 + 7) = 10$,

$$S^2 = \frac{1}{8}[(10 - 10)^2 + (9 - 10)^2 + (11 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (13 - 10)^2 + (8 - 10)^2 + (10 - 10)^2 + (7 - 10)^2] = 3.5,$$

故充分; 由(2)可以看出每个数据相当于在条件(1)的数据上加 100, 不影响数据的方差, 故也充分.

3. E; 显然联合分析, 分别计算出平均值和方差: $\bar{x}_甲 = 74, \bar{x}_乙 = 74, \bar{S}_甲 = 104, \bar{S}_乙 = 70.4$, 故 $\bar{S}_甲 > \bar{S}_乙$, 说明乙比较稳定, 不充分.

4. D; 由题干三种水果的平均价格为 10 元/千克, 得到三种水果的价格之和为 30 元/千克. 由条件(1) 最低为 6, 则其他两种价格和为 24, 若其中一种水果也为 6 元, 则另一种价格为最高价 $24 - 6 = 18$ 元, 未超过 18 元, 条件(1) 充分. 由(2) 设三种水果价格分别为 x, y, z , 则有 $x + y + z = 30; x + y + 2z = 46$, 两式相减得到, $z = 16, x + y = 14$, 显然不会超过 18, 也充分.



扫码看视频

综合提高题

一、问题求解

1. 如果两组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_n 的平均数分别为 \bar{x}, \bar{y} , 那么新的一组数据 $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$ 的平均数是().

- (A) \bar{x} (B) \bar{y} (C) $\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}$ (D) $\bar{x} + \bar{y}$ (E) $2(\bar{x} + \bar{y})$

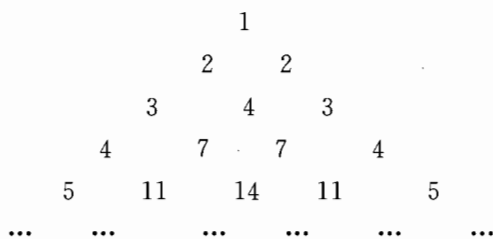
2. 在一次英语考试中第一小组的 10 名学生与全班的平均分 88 分的差分别是 2, 0, -1, -5, -6, 10, 8, 12, 3, -3, 则这个小组的平均成绩是().

- (A) 90 分 (B) 89 分 (C) 88 分 (D) 86 分 (E) 84 分

3. 某同学 9 门课的平均考试成绩为 80 分, 后查出某两门课的试卷分别少加了 5 分和 4 分, 则该同学的实际平均成绩应为().

- (A) 90 分 (B) 80 分 (C) 82 分 (D) 81 分 (E) 83 分

4. 观察统计图,



则三角形数阵第 n 行($n \geq 2$)的第 2 个数是().

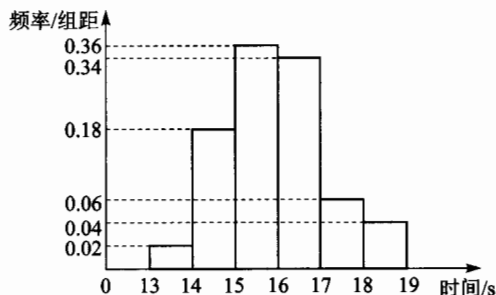
- (A) $n^2 - n + 2$ (B) $n + 1$ (C) $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$
(D) $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ (E) $\frac{1}{2}(n^2 - n)$

5. 一个容量为 20 的样本数据, 分组后, 组距与频数如下: $[10, 20), 2; [20, 30), 3; [30, 40), 4; [40, 50), 5; [50, 60), 3; [60, 70), 3$, 则样本在区间 $[10, 50)$ 内的频率是().

- (A) 0.05 (B) 0.25 (C) 0.5 (D) 0.7 (E) 0.6

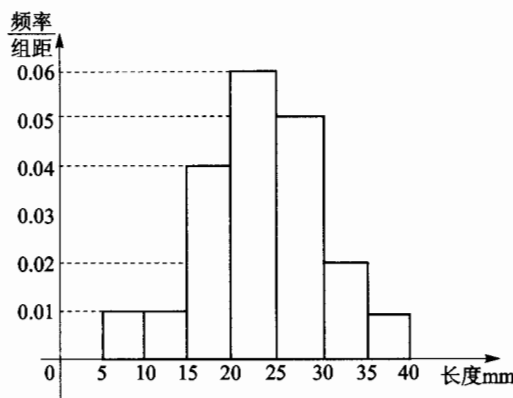
6. 某班 50 名学生在一次百米测试中,成绩全部介于 13 s 与 19 s 之间,将测试结果绘制成频率分布直方图. 设成绩小于 17 s 的学生人数占全班人数的百分比为 X ,成绩大于 15 s 且小于 17 s 的学生人数为 Y ,则从频率分布直方图中可知 X 和 Y 分别是().

- (A) 0.9, 35 (B) 0.9, 45 (C) 0.1, 35 (D) 0.1, 45 (E) 0.9, 40



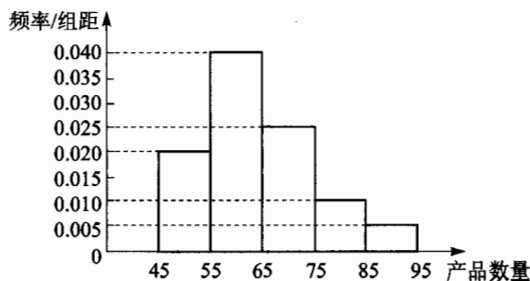
7. 某棉纺厂为了了解一批棉花的质量,从中随机抽取了 100 根棉花纤维的长度(棉花纤维的长度是棉花质量的重要指标),所得数据都在区间 $[5, 40]$ 中,其频率分布直方图如图所示,则其抽样的 100 根中,有()根在棉花纤维的长度小于 20 mm.

- (A) 20 (B) 25 (C) 26 (D) 28 (E) 30



8. 为了调查某厂工人生产某种产品的能力,随机抽查了 20 位工人某天生产该产品的数量. 产品数量的分组区间为 $[45, 55)$, $[55, 65)$, $[65, 75)$, $[75, 85)$, $[85, 95)$,由此得到频率分布直方图如下,则这 20 名工人中一天生产该产品数量在 $[55, 75)$ 的人数是().

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

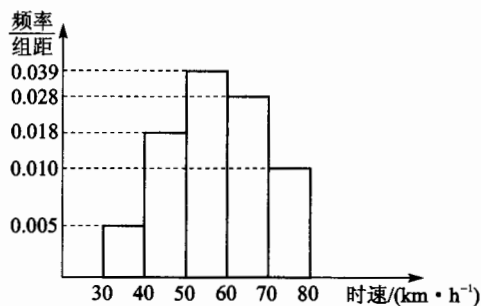


二、条件充分性判断题

1. 200 辆汽车经过某一雷达地区,时速频率分布直方图如图所示,则时速超过 65km/h 的汽车数量为 m 辆.

(1) $m=48$.

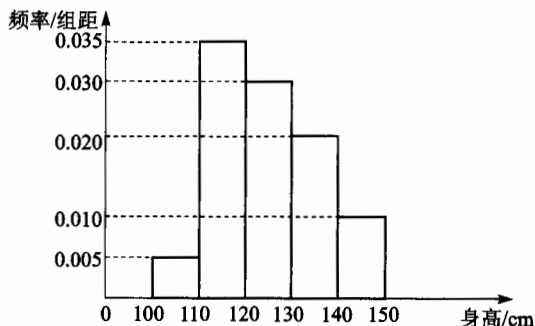
(2) $m=24$.



2. 从某小学随机抽取 100 名同学,将他们的身高(单位:cm)数据绘制成频率分布直方图(如图)则身高在 $[120,145]$ 内的学生人数为 m .

(1) $m=50$.

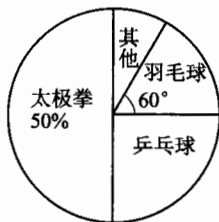
(2) $m=55$.



3. 某小区退休工人业余爱好的统计图如图所示,则 $m=25$.

(1) 共 60 人,喜欢各项体育项目的人数极差是 m 名.

(2) 喜欢太极拳的有 75 人,喜欢羽毛球的 m 人.



综合提高题详解

一、问题求解题

1. D; $\frac{x_1 + y_1 + \cdots + x_n + y_n}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} = \bar{x} + \bar{y}.$

2. A; $\bar{x} = 88 + \frac{1}{10}(2 + 0 - 1 - 5 - 6 + 10 + 8 + 12 + 3 - 3) = 90.$

3. D; $\bar{x} = 80 + \frac{1}{9}(5 + 4) = 81.$

4. D; 直接带入第2行的第2个数为2即可得到结果.

5. D; $P = \frac{2 + 3 + 4 + 5}{20} = 0.7.$

6. A; $X = 1 - (0.06 + 0.04) = 0.9, Y = (0.36 + 0.34) \times 50 = 35.$

7. E; $100 \times (0.01 + 0.01 + 0.04) \times 5 = 30.$

8. B; 由图可知,一天生产该产品数量在 $[55, 75)$ 的频率是 $(0.040 + 0.025) \times 10 = 0.65$,所以这20名工人中一天生产该产品数量在 $[55, 75)$ 的人数是 $20 \times 0.65 = 13$.

二、条件充分性判断题

1. A; $m = (5 \times 0.028 + 10 \times 0.01) \times 200 = 48.$

2. B; $m = (10 \times 0.03 + 10 \times 0.02 + 5 \times 0.01) \times 100 = 55.$

3. D; 由条件(1)知喜欢太极拳的人数为30人,喜欢其他的人为5人(因为喜欢其他和羽毛球的人共15人,而两者的比为1:2),所以极差为25,可知(1)充分;由条件(2)根据扇形的圆心角,可得喜欢羽毛球的人数为太极拳人数的 $\frac{1}{3}$,故25人.

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

附录一 历年真题

2016 年管理类专业学位全国联考 综合能力数学真题

一、问题求解:第 1~15 小题,每小题 3 分,共 45 分。下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中,只有一项是符合试题要求的,请在答题卡上将所选项的字母涂黑。

1. 某家庭在一年的总支出中,子女教育支出与生活资料支出的比为 3:8;文化娱乐支出与子女教育支出的比为 1:2;已知文化娱乐支出占家庭总支出的 10.5%,则生活资料支出占家庭总支出的()。

- (A) 40% (B) 42% (C) 48% (D) 56% (E) 64%

2. 有一批同规格的正方形瓷砖,用它们铺满某个正方形区域时剩余 180 块,将此正方形的区域的边长增加一块瓷砖的长度时,还需增加 21 块瓷砖才能铺满,该批瓷砖共有()。

- (A) 9981 块 (B) 10000 块 (C) 10180 块 (D) 10201 块 (E) 10222 块

3. 在分别标记了数字 1,2,3,4,5,6 的 6 张卡片中随机抽取 3 张,其上数字之和等于 10 的概率是()。

- (A) 0.05 (B) 0.1 (C) 0.15 (D) 0.2 (E) 0.25

4. 上午 9 时一辆货车从甲地出发前往乙地,同时一辆客车从乙地出发前往甲地,中午 12 时两车相遇,已知货车和客车的时速分别是 90 千米和 100 千米,则当客车到达甲地时,货车距乙地的距离为()。

- (A) 30 千米 (B) 43 千米 (C) 45 千米 (D) 50 千米 (E) 57 千米

5. 某委员会由三个不同专业的人员构成,三个专业的人数分别为 2,3,4,从中选派 2 位不同专业的委员外出调研,则不同的选派方式有()。

- (A) 36 种 (B) 26 种 (C) 12 种 (D) 8 种 (E) 6 种

6. 某商场将每台进价为 2000 元的冰箱以 2400 元销售时,每天销售 8 台,调研表明这种冰箱的售价每降低 50 元,每天就能多销售 4 台。若要每天销售利润最大,则该冰箱的定价应为()。

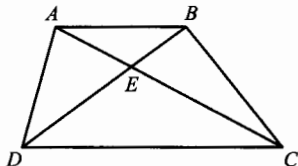
- (A) 2200 (B) 2250 (C) 2300 (D) 2350 (E) 2400

7. 从 1 到 100 的整数中任取一个数,则该数能被 5 或 7 整除的概率为()。

- (A) 0.02 (B) 0.14 (C) 0.2 (D) 0.32 (E) 0.34

8. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, AB 与 CD 的边长分别为 4 和 8。若 $\triangle ABE$ 的面积为 4,则四边形 $ABCD$ 的面积为()。

