

其实做数学题就像谈恋爱  
——越得不到越对她难以忘怀。  
一道写给爱情的数学公式，  
一封名叫数学公式的情书。



# 数学女孩

数学ガール

[日] 结城浩◎著  
朱一飞◎译

ARCTIME  
时代出版

时代出版传媒股份有限公司  
安徽教育出版社

---

提供各种书籍的pd电子版代找服务，如果你找不到自己想要的书的pdf电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系QQ1779903665.

PDF代找说明：

本人可以帮助你找到你要的PDF电子书，计算机类，文学，艺术，设计，医学，理学，经济，金融，等等。质量都很清晰，而且每本100%都带书签索引和目录，方便读者阅读观看，只要您提供给我书的相关信息，一般我都能找到，如果您有需求，请联系我QQ1779903665。

本人已经帮助了上万人找到了他们需要的PDF，其实网上有很多PDF,大家如果在网上不到的话，可以联系我QQ，大部分我都可以找到，而且每本100%带书签索引目录。因PDF电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

**声明：本人只提供代找服务，每本100%索引书签和目录，因寻找pdf电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因PDF产生的版权纠纷，与本人无关，我们仅仅只是帮助你寻找到你要的pdf而已。**



# 数学女孩

你说你懂得三元一次，我便做了这方程与你看；  
你说题目繁琐也终有答案，我便解了这公式与你看，  
你说暖暖旧日好时光，我便留下回忆与你看……

◎上架建议：青春文学

ISBN 978-7-5336-5357-6



9 787533 653576 >

定价：22.00元

# 数学女孩

[日] 结城浩◎著

朱一飞◎译

数学ガール



时代出版传媒股份有限公司  
安徽教育出版社

## 图书在版编目 (C I P) 数据

数学女孩/(日)结城浩著;朱一飞译.-合肥:安徽教育出版社.2009.9

ISBN 978-7-5336-5357-6

I.数… II.①结… ②朱… III.数学-青少年读物  
IV.01 49

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第158084号

责任编辑:王 骏

特约编辑:陈瑞侠 牛晓婧

封面设计:引文馆·李道娥

---

出版发行:安徽教育出版社

电 话:(0551)3683011

地 址:合肥市繁华大道西路398号

邮 编:230601

网 址:<http://www.ahep.com.cn>

经 销:新华书店

印 刷:北京兆成印刷有限责任公司

---

开 本:32

印 张:8.875

字 数:140千字

版 次:2009年9月第1版 2009年9月第1次印刷

定 价:22.00元

---

发现印装质量问题,影响阅读,请与印制单位联系调换

电话:(010) 82605959

SUGAKU GIRL © 2007 Hiroshi Yuki

Original Japanese edition published by SOFTBANK Creative Corp.

Simplified Chinese Character rights arranged with SOFTBANK Creative Corp.,  
through Owls Agency Inc. and Beijing SMSQ Culture Communications Co.,Ltd.

著作权合同登记号：皖图字1209711

---

## 序 言

---

光让事情留在记忆里总不行啊，  
需要回忆出来大家共享的。

——小林秀雄

我忘不了。

我怎么也忘不了高中时期因数学而结缘的她们。

她们是用一流的解法打动我的才女——美露嘉；认真向我发问的活力少女——铁户罗。

回想起那时的岁月，我脑海中顿时浮现出一个个计算公式，一个个新鲜的想法。这些数学公式不会随着时间的推移而显得落伍或陈旧，而是向我展现了欧几里德、高斯、欧拉等数学家们熠熠生辉的才思。

——数学穿越时空。

我一边想着那些计算公式，一边体会着古时候数学家们体验到的那份感动。即便是几百年前就已经被证明的也没关系，现在我一边追溯理论一边埋头苦思的东西一定是自己的东西。

——通过数学穿越时空。

拨开层层密林，找出藏宝。数学就是这样一种令人兴奋的寻宝游戏，比拼智力，寻找最牛的解法；数学就是这样一场激烈的战斗。

那时，我开始使用名叫数学的武器。但是，那种武器往往过于巨大，

很多时候不能灵活操控。这种感觉正如我很难操控自己年轻时的青涩、很难控制对她们的思念一样。

光让事情留在记忆里总不行啊，需要回忆出来大家共享的。

那我就从高一的春天开始讲起吧。



---

# 目 录

序 言 .....	001
-----------	-----

## 第1章 数列和数学模型

1.1 樱花树下 .....	001
1.2 自己家 .....	004
1.3 数列智力题没有正确答案 .....	006

## 第2章 一封名叫数学公式的情书

2.1 在校门口 .....	011
2.2 心算智力题 .....	012
2.3 信 .....	013
2.4 放学后 .....	014
2.5 阶梯教室 .....	014
2.5.1 质数的定义 .....	016
2.5.2 绝对值的定义 .....	019
2.6 回家路上 .....	021
2.7 自己家 .....	023
2.8 美露嘉的解答 .....	026
2.9 图书馆 .....	027
2.9.1 方程式和恒等式 .....	028
2.9.2 积的形式与和的形式 .....	031
2.10 在数学公式另一头的人到底是谁? .....	034

# 第3章 $\omega$ 的华尔兹

3.1 图书馆 .....	037
3.2 振动和旋转 .....	039
3.3 $\omega$ .....	045

# 第4章 斐波那契数列和母函数

4.1 图书馆 .....	051
4.1.1 找规律 .....	052
4.1.2 等比数列的和 .....	053
4.1.3 向无限级数进军 .....	054
4.1.4 向母函数进军 .....	054
4.2 抓住斐波那契数列的要害 .....	056
4.2.1 斐波那契数列 .....	056
4.2.2 斐波那契数列的母函数 .....	058
4.2.3 封闭表达式 .....	059
4.2.4 用无限级数来表示 .....	060
4.2.5 解决 .....	062
4.3 回顾 .....	065

