

国外电子信息科学经典教材系列

数字通信

(第四版)

Digital Communications
(Fourth Edition)

〔美〕 John G. Proakis 著
张力军 张宗橙 郑宝玉 等译



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

数字通信

(第四版)

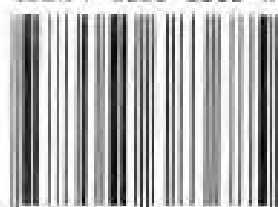
Digital Communications
(Fourth Edition)



国外电子信息科学经典教材系列

- 无线通信原理与应用
- 高性能通信网络
- 多媒体数字压缩原理与标准
- 计算机控制系统——原理与设计 (第三版)
- 现代控制工程 (第三版)
- 第三代移动通信系统原理与工程设计
IS-95 CDMA和cdma2000
- 现代无线通信系统电波传播
- 信息系统管理、控制和维护
- 数字通信 (第四版)

ISBN 7-5053-8368-X



9 787505 383685 >

Mc
Graw
Hill



责任编辑 沈艳波
封面制作 张 昱

本书贴有激光防伪标志,凡没有防伪标志者,属盗版图书。

ISBN 7-5053-8368-X/TN·1735 定价:58.00 元

国外电子信息科学经典教材系列

数字通信(第四版)

Digital Communications (Fourth Edition)

[美] John G. Proakis 著

张力军 张宗橙 郑宝玉 等译

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是数字通信领域的一本经典教材,通过对概率论及随机过程的复习,详细介绍了数字和模拟信源编码、数字调制信号和窄带信号与系统的特征、加性高斯白噪声中数字通信的调制和最佳调制与检测方法、基于最大似然准则的载波相位估计和定时同步的方法、不同信道模型的信道容量及随机编码、带限信道的信号设计、受到符号间干扰恶化信号的解调与检测问题、自适应信道均衡、多信道与多载波调制、扩展频谱信号和系统、衰落信道上的数字通信。本书适合与通信工程相关专业的高年级本科生、研究生及工程技术人员阅读。

John G. Proakis

Digital Communications, Fourth edition

ISBN: 0-07-232111-3

Copyright © 2001 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Original language published by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or distributed in any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Simplified Chinese translation edition jointly published by McGraw-Hill Education (Asia) Co. and Publishing House of Electronics Industry

本书中文简本字翻译版由电子工业出版社和美国麦格劳-希尔教育(亚洲)出版公司合作出版。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封底贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号:图字 01-2000-4292

图书在版编目(CIP)数据

数字通信(第四版)/(美)普罗基斯(Proakis, J. G.)著;张力军译. —北京:电子工业出版社, 2003. 1

(国外电子信息科学经典教材系列)

书名原文: Digital Communications

ISBN 7-5053-8368-X

I. 数... II. ①普... ②张... III. 数字通信-教材 IV. TN914.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 102812 号

责任编辑: 沈艳波

印刷者: 北京天竺颖华印刷厂

出版发行: 电子工业出版社 <http://www.phei.com.cn>

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

经 销: 各地新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 47.5 字数: 1200 千字

版 次: 2003 年 1 月第 2 版 2003 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 6000 册 定价: 58.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换;若书店售缺,请与本社发行部联系。
联系电话: (010)68279077

译者的话

在人类社会发展的近十多年间,信息科学技术迅猛发展,在社会各个领域得到越来越广泛的应用,成为 21 世纪国际社会和世界经济发展的新的强大推动力。信息技术快速发展的动因和显著的特点之一是计算机技术和数字通信技术的快速发展以及计算机网络与通信网的相互融合,使得因特网迅速发展,遍布世界各地,延伸到各个角落,并从有线扩展到无线,延伸到个人的手中。各种类型的数字通信网是因特网的载体。有关数字通信的研究主要是从网络的物理层研究数字信号的传输机理及其可靠性和有效性,为建立可靠和高效的因特网提供坚实的物理基础。

我们翻译的约翰·G·普罗基斯的《数字通信》(第四版)一书是著者多年教学和科研的总结,它全面而系统地论述了数字通信的基本理论,包括信源编码、数字调制信号特征、信道的模型、数字调制与解调、符号与定时同步、自适应均衡技术、多信道与多载波系统、扩频通信、衰落信道上的数字通信以及多用户通信。正如作者在前言中指出的,本书第四版比第三版增添了一些新的内容,如串行和并行级联码、删余级联码、Turbo 网格编码调制(TCM)与 Turbo 均衡以及空间复用,及时地反映了数字通信技术发展的新成果。本书在内容上既论述了数字通信的基本理论,又对数字通信新技术进行了比较深入的分析。本书采用信号空间和等效低通分析方法,根据最佳接收准则,先后讨论并分析了在加性高斯白噪声(AWGN)信道、带限线性滤波器(有符号间干扰和加性噪声)信道以及多径衰落信道等 3 种基本的典型信道条件下的数字信号传输的最佳接收问题。本书讨论问题系统、全面,内容逐步深入,概念清晰,理论分析严谨,逻辑性强,习题和参考资料丰富。本书是一本比较全面、系统、深入论述数字通信理论的经典著作,在学术界很有影响,被许多学术论文引用。同时,它也是一本优秀的研究生教材,目前在国内外有许多高等院校采用本书作为信息和通信专业的研究生教材。本书对于相关专业的教师、学生以及科技工作者来说,也是一本很好的参考书。

译者自 1986 年以来一直采用本书作为研究生数字通信课程的教材。从教学实践中,我们感到本书作为教材理论性较强,其性质相当于“高等通信原理”,也就是说,要求学习本课程的学生应当具备良好的本科“通信原理”基础。研究生通过本课程的学习可在通信理论方面打下比较好的基础,为深入研究创造良好的条件。

本书的前言、第 1,2,4,5,6,9,10,11,12 章由张力军翻译(其中的习题由曹士珂翻译),第 3,7,8 章由张宗橙翻译,第 13,14,15 章及附录由郑宝玉翻译,张力军负责统稿全书。在本书的翻译过程中,保留了原著的部分书写规则,电子工业出版社文宏武副社长、通信与电子事业部主任竺南直博士和责任编辑沈艳波为本书的出版付出了辛勤的劳动。南京邮电学院 2000 级和 2001 级研究生单方骥、曹常义、彭伟刚、徐彬辉、何雪云、周克琴、丁世杰、陈杰、梁景原、徐颖、陈敏、刘芳、赵宏亮、徐啸涛、李晓飞等协助做了大量的工作。借此机会,表示诚挚的谢意。本书第四版译稿是在译者第三版的基础上进行的,对第三版中译本的错漏作了更正。限于水平,译文倘有疏漏不当之处,敬请读者不吝指正。

译者

著者简介

约翰·G·普罗基斯(John G. Proakis)自 1969 年 9 月以来任职于美国东北大学(Northeastern University)。在 1982~1997 年期间,他历任电气与计算机工程系系主任、研究生院副院长、院长;同时也在美国通用电话电子公司(GTE)实验室和麻省理工学院(MIT)林肯实验室(Lincoln Laboratory)任职。

普罗基斯博士在 Cincinnati 大学获得学士学位(BSEE),在 MIT 获得硕士学位(MSEE),在哈佛大学(Harvard University)获得工程领域博士学位。他的专业方向和研究兴趣主要是数字通信和数字信号处理,在这些领域里他已发表了许多论文并出版了多本著作。

前 言

《数字通信(第四版)》在《数字通信》(第三版)基础上进行了一些修改,增添了几个新的论题,包括串行和并行级联码、删余级联码、Turbo 网格编码调制(TCM)与 Turbo 均衡以及空间复用。因为这是一本导论性质的教科书,所以对这些论题的论述及处理的范围有限。

这本书适合作为电子工程系一年级研究生的教科书,也适合从事数字通信系统设计的工程师作为自学课本和参考书。为阅读本书,读者应具备基本的微积分、线性系统理论以及概率论和随机过程的预备知识等背景知识。

第 1 章是本书主题的导引,包括回顾与展望、信道特征的描述和信道模型。

第 2 章是对概率论和随机过程基本内容的复习。它涉及本书要用到的一些概率分布函数和矩阵,包括契尔诺夫边界的推导。边界在求数字通信系统性能边界中是很有用的。

第 3 章论述数字和模拟信源编码,重点是标量和矢量量化技术,并比较速率失真理论的基本结果。

第 4 章介绍数字调制信号和窄带信号与系统的特征,还论述了数字调制信号的频谱特征。添加了关于 CPM 信号线性表示法的新材料。

第 5 章论述了在加性高斯白噪声信道中,数字通信的调制和最佳调制与检测方法。重点是各种数字信号传输的差错率性能和相应的信号对信道带宽的要求。

第 6 章专门论述基于最大似然准则的载波相位估计和定时同步的方法,描述面向判决和非面向判决的两种方法。

第 7 章论述几种不同信道模型的信道容量及随机编码。

第 8 章论述线性分组码和卷积码。本章添加的新论题有串行和并行交织卷积码、软输出维特比算法(SOVA)和 Turbo TCM。

第 9 章着重于带限信道的信号设计。本章的论题包括部分响应信号及频谱成形的游程长度受限码。

第 10 章论述受到符号间干扰恶化信号的解调与检测问题,重点是最佳与准最佳均衡方法及其性能。本章添加的新论题包括 Tomlinson-Harashima 预编码、降低复杂性的最大似然检测器和 Turbo 均衡。

第 11 章论述自适应信道均衡,描述 LMS 及递归最小二乘算法及其性能特征。本章还论述了盲均衡的算法。添加的新论题有抽头泄漏算法和加速 LMS 初始收敛的方法。

第 12 章论述了多信道和多载波调制。鉴于过去 20 年中已研发了几个重要的应用,所以后一论题尤为实用。

第 13 章专门阐述扩展频谱信号和系统。本章着重介绍在扩频信号设计中编码的益处。

第 14 章论述在衰落信道上的数字通信。研究了几种信道衰落的统计模型,重点在于瑞利(Rayleigh)衰落和 Nakagami 衰落。本章还包括衰落信道的网格编码。添加的新内容包括:关于移动无线信道衰落和多径的简要论述、有符号间干扰衰落多径信道的接收机结构以及采用

多个发送和接收天线的空间复用。

第 15 章论述多用户通信问题,重点是码分多址(CDMA)、信号检测和随机接入方式,例如 ALOHA 和载波侦听多址(CSMA)。

使用本书授课的教师可以将这 15 章内容和相关论题灵活地设计成一学期或者两学期的课程。第 3 章~第 6 章提供关于数字调制/解调和检测的方法的基本论述。第 7 和第 8 章论述的信道编码可与调制和解调一起作为一学期课程的内容。信道均衡、衰落信道、扩展频谱和多用户通信可以作为第二学期课程的内容。

在我研究、写作过程中,有机会同许多知名学者一起工作并向他们学习,在此对他们表示感谢。这些学者包括 R. 普赖斯(R. Price)博士、P. R. 德罗依尔汉(P. R. Drouilhet)先生和 P. E. 格林(P. E. Green)博士。我在麻省理工学院林肯实验室工作期间,上述学者在衰落信道中的数字通信和多信道信号传输等方面给了我许多指导。我也要感谢 D. W. 塔夫茨(D. W. Tufts)教授,他审查了我在哈佛大学做的博士论文,并指导我对带限信道的信号设计和均衡问题的研究。我曾在通用电话和电子公司以及斯坦协会组参加过各种研究项目,与许多同事愉快地共事多年,包括斯坦(S. Stein)博士、巴罗(B. Barrow)博士、A. A. 焦尔达诺(A. A. Giordano)博士、A. H. 莱韦斯克(A. H. Levesque)博士、R. 格林斯潘(R. Greenspan)博士、D. 弗里曼(D. Freeman)博士和 P. H. 安德森(P. H. Anderson)、D. 古德因(D. Gooding)及 J. 林德霍尔姆(J. Lindholm)先生。在东北大学,我与 M. 塞尔海(M. Salehi)博士、M. 斯多吉诺维克(H. Stojanovic)博士和 D. 布雷迪(D. Brady)博士合作,从中受益匪浅。T. 舍恩霍夫(T. Schonhoff)博士提供了 CPFSK 频谱特性曲线图,H. 吉本斯(H. Gibbons)提供了第 14 章中的曲线图的数据,这些数据表示了分集情况下 PSK 和 DPSK 的性能。我非常感激同事们给予的帮助。

麦格劳-希尔(McGraw-Hill)教育出版集团和我衷心感谢该版审阅者提出了许多有价值的建议,他们的亚利桑那大学(University of Arizona)的威廉·E·里杨(William E. Ryan),佛罗里达大学(University of Florida)的黄唐(Tan Wong)和乔治华盛顿大学(George Washington University)的雷蒙德·皮克霍尔茨(Raymond Pickholtz)。

最后,感谢格洛丽亚·多卡基斯(Gloria Doukakis)打印了这一版的手稿,感谢阿波斯托斯·里佐斯(Apostolos Rizos)准备了习题解答。

著 者

目 录

第 1 章 引言	(1)
1.1 数字通信系统的基本组成部分	(1)
1.2 通信信道及其特征	(2)
1.3 通信信道的数学模型	(7)
1.4 数字通信发展的回顾与展望	(8)
1.5 本书概貌	(10)
1.6 文献与参考资料	(11)
第 2 章 概率论与随机过程	(12)
2.1 概率	(12)
2.1.1 随机变量、概率分布和概率密度	(15)
2.1.2 随机变量的函数	(19)
2.1.3 随机变量的统计平均	(22)
2.1.4 某些有用的概率分布	(26)
2.1.5 尾部概率的上边界	(37)
2.1.6 随机变量之和与中心极限定理	(40)
2.2 随机过程	(44)
2.2.1 统计平均	(45)
2.2.2 功率密度谱	(47)
2.2.3 线性时不变系统对随机输入信号的响应	(48)
2.2.4 带限随机过程的抽样定理	(51)
2.2.5 离散时间随机信号与系统	(52)
2.2.6 循环平稳过程	(53)
2.3 文献与参考资料	(54)
习题	(55)
第 3 章 信源编码	(59)
3.1 信源的数学模型	(59)
3.2 信息的对数量度	(60)
3.2.1 平均互信息和熵	(62)
3.2.2 连续随机变量信息的度量	(64)
3.3 离散信源编码	(65)
3.3.1 离散无记忆信源的编码	(66)
3.3.2 平稳离散信源	(72)
3.3.3 Lempel-Ziv 算法	(73)

3.4 模拟信源的编码——最优量化	(75)
3.4.1 率失真函数	(75)
3.4.2 标量量化	(78)
3.4.3 矢量量化	(82)
3.5 模拟信源的编码技术	(87)
3.5.1 时间波形编码	(88)
3.5.2 频谱波形编码	(96)
3.5.3 模型基信源编码	(97)
3.6 文献与参考资料	(101)
习题	(102)
第4章 通信信号与系统的表征	(108)
4.1 带通信号与系统的表示法	(108)
4.1.1 带通信号的表示法	(108)
4.1.2 线性带通系统的表示法	(111)
4.1.3 带通系统对带通信号的响应	(112)
4.1.4 带通平稳随机过程的表示法	(113)
4.2 信号空间表示法	(115)
4.2.1 向量空间概念	(116)
4.2.2 信号空间概念	(117)
4.2.3 信号的正交展开	(117)
4.3 数字调制信号的表示法	(123)
4.3.1 无记忆调制	(123)
4.3.2 有记忆线性调制	(132)
4.3.3 有记忆非线性调制—CPFSK 和 CPM	(135)
4.4 数字调制信号的频谱特性	(147)
4.4.1 线性调制信号的功率谱	(147)
4.4.2 CPFSK 和 CPM 信号功率谱	(151)
4.4.3 有记忆调制信号功率谱	(157)
4.5 文献与参考资料	(160)
习题	(161)
第5章 加性高斯白噪声信道的最佳接收机	(169)
5.1 受加性高斯白噪声恶化信号的最佳接收机	(169)
5.1.1 相关解调器	(169)
5.1.2 匹配滤波器解调器	(173)
5.1.3 最佳检测器	(177)
5.1.4 最大似然序列检测器	(181)
5.1.5 有记忆信号的逐个符号 MAP 检测器	(184)
5.2 无记忆调制的最佳接收机性能	(186)
5.2.1 二进制调制的错误概率	(186)

5.2.2	M 元正交信号的错误概率	(188)
5.2.3	M 元双正交信号的错误概率	(191)
5.2.4	单纯信号的错误概率	(192)
5.2.5	M 元二进制编码信号的错误概率	(192)
5.2.6	M 元 PAM 的错误概率	(192)
5.2.7	M 元 PSK 的错误概率	(194)
5.2.8	差分 PSK(DPSK)及其性能	(198)
5.2.9	QAM 错误概率	(200)
5.2.10	数字调制方法的比较	(203)
5.3	CPM 信号的最佳接收机	(205)
5.3.1	CPM 的最佳解调和检测	(205)
5.3.2	CPM 信号的性能	(208)
5.3.3	CPM 信号的逐个符号检测	(213)
5.3.4	CPM 信号的准最佳解调和检测	(215)
5.4	AWGN 信道中随机相位信号的最佳接收机	(216)
5.4.1	二进制信号的最佳接收机	(216)
5.4.2	M 元正交信号的最佳接收机	(220)
5.4.3	M 元正交信号包络检测的错误概率	(221)
5.4.4	相关二进制信号包络检测的错误概率	(223)
5.5	有线和无线通信系统性能分析	(224)
5.5.1	再生中继器	(225)
5.5.2	无线通信系统中链路预算分析	(226)
5.6	文献与参考资料	(229)
	习题	(229)
第 6 章	载波和符号同步	(241)
6.1	信号参数估计	(241)
6.1.1	似然函数	(242)
6.1.2	信号解调中的载波恢复与符号同步	(242)
6.2	载波相位估计	(244)
6.2.1	最大似然载波相位估计	(245)
6.2.2	锁相环	(247)
6.2.3	加性噪声对相位估计的影响	(248)
6.2.4	面向判决环	(250)
6.2.5	非面向判决环	(254)
6.3	符号定时估计	(260)
6.3.1	最大似然定时估计	(260)
6.3.2	非面向判决定时估计	(261)
6.4	载波相位和符号定时的联合估计	(264)
6.5	最大似然估计器的性能特征	(266)

6.6 文献与参考资料	(268)
习题	(269)
第 7 章 信道容量和信道编码	(272)
7.1 信道模型和信道容量	(272)
7.1.1 信道模型	(272)
7.1.2 信道容量	(275)
7.1.3 以正交信号获取信道容量	(280)
7.1.4 信道可靠性函数	(282)
7.2 随机选择的码	(283)
7.2.1 基于 M 元二进制编码信号的随机编码	(283)
7.2.2 基于 M 元多幅度信号的随机编码	(287)
7.2.3 R_0^* 与 AWGN 信道容量的比较	(289)
7.3 基于截止速率的通信系统的设计	(289)
7.4 文献与参考资料	(294)
习题	(295)
第 8 章 分组码和卷积信道码	(301)
8.1 线性分组码	(301)
8.1.1 生成矩阵和奇偶校验矩阵	(303)
8.1.2 一些特殊的线性分组码	(306)
8.1.3 循环码	(308)
8.1.4 线性分组码的最佳软判决译码	(318)
8.1.5 线性分组码的硬判决译码	(323)
8.1.6 硬判决译码和软判决译码性能的比较	(330)
8.1.7 线性分组码最小距离的边界	(333)
8.1.8 非二进制分组码和级联分组码	(335)
8.1.9 突发差错信道中编码数据的交织	(337)
8.1.10 串行与并行级联分组码	(339)
8.2 卷积码	(340)
8.2.1 卷积码的转移函数	(345)
8.2.2 卷积码的最佳译码——维特比算法	(349)
8.2.3 软判决译码的差错概率	(351)
8.2.4 硬判决译码的差错概率	(353)
8.2.5 二进制卷积码的距离特性	(355)
8.2.6 删余卷积码	(358)
8.2.7 卷积码的其他译码算法	(362)
8.2.8 卷积码实用中一些问题的考虑	(368)
8.2.9 非二进制双 k 码和级联码	(371)
8.2.10 并行与串行的级联卷积码	(374)
8.3 带限信道的编码调制——网格编码调制	(376)

8.4 文献与参考资料	(389)
习题	(390)
第 9 章 带限信道的信号设计	(395)
9.1 带限信道的特征	(395)
9.2 带限信道的信号设计	(399)
9.2.1 无符号间干扰的带限信号的设计——奈奎斯特准则	(400)
9.2.2 具有受控 ISI 的带限信号设计——部分响应信号	(404)
9.2.3 受控 ISI 的数据检测	(407)
9.2.4 有失真信道的信号设计	(411)
9.3 PAM 检测的错误概率	(413)
9.3.1 具有零 ISI 的 PAM 检测的错误概率	(413)
9.3.2 部分响应信号检测的错误概率	(414)
9.4 谱成形调制码	(416)
9.5 文献与参考资料	(423)
习题	(424)
第 10 章 通过带限线性滤波器信道的通信	(431)
10.1 有 ISI 和 AWGN 信道的最佳接收机	(431)
10.1.1 最佳最大似然接收机	(431)
10.1.2 具有 ISI 信道的离散时间模型	(433)
10.1.3 离散时间白噪声滤波器模型的维特比算法	(435)
10.1.4 具有 ISI 信道的 MLSE 的性能	(438)
10.2 线性均衡	(444)
10.2.1 峰值失真准则	(445)
10.2.2 均方误差(MSE)准则	(448)
10.2.3 MSE 均衡器的性能特征	(452)
10.2.4 分数间隔均衡器	(455)
10.2.5 基带和带通线性均衡器	(458)
10.3 判决反馈均衡器	(460)
10.3.1 系数最佳化	(460)
10.3.2 DFE 的性能特征	(461)
10.3.3 预测判决反馈均衡器	(464)
10.3.4 发送端的均衡——Tomlinson-Harashima 预编码	(465)
10.4 降低复杂性的 ML 检测器	(467)
10.5 迭代均衡和译码——Turbo 均衡	(468)
10.6 文献与参考资料	(470)
习题	(470)
第 11 章 自适应均衡	(477)
11.1 自适应线性均衡器	(477)
11.1.1 迫零算法	(477)

11.1.2	LMS 算法	(478)
11.1.3	LMS 算法的收敛特性	(481)
11.1.4	由有噪梯度估计值引起的过剩 MSE	(482)
11.1.5	加速 LMS 算法的初始收敛速率	(484)
11.1.6	自适应分数间隔均衡器——抽头泄漏算法	(486)
11.1.7	用于 ML 序列检测的自适应信道估计器	(487)
11.2	自适应判决反馈均衡器	(489)
11.3	网格编码信号的自适应均衡	(490)
11.4	自适应均衡的递推最小二乘算法	(492)
11.4.1	递推最小二乘(卡尔曼)算法	(493)
11.4.2	线性预测和格型滤波器	(496)
11.5	自恢复(盲)均衡	(500)
11.5.1	基于最大似然准则的盲均衡	(500)
11.5.2	随机梯度算法	(503)
11.5.3	基于二阶和高阶信号统计量的盲均衡算法	(507)
11.6	文献与参考资料	(508)
	习题	(509)
第 12 章	多信道和多载波系统	(512)
12.1	在 AWGN 信道中的多信道数字通信	(512)
12.1.1	二进制信号	(513)
12.1.2	M 元正交信号	(515)
12.2	多载波通信	(516)
12.2.1	非理想线性滤波器信道的容量	(516)
12.2.2	基于 FFT 的多载波系统	(518)
12.2.3	多载波系统的峰值平均比最小化	(521)
12.3	文献与参考资料	(522)
	习题	(522)
第 13 章	数字通信用扩频信号	(524)
13.1	扩频数字通信系统的模型	(525)
13.2	直接序列扩频信号	(526)
13.2.1	译码器的差错率性能	(528)
13.2.2	DS 扩频信号的应用	(535)
13.2.3	脉冲干扰对 DS 扩频系统的影响	(543)
13.2.4	DS 扩频系统中窄带干扰的删除	(547)
13.2.5	PN 序列的生成	(552)
13.3	跳频扩频信号	(556)
13.3.1	AWGN 信道中的 FH 扩频信号的性能	(558)
13.3.2	部分频带干扰下 FH 扩频信号的性能	(559)
13.3.3	基于 FH 扩频信号的 CDMA 系统	(564)

13.4	其他类型的扩频信号	(565)
13.5	扩频系统的同步	(566)
13.6	文献与参考资料	(572)
	习题	(572)
第 14 章	通过多径衰落信道的数字通信	(577)
14.1	多径衰落信道的特征	(577)
14.1.1	信道相关函数和功率谱	(579)
14.1.2	衰落信道的统计模型	(584)
14.2	信号特征对信道模型选择的影响	(587)
14.3	频率非选择性慢衰落信道	(588)
14.4	多径衰落信道的分集技术	(591)
14.4.1	二进制信号	(592)
14.4.2	多相信号	(598)
14.4.3	M 元正交信号	(600)
14.5	在频率选择性慢衰落信道中的数字信号传输	(604)
14.5.1	抽头延时线信道模型	(604)
14.5.2	RAKE 解调器	(606)
14.5.3	RAKE 接收机的性能	(608)
14.5.4	符号间干扰信道的接收机结构	(612)
14.6	用于衰落信道的编码波形	(613)
14.6.1	线性二进制分组码软判决译码的差错率	(615)
14.6.2	线性二进制分组码硬判决译码的差错率	(616)
14.6.3	用于瑞利衰落信道的卷积码性能的上边界	(617)
14.6.4	衰落信道中恒重码和级联码的应用	(619)
14.6.5	基于截止率的系统设计	(624)
14.6.6	编码相位相干通信系统的性能——比特交织编码调制	(626)
14.6.7	网格编码调制	(628)
14.7	多天线系统	(629)
14.8	文献与参考资料	(636)
	习题	(637)
第 15 章	多用户通信	(643)
15.1	多址技术	(643)
15.2	多址方式的容量	(645)
15.3	码分多址	(649)
15.3.1	CDMA 信号与信道模型	(649)
15.3.2	最佳接收机	(650)
15.3.3	次最佳检测器	(653)
15.3.4	连续干扰抵消	(658)
15.3.5	检测器的性能特征	(659)

15.4 随机接入方式·····	(662)
15.4.1 ALOHA 系统和协议·····	(662)
15.4.2 载波侦听系统和协议·····	(665)
15.5 文献与参考资料·····	(669)
习题·····	(669)
附录 A 列文森-杜宾算法·····	(675)
附录 B 多信道二进制信号的差错率·····	(677)
附录 C M 相信号自适应接收的差错率·····	(681)
C.1 M 相信号通信系统的数学模型·····	(681)
C.2 相位 θ 的特征函数的概率密度函数·····	(682)
C.3 瑞利慢衰落信道的差错率·····	(684)
C.4 时不变与莱斯衰落信道的差错率·····	(686)
附录 D 平方根分解·····	(690)
文献与参考资料·····	(692)
中英文人名对照表·····	(722)
词汇表·····	(729)

第 1 章 引 言

在本书中,我们将介绍作为数字通信系统分析和设计基础的基本原理。数字通信的研究主题包括数字形式的信息从产生该信息的信源到一个或多个目的地的传输问题。在通信系统的分析和设计中,特别重要的是信息传输所通过的物理信道的特征。信道的特征一般会影响通信系统基本组成部分的设计。下面阐述一个通信系统的基本组成部分及其功能。

1.1 数字通信系统的基本组成部分

图 1-1-1 显示了一个数字通信系统的功能性框图和基本组成部分。信源输出的可以是模拟信号,如音频或视频信号;也可以是数字信号,如电传机的输出,该信号在时间上是离散的,并且具有有限个输出字符。在数字通信系统中,由信源产生的消息变换成二进制数字序列。理论上,应当用尽可能少的二进制数字表示信源输出(消息)。换句话说,我们要寻求一种信源输出的有效的表示方法,使其很少产生或不产生冗余。将模拟或数字信源的输出有效地变换成二进制数字序列的处理过程称为信源编码或数据压缩。

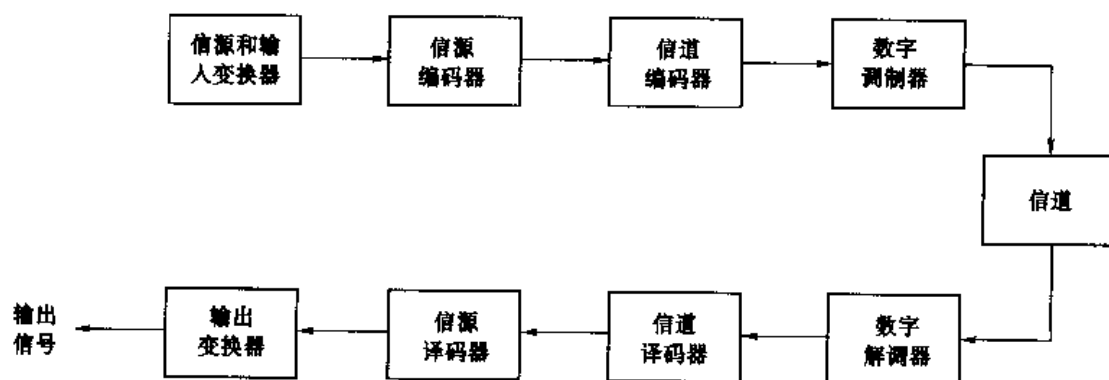


图 1-1-1 数字通信系统的基本组成部分

由信源编码器输出的二进制数字序列称为信息序列,它被传送到信道编码器。信道编码器的目的是在二进制信息序列中以受控的方式引入一些冗余,以便于在接收机中用来克服信号在信道中传输时所遭受的噪声和干扰的影响。因此,所增加的冗余是用来提高接收数据的可靠性以及改善接收信号的逼真度的。实际上,信息序列中的冗余有助于接收机译出期望的信息序列。例如,二进制信息序列的一种(平凡的)形式的编码就是将每个二进制数字简单重复 m 次,这里 m 为一个正整数。更复杂的(不平凡的)编码涉及到一次取 k 个信息比特,并将每个 k 比特序列映射成惟一的 n 比特序列,该序列称为码字。以这种方式对数据编码所引入的冗余度的大小是由比率 n/k 来度量的。该比率的倒数,即 k/n ,称为码的速率或简称码率。

信道编码器输出的二进制序列送至数字调制器,它是通信信道的接口。因为在实际中遇到的几乎所有的通信信道都能够传输电信号(波形),所以数字调制的主要目的是将二进制信息序列映射成信号波形。为了详细说明这一点,假定已编码的信息序列以均匀速率 $R(\text{b/s})$ —

次一个比特传输,数字调制器可以简单地将二进制数字“0”映射成波形 $s_0(t)$,而二进制数字“1”映射成波形 $s_1(t)$ 。在这种方式中,信道编码器输出的每一比特是分别传输的。我们把它称为二进制调制。另一种方式,调制器一次传输 b 个已编码的信息比特,其方法是采用 $M = 2^b$ 个不同的波形 $s_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, M$, 每一个波形用来传输 2^b 个可能的 b 比特序列中的一个序列。我们称这种方式为 M 元调制 ($M > 2$)。注意,每 b/R 秒就有一个新的 b 比特序列进入调制器。因此,当信道比特率 R 固定,与一个 b 比特序列相应的 M 个波形之一的传输时间量是二进制调制系统时间周期的 b 倍。

通信信道是用来将发送机的信号发送给接收机的物理媒质。在无线传输中,信道可以是大气(自由空间)。另一方面,电话信道通常使用各种各样的物理媒质,包括有线线路、光缆和无线(微波)等。无论用什么物理媒质来传输信息,其基本特点是发送信号随机地受到各种可能机理的恶化,例如由电子器件产生的加性热噪声、人为噪声(如汽车点火噪声)及大气噪声(如在雷暴雨时的闪电)。

在数字通信系统的接收端,数字解调器对受到信道恶化的发送波形进行处理,并将该波形还原成一个数的序列,该序列表示发送数据符号的估计值(二进制或 M 元)。这个数的序列被送至信道译码器,它根据信道编码器所用的关于码的知识及接收数据所含的冗余度重构初始的信息序列。

解调器和译码器工作性能好坏的一个度量是译码序列中发生差错的频度。更准确地说,在译码器输出端的平均比特错误概率是解调器-译码器组合性能的一个度量。一般地,错误概率是下列各种因素的函数:码特征、用来在信道上传输信息的波形的类型、发送功率、信道的特征(即噪声的大小、干扰的性质等)以及解调和译码的方法。在后续各章中将详细讨论这些因素及其对性能的影响。

作为最后一步,当需要模拟输出时,信源译码器从信道译码器接收其输出序列,并根据所采用的信源编码方法的有关知识重构由信源发出的原始信号。由于信道译码的差错以及信源编码器可能引入的失真,在信源译码器输出端的信号只是原始信源输出的一个近似。在原始信号与重构信号之间的信号差或信号差的函数是数字通信系统引入失真的一种度量。

1.2 通信信道及其特征

正如前面指出的,通信信道在发送机与接收机之间提供了连接。物理信道也许是携带电信号的一对明线;或是在已调光波束上携带信息的光纤;或是水下海洋信道,其中信息以声波形式传输;或是自由空间,携带信息的信号通过天线在空间辐射传输。可被表征为通信信道的其他媒质是数据存储媒质,例如磁带、磁盘和光盘。

在信号通过任何信道传输中的一个共同的问题是加性噪声。一般地,加性噪声是由通信系统内部组成元器件所引起的,例如电阻和固态器件。有时将这种噪声称为热噪声。其他噪声和干扰源也许是系统外面引起的,例如来自信道上其他用户的干扰。当这样的噪声和干扰与期望信号占有同频带时,可通过对发送信号和接收机中解调器的适当设计来使它们的影响最小。信号在信道上传输时可能会遇到的其他类型损伤有信号衰减、幅度和相位失真、多径失真等。

可以通过增加发送信号功率的方法使噪声的影响最小。然而,设备和其他实际因素限制

了发送信号的功率电平。另一个基本的限制是可用的信道带宽。带宽的限制通常是由于媒质以及发送机和接收机中组成器件和部件的物理限制产生的。这两种限制因素限制了在任何通信信道上能可靠传输的数据量,我们将在以后各章中讨论这种情况。下面描述几种通信信道的重要特征。

1. 有线信道

电话网络扩大了有线线路的应用,如话音信号传输以及数据和视频传输。双绞线和同轴电缆是基本的导向电磁信道,它能提供比较适度的带宽。通常用来连接用户和中心机房的电话线的带宽为几百千赫(kHz)。另一方面,同轴电缆的可用带宽是几兆赫(MHz)。图 1-2-1 示出了导向电磁信道的频率范围,其中包含波导和光纤。

信号在这样的信道上传输时,其幅度和相位都会发生失真,还受到加性噪声的恶化。双绞线信道还易受到来自物理邻近信道的串音干扰。因为在全国和全世界有线信道上通信在日常通信中占有相当大的比例,因此,人们对传输特性的表征以及对信号传输时的幅度和相位失真的减缓方法作了大量研究。在第 9 章中,我们将阐述最佳传输信号及其解调的设计方法。在第 10 章和第 11 章中,我们将研究信道均衡器的设计,它是用来补偿信道的幅度和相位失真的。

2. 光纤信道

光纤提供的信道带宽比同轴电缆信道大几个数量级。在过去的 20 年中,已经研发出具有较低信号衰减的光纤,以及用于信号和信号检测的可靠性光子器件。这些技术上的进展导致了光纤信道应用的快速发展,不仅应用在国内通信系统中,也应用于跨大西洋和跨太平洋的通信中。由于光纤信道具有大的可用带宽,因此有可能使电话公司为用户提供宽系列电话业务,包括话音、数据、传真和视频等。

在光纤通信系统中,发送机或调制器是一个光源,或者是发光二极管(LED)或者是激光。通过消息信号改变(调制)光源的强度来发送信息。光像光波一样通过光纤传播,并沿着传输路径被周期性地放大以补偿信号衰减(在数字传输中,光由中继器检测和再生)。在接收机中,光的强度由光电二极管检测,它的输出电信号的变化直接与照射到光电二极管上的光的功率成正比。光纤信道中的噪声源是光电二极管和电子放大器。

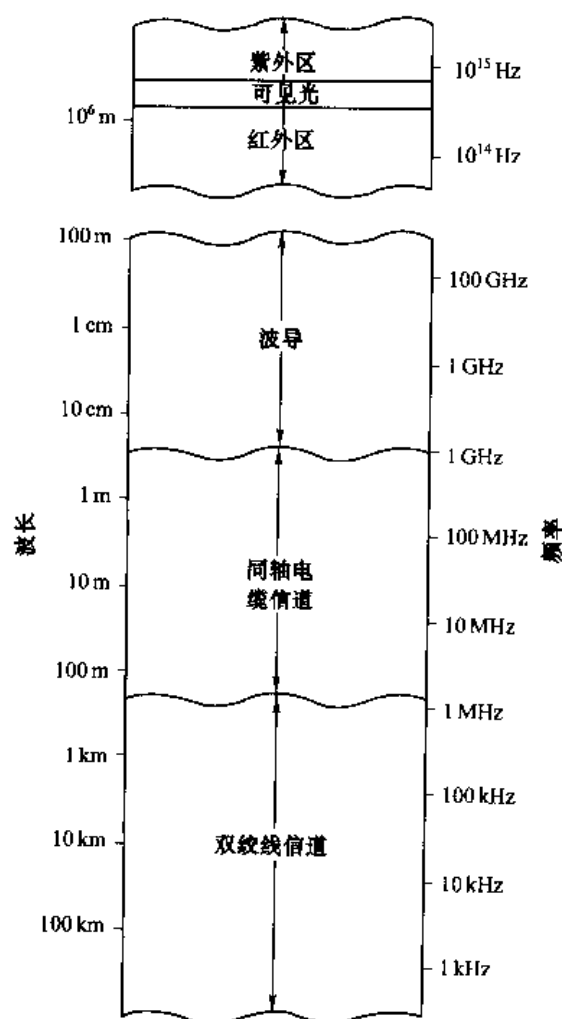


图 1-2-1 导向有线信道的频率范围

3. 无线电磁信道

在无线通信系统中,电磁能是通过作为辐射器的天线耦合到传播媒质的。天线的物理尺寸和配置主要决定于运行的频率。为了获得有效的电磁能量的辐射,天线必须比波长的 $1/10$ 更长。因此,在调幅(AM)频段发射的无线电台,譬如说在 $f_c = 1 \text{ MHz}$ 时(相当于波长 $\lambda = C/f_c = 300 \text{ m}$),要求天线至少为 30 m 。无线传输天线的其他重要特征和属性将在第 5 章阐述。

图 1-2-2 示出了不同频段的电磁频谱。在大气和自由空间中,电磁波传播的模式可以划分为 3 种类型,即地波传播、天波传播和视线传播。在甚低频(VLF)和音频段,其波长超过 10 km ,地球和电离层对电磁波传播的作用如同波导。在这些频段,通信信号实际上环绕地球传播。由于这个原因,这些频段主要用来在世界范围内提供从海洋到船舶的导航帮助。在此频段中可用的带宽较小(通常是中心频率的 $1\% \sim 10\%$),因此通过这些信道传输的信息速率较低,且一般限于数字传输。在这些频率上,最主要的一种噪声是由地球上的雷暴活动产生的,特别是在热带地区。干扰来自这些频段上的用户。

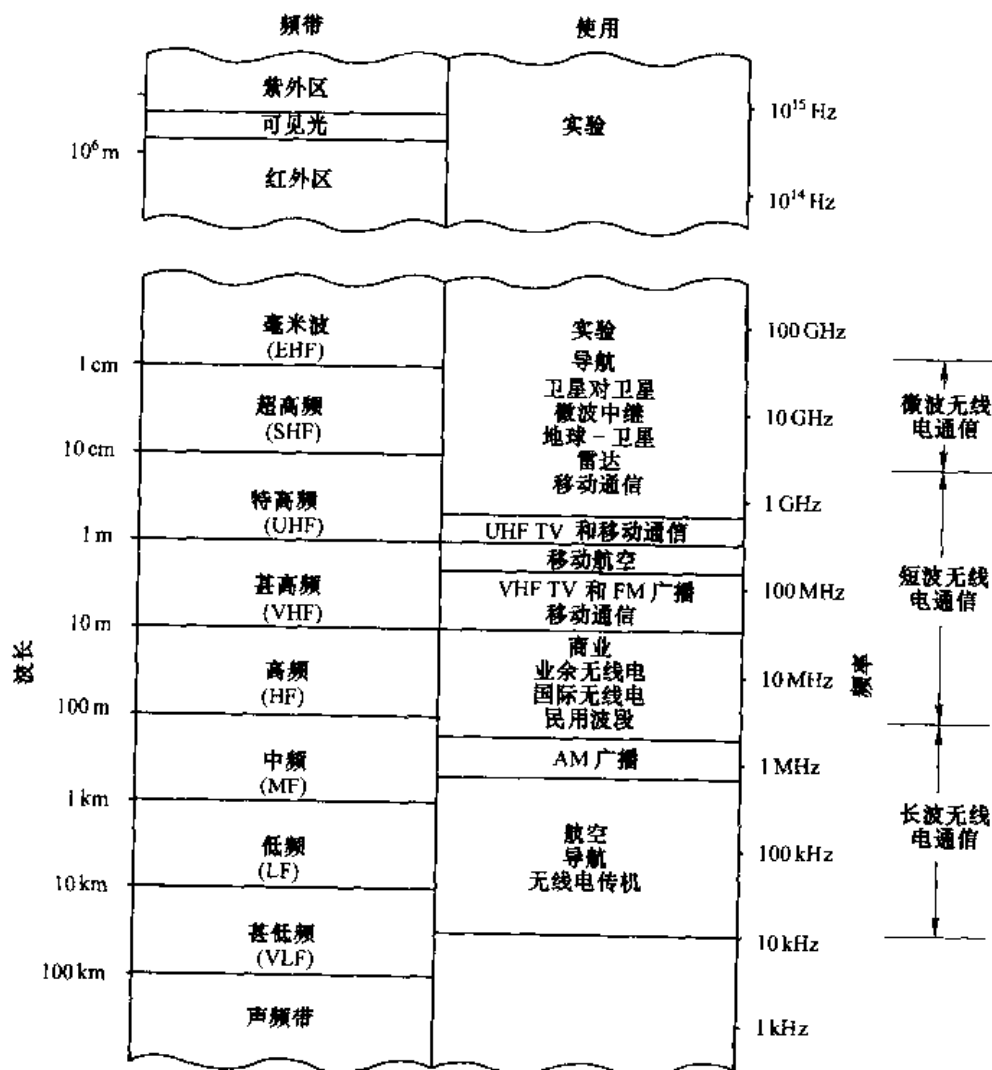


图 1-2-2 无线电磁信道的频率范围

如图 1-2-3 所示,地波传播是中频(MF)频段(0.3~3 MHz)的最主要传播模式,是用于 AM 广播和海岸无线电广播的频段。在 AM 广播中,甚至大功率的地波传播范围都限于 150 km 左右。在 MF 频段中,大气噪声、人为噪声和接收机的电子器件的热噪声是对信号传输的最主要干扰。

如图 1-2-4 所示,天波传播是电离层对发送信号的反射(弯曲或折射)形成的,电离层由位于地球表面之上高度 50~400 km 范围中的几层带电粒子组成。在白昼,太阳使较低大气层加热,引起高度在 120 km 以下的电离层的形成。这些较低的层,特别是 D 层,吸收 2 MHz 以下的频率,因此严重地限制了 AM 无线电广播的天波传播。然而,在夜晚,较低层的电离层中的电子密度急剧下降,而且白天发生的频率吸收现象明显减少。因此,功率强大的 AM 无线电广播电台能够通过天波经 F 层电离层传播很远的距离,F 层电离层位于地球表面之上 140~400 km 范围之内。

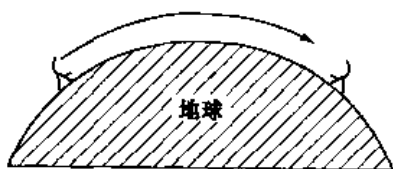


图 1-2-3 地波传播的说明

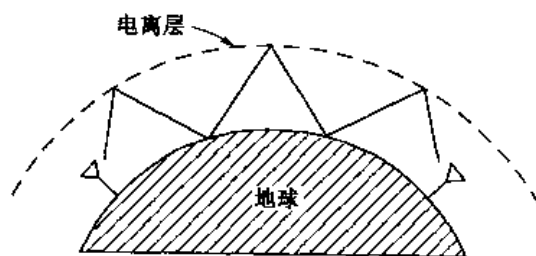


图 1-2-4 天波传播的说明

在高频(HF)频段范围内,电磁波经由天波传播时经常发生的问题是信号多径。信号多径发生在发送信号经由多条传播路径以不同的延迟到达接收机的时候,一般会引起数字通信系统中的符号间干扰。而且,经由不同传播路径到达的各信号分量会相互削弱,导致信号衰落的现象,许多人在夜晚收听远地无线电台广播时会对此有体验。在夜晚,天波是主要的传播模式。HF 频段的加性噪声是大气噪声和热噪声的组合。

在大约 30 MHz 之上的频率,即 HF 频段的边缘,就不存在天波电离层传播。然而,在 30~60 MHz 频段,有可能进行电离层散射传播,这是由较低电离层的信号散射引起的。也可利用在 40~300 MHz 频率范围内的对流层散射在几百英里(1 mile=1 609.344 m)的距离通信。对流层散射是由在 10 mile 或更低高度大气层中的粒子引起的信号散射造成的。一般地,电离层散射和对流层散射具有大的信号传播损耗,要求发射机功率大和天线比较长。

在 30 MHz 以上频率通过电离层传播具有较小的损耗,这使得卫星和超陆地通信成为可能。因此,在甚高频(VHF)频段和更高的频率,电磁传播的最主要模式是 LOS 传播。对于陆地通信系统,这意味着发送机和接收机的天线必须是直达 LOS,没有什么障碍。由于这个原因,在 VHF 和特高频(UHF)频段发射的电视台的天线安装在高塔上,以达到更宽的覆盖区域。

一般地,LOS 传播所能覆盖的区域受到地球曲度的限制。如果发射天线安装在地表面之上 h 米的高度,并假定没有物理障碍(如山),那么到无线地平线的距离近似为 $d = \sqrt{15h}$ km。例如,电视天线安装在 300 m 高的塔上,它的覆盖范围大约 67 km。另一个例子,工作在 1 GHz 以上频率、用来延伸电话和视频传输的微波中继系统将天线安装在高塔上或高的建筑物顶部。

对工作在 VHF 和 UHF 频率范围的通信系统,限制性能的最主要噪声是接收机前端所产生的热噪声和天线接收到的宇宙噪声。在 10 GHz 以上的超高频(SHF)频段,大气层环境在信号传

播中担负主要角色。例如,在 10 GHz 频率,衰减范围从小雨时的 0.003 dB/km 左右到大雨时的 0.3 dB/km;在 100 GHz 时,衰减范围从小雨时的 0.1 dB/km 左右到大雨时的 6 dB/km 左右。因此,在此频率范围,大雨引起了很大的传播损耗,这会导致业务中断(通信系统完全中断)。

在极高频(EHF)频段以上的频率是电磁频谱的红外区和可见光区,它们可用来提供自由空间的 LOS 光通信。到目前为至,这些频段已经用于实验通信系统,例如,卫星到卫星的通信链路。

4. 水声信道

在过去的几十年中,海洋探险活动不断增多。与这种增多相关的是对传输数据的需求。数据是由位于水下的传感器传送到海洋表面的,从那里可能将数据经由卫星转发给数据采集中心。

除极低频率外,电磁波在水下不能长距离传播。在低频率的信号传输的延伸受到限制,因为它需要大的且功率强的发送机。电磁波在水下的衰减可以用表面深度来表示,它是信号衰减 $1/e$ 的距离。对于海水,表面深度 $\delta = 250/\sqrt{f}$,其中 f 以 Hz 为单位, δ 以 m 为单位。例如,在 10 kHz 上,表面深度是 2.5 m。声信号能在几十甚至几百千米距离上传播。

水声信道可以表征为多径信道,这是由于海洋表面和底部对信号反射的缘故。因为波的运动,信号多径分量的传播延迟是时变的,这就导致了信号的衰落。此外,还存在与频率相关的衰减,它与信号频率的平方近似成正比。声音速度通常大约为 1 500 m/s,实际值将在正常值上下变化,这取决于信号传播的深度。

海洋背景噪声是由虾、鱼和各种哺乳动物引起的。在靠近港口处,除了海洋背景噪声外,也有人为噪声。尽管有这些不利的环境,还是可能设计并实现有效的且高可靠性的水声通信系统,以长距离地传输数字信号。

5. 存储信道

信息存储和恢复系统构成了日常数据处理工作的非常重要的部分。磁带(包括数字的声带和录像带)、用来存储大量计算机数据的磁盘、用作计算机数据存储器的光盘以及只读光盘都是数据存储系统的例子,它们可以表征为通信信道。在磁带或磁盘或光盘上存储数据的过程,等效于在电话或在无线信道上发送数据。回读过程以及在存储系统中恢复所存储的数据的信号处理,等效于在电话和无线通信系统中恢复发送信号。

由电子元器件产生的加性噪声和来自邻近轨道的干扰一般会呈现在存储系统的回读信号中,这正如电话或无线通信系统中的情况。

所能存储的数据量一般受到磁盘或磁带尺寸及密度(每平方英寸存储的比特数)的限制,该密度是由写/读电系统和读写头确定的。例如,在磁盘存储系统中,封装密度可达每平方英寸 10^9 比特(1 in = 2.54 cm)。磁盘或磁带上的数据的读写速度也受到组成信息存储系统的机械和电子子系统的限制。

信道编码和调制是良好设计的数字磁或光存储系统的最重要的组成部分。在回读过程中,信号被解调。由信道编码器引入的附加冗余度用于纠正回读信号中的差错。

1.3 通信信道的数学模型

在通过物理信道传输信息的通信系统设计中,我们发现,建立一个能反映传输媒质最重要特征的数学模型是很方便的。信道的数学模型可用于发送机中的信道编码器和调制器,以及接收机中的解调器和信道译码器的设计。下面,我们将简要地描述信道的模型,它们常用来表征实际的物理信道。

1. 加性噪声信道

通信信道最简单的数学模型是加性噪声信道,如图 1-3-1 所示。在这个模型中,发送信号 $s(t)$ 被加性随机噪声过程 $n(t)$ 恶化。在物理上,加性噪声过程由通信系统接收机中的电子元件和放大器引起,或者由传输中的干扰引起(正如在无线电信号传输中那样)。

如果噪声主要由接收机中的元件和放大器引起,那么,它可以表征为热噪声。这种模型的噪声统计地表征为高斯噪声过程。因此,该信道的数学模型通常称为加性高斯噪声信道。因为这个信道模型适用于很广的物理通信信道,并且因为它在数学上易于处理,所以是在通信系统分析和设计中所用的最主要的信道模型。信道的衰减很容易加入到该模型。信号通过信道传输而受到衰减时,接收信号是

$$r(t) = \alpha s(t) + n(t) \quad (1-3-1)$$

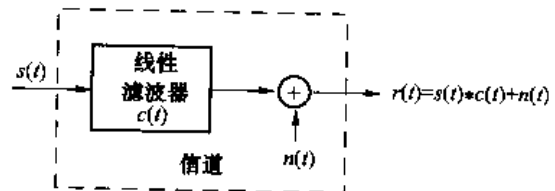
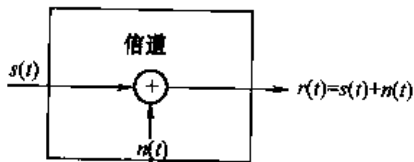
式中, α 是衰减因子。

2. 线性滤波器信道

在某些物理信道中,例如有线电话信道,采用滤波器来保证传输信号不超过规定的带宽限制,从而不会引起相互干扰。这样的信道通常在数学上表征为带有加性噪声的线性滤波器,如图 1-3-2 所示。因此,如果信道输入信号为 $s(t)$,那么信道输出信号是

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) * c(t) + n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) s(t - \tau) d\tau + n(t) \end{aligned} \quad (1-3-2)$$

式中, $c(t)$ 是信道的冲激响应, $*$ 表示卷积。



3. 线性时变滤波器信道

像水声信道和电离层无线电信道这样的物理信道,它们会导致发送信号的时变多径传播,这类物理信道在数学上可以表征为时变线性滤波器。该线性滤波器可以表征为时变信道冲激响应 $c(\tau; t)$, 这里 $c(\tau; t)$ 是信道在 $t - \tau$ 时刻加入冲激而在 t 时刻的响应。因此, τ 表示“历

时(经历时间)”变量。带有加性噪声的线性时变滤波器信道如图 1-3-3 所示。对于输入信号 $s(t)$, 信道输出信号是

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) * c(\tau; t) + n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) s(t - \tau) d\tau + n(t) \end{aligned} \quad (1-3-3)$$

用来表征通过物理信道的多径信号传播的模型是式(1-3-3)的一个特例, 这样的物理信道如电离层(在 30 MHz 以下的频率)和移动蜂窝无线电信道。该特例中的时变冲激响应为

$$C(\tau; t) = \sum_{k=1}^L a_k(t) \delta(\tau - \tau_k) \quad (1-3-4)$$

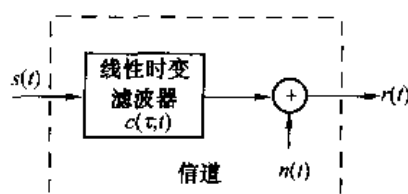


图 1-3-3 带有加性噪声的时变滤波器信道

式中, $|a_k|$ 表示 L 条多径传播路径上可能的时变衰减因子, $\{\tau_k\}$ 是相应的延迟。如果将式(1-3-4)代入式(1-3-3), 那么接收信号为

$$r(t) = \sum_{k=1}^L a_k(t) s(t - \tau_k) + n(t) \quad (1-3-5)$$

因此, 接收信号由 L 个路径分量组成, 其中每一个分量的衰减为 $|a_k|$, 且延迟为 $\{\tau_k\}$ 。

上面描述的 3 种数学模型适当地表征了实际中的绝大多数物理信道。本书将这 3 种信道模型用于通信系统的分析和设计。

1.4 数字通信发展的回顾与展望

值得注意的是, 最早的电通信形式, 即电报, 是一个数字通信系统。电报由 S·莫尔斯 (Samuel Morse) 研制, 并在 1837 年进行了演示试验。莫尔斯设计出一种可变长度的二进制码, 其中英文字母用点划线的序列(码字)表示。在这种码中, 较频繁发生的字母用短码字表示, 不常发生的字母用较长的码字表示。因此, 莫尔斯码是第 3 章所述可变长度信源编码方法的先驱。

差不多在 40 年之后, 1875 年, E. 博多 (Emile Baudot) 设计出一种电报码, 其中每一个字母编成一个固定长度为 5 的二进制码字。在博多码中, 二进制码的元素是等长度的, 且指定为传号和空号。

虽然莫尔斯在研制第一个电的数字通信系统(电报)中起了重要的作用, 但是现在我们所指的现代数字通信系统起源于奈奎斯特 (Nyquist, 1924 年) 的研究。奈奎斯特研究了在给定带宽的电报信道上, 无符号间干扰的最大信号传输速率。他用公式表达了一个电报系统的模型, 其中发送信号的一般形式为

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT) \quad (1-4-1)$$

式中, $g(t)$ 表示基本的脉冲形状, $\{a_n\}$ 是以速率 $1/T$ bit/s 发送的 $\{\pm 1\}$ 二进制数据序列。奈奎斯特提出了带宽限于 W Hz 的最佳脉冲形状, 并且在脉冲抽样时刻 kT (译注^①) ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 无符号间干扰的条件下的最大比特率。他得出结论: 最大脉冲速率是 $2W$ 脉冲/s, 该速率称为奈奎斯特速率。通过采用脉冲 $g(t) = (\sin 2\pi Wt)/2\pi Wt$ 可以达到此脉冲速率。这个脉冲形状也允许在抽样时刻, 对无符号间干扰的数据进行恢复。奈奎斯特的研究成果等价于带限信号抽样定理的一种形式, 后来 (1948 年) 香农准确地阐述了该定理。抽样定理指出: 带宽为 W 的信号可以由它以奈奎斯特速率 $2W$ 样值/s 抽样的样值通过下列插值公式重构

$$s(t) = \sum_n s\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin[2\pi W(t - n/2W)]}{2\pi W(t - n/2W)} \quad (1-4-2)$$

鉴于奈奎斯特的研究工作, 哈特利 (Hartley, 1928 年) 研究了当采用多幅度电平时在带限信道上能可靠地传输数据的问题。哈特利假定接收机能以某个准确度 (譬如 A_δ) 可靠地估计接收信号幅度。这个研究使得哈特利得出这样的结论: 当最大的信号幅度限于 A_{\max} (固定功率限制) 且幅度分辨率是 A_δ 时, 存在一个能在带限信道可靠通信的最大数据速率。

在通信的发展中, 另一个有重大意义的是科尔莫哥洛夫 (Kolmogorov, 1939 年) 和维纳 (Winer, 1942 年) 的研究, 他研究了在加性噪声 $n(t)$ 存在的情况下, 根据对接收信号 $r(t) = s(t) + n(t)$ 的观测来估计期望的信号波形 $s(t)$ 的问题。这个问题出现在信号解调中。科尔莫哥洛夫和维纳得出一个线性滤波器, 其输出是对期望信号 $s(t)$ 最好的均方近似。这个滤波器称为最佳线性 (科尔莫哥洛夫-维纳) 滤波器。

哈特利和奈奎斯特的关于数字信息最大传输速率的研究成果是香农 (Shannon, 1948 年) 研究工作的先导, 香农奠定了信息传输的数学基础, 并导出对数字通信系统的基本限制。香农在他的开拓性的研究中采用了信息源和通信信道的概率模型, 以统计术语将可靠的信息传输基本问题表示成公式。根据这些统计的公式表示, 他对信源的信息含量采用了对数的度量。他也证明了发送机的功率限制、带宽限制和加性噪声的影响可以和信道联系起来, 合并成一个单一的参数, 称为信道容量。例如, 在加性高斯白 (平坦频谱) 噪声干扰情况下, 一个带宽为 W 的理想带限信道所具有的容量为

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{WN_0} \right) \text{ b/s} \quad (1-4-3)$$

式中, P 是平均发送功率, N_0 是加性噪声的功率谱密度。信道容量的意义如下: 如果信源的信息速率 R 小于 C ($R < C$), 那么采用适当的编码达到在信道上可靠 (无差错) 地传输在理论上是可能的。另一方面, 如果 $R > C$, 不管在发送机和接收机中采用多少信号处理, 都不可能达到可靠地传输。因此, 香农建立了对信息通信的基本的限制, 并开创了一个新的领域, 现在我们称之为信息论。

对数字通信领域作出重要贡献的另一位科学家是科捷利尼科夫 (Kotelnikov, 1947 年), 他用几何的方法提出了对各种各样的数字通信系统的相干分析。科捷利尼科夫的方法后来由沃曾克拉夫特和雅各布斯 (Wozencraft 和 Jacobs, 1965 年) 进一步推广。

在香农的研究成果公布之后, 接着就是汉明 (Hamming, 1950 年) 的纠错和纠错码的经典研究工作, 用来克服信道噪声的不利影响。在随后的多年中, 汉明的研究成果激发了许多研究

① 译注: 原文误写成 k/T 。

工作者,发现了种种新的功能强的码,其中许多码用于当今现代通信系统中。

在过去三四十年中,对数据传输需求的增长以及更复杂的集成电路的发展,导致了非常有效的且更可靠的数字通信系统的发展。在这个发展过程中,香农关于信道最大传输极限及所达到的性能界限的最初结论及其推广已作为通信系统设计的基准。由香农和其他研究人员导出的理论极限对信息论的发展做出了贡献,并成为设计和开发更有效的数字通信系统不断努力的最终目标。

在香农、科捷利尼科夫和汉明等人的早期研究工作之后,数字通信领域又有了许多新的进展。一些著名的进展如下:

- 穆勒(Muller, 1954 年)、里德(Reed, 1954 年)、里德和所罗门(Reed 和 Solomon, 1960 年)、鲍斯和雷-乔德赫里(Bose 和 Ray-Chaudhuri, 1960 年)和歌帕(Goppa, 1970 年, 1971 年)等人发展了新的分组码。

- 由福尼(Forney, 1966 年)发展了级联码。

- 鲍斯-查德胡里-霍克奎恩海姆(Bose-Chaudhuri-Hocquenghem, BCH)码的有效地计算译码的发展,例如伯尔坎姆-马西(Berlekamp-Massey)算法(参见 Chien, 1964 年; Berlekamp, 1968 年)。

- 对卷积码及译码算法发展做出贡献的有沃曾克拉夫特和瑞峰(Wozencraft 和 Reiffen, 1961 年)、法诺(Fano, 1963 年)、齐岗吉诺夫(Zigangirov, 1966 年)、杰利内克(Jelinek, 1969 年)、福尼(Forney, 1970 年, 1972 年, 1974 年)和维特比(Viterbi, 1967 年, 1971 年)。

- 恩格伯克(Ungerboeck, 1982 年)、福尼等人(Forney 等, 1984 年)和魏(Wei, 1987 年)及其他人发展了网格编码调制。

- 用于数据压缩的高效的信源编码算法的发展,如由兹夫和莱帕(Ziv 和 Lempel, 1977 年, 1978 年)和林德等人(Linde 等, 1980 年)设计的算法。

- 伯罗(Berrou, 1993 年)等人的 Turbo 码和迭代译码的发展。

1.5 本书概貌

第 2 章简要回顾概率论和随机过程的基本概念。在这一章中,我们主要介绍用于全书的结论,并建立必要的符号表示法。

第 3 章是离散信源编码和模拟信源编码的入门,包括用于离散信源的霍夫曼编码算法和莱帕-兹夫算法,以及用于模拟信源的标量和向量量化技术。

第 4 章从数学的观点介绍通信信号与系统的特征,包括用于数字通信的信号波形的几何表示。

第 5~8 章介绍对加性高斯白噪声信道的调制/解调和信道编码/译码,重点是最佳解调和译码技术及其性能。

对有失真线性滤波器信道的有效的调制器和解调器的设计,在第 9~11 章介绍。重点是信号设计和补偿信道失真的信道均衡方法。

最后 4 章讨论几个更专业的课题。第 12 章介绍多信道和多载波通信系统。第 13 章重点介绍数字通信的扩展频谱信号及其性能。第 14 章深入地研究了衰落多径信道上的通信问题,包括信道特征的描述、信号设计、解调技术及其性能、编码/译码技术及其性能。

本书最后一章介绍多用户通信系统和多址方法。

1.6 文献与参考资料

在 19 世纪,有几篇关于无线电和电信发展的论文,可以从以下学者的著作中找到:麦克马洪(McMahon,1984 年)、米尔曼(Millman,1984 年)、赖德和芬克(Ryder 和 Fink,1984 年)。我们已经列举了奈奎斯特(Nyquist,1924 年)、哈特利(Hartley,1928 年)、科捷利尼科夫(Kotelnikov,1947 年)、香农(Shannon,1948 年)和汉明(Hamming,1950 年)等学者的经典著作,以及自 1950 年以来,在数字通信领域中较重要的进展。IEEE 出版社出版了由斯隆和怀纳(Sloane 和 Wyner,1993 年)编著的一本书以及早先俄罗斯的多布鲁辛和卢潘诺夫(Dobrushine 和 Lupanov,1963 年)编著的一本书中,其中发表了香农的论文集。其他使读者感兴趣的 IEEE 出版社汇编出版物还有由伯尔坎姆(Berlekamp,1974 年)编著的《编码理论发展中的重要论文集》和由斯莱皮恩(Slepian,1974 年)编著的《信息论发展中的重要论文》。

第2章 概率论与随机过程

在数字通信系统设计中,概率论与随机过程是最重要的数学工具。本章对于信息源的统计建模、信源输出数字化、数字信息传输信道的表征、设计用以处理来自信道载荷信息信号的接收机以及评估通信系统的性能等方面都是很重要的。对于这些内容,我们只介绍概率论和随机过程中的一些定义及基本概念,并且导出对于设计高效率的数字通信系统及评估其性能都很重要的一些结论。

考虑到大多数读者已具有概率论和随机过程的初步知识,因此本章主要用作复习。如果读者没有相关知识,可以通过本章得到简明的概念,再阅读与本章内容有关的著作,如达文波特和鲁特(Davenport 和 Root, 1958 年)、达文波特(Davenport, 1970 年)、帕波利斯(Papoulis, 1984 年)、海尔斯特朗姆(Helstrom, 1991 年)、斯达克和沃兹(Stark 和 Woods, 1994 年)以及列昂-加西亚(Leon-Garcia, 1994 年)等人的著作。

2.1 概率

让我们来研究一个实验,例如一个滚动的骰子,它有几种可能的结果。该实验的样本空间是由所有可能的结果的集组成的。就骰子来说,

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (2-1-1)$$

式中整数 $1, \dots, 6$ 表示该骰子 6 个面上的圆点的数目。这 6 个可能的结果是实验的样点。一个事件是 S 的一个子集,且可以由任意数目的样点组成。例如,事件 A 定义为

$$A = \{2, 4\} \quad (2-1-2)$$

事件 A 由结果 2 和 4 组成。事件 A 的补对立事件记作 \bar{A} , \bar{A} 是由 S 中不包含在 A 中的所有样点组成的。因此,

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 6\} \quad (2-1-3)$$

如果两个事件没有公共样点,则这两个事件是互不相容的,也就是说,一个事件的发生会排除其他事件的发生。例如,如果 A 定义为式(2-1-2)且事件 B 定义为

$$B = \{1, 3, 6\} \quad (2-1-4)$$

那么, A 与 B 为互不相容事件。类似地, A 与 \bar{A} 为互不相容事件。

两个事件的和是另一个事件,则该事件由两个事件中的所有样点组成。例如, B 是定义为式(2-1-4)的事件,而 C 是定义为

$$C = \{1, 2, 3\} \quad (2-1-5)$$

的事件,那么 B 与 C 之和记为 $B \cup C$, 是事件

$$\begin{aligned} D &= B \cup C \\ &= \{1, 2, 3, 6\} \end{aligned} \quad (2-1-6)$$

同样地, $A \cup \bar{A} = S$, 式中 S 是整个样本空间或必然事件。另一方面,如果两个事件之交是由两个事件的公共点所构成的一个事件,因此,若 $E = B \cap C$ 表示分别由式(2-1-4)和式(2-1-5)

定义的事件 B 和 C 之交,那么

$$E = \{1, 3\}$$

当两个事件互不相容时,它们之交为零事件,记为 ϕ 。例如, $A \cap B = \phi$ 及 $A \cap \bar{A} = \phi$ 。两个事件之和与之交的定义可直接推广到两个以上的事件。

将 A 与 S 中的每一事件联系起来的是概率 $P(A)$ 。在说明事件的概率时,我们采用一种公理化的观点,即假定事件 A 的概率满足条件 $P(A) \geq 0$ 。还假定样本空间(必然事件)的概率为 $P(S) = 1$,而第三个假定涉及互不相容的事件。假设 $A_i, i = 1, 2, \dots$, 是样本空间 S 的一定数量(也可能是无穷的)的事件,且有

$$A_i \cap A_j = \phi \quad (i \neq j = 1, 2, \dots)$$

那么,这些互不相容事件之和的概率满足条件

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i) \quad (2-1-7)$$

例如,投掷一个匀质的骰子,每个可能的结果为 $1/6$ 。由式(2-1-2)定义的事件 A 由两个互不相容的子事件或结果组成,因此 $P(A) = 2/6 = 1/3$ 。事件 $A \cup B$ 的概率是 $P(A) + P(B) = 1/3 + 1/2 = 5/6$,其中 A 和 B 是分别由式(2-1-2)和式(2-1-4)定义的互不相容的事件。

1. 联合事件和联合概率

上面分析了单一试验的情况,下面进行两个试验并研究其结果,两个试验可以是一个骰子分别投掷两次,或者两个骰子各自投掷一次。在任何一种情况下,样本空间由 36 种成对的 (i, j) 组成,这里 $i, j = 1, 2, \dots, 6$ 。如果骰子是匀质的,那么样本空间中每一点出现的概率是 $1/36$ 。现在我们可以研究联合事件,例如 $\{i \text{ 是偶数}, j = 3\}$,那么由样点概率的知识可确定这类联合事件的联合概率。

一般情况下,如果一个试验的可能结果为 A_i 个 ($i = 1, 2, \dots, n$),第二个试验可能的结果为 B_j 个 ($j = 1, 2, \dots, m$),则联合试验具有可能的联合结果 (A_i, B_j) ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$)。与每一个联合结果 (A_i, B_j) 联系在一起的是联合概率 $P(A_i, B_j)$,它满足以下条件

$$0 \leq P(A_i, B_j) \leq 1$$

假定结果 B_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 是互不相容的,由此可得

$$\sum_{j=1}^m P(A_i, B_j) = P(A_i) \quad (2-1-8)$$

类似地,如果结果 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是互不相容的,则有

$$\sum_{i=1}^n P(A_i, B_j) = P(B_j) \quad (2-1-9)$$

此外,如果两个试验所有的结果都是互不相容的,那么

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(A_i, B_j) = 1 \quad (2-1-10)$$

上述结论可以直接推广到两个以上的试验。

2. 条件概率

研究一个联合试验,其中一个联合事件以概率 $P(A, B)$ 发生。假定事件 B 已经发生,求事件 A 发生的概率。这称做在事件 B 发生的条件下,事件 A 的条件概率,且定义为

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} \quad (2-1-11)$$

其中假定 $P(B) > 0$ 。以相似的方式,在事件 A 发生的条件下,事件 B 的概率定义为

$$P(B|A) = \frac{P(A, B)}{P(A)} \quad (2-1-12)$$

其中 $P(A) > 0$ 。式(2-1-11)与式(2-1-12)之间的关系可以表示为

$$P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (2-1-13)$$

式(2-1-11)到式(2-1-13)也适用于单一试验的情况,此时 A 和 B 是定义在样本空间 S 中的任意两个事件。 $P(A, B)$ 可理解为 $A \cap B$ 的概率,也就是说, $P(A, B)$ 表示 A 和 B 同时发生的概率。例如,对于单独投掷一个骰子的情况,研究由式(2-1-4)和式(2-1-5)分别给出的事件 B 和 C 。联合事件由样点 $\{1, 3\}$ 组成。在事件 B 发生的条件下,事件 C 的条件概率为

$$P(C|B) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

在单个试验中,我们看到,当两个试验 A 和 B 是互不相容的,即 $A \cap B = \emptyset$ 时, $P(A|B) = 0$ 。还有,如果 A 是 B 的一个子集,则 $A \cap B = A$, 因此

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

另一方面,如果 B 是 A 的一个子集,则 $A \cap B = B$, 因此

$$P(A|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

对于条件概率,一个极其有用的公式是贝叶斯(Bayes)定理。该定理说明,如果 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是互不相容的事件,正如

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

而 B 是一个具有非零概率的任意事件,那么

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i, B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)} \end{aligned} \quad (2-1-14)$$

在第 5 章,我们将利用这个公式推导数字通信系统的最佳接收机结构,其中事件 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示在一个给定的时间间隔内可能发送的消息, $P(A_i)$ 表示它们的先验概率。 B 表示接收信号,这个信号由受到噪声恶化的发送消息(A_i 中之一)组成, $P(A_i|B)$ 是在观察到接收信号 B 的条件下的 A_i 的后验概率。

3. 统计独立

两个或多个事件的统计独立是概率论中另一个重要的概念。当我们研究两个或更多个试验,或者对一个试验重复多次时,这个概念常常出现。为了解释这个概念,研究事件 A 和 B 及其条件概率 $P(A|B)$,它是在 B 发生的条件下 A 发生的概率。假设 A 的发生不依赖于 B 的发生,也就是说,

$$P(A|B) = P(A) \quad (2-1-15)$$

将式(2-1-15)代入式(2-1-13),可得如下结果

$$P(A, B) = P(A)P(B) \quad (2-1-16)$$

这就是说,事件 A 和 B 的联合概率因子分解成单个事件概率或边际概率 $P(A)$ 和 $P(B)$ 的乘积。当事件 A 和 B 满足式(2-1-16)时,称它们统计独立。

例如,研究两次连续投掷骰子的试验。令 A 表示在第一次投掷中的偶数样点 $\{2, 4, 6\}$, B 表示第二次投掷中可能的偶数结果 $\{2, 4, 6\}$ 。对于一个匀质骰子,令概率 $P(A) = 1/2$ 和 $P(B) = 1/2$ 。现在,“第一次投掷的偶数结果与第二次投掷的偶数结果”的联合事件的联合概率正好是 9 对 (i, j) 结果, $i = 2, 4, 6, j = 2, 4, 6$, 其值为 $1/4$, 即

$$P(A, B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

因此,事件 A 和 B 是统计独立的。类似地,可以说两个试验的结果是统计独立的。

统计独立的定义可以推广到 3 个或更多个事件中。3 个统计独立的事件 A_1, A_2, A_3 必须满足下列条件

$$\begin{aligned} P(A_1, A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1, A_3) &= P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2, A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1, A_2, A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \end{aligned} \quad (2-1-17)$$

一般情况下,倘若联合事件(在某一时间,事件的个数为 $2, 3, 4, \dots, n$)的概率因子分解成各个单独事件的概率的乘积,那么事件 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 就是统计独立的。

2.1.1 随机变量、概率分布和概率密度

给定一个具有样本空间 S 且元素 $s \in S$ 的试验,我们可定义一个函数 $X(s)$, 其变量域是 S , 其函数范围是在实轴上的一组数,函数 $X(s)$ 称为随机变量。例如,如果掷一枚硬币,可能的结果是正面(H)和反面(T),所以 S 只包含标记 H 和 T 的两点。假设定义一个函数 $X(s)$ 为

$$X(s) = \begin{cases} 1 & (s = H) \\ -1 & (s = T) \end{cases} \quad (2-1-18)$$

那么可将掷硬币试验的两个可能的结果映射到实轴上的两个点(± 1)。另一个试验是投掷一只骰子,可能的结果 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。在此样本空间上定义一个随机变量,可以是 $X(s) = s$, 在这种情况下,试验的结果被映射成整数 $1, \dots, 6$;也可以是随机变量 $X(s) = s^2$, 在这种情况下,试验的结果被映射成整数 $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ 。以上都是离散随机变量的例子。

虽然我们所举的试验例子都是具有有限组合的可能结果,但是也有许多物理系统(试验)产生连续的输出(结果)。例如,由电子放大器产生的噪声电压具有连续的幅度。因此,电压幅度 $v \in S$ 的样本空间是连续的,而且映射 $X(v) = v$ 也是如此。在这种情况下,随机变量^① X 称为连续随机变量。

给定随机变量 X , 研究事件 $\{X \leq x\}$, 其中 x 是在 $(-\infty, \infty)$ 区间内的任意实数。将这个

^① 随机变量 $X(s)$ 简写为 X 。

事件的概率写成 $P(X \leq x)$, 简记为 $F(x)$, 即

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2-1-19)$$

函数 $F(x)$ 称为随机变量 X 的概率分布函数, 也称为累积分布函数(CDF)。因为 $F(x)$ 是一个概率, 所以它的范围被限制在区间 $0 \leq F(x) \leq 1$ 内。事实上, $F(-\infty) = 0$ 及 $F(\infty) = 1$ 。例如, 由掷一个匀质硬币产生的且由式(2-1-18)定义的离散随机变量具有图 2-1-1(a)所示的 CDF。在 $F(x)$ 中有两个不连续点或突变点, 一点在 $x = -1$ 而另一点在 $x = 1$ 。类似地, 由投掷一个匀质骰子产生的随机变量 $X(s) = s$ 具有图 2-1-1(b)所示的 CDF, 在这种情况下, $F(x)$ 有 6 个突变点, 分别位于 $x = 1, \dots, 6$ 上。

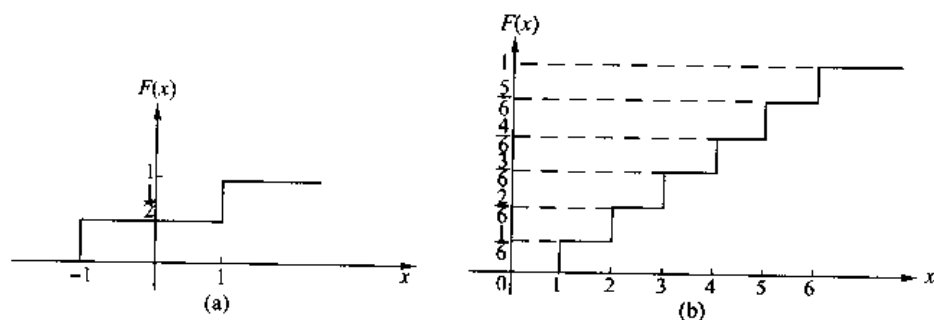


图 2-1-1 两个离散随机变量的累积分布函数的例子

一个典型的连续随机变量的 CDF 示于图 2-1-2, 它是 x 的平滑非降函数。在某些实际问题中, 会遇到一种混合型的随机变量, 这种随机变量的 CDF 在实轴上的某些部分是平滑、非降函数, 同时在一些 x 的离散值处有突变点。图 2-1-3 所示是这种 CDF 的一个例子。

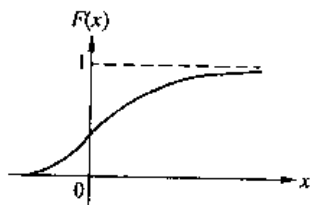


图 2-1-2 一个连续随机变量的累积分布函数的例子

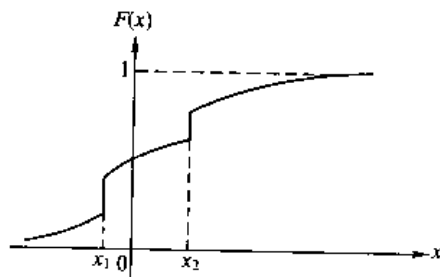


图 2-1-3 一种混合型随机变量的累积分布函数的例子

累积分布函数 $F(x)$ 的导数称为随机变量 X 的概率密度函数(PDF), 记为 $p(x)$ 。于是有

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2-1-20)$$

或等价地

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2-1-21)$$

因为 $F(x)$ 是一个非降函数, 所以 $p(x) \geq 0$ 。当随机变量是离散的或混合型的时, 其 PDF 在 $F(x)$ 的不连续点处存在冲激。在这种情况下, $p(x)$ 的离散部分可表示为

$$p(x) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \delta(x - x_i) \quad (2-1-22)$$

式中, $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是随机变量的可能离散值, $P(X=x_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 是概率, $\delta(x)$ 表示在 $x=0$ 处的冲激。

我们常常要确定一个随机变量 X 落入 (x_1, x_2) 区间内 ($x_2 > x_1$) 的概率问题。为了确定这个事件的概率, 从事件 $\{X \leq x_1\}$ 开始, 该事件总是可以表示成两个互不相容事件 $\{X \leq x_1\}$ 和 $\{x_1 < X \leq x_2\}$ 之和。因此, 事件 $\{X \leq x_2\}$ 的概率可表示成互不相容事件的概率之和, 所以

$$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

或者等价为

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \end{aligned} \quad (2-1-23)$$

换言之, 事件 $\{x_1 < X \leq x_2\}$ 的概率就是在 $x_1 < X \leq x_2$ 的范围内 PDF 下的面积。

1. 多随机变量、联合概率分布和联合概率密度

在处理联合试验或重复多次做某个试验时, 会遇到多个随机变量及其 CDF 和 PDF。多随机变量基本上是在联合试验的样本空间上定义的多维函数。从两个随机变量 X_1 和 X_2 开始, X_1 和 X_2 可能是连续的、离散的或混合的。这两个随机变量的联合 CDF 定义为

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2 \end{aligned} \quad (2-1-24)$$

式中, $p(x_1, x_2)$ 是联合 PDF。后者也可以表示成如下形式

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2) \quad (2-1-25)$$

当联合 PDF $p(x_1, x_2)$ 对其中一个变量积分时, 可以得到另一个变量的 PDF, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 &= p(x_2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_2 &= p(x_1) \end{aligned} \quad (2-1-26)$$

由对其中一个变量积分得到的 PDF, $p(x_1)$ 和 $p(x_2)$ 称为边缘 PDF。如果 $p(x_1, x_2)$ 对两个变量积分, 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = F(\infty, \infty) = 1 \quad (2-1-27)$$

以及 $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$ 。

上述表达式可直接推广到多维随机变量。假设 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是具有联合 CDF 的随机变量, 其联合 CDF 定义为

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \end{aligned} \quad (2-1-28)$$

式中 $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是联合 PDF。对式(2-1-28)中的 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 求偏导数, 得到

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-1-29)$$

在 $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中的任何多个变量可通过对这些变量的积分来消除。例如, 对 x_2 和 x_3 积分, 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_2 dx_3 = p(x_1, x_4, \dots, x_n) \quad (2-1-30)$$

也可以得到 $F(x_1, \infty, \infty, x_4, \dots, x_n) = F(x_1, x_4, x_5, \dots, x_n)$ 以及 $F(x_1, -\infty, -\infty, x_4, \dots, x_n) = 0$ 。

2. 条件概率分布函数

我们来研究两个随机变量 X_1 和 X_2 , 其联合 PDF 为 $p(x_1, x_2)$ 。假设希望在条件

$$x_2 - \Delta x_2 < x_2 \leq x_2$$

下求随机变量 $X_1 \leq x_1$ 的概率, 式中 Δx_2 是某个正增量, 也就是说, 希望求事件 $(X_1 \leq x_1 | x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$ 的概率。利用前面已建立的关于一个事件的条件概率的关系式, 可将事件 $(X_1 \leq x_1 | x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$ 表示成联合事件 $(X_1 \leq x_1, x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$ 的概率除以事件 $(x_2 - \Delta x_2 < X_2 \leq x_2)$ 的概率, 因此

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1 | x_2 - \Delta x_2 < x_2 \leq x_2) &= \frac{\int_{-\infty}^{x_1} \int_{x_2 - \Delta x_2}^{x_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2}{\int_{x_2 - \Delta x_2}^{x_2} p(u_2) du_2} \\ &= \frac{F(x_1, x_2) - F(x_1, x_2 - \Delta x_2)}{F(x_2) - F(x_2 - \Delta x_2)} \end{aligned} \quad (2-1-31)$$

假定 PDF $p(x_1, x_2)$ 和 $p(x_2)$ 在 $(x_2 - \Delta x_2, x_2)$ 区间上是连续函数, 可用 Δx_2 除式(2-1-31)中的分子和分母, 并取 $\Delta x_2 \rightarrow 0$ 时的极限, 可得到

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1 | X_2 = x_2) &\equiv F(x_1 | x_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2) / \partial x_2}{\partial F(x_2) / \partial x_2} \\ &= \frac{\partial \left[\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2 \right] / \partial x_2}{\partial \left[\int_{-\infty}^{x_2} p(u_2) du_2 \right] / \partial x_2} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{x_1} p(u_1, x_2) du_1}{p(x_2)} \end{aligned} \quad (2-1-32)$$

上式是在给定随机变量 X_2 的情况下, 随机变量 X_1 的条件 CDF, $F(-\infty | x_2) = 0$ 及 $F(\infty | x_2) = 1$ 。将式(2-1-32)对 x_1 微分, 可得到相应的 PDF $p(x_1 | x_2)$, 其形式为

$$p(x_1 | x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_2)} \quad (2-1-33)$$

换一种方式, 可将联合 PDF $p(x_1, x_2)$ 以条件 PDF $p(x_1 | x_2)$ 或 $p(x_2 | x_1)$ 表示为

$$p(x_1, x_2) = p(x_1 | x_2) p(x_2)$$

$$= p(x_2 | x_1) p(x_1) \quad (2-1-34)$$

以上关系式很容易推广到多维随机变量的情况。从随机变量 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的联合 PDF 开始, 可写出

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) p(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (2-1-35)$$

式中, k 是在 $1 < k < n$ 范围的任意整数。相应于 PDF $p(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$ 的联合条件 CDF 为

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_k} p(u_1, u_2, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n) du_1 du_2 \dots du_k}{p(x_{k+1}, \dots, x_n)} \quad (2-1-36)$$

这个条件 CDF 满足前面建立的关于这些函数的性质, 例如

$$F(\infty, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = F(x_2, x_3, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$F(-\infty, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$$

3. 统计独立的随机变量

我们已经阐明了一个样本空间 S 内的两个或更多个事件的统计独立的概念。统计独立的概念可以推广到定义在一个样本空间上的多个随机变量的情况, 该样本空间是由联合试验或单个试验重复多次产生的。如果试验的结果互不相容, 那么一个试验结果的概率与其他试验的结果无关。也就是说, 试验结果的联合概率因子分解成相应的每个试验结果的概率的乘积。因此, 如果与这些试验结果相应的随机变量的联合 PDF 因子分解成各边缘 PDF 的乘积, 那么在这个意义上, 这些随机变量是相互统计独立的, 所以当且仅当

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n) \quad (2-1-37)$$

或

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n) \quad (2-1-38)$$

成立时, 各多维随机变量是统计独立的。

2.1.2 随机变量的函数

在概率的实际应用中, 常常出现下述问题。已知一个随机变量 X 由它的 PDF $p(x)$ 来表征, 需求随机变量 $Y = g(X)$ 的 PDF, 其中 $g(X)$ 是某个已知的 X 的函数。当从 X 到 Y 的映射 g 一一对应时, 求 $p(y)$ 是比较直截了当的。然而, 当这种映射不是一一对应的, 例如 $Y = X^2$ 的情况, 在推导 $p(y)$ 时, 必须非常小心。

例 2-1-1 研究随机变量 Y , 其定义为

$$Y = aX + b \quad (2-1-39)$$

式中 a 和 b 是常数, 假定 $a > 0$ 。如果 $a < 0$, 解题方法类似(参见习题 2-3)。注意, 图 2-1-4(a) 说明的映射是线性和单调的。令 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别表示 X 和 Y 的 CDF^①, 则

① 为了避免在改变变量时发生混淆, 对各自的 PDF 和 CDF 使用了下标。

$$\begin{aligned}
 F_Y(Y) &= P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) \\
 &= \int_{-\infty}^{(y-b)/a} p_X(x) dx = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)
 \end{aligned} \quad (2-1-40)$$

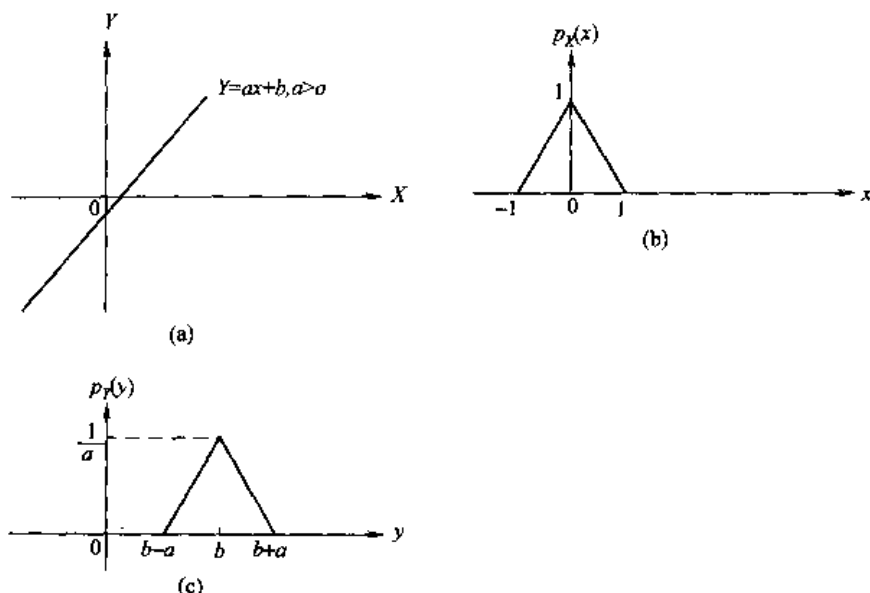


图 2-1-4 随机变量 X 的线性变换及 X 与 Y 的相应的 PDF 的例子

将式(2-1-40)对 y 微分,可得到各 PDF 之间的关系,即

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad (2-1-41)$$

因此,对于式(2-1-39)的线性变换,式(2-1-40)和式(2-1-41)以随机变量 X 的 CDF 和 PDF 表示了随机变量 Y 的 CDF 和 PDF。为了说明对特定 PDF $p_X(x)$ 的映射情况,研究图2-1-4(b)所示的 $p_X(x)$ 。由式(2-1-39)映射得到 PDF $p_Y(y)$,如图 2-1-4(c)所示。

例 2-1-2 研究随机变量 Y ,其定义为

$$Y = aX^3 + b \quad (a > 0) \quad (2-1-42)$$

正如例 2-1-1 中那样,在 X 与 Y 之间的映射是一一对应的。因此

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(aX^3 + b \leq y) \\
 &= P\left[X \leq \left(\frac{y-b}{a}\right)^{1/3}\right] = F_X\left[\left(\frac{y-b}{a}\right)^{1/3}\right]
 \end{aligned} \quad (2-1-43)$$

将式(2-1-43)对 y 微分,得到所要求的两个 PDF 之间的关系式

$$p_Y(y) = \frac{1}{3a[(y-b)/a]^{2/3}} p_X\left[\left(\frac{y-b}{a}\right)^{1/3}\right] \quad (2-1-44)$$

例 2-1-3 随机变量 Y 定义为

$$Y = aX^2 + b \quad (a > 0) \quad (2-1-45)$$

与例 2-1-1 和例 2-1-2 相比,图 2-1-5 说明的 X 与 Y 之间的映射不是一一对应的。为了求 Y

的 CDF, 我们观察到

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(aX^2 + b \leq y) \\ &= P\left(|X| \leq \sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \end{aligned}$$

因此

$$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \quad (2-1-46)$$

将式(2-1-46)对 y 微分, 可得到以 X 的 PDF 表示的 Y 的 PDF, 其形式如下

$$p_Y(y) = \frac{p_X\left[\sqrt{(y-b)/a}\right]}{2a\sqrt{(y-b)/a}} + \frac{p_X\left[-\sqrt{(y-b)/a}\right]}{2a\sqrt{(y-b)/a}} \quad (2-1-47)$$

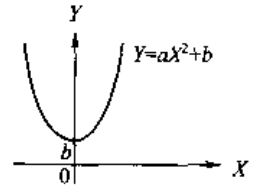


图 2-1-5 随机变量 X 的平方变换

在例 2-1-3 中, 我们观察到方程 $g(x) = ax^2 + b = y$ 有两个实数解

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{y-b}{a}} \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{y-b}{a}} \end{aligned}$$

而 $p_Y(y)$ 由相应于这两个解的两项组成

$$p_Y(y) = \frac{p_X[x_1 = \sqrt{(y-b)/a}]}{|g'(x_1 = \sqrt{(y-b)/a})|} + \frac{p_X[x_2 = -\sqrt{(y-b)/a}]}{|g'(x_2 = -\sqrt{(y-b)/a})|} \quad (2-1-48)$$

式中 $g'(x)$ 表示 $g(x)$ 的一阶导数。

在一般情况下, 假定 x_1, x_2, \dots, x_n 为方程 $g(x) = y$ 的实数根, 那么随机变量 $Y = g(x)$ 的 PDF 可以表示为

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (2-1-49)$$

式中, 根 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 y 的函数。

现在, 我们来研究多维随机变量的函数。假设 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是具有联合 PDF $p_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的随机变量, 令 $Y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是另一个与 X_i 有关的 n 个随机变量的集合, Y_i 与 X_i 的函数关系是

$$Y_i = g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-1-50)$$

假定 $g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) (i=1, 2, \dots, n)$ 是具有连续偏导数且可逆的单值函数。所谓“可逆的”, 意指 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 可表示为 $Y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的函数, 其形式为

$$X_i = g_i^{-1}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-1-51)$$

式中, 逆函数假定为具有连续偏导数的单值函数。现在的问题是, 在给定联合 PDF $p_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的情况下, 求 $Y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的联合 PDF $p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。

为了求所希望的关系式, 令 R_X 是随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的 n 维空间中一块区域。令 R_Y 是与 R_X 的(一对一)映射, 该映射由函数 $Y_i = g_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 确定。显然,

$$\iint_{R_Y} \dots \int p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

$$= \iint_{R_X} \cdots \int p_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2-1-52)$$

将式(2-1-52)右边的多重积分中的变量用下式替换

$$x_i = g_i^{-1}(y_1, y_2, \cdots, y_n) \equiv g_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \iint_{R_Y} \cdots \int p_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= \iint_{R_Y} \cdots \int p_X(x_1 = g_1^{-1}, x_2 = g_2^{-1}, \cdots, x_n = g_n^{-1}) |J| dy_1 dy_2 \cdots dy_n \end{aligned} \quad (2-1-53)$$

式中, J 表示雅可比变换, 由下列行列式定义

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_n} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (2-1-54)$$

因此, 所希望的 $Y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的联合 PDF 的关系式是

$$p_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n) = p_X(x_1 = g_1^{-1}, x_2 = g_2^{-1}, \cdots, x_n = g_n^{-1}) |J| \quad (2-1-55)$$

例 2-1-4 实际当中常出现的两组 n 维随机变量之间的一个重要的函数关系式是下列线性变换

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (2-1-56)$$

式中, $\{a_{ij}\}$ 是常数。使用矩阵形式表示该变换比较方便, 这就是

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2-1-57)$$

式中 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 是 n 维向量, \mathbf{A} 是一个 $n \times n$ 维矩阵。假定 \mathbf{A} 是非奇异的, 那么 \mathbf{A} 是可逆的, 因此

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y} \quad (2-1-58)$$

与此等价, 我们得到

$$X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} Y_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (2-1-59)$$

式中, $\{b_{ij}\}$ 是逆矩阵 \mathbf{A}^{-1} 的元素, 该变换的雅可比变换是 $J = 1/\det \mathbf{A}$ 。因此

$$\begin{aligned} & p_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ &= p_X\left(x_1 = \sum_{j=1}^n b_{1j} y_j, \quad x_2 = \sum_{j=1}^n b_{2j} y_j, \cdots, x_n = \sum_{j=1}^n b_{nj} y_j\right) \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \end{aligned} \quad (2-1-60)$$

2.1.3 随机变量的统计平均

在表征试验的结果以及根据试验的样本空间确定随机变量时, 平均起着重要的作用。人们特别感兴趣的是单个随机变量的一阶矩和二阶矩, 以及在多维随机变量集合中任意一对随

机变量之间的联合矩,例如相关和协方差。单个随机变量的特征函数以及多维随机变量集合的联合特征函数也是很重要的。本节将专门对这些重要的统计平均下定义。

首先研究单个随机变量 X , 它由 PDF $p(x)$ 表征。 X 的均值或期望值定义为

$$E(X) \equiv m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (2-1-61)$$

式中, $E(\cdot)$ 表示求期望值(统计平均), 这是随机变量 X 的一阶矩。一般地, n 阶矩定义为

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (2-1-62)$$

现在, 假定一个随机变量 $Y = g(X)$, 其中 $g(X)$ 是随机变量 X 的某个任意函数。 Y 的期望值是

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx \quad (2-1-63)$$

特别情况, 如果 $Y = (X - m_x)^n$, 式中 m_x 是 X 的均值, 那么

$$E(Y) = E[(X - m_x)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n p(x) dx \quad (2-1-64)$$

因为这是一个相对于均值的矩, 所以该期望值称为随机变量 X 的 n 阶中心矩。当 $n=2$ 时, 该中心矩称为随机变量的方差, 且记为 σ_x^2 , 即

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \quad (2-1-65)$$

这个参数提供随机变量 X 偏离的度量。将式(2-1-65)的积分式中的 $(x - m_x)^2$ 项展开, 并注意到常数的期望值等于常数, 可得到方差与一阶矩及二阶矩的关系式, 即

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - m_x^2 \end{aligned} \quad (2-1-66)$$

在两个随机变量 X_1 和 X_2 具有联合 PDF $p(x_1, x_2)$ 的情况下, 定义联合矩为

$$E(X_1^k X_2^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2-1-67)$$

联合中心矩为

$$\begin{aligned} &E[(X_1 - m_1)^k (X_2 - m_2)^n] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)^k (x_2 - m_2)^n p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2-1-68)$$

式中, $m_i = E(X_i)$ 。特别重要的是相应于 $k = n = 1$ 的联合矩和联合中心矩, 这些联合矩分别称为随机变量 X_1 和 X_2 的相关和协方差。

在研究多维随机变量中, 可定义任意阶的联合矩。然而, 在实际应用中最有用的矩是一对随机变量之间的相关和协方差。为进一步说明, 假定 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是具有联合 PDF $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的随机变量。令 $p(x_i, x_j)$ 是随机变量 X_i 和 X_j 的联合 PDF, 那么 X_i 与 X_j 之间的相关由联合矩

$$E(X_i X_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (2-1-69)$$

给出, 而 X_i 与 X_j 的协方差是

$$\begin{aligned}
\mu_{ij} &\equiv E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) p(x_i, x_j) dx_i dx_j \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j - m_i m_j \\
&= E(X_i X_j) - m_i m_j
\end{aligned} \tag{2-1-70}$$

具有元素 μ_{ij} 的 $n \times n$ 矩阵称做随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的协方差矩阵。在 2-1.4 节对联合高斯随机变量的讨论中, 我们将遇到协方差矩阵。

如果 $E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = m_i m_j$, 则这两个随机变量是不相关的。在这种情况下, 协方差 $\mu_{ij} = 0$ 。我们注意到, 当 X_i 与 X_j 是统计独立时, 它们也是不相关的。然而, 如果 X_i 与 X_j 是不相关的, 它们不一定是统计独立的。

如果 $E(X_i X_j) = 0$, 则这两个随机变量是正交的。注意, 这个条件也适用于 X_i 与 X_j 不相关且两个随机变量之一或两者都有零均值的情况。

特征函数

一个随机变量的特征函数定义为统计平均

$$E(e^{jvX}) \equiv \phi(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p(x) dx \tag{2-1-71}$$

式中, 变量 v 是实数且 $j = \sqrt{-1}$ 。我们注意到 $\phi(jv)$ 可以描述为 PDF $p(x)$ 的傅里叶变换^①。因此, 其傅里叶反变换是

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(jv) e^{-jvx} dv \tag{2-1-72}$$

特征函数的一个有用的性质是它与随机变量矩的关系。注意到式(2-1-71)对 v 的一阶导数是

$$\frac{d\phi(jv)}{dv} = j \int_{-\infty}^{\infty} x e^{jvx} p(x) dx$$

求在 $v=0$ 处的一阶导数, 可得到一阶矩(均值)

$$E(X) = m_x = -j \left. \frac{d\phi(jv)}{dv} \right|_{v=0} \tag{2-1-73}$$

重复这个微分过程, 从而计算在 $v=0$ 处 $\phi(jv)$ 的 n 阶导数, 可得到 n 阶矩

$$E(X^n) = (-j)^n \left. \frac{d^n \phi(jv)}{dv^n} \right|_{v=0} \tag{2-1-74}$$

因此, 一个随机变量的 n 阶矩可以由特征函数确定。另一方面, 假定特征函数在 $v=0$ 点处可展成泰勒级数, 即

$$\phi(jv) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^n \phi(jv)}{dv^n} \right]_{v=0} \frac{v^n}{n!} \tag{2-1-75}$$

利用式(2-1-74)中的关系消去式(2-1-75)中的导数, 将得到一个以矩表示的特征函数表达式,

^① 通常, 一个函数的傅里叶变换定义为 $G(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-jvu} du$, 与式(2-1-71)的差别是指数上的负号。这是一个微小差别。因此, 称式(2-1-71)的积分为傅里叶变换。

其形式为

$$\phi(jv) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X^n) \frac{(jv)^n}{n!} \quad (2-1-76)$$

这个特征函数提供了一个求统计独立随机变量之和的 PDF 的简单方法。为了说明这一点,令 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为一组 n 个统计独立的随机变量,且令

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad (2-1-77)$$

问题是求 Y 的 PDF。先求 Y 的特征函数,再求傅里叶反变换,就可求得 Y 的 PDF。因此,

$$\begin{aligned} \phi_Y(jv) &= E(e^{jvY}) \\ &= E\left[\exp\left(jv \sum_{i=1}^n X_i\right)\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^n (e^{jvX_i})\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n e^{jvx_i}\right) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (2-1-78)$$

因为随机变量是统计独立的, $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$, 因此式(2-1-78)中的 n 重积分简化成 n 个单个积分的乘积,每个积分相应于某个 X_i 的特征函数。因此,

$$\phi_Y(jv) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(jv) \quad (2-1-79)$$

如果除了它们是统计独立的之外, X_i 是相同分布的,那么所有 $\phi_{X_i}(jv)$ 是相同的。因此,

$$\phi_Y(jv) = [\phi_X(jv)]^n \quad (2-1-80)$$

最后, Y 的 PDF 可由 $\phi_Y(jv)$ 的傅里叶反变换求得,即式(2-1-72)。

因为 n 个统计独立的随机变量之和的特征函数等于各单个随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的特征函数的乘积,所以在变换域内, Y 的 PDF 是 X_i 的 PDF 的 n 次卷积。在求 Y 的 PDF 中,用 n 次卷积的方法通常比上述特征函数方法更难。

在处理 n 维随机变量时,定义一个联合 PDF 的 n 维傅里叶变换是比较适宜的。具体地说,如果 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是具有 PDF $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的随机变量,则 n 维特征函数定义为

$$\begin{aligned} \phi(jv_1, jv_2, \dots, jv_n) &= E\left[\exp\left(j \sum_{i=1}^n v_i X_i\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(j \sum_{i=1}^n v_i x_i\right) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (2-1-81)$$

我们特别感兴趣的是二维特征函数

$$\phi(jv_1, jv_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(v_1 x_1 + v_2 x_2)} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2-1-82)$$

可以看到, $\phi(jv_1, jv_2)$ 对 v_1 和 v_2 的偏导数可以用来产生联合矩。例如,容易证明

$$E(X_1 X_2) = - \frac{\partial^2 \phi(jv_1, jv_2)}{\partial v_1 \partial v_2} \bigg|_{v_1=v_2=0} \quad (2-1-83)$$

用直接的方法可以得到高阶矩。

2.1.4 某些有用的概率分布

在后面各章中,我们将遇到几种不同类型的随机变量。本节我们列出常遇到的随机变量及其 PDF、CDF 和矩。本节从二项式分布开始介绍,它是一种离散随机变量的分布,然后介绍几种连续随机变量的分布。

1. 二项式分布

令 X 为一个离散随机变量,它有两个可能的取值: $X=1$ 或 $X=0$, 其概率分别为 p 和 $1-p$ 。 X 的 PDF 如图 2-1-6 所示,假定

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

式中 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是统计独立且同分布的随机变量,其 PDF 如图 2-1-6 所示。那么 Y 的概率分布函数是什么呢?

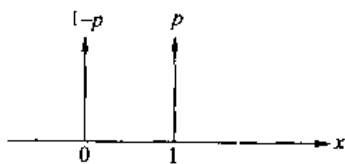


图 2-1-6 X 的概率分布函数

为了回答这个问题,我们看到 Y 的范围是 $0 \sim n$ 的整数集合。 $Y=0$ 的概率也就是所有 $X_i=0$ 的概率。因为 X_i 是统计独立的,

$$P(Y=0) = (1-p)^n$$

$Y=1$ 的概率也就是一个 $X_i=1$ 且其余 $X_i=0$ 的概率。因为这样的事件可有 n 种不同的方式发生,所以

$$P(Y=1) = np(1-p)^{n-1}$$

推广到一般情况, $Y=k$ 的概率就是 k 个 X_i 等于 1 且 $(n-k)$ 个 X_i 等于零的概率。因为有

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2-1-84)$$

种不同的组合可以导致事件 $\{Y=k\}$, 所以

$$P(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2-1-85)$$

式中 $\binom{n}{k}$ 为二项式系数。因此, Y 的 PDF 可以表示为

$$\begin{aligned} p(y) &= \sum_{k=0}^n P(Y=k) \delta(y-k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta(y-k) \end{aligned} \quad (2-1-86)$$

Y 的 CDF 是

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \leq y) \\ &= \sum_{k=0}^{[y]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned} \quad (2-1-87)$$

式中 $[y]$ 表示最大的整数 m 且 $m \leq y$ 。式(2-1-87)中的 CDF 表征了一个二项式分布的随机变量。

Y 的一阶矩和二阶矩是

$$E(Y) = np$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= np(1-p) + n^2 p^2 \\ \sigma^2 &= np(1-p) \end{aligned} \quad (2-1-88)$$

特征函数是

$$\psi(jv) = (1 - p + pe^{jv})^n \quad (2-1-89)$$

2. 均匀分布

均匀分布随机变量 X 的 PDF 和 CDF 如图 2-1-7 所示。 X 的一阶矩和二阶矩是

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2}(a+b) \\ E(X^2) &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab) \\ \sigma^2 &= \frac{1}{12}(a-b)^2 \end{aligned} \quad (2-1-90)$$

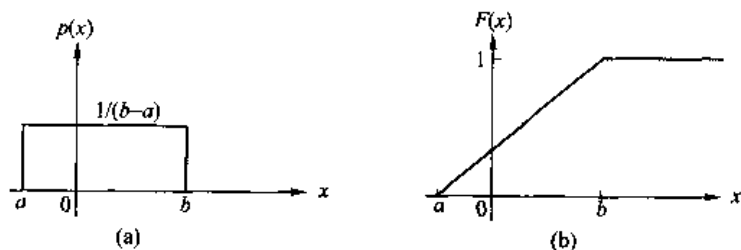


图 2-1-7 均匀分布随机变量的 PDF 和 CDF

特征函数是

$$\psi(jv) = \frac{e^{jvb} - e^{jva}}{jv(b-a)} \quad (2-1-91)$$

3. 高斯(正态)分布

高斯或正态分布随机变量的 PDF 是

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2} \quad (2-1-92)$$

式中 m_x 和 σ^2 分别是随机变量的均值和方差,其 CDF 是

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x p(u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-(u-m_x)^2/2\sigma^2} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m_x)/\sqrt{2}\sigma} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2-1-93)$$

式中, $\operatorname{erf}(x)$ 表示误差函数,其定义为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2-1-94)$$

上述 PDF 和 CDF 如图 2-1-8 所示。

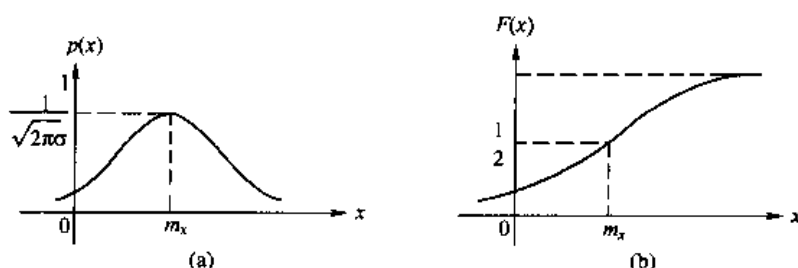


图 2-1-8 高斯分布随机变量的 PDF 和 CDF

其 CDF $F(x)$ 也可以用互补误差函数表示, 即

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x - m_x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

式中

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \\ &= 1 - \operatorname{erf}(x) \end{aligned} \quad (2-1-95)$$

注意: $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$, $\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x)$, $\operatorname{erf}(0) = \operatorname{erfc}(\infty) = 0$ 及 $\operatorname{erf}(\infty) = \operatorname{erfc}(0) = 1$ 。对于 $x > m_x$, 互补误差函数与高斯 PDF 尾部曲线下的面积成正比。当 x 值大时, 互补误差函数 $\operatorname{erfc}(x)$ 可以近似地表示成渐近级数

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots \right) \quad (2-1-96)$$

式中, 近似误差小于所取的最后一项。

一种经常用来表示高斯 PDF 尾部曲线下的面积的函数记为 $Q(x)$, 且定义为

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt, x \geq 0 \quad (2-1-97)$$

比较式(2-1-95)与式(2-1-97), 可得

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (2-1-98)$$

一个均值为 m_x 且方差为 σ^2 的高斯随机变量的特征函数是

$$\begin{aligned} \psi(jv) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2} \right] dx \\ &= e^{jvm_x - (1/2)v^2\sigma^2} \end{aligned} \quad (2-1-99)$$

高斯随机变量的中心矩是

$$E[(X - m_x)^k] \equiv \mu_k = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (k-1) \sigma^k & (\text{偶数 } k) \\ 0 & (\text{奇数 } k) \end{cases} \quad (2-1-100)$$

其原点矩可以用中心矩表示为

$$E(X^k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} m_x^i \mu_{k-i} \quad (2-1-101)$$

n 个统计独立的高斯随机变量之和也是一个高斯随机变量。为证明这点,令

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad (2-1-102)$$

式中, $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是均值为 m_i 且方差为 σ_i^2 的统计独立的高斯随机变量。利用式(2-1-79)的结果,求得 Y 的特征函数是

$$\begin{aligned} \phi_Y(jv) &= \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(jv) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{jvm_i - v^2 \sigma_i^2 / 2} \\ &= e^{jvm_y - v^2 \sigma_y^2 / 2} \end{aligned} \quad (2-1-103)$$

式中

$$\begin{aligned} m_y &= \sum_{i=1}^n m_i \\ \sigma_y^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \end{aligned} \quad (2-1-104)$$

因此, Y 是均值为 m_y 且方差为 σ_y^2 的高斯分布。

4. χ^2 分布

χ^2 分布的随机变量在某种意义上和高斯分布随机变量有关,这就是说,前者可以看做为后者的变换。为了具体地说明,令 $Y = X^2$, 其中 X 是高斯随机变量。那么, Y 具有 χ^2 分布。我们来区分两种类型的 χ^2 分布。第一种称为中心 χ^2 分布,它是在 X 为零均值时得到的;第二种称为非中心 χ^2 分布,它是 X 为非零均值时得到的。

首先研究中心 χ^2 分布。令 X 是均值为零且方差为 σ^2 的高斯分布。因为 $Y = X^2$, 可直接利用式(2-1-47)中的结果,取 $a=1, b=0$ 。因此,得到 Y 的 PDF 如下

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \sigma} e^{-y/2\sigma^2} \quad (y \geq 0) \quad (2-1-105)$$

Y 的 CDF 是

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_0^y p_Y(u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u/2\sigma^2} du \end{aligned} \quad (2-1-106)$$

上式不能表示成封闭形式。然而,可以求得封闭形式的特征函数

$$\phi(jv) = \frac{1}{(1 - j2v\sigma^2)^{1/2}} \quad (2-1-107)$$

现在,假定随机变量 Y 定义为

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (2-1-108)$$

式中, $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是统计独立且同分布的高斯随机变量, 具有零均值和方差 σ^2 。由于 X_i 是统计独立的, 所以 Y 的特征函数是

$$\phi_Y(jv) = \frac{1}{(1 - j2v\sigma^2)^{n/2}} \quad (2-1-109)$$

求这个特征函数的反变换可得到 PDF

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} y^{n/2-1} e^{-y/2\sigma^2} \quad (y \geq 0) \quad (2-1-110)$$

式中, $\Gamma(p)$ 是 γ (gamma) 函数, 定义为

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \quad (p > 0) \\ \Gamma(p) &= (p-1)! \quad (p \text{ 为整数且 } p > 0) \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (2-1-111)$$

这个 PDF 是式(2-1-105)的一般化, 它称为具有 n 个自由度的 χ^2 (或 γ) PDF, 如图 2-1-9 所示。当 $n=2$ 时, 可求得指数分布。

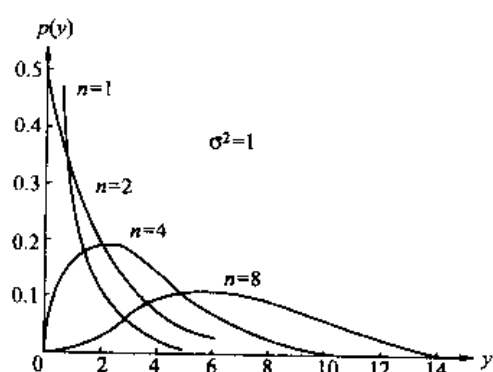


图 2-1-9 几种自由度的 χ^2 分布随机变量的 PDF

Y 的一阶矩和二阶矩是

$$\begin{aligned} E(Y) &= n\sigma^2 \\ E(Y^2) &= 2n\sigma^4 + n^2\sigma^4 \\ \sigma_Y^2 &= 2n\sigma^4 \end{aligned} \quad (2-1-112)$$

Y 的 CDF 是

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} u^{n/2-1} e^{-u/2\sigma^2} du \quad y \geq 0 \quad (2-1-113)$$

很容易将这个积分整理成不完全的 γ 函数形式, 该函数已由皮尔逊 (Pearson, 1965 年) 制成了表格。当 n 是偶函数时, 式(2-1-113)的积分可以表示成封闭形式。具体地说, 令 $m = n/2$, 式中 m 是整数, 那么通过反复进行分部积分, 可得

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y/2\sigma^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{y}{2\sigma^2}\right)^k \quad (y \geq 0) \quad (2-1-114)$$

现在研究一个非中心 χ^2 分布, 它由一个非零均值的高斯随机变量平方而得。如果 X 是均值为 m_x 且方差为 σ^2 的高斯变量, 则随机变量 $Y = X^2$ 具有 PDF

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \sigma} e^{-(y+m_x^2)/2\sigma^2} \cosh\left[\frac{\sqrt{y}m_x}{\sigma^2}\right] \quad (y \geq 0) \quad (2-1-115)$$

该式是通过将式(2-1-47)的结果应用于式(2-1-92)的高斯 PDF 而得到的。相应于该 PDF 的特征函数是

$$\phi_Y(jv) = \frac{1}{(1 - j2v\sigma^2)^{1/2}} e^{jm_x^2 v / (1 - j2v\sigma^2)} \quad (2-1-116)$$

为了推广这些结果, 令 Y 是高斯随机变量平方的总和, 如式(2-1-108)所定义。假定 X_i

($i=1,2,\cdots,n$)是统计独立的,具有均值 m_i ($i=1,2,\cdots,n$)和相同的方差 σ^2 ,那么将式(2-1-79)应用于式(2-1-116)而得到 Y 的特征函数为

$$\psi_Y(jv) = \frac{1}{(1-j2v\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[\frac{jv \sum_{i=1}^n m_i^2}{1-j2v\sigma^2} \right] \quad (2-1-117)$$

求特征函数的傅里叶反变换,得到 PDF

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{y}{s^2} \right)^{(n-2)/4} e^{-(s^2+y)/2\sigma^2} I_{n/2-1} \left(\sqrt{y} \frac{s}{\sigma^2} \right) \quad (y \geq 0) \quad (2-1-118)$$

式中,定义

$$s^2 = \sum_{i=1}^n m_i^2 \quad (2-1-119)$$

$I_\alpha(x)$ 是第一类 α 阶修正贝塞尔函数,它可以用无穷级数表示

$$I_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\alpha+2k}}{k! \Gamma(\alpha+k+1)} \quad (x \geq 0) \quad (2-1-120)$$

式(2-1-118)给出的 PDF 称为 n 个自由度的非中心 χ^2 PDF。参量 s^2 称为非中心分布参量。

n 个自由度的非中心 χ^2 的 CDF 是

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{u}{s^2} \right)^{(n-2)/4} e^{-(s^2+u)/2\sigma^2} I_{n/2-1} \left(\sqrt{u} \frac{s}{\sigma^2} \right) du \quad (2-1-121)$$

该积分没有封闭形式的表达式。然而,当 $m = n/2$ 是整数时,CDF 可以用广义马库姆(Marcum's) Q 函数表示,该函数定义为

$$\begin{aligned} Q_m(a, b) &= \int_b^\infty x \left(\frac{x}{a} \right)^{m-1} e^{-(x^2+a^2)/2} I_{m-1}(ax) dx \\ &= Q_1(a, b) + e^{(a^2+b^2)/2} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{b}{a} \right)^k I_k(ab) \end{aligned} \quad (2-1-122)$$

式中

$$Q_1(a, b) = e^{-(a^2+b^2)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b} \right)^k I_k(ab) \quad (b > a > 0) \quad (2-1-123)$$

如果将式(2-1-121)中的积分变量 u 变换为 x ,这里

$$x^2 = u/\sigma^2$$

且令 $a^2 = s^2/\sigma^2$,那么容易证明

$$F_Y(y) = 1 - Q_m \left(\frac{s}{\sigma}, \sqrt{y} \frac{s}{\sigma} \right) \quad (2-1-124)$$

最后,我们得到一个非中心 χ^2 分布的随机变量的一阶矩和二阶矩是

$$\begin{aligned} E(Y) &= n\sigma^2 + s^2 \\ E(Y^2) &= 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2 + (n\sigma^2 + s^2)^2 \\ \sigma_Y^2 &= 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2 \end{aligned} \quad (2-1-125)$$

5. 瑞利(Rayleigh)分布

瑞利分布常常用来对无线信道(如蜂窝无线系统)上传输信号的统计特性建模,与中心 χ^2

分布有密切的关系。为了说明这一点,令 $Y = X_1^2 + X_2^2$, 其中 X_1 和 X_2 是零均值且统计独立的高斯随机变量, 每一个变量的方差为 σ^2 。由以上的讨论, 可以得出 Y 是 2 个自由度 χ^2 分布。因此, Y 的 PDF 是

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-y/2\sigma^2} \quad (y \geq 0) \quad (2-1-126)$$

现在, 假设定义一个新的随机变量

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{Y} \quad (2-1-127)$$

对式(2-1-126)的 PDF 的变量作一个简单的变换, 可得出 R 的 PDF

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \quad (r \geq 0) \quad (2-1-128)$$

这是瑞利分布随机变量的 PDF。相应的 CDF 是

$$\begin{aligned} F_R(r) &= \int_0^r \frac{u}{\sigma^2} e^{-u^2/2\sigma^2} du \\ &= 1 - e^{-r^2/2\sigma^2} \quad (r \geq 0) \end{aligned} \quad (2-1-129)$$

R 的矩是

$$E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}k\right) \quad (2-1-130)$$

且方差是

$$\sigma_r^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\pi\right)\sigma^2 \quad (2-1-131)$$

瑞利分布随机变量的特征函数是

$$\phi_R(jv) = \int_0^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} e^{jvr} dr \quad (2-1-132)$$

该积分可以表示为

$$\begin{aligned} \phi_R(jv) &= \int_0^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \cos vr dr + j \int_0^\infty \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \sin vr dr \\ &= {}_1F_1\left(1, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}v^2\sigma^2\right) + j\sqrt{\frac{1}{2}\pi v\sigma^2} e^{-v^2\sigma^2/2} \end{aligned} \quad (2-1-133)$$

式中, ${}_1F_1(1, 1/2; -a)$ 是合流超几何函数, 其定义为

$${}_1F_1(\alpha, \beta; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)x^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+k)k!} \quad (\beta \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (2-1-134)$$

波列(Beaulieu, 1990 年)已证明, ${}_1F_1(1, 1/2; -a)$ 可以表示为

$${}_1F_1\left(1, \frac{1}{2}; -a\right) = -e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(2k-1)k!} \quad (2-1-135)$$

作为以上表达式的推广, 研究随机变量

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (2-1-136)$$

式中, $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是统计独立、同分布、零均值高斯随机变量。随机变量 R 具有广义瑞利分布。显然, $Y=R^2$ 是 n 个自由度的 χ^2 分布, 它的 PDF 由式(2-1-110)给出。简单地改变式(2-1-110)中的变量, 可得到 R 的 PDF

$$p_R(r) = \frac{r^{n-1}}{2^{(n-2)/2} \sigma^n \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} e^{-r^2/2\sigma^2} \quad (r \geq 0) \quad (2-1-137)$$

由于中心 χ^2 分布与瑞利分布之间的函数关系,与两者相应的 CDF 是相似的。从而,对于任何 n , R 的 CDF 可以用不完整的 γ 函数形式表示。在特殊情况下,当 n 是偶数,即 $n=2m$ 时, R 的 CDF 可以表示成封闭形式

$$F_R(r) = 1 - e^{-r^2/2\sigma^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)^k \quad (r \geq 0) \quad (2-1-138)$$

最后,我们得到 R 的 k 阶矩是

$$E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+k)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \quad (k \geq 0) \quad (2-1-139)$$

上式对任意整数 n 都适用。

6. 赖斯(Rice)分布

正如瑞利分布与中心 χ^2 分布有关那样,赖斯分布与非中心 χ^2 分布有关。为了说明这种关系,令 $Y = X_1^2 + X_2^2$, 其中 X_1 和 X_2 是统计独立高斯随机变量,其均值为 m_i ($i=1,2$) 且方差均为 σ^2 。由前面的讨论可知, Y 是具有非中心参量 $s^2 = m_1^2 + m_2^2$ 的非中心 χ^2 分布。在式(2-1-118)中取 $n=2$, 可得 Y 的 PDF 为

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-(s^2+y)/2\sigma^2} I_0\left(\sqrt{y} \frac{s}{\sigma^2}\right) \quad (y \geq 0) \quad (2-1-140)$$

现在,定义一个新的随机变量 $R = \sqrt{Y}$ 。对式(2-1-140)进行简单的变量变换,可得到 R 的 PDF, 即

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-(r^2+s^2)/2\sigma^2} I_0\left(\frac{rs}{\sigma^2}\right) \quad (r \geq 0) \quad (2-1-141)$$

这是赖斯分布随机变量的 PDF。正如将在第 5 章证明的,该 PDF 表征了受到加性窄带高斯噪声恶化的信号包络的统计特性,它也用来对在某些无线信道上传输信号的统计特性建模。由式(2-1-124)中取 $m=1$ 这一特殊情况,容易得到 R 的 CDF, 即

$$F_R(r) = 1 - Q_1\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right) \quad (r \geq 0) \quad (2-1-142)$$

式中, $Q_1(a, b)$ 由式(2-1-123)定义。

作为上面各式的推广,将 R 定义为式(2-1-136), 其中 X_i ($i=1,2,\dots,n$) 是统计独立的高斯随机变量,它们具有均值 m_i ($i=1,2,\dots,n$) 及相同的方差 σ^2 。随机变量 $R^2 = Y$ 是 n 个自由度的非中心 χ^2 分布,且具有式(2-1-119)所给的非中心参量 s^2 , 它的 PDF 由式(2-1-118)给出。因此, R 的 PDF 是

$$p_R(r) = \frac{r^{n/2}}{\sigma^2 s^{(n-2)/2}} e^{-(r^2+s^2)/2\sigma^2} I_{n/2-1}\left(\frac{rs}{\sigma^2}\right) \quad (r \geq 0) \quad (2-1-143)$$

且相应的 CDF 是

$$F_R(r) = P(R \leq r) = P(\sqrt{Y} \leq r) = P(Y \leq r^2) = F_Y(r^2) \quad (2-1-144)$$

式中, $F_Y(r^2)$ 由式(2-1-121)给出。特殊情况下, $m = n/2$ 是一个整数, 则

$$F_R(r) = 1 - Q_m\left(\frac{s}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right) \quad (r \geq 0) \quad (2-1-145)$$

此式得自于式(2-1-124)。最后, 得到 R 的 k 阶矩是

$$E(R^k) = (2\sigma^2)^{k/2} e^{-s^2/2\sigma^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+k)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} {}_1F_1\left(\frac{n+k}{2}, \frac{n}{2}; \frac{s^2}{2\sigma^2}\right) \quad (k \geq 0) \quad (2-1-146)$$

式中, ${}_1F_1(\alpha, \beta; x)$ 是合流超几何函数。

7. Nakagami-m 分布

瑞利分布与赖斯分布常用来描述从多径衰落信道接收的信号统计起伏性, 第 14 章将研究这些信道的模型。另一种常用来表征通过多径信道传输的信号统计特性的分布是 Nakagami-m 分布。Nakagami(1960 年)给出了该分布的 PDF

$$p_R(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m r^{2m-1} e^{-mr^2/\Omega} \quad (2-1-147)$$

式中, Ω 定义为

$$\Omega = E(R^2)$$

且参数 m 定义为矩的比值, 称为衰落指数

$$m = \frac{\Omega^2}{E[(R^2 - \Omega)^2]} \quad \left(m \geq \frac{1}{2}\right) \quad (2-1-148)$$

通过定义另一个随机变量 $X = R/\sqrt{\Omega}$ 的方法, 可以得出式(2-1-147)的归一化形式(参见习题 2-15)。 R 的 n 阶矩是

$$E(R^n) = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}n)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{n/2}$$

通过设置 $m=1$, 式(2-1-147)简化成瑞利 PDF。对于在 $1/2 \leq m \leq 1$ 范围内的 m 值, 得到的 PDF 曲线比瑞利分布随机变量具有更大的拖尾。对于 $m > 1$ 的值, PDF 曲线拖尾比瑞利分布拖尾衰减得快。图 2-1-10 示出了 m 取不同值时的 PDF 曲线。

8. 对数正态分布

假定随机变量 X 服从正态分布, 其均值为 m 且方差为 σ^2 。我们定义一个新的随机变量 R , 它通过变换式 $X = \ln R$ 与 X 有关。那么 R 的 PDF 是

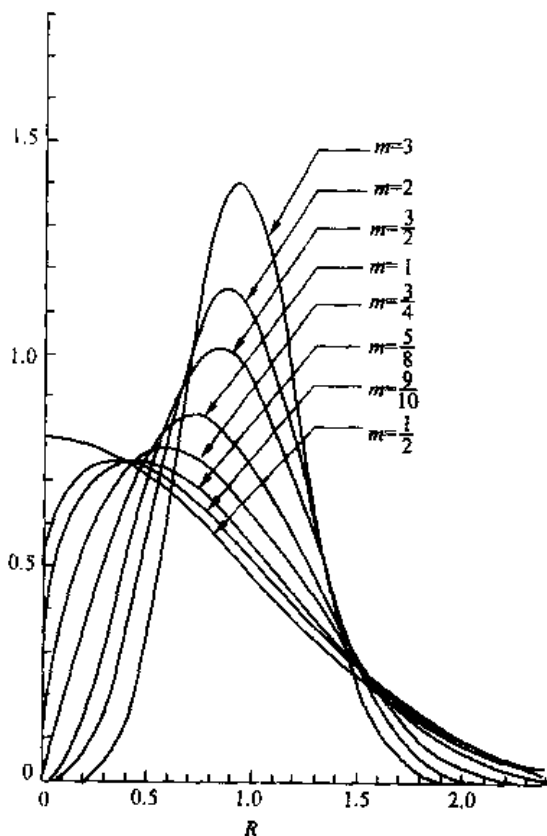


图 2-1-10 $\Omega=1$ 时的 Nakagami-m 分布的 PDF (m 是衰落指数)

$$p(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma r}} e^{-(\ln r - m)^2/2\sigma^2} & (r \geq 0) \\ 0 & (r < 0) \end{cases} \quad (2-1-149)$$

对数正态分布一般用在移动无线通信中,对大的障碍物(如高的建筑物)引起的信号阴影效应进行建模。

9. 多变量高斯分布

在许多定义为多变量或多维分布中,多变量高斯分布是最重要的,而且在实际中是最常遇见的。下面将简要介绍这种分布,并描述它的基本性质。

假定 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是高斯随机变量,并具有均值 $m_i (i=1, 2, \dots, n)$ 、方差 $\sigma_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$ 和协方差 $\mu_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 。显然 $\mu_{ii} = \sigma_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$ 。令 \mathbf{M} 表示元素为 $\{\mu_{ij}\}$ 的 $n \times n$ 协方差矩阵,令 \mathbf{X} 表示随机变量的 $n \times 1$ 列向量,令 \mathbf{m}_x 表示均值 $m_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的 $n \times 1$ 列向量。高斯随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的联合 PDF 定义为

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{M})^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{m}_x)' \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{m}_x) \right] \quad (2-1-150)$$

式中 \mathbf{M}^{-1} 表示 \mathbf{M} 的逆矩阵, \mathbf{X}' 表示 \mathbf{X} 的转置矩阵。与该 n 维联合 PDF 相应的特征函数是

$$\phi(j\mathbf{v}) = E(e^{j\mathbf{v}'\mathbf{X}})$$

式中 \mathbf{v} 是 n 维向量,其元素为 $v_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。求这个 n 维向量的傅里叶变换,得

$$\phi(j\mathbf{v}) = \exp \left(j \mathbf{m}_x' \mathbf{v} - \frac{1}{2} \mathbf{v}' \mathbf{M} \mathbf{v} \right) \quad (2-1-151)$$

式(2-1-150)的一个特殊情况是双变量或二维高斯 PDF,这种情况下的均值 \mathbf{m}_x 和协方差矩阵 \mathbf{M} 是

$$\mathbf{m}_x = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \mu_{12} \\ \mu_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2-1-152)$$

式中,联合中心矩 μ_{12} 定义为

$$\mu_{12} = E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$$

为了方便,定义归一化协方差为

$$\rho_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (i \neq j) \quad (2-1-153)$$

这里 ρ_{ij} 满足 $0 \leq |\rho_{ij}| \leq 1$ 的条件。当处理二维情况时,习惯上将 μ_{12} 和 ρ_{12} 的下标丢弃。因此,协方差矩阵可表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2-1-154)$$

它的逆矩阵是

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \quad (2-1-155)$$

且 $\det \mathbf{M} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$ 。将 \mathbf{M}^{-1} 代入式(2-1-150),得到所期望的双变量高斯 PDF 为

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left[-\frac{\sigma_2^2(x_1-m_1)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(x_1-m_1)(x_2-m_2) + \sigma_1^2(x_2-m_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right] \quad (2-1-156)$$

我们注意到,当 $\rho=0$ 时,式(2-1-156)中的联合 PDF $p(x_1, x_2)$ 分解成因子的乘积 $p(x_1)p(x_2)$, 这里 $p(x_i)$ ($i=1, 2$) 是边缘 PDF。因为 ρ 是 X_1 与 X_2 之间相关的测度, 我们已证明当高斯随机变量 X_1 与 X_2 不相关时, 它们也是统计独立的。这是高斯随机变量的一个重要性质, 在一般情况下对其他分布不适用。这一性质可以直接推广到 n 维高斯随机变量, 也就是, 如果对于 $i=j$ 有 $\rho_{ij}=0$, 那么随机变量 X_i ($i=1, 2, \dots, n$) 是不相关的, 因此也是统计独立的。

现在, 我们来研究 n 个高斯随机变量 X_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的线性变换, 其中 X_i 具有均值向量 \mathbf{m}_x 和协方差矩阵 \mathbf{M} , 令

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2-1-157)$$

式中 \mathbf{A} 是非奇异矩阵。如前所述, 这个变换的雅可比是 $J=1/\det\mathbf{A}$ 。因为 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$, 将 \mathbf{X} 代入式(2-1-150), 得到 \mathbf{Y} 的联合 PDF 为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\mathbf{M})^{1/2}\det\mathbf{A}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m}_x)'\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m}_x)\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\mathbf{Q})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)'\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)\right] \end{aligned} \quad (2-1-158)$$

式中, 向量 \mathbf{m}_y 和矩阵 \mathbf{Q} 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_y &= \mathbf{A}\mathbf{m}_x \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}' \end{aligned} \quad (2-1-159)$$

这就证明了一组联合高斯随机变量的线性变换可形成另一组联合高斯随机变量。

假定希望进行一种线性变换, 以得到 n 个线性独立的高斯随机变量。应当如何选择矩阵 \mathbf{A} 呢? 根据前面的讨论, 我们知道, 如果高斯随机变量是两两不相关的, 也就是说, 如果协方差矩阵 \mathbf{Q} 是对角形的, 那么这些高斯随机变量是统计独立的。因此, 必须有

$$\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}' = \mathbf{D} \quad (2-1-160)$$

式中 \mathbf{D} 是对角阵。矩阵 \mathbf{M} 是协方差矩阵, 因此它是正定的。一种解决方法是选择 \mathbf{A} 为正交矩阵 ($\mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1}$), 组成该矩阵的列是协方差矩阵 \mathbf{M} 的特征向量。那么 \mathbf{D} 是一个对角阵, 其对角元素等于 \mathbf{M} 的特征值。

例 2-1-5 假定双变量高斯 PDF 具有协方差矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

求变换 \mathbf{A} , 它能导致不相关的随机变量。首先, 求 \mathbf{M} 的特征值。特征方程是

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

其次,求两个特征向量。如果 \mathbf{a} 表示一个特征向量,则有

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{a} = 0$$

由于 $\lambda_1 = 3/2$ 及 $\lambda_2 = 1/2$, 得到特征向量

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

因此,

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

容易证明 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$ 以及

$$\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}' = \mathbf{D}$$

式中 \mathbf{D} 的对角元素是 $3/2$ 和 $1/2$ 。

2.1.5 尾部概率的上边界

在数字通信系统性能的评估中,常有必要确定 PDF 尾部下面的面积,该面积称为尾部概率。本节将介绍尾部概率的两个上边界,第一个是由切比雪夫(Chebyshev)不等式得到的,它相当疏松;第二个称为契尔诺夫(Chernoff)边界,则紧得多。

1. 切比雪夫不等式

假设 X 是一个具有有限均值 m_x 和有限方差 σ_x^2 的任意随机变量。对任何正数 δ ,

$$P(|X - m_x| \geq \delta) \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2} \quad (2-1-161)$$

这个关系式称为切比雪夫不等式。该不等式的证明比较简单

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \geq \int_{|x - m_x| \geq \delta} (x - m_x)^2 p(x) dx \\ &\geq \delta^2 \int_{|x - m_x| \geq \delta} p(x) dx = \delta^2 P(|X - m_x| \geq \delta) \end{aligned}$$

显而易见,切比雪夫不等式仅仅是 PDF $p(y)$ 尾部下的面积的上边界,其中 $Y = X - m_x$, 也就是说,是 $p(y)$ 在 $(-\infty, -\delta)$ 和 (δ, ∞) 区间内的面积。因此,切比雪夫不等式可以表示为

$$1 - [F_Y(\delta) - F_Y(-\delta)] \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2} \quad (2-1-162)$$

或等价地

$$1 - [F_X(m_x + \delta) - F_X(m_x - \delta)] \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2} \quad (2-1-163)$$

还有另一种方法来观察切比雪夫边界。对于零均值随机变量 $Y = X - m_x$, 为了方便,定义一个函数 $g(Y)$ 为

$$g(Y) = \begin{cases} 1 & (|Y| \geq \delta) \\ 0 & (|Y| < \delta) \end{cases} \quad (2-1-164)$$

因为 $g(Y)$ 是 0 或 1, 其概率分别为 $P(|Y| < \delta)$ 和 $P(|Y| \geq \delta)$, 它的均值是

$$E[g(Y)] = P(|Y| \geq \delta) \quad (2-1-165)$$

假设用平方值 $(Y/\delta)^2$ 作为 $g(Y)$ 的上边界, 即

$$g(Y) \leq \left(\frac{Y}{\delta}\right)^2 \quad (2-1-166)$$

$g(Y)$ 的图形及上边界示于图 2-1-11, 于是有

$$E[g(Y)] \leq E\left(\frac{Y^2}{\delta^2}\right) = \frac{E(Y^2)}{\delta^2} = \frac{\sigma_y^2}{\delta^2} = \frac{\sigma_x^2}{\delta^2}$$

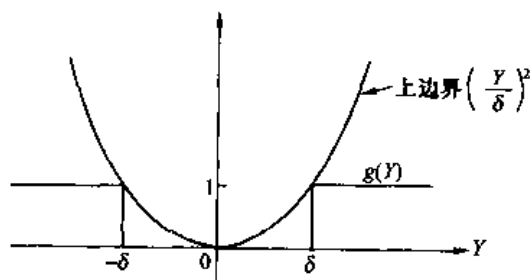


图 2-1-11 用来获得尾部概率的 $g(Y)$ 的平方上边界(切比雪夫边界)

正如从式(2-1-165)所见, 因为 $E[g(Y)]$ 是尾部概率, 所以得到切比雪夫边界。

对于许多实际应用, 切比雪夫边界极其宽松, 其原因可能是在对 $g(Y)$ 上方定边界时平方的 $(Y/\delta)^2$ 是疏松的。当然, 有许多其他函数可以用作 $g(Y)$ 的上边界。下面, 我们用一个指数边界来导出尾部概率的上边界, 那是很紧密的。

2. 契尔诺夫边界

上面给出的切比雪夫边界包括 PDF 的两个尾部下面的面积。在某些应用中, 我们仅对一个尾部下的面积感兴趣, 这个尾部或是在 (δ, ∞) 区间或是在 $(-\infty, \delta)$ 区间。在这种情况下, 可以用指数在函数 $g(Y)$ 上方定边界来获得一个极紧的上边界, 该指数具有一个可以最佳化的参数以产生尽可能紧的上边界。具体地说, 我们研究在 (δ, ∞) 区间上的尾部概率。函数 $g(Y)$ 的上边界为

$$g(Y) \leq e^{v(Y-\delta)} \quad (2-1-167)$$

式中 $g(Y)$ 定义为

$$g(Y) = \begin{cases} 1 & (Y \geq \delta) \\ 0 & (Y < \delta) \end{cases} \quad (2-1-168)$$

且 $v \geq 0$ 是最佳化参数。 $g(Y)$ 曲线和指数上边界如图 2-1-12 所示。

$g(Y)$ 的期望值是

$$E[g(Y)] = P(Y \geq \delta) \leq E(e^{v(Y-\delta)}) \quad (2-1-169)$$

这个边界对任何 $v \geq 0$ 都是有效的。通过选择 v 值, 使 $E(e^{v(Y-\delta)})$ 最小来获得最紧的上边界。求最小值的必要条件是

$$\frac{d}{dv} E(e^{v(Y-\delta)}) = 0 \quad (2-1-170)$$

但是可以将微分和期望的次序交换, 因此

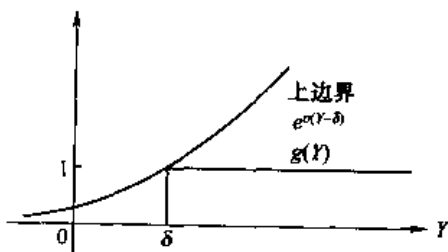


图 2-1-12 用来获得尾部概率的 $g(Y)$ 的指数上边界(契尔诺夫边界)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}E(e^{v(Y-\delta)}) &= E\left(\frac{d}{dv}e^{v(Y-\delta)}\right) \\ &= E[(Y-\delta)e^{v(Y-\delta)}] \\ &= e^{-v\delta}[E(Ye^{vY}) - \delta E(e^{vY})] = 0\end{aligned}$$

所以,能给出最紧的上边界的 v 值是以下方程的解

$$E(Ye^{vY}) - \delta E(e^{vY}) = 0 \quad (2-1-171)$$

令 \hat{v} 是式(2-1-171)的解,那么单边尾部概率的上边界是

$$P(Y \geq \delta) \leq e^{-\hat{v}\delta} E(e^{\hat{v}Y}) \quad (2-1-172)$$

这就是一个零均值的离散或连续随机变量的上尾部概率的契尔诺夫边界^①。这个边界可以用来证明 $Q(x) \leq e^{-x^2/2}$, 其中 $Q(x)$ 是高斯 PDF 尾部下的面积(参见习题 2-18)。

用类似的方法,可以求得下尾部概率的上边界,其结果是

$$P(Y \leq \delta) \leq e^{-\hat{v}\delta} E(e^{\hat{v}Y}) \quad (2-1-173)$$

式中 \hat{v} 是式(2-1-171)的解,且 $\delta < 0$ 。

例 2-1-6 研究(拉普拉斯)PDF

$$p(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|} \quad (2-1-174)$$

如图 2-1-13 所示。根据契尔诺夫边界评估上尾部概率,并与准确的尾部概率比较,后者为

$$P(Y \geq \delta) = \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-y}dy = \frac{1}{2}e^{-\delta} \quad (2-1-175)$$

为了从式(2-1-171)求解 \hat{v} ,必须先求矩 $E(Ye^{vY})$ 和 $E(e^{vY})$ 。对于式(2-1-174)中的 PDF,求得

$$\begin{aligned}E(Ye^{vY}) &= \frac{2v}{(v+1)^2(v-1)^2} \\ E(e^{vY}) &= \frac{1}{(1+v)(1-v)}\end{aligned} \quad (2-1-176)$$

将这些矩代入式(2-1-171),得到二次方程

$$v^2\delta + 2v - \delta = 0$$

它的解为

$$\hat{v} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta} \quad (2-1-177)$$

因为 \hat{v} 必须是正的,所以舍弃两个解中的一个。因此

$$\hat{v} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{\delta} \quad (2-1-178)$$

最后,我们来评估式(2-1-172)的上边界。利用式(2-1-176)中的第二个关系式消去 $E(e^{\hat{v}Y})$,并将式(2-1-178)中的 \hat{v} 代入,其结果是

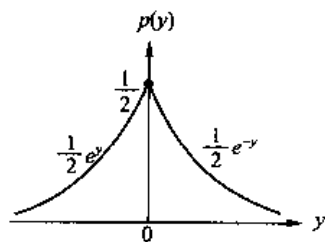


图 2-1-13 服从拉普拉斯分布的随机变量的 PDF

^① 注意, $E(e^{vY})$ 对于实数 v 不是 Y 的特征函数,它称为 Y 的矩生成函数。

$$P(Y \geq \delta) \leq \frac{\delta^2}{2(-1 + \sqrt{1 + \delta^2})} e^{1 - \sqrt{1 + \delta^2}} \quad (2-1-179)$$

对于 $\delta \gg 1$, 式(2-1-179)可简化为

$$P(Y \geq \delta) \leq \frac{\delta}{2} e^{-\delta} \quad (2-1-180)$$

注意, 当 δ 增加时, 契尔诺夫边界以指数规律减少。结果, 它与式(2-1-175)的准确的尾部概率很接近。相反地, 从两个尾部概率的一半(由于 PDF 对称性)得到的上尾部概率的切比雪夫边界是

$$P(Y \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2}$$

因此, 这个边界是非常疏松的。

下面将说明, 当随机变量具有非零均值时, 契尔诺夫边界可以推广。如果 $Y = X - m_x$, 则有

$$P(Y \geq \delta) = P(X - m_x \geq \delta) = P(X \geq m_x + \delta) = P(X \geq \delta_m)$$

这里定义 $\delta_m = m_x + \delta$ 。因为 $\delta > 0$, 所以 $\delta_m > m_x$ 。令 $g(Y)$ 为

$$g(X) = \begin{cases} 1 & (X \geq \delta_m) \\ 0 & (X < \delta_m) \end{cases} \quad (2-1-181)$$

上边界为

$$g(X) \leq e^{v(X - \delta_m)} \quad (2-1-182)$$

以下的推导步骤与式(2-1-169)~式(2-1-172)的步骤类似。最终的结果是

$$P(X \geq \delta_m) \leq e^{-\hat{v}\delta_m} E(e^{\hat{v}X}) \quad (2-1-183)$$

式中 $\delta_m > m_x$, \hat{v} 是下列方程的解

$$E(Xe^{\hat{v}X}) - \delta_m E(e^{\hat{v}X}) = 0 \quad (2-1-184)$$

用类似的方法, 可以求出下尾部概率的契尔诺夫的边界。对于 $\delta < 0$, 有

$$P(X - m_x \leq \delta) = P(X \leq m_x + \delta) = P(X \leq \delta_m) \leq E(e^{\hat{v}(X - \delta_m)}) \quad (2-1-185)$$

根据前面的推导, 由式(2-1-185)导出边界

$$P(X \leq \delta_m) \leq e^{-\hat{v}\delta_m} E(e^{\hat{v}X}) \quad (2-1-186)$$

式中 $\delta_m < m_x$, \hat{v} 是式(2-1-184)的解。

2.1.6 随机变量之和与中心极限定理

前面研究了求 n 个统计独立随机变量之和的 PDF 的问题, 本节将再次研究统计独立随机变量之和, 但是用的方法不同, 此法与总和中的随机变量个别的 PDF 无关。为了具体说明, 假设 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是统计独立且同分布的随机变量, 每个变量具有有限的均值 m_x 和有限的方差 σ_x^2 。将 Y 定义为归一化总和, 称为样本平均

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2-1-187)$$

首先求 Y 尾部概率的上边界, 然后证明一个非常重要的定理, 即 Y 的 PDF 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限情况。

从多次观察 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 来估计随机变量 X 的均值时, 常常会遇到式(2-1-187)所

定义的随机变量 Y 。换句话说, $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 可以认为是从分布 $F_X(x)$ 中取出的一些独立的样本值, 而 Y 是均值 m_x 的估计值。

Y 的均值是

$$\begin{aligned} E(Y) &= m_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= m_x \end{aligned}$$

Y 的方差是

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E(Y^2) - m_y^2 = E(Y^2) - m_x^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i X_j) - m_x^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E(X_i) E(X_j) - m_x^2 \\ &= \frac{1}{n} (\sigma_x^2 + m_x^2) + \frac{1}{n^2} n(n-1) m_x^2 - m_x^2 \\ &= \frac{\sigma_x^2}{n} \end{aligned}$$

注意, 当 Y 被看做是均值 m_x 的一个估计值时, 它的期望值等于 m_x , 其方差随样本数 n 的增加成反比例地减少。当 n 趋于无穷大时, 方差 σ_y^2 趋于零。当一个参数的估计值(在这种情况下是均值 m_x)满足这样的条件, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它的期望值收敛于参数的真值且方差收敛于零, 那么该参数估计值称为一致性的估计值。

利用 2.1.5 节所述的边界, 可以求得随机变量尾部概率的上边界。将切比雪夫不等式应用于 Y , 可得

$$\begin{aligned} P(|Y - m_y| \geq \delta) &\leq \frac{\sigma_y^2}{\delta^2} \\ P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m_x\right| \geq \delta\right) &\leq \frac{\sigma_x^2}{n\delta^2} \end{aligned} \quad (2-1-188)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时取极限, 式(2-1-188)变成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m_x\right| \geq \delta\right) = 0 \quad (2-1-189)$$

因此, 当 n 趋于无穷大时, 均值的估计值与真正的均值之差大于 $\delta (\delta > 0)$ 的概率趋于零。这种表述是大数定律的一种形式。由于上边界收敛于零相对缓慢, 即反比于 n , 所以式(2-1-188)称为弱大数定律。

将契尔诺夫边界应用于随机变量 Y 可得出一个与 n 指数相关的结果, 从而在单边尾部概率上提供一个更紧的上边界。按照 2.1.5 节所用的步骤, 可求出 y 的尾部概率

$$\begin{aligned} P(Y - m_y \geq \delta) &= P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m_x \geq \delta\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq n\delta_m\right) \leq E\left[\exp\left[v\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\delta_m\right)\right]\right] \end{aligned} \quad (2-1-190)$$

式中, $\delta_m = m_x + \delta$ 且 $\delta > 0$ 。但 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是统计独立且同分布的, 因此

$$\begin{aligned}
E\left\{\exp\left[v\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\delta_m\right)\right]\right\} &= e^{-vn\delta_m} E\left[\exp\left(v\sum_{i=1}^n X_i\right)\right] \\
&= e^{-vn\delta_m} \prod_{i=1}^n E(e^{vX_i}) \\
&= [e^{-v\delta_m} E(e^{vX})]^n \quad (2-1-191)
\end{aligned}$$

式中, X 表示任一个 X_i 。通过对式(2-1-191)微分并令导数为零,可以得到能产生最紧密上边界的参数 v 。由此得到方程

$$E(Xe^{vX}) - \delta_m E(e^{vX}) = 0 \quad (2-1-192)$$

将式(2-1-192)的解记为 \hat{v} 。那么,上尾部概率的边界是

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \geq \delta_m\right) \leq [e^{-\hat{v}\delta_m} E(e^{\hat{v}X})]^n \quad (\delta_m > m_x) \quad (2-1-193)$$

用类似的方法,求出下尾部概率的上边界为

$$P(Y \leq \delta_m) \leq [e^{-\hat{v}\delta_m} E(e^{\hat{v}X})]^n \quad (\delta_m < m_x) \quad (2-1-194)$$

式中, \hat{v} 是式(2-1-192)的解。

例 2-1-7 令 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是一组统计独立的随机变量,其定义为

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{概率 } p < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{概率 } 1-p \end{cases}$$

希望求出 X_i 的总和大于零的概率的紧密上边界。因为 $p < 1/2$, 总和将有负均值,因此我们求上尾部概率。使式(2-1-193)中的 $\delta_m = 0$, 则得到

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 0\right) \leq [E(e^{vX})]^n \quad (2-1-195)$$

式中, \hat{v} 是下列方程的解

$$E(Xe^{vX}) = 0 \quad (2-1-196)$$

现在

$$E(Xe^{vX}) = -(1-p)e^{-v} + pe^v = 0$$

因此

$$\hat{v} = \ln\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right) \quad (2-1-197)$$

而且

$$E(e^{vX}) = pe^{\hat{v}} + (1-p)e^{-\hat{v}}$$

因此式(2-1-195)中的边界为

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 0\right) &\leq [pe^{\hat{v}} + (1-p)e^{-\hat{v}}]^n \\
&\leq \left[p\sqrt{\frac{1-p}{p}} + (1-p)\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right]^n \\
&\leq [4p(1-p)]^{n/2} \quad (2-1-198)
\end{aligned}$$

我们看到,上边界随 n 按指数律减少,这正如所预料的。相反地,如果计算切比雪夫边

界,则尾部概率随 n 成反比减少。

中心极限定理

我们以一个很有用的定理总结本节。该定理是关于多个随机变量总和的项数趋于无穷大时,总和随机变量的 CDF 的极限问题。这个定理有多种形式,我们将从下面的情况来证明这个定理:总和中的随机变量 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是统计独立且同分布的,每一个变量具有有限的均值 m_x 和有限的方差 σ_x^2 。为方便计算,定义归一化随机变量

$$U_i = \frac{X_i - m_x}{\sigma_x} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

因此, U_i 具有零均值和单位方差。现令

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n U_i \quad (2-1-199)$$

因为总和中的每一项具有零均值和单位方差,因此归一化(除以 $1/\sqrt{n}$)随机变量 Y 具有零均值和单位方差。下面求 $n \rightarrow \infty$ 时, Y 的 CDF 的极限。

Y 的特征函数是

$$\begin{aligned} \psi_Y(jv) &= E(e^{jvY}) = E\left[\exp\left\{\frac{jv \sum_{i=1}^n U_i}{\sqrt{n}}\right\}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \psi_{U_i}\left(\frac{jv}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left[\psi_U\left(\frac{jv}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \end{aligned} \quad (2-1-200)$$

式中 U 表示任一 U_i , 它们是同分布的。将 U 的特征函数展开成泰勒级数, 展开式为

$$\psi_U\left(j \frac{v}{\sqrt{n}}\right) = 1 + j \frac{v}{\sqrt{n}} E(U) - \frac{v^2}{n 2!} E(U^2) + \frac{(jv)^3}{(\sqrt{n})^3 3!} E(U^3) - \dots \quad (2-1-201)$$

因为 $E(U) = 0$ 且 $E(U^2) = 1$, 所以式(2-1-201)可简化为

$$\psi_U\left(\frac{jv}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{v^2}{2n} + \frac{1}{n} R(v, n) \quad (2-1-202)$$

式中 $R(v, n)/n$ 表示余项。注意, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $R(v, n)$ 趋于零。将式(2-1-201)代入式(2-1-200)可得到 Y 的特征函数, 其形式为

$$\psi_Y(jv) = \left[1 - \frac{v^2}{2n} + \frac{R(v, n)}{n}\right]^n \quad (2-1-203)$$

取式(2-1-203)的自然对数, 得到

$$\ln \psi_Y(jv) = n \ln \left[1 - \frac{v^2}{2n} + \frac{R(v, n)}{n}\right] \quad (2-1-204)$$

对于小 x 值, $\ln(1+x)$ 可展成幂级数

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

将这个展开式应用于式(2-1-204), 得到

$$\ln \phi_Y(jv) = n \left[-\frac{v^2}{2n} + \frac{R(v, n)}{n} - \frac{1}{2} \left(-\frac{v^2}{2n} + \frac{R(v, n)}{n} \right)^2 + \dots \right] \quad (2-1-205)$$

最后,对上式取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限,式(2-1-205)简化为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \phi_Y(jv) = -v^2/2$,或等价为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_Y(jv) = e^{-v^2/2} \quad (2-1-206)$$

这正是一个具有零均值和单位方差的高斯随机变量的特征函数。因此,我们得出一个重要结论:均值和方差都是有限值的统计独立且同分布的随机变量总和,在 $n \rightarrow \infty$ 时趋近于一个高斯 CDF。这个结论就是中心极限定理。

虽然我们假定总和中的各随机变量是同分布的,但是只要在随机变量的性质上附加一些限制,就可以放宽这个假设。例如,中心极限定理有一种变化形式,此时不用假设随机变量是同分布的,而是利用总和中各随机变量的三阶绝对矩的一个状态。关于中心极限定理各种形式的讨论,读者可以参考克拉默(Cramer, 1946 年)的著作。

2.2 随机过程

自然界发生的许多现象是时间的函数,例如,气象现象中的气温和气压的随机起伏都是时间的函数,电子设备(如无线电接收机)中的电阻产生的热噪声电压也是一个时间的函数。类似地,信息源输出的信号也可表征为变化的随机信号,在电话信道上传输的音频信号就是这类信号的一个例子。所有这些都是随机过程的例子。在研究数字通信时,在下列场合会遇到随机过程:信息源产生的信号的表征与建模,传输信息的通信信道的表征,接收机中噪声的表征以及设计最佳接收机以处理接收的随机信号等场合。

在任何给定的时刻,随机过程的值,无论它是电阻产生的噪声电压值,还是音频信源产生的信号幅度,都是一个随参数 t 而变化的随机变量,用 $X(t)$ 表示这样一个过程。一般地,参数 t 是连续的,而 X 可以是连续的或者是离散的,这取决于产生随机过程的信源的特征。

由单个电阻和单个信息源产生的噪声电压表示随机过程的一个实现,因此它称为随机过程的一个样本函数。所有可能的样本函数的集合,例如由各电阻产生的所有噪声电压波形的集合,构成了一个样本函数集(或总体),即随机过程。通常,假定样本函数集中的样本数目是非常大的,常常是无限大的。

在将随机过程定义为样本函数的集合之后,可以研究在任一组时刻 $t_1 > t_2 > t_3 \cdots > t_n$ 随机过程的值,其中 n 为任意正整数。通常,随机变量 $X_{t_i} \equiv X(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是用它们的联合 PDF $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ 来统计表征的。此外,2.1 节中定义的多维随机变量的概率关系式都可应用到随机变量 X_{t_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) 中。

平稳随机过程

正如上面指出的,随机过程 $X(t)$ 在任意一组时刻 $t_1 > t_2 > t_3 \cdots > t_n$ 且 n 为任意值时得到的随机变量 X_{t_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) 可由联合 PDF $p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ 来统计表征。研究另一组 n 个随机变量 $X_{t_i+t} \equiv X(t_i+t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 其中 t 是任意时移,这些随机变量由联合 PDF $p(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \dots, x_{t_n+t})$ 表征。随机变量 X_{t_i} 和 X_{t_i+t} 两者的 PDF 可以相同,也可以不同。当它们相同时,即当

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = p(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \dots, x_{t_n+t}) \quad (2-2-1)$$

对所有 t 和所有 n 都成立时,该随机过程称为严平稳过程。也就是说,该平稳随机过程的统计特性不随时间轴的平移而变动。另一方面,当联合 PDF 不等时,随机过程是非平稳的。

2.2.1 统计平均

正如曾经定义随机变量的统计平均一样,可以类似地定义随机过程的统计平均,这样的平均也称为集平均。令 $X(t)$ 表示一个随机过程,且令 $X_{t_i} \equiv X(t_i)$ 。随机变量 X_{t_i} 的 n 阶矩定义为

$$E(X_{t_i}^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_i}^n p(x_{t_i}) dx_{t_i} \quad (2-2-2)$$

一般地,如果 X_{t_i} 的 PDF 与 t_i 有关,那么 n 阶矩的值也与瞬时 t_i 有关。当过程是平稳时,对于所有 t , $p(x_{t_i+t}) = p(x_{t_i})$ 。因此,PDF 与时间无关, n 阶矩也与时间无关。

下面研究两个随机变量 $X_{t_i} \equiv X(t_i)$ ($i=1,2$) 的情况。 X_{t_1} 与 X_{t_2} 之间的相关性可用下列联合矩度量

$$E(X_{t_1} X_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} p(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2} \quad (2-2-3)$$

因为这个联合矩与时刻 t_1 和 t_2 有关,将它表示为 $\phi(t_1, t_2)$ 。函数 $\phi(t_1, t_2)$ 称为随机过程的自相关函数。当过程 $X(t)$ 平稳时,一对 (X_{t_1}, X_{t_2}) 的联合 PDF 等于任意 t 的另一对 (X_{t_1+t}, X_{t_2+t}) 的联合 PDF。这意味着 $X(t)$ 的自相关函数与具体的 t_1 和 t_2 时刻无关,而与时间差 $t_1 - t_2$ 有关。因此,对于平稳随机过程,式(2-2-3)中的联合矩为

$$E(X_{t_1} X_{t_2}) = \phi(t_1, t_2) = \phi(t_1 - t_2) = \phi(\tau) \quad (2-2-4)$$

式中, $\tau = t_1 - t_2$ 或等价于 $t_2 = t_1 - \tau$ 。如果令 $t_2 = t_1 + \tau$, 则有

$$\phi(-\tau) = E(X_{t_1} X_{t_1+\tau}) = E(X_{t_1-\tau} X_{t_1}) = \phi(\tau)$$

因此, $\phi(\tau)$ 是个偶函数。我们也注意到, $\phi(0) = E(X_t^2)$ 表示过程 $X(t)$ 的平均功率。

也存在如下性质的非平稳过程:过程的均值与时间无关(常数)且自相关函数满足条件 $\phi(t_1, t_2) = \phi(t_1 - t_2)$ 。这样的过程称为宽平稳过程。因此,宽平稳的条件不如严平稳的条件严格。在本书以后任何涉及平稳随机过程的讨论中(包括相关函数),都指较不严格的条件(宽平稳)。

与随机过程自相关函数有关的是它的自协方差函数,后者定义为

$$\begin{aligned} \mu(t_1, t_2) &= E\{[X_{t_1} - m(t_1)][X_{t_2} - m(t_2)]\} \\ &= \phi(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) \end{aligned} \quad (2-2-5)$$

式中, $m(t_1)$ 和 $m(t_2)$ 分别是 X_{t_1} 和 X_{t_2} 的均值。当过程平稳时,该自协方差函数可简化为

$$\mu(t_1, t_2) = \mu(t_1 - t_2) = \mu(\tau) = \phi(\tau) - m^2 \quad (2-2-6)$$

式中 $\tau = t_1 - t_2$ 。

从一个随机过程 $X(t)$ 推导两个或更多个随机变量的高阶联合矩可用一个明显的方法定义。注意,高斯随机过程的高阶矩可用一阶矩和二阶矩表示。因此,高斯随机过程可完全用一阶矩和二阶矩来表征。

1. 高斯过程的平均

假设 $X(t)$ 是个高斯随机过程, 因此在 $t = t_i$ 时刻 ($i = 1, 2, \dots, n$), 随机变量 X_{t_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) 是联合高斯的, 且具有均值 $m(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 和自协方差

$$\mu(t_i, t_j) = E[(X_{t_i} - m(t_i))(X_{t_j} - m(t_j))] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2-2-7)$$

如果将具有元素 $\mu(t_i, t_j)$ 的 $n \times n$ 协方差矩阵用 \mathbf{M} 表示, 均值向量用 \mathbf{m}_x 表示, 那么随机变量 X_{t_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) 的联合 PDF 为式(2-1-150)。

如果高斯过程是平稳的, 那么对所有 t_i 有 $m(t_i) = m$ 且 $\mu(t_i, t_j) = \mu(t_i - t_j)$ 。再注意到, 高斯随机过程完全由均值和自协方差函数确定。因为联合高斯 PDF 只取决于这两个矩, 那么如果高斯过程是宽平稳的, 它也是严平稳的。当然, 逆命题对所有的随机过程总是正确的。

2. 联合随机过程的平均

令 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 表示两个随机过程, 且令 $X_{t_i} \equiv X(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 和 $Y_{t'_j} \equiv Y(t'_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 分别表示在 $t_1 > t_2 > t_3 > \dots > t_n$ 和 $t'_1 > t'_2 > t'_3 > \dots > t'_m$ 时刻的随机变量。这两个过程由任意一组时刻 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, t'_1, t'_2, t'_3, \dots, t'_m$ 及任意正整数 n 和 m 的联合 PDF

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t'_1}, y_{t'_2}, \dots, y_{t'_m})$$

来统计表征。

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数 $\phi_{xy}(t_1, t_2)$ 定义为联合矩

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E(X_{t_1} Y_{t_2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2} p(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2} \quad (2-2-8)$$

互协方差是

$$\mu_{xy}(t_1, t_2) = \phi_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2) \quad (2-2-9)$$

当这些过程是既联合又各自平稳时, 有 $\phi_{xy}(t_1, t_2) = \phi_{xy}(t_1 - t_2)$ 及 $\mu_{xy}(t_1, t_2) = \mu_{xy}(t_1 - t_2)$ 。在这种情况下

$$\phi_{xy}(-\tau) = E(X_{t_1} Y_{t_1+\tau}) = E(X_{t_1-\tau} Y_{t_1}) = \phi_{yx}(\tau) \quad (2-2-10)$$

当且仅当在所有选定 t_i 和 t'_j 及所有正整数 n 和 m 的情况下

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t'_1}, y_{t'_2}, \dots, y_{t'_m}) = p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) p(y_{t'_1}, y_{t'_2}, \dots, y_{t'_m})$$

随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 才是统计独立的。如果

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E(X_{t_1})E(Y_{t_2})$$

那么过程是不相关的。

因此,

$$\mu_{xy}(t_1, t_2) = 0$$

一个复随机过程 $Z(t)$ 定义为

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \quad (2-2-11)$$

式中, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是随机过程。随机变量 $Z_i \equiv Z(t_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 的联合 PDF 由组成分量 $(X_{t_i}, Y_{t_i}) (i=1, 2, \dots, n)$ 的联合 PDF 确定。因此, 表征 $Z_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的 PDF 是

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_n})$$

在窄带高斯噪声以其等效低通分量表示时, 将会遇到复随机过程 $Z(t)$ 。这种过程的一个重要特征是它的自相关函数。该函数定义为

$$\begin{aligned}\phi_{zz}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} E(Z_{t_1} Z_{t_2}^*) \\ &= \frac{1}{2} E[(X_{t_1} + jY_{t_1})(X_{t_2} - jY_{t_2})] \\ &= \frac{1}{2} [\phi_{xx}(t_1, t_2) + \phi_{yy}(t_1, t_2) + j[\phi_{yx}(t_1, t_2) - \phi_{xy}(t_1, t_2)]] \quad (2-2-12)\end{aligned}$$

式中, $\phi_{xx}(t_1, t_2)$ 和 $\phi_{yy}(t_1, t_2)$ 分别是 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的自相关函数, 而 $\phi_{yx}(t_1, t_2)$ 和 $\phi_{xy}(t_1, t_2)$ 是互相关函数。在复随机过程定义中的因子 $1/2$ 是一个任意的但在数学上便于归一化的因子, 我们将在第 4 章处理这种随机过程时阐明这一点。

当过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 既联合又各自平稳时, $Z(t)$ 的自相关函数为

$$\phi_{zz}(t_1, t_2) = \phi_{zz}(t_1 - t_2) = \phi_{zz}(\tau)$$

式中 $t_2 = t_1 - \tau$ 。式(2-2-12)的复共轭是

$$\phi_{zz}^*(\tau) = \frac{1}{2} E(Z_{t_1}^* Z_{t_1-\tau}) = \frac{1}{2} E(Z_{t_1+\tau}^* Z_{t_1}) = \phi_{zz}(-\tau) \quad (2-2-13)$$

因此, $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{zz}^*(-\tau)$ 。

现在, 假设 $Z(t) = X(t) + jY(t)$ 和 $W(t) = U(t) + jV(t)$ 是两个复随机过程。 $Z(t)$ 和 $W(t)$ 的互相关函数定义为

$$\begin{aligned}\phi_{zw}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} E(Z_{t_1} W_{t_2}^*) \\ &= \frac{1}{2} E[(X_{t_1} + jY_{t_1})(U_{t_2} - jV_{t_2})] \\ &= \frac{1}{2} [\phi_{xu}(t_1, t_2) + \phi_{yv}(t_1, t_2) + j[\phi_{yu}(t_1, t_2) - \phi_{xv}(t_1, t_2)]] \quad (2-2-14)\end{aligned}$$

当 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 、 $U(t)$ 和 $V(t)$ 两两平稳时, 式(2-2-14)中的互相关函数变成时间差 $\tau = t_1 - t_2$ 的函数, 而且

$$\phi_{zw}^*(\tau) = \frac{1}{2} E(Z_{t_1}^* W_{t_1-\tau}) = \frac{1}{2} E(Z_{t_1+\tau}^* W_{t_1}) = \phi_{wz}(-\tau) \quad (2-2-15)$$

2.2.2 功率密度谱

信号的频率含量是信号最基本的特征。一般地, 信号可以归类为有限(非零)平均功率(无限能量)信号或无限能量信号。一个有限能量信号的频率含量可以从相应的时间函数的傅里叶变换中得到。如果信号是周期的, 能量是无穷的, 那么它的傅里叶变换不存在。处理周期信号的方法是把它们表示成傅里叶级数。利用这种表示法, 傅里叶系数就确定了在不同离散频率成分上的功率分布。

一个平稳随机过程是一个无限能量信号,因此它的傅里叶变换不存在。随机信号的谱特性可以通过计算自相关函数的傅里叶变换得到,即功率随频率的分布由下列函数给出

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-2-16)$$

傅里叶反变换的关系式为

$$\phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2-2-17)$$

于是

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) df \\ &= E(|X_t|^2) \geq 0 \end{aligned} \quad (2-2-18)$$

因为 $\phi(0)$ 表示随机信号的平均功率,它是在 $\Phi(f)$ 之下的面积,所以 $\Phi(f)$ 是作为频率函数的功率分布。因此, $\Phi(f)$ 称为随机过程的功率密度谱。

如果随机过程是实的, $\phi(\tau)$ 是实的且偶的,那么 $\Phi(f)$ 也是实的且偶的。另一方面,如果过程是复的,即 $\phi(\tau) = \phi^*(-\tau)$,那么

$$\begin{aligned} \Phi^*(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \Phi(f) \end{aligned} \quad (2-2-19)$$

因此, $\Phi(f)$ 是实的。

功率密度谱的定义可以推广到两个联合平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 它们的互相关函数为 $\phi_{xy}(\tau)$ 。 $\phi_{xy}(\tau)$ 的傅里叶变换,即

$$\Phi_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-2-20)$$

称为互功率密度谱。如果对式(2-2-20)两边求共轭,得到

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}^*(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}^*(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}^*(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \Phi_{yx}(f) \end{aligned} \quad (2-2-21)$$

这个关系式一般均成立。然而,如果 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是实随机过程,

$$\Phi_{xy}^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \Phi_{xy}(-f) \quad (2-2-22)$$

将式(2-2-21)和式(2-2-22)的结果结合起来,我们发现两个实随机过程的互功率密度谱满足条件

$$\Phi_{yx}(f) = \Phi_{xy}(-f) \quad (2-2-23)$$

2.2.3 线性时不变系统对随机输入信号的响应

研究一个线性时不变系统(滤波器),该系统由它的冲激响应 $h(t)$ 或等效地由它的频率响应 $H(f)$ 表征,这里 $h(t)$ 和 $H(f)$ 是一个傅里叶变换对。令 $x(t)$ 是系统的输入信号,且令 y

(t)表示输出信号。系统的输出可以表示成卷积积分

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (2-2-24)$$

现在,假定 $x(t)$ 是平稳随机过程 $X(t)$ 的样本函数,那么 $y(t)$ 是随机过程 $Y(t)$ 的样本函数。我们希望求该输出的均值与自相关函数。

因为卷积是对输入信号 $x(t)$ 的一种线性运算,积分的期望值等于期望值的积分。因此, $Y(t)$ 的均值是

$$\begin{aligned} m_y &= E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau \\ &= m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = m_x H(0) \end{aligned} \quad (2-2-25)$$

式中, $H(0)$ 是线性系统在 $f=0$ 处的频率响应。因此,输出过程的均值是一个常数。

输出的自相关函数是

$$\begin{aligned} \phi_{yy}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} E(Y_{t_1} Y_{t_2}^*) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)h^*(\alpha)E[X(t_1-\beta)X^*(t_2-\alpha)]d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)h^*(\alpha)\phi_{xx}(t_1-t_2+\alpha-\beta)d\alpha d\beta \end{aligned}$$

最后一步表明二重积分是时间差 $t_1 - t_2$ 的函数。换言之,如果输入随机过程是平稳的,则输出也是平稳的。因此,

$$\phi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)h(\beta)\phi_{xx}(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta \quad (2-2-26)$$

对式(2-2-26)两边求傅里叶变换,可得到输出过程的功率密度谱,其形式为

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\alpha)h(\beta)\phi_{xx}(\tau+\alpha-\beta)e^{-j2\pi f\tau}d\tau d\alpha d\beta \\ &= \Phi_{xx}(f) |H(f)|^2 \end{aligned} \quad (2-2-27)$$

因此,我们得到一个重要的结论:输出信号的功率密度谱是输入信号功率密度谱乘以系统频率响应幅度的平方。

当要求的是自相关函数 $\phi_{yy}(\tau)$ 时,较容易的方法是先求功率密度谱 $\Phi_{yy}(f)$, 然后计算其傅里叶反变换。因此,得到

$$\begin{aligned} \phi_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{yy}(f)e^{j2\pi f\tau}df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) |H(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}df \end{aligned} \quad (2-2-28)$$

我们看到,输出信号的平均功率是

$$\phi_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) |H(f)|^2 df \quad (2-2-29)$$

因为 $\phi_{yy}(0) = E(|Y_t|^2)$, 于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) |H(f)|^2 df \geq 0$$

假设对于任意小的区间 $f_1 \leq f \leq f_2$, 令 $|H(f)|^2 = 1$, 而在这个区间之外 $H(f) = 0$, 那么

$$\int_{f_1}^{f_2} \Phi_{xx}(f) df \geq 0$$

当且仅当所有 f 都满足 $\Phi_{xx}(f) \geq 0$ 时, 这个关系式才可能成立。

例 2-2-1 假设有一个低通滤波器, 如图 2-2-1 所示, 其激励随机过程 $x(t)$ 的功率密度谱为

$$\Phi_{xx}(f) = \frac{1}{2} N_0$$

对于所有 f 具有平坦功率密度谱的随机过程称为白噪声。下面求输出过程的功率密度谱。低通滤波器的传输函数是

$$H(f) = \frac{R}{R + j2\pi fL} = \frac{1}{1 + j2\pi fL/R}$$

因此

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi L/R)^2 f^2} \quad (2-2-30)$$

输出过程的功率密度谱是

$$\Phi_{yy}(f) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + (2\pi L/R)^2 f^2} \quad (2-2-31)$$

此功率密度谱示于图 2-2-2, 对它进行傅里叶反变换可得到自相关函数

$$\begin{aligned} \phi_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + (2\pi L/R)^2 f^2} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{RN_0}{4L} e^{-(R/L)|\tau|} \end{aligned} \quad (2-2-32)$$

自相关函数 $\phi_{yy}(\tau)$ 示于图 2-2-3。我们看到, 过程 $Y(t)$ 的二阶矩是 $\phi_{yy}(0) = RN_0/4L$ 。

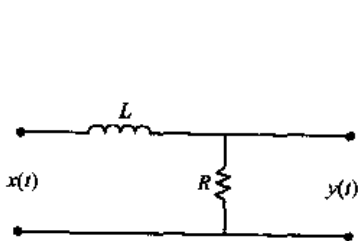


图 2-2-1 低通滤波器的实例

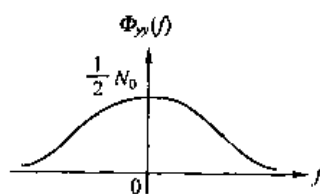


图 2-2-2 当输入是白噪声时, 低通滤波器输出的功率密度谱

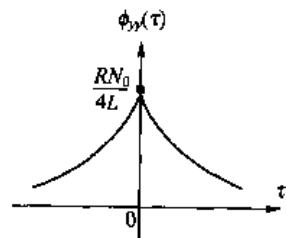


图 2-2-3 当输入白噪声时, 低通滤波器输出的自相关函数

作为练习, 求 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的互相关函数, 这里 $x(t)$ 表示线性系统的输入, $y(t)$ 表示线性系统的输出, 那么

$$\begin{aligned}\phi_{yx}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} E(Y_{t_1} X_{t_2}^*) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) E[X(t_1 - \alpha) X^*(t_2)] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \phi_{xx}(t_1 - t_2 - \alpha) d\alpha = \phi_{yx}(t_1 - t_2)\end{aligned}$$

因此,随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合平稳的。由于 $t_1 - t_2 = \tau$, 则有

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \phi_{xx}(\tau - \alpha) d\alpha \quad (2-2-33)$$

注意,式(2-2-33)中的积分是卷积积分。因此在频率域中,关系式(2-2-33)变成

$$\Phi_{yx}(f) = \Phi_{xx}(f) H(f) \quad (2-2-34)$$

我们看到,如果输入过程是白噪声,那么系统输入与输出的互相关是有一个标尺因子的冲激响应 $h(t)$ 。

2.2.4 带限随机过程的抽样定理

我们知道,确定信号 $s(t)$ 具有傅里叶变换 $S(f)$, 其所含最高频率为 W 。如果对 $|f| > W$ 有 $S(f) = 0$, 则称 $s(t)$ 为带限信号。这样的信号不是惟一地用 $s(t)$ 的以 $f_s \geq 2W$ (符号/s) 速率的抽样值来表示。最小速率 $f_N = 2W$ 样值/s 称为奈奎斯特速率。低于奈奎斯特速率抽样会引起频谱交叠。

以奈奎斯特速率抽样的带限信号可以由其样值利用内插公式重构

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (2-2-35)$$

式中, $\{s(n/2W)\}$ 是 $s(t)$ 在 $t = n/2W$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时刻的样值。这等效为将抽样信号通过一个冲激响应为 $h(t) = (\sin 2\pi W t) / 2\pi W t$ 的理想低通滤波器来重构 $s(t)$ 。图 2-2-4 说明了基于理想内插的信号重构过程。

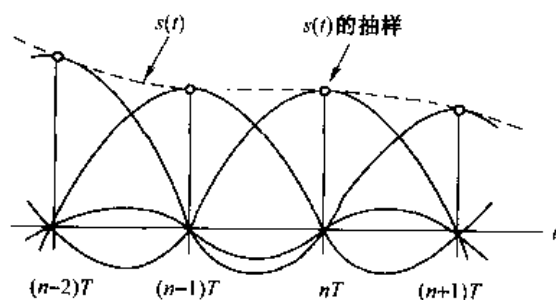


图 2-2-4 基于理想内插的信号重构

如果平稳随机过程 $X(t)$ 的功率密度谱 $\Phi(f)$ 在 $|f| > W$ 时满足 $\Phi(f) = 0$, 则该过程是带限的。因为 $\Phi(f)$ 是自相关函数 $\phi(\tau)$ 的傅里叶变换, 所以 $\phi(\tau)$ 可以表示为

$$\phi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(\tau - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(\tau - \frac{n}{2W}\right)} \quad (2-2-36)$$

式中, $\{\phi(n/2W)\}$ 是在 $\tau = n/2W (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时刻 $\phi(\tau)$ 的抽样值。

如果 $X(t)$ 是带限平稳随机过程, 那么 $X(t)$ 可以表示为

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (2-2-37)$$

式中 $\{X(n/2W)\}$ 是在 $t = n/2W (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时刻 $X(t)$ 的抽样值。这就是平稳随机过程的抽样表达式, 其样值是随机变量, 可用适当的联合概率密度函数对它们进行统计描述。通过对下式的证明(习题 2-17)

$$E\left\{\left[X(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)}\right]^2\right\} = 0 \quad (2-2-38)$$

容易建立起式(2-2-37)所表达的信号。

因此, 在均方误差为零的意义上, 随机过程 $X(t)$ 与抽样表达式之间的相等性成立。

2.2.5 离散时间随机信号与系统

上述连续时间随机信号的特征可以容易地应用到离散时间随机信号上, 这样的信号通常通过对连续时间随机过程均匀抽样而获得。

一个离散时间随机过程 $X(n)$ 是由样值序列集合 $\{x(n)\}$ 组成的。 $X(n)$ 的统计特性类似于 $X(t)$ 的特性, 不过现在限定 n 为整数(时间)变量。因此, $X(n)$ 的 m 阶矩定义为

$$E[X_n^m] = \int_{-\infty}^{\infty} X_n^m p(X_n) dX_n \quad (2-2-39)$$

而自相关序列是

$$\phi(n, k) = \frac{1}{2} E(X_n X_k^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_n X_k^* p(X_n, X_k) dX_n dX_k \quad (2-2-40)$$

类似地, 自协方差序列为

$$\mu(n, k) = \phi(n, k) - \frac{1}{2} E(X_n) E(X_k^*) \quad (2-2-41)$$

对于平稳过程, 有 $\phi(n, k) \equiv \phi(n-k)$, $\mu(n, k) \equiv \mu(n-k)$, 且

$$\mu(n-k) = \phi(n-k) - \frac{1}{2} |m_x|^2 \quad (2-2-42)$$

式中, $m_x = E(X_n)$ 是均值。

正如在连续时间随机过程中那样, 一个离散时间平稳过程的能量无限而平均功率有限, 其平均功率为

$$E(|X_n|^2) = \phi(0) \quad (2-2-43)$$

离散时间过程的功率密度谱可通过 $\phi(n)$ 的傅里叶变换获得。因为 $\phi(n)$ 是离散时间序列, 傅里叶变换定义为

$$\Phi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) e^{-j2\pi fn} \quad (2-2-44)$$

反变换关系式为

$$\phi(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi(f) e^{j2\pi fn} df \quad (2-2-45)$$

我们看到,功率密度谱 $\Phi(f)$ 是周期的,其周期为 $f_p = 1$,换言之, $\Phi(f+k) = \Phi(f)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$)。这是像 $\phi(n)$ 这样的任何离散时间序列的傅里叶变换的一个特性。

最后,我们来研究一个离散时间、线性时不变系统对一个平稳随机输入信号的响应。该系统在时间域上的表征是其单位样值响应 $h(t)$,在频率域上是其频率响应 $H(f)$,这里

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j2\pi fn} \quad (2-2-46)$$

系统对平稳随机输入信号 $X(n)$ 的响应由下列卷积总和给出

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \quad (2-2-47)$$

系统输出的均值是

$$\begin{aligned} m_y &= E[y(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) E[x(n-k)] \\ m_y &= m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = m_x H(0) \end{aligned} \quad (2-2-48)$$

式中, $H(0)$ 是系统的零频率[直流(DC)]增益。

输出过程的自相关序列是

$$\begin{aligned} \phi_{yy}(k) &= \frac{1}{2} E[y^*(n) y(n+k)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h^*(i) h(j) E[x^*(n-i) x(n+k-j)] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h^*(i) h(j) \phi_{xx}(k-j+i) \end{aligned} \quad (2-2-49)$$

这就是系统输出的自相关序列的一般形式,它是以系统输入自相关和系统单位样值响应来表示的。对 $\phi_{yy}(k)$ 进行傅里叶变换,并替代式(2-2-49),可得到相应的频域关系式

$$\Phi_{yy}(f) = \Phi_{xx}(f) |H(f)|^2 \quad (2-2-50)$$

该式与式(2-2-27)相同,只是在式(2-2-50)中,功率密度谱 $\Phi_{yy}(f)$ 和 $\Phi_{xx}(f)$ 以及频率响应 $H(f)$ 是频率的周期函数,且周期为 $f_p = 1$ 。

2.2.6 循环平稳过程

在处理携带数字信息的信号时,我们会遇到具有周期统计平均的随机过程的情况。下面具体地研究一个随机过程,其形式为

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t-nT) \quad (2-2-51)$$

式中, $\{a_n\}$ 是一个随机变量(离散时间)序列,其均值为 $m_a = E(a_n)$ (对所有 n) 且自相关序列为 $\phi_{aa}(k) = \frac{1}{2} E(a_n^* a_{n+k})$ 。信号 $g(t)$ 是确定性的。随机过程 $X(t)$ 表示几种不同类型的线性调制技术的信号,这将在第4章介绍。序列 $\{a_n\}$ 表示在通信信道上传输的(符号的)数字信息序列, $1/T$ 表示信息符号的传输速率。

求 $X(t)$ 的均值和自相关函数。首先,均值是

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(a_n)g(t-nT) \\ &= m_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT) \end{aligned} \quad (2-2-52)$$

可以看到该均值是时变的。实际上,它是以 T 为周期变化的。

$X(t)$ 的自相关函数是

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(t+\tau, t) &= \frac{1}{2} E[X(t+\tau)X^*(t)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(a_n^* a_m) g^*(t-nT) g(t+\tau-mT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{aa}(m-n) g^*(t-nT) g(t+\tau-mT) \end{aligned} \quad (2-2-53)$$

并且

$$\phi_{xx}(t+\tau+kT, t+kT) = \phi_{xx}(t+\tau, t) \quad (2-2-54)$$

其中 $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 。因此, $X(t)$ 的自相关函数也是周期的,其周期为 T 。

这样的随机过程称为循环平稳或周期平稳过程。因为自相关函数与两个变量 t 和 τ 有关,所以它的频域表达式需要利用二维傅里叶变换。

因为需要用功率密度谱表征这种信号,所以一种处理方法是在一个周期上计算时间平均自相关函数,它定义为

$$\bar{\phi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_{xx}(t+\tau, t) dt \quad (2-2-55)$$

因此,我们用时间平均的处理方法消除了与时间的相关性。那么,再对 $\bar{\phi}_{xx}(\tau)$ 求傅里叶变换,就可得到循环平稳随机过程的平均功率密度谱。用这种处理方法可以在频域用功率密度谱来简单地表征循环平稳过程,即功率密度谱为

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2-2-56)$$

2.3 文献与参考资料

本章回顾了概率论和随机过程的基本概念和定义。正如在开头一段中所述,这个理论在信息源和通信信道建模的设计中,以及在数字通信系统的设计中都是重要的数学工具。在通信系统性能的评估中,特别重要的是契尔诺夫边界。这个边界常用来给数字通信系统的错误概率定边界,该系统使用编码来传输信息。本章也重点介绍了在数字通信系统设计中常遇到的几种概率分布及其特性。

达文波特与鲁特(Davenport 和 Root, 1958 年)、达文波特(Davenport, 1970 年)、帕波利斯(Papoulis, 1984 年)、皮伯尔斯(Pebbles, 1987 年)、海尔斯特朗姆(Helstrom, 1991 年)、斯达克和沃兹(Stark 和 Woods, 1994 年)以及列昂·加西亚(Leon-Garcia, 1994 年)等人的著作提供了概率论和随机过程的面向工程的处理方法。对概率论进一步的数学处理,可在罗伊夫(Loève, 1955 年)的著作中找到。最后,我们还引用了密勒(Miller, 1964 年)的著作,他论述了多维高斯

分布。

习题

2-1 一实验有 4 种互斥结果 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 另一实验有 3 个互斥结果 $B_j (j = 1, 2, 3)$ 。

联合概率 $P(A_i, B_j)$ 如下:

$$P(A_1, B_1) = 0.10, \quad P(A_1, B_2) = 0.08, \quad P(A_1, B_3) = 0.13$$

$$P(A_2, B_1) = 0.05, \quad P(A_2, B_2) = 0.03, \quad P(A_2, B_3) = 0.09$$

$$P(A_3, B_1) = 0.05, \quad P(A_3, B_2) = 0.12, \quad P(A_3, B_3) = 0.14$$

$$P(A_4, B_1) = 0.11, \quad P(A_4, B_2) = 0.04, \quad P(A_4, B_3) = 0.06$$

试求概率 $P(A_i) (i = 1, 2, 3, 4)$ 和 $P(B_j) (j = 1, 2, 3)$ 。

2-2 随机变量 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 具有联合 PDF $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 试证明

$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$= p(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1) p(x_{n-1} | x_{n-2}, \dots, x_1) \cdots p(x_3 | x_2, x_1) p(x_2 | x_1) p(x_1)$$

2-3 随机变量 X 的 PDF 为 $p(x)$ 。随机变量 Y 定义为

$$Y = aX + b$$

其中 $a < 0$ 。试根据 X 的 PDF 求 Y 的 PDF。

2-4 假设 X 是一零均值、单位方差的高斯随机变量。设

$$Y = aX^3 + b \quad (a > 0)$$

试求 Y 的 PDF 并绘图。

2-5 (a) 设 X_r 和 X_i 是统计独立、零均值且方差相同的高斯随机变量。进行如下(旋转)变换

$$Y_r + jY_i = (X_r + jX_i)e^{j\theta}$$

试证明高斯随机变量对 (Y_r, Y_i) 和 (X_r, X_i) 具有同样的联合 PDF。

(b) 注意到有

$$\begin{bmatrix} Y_r \\ Y_i \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} X_r \\ X_i \end{bmatrix}$$

式中, \mathbf{A} 是 2×2 矩阵。作为(a)中的高斯随机变量二维变换的一般化推广, 如果 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 的 PDF 相同, 这里 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, $\mathbf{X} = (X_1 X_2 \cdots X_n)$ 而 $\mathbf{Y} = (Y_1 Y_2 \cdots Y_n)$, 试问线性变换 \mathbf{A} 必须满足什么性质?

2-6 随机变量 Y 定义为

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

式中 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为统计独立的随机变量, 且

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{概率 } p \\ 0 & \text{概率 } 1 - p \end{cases}$$

(a) 试求 Y 的特征函数。

(b)由特征函数,试求矩 $E(Y)$ 和 $E(Y^2)$ 。

- 2-7 4个随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 是零均值、联合高斯随机变量,具有协方差 $\mu_{ij} = E(X_i X_j)$ 及特征函数 $\phi(jv_1, jv_2, jv_3, jv_4)$ 。试证明

$$E(X_1 X_2 X_3 X_4) = \mu_{12} \mu_{34} + \mu_{13} \mu_{24} + \mu_{14} \mu_{23}$$

- 2-8 从式(2-1-109)和式(2-1-117)分别表示的中心 χ^2 和非中心 χ^2 随机变量的特征函数,分别求由式(2-1-112)和式(2-1-125)给出的一阶矩和二阶矩。

- 2-9 柯西(Cauchy)分布随机变量 X 的 PDF 为

$$p(x) = \frac{a/\pi}{x^2 + a^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

(a)试求 X 的均值和方差。

(b)试求 X 的特征函数。

- 2-10 随机变量 Y 定义为

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

式中 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为统计独立同分布随机变量,且具有习题 2-9 中的柯西 PDF。

(a)试求 Y 的特征函数。

(b)试求 Y 的 PDF。

(c)考察当 $n \rightarrow \infty$ 时, Y 的 PDF 的极限。试问中心极限定理还有效吗?并解释之。

- 2-11 假设随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 既各自平稳也联合平稳。

(a)试求 $z(t) = x(t) + y(t)$ 的自相关函数。

(b)当 $x(t)$ 和 $y(t)$ 不相关时,试求 $z(t)$ 的自相关函数。

(c)当 $x(t)$ 和 $y(t)$ 不相关且有零均值时,试求 $z(t)$ 的自相关函数。

- 2-12 随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$\phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau)$$

这样的过程称做白噪声。假设 $x(t)$ 输入到理想带通滤波器,该滤波器具有图 P2-12 所示的频率响应特性。试求该滤波器输出端的总噪声功率。

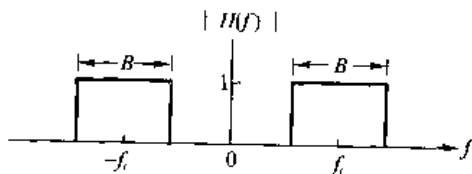


图 P2-12

- 2-13 3个随机变量 X_1, X_2 和 X_3 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & \mu_{13} \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}$$

作线性变换 $Y = AX$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求 \mathbf{Y} 的协方差矩阵。

- 2-14 设 $X(t)$ 是一个均值为零的平稳实正态过程。新过程 $Y(t)$ 为

$$Y(t) = X^2(t)$$

试用 $X(t)$ 的自相关函数来表示 $Y(t)$ 的自相关函数。

提示:利用习题 2-7 导出的高斯变量的结果。

- 2-15 对式(2-1-147)给出 NakagamiPDF, 定义归一化随机变量 $X = R/\sqrt{\Omega}$ 。试求 X 的 PDF。

- 2-16 图 P2-16 中的电路输入为随机过程 $X(t)$, 且 $E[X(t)] = 0$, $\phi_{xx}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$, 即 $X(t)$ 为白噪声过程。

(a) 试求谱密度 $\Phi_{yy}(f)$ 。

(b) 试求 $\phi_{yy}(\tau)$ 和 $E[Y^2(t)]$ 。

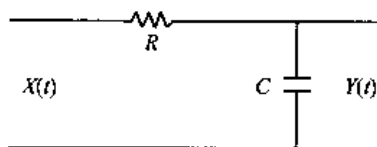


图 P2-16

- 2-17 试证明式(2-2-38)成立。

- 2-18 试利用契尔诺夫(Chernoff)边界证明 $Q(x) \leq e^{-x^2/2}$, 其中 $Q(x)$ 由式(2-1-97)定义。

- 2-19 系统单位样值响应为:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ -2 & (n = 1) \\ 1 & (n = 2) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

当输入 $x(n)$ 是方差为 σ_x^2 的白噪声过程时, 试求系统输出的均值、自相关序列和功率密度谱。

- 2-20 一离散时间随机过程的自相关序列是 $\phi(k) = (1/2)^{|k|}$, 试求其功率密度谱。

- 2-21 对连续时间零均值平稳过程 $X(t)$ 进行周期抽样, 得到离散时间随机过程 $X(n) \equiv X(nT)$, 其中 T 是抽样间隔, 即 $f_s = 1/T$ 是抽样速率。

(a) 试求 $X(t)$ 的自相关函数与 $X(n)$ 的自相关序列之间的关系。

(b) 试用过程 $X(t)$ 的功率密度谱来表示 $X(n)$ 的功率密度谱。

(c) 若要求 $X(n)$ 和 $X(t)$ 的功率密度谱相等, 应满足什么条件?

