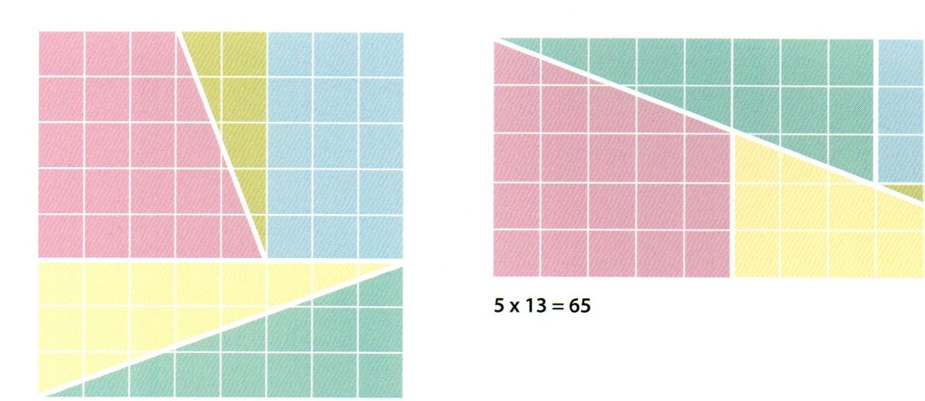
数学谜题

数学并不需要总是一本正经的，很多改变世界的发现都是来自数字游戏。下面是一些奇怪的谜题，它们可能并不是那么重要，但是常常非常美妙，而且非常有意义。总而言之，它们非常好玩。

虎珀悖论

斐波纳契数列里充满了隐藏的关系。这是一个聚会的游戏，最早由数学家威廉•虎珀在他 1774 年出版的《理性的娱乐》中提出。

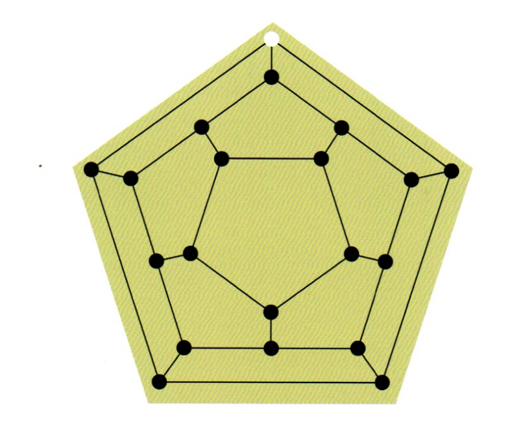
斐波纳契数列中任何相邻的三个数都很有意思。将第一个和第三个数相乘的乘积总是比第二个数的平方多或者少1。比如在数列5, 8, 13中，$5\times13=8^2+1$。（你自己算算看。）你可以用另一种方法表示：将含有8×8个小方块的正方形重新排列成5×13个小方块的长方形，然后数一数每种形状的小方块数量。多出来的小方块是怎么回事？（答案：形状并非严丝合缝，它们之间的微小缝隙加起来就相当于多出来的小方块的面积了。）



十二面体游戏

这个简单的游戏是由威廉•卢云•哈密顿爵士发明的（他最著名的成就是提出了四元数），这是哈密顿图论研究的一部分。他发现，如果要从一个顶点出发穿过所有的其他顶点的话，所经过的线路背后隐藏着数学。