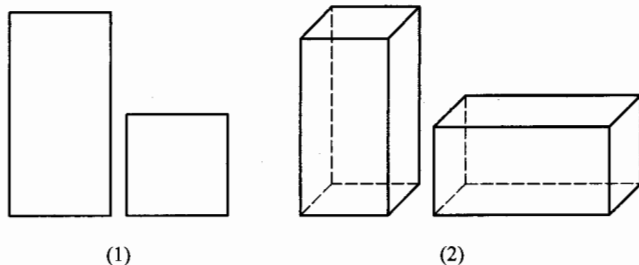
- (A) 24 (B) 30 (C) 32 (D) 36



(E) 40

9. 现有长方形木板 340 张, 正方形木板 160 张(图(1))。这些木板刚好可以装配成若干竖式和横式的无盖箱子(图(2))。装配成的竖式和横式箱子的个数为()。

(A) 25, 80 (B) 60, 50 (C) 20, 70 (D) 60, 40 (E) 40, 60

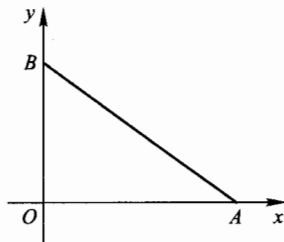


10. 圆 $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ 上到原点距离最远的点是()。

(A) $(-3, 2)$ (B) $(3, -2)$ (C) $(6, 4)$ (D) $(-6, 4)$ (E) $(6, -4)$

11. 如图, 点 A, B, O 的坐标分别为 $(4, 0), (0, 3), (0, 0)$, 若 (x, y) 是 $\triangle AOB$ 中的点, 则 $2x + 3y$ 的最大值为()。

(A) 6 (B) 7 (C) 8
(D) 9 (E) 12



12. 设抛物线 $y = x^2 + 2ax + b$ 与 x 轴相交于 A, B 两点, 点 C 坐标为 $(0, 2)$, 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 6, 则()。

(A) $a^2 - b = 9$ (B) $a^2 + b = 9$ (C) $a^2 - b = 36$ (D) $a^2 + b = 36$ (E) $a^2 - 4b = 9$

13. 某公司以分期付款的方式购买一套定价为 1100 万元的设备, 首期付款 100 万元, 之后每月付款 50 万元, 并支付上期余款的利息, 月利率 1%, 该公司共为此设备支付了()。

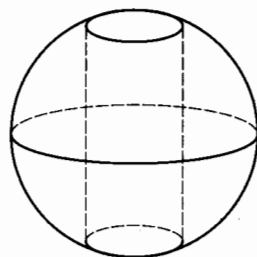
(A) 1195 万元 (B) 1200 万元 (C) 1205 万元 (D) 1215 万元 (E) 1300 万元

14. 某学生要在 4 门不同课程中选修 2 门课程, 这 4 门课程中的 2 门各开设一个班, 另外 2 门各开设 2 个班, 该学生不同的选课方式共有()。

(A) 6 种 (B) 8 种 (C) 10 种
(D) 13 种 (E) 15 种

15. 如图, 在半径为 10 厘米的球体上开一个底面半径是 6 厘米的圆柱形洞, 则洞的内壁面积为()。(单位: 平方厘米)

(A) 48π (B) 288π (C) 96π
(D) 576π (E) 192π



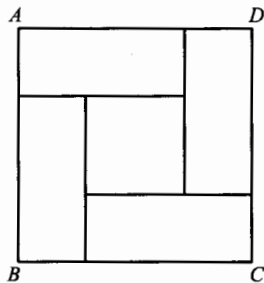
二、条件充分性判断: 第 16~25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分。要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 在答题卡上将所选项的字母涂黑。

- (A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分;
- (B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分;
- (C) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
- (D) 条件(1)充分, 但条件(2)也充分;
- (E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分。

16. 已知某公司男员工的平均年龄和女员工的平均年龄,则能确定该公司员工的平均年龄.

- (1) 已知该公司员工的人数.
- (2) 已知该公司男女员工的人数之比.

17. 如图,正方形 $ABCD$ 由四个相同的长方形和一个小正方形拼成,则能确定小正方形的面积.



- (1) 已知正方形 $ABCD$ 的面积.
- (2) 已知长方形的长宽之比.

18. 利用长度为 a 和 b 的两种管材能连接成长度为 37 的管道(单位:米).

- (1) $a=3, b=5$.
 - (2) $a=4, b=6$.
19. 设 x, y 是实数,则 $x \leq 6, y \leq 4$.
- (1) $x \leq y+2$.
 - (2) $2y \leq x+2$.

20. 将 2 升甲酒精和 1 升乙酒精混合得到丙酒精,则能确定甲、乙两种酒精的浓度.

- (1) 1 升甲酒精和 5 升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的 $\frac{1}{2}$ 倍.
- (2) 1 升甲酒精和 2 升乙酒精混合后的浓度是丙酒精浓度的 $\frac{2}{3}$ 倍.

21. 设有两组数据 $S_1: 3, 4, 5, 6, 7$ 和 $S_2: 4, 5, 6, 7, a$,则能确定 a 的值.

- (1) S_1 与 S_2 的均值相等.
- (2) S_1 与 S_2 的方差相等.

22. 已知 M 是一个平面有限点集,则平面上存在到 M 中各点距离相等的点.

- (1) M 中只有三个点.
- (2) M 中的任意三点都不共线.

23. 设 x, y 是实数,则可以确定 $x^3 + y^3$ 的最小值.

- (1) $xy=1$.
- (2) $x+y=2$.

24. 已知数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$,则 $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_9 - a_{10} \geq 0$.

- (1) $a_n \geq a_{n+1}, n=1, 2, \dots, 9$.
- (2) $a_n^2 \geq a_{n+1}^2, n=1, 2, \dots, 9$.

25. 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$,则 $0 \leq f(1) \leq 1$.

- (1) $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 中有两个零点.
- (2) $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 中有两个零点.

参 考 答 案

- 1—5 DCCEB 6—10 BDDEE 11—15 DACDE
16—20 BCACE 21—25 ACBAD

2015 年管理类专业学位全国联考
综合能力数学真题

一、问题求解:第 1~15 小题,每小题 3 分,共 45 分.下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中,只有一项是符合试题要求的,请在答题卡上将所选项的字母涂黑.

1. 若实数 a, b, c 满足 $a : b : c = 1 : 2 : 5$, 且 $a + b + c = 24$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 = ()$.

- (A) 30 (B) 90 (C) 120 (D) 240 (E) 270

2. 某公司共有甲、乙两个部门, 如果从甲部门调 10 人到乙部门, 那么乙部门人数是甲部门人数的 2 倍, 如果把乙部门员工的 $\frac{1}{5}$ 调到甲部门, 那么两个部门的人数相等, 该公司的总人数为().

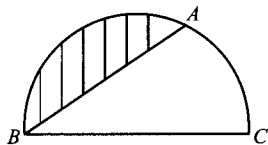
- (A) 150 (B) 180 (C) 200 (D) 240 (E) 250

3. 设 m, n 是小于 20 的质数, 满足条件 $|m - n| = 2$ 的 $\{m, n\}$ 共有().

- (A) 2 组 (B) 3 组 (C) 4 组 (D) 5 组 (E) 6 组

4. 如图, BC 是半圆的直径, 且 $BC = 4$, $\angle ABC = 30^\circ$, 则图中阴影部分面积为().

- (A) $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ (B) $\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ (C) $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$
(D) $\frac{2}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ (E) $2\pi - 2\sqrt{3}$



5. 某人驾车从 A 地赶往 B 地, 前一半路程比计划多用时 45 分钟, 平均速度只有计划的 80%, 若后一半路程的平均速度 120 千米/小时, 此人还能按原定时间到达 B 地, A、B 两地的距离为().

- (A) 450 千米 (B) 480 千米 (C) 520 千米 (D) 540 千米 (E) 600 千米

6. 在某次考试中, 甲、乙、丙三个班的平均成绩分别为 80、81 和 81.5, 三个班的学生得分之和为 6952, 三个班共有学生().

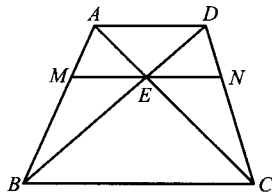
- (A) 85 名 (B) 86 名 (C) 87 名 (D) 88 名 (E) 90 名

7. 有一根圆柱形铁管, 管壁厚度为 0.1 米, 内径为 1.8 米, 长度为 2 米, 若将该铁管融化后浇铸成长方体, 则该长方体的体积为(). (单位: m^3 , $\pi \approx 3.14$)

- (A) 0.38 (B) 0.59 (C) 1.19
(D) 5.09 (E) 6.28

8. 如图, 梯形 $ABCD$ 的上底与下底分别为 5、7, E 为 AC 与 BD 的交点, MN 过点 E 且平行于 AD , 则 $MN = ()$.

- (A) $\frac{26}{5}$ (B) $\frac{11}{2}$ (C) $\frac{35}{6}$
(D) $\frac{36}{7}$ (E) $\frac{40}{7}$



9. 若直线 $y = ax$ 与圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 相切, 则 $a^2 = ()$.

- (A) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ (B) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $1 + \frac{\sqrt{5}}{3}$ (E) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

10. 设点 $A(0,2)$ 和 $B(1,0)$, 在线段 AB 上取一点 $M(x,y)$ ($0 < x < 1$), 则以 x, y 为两边的矩形面积的最大值为().

- (A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{8}$

11. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 的两个根, 则 $x_1^2 + x_2^2 = ()$.

- (A) $a^2 + 2$ (B) $a^2 + 1$ (C) $a^2 - 1$ (D) $a^2 - 2$ (E) $a + 2$

12. 某新兴产业在 2005 年末至 2009 年末产值增长率为 q , 在 2009 年末至 2013 年末产值的平均增长率比前四年下降 40%, 2013 年的产值为 2005 年值的 14.46 ($\approx 1.95^4$) 倍, 则 q 的值为().

- (A) 30% (B) 35% (C) 40% (D) 45% (E) 50%

13. 一件工作, 甲、乙两人合作需要 2 天, 人工费 2900 元; 乙、丙两人合作需要 4 天, 人工费 2600 元; 甲、丙两人合作 2 天完成了全部工作量的 $\frac{5}{6}$, 人工费 2400 元, 甲单独做该工作需要的时间与人工费分别为().

- (A) 3 天, 3000 元 (B) 3 天, 2850 元 (C) 3 天, 2700 元
(D) 4 天, 3000 元 (E) 4 天, 2900 元

14. 某次网球比赛的四强对阵为甲对乙, 丙对丁, 两场比赛的胜者将争夺冠军, 选手之间相互获胜的概率如下:

	甲	乙	丙	丁
甲获胜的概率		0.3	0.3	0.8
乙获胜的概率	0.7		0.6	0.3
丙获胜的概率	0.7	0.4		0.5
丁获胜的概率	0.7	0.7	0.5	

甲得冠军的概率为().

- (A) 0.165 (B) 0.245 (C) 0.275 (D) 0.315 (E) 0.330

15. 平面上有 5 条平行的直线与另一组 n 条平行直线垂直, 若两组平行直线共构成 280 个矩形, 则 $n = ()$.

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

二、条件充分性判断: 第 16~25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干所陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项为判断结果, 请选择一项符合试题要求的判断, 在答题卡上将所选项的字母涂黑.

- (A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分;
(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分;
(C) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
(D) 条件(1)充分, 但条件(2)也充分;
(E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

16. 已知 p, q 为非零实数, 则能确定 $\frac{p}{q(p-1)}$ 的值.

(1) $p+q=1$. (2) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

17. 信封中装有 10 张奖券, 只有 1 张有奖, 从信封中同时抽取 2 张奖券, 中奖的概率记为 P ; 从信封中每次抽取 1 张奖券后放回, 如此重复抽取 n 次, 中奖的概率记为 Q , 则 $P < Q$.

(1) $n=2$. (2) $n=3$.

18. 圆盘 $x^2+y^2 \leq 2(x+y)$ 被直线 L 分成面积相等的两部分.

(1) $L: x+y=2$. (2) $L: 2x-y=1$.

19. 已知 a, b 为实数, 则 $a \geq 2$ 或 $b \geq 2$.

(1) $a+b \geq 4$. (2) $ab \geq 4$.

20. 已知 $M = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$, $N = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1})$, 则 $M > N$.

(1) $a_1 > 0$. (2) $a_1 a_n > 0$.

21. 已知 $\{a_n\}$ 是公差大于零的等差数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_n \geq S_{10}$ ($n=1, 2, \dots$).

(1) $a_{10} = 0$. (2) $a_{11} a_{10} < 0$.

22. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则能确定数列 $\{a_n\}$.

(1) $a_1 + a_6 = 0$. (2) $a_1 a_6 = -1$.