- 2-22 有一带限零均值平稳随机过程 $X(t)$, 其功率密度谱为

$$\Phi(f) = \begin{cases} 1 & (|f| \leq W) \\ 0 & (|f| > W) \end{cases}$$

$X(t)$ 以速率 $f_s = 1/T$ 抽样,可得离散时间过程 $X(n) \equiv X(nT)$ 。

(a)试求 $X(n)$ 的自相关序列表达式。

(b)为了得到一个白色(谱平坦)序列,试求 T 的最小值。

(c)如果 $X(t)$ 的功率密度谱为:

$$\Phi(f) = \begin{cases} 1 - |f|/W & (|f| \leq W) \\ 0 & (|f| > W) \end{cases}$$

试重复(b)。

2-23 试证明函数

$$f_k(t) = \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{k}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{k}{2W}\right)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

在区间 $[-\infty, \infty]$ 上为正交的,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) f_j(t) dt = \begin{cases} 1/2W & (k = j) \\ 0 & (k \neq j) \end{cases}$$

所以,抽样定理的重构公式可以看做带限信号 $s(t)$ 的级数展开式,其中权值为 $s(t)$ 的样值,且 $\{f_k(t)\}$ 是级数展开式中的正交函数集。

2-24 系统的噪声等效带宽定义为

$$B_{eq} = \frac{1}{G} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

式中, $G = \max |H(f)|^2$ 。利用该定义,试确定图 P2-12 中的理想带通滤波器和图 P2-16中的低通系统的噪声等效带宽。

第3章 信源编码

设计通信系统的目的是把信源产生的信息送到目的地。信源可以有各种不同的形式,例如在无线广播中,信源一般是一个声音源(话音或音乐);在电视广播中,信源是输出活动图像的视频信号源。这些源的输出都是模拟信号,所以称为模拟源。相反,计算机和存储设备,如磁盘或光盘,产生的是离散输出信号(通常是二进制或 ASCII 字符),因此称之为离散源。

无论信源是模拟的还是离散的,数字通信系统是设计为传输数字形式的信息的。所以,信源的输出必须转换成能用数字方式传输的形式。将信源输出转换为数字形式的过程通常由信源编码器实现,它的输出是一串二进制数字序列。

本章将讨论基于信源数学模型的信源编码,并对信源发出的信息作定量描述。我们以信源数学模型的推导为起点,首先考虑离散信源编码器,然后讨论模拟信源编码器。

3.1 信源的数学模型

任何信源产生的输出都是随机的,也就是说,信源输出是用统计方法来定性的;否则,如果信源输出已确切知晓,就没有必要再传输它了。本节将分别以离散和模拟信源的数学模型为前提讨论这两种信源。

最简单的离散信源是由有限字符集的字符组成的序列。例如,一个二进制信源发出 100101110 形式的二进制字符串,它的字符集仅包含两个字符 $\{0, 1\}$ 。更一般地讲,若字符集含有 L 个可能的字符,如 $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$, 则信源发出的是选自该字符集的字符串。

为了构造离散信源的数学模型,假定字符集 $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$ 的每个字符都有给定的发生概率 P_k , 即

$$P_k = P(X = x_k) \quad (1 \leq k \leq L)$$

这里

$$\sum_{k=1}^L P_k = 1$$

考虑离散信源的两种数学模型。第一种,假设信源的输出序列是统计独立的,即当前的输出字符与所有过去和将来的输出字符统计无关。凡信源输出序列各字符间满足统计独立条件,则称其为无记忆的,这样的信源称为离散无记忆信源(DMS)。

假如离散信源的输出是统计相关的,如英语课文,可基于统计上的平稳来构造数学模型。根据平稳的定义,如果长度为 n 的两个序列 a_1, a_2, \dots, a_n 和 $a_{1+m}, a_{2+m}, \dots, a_{n+m}$ 的联合概率在所有 $n \geq 1$ 和所有移序 m 的情况下均相等,那么该离散信源是平稳的。换言之,信源输出的任何两个随意长度的序列的联合概率不随时间起点位置的移动而变化。

模拟信源具有输出波形 $x(t)$, 它是随机过程 $X(t)$ 的一个样本函数。假设 $X(t)$ 是一个平稳随机过程,其自相关函数为 $\phi_{xx}(\tau)$, 功率密度谱是 $\Phi_{xx}(f)$ 。当 $X(t)$ 是带限的随机过程,即 $|f| \geq W$ 时满足条件 $\Phi_{xx}(f) = 0$, 可以用抽样定理来表示 $X(t)$

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (3-1-1)$$

这里, $\{X(n/2W)\}$ 表示以每秒 $f_s = 2W$ 个样值的奈奎斯特速率对过程 $X(t)$ 抽样。这样, 利用抽样定理可把模拟信源的输出转换成等效的离散时间信源。于是对于所有 $m \geq 1$, 都可用联合概率密度函数(PDF) $p(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 从统计角度描述信源输出的特性, 此处 $X_n = X(n/2W)$, $1 \leq n \leq m$ 是与 $X(t)$ 抽样对应的随机变量。

我们注意到, 由平稳信源得到的每个输出抽样值 $\{X(n/2W)\}$ 通常是模拟量, 如果不损伤精度就无法用数字形式表示。例如, 可以把各个采样值量化成一组离散的幅度, 但这种量化处理必然导致精度损失, 后果是从量化的样值中不能精确地恢复原信号。在本章的后面部分, 我们将考虑由样值量化造成的模拟信源的失真问题。

3.2 信息的对数量度

为了找到一种度量信息的恰当方法, 考虑两个离散随机变量, 它们可能的取值分别是 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 和 $y_j (j=1, 2, \dots, m)$ 。假定已观察到某个结果 $Y = y_j$, 希望能定量地求出由 $Y = y_j$ 的出现而提供的关于 $X = x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的信息量。我们注意到, 当 X 和 Y 统计独立时, $Y = y_j$ 的出现对事件 $X = x_i$ 的发生不提供任何信息。另一方面, 当 X 和 Y 完全相关, 即 $Y = y_j$ 的出现决定了事件 $X = x_i$ 的出现时, 信息量正是事件 $X = x_i$ 所能提供的信息量。满足这些条件的一个适当的量度是以下条件概率

$$P(X = x_i | Y = y_j) \equiv P(x_i | y_j)$$

除以概率

$$P(X = x_i) \equiv P(x_i)$$

所得比值的对数, 也就是说, 由于事件 $Y = y_j$ 的出现而提供的关于事件 $X = x_i$ 的信息量可定义为

$$I(x_i; y_j) = \log \frac{P(x_i | y_j)}{P(x_i)} \quad (3-2-1)$$

$I(x_i; y_j)$ 称为 x_i 和 y_j 间的互信息。

$I(x_i; y_j)$ 的单位是由对数的底决定的, 通常选用 2 或者 e 。当对数的底是 2 时, $I(x_i; y_j)$ 的单位是比特; 而当以 e 为底时, $I(x_i; y_j)$ 的单位叫奈特(nat, 自然单位。 \log_e 的标准缩写是 \ln)。由于

$$\ln a = \ln 2 / \log_2 a = 0.69315 \log_2 a$$

所以, 用奈特量度的信息量是用比特量度的信息量的 $\ln 2$ 倍。

当随机变量 X 和 Y 统计独立时, $P(x_i | y_j) = P(x_i)$, 因此 $I(x_i; y_j) = 0$ 。另一方面, 当事件 $Y = y_j$ 的出现唯一地决定了事件 $X = x_i$ 出现时, 式(3-2-1)分子上的条件概率等于 1, 因此

$$I(x_i; y_j) = \log \frac{1}{P(x_i)} = -\log P(x_i) \quad (3-2-2)$$

式(3-2-2)也就是事件 $X = x_i$ 的信息。正是由于这个原因, 我们把它叫做事件 $X = x_i$ 的自信息, 记做

$$I(x_i) = \log \frac{1}{P(x_i)} = -\log P(x_i) \quad (3-2-3)$$

注意,大率事件比小概率事件的信息量少。事实上,如果仅有发生概率为 $P(x)=1$ 的单一事件,那么它的 $I(x)=0$ 。为了进一步说明信息量的对数量度对数字通信来说是一种合理的量度方法,看一个例子。

例 3-2-1 假设有一个离散信源,在每 τ_s 秒内以相等的概率发出二进制数字 0 或 1,则信源每个输出的信息含量是

$$I(x_i) = -\log_2 P(x_i) = -\log_2 0.5 = 1 \text{ 比特} \quad (x_i = 0, 1)$$

假设信源的前后输出是统计独立的,即信源是无记忆的,研究这样一个信源:它在时间 $k\tau_s$ 内发出一串由 k 个二进制数字组成的分组。 k 比特组共有 $M=2^k$ 种可能的组合,每种组合以相等的概率 $1/M=2^{-k}$ 发生。于是在时间 $k\tau_s$ 内发出的 k 比特分组的自信息是

$$I(x'_i) = -\log_2 2^{-k} = k \text{ 比特}$$

这样,当信源的许多输出被看成是一个分组块时,信息量的对数量度具有相加的特点。

现在回到式(3-2-1)关于互信息的定义上,将概率比值的分子和分母同乘以 $P(y_j)$,由于

$$\frac{P(x_i | y_j)}{P(x_i)} = \frac{P(x_i | y_j)P(y_j)}{P(x_i)P(y_j)} = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} = \frac{P(y_j | x_i)}{P(y_j)}$$

可得到如下结论

$$I(x_i; y_j) = I(y_j; x_i) \quad (3-2-4)$$

因此,由事件 $Y = y_j$ 的出现提供的关于事件 $X = x_i$ 出现的信息量,应等于由事件 $X = x_i$ 的出现提供的关于事件 $Y = y_j$ 出现的信息量。

例 3-2-2 设 X, Y 是二元域 $\{0, 1\}$ 上的随机变量,分别代表二元入、二元出信道的输入和输出。输入符号等概,输出符号取决于与输入相关的条件概率

$$P(Y=0|X=0) = 1 - p_0$$

$$P(Y=1|X=0) = p_0$$

$$P(Y=1|X=1) = 1 - p_1$$

$$P(Y=0|X=1) = p_1$$

在 $Y=0$ 的情况下,定义事件 $X=0$ 和 $X=1$ 发生的互信息。

从上面给出的概率,可以得到

$$P(Y=0) = P(Y=0|X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=0|X=1) \cdot P(X=1) = (1 - p_0 + p_1)/2$$

$$P(Y=1) = P(Y=1|X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=1|X=1) \cdot P(X=1) = (1 - p_1 + p_0)/2$$

因此,在 $Y=0$ 的前提下,事件 $X=0$ 发生的互信息是

$$I(x_1; y_1) = I(0; 0) = \log_2 \frac{P(Y=0|X=0)}{P(Y=0)} = \log_2 \frac{2(1 - p_0)}{1 - p_0 + p_1}$$

同理,在 $Y=0$ 的情况下,事件 $X=1$ 发生的互信息是

$$I(x_2; y_1) = I(1; 0) = \log_2 \frac{2p_1}{1 - p_0 + p_1}$$

考虑几个特例。首先,若 $p_0 = p_1 = 0$,这种信道称为无噪信道,

$$I(0; 0) = \log_2 2 = 1 \text{ 比特}$$

因此,从输出完全可确定输入。另一方面,如果 $p_0 = p_1 = 0.5$,则信道是无用信道,因为

$$I(0;0) = \log_2 1 = 0$$

然而,如果 $p_0 = p_1 = 0.25$,那么

$$I(0;0) = \log_2 1.5 = 0.587$$

$$I(0;1) = \log_2 0.5 = -1 \text{ 比特}$$

除了互信息和自信息的定义外,定义以下条件自信息也是很有用的

$$I(x_i | y_j) = \log \frac{1}{P(x_i | y_j)} = -\log P(x_i | y_j) \quad (3-2-5)$$

结合式(3-2-1)、(3-2-3)和(3-2-5),可得关系式

$$I(x_i; y_j) = I(x_i) - I(x_i | y_j) \quad (3-2-6)$$

我们把 $I(x_i | y_j)$ 解释为事件 $Y = y_j$ 发生后,事件 $X = x_i$ 的自信息。由于 $I(x_i) \geq 0$ 及 $I(x_i | y_j) \geq 0$,可推得当 $I(x_i | y_j) > I(x_i)$ 时 $I(x_i; y_j) < 0$,以及当 $I(x_i | y_j) < I(x_i)$ 时 $I(x_i; y_j) > 0$ 。因此,一对事件的互信息既可以是正的,也可以是负的,或者是零。

3.2.1 平均互信息和熵

我们已定义了与一对事件 (x_i, y_j) 有关的互信息,它们是两个随机变量 X 和 Y 可能取值的组合。如果用联合事件发生的概率对 $I(x_i; y_j)$ 加权,并对所有可能的联合事件求和,可以得到互信息的平均值。据此,可得 X 和 Y 的平均互信息为

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) I(x_i; y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \end{aligned} \quad (3-2-7)$$

注意,当 X 和 Y 统计独立时, $I(X; Y) = 0$ 。平均互信息的一个重要特性是 $I(X; Y) \geq 0$ (见习题 3-4)。

同样地,我们可以定义平均自信息,用 $H(X)$ 表示为

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{i=1}^n P(x_i) I(x_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log P(x_i) \end{aligned} \quad (3-2-8)$$

如 X 表示信源可能的输出字符集, $H(X)$ 就表示每个信源字符的平均自信息,我们把它叫做信源的熵^①。在信源输出符号等概的特定情况下,对于所有 i 都有 $P(x_i) = 1/n$ 。于是

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} \\ &= \log n \end{aligned} \quad (3-2-9)$$

一般来说,对任何一组给定的信源符号概率,都有 $H(X) \leq \log n$ (见习题 3-5)。换句话说,当输出字符等概率时,离散信源的熵最大。

① 术语“熵”来自统计力学(热力学),其中有一个与式(3-2-8)类似的函数叫(热力学)熵。

例 3-2-3 考虑一个可产生统计独立的字符串的信源,其输出或是 0(概率为 q),或是 1(概率为 $1-q$)。这个信源的熵为

$$H(X) \equiv H(q) = -q \log q - (1-q) \log(1-q) \quad (3-2-10)$$

二元熵函数 $H(q)$ 如图 3-2-1 所示。从图中可见,熵函数的最大值发生在 $q=0.5$ 处,此时 $H(0.5)=1$ 。

平均的条件自信息称为条件熵,定义为

$$H(X|Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log \frac{1}{P(x_i|y_j)} \quad (3-2-11)$$

我们把 $H(X|Y)$ 解释为由 Y 的发生而提供的关于事件 X 的信息或不确定度。结合式(3-2-7)、(3-2-8)和(3-2-11),可得如下关系式

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (3-2-12)$$

由于 $I(X;Y) \geq 0$,必有 $H(X) \geq H(X|Y)$,当且仅当 X 和 Y 统计独立时,等号才成立。如果把 $H(X|Y)$ 解释为 Y 发生以后事件 X 不确定度(条件自信息)的平均值, $H(X)$ 是 Y 发生前事件 X 不确定度(自信息)的平均值,那么 $I(X;Y)$ 就是由 Y 的发生所提供的关于 X 的平均不确定度(互信息)。因为 $H(X) \geq H(X|Y)$,显然,以已知 Y 为条件并没有增大熵。

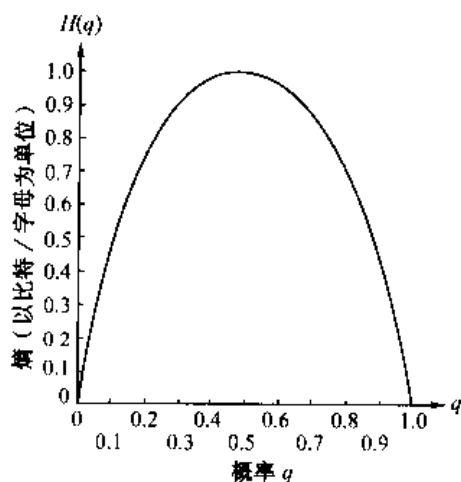


图 3-2-1 二元熵函数

例 3-2-4 对于例 3-2-2 中的二元入、二元出信道,在 $p_o = p_i = p$ 的情况下,求 $H(X|Y)$ 和 $I(X;Y)$ 的值。令输入符号的概率为 $P(X=0)=q$ 及 $P(X=1)=1-q$,则熵是

$$H(X) \equiv H(q) = -q \log q - (1-q) \log(1-q)$$

这里, $H(q)$ 是二元熵函数, $H(X|Y)$ 是式(3-2-11)定义的条件熵。以 p 为参数, $H(X|Y)$ 为 q 函数的曲线如图 3-2-2 所示,平均互信息 $I(X;Y)$ 的关系曲线如图 3-2-3 所示。

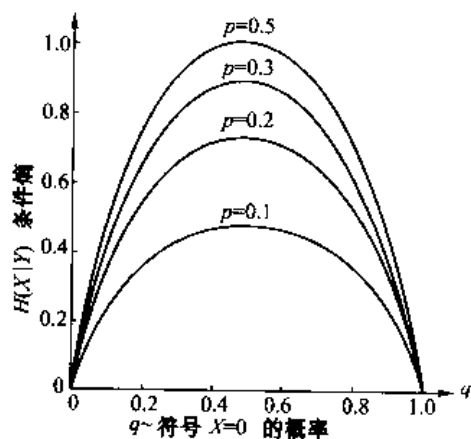


图 3-2-2 二元入、二元出对称信道的条件熵

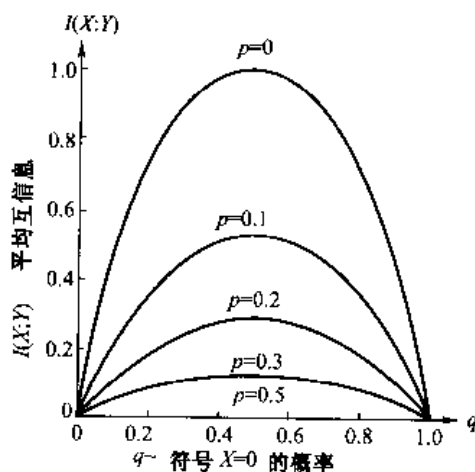


图 3-2-3 二进入、二进出对称信道的平均互信息

在上例中,如以输入为 X 、输出为 Y 的信道的观点来看条件熵 $H(X|Y)$, $H(X|Y)$ 称做模糊度(equivocation),解释为在 Y 已知的条件下, X 不确定程度的平均量度。

上面给出的结论可推广应用于两个以上的随机变量的情况。具体地说,假设有 k 个随机变量 X_1, X_2, \dots, X_k 组成的分组,其联合概率 $P(x_1 x_2 \dots x_k) \equiv (P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k))$, 那么该分组的熵定义为

$$H(X_1 X_2 \dots X_k) = - \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} P(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}) \lg P(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}) \quad (3-2-13)$$

由于联合概率 $P(x_1 x_2 \dots x_k)$ 可分解为

$$P(x_1 x_2 \dots x_k) = P(x_1) P(x_2 | x_1) P(x_3 | x_1 x_2) \dots P(x_k | x_1 x_2 \dots x_{k-1}) \quad (3-2-14)$$

由此推出

$$\begin{aligned} H(X_1 X_2 X_3 \dots X_k) &= H(X_1) + H(X_2 | X_1) + H(X_3 | X_1 X_2) \\ &\quad + \dots + H(X_k | X_1 \dots X_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k H(X_i | X_1 X_2 \dots X_{i-1}) \end{aligned} \quad (3-2-15)$$

利用 $H(X) \geq H(X | Y)$ 的关系, $X = X_m$ 以及 $Y = X_1 X_2 \dots X_{m-1}$, 由式(3-2-15), 得

$$H(X_1 X_2 \dots X_k) \leq \sum_{m=1}^k H(X_m) \quad (3-2-16)$$

当且仅当随机变量 X_1, X_2, \dots, X_k 统计独立时, 上式等号成立。

3.2.2 连续随机变量信息的度量

上节给出的关于离散随机变量互信息的定义, 可直接推广到连续随机变量的情况。具体地说, 若 X 和 Y 是联合 PDF 为 $p(x, y)$, 边际 PDF 等于 $p(x)$ 和 $p(y)$ 的两个随机变量, X, Y 之间的平均互信息定义为

$$I(X; Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) p(y | x) \log \frac{p(y | x) p(x)}{p(x) p(y)} dx dy \quad (3-2-17)$$

尽管平均互信息的定义可延伸用于连续随机变量, 但自信息的概念不能生搬硬套。问题出在连续随机变量需用无限个二进数字才能精确表达, 这样会使自信息变得无穷大, 它的熵也将无穷大。然而, 可定义一个量, 叫做连续随机变量 X 的差熵

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx \quad (3-2-18)$$

值得一提的是, 这个量尽管看上去很像是离散随机变量熵定义的自然扩展, 但其实没有自信息的物理意义(见习题 3-6)。

通过定义 Y 已知时 X 的平均条件熵

$$H(X | Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \log p(x | y) dx dy \quad (3-2-19)$$

平均互信息表达为

$$I(X; Y) = H(X) - H(X | Y)$$

或者换一种写法

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y | X)$$

在某些特定情况下, 随机变量 X 是离散的, 而 Y 是连续的。举个例子来说, 假定 X 可能的取值是 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 而 Y 用其边际 PDF $p(y)$ 描述。当 X, Y 统计相关时, $p(y)$ 可表

示为

$$p(y) = \sum_{i=1}^n p(y|x_i)P(x_i)$$

事件 $Y=y$ 的发生为事件 $X=x_i$ 提供的互信息是

$$\begin{aligned} I(x_i; y) &= \log \frac{p(y|x_i)P(x_i)}{p(y)p(x_i)} \\ &= \log \frac{p(y|x_i)}{p(y)} \end{aligned} \quad (3-2-20)$$

那么, X 和 Y 之间的平均互信息是

$$I(X; Y) = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} p(y|x_i)P(x_i) \log \frac{p(y|x_i)}{p(y)} dy \quad (3-2-21)$$

例 3-2-5 设离散随机变量 X 有两个等概取值 $x_1=A$ 或 $x_2=-A$, 令条件 PDF $p(y|x_i)$ ($i=1,2$) 服从均值为 x_i 、方差为 σ^2 的高斯分布, 即

$$\begin{aligned} p(y|A) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-A)^2/2\sigma^2} \\ p(y|-A) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y+A)^2/2\sigma^2} \end{aligned} \quad (3-2-22)$$

由式(3-2-21)得到的平均互信息为

$$I(X; Y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[p(y|A) \log \frac{p(y|A)}{p(y)} + p(y|-A) \log \frac{p(y|-A)}{p(y)} \right] dy \quad (3-2-23)$$

$$p(y) = [p(y|A) + p(y|-A)]/2 \quad (3-2-24)$$

在第 7 章我们将看到, 式(3-2-23)给出的平均互信息 $I(X; Y)$ 代表了二进制输入的加性高斯白噪声信道的信道容量。

3.3 离散信源编码

在 3.2 节, 我们介绍了离散随机变量 X 所含信息量的度量方法。当 X 是一个离散信源的输出时, 信源熵 $H(X)$ 代表信源发出的平均信息量。本节将讨论信源输出的编码方法, 即用二进制数字序列来表示信源输出的方法。有一种衡量信源编码效率的办法是把表示信源每一个输出字符所用的平均二进制数字的个数与信源熵 $H(X)$ 比较。初一看, 有限字符集离散信源的编码相对来说是一个简单问题, 然而, 只有当信源无记忆时才是这样, 即由信源发出的前后符号间统计独立, 每个符号可以单独编码。这种离散无记忆信源(DMS)是能够想到的最简单的物理信源模型, 但极少有实际信源是与此理想数学模型相符的。例如, 从一台打印英语课文的机器里发出的前后字符被认为是统计相关的, 另一方面, 如果从机器里送出的是用 Fortran 语言编写的程序, 那么输出符号序列之间的相关性要小得多。但不管是什么情况, 都可以证明: 对字符组编码总是比对单个字符编码效率高。如果使字符组足够长, 则信源中的每个输出字符所用的二进制数字的平均个数可无限地趋近于信源熵。

3.3.1 离散无记忆信源的编码

假设有一个 DMS, 每 τ_s 秒产生一个字符或符号, 每个符号选自有限字符集 $x_i (i = 1, 2, \dots, L)$, 各符号发生的概率分别是 $P(x_i) (i = 1, 2, \dots, L)$ 。以“比特/信源符号”为单位, 该 DMS 的熵是

$$H(X) = - \sum_{i=1}^L P(x_i) \log_2 P(x_i) \leq \log_2 L \quad (3-3-1)$$

当各符号等概时, 上式的等号成立。每信源符号的平均比特数是 $H(X)$, 以 b/s 为单位计算的信源速率是 $H(X)/\tau_s$ 。

1. 固定长度码字

首先讨论一个分组编码的方案, 为每个符号指定惟一的 R 位二进制数字串与之对应。因为每个符号有 L 个可能的取值, 当 L 是 2 的幂次时, 每个符号为了能惟一编码所需要的二进制位数是

$$R = \log_2 L \quad (3-3-2)$$

当 L 不是 2 的幂次时, 应有

$$R = \lfloor \log_2 L \rfloor + 1 \quad (3-3-3)$$

式中, $\lfloor x \rfloor$ 表示小于 x 的最大整数(取整)。在上述情况下, 每个符号的码率等于 R (以比特为单位), 并且由于 $H(X) \leq \log_2 L$, 可知 $R \geq H(X)$ 。

DMS 的编码效率定义为 $H(X)/R$ 之比。我们看到, 当 L 是 2 的幂次且信源符号等概时, $R = H(X)$ 成立, 这时每个符号 R 比特的固定长度码达到了 100% 的效率。但当 L 不是 2 的幂次而信源符号依然等概时, R 与 $H(X)$ 的差别至多是每符号 1 比特。当 $\log_2 L \gg 1$ 时, 这种编码方式的效率仍然较高。另一方面, 当 L 很小时, 可以一次对 J 个符号的序列编码, 这样的固定长度码能提高效率。为了实现要求的编码, 需要 L^J 个不同的码字。若采用二进制数字序列, N 长的序列可表示 2^N 个可能的码字, 所以 N 的选择必须满足条件

$$N \geq J \log_2 L$$

因此, 满足要求的 N 的最小整数值是

$$N = \lfloor J \log_2 L \rfloor + 1 \quad (3-3-4)$$

于是, 每信源符号的平均比特数是 $N/J = R$, 与上述逐符号编码相比, (由取整造成的) 效率降低约可减小一个因子 $1/J$ 。如果以 $JH(X)/N$ 的比值来度量编码效率, 那么当 J 足够大时, 编码效率可任意地趋近于 1。

上述编码方法并没有引起失真, 因为从信源符号或符号组编成的码字是惟一的, 这种类型的编码称为是无噪的。

下面, 我们试图降低码率 R , 在编码过程中放宽“惟一性”这个条件, 例如假设在 L^J 种符号取值中只有一部分是一一对应编码的。说得更具体些, 选择 $2^N - 1$ 种最有可能的 J 符号组, 让它们一一对应编码, 而剩余的 $L^J - (2^N - 1)$ 种 J 符号组统统编成余下的码字。采用这种处理方式后, 每当遇到低概率符号组编成那个码字时, 就会导致译码失败或译码差错概率(失真)。可以用 P_e 代表这个差错概率。对于这种分组的编码方法, 香农(1948 年)提出了以下信源编码定理。

2. 信源编码定理 I

若 X 是有限熵离散无记忆信源的字符集, 由信源发出的 J 个字符组成的分组编成长度为 N 的二进制码字。对于任何 $\epsilon > 0$, 都可使分组译码差错概率 P_e 任意小, 只要

$$R = \frac{N'}{J} \geq H(X) + \epsilon \quad (3-3-5)$$

以及 J 足够大。反之, 如果

$$R \leq H(X) - \epsilon \quad (3-3-6)$$

那么当 J 足够大时, P_e 可以任意地趋近于 1。

从上述结论可看到, 想要以任意小的译码差错概率对 DMS 信源的输出编码, 每个符号的平均比特数是以信源熵为下边界的。另一方面, 如果 $R < H(X)$, 则当 J 任意增大时, 译码差错概率趋于 100%。

3. 变长码字

当信源符号不等概时, 更有效的办法是采用变长码字。这种码的例子之一可追溯到 19 世纪的莫尔斯码。在莫尔斯码中, 发生频率较高的字母被指定到一个短的码字, 而发生频率较低的字母被指定给长的码字。遵循这条思路, 总可根据信源符号的不同发生概率来选择码字。问题是要推导出一种方法, 使得能给信源符号选择和指定码字。这种类型的编码称为熵编码。

举例来说, 假定有一个 DMS 信源, 其输出符号为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 相应的概率是 $P(a_1) = 1/2, P(a_2) = 1/4, P(a_3) = P(a_4) = 1/8$, 编码情况如表 3-3-1 所示。码 I 是一个有致命缺陷的变长码。为了看清这个缺陷, 假设编码后的序列是 001001..., 显然, 对应于 00 的第 1 个字符是 a_2 ; 但下面 4 个比特是混淆的 (非惟一可译), 它们可以译成 a_4a_3 , 也可以译成 $a_1a_2a_1$ 。或许, 下一比特的到来可以消除这种不确定性, 但是这种译码延迟是很不希望的。应该考虑的是那些立即可译的码, 就是说不存在任何译码延迟。

表 3-3-1 中的码 II 是立即可译且惟一可译的码。这种码的码字用图形表示比较方便, 把它当做树图上的终端节点, 如图 3-3-1 所示。我们看到, 数字 0 在前 3 个码字中表示每个码字的结尾, 这个特点以及最长的码字不超过 3 位二进制数字, 使得这种码立即可译。注意, 在这种码里, 没有一个码字是另一个码字的前缀。一般来说, 前缀条件是指对于一个长度为 k 的给定码字 $C_k = (b_1, b_2, \dots, b_k)$, 不存在另一个长度 $l < k (1 \leq l \leq k-1)$, 包含码元素 (b_1, b_2, \dots, b_l) 的码字。另一方面, 也没有一个长度 $l < k$ 的码字等于另一个长度 $k > l$ 的码字的前 l 个二进制数字。这种性质使得该码立即可译。

表 3-3-1 变长码

字 符	$P(a_k)$	码 I	码 II	码 III
a_1	$\frac{1}{2}$	1	0	0
a_2	$\frac{1}{4}$	00	10	01
a_3	$\frac{1}{8}$	01	110	011
a_4	$\frac{1}{8}$	10	111	111

表 3-3-1 中的码Ⅱ具有图 3-3-2 所示的树结构。在这种情况下,码是惟一可译的,但非立即可译的。显然,这种码并不满足前缀条件。

我们的主要目标是要找到一种用来构建惟一可译变长码的系统的方法,这种码在每信源符号所需的平均比特数最少,从这个角度看它是高效的。这里,信源符号的平均比特数定义为

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^L n_k P(a_k) \quad (3-3-7)$$

满足前缀条件的码存在的条件由克拉夫特(Kraft)不等式给出。

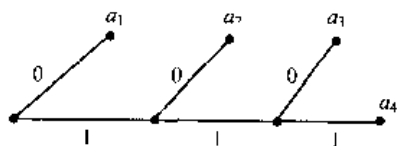


图 3-3-1 表 3-3-1 中码Ⅱ的码树

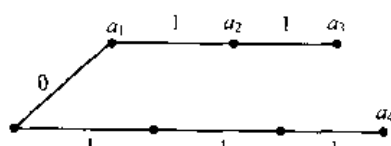


图 3-3-2 表 3-3-1 中码Ⅲ的码树

4. 克拉夫特(Kraft)不等式

一个满足前缀条件且码字长度 $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_L$ 的二进制码存在的充分和必要条件是

$$\sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1 \quad (3-3-8)$$

第一步,我们证明式(3-3-8)是满足前缀条件的码存在的充分条件。要构成这样的码,首先做一个 $n = n_L$ 级的全二进制树,它有 2^n 个终端节点,从第 $k-1$ 级的每一节点导出第 k ($1 \leq k \leq n$) 级的两个节点。如果选择第 n_1 级的任意一个节点作为第一个码字 C_1 ,这一选择消除了 2^{n-n_1} 个终端节点(或 2^n 的 2^{-n_1} 分之一)。从剩余的 n_2 级节点中再选择一个作为第二个码字 C_2 ,这次选择又消除了 2^{n-n_2} 个终端节点(或 2^n 个终端节点中的 2^{-n_2} 分之一)。这个过程延续下去,直到将最后一个码字指定给终端节点 $n = n_L$ 。由于在 $j < L$ 级的节点处消除的

终端节点比例是

$$\sum_{k=1}^j 2^{-n_k} < \sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1$$

总有一个 $k > j$ 级的节点可以指定给下一个码字。这样,可构成一个码树,它是嵌在 2^n 个节点的全树里的,如图 3-3-3 所示。图中的树有 16 个终端节点,信源输出由 5 个字符组成,分别是 $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3$ 和 $n_4 = n_5 = 4$ 。

要证明式(3-3-8)是必要条件,我们看码树的第 $n = n_L$ 级,在这一级上从总数 2^n 中消除的终端节点的数目是

$$\sum_{k=1}^L 2^{n-n_k} \leq 2^n$$

因此

$$\sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1$$

这就完成了式(3-3-8)必要性的证明。

克拉夫特不等式可以用来证明(无噪)信源的编码定理,该定理适用于满足前缀条件的编码。

5. 信源编码定理 II

若 X 是有限熵 $H(X)$ 离散无记忆信源的字符集, 与输出字符 $x_k (1 \leq k \leq L)$ 对应的发生概率是 $p_k (1 \leq k \leq L)$, 那么有可能构成一个平均长度为 \bar{R} 且满足前缀条件的码, 该码满足下列不等式

$$H(X) \leq \bar{R} < H(X) + 1 \quad (3-3-9)$$

为了确定式(3-3-9)的下限, 注意到对于长度为 $n_k (1 \leq k \leq L)$ 的码字, $H(X) - \bar{R}$ 的差可以表示为

$$\begin{aligned} H(X) - \bar{R} &= \sum_{k=1}^L p_k \log_2 \frac{1}{p_k} - \sum_{k=1}^L p_k n_k \\ &= \sum_{k=1}^L p_k \log_2 \frac{2^{-n_k}}{p_k} \end{aligned} \quad (3-3-10)$$

在式(3-3-10)中利用不等式 $\ln x \leq x - 1$, 可得

$$\begin{aligned} H(X) - \bar{R} &\leq (\log_2 e) \sum_{k=1}^L p_k \left(\frac{2^{-n_k}}{p_k} - 1 \right) \\ &\leq (\log_2 e) \left(\sum_{k=1}^L 2^{-n_k} - 1 \right) \leq 0 \end{aligned}$$

式中, 后面一个不等式来自克拉夫特不等式。当且仅当 $p_k = 2^{-n_k} (1 \leq k \leq L)$ 时, 上式中的等号成立。

在 $n_k (1 \leq k \leq L)$ 是整数的约束条件下选择 $\{n_k\}$, 使得满足 $2^{-n_k} \leq p_k < 2^{-n_k+1}$, 就能确定式(3-3-9)的上边界。但是, 若将 $p_k \geq 2^{-n_k}$ 的项在 $(1 \leq k \leq L)$ 区间相加, 可得到克拉夫特不等式。我们已证明过: 对于该不等式, 一定存在一个满足前缀条件的码。另一方面, 如果取 $p_k < 2^{-n_k+1}$ 的对数, 可得

$$\log p_k < -n_k + 1$$

等效于

$$n_k < 1 - \log p_k \quad (3-3-11)$$

如果将式(3-3-11)两边乘以 p_k , 并在 $1 \leq k \leq L$ 范围内将各式相加, 可得到所要求的式(3-3-9)的上边界。

自此我们确认, 满足前缀条件的变长码对于任何信源符号不等概的 DMS 信源来说都是一种高效的信源编码。下面将介绍构造这种码的一种算法。

6. 霍夫曼(Huffman)编码算法

霍夫曼(1952年)研究出一种基于信源符号概率 $P(x_i) (i=1, 2, \dots, L)$ 的变长码编码算法。这种算法在下述意义上是最优的: 在码字满足前缀条件的情况下, 用来表示信源符号的平均二进制数字的数目最小。正如上面定义过的, 满足该条件的接收序列可被惟一且即时地译码。下面举两个例子来说明这种算法。

例 3-3-1 考虑一个有 7 种可能符号 x_1, x_2, \dots, x_7 的 DMS 信源, 各种符号的发生概率如图 3-3-4 所示。按照概率递减的顺序将各符号排序, 即 $P(x_1) > P(x_2) > \dots > P(x_7)$ 。从最

小概率的两个符号 x_6, x_7 开始编码, 这两个码字捆绑在一起, 如图 3-3-4 所示, 上分支指定为 0 而下分支指定为 1, 这两个分支的概率在两分支的汇合处相加而得到 0.01 的概率。这时有信源符号 x_1, \dots, x_5 以及一个新符号, 比如称做 x'_6 , 是由 x_6 和 x_7 结合而成的。下一步是将集合 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x'_6$ 中最小概率的两个符号即 x_5 和 x'_6 捆绑在一起, 结合后的概率是 0.05。由 x_5 来的分支指定为 0, x'_6 来的分支指定为 1。这个过程持续下去, 直到把可能的信源符号用完。结果得到一棵码树, 其分支包含要求的码字。码字是从树的最右节点开始数到左边的, 最终得出的码字列于图 3-3-4。对于这种码, 每个符号所需的平均二进制数的个数是 $\bar{R} = 2.21$ 比特/符号, 信源的熵是 2.11 比特/符号。

通过观察可知, 该码未必是惟一的。例如在编码过程的倒数第二步, 我们把 x_1 和 x'_3 结合在一起, 因为这些符号是等概的。换一种方法, 也可将 x_2 和 x'_3 结合在一起, 如果这样, 所得的码如图 3-3-5 所示。这种码每信源符号所需的平均二进制数字的数目也是 2.21, 因此同样有效。另外, 将上分支指定为 0, 将下(低概率)分支指定为 1 也是随意的, 完全可以把 0 和 1 反过来, 同样可获得满足前缀条件的高效码。

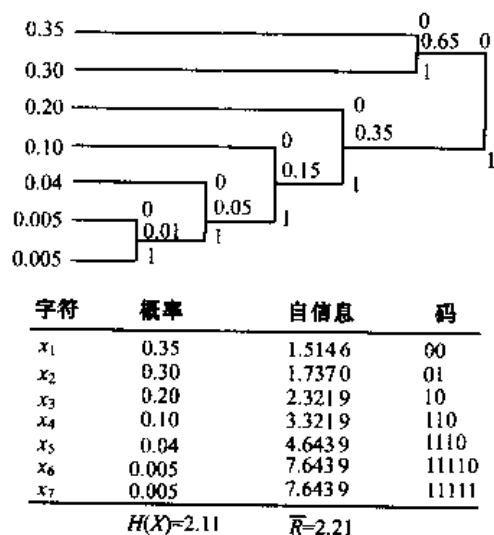


图 3-3-4 DMS 信源变长信源编码的例子

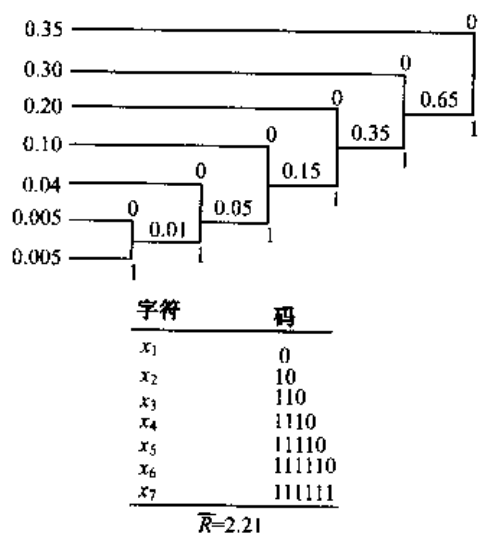


图 3-3-5 对例 3-3-1 中的 DMS 信源的另一种编码方法

例 3-3-2 作为第二个例子, 确定图 3-3-6 所示 DMS 信源输出的霍夫曼码。这个信源的熵是 $H(X) = 2.63$ 比特/符号。图 3-3-6 所示的霍夫曼码的平均长度是 $\bar{R} = 2.70$ 比特/符号, 因此, 它的效率是 0.97。

上例描述的变长(霍夫曼)编码算法生成了一个前缀码, 其 \bar{R} 满足式(3-3-9)。然而, 如果不是逐符号编码, 而是一次对 J 个符号的分组进行编码, 将使编码效率更高。在这种情况下, 式(3-3-9)表示的信源编码定理 II 的边界将为

$$JH(X) \leq \bar{R}_J < JH(X) + 1 \quad (3-3-12)$$

来自 DMS 信源 J 个符号分组的熵是 $JH(X)$, \bar{R}_J 是每个 J 符号组的平均比特数。如果把式(3-3-12)两边同除以 J , 可得

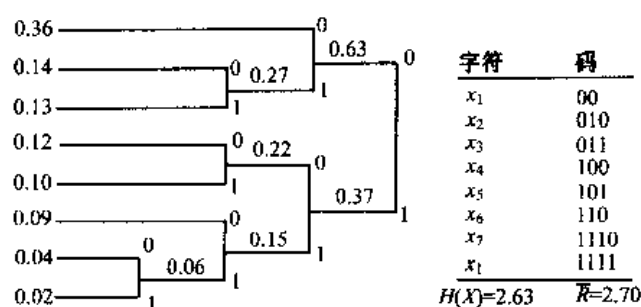


图 3-3-6 例 3-3-2 的霍夫曼码

$$H(X) \leq \frac{\bar{R}_J}{J} < H(X) + \frac{1}{J} \quad (3-3-13)$$

式中, $\bar{R}_J/J \equiv \bar{R}$ 是每信源符号的平均比特数。这样, 如果 J 选得足够大, \bar{R} 就能以要求的程度趋近于 $H(X)$ 。

例 3-3-3 某 DMS 信源的输出符号有 x_1, x_2, x_3 3 种, 对应的发生概率分别是 0.45, 0.35 和 0.2。该信源的熵是 $H(X) = 1.518$ 比特/符号, 其霍夫曼码(表 3-3-2 给出)要求 $\bar{R} = 1.55$ 比特/符号, 效率为 97.9%。如果改用霍夫曼算法将符号成对地编码, 可得到表 3-3-3 所示的码。符号成对输出时的信源熵是 $2H(X) = 3.036$ 比特/符号对, 也就是编码效率可提高到 $2H(X)/\bar{R}_2 = 0.990$, 即达到 99.0%。

表 3-3-2 例 3-3-3 的霍夫曼编码

符 号	概 率	自 信 息	码 字
x_1	0.45	1.156	1
x_2	0.35	1.520	00
x_3	0.20	2.330	01
$H(X) = 1.518$ 比特/符号, $\bar{R} = 1.55$ 比特/符号, 效率 97.9%			

表 3-3-3 符号对编码的霍夫曼码

符 号	概 率	自 信 息	码 字
$x_1 x_1$	0.2025	2.312	10
$x_1 x_2$	0.1575	2.676	001
$x_2 x_1$	0.1575	2.676	010
$x_2 x_2$	0.1225	3.039	011
$x_1 x_3$	0.09	3.486	111
$x_3 x_1$	0.09	3.486	0000
$x_2 x_3$	0.07	3.850	0001
$x_3 x_2$	0.07	3.850	1100
$x_3 x_3$	0.04	4.660	1101
$2H(X) = 3.036$ 比特/符号对, $\bar{R}_2 = 3.0675$ 比特/符号对, $\bar{R}_2/2 = 1.534$ 比特/符号, 效率 99.0%			

总之,在逐个符号上利用霍夫曼算法的变长码可对 DMS 信源有效编码。如果每次对一个 J 符号组编码,编码效率可以进一步提高。这样,信源熵为 $H(X)$ 的 DMS 的输出可以编成变长码,每信源符号的平均比特数能任意地逼近 $H(X)$ 。

3.3.2 平稳离散信源

前面,我们描述了 DMS 信源输出的有效编码。本节将介绍一种离散信源,它的输出符号序列是统计相关的。我们仅讨论统计平稳的信源。

我们来计算平稳信源发出的符号序列的熵。从定义式(3-2-13)和式(3-2-15)给出的结果,随机变量分组 $X_1 X_2 \cdots X_k$ 的熵是

$$H(X_1 X_2 \cdots X_k) = \sum_{i=1}^k H(X_i | X_1 X_2 \cdots X_{i-1}) \quad (3-3-14)$$

式中 $H(X_i | X_1 X_2 \cdots X_{i-1})$ 是前 $i-1$ 个符号给定后,发自信源的第 i 个符号的条件熵。 k 符号组中每个符号的熵定义为

$$H_k(X) = \frac{1}{k} H(X_1 X_2 \cdots X_k) \quad (3-3-15)$$

将平稳信源的信息量定义为式(3-3-15)中当 $k \rightarrow \infty$ 时的每符号的熵,即

$$H_\infty(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(X_1 X_2 \cdots X_k) \quad (3-3-16)$$

极限存在性的证明在后面介绍。

换一种方法,也可把信源每字符的熵定义为 k 趋于无穷时条件熵 $H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1})$ 的极限。这个极限也是存在的,等于式(3-3-16)的极限,即

$$H_\infty(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \quad (3-3-17)$$

下面证明这个结果,按照加拉杰(Gallager, 1968 年)的方法来推导。首先证明当 $k \geq 2$ 时存在下列关系

$$H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \leq H(X_{k-1} | X_1 X_2 \cdots X_{k-2}) \quad (3-3-18)$$

根据前面的结论,给随机变量加上条件不会增加熵,有

$$H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \leq H(X_k | X_2 X_3 \cdots X_{k-1}) \quad (3-3-19)$$

因信源是平稳的,因此

$$H(X_k | X_2 X_3 \cdots X_{k-1}) = H(X_{k-1} | X_1 X_2 \cdots X_{k-2}) \quad (3-3-20)$$

由此立即可得式(3-3-18)。这个结论证明了 $H(X_k | X_2 X_3 \cdots X_{k-1})$ 不随 k 而增大。

其次,由式(3-3-14)和式(3-3-15),以及式(3-3-14)的最后一项是其余 $k-1$ 项的下边界这一事实,立即可得

$$H_k(X) \geq H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \quad (3-3-21)$$

第三,根据 $H_k(X)$ 的定义,把它写成

$$\begin{aligned} H_k(X) &= \frac{1}{k} [H(X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) + H(X_k | X_1 \cdots X_{k-1})] \\ &= \frac{1}{k} [(k-1)H_{k-1}(X) + H(X_k | X_1 \cdots X_{k-1})] \\ &\leq \frac{k-1}{k} H_{k-1}(X) + \frac{1}{k} H_k(X) \end{aligned}$$

上式可简化为

$$H_k(X) \leq H_{k-1}(X) \quad (3-3-22)$$

因此,序列 $H_k(X)$ 不随 k 增大。

由于 $H_k(X)$ 和条件熵 $H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1})$ 都是非负的,都不随 k 增大,则它们的极限必然存在。求极限可利用式(3-3-14)和式(3-3-15),把 $H_{k+j}(X)$ 表示为

$$\begin{aligned} H_{k+j}(X) = & \frac{1}{k+j} H(X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \\ & + \frac{1}{k+j} [H(X_k | X_1 \cdots X_{k-1}) + H(X_{k+1} | X_1 \cdots X_k) \\ & + \cdots + H(X_{k+j} | X_1 \cdots X_{k+j-1})] \end{aligned}$$

因为条件熵是非增的,方括号里的第一项起着其余项的上边界的作用。因此

$$H_{k+j}(X) \leq \frac{1}{k+j} H(X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) + \frac{j+1}{k+j} H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \quad (3-3-23)$$

对于一个固定的 k ,当 $j \rightarrow \infty$ 时式(3-3-23)的极限为

$$H_\infty(X) \leq H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \quad (3-3-24)$$

式(3-3-24)对于所有 k 都成立,因此当 $k \rightarrow \infty$ 时它也成立。于是有

$$H_\infty(X) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \quad (3-3-25)$$

另一方面,由式(3-3-21)可得 $k \rightarrow \infty$ 时的极限

$$H_\infty(X) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} H(X_k | X_1 X_2 \cdots X_{k-1}) \quad (3-3-26)$$

这样,式(3-3-17)必然成立。

现在假设有一个平稳离散信源,它发出 J 个字符,每字符的熵是 $H_J(X)$ 。用满足前缀条件的变长霍夫曼码对 J 字符序列编码,所用的是前一节介绍的方法。所得码的每 J 符号分组的平均比特数满足条件

$$H(X_1 \cdots X_J) \leq \overline{R}_J < H(X_1 \cdots X_J) + 1 \quad (3-3-27)$$

将式(3-3-27)各项同除以 J ,得每信源符号平均比特数 $\overline{R} = \overline{R}_J / J$ 的边界如下

$$H_J(X) \leq \overline{R} < H_J(X) + 1/J \quad (3-3-28)$$

通过增加分组长度 J ,能够任意趋近 $H_J(X)$,在 $J \rightarrow \infty$ 时的极限处, \overline{R} 满足

$$H_\infty(X) \leq R < H_\infty(X) + \epsilon \quad (3-3-29)$$

式中, ϵ 等于 $1/J$ 而趋于 0。像这样把大长度符号块编成码字,可以实现平稳信源的高效编码。但是要强调的是,霍夫曼码的设计需要事先知道 J 符号组的联合 PDF。

3.3.3 Lempel-Ziv 算法

从以上讨论可知,霍夫曼编码算法能产生最优信源编码,使码字满足前缀条件且平均分组长度最小。为了给 DMS 信源设计霍夫曼码,需要知道所有信源符号的发生概率。在有记忆离散信源的情况下,必须知道长度为 $n \geq 2$ 的分组的联合概率。然而在实践中,信源输出的统计特性往往是不知道的。从原理上说,只要观察到信源发出的一个长长的信息序列,就有可能估计出离散信源的概率。除非是估算与各信源输出符号发生频率相对应的边际概率,一般在涉及联合概率的计算时,复杂度非常高。结果,霍夫曼编码方法在许多真实的有记忆信源中往往不能实现。

与霍夫曼编码算法不同,L-Z 信源编码算法设计成与信源的统计特性无关,因此 L-Z 编码算法属于通用信源编码算法范畴,是一种可变的定长算法,其编码方法如下所述。

在 L-Z 算法中,离散信源的输出序列分解成长度可变的分组,称为码段(phrases)。每当信源输出字符组在最后位置加上一个字符后与前面的已有码段都不相同时,把它作为一种新的码段引入。这些码段列入一个位置字典,用来记载已有码段的位置。在对一个新的码段编码时,只要指出字典中现有码段的位置,把新字符附在后面就行了。

举一个例子,考虑一个二进制序列

10101101001001110101000011001110101100011011

按上述方式分解序列可得以下码段

1,0,10,11,01,00,100,111,010,1000,011,001,110,101,10001,1011

我们看到,序列中的每一个码段是前面某一码段加上一个新的信源输出字符。为了对这些码段编码,构造一个字典如表 3-3-4 所示。字典位置按顺序编号,从 1 开始往下数,本例一直排到 16,它代表上述序列中的码段数。与各个位置对应的不同码段也列入表中。码字是由前码段的字典位置(二进制形式)决定的,这里所说的前码段是指前几位完全相同、只有最后一位不同的码段。然后,把新的输出字符附在前码段字典位置的后面。最初位置 0000 用于原先没出现过的码段。

表 3-3-4 L-Z 算法的字典

	字典位置	字典内容	码字
1	0001	1	00001
2	0010	0	00000
3	0011	10	00010
4	0100	11	00011
5	0101	01	00101
6	0110	00	00100
7	0111	100	00110
8	1000	111	01001
9	1001	010	01010
10	1010	1000	01110
11	1011	011	01011
12	1100	001	01101
13	1101	110	01000
14	1110	101	00111
15	1111	10001	10101
16		1011	11101

该码的信源解码器在通信系统的接收端构造一个完全相同的表,对接收序列作相应的解码。

值得注意的是,该表将 44 位信源比特编码成 16 个码字,每码字 5 比特,总共是 80 位码字比特。所以,这种算法没有提供任何数据压缩。然而,本例效率低下的原因是因为所考虑的序列非常短。随着序列长度的增加,该编码算法的效率越来越高,实现了信源输出序列的压缩。

如何选择表中的总长度呢?一般面言,无论表有多大,它总是要溢出的。为了解决溢出问题,信源编、解码器必须达成一致,将无用的码段从各自的字典中删去,在它们留下的位置上换

上新的码段。

L-Z 算法已被广泛应用于计算机文件的压缩。UNIX 操作系统中的“compress”, “uncompress”以及 MS-DOS 操作系统中的许多算法就是这种算法不同方式的实现。

3.4 模拟信源的编码——最优量化

在 3.1 节中已提到, 模拟信源发出的消息波形 $x(t)$ 是随机过程 $X(t)$ 的一个样本函数。当 $X(t)$ 是带限平稳随机过程时, 采样定理允许用一个以奈奎斯特速率抽取的、均匀的抽样序列来表示 $X(t)$ 。

利用采样定理, 模拟信源的输出可转化成—个等效的离散时间抽样序列, 然后对样值幅度进行量化和编码。一种简单的编码方法是用一串二进制数字序列来代表一个离散幅度电平, 这样, 如果有 L 个电平, 当 L 是 2 的幂次时每样值需用 $R = \log_2 L$ 比特表示, 当 L 不是 2 的幂次时每样值需 $R = \lfloor \log_2 L \rfloor + 1$ 比特表示。另一方面, 如果输出电平不等概而各电平概率已知, 可以用霍夫曼编码(也叫熵编码)来提高编码效率。

信号样值幅度量化带来了数据的压缩, 但同时引入了某些波形失真或信号保真度的损失。本节将介绍如何使失真最小化。本节给出的许多结论可直接应用于时间离散、连续幅度、无记忆的高斯信源, 这样的信源可当做一个很好的残余误差模型, 应用于 3.5 节所述的信源编码方法。

3.4.1 率失真函数

首先讨论信号量化, 分析当信源样值被量化成固定比特数时引入的失真。所谓“失真”, 是指用某种尺度衡量的实际信源样值 $|x_k|$ 与量化后的对应值 $|\hat{x}_k|$ 之差, 可用 $d|x_k, \hat{x}_k|$ 表示。例如, 最常用的失真量度是平方误差失真, 定义为

$$d|x_k, \hat{x}_k| = (x_k - \hat{x}_k)^2 \quad (3-4-1)$$

它在 3.5.1 节的 PCM 中被用来分析量化误差特性, 也可采用一个通用的表达式表示各种失真量度

$$d|x_k, \hat{x}_k| = |x_k - \hat{x}_k|^p \quad (3-4-2)$$

这里, p 是正整数。 $p=2$ 时有易于数学处理的优点。

如果每个样值的失真是 $d|x_k, \hat{x}_k|$, 那么由 n 个样值组成的序列 \mathbf{X}_n 与 n 个量化值组成的序列 $\tilde{\mathbf{X}}_n$ 之间的失真等于 n 个信源输出样值失真的平均, 即

$$d(\mathbf{X}_n, \tilde{\mathbf{X}}_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(x_k, \hat{x}_k) \quad (3-4-3)$$

信源输出是随机过程, \mathbf{X}_n 的 n 个样值是随机变量, 因此 $d|\mathbf{X}_n, \tilde{\mathbf{X}}_n|$ 也是随机变量, 把它的期望值定义为失真 D , 即

$$D = E[d(\mathbf{X}_n, \tilde{\mathbf{X}}_n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[d(x_k, \hat{x}_k)] = E[d(x, \hat{x})] \quad (3-4-4)$$

式中的最后一步是在假设信源输出是平稳过程的前提下推得的。

假设有一个无记忆信源, 其连续幅值输出 \mathbf{X} 的 PDF 是 $p(x)$, 量化后的幅值符号集是 $\tilde{\mathbf{X}}$, 每符号的失真度是 $d(x, \hat{x})$, 这里 $x \in \mathbf{X}$ 及 $\hat{x} \in \tilde{\mathbf{X}}$ 。那么, 为了以小于等于 D 的失真表示无记

信源的输出 \mathbf{X} , 每信源符号需要的最低比特率称为率失真函数 $R(D)$ (rate-distortion function), 它定义为

$$R(D) = \min_{p(\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{x}): E[d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})] \leq D} I(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) \quad (3-4-5)$$

式中, $I(\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}})$ 是 \mathbf{X} 和 $\tilde{\mathbf{X}}$ 之间的平均互信息。一般地, 当 D 增大时 $R(D)$ 减小; 或相反, 当 D 减小时 $R(D)$ 增大。

适合连续幅度无记忆信源的常用模型之一是高斯信源模型。对于这种模型, 香农提出了以下关于率失真函数的基本定理。

定理 无记忆高斯信源的率失真函数 (香农 Shannon, 1959 年)

如果用每符号的均方误差来度量失真 (单符号失真量度), 想要表示一个时间离散、幅度连续、无记忆高斯信源的输出所需的最低信息速率应是

$$R_g(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2(\sigma_x^2/D) & (0 \leq D \leq \sigma_x^2) \\ 0 & (D > \sigma_x^2) \end{cases} \quad (3-4-6)$$

式中, σ_x^2 是高斯信源输出的方差。

值得注意的是, 式 (3-4-6) 告诉我们: 当失真 $D \geq \sigma_x^2$, 或更具体一点 $D = \sigma_x^2$ 时, 率失真函数为零, 此时从输出信号不可能恢复想要传递的信源信息。在 $D > \sigma_x^2$ 的情况下, 可用一个统计独立、零均值、方差为 $D - \sigma_x^2$ 的高斯噪声抽样序列重构信源信号。 $R_g(D)$ 曲线见图 3-4-1。

信源的率失真函数 $R(D)$ 与信息论中的以下基本信源编码定理有关。

定理 限失真的信源编码

对于任意给定的失真 D , 一定存在一种最小速率 $R(D)$ 比特/符号 (抽样) 的编码方式, 能把信源输出编成符合下列条件的码字: 该码能以任意接近 D 的平均失真恢复信源输出。

显然, 信源的率失真函数表示失真大小给定时信源速率的下边界。

回到式 (3-4-6) 所示的无记忆高斯信源的率失真函数。如果把 D 和 R 的函数依赖关系反过来, 可以用 R 表达 D

$$D_g(R) = 2^{-2R} \sigma_x^2 \quad (3-4-7)$$

这个函数叫做离散时间无记忆高斯信源的失真-率函数 (distortion-rate function)。

如果用 dB 表示式 (3-4-7) 中的失真, 可得

$$10 \lg D_g(R) = -6R + \lg \sigma_x^2 \quad (3-4-8)$$

注意, 均方误差减小了 6 dB/比特。

对于无记忆非高斯信源, 其率失真函数还没有一个明确的结论。但是, 对于任何一个时间离散、幅度连续的无记忆信源, 都已有实用的率失真函数的上、下边界。以下定理给出了其中一种上边界。

定理 $R(D)$ 的上边界

对于零均值、有限方差 σ_x^2 (用均方差失真量度)、幅度连续的无记忆信源, 其率失真函数的上边界为

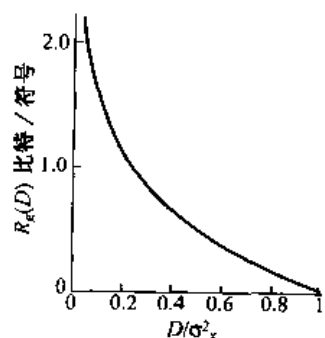


图 3-4-1 连续幅度无记忆高斯信源的率失真函数

$$R(D) \leq \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_x^2}{D} \quad (0 \leq D \leq \sigma_x^2) \quad (3-4-9)$$

本定理已由伯杰(1971年)证明。该定理说明:在指定均方误差值时,与其他所有各类信源相比,高斯信源需要的速率最大。因此,任何一个均值为0、方差 σ_x^2 为有限值、幅度连续的无记忆信源都满足条件 $R(D) \leq R_g(D)$ 。同样,该信源的失真-率函数满足条件

$$D(R) \leq D_g(R) = 2^{-2R} \sigma_x^2 \quad (3-4-10)$$

率失真函数的下边界也存在,叫做均方误差量度下的香农下边界(Shannon lower bound),由下式确定

$$R^*(D) = H(X) - \frac{1}{2} \log_2 2\pi e D \quad (3-4-11)$$

式中, $H(X)$ 是连续幅度无记忆信源的差熵。与式(3-4-11)对应的失真-率函数是

$$D^*(R) = \frac{1}{2\pi e} 2^{-2[R-H(X)]} \quad (3-4-12)$$

因此,任何一个幅度连续的无记忆信源的率失真函数都被限定在下列上下边界之内

$$R^*(D) \leq R(D) \leq R_g(D) \quad (3-4-13)$$

相应的失真-率函数被限定在

$$R^*(R) \leq D(R) \leq D_g(R) \quad (3-4-14)$$

无记忆高斯信源的差熵是

$$H_g(X) = \frac{1}{2} \log_2 2\pi e \sigma_x^2 \quad (3-4-15)$$

于是,式(3-4-11)的下边界 $R^*(D)$ 降为 $R_g(D)$ 。进一步,如果用dB表示 $D^*(R)$,令 $\sigma_x^2 = 1$ 或将 $D^*(R)$ 除以 σ_x^2 而使它归一化,由式(3-4-12)可得

$$10 \lg D^*(R) = -6R - 6[H_g(X) - H(X)] \quad (3-4-16)$$

或等效于

$$10 \lg \frac{D_g(R)}{D^*(R)} = 6[H_g(X) - H(X)] \text{ (dB)} = 6[R_g(D) - R^*(D)] \text{ (dB)} \quad (3-4-17)$$

关系式(3-4-16)和(3-4-17)使我们能对失真的下限和高斯信源时失真的上限作比较。注意, $D^*(R)$ 也是每比特减小6dB。还应指出,差熵 $H(X)$ 的上边界是 $H_g(X)$,正如香农1948年指出的那样。

表3-4-1列出了4种PDF,它们是信源常用的几种信号分布模型。表中列出了差熵、速率差(以比特/抽样为单位)和失真上、下限之间的差值。我们注意到,表中的伽玛(gamma)分布的概率密度函数与高斯分布的PDF的偏差最大,拉普拉斯(Laplacian)PDF与高斯PDF最相像,而均匀分布PDF排在第二。这些结果为失真和速率的上下边界的差值提供了某种基准。

在结束本章之前,考虑一个带限的高斯信源,其谱密度是

$$\Phi(f) = \begin{cases} \sigma_x^2/2W & (|f| \leq W) \\ 0 & (|f| > W) \end{cases} \quad (3-4-18)$$

当以奈奎斯特速率对信源输出抽样时,样值是不相关的。由于信源是高斯的,这些样值又是统计独立的,所以相应的离散时间高斯信源是无记忆的。每个抽样的率失真函数由式(3-4-6)给出。于是,带限高斯白噪声信源的率失真函数用b/s为单位表示为

表 3-4-1 4 种常用 PDF 信号模型的差熵和率失真的比较

PDF	$p(x)$	$H(X)$	$R_g(D) - R^*(D)$ /(比特/抽样)	$D_g(R) - D^*(R)$ /dB
高斯	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-x^2/2\sigma_x^2}$	$\frac{1}{2} \log_2(2\pi e\sigma_x^2)$	0	0
均匀	$\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_x}, x \leq \sqrt{3}\sigma_x$	$\frac{1}{2} \log_2(12\sigma_x^2)$	0.255	1.53
拉普拉斯	$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_x} e^{\sqrt{2} x /\sigma_x}$	$\frac{1}{2} \log_2(2e^2\sigma_x^2)$	0.104	0.62
伽玛	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}\sigma_x} e^{\sqrt{3} x /2\sigma_x}$	$\frac{1}{2} \log_2(4\pi e^{0.423}\sigma_x^2/3)$	0.709	4.25

$$R_g(D) = W \log_2 \frac{\sigma_x^2}{D} \quad (0 \leq D \leq \sigma_x^2) \quad (3-4-19)$$

对应的失真-率函数是

$$D_g(R) = 2^{-R/W} \sigma_x^2 \quad (3-4-20)$$

如用 dB 表示,并除以 σ_x^2 使它归一化,上式变为

$$10 \lg D_g(R) / \sigma_x^2 = -3R/W \quad (3-4-21)$$

对于高斯过程非白或非带限的更一般情况,加拉杰(1968 年)以及 Gobllick 与 Holsinger (1967 年)的相关著作有论述。

3.4.2 标量量化

在信源编码中,如能知道输入到量化器的信号幅度的 PDF,就可以使量化器最优化。举例来说,假如量化器输入序列 $|x_n|$ 的 PDF 是 $p(x)$,要求的量化电平数是 $L = 2^k$,设计一个最优的标量量化器,使某个量化误差函数 $q = \hat{x} - x$ 最小。这里, \hat{x} 是 x 量化后的值。为了详细说明,用 $f(\hat{x} - x)$ 代表所要求的误差函数。于是,由于信号幅度量化导致的失真为

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} f(\hat{x} - x) p(x) dx \quad (3-4-22)$$

最优量化器一般指这样一种量化器,它能优化选择输出电平和每个输出电平对应的输入范围,从而使 D 达到最优。劳埃德 Lloyd(1982 年)和马克斯(1960 年)研究了这种优化问题,所得出的最优量化器称为劳埃德-马克斯量化器。

对于均匀量化器,输出电平标定为 $\hat{x}_k = (2k - 1)\Delta/2$,对应的输入信号幅度范围是 $(k - 1)\Delta \leq x < k\Delta$,这里的 Δ 是步长。当均匀量化器对称且电平数是偶数时,式(3-4-22)的平均失真可以表示为

$$D = 2 \sum_{k=1}^{L/2-1} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} f\left(\frac{1}{2}(2k-1)\Delta - x\right) p(x) dx + 2 \int_{(L/2-1)\Delta}^{\infty} f\left(\frac{1}{2}(L-1)\Delta - x\right) p(x) dx \quad (3-4-23)$$

在这种情况下, D 的最小化是针对步长参数 Δ 进行的。 D 对 Δ 求导, 得

$$\sum_{k=1}^{L/2-1} (2k-1) \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} f\left(\frac{1}{2}(2k-1)\Delta - x\right) p(x) dx + (L-1) \int_{-(L/2-1)\Delta}^{\infty} f\left(\frac{1}{2}(L-1)\Delta - x\right) p(x) dx = 0 \quad (3-4-24)$$

式中, $f'(x)$ 代表 $f(x)$ 的导数。

选择好差错准则函数 $f(x)$ 后, 对于任何给定的 PDF $p(x)$, 在数字计算机上都可以求出最优步长的数值解。对于均方误差准则, 即 $f(x) = x^2$, 马克斯(1960 年)算出了最优步长 Δ_{opt} 以及当 PDF $p(x)$ 是均值为零且方差为 1 的高斯分布时的最小均方误差。部分结果列于表 3-4-2。我们看到, 电平数每增加一倍, 最小均方误差失真 Δ_{min} 可减小 5 dB 多。所以, 对高斯分布的信号幅度以最优步长 Δ_{opt} 均匀量化时, 每增加一个量化比特, 就可减小 5 dB 多的量化失真。

表 3-4-2 高斯随机变量均匀量化时的最优步长

输出电平数	最优步长 Δ_{opt}	最小 $MSE D_{min}$	$10\lg D_{min}/\text{dB}$
2	1.596	0.363 4	-4.4
4	0.995 7	0.118 8	9.25
8	0.586 0	0.037 44	-14.27
16	0.335 2	0.011 54	-19.38
32	0.188 1	0.003 49	-24.57

如果去掉均匀量化的限制, 失真还可以进一步减小。在这种情况下, 当输入信号幅度处于 $x_{k-1} \leq x < x_k$ 范围时, 可令输出电平为 $\tilde{x} = \tilde{x}_k$ 。对于 L 电平的量化器, 两个边缘点是 $x_0 = -\infty$ 和 $x_L = \infty$, 这时的失真

$$D = \sum_{k=1}^L \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\tilde{x}_k - x) p(x) dx \quad (3-4-25)$$

选择最优的 $\{x_k\}$ 和 $\{\tilde{x}_k\}$ 就可使 D 最小化。

将 D 分别对 $\{x_k\}$ 和 $\{\tilde{x}_k\}$ 求导, 可以得到失真最小化的必要条件。这样最小化的结果可得到一对方程

$$f(\tilde{x}_k - x_k) = f(\tilde{x}_{k+1} - x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, L-1) \quad (3-4-26)$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\tilde{x}_k - x) p(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, L) \quad (3-4-27)$$

作为特例, 再次考虑失真的均方值最小化问题。在这种情况下, $f(x) = x^2$, 于是式(3-4-26)变为

$$x_k = (\tilde{x}_k + \tilde{x}_{k+1})/2 \quad (k = 1, 2, \dots, L-1) \quad (3-4-28)$$

它是 \tilde{x}_k 和 \tilde{x}_{k+1} 的中点。用以确定 $\{\tilde{x}_k\}$ 的对应方程是

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\tilde{x}_k - x) p(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, L) \quad (3-4-29)$$

这样, \tilde{x}_k 正是 $p(x)$ 在 x_{k-1} 和 x_k 之间的面积的重心。对于任何给定的 $p(x)$, 都可求得方程

的数值解。

表 3-4-3 和表 3-4-4 是马克斯(1960 年)获得的对均值为零且方差为 1 的高斯分布的信号幅度进行 4 电平和 8 电平量化时的最优化结果。在表 3-4-5 中,我们对高斯分布信号幅度在非均匀量化和均匀量化两种情况下的最小均方失真进行对比。从表中的结果可以看到,两类量化器的性能差别在 R 较小时相对较小($R \leq 3$ 时小于 0.5 dB),而当 R 增大时差值增大。例如,当 $R = 5$ 时,非均匀量化优于均匀量化约 1.5 dB。

表 3-4-3 高斯随机变量最优的 4 电平量化

电平 k	x_k	\bar{x}_k
1	-0.981 6	1.510
2	0.0	0.452 8
3	0.981 6	0.452 8
4	∞	1.510
$D_{\min} = 0.1175$ $10\lg D_{\min} = -9.3 \text{ dB}$		

表 3-4-4 高斯随机变量最优的 8 电平量化(马克斯,1960 年)

电平 k	x_k	\bar{x}_k
1	-1.748	2.152
2	-1.050	1.344
3	-0.500 6	-0.756 0
4	0	-0.245 1
5	0.500 6	0.245 1
6	1.050	0.756 0
7	1.748	1.344
8	∞	2.152
$D_{\min} = 0.034 54$ $10\lg D_{\min} = -14.62 \text{ dB}$		

表 3-4-5 用于高斯随机变量的最佳均匀和非均匀量化器的比较
(马克斯,1960 年;PAEZ & GLISSON,1972 年)

R 比特/抽样	$10\lg D_{\min}$	
	均匀/dB	非均匀/dB
1	4.4	-4.4
2	-9.25	-9.30
3	-14.27	-14.62
4	-19.38	-20.22
5	-24.57	-26.02
6	-29.83	-31.89
7	-35.13	-37.81

把最小失真当做每信源抽样(字符)比特速率 $R = \log_2 L$ 的函数,画出均匀和非均匀两种情况下的关系图是很能说明一些问题的,这些曲线如图 3-4-2 所示。失真 D 对比特速率 R 的函数依赖关系可以用 $D(R)$,即失真-率函数来表示。我们知道,最优非均匀量化器的失真-率函数落在最优均匀量化器失真-率函数的下方。

由于任何一种量化器都把连续幅度的信源简化成离散幅度信源,可以把离散幅度当做字符来处理,比如认为这些字符是 $\tilde{X} = \{\tilde{x}_k, 1 \leq k \leq L\}$,对应的概率是 $\{p_k\}$ 。如果信号幅度是统计独立的,则离散信源是无记忆的,其熵为

$$H(\tilde{X}) = - \sum_{k=1}^L p_k \log_2 p_k \quad (3-4-30)$$

例如,对高斯分布的信号幅度进行最优 4 电平非均匀量化,则靠外的上下两个电平的概率是 $p_1 = p_4 = 0.1635$,靠里的中间两个电平的概率是 $p_2 = p_3 = 0.3365$,该离散信源的熵是 $H(\tilde{X}) = 1.911$ 比特/符号。因此,如对输出符号块实行熵编码(霍夫曼编码),能获得 -9.30 dB 的最小失真,其速率是 1.911 比特/符号而不是 2 比特/符号。马克斯(1960 年)已给出量化后离散信源符号的熵,表 3-4-6 列出了非均匀量化器的熵值,这些值画在图 3-4-2 中,标有“熵编码”的字样。

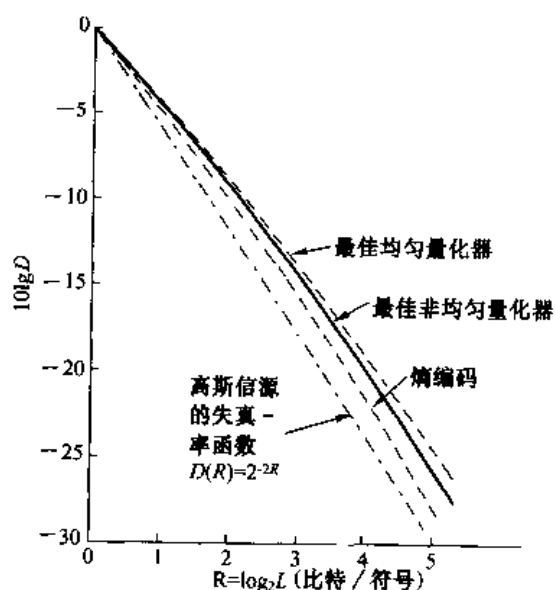


图 3-4-2 离散时间无记忆高斯信源的失真-率函数曲线

表 3-4-6 用于高斯随机变量的最优非均匀量化器的输出熵值

\bar{R} /(比特/抽样)	熵/(比特/符号)	失真 $10\lg D_{\text{out}}$
1	1.0	-4.4
2	1.911	-9.30
3	2.825	-14.62
4	3.765	-20.22
5	4.730	-26.02

从以上讨论得到以下结论:当一个连续信源的 PDF 已知时,量化器可以最优化。 $L = 2^R$ 电平的最优量化器的最小失真 $D(R)$, 这里 $R = \log_2 L$ 比特/抽样。这样, 只要用 R 比特表示每一个量化后的样值, 就可达到 $D(R)$ 的失真。但是, 还可能存在更有效的编码方法。量化后的离散信源输出特性是由一组概率 $\{p_k\}$ 决定的, 用它可以给信源输出设计有效的变长码(熵编码)。对于离散时间、连续幅度、PDF 特性给定的信源, 为衡量任何一种编码方法的效率, 与失真-率函数比较, 或等效地与率-失真函数对比较。

若将最优非均匀量化器的性能与失真-率函数比较, 我们发现, 比如在 -26 dB 失真处, 熵编码比由式(3-4-8)给出的最小速率高 0.41 比特/抽样, 如对每一个符号简单地块编码, 则要比最小速率高 0.68 比特/抽样。同时, 高斯信源的最优均匀与非均匀量化器的失真率函数在 R 较大时, 其下降斜率渐近地趋于每比特 -6 dB。

3.4.3 矢量量化

在前一节, 我们讨论了在逐个抽样量化的基础上, 连续幅度信源输出信号的量化问题, 即标量量化问题。本节将考虑一组信号样值或一组信号参数的联合量化问题, 这种类型的量化叫做块量化, 或者叫矢量量化, 广泛地应用于数字蜂窝系统的语音编码中。

率-失真理的一个基本结论是: 用矢量量化代替标量量化可以获得更好的性能, 即使对无记忆的连续幅度信源也是如此。而且, 如果信号样值或信号参数是统计相关的, 通过联合量化样值组或参数组, 可以找出其相关性, 从而获得比标量量化更高的效率(更低的比特率)。

矢量量化问题可用公式表示如下: 假设有一个 n 维矢量 $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$, 其每个分量是实的连续的幅值 $\{x_k, 1 \leq k \leq n\}$, 它们的联合概率密度函数是 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 。矢量 \mathbf{X} 被量化成另一个分量为 $\{\tilde{x}_k, 1 \leq k \leq n\}$ 的矢量 $\tilde{\mathbf{X}}$ 。用符号 $Q(\cdot)$ 代表量化, 有

$$\tilde{\mathbf{X}} = Q(\mathbf{X}) \quad (3-4-31)$$

式中, $\tilde{\mathbf{X}}$ 是输入矢量 \mathbf{X} 时矢量量化器的输出。

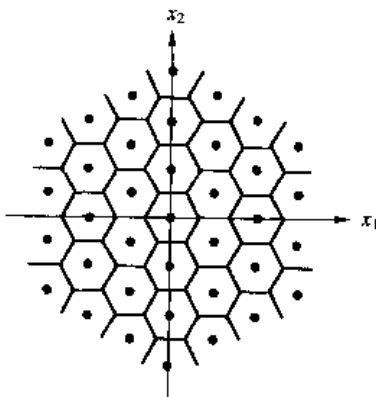


图 3-4-3 在二维空间量化的例子

本质上, 数据组的矢量量化可以看成是一个模式识别问题, 是在某个保真准则(比如均方失真)下以某种最优的方式将数据组分成分有限数目的类, 或称“胞元(cells)”。作为一个例子, 考虑两维矢量 $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2]$ 的量化问题。把两维空间划分成如图 3-4-3 所示的六角形胞元 $\{C_k\}$, 这些胞元是随意选取的。落在胞元 C_k 中的所有输入矢量都被量化成矢量 $\tilde{\mathbf{X}}_k$, 它在图 3-4-3 中位于六角形的中央。在本例中共有 $L = 37$ 个矢量, 在两维空间分割出的 37 个胞元里, 每胞元一个。把这组可能的输出矢量表示为 $\{\tilde{\mathbf{X}}_k, 1 \leq k \leq L\}$ 。

一般地, 当 n 维矢量 \mathbf{X} 量化为 n 维矢量 $\tilde{\mathbf{X}}_k$ 时, 会引入一个量化误差或失真 $d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$ 。这一组输入矢量 \mathbf{X} 的平均失真是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=1}^L P(\mathbf{X} \in C_k) E[d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_k) | \mathbf{X} \in C_k] \\ &= \sum_{k=1}^L P(\mathbf{X} \in C_k) \int_{\mathbf{X} \in C_k} d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_k) p(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3-4-32)$$

式中 $P(\mathbf{X} \in C_k)$ 表示矢量 \mathbf{X} 落在胞元 C_k 里的概率, $p(\mathbf{X})$ 是 n 个随机变量的联合 PDF。与标量量化的情况一样, 在 PDF $p(\mathbf{X})$ 给定时, 可通过胞元 $\{C_k, 1 \leq k \leq L\}$ 的选择使 D 最小化。

一个被普遍采用的失真量度是均方误差 (l_2 范), 它的定义是

$$d_2(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})' (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{x}_k)^2 \quad (3-4-33)$$

或者更一般化, 采用加权的均方误差

$$d_{2W}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})' \mathbf{W} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) \quad (3-4-34)$$

式中 \mathbf{W} 是正定的加权矩阵。 \mathbf{W} 选择为输入数据矢量 \mathbf{X} 的协方差矩阵的逆阵。

有时也可采用另一种失真量度, 它是 l_p 范的特例, 定义为

$$d_p(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \tilde{x}_k|^p \quad (3-4-35)$$

$p=1$ 的特例也常用来替代 $p=2$ 的特例。

矢量量化不仅局限于对信源波形的一组信号样值的量化, 也可以用来量化一组参数。例如在 3.5.3 节描述的线性预测编码 (LPC), 从信号中提取的参数是预测系数, 它们是数据信源的全极点滤波器模型的系数。这些参数可以看成是一个组, 可运用某种适当的失真量度把它作为一个组去量化。在语音编码的情况下, 板仓 (Itakura, 1968 年) 和塞脱 (Saito, 1975 年) 提出以加权的平方误差作为失真量度较合适, 该方法选择被观察数据的归一化自相关矩阵 Φ 作为加权矩阵 \mathbf{W} 。

在语音处理中, 另一种可当做矢量来量化并发送给接收机的参数是一组反射系数 $\{a_i, 1 \leq i \leq m\}$ 。然而在语音线性预测编码的矢量量化中, 有时采用另一套参数, 它由对数面积比 $\{r_k\}$ 组成, 可借助反射系数求得, 其定义是

$$r_k = \log \frac{1 + a_{kk}}{1 - a_{kk}} \quad (1 \leq k \leq m) \quad (3-4-36)$$

现在回到矢量量化的数学公式, 考虑将 n 维空间分割成 L 个胞元 $\{C_k, 1 \leq k \leq L\}$ 的方法, 以使 L 级量化器的平均失真最小。达到最优化要满足两个条件, 其一是最优量化器应采用选择最邻近点的原则, 用数学方式表示为

$$Q(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{X}}_k$$

当且仅当

$$d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_k) \leq d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_j) \quad (k \neq j, \quad 1 \leq j \leq L) \quad (3-4-37)$$

最优化的第二个必要条件是每个输出矢量 $\tilde{\mathbf{X}}_k$ 必须使胞元 C_k 中的平均失真最小化。换言之, $\tilde{\mathbf{X}}_k$ 是 C_k 中的矢量, 它能使下式最小

$$D_k = E[d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) | \mathbf{X} \in C_k] = \int_{\mathbf{X} \in C_k} d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) p(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (3-4-38)$$

使 D_k 最小化的矢量 $\tilde{\mathbf{X}}_k$ 叫做胞元的质心。于是, 当联合 PDF $p(\mathbf{X})$ 已知后, 就可以运用这些优化条件将 n 维空间分割成胞元 $\{C_k, 1 \leq k \leq L\}$ 。显然, 这两个条件使最优标量的量化问题扩展为最优矢量量化问题。可以预料, 在联合 PDF 较大的区域里, 码矢量较靠近; 在 $p(\mathbf{X})$ 较小的区域里, 码矢量分离得较远。

可以使用最优标量量化器的失真作为矢量量化失真的上边界, 它适用于上节所述的矢量的每一个元素。另一方面, 最优矢量量化能达到的最好性能已由率-失真函数给出, 或等效地

由失真-率函数给出。

上一节介绍的失真-率函数在矢量量化环境下可采用如下定义:假如用 n 个连续的抽样值 $\{x_m\}$ 构成一个 n 维矢量 \mathbf{X} , 将矢量 \mathbf{X} 量化成 $\tilde{\mathbf{X}} = Q(\mathbf{X})$ 的形式, 这里 $\tilde{\mathbf{X}}$ 是属于集合 $\{\tilde{\mathbf{X}}_k, 1 \leq k \leq L\}$ 的一个矢量。如前所述, 用 $\tilde{\mathbf{X}}$ 代替 \mathbf{X} 所产生的平均失真 D 等于 $E\{d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\}$, 这里 $d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$ 指每维的失真, 即

$$d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \tilde{x}_k)^2$$

矢量集 $\{\tilde{\mathbf{X}}_k, 1 \leq k \leq L\}$ 可以以下列平均比特速率传输

$$R = \frac{H(\tilde{\mathbf{X}})}{n} \text{ (比特/抽样)} \quad (3-4-39)$$

式中 $H(\tilde{\mathbf{X}})$ 是量化后信源输出的熵, 定义为

$$H(\tilde{\mathbf{X}}) = - \sum_{i=1}^L p(\tilde{\mathbf{X}}_i) \log_2 P(\tilde{\mathbf{X}}_i) \quad (3-4-40)$$

对于一个给定的平均速率 R , 可得到的最小失真 $D_n(R)$ 是

$$D_n(R) = \lim_{Q(\mathbf{X})} E[d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})] \quad (3-4-41)$$

这里, $R \geq H(\tilde{\mathbf{X}})/n$, 式(3-4-41)的最小值是从所有可能的 $Q(\mathbf{X})$ 映射取得的。当维数 n 趋于无穷大时, 可得极限

$$D(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(R) \quad (3-4-42)$$

这里 $D(R)$ 是前节介绍的失真-率函数。从推导中可清楚地看到, 随着矢量维数 n 的增大, 可以任意地接近失真-率函数。

上述推导是以假设数据矢量的联合 PDF $p(\mathbf{X})$ 已知为前提得到的。在实践中, 数据的联合 PDF $p(\mathbf{X})$ 可能并不知道。在这种情况下, 要设法从一组训练矢量 $\mathbf{X}(m)$ 试着选取量化输出矢量。具体地说, 假如一组 M 个训练矢量已经给定, M 比 L 大得多 ($M \gg L$), 可把一种称为 K 均值算法 (这里 $K = L$) 的迭代簇聚算法运用于这组训练矢量。这种算法依靠迭代把 M 个训练矢量分割成 L 簇, 使最优化的两个必要条件都能满足。 K 均值算法描述如下 (马克霍尔 (Makhoul) 等, 1985 年):

步骤 1 初始化, 设置迭代次数 $i=0$ 。选择一组输出矢量 $\tilde{\mathbf{X}}_k, 1 \leq k \leq L$ 。

步骤 2 根据下列准则, 将训练矢量 $\{\mathbf{X}(m), 1 \leq m \leq M\}$ 归类合并成簇 $\{C_k\}$ 。

最邻近点准则: 若对于任何 $k \neq j$, 均有 $d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_k(i)) \leq d(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}_j(i))$, 则 $\mathbf{X} \in C_k(i)$ 。

步骤 3 令 $i = i + 1$, 按下式重新计算落在每一簇的训练矢量的质心 $\tilde{\mathbf{X}}_k(i)$

$$\tilde{\mathbf{X}}_k(i) = \frac{1}{M_k} \sum_{\mathbf{X} \in C_k} \mathbf{X}(m) \quad (1 \leq k \leq L)$$

重新计算输出矢量, 并计算本次 (第 i 次) 迭代所得结果的失真 $D(i)$ 。

步骤 4 如果两次迭代所得平均失真之差 $D(i-1) - D(i)$ 相对而言足够小, 迭代停止; 否则, 转到步骤 2。

上述 K 均值算法收敛于局部最优 (安德伯格 Anderberg, 1973 年, 林德 Linde 等, 1980 年)。若以不同的初始输出矢量组 $\{\mathbf{X}_k(0)\}$ 为开端, 每组都执行上述 K 均值算法的优化过程, 就有可能找到全局最优。然而这种搜寻过程的计算量负担很大, 使选择的初始值点组数限于很少的几个。

一旦选定了称为码本的输出矢量组 $\{\tilde{\mathbf{X}}_k, 1 \leq k \leq L\}$, 每一个信号矢量 $\mathbf{X}(m)$ 就都量化成其中之一, 使得以所用的失真量度衡量时, 信号矢量与该点最近。如果一一计算 $\mathbf{X}(m)$ 到 L 个可能的输出矢量 $\{\tilde{\mathbf{X}}_k\}$ 的距离, 这个过程就是所谓的全搜索。设计算每一个距离需 n 次乘、加运算, 则每一个输入矢量全搜索所需的乘加运算量为

$$C = nL \quad (3-4-43)$$

如果把 L 选成是 2 的幂次, $\log_2 L$ 就是每一个矢量所需的比特数。如果用 R 表示每抽样 $[\mathbf{X}(m)$ 每分量或每维] 的比特率, 有 $nR = \log_2 L$, 因此计算量是

$$C = n2^{nR} \quad (3-4-44)$$

注意, 运算量随维数 n 和每维的比特数 R 指数上升。

采用稍微差一点(次优)的算法可降低与全搜索相关的计算量(见 chang 等, 1984 年; Gersho, 1982 年)。一个特别简单的办法是根据二进树搜索构造一个码本。二进树搜索用分级簇聚的方法分割 n 维空间, 使搜索的运算量降低到正比于 $\log_2 L$ 。这种方法先用 K 均值 ($K=2$) 算法将 n 维试验矢量分成两个区域, 这样我们就得到了两个区域以及它们的重心比如 $\tilde{\mathbf{X}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{X}}_2$ 。下一步, 采用 $K=2$ 的 K 均值算法将落入第一个区域的点再分成两个区域, 我们又得到两个重心比如 $\tilde{\mathbf{X}}_{11}$ 和 $\tilde{\mathbf{X}}_{12}$ 。在第二个区域也这样做, 得到另两个重心 $\tilde{\mathbf{X}}_{21}$ 和 $\tilde{\mathbf{X}}_{22}$ 。于是一个 n 维区域被分成了 4 个区域, 每个区域都有相应的重心。重复这样的过程直到将 n 维空间划分成 $L=2^{nR}$ 个区域, 这里 nR 是每码矢的比特数。对应的码矢可以被看成是二进树的终节点, 如图 3-4-4 所示。

给定一个信号矢量 $\mathbf{X}(m)$ 后, 将 $\mathbf{X}(m)$ 与重心 $\tilde{\mathbf{X}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{X}}_2$ 作比较而开始搜索算法。如果 $d(\mathbf{X}(m), \tilde{\mathbf{X}}_1) < d(\mathbf{X}(m), \tilde{\mathbf{X}}_2)$, 我们就删除从 $\tilde{\mathbf{X}}_2$ 起的那半棵树。接着, 我们计算差值 $d(\mathbf{X}(m), \tilde{\mathbf{X}}_{11})$ 和 $d(\mathbf{X}(m), \tilde{\mathbf{X}}_{12})$ 。如果 $d(\mathbf{X}(m), \tilde{\mathbf{X}}_{11}) < d(\mathbf{X}(m), \tilde{\mathbf{X}}_{12})$, 我们就删除从 $\tilde{\mathbf{X}}_{12}$ 起的那半边树, 而继续沿 $\tilde{\mathbf{X}}_{11}$ 作二进树搜索。当到达终节点后, 搜索中止。

二进树搜索的计算量是

$$C = 2n \log_2 L = 2n^2 R$$

与全搜索中运算量成指数关系上升相比, 这种方法的运算量与 R (每维的比特率) 成线性关系。虽然运算量大大减少, 然而存储(重心)矢量所需要的内存须从 nL 增加到 $2nL$, 因为我们现在除存储终节点矢量外, 还必须存储中间节点矢量。

二进树搜索算法产生的是一棵“均匀树”。一般而言, 这种方法所得码字与用全搜索方法所得码字相比具有较大的误差, 从这个意义上说, 这种方法产生的码本是次优的。如果能打破均匀树的限制, 就有可能提高性能。特别是, 如果能在过程的每一步把具有最大总误差的试验矢量族划分开来, 就能获得误差较小的码本。这样, 我们第一步先把 n 维空间分成两个区域。第二步, 选出具有较大误差的矢量簇(区域)并把它分割开, 于是有了 3 个矢量簇。下一步, 从中再挑出最大误差的簇将它分开, 于是成了 4 个簇, 如此重复进行。最终的结果是获得了一棵非均匀码树, 如图 3-4-5 所示, 图中取 $L=7$ 。注意, 这里 L 不再限于非是 2 的幂次。

为了证明矢量量化较标量量化的优点, 参阅以下例子, 这些例子是马克霍尔等人提出的(1985 年)。

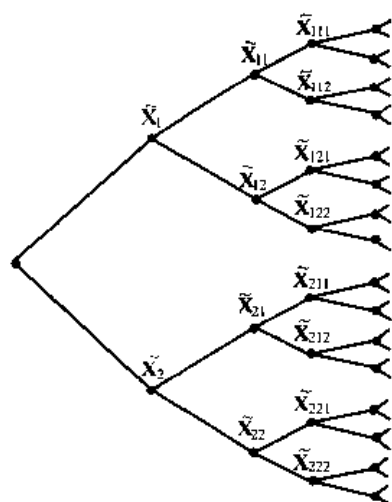


图 3-4-4 用于二进制搜索矢量量化的均匀树

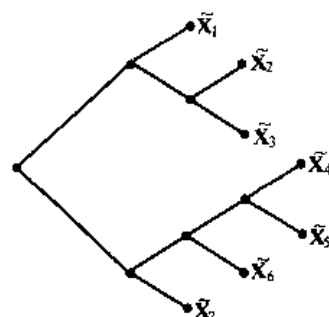


图 3-4-5 用于二进制搜索矢量量化的非均匀树

例 3-4-1 令 x_1 和 x_2 是两个随机变量, 具有均匀的联合 PDF

$$p(x_1, x_2) \equiv p(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{1}{ab} & (\mathbf{X} \in \mathbf{C}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (3-4-45)$$

式中 \mathbf{C} 是一个矩形区域, 如图 3-4-6 所示。注意, 该矩形相对于水平轴旋转了 45° 。另外, 边缘密度 $p(x_1)$ 和 $p(x_2)$ 示于图 3-4-6。

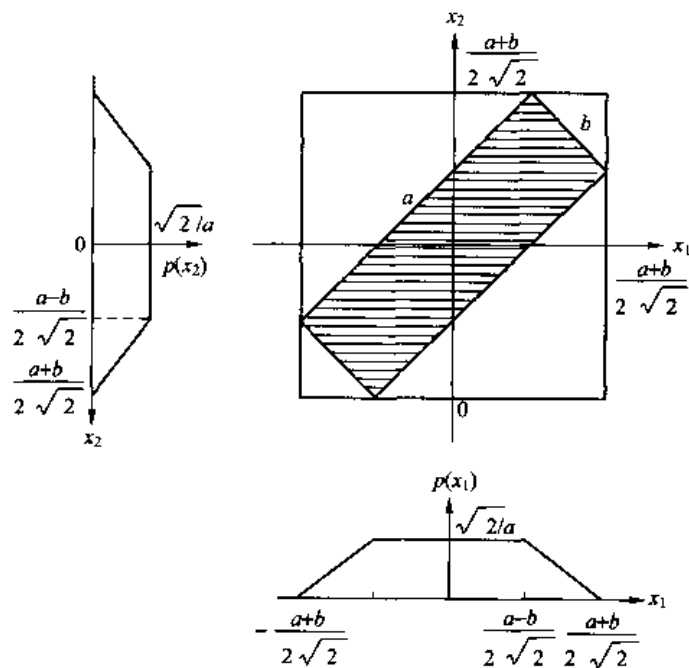


图 3-4-6 二维均匀的 PDF (Makhoul 等, 1985 年)

如果采用均匀的间隔长度 Δ 分别量化 x_1 和 x_2 , 需要的电平数是

$$L_1 = L_2 = \frac{a+b}{\sqrt{2}\Delta} \quad (3-4-46)$$

因此, 对矢量 $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2]$ 编码需要的比特数是

$$\begin{aligned} R_x &= R_1 + R_2 = \log_2 L_1 + \log_2 L_2 \\ R_x &= \log_2 \frac{(a+b)^2}{2\Delta^2} \end{aligned} \quad (3-4-47)$$

这样, 每个分量的标量量化相当于采用全部电平数的矢量量化

$$L_x = L_1 L_2 = \frac{(a+b)^2}{2\Delta^2} \quad (3-4-48)$$

我们看到, 这种途径相当于用许多正方形胞元覆盖一个能包围矩形区域的大正方形, 这里的每个胞元代表 L_x 个量化区域之一。由于除 $\mathbf{X} \in C$ 外 $p(\mathbf{X}) = 0$, 所以这种编码很浪费, 导致比特率的增加。

如果用面积为 Δ^2 的小正方形仅仅覆盖 $p(\mathbf{X}) \neq 0$ 的区域, 所需要的总电平数应是矩形面积除以 Δ^2 , 即

$$L'_x = \frac{ab}{\Delta^2} \quad (3-4-49)$$

因此, 标量量化和矢量量化比特率之差是

$$R_x - R'_x = \log_2 \frac{(a+b)^2}{2ab} \quad (3-4-50)$$

例如, 若 $a = 4b$, 比特率之差是

$$R_x - R'_x = 1.64 \text{ 比特/矢量}$$

这样, 在失真相同的情况下, 矢量量化比标量量化好 0.82 比特/抽样。

注意, 一次线性变换(旋转 45°)可以去除 x_1 和 x_2 的相关性, 使这两个随机变量统计独立。这样一来, 标量量化和矢量量化可取得同等的效率。虽然线性变换能够去除构成矢量的各随机变量之间的相关性, 但它不是一般都能导致统计独立的随机变量。所以, 矢量量化的性能总是等于或优于标量量化的性能(见习题 3-40)。

矢量量化已经应用于几种语音编码方法, 既有波形编码又有基于模型的编码, 这部分内容将在 3.5 节讨论。采用模型基方法, 比如 LPC, 矢量量化使得速率低于 1000b/s(布索 Buzo 等, 1980 年; 罗科斯 Roucos 等, 1982 年; 保罗 Paul, 1983 年)的语音编码成为可能。如果采用波形编码方法, 有可能获得速率为 16 kb/s 的高质量的语音编码, 相当于 $R = 2$ 比特/抽样。如果增加一些计算复杂度, 有可能获得速率为 $R = 1$ 比特/抽样的高质量波形编码。

3.5 模拟信源的编码技术

在过去 40 年中, 已经开发出许多模拟信源的编码技术, 其中大部分已应用于语音和图像编码。本节将简要介绍其中的几种方法, 并以语音编码为例来评价其性能。

为了方便起见, 可进一步把模拟信源编码划分为 3 类。一类叫时间波形编码。在这类编

码中,信源编码器设计成用数字表示信源波形的时域特性;第二种信源编码叫频谱波形编码,信号波形分解成不同频谱的子带,在各子带内或对时间波形或对频率特征编码后再传输;第三类编码是基于信源数学模型的编码,叫做模型基编码。

3.5.1 时间波形编码

模拟信源有多种编码技术可用来表达信号的时域特性,下面介绍最常用的几种。

1. 脉冲编码调制^① (PCM)

令 $x(t)$ 表示信源发出的样本函数, x_n 表示以抽样率 $f_s \geq 2W$ 采得的样值,这里 W 是 $x(t)$ 频谱中的最高频率。在 PCM 中,每个信号样值量化成 2^R 个幅度电平之一, R 是样值量化后的二进制位数。于是,信源速率可表示成 Rf_s b/s。

量化过程的数学模型为

$$\hat{x}_n = x_n + q_n \quad (3-5-1)$$

式中 \hat{x}_n 表示 x_n 的量化值, q_n 代表量化误差,可把它当做加性噪声对待。假设采用一个具有图 3-5-1 所示输入-输出特性的均匀量化器,其量化噪声从统计特性上看具有均匀分布的 PDF

$$p(q) = 1/\Delta \quad (-\Delta/2 \leq q \leq \Delta/2) \quad (3-5-2)$$

这里,量化步长是 $\Delta = 2^{-R}$ 。量化误差的均方值是

$$E(q^2) = \Delta^2/12 = 2^{-2R}/12 \quad (3-5-3)$$

如用分贝表示,噪声均方值是

$$10\lg\Delta^2/12 = 10\lg(2^{-2R}/12) = -6R - 10.8\text{dB} \quad (3-5-4)$$

我们看到,量化噪声随量化器所用的比特数,以每比特 6 dB 的斜率下降。举例来说,7 比特的量化器导致 -52.8 dB 的量化噪声。

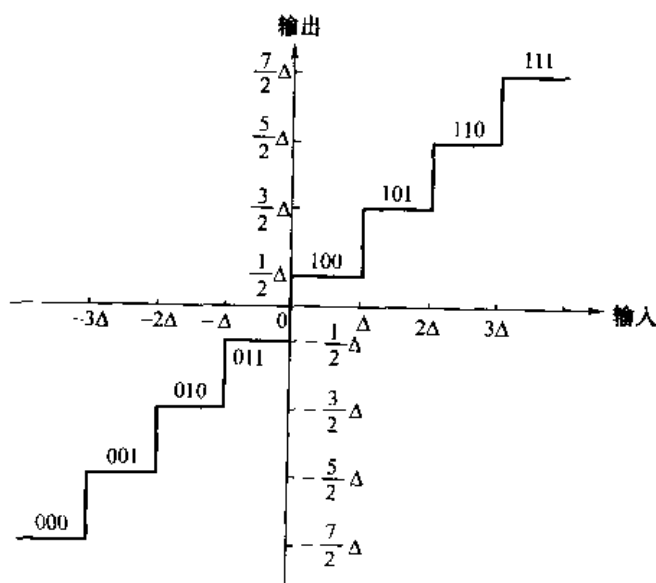


图 3-5-1 均匀量化器的输入-输出特性

^① PCM, DPCM 和 ADPCM 均是信源编码技术,而不是数字调制方法。

许多信源信号,比如语音波形,具有小幅度信号发生概率大于大幅度信号的特点。然而在均匀量化器的整个信号动态范围内,各电平具有相等的间隔大小,更好的方法是采用非均匀量化器。非均匀量化特性的获得,通常是先让信号通过一个非线性设备对幅度进行压缩,再送入后面的均匀量化器。例如,一个对数压缩器具有如下形式的输入-输出幅度特性

$$|y| = \frac{\lg(1 + \mu |x|)}{\lg(1 + \mu)} \quad (3-5-5)$$

式中, $|x| \leq 1$ 是输入的幅值, $|y|$ 是输出的幅值, μ 是用来选择压缩特性的参数。图 3-5-2 给出了几种不同 μ 值下的压缩关系曲线, $\mu=0$ 的曲线相当于没有压缩。

在美国和加拿大的语音波形编码标准中,取 μ 的值为 $\mu=255$ 。这个值与贾扬特(Jayant, 1974 年)的均匀量化器相比,量化噪声功率减小约 24 dB。结果,一个 $\mu=255$ 的对数压缩器接一个 7 比特的量化器后,产生的量化噪声功率约为 -77 dB,而直接 7 比特均匀量化产生的噪声功率为 -53 dB。

从量化值恢复原信号值时,采用与对数相反的关系来扩张信号幅度。压缩器-扩张器的组合对称做压扩器。

2. 差分脉冲编码调制(DPCM)

在 PCM 中,每个波形样值都独立编码,与其他样值无关。然而,大多数以奈奎斯特或更高速率抽样的信源信号在相邻样值间表现出很强的相关性。换言之,相邻样值间幅度的平均变化相对较小。因此,利用样值间的这种冗余度的编码方案将导致较低比特率的信源输出。

一种比较简单的解决办法是对相邻样值的差值而不是对样值本身编码。由于样值的差比样值本身小,可以用较少的比特数表示差值。基于这种思路的一个好办法是根据前面的 p 个样值预测当前的样值,即令 x_n 代表当前的信源样值,用 \hat{x}_n 代表 x_n 的预测值, \hat{x}_n 定义为

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} \quad (3-5-6)$$

这里的 \hat{x}_n 其实是过去 p 个样值的加权线性组合, $|a_i|$ 是预测器系数。 $|a_i|$ 选择得能使 \hat{x}_n 和 x_n 在某种误差准则下最小化。

从数学上和实践上讲都比较方便的一种误差函数是均方误差(MSE)。以 MSE 作为预测器的性能指数,选择 $\{a_i\}$ 使下列目标函数最小化

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= E(e_n^2) = E\left[\left(x_n - \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i}\right)^2\right] \\ &= E(x_n^2) - 2 \sum_{i=1}^p a_i E(x_n x_{n-i}) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j E(x_{n-i} x_{n-j}) \end{aligned} \quad (3-5-7)$$

假设信源输出是(广义)平稳的,可将式(3-5-7)表示为

$$\epsilon_p = \phi(0) - 2 \sum_{i=1}^p a_i \phi(i) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j \phi(i-j) \quad (3-5-8)$$

式中, $\phi(m)$ 是抽样信号序列 x_n 的自相关函数。与最小化 ϵ_p 对应的预测系数 $\{a_i\}$ 导致一组线

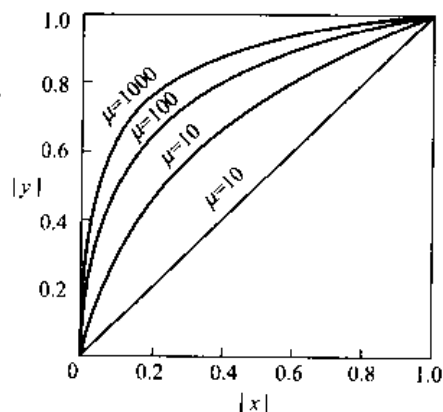


图 3-5-2 对数压缩器的输入-输出幅度特性

性方程

$$\sum_{i=1}^p a_i \phi(i-j) = \phi(j) \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (3-5-9)$$

于是预测器的系数值可求。如果事先不知道自相关函数 $\phi(m)$, 可以通过样值 $\{x_n\}$ 利用下列关系式来估算^①

$$\hat{\phi}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-n} x_i x_{i+n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, p) \quad (3-5-10)$$

将估值 $\hat{\phi}(n)$ 代入式(3-5-9)即可解出系数 $\{a_i\}$ 。注意, 将 $\hat{\phi}(n)$ 代入式(3-5-9)时, 式(3-5-10)中的归一化因子 $1/N$ 应删去。

式(3-5-9)中求预测系数用的线性方程称做正态方程, 也叫尤勒-沃克(Yule-Walker)方程。由莱文森(Levison, 1947年)和杜宾(Durbin, 1959年)提出的一种算法能有效地求解这个方程, 具体算法见附录A。在下面讨论线性预测编码时, 还会涉及此解法。

描述了预测器系数的确定方法后, 下面考虑一个实际的DPCM系统框图, 见图3-5-3(a)。在这种结构中, 预测器置于围绕量化器的反馈环里。预测器的输入记做 \tilde{x}_n , 代表经量化处理后的信号抽样 x_n 的修正值。预测器的输出是

$$\hat{\tilde{x}}_n = \sum_{i=1}^p a_i \tilde{x}_{n-i} \quad (3-5-11)$$

差值

$$e_n = x_n - \hat{\tilde{x}}_n \quad (3-5-12)$$

作为量化器输入, \tilde{e}_n 代表量化器输出。量化后的每个预测误差 \tilde{e}_n 值编码成二进制数字序列, 通过信道传送到目的地。该误差 \tilde{e}_n 同时被加到本地预测值 $\hat{\tilde{x}}_n$ 而得到 \tilde{x}_n 值。

在接收端装有与发送端相同的预测器, 它的输出 $\hat{\tilde{x}}_n$ 与 \tilde{e}_n 相加产生 \tilde{x}_n 。信号 \tilde{x}_n 既是所要求的预测器激励信号, 也是所要求的输出序列, 该序列经滤波后即可恢复所要求的信号 $\hat{x}(t)$, 如图3-5-3(b)所示。

围绕上述量化器采用的反馈环能确保 \tilde{x}_n 的误差就是量化误差 $q_n = \tilde{e}_n - e_n$, 保证在解码器执行时不存在以前的量化误差的累积, 即

$$q_n = \tilde{e}_n - e_n = \tilde{e}_n - (x_n - \hat{\tilde{x}}_n) = \tilde{x}_n - x_n \quad (3-5-13)$$

这里 $\tilde{x}_n = x_n + q_n$ 。这意味着量化后的样值 \tilde{x}_n 与输入 x_n 相差一个量化误差 q_n , 它与所用预测器无关。所以, 量化误差不积累。

在图3-5-3所示的DPCM系统中, 信号抽样 x_n 的估值或预测值 $\hat{\tilde{x}}_n$ 是从一组过去的值 \tilde{x}_{n-k} ($k=1, 2, \dots, p$) 的线性组合中得出的, 如式(3-5-11)所列。通过对量化误差的这组过去值线性滤波, 可以改善估值的质量。具体地说, 估值 $\hat{\tilde{x}}_n$ 可以表达为

$$\hat{\tilde{x}}_n = \sum_{i=1}^p a_i \tilde{x}_{n-i} + \sum_{i=1}^m b_i \tilde{e}_{n-i} \quad (3-5-14)$$

^① 从有限个观察值 $\{x_i\}$ 求自相关函数估值属于另外一个问题, 不是本书讨论的范围。式(3-5-10)仅是实践中常用的一种估算方法。

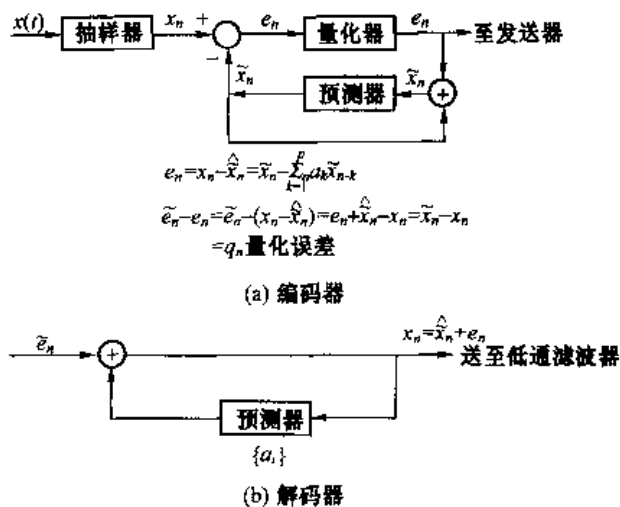


图 3-5-3 DPCM 编码器和解码器

式中, $\{b_i\}$ 是用来对量化误差序列 \tilde{e}_n 进行滤波的滤波器系数。在发送器和接收机解码器里所用的编码器的框图如图 3-5-4 所示。两组系数 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 的选择应使误差 $e_n = x_n - \hat{x}_n$ 的某种函数(如均方误差函数)最小化。

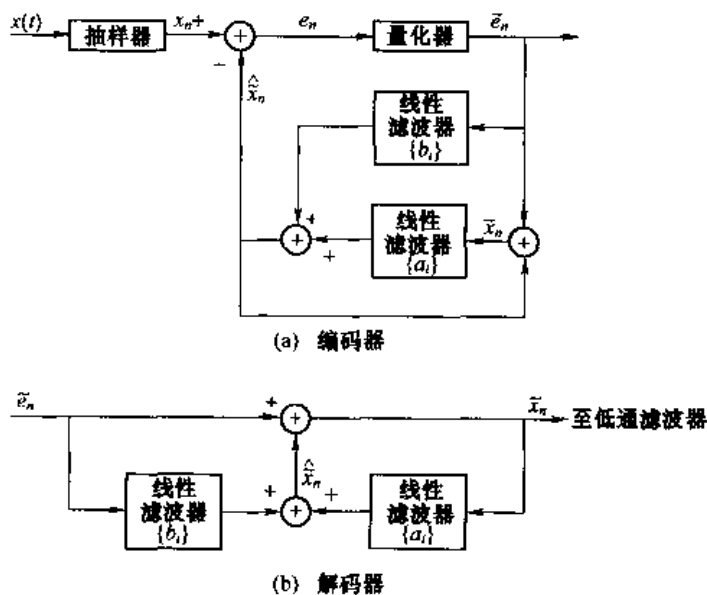


图 3-5-4 对误差序列增加线性滤波后改进的 DPCM

3. 自适应 PCM 和 DPCM

许多实际信源具有准平稳属性,准平稳的特点是信源输出方差和自相关函数随时间缓慢变化。然而,PCM 和 DPCM 编码器是以信源输出的平稳性为基础设计的,如能使它们适应信源缓慢的时变统计特性,就可以改善编码器的效率和性能。

无论是 PCM 还是 DPCM,工作在准平稳输入信号下的均匀量化器,其量化误差 q_n 将具有时变的方差(量化噪声功率)。减小量化噪声动态范围的一种改进方法是采用自适应量化器。尽管有很多方法可使量化器具有自适应性,但相对比较简单的方法是使用一种均匀量化器,它根据过去一组信号样值的方差来改变量化步长的大小。例如,从输入序列 $\{x_n\}$ 可以计算出 x_n 方差的短时估值,以此估值为依据可调整步长。步长调整算法最简单的形式是仅根据前面一个样值来调整,贾扬特(1974 年)将这种算法成功地运用于语音信号的编码。图 3-5-5 给出了这样一个 3 比特量化器,该量化器根据递推公式

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n M(n) \tag{3-5-15}$$

不断地调整步长。式中 $M(n)$ 是一个因子,它的值取决于样值 x_n 在量化器中的电平, Δ_n 是量化器在处理 x_n 时所用的步长。对于语音编码而言,最佳的乘积因子取值已由贾扬特(1974 年)给出,这些值列于表 3-5-1,用于 2,3,4 比特的自适应量化。

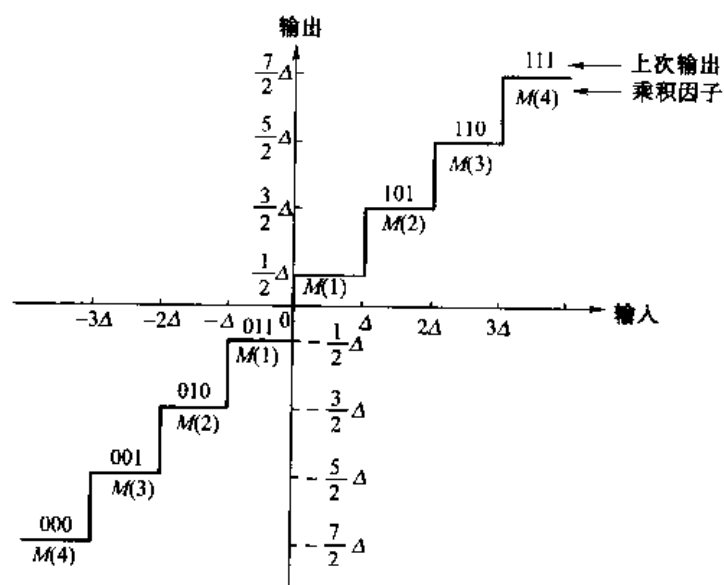


图 3-5-5 自适应步长量化器的例子(贾扬特,1974 年)

表 3-5-1 自适应步长调整的乘积因子(贾扬特,1974 年)

	PCM			DPCM		
	2	3	4	2	3	4
$M(1)$	0.60	0.85	0.80	0.80	0.90	0.90
$M(2)$	2.20	1.00	0.80	1.60	0.90	0.90
$M(3)$		1.00	0.80		1.25	0.90
$M(4)$		1.50	0.80		1.70	0.90
$M(5)$			1.20			1.20
$M(6)$			1.60			1.60
$M(7)$			2.00			2.00
$M(8)$			2.40			2.40

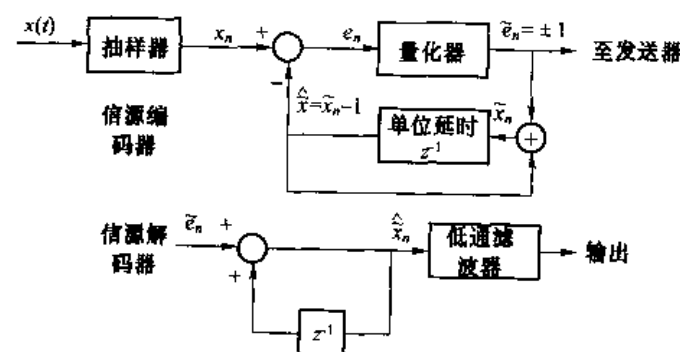
当信源输出准平稳时, DPCM 的预测器可做成自适应的。预测器系数可以周期地改变, 从而反映信源信号统计特性的变化。式(3-5-9)给出的线性方程仍然可用, 只是用 x_n 自相关函数的短时估值代替总体相关函数。这样, 确定的预测系数可与量化噪声 $\tilde{e}(n)$ 一起发送给接收器, 它装有同样的预测器, 不足的是预测系数的传输将导致信道上较高的比特速率。作为部分回报, 由于自适应预测使误差 e_n 的动态范围减小, 量化器可用较少的比特数(较少电平数)来处理, 以取得较低的数据速率。

另一种办法是令接收端的预测器从 \tilde{e}_n 和 \hat{x}_n 中自己计算预测系数, 这里

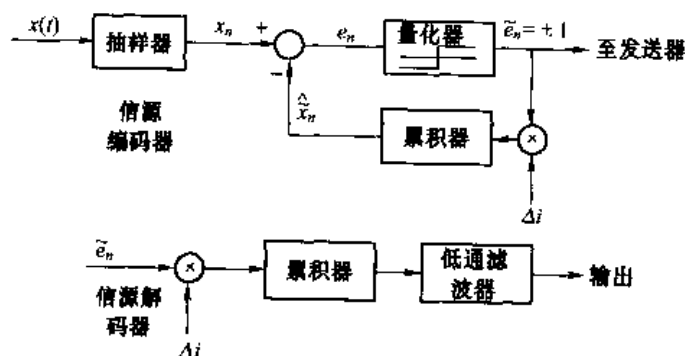
$$\hat{x}_n = \tilde{e}_n + \sum_{i=1}^p a_i \tilde{x}_{n-i} \quad (3-5-16)$$

如果忽略量化噪声, 那么 \hat{x}_n 等于 x_n 。因此, \hat{x}_n 可用在接收端估算自相关函数 $\phi(n)$, 计算结果可替代式(3-5-9)中的 $\phi(n)$ 来求解预测系数。只要量化足够好, \hat{x}_n 和 x_n 相差非常小。因此, 从 \hat{x}_n 中获得的估值 $\phi(n)$ 通常可以用来决定预测系数。采用这种方式后, 自适应预测器可使信源数据速率降低。

如果不采用上述以数据块为基础的处理方法来计算预测系数 $\{a_i\}$, 也可使用梯度类方法, 以逐个抽样为基础调整预测系数, 从形式上看类似于第 11 章将介绍的自适应梯度均衡算法。还可以采用其他梯度类算法来调节图 3-5-4 所示 DPCM 系统的滤波器系数 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$, 对于此算法, 可参考贾扬特和诺尔(Jayant & Noll, 1984 年)的相关著作。



(a) 增量调制系统的框图



(b) 增量调制系统的一种等效实现

图 3-5-6 增量调制系统及等效实现

4. 增量(Delta)调制(DM)

增量调制可以看成是 DPCM 的一种简化形式。在这种方式下,采用 2 电平(1 比特)量化器,配以固定的一阶预测器。DM 编、解码器的方框图如图 3-5-6(a)所示。我们注意到

$$\hat{x}_n = \bar{x}_{n-1} = \hat{x}_{n-1} + \bar{e}_{n-1} \quad (3-5-17)$$

由于

$$q_n = \bar{e}_n - e_n = \bar{e}_n - (x_n - \hat{x}_n)$$

可得

$$\hat{x}_n = x_{n-1} + q_{n-1}$$

这样, x_n 的估(预测)值正是前一个抽样值 x_{n-1} 加上量化误差 q_{n-1} 后的修正值。同时,式(3-5-17)的差分方程实质上代表一个对输入 \bar{e}_n 的积分器。因此,这种单步预测器等效的实现方法是采用一个累加器,令其输入信号为量化误差信号 \bar{e}_n 。一般地,这个量化误差信号可用某个值来标定,比如说 Δ_1 ,它称做步长,这种等效的实现方法如图 3-5-6(b)所示。实际上,图 3-5-6 所示的编码器产生一个近似于线性阶梯函数的波形 $x(t)$ 。为了得到相对较好的近似,波形 $x(t)$ 的变化相对于抽样速率而言必须比较慢,这意味着抽样速率必须几倍(至少 5 倍)于奈奎斯特速率。

对于任何给定的抽样速率,DM 编码器的性能受到两类失真的限制,如图 3-5-7 所示,一种称为斜率过载失真,它是由于所用的步长太小,跟不上波形中的斜率陡峭部分的变化速度而造成的;第二类失真叫颗粒失真,是由于所用的步长太大,在波形中的斜率较大部分产生的。在选择步长 Δ_1 时,使两类失真最小化的要求是相互矛盾的,解决办法之一是选择 Δ_1 ,使得两种失真的均方值之和最小。

即使 Δ_1 被优化而使斜率过载失真和颗粒失真两者总的均方值达到最小,DM 编码器的性能可能仍然不满意。另有一种解决办法是采用可变步长,使其适应信源信号的短时特性,也就是说,当波形具有陡峭斜率时使步长增大,当波形斜率相对较小时使步长减小。这种自适应特性如图 3-5-8 所示。

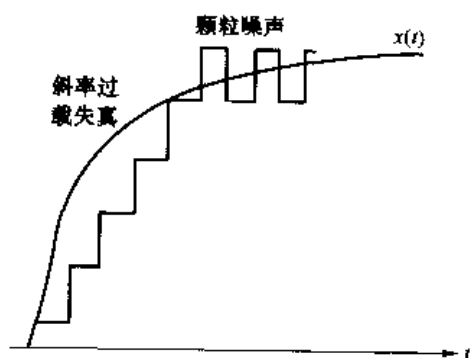


图 3-5-7 增量调制编码器中斜率过载失真和颗粒失真的例子

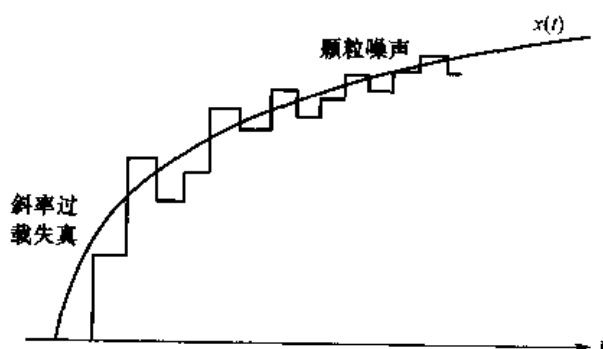


图 3-5-8 增量调制编码中可变步长的例子

在迭代中,有许多方法可用来自适应地调整步长。量化误差序列 \tilde{e}_n 可以为被编码波形的斜率特性提供很好的提示。在接连的两次迭代中,如果量化误差 \tilde{e}_n 改变了符号,说明这部分波形的斜率相对较小;反之,如果波形斜率陡峭,则很可能连续一串误差值 \tilde{e}_n 有相同的符号。从上述可知,根据 \tilde{e}_n 的前后值可以得出增大或减小步长的某些算法。贾扬特(1970 年)推导了一种相对简单的规则,可根据如下关系式自适应地改变步长

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} K^{\tilde{e}_n \tilde{e}_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

式中 $K \leq 1$ 是一个常数,应选择它使得整个失真最小化。与这种自适应算法对应的 DM 编-解码器的框图如图 3-5-9 所示。

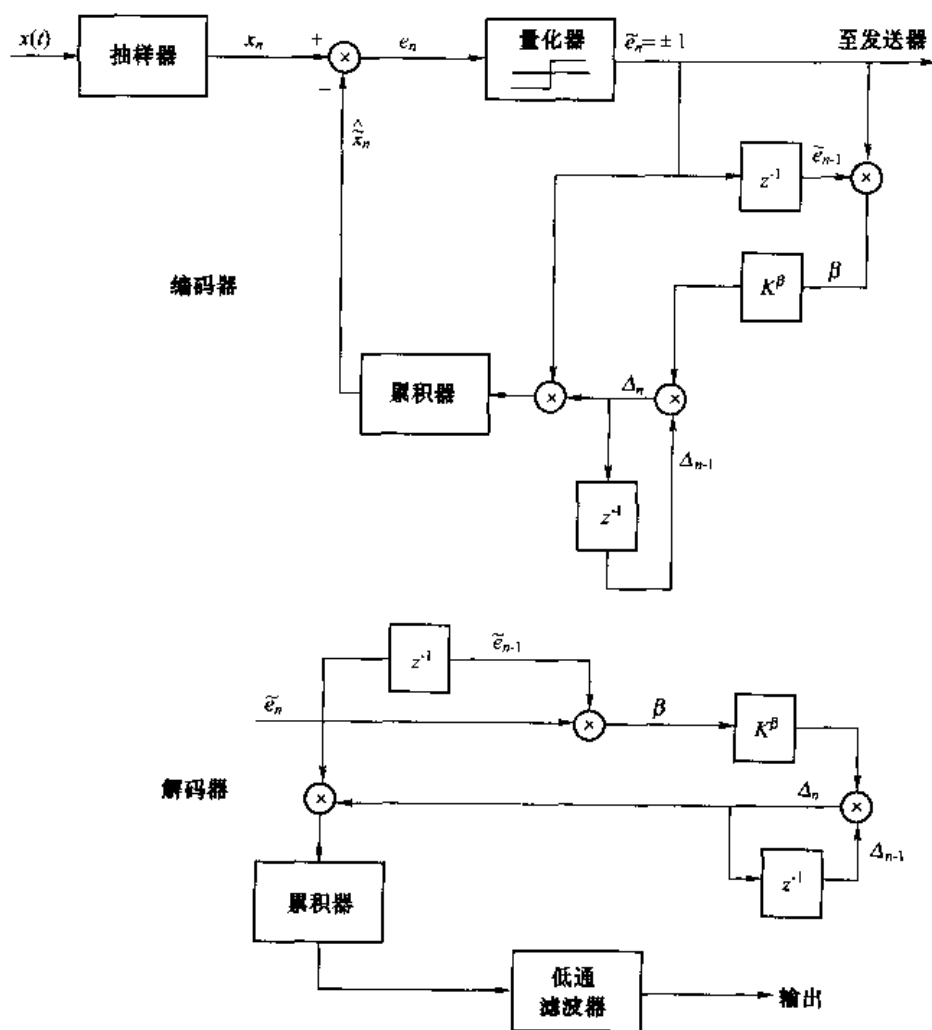


图 3-5-9 具有自适应步长的增量调制系统

还有其他几种自适应 DM 编码的变型,在技术文献中有记载。由格里夫凯斯(Greefkes, 1970 年)第一个建议的一种特别有效且流行的技术叫连续可变斜率增量调制(CVSD, continuously variable slope delta modulation)。在 CVSD 中,如果 $\tilde{e}_n, \tilde{e}_{n-1}$ 和 \tilde{e}_{n-2} 具有相同的符号,那么自适应步长参数可表达为

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + k_1$$

否则

$$\Delta_n = \alpha \Delta_{n-1} + k_2$$

参数 α , k_1 和 k_2 满足 $0 < \alpha < 1$ 以及 $k_1 \gg k_2 > 0$ 。关于这种方法以及自适应 DM 的其他变型的详细讨论,可以参考贾扬特(Jayant, 1974 年)和弗拉纳根(Flanagan, 1979 年)等的文章。

PCM, DPCM、自适应 DPCM 和 DM 均属信源编码技术,它们都力图可靠地表示信源输出的波形。下一节将介绍几种基于信源信号频谱分解的波形编码方法。

3.5.2 频谱波形编码

本节将介绍几种波形编码方法,这些方法通过滤波把信源输出信号分割成若干频带或子带(subband),分别对子带信号编码。在每个子带中,既可以对子带的时域波形编码,也可以对与子带时域波形对应的频域表达式进行编码。

1. 子带编码

在语音和图像信号的字带编码(SBC)中,信号被分解为几个子带,然后分别对各子带的时域波形编码。例如在语音编码中,低频端的子带含有语声的大部分能量谱,而且人耳对低频子带的量化噪声更敏感。因此,低频端子带的信号需用较多比特数,而高频端子带的信号使用较少比特数。

滤波器设计对于取得好的 SBC 性能特别重要。在实用中,一般采取正交镜像滤波器(QMF),因为该滤波器具有完美的信号重构特性,能产生无混叠的响应(Vaidyanathan, 1993 年)。在子带编码中,可使用 QMF 将子带再次两分频为更小的子带,这样可形成 8 子带的滤波器。为了降低抽样速率,每个 QMF 滤波器的输出频带减半。比如,假设语音信号带宽有 3 200 Hz,第一对 QMF 把频谱划分成低频带(0~1 600 Hz)和高频带(1 600~3 200 Hz),低频子带又被另一对 QMF 分割成低(0~800 Hz)和高(800~1 600 Hz)两个子带,接着又有一对 QMF 作第三次分割,把 800 Hz 带宽分成低(0~400 Hz)和高(400~800 Hz)两个子带。这样,共采用 3 对 QMF,就获得了频带为 0~400 Hz、400~800 Hz、800~1 600 Hz 和 1 600~3 200 Hz 的信号,可以采用不同的精度对每个子带的时域信号进行编码。在实践中,多采用自适应 PCM 对各子带信号进行波形编码。

2. 自适应变换编码

在自适应变换编码(ATC)中,信源信号时域采样后每 N_f 个样值组成一帧,每帧数据被变换到频域,再进行编码和传输。在信源解码处,每帧频域数据变回成时域样值,各帧样值再合并成全信号,最后通过一个 D/A 转换器输出。为了取得编码效益,给比较重要的频谱系数指配较多比特数,对相对不重要的频谱系数指配较少比特数。另外,在把总比特数指配给各频谱系数时设计一种自适应的分配方法,就能够适应信源信号统计特性可能的变化。

从时域变换到频域的目的是为了得到去相关的频谱抽样。从这个意义上说,卡亨南-洛厄夫(Karhunen-Loève)变换(KLT)是最优的,因为它产生的频谱值不相关,但是 KLT 一般难以计算(温兹 Wintz, 1972 年)。离散傅氏变换(DFT)和离散余弦变换(DCT)是行之有效的替代方法,尽管它们是次优的。两者中, DCT 具有较好的性能,实践中常采用(坎帕内拉和鲁宾逊, Campanella & Robinson, 1971 年;泽林斯基和诺尔, Zelinsky & Noll, 1977 年)。

在使用 ATC 的语音编码中,可能得到速率为 9 600 b/s 通信质量的语音。

3.5.3 模型基信源编码

与上述波形编码方法相比,模型基信源编码代表了一种截然不同的途径。这种方法用一个线性系统(滤波器)模型表示信源,在使用适当的输入信号激励后,该系统能产生所要求的序列。它不传送信源波形的抽样值,而是传输该线性系统模型的参数以及适当的激励信号。如果参数个数足够少,模型基方法能提供很大的数据压缩比。

最广泛使用的模型基编码方法是线性预测编码(LPC)。在这种方法里,样值序列(用 x_n , $n=0,1,\dots,N-1$ 表示)假设由一个全极点(离散时间)滤波器生成,它的转移函数是

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (3-5-18)$$

相应的激励函数是一个脉冲、一串脉冲或者是具有单位方差值的白噪声序列。无论哪种情况,都可将输入序列表示为 v_n ($n=1,2,\dots$),而全极点模型的输出序列满足差分方程

$$x_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + G v_n \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (3-5-19)$$

通常,只是信源模型满足差分方程(3-5-19),实际观察到的信源输出 x_n ($n=0,1,\dots,N-1$)并不满足该方程。如果输入是高斯白噪声序列或者是一个脉冲,通过下面加权的线性组合,可以求得 x_n 的估值(或预测值)

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad (n > 0) \quad (3-5-20)$$

x_n 和 \hat{x}_n 的差值,即

$$e_n = x_n - \hat{x}_n = x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad (3-5-21)$$

代表观察值 x_n 与估值(预测值) \hat{x}_n 之间的误差,滤波器系数 $\{a_k\}$ 的选择能使这个误差的均方值最小化。

假定输入 $\{v_n\}$ 是一个白噪声序列,则滤波器输出 x_n 是一个随机序列,差值 $e_n = x_n - \hat{x}_n$ 也是一个随机序列。误差平方的集合平均是

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= E(e_n^2) \\ &= E\left[\left(x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}\right)^2\right] \\ &= \phi(0) - 2 \sum_{k=1}^p a_k \phi(k) + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^p a_k a_m \phi(k-m) \end{aligned} \quad (3-5-22)$$

式中 $\phi(m)$ 是序列 x_n 的自相关函数, $n=0,1,\dots,N-1$ 。在 DPCM 所用的预测器中, \mathcal{E}_p 等于式(3-5-8)给出的 MSE。对式(3-5-22)中的 \mathcal{E}_p 求最小化,可产生一组由式(3-5-9)给出的归一化方程。为了完全确定滤波器 $H(z)$,还必须确定增益 G 。由式(3-5-19)可得

$$E[(Gv_n)^2] = G^2 E(v_n^2) = G^2 = E\left[\left(x_n - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}\right)^2\right] = \mathcal{E}_p \quad (3-5-23)$$

式中, $\hat{\mathcal{E}}_p$ 是将最优预测系数代入式(3-5-22)后得到的残留 MSE 值, 最优预测系数来自式(3-5-9)的解。利用这种关系, $\hat{\mathcal{E}}_p G^2$ 的表达式可简化为

$$\hat{\mathcal{E}}_p = G^2 = \hat{\phi}(0) - \sum_{k=1}^p a_k \hat{\phi}(k) \quad (3-5-24)$$

在实践中, 通常不能先验地确切知道信源输出的自相关函数, 因此用式(3-5-10)给出的估值 $\hat{\phi}(n)$ 代替 $\phi(n)$, 它可从信源发出的一组抽样值 $x_n (n=0, 1, \dots, N-1)$ 中求得。

正如前面已指出的, 可以用附录 A 推导的莱文森-杜宾算法以迭代方式算出预测器系数 $\{a_k\}$, 先求出一阶预测器, 再反复迭代, 将阶数提高到 p 阶。求 $\{a_k\}$ 的递推方程为

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{\hat{\phi}(i) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-1k} \hat{\phi}(i-k)}{\hat{\mathcal{E}}_{i-1}} \quad (i=2, 3, \dots, p) \\ a_{ik} &= a_{i-1k} - a_{ii} a_{i-1, i-k} \quad (1 \leq k \leq i-1) \\ \hat{\mathcal{E}}_i &= (1 - a_{ii}) \hat{\mathcal{E}}_{i-1} \\ a_{11} &= \frac{\hat{\phi}(1)}{\hat{\phi}(0)} \\ \hat{\mathcal{E}}_0 &= \hat{\phi}(0) \end{aligned} \quad (3-5-25)$$

式中, $a_{ik} (k=1, 2, \dots, i)$ 是第 i 阶预测器的系数。所要求的 p 阶预测器的系数是

$$a_k \equiv a_{pk} \quad (k=1, 2, \dots, p) \quad (3-5-26)$$

残余 MSE 是

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}} &= G^2 = \hat{\phi}(0) - \sum_{k=1}^p a_k \hat{\phi}(k) \\ &= \hat{\phi}(0) \prod_{i=1}^p (1 - a_{ii}^2) \end{aligned} \quad (3-5-27)$$

可以看到, 式(3-5-25)的迭代关系式不仅给出了 p 阶预测器的系数, 而且给出了所有小于 p 阶的预测器系数。

残余 MSE $\hat{\mathcal{E}}_i (i=1, 2, \dots, p)$ 形成一个单调递减序列, 即 $\hat{\mathcal{E}}_p \leq \hat{\mathcal{E}}_{p-1} \leq \dots \leq \hat{\mathcal{E}}_1 \leq \hat{\mathcal{E}}_0$ 预测系数 a_{ii} 满足条件

$$|a_{ii}| < 1 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (3-5-28)$$

如 $H(z)$ 的全部极点都在单位圆内, 这个条件是充分必要条件。于是, 式(3-5-28)能保证模型是稳定的。

LPC 方法已被成功地应用于语音信源的建模。在这种情况下, 系数 $a_{ii} (i=1, 2, \dots, p)$ 称为反射系数, 因为它们对应于声道声腔模型的反射系数(拉宾纳和谢弗, Rabiner & Schafer, 1978 年; 德尔勒, Deller, 1993 年)。

当预测系数和增益 G 从信源输出值 $\{x_n\}$ 中估算出来后, 它们中的每个参数被编成一个二进制数字序列发送到对方。在接收器中, 信源解码器或波形合成器的结构如图 3-5-10 所示。其中信号发生器用于产生激励函数 $\{v_n\}$, 该函数就是全极点滤波器模型 $H(z)$ 所要求的输入, 其幅度大小由 G 决定, 而 $H(z)$ 是根据接收到的预测系数构成的。令 $H(z)$ 的输出序列通过一个模拟滤波器即可恢复原模拟信源信号, 滤波器的作用大体上是在抽样值之间进行信号插

值。在波形合成器的这种实现方法中,激励函数、增益参数必须与预测系数一起发送到接收器。

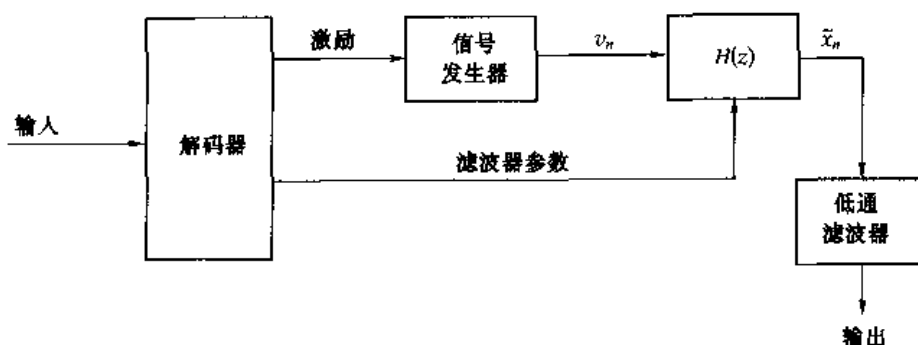


图 3-5-10 LPC 系统波形合成器(信源解码器)的方框图

当信源输出是平稳过程时,滤波器参数只需一次即可确定。但实践中遇到的大多数信源,其统计特性最多不过是准平稳的。在这种情况下,有必要周期性地获取更新的滤波器系数的估值、增益 G 和激励函数的类型,定时把这些参数传送到接收器。

例 3-5-1 图 3-5-11 所示是一个语音信源模型,两个互不包容的激励函数分别用做发声(浊音)和不发声(清音)语音的模型。从短时看,浊音具有基频 f_0 或间隔为 $1/f_0$ 的基音周期性,其值取决于说话者。因此,浊音可由周期脉冲序列激励声道全极点滤波器模型而产生,这串脉冲的周期等于所要求的基音周期;清音可用随机噪声发生器输出激励全极点滤波器模型而产生。发送端的语音编码器必须确定合适的激励函数、浊音的基音周期、增益参数 G 以及预测系数,这些参数编成二进制数传输到接收器。典型地,浊、清音信息需 1 比特,基音周期有 6 比特足够了,而在动态范围内经对数压缩后,增益参数安排 5 比特,每个预测系数需要 8~10 比特(拉宾纳和谢弗 Rabiner Schafer, 1978 年)。需要这么高精度的理由是预测系数相当小的变化就可能导致滤波器模型 $H(z)$ 极点位置很大的变化。把发送预测系数改为发送反射系数 a_n 可降低精度要求,因为反射系数的动态范围较小,用 6 比特表示就够用了。这样,对一个 10 阶 $p=10$ (5 个 $H(z)$ 极点)的预测器而言,需要的总比特数是 72。由于语音信号的准平稳特性,线性系统模型参数必须周期性地改变,典型的是每 15~30 ms 变一次。结果,信源编码器的比特率在 4 800~2 400 b/s 之间。

当反射系数送到解码器后,并非一定要重新算出预测系数才能完成语音合成。可以换一种方法,用一个如图 3-5-12 所示的格型滤波器来合成语音,它能直接利用反射系数,其本身等效于线性预测滤波器。

通过线性预测估算滤波器参数的线性全极点滤波器模型是目前最简单的线性信源模型,更一般的信源模型是既包含极点又包含零点的线性滤波器。在零极点模型中,信源输出 x_n 满足差分方程

$$x_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + \sum_{k=0}^q b_k v_{n-k}$$

式中, v_n 是输入的激励序列。现在的问题是要从信源发出的数据 $x_i (i=0, 1, \dots, N-1)$ 中估算滤波器的参数 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$, 但用来使误差 $e_n = x_n - \hat{x}_n$ (这里 \hat{x}_n 是 x_n 的估值)最小化的 MSE

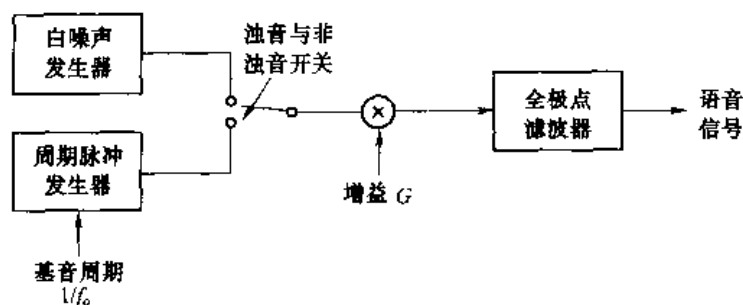


图 3-5-11 语音信号发生器的模型框图

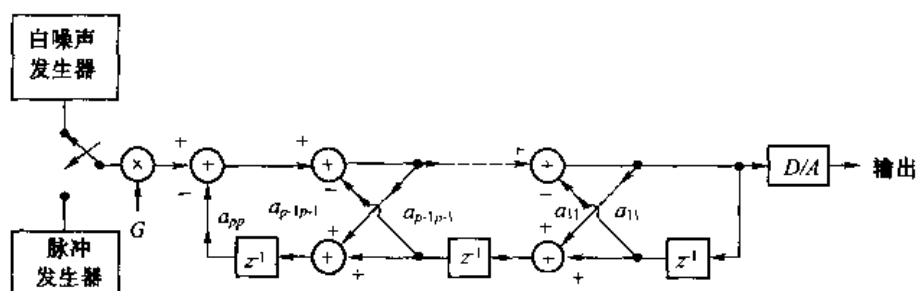


图 3-5-12 合成语音信号的全极点格型滤波器

准则导致一组参数 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 的非线性方程, $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 的计算在数学上变得十分烦琐和困难。为了避免解非线性方程, 专家们提出了许多零极点模型的次优解法, 有关这些内容的讨论不属本书范围。

如上所述, LPC 为更复杂的模型基信源编码算法打下了基础。当应用于语音编码时, 模型基方法一般称做声码器(vocoder, 即 voice coder)。除了上述的一般 LPC 声码器外, 已实现的其他类型的声码器还有残余激励 LPC(RELP)声码器、多脉冲 LPC 声码器、码激励 LPC(CELP)声码器以及矢量和激励 LPC(VSELP)。CELP 和 VSELP 声码器利用矢量量化激励码本取得了低比特率通信质量的语音。在声码器中, 激励序列是从零均值高斯序列的码本中选取的。一个典型的激励序列包含 40 个采样值, 一个码本包含 1 024 个这样的序列, 这样, 每个激励矢量需用 10 比特来确定。CELP 现已被广泛应用于数字蜂窝移动通信系统中来获得通信质量的语音传输, 码率低于 10 000 b/s。

在结束本节之前, 我们讨论一些将波形编码和 LPC 应用于语音信号编码的应用实例, 对由这些编码技术获得的比特速率进行比较。

1. 编码方法在语音信号中的应用

语音信号在电话线路、无线信道和卫星信道里的传输占据了日常通信的最大部分, 因此, 过去 30 多年对语音编码的研究多于对其他任何一种荷载信息信号的研究。事实上, 本节所述的所有编码技术都已应用于语音信号的编码。因此, 有必要根据传输语音信号所需的比特速率对这些方法的效率作比较。

假设语音信号的带宽限于 200~3 200 Hz 的频率范围以内, 除 DM 外的所有编码器以标准速率 8 000 样值/s 抽样, DM 的抽样速率 f_s 等于比特速率。对于 LPC 编码器, 假定其参数与例 3-5-1 中的一样。

表 3-5-2 总结了本节所述编码方法的主要特性和要求的比特速率。关于接收器从(无差错的)二进制序列合成的语音信号质量,可以说所有波形编码方法(PCM, DPCM, ADPCM, DM, ADM)提供的都是电话(长话)质量的语音,换言之,收听者将难以区分数字语音和模拟语音之间的差别。ADPCM 和 ADM 是特别有效的波形编码技术。至于 CVSD,在带有可察觉的波形失真的情况下,速率可以低到 9 600 b/s。事实上,当速率低于 16 000 b/s 时,波形编码器产生的失真明显增大,因此速率低于 9 600 b/s 时不采用这些技术。

表 3-5-2 应用于语音信号的编码技术

编 码 方 法	量 化 器	码长/比特	传输速率/(b/s)
PCM	线性	12	96 000
Lg PCM	对数	7~8	56 000~64 000
DPCM	对数	4~6	32 000~48 000
ADPCM	自适应	3~4	24 000~32 000
DM	二进制	1	32 000~64 000
ADM	自适应二进制	1	16 000~32 000
LPC/CELP			2 400~9 600

当速率低于 9 600 b/s 时,通常采用诸如 LPC 那样的编码技术,它们基于信源的线性模型。尽管这类编码技术获得的合成语音易懂,但这类语音属于合成质量,带有可察觉的失真。

3.6 文献与参考资料

自从香农 1948 年的经典论文及霍夫曼 1952 年的论文发表以后,信源编码已成为非常活跃的研究领域。这些年来主要进展是在开发高效的信源数据压缩算法上,其中特别重要的文章有齐夫(1985 年)、齐夫和兰培尔(Ziv & Lempe, 1977 年, 1978 年)、戴维森(Davissou, 1973 年, 1981 年)、格雷(1975 年)关于通用信源编码和通用量化方面的研究。

有关率失真理论的讨论可参阅加拉杰(1968 年)、伯杰(1971 年)、维特比和小村(Viterbi, Omura, 1979 年)、布拉胡特(Blahut, 1987 年)和格雷 Gray(1990 年)的著作。本书对率失真函数的讨论集中在语音处理应用上。关于率失真理论在图像和视频压缩方面的实际应用,读者可参见 1998 年 11 月的 IEEE Signal Processing Magazine。伯杰和吉伯森(Berger & Gibson) 1998 年发表的论文中对于有损信源编码这个领域过去 50 年的主要进展作了综述。

近几十年,科学家们在语音编码方法领域做了大量工作,我们的讨论只是这个重要课题的一个概论,更详细的讨论可参见拉宾纳与谢弗(Rabiner & Schafer, 1978 年)、贾扬特与诺尔(1984 年)和德尔勒等(2000 年)的著作。除此之外,IEEE Transactions on Communications(1979 年 4 月和 1982 年 4 月)以及 IEEE Journal on Selected Areas in Communications(1988 年 2 月)出版了专刊讨论语音编码。还要提到的是,IEEE 出版物中有一本是由贾扬特(Jayant)主编、关于波形量化和编码已发表文章的汇印集,以及贾扬特近期的研究文章(1990 年)。

在过去 10 年中,矢量量化方面取得了许多进展,本书关于这方面的讨论基于马克霍尔等(1985 年)的论文。对于矢量量化和信号压缩更详细的讨论可参见格尔逊和格雷(1992 年)的

著作。Gray 和 Neuhoﬀ 1998 年的研究文章论述了过去 50 年在量化问题上的大量进展,并罗列了 500 多篇参考文章。

习题

3-1 考虑习题 2-1 所述的联合事件,已知联合概率为 $P(A_i, B_j)$ 。假设观察到事件 A 的结果是 $A_i (i=1,2,3,4)$ 。

(a) 以比特为单位计算互信息 $I(B_j; A_i)$ 。这里, $j=1,2,3$ 以及 $i=1,2,3,4$ 。

(b) 计算平均互信息 $I(B; A)$ 。

3-2 假定习题 3-1 中的输出结果 $B_j (j=1,2,3)$ 代表一个 DMS 信源输出的 3 种可能字母,试计算信源熵。

3-3 试证明: $\ln u \leq u - 1$ 。将 $\ln u$ 和 $u - 1$ 画在同一张图上,再次证明该不等式成立。

3-4 X, Y 是两个离散随机变量,其概率为

$$P(X = x, Y = y) = P(x, y)$$

证明: $I(X, Y) \geq 0$, 当且仅当 X 和 Y 统计独立时等号成立。

提示: 对于 $0 < u < 1$, 利用不等式 $\ln u \leq u - 1$ 证明 $-I(X, Y) \leq 0$ 。

3-5 某 DMS 信源输出由可能的字符 x_1, x_2, \dots, x_n 组成, 其发生概率分别是 p_1, p_2, \dots, p_n 。

证明: 信源熵 $H(X)$ 至多是 $\lg n$ 。

3-6 均匀分布随机变量 X 的 PDF 为

$$P(x) = \begin{cases} a^{-1} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

在下列 3 种情况下求 X 的差熵 $H(X)$

(a) $a = 1$

(b) $a = 4$

(c) $a = 1/4$

从所得结果说明: $H(X)$ 不是一个绝对的量度, 而仅是随机度的相对量度。

3-7 某 DMS 信源的字符集有 8 个字符 $x_i (i=1,2,\dots,8)$, 其对应的概率分别是 0.25, 0.2, 0.15, 0.12, 0.10, 0.08, 0.05 和 0.05。

(a) 对信源输出设计一个霍夫曼二进制编码。

(b) 计算每信源字符所用的平均二进制数字个数 \bar{R} 。

(c) 计算信源熵, 并与 \bar{R} 值比较。

3-8 某 DMS 信源由 5 个字符 $x_i (i=1,2,\dots,5)$ 组成其字符集, 每个字符的发生概率均是 $1/5$ 。计算下列情况下固定长度二进制码的效率:

(a) 分别将每个字符编码成二进制序列。

(b) 一次将两个字符编码成二进制序列。

(c) 一次将 3 个字符编码成二进制序列。

3-9 利用式(3-2-6)

$$I(x_i; y_j) = I(x_i) - I(x_i | y_j)$$

证明

$$(a) I(x_i; y_j) = I(y_j) - I(y_j | x_i)$$

$$(b) I(x_i; y_j) = I(x_i) + I(y_j) - I(x_i y_j), \text{ 这里 } I(x_i y_j) = -\lg P(x_i, y_j)$$

3-10 设 X 是几何分布的随机变量, 即

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

(a) 计算 X 的熵。

(b) 已知 $X > K$ (K 是正整数), X 的熵是多少?

3-11 设 X 和 Y 是两个联合分布的离散随机变量

(a) 证明

$$H(X) = - \sum_{x,y} p(x,y) \lg P(x)$$

$$H(Y) = - \sum_{x,y} p(x,y) \lg P(y)$$

(b) 利用上述结果证明

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$$

在什么情况下上式的等号成立?

(c) 证明

$$H(X | Y) \leq H(X)$$

当且仅当 X 和 Y 独立时上式等号成立。

3-12 两个二进制随机变量 X 和 Y 服从下列联合分布

$$p(X = Y = 0) = p(X = 0, Y = 1) = p(X = Y = 1) = 1/3$$

计算 $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ 和 $H(X, Y)$ 。

3-13 马尔可夫过程是一种具有一阶记忆的过程, 即对于所有 n , 都有关系式

$$p(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots) = p(x_n | x_{n-1})$$

证明: 对于平稳马尔可夫过程, 熵率由 $H(x_n | x_{n-1})$ 决定。

3-14 令 $Y = g(X)$, 这里 g 代表一个确定的函数。证明: 关系式 $H(Y) \leq H(X)$ 成立。问在什么情况下等号成立?

3-15 证明: $I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$

3-16 对于统计独立事件, 证明下式成立

$$H(X_1 X_2 \cdots X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i)$$

3-17 对于一个无噪信道, 证明 $H(X|Y) = 0$ 。

3-18 证明

$$I(X_3; X_2 | X_1) = H(X_3 | X_1) - H(X_3 | X_1 X_2)$$

及

$$H(X_3 | X_1) \geq H(X_3 | X_1 X_2)$$

3-19 X 是一个 PDF 为 $p_X(x)$ 的随机变量, 令 $Y = aX + b$ 是 X 的一个线性变换, 此处 a

和 b 是两个常数。试根据 $H(X)$ 计算差熵 $H(Y)$ 。

- 3-20 与某 DMS 信源输出 x_1, x_2 和 x_3 对应的发生概率分别是 $p_1 = 0.45, p_2 = 0.35$ 及 $p_3 = 0.2$, 对它们作线性变换 $Y = aX + b$ (式中 a, b 是常数)。试计算熵值 $H(Y)$, 并解释这种变换对 X 的熵产生什么影响。
- 3-21 高斯分布信号幅值的最佳 4 电平量化器将信号量化成 4 种电平 a_1, a_2, a_3 和 a_4 , 对应的发生概率分别是 $p_1 = p_2 = 0.3365$ 及 $p_3 = p_4 = 0.1635$ 。
- (a) 设计一个霍夫曼码, 每次对一个电平符号编码, 计算其平均比特率。
- (b) 设计一个霍夫曼码, 每次对两个电平符号编码, 并计算其平均比特率。
- (c) 一次对 J 个输出电平编码, 当 $J \rightarrow \infty$ 时, 计算获得的最小码率。
- 3-22 一阶马尔可夫信源的特性由其状态概率 $P(x_i) (i = 1, 2, \dots, L)$ 、转移概率 $P(x_k | x_i) (i = 1, 2, \dots, L)$ 及 $k \neq i$ 确定。马尔可夫信源的熵是

$$H(X) = \sum_{k=1}^L P(x_k) H(X | x_k)$$

式中, $H(X | x_k)$ 是信源处在状态 x_k 下的熵。计算图 P3-22 所示二进制一阶马尔可夫信源的熵, 其转移概率为 $P(x_2 | x_1) = 0.2$ 及 $P(x_1 | x_2) = 0.3$ (注意, 条件熵 $H(X | x_1)$ 及 $H(X | x_2)$ 分别由二进制熵函数 $H[P(x_2 | x_1)]$ 和 $H[P(x_1 | x_2)]$ 确定)。如果输出字符概率 $P(x_1)$ 和 $P(x_2)$ 相同, 马尔可夫信源熵与二进制 DMS 信源熵相比如何?

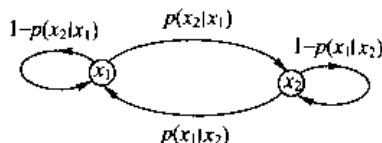


图 P3-22

- 3-23 一个无记忆信源的字符集为 $A \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$, 相应的概率分别是 $\{0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.05, 0.25, 0.3\}$,
- (a) 计算信源熵。
- (b) 假设信源输出按如下量化规则量化
- $$q(-5) = q(-3) = 4, \quad q(-1) = q(0) = q(1) = 0, \quad q(5) = q(3) = 4$$
- 计算量化后的信源熵。
- 3-24 某信源输出字符集的各字符的输出概率分别为 $\{0.05, 0.1, 0.15, 0.17, 0.18, 0.22, 0.13\}$, 设计一个以 0, 1, 2 为符号的三进制霍夫曼码, 所得码字的平均码长是多少? 将所得结果与信源熵的平均码长比较。(为了使这种比较有意义, 在用对数计算熵时, 采用什么为基?)
- 3-25 对下列二进制序列进行 L-Z 信源编码
- 000100100000011000010000000100000010100001000000110100000001100
- 再从编成的 L-Z 信源码中恢复原序列。
- 提示: 需对二进制序列处理两次, 以决定字典的尺寸。
- 3-26 计算下列情况下, 连续随机变量 X 的差熵。
- (a) X 是指数分布的随机变量, 参数 $\lambda > 0$, 即

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} e^{-x/\lambda} & (x > 0) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

(b) X 是拉普拉斯分布的随机变量, 参数 $\lambda > 0$, 即

$$f_X(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda}$$

(c) X 是三角分布的随机变量, 参数 $\lambda > 0$, 即

$$f_X(x) = \begin{cases} (x + \lambda)/\lambda^2 & (-\lambda \leq x \leq 0) \\ (-x + \lambda)/\lambda^2 & (0 < x \leq \lambda) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

- 3-27 可以证明, 一个误差-失真量度绝对值为 $d(x, \hat{x}) = |x - \hat{x}|$ 的拉普拉斯信源 $f_X(x) = (2\lambda)^{-1} e^{-|x|/\lambda}$ 的率失真函数是

$$R(D) = \begin{cases} \lg(\lambda/D) & (0 \leq D \leq \lambda) \\ 0 & (D > \lambda) \end{cases} \quad (\text{伯杰, 1971 年})$$

(a) 如想使平均失真不超过 $\lambda/2$, 每信源输出样值需要多少比特来表示?

(b) 画出 λ 取 3 种不同值时的 $R(D)$, 讨论图中 λ 值变化所产生的影响。

- 3-28 可以证明: 如果 X 是均值为零且方差为 σ^2 的连续随机变量, 在平方误差失真量度下, 它的率-失真函数的上、下边界可由以下不等式给定

$$h(X) - \frac{1}{2} \lg 2\pi e D \leq R(D) \leq \frac{1}{2} \lg \sigma^2 / 2$$

式中 $h(X)$ 表示随机变量 X 的差熵 (Cover & Thomas, 1991 年)。

(a) 证明: 对于高斯随机变量, 其上、下边界也是上式。

(b) 画出 $\sigma = 1$ 的拉普拉斯信源的上、下边界。

(c) 画出 $\sigma = 1$ 的三角分布信源的上、下边界。

- 3-29 一个平稳随机过程的自相关函数为 $R_x = \frac{1}{2} A^2 e^{-|x|} \cos 2\pi f_0 x$, 且其幅度从不超过 6。假设幅度 $A = 6$, 需要多少级量化电平才能保证信号-量化噪声之比至少达 60 dB?

- 3-30 某加性高斯白噪声信道的输出是 $Y = X + G$, 此处 X 是信道输入, G 是噪声, 概率密度函数为

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-n^2/2\sigma_n^2}$$

如 X 是 $E(X) = 0$ 及 $E(X^2) = \sigma_x^2$ 的白高斯输入, 计算

(a) 条件差熵 $H(X|G)$ 。

(b) 平均互信息 $I(X; Y)$ 。

- 3-31 某 DMS 信源的字符集由 8 个字符 $x_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ 组成, 发生概率与习题 3-7 的一样。利用霍夫曼编码方法编一个三进制码 (用符号 0, 1, 2 表示) 作为信源输出。

提示: 一个字符 x_9 , 令其概率 $p_9 = 0$ 。一次以 3 个符号为一组。

- 3-32 试判断: 是否存在一个二进制码, 满足前缀条件而码字长度为

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (1, 2, 2, 3)$$

- 3-33 考虑一个拥有 2^n 个码字, 各码字具有相等码长 n 的二进制分组码。证明: 这种码满

足克拉夫特不等式。

- 3-34 证明:一个 n 维高斯矢量 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的熵具有零均值, 且其协方差矩阵 \mathbf{M} 是

$$H(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e)^n |\mathbf{M}|$$

- 3-35 假设有一个 DMS 信源, 其输出为等概的 0 或 1。定义失真量度为 $D = P_e$, 这里 P_e 是二进制符号在 BSC 信道传输中的差错概率, 则率失真函数是(伯杰, 1971 年)

$$R(D) = 1 + D \log_2 D + (1 - D) \log_2 (1 - D) \quad (0 \leq D = P_e \leq 0.5)$$

画出 $0 \leq D \leq 0.5$ 时的 $R(D)$ 曲线。

- 3-36 计算 M 电平对称信道中 $M = 2, 4, 8$ 和 16 时的率失真函数, 该信道 $D = P_M$ 及

$$R(D) = \log_2 M + D \log_2 D + (1 - D) \log_2 \frac{1 - D}{M - 1}$$

P_M 是差错概率。

- 3-37 若采用加权的均方误差(MSE)作为失真量度, 其定义是

$$d_w(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})' \mathbf{W} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})$$

此处 \mathbf{W} 是一个对称正定的加权矩阵。若使 \mathbf{W} 满足条件 $\mathbf{W} = \mathbf{P}' \mathbf{P}$, 试证明 $d_w(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})$ 与未加权的 MSE 失真量度 $d_2(\mathbf{X}', \tilde{\mathbf{X}}')$ 是等价的(\mathbf{X}' 和 $\tilde{\mathbf{X}}'$ 是变换矢量)。

- 3-38 考虑一个平稳随机信号序列 $\{X(n)\}$, 其均值为 0, 自相关序列

$$\phi(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0.5 & (n = \pm 1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

(a) $\{X(n)\}$ 的一阶最小 MSE 预测器为

$$\hat{x}(n) = a_1 x(n - 1)$$

计算预测系数以及相应的最小均方误差 ϵ_1 。

(b) 对于二阶预测器

$$\hat{x}(n) = a_1 x(n - 1) + a_2 x(n - 2)$$

重复(a)的问题。

- 3-39 考虑对随机变量 x_1 和 x_2 编码, 它们的联合 PDF $p(x_1, x_2)$ 如图 P3-39 所示, 为

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 15/7ab & (x_1, x_2 \in C) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

计算对 x_1, x_2 分别均匀量化(标量量化)时所需的比特速率, 以及对 (x_1, x_2) 组合量化(矢量量化)时所需的比特速率。当 $a = 4b$ 时, 计算二者比特速率之差。

- 3-40 考虑对两个随机变量 X 和 Y 编码, 它们均匀分布在图 P3-40 所示的两个矩形之间。

(a) 写出 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的表达式。

(b) 假定用 4 电平均匀量化器分别对随机变量 X 和 Y 量化, 将造成怎样的失真? 每对 (X, Y) 所用的比特数是多少?

(c) 再假设对 X 和 Y 不用标量量化器而采用矢量量化器, 允许的失真程度与(b)题一样, 则每信源输出对 (X, Y) 所用的比特数是多少?

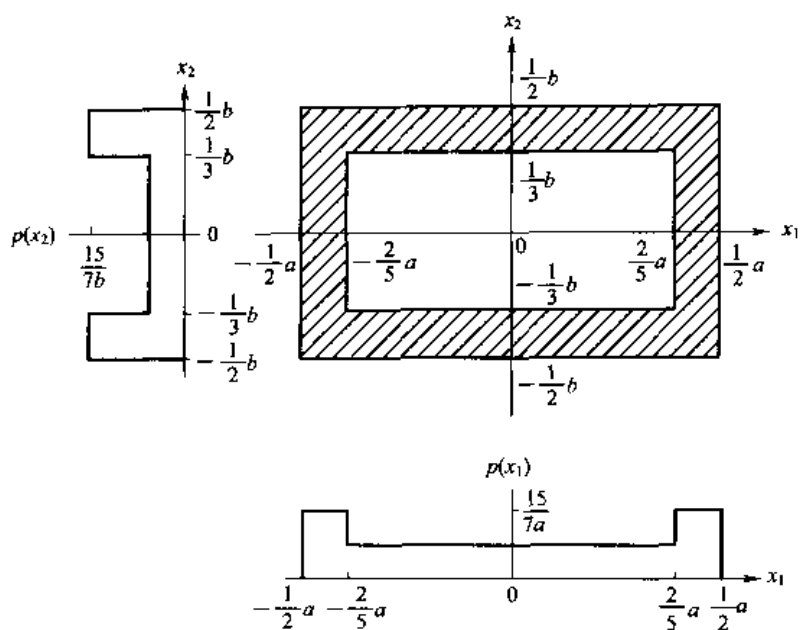


图 P3-39

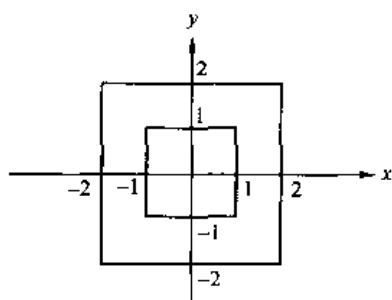


图 P3-40

3-41 两个随机变量 X 和 Y 均匀分布在图 P3-41 所示的矩形里，

(a) 写出 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的表达式。

(b) 假定用 4 电平均匀量化器分别对随机变量 X 和 Y 量化，将造成怎样的失真？每对 (X, Y) 所用的比特数是多少？

(c) 再假设对 X 和 Y 不用标量量化器而采用矢量量化器，每信源输出对 (X, Y) 所用的比特数与 (b) 题一样，则该矢量量化器的失真度是多大？

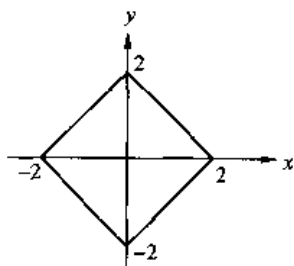


图 P3-41

第4章 通信信号与系统的表征

信号可用若干种不同的方法来分类,例如随机与确定、离散时间与连续时间、离散幅度与连续幅度、低通与带通、有限能量与无限能量、有限功率与无限功率。本章将对数字信息在通信信道上传输时经常遇到的信号与系统的特性进行描述,特别将介绍各种形式的数字已调信号的表示及其频谱特性。

首先表征带通信号与系统,其中包含带通平稳随机过程的数学表示,然后阐述信号的向量空间表示,最后阐述数字已调信号及其频谱特性的表示。

4.1 带通信号与系统的表示法

许多携带数字信息的信号是由某种类型的载波调制方式发送的。传输信号的信道带宽限制在以载波为中心的一个频段上,如双边带调制,或在邻近载波的频段上,如单边带调制。满足带宽远小于载波频率的信号与信道(系统)称为窄带带通信号与信道(系统)。通信系统发送端的调制产生带通信号,而接收端的解调恢复数字信息,两者均包含频率转换。为不失一般性及保证数学分析简便,最好将所有的带通信号与信道简化为等效低通信号与信道,因此在以后各章阐述的各种调制和解调技术性能与载波频率及信道频带无关。本节研究的主要问题是带通信号与系统以等效低通波形的表示法和带通平稳随机过程的表征。

4.1.1 带通信号的表示法

假定一个实值信号的频率成分集中在频率 f_c 附近的窄带频率范围内,如图 4-1-1 所示,我们的目的是导出该信号的数学表达式。首先构架一个信号,其中仅包含 $s(t)$ 的正频域部分,该信号可表示为



图 4-1-1 带通信号的频谱

$$S_+(f) = 2u(f)S(f) \quad (4-1-1)$$

式中, $S(f)$ 为 $s(t)$ 的傅里叶变换, $u(f)$ 为单位阶跃函数。式(4-1-1)的等效时域表达式为

$$\begin{aligned} s_+(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_+(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= F^{-1}[2u(f)] * F^{-1}[S(f)] \end{aligned} \quad (4-1-2)$$

信号 $s_+(t)$ 称为解析信号或 $s(t)$ 的预包络。注意到 $F^{-1}[S(f)] = s(t)$ 及

$$F^{-1}[2u(f)] = \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \quad (4-1-3)$$

因此,

$$\begin{aligned} s_+(t) &= \left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right] * s(t) \\ &= s(t) + j \frac{1}{\pi t} * s(t) \end{aligned} \quad (4-1-4)$$

定义 $\hat{s}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= \frac{1}{\pi t} * s(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \end{aligned} \quad (4-1-5)$$

信号 $\hat{s}(t)$ 可以看做一个滤波器在输入信号 $s(t)$ 激励下的输出, 该滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (4-1-6)$$

这样的滤波器称做希尔伯特(Hilbert)变换器, 其频率响应为

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \begin{cases} -j & (f > 0) \\ 0 & (f = 0) \\ j & (f < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (4-1-7)$$

可以看出, $|H(f)| = 1$ 以及相位响应当 $f > 0$ 时为 $\Theta(f) = -\frac{1}{2}\pi$, 而当 $f < 0$ 时为 $\Theta(f) = \frac{1}{2}\pi$ 。因此, 这种滤波器本质上是一个对输入信号所有频率的 90° 相移器。

解析信号 $s_+(t)$ 是带通信号。由 $S_+(f)$ 的频率转换, 可得到等效低通表达式。因此, 定义 $S_l(f)$ 为

$$S_l(f) = S_+(f + f_c) \quad (4-1-8)$$

等效时域关系式为

$$\begin{aligned} s_l(t) &= s_+(t) e^{-j2\pi f_c t} \\ &= [s(t) + j\hat{s}(t)] e^{-j2\pi f_c t} \end{aligned} \quad (4-1-9)$$

或等价

$$s(t) + j\hat{s}(t) = s_l(t) e^{j2\pi f_c t} \quad (4-1-10)$$

一般地, 信号 $s_l(t)$ 是复信号(参见习题 4-5), 且可表示为

$$s_l(t) = x(t) + jy(t) \quad (4-1-11)$$

若替换式(4-1-11)中的 $s_l(t)$, 并使该式每一边的实部和虚部相等, 可得到如下关系式

$$s(t) = x(t) \cos 2\pi f_c t - y(t) \sin 2\pi f_c t \quad (4-1-12)$$

$$\hat{s}(t) = x(t) \sin 2\pi f_c t + y(t) \cos 2\pi f_c t \quad (4-1-13)$$

表达式(4-1-12)是带通信号表示的期望形式。低频信号分量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 可以看做分别施加在载波分量 $\cos 2\pi f_c t$ 和 $\sin 2\pi f_c t$ 上的幅度调制信号。由于载波分量在相位上是正交的, 因此 $x(t)$ 和 $y(t)$ 称为带通信号 $s(t)$ 的两个正交分量。

式(4-1-12)中的信号的另一种表示为

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}\{[x(t) + jy(t)]e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \operatorname{Re}[s_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \end{aligned} \quad (4-1-14)$$

式中, Re 表示其后括号中复值量的实部。低通信号 $s_l(t)$ 通常称为实信号 $s(t)$ 的复包络, 其本质上是等效低通信号。

带通信号的第三种可能的表达形式可由如下 $s_l(t)$ 得到

$$s_l(t) = a(t)e^{j\theta(t)} \quad (4-1-15)$$

式中

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (4-1-16)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)} \quad (4-1-17)$$

因此

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}[s_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \\ &= \operatorname{Re}[a(t)e^{j[2\pi f_c t + \theta(t)]}] \\ &= a(t)\cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \end{aligned} \quad (4-1-18)$$

信号 $a(t)$ 称为 $s(t)$ 的包络, $\theta(t)$ 称为 $s(t)$ 的相位。因此, 式(4-1-12)、式(4-1-14)和式(4-1-18)是带通信号的等价表达形式。

$s(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{Re}[s_l(t)e^{j2\pi f_c t}]| e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (4-1-19)$$

在式(4-1-19)中利用恒等式

$$\operatorname{Re}(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + \xi^*) \quad (4-1-20)$$

可得到如下结果

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [s_l(t)e^{j2\pi f_c t} + s_l^*(t)e^{-j2\pi f_c t}] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{2} [S_l(f - f_c) + S_l^*(-f - f_c)] \end{aligned} \quad (4-1-21)$$

式中, $S_l(f)$ 是 $s_l(t)$ 的傅里叶变换。此式是实带通信号谱 $S(f)$ 与等效低通信号谱 $S_l(f)$ 之间的基本关系式。

信号 $s(t)$ 的能量定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{Re}[s_l(t)e^{j2\pi f_c t}]|^2 dt \end{aligned} \quad (4-1-22)$$

当在式(4-1-22)中应用恒等式(4-1-20)时,可得到以下结果

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 \cos[4\pi f_c t + 2\theta(t)] dt\end{aligned}\quad (4-1-23)$$

考察式(4-1-23)中的第二项积分。由于信号 $s(t)$ 是窄带的,所以实包络 $a(t) \equiv |S_l(t)|$, 或等效地说, $a^2(t)$ 的变化相对于余弦函数激励的快变换是缓慢的。图 4-1-2 给出了式(4-1-23)中的第二项积分中被积函数的图形说明。该积分值是由 $a^2(t)$ 调制的余弦函数下的净面积,由于调制波形 $a^2(t)$ 相对于余弦函数变化缓慢,第二项积分所得的净面积对于式(4-1-23)中的第一项积分值非常小,从而可以忽略。因此,从实用观点来看,以等效低通信号 $s_l(t)$ 表示的带通信号的能量为

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_l(t)|^2 dt \quad (4-1-24)$$

式中, $|s_l(t)|$ 是 $s(t)$ 的包络 $a(t)$ 。

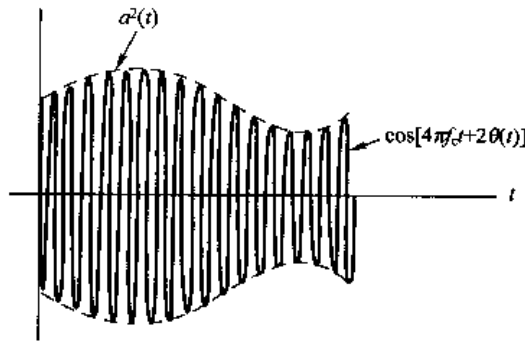


图 4-1-2 信号 $a^2(t) \cos[4\pi f_c t + 2\theta(t)]$

4.1.2 线性带通系统的表示法

线性滤波器或系统可以用其冲激响应 $h(t)$ 或频率响应 $H(f)$ 描述, $H(f)$ 是 $h(t)$ 的傅里叶变换。由于 $h(t)$ 是实的,因此

$$H^*(-f) = H(f) \quad (4-1-25)$$

定义 $H_l(f - f_c)$ 为

$$H_l(f - f_c) = \begin{cases} H(f) & (f > 0) \\ 0 & (f < 0) \end{cases} \quad (4-1-26)$$

那么

$$H_l^*(-f - f_c) = \begin{cases} 0 & (f > 0) \\ H^*(-f) & (f < 0) \end{cases} \quad (4-1-27)$$

利用式(4-1-25),可得

$$H(f) = H_l(f - f_c) + H_l^*(-f - f_c) \quad (4-1-28)$$

式(4-1-28)中 $H(f)$ 的反变换给出如下形式的 $h(t)$

$$\begin{aligned} h(t) &= h_l(t)e^{j2\pi f_c t} + h_l^*(t)e^{-j2\pi f_c t} \\ &= 2\operatorname{Re}[h_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \end{aligned} \quad (4-1-29)$$

式中, $h_l(t)$ 是 $H_l(f)$ 的傅里叶反变换。通常, 等效低通系统的冲激响应 $h_l(t)$ 是复值的。

4.1.3 带通系统对带通信号的响应

在 4.1.1 节和 4.1.2 节中, 我们已阐明: 窄带带通信号和系统可以用等效低通信号和系统表示。本节将证明带通系统对带通输入信号的输出信号可简单地由等效低通输入信号和系统的等效低通冲激响应得到。

假定 $s(t)$ 是窄带带通信号, $s_l(t)$ 是等效低通信号。该信号激励一个窄带带通系统, 该带通系统由其冲激响应 $h(t)$ 或等效低通冲激响应 $h_l(t)$ 表征。带通系统的输出也是一个带通信号, 因此, 它可表示成如下形式

$$r(t) = \operatorname{Re}[r_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (4-1-30)$$

式中, $r(t)$ 与输入信号 $s(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 的关系为卷积积分

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4-1-31)$$

在频率域表示系统的输出, 等价于

$$R(f) = S(f)H(f) \quad (4-1-32)$$

将式(4-1-21)替代 $S(f)$, 并将式(4-1-28)替代 $H(f)$, 得到以下结果

$$R(f) = \frac{1}{2}[S_l(f-f_c) + S_l^*(-f-f_c)][H_l(f-f_c) + H_l^*(-f-f_c)] \quad (4-1-33)$$

当 $s(t)$ 是窄带信号而 $h(t)$ 是窄带系统的冲激响应时, 对于 $f < 0$, 有 $S_l(f-f_c) \approx 0$ 且 $H_l(f-f_c) = 0$ 。由此窄带条件, 可得出以下结果

$$S_l(f-f_c)H_l^*(-f-f_c) \approx 0, \quad S_l^*(-f-f_c)H_l(f-f_c) = 0$$

因此, 式(4-1-33)简化成

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{2}[S_l(f-f_c)H_l(f-f_c) + S_l^*(-f-f_c)H_l^*(-f-f_c)] \\ &= \frac{1}{2}[R_l(f-f_c) + R_l^*(-f-f_c)] \end{aligned} \quad (4-1-34)$$

式中

$$R_l(f) = S_l(f)H_l(f) \quad (4-1-35)$$

是等效低通系统在等效低通信号激励下的输出频谱。显然, 输出 $r_l(t)$ 的时域关系式由 $s_l(t)$ 与 $h_l(t)$ 的卷积给出, 亦即

$$r_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_l(\tau)h_l(t-\tau)d\tau \quad (4-1-36)$$

式(4-1-36)与式(4-1-30)的结合给出带通输出信号 $r(t)$ 与等效低通时间函数 $s_l(t)$ 和 $h_l(t)$ 之间的关系式。这种简单的关系式允许可以不理睬在信号调制中遇到的任何线性频率搬移, 该调制的目的是将频谱分量与特定信道的频率分配相匹配。因此, 为简便数学分析, 我们仅讨论等效低通信号通过等效低通信道的传输。

4.1.4 带通平稳随机过程的表示法

在 4.1.1 节中提出的带通信号的表示法可应用于确定信号,本节将此表示法推广到带通平稳随机过程的样本函数。特别是,我们将导出带通信号的相关函数、功率谱与等效低通信号相关函数和功率谱之间的关系式。

假定 $n(t)$ 是具有零均值且功率密度谱为 $\Phi_{nn}(f)$ 的广义平稳随机过程的样本函数。假定在以 $\pm f_c$ 为中心的频率区间之外的功率密度谱为零,这里 f_c 称为载波频率。如果功率密度谱宽度远小于 f_c ,随机过程 $n(t)$ 称为窄带带通过程。在此条件下,过程 $n(t)$ 的样本函数可用 4.1.1 节给出的 3 种等价形式的任何一个表示,亦即

$$n(t) = a(t)\cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \quad (4-1-37)$$

$$= x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t \quad (4-1-38)$$

$$= \operatorname{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (4-1-39)$$

式中 $a(t)$ 和 $\theta(t)$ 是实值信号的包络和相位, $x(t)$ 和 $y(t)$ 是 $n(t)$ 的两个正交分量, $z(t)$ 称为 $n(t)$ 的复包络。

下面更深入地研究式(4-1-38)。首先,如果 $n(t)$ 是零均值的,那么 $x(t)$ 和 $y(t)$ 也一定是零均值的。此外, $n(t)$ 的平稳性意味着 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的自相关和互相关函数满足下面的性质

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) \quad (4-1-40)$$

$$\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(\tau) \quad (4-1-41)$$

这两个性质由 $n(t)$ 的平稳性得到,现给予证明。 $n(t)$ 的自相关函数 $\phi_{nn}(\tau)$ 为

$$\begin{aligned} E[n(t)n(t+\tau)] &= E\{[x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t] \\ &\quad \times [x(t+\tau)\cos 2\pi f_c(t+\tau) \\ &\quad - y(t+\tau)\sin 2\pi f_c(t+\tau)]\} \\ &= \phi_{xx}(\tau)\cos 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c(t+\tau) \\ &\quad + \phi_{yy}(\tau)\sin 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c(t+\tau) \\ &\quad - \phi_{xy}(\tau)\sin 2\pi f_c t \cos 2\pi f_c(t+\tau) \\ &\quad - \phi_{yx}(\tau)\cos 2\pi f_c t \sin 2\pi f_c(t+\tau) \end{aligned} \quad (4-1-42)$$

在式(4-1-42)中利用三角恒等式

$$\begin{aligned} \cos A \cos B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ \sin A \sin B &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ \sin A \cos B &= \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)] \end{aligned} \quad (4-1-43)$$

可得到以下结果

$$\begin{aligned} E[n(t)n(t+\tau)] &= \frac{1}{2}[\phi_{xx}(\tau) + \phi_{yy}(\tau)]\cos 2\pi f_c \tau \\ &\quad + \frac{1}{2}[\phi_{xx}(\tau) - \phi_{yy}(\tau)]\cos 2\pi f_c(2t+\tau) \\ &\quad - \frac{1}{2}[\phi_{yx}(\tau) - \phi_{xy}(\tau)]\sin 2\pi f_c \tau \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} [\phi_{yx}(\tau) + \phi_{xy}(\tau)] \sin 2\pi f_c(2t + \tau) \quad (4-1-44)$$

由于 $n(t)$ 是平稳的, 式(4-1-44)的右边一定是与 t 无关的。但是, 只有式(4-1-40)和式(4-1-41)成立时, 这个条件才能满足。从而式(4-1-44)简化为

$$\phi_{nn}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) \cos 2\pi f_c \tau - \phi_{yx}(\tau) \sin 2\pi f_c \tau \quad (4-1-45)$$

注意, 带通过程的自相关函数 $\phi_{nn}(\tau)$ 与两个正交分量的自相关函数 $\phi_{xx}(\tau)$ 和互相关函数 $\phi_{xy}(\tau)$ 之间的关系式, 在形式上与式(4-1-38)完全相同, 式(4-1-38)用两个正交分量表示带通过程。

等效低通过程

$$z(t) = x(t) + jy(t) \quad (4-1-46)$$

的自相关函数定义为

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} E[z^*(t)z(t+\tau)] \quad (4-1-47)$$

将式(4-1-46)代入式(4-1-47), 并进行期望值运算, 即得到

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} [\phi_{xx}(\tau) + \phi_{yy}(\tau) - j\phi_{xy}(\tau) + j\phi_{yx}(\tau)] \quad (4-1-48)$$

如果在式(4-1-48)中应用式(4-1-40)和式(4-1-41)的对称性质, 可得到

$$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) + j\phi_{yx}(\tau) \quad (4-1-49)$$

此式表示复包络的自相关函数与两个正交分量的自相关和互相关函数之间的关系。最后, 将式(4-1-49)的结果并入式(4-1-45), 可得到

$$\phi_{nn}(\tau) = \text{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}] \quad (4-1-50)$$

因此, 带通随机过程的自相关函数 $\phi_{nn}(\tau)$ 可由等效低通过程 $z(t)$ 的自相关函数 $\phi_{zz}(\tau)$ 和载频 f_c 唯一地确定。

随机过程 $n(t)$ 的功率密度谱 $\Phi_{nn}(f)$ 是 $\phi_{nn}(\tau)$ 的傅里叶变换, 因此

$$\begin{aligned} \Phi_{nn}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{\text{Re}[\phi_{zz}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}]\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} [\Phi_{zz}(f - f_c) + \Phi_{zz}(-f - f_c)] \end{aligned} \quad (4-1-51)$$

式中, $\Phi_{zz}(f)$ 是等效低通过程 $z(t)$ 的功率密度谱。由于 $z(t)$ 的自相关函数满足性质 $\phi_{zz}(\tau) = \phi_{zz}^*(-\tau)$, 因此 $\Phi_{zz}(f)$ 是一个频率实函数。

1. 正交分量的性质

上面仅证明了带通平稳随机过程 $n(t)$ 的两个正交分量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数满足式(4-1-41)的对称条件。除此之外, 任意互相关函数均满足条件

$$\phi_{yx}(\tau) = \phi_{xy}(-\tau) \quad (4-1-52)$$

从这两个条件, 可以得出

$$\phi_{xy}(\tau) = -\phi_{yx}(-\tau) \quad (4-1-53)$$

即 $\phi_{xy}(\tau)$ 是 τ 的奇函数, 从而 $\phi_{xy}(0) = 0$, 所以 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是不相关的 (仅对 $\tau = 0$ 而言)。当然, 这并不是对所有的 τ 过程 $x(t)$ 和 $y(t + \tau)$ 都是不相关的, 因为那样即意味着对所有的 τ

都有 $\phi_{xy}(\tau) = 0$ 。如果的确对所有的 τ 都有 $\phi_{xy}(\tau) = 0$, 那么 $\phi_{zz}(\tau)$ 是实函数且功率密度谱 $\Phi_{zz}(f)$ 满足条件

$$\Phi_{zz}(f) = \Phi_{zz}(-f) \quad (4-1-54)$$

反之亦然。也就是说, $\Phi_{zz}(f)$ 在 $f=0$ 附近是对称的。

在平稳随机过程 $n(t)$ 是高斯型的特殊情况下, 两个正交分量 $x(t)$ 和 $y(t+\tau)$ 是联合高斯型的。此外, $\tau=0$ 时, 它们是统计独立的, 因而其联合概率密度函数是

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} \quad (4-1-55)$$

式中, 方差 σ^2 定义为 $\sigma^2 = \phi_{xx}(0) = \phi_{yy}(0) = \phi_{nn}(0)$ 。

2. 白噪声的表示法

白噪声是随机过程, 其特点是在整个频率范围内具有平坦的(恒定的)功率密度谱。由于它的宽频带特性, 这种类型的噪声不能用正交分量来表示。

在从噪声中解调窄带信号的问题中, 把加性噪声过程建模成白噪声, 并用正交分量表示该噪声, 这便于数学上处理。假定接收端的信号与噪声通过一个理想带通滤波器, 该滤波器的通频带不仅能容纳信号的频谱, 而且更宽, 这样就可以实现上述目的。这样的滤波器引入了微不足道的信号失真(如果有的话), 但是它除去了通带外的噪声频率分量。

由白噪声过程通过一个频谱平坦的(理想的)带通滤波器所产生的噪声称为带通白噪声, 它具有图 4-1-3 所示的功率密度谱。带通白噪声可以用式(4-1-37)至式(4-1-39)中的任一种形式表示。等效低通噪声 $z(t)$ 具有功率密度谱

$$\Phi_{zz}(f) = \begin{cases} N_0 & (|f| \leq \frac{1}{2}B) \\ 0 & (|f| > \frac{1}{2}B) \end{cases} \quad (4-1-56)$$

其自相关函数是

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \frac{\sin \pi B \tau}{\pi \tau} \quad (4-1-57)$$

当 B 趋向无穷大时, $\phi_{zz}(\tau)$ 的极限形式是

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau) \quad (4-1-58)$$

白噪声和带通白噪声的功率密度谱关于 $f=0$ 对称,

故对所有 τ , $\phi_{yz}(\tau) = 0$ 。因此

$$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) \quad (4-1-59)$$

即正交分量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 对所有时间偏移 τ 都是不相关的, 而且 $z(t)$ 、 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的自相关函数都是相等的。

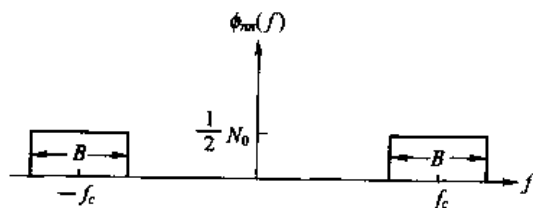


图 4-1-3 具有平坦频谱的带通噪声

4.2 信号空间表示法

本节将证明信号具有类似向量的特征, 并且导出信号波形的向量表示法。首先给出与向量有关的定义和概念。

4.2.1 向量空间概念

在 n 维空间中, 向量 \mathbf{v} 可用其 n 个分量 $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ 表征, 也可以表示成单位向量或基向量 $\mathbf{e}_i (1 \leq i \leq n)$ 的线性组合, 即

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i \quad (4-2-1)$$

式中, 按照定义, 单位向量的长度为 1。 v_i 是向量 \mathbf{v} 在单位向量 \mathbf{e}_i 上的投影。

两个 n 维向量 $\mathbf{v}_1 = [v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}]$ 和 $\mathbf{v}_2 = [v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n}]$ 的内积定义为

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^n v_{1i} v_{2i} \quad (4-2-2)$$

如果 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, 则向量 \mathbf{v}_1 与 \mathbf{v}_2 相互正交。更一般的情况, 对于一组 m 个向量 $\mathbf{v}_k (1 \leq k \leq m)$, 如果对所有 $1 \leq i, j \leq m$ 且 $i \neq j$, 有

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad (4-2-3)$$

则这组向量是相互正交的。

向量 \mathbf{v} 的范数记为 $\|\mathbf{v}\|$, 且定义为

$$\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (4-2-4)$$

这也是它的长度。如果一组 m 个向量相互正交且每个向量具有单位范数, 则称这组向量为标准(归一化)正交的。如果一组 m 个向量集中没有一个向量能表示成其余向量的线性组合, 则称这组向量是线性独立的。

两个 n 维向量 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 满足三角不等式

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\| \quad (4-2-5)$$

如果 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 方向相同, 即 $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2$, 其中 a 为正的实标量, 则上式为等式。

由三角不等式可导出柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwartz)不等式

$$|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2| \leq \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \quad (4-2-6)$$

如果 $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2$, 则上式为等式。两个向量之和的范数平方可表示为

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (4-2-7)$$

如果 \mathbf{v}_1 与 \mathbf{v}_2 是相互正交的, 则 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, 因此

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 \quad (4-2-8)$$

这是两个正交 n 维向量的勾股定理关系式。

由矩阵代数我们回想起在 n 维向量空间中的线性变换是矩阵变换, 其形式为

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (4-2-9)$$

式中, 矩阵 \mathbf{A} 将向量 \mathbf{v} 变换成某向量 \mathbf{v}' 。在 $\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{v}$ 的特定情况下, 即

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (4-2-10)$$

式中, λ 是某(正或负的)标量, 向量 \mathbf{v} 称做该变换的特征向量, λ 是相应的特征值。

最后, 我们回顾格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)正交化过程, 它将一组 n 维向量 $\mathbf{v}_i (1 \leq i \leq m)$ 构成一组标准正交向量。第一步, 从这组向量中任意选择一个向量, 如 \mathbf{v}_1 , 对它的长度归一化, 可得到第一个向量, 即

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \quad (4-2-11)$$

第二步,选择 \mathbf{v}_2 ,先减去 \mathbf{v}_2 在 \mathbf{u}_1 上的投影,得到

$$\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 \quad (4-2-12)$$

再将向量 \mathbf{u}'_2 归一化成单位长度,得到

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}'_2}{\|\mathbf{u}'_2\|} \quad (4-2-13)$$

继续这个过程,选择 \mathbf{v}_3 并减去 \mathbf{v}_3 在 \mathbf{u}_1 和 \mathbf{u}_2 上的投影,从而得到

$$\mathbf{u}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \quad (4-2-14)$$

标准正交向量 \mathbf{u}_3 为

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}'_3}{\|\mathbf{u}'_3\|} \quad (4-2-15)$$

这一过程继续下去,可构成一组 n_1 个标准正交向量,在一般情况下 $n_1 \leq n$ 。若 $m < n$,则 $n_1 \leq m$;若 $m \geq n$,则 $n_1 \leq n$ 。

4.2.2 信号空间概念

正如向量的情况,也可导出一个类似的方法处理定义在某区间 $[a, b]$ 上的一组信号。两个一般的复信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的内积记为 $\langle x_1(t), x_2(t) \rangle$,且定义为

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \quad (4-2-16)$$

如果它们的内积为零,则两个信号是正交的。

信号的范数定义为

$$\|x(t)\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (4-2-17)$$

一信号集 m 个信号,如果它们是相互正交的且其范数均为 1,则该信号集是标准正交的。如果没有一个信号能表示成其余信号的线性组合,则该信号集是线性独立的。

两个信号的三角不等式是

$$\|x_1(t) + x_2(t)\| \leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\| \quad (4-2-18)$$

其柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwartz)不等式为

$$\left| \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |x_1(t)|^2 dt \right|^{1/2} \left| \int_a^b |x_2(t)|^2 dt \right|^{1/2} \quad (4-2-19)$$

当 $x_2(t) = ax_1(t)$ (a 为任意复数)时,上式为等式。

4.2.3 信号的正交展开

本节将导出一个信号波形的向量表示法,还将证明信号波形与其向量表示之间的等价性。

假定 $s(t)$ 是一个确定性的实信号,且具有有限能量

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt \quad (4-2-20)$$

并且假定存在一个标准正交函数集 $\{f_n(t), n=1, 2, \dots, K\}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) f_m(t) dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \quad (4-2-21)$$

可以用这些函数的加权线性组合来近似信号 $s(t)$, 即

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \quad (4-2-22)$$

式中, $|s_k|, 1 \leq k \leq K$ 是 $s(t)$ 近似式中的系数, 引起的近似误差为

$$e(t) = s(t) - \hat{s}(t) \quad (4-2-23)$$

选择系数 $|s_k|$, 使近似误差的能量 \mathcal{E}_e 最小化, 因此

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &= \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - \hat{s}(t)]^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \right]^2 dt \end{aligned} \quad (4-2-24)$$

$s(t)$ 的级数展开式中的最佳系数可以通过式(4-2-24)对每一个系数 $|s_k|$ 的微分, 并置一阶导数为零的方法求得。另一种方法是利用估计理论中的基于均方误差准则的结论, 简单地说, 当误差正交于级数展开式的每一个函数时, 可以获得相对于 $|s_k|$ 的 \mathcal{E}_e 的最小值, 因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[s(t) - \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \right] f_n(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, K) \quad (4-2-25)$$

由于函数 $\{f_n(t)\}$ 是标准正交的, 式(4-2-25)简化为

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) f_n(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots, K) \quad (4-2-26)$$

因此, 用信号 $s(t)$ 投影到 $\{f_n(t)\}$ 的每个函数上的方法可得到系数。结果为 $\hat{s}(t)$ 是 $s(t)$ 在函数 $\{f_n(t)\}$ 架构的 K 维信号空间上的投影。最小均方近似误差是

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\min} &= \int_{-\infty}^{\infty} e(t) s(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) s(t) dt \\ &= \mathcal{E}_s - \sum_{k=1}^K s_k^2 \end{aligned} \quad (4-2-27)$$

由定义可知它是非负的。

当最小均方近似误差 $\mathcal{E}_{\min} = 0$ 时,

$$\mathcal{E}_s = \sum_{k=1}^K s_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)]^2 dt \quad (4-2-28)$$

在 $\mathcal{E}_{\min} = 0$ 条件下, 可以将 $s(t)$ 表示为

$$s(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t) \quad (4-2-29)$$

这里, $s(t)$ 与其级数展开式的相等性, 在近似误差具有零能量的意义上才成立。

当每一个有限能量信号用式(4-2-29)的级数展开表示且 $\mathcal{E}_{\min} = 0$ 时, 标准正交函数集 $\{f_n(t)\}$ 称为完备的。

例 4-2-1 三角傅里叶级数

一有限能量信号 $s(t)$ 在区间 $0 \leq t \leq T$ 外处处为零, 在区间内具有有限个不连续点, 其周期展开式可以用傅里叶级数表示为

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (4-2-30)$$

式中, 使均方误差最小化的系数 $\{a_k, b_k\}$ 为

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \\ b_k &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \end{aligned} \quad (4-2-31)$$

三角函数集 $\{\sqrt{2/T} \cos 2\pi kt/T, \sqrt{2/T} \sin 2\pi kt/T\}$ 是完备的, 因此该级数展开式导致零均方误差。

这些性质可由上面的推导建立。

1. 格拉姆-施密特 (Gram-Schmidt) 过程

假设有一个能量有限的信号波形集 $\{s_i(t), i=1, 2, \dots, M\}$, 希望构架一个标准正交波形集。格拉姆-施密特正交化过程允许构架这样一个集。从第一个信号波形 $s_1(t)$ 开始, 假定它具有能量 \mathcal{E}_1 。第一个标准正交波形简单地构架为

$$f_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \quad (4-2-32)$$

因此, $f_1(t)$ 就是归一化成单位能量的 $s_1(t)$ 。

第二个波形可以由 $s_2(t)$ 构架。首先计算 $f_1(t)$ 在 $s_2(t)$ 上的投影, 即

$$c_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) f_1(t) dt \quad (4-2-33)$$

然后, 从 $s_2(t)$ 中减去 $c_{12}f_1(t)$, 得到

$$f'_2(t) = s_2(t) - c_{12}f_1(t) \quad (4-2-34)$$

这个波形正交于 $f_1(t)$, 但它不具有单位能量。若以 \mathcal{E}_2 表示 $f'_2(t)$ 的能量, 则正交于 $f_1(t)$ 的归一化波形为

$$f_2(t) = \frac{f'_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} \quad (4-2-35)$$

一般情况下, 第 k 个函数的正交化导致

$$f_k(t) = \frac{f'_k(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_k}} \quad (4-2-36)$$

式中

$$f'_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik}f_i(t) \quad (4-2-37)$$

以及

$$c_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) f_i(t) dt \quad (i=1, 2, \dots, k-1) \quad (4-2-38)$$

因此,正交化过程继续下去,直到所有 M 个信号波形 $\{s_i(t)\}$ 处理完毕,且 $N \leq M$ 个标准正交波形构架完成。如果所有信号的波形线性独立,即没有一个信号波形是其他信号波形的线性组合,那么信号空间维数 N 等于 M 。

例 4-2-2 将格拉姆-施密特过程应用于图 4-2-1(a)中的 4 个波形集。波形 $s_1(t)$ 的能量 $\mathcal{E}_1=2$,所以 $f_1(t)=\sqrt{\frac{1}{2}}s_1(t)$ 。其次,观察到 $c_{12}=0$,因此 $s_2(t)$ 和 $f_1(t)$ 是正交的,所以 $f_2(t)=s_2(t)/\mathcal{E}_2^{1/2}=\sqrt{\frac{1}{2}}s_2(t)$ 。为了得到 $f_3(t)$,计算 c_{13} 和 c_{23} ,其中 $c_{13}=\sqrt{2}$ 而 $c_{23}=0$ 。因此,

$$f_3(t) = s_3(t) - \sqrt{2}f_1(t) = \begin{cases} -1 & (2 \leq t \leq 3) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

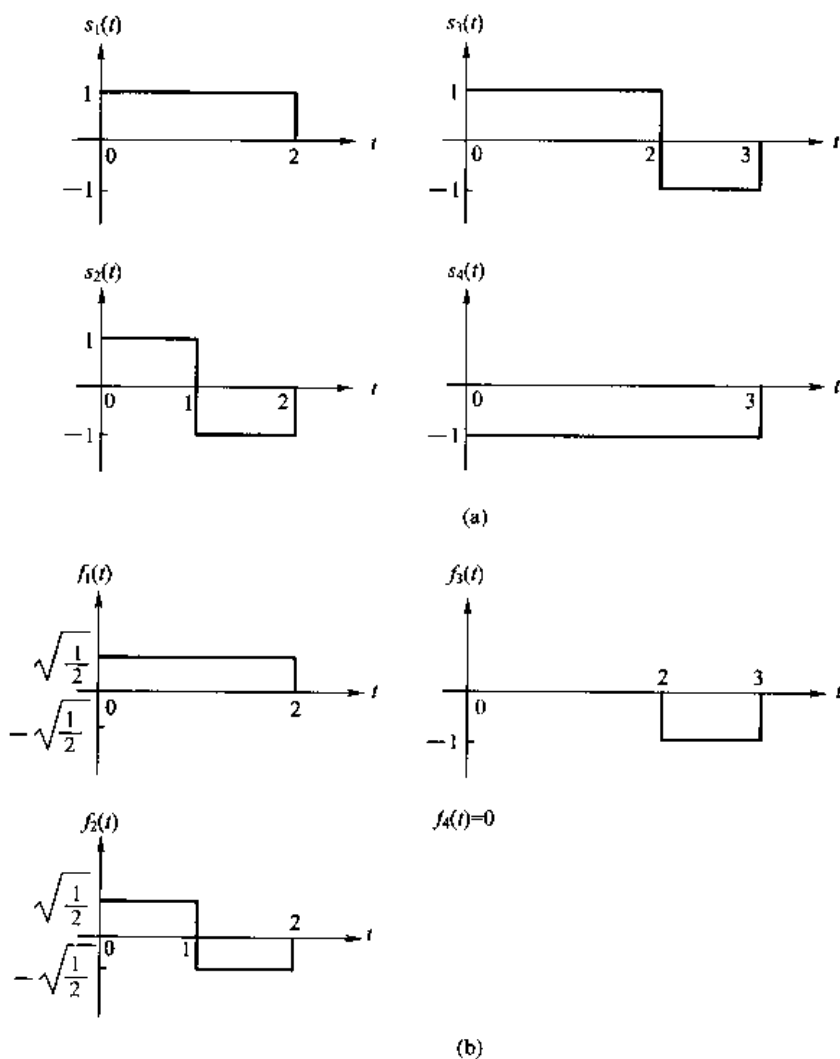


图 4-2-1 信号 $\{s_i(t), i=1,2,3,4\}$ 的格拉姆-施密特正交化及相应的正交信号

由于 $f'_3(t)$ 具有单位能量, 因此 $f_3(t) = f'_3(t)$ 。在求解 $f_4(t)$ 时, 得到 $c_{14} = -\sqrt{2}$, $c_{24} = 0$ 及 $c_{34} = 1$ 。因此,

$$f_4(t) = s_4(t) + \sqrt{2}f_1(t) - f_3(t) = 0$$

从而 $s_4(t)$ 是 $f_1(t)$ 和 $f_3(t)$ 的线性组合, 因此 $f_4(t) = 0$ 。图 4-2-1(b) 说明了这 3 个标准正交函数。

一旦构架起标准正交波形集 $\{f_n(t)\}$, 就能将 M 个信号 $\{s_n(t)\}$ 表示成 $\{f_n(t)\}$ 的线性组合, 可写为

$$s_k(t) = \sum_{n=1}^N s_{kn} f_n(t) \quad (k = 1, 2, \dots, M) \quad (4-2-39)$$

以及

$$\mathcal{E}_k = \int_{-\infty}^{\infty} [s_k(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^N s_{kn}^2 = \|s_k\|^2 \quad (4-2-40)$$

基于式(4-2-39), 每个信号可以表示成向量

$$\mathbf{s}_k = [s_{k1} \ s_{k2} \ \dots \ s_{kN}] \quad (4-2-41)$$

或者等效地表示成 N 维信号空间的一个点, 其坐标为 $\{s_{ki}, i = 1, 2, \dots, N\}$ 。第 k 个信号的能量是向量长度的平方, 或等价于 N 维空间中原点 to 信号点的欧氏距离的平方。因此, 任何信号都可以用几何方式表示成由标准正交函数 $\{f_n(t)\}$ 构架的信号空间中的一个点。

例 4-2-3 利用图 4-2-1(b) 中的标准正交函数集可获得图 4-2-1(a) 所示的 4 个信号的向量表示。由于信号空间的维数 $N = 3$, 每一个信号可由 3 个分量描述。信号 $s_1(t)$ 由向量 $\mathbf{s}_1 = (\sqrt{2}, 0, 0)$ 表征。类似地, 信号 $s_2(t)$ 、 $s_3(t)$ 和 $s_4(t)$ 可分别由 $\mathbf{s}_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$ 、 $\mathbf{s}_3 = (\sqrt{2}, 0, 1)$ 及 $\mathbf{s}_4 = (-\sqrt{2}, 0, 1)$ 表征, 如图 4-2-2 所示, 其长度为 $\|\mathbf{s}_1\| = \sqrt{2}$ 、 $\|\mathbf{s}_2\| = \sqrt{2}$ 、 $\|\mathbf{s}_3\| = \sqrt{3}$ 、 $\|\mathbf{s}_4\| = \sqrt{3}$, 相应的信号能量为 $\mathcal{E}_k = \|\mathbf{s}_k\|^2$ ($k = 1, 2, 3, 4$)。

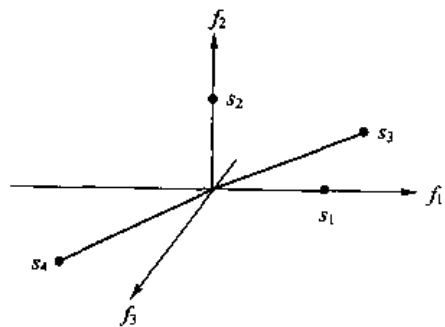


图 4-2-2 在三维函数空间中的 4 个信号向量表示成点

我们已经证明 M 个有限能量信号波形集 $\{s_n(t)\}$ 可以表示成维数 $N \leq M$ 的标准正交函数的加权线性组合, 通过对 $\{s_n(t)\}$ 应用格拉姆-施密特正交化过程可获得函数 $\{f_n(t)\}$ 。然而, 应该强调的是, 由格拉姆-施密特过程获得的函数 $\{f_n(t)\}$ 不是惟一的。如果改变信号 $\{s_n(t)\}$ 的正交化处理顺序, 标准正交波形将不同, 并且相应的信号 $\{s_n(t)\}$ 的向量表示将取决于标准正交函数 $\{f_n(t)\}$ 的选择。然而, 向量 \mathbf{s}_n 仍保持其几何形状, 并且其长度不随标准正交函数 $\{f_n(t)\}$ 的选择而改变。

例 4-2-4 图 4-2-1(a) 中的 4 个信号可选用的另一种标准正交函数集如图 4-2-3(a) 所示。利用这些函数展开 $\{s_n(t)\}$, 可得到相应的向量 $\mathbf{s}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{s}_2 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{s}_3 = (1, 1, -1)$ 及 $\mathbf{s}_4 = (-1, -1, -1)$, 如图 4-2-3(b) 所示。注意, 向量的长度与由标准正交函数 $\{f_n(t)\}$ 得到的长度相同。

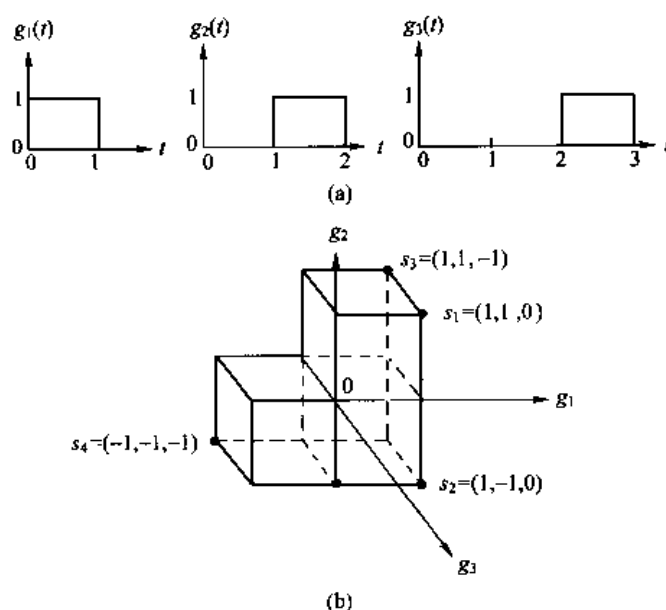


图 4-2-3 图 4-2-1(a)中的 4 个信号可选用的另一种标准
正交函数集及其相应的信号点

上述正交展开式是对实信号波形导出的。对复信号波形的展开式将作为练习留给读者(见习题 4-6 和习题 4-7)。

最后考虑以下情况,信号波形是带通型的且为

$$s_m(t) = \text{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (4-2-42)$$

式中, $|s_{lm}(t)|$ 表示等效低通信号。信号的能量可以用 $s_m(t)$ 或 $s_{lm}(t)$ 表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s_{lm}(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (4-2-43)$$

任意一对信号波形[如 $s_m(t)$ 和 $s_k(t)$]之间的相似性可用归一化互相关

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t) dt = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2 \sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}(t) s_{lk}^*(t) dt \right\} \quad (4-2-44)$$

来度量。

定义复互相关系数 ρ_{km} 为

$$\rho_{km} = \frac{1}{2 \sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}^*(t) s_{lk}(t) dt \quad (4-2-45)$$

那么

$$\text{Re}(\rho_{km}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t) dt \quad (4-2-46)$$

或等价地

$$\text{Re}(\rho_{km}) = \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{\|\mathbf{s}_m\| \|\mathbf{s}_k\|} = \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{\sqrt{\mathcal{E}_m \mathcal{E}_k}} \quad (4-2-47)$$

两两信号波形或信号向量之间的相关系数构成一个参数集,这些参数表征一组信号的相似性。另一种有关的参数是一对信号之间的欧氏距离 $d_{km}^{(e)}$,其定义为

$$\begin{aligned} d_{km}^{(e)} &= \|s_m - s_k\| \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [s_m(t) - s_k(t)]^2 dt \right\}^{1/2} \\ &= \{\epsilon_m + \epsilon_k - 2\sqrt{\epsilon_m \epsilon_k} \operatorname{Re}(\rho_{km})\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4-2-48)$$

当 $\epsilon_m = \epsilon_k = \mathcal{E}$ (对所有 m 和 k) 时,这个表达式简化为

$$d_{km}^{(e)} = \{2\mathcal{E}[1 - \operatorname{Re}(\rho_{km})]\}^{1/2} \quad (4-2-49)$$

因此,欧氏距离是一组信号波形或相应的信号向量相似性的另一种度量。

下一节将描述数字调制信号,并利用信号空间表示法分析这些信号。被归类为线性的数字已调信号可方便地用两个标准正交基函数

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t \\ f_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t \end{aligned} \quad (4-2-50)$$

展开。

因此,如果 $s_{lm}(t)$ 表示为 $s_{lm}(t) = x_l(t) + jy_l(t)$,则式(4-2-42)中的 $s_m(t)$ 可表示为

$$s_m(t) = x_l(t)f_1(t) + y_l(t)f_2(t) \quad (4-2-51)$$

式中, $x_l(t)$ 和 $y_l(t)$ 表示信号调制方式。

4.3 数字调制信号的表示法

在数字信息经通信信道传输的过程中,调制器是接口器件,它将数字信息映射成与信道特性相匹配的模拟波形。映射一般是这样进行的:先从信息序列 $\{a_n\}$ 一次提取 $k = \log_2 M$ 个二进制数字形成分组,再从 $M = 2^k$ 个确定的有限能量波形 $\{s_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$ 中选择其中之一送往信道传输。

当数字序列 $\{a_n\}$ 到波形的映射受到约束时,即在任意时间间隔发送的波形决定于一个或多个先前发送的波形,那么这种调制器称为有记忆的。另一方面,当序列 $\{a_n\}$ 到波形 $\{s_m(t)\}$ 的映射没有受到先前发送波形的约束时,这种调制器称为无记忆的。

除了把调制器划分为无记忆的或有记忆的之外,也可以把它划分为线性的或非线性的。调制方式的线性特性要求在数字序列到连续波形的映射中适用叠加原理。在非线性调制中,连续时间间隔的发送信号不再适用叠加原理。

下面首先描述无记忆调制方式。

4.3.1 无记忆调制

如上所述,在数字通信系统中,调制器将二进制数字序列映射成一组相应的信号波形,这些波形的差别在于幅度、相位或频率,或者两个或多个信号参数的组合。我们将分别考察这些

信号类型中的每一个,首先从数字脉冲幅度调制(PAM)开始。在所有情况中,假定在调制器输入端的二进制数字序列的速率均为 R b/s。

1. 脉冲幅度调制(PAM)信号

在数字 PAM 中,信号波形可以表示为

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \operatorname{Re}[A_m g(t) e^{j2\pi f_c t}] \\ &= A_m g(t) \cos 2\pi f_c t \quad (m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (4-3-1)$$

式中, $\{A_m, 1 \leq m \leq M\}$ 表示 M 个可能的幅度,相应于 $M = 2^k$ 个可能的 k 比特组或符号。波形 $g(t)$ 是实信号脉冲,其形状影响发送信号的谱。信号幅度 A_m 取离散值(电平)

$$A_m = (2m - 1 - M)d \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (4-3-2)$$

式中, d 是相邻信号幅度之间的距离。PAM 信号的符号速率是 R/k , 载波幅度以此速率发生变化,以反映新的信息的传输。时间间隔 $T_b = 1/R$ 称做比特间隔,时间间隔 $T = k/R = kT_b$ 称做符号间隔。

M PAM 信号具有能量

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \int_0^T s_m^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} A_m^2 \int_0^T g^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} A_m^2 \mathcal{E}_g \end{aligned} \quad (4-3-3)$$

式中, \mathcal{E}_g 表示脉冲 $g(t)$ 的能量。显然,这些信号是一维的 ($N=1$), 因此表示成一般的形式

$$s_m(t) = s_m f(t) \quad (4-3-4)$$

式中, $f(t)$ 定义为单位能量信号波形,为

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t \quad (4-3-5)$$

且

$$s_m = A_m \sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{E}_g} \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (4-3-6)$$

相应地 $M=2$, $M=4$ 和 $M=8$ 的信号空间图如图 4-3-1 所示。数字 PAM 也称为幅移键控(ASK)。

可以采用多种方法实现 k 个信息比特到 $M=2^k$ 个可能的信号幅度的映射或分配。优选的分配方法是相邻的信号幅度相差一个二进制数字,如图 4-3-1 所示,这种映射称为格雷(Gray)编码它在信号的解调中很重要,因为由噪声最可能引起的差错就是错选相邻幅度作为发送信号幅度。在这种情况下, k 比特序列仅发生一个比特差错。

注意,任何一对信号点之间的欧氏距离是

$$d_{mn}^{(e)} = \sqrt{(s_m - s_n)^2}$$

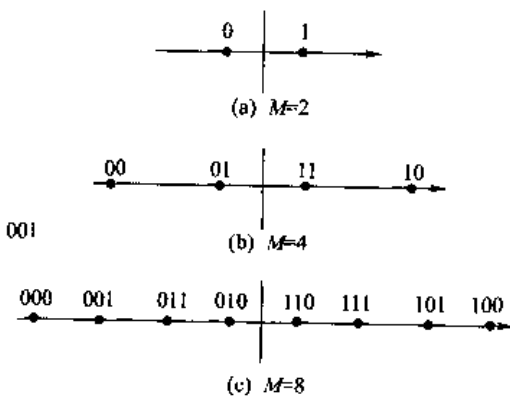


图 4-3-1 数字 PAM 信号的信号空间图

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{E}_g} |A_m - A_n| \\
 &= d \sqrt{2 \mathcal{E}_g} |m - n|
 \end{aligned} \quad (4-3-7)$$

因此,相邻信号点之间的距离,即最小欧氏距离为

$$d_{\min}^{(e)} = d \sqrt{2 \mathcal{E}_g} \quad (4-3-8)$$

由式(4-3-1)表示的载波调制 PAM 信号是双边带(DSB)信号,它需要占用两倍的等效低通信道的信道带宽来传输。另一种方法是采用单边带(SSB)PAM,其表达式(下或上边带)为

$$s_m(t) = \operatorname{Re}\{A_m[g(t) \pm j\hat{g}(t)]e^{j2\pi f_c t}\} \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (4-3-9)$$

式中, $\hat{g}(t)$ 是 $g(t)$ 的希尔伯特(Hilbert)变换。因此,SSB 信号的带宽为 DSB 信号的一半。

数字 PAM 信号也适合在不需要载波调制的信道上传输。在这种情况下,信号波形可以简单地表示为

$$s_m(t) = A_m g(t) \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (4-3-10)$$

称为基带信号。如图 4-3-2(a)所示为四幅度电平的基带 PAM 信号。该信号的载波调制波形如图 4-3-2(b)所示。

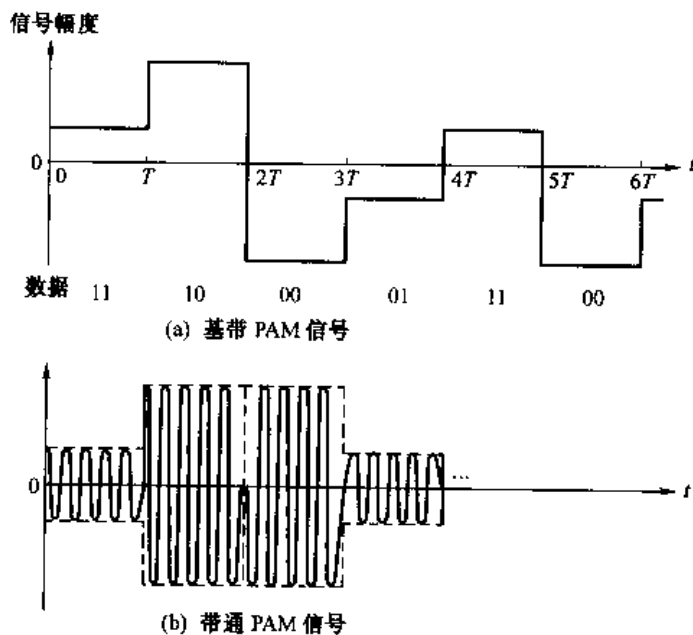


图 4-3-2 基带与带通 PAM 信号

在 $M=2$ 信号的特殊情况下,二进制 PAM 波形具有特殊的性质,即

$$s_1(t) = -s_2(t)$$

因此,这两个信号具有相等的能量且互相关系数为 -1 ,这样的信号称为双极性信号。

2. 相位调制信号

在数字相位调制中, M 个信号波形可表示为

$$s_m(t) = \operatorname{Re}[g(t)e^{j2\pi(m-1)/M}e^{j2\pi f_c t}] \quad (m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T)$$

$$\begin{aligned}
&= g(t) \cos \left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \\
&= g(t) \cos \frac{2\pi}{M}(m-1) \cos 2\pi f_c t - g(t) \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \sin 2\pi f_c t \quad (4-3-11)
\end{aligned}$$

式中, $g(t)$ 是信号脉冲形状, $\theta_m = 2\pi(m-1)/M$ ($m = 1, 2, \dots, M$) 是载波的 M 个可能的相位, 用于传送发送信息。数字相位调制通常称为相移键控 (PSK)。

注意, 这些信号波形具有相等的能量, 即

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int_0^T s_m^2(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T g^2(t) dt = \frac{1}{2} \mathcal{E}_g \quad (4-3-12)
\end{aligned}$$

而且这些信号波形可以表示为两个标准正交信号波形 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的线性组合, 即

$$s_m(t) = s_{m1}f_1(t) + s_{m2}f_2(t) \quad (4-3-13)$$

式中

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g(t) \cos 2\pi f_c t \quad (4-3-14)$$

$$f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g(t) \sin 2\pi f_c t \quad (4-3-15)$$

且二维向量 $\mathbf{s}_m = [s_{m1}, s_{m2}]$ 为

$$\mathbf{s}_m = \left[\sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \cos \frac{2\pi}{M}(m-1), \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (4-3-16)$$

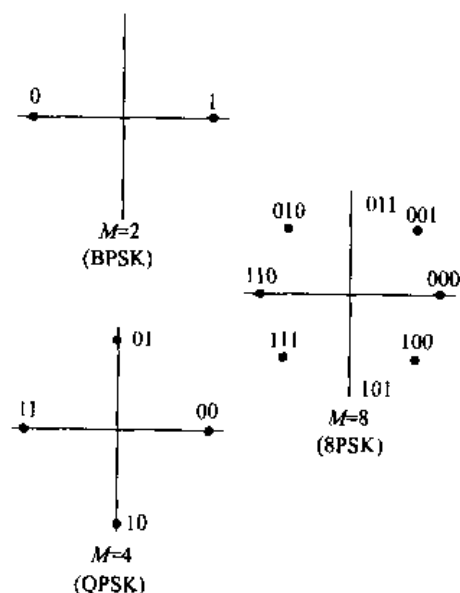


图 4-3-3 PSK 信号的信号空间图

$M=2, 4$ 和 8 的信号空间图如图 4-3-3 所示。注意到 $M=2$ 相当于一维信号, 与二进制 PAM 信号相同。

与 PAM 的情况一样, k 个信息比特到 $M=2^k$ 个可能的相位的映射或分配可以用多种方法实现。优选的分配方法是格雷编码, 因此由噪声引起的最大可能的差错是 k 个比特符号中的单个比特差错。

信号点之间的欧氏距离是

$$\begin{aligned}
d_{mn}^{(e)} &= \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\| \\
&= \left\{ \mathcal{E}_g \left[1 - \cos \frac{2\pi}{M}(m-n) \right] \right\}^{1/2} \quad (4-3-17)
\end{aligned}$$

最小欧氏距离相应于 $|m-n|=1$, 即相邻信号相位的情况。在这种情况下

$$d_{\min}^{(e)} = \sqrt{\mathcal{E}_g \left(1 - \cos \frac{2\pi}{M} \right)} \quad (4-3-18)$$

4PSK (QPSK) 的一种变型, 称为 $\pi/4$ -QPSK, 是通过在每一个符号间隔的载波相位中引入附加的 $\pi/4$ 相移而得到的。该相移使符号同步变得容易些。

3. 正交幅度调制

PAM/SSB 的带宽效率也可以这样求得:由信息序列 $\{a_n\}$ 形成的两个分离的 k 比特符号同时加在两个正交载波 $\cos 2\pi f_c t$ 和 $\sin 2\pi f_c t$ 上,该调制技术称为正交 PAM 或 QAM,相应的信号波形可以表示成

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \operatorname{Re}[(A_{mc} + jA_{ms})g(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T) \\ &= A_{mc}g(t)\cos 2\pi f_c t - A_{ms}g(t)\sin 2\pi f_c t \end{aligned} \quad (4-3-19)$$

式中, A_{mc} 和 A_{ms} 是承载信息的正交载波的信号幅度, $g(t)$ 是信号脉冲。

用另一种方法可将 QAM 信号波形表示为

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \operatorname{Re}[V_m e^{j\theta_m} g(t)e^{j2\pi f_c t}] \\ &= V_m g(t)\cos(2\pi f_c t + \theta_m) \end{aligned} \quad (4-3-20)$$

式中 $V_m = \sqrt{A_{mc}^2 + A_{ms}^2}$, $\theta_m = \tan^{-1}(A_{ms}/A_{mc})$ 。该表达式表明, QAM 信号波形可以看做组合幅度和相位调制。

事实上,可以选择 M_1 个电平 PAM 和 M_2 个相位 PSK 的任意组合来构成一个 $M = M_1 M_2$ 的组合 PAM-PSK 信号星座图。如果 $M_1 = 2^n$ 及 $M_2 = 2^m$, 则组合 PAM-PSK 信号星座图产生以下结果:以符号速率 $R/(m+n)$ 同时传输每个符号所包含的 $m+n = \lg M_1 M_2$ 个二进制数字。组合 PAM-PSK 信号空间图的例子如图 4-3-4 所示,其中 $M=8$ 及 $M=16$ 。

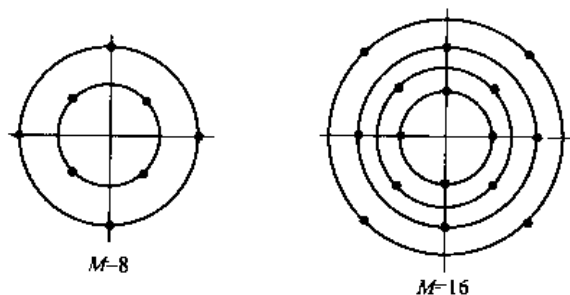


图 4-3-4 组合 PAM-PSK 信号空间图的例子

与 PSK 信号的情况一样, QAM 信号的波形可以表示成两个标准正交信号波形 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的线性组合,即

$$s_m(t) = s_{m1}f_1(t) + s_{m2}f_2(t) \quad (4-3-21)$$

式中

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g(t)\cos 2\pi f_c t \\ f_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g(t)\sin 2\pi f_c t \end{aligned} \quad (4-3-22)$$

且

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_m &= [s_{m1} \ s_{m2}] \\ &= \left[A_{mc}\sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{E}_g} \quad A_{ms}\sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{E}_g} \right] \end{aligned} \quad (4-3-23)$$

式中, \mathcal{E}_g 是信号脉冲 $g(t)$ 的能量。

在任意一对信号向量之间的欧氏距离是

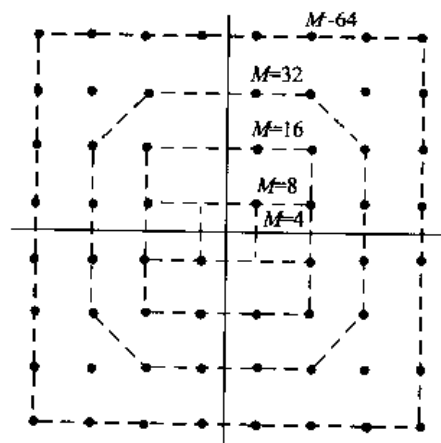


图 4-3-5 几种矩形 QAM 信号空间图

$$d_{mn}^{(e)} = \| \mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n \|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \epsilon_g [(A_{mc} - A_{nc})^2 + (A_{ms} - A_{ns})^2]} \quad (4-3-24)$$

在特殊情况下,即信号幅度取一组离散值 $\{(2m-1-M)d, m=1,2,\dots,M\}$,信号空间图是矩形的,如图 4-3-5 所示。在这种情况下,相邻两点的欧氏距离即最小距离,为

$$d_{\min}^{(e)} = d \sqrt{2\epsilon_g} \quad (4-3-25)$$

这与 PAM 的结果相同。

4. 多维信号

由上面的讨论可见,载波幅度和相位的数字调制允许构成对应于二维向量与信号空间图的信号波形。如果希望构成相应于更高维向量的信号波形,则可使用时域或者频域或者两域来增加维数。

假定有 N 维信号向量。对任意 N , 可以将长度为 $T_1 = NT$ 的时间间隔分割为 N 个长度为 $T = T_1/N$ 的子间隔。在每个长度为 T 的子间隔中,使用二进制 PAM(一维信号)发送 N 维信号向量的一个元素。因此, N 个时隙用来发送 N 维信号向量。如果 N 为偶数,长度为 T 的时隙可以用来同时发送 N 维向量的两个分量,其方法是用对应的分量独立地调制两个正交载波的幅度。在这种方式下, N 维信号向量在 $\frac{1}{2}NT$ s ($\frac{1}{2}N$ 时隙)内发送。

另一种方式是将宽度为 $N\Delta f$ 的频段分割成 N 个频隙,每一个宽度为 Δf 。 N 维信号向量通过同时调制 N 个载波的幅度(每个频隙一个载波)在信道上传输。必须注意,在连续的载波之间要提供足够的频率间隔,使 N 个载波上的信号不存在串话干扰。如果在每个频隙中使用正交载波,则 N 维向量(N 偶数)可以在 $\frac{1}{2}N$ 频隙中传输,从而使用的信道带宽减少一半。

更一般的方式是将时域和频域两者联合起来发送 N 维信号向量,例如在图 4-3-6 中将时间和频率轴分割为 12 个间隔。因此,可用 PAM 发送 $N=12$ 维信号向量,或者在每个间隔用两个正交载波(QAM)发送 $N=24$ 维信号向量。

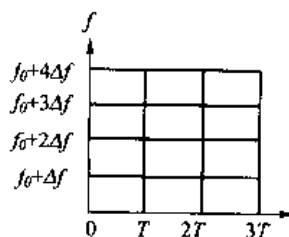


图 4-3-6 时间和频率轴
分割成不同的间隔

5. 正交多维信号

作为多维信号构成的一个特殊情况,考虑 M 个等能量、频率不同的正交信号波形,该信号可以表示为

$$s_m(t) = \text{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T)$$

$$= \sqrt{\frac{2\epsilon}{T}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t) \quad (4-3-26)$$

式中,等效低通信号波形定义为

$$s_{lm}(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{T}} e^{j2\pi m \Delta f t} \quad (m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T) \quad (4-3-27)$$

这种类型的频率调制称做频移键控(FSK)。

这些波形的特征是具有相等的能量及互相关系数

$$\rho_{km} = \frac{2\epsilon/T}{2\epsilon} \int_0^T e^{j2\pi(m-k)\Delta f t} dt$$

$$= \frac{\sin \pi T(m-k)\Delta f}{\pi T(m-k)\Delta f} e^{j\pi T(m-k)\Delta f} \quad (4-3-28)$$

ρ_{km} 的实部为

$$\begin{aligned} \rho_r \equiv \operatorname{Re}(\rho_{km}) &= \frac{\sin[\pi T(m-k)\Delta f]}{\pi T(m-k)\Delta f} \cos[\pi T(m-k)\Delta f] \\ &= \frac{\sin[2\pi T(m-k)\Delta f]}{2\pi T(m-k)\Delta f} \end{aligned} \quad (4-3-29)$$

首先,我们看到,当 $\Delta f = 1/2T$ 且 $m \neq k$ 时, $\operatorname{Re}(\rho_{km}) = 0$ 。由于 $|m-k| = 1$ 对应于相邻频隙, $\Delta f = 1/2T$ 表示 M 个信号在正交情况下相邻信号之间的最小频率间隔。 $\operatorname{Re}(\rho_{km})$ 随 Δf 变化的曲线及 $|\rho_{km}|$ 随 Δf 变化的曲线如图 4-3-7 所示。注意, $|\rho_{km}| = 0$ 是在 $1/T$ 整数倍处, $\operatorname{Re}(\rho_{km}) = 0$ 是在 $1/2T$ 的整数倍处。

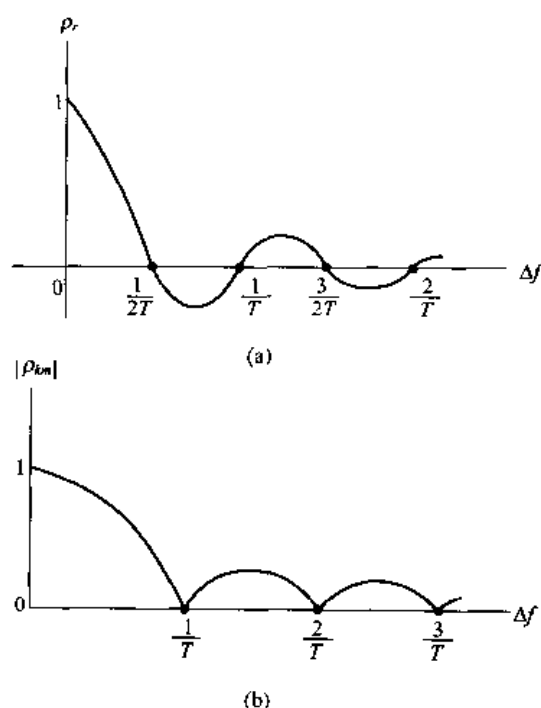


图 4-3-7 作为频率间隔函数的 FSK 信号的互相关系数

对于 $\Delta f = 1/2T$ 的情况, MFSK 信号等价于 N 维向量

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= [\sqrt{\mathcal{E}} \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \\ \mathbf{s}_2 &= [0 \quad \sqrt{\mathcal{E}} \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \\ &\vdots \\ \mathbf{s}_N &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0, \sqrt{\mathcal{E}}] \end{aligned} \quad (4-3-30)$$

式中 $N = M$ 。两两信号之间的距离为

$$d_{km}^{(\mathcal{E})} = \sqrt{2\mathcal{E}} \quad (\text{对所有 } m, k) \quad (4-3-31)$$

这也是最小距离。图 4-3-8 所示为 $M = N = 2$ 和 $M = N = 3$ 的信号空间图。

6. 双正交信号

一组 M 个双正交信号集可以由 $\frac{1}{2}M$ 个正交信号与其负的正交信号构架, 因此要求用 $N = \frac{1}{2}M$ 维来构架 M 双正交信号集。图 4-3-9 说明了 $M=4$ 和 $M=6$ 的双正交信号。

注意, 在任何一对波形之间的相关系数为 $\rho_r = -1$ 或 0 , 相应的距离是 $d = 2\epsilon^{1/2}$ 或 $\sqrt{2}\epsilon$, 且后者为最小距离。