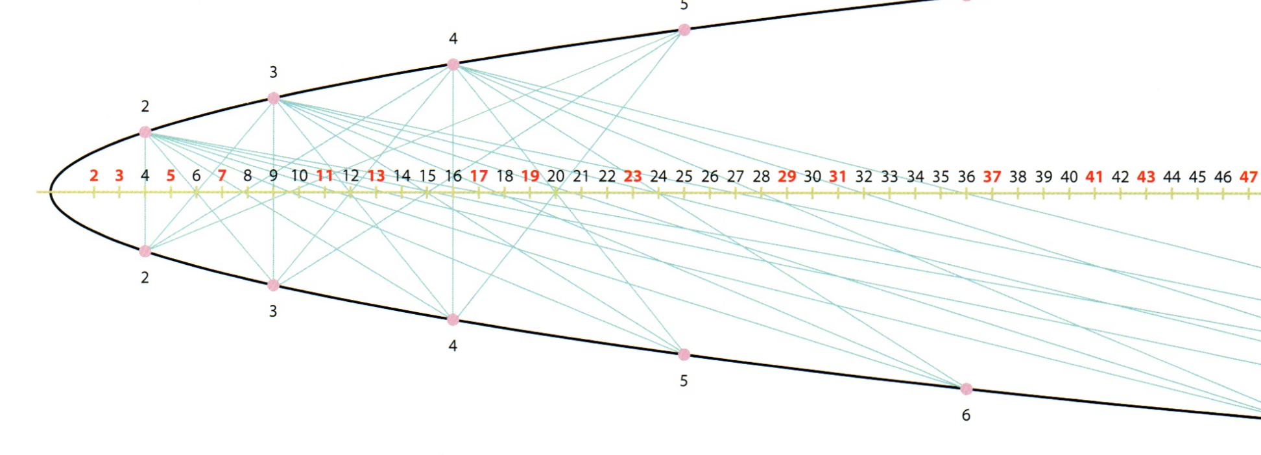
在这个十二面体上，从任一顶点开始，其余19个顶点每个只经过一次，最后回到原来的顶点，看你能不能找到这条路线？



几何筛子

公元前2世纪的时候，古希腊哲学家埃拉托斯特尼成功地做出一个数学“筛子”来过滤素数。此后2200年里，人们多次重新调整这个筛子。这一个使用奇妙的抛物线曲线，成功地将后续的乘积作为合成数筛出来，只留下神秘的素数。

1. 抛物线的两臂由一条水平线分开，在水平线上依次标记上大于1的正整数。不标记数字1是因为1既不是素数也不是合数。相反，它是所有的数字生成的基础。
2. 在抛物线双臂上标记上自然数，在水平线标记每个自然数的平方点上画一条垂线。换句话说，这条垂线通过抛物线上的2穿过水平线上的4到达抛物线另一侧的2上，3穿过9，4穿过16，依此类推。
3. 当数轴上所有的数字都和它们在抛物线上的平方根连起来以后，将抛物线一条曲线上的所有点连接上另一条曲线上的所有点。连接曲线上2个数的直线与数轴的焦点是这两个数的乘积。例如，连接2和3的直线正好落在数轴的6上。
4. 所有的交叉都做完后，没有直线穿过的点就是素数。



神秘的素数

素数里没有什么模式，但是我们从来不会停止寻找的脚步。这些有一些不同寻常的数字。它们有什么特殊含义吗？没有人真的知道。

（1）数字11111111111111111111111（23个1）是素数。

（2）91是合数（13×7），但当在数中间插入数字9和0的时候，生成的结果在素数和合成数之间不断转变：

91 合数

9901 素数

999001合数

99990001素数

9999900001合数

999999000001素数

99999990000001合数

9999999900000001素数

999999999000000001合数

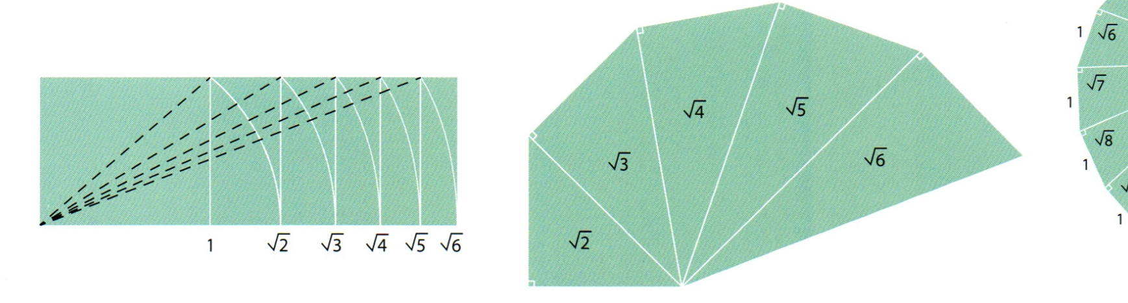
但是下一个数字，99999999990000000001，也是一个合数！

（3）313是仅有的一个3位回文素数，意思是从左到右或者从右到左读都是一样的。这一属性不论是二进制还是十进制都是如此，而且这也是仅有的具有下列属性的3位数素数：313_{10}=100111001。奇怪的是100111001_{10}也是一个素数。

螺旋特奥多鲁斯

也叫作“平方分螺旋”，这一结构以昔兰尼的特奥多鲁斯命名。他是一位公元5世纪的古希腊哲学家。当他提出这一棘手的无理数问题是，毕达哥拉斯学派的影响力正在减弱。看起来熟悉吗？这种结构在很多自然界的形式中都有所反应。