# 第5章 相加相乘的平均关系

5.1 在“神乐” .....	067
5.2 满是疑问 .....	069
5.3 不等式 .....	071
5.4 再进一步看看 .....	078
5.5 关于学习 .....	081

## 第 6 章 在美露嘉身旁

6.1 微分 .....	087
6.2 差分 .....	091
6.3 微分和差分 .....	093
6.3.1 一次函数 $x$ .....	093
6.3.2 二次函数 $x^2$ .....	094
6.3.3 三次函数 $x^3$ .....	096
6.3.4 指数函数 $e^x$ .....	097
6.4 两个世界中的来回旅行 .....	099

## 第 7 章 卷积

7.1 图书馆 .....	101
7.1.1 美露嘉 .....	101
7.1.2 铁户罗 .....	104
7.1.3 推导公式 .....	105
7.2 在回家路上进行的一般化计算 .....	107
7.3 在名为“豆”的咖啡店谈二项式定理 .....	109
7.4 在自己家里解母函数 .....	116
7.5 图书馆 .....	121
7.5.1 美露嘉的解 .....	121
7.5.2 研究母函数 .....	126
7.5.3 围巾 .....	128
7.5.4 最后的要塞 .....	129
7.5.5 攻陷 .....	131
7.5.6 半径是 0 的圆 .....	134
我的笔记 .....	136

## 第8章 调和数

8.1 寻宝 .....	137
8.1.1 铁户罗 .....	137
8.1.2 美露嘉 .....	139
8.2 图书馆里的对话 .....	140
8.2.1 部分和与无限级数 .....	140
8.2.2 从理所当然的地方开始 .....	143
8.2.3 命题 .....	144
8.2.4 所有的 .....	147
8.2.5 存在 .....	149
8.3 螺旋式楼梯的音乐教室 .....	153
8.4 令人扫兴的 $\zeta$ 函数 .....	154
8.5 过高评价 .....	155
8.6 在教室中研究调和函数 .....	161
8.7 两个世界、四种演算 .....	164
8.8 已知的钥匙、未知的门 .....	169
8.9 如果世界上只有两个质数 .....	172
8.9.1 卷积 .....	172
8.9.2 收敛的等比数列 .....	173
8.9.3 质因数分解的唯一性 .....	174
8.9.4 质数无限性的证明 .....	175
8.10 天象仪 .....	179
我的笔记 .....	182

## 第9章 泰勒展开和巴塞尔问题

9.1 图书馆 .....	183
9.1.1 两张卡片 .....	183

9.1.2 无限次的多项式 .....	185
9.2 自学 .....	188
9.3 宾斯 .....	189
9.3.1 微分的规则 .....	189
9.3.2 更进一步微分 .....	192
9.3.3 $\sin x$ 的泰勒展开 .....	194
9.3.4 极限函数的图像 .....	197
9.4 自己家 .....	200
9.5 代数学的基本定理 .....	202
9.6 图书馆 .....	207
9.6.1 铁户罗的尝试 .....	207
9.6.2 要到达哪里? .....	209
9.6.3 向无限挑战 .....	216

## 第 10 章 分割数

10.1 图书馆 .....	221
10.1.1 分割数 .....	221
10.1.2 举例 .....	223
10.2 回家路上 .....	228
10.2.1 斐波那契签名 .....	228
10.2.2 分组 .....	230
10.3 “豆”咖啡店 .....	231
10.4 自己家 .....	233
10.5 音乐教室 .....	237
10.5.1 我的发言 (分割数的母函数) .....	238
10.5.2 美露嘉提出的数列的上限 .....	243
10.5.3 铁户罗的发言 .....	248
10.6 教室 .....	252

10.7 寻找更好的上限之旅 .....	254
10.7.1 以分析母函数为出发点 .....	254
10.7.2 “开始的转角”积变形为和 .....	255
10.7.3 “东之森林”泰勒展开 .....	256
10.7.4 “西之丘陵”调和数 .....	260
10.7.5 旅行结束 .....	261
10.7.6 铁户罗的回顾 .....	264
10.8 明天见 .....	265
 尾 声 .....	 267
后 记 .....	271

---

## 第1章 数列和数学模型

---

1, 2, 3。3是1。

1, 2, 3。3是2。

——大岛弓子《棉之国星》

---

### 1.1 樱花树下

那是高一的春天。

开学典礼那天春光明媚。

“美丽的樱花开了……大家在新学期新起点之际……在这有着传统的校舍里……努力学习、努力锻炼……少年易老学难成……”

校长那冗长的致谢词简直引人入睡，我借着扶正眼镜的机会强忍住了呵欠。

开学典礼结束后，我在回教室的途中悄悄地溜出了校舍，独自一人漫步在校内的樱树林间。周围连个人影都没有。

我现在15岁。15岁、16岁、17岁……毕业的时候我将18岁了。有一个4次方的数字和一个质数。

$$15=3\times 5$$

$$16=2\times 2\times 2\times 2=2^4$$

17 是一个质数

$$18=2\times 3\times 3=2\times 3^2$$

现在教室里同学们一定正进行着自我介绍。我不擅长自我介绍，究竟该说说自己的什么呢？

“我喜欢数学，兴趣是讨论计算公式。请多多关照。”

我想象了下又停住了。

算了，管他呢。静静地上课，在谁都不会去的图书室学习展开数学公式，就这样就像中学时一样度过高中 3 年的时光吧。

映入眼帘的是一棵硕大的樱花树。

那里站着的一个少女，她抬头仰望着那棵樱花树。

我想：她是位新生吧，大概和我一样也是溜出来的。

我也抬起头望着那棵樱花树。模模糊糊的花色覆盖了天空。

刮起一阵风，飘舞着的樱花花瓣将少女裹住。

少女也看到了我。

她身材高挑，长发乌黑亮丽，嘴巴紧闭着，一副认真的表情。脸上架着副金丝眼镜。

她清楚地念着：“1，1，2，3。”