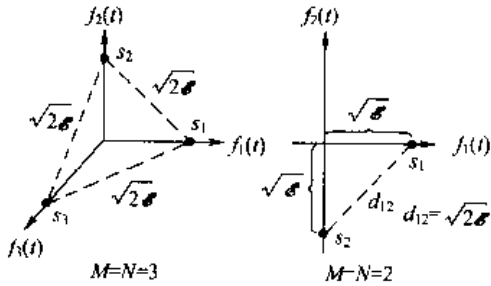


图 4-3-8 $M=N=3$ 和 $M=N=2$ 的正交信号

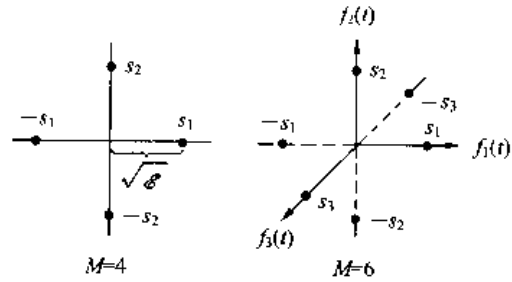


图 4-3-9 $M=4$ 和 $M=6$ 的双正交信号的信号空间

7. 单纯信号

假定有一个 M 正交信号波形集 $\{s_m(t)\}$, 其等效向量表示为 $\{s_m\}$ 。它们的均值是

$$\bar{s} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M s_m \quad (4-3-32)$$

通过从每一个 M 正交信号中减去均值来构架另一个 M 信号集, 因此

$$s'_m = s_m - \bar{s} \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (4-3-33)$$

减法的作用是将正交信号的原点转移到 \bar{s} 点。

结果形成的信号波形称为单纯信号, 它具有下列性质: 首先, 每个波形的能量是

$$\begin{aligned} |s'_m|^2 &= |s_m - \bar{s}|^2 \\ &= \epsilon - \frac{2}{M}\epsilon + \frac{1}{M}\epsilon \\ &= \epsilon \left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{aligned} \quad (4-3-34)$$

其次, 任何一对信号的互相关为

$$\begin{aligned} \text{Re}(\rho_{mn}) &= \frac{s'_m \cdot s'_n}{\|s'_m\| \|s'_n\|} \\ &= \frac{-1/M}{1 - 1/M} = -\frac{1}{M-1} \end{aligned} \quad (4-3-35)$$

上式对所有的 m, n 均成立。因此, 单纯波形集是等相关的, 而且需要的能量比正交波形集小, 减少因子为 $(1 - 1/M)$ 。由于仅仅是原点转移, 所以在任意一对信号点之间的距离仍维持在 $d = (2\epsilon)^{1/2}$, 这与任意一对正交信号之间的距离相同。

图 4-3-10 说明了 $M=2, M=3$ 和 $M=4$ 的单纯信号。注意, 信号的维数 $N = M - 1$ 。

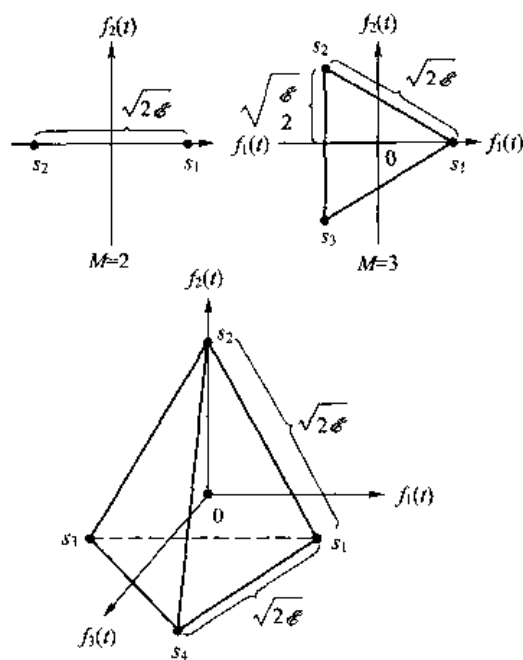


图 4-3-10 M 元单纯信号的信号空间图

8. 由二进制码生成的信号波形

一个 M 信号波形集可以由形式为

$$\mathbf{C}_m = [c_{m1} \ c_{m2} \ \cdots \ c_{mN}] \quad (m = 1, 2, \cdots, M) \quad (4-3-36)$$

的 M 二进制码字集生成, 式中对所有 m 和 j 有 $c_{mj} = 0$ 或 1 。码字的每一个分量映射成基本的二进制波形 PSK

$$c_{mj} = 1 \Rightarrow s_{mj}(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{T_c}} \cos 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T_c)$$

$$c_{mj} = 0 \Rightarrow s_{mj}(t) = -\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{T_c}} \cos 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T_c) \quad (4-3-37)$$

式中, $T_c = T/N$ 且 $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}/N$ 。因此, M 个码字集 $\{\mathbf{C}_m\}$ 映射成一个 M 波形集 $\{s_m(t)\}$ 。

该波形可以表示成向量形式

$$\mathbf{s}_m = [s_{m1} \ s_{m2} \ \cdots \ s_{mN}] \quad (m = 1, 2, \cdots, M) \quad (4-3-38)$$

式中, 对所有 m 和 j 有 $s_{mj} = \pm (\mathcal{E}/N)^{1/2}$ 。 N 称为码分组长度, 并且是 M 个波形的维数。

我们注意到, 有 2^N 个可能的波形存在, 它们可由 2^N 个可能的二进制码字生成。可以选择 $M < 2^N$ 个信号波形子集来传输信息, 2^N 个可能的信号点相应于以原点为中心的超立方体的顶点。图 4-3-11 所示为 $N=2$ 和 $N=3$ 维的信号点。

M 个波形中的每一个具有能量 \mathcal{E} 。在任意一对波形之间的互相关取决于如何从 2^N 个可能的波形中选择 M 个波形, 这个问题将在第 7 章解决。显然, 任意相邻信号点具有互相关系数

$$\rho_r = \frac{\mathcal{E}(1 - 2/N)}{\mathcal{E}} = \frac{N-2}{N} \quad (4-3-39)$$

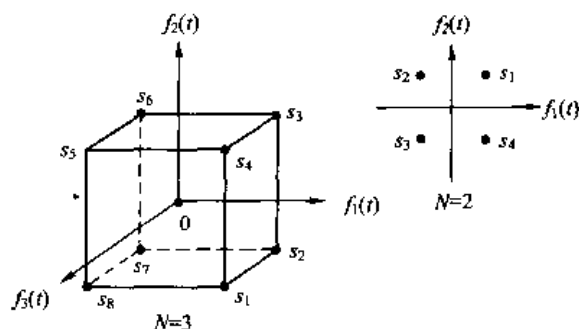


图 4-3-11 由二进制码生成的信号的信号空间图

以及相应的距离

$$\begin{aligned} d^{(e)} &= \sqrt{2E(1 - \rho_r)} \\ &= \sqrt{4E/N} \end{aligned} \quad (4-3-40)$$

就此结束关于无记忆调制信号的讨论。

4.3.2 有记忆线性调制

上一节介绍的调制信号可归为无记忆类,因为在不重叠的符号间隔发送的信号之间不存在相关性。本节将介绍某些调制信号,这些信号的连续符号间隔发送的信号之间有相关性。这种信号相关性的引入通常是为了发送信号频谱的形成,以便与信道的频谱特性相适应。在不同信号间隔发送的信号之间的相关性,通常采用调制码的方法对调制器输入端的数据序列进行编码来实现,第 9 章将详细介绍。

本节将介绍有记忆调制信号的例子,并以马尔可夫链表征其记忆特性。限定的处理是对基带信号而言的,推广到带通信号是比较容易的。

图 4-3-12 说明了 3 种不同的基带信号及其相应的数据序列。第一种信号称为 NRZ,是最简单的,二进制信息数字 1 由极性为 A 的矩形脉冲表示,二进制数字 0 由极性为 $-A$ 的矩形脉冲表示。因此,NRZ 调制是无记忆的,且等价于载波调制系统中的二进制 PAM 或二进制 PSK 信号。

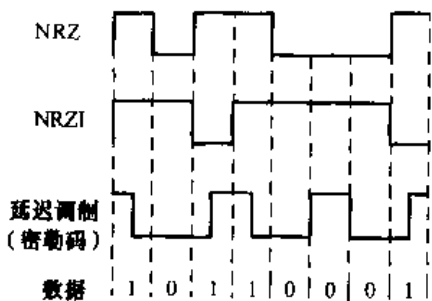


图 4-3-12 基带信号

NRZI 信号与 NRZ 信号不同,它的幅度从一个电平到另一个电平的转换仅在发送 1 时才发生。当发送 0 时,幅度电平保持不变。这种类型的信号编码称为差分编码,其编码运算可用关系式

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \quad (4-3-41)$$

来进行数学描述,式中 $\{a_k\}$ 是输入编码器的二进制信息序列, $\{b_k\}$ 是编码器的输出序列, \oplus 表示模 2 加。当 $b_k = 1$ 时,发送波形是幅度为 A 的矩形脉冲;当 $b_k = 0$ 时,发送波形是幅度为 $-A$ 的矩形脉冲。因此,编码器输出采用与 NRZ 信号完全相同的方式映射成两个波形之一。

差分编码运算在信号中引入了记忆。编码器和调制器运算的组合可以用状态图(马尔可

夫链)表示,如图 4-3-13 所示。状态图可采用对应于两个可能的输入比特 $\{0,1\}$ 的两个转移矩阵来描述。注意,当 $a_k=0$ 时,编码器停留在同一状态。因此,对 0 的状态转移矩阵是

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-3-42)$$

式中,如果 a_k 导致从状态 i 到状态 j 的转移, $i=1,2$ 且 $j=1,2$, 则 $t_{ij}=1$; 其他情况下, $t_{ij}=0$ 。类似地,对于 $a_k=1$ 的状态转移矩阵是

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-3-43)$$

这两个状态转移矩阵表征了 NRZI 信号。

展示由预编码运算引入的记忆的另一种方法是采用网格图的方式, NRZI 信号的网格图如图 4-3-14 所示。网格精确地描述了与状态图相同的信号相关性的信息,还描绘出状态转移的时间演进。

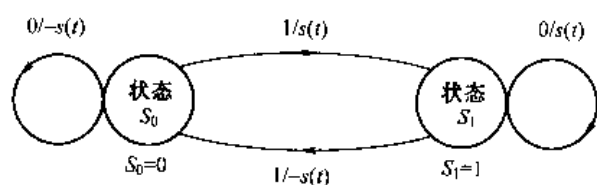


图 4-3-13 NRZI 信号状态图

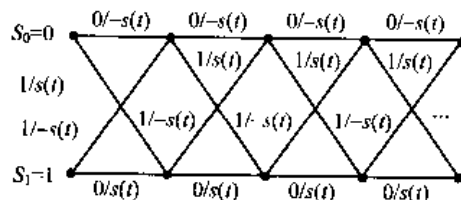


图 4-3-14 NRZI 信号的网格图

由延迟调制生成的信号也具有记忆。第 9 章将介绍,延迟调制等价于采用一种称为密勒 (Miller) 码的游程长度受限码对数据序列进行编码,并且用 NRZI 发送编码数据。这种类型的数字调制推广用做数字磁记录,在使用二进制 PSK 的载波调制系统中应用。该信号可以采用具有四状态的状态图来描述,如图 4-3-15(a) 所示。有两个基本的波形 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 及其负波形 $-s_1(t)$ 和 $-s_2(t)$,用这些波形发送二进制信息,如图 4-3-15(b) 所示。状态图说明了由比特到相应波形的映射。由图 4-3-15 中的状态转移图容易得到表征这种编码和调制方法记忆的状态转移矩阵。当 $a_k=0$ 时,得到

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-3-44)$$

当 $a_k=1$ 时,转移矩阵为

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-3-45)$$

因此,这两个 4×4 状态转移矩阵表征了密勒编码信号的状态图。

有记忆调制技术(如 NRZI 和密勒码)的表征通常采用具有稳态概率 $\{p_i, i=1,2,\dots,K\}$ 和转移概率 $\{p_{ij}, i,j=1,2,\dots,K\}$ 的 K 状态马尔可夫链进行。与每一个转移相关联的是一个信号波形 $s_j(t)$ ($j=1,2,\dots,K$)。因此转移概率 p_{ij} 表示以下概率:在先前的信号间隔发送信

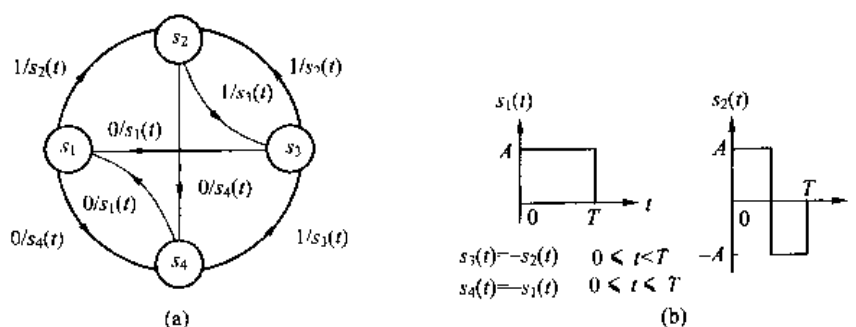


图 4-3-15 延迟调制(密勒编码)信号的状态图(a)和基本波形(b)

号波形 $s_i(t)$ 之后,在给定的信号间隔发送信号波形 $s_j(t)$ 的概率。转移概率可以排列成如下矩阵形式

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{K1} & p_{K2} & \cdots & p_{KK} \end{bmatrix} \quad (4-3-46)$$

式中, \mathbf{P} 称为转移概率矩阵。

转移概率矩阵可以由转移矩阵 \mathbf{T}_i 和相应的输入比特出现的概率(或等价于稳态转移概率 $|p_i|$)求得,一般的关系可以表示为

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{T}_i \quad (4-3-47)$$

式中, $q_1 = P(a_k = 0)$ 及 $q_2 = P(a_k = 1)$ 。

具有相等状态概率 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, 式(4-3-42)与式(4-3-43)给出的转移矩阵的 NRZI 信号,其转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4-3-48)$$

类似地,具有相等可能性符号 $(q_1 = q_2 = \frac{1}{2})$ 或等价于 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ 的密勒编码信号的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-3-49)$$

转移概率矩阵在确定有记忆数字调制技术的频谱特性时很有用,4.4节将详细介绍。

4.3.3 有记忆非线性调制—CPFSK 和 CPM

本节将研究一类数字调制方式,在这种调制中,信号相位限定是连续的。这个约束条件导致有记忆的相位或频率调制器的调制方式也是非线性的。

1. 连续相位 FSK(CPFSK)

常规 FSK 信号是由载波频移产生的,频移量 $f_n = \frac{1}{2} \Delta f I_n$ ($I_n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$), 它反映要发送的数字信息。这种类型的 FSK 信号在 4.3.1 节介绍过,它是无记忆的。从一个频率到另一个频率切换的实现方法是使用 $M \approx 2^k$ 个调谐到期望频率的振荡器,再从 M 个频率中选择一个频率,选择的依据是在信号间隔时间 $T = k/R$ s 内要发送特定的 k 比特符号。然而,在连续的信号传输时间间隔中,这种从一个振荡器输出到另一个的突发式切换造成在信号主要频段之外有比较大的频谱旁瓣。因此,用这种方式传输信号需要较宽的频带。

为了避免使用具有较大频谱旁瓣的信号,携带信息的信号频率调制单一的载波,载波频率是连续变化的。所得到的频率调制信号是相位连续的,因此称为连续相位 FSK(CPFSK)。这种类型的 FSK 是有记忆的,因为载波相位限定是连续的。

为了表示 CPFSK 信号,以 PAM 信号

$$d(t) = \sum_n I_n g(t - nT) \quad (4-3-50)$$

开始,式中 $\{I_n\}$ 表示幅度序列,它是由信息序列 $\{a_n\}$ 的 k 比特二进制数字组映射到幅度电平 $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$ 得到的。 $g(t)$ 是一个幅度为 $1/2T$,持续时间为 T s 的矩形脉冲。信号 $d(t)$ 用来对载波进行频率调制,从而等效低通波形 $v(t)$ 可表示为

$$v(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \exp \left\{ j \left[4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau + \phi_0 \right] \right\} \quad (4-3-51)$$

式中, f_d 是峰值频率偏移, ϕ_0 是载波的初始相位。

对应于式(4-3-51)的载波调制信号可以表示为

$$s(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos[2\pi f_c t + \phi(t; \mathbf{I}) + \phi_0] \quad (4-3-52)$$

式中 $\phi(t; \mathbf{I})$ 表示载波的时变相位,定义为

$$\begin{aligned} \phi(t; \mathbf{I}) &= 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t d(\tau) d\tau \\ &= 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t \left[\sum_n I_n g(\tau - nT) \right] d\tau \end{aligned} \quad (4-3-53)$$

注意,虽然 $d(t)$ 具有不连续性,但 $d(t)$ 的积分是连续的。因此,我们得到一个连续相位信号。在 $nT \leq t \leq (n+1)T$ 间隔内的载波相位由式(4-3-53)的积分确定。因此,

$$\begin{aligned} \phi(t; \mathbf{I}) &= 2\pi f_d T \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + 2\pi f_d (t - nT) I_n \\ &= \theta_n + 2\pi h I_n q(t - nT) \end{aligned} \quad (4-3-54)$$

式中, h, θ_n 及 $q(t)$ 定义为

$$h = 2f_d T \quad (4-3-55)$$

$$\theta_n = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k \quad (4-3-56)$$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t/2T & (0 \leq t \leq T) \\ \frac{1}{2} & (t > T) \end{cases} \quad (4-3-57)$$

可以看到, θ_n 表示直到 $(n-1)T$ 时的所有符号的累积(记忆)值。参数 h 称为调制指数。

2. 连续相位调制(CPM)

当用式(4-3-54)的形式表示时, CPFSK 变成一般类型的连续相位调制(CPM)信号的特例, CPM 的载波相位是

$$\phi(t; \mathbf{I}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^n I_k h_k q(t - kT) \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \quad (4-3-58)$$

式中, $\{I_k\}$ 是由符号表 $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$ 中选出的 M 元信息符号序列, $\{h_k\}$ 调制指数序列, $q(t)$ 是某个归一化波形。

当对于所有 k 都有 $h_k = h$ 时, 调制指数对所有符号都是固定的。当调制指数从一个符号到另一个符号而变化时, CPM 信号称做多重 h 。在这种情况下, $\{h_k\}$ 以循环方式在调制指数集中变化。

波形 $q(t)$ 一般可以表示成某个脉冲 $g(t)$ 的积分, 即

$$q(t) = \int_0^t g(t) dt \quad (4-3-59)$$

如果对 $t > T$ 有 $g(t) = 0$, 则 CPM 信号称为全响应 CPM。如果对 $t > T$ 有 $g(t) \neq 0$, 则已调信号称为部分响应 CPM。图 4-3-16 说明了 $g(t)$ 的几种脉冲形状及其相应的 $q(t)$ 。显而易见, 通过选择不同的脉冲形状 $g(t)$, 改变调制指数 h 和符号数目 M , 可以产生无穷多的 CPM 信号。

注意, CPM 信号具有记忆, 是通过相位的连续性引入的。当 $L > 1$ 时, 脉冲 $g(t)$ 给 CPM 信号引入了附加的记忆。

表 4-3-1 列出了三种常用的脉冲形状。LREC 表示持续时间为 LT 的矩形脉冲, 这里 L 为整数。在这种情况下, 如图 4-3-16(a) 所示的 $L=1$ 的脉冲导致 CPFSK 信号。图 4-3-16(c) 表示 $L=2$ 的 LREC 脉冲。LRC 表示持续时间为 LT 的升余弦脉冲。图 4-3-16(b) 和图 4-3-16(d) 分别示出了 $L=1$ 和 $L=2$ 的 LRC 脉冲。表 4-3-1 中的第 3 种脉冲称为具有带宽参数 B 的高斯最小移频键控(GMSK)脉冲, B 表示高斯脉冲的 -3 dB 带宽。图 4-3-16(e) 示出了时间-带宽乘积 BT 范围从 0.1 到 1 的一组 GMSK 脉冲。可以看出, 当脉冲带宽减小时脉冲持续时间增加。在实际应用中, 通常将脉冲持续时间截短到某特定的固定长度。欧洲数字蜂窝通信系统中采用了 $BT=0.3$ 的 GMSK, 称为 GSM。从图 4-3-16(e) 我们可以看到, 当 $BT=0.3$ 时, GMSK 脉冲可在 $|t|=1.5T$ 处截短, 而引起的 $t > 1.5T$ 的误差比较小。

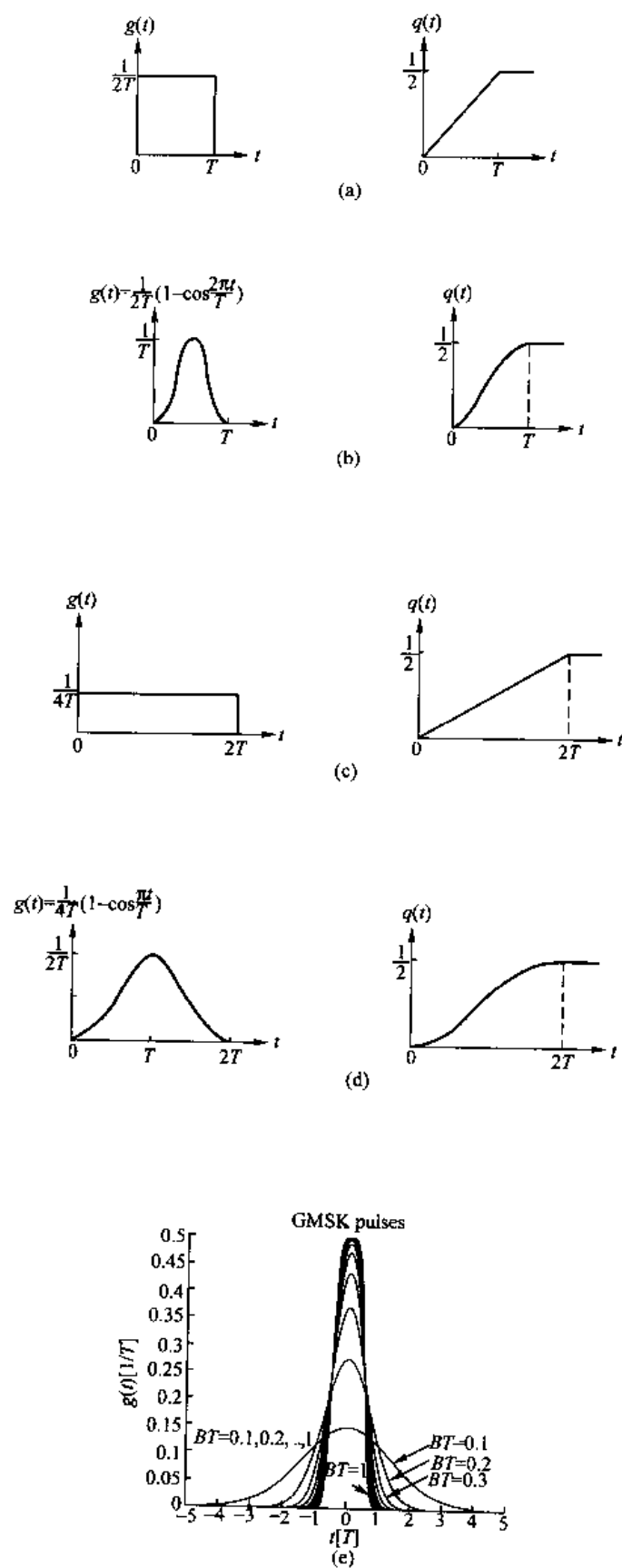


图 4-3-16 CPM 的脉冲形状:全响应 CPM(a),(b)及部分响应 CPM(c),(d),(e)

表 4-3-1 某些常用的 CPM 脉冲形状

LREC	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} & (0 \leq t \leq LT) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
LRC	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{LT}\right) & (0 \leq t \leq LT) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$
GMSK	$g(t) = \left\{ Q \left[2\pi B \left(t - \frac{T}{2} \right) / (\ln 2)^{1/2} \right] - Q \left[2\pi B \left(t + \frac{T}{2} \right) / (\ln 2)^{1/2} \right] \right\}$ $Q(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$

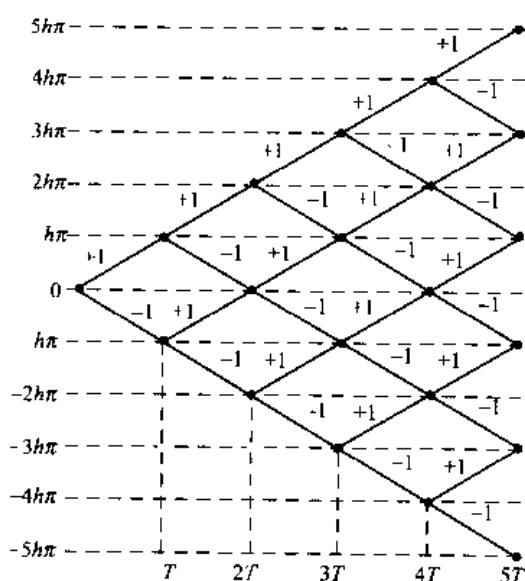


图 4-3-17 二进制 CPFSK 的相位轨迹

画出由信息序列 $\{I_n\}$ 所有可能的值生成的一组相位轨迹 $\phi(t; \mathbf{I})$ 是很有用的。例如, 在具有二进制符号 $I_n = \pm 1$ 的 CPFSK 情况下, 在 $t=0$ 起始的一组相位轨迹如图 4-3-17 所示。作为比较, 图 4-3-18 画出了四元 CPFSK 的相位轨迹。这些相位图称做相位树。我们看到, CPFSK 的相位树是分段线性的, 这是由于脉冲 $g(t)$ 是矩形的。较平滑的相位轨迹和相位树可以通过使用不包含跃变的脉冲获得, 例如使用升余弦脉冲。举个例子, 图 4-3-19 所示的相位轨迹是使用长度为 $3T$ 的部分响应升余弦脉冲并由序列 $(1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1)$ 产生的。为便于比较, 图中也示出了由 CPFSK 产生的相应的相位轨迹。

在这些图中, 相位树随时间而增长, 但载波相位仅仅在 $\phi=0$ 至 $\phi=2\pi$ (或等价于从 $\phi=-\pi$ 至 $\phi=\pi$) 的范围内是惟一的。当相位轨迹以模 2π 画出时, 即在 $(-\pi, \pi)$ 范围内, 相位树折叠到一个称为相位网格的结构中。为了全面地考察相位网格图, 画出两个正交分量 $x_c(t; \mathbf{I}) = \cos \phi(t; \mathbf{I})$ 和 $x_s(t; \mathbf{I}) = \sin \phi(t; \mathbf{I})$ 作为时间的函数, 从而作出一条三维曲线, 该曲线的两个正交分量 x_c 和 x_s 出现在单位半径的圆柱面上。例如, 图 4-3-20 所示为相位网格或相位圆柱, 它是由二进制调制且调制指数 $h = \frac{1}{2}$ 以及长度为 $3T$ 的升余弦脉冲得到的。

较简单的相位轨迹表示可以通过仅显示在 $t = nT$ 时刻的信号相位终值来获得。在这种情况下, 限制 CPM 信号的调制指数为有理数。特别地, 假定 $h = m/p$, 其中 m 与 p 是互素整数, 从而在 $t = nT$ 时刻且 m 为偶数时的全响应 CPM 信号具有终值相位状态

$$\Theta_s = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (4-3-60)$$

当 m 为奇数时,

$$\Theta_s = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(2p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (4-3-61)$$

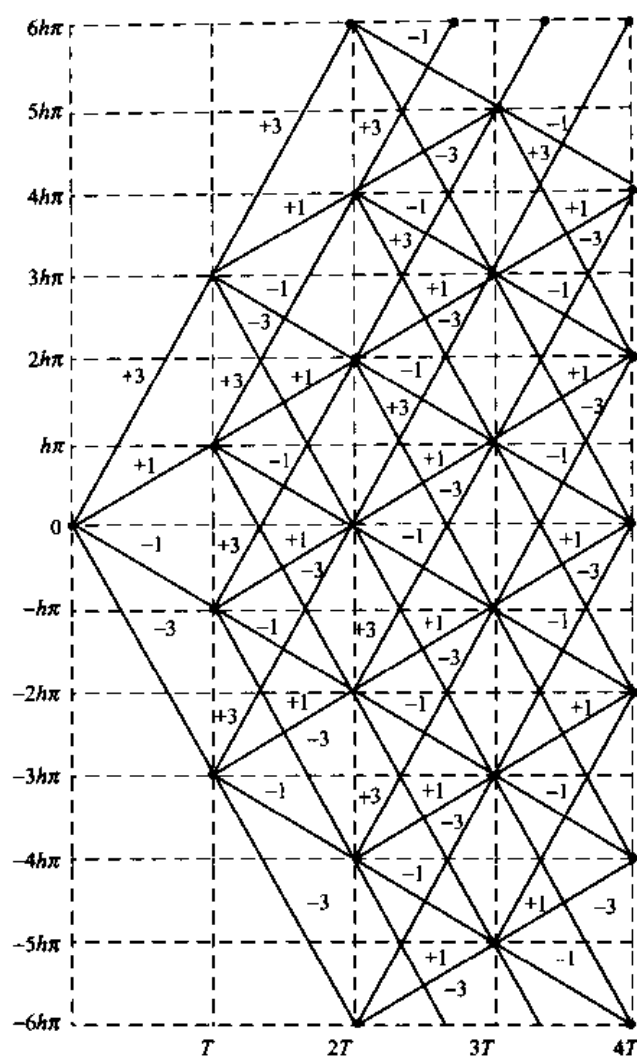


图 4-3-18 四元 CPFSK 相位轨迹

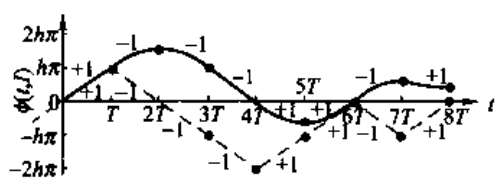


图 4-3-19 二进制 CPFSK 的相位轨迹(虚线)和基于长度为 $3T$ 升余弦脉冲的二进制部分响应 CPM 的相位轨迹(实线)

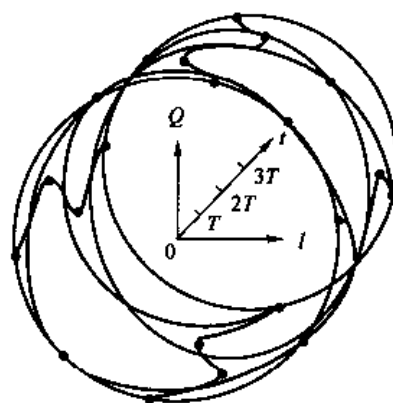


图 4-3-20 具有 $h=1/2$ 及长度为 $3T$ 的升余弦脉冲的二进制 CPM 的相位柱

因此,当 m 为偶数时,有 p 个终值相位状态;当 m 为奇数时,有 $2p$ 个状态。另一方面,当脉冲形状延伸 L 个符号间隔(部分响应 CPM)时,相位状态数可增至最大值 S_t ,这里

$$S_t = \begin{cases} pM^{L-1} & (\text{偶数 } m) \\ 2pM^{L-1} & (\text{奇数 } m) \end{cases} \quad (4-3-62)$$

式中, M 为符号表大小。例如,具有 $h = 1/2$ 的二进制 CPFSK 信号(全响应,矩形脉冲)具有 $S_t = 4$ (终值)相位状态。图 4-3-21 说明了该信号的状态网格。应强调指出,从一个状态到另一个状态的相位转移并不是真正的相位轨迹,它们表示在 $t = ntT$ 时刻的(终值)状态的相位转移。

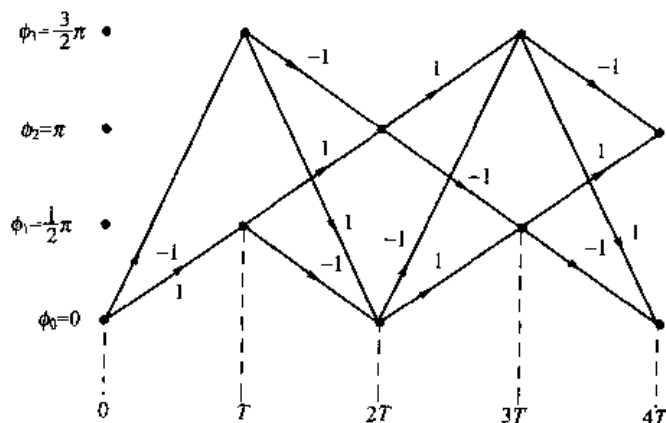


图 4-3-21 具有 $h = 1/2$ 的二进制 CPFSK 的状态网格

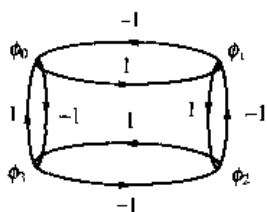


图 4-3-22 具有 $h = 1/2$ 的二进制 CPFSK 的状态图

3. 最小移频键控(MSK)

MSK 是二进制 CPFSK(以及 CPM)的一个特例,其调制指数 $h = 1/2$ 。在 $nT \leq t \leq (n+1)T$ 时间间隔中的载波相位是

$$\begin{aligned} \phi(t; \mathbf{I}) &= \frac{1}{2} \pi \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + \pi I_n q(t - nT) \\ &= \theta_n + \frac{1}{2} \pi I_n \left(\frac{t - nT}{T} \right) \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \end{aligned} \quad (4-3-63)$$

已调载波信号是

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos \left[2\pi f_c t + \theta_n + \frac{1}{2} \pi I_n \left(\frac{t - nT}{T} \right) \right] \\ &= A \cos \left[2\pi \left(f_c + \frac{1}{4T} I_n \right) t - \frac{1}{2} n\pi I_n + \theta_n \right] \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \end{aligned} \quad (4-3-64)$$

表达式(4-3-64)指出:二进制 CPFSK 信号可以表示成在 $nT \leq t \leq (n+1)T$ 时间间隔内具有两个频率之一的正弦波。如果定义这些频率为

$$f_1 = f_c - \frac{1}{4T}$$

$$f_2 = f_c + \frac{1}{4T} \quad (4-3-65)$$

那么由式(4-3-64)确定的二进制 CPFSK 信号可以写成如下形式

$$s_i(t) = A \cos[2\pi f_i t + \theta_n + \frac{1}{2} n\pi(-1)^{i-1}] \quad (i = 1, 2) \quad (4-3-66)$$

频率间隔 $\Delta f = f_2 - f_1 = 1/2T$ 。为了确保在长度为 T 的信号传输间隔上信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的正交性,最小频率间隔 $\Delta f = 1/2T$ 是必要的。这就解释了为什么具有 $h = 1/2$ 的二进制 CPFSK 称为最小移频键控(MSK)。在第 n 个信号传输间隔中的相位导致在相邻时间间隔内相位连续性的信号相位状态。

MSK 也可以表示成四相 PSK 的形式,特别是可以表示成等效低通数字调制信号的形式(参见习题 4-14)

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_{2n}g(t - 2nT) - jI_{2n+1}g(t - 2nT - T)] \quad (4-3-67)$$

式中 $g(t)$ 是正弦脉冲,定义为

$$g(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi t}{2T} & (0 \leq t \leq 2T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (4-3-68)$$

因此,这种类型的信号可看做四相 PSK 信号,其中脉冲形状是半个周期的正弦波。信息序列 $\{I_n\}$ 中偶数编号的二进制取值(± 1)的符号 $|I_{2n}|$ 经由余弦载波发送,而奇数编号的符号 $|I_{2n+1}|$ 经由正弦载波发送。两个正交载波分量的传输速率均为 $1/2T$ b/s,从而合成的传输速率为 $1/T$ b/s。注意,在正弦和余弦载波分量上的比特转移在时间上交错或偏移 T 秒,由于这个原因,信号

$$s(t) = A \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{2n}g(t - 2nT) \right] \cos 2\pi f_c t + \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{2n+1}g(t - 2nT - T) \right] \sin 2\pi f_c t \right\} \quad (4-3-69)$$

称为偏移正交 PSK(OQPSK)或交错正交 PSK(SQPSK)。

图 4-3-23 说明了 MSK 信号作为两个交错正交调制二进制 PSK 信号的表示法。相应的两个正交信号之和是一个恒定幅度的频率调制信号。

同样有趣的是,将 MSK 波形与具有矩形脉冲 $g(t)$ ($0 \leq t \leq 2T$) 的偏移 QPSK 以及具有矩形脉冲 $g(t)$ ($0 \leq t \leq 2T$) 的常规正交(四相)PSK(QPSK)进行比较。显然这 3 种调制方式导致相同的数据速率。MSK 具有连续相位;具有矩形脉冲的偏移 QPSK 信号本质上是两个相位转换在时间上交错 T s 的二进制 PSK,因此该信号包含 $\pm 90^\circ$ 相位跳变,它会像每 T s 一样频繁发生。另一方面,具有恒定幅度的常规四相 PSK 信号将每 $2T$ s 包含 $\pm 180^\circ$ 或 $\pm 90^\circ$ 的相位跳变。图 4-3-24 说明了这 3 种类型的信号。

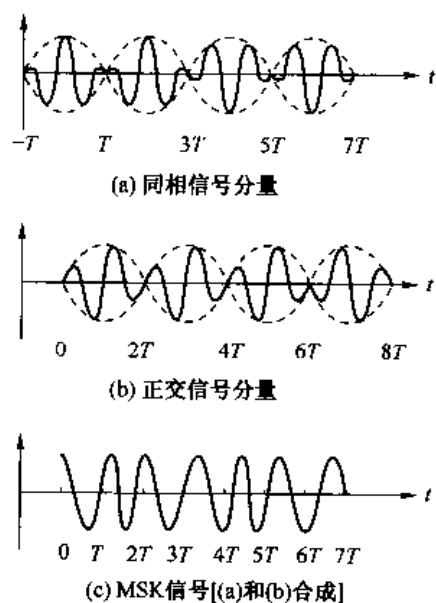


图 4-3-23 MSK 信号作为两个交错二进制 PSK 信号形式的表示法,每一个具有正弦包络

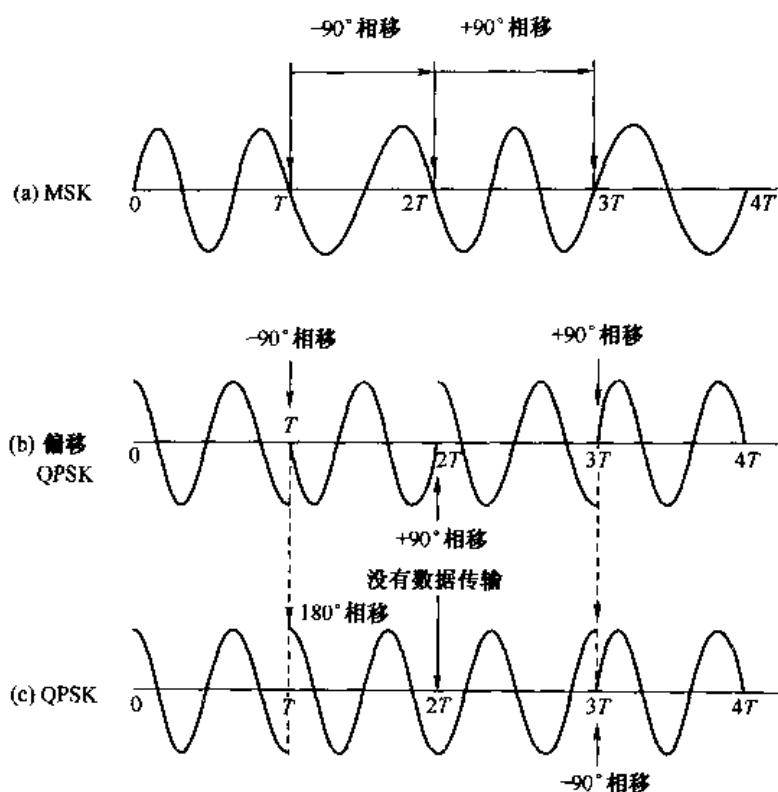


图 4-3-24 信号波形

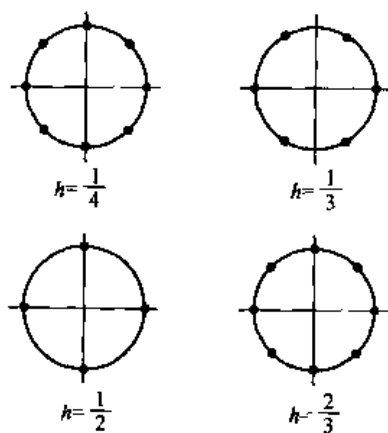


图 4-3-25 CPFSK 信号空间图

4. CPM 的信号空间图

通常,连续相位信号不能像 PAM, PSK 和 QAM 那样采用信号空间中的离散点来表示,这是因为载波相位是时变的,而是采用由一个相位状态转换到另一个状态的各种路径或轨迹来描述连续相位信号。对于恒定幅度的 CPM 信号,各种各样的轨迹形成一个圆。

例如,图 4-3-25 所示为具有 $h = 1/4$, $h = 1/3$, $h = 1/2$ 和 $h = 2/3$ 的 CPFSK 信号的信号空间(相位轨迹)图。在该图中,相位轨迹的起点与终点用圆点标注。注意,相位轨迹的长度随着 h 增加而增加, h 的增加导致信号带宽的增加。这将在下一节证明。

5. CPM 的线性表示法

如上所述,CPM 是一种有记忆的非线性调制技术。然而,CPM 也可以表示为信号波形的线性叠加。这样的表示法为发送机产生已调信号以及(或者)为接收机解调该信号提供了一种可选用的方法。依照劳伦特(Laurent, 1986 年)最初的研究证明:若脉冲 $g(t)$ 具有有限持续时间 LT (T 为比特间隔),那么二进制 CPM 可用有限数量的调幅脉冲线性叠加来表示。我们首先写出 CPM 的等效低通表达式:

$$v(t) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{T}} e^{j\phi(t;1)} \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \quad (4-3-70)$$

式中,

$$\begin{aligned}\phi(t; I) &= 2\pi h \sum_{k=-\infty}^n I_k q(t - kT) \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \\ &= \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-L} I_k + 2\pi h \sum_{k=n-L+1}^n I_k q(t - kT)\end{aligned}\quad (4-3-71)$$

而 $q(t)$ 是脉冲 $g(t)$ 的积分, 如前面式(4-3-59)所定义。

指数项 $\exp[j\phi(t; I)]$ 可以表示为

$$\exp[j\phi(t; I)] = \exp\left(j\pi h \sum_{k=-\infty}^{n-L} I_k\right) \prod_{k=0}^{L-1} \exp\{j2\pi h I_{n-k} q[t - (n-k)T]\} \quad (4-3-72)$$

注意, 式(4-3-72)的右边第一项表示直到信息符号 I_{n-L} 的相位累积值, 而第二项由 L 个相位项的乘积组成。假定调制指数 h 不是整数且数据符号是二进制的, 即 $I_k = \pm 1$, 则第 k 个相位项可以表示为

$$\begin{aligned}\exp\{j2\pi h I_{n-k} q[t - (n-k)T]\} &= \frac{\sin\pi h}{\sin\pi h} \exp\{j2\pi h I_{n-k} q[t - (n-k)T]\} \\ &= \frac{\sin(\pi h - 2\pi h q[t - (n-k)T])}{\sin\pi h} \\ &\quad + \exp(j\pi h I_{n-k}) \frac{\sin\{2\pi h q[t - (n-k)T]\}}{\sin\pi h}\end{aligned}\quad (4-3-73)$$

为方便, 定义信号脉冲 $s_0(t)$ 为

$$s_0(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2\pi h q(t)}{\sin \pi h} & (0 \leq t < LT) \\ \frac{\sin[\pi h - 2\pi h q(t - LT)]}{\sin \pi h} & (LT \leq t < 2LT) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (4-3-74)$$

那么,

$$\exp[j\phi(t; I)] = \exp\left(j\pi h \sum_{k=-\infty}^{n-L} I_k\right) \prod_{k=0}^{L-1} \{s_0[t + (k+L-n)T] + \exp(j\pi h I_{n-k}) s_0[t - (k-n)T]\} \quad (4-3-75)$$

通过该乘积中 L 项的乘法运算, 可以得到 2^L 项之和, 其中 2^{L-1} 项是各自相异的, 而其余 2^{L-1} 项是各自相异项的时移形式。最终的结果可以表示为

$$\exp[j\phi(t; I)] = \sum_n \sum_{k=0}^{2^{L-1}-1} e^{j\pi h A_{k,n}} c_k(t - nT) \quad (4-3-76)$$

式中, 脉冲 $c_k(t)$ 当 $0 \leq k \leq 2^{L-1} - 1$ 时定义为

$$c_k(t) = s_0(t) \prod_{n=1}^{L-1} s_0[t + (n + L a_{k,n})T] \quad (0 \leq t \leq T \cdot \min_{|n|} [L(2 - a_{k,n}) - n]) \quad (4-3-77)$$

注意, 每一个脉冲用一个复系数 $\exp(j\pi h A_{k,n})$ 加权, 其中

$$A_{k,n} = \sum_{m=-\infty}^n I_m - \sum_{m=1}^{L-1} I_{n-m} a_{k,m} \quad (4-3-78)$$

且 $a_{k,n} = 0$ 或 1 是指数 k 的二进制表达式中的系数, 即

$$k = \sum_{m=1}^{L-1} 2^{m-1} a_{k,m} \quad (k = 0, 1, \dots, 2^{L-1} - 1) \quad (4-3-79)$$

因此,二进制 CPM 信号可表示为 2^{L-1} 个实值脉冲 $\{c_k(t)\}$ 的加权和。

在这种 CPM 作为调幅脉冲叠加的表示法中,脉冲 $c_0(t)$ 是最重要的分量,因为它的持续时间最长且包含该信号大部分的能量。因此,CPM 信号的一种简单的近似表示就是以 $c_0(t)$ 作为基本脉冲形状的部分响应 PAM 信号。

上面研究的重点是二进制 CPM。 M 元 CPM 作为 PAM 波形的叠加的表示法已由蒙加利和摩尔利(Mengail 和 Morelli,1995 年)给出。

例 4-3-1 作为一个特例,我们研究 MSK 信号,其 $h = \frac{1}{2}$ 且 $g(t)$ 是持续时间为 T 的矩形脉冲。在这种情况下,

$$\begin{aligned} \phi(t; \mathbf{I}) &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + \pi I_n g(t - nT) \\ &= \theta_n + \frac{\pi}{2} I_n \left(\frac{t - nT}{T} \right) \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \end{aligned}$$

且

$$\exp[j\phi(t; \mathbf{I})] = \sum_n b_n c_0(t - nT)$$

式中

$$c_0(t) = \begin{cases} \sin \frac{\pi t}{2T} & (0 \leq t \leq 2T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

且

$$b_n = e^{j\pi A_{0,n}/2} = e^{j\pi(\theta_n + I_n)/2}$$

复值变型数据序列 $\{b_n\}$ 可表示为递推形式

$$b_n = j b_{n-1} I_n$$

故, b_n 交替取实数值和虚数值。通过将实数和虚数分量分离,就可得到式(4-3-67)和式(4-3-68)给出的等效低通信号表达式。

6. 多幅度 CPM

多幅度 CPM 是普通 CPM 的一般形式,其中信号可以在一组幅度值上变化,而信号的相位限定于连续的。例如,研究两幅度 CPFSK 信号,它可以表示为

$$s(t) = 2A \cos[2\pi f_c t + \phi_2(t; \mathbf{I})] + A \cos[2\pi f_c t + \phi_1(t; \mathbf{J})] \quad (4-3-80)$$

式中

$$\phi_2(t; \mathbf{I}) = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + \frac{\pi h I_n (t - nT)}{T} \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \quad (4-3-81)$$

$$\phi_1(t; \mathbf{J}) = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} J_k + \frac{\pi h J_n (t - nT)}{T} \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \quad (4-3-82)$$

信息是由符号序列 $\{I_n\}$ 和 $\{J_n\}$ 传送的, 该序列与两个独立的取值为 $\{0, 1\}$ 的二进制信息序列有关。我们看到, 式(4-3-80)中的信号是两个不同幅度的 CPFSK 信号的叠加。然而, 序列 $\{I_n\}$ 和 $\{J_n\}$ 不是统计独立的, 而是受约束的, 以便在两个分量叠加中实现相位的连续性。

为了详细地说明, 研究 $h = 1/2$ 的例子, 结果得到两个 MSK 信号的叠加信号。在符号的转移点, 两个幅度分量要么同相要么相差 180° 。信号中的相位变化是由幅度较大的分量确定的, 而幅度变化由较小的分量确定。因此, 较小分量是受约束的, 结果在每个符号间隔的起点和终点, 它与较大分量要么是同相的要么相位相差 180° , 与其相位无关。在这个约束条件下, 符号序列 $\{I_n\}$ 和 $\{J_n\}$ 可以表示为

$$\begin{aligned} I_n &= 2a_n - 1 \\ J_n &= I_n(1 - 2b_n) = I_n \left(1 - \frac{b_n}{h}\right) \end{aligned} \quad (4-3-83)$$

表 4-3-2 总结了这些关系。

表 4-3-2 a_n, b_n, I_n, J_n 及其幅相关系

a_n	b_n	I_n	J_n	幅 相 关 系
0	0	-1	-1	幅度恒定; 相位减少
0	1	-1	1	幅度改变; 相位减少
1	0	1	1	幅度恒定; 相位增加
1	1	1	-1	幅度改变; 相位增加

作为一般情况, 具有 n 个分量的多幅度 CPFSK 信号可以表示为

$$s(t) = 2^{N-1} \cos[2\pi f_c t + \phi_N(t; \mathbf{I})] + \sum_{m=1}^{N-1} 2^{m-1} \cos[2\pi f_c t + \phi_m(t; \mathbf{J}_m)] \quad (4-3-84)$$

式中

$$\phi_N(t; \mathbf{I}) = \pi h I_n \frac{t - nT}{T} + \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \quad (4-3-85)$$

及

$$\begin{aligned} \phi_m(t; \mathbf{J}_m) &= I_n \pi \left[h + \frac{1}{2}(J_{mn} + 1) \right] \frac{t - nT}{T} \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{n-1} \pi I_k \left[h + \frac{1}{2}(J_{mk} + 1) \right] \\ &\quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \end{aligned} \quad (4-3-86)$$

序列 $\{I_n\}$ 和 $\{J_{mn}\}$ 是统计独立的、从集合 $\{1, -1\}$ 取值的二进制序列。

从式(4-3-85)和式(4-3-86)可以看到: 在第 n 个符号间隔的终点, 即在 $t = (n+1)T$ 时, 总和中的每一个分量与最大的分量要么同相要么相位相差 180° 。因此, 信号状态可以用幅度电平和相位度数详细描述, 其中幅度电平取自幅度集合 $\{1, 3, 5, \dots, 2^N - 1\}$, 相位度数取自于集合 $\{0, \pi\theta, 2\pi\theta, \dots, 2\pi - \pi\theta\}$ 。相位约束还是需要的, 以便保持 CPM 信号的相位连续性。

图 4-3-26 所示为具有 $h = 1/4, h = 1/3, h = 1/2$ 和 $h = 2/3$ 的两个幅度 ($N=2$) CPFSK 的信号空间图。3 个分量 ($N=3$) CPFSK 的信号空间图如图 4-3-27 所示, 在此情况下, 有 4 个幅度电平。状态的数目取决于调制指数 h 以及 N 。注意, 相位轨迹的起点与终点由圆点标注。

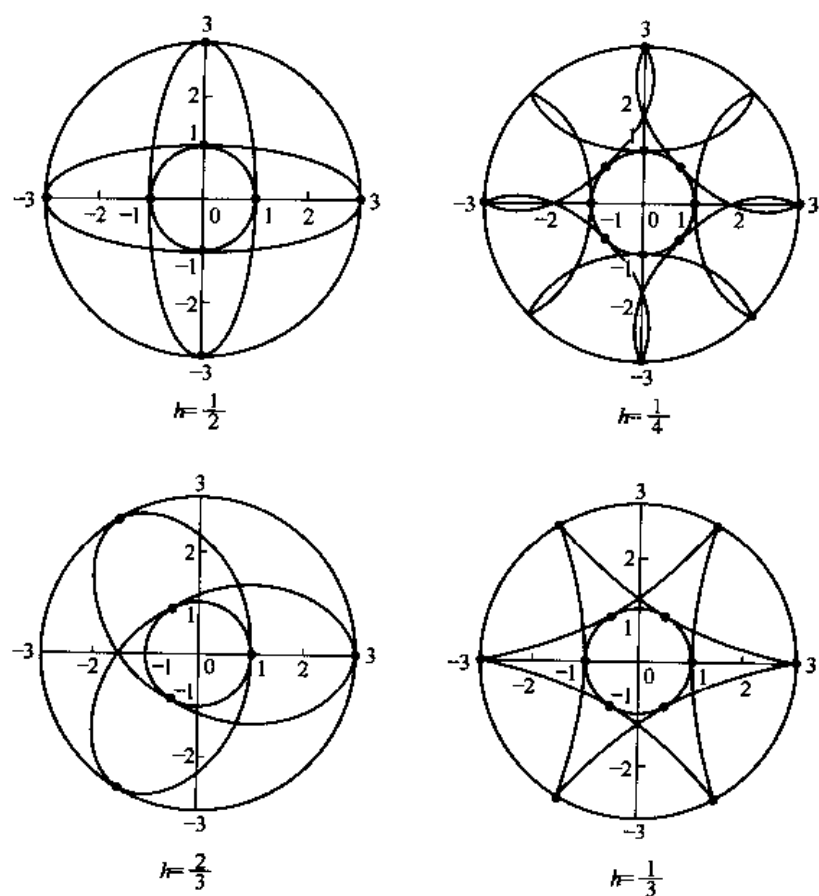


图 4-3-26 2 个分量 CPFSK 的信号空间图

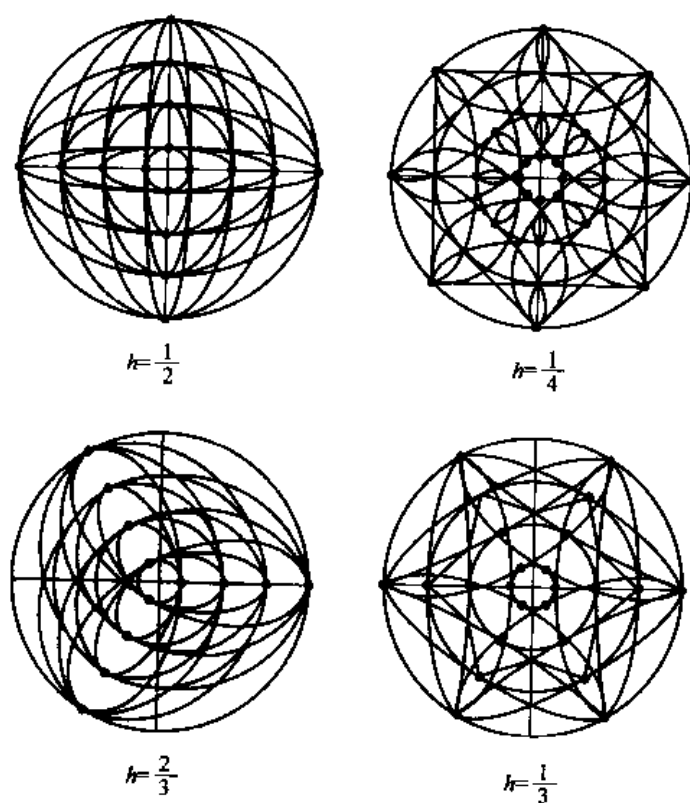


图 4-3-27 3 个分量 CPFSK 的信号空间图

其他格式的多幅度 CPM 信号可以采用非矩形脉冲以及横跨一个以上符号的信号脉冲(部分响应)获得。

4.4 数字调制信号的频谱特性

在大多数数字通信系统中,可获得的信道带宽是有限的。因此,系统设计人员在选择用来发送信息的调制技术时,必须考虑由信道带宽限制造成的约束。由于这个原因,确定 4.3 节所述的数字调制信号的频谱成分非常重要。由于信息序列是随机的,因此数字调制信号是一个随机过程,应确定这样的随机过程的功率密度谱。由功率密度谱,就能确定用来发送携带信息的信号所需要的信道带宽。下面首先推导一类线性调制信号的频谱特性,然后研究非线性 CPFSK、CPM 和有记忆基带调制信号。

4.4.1 线性调制信号的功率谱

考虑以下表达式

$$s(t) = \operatorname{Re}[v(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

它将带通信号 $s(t)$ 与等效低通信号 $v(t)$ 联系起来, $s(t)$ 的自相关函数为

$$\phi_{ss}(\tau) = \operatorname{Re}[\phi_{vv}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}] \quad (4-4-1)$$

式中, $\phi_{vv}(\tau)$ 是等效低通信号 $v(t)$ 的自相关函数。式(4-4-1)的傅里叶变换导出了所期望的功率密度谱 $\Phi_s(f)$ 表达式,其形式为

$$\Phi_s(f) = \frac{1}{2}[\Phi_{vv}(f - f_c) + \Phi_{vv}(-f - f_c)] \quad (4-4-2)$$

式中, $\Phi_{vv}(f)$ 是 $v(t)$ 的功率密度谱。只要确定等效低通信号 $v(t)$ 的自相关函数和功率密度谱就可以了。

首先研究线性数字调制方式。对于这种方式, $v(t)$ 可表示成一般形式

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT) \quad (4-4-3)$$

式中传输速率是 $1/T = R/k$ 符号/s, $\{I_n\}$ 表示符号序列,它是由 k 比特组映射到相应的信号点形成的,这些信号点是从适当的信号空间图中选出的。可以看到,在 PAM 中,序列 $\{I_n\}$ 是实的且相当于发送信号的幅度电平;而在 PSK、QAM 和组合 PAM-PSK 中,序列 $\{I_n\}$ 是复值的,这是由于信号点具有二维表达式。

$v(t)$ 的自相关函数是

$$\begin{aligned} \phi_{vv}(t + \tau; t) &= \frac{1}{2} E[v^*(t)v(t + \tau)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E[I_n^* I_m] g^*(t - nT) g(t + \tau - mT) \end{aligned} \quad (4-4-4)$$

假定信号符号序列 $\{I_n\}$ 是广义平稳的,且具有均值 μ_i 和自相关函数

$$\phi_{ii}(m) = \frac{1}{2} E[I_n^* I_{n+m}] \quad (4-4-5)$$

因此,式(4-4-4)可表示为

$$\begin{aligned}\phi_{vv}(t+\tau; t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m-n) g^*(t-nT) g(t+\tau-mT) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-mT)\end{aligned}\quad (4-4-6)$$

式(4-4-6)中的第二个和式,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-mT)$$

是以 T 为周期的变量 t 的周期(函数)。因此, $\phi_{vv}(t+\tau; t)$ 也是以 T 为周期的变量 t 的周期(函数),即

$$\phi_{vv}(t+T+\tau; t+T) = \phi_{vv}(t+\tau; t) \quad (4-4-7)$$

此外, $v(t)$ 的均值

$$E[v(t)] = \mu_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT) \quad (4-4-8)$$

也是以 T 为周期的周期(函数)。因此, $v(t)$ 是一个具有周期性均值和自相关函数的随机过程。这样的过程称为广义循环平稳过程或周期平稳过程,如 2.2.6 节所述。

为了计算循环平稳过程的功率密度谱,必须消去 $\phi_{vv}(t+\tau; t)$ 对变量 t 的依赖关系,这可以将 $\phi_{vv}(t+\tau; t)$ 在单一周期上求(时间)平均来完成。因此

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{vv}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_{vv}(t+\tau; t) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-mT) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2-nT}^{T/2-nT} g^*(t) g(t+\tau-mT) dt\end{aligned}\quad (4-4-9)$$

把式(4-4-9)的积分解释为 $g(t)$ 的时间自相关函数,将它定义为

$$\phi_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) g(t+\tau) dt \quad (4-4-10)$$

因此,式(4-4-9)可表示为

$$\bar{\phi}_{vv}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \phi_{gg}(\tau-mT) \quad (4-4-11)$$

对式(4-4-11)进行傅里叶变换,得出 $v(t)$ 的(平均)功率密度谱

$$\Phi_{vv}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \Phi_{ii}(f) \quad (4-4-12)$$

式中, $G(f)$ 是 $g(t)$ 的傅里叶变换, $\Phi_{ii}(f)$ 表示信息序列的功率密度谱,其定义为

$$\Phi_{ii}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) e^{-j2\pi f m T} \quad (4-4-13)$$

式(4-4-12)的结果说明了 $v(t)$ 的功率密度谱与脉冲 $g(t)$ 的频谱特性和信息序列 $\{I_n\}$ 的依赖关系,即 $v(t)$ 的频谱特性可以由脉冲形状 $g(t)$ 的设计以及由信息序列的相关特性的设计来控制。

尽管式(4-4-12)中的 $\Phi_{vv}(f)$ 对 $G(f)$ 的依赖性容易理解,但信息序列的相关性质的影响却较难捉摸。首先,对于任意自相关 $\phi_{ii}(m)$,相应的功率密度谱 $\Phi_{ii}(f)$ 是以 $1/T$ 为周期的频

率周期(函数)。事实上,将谱 $\Phi_{ii}(f)$ 与自相关 $\{\phi_{ii}(m)\}$ 关联起来的式(4-4-13)是指数型傅里叶级数,并以 $\{\phi_{ii}(m)\}$ 为傅里叶系数。因此,自相关序列 $\phi_{ii}(m)$ 可由

$$\phi_{ii}(m) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \Phi_{ii}(f) e^{j2\pi fmT} df \quad (4-4-14)$$

确定。

其次,我们研究另一种情况:序列中的信息符号是实的且互不相关的。在这种情况下,自相关函数 $\phi_{ii}(m)$ 可以表示成

$$\phi_{ii}(m) = \begin{cases} \sigma_i^2 + \mu_i^2 & (m = 0) \\ \mu_i^2 & (m \neq 0) \end{cases} \quad (4-4-15)$$

式中, σ_i^2 表示信息符号的方差。当用式(4-4-15)替换式(4-4-13)中的 $\phi_{ii}(m)$ 时,得到

$$\Phi_{ii}(f) = \sigma_i^2 + \mu_i^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fmT} \quad (4-4-16)$$

式(4-4-16)中的和式项是以 $1/T$ 为周期的周期(函数),它可以看做面积为 $1/T$ 的冲激序列的指数型傅里叶级数。因此,式(4-4-16)也可以写成

$$\Phi_{ii}(f) = \sigma_i^2 + \frac{\mu_i^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad (4-4-17)$$

将式(4-4-17)代入式(4-4-12),可得到在信息符号序列不相关的情况下所期望的 $v(t)$ 的功率密度谱,即

$$\Phi_{vv}(f) = \frac{\sigma_i^2}{T} |G(f)|^2 + \frac{\mu_i^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad (4-4-18)$$

功率密度谱表达式(4-4-18)分成两项是为了强调两种不同类型的谱分量。第一项是连续谱,它的形状取决于信号脉冲 $g(t)$ 的频谱特性;第二项由频率间隔为 $1/T$ 的离散频率分量组成,每一根谱线功率都与在 $f = m/T$ 处测定的 $|G(f)|^2$ 值成正比。注意,当信息符号具有零均值时,即 $\mu_i = 0$,离散频率分量消失。对于所研究的数字调制技术,这个条件通常是所希望的。当信息符号是等可能性的且在复平面上的位置对称时,这个条件满足。因此,通过适当选择所发送的信息序列的特性,系统设计人员就能控制数字调制信号的频谱特性。

例 4-4-1 为了说明 $g(t)$ 对频谱成型的作用,考虑图 4-4-1(a)所示的矩形脉冲。 $g(t)$ 的傅里叶变换是

$$G(f) = AT \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} e^{-j\pi f T}$$

因此

$$|G(f)|^2 = (AT)^2 \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \quad (4-4-19)$$

图 4-4-1(b)说明了这个谱。注意,它在频率轴上 $1/T$ 的整数倍处为零,而且随频率变量的平方成反比衰减。由于 $G(f)$ 中谱零点的结果,式(4-4-18)中除一个离散谱分量之外,所有离散分量消失。因此,当用式(4-4-19)代替 $|G(f)|^2$ 时,式(4-4-18)可简化为

$$\Phi_{vv}(f) = \sigma_i^2 A^2 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 + A^2 \mu_i^2 \delta(f) \quad (4-4-20)$$

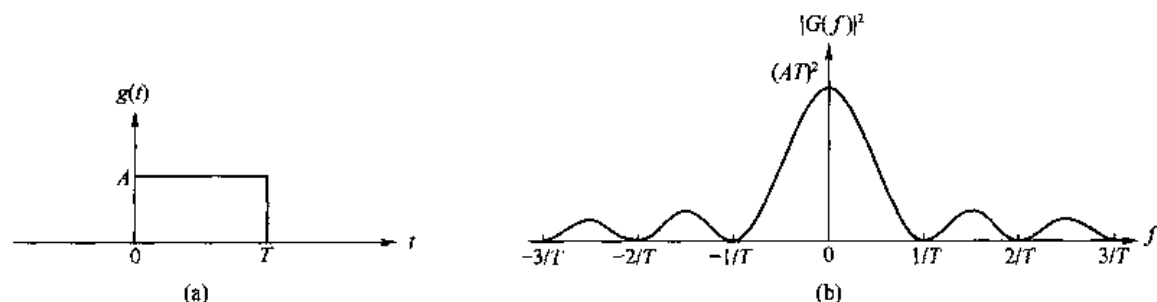


图 4-4-1 矩形脉冲及其能量密度谱 $|G(f)|^2$

例 4-4-2 作为 $g(t)$ 对频谱成形作用的第二个例子, 考虑升余弦脉冲

$$g(t) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right] \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4-4-21)$$

图 4-4-2(a) 示出了这个脉冲, 它的傅里叶变换很容易导出, 有如下形式

$$G(f) = \frac{AT}{2} \frac{\sin \pi f T}{\pi f T (1 - f^2 T^2)} e^{-j\pi f T} \quad (4-4-22)$$

$G(f)$ 幅度的平方如图 4-4-2(b) 所示。注意, 在 $f = n/T$ ($n = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$) 处该谱具有零点。因此, 除 $f = 0$ 和 $f = \pm 1/T$ 点外, 所有离散分量消失。当与矩形脉冲的谱比较时, 升余弦脉冲的谱具有较宽的主瓣, 但拖尾与 f^6 成反比衰减。

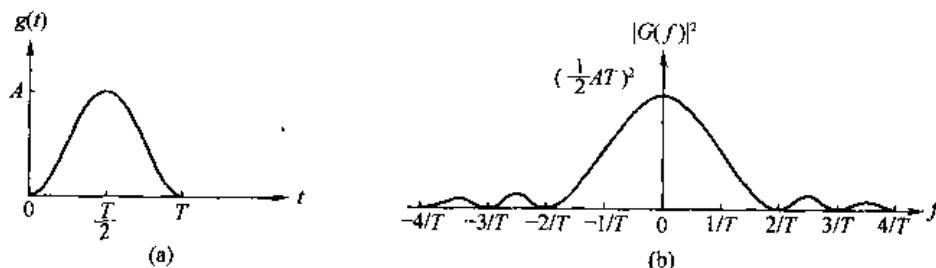


图 4-4-2 升余弦脉冲及其能量密度谱 $|G(f)|^2$

例 4-4-3 为了说明通过对输入信息序列的运算也能达到频谱成形的目的, 考虑一个二进制序列 $\{b_n\}$, 并由此序列形成符号

$$I_n = b_n + b_{n-1} \quad (4-4-23)$$

假定 $\{b_n\}$ 是不相关的随机变量, 且每一个都具有零均值和单位方差。那么, 序列 $\{I_n\}$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} \phi_{ii}(m) &= E(I_n I_{n+m}) \\ &= \begin{cases} 2 & (m = 0) \\ 1 & (m = \pm 1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4-4-24)$$

因此, 输入序列的功率密度谱为

$$\begin{aligned} \Phi_{ii}(f) &= 2(1 + \cos 2\pi f T) \\ &= 4\cos^2 \pi f T \end{aligned} \quad (4-4-25)$$

(低通)已调信号的相应功率密度谱为

$$\Phi_{vv}(f) = \frac{4}{T} |G(f)|^2 \cos^2 \pi f T \quad (4-4-26)$$

4.4.2 CPFSK 和 CPM 信号功率谱

本节将推导 4.4.3 节所述的恒定幅度 CPM 信号的功率密度谱。正如在线性调制信号情况下所做的,首先计算自相关函数及其傅里叶变换。

恒定幅度 CPM 信号可以表示为

$$s(t; \mathbf{I}) = A \cos[2\pi f_c t + \phi(t; \mathbf{I})] \quad (4-4-27)$$

式中

$$\phi(t; \mathbf{I}) = 2\pi h \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k q(t - kT) \quad (4-4-28)$$

序列 $\{I_n\}$ 中的每一个符号取 M 个电平值 $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$ 中的一个。这些符号是统计独立和同分布的,且具有先验概率

$$P_n = P(I_k = n) \quad (n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)) \quad (4-4-29)$$

式中 $\sum_n P_n = 1$ 。脉冲 $g(t) = q'(t)$ 在 $[0, LT]$ 区间之外为零,当 $t < 0$ 时 $q(t) = 0$; $t > LT$ 时 $q(t) = 1/2$ 。

等效低通信号

$$v(t) = e^{j\phi(t; \mathbf{I})}$$

的自相关函数是

$$\phi_{vv}(t + \tau; t) = \frac{1}{2} E \left[\exp \left(j 2\pi h \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k [q(t + \tau - kT) - q(t - kT)] \right) \right] \quad (4-4-30)$$

首先,将指数中的和式表示为指数的乘积,结果是

$$\phi_{vv}(t + \tau; t) = \frac{1}{2} E \left(\prod_{k=-\infty}^{\infty} \exp \{ j 2\pi h I_k [q(t + \tau - kT) - q(t - kT)] \} \right) \quad (4-4-31)$$

其次,对数据符号 $\{I_n\}$ 求数学期望。由于这些符号是统计独立的,得到

$$\phi_{vv}(t + \tau; t) = \frac{1}{2} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ odd}}}^{M-1} P_n \exp \{ j 2\pi h n [q(t + \tau - kT) - q(t - kT)] \} \right) \quad (4-4-32)$$

最后求得平均自相关函数为

$$\bar{\phi}_{vv}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_{vv}(t + \tau; t) dt \quad (4-4-33)$$

虽然式 (4-4-32) 的乘积式中含有无穷多个因式,但对于 $t < 0$ 和 $t > LT$ 的脉冲 $g(t) = q'(t) = 0$ 且 $t < 0$ 时 $q(t) = 0$ 。因此,在乘积式中只有有限项具有非零指数,式 (4-4-32) 可以大大简化。此外,如果令 $\tau = \xi + mT$, 式中 $0 \leq \xi < T$ 且 $m = 0, 1, \dots$, 则式 (4-4-33) 的平均自相关函数可简化为

$$\begin{aligned} & \bar{\phi}_{vv}(\xi + mT) \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \prod_{k=t-L}^{m+1} \left(\sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ odd}}}^{M-1} P_n \exp \{ j 2\pi h n [q(t + \xi - (k-m)T) - q(t - kT)] \} \right) dt \end{aligned} \quad (4-3-34)$$

让我们集中考虑 $\xi + mT \geq LT$ 时 $\bar{\phi}(\xi + mT)$ 的情况。在这种情况下, 式(4-4-34)可以表示为

$$\bar{\phi}_{vv}(\xi + mT) = [\phi(jh)]^{m-L} \lambda(\xi) \quad (m \geq L, \quad 0 \leq \xi < T) \quad (4-4-35)$$

式中 $\phi(jh)$ 是随机序列 $\{I_n\}$ 的特征函数, 其定义为

$$\begin{aligned} \phi(jh) &= E(e^{j\pi h I_n}) \\ &= \sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ odd}}}^{M-1} P_n e^{j\pi h n} \end{aligned} \quad (4-4-36)$$

而 $\lambda(\xi)$ 是平均自相关函数的剩余部分, 可表示为

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) &= \frac{1}{2T} \int_0^T \prod_{k=1-L}^0 \left(\sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ odd}}}^{M-1} P_n \exp \left\{ j2\pi h n \left[\frac{1}{2} - q(t - kT) \right] \right\} \right) \\ &\quad \times \prod_{k=1-L}^{M-1} \left(\sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ odd}}}^{M-1} P_n \exp [j2\pi h n q(t + \xi - kT)] \right) dt \quad (m \geq L) \end{aligned} \quad (4-4-37)$$

因此, $\bar{\phi}_{vv}(\tau)$ 可以分解成 $\lambda(\xi)$ 与 $\phi(jh)$ 的乘积, 正如式(4-4-35)在 $\tau = \xi + mT \geq LT$ 及 $0 \leq \xi < T$ 的情况下那样。这个性质将在下面用到。

$\bar{\phi}_{vv}(\tau)$ 的傅里叶变换导出平均功率密度谱为

$$\begin{aligned} \Phi_{vv}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &= 2\text{Re} \left[\int_0^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] \end{aligned} \quad (4-4-38)$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau &= \int_0^{LT} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \\ &\quad + \int_{LT}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \end{aligned} \quad (4-4-39)$$

借助式(4-4-35), 在 $LT \leq \tau < \infty$ 范围内的积分可以表示为

$$\int_{LT}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \sum_{m=L}^{\infty} \int_{mT}^{(m+1)T} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (4-4-40)$$

令 $\tau = \xi + mT$, 则式(4-4-40)变成

$$\begin{aligned} \int_{LT}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau &= \sum_{m=L}^{\infty} \int_0^T \bar{\phi}_{vv}(\xi + mT) e^{-j2\pi f (\xi + mT)} d\xi \\ &= \sum_{m=L}^{\infty} \int_0^T \lambda(\xi) [\phi(jh)]^{m-L} e^{-j2\pi f (\xi + mT)} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n(jh) e^{-j2\pi f nT} \int_0^T \lambda(\xi) e^{-j2\pi f (\xi + LT)} d\xi \end{aligned} \quad (4-4-41)$$

特征函数的一个性质是 $|\phi(jh)| \leq 1$ 。对 $|\phi(jh)| \leq 1$ 的 h 值, 在式(4-4-41)中的和式收敛且为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi^n(jh) e^{-j2\pi f nT} = \frac{1}{1 - \phi(jh) e^{-j2\pi f T}} \quad (4-4-42)$$

在这种情况下, 式(4-4-41)简化为

$$\int_{LT}^{\infty} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{1}{1 - \phi(jh) e^{-j2\pi f T}} \int_0^T \bar{\phi}_{vv}(\xi + LT) e^{-j2\pi f (\xi + LT)} d\xi \quad (4-4-43)$$

通过合并式(4-4-38)、式(4-4-39)和式(4-4-43),可得到 CPM 信号的功率密度谱为

$$\Phi_{vv}(f) = 2\text{Re}\left[\int_0^{LT} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau + \frac{1}{1 - \phi(jh) e^{j2\pi fT}} \int_{LT}^{(L+1)T} \bar{\phi}_{vv}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau\right] \quad (4-4-44)$$

这就是 $|\phi(jh)| < 1$ 时期望的结果。通常,功率密度谱可以通过式(4-4-44)进行数值计算。 $0 \leq \tau \leq (L+1)T$ 范围内的平均自相关函数 $\bar{\phi}_{vv}(\tau)$ 也可以由式(4-4-34)进行数值计算。

对于 $|\phi(jh)| = 1$ 的 h 值,例如 $h = K$,其中 K 是整数,置

$$\phi(jh) = e^{j2\pi v} \quad (0 \leq v < 1) \quad (4-4-45)$$

那么,式(4-4-41)中的和式变成

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j2\pi T(f-v/T)n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{v}{T} - \frac{n}{T}\right) - j \frac{1}{2} \cos \pi T \left(f - \frac{v}{T}\right) \quad (4-4-46)$$

因此,功率密度谱包含冲激,其位于频率

$$f_n = \frac{n + v}{T} \quad (0 \leq v < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4-4-47)$$

将式(4-4-46)的结果与式(4-4-41)和式(4-4-39)合并,可得到完整的功率密度谱,其包括连续谱分量和离散谱分量。

回到 $|\phi(jh)| < 1$ 的情况。当符号是等概率时,即

$$P_n = \frac{1}{M} \quad (\text{对于所有 } n)$$

特征函数简化为

$$\begin{aligned} \phi(jh) &= \frac{1}{M} \sum_{\substack{n=-(M-1) \\ n \text{ odd}}}^{M-1} e^{j\pi h n} \\ &= \frac{1}{M} \frac{\sin M\pi h}{\sin \pi h} \end{aligned} \quad (4-4-48)$$

注意,在这种情况下, $\phi(jh)$ 是实的,而且式(4-4-34)中的平均自相关函数可以简化为

$$\bar{\phi}_{vv}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_0^{T-(\tau/T)} \prod_{k=1}^L \frac{1}{M} \frac{\sin 2\pi h M [q(t+\tau-kT) - q(t-kT)]}{\sin 2\pi h [q(t+\tau-kT) - q(t-kT)]} dt \quad (4-4-49)$$

相应的功率密度谱表达式简化为

$$\begin{aligned} \Phi_{vv}(f) &= 2 \left[\int_0^{LT} \bar{\phi}_{vv}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \right. \\ &\quad + \frac{1 - \phi(jh) \cos 2\pi fT}{1 + \phi^2(jh) - 2\phi(jh) \cos 2\pi fT} \int_{LT}^{(L+1)T} \bar{\phi}_{vv}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \\ &\quad \left. - \frac{\phi(jh) \sin 2\pi fT}{1 + \phi^2(jh) - 2\phi(jh) \cos 2\pi fT} \int_{LT}^{(L+1)T} \bar{\phi}_{vv}(\tau) \sin 2\pi f\tau d\tau \right] \quad (4-4-50) \end{aligned}$$

1. CPFSK 的功率密度谱

当脉冲形状 $g(t)$ 是矩形且在 $[0, T]$ 区间之外为零时,由式(4-4-50)可以得到功率密度谱的封闭形式的表达式。在这种情况下,对于 $0 \leq t \leq T$, $q(t)$ 是线性的。所得到的功率谱可表示为

$$\Phi_{vv}(f) = T \left[\frac{1}{M} \sum_{n=1}^M A_n^2(f) + \frac{2}{M^2} \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M B_{nm}(f) A_n(f) A_m(f) \right] \quad (4-4-51)$$

式中

$$\Lambda_n(f) = \frac{\sin \pi \left[fT - \frac{1}{2}(2n-1-M)h \right]}{\pi \left[fT - \frac{1}{2}(2n-1-M)h \right]}$$

$$B_{nm}(f) = \frac{\cos(2\pi fT - \alpha_{nm}) - \psi \cos \alpha_{nm}}{1 + \psi^2 - 2\psi \cos 2\pi fT}$$

$$\alpha_{nm} = \pi h(m+n-1-M)$$

$$\psi \equiv \psi(jh) = \frac{\sin M\pi h}{M \sin \pi h} \quad (4-4-52)$$

图 4-4-3 至图 4-4-5 中画出了 $M=2, 4$ 和 8 的功率密度谱, 它是归一化频率 fT 的函数, 且以调制指数 $h=2f_dT$ 为参数。注意, 在这些图中只示了一半占用带宽, 原点相当于载波 f_c 。这些图说明 $h < 1$ 时 CPFSK 的谱相对比较平滑且受到适当的限制。当 h 趋近 1 时, 谱出现尖峰形, 而且当 $|\psi|=1, h=1$ 时, 在 M 个频率处出现冲激。当 $h > 1$ 时, 谱变得更宽。在使用 CPFSK 的通信系统中, 为了节省带宽, 设计调制指数 $h < 1$ 。

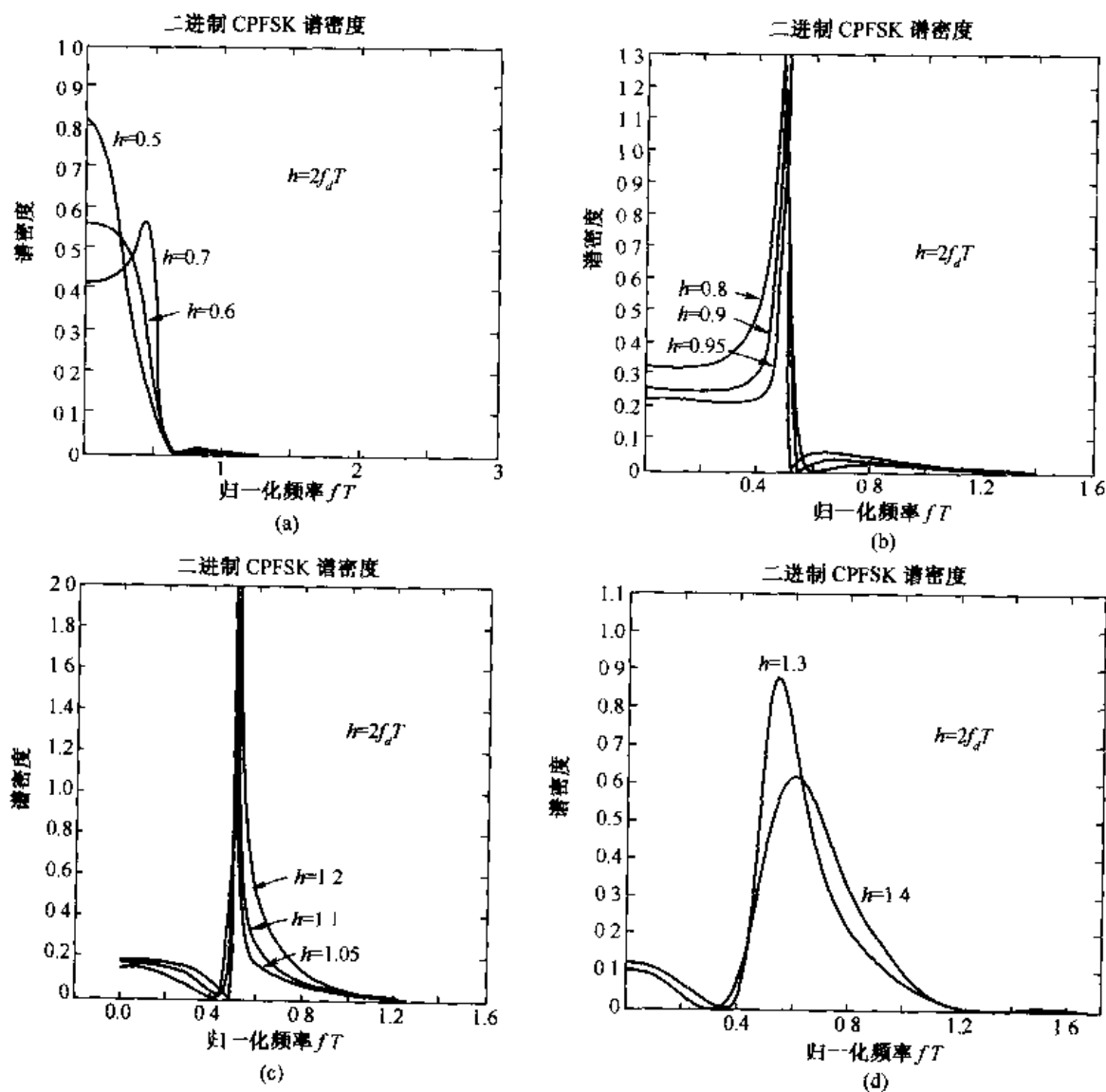


图 4-4-3 二进制 CPFSK 的功率密度谱

具有 $h=1/2$ (或 $f_d=1/4T$) 及 $\psi=0$ 的二进制 CPFSK 的特例相当于 MSK。在这种情况下,信号的谱为

$$\Phi_{vv}(f) = \frac{16A^2T}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\pi fT}{1-16f^2T^2} \right)^2 \quad (4-4-53)$$

这里,式(4-4-52)中的信号幅度 $A=1$ 。比较起来,具有持续时间 T 的矩形脉冲 $g(t)$ 的四相偏移(正交)PSK(OQPSK)的谱为

$$\Phi_{vv}(f) = A^2T \left(\frac{\sin \pi fT}{\pi fT} \right)^2 \quad (4-4-54)$$

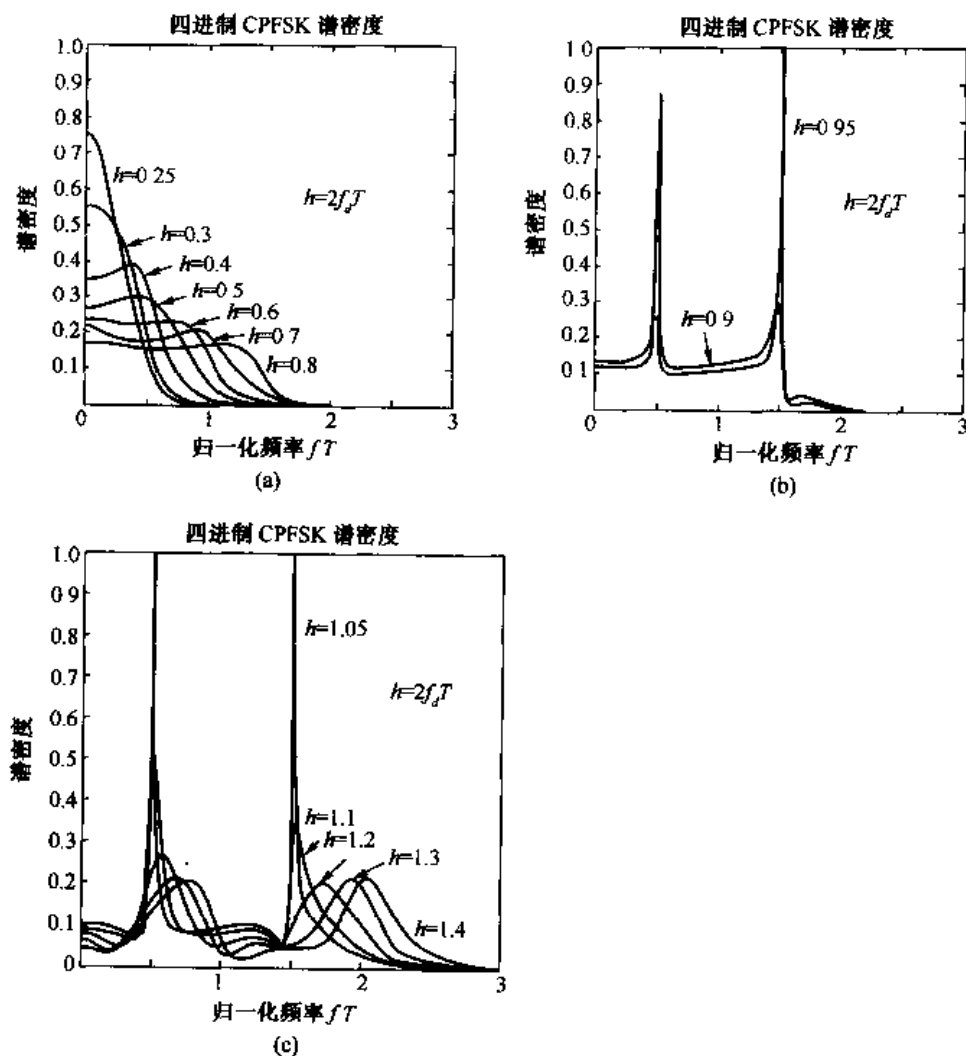


图 4-4-4 四进制 CPFSK 的功率密度谱

如果要比较这些频谱特性,应当用比特率或比特间隔 T_b 将频率变量归一化。由于 MSK 是二进制 FSK,在式(4-4-53)中 $T=T_b$ 。另一方面,在 OQPSK 中 $T=2T_b$,所以式(4-4-54)变成

$$\Phi_{vv}(f) = 2A^2T_b \left(\frac{\sin 2\pi fT_b}{2\pi fT_b} \right)^2 \quad (4-4-55)$$

图 4-4-6 说明了 MSK 和 OQPSK 的谱。注意,MSK 的主瓣比 OQPSK 的宽 50%,然而 MSK 的旁瓣下降得相当快。例如,如果比较含有总功率 99% 的带宽 W ,会发现 MSK 的 $W=$

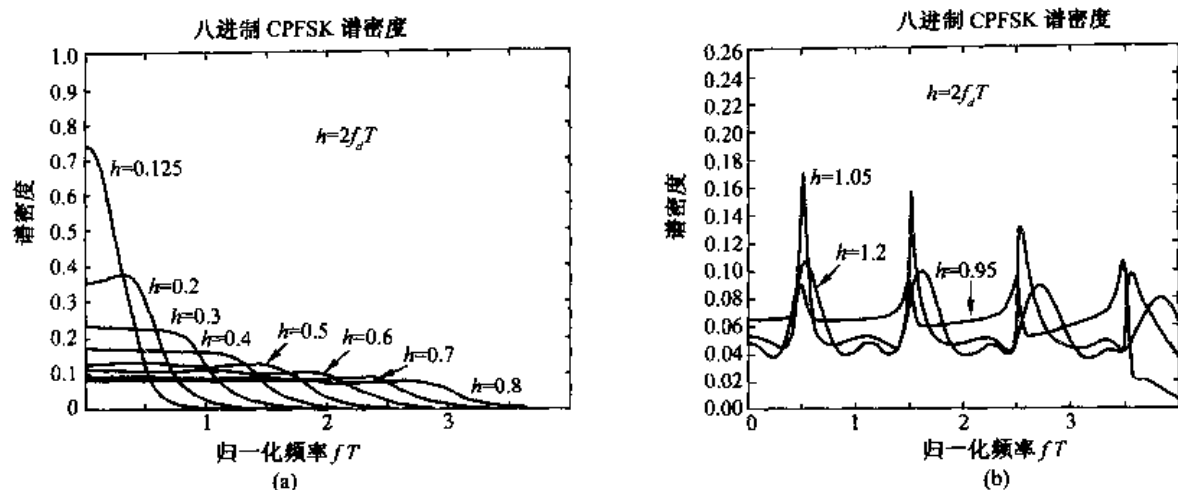


图 4-4-5 八进制 CPFSK 的功率密度谱

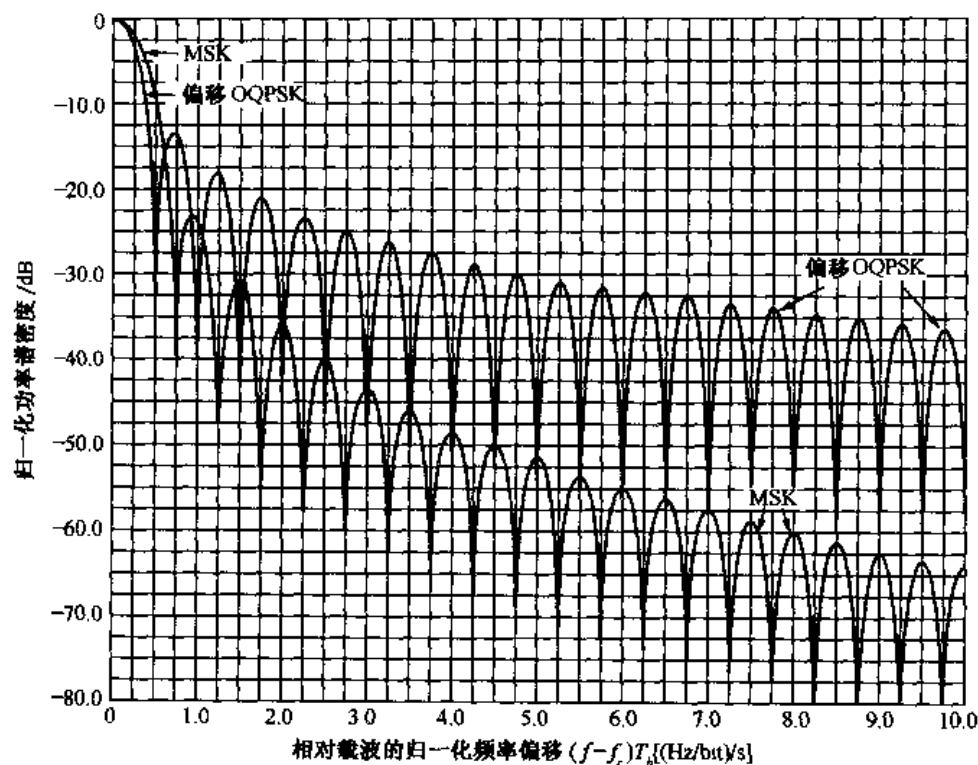


图 4-4-6 MSK 和偏移 QPSK 的功率密度谱

$1.2/T$ 而 OQPSK 的 $W \approx 8/T_b$ 。因此,按照 $fT_b = 1$ 以上的部分带外功率观点来看,MSK 占用较窄的频谱。OQPSK 和 MSK 的部分带外功率的图形如图 4-4-7 所示。注意,MSK 比 QPSK 更具有显著的带宽有效性,这种有效性是造成 MSK 在许多数字通信系统中流行的重要原因。

通过减小调制指数可达到比 MSK 更高的带宽效率,然而 FSK 信号不再是正交的,而且差错概率将增加。

2.CPM 的频谱特性

一般 CPM 占用带宽取决于调制指数 h 的选择、脉冲形状 $g(t)$ 和信号的数目 M 。正如对 CPFSK 的观察,小 h 值导致 CPM 信号占用带宽较小,而大 h 值导致信号具占用带宽大。对于更一般的 CPM 信号,也是这种情况。

采用平滑的脉冲,例如升余弦脉冲,其形式为

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{LT} \right) & (0 \leq t \leq LT) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (4-4-56)$$

式中对全响应有 $L=1$,而对部分响应有 $L>1$,这导致较小的带宽占用以及由此比采用矩形脉冲得到更大的带宽效率。例如,图 4-4-8 说明了当 $h=1/2$ 时具有不同部分响应升余弦(LRC)脉冲的二进制 CPM 功率密度谱。为比较起见,图中示出了二进制 CPFSK 的谱。注意,当 L 增加时,脉冲 $g(t)$ 更平滑,而且相应的信号频谱占用减少。

图 4-4-9 说明了改变 CPM 信号的调制指数的影响,图中的例子是 $M=4$ 且由式(4-4-56)给出升余弦脉冲在 $L=3$ 的情况下画出的。注意,这些频谱特性与前而所说的 CPFSK 相似,但由于采用了更平滑的脉冲形状,这些频谱较窄。图 4-4-10 所示为有不同 h 值的两幅度 CPFSK 的部分带外功率。

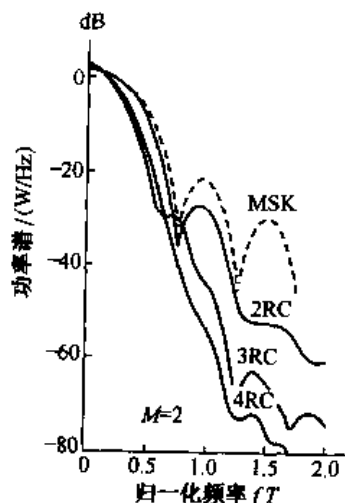


图 4-4-8 具有 $h=1/2$ 及不同脉冲形状二进制 CPM 的功率密度谱

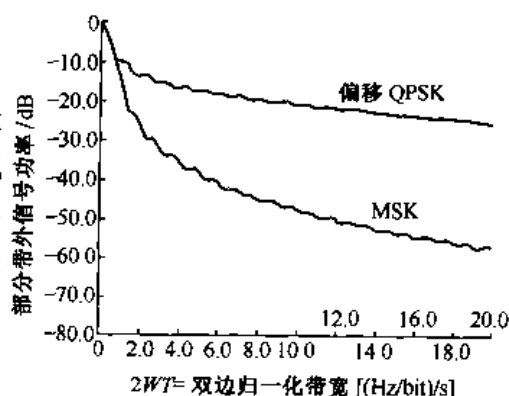


图 4-4-7 部分带外功率(归一化双边带宽 $= 2WT$)

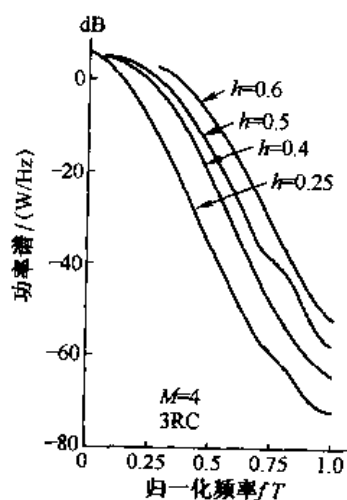


图 4-4-9 具有 3RC 及不同调制指数的 $M=4$ 的 CPM 的功率密度谱

4.4.3 有记忆调制信号功率谱

在上两节中,我们确定了无记忆线性调制信号及有记忆非线性角调信号(例如 CPFSK 和 CPM)的频谱特性。本节将研究有记忆线性调制信号的频谱特性,该信号可用马尔可夫链建模。在 4.3.2 节中已经谈到这样的信号,描述过几种类型的带通信号。

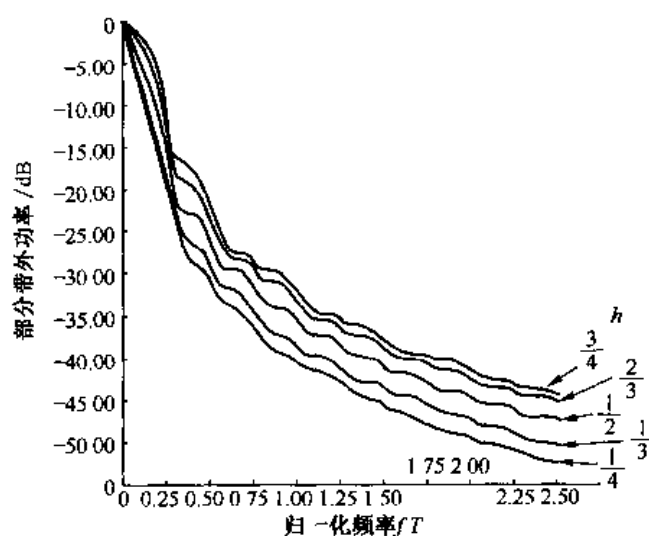


图 4-4-10 两幅度 CPFSK 的部分带外功率

由马尔可夫链生成的数字调制信号的功率密度谱,可以采用前一节给出的基本过程来推导。因此,可先确定自相关函数,然后求它的傅里叶变换来得到功率密度谱。对于具有转移概率矩阵 \mathbf{P} 的马尔可夫链产生的信号,已调信号可以表示成一般形式(Titsworth & Welch, 1961 年)

$$\Phi(f) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^K p_i S_i \left(\frac{n}{T} \right) \right|^2 \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K p_i |S'_i(f)|^2 + \frac{2}{T} \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i S'_i{}^*(f) S'_j(f) P_{ij}(f) \right] \quad (4-4-57)$$

式中, $S_i(f)$ 是信号波形 $s_i(t)$ 的傅里叶变换。

$$s'_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^K p_k s_k(t)$$

$P_{ij}(f)$ 是离散时间序列 $p_{ij}(n)$ 的傅里叶变换,其定义为

$$P_{ij}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) e^{-j2\pi n f T} \quad (4-4-58)$$

且 K 是调制器的状态数。 $p_{ij}(n)$ 表示在 $s_i(t)$ 发送之后,信号 $s_j(t)$ 发送 n 个信号传输间隔的概率。因此, $|p_{ij}(n)|$ 是转移概率矩阵 \mathbf{P}^n 中的转移概率。注意 $p_{ij}(1) = p_{ij}$ 。

当在调制方式中无记忆时,在每一个信号传输间隔发送的信号波形与先前信号传输间隔发送的波形无关。如果转移概率矩阵由

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{bmatrix} \quad (4-4-59)$$

代替,加上 $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$ (对所有 $n \geq 1$) 的条件时,结果产生的信号功率密度谱仍然可以表示成式 (4-4-57) 的形式。在这些条件下,功率密度谱的表达式变成仅仅是平稳状态概率 $\{p_i\}$ 的一个函数,因此可以简化为

$$\begin{aligned}\Phi(f) &= \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^K p_i S_i \left(\frac{n}{T} \right) \right|^2 \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K p_i (1 - p_i) |S_i(f)|^2 \\ &\quad - \frac{2}{T} \sum_{i=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^K p_i p_j \operatorname{Re}[S_i(f) S_j^*(f)]\end{aligned}\quad (4-4-60)$$

我们看到,由式(4-4-18)给出的无记忆线性调制功率密度谱的结果可以看做式(4-4-60)的一个特例,其中除了一组传送数字信息的标尺因子之外(参见习题 4-32),所有波形是相同的。

由式(4-4-57)或式(4-4-60)给出的功率密度谱表达式中的第一项由离散频率分量组成,当

$$\sum_{i=1}^K p_i S_i \left(\frac{n}{T} \right) = 0 \quad (4-4-61)$$

时,线谱消失。

在设计实际的数字通信系统中,通常要加入式(4-4-61)作为条件。通过对信号传输波形的适当选择,这个条件很容易满足(参见习题 4-33)。

现在,我们来确定 4.3.2 节描述的基带调制信号的功率密度谱。首先, NRZ 信号可由两个波形 $s_1(t) = g(t)$ 和 $s_2(t) = -g(t)$ 表征,其中 $g(t)$ 是幅度为 A 的矩形脉冲。对于 $K=2$, 式(4-4-60)简化为

$$\Phi(f) = \frac{(2p-1)^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| G \left(\frac{n}{T} \right) \right|^2 \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) + \frac{4p(1-p)}{T} |G(f)|^2 \quad (4-4-62)$$

式中

$$|G(f)|^2 = (AT)^2 \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \quad (4-4-63)$$

可以看到,当 $p=1/2$ 时,线谱消失且 $\Phi(f)$ 简化为

$$\Phi(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \quad (4-4-64)$$

NRZI 信号可由转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4-4-65)$$

表征。

注意,在这种情况下,对于所有 $n \geq 1$, $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$ 。因此,由式(4-4-62)给出的功率密度谱的特殊形式也适用于这种调制方式。因而, NRZI 信号的功率密度谱与 NRZ 信号的谱相同。

延迟调制具有转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-4-66)$$

及平稳状态概率 $p_i = 1/4 (i = 1, 2, 3, 4)$ 。 \mathbf{P} 的幂可利用关系式

$$\mathbf{P}^4 \mathbf{p} = -\frac{1}{4} \mathbf{p} \quad (4-4-67)$$

得到, 式中 \mathbf{p} 是信号相关矩阵, 其元素

$$\rho_{ij} = \frac{1}{T} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt \quad (4-4-68)$$

式中的 4 个信号 $\{s_i(t), i = 1, 2, 3, 4\}$ 如图 4-3-15 所示。由于

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-4-69)$$

因此, \mathbf{P} 的幂可由关系式

$$\mathbf{P}^{k+4} \mathbf{p} = -\frac{1}{4} \mathbf{P}^k \mathbf{p} \quad (k > 1) \quad (4-4-70)$$

生成。在式(4-4-57)中利用式(4-4-66), (4-4-69)及(4-4-70)可以得到延迟调制的功率密度谱如下

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\psi^2(17 + 8\cos 8\psi)} [23 - 2\cos\psi - 22\cos 2\psi - 12\cos 3\psi + 5\cos 4\psi + 12\cos 5\psi + 2\cos 6\psi - 8\cos 7\psi + 2\cos 8\psi] \quad (4-4-71)$$

式中, $\psi = \pi fT$ 。

图 4-4-11 说明了这些基带信号的谱。可以看到, NRZ 和 NRZI 信号的谱在 $f=0$ 处为峰值。延迟调制具有较窄的谱及比较小的零频成分, 它的带宽占用显著小于 NRZ 信号的占用。这两个特性使得延迟调制对于不能通过直流成分的信道, 例如磁记录介质, 是很具吸引力的选择。

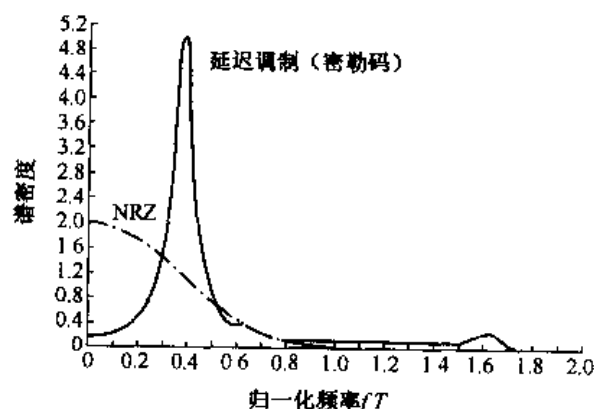


图 4-4-11 密勒码(延迟调制)和 NRZ/NRZI 基带信号的功率密度谱(单边)

4.5 文献与参考资料

本章给出的信号与系统特性在对各种信道模型的最佳调制/解调和编码/译码技术的设计中是非常有用的, 特别是本章介绍的数字调制方式在数字通信系统中有着广泛的应用。下一

章将介绍这些信号的最佳解调技术及其在加性高斯白噪声信道中的性能。关于信号表征,可参考弗兰克斯(Franks,1969年)的著作。

在数字通信系统设计中特别重要的是数字调制信号的频谱特性,本章对此进行了较深入地阐述。CPM是调制技术中最重要的一种,这是由于它对带宽的有效利用。由于这个原因,许多研究人员对它进行了广泛地研究,并在技术文献上发表了大量论文。对CPM最全面的综合论述,包括其性能和频谱特性,可以在安德森(Anderson,1986年)等人的著作中找到。除这本书之外,松德贝里(Sundberg,1986年)写的文章阐述了基本概念,并综述了各种CPM技术的性能特性。

劳伦特(Laurent,1986年)研究了二进制调制CPM的线性表示法。蒙加利和摩尔利(Menggali和Morelli,1995年)将此扩展到M元CPM信号。里莫迪(Rimoldi,1988年)证明了CPM系统可以分解成连续相位和无记忆调制器。这篇文章包含关于此课题已发表论文的100多篇参考文献。

有大量的参考文献论述CPFSK和CPM的频谱特性。作为一个参考,应当知道MSK是由多尔兹和希尔德(Dolz & Heald)在1961年发明的。CPFSK和CPM功率密度谱的早期研究工作是由贝内特和赖斯(Bennett & Rice,1963年)、安德森和扎尔茨(Anderson & Salz,1965年)以及贝内特和戴维(Bennett & Davey,1965年)完成的。勒基(Lucky,1968年)等人的著作也包含CPFSK频谱特性的论述。在松德贝里(Sundberg,1986年)论文的参考文献中列出了许多最近的研究成果。由IEEE通信汇刊出版的高效带宽调制及编码专刊(1981年3月)中,有论述CPM频谱特性的论文。

韦伯(Weber,1978年)等人研究了MSK推广到多幅度的一般化问题。马利根(Mulligan,1988年)提出多幅度与一般CPM相结合的建议,研究了它的频谱特性以及在高斯噪声有无编码情况下的错误概率性能。

习题

4-1 试证明以下希尔伯特变换的性质:

- (a) 若 $x(t) = x(-t)$, 则 $\hat{x}(t) = -\hat{x}(-t)$ 。
- (b) 若 $x(t) = -x(-t)$, 则 $\hat{x}(t) = \hat{x}(-t)$ 。
- (c) 若 $x(t) = \cos\omega_0 t$, 则 $\hat{x}(t) = \sin\omega_0 t$ 。
- (d) 若 $x(t) = \sin\omega_0 t$, 则 $\hat{x}(t) = -\cos\omega_0 t$ 。
- (e) $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$ 。

(f) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}^2(t)dt$ 。

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = 0$ 。

4-2 设 $x(t)$ 是一个平稳随机过程,其自相关函数为 $\phi_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$,谱密度为 $\Phi_{xx}(f)$ 。试证明 $\phi_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = \phi_{xx}(\tau)$, $\phi_{\hat{x}x}(\tau) = -\hat{\phi}_{xx}(\tau)$ 和 $\Phi_{\hat{x}\hat{x}}(f) = \Phi_{xx}(f)$ 。

4-3 设 $n(t)$ 为零均值平稳窄带过程,可用式(4-1-37), (4-1-38)或(4-1-39)表示,其等效低通过程 $z(t) = x(t) + jy(t)$ 的自相关函数定义为:

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} E[z^*(t)z(t+\tau)]$$

(a) 证明

$$E[z(t)z(t+\tau)] = 0$$

(b) 假设 $\phi_{zz}(\tau) = N_0\delta(\tau)$, 且令

$$V = \int_0^T z(t)dt$$

试求 $E(V^2)$ 和 $E(VV^*) = E(|V|^2)$ 。

4-4 试求随机过程

$$x(t) = A \sin(2\pi f_c t + \theta)$$

的自相关函数, 式中 f_c 为常数, θ 为均匀分布的相位, 即

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

4-5 假定 $s(t)$ 为实值带通信号, 试证明 $s_i(t)$ 一般为复值信号, 试求 $s_i(t)$ 为实信号的条件。

4-6 设 $s(t)$ 是实或复值信号, 且可以表示为标准正交基函数 $\{f_n(t)\}$ 的线性组合, 即

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=1}^K s_k f_k(t)$$

式中

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) f_m^*(t) dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$$

若要求 $\hat{s}(t)$ 使下列能量最小

$$\mathcal{E}_e = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - \hat{s}(t)|^2 dt$$

试求 $\hat{s}(t)$ 展开式中的系数 $\{s_k\}$, 以及相应残余误差 \mathcal{E}_e 的表达式。

4-7 设 $\{s_{im}(t)\}$ 为 M 个复值信号波形集, 试推导格拉姆-施密特 (Gram-Schmidt) 过程的方程, 以得到 $N \leq M$ 个标准正交信号的波形。

4-8 试求图 4-21 所示 4 个信号波形 $\{s_i(t)\}$ 之间的相关系数 ρ_{km} , 以及相应的欧氏 (Euclidean) 距离。

4-9 已知一组 M 个正交信号波形 $s_m(t)$, $1 \leq m \leq M$, $0 \leq t \leq T$, 它们具有相同的能量 \mathcal{E} 。现定义一组新的 M 个波形

$$s'_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M s_k(t) \quad (1 \leq m \leq M, 0 \leq t \leq T)$$

试证明这 M 个信号波形 $\{s'_m(t)\}$ 有相同的能量, 即

$$\mathcal{E}' = (M-1)\mathcal{E}/M$$

并且是等相关的, 相关系数为

$$\rho_{mn} = \frac{1}{\mathcal{E}'} \int_0^T s'_m(t) s'_n(t) dt = -\frac{1}{M-1}$$

4-10 考察图 P4-10 所示的 3 个波形 $f_n(t)$ 。

(a) 试证明这些波形是标准正交的。

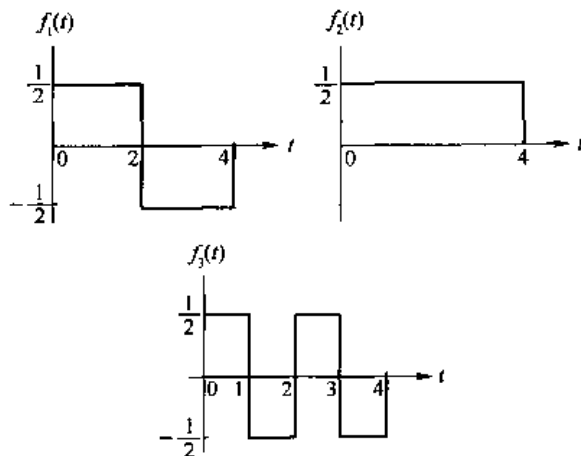


图 P4-10

(b) 如果

$$x(t) = \begin{cases} -1 & (0 \leq t < 1) \\ 1 & (1 \leq t < 3) \\ -1 & (3 \leq t < 4) \end{cases}$$

试将 $x(t)$ 表示为 $f_n(t)$ ($n=1,2,3$) 的线性组合, 并求加权系数。

4-11 考察图 P4-11 所示的 4 个波形。

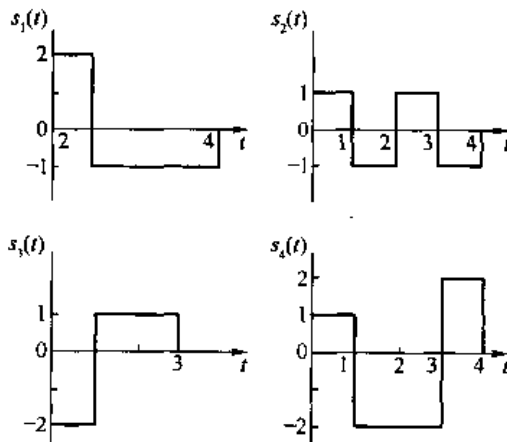


图 P4-11

(a) 确定波形的维数及基函数集。

(b) 利用基函数表示这 4 个波形, 该波形由向量 s_1, s_2, s_3 和 s_4 标记。

(c) 试求任意两个向量之间的最小距离。

4-12 试对图 P4-12 所示的 4 个信号求标准正交函数集。

4-13 低通高斯随机过程 $x(t)$ 的功率密度谱为

$$\phi(f) = \begin{cases} N_0 & (|f| < B) \\ 0 & (|f| > B) \end{cases}$$

试求 $y(t) = x^2(t)$ 的功率密度谱和自相关函数。

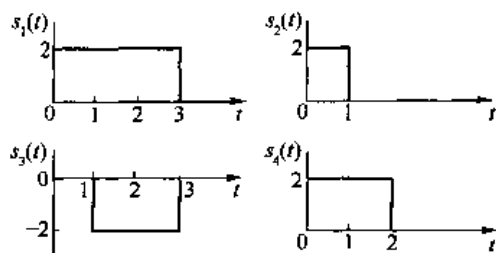


图 P4-12

4-14 等效低通数字已调信号为

$$u(t) = \sum_n [a_n g(t - 2nT) - jb_n g(t - 2nT - T)]$$

式中 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个统计独立的二进制数字序列, $g(t)$ 为正弦脉冲

$$g(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/2T) & (0 < t < 2T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

这种信号可以看做四相 PSK, 且脉冲形状为正弦波形的半个周期。信息序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 各以速率 $1/2T$ 比特/秒传输, 故组合传输速率为 $1/T$ 比特/秒。两个序列在时间上交错 T 秒传输, 所以信号 $u(t)$ 又叫参差四相 PSK。

(a) 试证明包络 $|u(t)|$ 是一个与同相分量上的信息 a_n 和正交分量上的信息 b_n 无关的常数。换言之, 用于传输信号的载波振幅是个常数。

(b) 试求 $u(t)$ 的功率密度谱。

(c) 试将由 (b) 得到的功率密度谱与 MSK 信号的功率密度谱相比较, 能从中得到什么结论?

4-15 考虑一个四相 PSK 信号, 它可表示为等效低通信号

$$u(t) = \sum_n I_n g(t - nT)$$

式中, I_n 是取自具有相等概率的 4 个可能值 $\sqrt{1/2} (\pm 1 \pm j)$ 之一。信息符号序列 $\{I_n\}$ 是统计独立的。

(a) 当

$$g(t) = \begin{cases} A & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

时, 试求 $u(t)$ 的概率密度谱并画图。

(b) 当

$$g(t) = \begin{cases} A \sin(\pi t/T) & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

时, 重做 (a) 题。

(c) 以 3 dB 带宽和第一频谱零点的带宽, 比较由 (a) 和 (b) 得到的频谱。

4-16 随机过程 $v(t)$ 定义如下:

$$v(t) = X \cos 2\pi f_c t - Y \sin 2\pi f_c t$$

式中 X 和 Y 是随机变量。

试证明: 当且仅当 $E(X) = E(Y) = 0$, $E(X^2) = E(Y^2)$ 及 $E(XY) = 0$ 时, $v(t)$ 为广

义平稳的。

- 4-17 试对图4-2-1(a)中的信号按 $s_4(t)$, $s_3(t)$, $s_1(t)$ 的次序进行格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)正交化, 得到标准正交函数集 $\{f_m(t)\}$ 。试利用标准正交函数集 $\{f_m(t)\}$ 将信号 $\{s_n(t)\}$ 表示为向量形式, 并求各信号的能量。
- 4-18 如图 P4-18 所示, 由 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 标准正交基函数, 试求 4 个信号 $s_k(t)$ ($k=1, 2, 3, 4$) 的信号空间表示形式。画出信号空间图, 并证明这种信号集等价于四相 PSK 信号集。

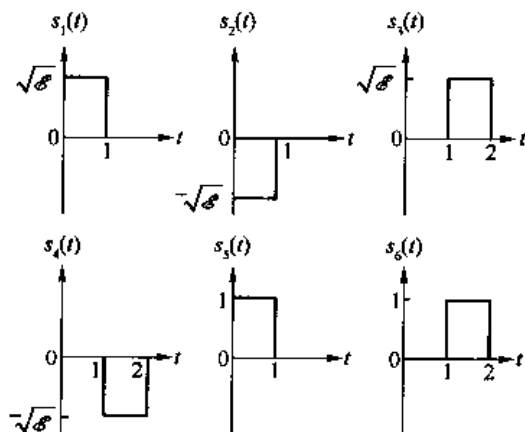


图 P4-18

- 4-19 $\pi/4$ -QPSK 可以看做偏移 $\pi/4$ 弧度的两个 QPSK 系统。
(a) 画出 $\pi/4$ -QPSK 信号的信号空间图。
(b) 以相应的格雷编码数据比特标示各信号点。
- 4-20 周期平稳过程

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT)$$

的功率密度谱的求法已在 4.4.1 节给出, 即在过程的周期 T 上对自相关函数 $\phi_{vv}(t + \tau, t)$ 求平均, 再对平均自相关函数求傅里叶变换。另一种方法是添加一个在 $0 \leq \Delta \leq T$ 上均匀分布的随机变量 Δ , 将周期平稳过程 $v(t)$ 变为平稳过程 $v_{\Delta}(t)$:

$$v_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT - \Delta)$$

再把 $v(t)$ 的谱密度定义为平稳过程 $v_{\Delta}(t)$ 的自相关函数的傅里叶变换。试通过求 $v_{\Delta}(t)$ 的自相关函数及其傅里叶变换, 导出式(4-4-11)中的结果。

- 4-21 如图 P4-21 所示, 一个 PAM 部分响应信号(PRS)是由序列

$$B_n = I_n + I_{n-1}$$

激励一个带宽为 W 的理想低通滤波器产生的, 序列速率为 $1/T = 2W$ 符号/s。序列 $\{I_n\}$ 由独立且等概取值为 $\{1, -1\}$ 的进制数字组成, 则已滤波的信号为

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n g(t - nT) \quad (T = \frac{1}{2W})$$

- (a) 试画出 $v(t)$ 的信号空间图, 并求每个符号出现的概率。

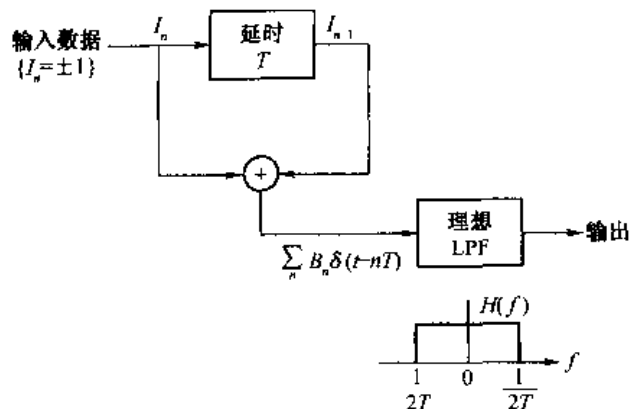


图 P4-21

(b) 试求三电平序列 $\{B_n\}$ 的自相关和功率密度谱。

(c) 序列 $\{B_n\}$ 的信号点构成一个马尔可夫链。试画出该马尔可夫链,并标明各状态间的转移概率。

4-22 PAM 信号的等效低通表达式为

$$u(t) = \sum_n I_n g(t - nT)$$

设 $g(t)$ 为矩形脉冲,且

$$I_n = a_n - a_{n-2}$$

式中, $\{a_n\}$ 是等概出现的不相关二进制 $(1, -1)$ 随机变量序列。

(a) 试求序列 $\{I_n\}$ 的自相关函数。

(b) 试求 $u(t)$ 的功率密度谱。

(c) 如果 a_n 的可能取值为 $(0, 1)$, 试重做(b)。

4-23 试证明 $x(t) = s(t) \cos 2\pi f_c t \pm \hat{s}(t) \sin 2\pi f_c t$ 是一个单边带信号,其中 $s(t)$ 带限于 $B \leq f_c$ Hz, 且 $\hat{s}(t)$ 为其希尔伯特变换。

4-24 二进制 FSK 信号的波形为

$$s_i(t) = \sin \omega_i t \quad (i = 1, 2, 0 \leq t \leq T)$$

式中 $\omega_1 = n\pi/T$ 、 $\omega_2 = m\pi/T$, $n \neq m$, m 和 n 都是任意正整数。试利用 4.4.3 节的结果求二进制 FSK 信号的功率密度谱。假设 $p_1 = p_2 = 1/2$ 。试画出该谱,并将其与 MSK 信号的谱相比较。

4-25 试利用 4.4.3 节的结果求多音 FSK(MFSK)信号的功率密度谱,该信号波形为

$$s_n(t) = \sin \frac{2\pi n t}{T} \quad (n = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T)$$

假设对所有 n , 概率 $p_n = 1/M$ 。试画出功率密度谱。

4-26 正交部分响应信号(QPRS)可由两路习题 4-21 描述的部分响应信号以相位正交组合而成。所以 QPRS 信号可表示为

$$s(t) = \text{Re}[v(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

式中

$$v(t) = v_c(t) + jv_s(t)$$

$$= \sum_n B_n g(t - nT) + j \sum_n C_n g(t - nT)$$

而 $B_n = I_n + I_{n-1}$, $C_n = J_n + J_{n-1}$ 。序列 $\{B_n\}$ 和 $\{C_n\}$ 是独立的, $I_n = \pm 1$, $J_n = \pm 1$, 且等概。

(a) 试画出 QPRS 信号的信号空间图, 并求每种符号出现的概率。

(b) 试求 $v_c(t)$, $v_s(t)$ 和 $v(t)$ 的自相关函数和功率密度谱。

(c) 试画出马尔可夫链模型, 且标出 QPRS 的转移概率。

4-27 试求 MSK 及偏移 QPSK 已调信号的自相关函数, 假定每种已调信号的信息序列都是不相关且零均值的。

4-28 有一种部分响应 CPM, $h = 1/2$, 且

$$g(t) = \begin{cases} 1/4T & (0 \leq t \leq 2T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

试画出相位树图、状态网格图和状态图。

4-29 针对以下两种情况, 试求状态网络图中的终端相位状态的个数。

(a) 全响应二进制 CPFSK, $h = 2/3$ 或 $3/4$ 。

(b) 部分响应 $L = 3$ 二进制 CPFSK, $h = 2/3$ 或 $3/4$ 。

4-30 试证明 16QAM 可以表示为两个四相恒包络信号的叠加, 在相加前对每一分量放大, 即

$$s(t) = G(A_n \cos 2\pi f_c t + B_n \sin 2\pi f_c t) + (C_n \cos 2\pi f_c t + D_n \sin 2\pi f_c t)$$

式中 $\{A_n\}$ 、 $\{B_n\}$ 、 $\{C_n\}$ 和 $\{D_n\}$ 为统计独立二进制序列, 其元素取值为 $\{+1, -1\}$, 且 G 为放大器的增益。试进一步证明该信号等价于

$$s(t) = I_n \cos 2\pi f_c t + Q_n \sin 2\pi f_c t$$

并用 A_n 、 B_n 、 C_n 和 D_n 确定 I_n 和 Q_n 。

4-31 在 CPM 的线性表示法中, 试证明 2^{L-1} 个脉冲 $\{c_k(t)\}$ 的持续时间如下:

$$c_0(t) = 0, \quad t < 0 \text{ 和 } t > (L+1)T$$

$$c_1(t) = 0, \quad t < 0 \text{ 和 } t > (L-1)T$$

$$c_2(t) = c_3(t) = 0, \quad t < 0 \text{ 和 } t > (L-2)T$$

$$c_4(t) = c_5(t) = c_6(t) = c_7(t) = 0, \quad t < 0 \text{ 和 } t > (L-3)T$$

\vdots

$$c_{2^{L-2}}(t) = \cdots = c_{2^{L-1}}(t) = 0, \quad t < 0 \text{ 和 } t > T$$

4-32 式(4-4-18)给出了无记忆线性调制的功率密度谱的表达式。试利用式(4-4-60)推导该表达式, 条件是

$$s_k(t) = I_k s(t) \quad (k = 1, 2, \cdots, K)$$

式中, I_k 是 K 个可能的等概发生的发送符号之一。

4-33 试证明式(4-4-60)中没有线谱分量的充分条件为

$$\sum_{i=1}^K p_i s_i(t) = 0$$

试问该条件是否为必要的? 说明之。

4-34 信息序列 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是一个统计独立同分布(iid)随机变量序列, 每一个随机变量等

概取值 +1 和 -1。该序列采用双相编码方案在基带上传输

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$$

式中 $g(t)$ 如图 P4-34 所示。

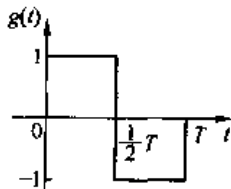


图 P4-34

(a) 试求 $s(t)$ 的功率密度谱。

(b) 假定要在 $f = 1/T$ 处引入一个功率谱零点, 为此采用预编码方案 $b_n = a_n + ka_{n-1}$, 其中 k 是某个常数, 然后利用同样的 $g(t)$ 发送 $\{b_n\}$ 序列。问能否通过选择 k 来在 $f = 1/T$ 处引入频率零点? 如果可以, 问取哪些值及结果的功率谱怎样?

(c) 现在假定要在 $f_0 = 1/4T$ 的整数倍处引入零点, 问能否通过恰当地选取在前一部分中的 k 来实现? 如果不能, 那么你建议采用什么形式的预编码来实现所期望的零点?

4-35 从式(4-4-66)给出的延迟调制(Delay Modulation)转移概率矩阵的定义着手, 试证明关系式

$$\mathbf{P}^4 \mathbf{p} = -\frac{1}{4} \mathbf{p}$$

成立, 因此

$$\mathbf{P}^{k+4} \mathbf{p} = -\frac{1}{4} \mathbf{P}^k \mathbf{p} \quad (k \geq 1)$$

4-36 相位不连续的二进制 FSK 的两个信号波形为

$$s_0(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}} \cos\left[2\pi\left(f - \frac{\Delta f}{2}\right)t + \theta_0\right] \quad (0 \leq t < T)$$

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}} \cos\left[2\pi\left(f + \frac{\Delta f}{2}\right)t + \theta_1\right] \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中 $\Delta f = 1/T \ll f_c$, 而 θ_0 和 θ_1 为在 $(0, 2\pi)$ 区间均匀分布的随机变量, 且信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 是等概的。

(a) 试求 FSK 信号的功率密度谱。

(b) 试证明当 $f \gg f_c$ 时, 功率密度谱以 $1/f^2$ 的形式衰减。

第5章 加性高斯白噪声信道的最佳接收机

第4章介绍了各种类型的调制方法,这些调制方法可以用来通过通信信道传输数字信息。发送端的调制器将数字序列映射成信号波形。

本章将论及在发送信号受到信道高斯噪声相加的影响下,各种调制方法的最佳接收机的设计和性能特征。5.1节介绍无记忆调制信号和有记忆调制信号的处理,5.2节评估各种调制方法的错误概率,5.3节介绍CPM信号的最佳接收机及其性能,5.4节在接收机的信号载波相位未知且作为随机变量的情况下推导最佳接收机,5.5节研究再生中继器在信号传输中的应用并对无线信道进行链路预算分析。

5.1 受加性高斯白噪声恶化信号的最佳接收机

首先,我们为接收机输入信号提出一个数学模型,假定发送机利用 M 个信号波形 $\{s_m(t), m=1,2,\dots,M\}$ 发送数字信息,每一个波形在持续时间为 T 的符号(信号传输)间隔内传输。具体地说,研究信息在 $0 \leq t \leq T$ 区间内的传输。

假定信道以高斯白噪声相加来恶化信号,正如图 5-1-1 所说明的。因此,在 $0 \leq t \leq T$ 间隔内,接收信号可以表示为

$$r(t) = s_m(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5-1-1)$$

式中, $n(t)$ 表示具有功率密度谱 $\Phi_{nn}(f) = \frac{1}{2} N_0$ (W/Hz) 的加性高斯白噪声的样本函数。根据对

$r(t)$ 在信号间隔时间上的观测设计一个接收机,该接收机在使错误概率最小的意义上是最佳的。

将接收机划分为两个部分——信号解调器和检测器是很方便的,如图 5-1-2 所示。信号解调器的功能是将接收波形变换成 n 维向量 $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N]$, 其中 N 是发送信号波形的维数。检测器的功能是根据向量 \mathbf{r} 在 M 个可能信号波形中判定哪一个波形被发送。

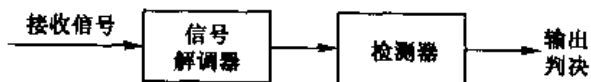


图 5-1-1 通过 AWGN 信道的接收信号模型

图 5-1-2 接收机的结构

下两节将阐述信号解调器的两种实现方法,一种是基于信号相关器的应用,另一种是基于匹配滤波器的应用。最佳检测器跟随在信号解调器之后,它的设计应使错误概率最小。

5.1.1 相关解调器

本节将介绍一个将接收信号和噪声分解成 N 维向量的相关解调器,换言之,接收信号和

噪声可展开成一系列线性加权正交基函数 $\{f_n(t)\}$ 。假设该 N 个基函数构架信号空间,那么可能发送信号集 $\{s_m(t), 1 \leq m \leq M\}$ 中的每一个信号可表示成 $\{f_n(t)\}$ 的加权线性组合。在有噪声的情况下,函数 $\{f_n(t)\}$ 不构建噪声空间。然而我们下面将证明落在信号空间之外的噪声项与信号的检测是无关的。

假设接收信号通过一组并行的 N 个互相关器,这些互相关器主要是计算 $r(t)$ 在 N 个基函数 $\{f_n(t)\}$ 上的投影,如图5-1-3所示。因此

$$\int_0^T r(t) f_k(t) dt = \int_0^T [s_m(t) + n(t)] f_k(t) dt$$

$$r_k = s_{mk} + n_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5-1-2)$$

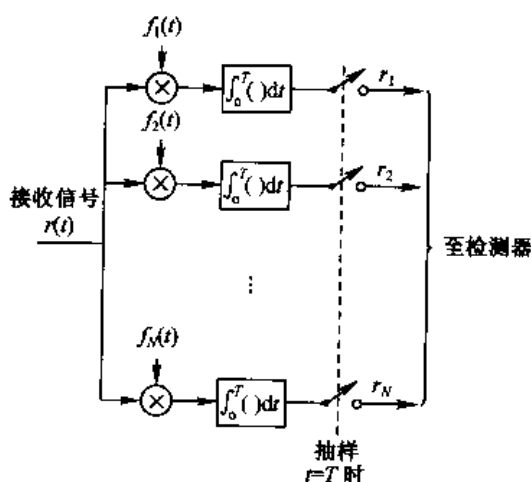


图 5-1-3 相关型解调器

式中

$$s_{mk} = \int_0^T s_m(t) f_k(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

$$n_k = \int_0^T n(t) f_k(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5-1-3)$$

信号可由具有分量 $s_{mk} (k=1, 2, \dots, N)$ 的向量 s_m 表示,它们的值取决于 M 个信号中哪一个被发送。 $|n_k|$ 分量是随机变量,它们由加性噪声的存在引起。

事实上,可以将 $0 \leq t \leq T$ 间隔内的接收信号表示为

$$r(t) = \sum_{k=1}^N s_{mk} f_k(t) + \sum_{k=1}^N n_k f_k(t) + n'(t)$$

$$= \sum_{k=1}^N r_k f_k(t) + n'(t) \quad (5-1-4)$$

$n'(t)$ 项定义为

$$n'(t) = n(t) - \sum_{k=1}^N n_k f_k(t) \quad (5-1-5)$$

该项是零均值高斯噪声过程,它表示原噪声过程 $n(t)$ 与 $n(t)$ 在基函数 $\{f_k(t)\}$ 上投影的相应部分之差。我们将证明, $n'(t)$ 与判决哪个发送信号无关。因此,判决可以完全根据相关器输出信号和噪声分量 $r_k = s_{mk} + n_k (k=1, 2, \dots, N)$ 来进行。

因为信号 $\{s_m(t)\}$ 是确定的, 所以信号分量也是确定的。噪声分量是高斯的, 这是因为其每个分量可作为高斯噪声激励一个线性滤波器的输出抽样值(见 5.1.2 节)。它们的均值(对所有 n)是

$$E(n_k) = \int_0^T E[n(t)] f_k(t) dt = 0 \quad (5-1-6)$$

协方差是

$$\begin{aligned} E(n_k n_m) &= \int_0^T \int_0^T E[n(t) n(\tau)] f_k(t) f_m(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t - \tau) f_k(t) f_m(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T f_k(t) f_m(t) dt \\ &= \frac{1}{2} N_0 \delta_{mk} \end{aligned} \quad (5-1-7)$$

式中, 当 $m = k$ 时 $\delta_{mk} = 1$, 其他情况下为零。所以, 噪声分量 $\{n_k\}$ 是零均值、具有共同方差 $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$ 的不相关的高斯随机变量。

从上面的研究可以得到, 在发送第 m 个信号的条件下, 相关器输出 $\{r_k\}$ 是高斯随机变量, 它具有均值

$$E(r_k) = E(s_{mk} + n_k) = s_{mk} \quad (5-1-8)$$

及相等的方差

$$\sigma_r^2 = \sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0 \quad (5-1-9)$$

因为噪声分量 $\{n_k\}$ 是不相关的高斯随机变量, 所以它们也是统计独立的, 从而在发送第 m 个信号的条件下, 相关器输出 $\{r_k\}$ 是统计独立的高斯变量。因此, 随机变量 $[r_1 r_2 \cdots r_N] = \mathbf{r}$ 的条件 PDF 可简单地表示为

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = \prod_{k=1}^N p(r_k | s_{mk}) \quad (m = 1, 2, \cdots, M) \quad (5-1-10)$$

式中

$$p(r_k | s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0} \right] \quad (k = 1, 2, \cdots, N) \quad (5-1-11)$$

将式(5-1-11)代入式(5-1-10), 得到联合条件 PDF 为

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left[-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0} \right] \quad (m = 1, 2, \cdots, M) \quad (5-1-12)$$

最后, 我们将证明, 相关器的输出 (r_1, r_2, \cdots, r_N) 对达到在 M 个信号中判决哪个信号被发送的要求是充分统计的, 也就是说, 从剩余噪声过程 $n'(t)$ 中不能再提取附加的有关信息。确实, $n'(t)$ 与 N 个相关器输出 $\{r_k\}$ 是不相关的, 即

$$\begin{aligned} E[n'(t) r_k] &= E[n'(t)] s_{mk} + E[n'(t) n_k] \\ &= E[n'(t) n_k] \\ &= E \left[\left[n(t) - \sum_{j=1}^N n_j f_j(t) \right] n_k \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T E[n(t)n(\tau)]f_k(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^N E(n_j n_k) f_j(t) \\
&= \frac{1}{2} N_0 f_k(t) - \frac{1}{2} N_0 f_k(t) = 0
\end{aligned} \tag{5-1-13}$$

因为 $n'(t)$ 和 $|r_k|$ 是高斯的和不相关的, 所以它们也是统计独立的。因此, 就哪一个信号波形被发送而言, $n'(t)$ 不包含与判决有关的任何信息。所有有关的信息全都包含在相关器的输出 $|r_k|$ 中, 因此可以不理睬 $n'(t)$ 。

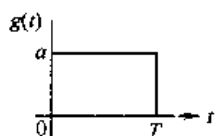


图 5-1-4 例 5-1-1 的信号脉冲

例 5-1-1 研究一个 M 元基带 PAM 信号集, 在该信号集中基本的脉冲形状 $g(t)$ 是矩形, 如图 5-1-4 所示。加性噪声是零均值高斯白噪声过程, 求基函数 $f(t)$ 和相关型解调器的输出。矩形脉冲的能量是

$$\mathcal{E}_g = \int_0^T g^2(t) dt = \int_0^T a^2 dt = a^2 T$$

因为 PAM 信号集的维数 $N=1$, 所以只有一个基函数 $f(t)$, 即

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 T}} g(t) \\
&= \begin{cases} 1/\sqrt{T} & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}
\end{aligned}$$

相关型解调器的输出是

$$r = \int_0^T r(t) f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T r(t) dt$$

有趣的是, 当 $f(t)$ 是矩形时, 相关器成为简单的积分器。若替代 $r(t)$, 则得到

$$\begin{aligned}
r &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \int_0^T [s_m(t) + n(t)] dt \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\int_0^T s_m(t) dt + \int_0^T n(t) dt \right]
\end{aligned}$$

$$r = s_m + n$$

式中, 噪声项 $E(n)=0$ 且

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= E \left[\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T n(t) n(\tau) dt d\tau \right] \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[n(t) n(\tau)] dt d\tau \\
&= \frac{N_0}{2T} \int_0^T \int_0^T \delta(t - \tau) dt d\tau = \frac{1}{2} N_0
\end{aligned}$$

抽样输出的概率密度函数是

$$p(r | s_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(r - s_m)^2}{N_0} \right]$$

5.1.2 匹配滤波器解调器

可以使用一组 N 个线性滤波器替代一组 N 个相关器来产生变量 $\{r_k\}$ 。具体地说,假定 N 个滤波器的冲激响应为

$$h_k(t) = f_k(T-t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5-1-14)$$

式中, $\{f_k(t)\}$ 是 N 个基函数,且在 $0 \leq t \leq T$ 区间之外 $h_k(t) = 0$ 。这些滤波器的输出是

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \int_0^T r(\tau) h_k(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^T r(\tau) f_k(T-t+\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (5-1-15)$$

那么,如果在 $t = T$ 时对滤波器输出抽样,可得到

$$y_k(T) = \int_0^T r(\tau) f_k(\tau) d\tau = r_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5-1-16)$$

因此,在 $t = T$ 时刻滤波器输出样值与由 N 个线性相关器得到的一组值 $\{r_k\}$ 完全相同。

假定 $s(t)$ 限定在 $0 \leq t \leq T$ 间隔内,那么冲激响应 $h(t) = s(T-t)$ 的滤波器称做对信号 $s(t)$ 的匹配滤波器。一个信号及其匹配滤波器的例子如图 5-1-5 所示。 $h(t) = s(T-t)$ 对信号 $s(t)$ 的响应是

$$y(t) = \int_0^T s(\tau) s(T-t+\tau) d\tau \quad (5-1-17)$$

该式本质上是信号 $s(t)$ 的时间自相关函数。图 5-1-6 说明了图 5-1-5 所示的三角信号脉冲的 $y(t)$ 。注意,自相关函数 $y(t)$ 是 t 的偶函数,它在 $t = T$ 时达到峰值。

在上述解调器的情况下, N 个匹配滤波器匹配基函数 $\{f_k(t)\}$ 。图 5-1-7 说明了匹配滤波器解调器,它产生观测变量 $\{r_k\}$ 。

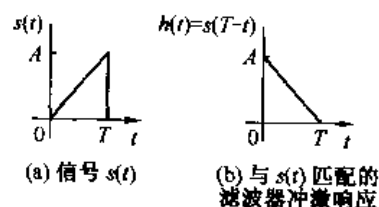


图 5-1-5 信号 $s(t)$ 和对 $s(t)$ 匹配的滤波器

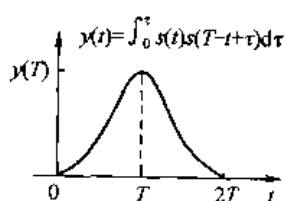


图 5-1-6 匹配滤波器输出是 $s(t)$ 的自相关函数

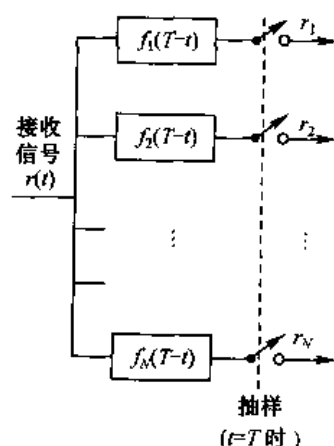


图 5-1-7 匹配滤波器解调器

1. 匹配滤波器的性质

匹配滤波器具有一些重要的性质,其中一个最重要的性质表述如下:如果信号 $s(t)$ 受到

AWGN 的影响,具有匹配于 $s(t)$ 的冲激响应的滤波器使输出信噪比(SNR_o)最大。

为了证明这个性质,假定接收信号由信号 $s(t)$ 和 AWGN $n(t)$ 组成, $n(t)$ 具有零均值及功率谱密度 $\Phi_{nn}(f) = \frac{1}{2} N_0 (\text{W/Hz})$ 。假定信号 $r(t)$ 通过冲激响应为 $h(t)$ ($0 \leq t \leq T$) 的滤波器,且在 $t = T$ 时刻对其输出抽样。滤波器对信号和噪声分量的响应是

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^T r(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^T s(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_0^T n(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5-1-18)$$

在抽样瞬时 $t = T$, 信号和噪声分量是

$$\begin{aligned} y(T) &= \int_0^T s(\tau) h(T - \tau) d\tau + \int_0^T n(\tau) h(T - \tau) d\tau \\ &= y_s(T) + y_n(T) \end{aligned} \quad (5-1-19)$$

式中, $y_s(T)$ 表示信号分量, $y_n(T)$ 表示噪声分量。问题是选择滤波器的冲激响应,使得输出信噪比(SNR_o)最大。 SNR_o 定义为

$$\text{SNR}_o = \frac{y_s^2(T)}{E[y_n^2(T)]} \quad (5-1-20)$$

式(5-1-20)中的分母就是滤波器输出端噪声项的方差。求 $E[y_n^2(T)]$ 如下

$$\begin{aligned} E[y_n^2(T)] &= \int_0^T \int_0^T E[n(\tau) n(t)] h(T - \tau) h(T - t) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t - \tau) h(T - \tau) h(T - t) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T - t) dt \end{aligned} \quad (5-1-21)$$

注意,该方差决定于噪声的功率谱密度及冲激响应 $h(t)$ 中的能量。

将 $y_s(T)$ 和 $E[y_n^2(T)]$ 代入式(5-1-20),得到输出 SNR 的表达式为

$$\text{SNR}_o = \frac{\left[\int_0^T s(\tau) h(T - \tau) d\tau \right]^2}{\frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T - t) dt} = \frac{\left[\int_0^T h(\tau) s(T - \tau) d\tau \right]^2}{\frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T - t) dt} \quad (5-1-22)$$

因为 SNR_o 的分母取决于 $h(t)$ 的能量,所以在分母保持常数的条件下使分子最大化可以获得在 $h(t)$ 上的最大输出 SNR。分子最大化可以采用柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式很容易地实现。一般地,该不等式指出,如果 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 是有限能量信号,那么

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t) dt \quad (5-1-23)$$

当对任意常数 C 有 $g_1(t) = C g_2(t)$ 时,上式为等式。如果设置 $g_1(t) = h(t)$ 且 $g_2(t) = s(T - t)$,显然当 $h(t) = C s(T - t)$, 即 $h(t)$ 匹配于信号 $s(t)$ 时, SNR 最大。丢弃 SNR 表达式中的标尺因子 C^2 ,因为它同时出现在分子和分母中。

以匹配滤波器获得的输出(最大)信噪比是

$$\text{SNR}_o = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt = 2 \mathcal{E} / N_0 \quad (5-1-24)$$

注意,匹配滤波器输出信噪比决定于信号波形 $s(t)$ 的能量,而不决定于 $s(t)$ 的细节特征。这是匹配滤波器的另一个重要性质。

2. 匹配滤波器的频域解释

匹配滤波器的频域解释是有趣的。因为 $h(t) = s(T-t)$, 这个关系式的傅里叶变换是

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_0^T s(T-t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \left[\int_0^T s(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{-j2\pi fT} \\ &= S^*(f) e^{-j2\pi fT} \end{aligned} \quad (5-1-25)$$

可见,匹配滤波器的频率响应是发送信号谱的复共轭乘以相位因子 $e^{-j2\pi fT}$, 该相位因子表示抽样延迟 T 。换言之, $|H(f)| = |S(f)|$, 所以匹配滤波器的幅频响应与发送信号谱相同。另一方面, $H(f)$ 的相位是 $S(f)$ 的相位负值。

那么,如果具有频谱 $S(f)$ 的信号 $s(t)$ 通过匹配滤波器,该滤波器的输出谱为 $Y(f) = |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT}$, 则输出波形是

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (5-1-26)$$

在 $t = T$ 时,对匹配滤波器输出抽样,可得到

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_0^T s^2(t) dt = \mathcal{E} \quad (5-1-27)$$

上式最后一步遵循帕什瓦尔(Parseval)关系式。

匹配滤波器输出端的噪声具有功率密度谱

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{2} |H(f)|^2 N_0 \quad (5-1-28)$$

因此,匹配滤波器输出端总的噪声功率是

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(f) df \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \frac{1}{2} \mathcal{E} N_0 \end{aligned} \quad (5-1-29)$$

输出 SNR 是信号功率 P_s

$$P_s = y_s^2(T) \quad (5-1-30)$$

与噪声功率 P_n 之比。因此

$$\text{SNR}_0 = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\mathcal{E}^2}{\frac{1}{2} \mathcal{E} N_0} = \frac{2\mathcal{E}}{N_0} \quad (5-1-31)$$

上式与式(5-1-24)的结果一致。

例 5-1-2 研究图 5-1-8(a) 所示的 $M=4$ 双正交信号是由两个正交信号构成的。该信号用来在 AWGN 信道传输信息。假定噪声具有零均值和功率谱密度 $\frac{1}{2} N_0$, 求该信号集的基函

数、匹配滤波器解调器的冲激响应以及当发送信号为 $s_1(t)$ 时匹配滤波器解调器的输出波形。

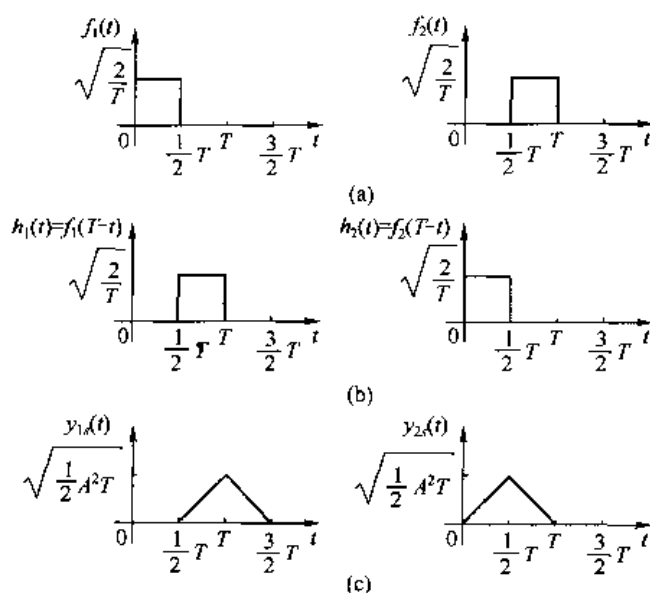


图 5-1-8 例 5-1-2 的基函数和匹配滤波器响应

$M=4$ 双正交信号的维数 $N=2$, 因此需用两个基函数表示信号。由图 5-1-8(a), 选择 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} \sqrt{2/T} & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \\ f_2(t) &= \begin{cases} \sqrt{2/T} & (\frac{1}{2}T \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \end{aligned} \quad (5-1-32)$$

两个匹配滤波器的冲激响应是

$$\begin{aligned} h_1(t) &= f_1(T-t) = \begin{cases} \sqrt{2/T} & (\frac{1}{2}T \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \\ h_2(t) &= f_2(T-t) = \begin{cases} \sqrt{2/T} & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \end{aligned} \quad (5-1-33)$$

且由图 5-1-8(b)说明。

如果发送 $s_1(t)$, 两个匹配滤波器的(无噪声)响应如图 5-1-8(c)所示。因为 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 在 $t=T$ 时被抽样, 可观测到 $y_{1s}(T) = \sqrt{\frac{1}{2}A^2T}$ 和 $y_{2s}(T) = 0$ 。注意, $\frac{1}{2}A^2T = \mathcal{E}$, 即信号的能量。因此, 在 $t=T$ 时刻, 由两个匹配滤波器输出形成的接收向量是

$$\mathbf{r} = [r_1 \ r_2] = [\sqrt{\mathcal{E}} + n_1 \ n_2] \quad (5-1-34)$$

式中, $n_1 = y_{1n}(T)$ 及 $n_2 = y_{2n}(T)$ 是匹配滤波器输出端的噪声分量, 且由下式确定

$$y_{kn}(T) = \int_0^T n(t) f_k(t) dt \quad (k = 1, 2) \quad (5-1-35)$$

显然, $E(n_k) = E[y_{kn}(T)] = 0$ 。它们的方差是

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= E[y_{kn}^2(T)] = \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)] f_k(t) f_k(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau) f_k(\tau) f_k(t) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T f_k^2(t) dt = \frac{1}{2} N_0\end{aligned}\quad (5-1-36)$$

第一个匹配滤波器的 SNR_0 是

$$\text{SNR}_0 = \frac{(\sqrt{\mathcal{E}})^2}{\frac{1}{2} N_0} = \frac{2\mathcal{E}}{N_0} \quad (5-1-37)$$

这与前面分析的结果一致。我们还注意到, 相应于图 5-1-8 中 4 个可能的发送信号, 两个匹配滤波器的 4 个可能的输出信号是 $(r_1, r_2) = (\sqrt{\mathcal{E}} + n_1, n_2)$ 、 $(n_1, \sqrt{\mathcal{E}} + n_2)$ 、 $(-\sqrt{\mathcal{E}} + n_1, n_2)$ 及 $(n_1, -\sqrt{\mathcal{E}} + n_2)$ 。

5.1.3 最佳检测器

我们已经证明, 对于在 AWGN 信道传输的信号, 相关解调器或者匹配滤波器解调器都产生向量 $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_N]$, 该向量包含接收信号波形中所有有关的信息。本节将描述基于观测向量 \mathbf{r} 的最佳判决规则, 假定在连续信号间隔时间内的发送信号中不存在记忆。

设计一个信号检测器, 它根据每个信号间隔中向量 \mathbf{r} 的观测值对该间隔内的发送信号作出判决, 并使正确判决概率最大。以此作为目标, 研究一个基于后验概率计算的判决规则, 该后验概率定义为

$$P(\text{发送信号 } s_m | \mathbf{r}) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

可将它缩写为 $P(s_m | \mathbf{r})$ 。该判决规则的根据是选择相应后验概率集 $\{P(s_m | \mathbf{r})\}$ 中最大值的信号。我们将证明这个准则使正确判决概率最大, 因此也使错误概率最小。该判决准则称做最大后验概率(MAP)准则。

利用贝叶斯(Bayes)规则, 后验概率可以表示为

$$P(s_m | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | s_m) P(s_m)}{p(\mathbf{r})} \quad (5-1-38)$$

式中, $p(\mathbf{r} | s_m)$ 是给定 s_m 条件下的观测向量的条件 PDF, 而 $P(s_m)$ 是第 m 个发送信号的先验概率。式(5-1-38)的分子可表示为

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M p(\mathbf{r} | s_m) P(s_m) \quad (5-1-39)$$

由式(5-1-38)和式(5-1-39)看出, 后验概率 $P(s_m | \mathbf{r})$ 的计算需要先验概率 $P(s_m)$ 和条件 PDF $p(\mathbf{r} | s_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$)。

当 M 个信号等概时, 即对所有 M 有 $P(s_m) = 1/M$, 可简化 MAP 准则。此外, 我们注意到式(5-1-38)中的分母与哪一个信号被发送是无关的。因此, 基于寻求能使 $P(s_m | \mathbf{r})$ 最大的信号的判决规则等价于寻求使 $p(\mathbf{r} | s_m)$ 最大的信号。

条件 PDF $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ 或它的任何单调函数通常称做似然函数, 在 M 个信号上 $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ 最大的判决准则称做最大似然 (ML) 准则。我们看到, 只要先验概率 $P(\mathbf{s}_m)$ 全部相等, 即信号 $\{\mathbf{s}_m\}$ 是等概的, 那么基于 MAP 准则的检测器与基于 ML 准则的检测器将作出同样的判决。

在 AWGN 信道情况下, 似然函数由式 (5-1-12) 给出。为简化计算, 取 $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ 的自然对数, 它是单调函数。因此

$$\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = -\frac{1}{2}N\ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2 \quad (5-1-40)$$

$\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ 在 \mathbf{s}_m 上的最大化等价于使下列欧氏距离最小的信号 \mathbf{s}_m

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2 \quad (5-1-41)$$

$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ ($m=1, 2, \dots, M$) 称做距离度量。因此, 对于 AWGN 信道, 基于 ML 准则的判决规则简化为在距离上最接近于接收信号向量 \mathbf{r} 的信号 \mathbf{s}_m 。该判决规则叫做最小距离检测。

基于 ML 准则的最佳判决规则的另一种解释可由展开式 (5-1-41) 中的距离度量得到

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) &= \sum_{n=1}^N r_n^2 - 2 \sum_{n=1}^N r_n s_{mn} + \sum_{n=1}^N s_{mn}^2 \\ &= \|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m + \|\mathbf{s}_m\|^2 \quad (m=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (5-1-42)$$

式中, $\|\mathbf{r}\|^2$ 项对所有距离度量是公共的, 因此在度量的计算中可以忽略, 其结果是一组变型的距离度量

$$D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = -2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m + \|\mathbf{s}_m\|^2 \quad (5-1-43)$$

注意, 选择使 $D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 最小的信号 \mathbf{s}_m 等价于使度量 $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = -D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 最大的信号, 即

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m - \|\mathbf{s}_m\|^2 \quad (5-1-44)$$

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m$ 项表示接收信号向量在 M 个可能发送信号向量上的投影, 每个投影的值是接收信号与第 m 个信号之间相关的一个测度。由于这个原因, $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ ($m=1, 2, \dots, M$) 称做相关度量, 用来确定 M 个信号中的哪一个被发送。 $\|\mathbf{s}_m\|^2 = \varepsilon_m$ ($m=1, 2, \dots, M$) 可以看做偏置项, 用来对不等能量的信号集进行补偿, 例如 PAM。如果所有信号具有相同的能量, 那么在相关度量 $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 和距离度量 $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 或 $D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 的计算中也可以忽略 $\|\mathbf{s}_m\|^2$ 。

相关度量 $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 也可以表示为

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = 2 \int_0^T r(t) s_m(t) dt - \varepsilon_m \quad (m=0, 1, \dots, M) \quad (5-1-45)$$

因此, 这些度量可以由一个解调器产生, 该解调器使接收信号 $r(t)$ 与 M 个可能发送的信号进行相关运算, 在信号能量不相等的情况下再以偏置调整相关器的输出。这等效于接收信号通过一组 M 个匹配于可能的发送信号 $\{s_m(t)\}$ 的滤波器, 并在符号间隔的终止时刻 $t=T$ 抽样。因此, 最佳接收机 (解调器和检测器) 可用图 5-1-9 所示的另一种形式实现。

总之, 我们已经证明了最佳 ML 检测器计算一组 M 个距离 $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 或 $D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 并选择相应于最小 (距离) 度量的信号, 这等效于最佳 ML 检测器计算一组 M 个相关度量 $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 并选择相应于最大相关度量的信号。

以上对最佳检测器的研究讨论了最重要的情况, 即所有信号是等概的。在这种情况下, MAP 准则等价于 ML 准则。然而, 当信号不等概时, 最佳 MAP 检测判决的依据是式

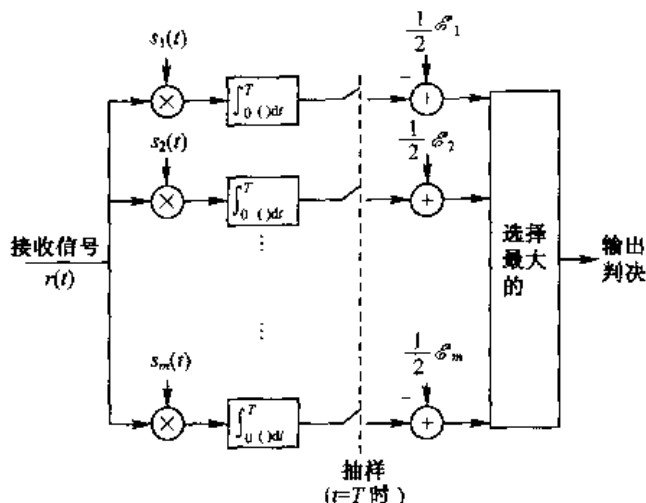


图 5-1-9 最佳 AWGN 接收机的另一种实现形式

(5-1-38) 给出的概率 $P(s_m | \mathbf{r})$ ($m=1, 2, \dots, M$) 或等价为度量

$$PM(\mathbf{r}, s_m) = p(\mathbf{r} | s_m) P(s_m)$$

下面的例子将说明二进制 PAM 信号的计算。

例 5-1-3 研究二进制 PAM 信号的情况, 其中两个可能的信号点是 $s_1 = -s_2 = \sqrt{\mathcal{E}_b}$, 式中 \mathcal{E}_b 是每比特能量。先验概率是 $P(s_1) = p$ 及 $P(s_2) = 1 - p$ 。求在发送信号受到 AWGN 影响时最佳 MAP 检测器的度量。

对二进制 PAM, 接收信号向量(一维)是

$$r = \pm \sqrt{\mathcal{E}_b} + y_n(T) \quad (5-1-46)$$

式中, $y_n(T)$ 是零均值、方差 $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$ 的高斯随机变量。因此, 对这两个信号, 条件 PDF $p(r | s_m)$ 是

$$p(r | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5-1-47)$$

$$p(r | s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5-1-48)$$

因此, 度量 $PM(\mathbf{r}, s_1)$ 和 $PM(\mathbf{r}, s_2)$ 是

$$\begin{aligned} PM(\mathbf{r}, s_1) &= p p(r | s_1) \\ &= \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \end{aligned} \quad (5-1-49)$$

$$PM(\mathbf{r}, s_2) = \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (5-1-50)$$

如果 $PM(\mathbf{r}, s_1) > PM(\mathbf{r}, s_2)$, 选择 s_1 为发送信号, 否则选择 s_2 。这个判决规则可以表示为

$$\frac{PM(\mathbf{r}, s_1)}{PM(\mathbf{r}, s_2)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\geq}} 1 \quad (5-1-51)$$

而

$$\frac{PM(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)}{PM(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2)} = \frac{p}{1-p} \exp \left[\frac{(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 - (r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (5-1-52)$$

所以式(5-1-51)可以表示为

$$\frac{(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 - (r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\geq}} \ln \frac{1-p}{p} \quad (5-1-53)$$

或等价为

$$\sqrt{\mathcal{E}_b} r \underset{s_2}{\overset{s_1}{\geq}} \frac{1}{2} \sigma_n^2 \ln \frac{1-p}{p} = \frac{1}{4} N_0 \ln \frac{1-p}{p} \quad (5-1-54)$$

这是最佳检测器的最终形式,它计算相关度量 $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = r \sqrt{\mathcal{E}_b}$,并将该度量与阈值 $\frac{1}{4} N_0 \ln[(1-p)/p]$ 比较。图 5-1-10 说明了两个信号点 s_1 和 s_2 。标注为 τ_h 的阈值将实轴划分为两个区域 R_1 和 R_2 ,其中 R_1 由大于 τ_h 的点集组成, R_2 由小于 τ_h 的点集组成。如果 $r \sqrt{\mathcal{E}_b} > \tau_h$,则判发送 s_1 ;如果 $r \sqrt{\mathcal{E}_b} < \tau_h$,则判发送 s_2 。阈值 τ_h 取决于 N_0 和 p 。如果 $p = \frac{1}{2}$,那么 $\tau_h = 0$;如果 $p > \frac{1}{2}$,则信号点 s_1 有更大的可能性,因此 $\tau_h < 0$ 。在这种情况下,区域 R_1 大于 R_2 ,选择 s_1 的可能性大于 s_2 ;若 $p < \frac{1}{2}$,情况相反。因此,平均错误概率是最小的。

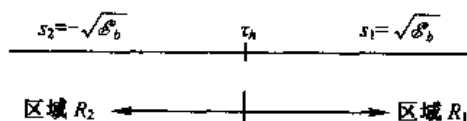


图 5-1-10 二进制(PAM)调制的最佳检测器操作的信号空间表示

注意,在先验概率不相等的情况下,为了计算阈值,不仅必须知道先验概率的值,还要知道功率谱密度 N_0 的值,或等效为噪声对信号比 N_0/\mathcal{E}_b 。当 $p = \frac{1}{2}$ 时,阈值为零,则检测器不要知道 N_0 的大小。

由以上的论证,我们作出以下结论:当 M 个信号先验等概时,基于最大似然准则的判决规则使错误概率最小。在 N 维空间中用 R_m 标记区域,该区域用来当接收向量 $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \cdots r_N]$ 时判决发送信号 $s_m(t)$ 。在发送 $s_m(t)$ 时,正确判决的概率是

$$P(c | s_m) = \int_{R_m} p(\mathbf{r} | s_m) d\mathbf{r} \quad (5-1-55)$$

平均正确判决概率是

$$\begin{aligned} P(c) &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} P(c | s_m) \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \int_{R_m} p(\mathbf{r} | s_m) d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5-1-56)$$

注意,若 $p(\mathbf{r} | s_m)$ 大于 $p(\mathbf{r} | s_k)$ (对所有 $m \neq k$) 时选择信号 s_m ,那么 $P(c)$ 是最大的。

与 MAP 准则相似,当 M 个信号不等概时平均正确判决的概率为

$$P(c) = \sum_{m=1}^M \int_{R_m} P(s_m | \mathbf{r}) p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

为了使 $P(c)$ 尽可能地大,落在每一个特定区域 R_m 内信号点的 $P(s_m | \mathbf{r})$ 应超过所有其他的后验概率。

5.1.4 最大似然序列检测器

当信号无记忆时,前一节所述的逐个符号检测器在最小符号错误概率意义上是最佳的。另一方面,当发送信号有记忆时,即在连续的符号间隔内发送信号是相互关联的,则最佳检测器根据在连续信号间隔内接收信号的观测序列来判决。下面我们描述两种不同类型的检测算法。本节将描述最大似然序列检测算法,该算法通过表征发送信号中记忆的网络来搜索最小欧氏距离路径。下一节将描述最大后验概率算法,该算法以逐个符号为基础作出判决,而每个符号的判决基于接收信号向量序列的观测值。

为了研究最大似然序列检测算法,作为例子,考察 4.3.2 节所述的 NRZI 信号,它的记忆如图 4-3-14 所示的网格表征。在每个信号间隔内的发送信号是二进制 PAM。因此,有两个可能的发送信号,其相应的信号点是 $s_1 = -s_2 = \sqrt{\mathcal{E}_b}$, 其中 \mathcal{E}_b 是每比特能量。匹配滤波器或相关解调器对二进制 PAM 在第 k 个信号间隔内的输出可以表示为

$$r_k = \pm \sqrt{\mathcal{E}_b} + n_k \quad (5-1-57)$$

式中, n_k 是零均值、方差 $\sigma_n^2 = N_0/2$ 的高斯随机变量。因此,这两个可能发送信号的条件 PDF 是

$$\begin{aligned} p(r_k | s_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r_k - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \\ p(r_k | s_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r_k + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \end{aligned} \quad (5-1-58)$$

于是,假设观测到匹配滤波器输出序列 r_1, r_2, \dots, r_N 。因为假定信道噪声是白的且高斯的,并且 $f(t-iT)$ 与 $f(t-jT)$ 对于 $i \neq j$ 是相互正交的,则有 $E(n_k n_j) = 0$, $k \neq j$ 。因此,噪声序列 n_1, n_2, \dots, n_K 也是白的。从而对于任何给定的发送序列 $\mathbf{s}^{(m)}$, r_1, r_2, \dots, r_K 的联合 PDF 可以表示为 K 个边缘 PDF 的乘积,即

$$\begin{aligned} p(r_1, r_2, \dots, r_K | \mathbf{s}^{(m)}) &= \prod_{k=1}^K p(r_k | s_k^{(m)}) \\ &= \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r_k - s_k^{(m)})^2}{2\sigma_n^2}\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^K \exp\left[-\sum_{k=1}^K \frac{(r_k - s_k^{(m)})^2}{2\sigma_n^2}\right] \end{aligned} \quad (5-1-59)$$

式中, $s_k = \sqrt{\mathcal{E}_b}$ 或 $s_k = -\sqrt{\mathcal{E}_b}$ 。在给定匹配滤波器或相关解调器输出端的接收序列 r_1, r_2, \dots, r_K 的条件下,检测器确定使条件 PDF $p(r_1, r_2, \dots, r_K | \mathbf{s}^{(m)})$ 最大的序列 $\mathbf{s}^{(m)} = \{s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, \dots, s_K^{(m)}\}$ 。这样的检测器称做最大似然 (ML) 序列检测器。

将式 (5-1-59) 取对数,并忽略与 (r_1, r_2, \dots, r_K) 无关的项,可得到等价的 ML 序列检测

器,选择使欧氏距离度量

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)}) = \sum_{k=1}^K (r_k - s_k^{(m)})^2 \quad (5-1-60)$$

最小的序列 $\mathbf{s}^{(m)}$ 。

在通过网格图搜索使欧氏距离 $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)})$ 最小的序列中,似乎必须对每个可能的序列计算距离 $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)})$ 。对于 NRZI,它使用二进制调制,序列的总数是 2^K ,其中 K 是从解调器得到的输出数目。然而,情况并不是这样。可以在网格搜索中减少序列的数目,其方法是当解调器接收到新的数据时,使用维特比算法消去一些序列。

维特比算法是一种顺序网格搜索算法,用来执行 ML 序列检测。第 8 章把该算法描述成卷积码的译码算法。下面在 NRZI 信号范围内描述该算法。假定搜索过程在状态 S_0 起始。图 5-1-11 示出了相应的网格。

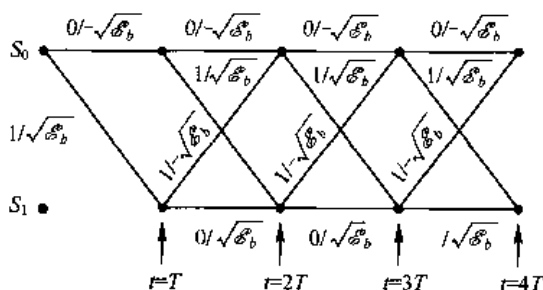


图 5-1-11 NRZI 信号的网格图

在 $t = T$ 时刻,从解调器收到 $r_1 = s_1^{(m)} + n_1$,而在 $t = 2T$ 时收到 $r_2 = s_2^{(m)} + n_2$ 。因为信号记忆是 1 比特,以 $L = 1$ 表示,观测到两次转移后网格达到规则(稳态)形式。因此,根据在 $t = 2T$ (及其后续)时刻 r_2 的接收,我们看到有两条信号路径进入每一个节点,并有两条信号路径离开每个节点。在 $t = 2T$ 时刻进入节点 S_0 的两条路径相应于信息比特(0,0)和(1,1),或者分别等价于信号点 $(-\sqrt{E_b}, -\sqrt{E_b})$ 和 $(\sqrt{E_b}, -\sqrt{E_b})$ 。在 $t = 2T$ 时刻进入节点 S_1 的两条路径相应于信息比特(0,1)和(1,0),或者分别等价于信号点 $(-\sqrt{E_b}, \sqrt{E_b})$ 和 $(\sqrt{E_b}, \sqrt{E_b})$ 。

对进入节点 S_0 的两条路径,用解调器的输出 r_1 和 r_2 计算两个欧氏距离度量

$$\begin{aligned} D_0(0,0) &= (r_1 + \sqrt{E_b})^2 + (r_2 + \sqrt{E_b})^2 \\ D_0(1,1) &= (r_1 - \sqrt{E_b})^2 + (r_2 + \sqrt{E_b})^2 \end{aligned} \quad (5-1-61)$$

维特比算法比较这两个度量并舍弃较大(较大距离)度量^①。存储较小度量的路径称做 $t = 2T$ 时刻的幸存路径。在两条路径中舍弃一条的做法不会损失网格搜索的最佳性,因为在 $t = 2T$ 之后,较大距离路径延伸将总是比沿着同样路径延伸的幸存路径具有较大的度量。

同样地,在 $t = 2T$ 时刻对进入节点 S_1 的两条路径用解调器的输出 r_1 和 r_2 计算其欧氏距离度量

$$D_1(0,1) = (r_1 + \sqrt{E_b})^2 + (r_2 - \sqrt{E_b})^2$$

^① 注意,对于 NRZI,由解调器得到 r_2 的接收既不增加也不减少两个度量 $D_0(0,0)$ 与 $D_0(1,1)$ 之间的相对差值。在这点上,应当考虑该观察结果的内在含义。在任何情况下,都遵照基于维特比算法的 ML 序列检测器的说明。

$$D_1(1,0) = (r_1 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 + (r_2 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 \quad (5-1-62)$$

比较这两个度量并舍弃较大度量的路径。因此,在 $t=2T$ 时刻,留下两条幸存路径,一个在节点 S_0 ,另一个在节点 S_1 ,以及它们相应的度量。在节点 S_0 和 S_1 的信号路径将沿着两条幸存路径延伸。

在 $t=3T$ 时刻根据 r_3 的接收,计算进入状态 S_0 的两条路径的度量。假设在 $t=2T$ 时刻的幸存路径是在 S_0 的路径 $(0,0)$ 和在 S_1 的路径 $(0,1)$,那么在 $t=3T$ 时刻进入 S_0 的两条路径的度量是

$$\begin{aligned} D_0(0,0,0) &= D_0(0,0) + (r_3 + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 \\ D_0(0,1,1) &= D_1(0,1) + (r_3 + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 \end{aligned} \quad (5-1-63)$$

比较这两个度量,并舍弃较大(较大距离)度量的路径。同样地,在 $t=3T$ 时刻进入 S_1 的两条路径度量是

$$\begin{aligned} D_1(0,0,1) &= D_0(0,0) + (r_3 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 \\ D_1(0,1,0) &= D_1(0,1) + (r_3 - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 \end{aligned} \quad (5-1-64)$$

比较这两个度量,舍弃较大(较大距离)度量的路径。

当从解调器收到每一个新的信号样值时,这个过程继续进行。因此,在网格搜索的每一级,维特比算法都要计算进入一个节点的两个信号路径的度量,并在每个节点舍弃两条路径中的一条路径,然后将两条幸存路径延伸到下一状态。因此,在网格中,搜索路径的数量在每一级减少一半。

将维特比算法执行的网格搜索推广到 M 元调制是容易的。例如,延迟调制使用 $M=4$ 的信号,并可用图 5-1-12 所示的四状态网格表征。我们看到,每一个状态都有两条信号路径进入以及两条信号路径离开每一个节点。信号的记忆是 $L=1$ 。因此,维特比算法在每一级有 4 条幸存路径及其相应的度量。在每一节点,计算两个进入路径的度量,并在网格的每一状态舍弃进入节点的两条信号路径中的一条。因此,维特比算法将 ML 序列检测器执行的网格路径搜索的数量减到最小。

由上面对维特比算法的描述,我们还不清楚在给定幸存序列条件下如何对各个受检测的信息符号作出判决。如果已经延伸到某一级,譬如 K ,在网格中 $K \gg L$,比较幸存序列,我们将发现在比特(或符号)位置 $K-5L$ 及小一些的位置处,所有幸存序列以概率趋于 1 而相同。在维特比算法的实现中,对每个信息比特(或符号)的判决必须在延迟 $5L$ 比特(或符号)之后进行,因此幸存序列被截断至 $5L$ 个最近的比特(或符号)。所以,应避免比特(或符号)检测中的可变延迟。如果延迟至少是 $5L$,那么由准最佳检测过程引起的性能损失可以忽略不计。

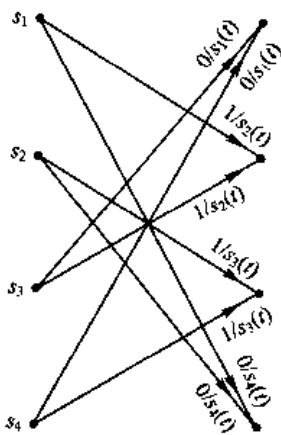


图 5-1-12 延迟调制器网格图中的一级

例 5-1-4 研究用来检测 NRZI 信号中的数据序列的判决规则,检测方法采用具有 $5L$ 比特延迟的维特比算法。NRZI 信号的网格如图 5-1-11 所示。在这种情况下, $L=1$,因此在比特检测中的延迟设置成 5 比特。因此,在 $t=6T$ 时刻,将有两个幸存序列,两个状态中的每个

状态有一个幸存序列及其相应的度量 $\mu_6(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ 和 $\mu_6(b_1', b_2', b_3', b_4', b_5', b_6')$ 。在这一级, 比特 b_1 将以概率近似等于 1 与 b_1' 相同, 即两个幸存序列将有共同的第一个分支。如果 $b_1 \neq b_1'$, 可以选择相应于两个度量中的较小度量的比特 (b_1 或 b_1'), 然后从两个幸存序列中丢弃第一个比特。在 $t = 7T$ 时刻, 使用两个度量 $\mu_7(b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$ 和 $\mu_7(b_2', b_3', b_4', b_5', b_6', b_7')$ 对比特 b_2 进行判决。这一过程在通过网格搜索最小距离序列的每一级上不断进行下去。因此, 检测延迟固定在 5 个比特^①。

5.1.5 有记忆信号的逐个符号 MAP 检测器

与用来检测发送信息的最大似然序列检测器相对照, 本节将介绍一种检测器, 该检测器根据对被检测符号的最大后验概率 (MAP) 的计算进行逐个符号的判决。因此, 在最小符号错误概率的意义上, 这个检测器是最佳的。下述检测算法是由阿本德和弗里奇曼 (Abend & Fritchman, 1970 年) 提出的, 他们研究的这种算法是对有符号间干扰信道, 即有记忆信道的检测算法。

在检测有 M 个可能电平的 PAM 信号的范围内说明这种算法。假设希望检测第 k 个信号间隔中的发送信息符号, 令 r_1, r_2, \dots, r_{k+D} 是观测到的接收序列, 其中 D 是延迟参数, 选择该参数超过信号的记忆, 即 $D \geq L$, 这里 L 是信号中固有的记忆。根据接收序列, 对 M 个可能符号值计算后验概率

$$P(s^{(k)} = A_m | r_{k+D}, r_{k+D-1}, \dots, r_1) \quad (5-1-65)$$

并选择具有最大概率的符号。因为

$$P(s^{(k)} = A_m | r_{k+D}, \dots, r_1) = \frac{p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(k)} = A_m) P(s^{(k)} = A_m)}{p(r_{k+D}, r_{k+D-1}, \dots, r_1)} \quad (5-1-66)$$

并且分母对所有 M 个概率是公共的, 所以最大后验概率 (MAP) 准则等价于使式 (5-1-66) 的分子最大的 $s^{(k)}$ 值。因此, 判决发送符号 $s^{(k)}$ 的准则是

$$\hat{s}^{(k)} = \arg \max_{s^{(k)}} \{ p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(k)} = A_m) P(s^{(k)} = A_m) \} \quad (5-1-67)$$

当符号等概时, 可以在计算中舍去概率 $P(s^{(k)} = A_m)$ 。计算式 (5-1-67) 概率的算法从第一个符号 $s^{(1)}$ 开始, 递推下去, 有

$$\begin{aligned} \hat{s}^{(1)} &= \arg \max_{s^{(1)}} \{ p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(1)} = A_m) P(s^{(1)} = A_m) \} \\ &= \arg \max_{s^{(1)}} \left\{ \sum_{s^{(1+D)}} \dots \sum_{s^{(2)}} p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \right\} \\ &= \arg \max_{s^{(1)}} \left\{ \sum_{s^{(1+D)}} \dots \sum_{s^{(2)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)}) \right\} \end{aligned} \quad (5-1-68)$$

式中, $\hat{s}^{(1)}$ 标记是对 $s^{(1)}$ 的判决, 为了数学上分析方便, 定义

$$p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)}) \equiv p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \quad (5-1-69)$$

^① 现在可以看出, ML 序列检测器与不管 NRZI 信号中记忆的逐个符号检测器达到了同样的判决, 因此不需要判决延迟。虽然如此, 上述过程一般都适用。

如果符号是等概的且统计独立的,则联合概率 $P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)})$ 可以忽略。因为加性噪声是统计独立的,则有

$$\begin{aligned} p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \\ = p(r_{1+D} | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1+D-L)}) p(r_D | s^{(D)}, \dots, s^{(D-L)}) \dots p(r_2 | s^{(2)}, s^{(1)}) p(r_1 | s^{(1)}) \end{aligned} \quad (5-1-70)$$

式中,假定当 $k \leq 0$ 时, $s^{(k)} = 0$ 。

对符号 $s^{(2)}$ 的检测有

$$\begin{aligned} \hat{s}^{(2)} &= \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} p(r_{2+D}, \dots, r_1 | s^{(2)} = A_m) P(s^{(2)} = A_m) \right\} \\ &= \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} \sum_{s^{(2+D)}} \dots \sum_{s^{(3)}} p(r_{2+D}, \dots, r_1 | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) P(s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) \right\} \end{aligned} \quad (5-1-71)$$

多重求和式中的联合条件概率可以表示为

$$\begin{aligned} p(r_{2+D}, \dots, r_1 | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) \\ = p(r_{2+D} | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2+D-L)}) p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}) \end{aligned} \quad (5-1-72)$$

联合概率

$$p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)})$$

可由前面检测 $s^{(1)}$ 时计算的概率求得,即

$$\begin{aligned} p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}) \\ = \sum_{s^{(1)}} p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \\ = \sum_{s^{(1)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)}) \end{aligned} \quad (5-1-73)$$

因此,通过计算式(5-1-73)和式(5-1-72),再代入式(5-1-71),可得到

$$\hat{s}^{(2)} = \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} \sum_{s^{(2+D)}} \dots \sum_{s^{(3)}} p_2(s^{(2+D)}, \dots, s^{(3)}, s^{(2)}) \right\} \quad (5-1-74)$$

式(5-1-74)中采用了定义

$$\begin{aligned} p_2(s^{(2+D)}, \dots, s^{(3)}, s^{(2)}) \\ = p(r_{2+D} | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2+D-L)}) P(s^{(2+D)}) \sum_{s^{(1)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)}) \end{aligned} \quad (5-1-75)$$

一般地,检测符号 $s^{(k)}$ 的递推算法如下:根据 r_{k+D}, \dots, r_2, r_1 的接收,计算

$$\begin{aligned} \hat{s}^{(k)} &= \arg \left\{ \max_{s^{(k)}} p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(k)}) P(s^{(k)}) \right\} \\ &= \arg \left\{ \max_{s^{(k)}} \sum_{s^{(k+D)}} \dots \sum_{s^{(k+1)}} p_k(s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+1)}, s^{(k)}) \right\} \end{aligned} \quad (5-1-76)$$

式(5-1-76)中采用了定义

$$\begin{aligned} p_k(s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+1)}, s^{(k)}) \\ = p(r_{k+D} | s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+D-L)}) P(s^{(k+D)}) \sum_{s^{(k-1)}} p_{k-1}(s^{(k-1+D)}, \dots, s^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (5-1-77)$$

因此,用关系式(5-1-76)和(5-1-77)建立起该算法的递推性质。

该算法的主要问题是其计算的复杂性,特别是式(5-1-76)中在符号 $s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+1)}, s^{(k)}$ 上所做的平均运算对每个接收信号都包含大量的计算,尤其在幅度电平 $|A_m|$ 的数目 M 比较大的时候。另一方面,如果 M 比较小且记忆 L 比较短时,这种算法比较容易实现。

根据 MAP 准则对有记忆信号的逐个符号检测,是第 8 章所述卷积码和交织级联码的迭代译码算法的基础。这些迭代译码算法是根据巴尔(Bahl, 1974 年)等人论文所描述的 MAP 算法,称为 BCJR 算法,它不同于前面给出的阿本德-弗里奇曼(Abend-Fritchman)MAP 算法。

5.2 无记忆调制的最佳接收机性能

本节将评估 4.3.1 节所述的无记忆调制信号的错误概率。首先研究二进制 PAM 信号,然后研究各种类型的 M 元信号。

5.2.1 二进制调制的错误概率

下面研究二进制 PAM 信号,这里的两个信号波形是 $s_1(t) = g(t)$ 和 $s_2(t) = -g(t)$, $g(t)$ 是在 $0 \leq t \leq T_b$ 区间非零而在其他处为零的任意脉冲。

因为 $s_1(t) = -s_2(t)$,这两个信号称为双极性信号。脉冲 $g(t)$ 的能量是 \mathcal{E}_g 。正如 4.3.1 节指出的,PAM 信号是一维的,所以它的几何表示是简单的一维向量 $s_1(t) = \sqrt{\mathcal{E}_b}$, $s_2(t) = -\sqrt{\mathcal{E}_b}$ 。图 5-2-1 所示为这两个信号点。

假定两个信号是等概的且发送信号为 $s_1(t)$,那么由(匹配滤波器或相关器)解调器得到的接收信号是

$$r = s_1 + n = \sqrt{\mathcal{E}_b} + n \quad (5-2-1)$$

式中, n 表示均值为零且方差为 $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$ 的加性高斯噪声分量。在这种情况下,基于式(5-1-44)相关度量的判决规则将 r 与阈值零进行比较。如果 $r > 0$,则判为 $s_1(t)$;如果 $r < 0$,则判发送 $s_2(t)$ 。显然, r 的两个 PDF 是

$$p(r | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / N_0} \quad (5-2-2)$$

$$p(r | s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / N_0} \quad (5-2-3)$$

图 5-2-2 示出了这两个条件 PDF。

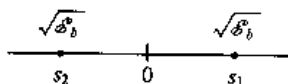


图 5-2-1 二进制双极性信号的信号点

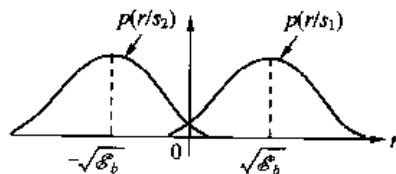


图 5-2-2 两个信号的条件 PDF

在给定发送 $s_1(t)$ 的情况下,错误概率就是 $r < 0$ 的概率,即

$$\begin{aligned}
P(e | s_1) &= \int_{-\infty}^0 p(r | s_1) dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{N_0} \right] dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2\mathcal{E}_b}/N_0} e^{-x^2/2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\mathcal{E}_b}/N_0}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\
&= Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right]
\end{aligned} \tag{5-2-4}$$

式中, $Q(x)$ 是式(2-1-97)定义的 Q 函数。类似地, 假定发送 $s_2(t)$, $r = -\sqrt{\mathcal{E}_b} + n$, 那么 $r > 0$ 的概率也是 $P(e | s_2) = Q(\sqrt{2\mathcal{E}_b}/N_0)$ 。因为 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 是等概发送的, 所以平均错误概率是

$$\begin{aligned}
P_b &= \frac{1}{2} P(e | s_1) + \frac{1}{2} P(e | s_2) \\
&= Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right]
\end{aligned} \tag{5-2-5}$$

我们将看到这种性能度量的两个重要特征。首先, 错误概率只取决于比值 \mathcal{E}_b/N_0 , 而与信号和噪声的其他细节特征无关; 其次, $2\mathcal{E}_b/N_0$ 也是匹配滤波器(及相关)解调器的输出 SNR_0 。通常, 比值 \mathcal{E}_b/N_0 称为比特信噪比。

我们也看到, 错误概率可以用两个信号 s_1 和 s_2 之间的距离来表示。由图 5-2-1 可以看出, 两个信号之间的距离是 $d_{12} = 2\sqrt{\mathcal{E}_b}$ 。将 $\mathcal{E}_b = \frac{1}{4}d_{12}^2$ 代入式(5-2-5), 得到

$$P_b = Q \left[\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}} \right] \tag{5-2-6}$$

这个表达式说明错误概率与两个信号点之间的距离有关。

下面评估两个正交信号的错误概率, 信号向量 s_1 和 s_2 是二维的, 如图 5-2-3 所示。按照式(4-3-30), 这两个向量可以表示为

$$\begin{aligned}
s_1 &= [\sqrt{\mathcal{E}_b} \quad 0] \\
s_2 &= [0 \quad \sqrt{\mathcal{E}_b}]
\end{aligned} \tag{5-2-7}$$

式中, \mathcal{E}_b 表示每一个波形的能量。注意, 这两个信号点之间的距离是 $d_{12} = \sqrt{2\mathcal{E}_b}$ 。

为了评估错误概率, 假定发送 s_1 , 那么在解调器输出端的接收向量是

$$\mathbf{r} = [\sqrt{\mathcal{E}_b} + n_1 \quad n_2] \tag{5-2-8}$$

将 \mathbf{r} 代入式(5-1-44)的相关度量, 得到 $C(\mathbf{r}, s_1)$ 和 $C(\mathbf{r}, s_2)$ 。那么, 错误概率就是 $C(\mathbf{r}, s_2) > C(\mathbf{r}, s_1)$ 的概率, 因此

$$P(e | s_1) = P[C(\mathbf{r}, s_2) > C(\mathbf{r}, s_1)] = P[n_2 - n_1 > \sqrt{\mathcal{E}_b}] \tag{5-2-9}$$

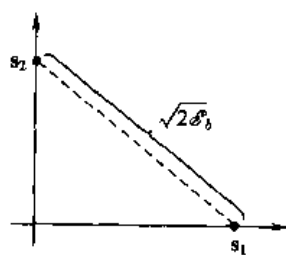


图 5-2-3 二进制正交信号的信号点

因为 n_1 和 n_2 是均值为零、方差为 $\frac{1}{2}N_0$ 且统计独立的高斯随机变量, 所以随机变量 $x = n_2 - n_1$ 是均值为零、方差为 N_0 的高斯变量。因此

$$\begin{aligned} P(n_2 - n_1 > \sqrt{\mathcal{E}_b}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{\sqrt{\mathcal{E}_b}}^{\infty} e^{-x^2/2N_0} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\mathcal{E}_b}/\sqrt{N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &= Q\left[\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right] \end{aligned} \quad (5-2-10)$$

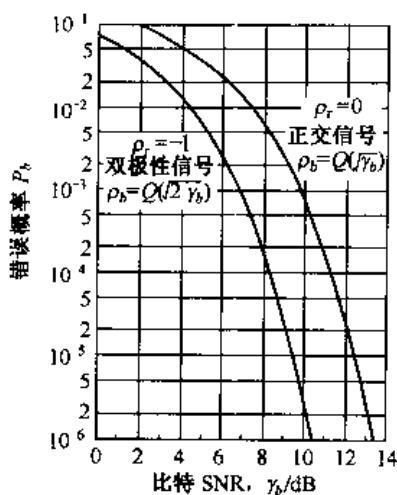


图 5-2-4 二进制信号的错误概率

假定发送 s_2 , 由于对称性, 将得到同样的错误概率。因此, 二进制正交信号的平均错误概率为

$$P_b = Q\left[\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right] = Q(\sqrt{\gamma_b}) \quad (5-2-11)$$

式中, γ_b 定义为比特 SNR。

如果将二进制双极性信号与二进制正交信号的错误概率进行比较, 我们发现, 要达到同样的错误概率, 正交信号的能量需增加一倍。因为 $10\lg 2 = 3$ dB, 所以正交信号的性能劣于双极性信号 3 dB。该 3 dB 的差别是由两个信号点之间的距离引起的, 正交信号的距离是 $d_{12}^2 = 2\mathcal{E}_b$, 而双极性信号的距离是 $d_{12}^2 = 4\mathcal{E}_b$ 。

图 5-2-4 示出了这两种类型信号的错误概率与 $10\lg \mathcal{E}_b/N_0$ 的关系曲线。由该图可看出, 在任何给定的错误概率值上, 正交信号所要求的 \mathcal{E}_b/N_0 比双极性信号要求的大 3 dB。

5.2.2 M 元正交信号的错误概率

对于等能量的正交信号, 最佳检测器选择能在接收信号向量 \mathbf{r} 与 M 个可能发送信号向量 $\{\mathbf{s}_m\}$ 之间产生最大互相关值的发送信号, 即

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^M r_k s_{mk} \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (5-2-12)$$

为了评估错误概率, 假定发送信号 \mathbf{s}_1 , 那么接收信号向量为

$$\mathbf{r} = [\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1 \quad n_2 \quad n_3 \cdots n_M] \quad (5-2-13)$$

式中, \mathcal{E}_s 表示符号能量, 而 n_1, n_2, \dots, n_M 是零均值且等方差 $\sigma_n^2 = \frac{1}{2}N_0$ 的相互统计独立的高斯随机变量。在这种情况下, M 个相关器组的输出为

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) &= \sqrt{\mathcal{E}_s}(\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1) \\ C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2) &= \sqrt{\mathcal{E}_s}n_2 \\ &\vdots \\ C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_M) &= \sqrt{\mathcal{E}_s}n_M \end{aligned} \quad (5-2-14)$$

注意,相关器输出中的标尺因子 \mathcal{E}_s 可用每一个输出除以 $\sqrt{\mathcal{E}_s}$ 来消去。在这种归一化处理后,第一个相关器输出 ($r_1 = \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1$) 的 PDF 是

$$p_{r_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(x_1 - \sqrt{\mathcal{E}_s})^2}{N_0}\right] \quad (5-2-15)$$

其余 $M-1$ 个相关器输出的 PDF 为

$$p_{r_m}(x_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-x_m^2/N_0} \quad (m = 2, 3, \dots, M) \quad (5-2-16)$$

为数学处理方便,先推导检测器正确判决的概率,这个概率是 r_1 大于其他 $M-1$ 个相关器输出 n_2, n_3, \dots, n_M 的概率,可表示为

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1) p(r_1) dr_1 \quad (5-2-17)$$

式中, $P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1)$ 表示在任何给定 r_1 条件下 n_2, n_3, \dots, n_M 同时小于 r_1 的联合概率。将这个联合概率在所有 r_1 上平均,因为 $\{r_m\}$ 是统计独立的,所以联合概率可分解成 $M-1$ 个边缘概率的连乘积,边缘概率的形式为

$$\begin{aligned} p(n_m < r_1 | r_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{r_m}(x_m) dx_m \quad (m = 2, 3, \dots, M) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_1/\sqrt{2N_0}} e^{-x^2/2} dx \end{aligned} \quad (5-2-18)$$

对于 $m=2, 3, \dots, M$, 这些概率是相同的,因此这种情况下的联合概率就是式(5-2-18)结果的 $M-1$ 次方。从而,正确判决的概率为

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_1/\sqrt{2N_0}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M-1} p(r_1) dr_1 \quad (5-2-19)$$

(k 比特)符号的错误概率是

$$P_M = 1 - P_c \quad (5-2-20)$$

因此

$$P_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx \right)^{M-1} \right] \exp\left[-\frac{1}{2} \left(y - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}} \right)^2\right] dy \quad (5-2-21)$$

当发送其他 $M-1$ 个信号中的任何一个信号时,可得出相同的错误概率表达式。因为 M 个信号是等概的,所以式(5-2-21)给出的 P_M 表达式就是平均符号错误概率。可用数值方法来评估该表达式。

在对各种数字调制方法性能的比较中,希望将错误概率以比特 SNR(\mathcal{E}_b/N_0)表示,而不是用符号 SNR \mathcal{E}_s/N_0 表示。因为 $M=2^k$, 每一个符号传送 k 个比特信息,所以 $\mathcal{E}_s = k \mathcal{E}_b$ 。因此,替代式(5-2-21)中的 \mathcal{E}_s , 该式可以用 \mathcal{E}_b/N_0 表示。

有时也希望将符号错误概率表示成等效的二进制数字错误概率。对等概正交信号,所有符号错误都是等概的,且发生的概率为

$$\frac{P_M}{M-1} = \frac{P_M}{2^k-1} \quad (5-2-22)$$

k 个比特中有 n 个比特出现差错的情况共有 $\binom{k}{n}$ 种,因此每 k 个比特符号的平均比特差错数

为

$$\sum_{n=1}^k n \binom{k}{n} \frac{P_M}{2^k - 1} = k \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M \quad (5-2-23)$$

平均比特错误概率就是式(5-2-23)的结果除以 k (每个符号的比特数), 因此

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M \approx \frac{P_M}{2} \quad (k \gg 1) \quad (5-2-24)$$

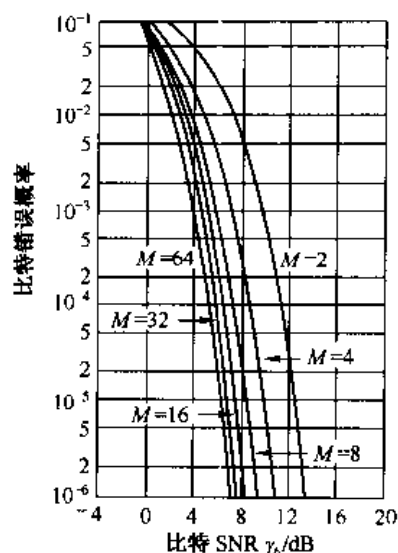


图 5-2-5 正交信号相干检测的比特错误概率

图 5-2-5 示出了当 $M = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ 时, 二进制数字错误概率作为比特 SNR (\mathcal{E}_b/N_0) 的函数曲线。该图说明为了达到一个给定的比特错误概率, 用增加波形个数 M 的方法可以减少对比特 SNR 的要求。例如, 要达到 $p_b = 10^{-5}$, 当 $M = 2$ 时, 要求比特 SNR 略高于 12 dB。但如果将 M 增加到 64 个信号波形 ($k = 6$ 比特/符号), 所要求的比特 SNR 大约为 6 dB。因此, 为达到 $p_b = 10^{-5}$, 通过将 M 从 $M = 2$ 增加到 $M = 64$ 的方法, 可使所需的发送功率节省 6 dB。

当 $M \rightarrow \infty$ 时, 为达到任意小的错误概率, 所要求的最小 \mathcal{E}_b/N_0 是多少呢? 下面回答这个问题。

错误概率的一致边界

研究增加 M 对正交信号错误概率的影响。为了简化数学处理, 首先推导符号错误概率的上边界, 这比式 (5-2-21) 给出的准确形式简单得多。

前文已述, 二进制正交信号的错误概率由式(5-2-11)给出。现在, 如果将 M 个正交信号的检测器看成一种检测器, 它在含有该信号的相关器输出 $C(r, s_1)$ 与其他 $M-1$ 个相关器输出 $C(r, s_m)$ ($m = 2, 3, \dots, M$) 之间作出 $M-1$ 次二进制判决, 那么错误概率上边界由 $M-1$ 个事件的一致边界来确定。也就是说, 如果 E_i 表示 $i \neq 1$ 时 $C(r, s_i) > C(r, s_1)$ 的事件, 那么

$P_M = P(\bigcup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$ 。因此

$$P_M \leq (M-1)P_2 = (M-1)Q(\sqrt{\mathcal{E}_s/N_0}) < MQ(\sqrt{\mathcal{E}_s/N_0}) \quad (5-2-25)$$

这个边界可以进一步用上边界 $Q(\sqrt{\mathcal{E}_s/N_0})$ 来简化, 由于

$$Q(\sqrt{\mathcal{E}_s/N_0}) < e^{-\mathcal{E}_s/2N_0} \quad (5-2-26)$$

因此,

$$P_M < Me^{\mathcal{E}_s/2N_0} = 2^k e^{k\mathcal{E}_b/2N_0} < e^{k(\mathcal{E}_b/N_0 - 2\ln 2)/2} \quad (5-2-27)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 或等价于当 $M \rightarrow \infty$ 时, 倘若 \mathcal{E}_b/N_0 大于 $2\ln 2$, 即

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} > 2\ln 2 = 1.39 \quad (1.42 \text{ dB}) \quad (5-2-28)$$

则错误概率按指数趋于零。

式(5-2-27)给出的错误概率简单的上边界含义是:只要 $\text{SNR} > 1.42 \text{ dB}$, 就能得到任意低的 P_M 。然而, 在足够低的 SNR 情况下, 该一致边界不是很紧密的上边界, 这是由于式(5-2-26)中 Q 函数的上边界是疏松的。事实上, 第 7 章将证明通过更精致的边界技术, 式(5-2-27)的上边界对于 $\mathcal{E}_b/N_0 > 4\ln 2$ 是充分紧密的。对于 $\mathcal{E}_b/N_0 < 4\ln 2$, P_M 的更紧密的上边界是

$$P_M < 2e^{-k(\sqrt{\mathcal{E}_b/N_0} \sqrt{\ln 2})^2} \quad (5-2-29)$$

因此, 若

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} > \ln 2 = 0.693, \quad (-1.6 \text{ dB}) \quad (5-2-30)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, $P_M \rightarrow 0$ 。

因此, 在 $k \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow \infty$) 的极限情况下, 达到任意小的错误概率所要求的最小 SNR 为 -1.6 dB 。这个最小比特 SNR (-1.6 dB) 称做加性高斯白噪声信道的香农极限。

5.2.3 M 元双正交信号的错误概率

正如 4.3 节所述, $M = 2^k$ 个双正交信号集是由 $\frac{1}{2}M$ 个正交信号及其负值信号构成的。因此, 双正交信号解调器的复杂性比正交信号的解调器小, 因为前者用 $\frac{1}{2}M$ 个互相关器或匹配滤波器实现, 后者需用 M 个匹配滤波器或互相关器。

为了评估最佳检测器的错误概率, 假定发送信号为 $s_1(t)$, 其相应的向量是 $\mathbf{s}_1 = [\sqrt{\mathcal{E}_s} \quad 0 \quad 0 \cdots 0]$, 那么接收信号向量是

$$\mathbf{r} = [\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_{M/2}] \quad (5-2-31)$$

式中, $\{n_m\}$ 是均值为零、方差为 $\sigma_n^2 = \frac{1}{2}N_0$ 的相互统计独立且同分布的高斯随机变量。最佳检测器根据下列互相关器幅度的最大值得出相应的判决信号

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^{M/2} r_k s_{mk} \quad (m = 1, 2, \cdots, \frac{1}{2}M) \quad (5-2-32)$$

最大项的正负号用来确定发送信号是 $s_m(t)$ 还是 $-s_m(t)$ 。按照这一判决规则, 正确判决的概率等于 $r_1 = \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1 > 0$ 且 r_1 超过 $|r_m| = |n_m|$ ($m = 2, 3, \cdots, \frac{1}{2}M$) 的概率。但

$$P(|n_m| < r_1 | r_1 > 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-r_1}^{r_1} e^{-x^2/N_0} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r_1/\sqrt{N_0/2}}^{r_1/\sqrt{N_0/2}} e^{-x^2/2} dx \quad (5-2-33)$$

那么, 正确判决的概率为

$$P_c = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r_1/\sqrt{N_0/2}}^{r_1/\sqrt{N_0/2}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M/2-1} p(r_1) dr_1$$

将 $p(r_1)$ 代入上式, 得到

$$P_c = \int_{-\sqrt{2\mathcal{E}_s/N_0}}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(v+\sqrt{2\mathcal{E}_s/N_0})}^{v+\sqrt{2\mathcal{E}_s/N_0}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M/2-1} e^{-v^2/2} dv \quad (5-2-34)$$

式中使用了式(5-2-15)给出的关于 r_1 的 PDF。符号错误概率 $P_M = 1 - P_c$ 。

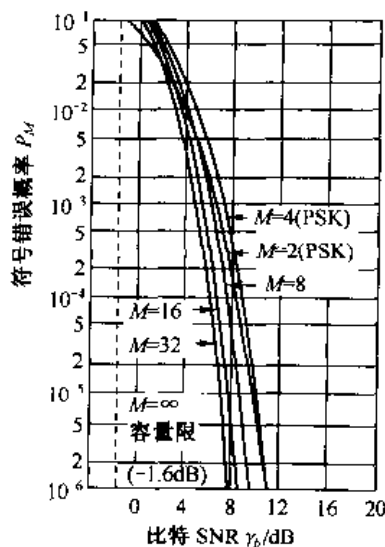


图 5-2-6 双正交信号的符号错误概率

对式(5-2-34)中的不同 M 值,可以通过数值计算方法评估 P_e 以及 P_M 。图 5-2-6 所示的 P_M 曲线 ($M=2, 4, 8, 16, 32$) 是 \mathcal{E}_b/N_0 的函数,其中 $\mathcal{E}_s = k\mathcal{E}_b$ 。该图类似于正交信号的情况(参见图 5-2-5),但在这种情况下, $M=4$ 的错误概率大于 $M=2$ 的。这是由于在图 5-2-6 中已经画出了符号错误概率 P_M 。如果画出等价的比特错误概率,可看到 $M=2$ 与 $M=4$ 的两条曲线相重合。正如正交信号的情况,当 $M \rightarrow \infty$ (或 $k \rightarrow \infty$) 时,达到任意小的错误概率需要的最小 \mathcal{E}_b/N_0 为 -1.6 dB,即香农极限。

5.2.4 单纯信号的错误概率

下面研究 M 个单纯信号的错误概率。由 4.3 节可知,单纯信号是 M 个等相关的且互相关系数为 $\rho_{mn} = -1/(M-1)$ 的信号集合。在 M 维空间中,这些信号作为正交信号,其相邻信号点之间具有同样的最小间隔 $\sqrt{2\mathcal{E}_s}$ 。它们达到这个相互间隔所要求的发送能量为 $\mathcal{E}_s(M-1)/M$,该能量比正交信号要求的能量小,为其 $(M-1)/M$ 倍。因此,单纯信号的错误概率与正交信号的错误概率是相同的,但达到这个性能所要求的 SNR 节省了

$$10\lg(1-\rho) = 10\lg \frac{M}{M-1} \text{ (dB)} \quad (5-2-35)$$

当 $M=2$ 时,SNR 节省了 3 dB。当 M 增加时,SNR 的节省趋于 0 dB。

5.2.5 M 元二进制编码信号的错误概率

4.3 节已说明二进制编码信号波形可用下列信号向量表示

$$\mathbf{s}_m = [s_{m1} \ s_{m2} \ \cdots \ s_{mN}] \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

式中, $s_{mj} = \pm \sqrt{\mathcal{E}/N}$ (对所有的 m 和 j), N 是码的分组长度也是 M 个信号波形的维数。

如果 $d_{\min}^{(e)}$ 是 M 个信号波形的最小欧氏距离,那么符号错误概率的上边界为

$$\begin{aligned} P_m &< (M-1)P_b = (M-1)Q \left\{ \sqrt{\frac{(d_{\min}^{(e)})^2}{2N_0}} \right\} \\ &< 2^k \exp \left[-\frac{(d_{\min}^{(e)})^2}{4N_0} \right] \end{aligned} \quad (5-2-36)$$

最小欧氏距离的值将取决于码字的选择,即码的设计。

5.2.6 M 元 PAM 的错误概率

我们记得, M 元 PAM 信号可以用几何方式表示为 M 个一维信号点,其值为

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{E}_g} A_m \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (5-2-37)$$

式中, \mathcal{E}_g 是基本信号脉冲 $g(t)$ 的能量。幅度值可以表示为

$$A_m = (2m - 1 - M)d \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (5-2-38)$$

这里, 两个相邻信号点之间的距离是 $d\sqrt{2\mathcal{E}_g}$ 。假定信号等概, 则平均能量为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{av} &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathcal{E}_m = \frac{d^2 \mathcal{E}_g}{2M} \sum_{m=1}^M (2m - 1 - M)^2 \\ &= \frac{d^2 \mathcal{E}_g}{2M} \left[\frac{1}{3} M(M^2 - 1) \right] = \frac{1}{6} (M^2 - 1) d^2 \mathcal{E}_g \end{aligned} \quad (5-2-39)$$

也可以等价地用下列平均功率表征信号

$$P_{av} = \frac{\mathcal{E}_{av}}{T} = \frac{1}{6} (M^2 - 1) \frac{d^2 \mathcal{E}_g}{T} \quad (5-2-40)$$

M 元 PAM 的平均错误概率可以由判决规则求得, 该判决规则使式(5-1-44)的相关度量最大化。这等效为检测器将解调器输出 r 与 $M-1$ 个阈值组进行比较, 这些阈值位于相邻幅度电平的中点, 如图 5-2-7 所示。因此, 作出的判决是离 r 最近的幅度电平。

图 5-2-7 所示的阈值的设置有助于计算错误概率。我们注意到, 如果发送第 m 个幅度电平, 那么解调器的输出为

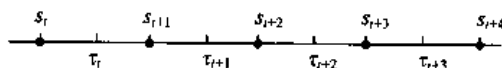


图 5-2-7 阈值位于相邻幅度电平的中点

$$r = s_m + n = \sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{E}_g} A_m + n \quad (5-2-41)$$

式中, 噪声变量 n 具有零均值和方差 $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$ 。根据所有幅度电平是先验等概的条件, 平均符号错误概率就是噪声变量 n 的幅度超过两相邻电平之间距离一半的概率。然而, 当两个外层电平 $\pm(M-1)$ 中任一发送时, 差错只出现在一个方向上。因此,

$$\begin{aligned} P_M &= \frac{M-1}{M} P\left(|r - s_m| > d\sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{E}_g}\right) \\ &= \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{d\sqrt{\mathcal{E}_g}/2}^{\infty} e^{-x^2/N_0} dx \\ &= \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{d^2 \mathcal{E}_g}/N_0}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{2(M-1)}{M} Q\left[\sqrt{\frac{d^2 \mathcal{E}_g}{N_0}}\right] \end{aligned} \quad (5-2-42)$$

式(5-2-42)中的错误概率也可以用平均发送功率表示。由式(5-2-40)可得

$$d^2 \mathcal{E}_g = \frac{6}{M^2 - 1} P_{av} T \quad (5-2-43)$$

将其代入式(5-2-42)中的 $d^2 \mathcal{E}_g$, 可得到用平均功率表示的 PAM 的平均符号错误概率

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left[\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}}\right] \quad (5-2-44)$$

或等价地

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q \left[\sqrt{\frac{6\mathcal{E}_{av}}{(M^2-1)N_0}} \right] \quad (5-2-45)$$

式中, $\mathcal{E}_{av} = P_{av}T$ 是平均能量。

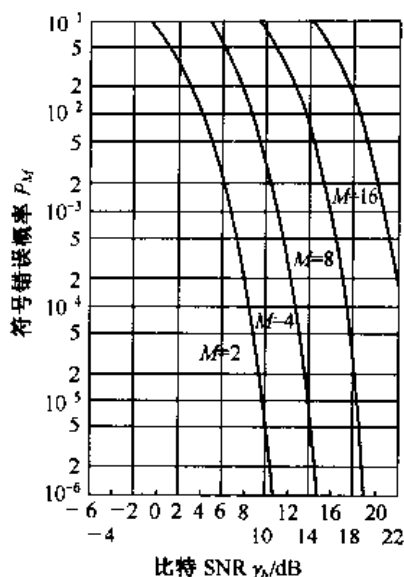


图 5-2-8 PAM 的符号错误概率

在绘制 M 元信号(如 M 元 PAM)的符号错误概率曲线时,习惯上采用比特 SNR 作为基本参数。因为 $T = kT_b$ 且 $k = \log_2 M$, 所以式(5-2-45)可以表示为

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q \left[\sqrt{\frac{(6\log_2 M)\mathcal{E}_{bav}}{(M^2-1)N_0}} \right] \quad (5-2-46)$$

式中, $\mathcal{E}_{bav} = P_{av}T_b$ 是平均比特能量, \mathcal{E}_{bav}/N_0 是平均比特 SNR。图 5-2-8 示出了作为 $10\lg(\mathcal{E}_{bav}/N_0)$ 函数的符号错误概率, 其中 M 为参数。注意, $M=2$ 的情况相当于二进制双极性信号的错误概率。 M 每增加 1 倍, 比特 SNR 的增加超过 4 dB。对于大 M 值, 当 M 增加 1 倍时, 要求比特 SNR 增加近 6 dB。

5.2.7 M 元 PSK 的错误概率

由 4.3 节可知, 数字相位调制波形可表示为

$$s_m(t) = g(t) \cos \left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \quad (1 \leq m \leq M, 0 \leq t \leq T) \quad (5-2-47)$$

其向量表达式为

$$\mathbf{s}_m = \left[\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos \frac{2\pi}{M}(m-1) \quad \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \quad (5-2-48)$$

式中, $\mathcal{E}_s = \frac{1}{2}\mathcal{E}_g$ 是每个波形的能量, $g(t)$ 是发送信号脉冲波形。因为信号波形具有相等的能量, 所以式(5-1-44)给出的 AWGN 信道的最佳检测器计算相关度量

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (5-2-49)$$

换言之, 将接收信号向量 $\mathbf{r} = [r_1, r_2]$ 投影到 M 个可能发送的信号向量上, 再根据最大的投影分量判决发送信号。

以上所述的相关检测器等价于一个相位检测器: 计算接收信号 \mathbf{r} 的相位, 再选择相位最接近 \mathbf{r} 的信号向量 \mathbf{s}_m 。因为 \mathbf{r} 的相位是

$$\Theta_r = \tan^{-1} \frac{r_2}{r_1} \quad (5-2-50)$$

求 Θ_r 的 PDF, 并由此计算错误概率。

研究以下情况: 发送信号相位 $\Theta_r = 0$, 这相当于信号 $s_1(t)$ 。因此, 发送信号向量是

$$\mathbf{s}_1 = [\sqrt{\mathcal{E}_s} \quad 0] \quad (5-2-51)$$

接收信号向量的分量为

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1 \\ r_2 &= n_2 \end{aligned} \quad (5-2-52)$$