螺线由一系列直角三角形组成，每一个的外边都是等长的，而另一边则是临近三角形的斜边。



小麦和棋盘问题

有一个故事说，当古印度的一位棋手（有人说是游戏的发明者）向国王进献这个游戏的时候，他向国王提了个要求。如果国王信守承诺的话，他就得把整个王国都送给这位棋手，而且即使这样也不够。

棋手要求在棋盘的第一个方格里放入一粒小麦，然后依次在下一个方格里放2倍的小麦，所以第二个格子里有2粒，第三个有4粒，以此类推。那这样的话，国王需要在第64个格子里放多少粒小麦呢？

18 446 744 073 709 551 615粒，或者18.4万亿粒（地球上现有的小麦也不够这个数）。

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
65536	131 072	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152	4 194 304	8 388 608
16 777 216	33 554 432	67 108 864	134 217 728	268 435 456	536 870 912	1 073 741 824	2 147 483 648
4 294 967 296	8 589 934 592	17 179 869 184	34 359 738 368	68 719 476 736	137 438 953 472	274 877 906 944	549 755 813 888
1 099 511 627 776	2 199 023 255 552	4 398 046 511 104	8 796 093 022 208	17 592 186 044 416	35 184 372 088 832	70 368 744 177 664	140 737 488 355 328
281 474 976 710 656	562 949 953 421 312	1 125 899 906 842 624	2 251 799 813 685 248	4 503 599 627 370 496	9 007 199 254 740 992	18 014 398 509 481 984	36 028 797 018 963 968
72 057 594 037 927 936	144 115 188 075 855 872	288 230 376 151 711 744	576 460 752 303 423 488	1 152 921 504 606 846 976	2 305 843 009 213 693 952	4 611 686 018 427 387 904	9 223 372 036 854 775 808

出租车数字

一位老师到医院里看望学生，一般情况下这样很少会产生一套新规律的数字。但是像斯里尼瓦瑟•拉马努金这样的天才确实非常少——就像他的出租车车牌号一样。

1917年，来自印度的数学天才拉马努金因患肺结核在伦敦的普特尼疗养院修养，他的剑桥数学导师戈弗雷•哈代去看望他。哈代说，他乘坐的出租车编号是1729，他觉得这个数字非常乏味（他们可能在进行数学家之间的闲聊）。拉马努金却有不同看法：“这个数能表示为两组不同的数字的立方和，而且这是第二小的这种数。”

到现在为止，这种“出租车号牌”数人们只发现了6个。

Ta(1) = **2**

Ta(2) = **1,729**

Ta(3) = **87,539,319**

Ta(4) = **6,963,472,309,248**

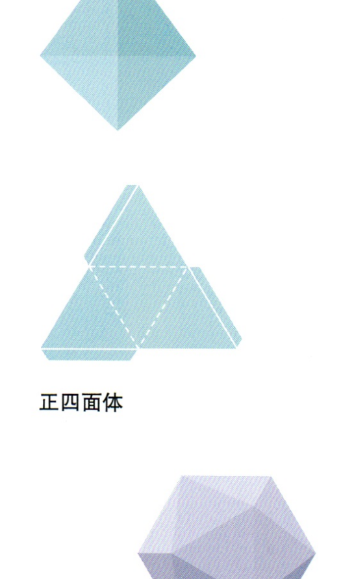
Ta(5) = **48,988,659,276,962,496**

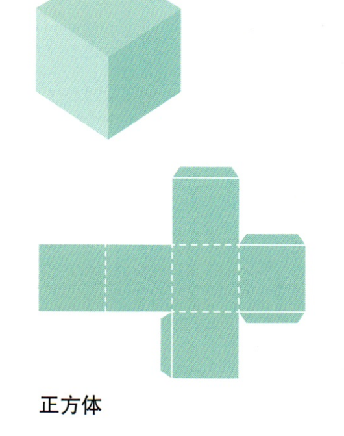
Ta(6) = **24,153,319,581,254,312,065,344**