念完这 4 个数字之后，少女便不出声了，用手指着我，好像在说：“喂，你，请回答接下去的数字。”

我指着自已：“要我回答？”

她没有说话，而是点了点头。食指仍然指向我。

到底是什么呢？在樱花树丛中好好地散着步，为什么非要做什么猜数字的游戏呢？对了，刚才她说的是什么呢？

我回想她刚才的题目：“1，1，2，3。”

啊，原来如此。我知道了。

“1，1，2，3 的后面接着的数字是 5，接下来是 8，再接下来是 13，然后是 21，然后再是……”我开始滔滔不绝地回答。

她向我伸出手掌，示意我不要说了。



接着，她给我出了另外一道题，又是4个数字。

**1 4 27 256**

她又指向我。

这是在考我吗？

“1, 4, 27, 256。”

我突然一下子找到了规律。

我回答说：“1, 4, 27, 256, 接下来是3125吧，再接下来是……心算是不行了。”

她听到我说“心算是不行了”之后神色显得有些不满，她摇了摇头，便告诉了我答案。

“1, 4, 27, 256, 3125, 46656, …”她的声音很响亮。

接着，她闭上眼，头微微朝上抬起，好似正在仰望樱花树。食指朝着天空飞快地写着些什么。

唯一从这个女孩口中说出的只是些数字，她漫不经心地将那些数字排列起来，略做些手势。但是我的目光却一直盯着这个与众不同的女孩。她到底想干什么？

她朝我这里看了看。

**6 15 35 77**

又是4个数字。

“6, 15, 35, 77。”

我心想，这题好难啊。我开动脑筋拼命想，6和15是3的倍数，但是35却不同了，35和77是7的倍数。如果可以在纸上写的话应该马上能解出来。

我瞟了她一眼，樱花树下的女孩还笔挺地站在那里，很认真地看着我，甚至都不掉一下飘落到头发上的樱花花瓣。那副认真的模样仿佛是在考试一样。

“啊，我知道了。”

我刚一说，她顿时变得神采奕奕，微微一笑。我第一次看到她笑，便情不自禁地大声回答：

“6, 15, 35, 77 的后面是 133。”

她摇了摇头，长发飘动，花瓣也随之飘落。她的表情仿佛在说：“哎呀呀，真可惜。”

“计算错误！”她的手指碰了下眼镜。

计算错误？啊，真的算错了。11 乘以 13 应该是 143，而不是 133。

她又继续出了下一题。

6 2 8 2 10 18

这次是 6 个数字。我考虑了一下，最后一个 18 最令人头疼，如果是 2 就好了，现在的数字看上去乱七八糟，没有规则。啊，不对，这些都是偶数。……我知道了！

“接下来是 4, 12, 10, 6, …这道题真伤脑子。”我说道。

“是吗？但你不是解出来了嘛。”

她装模作样地说着，走向我伸出手。她的手指又细又长。

我心想：难道她要和我握手吗？

于是，我莫名其妙地握住了她的手。她的手又柔软又温暖。

“我叫美露嘉，请多多关照。”

这就是我和美露嘉的邂逅。

---

## 1.2 自己家

夜晚啊。

我喜欢夜晚。家人平静地睡着后，我就可以有大量自由的时间，拥有一个谁都无法进入的世界。于是，我便自己一个人过那段时间，打开书，探索世界。我思考数学问题，闯入那深邃的密密层林。在那里，我发现了

珍稀动物、清澈得令人吃惊的湖，还有需要抬头仰望的大树。令我意想不到的是，还遇到了美丽的花朵。

她就是美露嘉小姐。

第一次见面就和我进行那样的对话，她真是奇怪的女孩。她一定非常喜欢数学吧。她连开场白都没说，竟然就直接给我出数列的脑筋急转弯题，简直像考试一样。我是不是合格了呢？我握了她的手，那柔软的手，飘着淡淡的清香，真的是很淡的清香——女孩独特的香味。

女孩啊。

我摘下眼镜，把它搁到书桌上，闭上眼睛，开始回想我和美露嘉之间的对话。

一开始的题目：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …是斐波那契数列。1, 1后面的数字是将前两个数字相加，所得的和成为接下来的数字。

1, 1,  $1+1=2$ ,  $1+2=3$ ,  $2+3=5$ ,  $3+5=8$ ,  $5+8=13$

第二道题：1, 4, 27, 256, 3125, 46656, …规律是这样的：

1的1次方，2的2次方，3的3次方，4的4次方，5的5次方，6的6次方，以此类推。

也就是说，这个数列中的各项是 $n$ 的 $n$ 次方，4的4次方、5的5次方之类心算还没问题，6的6次方的话，心算就不太可能了。

第三道题：6, 15, 35, 77, 143, …规律是这样的：

$2 \times 3$ ,  $3 \times 5$ ,  $5 \times 7$ ,  $7 \times 11$ ,  $11 \times 13$ , …

也就是说，“质数 $\times$ 后一个质数”的形式。可是我把 $11 \times 13$ 算错了，真是丢脸啊。美露嘉一针见血地指出了我的“计算错误”。

最后一道题是6, 2, 8, 2, 10, 18, 4, 12, 10, 6, …。这道题很难。因为这个数列其实是圆周率 $\pi$ 中每位数的数字乘以2而成的。