23. 底面半径为 r , 高为 h 的圆柱体表面积记为 S_1 ; 半径为 R 的球体表面积记为 S_2 , 则 $S_1 \leq S_2$.

(1) $R \geq \frac{r+h}{2}$. (2) $R \leq \frac{2h+r}{3}$.

24. 已知 x_1, x_2, x_3 为实数, \bar{x} 为 x_1, x_2, x_3 的平均值, 则 $|x_k - \bar{x}| \leq 1, k=1, 2, 3$.

(1) $|x_k| \leq 1, k=1, 2, 3$. (2) $x_1 = 0$.

25. 几个朋友外出游玩, 购买了一些瓶装水, 则能确定购买的瓶装水数量.

(1) 若每人分 3 瓶, 则剩余 30 瓶.

(2) 若每人分 10 瓶, 则只有一人不够.

参 考 答 案

1—5 EDCAD

6—10 BCCEB

11—15 AEAAD

16—20 BBDAB

21—25 DECCC

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

2014 年在职管理类全国联考 综合能力数学真题

一、问题求解:第 1~15 题,每小题 3 分,共 45 分.下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中,只有一项是符合试题要求的.请在答题卡上将所选项的字母涂黑.

1. 两个相邻的正整数都是合数,则这两个数的乘积的最小值是().

- (A) 420 (B) 240 (C) 210 (D) 90 (E) 72

2. 李明的讲义夹里放了大小相同的试卷共 12 页,其中语文 5 页、数学 4 页、英语 3 页,他随机地从讲义夹中抽出 1 页,抽出的是数学试卷的概率等于().

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{3}$

3. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = -1$, 则 $x =$ ().

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

4. 高速公路假期免费政策带动了京郊旅游的增长.据悉,2014 年春节 7 天假期,北京市乡村民俗旅游接待游客约 697000 人次,比去年同期增长 14%,则去年大约接待游客人次为().

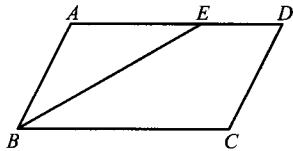
- (A) $6.97 \times 10^5 \times 0.14$ (B) $6.97 \times 10^5 - 6.97 \times 10^5 \times 0.14$ (C) $\frac{6.97 \times 10^5}{0.14}$
(D) $\frac{6.97 \times 10^7}{0.14}$ (E) $\frac{6.97 \times 10^7}{114}$

5. 在一次足球预选赛中有 5 个球队进行双循环赛(每两个球队之间赛两场).规定胜一场得 3 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分.赛完后一个球队的积分不同情况的种数为().

- (A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 22 (E) 21

6. 如右图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于 E , $\angle BED = 150^\circ$,则 $\angle A$ 的大小为().

- (A) 100° (B) 110° (C) 120°
(D) 130° (E) 150°



7. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,已知 $S_3 = 3$, $S_6 = 24$,则此等差数列的公差 d 等于().

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{3}$

8. 直线 $x - 2y = 0$, $x + y - 3 = 0$, $2x - y = 0$ 两两相交构成 $\triangle ABC$,以下各点中,位于 $\triangle ABC$ 内的点是().

- (A) (1,1) (B) (1,3) (C) (2,2) (D) (3,2) (E) (4,0)

9. 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$ ().

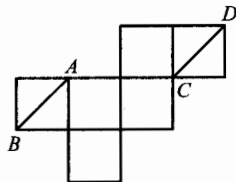
- (A) 外离 (B) 外切 (C) 相交 (D) 内切 (E) 内含

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 且 $a_2 > a_1$, 那么 a_1 的取值范围是().

- (A) $a_1 < \sqrt{2}$ (B) $-1 < a_1 < \sqrt{2}$ (C) $a_1 > \sqrt{2}$
(D) $-\sqrt{2} < a_1 < \sqrt{2}$ 且 $a_1 \neq -1$ (E) $-1 < a_1 < \sqrt{2}$ 或 $a_1 < -\sqrt{2}$

11. 右图是一个棱长为 1 的正方体表面展开图。在该正方体中， AB 与 CD 确定的截面面积为()。

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) 1
(D) $\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{3}$

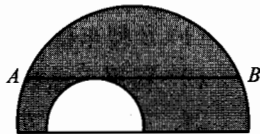


12. 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的四位数，其中千位数字大于百位数字且百位数字大于十位数字的四位数的个数是()。

- (A) 36 (B) 40 (C) 48 (D) 60 (E) 72

13. 如右图所示，大小两个半圆的直径在同一直线上，弦 AB 与小半圆相切，且与直径平行，弦 AB 长为 12。则图中阴影部分面积为()。

- (A) 24π (B) 21π (C) 18π
(D) 15π (E) 12π

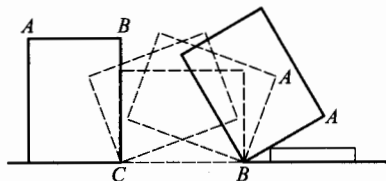


14. a, b, c, d, e 五个数满足 $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ ，其平均数 $m = 100$ ， $c = 120$ ，则 $e - a$ 的最小值是()。

- (A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 60 (E) 65

15. 一个长为 8 cm，宽为 6 cm 的长方形木板在桌面上做无滑动的滚动(顺时针方向)，如右图所示，第二次滚动中被一小木块垫住而停止，使木板边沿 AB 与桌面成 30° 角，则木板滚动中，点 A 经过的路径长为()。

- (A) 4π (B) 5π (C) 6π
(D) 7π (E) 8π



二、条件充分性判断：第 16~25 小题，每小题 3 分，共 30 分。要求判断每题给出的条件(1)和条件(2)能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项中，只有一项符合试题要求。

- (A) 条件(1)充分，但条件(2)不充分；
(B) 条件(2)充分，但条件(1)不充分；
(C) 条件(1)和(2)充分单独都不充分，但条件(1)和(2)联合起来充分；
(D) 条件(1)充分，条件(2)也充分；
(E) 条件(1)和(2)单独都不充分，条件(1)和(2)联合起来也不充分。

16. $x \geq 2014$.

- (1) $x > 2014$. (2) $x = 2014$.

17. 直线 $y = k(x + 2)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切。

- (1) $k = \frac{1}{2}$. (2) $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

18 代数式 $2a(a-1) - (a-2)^2$ 的值为 -1。

- (1) $a = -1$. (2) $a = -3$.

19. x 是实数, 则 x 的取值范围是 $(0, 1)$.

(1) $x < \frac{1}{x}$. (2) $2x > x^2$.

20. 三条长度分别为 a, b, c 的线段能构成一个三角形.

(1) $a+b > c$. (2) $b-c < a$.

21. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$, 则 $a_3 + a_5 = 40$.

(1) 公比 $q = 2$. (2) $a_1 + a_3 = 10$.

22. $m^2 - n^2$ 是 4 的倍数.

(1) m, n 都是偶数. (2) m, n 都是奇数.

23. A, B 两种型号的客车载客量分别为 36 人和 60 人, 租金分别 1600 元/辆和 2400 元/辆. 某旅行社租用 A, B 两种车辆安排 900 名旅客出行. 则至少要花租金 37600 元.

(1) B 型车租用数量不多于 A 型车租用数量.

(2) 租用车总数不多于 20 辆.

24. 关于 x 的方程 $mx^2 + 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实根.

(1) $m > -1$. (2) $m \neq 0$.

25. 在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上随机取一点 P , 使得 AB 是 $\triangle APB$ 的最大边的概率大于 $\frac{1}{2}$.

(1) $\frac{AD}{AB} < \frac{\sqrt{7}}{4}$. (2) $\frac{AD}{AB} > \frac{1}{2}$.

参 考 答 案

1—5 EEBEB

6—10 CBACE

11—15 ADCBD

16—20 DBBCE

21—25 DDCCA

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

2014 年管理类专业学位全国联考
综合能力数学真题

一、问题求解:第1~15小题,每小题3分,共45分.下列每题给出的A、B、C、D、E五个选项中,只有一项是符合试题要求的.请在答题卡上将所选项的字母涂黑.

1. 某部门在一次联欢活动中共设了26个奖,奖品均价为280元,其中一等奖单价400元,其他奖品均价为270元,一等奖的个数为().

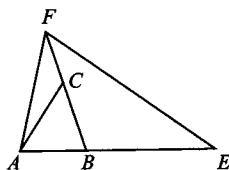
- (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

2. 某单位进行办公室装修,若甲、乙两个装修公司合做,需10周完成,工时费为100万元,甲公司单独做6周后由乙公司接着做18周完成,工时费为96万元.甲公司每周的工时费为().

- (A) 7.5万元 (B) 7万元 (C) 6.5万元 (D) 6万元 (E) 5.5万元

3. 如图,已知 $AE = 3AB$, $BF = 2BC$,若 $\triangle ABC$ 的面积是2,则 $\triangle AEF$ 的面积为().

- (A) 14 (B) 12 (C) 10
(D) 8 (E) 6

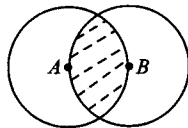


4. 某公司投资一个项目,已知上半年完成了预算的 $\frac{1}{3}$,下半年完成了剩余部分的 $\frac{2}{3}$,此时还有8千万投资未完成,则该项目的预算为().

- (A) 3亿元 (B) 3.6亿元 (C) 3.9亿元 (D) 4.5亿元 (E) 5.1亿元

5. 如图,圆A与圆B的半径均为1,则阴影部分的面积为().

- (A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$
(D) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (E) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$



6. 某容器中装满了浓度为90%的酒精,倒出1升后用水将容器注满,搅拌均匀后又倒出1升,再用水将容器注满,已知此时的酒精浓度为40%,该容器的体积是().

- (A) 2.5升 (B) 3升 (C) 3.5升 (D) 4升 (E) 4.5升

7. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列,且 $a_2 - a_5 + a_8 = 9$,则 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 =$ ().

- (A) 27 (B) 45 (C) 54 (D) 81 (E) 162

8. 甲、乙两人上午8:00分别自A、B出发相向而行,9:00第一次相遇,之后速度均提高了1.5千米/小时.甲到B,乙到A后都立刻沿原路返回,若两人在10:30第二次相遇.则A、B两地的距离为().

- (A) 5.6千米 (B) 7千米 (C) 8千米 (D) 9千米 (E) 9.5千米

9. 掷一枚均匀的硬币若干次,当正面向上次数大于反面向上次数时停止,则在4次之内停止的概率为().

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{3}{16}$ (E) $\frac{5}{16}$

10. 若几个质数(素数)的乘积为 770, 则它们的和为().

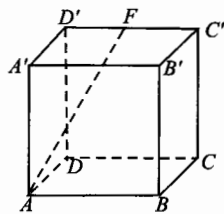
- (A) 85 (B) 84 (C) 28 (D) 26 (E) 25

11. 已知直线 l 是圆 $x^2 + y^2 = 5$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线, 则 l 在 y 轴上截距为().

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) 5

12. 如图, 正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的棱长为 2, F 是 $C'D'$ 的中点, 则 AF 的长为().

- (A) 3 (B) 5 (C) $\sqrt{5}$
(D) $2\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{3}$



13. 在某项活动中, 将 3 男 3 女 6 名志愿者随机地分成甲、乙、丙三组, 每组 2 人, 则每组志愿者都是异性的概率为().

- (A) $\frac{1}{90}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{2}{5}$

14. 某工厂在半径 5cm 的球形工艺品上镀一层装饰金属, 厚度为 0.01cm. 已知装饰金属的原材料是棱长为 20cm 的正方体锭子, 则加工 10000 个该工艺品需要的锭子数最少为(不考虑加工损耗, $\pi \approx 3.14$)().

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 20

15. 某单位决定对 4 个部门的经理进行轮岗, 要求每位经理必须轮换到 4 个部门中的其他部门任职, 则不同的轮岗方案有().

- (A) 3 种 (B) 6 种 (C) 8 种 (D) 9 种 (E) 10 种

二、条件充分性判断:第 16~25 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 要求判断每题给出的条件(1)和条件(2)能否充分支持题干所陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项中, 只有一项符合试题要求.

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分;

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分;

(C) 条件(1)和(2)充分单独都不充分, 但条件(1)和(2)联合起来充分;

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分;

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和(2)联合起来也不充分.

16. 已知曲线 $l: y = a + bx - 6x^2 + x^3$, 则 $(a + b - 5)(a - b - 5) = 0$.

(1) 曲线 l 过点 $(1, 0)$.

(2) 曲线 l 过点 $(-1, 0)$.

17. 不等式 $|x^2 + 2x + a| \leq 1$ 的解集为空集.

(1) $a < 0$.

(2) $a > 2$.

18. 甲、乙、丙三人的年龄相同.

(1) 甲、乙、丙的年龄成等差数列.