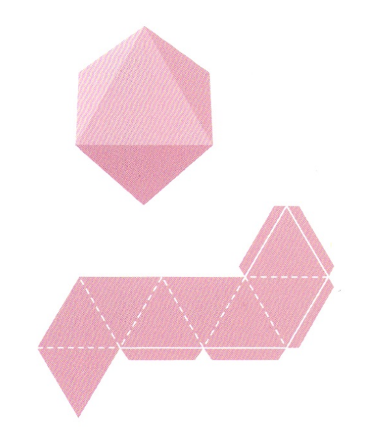
制作柏拉图多面体

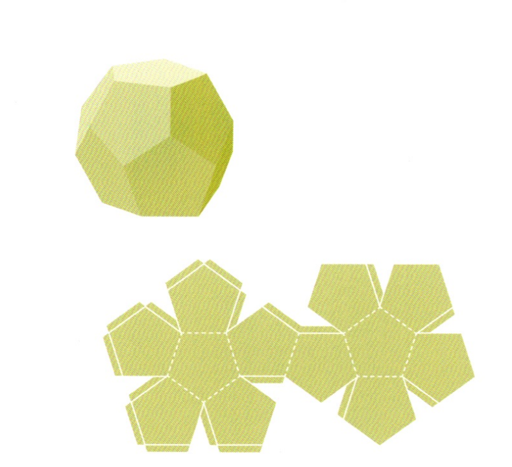
这些著名的正多面体是由相同的表面重复而来，这些表面也是正多边形。要想制作这种多面体，你需要耐心和细致。

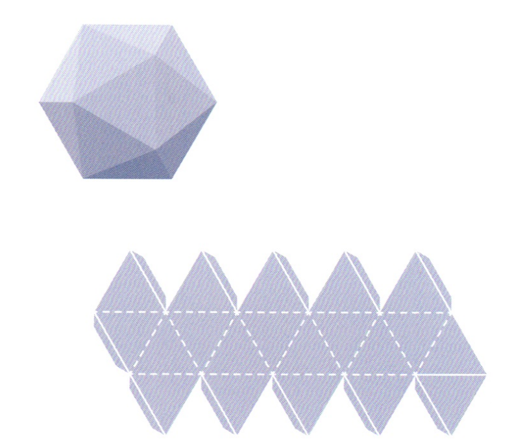
多角体由等边三角形、正方形和正五边形构成。用这些形状做模板，复制下来，你也可以制作自己的柏拉图多面体了。