圆周率  $\pi=3.141592653\cdots$

每位数的数字：3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, …

每位数乘以2后：6, 2, 8, 2, 10, 18, 4, 12, 10, 6, …

解这道题必须要背出圆周率 $\pi$ 的各个位数的数字。如果脑海里没有这样一个数列模式，就无法解出这道题。

记忆啊。

我喜欢数学。比起记忆背诵，我更喜欢思考。追溯过去不是数学，发掘新东西才是数学。如果是要背诵的话，只要靠脑子强记就可以了。记人名、记地名、背单词、背元素符号等，无法靠推理计算解答。但是，数学却不同。一旦告诉我题目的条件后，我就会把材料和道具（笔和纸等）都排列到桌上。我一直认为数学不是靠记忆的比拼，而是靠思考。

但是，我又突然觉察到数学也许不是那么简单的东西。

美露嘉在出“6, 2, 8, 2”这道题时，为什么不单说“6, 2, 8, 2”，还一直说到“6, 2, 8, 2, 10, 18”呢？那是因为如果她只是说“6, 2, 8, 2”的话，我们无法发现那规律其实是圆周率 $\pi$ 的各个位数的数字2倍。我们还可能得出其他简单的答案。假设题目只是“6, 2, 8, 2, 10, …”的话，我们还可能联想到以下的数列：

$$6, \underline{2}, 8, \underline{2}, 10, \underline{2}, 12, \underline{2}, \dots$$

有这样的联想也是非常自然的吧。也就是说，在连续的偶数之间放入一个2作为间隔。

原来，美露嘉在出这道题时是想得如此周密啊。

“但你不也是解出来了吗。”

她似乎预料到我能够解出这道题。我突然想到她那装模作样的表情。

美露嘉啊。

站在这样一个春色满园，樱花飘落的地方，她却与此环境格格不入。她有着一头乌黑亮丽的秀发，宛若指挥家般修长的手指，温暖的小手，淡淡的清香。

不知怎么的，我一直想着与美露嘉有关的事情。

---

## 1.3 数列智力题没有正确答案

“喂，美露嘉，那时为什么考我数列智力题呀？”我问美露嘉。

“什么那时呀？”美露嘉抬起头，停止了计算。

这里是图书馆。令人惬意的春风透过打开的窗子徐徐吹来，已经可以依稀看到法国梧桐冒出一片片嫩叶。远处的操场上还隐约传来棒球队的练习声。

已经五月了。

新学校，新教室，新同学，随着时间的流逝，新鲜感也在逐渐减少，我开始过起普普通通的每一天。

我没有参加任何课外社团，也就是说我参加了“回家族社团”。虽说如此，但我也不是放学后就立即回家。参加完师生座谈生活会后，我一般都去图书馆，因为那里便于我推导数学公式。

我初中时也是这样，不参加社团活动，放学后去图书馆（初中时叫图书室）。我经常在那里读读书，看看窗外的绿色，复习预习上课的内容。

我最喜欢的就是展开数学公式。我经常将课堂上学过的公式写在笔记本上，然后自己再进行公式变形，以学到的定义为基础进行公式推导，根据定义进行变形，再思考是否能举出具体例子，思考如何证明。在定理的变化过程中我感到很快乐。我喜欢把这些过程都写在笔记本上。

我不喜欢运动，也没有什么朋友和我一起玩，我唯一的乐趣就是一个面朝笔记本。虽然是自己写这些数学公式，但并不是说一定能按照自己所想的把公式写出来。因为公式是有规律的，而有规律的地方就存在着游戏。这是最最严密，最最自由的一种游戏。历史上的数学家们也都是挑战着这种游戏过来的。这个游戏只需要活动铅笔、笔记本和自己的脑子就行了。我对数学的迷恋简直达到了狂热的程度。

所以，我成为一个高中生后仍然享受着一个人往返于图书馆的日子。

但是这个计划却落空了。

这是因为来图书馆的不止我一个人。

另一个人就是美露嘉。

她和我同班同学。她每三天来一次图书馆。

我在计算的时候，手中的活动铅笔突然被她拿起，接着她就自说自话地在笔记本上开始写起来。“我先声明一下，这可是我的笔记本。”她就这样旁若无人、自说自话地开始写起来了。

但是，我并不讨厌她那样。她所说的数学题虽然比较难，但是也很有趣，非常刺激。

美露嘉拿着我的活动铅笔轻轻敲敲我的太阳穴，问我：“那时是指什么时候的事情呀？”

“就是我们初次见面的时候，在那樱花树下。”我回答道。

“啊，是吗？我没有理由出数学题考你呀。我只是临时想到。为什么突然又提起这件事情问我呀？”她问。

“我也正好是突然想到。”我说。

她又问我：“你喜欢那种智力题吗？”

“一般吧，我并不讨厌。”我答道。

“是嘛。‘数列智力题没有正确答案’这个说法你知道吗？”她问我。

“什么意思呀？”弄得我丈二和尚摸不着头。

美露嘉举了个例子问我：“比如说，你认为 1, 2, 3, 4 接下来的数字是什么？”

我不假思索地说：“那自然是 5 喽。1, 2, 3, 4, 5, …这样一直继续下去喽。”

“但是那可不一定哦。比如 1, 2, 3, 4 后面突然变成 10, 20, 30, 40, 然后突然又增加到 100, 200, 300, 400, …这样的数列也是有可能的。”她举出反例。

我说：“这样的题目太狡猾了。一开始只告诉我 4 个数字，后面的数字却突然增大，这太过分了。1, 2, 3, 4 的后面突然接个 10，这种情况不可能想到啊！”

“是吗？如果照你这么说的话，那要看到第几个数字才算数呢？数列是无限继续的，到底要看到第几个数字才能知道剩下的数字是什么呢？”她反问道。

我恍然大悟：“原来你所说的‘数列智力题没有正确答案’就是这个意思啊。题目中提供的数字，其后面的变化可能很大，但是，1, 2, 3, 4 后面如果接一个数字 10 的话，作为题目而言太无聊了。”