(2) 甲、乙、丙的年龄成等比数列.

19. 设 x 是非零实数, 则 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$.

(1) $x + \frac{1}{x} = 3$.

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

20. 如图, O 是半圆圆心, C 是半圆上的一点, $OD \perp AC$, 则能确定 OD 的长.

(1) 已知 BC 的长.

(2) 已知 AO 的长.

21. 方程 $x^2 + 2(a+b)x + c^2 = 0$ 有实数根.

(1) a, b, c 是一个三角形的三边长.

(2) 实数 a, c, b 成等差数列.

22. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则能确定 a, b, c 的值.

(1) 曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$.

(2) 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = a + b$ 相切.

23. 已知袋中装有红、黑、白三种颜色的球若干个. 则红球最多.

(1) 随机取出的一球是白球的概率为 $\frac{2}{5}$.

(2) 随机取出的两球中至少有一个黑球的概率小于 $\frac{1}{5}$.

24. 已知 $M = \{a, b, c, d, e\}$ 是一个整数集合. 则能确定集合 M .

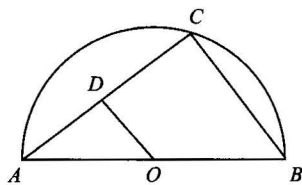
(1) a, b, c, d, e 的平均值为 10.

(2) a, b, c, d, e 的方差为 2.

25. 已知 x, y 为实数. 则 $x^2 + y^2 \geq 1$.

(1) $4y - 3x \geq 5$.

(2) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 5$.



参 考 答 案

1—5 EBBBE

6—10 BDDCE

11—15 DAECD

16—20 ABCAA

21—25 DCCCA

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

2013 年在职管理类全国联考 综合能力数学真题

一、问题求解：第 1~15 题，每小题 3 分，共 45 分。下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中，只有一项是符合试题要求的。请在答题卡上将所选项的字母涂黑。

1. 某公司今年第一季度和第二季度的产值分别比去年同期增长了 11% 和 9%，且这两个季度产值的同比绝对增加量相等。该公司今年上半年的产值同比增长了()。

- (A) 9.5% (B) 9.9% (C) 10% (D) 10.5% (E) 10.9%

2. 某高校高一年级男生人数占该年级学生人数的 40%。在一次考试中，男、女生的平均分数分别为 75 和 80，则这次考试高一年级学生的平均分数为()。

- (A) 76 (B) 77 (C) 77.5 (D) 78 (E) 79

3. 如果 a, b, c 的算术平均值等于 13，且 $a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ ，那么 $c =$ ()。

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 18

4. 某物流公司将一批货物的 60% 送到了甲商场，100 件送到了乙商场，其余的都送到了丙商场。若送到甲、丙两商场的货物数量之比为 7 : 3，则该批货物共有()件。

- (A) 700 (B) 800 (C) 900 (D) 1000 (E) 1100

5. 不等式 $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ 的解集是()。

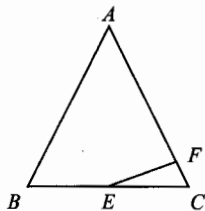
- (A) (2, 3) (B) $(-\infty, 2]$ (C) $[3, +\infty)$
(D) $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ (E) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

6. 老王上午 8:00 骑自行车离家去办公楼开会。若每分钟骑行 150 米，则他会迟到 5 分钟；若每分钟骑行 210 米，则他会提前 5 分钟。会议开始的时间是()。

- (A) 8:20 (B) 8:30 (C) 8:45 (D) 9:00 (E) 9:10

7. 如图， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ， E 是 BC 的中点， $EF \perp AC$ ，则 $EF =$ ()。

- (A) 1.2 (B) 2 (C) 2.2 (D) 2.4 (E) 2.5

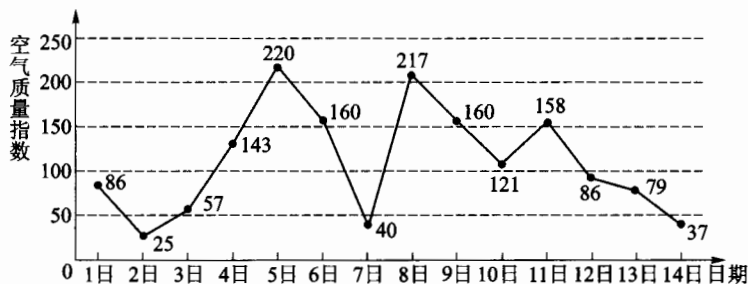


8. 设数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{n}{3} (n \geq 1)$ ，则 $a_{100} =$ ()。

- (A) 1650 (B) 1651 (C) $\frac{5050}{3}$ (D) 3300 (E) 3301

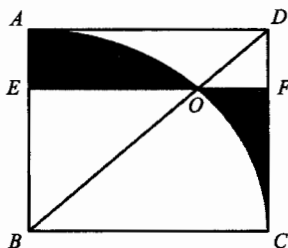
9. 下图是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图，空气质量指数小于 100 表示空气质量优良，空气质量指数大于 200 表示空气重度污染。某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 13 日中的某一天到达该市，并停留 2 天。此人停留期间空气质量都是优良的概率为()。

- (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{4}{13}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) $\frac{6}{13}$ (E) $\frac{1}{2}$



10. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,弧 AOC 是四分之一圆周, $EF \parallel AD$. 若 $DF = a$, $CF = b$, 则阴影部分的面积为().

- (A) $\frac{1}{2}ab$ (B) ab (C) $2ab$ (D) $b^2 - a^2$ (E) $(b - a)^2$



11. 甲、乙、丙三个容器中装有盐水. 现将甲容器中盐水的 $\frac{1}{3}$ 倒入乙容器, 摇匀后将乙容器中盐水的 $\frac{1}{4}$ 倒入丙容器, 摇匀后再将丙容器中盐水的 $\frac{1}{10}$ 倒回甲容器, 此时甲、乙、丙三个容器中盐水的含盐量都是 9 千克. 则甲容器中原来的盐水含盐量是() 千克.

- (A) 13 (B) 12.5 (C) 12 (D) 10 (E) 9.5

12. 在某次比赛中有 6 名选手进入决赛. 若决赛设有 1 个一等奖, 2 个二等奖, 3 个三等奖, 则可能的结果共有() 种.

- (A) 16 (B) 30 (C) 45 (D) 60 (E) 120

13. 将一个白木质的正方体的六个表面都涂上红漆, 再将它锯成 64 个小正方体. 从中任取 3 个, 其中至少有 1 个三面是红漆的小正方体的概率是().

- (A) 0.665 (B) 0.578 (C) 0.563 (D) 0.482 (E) 0.335

14. 福彩中心发行彩票的目的是为了筹措资金资助福利事业. 现在福彩中心准备发行一种面值为 5 元的福利彩票刮刮卡, 方案设计如下: (1) 该福利彩票的中奖率为 50%; (2) 每张中奖彩票的中奖奖金有 5 元和 50 元两种. 假设购买一张彩票获得 50 元奖金的概率为 p , 且福彩中心筹得资金不少于发行彩票面值总和的 32%, 则().

- (A) $p \leq 0.005$ (B) $p \leq 0.01$ (C) $p \leq 0.015$ (D) $p \leq 0.02$ (E) $p \leq 0.025$

15. 某单位在甲、乙两个仓库中分别存在着 30 吨和 50 吨货物, 现要将这批货物转运到 A、B 两地存放, A、B 两地的存放量都是 40 吨. 甲、乙两个仓库到 A、B 两地的距离(单位: 公里)如表 1 所示, 甲、乙两个仓库运送到 A、B 两地的货物重量如表 2 所示. 若每吨货物每公里的运费是 1 元, 则下列调运方案中总运费最少的是().

- (A) $x=30, y=10, u=0, v=40$
(B) $x=0, y=40, u=30, v=10$
(C) $x=10, y=30, u=20, v=20$
(D) $x=20, y=20, u=10, v=30$
(E) $x=15, y=25, u=15, v=25$

表 1

	甲	乙
A	15	10
B	10	15

表 2

	甲	乙
A	x	y
B	u	v

二、条件充分性判断:第 16~25 题,每小题 3 分,共 30 分.要求判断每题给出的条件(1)与条件(2)能否充分支持题干中陈述的结论. A、B、C、D、E 五个选项为判断结果,请选择一项符合试题要求的判断.请在答题卡上将所选项的字母涂黑.

- (A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分;
(B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分;
(C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
(D) 条件(1)充分,条件(2)也充分;
(E) 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

16. $m^2n^2 - 1$ 能被 2 整除.

(1) m 是奇数.

(2) n 是奇数.

17. 已知圆 $A: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$. 则圆 B 和圆 A 相切.

(1) 圆 $B: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$.

(2) 圆 $B: x^2 + y^2 - 6x = 0$.

18. 产品出厂前,需要在外包装上打印某些标志. 甲、乙两人一起每小时可完成 600 件. 则可以确定甲每小时完成多少件.

(1) 乙的打件速度是甲的打件速度的 $\frac{1}{3}$.

(2) 乙工作 5 小时可以完成 1000 件.

19. 已知 $f(x, y) = x^2 - y^2 - x + y + 1$. 则 $f(x, y) = 1$.

(1) $x = y$.

(2) $x + y = 1$.

20. 设 a 是整数. 则 $a = 2$.

(1) 二次方程 $ax^2 + 8x + 6 = 0$ 有实根.

(2) 二次方程 $x^2 + 5ax + 9 = 0$ 有实根.

21. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列. 则 $a_2 = 2$.

(1) $a_1 + a_3 = 5$.

(2) $a_1 a_3 = 4$.

22. 甲、乙两人以不同的速度在环形跑道上跑步,甲比乙快. 则乙跑一圈需要 6 分钟.

(1) 甲、乙相向而行,每隔 2 分钟相遇一次.

(2) 甲、乙同向而行,每隔 6 分钟相遇一次.

23. 设 a, b 为常数. 则关于 x 的二次方程 $(a^2 + 1)x^2 + 2(a + b)x + b^2 + 1 = 0$ 具有重实根.

(1) $a, 1, b$ 成等差数列.

(2) $a, 1, b$ 成等比数列.

24. 设直线 $y=x+b$ 分别在第一和第三象限与曲线 $y=\frac{4}{x}$ 相交于点 A 、点 B . 则能确定 b 的值.

(1) 已知以 AB 为对角线的正方形的面积.

(2) 点 A 的横坐标小于纵坐标.

25. 方程 $|x+1|+|x+3|+|x-5|=9$ 存在唯一解.

(1) $|x-2|\leq 3$.

(2) $|x-2|\geq 2$.

参 考 答 案

1—5 BDCAE

6—10 BDBBB

11—15 CDEDA

16—20 CADDE

21—25 ECBCA

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

2013 年管理类专业学位全国联考 综合能力数学真题

一、问题求解(本大题共 15 题,每小题 3 分,共 45 分,在每小题的五项选择中选择一项)。

1. 某工厂生产一批零件,计划 10 天完成任务,实际提前 2 天完成任务,则每天的产量比计划平均提高了()。

- (A) 15% (B) 20% (C) 25% (D) 30% (E) 35%

2. 甲乙两人同时从 A 点出发,沿 400 米跑道同向匀速行走,25 分钟后乙比甲少走一圈,若乙行走一圈需要 8 分钟,甲的速度是(单位:米/分钟)()。

- (A) 62 (B) 65 (C) 66 (D) 67 (E) 69

3. 甲班共有 30 名同学,在一次满分为 100 分的考试中,全班的平均成绩为 90 分,则成绩低于 60 分的同学至多有()个。

- (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

4. 某工程由甲公司 60 天完成,由甲、乙两公司共同承包需要 28 天完成,由乙、丙两公司共同承包需要 35 天完成,则由丙公司承包该工程需要的天数为()。

- (A) 85 (B) 90 (C) 95 (D) 100 (E) 105

5. 已知 $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$, 则 $f(8) = ()$ 。

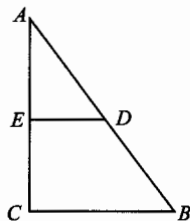
- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{17}$ (E) $\frac{1}{18}$

6. 甲乙两商店同时购进了一批某品牌的电视,当甲店售出 15 台时乙售出了 10 台,此时两店的库存比为 8:7,库存差为 5,甲乙两店总进货量为()。

- (A) 75 (B) 80 (C) 85 (D) 100 (E) 125

7. 如图,在直角三角形 ABC 中, $AC = 4$, $BC = 3$, $DE \parallel BC$, 已知梯形 BCED 的面积为 3, 则 DE 长为()。

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3} + 1$ (C) $4\sqrt{3} - 4$
(D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (E) $\sqrt{2} + 1$



8. 点 $(0, 4)$ 关于直线 $2x + y + 1 = 0$ 的对称点为()。

- (A) $(2, 0)$ (B) $(-3, 0)$ (C) $(-6, 1)$
(D) $(4, 2)$ (E) $(-4, 2)$

9. 在 $(x^2 + 3x + 1)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为()。

- (A) 5 (B) 10 (C) 45 (D) 90 (E) 95

10. 有一批水果要装箱,一名熟练工单独装箱需要 10 天,每天报酬为 200 元;一名普通工单独装箱需要 15 天,每天报酬为 120 元。由于场地限制,最多可同时安排 12 人装箱,若要求在一天内完成装箱任务,则支付的最少报酬为()元。

- (A) 1800 (B) 1840 (C) 1920 (D) 1960 (E) 2000

11. 将体积为 $4\pi\text{cm}^3$ 和 $32\pi\text{cm}^3$ 的两个实心金属球熔化后铸成一个实心大球,则大球的

表面积为().