正四面体


正方体


正八面体


正十二面体


正二十面体

毕达哥拉斯数

对于毕达哥拉斯及其追随者来说，万物起源于数字，终于数字。古代数学家有他们自己的数字分类法，这些分类既依靠迷信又依靠科学。

他们将自然数分为4类：

偶数型偶数：取一半的值仍然是偶数的偶数；

奇数型偶数：取一半的值是奇数的偶数；

偶数型奇数：被奇数除的时候商为偶数的奇数；

奇数型奇数：只有奇数除数的奇数。

空间中的数

在毕达哥拉斯学派术语中，线性数字是没有除数的数（实际上也就是素数）。

平面数字是平面上两个为边的数字的乘积；

立体数在空间中三个数为边的数字的乘积；

平方数是一个数自己与自己相乘的乘积；

立方数是一个数与自己相乘两次的乘积。

数的结构

亏数是指除了本身之外的所有正约数之和小于本身的正整数。例如，4就是亏数，因为它的因子只有1和2。

过剩数是指除了本身之外的所有正约数之和比本身还大的正整数。12就是过剩数，因为它的因子1,2,3,4,6之和为16。

完全数是指除了本身之外的所有正约数之和等于本身的正整数（如6=1+2+3）。

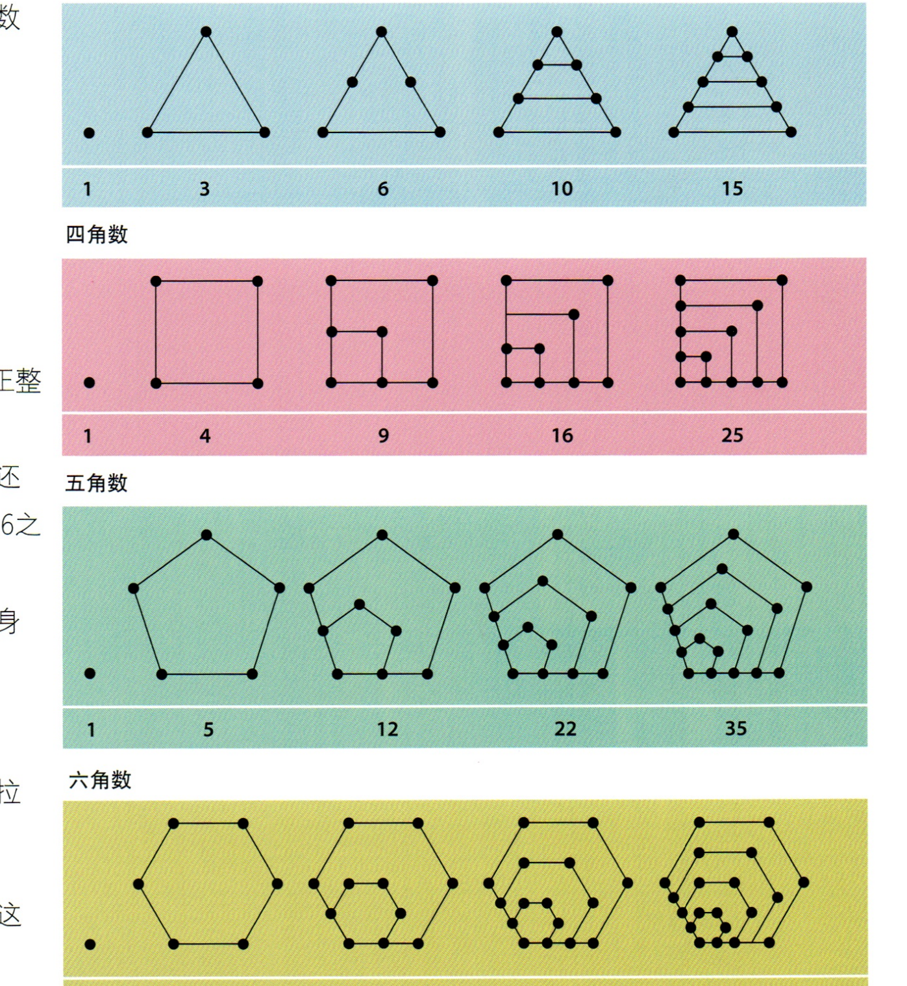
亲和数

亲和数是指真因数之和等于自身的两个数。毕达哥拉斯只发现了220和284是一对亲和数。

如284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110，而这些数恰好是220的因子；

220=1+2+4+71+142，这些数正好又是284的因子。

数的家族



π，e 和Φ

这3个数学常数都是超越数：它们不仅永无止尽，而且小数点后的模式不会重复。π的小数点后前100万位每个数字出现的频率如右图所示。我们会不会漏了什么东西？您自己看看吧。

π = 3.14159 26535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078
164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317
253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756
659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133
93607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892
59036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218
61173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119
491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676
694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922 7
968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973
173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838
142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300192
787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259
941389124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785588907509838175463746493931925
506040092770167113900984882401285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472
684710404753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003
558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674

***e* = 2.71828** 182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852
5166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763233829880
7531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424
3710753907774499206955170276183860626133138458300075204493382656029760673711320070932870912744
3747047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784425056953696770785449969967946
8644549059879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825288693984964
651058209392398294887933203625094431173012381970684161403970198376793206832823764648042953118
023287825098194558153017567173613320698112509961818815930416903515988885193458072738667385894