“可是世上的事情不就是那样吗？谁都不知道接下来会发生什么。事情

往往偏离自己所预想的。对了，你知道数列的各项吗？”美露嘉说着，在笔记本上写下了以下数列：

**1, 2, 3, 4, 6, 9, 8, 12, 18, 27, ...**

“嗯，我也吃不准，似懂非懂的感觉。”我说。

美露嘉说：“看到 1, 2, 3, 4 这样排列的话，一般会认为接下来的数字是 5，对吧？但是不对，不是 5 而是 6。这说明，如果只告诉我们一点点条件的话，我们无法发现数列规律，真正的数列模型是一眼看不出来的。”

我“嗯”了一声表示赞同。

她又接着说：“如果看到 1, 2, 3, 4, 6, 9 这个顺序，你一定会认为接下来的数字会变大，对吧？但是不对，9 后面的数字却变小了，是 8。我们原本认为接下来的数字是逐渐变大的，但突然又峰回路转变小了。你能看出这个数列模型的规律吗？”

“嗯，让我想想。如果去掉第一个数字 1 的话，接下来的数字都是 2 和 3 的倍数。可接下来的数字变小我却想不通了。”我说。

“比如说，这样的答案是可能存在的：

$2^03^0, 2^13^0, 2^03^1, 2^23^0, 2^13^1, 2^03^2, 2^23^0, 2^23^1, 2^13^2, 2^03^3, \dots$

如果考虑 2 和 3 的指数的话，这个数列模型就逐渐浮出水面了。”她说。

“嗯？是吗？我不太明白呢。某数的 0 次方就是 1。但仔细一看， $2^03^0$  是 1， $2^13^0$  是 2， $2^03^1$  是 3，……题目中的数列确实也是这样的。”我百思不得其解。

“嗯，把这些指数写下来你也不理解吗？那么，我们这样来总结一下。

$2^03^0$  (这组数字中指数最大的是 0)， $2^13^0, 2^03^1$  (这组数字中指数最大的是 1)， $2^23^0, 2^13^1, 2^03^2$  (这组数字中指数最大的是 2)， $2^23^0, 2^23^1, 2^13^2, 2^03^3$  (这组数字中指数最大的是 3) ……”她这样解释。

“……原来如此。”我豁然开朗。

“但是说起 2 和 3 的倍数呢……”美露嘉刚开口，图书馆的入口处便传来了大吵大嚷的声音：“练琴的时间快到了，你怎么还不出去放松一下呀？”

“啊，我想起来了，今天是训练的日子。”美露嘉把活动铅笔还给我，朝站在入口处的女孩子说道。

当美露嘉要离开图书馆时，她又回头对我说：“什么时候有空的话，我跟你说关于‘世界上只有两个质数’的话题。”

于是，她走出了图书馆。图书馆里只剩下我一个人。

为什么世界上只有两个质数呢？

这到底是怎么回事？



---

## 第2章 一封名叫数学公式的情书

---

我的心就是你要说的话。

——萩尾望都《半神》

---

### 2.1 在校门口

我已经读高二了。但对我来说唯一的变化就是身上别着的年级牌子。和昨天一样的生活今天仍然在继续，直到今天早晨我还这么认为。

“这，这个，请你读读看！”

四月底的日子大多为多云。某天的一个早晨，我在校门口被一个女孩叫住了。

她两手捧着个白色的信封，将它送到我面前。就这样，我莫名其妙地收下了这封信。那个女孩子向我行了个礼，就飞奔着进了校园。

她比我矮很多。我从来都没有见过这个女孩子，我想她可能是前阵子刚入学的新生吧。我迅速将信塞入衣服口袋，便朝教室走去。

这之前还是我在上小学的时候收到过信。那次是因为我感冒休假，一个女班干部将她的作业题和一封信一起交给了我。信上写着：“大家都等

着你哦。愿你身体快点好起来，快点回到学校来噢。”这只是一张单纯的联系便条。

正如过去美露嘉对我所说的：“谁都不知道接下来会发生什么。”和昨天一样的生活今天不一定会继续。

上课时，衣服口袋里的那个信封一直挠得我心里发痒。

## 2.2 心算智力题

“这是心算小测验哦。1024 的约数有几个呀？”

在午休的时候，我正准备拿出从女孩那里收到的信，美露嘉一边啃着 Kitkat（奇巧膨化巧克力），一边到我的座位边提问我。由于中途不能换班级，所以到了高二，我和美露嘉仍旧是同班同学。

“心算吗？”我问，边把信重新放回衣服口袋。

“在我数到 10 之前回答我。0, 1, 2, 3, …”

等等。1024 的约数……1024 是能被除尽的数吗？可以被 1 除吧，被 2 除也可以，但不能被 3 除。1024 不能被 3 除尽，但是可以被 4 除尽。啊，对了，1024 是 2 的 10 次方……我开始进行紧张的计算。

“1, 2, …, 9, 10。时间到了，算好了吗？几个呀？”美露嘉问。

“11 个。1024 的约数有 11 个。”我赶忙答道。

“完全正确。你是怎么计算的？”美露嘉伸出舌头边舔舔沾有巧克力的手指，边等着我的回答。

“将 1024 进行因数分解得到的是 2 的 10 次方。也就是说，将 1024 变成  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ （10 个 2 相乘）的形式。”我回答道。

$1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ （10 个 2 相乘）

我接着说：“1024 的约数能够被 1024 整除。也就是说所有的约数必定是 2 的  $n$  次方。 $n$  在 0 到 10 之间取。所以，1024 的约束就是以下这 11 个：

2 的 0 次方，2 的 1 次方，2 的 2 次方，2 的 3 次方，2 的 4 次方，2 的 5 次方，2 的 6 次方，2 的 7 次方，2 的 8 次方，2 的 9 次方，2 的 10 次方。”