- (A) $32\pi\text{cm}^2$ (B) $36\pi\text{cm}^2$ (C) $38\pi\text{cm}^2$ (D) $40\pi\text{cm}^2$
(E) $42\pi\text{cm}^2$

12. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 1$, 且过点 $(-1, 1)$, 则().

- (A) $b = -2, c = -2$ (B) $b = 2, c = 2$ (C) $b = -2, c = 2$
(D) $b = -1, c = 1$ (E) $b = 1, c = 1$

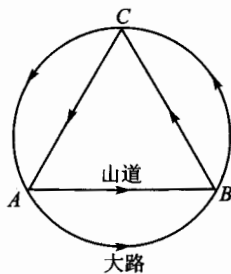
13. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列. 若 a_2 与 a_{10} 是方程 $x^2 - 10x - 9 = 0$ 的两个根, 则 $a_5 + a_7 =$ ().

- (A) -10 (B) -9 (C) 9 (D) 10 (E) 12

14. 已知 10 件产品中有 4 件一等品, 从中任取 2 件, 则至少有 1 件一等品的概率为().

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{15}$
(D) $\frac{8}{15}$ (E) $\frac{13}{15}$

15. 确定两人从 A 地出发经过 B, C 沿逆时针方向行走一圈回到 A 地的方案(如图). 若 A 地出发时, 每人均可选大路或山道, 经过 B, C 时, 至多有一人可以更改道路, 则不同的方案有().



- (A) 16 种 (B) 24 种 (C) 36 种
(D) 48 种 (E) 64 种

二、条件充分性判断(本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分).

解题说明: 本大题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论. 阅读条件

(1) 和 (2) 后选择:

- (A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分;
(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分;
(C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分;
(E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分, 条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

16. 已知平面区域 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq 9\}$, 则 $D_1 D_2$ 覆盖区域的边界长度为 8π .

- (1) $x_0^2 + y_0^2 = 9$. (2) $x_0 + y_0 = 3$.

17. $p = mq + 1$ 为质数.

- (1) m 为正整数, q 为质数. (2) m, q 均为质数.

18. $\triangle ABC$ 的边长为 a, b, c , 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

- (1) $(c^2 - a^2 - b^2)(a^2 - b^2) = 0$. (2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab$.

19. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则方程 $f(x) = 0$ 有两不同实根.

- (1) $a + c = 0$. (2) $a + b + c = 0$.

20. 档案馆在一个库房安装了 n 个烟火反应报警器, 每个报警器遇到烟火成功报警的概率为 p , 该库房遇烟火发出报警的概率达到 0.999.

- (1) $n = 3, p = 0.9$. (2) $n = 2, p = 0.97$.

21. 已知 a, b 是实数, 则 $|a| \leq 1, |b| \leq 1$.
- (1) $|a+b| \leq 1$. (2) $|a-b| \leq 1$.
22. 设 x, y, z 为非零实数, 则 $\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z} = 1$.
- (1) $3x-2y=0$. (2) $2y-z=0$.
23. 某单位年终共发了 100 万元奖金, 奖金金额分别是一等奖 1.5 万元、二等奖 1 万元、三等奖 0.5 万元, 则该单位至少有 100 人.
- (1) 得二等奖的人数最多. (2) 得三等奖的人数最多.
24. 三个科室的人数分别为 6、3 和 2, 因工作需要, 每晚需要排 3 人值班, 则在两个月中以便每晚的值班人员不完全相同.
- (1) 值班人员不能来自同一科室. (2) 值班人员来自三个不同科室.
25. 设 $a_1=1, a_2=k, \dots, a_{n+1}=|a_n-a_{n-1}| (n \geq 2)$, 则 $a_{100}+a_{101}+a_{102}=2$.
- (1) $k=2$. (2) k 是小于 20 的正整数.

参 考 答 案

- 1—5 CCBEE 6—10 DDEEC 11—15 BADBC
16—20 AEBAD 21—25 CCBAD

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

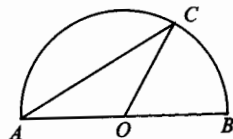
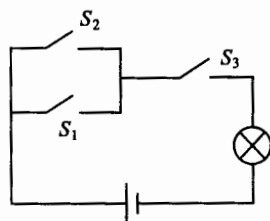
6大 (太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

2012 年在职管理类全国联考
综合能力数学真题

一、问题求解(本大题共 15 题,每小题 3 分,共 45 分,在每小题的五项选择中选择一项)。

1. 将 3700 元奖金按 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{2}{5}$ 的比例分给甲、乙、丙三人,则乙应得奖金()。
- (A) 1000 (B) 1050 (C) 1200 (D) 1500 (E) 1700
2. 设实数 x, y 满足 $x + 2y = 3$, 则 $x^2 + y^2 + 2y$ 的最小值为()。
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) $\sqrt{5} - 1$ (E) $\sqrt{5} + 1$
3. 若菱形两条对角线的长分别为 6 和 8, 则这个菱形的周长和面积分别为()。
- (A) 14; 24 (B) 14; 48 (C) 20; 12 (D) 20; 24 (E) 20; 48
4. 第一季度甲公司的产值比乙公司的产值低 20%。第二季度甲公司的产值比第一季度增长了 20%, 乙公司的产值比第一季度增长了 10%。第二季度甲、乙两公司的产值之比是()。
- (A) 96 : 115 (B) 92 : 115 (C) 48 : 55 (D) 24 : 25 (E) 10 : 11
5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 4, a_4 = 8$ 。若 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{21}$, 则 $n =$ ()。
- (A) 16 (B) 17 (C) 19 (D) 20 (E) 21
6. 如图是一个简单的电路图 S_1, S_2, S_3 表示开关, 随机闭合 S_1, S_2, S_3 中的两个, 灯泡发光的概率是()。
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$
7. 设 $\{a_n\}$ 是非负等比数列。若 $a_3 = 1, a_5 = \frac{1}{4}$, $\sum_{n=1}^8 \frac{1}{a_n} =$ ()。
- (A) 255 (B) $\frac{255}{4}$ (C) $\frac{255}{8}$ (D) $\frac{255}{16}$ (E) $\frac{255}{32}$
8. 某次乒乓球单打比赛中, 先将 8 名选手等分为 2 组进行小组单循环赛。若一位选手只打了 1 场比赛后因故退赛, 则小组赛的实际比赛场数是()。
- (A) 24 (B) 19 (C) 12 (D) 11 (E) 10
9. 甲、乙、丙三人同时在起点出发进行 1000 米自行车比赛(假设他们各自的速度保持不变), 甲到终点时, 乙距终点还有 40 米, 丙距终点还有 64 米。那么乙到达终点时, 丙距终点()米。
- (A) 21 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 39
10. 如图, AB 是半圆 O 的直径, AC 是弦。若 $|AB| = 6$, $\angle ACO = \frac{\pi}{6}$, 则弧 BC 的长度为()。
- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) π (C) 2π (D) 1 (E) 2



11. 在一次数学考试中,某班前 6 名同学的成绩恰好成等差数列.若前 6 名同学的平均成绩为 95 分,前 4 名同学的成绩之和为 388 分,则第 6 名同学的成绩为()分.

- (A) 92 (B) 91 (C) 90 (D) 89 (E) 88

12. 一满桶纯酒精倒出 10 升后,加满水搅匀,再倒出 4 升后,再加满水.此时,桶中的纯酒精与水的体积之比是 2:3.则该桶的容积是()升.

- (A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 25

13. 设 A, B 分别是圆周 $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$ 上使得 $\frac{y}{x}$ 取到最大值和最小值的点, O 是坐标原点,则 $\angle AOB$ 的大小为().

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$ (E) $\frac{5\pi}{12}$

14. 若不等式 $\frac{(x-a)^2 + (x+a)^2}{x} > 4$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,则常数 a 的取值范围是().

- (A) $(-\infty, -1)$ (B) $(1, +\infty)$ (C) $(-1, 1)$
(D) $(-1, +\infty)$ (E) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

15. 某商场在一次活动中规定:一次购物不超过 100 元时没有优惠;超过 100 元而没有超过 200 元时,按该次购物全额 9 折优惠;超过 200 元时,其中 200 元按 9 折优惠,超过 200 元的部分按 8.5 折优惠.若甲、乙两人在该商场购买的物品分别付费 94.5 元和 197 元,则两人购买的物品在举办活动前需要的付费总额是()元.

- (A) 291.5 (B) 314.5 (C) 325 (D) 291.5 或 314.5 (E) 314.5 或 325

二、条件充分性判断(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

解题说明:本大题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论.阅读条件(1)和(2)后选择:

- (A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分;
(B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分;
(C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
(D) 条件(1)充分,条件(2)也充分;
(E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

16. 某人用 10 万元购买了甲、乙两种股票.若甲种股票上涨 $a\%$ 、乙种股票下降 $b\%$ 时,此人购买的甲、乙两种股票总值不变,则此人购买甲种股票用了 6 万元.

- (1) $a=2, b=3$. (2) $3a-2b=0 (a \neq 0)$.

17. 一项工作,甲、乙、丙三人各自独立完成需要的天数分别为 3,4,6.则丁独立完成该项工作需要 4 天时间.

- (1) 甲、乙、丙、丁四人共同完成该项工作需要 1 天时间.
(2) 甲、乙、丙三人各做 1 天,剩余部分由丁独立完成.

18. a, b 为实数.则 $a^2 + b^2 = 16$.

- (1) a 和 b 是方程 $2x^2 - 8x - 1 = 0$ 的两个根.

(2) $|a-b+3|$ 与 $|2a+b-6|$ 互为相反数.

19. 直线 L 与直线 $2x+3y=1$ 关于 x 轴对称.

- (1) $L: 2x-3y=1$. (2) $L: 3x+2y=1$.

20. 直线 $y=kx+b$ 经过第三象限概率是 $\frac{5}{9}$.

(1) $k \in \{-1, 0, 1\}$, $b \in \{-1, 1, 2\}$.

(2) $k \in \{-2, -1, 2\}$, $b \in \{-1, 0, 2\}$.

21. 设 a 、 b 为实数. 则 $a=1$, $b=4$.

(1) 曲线 $y=ax^2+bx+1$ 与 x 轴的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$.

(2) 曲线 $y=ax^2+bx+1$ 关于直线 $x+2=0$ 对称.

22. 在一个不被透明的布袋中装有 2 个白球、 m 个黄球和若干个黑球, 它们只有颜色不同. 则 $m=3$.

(1) 从布袋中随机摸出一个球, 摸到白球的概率是 0.2.

(2) 从布袋中随机摸出一个球, 摸到黄球的概率是 0.3.

23. 某商品经过八月份与九月份连续两次降价, 售价由 m 元降到了 n 元. 则该商品的售价平均每次下降了 20%.

(1) $m-n=900$.

(2) $m+n=4100$.

24. 如图, 长方形 $ABCD$ 的长与宽分别为 $2a$ 和 a , 将其以顶点 A 为中心顺时针旋转 60° . 则四边形 $AECD$ 的面积为 $24-2\sqrt{3}$.

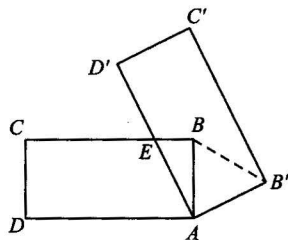
(1) $a=2\sqrt{3}$.

(2) $\triangle AB'B$ 的面积为 $3\sqrt{3}$.

25. $x^2-x-5 > |2x-1|$.

(1) $x > 4$.

(2) $x < -1$.