因为 n_1 与 n_2 是联合高斯随机变量, 所以 r_1 与 r_2 也是联合高斯随机变量且 $E(r_1) = \sqrt{\mathcal{E}_s}$, $E(r_2) = 0$ 及 $\sigma_{r_1}^2 = \sigma_{r_2}^2 = \frac{1}{2}N_0 = \sigma_r^2$ 。因此,

$$p_r(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} \exp\left[-\frac{(r_1 - \sqrt{\mathcal{E}_s})^2 + r_2^2}{2\sigma_r^2}\right] \quad (5-2-53)$$

将上式中的变量 (r_1, r_2) 改为

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \\ \Theta_r &= \tan^{-1}(r_2/r_1) \end{aligned} \quad (5-2-54)$$

可得出相位 Θ_r 的 PDF。联合 PDF 为

$$p_{V, \Theta_r}(V, \Theta_r) = \frac{V}{2\pi\sigma_r^2} \exp\left[-\frac{V^2 + \mathcal{E}_s - 2\sqrt{\mathcal{E}_s}V\cos\Theta_r}{2\sigma_r^2}\right]$$

将 $p_{V, \Theta_r}(V, \Theta_r)$ 在 V 的范围积分得到 $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$, 即

$$\begin{aligned} p_{\Theta_r}(\Theta_r) &= \int_0^\infty p_{V, \Theta_r}(V, \Theta_r) dV \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-2\gamma_s \sin^2 \Theta_r} \int_0^\infty V e^{-(V - \sqrt{2\gamma_s} \cos \Theta_r)^2 / 2} dV \end{aligned} \quad (5-2-55)$$

式中, 为了方便, 将符号 SNR 定义为 $\gamma_s = \mathcal{E}_s/N_0$ 。图 5-2-9 示出了当发送相位为零时, SNR 参数 γ_s 取不同值的情况下的 $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ 。注意, 当 SNR γ_s 增加时, $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ 曲线在 $\Theta_r = 0$ 附近变得更窄、更尖。

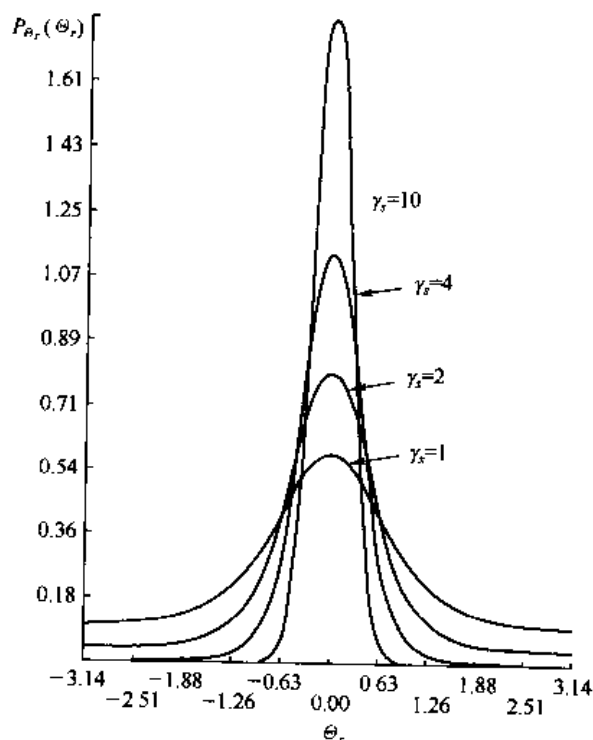


图 5-2-9 概率密度函数 $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$, 其中 $\gamma_s = 1, 2, 4$ 和 10

发送 $s_1(t)$, 如果噪声引起相位落到 $-\pi/M \leq \Theta_r \leq \pi/M$ 范围之外, 会作出错误判决。因此, 符号错误概率是

$$P_M = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p_{\Theta_r}(\Theta_r) d\Theta_r \quad (5-2-56)$$

一般情况下, $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ 的积分不能简化成简单的形式, 除 $M=2$ 和 $M=4$ 外, 必须采用数值计算。

对于二进制相位调制, $s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 是双极性信号, 因此错误概率为

$$P_2 = Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right] \quad (5-2-57)$$

当 $M=4$ 时, 这实际上是两个相位正交的二进制相位调制。因为在两个正交载波之间没有串音或干扰, 所以比特错误概率与式(5-2-57)相同。另一方面, $M=4$ 的符号错误概率可通过 2 比特符号的正确判决概率 P_c 来确定

$$P_c = (1 - P_2)^2 = \left[1 - Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right]\right]^2 \quad (5-2-58)$$

式(5-2-58)是根据在正交载波上噪声的统计独立特性得到的。因此, $M=4$ 的符号错误概率是

$$\begin{aligned} P_4 &= 1 - P_c \\ &= 2Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right] \left[1 - \frac{1}{2}Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right]\right] \end{aligned} \quad (5-2-59)$$

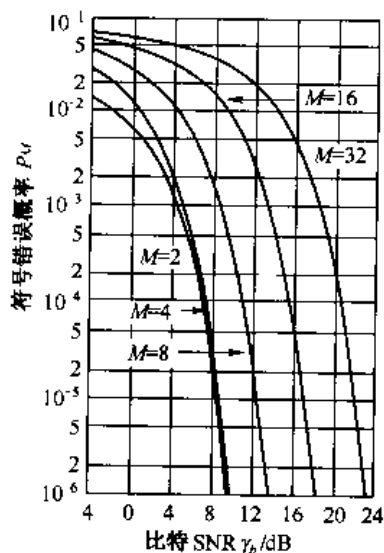


图 5-2-10 PSK 信号的符号错误概率

对于 $M>4$, 通过对式(5-2-56)数值积分可得到符号错误概率。图 5-2-10 示出了当 $M=2, 4, 8, 16$ 和 32 时作为比特 SNR 函数的错误概率, 该图明显地示出当 M 增加超过 $M=4$ 时, 比特 SNR 付出的代价。例如, 当 $P_M = 10^{-5}$ 时, $M=4$ 与 $M=8$ 之间的差别近似为 4 dB, 而在 $M=8$ 与 $M=16$ 之间的差别近似为 5 dB。对于大 M 值, 当相位数目成倍增加时, 若要达到同样的性能, 要求附加 6 dB/bit。

在大 M 值和大 SNR 值情况下的错误概率近似式主要利用 $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ 的近似表达式求得。 $\mathcal{E}_s/N_0 \gg 1$ 且

$|\Theta_r| \leq \frac{1}{2}\pi$ 时, $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ 较好地近似为

$$p_{\Theta_r}(\Theta_r) \approx \sqrt{\frac{\gamma_s}{\pi}} \cos \Theta_r e^{-\gamma_s \sin^2 \Theta_r} \quad (5-2-60)$$

通过替代式(5-2-56)中的 $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$, 并且将变量 Θ_r

变换为 $u = \sqrt{\gamma_s} \sin \Theta_r$, 可求得

$$P_M \approx 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sqrt{\frac{\gamma_s}{\pi}} \cos \Theta_r e^{-\gamma_s \sin^2 \Theta_r} d\Theta_r$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{2\gamma_s} \sin(\pi/M)}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= 2Q\left(\sqrt{2\gamma_s} \sin \frac{\pi}{M}\right) = 2Q\left(\sqrt{2k\gamma_b} \sin \frac{\pi}{M}\right) \end{aligned} \quad (5-2-61)$$

式中, $k = \log_2 M$ 且 $\gamma_s = k\gamma_b$ 。注意, 该式对错误概率的近似程度^① 对所有 M 值都是比较好的。例如, 当 $M=2$ 和 $M=4$ 时, $P_2 = P_4 = 2Q(\sqrt{2\gamma_b})$, 可将该式与式(5-2-57)的精确概率比较(相差因子 2)。

推导 M 元 PSK 等价的比特错误概率是相当冗长乏味的, 这是由于这种推导与 k 比特符号对相应信号相位的映射有关。当在映射中采用格雷(Gray)码时, 相应于邻近相位的两个 k 比特符号仅相差 1 比特。由于噪声引起的大多数可能的差错情况是错误地选择了与正确相位相邻的相位, 所以 k 比特符号差错仅包含单个比特差错。因此, M 元 PSK 的等价比特错误概率较好地近似为

$$P_b \approx \frac{1}{k} P_M \quad (5-2-62)$$

在对 PSK 信号解调的讨论中, 假定解调器具有对载波相位完善的估计。然而, 实际上载波相位是从接收信号通过某些非线性运算提取的, 这会引入相位模糊。例如, 在二进制 PSK 中, 为了除去调制分量, 常将信号进行平方运算, 再将所产生的倍频分量过滤, 然后二分频提取载波频率和相位 ϕ 的估值。这些运算会在载波相位中产生 180° 的相位模糊。与此类似, 在四相 PSK 中, 为了除去数字调制分量, 须将接收信号进行 4 次方运算, 再将所产生的载波频率的 4 次谐波分量过滤, 然后四分频以提取载波分量。这些运算产生一个包含载波相位 ϕ 估值的载波频率分量, 但在相位估值中存在 $\pm 90^\circ$ 和 $\pm 180^\circ$ 的相位模糊。因此, 不能获得确定无疑的载波相位估值用于解调。

载波相位 ϕ 估计中的相位模糊问题可以用下述方法克服: 以前后接连的信号传输间的相位差的进行信息编码, 这与绝对相位编码的情况不同。例如, 在二进制 PSK 中, 信息比特 1 通过载波相位相对前一载波相位 180° 相移来发送, 信息比特 0 则是通过相对前一信号传输间隔中相位的零相移发送。在四相 PSK 中, 在接连间隔之间的相对相移是 $0, 90^\circ, 180^\circ$ 和 -90° , 分别相应于信息比特 00, 01, 11 和 10。这可以直接推广到 $M > 4$ 的多相情况。由该编码处理产生的 PSK 信号称为差分编码 PSK 信号。这种编码由调制器之前比较简单的逻辑电路实现。

差分编码 PSK 的解调方法如上所述, 不用理睬相位模糊问题。因此, 在每一个信号传输间隔中, 接收信号被解调并检测成 M 个可能发送的相位中的一个。在检测器之后是一个比较简单的相位比较器, 它比较在两个接连间隔上已解调信号的相位, 以便提取信息。

差分编码 PSK 的相干解调的错误概率比绝对相位编码的错误概率高。在任何给定的间隔中, 信号解调相位的差错通常会导致在两个接连信号传输间隔上的译码差错。因此, 差分编码 M 元 PSK 的错误概率近似于绝对相位编码 M 元 PSK 的错误概率的两倍。然而, 错误概率增加一倍折算成 SNR 的损失比较小。

^① 卢(Lu)等人的论文给出了在低 SNR 情况下错误概率的更好的近似式。

5.2.8 差分 PSK(DPSK)及其性能

差分编码相位调制信号还有另外一种不需要载波相位估计的解调方法^①,就是将任何给定的信号传输间隔的接收信号与前一信号传输间隔的接收信号的相位进行比较。具体地说,假设通过将 $r(t)$ 乘以 $\cos 2\pi f_c t$ 和 $\sin 2\pi f_c t$,再将这两个乘积在间隔 T 上积分的方法来解调差分编码信号。在第 k 个信号传输间隔,解调器输出是

$$\mathbf{r}_k = [\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\theta_k - \phi) + n_{k1} \quad \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin(\theta_k - \phi) + n_{k2}]$$

或等效为

$$r_k = \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_k - \phi)} + n_k \quad (5-2-63)$$

式中, θ_k 是第 k 个信号传输间隔发送信号的相角, ϕ 是载波相位, $n_k = n_{k1} + jn_{k2}$ 是噪声向量。类似地,在前一信号传输间隔,解调器输出的接收信号向量是

$$r_{k-1} = \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_{k-1} - \phi)} + n_{k-1} \quad (5-2-64)$$

相位检测器的判决变量是这两个复数之间的相位差。这也可等效为将 r_k 投影到 r_{k-1} ,再利用得出的复数相位,即

$$r_k r_{k-1}^* = \mathcal{E}_s e^{j(\theta_k - \theta_{k-1})} + \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_k - \phi)} n_{k-1}^* + \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{-j(\theta_{k-1} - \phi)} n_k + n_k n_{k-1}^* \quad (5-2-65)$$

在无噪声情况下,该复数具有相差 $\theta_k - \theta_{k-1}$ 。因此, $r_k r_{k-1}^*$ 的均值与载波相位无关。以上所述的被解调和检测的差分编码 PSK 信号传输称为差分 PSK(DPSK)。

图 5-2-11 示出了采用匹配滤波器的 DPSK 的解调与检测方法。如果脉冲 $g(t)$ 是矩形的,那么匹配滤波器可用积分和清除滤波器代替。

现在来研究 DPSK 解调和检测错误概率性能的计算问题。除 $M=2$ 之外,推导 M 元 DPSK 错误概率的准确值极其困难,主要在于确定式(5-2-65)中随机变量 $r_k r_{k-1}^*$ 相位的 PDF。然而,要得到一个 DPSK 性能的近似式很容易,以下将详细说明。

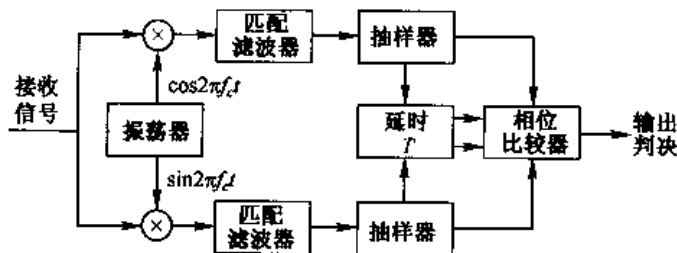


图 5-2-11 DPSK 解调器的方框图

不失一般性,假设相位差 $\theta_k - \theta_{k-1} = 0$,式(5-2-65)中的指数因子 $e^{-j(\theta_{k-1} - \phi)}$ 和 $e^{-j(\theta_k - \phi)}$ 可归并到高斯噪声 n_{k-1} 和 n_k 中,而不会改变它们的统计特性。因此,式(5-2-65)中的 $r_k r_{k-1}^*$ 可表示为

$$r_k r_{k-1}^* = \mathcal{E}_s + \sqrt{\mathcal{E}_s} (n_k + n_{k-1}^*) + n_k n_{k-1}^* \quad (5-2-66)$$

求相位 PDF 的复杂性在于 $n_k n_{k-1}^*$ 项。然而,在实际应用的 SNR 上, $n_k n_{k-1}^*$ 项相对主要噪声

^① 因为不需要相位估计,所以常把 DPSK 看做一种非相干通信技术。可以看到,DPSK 表示一种在极端情况下的数字相位调制形式,其中相位估值仅由前一符号间隔得到。

项 $\sqrt{\mathcal{E}_s}(n_k + n_{k-1}^*)$ 较小。如果忽略 $n_k n_{k-1}^*$ 项,再用 $\sqrt{\mathcal{E}_s}$ 除各项,将 $r_k r_{k-1}^*$ 归一化,则一组新的判决变量为

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\mathcal{E}_s} + \operatorname{Re}(n_k + n_{k-1}^*) \\ y &= \operatorname{Im}(n_k + n_{k-1}^*) \end{aligned} \quad (5-2-67)$$

变量 x 和 y 是不相关的高斯随机变量,且具有相同的方差 $\sigma_n^2 = N_0$,相位是

$$\Theta_r = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (5-2-68)$$

在这一步,我们要解决的问题与前面解决相干相位解调器中的问题是相同的。惟一的差别是现在的噪声方差是 PSK 情况的两倍。因此,可得出结论: DPSK 的性能比 PSK 差 3 dB。这个结果对于 $M \geq 4$ 是比较好的,但对 $M = 2$ 且在大 SNR 时不太好,因为此时二进制 DPSK 相对二进制 PSK 的损失小于 3 dB。下面将证明这一点。

在二进制 DPSK 中,两个可能的发送相位差是 0 和 π 弧度,因此恢复信息仅需要 $r_k r_{k-1}^*$ 的实部。利用式(5-2-67),将实部表示为

$$\operatorname{Re}(r_k r_{k-1}^*) = \frac{1}{2}(r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1})$$

因为在两个接连的信号传输间隔之间相位差为零,如果 $\operatorname{Re}(r_k r_{k-1}^*) < 0$,将造成一次差错。附录 B 研究了复高斯随机变量的一般二次式小于零的概率, $r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1} < 0$ 的概率是其中的特殊情况。这个概率的一般形式由附录 B 的式(B-21)给出,它完全决定于复高斯随机变量 r_k 和 r_{k-1} 的一阶矩和二阶矩。根据计算出来的矩以及与矩有函数关系的参数,得到二进制 DPSK 错误概率的形式如下

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\mathcal{E}_b/N_0} \quad (5-2-69)$$

式中, \mathcal{E}_b/N_0 是比特信噪比,其曲线如图 5-2-12 所示,图中还示出了二进制相干 PSK 的错误概率。可以看到,在错误概率 $p_e \leq 10^{-3}$ 时,二进制 PSK 与二进制 DPSK 之间的 SNR 之差小于 3 dB。实际上,在 $p_e \leq 10^{-5}$ 时,SNR 之差小于 1 dB。

对于具有格雷编码的四相 DPSK 的二进制数字差错概率,可以用熟知的函数来表示,不过其推导相当复杂。在此只简单地说明结果,有兴趣的读者可以参考附录 C 中的详细推导。这个差错概率可表示成如下形式

$$P_b = Q_1(a, b) - \frac{1}{2} I_0(ab) \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \quad (5-2-70)$$

式中 $Q_1(a, b)$ 是马库姆(Marcum) Q 函数,它由式(2-1-122)和式(2-1-123)定义。 $I_0(x)$ 是零阶修正贝塞尔函数,由式(2-1-120)定义,参数 a 和 b 定义为

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2\gamma_b \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \\ b &= \sqrt{2\gamma_b \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \end{aligned} \quad (5-2-71)$$

图 5-2-13 示出了二、四相 DPSK 和相干 PSK 信号传输的二进制数字差错概率曲线,它们是通过本节导出的精确公式计算而得的。因为在大 SNR 时二进制 DPSK 稍次于二进制 PSK,

且 DPSK 不需要用复杂的方法来估计载波相位,所以它常用于数字通信系统中。另一方面,四相 DPSK 的性能在大 SNR 时比四相 PSK 差大约 2.3 dB。因此,在这两个四相系统之间选择不是非常明确的,必须在 2.3 dB 损失与减少实现的复杂性之间权衡。

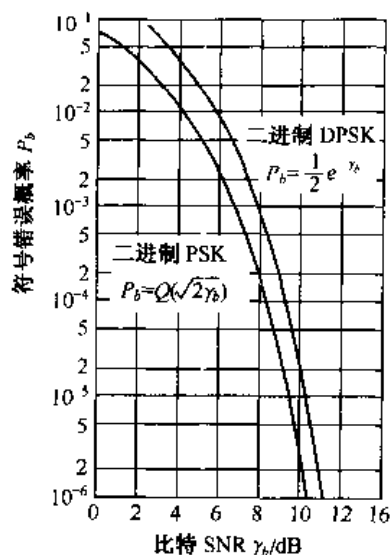


图 5-2-12 二进制 PSK 和 DPSK 的错误概率

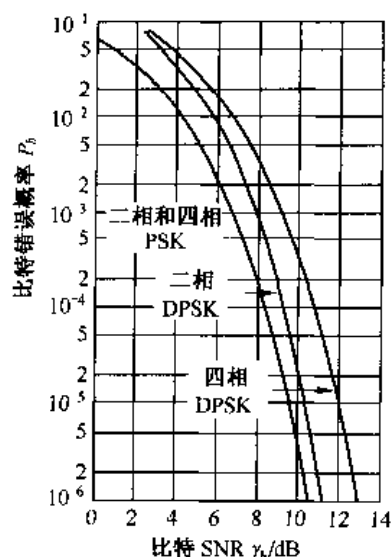


图 5-2-13 二进制四相 PSK 和 DPSK 的比特错误概率

5.2.9 QAM 错误概率

由 4.3 节可知, QAM 信号波形可表示为

$$s_m(t) = A_{mc}g(t)\cos 2\pi f_c t - A_{ms}g(t)\sin 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5-2-72)$$

式中, A_{mc} 和 A_{ms} 是正交载波携带信息的信号幅度, $g(t)$ 是信号脉冲。这些波形的向量表达式为

$$\mathbf{s}_m = \left[A_{mc} \sqrt{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_g, A_{ms} \sqrt{\frac{1}{2}} \mathcal{E}_g \right] \quad (5-2-73)$$

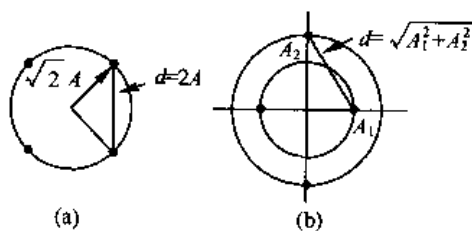


图 5-2-14 两个 4 点信号星座图

为了求 QAM 的错误概率,必须详细说明信号点星座图。首先看 $M=4$ 个点的 QAM 信号集。图 5-2-14 示出了两种 4 点信号集,第一种是一个四相调制信号,第二种是具有两个幅度电平(标记为 A_1 和 A_2)和 4 个相位的 QAM 信号。因为错误概率主要取决于信号点之间的最小距离,对这两种信号星座图施加条件 $d_{\min}^{(e)} = 2A$,并根据所有点是等概的前提条件来计算平均发送功率。对于四相信号,有

$$P_{av} = \frac{1}{4}(4)2A^2 = 2A^2 \quad (5-2-74)$$

对两幅度、四相位的 QAM,将信号点置于半径为 A 和 $\sqrt{3}A$ 的圆周上。因此, $d_{\min}^{(e)} = 2A$,且

$$P_{av} = \frac{1}{4}[2(3A^2) + 2A^2] = 2A^2 \quad (5-2-75)$$

这是与 $M=4$ 相位信号星座图相同的平均功率。因此,对所有实际的目的,这两个信号集的

差错率性能是相同的。换言之,两幅度 QAM 信号集相对于 $M=4$ 相位调制没有优越性。

其次,研究 $M=8$ QAM 的情况。在这种情况下,有许多种可能的信号星座图。我们将研究四相信号星座图,如图 5-2-15 所示,该图中的所有星座都由两个幅度组成且信号点之间的最小距离均为 $2A$ 。图中每个信号点的坐标 (A_{mc}, A_{ms}) 已由 A 归一化。假设信号点是等概的,平均发送功率是

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (A_{mc}^2 + A_{ms}^2) \\ &= \frac{A^2}{M} \sum_{m=1}^M (a_{mc}^2 + a_{ms}^2) \end{aligned} \quad (5-2-76)$$

式中, (a_{mc}, a_{ms}) 是由 A 归一化的信号点坐标。

图 5-2-15 中的两个信号集(a)和(c)中的信号点落在一个矩形的格栅上且 $P_{av} = 6A^2$ 。信号集(b)要求平均发送功率 $P_{av} = 6.83A^2$, (d)要求 $P_{av} = 4.73A^2$ 。因此,为达到相同的错误概率,第 4 个信号集要求的功率比头两个信号集大约小 1 dB,而比第 3 个信号集小 1.6 dB。这个信号星座图称为最好的 8 点 QAM 信号星座图,因为它对于给定的信号点之间的最小距离所要求的功率最小。

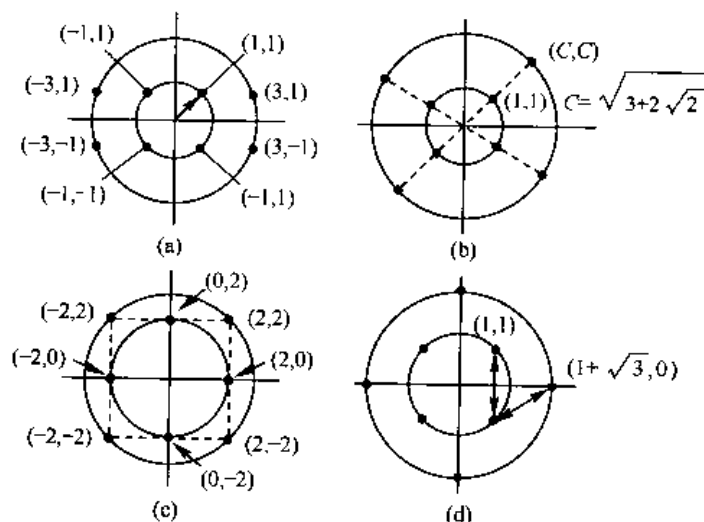


图 5-2-15 4 个 8 点 QAM 信号星座图

对于 $M \geq 16$, 在二维空间中选择 QAM 信号点的可能性更大。例如,可对 $M=16$ 选择圆形多幅度星座,如图 4-3-4 所示。在这种情况下,给定幅度电平上的信号点相对于邻近幅度电平上的信号点相位旋转 $\frac{1}{4}\pi$ 。16-QAM 星座是最佳 8-QAM 星座的推广。然而,对于 AWGN 信道,圆周形的 16-QAM 星座不是最好的 16 点 QAM 信号星座。

矩形 QAM 信号星座具有容易产生的独特优点,即通过在两个相位正交载波上施加两个 PAM 信号来产生。此外,它们也容易解调。虽然对于 $M \geq 16$ 来说,该星座并不是最好的 M 元 QAM 信号星座,但是对于要达到给定的最小距离的要求来说,该星座所需要的平均发送功率仅稍大于最好的 M 元 QAM 信号星座所需的平均功率。由于这些原因,矩形 M 元 QAM 信号在实际中应用得最多。

对于 $M=2^k$ 且 k 为偶数的矩形信号星座, QAM 信号星座等效为在两个正交载波上的两个 PAM 信号, 其中每一个具有 $\sqrt{M}=2^{k/2}$ 个信号点。因为在解调器中可以将相位正交的两个信号分量完全分开, 所以 QAM 的错误概率可以很容易地由 PAM 的错误概率求得。具体地说, M 元 QAM 系统的正确判决概率是

$$P_c = (1 - P_{\sqrt{M}})^2 \quad (5-2-77)$$

式中, $P_{\sqrt{M}}$ 是 \sqrt{M} 元 PAM 的错误概率, 在等效 QAM 系统的每一个正交信号中, \sqrt{M} 元 PAM 具有一半平均功率, 通过适当地修改 M 元 PAM 的错误概率, 可得到

$$P_{\sqrt{M}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left[\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{\mathcal{E}_{av}}{N_0}} \right] \quad (5-2-78)$$

式中, \mathcal{E}_{av}/N_0 是平均符号 SNR。因此, M 元 QAM 的符号错误概率为

$$P_M = 1 - (1 - P_{\sqrt{M}})^2 \quad (5-2-79)$$

注意, 该结果对于 $M=2^k$ 且 k 为偶数时是准确的。另一方面, 当 k 为奇数时, 没有等效的 \sqrt{M} 元 PAM 系统。然而, 这也不成问题, 因为求矩形信号集的差错率相当容易。如果使用一个最佳检测器, 它以式(5-1-43)的最佳距离度量作为判决依据, 那么可直接表示符号错误概率的紧密上边界为

$$\begin{aligned} P_M &\leq 1 - \left[1 - 2Q \left[\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{av}}{(M-1)N_0}} \right] \right]^2 \\ &\leq 4Q \left[\sqrt{\frac{3k\mathcal{E}_{av}}{(M-1)N_0}} \right] \end{aligned} \quad (5-2-80)$$

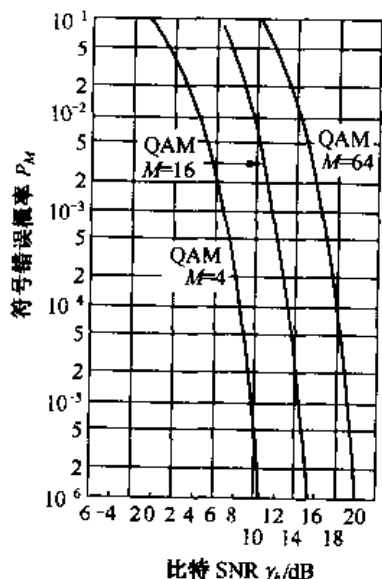


图 5-2-16 QAM 符号错误概率

该式适用于任何 $k \geq 1$ 的情况, 式中 \mathcal{E}_{av}/N_0 是平均比特 SNR。图 5-2-16 画出了符号错误概率的曲线, 它是平均比特 SNR 的函数。

对于非矩形 QAM 信号星座, 可以采用一致边界作为错误概率的上边界。一个明显的上边界是

$$P_M < (M-1)Q \left(\sqrt{\frac{[d_{\min}^{(e)}]^2}{2N_0}} \right)$$

式中, $d_{\min}^{(e)}$ 是信号点之间的最小欧氏距离。在大 M 值时, 该边界也许是比较松疏的。在这样的情况下, 可以用 M_n 取代 $M-1$ 的办法来近似 P_M , 这里 M_n 是与任何星座的点距离为 $d_{\min}^{(e)}$ 的最多相邻点的数目。

将 QAM 的性能与 PSK 的性能在给定信号数目 M 的条件下比较, 因为这两种类型的信号都是二维的, M 元 PSK 的符号错误概率近似为

$$P_M \approx 2Q \left(\sqrt{2\gamma_s} \sin \frac{\pi}{M} \right) \quad (5-2-81)$$

式中, γ_s 是符号 SNR。对于 M 元 QAM, 可以用式(5-2-78)表示。因为错误概率是受 Q 函数的自变量支配的, 所以可简单地比较两种信号格式 Q 函数的自变量。因此, 这两个自变量的比值为

$$\mathcal{R}_M = \frac{3/(M-1)}{2\sin^2(\pi/M)} \quad (5-2-82)$$

例如,当 $M=4$ 时, $\mathcal{R}_M=1$ 。因此,4-PSK 与 4-QAM 在同样的符号 SNR 时具有类似的性能。另一方面,当 $M>4$ 时, $\mathcal{R}_M>1$,所以 M 元 QAM 的性能比 M 元 PSK 好。表 5-2-1 说明了在几种 M 值时,QAM 相对于 PSK 的 SNR 改善量。例如,32-QAM 相对于 32-PSK 有 7 dB 的改善量。

表 5-2-1 M 元 QAM 相对于 M 元 PSK 的 SNR 改善量

M	$10\lg\mathcal{R}_M$
8	1.65
16	4.20
32	7.02
64	9.95

5.2.10 数字调制方法的比较

本章所述的数字调制的比较方式有几种。例如,一种方式是根据要达到的错误概率比较所需要的 SNR,但这种比较不很有意义,除非它基于某些限制条件,如基于一个固定的数据传输速率,或等价为基于一个固定的带宽。下面以此为目标研究几种调制方法的带宽要求。

对于多相信号,所要求的带宽也就是等效低通信号脉冲 $g(t)$ 的带宽,它取决于脉冲详细的特征。假定 $g(t)$ 脉冲的持续时间为 T ,带宽近似等于 T 的倒数。因此, $W=1/T$,由于 $T=k/R=(\log_2 M)/R$,所以

$$W = \frac{R}{\log_2 M} \quad (5-2-83)$$

因此,当比特率 R 固定时,随着 M 增加而要求的带宽减少。带宽效率可用比特率与带宽的比值来度量,即

$$\frac{R}{W} = \log_2 M \quad (5-2-84)$$

为了传输 PAM 信号的带宽,效率高的方法是单边带。那么,传输该信号所要求的信道带宽近似等于 $1/2T$,且因为 $T=k/R=(\log_2 M)/R$,所以

$$\frac{R}{W} = 2\log_2 M \quad (5-2-85)$$

这个带宽效率比 PSK 好两倍。

在 QAM 情况下,有两个正交载波,每一个载波具有一个 PAM 信号,因此它的速率是 PAM 的两倍。然而,QAM 信号必须经由双边带传输,所以当以带通信号带宽为基准时,QAM 和 PAM 具有相同的带宽效率。

正交信号具有完全不同的带宽要求。如果以满足正交性的最小频率间隔 $1/2T$ 的正交载波的方法构成 $M=2^k$ 正交信号,则传输 $k=\log_2 M$ 信息比特所要求的带宽是

$$W = \frac{M}{2T} = \frac{M}{2(k/R)} = \frac{M}{2\log_2 M} R \quad (5-2-86)$$

在这种情况下, M 增加时带宽增加。对于单纯信号和双正交信号,有类似的关系。在双正交

信号情况下,所要求的带宽是正交信号的一半。

对这些调制方法的一种紧凑的且有意义的比较是根据在要求达到给定的错误概率的情况下,归一化数据速率 R/W (单位为 $(\text{b/s})/\text{Hz}$) 与比特 SNR (\mathcal{E}_b/N_0) 的关系曲线。图 5-2-17 示出了 PAM, QAM, PSK 和正交信号在错误概率 $P_M = 10^{-5}$ 情况下的 R/W 与比特 SNR 的关系曲线。可以看到,在 PAM, QAM 和 PSK 情况下,增加 M 导致较高的比特率-带宽比值 (R/W)。然而,达到较高数据速率的代价是增加比特 SNR。因此,这些调制方法适合于带宽受限的通信信道,这时希望 $R/W > 1$ 且要求有足够的 SNR 支持 M 的增加。电话信道和数字微波无线信道是这种带宽受限信道的例子。

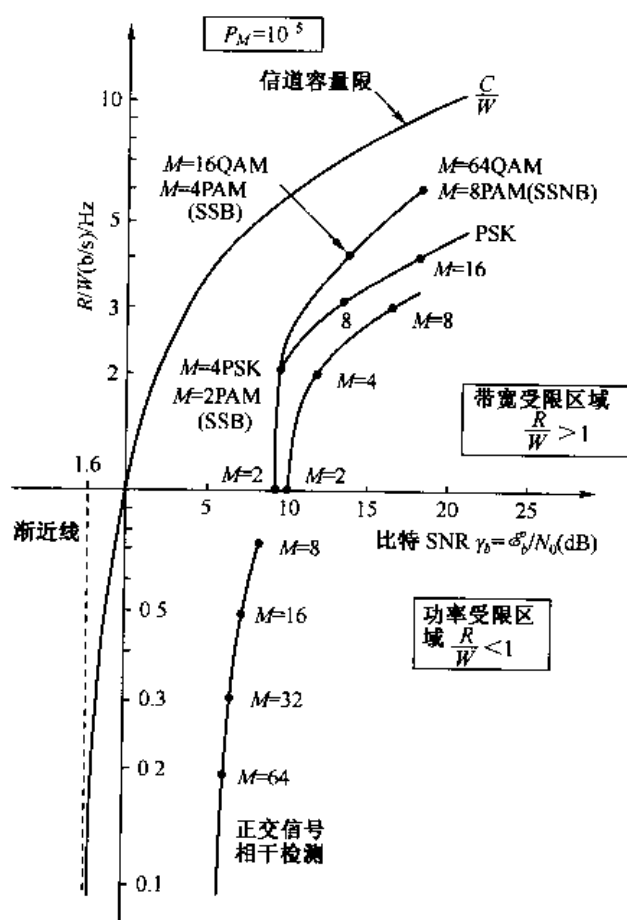


图 5-2-17 当符号错误概率为 10^{-5} 时几种调制方法的比较

相反地, M 元正交信号的 $R/W \leq 1$ 。当 M 增加时,由于所需信道带宽增加,故 R/W 减少。然而,当 M 增加时,要达到给定错误概率 ($P_M = 10^{-5}$),所需的比特 SNR 减少。因此, M 元正交信号适合于功率受限的信道,该信道具有充分大的带宽容纳大量信号。在这种情况下,倘若 $\mathcal{E}_b/N_0 > 0.693$ (-1.6 dB),当 $M \rightarrow \infty$ 时,可以得到尽可能小的错误概率。该信噪比条件是在如下极限情况下可靠传输所要求的最小 SNR: 信道带宽 $W \rightarrow \infty$ 且相应的 $R/W \rightarrow 0$ 。

图 5-2-17 也示出了根据香农(1948 年)理论的带限 AWGN 信道的归一化容量曲线。比值 C/W 表示在该信道上最高可达到的比特率-带宽比值,其中 C ($= R$) 是容量,其单位为 b/s 。因此,它可作为任何类型调制的带宽效率的上边界。

第 7 章将推导此边界,并作更详细的讨论。

5.3 CPM 信号的最佳接收机

由 4.3 节可知,CPM 是一种有记忆的调制方法,记忆特性来自于从一个信号间隔到下一个间隔时发送载波相位的连续性。CPM 发送信号可以表示为

$$s(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos[2\pi f_c t + \phi(t; \mathbf{I})] \quad (5-3-1)$$

式中, $\phi(t; \mathbf{I})$ 是载波相位。加性高斯噪声信道的过滤接收信号是

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (5-3-2)$$

式中

$$n(t) = n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t \quad (5-3-3)$$

5.3.1 CPM 的最佳解调和检测

对这种信号的最佳接收机由相关器跟随一个最大似然序列检测器组成,该检测器通过状态网格搜索最小欧氏距离的路径。维特比算法是执行这种搜索的有效方法。下面将建立 CPM 的一般状态网格结构,然后描述度量的计算。

具有固定调制指数 h 的 CPM 信号的载波相位可以表示为

$$\begin{aligned} \phi(t; \mathbf{I}) &= 2\pi h \sum_{k=-\infty}^n I_k q(t - kT) \\ &= \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-L} I_k + 2\pi h \sum_{k=n-L+1}^n I_k q(t - kT) \\ &= \theta_n + \theta(t; \mathbf{I}) \quad (nT \leq t \leq (n+1)T) \end{aligned} \quad (5-3-4)$$

式中,假定当 $t < 0$ 时 $q(t) = 0$, 当 $t \geq LT$ 时 $q(t) = \frac{1}{2}$, 且

$$q(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (5-3-5)$$

当 $t < 0$ 和 $t \geq LT$ 时,信号脉冲 $g(t) = 0$; 当 $L = 1$ 时,为全响应 CPM; 当 $L > 1$ 时(其中 L 为正整数),为部分响应 CPM 信号。

那么,当 h 为有理数时,即 $h = m/p$, 其中 m 和 p 是互素的正整数,CPM 方案可用网格表示。在这种情况下,当 m 为偶数时,有 p 个相位状态

$$\Theta_s = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (5-3-6)$$

当 m 为奇数时,有 $2p$ 个相位状态

$$\Theta_s = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \dots, \frac{(2p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (5-3-7)$$

如果 $L = 1$, 这些状态是网格图中惟一的状态。另一方面,如果 $L > 1$, 由于信号脉冲 $g(t)$ 的部分响应特性,有附加的状态。这些附加的状态可通过把式(5-3-4)中的 $\theta(t; \mathbf{I})$ 表示成下式来辨识

$$\theta(t; \mathbf{I}) = 2\pi h \sum_{k=n-L+1}^{n-1} I_k q(t-kT) + 2\pi h I_n q(t-nT) \quad (5-3-8)$$

式(5-3-8)右边的第一项决定于信息符号 $(I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_{n-L+1})$, 称做相关状态向量, 该项表示相应于未达到最终值的信号脉冲的相位项。式(5-3-8)中的第二项表示最近的符号 I_n 的相位贡献。因此, 对于长度为 LT ($L > 1$) 的部分响应信号脉冲, CPM 信号(或调制器)在 $t = nT$ 时刻的状态可以表示为相位状态和相关状态的组合, 记为

$$S_n = \{\theta_n, I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_{n-L+1}\} \quad (5-3-9)$$

在这种情况下, 当 $h = m/p$ 时, 状态数为

$$N_s = \begin{cases} pM^{L-1} & (\text{偶数 } m) \\ 2pM^{L-1} & (\text{奇数 } m) \end{cases} \quad (5-3-10)$$

现在, 假设调制器在 $t = nT$ 时刻的状态是 S_n 。在 $nT \leq t \leq (n+1)T$ 时间间隔中, 新的符号的影响将状态由 S_n 变为 S_{n+1} 。因此, 在 $t = (n+1)T$ 时, 状态变为

$$S_{n+1} = (\theta_{n+1}, I_n, I_{n-1}, \dots, I_{n-L+2})$$

其中

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \pi h I_{n-L+1}$$

例 5-3-1 研究一个具有调制指数 $h = 3/4$ 和 $L = 2$ 的部分响应脉冲的 CPM 方案。求该 CPM 方案的状态 S_n , 并画出相位树及状态网格。

首先, 注意到有 $2p = 8$ 个相位状态, 即

$$\Theta_s = \{0, \pm \frac{1}{4}\pi, \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{4}\pi, \pi\}$$

其中每一个相位状态有两个状态, 它们是由该 CPM 方案的记忆特性产生的。因此, 总的状态数目 $N_s = 16$, 即

$$\begin{aligned} & (0, 1), (0, -1), (\pi, 1), (\pi, -1), (\frac{1}{4}\pi, 1), (\frac{1}{4}\pi, -1), (\frac{1}{2}\pi, 1), (\frac{1}{2}\pi, -1), \\ & (\frac{3}{4}\pi, 1), (\frac{3}{4}\pi, -1), (-\frac{1}{4}\pi, 1), (-\frac{1}{4}\pi, -1), (-\frac{1}{2}\pi, 1), (-\frac{1}{2}\pi, -1), \\ & (-\frac{3}{4}\pi, 1), (-\frac{3}{4}\pi, -1) \end{aligned}$$

如果系统在相位状态 $\theta_n = -\frac{1}{4}\pi$ 且 $I_{n-1} = -1$, 那么

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \pi h I_{n-1} \\ &= -\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi = -\pi \end{aligned}$$

图 5-3-1 示出了状态网格。图 5-3-2 示出了一条通过状态网格的路径, 它相应于序列 $(1, -1, -1, -1, 1, 1)$ 。

为了画出相位树, 必须知道信号脉冲的形状 $g(t)$ 。图 5-3-3 示出了当 $g(t)$ 是持续时间为 $2T$ 的矩形脉冲, 且初始状态为 $(0, 1)$ 时的相位树。

在 CPM 的状态网格表示形式建立起来后, 我们来研究维特比算法中的度量计算。

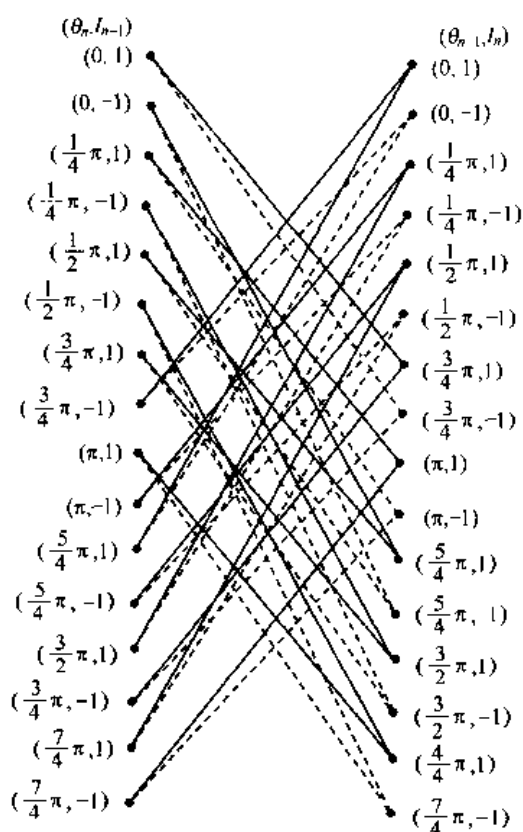


图 5-3-1 具有 $h=3/4$ 部分响应 ($L=2$) CPM 的状态网络

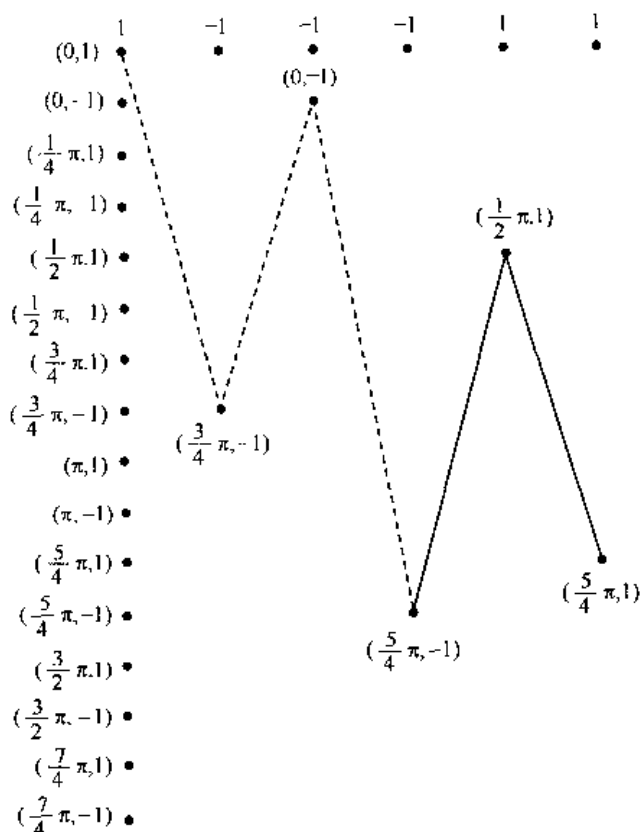


图 5-3-2 通过网格的一条单独的信号路径

度量计算

回顾 5.1.4 节对最大似然解调器的数学推导,容易证明:在特定发送符号序列 \mathbf{I} 条件下的观察信号 $r(t)$ 的对数概率与下列互相关度量成正比

$$\begin{aligned} CM_n(\mathbf{I}) &= \int_{-\infty}^{(n+1)T} r(t) \cos[\omega_c t + \phi(t; \mathbf{I})] dt \\ &= CM_{n-1}(\mathbf{I}) + \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \cos[\omega_c t + \theta(t; \mathbf{I}) + \theta_n] dt \end{aligned} \quad (5-3-11)$$

$CM_{n-1}(\mathbf{I})$ 项表示直到 nT 时刻的幸存序列的度量,而下列项

$$v_n(\mathbf{I}; \theta_n) = \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \cos[\omega_c t + \theta(t; \mathbf{I}) + \theta_n] dt \quad (5-3-12)$$

表示由在 $nT \leq t \leq (n+1)T$ 时间间隔内的信号引起的度量的附加增量。注意,有 M^L 个可能的符号序列 $\mathbf{I} = (I_n, I_{n-1}, \dots, I_{n-L+1})$ 以及 p (或 $2p$) 个可能的相位状态 $\{\theta_n\}$ 。因此,在每个信号间隔计算出 pM^L (或 $2pM^L$) 个不同的 $v_n(\mathbf{I}, \theta_n)$ 值,其中每个值用做相应于前一信号传输间隔中 pM^{L-1} 个幸存序列的度量的增量。图 5-3-4 示出了该维特比译码器计算 $v_n(\mathbf{I}, \theta_n)$ 的一般方框图。

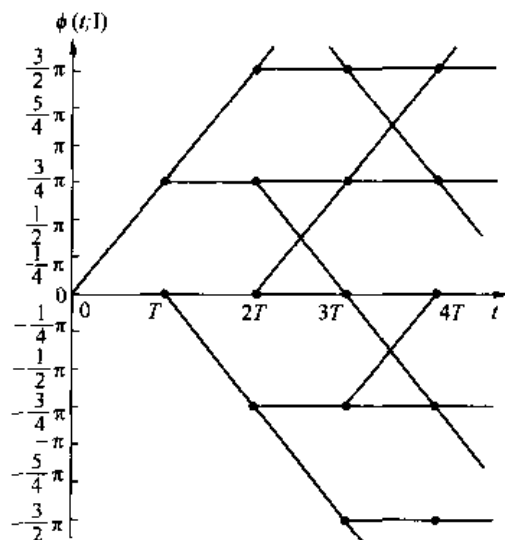


图 5-3-3 具有 $h=3/4$ 且 $L=2$ 部分响应 CPM 的相位树

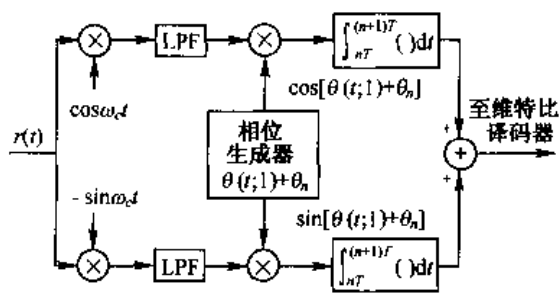


图 5-3-4 度量增量 $v_n(I; \theta_n)$ 的计算

注意,在维特比译码过程中的每一个状态,幸存序列的数目是 pM^{L-1} (或 $2pM^{L-1}$) 个。对于每一个幸存序列,有 M 个新的 $v_n(I, \theta_n)$ 的增量,该增量附加到现有度量上,产生具有 pM^L (或 $2pM^L$) 个度量的 pM^L (或 $2pM^L$) 个序列。然而,这些序列的数目将减回到 pM^{L-1} (或 $2pM^{L-1}$) 个具有相应度量的幸存序列,这是由于在网格的每个节点上汇合的 M 个序列中选取最可能的序列,舍弃了其他 $M-1$ 个序列。

5.3.2 CPM 信号的性能

在评估具有最大似然序列检测的 CPM 信号的性能时,必须确定通过网格路径的最小欧氏距离,这些路径在 $t=0$ 时刻的节点上分离,而在后面一个时刻的同样的节点上重新汇合。通过网格的两条路径之间的距离与相应的信号有关,下面将证明这点。

假设有相应于两个相位轨迹 $\phi(t; I_i)$ 和 $\phi(t; I_j)$ 的两个信号 $s_i(t)$ 和 $s_j(t)$, 序列 I_i 和 I_j 的第一个符号必须是不同的。那么,在长度为 NT ($1/T$ 为符号速率) 的间隔上,两个信号之间的欧氏距离定义为

$$\begin{aligned}
 d_{ij}^2 &= \int_0^{NT} [s_i(t) - s_j(t)]^2 dt \\
 &= \int_0^{NT} s_i^2(t) dt + \int_0^{NT} s_j^2(t) dt - 2 \int_0^{NT} s_i(t) s_j(t) dt \\
 &= 2N\mathcal{E} - 2 \frac{2\mathcal{E}}{T} \int_0^{NT} \cos[\omega_c t + \phi(t; I_i)] \cos[\omega_c t + \phi(t; I_j)] dt \\
 &= 2N\mathcal{E} - \frac{2\mathcal{E}}{T} \int_0^{NT} \cos[\phi(t; I_i) - \phi(t; I_j)] dt \\
 &= \frac{2\mathcal{E}}{T} \int_0^{NT} \{1 - \cos[\phi(t; I_i) - \phi(t; I_j)]\} dt
 \end{aligned} \tag{5-3-13}$$

因此,按照式(5-3-13),状态网格中两条路径之间的欧氏距离和相位差有关。

希望将距离 d_{ij}^2 用比特能量表示。因为 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_b \log_2 M$, 式(5-3-13)可以表示为

$$d_{ij}^2 = 2\mathcal{E}_b \delta_{ij}^2 \quad (5-3-14)$$

式中, δ_{ij}^2 定义为

$$\delta_{ij}^2 = \frac{\log_2 M}{T} \int_0^{NT} |1 - \cos[\phi(t; \mathbf{I}_i) - \phi(t; \mathbf{I}_j)]| dt \quad (5-3-15)$$

而且 $\phi(t; \mathbf{I}_i) - \phi(t; \mathbf{I}_j) = \phi(t; \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j)$, 因此令 $\xi = \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j$, 则式(5-3-15)可写为

$$\delta_{ij}^2 = \frac{\log_2 M}{T} \int_0^{NT} [1 - \cos \phi(t; \xi)] dt \quad (5-3-16)$$

式中, 除 $\xi_0 \neq 0$ 之外, ξ 的任何元素可取的值为 $0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2(M-1)$ 。

CPM 差错率性能主要由相应于最小欧氏距离的项控制, 它可表示为

$$P_M = K_{\delta_{\min}} Q \left[\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \delta_{\min}^2 \right] \quad (5-3-17)$$

式中 $K_{\delta_{\min}}$ 是具下列最小距离的路径数,

$$\begin{aligned} \delta_{\min}^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{ij} \delta_{ij}^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{ij} \left\{ \frac{\log_2 M}{T} \int_0^{NT} [1 - \cos \phi(t; \mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j)] dt \right\} \end{aligned} \quad (5-3-18)$$

注意, 对于常规的无记忆二进制 PSK, $N=1$ 且 $\delta_{\min}^2 = \delta_{12}^2 = 2$ 。因此, 式(5-3-17)与前面的结果一致。

因为 δ_{\min}^2 表征 CPM 的性能, 所以可研究字符数 M 、调制指数 h 和部分响应 CPM 发送脉冲的长度等变化对 δ_{\min}^2 的影响。

首先研究全响应 ($L=1$) CPM。如果开始取 $M=2$, 注意下列两个序列

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i &= +1, -1, I_2, I_3 \\ \mathbf{I}_j &= -1, +1, I_2, I_3 \end{aligned} \quad (5-3-19)$$

在 $k=0, 1$ 时是不同的, 而在 $k \geq 2$ 时是相同的。这两个序列导致了两个相位轨迹在第二个符号之后汇合, 这相当于差序列

$$\xi = \{2, -2, 0, 0, \dots\} \quad (5-3-20)$$

由式(5-3-16)容易算出该序列的欧氏距离, 它提供了 δ_{\min}^2 的上边界。 $M=2$ 的 CPFSK 的上边界是

$$d_B^2(h) = 2 \left(1 - \frac{\sin 2\pi h}{2\pi h} \right) \quad (M=2) \quad (5-3-21)$$

例如, $h = \frac{1}{2}$ 时, 相当于 MSK, 则有 $d_B^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, 所以 $\delta_{\min}^2\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2$ 。

对于 $M > 2$ 且全响应 CPM, 也容易看出在 $t=2T$ 时, 相位轨迹汇合。因此, 通过研究相位差序列 $\xi = \{\alpha, -\alpha, 0, 0, \dots\}$, 其中 $\alpha = \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2(M-1)$, 可以得到 δ_{\min}^2 的上边界。这个序列产生的 M 元 CPFSK 上边界为

$$d_B^2(h) = \min_{1 \leq k \leq M-1} \left\{ (2 \log_2 M) \left(1 - \frac{\sin 2k\pi h}{2k\pi h} \right) \right\} \quad (5-3-22)$$

图 5-3-5 示出了当 $M=2, 4, 8, 16$ 时的 $d_B^2(h)$ 与 h 的关系曲线, 该图表明通过增大字符

数 M 可以得到大的性能增益。然而,必须记住 $\delta_{\min}^2(h) \leq d_B^2(h)$, 即对所有 h 值,上边界是不可达到的。

奥林和松德贝里(Aulin & Sundberg, 1981 年)通过式(5-3-16)已经把各种 CPM 信号的最小欧氏距离 $\delta_{\min}^2(h)$ 求出来。例如,图 5-3-6 示出了二进制 CPFSK 的欧氏距离作为调制指数 h 的函数的依从关系,其中作为参数的 N 是比特观测(判决)间隔数($N=1, 2, 3, 4$)。该图也示出了由式(5-3-21)给出的上边界 $d_B^2(h)$ 。特别是,当 $h = \frac{1}{2}$ 时, $\delta_{\min}^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, 这与 $N=1$ 的 PSK(二进制或四进制)是相同的平方距离。另一方面,MSK 所要求的观测间隔是 $N=2$ 个间隔,此时 $\delta_{\min}^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 。因此,具有维特比检测器的 MSK 性能与(二进制或四进制)PSK 是相当的,正如前所述。

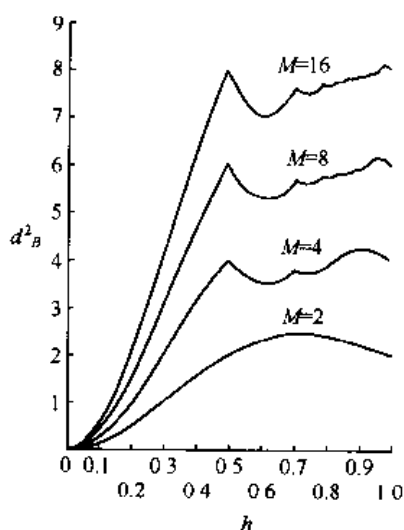


图 5-3-5 具有矩形脉冲全响应 CPM 的上边界 d_B^2 是调制指数 h 的函数

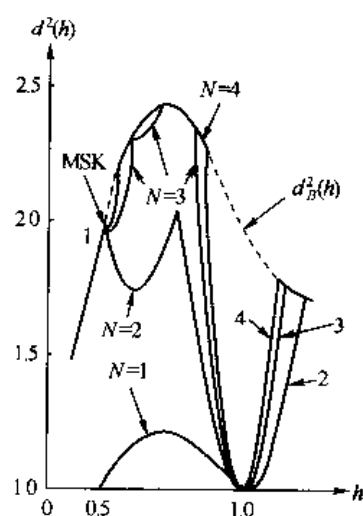


图 5-3-6 二进制 CPFSK 的作为调制指数函数的平方最小欧氏距离,上边界是 d_B^2

由图 5-3-6 可知,当观测间隔 $N=3$ 时,二进制 CPFSK 的最佳调制指数 $h=0.715$ 。这就得出 $\delta_{\min}^2(0.715)=2.43$ 或相对 MSK 的增益 0.85 dB。

图 5-3-7 示出了 $M=4$ CPFSK 的作为 h 函数的欧氏距离,其中观测间隔长度 N 作为参数。图中也示出了(用虚线表示且不可达到的)由式(5-3-22)算出的上边界 d_B^2 。注意,对几种 h 值和某些 N , δ_{\min}^2 可达到上边界。特别是,当 $N=8$ 观测符号间隔时,在 $h \approx 0.9$ 处近似地达到 d_B^2 的最大值。当 $N=9$ 时,在 $h=0.914$ 处可得到真正的最大值。这种情况的 $\delta_{\min}^2(0.914)=4.2$, 表示相对于 MSK 有 3.2 dB 的增益。同时,欧氏距离在 $h = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$ 等处具有最小值,这些 h 值称为弱调制指数,应当避免。对于较大的 M 值,可得到类似的结果,这可以在奥林和松德贝里(Aulin & Sundberg, 1981 年)的论文和安德森(Anderson, 1986 年)等人的著作中找到。

通过使用部分响应信号,CPM 的最大似然序列检测也可以得到大的性能增益。例如,部分响应的升余弦脉冲为

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{2LT} \right) & (0 \leq t \leq LT) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (5-3-23)$$

其距离边界为 $d_B^2(h)$, 如图 5-3-8 所示, 其中 $M=2$ 。这里, 当 L 增加时, d_B^2 也达到更高的值。显然, 当记忆 L 增加时, CPM 的性能得到改善, 但是 h 也必须增加以获得更大的 d_B^2 值。因为较大的调制指数意味着较大的带宽 (对固定 L), 而较长的记忆长度 L (对固定 h) 意味着较小的带宽, 所以最好将欧氏距离作为归一化带宽 $2WT_b$ 的函数来比较, 其中 W 是 99% 的功率带宽, T_b 是比特间隔。图 5-3-9 说明了这种类型的比较, 其中 MSK 作为比较的参考点 (0 dB)。从该图可知, 通过采用部分响应信号和更大的信号传输符号表, 可获得几分贝的增益。为这种性能的增益付出的代价主要是在维特比检测器的实现中增添了指数上升的复杂性。

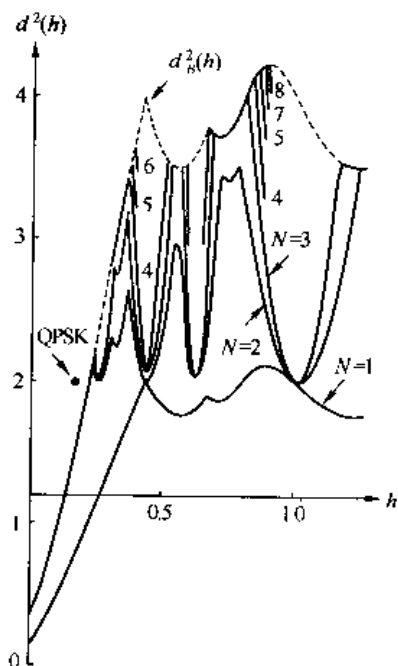


图 5-3-7 四进制 CPFSK 的作为调制指数函数的平方最小欧氏距离, 上边界是 d_B^2

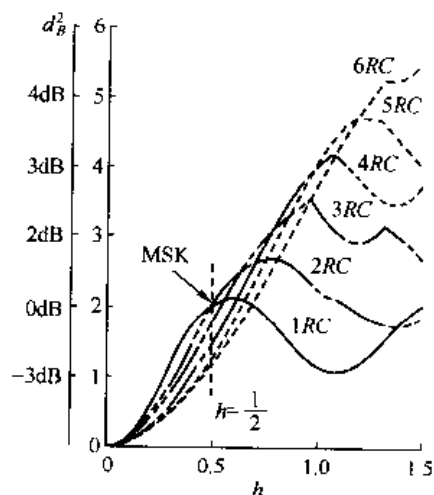


图 5-3-8 部分响应 (升余弦脉冲) 二进制 CPM 最小距离的上边界 d_B^2

图 5-3-9 所示的性能结果表明, 通过采用升余弦部分响应 CPM 且 $M=4$, 容易获得相对 MSK 的 3~4 dB 增益, 而带宽没有增加。虽然这些结果是针对升余弦信号脉冲的, 采用其他部分响应脉冲形状也能获得类似的增益。要强调的是, 这种 SNR 增益是通过将记忆引入信号调制, 并且在信号解调中利用该记忆的方法而获得的。在编码过程中没有引入冗余度。实际上已经将码置入调制, 并且网格型 (维特比) 译码利用了 CPM 信号中的相位的约束条件。

通过在编码中引入附加的冗余度并增大信号传输符号表维持固定带宽的方法可获得附加的性能增益。特别是对采用比较简单的卷积码的网格编码 CPM 的全面研究, 使得许多成果已在技术文献中发表。卷积编码 CPM 信号的维特比译码器利用了码中和 CPM 信号中固有的记忆特性。已经证明, 采用卷积编码与 CPM 的结合方式相对于具有相同带宽的未编码 MSK 可获得 4~6 dB 的性能增益。林德尔 (Lindell, 1985 年) 给出了编码 CPM 更广泛的数值研究成果。

1. 多重 h CPM

通过改变从一个信号传输间隔到另一个间隔的调制指数,有可能增加各对相位轨迹间的最小欧氏距离 d_{\min}^2 ,因此相对恒定 h CPM 改善了性能增益。通常,多重 h CPM 使用固定数目 H 的调制指数,它们在接连的信号传输间隔中周期地改变。因此,信号的相位逐段线性变化。

只要采用一个较小数目的不同 h 值,就可获得较大的 SNR 增益。例如,采用全响应 ($L=1$) CPM 且 $H=2$,就能得到相对二进制或四进制 PSK 的 3 dB 增益。将 H 增加到 $H=4$,就能得到相对于 PSK 的 4.5 dB 增益。性能增益也随着信号符号表的增大而增加。表 5-3-1 列出了 $M=2, 4$ 和 8 且 H 取几种数值时获得的性能增益。图 5-3-10 也示出了 M 和 H 取几种数值时最小欧氏距离的上边界。注意,当 H 从 $H=1$ 增加到 $H=2$ 时,可获得大部分的性能增益。当 $H>2$ 时,对于小 $|h|$ 值,附加的增益比较小。另一方面,通过增大符号表中的符号数目 M ,可获得明显的性能增益。

以上所示的结果适用于全响应 CPM,也可以将多重 h CPM 的应用推广到部分响应,以进一步改善性能。可以预料,这样的方案将得到附加的性能增益,但是部分响应、多重 h CPM 的数值结果是有限的。有兴趣的读者可参阅奥林和松德贝里 (Aulin & Sundberg, 1982 年) 的论文。

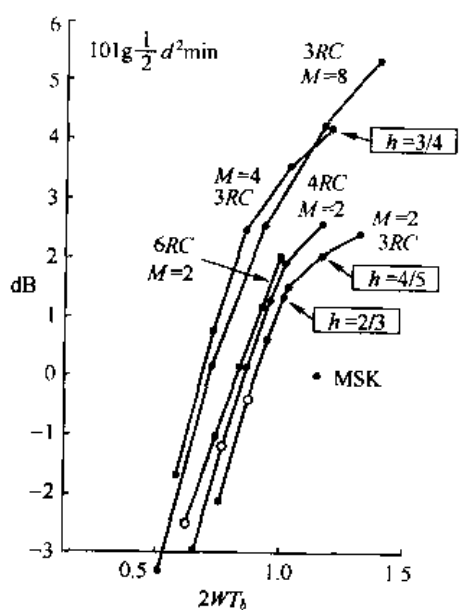


图 5-3-9 具有升余弦脉冲的部分响应 CPM 信号功率带宽的比较。 W 是带内 99% 功率带宽

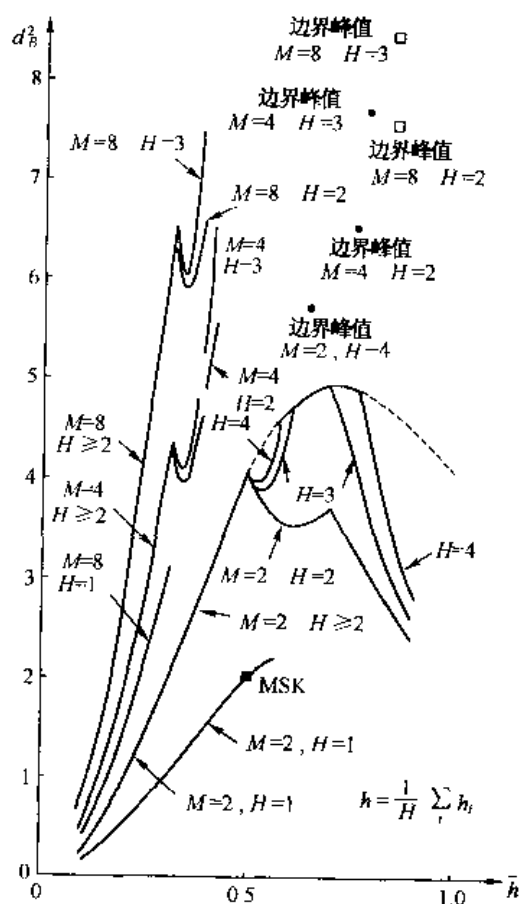


图 5-3-10 各种 M 和 H 值的情况下的最小平方欧氏距离的上边界

表 5-3-1 多重 h 线性相位 CPM^(注) 上边界 d_B^2 的最大值

M	H	$\text{Max} d_B^2$	与 MSK 相比 较时的 dB 增益	h_1	h_2	h_3	h_4	h
2	1	2.43	0.85	0.715				0.715
2	2	4.0	3.0	0.5	0.5			0.5
2	3	4.88	3.87	0.620	0.686	0.714		0.673
2	4	5.69	4.54	0.73	0.55	0.73	0.55	0.64
4	1	4.23	3.25	0.914				0.914
4	2	6.54	5.15	0.772	0.772			0.772
4	3	7.65	5.83	0.795	0.795	0.795		0.795
8	1	6.14	4.87	0.964				0.964
8	2	7.50	5.74	0.883	0.883			0.883
8	3	8.40	6.23	0.879	0.879	0.879		0.879

注:取自奥林和松德贝里的论文。

2. 多幅度 CPM

多幅度 CPM(MACPM)基本上是一个组合的幅度和相位数字调制方案,它允许在另一维上相对 CPM 增大信号传输的符号表,从而达到带限信道上更高的数据速率。同时,多幅度与 CPM 的组合导致一种带宽效率高的调制技术。

4.3 节已经介绍了 MACPM 的频谱特征。马利根(Mulligan,1988 年)研究了未编码和网格编码 CPM 两种情况下的 MACPM 的性能特征,特别有意义的是这样的结果:具有两个幅度电平的网络编码 CPM 相对于 MSK 获得了 3~4 dB 的增益,而信号带宽没有显著增加。

5.3.3 CPM 信号的逐个符号检测

除 ML 序列检测器之外,还有其他类型的检测器可以用来恢复 CPM 信号中的信息序列。本节将研究逐个符号的检测器。一种逐个符号检测器如 5.1.5 节所述,它通过几个信号传输间隔上匹配滤波或互相关的方法利用 CPM 的记忆特性。然而,由于它计算复杂,这种递归算法未直接应用于 CPM 的检测。德布达(deBuda,1972 年)、奥斯本和路兹(Osborne & Luntz,1974 年)以及舍恩霍夫(Schonhoff,1976 年)等人的论文中描述了可替代的两种类似的准最佳、逐个符号检测方法,其中一种在功能上等价于 5.1.5 节给出的算法,第二种是第一种的最佳近似。我们将在介绍 CPFSK 信号的解调时介绍这两种方法,这些检测器的算法可直接用于解调。

为了描述这些方法,假设在当前信号传输间隔上以及未来 D 个信号传输间隔上观测信号,对在当前信号传输间隔发送的信息符号进行判决。图 5-3-11 示出了用一组互相关器实现解调器的方框图。在第 n 个信号传输间隔中 CPFSK 的发送信号为

$$s(t) = \text{Re}[v(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

式中

$$v(t) = \exp \left\{ j \left[\frac{\pi h [t - (n-1)T]}{T} I_n + \pi h \sum_{k=0}^{n-1} I_k + \phi_0 \right] \right\}$$

$h = 2f_d T$ 是调制指数, f_d 是峰值频偏, ϕ_0 是载波的初始相位。

在检测符号 I_1 中,图 5-3-11 示出了与参考信号 $s(t, I_1, I_2, \dots, I_{1+D})$ 的互相关运算,该

运算对在 $D+1$ 个信号间隔上发送符号 I_1, I_2, \dots, I_{1+D} 的 M^{D+1} 个全部可能的值进行计算。实际上,这些相关运算产生变量 r_1, r_2, \dots, r_{1+D} ,这些变量再成为下列 PDF 中指数的自变量

$$p(r_1, r_2, \dots, r_{1+D} | I_1, I_2, \dots, I_{1+D})$$

在符号 I_2, I_3, \dots, I_{1+D} 的 M^D 个可能值上的总和表示了

$$p(r_1, r_2, \dots, r_{1+D} | I_1, I_2, \dots, I_{1+D})P(I_1, I_2, \dots, I_{1+D})$$

在这些符号的 M^D 个可能值上的平均。解调器的 M 个输出构成了判决变量,从中选择最大值形成解调符号。因此,由图 5-3-11 解调产生的度量等价于式(5-1-68)给出的判决变量,依此对 I_1 作出判决。

在后续的信号传输间隔中以同样的方式解调接收信号,即解调器在 $D+1$ 个信号传输间隔上用 M^{D+1} 个可能的发送信号对接收信号进行互相关运算,形成判决变量,如图 5-3-11 所示。因此,在第 m 个信号传输间隔作出的判决是根据在信号传输间隔 $m, m+1, \dots, m+D$ 上的互相关运算进行的,假定在持续时间为 $(D+1)T$ 的相关运算间隔中的初始相位已知。另一方面,式(5-1-76)和式(5-1-77)描述的算法包含附加的对先前检测符号的平均运算,在这方面,图 5-3-11 所示的解调器不同于以上所述的递归算法,然而这种差别无关紧要。

一种准最佳解调方法是根据一组 M^{D+1} 个互相关器的最大输出来进行判决,这种方法的性能几乎与图 5-3-11 所示的最佳方法的性能同样好。因此,可以取消指数函数和求和运算。但这种方法等价于选择使概率密度函数 $p(r_m, r_{m+1}, \dots, r_{m+D} | I_m, I_{m+1}, \dots, I_{m+D})$ 最大的符号 I_m 。

图 5-3-11 所示检测器的性能受到上边界限制,并已用数值方法计算出来。图 5-3-12 示出了二进制 CPFSK 的性能,其中参数 $n = D+1$ 。产生这些结果所用的调制指数 $h = 0.715$,它使错误概率最小化,舍恩霍夫(Schonhoff, 1976 年)已证明了这一点。注意,通过采用在两个符号上进行互相关运算的解调器,可以获得相对正交 FSK ($n=1$) 大约 2.5 dB 的改善。采用延长相关运算时间至 3 个符号的方法,可以得到大约 1.5 dB 的附加增益。进一步延长相关运算时间所得到的附加增益比较小。

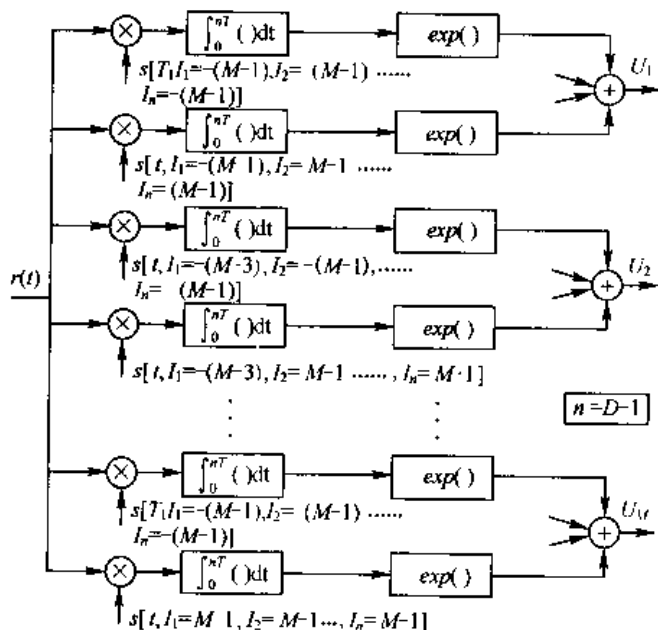


图 5-3-11 检测 CPFSK 的解调器方框图

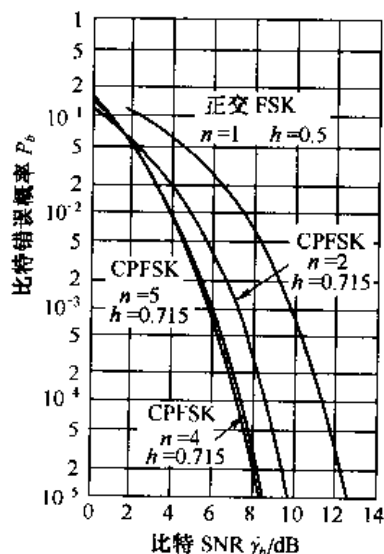


图 5-3-12 二进制 CPFSK 相干检测的性能

采用较大的符号表可以得到类似的结果。例如,图 5-3-13 和图 5-3-14 分别说明了四进制和八进制 CPFSK 的性能改善,这些图中给出的调制指数使符号错误概率最小化。

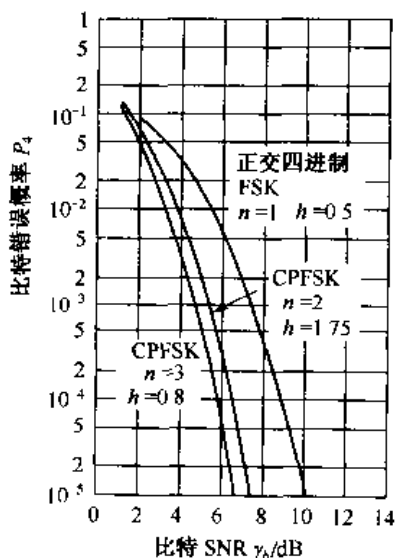


图 5-3-13 四进制 CPFSK 相干检测的性能

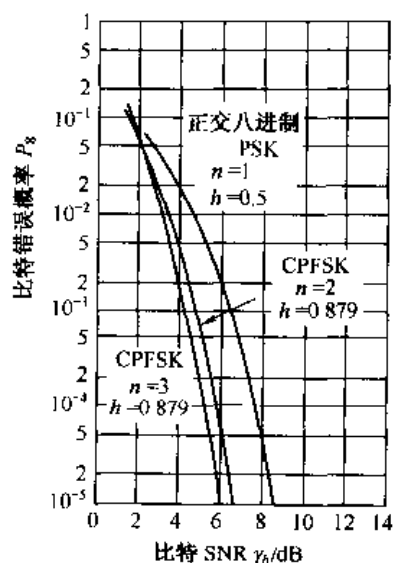


图 5-3-14 八进制 CPFSK 相干检测的性能

相干检测需要知道载波的相位 ϕ_0 , 在不进行相干检测时, 可以假定 ϕ_0 在 $0 \sim 2\pi$ 区间均匀分布, 并在达成判决变量中对它进行平均。因此相干积分(互相关运算)是在 $n = D + 1$ 个信号传输间隔上进行的, 但对相关器的输出进行包络检测。这称为 CPFSK 的非相干检测。在此检测方案中, 通过选择 n 为奇数并在 n 个符号序列的中间符号上进行判决等方法使性能最佳。CPFSK 非相干检测错误概率的数值计算结果类似于上述相干检测的结果, 即通过将相关运算间隔从 $n = 1$ 增至 $n = 3$ 及 $n = 5$ 获得 $2 \sim 3$ dB 的性能增益。

5.3.4 CPM 信号的准最佳解调和检测

CPM 信号最大似然序列检测器实现中固有的高复杂性一直是一个激发因素, 推动着降低检测器复杂性的研究。斯温森(Svensson, 1984 年), 斯温森和松德贝里(Svensson 和 Sundberg, 1983 年), 奥林(Aulin, 1981 年)等人, 西蒙斯和维基(Simmons 和 Wittke, 1983 年), 帕纽斯和斯温森(Paleniuss 和 Svensson, 1993 年), 帕纽斯(Paleniuss, 1991 年)等对降低维特比检测器复杂性进行了研究。降低维特比检测器复杂性的基本思想是设计一个接收机滤波器, 它具有比发送机短的脉冲。接收机脉冲 $g_R(t)$ 必须以这样一种方式来选择: 由 $g_R(t)$ 生成的相位树较好地近似于由发送机脉冲 $g_T(t)$ 生成的相位树。性能分析结果表明, 性能损失大约 $0.5 \sim 1$ dB 会使复杂性显著降低。

降低 CPM 信号接收机复杂性的另一种方法是利用 CPM 的线性表达式, 它可以表示成调幅脉冲之和, 这在劳伦特(Laurent, 1986 年)、蒙加利和摩尔利(Mengali 和 Morelli, 1995 年)的论文中已给出。在许多实用场合中, CPM 信号可以用单个调幅脉冲或两个调幅脉冲之和来近似。因此, 根据 CPM 信号的这种线性表达式, 就可容易实现接收机。卡瓦斯-卡尔(Kawas-Kaleh, 1989 年)研究了这种比较简单的接收机的性能。该研究成果表明, 这种简化的接收机在性能上几乎没有什么损失, 却明显地降低了实现的复杂性。

5.4 AWGN 信道中随机相位信号的最佳接收机

本节将研究如下情况下的载波已调信号最佳接收机的设计问题:接收机中的载波相位是未知的且不对该相位的值进行估计。接收信号的载波相位的不确定性可能由一个或多个原因造成:第一,发送机和接收机中振荡器产生的载波信号相位一般是不同步的;第二,一般不能准确知道信号从发送机到接收机的传播延迟。下面将详细说明。发送信号的形式为

$$s(t) = \text{Re}[g(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

它通过信道传播且延迟为 t_0 。接收信号为

$$\begin{aligned} s(t - t_0) &= \text{Re}[g(t - t_0)e^{j2\pi f_c(t - t_0)}] \\ &= \text{Re}[g(t - t_0)e^{-j2\pi f_c t_0}e^{j2\pi f_c t}] \end{aligned}$$

传播延迟 t_0 引起的载波相移是

$$\phi = -2\pi f_c t_0$$

注意,传播延迟较小的变化会引起载波相位大的变化。例如,如果载波频率 $f_c = 1 \text{ MHz}$,在 $0.5 \mu\text{s}$ 传播延迟中的不确定性或变化将引起 $\pi \text{ rad}$ (弧度)的相位不确定性。在某些信道中(如无线电信道),信号从发送机到接收机的传播延迟可能会迅速地变化,而且以一种明显的随机方式变化,因此接收信号的载波相位以一种明显的随机方式变化。

在不知道载波相位的情况下,将信号参数作为随机变量处理,并求最佳接收机的形式,从接收信号中恢复发送信息。首先研究二进制信号的情况,然后研究 M 元信号。

5.4.1 二进制信号的最佳接收机

研究一个二进制通信系统,该系统使用两个载波已调信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 发送信息,这里

$$s_m(t) = \text{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (m = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq T) \quad (5-4-1)$$

且 $s_{lm}(t)$ ($m = 1, 2$) 是等效低通信号。假定这两个信号具有相等的能量

$$\mathcal{E} = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T |s_{lm}(t)|^2 dt \quad (5-4-2)$$

且用下列复相关系数表征

$$\rho_{12} \equiv \rho = \frac{1}{2\mathcal{E}} \int_0^T s_{l1}^*(t) s_{l2}(t) dt \quad (5-4-3)$$

假设接收信号是发送信号的相移形式,且受到下列加性噪声的恶化

$$\begin{aligned} n(t) &= \text{Re}\{[n_c(t) + jn_s(t)]e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \text{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}] \end{aligned} \quad (5-4-4)$$

因此,接收信号可以表示为

$$r(t) = \text{Re}\{[s_{lm}(t)e^{j\phi} + z(t)]e^{j2\pi f_c t}\} \quad (5-4-5)$$

式中

$$r_l(t) = s_{lm}(t)e^{j\phi} + z(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5-4-6)$$

是等效低通接收信号。该接收信号通过解调器,将 $t = T$ 时刻的抽样输出送至检测器。

1. 最佳解调器

5.1.1 节已经证明,如果接收信号与构成信号空间的标准正交函数集 $\{f_n(t)\}$ 进行相关运算,那么相关器组的输出为检测器提供一组充分的统计特性,以进行错误概率最小的判决。我们也证明了相关器组可由匹配滤波器组代替。

对于未知载波相位的接收信号,也可以使用一种类似的标准正交还原方法。为了数学上处理方便,采用等效低通信号处理方法,并且将信号相关器或匹配滤波器用等效低通信号波形表示。

具体地说,在 $0 \leq t \leq T$ 内,与复等效低通信号 $s_l(t)$ 匹配的滤波器冲激响应 $h_l(t)$ 为(参见习题 5-6)

$$h_l(t) = s_l^*(T - t) \quad (5-4-7)$$

而且该滤波器在 $t = T$ 时刻的输出为

$$\int_0^T |s_l(t)|^2 dt = 2\mathcal{E} \quad (5-4-8)$$

式中, \mathcal{E} 是信号的能量。如果信号 $s_l(t)$ 与 $s_l^*(t)$ 相关运算并且相关器在 $t = T$ 时刻抽样,可得到类似的结果。因此,式(5-4-6)给出的等效低通接收信号 $s_l(t)$ 的最佳解调器可由两个平行的匹配滤波器实现,一个匹配于 $s_{1l}(t)$,而另一个匹配于 $s_{2l}(t)$,如图 5-4-1 所示。匹配滤波器或相关器在抽样时刻的输出是两个复数

$$r_m = r_{m_c} + jr_{m_s} \quad (m = 1, 2) \quad (5-4-9)$$

假设发送信号是 $s_l(t)$,容易证明(参见习题 5-35)

$$\begin{aligned} r_1 &= 2\mathcal{E}\cos\phi + n_{1c} + j(2\mathcal{E}\sin\phi + n_{1s}) \\ r_2 &= 2\mathcal{E}|\rho|\cos(\phi - \alpha_0) + n_{2c} + j[2\mathcal{E}|\rho|\sin(\phi - \alpha_0) + n_{2s}] \end{aligned} \quad (5-4-10)$$

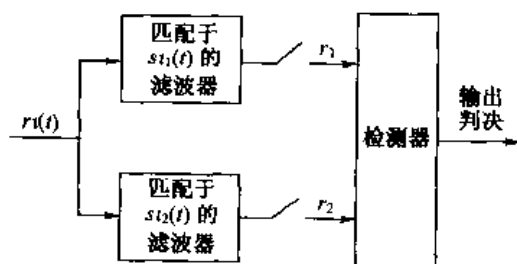


图 5-4-1 二进制信号的最佳接收机

式中, ρ 是两个信号 $s_{1l}(t)$ 与 $s_{2l}(t)$ 的复相关系数,可以表示为 $\rho = |\rho|\exp(j\alpha_0)$ 。随机噪声变量 n_{1c}, n_{1s}, n_{2c} 和 n_{2s} 是联合高斯的,且均值为零、方差相同。

2. 最佳检测器

最佳检测器观测随机变量 $[r_{1c}, r_{1s}, r_{2c}, r_{2s}] = \mathbf{r}$,其中 $r_1 = r_{1c} + jr_{1s}$ 及 $r_2 = r_{2c} + jr_{2s}$,根据后验概率 $P(s_m|\mathbf{r})$ ($m = 1, 2$)判决。这些概率可以表示为

$$P(s_m|\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r}|s_m)P(s_m)}{p(\mathbf{r})} \quad (m = 1, 2) \quad (5-4-11)$$

因此,最佳判决规则为

$$P(s_1 | \mathbf{r}) \underset{s_2}{\overset{s_1}{\geq}} P(s_2 | \mathbf{r})$$

或等价于

$$\frac{p(\mathbf{r} | s_1)}{p(\mathbf{r} | s_2)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (5-4-12)$$

式(5-4-12)左边的 PDF 比值是似然比,记为

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | s_1)}{p(\mathbf{r} | s_2)} \quad (5-4-13)$$

式(5-4-12)右边是两个先验概率之比值,当两个信号等概时,该比值为 1。

通过将 PDF $p(\mathbf{r} | s_m, \phi)$ 对随机载波相位 PDF 求平均,可得到概率密度函数 $p(\mathbf{r} | s_1)$ 和 $p(\mathbf{r} | s_2)$

$$p(\mathbf{r} | s_m) = \int_0^{2\pi} p(\mathbf{r} | s_m, \phi) p(\phi) d\phi \quad (5-4-14)$$

下面针对两个正交信号(即 $\rho=0$)的特殊情况,进行式(5-4-14)的积分运算。在这种情况下,解调器的输出是

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1c} + jr_{1s} \\ &= 2\epsilon \cos \phi + n_{1c} + j(2\epsilon \sin \phi + n_{1s}) \\ r_2 &= r_{2c} + jr_{2s} \\ &= n_{2c} + jn_{2s} \end{aligned} \quad (5-4-15)$$

式中, $(n_{1c}, n_{1s}, n_{2c}, n_{2s})$ 是互不相关的,因此也是统计独立的零均值高斯随机变量(参见习题 5-40)。因此, $\mathbf{r} = [r_{1c}, r_{1s}, r_{2c}, r_{2s}]$ 的联合 PDF 可以表示为边缘 PDF 的乘积,所以

$$\begin{aligned} p(r_{1c}, r_{1s} | s_1, \phi) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(r_{1c} - 2\epsilon \cos \phi)^2 + (r_{1s} - 2\epsilon \sin \phi)^2}{2\sigma^2} \right] \\ p(r_{2c}, r_{2s}) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (5-4-16)$$

式中, $\sigma^2 = 2\epsilon N_0$ 。

载波相位 ϕ 的均匀 PDF 表示了最大的不确定性,这可由检测器表现出来,称做 ϕ 的最不利的 PDF。将 $p(\phi) = 1/2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ 代入式(5-4-14)的积分式,得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r_{1c}, r_{1s} | s_1, \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + 4\epsilon^2}{2\sigma^2} \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{2\epsilon(r_{1c} \cos \phi + r_{1s} \sin \phi)}{\sigma^2} \right] d\phi \end{aligned} \quad (5-4-17)$$

但

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{2\epsilon(r_{1c} \cos \phi + r_{1s} \sin \phi)}{\sigma^2} \right] d\phi = I_0 \left[\frac{2\epsilon \sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}}{\sigma^2} \right] \quad (5-4-18)$$

式中, $I_0(x)$ 是零阶修正贝塞尔函数,由式(2-1-120)定义。

假定发送信号为 $s_2(t)$,通过类似式(5-4-17)的积分运算,得到

$$p(r_{2c}, r_{2s} | s_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r_{2c}^2 + r_{2s}^2 + 4\mathcal{E}}{2\sigma^2}\right) I_0\left[\frac{2\mathcal{E}\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}}{\sigma^2}\right] \quad (5-4-19)$$

将这些结果代入式(5-4-13)的似然比,得到

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \frac{I_0(2\mathcal{E}\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}/\sigma^2)}{I_0(2\mathcal{E}\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}/\sigma^2)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (5-4-20)$$

因此,最佳检测器计算两个包络 $\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}$ 和 $\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$ 以及相应的贝塞尔函数 $I_0(2\mathcal{E}\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}/\sigma^2)$ 和 $I_0(2\mathcal{E}\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}/\sigma^2)$ 的值形成似然比。可以看到,该计算需要知道噪声的方差 σ^2 ,然后将似然比与阈值 $P(s_2)/P(s_1)$ 比较,确定哪个信号被发送。

当两个信号等概时,最佳检测器的实现可以大大简化。在这种情况下,阈值为1,而且由于图5-4-2所示的贝塞尔函数的单调性,最佳检测规则简化为

$$\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\geq}} \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2} \quad (5-4-21)$$

因此,最佳检测器根据两个包络 $\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}$ 和 $\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$ 进行判决,所以称为包络检测器。

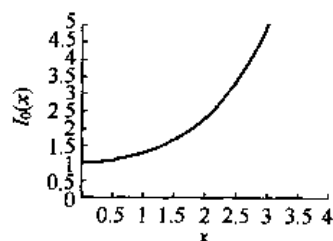


图 5-4-2 $I_0(x)$ 曲线图

可以看到,对解调器输出端接收信号样值包络的计算使得

载波相位与发送信号的判决不相干,这等效为根据平方包络 $r_{1c}^2 + r_{1s}^2$ 和 $r_{2c}^2 + r_{2s}^2$ 的计算进行判决,在此情况下,检测器称为平方律检测器。

二进制 FSK 信号是二进制正交信号的一个例子。在二进制 FSK 中使用了两个不同的频率,如 f_1 和 $f_2 = f_1 + \Delta f$ 来发送二进制信息序列。最小频率间隔 $\Delta f = f_2 - f_1$ 的选择将在下面研究。因此,信号波形可表示为

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{2\mathcal{E}_b/T_b} \cos 2\pi f_1 t \quad (0 \leq t \leq T_b) \\ s_2(t) &= \sqrt{2\mathcal{E}_b/T_b} \cos 2\pi f_2 t \quad (0 \leq t \leq T_b) \end{aligned} \quad (5-4-22)$$

且其相应的等效低通信号是

$$\begin{aligned} s_{11}(t) &= \sqrt{2\mathcal{E}_b/T_b} \quad (0 \leq t \leq T_b) \\ s_{12}(t) &= \sqrt{2\mathcal{E}_b/T_b} e^{j2\pi\Delta f t} \quad (0 \leq t \leq T_b) \end{aligned} \quad (5-4-23)$$

接收信号为

$$r(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}} \cos(2\pi f_m t + \phi_m) + n(t) \quad (5-4-24)$$

式中, ϕ_m 是载波频率 f_m 的相位。实信号 $r(t)$ 的解调可以通过采用具有下列基函数的4个相关器完成,如图5-4-3所示。

$$\begin{aligned} f_{1m}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos[(2\pi f_1 + 2\pi m\Delta f)t] \quad (m = 0, 1) \\ f_{2m}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_b}} \sin[(2\pi f_1 + 2\pi m\Delta f)t] \quad (m = 0, 1) \end{aligned} \quad (5-4-25)$$

在每个信号间隔的结尾对4个相关器的输出抽样,其样值送至检测器。如果发送第 m 个信

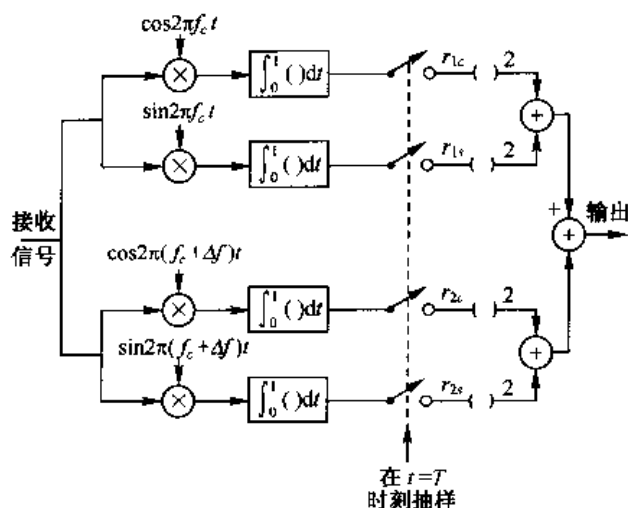


图 5-4-3 二进制 FSK 信号的解调与平方律检测

号,检测器的 4 个样值可表示为

$$\begin{aligned}
 r_{kc} &= \sqrt{E_b} \left[\frac{\sin[2\pi(k-m)\Delta f T]}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos\phi_m \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\cos[2\pi(k-m)\Delta f T] - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin\phi_m \right] + n_{kc} \quad (k, m = 1, 2) \\
 r_{ks} &= \sqrt{E_b} \left[\frac{\cos 2\pi(k-m)\Delta f T - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos\phi_m \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin[2\pi(k-m)\Delta f T]}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin\phi_m \right] + n_{ks} \quad (k, m = 1, 2)
 \end{aligned} \quad (5-4-26)$$

式中, n_{kc} 和 n_{ks} 表示在输出样值中的高斯噪声分量。

当 $k = m$ 时,检测器输入样值是

$$\begin{aligned}
 r_{mc} &= \sqrt{E_b} \cos\phi_m + n_{mc} \\
 r_{ms} &= \sqrt{E_b} \sin\phi_m + n_{ms}
 \end{aligned} \quad (5-4-27)$$

而且,当 $k \neq m$ 时,倘若相邻频率之间的频率间隔为 $\Delta f = 1/T$,那么样值 r_{kc} 和 r_{ks} 中的信号分量将消失,与相移 ϕ_k 值无关。在这种情况下,其他两个相关器的输出仅由噪声组成,即

$$r_{kc} = n_{kc} \quad r_{ks} = n_{ks} \quad (k \neq m) \quad (5-4-28)$$

当频率间隔 $\Delta f = 1/T$ 时,对于解调器输出而言,关系式(5-4-27)和式(5-4-28)与式(5-4-15)一致。因此得出如下结论:对于 FSK 信号的包络或平方律检测,信号正交性所要求的最小频率间隔是 $\Delta f = 1/T$ 。这个间隔是相位相干检测要求间隔的两倍。

5.4.2 M 元正交信号的最佳接收机

最佳解调器和检测器可直接推广到 M 元正交信号的情况。如果将等能量和等概的信号波形表示为

$$s_m(t) = \text{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T) \quad (5-4-29)$$

式中, $s_{lm}(t)$ 是等效低通信号,最佳相关型或匹配滤波器型解调器产生 M 个复随机变量

$$r_m = r_{mc} + jr_{ms} = \int_0^T r_l(t) s_{lm}^*(t) dt \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (5-4-30)$$

式中, $r_l(t)$ 是等效低通接收信号。那么, 基于均匀分布的随机载波相位的最佳检测器计算 M 个包络

$$|r_m| = \sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2} \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (5-4-31)$$

或等价于平方包络 $|r_m|^2$, 并且选择具有最大包络(或平方包络)的信号。

在 M 元正交 FSK 信号的特殊情况下, 最佳接收机的结构如图 5-4-4 所示, 有 $2M$ 个相关器, 与每一个可能的发送频率对应的有两个相关器。为保持正交性, 相邻频率之间的最小频率间隔是 $\Delta f = 1/T$ 。

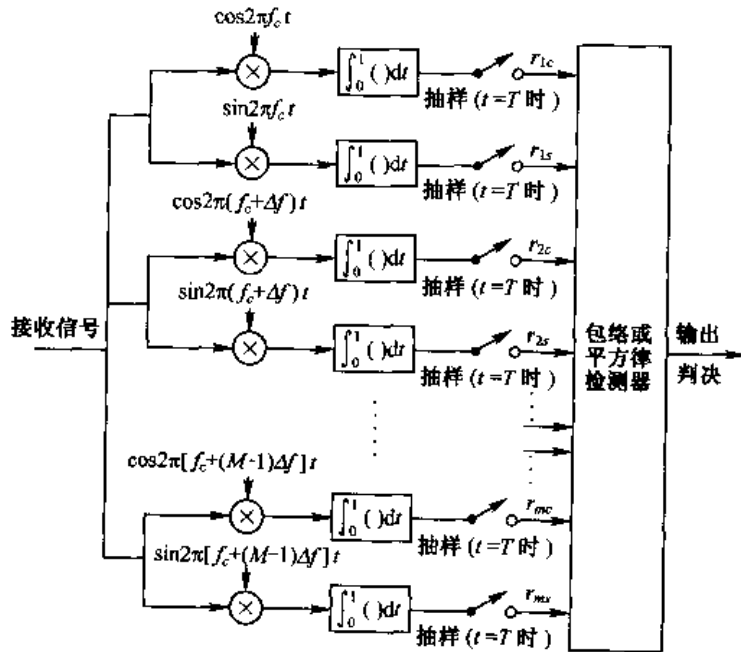


图 5-4-4 非相干检测 M 元 FSK 信号的解调

5.4.3 M 元正交信号包络检测的错误概率

研究 M 元正交等能量信号在 AWGN 信道上的传输问题, 在接收机中对该信号进行包络检测。假定 M 个信号是先验等概的, 且在 $0 \leq t \leq T$ 信号间隔内的发送信号为 $s_1(t)$ 。

检测器的 M 个判决度量是 M 个包络

$$|r_m| = \sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2} \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (5-4-32)$$

式中

$$\begin{aligned} r_{1c} &= \sqrt{\mathcal{E}_s} \cos \phi_1 + n_{1c} \\ r_{1s} &= \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin \phi_1 + n_{1s} \end{aligned} \quad (5-4-33)$$

且

$$r_{mc} = n_{mc} \quad r_{ms} = n_{ms} \quad (m = 2, 3, \dots, M) \quad (5-4-34)$$

加性噪声分量 $\{n_{mc}\}$ 和 $\{n_{ms}\}$ 是相互统计独立的零均值高斯变量, 且具有相等的方差 $\sigma^2 = \frac{1}{2} N_0$ 。因此, 检测器输入端随机变量的 PDF 是

$$p_{r_1}(r_{1c}, r_{1s}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + \mathcal{E}_s}{2\sigma^2}\right) I_0\left[\frac{\sqrt{\mathcal{E}_s}(r_{1c}^2 + r_{1s}^2)}{\sigma^2}\right] \quad (5-4-35)$$

$$p_{r_m}(r_{mc}, r_{ms}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}{2\sigma^2}\right) \quad (m = 2, 3, \dots, M) \quad (5-4-36)$$

对式(5-4-35)和式(5-4-36)中的联合 PDF 进行变量变换。定义归一化变量

$$R_m = \frac{\sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}}{\sigma}$$

$$\Theta_m = \tan^{-1} \frac{r_{ms}}{r_{mc}} \quad (5-4-37)$$

显然, $r_{mc} = \sigma R_m \cos \Theta_m$ 和 $r_{ms} = \sigma R_m \sin \Theta_m$ 。该变换的雅可比行列式是

$$|J| = \begin{vmatrix} \sigma \cos \Theta_m & \sigma \sin \Theta_m \\ -\sigma R_m \sin \Theta_m & \sigma R_m \cos \Theta_m \end{vmatrix} = \sigma^2 R_m \quad (5-4-38)$$

因此

$$p(R_1, \Theta_1) = \frac{R_1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(R_1^2 + \frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}\right)\right] I_0\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}} R_1\right] \quad (5-4-39)$$

$$p(R_m, \Theta_m) = \frac{R_m}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} R_m^2\right) \quad (m = 2, 3, \dots, M) \quad (5-4-40)$$

最后, 通过 $p(R_m, \Theta_m)$ 在 Θ_m 上平均, 可将式(5-4-39)和式(5-4-40)中的 2π 因子消去。因此, R_1 具有赖斯(Rice)概率分布, 而 R_m ($m = 2, 3, \dots, M$) 中的每一个都是瑞利(Rayleigh)分布。

正确判决的概率是 $R_1 > R_2$ 且 $R_1 > R_3, \dots$, 且 $R_1 > R_m$ 的概率。因此,

$$P_c = P(R_2 < R_1, R_3 < R_1, \dots, R_M < R_1)$$

$$= \int_0^\infty P(R_2 < R_1, R_3 < R_1, \dots, R_M < R_1 | R_1 = x) p_{R_1}(x) dx \quad (5-4-41)$$

因为随机变量 R_m ($m = 2, 3, \dots, M$) 是统计独立同分布的, 所以在式(5-4-41)中 R_1 条件下的联合概率可因式分解成 $M-1$ 个相同项的乘积。因此,

$$P_c = \int_0^\infty [P(R_2 < R_1 | R_1 = x)]^{M-1} p_{R_1}(x) dx \quad (5-4-42)$$

式中

$$P(R_2 < R_1 | R_1 = x) = \int_0^x p_{R_2}(r_2) dr_2$$

$$= 1 - e^{-x^2/2} \quad (5-4-43)$$

式(5-4-43)的 $M-1$ 次方可以表示为

$$(1 - e^{-x^2/2})^{M-1} = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} e^{-nx^2/2} \quad (5-4-44)$$

将此结果代入式(5-4-42), 并且对 x 积分, 可得到正确判决的概率为

$$P_c = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left[-\frac{n\mathcal{E}_s}{(n+1)N_0}\right] \quad (5-4-45)$$

式中, \mathcal{E}_s/N_0 是符号 SNR。那么, 符号错误概率 $P_M = 1 - P_c$ 为

$$P_M = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp \left[-\frac{nk\mathcal{E}_b}{(n+1)N_0} \right] \quad (5-4-46)$$

式中, \mathcal{E}_b/N_0 是比特 SNR。

对于二进制正交信号 ($M=2$), 式(5-4-46)可简化为

$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\mathcal{E}_b/2N_0} \quad (5-4-47)$$

对于 $M>2$, 利用关系式

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M \quad (5-4-48)$$

可计算比特错误概率, 该式已在 5.2 节中建立。图 5-4-5 展示了当 $M=2, 4, 8, 16$ 和 32 时的比特错误概率, 它是比特 SNR γ_b 的函数。正如 M 元正交信号相干检测的情况那样 (参见 5.2.2 节), 对于任何给定比特错误概率, 比特 SNR 随 M 增大而减小。第 7 章将证明, 在 $M \rightarrow \infty$ (或 $k = \log_2 M \rightarrow \infty$) 的极限情况下, 若比特 SNR 大于香农极限 -1.6 dB, 可以得到任意小的比特错误概率 P_b 。增大 M 的代价是传输信号所要求的带宽。对于 M 元 FSK, 为了信号的正交性, 相邻频率之间间隔 $\Delta f = 1/T$ 。 M 元信号要求的带宽是 $W = M\Delta f = M/T$, 同时比率为 $R = k/T$, 其中 $k = \log_2 M$ 。因此, 比特率与带宽之比是

$$\frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{M} \quad (5-4-49)$$

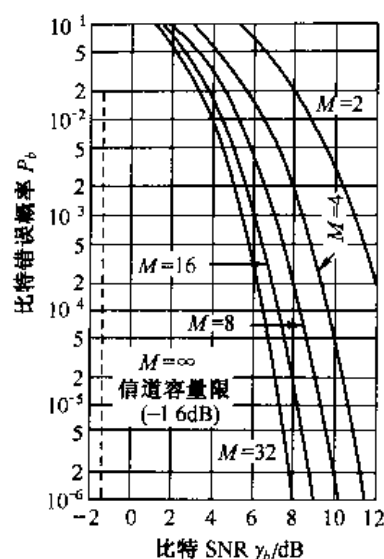


图 5-4-5 正交信号非相干检测的比特错误概率

5.4.4 相关二进制信号包络检测的错误概率

本节将研究二进制等能量相关信号的包络检测器的性能。当两个信号相关时, 检测器输入是式(5-4-10)给出的复随机变量。假定检测器根据包络 $|r_1|$ 和 $|r_2|$ 进行判决, 这两个包络是相关的 (统计相关)。 $R_1 = |r_1|$ 和 $R_2 = |r_2|$ 的边缘 PDF 是赖斯分布, 且可以表示为

$$p(R_m) = \begin{cases} \frac{R_m}{2\mathcal{E}N_0} \exp \left(-\frac{R_m^2 + \beta_m^2}{4\mathcal{E}N_0} \right) I_0 \left(\frac{\beta_m R_m}{2\mathcal{E}N_0} \right) & (R_m > 0) \\ 0 & (R_m < 0) \end{cases} \quad (5-4-50)$$

$m=1, 2$, 式中 $\beta_1 = 2\mathcal{E}$ 且 $\beta_2 = 2\mathcal{E}|\rho|$, 并假定发送信号是 $s_1(t)$ 。

因信号为非正交性的, R_1 与 R_2 是统计相关的, 所以通过计算下列二重积分可求得错误概率

$$P_b = P(R_2 > R_1) = \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5-4-51)$$

式中, $p(x_1, x_2)$ 是包络 R_1 与 R_2 的联合 PDF。这种分析方法首先由海尔斯特朗姆 (Helstrom, 1955 年) 使用, 他求出 R_1 和 R_2 联合 PDF, 并且计算了式(5-4-51)的二重积分。

另一种分析方法如下: 错误概率可表示为

$$P_b = P(R_2 > R_1) = P(R_2^2 > R_1^2) = P(R_2^2 - R_1^2 > 0) \quad (5-4-52)$$

但是 $R_2^2 - R_1^2$ 是复高斯随机变量一般二次式的特例,这将在附录 B 处理。对所研究的特例,推导其错误概率的形式为

$$P_b = Q_1(a, b) - \frac{1}{2} e^{-(a^2+b^2)/2} I_0(ab) \quad (5-4-53)$$

式中

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2N_0}} (1 - \sqrt{1 - |\rho|^2}) \\ b &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2N_0}} (1 + \sqrt{1 - |\rho|^2}) \end{aligned} \quad (5-4-54)$$

$Q_1(a, b)$ 是式(2-1-123)定义的马库姆(Marcum) Q 函数, $I_0(x)$ 是零阶修正贝塞尔函数。

图 5-4-6 示出了几个 $|\rho|$ 值时的错误概率 P_b 。当 $\rho=0$, 即当信号正交时, P_b 最小。这种情况下, $a=0, b=\sqrt{\mathcal{E}_b/N_0}$ 且式(5-4-53)简化为

$$P_b = Q\left[0, \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right] - \frac{1}{2} e^{-\mathcal{E}_b/2N_0} \quad (5-4-55)$$

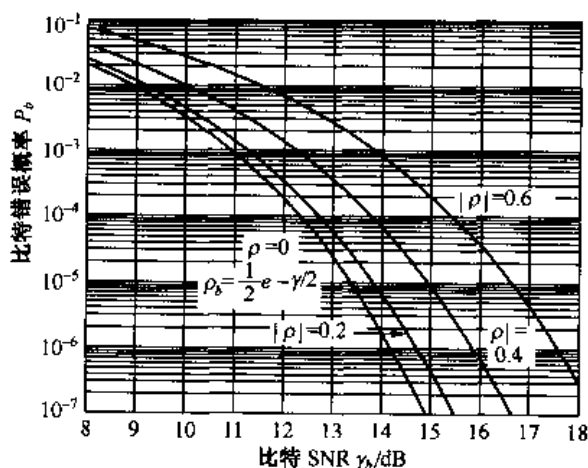


图 5-4-6 二进制 FSK 非相干检测的错误概率

由式(2-1-123)的 $Q_1(a, b)$ 定义,得到

$$Q_1\left[0, \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right] = e^{-\mathcal{E}_b/2N_0}$$

将此关系式代入式(5-4-55),可得到式(5-4-47)给出的期望结果。另一方面,当 $|\rho|=1$ 时,式(5-4-53)的错误概率为 $P_b = \frac{1}{2}$,这正是所预料的。

5.5 有线和无线通信系统性能分析

在数字信号通过 AWGN 信道的传输中,以错误概率度量的通信系统性能只决定于接收 SNR, \mathcal{E}_b/N_0 , 其中 \mathcal{E}_b 是发送比特能量, $\frac{1}{2} N_0$ 是加性噪声的功率谱密度。因此,归根结底,加性噪声限制了通信系统的性能。

除加性噪声之外,影响通信系统性能的另一个因素是信道衰减。所有物理信道,包括有线线路和无线信道,都是有损的,因此信号通过信道传输时受到衰减。图 5-5-1 所示的简单的衰减数学模型可用于该信道。因此,如果发送信号是 $s(t)$ 且 $0 < \alpha \leq 1$,接收信号为

$$r(t) = \alpha s(t) + n(t) \quad (5-5-1)$$

那么,如果发送信号的能量是 \mathcal{E}_b ,则接收信号的能量为 $\alpha^2 \mathcal{E}_b$,从而接收信号的 SNR 为 $\alpha^2 \mathcal{E}_b / N_0$ 。因此,信号衰减的影响是减少了接收信号的能量,并因此使通信系统更容易受到加性噪声的损伤。

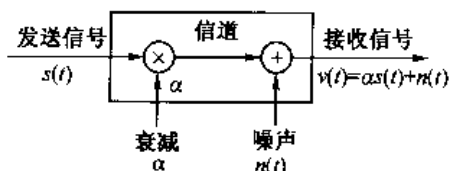


图 5-5-1 具有衰减和加性噪声的数学模型

在模拟通信系统中,信号通过信道的传输过程中,采用放大器(称做中继器)周期性地增强信号的强度。然而,每一个放大器也增强了系统中的噪声。与此相反,

数字通信系统允许在传输信道中检测并再生一个干净的(无噪声)信号,这样的装置称为再生中继器,常用在有线和光纤通信信道中。

5.5.1 再生中继器

每一个再生中继器的前端由解调器/检测器组成,解调并检测由前一个中继器发送的数字信息序列。一旦序列被检测出来,就送至中继器的发送机侧,发送机将序列映射成信号波形,再发送到下一个中继器。这种类型的中继器称做再生中继器。

由于每一个中继器再生了无噪声信号,所以加性噪声不会累积。然而,当中继器的检测器发生差错时,该差错会传播到信道后面的中继器。为了评估差错对整个系统性能的影响,假设调制是二进制 PAM,从而一个中继段(信号传输链中从一个中继器至下一个中继器)的比特错误概率为

$$P_b = Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right]$$

由于错误概率低,所以任一比特通过 K 个中继器的信道传输时不正确检测超过一次的概率可以忽略。因此,差错的数目随信道中的中继器数目而线性增加,所以整个系统的错误概率可以近似为

$$P_b \approx KQ \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right] \quad (5-5-2)$$

相反,在信道上使用 K 个模拟中继器使接收 SNR 降低 K 倍,因此比特错误概率为

$$P_b \approx Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{KN_0}} \right] \quad (5-5-3)$$

显然,对于同样的错误概率性能,再生中继器比模拟中继器大大节省了发送机的功率。因此,在数字通信系统中,再生中继器是更可取的。然而,在用来传输模拟和数字信号的有线电话信道中,一般使用模拟中继器。

例 5-5-1 一个二进制数字通信系统在 1 000 km 长的有线信道上传输数据,每隔 10 km 用一个中继器补偿信道衰减的影响。在下列两种情况下求当比特错误概率为 10^{-5} 时要求的

\mathcal{E}_b/N_0 : (a) 使用模拟中继器; (b) 使用再生中继器。

该系统所用的中继器数量为 $K=100$ 。如果使用再生中继器, 由式(5-5-2)可求得 \mathcal{E}_b/N_0

$$10^{-5} = 100Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right]$$

$$10^{-7} = Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right]$$

结果近似为 11.3 dB。如果使用模拟中继器, 由式(5-5-3)可求得 \mathcal{E}_b/N_0

$$10^{-5} = Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{100N_0}} \right]$$

结果是 $\mathcal{E}_b/N_0 \approx 29.6$ dB。因此, 所要求的 SNR 的差值大约为 18.3 dB, 或者大约是数字通信系统发送机功率的 70 倍。

5.5.2 无线通信系统中链路预算分析

在具有视线微波和卫星传输信道的无线通信系统的设计中, 必须详细规定发送和接收天线的尺寸、发送功率以及在某个期望的速率上达到给定等级性能所要求的 SNR。该系统的设计过程比较直接, 概述如下。



图 5-5-2 全向辐射天线

首先, 发射天线以功率电平 P_T 瓦特在自由空间中全向辐射, 如图 5-5-2 所示, 在与天线相距 d 处的功率密度为 $P_T/4\pi d^2 \text{ W/m}^2$ 。如果发射天线在特定方向上具有方向性, 那么在此方向上的功率密度将增加一个因子, 该因子称为天线增益并记为 G_T 。在这种情况下, 在距离 d 处的功率密度是 $P_T G_T / 4\pi d^2 \text{ W/m}^2$ 。乘积 $P_T G_T$ 通常称为有效辐射功率(ERP 或 EIRP), 它基本上是相对于全向天线的辐射功率, 对于全向天线 $G_T=1$ 。

接收天线指向功率辐射的方向并收集部分功率, 接收功率与天线的截面积成比例。因此, 由天线获得的接收功率为

$$P_R = \frac{P_T G_T A_R}{4\pi d^2} \quad (5-5-4)$$

式中, A_R 是天线有效面积(单位是 m^2)。由电磁场理论, 可得到天线增益 G_R 与其有效面积之间的关系为

$$A_R = \frac{G_R \lambda^2}{4\pi} \quad (5-5-5)$$

式中, $\lambda = c/f$ 是发送信号的波长, c 是光速($3 \times 10^8 \text{ m/s}$), f 是发送信号的频率。

如果将式(5-5-5)的 A_R 代入式(5-5-4), 接收功率的表达式为

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R}{(4\pi d / \lambda)^2} \quad (5-5-6)$$

因子

$$L_s = \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \quad (5-5-7)$$

称为自由空间路径损耗。如果在信号传输过程中遇到其他损耗,如大气损耗,则通过引入一个附加的损耗因子,如 L_a , 计算损耗。因此,接收功率一般可写成

$$P_R = P_T G_T G_R L_s L_a \quad (5-5-8)$$

正如上面所述,天线的重要特征是它的增益和有效面积。这些特征一般决定于辐射功率的波长和天线的物理尺寸。例如,直径为 D 的抛物面(碟形)天线的有效面积为

$$A_R = \frac{1}{4} \pi D^2 \eta \quad (5-5-9)$$

式中, $\frac{1}{4} \pi D^2$ 是物理面积, η 是照明效率因子,其取值范围为 $0.5 \leq \eta \leq 0.6$ 。因此,直径为 D 的抛物面天线的天线增益是

$$G_R = \eta \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 \quad (5-5-10)$$

作为第二个例子,物理面积为 A 的喇叭天线的效率因子为 0.8,有效面积为 $A_R = 0.8A$, 天线增益为

$$G_R = \frac{10A}{\lambda^2} \quad (5-5-11)$$

另一个参数是天线的波束宽度,它与天线的增益(方向性)有关,该参数记为 θ_B ,如图 5-5-3 所示。通常,将天线方向性图的 -3 dB 宽度作为波束宽度。例如,抛物面天线的 -3 dB 波束宽度近似为

$$\theta_B = 70(\lambda/D)^\circ \quad (5-5-12)$$

所以, G_T 与 θ_B^2 成反比,即通过直径 D 加倍使波束宽度减小一半,则天线增益增加 4 倍(6 dB)。

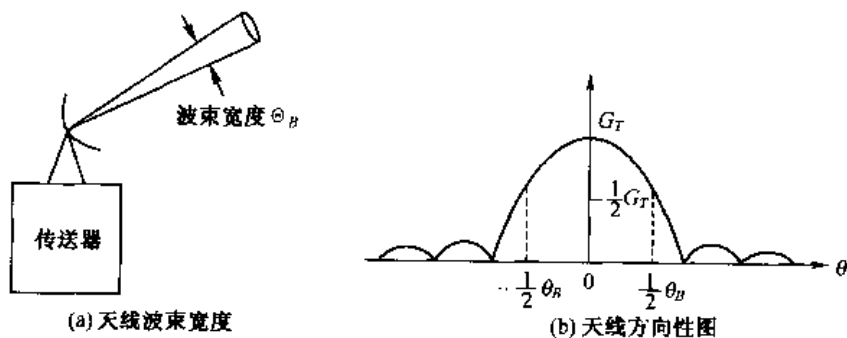


图 5-5-3 天线波束宽度和方向性图

根据式(5-5-8)给出的接收信号功率的一般关系式,可以由天线增益的技术说明以及发送机与接收机之间的距离计算 P_R 。这样的计算通常以功率为依据,所以

$$(P_R)_{dB} = (P_T)_{dB} + (G_T)_{dB} + (G_R)_{dB} + (L_s)_{dB} + (L_a)_{dB} \quad (5-5-13)$$

例 5-5-2 假设在地球同步轨道上(在地球表面上方 36 000 km)有一颗卫星辐射 100 W 的功率,即在 1 W 之上 20 dB(20 dBW)。发射天线的增益为 17 dB,所以 ERP=37 dBW。同时,假设地球站使用一个 3 m 的抛物面天线且下行链路工作在 4 GHz 频率上。效率因子 $\eta = 0.5$ 。将这些数据代入式(5-5-10),得到天线增益为 39 dB。自由空间路径损耗为

$$L_s = 195.6 \text{ dB}$$

假定没有其他损耗。因此,接收信号的功率为

$$\begin{aligned}(P_R)_{\text{dB}} &= 20 + 17 + 39 - 195.6 \\ &= -119.6(\text{dBW})\end{aligned}$$

或等价为

$$P_R = 1.1 \times 10^{-12} \text{ W}$$

为了完成链路预算的计算,必须考虑接收机前端的加性噪声的影响。接收机前端的热噪声的功率谱密度直到大约 10^{12} Hz 都比较平坦,且由下式确定

$$N_0 = k_B T_0 (\text{W/Hz}) \quad (5-5-14)$$

式中, k_B 是波尔兹曼(Boltzmann)常数($1.38 \times 10^{-23} \text{ W s/K}$), T_0 是 K 氏温度。因此,在信号带宽 W 内,总的噪声功率是 $N_0 W$ 。

数字通信系统的性能是通过为保持差错率性能低于某给定值所要求的 \mathcal{E}_b/N_0 说明的。因为

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} = \frac{T_b P_R}{N_0} = \frac{1}{R} \frac{P_R}{N_0} \quad (5-5-15)$$

则

$$\frac{P_R}{N_0} = R \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \right)_{\text{req}} \quad (5-5-16)$$

式中, $(\mathcal{E}_b/N_0)_{\text{req}}$ 是要求的比特 SNR。因此,如果已知 P_R/N_0 和所要求的比特 SNR,就能求出可能的最大数据速率。

例 5-5-3 对于例5-5-2研究的链路,接收信号的功率是

$$P_R = 1.1 \times 10^{-12} \text{ W} (-119.6 \text{ dBW})$$

假设接收机前端的噪声温度为 300 K,这对于 4 GHz 范围内的接收机是一个典型值,那么

$$N_0 = 4.1 \times 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

或等价于 -203.9 dBW/Hz 。因此

$$\frac{P_R}{N_0} = -119.6 + 203.9 = 84.3 \text{ dB Hz}$$

如果要求的比特 SNR 是 10 dB,由式(5-5-16)求出可达到的速率为

$$\begin{aligned}R_{\text{dB}} &= 84.3 - 10 \\ &= 74.3 \text{ dB (对于 1b/s)}\end{aligned}$$

相当于 26.9 Mb/s 的速率,这等价于大约 420 PCM 信道,每个信道运行在 64 000 b/s 的速率上。

计算通信链路的容量时往往引入某种安全边际,称为链路边际 M_{dB} ,其典型值可选为 $M_{\text{dB}} = 6 \text{ dB}$ 。那么,对链路容量进行链路预算有以下形式

$$\begin{aligned}R_{\text{dB}} &= \left(\frac{P_R}{N_0} \right)_{\text{dB Hz}} - \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \right)_{\text{req}} - M_{\text{dB}} \\ &= (P_T)_{\text{dBW}} + (G_T)_{\text{dB}} + (G_R)_{\text{dB}} \\ &\quad + (L_a)_{\text{dB}} + (L_s)_{\text{dB}} - \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \right)_{\text{req}} - M_{\text{dB}}\end{aligned} \quad (5-5-17)$$

5.6 文献与参考资料

在推导受 AWGN 恶化的信号的最佳解调器时,我们应用的数学方法起初是用于推导雷达信号最佳接收机结构的。例如,匹配滤波器首先由诺思(North,1943 年)提出来用于雷达检测,有时称之为诺思滤波器。推导最佳解调器和检测器的另一种方法是卡尔胡宁-罗伊夫(Karhunen-Loeve)展开式,这在达文波特和鲁特(Davenport & Root,1958 年)、海尔斯特朗姆(Helstrom,1968 年)和温·特里斯(Van Trees,1968 年)等人的经典著作中都有论述。凯利(Kelly,1960 年)等人论述了该展开式在雷达检测理论中的应用。这些检测方法是基于假设检验的方法,该方法由统计学家,如内曼和皮尔逊(Neyman & Pearson,1933 年)和沃尔德(Wald,1947 年)研发。

对信号设计和检测的几何分析方法呈现在数字调制的来龙去脉之中,以科捷利尼科夫(Kotelnikov,1947 年)和香农的原著为基础。自从沃曾克拉夫特和雅各布斯(Wozencraft & Jacobs,1965 年)在著作中介绍这种方法的应用以来,该方法在概念上很有吸引力,并且得到广泛地应用。

对于 AWGN 信道的信号星座的设计和分析在技术文献中得到相当的关注,特别有意义的是二维(QAM)信号星座性能分析,以下学者对之进行了研究:卡恩(Cahn,1960 年)、汉考克和勒基(Hancock & Lucky,1960 年)、喀波皮阿诺和格拉泽(Campopiano & Glazer,1962 年)、勒基和汉考克(Lucky & Hancock,1962 年)、扎尔茨(Salz,1971 年)等人、西蒙和史密斯(Simon & Smith,1973 年)、托马斯(Thomas,1974 年)等人、福西里(Foschini,1974 年)等人。格谢和劳伦斯(Gersho & Lawrence,1984 年)的论文描述和分析了基于多维信号星座的信号设计。

维特比算法首先是由维特比(Viterbi,1967 年)为卷积码的译码而发明的。将它用做有记忆信号的最佳最大似然序列检测算法,是由福尼(Forney,1972 年)和奥姆拉(Omura,1971 年)提出的。维特比算法在载波已调信号中的应用,是由恩格伯克(Ungerboeck,1974 年)和麦克肯切尼(MacKenchnie,1973 年)提出的,后来奥林和松德贝里(Aulin & Sunberg,1981 年)和奥林(Aulin,1980 年)将它应用到 CPM 的解调中。

关于有记忆信号解调和检测的讨论主要是参考了在美国出版的期刊论文。最近著者也了解到,在 1960 年俄国 D. 克洛夫斯基(D. Klovsky)也研究和发表了有记忆(记忆是由信道符号间干扰引人的)信号的最大似然序列检测算法。克洛夫斯基研究成果的英译文已被写入他与 B. 尼可拉耶夫(B. Nikolaev,1978 年)合著的书中。这本书第一次用英语发表了 Klovsky-Nikolaev 算法,该算法也可用于有记忆信号的检测。

习题

5-1 匹配滤波器的频率响应为:

$$H(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

(a) 试求与 $H(f)$ 对应的冲激响应 $h(t)$ 。

(b) 试求该滤波器特性所匹配的信号波形。

5-2 有一个信号为:

$$s(t) = \begin{cases} (A/T)t \cos 2\pi f_c t & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

(a) 试求该信号的匹配滤波器的冲激响应。

(b) 试求在 $t = T$ 时刻匹配滤波器的输出。

(c) 设信号 $s(t)$ 通过一个相关器, 它将输入 $s(t)$ 与 $s(t)$ 进行相关运算。试求在 $t = T$ 时刻相关器的输出值。试与(b)中的结果相比较。

5-3 本题是有关 DPSK 信号的特性的:

(a) 若想要用二进制 DPSK 发送下列数据序列

1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0

令 $s(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$ 表示任何信号传输间隔(持续时间为 T)中的发送信号, 并设发送的第一个比特对应的相位为 $\theta = 0$, 试给出该数据序列对应的发送信号的相位。

(b) 如果数据序列是不相关的, 试求并画出由 DPSK 发送的信号功率密度谱。

5-4 二进制数字通信系统采用以下信号发送信息:

$$s_0(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$s_1(t) = A \quad (0 \leq t \leq T)$$

这称做启闭信号传输(on-off-signalling)。在解调器将接收信号 $r(t)$ 与 $s(t)$ 进行互相关运算, 并且在 $t = T$ 时刻对相关器的输出进行抽样。

(a) 假设信号是等概的, 试求加性高斯白噪声(AWGN)信道的最佳检测器和最佳门限。

(b) 试求作为信噪比(SNR)函数的错误概率。试将启闭信号传输与双极性信号传输(antipodal signaling)进行比较。

5-5 式(5-1-14)给出的相关度量如下

$$C(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = 2 \sum_{n=1}^N r_n s_{mn} - \sum_{n=1}^N s_{mn}^2 \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

其中

$$r_n = \int_0^T r(t) f_n(t) dt$$

$$s_{mn} = \int_0^T s_m(t) f_n(t) dt$$

试证明该相关度量等价于以下度量

$$C(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = 2 \int_0^T r(t) s_m(t) dt - \int_0^T s_m^2(t) dt$$

5-6 有一个等效低通(复值)信号 $s_l(t)$, $0 \leq t \leq T$, 其能量为

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^T |s_l(t)|^2 dt$$

假设该信号受到 AWGN 的恶化, 其等效低通形式为 $z(t)$, 则观察到的信号为

$$r_l(t) = s_l(t) + z(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

该接收信号通过一个(等效低通)冲激响应为 $h_l(t)$ 的滤波器。试求 $h_l(t)$, 要求

(在 $t = T$ 时刻)使输出 SNR 最大。

- 5-7 设 $z(t) = x(t) + jy(t)$ 是一个复值零均值高斯白噪声过程,其自相关函数为 $\phi_{zz}(\tau) = N_0\delta(\tau)$ 。设 $f_m(t)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) 为定义在 $0 \leq t \leq T$ 区间的 M 个等效低通正交波形的集合。定义

$$N_{mr} = \operatorname{Re} \left[\int_0^T z(t) f_m^*(t) dt \right] \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

(a) 试求 N_{mr} 的方差。

(b) 试证明 $E(N_{mr} N_{kr}) = 0$, 其中 $k \neq m$ 。

- 5-8 利用图 P5-8 所示的两个等效低通信号在加性高斯白噪声信道上传输二进制序列。接收信号可以表示为

$$r_i(t) = s_i(t) + z(t) \quad (0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2)$$

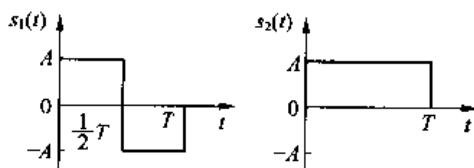


图 P5-8

其中 $z(t)$ 为零均值高斯噪声过程,其自相关函数为

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} E[z^*(t) z(t + \tau)] = N_0 \delta(\tau)$$

- (a) 试求 $s_1(t), s_2(t)$ 的发送能量及互相关系数 ρ_{12} 。
- (b) 假设接收机采用两个匹配滤波器的相干检测的方法实现,一个匹配于 $s_1(t)$,另一个匹配于 $s_2(t)$ 。试画出这两个匹配滤波器的等效低通冲激响应。
- (c) 发送信号为 $s_2(t)$ 时,试画出这两个匹配滤波器的无噪声响应。
- (d) 假设接收机由两个并列的互相关器(乘法器之后跟随积分器)的方法实现。当发送信号为 $s_2(t)$ 时,试画出在 $0 \leq t \leq T$ 区间作为时间函数的每一个积分器输出。
- (e) 试比较 (c) 和 (d) 中的曲线,问它们是否相同? 给予简要的解释。
- (f) 根据你对这种信号特性的认识,求该二进制通信系统的错误概率。
- 5-9 设 $z = x + jy$ 为复高斯随机变量,其中 (x, y) 为零均值且方差为 $E(x^2) = E(y^2) = \sigma^2$ 的统计独立的变量。令

$$r = z + m, \quad \text{其中 } m = m_r + jm_i$$

且 r 定义为

$$r = a + jb$$

显然, $a = x + m_r$ 和 $b = y + m_i$ 。试求下列概率密度函数

(a) $p(a, b)$

(b) $p(u, \phi)$, 其中 $u = \sqrt{a^2 + b^2}$ 和 $\phi = \tan^{-1} b/a$

(c) $p(u)$

注意: (b) 中为方便计,定义 $\theta = \tan^{-1}(m_i/m_r)$, 所以

$$m_r = \sqrt{m_r^2 + m_i^2} \cos \theta, \quad m_i = \sqrt{m_r^2 + m_i^2} \sin \theta$$

利用关系式

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a \cos(\phi - \theta)} d\phi = I_0(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

其中 $I_0(a)$ 是零阶修正贝塞尔函数。

- 5-10 三元通信系统在每个 T 秒内传输下列 3 个信号之一: $s(t)$, 0 , $-s(t)$, 则接收信号为 $r_f(t) = s(t) + z(t)$, $r_f(t) = z(t)$ 或 $r_f(t) = -s(t) + z(t)$, 其中 $z(t)$ 为高斯白噪声, $E[z(t)] = 0$, $\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} E[z(t)z^*(\tau)] = N_0 \delta(t - \tau)$ 。最佳接收机计算以下相关度量

$$U = \operatorname{Re} \left[\int_0^T r(t) s^*(t) dt \right]$$

将 U 与门限 A 和门限 $-A$ 相比较。若 $U > A$, 则判发送 $s(t)$; 若 $U < -A$, 则判 $-s(t)$; 若 $-A < U < A$, 则判为 0 。

(a) 试求 3 个条件错误概率: 发 $s(t)$ 时的 P_e 、发 $-s(t)$ 时的 P_e 、发 0 时的 P_e 。

(b) 设这 3 个符号是先验等概的, 试求作为门限 A 函数的平均错误概率。

(c) 试求使 P_e 最小的 A 值。

- 5-11 如图 P5-11 所示的两个等效低通信号用于发送二进制信息序列。该发送信号是等概率的, 且受到零均值加性高斯白噪声的恶化, 该噪声的等效低通形式 $z(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} \phi_{zz}(\tau) &= \frac{1}{2} E[z^*(t)z(t + \tau)] \\ &= N_0 \delta(\tau) \end{aligned}$$

(a) 试问发送信号的能量是多少?

(b) 如果接收机采用相干检测, 试问二进制数字差错概率是多少?

(c) 如果接收机采用非相干检测, 试问二进制数字差错概率是多少?

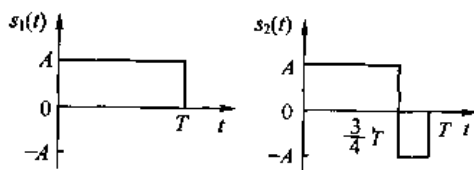


图 P5-11

- 5-12 4.3.1 节中指出, 相干检测的二进制 FSK 信号保证正交性的最小频率间隔为 $\Delta f = 1/2T$ 。如果 Δf 超过 $1/2T$, FSK 相干检测可能达到更低的错误概率。试证明 Δf 的最佳值为 $0.715/T$, 并求当 Δf 为该值时的错误概率。

- 5-13 有 3 个信号集, 其等效低通波形如图 P5-13 所示。每一个集都可以用来在加性高斯白噪声信道传输 4 个等概率的消息。等效低通噪声 $z(t)$ 具有零均值和自相关函数 $\phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$ 。

(a) 试对集 I、II 和 III 中的信号波形进行分类。换句话说, 说明每一个信号集属于哪一种类型或类别。

(b) 试问每一个信号集的平均发送能量是多少?

- (c) 如果采用相干检测,求信号集 I 的平均错误概率。
- (d) 针对信号集 II,对以下两种情况求符号错误概率的一致边界:(i)相干检测;(ii)非相干检测。
- (e) 试问能否对信号集 III 用非相干检测?请说明。
- (f) 如果要求比特率与带宽之比(R/W)至少为 2,试问选择哪一种或哪些信号集?简要说明。

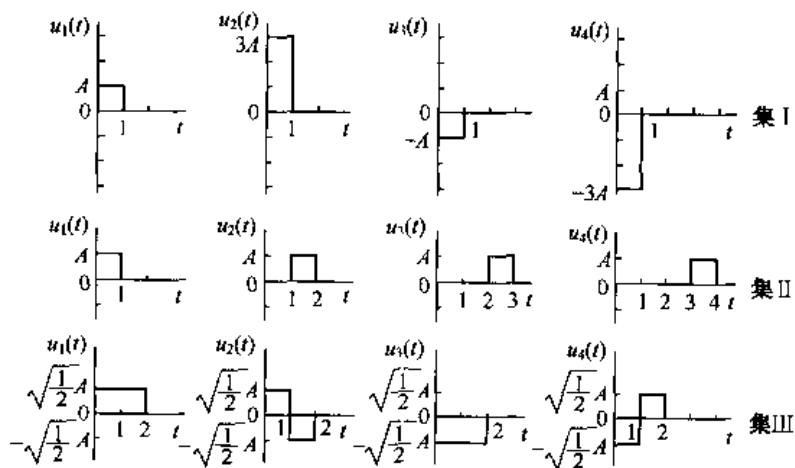


图 P5-13

- 5-14 有一个四元($M=4$)通信系统,每 T 秒发送下列 4 个等概信号之一: $s_1(t)$, $-s_1(t)$, $s_2(t)$, $-s_2(t)$ 。 $s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 正交且等能量。噪声为加性高斯白噪声,其均值为零且自相关函数为 $\phi_{zz}(\tau) = N_0\delta(\tau)$ 。解调器由两个与 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 相匹配的滤波器组成,在抽样时刻的输出为 U_1 和 U_2 。检测器按下列规则判决

$$U_1 > |U_2| \Rightarrow s_1(t), U_1 < -|U_2| \Rightarrow -s_1(t)$$

$$U_2 > |U_1| \Rightarrow s_2(t), U_2 < -|U_1| \Rightarrow -s_2(t)$$

由于这是双正交信号集,故错误概率为 $(1 - P_c)$,其中 P_c 由式(5-2-34)确定。试把该错误概率表示为单个积分式,并证明 $M=4$ 的双正交信号集的符号错误概率与四相 PSK 相同。

提示:将 U_1 和 U_2 变量作变换 $W_1 = U_1 + U_2$ 和 $W_2 = U_1 - U_2$,可以简化该问题。

- 5-15 带通滤波器的输入 $s(t)$ 为

$$s(t) = \text{Re}[s_0(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

其中 $s_0(t)$ 为一个矩形脉冲,如图 P5-15(a)所示。

- (a) 如果该滤波器的冲激响应为

$$g(t) = \text{Re}[2h(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

其中 $h(t)$ 为指数函数,如图 P5-15(b)所示。试求该带通滤波器在所有 $t \geq 0$ 时的输出 $y(t)$ 。

- (b) 试画出该滤波器的等效低通输出。

- (c) 如果要求抽样时刻的滤波器的输出为最大值,试问应该在何时抽样?最大输出值是多少?

(d) 假设除了输入信号 $s(t)$ 之外,还存在加性高斯白噪声

$$n(t) = \text{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

这里 $\phi_{zz}(\tau) = N_0\delta(\tau)$ 。在(c)中确定的抽样时刻,信号的样值受到一个加性高斯噪声项的恶化。试求其均值和方差。

(e) 试求抽样输出的信噪比 γ 。

(f) 当 $h(t)$ 是对 $s(t)$ 的匹配滤波器时,试求信噪比,并与(e)中得到的 γ 值比较。

5-16 图 P5-16 为 8 个信号点的星座图。

(a) 设 8-QAM 星座图上的最近两个信号点的间距为 A ,试求内圆和外圆的半径 a, b 。

(b) 8-PSK 的相邻信号点的间距为 A ,试求圆的半径 r 。

(c) 试求这两个信号星座图各自的平均发送功率,比较这两个功率。试问在功率上,一个星座图比另一个具有多大相对优势(假定所有信号点概率相等)?

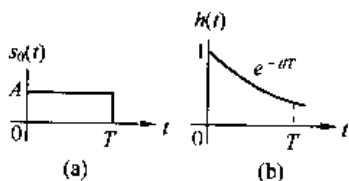


图 P5-15

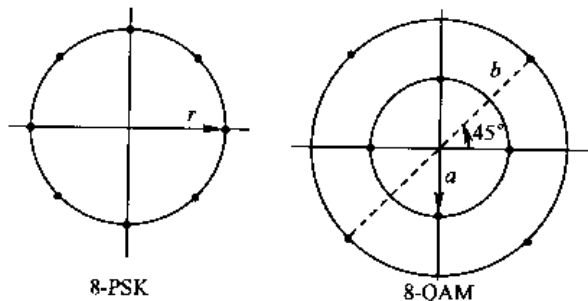


图 P5-16

5-17 有一个 8 点 QAM 信号星座图如图 P5-16 所示。

(a) 试问能否给信号星座图上的每点分配 3 个数据比特,使得最接近(相邻)点只相差 1 比特?

(b) 如果要求比特率为 90 Mb/s,试求符号速率。

5-18 假设用二进制 PSK 在功率谱密度为 $\frac{1}{2}N_0 = 10^{-10}$ W/Hz 的 AWGN 信道上传输信息。发送信号能量为 $\mathcal{E}_b = \frac{1}{2}A^2T$, T 为比特间隔, A 为信号幅度。当数据速率为下列值时,试求达到错误概率 10^{-6} 时所需的信号幅度: (a) 10 kb/s; (b) 100 kb/s; (c) 1 mb/s。

5-19 有一个信号检测器,其输入为

$$r = \pm A + n$$

式中, $+A$ 与 $-A$ 以等概率出现,噪声变量 n 由图 P5-19 所示的(拉普拉斯)PDF 表征。

(a) 试求作为参数 A 和 σ 函数的错误概率。

(b) 为达到错误概率 10^{-5} ,试求所需的 SNR。试将该 SNR 与高斯 PDF 的结果进行比较。

5-20 图 P5-20 所示为两个 8 点 QAM 信号的星座图,相邻点的最短距离为 $2A$ 。假设各信号点是等概的,试求各星座的平均发送功率。试问哪个星座的功率更有效率?

5-21 图 P5-21 为 QAM 信号的星座图。假设 SNR 足够大,以至差错仅发生在相邻点之间。试求检测器的最佳判决边界。

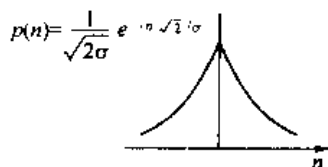


图 P5-19

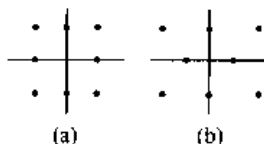


图 P5-20

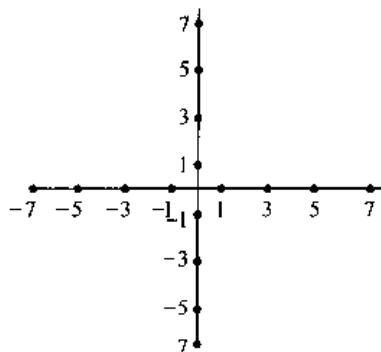


图 P5-21

- 5-22 试对图 P5-21 所示的 16-QAM 信号星座图进行格雷(Gray)编码。
- 5-23 用两个正交载波 $\cos 2\pi f_c t$ 和 $\sin 2\pi f_c t$ 通过 AWGN 信道,并以两个不同的数据速率 10 kb/s 和 100 kb/s 传送信息。如果要求这两个信道具有相同的 \mathcal{E}_b/N_0 , 分别求两个载波信号的相对幅度。
- 5-24 有 3 个消息 m_1, m_2 和 m_3 要在 AWGN 信道传输,噪声的功率谱密度为 $N_0/2$ 。消息是

$$s_1(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

$$s_2(t) = -s_3(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T) \\ -1 & (\frac{1}{2}T \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

- (a) 试问信号空间的维度(dimensionality)是多少?
- (b) 试为信号空间寻找一个合适的基。
- 提示:可不用格拉姆-施密特过程来求基。
- (c) 试画出该题的信号星座图。
- (d) 试推导并画出最佳判决区域 R_1, R_2 和 R_3 。
- (e) 试问 3 个消息中哪一个更容易出差错?为什么?换句话说, $P(\text{差错} | \text{发 } m_i)$ ($i = 1, 2, 3$) 中哪一个更大?
- 5-25 如果解调器输入端的加性噪声是有色的,那么与信号相匹配的滤波器不再使输出 SNR 最大。这时可以考虑采用一个预滤波器,使有色噪声白化,其后接一个与预滤波后的信号相匹配的滤波器。最后的结构如图 P5-25 所示。
- (a) 试求白化噪声的预滤波器的频率响应特性。
- (b) 试求与 $\bar{s}(t)$ 相匹配的滤波器的频率响应特性。
- (c) 如果把预滤波器和匹配滤波器看成是一个“广义匹配滤波器”,试问该滤波器的频率响应特性是怎样的?
- (d) 试求检测器输入端的 SNR。

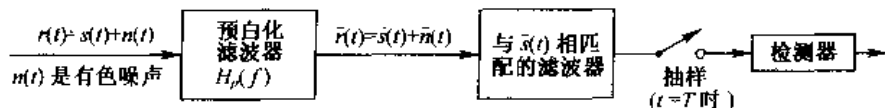


图 P5-25

- 5-26 有一个数字通信系统用 QAM 在音带电话信道上以 2 400 符号/s 的速率传送信息。假定加性噪声为白的和高斯的。
- (a) 要求在 4 800 b/s 时达到 10^{-5} 的错误概率, 试求所需要的 \mathcal{E}_b/N_0 。
- (b) 当速率为 9 600 b/s 时, 重复(a)。
- (c) 当速率为 19 200 b/s 时, 重复(a)。
- (d) 试问从这些结果能得到什么结论?
- 5-27 图 P5-27 示出了四相和八相信号的星座图。要使两个星座图中相邻点的距离都是 d , 试求圆的半径 r_1 和 r_2 。利用上面的结果, 试求在高 SNR 时 8-PSK 信号要达到与四相信号相同的错误概率需要的附加发送能量, 这里的错误概率由选择相邻点的差错决定。

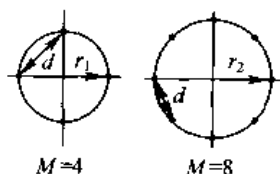


图 P5-27

- 5-28 数字信息由载波调制在加性高斯噪声信道传输, 信道带宽为 100 kHz, $N_0 = 10^{-10}$ W/Hz。如果采用四相 PSK、二进制 FSK 和四频率正交 FSK, 并用非相干检测, 试求通过该信道能传输的最大速率。
- 5-29 MSK 信号的初始相位状态是 0 或 π 弧度。试针对以下 4 对数据输入, 求末端相位状态: (a) 00; (b) 01; (c) 10; (d) 11。
- 5-30 $h = \frac{1}{2}$ 的连续相位 FSK 信号为

$$s(t) = \pm \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \cos 2\pi f_c t \pm \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \sin 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq 2T_b)$$

其中, \pm 号取决于发送的信息比特。

- (a) 试证明该信号具有恒定幅度。
- (b) 试画出产生该信号的调制器的方框图。
- (c) 试画出恢复信息的解调器和检测器的方框图。
- 5-31 部分响应 CPM 的 $h = \frac{1}{2}$, 且有

$$u(t) = \begin{cases} 1/4T & (0 \leq t \leq 2T) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

试画出状态网格图和状态图。

- 5-32 在下列情况下, 试求状态网格图中的状态数目:

(a) 全响应二进制 CPFSK, 且 $h = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$ 。

(b) 部分响应 $L=3$ 二进制 CPFSK, 且 $h = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{4}$ 。

5-33 具有 $M=8$ 信号点的双正交信号集中, 各信号点是先验等概率的。试求作为 \mathcal{E}_b/N_0 函数的符号错误概率的一致边界。

5-34 有一个 M 元数字通信系统, 其中 $M=2^N$, 且 N 为信号空间的维数。假设 M 个信号向量位于一个以原点为中心的超立方体(hypercube)的顶点。试求作为 \mathcal{E}_b/N_0 函数的平均符号错误概率, 其中 \mathcal{E}_b 为每个符号的能量, $\frac{1}{2}N_0$ 为 AWGN 的功率谱密度, 且所有信号点都是等概的。

5-35 有一个信号的波形为

$$s(t) = \sum_{i=1}^n c_i p(t - iT_c)$$

式中, $p(t)$ 是单位幅度且持续时间为 T_c 的矩形脉冲, $\{c_i\}$ 可以看做是码向量 $\mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$, 其中元素 $c_i = \pm 1$ 。试证明波形 $s(t)$ 的匹配滤波器可以由一个与 $p(t)$ 匹配的滤波器跟随一个与向量 \mathbf{C} 相匹配的离散时间滤波器的级联结构实现。试求匹配滤波器在抽样时刻 $t = nT_c$ 时的输出值。

5-36 话音信号以 8 kHz 的速率抽样, 按对数律压缩, 再将每个样值编为 8 比特码的 PCM 格式。该 PCM 数据以 M 电平 PAM 在 AWGN 基带信道传输。试对以下不同的 M 求传输所需的带宽: (a) $M=4$; (b) $M=8$; (c) $M=16$ 。

5-37 哈达马(Hadamard)矩阵的元素为 ± 1 , 且行向量两两正交。当 n 为 2 的幂时, $n \times n$ 哈达马矩阵由以下递归方法构成

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{bmatrix}$$

(a) 设 \mathbf{C}_i 为上面定义的 $n \times n$ 哈达马矩阵的第 i 行, 证明构成的以下波形是正交的

$$s_i(t) = \sum_{k=1}^n c_{ik} p(t - kT_c) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

其中, $p(t)$ 是限定在 $0 \leq t \leq T_c$ 时间间隔内的任意脉冲。

(b) 试证明 n 个波形 $\{s_i(t)\}$ 的匹配滤波器(或互相关器)可以由单个与脉冲 $p(t)$ 匹配的滤波器(或相关器), 后接一组 n 个利用码组 $\{\mathbf{C}_i\}$ 的互相关器来实现。

5-38 离散序列

$$r_k = \sqrt{\mathcal{E}_b} c_k + n_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

表示解调器输出的样值序列, 其中 $c_k = \pm 1$, 为两个可能码组 $\mathbf{C}_1 = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]$ 和 $\mathbf{C}_2 = [1 \ 1 \ \cdots \ 1 \ -1 \ \cdots \ -1]$ 之一的元素。码组 \mathbf{C}_2 有 w 个 $+1$ 元素和 $n-w$ 个 -1 元素, 其中 w 为正整数。噪声序列 $\{n_k\}$ 是白高斯的, 且方差为 σ^2 。

(a) 试问这两个发送信号的最佳最大似然检测器是怎样的?

(b) 试求作为参数 $(\sigma^2, \mathcal{E}_b, w)$ 的函数的错误概率。

(c) 使错误概率最小的 w 值为多少?

5-39 试推导图 5-4-1 中采用互相关型解调器的输出 r_1 和 r_2 。假定发送信号为 $s_{11}(t)$, 且

$$r_l(t) = s_{l1}(t)e^{j\phi} + z(t)$$

其中, $z(t) = n_c(t) + jn_s(t)$ 为加性高斯噪声。

5-40 试求式(5-4-15)中高斯随机噪声变量 n_{1c}, n_{2c}, n_{1s} 和 n_{2s} 的协方差、方差和联合 PDF。

5-41 试推导式(5-4-10)确定的匹配滤波器的输出。

5-42 在启闭键控的载波已调信号中,两个可能的信号为

$$s_0(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T_b)$$

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}} \cos 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T_b)$$

相应的接收信号为

$$r(t) = n(t) \quad (0 \leq t \leq T_b)$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T_b)$$

其中, ϕ 为载波相位, $n(t)$ 为 AWGN。

(a) 试画出采用非相干(包络)检测的接收机(解调器及检测器)的方框图。

(b) 试求检测器中相应于两个接收信号的判决变量的 PDF。

(c) 推导检测器的错误概率。

5-43 在二相 DPSK 中,一个信号传输间隔中的接收信号作为下一个信号传输间隔中的接收信号的相位参考。判决变量为

$$D = \operatorname{Re}(V_m V_{m-1}^*) \stackrel{\text{"1"}}{\geq} 0$$

其中

$$V_k = 2\alpha \epsilon_e^{j(\theta_k - \phi)} + N_k$$

表示与发送信号 $u(t)$ 相匹配的滤波器的复值输出。 N_k 为零均值复高斯变量,其分量为统计独立的。

(a) 令 $V_k = X_k + jY_k$, 试证明 D 等价于

$$d = \left[\frac{1}{2}(X_m + X_{m-1}) \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(Y_m + Y_{m-1}) \right]^2 \\ - \left[\frac{1}{2}(X_m - X_{m-1}) \right]^2 - \left[\frac{1}{2}(Y_m - Y_{m-1}) \right]^2$$

(b) 为数学上计算的方便,假设 $\theta_k = \theta_{k-1}$, 试证明 U_1, U_2, U_3 和 U_4 为统计独立的高斯变量,其中 $U_1 = \frac{1}{2}(X_m + X_{m-1})$, $U_2 = \frac{1}{2}(Y_m + Y_{m-1})$, $U_3 = \frac{1}{2}(X_m - X_{m-1})$ 和 $U_4 = \frac{1}{2}(Y_m - Y_{m-1})$ 。

(c) 定义随机变量 $W_1 = U_1^2 + U_2^2$ 及 $W_2 = U_3^2 + U_4^2$, 则

$$D = W_1 - W_2 \stackrel{\text{"1"}}{\geq} 0$$

试求 W_1 和 W_2 的概率密度函数。

(d) 试求错误概率 P_b , 这里

$$P_b = P(D < 0) = P(W_1 - W_2 < 0) = \int_0^\infty P(W_2 > w_1 | w_1) p(w_1) dw_1$$

5-44 MSK 可以表示为四相偏移 PSK 调制,其等效低通形式为

$$v(t) = \sum_k [I_k u(t - 2kT_b) + jJ_k u(t - 2kT_b - T_b)]$$

式中

$$u(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/2T_b) & (0 \leq t \leq 2T_b) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

且 $\{I_k\}$ 和 $\{J_k\}$ 为信息符号 (± 1) 序列。

(a) 试画出对偏移 QPSK 的 MSK 解调器的方框图。

(b) 若不考虑调制的记忆特性,试针对 AWGN 求四相解调器的性能。

(c) 试将(b)中得到的性能与 MSK 信号的维特比译码性能作比较。

(d) MSK 信号等价于二进制 FSK,试求 MSK 非相干检测的性能。试将(b)和(c)的结果作比较。

5-45 有一个传输二进制信息的传输线信道,它使用 $n-1$ 个再生中继器和一个终端接收器。假定每个接收器的检测器的错误概率都是 p ,并且各中继器的差错是统计独立的。

(a) 试证明终端接收器上的二进制错误概率为

$$P_n = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2p)^n]$$

(b) 如果 $p = 10^{-6}$ 且 $n = 100$,试求 P_n 的近似值。

5-46 一个数字通信系统包含100个数字再生中继器的传输线,采用二进制双极信号传输信息。如果端到端的总的错误概率为 10^{-6} ,为达到在 AWGN 中的这个性能,试求每个中继器的错误概率及所需的 ε_b/N_0 。

5-47 一个无线电发射机的输出功率 $P_T = 1\text{ W}$,频率为 1 GHz 。发射和接收天线为直径 $D = 3\text{ m}$ 的抛物面天线。

(a) 试求天线的增益。

(b) 试求发射机的有效辐射功率(EIRP)。

(c) 发射机和接收机的天线间的距离(自由空间)为 20 km ,试求接收天线输出的信号功率(单位为 dBm)。

5-48 无线电通信系统的发射功率为 0.1 W ,频率为 1 GHz 。发射和接收天线都是抛物型的,直径都是 1 m 。接收机与发射机相距 30 km 。

(a) 试求发射天线和接收天线的增益。

(b) 试求发送信号的有效辐射功率(EIRP)。

(c) 试求接收天线的输出信号功率。

5-49 同步轨道卫星与相距 $40\,000\text{ km}$ 的地球站通信。卫星天线的增益为 15 dB ,发射功率为 3 W 。地球站采用效率为 0.6 的 10 m 抛物面天线,其频带中心在 $f = 10\text{ GHz}$ 。试求接收机天线输出端的接收功率电平。

5-50 宇宙飞船在距离地球 $100\,000\text{ km}$ 的地方以 $R\text{ b/s}$ 的速率发送数据,其频带中心为 2 GHz ,发送功率为 10 W 。地球站使用抛物面天线,且直径为 50 m 。宇宙飞船天线

的增益为 10 dB。接收机前端的噪声温度为 $T_0 = 300\text{ K}$ 。

(a) 试求接收功率电平。

(b) 如果要求 $\mathcal{E}_b/N_0 = 10\text{ dB}$, 试求宇宙飞船能发送的最大比特率。

- 5-51** 在数字通信系统中采用一个地球同步轨道卫星作为再生中继器。在卫星到地球的链路上, 卫星天线的增益为 6 dB, 地球站天线的增益为 50 dB。下行链路运行的中心频率为 4 GHz, 信号带宽为 1 MHz。如果实现可靠通信要求的 \mathcal{E}_b/N_0 为 15 dB, 试求卫星下行链路的发射功率。假定 $N_0 = 4.1 \times 10^{-21}\text{ W/Hz}$ 。

第6章 载波和符号同步

在数字通信系统中,为了恢复发送信息,必须对解调器输出进行周期性的抽样,每个符号间隔抽样一次。因为在接收机中对发送机到接收机的传播延迟一般是未知的,为了对解调器输出同步抽样,必须从接收信号导出符号定时。

发送信号的传播延迟导致载波(相位)的偏移,如果检测器是相位相干的,接收机必须估计这种载波(相位)偏移。本章将研究在接收机中导出载波和符号同步的方法。

6.1 信号参数估计

首先研究接收机输入信号的数学模型。假定信道使通过它的发送信号产生延迟,并以高斯噪声相加恶化发送信号。因此,接收信号可以表示为

$$r(t) = s(t - \tau) + n(t)$$

式中

$$s(t) = \text{Re}[s_i(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (6-1-1)$$

式中 τ 是传播延迟, $s_i(t)$ 是等效低通信号。

接收信号可以表示为

$$r(t) = \text{Re}\{[s_i(t - \tau)e^{j\phi} + z(t)]e^{j2\pi f_c t}\} \quad (6-1-2)$$

式中,由传播延迟引起的载波相位是 $\phi = -2\pi f_c \tau$ 。那么,从这个公式来看,似乎只有一个信号参数要估计,即传播延迟,因为可以由 f_c 和 τ 求出 ϕ 。然而,情况并不是这样。因为接收机中为解调产生载波信号的振荡器在相位上一般与发送机不同步,而且两个振荡器随时间慢慢漂移,也许往不同方向漂移。因此,接收信号的相位不仅依赖于延迟 τ ,而且为了解调接收信号,接收机必须在时间上同步,其精度决定于符号间隔 T 。通常,对 τ 的估计误差必须是相对 T 比较小的一部分。例如,在实际应用中, T 的 $\pm 1\%$ 较适当。然而,即使 ϕ 仅取决于 τ ,对估计载波相位来说,这种等级精度一般是不合适的。由于 f_c 一般较大,因此较小的 τ 估计误差会引起较大的相位误差。

实际上,为了解调和相干检测接收信号,必须估计两个参数 τ 和 ϕ 。因此,将接收信号表示为

$$r(t) = s(t; \phi, \tau) + n(t) \quad (6-1-3)$$

式中, ϕ 和 τ 表示要估计的参数。为了简化符号标记,令 Ψ 标记参数向量 $\{\phi, \tau\}$, 因此 $s(t; \phi, \tau)$ 可标记为 $s(t; \Psi)$ 。

有两个基本准则广泛应用于信号参数估计:最大似然(ML)准则和最大后验概率(MAP)准则。在 MAP 准则中,信号参数向量 Ψ 建模成随机的,且由先验概率密度函数 $p(\Psi)$ 表征。在最大似然准则中,信号参数向量 Ψ 被处理成确定的但是未知的。

采用 N 个标准正交函数 $\{f_n(t)\}$ 得到 $r(t)$ 的标准正交展开式,于是用系数为 $[r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_N] \equiv \mathbf{r}$ 的向量表示 $r(t)$ 。在展开式中,随机变量 $[r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_N]$ 的联合 PDF 可以表示为 $p(\mathbf{r}|\Psi)$ 。那么, Ψ 的 ML 估计值就是使 $p(\mathbf{r}|\Psi)$ 最大的值。另一方面, MAP 的估计值是使后验概率密度函数

$$p(\Psi | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | \Psi) p(\Psi)}{p(\mathbf{r})} \quad (6-1-4)$$

最大的 Ψ 值。

注意,如果没有参数向量 Ψ 的先验知识,可假定 $p(\Psi)$ 在该参数的取值范围内是均匀的(常数值)。在这种情况下,使 $p(\mathbf{r} | \Psi)$ 最大的 Ψ 值,同时也使 $p(\Psi | \mathbf{r})$ 最大。因此,MAP 和 ML 的估计是相同的。

下面在参数估计的处理中,把参数 ϕ 和 τ 视做未知的,但是确定的。因此,采用 ML 准则来估计。

在信号参数的 ML 估计中,需要通过在称为观测间隔的时间间隔 $T_0 \geq T$ 上观测接收信号,以使接收机提取估计值。由单个观测间隔得到的估计有时称为点估计。然而,实际采用跟踪环(模拟的和数字的)的估计以连续为基础,跟踪环连续不断地更新估计值。虽然如此,点估计还是可以给出对跟踪环实现的深入理解。此外,在 ML 估计性能的分析中,点估计也很有用,其性能与由跟踪环得到的性能有关。

6.1.1 似然函数

虽然根据由 $r(t)$ 展开式得到的随机变量 $[r_1, r_2, \dots, r_N]$ 的联合 PDF 来导出参数估计值是可能的,但是比较方便的做法是当估计信号波形的参数时,直接处理信号波形。因此,我们将研究 $p(\mathbf{r} | \Psi)$ 最大化的连续时间等效形式。

因为加性噪声 $n(t)$ 是白的且零均值高斯的,联合 PDF $p(\mathbf{r} | \Psi)$ 可以表示为

$$p(\mathbf{r} | \Psi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^N \exp \left\{ - \sum_{n=1}^N \frac{[r_n - s_n(\Psi)]^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (6-1-5)$$

式中

$$\begin{aligned} r_n &= \int_{T_0} r(t) f_n(t) dt \\ s_n(\Psi) &= \int_{T_0} s(t; \Psi) f_n(t) dt \end{aligned} \quad (6-1-6)$$

式中, T_0 表示在 $r(t)$ 和 $s(t; \Psi)$ 展开式中的积分区间。

注意,通过将式(6-1-6)代入式(6-1-5),指数中的自变量可以用信号波形 $r(t)$ 和 $s(t; \Psi)$ 表示,即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N [r_n - s_n(t; \Psi)]^2 = \frac{1}{N_0} \int_{T_0} [r(t) - s(t; \Psi)]^2 dt \quad (6-1-7)$$

该式的证明留做读者练习(参见习题 6-1)。 $p(\mathbf{r} | \Psi)$ 关于信号参数 Ψ 的最大化等价于下列似然函数的最大化,即

$$\Lambda(\Psi) = \exp \left\{ - \frac{1}{N_0} \int_{T_0} [r(t) - s(t; \Psi)]^2 dt \right\} \quad (6-1-8)$$

下面,我们将根据 $\Lambda(\Psi)$ 最大的观点研究参数估计。

6.1.2 信号解调中的载波恢复与符号同步

在每一个同步地传输信息的数字通信系统中,需要有符号同步。如果信号被相干检测,需

要载波恢复。

图 6-1-1 所示为二进制 PSK(或二进制 PAM)信号解调器和检测器的方框图。如图所示, 载波相位估计值 $\hat{\phi}$ 用来给相关器产生参考信号 $g(t)\cos(2\pi f_c t + \hat{\phi})$, 符号同步器控制抽样器和信号脉冲发生器的输出。如果信号脉冲是矩形的, 信号发生器可删去。

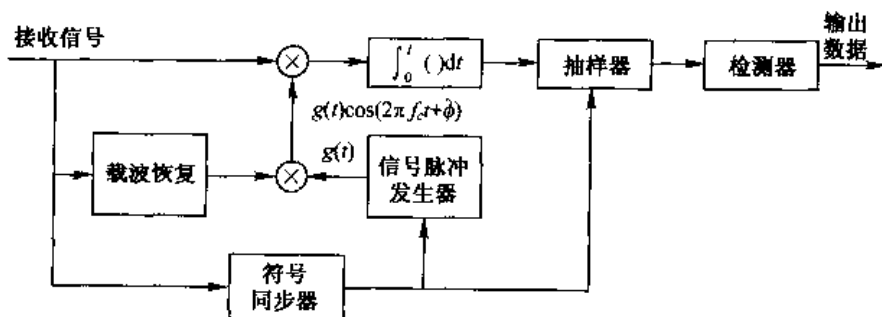


图 6-1-1 二进制 PSK 接收机的方框图

M 元 PSK 解调器的方框图如图 6-1-2 所示。在这种情况下, 要求用两个相关器使接收信号与两个正交载波信号 $g(t)\cos(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ 和 $g(t)\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$ 相关, 其中 $\hat{\phi}$ 是载波相位的估计值。此时, 检测器是一个相位检测器, 它将接收信号相位与可能的发送信号相位进行比较。

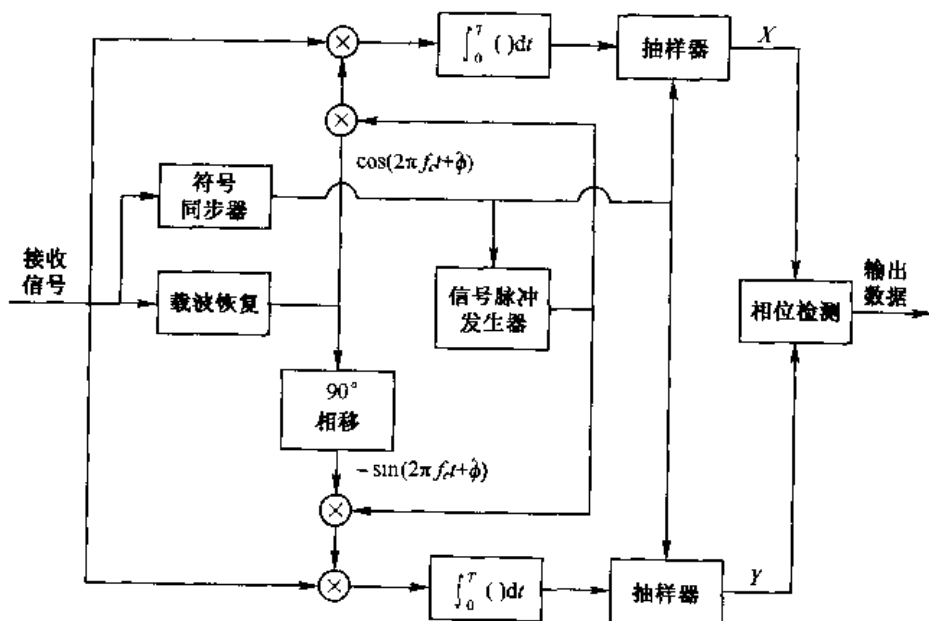


图 6-1-2 M 元 PSK 接收机的方框图

PAM 信号解调器的方框图如图 6-1-3 所示。在这种情况下, 要求用一个相关器, 而检测器是一个幅度检测器, 将接收信号的幅度与可能的发送信号幅度进行比较。注意, 我们已经在解调器的前端加入了一个自动增益控制 (AGC) 以消除信道增益的变化, 这种变化会影响幅度检测器。因为 AGC 具有较长的时间常数, 所以不会对逐个符号发生的信号幅度变化作出响应。因而, AGC 在其输出端维持一个固定的平均 (信号加噪声) 功率。

最后, 考察图 6-1-4 所示的 QAM 解调器的方框图。正如 PAM 的情况, 在解调器的输入

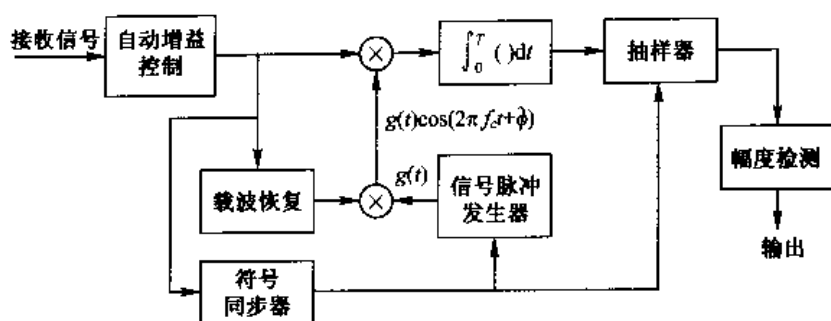


图 6-1-3 M 元 PAM 接收机的方框图

端也要求有一个 AGC,以维持一个恒定平均功率的信号,这个解调器类似于 PSK 解调器,两者都产生同相和正交信号样值(X, Y)给检测器。在 QAM 的情况下,检测器计算受噪声恶化的接收信号点与 M 个可能发送的信号点之间的欧式距离,并选择最接近接收信号点的信号。

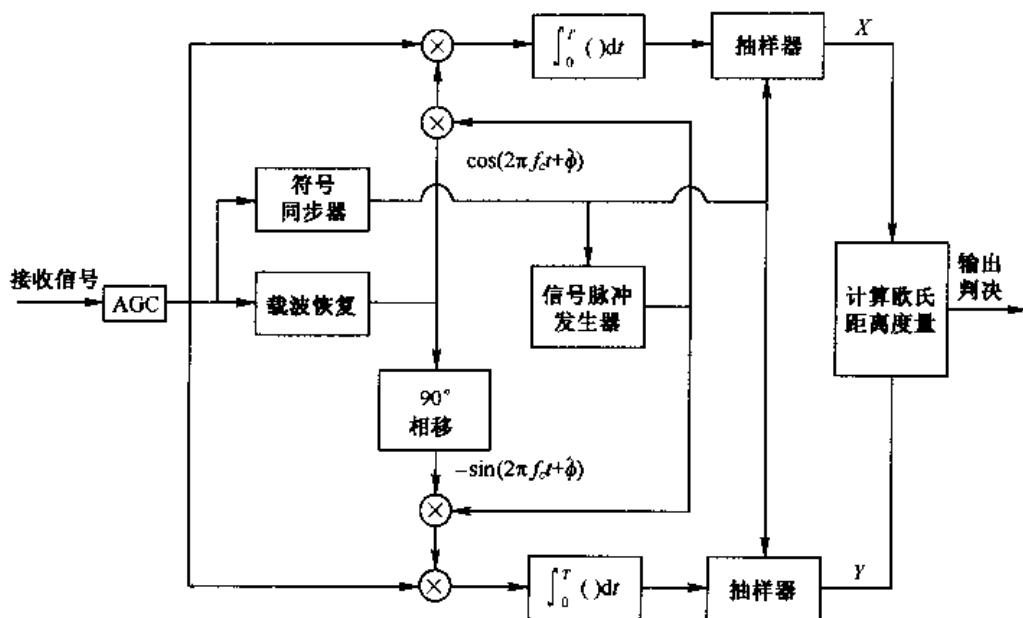


图 6-1-4 QAM 接收机的方框图

6.2 载波相位估计

在接收机中,有两种基本的方法处理载波同步。一种是复用法,通常在频域采用一个称为导频的特殊信号,这种方法使接收机提取导频,并使本地振荡器与接收信号的载波频率和相位同步。当未调载波分量伴随着携带信息的信号发送时,接收机使用一个锁相环(PLL)获取并跟踪这个载波分量。将 PLL 设计成具有窄带宽,因此它不会受到携带信息信号的频率成分明显的影响。

第二种方法是从已调信号直接导出载波相位的估计值,在实践中这种方法更为普遍。该方法有一个明显的优点,即全部发送功率分配给携带信息的信号传输。在对载波恢复的处理中,仅限于第二种方法,因此假定发送信号是抑制载波的。

为了强调提取精确相位估计值的重要性,研究载波相位误差对一个双边带抑制(DSB/SC)信号解调的影响。具体地说,假设有一个调幅信号,其形式为

$$s(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (6-2-1)$$

如果以参考载波

$$c(t) = \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \quad (6-2-2)$$

乘以 $s(t)$ 来解调这个信号,得到

$$c(t)s(t) = \frac{1}{2}A(t)\cos(\phi - \hat{\phi}) + \frac{1}{2}A(t)\cos(4\pi f_c t + \phi + \hat{\phi})$$

将乘积信号 $c(t)s(t)$ 通过一个低通滤波器,就可以滤除倍频分量。这种滤波产生携带信息的信号

$$y(t) = \frac{1}{2}A(t)\cos(\phi - \hat{\phi}) \quad (6-2-3)$$

注意,相位误差 $\phi - \hat{\phi}$ 的影响是以因子 $\cos(\phi - \hat{\phi})$ 降低信号电压,并以因子 $\cos^2(\phi - \hat{\phi})$ 降低信号功率。因此,在调幅信号中,相位误差 10° 导致信号功率损失 0.13 dB,而相位误差 30° 导致信号功率损失 1.25 dB。

在 QAM 和多相 PSK 中,载波相位误差的影响更严重。QAM 和 M-PSK 信号可以表示为

$$s(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) - B(t)\sin(2\pi f_c t + \phi) \quad (6-2-4)$$

用两个正交载波

$$\begin{aligned} c_c(t) &= \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \\ c_s(t) &= -\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \end{aligned} \quad (6-2-5)$$

解调这个信号。 $s(t)$ 与 $c_c(t)$ 相乘再进行低通滤波,产生同相分量

$$y_I(t) = \frac{1}{2}A(t)\cos(\phi - \hat{\phi}) - \frac{1}{2}B(t)\sin(\phi - \hat{\phi}) \quad (6-2-6)$$

同样地, $s(t)$ 与 $c_s(t)$ 相乘再低通滤波,产生正交分量

$$y_Q(t) = \frac{1}{2}B(t)\cos(\phi - \hat{\phi}) + \frac{1}{2}A(t)\sin(\phi - \hat{\phi}) \quad (6-2-7)$$

表达式(6-2-6)和式(6-2-7)明确指出,在 QAM 和 M-PSK 信号的解调中相位误差的影响比 PAM 信号更严重。不仅期望信号分量功率减少因子 $\cos^2(\phi - \hat{\phi})$,而且在同相和正交分量之间存在交互干扰。因为 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的平均功率电平相似,所以一个较小的相位误差就会引起性能较大的下降。因此,对 QAM 和多相相干 PSK 的相位准确性的要求比 DSB/SC PAM 高得多。

6.2.1 最大似然载波相位估计

首先,我们来推导最大似然载波相位估计值。为简单起见,假设延迟 τ 已知,特别地,令 $\tau=0$ 。被最大化的函数是式(6-1-8)给出的似然函数,以 ϕ 代替 Ψ ,该函数变为

$$\begin{aligned} \Lambda(\phi) &= \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{T_0} [r(t) - s(t; \phi)]^2 dt \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{T_0} r^2(t) dt + \frac{2}{N_0} \int_{T_0} r(t)s(t; \phi) dt - \frac{1}{N_0} \int_{T_0} s^2(t; \phi) dt \right\} \end{aligned} \quad (6-2-8)$$

注意,指数因子中的第一项不包含信号参数 ϕ 。含有 $s^2(t; \phi)$ 积分的第三项是一个常数,它等于在观测时间间隔 T_0 对任何 ϕ 值的信号能量。只有第二项依赖于 ϕ 的选择,该项包含接收

信号 $r(t)$ 与 $s(t; \phi)$ 的互相关。因此,似然函数 $\Lambda(\phi)$ 可以表示为

$$\Lambda(\phi) = C \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_{T_0} r(t) s(t; \phi) dt \right] \quad (6-2-9)$$

式中, C 是与 ϕ 无关的常数。

ML 估计值 $\hat{\phi}_{ML}$ 是使式(6-2-9)中的 $\Lambda(\phi)$ 最大的 ϕ 值。 $\hat{\phi}_{ML}$ 值等价地使对数 $\Lambda(\phi)$ 最大, 即对数似然函数为

$$\Lambda_L(\phi) = \frac{2}{N_0} \int_{T_0} r(t) s(t; \phi) dt \quad (6-2-10)$$

注意,在定义 $\Lambda_L(\phi)$ 时略去了常数项 $\ln C$ 。

例 6-2-1 作为求载波相位最佳化的例子,研究未调载波 $A \cos 2\pi f_c t$ 的传输。接收信号是

$$r(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)$$

式中, ϕ 是未知相位。求 ϕ 值,叫做 $\hat{\phi}_{ML}$,使得

$$\Lambda_L(\phi) = \frac{2A}{N_0} \int_{T_0} r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt$$

最大。该值最大的必要条件是

$$\frac{d\Lambda_L(\phi)}{d\phi} = 0$$

由这个条件得到

$$\int_{T_0} r(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}_{ML}) dt = 0 \quad (6-2-11)$$

或等价于

$$\hat{\phi}_{ML} = -\tan^{-1} \left[\frac{\int_{T_0} r(t) \sin 2\pi f_c t dt}{\int_{T_0} r(t) \cos 2\pi f_c t dt} \right] \quad (6-2-12)$$

可以看到,式(6-2-11)给出的最佳化条件意味着采用一个环路来提取估计值,如图6-2-1所示。环路滤波器是一个积分器,它的带宽与积分时间间隔 T_0 的倒数成正比。另一方面,式(6-2-12)也意味着采用正交载波与 $r(t)$ 互相关的一种实现方法,这两个相关器的输出之比的反正切就是 $\hat{\phi}_{ML}$,如图6-2-2所示。注意,该估计方案直接产生了 $\hat{\phi}_{ML}$ 。

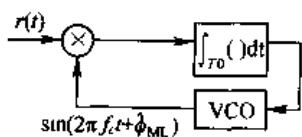


图 6-2-1 用来得到一个未调载波相位的 ML 估计值的 PLL

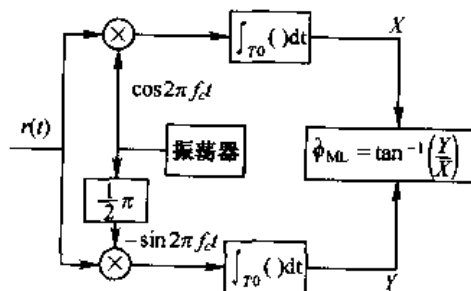


图 6-2-2 一个未调载波相位的 (点) ML 估计值

这个例子清楚地证明了 PLL 提供了一个未调载波相位的 ML 估计值。

6.2.2 锁相环

锁相环 PLL 基本上由乘法器、环路滤波器和压控振荡器 (VCO) 组成, 如图 6-2-3 所示。如果假定 PLL 的输入是正弦 $\cos(2\pi f_c t + \phi)$, VCO 的输出是 $\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$, 其中 $\hat{\phi}$ 表示 ϕ 的估计值, 这两个信号的乘积是

$$\begin{aligned} e(t) &= \cos(2\pi f_c t + \phi) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \\ &= \frac{1}{2} \sin(\hat{\phi} - \phi) + \frac{1}{2} \sin(4\pi f_c t + \phi + \hat{\phi}) \end{aligned} \quad (6-2-13)$$

环路滤波器是一个低通滤波器, 它仅响应低频分量 $\frac{1}{2} \sin(\hat{\phi} - \phi)$ 而滤除 $2f_c$ 分量。通常, 该滤波器选择比较简单的传递函数

$$G(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \tau_1 s} \quad (6-2-14)$$

式中, τ_1 和 τ_2 是控制环路带宽的设计参数 ($\tau \gg \tau_2$)。如果要求有一个较好的环路响应, 可以采用含有附加极点的高阶滤波器。

环路滤波器的输出给 VCO 提供控制电压 $v(t)$ 。VCO 基本上是一个正弦信号发生器, 其瞬时相位为

$$2\pi f_c t + \hat{\phi}(t) = 2\pi f_c t + K \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (6-2-15)$$

式中, K 是以弧度/伏 (rad/V) 为单位的增益常数, 因此

$$\hat{\phi}(t) = K \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (6-2-16)$$

将输入信号与 VCO 输出相乘并忽略倍频项, 可以将 PLL 简化成如图 6-2-4 所示的等效闭环系统模型。相位差 $\phi - \hat{\phi}$ 的正弦函数使得这个系统是非线性的, 因此难免要分析该系统在噪声存在的情况下的性能, 然而对某些简单的环路滤波器, 这种分析在数学上是易处理的。

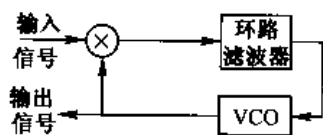


图 6-2-3 锁相环(PLL)的基本组成单元

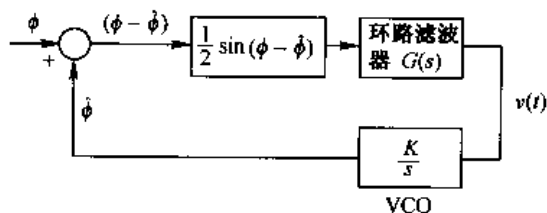


图 6-2-4 锁相环的模型

正常运行时, 环路跟踪输入的载波相位, 相位误差 $\phi - \hat{\phi}$ 比较小, 因此

$$\sin(\hat{\phi} - \phi) \approx \hat{\phi} - \phi \quad (6-2-17)$$

由于这个近似式, PLL 成为线性的并由闭环传递函数

$$H(s) = \frac{KG(s)/s}{1 + KG(s)/s} \quad (6-2-18)$$

表征,式中的因子 $1/2$ 已归并到增益参数 K 中。将式(6-2-14)的 $G(s)$ 代入式(6-2-18),得到

$$H(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + (\tau_2 + 1/K)s + (\tau_1/K)s^2} \quad (6-2-19)$$

因此,当 $G(s)$ 由式(6-2-14)确定时,线性化 PLL 的闭环系统是二阶的。参数 τ_2 控制零点的位置, K 和 τ_1 用来控制闭环系统的极点位置。习惯上将 $H(s)$ 的分母表示成标准形式

$$D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (6-2-20)$$

式中 ζ 称为环路阻尼因子, ω_n 是环路的自然频率。以环路参数 $\omega_n = \sqrt{K/\tau_1}$ 和 $\zeta = (\tau_2 + 1/K)/2\omega_n$ 表示,闭环传递函数为

$$H(s) = \frac{(2\zeta\omega_n - \omega_n^2/K)s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6-2-21)$$

环路的(单边)等效噪声带宽是(参见习题 2-24)

$$\begin{aligned} B_{eq} &= \frac{\tau_2^2(1/\tau_2^2 + K/\tau_1)}{4(\tau_2 + 1/K)} \\ &= \frac{1 + (\tau_2\omega_n)^2}{8\zeta\omega_n} \end{aligned} \quad (6-2-22)$$

作为归一化频率 ω/ω_n 函数的幅度响应 $20\lg|H(\omega)|$ 如图 6-2-5 所示,其中阻尼因子 ζ 作为一个参数且 $\tau_1 \gg 1$ 。注意, $\zeta=1$ 导致一个临界阻尼环路响应, $\zeta<1$ 产生一个欠阻尼响应, $\zeta>1$ 产生一个过阻尼响应。

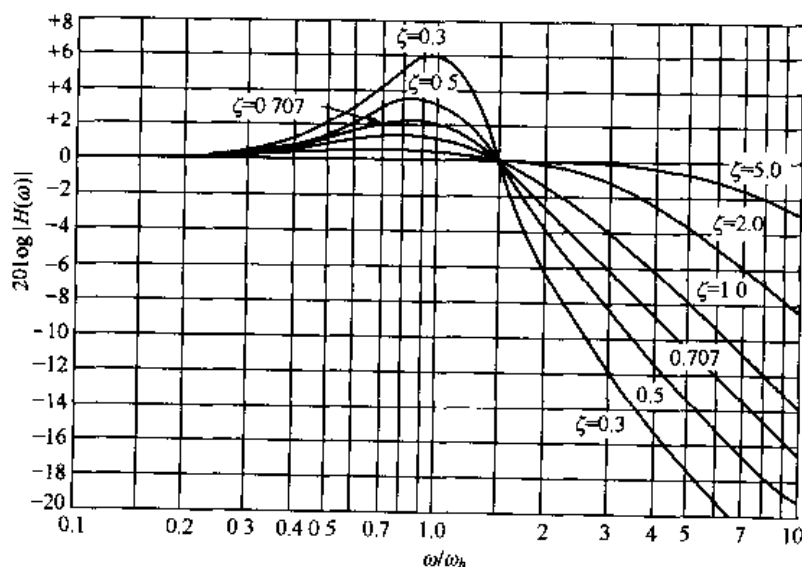


图 6-2-5 二阶环路的频率响应

在实践中,PLL 带宽的选择涉及到响应速度与相位估计值中的噪声之间的折中问题。一方面,希望选择环路的带宽足够宽,以跟踪接收载波相位的任何时变;另一方面,宽带 PLL 允许更多的噪声进入环路,这会恶化相位估计。下面,我们将评估噪声在相位估计质量中的影响。

6.2.3 加性噪声对相位估计的影响

为了评估噪声对载波相位估计的影响,假定 PLL 输入端的噪声是窄带的,并假定 PLL 正

跟踪一个正弦信号,其形式为

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (6-2-23)$$

它被加性窄带噪声

$$n(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t \quad (6-2-24)$$

恶化。假定该噪声的同相和正交分量是统计独立的平稳高斯过程,且具有(双边)功率谱密度 $\frac{1}{2}N_0$ W/Hz。利用三角恒等式,式(6-2-24)中的噪声项可以表示为

$$n(t) = n_c(t)\cos[2\pi f_c t + \phi(t)] - n_s(t)\sin[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (6-2-25)$$

式中

$$\begin{aligned} n_c(t) &= x(t)\cos\phi(t) + y(t)\sin\phi(t) \\ n_s(t) &= -x(t)\sin\phi(t) + y(t)\cos\phi(t) \end{aligned} \quad (6-2-26)$$

注意

$$n_c(t) + jn_s(t) = [x(t) + jy(t)]e^{-j\phi(t)}$$

所以两个正交分量 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 具有与 $x(t)$ 和 $y(t)$ 完全一样的统计特性。

如果用 VCO 的输出去乘 $s(t) + n(t)$ 并略去倍频项,则环路滤波器的输入是受噪声恶化的信号

$$\begin{aligned} e(t) &= A_c \sin\Delta\phi + n_c(t)\sin\Delta\phi - n_s(t)\cos\Delta\phi \\ &= A_c \sin\Delta\phi + n_1(t) \end{aligned} \quad (6-2-27)$$

式中,定义 $\Delta\phi = \phi - \hat{\phi}$ 为相位误差。因此,我们得到具有加性噪声的 PLL 的等效模型,如图 6-2-6 所示。

当输入信号的功率 $P_c = \frac{1}{2}A_c^2$ 比噪声功率大得多时,可以将 PLL 线性化,从而容易求出加性噪声对估计值 $\hat{\phi}$ 质量的影响。在这些条件下,具有加性噪声的线性化 PLL 的模型如图 6-2-7 所示。注意,倘若噪声项以 $1/A_c$ 进行标尺变换,即噪声项成为

$$n_2(t) = \frac{n_c(t)}{A_c} \sin\Delta\phi - \frac{n_s(t)}{A_c} \cos\Delta\phi \quad (6-2-28)$$

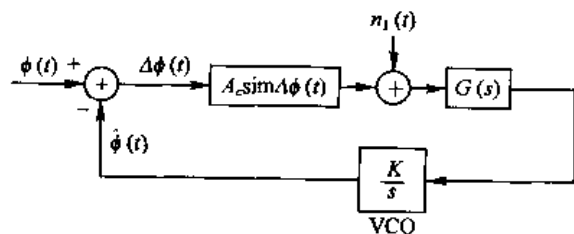


图 6-2-6 具有加性噪声的等效 PLL 模型

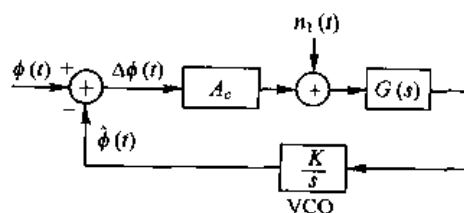


图 6-2-7 具有加性噪声的线性化 PLL 模型

则增益参数 A_c 可以归一化为 1。噪声项 $n_2(t)$ 是零均值高斯的且功率谱密度为 $N_0/2A_c^2$ 。因为在环路输入端的噪声 $n_2(t)$ 是加性的,所以相位误差 $\Delta\phi$ 的方差,也就是 VCO 输出相位的方差为

$$\begin{aligned}
\sigma_{\phi}^2 &= \frac{N_0}{2A_c^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \\
&= \frac{N_0}{A_c^2} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df \\
&= \frac{N_0 B_{eq}}{A_c^2} = \frac{N_0 B_{eq}}{A_c^2}
\end{aligned} \tag{6-2-29}$$

式中, B_{eq} 是环路的(单边)等效噪声带宽, 由式(6-2-22)确定。注意, σ_{ϕ}^2 是在 PLL 带宽内总的噪声功率除以信号功率的比值, 因此

$$\sigma_{\phi}^2 = 1/\gamma_L \tag{6-2-30}$$

式中, γ_L 定义为信噪比

$$\text{SNR} \equiv \gamma_L = \frac{A_c^2}{N_0 B_{eq}} \tag{6-2-31}$$

VCO 相位误差的方差 σ_{ϕ}^2 的表达式适用于 SNR 足够高, 从而 PLL 的线性模型适用的情况。当 $G(s) = 1$ 时, 导致一阶环路的结果, 这时基于非线性 PLL 的精确分析在数学上是可行的。在这种情况下, 可以导出相位误差的概率密度函数(参见 Viterbi, 1966 年)为

$$p(\Delta\phi) = \frac{\exp(\gamma_L \cos \Delta\phi)}{2\pi I_0(\gamma_L)} \tag{6-2-32}$$

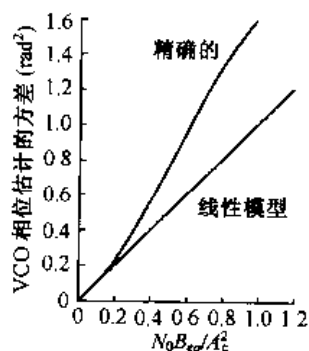


图 6-2-8 精确的和近似的(线性模型)一阶 PLL 的 VCO 相位方差的比较

式中, γ_L 是由式(6-2-31)给出的 SNR, 其中 B_{eq} 是一阶环路的适当的噪声带宽, $I_0(\cdot)$ 是零阶修正贝塞尔函数。

由 $p(\Delta\phi)$ 的表达式, 可以得到一阶 PLL 相位误差的方差的精确值, 图 6-2-8 画出了该方差作为 $1/\gamma_L$ 的函数曲线。为了比较, 图中还示出了由线性化 PLL 模型得到的结果。注意, 当 $\gamma_L > 3$ 时, 线性模型的方差很接近精确的方差。因此, 该线性模型对实用目的是适当的。

专家们对非线性 PLL 相位误差统计特性的近似分析也已进行了研究, 特别重要的是在初始捕获期间的 PLL 的瞬态性能, 以及低 SNR 时的 PLL 性能。例如, 当 PLL 输入端的 SNR 下降到某个值以下时, PLL 的性能会迅速恶化, 环路开始失去锁定并产生如同“喀咧”声特征的冲激型噪声, 这将使环路的性能下降。这类课题的研究成果在维特比(Viterbi, 1966 年)、林塞(Lindsey, 1972 年)、林塞和西蒙(Lindsey & Simon, 1973 年)和加德纳(Gardner, 1979 年)等人的著作, 以及古普塔(Gupta, 1975 年)和林塞与切(Lindsey & Chie, 1981 年)的论文中有述。

至此, 我们研究了载波信号未调制时的载波相位估计, 下面将研究信号携带信息时载波相位的恢复。

6.2.4 面向判决环

当信号 $s(t; \phi)$ 携带信息序列 $\{I_n\}$ 时, 一个问题出现在式(6-2-9)或式(6-2-10)的最大化中。在这种情况下, 可以采用两种方法之一来研究: 假定 $\{I_n\}$ 是已知的, 或者将 $\{I_n\}$ 作为随机序列来处理, 并在其统计特性上求平均。

在面向判决参数的估计中,假定在观测时间区间上信息序列已经估计出来,并且不存在解调差错, $\tilde{I}_n = I_n$, 其中 \tilde{I}_n 标记信息 I_n 的检测值。在这种情况下,除载波相位外 $s(t; \phi)$ 是确知的。

具体地,我们将研究线性调制技术类的面向判决相位的估计,此类调制的接收等效低通信号可以表示为

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-j\phi} \sum_n I_n g(t - nT) + z(t) \\ &= s_I(t) e^{-j\phi} + z(t) \end{aligned} \quad (6-2-33)$$

式中,如果假定序列 $\{I_n\}$ 已知,则 $s_I(t)$ 是已知信号。等效低通信号的似然函数及相应的对数似然函数是

$$\Lambda(\phi) = C \exp \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{N_0} \int_{T_0} r(t) s_I^*(t) e^{j\phi} dt \right] \right\} \quad (6-2-34)$$

$$\Lambda_L(\phi) = \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{N_0} \int_{T_0} r(t) s_I^*(t) dt \right] e^{j\phi} \right\} \quad (6-2-35)$$

如果在式(6-2-35)中代入 $s_I(t)$, 并假定观测时间区间 $T_0 = KT$, 其中 K 是正整数, 则

$$\begin{aligned} \Lambda_L(\phi) &= \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi} \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{K-1} I_n^* \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) g^*(t - nT) dt \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi} \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right\} \end{aligned} \quad (6-2-36)$$

式中, 定义

$$y_n = \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) g^*(t - nT) dt \quad (6-2-37)$$

注意, y_n 是在第 n 个信号间隔中匹配滤波器的输出。由式(6-2-36), 将对数似然函数

$$\Lambda_L(\phi) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right) \cos \phi - \operatorname{Im} \left(\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right) \sin \phi$$

对 ϕ 微分并令导数等于零, 容易得到 ϕ 的 ML 估计值。因此

$$\hat{\phi}_{ML} = -\tan^{-1} \left[\operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right) / \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{K-1} I_n^* y_n \right) \right] \quad (6-2-38)$$

将式(6-2-38)中的 $\hat{\phi}_{ML}$ 称为面向判决(或判决反馈)载波相位估计。容易证明(习题 6-10), $\hat{\phi}_{ML}$ 的均值是 ϕ , 因此估计值是无偏的。采用 5.2.7 节所述的方法可以得出 $\hat{\phi}_{ML}$ 的 PDF(习题 6-11)。

图 6-2-9 示出了双边带 PAM 信号接收机的方框图, 它把式(6-3-38)表示的面向判决载波相位估计结合在一起。

PAM 接收机的另一种实现方案如图 6-2-10 所示, 该方案使用了判决反馈 PLL (DFPLL) 的载波相位估计。接收的双边带 PAM 信号为 $A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi)$, 其中 $A(t) = A_m g(t)$ 且假定 $g(t)$ 是持续时间为 T 的矩形脉冲。该接收信号乘以由 VCO 导出的正交载波 $c_c(t)$ 和 $c_s(t)$, 该载波由式(6-2-5)给出。乘积信号

$$\begin{aligned} r(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) &= \frac{1}{2} [A(t) + n_c(t)] \cos \Delta \phi \\ &\quad - \frac{1}{2} n_s(t) \sin \Delta \phi + \text{倍频项} \end{aligned} \quad (6-2-39)$$

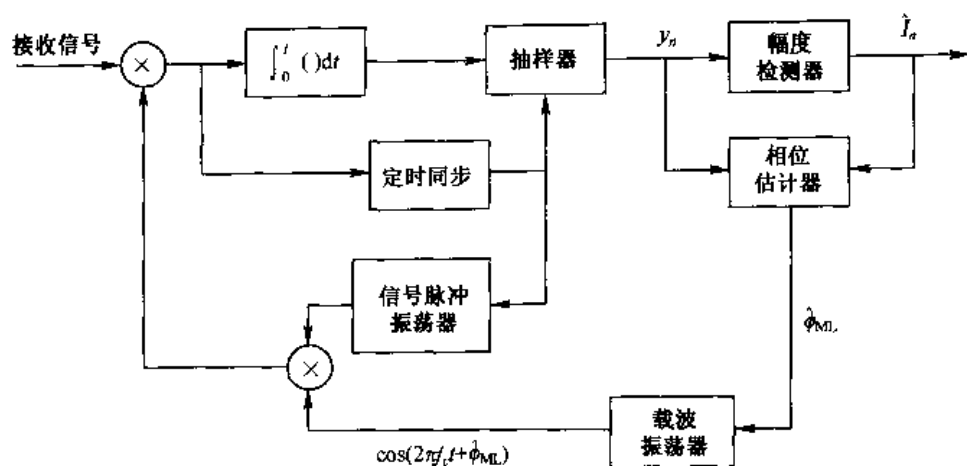


图 6-2-9 具有面向判决载波相位估计的双边带 PAM 信号接收机方框图

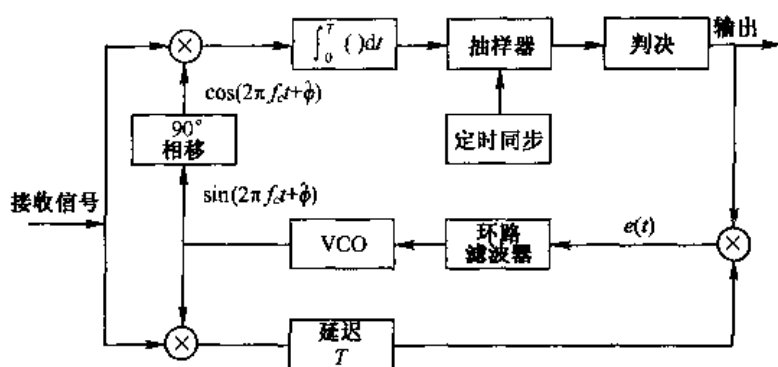


图 6-2-10 采用判决反馈 PLL 的载波恢复

用来恢复 $A(t)$ 携带的信息。检测器每 T_s 对接收到的符号进行一次判决。因此,在无判决误差的情况下,它重新构成无任何噪声的 $A(t)$ 。这个重构的信号用来乘以第二个正交乘法器的乘积信号,该乘积信号延迟 T_s 以允许解调器达到一个判决。因此,在无判决差错的情况下,环路滤波器的输入是误差信号

$$e(t) = \frac{1}{2} A(t) \{ [A(t) + n_c(t)] \sin \Delta \phi - n_s(t) \} \cos \Delta \phi + \text{倍频项}$$

$$= \frac{1}{2} A^2(t) \sin \Delta \phi + \frac{1}{2} A(t) [n_c(t) \sin \Delta \phi - n_s(t) \cos \Delta \phi] + \text{倍频项} \quad (6-2-40)$$

环路滤波器是低通的,因此它将滤除 $e(t)$ 中的倍频项。期望的分量是 $A^2(t) \sin \Delta \phi$,它包含相位误差以驱动该环路。

式(6-2-38)的 ML 估计也适用于 QAM。图 6-2-11 示出了结合面向判决载波相位估计的 QAM 接收机方框图。

在 M 元 PSK 的情况下,DFPLL 的结构如图 6-2-12 所示。接收信号被解调,产生相位估计值

$$\hat{\theta}_m = \frac{2\pi}{M}(m-1)$$

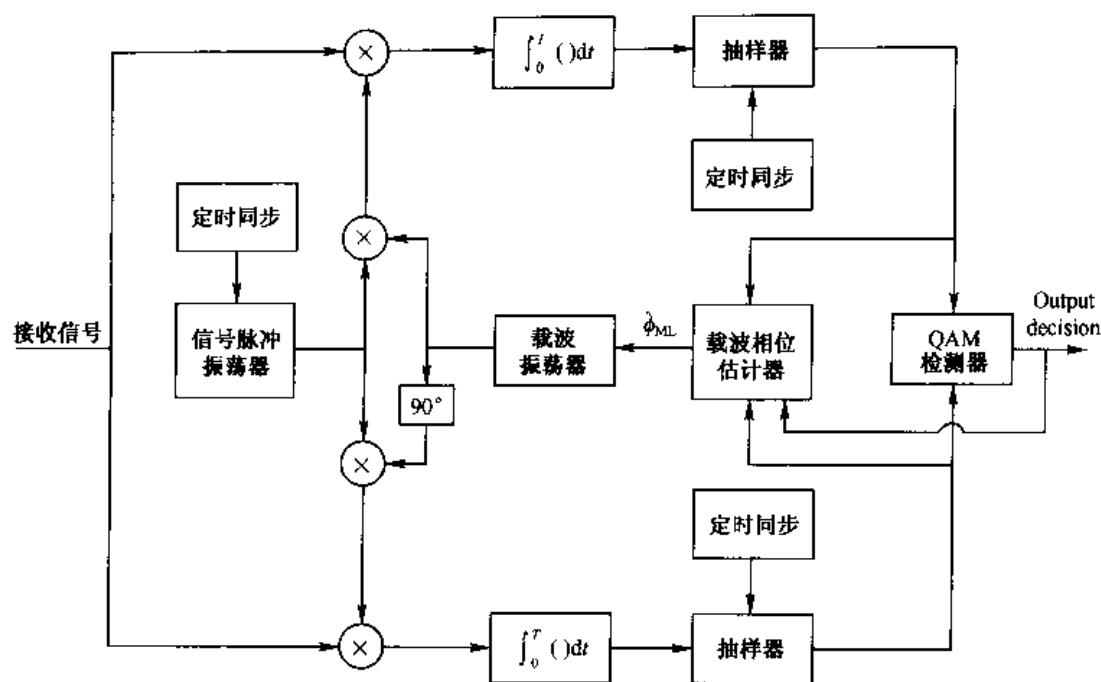


图 6-2-11 具有面向判决载波相位估计的 QAM 信号接收机方框图

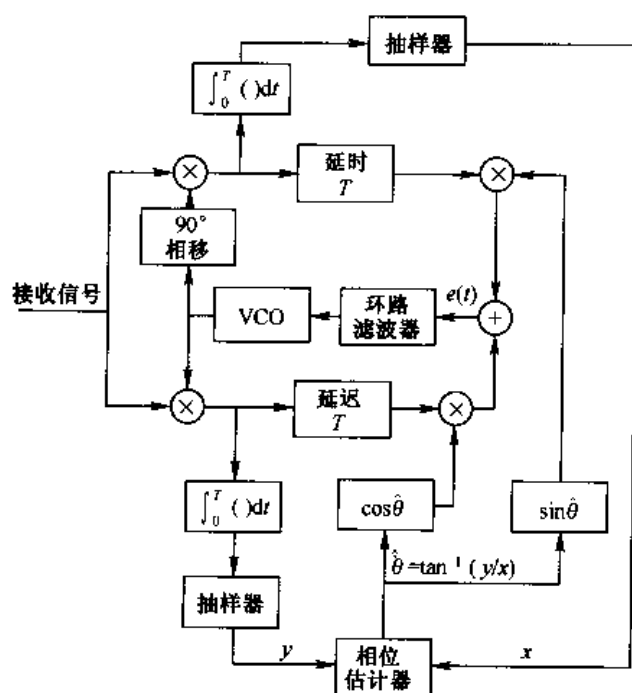


图 6-2-12 采用判决反馈 PLL 的 M 元 PSK 的载波恢复

在无判决差错的情况下,这就是发送信号的相位 θ_m 。两个正交乘法器的输出延迟符号间隔 T ,再乘以 $\cos \theta_m$ 和 $\sin \theta_m$ 得到

$$\begin{aligned} & r(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \sin \theta_m \\ &= \frac{1}{2} [A \cos \theta_m + n_c(t)] \sin \theta_m \cos(\phi - \hat{\phi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}[A\sin\theta_m + n_s(t)]\sin\theta_m\sin(\phi - \hat{\phi}) + \text{倍频项} \\
& r(t)\sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})\cos\hat{\theta}_m \\
& = -\frac{1}{2}[A\cos\theta_m + n_c(t)]\cos\theta_m\sin(\phi - \hat{\phi}) \\
& -\frac{1}{2}[A\sin\theta_m + n_s(t)]\cos\theta_m\cos(\phi - \hat{\phi}) + \text{倍频项} \quad (6-2-41)
\end{aligned}$$

两个信号相加生成误差信号

$$\begin{aligned}
e(t) = & -\frac{1}{2}A\sin(\phi - \hat{\phi}) + \frac{1}{2}n_c(t)\sin(\phi - \hat{\phi} - \hat{\theta}_m) \\
& + \frac{1}{2}n_s(t)\cos(\phi - \hat{\phi} - \hat{\theta}_m) + \text{倍频项} \quad (6-2-42)
\end{aligned}$$

这个误差信号是环路滤波器的输入,为 VCO 提供控制信号。

可以看到,在式(6-2-42)中,两个正交噪声分量呈现为加性项。不存在像在 M 方律器件中的两个噪声分量的乘积项,这种器件将在下一节描述。因此,也就没有与判决反馈 PLL 相关联的附加的功率损失。

这种 M 相位跟踪环具有 $360^\circ/M$ 的相位模糊,这就要求在发送之前对信息序列进行差分编码,并且在解调之后对接收序列进行差分译码来恢复信息。

式(6-2-38)中的 ML 估计对 QAM 也是适用的。偏移 QPSK 的 ML 估计也容易获得(习题 6-12),其方法是将式(6-2-35)中的对数似然函数最大化,其中 $s_l(t)$ 为

$$s_l(t) = \sum_n I_n g(t - nT) + j \sum_n J_n g\left(t - nT - \frac{1}{2}T\right) \quad (6-2-43)$$

式中, $I_n = \pm 1$ 且 $J_n = \pm 1$ 。

最后应当指出,CPM 信号的载波相位恢复可以采用 PLL,以面向判决方式来实现。由 5.3 节所述的 CPM 信号最佳解调器可以生成一个误差信号,通过环路滤波器滤波,输出驱动一个 PLL。或者我们也可以采用 CPM 信号的线性表达式,那么就可使用式(6-2-38)给出的载波相位估计器的推广形式,其中接收信号与线性表达式中的每一个脉冲进行互相关运算。在蒙加利和德安德里(Mengali & D'Andrea, 1997 年)所著的书中综述了 CPM 的载波相位恢复技术。

6.2.5 非面向判决环

若不采用面向判决方案来获得相位估计,可以将数据处理为随机变量,并在最大化前将 $\Lambda(\phi)$ 对这些随机变量求平均。为了计算这个积分,如果数据的实际概率分布函数已知,即可使用它;或者假定某种概率分布,该分布是对真实分布的合理近似。下例将说明第一种方法。

例 6-2-2 假设实信号 $s(t)$ 含有二进制调制,那么在一个信号间隔内,有

$$s(t) = A\cos 2\pi f_c t \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $A = \pm 1$ 且等概。显然, A 的 PDF 如下

$$p(A) = \frac{1}{2}\delta(A - 1) + \frac{1}{2}\delta(A + 1)$$

由式(6-2-9)给出的似然函数 $\Lambda(\phi)$ 是以给定 A 值为条件的,从而必须在这两个值上求平均。

因此,

$$\begin{aligned}\Lambda(\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\phi) p(\Lambda) d\Lambda \\ &= \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right] \\ &= \cosh \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right]\end{aligned}$$

且相应的对数似然函数是

$$\bar{\Lambda}_L(\phi) = \ln \cosh \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right] \quad (6-2-44)$$

如果对 $\bar{\Lambda}_L(\phi)$ 微分, 并且令导数等于零, 可得到非面向判决估计的 ML 估计。但式(6-2-44)中的函数关系是高度非线性的, 因此精确的解答很难得到, 然而近似是可能的, 尤其

$$\ln \cosh x = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 & (|x| \ll 1) \\ |x| & (|x| \gg 1) \end{cases} \quad (6-2-45)$$

采用上述近似, 求解 ϕ 容易多了。

在这个例子中, 我们在两个可能的信息符号值上平均。当信息符号有 M 个值时, 其中 M 比较大, 则平均运算产生被估计参数的高度非线性函数。在这种情况下, 可以假定信息符号是连续随机变量, 从而将问题简化。例如, 假定符号是零均值高斯的。下例将说明这种近似方法, 并求平均似然函数。

例 6-2-3 研究与例6-2-2中同样的信号, 但是现在假定幅度 A 是零均值高斯的且具有单位方差。因此,

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-A^2/2}$$

如果在假定的 A 的 PDF 上对 $\Lambda(\phi)$ 求平均, 得到平均似然函数 $\bar{\Lambda}(\phi)$ 为

$$\bar{\Lambda}(\phi) = C \exp \left\{ \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right]^2 \right\} \quad (6-2-46)$$

以及相应的对数似然函数

$$\bar{\Lambda}_L(\phi) = \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right]^2 \quad (6-2-47)$$

对 $\bar{\Lambda}_L(\phi)$ 微分并令导数为零, 可得到 ϕ 的 ML 估计值。

在高斯的假设情况下, 对数似然函数是平方的, 而在 $r(t)$ 与 $s(t; \phi)$ 的互相关值比较小的时候, 它近似是平方的, 正如式(6-2-45)指出的。换言之, 如果在单个间隔上互相关值比较小, 对信息符号分布的高斯假设就可得到对对数似然函数的较好近似。

鉴于这些结果, 可以对观测间隔 $T_0 = KT$ 内的所有符号采用高斯假设。具体讲, 假定 K 个信息符号是统计独立的且同分布的, 在间隔 $T_0 = KT$ 内, 对 K 个符号中的每一个将似然函数 $\Lambda(\phi)$ 在高斯 PDF 上求平均, 则结果为

$$\Lambda(\phi) = C \exp \left\{ \sum_{n=0}^{K-1} \left[\frac{2}{N_0} \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right]^2 \right\} \quad (6-2-48)$$

如果取式(6-2-48)的对数,再求对数似然函数的微分并令导数等于零,可得到 ML 估计的条件为

$$\sum_{n=0}^{K-1} \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) dt \int_{nT}^{(n+1)T} r(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) dt = 0 \quad (6-2-49)$$

可以进一步处理这个方程,但它的当前形式提出了图 6-2-13 所示的跟踪环结构,该环与下面所述的科斯塔斯(Costas)环相似。注意,积分器输出的两个信号相乘破坏了信息符号所带的正负号。加法器起着环路滤波器的作用,在跟踪环的结构中,加法器可以用一个滑动窗口的数字滤波器(加法器)实现,或者用一个具有对过去的信号指数加权的低通数字滤波器实现。

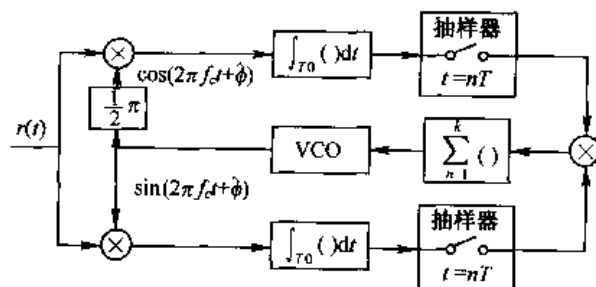


图 6-2-13 用于 PAM 信号载波相位估计的非面向判决 PLL

以类似的方式,可以导出 QAM 和 M-PSK 的非面向判决 ML 相位估计,着手点在于将式(6-2-9)的似然函数在数据的统计特性上求平均。这里,在对信息序列求平均时,可以再次使用高斯近似(复值信息序列的二维高斯)。

1. 平方环

平方环是一种非面向判决环,在实践中广泛地用于建立双边带抑载信号(例如 PAM)的载波相位。为了描述它的工作,研究数字已调 PAM 信号载波相位的估计问题,该信号为

$$s(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (6-2-50)$$

式中, $A(t)$ 携带数字信息。注意,当信号电平关于零电平对称时, $E[s(t)] = E[A(t)] = 0$ 。因此, $s(t)$ 的平均值不会在任何频率产生任何相位相干的频率分量,包括载波。由接收信号生成载波的一种方法是将信号平方,从而生成一个 $2f_c$ 频率分量,用该分量驱动一个调谐在 $2f_c$ 上的锁相环(PLL),如图 6-2-14 所示。

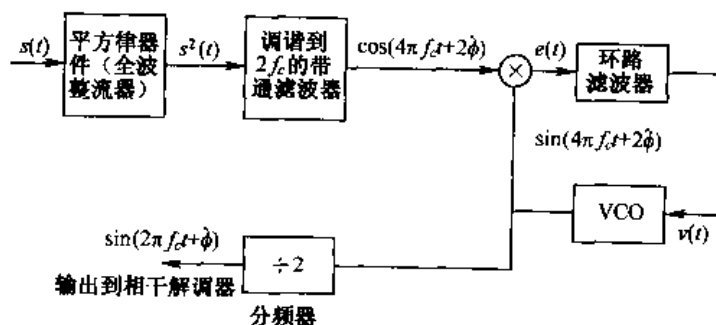


图 6-2-14 采用平方律器件的载波恢复

平方律器件的输出是

$$\begin{aligned} s^2(t) &= A^2(t) \cos^2(2\pi f_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} A^2(t) + \frac{1}{2} A^2(t) \cos(4\pi f_c t + 2\phi) \end{aligned} \quad (6-2-51)$$

因为调制是一个循环平稳随机过程,所以 $s^2(t)$ 的期望值是

$$E[s^2(t)] = \frac{1}{2} E[A^2(t)] + \frac{1}{2} E[A^2(t)] \cos(4\pi f_c t + 2\phi) \quad (6-2-52)$$