听了我的回答后，美露嘉频频点头表示赞同：“对啊。那我就接着出下一题喽。如果我让你把1024的所有约数相加，最后所得的和为多少呀？”

“美露嘉，不好意思，我中午还有其他事情，我过会儿再回答你……”我边说边站起身。

美露嘉突然被我打断了问话，顿时露出了不高兴的神色。我也顾不上这些了，匆匆离开了教室。

打断别人问话很没礼貌吧，是求1024的所有约数和吧？我一边想着一边朝楼上爬。

---

## 2.3 信

虽说是午休时间，但去外面的人还是很少。我猜想大概是因为天气不好的关系吧。

在信封里有一张白色的信纸，信是用钢笔写的，字迹清秀。

信的内容是：

“我是今年春天刚入学的铁户罗。我和学长您是同一所初中毕业的，比您小一届。我想和学长您探讨关于如何才能学好数学的问题，所以写了这封信。

虽然我对数学十分感兴趣，但是从初中开始我的数学成绩就不好。进入高中后，我听说高中数学是非常难学的，所以想向学长讨教一下该怎么克服这个薄弱科目。

在百忙之中打扰您，真是不好意思，不知道您是否愿意与我探讨一下这个问题呢？如果可以的话，今天放学后，我在阶梯教室等您。

铁户罗”

我将这封信读了4遍。

原来是这样，这个女孩子名叫铁户罗呀。她和我在同一个初中，而且是我小一届的学妹，我真的一点都不记得了。但是数学不好的同学确实很多，更不用说是刚入校的新生。

……先暂且不说这些，这封信也和小学那张联系便条差不了多少。我

完全会错意了。唉！算了，就这样吧。

放学后，只好去阶梯教室喽。

---

## 2.4 放学后

“1024 的所有约数和算出来没有啊？”

一天的课结束后，我正准备去阶梯教室，美露嘉突然又开始对我发问了。

“是 2047。”我立刻回答。1024 的所有约数和是 2047。

“对了，但那是因为你考虑的时间非常充分哦。”美露嘉说。

“算是吧……再见。”我向她道别。

“你是去图书馆吗？”顿时，她的眼神中掠过一丝神采。

“不是，今天可能不去图书馆了，有点急事。”我说。

“嗯，这样啊，那我给你布置数学作业。”她说。

### 美露嘉给我布置的作业

有一个正整数  $n$ ，如何求出  $n$  的所有约数的和？

我听后问道：“这道题的意思是不是要用  $n$  来表示其所有约数的和？”

“不是，只要告诉我求解的步骤就可以了。”她说。

---

## 2.5 阶梯教室

“啊，真对……对不起。特地叫您来一次……”

我一踏入阶梯教室，就看见一个紧张地等待着我的出现的女孩子。她就是铁户罗，怀里抱着笔记本和铅笔盒。

“学……学长，我非常想和您交流，可是我却不知道该怎么跟您说。听朋友说，在阶梯教室说话会比较方便，所以就……”

阶梯教室是从主要校舍区开始，环绕中心花园而建成的教室，物理课和化学课一般都在阶梯教室进行。教室内每排椅子的摆放呈阶梯状，最低处是讲台。这样做是为了让教室里坐着的所有学生都能看清讲台上老师所做的实验。

我和铁户罗坐在教室最后一排的长椅上。我从衣服口袋里掏出今天早晨收到的信。

“我读了信哦。但不好意思的是，我不太记得你了。”我说。

她拼命在我面前摆摆右手说：“那当然，我也认为您不会记得我。”

我接着问道：“对了，你是怎么知道我的呀？我想我中学时应该没那么受人瞩目吧。”我是一个不参加任何课外活动的男孩子，一放学就往图书室跑，不会引起别人注意吧。

“嗯，这是因为……不是啦，学长可是很有名的哦。我……我……”她一个劲地解释。

“算了，没关系。对了，你不是因为自己数学不好，想要和我讨论讨论吗？我可以问问你的详细情况吗？”我言归正传。

“好的。谢谢您。我上小学时，觉得数学问题啦，计算啦，都非常有意思，可是进了中学以后，无论是听老师讲课还是自己看书，都觉得自己越来越不能理解了。到了高中，老师说数学很重要，叮嘱我们一定要认真学习。我也很努力地在学，但是总不能完全理解，不知道学长是不是有办法帮帮我？”她说明了自己的学习情况。

“原来如此。”我又问，“顺便问一下，你有没有因为你所说的‘感觉自己没有懂’而导致考试成绩不太好呢？”

“这个倒还不至于。”她答。

铁户罗用大拇指按着嘴唇，思考着。她留着一头短发，一双机灵的大眼睛，眼珠滴溜溜地转动着。这让我想到她很像有活力的小动物，比如说小松鼠，或者说像小猫咪，她给我的感觉大概是这样。

“……像单元测验之类的考试，如果事先告诉我们考试范围的话，我还能凑合着考考，但如果像水平测验之类不知道范围的考试，我曾得过很惨的分数。成绩的落差非常大。”她补充道。

我接着问：“那上课怎么样呢？都听得懂吗？”

她说：“说到上课嘛，我很想能够全部理解……”

“但感到听不懂，对吗？”我问。

“是啊。我觉得不是很懂。我能解题，但也只能解个大概。我上课能听懂，但也只是懂个大概。但是，事实上是没有真懂。”她说。

### 2.5.1 质数的定义

“我可以再问得具体点吗？你知道质数吗？”我问铁户罗。

“嗯——我想我知道吧。”她说。

“你想你知道？那我问问你，你能说说质数的定义吗？请你回答‘质数是什么’这个问题。不要用计算公式来表示，用语言表达就可以了。”我紧追不放。

“问我质数是什么啊。嗯，就是类似5啦7啦之类的数字吧。”她回答道。

“嗯，5和7都是质数。这是对的，但是5和7只能说是可以被称为质数的两个数例。‘举例说明’和‘下定义’是不同的。我纠正了她的说法，之后再一次问道：质数是什么呢？”