参 考 答 案

1-5 AADCD

6-10 EBEBB

11-15 CCBEE

16-20 DAEAD

21-25 CCCDA

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大 (太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

2012 年管理类专业硕士学位联考

综合能力数学真题

一、问题求解(本大题共 15 题,每小题 3 分,共 45 分,在每小题的五项选择中选择一项)

1. 某商品的定价为 200 元,受金融危机的影响,连续两次降价 20% 以后的售价是()。

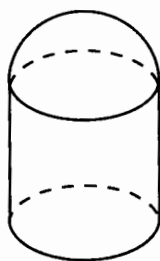
- (A) 114 元 (B) 120 元 (C) 128 元 (D) 144 元 (E) 160 元

2. 在一次捐赠活动中,某市将捐赠的物品打包成件,其中帐篷和食品共 320 件,帐篷比食品多 80 件,则帐篷的件数是()。

- (A) 80 (B) 200 (C) 230 (D) 240 (E) 260

3. 如图,一个储物罐的下半部分的底面直径与高均是 20 m 的圆柱形,上半部分(顶部)是半球形,已知底面与顶部的造价是 400 元/ m^2 ,侧面的造价是 300 元/ m^2 ,该储物罐的造价是($\pi=3.14$)()。

- (A) 56.52 万元 (B) 62.8 万元 (C) 75.36 万元
(D) 87.92 万元 (E) 100.48 万元



4. 在一次商品促销活动中,主持人出示一个 9 位数,让顾客猜测商品的价格,商品的价格是该 9 位数中从左到右相邻的 3 个数字组成的 3 位数,若主持人出示的是 513535319,则顾客一次猜中价格的概率是()。

- (A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{7}$ (E) $\frac{1}{3}$

5. 某商店经营 15 种商品,每次在橱窗内陈列 5 种,若每两次陈列的商品不完全相同,则最多可陈列()。

- (A) 3000 次 (B) 3003 次 (C) 4000 次 (D) 4003 次 (E) 4300 次

6. 甲,乙,丙三个地区的公务员参加一次测评,其人数和考分情况如表所列。

人 数 地 区	分 数	6	7	8	9
甲		10	10	10	10
乙		15	15	10	20
丙		10	10	15	15

三个地区按平均分由高到低的排名顺序为()。

- (A) 乙,丙,甲 (B) 乙,甲,丙 (C) 甲,丙,乙
(D) 丙,甲,乙 (E) 丙,乙,甲

7. 经统计,某机场的一个安检口每天中午办理安检手续的乘客人数及相应的概率如表所列。

乘客人数	0~5	6~10	11~15	16~20	21~25	25 以上
概率	0.1	0.2	0.2	0.25	0.2	0.05

该安检口 2 天中至少有 1 天中午办理安检手续的乘客人数超过 15 的概率是()。

- (A) 0.2 (B) 0.25 (C) 0.4 (D) 0.5 (E) 0.75

8. 某人在保险柜中存放了 M 元现金,第一天取出它的 $\frac{2}{3}$,以后每天取出前一天所取的

$\frac{1}{3}$,共取了 7 天,保险柜中剩余的现金为()。

- (A) $\frac{M}{3^7}$ 元 (B) $\frac{M}{3^6}$ 元 (C) $\frac{2M}{3^6}$ 元 (D) $\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7\right]M$ 元

- (E) $\left[1 - 7\left(\frac{2}{3}\right)^7\right]M$ 元

9. 在直角坐标系中,若平面区域 D 中所有点的坐标 (x, y) 均满足 $0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 6, |y-x| \leq 3, x^2+y^2 \geq 9$,则 D 的面积是()。

- (A) $\frac{9}{4}(1+4\pi)$ (B) $9\left(4-\frac{\pi}{4}\right)$ (C) $9\left(3-\frac{\pi}{4}\right)$ (D) $\frac{9}{4}(2+\pi)$ (E) $\frac{9}{4}(1+\pi)$

10. 某单位春季植树 100 棵,前 2 天安排乙组植树,其余任务有甲、乙两组用 3 天完成,已知甲组每天比乙组多植树 4 棵,则甲组每天植树()。

- (A) 11 棵 (B) 12 棵 (C) 13 棵 (D) 15 棵 (E) 17 棵

11. 在两队进行的羽毛球对抗赛中,每队派出 3 男 2 女共 5 名运动员进行 5 局单打比赛,如果女子比赛安排在第二和第四局进行,则每队队员的不同出场顺序有()。

- (A) 12 种 (B) 10 种 (C) 8 种 (D) 6 种 (E) 4 种

12. 若 x^3+x^2+ax+b 能被 x^2-3x+2 整除,则()。

- (A) $a=4, b=4$ (B) $a=-4, b=-4$ (C) $a=10, b=-8$
(D) $a=-10, b=8$ (E) $a=2, b=0$

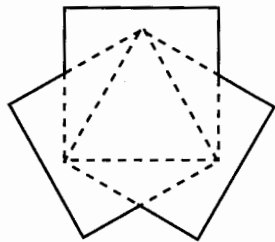
13. 某公司计划运送 180 台电视机和 110 台洗衣机下乡.现有两种货车,甲种货车每辆最多可载 40 台电视机和 10 台洗衣机,乙种货车每辆最多可载 20 台电视机和 20 台洗衣机.已知甲、乙两种货车的租金分别是每辆 400 元和 360 元,则最少的运费是()。

- (A) 2560 元 (B) 2600 元 (C) 2640 元
(D) 2680 元 (E) 2720 元

14. 如图,三个边长为 1 的正方形所组成区域(实线区域)的面积()。

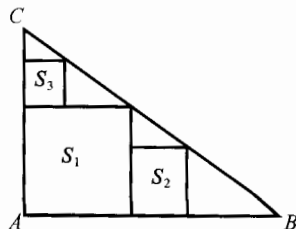
- (A) $3-\sqrt{2}$ (B) $3-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (C) $3-\sqrt{3}$

- (D) $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $3-\frac{3\sqrt{3}}{4}$



15. 如图, $\triangle ABC$ 是直角三角形, S_1, S_2, S_3 为正方形. 已知 a, b, c 分别是 S_1, S_2, S_3 的边长,则()。

- (A) $a=b+c$ (B) $a^2=b^3+c^2$
(C) $a^2=2b^2+2c^2$ (D) $a^3=b^3+c^3$
(E) $a^3=2b^3+2c^3$



二、条件充分性判断(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

解题说明:本大题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论. 阅读条件(1)和(2)后选择:

- (A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分;
- (B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分;
- (C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
- (D) 条件(1)充分,条件(2)也充分;
- (E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

16. 一元二次方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 有两个不同实根.

- (1) $b < -2$. (2) $b > 2$.

17. 直线 $y = ax + b$ 过第二象限.

- (1) $a = -1, b = 1$. (2) $a = 1, b = -1$.

18. 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 分别为等比数列与等差数列, $a_1 = b_1 = 1$. 则 $b_2 \geq a_2$

- (1) $a_2 > 0$. (2) $a_{10} = b_{10}$.

19. 某产品由两道独立工序加工完成,则该产品是合格品的概率大于 0.8.

- (1) 每道工序的合格率为 0.81. (2) 每道工序的合格率为 0.9.

20. 已知 m, n 是正整数,则 m 是偶数.

- (1) $3m + 2n$ 是偶数. (2) $3m^2 + 2n^2$ 是偶数.

21. 已知 a, b 是实数,则 $a > b$.

- (1) $a^2 > b^2$. (2) $a^2 > b$.

22. 在某次考试中,3 道题中答对 2 道即为及格,假设某人答对各题的概率相同,则此人及格的概率是 $\frac{20}{27}$.

- (1) 答对各题的概率为 $\frac{2}{3}$. (2) 3 道题全部答错的概率为 $\frac{1}{27}$.

23. 已知三种水果的平均价格为 10 元/千克,则每种水果的价格均不超过 18 元/千克.

- (1) 三种水果中价格最低的为 6 元/千克.
- (2) 购买重量分别是 1 千克、1 千克和 2 千克的三种水果共用了 46 元.

24. 某用户要建一个长方形的羊栏,则羊栏的面积大于 500m^2 .

- (1) 羊栏的周长为 120m. (2) 羊栏对角线的长不超过 50m.

25. 直线 $y = x + b$ 是抛物线 $y = x^2 + a$ 的切线.

- (1) $y = x + b$ 与 $y = x^2 + a$ 有且仅有一个交点.
- (2) $x^2 - x \geq b - a (x \in \mathbf{R})$.

参 考 答 案

- 1—5 CBCBB 6—10 EEACD 11—15 ADBEA
- 16—20 DACBD 21—25 EDDCA

2011 年在职管理类专业硕士学位联考

综合能力数学真题

一、问题求解(本大题共 15 题,每小题 3 分,共 45 分,在每小题的五项选择中选择一项)

1. 已知某种商品的价格从一月份到三月份的月平均增长速度为 10%,那么该商品三月份的价格是其一月份价格的().

- (A) 21% (B) 110% (C) 120% (D) 121% (E) 133.1%

2. 含盐 12.5%的盐水 40 千克蒸发掉部分水分后变成了含盐 20%的盐水,蒸发掉的水分重量为()千克.

- (A) 19 (B) 18 (C) 17 (D) 16 (E) 15

3. 为了调节个人收入,减少中低收入者的赋税负担,国家调整了个人工资薪金所得税的征收方案.已知原方案的起征点为 2000 元/月,税费分九级征收,前四级税率见下表:

级数	全月应纳税所得额 q (元)	税率(%)
1	$0 < q \leq 500$	5
2	$500 < q \leq 2000$	10
3	$2000 < q \leq 5000$	15
4	$5000 < q \leq 20000$	20

新方案的起征点为 3500 元/月,税费分七级征收,前三级税率见下表:

级数	全月应纳税所得额 q (元)	税率(%)
1	$0 < q \leq 1500$	3
2	$1500 < q \leq 4500$	10
3	$4500 < q \leq 9000$	20

若某人新方案下每月缴纳的个人工资薪金所得税是 345 元,则此人每月缴纳的个人工资薪金所得税比原方案减少了()元.

- (A) 825 (B) 480 (C) 345 (D) 280 (E) 135

4. 一列火车匀速行驶时,通过一座长为 250 米的桥梁需要 10 秒钟,通过一座长为 450 米的桥梁需要 15 秒钟,该火车通过长为 1050 米的桥梁需要()秒.

- (A) 22 (B) 25 (C) 28 (D) 30 (E) 35

5. 打印一份材料,若每分钟打 30 个字,需要若干小时打完.当打到此材料的 $\frac{2}{5}$ 时,打字效率提高了 40%,结果提前半小时打完.这份材料的字数是()个.

- (A) 4650 (B) 4800 (C) 4950 (D) 5100 (E) 5250

6. 若等比数列 a_n 满足 $a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_2a_8 = 25$,且 $a_1 > 0$,则 $a_3 + a_5 =$ ().

- (A) 8 (B) 5 (C) 2 (D) 2 (E) -5

7. 某地区平均每天产生生活垃圾 700 吨,由甲、乙两个处理厂处理.甲厂每小时可处理垃圾 55 吨,所需费用为 550 元;乙厂每小时可处理垃圾 45 吨,所需费用为 495 元.如果该地区每天的垃圾处理费不能超过 7370 元,那么甲厂每天处理垃圾的时间至少需要()

小时.

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

8. 若三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三个不同实根 x_1, x_2, x_3 满足: $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2x_3=0$, 则下列关系式中恒成立的是().

- (A) $ac=0$ (B) $ac<0$ (C) $ac>0$ (D) $a+c<0$ (E) $a+c>0$

9. 若等差数列 a_n 满足 $5a_7-a_3-12=0$, 则 $\sum_{k=1}^{15} a_k$ 为().

- (A) 15 (B) 24 (C) 30 (D) 45 (E) 60

10. 10 名网球选手中有 2 名种子选手. 现将他们分成两组, 每组 5 人, 则 2 名种子选手不在同一组的概率为().

- (A) $\frac{5}{18}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

11. 某种新鲜水果的含水量为 98%, 一天后的含水量降为 97.5%. 某商店以每斤 1 元的价格购进了 1000 斤新鲜水果, 预计当天能售出 60%, 两天内售完. 要使利润维持在 20%, 则每斤水果的平均售价应定为()元.

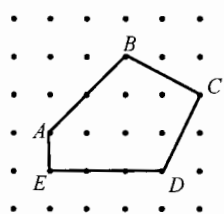
- (A) 1.20 (B) 1.25 (C) 1.30 (D) 1.35 (E) 1.40

12. 在 8 名志愿者中, 只能做英语翻译的有 4 人, 只能做法语翻译的有 3 人, 既能做英语翻译又能做法语翻译的有 1 人. 现从这些志愿者中选取 3 人做翻译工作, 确保英语和法语都有翻译的不同选法共有()种.