因此,在频率 $2f_c$ 处有功率存在。

如果平方律器件的输出通过一个调谐到式(6-2-51)中倍频项的带通滤波器,则滤波器的均值是一个频率为 $2f_c$ 、相位为 ϕ 且幅度为 $\frac{1}{2} E[A^2(t)] H(2f_c)$ 的正弦信号,其中 $H(2f_c)$ 是滤波器在 $f=2f_c$ 点的增益。因此,平方律器件由输入信号 $s(t)$ 产生一个周期分量。实际上, $s(t)$ 的平方已除去了 $A(t)$ 中包含的正负号信息,从而在载波的两倍频率处产生与相位相干的频率分量。在 $2f_c$ 处滤波后的频率分量用于驱动 PLL。

平方运算导致噪声增强,使得 PLL 输入端噪声功率电平增加,从而使相位误差的方差增加。

为了详细说明这一点,令平方环的输入为 $s(t) + n(t)$,其中 $s(t)$ 由式(6-2-50)确定, $n(t)$ 表示带通加性高斯噪声过程。将 $s(t) + n(t)$ 平方,得到

$$y(t) = s^2(t) + 2s(t)n(t) + n^2(t) \quad (6-2-53)$$

式中, $s^2(t)$ 是期望的信号分量,其他两个分量是信号 \times 噪声项和噪声 \times 噪声项。通过计算这两个噪声分量的自相关函数和功率密度谱,容易证明两个分量在以 $2f_c$ 为中心频率的频带内有谱功率。因此,中心频率在 $2f_c$ 且带宽为 B_{bp} 的带通滤波器产生了期望的正弦信号分量来驱动 PLL,同时也让这两项引起的噪声得以通过。

因为环路的带宽设计成明显小于带通滤波器的带宽,所以在 PLL 输入端的总噪声谱在环路带宽内可以近似为常数。这种近似允许得到相位误差方差的表达式

$$\sigma_\phi^2 = 1/\gamma_L S_L \quad (6-2-54)$$

式中, S_L 称为平方损失,由下式确定

$$S_L = \left(1 + \frac{B_{bp}/2B_{eq}}{\gamma_L} \right)^{-1} \quad (6-2-55)$$

因为 $S_L < 1$,所以 S_L^{-1} 表示相位误差的方差的增加,该相位误差是由平方器产生的相加噪声(噪声 \times 噪声项)引起的。举例来说,当 $\gamma_L = B_{bp}/2B_{eq}$ 时,该损失为 3 dB。

可以看到,平方环中的 VCO 输出必须二分频,以生成锁相的载波用来解调信号。应当注意,分频器的输出相对于接收信号相位有 180° 的相位模糊,因此二进制数据在发送之前必须差分编码,并在接收机中差分译码。

2. 科斯塔斯(Costas)环

对双边带抑载信号生成一个适当调整相位的载波的另一个方法如图 6-2-15 所示,该方案由科斯塔斯(Costas, 1956 年)提出,故称为科斯塔斯环。接收信号乘以由 VCO 输出的 $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ 和 $\sin(2\pi f_c t + \phi)$,这两个乘积是

$$\begin{aligned}
y_c(t) &= [s(t) + n(t)] \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \\
&= \frac{1}{2} [A(t) + n_c(t)] \cos \Delta\phi + \frac{1}{2} n_s(t) \sin \Delta\phi + \text{倍频项} \\
y_s(t) &= [s(t) + n(t)] \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \\
&= \frac{1}{2} [A(t) + n_c(t)] \sin \Delta\phi - \frac{1}{2} n_s(t) \cos \Delta\phi + \text{倍频项} \quad (6-2-56)
\end{aligned}$$

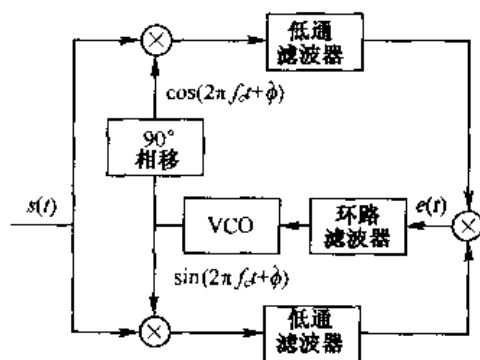


图 6-2-15 科斯塔斯环方框图

式中,相位误差 $\Delta\phi = \hat{\phi} - \phi$ 。倍频项由相乘之后的低通滤波器滤除。

误差信号由这两个低通滤波器的输出相乘产生,因此

$$\begin{aligned}
e(t) &= \frac{1}{8} \{ [A(t) + n_c(t)]^2 - n_s^2(t) \} \sin(2\Delta\phi) \\
&\quad - \frac{1}{4} n_s(t) [A(t) + n_c(t)] \cos(2\Delta\phi) \quad (6-2-57)
\end{aligned}$$

该误差信号通过环路滤波器滤波,其输出是驱动 VCO 的控制电压。注意,科斯塔斯环与图 6-2-13 所示的 PLL 的相似性。

注意,进入环路滤波器的误差信号由期望项 $A^2(t) \sin 2(\hat{\phi} - \phi)$ 加上包含信号 \times 噪声和噪声 \times 噪声的项组成,这些项类似于平方环方法中 PLL 输入端的两个噪声项。事实上,如果在科斯塔斯环中的环路滤波器与平方环中的相同,则两个环路是等效的。在这个条件下,相位误差的概率密度函数和两个环路的性能相同。

值得注意的是,在科斯塔斯环中用来滤除倍频项的最佳低通滤波器是一个匹配滤波器,它匹配于携带信息的信号中的信号脉冲。如果匹配滤波器用做低通滤波器,其输出可以在每一个信号间隔的终止时刻以比特速率抽样,而且离散时间信号样值可以用来驱动环路。匹配滤波器的使用导致较小的噪声进入环路。

最后,正如在平方 PLL 中那样,VCO 的输出包含 180° 相位模糊,因此有必要在发送之前对数据差分编码,并且在解调器中差分译码。

3. 多相位信号的载波估计

当数字信息通过载波的 M 相调制发送时,可将上述方法推广,以提供适当调整相位的载波用做解调。 M 相接收信号(加性噪声除外)可以表示为

$$s(t) = A \cos[2\pi f_c t + \phi + \frac{2\pi}{M}(m-1)] \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (6-2-58)$$

式中, $2\pi(m-1)/M$ 表示信号相位中携带的信息分量。载波恢复是指除去携带信息的分量, 得到未调载波 $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ 。图 6-2-16 所示为实现上述功能的一种方法, 该图示出了平方环的推广。信号通过一个 M 方律的器件, 该器件产生一些 f_c 的谐波。带通滤波器选择谐波 $\cos(2\pi M f_c t + M\phi)$ 来驱动 PLL。因为

$$\frac{2\pi}{M}(m-1)M = 2\pi(m-1) \equiv 0 \quad (\text{模 } 2\pi) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

因此信息被除去。VCO 输出是 $\sin(2\pi M f_c t + M\phi)$, 所以该输出被 M 分频产生 $\sin(2\pi f_c t + \phi)$, 并且相移 $\pi/2$ 弧度来产生 $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ 。将这些分量馈送给解调器。虽然没有明确显示, 但在这些参考正弦中存在 $360^\circ/M$ 相位模糊, 这可以在发送机中对数据采用差分编码并在接收机中在解调之后差分译码来克服。

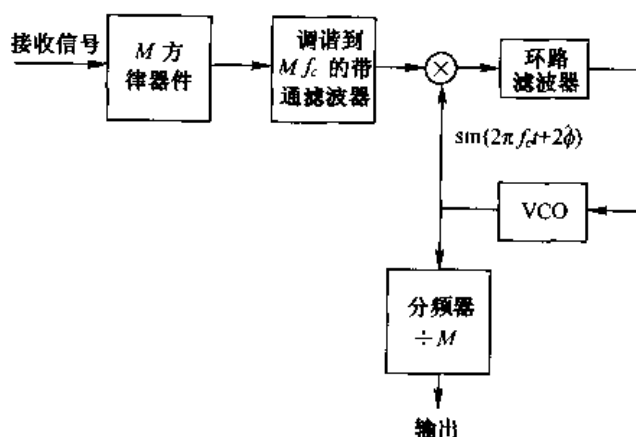


图 6-2-16 采用 M 方律器件的 M 元 PSK 的载波恢复

正如在平方 PLL 中, M 方 PLL 也是在噪声存在的情况下运行, M 方律器件增强了噪声。该器件的输出为

$$y(t) = [s(t) + n(t)]^M$$

由加性噪声引起的 PLL 中相位误差的方差为

$$\sigma_\phi^2 = \frac{S_{ML}^{-1}}{\gamma_L} \quad (6-2-59)$$

式中, γ_L 是环路 SNR, S_{ML}^{-1} 是 M 相功率损失。林塞和西蒙 (Lindsey & Simon, 1973 年) 已计算出 $M=4$ 和 $M=8$ 的 S_{ML} 。

M 元 PSK 载波恢复的另一种方法基于科斯塔斯环的推广, 这种方法要求接收信号乘以形式为

$$\sin\left[2\pi f_c t + \phi + \frac{\pi}{M}(k-1)\right] \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

的 M 移相载波并低通过滤每个乘积, 然后将低通滤波器的输出相乘来生成误差信号。误差信号激励环路滤波器, 再给 VCO 提供控制信号。这种方法实现起来比较复杂, 在实际中一般不采用。

4. 面向判决与非面向判决环的比较

我们注意到,判决反馈锁相环(DFPLL)与科斯塔斯环的不同之处仅在于为除去调制而检波 $A(t)$ 的方法。在科斯塔斯环中,用来检波 $A(t)$ 的两个正交信号都被噪声恶化;在 DFPLL 中,用来检波 $A(t)$ 的信号中仅有一个被噪声恶化。另一方面,噪声对估计值 $\hat{\phi}$ 的影响方面,平方环与科斯塔斯环相似。因此,假如解调器运行在差错率低于 10^{-2} 的情况下,其中偶然的判决差错对 $\hat{\phi}$ 的影响可以忽略,此时 DFPLL 在性能上优于科斯塔斯环和平方环。林塞和西蒙(Lindsey & Simon, 1973 年)研究了科斯塔斯环中相位误差的方差与 DFPLL 中的方差的定量比较,并证明了当比特信噪比在 0 dB 之上时 DFPLL 的方差要小 4~10 倍。

6.3 符号定时估计

在数字通信系统中,解调器的输出必须以符号速率周期性地在精确的抽样时刻 $t_m = mT + \tau$ 上抽样,其中 T 是符号间隔, τ 是信号从发送机到接收机传播时间的标称延迟。为了周期抽样,要求在接收机中有一个时钟。在接收机中提取这种时钟信号的处理过程通常称为符号同步或定时恢复。

定时恢复是同步数字通信系统的接收机中最关键的功能之一。应当注意,接收机不仅必须知道匹配滤波器或相关器输出的抽样频率($1/T$),也要知道在每一个符号间隔的什么位置上抽样。在持续时间为 T 的符号间隔内,抽样时刻的选择称为定时相位。

符号同步有几种方式。在某些通信系统中,发送机和接收机的时钟都同步到一个主时钟上,该时钟提供一个非常精确的定时信号。在这种情况下,接收机必须估计和补偿发送与接收信号之间的相对延迟,甚低频(VLF)段(低于 30 kHz)的无线通信系统属于这种情况,该系统由无线主站发送精确的时钟信号。

获得符号同步的另一种方法是发送机在伴随信息信号的同时发送一个时钟频率为 $1/T$ 或 $1/T$ 的倍频信号。接收机可以使用一个调谐到发送时钟频率上的窄带滤波器中提取时钟信号用来抽样,这种方法具有简单易行的优点,但也有缺点。一个缺点是时钟信号的传输占用发送机的有用功率,另一个缺点是时钟信号的传输占用一小部分有用的信道带宽。尽管有这些缺点,但这种方法常用于电话传输系统,该系统使用比较大的带宽传输许多用户的信号。在这种情况下,信号解调中的时钟信号的传输被许多用户共享。通过这种时钟信号的共享使用,发送机功率和带宽分配上付出的代价随用户数成比例地减少。

时钟信号也可以从接收的数据信号中提取。在接收机中可以用不同的方法获得自同步。本节将讨论面向判决和非面向判决两种方法。

6.3.1 最大似然定时估计

首先求延迟 τ 的 ML 估计值。如果信号是一个基带 PAM 波形,它可表示为

$$r(t) = s(t; \tau) + n(t) \quad (6-3-1)$$

式中

$$s(t; \tau) = \sum_n I_n g(t - nT - \tau) \quad (6-3-2)$$

正如在 ML 相位估计中那样,可区分两种类型的定时估计器,即面向判决定时估计器和非面向判决估计器。在前者中,由解调器输出的信息符号当做已知的发送序列。此时,对数似然函数为

$$A_L(\tau) = C_L \int_{T_0} r(t) s(t; \tau) dt \quad (6-3-3)$$

若将式(6-3-2)代入式(6-3-3),可得到

$$\begin{aligned} A_L(\tau) &= C_L \sum_n I_n \int_{T_0} r(t) g(t - nT - \tau) dt \\ &= C_L \sum_n I_n y_n(\tau) \end{aligned} \quad (6-3-4)$$

式中, $y_n(\tau)$ 定义为

$$y_n(\tau) = \int_{T_0} r(t) g(t - nT - \tau) dt \quad (6-3-5)$$

求 τ 的 ML 估计值 $\hat{\tau}$ 的必要条件是

$$\begin{aligned} \frac{dA_L(\tau)}{d\tau} &= \sum_n I_n \frac{d}{d\tau} \int_{T_0} r(t) g(t - nT - \tau) dt \\ &= \sum_n I_n \frac{d}{d\tau} [y_n(\tau)] = 0 \end{aligned} \quad (6-3-6)$$

式(6-3-6)中的结果提出了跟踪环的实现方法,如图 6-3-1 所示。可以看到,环路中的求和器作为环路滤波器,其带宽由求和器的滑动窗口的长度控制。环路滤波器的输出驱动压控时钟(VCC)或压控振荡器,VCC 控制环路输入的抽样时间。因为在 τ 的估计中使用了已检测信息序列 $\{I_n\}$,所以该估计是面向判决的。

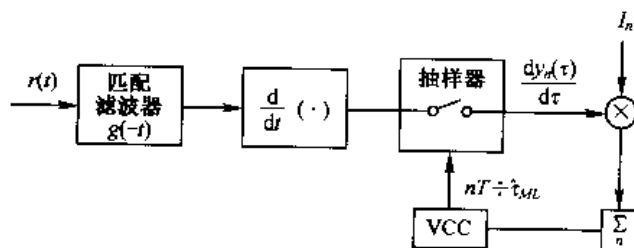


图 6-3-1 基带 PAM 的面向判决 ML 定时估计

可以采用等效低通信号的处理方法,直接将上述基带 PAM 信号的 ML 定时估计技术推广到载波已调信号的形式,例如 QAM 和 PSK。因此,载波信号符号定时的 ML 估计问题与基带 PAM 信号的问题表述起来非常相似。

6.3.2 非面向判决定时估计

求非面向判决定时估计的方法是首先将似然比 $\Lambda(\tau)$ 在信息符号的 PDF 上求平均,得出 $\bar{\Lambda}(\tau)$;再对 $\bar{\Lambda}(\tau)$ 或 $\ln \bar{\Lambda}(\tau) = \bar{A}_L(\tau)$ 求导,得到求最大似然估计值 $\hat{\tau}_{ML}$ 的条件。

在二进制(基带)PAM 的情况下,其中 $I_n = \pm 1$ 且等概,对数据求平均,得

$$\bar{A}_L(\tau) = \sum_n \ln \cosh C y_n(\tau) \quad (6-3-7)$$

这正如在相位估计器中的情况。因为对小 x 有 $\ln \cosh x \approx \frac{1}{2}x^2$, 因此在低信噪比时平方律近似式

$$\bar{\Lambda}_L(\tau) \approx \frac{1}{2} C^2 \sum_n y_n^2(\tau) \quad (6-3-8)$$

是适当的。对于多电平 PAM, 可以用零均值且单位方差的高斯 PDF 来近似信息符号 $\{I_n\}$ 的统计特征。将 $\Lambda(\tau)$ 在高斯 PDF 上求平均时, $\bar{\Lambda}(\tau)$ 的对数与式(6-3-8)给出的 $\bar{\Lambda}_L(\tau)$ 相同。因此, 对式(6-3-8)求导可得到 τ 的非面向判决估计值, 其结果是延迟的 ML 估计值的近似值。式(6-3-8)的导数是

$$\frac{d}{d\tau} \sum_n y_n^2(\tau) = 2 \sum_n y_n(\tau) \frac{dy_n(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (6-3-9)$$

式中, $y_n(\tau)$ 由式(6-3-5)定义。

基于式(6-3-7)中的 $\bar{\Lambda}_L(\tau)$ 导数的跟踪环实现方案如图 6-3-2 所示。另外一种实现方案基于式(6-3-9)的跟踪环, 如图 6-3-3 所示。在两种方案中, 求和器是用来驱动 VCC 的环路滤波器的。图 6-3-3 中的定时环与用于相位估计的科斯塔斯环相似。

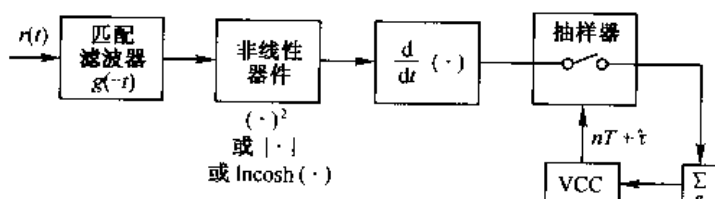


图 6-3-2 二进制基带 PAM 的非面向判决定时估计

早-迟门同步器

另一种非面向判决定时估计器利用匹配滤波器或相关器输出端信号的对称特性。为了说明这种方法, 研究图 6-3-4(a) 所示的矩形脉冲 $s(t)$, $0 \leq t \leq T$ 。匹配滤波器对 $s(t)$ 的输出在 $t = T$ 时达到最大值, 如图 6-3-4(b) 所示。因此, 匹配滤波器的输出是脉冲 $s(t)$ 的时间自相关函数。当然, 这个论点对任意脉冲形状都成立, 所以我们介绍的方法一般适用于任何信号脉冲。显然, 匹配滤波器输出达到最大值的抽样时刻 $t = T$, 即在相关函数的峰值点。

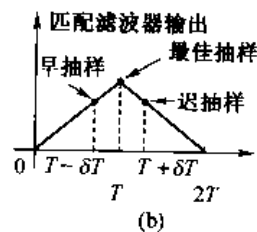
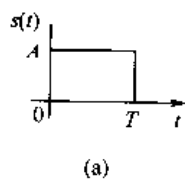
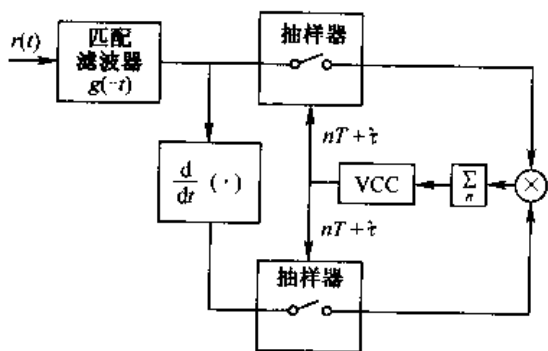


图 6-3-3 基带 PAM 的非面向判决定时估计

图 6-3-4 矩形信号脉冲(a)及其匹配滤波器的输出(b)

在噪声存在的情况下,对信号峰值的辨识一般较困难。假定不在峰值点对信号抽样,而在 $t = T - \delta$ 时早抽样,在 $t = T + \delta$ 时迟抽样,早抽样的绝对值 $|y(m(T - \delta))|$ 和迟抽样的绝对值 $|y(m(T + \delta))|$ 比峰值样值 $|y(mT)|$ 小(存在噪声的平均意义上)。因为自相关函数相对最佳抽样时刻 $t = T$ 是偶函数,所以在 $t = T - \delta$ 和 $t = T + \delta$ 时刻的自相关函数的绝对值相等。在这种条件下,适当的抽样时刻是在 $t = T - \delta$ 与 $t = T + \delta$ 之间的中点。这一条件构成早-迟门符号同步器的基础。

图 6-3-5 示出了早-迟门同步器的方框图。在该图中,相关器取代了等效的匹配滤波器。两个相关器在符号间隔 T 上积分,但是一个相关器比所估计的最佳抽样时刻提早 δs 开始积分,另一个积分器比所估计的最佳抽样时刻迟 δs 开始积分,两个相关器输出绝对值之差形成误差信号。为了平滑噪声对信号样值恶化的影响,将误差信号通过一个低通滤波器。如果定时偏离最佳抽样时刻,则低通滤波器输出的平均误差信号非零,且时钟信号是迟后的或提前的,这取决于误差的正负号。因此,平滑的误差信号用来驱动压控时钟(VCC),VCC 的输出就是期望的时钟信号,用来抽样。同时,VCC 的输出也用做符号波形发生器的时钟信号,该发生器能产生与发送滤波器一样的基本脉冲波形。该脉冲波形被提前或推迟,然后馈送给两个相关器,如图 6-3-5 所示。注意,如果信号脉冲是矩形的,则在跟踪环内不需要信号脉冲发生器。

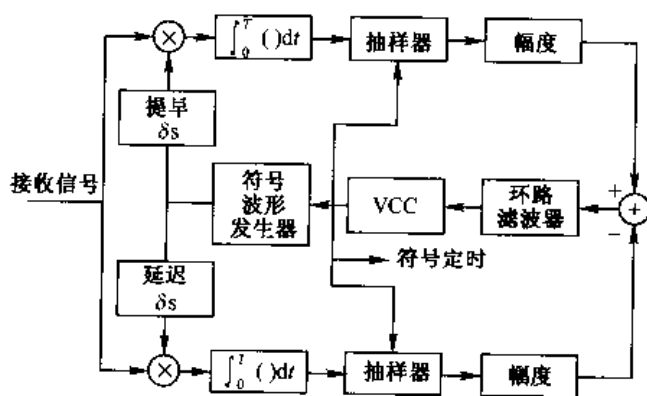


图 6-3-5 早-迟门同步器方框图

早-迟门同步器基本上是一个闭环控制系统,其带宽与符号速率 $1/T$ 相比较窄。环路的带宽决定了定时估计的质量。如果信道传播延迟是常数且发送机中的时钟振荡器不随时间而漂移(或随时间很缓慢地漂移),那么窄带环路在加性噪声上较长时间的平均可改善抽样时刻估计的质量。另一方面,如果信道传播延迟随时间而变且/或发送机的时钟也随时间漂移,那么必须增加环路的带宽才能快速跟踪符号定时随时间的变化。

在该跟踪模式中,两个相关器受到邻近符号的影响。然而,正如 PAM 和其他信号调制中那样,如果信息符号序列的均值为零,那么在低通滤波器中由邻近符号对相关器输出的贡献平均是零。

早-迟门同步器的一种等价的实现方案如图 6-3-6 所示,该方案较容易实现。在该方案中,由 VCC 产生的时钟信号被提前和延迟 δ ,并用这两个时钟信号对两个相关器的输出抽样。

以上所述的早-迟门同步器是一个非面向判决符号定时估计器,近似于最大似然估计器。这一断言可以证明如下:通过有限差近似对数似然函数的导数,即

$$\frac{d\bar{A}_L(\tau)}{d\tau} \approx \frac{\bar{A}_L(\tau + \delta) - \bar{A}_L(\tau - \delta)}{2\delta} \quad (6-3-10)$$

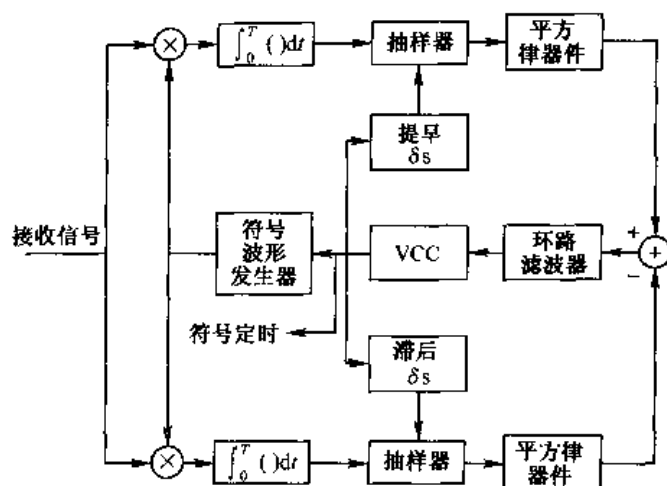


图 6-3-6 另一种形式的早-迟门同步器的方框图

将式(6-3-8)的 $\bar{A}_L(\tau)$ 代入式(6-3-10), 可得到导数的近似式为

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}_L(\tau)}{d\tau} &= \frac{C^2}{4\delta} \sum_n [y_n^2(\tau + \delta) - y_n^2(\tau - \delta)] \\ &\approx \frac{C^2}{4\delta} \sum_n \left\{ \left[\int_{T_0} r(t) g(t - nT - \tau - \delta) dt \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_{T_0} r(t) g(t - nT - \tau + \delta) dt \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (6-3-11)$$

式(6-3-11)中的数学表达式基本上描述了图 6-3-5 和图 6-3-6 说明的早-迟门符号同步器执行的功能。

6.4 载波相位和符号定时的联合估计

载波和符号定时的估计可以如上所述分别实现或联合实现。两个或更多个信号参数的联合 ML 估计产生的估计值同样甚至通常更好于由各自似然函数最佳化得到的估计值。换言之, 由联合最佳化得到的信号参数的方差小于或等于由各自似然函数最佳化得到的参数估计的方差。

下面研究载波相位和符号定时的联合估计。这两个参数的对数似然函数可用等效低通信号形式表示为

$$\Delta_L(\phi, \tau) = \text{Re} \left[\frac{1}{N_0} \int_{T_0} r(t) s_l^*(t; \phi, \tau) dt \right] \quad (6-4-1)$$

式中 $s_l(t; \phi, \tau)$ 是等效低通信号, 它的一般形式为

$$s_l(t; \phi, \tau) = e^{-j\phi} \left[\sum_n I_n g(t - nT - \tau) + j \sum_n J_n w(t - nT - \tau) \right] \quad (6-4-2)$$

式中, $\{I_n\}$ 和 $\{J_n\}$ 为两个信息序列。

注意, 对于 PAM, 令 $J_n = 0$ (所有 n), 且序列 $\{I_n\}$ 是实的。对于 QAM 和 PSK, 令 $J_n = 0$ (所有 n) 且 $\{I_n\}$ 是复值的。对于偏移 QPSK, 两个序列 $\{I_n\}$ 和 $\{J_n\}$ 是非零的且 $w(t) = g(t - \frac{1}{2}T)$ 。

对于 ϕ 和 τ 面向判决 ML 估计,对数似然函数为

$$\Lambda_L(\phi, \tau) = \text{Re} \left\{ \frac{e^{j\phi}}{N_0} \sum_n [I_n^* y_n(\tau) + jI_n^* x_n(\tau)] \right\} \quad (6-4-3)$$

式中

$$\begin{aligned} y_n(\tau) &= \int_{T_u} r(t) g^*(t - nT - \tau) dt \\ x_n(\tau) &= \int_{T_u} r(t) w^*(t - nT - \tau) dt \end{aligned} \quad (6-4-4)$$

求 ϕ 和 τ 的 ML 估计值的必要条件是

$$\frac{\partial \Lambda_L(\phi, \tau)}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \Lambda_L(\phi, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (6-4-5)$$

为方便,定义

$$A(\tau) + jB(\tau) = \frac{1}{N_0} \sum_n [I_n^* y_n(\tau) + jI_n^* x_n(\tau)] \quad (6-4-6)$$

利用这个定义,式(6-4-3)简化为

$$\Lambda_L(\phi, \tau) = A(\tau) \cos \phi - B(\tau) \sin \phi \quad (6-4-7)$$

式(6-4-5)中求联合 ML 估计值的条件为

$$\frac{\partial \Lambda(\phi, \tau)}{\partial \phi} = -A(\tau) \sin \phi - B(\tau) \cos \phi = 0 \quad (6-4-8)$$

$$\frac{\partial \Lambda(\phi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \cos \phi - \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} \sin \phi = 0 \quad (6-4-9)$$

由式(6-4-8)可得

$$\hat{\phi}_{ML} = -\tan^{-1} \left[\frac{B(\hat{\tau}_{ML})}{A(\hat{\tau}_{ML})} \right] \quad (6-4-10)$$

结合式(6-4-10)可得出式(6-4-9)的解答为

$$\left[A(\tau) \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} + B(\tau) \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=\hat{\tau}_{ML}} = 0 \quad (6-4-11)$$

由这些方程得到的 QAM(或 PSK)面向判决跟踪环如图 6-4-1 所示。

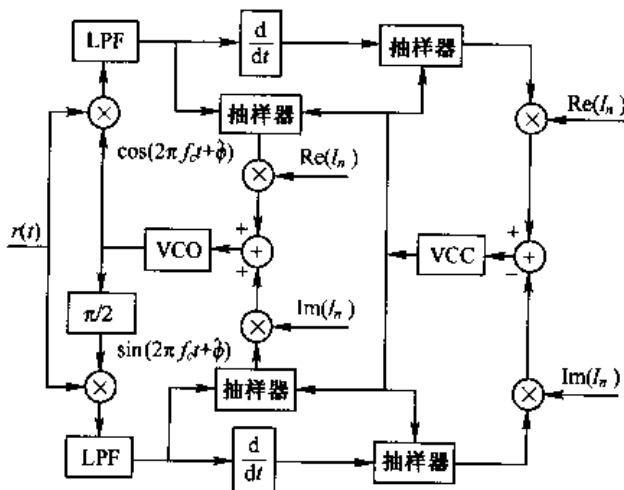


图 6-4-1 QAM 和 PSK 中载波相位和符号定时的面向判决联合跟踪环

偏移 QPSK 的 ϕ 和 τ 的联合估计需要较复杂的结构,该结构易从式(6-4-6)至式(6-4-11)导出。

除了上面给出的联合估计之外,有可能导出载波相位和符号定时的非面向判决估计,但我们在这里不再继续下去了。

应当指出,可以将参数估计问题与信息序列 $\{I_n\}$ 的解调联合起来研究,也就是研究 $\{I_n\}$ 、载波相位 ϕ 和符号定时参数 τ 的联合最大似然估计。这些联合估计问题的研究成果已发表在一些技术文献中,如柯贝雅西(Kobayashi, 1971 年)、福尔科纳(Falconer, 1976 年)及福尔科纳与扎尔茨(Salz, 1977 年)的论文。

6.5 最大似然估计器的性能特征

信号参数估计的质量通常用其偏差及方差来度量。为了定义这两个术语,假定观测序列 $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] = \mathbf{x}$ 具有 PDF $p(\mathbf{x}|\phi)$, 可从中求出参数 ϕ 的估计值。估计值 $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ 的偏差定义为

$$\text{偏差} = E[\hat{\phi}(\mathbf{x})] - \phi \quad (6-5-1)$$

式中, ϕ 是参数的真值。当 $E[\hat{\phi}(\mathbf{x})] = \phi$ 时,称该估计值是无偏的。估计值 $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ ① 的方差定义为

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 = E\{[\hat{\phi}(\mathbf{x})]^2\} - \{E[\hat{\phi}(\mathbf{x})]\}^2 \quad (6-5-2)$$

一般 $\sigma_{\hat{\phi}}^2$ 的计算较困难。然而,参数估计(参见 Helstrom, 1968 年)的一个众所周知的成果是均方误差的克拉默-罗(Cramér-Rao)下界限,定义为

$$E\{[\hat{\phi}(\mathbf{x}) - \phi]^2\} \geq \left[\frac{\partial}{\partial \phi} E[\hat{\phi}(\mathbf{x})] \right]^2 / E\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln p(\mathbf{x}|\phi) \right]^2 \right\} \quad (6-5-3)$$

注意,无偏估计时,式(6-5-3)的分子是 1,并且该界限成为估计值 $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ 的方差 $\sigma_{\hat{\phi}}^2$ 的下界限,即

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 \geq 1 / E\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln p(\mathbf{x}|\phi) \right]^2 \right\} \quad (6-5-4)$$

因为 $\ln p(\mathbf{x}|\phi)$ 与对数似然函数的差别在于与 ϕ 无关的常数因子,由此得出

$$\begin{aligned} E\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln p(\mathbf{x}|\phi) \right]^2 \right\} &= E\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln \Lambda(\phi) \right]^2 \right\} \\ &= -E\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \ln \Lambda(\phi) \right\} \end{aligned} \quad (6-5-5)$$

因此,方差的下界限为

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2 \geq 1 / E\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \ln \Lambda(\phi) \right]^2 \right\} = -1 / E\left[\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \ln \Lambda(\phi) \right] \quad (6-5-6)$$

该下界限是非常有用的结果,它为任何实际估计值方差与该下界限的比较提供了一个基准。无偏的且方差达到下界限的估计称为有效估计。

通常,有效估计是很少的。当它们存在时,是最大似然估计。参数估计理论的一个众所周

① 原文中将 $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ 误写成 $\hat{\phi}(x)$ 。

知的结果是任何 ML 参数估计是渐近(任意大的观测次数)无偏的和有效的。在很大程度上, 这些期望的性质构成了 ML 参数估计的重要性。人们也知道, ML 估计是渐近高斯分布的(具有均值 ϕ , 且方差等于式(6-5-6)的下界限)。

本章所述的对两个信号参数 ML 估计的情况下, 它们的方差一般与信噪比成反比, 或者等价于与信号功率同观测间隔 T_0 的乘积成反比。而且, 在低错误概率时, 面向判决估计的方差一般低于非面向判决估计的方差。事实上, ϕ 和 τ 的 ML 面向判决估计的性能达到了下界限。

下例是对载波相位 ML 估计的克拉默-罗(Cramér-Rao)下界限的评估。

例 6-5-1 式(6-2-11)中未调载波相位的 ML 估计值满足条件

$$\int_{T_0} r(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi}_{ML}) dt = 0 \quad (6-5-7)$$

式中

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t; \phi) + n(t) \\ &= A \cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t) \end{aligned} \quad (6-5-8)$$

式(6-5-7)的条件可由最大化似然函数

$$A_L(\phi) = \frac{2}{N_0} \int_{T_0} r(t) s(t; \phi) dt \quad (6-5-9)$$

导出。 $\hat{\phi}_{ML}$ 的方差下界限为

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\phi}_{ML}}^2 &\geq \left\{ \frac{2A}{N_0} \int_{T_0} E[r(t)] \cos(2\pi f_c t + \phi) dt \right\}^{-1} \\ &\geq \left\{ \frac{A^2}{N_0} \int_{T_0} dt \right\}^{-1} = \frac{N_0}{A^2 T_0} \\ &\geq \frac{N_0 \cdot 2T_0}{\frac{1}{2} A^2} = \frac{N_0 B_{eq}}{\frac{1}{2} A^2} \end{aligned} \quad (6-5-10)$$

因子 $1/2 T_0$ 是理想积分器的(单边)等效噪声带宽, $A^2/2$ 是正弦信号的功率, $N_0 B_{eq}$ 是总的噪声功率。

由此例可见, ML 相位估计的方差下界限为

$$\sigma_{\hat{\phi}_{ML}}^2 \geq 1/\gamma_L \quad (6-5-11)$$

式中 γ_L 是环路 SNR, 这也是面向判决估计的 PLL 中相位估计的方差。正如已看到的, 非面向判决估计的性能不够好, 这是由用来除去调制分量的非线性损失造成的, 例如平方损失和 M 方损失。

也可以求得上面推导的符号定时估计质量的类似结果。除了与 SNR 有关之外, 符号定时估计质量还是信号脉冲形状的函数。例如, 通常实用的脉冲形状具有升余弦谱(参见 9.2 节)。对于这样的脉冲, rms 定时误差(σ_{τ})是 SNR 的函数, 如图 6-5-1 所示, 图中示出了面向判决和非面向判决估计的两种情况。注意, 面向判决估计的性能比非面向判决估计有显著的改进。可是, 如果改变脉冲带宽, 改变脉冲形状, 那么定时误差的 rms 值也随之改变。例如, 具有升余

弦谱的脉冲带宽改变时,rms 定时误差也随之改变,如图 6-5-2 所示。注意,误差随脉冲带宽的增加而减少。

本节阐述了信号参数估计的 ML 方法,并将它应用到载波相位和符号定时的估计中,我们也阐述了它们的性能特征。

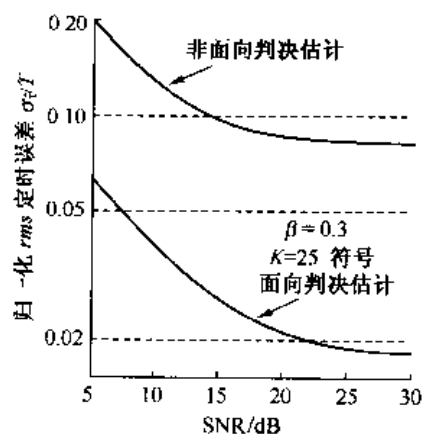
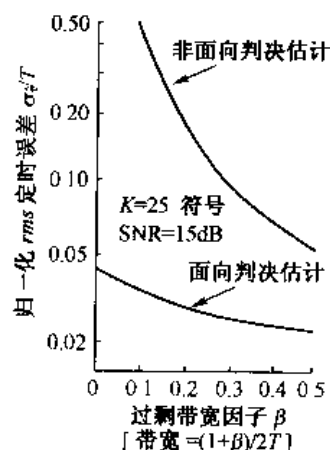


图 6-5-1 对于固定信号和环路带宽的基带符号定时估计的性能



6-5-2 对于固定 SNR 和固定环路带宽的基带符号定时估计的性能

6.6 文献与参考资料

载波恢复和定时同步是科学家们过去 30 年一直研究的两个课题。科斯塔斯环是在 1956 年发明的,而向判决相位估计方法由普罗基斯等人(Proakis et al, 1964 年)以及纳塔利和瓦尔贝塞(Natali & Walbesser, 1969 年)描述。普赖斯(Price, 1962 年)早期的工作推动了面向判决估计的研究。关于锁相环的综合性的论述,首先出现在维特比(Viterbi, 1966 年)和加德纳(Gardner, 1979 年)的著作中。斯蒂夫勒(Stiffler, 1971 年)、林塞(Lindsey, 1972 年),林塞与塞孟(Lindsey & Simon, 1973 年),梅尔与阿斯切德(Meyr & Aschied, 1990 年),塞孟等人(Simon et al., 1995 年),梅尔等人(Meyr et al., 1998 年),以及蒙加利和德安德里(Mengali & D'Andrea, 1997 年)等发表的著作中都包含相位恢复和定时同步技术。

IEEE 汇刊已发表了几篇关于 PLL 和定时同步指导性的论文。举例来说,古普塔(Gupta, 1975 年)的论文论述了 PLL 的模拟和数字两种实现方法,林塞与切(Lindsey & Chie, 1981 年)的论文专门分析了数字 PLL。此外,弗兰克斯(Franks, 1980 年)撰写的论文描述了载波相位和符号同步的方法,其中包括基于最大似然估计准则的方法。IEEE 通信汇刊(1980 年 8 月)的专刊刊登了弗兰克斯(Franks)专论同步的论文。米勒和穆勒(Mueller & Muller, 1976 年)的论文描述了提取符号定时的数字信号处理的算法,柏格曼斯(Bergmans, 1995 年)的论文评估了数据辅助定时恢复方法的效率。

最大似然准则在参数估计中的应用首先是在雷达参数估计(测距及临近速率)中描述的。接着,这种最佳准则被应用到载波相位和符号定时估计以及与数据符号联合的参数估计。几位研究人员发表了有关此课题的论文,包括福尔科纳(Falconer, 1976 年)、蒙加利(Mengali, 1977 年)、福尔科纳和扎尔茨(Falconer & Salz, 1977 年)、迈尔斯和弗尔克斯(Meyers & Franks, 1980 年)。

参数估计方差的克拉默-罗(Cramér-Rao)下界限已在检测与估计理论的权威著作中推导和评价,例如海尔斯特洛姆(Helstrom, 1968 年)和温·特里斯(Van Trees, 1968 年)的著作。有几本统计学方面的数学专著,如克拉默(Cramér, 1946 年)的,也对此进行了阐述。

习题

6-1 证明关系式(6-1-7)。

6-2 试画出与图6-1-1等价的二进制 PSK 的接收机框图,要求使用匹配滤波器取代相关器。

6-3 假设 PLL 的环路滤波器(参见(6-2-14))具有如下传递函数

$$G(s) = \frac{1}{s + \sqrt{2}}$$

(a) 试求闭环传递函数 $H(s)$, 并说明环路是否稳定。

(b) 试求环路的阻尼因子及自然频率。

6-4 有一个锁相环用于信号载波相位的估计,其环路滤波器为

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau_1 s}$$

(a) 试求闭环传递函数 $H(s)$ 及其在 $f=0$ 处的增益。

(b) 试问 τ_1 和 K 值在什么范围内,环路才是稳定的?

6-5 锁相环中的环路滤波器 $G(s)$ 可由图 P6-5 所示的电路实现。试求系统函数 $G(s)$, 并用电路参数表示时间常数 τ_1 和 τ_2 。

6-6 锁相环中的环路滤波器 $G(s)$ 由图 P6-6 所示的有源滤波器实现。试求系统函数 $G(s)$, 并用电路参数表示时间常数 τ_1 和 τ_2 。

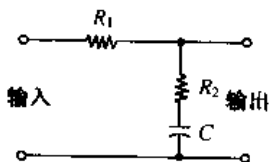


图 P6-5

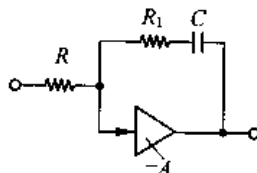


图 P6-6

6-7 试证明图6-3-5所示的早-迟门同步器近似于图 P6-7 中的定时恢复系统。

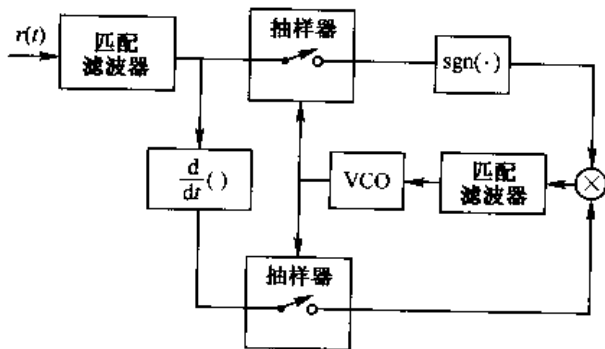


图 P6-7

6-8 根据最大似然(ML)准则,试求二进制启闭键控(OOK, on-off keying)调制的载波相位估计方法。

6-9 在运动的车辆中收发信号时,传输信号的频率偏移直接与车辆速度成正比。当车辆以相对于(固定的)发射台的速度 v 运动时,其接收信号有多普勒频移,由下式确定

$$f_D = \pm \frac{v}{\lambda}$$

其中 λ 是波长,正负号取决于车辆相对于发射台的运动方向(移近或移开)。假设在一个蜂窝移动通信系统中,车辆相对于基站的移动速度为 100 km/h。信号是载频为 1 GHz 的窄带信号。

(a) 试求多普勒频移。

(b) 假设车辆的速度最高达 100 km/h,设计一个环路来跟踪频移,试问多普勒频率跟踪环的带宽应为多少?

(c) 假设发送信号的带宽为 2 MHz,其中心频率为 1 GHz,试求该信号在高低频之间的多普勒频率扩散(Spread)。

6-10 试证明式(6-2-38)中的最大似然估计值的均值为 ϕ ,即该估计值是无偏的。

6-11 试求式(6-2-38)中的最大似然(ML)相位估计的概率密度函数(PDF)。

6-12 试求偏移 QPSK 的最大似然相位估计。

6-13 单边带 PAM 信号为

$$u_m(t) = A_m [g_T(t) \cos 2\pi f_c t - \hat{g}_T(t) \sin 2\pi f_c t]$$

其中 $\hat{g}_T(t)$ 是 $g_T(t)$ 的希尔伯特(Hilbert)变换, A_m 是携带信息的振幅电平。试用数学的方法推证科斯塔斯(Costas)环可以用来解调单边带 PAM 信号。

6-14 有一个通信系统用二进制 PSK 传送信息,该系统以正交载波方式发送一个载波分量,所以接收信号具有以下形式

$$r(t) = \pm \sqrt{2P_s} \cos(2\pi f_c t + \phi) + \sqrt{2P_c} \sin(2\pi f_c t + \phi) + n(t)$$

其中 ϕ 是载波相位, $n(t)$ 是加性高斯白噪声(AWGN)。未调制的载波分量用做导频信号,以便于接收机对载波相位进行估计。

(a) 试画出接收机的方框图,包括载波相位估计器。

(b) 试用数学的方法说明载波相位 ϕ 估计中的操作。

(c) 试把二进制 PSK 信号检测的错误概率表示为总发送功率 $P_T = P_s + P_c$ 的函数。试问由于把一部分发送功率分配给导频信号将导致多大的性能损失? 试针对 $P_c/P_T = 0.1$, 求损失的大小。

6-15 解调 QPSK 时采用四次方($M=4$)锁相环产生载波相位,试求该环输入端的信号和噪声分量。假定只考虑噪声 $n(t)$ 中的线性分量而略去其他分量,试求锁相环输出端的相位估计的方差。

6-16 在二进制 PSK 解调中,当载波相位误差为 ϕ_e 时,二进制 PSK 解调和检测的错误概率为

$$P_2(\phi_e) = Q \left[\sqrt{\frac{2E_b}{N_0} \cos^2 \phi_e} \right]$$

假设锁相环的相位误差的模型为零均值高斯随机变量,且方差 $\sigma_\phi^2 \ll \pi$ 。试求平均错误概率的表达式(以积分形式表示)。

6-17 QAM 信号的形式为

$$s(t) = \operatorname{Re}[s_l(t; \tau) e^{j2\pi f_c t}]$$

式中

$$s_l(t; \tau) = \sum_n I_n g(t - nT - \tau)$$

且 $\{I_n\}$ 为复数据序列。试求该 QAM 信号的延迟 τ 的 ML 估计值。

6-18 试求 PAM 信号的 τ 和 ϕ 的联合 ML 估计值。

6-19 试求偏移 QPSK 的 τ 和 ϕ 的联合 ML 估计值。

第7章 信道容量和信道编码

第5章讨论了利用 $M=2^k$ 个信号波形的数字调制问题,每一个这样的波形可以传递 k 比特信息,有些调制方法的性能较好。特别证明了当波形数 $M \rightarrow \infty$ 时,只要每比特信噪比 $\gamma_b \geq -1.6$ dB,就能借助正交的信号波形使差错概率任意小。这样,在加性高斯白噪声信道上,当带宽扩展因子 $B_e = W/R \rightarrow \infty$ 时,可以在极限容量运行,但要付出沉重的代价,因为 B_e 随分组长度 k 的增加而指数增加,如此低效地利用信道带宽是不可取的。

本章和下一章将讨论由二进制或非二进制序列产生的信号波形。这种波形一般具有带宽扩展因子仅随 k 的增加而线性增加的特点,这样,编码的波形比正交 M 元波形更有潜力取得较高的带宽效率。总的来说,编码波形不仅在 $R/W < 1$ 的功率受限系统,而且在 $R/W > 1$ 的带宽受限系统应用时在性能上具有优越性。

本章先建立几个信道模型用于估算信道编码,同时引入各种信道模型的信道容量的概念,再讨论用于高效通信的信道码的设计。

7.1 信道模型和信道容量

回忆1.1节所述的数字通信系统模型,其发送器的框图由离散输入、离散输出的信道编码器和紧接其后的调制器组成。离散信道编码器的作用是以可控的方式在二进制信息序列中插入一些冗余度,以便在接收器中利用这些冗余度来克服信号在信道传输过程中遇到的干扰和噪声的影响。编码过程一般是这样的:一次取 k 位比特,把各个 k 比特组映射到唯一对应的称为码字的 n 位比特上。在这种方式中,由数据编码引进的冗余量可以用比值 n/k 衡量,该比值的倒数,即 k/n 称为码率。

信道编码器输出的二进制序列被送进调制器,它是进入通信信道的接口。正如已讨论过的,调制器仅把每个二进制数字映射为两个可能的波形之一,即0映射为波形 $s_1(t)$,1映射为波形 $s_2(t)$;或者采用 $M=2^q$ 个可能的波形,一次传送一个 q 比特数据块。

在数字通信设备的接收端,解调器处理受信道损伤的波形,将波形简化成一个标量或者一个矢量,用来表示传送的数据符号(二元或 M 元)的估值。解调器后面的检测器可用来判决传送的比特是0还是1。在这种情况下,判决器作的是硬判决。如果把检测器的判决过程想像成量化的一种形式,可以看到,硬判决相当于对解调器输出作二进制量化。更广义地,可把一个量化成 $Q > 2$ 电平的检测器看做是一个 Q 元检测器,如果采用 M 元信号,应有 $Q \geq M$ 。在不作量化的极端情况下, $Q = \infty$ 。 $Q > M$ 时,称检测器作软判决。

检测器的量化输出送到信道译码器,利用可用的冗余度纠正信道干扰。

下面将描述3种信道模型,我们将利用它们来估算信道能取得的最高比特速率。

7.1.1 信道模型

本节讨论信道模型,这些模型将在编码设计时有用。最简单的信道模型是二进制对称信

道(BSC, binary symmetric channel), 它对应于 $M=2$ 、检测器实行硬判决的情况。

1. 二进制对称信道

考虑一个加性噪声信道, 把调制/解调器/检测器看成是信道的一个组成部分。如果调制器采用二进制波形, 检测器实行硬判决, 这就构成了如图 7-1-1 所示的信道, 它具有离散时间的二进制输入序列和离散时间的二进制输出序列。这样一个合成信道的特点是它有一个可能输入值的集合 $X = \{0, 1\}$ 和可能输出值的集合 $Y = \{0, 1\}$, 以及一组表示可能输入与可能输出之间关系的条件概率。如果信道噪声和其他干扰导致传输的二进制序列发生统计独立的差错, 那么平均差错概率 p 是

$$\begin{aligned} P(Y = 0 | X = 1) &= P(Y = 1 | X = 0) = p \\ P(Y = 1 | X = 1) &= P(Y = 0 | X = 0) = 1 - p \end{aligned} \quad (7-1-1)$$

这样就把二进制调制器、波形信道、二进制解调器和检测器四者的级联简化为一个等效的离散时间信道, 如图 7-1-2 所示。这种对称的二进制输入、二进制输出信道简称为二进制对称信道(BSC)。由于这种信道的每个输出比特仅与对应的一个输入比特有关, 所以说该信道是无记忆的。

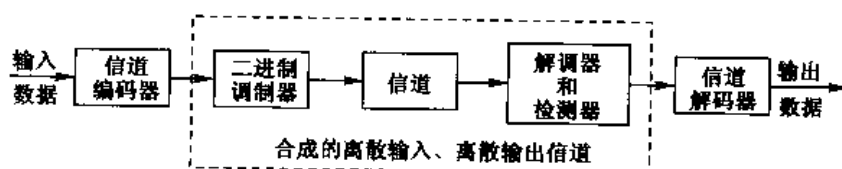


图 7-1-1 合成的离散输入、离散输出信道, 将调制/解调/检测器视为信道的一部分

2. 离散无记忆信道

离散无记忆信道 BSC 可视为一种更广义的离散输入、离散输出信道的特例。假设信道编码器的输出是 q 元符号, 即 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$, 检测器的输出由 Q 元符号组成, 这里 $Q \geq M = 2^q$ 。如果信道和调制过程是无记忆的, 那么图 7-1-1 所示合成信道的输入-输出特性可以用一组 qQ 个条件概率描述

$$P(Y = y_i | X = x_j) \equiv P(y_i | x_j) \quad (7-1-2)$$

式中, $i = 0, 1, \dots, Q-1$ 以及 $j = 0, 1, \dots, q-1$ 。这样的信道称为离散无记忆信道(DMC, discrete memoryless channel), 如图 7-1-3 所示。若 DMC 的输入选自 X 符号集的 n 个符号 u_1, u_2, \dots, u_n 的序列, 相应的输出选自 Y 符号集的 n 个符号 v_1, v_2, \dots, v_n 的序列, 则联合条件概率是

$$\begin{aligned} P(Y_1 = v_1, Y_2 = v_2, \dots, Y_n = v_n | X = u_1, \dots, X = u_n) \\ = \prod_{k=1}^n P(Y_k = v_k | X = u_k) \end{aligned} \quad (7-1-3)$$

这个表达式正是无记忆条件的数学表述。

通常, 决定 DMC 特点的条件概率 $\{P(y_i | x_j)\}$ 可以写成矩阵的形式 $\mathbf{P} = [p_{ji}]$ 。根据定义, 式中的 $p_{ji} = P(y_i | x_j)$ 。 \mathbf{P} 称为信道的转移概率矩阵。

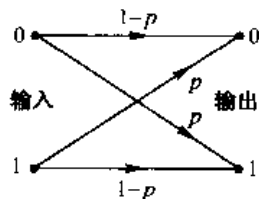


图 7-1-2 二进制对称信道

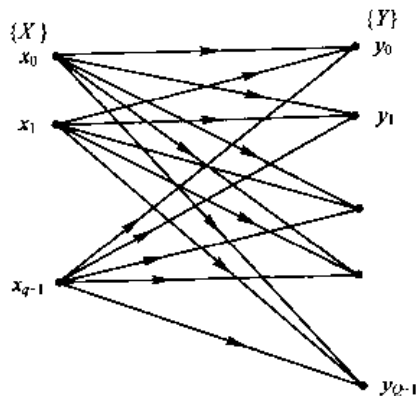


图 7-1-3 离散 q 进制输入、 Q 进制输出信道

3. 离散输入、连续输出信道

假设调制器的输入信号选自一个有限的离散的输入字符集 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$, 检测器的输出未经量化 ($Q = \infty$)。这样, 信道译码器的输入可以假设为实轴上的任意值, 即 $Y = \{-\infty, \infty\}$ 。这就可以定义一个合成的离散时间无记忆信道, 它的特性由离散输入 X 、连续输出 Y 以及一组条件概率密度函数 $p(y | X = x_k)$, ($k = 0, 1, \dots, q-1$) 决定。这类信道中最重要的一种是加性高斯白噪声信道 (AWGN), 对它而言

$$Y = X + G \quad (7-1-4)$$

式中, G 是一个零均值、方差为 σ^2 的高斯随机变量, $X = x_k$ ($k = 0, 1, \dots, q-1$)。对于给定的 X , Y 也是一个高斯随机变量, 均值为 x_k , 方差为 σ^2 , 即

$$p(y | X = x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y - x_k)^2 / 2\sigma^2} \quad (7-1-5)$$

对于任意给定的输入序列 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 存在一个相应的输出序列

$$Y_i = X_i + G_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7-1-6)$$

信道为无记忆的条件为

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n | X_1 = u_1, X_2 = u_2, \dots, X_n = u_n) = \prod_{i=1}^n p(y_i | X_i = u_i) \quad (7-1-7)$$

4. 波形信道

可以把调制器和解调器从物理信道中分离出来, 讨论一个信道模型, 其输入是波形, 其输出也是波形。假设这种信道有给定的带宽 W , 在带宽 W 范围内具有理想的频率响应 $C(f) = 1$, 信号在输出端遭受加性高斯白噪声的损伤。假设输入该信道的是带限信号 $x(t)$, 相应的输出是 $y(t)$, 那么

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (7-1-8)$$

这里 $n(t)$ 代表加性噪声过程的一个样本函数。为了定义一组能体现信道特征的概率, 一种适当的办法是把 $x(t)$, $y(t)$ 和 $n(t)$ 展开成一个正交函数的完备集, 即把 $x(t)$, $y(t)$ 和 $n(t)$ 表示为如下形式

$$y(t) = \sum_i y_i f_i(t)$$

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_i x_i f_i(t) \\n(t) &= \sum_i n_i f_i(t)\end{aligned}\quad (7-1-9)$$

式中, $|x_i|$ 、 $|y_i|$ 和 $|n_i|$ 是与展开式对应的一套系数, 如

$$\begin{aligned}y_i &= \int_0^T y(t) f_i^*(t) dt \\&= \int_0^T [x(t) + n(t)] f_i^*(t) dt \\&= x_i + n_i\end{aligned}\quad (7-1-10)$$

函数 $\{f_i(t)\}$ 在区间 $(0, T)$ 构成一个完备正交系, 即

$$\int_0^T f_i(t) f_j^*(t) dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (7-1-11)$$

这里, δ_{ij} 是克朗耐克 (Kronecker) 得尔塔函数。由于高斯噪声是白色的, 在式 (7-1-9) 的展开式中可以使用任意一种正交函数完备集。

现在, 可利用展开式中的系数描述信道特征。由于

$$y_i = x_i + n_i$$

其中 n_i 是高斯变量, 可以推得

$$p(y_i | x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-(y_i - x_i)^2 / 2\sigma_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7-1-12)$$

因为展开式中的函数 $\{f_i(t)\}$ 是正交的, 必有 $|n_i|$ 不相关。又因为是高斯的, 它们也一定是统计独立的, 因此

$$p(y_1, y_2, \dots, y_N | x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i) \quad (7-1-13)$$

上式对于任意 N 均成立。在这种方式中, 波形信道被简化为一个等效的离散时间信道, 其特征由式 (7-1-12) 给出的条件 PDF 决定。

如果加性噪声是白色 (谱密度 $N_0/2$) 且高斯分布的, 对于式 (7-1-12) 中的所有 i 均有方差 $\sigma_i^2 = N_0/2$, 在这种情况下, $x(t)$ 和 $y(t)$ 可以奈奎斯特速率 $2W$ 样值/s 采样, 以致有 $x_i = x(i/2W)$ 及 $y_i = y(i/2W)$ 。由于噪声是白的, 因此噪声样值是统计独立的。这样, 式 (7-1-12) 和式 (7-1-13) 描述的是采样信号的统计值。注意, 在长为 T 的时间间隔中存在 $N = 2WT$ 个样值, 下面将用这个参数求取带限 AWGN 波形的信道的容量。

在任一时刻选用何种信道模型完全取决于用户目的。如果用户的兴趣在于设计和分析离散信道编、解码器的性能, 合适的做法是选择一种信道模型, 使调制、解调器变为复合信道的一部分。如果想要设计和分析数字调制器和数字解调器的性能, 采用波形信道模型。

7.1.2 信道容量

考虑一个 DMC 信道, 其输入字符集是 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$, 输出字符集是 $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{q-1}\}$, 转移概率集合 $P(y_i | x_j)$ 如式 (7-1-2) 定义。假如传输的信号是 x_j , 接收到的信号是 y_i , 那么由事件 $Y = y_i$ 的发生而提供的关于 $X = x_j$ 的互信息是 $\log[P(y_i | x_j)/P(y_i)]$ 。这里,

$$P(y_i) \equiv P(Y = y_i) = \sum_{k=0}^{q-1} P(x_k) P(y_i | x_k) \quad (7-1-14)$$

因此,输出 Y 为输入 X 提供的平均互信息是

$$I(X; Y) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{q-1} P(x_j) P(y_i | x_j) \log \frac{P(y_i | x_j)}{P(y_i)} \quad (7-1-15)$$

转移概率 $P(y_i | x_j)$ 是由信道特征决定的,输入符号的发生概率受离散信道编码器的控制。对于一组输入符号概率 $P(x_j)$, $I(X; Y)$ 的最大值仅仅取决于由条件概率 $P(y_i | x_j)$ 决定的 DMC 信道的特性。这个量称为信道容量,用符号 C 表示,也就是说,DMC 的容量定义为

$$\begin{aligned} C &= \max_{P(x_j)} I(X; Y) \\ &= \max_{P(x_j)} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{q-1} P(x_j) P(y_i | x_j) \log \frac{P(y_i | x_j)}{P(y_i)} \end{aligned} \quad (7-1-16)$$

$I(X; Y)$ 值的最大化是在下列限制条件下进行的

$$P(x_j) \geq 0$$

$$\sum_{j=0}^{q-1} P(x_j) = 1$$

如以 2 为底取对数, C 的单位是信道上每输入一个符号(即每使用一次信道)所能传送的比特数(bit/channel use 或 bit/symbol); 以 e 为底取自然对数时,单位是每输入符号传送的奈特数(nat/symbol)。如果每隔 τ_s 输入一个符号,则信道容量是 C/τ_s , 以比特/秒(b/s)或奈特/s 为单位。

例 7-1-1 对于转移概率 $P(0|1) = P(1|0) = p$ 的 BSC 而言,当输入概率 $P(0) = P(1) = 1/2$ 时其平均互信息最大。这时, BSC 的信道容量是

$$C = p \log 2p + (1-p) \log 2(1-p) = 1 - H(p) \quad (7-1-17)$$

式中, $H(p)$ 是二进熵函数。 C 随 p 变化的曲线如图 7-1-4 所示,注意, $p=0$ 时的信道容量是每符号 1 比特信息。另一方面,当 $p=1/2$ 时,输入输出间的互信息为 0,因此信道容量是零。对于 $1/2 < p \leq 1$,可在 BSC 的输出端颠倒 0 和 1,导致信道容量以 $p=1/2$ 点为中心对称。在本书第 5 章关于二进制调制、解调的讨论中,证明了 p 是信噪比 SNR 的单调函数,如图 7-1-5 (a) 所示。所以,当 C 作为 SNR 的函数作图时,它随 SNR 的增加而单调增加。 C 和 SNR 的关系特性曲线如图 7-1-5 (b) 所示。

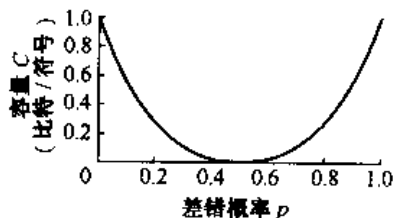


图 7-1-4 作为差错概率 p 的函数时, BSC 的容量

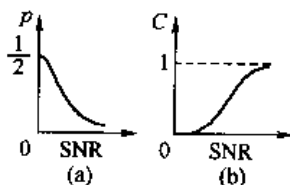


图 7-1-5 作为 SNR 的函数, 差错概率和信道容量的一般特性

考虑一个离散时间的 AWGN 无记忆信道,其特性用式(7-1-5)定义的转移概率密度函数

描述。离散输入 $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ 和模拟输出 $Y = \{-\infty, \infty\}$ 之间的平均互信息由该信道的容量确定,以比特/符号为单位时是

$$C = \max_{P(x_i)} \sum_{i=0}^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} p(y | x_i) P(x_i) \log_2 \frac{p(y | x_i)}{p(y)} dy \quad (7-1-18)$$

式中

$$p(y) = \sum_{k=0}^{q-1} p(y | x_k) P(x_k) \quad (7-1-19)$$

例 7-1-2 考虑一个二进制输入的 AWGN 无记忆信道,可能的输入是 $X = A$ 或 $X = -A$ 。当输入概率 $P(X = A) = P(X = -A) = 1/2$ 时,平均互信息 $I(X; Y)$ 最大。于是,该信道的容量以比特/符号为单位是

$$C = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(y | A) \log_2 \frac{p(y | A)}{p(y)} dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(y | -A) \log_2 \frac{p(y | -A)}{p(y)} dy \quad (7-1-20)$$

图 7-1-6 所示为 C 作为 $A^2/2\sigma^2$ 比值函数时的关系曲线。注意,当比值增大时, C 从 0 到 1 比特/符号单调增大。

在上述两个信道模型中,选择等概的输入符号能使平均互信息最大。这样,只要令输入符号等概,就可以得出信道容量。然而,等概条件并不总能得出式(7-1-16)和式(7-1-17)给出的信道容量公式的解。关于如何分配输入概率才能使平均互信息最大化,目前还没有一个通用的解法。但是,在上述两个信道模型中,信道转移概率呈现出一种对称的形式,它导致了输入符号等概时能获得最大的 $I(X; Y)$ 。对称条件可以用转移概率矩阵 \mathbf{P} 的元素表示。当该矩阵的每一行是另外任一行的重新排列,且每一列是另外任一列的重新排列时,称该转移概率矩阵是对称的。这时,输入符号的等概能使 $I(X; Y)$ 最大化。

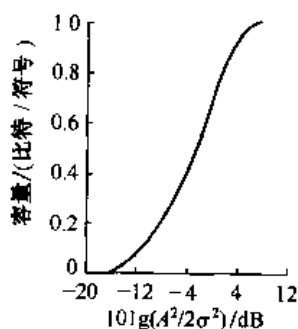


图 7-1-6 AWGN 无记忆信道二元输入时作为 $A^2/2\sigma^2$ 函数的信道容量

一般地,为使 $I(X; Y)$ 最大化以便求取 DMC 容量,输入概率集 $\{P(x_j)\}$ 必须满足的充分和必要条件如下(见习题 7-1):

$$I(x_j; Y) = C \quad \text{对于所有满足 } P(x_j) > 0 \text{ 的 } j$$

$$I(x_j; Y) \leq C \quad \text{对于所有满足 } P(x_j) = 0 \text{ 的 } j \quad (7-1-21)$$

此处 C 是信道容量,且

$$I(x_j; Y) = \sum_{i=0}^{Q-1} P(y_i | x_j) \log \frac{P(y_i | x_j)}{P(y_i)} \quad (7-1-22)$$

通常,核对输入符号的等概集是否满足条件式(7-1-21)相对容易。假如不满足,必须找出一个能满足条件式(7-1-21)的非等概集 $\{P(x_j)\}$ 。

下面考虑一个受加性高斯白噪声干扰的带限波形信道,该信道每单位时间的信道容量由香农(1948年)定义为

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \max_{p(x)} \frac{1}{T} I(X; Y) \quad (7-1-23)$$

式中的平均互信息 $I(X; Y)$ 由式(3-2-17)确定。换一种方法,分别利用采样值,或者利用 $y(t)$ 、 $x(t)$ 和 $n(t)$ 级数展开式的系数 $\{y_i\}$ 、 $\{x_i\}$ 和 $\{n_i\}$ 计算 $X_N = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ 和 $Y_N = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ 之间的平均互信息,这里的 $N = 2WT$, $y_i = x_i + n_i$, $P(y_i | x_j)$ 由式(7-1-12)确定。AWGN 信道 X_N 和 Y_N 之间的平均互信息是

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}_N; \mathbf{Y}_N) &= \int_{\mathbf{x}_N} \cdots \int_{\mathbf{y}_N} \cdots \int p(\mathbf{y}_N | \mathbf{x}_N) p(\mathbf{x}_N) \log \frac{p(\mathbf{y}_N | \mathbf{x}_N)}{p(\mathbf{y}_N)} d\mathbf{x}_N d\mathbf{y}_N \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(y_i | x_i) p(x_i) \log \frac{p(y_i | x_i)}{p(y_i)} dy_i dx_i \end{aligned} \quad (7-1-24)$$

式中

$$p(y_i | x_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(y_i - x_i)^2 / N_0} \quad (7-1-25)$$

当 $\{x_i\}$ 是统计独立且零均值的高斯随机变量时,对于输入的 PDF 值 $p(x_i)$, $I(X; Y)$ 的最大值可求,即

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-x_i^2 / 2\sigma_x^2} \quad (7-1-26)$$

式中, σ_x^2 是各 x_i 的方差。

由式(7-1-24)可得

$$\begin{aligned} \max_{p(x)} I(\mathbf{X}_N; \mathbf{Y}_N) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2\sigma_x^2}{N_0} \right) \\ &= \frac{1}{2} N \log \left(1 + \frac{2\sigma_x^2}{N_0} \right) \\ &= WT \log \left(1 + \frac{2\sigma_x^2}{N_0} \right) \end{aligned} \quad (7-1-27)$$

假如对 $x(t)$ 的平均功率加以限制,即

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T E[x^2(t)] dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N E(x_i^2) = \frac{N\sigma_x^2}{T} \quad (7-1-28)$$

因此,

$$\sigma_x^2 = \frac{TP_{av}}{N} = \frac{P_{av}}{2W} \quad (7-1-29)$$

将此结果代入式(7-1-27)中的 σ_x^2 , 得

$$\max_{p(x)} I(\mathbf{X}_N; \mathbf{Y}_N) = WT \log \left(1 + \frac{P_{av}}{WN_0} \right) \quad (7-1-30)$$

最后,将式(7-1-30)的结果除以 T , 可得单位时间的信道容量,即

$$C = W \log \left(1 + \frac{P_{av}}{WN_0} \right) \quad (7-1-31)$$

这就是带限 AWGN 波形信道在带限及平均功率受限的输入条件下的信道容量的基本公式, 它最早由香农推导出来(1948 年)。

以 b/s 为单位, 对带宽 W 归一化的容量曲线如图 7-1-7 所示, 图中将容量作为信号功率 P_{av} 与噪声功率 WN_0 之比的函数。注意, 容量随着 SNR 的增加而单调增加。因此, 对于一个固定的带宽, 波形信道的容量随着传输信号功率的增大而增加。另一方面, 如果 P_{av} 固定, 容量随着带宽的增加而增加。图 7-1-8 所示为 C 随 W 变化的曲线。注意, 当 W 趋于无穷大时, 信道容量趋于一个渐近值

$$C_{\infty} = \frac{P_{av}}{N_0} \log_2 e = \frac{P_{av}}{N_0 \ln 2} \text{ (b/s)} \quad (7-1-32)$$

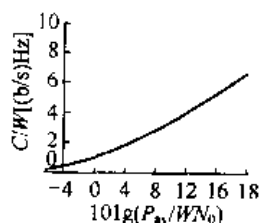


图 7-1-7 带限 AWGN 信道中, 作为 SNR 函数的归一化信道容量

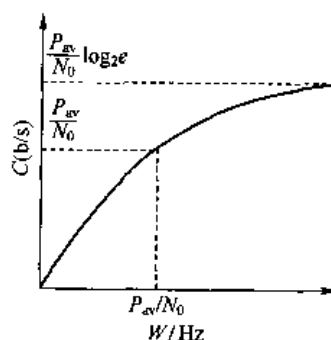


图 7-1-8 平均传输功率固定时信道容量作为带宽的函数

把归一化信道容量 C/W 表示成每比特信噪比的函数, 由于 P_{av} 代表平均传输功率, 而 C 是 b/s 之比值, 可得

$$P_{av} = C \mathcal{E}_b \quad (7-1-33)$$

式中, \mathcal{E}_b 是每比特的能量。于是, 式(7-1-31)可表示为

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{C}{W} \frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \right) \quad (7-1-34)$$

结果是

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} = \frac{2^{C/W} - 1}{C/W} \quad (7-1-35)$$

当 $C/W = 1$ 时, $\mathcal{E}_b/N_0 = 1$ (0 dB)。当 $C/W \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \approx \frac{2^{C/W}}{C/W} \approx \exp \left(\frac{C}{W} \ln 2 - \ln \frac{C}{W} \right) \quad (7-1-36)$$

所以, 当 $C/W \rightarrow \infty$ 时, \mathcal{E}_b/N_0 呈指数增加。另一方面, 当 $C/W \rightarrow 0$ 时

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} = \lim_{C/W \rightarrow 0} \frac{2^{C/W} - 1}{C/W} = \ln 2 \quad (7-1-37)$$

其值是 -1.6 dB。 C/W 随 \mathcal{E}_b/N_0 变化的曲线如图 5-2-17 所示。

至此, 我们已推导了 3 种重要信道模型的信道容量。第一种是离散输入、离散输出信道, BSC 是它的一个特例。第二种是离散输入、连续输出、无记忆加性高斯白噪声信道。可以利用这两种信道模型构成标准平台, 用以衡量数字通信系统分别在硬、软判决译码时的编码性能。

第三种信道模型着重解决波形信道的信道容量问题(以 b/s 为单位)。在这种信道中,假设信道带宽受限、信号受到加性高斯噪声的损伤,且发送器的平均功率受限。在这些条件的约束下,可推导出式(7-1-31)。

上述信道容量公式的意义是为了在噪声信道中可靠通信,用它来确定传输速率的上限值。信道容量所能提供的基本速率由香农在 1948 年提出的噪声信道编码定理给出。

噪声信道编码定理

只要传输速率 $R < C$, 总存在一种信道码(及解码器), 以所要求的任意小的差错概率实现可靠的通信, 这里的 C 指信道容量。反之, 如果 $R > C$, 不可能有任何一种编码能使差错概率趋近于零。

下一节讨论在上述加性噪声信道模型中编码的优点, 并以信道容量为基础研究编码性能。

7.1.3 以正交信号获取信道容量

5.2 节利用简单的联合边界证明了对于正交信号, 通过增加波形数 M 可使差错概率任意小, 只要 $\mathcal{E}_b/N_0 > 2 \ln 2$ 。我们也指出, 用简单联合边界并不能得到每比特 SNR 的最小下边界, 问题在于 $Q(x)$ 中引用的上边界在 x 值很小时只是一个松散的边界。

换一条途径, 可以在 $Q(x)$ 中根据 x 值的大小采用两个不同的上边界。下面以式(5-2-21)为起点推导, 我们看到

$$1 - [1 - Q(y)]^{M-1} \leq (M-1)Q(y) < Me^{-y^2/2} \quad (7-1-38)$$

这仅是一个联合边界, 当 y 值较大即 $y > y_0$ 时, 这个边界比较紧密, 这里的 y_0 取决于 M 。当 y 较小且 M 较大时, 联合边界可以超过一个单位量。由于对于任何 y 都有

$$1 - [1 - Q(y)]^{M-1} \leq 1 \quad (7-1-39)$$

在 $y < y_0$ 时利用此边界, 因为这时它比联合边界紧密。这样, 式(5-2-21)的上边界可写为

$$P_M < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_0} e^{-(y\sqrt{2\gamma})^2/2} dy + \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-(y\sqrt{2\gamma})^2/2} dy \quad (7-1-40)$$

使上边界最小化的 y_0 值, 可以通过对式(7-1-40)的右边取导并令导数为零得出。容易证明, 其解为

$$e^{y_0^2/2} = M \quad (7-1-41)$$

或等效于

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{2 \ln M} = \sqrt{2 \ln 2 \log_2 M} \\ &= \sqrt{2 k \ln 2} \end{aligned} \quad (7-1-42)$$

确定了 y_0 后, 计算式(7-1-40)积分的指数上边界。对于第一个积分, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_0} e^{-(y\sqrt{2\gamma})^2/2} dy &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-(\sqrt{2\gamma} - y_0)/\sqrt{2}} e^{-x^2} dx \\ &= Q(\sqrt{2\gamma} - y_0) \quad (y_0 \leq \sqrt{2\gamma}) \\ &< e^{-(\sqrt{2\gamma} - y_0)^2/2} \quad (y_0 \leq \sqrt{2\gamma}) \end{aligned} \quad (7-1-43)$$

第二个积分的上边界是

$$\frac{M}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{-(y-\sqrt{2\gamma})^2/2} dy = \frac{M}{\sqrt{2\pi}} e^{-\gamma/2} \int_{y_0-\sqrt{\gamma/2}}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$< \begin{cases} Me^{-\gamma/2} & (y_0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}) \\ Me^{-\gamma/2} e^{-(y_0-\sqrt{\gamma/2})^2} & (y_0 \geq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}) \end{cases} \quad (7-1-44)$$

将两个积分的边界相结合,且以 $e^{y_0^2/2}$ 代替 M , 可得

$$P_M < \begin{cases} e^{-(\sqrt{2\gamma}-y_0)^2/2} + e^{(y_0^2-\gamma)/2} & (0 \leq y_0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}) \\ e^{-(\sqrt{2\gamma}-y_0)^2/2} + e^{(y_0^2-\gamma)/2} e^{-(y_0-\sqrt{\gamma/2})^2} & (\sqrt{\frac{1}{2}\gamma} \leq y_0 \leq \sqrt{2\gamma}) \end{cases} \quad (7-1-45)$$

在 $0 \leq y_0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}$ 范围内,边界可表示为

$$P_M < e^{(y_0^2-\gamma)/2} (1 + e^{-(y_0-\sqrt{\gamma/2})^2})$$

$$< 2e^{(y_0^2-\gamma)/2} \quad (0 \leq y_0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}\gamma}) \quad (7-1-46)$$

在 $\sqrt{\frac{1}{2}\gamma} \leq y_0 \leq \sqrt{2\gamma}$ 范围内,式(7-1-45)的两项是等同的,因此

$$P_M < 2e^{-(\sqrt{2\gamma}-y_0)^2/2} \quad (\sqrt{\frac{1}{2}\gamma} \leq y_0 \leq \sqrt{2\gamma}) \quad (7-1-47)$$

下面,将 y_0 和 γ 替换。由于 $y_0 = \sqrt{2\ln M} = \sqrt{2k\ln 2}$ 以及 $\gamma = k\gamma_b$, 式(7-1-46)和式(7-1-47)中的边界可以表示为

$$P_M < \begin{cases} 2e^{-k(\gamma_b-2\ln 2)/2} & (\ln M \leq \frac{1}{4}\gamma) \\ 2e^{-k(\sqrt{\gamma_b}-\sqrt{\ln 2})^2} & (\frac{1}{4}\gamma \leq \ln M \leq \gamma) \end{cases} \quad (7-1-48)$$

这里的第一个上边界恰巧与原先提出的联合边界一样,但是当 M 值很大时它很松散。对于大的 M 值,第二个上边界更好。注意,只要 $\gamma_b > \ln 2$, 当 $k \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow \infty$) 时, $P_M \rightarrow 0$ 。然而,当传输速率等于 7.1.2 节所述无限带宽 AWGN 信道的容量时, $\ln 2$ 正是可靠传输所需的每比特信噪比 SNR 的极限值。事实上,如果对式(7-1-46)和式(7-1-47)给出的两个上边界作如下替换

$$y_0 = \sqrt{2k\ln 2} = \sqrt{2RT\ln 2}$$

$$\gamma = \frac{TP_{av}}{N_0} = TC_{\infty}\ln 2 \quad (7-1-49)$$

这里 $C_{\infty} = P_{av}/(N_0 \ln 2)$ 是无限带宽 AWGN 信道的容量,所得结果是

$$P_M < \begin{cases} 2 \cdot 2^{-T(\frac{1}{2}C_{\infty}-R)} & (0 \leq R \leq \frac{1}{4}C_{\infty}) \\ 2 \cdot 2^{-T(\sqrt{C_{\infty}}-\sqrt{R})^2} & (\frac{1}{4}C_{\infty} \leq R \leq C_{\infty}) \end{cases} \quad (7-1-50)$$

这样,就利用 C_{∞} 和信道上的比特速率表达了边界值。第一个上边界适用于速率低于

$C_\infty/4$ 的情况,第二个边界在速率为 $C_\infty \sim C_\infty/4$ 范围内比第一个边界更紧。显然,若使 $T \rightarrow \infty$ (R 固定时 $M \rightarrow \infty$), 差错概率可以任意小,只要 $R < C_\infty = P_{av}/(N_0 \ln 2)$ 。另外,当速率 $R < C_\infty$ 且 $M \rightarrow \infty$ 时,正交波形集能达到信道容量的边界。

7.1.4 信道可靠性函数

式(7-1-50)给出了无限带宽 AWGN 信道上的 M 元正交信号差错概率的指数边界,它可以表示为

$$P_M < 2 \cdot 2^{-TE(R)} \quad (7-1-51)$$

式(7-1-51)中的指数因子

$$E(R) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_\infty - R & \left(0 \leq R \leq \frac{1}{4}C_\infty\right) \\ (\sqrt{C_\infty} - \sqrt{R})^2 & \left(\frac{1}{4}C_\infty \leq R \leq C_\infty\right) \end{cases} \quad (7-1-52)$$

称为无限带宽 AWGN 信道的信道可靠性函数。 $E(R)/C_\infty$ 曲线如图 7-1-9 所示,图中的另一条曲线是根据式(5-2-27)画出的 P_M 联合边界的指数因子,可以表示为

$$P_M \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-T(\frac{1}{2}C_\infty - R)} \quad (0 \leq R \leq \frac{1}{2}C_\infty) \quad (7-1-53)$$

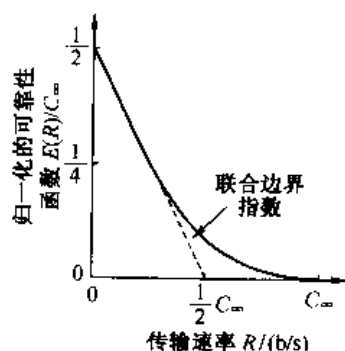


图 7-1-9 无限带宽 AWGN 信道的信道可靠性函数

显然,由于联合边界的松弛性,式(7-1-53)中的指数因子并不像 $E(R)$ 那样紧密。

加拉杰 1965 年已证明:式(7-1-51)和式(7-1-52)给出的边界是按指数规律收紧的。这表明,不存在另一个可靠性函数,如 $E_1(R)$,对于任何 R 都满足条件 $E_1(R) > E(R)$,因此差错概率被上下边界限制于

$$K_1 2^{-TE(R)} \leq P_M \leq K_2 2^{-TE(R)} \quad (7-1-54)$$

式中的常数与 T 的关系不大,也就是说,它们仅随 T 缓慢变化。

由于在 M 值较大时,正交信号提供的性能基本上与最优单纯信号相同,所以式(7-1-54)的下边界适用于任意信号集。因此,式(7-1-52)给出的可靠性函数 $E(R)$ 决定了数字信号在无限带宽 AWGN 信道传输时,差错概率呈指数变化。

当 $R < C_\infty$ 且信号数较为适中时,尽管增加正交、双正交或单纯信号的数目可以使差错概率任意小,但在实际取得的性能和利用信道容量公式算出的最高可获取性能之间仍然存在很大差距。比如,由图 5-2-17 可知,采用相干检测的 $M=16$ 正交信号需要约每比特 7.5 dB SNR 才能获得 $P_e = 10^{-5}$ 的差错概率。相比之下,信道容量公式指出,在 $C/W=0.5$ 条件下,SNR 为 -0.8 dB 时就可能获取可靠的传输。这表示两者间尚存在 8.3 dB/比特的差距,该差距是寻找更有效的信号波形的源动力。本章和第 8 章将证明:编码的波形能可观地减小这个差距。

图 5-2-17 所示的 $R/W > 1$ 的带限信道也存在类似的差距。在这个领域,必须更加巧妙地编码才能改善性能,因为不能像功率受限的情况那样扩展带宽。对于在要求有较高边带效率的通信中如何应用编码技术的问题,将在第 8 章讨论。

7.2 随机选择的码

在高效的信息传输中,编码调制的设计有两条基本的途径。一条是代数途径,主要是运用编、解码技术来设计特定种类的码,比如循环分组码、卷积码等。第二条途径是采用概率方法,分析一般编码信号的性能。在具有一定特性的信道上通信时,利用这条途径可求出差错概率的上下限边界。

本节采用概率方法研究编码调制。第8章将讨论基于分组码和卷积码的代数途径。

7.2.1 基于 M 元二进制编码信号的随机编码

考虑一个包含 M 个编码信号波形的集合,它由如下形式的 n 维二进制码字构成

$$C_i = [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}] \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (7-2-1)$$

式中, $c_{ij} = 0$ 或 1 。码字的每一比特映射到一个二进制 PSK 波形里,这样,与码字 C_i 对应的信号波形为

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^n s_{ij} f_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (7-2-2)$$

式中,

$$s_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\mathcal{E}_c} & (\text{当 } c_{ij} = 1 \text{ 时}) \\ -\sqrt{\mathcal{E}_c} & (\text{当 } c_{ij} = 0 \text{ 时}) \end{cases} \quad (7-2-3)$$

\mathcal{E}_c 是每个码字比特的能量。于是,每个波形 $s_i(t)$ 与一个 n 维矢量相对应

$$s_i = [s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in}] \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (7-2-4)$$

该 n 维矢量又与 n 维空间中一个超立方体的某个顶点相对应。

假设进入编码器的信息速率是 R b/s,一次将一个 k 比特块映射为 M 个编码波形之一。因此, $k = RT$, 共需要 $M = 2^k = 2^{RT}$ 种编码波形信号。为了方便起见,定义参数 D 为

$$D = n/T \quad \text{维/s} \quad (7-2-5)$$

因此, $n = DT$ 也代表信号空间的维数。

超立方体总共有 $2^n = 2^{DT}$ 个顶点,在它们中间, $M = 2^{RT}$ 个编码波形实际被用来传送信息。如果附加 $D > R$ 这样一个条件,超立方体中用做编码波形信号的顶点数与顶点总数之比为

$$F = \frac{2^k}{2^n} = \frac{2^{RT}}{2^{DT}} = 2^{-(D-R)T} \quad (7-2-6)$$

显然,如果 $D > R$, 当 $T \rightarrow \infty$ 时 $F \rightarrow 0$ 。

我们提出一个问题:能否在全部 $2^n = 2^{DT}$ 个可用的顶点中选出一个含 $M = 2^{RT}$ 个顶点的子集,使得当 $T \rightarrow \infty$ (或等效地 $n \rightarrow \infty$) 时差错概率 $P \rightarrow 0$? 由于当 $T \rightarrow \infty$ 时,所用顶点的比例 F 也趋于零,所以选出具有最小距离的 M 个信号波形应该是可能的。最小距离随着 $T \rightarrow \infty$ 而增大,从而使 $P_e \rightarrow 0$ 。

换一种方法,也可以不寻找某个 M 编码波形的集合,计算其差错概率,而是从总体上考虑从超立方体的 2^n 个有效顶点中选取 M 个的方法,每种选择都构成一种码,共有 $(2^n)^M$ 种不同的选法,构成一个码集。与 2^{nM} 种不同选法中的每一种码相关,都存在一个由调制器、信道、

解调器组成的通信系统,该系统对于已选取的 M 个波形的集合而言是最优的。这样,存在 2^{nM} 个通信系统,每个适用于 M 编码波形的一种选择,如图 7-2-1 所示。每个通信系统在差错概率性能上各不相同。

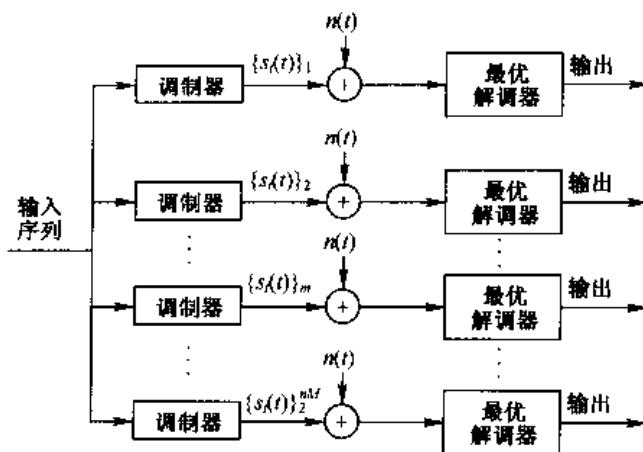


图 7-2-1 2^{nM} 个通信系统的集合,每个系统使用一组来自 2^{nM} 个候选项,含 M 个信号的不同信号集

假如 M 个编码波形是随机地从 2^{nM} 个候选码组成的码集中选取的,那么码集之中的第 m 个码(记做 $\{s_i\}_m$)被随机选中的概率是

$$P(\{s_i\}_m) = 2^{-nM} \quad (7-2-7)$$

与这种编码信号的选择相对应的条件差错概率是 $P_e(\{s_i\}_m)$ 。于是,在整个码集上的平均差错概率是

$$\begin{aligned} \bar{P}_e &= \sum_{m=1}^{2^{nM}} P_e(\{s_i\}_m) P(\{s_i\}_m) \\ &= 2^{-nM} \sum_{m=1}^{2^{nM}} P_e(\{s_i\}_m) \end{aligned} \quad (7-2-8)$$

式中, \bar{P}_e 的上横线代表对于码集的平均。

显然,某些码的选择会导致较大的差错概率。举例来说,如果把所有 M 个 k 比特序列指定到超立方体的同一个顶点,必将导致大的差错概率。在这种情况下, $P_e(\{s_i\}_m) > \bar{P}_e$ 。但是,某些码的选择会导致 $P_e(\{s_i\}_m) < \bar{P}_e$ 。如果算出了 \bar{P}_e 的上边界,该边界对于 $P_e(\{s_i\}_m) < \bar{P}_e$ 的码照样成立。此外,如果在 $T \rightarrow \infty$ 时 $\bar{P}_e \rightarrow 0$,那么在 $T \rightarrow \infty$ 时必有 $P(\{s_i\}_m) \rightarrow 0$ 。

为了计算 \bar{P}_e 的上边界,考虑一个 k 比特消息 $\mathbf{X}_k \equiv ([x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_k])$, 其中 $x_j = 0$ 或 $1 (j = 1, 2, \dots, k)$ 。条件差错概率在整个码集上的平均是

$$P_e(\overline{\mathbf{X}_k}) = \sum_{\text{所有码}} P_e(\mathbf{X}_k, \{s_i\}_m) P(\{s_i\}_m) \quad (7-2-9)$$

式中, $P_e(\mathbf{X}_k, \{s_i\}_m)$ 是给定 k 比特消息 \mathbf{X}_k 时的条件差错概率,它利用 $\{s_i\}_m$ 码传送。对于第 m 个码,差错概率 $P_e(\mathbf{X}_k, \{s_i\}_m)$ 的上边界是

$$P_e(\mathbf{X}_k, \{s_i\}_m) \leq \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M P_{2m}(s_l, s_k) \quad (7-2-10)$$

式中, $P_{2m}(s_l, s_k)$ 是一个二进制通信系统利用信号矢量 s_l 和 s_k 传输两个等概的 k 比特消息之一的差错概率, 因此

$$\overline{P_e(\mathbf{X}_k)} \leq \sum_{\text{所有码}} P_e(\{s_i\}_m) \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M P_{2m}(s_l, s_k) \quad (7-2-11)$$

如果交换式(7-2-11)中和号的位置, 可得

$$\begin{aligned} \overline{P_e(\mathbf{X}_k)} &\leq \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M \left[\sum_{\text{所有码}} P_e(\{s_i\}_m) P_{2m}(s_l, s_k) \right] \\ &\leq \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M \overline{P_{2m}(s_l, s_k)} \end{aligned} \quad (7-2-12)$$

式中, $\overline{P_{2m}(s_l, s_k)}$ 表示 $P_{2m}(s_l, s_k)$ 在 2^{nM} 个码或 2^{nM} 个通信系统上的集合平均。

对于加性高斯白噪声信道, 二进制差错概率 $P_{2m}(s_l, s_k)$ 是

$$P_{2m}(s_l, s_k) = Q \left[\sqrt{\frac{d_{lk}^2}{2N_0}} \right] \quad (7-2-13)$$

式中, $d_{lk}^2 = \|s_l - s_k\|^2$ 。如果 s_l 和 s_k 在 d 坐标上不同,

$$d_{lk}^2 = \|s_l - s_k\|^2 = \sum_{j=1}^n (s_{lj} - s_{kj})^2 = d(2\sqrt{\mathcal{E}_c})^2 = 4d\mathcal{E}_c \quad (7-2-14)$$

那么

$$P_{2m}(s_l, s_k) = Q \left[\sqrt{\frac{2d\mathcal{E}_c}{N_0}} \right] \quad (7-2-15)$$

现在就可以在码集上求 $P_{2m}(s_l, s_k)$ 的平均了。由于所有的码等概, 信号矢量 s_l 以相等的概率对应到超立方体的 2^n 个可能的顶点上, 并与信号矢量 s_k 统计独立。因此, $P(s_{li} = s_{ki}) = 1/2$ 以及 $P(s_{li} \neq s_{ki}) = 1/2$, 对于 i 的所有取值 $i=1, 2, \dots, n$ 都是如此, s_l 和 s_k 有 d 位不同的概率是

$$P(d) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{d} \quad (7-2-16)$$

因此, $P_{2m}(s_l, s_k)$ 在码集上的数学期望值可表示为

$$\begin{aligned} \overline{P_{2m}(s_l, s_k)} &= \sum_{d=0}^n P(d) Q \left[\sqrt{\frac{2d\mathcal{E}_c}{N_0}} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{d=0}^n \binom{n}{d} Q \left[\sqrt{\frac{2d\mathcal{E}_c}{N_0}} \right] \end{aligned} \quad (7-2-17)$$

如果取 Q 函数的上限为

$$Q \left[\sqrt{\frac{2d\mathcal{E}_c}{N_0}} \right] < e^{-d\mathcal{E}_c/N_0}$$

那么式(7-2-17)的结果可简化为

$$\begin{aligned} \overline{P_{2m}(s_l, s_k)} &\leq 2^{-n} \sum_{d=0}^n \binom{n}{d} e^{-d\mathcal{E}_c/N_0} \\ &\leq 2^{-n} (1 + e^{-\mathcal{E}_c/N_0})^n \\ &\leq \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\mathcal{E}_c/N_0}) \right]^n \end{aligned} \quad (7-2-18)$$

可以看到,式(7-2-18)等号的右边与下标 l 及 k 无关,因此把式(7-2-18)的边界代入式(7-2-12),可得

$$\begin{aligned}\overline{P_e}(\mathbf{X}_k) &\leq \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M \overline{P_2(\mathbf{s}_l, \mathbf{s}_k)} = (M-1) \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\epsilon_c/N_0}) \right]^n \\ &< M \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\epsilon_c/N_0}) \right]^n\end{aligned}$$

最后,对所有可能的 k 比特信息序列求平均 $\overline{P_e}(\mathbf{X}_k)$, 可得到无条件平均差错概率 $\overline{P_e}$, 所以

$$\begin{aligned}\overline{P_e} = \sum_k \overline{P_e}(\mathbf{X}_k) P(\mathbf{X}_k) &< M \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\epsilon_c/N_0}) \right]^n \sum_k P(\mathbf{X}_k) \\ &< M \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-\epsilon_c/N_0}) \right]^n\end{aligned}\quad (7-2-19)$$

这个结果可以用更简洁的形式表达,即首先定义一个参数 R_0 , 叫做截止速率,单位是比特/维 (bit/dimension)

$$\begin{aligned}R_0 &= \log_2 \frac{2}{1 + e^{-\epsilon_c/N_0}} \\ &= 1 - \log_2 (1 + e^{-\epsilon_c/N_0}), \text{双极性信号}\end{aligned}\quad (7-2-20)$$

于是,式(7-2-19)为

$$\overline{P_e} < M 2^{-nR_0} = 2^{RT} 2^{-nR_0}\quad (7-2-21)$$

由于 $n = DT$, 式(7-2-21)可表示为

$$\overline{P_e} < 2^{-T(DR_0 - R)}\quad (7-2-22)$$

参数 R_0 作为 ϵ_c/N_0 的函数如图 7-2-2 所示,可以看到, $0 \leq R_0 \leq 1$ 。只要信息速率 $R < DR_0$, $T \rightarrow \infty$ 时 $\overline{P_e} \rightarrow 0$ 。

换一种方法,式(7-2-21)可表示为

$$\overline{P_e} < 2^{-n(R_0 - R/D)}\quad (7-2-23)$$

比值 R/D 的单位也是比特/维,定义为

$$R_c = \frac{R}{D} = \frac{R}{n/T} = \frac{RT}{n} = \frac{k}{n}\quad (7-2-24)$$

因此, R_c 是码率,有

$$\overline{P_e} < 2^{-n(R_0 - R_c)}\quad (7-2-25)$$

据此得到结论:在 $R_c < R_0$ 的条件下,当码块长度 $n \rightarrow \infty$ 时,平均差错概率 $\overline{P_e} \rightarrow 0$ 。由于 $n \rightarrow \infty$ 时差错概率的平均值可以任意小,因此在 2^{nM} 个码的集合里一定存在若干个码,它们的差错概率不大于 $\overline{P_e}$ 。

从以上平均差错概率的推导中得出了“好码必定存在”这一结论。尽管通常不会随机地选择一个码,但是如能想一想“随机选择的码会不会是好码”这样一个问题也很有用。事实上,可以很容易地证明:在码集中有很多好码。首先,我们注意到, $\overline{P_e}$ 是所有码的差错概率的集合平均,而所有这些概率显然都是正数值。如果随机地选择一个码,其差错概率 $P_e > \alpha \overline{P_e}$ 的概率应小于 $1/\alpha$ 。结果,差错概率超过 $10 \overline{P_e}$ 的码的数量不会多于 10%。同理,差错概率超过 $100 \overline{P_e}$ 的码不会多于 1%。

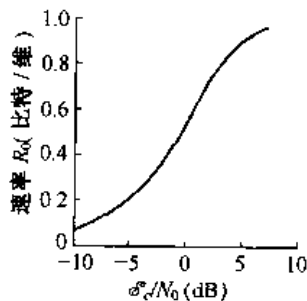


图 7-2-2 作为每维 SNR(dB)函数的截止速率 R_0

应该强调的是,差错概率超过 \bar{P}_e 的码不一定是坏码。例如,在 $R_c < R_0$ 的条件下,如果一个码长 n_0 的码能达到平均差错概率 $\bar{P}_e < 10^{-10}$,选择一个差错概率 $1000 \bar{P}_e = 10^{-7}$ 的码。为了弥补差错概率的劣化,把码长从 n_0 增加到 $n = 10 n_0 / 7$,这样,通过适度增加码长,可得到 $\bar{P}_e < 10^{-10}$ 的码。总之,好码是很多的,即使用随机选择的方法也可以容易地找到。

为了从每比特信噪比 γ_b 的角度解释式(7-2-25)的平均差错概率,把每信号波形的能量表示为

$$\mathcal{E} = n \mathcal{E}_c = k \mathcal{E}_b \quad (7-2-26)$$

因此, $n = k \mathcal{E}_b / \mathcal{E}_c$ 。注意, $R_c \mathcal{E}_b / \mathcal{E}_c = 1$ 。于是,式(7-2-25)可表示为

$$\bar{P}_e < 2^{-k(\gamma_b/\gamma_0)} \quad (7-2-27)$$

这里 γ_0 是一个归一化 SNR 参数,定义为

$$\gamma_0 = \frac{R_c}{R_0} \gamma_b = \frac{R_c \gamma_b}{1 - \log_2(1 + e^{-R_c \gamma_b})} \quad (7-2-28)$$

因此, $k \rightarrow \infty$ 时 $\bar{P}_e \rightarrow 0$,只要每比特信噪比 $\gamma_b > \gamma_0$ 。

参数 γ_0 作为 $R_c \gamma_b$ 函数的曲线图如图 7-2-3 所示。注意,当 $R_c \gamma_b \rightarrow 0$ 时, $\gamma_0 \rightarrow 2 \ln 2$ 。只要信号维数足够大,以致 $\gamma_0 \approx 2 \ln 2$, M 元二进码信号的差错概率与用 M 元正交信号联合得出的差错概率相当。

式(7-2-5)引入的信号维数参数 D 与传输这些信号所需的信道带宽成正比。抽样定理表明带宽为 W 的信号可用以每秒 $2W$ 频率抽样的信号样值表示,所以在长度 T 的时间间隔里,有 $n = 2WT$ 个样值,或等效地说,有 n 个自由度(维数)。因此, D 可与 $2W$ 等同。

本节讨论的二进制编码信号在每维信噪比较小时(如 $\mathcal{E}_c/N_0 < 10$)是很适用的。但当 $\mathcal{E}_c/N_0 > 10$ 时, R_0 在 1 比特/维处就饱和了。由于码率被限制在小于 R_0 处,所以当 $\mathcal{E}_c/N_0 > 10$ 时,二进制编码信号很低效。在此情况下,采用非二进制编码信号来增加每维的比特数。举例来说,通过把每个码元映射到 q 个可能的幅度电平之一(如 PAM),可用非二进制码构成多幅度电平的编码信号集。下面将详细讨论。

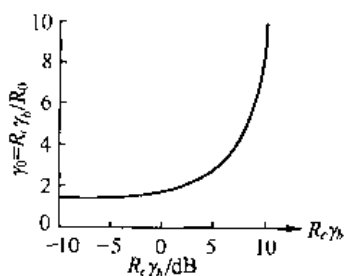


图 7-2-3 二进制双极性信号的每比特信噪比 γ_b 的下限

7.2.2 基于 M 元多幅度信号的随机编码

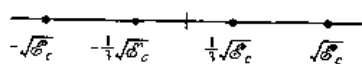


图 7-2-4 由 4 个电平组成的信号集

如果不采用二进制编码信号,也可以采用式(7-2-1)所示形式的码字进行非二进制编码,该码的码元 C_{ij} 选自集合 $\{0, 1, \dots, q-1\}$,每个码元映射到 q 个可能的幅度电平之一。这样,可构成对应于式(7-2-4)中 n 维矢量 $\{s_{ij}\}$ 的信号,该式中的元素 $\{s_{ij}\}$ 选自有 q 个可能值的多幅度电平集。于是有 q^n 个可能的信号,从中选取 $M = 2^{RT}$ 个信号传输 k 比特信息块。与码元 $\{0, 1, \dots, q-1\}$ 对应的 q 个幅度可表示为 $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$,假设它们是按照某种指定的概率 $\{p_i\}$ 选取的。假设幅值在 $[-\sqrt{\mathcal{E}_c}, \sqrt{\mathcal{E}_c}]$ 区间是等间隔分布的,例如,图 7-2-4 表示了 $q=4$ 时的幅值。一般情况下,相邻电平的间距

是 $2/\sqrt{\mathcal{E}_c}/(q-1)$ 。这样的设定不仅可保证每个元素 s_{ij} 的能量峰值不超过 $\sqrt{\mathcal{E}_c}$, 而且每个码字的平均能量受限以满足条件

$$|s_i|^2 < n\mathcal{E}_c \quad (7-2-29)$$

重复以上在 AWGN 信道随机选码的推导, 平均差错概率的上限求得为

$$\overline{P_e} < M2^{-nR_0} = 2^{RT}2^{-nR_0} = 2^{-n(R_0 - R/D)} \quad (7-2-30)$$

这里 R_0 为

$$R_0 = -\log_2 \left(\sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q p_l p_m e^{-d_{lm}^2/4N_0} \right) \quad (7-2-31)$$

$$d_{lm} = |a_l - a_m| \quad (l, m = 1, 2, \dots, q) \quad (7-2-32)$$

在所有幅度电平等概发生的特殊情况下, $p_l = p_m = 1/q$, 式(7-2-31)可简化为

$$R_0 = \log_2 \left(\frac{1}{q^2} \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q e^{-d_{lm}^2/4N_0} \right) \quad (7-2-33)$$

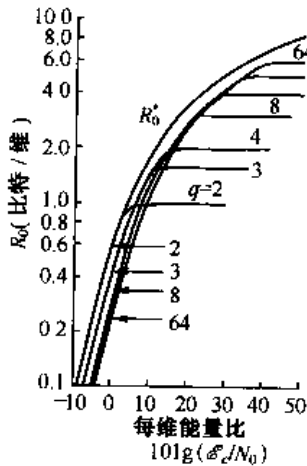
例如, 当 $q=2, a_1 = -\sqrt{\mathcal{E}_c}, a_2 = \sqrt{\mathcal{E}_c}$ 时, $d_{11} = d_{22} = 0, d_{12} = d_{21} = 2\sqrt{\mathcal{E}_c}$, 因此

$$R_0 = \log_2 \frac{2}{1 + e^{-\mathcal{E}_c/N_0}} \quad (q=2)$$

这与前述的结论相符。

当 $q=4, a_1 = -\sqrt{\mathcal{E}_c}, a_2 = -\sqrt{\mathcal{E}_c}/3, a_3 = \sqrt{\mathcal{E}_c}/3$ 及 $a_4 = \sqrt{\mathcal{E}_c}$ 时, 对于 $m=1, 2, 3, 4$, $d_{11} = 0, d_{12} = d_{23} = d_{34} = d_{21} = d_{32} = d_{43} = 2\sqrt{\mathcal{E}_c}/3, d_{13} = d_{31} = d_{24} = d_{42} = 4\sqrt{\mathcal{E}_c}/3$ 以及 $d_{14} = d_{41} = 2\sqrt{\mathcal{E}_c}$ 。因此,

$$R_0 = \log_2 \frac{8}{2 + 3e^{-\mathcal{E}_c/9N_0} + 2e^{-4\mathcal{E}_c/9N_0} + e^{-\mathcal{E}_c/N_0}} \quad (q=4) \quad (7-2-34)$$



显然, 当 \mathcal{E}_c/N_0 增大时, R_0 的饱和点为 2 比特/维。

在幅值等间隔且等概率的条件下, R_0 作为 \mathcal{E}_c/N_0 函数的关系曲线如图 7-2-5 所示, 图中 q 分别等于 2, 3, 4, 8, 16, 32 和 64。注意, 此时的饱和点位于 $\log_2 q$ 比特/维。在高 SNR 情况下, 只要 $R < DR_0 = 2WR_0$ b/s, 必有 $n \rightarrow \infty$ 时 $\overline{P_e} \rightarrow 0$ 。

如果去掉对各元素峰值能量的限制, 保留对各码字平均能量的限制, 如式(7-2-29), 有可能得到每维比特数的一个较大的上边界。在这种情况下, 香农 (1959 年) 获得的结果是

$$R_0^* = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\mathcal{E}_c}{N_0} - \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{E}_c}{N_0} \right)^2} \right] \log_2 e + \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{E}_c}{N_0} \right)^2} \right) \right] \quad (7-2-35)$$

图 7-2-5 等间隔 q 电平幅度调制且等概率 $P_c = 1/q$ 条件下的截止速率 R_0 (摘自 Principles of Communication Engineering, 由 J.M. Wozencraft 和 I.M. Jacobs © 1965 by John Wiley and Sons, Inc. 经出版社允许后再次印刷)

R_0^* 作为每维信噪比 SNR 函数的变化曲线如图 7-2-5 所示。显然,选择等间隔且等概率的幅度电平使所得的 R_0 次优。然而,这种编码信号在实践中易于产生且易于实现,这是它们的一个重要优点。

7.2.3 R_0^* 与 AWGN 信道容量的比较

对输入信号有平均功率限制且带限的加性高斯白噪声信道的信道容量在 7.1.2 节中推导出,为

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_{av}}{W/N_0} \right) \quad \text{b/s} \quad (7-2-36)$$

这里 P_{av} 是输入信号的平均功率, W 是信道带宽。用比特/维 (bit/dimension) 表示信道容量和能量/维 (energy/dimension) 表示平均功率将很有意义。令 $D = 2W$ 及

$$E_c = \frac{E}{n} = \frac{P_{av}T}{n}$$

有

$$P_{av} = \frac{n}{T} E_c = D E_c \quad (7-2-37)$$

定义 $C_n = C/2W = C/D$, 将上述关系式代入 W 和 P_{av} , 式(7-2-36)为

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + 2 \frac{E_c}{N_0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 (1 + 2 R_0 \gamma_b) \end{aligned} \quad (7-2-38)$$

将这种归一化容量的表达式与 R_0^* 比较,如图 7-2-6 所示。由于 C_n 是传输速率 R/D 的最终上限,必有 $R_0^* < C_n$ 。对于小的 E_c/N_0 值, R_0^* 和 C_n 之差约为 3 dB。因此,采用随机选择、最佳平均功率限制、多幅值信号得到的速率函数 R_0^* 位于信道容量的 3 dB 范围之内。如要说明当 $R < DC_n = 2WC_n = C$ 时差错概率可以任意小,需用更加复杂的边界估算技术。

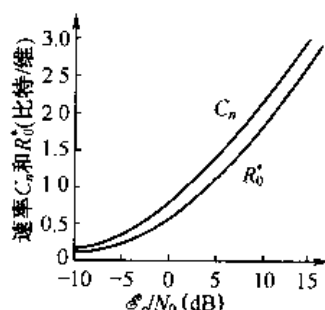


图 7-2-6 截止速率 R_0^* 与 AWGN 信道容量的比较

7.3 基于截止速率的通信系统的设计

在以上的讨论中,我们借助差错概率研究了编码和调制的性能,这当然是一个有意义的系统设计标准。但是在很多情况下,差错概率的计算极为困难,特别是在非线性运行的情况下,比如接收机对信号处理后再量化,或者加性噪声不是高斯分布的。

可以换一种方法,不计算某特定码精确的差错概率,而是利用集平均差错概率来随机地选择码字。假设信道有 q 种可取的输入符号 $\{0, 1, \dots, q-1\}$ 和 Q 种可能的输出符号 $\{0, 1, \dots, Q-1\}$, 用转移概率 $P(i|j)$ 表示输入/出关系特性,这里 $j = 0, 1, \dots, q-1, i = 0, 1, \dots, Q-1$ 且 $Q \geq q$ 。各输入符号的发生概率是 $\{p_j\}$, 假设它们是统计独立的。另外,假设信道噪声在时

间上也是统计独立的,所以加在前后接收符号上的噪声互不相关。在这些条件下,随机选择码字时的集平均差错概率可以利用切尔诺夫(Chernoff)界推导出来(见 Viterbi 和 Omura 的著作,1979 年)。

对于离散无记忆信道,有一般性的结论

$$\overline{P_e} < 2^{-n(R_Q - R/D)} \quad (7-3-1)$$

这里 n 是码块的长度, R 是以 b/s 为单位的信息速率, D 是每秒的维数。 R_Q 是 Q 电平量化器的截止速率, 定义为

$$R_Q = \max_{\{p_i\}} \left\{ -\log_2 \sum_{i=1}^{Q-1} \left[\sum_{j=0}^{q-1} p_j \sqrt{P(i|j)} \right]^2 \right\} \quad (7-3-2)$$

从码设计的角度看, 调制器、波形信道、解调器的组合构成了一个 q 输入、 Q 输出的离散时间信道。转移概率 $P(i|j)$ 取决于信道噪声特性、量化电平数、量化器类型(比如是均匀还是非均匀的)。举例来说, 在二进制 AWGN 信道中, 抽样瞬间相关器的输出可表示为

$$p(y|j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y - m_j)^2/2\sigma^2} \quad (j = 0, 1) \quad (7-3-3)$$

此处 $m_0 = -\sqrt{\mathcal{E}_c}$, $m_1 = \sqrt{\mathcal{E}_c}$, $\sigma^2 = N_0/2$ 。这两个概率分布函数(PDF)如图 7-3-1 所示。图中还示出了量化的方法, 即把一根实轴划分成 5 个子区域, 从这样的划分中可计算出转移概率, 选择划分子区域的最佳门限值, 使得对于任何给定的 Q , R_Q 最大。因此

$$P(i|j) = \int_{r_i} p(y|j) dy \quad (7-3-4)$$

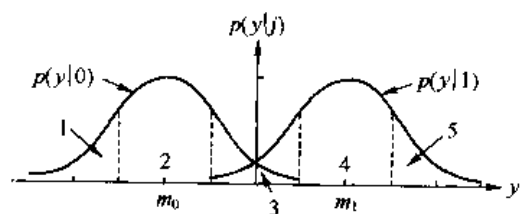


图 7-3-1 解调器输出量化为五电平的例子

式中, $p(i|j)$ 的积分在与转移概率 $P(i|j)$ 对应的区间 r_i 求值。

从 $Q \rightarrow \infty$ 时速率 R_Q 的极限值可得出未量化译码器的截止速率。可以比较直观地看到, 当 $Q \rightarrow \infty$ 时, 式(7-3-2)中的第一个和式(从 $i = 0$ 加到 $i = Q - 1$)为积分, 转移概率可用对应的 PDF 替代。这样, 如用 y 表示 PSK 或 PAM

调制系统中匹配滤波器或者互相关器未量化的输出, 信道看成由 q 个离散输入和一个连续输出 y 组成, 则截止速率为

$$R_0 = \max_{\{p_j\}} \left\{ -\log_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\sum_{j=0}^{q-1} p_j \sqrt{p(y|j)} \right]^2 \right\} \quad (7-3-5)$$

式中 p_j ($0 \leq j \leq q-1$) 是发送第 j 个符号的概率, $p(y|j)$ 是发送第 j 个符号时匹配滤波器或互相关器输出 y 的条件概率密度函数。这是未量化(软判决)译码器所要求的表达式。

可以看到, 当输入信号是二进制 PSK、 $p_0 = p_1 = 1/2$ 且噪声是加性、高斯、白色的时, 式(7-3-5)简化为式(7-2-20)。

式(7-3-5)和式(7-3-2)的通用表达式使我们对基于不同量化电平数的各种接收机的性能有不同的了解。

例 7-3-1 比较 AWGN 信道中当接收机将输出量化成 $Q=2, 4$ 和 8 电平时, 二进制 PSK 输入信号的性能。为了简化解调器输出信号的最优量化问题, 把量化器电平定在 $0, \pm \tau_h, \pm 2\tau_h, \dots, \pm (2^{b-1}-1)\tau_h$, 这里 τ_h 是待选择的量化器步长参数, b 是量化器的比特数。选取 τ_h 的一种很好的策略是选择使运行于码率 R_0 上的所要求的每比特 SNR 值 γ_b 最小化的 τ_h 值。这意味着步长参数必须对所有 SNR 值最优化, 也意味着接收机在具体实现时必须测量 SNR 值。幸好 τ_h 对 SNR 较小的变化不太敏感, 因此有可能针对某个 SNR 标称值取得最优的 τ_h , 固定使用这个 τ_h 值, 就能在该 SNR 标称值上下一个较宽的范围内取得优良的性能。

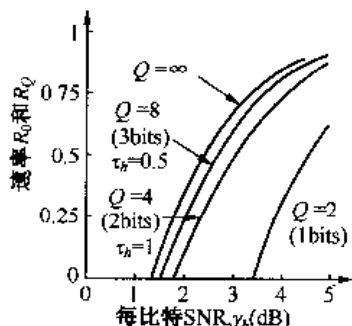


图 7-3-2 AWGN 信道、二进制 PSK 调制、码率 $R=R_0$ 或 $R=R_Q$ 时, 量化对编码的通信系统性能的影响

基于这个方法, 分别令 $b=1$ (硬判决译码)、 $b=2$ 及 $b=3$, 相当于 $Q=2, 4$ 及 8 量化电平, 则式(7-3-2)给出的 R_Q 的表达式可以计算出来, 其结果如图 7-3-2

所示。由求解式(7-3-5)得到的未量化软判决译码时的 R_0 值如图 7-3-2 所示。注意, 步长 $\tau_h=1$ 的 2 比特量化时可获得高于硬判决译码 1.4 dB 的增益, 步长 $\tau_h=0.5, 3$ 比特量化时又可增添 0.4 dB 增益。这样, 利用一个 3 比特量化器, 获得的结果与未量化软判决译码极限值之差在 0.2 dB 以内。显然, 进一步提高量化精度已没有多少增益可得。

在二进制信号 ($q=2$)、硬判决译码 ($Q=2$) 的情况下, 式(7-3-2)给出的截止速率计算公式简化为

$$R_2 = 1 - \log_2[1 + \sqrt{4P(1-P)}] \quad (7-3-6)$$

对于二元 PSK 调制和 AWGN 信道, 差错概率为

$$P = Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{N_0}} \right] = Q(\sqrt{2R_c\gamma_b}) \quad (7-3-7)$$

这里 $\gamma_b = \mathcal{E}_b/N_0$ 。我们可以令式(7-3-6)的 $R_2 = R_c$, 以将式(7-3-7)给定 p 值的 γ_b 代入来解方程。对于任意码率 R_c , 我们把满足方程(7-3-6)的 γ_b 值解释为是在运行速率 R_c 等于截止速率 R_2 时所要求的最小 SNR。

同样, 对于二元 PSK (双极性) 和软判决译码 ($Q=\infty$), 截止速率公式(7-2-20)中可令 $R_0 = R_c$, 由此可解出 γ_b 值。所得结果是

$$\gamma_b = -\frac{1}{R_c} \ln(2^{1-R_c} - 1) \quad (7-3-8)$$

又一次, 对于任意码率 R_c , 我们把满足方程(7-3-8)的 γ_b 值解释为当运行码率等于截止速率 R_0 时每比特所要求的最小 SNR。

图 7-3-3 是硬、软两种判决译码时每维码率与 SNR 的关系曲线。每比特相应的信噪比是 $\gamma_b = (\mathcal{E}_c/N_0)/R_c$ 。我们看到, 对于任意给出的 R_c 值, 硬判决译码和软判决译码每比特所需 SNR 的差值, 在 AWGN 信道中约为 2 dB 左右。

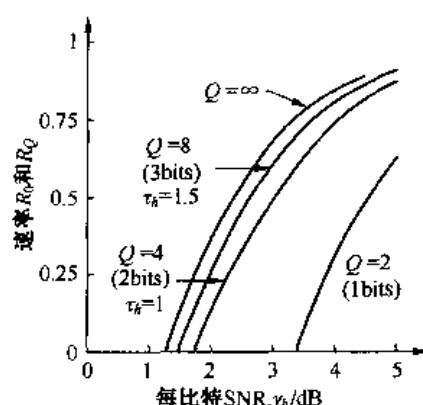


图 7-3-3 R_0 (软判决译码)与 R_2 (硬判决译码)作为每维 SNR 函数的比较

如果一种非二进制码与 M 元 ($M=q$) 信号结合在一起使用, M 个匹配滤波器输出端的接收信号可以用矢量 $\mathbf{y}=[y_1 \ y_2 \cdots y_M]$ 表示。这种 M 输入、 M 输出(未量化)的信道的截止速率是

$$R_0 = \max_{\{p_j\}} \left\{ -\log_2 \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} p_j p_i \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p(\mathbf{y}|j)p(\mathbf{y}|i)} d\mathbf{y} \right\} \quad (7-3-9)$$

这里, $p(\mathbf{y}|j)$ 是发送第 j 个信号时解调器输出矢量 \mathbf{y} 的条件概率密度函数。注意, 式(7-3-9)在形式上类似于式(7-3-5), 不同之处仅在于要做 M 重积分, 因为从解调器出来有 M 个输出。

假设这 M 个信号是正交的, 以致在特定输入信号条件下, 它们是统计独立的。于是,

$$p(\mathbf{y}|j) = p_{s+n}(y_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M-1} p_n(y_i) \quad (7-3-10)$$

式中, $p_{s+n}(y_j)$ 是与传送信号对应的匹配滤波器输出的 PDF, $\{p_n(y_i)\}$ 对应于从其他 $M-1$ 个匹配滤波器输出的、仅有噪声的输出。式(7-3-10)与式(7-3-9)相结合, 可得

$$R_0 = \max_{\{p_j\}} \left\{ -\log_2 \left[\sum_{j=0}^{M-1} p_j^2 + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{M-1} p_i p_j \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy \sqrt{p_{s+n}(y)p_n(y)} \right)^2 \right] \right\} \quad (7-3-11)$$

在输入概率集将 R_0 最大化, 可得 $p_j = 1/M$ ($1 \leq j \leq M$)。式(7-3-11)简化为

$$\begin{aligned} R_0 &= \log_2 \left\{ \frac{M}{1 + (M-1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p_{s+n}(y)p_n(y)} dy \right]^2} \right\} \\ &= \log_2 M - \log_2 \left\{ 1 + (M-1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{p_{s+n}(y)p_n(y)} dy \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (7-3-12)$$

这是 M 元输入、 M 元矢量输出、未量化信道截止速率要求的结果。

对于 M 元正交信号的相位相干检测, 合适的 PDF 是

$$\begin{aligned} P_{s+n}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} \\ P_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (7-3-13)$$

式中 $m = \sqrt{\mathcal{E}}$, $\sigma^2 = N_0/2$ 。将这些关系式代入式(7-3-12), 计算积分值可得

$$R_0 = \log_2 \left[\frac{M}{1 + (M-1)e^{-\mathcal{E}/2N_0}} \right]$$

$$= \log_2 \left[\frac{M}{1 + (M-1)e^{-R_w \gamma_b/2}} \right] \quad (7-3-14)$$

这里 \mathcal{E} 是接收的每波形的能量, R_w 是以比特波形 (bit/waveform) 为单位的速率, $\gamma_b = \mathcal{E}_b/N_0$ 是每比特的 SNR。

必须强调, 速率参数 R_w 已经内嵌在码率 R_c 里。例如, 假定采用二进制编码, $M=2$, 则有 $R_w = R_c$ 。更一般地, 如果用二进制编码, $M=2^\nu$, 那么每个 M 元波形运送 $R_w = \nu R_c$ 个信息比特。注意, 假如二进制编码且 $M=2$, 那么式(7-3-14)简化为

$$R_0 = \log_2 \left(\frac{2}{1 + e^{-R_c \gamma_b/2}} \right) \quad M=2 \text{ 正交信号} \quad (7-3-15)$$

它比双极性信号的截止速率差 3 dB。如果令式(7-3-14)中的 $R_w = R_0$, 求解 γ_b 可得

$$\gamma_b = \frac{2}{R_0} \ln \left(\frac{M-1}{2^{-R_0} M - 1} \right) \quad (7-3-16)$$

若干 M 值时 R_0 对 γ_b 的变化曲线如图 7-3-4 所示。注意, 对于 M 的任何取值, 曲线饱和于 $R_0 = \log_2 M$ 处。

讨论在 $M \rightarrow \infty$ 的极限情况下式(7-3-11)的极限形式, 可得

$$\lim_{M \rightarrow \infty} R_0 = \frac{\mathcal{E}}{2N_0 \ln 2} \quad \text{bit/波形} \quad (7-3-17)$$

由于 $\mathcal{E} = P_{av} T$, 这里 T 是每波形所占的时间间隔, 可得

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{R_0}{T} = \frac{P_{av}}{2N_0 \ln 2} = \frac{1}{2} C_\infty \quad (7-3-18)$$

因此在 $M \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 截止速率是无限带宽 AWGN 信道容量的一半。换一种方法, 将 $\mathcal{E} = R_0 \mathcal{E}_b$ 代入式(7-3-17), 得 $\gamma_b = 2 \ln 2$ (1.4 dB), 它是 $M \rightarrow \infty$ 时运行于速率 R_0 所要求的最小 SNR。所以, 以速率 R_0 传送信号所需功率比香农极限大 3 dB。

式(7-3-14)给出的 R_0 值是以采用 M 元正交信号为前提的, 当 M 较小时它显然仅是次优的。如果想通过选择一组最佳的 M 个波形使 R_0 最大化, 单纯的波形集是最优的。事实上, 对于这些最佳波形, R_0 是

$$R_0 = \log_2 \left[\frac{M}{1 + (M-1)e^{-M\mathcal{E}/2(M-1)N_0}} \right] \quad (7-3-19)$$

将此表达式与式(7-3-14)相比较, 我们看到式(7-3-19)的 R_0 仅表明单纯集的能量效率更高, 增高的比例因子是 $M/(M-1)$ 。

在非相干检测的情况下, 与信号连同噪声以及噪声本身相对应的概率密度函数为

$$\begin{aligned} P_{s+n}(y) &= ye^{-(y^2+a^2)/2} I_0(ay) \quad (y \geq 0) \\ p_n(y) &= ye^{-y^2/2} \quad (y \geq 0) \end{aligned} \quad (7-3-20)$$

根据定义, 式中的 $a = \sqrt{2\mathcal{E}/N_0}$ 。由式(7-3-12)给出的 R_0 的计算不能产生封闭形式的解, 相反地, 式(7-3-12)的积分必须采用数值运算。这种情况下的结果已由乔丹(Jordan, 1966 年)和 Bucher(1980 年)给出。例如, 非相干检测的 M 元正交信号的(非归一化)截止速率 R_0 如图 7-3-5 所示, 图中分别取 $M=2, 4, 8$ 和 16。作为对比, 同时画出 M 元符号硬判决译码 ($Q =$

M)时的截止速率,在此情况下,

$$R_Q = \log_2 \left\{ \frac{M}{[\sqrt{(1-P_M)} + \sqrt{(M-1)P_M}]^2} \right\} \quad (Q = M) \quad (7-3-21)$$

这里, P_M 是符号差错概率。在相当宽的速率范围内,软判决与硬判决译码之间的差距约为 2 dB。

图 7-3-5 所示的性能曲线中最引人注目的是对于每个给定的 M , 都存在一个最优的编码速率。相干检测时,每比特 SNR 随码率的降低而单调下降;与相干检测不同的是,非相干检测每比特 SNR 在归一化速率为 0.5 左右时达到最小值,随着速率的提高或降低其值增大。最小值的范围相当宽,所以实际上存在一个 0.2~0.9 的速率范围,在该范围内每比特 SNR 与最小值之差均不超过 1 dB。非相干检测的这种特殊的性能特点是由检测器的非线性特性造成的。

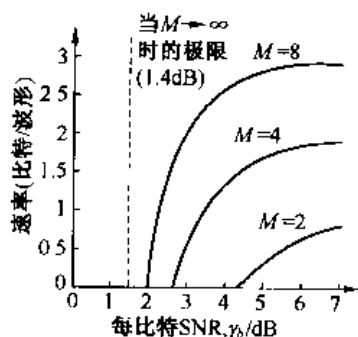


图 7-3-4 AWGN 信道上采用相干检测的 M 元正交信号运行于速率 R_0 时所要求的每比特 SNR

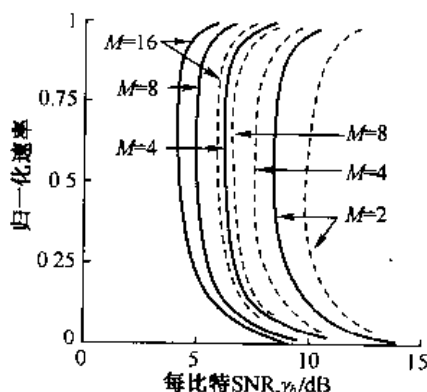


图 7-3-5 AWGN 信道上采用非相干检测的 M 元正交信号运行于速率 R_0 时所要求的每比特 SNR

7.4 文献与参考资料

从信道容量和随机编码的角度研究信道特性的开创性工作由香农(Shannon, 1948 年, 1949 年)最先开始,吉伯特(Gibert, 1952 年)、埃利斯(Elias, 1955 年)、加拉杰(1965 年)、怀纳(Wyner, 1965 年)、香农等(1967 年)、福尼(Forney, 1968 年)和维特比(Viterbi, 1969 年)相继做出重要贡献。所有这些早期的相关论文均收录在 IEEE 出版社的由 Slepian(1974 年)编辑的名为“Key Papers in the Development of Information Theory”的书里。Verdú 1998 年在“IEEE Transactions on Information Theory”出版 50 周年纪念特刊上发表的文章里,对过去 50 年来在信息理论方面的无数进展作了历史性的回顾。

使用截止速率参数作为设计准则是由沃曾克拉夫特(Wozencraft)、肯尼迪(Kennedy, 1966 年)以及沃曾克拉夫特、雅各布斯(Jacobs, 1965 年)提议并发展起来的。它在 1966 年被乔丹用于相干/非相干检测的 M 元正交信号编码波形的设计。经过这些开创性的工作后,截止速率在各种不同的信道条件下被广泛应用,作为编码信号的一个设计标准。

习题

- 7-1 证明:为了使 $I(X; Y)$ 最大化,并由此获得 DMC 信道容量,对于输入概率集 $\{P(x_j)\}$,下面两个关系式是充分必要条件

$$I(x_j; Y) = C \quad \text{对于所有满足 } P(x_j) > 0 \text{ 的 } j$$

$$I(x_j; Y) \leq C \quad \text{对于所有满足 } P(x_j) = 0 \text{ 的 } j$$

其中 C 为信道容量,

$$I(x_j; Y) = \sum_{i=0}^{Q-1} P(y_i | x_j) \lg \frac{P(y_i | x_j)}{P(y_i)}$$

- 7-2 图 P7-2 所示为一个 M 元对称 DMC,其转移概率为

$$P(y|x) = 1-p \quad \text{当 } x=y=k(k=0,1,\dots,M-1) \text{ 时}$$

$$P(y|x) = p/(M-1) \quad \text{当 } x \neq y \text{ 时}$$

(a) 证明:当 $P(x_k) = 1/M$ 时,该信道满足习题 7-1 所给的条件。

(b) 计算并画出以 p 为自变量的信道容量曲线。

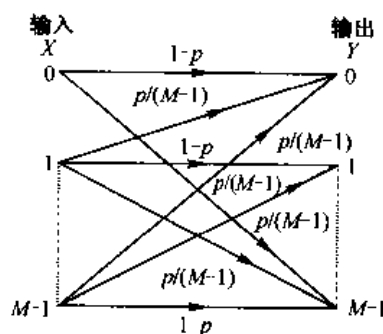


图 P7-2

- 7-3 计算如图 P7-3 所示的信道容量。

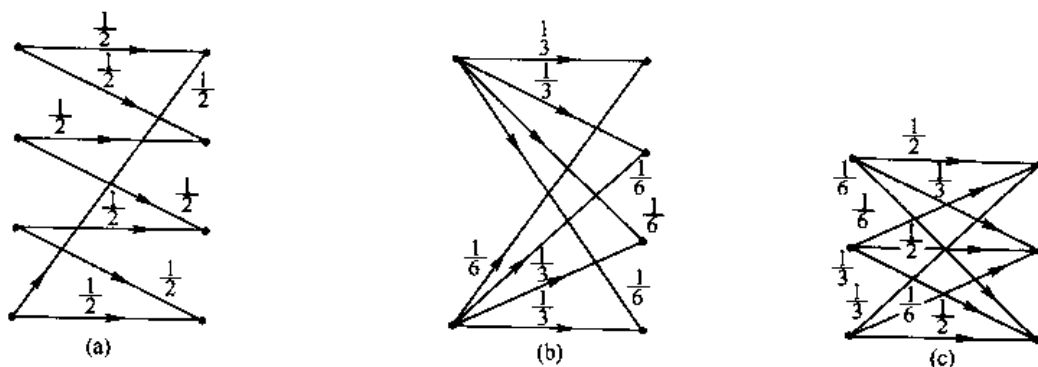


图 P7-3

- 7-4 两个信道的转移概率如图 P7-4 所示,输入符号的等概发生是否能使通过信道的信息速率最大化?

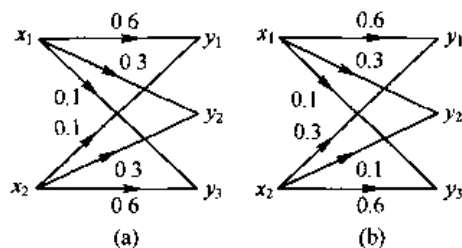


图 P7-4

7-5 某电话信道的带宽 $W = 3\,000\text{ Hz}$, 信噪功率比为 400 (26 dB) 。如果把信道定性为带限的 AWGN 波形信道, 且 $P_{av}/WN_0 = 400$ 。

- 计算信道容量(以 b/s 为单位)。
- 该信道的容量是否足以支持用对数 PCM 采样编码的语音信号的传输?
- 通常除加性噪声外, 其他信道损伤也会限制电话信道的传输速率, 使之小于在习题 7-5(a) 中算出的相应带宽的 AWGN 信道容量。假设不加信道编码, 实际可获得 $0.7C$ 的传输速率。试问在 3.5 节所述语音编码方法中, 哪些码能提供足够的压缩度, 以适应在这样的带限电话信道上传输?

7-6 考虑一个二元输入、四元输出的 DMC 信道如图 P7-6 所示。

- 计算该信道的容量。
- 证明该信道与一个 BSC 信道等效。

7-7 计算图 P7-7 所示信道的容量。

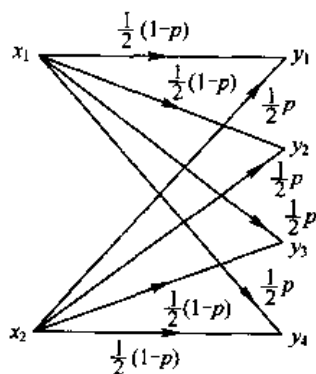


图 P7-6

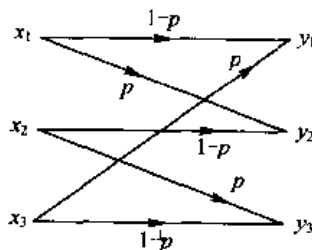


图 P7-7

7-8 考虑一个 BSC 信道, 其转移差错概率为 p 。若 R 为信源码字的比特数, 每信源码字代表量化器输出的 2^R 个可能的电平之一。试计算

- 码字通过 BSC 传输后被正确接收的概率。
- 码字通过 BSC 传输后至少有 1 比特差错的概率。
- 在一个码字里, 差错比特数小于等于 n_e 的概率。
- 若 $R = 5$, $p = 0.01$, $n_e = 5$, 计算(a), (b), (c)各题中的概率。

7-9 对于一个 DMC, 证明输入符号序列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 与相应的输出序列的互信息满足条件

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) \leq \sum_{i=1}^n I(x_i; y_i)$$

当且仅当输入符号集统计独立时,上式中的等号成立。

- 7-10 图 P7-10 所示为一个二进制删除信道,其转移概率为 $P(0|0) = P(1|1) = 1 - p$ 以及 $P(e|0) = P(e|1) = p$,输入符号的概率为 $P(X=0) = \alpha, P(X=1) = 1 - \alpha$ 。

(a) 计算平均互信息 $I(X; Y)$ (以比特表示)。

(b) 计算使 $I(X; Y)$ 最大的 α 值,即以 bit/symbol 为单位的信道容量 C 。画出 α 取最优值时, C 作为自变量 p 函数的曲线。

(c) 根据(b)中算得的 α 值,计算互信息 $I(X; Y) = I(0; 0), I(1; 0), I(0; e)$ 和 $I(1; e)$ 。

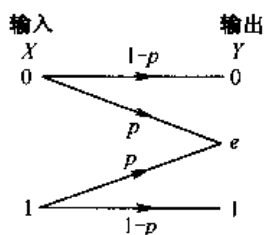


图 P7-10

- 7-11 考虑一个二元输入、三元输出的信道,转移概率如图 P7-11 所示,其中 e 表示一个删除。如果是 AWGN 信道, α, p 分别定义如下

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-(x + \sqrt{\mathcal{E}_c})^2 / N_0} dx$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\beta}^{\infty} e^{-(x + \sqrt{\mathcal{E}_c})^2 / N_0} dx$$

(a) 以 α, p 为自变量,计算 $Q=3$ 时的 R_Q 函数的曲线。

(b) 速率参数 R_Q 取决于在 α 和 p 的全范围选择的门限值 β 。对于任意 \mathcal{E}_c/N_0 , 使 R_Q 最大的 β 值可以由实验和差错得到。例如,在 \mathcal{E}_c/N_0 低于 0 dB 时, $\beta_{opt} = 0.65 \sqrt{N_0/2}$; 若 $1 \leq \mathcal{E}_c/N_0 \leq 10$, 则 β_{opt} 值在 $0.65 \sqrt{N_0/2} \sim 1.0 \sqrt{N_0/2}$ 之间线性变化。在 \mathcal{E}_c/N_0 的整个范围内取 $\beta = 0.65 \sqrt{N_0/2}$, 试画出 R_Q 随 \mathcal{E}_c/N_0 变化的曲线,将这一结果与 $R_Q(Q \rightarrow \infty)$ 比较。

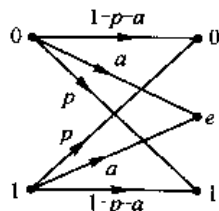


图 P7-11

- 7-12 计算 n 个具有相同转移概率的 BSC 信道级联后的信道容量。当信道数 $n \rightarrow \infty$ 时,级联后信道的信道容量是多少?

7-13 信道1,2,3的特性如图 P7-13 所示。

- (a) 计算信道 1 的容量。当输入信号怎样分布时才能达到该信道容量?
 (b) 计算信道 2 的容量。当输入信号怎样分布时才能达到该信道容量?
 (c) 令 C 表示第三条信道的容量, C_1, C_2 表示第一、第二条信道的容量, 下列关系式中哪一个是正确的? 为什么?

$$C < \frac{1}{2}(C_1 + C_2), \quad C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2), \quad C > \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

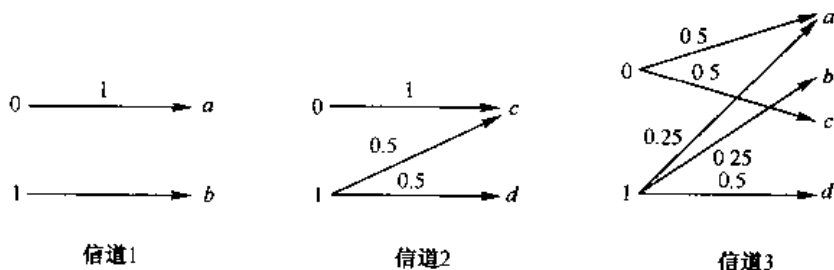


图 P7-13

7-14 某离散无记忆信道的输入符号集为 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, 输出符号集为 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_M\}$, C 表示该信道的容量。证明: $C \leq \min\{\lg M, \lg N\}$ 。

7-15 信道 C (称为 Z 信道) 如图 P7-15 所示。

- (a) 计算达到最大容量时的输入概率分布。
 (b) 在 $\epsilon = 0, \epsilon = 1$ 和 $\epsilon = 0.5$ 的特殊情况下, 输入概率和信道容量分别是多少?
 (c) 证明: 若 n 个这样的信道级联, 级联后的信道等效于一个 $\epsilon_1 = \epsilon^n$ 的 Z 信道。
 (d) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述等效 Z 信道的容量是多少?

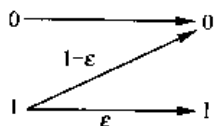


图 P7-15

7-16 某 AWGN 信道, 带宽为 1 MHz, 功率为 10 W, 噪声功率谱密度为 $N_0/2 = 10^{-9}$ W/Hz。计算其信道容量。

7-17 信道 C_1 为加性高斯白噪声信道, 带宽为 W , 平均传输功率为 P_1 , 噪声功率谱密度为 $N_0/2$ 。信道 C_2 为加性高斯噪声信道, 与信道 C_1 具有同样的带宽和功率, 但功率谱密度为 $\Phi_n(f)$ 。假设两个信道的噪声功率相同, 即

$$\int_{-W}^W \Phi_n(f) df = \int_{-W}^W \frac{1}{2} N_0 df = N_0 W$$

你认为哪一个信道具有较大容量? 给出直观的推理。

7-18 一个时间离散的无记忆高斯信源均值为 0, 方差为 σ^2 , 准备通过一个转移概率为 p 的 BSC 信道传输。

- (a) 在接收端可得到的最小失真值是多少 (用均方误差衡量失真)?
 (b) 若信道为离散时间无记忆加性高斯噪声信道, 输入功率为 P , 噪声功率为 P_n , 那

么在接收端可得到的最小失真值是多少?

(c) 假设信源不是无记忆的,除此之外的其他基本特性与题(b)相同。你认为通过该 BSC 信道传输后失真是下降还是上升?为什么?

7-19 X 是一个二进制无记忆信源,其 $p(X=0)=0.3$,该信源通过一个转移概率为 $p=0.1$ 的 BSC 信道传输。

(a) 假如信源直接送进信道即没有编码,在接收端的差错概率是多少?

(b) 如果使用编码,在接收端恢复信源信号时,可能的最小差错概率为多少?

(c) p 为多大时,才可能依靠编码达到可靠传输?

7-20 一个使用二进制双极性信号传输的 AWGN 信道,在接收机中使用最优逐比特检测器,请以 ε_b/N_0 为自变量,画出该信道的容量曲线。在同一坐标系中,画出使用二进制正交信号时的信道容量。

7-21 在某编码的通信系统中,用 M 个基带信号 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)$ 传送 M 个信息 $1, 2, \dots, M=2^k$ 。每个信号的持续时间为 nT , $x_i(t)$ 的一般形式为

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f_{ij}(t-jT)$$

式中, $f_{ij}(t)$ 代表 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 两个信号中的一个,并且当 $t \in [0, T]$ 时 $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$ 。假设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 有相同的能量 ε ,信道是理想的(无损耗的)加性高斯白噪声信道,功率谱密度为 $N_0/2$ 。这意味着接收信号为 $r(t) = x(t) + n(t)$, $x(t)$ 代表 $x_i(t)$ 中的一个, $n(t)$ 表示噪声。

(a) 如果 $f_1(t) = -f_2(t)$,证明 $N \leq n$ 。这里 N 为信号空间的维数。

(b) 证明在一般情况下, $N \leq 2n$ 。

(c) 当 $M=2$ 时,证明对于一般的 $f_1(t), f_2(t)$,

$$p(\text{差错} | x_1(t) \text{ 发送}) \leq \int_{R^N} \dots \int \sqrt{p(\mathbf{r} | \mathbf{x}_1)} p(\mathbf{r} | \mathbf{x}_2) d\mathbf{r}$$

式中, \mathbf{r}, \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 是 $r(t), x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 在 N 维空间的矢量表示。

(d) 利用(c)的结果,证明对于一般的 M 来说,

$$p(\text{差错} | x_m(t) \text{ 发送}) \leq \sum_{\substack{1 \leq m' \leq M \\ m' \neq m}} \int_{R^N} \dots \int \sqrt{p(\mathbf{r} | \mathbf{x}_m)} p(\mathbf{r} | \mathbf{x}_{m'}) d\mathbf{r}$$

(e) 证明

$$\int_{R^N} \dots \int \sqrt{p(\mathbf{r} | \mathbf{x}_m)} p(\mathbf{r} | \mathbf{x}_{m'}) d\mathbf{r} = \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m'}|^2}{4N_0}\right)$$

因此有

$$p(\text{差错} | x_m(t) \text{ 发送}) \leq \sum_{\substack{1 \leq m' \leq M \\ m' \neq m}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m'}|^2}{4N_0}\right)$$

7-22 利用式(7-3-2)证明:二进制对称信道(BSC)的截止速率为

$$R_Q |_{Q=2} \equiv R_2 = 1 - \log_2[1 + \sqrt{4p(1-p)}]$$

这里 p 是差错概率。若编码比特用双极性二元 PSK 来传输,且有

$$p = Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{N_0}} \right]$$

计算作为 \mathcal{E}_c/N_0 函数的 R_2 , 再由式(7-2-20)画出双极性信号的 R_0 图。将 R_0 与 R_2 作比较, 硬判决译码 ($Q=2$) 较之软判决译码 ($Q=\infty$) 导致的性能损失是多少?

7-23 对于下列几种二进制调制方式

$$\text{双极性} \quad p = Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{N_0}} \right]$$

$$\text{正交信号} \quad p = Q \left[\sqrt{\frac{\mathcal{E}_c}{N_0}} \right]$$

$$\text{DPSK} \quad p = \frac{1}{2} e^{-\mathcal{E}_c/N_0}$$

利用习题 7-22 给出的 BSC 信道截止速率 R_2 的表达式, 画出 R_2 作为 \mathcal{E}_c/N_0 函数的曲线图, 并评价给定截止速率时三种调制方式下的性能差别。

7-24 利用习题 7-22 给出的 BSC 信道截止速率 R_2 的表达式, 画出双极性信号的 R_2 作为 \mathcal{E}_c/N_0 函数的曲线图, 以及双极性信号下 BSC 信道的信道容量 C 的图。 R_2 与 C 在 \mathcal{E}_c/N_0 上的差是多少?

7-25 对于 M 进制 PSK, 等概的输入符号具有最大的截止速率 R_0 。证明

$$\begin{aligned} R_0 &= \log_2 M - \log_2 \left[\sum_{K=0}^{M-1} e^{-\|S_0 - S_K\|^2 / 4N_0} \right] \\ &= \log_2 M - \log_2 \left[\sum_{K=0}^{M-1} e^{-(\mathcal{E}_c/N_0) \sin^2(\pi K/M)} \right] \end{aligned}$$

画出 $M=2, 4, 8$ 和 16 时, R_0 作为 \mathcal{E}_c/N_0 函数的曲线图。

第8章 分组码和卷积信道码

第7章从总体的角度研究了信道编解码问题,证明了即使以平均为基础随机选择的码也能产生接近于信道容量的性能。还证明了在正交信号集的情况下,当信号数目趋于无穷时可以达到信道容量极限。

本章将描述某些特定的码,推导它们在 AWGN 信道中的性能。特别要详细讨论两类码——线性分组码和卷积码,推导在硬判决和软判决两种情况下的编码特性。

8.1 线性分组码

分组码由一组固定长度称为码字的矢量构成。码字的长度是矢量元素的个数,用 n 表示。码字的元素选自由 q 个元素组成的字符集。当字符集由 0,1 两个元素组成时,该码就是二进制码,此时码字的任一元素称做比特。当码字的元素从由 q 个元素($q > 2$)组成的字符集选取时,该码为非二进制码。应该指出,当 q 是 2 的幂次,即 $q = 2^b$ (b 是正整数)时,每个 q 进制码元可以用对应的包含 b 比特的二进制制表示。这样,分组长度为 N 的非二进制码可以映射成分组长度为 $n = bN$ 的二进制分组码。

长度 n 的二进制分组码有 2^n 种可能的码字。从这 2^n 种码字中,可以选择 $M = 2^k$ 个码字($k < n$)组成一种码。这样,一个 k 比特信息的分组可以映射到长度为 n 的一个码字,该码字是从由 $M = 2^k$ 个码字构成的码集中选出来的。这样得到的分组码称为 (n, k) 码,定义 $k/n \equiv R_c$ 为码率。更一般地,对于一个 q 进制码,存在 q^n 个可能的码字,可选择其中一个由 $M = 2^k$ 个码字构成的子集来传送 k 比特的信息分组。

除码率 R_c 这个参数外,另一个重要的参数是码字的重量,即该码字包含的非零元素的个数。通常,码字各有各的重量。编码中所有码字重量的集合形成该码的重量分布。如果全部 M 个码字都具有相同的重量,这种码叫做固定重量码,或叫恒重码。

编、解码的功能体现为对码字实行乘、加算术运算,算术运算的规则服从元素所在字符集代数域的惯例。比如,二进制字符集的字符是 0 和 1,该域就有两个域元素。一般地,在元素集合构成的域 F 中,对元素定义了两种算术运算——加法和乘法运算,它们满足以下特性(规则)。

· 加法

- (1) 集合 F 在加法运算下是封闭的,即如果 $a, b \in F$,必有 $a + b \in F$ 。
- (2) 满足加法结合律,即如果 $a, b, c \in F$,则 $a + (b + c) = (a + b) + c$ 。
- (3) 满足加法交换律,即 $a + b = b + a$ 。
- (4) 集合中一定包含一个零元素,满足条件 $a + 0 = a$ 。
- (5) 集合中的每个元素都有其对应的逆元素。若 b 是一个元素,那么其逆元素记为 $-b$ 。两个元素相减,比如 $a - b$,定义为 $a + (-b)$ 。

· 乘法

(1) 集合 F 在乘法运算下是封闭的,即如果 $a, b \in F$,必有 $ab \in F$ 。

(2) 满足乘法结合律,即 $a(bc) = (ab)c$ 。

(3) 满足乘法交换律,即 $ab = ba$ 。

(4) 满足乘法分配律,即 $(a+b)c = ac + bc$ 。

(5) 集合中一定包含一个单位元(identity),使得对于任何 $a \in F$,满足条件 $a(1) = a$ 。

(6) 除零元素外,集合 F 的每个元素都有逆元素。因此,若 $b \in F (b \neq 0)$,那么其逆元素记做 b^{-1} 。两个元素相除,比如 $a \div b$,定义为 ab^{-1} 。

实数域和复数域含有无穷个元素,然而,正如上面指出的,码是由有限个元素的域构成的。具有 q 个元素的有限域通常称为伽罗华域,用 $GF(q)$ 表示。

每个域必须有一个零元素和一个单位元,最简单的域是二元域 $GF(2)$ 。一般地,若 q 是素数,可构成一个由元素 $\{0, 1, \dots, q-1\}$ 组成的 q 元域 $GF(q)$ 。在域 $GF(q)$ 中的加、乘运算定义为模 q 运算,写做 $(\text{mod } q)$ 。例如, $GF(2)$ 中的加法和乘法用表列出是

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

这就是模 2 运算。同样地,域 $GF(5)$ 是由元素 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 构成的集合。 $GF(5)$ 的加法和乘法运算列表如下。

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

通常,有限域只有当 q 是素数或素数的幂时才能构成。当 q 是素数时,乘法和加法运算基于上述模 q 运算。如果 $q = p^m$ (p 是素数, m 是任意正整数),有可能将 $GF(q)$ 域扩展成 $GF(q^m)$,称为 $GF(q)$ 的扩域。扩域中元素的乘、加运算也基于模 q 运算。

简要描述了码字元素可能用到的运算方法后,可以讨论分组码的一些基本特性了。

设 C_i, C_j 是某 (n, k) 分组码的两个任意码字,这两个码字的差别是用对应元素(或位置)上不相同元素的个数来衡量的。这种量度称为码字间的汉明距离,记做 d_{ij} 。显然,当 $i \neq j$ 时必然满足条件 $0 < d_{ij} \leq n$ 。 M 个码字 $\{d_{ij}\}$ 集合中的最小值称为码的最小距离,用 d_{\min} 表示。因为汉明距离是码对间区分程度的量度,关系到与码对对应的传输波形对之间的互相关系数,这种关系将在 8.1.4 节讨论。

编码除了可划分为二进制码或非二进制码以外,还可以用是线性的还是非线性的来描述。假设 C_i, C_j 是某 (n, k) 分组码的两个码字, α_1, α_2 是码元字符集里的任意两个元素,那么当且仅当 $\alpha_1 C_i + \alpha_2 C_j$ 也是码字时,才称该码是线性的。这个定义隐含着线性码必须包含全零码字这一结论,由此推断,恒重码是非线性的。

如果有一个二进制线性分组码,用 $C_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 表示 M 个码字。为了方便起见,令

C_1 代表全零码字即 $C_1 = \{0, 0, \dots, 0\}$, 令 w_r 代表第 r 个码字的重量。容易推断, 码字 C_i 和 C_j 之间的汉明距离正是 w_r , 即 $d_{ij} = w_r$ 。一般情况下, 任意一对码字 C_i, C_j 间的距离 d_{ij} 等于求 C_i, C_j 之差后得到的码字的重量。因为是线性码, C_i, C_j 之差 (在二进制码情况下等效于取模 2 加) 也是一个码字, 其重量包含在集合 $\{w_r\}$ 中。因此, 一个线性码的重量分布完全决定了该码的距离特性。码的最小距离为

$$d_{\min} = \min_{r, r \neq 1} \{w_r\} \quad (8-1-1)$$

在讨论线性分组码时, 线性代数中的许多基本概念是非常有用的, 特别是所有的 n 重 (n -tuples, 指 n 个元素的排列, 类似一个矢量) 集合可构成一个矢量空间 S 。假如从 S 中选出一组 k 个 ($k < n$) 线性无关的矢量, 则其所有线性组合构成一个集合, 该集合是 S 的一个 k 维子集, 记做 S_c 。于集 S_c 中的任何一组 (k 个) 线性无关的矢量都可构成一个“基底”。如果 S 中另有一组矢量, 它们与构成子集 S_c 基底的每个矢量都正交 (因此一定也正交于 S_c 的所有矢量), 那么这组矢量一定是 S 的一个子集, 称为 S_c 的零空间 (null space, 也称零化空间)。若 S_c 的维数是 k , 则零空间的维数必然是 $n - k$ 。

用适当的术语表达二进制分组码, 我们说矢量空间 S 是由 2^n 个已赋值的二进制 n 重 (n -tuples) 构成的。 (n, k) 线性码是由 2^k 个称为码字的 n 重组成的集合, 它在二元域上构成了一个子集 S_c 。因为在子集 S_c 里有 2^k 个码字, 所以 S_c 的基底应含有 k 个码字, 也就是说需要 k 个线性无关的码字构成 2^k 个线性组合, 以此生成整个码。 S_c 的零空间是另一个线性码, 由分组长度 n 含 $n - k$ 信息比特的 2^{n-k} 个码字构成, 其维数是 $n - k$ 。下面将详细地讨论这些关系。

8.1.1 生成矩阵和奇偶校验矩阵

设 $x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mk}$ 是编进码字 C_m 里的 k 个信息比特。本章将遵照编码的习惯, 用行矢量表示码字。这样, 输入编码器的 k 位信息可写做

$$X_m = [x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mk}]$$

编码器输出矢量记为

$$C_m = [c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn}]$$

对于二进制线性分组码, 编码运算可以用一组 n 个方程表示如下

$$c_{mj} = x_{m1}g_{1j} + x_{m2}g_{2j} + \dots + x_{mk}g_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8-1-2)$$

式中 $g_{ij} = 0$ 或 1 , $x_{mi}g_{ij}$ 表示 x_{mi} 和 g_{ij} 的乘积。线性方程组 (8-1-2) 也可以用矩阵形式表示如下

$$C_m = X_m G \quad (8-1-3)$$

式中, G 称为该码的生成矩阵。

$$G = \begin{bmatrix} \leftarrow \mathbf{g}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{g}_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \mathbf{g}_k \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kn} \end{bmatrix} \quad (8-1-4)$$

必须指出, 任何码字都是 G 的矢量 $\{\mathbf{g}_i\}$ 的线性组合, 即

$$C_m = x_{m1}\mathbf{g}_1 + x_{m2}\mathbf{g}_2 + \dots + x_{mk}\mathbf{g}_k \quad (8-1-5)$$

由于具有 2^k 个码字的 (n, k) 线性分组码构成 k 维子空间, 生成矩阵 G 的行矢量 $\{\mathbf{g}_i\}$ 必须是线

性无关的,即它们必须能扩张成整个 k 维子空间。换言之, $\{g_i\}$ 必然是 (n, k) 码的基底。但是,基底的矢量集不是惟一的,所以 G 不是惟一的。此外,由于子空间是 k 维的,因而 G 的秩是 k 。

(n, k) 码的任何生成矩阵都可以通过行运算(以及列置换)简化成“系统形式”:

$$G = [I_k : P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n-k} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kn-k} \end{bmatrix} \quad (8-1-6)$$

这里 I_k 是 $k \times k$ 维矩阵, P 是 $k \times (n-k)$ 维矩阵,由它决定 $n-k$ 个冗余比特或一致校验位。注意,在由系统形式的生成矩阵所生成的线性分组码中,每个码字的前 k 位与所要发送的信息比特相同,其余 $n-k$ 位是前 k 个信息位的线性组合。这 $n-k$ 个冗余位叫做一致校验位(简称校验位),这样生成的 (n, k) 码叫做系统码。

由生成矩阵产生的 (n, k) 码如不具备式(8-1-6)所示的系统形式,则该码叫做非系统码。然而,如果一个矩阵能通过行运算和列置换得到另一个矩阵,这两个矩阵称为是等效的,从这个意义上说,非系统形式的生成矩阵可以和另一个系统形式的生成矩阵等效。由两个等效的生成矩阵生成的两个 (n, k) 线性码也是等效的,可以通过置换各码字的位置,从一个码得到另一个码。这样,每个 (n, k) 线性码都可以和一个系统的 (n, k) 线性码等效。

例 8-1-1 考虑一个 $(7, 4)$ 码,其生成矩阵是

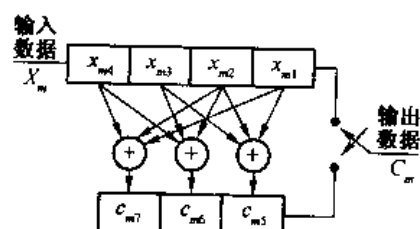
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I_4 : P] \quad (8-1-7)$$

一个典型的码字可以表示为:

$$C_m = [x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, x_{m4}, c_{m5}, c_{m6}, c_{m7}]$$

式中 $\{x_{mj}\}$ 代表 4 个信息位, $\{c_{mj}\}$ 表示 3 个校验位,由下式求得。

$$\begin{aligned} c_{m5} &= x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} \\ c_{m6} &= x_{m2} + x_{m3} + x_{m4} \\ c_{m7} &= x_{m1} + x_{m2} + x_{m4} \end{aligned} \quad (8-1-8)$$



8-1-1 生成 $(7, 4)$ 二进制码的线性移存器

一个二进制 (n, k) 系统线性分组码的编码器可用 k 级移存器和连接到移存器适当位置的 $n-k$ 个模 2 加法器组成。校验位由 $n-k$ 个加法器生成,它们按顺序暂存在另一个长度为 $n-k$ 的移存器中。 k 比特信息分组移位输入 k 级移存器,加法器计算 $n-k$ 校验比特,然后先是 k 位信息、紧接着是 $n-k$ 位校验比特从两个移存器中移位输出,送到调制器。例 8-1-1 $(7, 4)$ 码的编码如图 8-1-1 所示。

任何一个 (n, k) 线性码都有 $n - k$ 维对偶码与之关联。对偶码是一种 $(n, n - k)$ 线性码,有 2^{n-k} 个码矢量,这些矢量属于 (n, k) 码的零空间。对偶码的生成矩阵用 \mathbf{H} 表示,是由零空间中 $n - k$ 个线性无关的码矢量组成的。 (n, k) 码的任意一个码字 \mathbf{C}_m 均正交于其对偶码的任意一个码字,因此 (n, k) 码的任意一个码字均正交于矩阵 \mathbf{H} 的每一行,即

$$\mathbf{C}_m \mathbf{H}' = \mathbf{0} \quad (8-1-9)$$

式中, $\mathbf{0}$ 代表由 $n - k$ 个元素组成的全零行矢量, \mathbf{C}_m 是 (n, k) 码的一个码字。因为式(8-1-9)对 (n, k) 码的每个码字都成立,于是

$$\mathbf{G} \mathbf{H}' = \mathbf{0} \quad (8-1-10)$$

这里, $\mathbf{0}$ 代表一个由全零元素组成的 $k \times (n - k)$ 维矩阵。

假定 (n, k) 线性码是系统码,其生成矩阵 \mathbf{G} 符合式(8-1-6)的形式。由于 $\mathbf{G} \mathbf{H}' = \mathbf{0}$,必有

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{P}' \mid \mathbf{I}_{n-k}] \quad (8-1-11)$$

式(8-1-11)中的负号在二进制码情况下可省略,因为模2减法和模2加法是等同的。

例 8-1-2 用式(8-1-7)的矩阵 \mathbf{G} 生成一个 $(7, 4)$ 系统码。根据式(8-1-11),可得 \mathbf{H} 矩阵如下

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (8-1-12)$$

由 $\mathbf{C}_m \mathbf{H}'$ 的乘积可产生以下3个方程

$$\begin{aligned} x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + c_{m5} &= 0 \\ x_{m2} + x_{m3} + x_{m4} + c_{m6} &= 0 \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m4} + c_{m7} &= 0 \end{aligned} \quad (8-1-13)$$

可见, $\mathbf{C}_m \mathbf{H}'$ 的积等于信息位的线性组合加上相应的校验位,这些信息位是在计算 c_{mj} , ($j = 5, 6, 7$)时用过的,也就是说,式(8-1-13)与式(8-1-8)是等效的。 \mathbf{H} 矩阵可被译码器用来检查收到的码字 \mathbf{Y} 是否满足条件式(8-1-13),即 $\mathbf{Y} \mathbf{H}' = \mathbf{0}$ 。此时,译码器用比特 y_1, y_2, y_3 和 y_4 对应的线性组合检验接收到的校验位,这几个比特正是发送器在生成校验位时用过的。所以,把 \mathbf{H} 矩阵称为 (n, k) 码的一致校验矩阵(简称为校验矩阵)是非常恰当的。

下面分析码的最小距离与其校验矩阵之间的关系。 $\mathbf{C}_m \mathbf{H}'$ ($\mathbf{C}_m \neq \mathbf{0}$)代表 \mathbf{H}' 的 n 个列的线性组合。由于 $\mathbf{C}_m \mathbf{H}' = \mathbf{0}$,因此 \mathbf{H} 的列矢量是线性相关的。如果用 \mathbf{C}_j 代表 (n, k) 线性码中重量最小的码字,那它必然满足条件 $\mathbf{C}_j \mathbf{H}' = \mathbf{0}$ 。由于最小重量等于最小距离,所以可以断言 \mathbf{H} 的 d_{\min} 个列一定是线性相关的,换言之, \mathbf{H} 中线性无关的列最多不超过 $d_{\min} - 1$ 个。由于 \mathbf{H} 的秩至多是 $n - k$,则必有 $n - k \geq d_{\min} - 1$ 的关系,所以 d_{\min} 的上边界是

$$d_{\min} \leq n - k + 1 \quad (8-1-14)$$

对于最小距离为 d_{\min} 的二进制 (n, k) 线性码,可给每个码字添加一位奇偶校验位而构成一个二进制 $(n + 1, k)$ 线性码。这个附加的校验位通常用来对码字的所有比特进行校验。这样,若原来码字中1的个数为偶数,则添加的校验位为0;若原来码字中1的个数为奇数,则添加一个校验位1。因此,如果码的最小重量即最小距离是奇数,那么添加一个奇偶校验位后使

最小距离加 1。这种 $(n+1, k)$ 码叫做扩展码, 其校验矩阵是

$$\mathbf{H}_e = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right] \quad (8-1-15)$$

式中, \mathbf{H} 是原码的校验矩阵。

若把一定数量的信息位设为零, (n, k) 系统码同样可以缩短, 也就是说, 把码的前 l 位设置为零, 从而把一个包含 k 个信息位、 $n-k$ 校验位的 (n, k) 线性码缩短成 $(n-l, k-l)$ 的线性码。缩短码的前 l 位并不真地传送出去, 译码时 $n-k$ 个校验位仍按原码 (缩短前) 的方法计算。由于

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{X}_m \mathbf{G}$$

把 \mathbf{X}_m 的前 l 位设置为零, 等效于删除 \mathbf{G} 的前 l 行而使它的行数减少。同样地, 由于

$$\mathbf{C}_m \mathbf{H}' = \mathbf{0}$$

也可以删除 \mathbf{H} 的开头 l 列。缩短的 $(n-l, k-l)$ 码由 2^{k-l} 个码字构成, 这 2^{k-l} 个码字的最小距离至少和原 (n, k) 码的最小距离相同。

8.1.2 一些特殊的线性分组码

本节简述 3 种在实践中经常遇到的线性分组码及其重要参数。

1. 汉明码

汉明码既有二进制的, 也有非二进制的, 这里仅讨论二进制汉明码的性质。汉明码具有的共同特性是

$$(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m) \quad (8-1-16)$$

其中, m 是任意正整数。例如 $m=3$ 时, 有 $(7, 4)$ 汉明码。

汉明码的校验矩阵 \mathbf{H} 具有特殊的性质, 使得能以相对简单的方法描述该码。一个 (n, k) 码的校验矩阵有 $n-k$ 行和 n 列。对于二进制 (n, k) 汉明码, $n=2^m-1$ 列包含由 $n-k=m$ 个二进制码元组成的列矢量的所有可能的组合 (全零矢量除外)。比如, 例 8-1-1 和例 8-1-2 中的 $(7, 4)$ 码是汉明码, 其校验矩阵由 $(001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)$ 组成。

如果想要产生一个系统汉明码, 可以很容易地把校验矩阵 \mathbf{H} 转换成如式 (8-1-11) 所示的系统。通过式 (8-1-11), 可进一步得到相应的生成矩阵 \mathbf{G} 。

通过观察可知, \mathbf{H} 中没有哪两个列是线性相关的, 除非这两列相等。但在 $m>1$ 时, 有可能找到 \mathbf{H} 的 3 个列, 它们之和为零矢量。由此可得 (n, k) 汉明码的 $d_{\min}=3$ 。

如果给 (n, k) 汉明码添加一位奇偶校验位, 得到一个 $d_{\min}=4$ 的 $(n+1, k)$ 扩展汉明码。反之, 在生成矩阵 \mathbf{G} 中删除 1 行, 或等效地在校验矩阵 \mathbf{H} 中删除 1 列, 汉明码可以缩短为 $(n-l, k-l)$ 码。

(n, k) 汉明码的重量分布是已知的, 可用一种紧凑的形式即重量估值算式来表达它

$$A(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i$$

$$= \frac{1}{n+1} [(1+z)^n + n(1+z)^{(n-1)/2}(1-z)^{(n+1)/2}] \quad (8-1-17)$$

这里, A_i 是重量为 i 的码字的数目。

2. 哈达马(Hadamard)码

哈达马码是选取哈达马矩阵的行作为码字而得到的码。哈达马矩阵 M_n 是一个由“0”和“1”构成的 $n \times n$ 维矩阵(n 是偶数)。该矩阵具有以下特性:拿出它的任意两行相比较,都一点不差地在 $n/2$ 个位置上取不同值^①;矩阵中有一行是全 0 行,其他行都包含 $n/2$ 个“0”和 $n/2$ 个“1”。

当 $n=2$ 时,哈达马矩阵为

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-1-18)$$

进一步可以按照下述规律由 M_n 产生哈达马矩阵 M_{2n} 。

$$M_{2n} = \begin{bmatrix} M_n & M_n \\ M_n & \bar{M}_n \end{bmatrix} \quad (8-1-19)$$

式中, \bar{M}_n 为 M_n 的互补矩阵(所有 0 由 1 替换,所有 1 由 0 替换)。将式(8-1-18)代入式(8-1-19),可得

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-1-20)$$

互补矩阵 \bar{M}_4 是

$$\bar{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-1-21)$$

至此,可用 M_4 和 \bar{M}_4 的行构成一个码长 $n=4$ 的二进制线性分组码,该码由 $2n=8$ 个码字组成,码的最小距离是 $d_{\min} = n/2 = 2$ 。

反复使用式(8-1-19),可以生成分组长度 $n=2^m$, $k = \log_2 2n = \log_2 2^{m+1} = m+1$, $d_{\min} = n/2 = 2^{m-1}$ 的哈达马码(m 是正整数)。除了 $n=2^m$ 这一重要特例外,其他长度的哈达马码也有可能产生,不过不是线性码。

3. 高莱(Golay)码

高莱码是二进制(23,12)线性码,其最小距离 $d_{\min}=7$ 。在(23,12)码上添加一位奇偶位即可得二进制线性(24,12)扩展高莱码,其最小距离 $d_{\min}=8$ 。表 8-1-1 列出了(23,12)高莱码和(24,12)扩展高莱码的重量分布。8.1.3 节将讨论高莱码的产生。

^① 有时哈达马矩阵的元素也用 +1 和 -1 表示,此时哈达马矩阵的各行互相正交。注意,如果把哈达马码字的每一个比特映射为二进制 PSK 信号,构成的 $M=2^k$ 个信号波形也是正交的。

表 8-1-1 (23,12) 高莱码和(24,12)扩展高莱码的重量分布

重 量	码 字 数	
	(23,12)码	(24,12)码
0	1	1
7	253	0
8	506	759
11	1 288	0
12	1 288	2 576
15	506	0
16	253	759
23	1	0
24	0	1

摘自 Peterson & Weldon (1972)

8.1.3 循环码

循环码是线性码的一个子集,它满足下列循环移位特性:如果 $C = [c_{n-1}c_{n-2}\cdots c_1c_0]$ 是某循环码的码字,那么由 C 的元素循环移位得到的 $[c_{n-2}\cdots c_1c_0 \ c_{n-1}]$ 也是该循环码的一个码字,也就是说,码字 C 的所有循环移位都是码字。由于循环码的循环特性,该码具有许多构造上的特点,可以在编码和解码运算时利用。针对循环码已设计出许多有效的编码和硬判决译码算法,使得含有大量码字的长分组码在通信系统中得以实用。描述这些专门算法已超出本书范围,我们将仅简要介绍循环码的一些性质。

为了研究循环码,将其码字 $C = [c_{n-1}c_{n-2}\cdots c_1c_0]$ 与一个不大于 $n-1$ 次($\text{degree} \leq n-1$)的多项式 $C(p)$ 联系起来,该多项式定义为

$$C(p) = c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2} + \cdots + c_1p + c_0 \quad (8-1-22)$$

对于二进制码,多项式的每个系数不是 0 就是 1。

假定两边同乘 p ,可得下列多项式

$$pC(p) = C_{n-1}p^n + C_{n-2}p^{n-1} + \cdots + C_1p + C_0p$$

这个多项式不能表示一个码字,因为它的次数可以等于 n (当 $c_{n-1}=1$ 时)。但若将 $pC(p)$ 除以 p^n+1 ,可得

$$\frac{pC(p)}{p^n+1} = c_{n-1} + \frac{C_1(p)}{p^n+1} \quad (8-1-23)$$

这里

$$C_1(p) = c_{n-2}p^{n-1} + c_{n-3}p^{n-2} + \cdots + c_0p + c_{n-1}$$

注意,多项式 $C_1(p)$ 代表码字 $C_1 = [c_{n-2}\cdots c_1c_0 \ c_{n-1}]$,它正是由原码字 C 循环移位得到的。由于 $C_1(p)$ 是 $pC(p)$ 除以 p^n+1 的余式,因此

$$C_1(p) = pC(p) \bmod (p^n+1) \quad (8-1-24)$$

依次类推,若 $C(p)$ 代表循环码的一个码字,那么 $p^iC(p) \bmod (p^n+1)$ 也一定是该循环码的一个码字,于是

$$p^iC(p) = Q(p)(p^n+1) + C_i(p) \quad (8-1-25)$$

式中,剩余多项式 $C_i(p)$ 代表循环码的一个码字, $Q(p)$ 是商。

可以用一个 $n-k$ 次的生成多项式 $g(p)$ 产生一个循环码。 (n,k) 循环码的生成多项式

一定是多项式 $(p^n + 1)$ 的因子,其通式为

$$g(p) = p^{n-k} + g_{n-k-1}p^{n-k-1} + \cdots + g_1p + 1 \quad (8-1-26)$$

定义一个消息多项式 $X(p)$ 如下

$$X(p) = x_{k-1}p^{k-1} + x_{k-2}p^{k-2} + \cdots + x_1p + x_0 \quad (8-1-27)$$

这里的 $[x_{k-1}x_{k-2}\cdots x_1x_0]$ 代表 k 位信息比特。显然, $X(p)g(p)$ 的乘积是一个小于等于 $n-1$ 次的多项式,它代表一个码字。注意,共有 2^k 个多项式 $\{X_i(p)\}$,因此从给定的 $g(p)$ 中可以形成 2^k 个码字。

假定把这些码字写成

$$C_m(p) = X_m(p)g(p) \quad (m = 1, 2, \cdots, 2^k) \quad (8-1-28)$$

为了验证式(8-1-28)中的码字满足循环特性,考虑式(8-1-28)中任意一个码字 $C(p)$ 。对 $C(p)$ 循环移位产生

$$C_1(p) = pC(p) + c_{n-1}(p^n + 1) \quad (8-1-29)$$

由于 $g(p)$ 既能整除 $C(p)$ 和 $p^n + 1$,又能整除 $C_1(p)$,则 $C_1(p)$ 可以表示为

$$C_1(p) = X_1(p)g(p)$$

所以,对式(8-1-28)生成的任一码字 $C(p)$ 循环移位后可以产生另一个码字。

以上可见,具有循环特性的码字可由惟一的 $g(p)$ 多项式乘以 2^k 个消息多项式生成,这个多项式叫做 (n, k) 循环码的生成多项式,它的次数为 $n-k$ 并可整除 $p^n + 1$ 。由这种方法产生的循环码是矢量空间 S 的一个子空间 S_c ,该子空间的维数是 k 。

例 8-1-3 研究一个长度 $n=7$ 的分组码。多项式 $p^7 + 1$ 具有如下因式

$$p^7 + 1 = (p + 1)(p^3 + p^2 + 1)(p^3 + p + 1) \quad (8-1-30)$$

为了生成一个 $(7, 4)$ 循环码,取下面两个多项式之一作为生成多项式。

$$g_1(p) = p^3 + p^2 + 1$$

$$g_2(p) = p^3 + p + 1 \quad (8-1-31)$$

由 $g_1(p)$ 和 $g_2(p)$ 生成的码是等效的。由 $g_1(p) = p^3 + p^2 + 1$ 生成的 $(7, 4)$ 码的码字如表 8-1-2 所示。

表 8-1-2 $(7, 4)$ 循环码(生成多项式 $g_1(p) = p^3 + p^2 + 1$)

信 息 比 特				码 字						
p^3	p^2	p^1	p^0	p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p^1	p^0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1

续表

信 息 比 特				码 字						
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1

一般情况下,多项式 $p^n + 1$ 可因式分解为

$$p^n + 1 = g(p)h(p)$$

式中 $g(p)$ 代表 (n, k) 循环码的生成多项式, $h(p)$ 代表一致校验多项式, 其阶次为 k 。

用 $h(p)$ 还可生成一个对偶码。为此, 定义 $h(p)$ 的反多项式

$$\begin{aligned} p^k h(p^{-1}) &= p^k (p^k + h_{k-1} p^{k-1} + h_{k-2} p^{k-2} + \cdots + h_1 p + 1) \\ &= 1 + h_{k-1} p + h_{k-2} p^2 + \cdots + h_1 p^{k-1} + p^k \end{aligned} \quad (8-1-32)$$

显然, 反多项式也是 $p^n + 1$ 的一个因式。因此, $p^k h(p^{-1})$ 是一个 $(n, n-k)$ 循环码的生成多项式, $(n, n-k)$ 对偶码构成 (n, k) 循环码的零空间。

例 8-1-4 考虑例 8-1-3 中的 $(7, 4)$ 循环码的对偶码, 该码是与下列校验多项式对应的 $(7, 3)$ 循环码

$$h_1(p) = (p+1)(p^3+p+1) = p^4 + p^3 + p^2 + 1 \quad (8-1-33)$$

其反多项式是

$$p^4 h_1(p^{-1}) = 1 + p + p^2 + p^4$$

此多项式生成了表 8-1-3 列出的 $(7, 3)$ 对偶码。读者可自行验证: 这些 $(7, 3)$ 对偶码的码字与例 8-1-3 中的 $(7, 4)$ 循环码的码字是正交的。注意, 这里的 $(7, 3)$ 码、 $(7, 4)$ 码都不是系统码。

表 8-1-3 $(7, 3)$ 对偶码 (生成多项式 $p^4 h_1(p^{-1}) = p^4 + p^2 + p + 1$)

信息比特			码字						
p^2	p^1	p^0	p^6	p^5	p^4	p^3	p^2	p^1	p^0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1

有必要说明如何从 (n, k) 循环码的生成多项式获得生成矩阵。如前所述, (n, k) 循环码的生成矩阵可以用任何一组线性独立的码字构成。当给出生成多项式 $g(p)$ 后, 容易产生的 k 个线性独立码字是与下列 k 个线性独立多项式对应的码字:

$$p^{k-1}g(p), p^{k-2}g(p), \cdots, pg(p), g(p)$$

因为任何一个次数小于等于 $n-1$ 且能被 $g(p)$ 整除的多项式都可以用这组多项式的线性组

合表达,所以这组多项式能构成 k 维基底,于是与之对应的一组码字可以构成 (n, k) 循环码的 k 维基底。

例 8-1-5 生成多项式为 $g_1(p) = p^3 + p^2 + 1$ 的 $(7, 4)$ 循环码生成矩阵的 4 行可从以下多项式获得

$$p^i g_1(p) = p^{3+i} + p^{2+i} + p^i \quad (i = 3, 2, 1, 0)$$

显见其生成矩阵是

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-1-34)$$

同样地,由多项式 $g_2(p) = p^3 + p + 1$ 产生的 $(7, 4)$ 循环码的生成矩阵是

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-1-35)$$

对应于 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ 的校验矩阵可以利用各自的反多项式通过同样的方法获得(见习题 8-8)

注意,通过这种方法获得的生成矩阵不是系统形式的。如果要从生成多项式构造一个系统形式 $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{P}]$ 的循环码生成矩阵,须按如下方法处理:首先, \mathbf{G} 的第 l 行对应于形式为 $p^{n-l} + R_l(p)$, $l = 1, 2, \dots, k$ 的多项式,这里的 $R_l(p)$ 是一个次数小于 $n - k$ 的多项式。上述关系式可用 p^{n-l} 除以 $g(p)$ 推导。两者相除,有

$$\frac{p^{n-l}}{g(p)} = Q_l(p) + \frac{R_l(p)}{g(p)} \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

或等效为

$$p^{n-l} = Q_l(p)g(p) + R_l(p) \quad (8-1-36)$$

这里 $Q_l(p)$ 是商。由于 $p^{n-l} + R_l(p) = Q_l(p)g(p)$, 所以 $p^{n-l} + R_l(p)$ 一定是循环码的一个码字。因此,对应于 \mathbf{G} 的第 l 行的多项式为 $p^{n-l} + R_l(p)$ 。

例 8-1-6 对于上例生成多项式为 $g_2(p) = p^3 + p + 1$ 的 $(7, 4)$ 循环码,有

$$p^6 = (p^3 + p + 1)g_2(p) + p^2 + 1$$

$$p^5 = (p^2 + 1)g_2(p) + p^2 + p + 1$$

$$p^4 = pg_2(p) + p^2 + p$$

$$p^3 = g_2(p) + p + 1$$

因此,系统形式的生成矩阵是

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-1-37)$$

相应的校验矩阵是

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-1-38)$$

由式(8-1-35)确定的生成矩阵 \mathbf{G}_2 与式(8-1-37) 确定的系统形式的 \mathbf{G}_2 生成的是同一个码字集,这个论断的证明留做习题(习题 8-2)。

根据式(8-1-36)构成系统形式的生成矩阵的方法说明由生成多项式 $g(p)$ 可直接产生系统码。如果将消息多项式 $X(p)$ 乘以 p^{n-k} , 可得

$$p^{n-k}X(p) = x_{k-1}p^{n-1} + x_{k-2}p^{n-2} + \cdots + x_1p^{n-k+1} + x_0p^{n-k}$$

在系统码中,这个多项式代表码字 $C(p)$ 的前 k 消息位,必须在其上加上一个代表校验比特的次数低于 $n-k$ 的多项式。如果将 $p^{n-k}X(p)$ 除以 $g(p)$, 可得

$$\frac{p^{n-k}X(p)}{g(p)} = Q(p) + \frac{r(p)}{g(p)}$$

即

$$p^{n-k}X(p) = Q(p)g(p) + r(p) \quad (8-1-39)$$

式中, $r(p)$ 的次数低于 $n-k$ 。显然, $Q(p)g(p)$ 是循环码的码字。将 $r(p)$ 模 2 加到式(8-1-39)的两边,可得出要求的系统码。

作为总结,系统码可通过下述方法产生:

- (1) 将消息多项式 $X(p)$ 乘以 p^{n-k} 。
- (2) 将 $p^{n-k}X(p)$ 除以 $g(p)$ 得到余式 $r(p)$ 。
- (3) 将 $r(p)$ 加进 $p^{n-k}X(p)$ 。

下面说明如何用带反馈的移存器实现上述运算。

因为 $p^{n+1} = g(p)h(p)$, 等效于 $g(p)h(p) = 0 \pmod{p^n + 1}$, 所以说多项式 $g(p)$ 和 $h(p)$ 是正交的。进一步推论, 多项式 $p^i g(p)$ 和 $p^j h(p)$ 对于任意 i, j 都是正交的。但从矢量角度看, 与多项式 $g(p)$ 和 $h(p)$ 对应的两个矢量中只有一个矢量的元素顺序颠倒后两者才正交。这样的说法也适用于 $p^i g(p)$ 和 $p^j h(p)$ 对应的矢量。事实上, 如果采用校验多项式 $h(p)$ 作为 $(n, n-k)$ 对偶码的生成矩阵, 所得的码字集与用其反多项式生成的码字集除了码元顺序颠倒外包含同样的码字, 这就是说, 从反多项式 $p^k h(p^{-1})$ 得出的对偶码的生成矩阵同样可以从 $h(p)$ 间接地得到。由于 (n, k) 循环码的校验矩阵 \mathbf{H} 就是对偶码的生成矩阵, 所以 \mathbf{H} 也可以从 $h(p)$ 得到, 下面举例说明。

例 8-1-7 由 $g_1(p) = p^3 + p^2 + 1$ 生成的 $(7, 4)$ 循环码的对偶码是 $(7, 3)$ 对偶码, 它由反多项式 $p^4 h_1(p^{-1}) = p^4 + p^2 + p + 1$ 产生。也可用 $h_1(p)$ 获得对偶码的生成多项式。在这种情况下, 与多项式 $p^i h_1(p)$ ($i = 2, 1, 0$) 对应的矩阵是

$$\mathbf{G}_{h_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(7, 3)$ 对偶码的生成矩阵, 也就是 $(7, 4)$ 循环码的校验矩阵, 可通过颠倒 \mathbf{G}_{h_1} 行矢量元素的

顺序得到,即

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

读者可自己验证 $\mathbf{G}_1 \mathbf{H}_1^T = \mathbf{0}$ 。

注意, \mathbf{H}_1 的列矢量包含长度为 3 的二进制矢量的所有 7 种可能的组合(全 0 矢量除外),符合对 (7,4) 汉明码校验矩阵的要求。因此,这个 (7,4) 循环码等效于例 8-1-1 和例 8-1-2 讨论的 (7,4) 汉明码。

1. 循环码编码器

可以利用生成多项式或者校验多项式在线性反馈移存器上实现循环码的编码运算。首先介绍 $g(p)$ 的使用。

如上所述,系统循环码的产生分 3 个步骤,即消息多项式 $X(p)$ 乘以 p^{n-k} , 所得之积除以 $g(p)$, 最后将余式 $r(p)$ 加进 $p^{n-k}X(p)$ 。在这 3 步中,只有除法不易。

$n-k$ 次多项式 $A(p) = p^{n-k}X(p)$ 与多项式

$$g(p) = g_{n-k}p^{n-k} + g_{n-k-1}p^{n-k-1} + \cdots + g_1p + g_0$$

的除法可用如图 8-1-2 所示的 $n-k$ 级反馈移存器完成。初始状态时,移存器全为 0。 $A(p)$ 的系数以钟频移入移存器,从高次系数开始,先是 a_{n-1} , 紧接是 a_{n-2} , 依次类推,每拍一个(比特)系数。经 k 次移位后,商式的第一个非零输出是 $q_1 = g_{n-k}a_n$, 接下来的输出如图 8-1-2 所示产生。对于输出商式的每一个系数,都要做一次减法,减去 $g(p)$ 与该系数的乘积,正如普通长除法一样。该减法是靠移存器的反馈部分实现的。就这样,用图 8-1-2 所示的反馈移存器可实现两个多项式相除。

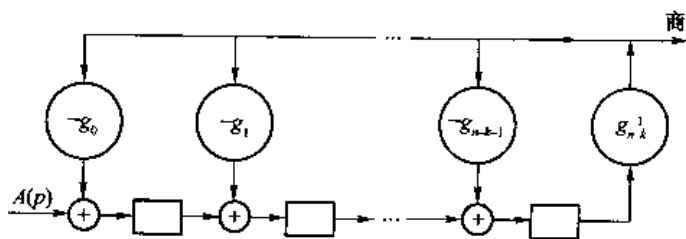


图 8-1-2 多项式 $A(p)$ 除以 $g(p)$ 所用的反馈型移存器

对于二进制码,在 $g_{n-k} = g_0 = 1$ 的情况下,算术运算是模 2 运算,于是减法运算可简化为模 2 加。另外,由于码是系统的,我们感兴趣的只是产生每个码字的校验位。这样,循环码编码器可取图 8-1-3 所示的结构。 k 位信息比特就是编码器的前 k 比特输出,这 k 位在输出的同时也按钟频进入移存器,此时开关 1 处于闭合位置。值得注意的是, p^{n-k} 和 $X(p)$ 的多项式乘法也已实现,但不是显式的。在 k 位信息比特全部进入编码器后,两个开关均切换到相反位置。此时,移存器的内容就是 $n-k$ 位校验比特,对应于余式的系数。这 $n-k$ 位校验比特按钟频一拍一个送到调制器。

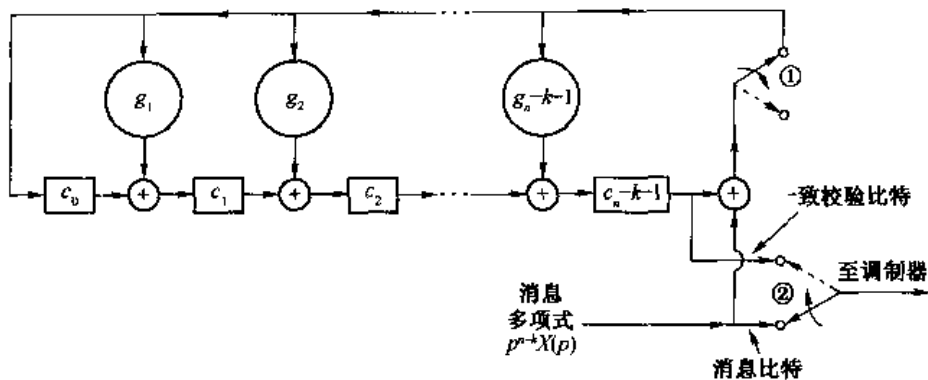


图 8-1-3 利用生成多项式 $g(p)$ 的循环码编码

例 8-1-8 生成矩阵为 $g(p) = p^3 + p + 1$ 的 (7,4) 循环码, 其编码器的移存器如图 8-1-4 所示。

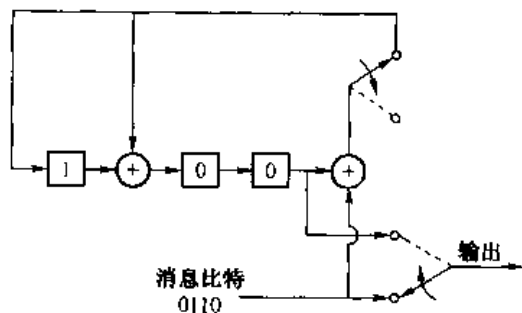


图 8-1-4 生成矩阵为 $g(p) = p^3 + p + 1$ 的 (7,4) 循环码编码器

假设输入的消息比特是 0110, 移存器的内容如下

输入	移位	移存器内容
	0	000
0	1	000
1	2	110
1	3	101
0	4	100

因此, 3 个校验位是 100, 对应于码字比特 $c_5 = 0, c_6 = 0, c_7 = 1$ 。

如果不用生成多项式, 也可用校验多项式

$$h(p) = p^k + h_{k-1}p^{k-1} + \dots + h_1p + 1$$

完成循环码的编码, 这样的编码器如图 8-1-5 所示。开始 k 拍, k 个信息比特移位进入移存器的同时也送到调制器, 当所有信息比特都进入移存器后, 开关转换到位置 2, 移存器运行 $n - k$ 个钟频节拍以生成 $n - k$ 个校验比特, 如图 8-1-5 所示。

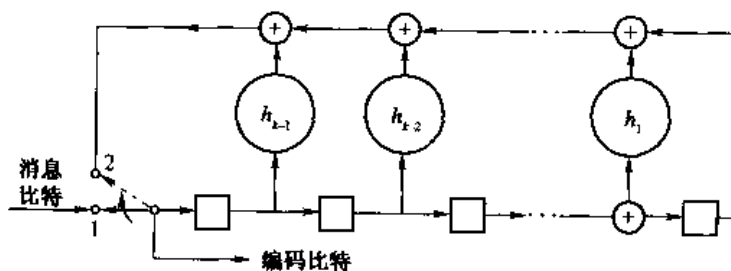


图 8-1-5 基于校验多项式 $h(p)$ 的 (n, k) 循环码编码器

例 8-1-9 由多项式 $g(p) = p^3 + p + 1$ 生成的 $(7, 4)$ 循环码, 其校验多项式为 $h(p) = p^4 + p^2 + p + 1$ 。基于校验多项式的编码器如图 8-1-6 所示。

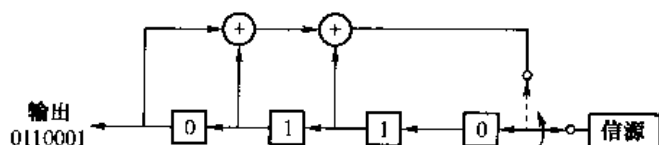


图 8-1-6 基于校验多项式 $h(p) = p^4 + p^2 + p + 1$ 的 $(7, 4)$ 循环码编码器

如果送入编码器的消息比特是 0110, 那么不难验证: 校验比特是 $c_5 = 0, c_6 = 0$ 和 $c_7 = 1$ 。

应该指出, 当 $n - k < k$ ($k > n/2$), 即属于高效码 ($R_c > 1/2$) 范畴时, 基于生成多项式的编码器较简单; 反之, 当 $k < n - k$ ($k < n/2$), 即低效码 ($R_c < 1/2$) 时, 基于校验多项式的编码器比较简单。

2. 循环汉明码

这类循环码包括汉明码, 其分组长度是 $n = 2^m - 1$, 校验位 $n - k = m$, 其中 m 是任意正整数。循环汉明码等效于 8.1.2 节所述的汉明码。

3. 循环(23,12)高莱码

8.1.2 节所述的线性 $(23, 12)$ 高莱码如果用多项式

$$g(p) = p^{11} + p^9 + p^7 + p^6 + p^5 + p + 1 \quad (8-1-40)$$

生成时是循环码, 码字的最小距离 $d_{\min} = 7$ 。

4. 最大长度移存器码

最大长度移存器码是循环码的一个子类, 符合下列关系

$$(n, k) = (2^m - 1, m) \quad (8-1-41)$$

式中, m 是正整数。它的码字通常以校验多项式为基础, 用带有反馈的 m 级移位寄存器产生。对于每个要发送的码字, 其 m 个信息位送进移位寄存器, 开关位置由 1 转换到位置 2。移存器的内容每次(拍)向左移一位, 共移 $2^m - 1$ 次。这种运算产生了符合要求的长度为 $2^m - 1$ 的系统码。例如, 图 8-1-7 中 $m = 3$ 的 3 级移存器产生的码字如表 8-1-4 所示。

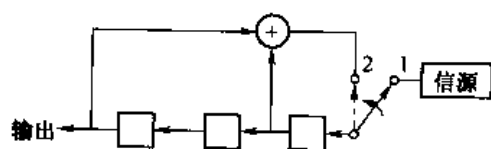


图 8-1-7 带反馈的 3 级 ($m = 3$) 移存器

表 8-1-4 $m = 3$ 的最大长度移存器码

信息比特			码 字						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0

应该指出, 除全零码字外, 移位寄存器产生的所有码字都是某一个码字不同次循环移位的

结果。这一点从图 8-1-8 所示的 $m=3$ 移位寄存器的状态图中可以很容易地看出来。当移位寄存器输入一个初始值并将其移位 $2^m - 1$ 次时,它将循环通过所有 $2^m - 1$ 种可能的状态,在第 $2^m - 1$ 次移位时返回起始状态。因此,输出序列以长度 $n = 2^m - 1$ 为周期。因为移存器只有 $2^m - 1$ 种可能状态,这个输出长度是可能的最大周期。这也解释了为什么 $2^m - 1$ 个码字可来自一个码字的不同次循环移位。

m 为任意正整数时,最大长度移存器码都存在。表 8-1-5 列出了在 $2 \leq m \leq 34$ 范围内,构成最大长度移存器的模 2 加法器各级的连接表。

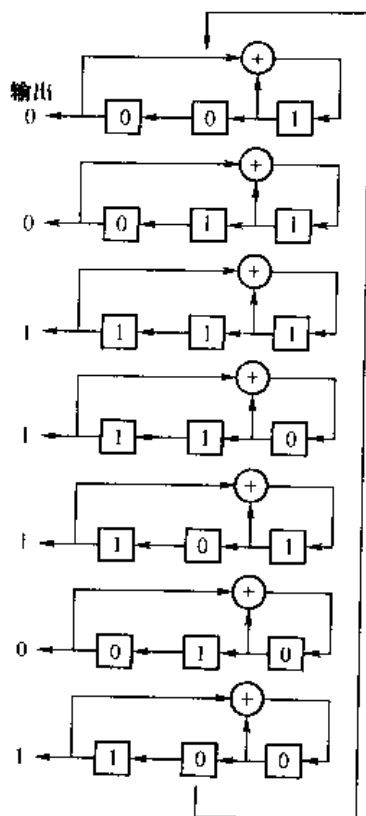


图 8-1-8 $m=3$ 最大长度移存器的 7 个状态

表 8-1-5 产生最大长度序列时移存器的连接

m	连到模 2 加法器的级	m	连到模 2 加法器的级	m	连到模 2 加法器的级
2	1,2	13	1,10,11,13	24	1,18,23,24
3	1,3	14	1,5,9,14	25	1,23
4	1,4	15	1,15	26	1,21,25,26
5	1,4	16	1,5,14,16	27	1,23,26,27
6	1,6	17	1,15	28	1,26
7	1,7	18	1,12	29	1,28
8	1,5,6,7	19	1,15,18,19	30	1,8,29,30
9	1,6	20	1,18	31	1,29
10	1,8	21	1,20	32	1,11,31,32
11	1,10	22	1,22	33	1,21
12	1,7,9,12	23	1,19	34	1,8,33,34

摘自(福尼,1970年)

最大长度移存器码的码字还有另一个特点:除了全零码字外的所有码字都含有 2^{m-1} 个“1”和 2^{m-1} 个“0”,因此所有码字都有相同的重量,即 $w = 2^{m-1}$ 。又因是码线性,所以码重也就是码的最小距离,即

$$d_{\min} = 2^{m-1}$$

最后还要指出,表 8-1-4 列出的 (7,3) 最大长度移存器码和表 8-1-3 列出的 (7,3) 码是一样的,后者是表 8-1-2 列出的 (7,4) 汉明码的对偶码。这不是一个巧合,最大长度移存器码就是 $(2^m - 1, 2^m - 1 - m)$ 循环汉明码的对偶码。

生成最大长度移存器码的移存器也可以用来产生一个周期长度为 $n = 2^m - 1$ 的二进制周期序列,该二进制周期序列具有周期性的自相关函数 $\Phi(m)$, $m = 0, \pm n, \pm 2n \dots$ 时 $\Phi(m) = n$,在所有其他移位时 $\Phi(m) = -1$,如 13.2.4 节所述。这种脉冲状的自相关说明其功率谱近似白色,因此序列类似白噪声。最大长度序列称为伪噪声(PN)序列,在数据扰码和扩谱信号中得到实际应用。

5. BCH 码

BCH(Bose-Chaudhuri-Hocquenghem)码是循环码中的一个大类,它可以是二进制码,也可以是非二进制码。二进制 BCH 码的构造可具有下列参数:

$$n = 2^m - 1$$

$$n - k \leq mt$$

(8-1-42)

$$d_{\min} = 2t + 1$$

式中, m ($m \geq 3$) 和 t 是任意正整数。这类二进制 BCH 码为通信系统设计者们在码长和码率方面提供了很大的选择余地。非二进制 BCH 码包括非常有用的里德-索罗门(Reed-Solomon)码, 该码将在后面介绍。

BCH 码的生成多项式可由 $p^{2^m-1} + 1$ 的因式构成。表 8-1-6 列出了码长为 $7 \leq n \leq 255$ 的 BCH 码生成多项式的系数, 相当于 $3 \leq m \leq 8$ 。系数以八进制形式给出, 最左面的数字对应生成多项式的最高次项系数。这样, (15, 5) 码的生成多项式的系数是 2467, 用二进制形式表示是 10100110111。最后得到的生成多项式是 $g(p) = p^{10} + p^8 + p^5 + p^4 + p^2 + p + 1$ 。

表 8-1-6 码长 $7 \leq n \leq 255$ 的 BCH 码生成多项式系数(八进制形式)

n	k	t	$g(p)$
7	4	1	13
15	11	1	23
	7	2	721
	5	3	2467
31	26	1	45
	21	2	3551
	16	3	107657
	11	5	5423325
	6	7	313365047
63	57	1	103
	51	2	12471
	45	3	1701317
	39	4	166623567
	36	5	1033500423
	30	6	157464165547
	24	7	17323260404441
	18	10	1363026512351725
	16	11	6331141367235453
	10	13	472622305527250155
	7	15	5231045543503271737
127	120	1	211
	113	2	41567
	106	3	11554743
	99	4	3447023271
	92	5	624730022327
	85	6	130704476322273
	78	7	26230002166130115
	71	9	6255010713253127753
	64	10	1206534025570773100045
	57	11	335265252505705053517721
	50	13	54446512523314012421501421
	43	14	17721772213651227521220574343
	36	15	3146074666522075044764574721735
	29	21	403114461367670603667530141176155
	22	23	123376070404722522435445626637647043
	15	27	22057042445604554770523013762217604353
	8	31	7047264052751030651476224271567733130217

续表

n	k	t	$g(p)$
255	247	1	435
	239	2	267543
	231	3	156720665
	223	4	75626641375
	215	5	23157564726421
	207	6	16176560567636227
	199	7	7633031270420722341
	191	8	2663470176115333714567
	187	9	52755313540001322236351
	179	10	22624710717340432416300455
	171	11	1541621421234235607706163067
	163	12	7500415510075602551574724514601
	155	13	3757513005407665015722506464677633
	147	14	1642130173537165525304165305441011711
	139	15	461401732060175561570722730247453567445
	131	18	215713331471510151261250277442142024165471
	123	19	120614052242066003717210326516141226272506267
	115	21	60526665572100247263636404600276352556313472737
	107	22	22205772322066256312417300235347420176574750154441
	99	23	10656667253473174222741416201574332252411076432303431
	91	25	6750265030327444172723631724732511075550762720724344561
	87	26	110136763414743236435231634307172046206722545273311721317
	79	27	66700035637657500020270344207366174621015326711766541342355
	71	29	24024710520644321515554172112331163205444250362557643221706035
	63	30	10754475055163544325315217357707003666111726455267613656702543301
	55	31	7315425203501100133015275306032054325414326755010557044426035473617
	47	42	2533542017062646563033041377406233175123334145446045005066024552543173
	45	43	15202056055234161131101346376423701563670024470762373033202157025051541
	37	45	5136330255067007414177447245437530420735706174323432347644354737403044003
	29	47	3025715536673071465527064012361377115342242324201174114060254757410403565037
	21	55	1256215257060332656001773153607612103227341405653074542521153121614466513473725
	13	59	464173200505256454442657371425006600433067744547656140317467721357026134460500547
	9	63	15726025217472463201031043255355134614162367212044074545112766115547705561677516057

来源: stembit(1964)©1964 IEEE

BCH 码生成多项式更完整的列表由彼得森(Peterson)和韦尔登(Weldon)给出(1972 年), 他们列出了 $m \leq 34$ 时 $p^{2^m-1} + 1$ 的因式分解的结果。

8.1.4 线性分组码的最佳软判决译码

本小节将推导在加性高斯白噪声(AWGN)信道上接收机使用最佳(非量化)软判决译码时,二进制线性分组码的性能。码字比特可用第 5 章讲过的任何一种二进制信号传输方法传送。这里仅研究二进(或四进)制相干 PSK(它是最有效的方法)和二进制正交 FSK 方式(相干检测或非相干检测均可)。

令 \mathcal{E} 表示传输一个码字的信号能量,令 \mathcal{E}_c 表示传输码字的一个元素(比特)所需的信号能量。由于每个码字有 n 个比特,所以 $\mathcal{E} = n\mathcal{E}_c$;又因为每个码字只传递 k 位信息比特,所以每个

信息比特所需的能量为

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon}{k} = \frac{n}{k} \epsilon_c = \frac{\epsilon_c}{R_c} \quad (8-1-43)$$

这里假定各个码字等概发生,具有相同的先验概率 $1/M$ 。

假设码字的各比特用二进制 PSK 发送,那么每个码字的波形必然取自 M 个传输信号波形之一。从第 5 章可知,AWGN 信道的最佳接收,也就是要使码字的平均差错概率最小,可以用一组 (M 个)并行的滤波器分别与 M 个可能的发送波形匹配来实现。在每个信号传输间隔的尾部(完成码字中 n 个比特的传输),要对各匹配滤波器的输出进行比较,选出输出值最大的匹配滤波器所对应的码字。换一种方法,也可以使用 M 个互相关器。不管哪一种方法,接收机在实现时还可简化,也就是说,只要用一个滤波器(或互相关器)与传输码字每一比特的二进制 PSK 波形匹配,就可以构成一个等效的最佳接收机,后接一个译码器,用来生成与 M 种码字对应的 M 个判决变量。

具体地讲,令 $r_j (j=1,2,\dots,n)$ 表示发送任一指定码字后匹配滤波器的 n 个输出取样。由于信号是用相干二进制 PSK 传输的,所以输出 r_j 可用下列两式之一表示。

当码字的第 j 比特是 1 时,表示为

$$r_j = \sqrt{\epsilon_c} + n_j \quad (8-1-44)$$

当码字的第 j 比特是 0 时,表示为

$$r_j = -\sqrt{\epsilon_c} + n_j \quad (8-1-45)$$

变量 $\{n_j\}$ 表示取样瞬间的加性高斯白噪声。每个 n_j 的均值为 0,方差为 $N_0/2$ 。根据已知的 M 种可能发送的码字和接收到的 $\{r_j\}$ 值,最佳译码器形成 M 个相关度

$$CM_i = C(\mathbf{r}, \mathbf{C}_i) = \sum_{j=1}^n (2c_{ij} - 1)r_j \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (8-1-46)$$

式中, c_{ij} 表示第 i 个码字第 j 个位置上的比特。若 $c_{ij} = 1$, 加权系数 $2c_{ij} - 1 = 1$; 如果 $c_{ij} = 0$, 加权系数 $2c_{ij} - 1 = -1$ 。在这种方法中,加权系数 $2c_{ij} - 1$ 用来调整 $\{r_j\}$ 中的信号成分,使得与实际传输码字对应时相关度具有较大的均值 $\sqrt{\epsilon_c}n$, 其余 $M-1$ 个码字的相关度具有很小的均值。

尽管在软判决译码中根据式(8-1-46)计算相关度相对比较简单,但当码字数量巨大,比如 $M > 2^{10}$ 时,要对所有可能的码字进行式(8-1-46)的计算是不现实的。在这种情况下,使用下述算法有可能实现软判决译码,即把可能性不大的码字丢掉,不必用式(8-1-46)一一计算所有码字的相关量。在技术文献中有几种软判决译码算法的介绍,有兴趣的读者可以参阅福尼(Forney, 1966 年)、韦尔登(Weldon, 1971 年)、蔡斯(Chase, 1972 年)、韦恩伯格和沃尔夫(Wainberg & Wolf, 1973 年)、沃尔夫(1978 年)和莫代斯蒂诺(Modestino, 1982 年)的论著。

在求取线性分组码的差错概率时,当一个码用于二进制输入的对称信道,如加性高斯白噪声信道,并用最佳软判决译码时,第 m 个码字的传送差错概率对于所有 m 都是相同的。所以,为了简化起见,假定传送的是全零码字 \mathbf{C}_1 。要对 \mathbf{C}_1 正确译码,相关度 CM_1 必须超过其余 $M-1$ 个相关度 $CM_m (m = 2, \dots, M)$ 。所有这些 CM 都是高斯分布的。 CM_1 的平均值是 $\sqrt{\epsilon_c}n$, $CM_m (m = 2, \dots, M)$ 的平均值是 $\sqrt{\epsilon_c}n(1 - 2w_m/n)$ 。每个判决变量的方差是 $N_0/2$ 。正确译码概率(或等效于计算码字差错概率)的精确表达式涉及 M 个相关度之间的互相关

性,推导很麻烦。 C_1 和其余 $M-1$ 个码字之间的互相关系数为

$$\rho_m = 1 - 2w_m/n \quad (m = 2, \dots, M) \quad (8-1-47)$$

式中, w_m 表示第 m 个码字的重量。

我们也可避开精确差错概率表达式的推导而改用另一种办法,即求助于联合边界。

$CM_m > CM_1$ 的概率是

$$P_2(m) = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}(1 - \rho_m)}\right) \quad (8-1-48)$$

式中, $\mathcal{E} = k\mathcal{E}_b$ 是传输每个波形的能量。将式(8-1-47)中的 ρ_m 和 \mathcal{E} 代入,得

$$\begin{aligned} P_2(m) &= Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}R_c w_m}\right] \\ &= Q(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}) \end{aligned} \quad (8-1-49)$$

式中, γ_b 为每比特的信噪比(SNR), R_c 是码率。利用式(8-1-49)求二进制差错事件总和,可得一个码字平均差错概率的边界为

$$\begin{aligned} P_M &\leq \sum_{m=2}^M P_2(m) \\ &\leq \sum_{m=2}^M Q(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}) \end{aligned} \quad (8-1-50)$$

按式(8-1-50)计算软判决译码的差错概率,需要知道码字的重量分布。许多码的重量分布在编码理论中已经给出,比如可参考伯利坎普(Berlekamp, 1968年)、麦克威廉斯(MacWilliams)和斯隆(Sloane, 1977年)的著作。

由于

$$Q(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}) \leq Q(\sqrt{2\gamma_b R_c d_{\min}}) < \exp(-\gamma_b R_c d_{\min}) \quad (8-1-51)$$

可求得松散的边界为

$$P_M \leq (M-1)Q(\sqrt{2\gamma_b R_c d_{\min}}) < \exp(-\gamma_b R_c d_{\min} + k \ln 2) \quad (8-1-52)$$

上式的边界非常有用,因为求取时不需要知道码字的重量分布。若把式(8-1-52)的上边界与未编码二进制 PSK 系统的性能比较,后者的上边界为 $\exp(-\gamma_b)/2$, 由于编码可获得大约 $10 \lg(R_c d_{\min} - k \ln 2 / \gamma_b)$ dB 的增益,称之为编码增益。应该指出,编码增益取决于码的参数和每比特 γ_b 的信噪比 SNR。

由 5.2 节的简单信号推导出来的用于等相关性波形的差错概率表达式,提供了编码波形差错概率的三阶近似。一对编码波形之间的最大互相关系数为

$$\rho_{\max} = 1 - \frac{2}{n} d_{\min} \quad (8-1-53)$$

假设在最坏情况下,所有 M 个码字的互相关系数都等于 ρ_{\max} , 码字的差错概率就很容易处理了。但实际上有些码字的分隔距离大于最小距离,所以在 $\rho_r = \rho_{\max}$ 的假设下得到的差错概率只是上边界。所以,

$$P_M \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v + \sqrt{4\gamma_b R_c d_{\min}}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M-1} dv \quad (8-1-54)$$

上面给出的关于线性分组码性能的边界指的是分组的差错概率,即码字的差错概率。等

效的比特差错概率 P_b 的计算复杂得多。一般地,当分组发生差错时,分组内 k 个信息比特中有某些比特仍是正确的,另一些是错误的。对于正交波形,需将 P_M 乘以转换系数 $2^{k-1}/(2^k - 1)$ 才能求出 P_b 。当 $k=1$ 时此系数为 1,当 k 增大时转换系数趋近于 $1/2$,这等效于当分组发生差错时,平均来看 k 比特中将有一半是错的。各种编码波形的转换系数与其码距特性存在复杂的关系,但不会比上述假定更坏,即平均来说,当一个分组发生差错时, k 比特中的差错比特数不会超过一半,即 $P_b \leq P_M/2$ 。

式(8-1-50),式(8-1-52)和式(8-1-54)给出的性能边界也同样适用于用 QPSK 传输码字的一对比特的情况,因为 QPSK 可以等效地看做是两个以正交相位独立传输的二进制 PSK 波形。另外,式(8-1-52)和式(8-1-54)基于码最小距离的边界计算方法同样适用于非线性的二进制分组码。

如果在加性高斯白噪声信道中用二进制正交 FSK 传送码字的每个比特,那么最佳接收机可用两个匹配滤波器实现,一个滤波器与发送“0”的频率匹配,另一个滤波器与发送“1”的频率匹配。再接一个译码器,用来计算与 M 个可能的发送波形相对应的 M 个相关度。接收机的检测可以是相干的,也可以是非相干的。无论哪一种情况,都可令 r_{1j} 和 r_{0j} 表示输入到组合器的抽样值,译码器得出的相关度为

$$CM_i = \sum_{j=1}^n [c_{ij}r_{1j} + (1 - c_{ij})r_{0j}] \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (8-1-55)$$

式中, c_{ij} 代表第 i 个码字的第 j 个比特。与 $\{CM_i\}$ 的最大值相对应的码字挑选出来作为对发送码字的判决结果。

如果二进制 PSK 波形是相干检测的,随机变量 $\{r_{1j}\}$ 和 $\{r_{0j}\}$ 服从高斯分布,相关度 $\{CM_i\}$ 也是高斯分布的。在这种情况下,编码性能边界值容易求得。作为一个特例,假定发送的是全零码字 C_1 ,那么

$$\begin{aligned} r_{0j} &= \sqrt{\epsilon_c} + n_{0j} \\ r_{1j} &= n_{1j} \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8-1-56)$$

这里 $\{n_{ij}\} (i=0, 1, j=1, 2, \dots, n)$ 是互相统计独立的高斯随机变量,均值为 0,方差为 $N_0/2$ 。于是,相关度 CM_1 也是高斯分布的,均值为 $\sqrt{\epsilon_c}n$,方差为 $nN_0/2$ 。另一方面,与重量 w_m 的码字相对应的相关度 CM_m 也是高斯的,均值是 $\sqrt{\epsilon_c}n(1 - w_m/n)$,方差为 $nN_0/2$ 。由于 $\{CM_m\}$ 是相互有关的,再次使用联合边界。相关系数为

$$\rho_m = 1 - w_m/n \quad (8-1-57)$$

$CM_m > CM_1$ 的概率是

$$P_2(m) = Q(\sqrt{\gamma_b R_c w_m}) \quad (8-1-58)$$

将此结果与式(8-1-49)在相干 PSK 时的结果比较可以看出,如想达到同样的性能,相干 PSK 对信噪比的要求小 3 dB。这个结果并不意外,因为在相干检测下,即使不编码的 PSK 也比二进制正交 FSK 好 3 dB。由此看来,PSK 对于 FSK 的优点在采用编码波形后仍然存在。可得出结论:式(8-1-50),式(8-1-52)和式(8-1-54)给出的边界对于用二进制正交相干 FSK 发送的编码波形来说仍然适用,只不过要用 $\gamma_b/2$ 取代原式中的 γ_b 。

如果接收机对二进制正交 FSK 信号使用平方律检测,由于非相干组合的损失,性能将更差(见第 12 章)。如假定发送的是全零码字,则相关度可由式(8-1-55)确定,送到译码器的输入变量将是

$$\begin{aligned} r_{0j} &= \left| \sqrt{\mathcal{E}_c} + N_{0j} \right|^2 \\ r_{0j} &= |N_{1j}|^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (8-1-59)$$