铁户罗点点头说：“好吧。质数是……‘只能被1和其本身所整除的数字’吧？数学老师说过必须要背出质数的定义，所以我还记得。”

我接着她的话说：“如果是这样的话，你一定也认为下面所写的定义是正确的吧。

“正整数 $p$ 只能被1和 $p$ 整除时，我们把 $p$ 叫做质数。”

“是啊，我认为是对的。”她说。

“不对，这个定义是错误的。”我说道。

“啊？但是比如说5是质数，它不就只能被1和5整除嘛。”她不明白。

我解释道：“嗯，5确实是质数。但是如果照这个定义来说的话，1也变成质数了。为什么这么说呢，因为如果 $p$ 是1的时候， $p$ 也是只能被1和 $p$ 整除啊；但是，1不算在质数里。最小的质数应该是2。把质数以从小到大的顺序排列的话，是从2开始的：

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

我继续说道：“所以上面说的定义是不对的。关于质数，正确的定义应该是下面所写的定义，要加上排除的情况。”

“正整数 $p$ 只能被1和 $p$ 整除时，我们把 $p$ 叫做质数。但是质数不包括1。”

“或者说，在句首就加上条件进行定义。”我补充道。

“比1大的整数 $p$ 只能被1和 $p$ 整除时，我们把 $p$ 叫做质数。”

“或者将这个加上的条件写成算式也可以。”我又补充说。

“整数 $p>1$ ，并且只能被1和 $p$ 整除时，我们把 $p$ 叫做质数。”

“哦，对哦，1不是质数……我想起来了，我确实学过。学长所写的定义我也完全理解了。但是……”这时，铁户罗猛地抬起头说，“质数不包括1这一点我是明白了。但是，还是不能完全接受。为什么质数不包括1呢？为什么包括了1就不对了呢？我不是很明白这所谓质数不包含1的rationale。”

“rationale是什么意思啊？”我不解。

“rationale就是正当的理由，可以用原来说明的理论根据。”她答道。

啊，这孩子，这个女孩原来知道彻彻底底理解的重要性啊。

她看我走神了：“……学长？”

“啊，对不起，你问我质数为什么不能包含1吧，很简单哦。那是因为质因数分解有其唯一分解定理。”我回过神来。

“分解质因数的唯一分解定理是什么呀？”她问道。

“分解质因数的唯一分解定理就是将某个正整数 $n$ 分解质因数，其形式是唯一的。比如说，将24进行质因数分解，其唯一形式是 $2 \times 2 \times 2 \times 3$ 。另外，不用考虑这些质因数的顺序，不论是 $2 \times 2 \times 3 \times 2$ 还是 $3 \times 2 \times 2 \times 2$ ，这些形式只是质因数的顺序不同而已，我们仍把它们看做是同一种质因数分解的形式。分解质因数的唯一分解定理对于数学而言是非常重要的，为了遵循这个定理，规定1不包含在质数范围内。”我向她解释。

“就为了遵循分解质因数的唯一分解定理，然后就随随便便地这么规定吗？”她不能理解。

“是啊。不过你说随随便便规定这话有点言过其实了。数学家们是为了建立一个数学的世界而规定一些有用的数学概念，然后再给这些概念取名，

也就是对其进行定义。如果能清晰地给这些概念做出规定的話，至少作为定义是合格的。所以，正如你所说的，质数包含1的定义也是有可能的。但是，定义是否可能与这个定理是否有用是有区别的。如果照你所说的，将1放到质数里，这样就不能运用分解质因数的唯一分解定理了。顺便问一下，你现在理解分解质因数的唯一分解定理了吗？”我说。

“嗯，我觉得我是理解了。”她回答。

“嗯，为什么你只是觉得自己理解呢？自己是否已经真正理解必须靠自己来确定。”我特别强调了“自己”两个字。

“是否真正理解要靠自己来确定，此话怎讲？”她问道。

“比如说，可以举个恰当的例子来考查自己是不是真正理解了。‘举例是检查是否真正理解的试金石。’虽然举例并不是定义，但是举一个确切的例子是很好的练习。”我答道。

“如果1包含在质数里的话，分解质因数的唯一分解定理就不成立了。请举例说明。”

“这样啊。如果1包含在质数里的话，24的分解质因数就变为这样了，会出现很多种形式……”她说。

$$2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

⋮

“嗯，是啊。这就是分解质因数的唯一分解定理不成立的例子。”

铁户罗听了我的话后顿时放心了。

“只是，比起可以举出‘很多’例子的说法，可以举出‘几个’或者‘两个以上’例子的说法更好些。为什么这么说呢，那是因为……”我的话还没说完，就听铁户罗紧跟着说：“那是因为后者表达更严谨吧？”

“正是如此。‘很多’，这个表达方式不够严谨。如果不止几个，到底是不是很多呢？这种表达有歧义。”我说。

铁户罗说：“学长，不知怎么的，我感觉我的脑子像被彻底打扫了一遍，重新装进了定义、举例、质数、分解质因数、唯一分解定理，等等，



另外，还要注意语言表达的严谨性。对数学而言，如何应用语言来表达是非常重要的吧？”