- (A) 12 (B) 18 (C) 21 (D) 30 (E) 51

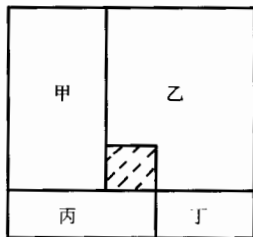
13. 如图所示, 若相邻点的水平距离与竖直距离都是 1, 则多边形 ABCDE 的面积为().

- (A) 7 (B) 8 (C) 9
(D) 10 (E) 11



14. 如图, 一块面积为 400 平方米的正方形土地被分割成甲、乙、丙、丁四个长方形区域作为不同的功能区域, 它们的面积分别为 128, 192, 48 和 32 平方米. 乙的左下角划出一块正方形区域(阴影面积)作为公共区域, 这块小正方形的面积为()平方米.

- (A) 16 (B) 17 (C) 18
(D) 19 (E) 20



15. 已知直线 $y=kx$ 与圆 $x^2+y^2=2y$ 有两个交点 A, B. 若弦 AB 的长度大于 $\sqrt{2}$, 则 k 的取值范围是().

- (A) $(-\infty, -1)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 1)$
(D) $(1, +\infty)$ (E) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

二、条件充分性判断(本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

解题说明: 本大题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论. 阅读条件(1)和(2)后选择:

- (A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分;
(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分;

- (C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分;
 (D) 条件(1)充分,条件(2)也充分;
 (E) 条件(1)和条件(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

16. 某种流感在流行. 从人群中任意找出 3 人, 其中至少有 1 人患该种流感的概率为 0.271.

- (1) 该流感的发病率为 0.3. (2) 该流感的发病率为 0.1.

17. 抛物线 $y=x^2+(a+2)x+2a$ 与 x 轴相切.

- (1) $a>0$. (2) $a^2+a-6=0$.

18. 甲、乙两人赛跑. 甲的速度是 6 米/秒.

- (1) 乙比甲先跑 12 米, 甲起跑后 6 秒钟追上乙.
 (2) 乙比甲先跑 2.5 秒, 甲起跑后 5 秒钟追上乙.

19. 甲、乙两组射手打靶. 两组射手的平均成绩是 150 环.

- (1) 甲组的人数比乙组多 20%.
 (2) 乙组的平均成绩是 171.6 环, 比甲组的平均成绩高 30%.

20. 直线 l 是圆 $x^2-2x+y^2+4y=0$ 的一条切线.

- (1) $l: x-2y=0$. (2) $l: 2x-y=0$.

21. 不等式 $ax^2+(a-6)x+2>0$ 对所有实数 x 成立.

- (1) $0<a<3$. (2) $1<a<5$.

22. 已知 $x(1-kx)^3=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ 对所有实数 x 成立. 则 $a_1+a_2+a_3+a_4=-8$

- (1) $a_2=-9$. (2) $a_3=27$.

23. 已知数列 a_n 满足 $a_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n+1}$ ($n=1, 2, \dots$). 则 $a_2=a_3=a_4$.

- (1) $a_1=\sqrt{2}$. (2) $a_1=-\sqrt{2}$.

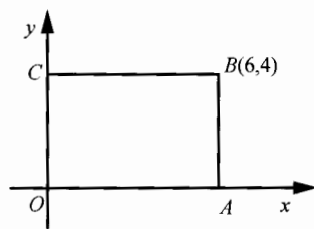
24. 已知 $g(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$ $f(x)=|x-1|-g(x)|x+1|+|x-2|+|x+2|$. 则 $f(x)$

是与 x 无关的常数.

- (1) $-1<x<0$. (2) $1<x<2$.

25. 如图, 在直角坐标系 xOy 中, 矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标是 $(6, 4)$. 则直线 l 将矩形 $OABC$ 分成了面积相等的两部分.

- (1) $l: x-y-1=0$.
 (2) $l: x-3y+3=0$.



参 考 答 案

- 1-5 DEBDE 6-10 BABDC 11-15 CEBAE
 16-20 BCCCA 21-25 EADDD

2011 年管理类专业学位全国联考 综合能力数学真题

一、问题求解(第1~15小题,每小题3分,共45分,下例每题给出的A、B、C、D、E五个选项中,只有一项是符合试题要求的,请在答题卡上将所选项的字母涂黑)。

1. 已知船在静水中的速度为28 km/h,水流的速度为2 km/h. 则此船在相距78km 的两地间往返一次所需时间是().

- (A) 5.9h (B) 5.6h (C) 5.4h (D) 4.4h (E) 4h

2. 若实数满足 a, b, c , 满足 $|a-3| + \sqrt{3b+5} + (5c-4)^2 = 0$, 则 $abc = ()$.

- (A) -4 (B) $-\frac{5}{3}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) 3

3. 某年级60名学生中,有30人参加合唱团,45人参加运动队,其中参加合唱团而未参加运动队的有8人,则参加运动队而未参加合唱团的有().

- (A) 15人 (B) 22人 (C) 23人 (D) 30人 (E) 37人

4. 现有一个半径为 R 的球体,拟用刨床将其加工成正方体,则能加工成的最大正方体的体积是().

- (A) $\frac{8}{3}R^3$ (B) $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$ (C) $\frac{4}{3}R^3$ (D) $\frac{1}{3}R^3$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{9}R^3$

5. 2007年,某市的全年研究与试验发展(R&D)经费支出300亿元,比2006年增长20%,该市的GDP为10000亿元,比2006年增长10%,2006年,该市的R&D经费支出占当年GDP的().

- (A) 1.75% (B) 2% (C) 2.5% (D) 2.75% (E) 3%

6. 现从5名管理专业,4名经济专业和1名财会专业的学生中随机派出一个3人小组,则该小组中3个专业各有1名学生的概率为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

7. 一所四年制大学每年的毕业生七月份离校,新生九月份入学,该校2001年招生2000名,之后每年比上一年多招200名,则该校2007年九月底的在校学生有().

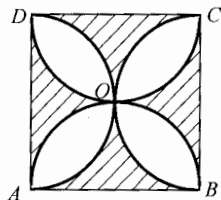
- (A) 14000名 (B) 11600名 (C) 9000名 (D) 6200名 (E) 3200名

8. 将2个红球与1个白球随机地放入甲、乙、丙三个盒子中,则乙盒中至少有1个红球的概率为().

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{8}{27}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{17}{27}$

9. 如图,四边形ABCD是边长为1的正方形,弧AOB, BOC, COD, DOA均为半圆,则阴影部分的面积为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2}$
(C) $1 - \frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2} - 1$



(E) $2 - \frac{\pi}{2}$

10. 3个3口之家一起观看演出,他们购买了同一排的9张连座票,则每一家的人都坐在一起的不同坐法有()。

- (A) $(3!)^2$ 种 (B) $(3!)^3$ 种 (C) $3(3!)^3$ 种 (D) $(3!)^4$ 种 (E) $9!$ 种

11. 设 p 是圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上的一点,该圆在点 p 的切线平行于直线 $x + y + 2 = 0$,则点 p 的坐标为()。

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(1, -1)$ (C) $(0, \sqrt{2})$ (D) $(\sqrt{2}, 0)$ (E) $(1, 1)$

12. 设 a, b, c 是小于12的三个不同的质数(素数),且 $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 8$,则 $a + b + c =$ ()。

- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 19

13. 在年底的献爱心活动中,某单位共有100人参加捐款,经统计,捐款总额是19000元,个人捐款数额有100元,500元和2000元三种.该单位捐款500元的人数为()。

- (A) 13 (B) 18 (C) 25 (D) 30 (E) 38

14. 某施工队承担了开凿一条长为2400m隧道的工程,在掘进了400m后,由于改进了施工工艺,每天比原计划多掘进2m,最后提前50天完成了施工任务,原计划施工工期是()。

- (A) 200 天 (B) 240 天 (C) 250 天 (D) 300 天 (E) 350 天

15. 已知 $x^2 + y^2 = 9$, $xy = 4$, 则 $\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y} =$ ()。

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

二、条件充分性判断(第16~25小题,每小题3分,共30分,要求判断每题给出的条件(1)和(2)能否充分支持题干所陈述的结论。A, B, C, D, E, 五个选项中,只有一项是符合试题要求的,请在答题卡上将所选项的字母涂黑)。

- (A) 条件(1)充分,但是(2)不充分;
(B) 条件(2)充分,但是(1)不充分;
(C) 条件(1)和(2)单独不充分,但条件(1)和(2)联合起来充分;
(D) 条件(1)充分,条件(2)也充分;
(E) 条件(1)和(2)单独不充分,但条件(1)和(2)联合起来也不充分。

16. 实数 a, b, c 成等差数列。

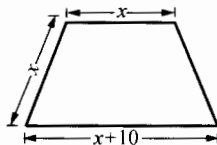
- (1) e^a, e^b, e^c 成等比数列. (2) $\ln a, \ln b, \ln c$ 成等差数列。

17. 在一次英语考试中,某班的及格率为80%。

- (1) 男生及格率为70%,女生及格率为90%。
(2) 男生的平均分与女生的平均分相等。

18. 如图,等腰梯形的上底与腰均为 x ,下底为 $x+10$,则 $x = 13$ 。

- (1) 该梯形的上底与下底之比为13:23。
(2) 该梯形的面积为216。



19. 现有3名男生和2名女生参加面试,则面试的排序法有24种。

- (1) 第一位面试的女生.
- (2) 第二位面试的是指定的某位男生.
20. 已知三角形 ABC 的三条边长分别为 a, b, c , 则三角形 ABC 是等腰直角三角形.
- (1) $(a-b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$. (2) $c = \sqrt{2}b$.
21. 直线 $ax + by + 3 = 0$ 被圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 截得的线段长短为 $2\sqrt{3}$.
- (1) $a=0, b=-1$. (2) $a=-1, b=0$.
22. 已知实数 a, b, c, d 满足 $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$, 则 $|ac + bd| < 1$.
- (1) 直线 $ax + by = 1$ 与 $cx + dy = 1$ 仅有一个交点. (2) $a \neq c, b \neq d$.
23. 某年级共有 8 个班, 在一次年级考试中, 共有 21 名学生不及格, 每班不及格的学生最多有 3 名, 则(一)班至少有 1 名学生不及格.
- (1) (二)班不及格人数多于(三班).
- (2) (四)班不及格的学生有 2 名.
24. 现有一批文字材料需要打印, 两台新打印机单独完成此任务分别需要 4 小时与 5 小时, 两台旧型打印机单独完成任务分别需要 9 小时与 11 小时, 则能在 2.5 小时内完成此任务.
- (1) 安排两台新型打印机同时打印.
- (2) 安排一台新型打印机一与两台旧型打印机同时打印.
25. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则该数列的公差为零.
- (1) 对任何正整数 n , 都有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n$.
- (2) $a_2 \geq a_1$.

参 考 答 案

- 1-5 BACBD 6-10 EBDDE 11-15 EDADC
16-20 AEDBC 21-25 BADDC

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

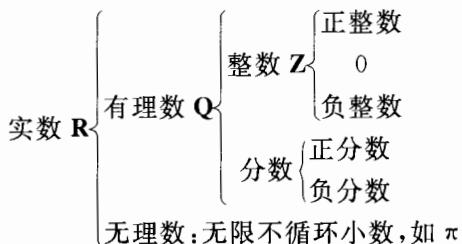
6大(太奇 华章 鼎学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航, 配套电子讲义, 好实惠客服: 737182994

附录二 数学核心考点公式

一、实数

1. 实数分类



(1) 最小的质数为 2，最小的合数为 4，1 既不是质数也不是合数。

(2) 常见质数 2、3、5、7、11、13、17、19 (2 为唯一的偶数)。

2. 奇数与偶数

偶数：能被 2 整除的整数叫做偶数(双数)。如 $-2, 0, 2, 4, 6, \dots$ 。

奇数：不能被 2 整除的整数叫做奇数(单数)。如 $-1, 1, 3, 5, \dots$ 。

如果 $n \in \mathbf{Z}$ (\mathbf{Z} 代表整数)，那么 $2n$ 是偶数， $2n-1$ 或 $2n+1$ 是奇数。

显然有：整数 $\begin{cases} \text{奇数} \\ \text{偶数} \end{cases}$

3. 奇数偶数的运算性质

奇数 \pm 奇数 = 偶数，奇数 \pm 偶数 = 奇数，偶数 \pm 偶数 = 偶数；

奇数 \times 奇数 = 奇数，奇数 \times 偶数 = 偶数，偶数 \times 偶数 = 偶数；

奇数的正整数次幂是奇数，偶数的正整数次幂是偶数。

4. 实数的运算

(1) $a \neq 0$ 时， $a^0 = 1$ 。

(2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

二、幂、指、对数的运算公式

1. $a \neq 0$ 时， $a^0 = 1$ ； $\log_a 1 = 0$ 。

2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ； $a^{\frac{a}{m}} = \sqrt[m]{a^a}$ 。

3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ； $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

4. $\log_a m + \log_a n = \log_a mn$ ； $\log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}$ 。

5. $\log_a^m b^n = \frac{n}{m} \log_a b$ ；当 $m=1$ 时， $\log_a b^n = n \log_a b$ ；当 $m=n$ 时， $\log_a^n b^n = \log_a b$ 。

$$6. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ (换底公式), 一般 } c \text{ 取 } 10 \text{ 或 } e.$$

三、绝对值

1. 非负性: 即 $|a| \geq 0$, 任何实数 a 的绝对值非负.