式中, $|N_{0j}|$ 和 $|N_{1j}|$ 表示互相统计独立的高斯随机变量的复数值, 其均值为零, 方差为 N_0 。相关度 CM_1 为

$$CM_1 = \sum_{j=1}^n r_{0j} \quad (8-1-60)$$

与重量 w_m 的码字对应的相关度从统计意义上说与前 w_m 码元为 1、后 $(n - w_m)$ 码元为 0 的码字 ($1 \leq j \leq w_m$ 时 $c_{mj} = 1$, $w_m + 1 \leq j \leq n$ 时 $c_{mj} = 0$) 的相关度是一样的。因此, CM_m 可表达为

$$CM_m = \sum_{j=1}^{w_m} r_{1j} + \sum_{j=w_m+1}^n r_{0j} \quad (8-1-61)$$

CM_1 和 CM_m 的差是

$$CM_1 - CM_m = \sum_{j=1}^{w_m} (r_{0j} - r_{1j}) \quad (8-1-62)$$

差错概率正是 $CM_1 - CM_m < 0$ 的概率, 这个差值是第 12 章和附录 B 将讨论的复高斯随机变量一般的二次形式的一个特例。在 CM_1 和 CM_m 间判决时, 差错概率的表达式是

$$P_2(m) = \frac{1}{2^{2w_m-1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma_b R_c w_m\right) \sum_{i=0}^{w_m-1} K_i \left(\frac{1}{2} \gamma_b R_c w_m\right)^i \quad (8-1-63)$$

式中, 定义

$$K_i = \frac{1}{i!} \sum_{r=0}^{w_m-1-i} \binom{2w_m-1}{r} \quad (8-1-64)$$

在 $2 \leq m \leq M$ 上对 $P_2(m)$ 求和可得到联合边界, 它提供了码字差错概率的上边界。

换一种方法, 用最小距离, 而不用重量分布求一个较宽松的上边界。

$$P_M \leq \frac{M-1}{2^{2d_{\min}-1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma_b R_c d_{\min}\right) \sum_{i=0}^{d_{\min}-1} K_i \left(\frac{1}{2} \gamma_b R_c d_{\min}\right)^i \quad (8-1-65)$$

衡量一个码字中由于 n 个二进制 FSK 波形的组合以及平方律检测固有的非相干组合损失的方法可从图 12-1-1 得到, 只是要把图中的 L 用 d_{\min} 代替。这里的损失是在下列情况下求出的: n 个元素的二进制 FSK 波形先用相干检测, 再按式 (8-1-55) 组合求和, 最后用平方律检测或包络检测得到 M 个判决值。后一种情况下, 二进制差错概率是

$$P_2(m) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma_b R_c w_m\right) \quad (8-1-66)$$

因此

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M P_2(m)$$

如果用 d_{\min} 而不用重量分布来求, 码字差错概率的联合边界是

$$P_M \leq \frac{1}{2} (M-1) \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma_b R_c d_{\min}\right) \quad (8-1-67)$$

发送编码波形时需要的信道带宽可按下述方法确定: 如果用二进制 PSK 发送码字比特, 需要的带宽近似等于发送每个比特所用的时间的倒数。在信息速率为 R b/s 秒的情况下, 用

来发送 k 个信息比特和 $n - k$ 个冗余(校验)比特(共 n 比特)的时间是 $T = k/R$ 。所以

$$W = \frac{1}{T/n} = \frac{n}{k/R} = \frac{R}{R_c} \quad (8-1-68)$$

因此编码波形的带宽扩展系数 B_e 为

$$B_e = \frac{W}{R} = \frac{n}{k} = \frac{1}{R_c} \quad (8-1-69)$$

另一方面,如果用非相干检测的二进制 FSK 发送码字比特, $W \approx 2n/T$, 因而带宽扩展系数比二进制 PSK 增加大约 2 倍。不管什么情况, B_e 将随编码效率的减小而增加, 或者等效地说, B_e 随分组长度 n 的增加而线性增大。

下面比较编码传输波形和正交传输波形的性能和所要求的带宽。比较式(5-2-21)的正交波形和式(8-1-54)的相干 PSK 编码波形的 P_M 表达式, 在同样的波形数目下, 编码波形比正交波形最多损失 $10\lg(n/2d_{\min})$ dB。另一方面, 由于编码增加了码字数(编码传输需要发送 $M_c = 2^k$ 个波形, 而正交信号传输需要发送 $M_o = 2^{k_0}$ 个波形), 如果补回由于码字数造成的信噪比损失, 那么由式(5-2-27)和式(8-1-52)的联合边界可以得到以下结果: 在高信噪比情况下, 如果

$$k_0 = 2R_c d_{\min} \quad (8-1-70)$$

那么两种传输波形的性能大致相等。在此条件下, 正交信号的带宽扩展系数为

$$B_{eo} = \frac{M_o}{2\log_2 M_o} = \frac{2^{k_0}}{2k_0} = \frac{2^{2R_c d_{\min}}}{4R_c d_{\min}} \quad (8-1-71)$$

对于编码传输的波形, 有 $B_{ec} = 1/R_c$ 。式(8-1-71)给出的 B_{eo} 与此处的 B_{ec} 之比为

$$\frac{B_{eo}}{B_{ec}} = \frac{2^{2R_c d_{\min}}}{4d_{\min}} \quad (8-1-72)$$

该比值可用来衡量正交传输波形和相干 PSK 编码传输波形的相对带宽。

例如, 假定采用(63,33)二进制循环码, 其最小距离 $d_{\min} = 12$ 。由式(8-1-72)算出正交信号相对于这种编码信号的传输带宽比等于 127。这表明用编码方式比用正交信号传输可获得更高的带宽利用效率。

8.1.5 线性分组码的硬判决译码

8.1.4 节给出的 AWGN 信道上编码传输波形的性能边界是以匹配滤波器或互相关器输出的取样值未被量化为前提的。虽然这种处理方法能得到最好的性能, 但其主要的制约是在形成 M 个相关度, 比较这些量并选取最大值过程中所需的巨大计算量。当码字数目 M 很大时, 计算量大得不可忍受。

为了减轻计算负担, 可先将模拟样值量化, 然后用数字方式实现译码。本节只考虑把与码字单个比特对应的每个样值量化成 0、1 两个电平的极端情况, 即不管发送的码字比特是 0 还是 1, 都实行硬判决。这样处理后得到的离散时间信道(由调制器、AWGN 信道及解调器组成)构成一个交叉概率为 p 的二进制对称信道(BSC)。如果用相干 PSK 信号发送和接收码字比特, 有

$$p = Q\left[\sqrt{\frac{2E_c}{N_0}}\right] = Q(\sqrt{2\gamma_b R_c}) \quad (8-1-73)$$

另一方面,如果用 FSK 信号发送每个码字比特并用相干检测,那么

$$p = Q(\sqrt{\gamma_b R_c}) \quad (8-1-74)$$

用非相干检测时

$$p = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma_b R_c\right) \quad (8-1-75)$$

1. 最小距离(最大似然)译码

来自解调器的与接收码字对应的 n 个比特被送往译码器,在那里,将接收的码字和 M 种可能发送的码字相比较,把与接收码字汉明距离(两个码字不相同码位的个数)最小的判决为译码码字。在二进制对称信道下译出的码字差错概率最小,从这个意义上说,最小距离译码的法则最优。

有一种概念上很简单但计算效率不高的译码方法,是将接收的码字和所有 M 种可能发出的码字 C_i 模 2 加,得到差错矢量 e_i 。此时, e_i 代表由发送端的发送码字 C_i 转变成接收端的特定接收码字时,在信道上必然产生的差错事件。由 C_i 变为接收码字时的误码数目正好等于 e_i 中“1”的个数。因此,如果简单地计算 $\{e_i\}$ 中每一个差错矢量(共 M 个)的重量,并按照使差错矢量的重量最小的准则判决码字,事实上就实现了最小距离译码法则。

一种更加有效的硬判决译码方法是使用校验矩阵 H 。为了便于研究,假定 C_m 是发送码字, Y 是解调器输出的接收码字,一般地, Y 可表示为

$$Y = C_m + e$$

这里, e 代表一个任意的二进制差错矢量。 YH' 的乘积为

$$YH' = (C_m + e)H' = C_m H' + eH' = eH' = S \quad (8-1-76)$$

其中, $(n-k)$ 维矢量 S 叫做差错图案的伴随式。换言之,当所有一致校验方程都满足时,矢量 S 的所有元素为零;并非所有的一致校验方程都满足时,矢量 S 一定含有非零元素,即 S 包含在一致校验中失败的图案。

需强调的是,伴随式表现了差错图案的特性,而不是发送码字的特性。此外,共有 2^n 个可能的差错图案却只有 2^{n-k} 个伴随式。因此,不同的差错图案有可能导致相同的伴随式。

如果构造一个译码表,其中第一行列出所有 2^k 个可能的码字,而以全 0 码字作为开头放在该行的第一列(最左一列)。这个全 0 码字同时代表了全 0 差错图案。在第一列接下去的行填上所有 $n-1$ 个重量为 1 的差错图案 $\{e_i\}$ 。如果 $n < 2^{n-k}$,再列出全部 2 个差错的图案,然后是 3 个差错的图案,依次类推,直到填满第一列的全部 2^{n-k} 项。这样,表的行数是 2^{n-k} ,等于伴随式的数目。下一步,把第一列的每个差错图案加到对应的码字上,就把 $2^k \times 2^{n-k}$ 表的其余项都填满了,如下表所示。

C_1	C_2	C_3	...	C_{2^k}
e_1	$C_2 + e_1$	$C_3 + e_1$...	$C_{2^k} + e_1$
e_2	$C_2 + e_2$	$C_3 + e_2$...	$C_{2^k} + e_2$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
$e_{2^{n-k}-1}$	$C_2 + e_{2^{n-k}-1}$	$C_3 + e_{2^{n-k}-1}$...	$C_{2^k} + e_{2^{n-k}-1}$

这个表称为标准阵列,它的每一行,包括第一行,含有 2^k 个可能的接收码字。可能的接收

码字是由第一行的码字和第一列对应的差错图案造成的。每一行称为一个陪集,陪集的第一个(最左)接收码字叫陪集首(或叫差错图案)。因此,陪集是由同一个特定差错图案(陪集首)导致的所有可能的接收码字。

例 8-1-10 构造一个(5,2)系统码的标准阵列,该码的生成矩阵是

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

码的最小距离 $d_{\min} = 3$ 。标准阵列如表 8-1-7 所示。请注意,在这个码中,陪集首由 1 个全 0 差错图案、5 个重量为 1 的差错图案和 2 个重量为 2 的差错图案组成。虽然有许多重量为 2 的差错图案存在,但表上只有 2 个空位。这 2 个空位是由令其对应的伴随式与单个差错图案的伴随式不同而选出来的。

表 8-1-7 (5,2)码的标准阵列

码 字									
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1

设 e_i 是陪集首,发送的码字是 C_m ,那么差错图案 e_i 将使接收码字变为

$$Y = C_m + e_i$$

伴随式是

$$S = (C_m + e_i)H' = C_m H' + e_i H' = e_i H'$$

显然,在同一陪集中的所有接收码字都有相同的伴随式,因为伴随式仅取决于差错图案。另外,各个陪集有不同的伴随式。既然标准阵列已经确定了这些性质,只要再画一张伴随式译码表,表中列出 2^{n-k} 个伴随式和对应的代表最小重量差错图案的 2^{n-k} 个陪集首就可以了。这样,当给出接收码矢 Y 后,计算其伴随式

$$S = YH'$$

从算出的 S 找到对应(最大似然)的差错矢量,如 \hat{e}_m ,将该矢量加到 Y 上,可得到译出的码字。

$$\hat{C}_m = Y \oplus \hat{e}_m$$

例 8-1-11 考虑一个(5,2)码,其标准阵列如表 8-1-7 所示,其伴随式与对应的最大似然差错图案如表 8-1-8 所示。假设信道中实际的差错矢量是

$$e = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

由此差错矢量算出的伴随式是 $S = [0 \ 0 \ 1]$ 。查表确定的差错是 $\hat{e} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ 。将 \hat{e}

与 Y 相加,结果是一个错误的译码。换言之,(5,2)码能纠正所有的单个比特差错,但只能纠正 2 种 2 比特差错,即 $[1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 和 $[1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ 。

表 8-1-8 (5,2)码的伴随式表

伴 随 式	差 错 图 案
000	00000
001	00001
010	00010
100	00100
011	01000
101	10000
110	11000
111	10010

2. 循环码的伴随式译码

由上述可知,线性分组码的硬判决译码可以首先计算伴随式 $S = YH'$,然后查表找到对应于伴随式 S 的最大似然差错图案 e ,最后把差错图案 e 和接收码字相加得到最大似然译码码字 \hat{C}_m 。当码是循环码时,伴随式的计算可以用移存器实现,像编码时用的。

为了进一步说明,考虑一个系统的循环码,用多项式 $Y(p)$ 表示码字 Y 。一般地, $Y = C + e$,这里 C 是发送的码字, e 是差错矢量。于是,

$$Y(p) = C(p) + e(p) = X(p)g(p) + e(p) \tag{8-1-77}$$

假如用 $Y(p)$ 除以生成多项式 $g(p)$,得

$$\frac{Y(p)}{g(p)} = Q(p) + \frac{R(p)}{g(p)}$$

相当于

$$Y(p) = Q(p)g(p) + R(p) \tag{8-1-78}$$

所得余式 $R(p)$ 是次数小于等于 $n - k - 1$ 的多项式。

结合式(8-1-77),式(8-1-78),可得

$$e(p) = [X(p) + Q(p)]g(p) + R(p) \tag{8-1-79}$$

这个关系式说明,由 $Y(p)$ 除以 $g(p)$ 得到的余式 $R(p)$ 仅取决于差错多项式 $e(p)$,所以 $R(p)$ 是与差错图案 e 相对应的伴随式。因此,

$$Y(p) = Q(p)g(p) + S(p) \tag{8-1-80}$$

式中, $S(p)$ 是次数小于等于 $n - k - 1$ 的伴随式多项式。如果 $g(p)$ 能整除 $Y(p)$,则 $S(p) = 0$,译码码字就是 $\hat{C}_m = Y$ 。

$Y(p)$ 与 $g(p)$ 的除法可以用一个移存器实现,除法的执行如前所述。首先,接收矢量 Y 移位进入 $n - k$ 级的移存器,如图 8-1-9 所示。

初始时移存器为全 0,开关闭合于位置 1。当 n 比特的接收码字全部移入寄存器后, $n - k$ 级移存器的内容便是伴随式,比特编号的顺序如图 8-1-9 所示。将开关切换到位置 2,这些比

特就可按时钟节拍输出。有了 $n-k$ 级移存器给出的伴随式,可查表判断最大似然差错矢量。

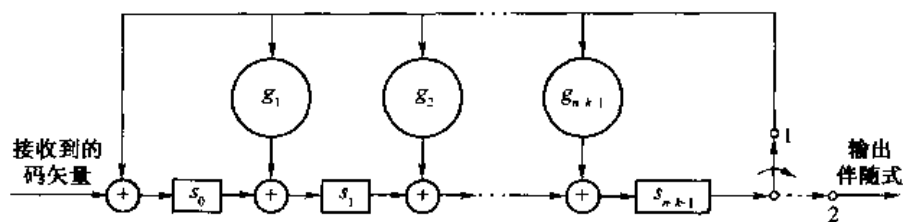


图 8-1-9 计算伴随式的 $n-k$ 级移存器

例 8-1-12 $(7,4)$ 循环汉明码的生成多项式是 $g(p) = p^3 + p + 1$, 计算其伴随式。假定接收到的码字是 $Y = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$, 该矢量送入如图 8-1-10 所示的 3 级移存器, 经 7 次移位后移存器的内容是 110, 对应于伴随式 $S = [0 \ 1 \ 1]$ 。与此伴随式对应的最大似然差错矢量是 $e = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 。因此,

$$\hat{C}_m = Y + e = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

信息比特是 1000。

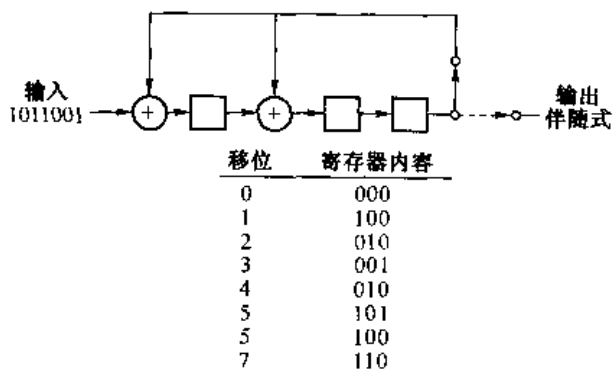


图 8-1-10 生成多项式 $g(p) = p^3 + p + 1$ 的 $(7,4)$ 循环码, 在接收码字 $Y = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$ 时伴随式的计算

使用伴随式的查表译码法, 在实践中仅当 $n-k$ 较小, 如 $n-k < 10$ 时才实用, 许多重要的码却不能实用。例如, 若 $n-k = 20$, 则表中应有 2^{20} (约一百万) 项。如此大的存储量, 在这么大的表中查找某一项所需的时间, 使得查表译码方法对包含大量校验位的长码是不现实的。

对于某一类循环码, 具体地就是 BCH 码, 已有比较有效且可行的硬判决译码算法。但是, 描述这种算法要用到更多的有限域计算方法, 这已超出编码理论的范围。可以毫不夸张地说, 正是有了这些高效的译码算法, 才使高冗余度的 BCH 长码在实际的数字通信系统中得到应用。有兴趣的读者可参考彼得森和韦尔登 (Peterson & Weldon, 1972 年)、林舒 (Lin) & 科斯特洛 (Costello, 1983 年)、布拉胡特 (Blahut, 1983 年) 和 Berlekamp (1968 年) 所著的教科书, 以及福尼 (1965 年) 的论文。

3. 检错和纠错能力

从以上讨论可以清楚地看到, 当伴随式为全 0 时, 接收码字是 2^k 个可能发送的码字之一。

因为一对码字间最小的分隔距离是 d_{\min} , 重量为 d_{\min} 的差错图案有可能把码集中 2^k 个码字之一转变成另一个码字。如果这种情况发生, 就产生了一个不可检的差错。另一方面, 如果差错数小于 d_{\min} , 伴随式即为非零重量。如果这种情况发生, 说明已检测出信道的一个或多个差错。显然, (n, k) 分组码有能力检测出 $d_{\min} - 1$ 个差错。差错检测可与反馈重发 (ARQ-Automatic Repeat-request) 结合使用, 让错了的码重发。

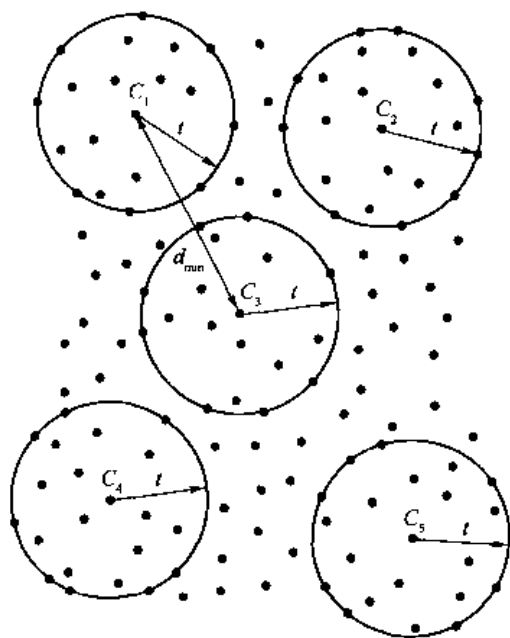


图 8-1-11 码字是半径为 $t = [(d_{\min} - 1) / 2]$ 球的球心的示意图

码的纠错能力也同样取决于最小距离。但是, 可纠差错图案的数目局限于可能的伴随式数目, 或者说是标准阵列中陪集首的数目。为了确定 (n, k) 分组码的纠错能力, 一种办法是把 2^k 个码字看做是位于 n 维空间的点。如果把每个码字看成位于半径 (汉明距离) t 的一个球的中心, 那么使 2^k 个球中任意一对两两不相交 (或相切) 的 t 的最大可能取值是 $t = [(d_{\min} - 1) / 2]$, 这里 $[x]$ 表示取包含在 x 里的最大整数。在每一个球内, 含有与该码字距离小于等于 t 的所有可能的接收码字, 于是落在球内的任何接收码字在译码时都被译为位于球心的那个码字。这就意味着, 最小距离为 d_{\min} 的 (n, k) 分组码有能力纠正 $t = [(d_{\min} - 1) / 2]$ 个差错。图 8-1-11 是码字和球的两维示意图。

如上所述, 一个码可以检 $d_{\min} - 1$ 个差错, 或者纠 $t = [(d_{\min} - 1) / 2]$ 个差错。显然, 能纠 t 个差错说明已经检出 t 个差错。然而, 若能恰当处理码的纠错能力, 可检的差错个数可多于可纠的差错个数。例如, 一个 $d_{\min} = 7$ 的码能纠 3 个差错。如果想要检测 4 个差错, 可以把包围每个码字的球的半径从 3 减为 2。这样, 带 4 个差错的图案可以被检出, 而只有带 2 个差错的图案可被纠正。换言之, 如只有 2 个差错发生, 码字可纠; 如 3 个、4 个差错发生, 接收器要求重发; 如 4 个以上的差错发生, 又使接收码字落到别的半径为 2 的球中, 误码将不可检。同样, 如 $d_{\min} = 7$ 不变, 也可以让它检 5 个差错、纠 1 个差错。一般地, 一个最小距离为 d_{\min} 的码能检 e_d 个差错、纠 e_c 个差错, 这里

$$e_d + e_c \leq d_{\min} - 1$$

及

$$e_c \leq e_d$$

4. 纠错以后的差错概率

下面推导二进制线性分组码采用硬判决译码并纠错后剩余的差错概率。

从以上讨论可知, 当 (但未必仅当) 一个码字的差错个数小于该码最小距离 d_{\min} 的一半时, 二进制对称信道的最佳译码器可以正确地译码。也就是说, 任何一个差错数高达

$$t = [(d_{\min} - 1) / 2]$$

的码字都是可纠正的。由于二进制对称信道是无记忆的,比特差错独立地发生,在 n 比特码块中出现 m 个差错的概率就是

$$P(m, n) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad (8-1-81)$$

因此,码字差错概率上边界的表达式为

$$P_M \leq \sum_{m=t+1}^n P(m, n) \quad (8-1-82)$$

仅当线性分组码是完备码时,式(8-1-82)中的等号才成立。为了描述完备码的基本特性,假定围绕每一个可能发送的码字放置一个半径为 t 的球。每个围绕码字的球内包含与该码字汉明距离小于、等于 t 的所有码字的集合,这样,在半径为 $t = [(d_{\min} - 1)/2]$ 的球内的码字数是

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{t} = \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

因为有 $M = 2^k$ 个可能发送的码字,也就是有 2^k 个不相重叠的半径为 t 的球。包含在 2^k 个球中的码字总数不会超过 2^n 个可能的接收码字。于是,一个纠 t 差错的码必然满足不等式

$$2^k \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \leq 2^n$$

即

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad (8-1-83)$$

完备码具有下述特性:围绕 $M = 2^k$ 个可能发送码字、汉明距离为 $t = [(d_{\min} - 1)/2]$ 的所有球都是不相交的,每一个接收码字都落在这些球的某一个中。因此,每个接收码字离开可能发送码字的距离至多为 t ,这时式(8-1-83)取等号。对于这种码,所有重量小于或等于 t 的差错图案都能用最佳(最小距离)译码器得到纠正。另一方面,任何重量等于或大于 $t+1$ 的差错图案都不能纠正,所以式(8-1-82)给出的差错概率表达式可以取等号。 $d_{\min} = 7$ 、 $t = 3$ 的(23, 12)高莱码是一种完备码,具有参数 $n = 2^{n-k} - 1$ 、 $d_{\min} = 3$ 和 $t = 1$ 的汉明码也是完备码。这两种特殊码,以及由长度为奇数 n 的两个码字组成且满足 $d_{\min} = n$ 的任何码,是二进制分组码中仅有的完备码。这些码与具有相同分组长度、相同信息位的其他码相比,在 BSC 信道中具有最小的差错概率,从这个意义上说,它们是最佳的。

上述关于最佳性能的定义对于准完备码也是成立的。准完备码的特点是所有 M 个围绕可能发送码字、汉明半径为 t 的球互不相交,并且每个接收码字离开可能发送码字之一的距离至多为 $t+1$ 。对于这种准完备码,所有重量小于、等于 t 的差错图案以及某些重量等于 $t+1$ 的差错图案都是可纠的,但任何重量等于或大于 $t+2$ 的差错图案都将导致不正确的译码。很明显,式(8-1-82)是差错概率的上边界,且

$$P_M \geq \sum_{m=t+2}^n P(m, n) \quad (8-1-84)$$

是下边界。

利用不等式(8-1-83),可以得到一个能更精确地测量准完备码性能的式子,即在半径为 t 的 2^k 个球之外的全部码字的数目是

$$N_{t+1} = 2^n - 2^k \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

如果把这些球外的码字等分成 2^k 个集合,每一集合对应到 2^k 个球之一,则每个球由于加上如下数量的码字而扩大了:

$$\beta_{t+1} = 2^{n-k} - \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad (8-1-85)$$

这些被加上的码字与发送码字的距离为 $t+1$ 。这样做的结果是在距离各码 $t+1$ 的 $\binom{n}{t+1}$ 个差错图案中能够纠正 β_{t+1} 个差错。于是准完备码的译码差错概率可以表示为

$$P_M = \sum_{m=t+2}^n P(m, n) + \left[\binom{n}{t+1} - \beta_{t+1} \right] p^{t+1} (1-p)^{n-t-1} \quad (8-1-86)$$

虽然准完备码不是对所有任选的 n 和 k 都存在,但是现在已知许多准完备码。由于这种码用于二进制对称信道是最佳的,所以任何 (n, k) 线性分组码的差错概率至少如式(8-1-86)那么大。因此,式(8-1-86)是任何 (n, k) 线性分组码差错概率的下边界,式中 t 是使 $\beta_{t+1} \geq 0$ 成立的最大整数。

研究两个最小距离不同的码字,可以得出另外一对上下边界。首先,我们注意到 P_M 不可能小于将发送码字错误地译码成它最邻近码字(它们离原发送码字的距离是最小距离 d_{\min})的概率,即

$$P_M \geq \sum_{m=\lfloor d_{\min}/2 \rfloor + 1}^{d_{\min}} \binom{d_{\min}}{m} p^m (1-p)^{d_{\min}-m} \quad (8-1-87)$$

另一方面, P_M 不可能大于将发送码字错误地译码成最邻近码字(它们离原发送码字的距离是最小距离 d_{\min})概率的 $M-1$ 倍。这是一个联合边界,可表示为

$$P_M \leq (M-1) \sum_{m=\lfloor d_{\min}/2 \rfloor + 1}^{d_{\min}} \binom{d_{\min}}{m} p^m (1-p)^{d_{\min}-m} \quad (8-1-88)$$

当 M 很大时,式(8-1-87)表示的下边界和式(8-1-88)表示的上边界是非常松散的。

紧密的 P_M 上边界可用 2.1.6 节介绍的契尔诺夫边界求得。再次假定发送的是全零码。将收到的码字和全零码以及重量为 w_m 的码字比较,由契尔诺夫边界(习题 8-22)求得译码差错概率的上边界为

$$P_2(W_m) \leq [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (8-1-89)$$

综合这些二进制判决可得到联合上边界

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (8-1-90)$$

如用 d_{\min} 替代重量分布,得到比式(8-1-90)更简单的形式,即

$$P_M \leq (M-1)[4p(1-p)]^{d_{\min}/2} \quad (8-1-91)$$

当然,式(8-1-90)是比式(8-1-91)更紧的上边界。

8.1.6 节将比较一种特定的码,即(23,12)高莱码的各种边界值,还将比较硬判决译码和软判决译码的差错概率性能。

8.1.6 硬判决译码和软判决译码性能的比较

在软判决和硬判决译码两种条件下比较 AWGN 信道上线性分组码的差错概率性能边界

是一件既有趣又有启发性的事。为了说明问题,以(23,12)高莱码为例,这种码相对而言有较简单的重量分布,在表 8-1-1 中已给出,其最小距离为 $d_{\min}=7$ 。

首先计算并比较硬判决译码的差错概率边界。由于(23,12)高莱码是一种完备码,硬判决译码差错概率的精确表达式为

$$P_M = \sum_{m=4}^{23} \binom{23}{m} p^m (1-p)^{23-m} \\ = 1 - \sum_{m=0}^3 \binom{23}{m} p^m (1-p)^{23-m} \quad (8-1-92)$$

式中, p 是二进制对称信道中二进制数字的差错概率。假如码字所含的二进制数字采用二相(或四相)相干 PSK 调制/解调来传输和接收,则 p 的近似表达式已由式(8-1-73)确定。除了差错概率的准确表达式(8-1-92)之外,还有式(8-1-87)给出的下边界和由式(8-1-88)、式(8-1-90)及式(8-1-91)确定的上边界。

从这些边界算出的数值结果与精确差错概率的对比见图 8-1-12。由图可见,下边界是很松的。在 $P_M=10^{-5}$ 时,下边界比精确差错概率下降约 2 dB;在 $P_M=10^{-2}$ 时,两者差约增加到 4 dB。对 3 个上边界来说,由式(8-1-88)算出的上边界最靠近准确差错概率,在 $P_M=10^{-5}$ 时只差 1 dB 不到,由式(8-1-90)绘出的契尔诺夫边界是用重量分布计算的,相对比较靠近。最后一个是只用码的最小距离计算的契尔诺夫边界,它是三者中最差的,当 $P_M=10^{-5}$ 时比准确差错概率约差 2 dB。所有 3 个上边界在差错概率 $P_M=10^{-2}$ 以上时都是很松的。

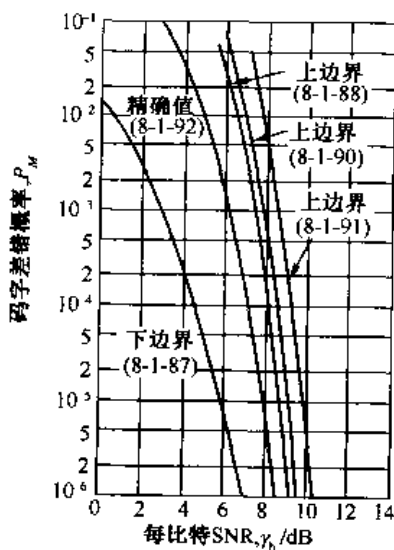


图 8-1-12 (23,12)高莱码硬判决译码时, 精确差错概率与边界值的比较

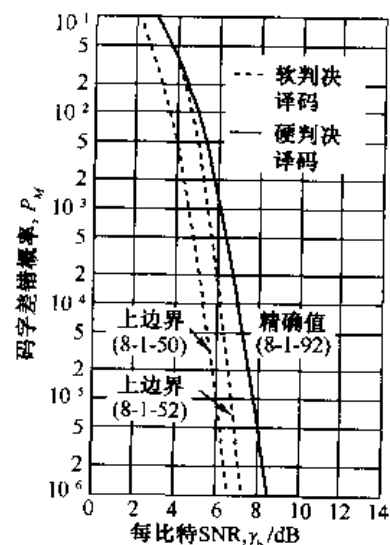


图 8-1-13 (23,12)高莱码的软判决译码与硬判决译码的比较

比较软判决译码和硬判决译码的性能也是很有意义的。在这种比较中,我们用式(8-1-52)确定的软判决译码差错概率上边界与式(8-1-92)确定的硬判决译码差错概率的精确值作对照。图 8-1-13 绘出了其性能曲线。由图可见,软判决译码的边界值在 $P_M=10^{-6}$ 时约有 0.5 dB 之差,在 $P_M=10^{-2}$ 时相差约 1 dB。还可看到,在 $10^{-2} < P_M < 10^{-6}$ 范围内,硬判决译码和软判决译码的性能约相差 2 dB。当 $P_M > 10^{-2}$ 时,硬判决译码的差错概率曲线和两个边界

值曲线相交。这表明当 $P_M > 10^{-2}$ 时, 软判决译码的边界是松散的。

正如在 7.3 节已看到的那样, 通过对硬判决译码和软判决译码截止速率的比较, 我们得出了性能相差 2 dB 的结论, 这个结果广泛适用于 AWGN 信道上编码的数字通信。以下我们将表明, 通过计算硬、软判决译码时 AWGN 信道的容量, 同样可以推出 2 dB 的性能差。

7.1.2 节推导的以比特/码元为单位的 BSC 信道容量是

$$C = 1 + p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p) \quad (8-1-93)$$

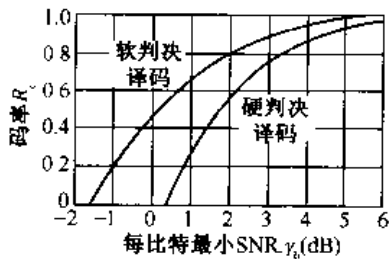


图 8-1-14 软判决和硬判决译码时码率和每比特最小信噪比的关系曲线

式中, AWGN 信道上二进制相干 PSK 的比特差错概率可用式(8-1-73)求出。假如用式(8-1-73)求得 p , 令式(8-1-93)的 $C = R_c$, 求出满足此式的 γ_b 值。计算结果如图 8-1-14 的 $R_c \sim \gamma_b$ 曲线所示。假定我们有兴趣使用码率 $R_c = 1/2$ 的码, 从表中可以查出, 为了取得硬判决译码时该码率的容量, 要求每比特最小信噪比约为 1.6 dB。

当码率趋近于零时, 最小信噪比的极限是什么? 在 R_c 较小时, 概率 p 近似为

$$p \approx \frac{1}{2} - \sqrt{\gamma_b R_c / \pi} \quad (8-1-94)$$

把 p 的表达式代入式(8-1-93), 并将式(8-1-93)的对数用下式近似

$$\log_2(1 + x) \approx (x - \frac{1}{2}x^2) / \ln 2$$

可把信道容量公式简化为

$$C = \frac{2}{\pi \ln 2} \gamma_b R_c \quad (8-1-95)$$

再令 $C = R_c$, 在 R_c 趋近于零的极限情况下可得

$$\gamma_b = \frac{1}{2} \pi \ln 2 \quad (0.37 \text{ dB}) \quad (8-1-96)$$

采用软判决译码时, 二进制输入的 AWGN 信道的容量可用类似的方式计算。其容量表达式如 7.1.2 节中的推导, 以比特/码元(bit/symbol)为单位的容量是

$$C = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} p(y|k) \log_2 \frac{p(y|k)}{p(y)} dy \quad (8-1-97)$$

式中 $p(y|k)$, $k=0, 1$ 表示在发送比特分别为 0 和 1 的条件下, 解调器输出的概率密度函数。对于 AWGN 信道, 有

$$p(y|k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-m_k)^2/2\sigma^2} \quad (k=0, 1) \quad (8-1-98)$$

式中 $m_0 = -\sqrt{\mathcal{E}_c}$, $m_1 = \sqrt{\mathcal{E}_c}$, $\sigma^2 = \frac{1}{2} N_0$ 以及 $\mathcal{E}_c = R_c \mathcal{E}_b$ 。无条件的概率密度函数 $p(y)$ 是 $p(y|1)$ 和 $p(y|0)$ 之和的一半。当 R_c 趋近于 0 时, 式(8-1-97)描述的信道容量可近似为

$$C \approx \gamma_b R_c / \ln 2 \quad (8-1-99)$$

再令 $C = R_c$, 当 $R_c \rightarrow 0$ 时, 达到此容量的每比特最小信噪比为

$$\gamma_b = \ln 2 \quad (-1.6 \text{ dB}) \quad (8-1-100)$$

将式(8-1-98)代入式(8-1-97), 并令 $C = R_c$, 可求得 $0 \leq R_c \leq 1$ 范围内码率的数值解, 结果如

图 8-1-14 所示。

从上述内容我们看到,在 R_c 趋近于零的极限处,硬判决译码和软判决译码的信噪比 γ_b 值相差 $\pi/2$,约 2 dB。另一方面,当 R_c 增加而趋近于 1 时,两种译码技术 γ_b 的差值逐渐缩小。例如,当 $R_c = 0.8$ 时,差值约为 1.5 dB。

图 8-1-14 中的曲线除了描述硬判决和软判决译码的性能差别外,还提供了其他信息。这条曲线同时指出某一特定码率所要求的每比特最小信噪比。举例来说,当采用软判决时,码率 $R_c = 0.8$ 在每比特信噪比 2 dB 时能提供任意小的差错概率。一个未编码的二进制 PSK 在信噪比 9.6 dB 时能取得 10^{-5} 的差错概率,作为比较,当使用码率 $R_c = 0.8$ 编码时可获得 7.6 dB 增益。但要得到这么大的编码增益,通常要使用一个分组长度非常大的码,这将导致接收器非常复杂。无论如何,图 8-1-14 毕竟还是提供了一个基础,使我们能对比实际获得的编码增益与硬判决和软判决译码的理论极限。

8.1.7 线性分组码最小距离的边界

本章导出的线性分组码在软判决和硬判决译码下的差错概率表达式清楚地表明最小距离参数对于编码性能的重要作用。例如,当研究软判决译码时,式(8-1-52)确定的差错概率上边界指出:对于给定的码率为 $R_c = k/n$ 的码,在 AWGN 信道下其差错概率随 d_{\min} 的增大而呈指数下降。当该上边界和下面将给出的 d_{\min} 下边界结合使用时,可求出许多码的 P_M 上边界。同样地,我们也可将式(8-1-82)给出的硬判决译码差错概率的上边界和 d_{\min} 的下边界联系起来,从而求得二进制对称信道中线性分组码差错概率的上边界。

另一方面,由 d_{\min} 的上边界可求出最佳编码能达到的差错概率的下边界。比如,在使用硬判决译码的情况下,有式(8-1-86)和式(8-1-87)给出的两个 P_M 下边界。在这两式中,前者较紧密。当这两个下边界中的任意一个和 d_{\min} 的上边界联用时,其结果就是最佳 (n, k) 码差错概率 P_M 的下边界。因此, d_{\min} 的上、下边界在评价码的能力时十分重要。

式(8-1-14)给出了一个 (n, k) 二进制或非二进制线性分组码最小距离的上边界,即 $d_{\min} \leq n - k + 1$ 。用分组长度 n 可将此式归一化,即

$$\frac{d_{\min}}{n} \leq (1 - R_c) + \frac{1}{n} \quad (8-1-101)$$

式中, R_c 是码率。当 n 很大时,因子 $1/n$ 可以忽略。

如果某一编码具有最大的可能距离,即 $d_{\min} = n - k + 1$,这种码叫做极大最小距离可分码。除了普通重复型码外,不存在二进制的极大最小距离可分码。事实上,式(8-1-101)规定的上边界对二进制码来说是非常松散的。另一方面,具有 $d_{\min} = n - k + 1$ 的非二进制码却是存在的。例如里德-索罗门(Reed-Solomon)码就是极大最小距离可分码,它属于 BCH 码的子类。

除了上述上边界之外,还有几个线性分组码的最小距离较紧的边界。我们将简述 4 种重要的边界,其中 3 个是上边界,1 个是下边界。这些边界的推导冗长并对以下讨论无用,这里不详述,有兴趣的读者请参阅彼得森和韦尔登(1972 年)著作的第 4 章。

第一个最小距离的上边界可以由不等式(8-1-83)求得。对式(8-1-83)的两边取对数并除以 n 可得

$$1 - R_c \geq \frac{1}{n} \log_2 \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad (8-1-102)$$

由于码的纠错能力(用 t 度量)与最小距离有关,所以上述关系式是最小距离的上边界,叫做汉明上边界。

令 $n \rightarrow \infty$, 可得到式(8-1-102)的渐近形式。对于任意 n , 令 t_0 是使式(8-1-102)成立的 t 的最大整数, 可以证明(彼得森和韦尔登, 1972 年)当 $n \rightarrow \infty$ 时, 任何 (n, k) 分组码 t/n 之比决不会超过 t_0/n 。这里, t_0/n 满足等式

$$1 - R_c = H(t_0/n) \quad (8-1-103)$$

式中, $H(x)$ 是式(3-2-10)定义的二进熵函数。

将汉明界推广到非二进制码, 即

$$1 - R_c \geq \frac{1}{n} \log_q \left[\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i \right] \quad (8-1-104)$$

另一个最小距离上边界是普洛特金(Plotkin)1960 年推出的, 说明如下: 在一个 (n, k) 线性分组码中, 为了达到最小距离 d_{\min} 所需的校验位数目必须满足不等式

$$n - k \geq \frac{qd_{\min} - 1}{q - 1} - 1 - \log_q d_{\min} \quad (8-1-105)$$

其中 q 是字符集大小。对二进制编码来说, 式(8-1-105)可表示为

$$\frac{d_{\min}}{n} \left(1 - \frac{1}{2d_{\min}} \log_2 d_{\min} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 - R_c + \frac{2}{n} \right)$$

在 $d_{\min}/n \leq 1/2$ 而 $n \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 式(8-1-105)简化为

$$d_{\min}/n \leq \frac{1}{2} (1 - R_c) \quad (8-1-106)$$

最后一个紧的最小距离上边界是埃利斯(Elias, 1968 年)发现的, 以渐近线形式表示为

$$d_{\min}/n \leq 2A(1 - A) \quad (8-1-107)$$

式中参数 A 与码率有关, 两者之间的关系式为

$$R_c = 1 + A \log_2 A + (1 - A) \log_2 (1 - A) \quad (0 \leq A \leq \frac{1}{2}) \quad (8-1-108)$$

(n, k) 分组码最小距离的下边界同样存在, 特别是具有归一化最小距离的二进制分组码, 它们渐近地满足不等式

$$d_{\min}/n \geq \alpha \quad (8-1-109)$$

式中, α 通过下列等式与码率建立联系

$$\begin{aligned} R_c &= 1 - H(\alpha) \\ &= 1 + \alpha \log_2 \alpha + (1 - \alpha) \log_2 (1 - \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (8-1-110)$$

这个下边界是吉尔伯特(Gilbert, 1952 年)和乌沙莫夫(Varsharmov, 1957 年)提出的下边界的一个特例, 适用于非二进和二进制分组码。

在二进制编码的情况下, 上述几种渐近线边界如图 8-1-15 所示。为了比较, 图中画出了码长分别为 $n=31$ 和 $n=63$ 的 BCH 分组码的最小距离作为码率函数的曲线。可以看到, 在 $n=31$

和 $n = 63$ 时,归一化最小距离比吉尔伯特-乌沙莫夫下边界高出不少。当分组长度 n 增加时,BCH 码的效率下降。例如,当 $n = 1023$ 时,归一化最小距离的曲线落在紧靠吉尔伯特-乌沙莫夫边界的地方。当码长超出 $n = 1023$ 时,BCH 码的归一化最小距离继续下降,落到吉尔伯特-乌沙莫夫边界以下。也就是说, $n \rightarrow \infty$ 时 $d_{\min}/n \rightarrow 0$ 。结论是最重要的一类循环码即 BCH 码,在码长很大时并不是很有效的。

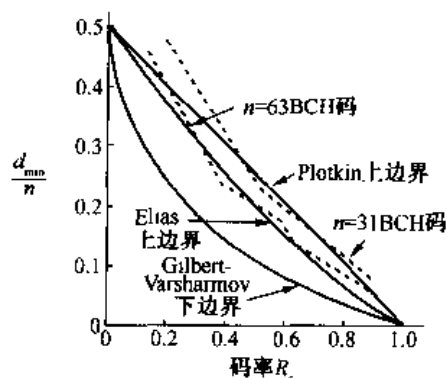


图 8-1-15 归一化最小距离时上、下边界作为码率函数的曲线图

8.1.8 非二进制分组码和级联分组码

非二进制分组码是由一组固定长度的码字构成,其码字的每个码元是从 q 个符号的集合,记做 $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ 中选出的。通常 $q = 2^k$, 所以 k 位信息比特映射到 q 个符号之一。非二进制码的码长用 N 表示,信息符号长度用 K 表示,每 K 个信息符号编成 N 符号长的一个分组。非二进制码的最小距离用 D_{\min} 表示。一个系统的 (N, K) 分组码由 K 个信息符号加上 $N - K$ 个一致校验符号组成。

在各种类型的非二进制线性分组码中,里德-所罗门码(以下简称 RS 码)是最重要的实用型编码。这种码是 BCH 码的一个子类,BCH 码又是循环码的子类。这类码的参数可用下式表示

$$\begin{aligned} N &= q - 1 = 2^k - 1 \\ K &= 1, 2, 3, \dots, N - 1 \\ D_{\min} &= N - K + 1 \\ R_c &\approx K/N \end{aligned} \quad (8-1-111)$$

这种码可确保纠正 t 个符号差错,其中

$$t = [(D_{\min} - 1)/2] = [(N - K)/2] \quad (8-1-112)$$

当然,这种码也可以扩展或者缩短,与前述二进制码的做法一样。

RS 码的重量分布是已知的。在码重多项式中各项的系数为

$$A_i = \binom{N}{i} (q-1) \sum_{j=0}^{i-D} (-1)^j \binom{i-1}{j} q^{i-j-D} \quad (i \geq D_{\min}) \quad (8-1-113)$$

式中, $D \equiv D_{\min}$ 及 $q = 2^k$ 。

RS 码之所以重要,原因之一是该码的距离特性好,其次是因为存在一种有效的硬判决译码算法,使得在许多需要长码的应用场合,该码能够被实现。

非二进制码与每次发送 2^k 种可能符号之一的 M 进制调制技术十分匹配,特别适合用于 M 进制正交信号,如 M 进制 FSK 中, q 附字符集的 2^k 个符号与 $M = 2^k$ 个正交信号正好一一对应。这样,发送 N 个正交信号就完成了—个码字的传输,其中每个正交信号都是从 $M = 2^k$ 个可能的信号中选取的。

信号在 AWGN 信道传输时劣化,接收这种信号的最佳解调器由 M 个匹配滤波器(或互相关器)组成,匹配滤波器的输出以软判决或硬判决形式送到译码器。如果译码器采用的是硬判决,那么用符号差错概率 P_M 和编码参数来描述译码器的特性就足够了。事实上,调制器、

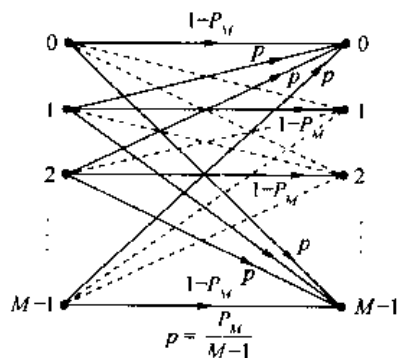


图 8-1-16 M 进制输入、 M 进制输出的对称无记忆信道

AWGN 信道和解调器构成了一个等效的离散 (M 进制) 输入、离散 (M 进制) 输出的对称无记忆信道, 其特性可以用转移概率 $P_c = 1 - P_M$ 和 $P_M/(M-1)$ 描述。这种模型是二进制对称信道 (BSC) 模型的推广, 如图 8-1-16 所示。

硬判决译码器的性能可用下述码字差错概率上边界表示

$$P_e \leq \sum_{i=t+1}^N \binom{N}{i} P_M^i (1 - P_M)^{N-i} \quad (8-1-114)$$

式中, t 是确保该码能纠正的差错的个数。

在码字产生差错时, 对应的符号差错概率是

$$P_{es} = \frac{1}{N} \sum_{i=t+1}^N i \binom{N}{i} P_M^i (1 - P_M)^{N-i} \quad (8-1-115)$$

进一步, 如果将符号转换成二进制数字, 对应式 (8-1-115) 的比特差错概率是

$$P_{eb} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_{es} \quad (8-1-116)$$

例 8-1-13 求解一个 $N = 2^5 - 1 = 31$ 的 RS 码的性能, 其 $D_{\min} = 3, 5, 9$ 和 17, 相应的 K 值是 29, 27, 23 和 15。调制方式是 $M = 32$ 的正交 FSK, 接收器采用非相干检测。

符号差错概率已由式 (5-4-46) 给出, 可表示为

$$P_M = \frac{1}{M} e^{-\gamma} \sum_{n=2}^M (-1)^n \binom{M}{n} e^{\gamma/n} \quad (8-1-117)$$

式中, γ 是每个码元符号的信噪比。将式 (8-1-117) 代入式 (8-1-115), 结合式 (8-1-116) 的结果可得到比特差错概率。计算的结果如图 8-1-17 所示。值得注意的是, 越强 (D_{\min} 大) 的码在每比特 SNR 较低时与弱码相比其性能越差。相反地, 在高 SNR 时, 越强的码性能越好。在各码间必然存在相交点, 正如图 8-1-17 中 $t=1$ 和 $t=8$ 时两个码的曲线相交。 $t=1, 2$ 和 4 的码在比特 SNR 较低的区域相交。同样地, $t=4$ 和 $t=8$ 以及 $t=8$ 和 $t=2$ 的码的曲线在高 SNR 区域相交。这就是编码波形非相干检测时的性能特点。

如果解调器对每个符号不作硬判决, 而是把未经量化的匹配滤波器输出信号送到译码器, 就可进行软判决译码。这种译码需要计算 $q^K = 2^{kK}$ 个相关度, 每个相关度与 q^K 个码字之一对应。相关度等于把匹配滤波器的 N 个输出 (每个输出对应一个接收符号) 相加之和。匹配滤波器的输出可以是相干相加, 也可以是包络检波后相加, 还可以是平方律检波后相加。如果用相干检测且信道噪声是 AWGN, 其差错概率的计算可由 8.1.4 节讨论的二进制情况直接推广而来。但是, 如果用包络检测或平方律检波及非相干组合来产生判决变量, 译码器性能的计算就相当复杂。

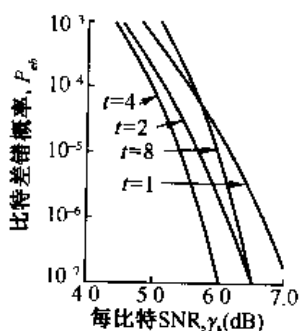


图 8-1-17 AWGN 信道、32 进制 FSK 调制、非相干检测时, 若干 $N=31$ 纠错 t 差错的 RS 码的性能

级联分组码

级联码是由两个独立的码结合而成的一种较长的码。通常,其中一个选用非二进制码,另一个选用二进制码。两个码的级联如图 8-1-18 所示。

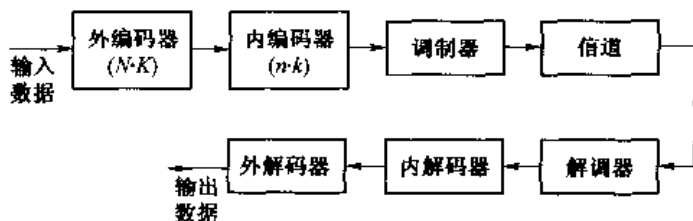


图 8-1-18 采用级联码的通信系统框图

非二进制 (N, K) 码作为外码,二进制码作为内码。将 kK 个信息比特组成的一个数据块分割成 K 组,每组 k 比特,称之为一个符号。 K 个 k 比特符号由外编码器编成 N 个 k 比特符号,这和通常的非二进制编码一样。内编码器再把每个 k 比特长的符号编成长度为 n 的二进制分组码。这样得到的级联分组码的分组长度为 Nn 比特,包含 kK 个信息比特,也就是说,产生了一个等效的 (Nn, Kk) 二进制长码。码字中的各个比特采用 PSK 或 FSK 在信道上传输。

级联码的最小距离为 $d_{\min} D_{\min}$,其中 D_{\min} 是外码的最小距离, d_{\min} 是内码的最小距离。此外,级联码的码率是 Kk/Nn ,等于两个码率相乘。

级联码采用硬判决译码很方便,只需分解为一个内译码器和一个外译码器即可。内译码器对每个 n 比特组作硬判决,每个 n 比特组对应于内码的一个码字。对 k 位信息比特的判决根据最大似然(最小距离)译码准则,这 k 个比特代表外码的一个符号。当收到来自内译码器的由 N 个 k 比特符号组成的数据块后,外译码器根据最大似然译码准则对 K 个 k 比特符号作硬判决译码。

级联码也可用软判决译码。如果选用的内码码字比较少,即 2^k 不算太大,一般可对内码进行软判决译码;外码通常还是采用硬判决译码,特别是在分组长度比较长而码集里的码字数很大的情况下。此外,当外码和内码都用软判决译码时,性能可有显著增益,这也证实了增加译码复杂度的合理性。在衰落信道上的数字通信就用了这种方法,第 14 章将详述。

下面用一个例子来结束本节。

例 8-1-14 将例 8-1-1 和例 8-1-2 中描述的 $(7,4)$ 汉明码作为级联码的内码,将 RS 码作为外码。由于 $k=4$,选择 RS 码的长度为 $N=2^4-1=15$ 。为了达到要求的码率,每个外码码字中信息符号 K 的数目可在 $1 \leq K \leq 14$ 的范围内选取。

8.1.9 突发差错信道中编码数据的交织

大多数用来提高信息传输可靠性的码在信道差错满足统计独立时使用起来是很有效的,AWGN 信道就是这样的信道。但是也有一些信道,其差错具有突发特性。例子之一就是具有多径和衰落特点的信道,第 14 章将详述。由时变的多径传输造成的信号衰落常导致信号电平降落到噪声电平以下,造成大量差错。第二个例子是磁记录类型的信道(磁带或磁盘),在这种

信道里,记录媒体的瑕疵将导致成簇的差错。针对统计独立差错的最优编码通常也纠正不了这种突发差错块。

现在,技术人员已做了大量工作来构造能够纠正突发差错的码。最有名的纠突发差错码是循环码的一个子类,叫做法尔码,这是以该码发明人法尔(P. Fire, 1959年)的名字命名的码。另一类纠突发差错的循环码是由伯顿(Burton, 1969年)发明的码。

一个长度为 b 的突发差错定义为有 b 比特差错的序列,该序列的第一位和最后一位是“1”。码的纠突发差错能力定义为比最短的不可纠突发差错的长度少 1。不难看出,有 $n-k$ 校验位的 (n, k) 系统码能够纠正长度为 $b \leq [(n-k)/2]$ 的突发差错。

处理突发差错信道的一个有效的办法是对编码数据实行交织,把突发差错信道转变为统计独立差错的信道。这样,为统计独立差错信道(短突发)设计的码就可以使用了。

采用交织技术的系统框图如图 8-1-19 所示,编码数据经交织器重新排序后在信道上传输。在接收端解调后(硬、软判决都可以),去交织器将数据复原到正确的顺序后送入译码器。由于交织/去交织的效果,突发差错在时间上被扩散,于是在每个码字上的差错显得独立了。

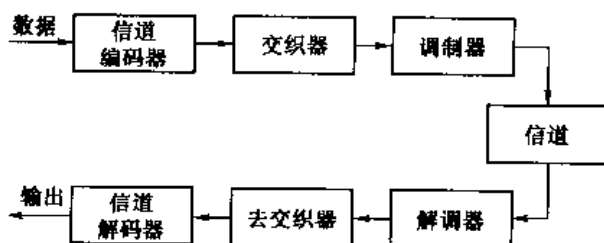


图 8-1-19 在突发差错信道中采用交织的系统框图

交织可以取两种形式之一:分块结构或者卷积结构。分块交织器将编码数据排成 m 行 n 列的矩形阵列形式。通常,阵列的每一行包含一个长度为 n 的码字, m 阶交织器由 m 行(m 个码字)组成,如图 8-1-20 所示。比特按列的方向读出,送至信道。在接收端,去交织器把数据存储成同样的矩形阵列形式,但是按行的方向读出,一次一行。这种将传输数据重新排序的效果,是把长度 $l = mb$ 的突发差错破碎成 m 个长度 b 的突发差错。于是,用一个能处理 $b \leq [(n-k)/2]$ 长突发差错的 (n, k) 码加上一个 m 阶交织器产生交织的 (mn, mk) 分组码,就能解决长度 mb 的突发差错。

也可用卷积交织器以类似的方式代替分块交织器。卷积交织器用于下面将讨论的卷积码时匹配得比较好。卷积交织器的结构在拉姆齐(Ramsey, 1970年)和福尼(1971年)的著作中有述。

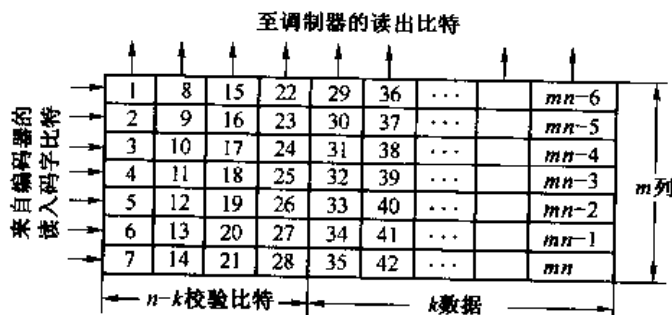


图 8-1-20 编码数据的块交织器

8.1.10 串行与并行级联分组码

交织器与级联码结合可构成码字非常长的编码。在串行级联分组码(SCBC, Serially Concatenated Block Code)中,交织器插在两个编码器之间。如图 8-1-21 所示。前后两个码都是二进制线性系统码,外码是 (p, k) 码而内码是 (n, p) 码。块交织的长度选为 $N = mp$,这里 m 对应于外码码字的数目。编码和交织的具体过程如下: mk 位信息比特经外编码器变为 $N = mp$ 位编码比特,这些编码比特进入交织器,按交织器的置换算法以不同的顺序读出。交织器输出的 mp 编码比特然后分隔成长度 p 的分组送入内编码器,这样, mk 位信息比特被 SCBC 编成了 mn 的码块。最终的码率是 $R_c = k/n$,它是内、外编码器码率的乘积。然而,串行级联分组码 SCBC 的分块长度是 mn 比特,它比不使用交织器的一般级联码的分块长度要大得多。

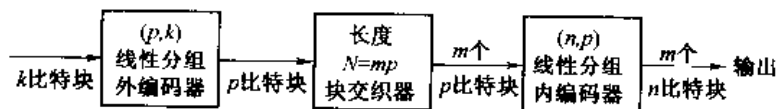


图 8-1-21 带交织器的串行级联分组码(SCBC)

块交织器通常起一种伪随机交织器的作用,就是说,交织器对 N 比特的数据块作伪随机的置换。为了分析 SCBC 的性能,这种交织器可以用一个均匀交交织器作为它的模型,均匀交织器定义为这样一种装置:它能把重量为 w 的输入码字以相等的概率 $1/\binom{N}{w}$ 映射为全部 $\binom{N}{w}$ 个不同的置换体之一。

利用交织,可用类似办法构成并行级联分组码(PCBC)。图 8-1-22 是这种编码器的基本结构框图,它由两个二进制编码器组成,两编码器可以相同也可以不同。这两个编码器是二进制、线性、系统的,用 (n_1, k) 、 (n_2, k) 来表示。伪随机块交织器的长度 $N = k$,由于信息比特仅传送一次,因此 PCBC 总的分组长度是 $n_1 + n_2 - k$,码率是 $k/(n_1 + n_2 - k)$ 。更一般地看,我们能对 mk ($m > 1$)比特编码,这样可使用长度为 $N = mk$ 的交织器,关于并行级联码交织器的设计,可参见 Daneshgaran 和 Mondin(1999 年)的论文。

交织器在 SCBC 和 PCBC 上的使用,不但导致码长变大,而且使码间变得稀疏。这类码的解码一般采用软输入/软输出的最大后验概率(MAP)算法,迭代执行。Benedetto 等人在 1998 年的一篇论文中描述了一种用于串行级联码的 MAP 迭代译码算法。有许多文章对并行级联码的 MAP 迭代译码算法作了介绍,其中包括 Berrou 等人(1993 年)、Benedetto 和 Montorsi (1996 年)、Hagenauer 等人(1996 年)的论文,以及 Hecgard 和 Wicker 1999 年出版的书。

带交织器的级联码与 MAP 迭代译码相结合导致在中等误码率如 10^{-4} 到 10^{-5} 低(SNR 区)时,编码性能非常接近香农限。在下节我们还将讲到级联码,那时是用到卷积码。

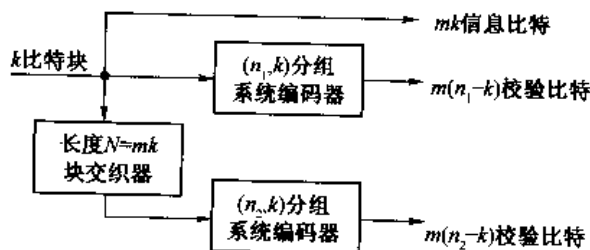


图 8-1-22 带交织器的并行级联分组码(PCBC)

8.2 卷积码

卷积码是将发送的信息序列通过一个线性的、有限状态的移位寄存器而产生的码。通常,该移位寄存器由 K 级(每级 k 比特)和 n 个线性的代数函数生成器组成,如图 8-2-1 所示。二进制数据移位输入到编码器,沿着移存器每次移动 k 比特位。每一个 k 比特长的输入序列对应一个 n 比特长的输出序列。因此其编码效率(码率)定义为 $R_c = k/n$,这和分组码编码效率的定义一致。参数 K 称为卷积码的约束长度。^①

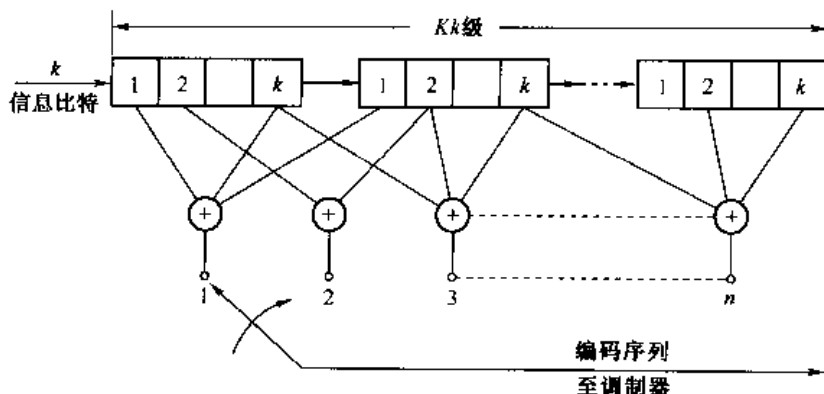


图 8-2-1 卷积编码器

描述卷积码的方法之一是给出其生成矩阵,正如在处理分组码时的做法一样。一般来说,卷积码的生成矩阵是半(单边)无限矩阵,这是因为输入序列本身的长度是半无限的。另一种描述生成矩阵的方法是用一组 n 个矢量来表示,每个矢量对应 n 个模 2 加法器中的一个,这与生成矩阵在功能上是等效的。每个矢量有 Kk 维,包含编码器和模 2 加法器之间连接关系的信息。某矢量第 i 个元素如果是“1”,表示相应的移存器第 i 级和模 2 加法器相连;反之,如果在该位置上为 0,表明这一级移存器和模 2 加法器不相连。

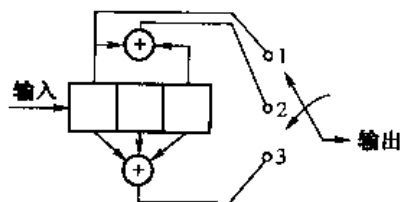


图 8-2-2 $K=3, k=1, n=3$ 的卷积编码器

具体地,参看图 8-2-2 中一个约束长度 $K=3, k=1$ 以及 $n=3$ 的二进制卷积编码器,移位寄存器初始是全零状态。假设第一个输入比特是 1,那么 3 比特输出序列是 111。如第二个输入比特是 0,则输出序列是 001。如第三个输入比特是 1,输出序列将是 100,依此类推。现若将 3 比特输出序列从上到下按 1,2 和 3 编号,并给每个对应的函数生成矢量也作类似的编号,那么,由于只有第一级与第一个函数生成器相连(不需要模 2 加法器),因此第一个函数生成矢量是

$$g_1 = [100]$$

第二个函数生成器和第一级、第三级相连,所以

^① 在多数情况下,码的约束长度以比特为单位,而不以 K 比特组为单位。因此,将移存器说成是 L 级移存器,这里 $L = Kk$ 。一般情况下, L 可以不是 k 的倍数。

$$g_2 = [101]$$

最后,第三个函数生成矢量为

$$g_3 = [111]$$

这种码的函数生成矢量如用八进制方式表示为(4,5,7)更方便。可以得出结论:当 $k=1$ 时,需要用 n 个函数生成矢量来表示,每个矢量是 K 维的。

按照上面的叙述,对于一个 $k>1$ 、约束长度为 K 、码率为 k/n 的二进制卷积码来说,应该有 n 个 Kk 维的函数生成矢量。下面是一个 $k=2, n=3$ 的例子。

例 8-2-1 研究图 8-2-3 中码率为 $2/3$ 的卷积编码器。在此编码器中,每次有 2 比特移入编码器,产生 3 个输出比特。生成式是

$$g_1 = [1011], \quad g_2 = [1101], \quad g_3 = [1010]$$

用八进制形式表示,这些生成式是(13,15,12)。

描述卷积码通常有 3 种可选方法,即树图、网格图和状态图。例如,图 8-2-4 绘出了图 8-2-2 所示卷积编码器的树图。假定编码器的初始状态为零,那么树图表明:若第一个输入比特是 0,则输出序列为 000;若第一个输入比特为 1,则输出序列是 111。若第一个输入比特为 1 而第二个输入比特为 0,则第二组的 3 个输出比特是 001。按此树图继续下去,若第三个输入比特是 0,则输出是 011;但若第三个输入比特是 1,那么输出是 100。因此,如果一个特定的序列已经把我们带到树图的某特定节点,可按如下规律继续分枝:如果下一个输入比特是 0,取上分支;如果下一个输入比特为 1,取下分支。这样,对于一个确定的输入序列,在树图中有一条确定的路径轨迹。

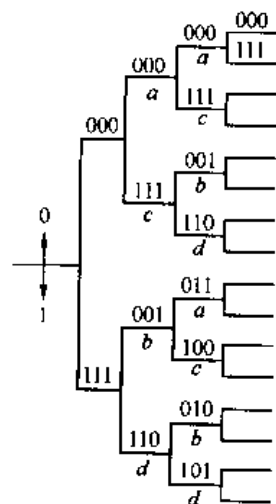


图 8-2-4 码率为 $1/3$, $K=3$ 卷积码的树图

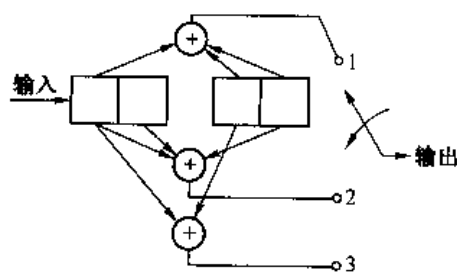


图 8-2-3 $K=2, k=2, n=3$ 的卷积编码器

仔细观察由图 8-2-2 所示卷积编码器产生的树图,发现第三级之后的结构是自身结构的不断重复。这个特点与约束长度 $K=3$ 相符。也就是说,每级的 3 比特输出序列取决于当前的输入比特和早先输入的 2 个比特,即已包含在移位寄存器前两级中的 2 比特。移存器最后一级中的比特是向右移出的,不影响输出。于是可以说,每个输入比特所对应的 3 比特输出序列取决于输入比特和移存器的 4 种可能状态,即 $a=00, b=01, c=10, d=11$ 。如果把树图中的每个节点写上标记,与移存器的 4 个状态相对应,我们会发现,在树图第三级上有两个节点标有 a ,两个节点标有 b ,两个节点标有 c 和两个节点标有 d 。可见,从两个有同样标记(同样状态)的节点发出的分支具有相同的输出序列,从这个意义上说它们是等同的。这意味着两个相同标记的节点可以合并。如果把图 8-2-4 所示的树图合并,得到另一种较紧凑的图,称为网格图。例如,图 8-2-5 所示就是图 8-2-2 所示卷积编码器的网格图。在画网格图时我们约定:实线表示输入比特为 0 时的输出,虚线表示输入比特为 1 时的输出。由此例

可见,在完成初始过渡之后,网格图的每一级都包含 4 个节点,对应于移位寄存器的 4 个状态 a, b, c 和 d 。从第二级后,网格图的每个节点都有两条进入的路径和两条出去的路径。在这两条出去的路径中,一条对应输入比特为 0 时的路径,另一条对应于输入比特为 1 的路径。

由于编码器的输出取决于输入和编码器的状态,所以还有一个比网格图更紧凑的图,即状态图。状态图是一种表示编码器可能的状态及由一个状态到另一状态可能的转移的图形。例如,图 8-2-6 所示就是图 8-2-2 所示编码器的状态图。状态图表明可能的状态转移如下。

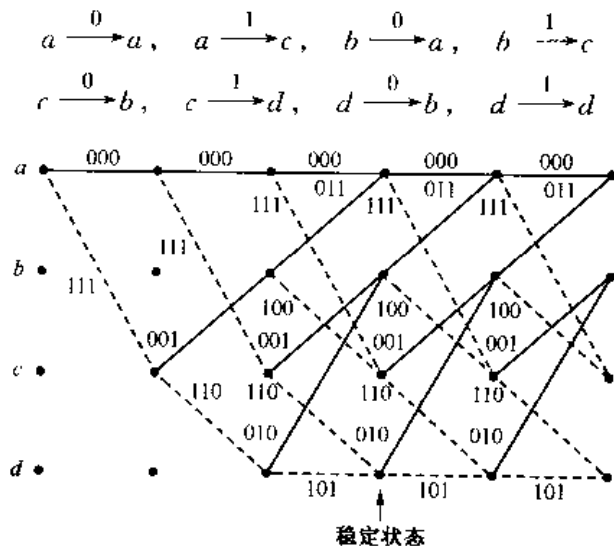


图 8-2-5 码率 $1/3, K=3$ 卷积码的网格图

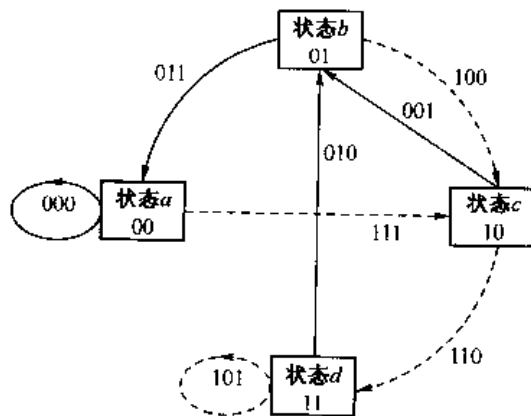


图 8-2-6 码率 $1/3, K=3$ 卷积码的状态图

这里, $\alpha \xrightarrow{1} \beta$ 表示当输入比特为 1 时由状态 α 转移到状态 β 。状态图中标在每条分支旁边的 3 个比特代表输出比特。图中虚线表示输入比特为 1 时的转移,实线表示输入比特为 0 时的转移。

例 8-2-2 研究例 8-2-1 (见图 8-2-3) $k=2$ 且码率为 $2/3$ 的卷积码,最初的 2 个输入比特可以是 00, 01, 10 或 11, 相应的输出比特是 000, 010, 111, 101。当下一对输入比特进入编码器时,原先一对比特移到第二级。相应的输出比特既取决于已经移到第二级的那一对比特,也取决于新输入的一对比特。因此,该码树图 (见图 8-2-7) 的每一个节点有 4 个分支,与 4 种可能

的输入比特对相对应。由于这种码的约束长度 $K=2$, 所以树图从第二级之后就开始重复。正如图 8-2-7 所示, 从标记为 a (状态 a) 的节点发出去的所有分支都有相同的输出。通过合并这些具有相同标记的节点, 可得到图 8-2-8 所示的网格图。最后可得到该码的状态图如图 8-2-9 所示。

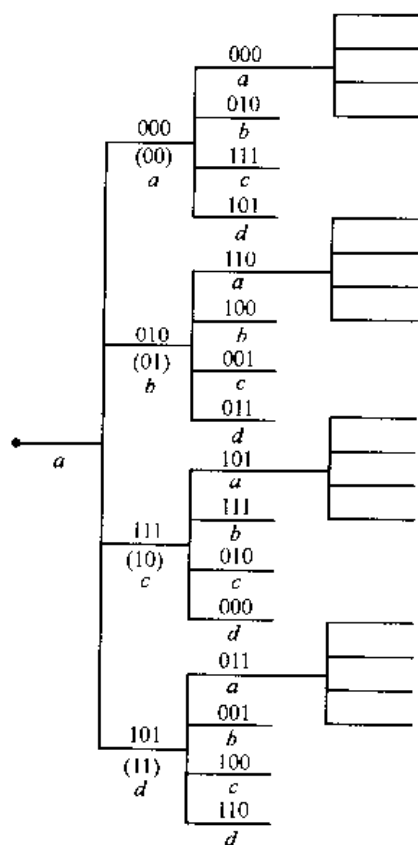


图 8-2-7 $K=2, k=2, n=3$ 卷积码的树图

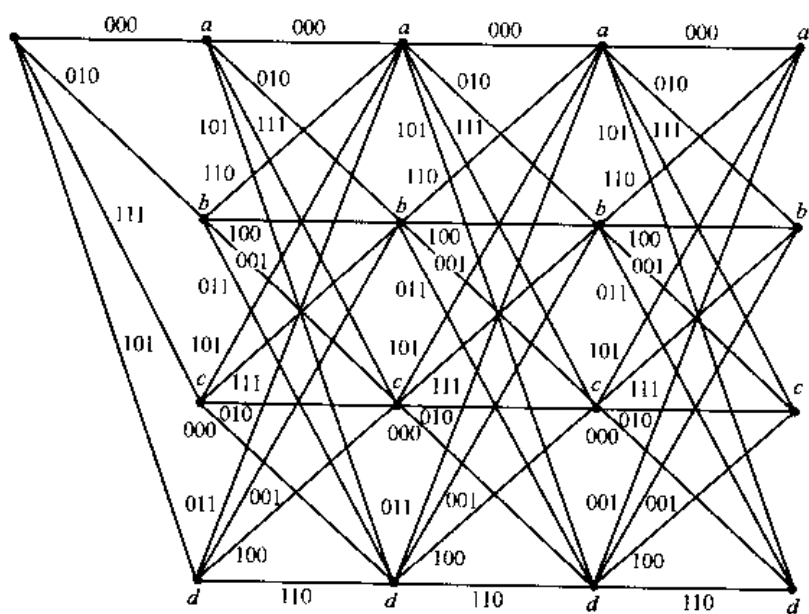


图 8-2-8 $K=2, k=2, n=3$ 卷积码的网格图

推广为一般结论,一个码率为 k/n 、约束长度 K 的卷积码有以下特点:其树图的每个节点发出 2^k 个分支;其网格图和状态图各具有 $2^{k(K-1)}$ 种可能的状态;可能进入到每个状态的分支有 2^k 条,从每个状态发出的分支也是 2^k 条(在网格图和树图中,这个结论仅在完成过渡之后才是正确的)。

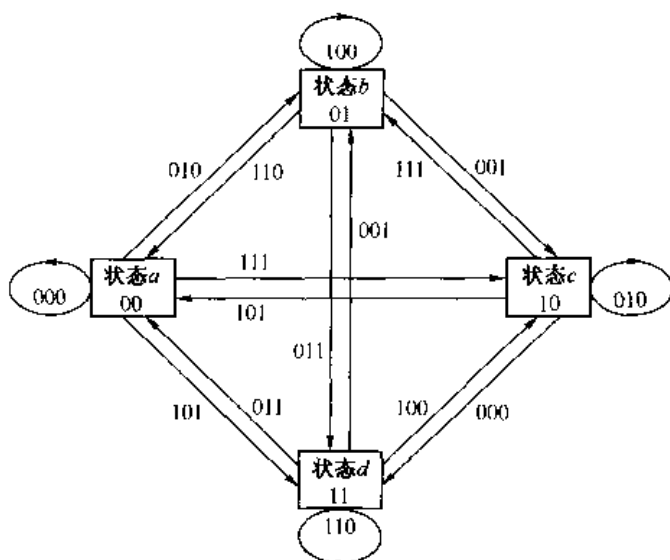


图 8-2-9 $K=2, k=2, n=3$ 卷积码的状态图

以上描述的 3 种图可用来表示非二进制卷积码。当编码字符集的符号数为 $q=2^k$ ($k > 1$) 时,非二进制码可用一个等效的二进制码表示。下例研究这种类型的卷积码。

例 8-2-3 如图 8-2-10 所示的编码器产生卷积码,这种码可以用一个 $K=2, k=2, n=4, R_c=1/2$ 的二进制卷积码表示,其生成式是

$$\begin{aligned} g_1 &= [1010] & g_2 &= [0101] \\ g_3 &= [1110] & g_4 &= [1001] \end{aligned}$$

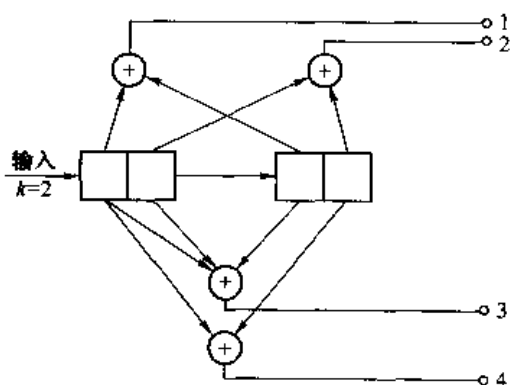


图 8-2-10 $K=2, k=2, n=4$ 的卷积编码器

除了码率不同外,该码与例 8-2-1 研究的码率为 $2/3, k=2$ 的卷积码具有相似的形式。换一种说法,即图 8-2-10 所示的编码器产生的码可以看做是非二进制码($q=4$),该码用一个四进制符号当做输入,用两个四进制符号当做输出。实际上,如果编码器的输出被调制器和解

调器当做 q 进制 ($q=4$) 符号来对待, 这些符号又用 M 进制 ($M=4$) 的调制技术在信道上传输, 那么把这种码看做非二进制码是合适的。

在任何情况下, 树图、网格图、状态图与如何看待该码无关, 即特定编码的特性可以用树图表示, 树图的每一个节点发出 4 个分支; 或者用具有 4 个可能状态的网格图表示, 每个状态有 4 个分支可进入, 又有 4 个分支可离去; 也可用参数与网格图一样的状态图表示。

8.2.1 卷积码的转移函数

卷积码的距离特性和差错概率性能可从其状态图求得。由于卷积码是线性的, 所以树图中截止到某级长度的所有码字序列与全零码字序列的汉明距离集合, 同所有码字序列与其他任何一个码字序列的距离集合相同。因而, 不失一般性, 假设输入到编码器的是全零码字序列。

借用图 8-2-6 所示的状态图说明获得卷积码码距特性的方法。首先, 把该状态图的每个分支注上 $D^0=1, D^1, D^2$ 或 D^3 的标记, 其中 D 的指数表示对应于每个分支的输出比特序列与全零分支的输出比特序列之间的汉明距离。在 a 节点处的自环可以删除, 因为它在计算码字序列与全零码序列的距离特性上不起作用。另外, 节点 a 被分成两个节点, 其中之一表示状态图的输入, 另一个代表状态图的输出。图 8-2-11 是经以上处理后的状态图。

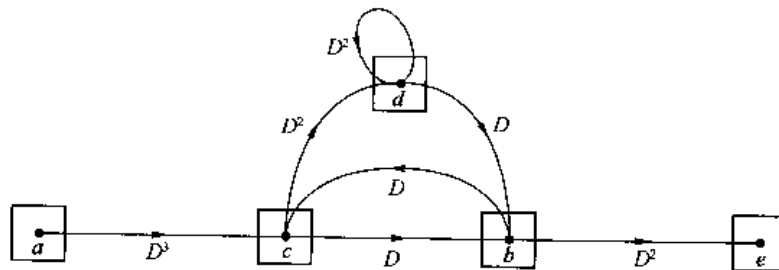


图 8-2-11 码率 1/3, $K=3$ 卷积码的状态图

因为节点 a 分成了两个, 所以现在有 5 个节点。根据图 8-2-11 可写出 4 个状态方程

$$\begin{aligned} X_c &= D^3 X_a + D X_b \\ X_b &= D X_c + D X_d \\ X_d &= D^2 X_c + D^2 X_d \\ X_e &= D^2 X_b \end{aligned} \quad (8-2-1)$$

码的转移函数定义为 $T(D) = X_e / X_a$ 。解上述状态方程, 可得

$$T(D) = \frac{D^6}{1 - 2D^2} = D^6 + 2D^8 + 4D^{10} + 8D^{12} + \dots = \sum_{d=6}^{\infty} a_d D^d \quad (8-2-2)$$

其中, a_d 定义为

$$a_d = \begin{cases} 2^{(d-6)/2} & (\text{偶数 } d) \\ 0 & (\text{奇数 } d) \end{cases} \quad (8-2-3)$$

这个码的转移函数表明: 存在惟一一条汉明距离 $d-6$ 的路径, 该路径从全零路径分叉出去后又在某给定节点与全零路径汇合。从图 8-2-6 所示状态图或图 8-2-5 所示网格图看到: 这条 $d=6$ 的路径是 $acbe$ 。从 a 节点到 e 节点不存在另一条距离 $d=6$ 的路径。式 (8-2-2) 的第二

项表明:从 a 节点到 e 节点有两条距离 $d = 8$ 的路径,从状态图或网格图可看到,这两条路径是 $acdbe$ 和 $acbcbe$ 。式(8-2-2)的第三项表明存在 4 条距离 $d = 10$ 的路径,依此类推。转移函数给出了卷积码的距离特性。卷积码的最小距离叫做最小自由距离,用 d_{free} 表示。上例中, $d_{\text{free}} = 6$ 。

除了不同路径的距离特性之外,转移函数还可以给出更详细的信息。假定在由输入比特为 1 而引发的所有转移分支上引入一个因子 N ,那么当横越每个分支时,只有由输入比特为 1 引发的转移才能使 N 指数的累积值增加 1。可再引入一个因子 J 到状态图的每个分支,用它的指数来表示由节点 a 到节点 e 的任何给定路径所经过的分支的数目。在码率为 $1/3$ 的卷积码例子中,引入 J 和附加因子后的状态图如图 8-2-12 所示。

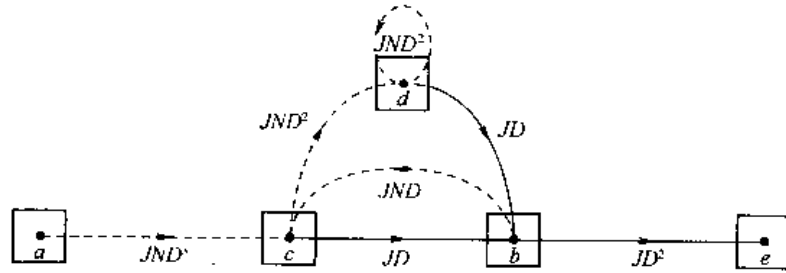


图 8-2-12 码率 $1/3$, $K=3$ 卷积码的状态图

图 8-2-12 所示状态图中的状态方程是

$$\begin{aligned} X_c &= JND^3 X_a + JNDX_b \\ X_b &= JDX_c + JDX_d \\ X_d &= JND^2 X_c + JND^2 X_d \\ X_e &= JD^2 X_b \end{aligned} \quad (8-2-4)$$

对上述这些方程求 X_e/X_a , 可得转移函数

$$\begin{aligned} T(D, N, J) &= \frac{J^3 ND^6}{1 - JND^2(1 + J)} \\ &= J^3 ND^6 + J^4 N^2 D^8 + J^5 N^2 D^8 + J^5 N^3 D^{10} \\ &\quad + 2J^6 N^3 D^{10} + J^7 N^3 D^{10} + \dots \end{aligned} \quad (8-2-5)$$

转移函数的这种形式给出了卷积码中所有路径的特性。 $T(D, N, J)$ 展开式的第一项表明距离 $d = 6$ 的路径长度(分支数)为 3,有 3 个输入信息比特,其中有一个比特是 1。 $T(D, N, J)$ 展开式的第二项和第三项表明有两个 $d = 8$ 的项(路径),其中一项的长度为 4,另外一项的长度为 5。在长度为 4 的路径中,4 个输入信息比特中的两个是 1;在长度为 5 的路径中,5 个信息比特中的两个是 1。由此可见,因子 J 的指数表明与全零路径分叉后首次合并的路径长度,因子 N 的指数表明该路径的输入信息序列中“1”的个数, D 的指数表明该路径的编码比特序列与全零序列的距离。

假设发送一个有限长度(如 m 比特)的序列,因子 J 特别重要。在这种情况下,卷积码在 m 个节点或 m 分支之后就截断了。这意味着截短码的转移函数可以通过把 $T(D, N, J)$ 在 J^m 处截断而获得。另一方面,如果发送一个非常长的序列,实质上是一个无限长序列,希望抑制 $T(D, N, J)$ 对参数 J 的依赖关系,令 $J = 1$ 即可。这时,上例变为

$$\begin{aligned}
T(D, N, 1) &= T(D, N) = \frac{ND^6}{1 - 2ND^2} \\
&= ND^6 + 2N^2D^8 + 4N^3D^{10} + \dots \\
&= \sum_{d=6}^{\infty} a_d N^{(d-4)/2} D^d
\end{aligned} \tag{8-2-6}$$

式中,系数 $\{a_d\}$ 由式(8-2-3)定义。

上述求二进制卷积码转移函数的步骤很容易推广到非二进制码的情况。下面求例 8-2-3 介绍的非二进制卷积码的转移函数。

例 8-2-4 图8-2-10所示的卷积码具有参数 $K=2, k=2, n=4$ 。在这个例子中,如何标记距离和如何对差错计数是可以选择的,取决于把码当做二进制处理还是非二进制处理。如果把码当做非二进制的,编码器的输入和输出都可看成是四进制的符号。特别是当把输入和输出看做四进制符号 00,01,10,11 时,序列 0111 和序列 0000 之间的距离用符号来量度,即等于 2。此外,假如输入符号 00 被译码成符号 11,就是产生了一个符号差错。把此约定用于图 8-2-10 所示的卷积码,可得到图 8-2-13 所示的状态图。由图可列出状态方程

$$\begin{aligned}
X_b &= NJD^2 X_a + NJDX_b + NJDX_c + NJD^2 X_d \\
X_c &= NJD^2 X_a + NJD^2 X_b + NJDX_c + NJDX_d \\
X_d &= NJD^2 X_a + NJDX_b + NJD^2 X_c + NJDX_d \\
X_e &= JD^2 (X_b + X_c + X_d)
\end{aligned} \tag{8-2-7}$$

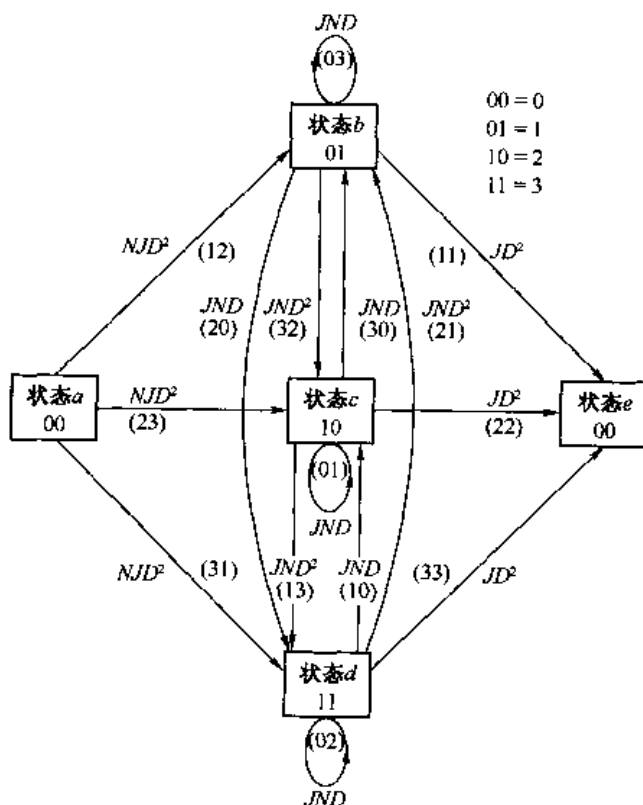


图 8-2-13 $K=2, k=2$, 码率 $1/2$ 非二进制卷积码的状态图

解这些方程可得到转移函数

$$T(D, N, J) = \frac{3NJ^2D^4}{1 - 2NJD - NJD^2} \quad (8-2-8)$$

转移函数的这种表达式特别适用于下述情况:编码器输出端的四进制符号映射到相应的4个正交波形 $s_m(t)$, $m=1,2,3,4$ 组成的集合中,码字符号和信号波形之间就有了一一对应的关系。

还有其他办法,比如,编码器的输出可采用二进制 PSK 调制以二进制数字序列的形式传输。在这种情况下,用比特来量度码距比较合适。采用这一方法,状态图可像图 8-2-14 所示的那样标记。求解根据状态图列出的状态方程可得到转移函数,它与式(8-2-8)给出的不相同。

某些卷积码表现出一种特别的性质叫做恶性差错传播。当具有这种特性的卷积码用于二进制对称信道时,可能因为有限数量的信道差错而引起无限数量的译码差错。这种码可从其状态图看出来。它含有一条从某个非零状态返回同一状态的零距离路径(因子 $D^0=1$ 的路径),这意味着可以沿着这条零距离路径环绕无限多次,而与全零路径之间的距离不增大。但是,如果这条自环对应于传送“1”,译码器将产生无穷多个差错。由于这种码很容易识别,因此在实用中容易避免。

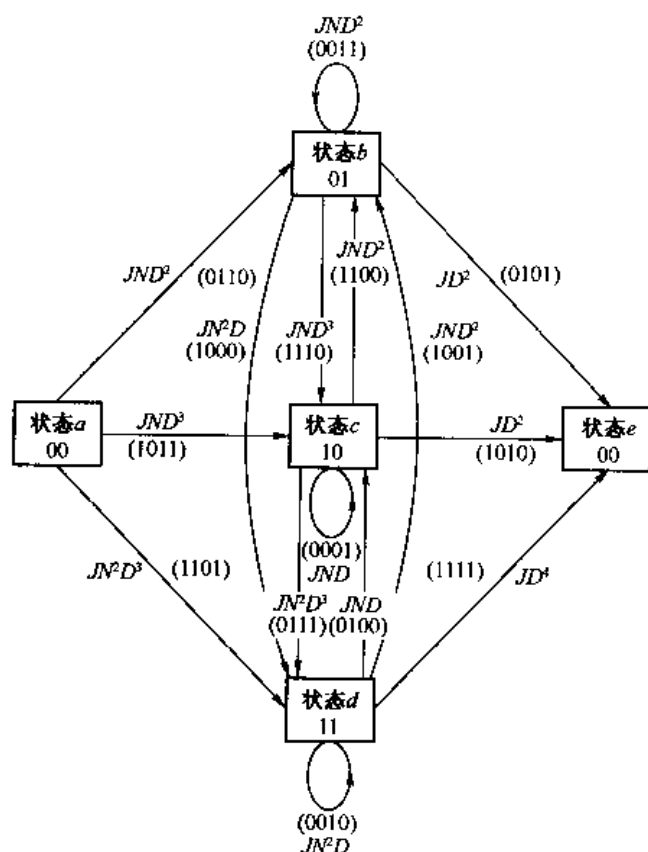


图 8-2-14 $K=2, k=2$, 码率 $1/2$ 卷积码且输出按二进制序列处理时的状态图

8.2.2 卷积码的最佳译码——维特比算法

在无记忆信道分组码的译码中,我们需计算接收码字与 2^k 个可能发送码字之间的距离(硬判决译码时是汉明距离,软判决译码时是欧氏(Euclidean)距离),选择一个离接收码字最近的码字作为译码输出。这种判决法则需要计算 2^k 个距离量度(metrics)。在加性高斯白噪声、 $p < 1/2$ 的二进制对称信道中,该算法的差错概率最小,从这个意义上说它是最优的。

不像分组码那样有固定的长度 n ,卷积码基本上是一个有限状态机,因此它的最佳译码器与 5.1.4 节所述的有记忆信号(如 NRZI 和 CPM)属同一类型,是一个最大似然序列估计器(MLSE, Maximum Likelihood Sequence Estimator)。所以,卷积码的译码就是搜遍网格图找出最可能的序列。根据解调器后的译码器执行软判决或硬判决,搜寻网格图时所用的量度可以是汉明距离,也可以是欧氏距离。下面,我们针对图 8-2-2 所示卷积码的网格图(图 8-2-5)来详细说明。

观察网格图中的两条路径,它们从初始状态 a 经过 3 次状态转移(3 个分支)又回到状态 a ,与这两条路径对应的信息序列分别是 000 和 100,对应的发送序列分别是 000 000 000 和 111 001 011。用 $\{c_{jm}, j=1,2,3; m=1,2,3\}$ 表示发送比特,其中下标 j 表示第 j 个分支,下标 m 表示该分支的第 m 个比特。同样地,用 $\{r_{jm}, j=1,2,3; m=1,2,3\}$ 表示解调器的输出。如果采用硬判决译码,则解调器输出的发送比特不是 0 就是 1。另一方面,如果用软判决译码,且编码序列用二进制相干 PSK 传输,则译码器的输入为

$$r_{jm} = \sqrt{\mathcal{E}_c}(2c_{jm} - 1) + n_{jm} \quad (8-2-9)$$

式中 n_{jm} 表示加性噪声, \mathcal{E}_c 是发送每个编码比特所用的信号能量。

穿过网格图的第 i 条路径之第 j 分支的量度定义为在第 i 条路径上发送序列为 $\{c_{jm}^{(i)}, m=1,2,3\}$ 而接收序列是 $\{r_{jm}, m=1,2,3\}$ 的联合条件概率的对数,即

$$\mu_j^{(i)} = \log P(Y_j | C_j^{(i)}) \quad (j=1,2,3, \dots) \quad (8-2-10)$$

把穿过网格图由 B 个分支组成的第 i 条路径的量度定义为

$$PM^{(i)} = \sum_{j=1}^B \mu_j^{(i)} \quad (8-2-11)$$

在穿过网格图的两条路径之间进行判决的准则是选取量度较大的一条路径。这个准则使正确判决的概率最大,或等效于使信息比特序列的差错概率最小。比如,准备执行硬判决译码的解调器输出一个接收序列 $\{101\ 000\ 100\}$ 。令 $i=0$ 代表由 3 个分支组成的全零路径;令 $i=1$ 代表第二个三分支组成的路径,它从初始状态 a 开始,经过 3 次转移之后和全零路径在状态 a 合并。这两条路径的量度分别为

$$\begin{aligned} PM^{(0)} &= 6\log(1-p) + 3\lg p \\ PM^{(1)} &= 4\log(1-p) + 5\lg p \end{aligned} \quad (8-2-12)$$

式中, p 是比特差错概率。假定 $p < 1/2$,可求得量度 $PM^{(0)}$ 大于量度 $PM^{(1)}$ 。这个结果和以下事实一致,即全零路径到接收序列的汉明距离 $d=3$,而 $i=1$ 的路径与接收路径的汉明距离 $d=5$ 。因此,对硬判决译码来说汉明距离是一种等效的量度。

与此类似,假设采用软判决译码,且信道给信号叠加了高斯白噪声,那么解调器的输出从统计角度可以用概率密度函数表示为

$$p(r_{jm} | c_{jm}^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{[r_{jm} - \sqrt{E_c}(2c_{jm}^{(i)}) - 1]^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (8-2-13)$$

式中, $\sigma^2 = N_0/2$ 是加性高斯噪声的方差。如果忽略各分支量度同等拥有的项, 第 i 条路径的第 j 分支的分支量度可以表示为

$$\mu_j^{(i)} = \sum_{m=1}^n r_{jm} (2c_{jm}^{(i)} - 1) \quad (8-2-14)$$

此例中 $n=3$ 。这两个路径的相对量度为

$$\begin{aligned} CM^{(0)} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 r_{jm} (2c_{jm}^{(0)} - 1) \\ CM^{(1)} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 r_{jm} (2c_{jm}^{(1)} - 1) \end{aligned} \quad (8-2-15)$$

定义了由译码器计算的分支量度和路径量度后, 下一步研究维特比算法在卷积码最佳译码上的应用。考虑上述两条路径, 它们是经过 3 次转移后又汇合到状态 a 的。注意, 从这个节点起源的任何一条穿过网格图的特定路径, 都要在其路径量度 $CM^{(0)}$ 和 $CM^{(1)}$ 上加上相同的项。因此, 如果经过 3 次转移后在汇合节点 a 处满足 $CM^{(0)} > CM^{(1)}$, 那么对于任何起源于 a 节点的路径, $CM^{(0)}$ 将仍然大于 $CM^{(1)}$ 。这意味着从此以后可以不再考虑与 $CM^{(1)}$ 对应的路径。与量度 $CM^{(0)}$ 对应的路径叫做留存路径 (Survivor)。同理, 根据两个量度的大小, 在 b 状态汇合的两条路径中也可以去除其中之一。对 c 状态和 d 状态也可同样重复这种步骤。结果, 经过开头 3 次状态转移之后, 只剩下 4 条路径, 每个状态作为其中一条的终点, 并且每条留存路径有相应的量度。随着以后每一时间间隔中新信号的接收, 在网格图的每一级都重复这样的步骤。

一般来说, 如果用维特比算法对一个 $k=1$ 且约束长度为 K 的二进制卷积码译码, 应有 2^{K-1} 个状态。因此每级有 2^{K-1} 条留存路径, 每条留存路径有一个路径量度, 共 2^{K-1} 个。更一般地, 一个二进制卷积码若一次能让 k 个信息比特输入到由 K 个 k 比特移存器构成的编码器, 这样的卷积码将产生 $2^{k(K-1)}$ 个状态的网格图。若想用维特比算法对这种码进行译码, 要保存 $2^{k(K-1)}$ 条留存路径和 $2^{k(K-1)}$ 个路径量度。在网格图每一级的每一个节点, 有 2^k 条路径汇合于该点。由于汇合于同一节点的每一条路径都要计算其量度, 因此每个节点要计算 2^k 个量度。在汇合于每个节点的 2^k 条路径中, 留存路径只有一条, 它是最可能 (最小距离) 的路径。这样, 在执行每一级的译码时, 计算量将随 k 和 K 呈指数增加, 这就将维特比算法的应用局限于 k 和 K 值较小的场合。

在对一个卷积编码的长序列进行译码时, 译码延时对大多数实际应用场合来说太长, 用来存储留存序列全部长度的存储器太大太贵。解决这个问题的办法如 5.1.4 节所述, 设法修改维特比算法, 使修改后既能保持一个固定的译码延时, 又对算法的最佳性能没有显著影响。修改办法是在任一给定时间 t 内仅保留每个留存序列中最新的 δ 个译码信息比特 (符号)。当收到每一个新的信息比特 (符号) 时, 译码器对各留存序列量度的大小作比较, 找出具有最大量度的留存序列, 再在网格图 (时间) 上回退 δ 个分支, 将该留存序列上该时刻的比特判决为接收比特 (符号) 的译码输出。如果 δ 选得足够大, 在时间上回退 δ 个分支后, 所有留存序列将包含相同的译码输出比特 (符号)。这就是说, 时刻 t 的所有留存序列极有可能是起源于时刻 $t - \delta$ 的同一节点。实验 (计算机模拟法) 证明, 当延时 $\delta \geq 5K$ 时, 与最佳维特比算法性能相比其

性能的下降忽略不计。

8.2.3 软判决译码的差错概率

本节的主题是讨论加性高斯白噪声信道中使用软判决译码时维特比算法的差错概率性能。

在推导卷积码的差错概率时,利用这类编码的线性特性可使推导简化,也就是假定发送的是全零序列,求误判成另一序列的差错概率。假定传输采用的是二相 PSK(或四相 PSK),解调器使用相干检测,所得的卷积码第 j 个分支上的二进制编码数字如 8.2.2 节定义,用 $\{c_{jm}, m=1,2,\dots,n\}$ 表示。解调器的输出,即维特比译码器的输入是序列 $\{r_{jm}, m=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots\}$,其中 r_{jm} 如式(8-2-9)定义。

维特比软判决译码器计算的分支量度由式(8-2-14)定义,以此可计算路径量度为

$$CM^{(i)} = \sum_{j=1}^B \mu_j^{(i)} = \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n r_{jm} (2c_{jm}^{(i)} - 1) \quad (8-2-16)$$

这里, i 表示各节点的任意一条待选路径, B 是一条路径上的分支(信息符号)数。例如,全零路径用 $i=0$ 表示,具有路径量度

$$\begin{aligned} CM^{(0)} &= \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n (-\sqrt{\mathcal{E}_c} + n_{jm}) (-1) \\ &= \sqrt{\mathcal{E}_c} Bn + \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n n_{jm} \end{aligned} \quad (8-2-17)$$

由于卷积码没有固定长度,可以利用网格图某给定节点上第一次与全零序列汇合的序列的差错概率推导其性能。把在节点 B 上与全零路径汇合的路径的量度首次超过全零路径量度的概率定义为首次差错事件概率。假设和全零路径汇合的编号为 $i=1$ 的不正确路径与全零路径有 d 比特差别,即编号 $i=1$ 的路径上有 d 个“1”而其余为“0”。两条路径为一对,成对比较量度 $CM^{(0)}$ 和 $CM^{(1)}$,得差错概率

$$P_2(d) = P(CM^{(1)} \geq CM^{(0)}) = P(CM^{(1)} - CM^{(0)} \geq 0)$$

$$P_2(d) = P\left[2 \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n r_{jm} (c_{jm}^{(1)} - c_{jm}^{(0)}) \geq 0\right] \quad (8-2-18)$$

由于两条路径的编码比特除了在 d 个位置上不同外,其他都相同,所以式(8-2-18)可以简化为

$$P_2(d) = P\left(\sum_{l=1}^d r_l \geq 0\right) \quad (8-2-19)$$

式中,下标 1 代表两条路径中不同的 d 个比特,集合 $\{r_l\}$ 表示和该 d 比特对应的译码器输入。 $\{r_l\}$ 是独立等概的高斯随机变量,均值为 $-\sqrt{\mathcal{E}_c}$,方差为 $N_0/2$ 。因此,两条相差 d 比特的路径成对比较时的差错概率为

$$\begin{aligned} P_2(d) &= Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{N_0}} d\right] \\ &= Q(\sqrt{2\gamma_b R_c} d) \end{aligned} \quad (8-2-20)$$

式中, $\gamma_b = \mathcal{E}_b/N_0$ 是接收端的每比特信噪比, R_c 是码率。

尽管我们推出了与全零路径距离为 d 的错误路径的首次差错事件概率,但在给定节点 B

上可能有很多路径以不同的距离和全零路径汇合。实际上,转移函数 $T(D)$ 为所有以不同距离与全零路径汇合于 B 节点的路径提供了最完整的描述。于是,可以用式(8-2-20)将所有可能距离的路径的差错概率统统加起来,通过求和运算,得到首次差错事件概率的上边界为

$$\begin{aligned} P_e &\leq \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d P_2(d) \\ &\leq \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d Q(\sqrt{2\gamma_b R_c d}) \end{aligned} \quad (8-2-21)$$

式中, a_d 表示与全零路径首次汇合且距离为 d 的路径的数目。

有两个理由说明为什么式(8-2-21)是首次差错事件概率的上边界。一是引起差错概率 $\{P_2(d)\}$ 的事件不是独立的,这可从网格图看出来。二是对所有可能的 $d \geq d_{\text{min}}$ 求和时,默认卷积码是无限长的。如果卷积码在 B 节点之后周期地截短,式(8-2-21)的上边界可以通过求 $d_{\text{min}} \leq d \leq B$ 间的差错事件总和而得到改善。这个改善对于确定短卷积码的性能有利,但当 B 很大时,它对性能的影响可以忽略。

如果 Q 函数被一个指数框出上限,即

$$Q(\sqrt{2\gamma_b R_c d}) \leq e^{-\gamma_b R_c d} = D^d \mid_{D=e^{-\gamma_b R_c}} \quad (8-2-22)$$

那么式(8-2-21)的上边界可以用略有不同的另一种形式表示。将式(8-2-22)代入式(8-2-21),首次差错事件概率的上边界可以表示为

$$P_e < T(D) \mid_{D=e^{-\gamma_b R_c}} \quad (8-2-23)$$

虽然首次差错事件概率提供了一种用来衡量卷积码性能的方法,但衡量性能更有用的办法是比特差错概率。用确定首次差错事件概率边界的方法同样可确定比特差错概率的上边界。一旦选择一条差错路径,其信息比特和正确路径信息比特的差异将造成译码的不正确。转移函数 $T(D, N)$ 中因子 N 的指数代表与全零路径汇合于某节点 B 的所选错误路径中的差错信息比特数(即“1”的个数),如果把成对差错概率 $P_2(d)$ 乘以路径汇合处由错误路径造成的译码信息比特的差错个数,可得到该差错路径的比特差错率。若令每一对差错概率 $P_2(d)$ 都乘以相应错误路径(这些错误路径与正确路径在节点 B 处汇合)中的译码信息比特差错个数,并对所有 d 求和,可获得平均比特差错概率的上边界。

让 $T(D, N)$ 对 N 求微分,得到与每一条差错路径中的信息比特差错个数相对应的非常合适的乘法因子。一般地, $T(D, N)$ 可表示为

$$T(D, N) = \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d D^d N^{f(d)} \quad (8-2-24)$$

式中 $f(d)$ 表示 N 的指数,它是 d 的函数。求 $T(D, N)$ 对 N 的导数并令 $N=1$, 得

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT(D, N)}{dN} \right|_{N=1} &= \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d f(d) D^d \\ &= \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d D^d \end{aligned} \quad (8-2-25)$$

式中, $\beta_d = a_d f(d)$ 。于是, $k=1$ 时的比特差错概率上边界为

$$P_b < \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d P_2(d)$$

$$< \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d Q(\sqrt{2\gamma_b R_c d}) \quad (8-2-26)$$

如果 Q 函数像式(8-2-22)那样由一个指数框出上边界,式(8-2-26)简化为

$$\begin{aligned} P_b &< \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d D^d \Big|_{D=e^{-\gamma_b R_c}} \\ &< \frac{dT(D, N)}{dN} \Big|_{N=1, D=e^{-\gamma_b R_c}} \end{aligned} \quad (8-2-27)$$

如果 $k > 1$, 相应的比特差错概率可以由式(8-2-26) 和式(8-2-27)除以 k 求得。

以上差错概率表达式是在假设编码比特用二相相干 PSK 传输的前提下得到的。这个结果对四相相干 PSK 也同样成立, 因为四相调制/解调技术等效于两个独立(相位正交)的二相 PSK 系统。在其他调制/解调技术, 如相干和非相干二进制 FSK 时也能使用, 但需重新计算成对差错概率 $P_2(d)$ 。也就是说, 发送编码信息序列的调制/解调技术的变化只影响 $P_2(d)$ 的计算, P_b 的推导不变。

虽然上述卷积码维特比译码时差错概率的推导是应用于二进制卷积码的, 但很容易推广到非二进制卷积码, 此时, 每个非二进制符号映射到不同的波形上。关键地, 式(8-2-25)中 $T(D, N)$ 导数展开式的系数 β_d 表示两条距离(用符号数衡量)相隔 d 符号的路径中的符号差错个数。用 $P_2(d)$ 表示两条成对比较的间隔为 d 符号的路径的差错概率, k 比特符号的符号差错概率的上边界应为

$$P_M \leq \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d P_2(d)$$

此符号差错概率可以转换成等效的比特差错概率。例如, 用 2^k 个正交波形发送 k 比特符号时, 等效的比特差错概率是 P_M 乘以 $2^{k-1}/(2^k-1)$, 如第 5 章所述。

8.2.4 硬判决译码的差错概率

本节讨论二进制对称信道中采用维特比译码能达到的性能。对于卷积码的硬判决译码, 维特比算法的量度是指接收序列与网格图每节点 $2^{k(K-1)}$ 个留存序列之间的汉明距离。

正如处理软判决译码那样, 从确定首次差错事件概率开始。假设发送的是全零路径, 并假定某节点 B 上准备与全零路径比较的路径和全零路径相距 d 。若 d 是奇数, 那么当接收序列的差错数小于 $(d+1)/2$ 时, 会正确地选择全零路径; 反之, 选择错误路径。所以, 选择错误路径的概率为

$$P_2(d) = \sum_{k=(d+1)/2}^d \binom{d}{k} p^k (1-p)^{d-k} \quad (8-2-28)$$

式中, p 是二进制对称信道的比特差错概率。若 d 为偶数, 差错数超过 $d/2$ 时将选择错误路径。如果差错数等于 $d/2$, 两条路径的量度一样, 随便选择两条路径之一, 这时有一半差错机会。于是, 选择差错路径的总概率是

$$P_2(d) = \sum_{k=d/2+1}^d \binom{d}{k} p^k (1-p)^{d-k} + \frac{1}{2} \binom{d}{d/2} p^{d/2} (1-p)^{d/2} \quad (8-2-29)$$

正如 8.2.3 节所述, 在给定的节点上有许多具有不同距离的路径与全零路径汇合, 所以写

不出既简单又精确的表达式。但是,把该节点上与全零路径汇合的所有可能路径的成对差错概率 $P_2(d)$ 加起来,可以求出首次差错事件概率的上边界。于是得到联合边界如下

$$P_e < \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d P_2(d) \quad (8-2-30)$$

式中,系数 $|a_d|$ 表示与不同距离集合 $|d|$ 相对应的路径数目。这些系数正是转移函数 $T(D)$ 或 $T(D, N)$ 展开式中的系数。

如果不用式(8-2-28)和式(8-2-29)中 $P_2(d)$ 的表达式,可用其上边界

$$P_2(d) < [4p(1-p)]^{d/2} \quad (8-2-31)$$

该式在 8.1.5 节定义。利用式(8-2-30)的边界,可以得到首次差错事件概率的较松的上边界如下

$$\begin{aligned} P_e &< \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} a_d [4p(1-p)]^{d/2} \\ &< T(D) \Big|_{D=\sqrt{4p(1-p)}} \end{aligned} \quad (8-2-32)$$

下面求比特差错概率。像软判决译码一样,当选择一条错误路径后,该路径上非零信息比特数对全零路径而言是差错,差错个数等于转移函数 $T(D, N)$ N 因子上的指数。将 $T(D, N)$ 对 N 求导并设 $N=1$, N 的指数就是相应的差错事件概率 $P_2(d)$ 的乘法因子,于是得到比特差错概率的上边界为

$$P_b < \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (8-2-33)$$

式中, β_d 是 $T(D, N)$ 导数展开式中的系数在 $N=1$ 时的值。对于 $P_2(d)$,既可用式(8-2-28)和式(8-2-29),也可以用式(8-2-31)定义的上边界。如果使用后者, P_b 的上边界为

$$P_b < \frac{dT(D, N)}{dN} \Big|_{N=1, D=\sqrt{4p(1-p)}} \quad (8-2-34)$$

当 $k > 1$ 时,式(8-2-33)、式(8-2-34)定义的 P_b 的结果应该再除以 k 。

码率 $1/3$, $K=3$ 的卷积码在使用软判决译码和硬判决译码时差错概率的比较如图 8-2-15 所示。应该指出,由式(8-2-34)给出的契尔诺夫上边界比由式(8-2-33)和式(8-2-28)、式(8-2-29)联合给出的较紧的上边界高出不到 1 dB。契尔诺夫边界的优点在于计算简单。在比较软判决和硬判决译码的性能时,在 $10^{-6} \leq P_b \leq 10^{-2}$ 的范围内,两者上边界之差约为 2.5 dB。值得一提的是,卷积码在离散无记忆信道的差错概率集平均,正如分组码一样可以用截止速率参数 R_0 表示为(推导请见 Viterbi & Omura, 1979 年的书)

$$\bar{p}_b < \frac{(q-1)q^{-kR_0/R_c}}{[1 - q^{-(R_0-R_c)/R_c}]^2}, \quad R_c \leq R_0 \quad (8-2-35)$$

式中 q 是输入到信道的符号数, K 是码的约束长度, R_c 是码率, R_0 是 7.2 节和 8.1 节定义过

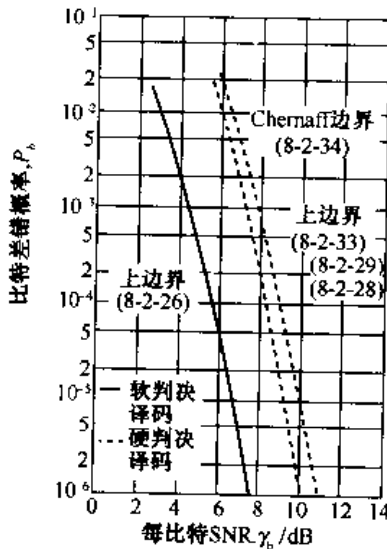


图 8-2-15 $K=3, k=1, n=3$ 时卷积码的软判决译码和硬判决译码的比较

的截止速率。因此,在不同信道条件下从计算 R_0 中得到的结论既可用于分组码,也可用于卷积码。

8.2.5 二进制卷积码的距离特性

本节将用列表法给出几种不同码率、短约束长度的二进制卷积码的生成多项式及最小自由距离。这些二进制码在下述意义上是最佳的,即当码率和约束长度给定时,它们具有能够得到的最大的 d_{free} 。表中列出的生成多项式和相应的 d_{free} 值是由奥登沃尔德(Odenwalder, 1970 年)、拉森(Larsen, 1973 年)、Paaske(1974 年)和 Daut 等(1982 年)用计算机搜索方法得到的。

海勒(Heller)为码率 $1/n$ 的卷积码推导了一种简单的自由距离的上边界,即

$$d_{\text{free}} \leq \min_{l \geq 1} \left\lfloor \frac{2^{l-1}}{2^l - 1} (K + l - 1)n \right\rfloor \quad (8-2-36)$$

其中, $\lfloor x \rfloor$ 表示取 x 中的最大整数。为了比较,表中也给出了码率 $1/n$ 码的上边界。对于码率为 k/n 的卷积码,道特(Daut)等人 1982 年定义了一个改进的海勒边界。由这个公式求出的 k/n 码上边界值列于表中。

表 8-2-1~表 8-2-7 列出了码率为 $1/n$ ($n=2, 3, \dots, 8$) 的卷积码参数。表 8-2-8~表 8-2-11 列出了几种码率为 k/n ($k \leq 4$ 和 $n \leq 8$) 的卷积码参数。

表 8-2-1 码率 $1/2$ 的最大自由距离码

约束长度 K	生成多项式 (八进制表示)		d_{free}	d_{free} 时的上边界
3	5	7	5	5
4	15	17	6	6
5	23	35	7	8
6	53	75	8	8
7	133	171	10	10
8	247	371	10	11
9	561	753	12	12
10	1 167	1 545	12	13
11	2 335	3 661	14	14
12	4 335	5 723	15	15
13	10 533	17 661	16	16
14	21 675	27 123	16	17

摘自 Odenwalder(1970 年)和 Larsen(1973 年)

表 8-2-2 码率 $1/3$ 的最大自由距离码

约束长度 K	生成多项式(八进制表示)			d_{free}	d_{free} 时的上边界
3	5	7	7	8	8
4	13	15	17	10	10
5	25	33	37	12	12
6	47	53	75	13	13
7	133	145	175	15	15
8	225	331	367	16	16
9	557	663	711	18	18
10	1 117	1 365	1 633	20	20
11	2 353	2 671	3 175	22	22
12	4 767	5 723	6 265	24	24
13	10 533	10 675	17 661	24	24
14	21 645	35 661	37 133	26	26

摘自 Odenwalder(1970 年)和 Larsen(1973 年)

表 8-2-3 码率 1/4 的最大自由距离码

约束长度 K	生成多项式(八进制表示)				d_{free}	d_{free} 时的 上边界
3	5	7	7	7	10	10
4	13	15	15	17	13	15
5	25	27	33	37	16	16
6	53	67	71	75	18	18
7	135	135	147	163	20	20
8	235	275	313	357	22	22
9	463	535	733	745	24	24
10	1 117	1 365	1 633	1 653	27	27
11	2 387	2 353	2 671	3 175	29	29
12	4 767	5 723	6 265	7 455	32	32
13	11 145	12 477	15 537	16 727	33	33
14	21 113	23 175	35 537	35 537	36	36

摘自 Larsen(1973 年)

表 8-2-4 码率 1/5 的最大自由距离码

约束长度 K	生成多项式(八进制表示)					d_{free}	d_{free} 时的 上边界
3	7	7	7	5	5	13	13
4	17	17	13	15	15	16	16
5	37	27	33	25	35	20	20
6	75	71	73	65	57	22	22
7	175	131	135	135	147	25	25
8	257	233	323	271	357	28	28

摘自 Daut 等(1982 年)

表 8-2-5 码率 1/6 的最大自由距离码

约束长度 K	生成多项式(八进制表示)			d_{free}	d_{free} 时的 上边界
3	7	7	7	16	16
	7	5	5		
4	17	17	13	20	20
	13	15	15		
5	37	35	27	24	24
	33	25	35		
6	73	75	55	27	27
	65	47	57		
7	173	151	135	30	30
	135	163	137		
8	253	375	331	34	34
	235	313	357		

摘自 Daut 等(1982 年)

表 8-2-6 码率 1/7 的最大自由距离码

约束长度 K	生成多项式(八进制表示)				d_{free}	d_{free} 时的 上边界
3	7	7	7	7	18	18
	5	5	5			
4	17	17	13	13	23	23
	13	15	15			
5	35	27	25	27	28	28
	33	35	37			
6	53	75	65	75	32	32
	47	67	57			
7	165	145	173	135	36	36
	135	147	137			
8	275	253	375	331	40	40
	235	313	357			

摘自 Daut 等(1982 年)

表 8-2-7 码率 1/8 的最大自由距离码

约束长度 K	生成多项式(八进制表示)				d_{free}	d_{free} 时的 上边界
3	7	7	5	5	21	21
	5	7	7	7		
4	17	17	13	13	26	26
	13	15	15	17		
5	37	33	25	25	32	32
	35	33	27	37		
6	57	73	51	65	36	36
	75	47	67	57		
7	153	111	165	173	40	40
	135	135	147	137		
8	275	275	253	371	45	45
	331	235	313	357		

摘自 Daut 等(1982 年)

表 8-2-8 码率 2/3 的最大自由距离码

约束长度 K	生成多项式(八进制表示)			d_{free}	d_{free} 时的 上边界
2	17	06	15	3	4
3	27	75	72	5	6
4	236	155	337	7	7

摘自 Daut 等(1982 年)

表 8-2-9 码率 k/5 的最大自由距离码

码率	约束长度 K	生成多项式(八进制表示)					d_{free}	d_{free} 时的 上边界
2/5	2	17	07	11	12	04	6	6
	3	27	71	52	65	57	10	10
	4	247	366	171	266	373	12	12
3/5	2	35	23	75	61	47	5	5
4/5	2	237	274	156	255	337	3	4

摘自 Daut 等(1982 年)

表 8-2-10 码率 $k/7$ 的最大自由距离码

码率	约束长度 K	生成多项式(八进制表示)				d_{free}	d_{free} 时的 上边界
2/7	2	05	06	12	15	9	9
		15	13	17			
	3	33	55	72	47	14	14
		25	53	75			
	4	312	125	247	366	18	18
3/7	2	171	266	373			
		45	21	36	62	8	8
		57	43	71			
4/7	2	130	067	237	274	6	7
		156	255	337			

摘自 Daut 等(1982 年)

表 8-2-11 码率 $3/4$ 和 $3/8$ 的最大自由距离码

码率	约束长度 K	生成多项式(八进制表示)				d_{free}	d_{free} 时的 上边界
3/4	2	13	25	61	47	4	4
3/8	2	15	42	23	61	8	8
		51	36	75	47		

摘自 Daut 等(1982 年)

8.2.6 删余卷积码

在某些实际应用场合,有必要使用一些高码率,比如码率 $(n-1)/n$ 的卷积码。正如我们已看到的,在一些高码率码的网格中,进入每一状态的分支可有 2^{n-1} 个,结果,在执行维特比算法时必须为每个状态计算 2^{n-1} 个分支长度,在选择各状态最佳路径时又要进行同样多次的比较以更新路径长度。因此,高码率码的实现是非常复杂的。

如果我们先设计一个低码率码,在传输时删去某些编码比特而让它成为一个高码率码,通过这种途径可以避免高码率卷积码译码运算时所固有的计算复杂度。在卷积编码器输出端有选择地删除一些编码比特被称为删余(puncturing)。这样,我们可以对码率 $1/n$ 的卷积码删余来生成高码率卷积码,而保持 $1/n$ 低码率译码器的复杂度。当然我们也注意到,卷积码的删余导致 $1/n$ 码率卷积码自由距离的减小,减小的程度取决于删余的程度。

删余处理可以形容成是从编码器输出中周期地删除被选择的比特,这样,就产生了一个周期性时变的网格码。我们以一个码率 $1/n$ 的码为母本,并定义一个删余周期 p ,对应于输入到编码器的 p 个信息比特。这样在一个周期里,编码器输出 nP 个编码比特。与 nP 编码比特相联系的是一个删余矩阵 P ,具有如下形式

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1p} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{np} \end{bmatrix} \quad (8-2-37)$$

其中, P 的每一列对应输入一比特时编出的 n 输出比特, P 的每一矩阵元素为 0 或 1。当 $p_{ij} =$

1 时,对应的编码器输出比特被传送出去,当 $p_{ij}=0$ 时,对应的编码器输出比特被删除。可见,码率是由删除周期 P 和被删除比特的数目决定的。

如果我们在 nP 比特中删除 N 比特,码率将是 $P/(nP - N)$,这里 N 可取从 0 到 $(n-1)P - 1$ 的任意整数。于是,可取得的码率是

$$R_c = \frac{P}{P + M} \quad (M = 1, 2, \dots, (n-1)P) \quad (8-2-38)$$

例 8-2-5 对图 8-2-2 所示码率 $1/3$, $K=3$ 编码器的输出进行删余,构造一个码率为 $3/4$ 的码。

为了满足要求的码率,对式(8-2-38)中的 P 和 M 可以有多种选择,我们这里取 P 的最小值即 $P=3$ 。然后,在 $nP=9$ 个输出比特中删余 $N=5$ 比特,这就得到了码率 $3/4$ 的删余卷积码。至于删余矩阵,我们可选择 P 为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-2-39)$$

图 8-2-16 表明了由码率 $1/3$ 母本码产生删余码的过程以及与删余码对应的网格图。

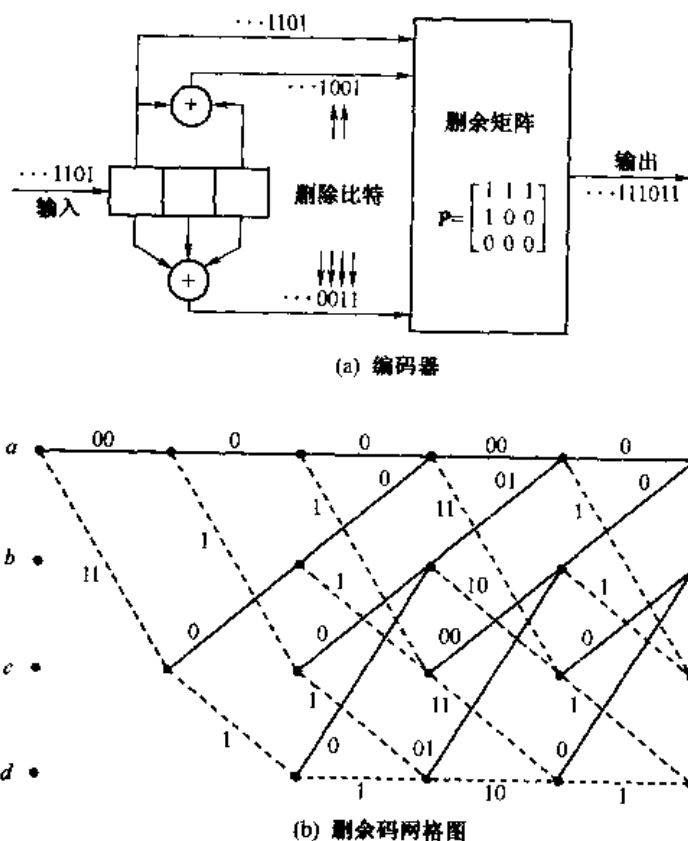


图 8-2-16 从码率 $1/3$ 卷积码生成码率 $3/4$ 删余码

在上例中,删余矩阵是随意选择的。然而,必然存在某些删余矩阵优于另一些矩阵,表现为在网格图路径上具有更好的汉明距离特性。寻找好的删余矩阵通常是采用计算机搜索。一

一般而言,用这种方法产生的高码率删余卷积码,与同样码率未加删余直接得出的最好卷积码相比,自由距离要么相等,要么小1比特。

Yasuda等(1984年)、Hole(1988年)、Lee(1988年)、Haccoun和Bégin(1989年)、Bégin和Haccoun(1989年)、Bégin等(1990年)研究了由低码率码生成大、小限制长度删余卷积码的结构和性能情况。一般来说,具有较好距离特性的高码率码是对码率 $1/2$ 的最大自由距离码删余后得到的。例如在表8-2-12中,我们列出了码率 $2/3 \leq R_c \leq 7/8$ 的码的删余矩阵,它用于对限制长度 $3 \leq K \leq 9$ 、码率 $1/2$ 的码删余,表中还给出了删余码的自由距离。其他码率以及更大限制长度时的删余卷积码可参见上面列出过的那些论文。

表 8-2-12 从 $1/2$ 码率码得出的、用于产生 $2/3 \leq R_c \leq 7/8$ 码率码的删余矩阵

限制长度 K	码率 $R = 2/3$		码率 $R = 3/4$		码率 $R = 4/5$		码率 $R = 5/6$		码率 $R = 6/7$		码率 $R = 7/8$	
	P	d_{free}	P	d_{free}	P	d_{free}	P	d_{free}	P	d_{free}	P	d_{free}
3	10 11	3	101 110	3	1011 1100	2	10111 11000	2	101111 110000	2	1011111 1100000	2
4	11 10	4	110 101	4	1011 1100	3	10100 11011	3	100011 111100	2	1000010 1111101	2
5	11 10	3	101 110	3	1010 1101	3	10111 11000	3	101010 110101	3	1010011 1101100	3
6	10 11	4	100 111	4	1000 1111	4	10000 11111	4	110110 101001	3	1011101 1100010	3
7	11 10	5	110 101	5	1111 1000	4	11010 10101	4	111010 100101	3	1111010 1000101	3
8	10 11	6	110 101	6	1010 1101	5	11100 10011	4	101001 110110	4	1010100 1101011	4
9	11 10	6	111 100	6	1101 1010	5	10110 11001	5	110110 101001	4	1101011 1010100	4

删余卷积码的译码采用与 $1/n$ 低码率母本码同样的译码方法,采用 $1/n$ 码的网格图。在软判决译码中,网格图上路径长度的计算采用前面已描述过的常规方法。当分支上一个或多个比特被删余后,相应分支长度的增量仍然是基于未删余时的情况计算的,这样,删余比特并没有对分支长度产生影响。在删余码中,差错事件的长度通常比低码率 $1/n$ 母本码的差错事件长度更长。结果是,在对接收比特作出最终判决前,译码器的等待或时延时间应大于5倍的限制长度。

对于软判决译码,删余码的性能可以用式(8-2-21)差错概率(上界)表达式来描述首次差错事件概率,用下列表达式(上界)来衡量误比特率

$$P_b \leq \frac{1}{b} \sum_{d=d_{free}}^{\infty} \beta_b Q(\sqrt{2\gamma_b R_c d}) \quad (8-2-40)$$

式中, R_c 是删余码的码率($R_c = b/c$), b 是每分支的信息比特数目。

设计好删余码的方法之一是搜索及选择能产生最大自由距离的删余矩阵。在某种意义上更好的一种方法是判断删余码关键项的重量谱(β_d),以及利用式(8-2-40)计算相应的误比特率。我们选择能导致最好误码率性能的删余矩阵所对应的码作为最佳删余码,只要该码不是

恶性的。一般在计算删余码重量谱时,与基础的低码率 $1/n$ 母本码相比,删余码有必要在更长的长度上搜索更多数量的可能路径。有几种删余码的重量谱已在 Haccoun 和 Bégin(1989 年)以及 Bégin 等人(1990 年)的论文中给出了。

多码率兼容的删余码

在压缩的数字语音传输和某些其他应用场合,有必要以大于一般应用的冗余度来传输集团的信息比特。换言之,不同类型的信息比特群在信息序列传输中要求的差错保护措施是不同的,越是重要的比特其冗余度应该越大。与其对不同种类的比特采用不同的编码,不如采用同一种冗余度可变的码。只要以同一个低码率 $1/n$ 卷积码为基础,删除不同数量的“余”,就可以做到这点。正如 Hagenauer 1988 年描述的那样。为了满足兼容不同码率的要求,可以选择不同的删余矩阵,基本的要求是:较低码率的码(高冗余度)除了传送与高码率码相同的编码比特外,再多传送一些附加比特。这种由同一个低码率 $1/n$ 卷积码导致的码称为多码率兼容的删余卷积码(RCPC-rate compatible punctured convolutional)。

例 8-2-6 让我们以码率 $1/3, K=4$ 的最大自由距离卷积码为基础构建一个 RCPC 码。本例的 RCPC 码取自 Hagenauer 1988 年的论文,他选择了 $P=8$,产生的码率在 $4/11$ 到 $8/9$ 之间。删余矩阵已列在表 8-2-13 中。请注意,在码率 $1/2$ 的码的删余矩阵里,第 3 行为全零行。这样,来自码率 $1/3$ 编码器第 3 条分支的所有比特都被删除了。删除码率 $1/3$ 编码器第 2 条分支上的更多比特可以获得更高的码率。同时我们注意到:凡高码率码的删余矩阵中出现“1”,那么在所有低码率码的同样位置上也必然是“1”。

表 8-2-13 由码率 $1/3, K=4$ 码构造的多码率兼容删余卷积码

码 率	删 余 矩 阵
$1/3$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$4/11$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$2/5$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$4/9$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$1/2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

续表

码 率	删 余 矩 阵
4/7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4/6	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4/5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8/9	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

将 RCPC 码用于一个对不同信息序列有不同差错保护要求的系统时,我们可以把不同类别的比特封装成帧结构,正如 Hagenauer (1990 年)建议的那样,如图 8-2-17 所示。

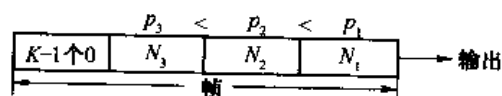


图 8-2-17 具有不同差错保护要求的传输数据的帧结构

图中以带有 3 类不同长度的数据 N_1, N_2, N_3 为例,以相应的差错概率要求 $p_1 > p_2 > p_3$ 的顺序排列。在每帧最后一组数据 N_3 之后附加 $K-1$ 个零作为结尾,它是帧头开锁,用来使网格图上路径回到全零状态。然后,我们选择一组适当的、能满足差错保护要求即指定差错概率 $\{p_k\}$ 的 RCPC 码。本例中,采用 3 种删余矩阵来对 3 类比特编码,删余周期为 P ,对应的 RCPC 码产生于码率 $1/n$ 的码。发送时,要求最小程度保护的码先发,接着是要求较高程度保护的码,再是要求最高程度保护的码,最后用一组全 0 码结束该帧。这样各种码率可以放在同一帧内发送,不致影响设计要求的差错率性能。与编码一样,一帧内的比特采用同一个维特比译码算法,所用网格图就是码率 $1/n$ 码的图,对各类比特用相应的删余矩来计算分支长度。

可以证明(见习题 8-39),这种方式下平均有效码率是

$$R_{av} = \frac{\sum_{j=1}^J N_j P}{\sum_{j=1}^J N_j (P + M_k) + (K - 1)(P + M_j)} \quad (8-2-41)$$

式中 J 是帧内比特类别数, P 为 RCPC 码周期,分母第二项对应于帧头开销,它是以最低码率(最大冗余度)传输的。

8.2.7 卷积码的其他译码算法

8.2.2 节介绍的维特比算法从序列整体似然度最大这个意义上说是卷积码的最佳译码算

法。然而这种算法要求对网格图的每个节点计算 2^{Kk} 个量度,并存储 $2^{k(K-1)}$ 个量度和 $2^{k(K-1)}$ 个留存序列,每个留存序列约有 $5kK$ 比特长。为了完成维特比算法所花费的计算量和存储量巨大,以致对约束长度较长的卷积码而言,该算法是不现实的。

早在维特比发现最佳算法之前,曾提出过其他卷积码的译解算法。最早由沃曾克拉夫特 (Wozencraft, 1957 年, 1961 年) 提出序列译码算法, 后来范诺 (Fano, 1963 年) 改进此算法。

1. 序列译码算法

范诺的序列译码算法是用一次考察一条路径的方法寻找通过树图或网格图的最大可能路径。沿着每条分支的量的增量,正比于该分支对应的接收信号的概率,这和维特比译码一样,不同的只是在每一分支的量度上要加上一个负常数。这个常数的值如下选定:为正确路径的量度加上一个平均值,为任何错误路径的量度减去一个平均值。范诺算法将候选路径的量度与一个变化(增大)的门限比较,就能检测并抛弃错误的路径。

为了描述得更清楚,看一个无记忆信道。通过树图或网格图的第 i 条路径上第一分支到第 B 分支的量度为

$$CM' = \sum_{j=1}^B \sum_{m=1}^n \mu_{jm}^{(i)} \quad (8-2-42)$$

式中

$$\mu_{jm}^{(i)} = \log_2 \frac{p(r_{jm} | c_{jm}^{(i)})}{p(r_{jm})} - \lambda \quad (8-2-43)$$

在式(8-2-43)中, r_{jm} 是解调器输出序列, $p(r_{jm} | c_{jm}^{(i)})$ 是第 i 条路径的第 j 个分支的第 m 个码字比特为 $c_{jm}^{(i)}$ 的条件下 r_{jm} 的概率密度函数 PDF, λ 是一个正的常数。选择 λ 使不正确路径减去一个平均量度,正确路径加一个平均量度。注意,分母的 $p(r_{jm})$ 项与编码序列无关,所以将其归入常数因子。

式(8-2-43)给出的量度在软判决和硬判决译码中都能使用,但在硬判决译码时可大大简化。具体地说,如果有一个转移(差错)概率为 p 的 BSC 信道,与式(8-2-43)相符的每接收比特的量度是

$$\mu_{jm}^{(i)} = \begin{cases} \log_2[2(1-p)] - R_c & \text{若 } \tilde{r}_{jm} = c_{jm}^{(i)} \\ \log_2 2p - R_c & \text{若 } \tilde{r}_{jm} \neq c_{jm}^{(i)} \end{cases} \quad (8-2-44)$$

这里 \tilde{r}_{jm} 是解调器的硬判决输出, $c_{jm}^{(i)}$ 是树图中第 i 条路径的第 j 个分支的第 m 个码字比特, R_c 是码率。注意,该量度需要用到(近似的)差错概率的知识。

例 8-2-7 设有一个码率 $1/3$ 的二进制卷积码,在 $p=0.1$ 的 BSC 信道上传递信息。通过式(8-2-44)的计算,得

$$\mu_{jm}^{(i)} = \begin{cases} 0.52 & \text{若 } \tilde{r}_{jm} = c_{jm}^{(i)} \\ -2.65 & \text{若 } \tilde{r}_{jm} \neq c_{jm}^{(i)} \end{cases} \quad (8-2-45)$$

为了简化计算,将式(8-2-45)中的量度归一化,得到近似式

$$\mu_{jm}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{若 } \tilde{r}_{jm} = c_{jm}^{(i)} \\ -5 & \text{若 } \tilde{r}_{jm} \neq c_{jm}^{(i)} \end{cases} \quad (8-2-46)$$

由于码率是 $1/3$, 每 1 个输入比特对应编码器的 3 个输出比特。因此, 式(8-2-46)的分支量度是

$$\mu_j^{(i)} = 3 - 6d$$

或等效于

$$\mu_j^{(i)} = 1 - 2d \quad (8-2-47)$$

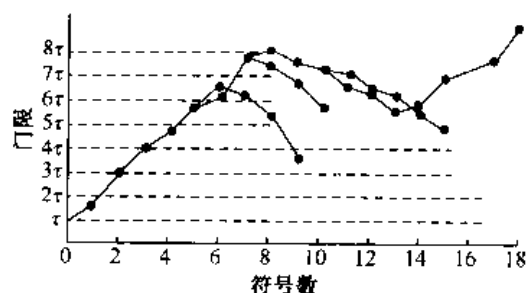
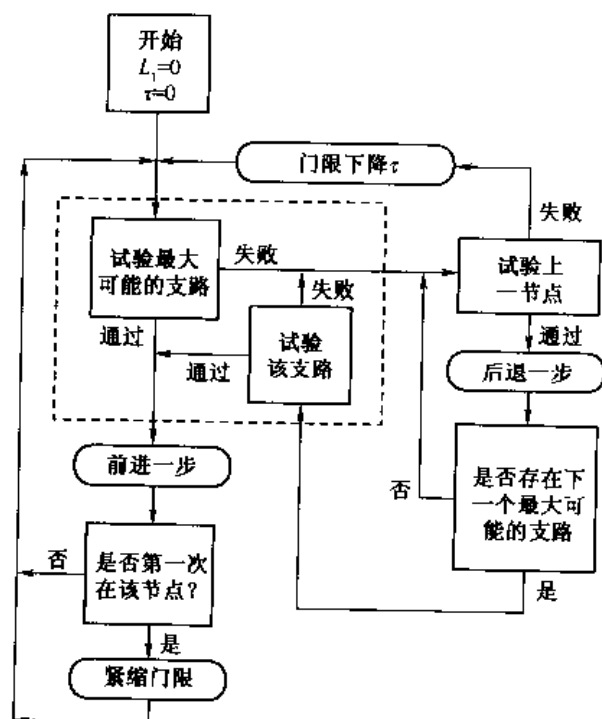


图 8-2-18 序列译码中路径搜索的一个例子
(摘自 Jordan(1966 年), ©1966 年 IEEE)

式中, d 是 3 个接收比特与 3 个分支比特的汉明距离。这样, 量度 $\mu_j^{(i)}$ 仅与接收比特和第 i 条路径第 j 个分支码字比特的距离有关。

初始时, 先发送已知的数据比特, 强迫译码器以正确路径为起始点。然后一个节点一个节点顺序地往前进行, 在每个节点处选取最可能(量度最大)的分支, 并且加大门限使其与量度相比永远不低于某一预设值 r 。

假设由于加性噪声(对软判决译码而言)或由信道噪声引起的解调差错(对硬判决译码而言)导致译码器选取了一条错误路径(因为当时错误路径比正确路径的可能性大), 这种情况如图 8-2-18 所示。由于不正确路径量度的平均值不断减小, 其量度将落在当前的门限值(比如 τ_0)以下。出现这种情况时, 为了减小分支量度以便找到另外一条超过门限 τ_0 的路径, 译码器将退回几步选择树图或网格图的另一条路径。如果成功地找到另一条路径, 继续沿该路径走下去, 在每个节点处总是选择最大可能的分支。反之, 如果不存在超过门限 τ_0 的路径, 门限将减去一个量 τ , 并回到原路径重新寻迹。如果原路径不在新的门限之上, 译码器将回头搜索其他路径。这个过程不断重复, 每次重复门限下降 τ , 直到译码器找到能保持在修正后的门限之上的路径。简化的范诺算法的流程图如图 8-2-19 所示。



8-2-19 一个简化的范诺算法的流程图(摘自 Jordan(1966 年), ©1966 年 IEEE)

序列译码器中需要缓存器,以便在译码器搜寻不同路径时存放输入的解调数据。搜索完毕后,译码器必须能以足够快的速度处理解调比特,以便在进行新一轮搜索时腾空缓存器。偶然遇到非常长的搜索时,缓存器可能溢出。这将导致数据丢失,想要修复它必须重新传输丢失的信息。出于这种考虑,在序列译码中截止速率 R_0 有特殊的意义。正是这个速率限制了每译码数字位在译码中的平均运算次数,用术语来说叫计算的截止速率 R_{comp} 。在实践中,序列译码通常以接近 R_0 的速率运行。

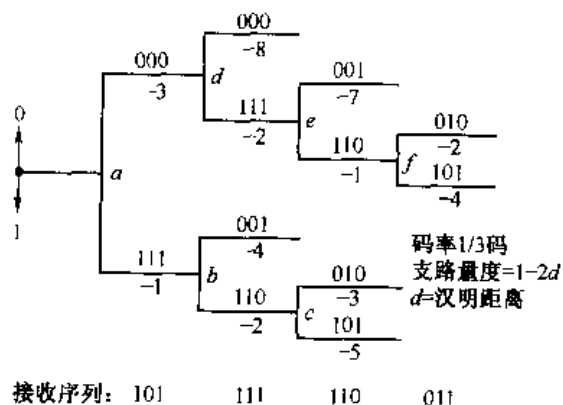
范诺序列译码算法已成功地应用于一些通信系统,其差错概率性能与维特比译码相媲美。但是,与维持比译码相比,序列译码有相当大的译码延时。序列译码的优点是所需存储量比维特比译码小,因此对约束长度大的卷积码很有吸引力。专家们对序列译码的复杂度和存储量问题作了透彻的研究,有关分析和范诺算法的其他特点请参见加拉格尔(Gallager, 1968 年)、沃曾克拉夫特和雅各布斯(1965 年)、Savage(1966 年)和福尼(1974 年)的著作。

2. 堆栈算法

另一类序列译码算法叫做堆栈算法,是杰林克(Jelinek, 1968 年)和齐盖基洛夫(Zigan-girov, 1966 年)分别提出的。它不像维特比算法那样要保存 $2^{(K-1)k}$ 条路径及相应的量度,堆栈序列译码算法只涉及较少路径及其量度。在堆栈算法中,只取可能性较大的路径,按其量度的大小顺序排列,量度最大的路径放在堆栈顶上。在算法的每一步,只将堆栈顶部的路径延伸一个分支,这样仅产生 2^k 个后续路径及其相应的量度。然后将此 2^k 个后续路径和其他路径按量度大小重新排序,路径量度与堆栈顶的最大路径量度相比,低于某预设值的所有路径全被丢弃。这样不断重复,以最大量度为基准延伸路径。图 8-2-20 所示为堆栈算法的头几步。

显然,当具有最大量度的 2^k 个延伸路径中没有一条能留在堆栈顶部时,下一步应延伸到达堆栈顶部的另一条路径。由此可见,这种算法在每次迭代中不一定沿着网格图前进一个分支,其后果是必须为新接收的信号和先前已接收的信号提供一定数量的存储能力,以便在较短的路径到达栈顶时允许算法沿此短路径延伸搜索。

堆栈算法和维特比算法相比,堆栈算法只需计算较少的量度,但这种计算量的节约是以每次迭代后堆栈重新排序所需计算量的增大为代价换来的。与范诺算法相比,堆栈算法的计算比较简单,因为不像范诺算法那样有从同一路径退回重新找路的情况。不过,堆栈算法所需的存储量比范诺算法大。



接收序列: 101 111 110 011

带有累积路径量度的堆栈					
步骤 a	步骤 b	步骤 c	步骤 d	步骤 e	步骤 f
-1	-2	-3	-2	-1	-2
-3	-3	-3	-3	-3	-3
	-4	-4	-4	-4	-4
		-5	-5	-5	-4
			-8	-7	-5
				-8	-7
					-8

图 8-2-20 用堆栈算法译码
码率 1/3 的卷积码的例子

3. 反馈译码

第三种可能代替最佳维特比译码的方法是反馈译码(海勒 Heller, 1975 年), 已被用于 BSC 信道的硬判决译码。在反馈译码中, 译码器根据从 j 级到 $j+m$ 级 (m 是预选的正整数) 计算得来的量度对第 j 级上的信息比特硬判决。该信息比特判决为 0 还是 1, 取决于由 j 级开始到 $j+m$ 级结束这段区间内, 具有最小汉明距离的路径在第 j 级发出的分支中包含 0 还是 1。一旦第 j 级的信息比特完成判决, 树图中只有起源于 j 级选定比特路径的部分被保存(即从节点 j 发出的半数路径), 将其余部分丢掉。这就是反馈译码的特征。

下一步把留在树图中的部分延伸到 $j+1+m$ 级, 并在判决第 $j+1$ 级的比特时考虑从 $j+1$ 级到 $j+1+m$ 级的所有路径。这样, 在每一级都重复这个步骤。参数 m 是译码器硬判决之前参考的树图级数。由于大 m 值导致大存储量, 所以 m 应选得尽可能小。另一方面, 为了避免性能的严重恶化, 必须将 m 选得足够大。折中这个矛盾, m 通常在 $K \leq m \leq 2K$ 范围内, 这里 K 是约束长度。还应指出, 反馈译码的延时比维特比译码的延时小得多, 后者的延时通常约为 $5K$ 。

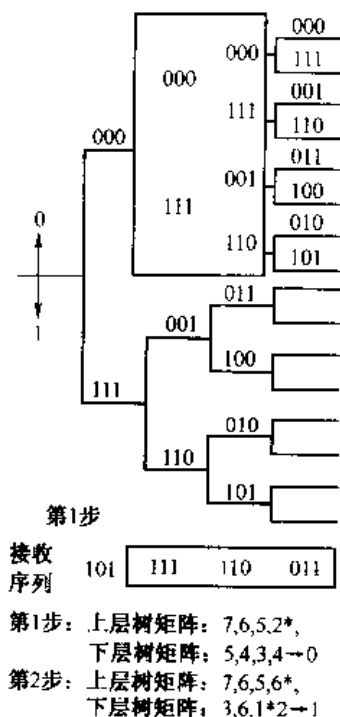


图 8-2-21 对码率 $1/3$ 的卷积码实行反馈译码

例 8-2-8 用反馈译码法译图 8-2-2 所示码率为 $1/3$ 的卷积码, 该卷积码的树图如图 8-2-21 所示。反馈译码时取 $m=2$, 也就是说, 在译第 j 分支的比特时, 译码器要考虑第 $j, j+1$ 和 $j+2$ 分支上的各条路径。从第一个分支开始, 译码器计算 8 个量度(汉明距离)。当最小距离路径在树图上部时, 将第一分支的比特判为 0; 当最小距离路径在树图下部时, 将第一分支的比特判为 1。本例中, 前 3 个分支的接收序列假定是 101111110, 所以最小距离路径在树图的上部, 因此第一个输出比特为 0。

下一步将树图上部的路径(这个部分已被保存)延伸一个分支, 并计算第二、三和四分支的 8 个量度。假如接收的序列是 111110011, 则最小距离路径包含在树图下部, 该路径从第一步起保存。所以, 第二个输出比特为 1。第三步从树图下部延伸出去, 并重复前两步的过程。

如果不像上述那样计算量度, BSC 信道的反馈译码器可以通过接收序列伴随式的计算用查表法进行差错纠正, 这也能有效地实施译码。这种方法与前述分组码译码方法相似。对于某些卷积码, 反馈译码可简化为大数逻辑译码, 或叫做门限译码(见梅西, 1963 年; 海勒, 1975 年)。

4. 软输出算法

维特比以及本节描述过的 3 种算法均为硬判决, 而在某些情况下, 要求解码器具有软输出。级联码内码的译码就是这种情况, 它的输出作为外码译码器的输入要求是一种软判决。

前面 8.1.10 节中讨论过的级联码迭代译码也是这种情况,我们还将后面 8.2.10 节卷积码内容中进一步提到这问题。

衡量符号判决可靠性的最佳尺度是在已知接受信号矢量 $\mathbf{r} = [r_{jm}, m = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, B]$ 条件下检测信号的后验概率,这里, $\{r_{jm}\}$ 是解调器的软输出序列, n 是从每 k 个输入符号中译码所得的输出符号数, j 是码组序号。举例来说,假定 AWGN 信道一个采用二进卷积编码、二进 PSK 调制系统的解调器输出为

$$r_{jm} = (2c_{jm} - 1) \sqrt{\epsilon_c} + n_{jm}$$

这里, $\{c_{jm} = 0, 1\}$ 是编码器输出比特。若给定接收矢量 \mathbf{r} , 可依据最大后验概率 (MAP) 准则对传输的信息比特进行判决, 表示为

$$P(x_i = 0 | \mathbf{r}) = 1 - P(x_i = 1 | \mathbf{r}) \quad (8-2-48)$$

其中 x_i 代表信息序列的第 i 个比特。这样, 通过选择与最大后验概率对应的信息符号 (或上述的比特), 符合 MAP 准则的判决逐符号地作出。如果若干可选传输符号的后验概率接近相等, 则判决变得不可靠。因此, 与判决符号 (硬判决) 对应的后验概率其实是译码器的软输出, 它提供了一种关于硬判决可靠性的计量或尺度。由于 MAP 准则使符号差错概率最小化, 所以后验概率尺度是解码器的最佳软输出。已知解调后的接收信号序列 \mathbf{r} , 计算每个接收符号的后验概率, 这样的递归算法在 1974 年 Bahl, Cocke, Jelinek, Raviv 的论文中已有描述。这种逐符号解码算法, 称为 BCJR 算法, 以 MAP 为准则, 为每个接收符号提供一个硬判决值以及一个后验概率尺度, 作为对硬判决可靠性的量度。BCJR 算法的主要缺点在于它的计算复杂度, 比维特比算法的复杂度大 3 至 4 倍。

与 MAP 的逐符号检测准则相反, 维特比算法选择能使概率 $p(\mathbf{r} | \mathbf{X})$ 最大化的序列, 这里的 \mathbf{X} 代表信息比特矢量。在这种情况下, 软输出尺度是判决序列与接收符号序列间的欧氏距离, 而不是单个符号的距离。但是, 完全可能从序列或路径距离中推导出符号的尺度。Hagenauer Hoehner (1989 年) 提出了一种软输出维特比算法 (SOVA), 它可为每个解码符号提供一个可靠性尺度。SOVA 算法基于这样一种观察: 维特比算法输出中, 特定符号硬判决正确的概率, 与残存序列和非残存序列间路径量度之差成正比。我们可以利用这个结果对每个符号的判决差错概率 (或正确概率) 作一估计, 方法就是将残存路径的路径量度与非残存路径的路径量度作对比。

例如, 考虑一个二元 PSK 调制的二进制卷积码。由于维特比算法的判决存在一个解码时延 δ , 经过时间 $t = i + \delta$ 后, 维特比解码器才从最可能的残存序列中取出输出比特 \hat{x}_{is} 。当沿着残存路径从时刻 t 追溯回时刻 $t - \delta$ 时, 我们看到这一路上我们曾丢弃掉 $\delta + 1$ 条路径。我们考虑丢弃掉的第 j 条路径, 它对应 $t = i$ 时刻的相应比特 x_{ij} 。如果 $\hat{x}_{is} \neq x_{ij}$, 令 $\Delta_j (\Delta_j \geq 0)$ 等于残存路径与第 j 丢弃路径之间路径量度的差值。如果 $\hat{x}_{is} = x_{ij}$, 令 $\Delta_j = \infty$ 。对所有丢弃路径进行这样的比较, 从所得集合 $\{\delta_j = 0, 1, 2, \dots, \delta\}$ 中选出最小值, 定义为 $\Delta_{\min} = \min \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_\delta\}$ 。于是, 比特 \hat{x}_{is} 的差错概率可近似为

$$\hat{P}_e \approx \frac{1}{1 + e^{\Delta_{\min}}} \quad (8-2-49)$$

我们注意到: 如果 Δ_{\min} 非常小, 则 $\hat{P}_e \approx \frac{1}{2}$, 判决 \hat{x}_{is} 不可靠。这样, \hat{P}_e 提供了一种衡量维特比算法硬判决输出可靠性的尺度。然而我们也注意到, \hat{P}_e 仅是真正差错概率是近似, 它并不

是维特比算法硬判决输出的最优软输出量度。事实上,1996年 Wang 和 Wicker 的论文已指出,在低信噪比条件下, \hat{P}_e 低估了真正的差错概率。然而,这种维特比算法的软输出尺度导致级联码解码性能的大幅改善。

由式(8-2-49),可得正确判决的近似概率为

$$\hat{P}_c = 1 - \hat{P}_e = \frac{e^{\Delta_{\min}}}{1 + e^{\Delta_{\min}}} \quad (8-2-50)$$

在 8.2.10 节讨论的软输入、软输出迭代解码算法中,算法用到的软输出尺度通常是 \hat{P}_c / \hat{P}_e 的对数即

$$L(x_i) \equiv \ln \frac{\hat{P}_c}{\hat{P}_e} = \Delta_{\min}(i) \quad (8-2-51)$$

这里, x_i 是解码的第 i 个信息比特。

8.2.8 卷积码实用中一些问题的考虑

卷积码在实际的通信系统设计中已被广泛采用。在短约束长度($K \leq 10$)时,占优势的是维特比译码。序列译码一般用于长约束长度的卷积码,因为维特比译码的复杂性使之不能用于该场合。约束长度的选择由所要求的编码增益决定。

从式(8-2-26)给出的软判决译码差错概率结果来看,卷积编码相对于不编码的二相 PSK 或 QPSK 系统而言的编码增益显然是

$$\text{编码增益} \leq 10 \lg(R_d d_{\text{free}})$$

我们知道,通过减小码率或者增大约束长度或者两者并举,最小自由距离 d_{free} 可以加大。表 8-2-14 列出了一些卷积码编码增益的上边界。作为比较,表 8-2-15 列出了实际的编码增益,以及短约束长度的卷积码在采用维特比译码时的编码增益上边界。应该指出,当每比特 SNR 增大时,编码增益向渐近上限的方向增加。

这些结果都是基于软判决维特比译码的。假如采用硬判决译码,AWGN 信道的编码增益将下降大约 2 dB。

表 8-2-14 一些卷积码在软判决译码时的编码增益上边界

码率 1/2			码率 1/3		
约束长度 K	d_{free}	上边界/dB	约束长度 K	d_{free}	上边界/dB
3	5	3.98	3	8	4.26
4	6	4.77	4	10	5.23
5	7	5.44	5	12	6.02
6	8	6.02	6	13	6.37
7	10	6.99	7	15	6.99
8	10	6.99	8	16	7.27
9	12	7.78	9	18	7.78
10	12	7.78	10	20	8.24

表 8-2-15 软判决维特比译码时的编码增益/dB

P_b	未编码 ε_b/N_0 (dB)	$R_c = 1/3$		$R_c = 1/2$			$R_c = 2/3$		$R_c = 3/4$	
		$K=7$	$K=8$	$K=5$	$K=6$	$K=7$	$K=6$	$K=8$	$K=6$	$K=9$
10^{-3}	6.8	4.2	4.4	3.3	3.5	3.8	2.9	3.1	2.6	2.6
10^{-5}	9.6	5.7	5.9	4.3	4.6	5.1	4.2	4.6	3.6	4.2
10^{-7}	11.3	6.2	6.5	4.9	5.3	5.8	4.7	5.2	3.9	4.8

源于: Jacobs(1974 年); ©IEEE

使用长约束长度的卷积码,比如 $K=50$,可以取得比上表所列更大的编码增益,译这些码要用序列译码。序列译码一概采用硬判决,为的是减小复杂性。图 8-2-22 画出了约束长度 $K=7$ 、码率 $1/2$ 和 $1/3$ 的卷积码,以及序列译码(硬判决)约束长度 $K=41$ 、码率 $1/2$ 和 $1/3$ 的卷积码的差错概率性能。注意, $K=41$ 的码在 SNR 等于 2.5 dB 和 3 dB 处取得了 10^{-6} 的差错概率,较之信道容量限,即截止速率限的 SNR 差距 4~4.5 dB 以内。码率 $1/2$ 和 $1/3$ 、 $K=7$ 的码在维特比软判决译码时, 10^{-6} 处的 SNR 分别是 5 dB 和 4.4 dB。短约束长度的码在 10^{-6} 处取得的编码增益约为 6 dB,长约束长度码的编码增益约为 7.5~8 dB。

实现维特比译码时有两个重要问题如下:

- (1) 路径留存的截断效应,它对于保证固定的译码延时是必要的。
- (2) 维特比译码器输入信号的量化级数。

粗略地估计,路径留存如在约束长度 5 倍处截断,其性能的损伤可忽略不计。图 8-2-23 所示为码率 $1/2$ 、约束长度 $K=3,5$ 和 7 的码在留存路径长度为 32 比特时通过计算机模拟的性能曲线。除路径留存的截断外,对来自解调器的输入信号实行 8 级(3 比特)量化后才进行计算。图中的虚线是从式(8-2-26)算得的比特差错概率性能上边界。注意,模拟结果与理论的上边界很接近,这表明由路径留存的截断和输入信号的量化造成的损伤对性能仅有很小的影响(0.20~0.30 dB)。

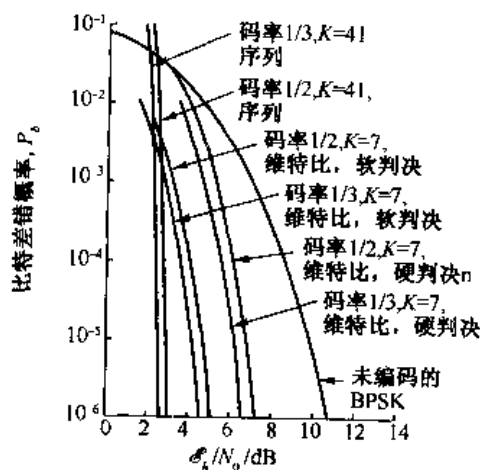


图 8-2-22 码率 $1/2$ 和 $1/3$ 且维特比译码和序列译码时的性能(摘自 Omura & Levitt, 1982 年, © 1982 年 IEEE)

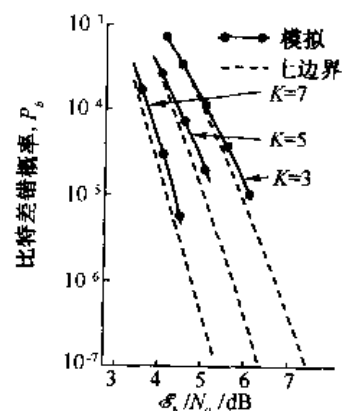


图 8-2-23 码率 $1/2$ 、对译码器输入 8 级量化、32 比特路径留存、维特比译码时的比特差错概率(摘自 Heller & Jacobs, 1971 年, ©1971 年 IEEE)

图 8-2-24 所示是计算机模拟得到的,对 $K = 3 \sim 8$ 卷积码实行硬判决译码时的比特差错概率性能。我们看到,对于 $K = 8$ 的码,差错概率为 10^{-5} 时所需的 SNR 约为 6 dB,这表明与不编码的 QPSK 相比,该码取得将近 4 dB 的编码增益。

输入信号的量化对码率 $1/2$ 、 $K = 5$ 卷积码的影响如图 8-2-25 所示。3 比特(8 电平)量化约比硬判决译码好 2 dB,这接近 AWGN 信道上软判决译码较之硬判决译码所能得到的最大改进。信号量化和路径留存截断加在一起,对码率 $1/2$ 、 $K = 5$ 、路径留存 8 比特、16 比特和 32 比特、量化成 1 比特、2 比特和 3 比特的卷积码的影响如图 8-2-26 所示。从这些结果可以清楚地看到,路径留存即使短到只有约束长度的 3 倍时,也没使性能严重下降。

当来自解调器的信号量化成多于 2 电平时,必须考虑量化电平间隔的大小。图 8-2-27 是 8 电平均匀量化且性能作为量化器门限电平间隔(量阶)函数时用计算机模拟所得的结果。我们看到,门限间存在一个最佳的间隔大小(约等于 0.5)。但最佳区的范围足够宽(0.4~0.7),以致一旦设定后,在 AGC 电平以 20% 数量级波动时,其性能的损伤极小。

最后指出由于载波相位变化导致性能下降的一些重要结论。图 8-2-28 给出了码率 $1/2$ 、 $K = 7, 8$ 电平量化的编码性能随载波相位跟踪环 SNR γ_L 变化的曲线。在锁相环里,相位误差的方差反比于 γ_L 。图 8-2-28 的结果表明:环路 SNR 较小时($\gamma_L < 12$ dB)性能损伤较大,它将使差错概率性能停留在较高的差错率上降不下来。

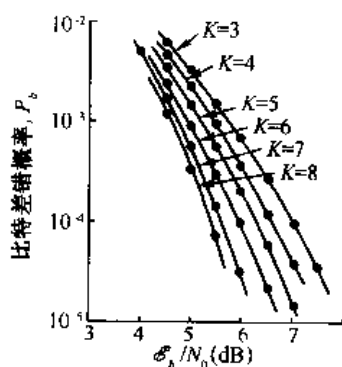


图 8-2-24 码率 $1/2$ 、硬判决维特比译码、32 比特路径留存时的性能(摘自 Heller & Jacobs, 1971 年, © 1971 年 IEEE)

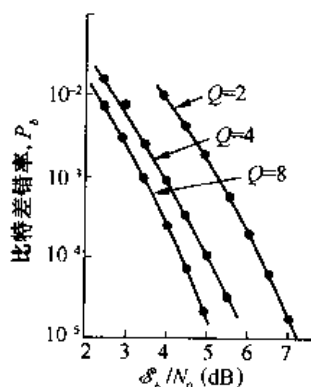


图 8-2-25 码率 $1/2$ 、 $K = 5$ 、对维特比译码器输入信号 8, 4, 2 电平量化、路径截断长度 32 比特时的性能(摘自 Heller & Jacobs, 1971 年, © 1971 年 IEEE)

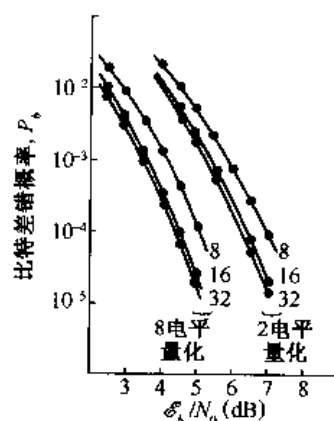


图 8-2-26 码率 $1/2$ 、 $K = 5$ 、8, 4, 2 电平量化、32 比特、16 比特、8 比特路径留存截断时的性能(摘自 Heller & Jacobs, 1971 年, © 1971 年 IEEE)

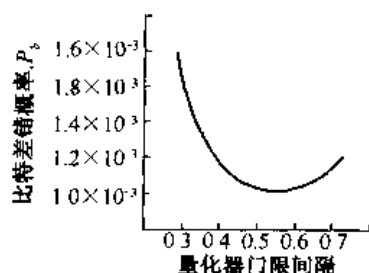


图 8-2-27 码率 $1/2$ 、 $K=5$ 、 $\epsilon_b/N_0=3.5$ dB、8 电平等间隔量化的维特比译码器,其差错概率性能随量化器门限电平间隔变化的曲线(摘自 Heller & Jacobs, 1971 年, © 1971 年 IEEE)

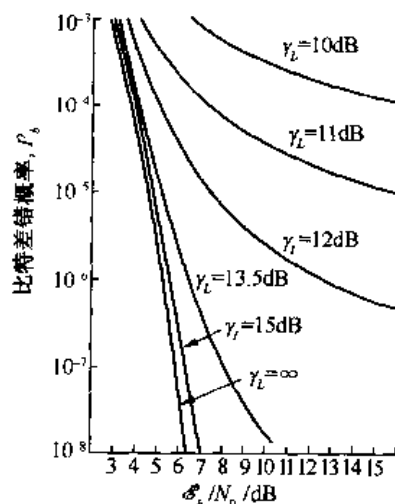


图 8-2-28 码率 $1/2$ 、 $K=7$ 的卷积码在 8 电平量化的维特比译码时性能随载波相位跟踪环 SNR γ_L 变化的曲线(摘自 Heller & Jacobs, 1971 年, © 1971 年 IEEE)

8.2.9 非二进制双 k 码和级联码

到目前为止,我们关于卷积码的讨论主要集中在二进制编码。二进制码特别适合于采用二相或四相 PSK 调制和相干解调的信道。然而在很多实际应用中,PSK 调制和相干解调或者不适宜,或者不可能。在这种情况下,要使用其他调制技术如 M 进制 FSK,并结合使用非相干解调。非二进制码与非相干解调的 M 进制信号配合得特别好。

本节将介绍一类非二进制卷积码,叫做双 k 码,它很容易使用软判决或硬判决的维特比译码,也适合在级联码中当做外码或内码。

一个码率为 $1/2$ 的双 k 卷积码如图 8-2-29 所示,由两级($K=2$)且每级 k 比特的移存器和 $n=2k$ 个函数生成器组成,其输出是两组 k 比特符号。注意,例 8-2-3 讨论的码就是双 2 卷积码。

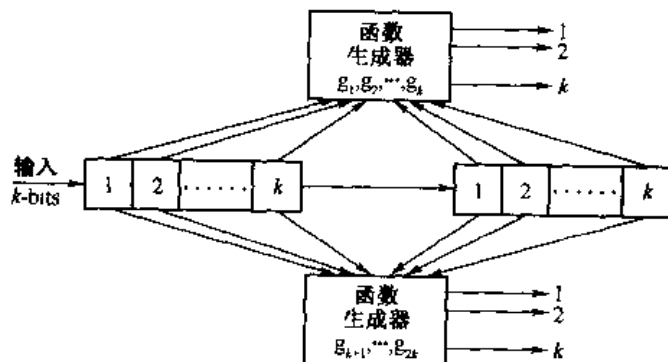


图 8-2-29 码率 $1/2$ 的双 k 码的编码器

双 k 卷积码所用的 $2k$ 个函数生成式在维特比和雅各布斯(Viterbi & Jacobs, 1975 年)的

著作中给出,这些函数生成式可表示为如下形式

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \leftarrow g_1 \rightarrow \\ \leftarrow g_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow g_k \rightarrow \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_k \quad \mathbf{I}_k] \\
 \begin{bmatrix} \leftarrow g_{k+1} \rightarrow \\ \leftarrow g_{k+2} \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow g_{2k} \rightarrow \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & \end{bmatrix} \mathbf{I}_k \quad (8-2-52)
 \end{aligned}$$

式中, \mathbf{I}_k 表示 $k \times k$ 单位矩阵。

码率为 $1/2$ 的双 k 码转移函数的一般形式由奥登沃尔德 (Odenwalder, 1976 年) 推导出来, 可表示为

$$\begin{aligned}
 T(D, N, J) &= \frac{(2^k - 1)D^4 J^2 N}{1 - NJ[2D + (2^k - 3)D^2]} \\
 &= \sum_{i=4}^{\infty} a_i D^i N^{f(i)} J^{h(i)} \quad (8-2-53)
 \end{aligned}$$

式中, D 表示 q 元 ($q = 2^k$) 符号的汉明距离, $f(i)$ 是 N 的指数, 表示在树图或网格图中没有选全零路径对应的分支而选择了另外的分支产生的信息符号差错个数。 $h(i)$ 是 J 的指数, 等于某一给定路径上分支的数目。注意, 最小自由距离是 $d_{\text{free}} = 4$ 个符号 (相当于 $4k$ 比特)。

产生低码率双 k 卷积码的方法有几种, 最简单的一种是把码率为 $1/2$ 的编码产生的每个符号重复 r 次, 这里 $r = 1, 2, \dots, m$ ($r = 1$ 相当于每个符号只出现一次)。如果将树图、网格图或状态图的任一特定分支上的每一符号重复 r 次, 距离参数将从 D 增加到 D^r 。因此码率为 $1/2r$ 的双 k 码的转移函数为

$$T(D, N, J) = \frac{(2^k - 1)D^{4r} J^2 N}{1 - NJ[2D^r + (2^k - 3)D^{2r}]} \quad (8-2-54)$$

在长信息序列的传输中, 令 $J = 1$ 可以精简转移函数中的路径长度参数 J 。精简后的转移函数 $T(D, N)$ 可以对 N 求导, 并把 N 设为 1, 于是

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dT(D, N)}{dN} \right|_{N=1} &= \frac{(2^k - 1)D^{4r}}{[1 - 2D^r - (2^k - 3)D^{2r}]^2} \\
 &= \sum_{i=4r}^{\infty} \beta_i D^i \quad (8-2-55)
 \end{aligned}$$

式中, β_i 表示与全零路径相距 D^i 的路径上的差错符号数, 如 8.2.3 节所述。式 (8-2-55) 可用来计算在各种信道条件下的差错概率。

1. M 进制调制下双 k 码的性能

假定在调制器中将双 k 码与 M 进制 ($M=2^k$) 的正交信号结合使用, 编码器输出的每个符号被映射为 M 种可能的正交波形之一。假设信道是加性高斯白噪声信道, 解调器由 M 个匹配滤波器组成。

如果译码器采用硬判决译码, 那么码的性能由符号差错概率 P_M 确定。第 5 章讨论过相干与非相干检测下这种差错概率的计算。已知 P_M , 根据式(8-2-28)或式(8-2-29)可确定 $P_2(d)$, 这是全零路径和与之相差 d 个符号的路径成对比较时所得的差错概率。比特差错概率的上边界为

$$P_b < \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \sum_{d=1}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (8-2-56)$$

式中, 因子 $2^{k-1}/(2^k - 1)$ 用来将符号差错概率转换为比特差错概率。

假如解调器使用平方律检波, 译码器采用软判决而不是硬判决译码, 式(8-2-40)的比特差错概率表达式仍然适用, 但 $P_2(d)$ 改为由下式计算(见 12.1.1 节):

$$P_2(d) = \frac{1}{2^{2d-1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma_b R_c d\right) \sum_{i=0}^{d-1} K_i \left(\frac{1}{2} \gamma_b R_c d\right) \quad (8-2-57)$$

式中

$$K_i = \frac{1}{i!} \sum_{l=0}^{d-1-i} \binom{2d-1}{l}$$

$R_c = 1/2r$ 是编码效率。该表达式是从式(8-1-63)推出的。

2. 级联码

8.1.8 节曾研究过用两个分组码级联成一个长的分组码。现在, 既然已经学过了卷积码, 我们不妨研究分组码和卷积码的级联, 或者两个卷积码的级联。

如前所述, 级联码中的外码常选用非二进制码, 它的每个符号选自 $q=2^k$ 个符号组成的字符集。这种码可以是分组码, 例如 RS 码; 也可以是卷积码, 例如双 k 码。级联码的内码可以是二进制的, 也可以是非二进制的; 可以是分组码, 也可以是卷积码。举例来说, RS 码可选做外码, 双 k 码可选做内码。在这种级联模式中, 外(RS)码的符号数 q 等于 2^k , 所以外码的每个符号映射成双 k 内码的 k 比特符号。这些符号可以用 M 进制正交信号传输。

这种级联码也可以采用各种不同的译码方式。如果内码是具有短约束长度的卷积码, 那么无论是用软判决译码还是硬判决译码, 维特比算法都是一种有效的译码算法。

如果内码是分组码, 并且译码器执行软判决译码, 那么外码译码器也可以按输入内码的每个码字对应的量度来实行软判决译码。换一种方法, 内码译码器在收到码字后也可以进行硬判决, 再把硬判决结果送给外码译码器, 这时外码译码器必须执行硬判决译码。

下例描述了一个级联码, 其外码是卷积码, 内码是分组码。

例 8-2-9 假如选双 k 码作为外码, 哈达马码作为内码构成一个级联码。再具体些, 选码率 $1/2$ 的双 5 码配以 (16, 5) 哈达马码的内码。码率 $1/2$ 双 5 码的最小自由距离 $D_{\text{free}} = 4$, 哈达马码的最小距离 $d_{\text{min}} = 8$, 所以级联码的最小有效距离为 32。因为哈达马码有 32 个码字, 外

码有 32 个可能的符号,所以外码中的每个符号映射到 32 个哈达马码码字之一。

内码译码时的符号差错概率可以引用分组码性能分析的结果,软判决和硬判决译码时的结果分别在 8.1.4 节和 8.1.5 节中给出。首先假定内码译码采用硬判决,由于 $M=32$,所以用 P_{32} 表示码字(即外码符号)差错概率。利用此差错概率,结合式(8-2-53)给出的双 5 码的转移函数,可求出外码的性能,于是级联码的性能可得。

换一种情况,如果外码和内码都用软判决译码,那么每一个接收的哈达马码字对应的软判决量度将被送入维特比算法,维特比算法再算出网格图上各条待选路径的累积量度。在讨论瑞利衰落信道的编码时,我们将给出这类级联码性能的数值解。

8.2.10 并行与串行的级联卷积码

在 8.1.10 节中已介绍了并行与串行的级联分组码,该码采用交织器来构成特长码。我们在本节将讨论用卷积码构成、带交织的级联码的结构和解码。

带交织的并行级联卷积码(PCCC)也叫 Turbo 码,是 1993 年由 Berrou 等人提出的。Turbo 编码器的基本结构如图 8-2-30 所示,它是递归、系统的,由两个并联的卷积编码器组成,在第二编码器的前面串接了一个交织器。这两个递归、系统的卷积编码器可以是相同的,也可以是不同的。我们看到,Turbo 编码器输出的标称码率是 $R_c=1/3$ 。然而,通过对二进卷积编码器输出冗余校验比特的删余压缩(puncturing)处理,我们可以获得较高的码率,比如 $1/2$ 或 $2/3$ 。如同级联分组码一样,交织器通常选用块状伪随机交织器,它在将信息序列比特送入下一级编码器之前对它们进行重新排序。从效果上看,两个卷积编码器加上一个交织器能产生一种新码,这种码的码字很少有“重量”轻的。这个特点并不意味着该级联码的自由距离一定非常大,但与两编码器配套使用交织器后,就使各码字极少有离它很靠近的邻码,也就是说码字变得相对稀疏。Turbo 码编码增益的取得,部分原因就在于此,即交织导致紧邻码字数量的减少。Benedetto 和 Montorsi 已论证(1996 年);当交织器分块长度为 N 时,紧邻码字的数目减少 N 倍。

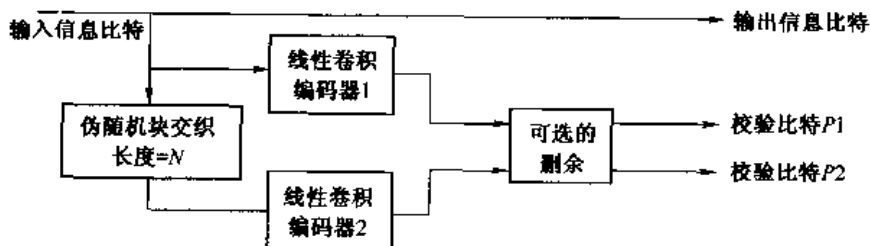


图 8-2-30 并行级联码(Turbo 码)编码器

用 Turbo 码取得优良性能的第二个重要方面是使用基于 MAP 准则的迭代译码,迭代解码器的基本结构如图 8-2-31 所示。

PCCC 迭代译码算法一般采用 BCJR 法或这种算法的某些变种,该算法在 Bahl 等人 1974 年的论文中作过描述。从图 8-2-31 看到,第一个编码器的输入取自与信息比特及校验比特 $P1$ 对应的解调器输出。类似地,第二个编码器的输入取自与信息比特及校验比特 $P2$ 对应的解调器输出。每个解码器都试图借助各自的校验比特获得信息比特,计算各信息比特的后验概率,解出信息序列 $\{x_i\}$,并将这软输出信息馈送到下一个解码器,用做“先验信息”(priori information)来提高正确判断的概率。两解码器之间交换的软输出信息,如图 8-2-31 所示,称为

“外信息”(extrinsic information)。

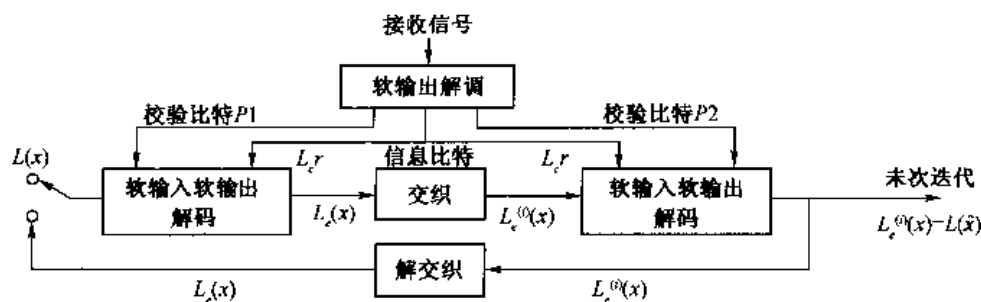


图 8-2-31 PCCC(Turbo 码)迭代解码器方框图

对于传输比特 $x = 1$ 及 $x = -1$, 我们将逐符号 MAP 解码器的输出定义为后验对数相似比

$$L(x) = \lg \frac{P(x = 1 | \mathbf{r})}{P(x = -1 | \mathbf{r})}$$

这里 \mathbf{r} 是解调器输出信号矢量。在计算 $L(x)$ 过程中, 解码器使用了先验信息 $L(x)$ 以及解调器输出的信道参量 $L_c r$ 。先验信息定义为先验概率的和似然比, 即

$$L(x) = \lg \frac{P(x = 1)}{P(x = -1)}$$

L_c 是个常数^①, 正比于接收的信噪比。解码器输出包括各信息比特的软输出 $L(x)$ 以及与之对应的、称之为“外信息”的软输出, 记做 $L_e(x)$, 代表从解码器接收的校验比特中提取到的、关于信息比特的计算所得软输出。

Hagenauer 等人在 1996 年提出, 对于系统码而言, 信息比特 x 的软输出可以表示为三项之和, 即

$$L(x) = L_c r + L(x) + L_e(x) \quad (8-2-58)$$

这里, 外信息 $L_e(x)$ 用于在两解码器之间作交换。在迭代译码算法的首次迭代中, 解码器 1 计算得出外信息

$$L_{e1}(x) = L_1(x) - [L_c r + L(x)] \quad (8-2-59)$$

如果信息比特在发端等概分布, 此处 $L(x) = 0$ 。第一个译码器算出的外信息经适当交织后被送到解码器 2, 解码器 2 以 $L_{e1}(x)$ 为先验值代替上式 $L(x)$ 来计算 $L_2(x)$ 。于是解码器 2 又算得每个信息比特的外信息值为

$$L_{e2}(x) = L_2(x) - [L_c r + L_{e1}(x)] \quad (8-2-60)$$

接着, 解码器 1 再利用外信息值 $L_{e2}(x)$ 作为第二次迭代的先验信息。迭代按此算法反复进行。

迭代过程通常是在完成了预定迭代次数后中止, 这时软输出值 $L_2(x)$ 已趋稳定, 在前后两次迭代中变化甚微。在最后一次迭代中, 解码器 2 在计算软输出时将两个外信息值结合在一起

$$L_2(x) = L_c r + L_{e1}(x) + L_{e2}(x)$$

① 可以证明在 AWGN 信道中, $L_c = 4\epsilon_c/N_0$, ϵ_c 是每编码比特的能量。

如果解码器运行在足够大的 SNR 环境以致差错率可在 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 时,典型的迭代次数是 4 次就够了。但在 SNR 较低、差错概率在 10^{-5} 以内时,约需迭代 8~10 次。

影响 Turbo 码性能的一个重要因素是交织长度,有时也称为交织增益。使用足够大的交织器,采用 MAP 迭代译码,Turbo 码的性能可以非常接近香农限。例如,码率 $1/2$ 、块长 $N = 2^{16}$ 、每比特译码迭代 18 次的 Turbo 码,在差错概率 10^{-5} 时所需 SNR 可达 0.6 dB。

带有大交织器的 Turbo 译码的主要缺点是迭代译码算法固有的译码时延和计算复杂。

构成带交织的级联卷积码的第二种方法是串行级联。Benedetto 等人 1998 年研究了带交织的串行级联卷积码(SCCC)的结构和性能,并提出了一种该码的迭代译码算法。在对比了 SCCC 与 PCCC(Turbo 码)的误码特性后,Benedetto 等人(1998 年)发现,在误码率低于 10^{-2} 时,SCCC 显示了比 PCCC 更好的性能。

8.3 带限信道的编码调制——网格编码调制

8.1 节和 8.2 节分别讨论了分组码与卷积码,这两种码性能的改善都是通过扩大传输信号的带宽取得的,带宽扩大的倍数等于码率的倒数。采用软判决译码的二进制 (n, k) 分组码与不编码的 2 相或 4 相 PSK 相比所得的性能改善约 $10\lg(R_c d_{\min} - k \ln 2 / \gamma_b)$ 。例如当 $\gamma_b = 10$ 时, $(24, 12)$ 扩展高莱码的编码增益是 5 dB,这个编码增益是以传输信号的带宽增大 1 倍为代价取得的。另一个代价是接收器复杂度的增加。编码实际上提供了一种有效的方法,使我们能在带宽、实现的复杂度和发送功率三者间折中、权衡。这种情况在设计用于功率受限信道(一般 $R/W < 1$)的数字通信系统时很有用。

本节将讨论用于带限信道的信号编码。在这种信道里,数字通信系统都被设计成使用频带效率高的多电平多相位的调制方法,比如 PAM, PSK, DPSK 或 QAM 等,工作于 $R/W > 1$ 的领域。当编码用于带限信道时,要求不扩展带宽而取得编码增益。可以通过增加符号数(相对于不编码系统)提供编码所需的冗余度来达到这个目标。

举例来说,假如有一个系统用不编码的四相 PSK 调制在差错概率 10^{-6} 处取得频带效率 $R/W = 2\text{b/s} \cdot \text{Hz}$ 。在这个差错概率下,每比特所需的 SNR 是 $\gamma_b = 10.5\text{ dB}$ 。试图采用信号编码来减小每比特的 SNR,条件是带宽不能扩大。如果选用一个码率 $R_c = 2/3$ 的码,必然引起信号集点数由 4(每符号 2 比特)增大到 8(每符号 3 比特)。这样,码率 $2/3$ 的编码必须结合如 8PSK 那样的调制使用,才能得到与不编码 4PSK 同样的数据吞吐量。然而,信号相位数由 4 增加到 8 需要增加约 4 dB 信号功率才能保持同样的差错概率。所以,如果编码有好处的话,码率 $2/3$ 的编码增益必须大到足以抵偿 4 dB 损失才行。

如果把调制看做是与编码无关的独立操作,在使用强有力的编码(大约约束长度的卷积码或大分组长度的分组码)时要抵偿这种损失,要有相当大的编码增益。但是,如果把调制当做编码过程不可分割的一部分,与编码结合在一起设计,以增大编码符号之间的最小欧氏距离,那么信号集扩大造成的损失容易弥补,用一个相对简单的码就可以获得相当大的编码增益。把调制和编码集成在一起的关键是找到一种有效的办法,把编码比特映射到信号点集而使最小欧氏距离最大。翁格博克(Ungerboeck, 1982 年)已找到这种方法,它以分集映射为基本原则。我们用例 8-3-1 和例 8-3-2 两个例子说明其原理。

1. 分集

我们从给定的信号星座, 比如 M 进制 PAM, QAM 或 PSK 着手, 以这样的方法将星座分割成子集, 即令子集中两信号点之间的最小欧氏距离随着每次分集变大。

以下两个例子表示了翁格博克(Ungerboeck)提出的分集方法。

例 8-3-1 8-PSK 信号星座 把一个八相信号星座按最小欧氏距离逐级增大的原则划分成子集。在八相信号集中, 信号点位于半径为 $\sqrt{\epsilon}$ 的圆上, 各点间相隔的最小欧氏距离是

$$d_0 = 2\sqrt{\epsilon} \sin \frac{1}{8} \pi = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\epsilon} = 0.765\sqrt{\epsilon}$$

第一次分集(即划分子集)时, 8 个点分成 2 个子集, 每子集 4 点, 划分的原则是使点间的最小距离增大到 $d_1 = \sqrt{2}\epsilon$ 。第二次(也叫第二级)分集时, 两个子集中的每一个又各分成两个子集, 每子集 2 个点, 使最小距离增大到 $d_2 = 2\sqrt{\epsilon}$ 。这样共产生 4 个 2 个点的子集。最后一次分集得到 8 个子集, 每子集仅包含一个点。可以看到, 每次分集都能使信号点间的欧氏距离增大。这样, 三级分集的结果如图 8-3-1 所示。关于编码比特映射到分集信号点的方法在下面讲述。

例 8-3-2 16-QAM 信号星座 图 8-3-2 所示的 16 点矩形信号星座首先被划分为两个子集, 每个子集隔点选取, 如图所示。这样, 经第一级分集后, 点间距离从 $2\sqrt{\epsilon}$ 增加到 $2\sqrt{2}\epsilon$ 。将这两个子集再各分成两个子集, 可使信号点以更大的欧氏距离相间隔, 如图 8-3-2 所示。注意, 对矩形信号星座而言, 每一级分集可使最小欧氏距离增加 $\sqrt{2}$ 倍。也就是说, 对于任何 i , 存在 $d_{i+1}/d_i = \sqrt{2}$ 的关系。

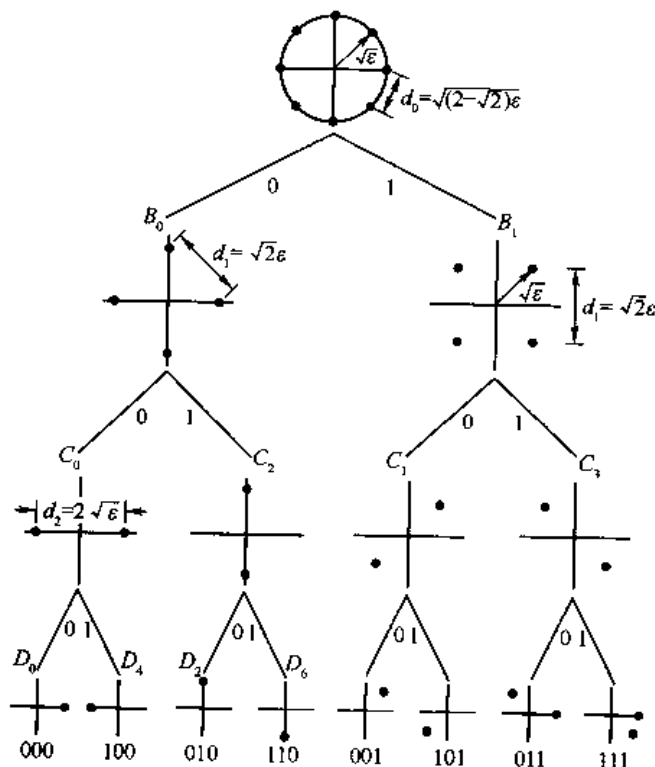


图 8-3-1 8-PSK 信号集的分集

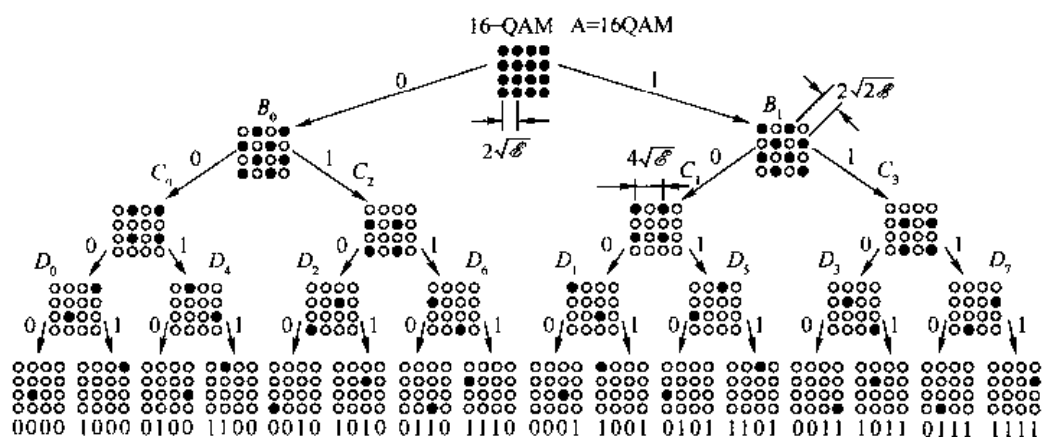


图 8-3-2 16-QAM 信号的分集

以上两例中分集的过程都进行到每个子集仅包含一个信号点为止,一般不一定这样。例如,16 点 QAM 的信号星座可以只进行两级分集,产生 4 个子集,每子集 4 个信号点。同样,8-PSK 的信号星座可以只进行两级分集,产生 4 个子集,每子集 2 个点。

2. 网格编码调制(TCM)

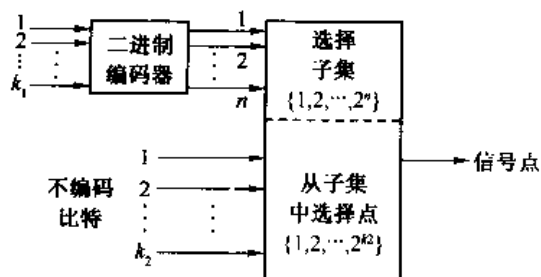


图 8-3-3 一体化编码调制器的一般结构

信号究竟分集到什么程度取决于编码特性。一般来说,编码过程可按图 8-3-3 所示的方式进行。一个 m 比特的信息块被分成长度分别为 k_1 和 k_2 的两组。 k_1 比特被编码成 n 比特,而 k_2 比特不参与编码。这样,从编码器得出的 n 比特用来在分集后信号星座的 2^n 个子集里选取其中之一, k_2 比特用来在各子集的 2^{k_2} 个信号点里选取其中之一。当 $k_2 = 0$ 时,所有 m 个信息比特都参与编码。

关于网格图中状态转移与信号子集的指配关系,翁格博克在 1982 年的论文中提出了令人寻味的 3 条规则,它们是:

(1) 网格图中的同样的频度使用所有子集。

(2) 对于由网格图同一状态发出或合并到同一状态的转移,应指定具有最大欧氏距离分隔的子集。

(3) 并行状态转移(如果存在的话)应指定具有最大欧氏距离分隔的信号点。网格图上的并行转移是 TCM 的特点,它包含了一个或多个未编码信息比特。

例 8-3-3 设想用图 8-3-4(a) 所示码率 $1/2$ 的卷积码对一个信息比特编码,而保留另一个信息比特不编码,这样的码导致了如图 8-3-4(b) 所示的四状态网格图。当与 8 点的星座,比如 8-PSK 或 8-QAM 结合使用时,两个编码比特用来在信号星座的 4 个子集中选取其中之一,剩下那个未编码的信息比特用来在每个集的 2 个信号点中选取其中之一。我们这里选用 8-PSK

星座继续本例。指定给图 8-3-4(b) 网格图的 4 个子集对应于图 8-3-1 的子集 C_0, C_1, C_2, C_3 。我们看到,任一子集内各点的欧氏距离是 $d_2 = 2\sqrt{E}$,而任何一对子集两点间的最小距离是 $d_1 = 2\sqrt{2E}$ 。编码比特 (c_1, c_2) 及未编码比特 c_3 与状态转移的映射,通常写成 (c_3, c_2, c_1) ,如图 8-3-4(c) 所示。我们注意到,对应于未编码比特的两个可能取值,网格图的每状态都存在两条并行转移。8-PSK 星座相位与码字的指配关系见图 8-3-4(d)。必须指出,此特组 (c_3, c_2, c_1) 与星座 8 个信号点之间的映射不是惟一的,还可以有另外几种映射方法。比如将图 8-3-1 中的 4 点子集 B_0 和 B_1 对调,子集 C_0, C_1, C_2, C_3 包含的信号点随之改变,这样得出的映射与原来一样好。

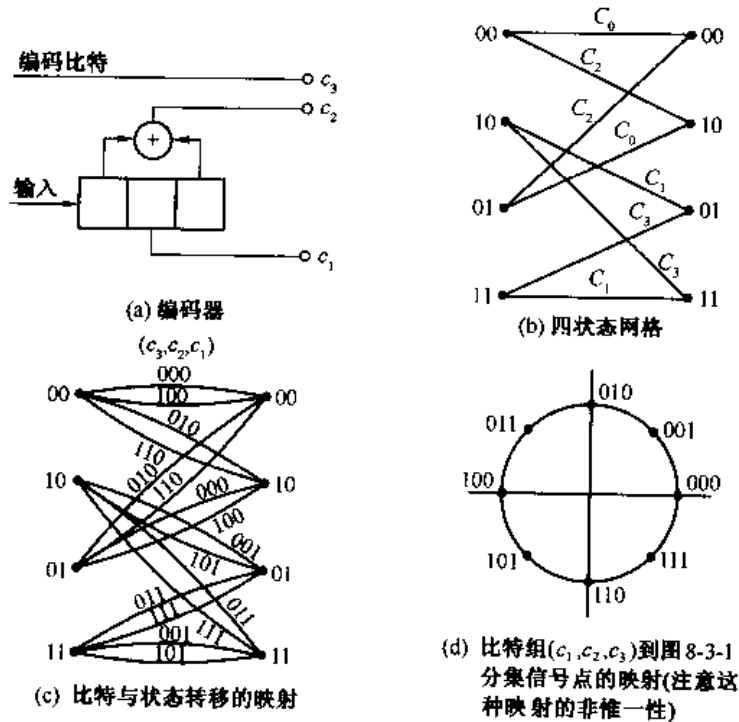


图 8-3-4 四状态 8-PSK 星座的网格编码调制

一般规律而言,网格图中的状态数 $S = 2^v$ 是编码器所含记忆元件数量的函数,因此我们可以增加网格图状态数而维持原来码率。举例来说,图 8-3-5 是一个码率 $2/3$ 的码,它的网格图状态数是 8,在这种情况下,两个信息比特都编了码。

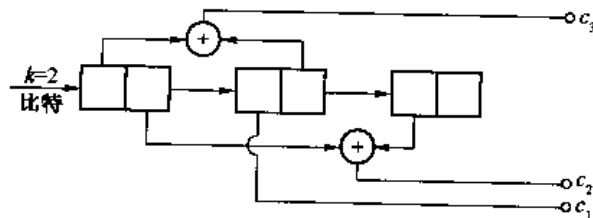


图 8-3-5 码率 $2/3$ 、八状态网格编码

下面我们来估算网格编码 8-PSK 的性能,并以未编码 4-PSK 的性能为参照作一个对比,以衡量网格编码调制的编码增益。未编码 4-PSK 使用的信号点是图 8-3-1 中的子集 B_0 或者 B_1 ,其中信号点间的最小距离是 $2\sqrt{2E}$ 。此时的 4-PSK 信号对应一个普通的单状态网格图,有 4 条并行状态转移,如图 8-3-6 所示。例中使用的信号点是图 8-3-1 中的子集 D_0, D_2, D_4 和 D_6 。

对于编码的 8-PSK 调制,采用如图 8-3-4(b)和图 8-3-6(c)所示的四状态网格图。注意,网格图上的每一分支对应 4 个子集 C_0, C_1, C_2 或 C_3 之一。对于八点星座,每子集 C_0, C_1, C_2 或 C_3 包含两个信号点。因此,状态转移 C_0 包含的两点对应于比特组 $(C_3 C_2 C_1) = (000)$ 和 (100) ,用八进制表示为 $(0,4)$ 。同样, C_2 包含的两点对应于 (010) 和 (110) 或八进制 $(2,6)$, C_1 包含的两点对应于 (001) 和 (101) 或八进制 $(1,5)$, C_3 包含的两点对应于 (011) , (111) 或八进制 $(3,7)$ 。这样,四状态网格图上的每个转移包含两条并行路径,如图 8-3-6 所示。我们看到,任何由同一状态发出,经过一次以上转移又在同一状态汇合的两条路径,它们之间欧氏距离的平方之和至少有 $d_0^2 + 2d_1^2 = d_0^2 + d_2^2$ 。例如,信号路径 $(0,0,0)$ 和 $(2,1,2)$ 相隔 $d_0^2 + d_2^2 = [(0.765)^2 + 4]\epsilon = 4.585\epsilon$ 。另一方面,并行转移欧氏距离平方之和是 $d_2^2 = 4\epsilon$ 。因此,在四状态网格图中由任何状态发出又汇合于同一状态的两条路径之间的最小欧氏距离是 $2\sqrt{\epsilon}$ 。网格码中的这种最小距离叫做自由欧氏距离,用 D_{fed} 表示。

在图 8-3-6(b) 四状态网格图中, $D_{\text{fed}} = 2\sqrt{\epsilon}$ 。将不编码的 4-PSK 调制的欧氏距离 $d_0 = \sqrt{2\epsilon}$ 与之相比,四状态网格码取得了 3 dB 的编码增益。

应该强调,对于图 8-3-6(b)所示的四状态网格码,从它能提供最大的自由欧氏距离这个意义上说是最优的。显然,还可以构成许多其他的四状态网格码,包括图 8-3-7 所示的,它有 4 个不同的转移从一个状态到其他所有状态。然而,不管是这种码还是其他可能的四状态网格码,都不可能给出更大的 D_{fed} 。

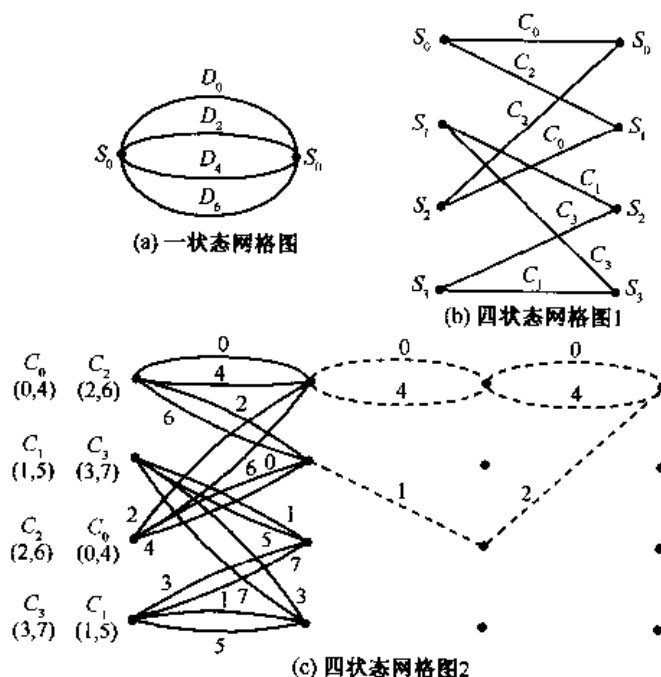


图 8-3-6 不编码的 4-PSK 和编码的 8-PSK 调制

在四状态网格码中,并行转移间的欧氏距离是 $2\sqrt{\epsilon}$,也就是 D_{fed} 。由于并行转移距离的限制,编码增益被限制在 3 dB。采用具有更多状态的网格码可以取得较之不编码 4-PSK 更大的性能增益。因为状态多的网格码可以消除并行转移,八状态或八状态以上的网格码将具有单一的转移以获得更大的 D_{fed} 。

例如图 8-3-8 所示为翁格博克(1982 年)提出的八状态网格码,用于 8-PSK 信号星座。使自由欧氏距离最大的状态转移可以利用以上 3 条基本原则来确定。注意,在本例中,最小欧氏距离平方和是

$$D_{\text{fed}}^2 = d_0^2 + 2d_1^2 = 4.585\epsilon$$

与不编码 4-PSK 时的 $d_0^2 = 2\epsilon$ 相比,它有 3.6 dB 的编码增益。翁格博克(1982 年,1987 年)找到码率 2/3 且带有 16, 32, 64, 128 和 256 状态的网格码在 8-PSK 调制时,获得的编码增益在 4~5.75 dB 之间。

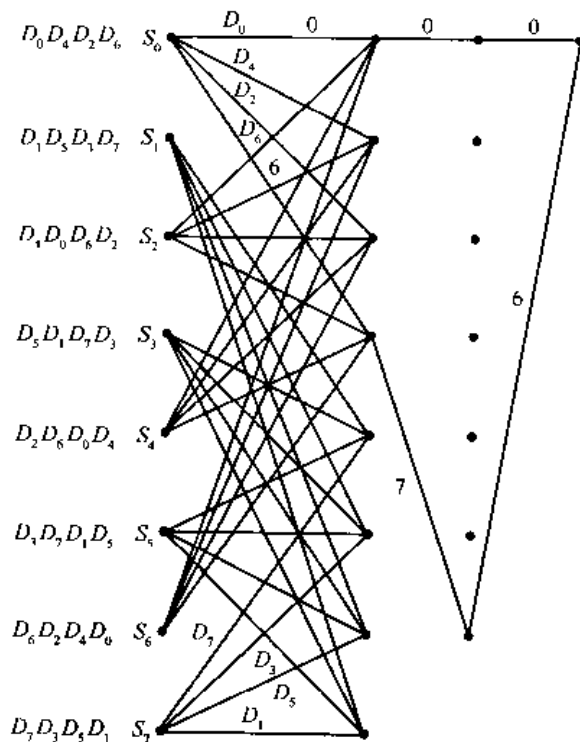


图 8-3-8 用于 8-PSK 编码调制的八状态网格码

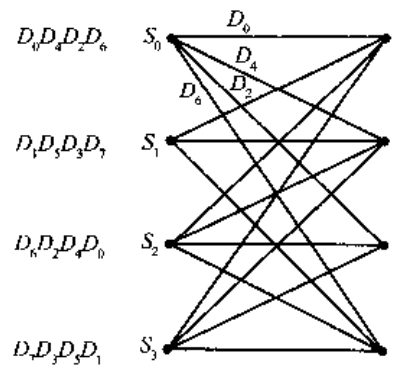


图 8-3-7 另一种四状态网格码

分集的

基本原则很容易推广应用于更大的 PSK 信号星座,它们能产生更大的带宽效率。例如,用不编码的 8-PSK 或网格编码调制的 16-PSK 都能达到 3 (b/s)/Hz 的带宽效率。翁格博克(1987 年)设计了网格码,计算了码率 1/2 和 2/3 卷积码结合 16-PSK 信号星座时的编码增益。

对网格编码调制实行软判决维特比译码分两步实现。因为网格图的每一个分支对应一个信号子集,译码的第一步是确定每一子集中的最佳信号点,也就是每子集中离接收的信号点最近的点,这一步称为子集译码。第二步,将每个子集选出的信号点及相应的平方距离量度对应到维特比算法的分支中,以便在码的整个网格图中找到一条信号路径,该路径与接收的(有噪信道输出)信号序列的距离平方之和最小。

在存在加性高斯噪声的情况下,网格编码信号的差错概率性能可以用 8.2 节所述的

用于卷积码的方法来计算。这种方法计算各种差错事件的差错概率,把这些差错事件概率相加,得到首要事件差错概率的联合边界。但要注意,在高 SNR 时,首要事件差错概率是由开头的项决定的,该项具有最小距离 D_{fed} 。因此,在高 SNR 时,首要事件差错概率可以用下式很好地近似:

$$P_e \approx N_{\text{fed}} Q \left[\sqrt{\frac{D_{\text{fed}}^2}{2N_0}} \right] \quad (8-3-1)$$

式中, N_{fed} 是从任一状态发出,经一个或一个以上转移汇合于该状态的距离为 D_{fed} 的信号序列的数目。

在计算网格编码调制的编码增益时,我们的注意力通常集中在由于 D_{fed} 的增大而获得的编码增益上,忽略了 N_{fed} 的效果。然而,具有大状态数的网格码可以导致大的 N_{fed} ,在估计总的编码增益时是不能忽略的。

除了上述 PSK 网格编码调制以外,还有用于 PAM 和 QAM 信号星座的高效的网格码。在实践中有重要意义的一类网格码是具有两维矩形信号星座的码。图 8-3-9 所示为 M -QAM ($M=16,32,64$ 和 128) 的信号星座图。 $M=32$ 和 $M=128$ 星座的图案呈十字形,有时称为十字星座。隐含在 M -QAM 信号点集里的格栅称做 Z_2 格(下标表示空间的维数)。对这类信号星座实现分集时,相邻两级星座的最小欧氏距离之比是 $d_{i+1}/d_i = \sqrt{2}$ (对于所有 i),正如例 8-3-2 所示。

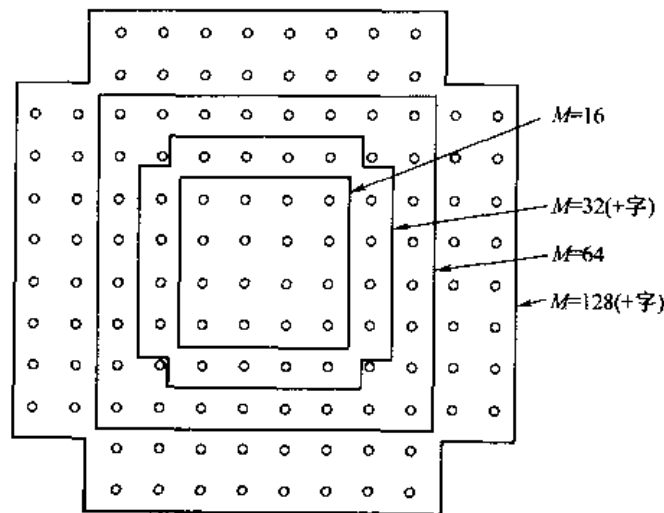


图 8-3-9 两维矩形(QAM)信号星座

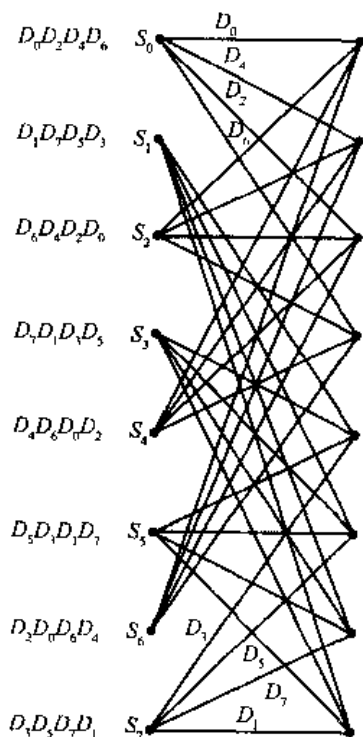


图 8-3-10 矩形 QAM 信号星座的八状态网格图

图 8-3-10 所示为一个八状态网格码,它可用于任何 M -QAM 矩形信号星座,这里 $M=2^k$, $k=4,5,6\cdots$ 等。对应八状态网格,我们使用 8 个信号子集,因此任何 $M \geq 16$ 的 M -QAM 信号集都适用。若 $M=2^{m+1}$, 2 个输入比特 ($k_1=2$) 被编码成 $n=3$ ($n=k_1+1$) 比特,这 3 比特就用来选择与 8 个子集对应的八状态之一。另外的 $k_2=m-k_1$ 输入比特用来在子集中选取信号点,这就导致八状态网格图中的并行转移。因此,16-QAM 网格图的每条分支有 2 个并行转移。推广到一般, $M=2^{m+1}$ 点的 QAM 信号星座在其八状态网格图的每条分支上有 2^{m-2} 个并行转移。

如何将各信号子集指配给各个转移,其方法就像前面所述用于 8-PSK 信号星座的指配方法一样,以 3 条普遍的规则为基础,即发自或汇合于同一状态的 4 条分支或者指配给子集 D_0, D_2, D_4, D_6 , 或者指配给子集 D_1, D_3, D_5, D_7 , 再把相应子集里的信号点指配给分支中的各并行转移。这种八状态网格码可提供 4 dB 编码增益。由于并行转移的欧氏距离大于自由欧氏距离,所以码的性能没有受到并行转移的制约。

对于 M-QAM, 状态数越多则编码增益越大。例如, 应用于 $M = 2^{m+1}$ 点的 QAM 信号星座有 2^v 个状态的网格码可通过卷积编码形成, 它将 k_1 个输入比特编成 $k_1 + 1$ 个输出比特, 于是可选用码率 $R_c = k_1 / (k_1 + 1)$ 的卷积码。通常选 $k_1 = 2$, 这时可获得能够获得最大编码增益的大部分。另外的 $k_2 = m - k_1$ 输入比特不编码, 这些信息靠每符号时间内在子集里选信号点而传送。

表 8-3-1~表 8-3-3 摘自翁格博克(1987 年)的论文, 它们是网格编码调制所能获得的编码增益的总结。

表 8-3-1 总结了码率 $1/2$ 、一维 PAM 调制的网格码能获得的编码增益。注意, 当差错概率在 $10^{-6} \sim 10^{-8}$ 范围时, 8-PAM 128 状态的网格码可取得 5.8 dB 的编码增益, 这个数字接近信道截止速率 R_0 , 离信道容量极限仅差不足 4 dB。还应看到, 具有自由欧氏距离 D_{fed} 的路径数 N_{fed} 随着状态数的增加而增大。

表 8-3-2 所示是编码调制的 16-PSK 能获得的编码增益。八状态或八状态以上的网格码较之不编码 8-PSK 有 4 dB 以上的增益。当 128 状态时, 一个简单的码率 $1/2$ 的码有 5.33 dB 增益。

表 8-3-3 所示为编码调制的 QAM 信号能获得的编码增益。一个相对简单的码率 $2/3$, 128 状态的网格码在 $m = 3$ 和 $m = 4$ 时可产生 6 dB 增益。

这些表清楚地表明, 使用相对简单的网格码可以得到相当大的编码增益。对于我们所讨论的信号集而言, 6 dB 编码增益已经接近截止速率 R_0 。再加大增益将导致在信道容量极限附近的传输, 不增加编/解码的复杂度是难以实现的。大信号集的不断分集很快使任何子集中信号点的距离超过码的自由欧氏距离, 这时, 并行转移将不再是 D_{fed} 的限制因素。通常, 分割成 8 个子集已足以使码率 $1/2$ 或 $2/3$, 64 或 128 状态简单的网格码获得 5~6 dB 的编码增益, 如表 8-3-1~表 8-3-3 所示。

表 8-3-1 网格编码 PAM 信号的编码增益

状态数	K_1	码率 k_1/k_1+1	$m=1$ 编码增益/dB (编码的 4PAM 对于 不编码的 2PAM)	$m=2$ 编码增益/dB (编码的 8PAM 对于 不编码的 4PAM)	$m \rightarrow \infty$ 渐近编码增益 /dB	$m \rightarrow \infty$ N_{fed}
4	1	1/2	2.55	3.31	3.52	4
8	1	1/2	3.01	3.77	3.97	4
16	1	1/2	3.42	4.18	4.39	8
32	1	1/2	4.15	4.91	5.11	12
64	1	1/2	4.47	5.23	5.44	36
128	1	1/2	5.05	5.81	6.02	66

表 8-3-2 网格编码调制 16-PSK 的编码增益

状态数	K_1	码率 k_1/k_1+1	$m=3$ 编码增益/dB (编码的 16-PSK 对于 不编码的 8-PSK)	$m \rightarrow \infty$ N_{fed}
4	1	1/2	3.54	4
8	1	1/2	4.01	4
16	1	1/2	4.44	8
32	1	1/2	5.13	8
64	1	1/2	5.33	2
128	1	1/2	5.33	2
256	2	2/3	5.51	8

表 8-3-3 网格编码调制 QAM 的编码增益

状态数	K_1	码率 k_1/k_1+1	$m=3$ 编码增益/dB (编码的 16-QAM 对 不编码的 8-QAM)	$m=4$ 编码增益/dB (编码的 32-QAM 对 于不编码的 16-QAM)	$m=5$ 编码增益/dB (编码的 64-QAM 对 于不编码的 32-QAM)	$m=\infty$ 渐近编码增益 /dB	N_{fed}
4	1	1/2	3.01	3.01	2.80	3.01	4
8	2	2/3	3.98	3.98	3.77	3.98	16
16	2	2/3	4.77	4.77	4.56	4.77	56
32	2	2/3	4.77	4.77	4.56	4.77	16
64	2	2/3	5.44	5.44	4.23	5.44	56
128	2	2/3	6.02	6.02	5.81	6.02	344
256	2	2/3	6.02	6.02	5.81	6.02	44

表 8-3-1~表 8-3-3 列出的线性网格码的卷积编码器在翁格博克(1982 年,1987 年)的论文中给出,这些码适用于 M-PAM, M-PSK 和 M-QAM 信号星座。编码器的实现可以有反馈,也可以没有反馈。例如,图 8-3-11 给出了 3 个用于 8-PSK 和 16-QAM 信号星座、带 4-状态、8-状态和 16-状态的无反馈卷积编码器。同样,也可以基于系统卷积编码器,用带反馈的结构来等效地实现这些网格码,如图 8-3-12 所示。通常,在实际应用中更偏向于使用系统卷积编码器。

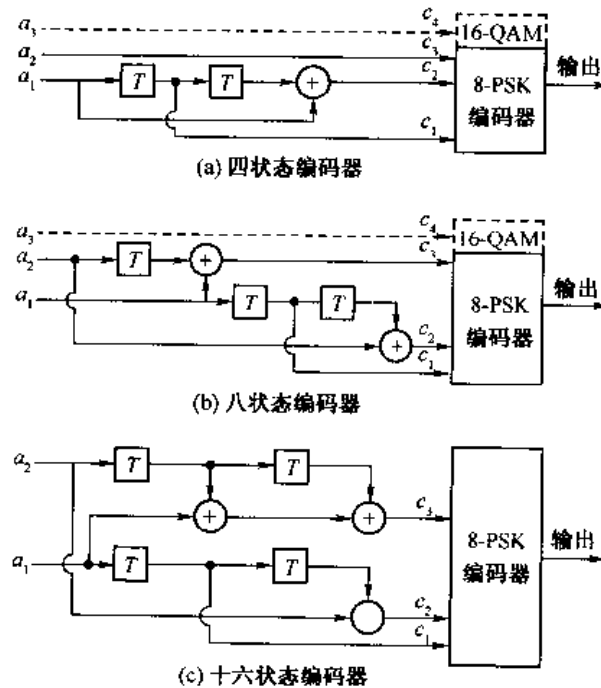


图 8-3-11 用于 8-PSK 和 16-QAM 信号的最小无反馈卷积编码器

[摘自 Ungerboeck(1982 年), ©1982 年 IEEE.]