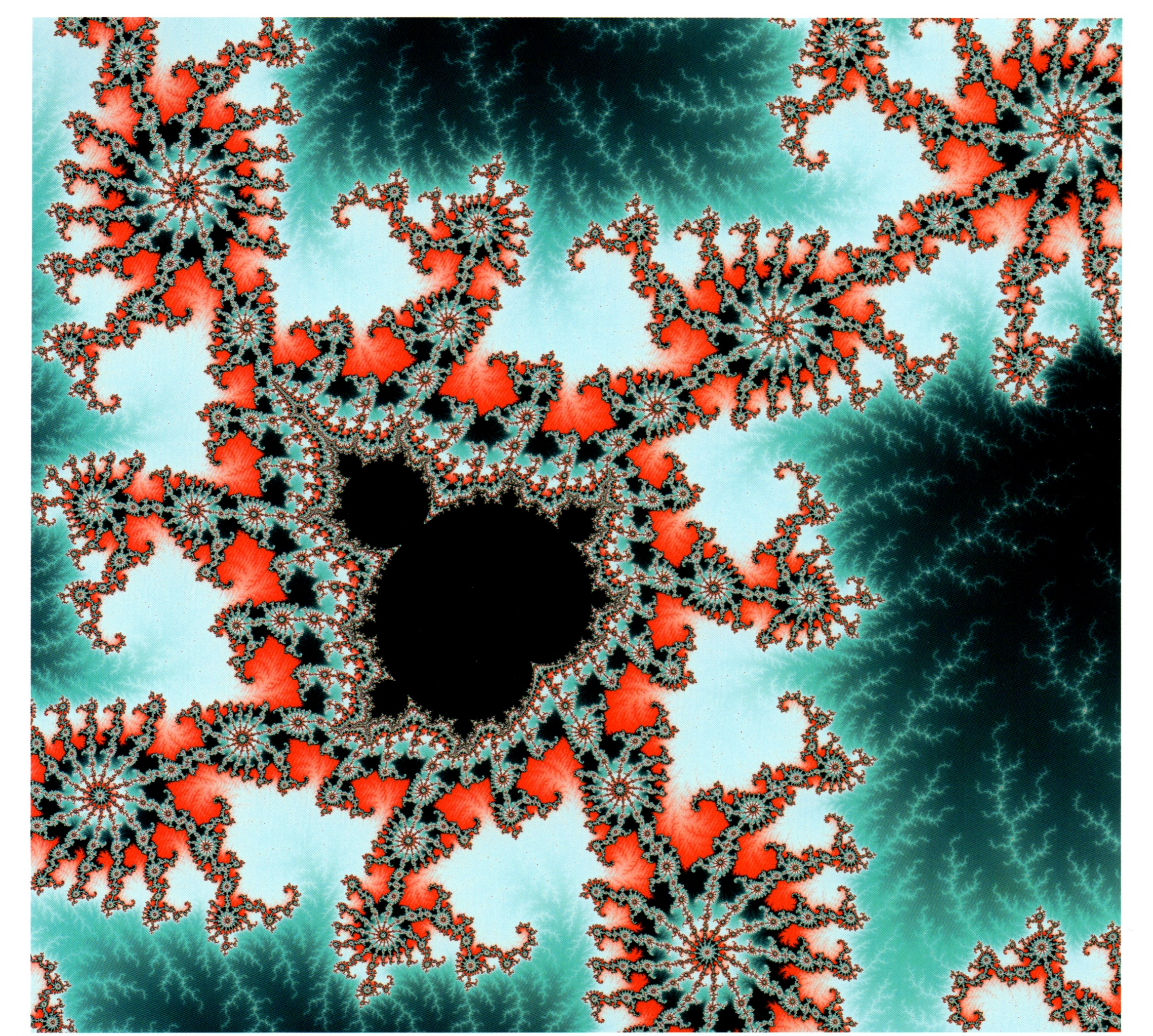
phi = 1.61803 3988749894848204586834365638117720309179805762862135448622705260462818902497072072041
893911374847540880753868917521266338622235369317931800607667263544333890865959395829056383226
613199282902678806752087668925017116962070322210432162695486262963136144381497587012203408058
879544547492461856953648644492410443207713449470495658467885098743394422125448770664780915884
607499887124007652170575179788341662562494075890697040002812104276217711177780531531714101170
46665991466979873176135600670874807101317952368942752194843530567830022878569978297783478458
78228911097625003026961561700250464338243776486102838312683303724292675263116533924731671112

π 中的数字频率

0	**99,999,485,134**
1	**99,999,945,664**
2	**100,000,480,057**
3	**99,999,787,805**
4	**100,000,357,857**
5	**99,999,671,008**
6	**99,999,807,503**
7	**99,999,818,723**
8	**100,000,791,469**
9	**99,999,854,780**
总数	**1,000,000,000,000**

曼德布罗特分形

你会很容易地把分形误认为是20世纪60年代美学与迷幻社团的产物。其实它首次出现是通过1978年的计算机输出，而全彩色再现图则要差不多10年之后才出现。一切都不言而喻了吧。



幻方

幻方是最古老的数学游戏之一，但是这里我们并不是要求和（上、下、左、右甚至对角线之和都相等），而是要把这些正方形放在一起。

每个正方形都有一个神奇的常数，也就是每一行列的数字之和。求这个常数的公式是$n(n^2+1)/2$，n是每一行、列或者对角线里的数字数量。下图为3到9阶的幻方，包括原有的洛书幻方（3阶），据说是在一条洪水泛滥的河里的一只河龟的龟甲上发现的。