归纳: 所有非负性的变量.

(1) 正的偶数次方(根式): $a^2, a^4, \dots, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}} \geq 0$.

(2) 负的偶数次方(根式): $a^{-2}, a^{-4}, \dots, a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{1}{4}} > 0$.

2. 三角不等式, 即 $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

左边等号成立的条件: $ab \leq 0$ 且 $|a| \geq |b|$.

右边等号成立的条件: $ab \geq 0$.

四、比和比例

$$1. \text{ 合分比定理: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm mc}{b \pm md} \xrightarrow{m=1} \frac{a \pm c}{b \pm d}.$$

$$2. \text{ 等比定理: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} \quad (b+d+f \neq 0).$$

五、平均值

1. 当 x_1, x_2, \dots, x_n 为 n 个正数时, 它们的算术平均值不小于它们的几何平均值, 即

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \quad (x_i > 0, i = 1, \dots, n).$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时, 等号成立.

$$2. a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a, b > 0).$$

$$3. a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0).$$

六、整式和分式

1. 乘法公式

$$(1) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$(2) (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$(3) (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$(4) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$$(5) a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

2. 除法定理

设 $f(x)$ 除以 $p(x)$, 商为 $g(x)$, 余式为 $r(x)$, 则有 $f(x) = g(x)p(x) + r(x)$, 且 $r(x)$ 的次数小于 $p(x)$ 的次数. 当 $r(x) = 0$, 则 $f(x)$ 可以被 $p(x)$ 整除.

3. 余式定理

多项式 $f(x)$ 除以 $ax - b$ 的余式为 $f(\frac{b}{a})$.

4. 因式定理

多项式 $f(x)$ 含有因式 $ax - b \Leftrightarrow f(\frac{b}{a}) = 0$.

七、方程

1. 判别式($a, b, c \in \mathbf{R}$)

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} \Delta > 0, \text{两个不相等的实根;} \\ \Delta = 0, \text{两个相等的实根;} \\ \Delta < 0, \text{无实根.} \end{cases}$$

2. 根与系数的关系

x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ 和 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

3. 韦达定理的应用

$$(1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c}.$$

$$(2) |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

八、数列

1. a_n 与 S_n 的关系

(1) 已知 a_n , 求 S_n .

$$\text{公式: } S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

(2) 已知 S_n , 求 a_n .

$$a_n = \begin{cases} a_1 = S_1, n=1, \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$$

2. 等差数列等和等比数列对比

数列	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1} - a_n = d (n = 1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (q \neq 0)$
通项	$a_n = a_1 + (n-1)d = a_m + (n-m)d$	$a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m}$
前 n 项和	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$ $= \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$	当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$ 当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$
性质	(1) 若 $m+n = k+t$, 则 $a_m + a_n = a_k + a_t$ (2) a, b, c 成等差数列 $\Leftrightarrow 2b = a + c$ (称 b 为 a 和 c 的等差中项) (3) $\{a_n\}$ 中等距的三项也成等差数列 (4) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \cdots$, 仍为等差数列	(1) 若 $m+n = k+t$, 则 $a_m \cdot a_n = a_k \cdot a_t$ (2) a, b, c 成等比数列 $\Leftrightarrow b^2 = ac$ (称 b 为 a 和 c 的等比中项) (3) $\{a_n\}$ 中等距的三项也成等比数列 (4) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \cdots$, 仍为等比数列
特殊	非零的常数列既为等差数列($d = 0$), 也为等比数列($q = 1$)	

九、平面几何

1. 三角形

(1) 直角三角形

常用勾股数: (3, 4, 5); (6, 8, 10); (7, 24, 25); (8, 15, 17); (9, 12, 15); (9, 40, 41).

等腰直角三角形三边之比: $1:1:\sqrt{2}$.

内角为 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 的直角三角形三边比为: $1:\sqrt{3}:2$.

(2) 等边三角形(设边长为 a)

面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; 高 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; 外接圆半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$; 内切圆半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

2. 四边形(a, b 为边长, h 为高, 面积为 S)

(1) 矩形:

面积 $S = ab$, 周长 $L = 2(a + b)$, 对角线长 $= \sqrt{a^2 + b^2}$.

(2) 平行四边形:

面积 $S = bh$, 周长 $L = 2(a + b)$.

(3) 梯形: 面积 $S = \frac{1}{2}(a + b)h$.

3. 圆和扇形

(1) 圆形: 设半径为 r , 直径为 d ,

面积 $S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}d^2$, 周长 $l = 2\pi r = \pi d$.

(2) 扇形: 设圆心角为 α , 半径为 r (注意 α 用弧度制),

弧长 $l = r\alpha$,

面积 $S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}\alpha r^2$.

4. 几个特殊的倾斜角及斜率值

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$k = \tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

十、平面解析几何

1. 两点距离

两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 之间的距离:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2. 直线方程

一般式: $ax + by + c = 0$;

斜截式: $y = kx + b$;

点斜式: $y - y_0 = k(x - x_0)$;

截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a \neq 0$ 且 $b \neq 0$).

3. 两条直线的位置关系(设不重合的两条直线)

直线形式 位置关系	斜截式 $l_1: y = k_1x + b_1$ $l_2: y = k_2x + b_2$	一般式 $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$
平行 $l_1 // l_2$	$k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1 \neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
垂直 $l_1 \perp l_2$ (相交的特殊情况)	$k_1 k_2 = -1$	$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

4. 点 (x_0, y_0) 到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离:

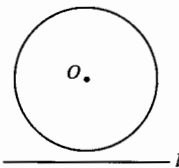
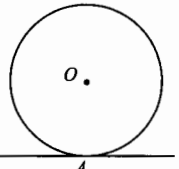
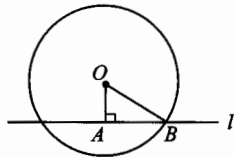
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

5. 两直线的夹角公式:

$$\tan \varphi = \left| \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$


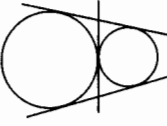
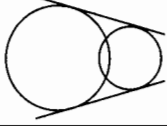
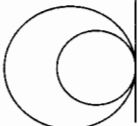
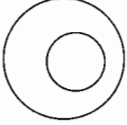
6. 直线与圆的位置关系

直线 $l, y = kx + b$; 圆 $O, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, d 为圆心 (x_0, y_0) 到直线 l 的距离.

直线与圆 位置关系	图形	成立条件 (几何表示)	成立条件 (代数式表示)
相离		$d > r$	方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$ 无实根, 即 $\Delta < 0$
相切		$d = r$	方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$ 有两个相等的实根, 即 $\Delta = 0$
相交		$d < r$	方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$ 有两个不等的实根, 即 $\Delta > 0$

7. 两圆的位置关系

圆 $O_1, (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$; 圆 $O_2, (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$ (不妨设 $r_1 > r_2$); d 为圆心 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的圆心距.

两圆 位置关系	图形	成立条件 (几何表示)	内公切线 条数	外公切线 条数
外离		$d > r_1 + r_2$	2	2
外切		$d = r_1 + r_2$	1	2
相交		$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	0	2
内切		$d = r_1 - r_2$	0	1
内含		$d < r_1 - r_2$	0	0

十一、立体几何

1. 长方体(设 3 条相邻的棱边长是 a, b, c)

(1) 体积: $V = abc$.

(2) 全面积: $F = 2(ab + bc + ac)$.

(3) 体对角线: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

(4) 所有棱长和: $l = 4(a + b + c)$.

注意: 当 $a = b = c$ 时, 为正方体.

2. 圆柱体(设高为 h , 底面半径为 r)

(1) 体积: $V = \pi r^2 h$.

(2) 侧面积: $S = 2\pi rh$ (其侧面展开图为一个长为 $2\pi r$, 宽为 h 的长方形).

(3) 全面积: $F = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

3. 球体

设球半径为 r ,

体积: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

面积: $S = 4\pi r^2$.

十二、数据分析

1. 排列组合

组合公式	排列公式
$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$	$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$
$C_n^0 = C_n^n = 1$	$P_n^0 = 1; P_n^n = n!$
$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$	$P_n^1 = n; P_n^{n-1} = P_n^n = n!$
$C_n^m = C_n^{n-m}$	一般 $P_n^m \neq P_n^{n-m}$
$C_4^2 = 6; C_5^2 = 10; C_6^2 = 15$	$P_4^2 = 12; P_5^2 = 20; P_6^2 = 30$

2. 概率初步

(1) $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (A, B 互斥).

(2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(3) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ (A, B 独立).

(4) 独立重复事件

伯努利: n 次试验中成功 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

直到第 k 次试验, A 才首次发生 $P_k = q^{k-1} \cdot p$.

做伯努利试验, 直到第 n 次, 才成功 k 次, $P = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}$.

3. 方差与标准差

(1) 方差

设一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n , 其平均数为 \bar{x} , 则称 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 为这个样本的方差.

(2) 标准差

将方差的算术平方根称为这组数据的标准差. $S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

标准差是方差的一个派生概念, 它的优点是单位和样本的数据单位保持一致, 给计算和研究带来方便.

(3) 方差和标准差的意义

方差的实质是各数据与平均数的差的平方的平均数. 方差越大, 说明数据的波动越大, 越不稳定. 方差描述了一组数据波动的大小, 方差越小, 数据波动越小、越整齐、越稳定. 方差用来比较平均数相同的两组数据波动的大小, 也用它描述数据的离散程度.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

购书请拨打读者服务部电话：(010) 58581115/58581116/58581117/
58581118

特别提醒：“中国教育考试在线”<http://www.eduexam.com.cn>是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供名师导航、下载中心、在线练习、在线考试、图书浏览等多项增值服务。高教版考试用书配有本网站的增值服务卡，该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息，并以此辨别图书真伪。

2017MBA/MPA/MPAcc网络初试辅导课程

6大(太奇 华章 霖学 社科 鑫全工作室 京虎)

名校护航，配套电子讲义，好实惠客服：737182994

高等教育出版社 2017版考研精品推荐

★ 2017 全国硕士研究生招生考试管理类专业学位联考
综合能力考试大纲

★ 2017 全国硕士研究生招生考试英语 (二) 考试大纲
(非英语专业)

★ 2017 全国硕士研究生招生考试英语 (二) 考试大纲解析
(非英语专业)

★ 2017 全国硕士研究生招生考试管理类专业学位联考
综合能力考试大纲解析

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学高分指南

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力逻辑高分指南

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力写作高分指南

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考英语二高分指南

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学历年真题名家详解

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力逻辑历年真题名家详解

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力写作历年真题名家详解

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考英语二历年真题名家详解

★ 2017MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力考前冲刺



陈 剑



微信公众号

清华大学博士，数学考试大纲解析人，标准化辅导体系首创人，曾到日本、澳洲、美国、加拿大等国家和地区进行国际交流学习。从事数学辅导十三载以来，面对数学纷乱无序的考法，对重点、难点、必考点的把握出神入化，令学员事半功倍；孜孜不倦、高度负责的态度以及对考题的精准预测，令考生受益无穷。浓缩应试技巧的《数学考前冲刺》、深度剖析数学考试的《历年真题名家详解》、引领数学复习方向的《数学高分指南》已成为考试大纲解析范本、业内传播的经典。多年来学员有“容易的通俗易懂，疑难的分析透彻；零基础的学有所获，数学高手另有启发”的评价，每年超高的命中率使无数零基础考生创造了轻取高分的奇迹，是业界王牌数学老师。

授课特点：理论功底深厚，实力与技巧双管齐下；讲解高屋建瓴，深入浅出与通俗易懂相互辉映；辅导脉络清晰，精辟透彻与重点突出齐头并行；知识点厚积薄发，对各层次的考生皆有照顾。

欢迎通过作者博客 (<http://www.chenjian.cc>)、微博 (<http://weibo.com/myofficer>)、备考万人YY群 (群号: 7201531) 在线交流。



ISBN 978-7-04-044655-5



9 787040 446555 >

定价 55.00 元

上架建议：考研管理类联考