线性网格码有一个潜在的问题,即当相位旋转时已调制的信号集也会跟着变化。这就给网格码的实际应用提出了一个问题,因为实践中通常要采用差分编码来避免相位的混淆,当相位混淆导致短暂的信号丢失后,接收机必须能恢复载波相位。对于二维信号星座,采用线性网格码有可能免受 180° 相位变化的影响。但是,一个线性码不可能不受 90° 相位改变的影响,在这种情况下就必须使用非线性码了。这种相位变化和差分编/解码问题已由韦(Wei, 1984 年)

解决,他设计了能在载波相位旋转 180° 或 90° 时不受影响(旋转不变)的线性和非线性网格码。例如,图 8-3-13 给出一个非线性八状态的卷积编码器,对应于 32-QAM 矩形信号星座,能在 90° 相位旋转时不变。这种网格码被 9 600b/s 和 14 000b/s(高速)电话线调制解调器的国际标准采用。

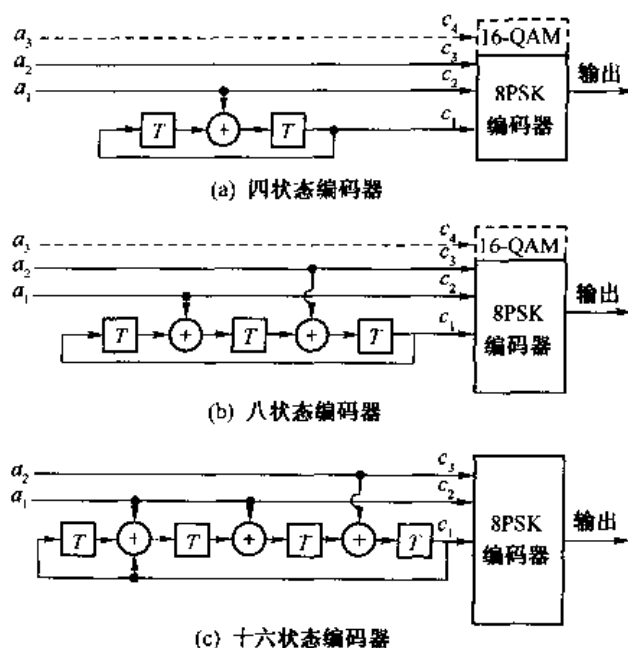


图 8-3-12 用于 8-PSK 和 16-QAM 带反馈的系统卷积编码器的等效实现

[摘自 Ungerboeck(1982 年), ©1982 年 IEEE]

网格编码调制的方式被发展应用到多维信号。在实际系统中,多维信号作为一个一维(PAM)或二维信号的序列传送。基于 4-维、8-维和 16-维的信号星座已构成,有些多维码在商用调制解调器中实现。网格编码多维信号的一个潜在优点在于能选用较小的二维信号星座,可以在编码增益和实现的复杂度两者间折中选择。例如,韦(1987 年)提出的四维十六状态线性码已被采用为 V.34 电话 MODEM 用码之一,其构成 4 维的 2 维信号星座最多可含有 1 664 个信号点。该 MODEM 每符号最多可传送 10 比特信息(其中 8 比特不编码),数据速率高达 33 600 b/s。韦(1987 年)、翁格博克(Ungerboeck, 1987 年)、格尔逊 Gersho 和劳伦斯(Lawrence, 1984 年)及福尼(1984 年)的文章中讨论了网格编码调制所用的多维信号星座问题。

基于格和子格陪集的一种新的设计网格编码调制的技术由考尔德班克 Calderbank & 斯隆(1987 年)和福尼(1988 年)描述。构成网格码的这种方法提供了一种与前述分集方法不同的思路,但两种方法密切相关。在这种方法里, k_1 比特信息块被送入卷积编码器。每个 k_1 输入比特块产生一个输出符号,它是子格 Δ' 的陪集,子格 Δ' 是所选格的子集。第二个 k_2 输入比特块用来在卷积编码器输出陪集中选择其中一个点。显然,子格的陪集类似于分集中的子集,陪集的元素类似于子集中的信号点。这种新的方法导致一系列用于大信号星座的高效网格码的发现,它们中有许多在 Calderbank & 斯隆(1987 年)的论文中有述。

Turbo 高带宽效率编码调制

通过级联编码,网格编码调制 TCM 的性能还可以进一步提高。在文献中已有若干不同方法的描述,我们将简要介绍其中两种以并行方式级联的码,这里笼统简称为 Turbo 码。

第一种方法是 Le Goff 等人 1994 年论文中提出的,将信息序列送入一个二进制 Turbo 编码器,利用两个带交织的卷积编码器的并行级联产生一个系统的二进制 Turbo 码。如图 8-3-14 所示,Turbo 编码的二进制序列被适当复合,其中校验比特序列被删余以取得所需码率,再将数据和校验序列进行交织,这样产生的 Turbo 编码器输出最后被连接到符号映射器。将编码比特映射到调制信号点的典型方法是使用格雷(Gray)映射法,分解为相同 I 分量和正交 Q 分量。

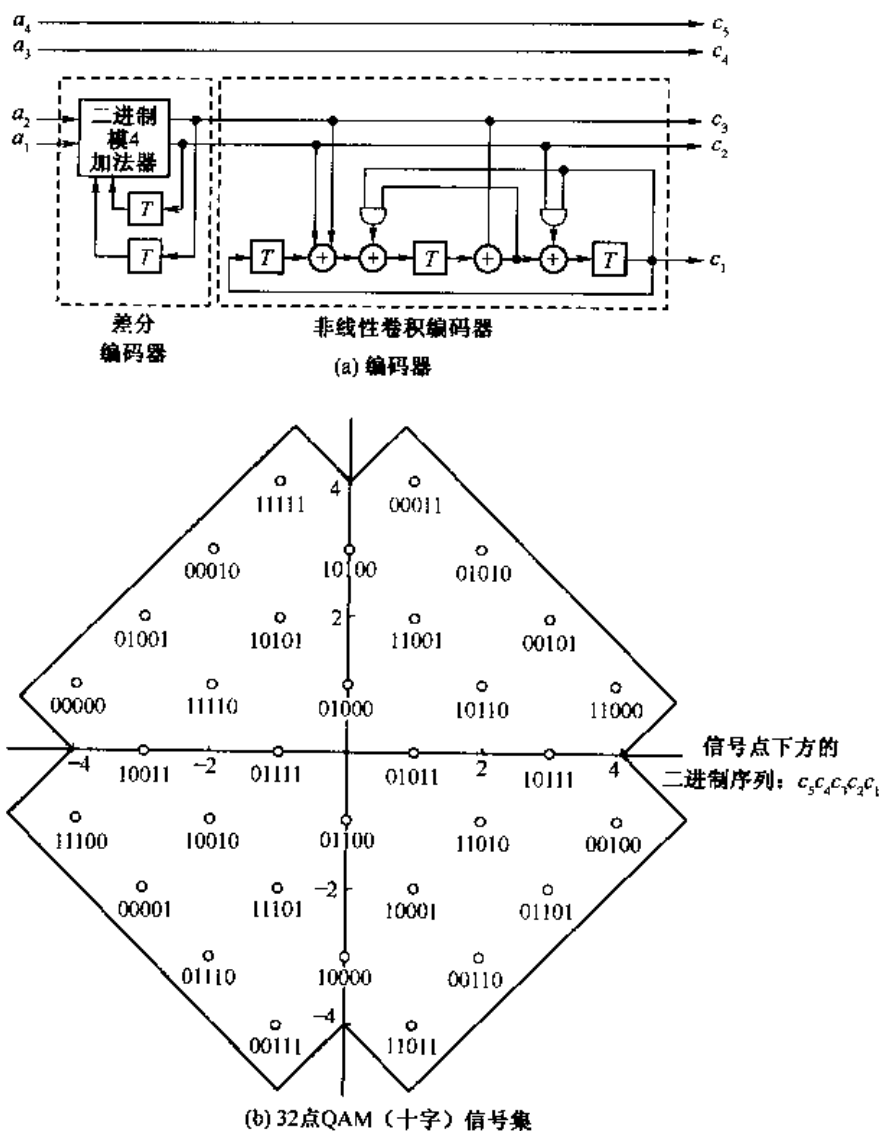


图 8-3-13 32-QAM 信号集的八状态非线性卷积编码器
在 90° 相位旋转下的不变性

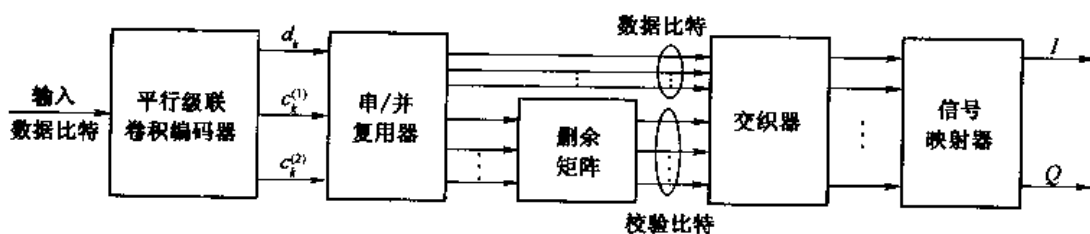


图 8-3-14 网格编码调制 TCM 的 PCCC(Turbo)级联编码器

图 8-3-15 是与该 Turbo 编码方案对应的解码器方框图。以接收到的每 I 与 Q 符号为基础,接收器计算出各系统比特和各校验比特的对数似然比或 MAP。经解交织,解删余、解复合后,这些系统和校验比特的对数量度信息被送入标准的二进 Turbo 解码器。

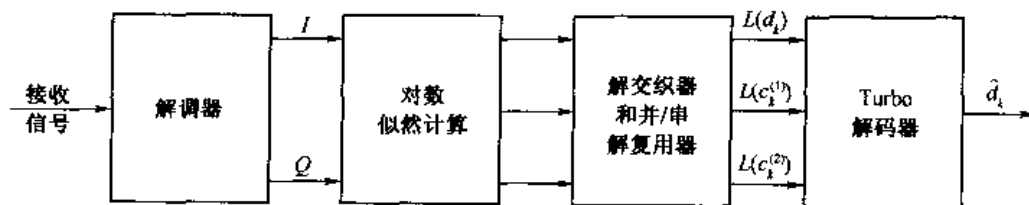


图 8-3-15 级联 PCCC/TCM 码解码器

用这种方式构成的 Turbo 高带宽效率编码调制对信号点集(星座)的大小和类型没有限制。另外,这种方式可与任何一种常规二进 Turbo 码配用。事实上,若以串行级联卷积码替代 Turbo 码,这种方式照样适用。

第二种方式是采用带交织的传统 Ungerboeck 网格码来生成一种并行级联的 TCM。Turbo TCM 编码器的基本结构,正如 Robertson 和 Wörz 在 1998 年论文描述的那样,表示在图 8-3-16 中。为避免码率损失,对校验序列作了下述的删余处理:所有信息比特仅传送一次,来自两个编码器的两路校验比特被交替删余。方块交织器以 $(m-1)$ 位信息比特为一组进行交织操作,而信号点集(星座)包含 2^m 个信号点。

为了说明分组交织和删余,我们来看一个码率 $R_c = 2/3$ 的 TCM 码,其方块交织器长度 $N = 6$,采用 8-PSK 调制($m = 3$)。于是,每块的信息比特数就是 $N(m-1) = 12$,交织成对地施加于信息比特对上,如图 8-3-16 所示。图中,偶数位置(2,4,6)上的比特对被映射到另一个偶数位置,奇数位置上的比特对被映射到另一个奇数位置。第二个 TCM 编码器已映射为信号星座的输出序列经解交织,与第一个 TCM 编码器的信号序列一起被删余,即依次、相间地从两序列中抽取符号,就得到了输出信号序列,如图 8-3-16 所示。也就是,我们从图上部的符号映射器中选取偶数序号的符号,而从底部的符号映射器中选取奇数序号的符号。(通常,有部分信号比特未经编码,取决于信号星座和信号映射关系。本例中,两路信号比特均已被编码。)

Turbo 解码器的方框图如图 8-3-17 所示。在常规二进迭代 Turbo 解码器中,解码器各分支的各输出通常都可分成 3 部分,即系统部分、先验部分和外信息部分,而只有外信息是在两解码器之间传递的。在 TCM 方式中,系统信息不能从外信息部分分离出来,这是因为此两分量是由同一符号传递的,影响校验分量的噪声同样也影响系统分量。这意味解码器输出只能分离出两个分量,即先验信息和系统-外信息。因此,每解码器送往另一解码器的是合一的系统-外信息。各译码器忽略相关校验比特没有发送过来的那些符号,通过先验输入获得系统信息。在首次迭代时,第一解码器的先验输入在初始化时没有系统信息。迭代译码算法的细节已在 Robertson 和 Wörz1998 年论文中给出。与普通 TCM 码相比,在误码率 10^{-4} 附近,使用 Turbo TCM 码可多增加 1.7 dB 的编码增益。这意味 Turbo TCM 码在 AWGN 信道中取得了接近香农限的性能。

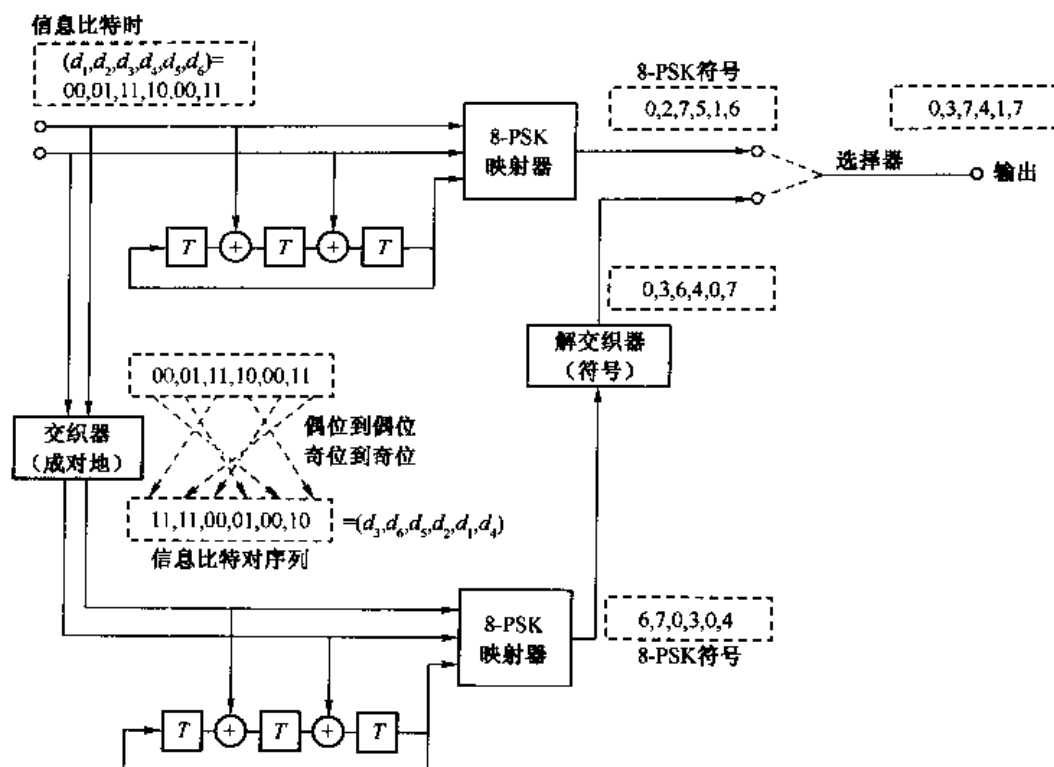


图 8-3-16 带 3 个存储单元、二维编码、8-PSK 调制的 Turbo TCM 编码器, $N=6$ 的交织 (黑体字母表示与上部编码器对应的符号或比特对)

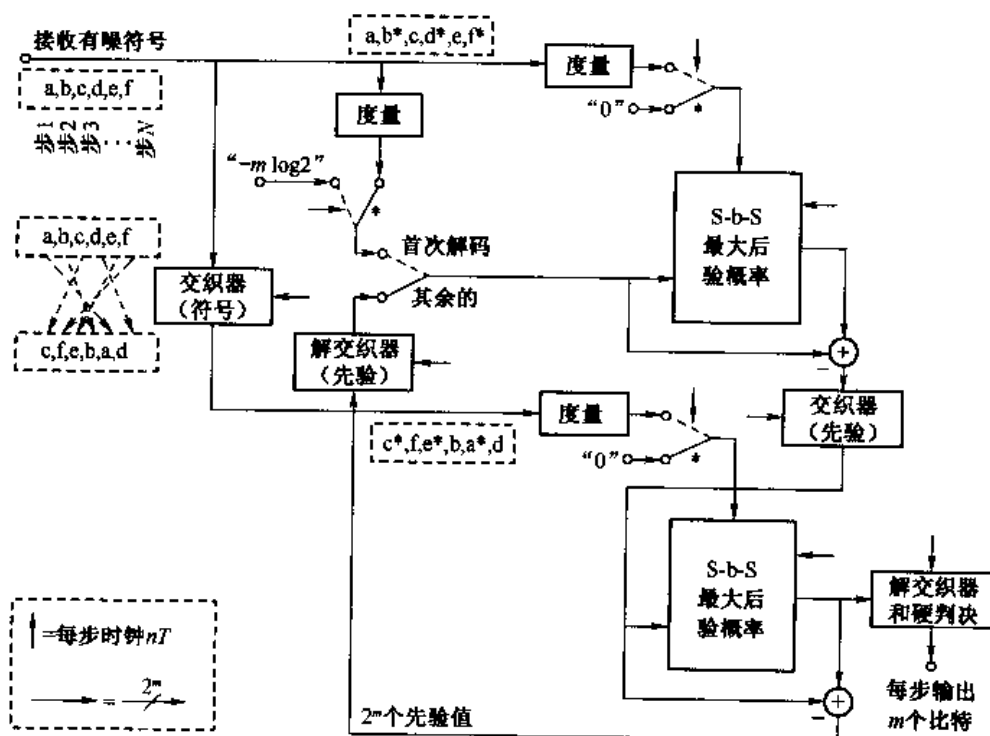


图 8-3-17 与图 8-3-16 编码器对应的 Turbo TCM 解码器

8.4 文献与参考资料

数字通信中关于编码和编码波形的开拓性工作是香农(Shannon, 1948 年)、汉明(Hamming, 1950 年)和高莱(Golay, 1949 年)完成的。接着有吉尔伯特(Gilbert, 1952 年)关于编码性能, 米勒(Muller, 1954 年)和里德(Reed, 1954 年)关于新码, 埃利斯(Elias, 1954 年, 1955 年)和斯列宾(Slepian, 1956 年)关于有噪信道编码技术的论述。

1960~1970 年众多学者在发展编码理论和译码算法上做了大量有意义的工作。更具体地, 可以引用如下例子: 里德-索罗门(1960 年)关于 R-S 码的论文, Hocquenghem (1959 年)、Bose 和 Ray-Chaudhuri(1960 年)关于 BCH 码的论文, 福尼(1966 年)关于级联码的博士论文。还有戈帕(Goppa, 1970 年, 1971 年)关于新一类线性循环码(现在叫戈帕码)结构的论文(1973 年), 以及贾斯特逊(Justesen, 1972 年)关于渐近好码构造技术的论文。在这一阶段, 译码算法的研究主要集中在 BCH 码上。第一个二进制 BCH 码的译码算法是由彼得森(Peterson, 1960 年)提出的。后来钱(Chien, 1964 年)、福尼(1965 年)、梅西(Massey, 1965 年)和 Berlekamp (1968 年)又提出许多更好的通用方法, 从而导致一种计算上高效的 BCH 码译码算法, 这种算法在林舒和科斯特洛(1983 年)的书中作了详细描述。对 RS 码的论述可见 Wicker 和 Bhargava 1994 年的书。

与分组码齐头并进的是卷积码, 它是由埃利斯(1955 年)发明的。卷积码的主要问题是译码。沃曾克拉夫特和赖芬(1961 年)提出了一种卷积码的序列译码算法, 这种算法后来由范诺(1963 年)修改和完善, 现在称为范诺算法。齐盖吉洛(Zigangirov, 1966 年)和杰林克(1969 年)设计出堆栈算法, Viterbi(1967 年)推出维特比算法。由于最优的特性和相对适中的复杂度, 维特比算法在 $K \leq 10$ 的卷积码译码中成为最普遍采用的算法。

20 世纪 70 年代在编码领域有重要贡献的是翁格博克和 Csajka(1976 年)关于带限信道编码的论著。这篇论文告诉大家, 在带限信道中只要引入冗余度就可以获得可观的编码增益, 并描述了几个能得到 3~4 dB 增益的网格码。这篇论文引起研究者的极大兴趣并在此后的 15 年中引来了大量文章。在翁格博克(1982 年, 1987 年)和福尼等(1984 年)的论文中可以找到许多参考资料。在 IEEE Journal on Selected Areas in Communication (1984 年 9 月)的话带数据传输特刊里也可以找到许多关于带限信道编码调制文章。Biglieri 等(1991 年)用启发式的方法叙述了网格编码调制。

在编、译码领域一个新的、主要的进展是带交织的并行和串行级联码结构, 以及用迭代 MAP 算法对该码的译码。无论 PCCC 还是 SCCC 在迭代译码时都表现出能达到非常接近香农限的性能。PCCC 也叫 Turbo 码, Berrou 等在 1993 年的论文中首次描述了迭代译码的使用。Benedetto 等 1998 年的论文中提出了带交织的串行级联码及其性能。在 Heegard 和 Wicker(1999 年)、Johannesson 和 Zigangirov(1999 年)、Schlegel(1997 年)的书著上也有关于 Turbo 编、译码的讨论。Turbo 码的性能限则已由 Duman 和 Salehi 在 1997 年的论文中给出。

除了以上有关编码、解码和编码信号设计的参考资料外, 还有由 Berlekamp(1974 年)编辑、IEEE 出版社出版的题为《编码理论发展中的关键论文》论文集, 包含了编码理论前 25 年所发表的重要文章。此外还值得一提的有 IEEE Transactions on Communications(1971 年 10 月)的《纠错编码特刊》。最后, 考尔德班克(Calderbank, 1998 年)、科斯特洛等(Costello 1998 年)、

福尼和翁格伯克(1998年)的综述精采地分析了50年未编、解码的主要发展,包括了大量参考资料。

习题

8-1 某线性二进码的生成矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) 用系统码 $[\mathbf{I} \mid \mathbf{P}]$ 的形式表示 \mathbf{G} 。
- (b) 计算该码的校验矩阵 \mathbf{H} 。
- (c) 列出该码的伴随式表。
- (d) 计算该码的最小距离。
- (e) 证明:与信息序列101相对应的码字正交于 \mathbf{H} 。

8-2 列出由式(8-1-35)和式(8-1-37)定义的两个矩阵所生成的码字,从而证明这些矩阵产生的是同一个码字集。

8-3 汉明码的重量分布是已知的。用 x 幂多项式来表示的话,长度为 n 的二进制汉明码的重量分布是

$$A(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i = \frac{1}{n+1} [(1+x)^n + n(1+x)^{(n-1)/2}(1-x)^{(n+1)/2}]$$

这里, A_i 是重量为 i 的码字的数目。用此公式计算(7,4)汉明码的重量分布,并将结果与表8-1-2所列码字作核对。

8-4 多项式 $g(p) = p^4 + p + 1$ 是二进制(15,11)汉明码的生成多项式。

- (a) 计算该码以系统码形式的生成矩阵 \mathbf{G} 。
- (b) 计算其对偶码的生成多项式 $p^{15} + 1$ 。

8-5 由生成多项式为 $g(p) = p^3 + p^2 + 1$ 的(7,4)循环汉明码构造一个(8,4)扩展汉明码并列所有码字。该扩展码的 d_{\min} 是多少?

8-6 某(8,4)线性分组码是由生成多项式为 $g(p) = p^4 + p + 1$ 的(15,11)汉明码缩短而成的。

- (a) 构造(8,4)码的码字并列出来。
- (b) 该(8,4)码的最小距离是多少?

8-7 多项式 $p^{15} + 1$ 可因式分解为

$$p^{15} + 1 = (p^4 + p^3 + 1)(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)(p^4 + p + 1)(p^2 + p + 1)(p + 1)$$

- (a) 用生成多项式 $g(p) = (p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)(p^4 + p + 1)(p^2 + p + 1)(p + 1)$ 构造一个(15,5)系统码。
- (b) 该码的最小距离是多少?
- (c) 每个码字最多有多少随机差错时可纠?
- (d) 这种码能检多少差错?

(e) 列出由多项式 $g(p) = (p^{15} + 1)/(p^2 + p + 1)$ 生成的 $(15, 2)$ 码的码字, 计算其最小距离。

8-8 分别构造与式(8-1-34)和式(8-1-35)定义的生成矩阵 G_1 和 G_2 对应的校验矩阵 H_1 和 H_2 。

8-9 通过修正生成矩阵和校验矩阵, 构造 $(7, 4)$ 汉明码的扩展 $(8, 4)$ 码。

8-10 某 $(6, 3)$ 系统码有生成矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

列出标准阵列, 确定可纠差错图案及其对应的伴随式。

8-11 某 $(7, 3)$ 码的生成矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

计算可纠差错图案和对应的伴随式。

8-12 计算 $(7, 4)$ 系统循环汉明码(最小重量)的可纠差错图案和对应的伴随式。

8-13 证明: 如果两个差错图案 e_1 及 e_2 的和是有效码字 C_i , 那么, 它们具有相同的伴随式。

8-14 若 $g(p) = p^8 + p^6 + p^4 + p^2 + 1$ 是二元域上的多项式。

(a) 找出以 $g(p)$ 为生成多项式的最低码率的循环码, 该码码率是多少?

(b) 问题(a)中找到的码的最小距离是多少?

(c) 问题(a)中找到的码的编码增益是多少?

8-15 考虑二元域上的多项式 $g(p) = p + 1$ 。

(a) 证明此多项式可产生任意码长 n 的循环码, 找出相应的 k 值。

(b) 求由 $g(p)$ 生成的码的系统形式的 G 和 H 。

(c) 试说明由这个生成多项式生成的是什么类型的码。

8-16 选用一个最短的生成多项式设计一个 $(6, 2)$ 循环码。

(a) 计算该码的生成矩阵(系统形式), 找出所有可能的码字。

(b) 该码能纠多少差错?

8-17 证明: 位于标准译码表同一行的任何两个 n -重相加后所得的是一个有效的码字。

8-18 基于 $(15, 7)$ BCH 码, 构造一个缩短的 $(12, 4)$ 码, 写出该缩短码的生成矩阵。

8-19 在 8.1.2 节中提到: 当一个哈达马码借助二进制 PSK 映射到波形时, 相应的 $M = 2^k$ 种波形是正交的。计算这 M 个正交波形的带宽扩展因子, 并与相干检测正交 FSK 所需要的带宽作比较。

8-20 证明: 若将每一个码字比特映射为一个二进制 PSK 信号, 由最长移存器码产生的信号波形之间具有相等的相关系数 $\rho_r = -1/(M-1)$, 即 M 个波形构成一个单纯集。

8-21 利用式(8-1-50), (8-1-52), (8-1-82), (8-1-90) 和 (8-1-91), 分别计算在采用硬判决和软判决两种情况下, 在 AWGN 信道上 $(7, 4)$ 汉明码的差错概率特性。

8-22 利用 2.1.6 节的结果, 计算由式(8-1-89)和式(8-1-90)给出的硬判决契尔诺夫边界。

假设发送一个全 0 码, 计算误译为重量 ω_m 的码字 C_m 的概率上限, 这种情况出现在大于等于 $\omega_m/2$ 个比特发生差错时。为了运用契尔诺夫边界, 定义一个由 ω_m 个随机变量组成的序列

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{概率为 } p \\ -1 & \text{概率为 } 1-p \end{cases}$$

式中 $i = 1, 2, \dots, \omega_m$, p 是差错概率。对于 BSC 信道, $\{X_i\}$ 是统计独立的。

8-23 某卷积码如下

$$g_1 = [1 \ 0 \ 1], \quad g_2 = [1 \ 1 \ 1], \quad g_3 = [1 \ 1 \ 1],$$

- 画出该码的编码器。
- 画出该码的状态转移图。
- 画出该码的网格图。
- 求该码的转移函数和自由距离。
- 核查该码是否是恶性的。

8-24 用上题的卷积码在 AWGN 信道中以硬判决方式传输, 接收机解调器的输出为 (101001011110111...)。运用维特比算法, 找出发送序列。

8-25 卷积码为

$$g_1 = [1 \ 1 \ 0], \quad g_2 = [1 \ 0 \ 1], \quad g_3 = [1 \ 1 \ 1],$$

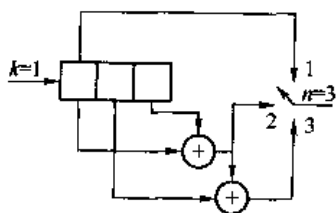


图 P8-26

重复习题 8-23 中的问题。

8-26 某二进制卷积码的框图如图 P8-26 所示。

- 画出该码的状态图。
- 求转移函数 $T(D)$ 。
- 该码的自由距离 d_{free} 是多少?
- 如果信息用该码编码后经二进制对称信道以

$p = 10^{-5}$ 的差错概率传输, 设接收序列是 $\mathbf{r} =$

(110 110 110 111 010 101 101), 用维特比算法找出发送比特序列。

(e) 利用任何合理的近似, 求该码在上述 BSC 信道中的误比特率上限。

8-27 某 (3, 1) 卷积码的框图如图 P8-27 所示,

- 画出该码的状态图。
- 求转移函数 $T(D)$ 。
- 求该码的自由距离 d_{free} , 在格栅图上画出相应路径 (与全 0 码字相距 d_{free} 的路径)。

(d) 对 4 位信息比特 (x_1, x_2, x_3, x_4) 和紧接的 2 位 0

比特编码, 以 0.1 的差错概率通过 BSC 信道传送。已知接收序列是 (111 111 111 111 111 111), 试用维特比算法找出最大似然发送数据序列。

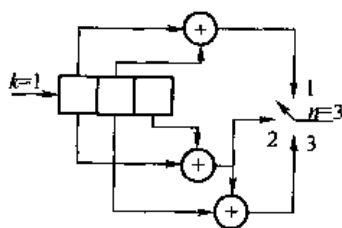


图 P8-27

8-28 某卷积码由图 P8-28 所示的编码器生成。

- 求该码形式为 $T(N, D)$ 的转移函数。
- 求该码的自由距离 d_{free} 。
- 如果在信道中采用硬判决维特比译码, 设差错概率是 $p = 10^{-6}$, 利用硬判决边界求该码平均误比特率的上界。

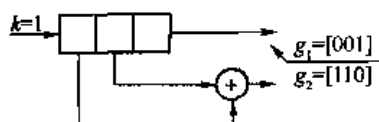


图 P8-28

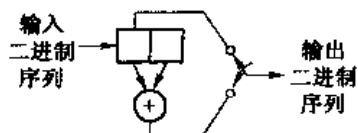


图 P8-29

8-29 图 P8-29 是一个码率 $R = 1/2$ 、约束长度 $K = 2$ 的卷积码，

(a) 画出树图、网格图和状态图。

(b) 求转移函数 $T(D, N, J)$ ，据此求自由距离。

8-30 某码率为 $1/2$ 、约束长度 $K = 3$ 的二进制卷积码，其编码器如图 P8-30 所示。

(a) 画出树图、网格图和状态图。

(b) 求转移函数 $T(D, N, J)$ ，据此求自由距离。

8-31 画出下列卷积码的编码器图：

(a) 码率 $1/2$ 、 $K = 5$ 、最大自由距离码(表 8-2-1)。

(b) 码率 $1/3$ 、 $K = 5$ 、最大自由距离码(表 8-2-2)。

(c) 码率 $2/3$ 、 $K = 2$ 、最大自由距离码(表 8-2-8)。

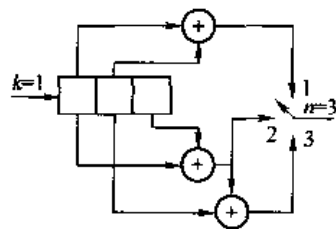


图 P8-30

8-32 画出习题8-31(c)中码率为 $2/3$ 、 $K = 2$ 卷积码的状态图。

对应每个转移求输出序列以及输出序列与全 0 序列的距离。

8-33 一个 $K = 3$ 、码率 $1/2$ 的卷积码如图 P8-30 所示，假定此码被用于一个二进制对称信道，接收序列的前 8 个分支是(0001100000001001)。在网格图上画出判决过程的轨迹，逐节点地标出留存路径和汉明距离长度。如果在判决时出现长度相等的情况，总是选用上述那条路径(任选的)。

8-34 利用习题8-30推导的码率 $1/2$ 、 $K = 3$ 卷积码的转移函数，计算在一个 AWGN 信道中分别以硬判决和软判决译码时的误比特率。把计算结果画在同一张图上，比较两者的性能。

8-35 利用式(8-2-36)给出的生成矩阵，设计一个双 3(dual-3)、码率 $1/2$ 的卷积码编码器，画出状态图，推导转移函数 $T(D, N, J)$ 。

8-36 画出图 P8-36 所示编码器生成的卷积码的状态图，判断该码是否是恶性的。另外，给出一个码率 $1/2$ 、 $K = 4$ 的卷积编码器的例子，该码存在恶性差错传播现象。

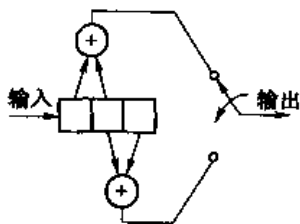


图 P8-36

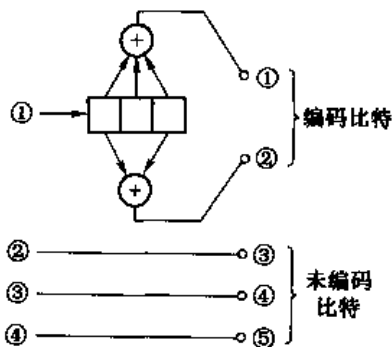


图 P8-37

- 8-37 某网格编码信号的构成如图 P8-37 所示,它用码率 $1/2$ 的卷积码对 1 比特信号编码而对另外 3 比特不编码。请把 32-QAM(十字形)星座分割成集并标出各子集。分集后相邻信号点之间的距离增加了多少?
- 8-38 x_1, x_2 是距离为 d 且长度为 n 的两个码字,它们在交叉(crossover)概率为 p 的二进制对称信道上传送。设这两个码字在传输中的差错概率是 $P(d)$ 。
- (a) 证明 $P(d) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \sqrt{p(y_i|x_1)p(y_i|x_2)}$ 。这里,求和针对所有二进制序列 y_i 。
- (b) 从上式推导结论: $P(d) \leq [4p(1-p)]^{d/2}$
- 8-39 证明等式(8-2-41)。

第9章 带限信道的信号设计

前几章研究了数字信息通过加性高斯噪声信道的传输。实际上,信号设计和通信系统设计没有施加带宽的限制。

本章将研究当限制信道带宽为某个指定的带宽 W Hz 时的信号设计问题。在这个条件下,信道可以建模为一个线性滤波器,其等效低通频率响应为 $C(f)$,且当 $|f| > W$ 时 $C(f)$ 为零。

本章要讨论的第一个问题是在线性调制信号中的信号脉冲 $g(t)$ 的设计。该线性调制信号可以表示为

$$v(t) = \sum_n I_n g(t - nT)$$

该信号有效地利用所有可用的带宽 W 。我们将看到,当信道在 $|f| \leq W$ 内是理想的时,适当地设计信号脉冲可以使符号传输速率相当于或超过信道带宽 W 。另一方面,信道不理想时,以等于或超过 W 的符号速率传输时,会在相邻的一些符号之间产生符号间干扰(ISI)。

本章要讨论的第二个问题是用编码来成形发送信号的谱,从而避免 ISI 的问题。

下面首先讨论带限、线性滤波器信道的一般特征。

9.1 带限信道的特征

在数字通信的各种实用信道中,电话信道应用最广。这种信道可以表征为带限线性滤波器。对于频分复用(FDM)电话网信道,这种表征是适当的。最近出现了使用脉码调制(PCM)的电话网,它对模拟信号进行数字化和编码,并用时分复用(TDM)方法建立多路信道。尽管如此,在抽样与编码之前仍然需要对模拟信号进行滤波。因此,即使现在的电话网使用 FDM 和 TDM 混合传输,电话信道的线性滤波器的模型仍然是适当的。

为此,像电话信道这样的带限信道将表征为具有等效低通频率响应 $C(f)$ 的线性滤波器,其等效低通冲激响应记为 $c(t)$ 。那么,如果信号

$$s(t) = \operatorname{Re}[v(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (9-1-1)$$

在带通电话信道上传输,等效低通接收信号为

$$r_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)c(t-\tau)d\tau + z(t) \quad (9-1-2)$$

式中,积分表示 $c(t)$ 与 $v(t)$ 的卷积, $z(t)$ 表示加性噪声。此外,该信号项在频域可表示为 $V(f)C(f)$,其中 $V(f)$ 是 $v(t)$ 的傅里叶变换。

如果信道带宽限于 W Hz,那么 $|f| > W$ 时 $C(f) = 0$ 。结果, $V(f)$ 中高于 $|f| = W$ 的任何频率分量都不能通过该信道。为此,我们把发送信号的带宽也限定为 W Hz。

在信道带宽内,频率响应 $C(f)$ 可以表示为

$$C(f) = |C(f)|e^{j\theta(f)} \quad (9-1-3)$$

式中, $|C(f)|$ 是幅度响应特性, $\theta(f)$ 是相位响应特性。此外,包络延时特性定义为

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df} \quad (9-1-4)$$

如果对所有 $|f| \leq W$, 幅度响应 $|C(f)|$ 是常数, 且 $\theta(f)$ 是频率的线性函数, 即 $\tau(f)$ 是一个常数, 则称这种信道是无失真或理想的。另一方面, 如果对所有 $|f| \leq W$, $|C(f)|$ 不是常数, 则称信道引起发送信号 $V(f)$ 幅度失真; 如果对所有 $|f| \leq W$, $\tau(f)$ 不是常数, 则称信道引起信号 $V(f)$ 延时失真。

由于非理想信道频率响应特性 $C(f)$ 引起的幅度和延时失真, 当发送的连续脉冲以与信道带宽 W 相比拟的速率通过信道传输时, 在接收端作为明确定义脉冲的点变得模糊不清。它们相互重叠, 因此出现符号间干扰。作为延时失真对发送脉冲影响的例子, 图 9-1-1(a) 示出一个带限脉冲, 它在周期时间间隔 $\pm T, \pm 2T$ 等点上出现零点。如果用脉冲幅度传送信息, 如 PAM 中那样, 可以发送一个脉冲序列, 其中每一个脉冲在其他脉冲的周期零点上出现峰值。然而, 当脉冲通过具有线性包络延时特性 $\tau(f)$ (二次相位 $\theta(f)$) 的信道传输时, 接收信号的零交点不再是周期间隔的, 如图 9-1-1(b) 所示。因此, 连续脉冲的序列将相互混叠, 脉冲的峰值不再是清晰可辨的。所以, 信道延时失真导致符号间干扰。第 10 章将要讨论, 在解调器中采用滤波器或均衡器来补偿信道非理想频率响应特性是可能的。图 9-1-1(c) 示出了一个线性均衡器的输出, 它补偿了信道的线性失真。

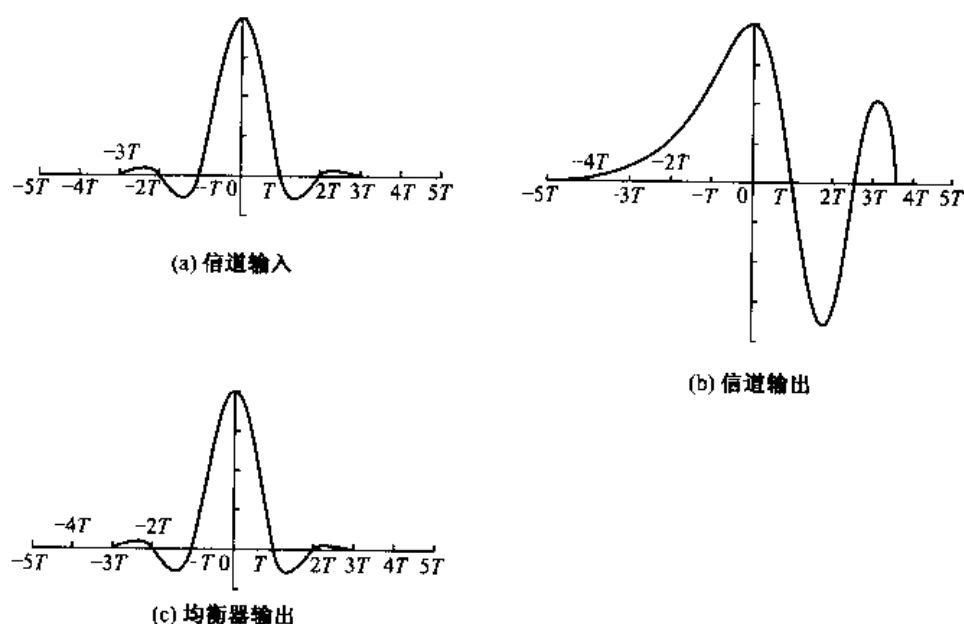


图 9-1-1 信道失真的影响

电话信道的符号间干扰的范围可以通过观测信道的频率响应特性来估计。图 9-1-2 示出了由达菲和图雷丘 (Duffy 和 Tratcher, 1971 年) 给出的电信交换网中等距离 (180~725 英里) 电话信道的实测平均幅度和延时频率函数。可以看出, 信道可用的带宽大约是 300~3 000 Hz。这个平均信道的相应的冲激响应如图 9-1-3 所示, 其持续时间大约为 10 ms。作为比较, 在这样的信道上的发送符号速率可以是每秒 2 500 个脉冲或符号的量级。因此, 符号间干扰延伸到 20~30 个符号。

除线性失真之外, 信号通过信道传输时还遭受其他损伤, 尤其是非线性失真、频率偏移、相

位抖动、脉冲噪声和热噪声。

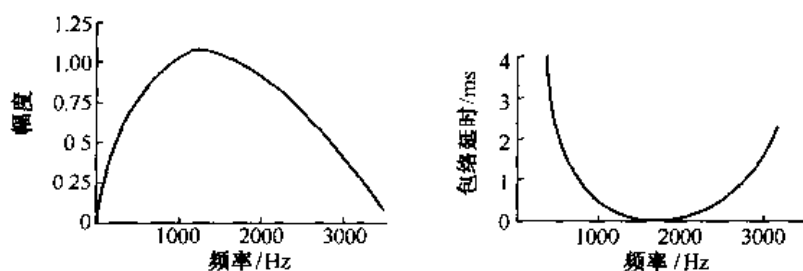
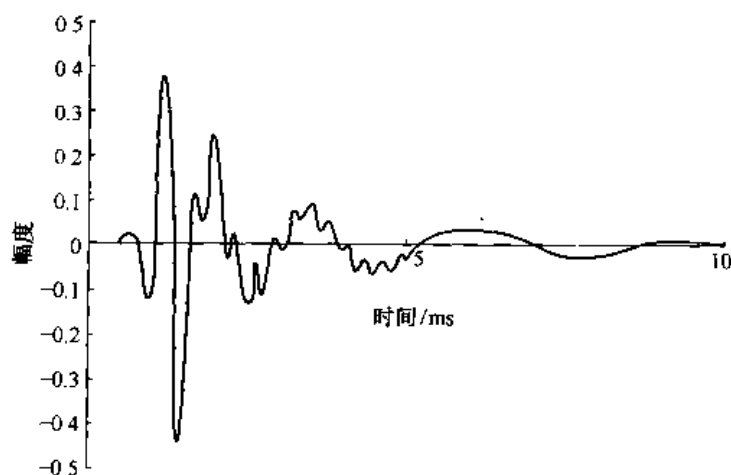


图 9-1-2 中等距离电话信道的平均幅度和延时特性



9-1-3 具有图 9-1-2 所示幅度和延时的平均信道的冲激响应

电话信道中的非线性失真由电话系统中的放大器和压扩器引起的。这种类型的失真通常比较小,而且很难校正。

通常小于 5 Hz 的小的频率偏移是由在电话信道中使用载波设备引起的。在采用同步相位相干解调的高速数字传输系统中,不允许有这样的偏移。该偏移通常由解调器中的载波恢复环来补偿。

相位抖动基本上以电力线频率(50~60 Hz)的低频谐波引起的传输信号的小调制指数频率调制。相位抖动对高速数字通信是个严重的问题。但在解调器中,在一定程度上可以跟踪和补偿。

脉冲噪声是一种加性干扰,主要由电话系统中的交换设备引起。另外,还有低于信号电平 30 dB 的热(高斯)噪声。

信道的这些损伤所影响的程度取决于信道上的传输速率和调制技术。当速率低于 1 800 b/s ($R/W < 1$) 时,可选择如 FSK 这样的调制技术,它对在典型电话信道上遭遇的上述各种因素引起的所有失真都不敏感。当速率在 1 800~2 400 b/s ($R/W \approx 1$) 之间时,通常采用带宽效率较高的调制技术,例如四相 PSK。在这段速率上,常常采用某些折中均衡方式来补偿信道中的平均幅度和延时失真。此外,载波恢复方法用来补偿频率偏移。在这段速率上,其他信道损伤对差错率性能的影响不严重。当传输速率高于 2 400 b/s ($R/W > 1$) 时,可采用高效的编码调制技术,如网格编码 QAM, PAM 和 PSK。对于这样的速率,特别要注意线性失真、频率

偏移和相位抖动。线性失真通常用自适应均衡器补偿。相位抖动通过信号设计和解调器中某些形式的相位补偿结合起来处理。当速率超过 9 600 b/s 时,应特别注意的不仅是线性失真、相位抖动和频率偏移,还有上述其他信道损伤。

遗憾的是,若信道模型包含上述所有损伤是很难分析的。为数学处理方便,本章和下两章采用的信道模型是线性滤波器,它引入幅度和延时失真并加上高斯噪声。

除了电话信道之外,还有其他物理信道存在某种形式的时间弥散引入了符号间干扰。无线信道,如短波电离层信道(HF)、对流层散射信道和移动无线信道都是时间弥散信道的例子。在这些信道中,时间弥散以及符号间干扰是由于不同延时的多个传播路径造成的。在这些路径中,路径的数量及相对延时随时间而变,这些无线信道称为时变多径信道。时变多径条件会引起频率响应特性在很大范围内变化。因此,用于电话信道的频率响应表征不再适用于时变多径信道。这时应该使用散射函数对这些无线信道进行统计表征。简单地说,散射函数是平均接收信号功率的一个二维表示形式,它是相对延时和多普勒频率的函数。第 14 章将详细解释。

为直观起见,对中等距离(150 英里)对流层散射信道测量出的散射函数如图 9-1-4 所示。信道响应的总的持续时间(多径扩展)的平均值大约为 $0.7 \mu\text{s}$ 。在最强的路径上,多普勒频率的“半功率点”之间的展宽略小于 1 Hz,在其他路径上稍大。典型的例子是如果信号以 10^7 符号/s 的速率在这样的信道上传输,那么 $0.7 \mu\text{s}$ 的多径扩展引起的符号间干扰将覆盖大约 7 个符号。

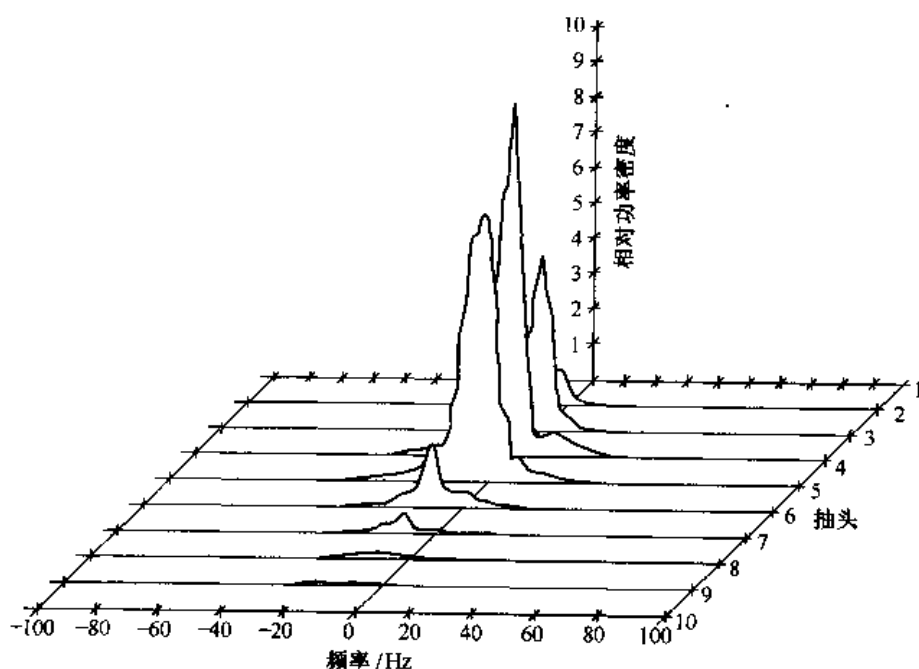


图 9-1-4 中等距离对流层散射信道的散射函数

本章只讨论带限信道的线性时不变滤波器的模型。第 10 章和第 11 章介绍的用于克服符号间干扰的自适应均衡技术也适用于时不变多径信道。在这种情况下,与总的信道带宽相比,或等价地与在信道上的传输速率相比,信道随时间变化比较缓慢。

9.2 带限信道的信号设计

第4章中已经证明,几种不同类型的数字调制技术的等效低通发送信号具有共同的形式

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n g(t - nT) \quad (9-2-1)$$

式中, $\{I_n\}$ 表示离散信息符号序列。 $g(t)$ 是一个脉冲且假定在本讨论中具有带限的频率响应特性 $G(f)$, 即当 $|f| > W$ 时 $G(f) = 0$ 。这个信号通过信道传输, 信道的频率响应 $C(f)$ 也限于 $|f| \leq W$ 范围。因此, 接收信号可以表示为

$$r_l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n h(t - nT) + z(t) \quad (9-2-2)$$

式中

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) c(t - \tau) d\tau \quad (9-2-3)$$

且 $z(t)$ 表示加性高斯白噪声。

假设接收机信号首先通过一个滤波器, 然后以速率 $1/T$ 符号/s 抽样。后面我们将证明, 由信号检测观点得出的最佳滤波器是与接收脉冲匹配的滤波器, 也就是说, 接收滤波器的频率响应是 $H^*(f)$ 。把接收滤波器的输出表示为

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(t - nT) + v(t) \quad (9-2-4)$$

式中, $x(t)$ 表示接收滤波器对输入脉冲 $h(t)$ 的响应, $v(t)$ 是接收滤波器对噪声 $z(t)$ 的响应。那么, 若在 $t = kT + \tau_0$ 时刻, $k = 0, 1, \dots$ 对 $y(t)$ 抽样, 则有

$$y(kT + \tau_0) \equiv y_k = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(kT - nT + \tau_0) + v(kT + \tau_0) \quad (9-2-5)$$

或等价地

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (9-2-6)$$

式中, τ_0 是信道的传输延时。抽样值可以表示为

$$y_k = x_0 \left(I_k + \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n} \right) + v_k \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (9-2-7)$$

把 x_0 看做一个任意的标尺因子, 为方便计令它等于 1, 则

$$y_k = I_k + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k \quad (9-2-8)$$

I_k 项表示在第 k 个抽样时刻的期望信息符号, $\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n}$ 表示符号间干扰 (ISI), v_k 是在第 k 个抽样时刻的加性高斯噪声变量。

在数字通信系统中, 符号间干扰和噪声的总量可以在示波器上观测到。对于 PAM 信号, 可以用水平扫描速率 $1/T$ 在垂直输入上显示接收信号 $y(t)$ 。所得出的示波器显示图形称做眼图, 因为它与人的眼睛类似。例如, 图 9-2-1 示出了二进制和四电平 PAM 调制的眼图。ISI

的影响会引起眼图闭合,因此使加性噪声引起差错的边际减少。图 9-2-2 以图解的方法说明了符号间干扰在减少二进制眼图开启度中的影响。注意,符号间干扰使零交点位置失真并且使眼图开启度减小,因此使系统对同步误差更敏感。

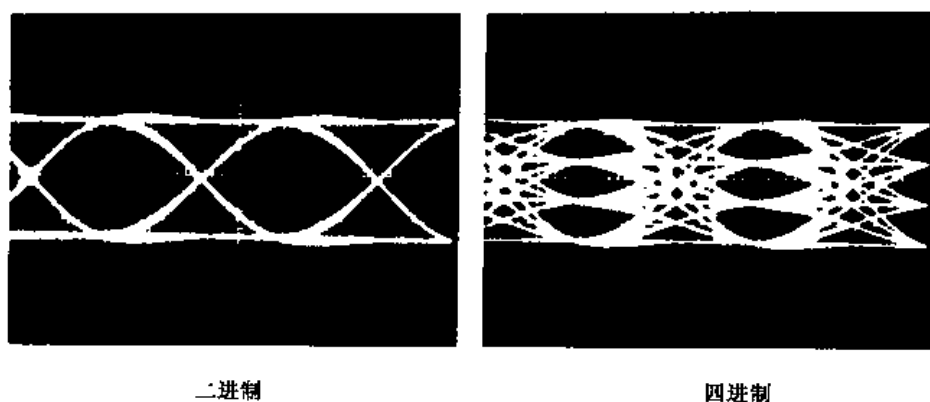


图 9-2-1 二进制和四进制幅移键控(或 PAM)的眼图的实例

对于 FSK 和 QAM,通常将“眼图”显示为二维散射图,该图表示在抽样时刻判决变量的抽样值 $\{y_k\}$ 。图 9-2-3 示出了 8-PSK 信号的眼图。在无符号间干扰和噪声的情况下,在抽样时刻重叠的信号导致了相应于 8 个发送信号相位的 8 个清晰的点。符号间干扰和噪声引起接收信号样值 $\{y_k\}$ 偏离期望的 8-PSK 信号。符号间干扰和噪声越大,接收信号样值相对于发送信号点的散布也越大。

下面研究在抽样时刻不存在符号间干扰的条件下的信号设计。

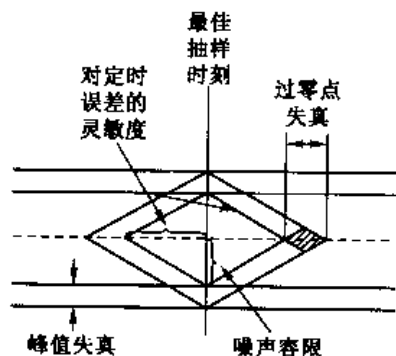


图 9-2-2 符号间干扰对眼图开启度的影响

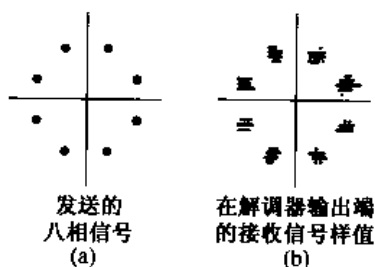


图 9-2-3 二维数字“眼图”

9.2.1 无符号间干扰的带限信号的设计——奈奎斯特准则

本节和 9.2.2 节的讨论中,我们假定带限信道具有理想频率响应特性,即当 $|f| \leq W$ 时 $C(f) = 1$ 。其次,脉冲 $x(t)$ 具有谱特性 $X(f) = |G(f)|^2$,这里

$$x(t) = \int_{-W}^W X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (9-2-9)$$

我们感兴趣的是求无符号间干扰的脉冲 $x(t)$ 以及发送脉冲 $g(t)$ 的谱特性。因为

$$y_k = I_k + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n} + v_k \quad (9-2-10)$$

所以,无符号间干扰的条件是

$$x(t = kT) \equiv x_k = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \quad (9-2-11)$$

下面推导使 $x(t)$ 满足上述关系式的 $X(f)$ 的必要且充分条件。这个条件称为奈奎斯特脉冲成形准则或零 ISI 奈奎斯特条件,这将在下面的定理中阐述。

定理(奈奎斯特)

使 $x(t)$ 满足

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (9-2-12)$$

的充要条件是其傅里叶变换 $X(f)$ 满足

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) = T \quad (9-2-13)$$

证明

一般地, $x(t)$ 是 $X(f)$ 的傅里叶反变换,因此

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (9-2-14)$$

在抽样时刻 $t = nT$, 这个关系式变为

$$x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi fnT} df \quad (9-2-15)$$

将式(9-2-15)的积分分解成覆盖有限范围 $1/T$ 的积分段,从而

$$\begin{aligned} x(nT) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)/2T}^{(2m+1)/2T} X(f) e^{j2\pi fnT} df \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f + m/T) e^{j2\pi fnT} df \\ &= \int_{-1/2T}^{1/2T} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) \right] e^{j2\pi fnT} df \\ &= \int_{-1/2T}^{1/2T} B(f) e^{j2\pi fnT} df \end{aligned} \quad (9-2-16)$$

式中, $B(f)$ 定义为

$$B(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) \quad (9-2-17)$$

显然, $B(f)$ 是周期为 $1/T$ 的周期函数,因此可以用傅里叶级数系数 $\{b_n\}$ 展开成

$$B(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j2\pi n f T} \quad (9-2-18)$$

式中

$$b_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} B(f) e^{-j2\pi n f T} df \quad (9-2-19)$$

比较式(9-2-19)和式(9-2-16),得到

$$b_n = Tx(-nT) \quad (9-2-20)$$

因此,式(9-2-10)要满足的充要条件是

$$b_n = \begin{cases} T & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (9-2-21)$$

将其代入式(9-2-18),得

$$B(f) = T \quad (9-2-22)$$

或等价为

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) = T \quad (9-2-23)$$

这就结束了该定理的证明。

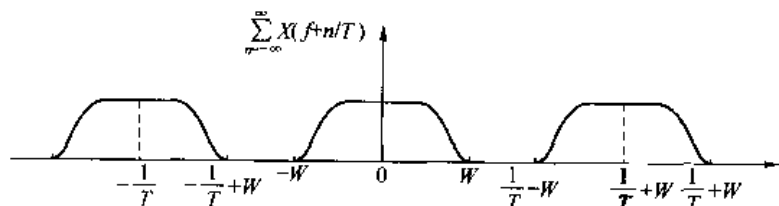


图 9-2-4 $T < 1/2W$ 情况下的 $B(f)$ 的曲线

假设信道具有带宽 W , 那么 $|f| > W$ 时 $C(f) \equiv 0$, 因此 $|f| > W$ 时 $X(f) = 0$ 。分 3 种情况讨论。

(1) 当 $T < 1/2W$ 或 $1/T > 2W$ 时, $B(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f + n/T)$ 由间隔为 $1/T$ 的 $X(f)$ 非重叠的重复谱瓣组成, 如图 9-2-4 所示。在这种情况下, 无法选择 $X(f)$ 确保 $B(f) \equiv T$, 也无法设计一个无 ISI 的系统。

(2) 当 $T = 1/2W$ 或 $1/T = 2W$ (奈奎斯特速率) 时, 间隔为 $1/T$ 的 $X(f)$ 的重复谱瓣如图 9-2-5 所示。显然, 在这种情况下只有一个 $X(f)$ 能导致 $B(f) = T$, 即

$$X(f) = \begin{cases} T & (|f| < W) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (9-2-24)$$

相应于脉冲

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \equiv \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad (9-2-25)$$

这意味着, 使无 ISI 传输成为可能的 T 的最小值是 $T = 1/2W$ 。对于此值, $x(t)$ 必须是 sinc 函数。选择这种 $x(t)$ 的困难在于它是非因果的, 并且是不可实现的。为了实现它, 通常采用其延时形式, 即 $\text{sinc}[\pi(t - t_0)/T]$, 并且选择 t_0 使当 $t < 0$ 时 $\text{sinc}[\pi(t - t_0)/T] \approx 0$ 。当然, 选择这样的 $x(t)$ 时, 抽样时刻也必须平移至 $mT + t_0$ 。这种脉冲形状收敛到零的速度是缓慢的。 $x(t)$ 的拖尾按 $1/t$ 衰减, 因此在解调器中对匹配滤波器输出抽样时, 一个小的定时偏差会产生无穷串的 ISI 分量。由于脉冲衰减的速率为 $1/t$, 这样一串分量绝不是可和的。因此, 所产生的 ISI 的总和是不收敛的。

(3) 当 $T > 1/2W$ 时, $B(f)$ 由间隔为 $1/T$ 的 $X(f)$ 重叠的重复谱瓣组成, 如图 9-2-6 所示。在这种情况下, 有无数种 $X(f)$ 的选择使 $B(f) \equiv T$ 。

对于 $T > 1/2W$ 的情况, 具有期望的谱特性并在实践中广泛采用的一种特殊的脉冲频谱是升余弦谱。升余弦频率的特性为(参见习题 9-16):

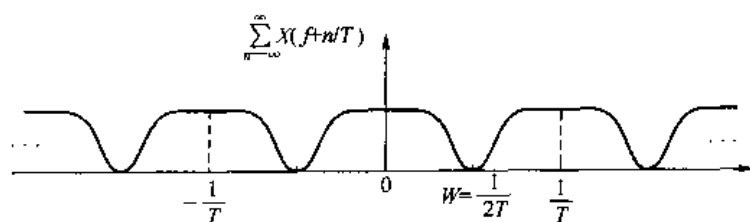


图 9-2-5 $T = 1/2 W$ 情况下的 $B(f)$ 曲线

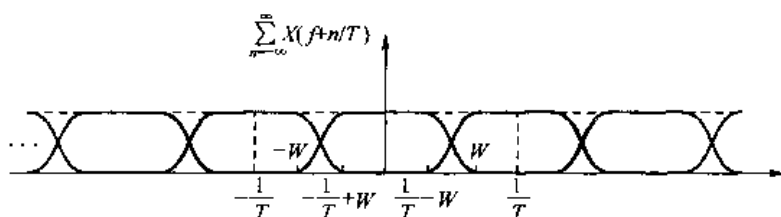


图 9-2-6 $T > 1/2 W$ 情况下的 $B(f)$ 曲线

$$X_n(f) = \begin{cases} T & \left(0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T}\right) \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{\pi T}{\beta} \left(|f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) \right] \right] & \left(\frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \right) \\ 0 & (|f| > \frac{1+\beta}{2T}) \end{cases} \quad (9-2-26)$$

式中 β 称为滚降因子,其取值范围为 $0 \leq \beta \leq 1$ 。信号超出奈奎斯特频率 $1/2T$ 以外的带宽称为过剩带宽,通常将它表示为奈奎斯特频率的百分数。例如,当 $\beta = \frac{1}{2}$ 时,过剩带宽为 50%,当 $\beta = 1$ 时,过剩带宽为 100%。具有升余弦谱的脉冲 $x(t)$ 为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - 4\beta^2 t^2/T^2} \\ &= \text{sinc}(\pi t/T) \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - 4\beta^2 t^2/T^2} \end{aligned} \quad (9-2-27)$$

注意, $x(t)$ 被归一化,所以 $x(0) = 1$ 。图 9-2-7 示出了 $\beta = 0$ 、 $\frac{1}{2}$ 和 1 的升余弦谱特性及其相应的脉冲。注意,当 $\beta = 0$ 时,脉冲简化成 $x(t) = \text{sinc}(\pi t/T)$,且符号速率 $1/T = 2W$;当 $\beta = 1$ 时,符号速率 $1/T = W$ 。一般地,对于 $\beta > 0$, $x(t)$ 尾部按 $1/t^3$ 衰减,因此抽样定时偏差产生的一串 ISI 分量将收敛于一个有限的值。

由于升余弦谱的平滑特性,因此设计实用的发送和接收滤波器来近似实现整个期望的频率响应是可能的。在信道是理想的特殊情况下,即 $C(f) = 1, |f| \leq W$,有

$$X_n(f) = G_T(f) G_R(f) \quad (9-2-28)$$

式中, $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ 是两个滤波器的频率响应。在此情况下,若接收滤波器匹配于发送滤波器,则有 $X_n(f) = G_T(f) G_R(f) = |G_T(f)|^2$ 。对此理想情况,

$$G_T(f) = \sqrt{|X_n(f)|} e^{-j2\pi f t_0} \quad (9-2-29)$$

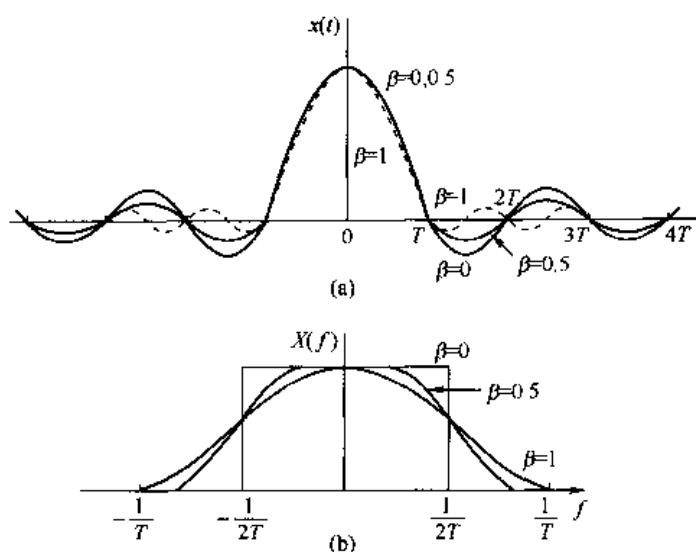


图 9-2-7 具有升余弦谱的脉冲

并且 $G_R(f) = G_T^*(f)$, 其中 t_0 是某标称延时, 用来保证该滤波器的物理可实现性。因此, 整个升余弦频谱特性在发送滤波器和接收滤波器之间均等地划分。同时, 为保证接收滤波器的物理可实现性, 附加的延时是必要的。

9.2.2 具有受控 ISI 的带限信号设计——部分响应信号

从对零 ISI 信号设计的讨论可以看到, 为了实现实用的发送和接收滤波器, 必须将符号速率 $1/T$ 降到奈奎斯特速率 $2W$ 符号/s 以下。另一方面, 假设放宽零 ISI 的条件, 可达到符号传输速率 $2W$ 符号/s。采用估计 ISI 的受控量的方法, 能达到这个符号速率。

零 ISI 的条件是当 $n \neq 0$ 时 $x(nT) = 0$ 。然而, 假定设计一个在某个时刻具有受控 ISI 的带限信号, 意味着允许在样值 $\{x(nT)\}$ 中有一个附加的非零值。引入的 ISI 是确定的或“受控的”, 因此, 在接收机中它可以被计及。下而将讨论。

能导致(近似地)物理可实现的发送和接收滤波器的一个特殊例子由以下样值^①表示

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (9-2-30)$$

利用式(9-2-20)可得到

$$b_n = \begin{cases} T & (n = 0, -1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (9-2-31)$$

将其代入式(9-2-18), 得

$$B(f) = T + Te^{j2\pi fT} \quad (9-2-32)$$

正如前一节所述, $T < 1/2W$ 时不可能满足上述方程。然而, 对于 $T = 1/2W$, 可得

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W}(1 + e^{-j\pi f/W}) & (|f| < W) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

^① 将 $x(t)$ 的样值归一化为 $1(n=0,1)$ 处理起来比较方便。

$$= \begin{cases} \frac{1}{W} e^{-j\pi f/2W} \cos \frac{\pi f}{2W} & (|f| < W) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (9-2-33)$$

因此, $x(t)$ 为

$$x(t) = \text{sinc}(2\pi Wt) + \text{sinc}[2\pi(Wt - \frac{1}{2})] \quad (9-2-34)$$

这个脉冲称为双二进制信号脉冲。图 9-2-8 所示为该信号脉冲及其幅度谱。注意, 该谱平滑地衰减至零, 这意味着可以设计出物理可实现的滤波器非常接近该谱特性。因此, 可以达到符号速率 $2W$ 。

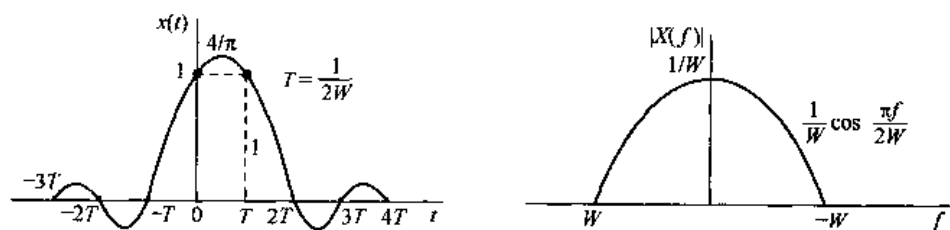


图 9-2-8 双二进制信号的时域和频域特性

能导致(近似地)物理可实现的发送和接收滤波器的另一特殊例子由下列样值表示

$$x\left(\frac{n}{2W}\right) = x(nT) = \begin{cases} 1 & (n = -1) \\ -1 & (n = 1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (9-2-35)$$

相应的脉冲 $x(t)$ 为

$$x(t) = \text{sinc}\left[\frac{\pi(t+T)}{T}\right] - \text{sinc}\left[\frac{\pi(t-T)}{T}\right] \quad (9-2-36)$$

且其谱为

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} (e^{j\pi f/W} - e^{-j\pi f/W}) = \frac{j}{W} \sin \frac{\pi f}{W} & |f| \leq W \\ 0 & |f| > W \end{cases} \quad (9-2-37)$$

图 9-2-9 所示为该脉冲及其幅度谱, 称为变型双二进制信号脉冲。注意, 该信号的谱在 $f=0$ 处为零, 这使得该信号适合在不能通过直流分量的信道上传输。

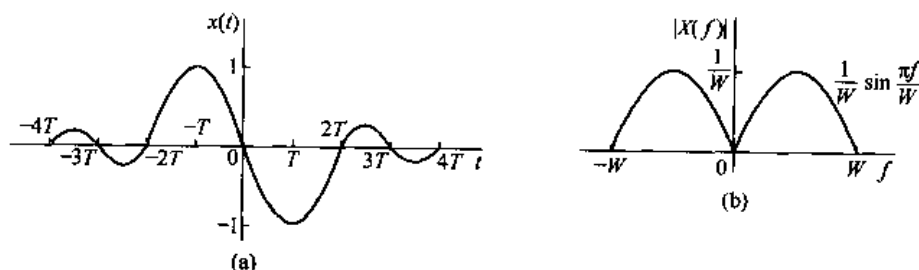


图 9-2-9 变型双二进制信号的时域和频域特性

正如克莱兹姆(Kretzmer, 1966 年)和勒基(Lucky, 1968 年)等人证明的, 通过选择不同的样值 $|x(n/2W)|$ 和两个以上的非零样值, 可以得到其他有趣的且物理可实现的滤波器特性。

然而,当选择更多非零样值时,将使受控 ISI 分开更为麻烦而且不实用。

通常,这类带限信号脉冲的形式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \text{sinc}\left[2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right] \quad (9-2-38)$$

其相应的谱为

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) e^{-jn\pi f/W} & (|f| \leq W) \\ 0 & (|f| > W) \end{cases} \quad (9-2-39)$$

当在集合 $\{x(n/2W)\}$ 中选择两个或更多个非零样值来有目的地引入受控 ISI 时,该带限信号称为部分响应信号,所产生的信号脉冲允许以奈奎斯特速率 $2W$ 符号/s 传输信息符号。下面将讨论在受控 ISI 存在的情况下接收符号的检测。

部分响应信号的另一种特性表征

我们将阐述对部分响应信号的另一种特性表征,并以此结束本节的讨论。假定部分响应信号的产生采用图 9-2-10 所示的方式,离散时间序列 $\{I_n\}$ 通过一个离散时间滤波器,其系数 $x_n \equiv x(n/2W)$, $n=0,1,\dots,N-1$,并用该滤波器的输出序列 $\{B_n\}$ 来周期地激励一个冲激响应为 $\text{sinc}(2\pi Wt)$ 的模拟滤波器,其输入为 $B_n\delta(t-nT)$,所产生的输出信号与式(9-2-38)所示的部分响应信号相同。

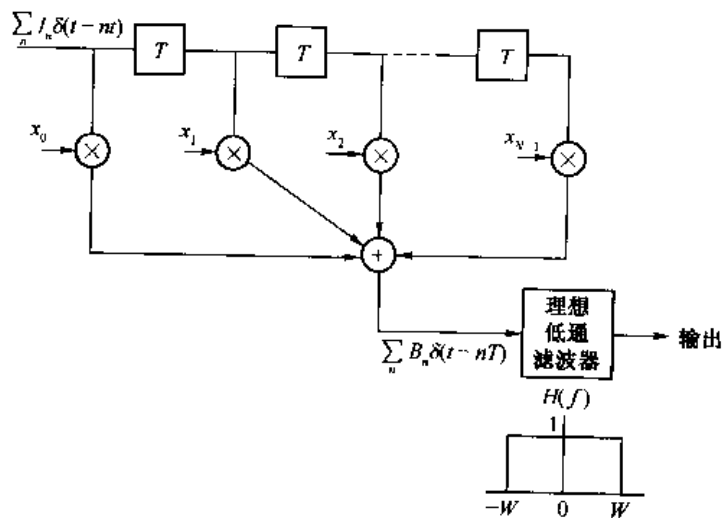


图 9-2-10 产生部分响应信号的另一种方法

因为

$$B_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k I_{n-k} \quad (9-2-40)$$

对序列 $\{I_n\}$ 滤波的结果使符号序列 $\{B_n\}$ 产生相关性。事实上,序列 $\{B_n\}$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= E(B_n B_{n+m}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x_k x_l E(I_{n-k} I_{n+m-l}) \end{aligned} \quad (9-2-41)$$

当输入序列是零均值且为白时,

$$E(I_{n-k}I_{n+m-l}) = \delta_{m+k-l} \quad (9-2-42)$$

其中已经归一化 $E(I_n^2) = 1$ 。将式(9-2-42)代入式(9-2-41),可得期望的 $\{B_n\}$ 自相关函数为

$$\varphi(m) = \sum_{k=0}^{N-1-|m|} x_k x_{k+|m|} \quad (m = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)) \quad (9-2-43)$$

相应的功率谱密度是

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \varphi(m) e^{j2\pi f m T} \\ &= \left| \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{j2\pi f m T} \right|^2 \end{aligned} \quad (9-2-44)$$

式中, $T = 1/2W$ 且 $|f| \leq 1/2T = W$ 。因此,部分响应信号设计提供了信道传输信号谱成型的方法。

9.2.3 受控 ISI 的数据检测

本节将讨论在接收机中接收信号含有受控 ISI 时检测信息符号的两种方法。一种是逐个符号的检测方法,它相对比较容易实现。第二种方法是根据最大似然准则来检测符号序列。后一种方法可使错误概率最小,但实现起来稍复杂。具体地讲,我们将研究双二进制和变型双二进制部分响应信号的检测。在这两种情况下,假定部分响应信号的期望频谱特性 $X(f)$ 被均等地在发送和接收两个滤波器之间分解,即 $|G_T(f)| = |G_R(f)| = |X(f)|^{1/2}$ 。这种处理方式是根据 PAM 信号的,容易推广到 QAM 和 PSK。

1. 逐符号的次最佳检测

对于双二进制脉冲,当 $n = 0$ 和 $n = 1$ 时 $x(nT) = 1$,其他为零。因此,接收滤波器(解调器)输出端的样值为

$$y_m = B_m + v_m = I_m + I_{m-1} + v_m \quad (9-2-45)$$

式中, $\{I_m\}$ 为发送幅度序列, $\{v_m\}$ 是加性高斯噪声样值序列。暂时不考虑噪声,研究二进制的情况,其中 $I_m = \pm 1$ 且等概。那么, B_m 取 3 个可能值之一,这 3 个值为 $B_m = -2, 0, 2$, 其相应的概率为 $1/4, 1/2, 1/4$ 。如果 I_{m-1} 是由第 $(m-1)$ 信号间隔得到的检测信号,那么它对 B_m 的影响可以用减法来消除,这里 B_m 是第 m 个信号间隔中的接收信号,因此 I_m 可被检测出来。对于每个接收符号,可以顺序地重复这一过程。

这种处理过程的主要问题是加性噪声引起的差错可能会传播。例如,如果 I_{m-1} 出错,它对 B_m 的影响就不可能消除,事实上是被不正确的减法所增强。因此, B_m 的检测也可能发生差错。

差错传播可以在发送机中用数据预编码的方法避免,而不是在接收机中用减法消除受控 ISI。对二进制数据序列的预编码是在调制之前进行的。由要发送的 1、0 数据序列 $\{D_n\}$ 产生一个新序列 $\{P_n\}$,称为预编码序列。对于双二进制信号,预编码序列定义为

$$P_m = D_m \ominus P_{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (9-2-46)$$

式中, \ominus 表示模 2 减法^①。设当 $P_m = 0$ 时 $I_m = -1$ 及当 $P_m = 1$ 时 $I_m = 1$, 即 $I_m = 2P_m - 1$ 。注

^① 虽然这与模 2 加法相同,但以模 2 减法来分析双二进制的预编码运算比较方便。

意,这种预编码运算与 4.3.2 节中关于 NRZI 信号的讨论相同。

在接收滤波器的输出端的无噪声样值为

$$\begin{aligned} B_m &= I_m + I_{m-1} \\ &= (2P_m - 1) + (2P_{m-1} - 1) \\ &= 2(P_m + P_{m-1} - 1) \end{aligned} \quad (9-2-47)$$

因此

$$P_m + P_{m-1} = \frac{1}{2}B_m + 1 \quad (9-2-48)$$

因为 $D_m = P_m \ominus P_{m-1}$, 所以由 B_m 利用关系式

$$D_m = \frac{1}{2}B_m + 1 \pmod{2} \quad (9-2-49)$$

可得到数据序列 D_m 。因此,若 $B_m = \pm 2$, 则 $D_m = 0$; 若 $B_m = 0$, 则 $D_m = 1$ 。表 9-2-1 为一个说明预编码和译码运算的例子。在加性噪声存在的情况下,接收滤波器的抽样输出如式(9-2-45)所示,在这种情况下, $y_m = B_m + v_m$ 与设置成 +1 和 -1 的两个阈值比较。按照检测规则

$$D_m = \begin{cases} 1 & (|y_m| < 1) \\ 0 & (|y_m| \geq 1) \end{cases} \quad (9-2-50)$$

可得到数据序列 $\{D_m\}$ 。

表 9-2-1 以双二进制脉冲的二进制信号传输

数据序列	D_n		1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
预编码序列	P_n	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
发送序列	I_n	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
接收序列	B_n		0	0	0	2	0	-2	-2	0	2	2	2	0	0	2	0
译码序列	D_n		1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1

可将二进制 PAM 直接推广到多电平 PAM 的双二进制脉冲的信号传输。在这种情况下, M 电平幅度序列 $\{I_m\}$ 产生一个(无噪声)序列

$$B_m = I_m + I_{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (9-2-51)$$

它有 $2M - 1$ 种可能的等间隔电平。幅度电平可由关系式

$$I_m = 2P_m - (M - 1) \quad (9-2-52)$$

确定,其中 $\{P_m\}$ 是预编码序列,是由 M 电平数据序列 $\{D_m\}$ 按照下列关系式得到的

$$P_m = D_m \ominus P_{m-1} \pmod{M} \quad (9-2-53)$$

式中,序列 $\{D_m\}$ 的可能值是 $0, 1, 2, \dots, M - 1$ 。

在不存在噪声的情况下,接收滤波器输出端的样值为

$$B_m = I_m + I_{m-1} = 2[P_m + P_{m-1} - (M - 1)] \quad (9-2-54)$$

因此

$$P_m + P_{m-1} = \frac{1}{2}B_m + (M - 1) \quad (9-2-55)$$

因为 $D_m = P_m + P_{m-1} \pmod{M}$, 则

$$D_m = \frac{1}{2} B_m + (M-1) \pmod{M} \quad (9-2-56)$$

表 9-2-2 说明了多电平预编码和译码。

表 9-2-2 四电平信号的双二进制脉冲传输

数据序列	D_m		0	0	1	3	1	2	0	3	3	2	0	1	0
预编码序列	P_m	0	0	0	1	2	3	3	1	2	1	1	3	2	2
发送序列	I_m	-3	-3	-3	-1	1	3	3	-1	1	-1	-1	3	1	1
接收序列	B_m		-6	-6	-4	0	4	6	2	0	0	-2	2	4	2
译码序列	D_m		0	0	1	3	1	2	0	3	3	2	0	1	0

在存在噪声的情况下,接收的信号加噪声被量化到最接近的一个可能的信号电平上,再利用上述量化值规则恢复数据序列。

在变型双二进制脉冲的情况下,受控 ISI 的值规定为:当 $n=1$ 时 $x(n/2W)=-1$,当 $n=-1$ 时 $x(n/2W)=1$,其余为零。因此,接收滤波器的无噪声抽样输出为

$$B_m = I_m - I_{m-2} \quad (9-2-57)$$

式中, M 电平序列 $\{I_m\}$ 是按照关系式(9-2-52)对预编码序列映射并通过求解下式获得的

$$P_m = D_m \oplus P_{m-2} \pmod{M} \quad (9-2-58)$$

由这些关系式,容易证明不存在噪声的情况下,由 $\{B_m\}$ 恢复数据序列 $\{D_m\}$ 的检测规则是

$$D_m = \frac{1}{2} B_m \pmod{M} \quad (9-2-59)$$

正如上述证明,在发送机中的数据预编码使得根据逐个符号来检测接收数据而不必顾及先前检测的符号成为可能,这避免了差错传播。

上述逐符号检测对部分响应信号不是最佳的检测方案,这是由于在接收信号中存在固有的记忆。然而,逐符号检测实现起来比较简单,在许多实际应用中被采用,包括双二进制和变型双二进制脉冲信号。下一节将讨论其性能。

2. 最大似然序列检测

由上述讨论可明显看出,部分响应波形是有记忆信号波形,这种记忆用网格表示比较方便。例如,图 9-2-11 示出了用于二进制数据传输的双二进制部分响应信号的网格。对于二进制调制,该网格包含两个状态,相应于 I_m 的两个可能的输入值,即 $I_m = \pm 1$ 。网格中的每一个分支用两个数标记。左边的第一个数是新的数据比特,即 $I_{m+1} = \pm 1$,该数确定向新状态的转移。右边的数是接收信号电平。

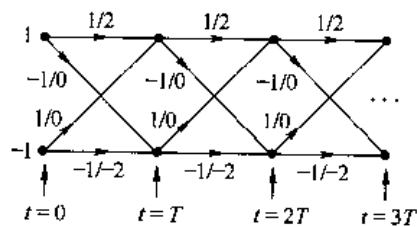


图 9-2-11 双二进制部分响应信号的网格

双二进制信号具有长度为 $L=1$ 的记忆。因此,对于二进制调制,网格有 $S_L=2$ 个状态。一般地,对于 M 元调制,网格状态数为 M^L 。

最佳最大似然(ML)序列检测器根据在抽样时刻 $t = mT, m=1, 2, \dots$ 对接收数据序列

$\{y_m\}$ 的观测来选择通过网格的最可能的路径。一般地, 网格中的每一个节点具有 M 条进入的路径和 M 个相应的度量, 根据度量值从 M 条进入的路径中选出一条最可能的路径, 舍弃其余 $M-1$ 条路径及其度量。然后, 每一个节点的幸存路径延伸到 M 条新的路径, 每条新路径对应 M 个可能的输入符号之一, 搜索过程继续下去。这本质上是执行网格搜索的维特比算法。

对于这类部分响应信号, 一般采用联合 PDF $p(\mathbf{y}_N | \mathbf{I}_N)$ 来对接收信号序列 $\{y_m, 1 \leq m \leq N\}$ 进行统计描述, 其中 $\mathbf{y}_N = [y_1 y_2 \cdots y_N]'$, $\mathbf{I}_N = [I_1 I_2 \cdots I_N]'$ 且 $N > L$ 。当加性噪声是零均值高斯的, $p(\mathbf{y}_N | \mathbf{I}_N)$ 是多变量高斯 PDF, 即

$$p(\mathbf{y}_N | \mathbf{I}_N) = \frac{1}{(2\pi \det \mathbf{C})^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)' \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)\right] \quad (9-2-60)$$

时, 式中 $\mathbf{B}_N = [B_1 B_2 \cdots B_N]'$ 是向量 \mathbf{y}_N 的均值, \mathbf{C} 是 \mathbf{y}_N 的 $N \times N$ 协方差矩阵。那么, ML 序列检测器通过网格选择使 PDF $p(\mathbf{y}_N | \mathbf{I}_N)$ 最大的序列。

对 $p(\mathbf{y}_N | \mathbf{I}_N)$ 取自然对数, 可以简化通过网格寻求最可能序列的计算。因此,

$$\ln p(\mathbf{y}_N | \mathbf{I}_N) = -\frac{1}{2} N \ln(2\pi \det \mathbf{C}) - \frac{1}{2}(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)' \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N) \quad (9-2-61)$$

对于给定的接收序列 $\{y_m\}$, 使 $\ln p(\mathbf{y}_N | \mathbf{I}_N)$ 最大的数据序列 $\{I_m\}$ 与使 $(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)' \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)$ 最小的数据序列 $\{I_m\}$ 是相同的, 即

$$\hat{\mathbf{I}}_N = \underset{\mathbf{I}_N}{\operatorname{argmin}} [(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)' \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)] \quad (9-2-62)$$

网格搜索中的度量计算相当复杂, 该计算采用在部分响应信号匹配滤波器输出端的噪声样值的相关运算。例如, 在双二进制信号波形的情况中, 噪声序列 $\{v_m\}$ 的相关运算是在两个连续的信号样值上进行的。因此, v_m 和 v_{m+k} 对于 $k=1$ 是相关的, 对于 $k>1$ 则是不相关的。一般地, 具有记忆 L 的部分响应信号波形在匹配滤波器输出端产生一个相关的噪声序列, 满足当 $k>L$ 时, $E[v_m v_{m+k}] = 0$ 。在这种情况下, 可以改进用来执行网格搜索的维持比算法, 如第 10 章所述。

如果通过假定 $k>0$ 时 $E[v_m v_{m+k}] = 0$ 来忽略噪声的相关, 可以使度量计算得到简化。根据假定, 协方差矩阵 $\mathbf{C} = \sigma_v^2 \mathbf{1}_N$, 其中 $\sigma_v^2 = E[v_m^2]$, $\mathbf{1}_N$ 是 $N \times N$ 单位矩阵。在这种情况下, 式 (9-2-62) 简化为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{I}}_N &= \underset{\mathbf{I}_N}{\operatorname{argmin}} [(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)'(\mathbf{y}_N - \mathbf{B}_N)] \\ &= \underset{\mathbf{I}_N}{\operatorname{argmin}} \left[\sum_{m=1}^N \left(y_m - \sum_{k=0}^L x_k I_{m-k} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (9-2-63)$$

其中

$$B_m = \sum_{k=0}^L x_k I_{m-k}$$

及 $x_k = x(kT)$ 是部分信号响应波形的抽样值。在这种情况下, 每个网格节点上的度量计算具有如下形式

$$DM_m(\mathbf{I}_m) = DM_{m-1}(\mathbf{I}_{m-1}) + \left(y_m - \sum_{k=0}^L x_k I_{m-k} \right)^2 \quad (9-2-64)$$

式中, $DM_m(\mathbf{I}_m)$ 是在 $t = mT$ 时刻的距离度量, $DM_{m-1}(\mathbf{I}_{m-1})$ 是在 $t = (m-1)T$ 时刻的距离度量, 式 (9-2-64) 中右边的第二项表示根据新接收样值 y_m 计算度量的新增量。

正如 5.1.4 节所述, ML 序列检测器在检测每一个发送的信息符号中引入一个可变延时。在实用中应避免采用可变延时, 其方法是将幸存序列截断为 N_t 个最近的符号, 其中 $N_t \gg 5L$, 因而实现固定延时。当 $t = mT$ 时刻 M^L 个幸存序列与符号 I_{m-N_t} 不一致时, 可以在最可能的幸存序列中选择符号。如果 $N_t > 5L$, 这种截断引起的性能损失可以忽略不计。

9.2.4 有失真信道的信号设计

9.2.1 节和 9.2.2 节描述了理想信道条件下发送机调制滤波器和接收机解调滤波器的信号设计准则。本节将在信道使发送信号失真的条件下进行信号设计。假定已知信道频率响应 $C(f) (|f| \leq W)$, 且当 $|f| > W$ 时, $C(f) = 0$ 。选择滤波器响应 $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ 使检测器的错误概率最小。假定加性信道噪声是高斯的, 其功率谱密度为 $\Phi_{nn}(f)$ 。图 9-2-12 所示为此系统。

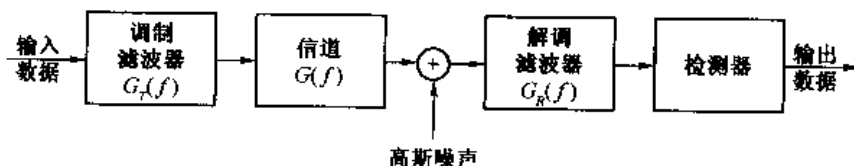


图 9-2-12 用于调制与解调滤波器设计的系统模型

解调器输出端的信号分量必须满足条件

$$G_T(f)C(f)G_R(f) = X_d(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (|f| \leq W) \quad (9-2-65)$$

式中 $X_d(f)$ 是调制器、信道和解调器三者级联的期望频率响应, t_0 是保证调制和解调滤波器物理可实现的必要延时。可以选用期望频率响应 $X_d(f)$ 在抽样时刻产生零 ISI 或者受控 ISI。我们研究通过选用 $X_d(f) = X_{rc}(f)$ 的零 ISI 的情况, 其中 $X_{rc}(f)$ 是具有任意滚降因子的升余弦谱。

解调滤波器输出端的噪声可以表示为

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t - \tau)g_R(\tau)d\tau \quad (9-2-66)$$

式中, $n(t)$ 是滤波器的输入。因为 $n(t)$ 是零均值、高斯的, 所以 $v(t)$ 也是零均值、高斯的, 且具有功率谱密度

$$\Phi_{vv}(f) = \Phi_{nn}(f) |G_R(f)|^2 \quad (9-2-67)$$

为简单起见, 研究二进制 PAM 传输。匹配滤波器的抽样输出为

$$y_m = x_0 I_m + v_m = I_m + v_m \quad (9-2-68)$$

式中, x_0 被归一化^① 成 1, $I_m = \pm d$ 。 v_m 表示噪声项, 是零均值、高斯的, 且方差为

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{nn}(f) |G_R(f)|^2 df \quad (9-2-69)$$

因此, 错误概率是

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d/\sigma_v}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = Q(\sqrt{d^2/\sigma_v^2}) \quad (9-2-70)$$

^① 通过设置 $x_0 = 1$ 及 $I_m = \pm d$, 用 x_0 的标度变换结合到参数 d 中。

使错误概率最小的方法是使比值 d^2/σ_v^2 最大,或等价为使噪信比 σ_v^2/d^2 最小。

我们来研究加性高斯白噪声且 $\phi_{nn}(f) = N_0/2$ 情况下的两种可能的解决方案。第一种方案是,假设在发送机中对总的信道失真进行预补偿,那么接收滤波器匹配于接收信号。在这种情况下,发送机和接收机滤波器的幅度特性为

$$\begin{aligned} |G_T(f)| &= \frac{\sqrt{X_{rc}(f)}}{|C(f)|} \quad (|f| \leq W) \\ |G_R(f)| &= \sqrt{X_{rc}(f)} \quad (|f| \leq W) \end{aligned} \quad (9-2-71)$$

信道频率响应 $C(f)$ 的相位特性也可以在发送机滤波器中进行补偿。由于这些滤波器的特性,平均发送功率为

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{E(I_m^2)}{T} \int_{-W}^W g_T^2(t) dt = \frac{d^2}{T} \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df \\ &= \frac{d^2}{T} \int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|^2} df \end{aligned} \quad (9-2-72)$$

因此,

$$d^2 = P_{av} T \left[\int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|G(f)|^2} df \right]^{-1} \quad (9-2-73)$$

接收滤波器输出端的噪声的 $\sigma_v^2 = N_0/2$, 因此检器的 SNR 为

$$\frac{d^2}{\sigma_v^2} = \frac{2P_{av}T}{N_0} \left[\int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|^2} df \right]^{-1} \quad (9-2-74)$$

另一种可选择的解决方案是,假设信道的补偿由发送机和接收机滤波器两者平均分摊,即

$$\begin{aligned} |G_T(f)| &= \frac{\sqrt{X_{rc}(f)}}{|C(f)|^{1/2}} \quad (|f| \leq W) \\ |G_R(f)| &= \frac{\sqrt{X_{rc}(f)}}{|C(f)|^{1/2}} \quad (|f| \leq W) \end{aligned} \quad (9-2-75)$$

$C(f)$ 的相位特性也可以由发送机和接收机滤波器两者平均分摊。在这种情况下,平均发送功率为

$$P_{av} = \frac{d^2}{T} \int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|} df \quad (9-2-76)$$

且在接收滤波器输出端的噪声方差为

$$\sigma_v^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|} df \quad (9-2-77)$$

因此,检测器的 SNR 为

$$\frac{d^2}{\sigma_v^2} = \frac{2P_{av}T}{N_0} \left[\int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|} df \right]^{-2} \quad (9-2-78)$$

由式(9-2-73)和式(9-2-78)可以看出,当用平均发送功率 P_{av} 来表示 $\text{SNR} d^2/\sigma_v^2$ 时,存在信道失真引起的损失。在滤波器由式(9-2-71)给定条件下,该损失为

$$10 \lg \int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|^2} df \quad (9-2-79)$$

而在滤波器由式(9-2-75)给定条件下,该损失为

$$10\lg\left[\int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|} df\right]^2 \quad (9-2-80)$$

可以看到,当 $|f| \leq W$, $C(f) = 1$ 时,信道是理想的,且

$$\int_{-W}^W X_{rc}(f) df = 1 \quad (9-2-81)$$

结果没有损失。在另一方面,当在 $|f| \leq W$ 带宽的某些频率范围内有幅度失真时, $|C(f)| < 1$,那么就会有 SNR 损失,该损失由式(9-2-79)和式(9-2-80)给出。有兴趣的读者,可以证明(见习题 9-30)式(9-2-75)给出的滤波器导致较小的 SNR 损失。

例 9-2-1 有一个二进制通信系统,以 4 800 b/s 的速率在信道上传输数据。信道的频率(幅度)响应为

$$|C(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/W)^2}} \quad (|f| \leq W) \quad (9-2-82)$$

式中, $W = 4\,800$ Hz。试求式(9-2-75)所确定的发送和接收滤波器。加性噪声是零均值高斯白噪声,其功率谱密度为 $\frac{1}{2}N_0 = 10^{-15}$ W/Hz。

因为 $W = 1/T = 4\,800$, 采用具有升余弦谱且 $\beta = 1$ 的信号脉冲,因此,

$$\begin{aligned} X_{rc}(f) &= \frac{1}{2}T[1 + \cos(\pi T|f|)] \\ &= T\cos^2\left(\frac{\pi|f|}{9\,600}\right) \end{aligned} \quad (9-2-83)$$

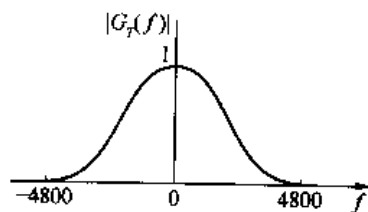


图 9-2-13 最佳发送机滤波器的频率响应

则

$$\begin{aligned} |G_T(f)| = |G_R(f)| &= \left[1 + \left(\frac{f}{4\,800}\right)^2\right]^{1/4} \cos\left(\frac{\pi|f|}{9\,600}\right), \\ |f| &\leq 4\,800 \end{aligned} \quad (9-2-84)$$

且其他 $|G_T(f)| = |G_R(f)| = 0$ 。图 9-2-13 示出了滤波器特性 $G_T(f)$ 。现在,可以确定为达到预定错误概率所需的发送能量 \mathcal{E} ,具体求解方法留给读者作为练习。

9.3 PAM 检测的错误概率

本节将对接收机在输入端存在加性高斯白噪声的情况下解调和检测 M 元 PAM 信号的性能进行评估。首先研究发送和接收滤波器 $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ 设计成零 ISI 的情况,然后研究将 $G_T(f)$ 和 $G_R(f)$ 设计成 $x(t) = g_T(t) * g_R(t)$ 是双二进制信号或是变型双二进制信号的情况。

9.3.1 具有零 ISI 的 PAM 检测的错误概率

在无 ISI 时,接收匹配滤波器输出端的接收信号样值为

$$y_m = x_0 I_m + v_m \quad (9-3-1)$$

式中

$$x_0 = \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df = \epsilon_g \quad (9-3-2)$$

且 v_m 是加性高斯噪声,其均值为零且方差为

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2} \epsilon_g N_0 \quad (9-3-3)$$

一般地, I_m 在 M 个可能的等间距、等概率幅度值中取其中一个。给定幅度电平后,要求错误概率。

在带限加性高斯白噪声且无 ISI 的信道条件下,对数字 PAM 错误概率的评估问题等同于 5.2 节中对 M 元 PAM 错误概率的评估,最终结果是

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q \left[\sqrt{\frac{2\epsilon_g}{N_0}} \right] \quad (9-3-4)$$

$\epsilon_g = 3\epsilon_{av}/(M^2-1)$ 。 $\epsilon_{av} = k\epsilon_{bav}$ 是每符号平均能量, ϵ_{bav} 是每比特平均能量。因此

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q \left[\sqrt{\frac{6(\log_2 M)\epsilon_{bav}}{(M^2-1)N_0}} \right] \quad (9-3-5)$$

该式与 5.2 节导出的 M 元 PAM 错误概率的形式完全相同(参见式(5-2-46))。本章对 PAM 的处理中,我们施加了附加的限制,即发送信号的带宽限制在信道带宽上。因此把发送信号脉冲设计成带限的且具有零 ISI。

相对而言,5.2 节研究的 PAM 信号无带宽限制。虽然如此,两种情况下的接收机(解调器和检测器)对于相应的发送信号都是最佳的(匹配滤波器)。因此,当信号脉冲设计成零 ISI 且信道不使发送信号失真时,带宽限制不会导致差错率性能的损失。

9.3.2 部分响应信号检测的错误概率

本节求采用双二进制和变型双二进制脉冲的数字 M 元 PAM 信号传输检测的错误概率。假定信道是具有加性高斯白噪声的理想带限信道。该通信系统的模型如图 9-3-1 所示。

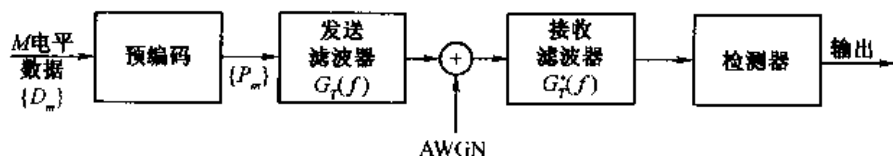


图 9-3-1 部分响应信号的调制器和解调器方框图

研究两种类型检测器。第一种是逐符号检测器,另一种是上节所述最佳 ML 序列检测器。

1. 逐符号检测器

在发送机中, M 电平数据序列 $\{D_m\}$ 被预编码,如前所述。预编码器的输出被映射到 M 个可能的幅度电平之一。具有频率响应 $G_T(f)$ 的发送滤波器的输出为

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g_T(t - nT) \quad (9-3-6)$$

部分响应函数 $X(f)$ 被均等地在发送和接收滤波器之间划分。因此,接收滤波器对发送脉冲匹配,且两个滤波器级联的频率特性为

$$|G_T(f)G_R(f)| = |X(f)| \quad (9-3-7)$$

在 $t = nT = n/2W$ 时刻对匹配滤波器输出抽样,其样值送至检测器。对于双二进制信号,匹配滤波器在抽样瞬时的输出可以表示为

$$y_m = I_m + I_{m-1} + v_m = B_m + v_m \quad (9-3-8)$$

式中, v_m 是加性噪声分量。类似地,对于变型双二进制信号,其匹配滤波器输出为

$$y_m = I_m - I_{m-2} + v_m = B_m + v_m \quad (9-3-9)$$

对于二进制传输,令 $I_m = \pm d$, 其中 $2d$ 是信号电平之间的距离。那么,相应的 B_m 值为 $(2d, 0, -2d)$ 。对于 M 元 PAM 信号传输,其中 $I_m = \pm d, \pm 3d, \dots, \pm (M-1)d$, 接收信号电平是 $B_m = 0, \pm 2d, \pm 4d, \dots, \pm 2(M-1)d$ 。因此,接收电平数为 $2M-1$, 标度因子 d 等价于 $x_0 = \xi_g$ 。

假定输入发送符号 $\{I_m\}$ 是等概的。那么,对于双二进制和变型双二进制信号,容易证明:在无噪声的情况下,接收的输出电平具有如下形式的(三角型)概率分布

$$P(B = 2md) = \frac{M - |m|}{M^2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (M-1)) \quad (9-3-10)$$

式中 B 是表示无噪声的接收电平, $2d$ 是任何两个相邻接收信号电平之间的距离。

发送信号在信道中传输时,受到零均值且功率谱密度为 $\frac{1}{2}N_0$ 的高斯白噪声相加而被恶化。

假定当加性噪声幅度超过距离 d 时出现符号差错。这一假定忽略了一个稀少事件,即幅度超过 d 的大噪声分量产生的接收信号电平也许会得出一个正确的符号判决。若二进制和双二进制信号噪声分量 v_m 是零均值高斯的,其方差为

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= \frac{1}{2}N_0 \int_{-W}^W |G_R(f)|^2 df \\ &= \frac{1}{2}N_0 \int_{-W}^W |X(f)|^2 df = 2N_0/\pi \end{aligned} \quad (9-3-11)$$

则符号错误概率的上边界为

$$\begin{aligned} P_M &< \sum_{m=-(M-2)}^{M-2} P(|y - 2md| > d | B = 2md) P(B = 2md) \\ &\quad + 2P[y + 2(M-1)d > d | B = -2(M-1)d] P[B = -2(M-1)d] \\ &= P(|y| > d | B = 0) \left\{ 2 \sum_{m=0}^{M-1} P[B = 2md] - P(B = 0) - P[B = -2(M-1)d] \right\} \\ &= (1 - M^{-2}) P(|y| > d | B = 0) \end{aligned} \quad (9-3-12)$$

但

$$\begin{aligned} P(|y| > d | B = 0) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \int_d^\infty e^{-x^2/2\sigma_v^2} dx \\ &= 2Q(\sqrt{\pi d^2/2N_0}) \end{aligned} \quad (9-3-13)$$

因此,平均符号错误概率的上边界为

$$P_M < 2(1 - M^{-2}) Q(\sqrt{\pi d^2/2N_0}) \quad (9-3-14)$$

式(9-3-14)中的标度因子 d 可以表示成平均发送功率而消去。对于 M 元 PAM 信号,发送电

平是等概的,发送滤波器输出端的平均功率为

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{E(I_m^2)}{T} \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df \\ &= \frac{E(I_m^2)}{T} \int_{-W}^W |X(f)|^2 df = \frac{4}{\pi T} E(I_m^2) \end{aligned} \quad (9-3-15)$$

式中 $E(I_m^2)$ 是 M 个信号电平的均方值,表示为

$$E(I_m^2) = \frac{1}{3} d^2 (M^2 - 1) \quad (9-3-16)$$

因此,

$$d^2 = \frac{3\pi P_{av} T}{4(M^2 - 1)} \quad (9-3-17)$$

将式(9-3-17)中的 d^2 值代入式(9-3-14),可得符号错误概率的上边界为

$$P_M < 2 \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) Q \left[\sqrt{\left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \frac{6}{M^2 - 1} \frac{\mathcal{E}_{av}}{N_0}} \right] \quad (9-3-18)$$

式中 \mathcal{E}_{av} 是平均发送符号能量,它可以用平均比特能量表示为 $\mathcal{E}_{av} = k \mathcal{E}_{bav} = (\log_2 M) \mathcal{E}_{bav}$ 。

式(9-3-18)中的 M 元 PAM 的错误概率表达式对双二进制和变型双二进制部分响应信号两种情况都适用。如果将这一结果与具有零 ISI 的 M 元 PAM 的错误概率比较,其中该 M 元 PAM 可以通过采用具有升余弦谱的信号脉冲得到,可看到双二进制或变型双二进制部分响应的性能损失 $(\frac{1}{4}\pi)^2$ 或 2.1 dB。这种 SNR 的损失是由于部分响应检测器是逐符号判决的,并且它忽视了在检测器输入端接收信号中的内在的记忆。

2. 最大似然序列检测器

ML 序列检测器通过网格来搜索最可能的发送序列 $\{I_m\}$,如 9.2.3 节所述。在搜索过程的每一级,检测器对每个节点上会聚的各条路径的度量进行比较,选择每个节点上最可能的路径。对该检测器的性能评估可以根据欧氏距离度量求错误事件概率来进行,正如对卷积码的软判决译码所做的。一般性的推导将在 10.1.4 节讨论。在双二进制和变型双二进制的情况下,可以证明,在准最佳逐符号检测器中,2.1 dB 的固有损失完全可由 ML 序列检测器挽回。

9.4 谱成形调制码

前文已述,通过选择发送信号脉冲 $g(t)$ 以及通过编码引入相关性的方法来控制和成形数字通信系统信号的功率谱密度,能克服信道失真和传输中的噪声。在信道编码之后加入谱成形编码,可使发送信号的谱与基带或等效低通信道的谱特性相匹配。

用做谱成形的码一般称做调制码,或线性码,或数据变换码。这样的码通常对进入调制器的比特序列施加约束,从而将相关性和记忆引入发送信号。本节要讨论的正是此类编码。

调制码通常用于磁记录、光记录和电缆系统中的数字通信,实现谱成形或将发送(或存储)基带信号中的直流分量消除或减到最小。在磁记录信道中,设计调制码的目的是增加记录波形转移之间的距离,减少符号间干扰的影响。

作为调制码应用的一个例子,研究一个磁记录系统,该系统的组成如图 9-4-1 所示。存储

的二进制数据序列用来产生一个写电流。该电流可以看做为“调制器”的输出。将信息序列映射到写电流波形最常用的方法是 NRZI, 如 4.3.2 节所述。我们知道, 在 NRZI 中只有当信息比特为 1 时, 才会发生幅度转移(从 A 到 $-A$, 或 $-A$ 到 A)。当信息比特为 0 时, 不发生转移, 即幅度电平仍保持与前一个信号间隔时相同。正幅度脉冲导致介质磁化成一个(方向)极性, 负脉冲将介质磁化成相反(方向)极性。

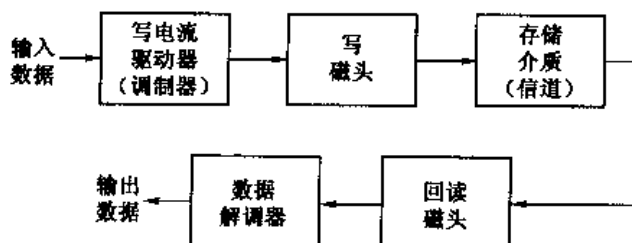


图 9-4-1 磁存储读/写系统的方框图

因为输入数据序列基本上是“1”和“0”等概的随机序列, 所以每一个数据比特电平从 A 到 $-A$ 或从 $-A$ 到 A 的转移概率为 $1/2$ 。正向转移(从 $-A$ 到 A)的回读信号是一个脉冲, 其数学模型为

$$g(t) = \frac{1}{1 + (2t/T_{50})^2} \quad (9-4-1)$$

式中 T_{50} 定义为该脉冲幅度电平 50% 处的宽度, 如图 9-4-2 所示。类似地, 负向转移(从 A 到 $-A$)的回读信号是脉冲 $-g(t)$ 。 T_{50} 值由介质的特征、读/写磁头和磁头到介质的距离确定。

假定写一个正向转移, 接着是一个负向转移。改变两个转移之间的时间间隔, 该间隔表示为 T_b (比特时间间隔)。图 9-4-3 说明了该回读信号脉冲, 它由 $g(t)$ 与 $-g(t - T_b)$ 叠加而成。参数 $\Delta = T_{50}/T_b$ 定义为归一化密度。比特转移越靠近 (T_b 小), 归一化密度值越大, 因此记录密度越大。注意, Δ 增加时, 回读信号的峰值幅度减小, 而且发生时移, 偏离期望时刻。换言之, 脉冲发生相互干扰, 从而限制了写的密度。这个问题作为设计调制码的动因, 调制码将原始数据序列变换(编码)成另一个序列, 该序列导致一个具有更大间距的幅度转移的写波形。例如, 如果使用 NRZI, 进入调制器的编码序列必须在“1”之间包含一个或多个“0”。

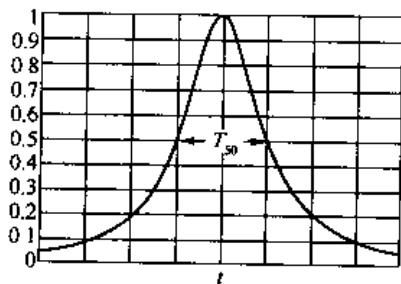


图 9-4-2 在磁记录系统中回读脉冲

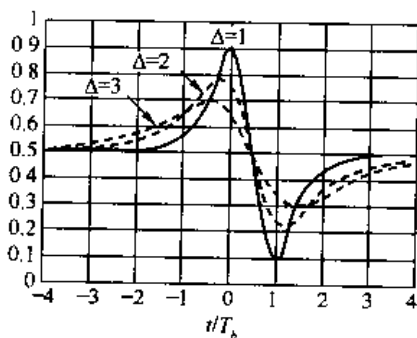


图 9-4-3 回读信号脉冲响应

在磁记录中遇到的第二个问题是要避免(或最小化)在已调信号(写电流)中含有直流成分, 这是由回读系统和有关电子器件的频率响应特性不同而造成的。这个问题可以通过改变(编码)进入调制器的数据序列来解决。能满足这些目标的一类码型就是下面将介绍的调制

码。

1. 游程长度受限码

在一个序列中连续“1”或“0”的数目受到限制的码型通常称为游程长度受限码。这种码型通常由两个参数来描述,如 d 和 κ ,其中 d 表示序列中两个“1”之间“0”的最小数目, κ 表示序列中两个“1”之间“0”的最大数目。采用 NRZI 调制时,在连续的“1”之间置放 d 个“0”的效果是将转移分开更远,从而减小信道对连续转移响应的叠加程度,因此减少了符号间干扰。将“0”的游程长度置于上限 κ ,能保证转移的发生有足够的频度,从而可从接收的已调信号中恢复符号定时信息。游程长度受限码通常称为 (d, κ) 码^①。

(d, κ) 码序列限制可以用有限状态顺序机来表示,它有 $\kappa + 1$ 个状态,记为 $S_i, 1 \leq i \leq \kappa + 1$,如图 9-4-4 所示。我们看到,输出数据比特“0”将序列从状态 S_i 转移到 $S_{i+1}, i \leq \kappa$,输出数据比特“1”将序列转移到状态 S_i 。只有当序列在状态 S_i 时 ($d + 1 \leq i \leq \kappa + 1$),编码器的输出比特才可能是“1”。当序列在状态 $S_{\kappa+1}$ 时,输出比特总是“1”。

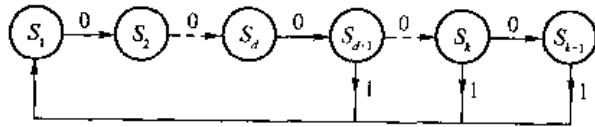


图 9-4-4 (d, κ) 码序列的有限状态顺序机

有限状态顺序机也可以用状态转移矩阵表示,记为 \mathbf{D} ,它是 $(\kappa + 1) \times (\kappa + 1)$ 方阵,其元素表示为 d_{ij} ,其中

$$d_{i1} = 1 \quad (i \geq d + 1)$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & (j = i + 1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (9-4-2)$$

例 9-4-1 求 $(d, \kappa) = (1, 3)$ 码的状态转移矩阵。 $(1, 3)$ 码有 4 个状态,由图 9-4-4,可得出其状态转移矩阵为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9-4-3)$$

任何 (d, κ) 码的一个重要参数是满足 (d, κ) 限制的一定长度 (如 n) 的序列的数目。当允许 n 增加时,满足 (d, κ) 限制的序列 $N(n)$ 的数目也增加。信息比特的数目可惟一地用 $N(n)$ 码序列表示,即

$$K = \lfloor \log_2 N(n) \rfloor$$

式中, $\lfloor x \rfloor$ 表示 x 中包含的最大整数。那么,最大码率为 $R_c = k/n$ 。 (d, κ) 码的容量定义为

$$C(d, \kappa) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 N(n) \quad (9-4-4)$$

^① 实际上,通常称之为 (d, k) 码,其中 k 是“0”的最大游程长度。我们用希腊字母 κ (kappa) 代替 k ,以避免与 k 混淆。

显然, $C(d, \kappa)$ 是在 (d, κ) 限制条件下能达到的最大可能速率。香农 (Shannon, 1948 年) 证明了容量

$$C(d, \kappa) = \log_2 \lambda_{\max} \quad (9-4-5)$$

式中, λ_{\max} 是状态转移矩阵 \mathbf{D} 的最大实特征值。

例 9-4-2 求 $(d, \kappa) = (1, 3)$ 码的容量。利用例 9-4-1 中 $(1, 3)$ 码的状态转移矩阵, 可得到

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \end{aligned} \quad (9-4-6)$$

解此多项式, 可得其最大实根是 $\lambda_{\max} = 1.4656$ 。因此, 容量 $C(1, 3) = \log_2 \lambda_{\max} = 0.5515$ 。

表 9-4-1 容量 $C(d, \kappa)$ 与游程参数 d 和 κ 的关系

κ	$d=0$	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$	$d=6$
2	0.879 1	0.405 7					
3	0.946 8	0.551 5	0.287 8				
4	0.975 2	0.617 4	0.405 7	0.223 2			
5	0.988 1	0.650 9	0.465 0	0.321 8	0.182 3		
6	0.994 2	0.669 0	0.497 9	0.374 6	0.226 9	0.154 2	
7	0.997 1	0.679 3	0.517 4	0.405 7	0.314 2	0.228 1	0.133 5
8	0.998 6	0.685 3	0.529 3	0.425 1	0.343 2	0.270 9	0.199 3
9	0.999 3	0.688 8	0.536 9	0.437 6	0.362 0	0.297 9	0.238 2
10	0.999 6	0.690 9	0.541 8	0.446 0	0.374 6	0.315 8	0.263 3
11	0.999 8	0.692 2	0.545 0	0.451 6	0.383 3	0.328 5	0.280 4
12	0.999 9	0.693 0	0.547 1	0.455 5	0.389 4	0.336 9	0.292 4
13	0.999 9	0.693 5	0.548 5	0.458 3	0.393 7	0.343 2	0.301 1
14	0.999 9	0.693 8	0.549 5	0.460 2	0.396 8	0.347 8	0.307 4
15	0.999 9	0.693 9	0.550 1	0.461 5	0.399 1	0.351 3	0.312 2
∞	1.000	0.694 2	0.551 5	0.465 0	0.405 7	0.362 0	0.328 2

表 9-4-1 给出了 (d, κ) 码在 $0 \leq d \leq 6$ 和 $2 \leq \kappa \leq 15$ 时的容量。当 $d \geq 3$ 而 κ 为任何值时, $C(d, \kappa) < 1/2$ 。在磁记录中最常用的码取 $d \leq 2$, 因此其速率 R_c 至少为 $1/2$ 。

下面讨论游程受限码的构造。一般地, (d, κ) 码可以构造为固定长度码或可变长度码。

在固定长度码中,每个比特或 k 个比特组经编码后成为 $n > k$ 比特的码组。

在原理上,固定长度码的构造是直接的。对于给定的码组长度 n ,可以从 2^n 个码字中选择满足特定游程限制的子集,由该子集可消除连续时不满足游程限制的码字。因此得到一组码字,它们满足该限制,并且可用于输入数据比特到编码器的映射。编码和译码的操作可采用查表的方法来进行。

例 9-4-3 构造一个 $d=3, \kappa=2$ 且长度 $n=3$ 的码,求其效率。列出所有码字,我们找到下列 5 种满足 $(0,2)$ 限制的码: $(010), (011), (101), (110), (111)$ 。在这些码字中任选 4 个,针对数据比特对 $(00,01,10,11)$ 编码,得到一个满足 $(0,2)$ 限制的码率为 $k/n=2/3$ 的码。

此例中的固定长度码不是很有效。因为容量 $C(0,2)=0.879\ 1$,所以该码的效率为

$$\text{效率} = \frac{R_c}{C(d, \kappa)} = \frac{2/3}{0.879\ 1} = 0.76$$

当然,增加分组长度 n 可以构造更好的 $(0,2)$ 码。

下例将对“0”的最大长度不加限制。

例 9-4-4 构造一个 $d=1, \kappa=\infty$ 且长度 $n=5$ 的码,此时对连续“0”的数目不加限制。为了构造该码,从 32 个可能的码字中选择能满足 $d=1$ 限制的码字。有 8 个这样的码字存在,这意味着可对每个码字的 3 个信息比特进行编码,如表 9-4-2 所示。注意,每一个码字的第一个比特为“0”,最后一个比特是“0”或“1”。因此,这些码字连续时能满足 $d=1$ 的限制。该码的码率为 $R_c=3/5$,与表 9-4-1 所示的容量 $C(1, \infty)=0.694\ 2$ 比较,该码的效率为 0.864,这是完全可以接受的。

表 9-4-2 固定长度 $d=1, \kappa=\infty$ 码

输入数据比特	输出编码序列
0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1	0 0 0 0 1
0 1 0	0 0 0 1 0
0 1 1	0 0 1 0 0
1 0 0	0 0 1 0 1
1 0 1	0 1 0 0 0
1 1 0	0 1 0 0 1
1 1 1	0 1 0 1 0

上述两个例子描述的码构造方法产生的固定长度码 (d, κ) 是状态独立的。由于状态独立,固定长度码可以是连续的而不违反 (d, κ) 的限制。一般情况下,固定长度状态独立 (d, κ) 码需要有大的分组长度,也有例外,如上例中 d 比较小。考虑状态相关和可变长度码字,较简单(较短长度)的码字也是可能的。下面研究编码器的输入码组和输出码组是可变长度的码。为了使该码在接收机中是惟一可译码,可变长度码应当满足前缀条件,如第 3 章所述。

例 9-4-5 一个非常简单的惟一可译且可变长度 $d=0, \kappa=2$ 的码是

$0 \rightarrow 01$
 $10 \rightarrow 10$
 $11 \rightarrow 11$

上例中的码具有固定的输出分组长度,输入分组长度可变。一般地,输入和输出分组都可以是可变的,如下例所述。

例 9-4-6 构造一个 $(2,7)$ 可变分组长度码。该码的构造方法肯定不是惟一的,也不是普通的。之所以以此为例,是因为 $(2,7)$ 码已被 IBM 广泛应用于磁盘存储系统中。表 9-4-3 列出了该码。输入 2,3 和 4 个比特的数据分组分别被映射为输出 4,6 和 8 个数据比特分组,因此,码率是 $R_c = 1/2$ 。因为这是所有码字的码率,所以该码称为固定速率码,其效率为 $0.5/0.5174 = 0.966$ 。注意,这个码满足前缀条件。

在磁记录中广泛应用的另一种码是表 9-4-4 所示码率为 $1/2, (d, \kappa) = (1, 3)$ 的码。可以看到,当信息比特为“0”时,若前一个输入比特是“0”,则第一个输出比特是“1”;若前一个输入比特是“1”,则第一个输出比特是“0”。当信息比特为“1”时,编码器的输出是“01”。该码的译码较简单。2 比特分组的第一个比特冗余,可被丢弃;第二个比特是信息比特。该码通常称为密勒码(Miller Code)。可以看到,这是一个状态相关码,可由图 9-4-5 所示的状态图描述。图中有两个标为 S_1 和 S_2 的状态,其转移如数字所示。当编码器处于状态 S_1 时,输入比特“1”导致编码器停留在状态 S_1 且输出为“01”,记为 $1/01$;如果输入比特是“0”,编码器进入状态 S_2 且输出“00”,记为 $0/00$ 。类似地,如果编码器处于状态 S_2 ,输入比特“0”不会引起转移且编码器输出为“10”。另一方面,如果输入比特是“1”,编码器进入状态 S_1 且输出“01”。图 9-4-6 所示为密勒码的网格。

表 9-4-3 可变长度 $(2,7)$ 码的码本

输入数据比特	输出编码序列
1 0	1 0 0 0
1 1	0 1 0 0
0 1 1	0 0 0 1 0 0
0 1 0	0 0 1 0 0 0
0 0 0	1 0 0 1 0 0
0 0 1 1	0 0 1 0 0 1 0 0
0 0 1 0	0 0 0 0 1 0 0 0

表 9-4-4 密勒码 $(1,3)$ 的编码器

输入数据比特	输出编码序列
0	x 0
1	0 1

$x=0$, 若先前输出比特是 1

$x=1$, 若先前输入比特是 0

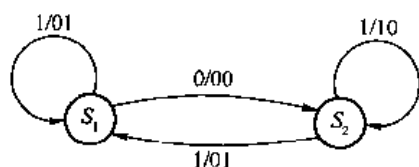


图 9-4-5 $d=1, \kappa=3$ (密勒) 码的状态图

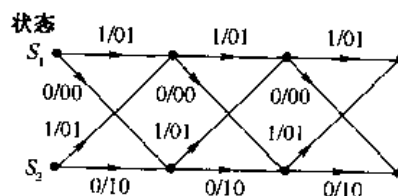


图 9-4-6 $d=1, \kappa=3$ (密勒) 码的网格

2. 编码比特到信号波形的映射

调制器将 (d, κ) 编码器的输出序列映射成信号波形,以便在信道上传输。如果二进制数字“1”映射成幅度为 A 的矩形脉冲,而二进制数字“0”映射成幅度为 $-A$ 的矩形脉冲,其结果是 (d, κ) 编码的NRZ已调信号。注意,矩形脉冲的持续时间是 $T_c = R_c / R_b = R_c T_b$,其中 R_b 是进入编码器的信息(比特)速率, T_b 是相应的(未编码)比特间隔, R_c 是 (d, κ) 码的码率。

当 (d, κ) 码是码率为 $R_c = k/n$ 的状态独立固定长度码时,可以认为每 n 个比特分组生成一个持续时间为 nT_c 的信号波形。因此,有 $M = 2^k$ 个信号波形,每一个波形对应于 2^k 个可能的 k 比特数据分组中的一个。这些已编码波形具有式(4-3-6)和式(4-3-38)所示的一般形式。在这种情况下,连续的波形传输之间没有相关性。

与前述情况相比,当NRZI被使用且(或者) (d, κ) 码是状态相关的时候,调制信号不再是无记忆的。下面研究编码比特映射成NRZI信号波形的效果。

NRZI信号中的状态相关性是信息序列的差分编码引起的。差分编码是一种预编码,其数学描述为

$$p_k = d_k \oplus p_{k-1}$$

式中 $\{d_k\}$ 是进入预编码器的二进制序列, $\{p_k\}$ 是预编码器输出的二进制序列, \oplus 表示模2加。该编码可以用图9-4-7(a)所示的状态图来表征。序列 $\{p_k\}$ 由NRZ发送。因此,当 $p_k = 1$ 时,调制器输出幅度为 A 的矩形脉冲;当 $p_k = 0$ 时,调制器输出幅度为 $-A$ 的矩形脉冲。当将信号波形附加在图9-4-7(a)所示的状态图上时,得到相应的状态图如图9-4-7(b)所示,图9-4-7(c)所示为相应的网格。

当用一个NRZI调制器跟随一个状态相关编码器输出时,可以简单地将具有预编码的 (d, κ) 码的两个状态图合并成一个单状态图。相应的网格可以进行类似的合并。下例说明密勒码之后跟随NRZI调制的处理方法。

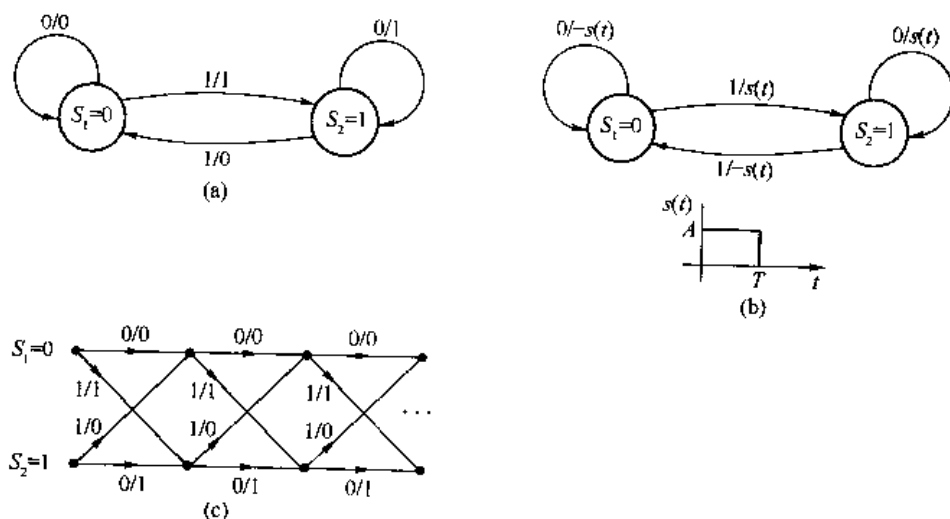


图 9-4-7 NRZI 信号的状态和网格图

例 9-4-7 求下述组合情况的状态图:(1,3)密勒码之后跟随 NRZI 调制中固有的预编

码。因为(1,3)密勒码有两个状态,预编码器也有两个状态,所以组合的编码器有4个状态,记为 $(S_M, S_N) = (\sigma_1, s_1), (\sigma_1, s_2), (\sigma_2, s_1), (\sigma_2, s_2)$,其中 $S_M = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ 表示密勒码的两个状态, $S_N = \{s_1, s_2\}$ 表示NRZI预编码器的两个状态。密勒码编码器对于每个数据输入比特产生两个输出比特,再经预编码产生两个预编码器的输出比特。结果的状态图如图9-4-8所示,图中第一个比特表示进入密勒编码器的信息比特,之后的两个比特表示预编码器相应的输出。

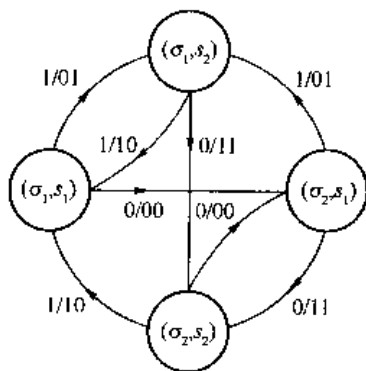


图 9-4-8 密勒码后跟随预编码器的状态图

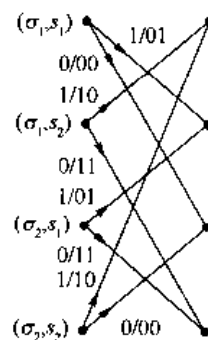


图 9-4-9 密勒码后跟随预编码器的网格图的一级

密勒预编码序列的网格图可直接由组合状态图或两种码的网格的组合得到。这种组合的结果是四状态网格,其中一级如图9-4-9所示。

读者可试着证明由密勒预编码序列的每一对比特映射到一个NRZ信号得到的4个信号波形是双正交的,并证明结果的已调信号波形与4.3.2节所述的延迟调制相同。

从一个状态相关、游程长度受限码的状态图,可以得到转移概率矩阵,如4.3.2节所述。也可求出码的功率谱密度,如4.4.3节所述。

9.5 文献与参考资料

奈奎斯特(Nyquist, 1928年)对带宽受限信道的信号设计进行了开拓性的研究。二进制部分响应信号最初由莱恩德(Lender, 1963年)提出,后来由克莱兹姆(Kretzmer, 1966年)推广到一般情况。其他早期的研究工作,如处理符号间干扰以及在ISI限制条件下发送机和接收机的最佳化,是由格斯特与戴蒙德(Gerst和Diamond, 1961年)、塔夫茨(Tufts, 1965年)、史密斯(Smith, 1965年)及伯格与塔夫茨(Berger和Tufts, 1967年)等人完成的。马索(Mazo, 1975年)和福西里(Foschini, 1984年)研究了“比奈奎斯特更快”的传输。

调制码首先由香农(Shannon, 1948年)提出。关于游程长度可变码的构造的早期研究成果可以在一些学者的论文中找到,如福雷曼和怀纳(Freimon和Wyner, 1964年)、加博尔(Gabor, 1967年)、佛郎纳则克(Franaszek, 1968年, 1969年, 1970年)、唐和巴尔(Tang和Bahl, 1970年)以及雅可比(Jacoby, 1977年)等人的论文。其他的研究成果可以在阿德勒(Adler, 1983年)以及卡拉伯德和西格尔(Karabed和Siegel, 1991年)等人的论文中找到。对游程长度受限码的研究主要由磁记录和光记录的应用研究推动。伊明克(Immink, 1990年)发表了一篇关于游程长度受限码的论文,很有指导意义。西格尔和沃尔夫(Siegel & Wolf, 1991年)的论文给出了关于存储信道调制和编码的指导性论述。最近伊明克等人(Immink et al., 1998年)

发表了存储系统的调制和编码的综述论文。

习题

- 9-1 如果信道对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$ 为 $Kx(t-t_0)$, 其中 K 和 t_0 是常数, 那么称该信道为无失真的。试证明如果信道的频率响应为 $A(f)e^{j\theta(f)}$, 其中 $A(f)$ 和 $\theta(f)$ 都是实的, 那么信道无失真传输的充分必要条件为 $A(f)=K$ 和 $\theta(f)=2\pi ft_0 \pm n\pi, n=0,1,2,\dots$

- 9-2 式(9-2-26)给出了升余弦谱特性。

(a) 试证明相应的冲激响应为

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \frac{\cos(\beta\pi t/T)}{1-4\beta^2 t^2/T^2}$$

(b) 当 $\beta=1$ 时, 试求 $x(t)$ 的希尔伯特变换。

(c) 试问 $x(t)$ 是否具有 $x(t)$ 那样的适宜于数据传输的特性? 请解释。

(d) 试求 $x(t)$ 产生的 SSB 抑制载波信号的包络。

- 9-3 (a) 试证明(泊松求和公式)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t)h(t-kT) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T}\right)G\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

提示: 将下列周期性因式进行傅里叶级数展开

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT)$$

(b) 利用(a)得到的结果, 证明以下泊松求和公式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T}\right) \quad (\text{i})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{n}{T}\right) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T}\right) \quad (\text{ii})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) \exp(-j2\pi kTf) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (\text{iii})$$

(c) 利用泊松求和公式, 推导无符号间干扰的条件(奈奎斯特准则)。

- 9-4 假设一个数字通信系统采用高斯形脉冲

$$x(t) = \exp(-\pi a^2 t^2)$$

为了减小符号间干扰, 要求 $x(T)=0.01$, 其中 T 是符号间隔。脉冲 $x(t)$ 的带宽 W 定义为 $X(W)/X(0)=0.01$ 时的 W 值, 其中 $X(f)$ 为 $x(t)$ 的傅里叶变换。试求 W , 并与 100% 滚降升余弦谱的带宽相比较。

- 9-5 试证明具有平方根升余弦谱特性的滤波器的冲激响应为

$$x_p(t) = \frac{(4\beta t/T) \cos[\pi(1+\beta)t/T] + \sin[\pi(1-\beta)t/T]}{(\pi t/T)[1-(4\beta t/T)^2]}$$

- 9-6 希望实现一个(离散时间)有限冲激响应(FIR)滤波器, 该滤波器能提供平方根升余弦谱成形。该 FIR 滤波器的系数是习题 9-5 给出的时间响应的抽样值, 其中抽样时刻为 $t=kT/2, k=0, \pm 1, 2, \dots, \pm N$ 。

(a) 若取 $N=10, 15$ 和 20 且滚降因子 $\beta=1/2$ 时, 试求该截短滤波器响应对特性的影

响。滤波器的频率响应按下式计算

$$X_{sr}(\omega) = \sum_{n=-N}^N x(nT_s) e^{-j\omega nT_s}$$

式中 $T_s = T/2$ 。

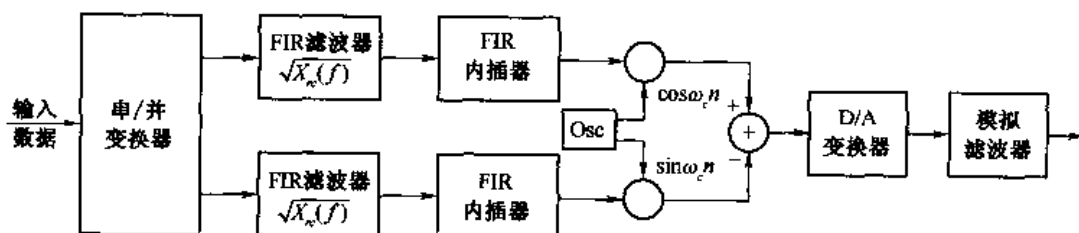
(b) 试画出 $N=10, 15$ 和 20 时三种滤波器的谱特性, 并将所得结果与理想平方根升余弦谱进行比较。

9-7 图 P9-7 示出了 QAM 和 PSK 调制器和解调器的方框图, 其中对已调信号进行数字合成和数字解调。FIR 滤波器具有平方根升余弦谱特性, 抽样速率为 $2/T$, 符号速率 $1/T = 2400$ 符号/s。FIR 内插器使用的抽样速率为 $6/T$, 且设计成线性相位 FIR 滤波器以通过期望的信号谱。

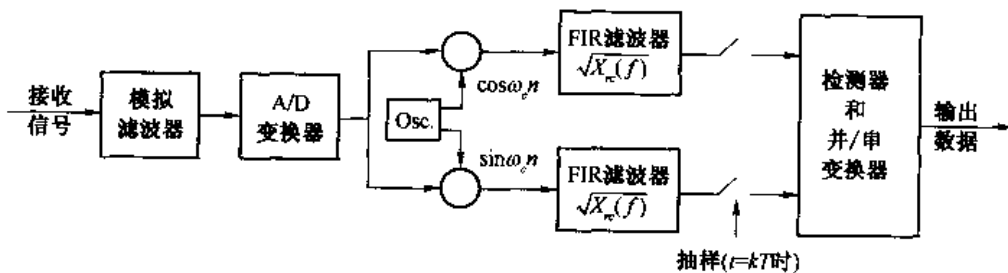
(a) 编写软件程序来实现图 P9-7 的数字调制器。所取的参数如下: 滚降因子 $\beta = 0.25$, FIR 成形滤波器的长度 = 21, FIR 内插的长度 = 11, 载波频率 $f_c = 1800$ Hz。

(b) 产生 5000 个样值的数字信号序列 $x_d(n)$, 计算并画出这个已调信号功率谱密度。

(c) 重复(b)再做 5 次迭代。然后, 在总共 6 次信号记录数据上计算平均功率谱。对所得结果进行评论。



(a) QAM 或 PSK 调制器



(b) QAM 或 PSK 解调器

图 P9-7

9-8 (无载波 QAM 或 PSK 调制解调器) 有一 QAM 或 M 元 PSK ($M \geq 4$) 信号在载频 f_c 上传输, 其中载波与基带信号的带宽相当。带通信号可以表示为

$$s(t) = \text{Re} \left[\sum_n I_n g(t - nT) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

(a) 试证明 $s(t)$ 可以表示为

$$s(t) = \text{Re} \left[\sum_n I'_n Q(t - nT) \right]$$

式中 $Q(t)$ 定义为

$$Q(t) = q(t) + j\hat{q}(t)$$

$$qt = g(t)\cos 2\pi f_c t$$

$$\hat{q} = g(t)\sin 2\pi f_c t$$

且 I'_n 是相位旋转符号, 即 $I'_n = I_n e^{j2\pi f_c nT}$ 。

(b) 采用响应为 $q(t)$ 和 $\hat{q}(t)$ 的 FIR 滤波器, 画出调制器和解调器实现的方框图。不需要用混频器在调制器中将信号搬移到带通以及在解调器中再搬移到基带。

- 9-9 (无载波幅度或相位[CAP]调制)在有线数据传输的某些实际应用中,发送信号的带宽与载波频率相当。在这样的系统中,有可能将基带信号与载波分量混频这一级取消,带通信号可以直接合成,方法是在 FIR 成形滤波器实现中嵌入载波分量。因此,调制解调器的实现如图 P9-9 的方框图所示,其中 FIR 成形滤波器的冲激响应为

$$q(t) = g(t)\cos 2\pi f_c t$$

$$\hat{q}(t) = g(t)\sin 2\pi f_c t$$

且 $g(t)$ 脉冲具有平方根升余弦谱特性。

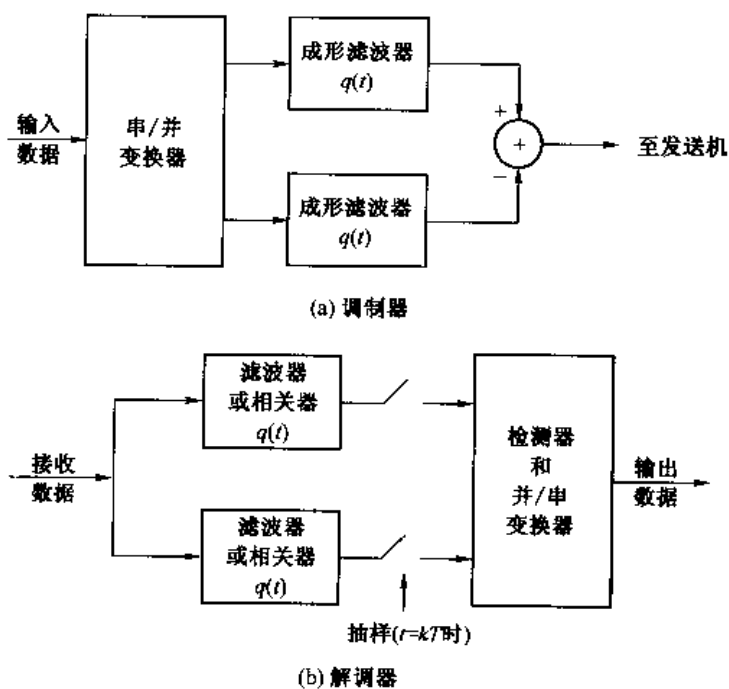


图 P9-9

(a) 试证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(t)\hat{q}(t)dt = 0$$

并证明该系统可以用来传输二维信号星座。

(b) 试问在什么样的条件下,这种 CAP 调制解调器与习题 9-8 所述的无载波 QAM/PSK 调制解调器相同。

- 9-10 带宽为 W 的带限信号可以表示为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin[2\pi W(t - n/2W)]}{2\pi W(t - n/2W)}$$

(a) 针对下列情况求谱 $X(f)$, 并绘出 $|X(f)|$

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_n = 0, \quad n \neq 0, 1, 2 \quad (\text{i})$$

$$x_{-1} = -1, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = -1, \quad x_n = 0, \quad n \neq -1, 0, 1 \quad (\text{ii})$$

(b) 对于以上两种情况, 绘出 $x(t)$ 。

(c) 如果采用以上两种信号来进行二进制信号传输, 试求在抽样时刻 $t = nT = n/2W$ 时可能的接收电平数目。求各种接收电平出现的概率。假定发送机的二进制数字是等概的。

9-11 在 4 kHz 的带通信道上传送速率为 9 600 b/s 的数据。如果信道中的加性零均值高斯噪声的谱密度为 $N_0/2 = 10^{-10} \text{ W/Hz}$, 试设计一个 QAM 调制方案, 并求达到 10^{-6} 误比特率的平均功率。采用的信号脉冲具有滚降因子至少为 50% 的升余弦谱。

9-12 音带电话(带通)信道带宽为 4 kHz, 试求下列调制方法在该信道上传输的比特率:
(a) 二进制 PAM; (b) 四相 PSK; (c) 8 点 QAM; (d) 采用相干检测的二进制正交 FSK;
(e) 采用非相干检测的正交 4-FSK; (f) 采用非相干检测的正交 8-FSK。假设 (a) ~ (c) 中发送脉冲的谱为 50% 滚降升余弦谱。

9-13 有一个理想音带电话线信道具有频率范围 600 ~ 3 000 Hz 的带通频率响应特性。

(a) 设计一个 $M=4$ PSK (正交 PSK 或 QPSK) 系统来传送速率为 2 400 b/s 的数据, 载频 $f_c = 1 800 \text{ Hz}$ 。采用升余弦的谱特性。试画出系统的方框图, 并描述每个方框的作用。

(b) 比特率改为 $R = 4 800 \text{ b/s}$, 试针对 8-QAM 信号重复 (a)。

9-14 音带电话信道可以通过 300 ~ 3 300 Hz 频带的所有频率。设计一个调制解调器(MODEM), 其符号传输速率为 2 400 符号/s, 而目标是 9 600 b/s。试选择一个合适的 QAM 信号星座图、载波频率及具有升余弦谱的滚降因子, 升余弦谱利用整个频带。试画出发送信号脉冲的谱, 并指出重要的频率点。

9-15 为音带(3 kHz)信道设计一个通信系统。当发送机功率 $P_s \approx -3 \text{ dBW}$ 时, 要求检测器的接收 SNR 为 30 dB。如果系统的带宽扩大到 10 kHz, 同时要保持检测器有同样的 SNR, 试求这时的 P_s 值。

9-16 试证明: 具有式(9-2-26)给出的升余弦谱的脉冲对取任何值的滚降因子 β 都能满足式(9-2-13)确定的奈奎斯特准则。

9-17 试证明: 不论 β 为何值, 式(9-2-26)给出的升余弦谱都满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_{rc}(f) df = 1$$

提示: X_{rc} 满足式(9-2-13)给出的奈氏准则。

9-18 奈奎斯特准则给出了产生零 ISI 的脉冲 $x(t)$ 的谱 $X(f)$ 的充要条件。试证明: 对于带限于 $|f| < 1/T$ 的任何脉冲, 如果 $\text{Re}[X(f)]$ (当 $f > 0$) 由一个矩形函数加上一个在 $f = 1/2T$ 处的任意奇函数组成, 并且 $\text{Im}[X(f)]$ 为一个在 $f = 1/2T$ 处的任意偶函数, 就能满足零 ISI 条件。

9-19 音带电话信道在 $300 \text{ Hz} < f < 3 000 \text{ Hz}$ 频率范围内具有带通特性。

(a) 要求达到 9 600 b/s 的信号传输, 试选择符号速率和一个功率有效的星座图。

(b) 如果发送脉冲 $g(t)$ 为平方根升余弦脉冲, 试求滚降因子。假定信道具有理想的频率响应特性。

- 9-20 为在带宽 $W = 2400$ Hz 的理想信道上传送数字信息, 设计一个 M 元 PAM 系统, 比特率为 14400 b/s。当采用双二进制信号脉冲时, 试求发送的点数和接收信号的点数, 再求为达到 10^{-6} 错误概率所需的 ε_b 。加性噪声是零均值高斯噪声, 其功率谱密度为 10^{-4} W/Hz。

- 9-21 如图 P9-21 所示, 通过激励一个具有 50% 滚降因子的升余弦形滤波器, 再对一个正弦载波进行 DSB/SC 幅度调制, 从而产生二进制 PAM 信号, 比特率为 2400 b/s。

(a) 试求已调二进制 PAM 信号的频谱并画出来。

(b) 试画出接收信号最佳解调器/检测器的方框图, 该接收信号等于发送信号加上加性高斯白噪声。

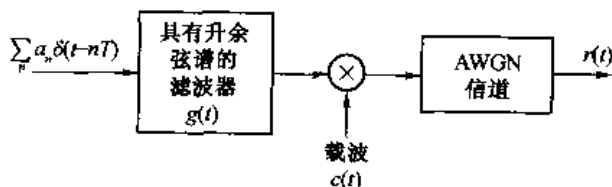


图 P9-21

- 9-22 序列 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 的元素为独立二进制随机变量, 其取值为 ± 1 且等概。用该数据序列调制图 P9-22(a) 中的基本脉冲 $g(t)$ 。已调制信号为

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT)$$

(a) 试求 $X(t)$ 的功率谱密度。

(b) 如果用 $g_1(t)$ (如图 9-22(b) 所示) 取代 $g(t)$, 试问 (a) 中的功率谱发生怎样的变化。

(c) 假设在 (b) 中要在 $f = 1/3T$ 处引入一个谱零点, 这可以采用预编码 $b_n = a_n + \alpha a_{n-3}$ 实现。试求 α 值。

(d) 如果想要最终的功率谱在 $1/3T \leq |f| \leq 1/2T$ 上恒等于零, 问能否采用下列形式的预编码: $b_n = a_n + \sum_{i=1}^N \alpha_i a_{n-i}$, 其中 N 为有限的, 使得频谱满足以上要求。如果能, 如何满足? 如果不能, 为什么?

提示: 利用解析函数的性质。

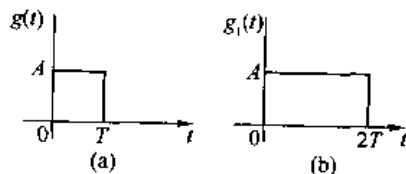


图 P9-22

- 9-23 考虑在音带电话信道上进行 PAM 数据传输, 信道带宽为 3000 Hz。试问符号速率如何作为过剩带宽的函数而变化? 针对以下过剩带宽求符号速率: 25%, 33%, 50%,

67%, 75% 和 100%。

- 9-24 输入到预编码器的二进制序列为10010110010,其输出用来调制一个双二进制发送滤波器。试建立一个形如表 9-2-1 的表,显示预编码序列、发送幅度电平、接收信号电平和译码序列。
- 9-25 对于变型双二进制信号脉冲,重做 9-24 题。
- 9-26 如果所期望的部分响应当 $n=0$ 时为模 M 零,那么该部分响应的预编码器将不能工作。例如,研究如下 $M=2$ 的期望的响应

$$x(nT) = \begin{cases} 2 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ -1 & (n=2) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

试问为什么该响应不能进行预编码。

- 9-27 图 P9-27 所示为一个 RC 低通滤波器,其中 $\tau = RC = 10^{-6}$ 。
- (a) 试求该滤波器的作为频率函数的包络(群)延时,并画出图形。
- (b) 假设该滤波器的输入是一个带宽为 $\Delta f = 1\text{kHz}$ 的低通信号,试求 RC 滤波器对该信号的影响。

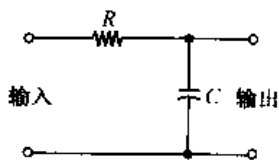


图 P9-27

- 9-28 微波无线电信道的频率响应为:

$$C(f) = 1 + 0.3\cos 2\pi fT$$

试推导发送和接收滤波器的频率响应特性,要求以速率 $1/T$ 符号/s 传输时 ISI 为零,且具有 50% 的过剩带宽。假定加性噪声谱是平坦的。

- 9-29 $M=4\text{PAM}$ 调制用于 9 600 b/s 的信号传输,信道的频率响应为

$$C(f) = \frac{1}{1 + j(f/2400)}$$

其中 $|f| \leq 2400$, 且当 f 为其他值时, $C(f) = 0$ 。加性噪声是零均值高斯白噪声且功率谱密度为 $\frac{1}{2} N_0 W/\text{Hz}$ 。试求最佳发送和接收滤波器的(幅度)频率响应特性。

- 9-30 试用柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式证明:式(9-2-75)给出的发送和接收滤波器使噪声信号比 σ_v^2/d^2 最小,其中 σ_v^2 为式(9-2-69)给出的噪声功率,该式中 $\Phi_m(f) = N_0/2$ 。

- 9-31 假设信道频率响应为

$$C(f) = \begin{cases} 1 & (|f| \leq W/2) \\ \frac{1}{2} & (W/2 < |f| < W) \end{cases}$$

试分别针对式(9-2-71)和式(9-2-75)给出的滤波器,根据式(9-2-79)和式(9-2-80)求信道所引起的 SNR 损失。并问哪种滤波器的损失较小。

- 9-32 试求一个(0,1)游程长度受限码的容量,并与一个(1,∞)码的容量比较,解释其关系。
- 9-33 为不能通过直流的信道设计一种三进制信号。二进制信息序列的传输如下进行:“1”映射为正脉冲或负脉冲,“0”则不发送脉冲。因此,对于“1”的传输,脉冲的极性是交替的,这称做 AMI(交替传号转换)码。试求该码的容量。

- 9-34 习题9-33中的 AMI 码可以用运行数字和(RDS)来描述,其约束条件是 RDS 只能取 0 和 +1 两种值。试描述之。
- 9-35 ($kBnT$ 码)习题 9-33 中的 AMI 码是一种“伪三进制”码,因为它采用三进制符号表传送 1 比特/符号,容量应为 $\log_2 3 = 1.58$ 比特。这种码不能提供充分的谱成形,采用 $kBnT$ 分组码可得到较好的谱成形。其中 k 表示一个码组中信息比特的个数, n 代表三进制符号的个数。对于每个 n , 选择最大可能的 k , 得到下表

k	n	码
1	1	1B1T
3	2	3B2T
4	3	4B3T
6	4	6B4T

试确定这些码的效率,即计算码的比率,用比特/符号除以 $\log_2 3$ 。注意,1B1T 码即 AMI 码。

- 9-36 本习题是关于两个 (d, κ) 码的容量的。
- (a) 试求一个 (d, κ) 码的容量,已知其状态转移阵为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) 重复(a),且

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) 试说明(a)和(b)的不同之处。

- 9-37 一种简化的电报码模型由两个符号组成(Blahut, 1990 年)。点(dot)由一个时间单位的线路闭合后接一个时间单位的线路开启组成,划(dash)由 3 个时间单位的线路闭合后接一个时间单位的线路开启组成。
- (a) 将这种码看作等持续时间符号约束码,试给出约束条件。
- (b) 试求状态转移矩阵。
- (c) 试求其容量。

- 9-38 图 P9-38 给出了一种游程长度受限码的状态图,试求其状态转移矩阵,并画出相应的网格图。

- 9-39 图 P9-39 为 $(2, 7)$ 游程长度受限码的状态图,试求其状态转移矩阵。

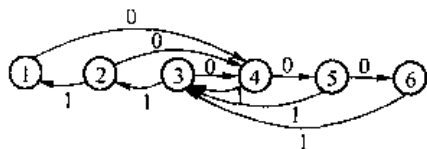


图 P9-38

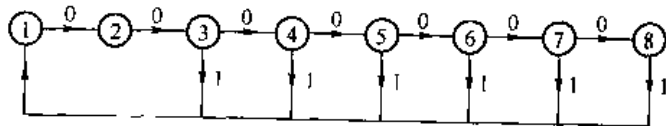


图 P9-39

- 9-40 试证明:由密勒(Miller)预编码序列的每一对比特映射成 NRZ 信号所得到 4 个信号波形是双正交的。然后证明所得到的已调信号波形与 4.3.2 节描述的延时调制是相同的。

第 10 章 通过带限线性滤波器信道的通信

第 9 章重点讨论了用于带限信道的调制器和解调器的设计,该设计过程基于(理想或非理想)信道响应特性 $C(f)$ 是先验已知的这一假设。在设计实际的数字通信系统以在带限信道中高速传输时,往往不能获得足够准确的信道频率响应 $C(f)$ 用于调制和解调器的最佳滤波器的设计。例如,在拨号电话网络上的数字通信中,每次拨一个号码时,通信信道是不同的,这是因为信道的路由不同。这是一个先验未知特性信道的例子。其他类型的信道,例如无线电信道和水声信道等无线信道,它们的频率响应是时变的。对于这样的信道,要设计最佳固定解调滤波器是不可能的。

本章将研究在信道存在失真且先验未知以及 AWGN 条件下的接收机设计问题。信道失真引起符号间干扰,如果不加补偿,会产生高的差错率。ISI 问题的解决方案是设计一个能使用一种方法补偿或减小接收信号中的 ISI 的接收机。这种 ISI 补偿器称为均衡器。

本章将讨论几种类型的均衡方法。一种基于最大似然(ML)序列检测准则,从错误概率的观点来看,这是最佳的。第二种均衡方法基于使用一种系数可调的线性滤波器。第三种均衡方法是利用已检测的符号来抑制当前被检测符号中的 ISI,这种方法称为判决反馈均衡。最后,我们研究降低复杂性的最大似然检测方法。下面首先推导用于有 ISI 信道的最佳检测器。

10.1 有 ISI 和 AWGN 信道的最佳接收机

本节推导在非理想、带限且具有加性高斯噪声信道上用于数字传输的最佳解调器和检测器的结构。首先,发送(等效低通)信号如式(9-2-1)所示。接收(等效低通)信号可表示为

$$r_l(t) = \sum_n I_n h(t - nT) + z(t) \quad (10-1-1)$$

式中, $h(t)$ 表示信道对输入信号脉冲 $g(t)$ 的响应, $z(t)$ 表示加性高斯白噪声。

先证明最佳解调器可以看做一个与 $h(t)$ 匹配的滤波器,其后跟随一个以符号速率 $1/T$ 操作的抽样器,以及由抽样值估计信息序列 $\{I_n\}$ 的处理算法。因此,匹配滤波器输出的样值满足对序列 $\{I_n\}$ 估计的要求。

10.1.1 最佳最大似然接收机

将接收信号 $r_l(t)$ 展开为级数

$$r_l(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N r_k f_k(t) \quad (10-1-2)$$

式中 $\{f_k(t)\}$ 是完备标准正交函数集, $\{r_k\}$ 是 $r_l(t)$ 投影到 $\{f_k(t)\}$ 上的可观测随机变量,表示为

$$r_k = \sum_n I_n h_{kn} + z_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (10-1-3)$$

式中, h_{kn} 是 $h(t - nT)$ 在 $f_k(t)$ 上的投影值, z_k 是 $z(t)$ 在 $f_k(t)$ 上的投影值。序列 $\{z_k\}$ 是零均值高斯的且其协方差为

$$\frac{1}{2} E(z_k^* z_m) = N_0 \delta_{km} \quad (10-1-4)$$

随机变量 $\mathbf{r}_N = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_N]$ 在发送序列 $\mathbf{I}_p = [I_1 \ I_2 \ \cdots \ I_p]$ 条件下 (其中 $p \leq N$) 的联合概率密度函数为

$$p(\mathbf{r}_N | \mathbf{I}_p) = \left(\frac{1}{2\pi N_0} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2N_0} \sum_{k=1}^N \left| r_k - \sum_n I_n h_{kn} \right|^2 \right) \quad (10-1-5)$$

在可观测随机变量数 N 趋于无穷大的极限情况下, 对数 $p(\mathbf{r}_N | \mathbf{I}_p)$ 与度量 $PM(\mathbf{I}_p)$ 成比例, 该度量定义为

$$\begin{aligned} PM(\mathbf{I}_p) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left| r_l(t) - \sum_n I_n h(t - nT) \right|^2 dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} |r_l(t)|^2 dt + 2 \operatorname{Re} \sum_n \left[I_n^* \int_{-\infty}^{\infty} r_l(t) h^*(t - nT) dt \right] \\ &\quad - \sum_n \sum_m I_n^* I_m \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t - nT) h(t - mT) dt \end{aligned} \quad (10-1-6)$$

符号 I_1, I_2, \dots, I_p 的最大似然估计值为使该度量最大化的值。注意, $|r_l(t)|^2$ 的积分对所有度量是共同的, 因此可将它舍去。包含 $r(t)$ 的其他积分产生变量

$$y_n \equiv y(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} r_l(t) h^*(t - nT) dt \quad (10-1-7)$$

将 $r(t)$ 通过与 $h(t)$ 匹配的滤波器, 再以符号速率 $1/T$ 对其输出进行抽样, 可产生这些变量。这些样值 $\{y_n\}$ 形成一组充分的统计值, 用于 $PM(\mathbf{I}_p)$ 或下列等价的相关度量的计算:

$$CM(\mathbf{I}_p) = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_n I_n^* y_n \right) - \sum_n \sum_m I_n^* I_m x_{n-m} \quad (10-1-8)$$

式中, 根据定义, $x(t)$ 是匹配滤波器对 $h(t)$ 的响应, 且

$$x_n \equiv x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t + nT) dt \quad (10-1-9)$$

因此, $x(t)$ 表示具有冲激响应 $h^*(-t)$ 和激励 $h(t)$ 的滤波器输出。换言之, $x(t)$ 表示 $h(t)$ 的自相关函数。因此, $|x_n|$ 表示 $h(t)$ 自相关函数的样值, 其抽样速率为 $1/T$ 。我们并不特别关心 $h(t)$ 匹配滤波器的非因果特性, 因为实际上可以引入足够大的延时以确保匹配滤波器的因果关系。

如果用式 (10-1-1) 替代式 (10-1-7) 中的 $r_l(t)$, 得到

$$y_k = \sum_n I_n x_{k-n} + v_k \quad (10-1-10)$$

式中, v_k 表示匹配滤波器输出的加性噪声序列, 即

$$v_k = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) h^*(t - kT) dt \quad (10-1-11)$$

解调器 (匹配滤波器) 在抽样瞬间的输出受到 ISI 的恶化影响, 如式 (10-1-10) 所示。在任何实际系统中, 假定 ISI 影响有限数目的符号是合理的, 假定 $|n| > L$ 时 $x_n = 0$, 因此在解调器输出端观测到的 ISI 可以看做有限状态机的输出。这意味着含有 ISI 的信道输出可以用网格图表示, 信息序列 (I_1, I_2, \dots, I_p) 的最大似然估计值就是在给定接收的解调器输出序列 $\{y_n\}$ 情况下通过网格的最可能的路径。显然, 维特比算法提供了网格搜索的有效方法。

序列 $\{I_k\}$ 的 MLSE 所要计算的度量由式 (10-1-8) 确定。可以看出, 这些度量可以按下列

关系式以维特比算法的递推方式计算

$$CM_n(\mathbf{I}_n) = CM_{n-1}(\mathbf{I}_{n-1}) + \text{Re} \left[I_n^* \left(2y_n - x_0 I_n - 2 \sum_{m=1}^L x_m I_{n-m} \right) \right] \quad (10-1-12)$$

图 10-1-1 示出了具有 ISI 的 AWGN 信道的最佳接收机的方框图。

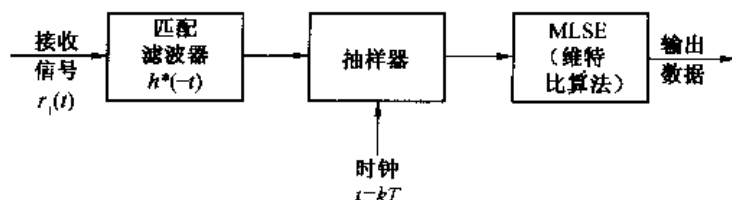


图 10-1-1 具有 ISI 的 AWGN 信道的最佳接收机

10.1.2 具有 ISI 信道的离散时间模型

在对导致 ISI 的带限信道的处理中,比较方便的做法是研究模拟(连续时间)系统的等效离散时间模型。因为发送机以速率 $1/T$ 符号/s 发送离散时间符号,而且接收机中匹配滤波器的抽样输出也是离散时间信号,且具有速率为每秒 $1/T$ 的样值,因此发送机中冲激响应为 $g(t)$ 的模拟滤波器、冲激响应为 $c(t)$ 的信道、接收机中冲激响应为 $h^*(-t)$ 的匹配滤波器和抽样器的级联结构可以用抽头增益系数为 $\{x_k\}$ 的等效离散时间横向滤波器来表示。从而,我们得到一个横跨时间间隔 $2LT$ s 的等效离散时间横向滤波器,其输入是信息符号序列 $\{I_k\}$,输出是由式(10-1-10)定义的离散时间序列 $\{y_k\}$ 。等效离散时间模型如图 10-1-2 所示。

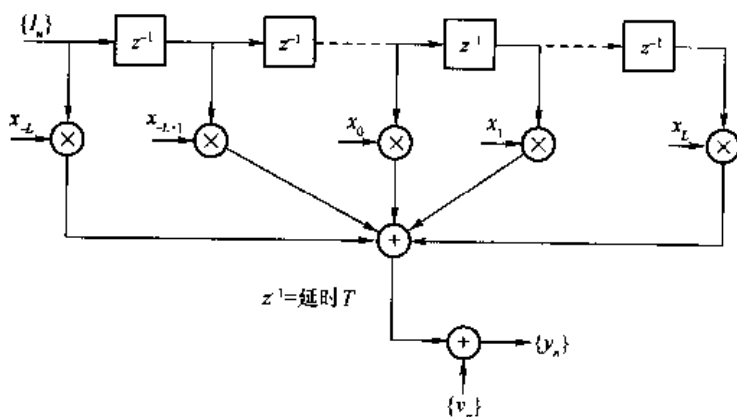


图 10-1-2 具有符号间干扰的信道的等效离散时间模型

采用这种离散时间模型的主要困难是对各种均衡或估计技术的性能评估,这些技术将在下面各节讨论,这种困难是由匹配滤波器输出的噪声序列 $\{v_k\}$ 中的相关性引起的。也就是说,噪声变量 $\{v_k\}$ 集是一个高斯分布序列,其均值为零而自相关函数为(参见习题 10-5)

$$\frac{1}{2} E(v_k^* v_j) = \begin{cases} N_0 x_{j-k} & (|k-j| \leq L) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (10-1-13)$$

因此,该噪声序列是相关的,除非当 $k \neq 0$ 时 $x_k = 0$ 。因为当计算差错率性能时,处理白噪声序列比较方便,因此希望通过进一步对序列 $\{y_k\}$ 进行滤波来使噪声序列白化。求离散时间噪声白化滤波器的方法如下。

令 $X(z)$ 表示抽样自相关函数 $\{x_k\}$ 的(双边) z 变换,即

$$X(z) = \sum_{k=-L}^L x_k z^{-k} \quad (10-1-14)$$

因为 $x_k = x_{-k}^*$, 因此 $X(z) = X^*(1/z^*)$, 且 $X(z)$ 的 $2L$ 个根具有对称性: 若 ρ 是一个根, 那么 $1/\rho^*$ 也是一个根。因此, $X(z)$ 可以因式分解为

$$X(z) = F(z)F^*(z^{-1}) \quad (10-1-15)$$

式中, $F(z)$ 是具有根 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L$ 的 L 次多项式, $F^*(z^{-1})$ 是具有根 $1/\rho_1^*, 1/\rho_2^*, \dots, 1/\rho_L^*$ 的 L 次多项式。假定在单位圆上无根, 那么, 一个适当的噪声白化滤波器具有 z 变换 $1/F^*(z^{-1})$ 。因为 $F^*(z^{-1})$ 的根有 2^L 种可能的选择, 各种选择对应的滤波器的特性在幅度上相同, 而在相位上不同, 因此, 建议选择惟一的 $F^*(z^{-1})$, 其与 $X(z)$ 零点相对应的极点在单位圆外, 它的冲激响应是非因果的。这样的非因果滤波器是稳定的。以这种方式选择噪声白化滤波器能确保所得到的信道响应 $F(z)$ 是最小相位的。因此, 序列 $\{y_k\}$ 通过数字滤波器 $1/F^*(z^{-1})$ 导致一个输出序列 v_k 为

$$v_k = \sum_{n=0}^L f_n I_{k-n} + \eta_k \quad (10-1-16)$$

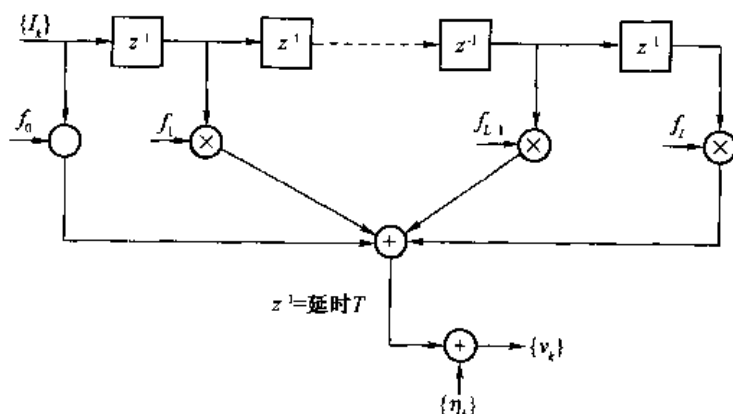
式中, $\{\eta_k\}$ 是一个高斯白噪声序列, $\{f_k\}$ 是传递函数为 $F(z)$ 的等效离散时间横向滤波器的一组抽头系数。匹配滤波器、抽样器和噪声白化滤波器的级联称为白化匹配滤波器(WMF)。

为方便计, 将 $F(z)$ 的能量归一化为 1, 即

$$\sum_{n=0}^L |f_n|^2 = 1$$

$F(z)$ 的最小相位条件意味着, 对每一个 M 值其冲激响应的头 M 个样值的能量是最大的。

总之, 发送滤波器 $g(t)$ 、信道 $c(t)$ 、匹配滤波器 $h^*(-t)$ 、抽样器和离散时间噪声白化滤波器 $1/F^*(z^{-1})$ 的级联结构可以表示为一个等效的离散时间横向滤波器, 其抽头系数为 $\{f_k\}$ 。加性噪声序列 $\{\eta_k\}$ 是一个均值为零、方差为 N_0 的高斯白噪声序列, 它恶化了离散时间横向滤波器的输出。图 10-1-3 示出了具有白噪声的等效离散时间系统的模型, 称为等效离散时间白噪声滤波器模型。



10-1-3 具有 AWGN 的符号间干扰信道的等效离散时间模型

例 10-1-1 假设发送机信号脉冲 $g(t)$ 具有持续时间 T 和单位能量, 接收信号脉冲是

$h(t) = g(t) + ag(t - T)$ 。求等效离散时间白噪声滤波器模型。抽样自相关函数为

$$x_k = \begin{cases} a^* & (k = -1) \\ 1 + |a|^2 & (k = 0) \\ a & (k = 1) \end{cases} \quad (10-1-17)$$

x_k 的 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-1}^1 x_k z^{-k} \\ &= a^* z + (1 + |a|^2) + az^{-1} \\ &= (az^{-1} + 1)(a^* z + 1) \end{aligned} \quad (10-1-18)$$

假定 $|a| < 1$, 选择 $F(z) = az^{-1} + 1$, 那么等效横向滤波器有两个抽头, 其抽头增益系数为 $f_0 = 1$ 和 $f_1 = a$ 。注意, 相关序列 $\{x_k\}$ 可以用 $\{f_n\}$ 表示为

$$x_k = \sum_{n=0}^{L-k} f_n^* f_{n+k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, L) \quad (10-1-19)$$

当信道冲激响应随时间慢变化时, 接收机中匹配滤波器成为一个时变滤波器。在这种情况下, 信道/匹配滤波器对的时变导致一个具有时变系数的离散时间滤波器。结果得到时变符号间干扰的效应, 这可用图 10-1-3 所示的滤波器来建模, 其中抽头系数随时间慢变化。在非理想带限信道上进行高速数字传输会出现符号间干扰的影响, 这可以表示成离散时间白噪声线性滤波器的模型, 本章其余部分关于对该干扰的补偿技术的讨论中始终采用这个模型。一般地, 这种补偿方法称做均衡技术或均衡算法。

10.1.3 离散时间白噪声滤波器模型的维特比算法

信息序列 $\{I_k\}$ 的 MLSE 是最容易由白化滤波器输出端的接收序列 $\{v_k\}$ 描述的。存在符号间干扰且覆盖 $L+1$ 个符号 (L 个干扰分量) 的情况下, MLSE 准则等价为一个离散时间有限状态机的状态估计问题。这种情况下的有限状态机是系数为 $\{f_k\}$ 的等效离散时间信道。在任何瞬时, 它的状态由 L 个最近的输入确定, 即在 k 时刻状态为

$$S_k = (I_{k-1}, I_{k-2}, \dots, I_{k-L}) \quad (10-1-20)$$

式中, $k \leq 0$ 时 $I_k = 0$ 。因此, 如果信息符号是 M 元的, 那么信道滤波器有 M^L 个状态。从而信道可由 M^L 状态网格描述, 维特比算法可用来计算通过该网格的最可能的路径。

在网格搜索中所用的度量类似于卷积码的软判决译码中所用的度量。简言之, 从样值 v_1, v_2, \dots, v_{L+1} 着手, 计算 M^{L+1} 个度量

$$\sum_{k=1}^{L+1} \ln p(v_k | I_k, I_{k-1}, \dots, I_{k-L}) \quad (10-1-21)$$

$I_{L+1}, I_L, \dots, I_2, I_1$ 的 M^{L+1} 个可能的序列划分为 M^L 组, 相应于 M^L 个状态 $(I_{L+1}, I_L, \dots, I_2)$ 。注意, 每一组(状态)中的 M 个序列的差别在于 I_1 不同, 并且相应于通过网格的不同路径, 这些路径会聚于一个单一的节点。从 M^L 个状态的每一个状态中的 M 个序列选择具有最大概率(关于 I_1)的序列并对该幸存序列赋予度量

$$PM_1(I_{L+1}) \equiv PM_1(I_{L+1}, I_L, \dots, I_2)$$

$$= \max_{I_1} \sum_{k=1}^{L+1} \ln p(v_k | I_k, I_{k-1}, \dots, I_{k-L}) \quad (10-1-22)$$

M^L 组的每一组中的 $M-1$ 个剩余序列被舍弃。因此,保留 M^L 个幸存序列及其度量。

当接收到 v_{L+2} 时, M^L 个幸存序列被延伸一级,再利用先前的度量和新增量来计算延伸序列相应的 M^{L+1} 个概率,该增量是 $\ln p(v_{L+2} | I_{L+2}, I_{L+1}, \dots, I_2)$ 。进而 M^{L+1} 个序列被划分为相应于 M^L 个可能状态 (I_{L+2}, \dots, I_3) 的 M^L 组,并且从每一组中选择最可能的序列,舍弃其他 $M-1$ 个序列。

上述过程以顺序信号样值的接收继续下去。一般地,当接收 v_{L+k} 时,度量^①

$$PM_k(I_{L+k}) = \max_{I_k} [\ln p(v_{L+k} | I_{L+k}, \dots, I_k) + PM_{k-1}(I_{L+k-1})] \quad (10-1-23)$$

的计算给出 M^L 个幸存序列的概率。因此,当接收到每一个信号样值时,维特比算法首先包含下列 M^{L+1} 个概率的计算

$$\ln p(v_{L+k} | I_{L+k}, \dots, I_k) + PM_{k-1}(I_{L+k-1}) \quad (10-1-24)$$

该概率相应于 M^{L+1} 个序列,这些序列形成从前一级处理得到的 M^L 个幸存序列的延续。 M^{L+1} 个序列划分为 M^L 组,每一组包含 M 个序列,这些序列终接于相同的符号集 I_{L+k}, \dots, I_{k+1} ,其差别在于符号 I_k 。从每一组的 M 个序列中选择具有最大概率的一个,如式(10-1-23)所示,而舍弃剩余的 $M-1$ 个序列。再次保留度量为 $PM_k(I_{L+k})$ 的 M^L 个序列。

如前所述,检测每一个信息符号中的延时是可变的。在实际中,通过截断幸存序列为 q 个最近的符号,其中 $q \gg L$,来避免可变延时,从而达到一个固定延时。在 k 时刻 M^L 个幸存序列与符号 I_{k-q} 不一致的情况下,可以选择最可能序列中的符号。如果 $q \geq 5L$,由这种次最佳判决过程造成的性能损失可以忽略不计。

例 10-1-2 为了说明,假设采用双二进制信号脉冲传输四电平 ($M=4$) PAM。因此,每一个符号是从集合 $\{-3, -1, 1, 3\}$ 中选出的一个数。在这个部分响应信号中,受控符号间干扰由图 10-1-4 所示的等效离散时间信道模型表示。假设已接收 v_1 和 v_2 , 其中

$$\begin{aligned} v_1 &= I_1 + \eta_1 \\ v_2 &= I_2 + I_1 + \eta_2 \end{aligned} \quad (10-1-25)$$

且 $\{\eta_i\}$ 是统计独立零均值高斯噪声。现在可以计算 16 个度量

$$PM_1(I_2, I_1) = - \sum_{k=1}^2 \left(v_k - \sum_{j=0}^1 I_{k-j} \right)^2, \quad I_1, I_2 = \pm 1, \pm 3 \quad (10-1-26)$$

式中, $k \leq 0$ 时 $I_k = 0$ 。

注意,任何顺序接收的信号 $\{v_i\}$ 不包含 I_1 。因此,在这一级上可以舍弃 16 对可能的 $\{I_1, I_2\}$ 中的 12 对,这一步可由图 10-1-5 所示的树图说明。换言之,在树图中对相应于 16 条路径的 16 个度量计算之后,舍弃终接于 $I_2 = 3$ 的 4 条路径中的 3 条,并保留这 4 条路径中最可能的一条。因此,该幸存路径的度量是

$$PM_1(I_2 = 3, I_1) = \max_{I_1} \left[- \sum_{k=1}^2 \left(v_k - \sum_{j=0}^1 I_{k-j} \right)^2 \right]$$

① 当加性噪声是高斯的时,度量 $PM_k(I)$ 只与欧氏距离度量 $DM_k(I)$ 有关。

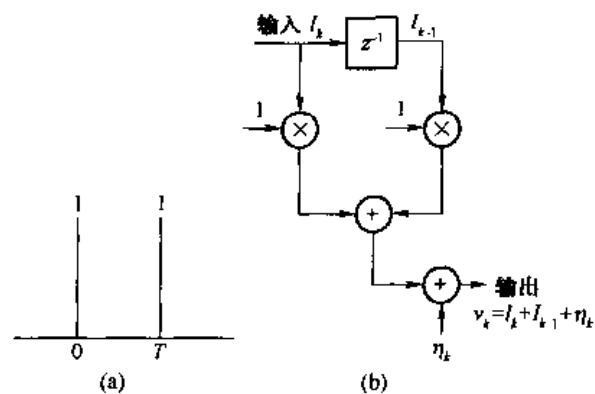


图 10-1-4 由双二进制脉冲产生的
符号间干扰的等效离散时间模型

对终接于 $I_2 = 1$ 、 $I_2 = -1$ 和 $I_2 = -3$ 每一组的 4 条路径,重复上述过程。因此,在接收 v_1 和 v_2 之后,4 条路径及其度量幸存下来。

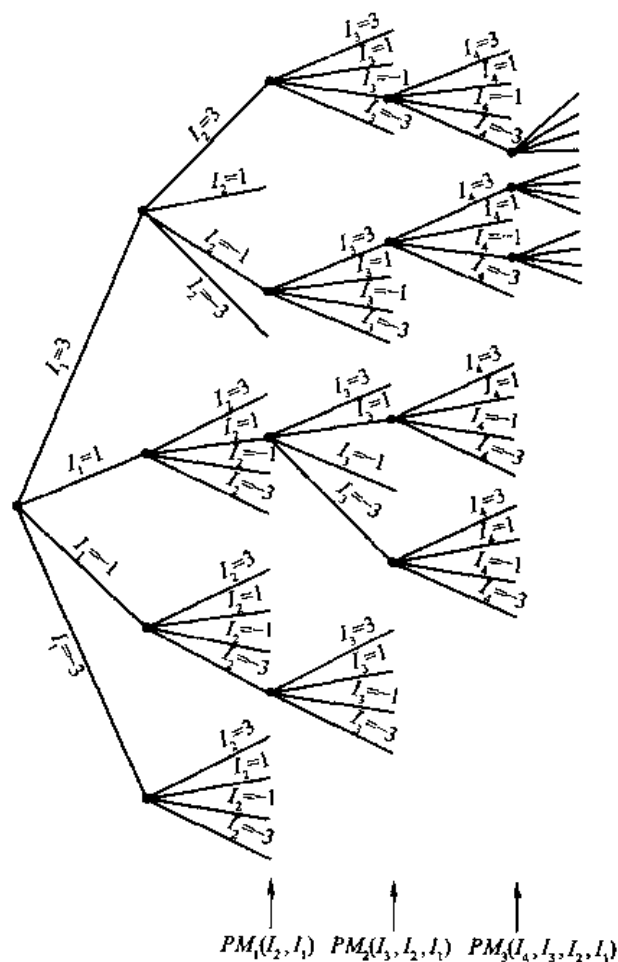


图 10-1-5 双二进制脉冲维特比译码的树图

当接收到 v_3 时,4 条路径被延伸,如图 10-1-5 所示,这产生了 16 条路径及 16 个相应的度量,由下式给出

$$PM_2(I_3, I_2, I_1) = PM_1(I_2, I_1) - \left(V_3 - \sum_{j=0}^1 i_{3-j} \right)^2 \quad (10-1-27)$$

对于终接于 $I_3 = 3$ 的 4 条路径, 保留最可能的路径。对于 $I_3 = 1$ 、 $I_3 = -1$ 和 $I_3 = -3$ 再次重复这个过程。因此, 在这一级仅有 4 条路径幸存下来。当 $k > 3$ 时, 对于每个顺序接收的信号 v_k 重复该过程。

10.1.4 具有 ISI 信道的 MLSE 的性能

现在, 在信息通过 PAM 发送且加性噪声是高斯的情况下, 求接收信息序列 MLSE 的错误概率。卷积码与有限持续时间符号间干扰信道之间的相似性意味着后者计算错误概率的方法可以从前者移植过来, 具体讲, 对 8.2.3 节所述利用维特比算法进行卷积码的软判决译码性能的计算方法进行适当修改, 就可在此应用。

在具有加性高斯噪声和符号间干扰的 PAM 信号传输中, 维特比算法所用的度量可以表示成式(10-1-23), 或等价于

$$PM_{k-L}(I_k) = PM_{k-L-1}(I_{k-1}) - \left(v_k - \sum_{j=0}^L f_j I_{k-j} \right)^2 \quad (10-1-28)$$

式中, 符号 $\{I_n\}$ 可以取值 $\pm d, \pm 3d, \dots, \pm (M-1)d, 2d$ 是两个相邻电平之间的距离。网格有 M^L 个状态, 在 k 时刻定义为

$$S_k = (I_{k-1}, I_{k-2}, \dots, I_{k-L}) \quad (10-1-29)$$

将维特比算法得到的估计符号标记为 $\{\tilde{I}_n\}$, 且在 k 时刻相应的估计状态标记为

$$\tilde{S}_k = (\tilde{I}_{k-1}, \tilde{I}_{k-2}, \dots, \tilde{I}_{k-L}) \quad (10-1-30)$$

现在假设在 k 时刻通过网格的估计路径从正确路径分离出来, 在 $k+l$ 时刻与正确路径重新合并。因此, $\tilde{S}_k = S_k$ 且 $\tilde{S}_{k+l} = S_{k+l}$, 但对于 $k < m < k+l$, $\tilde{S}_m \neq S_m$ 。正如在卷积码中那样, 把这种情况称做差错事件。因为信道覆盖 $L+1$ 个符号, 因此 $l \geq L+1$ 。

对于这个差错事件, $\tilde{I}_k \neq I_k$ 及 $\tilde{I}_{k+l-L-1} \neq I_{k+l-L-1}$; 但对于 $k-L \leq m \leq k-1$ 和 $k+l-L \leq m \leq k+l-1$, $\tilde{I}_m = I_m$ 。为方便计, 为该差错事件定义一个差错向量 \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = [\epsilon_k \quad \epsilon_{k+1} \quad \dots \quad \epsilon_{k+l-L-1}] \quad (10-1-31)$$

式中, \mathbf{e} 的各分量定义为

$$\epsilon_j = \frac{1}{2d} (I_j - \tilde{I}_j) \quad (j = k, k+1, \dots, k+l-L-1) \quad (10-1-32)$$

式(10-1-32)中的归一化因子 $2d$ 导致元素 ϵ_j 的取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm (M-1)$ 。差错向量可以用下列性质表征: $\epsilon_k \neq 0$, $\epsilon_{k+l-L-1} \neq 0$ 且不存在连续 L 个零元素的序列。与式(10-1-31)中差错向量相关联的是 $l-L-1$ 次多项式

$$\mathbf{e}(z) = \epsilon_k + \epsilon_{k+1}z^{-1} + \epsilon_{k+2}z^{-2} + \dots + \epsilon_{k+l-L-1}z^{-(l-L-1)} \quad (10-1-33)$$

我们希望求差错事件发生的概率, 该差错事件在 k 时刻开始, 并由式(10-1-31)中的差错向量或等价地用式(10-1-33)中的多项式表征。为了完成这一工作, 遵循福尼 (Forney, 1972 年) 提出的运算过程。具体地, 对于发生的差错事件 \mathbf{e} , 下面 3 个子事件 E_1 、 E_2 和 E_3 必定发生。

E_1 : 在 k 时刻, $\tilde{S}_k = S_k$ 。

E_2 : 信息符号 $I_k, I_{k+1}, \dots, I_{k+l-L-1}$ 在被加入标度变换的差错序列 $2d(\epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_{k+l-L-1})$ 时必定导致一个许用序列, 即序列 $\tilde{I}_k, \tilde{I}_{k+1}, \dots, \tilde{I}_{k+l-L-1}$ 的值一定在 $\pm d, \pm 3d, \dots, \pm(M-1)d$ 中选择。

E_3 : 当 $k \leq m \leq k+l$ 时, 估计路径分支度量的总和超过正确路径分支度量的总和。

E_3 发生的概率是

$$P(E_3) = P\left[\sum_{i=k}^{k+l-1} \left(v_i - \sum_{j=0}^L f_j \tilde{I}_{i-j}\right)^2 < \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(v_i - \sum_{j=0}^L f_j I_{i-j}\right)^2\right] \quad (10-1-34)$$

但

$$v_i = \sum_{j=0}^L f_j I_{i-j} + \eta_i \quad (10-1-35)$$

式中, $\{\eta_i\}$ 是实高斯白噪声序列。将式(10-1-35)代入式(10-1-34), 得到

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P\left[\sum_{i=k}^{k+l-1} \left(\eta_i + 2d \sum_{j=0}^L f_j \epsilon_{i-j}\right)^2 < \sum_{i=k}^{k+l-1} \eta_i^2\right] \\ &= P\left[4d \sum_{i=k}^{k+l-1} \eta_i \left(\sum_{j=0}^L f_j \epsilon_{i-j}\right) < -4d^2 \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(\sum_{j=0}^L f_j \epsilon_{i-j}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (10-1-36)$$

式中, 当 $j < k$ 和 $j > k+l-L-1$ 时, $\epsilon_j = 0$ 。如果定义

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^L f_j \epsilon_{i-j} \quad (10-1-37)$$

那么, 式(10-1-36)可以表示为

$$P(E_3) = P\left(\sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i \eta_i < -d \sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i^2\right) \quad (10-1-38)$$

式中的两项公共因子 $4d$ 已被舍去。那么, 式(10-1-38)正是统计独立高斯随机变量的线性组合小于某个负数的概率, 因此

$$P(E_3) = Q\left[\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}} \sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i^2\right] \quad (10-1-39)$$

为方便计, 定义

$$\delta^2(\mathbf{e}) = \sum_{i=k}^{k+l-1} \alpha_i^2 = \sum_{i=k}^{k+l-1} \left(\sum_{j=0}^L f_j \epsilon_{i-j}\right)^2 \quad (10-1-40)$$

式中, 当 $j < k$ 及 $j > k+l-L-1$ 时, $\epsilon_j = 0$ 。注意, 由 $\{f_i\}$ 与 $\{\epsilon_j\}$ 卷积得到的 $\{\alpha_i\}$ 是下列多项式的系数

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= F(z)\epsilon(z) \\ &= \alpha_k + \alpha_{k+1}z^{-1} + \dots + \alpha_{k+l-1}z^{-(l-1)} \end{aligned} \quad (10-1-41)$$

而且, $\delta^2(\mathbf{e})$ 就等于下列多项式中 z^0 的系数

$$\begin{aligned} \alpha(z)\alpha(z^{-1}) &= F(z)F(z^{-1})\epsilon(z)\epsilon(z^{-1}) \\ &= X(z)\epsilon(z)\epsilon(z^{-1}) \end{aligned} \quad (10-1-42)$$

$\delta^2(\mathbf{e})$ 称做差错事件 \mathbf{e} 的欧氏重量。

表示 $\{f_i\}$ 与 $\{\epsilon_j\}$ 卷积结果的另一种方法是矩阵形式

$$\mathbf{\alpha} = \mathbf{e}\mathbf{f}$$

式中, $\mathbf{\alpha}$ 是一个 l 维向量, \mathbf{f} 是一个 $(L+1)$ 维向量, \mathbf{e} 是一个 $l \times (L+1)$ 矩阵, 它们分别定义为

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k+1} \\ \dots \\ a_{k+l-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_k & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \epsilon_{k+1} & \epsilon_k & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \epsilon_{k+2} & \epsilon_{k+1} & \epsilon_k & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \epsilon_{k+l-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \epsilon_{k+l-L-1} \end{bmatrix} \quad (10-1-43)$$

那么

$$\begin{aligned} \delta^2(\mathbf{e}) &= \mathbf{a}'\mathbf{a} \\ &= \mathbf{f}'\mathbf{e}'\mathbf{e}\mathbf{f} \\ &= \mathbf{f}'\mathbf{A}\mathbf{f} \end{aligned} \quad (10-1-44)$$

式中, \mathbf{A} 是一个 $(L+1) \times (L+1)$ 矩阵, 其形式为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}'\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_L \\ \beta_1 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{L-1} \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_{L-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_L & \dots & \dots & \dots & \beta_0 \end{bmatrix} \quad (10-1-45)$$

且

$$\beta_m = \sum_{i=k}^{k+l-1-m} \epsilon_i \epsilon_{i+m} \quad (10-1-46)$$

在评价差错率性能时, 可以利用式 (10-1-40) 和式 (10-1-41), 或者式 (10-1-45) ~ (10-1-46), 后面将研究这些计算方法。可以得出如下结论: 由式 (10-1-39) 定义的子事件的概率为

$$\begin{aligned} P(E_3) &= Q \left[\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}} \delta^2(\mathbf{e}) \right] \\ &= Q \left[\sqrt{\frac{6}{M^2-1}} \gamma_{av} \delta^2(\mathbf{e}) \right] \end{aligned} \quad (10-1-47)$$

式中利用了关系式

$$d^2 = \frac{3}{M^2-1} TP_{av} \quad (10-1-48)$$

来消去 d^2 , 以及 $\gamma_{av} = TP_{av}/N_0$ 。注意, 在没有符号间干扰的情况下, $\delta^2(\mathbf{e}) = 1$, 且 $P(E_3)$ 与 M 元 PAM 的符号错误概率成正比。

子事件 E_2 的概率只决定于输入序列的统计特性。假定信息符号是等概的, 而且在发送序列中的符号是统计独立的。那么, 对于形式为 $|\epsilon_i| = j$ ($j = 1, 2, \dots, M-1$) 的差错, 有 $M-j$ 个可能的 I_i 值, 这样

$$I_i = \tilde{I}_i + 2d\epsilon_i$$

因此

$$P(E_2) = \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M - |\epsilon_i|}{M} \quad (10-1-49)$$

子事件 E_1 概率的精确计算困难得多,这是由于它与子事件 E_3 相关,也就是说,必须计算 $P(E_1|E_3)$ 。然而, $P(E_1|E_3) = 1 - P_M$, 其中 P_M 是符号错误概率。因此,当符号错误概率相当低时, $P(E_1|E_3)$ 近似于(且上边界为)1。因此,差错事件 ϵ 的概率近似为且上边界为

$$P(\epsilon) \leq Q \left[\sqrt{\frac{6}{M^2 - 1}} \gamma_{av} \delta^2(\epsilon) \right] \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M - |\epsilon_i|}{M} \quad (10-1-50)$$

令 E 为从 k 时刻开始的所有差错事件的集合,并且令 $w(\epsilon)$ 为每一个差错事件 ϵ 中相应的非零分量的数目(汉明重量或符号差错数目)。那么,符号错误概率的上边界一致为

$$\begin{aligned} P_M &\leq \sum_{\epsilon \in E} w(\epsilon) P(\epsilon) \\ &\leq \sum_{\epsilon \in E} w(\epsilon) Q \left[\sqrt{\frac{6}{M^2 - 1}} \gamma_{av} \delta^2(\epsilon) \right] \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M - |\epsilon_i|}{M} \end{aligned} \quad (10-1-51)$$

令 D 为所有 $\delta(\epsilon)$ 的集合。对于每个 $\delta \in D$, 令 E_δ 为差错事件的子集,其中 $\delta(\epsilon) = \delta$, 那么式(10-1-51)可表示为

$$\begin{aligned} P_M &\leq \sum_{\delta \in D} Q \left[\sqrt{\frac{6}{M^2 - 1}} \gamma_{av} \delta^2 \right] \left[\sum_{\epsilon \in E_\delta} w(\epsilon) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M - |\epsilon_i|}{M} \right] \\ &\leq \sum_{\delta \in D} K_\delta Q \left[\sqrt{\frac{6}{M^2 - 1}} \gamma_{av} \delta^2 \right] \end{aligned} \quad (10-1-52)$$

式中

$$K_\delta = \sum_{\epsilon \in E_\delta} w(\epsilon) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M - |\epsilon_i|}{M} \quad (10-1-53)$$

式(10-1-52)中的错误概率表达式类似于式(8-2-26)给出的卷积码软判决译码的错误概率的形式。加权因子 $\{K_\delta\}$ 可以用差错状态图的方法求得,该差错状态图类似于卷积编码器的状态图。这种处理方法已由福尼(Forney, 1972 年)、维特比和小村(Viterbi 和 Omura, 1979 年)说明。

然而,一般情况下用差错状态图计算 P_M 冗长而乏味,替代的方法是利用式(10-1-52)的求和式中的主要项来简化 P_M 的计算。由于和式中每一项的指数的相关性,表达式 P_M 主要受相应于最小 δ 值(记为 δ_{\min})的项的支配。因此,符号错误概率可以近似为

$$P_M \approx K_{\delta_{\min}} Q \left[\sqrt{\frac{6}{M^2 - 1}} \gamma_{av} \delta_{\min}^2 \right] \quad (10-1-54)$$

式中

$$K_{\delta_{\min}} = \sum_{\epsilon \in E_{\delta_{\min}}} w(\epsilon) \prod_{i=0}^{l-L-1} \frac{M - |\epsilon_i|}{M} \quad (10-1-55)$$

一般地, $\delta_{\min}^2 \leq 1$ 。因此, $10 \lg \delta_{\min}^2$ 表示由于符号间干扰而造成的 SNR 损失。

δ 的最小值可以由式(10-1-40)求得,或者通过对不同的差错序列计算式(10-1-44)中的二次型来求得。在下面两个例子中,我们使用式(10-1-40)。

例 10-1-3 研究具有任意系数 f_0 和 f_1 的两径信道 ($L=1$), 该系数满足约束条件 $f_0^2 + f_1^2 = 1$ 。信道特性是

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} \quad (10-1-56)$$

对于长度为 n 的差错事件

$$\epsilon(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1 z^{-1} + \cdots + \epsilon_{n-1} z^{-(n-1)} \quad (n \geq 1) \quad (10-1-57)$$

乘积 $\alpha(z) = F(z)\epsilon(z)$ 可以表示为

$$\alpha(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_n z^{-n} \quad (10-1-58)$$

式中, $\alpha_0 = \epsilon_0 f_0$ 以及 $\alpha_n = f_1 \epsilon_{n-1}$ 。因为 $\epsilon_0 \neq 0, \epsilon_{n-1} \neq 0$, 且

$$\delta^2(\epsilon) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \quad (10-1-59)$$

得到

$$\delta_{\min}^2 \geq f_0^2 + f_1^2 = 1$$

实际上, 当单一差错发生, 即 $\epsilon(z) = \epsilon_0$ 时, $\delta_{\min}^2 = 1$ 。因此, 我们得出结论: 当信道弥散长度为 2 时, 在信息符号的最大似然序列估计中没有 SNR 损失。

例 10-1-4 部分响应信号中的受控符号间干扰可以看做由一个时间弥散信道生成。因此, 由双二进制脉冲产生的符号间干扰可以用下列(归一化)信道特性表示

$$F(z) = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} z^{-1} \quad (10-1-60)$$

类似地, 变型双二进制脉冲可表示为

$$F(z) = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} z^{-1} \quad (10-1-61)$$

对于式(10-1-60)定义的信道, 对形式为

$$\epsilon(z) = \pm (1 - z^{-1} - z^{-2} \cdots - z^{-(n-1)}) \quad (n \geq 1) \quad (10-1-62)$$

的任何差错事件, 最小距离 $\delta_{\min}^2 = 1$, 因为

$$\alpha(z) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}} z^{-n}$$

类似地, 对于式(10-1-61)定义的信道, 当

$$\epsilon(z) = \pm (1 + z^{-2} + z^{-4} + \cdots + z^{-2(n-1)}) \quad (n \geq 1) \quad (10-1-63)$$

时, $\delta_{\min}^2 = 1$, 因为

$$\alpha(z) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}} z^{-2n}$$

因此, 这两个部分响应信号的 MLSE 结果没有 SNR 损失。作为对比, 前述次最佳逐符号检测导致 2.1 dB 损失。

对于这两个信号, 常数 $K_{\delta_{\min}}$ 很容易计算。采用预编码时, 与式(10-1-62)和式(10-1-63)中的差错事件相关联的输出符号差错的数目(汉明重量)是 2。因此

$$K_{\delta_{\min}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M-1}{M} \right)^n = 2(M-1) \quad (10-1-64)$$

另一方面,不采用预编码时,这些差错事件导致 n 个符号差错,因此

$$K_{\delta_{\min}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{M-1}{M} \right)^n = 2M(M-1) \quad (10-1-65)$$

作为练习,研究由式(10-1-44)中的二次型计算 δ_{\min}^2 。二次型矩阵 \mathbf{A} 是正定的,因此其所有特征值是正的。如果 $\mu_k(\mathbf{e})$ 是特征值,且 $\mathbf{v}_k(\mathbf{e})$ 是差错事件 \mathbf{e} 相应的 \mathbf{A} 的标准正交特征向量,那么式(10-1-44)中的二次型可以表示为

$$\delta^2(\mathbf{e}) = \sum_{k=1}^{L+1} \mu_k(\mathbf{e}) [\mathbf{f} \mathbf{v}_k(\mathbf{e})]^2 \quad (10-1-66)$$

换言之, $\delta^2(\mathbf{e})$ 可表示为信道向量 \mathbf{f} 在 \mathbf{A} 的特征向量上的平方投影的线性组合。在总和中的每一个平方投影被相应的特征值 $\mu_k(\mathbf{e})$ ($k=1, 2, \dots, L+1$) 加权,那么

$$\delta_{\min}^2 = \min_{\mathbf{e}} \delta^2(\mathbf{e}) \quad (10-1-67)$$

注意,一个给定长度 $L+1$ 的最坏信道的特性可以通过求相应于最小特征值的特征向量来获得。因此,如果 $\mu_{\min}(\mathbf{e})$ 是给定差错事件 \mathbf{e} 的最小特征值,且 $\mathbf{v}_{\min}(\mathbf{e})$ 是相应的特征向量,那么

$$\mu_{\min} = \min_{\mathbf{e}} \mu_{\min}(\mathbf{e})$$

$$\mathbf{f} = \min_{\mathbf{e}} \mathbf{v}_{\min}(\mathbf{e})$$

以及

$$\delta_{\min}^2 = \mu_{\min}$$

例 10-1-5 通过对不同差错事件寻找 \mathbf{A} 的最小特征值来求长度为 3 ($L=2$) 的最坏的时间弥散信道,因此

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}$$

式中, f_0 、 f_1 和 f_2 是相应于最小特征值的 \mathbf{A} 的特征向量的分量。一个形式如下的差错事件

$$\mathbf{e}(z) = 1 - z^{-1}$$

导致一个矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

其特征值为 $\mu_1=2$, $\mu_2=2+\sqrt{2}$, $\mu_3=2-\sqrt{2}$ 。相应于 μ_3 的特征向量是

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10-1-68)$$

也可以研究双差错事件

$$\mathbf{e}(z) = 1 + z^{-1}$$

它导致矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

该矩阵的特征值与 $\varepsilon(z) = 1 - z^{-1}$ 的矩阵的特征值相同。相应于 $\mu_3 = 2 - \sqrt{2}$ 的特征向量是

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10-1-69)$$

任何其他差错事件导致比 μ_{\min} 更大的值。因此, $\mu_{\min} = 2 - \sqrt{2}$ 且最坏情况下的信道为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

信道造成的 SNR 损失为

$$-10\lg\delta_{\min}^2 = -10\lg\mu_{\min} = 2.3 \text{ dB}$$

对于 $L = 3, 4$ 和 5 的信道, 重复上述计算得到的结果如表 10-1-1 所示。

表 10-1-1 最大性能损失与相应的信道特性

信道长度 $L + 1$	性能损失 $-10\lg\delta_{\min}^2(\text{dB})$	最小距离信道
3	2.3	0.50, 0.71, 0.50
4	4.2	0.38, 0.60, 0.60, 0.38
5	5.7	0.29, 0.50, 0.58, 0.50, 0.29
6	7.0	0.23, 0.42, 0.52, 0.52, 0.42, 0.23

10.2 线性均衡

有 ISI 信道的 MLSE 的计算的复杂性随着信道时间弥散的长度而呈指数增长。如果符号表中的符号数是 M 且造成 ISI 的干扰符号数是 L , 那么维特比算法对每个新的接收符号计算 M^{L+1} 个度量。对于大多数实际的信道, 这样大的计算复杂性实现起来过于昂贵。

本节和下而各节将介绍次最佳信道均衡方法, 以此补偿 ISI。一种方法是利用线性横向滤波器, 本节将述, 该滤波器结构的计算复杂度是信道弥散长度 L 的线性函数。

最常用于均衡的线性滤波器是一个横向滤波器, 如图 10-2-1 所示。它的输入是式 (10-1-16) 给出的序列 $\{v_k\}$, 输出是信息序列 $\{I_k\}$ 的估计值。第 k 个符号的估计值可以表示为

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \quad (10-2-1)$$

式中, $|c_j|$ 是该滤波器的 $(2K+1)$ 个复抽头加权系数。估计值 \hat{I}_k 被均衡到最接近(在距离上)的信息符号, 以形成判决 \hat{I}_k 。如果 \hat{I}_k 与发送信息符号不同, 判决发生一次差错。

人们在滤波器系数 $|c_k|$ 最佳化的准则上已做了大量研究。因为对数字通信系统性能最有意义的度量是平均错误概率, 所以希望选择该系数以使该性能指数最小。然而, 错误概率是 $|c_j|$ 的高度非线性函数, 因此, 以错误概率作为均衡器抽头加权系数最佳化的性能指数计算起来比较复杂。

两个准则已经在均衡系数 $|c_j|$ 最佳化中得到广泛应用, 一个是峰值失真准则, 另一个是均方误差准则。

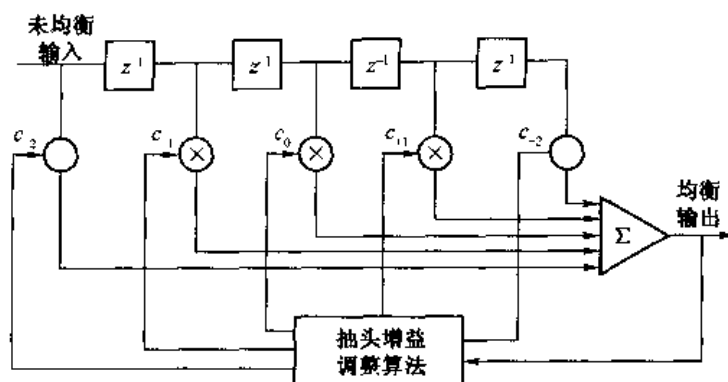


图 10-2-1 线性横向滤波器

10.2.1 峰值失真准则

峰值失真可简单地定义为在均衡器输出端最坏情况下的符号间干扰。这个性能指数的最小化称为峰值失真准则。首先研究假定均衡器有无限个抽头情况下的峰值失真最小化,讨论横向均衡器横跨有限时间区间的情况。

我们看到,具有冲激响应 $\{f_n\}$ 的离散时间线性滤波器模型与具有冲激响应 $\{c_n\}$ 的均衡器级联结构可以用单一的等效滤波器来表示,其冲激响应为

$$q_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{n-j} \quad (10-2-2)$$

即 $\{q_n\}$ 就是 $\{c_n\}$ 与 $\{f_n\}$ 的卷积。假设均衡器有无限个抽头,在第 k 个抽样时刻,其输出可以表示成如下形式

$$\hat{I}_k = q_0 I_k + \sum_{n \neq k} I_n q_{k-n} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \eta_{k-j} \quad (10-2-3)$$

式(10-2-3)中的第一项表示标度变换形式的信息符号。为方便计,将 q_0 归一化为 1。第二项是符号间干扰,该干扰的峰值称为峰值失真,表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{c}) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |q_n| \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{n-j} \right| \end{aligned} \quad (10-2-4)$$

因此, $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ 是均衡器抽头权值的函数。

当采用无限抽头的均衡器时,有可能选择抽头权值使得 $\mathcal{D}(\mathbf{c}) = 0$, 即除 $n = 0$ 外,对所有 n 有 $q_n = 0$ 。也就是说,符号间干扰可以被完全消除。实现此目标的抽头权值由下列条件确定

$$q_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{n-j} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (10-2-5)$$

对式(10-2-5)进行 z 变换得到

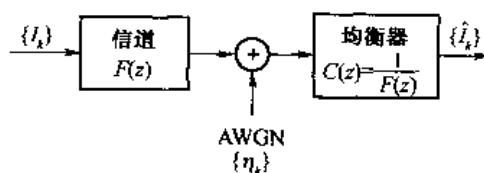


图 10-2-2 带有迫零均衡器的信道方框图

$$Q(z) = C(z)F(z) = 1 \quad (10-2-6)$$

或

$$C(z) = \frac{1}{F(z)} \quad (10-2-7)$$

式中, $C(z)$ 表示 $\{c_j\}$ 的 z 变换。注意, 具有传递函数 $C(z)$ 的均衡器是线性滤波器模型 $F(z)$ 的逆滤波器。换言之, 完全消除符号间干扰要求使用一个 $F(z)$ 的逆滤波器。我们将这种滤波器称为迫零滤波器。图 10-2-2 的方框图说明了该等效离散时间的信道和均衡器。

传递函数为 $1/F^*(z^{-1})$ 的噪声白化滤波器与传递函数为 $1/F(z)$ 的迫零均衡器的级联导致一个等效迫零均衡器, 其传递函数为

$$C'(z) = \frac{1}{F(z)F^*(z^{-1})} = \frac{1}{X(z)} \quad (10-2-8)$$

如图 10-2-3 所示。该组合滤波器的输入为从匹配滤波器得到的样值序列 $\{y_n\}$, 由式 (10-1-10) 确定, 其输出由仅受到加性零均值高斯噪声恶化的期望信息符号组成。该组合滤波器的冲激响应是

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{2\pi j} \oint C'(z) z^{k-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{k-1}}{X(z)} dz \end{aligned} \quad (10-2-9)$$

式中, 积分运算是在 $C'(z)$ 的收敛区域内的闭合围线上进行的。因为 $X(z)$ 是具有 $2L$ 个根 $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_L, 1/\rho_1^*, 1/\rho_2^*, \dots, 1/\rho_L^*)$ 的多项式, 因此 $C'(z)$ 必须在包括单位圆 ($z = e^{j\theta}$) 在内的 z 平面上的环形区域内收敛。因此, 积分中的闭合围线可以是单位圆。

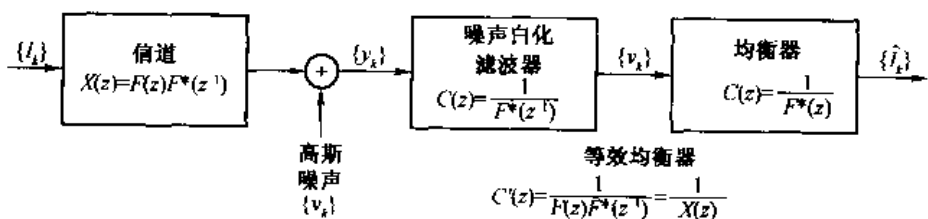


图 10-2-3 带有等效迫零均衡器的信道方框图

无限抽头均衡器完全消除了符号间干扰, 其性能可以用其输出端的信噪比 (SNR) 表示。为了数学处理方便, 将接收信号能量归一化为 1^①。这意味着, $q_0 = 1$ 且 $|I_k|^2$ 的数学期望也是 1。那么, SNR 就是均衡器输出端的噪声方差的倒数。^②

σ_n^2 值可以通过对等效迫零均衡器 $C'(z)$ 输入端的噪声序列 $\{v_k\}$ 的观测来确定, $\{v_k\}$ 的均值为零且功率谱密度为

$$\Phi_{vv}(\omega) = N_0 X(e^{j\omega T}) \quad (|\omega| \leq \frac{\pi}{T}) \quad (10-2-10)$$

式中, $X(e^{j\omega T})$ 可由 $X(z)$ 以 $z = e^{j\omega T}$ 代入而得到。因为 $C'(z) = 1/X(z)$, 所以在均衡器输出端的噪声序列的功率谱密度为

① 为了数学处理方便, 本章都采用这种归一化方法。

② 若需要, 可以用信号的量乘以均衡器输出端的归一化 SNR。

$$\Phi_{nn}(\omega) = \frac{N_0}{X(e^{j\omega T})} \quad (|\omega| \leq \frac{\pi}{T}) \quad (10-2-11)$$

因此,均衡器输出端的噪声变量的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_{nn}(\omega) d\omega \\ &= \frac{TN_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{X(e^{j\omega T})} \end{aligned} \quad (10-2-12)$$

且迫零均衡器的 SNR 为

$$\begin{aligned} \gamma_\infty &= 1/\sigma_n^2 \\ &= \left[\frac{TN_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{X(e^{j\omega T})} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (10-2-13)$$

式中, γ 的下标表示均衡器有无限个抽头。

抽样序列 $\{x_n\}$ 傅里叶变换的谱特性 $X(e^{j\omega T})$ 与接收机中的模拟滤波器 $H(\omega)$ 之间有一个有趣的关系。因为