15

4	9	2
3	5	7
8	1	6

34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

65

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

111

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

175

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	32	8

260

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

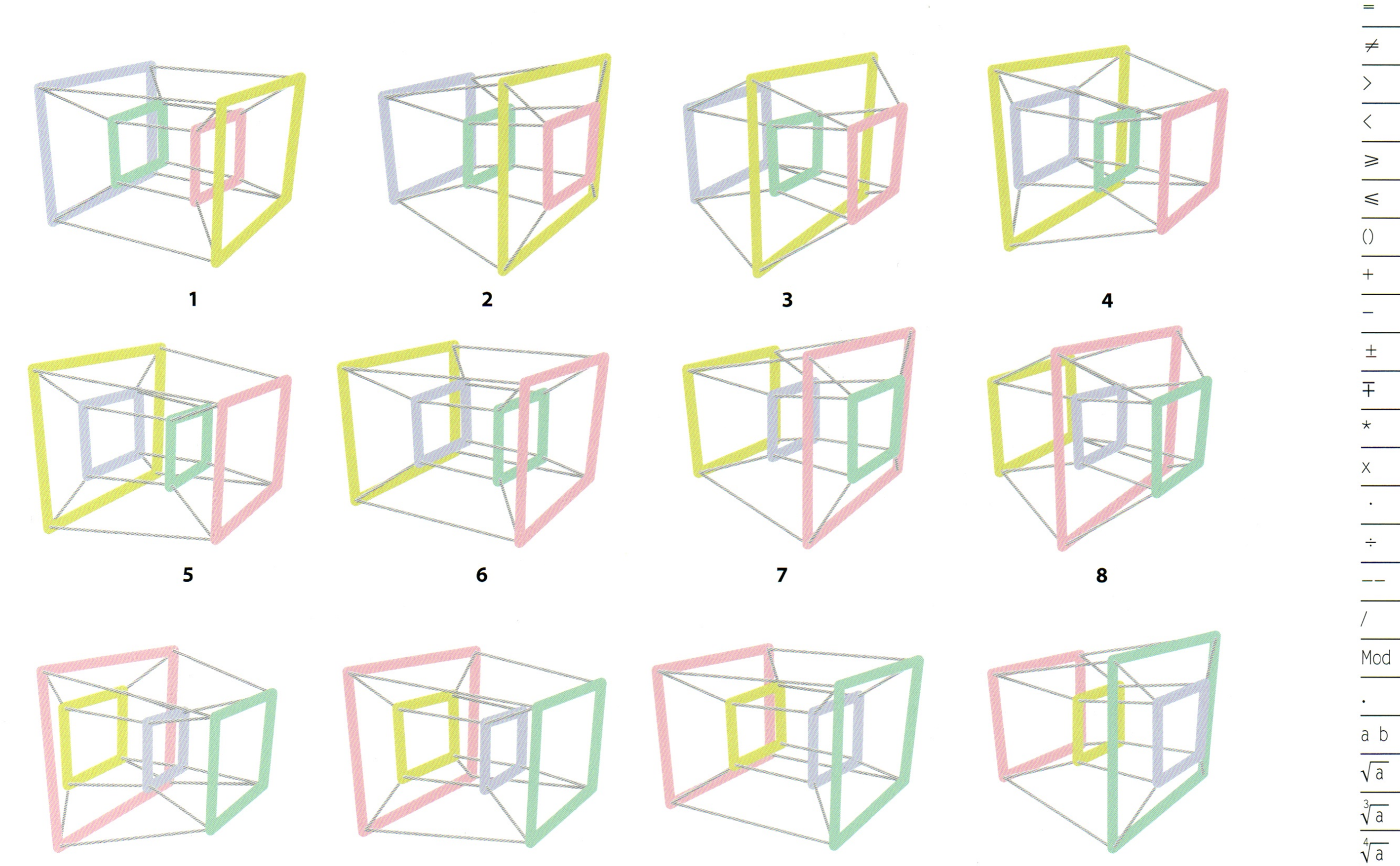
369

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

四次元立方体变换

这一个可能要花点时间研究了。四次元立方体是一种四维的立方体。我们知道，线是一维的，面是二维的，而体是三维的。为什么不能有更多维度呢？你可能会想到了，四维物体会有很多好玩的性质。