“对，你真聪明。在对数学概念的表达上可要谨慎地使用语言。为了尽量不让人产生误解，就要使用严密的语言。对数学表达而言，最最严密的语言就是数学公式了。”我说。

“数学公式……”她不明白。

“说到数学语言，就要深入数学公式。我想使用黑板，往下走吧。”于是，我就顺着楼梯往下走，铁户罗跟在我后面。才走了两三步，只听“咔”的一声，我顿时感到背部剧烈疼痛。

“啊！”我大叫。

“不，不好意思！”铁户罗连忙道歉。

她不小心在阶梯处绊了一跤，正好撞在我身上。我们两个人差点一起滚下去，幸好我拼命地站稳。真是太危险了！

### 2.5.2 绝对值的定义

“……那么你知道绝对值吗？”我们面朝这讲台前的黑板，并排站着时我问。

“嗯，我想我知道吧。5的绝对值就是5，-5的绝对值也是5，就是只要把负数的负号去掉就可以了吧？”铁户罗回答道。

“嗯……那么，用数学式子来表示 $x$ 的绝对值的定义的话，这样写你是不是能接受呢？”我在黑板上写下数学式子。

$x$  的绝对值  $|x|$  的定义

$$|x| = \begin{cases} x & (\text{当 } x \geq 0 \text{ 时}) \\ -x & (\text{当 } x < 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

“啊，这样说来，我对此还真有点疑问呢。 $x$ 的绝对值不是去掉负号就可以了吗？为什么会出现 $-x$ 的情况呢？”她疑惑不解。

“‘去掉负号’这一说法就数学语言而言是比较暧昧不清的。虽然这种说法能够让人理解其意思，能够大致明白说的是什么意思。”我说。

“那么，把这个说法改成‘把负号变成正号’呢？”她紧追不舍。

“这样说也很暧昧不清啊。比如说， $-x$ 的绝对值是什么？”我在黑板上写道。

$$|-x|$$

“去掉负号，答案是 $x$ 吧，也就是说 $|-x|$ 等于 $x$ 。”她答道。

“错了。那如果 $x$ 等于 $-3$ ，答案将如何呢？”我举出反例。

“啊？ $x$ 如果是 $-3$ 的话……”铁户罗也在黑板上写了起来。

$$\begin{aligned} |-x| &= |-(-3)| && \text{因为是}-3 \\ &= |-x| && \text{所以}-(-3) \text{是} 3 \\ &= 3 && \text{所故} |3| \text{是} 3 \end{aligned}$$

“如果照你所说的 $|-x|$ 就是 $x$ 的话， $x$ 是 $-3$ 的时候， $|-x|$ 必须是 $-3$ 了。但是事实上， $|-x|$ 却是 $3$ 。这也就是说， $|-x|$ 应该等于 $-x$ 。”听了我的解释，铁户罗又看了看式子，开始陷入沉思。

“啊，我知道了，是啊， $x$ 原本就是负数的时候，如果不再加上一个负号的话，这个数字就变不了正数。不知怎么的，我无意识中就把 $x$ 当做是 $3$ 啦、 $5$ 啦之类的正数了。”她恍然大悟。

“对啊， $x$ 这个字母前面没有加什么符号，所以一般人们都不会想到 $x$ 还可能是 $-3$ 这样的情况，但这恰恰又是很重要的。用 $x$ 来表示就是因为不用举出具体数字，就能定义 $x$ 的绝对值。如果只是说‘去掉负号就是绝对值’，这种说法过于偏面了。另外，我们还必须要注意不能忘了加上条件。说得难听点，就是要让人觉得是在故意刁难他们，必须进行严密地思考。当你逐渐习惯了严密的思考时，你就会觉得自己也习惯数学公式和数学了。”

我正说着，铁户罗一屁股坐在最前排的一把椅子上，她默不作声地用手指不停地玩弄着笔记本的页角，像是在思考着什么。

于是，我就在一旁等她开口说话。

“……我，是不是浪费了初中的大好时光呀？”她终于开口了。

“此话怎讲？”我问。

“我也算是读上来了，但是，我却从没有仔细地看过教科书中出现的定义和数学公式……我一直就没有认真对待。”她长叹一声，显出非常失望的样子。

“……喂。”我有话要说。

“嗯，怎么了？”铁户罗看看我。

“如果你这么想的话，从现在开始学会严密思考也不晚啊。过去的事就让它过去吧。你要面对现在，对于现在认识到的事情，只要在今后有效地运用就可以了。”我说。

铁户罗像是舒了口气，睁大眼睛，立刻站起身来，“是，是啊。已经过去了的事情再怎么后悔也没有用了，要在今后好好运用。对，确实是这样，学长。”

“嗯……对了，今天就大致说到这里吧。天也快黑了，以后再继续聊吧。”我说。

“继续聊？”她问。

“嗯，我放学后一般都在图书馆，铁户罗，如果你还有什么要问我的话，再叫我好了。”我答道。

她听后顿时两眼放光，很开心地笑了，“好，一定！”

---

## 2.6 回家路上

走到教室门口时，铁户罗抬头看看天空，叫道：“啊呀呀……下雨了！”天空乌云密布，飘起了蒙蒙细雨。

“你没带伞吗？”我问。

“早上赶着出门，忘记带了。虽然我还事先看了天气预报……但没关系。反正是小雨，我快跑就行了。”她说。

“但跑到地铁站还是会被淋湿哦，反正我们是一个方向，一起走吧。我

---

提供各种书籍的pd电子版代找服务，如果你找不到自己想要的书的pdf电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系QQ1779903665.

PDF代找说明：

本人可以帮助你找到你要的PDF电子书，计算机类，文学，艺术，设计，医学，理学，经济，金融，等等。质量都很清晰，而且每本100%都带书签索引和目录，方便读者阅读观看，只要您提供给我书的相关信息，一般我都能找到，如果您有需求，请联系我QQ1779903665。

本人已经帮助了上万人找到了他们需要的PDF，其实网上有很多PDF,大家如果在网上不到的话，可以联系我QQ，大部分我都可以找到，而且每本100%带书签索引目录。因PDF电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

**声明：本人只提供代找服务，每本100%索引书签和目录，因寻找pdf电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因PDF产生的版权纠纷，与本人无关，我们仅仅只是帮助你寻找到你要的pdf而已。**