想象一下这么一个超出人类感知的4D物体。要想让绘图员在2D平面上表示3D物体都需要很多技巧，所以在2D平面上表示4D物体的难度自然要加倍了（或者更可能是难度的平方）。想象一下被4个立方体包围的内立方体（在图中看起来有些变形）从里面慢慢伸出来变成了外立方体。看明白了吗？你看，这种四次元立方体里的边、角和面可以任意位置上。你现在就进入了第四维。



数学符号

数学里并不只有+和-。现代数学中有大量的用于表示数学的符号，这样既简短又可以重复。当然，这些众多的符号让人感觉迷惑不解，索然无味。通过下面的表格，你可以破除对于这些复杂公式的神秘感。

这些符号是经过上百年才形成的。具有讽刺意味的是，一些最简单的操作，比如乘法，仍然没有严格的规定：你既可以用×，也可以用•。在一些国家里，小数点用句点表示（1.23），而在其他一些国家则常用逗号表示（1,23）。

算术

符号	符号名称	含义或举例
=	等于号	相等
≠	不等于号	不相等
>	大于号	大于
<	小于号	小于
⩾	大于等于号	大于或等于
⩽	小于等于号	小于或等于
()	括号	优先计算
+	加号	相加
−	减号	减法
±	正负号	加减法
∓	负正号	减加法
*	星号	乘法
x	乘号	乘法
·	点号	乘法
÷	除号	除法
––	破折号	除法
/	分号	分数
Mod	系数	除法的余数
.	基数点	小数分隔符
a b	乘方	幂，$3^2=9$
$\sqrt{a}$	平方根	$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$
$\sqrt[3]{a}$	立方根	
$\sqrt[4]{a}$	四次方根	
$\sqrt[n]{a}$	N次方根	

符号	符号名称	含义或举例
%	百分号	百分之几
‰	千分号	千分之几
Ppm	百万分号	百万分之几
Ppb	十亿分号	十亿分之几
ppt	万亿分号	万亿分之几

几何学

符号	符号名称	含义或举例
∠	角度	∠ABC=30°
	有向角	
∟	直角	=90°
'	分	1° =60'
"	秒	1'=60"
CD	线	从点C到点D
⊥	垂直	垂线（90° 角）
//	平行	平行线
≌	全等	在几何上相等
∽	相似	形状相同但尺寸不同
|a−b|	距离	两点之间的距离
π	圆周率常数	π=3.1415926···
Rad	弧度	360° =2π rad
grad	百分度	360° =400 grad

代数学

符号	符号名称	含义或举例
X	变量 X	未知数
≡	全等	全等于
:=	等同符号	等同
~	约等号	若约等
≈ ∝	约等号	强约等
∝	成正比	
∞	无穷	无穷大
<<	远小于	1<<9876544321
>>	远大于	9876544321>>1
X!	叹号	阶乘
|x|	单竖线	绝对值
f(x)	关于x的函数	将x转换成f(x)
Δ	德尔塔	差分
Σ	西格玛	求和
Σ Σ	西格玛西格玛	二次求和
Π	派（大写）	所有值的乘积
e	e常数	e=2.718281828···
Υ	欧拉−马歇罗尼常数	Υ=0.527721566···
·	点	标量积
x	叉号	矢量积
||x||	双竖线	范数

分析学

符号	符号名称	含义或举例
Lim	极限	函数极限
ε	伊普西龙	极小的正数
αx/αy	导数	求导−莱布尼茨的符号
∫	积分	求导的逆过程
∫∫	双积分	2个变量的函数的积分
∫∫∫	三积分	3个变量的函数的积分
	闭围线积分	
	闭曲面积分	
i	虚数单位	$i=\sqrt{-1}$

逻辑学

符号	符号名称	含义或举例
∧	合取	与
∨	析取	或
¬	否定	非
~	对等	
	全称量词	
	存在量词	
	非存在量词	
	所以	
	因为	
δ	δ函数	

统计学

符号	符号名称	含义或举例
P(A)	概率函数	事件A的概率
P(A∩B)	交集事件概率	事件A和B发生的概率
P(A∪B)	联集事件概率	事件A或B发生的概率
P(A|B)	条件概率	事件B发生的基础上发生A的概率
μ	总体均值	数值的平均数
Bin(n,p)	二项分布	
Poisson(λ)	泊松分布	
Geom(p)	几何分布	