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t) h(t + kT) dt$$

利用帕什瓦尔定理,得到

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 e^{j\omega kT} d\omega \quad (10-2-14)$$

式中, $H(\omega)$ 是 $h(t)$ 的傅里叶变换。式(10-2-14)中的积分可以表示为如下形式

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) \right|^2 \right] e^{j\omega kT} d\omega \quad (10-2-15)$$

那么, $\{x_k\}$ 的傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega kT} \quad (10-2-16)$$

反变换后得到

$$x_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega kT} d\omega \quad (10-2-17)$$

将式(10-2-15)与式(10-2-17)比较,得出 $X(e^{j\omega T})$ 与 $H(\omega)$ 之间的关系,即

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) \right|^2 \quad (|\omega| \leq \frac{\pi}{T}) \quad (10-2-18)$$

式中,式(10-2-18)的右边称为 $|H(\omega)|^2$ 的折叠谱。我们也看到, $|H(\omega)|^2 = X(\omega)$, 其中 $X(\omega)$ 是波形 $x(t)$ 的傅里叶变换, $x(t)$ 是匹配滤波器对输入脉冲 $h(t)$ 的响应。因此,式(10-2-18)的右边也可以用 $X(\omega)$ 表示。

将式(10-2-18)中的结果代入式(10-2-13)的 $X(e^{j\omega T})$ 中,得到 SNR 表达式为

$$\gamma_\infty = \left[\frac{T^2 N_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{d\omega}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega + 2\pi n/T)|^2} \right]^{-1} \quad (10-2-19)$$

我们看到,如果 $H(\omega)$ 折叠谱特性具有任何零点,那么被积函数变成无穷大而 SNR 变成零。换言之,无论何时,折叠谱特性具有零点或较小的值,均衡器的性能都比较差,这主要是因为均衡器在消除符号间干扰的同时增强了加性噪声。例如,如果信道在它的频率响应中含有

一个谱零点,那么线性迫零均衡器试图在该频率处引入无穷大的增益来补偿它,但是这种对信道失真的补偿是以增强加性噪声为代价的。另一方面,结合适当的信号设计而不产生符号间干扰的理想信道的折叠谱将满足下列条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) \right|^2 = T \quad (|\omega| \leq \frac{\pi}{T}) \quad (10-2-20)$$

在这种情况下,SNR 达到其最大值,即

$$\gamma_{\infty} = \frac{1}{N_0} \quad (10-2-21)$$

有限长度均衡器

现在,让我们将注意力转向具有 $2K+1$ 个抽头的均衡器。因为当 $|j| > K$ 时 $c_j = 0$,所以在 $-K \leq n \leq K+L$ 范围^①之外, $\{f_n\}$ 与 $\{c_n\}$ 的卷积为零,即当 $n < -K$ 以及 $n > K+L$ 时^② $q_0 = 0$ 。当 q_0 归一化为 1 时,峰值失真^③ 为

$$\mathcal{D}(\mathbf{c}) = \sum_{\substack{n=-K \\ n \neq 0}}^{K+L} |q_n| = \sum_{\substack{n=-K \\ n \neq 0}}^{K+L} \left| \sum_j c_j f_{n-j} \right| \quad (10-2-22)$$

虽然均衡器有 $2K+1$ 个可调参数,但是在响应 $|q_n|$ 中有 $2K+L+1$ ^④ 个非零值。因此,要在均衡器输出端完全消除符号间干扰,一般是不可能的。当系数最佳时,总有一些残余的干扰。问题是使 $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ 关于系数 $|c_j|$ 最小化。

式(10-2-22)给出的峰值失真已由勒基(Lucky, 1965 年)证明是系数 $|c_j|$ 的凸函数,即它有一个全局的最小值而没有局部的最小值,其最小化可以采用如最陡下降法等方法通过数值计算来进行。这种最小化问题的一般解答无须赘述,但有一个特别重要的情况, $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ 的最小化解答已知。在此情况下,均衡器输入端的失真定义为

$$D_0 = \frac{1}{|f_0|} \sum_{n=1}^L |f_n| \quad (10-2-23)$$

该失真小于 1。这个条件等效于在均衡之前有一个睁升的眼图,即符号间干扰不足以严重到闭合眼图。在这种条件下,通过选择均衡器的系数,当 $1 \leq |n| \leq K$ 时迫使 $q_n = 0$ 且 $q_0 = 1$ 。换言之,当 $D_0 < 1$ 时, $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ 最小化的一般解答,是 $\{q_n\}$ 在 $1 \leq |n| \leq K$ 范围内的迫零解答。然而,对于 $K+1 \leq n \leq K+L$ ^⑤, $\{q_n\}$ 的值一般是非零的,这些非零值构成了均衡器输出端残余的符号间干扰。

10.2.2 均方误差(MSE)准则

在 MSE 准则中,调整均衡器的抽头权值系数 $|c_j|$,以使下列误差的均方值最小

$$\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k \quad (10-2-24)$$

式中, I_k 是在第 k 个信号传输间隔中发送的信息符号, \hat{I}_k 是均衡器输出端对该符号的估计值,由式(10-2-1)定义。当信息符号是复值时,MSE 准则的性能指数(标记为 J)定义为

① 原文误写为 $-K \leq n \leq K+L-1$ 。注意, $\{f_n\}$ 有 $L+1$ 个抽头。

② 原文误写为 $n > K+L-1$ 。

③ 原文式(10-2-22)中求和上限误写为 $K+L-1$ 。

④ 原文中误写为 $2K+L$ 。

⑤ 原文误写为 $K+1 \leq n \leq K+L-1$ 。

$$\begin{aligned} J &= E |\epsilon_k|^2 \\ &= E |I_k - \hat{I}_k|^2 \end{aligned} \quad (10-2-25)$$

另一方面,当信息符号是实值时,性能指数是 ϵ_k 实部的平方。在这两种情况下, J 都是均衡器系数 $\{c_j\}$ 的二次函数。在下面的讨论中,我们研究式(10-2-25)定义的复值形式的最小化问题。

1. 无限长度均衡器

首先推导当均衡器有无限个抽头时使 J 最小的抽头权值系数。在这种情况下,估计值 \hat{I}_k 可表示为

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j} \quad (10-2-26)$$

将式(10-2-26)代入式(10-2-25)中 J 的表达式,由其结果的展开式得到一个系数 $\{c_j\}$ 的二次函数。这个函数可容易地对 $\{c_j\}$ 进行最小化运算,得到一组(数目无穷多) $\{c_j\}$ 的线性方程。换一种方法,利用均方误差的正交性原理也能得到这组线性方程,即选择系数 $\{c_j\}$,使得误差 ϵ_k 正交于信号序列 $\{v_{k-l}^*\} (-\infty < l < \infty)$ 。因此

$$E(\epsilon_k v_{k-l}^*) = 0 \quad (-\infty < l < \infty) \quad (10-2-27)$$

替代式(10-2-27)中的 ϵ_k ,得到

$$E\left[\left(I_k - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j v_{k-j}\right)v_{k-l}^*\right] = 0$$

或等价于

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j E(v_{k-j} v_{k-l}^*) = E(I_k v_{k-l}^*) \quad (-\infty < l < \infty) \quad (10-2-28)$$

为了计算式(10-2-28)中的矩,利用式(10-1-16)中 v_k 的表达式,得到

$$\begin{aligned} E(v_{k-j} v_{k-l}^*) &= \sum_{n=0}^l f_n^* f_{n+l-j} + N_0 \delta_{lj} \\ &= \begin{cases} x_{l-j} + N_0 \delta_{lj} & (|l-j| \leq L) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \end{aligned} \quad (10-2-29)$$

及

$$E(I_k v_{k-l}^*) = \begin{cases} f_{-l}^* & (-L \leq l \leq 0) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (10-2-30)$$

如果将式(10-2-29)和式(10-2-30)代入式(10-2-28),并对所得方程的两边求 z 变换,得到

$$C(z)[F(z)F^*(z^{-1}) + N_0] = F^*(z^{-1}) \quad (10-2-31)$$

因此,基于 MSE 准则的均衡器传递函数为

$$C(z) = \frac{F^*(z^{-1})}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0} \quad (10-2-32)$$

当噪声白化滤波器合并到 $C(z)$ 中时,得到一个等效均衡器,其传递函数为

$$C'(z) = \frac{1}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0}$$

$$= \frac{1}{X(z) + N_0} \quad (10-2-33)$$

我们看到,此 $C'(z)$ 表达式与基于峰值失真准则的表达式之间的惟一差别是式(10-2-33)中出现的噪声谱密度因子 N_0 。当与信号相比 N_0 很小时,使峰值失真 $\mathcal{D}(c)$ 最小的系数近似等于使 MSE 性能指数 J 最小的系数。也就是说,在 $N_0 \rightarrow 0$ 的极限情况下,两个准则对抽头权值得出同样的解答。因此,当 $N_0 = 0$ 时, MSE 的最小化结果是符号间干扰的完全消除。另一方面,一般地,当 $N_0 \neq 0$ 时,在均衡器输出端同时存在残余符号间干扰和加性噪声。

当均衡器的传递函数 $C(z)$ 由式(10-2-32)确定时,通过计算 J 的最小值(记为 J_{\min}),可以得到残余符号间干扰和加性噪声的一个度量。因为 $J = E|\epsilon_k|^2 = E(\epsilon_k I_k^*) - E(\epsilon_k \hat{I}_k^*)$, 且根据式(10-2-27)给出的正交条件,有 $E(\epsilon_k \hat{I}_k^*) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} J_{\min} &= E(\epsilon_k I_k^*) \\ &= E|I_k|^2 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j E(v_{k-j} I_k^*) \\ &= 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_{-j} \end{aligned} \quad (10-2-34)$$

这种 J_{\min} 的特殊形式不提供更多的信息。当将式(10-2-34)中的和式变换到频率域时,可以更多地了解作为信道特性函数的均衡器性能。首先注意式(10-2-34)中的和式是 $|c_j|$ 与 $|f_j|$ 在零移处的卷积。因此,如果 $|b_k|$ 表示这两个序列的卷积,那么式(10-2-34)中的和式就等于 b_0 。因为序列 $|b_k|$ 的 z 变换为

$$\begin{aligned} B(z) &= C(z)F(z) \\ &= \frac{F(z)F^*(z^{-1})}{F(z)F^*(z^{-1}) + N_0} \\ &= \frac{X(z)}{X(z) + N_0} \end{aligned} \quad (10-2-35)$$

b_0 项是

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{B(z)}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{X(z)}{z[X(z) + N_0]} dz \end{aligned} \quad (10-2-36)$$

式(10-2-36)中的围线积分可以通过变量的替换 $z = e^{j\omega T}$ 而变换为一个等效的线积分。该变量替换的结果是

$$b_0 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{X(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \quad (10-2-37)$$

最后,将式(10-2-37)的结果代入式(10-2-34)的和式,得到所期望的最小 MSE 表达式为

$$\begin{aligned} J_{\min} &= 1 - \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{X(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{X(e^{j\omega T}) + N_0} d\omega \end{aligned} \quad (10-2-38)$$

$$= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(\omega + 2\pi n/T)|^2 + N_0} d\omega$$

不存在符号间干扰时, $X(e^{j\omega T}) = 1$, 因此

$$J_{\min} = \frac{N_0}{1 + N_0} \quad (10-2-39)$$

我们看到, $0 \leq J_{\min} \leq 1$ 。输出(由信号能量归一化)SNR 的 γ_{∞} 与 J_{\min} 之间的关系一定是

$$\gamma_{\infty} = \frac{1 - J_{\min}}{J_{\min}} \quad (10-2-40)$$

更重要的是, 当除噪声之外还有残余符号间干扰时, 这个 γ_{∞} 与 J_{\min} 的关系式仍然成立。

2. 有限长度均衡器

注意横向均衡器横跨有限持续时间的情况。在第 k 个信号传输间隔中, 均衡器的输出是

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \quad (10-2-41)$$

具有 $2K+1$ 个抽头的均衡器的 MSE 标记为 $J(K)$ 且

$$J(K) = E |I_k - \hat{I}_k|^2 = E \left| I_k - \sum_{j=-K}^K c_j v_{k-j} \right|^2 \quad (10-2-42)$$

$J(K)$ 关于抽头权值 $\{c_j\}$ 的最小化, 等价于迫使误差 $\varepsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ 正交于信号样值 v_{j-l}^* , $|l| \leq K$, 则得到下列联立方程组

$$\sum_{j=-K}^K c_j \Gamma_{lj} = \xi_l \quad (l = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K) \quad (10-2-43)$$

式中

$$\Gamma_{lj} = \begin{cases} x_{l-j} + N_0 \delta_{lj} & (|l-j| \leq L) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (10-2-44)$$

且

$$\xi_l = \begin{cases} f_{-l}^* & (-L \leq l \leq 0) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \quad (10-2-45)$$

为方便计, 可将该线性方程组表示成矩阵形式, 因此

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{C} = \boldsymbol{\xi} \quad (10-2-46)$$

式中, \mathbf{C} 表示 $(2K+1)$ 个抽头权值系数的列向量, $\mathbf{\Gamma}$ 表示元素为 Γ_{lj} 的 $(2K+1) \times (2K+1)$ 埃尔米特协方差矩阵, $\boldsymbol{\xi}$ 是元素为 ξ_l 的 $(2K+1)$ 维列向量。式(10-2-46)的解为

$$\mathbf{C}_{\text{opt}} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\xi} \quad (10-2-47)$$

因此, \mathbf{C}_{opt} 的解包含对矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 求逆。式(10-2-47)给出的最佳抽头权值系数使性能指数 $J(K)$ 最小, 其结果的 $J(K)$ 最小值为

$$\begin{aligned} J_{\min}(K) &= 1 - \sum_{j=-K}^0 c_j f_{-j} \\ &= 1 - \boldsymbol{\xi}'^* \mathbf{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (10-2-48)$$

式中, $\boldsymbol{\xi}'$ 表示列向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置。 $J_{\min}(K)$ 可用于式(10-2-40), 以便计算具有 $(2K+1)$ 个抽头系

数的线性均衡器的输出 SNR。

10.2.3 MSE 均衡器的性能特征

本节研究采用 MSE 最佳化准则的线性均衡器的性能特征。最小 MSE 和错误概率两者均被考虑为对某些具体信道的性能度量。首先,对两个具体信道计算最小 MSE J_{min} 和输出 SNR γ_{∞} , 然后研究错误概率的计算。

例 10-2-1 首先研究一个等效离散时间信道模型,它由两个分量 f_0 和 f_1 组成,且归一化为 $|f_0|^2 + |f_1|^2 = 1$ 。其次

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} \quad (10-2-49)$$

且

$$X(z) = f_0 f_1^* z + 1 + f_0^* f_1 z^{-1} \quad (10-2-50)$$

相应的频率响应为

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega T}) &= f_0 f_1^* e^{j\omega T} + 1 + f_0^* f_1 e^{-j\omega T} \\ &= 1 + 2 |f_0| |f_1| \cos(\omega T + \theta) \end{aligned} \quad (10-2-51)$$

式中, θ 是 $f_0 f_1^*$ 的相角。注意,当 $f_0 = f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 时,该信道特性曲线在 $\omega = \pi/T$ 处有一个零点。

根据 MSE 准则调整的无限抽头线性均衡器将得到式(10-2-38)给出的最小 MSE。在式(10-2-38)中对式(10-2-51)给出的 $X(e^{j\omega T})$ 进行积分运算,得到

$$\begin{aligned} J_{min} &= \frac{N_0}{\sqrt{N_0^2 + 2N_0(|f_0|^2 + |f_1|^2) + (|f_0|^2 - |f_1|^2)^2}} \\ &= \frac{N_0}{\sqrt{N_0^2 + 2N_0 + (|f_0|^2 - |f_1|^2)^2}} \end{aligned} \quad (10-2-52)$$

研究 $f_0 = f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 的特殊情况。最小 MSE 是 $J_{min} = N_0 / \sqrt{N_0^2 + 2N_0}$, 相应的输出 SNR 为

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} &= \sqrt{1 + \frac{2}{N_0}} - 1 \\ &\approx \left(\frac{2}{N_0} \right)^{1/2} \quad (N_0 \ll 1) \end{aligned} \quad (10-2-53)$$

应当将此结果与无符号间干扰情况下得到的输出 SNR $1/N_0$ 进行比较。该信道引起明显的 SNR 损失。

例 10-2-2 作为第二个例子,研究一个指数衰减特性,其形式为

$$f_k = \sqrt{1-a^2} a^k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

式中, $a < 1$ 。该序列的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\omega T} \quad (10-2-54)$$

它是一个函数,在 $\omega = \pi/T$ 处有一个最小值。

该信道的输出 SNR 为

$$\gamma_{\infty} = \left[\sqrt{1 + 2N_0 \frac{1+a^2}{1-a^2} + N_0^2} - 1 \right]^{-1} \\ \approx \frac{1-a^2}{(1+a^2)N_0} \quad (N_0 \ll 1) \quad (10-2-55)$$

因此,由于干扰造成的 SNR 损失为

$$-10\lg\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$$

线性 MSE 均衡器的错误概率的性能

上面讨论了线性均衡器的性能,该性能是以最小可达到的 MSE J_{\min} 和输出 SNR γ 表示的,其中 γ 通过式(10-2-40)与 J_{\min} 有关,但这些量与错误概率之间没有简单的关系,其原因是线性 MSE 均衡器在其输出端包含残余的符号间干扰。这种情况不像无限长的迫零均衡器那样,后者不存在残余符号间干扰,仅有高斯噪声。在 MSE 均衡器输出端的残余干扰不能表征为一个附加的高斯噪声项。因此,输出 SNR 不容易折算成等效的错误概率。

计算错误概率的一种方法是强制法,它能产生准确的结果。为了说明这种方法,研究 PAM 信号,其中信息符号等概率地从一组值 $2n - M - 1$ ($n = 1, 2, \dots, M$) 中选取。现在研究对符号 I_n 的判决, I_n 的估计值是

$$\hat{I}_n = q_0 I_n + \sum_{k \neq n} I_k q_{n-k} + \sum_{j=-K}^K c_j \eta_{n-j} \quad (10-2-56)$$

式中, $\{q_n\}$ 表示均衡器与等效信道冲激响应的卷积,即

$$q_n = \sum_{k=-K}^K c_k f_{n-k} \quad (10-2-57)$$

且均衡器输入信号

$$v_k = \sum_{j=0}^L f_j I_{k-j} + \eta_k \quad (10-2-58)$$

式(10-2-56)右边的第一项是期望信息符号,中间项是符号间干扰,最后一项是高斯噪声。噪声的方差为

$$\sigma_n^2 = N_0 \sum_{j=-K}^K c_j^2 \quad (10-2-59)$$

对于具有 $2K+1$ 个抽头的均衡器和横跨 $L+1$ 个符号的信道响应,被卷入符号间干扰的符号数目是 $2K+L$ 。

定义

$$\mathcal{D} = \sum_{k \neq n} I_k q_{n-k} \quad (10-2-60)$$

对于一个特定的 $2K+L$ 个信息符号的序列,如序列 \mathbf{I}_j ,符号间干扰项 $\mathcal{D} = D_j$ 是固定的。

固定 D_j 的错误概率是

$$P_M(D_j) = 2 \frac{(M-1)}{M} P(N + D_j > q_0) \\ = \frac{2(M-1)}{M} Q \left[\sqrt{\frac{(q_0 - D_j)^2}{\sigma_n^2}} \right] \quad (10-2-61)$$

式中, N 表示加性噪声项。将 $P_M(D_j)$ 在所有可能的序列 I_j 上求平均, 得到平均错误概率

$$\begin{aligned} P_M &= \sum_{I_j} P_M(D_j) P(I_j) \\ &= \frac{2(M-1)}{M} \sum_{I_j} Q \left[\sqrt{\frac{(q_0 - D_j)^2}{\sigma_n^2}} \right] P(I_j) \end{aligned} \quad (10-2-62)$$

当所有序列等概时,

$$P(I_j) = \frac{1}{M^{2K+L}} \quad (10-2-63)$$

条件错误概率项 $P_M(D_j)$ 由产生最大 D_j 值的序列支配, 这发生在 $I_n = \pm(M-1)$ 且信息符号的正负号与相应的 $|q_n|$ 的正负号相符时, 那么

$$D_j^* = (M-1) \sum_{k \neq 0} |q_k|$$

且

$$P_M(D_j^*) = \frac{2(M-1)}{M} Q \left[\sqrt{\frac{q_0^2}{\sigma_n^2} \left(1 - \frac{M-1}{q_0} \sum_{k \neq 0} |q_k| \right)^2} \right] \quad (10-2-64)$$

因此, 对于等概符号序列, 平均错误概率的上边界为

$$P_M \leq P_M(D_j^*) \quad (10-2-65)$$

如果由于总和中的项数庞大, 使得式(10-2-62)中精确错误概率的计算太烦琐、太耗时, 且如果上边界疏松, 那么可以任选一种近似方法求解, 这些方法能产生 P_M 的紧密边界。本书不讨论这些近似方法, 有兴趣的读者可参考萨尔茨伯格(Saltzberg, 1968年)、勒岗纳里(Luganani, 1969年)、何和叶(Ho 和 Yah, 1970年)、西姆保和塞尔比勒(Simbo 和 Celebiler, 1971年)、格拉夫(Glave, 1972年)、姚(Yao, 1972年)、姚和托宾(Yao 和 Tombin, 1976年)等人的论文。

对于在有严重的符号间干扰的情况下线性均衡器性能限制的说明如图 10-2-4 所示, 图中示出了二进制(双极性)信号传输的错误概率, 是针对图 10-2-5 所示的 3 种离散时间信道特性用蒙特卡洛模拟方法测量出来的。为便于比较, 图 10-2-4 说明了无符号间干扰信道的性能。图 10-2-5(a)所示的等效离散时间信道是典型的高质量电话信道响应。相反地, 图 10-2-5(b)和图 10-2-5(c)所示的等效离散时间信道特性导致严重的符号间干扰。图 10-2-6 中说明的 3 条信道的谱特性 $|X(e^{j\omega})|$ 清楚地表明, 图 10-2-5(c)中的信道的谱特性最差。因此, 该信道的线性均衡器的性能最差, 性能其次的是图 10-2-5(b)所示的信道, 图 10-2-5(a)所示的信道性能最好。事实上, 后者的差错率与无符号间干扰所达到的差错率的差别不超过 3 dB。

由输出 $\text{SNR} \gamma_\infty$ 和图 10-2-4 说明的有限错误概率的结果可得出结论: 线性均衡器对于像电话线这样的信道来说性能良好, 其中信道具有较好的特性且不存在谱零点。另一方面, 对于像在无线传输中遇到的具有谱零点的信道, 线性均衡器作为符号间干扰的补偿器是不合适的。通常, 信道谱零点使得线性均衡器输出端的噪声大大增强。

线性均衡器处理严重的 ISI 将受到的限制激发了人们对于具有低计算复杂度的非线性均衡器的研究。10.3 节所述的判决反馈均衡器被证明是对该问题的一个有效的解决方法。

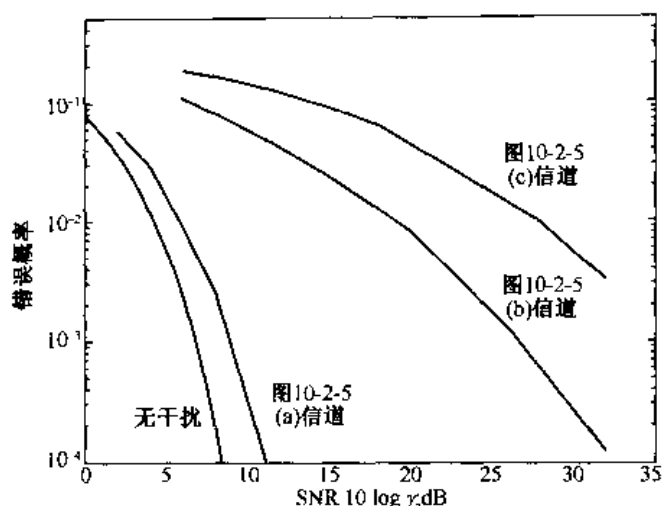


图 10-2-4 线性 MSE 均衡器差错率性能,横向均衡器中有 31 个抽头

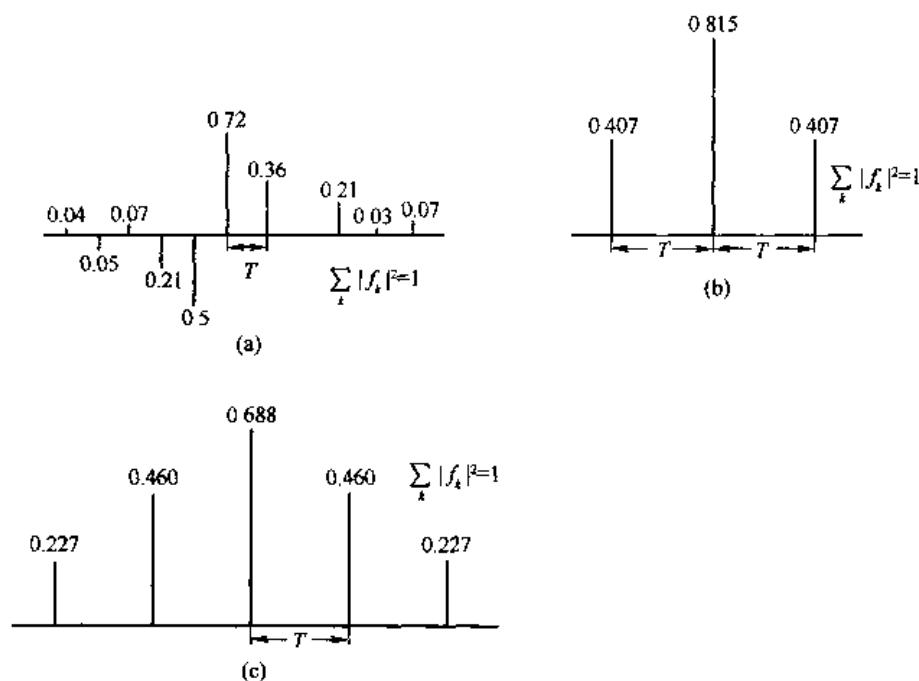


图 10-2-5 3 种离散时间信道特性

10.2.4 分数间隔均衡器

上节所述的线性均衡器结构中,均衡器抽头的间隔为符号速率的倒数,即信号传输速率 $1/T$ 的倒数。如果均衡器之前有一个与信道失真后的发送脉冲相匹配的滤波器,那么这种抽头间隔是最佳的。当信道特性未知时,接收机滤波器有时匹配于发送信号脉冲,对该次最佳滤波器的抽样时间最佳化。通常,这种方法导致均衡器性能对抽样时间的选择非常敏感。

符号速率均衡器的限制在频率域中显而易见。由式(9-2-5),在均衡器输入端,信号的谱可以表示为

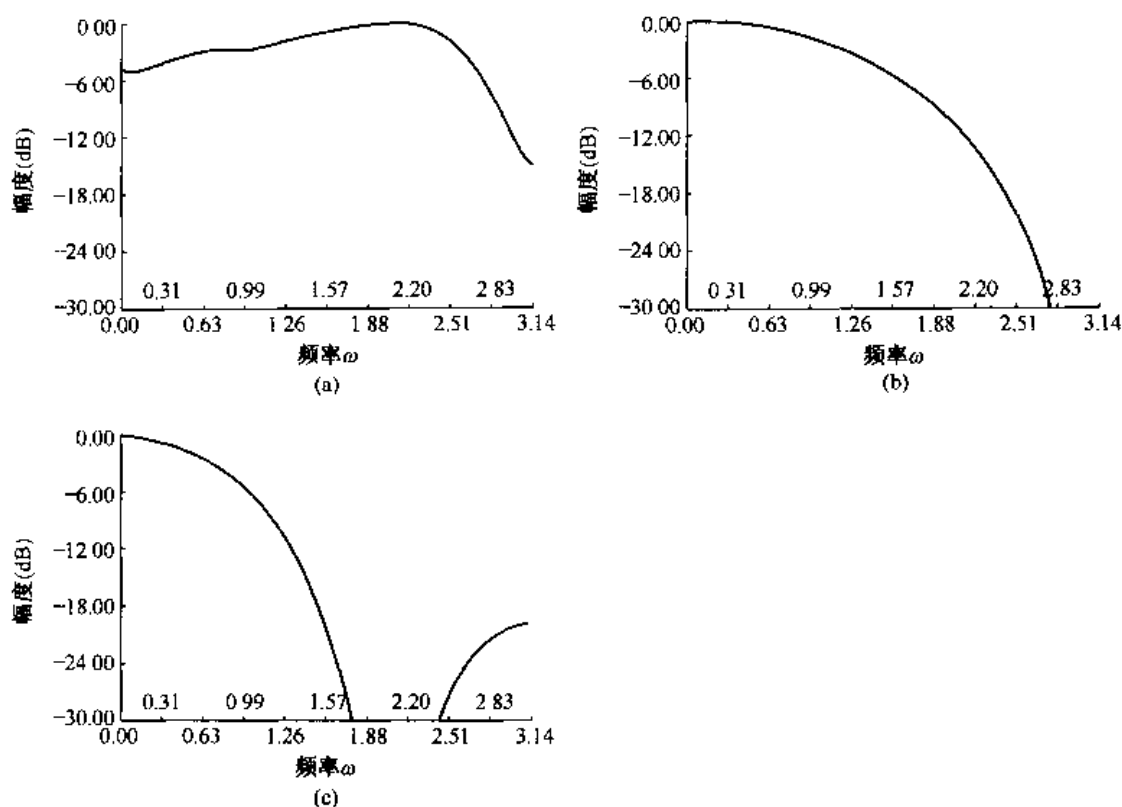


图 10-2-6 图 10-2-5(a)、(b)和(c)分别所示信道的幅度谱

$$Y_T(f) = \frac{1}{T} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi(f - n/T)\tau_0} \quad (10-2-66)$$

式中, $Y_T(f)$ 为折叠或混叠谱, 其中折叠频率是 $1/2T$ 。注意, 接收信号谱与抽样延时 τ_0 的选择有关。均衡器输出端的谱为 $C_T(f)Y_T(f)$, 其中

$$C_T(f) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{-j2\pi f k T} \quad (10-2-67)$$

这些关系清楚地表明, 符号速率均衡器只能补偿混叠接收信号的频率响应, 不能补偿信道的固有失真 $X(f)e^{j\omega f \tau_0}$ 。

与符号速率均衡器相反, 分数间隔均衡器(FSE)基于输入信号以至少两倍的奈奎斯特速率进行抽样。例如, 发送信号由升余弦谱的脉冲组成, 其滚降因子为 β , 则其谱延伸到 $F_{\max} = (1 + \beta)/2T$ 。在接收机中, 可以速率

$$2F_{\max} = \frac{1 + \beta}{T} \quad (10-2-68)$$

对该信号抽样, 信号通过一个抽头间隔为 $T/(1 + \beta)$ 的均衡器。例如, 如果 $\beta = 1$, 则均衡器的间隔为 $\frac{1}{2}T$ 。如果 $\beta = 0.5$, 则均衡器的间隔为 $\frac{2}{3}T$ 。一般地, 一个数字实现的分数间隔均衡器的抽头间隔为 MT/N , 其中 M 和 N 为整数且 $N > M$ 。通常采用 $\frac{1}{2}T$ 间隔的均衡器。

$$\text{因为 FSE 的频率响应为 } C_{T'}(f) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{j2\pi f k T'} \quad (10-2-69)$$

式中, $T' = MT/N$, 所以 $C_{T'}(f)$ 能够对奈奎斯特频率 $f = 1/2T$ 之外至 $f = (1 + \beta)/2T =$

$N/2MT$ 的接收信号谱进行均衡。均衡后的谱为

$$\begin{aligned} C_T(f) Y_T(f) &= C_T(f) \sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi(f - n/T)\tau_0} \\ &= C_T(f) \sum_n X\left(f - \frac{nN}{MT}\right) e^{j2\pi(f - nN/MT)\tau_0} \end{aligned} \quad (10-2-70)$$

因为当 $|f| > N/MT$ 时 $X(f) = 0$, 所以式 (10-2-70) 可以表示为

$$C_T(f) Y_T(f) = C_T(f) X(f) e^{j2\pi f \tau_0} \quad (|f| \leq \frac{1}{2T}) \quad (10-2-71)$$

因此, 在因符号速率抽样造成混叠效应之前, FSE 补偿了接收信号中的信道失真。换言之, $C_T(f)$ 能够补偿任意的定时相位。

FSE 输出以符号速率抽样且频谱为

$$\sum_k C_T\left(f - \frac{k}{T}\right) X\left(f - \frac{k}{T}\right) e^{j2\pi(f - k/T)\tau_0} \quad (10-2-72)$$

实际上, 最佳 FSE 等价于最佳线性接收机, 它由匹配滤波器之后跟随一个符号速率均衡器组成。

下面研究 FSE 中抽头系数的调整问题。FSE 的输入可以表示为

$$y\left(\frac{kMT}{N}\right) = \sum_n I_n x\left(\frac{kMT}{N} - nT\right) + v\left(\frac{kMT}{N}\right) \quad (10-2-73)$$

在每一个符号间隔中, FSE 产生一个输出, 其形式为

$$\hat{I}_k = \sum_{n=-K}^K c_n y\left(kT - \frac{nMT}{N}\right) \quad (10-2-74)$$

式中, 以最小化 MSE 来选择均衡器的系数。这种最佳化导致均衡器系数的一个线性方程组, 其解答为

$$\mathbf{C}_{\text{opt}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} \quad (10-2-75)$$

式中 \mathbf{A} 是输入数据的协方差矩阵, \mathbf{a} 是互相关向量。这些方程在形式上与符号速率均衡器的方程相同, 但有细微差别。其一是 \mathbf{A} 是埃尔米特矩阵, 而不是托伯利兹 (Toeplitz) 矩阵。此外, \mathbf{A} 呈现周期性, 这是循环平稳过程中固有的特性, 正如库里西 (Qureshi, 1985 年) 证明的。由于分数间隔的结果, \mathbf{A} 的一些特征值接近于零。朗 (Long, 1988 年) 等人研究了系数调整中的这种特性。

分数间隔均衡器性能的分析, 包括其收敛特性, 在昂格伯克 (Ungerboeck, 1976 年) 的论文中给出。证明 FSE 对符号速率均衡器的有效性的计算机模拟结果, 由库里西和福尼 (Qureshi 和 Forney, 1977 年) 以及吉特林和温斯坦 (Gitlin 和 Weinstein, 1981 年) 在其论文中给出。我们从这些论文中引用两个例子。首先, 图 10-2-7 说明了用于一个具有高端幅度失真的信道 (其特性也示于该图) 的符号速率均衡器和 $\frac{1}{2}T$ -FSE 的性能。符号间隔均衡器之前有一个滤波器匹配于发送脉冲, 具有 (平方根) 升余弦谱且 20% 滚降 ($\beta = 0.2$)。FSE 之前没有滤波器。符号速率为 2400 符号/s 且调制为 QAM。接收 SNR 是 30 dB。两种均衡器均有 31 个抽头, 因此 $\frac{1}{2}T$ -FSE 横跨的时间间隔是符号速率均衡器的一半。虽然如此, 当后者在最佳抽样时刻被最佳化时, FSE 性能优于符号速率均衡器, 而且 FSE 对定时相位不敏感, 如图 10-2-7 所示。

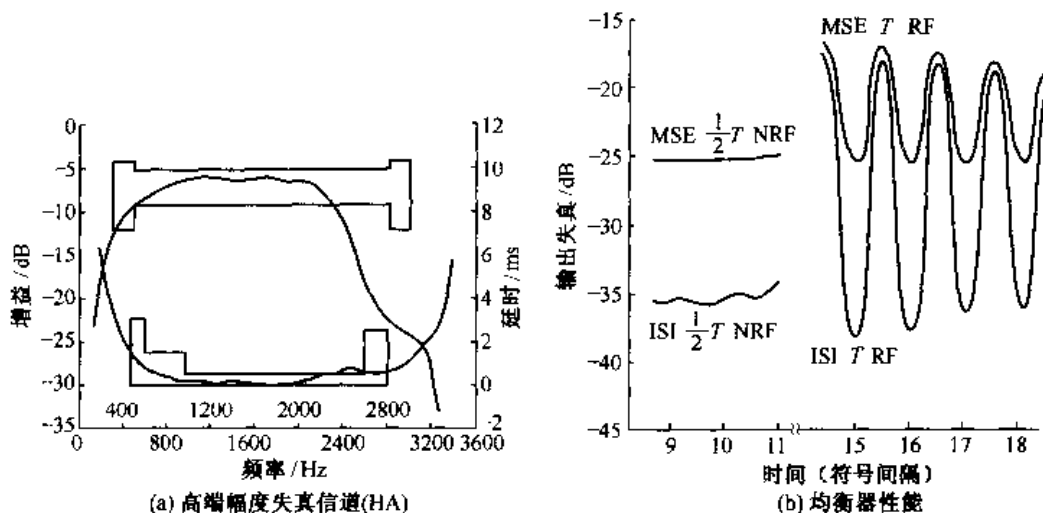


图 10-2-7 对于每秒 2400 符号,作为定时相位函数的 T 和 $\frac{1}{2}T$ 均衡器的性能
(NRF 表示无接收滤波器)

类似的结果吉特林和温斯坦(Gitlin 和 Weinstein)也从研究中得出。对于一个具有较差的包络延时特性的信道,符号速率均衡器和 $\frac{1}{2}T$ -FSE 的 SNR 性能如图 10-2-8 所示。在这种情况下,两种均衡器有相同的时间跨度。 T 间隔均衡器有 24 个抽头,FSE 有 48 个抽头,符号速率为 2 400 符号/s 且数据速率为 9 600 b/s,采用 QAM 调制。信号脉冲具有升余弦谱且 $\beta=0.12$ 。注意,FSE 性能优于 T 间隔均衡器几个分贝,甚至当后者调整到最佳抽样时也如此。这两篇论文充分证明了分数间隔均衡器所能达到的优越性能。

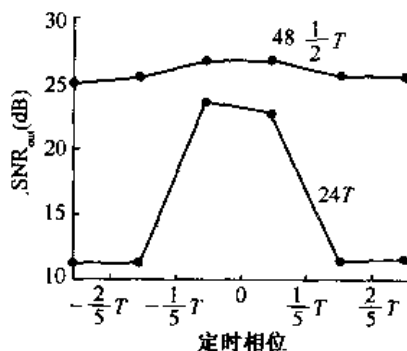


图 10-2-8 T 和 $\frac{1}{2}T$ 均衡器的性能,是定时相位的函数。

符号速率 2 400 符号/s,16QAM 调制,信道有较差的包络延时

10.2.5 基带和带通线性均衡器

上面对线性均衡器的处理是按照等效低通信号形式进行的。然而,在实际的实现中,图 10-2-1 所示的线性均衡器可以在基带实现,或者在带通实现。例如,图 10-2-9 说明了 QAM (或多相 PSK)的解调,它首先将信号搬到基带,再用复系数的均衡器对基带信号进行均衡。实际上,具有复(同相和正交分量)输入的均衡器等效为 4 个并行的且具有实抽头系数的均衡

器,如图 10-2-10 所示。通常,我们将图 10-2-9 中的均衡器称为复基带均衡器。

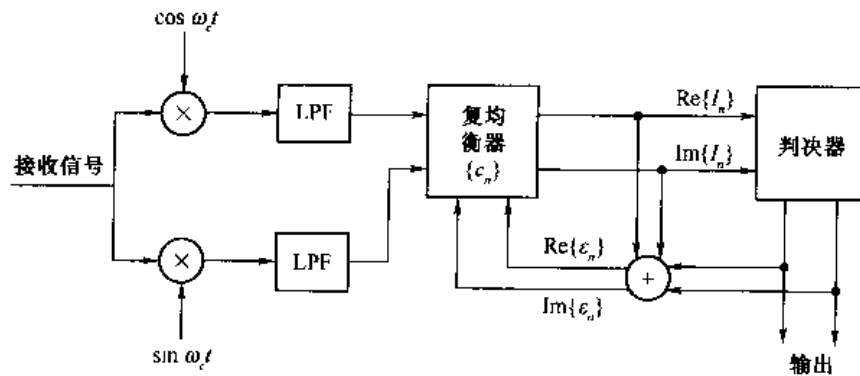


图 10-2-9 带有基带均衡器的 QAM 和 PSK 解调器

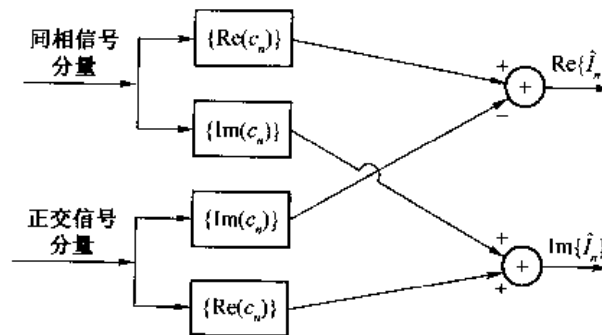


图 10-2-10 QAM 和 PSK 信号的复基带均衡器

作为一种替代方式,我们也可在带通均衡信号。对于二维信号星座,如 QAM 和 PSK,这种方式的实现如图 10-2-11 所示。接收信号以并行方式滤波,该信号通过一个希尔伯特 (Hilbert)变换器,称为相位分离滤波器。因此,在带通中有等效的同相和正交分量,将这些分量馈送到带通复均衡器。我们也可以将该均衡器的结构称为复带通均衡器。均衡之后,该信号向下变换成基带信号并进行检测。

复基带均衡器可以用符号速率均衡器 (SRE) 实现,也可以用分数间隔均衡器 (FSE) 来实现,通常优选后者,因为它对一个符号间隔内抽样相位不敏感。

复带通均衡器必须是 FSE,其输入接收信号样值的抽样速率多倍于符号速率且超过奈奎斯特速率。

图 10-2-11 所示结构的一种可替代的带通 FSE 如图 10-2-12 所示。在这种 FSE 中,实接收信号样值的抽样速率为奈奎斯特速度或者更高的速率,该信号由一个复系数的线性均衡器进行带通均衡。注意,该均衡器结构不是很直观地实现一个希尔伯特变换器来进行相位分离的操作,而是将相位分离的功能嵌入到均衡器的系数中,从而避免使用希尔伯特变换。图 10-2-12 中这种可替代的带通 FSE 称为相位分离 FSE (PS-FSE)。米勒和维尔纳 (Mueller & Werner, 1982 年),伊姆和恩 (Im & Un, 1987 年),以及林和库里西 (Ling & Qureshi, 1990 年) 等研究了这种均衡器的性质和性能。

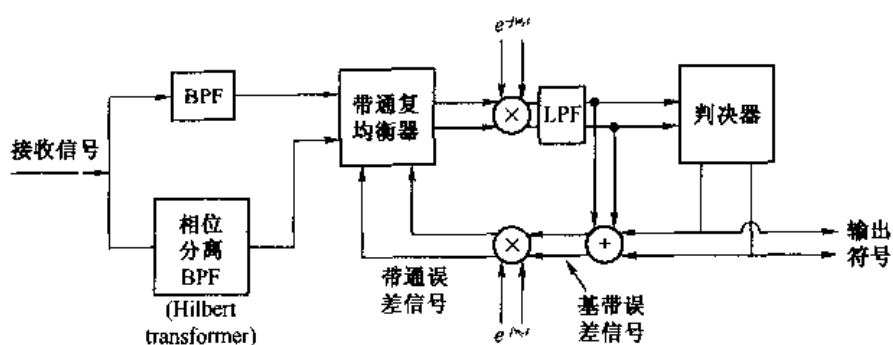


图 10-2-11 QAM 或 PSK 信号的带通均衡

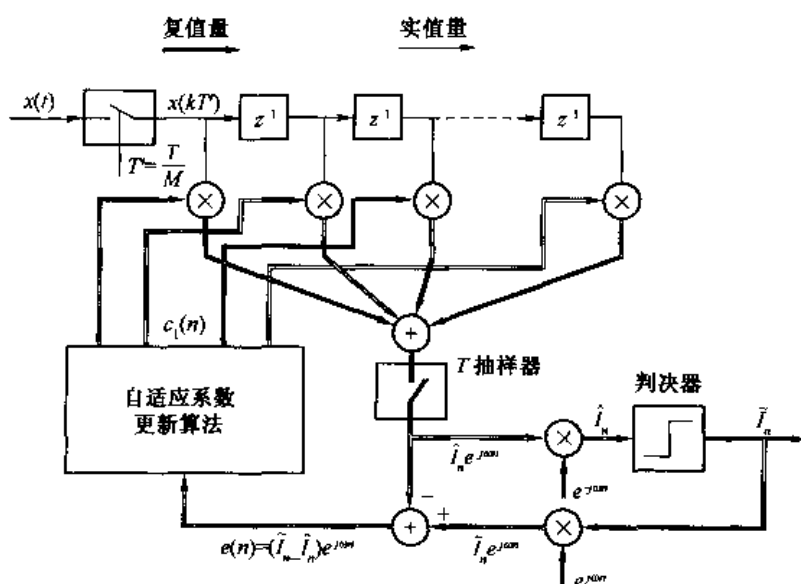


图 10-2-12 相位分离分数间隔均衡器的结构

10.3 判决反馈均衡器

图 10-3-1 所示的判决反馈均衡器(DFE)由两个滤波器组成,一个前馈滤波器和一个反馈滤波器。如图所示,两个滤波器的抽头间隔均是符号间隔 T 。前馈部分的输入是接收信号序列 $\{v_k\}$ 。在这一方面,前馈滤波器与 10.2 节所述的线性横向均衡器相同。反馈滤波器以对先前被检测符号的判决序列作为其输入。从功能上讲,反馈滤波器用来从当前估计值中除去由先前被检测符号引起的那部分符号间干扰。

在前向和反馈滤波器具有无限长冲激响应的情况下,普赖斯(Price, 1972 年)证明了在迫零 DFE 中的最佳前馈滤波器就是前述的白化匹配滤波器。在这种情况下,反馈滤波器的系数只与 $F(z)$ 的系数有关。

下面,我们利用 MSE 准则优化两个滤波器的系数,其中每一个滤波器的系数是有限的。

10.3.1 系数最佳化

如上所述,判决反馈均衡器的输出可表示为

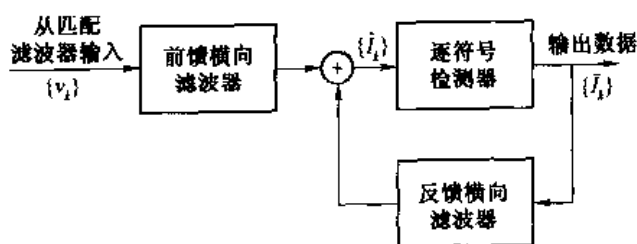


图 10-3-1 判决反馈均衡器的结构

$$\hat{I}_k = \sum_{j=-K_1}^0 c_j v_{k-j} + \sum_{j=1}^{K_2} c_j I_{k-j} \quad (10-3-1)$$

式中, \hat{I}_k 是第 k 个信息符号的估计值, $\{c_j\}$ 是滤波器的抽头系数, $\{I_{k-1}, \dots, I_{k-K_2}\}$ 是先前检测的符号。假定该均衡器在其前馈部分有 $(K_1 + 1)$ 个抽头, 而在反馈部分有 K_2 个抽头。应当看到, 这种均衡器是非线性的, 因为反馈滤波器包含先前检测的符号 $\{I_k\}$ 。

峰值失真准则和 MSE 准则都导致均衡器系数的最佳化, 这种最佳化在数学上是容易处理的, 这是由乔治 (George, 1971 年)、普赖斯 (Price, 1972 年)、扎尔茨 (Salz, 1973 年) 和普罗基斯 (Proakis, 1975 年) 等人的论文得出的结论。因为 MSE 准则在实际应用中更普遍, 我们将重点研究它。假定在反馈滤波器中先前检测的符号是正确的, 那么 MSE

$$J(K_1, K_2) = E |I_k - \hat{I}_k|^2 \quad (10-3-2)$$

的最小化导致前馈滤波器系数的下列线性方程组:

$$\sum_{j=-K_1}^0 \psi_{lj} c_j = f_{-l}^* \quad (l = -K_1, \dots, -1, 0) \quad (10-3-3)$$

式中

$$\psi_{lj} = \sum_{m=0}^{-l} f_m^* f_{m+l-j} + N_0 \delta_{lj} \quad (l, j = -K_1, \dots, -1, 0) \quad (10-3-4)$$

该均衡器的反馈滤波器系数以前馈部分系数表示, 其表达式为

$$c_k = - \sum_{j=-K_1}^0 c_j f_{k-j} \quad (k = 1, 2, \dots, K_2) \quad (10-3-5)$$

倘若先前判决正确且 $K_2 \geq L$ (参见习题 10-20), 那么反馈系数的值可以完全消除由先前被检测符号引起的符号间干扰。

10.3.2 DFE 的性能特征

下面讨论判决反馈均衡器的性能。由于检测器偶尔作出不正确的判决并向下传播到反馈部分, 对性能作出精确的评价比较困难。当不存在判决差错的情况下, 最小 MSE 为

$$J_{\min}(K_1) = 1 - \sum_{j=-K_1}^0 c_j f_{-j} \quad (10-3-6)$$

将前馈滤波器的抽头数取无穷大 ($K_1 \rightarrow \infty$), 得到最小可达到的 MSE, 记为 J_{\min} 。经进一步处理, J_{\min} 可用信道的谱特性和加性噪声来表示, 如扎尔茨 (Salz, 1973 年) 证明的。这个 J_{\min} 较理想的表达式是

$$J_{\min} = \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{N_0}{X(e^{j\omega T}) + N_0} \right] d\omega \right\} \quad (10-3-7)$$

相应的输出 SNR 是

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} &= \frac{1 - J_{\min}}{J_{\min}} \\ &= -1 + \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{N_0 + X(e^{j\omega T})}{N_0} \right] d\omega \right\} \end{aligned} \quad (10-3-8)$$

再次看到, 在不存在符号间干扰的情况下, $X(e^{j\omega T}) = 1$ 且 $J_{\min} = N_0/(1 + N_0)$ 。相应的输出 SNR 是 $\gamma_{\infty} = 1/N_0$ 。

例 10-3-1 将判决反馈均衡器的 J_{\min} 值与线性 MSE 均衡器的 J_{\min} 值进行比较。例如, 研究由两个抽头 f_0 和 f_1 组成的离散时间等效信道。该信道的最小 MSE 是

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \exp \left\{ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln \left[\frac{N_0}{1 + N_0 + 2|f_0||f_1|\cos(\omega T + \theta)} \right] d\omega \right\} \\ &= N_0 \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + N_0 + 2|f_0||f_1|\cos\omega) d\omega \right] \\ &= \frac{2N_0}{1 + N_0 + \sqrt{(1 + N_0)^2 - 4|f_0 f_1|^2}} \end{aligned} \quad (10-3-9)$$

注意, 当 $|f_0| = |f_1| \sqrt{\frac{1}{2}}$ 时, J_{\min} 被最大化, 那么

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{2N_0}{1 + N_0 + \sqrt{(1 + N_0)^2 - 1}} \\ &\approx 2N_0, N_0 \ll 1 \end{aligned} \quad (10-3-10)$$

相应的输出 SNR 是

$$\gamma_{\infty} \approx \frac{1}{2N_0} \quad (N_0 \ll 1) \quad (10-3-11)$$

因此, 由于存在符号间干扰, 输出 SNR 下降了 3 dB。比较起来, 线性均衡器的性能损失很严重, 其输出 SNR 如式 (10-2-53) 所示, $N_0 \ll 0$ 时 $\gamma_{\infty} \approx (2/N_0)^{1/2}$ 。

例 10-3-2 研究一个指数衰减信道特性, 其形式为

$$f_k = (1 - a^2)^{1/2} a^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (10-3-12)$$

式中, $a < 1$ 。判决反馈均衡器的输出 SNR 是

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} &= -1 + \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left[\frac{1 + a^2 + (1 - a^2)/N_0 - 2a \cos\omega}{1 + a^2 - 2a \cos\omega} \right] d\omega \right\} \\ &= -1 + \frac{1}{2N_0} \{ 1 - a^2 + N_0(1 + a^2) + \sqrt{[1 - a^2 + N_0(1 + a^2)]^2 - 4a^2 N_0^2} \} \\ &\approx \frac{(1 - a^2)[1 + N_0(1 + a^2)/(1 - a^2)] - N_0}{N_0} \\ &\approx \frac{1 - a^2}{N_0} \quad (N_0 \ll 1) \end{aligned} \quad (10-3-13)$$

因此, SNR 的损失是 $10\lg(1 - a^2)$ dB。比较起来, 线性均衡器的损失是 $10\lg[(1 - a^2)/(1 + a^2)]$ dB。

这些结果说明, 当判决差错对性能影响可忽略时, 判决反馈均衡器优于线性均衡器。显而易见, 相对于线性均衡器, 加入判决反馈部分可得到性能上相当大的增益, 这是由于反馈部分消除了由先前被检测符号引起的符号间干扰缘故。

评估判决反馈均衡器的判决差错对差错率性能影响的一种方法是数字计算机上的蒙特卡罗模拟法。为了说明, 下面提供二进制 PAM 信号通过图 10-2-5(b) 和图 10-2-5(c) 所示的等效离散时间信道模型传输的结果。

图 10-3-2 所示为模拟的结果。首先, 将这些结果与图 10-2-4 中的结果比较, 可得到以下结论: 判决反馈均衡器相对于有同样抽头数的线性均衡器在性能上有显著的改善。其次, 由于残余符号间干扰, 判决反馈均衡器在性能上显著下降, 特别是对有严重失真的信道, 例如图 10-2-5(c) 所示的信道。最后, 对于所研究的信道响应, 由不正确判决被反馈造成的性能损失近似为 2 dB。其他关于带有差错传播的判决反馈均衡器的错误概率的研究成果, 可以在唐特威勒(Duttweiler, 1974 年) 等人 and 博利厄(Beaulieu, 1994 年) 的论文中找到。

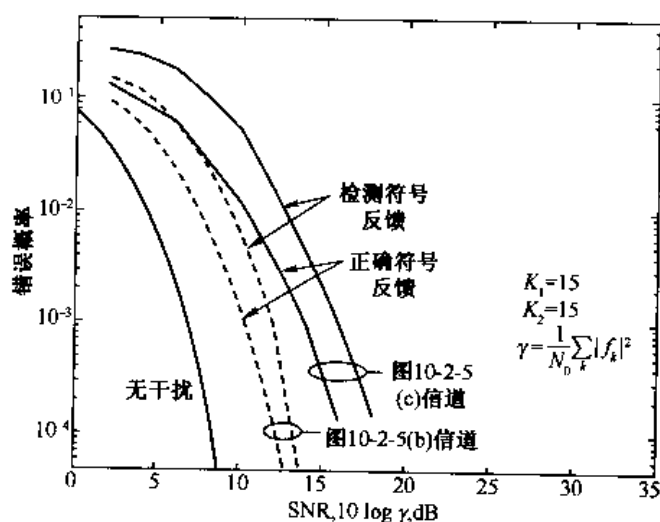


图 10-3-2 具有和没有差错传播的判决反馈均衡器性能

上面分析的 DFE 的结构中, 前馈部分使用了一个 T 间隔滤波器。这种结构的最佳化基于如下假定: DFE 之前的模拟滤波器匹配于受信信道恶化的脉冲响应, 其输出在最佳抽样时刻被抽样。实际上, 信道响应不是先验可知的, 所以不可能设计出理想的匹配滤波器。鉴于此, 在实际应用中, 通常使用一个分数间隔的前馈滤波器。当然, 反馈滤波器的抽头间隔仍保持为 T 。前馈滤波器采用 FSE, 消除了系统对定时误差的敏感性。

与 MLSE 性能的比较

本节通过与 MLSE 性能的比较来总结 DFE 性能。对于具有 $f_0 = f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 的两径信道, 已经证明 MLSE 没有 SNR 损失, 而判决反馈均衡器遭受 3 dB 损失。在失真较大的信道上, MLSE 相对判决反馈均衡器的 SNR 的得益更大。图 10-3-3 所示为这两种均衡技术的差错率

性能的比较,是针对二进制 PAM 与图 10-2-5(b)和图 10-2-5(c)所示的信道特性通过蒙特卡罗模拟得到的。由这两种方法得到的差错率曲线有不同的斜率,因此当错误概率减小时,SNR 之差增加。作为参考基准,无符号间干扰 AWGN 信道的差错率也在图 10-3-3 中绘出。

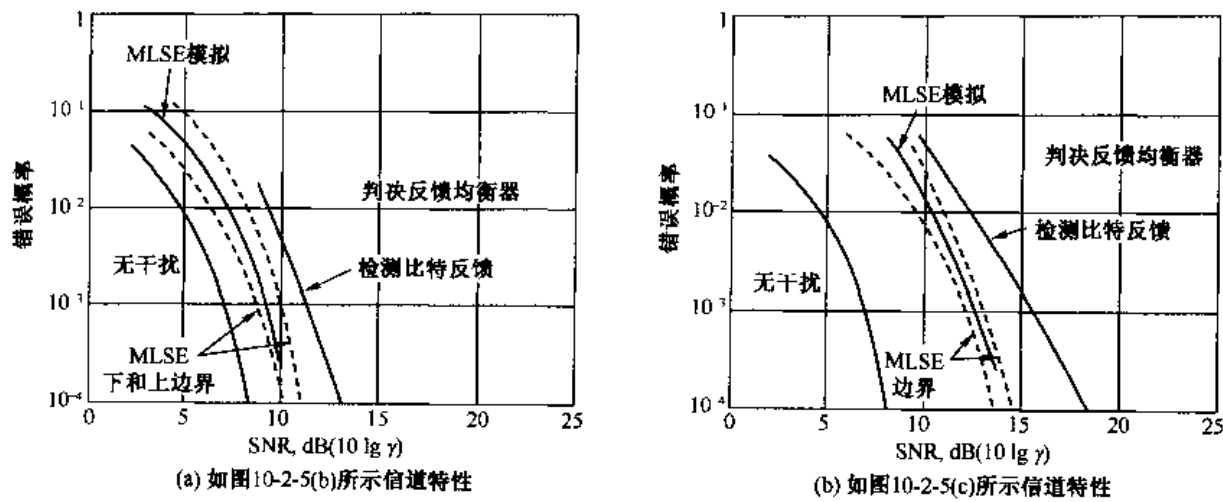


图 10-3-3 MLSE 与判决反馈均衡性能的比较

10.3.3 预测判决反馈均衡器

贝尔菲沃和帕克(Belfiore 和 Park, 1979 年)提出了另一种 DFE 结构,在前馈滤波器有无限抽头的条件下,该结构等价于图 10-3-1 所示的结构。这种结构由一个作为前馈滤波器的 FSE 和一个作为反馈滤波器的线性预测器组成,如图 10-3-4 所示。下面简要地研究该均衡器的性能特征。

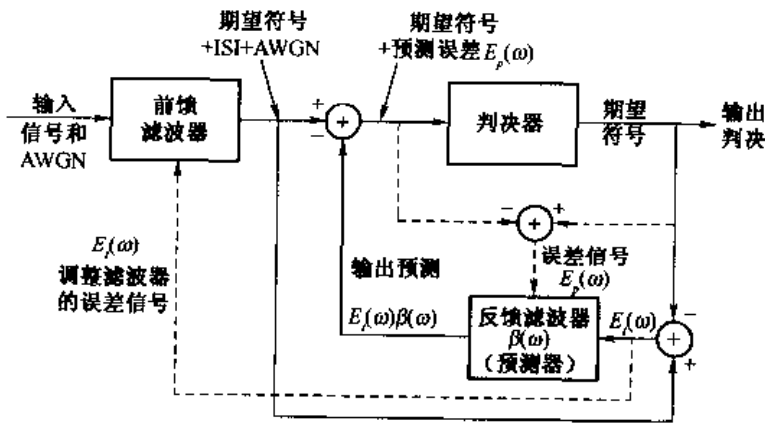


图 10-3-4 预测 DFE 的方框图

首先,无限长前馈滤波器输出端的噪声具有如下功率谱密度

$$\frac{N_0 X(e^{j\omega T})}{|N_0 + X(e^{j\omega T})|^2} \quad (|\omega| \leq \frac{\pi}{T}) \quad (10-3-14)$$

残余符号间干扰的功率谱密度为

$$\left| 1 - \frac{X(e^{j\omega T})}{N_0 + X(e^{j\omega T})} \right|^2 = \frac{N_0^2}{|N_0 + X(e^{j\omega T})|^2} \quad (|\omega| \leq \frac{\pi}{T}) \quad (10-3-15)$$

这两个谱之和表示在前馈滤波器输出端的总的噪声和符号间干扰的功率谱密度。因此,将式(10-3-14)与式(10-3-15)相加得到

$$|E_t(\omega)|^2 = \frac{N_0}{N_0 + X(e^{j\omega T})}, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (10-3-16)$$

如前所述,如果 $X(e^{j\omega T}) = 1$, 则信道是理想的。因此,不可能进一步减少 MSE。另一方面,如果信道存在失真,通过基于差错序列的过去值的线性预测方法,可以减小前馈滤波器输出端的差错序列的功率。

如果 $\mathcal{B}(\omega)$ 表示无限长反馈预测器的频率响应,即

$$\mathcal{B}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-j\omega n T} \quad (10-3-17)$$

那么,预测器输出端的差错是

$$E_p(\omega) = E_t(\omega) - E_t(\omega)\mathcal{B}(\omega) = E_t(\omega)[1 - \mathcal{B}(\omega)] \quad (10-3-18)$$

该差错的均方值

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |1 - \mathcal{B}(\omega)|^2 |E_t(\omega)|^2 d\omega \quad (10-3-19)$$

对预测器系数 $\{b_n\}$ 的最小化可得到最佳预测器,其形式为

$$\mathcal{B}(\omega) = 1 - \frac{G(\omega)}{g_0} \quad (10-3-20)$$

式中, $G(\omega)$ 是下列谱因式分解的解

$$G(\omega)G^*(-\omega) = \frac{1}{|E_t(\omega)|^2} \quad (10-3-21)$$

且

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{j\omega n T} \quad (10-3-22)$$

无限长线性预测器的输出是白噪声序列,其功率谱密度为 $1/g_0^2$, 且相应的最小 MSE 由式(10-3-7)给出。因此,无限长预测 DFE 的 MSE 性能与常规 DFE 相同。

这两个 DFE 结构的长度均为无限长时导致等价的性能;若两个滤波器长度有限,则预测 DFE 是次最佳的。这种常规 DFE 最佳性的原因比较简单,因其前馈和反馈滤波器的抽头系数最佳化是联合实现的,因此,它产生一个最小 MSE。另一方面,预测 DFE 中的前馈滤波器和反馈预测器的最佳化是分别实现的,因此,其 MSE 至少像常规 DFE 的那样大。尽管预测 DFE 有这种次最佳性,它仍然适合作为网格编码信号的均衡器,但常规 DFE 不合适,下一章将介绍。最后应当指出,在预测 DFE 中的前馈滤波器通常是用分数间隔滤波器来实现的,这样可以避免对抽样相位的敏感性。

10.3.4 发送端的均衡——Tomlinson-Harashima 预编码

如果发送机知道信道的响应,那么均衡器可以置于通信系统的发送端,从而,对均衡器(线性或 DFE)置于接收机时通常所固有的噪声增强的情况就可以避免。然而,在实际情况下,通常信道特性是时变的,所以将整个均衡器置于发送机中是不方便的。

在有线信道中,信道特性并不随时间发生显著的变化。因此,有可能将 DFE 的反馈滤波

器置于发送机中,而前馈滤波器置于接收机中。这种方法的优点是,可以完全消除反馈滤波器由于不正确判决引起的差错传播的问题,因此,消除信道响应的尾巴(后标,postcursor)而不必付出任何 SNR 的代价。DFE 的线性分数间隔前馈部分,它是理想的 WMF,可以补偿信道响应任何小的时变所产生的 ISI。DFE 的反馈滤波器在发送端的合成是在以下操作之后进行的:接收机通过一个信道探测信号的传输进行信道响应测量,然后接收机将反馈滤波器的系数发送给发送机。

这种实现 DFE 方法的一个问题是,发送机中的信号点在减去 ISI 后标之后一般比原始信号星座有更大的动态范围,因此,需要更大的发送功率。这个问题可以通过在发送之前对信息符号进行预编码来避免,如汤姆林森(Tomlinson,1971 年)以及 Harashima 和 Miyakawa(1972 年)论文所述。

我们来描述 PAM 信号星座的预编码技术。因为,一个矩形 QAM 信号星座可以看做在正交载波上的两个 PAM 信号集,因此预编码就容易扩展到 QAM。为简单起见,我们假定 DFE 中的前馈滤波器是 WMF 且发送机和接收机完全知道信道的响应,信道响应是由参数 $\{f_i, 0 \leq i \leq L\}$ 来表征的。假定信息符号 $\{I_k\}$ 的取值为 $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$ 。

在预编码中,从发送符号中减去由后标引起的 ISI,如果所得差值落在 $(-M, M)$ 范围之外,那么通过从该差值中减去 $2M$ 的整数倍使其缩减到该范围内。因此,预编码输出可以表示为

$$a_k = I_k - \sum_{j=1}^L f_j a_{k-j} + 2Mb_k \quad (10-3-23)$$

式中, b_k 表示能将 a_k 带入所期望的范围内的适当整数。换言之,通过模 $2M$ 运算 a_k 缩减到所期望的范围内。用 z 变换来描述预编码器的这种运算,得到

$$A(z) = I(z) - [F(z) - 1]A(z) + 2MB(z) \quad (10-3-24)$$

式中,为方便计,信道系数归一化为 1。因此,发送序列为

$$A(z) = \frac{I(z) + 2MB(z)}{F(z)} \quad (10-3-25)$$

因为信道响应是 $F(z)$,所以接收信号序列可以表示为

$$\begin{aligned} V(z) &= A(z) + W(z) \\ &= [I(z) + 2MB(z)] + W(z) \end{aligned} \quad (10-3-26)$$

式中, $W(z)$ 表示 AWGN 项。所以,检测器输入的接收数据序列项 $I(z) + 2MB(z)$ 是无 ISI 的, $I(z)$ 可以通过采用逐符号检测器从 $V(z)$ 来恢复,该检测器对符号进行模 $2M$ 译码。图 10-3-5 示出了该系统的方框图,可看出该系统在发送端实现了预编码器和 DFE 的前馈滤波器。

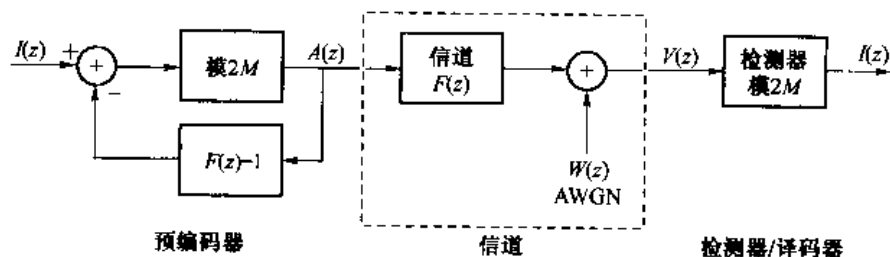


图 10-3-5 Tomlinson-Harashima 预编码

反馈滤波器置于发送机中,使得 DFE 与网格编码调制(TCM)相结合成为可能。因为接收机中的均衡器是线性滤波器,所以由维特比(TCM)检测器输出的判决可以用来调整均衡器的系数。在这种情况下,维特比检测器在它的度量计算中执行的是模 $2M$ 运算。

10.4 降低复杂性的 ML 检测器

上面所阐述的 3 种基本均衡方法的性能分析的结果,即 MLSE,线性均衡(LE)判决反馈均衡(DFE),清楚地表明 MLSE 在具有严重 ISI 信道中性能的优越性。在无线通信中和在高密度磁记录系统中会遇到这样的信道。MLSE 的优越性能激发了对其方法的大量研究,这些方法能保持 MLSE 的性能特征,但降低了复杂性。

对降低复杂性的 MLSE 设计的早期研究工作,主要集中在方法上:即通过在最大似然检测器之前对接收信号进行预处理来减少 ISI 横跨的长度。福尔科纳和马吉(Falconer & Magee, 1973 年)和拜尔(Beare, 1978 年)等人在维特比检测器之前采用一个线性均衡器将 ISI 的跨度减少到比较小的特定长度。李和希尔(Lee & Hill, 1997 年)使用 DFE 来代替 LE。因此,比较大的信道 ISI 跨度缩减到一个充分小的长度,这称为期望的冲激响应,这样跟随在 LE 或 DFE 之后的维特比检测器复杂性比较容易处理了。我们可以把维特比检测器之前的 LE 或 DFE 的角色看做对信道响应的均衡作用,它将信道响应均衡到一个特定短持续时间的部分响应特性(期望冲激响应),维特比检测器能以充分低的复杂性来处理这个特定响应。所选择的期望冲激响应对信道 ISI 特性是简洁的。这种化简维特比检测器复杂性的方法业已证明在高密度的磁记录系统中是很有效的,这在以下作者的论文中有所阐述:西格尔和沃尔夫(Siegel & Wolf, 1991 年),泰勒和普罗基斯(Tyner & Proakis, 1993 年),穆恩和卡里(Moon & Carley, 1998 年),以及普罗里斯(Proakis, 1998 年)。

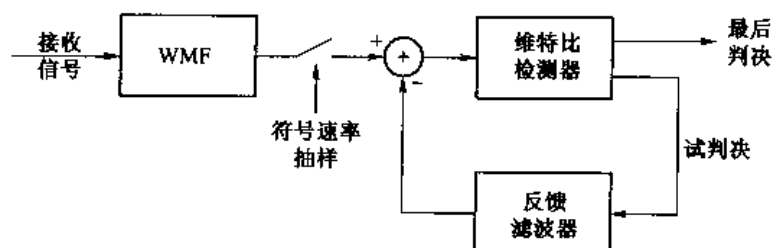
另一种常用的方法是,直接通过减少幸存序列的数目来降低维特比检测器的复杂性。维姆尔恩和赫尔曼(Vermuelen & Hellman, 1974 年)弗雷德里克森(Fredricsson, 1974 年),以及福西里(Foschini, 1977 年)等的论文论述了维特比检测器中减少幸存序列数目的各种算法。关于这类方法的研究成果还有克拉克(Clark, 1984 年, 1985 年)等人和维索洛斯基(Wcsolowski, 1987 年)的论文。

以性能表示的降低维特比检测器复杂性的最有效的方法就是以下学者论文所论述的方法:伯格曼斯(Bergmans, 1987 年)等人,埃尤布奥卢和库里西(Eyuboglu & Qureshi, 1988 年)以及杜尔-霍伦和希加德(Duel-Hallen & Heegard, 1989 年)。在维特比检测器之前的滤波器就是前面所述的白化匹配滤波器(WMF)。WMF 将信道的相位特性减到最小。这些论文所阐述的降低维特比检测器计算复杂性的基本算法是,在维特比检测器中使用判决反馈来将 ISI 的有效长度从 L 项减少为 L_0 项,其中 $L_0 < L$ 。这可采用两种方法之一来实现,即从维特比检测器的预判决来进行“全局反馈”或者“局部反馈”,该方法如伯格曼斯(Bergmans, 1987 年)等人的论文所阐述。图 10-4-1 示出了全局反馈的应用,其中利用维特比检测器的最可能的幸存序列所得到的预判决来合成 ISI 的尾部,该尾部是由信道的系数($f_{L_0+1}, f_{L_0+2}, \dots, f_{L-1}, f_L$)产生的。因此,对于 M 元调制,维特比检测器的计算复杂性从 M^L 减为 M^{L_0} ,减少了 M^{L-L_0} 倍。使用全局反馈的主要缺点是:如果在最可能的幸存序列的符号 $\hat{I}_{k-L_0-1}, \dots, \hat{I}_{k-L}$ 中有一个或多个符号不正确,那么,ISI 尾部的相减也是不正确的。因此,这种有缺陷的消除所产生

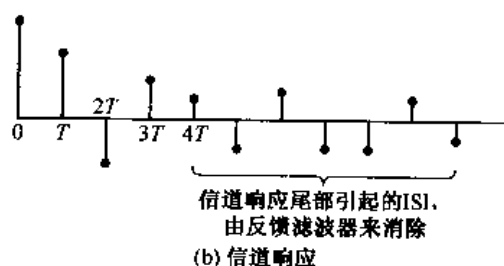
残余 ISI 使得度量计算的质量变坏。

为了补救这个问题,可以使用相应于每一个幸存序列的预判决来消除该相应幸存序列的尾部中的 ISI。因此,当正确序列在这些幸存序列中时,即使它不是最可能的序列,也可以完全消除 ISI。伯格曼斯(Bergmans,1987 年)等人将这种方法描述为使用“局部反馈”来实现尾部消除。

值得注意的是,如果 L_0 选为 1 时($L_0 = 1$),那么维特比检测器就化简成常规 DFE 的简单反馈滤波器。在其他极端情况下,当 $L_0 = L$ 时,得到一个满额复杂性的维特比检测器。伯格曼斯(Bergmans,1987 年)等人的论文所给出的分析和模拟结果清楚地表明,局部反馈的性能优于全局反馈。



(a) 符号检测器方框图



(b) 信道响应

图 10-4-1 降低复杂性的 ML 序列检测器,其采用了从维特比检测器反馈的方式

10.5 迭代均衡和译码——Turbo 均衡

8.2.10 节所阐述的迭代译码和 Turbo 编码原理可以应用于信道均衡。假设一数字通信系统的发送机使用二进制系统卷积编码器,其后跟随一个分组交织器和调制器。信道是线性时间弥散信道,引入 ISI。在这种情况下,我们可以将信道看做一个串行级联码的内编码器。因此,我们可以根据 MAP 准则应用迭代译码。

迭代均衡器-译码器的基本结构如图 10-5-1 所示。MAP 均衡器的输入是 WMF 的输出序列 $\{v_k\}$ 。均衡器计算编码比特的对数似然比,记为 $L^E(x)$,它表示该编码比特后验值。外译码器接收 $L^E(x)$ 的外信息作为输入,这可定义为

$$L_e^E(x) = L^E(x) - L_e^D(x) \quad (10-5-1)$$

式中, $L_e^D(x)$ 是在交织后的外译码器输出的外信息, $L_e^E(x)$ 在被馈送到外译码器之前被解交织。

外译码器计算编码比特和信息比特的对数似然比,分别记为 $L^D(x')$ 和 $L^D(\hat{I})$ 。 $L^D(x')$ 的外信息,记为 $L_e^D(x')$,是关于当前比特的增量信息,它是译码器对所有接收比特的所有信

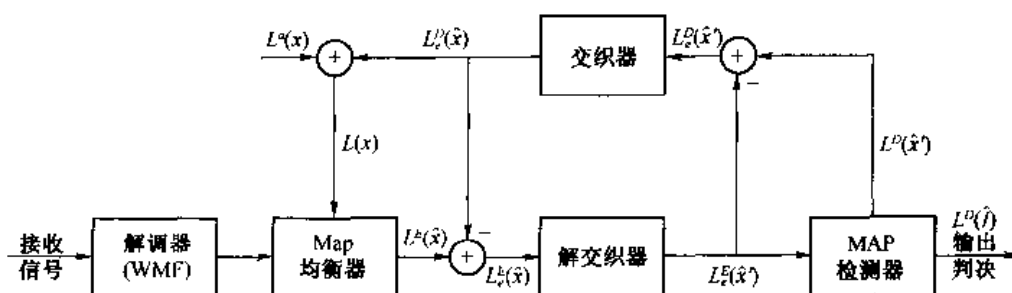


图 10-5-1 迭代均衡和译码

息进行观测后得到的。外信息计算如下

$$L_e^D(x') = L^D(x') - L_e^E(x') \quad (10-5-2)$$

$L_e^E(x')$ 被交织产生 $L_e^E(x)$ 并馈送给 AMP 均衡器。我们强调仅反馈外信息 $L_e^D(x)$ 的重要性，因此使得均衡器所用的先验信息与先前均衡器输出之间的相关性最小。类似地，我们用先验信息值 $L_e^D(x)$ 来减少后验信息值 $L^L(x)$ 以得到外信息值 $L_e^E(x)$ ，在解交织之后馈送给外译码器。

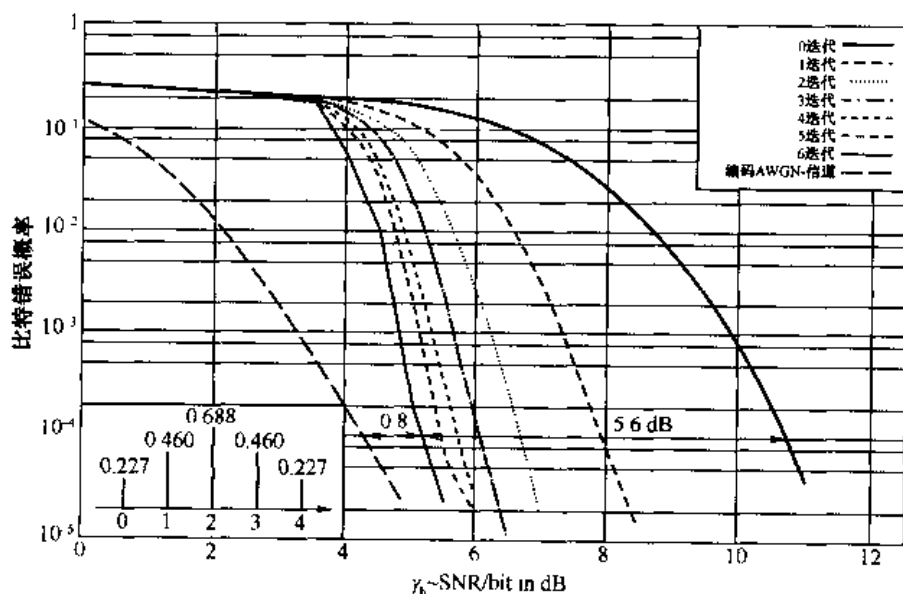


图 10-5-2 时不变信道的信道抽头和误比特率

对数似然比的计算在鲍奇(Bauch, 1997 年)等人的论文中已有阐述。这种迭代均衡-译码方案的能力可以从这篇论文给出的性能分析结果中作出评价。图 10-5-2 示出了比特错误率，它是通过对图 10-5-2(c)的 5 抽头时不变信道进行模拟而得到的。所用的外译码器是码率为 1/2、约束长度 $K=5$ 的递归系统卷积码。所用的交织器是长度 $N=4096$ 比特的伪随机分组交织器。采用二进制 PSK 调制。图中的曲线说明了性能增益随着迭代次数而增加。可以看出，在 8 次迭代之后，当比特错误率为 10^{-4} 时迭代均衡器-译码器的性能与无 ISI 的编码数据的性能之差在 0.8 dB 之内。因此，迭代均衡器几乎完全消除了 ISI 造成的全部损失。比较起来，从图 10-3-3(b)可以看出，最佳(非迭代)维特比检测器对这种信道 ISI 所遭受的性能损失大约为 7 dB。因此，除了卷积码的编码增益外，迭代均衡器达到的性能增益超过了 6 dB。

鲍奇(Bauch,1997年)等人已将这种迭代均衡方法对蜂窝无线信道的性能进行了评价。哈根劳(Hagenauer,1999年)等人的论文阐述了采用非线性电路实现迭代均衡-译码的方法。

另外一种实现迭代均衡-译码的方法是,在发送端采用一个并行级联码(Turbo码),跟随一个分组交织器和一个调制器。在接收机采用一个MAP均衡器,跟随一个Turbo译码器。由Turbo译码器生成的外信息反馈给MAP均衡器。因此,我们得到一种迭代均衡器-Turbo译码器的结构,将它称之为Turbo均衡器。雷费利和扎纳伊(Raphaeli & Zarai,1998年)以及多尔纳德(Douillard,1995年)等人的论文论述了Turbo均衡。

10.6 文献与参考资料

勒基(Lucky,1965年,1966年)研究了数字通信的信道均衡,主要是采用峰值失真准则设计最佳化的线性均衡器。将均方误差准则用于均衡器系数最佳化,由韦德罗(Widrow,1966年)提出。

判决反馈均衡器由奥斯丁(Austin,1967年)提出并分析得到。对于DFE性能的分析可以在下列学者的论文中找到:蒙森(Monsen,1971年)、乔治(George,1971年)等人、普赖斯(Price,1972年)、扎尔茨(Salz,1973年)、唐特威勒(Duttweiler,1974年)等人,以及阿特卡和博利厄(Altekar和Beaulieu,1993年)。

将维特比算法应用于受ISI恶化符号的最佳的最大似然序列估计器,是由福尼(Fornety,1972年)和小村(Omura,1971年)提出并分析的。昂格伯克(Ungerboeck,1974年)和麦克肯切尼(MacKenzie,1973年)研究了它在载波调制信号中的应用。

在编码系统中使用迭代MAP算法来抑制ISI,称为Turbo均衡,它代表了在带限信道的信号传输中符号间干扰抑制研究新进展的重要成果。可以预料,迭代MAP均衡算法将用于未来的通信系统中。哈根劳(Hagenauer,1999年)等人的论文所阐述的Turbo均衡的实现方法,是在编码系统中实现迭代MAP均衡算法的第一次尝试。

习题

10-1 二进制PAM系统中,检测器的输入为:

$$y_m = a_m + n_m + i_m$$

其中, $a_m = \pm 1$ 是期望信号。 n_m 是零均值高斯随机变量,其方差为 σ_n^2 。 i_m 表示信道失真引起的符号间干扰。符号间干扰项为一个随机变量,取值为 $-1/2$ 、 0 和 $1/2$,其概率分别为 $1/4$ 、 $1/2$ 和 $1/4$ 。试求平均错误概率,且表示为 σ_n^2 的函数。

10-2 在二进制PAM系统中,规定相关器输出抽样的时钟与最佳抽样时刻之间有10%的偏差。

(a) 如果所用的信号脉冲为矩形,试求由于定时不准而产生的SNR损失。

(b) 试求由定时不准引起的符号间干扰的大小,并求其对性能的影响。

10-3 一个低通信道的频率响应特性可以近似为:

$$H(f) = \begin{cases} 1 + \alpha \cos 2\pi f t_0 & (|\alpha| < 1, |f| \leq W) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

式中 W 是信道带宽。有一个带限于 W Hz 的输入信号 $s(t)$ 通过该信道。

(a) 试证明

$$y(t) = s(t) + \frac{1}{2} \alpha [s(t - t_0) + s(t + t_0)]$$

因此该信道产生一对回波。

(b) 假设接收信号 $y(t)$ 通过一个与 $s(t)$ 相匹配的滤波器。试求匹配滤波器在 $t = kT$ 时的输出, 其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, T 为符号持续时间。

(c) 如果 $t_0 = T$, 试问信道产生的 ISI 图样是怎样的?

10-4 用二进制 PAM 在长 1 000 km 的有线信道上传输数据。该系统中每隔 50 km 使用一个再生中继器。信道的每一段在 $0 \leq f \leq 1\ 200$ Hz 频段上具有理想(恒定)的频率响应, 且具有 1 dB/km 的衰减。信道噪声为 AWGN。

(a) 试问无 ISI 时能传输的最高比特率为多少?

(b) 试求每个中继器为达到 $P_2 = 10^{-7}$ 的误比特率所需要的 \mathcal{E}_b/N_0 。

(c) 试求为达到要求的 \mathcal{E}_b/N_0 时每个中继器的发送功率, 其中 $N_0 = 4.1 \times 10^{-21}$ W/Hz。

10-5 式(10-1-13)为匹配滤波器输出端噪声的自相关表达式, 试证明之。

10-6 PAM 系统带有相关噪声, 维特比算法中的相关度量一般可表示为(Ungerboeck, 1974 年):

$$CM(I) = 2 \sum_n I_n r_n - \sum_n \sum_m I_n I_m x_{n-m}$$

式中, $x_n = x(nT)$ 为匹配滤波器的抽样输出信号。 $\{I_n\}$ 是数据序列, $\{r_n\}$ 是匹配滤波器输出端的接收信号序列。试求双二进制信号的度量。

10-7 利用一个滚降因子为 1 的(平方根)升余弦信号脉冲在一个理想带限信道上传输二进制 PAM, 该信道无失真地传送信号脉冲, 所以发送信号为

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT_b)$$

式中, 信号间隔 $T_b = T/2$ 。因此, 符号速率为无 ISI 速率的两倍。

(a) 试求匹配滤波器解调器输出端的 ISI 值。

(b) 试画出最大似然序列检测器的网格图, 并标出状态。

10-8 二进制双极性信号在一个非理想带限信道传输, 该信道在两个相邻符号引入 ISI。如果传输单个信号脉冲 $s(t)$, 解调器的(无噪声)输出当 $t = T$ 时为 $\sqrt{\mathcal{E}_b}$, 当 $t = 2T$ 时为 $\sqrt{\mathcal{E}_b}/4$, 当 $t = kT (k > 2)$ 时为零。其中 \mathcal{E}_b 为信号能量, T 是信号传输间隔。

(a) 试求平均错误概率。假设两个信号是等概的, 且加性噪声为高斯白噪声。

(b) 试绘出(a)中的错误概率, 以及无 ISI 情况下的错误概率。当错误概率为 10^{-6} 时, 求两种情况下相对的 SNR 之差。

10-9 式(10-3-5)为 DFE 的反馈滤波器系数的表达式, 试推导该式。

10-10 用二进制 PAM 在一个未均衡的线性滤波器信道上传输信息。当发送 $a = 1$ 时, 解

调器的无噪声输出为

$$x_m = \begin{cases} 0.3 & (m = 1) \\ 0.9 & (m = 0) \\ 0.3 & (m = -1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

(a) 试设计一个三抽头迫零线性均衡器,使其输出为

$$q_m = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 0 & (m = \pm 1) \end{cases}$$

(b) 试求 q_m ($m = \pm 2, \pm 3$), 方法是把均衡器的冲激响应与信道响应卷积起来。

10-11 一个具有升余弦谱的信号脉冲通过信道传输,由解调器得到以下(无噪声)抽样输出:

$$x_k = \begin{cases} -0.5 & (k = -2) \\ 0.1 & (k = -1) \\ 1 & (k = 0) \\ -0.2 & (k = 1) \\ 0.05 & (k = 2) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

(a) 根据迫零准则,试求一个三抽头线性均衡器的抽头系数。

(b) 针对(a)中得到的系数,试求在单个信号脉冲时的均衡器输出,并据此计算残余的 ISI 及其时间跨度。

10-12 一个非理想带限信道在 3 个连续的符号上引入 ISI。在抽样时刻 kT 时,被抽样的匹配滤波器解调器的(无噪声)响应为

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-kT)dt = \begin{cases} \epsilon_b & (k = 0) \\ 0.9\epsilon_b & (k = \pm 1) \\ 0.1\epsilon_b & (k = \pm 2) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

(a) 用一个三抽头线性均衡器将信道(接收信号)响应均衡成等效部分响应(双二进制)信号

$$y_k = \begin{cases} \epsilon_b & (k = 0, 1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

试求抽头系数。

(b) 假设(a)中线性均衡器后接一个维特比序列检测器,用以检测部分响应信号。如果加性噪声为白高斯的,且功率谱密度为 $N_0/2$ W/Hz,试求错误概率的估值。

10-13 如果符号间干扰横跨 3 个符号,且可用下列值表征: $x(0) = 1$, $x(-1) = 0.3$, $x(1) = 0.2$ 。试求三抽头迫零均衡器的抽头权值系数,并求最佳抽头系数时的均衡器输出端的残余 ISI。

10-14 在视线微波无线传输中,信号通过两条传播路径到达接收机:直接路径及延时路径,后者是由周围地形对信号的反射引起的。假设接收信号为

$$r(t) = s(t) + \alpha s(t - T) + n(t)$$

式中 $s(t)$ 是发送信号, α 是第二条路径的衰减 ($\alpha < 1$), $n(t)$ 是 AWGN。

(a) 已知解调器使用了一个与 $s(t)$ 相匹配的滤波器, 求当 $t = T$ 和 $t = 2T$ 时解调器的输出。

(b) 如果发送信号为二进制双极性的, 并且检测器可以忽略 ISI。试求逐符号检测器的错误概率。

(c) 有一个简单的(单抽头)DFE 可以对 α 进行估算并消除 ISI, 试问其差错率性能怎样? 试绘出采用 DFE 的检测器的结构。

10-15 重复习题 10-10 中的问题, 要求以 MSE 作为抽头系数最佳化的准则。假定噪声功率谱密度为 0.1 W/Hz 。

10-16 在磁记录信道中, 写电流中正向转移产生的回读脉冲为

$$p(t) = \left[1 + \left(\frac{2t}{T_{50}} \right)^2 \right]^{-1}$$

用一个线性均衡器将该脉冲均衡成部分响应。参数 T_{50} 定义为 50% 电平处的脉冲宽度。比特率为 $1/T_b$, 比率 $T_{50}/T_b = \Delta$ 为记录的归一化密度。假定脉冲被均衡为以下部分响应值:

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & (n = -1, 1) \\ 2 & (n = 0) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

式中 $x(t)$ 代表已均衡的脉冲形状。

(a) 试求带限已均衡脉冲的谱 $X(f)$ 。

(b) 试求检测器可能的输出电平, 假设连续转移可以速率 $1/T_b$ 发生。

(c) 假定加性噪声为零均值高斯的且方差为 σ^2 , 试求该信号逐符号检测器的差错率性能。

10-17 试画出习题 10-16 中已均衡信号的维特比检测器的网格图, 并标出所有状态。求合并路径之间的最小欧氏距离。

10-18 研究图 P10-18 所示的离散时间等效信道的均衡问题。信息序列 $\{I_n\}$ 为二进制的 (± 1) 并且不相关。加性噪声 $\{\eta_n\}$ 为白色的且实的, 其方差为 N_0 。接收序列 $\{y_n\}$ 要经过一个线性三抽头均衡器的处理, 该均衡器根据 MSE 准则而最佳化。

(a) 试求均衡器的最佳系数, 并作为 N_0 的函数。

(b) 试求协方差阵 \mathbf{r} 的 3 个特征值 λ_1 、 λ_2 和 λ_3 以及相应的特征向量 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 和 \mathbf{v}_3 (归一化为单位长度)。

(c) 试求三抽头均衡器的最小 MSE, 并作为 N_0 的函数。

(d) 试求三抽头均衡器的输出信噪比, 并作为 N_0 的函数, 试与无限抽头均衡器的输

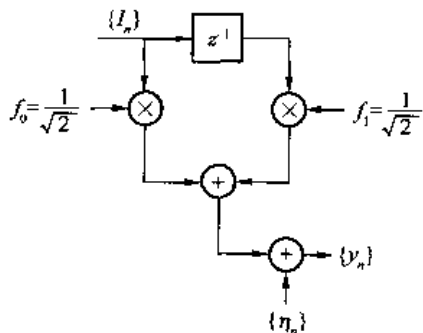


图 P10-18

出 SNR 相比较。当 $N_0=0.1$ 时, 计算这两种均衡器的输出 SNR。

10-19 对基于 MSE 准则的判决反馈均衡器, 试利用正交原理推导其系数方程, 即式 (10-3-3) 和式 (10-3-5)。

10-20 假设符号间干扰的离散时间模型由抽头系数 f_0, f_1, \dots, f_L 表征。试根据判决反馈均衡器 (DFE) 的抽头系数方程, 证明该 DFE 的反馈滤波器只需要 L 个抽头。即如果 $|c_k|$ 为反馈滤波器的系数, 当 $k \geq L+1$ 时, $c_k=0$ 。

10-21 图 P10-21 所示为一个信道模型, 其中 $\{\eta_n\}$ 是均值为零、方差为 N_0 的实值白噪声序列。假定使用一个带有两抽头前馈滤波器 (c_0, c_1) 和单个抽头反馈滤波器 (c_1) 的 DFE 来均衡该信道, 使用 MSE 准则将 $|c_i|$ 最佳化。

(a) 试求最佳系数及其近似值 (令 $N_0 \ll 1$)。

(b) 试求最小 MSE 的精确值及其适合 $N_0 \ll 1$ 情况的一阶近似值。

(c) 试求三抽头均衡器输出 SNR 的精确值, 并作为 N_0 的函数。求适合 $N_0 \ll 1$ 情况的一阶近似值。

(d) 试比较 (b)、(c) 中的结果与无限抽头 DFE 的性能。

(e) 在 $N_0=0.1$ 和 $N_0=0.01$ 的特殊情况下, 试计算并比较三抽头及无限抽头 DFE 输出 SNR 的精确值, 并说明三抽头均衡器相对于无限长均衡器性能如何。

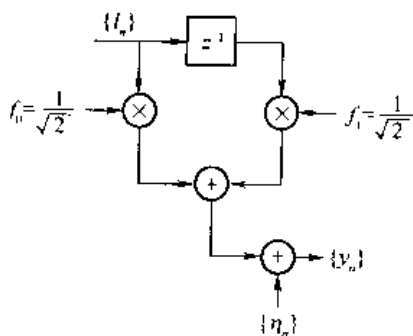


图 P10-21

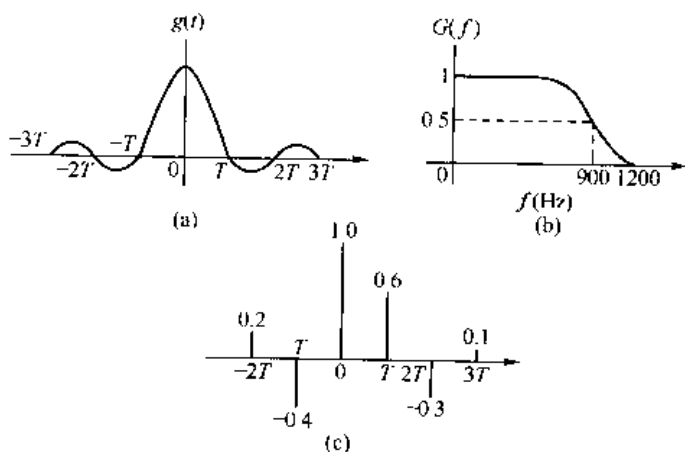


图 P10-22

10-22 图 P10-22 所示为脉冲及其 (升余弦) 谱特性。该脉冲用于在带限信道上以 $1/T$ 的符号/s 的速率传输数字信息。

(a) 试问滚降因子 β 为多大?

(b) 试问脉冲速率为多少?

(c) 信道会使信号脉冲失真。假定经滤波的接收脉冲抽样值如图 P10-22(c) 所示, 显然有 5 个干扰信号分量。由 +1 和 -1 组成的序列将引起最大的 (破坏性或建设性) 干扰, 试给出该序列, 并计算相应的干扰值 (峰值失真)。

(d) 假定二进制数字等概且独立, 试问 (c) 中最坏序列出现的概率有多大?

10-23 有一个时间弥散信道, 其冲激响应为 $h(t)$, 用来传输四相 PSK 信号, 速率为 $R=1/T$ 符号/s。其等效离散时间信道如图 P10-23 所示, 其中序列 $\{\eta_k\}$ 为零均值且方差

$\sigma^2 = N_0$ 的白噪声序列。

(a) 试求该信道的抽样自相关函数序列 $|x_k|$, 其中 x_k 定义为

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t)h(t+kT)dt$$

(b) 信道的折叠谱定义为

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) \right|^2$$

其中, $H(\omega)$ 为 $h(t)$ 的傅里叶变换。具有无限抽头的线性均衡器和判决反馈均衡器的最小 MSE 性能取决于该信道的折叠谱。试求以上信道的折叠谱。

(c) 试利用(b)中的解答, 把线性均衡器的最小 MSE 用信道折叠谱表示(利用积分形式给出解答)。

(d) 针对无限抽头判决反馈均衡器重解问题(c)。

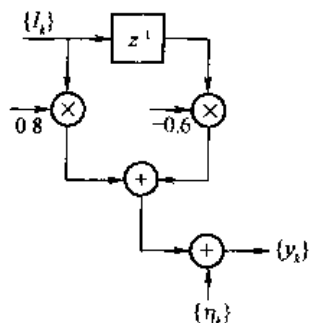


图 P10-23

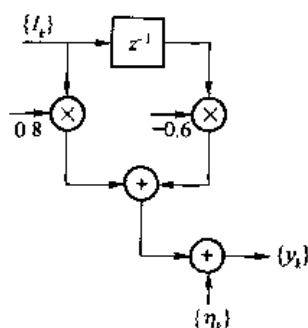


图 P10-24

- 10-24** 研究一个四电平 PAM 系统, 其可能的传输电平为 3、1、-1 和 -3。数据通过的信道在两个连续符号上引入符号间干扰。图 P10-24 是等效离散时间信道模型, 其中 $\{n_k\}$ 是独立的实高斯噪声变量, 其均值为零, 方差为 $\sigma^2 = N_0$ 。接收序列为

$$y_1 = 0.8I_1 + n_1$$

$$y_2 = 0.8I_2 - 0.6I_1 + n_2$$

$$y_3 = 0.8I_3 - 0.6I_2 + n_3$$

$$\vdots$$

$$y_k = 0.8I_k - 0.6I_{k-1} + n_k$$

- (a) 试画出树型结构图, 并对接收信号 y_1 、 y_2 和 y_3 给出可能的信号序列。
 (b) 假定用维特比算法检测信息序列。试问在算法中的每一级要计算多少个概率?
 (c) 试问对于该信道, 维特比算法中有几个幸存序列?
 (d) 假定接收信号为

$$y_1 = 0.5, \quad y_2 = 2.0, \quad y_3 = -1.0$$

试求通过 y_3 级的幸存序列及其相应的度量。

(e) 试求在此信道上传输的四电平 PAM 错误概率的紧密上边界。

- 10-25** 一个具有 K 个抽头的横向均衡器的冲激响应为

$$e(t) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \delta(t - kT)$$

式中 T 是相邻抽头之间的延时,其传输函数为

$$E(z) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k z^{-k}$$

均衡器系数 $\{c_k\}$ 的离散傅里叶变换(DFT)定义为

$$E_n \equiv E(z) \big|_{z=e^{j2\pi n/K}} = \sum_{k=0}^{K-1} c_k e^{-j2\pi kn/K} \quad (n = 0, 1, \dots, K-1)$$

逆 DFT 定义为

$$b_k = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} E_n e^{j2\pi nk/K} \quad (k = 0, 1, \dots, K-1)$$

(a) 通过在上述表达式中代入 E_n , 试证明 $b_k = c_k$ 。

(b) 根据以上关系式, 试推出一种等效滤波器结构, 其 z 变换为

$$E(z) = \underbrace{\frac{1-z^{-K}}{K}}_{E_1(z)} \sum_{n=0}^{K-1} \underbrace{\frac{E_n}{1-e^{j2\pi n/K} z^{-1}}}_{E_2(z)}$$

(c) 如果将 $E(z)$ 看做两个分离滤波器 $E_1(z)$ 和 $E_2(z)$ 的级联, 试画出每个滤波器的方框图, 用 z^{-1} 表示单位延时。

(d) 在横向滤波器中, 可调参数为均衡器系数 $\{c_k\}$ 。试问(b)中等效均衡器的可调参数是哪些? 它们与 $\{c_k\}$ 的关系怎样?

第 11 章 自适应均衡

第 10 章介绍了最佳和次最佳两种接收机,它们都能对数字信息通过带限、非理想信道传输中的 ISI 进行补偿。最佳接收机使用了最大似然序列估计,以从解调滤波器的样值中检测出信息符号。次最佳接收机使用了线性均衡器或判决反馈均衡器。

在对 3 种均衡方法的研究中,我们曾隐含地假定在接收机中已知信道的特性:冲激响应或者频率响应。然而,在大多数使用均衡器的通信系统中,信道特性是先验未知的,在许多情况下信道响应是时变的。在这种情况下,将均衡器设计成对信道响应是可调的;对于时变信道,设计成对信道响应的时变是自适应的。

本章将介绍一些算法,它们能自动地调整均衡器系数,以使指定的性能指数最佳化,并能自适应地补偿信道特性的时变。本章还将分析算法的性能特征,包括收敛速率以及计算的复杂性。

11.1 自适应线性均衡器

在线性均衡器的情况下,我们研究了两种不同的准则来确定均衡器系数 $\{c_k\}$ 的值。一个准则基于均衡器输出端的峰值失真最小化,由式(10-2-4)定义。另一个准则基于均衡器输出端均方误差的最小化,由式(10-2-25)定义。下面介绍两种算法,它们能自动且自适应地实现最佳化。

11.1.1 迫零算法

在峰值失真准则中,通过选择均衡器系数 $\{c_k\}$,使式(10-2-22)定义的峰值失真 $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ 最小。除均衡器输入端的峰值失真(定义为式(10-2-23)中的 \mathcal{D}_0)小于 1 的特殊情况外,一般没有简单的算法实现这种最佳化。当 $\mathcal{D}_0 < 1$ 时,通过强迫均衡器响应当 $1 \leq |n| \leq K$ 时 $q_n = 0$ 且 $q_0 = 1$,使得均衡器输出端的失真 $\mathcal{D}(\mathbf{c})$ 最小。在这种情况下,有一种简单的算法,称为迫零算法,它能达到这些条件。

迫零解答可以用下述方法求得:强迫误差序列 $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ 与期望的信息序列 $\{I_k\}$ 的互相关在 $0 \leq |n| \leq K$ 内的位移为零。用该方法求解期望解答的证明很简单,有

$$\begin{aligned} E(\epsilon_k I_{k-j}^*) &= E[(I_k - \hat{I}_k) I_{k-j}^*] \\ &= E(I_k I_{k-j}^*) - E(\hat{I}_k I_{k-j}^*) \quad (j = -K, \dots, K) \end{aligned} \quad (11-1-1)$$

假定信息符号是不相关的,即 $E(I_k I_j^*) = \delta_{kj}$,且假定信息序列 $\{I_k\}$ 与加性噪声序列 $\{\eta_k\}$ 不相关。利用式(10-2-41)给出的 $\{\hat{I}_k\}$ 的表达式,取式(11-1-1)的期望值后得到

$$E(\epsilon_k I_{k-j}^*) = \delta_{j0} - q_j \quad (j = -K, \dots, K) \quad (11-1-2)$$

因此,当 $q_0 = 1$ 且 $1 \leq |n| \leq K$ 时 $q_n = 0$,满足条件

$$E(\epsilon_k I_{k-j}^*) = 0 \quad (j = -K, \dots, K) \quad (11-1-3)$$

当信道响应未知时,式(11-1-1)的互相关也未知。这一困难可以这样来克服:发送一个确知的训练序列给接收机,以时间平均替代式(11-1-1)的集平均来估计互相关。初始训练之后,满足式(11-1-3)的均衡器系数就可确定,其中要求有一个预定长度的训练序列,该长度等于或超过均衡器的长度。

调整均衡器系数的一种简单的递推算法是

$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \Delta \epsilon_k I_{k-j}^* \quad (j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K) \quad (11-1-4)$$

式中, $c_j^{(k)}$ 是第 j 个系数在 $t = kT$ 时刻的值, $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ 是在 $t = kT$ 时刻的误差信号, Δ 是控制调整速率的标度因子,本节后面将逐一解释。这是迫零算法。 $\epsilon_k I_{k-j}^*$ 项是互相关(集平均) $E(\epsilon_k I_{k-j}^*)$ 的估计值。互相关的平均运算通过采用式(11-1-1)中的递推一阶差分方程算法来实现,它表示一种简单的离散时间积分器。

在训练阶段之后,均衡器的系数收敛到最佳值。在检测器输出端的判决一般是足够可靠的,所以可用来继续系数的自适应调整。这称为自适应的面向判决模式。在这种情况下,式(11-1-4)中的互相关包含误差信号 $\tilde{\epsilon}_k = \tilde{I}_k - \hat{I}_k$ 和检测的输出序列 \tilde{I}_{k-j} , $j = -K, \dots, K$ 。因此,在自适应模式中,式(11-1-4)变为

$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \Delta \tilde{\epsilon}_k \tilde{I}_{k-j}^* \quad (11-1-5)$$

图 11-1-1 所示为在训练模式和自适应模式操作中的迫零均衡器。

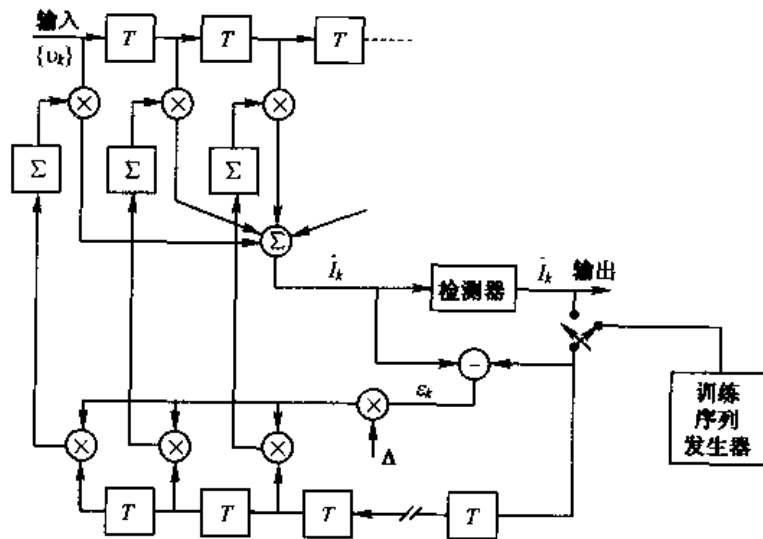


图 11-1-1 自适应迫零均衡器

迫零均衡算法的特征类似于最小均方(LMS)算法的特征,后者使 MSE 最小,下一节将详细描述。

11.1.2 LMS 算法

10.2.2 节所述的 MSE 最小化中,我们得知最佳均衡器系数由下列矩阵形式表示的线性方程组的解确定:

$$\Gamma \mathbf{C} = \boldsymbol{\xi} \quad (11-1-6)$$

式中, Γ 是信号样值 $|v_k|$ 的 $(2K+1) \times (2K+1)$ 协方差矩阵, \mathbf{C} 是 $(2K+1)$ 个均衡器系数的列向量, $\boldsymbol{\xi}$ 是信道滤波器系数的 $(2K+1)$ 维列向量。最佳均衡器系数向量 \mathbf{C}_{opt} 的解可通过对方

差矩阵 Γ 求逆来确定,这可以采用附录 A 所述的列文森-杜宾(Levinson-Durbin)算法有效地进行。

另外,可以采用避免直接对矩阵求逆的迭代过程计算 C_{opt} 。最简单的迭代过程是最陡下降法,其中的迭代可从任意选择的向量 C (如 C_0) 开始。系数的初始选择相当于在 $(2K+1)$ 维系数空间中 MSE 二次曲面上的某个点。梯度向量 G_0 具有 $(2K+1)$ 个梯度分量 $\frac{1}{2} \partial J / \partial c_{0k}$, $k = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K$ 。在 MSE 曲面的该点上计算该向量,而且每一个抽头权值变化的方向与其梯度分量相反。第 j 个抽头权值的变化与第 j 个梯度分量的大小成正比。因此,系数向量 C 的后续值可按下列关系式求得:

$$C_{k+1} = C_k - \Delta G_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (11-1-7)$$

式中,梯度向量 G_k 是

$$G_k = \frac{1}{2} \frac{dJ}{dC_k} = \Gamma C_k - \xi = -E(\epsilon_k V_k^*) \quad (11-1-8)$$

向量 C_k 表示在第 k 次迭代的一组系数, $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ 是第 k 次迭代的误差信号, V_k 是形成估计值 \hat{I}_k 的接收信号样值向量,即 $V_k = [v_{k+K} \cdots v_k \cdots v_{k-K}]^t$ 。 Δ 是正数,应选择足够小的 Δ 值,以确保迭代过程的收敛。如果 $k = k_0$ 时达到最小 MSE,那么 $G_k = 0$, 抽头权值不再发生变化。一般讲,采用最陡下降法时,以有限的 k_0 值并不能达到 $J_{\min}(K)$ 。但对于某个有限的 k_0 值,能按所期望的尽可能接近它。

用最陡下降法求最佳抽头权值的主要困难在于梯度向量 G_k 未知,它决定于协方差矩阵 Γ 和互相关向量 ξ 。这些量本身又决定于等效离散时间信道模型的系数 $\{f_k\}$ 以及信息序列的协方差和加性噪声,所有这些在接收机中一般都是未知的。为了克服这一困难,可以采用梯度向量的估计值,调整抽头权值系数的算法如下:

$$\hat{C}_{k+1} = \hat{C}_k - \Delta \hat{G}_k \quad (11-1-9)$$

式中, \hat{G}_k 表示梯度向量 G_k 的估计值, \hat{C}_k 表示系数向量的估计值。

由式(11-1-8)可知, G_k 是 $\epsilon_k V_k^*$ 期望值的负值,因此, G_k 的估计值为

$$\hat{G}_k = -\epsilon_k V_k^* \quad (11-1-10)$$

因为 $E(\hat{G}_k) = G_k$, 估计值 \hat{G}_k 是梯度向量 G_k 真值的无偏估计值。将式(11-1-10)代入式(11-1-9),得到以下算法

$$\hat{C}_{k+1} = \hat{C}_k + \Delta \epsilon_k V_k^* \quad (11-1-11)$$

这就是用来递推调整均衡器抽头权值系数的基本 LMS 算法,该算法由韦德罗(Widrow, 1966 年)首先提出。图 11-1-2 所示的均衡器说明了这种算法。

式(11-1-11)的基本算法及其可能的变型已经应用于高速调制解调器中的许多商用自适应均衡器。仅利用误差信号 ϵ_k 和/或 V_k 分量中的正负号信息,可得到基本算法的 3 种变型如下:

$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta \text{sgn}(\epsilon_k) v_{k-j}^* \quad (j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K) \quad (11-1-12)$$

$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta \epsilon_k \text{sgn}(v_{k-j}^*) \quad (j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K) \quad (11-1-13)$$

$$c_{(k+1)j} = c_{kj} + \Delta \text{sgn}(\epsilon_k) \text{sgn}(v_{k-j}^*) \quad (j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K) \quad (11-1-14)$$

式中, $\text{sgn}(x)$ 定义为

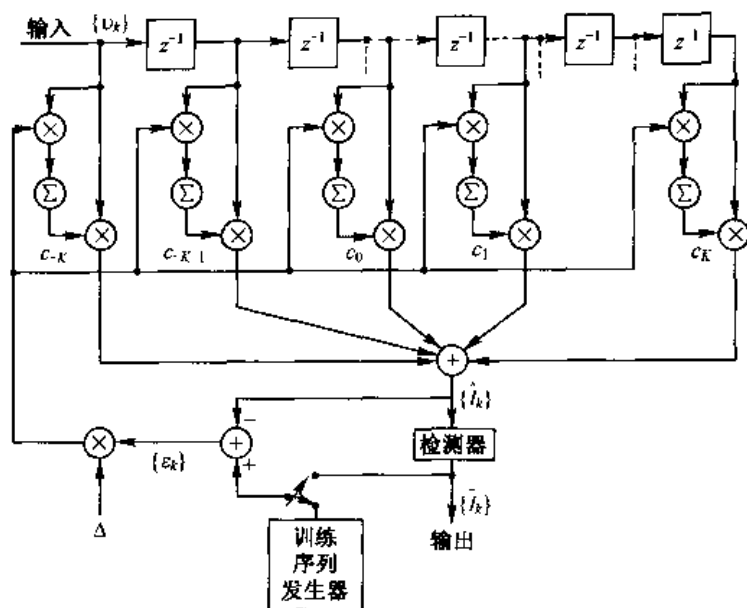


图 11-1-2 基于 MSE 准则的线性自适应均衡器

$$\text{csign}(x) = \begin{cases} 1 + j & (\text{Re}(x) > 0, \text{Im}(x) > 0) \\ 1 - j & (\text{Re}(x) > 0, \text{Im}(x) < 0) \\ -1 + j & (\text{Re}(x) < 0, \text{Im}(x) > 0) \\ -1 - j & (\text{Re}(x) < 0, \text{Im}(x) < 0) \end{cases} \quad (11-1-15)$$

(注意,在式(11-1-15)中, $j \equiv \sqrt{-1}$,它不同于式(11-1-12)~式(11-1-14)中的指数 j)。显然,式(11-1-14)中的算法最容易实现,但它的收敛速率相对其他变型算法是最慢的。

LMS 算法的其他几种变型可以用如下方法得到:在调整均衡器系数之前,将梯度向量在几次迭代周期上平均或过滤。例如,对 N 个梯度向量的平均为

$$\bar{\mathbf{G}}_{mN} = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_{mN+n} \mathbf{V}_{mN+n}^* \quad (11-1-16)$$

每 N 次迭代更新一次均衡器系数的相应的递推方程为

$$\hat{\mathbf{C}}_{(k+1)N} = \hat{\mathbf{C}}_{kN} - \Delta \bar{\mathbf{G}}_{kN} \quad (11-1-17)$$

事实上,式(11-1-16)执行的平均运算减少了梯度向量估计值中的噪声,加德纳(Gardner, 1984 年)已证明了这一点。

另一种方法是用低通滤波器对有噪的梯度向量进行过滤,将滤波器的输出作为梯度向量的估计值。例如,一个简单的低通滤波器对于有噪梯度产生的输出为

$$\bar{\mathbf{G}}_k = w \bar{\mathbf{G}}_{k-1} + (1-w) \hat{\mathbf{G}}_k, \quad \bar{\mathbf{G}}(0) = \hat{\mathbf{G}}(0) \quad (11-1-18)$$

式中, $0 \leq w \leq 1$ 的选择确定了该低通滤波器的带宽。当 w 接近于 1 时,滤波器的带宽比较小,在许多梯度向量上进行有效的平均。另一方面,当 w 比较小时,该滤波器有比较大的带宽,因此对梯度向量几乎不提供平均。以式(11-1-18)中过滤的梯度向量代替 \mathbf{G}_k ,可得到过滤的 LMS 算法为

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k - \Delta \bar{\mathbf{G}}_k \quad (11-1-19)$$

上面的讨论中假定接收机在期望符号与其估计值的误差信号的形成中具有发送信息序列

的知识。这样的知识可在短训练期间得到。在训练期间发送一个确知信息序列的信号给接收机,用以初始调整抽头权值。这个序列的长度必须不少于均衡器的长度,因此发送信号的谱适当地覆盖被均衡信道的带宽。

实际上,训练序列常选用一个周期的伪随机序列,例如最大长度移位寄存器序列,其周期 N 等于均衡器的长度 ($N = 2K + 1$)。在这种情况下,梯度通常在序列的长度上平均,如式 (11-1-16) 所示,均衡器按式 (11-1-17) 每个周期调整一次。这种方式称为循环(周期)均衡,这在米勒和斯包丁 (Mueller & Spaulding, 1975 年) 和库里西 (Qureshi, 1977 年, 1985 年) 的论文中已有阐述。抽头权值连续调整的实现方案有以下两种:一是面向判决模式的操作,其中假定对信息符号的判决是正确的,且用来代替误差信号 ϵ_k 中的 I_k ;二是在携带信息的信号中插入一个确知的伪随机探测序列,插入的方法是在时域相加或者交织,抽头权值的调整是通过比较接收的探测符号与确知的发送探测符号进行的。在面向判决模式的操作中,误差信号变为 $\tilde{\epsilon}_k = \tilde{I}_k - I_k$, 其中 \tilde{I}_k 为接收机基于估计值 \tilde{I}_k 的判决值。只要接收机在低差错率运行,偶尔的差错对该算法收敛性的影响可以忽略。

如果信道的响应发生变化,则该变化反映在等效离散时间信道模型的系数 $\{f_k\}$ 中,也同时反映在误差信号 ϵ_k 中,因为它决定于 $\{f_k\}$ 。因此,抽头权值也将按式 (11-1-11) 改变,以反映信道的变化。如果噪声或信息序列的统计量变化,抽头权值也将发生类似的变化。因此,均衡器是自适应的。

11.1.3 LMS 算法的收敛特性

式 (11-1-11) 所示的 LMS 算法的收敛特性由步长参数 Δ 控制。下面研究如何选择参数 Δ 来确保式 (11-1-7) 中最陡下降算法的收敛,该式使用梯度的精确值。

由式 (11-1-7) 和式 (11-1-8) 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{k+1} &= \mathbf{C}_k - \Delta \mathbf{G}_k \\ &= (\mathbf{I} - \Delta \mathbf{\Gamma}) \mathbf{C}_k + \Delta \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (11-1-20)$$

式中, \mathbf{I} 是单位矩阵, $\mathbf{\Gamma}$ 是接收信号自相关矩阵, \mathbf{C}_k 是 $(2K + 1)$ 维均衡器抽头增益向量, $\boldsymbol{\xi}$ 是式 (10-2-45) 给出的互相关向量。式 (11-1-20) 中的递推关系式可以表示为一个闭环控制系统,如图 11-1-3 所示。不幸,式 (11-1-20) 中的一组 $(2K + 1)$ 个一阶差分方程通过自相关矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 互相耦合,为了求解这些方程并由此建立递推算法的收敛特性,在数学上比较方便的处理方法是运用线性变换将这些方程解耦。注意到矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 是埃尔米特的,可以得到适当的变换且表示成下式:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^* \quad (11-1-21)$$

式中, \mathbf{U} 为 $\mathbf{\Gamma}$ 的归一化模态矩阵。 $\mathbf{\Lambda}$ 是对角矩阵,其对角元素等于 $\mathbf{\Gamma}$ 的特征值。

将式 (11-1-21) 代入式 (11-1-20), 且定义已变换的 (正交化的) 向量 $\mathbf{C}_k^0 = \mathbf{U}^* \mathbf{C}_k$ 及 $\boldsymbol{\xi}^0 = \mathbf{U}^* \boldsymbol{\xi}$, 得到

$$\mathbf{C}_{k+1}^0 = (\mathbf{I} - \Delta \mathbf{\Lambda}) \mathbf{C}_k^0 + \Delta \boldsymbol{\xi}^0 \quad (11-1-22)$$

于是一阶差分方程组被解耦,其收敛特性由下列齐次方程确定

$$\mathbf{C}_{k+1}^0 = (\mathbf{I} - \Delta \mathbf{\Lambda}) \mathbf{C}_k^0 \quad (11-1-23)$$

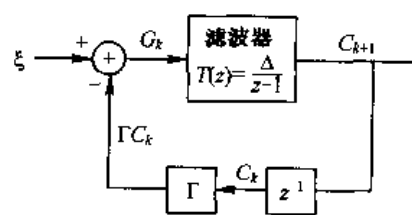


图 11-1-3 式 (11-1-20) 递推关系式的闭环控制系统表示法

若所有极点位于单位圆内,即

$$|1 - \Delta\lambda_k| < 1 \quad (k = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K) \quad (11-1-24)$$

则递推关系式收敛,式中 $\{\lambda_k\}$ 是 Γ 的一组 $2K+1$ 个(可能相重)特征值。因为 Γ 是一个自相关矩阵,是正定的,所以对所有 $k, \lambda_k > 0$ 。因此,如果 Δ 满足不等式

$$0 < \Delta < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (11-1-25)$$

可确保式(11-1-22)的递推关系式收敛,式中 λ_{\max} 是 Γ 的最大特征值。

因为正定矩阵的最大特征值小于该矩阵的所有特征值总和,而且矩阵的特征值的总和等于它的迹,所以得到 λ_{\max} 的简单上边界:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &< \sum_{k=-K}^K \lambda_k = \text{tr}\Gamma = (2K+1)\Gamma_{kk} \\ &= (2K+1)(x_0 + N_0) \end{aligned} \quad (11-1-26)$$

由式(11-1-23)和式(11-1-24)我们看到,当 $|1 - \Delta\lambda_k|$ 较小,即当极点位置远离单位圆时,收敛迅速。但是,如果 Γ 的最大与最小特征值之间存在较大的差距,不能达到这种期望的状况,但仍然满足式(11-1-25)。换言之,即使选择 Δ 接近式(11-1-25)中的上边界,递推MSE算法的收敛速率仍然由最小的特征值 λ_{\min} 确定。因此,最终由比值 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 确定收敛速率。如果比值 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 较小,可以选择 Δ 达到快速收敛;如果比值 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 比较大,正如信道频率响应有深度频谱零点的情况,该算法的收敛速率比较缓慢。

11.1.4 由有噪梯度估计值引起的过剩MSE

式(11-1-11)中调整线性均衡器抽头系数的递推算法使用了梯度向量的无偏有噪估计值。这些估计值中的噪声引起系数在其最佳值附近随机波动,导致均衡器输出端MSE增加,即最终的MSE是 $J_{\min} + J_{\Delta}$,其中 J_{Δ} 是测量噪声的方差。韦德罗(Widrow, 1966年)将由于估计噪声引起的 J_{Δ} 项称为过剩均方误差。

对于任何一组系数 C ,在均衡器输出端,总的MSE可以表示为

$$J = J_{\min} + (C - C_{\text{opt}})^* \Gamma (C - C_{\text{opt}}) \quad (11-1-27)$$

式中, C_{opt} 表示最佳系数,满足式(11-1-6)。这个MSE的表达式可以通过用来建立收敛特性的线性正交变换来简化。这种变换应用于式(11-1-27)的结果是

$$J = J_{\min} + \sum_{k=-K}^K \lambda_k E |c_k^0 - c_{k \text{ opt}}^0|^2 \quad (11-1-28)$$

式中, $\{c_k^0\}$ 是一组已变换的均衡器系数。过剩MSE是式(11-1-28)中第二项的期望值,即

$$J_{\Delta} = \sum_{k=-K}^K \lambda_k E |c_k^0 - c_{k \text{ opt}}^0|^2 \quad (11-1-29)$$

韦德罗(Widrow, 1970年)证明过剩MSE为

$$J_{\Delta} = \Delta^2 J_{\min} \sum_{k=-K}^K \frac{\lambda_k^2}{1 - (1 - \Delta\lambda_k)^2} \quad (11-1-30)$$

选择 Δ ,使得满足对于所有 $k, \Delta\lambda_k \ll 1$ 时,式(11-1-30)中的表达式被简化,那么

$$J_{\Delta} \approx \frac{1}{2} \Delta J_{\min} \sum_{k=-K}^K \lambda_k$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{2} \Delta J_{\min} \text{tr} \Gamma \\ &\approx \frac{1}{2} \Delta (2K+1) J_{\min} (x_0 + N_0) \end{aligned} \quad (11-1-31)$$

注意, $x_0 + N_0$ 表示接收信号加噪声功率。

我们希望 $J_{\Delta} < J_{\min}$, 即 Δ 应当如下选择

$$\frac{J_{\Delta}}{J_{\min}} \approx \frac{1}{2} \Delta (2K+1) (x_0 + N_0) < 1$$

或等价为

$$\Delta < \frac{2}{(2K+1)(x_0 + N_0)} \quad (11-1-32)$$

例如, 如果选择 Δ 为

$$\Delta = \frac{0.2}{(2K+1)(x_0 + N_0)} \quad (11-1-33)$$

则由于过剩 MSE 引起的均衡器输出 SNR 的下降小于 1 dB。

上面给出的对过剩均方误差的分析基于如下假定: 均衡器系数的均值已收敛到最佳值 C_{opt} 。在此条件下, 步长 Δ 应当满足式 (11-1-32) 中的边界。另一方面, 我们已求得平均系数向量的收敛要求 $\Delta < 2/\lambda_{\max}$ 。 Δ 的选择值接近上边界 $2/\lambda_{\max}$ 将导致确定 (确知) 的最陡下降梯度算法的初始收敛, 但这样大的 Δ 值通常将导致 LMS 随机梯度算法的不稳定。

专家们已经研究了 LMS 算法的初始收敛或瞬态性能, 他们的成果清楚地表明: 步长必须与均衡器长度直接成比例地减小, 如式 (11-1-32) 所示。因此, 式 (11-1-32) 确定的上界对于确保 LMS 算法的初始收敛也是必要的。吉特林和温斯坦 (Gitlin 和 Weinstein, 1979 年) 及昂格伯克 (Ungerboeck, 1972 年) 的论文中有关于 LMS 算法的瞬态性能和收敛特性的分析。

下例将进一步强调上述 LMS 算法的初始收敛特性。

例 11-1-1 LMS 算法用来自适应地均衡通信信道, 该信道的自相关矩阵 Γ 的特征值散布为 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11$, 均衡器的抽头数为 $2K+1=11$, 输入信号加噪声功率 $x_0 + N_0$ 归一化为 1。因此, 式 (11-1-32) 的 Δ 上边界为 0.18。图 11-1-4 说明, 当 $\Delta = 0.045, 0.09$ 和 0.115 时, 通过 200 次模拟, 对 (估计的) MSE 求平均所得的 LMS 算法初始收敛特性。我们看到, 通过选择 $\Delta = 0.09$ (上边界的一半), 可得到比较快的初始收敛。如果将 Δ 除以 2 得 $\Delta/2 = 0.045$, 则收敛速率减小, 过剩均方误差也减小, 因此稳态时 (在时不变信号环境中) LMS 算法的性能较好。选择 $\Delta = 0.115$ 时, 该值仍然远低于上边界, 将引起该算法输出 MSE 不希望的大波动。

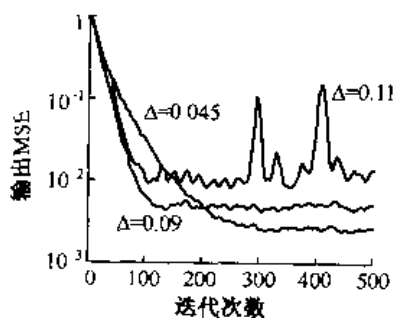


图 11-1-4 采用不同步长的 LMS 算法的初始收敛特性

在 LMS 算法的数字实现中,步长参数的选择更为关键。在减小过剩均方误差的尝试中,有可能将步长减小到某点,而在该点上总的均方误差实际上增大了。这种状况发生在在以下情况:向量 $\epsilon_k \mathbf{V}_k^*$ 的估计梯度分量乘以一个小的步长参数 Δ 之后,其乘积小于均衡器系数定点表示的末位比特的一半。在这样的情况下,自适应过程停止。因此,重要的是要选择足够大的步长,以便将均衡器系数调到 C_{opt} 附近。如果希望显著地减小步长,必须增加均衡器系数的精度。典型情况是 16 比特精度用做系数,其中大约 10~12 个高位比特用做数据均衡中的算术运算,其余的低位比特用来为自适应过程提供必要的精度。因此,在任何一次迭代中,标度的、估计的梯度分量 $\Delta \epsilon \mathbf{V}_k^*$ 通常只影响低位比特。事实上,添加的精度也考虑到噪声会被平均,因为在数据均衡的算术运算中用的较高位比特在发生变化之前,要求低位比特进行多次增量变化。有关 LMS 算法数字实现中舍入误差的分析,请参考吉特林和温斯坦 (Gitlin 和 Weinstein, 1979 年)、吉特林 (Gitlin, 1982 年)、卡瑞斯哥斯和刘 (Caraiscos 和 Liu, 1984 年) 的论文。

最后应当指出, LMS 算法适合跟踪慢时不变信号统计量。在此情况下,最小 MSE 和最佳系数向量是时变的。换言之, $J_{min}(n)$ 是一个时间函数,且 $(2K+1)$ 维误差曲面随时间指数 n 而移动。LMS 算法在 $(2K+1)$ 维空间中试图跟随移动的最小 $J_{min}(n)$,但它总是滞后,因为它使用了(估计的)梯度向量。因此, LMS 算法有另外一种形式的误差,称做滞后误差,其均方值随步长 Δ 的增大而减小。现在,总的 MSE 误差可表示为

$$J_{total} = J_{min}(n) + J_{\Delta} + J_l \quad (11-1-34)$$

式中, J_l 表示滞后引起的均方误差。

在任何给定的非平稳自适应均衡问题中,如果将误差 J_{Δ} 和 J_l 画成 Δ 的函数曲线,那么期望这些误差的性能如图 11-1-5 所示。可以看到, J_{Δ} 随着 Δ 的增大而增大, J_l 随着 Δ 的增大而减小。总的误差将出现一个最小值,由该值可确定步长参数的最佳选择。

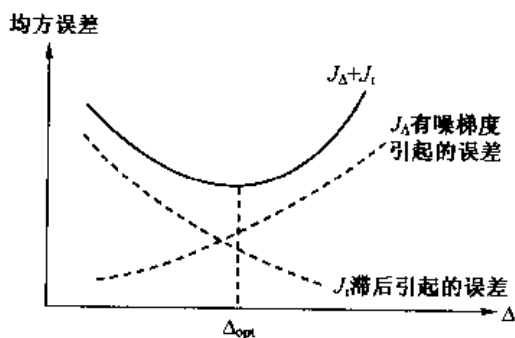


图 11-1-5 作为步长函数的过剩均方误差 J_{Δ} 和滞后误差 J_l

当信号的统计随时间迅速变化时,滞后误差将主导自适应均衡器的性能。这时, $J_l \gg J_{min} + J_{\Delta}$,甚至当采用最大可能的 Δ 值时也如此,此时 LMS 算法不适用。必须依据 11.4 节所述的更复杂的递推最小二乘算法获得更快的收敛和跟踪。

11.1.5 加速 LMS 算法的初始收敛速率

如前所述,对任何给定的信道特性, LMS 算法的初始收敛速率是由步长参数 Δ 控制的。

初始收敛速率受到信道频谱特性强烈的影响,它与接收信号协方差矩阵的特征值 $|\lambda_n|$ 有关。如果信道的幅度和相位失真比较小,特征值比 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 接近于1,那么均衡器抽头系数收敛到其最佳值就比较快。在另一方面,如果信道频谱特性较差,例如其频谱的一部分衰减较大,特征值比 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$,那么LMS的收敛就比较慢。

许多学者在加速LMS算法的初始收敛特性的方法上做了大量的研究工作。一种简单的补救方法是,开始使用一个大的步长,如 Δ_0 ,然后步长随着抽头系数收敛到其最佳而减少。换言之,我们使用一个步长序列, $\Delta_0 > \Delta_1 > \Delta_2 > \dots > \Delta_m \equiv \Delta$,这里 Δ 是LMS算法在稳态操作时所使用的最终步长。

张(Change, 1971年)和库里西(Qureshi, 1977年)提出并研究了另一种加速初始收敛速率的方法。这种方法是基于LMS算法的附加参数的引入,以加权矩阵 \mathbf{W} 来代替步长。在这种情况下,LMS算法可以推广成以下形式

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{C}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{C}}_k - \mathbf{W}\hat{\mathbf{G}}_k \\ &= \hat{\mathbf{C}}_k + \mathbf{W}(\mathbf{\Gamma}\hat{\mathbf{C}} - \boldsymbol{\zeta}) \\ &= \hat{\mathbf{C}}_k + \mathbf{W}\mathbf{e}_k\mathbf{V}_k^*\end{aligned}\quad (11-1-35)$$

式中, \mathbf{W} 是加权矩阵,理想时, $\mathbf{W} = \mathbf{\Gamma}^{-1}$,或如果 $\mathbf{\Gamma}$ 被估计,那么 \mathbf{W} 可以设置成等于该估计值的逆。

当均衡器的训练序列是周期的且周期为 N 时,协方差矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 是特普利茨(Toeplitz)和循环矩阵,并且它的逆矩阵也是循环矩阵。在这种情况下,通过实现一个单独的有限冲激响应(FIR)滤波器且权值等于 \mathbf{W} 的第一行,加权矩阵 \mathbf{W} 的乘法运算就可以大大简化,这正如库里西(Qureshi, 1977年)所指出的。快速更新算法等价于用 \mathbf{W} 乘以梯度向量 $\hat{\mathbf{G}}_k$,这种算法实现简单,如图11-1-6所示,其实现方法是:在周期输入序列用来调整抽头系数之前的路径上插入FIR滤波器,该滤波器的 N 个系数为 w_0, w_1, \dots, w_{N-1} 。

库里西(Qureshi, 1977年)阐述了用接收信号来估计权值的一种方法,其基本步骤如下:

- (1) 采集均衡器延迟线中一个周期(N 个符号)的接收数据 v_0, v_1, \dots, v_{N-1} 。
- (2) 计算 $\{v_n\}$ 的 N 点离散傅里叶变换(DFE),标记为 $\{R_n\}$ 。
- (3) 计算离散功率谱 $|R_n|^2$ 。如果我们忽略噪声, $|R_n|^2$ 相当于均衡器输入端信号循环协方差矩阵特征值的 N 倍。然后,将 N 倍的噪声方差 σ^2 的估计值加上 $|R_n|^2$ 。
- (4) 计算序列 $1/(|R_n|^2 + N\hat{\sigma}^2)$ 的逆DFT, $n=0, 1, \dots, N-1$ 。于是,得到如图11-1-6所示的滤波器系数 $\{w_n\}$ 。

(5) 调整均衡器抽头系数的算法就成为

$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} - e_j \sum_{m=0}^{N-1} w_k v_{k-j-m}^* \quad (j=0, 1, \dots, N-1) \quad (11-1-36)$$

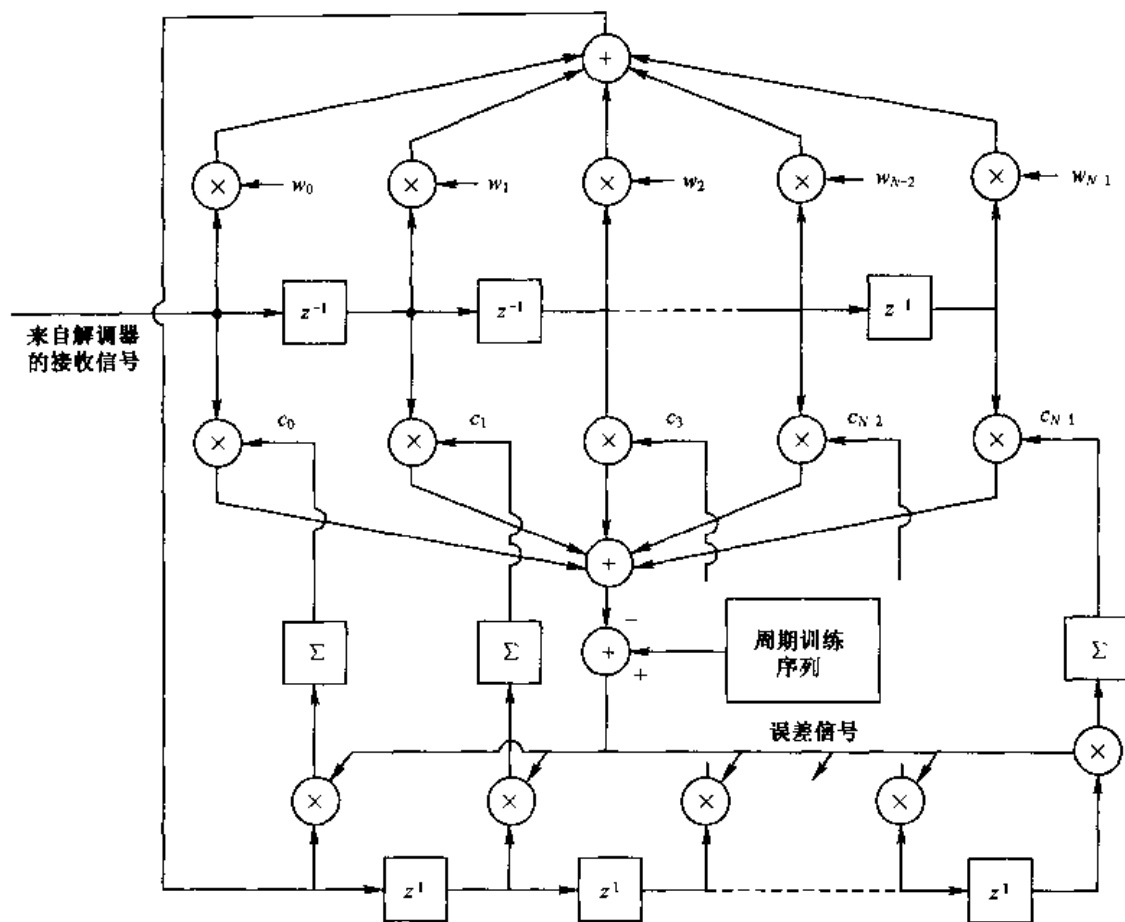


图 11-1-6 自适应均衡器的快速启动技术

11.1.6 自适应分数间隔均衡器——抽头泄漏算法

如 10.2.4 节所述,当接收机不知道信道特性时,FSE 比符号速率均衡器(SRE)更可取。在这样的情况下,FSE 将匹配滤波和符号间干扰的均衡操作合并成一个滤波器。通过以奈奎斯特速率处理抽样值。FSE 能使其抽头系数补偿在一个符号间隔内的任何定时相位。从而,它具有对一个符号间隔内的抽样时刻不敏感的性能,这在前面已作过讨论。因此,从性能的观点来看,PSE 等价于一个匹配滤波器跟随一个符号速率抽样器,之后再跟随一个 SRE。

LMS 算法及其任何变型都可以用来自适应地调整 PSE 的抽头系数。用做初始调整的适当的训练信号,可以采用非周期的伪随机序列或者周期的伪随机序列的形式,其中周期等于均衡器的时间跨度,即周期为 P 的序列用来训练具有 PN/M 个系数的 PSE,其中抽头间隔为 MT/N 。在采用周期训练序列的情况下,每一个抽头系数的更新可以周期地进行,根据式 (11-1-16)和式(11-1-17)的平均梯度 LMS 算法在序列的每一个周期进行一次。

在 PSE 的 LMS 算法的数学实现中,在选择步长参数 Δ 时必须细心。吉特林和温斯坦 (Gitlin & Weinstein, 1981 年)已经证明而且库里西 (Qureshi, 1985 年)也进一步阐述:在 PSE 中,接收信号的协方差矩阵的特征值的 $(N - M)/N$ 部分是很小的。这些小的特征值及其相应的特征向量与频段 $(1 + \beta)/2T \leq |f| \leq 1/T$ 内的噪声频谱特性有关。结果,输出 MSE 变得对这些特征值所相应的系数值的偏差敏感。在这种情况下,对小特征值所相应的特征向量

(频段)进行有限精度算术运算会产生误差累积,最终引起系数值的溢出,而不会对整个 MSE 有显著的影响。

吉特林(Gitlin,1982 年)的论文给出了这个问题的解决方案。取代式(10-2-25)给出的最小化 MSE,我们将下列性能指数最小化

$$J = J_{\text{MSE}} + \mu \sum_{i=1}^K |C_i|^2 \quad (11-1-37)$$

式中, J_{MSE} 是常规 MSE, μ 是一个小的正常数。因此,就可以避免接收信号协方差矩阵的不利调整。 J 的最小化导致下列“变型 LMS”算法

$$\mathbf{C}_{k+1} = (1 - \Delta\mu)\mathbf{C}_k + \Delta\epsilon_K \mathbf{V}_k^* \quad (11-1-38)$$

这种算法称为抽头泄漏算法。

在 PSE 抽头系数自适应调整中,如前所述,当发送一个周期的训练序列时,抽头按照符号速率或较慢的速率进行周期调整。然而,PSE 输入端的样值以较快的速率出现。例如,如果考察一个 $T/2$ FSE,那么每个信息符号就有两个样值。一个有趣的问题是,是否可能通过以抽样速率自适应调整系数来提高 FSE 的初始收敛速率。如果抽头调整按照抽样速率进行,那么必须产生一个附加的期望信号值,这些值相当于落在两个期望符号值之间的抽样值。即必须设计一个符号间插值滤波器,以便产生中间的期望样值序列。吉特林和温斯坦(Gitlin & Weinstein,1981 年),乔菲和凯拉斯(Cioffi & Kailath,1984 年)以及林(Ling,1989 年)等人研究了这个问题。林的论文研究成果回答了这个问题。

首先我们注意到,LMS 算法的初始收敛特性取决于接收信号自相关矩阵非平凡特征值的数目。这个数目等于要优化独立参数的数目。例如,SRE 有 K 个抽头且横跨时间间隔为 KT 秒,该 SRE 有 K 个独立参数要优化。与此相比,横跨同样时间间隔的 $T/2$ 复 FSE 具有 $2K$ 个抽头系数,但它的自相关矩阵有 K 个非平凡(和 K 个平凡)特征值,所以,它有 K 个独立参数要优化。因此,以符号速率自适应调整的复 $T/2$ FSE 的收敛速率与 SRE 相同。那么,如果复 FSE 使用插值法在所有 $nT/2$ 时刻来更新其系数,那么要优化的独立参数的数目为 $2K$ 。在这种情况下,有两个自相关矩阵,其中一个对应于 $nT/2$ 时刻的样值,而另一个对应于 $(nT+1)/2$ 时刻的样值,每一个矩阵有 K 个非平凡特征值。也就是说,使用插值法的 $T/2$ FSE 在一次更新中调整一组 K 个参数,而在下一次更新中调整第二组 K 个参数。因此,插值 FSE 的收敛速率与符号更新的 FSE 的收敛速率近似相同。

在相位分离 FSE(PS-FSE)的情况中,它是带通实现的,时间跨度为 KT s,抽头间隔为 T/N ,其中 $N>2$,例如, $N=3$ 或 4 ,它有 KN 个参数要优化。在这种情况下,林(Ling,1989 年)证明了:当 PS-FSE 以符号速率调整时,PS-FSE 的收敛速率比常规的复 FSE 的收敛速率慢两倍。通过理想的符号间插值,PS-FSE 的收敛速率可近似增加到按符号速率调整的 FSE 收敛速率的两倍。因此,具有符号间插值的 PS-FSE 达到以符号速率调整的常规复 FSE 的同样的收敛速率。

11.1.7 用于 ML 序列检测的自适应信道估计器

ML 序列检测准则和概率的逐符号检测算法都需要知道等效离散时间信道系数 $\{f_k\}$,前者通过体现在式(10-1-23)的度量计算中的维特比算法实现,后者如 5.1.5 节所述。为了适应未知信道或慢时变信道,接收机中包含与检测算法并接的信道估计器,如图 11-1-7 所示。图

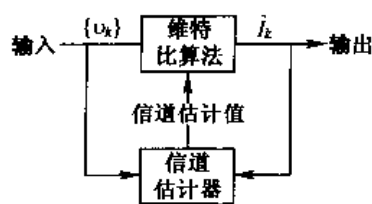


图 11-1-7 用于维特比算法的信道特性估计方法方框图

11-1-8所示的信道估计器在结构上与 11.1 节讨论的线性横向均衡器相同。事实上,信道估计器是等效离散时间信道滤波器的复制品,对符号间干扰建模。估计的抽头系数(标记为 $\{\hat{f}_k\}$)递推调整,以使实际接收序列与估计器输出之间的 MSE 最小。例如,在面向判决的操作模式中,最陡下降算法是

$$\hat{\mathbf{f}}_{k+1} = \hat{\mathbf{f}}_k + \Delta \epsilon_k \hat{\mathbf{I}}_k^* \quad (11-1-39)$$

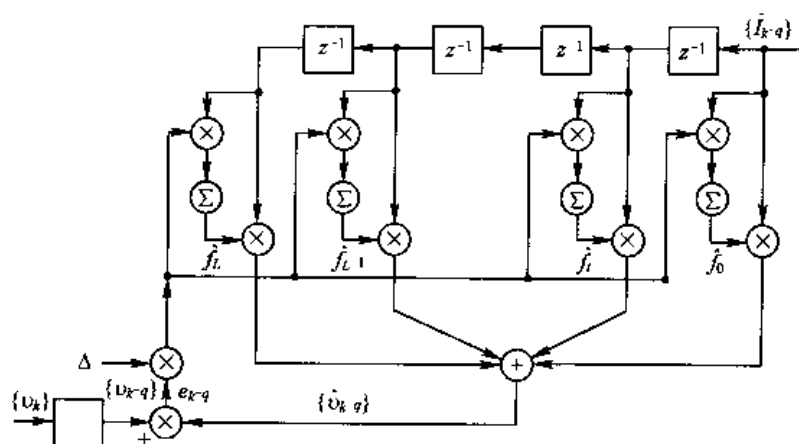


图 11-1-8 估计信道弥散的自适应横向滤波器

式中, $\hat{\mathbf{f}}_k$ 是第 k 次迭代的抽头增益系数向量, Δ 是步长, $\epsilon_k = v_k - \hat{v}_k$ 是误差信号, $\hat{\mathbf{f}}_k$ 表示在第 k 次迭代时信道估计器中的已检测信息符号向量。

下面证明当 v_k 与 \hat{v}_k 之间的 MSE 最小时,信道估计器的抽头增益系数值是离散时间信道模型的值。为了在数学上容易处理,假设已检测的信息序列 $\{\hat{I}_k\}$ 是正确的,即 $\{\hat{I}_k\}$ 与发送序列 $\{I_k\}$ 相同。当系统运行在低错误概率时,这种假设是合理的。因此,在接收信号 v_k 与估计值 \hat{v}_k 之间的 MSE 为

$$J(\hat{\mathbf{f}}) = E\left(\left|v_k - \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j I_{k-j}\right|^2\right) \quad (11-1-40)$$

使式(11-1-40)中 $J(\hat{\mathbf{f}})$ 最小的抽头系数 $\{\hat{f}_k\}$ 满足 N 个线性方程组

$$\sum_{i=0}^{N-1} \hat{f}_j \phi_{kj} = d_k \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (11-1-41)$$

式中

$$\phi_{kj} = E(I_k I_j^*), \quad d_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \phi_j \quad (11-1-42)$$

由式(11-1-41)和式(11-1-42)得出结论:只要信息序列 $\{I_k\}$ 是不相关的,最佳系数就精确地等于等效离散时间信道对应的值。虽然,当信道估计器的抽头数 N 大于或等于 $L+1$ 时,最佳抽头增益系数 $\{\hat{f}_k\}$ 等于 $\{f_k\}$ 对应的值,甚至当信息序列相关时。在上述条件下,最小 MSE 就等于噪声的方差 N_0 。

在上面的讨论中,维特比算法或概率逐符号算法的输出端的已估计信息序列用来调整信

道估计器。启动操作时,发送一个短训练序列来对抽头系数进行初始调整,如线性横向均衡器中的那样。在自适应操作模式中,接收机就使用自己的判决来形成误差信号。

11.2 自适应判决反馈均衡器

正如线性自适应均衡器的情况,判决反馈均衡器(DFE)中的前馈滤波器和反馈滤波器的系数可以递推地调整,而不是对式(10-3-3)所示的矩阵进行变换。基于 DFE 输出端 MSE 的最小化,最陡下降算法的形式为

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k + \Delta E(\epsilon_k \mathbf{V}_k^*) \quad (11-2-1)$$

式中, \mathbf{C}_k 是第 k 个信号间隔中的均衡器系数向量。 $E(\epsilon_k \mathbf{V}_k^*)$ 是误差信号 $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$ 与 \mathbf{V}_k 的互相关, $\mathbf{V}_k = [v_{k+K_1} \cdots v_k I_{k-1} \cdots I_{k-K_2}]^t$ 表示 $t = kT$ 时刻前馈和反馈滤波器中的信号值。当 $k \rightarrow \infty$ 且互相关向量 $E(\epsilon_k \mathbf{V}_k^*) = 0$ 时, MSE 最小。

因为任何时刻精确的互相关向量未知,将向量 $\epsilon_k \mathbf{V}_k^*$ 当做估计值,并通过下列递推方程将估计值中的噪声平均掉:

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta \epsilon_k \mathbf{V}_k^* \quad (11-2-2)$$

这就是 DFE 的 LMS 算法。

如线性均衡器,可以使用一个训练序列对 DFE 的系数进行初始调整。收敛于(接近)最佳系数(最小 MSE)时,可以切换到面向判决的模式。该模式中,检测器输出端的判决值用来形成误差信号 ϵ_k ,并馈送给反馈滤波器,这就是 DFE 的自适应模式,如图 11-2-1 所示。在此情况下,调整均衡器系数的递推方程是

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta \hat{\epsilon}_k \mathbf{V}_k^* \quad (11-2-3)$$

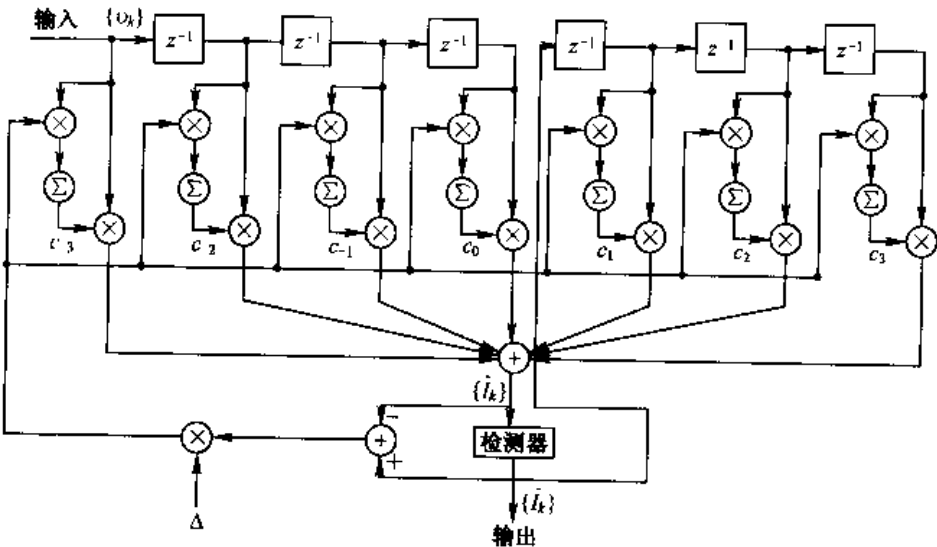


图 11-2-1 判决反馈均衡器

式中, $\hat{\epsilon}_k = \hat{I}_k - \hat{I}_k$, $\mathbf{V}_k = [v_{k+K_1} \cdots v_k \hat{I}_{k-1} \cdots \hat{I}_{k-K_2}]^t$ 。

DFE 的 LMS 算法的性能特征基本上与 11.1.3 节和 11.1.4 节对线性均衡器的研究结果相同。

11.3 网格编码信号的自适应均衡

8.3 节所述的带宽效率高的网格编码调制常常用在电话信道上的数字通信系统中,以减小为达到指定的差错率所需要的比特 SNR。网格编码信号的信道失真迫使我们使用自适应均衡,以减小符号间干扰。然后将均衡器的输出馈送给维特比译码器,对网格编码信号进行软判决译码。

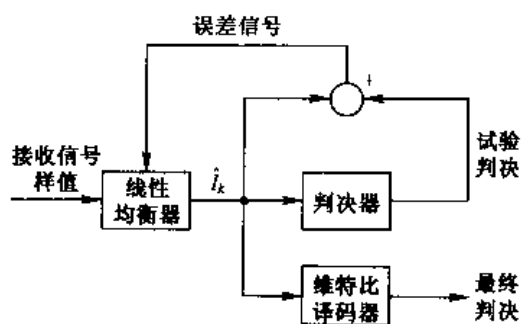


图 11-3-1 基于试验性判决的均衡器的调整

对于这样的接收机,要解决的问题是如何在数据传输模式中使该均衡器自适应? 一种是使均衡器在其输出端单独作出判决,用来生成一个误差信号以调整抽头系数,如图 11-3-1 所示。采用这种方法得到的判决一般是不可靠的,因为译码前的编码符号 SNR 比较低。高的差错率会严重地损害均衡器的操作,最终影响译码器输出端判决的可靠性。比较好的方法是采用更可靠的维特比译码器译码后判决来连续地使均衡器自适应。在维特比译码器之前使用一个线性均衡器

这种方法较好且是可行的。在维特比译码器中的固有延时可以通过在均衡器系数的抽头权值调整中引入一个相同的延时来克服,如图 11-3-2 所示。为该附加延时所付出的主要代价是,LMS 算法中的步长参数必须减小,以保证算法的稳定性,如朗(Long,1987 年,1989 年)等人的论文中所述。

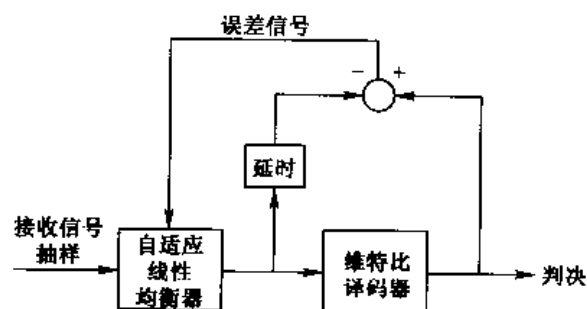


图 11-3-2 基于维特比译码器判决的均衡器的调整

在具有严重 ISI 的信道中,线性均衡器不再适合补偿该信道的符号间干扰,代之以使用 DFE。但是 DFE 要求在其反馈滤波器中有可靠的判决,以便抵消由先前被检测符号引起的符号间干扰。译码之前的试验性判决是高度不可靠的,因此不合适。不巧,常规 DFE 不能与维特比算法级联,其中由译码器得到的译码后判决再反馈到 DFE。

一种可行的方法是使用 10.3.3 节所述的预测 DFE。为了适应译码延时,由于它影响线性预测器,所以引入一个周期的交织器/解交织器对,它与维特比译码器有相同的延时,从而有可能生成一个合适的误差信号给预测器,如图 11-3-3 所示。埃尤布奥卢(Eyuboglu,1988 年)描述并分析了一种新方法,在此方法中预测 DFE 可以和维特比译码结合起来均衡网格编码信号。周(Zhou,1988 年,1990 年)等人将同样的思想用于衰落多径信道的均衡,但修改了 DFE

的结构,使用了递推最小二乘格型滤波器,对信道的时变提供更快的自适应性能。

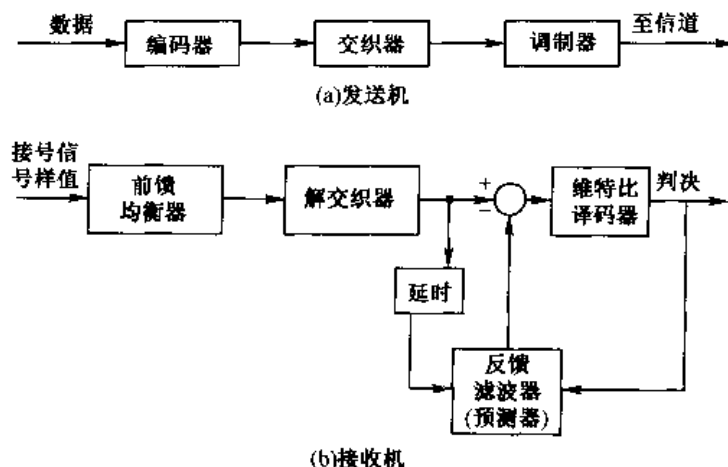


图 11-3-3 使用具有交织和网格编码调制的预测 DFE

另一种方法对有线信道是有效的,这时信道实质上是时不变的,该方法是将 DFE 的反馈部分置于发送机中,从而可以在传输之前消除信道响应的尾部(后标)。前面 10.3.4 节曾描述过这种方法,其中采用 Tomlinson-Harashima 预编码方案对信息序列进行预编码。通常,这种方法是这样实现的:发送一个信道探测信号,在接收机中测量信道的频率或冲激响应,而后将信道响应通知发送机以便合成预编码器。在接收机中实现一个自适应分数间隔均衡器,用做 DFE 的前馈滤波器,从而补偿信道响应的任何小的时变。

减少状态的维持比检测算法

从性能观点来看,检测受 ISI 恶化的 TCM 信号序列的最好方法是:用单一的有限状态机对 ISI 和网格码联合建模,在这个合并的网格上使用维持比算法,这种方法在以下作者的论文中都有阐述:切维尔特和埃莱夫塞里奥(Chevillat & Eleftheriou, 1988 年, 1989 年),埃尤布奥卢(Eyuboglu, 1988 年, 1989 年)等人,以及维索洛斯基(Weslowski, 1987 年)。如前所述,在接收机的前端采用一个白化匹配滤波器,网格编码器与 ISI 信道滤波器合并的模型如图 11-3-4 所示,其中信道滤波器 $F(z)$ 具有最小相位。因此,TCM 编码器具有 S 个状态且使用 2^{m+1} 个信号点的星座,该编码器有一个合并的 TCM/ISI 的网格,其中有 $S2^{mL}$ 个状态和发自每个状态的 2^m 个转移(分支)。该合并的有限状态机的状态可以标记为

$$S_n = (I_{n-L}, I_{n-L+1}, \dots, I_{n-1}, \theta_n) \quad (11-3-1)$$

式中, $\{I_n\}$ 是信息符号序列, θ_n 是编码器的状态。

维特比译码器在 ISI 与网格码合并的网格上的操作方法是常规方法:计算分支度量

$$\left| v_k - \sum_{i=0}^L f_i I_{k-i} \right|^2 \quad (11-3-2)$$

并增加相应的路径度量。

显然,当 ISI 的跨度 L 大时,维持比检测器的复杂性高得无法实现。在这种情况下,可以像 10.4 节所阐述的那样降低译码器的复杂性,其方法是截短有效的信道记忆到 L_0 项。经过截短后,合并的 TCM/ISI 网格有 $S2^{mL_0}$ 个状态

$$S_n^{L_0} = (I_{n-L_0}, I_{n-L_0+1}, \dots, I_{n-1}, \theta_n) \quad (11-3-3)$$

式中, $1 \leq L_0 \leq L$ 。

因此, 当 $L_0 = 1$ 时, 维特比算法就直接在 TCM 编码网格上运算, L 个 ISI 项被估计和抵消。当选择 $L_0 > 1$ 时, 某些 ISI 项保持, 而 $L + 1 - L_0$ 项被抵消。为了减少由于维特比检测器试验性判决引起的性能损伤, 我们采用局部反馈方法将 ISI 抵消引入到分支度量的计算中, 这在前面 10.4 节中已有阐述。因此, 维特比检测器所计算的分支度量形式为

$$\left| v_k - \sum_{i=0}^{L_0-1} f_i I_{k-i} - \sum_{i=L_0}^{L-1} f_i \tilde{I}_{k-i}(S_n^{L_0}) \right|^2 \quad (11-3-4)$$

式中, $\tilde{I}_{k-i}(S_n^{L_0})$ 标记基于局部反馈所估计的 ISI 项, 该 ISI 是由于截短 ISI 中所包含的符号 $\{I_{k-i}, L_0 < i < L\}$ 引起的。

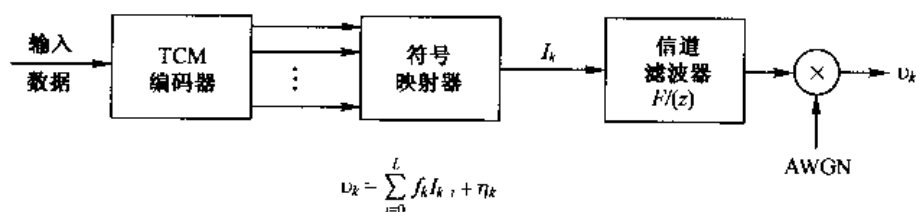


图 11-3-4 TCM 和 ISI 信道的模型

在信道特性未知的情况下, WMF 和 $F(z)$ 的信道估计器必须自适应地确定。这可以采用如下的方法来实现: 用一个复基带 FSE 作为 WMF, 并采用前面 11.1.7 节所述的信道估计器。因此, 可以采用训练序列来初始调整, 面向判决估计可以继续跟随初始训练序列。LMS 算法可用训练和面向判决的两种模式。切维尔特和埃莱夫塞里奥 (Chevillat & Eleftheriou, 1989 年) 的模拟结果证明, 与一个线性均衡器跟随一个维特比检测器的组合情况相比, 这种自适应 WMFI 减少状态的维特比检测器具有优越的性能。

11.4 自适应均衡的递推最小二乘法

11.1 节和 11.2 节所述的 LMS 算法用于自适应地调整线性均衡器或 DFE 的抽头系数。LMS 算法本质上是(随机)最陡下降算法, 其中梯度向量的真值由数据直接得到的估计值来近似。

最陡下降算法的主要优点是计算简单。然而, 计算简单付出的代价是收敛缓慢, 特别是当信道特性导致自相关矩阵 Γ 的特征值散布比较大, 即 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$ 时。另一方面, 梯度算法只有一个调整参数(即参数 Δ)用来控制收敛速率。因而, 收敛慢正是由于这个基本的限制。在 11.1.5 节曾介绍过两种简单的方法能在一定程度上提高收敛速率。

为了得到较快的收敛, 有必要设计包含附加参数的更复杂的算法。特别是, 如果矩阵 Γ 是 $N \times N$ 的且特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, 可以使用一种含有 N 个参数的算法, 其中每个参数对应一个特征值。本节将讨论如何选择达到快速收敛的最佳参数。

在快速收敛算法的推导中, 我们将采用最小二乘法。因此, 我们将直接处理接收数据, 使二次性能指数最小, 而以前是使平方误差的期望值最小。这意味着, 用时间平均而不是统计平均来表示性能指数。

为方便计,以矩阵形式表示递推最小二乘算法。因此,定义几个必需的向量和矩阵,将略微改变符号标记。具体地,线性均衡器中, t 时刻(t 是整数)的信息符号的估计值表示为

$$\hat{I}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j(t-1) v_{t-j}$$

通过改变 $c_j(t-1)$ 的指数 j ,其取值由 $j=0$ 到 $j=N-1$ 。同时定义

$$y(t) = v_{t+K}$$

那么估计值 $\hat{I}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{I}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j(t-1) y(t-j) \\ &= \mathbf{C}_N'(t-1) \mathbf{Y}_N(t) \end{aligned} \quad (11-4-1)$$

式中, $\mathbf{C}_N(t-1)$ 和 $\mathbf{Y}_N(t)$ 分别是均衡器系数 $c_j(t-1)$ ($j=0, 1, \dots, N-1$) 和输入信号 $y(t-j)$ ($j=0, 1, 2, \dots, N-1$) 的列向量。

类似地,在判决反馈均衡器中,抽头系数为 $c_j(t)$ ($j=0, 1, \dots, N-1$)。其中,前面的 K_1+1 是前馈滤波器的系数,剩余的 $K_2=N-K_1-1$ 是反馈滤波器的系数。估计值 $\hat{I}(t)$ 中的数据是 $v_{t+K_1}, \dots, v_{t+1}, I_{t-1}, \dots, I_{t-K_2}$, 其中 I_{t-j} ($1 \leq j \leq K_2$) 表示对先前被检测符号的判决。在此,我们忽略了判决差错在算法中的影响。因此,假定 $I_{t-j} = I_{t-j}, 1 \leq j \leq K_2$ 。为符号标记方便,定义

$$y(t-j) = \begin{cases} v_{t+K_1-j} & (0 \leq j \leq K_1) \\ I_{t-K_1-j} & (K_1 < j \leq N-1) \end{cases} \quad (11-4-2)$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_N(t) &= [y(t) y(t-1) \cdots y(t-N+1)]^T \\ &= [v_{t+K_1} \cdots v_{t+1} v_{t-1} \cdots I_{t-K_2}]^T \end{aligned} \quad (11-4-3)$$

11.4.1 递推最小二乘(卡尔曼)算法

关于 $\hat{I}(t)$ 的递推最小二乘(RLS)估计可以用公式表示如下。假设已观测到向量 $\mathbf{Y}_N(n)$, $n=0, 1, \dots, t$, 希望求均衡器(线性或判决反馈)的系数向量 $\mathbf{C}_N(t)$, 该系数使下列时间平均的加权平方误差最小:

$$\mathcal{E}_N^{LS} = \sum_{n=0}^t w^{t-n} |e_N(n, t)|^2 \quad (11-4-4)$$

式中,误差定义为

$$e_N(n, t) = I(n) - \mathbf{C}_N'(t) \mathbf{Y}_N(n) \quad (11-4-5)$$

w 表示加权因子, $0 < w < 1$ 。因此,将指数加权引入到过去的的数据,当信道特性是时变的时候,这样做是恰当的。对 \mathcal{E}_N^{LS} 相对于系数向量的最小化得到下列线性方程组

$$\mathbf{R}_N(t) \mathbf{C}_N(t) = \mathbf{D}_N(t) \quad (11-4-6)$$

式中, $\mathbf{R}_N(t)$ 是信号相关矩阵, 定义为

$$\mathbf{R}_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} \mathbf{Y}_N^*(n) \mathbf{Y}_N'(n) \quad (11-4-7)$$

$\mathbf{D}_N(t)$ 是互相关向量

$$\mathbf{D}_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} I(n) \mathbf{Y}_N^*(n) \quad (11-4-8)$$

式(11-4-6)的解为

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{R}_N^{-1}(t) \mathbf{D}_N(t) \quad (11-4-9)$$

矩阵 $\mathbf{R}_N(t)$ 类似于统计自相关矩阵 Γ_N , 向量 $\mathbf{D}_N(t)$ 类似于互相关向量 ξ_N , 如前面定义的。我们强调, $\mathbf{R}_N(t)$ 并不是托伯利茨(Toeplitz)矩阵。也应当指出, 对于小的 t 值, $\mathbf{R}_N(t)$ 也许是比较差的状况。因此, 习惯上在初始时将矩阵 $\delta \mathbf{I}_N$ 加到 $\mathbf{R}_N(t)$ 上, 其中 δ 是一个小的正常数, \mathbf{I}_N 是单位矩阵。由于对过去的信号采用指数加权, 因此加入 $\delta \mathbf{I}_N$ 的影响随时间而消除。

假设 $t-1$ 时刻我们得到解答式(11-4-9), 即 $\mathbf{C}_N(t-1)$, 那么计算 $\mathbf{C}_N(t)$ 。对接收到的每一个新的信号分量求解 N 个线性方程组是没有效率的, 因此也是不实用的。为了避免这种情况, 进行如下处理。首先, $\mathbf{R}_N(t)$ 可以递推计算:

$$\mathbf{R}_N(t) = w \mathbf{R}_N(t-1) + \mathbf{Y}_N^*(t) \mathbf{Y}_N'(t) \quad (11-4-10)$$

将式(11-4-10)称做 $\mathbf{R}_N(t)$ 的时间更新方程。

因为在式(11-4-9)中需用 $\mathbf{R}_N(t)$ 的逆, 所以利用逆矩阵恒等式

$$\mathbf{R}_N^{-1}(t) = \frac{1}{w} \left[\mathbf{R}_N^{-1}(t-1) - \frac{\mathbf{R}_N^{-1}(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{R}_N^{-1}(t-1)}{w + \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{R}_N^{-1}(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t)} \right] \quad (11-4-11)$$

因此, 可按照式(11-4-11)来递推计算 $\mathbf{R}_N^{-1}(t)$ 。

为方便计, 定义 $\mathbf{P}_N(t) = \mathbf{R}_N^{-1}(t)$, 同时定义一个 N 维向量如下:

$$\mathbf{K}_N(t) = \frac{1}{w + \mu_N(t)} \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \quad (11-4-12)$$

它称做卡尔曼增益向量。式中, $\mu_N(t)$ 是一个标量, 定义为

$$\mu_N(t) = \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \quad (11-4-13)$$

利用这些定义, 式(11-4-11)变为

$$\mathbf{P}_N(t) = \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{P}_N(t-1)] \quad (11-4-14)$$

假设用 $\mathbf{Y}_N^*(t)$ 后乘式(11-4-14)的两边, 那么

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N(t) \mathbf{Y}_N^*(t) &= \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t)] \\ &= \frac{1}{w} \{ [w + \mu_N(t)] \mathbf{K}_N(t) - \mathbf{K}_N(t) \mu_N(t) \} \\ &= \mathbf{K}_N(t) \end{aligned} \quad (11-4-15)$$

因此, 卡尔曼增益向量也可以定义为 $\mathbf{P}_N(t) \mathbf{Y}_N^*(t)$ 。

现在利用矩阵求逆恒等式推导一个方程, 以便从 $\mathbf{C}_N(t-1)$ 求得 $\mathbf{C}_N(t)$ 。因为

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{P}_N(t) \mathbf{D}_N(t)$$

且

$$\mathbf{D}_N(t) = w \mathbf{D}_N(t-1) + I(t) \mathbf{Y}_N^*(t) \quad (11-4-16)$$

得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_N(t) &= \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{P}_N(t-1)] [w \mathbf{D}_N(t-1) + I(t) \mathbf{Y}_N^*(t)] \\
&= \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{D}_N(t-1) + \frac{1}{w} I(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \\
&\quad - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{D}_N(t-1) \\
&\quad - \frac{1}{w} I(t) \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t) \\
&= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t) [I(t) - \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{C}_N(t-1)]
\end{aligned} \tag{11-4-17}$$

注意, $\mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{C}_N(t-1)$ 是均衡器在 t 时刻的输出, 即

$$\hat{f}(t) = \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{C}_N(t-1) \tag{11-4-18}$$

且

$$e_N(t, t-1) = I(t) - \hat{f}(t) \equiv e_N(t) \tag{11-4-19}$$

是期望符号与估计值之间的误差。因此, $\mathbf{C}_N(t)$ 按照下列关系式以递推方式更新:

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t) e_N(t) \tag{11-4-20}$$

这种最佳化产生的残余 MSE 是

$$e_{N\min}^{LS} = \sum_{n=0}^t w^{t-n} |I(n)|^2 - \mathbf{C}_N'(t) \mathbf{D}_N^*(t) \tag{11-4-21}$$

下面进行小结, 假设有 $\mathbf{C}_N(t-1)$ 和 $\mathbf{P}_N(t-1)$ 。接收到一个新的信号分量时, 有 $\mathbf{Y}_N(t)$, 那么 $\mathbf{C}_N(t)$ 时间更新的递推计算按下列过程进行:

· 计算输出

$$\hat{f}(t) = \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{C}_N(t-1)$$

· 计算误差

$$e_N(t) = I(t) - \hat{f}(t)$$

· 计算卡尔曼增益向量

$$\mathbf{K}_N(t) = \frac{\mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N'(t)}{w + \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{P}_N(t-1) \mathbf{Y}_N^*(t)}$$

· 更新相关矩阵的逆

$$\mathbf{P}_N(t) = \frac{1}{w} [\mathbf{P}_N(t-1) - \mathbf{K}_N(t) \mathbf{Y}_N'(t) \mathbf{P}_N(t-1)]$$

· 更新系数

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_N(t) &= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{K}_N(t) e_N(t) \\
&= \mathbf{C}_N(t-1) + \mathbf{P}_N(t) \mathbf{Y}_N^*(t) e_N(t)
\end{aligned} \tag{11-4-22}$$

式(11-4-22)所述的算法称做 RLS 直接形式或卡尔曼算法。当均衡器具有一个横向(直接形式)结构时, 它是适当的。

注意, 均衡器系数随时间改变的量等于误差 $e_N(t)$ 乘以卡尔曼增益向量 $\mathbf{K}_N(t)$ 。因为 $\mathbf{K}_N(t)$ 是 N 维的, 所以每一个抽头系数实际上受到 $\mathbf{K}_N(t)$ 的一个元素的控制, 从而获得快速收敛。相反地, 最陡下降算法以现有符号标记表示为

$$\mathbf{C}_N(t) = \mathbf{C}_N(t-1) + \Delta \mathbf{Y}_N^*(t) e_N(t) \tag{11-4-23}$$

其惟一可变的参数是步长 Δ 。

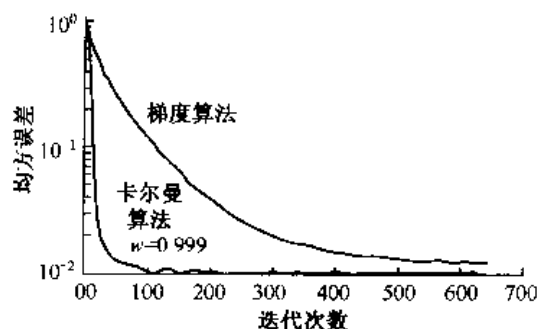


图 11-4-1 卡尔曼与梯度算法收敛速率的比较

图 11-4-1 说明当信道的固定参数 $f_0 = 0.26$ 、 $f_1 = 0.93$ 、 $f_2 = 0.26$ 且一个线性均衡器具有 11 个抽头时,这两种算法的初始收敛速率。这个信道的特征值比值是 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 11$,所有均衡器系数被初始化为零,最陡下降算法以 $\Delta = 0.020$ 实现。卡尔曼算法的优越性是显而易见的,这在时变信道中特别重要。例如,(电离层)高频(HF)无线信道的时变太快,因而不能被梯度算法均衡,但卡尔曼算法完全适应迅速

跟踪这样的变化。

尽管上述卡尔曼算法有出色的跟踪性能,但它有两个缺点。一是复杂,二是对递推计算引起的累积舍入噪声敏感。后者会引起算法的不稳定。

式(11-4-22)中变量的计算或操作(乘、除和减)的次数与 N^2 成正比。大多数操作包含在 $\mathbf{P}_N(t)$ 的更新过程中,这部分计算对舍入误差噪声是敏感的。为了补救,人们提出不按式(11-4-14)计算 $\mathbf{P}_N(t)$ 的算法,该算法基于将 $\mathbf{P}_N(t)$ 分解成以下形式:

$$\mathbf{P}_N(t) \approx \mathbf{S}_N(t) \mathbf{\Lambda}_N(t) \mathbf{S}_N'(t) \quad (11-4-24)$$

式中, $\mathbf{S}_N(t)$ 是一个下三角矩阵,其对角元素是 1。 $\mathbf{\Lambda}_N(t)$ 是一个对角矩阵。这样的分解称做平方根因式分解(参见比尔曼(Bierman, 1977 年))。附录 D 详细介绍了这种因式分解。在平方根算法中, $\mathbf{P}_N(t)$ 既没有像式(11-4-14)中被更新,也没有被计算,而是对 $\mathbf{S}_N(t)$ 和 $\mathbf{\Lambda}_N(t)$ 进行时间更新。

平方根算法常常用在控制系统的应用中,其中包含卡尔曼滤波。在数字通信中,平方根卡尔曼算法已在判决反馈均衡的 PSK 调制解调器中实现,该调制解调器用于在标称的 3 kHz 带宽的 HF 无线信道上高速传输。许(Hsu, 1982 年)的论文描述了这种算法,其计算复杂性为 $1.5N^2 + 6.5N$ (每个输出符号的复值乘法和除法)。它在数值上是稳定的,并具有良好的数值特性。有关序贯估计中的平方根算法,可参考比尔曼(Bierman, 1977 年)的著作。

导出 RLS 算法也是可能的,其计算复杂性随均衡器系数的数目 N 线性增长,该算法通常称做快速 RLS 算法,卡拉扬尼斯(Carayannis, 1983 年)等人、乔菲和凯拉斯(Cioffi 和 Kailath, 1984 年)以及斯洛克和凯拉斯(Slock 和 Kailath, 1988 年)的论文中述及。

自适应均衡器的另一类递推最小二乘算法是基于格型均衡器结构的。下面,我们从横向滤波器结构导出格型滤波器的结构,从而证明这两种结构是等效的。

11.4.2 线性预测和格型滤波器

第 3 章研究了语音编码方面的信号线性预测。本节将建立线性预测与格型滤波器间的关联。

线性预测问题可以表达如下:已知一组数据 $y(t-1)$, $y(t-2)$, ..., $y(t-p)$, 预测下一个数据点 $y(t)$ 的值。 p 阶预测器是

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=1}^p a_{pk} y(t-k) \quad (11-4-25)$$

其 MSE 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p &= E[y(t) - \hat{y}(t)]^2 \\ &= E\left[y(t) - \sum_{k=1}^p a_{pk}y(t-k)\right]^2\end{aligned}\quad (11-4-26)$$

将该 MSE 关于预测器系数 $\{a_{pk}\}$ 最小化, 得到线性方程组

$$\sum_{k=1}^p a_{pk}\phi(k-l) = \phi(l) \quad (l=1, 2, \dots, p) \quad (11-4-27)$$

式中

$$\phi(l) = E[y(t)y(t+l)]$$

以上线性方程称为正态方程或尤尔-沃克(Yule-Walker)方程。

元素为 $\phi(k-l)$ 的矩阵 Φ 是托伯利茨(Toeplitz)矩阵, 附录 A 所述的列文森-杜宾(Levinson-Durbin)算法提供了一种有效的手段来递推求解线性方程, 从一阶预测器开始递推下去, 直到求出 p 阶预测器的系数。列文森-杜宾算法的递推关系式为

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{\phi(1)}{\phi(0)}, \quad \mathcal{E}_0 = \phi(0) \\ a_{mm} &= \frac{\phi(m) - \mathbf{A}_m^t \Phi_{m-1}^r}{\mathcal{E}_{m-1}} \\ a_{mk} &= a_{m-1k} - a_{mm}a_{m-1m-k} \\ \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_{m-1}(1 - a_{mm}^2)\end{aligned}\quad (11-4-28)$$

式中 $m=1, 2, \dots, p$, 向量 \mathbf{A}_{m-1} 和 Φ_{m-1}^r 定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{m-1} &= [a_{m-11} \ a_{m-12} \ \dots \ a_{m-1m-1}]^t \\ \Phi_{m-1}^r &= [\phi(m-1) \ \phi(m-2) \ \dots \ \phi(1)]^t\end{aligned}$$

m 阶线性预测滤波器可以用一个横向滤波器实现, 其传递函数为

$$A_m(z) = 1 - \sum_{k=1}^m a_{mk}z^{-k} \quad (11-4-29)$$

其输入是数据 $\{y(t)\}$, 输出是误差 $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ 。预测滤波器也可以用格型形式实现, 下面将证明。

首先利用列文森-杜宾算法求式(11-4-29)中的预测器系数 a_{mk} , 得到

$$\begin{aligned}A_m(z) &= 1 - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{m-1k} - a_{mm}a_{m-1m-k})z^{-k} - a_{mm}z^{-m} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1k}z^{-k} - a_{mm}z^{-m} \left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1k}z^k\right) \\ &= A_{m-1}(z) - a_{mm}z^{-m}A_{m-1}(z^{-1})\end{aligned}\quad (11-4-30)$$

因此得到以 $(m-1)$ 阶预测器传递函数表示的 m 阶预测的传递函数。

定义一个滤波器, 其传递函数 $G_m(z)$ 为

$$G_m(z) = z^{-m}A_m(z^{-1}) \quad (11-4-31)$$

那么, 式(11-4-30)可以表示为

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) - a_{mm}z^{-1}G_{m-1}(z) \quad (11-4-32)$$

注意, $G_{m-1}(z)$ 表示横向滤波器, 其抽头系数为 $(-a_{m-1m-1}, -a_{m-1m-2}, \dots, -a_{m-11}, 1)$ 。

$A_{m-1}(z)$ 的系数与之完全相同,只是顺序相反。

通过计算两个滤波器对输入序列 $y(t)$ 的输出,可以深入研究 $A_m(z)$ 与 $G_m(z)$ 之间的关系。利用 z 变换关系式得到

$$A_m(z)Y(z) = A_{m-1}(z)Y(z) - a_{mm}z^{-1}G_{m-1}(z)Y(z) \quad (11-4-33)$$

定义滤波器的输出为

$$\begin{aligned} F_m(z) &= A_m(z)Y(z) \\ B_m(z) &= G_m(z)Y(z) \end{aligned} \quad (11-4-34)$$

那么式(11-4-33)变为

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) - a_{mm}z^{-1}B_{m-1}(z) \quad (11-4-35)$$

在时域中,式(11-4-35)的关系式变为

$$f_m(t) = f_{m-1}(t) - a_{mm}b_{m-1}(t-1) \quad (m \geq 1) \quad (11-4-36)$$

式中,

$$f_m(t) = y(t) - \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk}y(t-k) \quad (11-4-37)$$

$$b_m(t) = y(t-m) - \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk}y(t-m+k) \quad (11-4-38)$$

式(11-4-37)中的 $f_m(t)$ 表示 m 阶前向预测器的误差, $b_m(t)$ 表示 m 阶后向预测器的误差。

式(11-4-36)是规定格型滤波器的两个关系式之一。第二个关系式可由 $G_m(z)$ 获得如下:

$$\begin{aligned} G_m(z) &= z^{-m}A_m(z^{-1}) \\ &= z^{-m}[A_{m-1}(z^{-1}) - a_{mm}z^m A_{m-1}(z)] \\ &= z^{-1}G_{m-1}(z) - a_{mm}A_{m-1}(z) \end{aligned} \quad (11-4-39)$$

如果用 $Y(z)$ 乘以式(11-4-39)的两边,其结果用式(11-4-34)中所定义的 $F_m(z)$ 和 $B_m(z)$ 表示,得到

$$B_m(z) = z^{-1}B_{m-1}(z) - a_{mm}F_{m-1}(z) \quad (11-4-40)$$

将式(11-4-40)变换到时域,得到相应于格型滤波器的第二个关系式

$$b_m(t) = b_{m-1}(t-1) - a_{mm}f_{m-1}(t) \quad (m \geq 1) \quad (11-4-41)$$

其初始条件为

$$f_0(t) = b_0(t) = y(t) \quad (11-4-42)$$

图 11-4-2 说明了式(11-4-36)和式(11-4-41)的递推关系所描述的格型滤波器。每一级由其自己的乘法因子 $\{a_{ii}\}$, $i=1, 2, \dots, m$ 表征,该因子在列文森-杜宾算法中已定义。前向和反向误差 $f_m(t)$ 和 $b_m(t)$ 通常称为残差,其均方值为

$$\mathcal{E}_m = E[f_m^2(t)] = E[b_m^2(t)] \quad (11-4-43)$$

\mathcal{E}_m 由下式递推得出,正如列文森-杜宾算法所指:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_{m-1}(1 - a_{mm}^2) \\ &= \mathcal{E}_0 \prod_{i=1}^m (1 - a_{ii}^2) \end{aligned} \quad (11-4-44)$$

式中, $\mathcal{E}_0 = \phi(0)$ 。

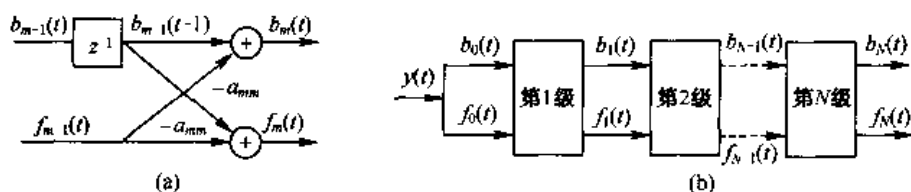


图 11-4-2 格型滤波器

残差 $\{f_m(t)\}$ 和 $\{b_m(t)\}$ 有一些特殊的性质,如迈克霍尔(Makhoul, 1978 年)的论文中所述。其中最重要的性质是正交性

$$\begin{aligned} E[b_m(t)b_n(t)] &= \epsilon_m \delta_{mn} \\ E[f_m(t+m)f_n(t+n)] &= \epsilon_m \delta_{mn} \end{aligned} \quad (11-4-45)$$

$f_m(t)$ 与 $b_n(t)$ 之间的互相关为

$$E[f_m(t)b_n(t)] = \begin{cases} a_{nn}\epsilon_m & (m \geq n) \\ 0 & (m < n) \end{cases} \quad m, n \geq 0 \quad (11-4-46)$$

由于残差正交性,该格型的不同节呈现独立的形式,这允许添加或删除最后的一级或多级,而不影响余下各级的参数。因为残余均方误差 ϵ_m 随节数单调减小,所以 ϵ_m 可以作为性能指数,用来确定格型在何处终止。

由上述讨论我们看到,线性预测器可以用线性横向滤波器或格型滤波器实现。格型滤波器是递推阶次的,因此它所含的节数增加或减少比较容易,而不影响余下各节的参数。相反,根据 RLS 准则得到的横向滤波器的系数是互相关联的。这意味着,该滤波器抽头数的增加或减少将导致所有系数的变化。因此,11.4.1 节所述的卡尔曼算法不是在阶次上而是在时间上递推。

根据最小二乘最佳化,RLS 格型均衡算法的计算复杂性随滤波器系数(格型多级)的数目 N 线性增长。因此,格型均衡器的结构在计算上与直接形式的快速 RLS 均衡器算法不相上下。例如,图 11-4-3 说明了横向和格型、符号间隔 DFE 滤波器结构的计算复杂性(每个输出符号的乘法和除法的次数)。可以看到,当均衡器抽头数小于 10 时,不同结构和算法的计算复杂性相差比较小。然而,当抽头数增加时,格型 RLS 算法和快速(横向)RLS 算法的复杂性明显低于常规和平方根 RLS 算法。当然,所有 RLS 算法的复杂性都高于 LMS 算法。对于 RLS 格型算法,莫夫(Morf, 1977 年)、莫夫和李(Morf & Lee, 1978 年),莫夫(Morf, 1977 年)等人。萨托里斯和亚历山大(Satorius 和 Alexander, 1979 年)、萨托里斯和帕克(Satorius 和 Pack, 1981 年)、林和普罗基斯(Ling 和 Proakis, 1984 年)以及林(Ling, 1982 年, 1984 年, 1985 年, 1986 年)等人的论著中有相关描述。

RLS 格型算法对于该算法在数字实现中固有的舍入误差有明显的数值上的鲁棒特性,有关这类特性的论述请参见林和普罗基斯(Ling & Proakis, 1984 年),和林(1986 年)等人的论著。

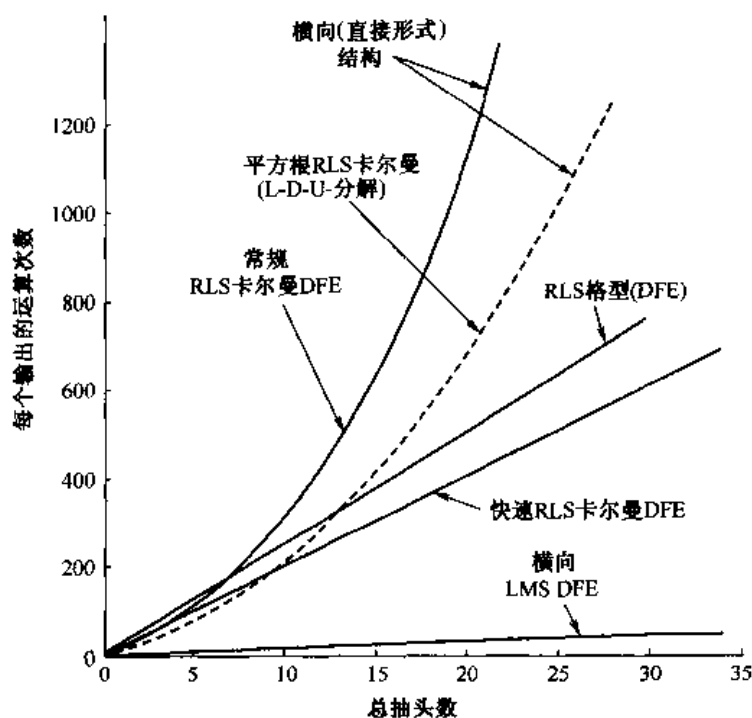


图 11-4-3 DFE 算法的计算复杂性

11.5 自恢复(盲)均衡

在常规的迫零或最小 MSE 均衡器中,假定发送一个确知的训练序列给接收机,以便初始调整均衡器系数。然而,有一些应用场合,如多点通信网络,希望接收机在没有确知训练序列可用的情况下能与接收信号同步,并能调整均衡器。基于不利用训练序列初始调整系数的均衡技术称为自恢复或盲均衡。

从塞脱(Sato, 1975 年)的论文开始,过去的 20 年中已推出 3 种不同类型的自适应盲均衡算法。一种类型算法是基于自适应均衡器的最陡下降法,第二种类型算法利用接收信号的二阶和更高阶(通常四阶)的统计量来估计信道特性并设计均衡器。近年来,基于最大似然准则的第三种类型盲均衡算法被推出。本节将简要介绍这些方法并给出相关文献。

11.5.1 基于最大似然准则的盲均衡

为方便计,使用 10.1.2 节所述的等效离散时间信道模型。这个具有 ISI 信道模型的输出是

$$v_n = \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} + \eta_n \quad (11-5-1)$$

式中, $|f_k|$ 是等效离散时间信道的系数, $|I_n|$ 表示信息序列, $|\eta_n|$ 是高斯白噪声序列。

对于一组 N 个接收数据点,在已知冲激响应向量 $\mathbf{f} = [f_0 \ f_1 \ \cdots \ f_L]^t$ 和数据向量 $\mathbf{I} = [I_1 \ I_2 \ \cdots \ I_N]^t$ 的条件下,接收数据向量 $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N]^t$ 的(联合)概率密度函数是

$$p(\mathbf{v} | \mathbf{f}, \mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \left| v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} \right|^2 \right) \quad (11-5-2)$$

\mathbf{f} 和 \mathbf{I} 的联合最大似然估计值是使联合概率密度函数 $p(\mathbf{v} | \mathbf{f}, \mathbf{I})$ 最大的向量的值, 或者等价为使指数项最小的 \mathbf{f} 和 \mathbf{I} 值。因此, ML 的解是下列度量在 \mathbf{f} 和 \mathbf{I} 上的最小值:

$$\begin{aligned} DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}) &= \sum_{n=1}^N \left| v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} \right|^2 \\ &= \|\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|^2 \end{aligned} \quad (11-5-3)$$

式中, 矩阵 \mathbf{A} 称做数据矩阵, 且定义为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I_2 & I_1 & 0 & \cdots & 0 \\ I_3 & I_2 & I_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ I_N & I_{N-1} & I_{N-2} & \cdots & I_{N-L} \end{bmatrix} \quad (11-5-4)$$

首先我们注意到, 当数据向量 \mathbf{I} (或数据矩阵 \mathbf{A}) 已知时, 正如接收机可获得一个训练序列的情况, 通过式(11-5-3)对 \mathbf{f} 的最小化而得到的 ML 信道冲激响应估计值为

$$\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}) = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{v} \quad (11-5-5)$$

另一方面, 当信道冲激响应 \mathbf{f} 已知时, 数据序列 \mathbf{I} 的最佳 ML 检测器对 ISI 信道利用维特比算法来进行网格搜索(或树搜索)。

当 \mathbf{I} 和 \mathbf{f} 都未知时, 性能指数 $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ 的最小化可以在 \mathbf{I} 和 \mathbf{f} 上联合进行。另一种方法, \mathbf{f} 可以由概率密度函数 $p(\mathbf{v} | \mathbf{f})$ 估计, $p(\mathbf{v} | \mathbf{f})$ 可通过 $p(\mathbf{v}, \mathbf{I} | \mathbf{f})$ 在所有可能的数据序列上平均得到, 即

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v} | \mathbf{f}) &= \sum_m p(\mathbf{v}, \mathbf{I}^{(m)} | \mathbf{f}) \\ &= \sum_m p(\mathbf{v} | \mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}) P(\mathbf{I}^{(m)}) \end{aligned} \quad (11-5-6)$$

式中, $P(\mathbf{I}^{(m)})$ 是序列 $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, M^N$) 的概率, M 是信号星座的大小。

1. 基于在数据序列上平均的信道估计

如上述讨论所指出的, 当 \mathbf{I} 和 \mathbf{f} 两者都未知时, 一种方法是在所有可能的数据序列上对概率密度函数 $p(\mathbf{v}, \mathbf{I} | \mathbf{f})$ 求平均后估计冲激响应 \mathbf{f} , 因此

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v} | \mathbf{f}) &= \sum_m p(\mathbf{v} | \mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}) P(\mathbf{I}^{(m)}) \\ &= \sum_m \left[\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)}\mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2}\right) \right] P(\mathbf{I}^{(m)}) \end{aligned} \quad (11-5-7)$$

其次, 使 $p(\mathbf{v} | \mathbf{f})$ 最小的 \mathbf{f} 估计值是下列方程的解:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mathbf{v} | \mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} &= \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \\ &(\mathbf{A}^{(m)'} \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f} - \mathbf{A}^{(m)'} \mathbf{v}) \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)}\mathbf{f}\|^2}{2\sigma^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (11-5-8)$$

因此, \mathbf{f} 的估计值为

$$\mathbf{f} = \left[\sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \mathbf{A}^{(m)\prime} \mathbf{A}^{(m)} g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}) \right]^{-1} \times \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}) \mathbf{A}^{(m)\prime} \mathbf{v} \quad (11-5-9)$$

式中, 函数 $g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f})$ 定义为

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}) = \exp \left(- \frac{\| \mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f} \|^2}{2\sigma^2} \right) \quad (11-5-10)$$

将最佳 \mathbf{f} 的解记为 \mathbf{f}_{ML} 。

方程(11-5-9)是在给定接收信号向量 \mathbf{v} 的条件下求解信道冲激响应估计值的非线性方程。通过直接求解方程(11-5-9)来获得最佳解答一般很困难, 设计一种数值方法来递推求解 \mathbf{f}_{ML} 是比较简单的。具体地有

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \left[\sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) \mathbf{A}^{(m)\prime} \mathbf{A}^{(m)} g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}^{(k)}) \right]^{-1} \times \sum_m P(\mathbf{I}^{(m)}) g(\mathbf{v}, \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}^{(k)}) \mathbf{A}^{(m)\prime} \mathbf{v} \quad (11-5-11)$$

一旦从式(11-5-9)或式(11-5-11)的解中得到 \mathbf{f}_{ML} , 就可在式(11-5-3)的度量 $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$ 对所有可能的数据序列的最小化中使用该估计值。因此, \mathbf{I}_{ML} 是使 $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$ 最小的序列 \mathbf{I} , 即

$$\min_{\mathbf{I}} DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML}) = \min_{\mathbf{I}} \| \mathbf{v} - \mathbf{A} \mathbf{f}_{ML} \|^2 \quad (11-5-12)$$

我们知道, 维特比算法是进行 $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f}_{ML})$ 在 \mathbf{I} 上最小化的高效算法。

这种算法有两个主要的缺点。首先, 式(11-5-11)给出的 \mathbf{f}_{ML} 递推运算的计算量大。其次, 也许是更重要的, 估计值 \mathbf{f}_{ML} 不像最大似然估计 $\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I})$ 那样好, 后者是当序列 \mathbf{I} 已知时得到的。因此, 基于估计值 \mathbf{f}_{ML} 的盲均衡器(维特比算法)的差错率性能比基于 $\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I})$ 的差。下面将研究联合信道和数据的估计。

2. 联合信道和数据的估计

本节研究式(11-5-3)给出的性能指数 $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ 的联合最佳化。因为冲激响应向量 \mathbf{f} 的元素是连续的, 数据向量 \mathbf{I} 的元素是离散的, 所以一种方法是对每个可能的发送数据序列求 \mathbf{f} 的最大似然估计值, 然后为每一个相应的信道估计值选择使 $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ 最小的数据序列。因此, 相应于第 m 个数据序列 $\mathbf{I}^{(m)}$ 的信道估计值是

$$\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)}) = (\mathbf{A}^{(m)\prime} \mathbf{A}^{(m)})^{-1} \mathbf{A}^{(m)\prime} \mathbf{v} \quad (11-5-13)$$

对于第 m 个数据序列, 度量 $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ 为

$$DM[\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)})] = \| \mathbf{v} - \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)}) \|^2 \quad (11-5-14)$$

其次, 从 M^N 个可能的序列集合中选择使式(11-5-14)中的代价函数最小的数据序列, 即求

$$\min_{\mathbf{I}^{(m)}} DM(\mathbf{I}^{(m)}, \mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)})) \quad (11-5-15)$$

上述方法是一种耗费计算的搜索方法, 其计算复杂性随数据分组长度而指数增长。可选择 $N = L + 1$, 使 M^L 个幸存序列中的每一个都有一个信道估计值。此后, 对于维特比算法在网格上搜索的每一条幸存路径继续维持各自的信道估计值。雷海利(Raheli, 1995 年)将这种联合信道和数据估计的方法称为按幸存处理。

一种类似的方法由塞沙德里(Seshadri, 1994 年)提出。在本质上, 塞沙德里的算法是一种

一般化的维特比算法(GVA),它将发送数据序列的 $K \geq 1$ 个最好的估计值保持到网格的每个状态以及相应的信道估计值中。在塞沙德里的 GVA 中,搜索从开始直到网格的第 L 级,即直到接收序列 (v_1, v_2, \dots, v_L) 已被处理的点,这种搜索与常规维特比算法(VA)相同。因此,直到第 L 级,进行了耗时较长的搜索。与每一个数据序列 $\mathbf{I}^{(m)}$ 相关联的有一个相应的信道估计值 $\mathbf{f}_{ML}(\mathbf{I}^{(m)})$,从这一级开始修正搜索,使每个状态保持 $K \geq 1$ 个幸存序列和相关联的信道估计值,以代替每个状态的惟一序列。因此,GVA 用来处理接收信号序列 $\{v_n, n \geq L+1\}$ 。在每一级使用 LMS 算法更新信道的估计值,以进一步减少计算的复杂性。塞沙德里(Seshadri, 1991 年)的论文给出的模拟结果表明在适度的信噪以及 $K=4$ 的情况下,GVA 盲均衡算法运行得相当好。因此,GVA 的计算复杂性比常规 VA 有适度的增加。但还有其他计算,它们涉及信道估计值 $\mathbf{f}(\mathbf{I}^{(m)})$ 的估计和更新,信道估计值是与每一个幸存数据估计值相关联的。

另一种联合估计算法由泽尔瓦斯(Zervas, 1991 年)等人提出,该算法避免了信道估计的最小二乘算法。在这个算法中,执行性能指数 $DM(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ 最小化的次序被颠倒,即选择一个信道冲激响应,如 $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$,利用 VA 求该信道冲激响应的最佳序列。然后,以某种方式将 $\mathbf{f}^{(1)}$ 修改成 $\mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}^{(1)} + \Delta \mathbf{f}^{(1)}$,并且在数据序列 $\{\mathbf{I}^{(m)}\}$ 重复该最佳化过程。

根据以上一般方法,泽尔瓦斯(Zervas)等人研究出新的盲均衡算法,称做量化信道算法。该算法在信道空间的一个栅格上运算,采用 ML 准则使该栅格越来越细,将被估计的信道限制在原未知信道的邻近范围。该算法导致高效的并行实现,其存储量要求仅是 VA 的存储量。

11.5.2 随机梯度算法

另一类盲均衡算法是随机梯度迭代均衡方案,应用一个线性 FIR 均衡滤波器输出中的无记忆非线性在每次迭代中生成“期望响应”。

我们从最佳均衡器系数的初始猜测值着手,它记为 $\{c_n\}$ 。那么信道响应与均衡器响应的卷积为

$$\{c_n\} * \{f_n\} = \{\delta_n\} + \{e_n\} \quad (11-5-16)$$

式中, $\{\delta_n\}$ 是单位样值序列。 $\{e_n\}$ 表示误差序列,由均衡器系数的初始猜测值产生。如果将均衡器冲激响应与接收序列 $\{v_n\}$ 卷积,得到

$$\begin{aligned} \{\hat{I}_n\} &= \{v_n\} * \{c_n\} \\ &= \{I_n\} * \{f_n\} * \{c_n\} + \{\eta_n\} * \{c_n\} \\ &= \{I_n\} * (\{\delta_n\} + \{e_n\}) + \{\eta_n\} * \{c_n\} \\ &= \{I_n\} + \{I_n\} * \{e_n\} + \{\eta_n\} * \{c_n\} \end{aligned} \quad (11-5-17)$$

式(11-5-17)中的 $\{\hat{I}_n\}$ 项表示期望数据序列, $\{I_n\} * \{e_n\}$ 项表示残余 ISI, $\{\eta_n\} * \{c_n\}$ 项表示加性噪声。我们的问题是利用已解卷积的序列 $\{\hat{I}_n\}$ 求期望响应的“最好的”估计值,一般记为 $\{d_n\}$ 。利用训练序列的自适应均衡器情况下, $\{d_n\} = \{\hat{I}_n\}$ 。在盲均衡模式中,由 $\{\hat{I}_n\}$ 生成期望响应。

可以使用均方误差(MSE)准则,从观测的均衡器输出 $\{\hat{I}_n\}$ 求 $\{I_n\}$ 的“最好的”估计值。因为发送序列 $\{I_n\}$ 具有非高斯 PDF,所以 MSE 估计是 $\{\hat{I}_n\}$ 的非线性变换。通常“最好的”估计值 $\{d_n\}$ 由下式求得

$$\begin{aligned} d_n &= g(\hat{I}_n) && \text{无记忆} \\ d_n &= g(\hat{I}_n, \hat{I}_{n-1}, \dots, \hat{I}_{n-m}) && m \text{ 阶记忆} \end{aligned} \quad (11-5-18)$$

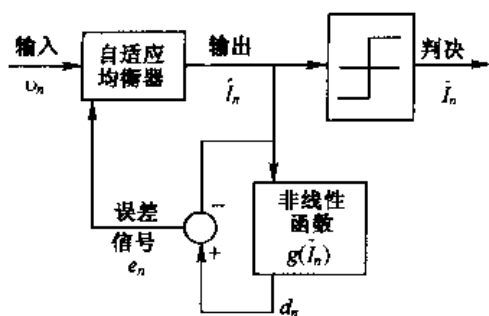


图 11-5-1 具有随机梯度算法
的自适应盲均衡

统计独立的。 $\{I_n\}$ 是统计独立且同分布的随机变量,那么 $\{I_n\}$ 的 MSE 估计值为

$$d_n = E(I_n | \hat{I}_n) \quad (11-5-20)$$

当 $\{I_n\}$ 非高斯时,上式是均衡器输出的非线性函数。

表 11-5-1 说明了现有盲均衡算法的一般形式,它们基于 LMS 自适应。我们看到,这些算法的基本差别在于无记忆非线性的选择。实际中最广泛应用的算法是戈达尔(Godard)算法,有时也称为恒模算法(CMA)。

由表 11-5-1 可见,对均衡器输出取非线性函数而得到的输出序列 $\{d_n\}$ 起着期望响应或训练序列的作用。同时,这些算法简单且易实现,因为它们基本上是 LMS 型的算法。正因如此,我们预期这些算法的收敛特性将取决于接收数据 $\{v_n\}$ 的自相关矩阵。

对于自适应 LMS 型算法,当

$$E[v_n g^*(\hat{I}_n)] = E[v_n \hat{I}_n^*] \quad (11-5-21)$$

时,以均值收敛;当(上标 H 表示共轭转置)

$$\begin{aligned} E[\mathbf{c}_n^H v_n g^*(\hat{I}_n)] &= E[\mathbf{c}_n^H v_n \hat{I}_n^*] \\ E[\hat{I}_n g^*(\hat{I}_n)] &= E[|\hat{I}_n|^2] \end{aligned} \quad (11-5-22)$$

时,以均方意义收敛。

因此,要求均衡器输出 $\{\hat{I}_n\}$ 满足式(11-5-22)。注意,式(11-5-22)表明 $\{\hat{I}_n\}$ 的自相关(右边)等于 \hat{I}_n 与 \hat{I}_n 的非线性变换的互相关(左边)。满足该性质的处理方法称做巴斯岗(Bussgang, 1952 年),由贝利尼(Bellini, 1986 年)命名。总之,当均衡器输出序列 \hat{I}_n 满足巴斯岗性质时,表 11-5-1 给出的算法收敛。

随机梯度算法的基本限制是它们的收敛比较慢。将自适应算法由 LMS 型修改成 RLS 型,可以改进收敛的速率。

表 11-5-1 盲均衡的随机梯度算法

均衡器抽头系数	$\{c_n, 0 \leq n \leq N-1\}$
接收信号序列	$\{v_n\}$
均衡器输出序列	$\{\hat{I}_n\} = \{v_n\} * \{c_n\}$
均衡器误差序列	$\{e_n\} = g(\hat{I}_n) - \hat{I}_n$
抽头系数更新方程	$\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{c}_n + \Delta \mathbf{v}_n^* e_n$

式中, $g(\cdot)$ 是非线性函数。序列 $\{d_n\}$ 用于生成误差信号,再反馈到自适应均衡滤波器,如图 11-5-1 所示。让我们来研究基于 MSE 准则的非线性函数。

一个熟知的经典估计问题如下:如果均衡输出为

$$\hat{I}_n = I_n + \hat{\eta}_n \quad (11-5-19)$$

式中,假定 $\hat{\eta}_n$ 是零均值高斯的(这里可以对残余 ISI 和加性噪声引用中心极限定理), $\{I_n\}$ 与 $\{\hat{\eta}_n\}$ 是

(续表)

算法	非线性: $g(I_n)$
戈达尔(Godard)	$\frac{\hat{I}_n}{ I_n }(I_n + R_2 I_n - I_n ^3), R_2 = \frac{E[I_n ^4]}{E[I_n ^2]}$
塞脱(Sato)	$\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n), \zeta = \frac{E[\text{Re}(I_n) ^2]}{E[\text{Re}(I_n)]}$
本维尼斯特-古尔萨 (Benveniste-Goursat)	$\hat{I}_n + k_1(\hat{I}_n - I_n) + k_2 \hat{I}_n - I_n [\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n) - I_n], k_1$ 和 k_2 是正常数
停止-前进 (Stop-and-Go)	$\hat{I}_n + \frac{1}{2}A(\hat{I}_n - I_n) + \frac{1}{2}B(\hat{I}_n - I_n)^*$ ($A, B = (2, 0), (1, 1), (1, -1)$ 或 $(0, 0)$, 取决于面向判决误差 $\hat{I}_n - I_n$ 和误差 $\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n) - I_n$ 的符号

戈达尔算法

如上所述,戈达尔盲均衡算法是最陡下降算法,该算法广泛地应用于实际中没有训练序列可用时。下面详细研究该算法,假定信号星座为一般的 QAM 星座。

戈达尔研究了均衡、载波相位恢复和跟踪的组合问题。载波相位跟踪在基带进行,跟随在均衡器之后,如图 11-5-2 所示。根据这个结构,可将均衡器输出表示为

$$\hat{I}_k = \sum_{n=-K}^K c_n v_{k-n} \quad (11-5-23)$$

判决器的输入为 $\hat{I}_n \exp(-j\hat{\phi}_k)$, 其中 $\hat{\phi}_k$ 是在第 k 个符号间隔中的载波相位估计值。

如果已知期望符号,可形成误差信号

$$\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k} \quad (11-5-24)$$

对 $\hat{\phi}_k$ 和 $|c_n|$ 求最小 MSE

$$\min_{\hat{\phi}_k, c} E(|I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k}|^2) \quad (11-5-25)$$

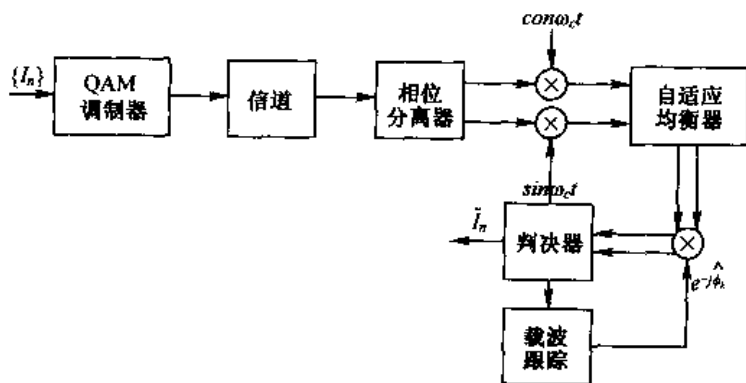


图 11-5-2 自适应(盲)均衡与载波相位跟踪组合的戈达尔方案

该准则使用 LMS 算法来递推估计 \mathbf{C} 和 ϕ_k 。基于发送序列知识的 LMS 算法是

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta_c (I_k - \hat{I}_k e^{-j\hat{\phi}_k}) \mathbf{V}_k^* e^{j\hat{\phi}_k} \quad (11-5-26)$$

$$\hat{\phi}_{k+1} = \hat{\phi}_k + \Delta_\phi \text{Im}(\hat{I}_k \hat{\mathbf{I}}_k^* e^{j\hat{\phi}_k}) \quad (11-5-27)$$

式中, Δ_c 和 Δ_ϕ 是两个递推方程的步长参数。注意, 这些递推方程是相互耦合的。不巧, 期望符号序列 $\{I_k\}$ 未知时, 这些方程一般不会收敛。

戈达尔提出的方法使用了一个准则, 该准则取决于均衡器输出端的符号间干扰量, 而与 QAM 信号星座和载波相位无关。例如, 与载波相位无关且其最小值导致一个小的 MSE 的代价函数为

$$G^{(p)} = E(|\hat{I}_k|^p - |I_k|^p)^2 \quad (11-5-28)$$

式中, p 是正实整数。 $G^{(p)}$ 关于均衡器系数的最小化仅导致信号幅度的均衡。根据这个观察, 戈达尔选择了更一般的代价函数, 称做 p 阶弥散, 定义为

$$D^{(p)} = E(|\hat{I}_k|^p - R_p)^2 \quad (11-5-29)$$

式中, R_p 是正实常数。正如 $G^{(p)}$ 的情况, $D^{(p)}$ 与载波相位无关。

$D^{(p)}$ 关于均衡器系数的最小化可以按下列最陡下降算法递推:

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k - \Delta_p \frac{dD^{(p)}}{d\mathbf{C}_k} \quad (11-5-30)$$

式中, Δ_p 是步长参数。通过对 $D^{(p)}$ 微分并去掉数学期望运算, 得到调整均衡器系数的 LMS 型算法:

$$\hat{\mathbf{C}}_{k+1} = \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta_p \mathbf{V}_k^* \hat{I}_k |\hat{I}_k|^{p-2} (R_p - |\hat{I}_k|^p) \quad (11-5-31)$$

式中, Δ_p 是步长参数, R_p 的最佳选择为

$$R_p = \frac{E(|I_k|^{2p})}{E(|I_k|^p)} \quad (11-5-32)$$

正如所料, 式(11-5-31)中 $\hat{\mathbf{C}}_k$ 的递推运算不要求载波相位的知识。载波相位跟踪可以按式(11-5-27)以面向判决模式来执行, 其中以 \hat{I}_k 取代 I_k 。

特别重要的是 $p=2$ 的情况, 它导致比较简单的算法

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{C}}_k + \Delta_p \mathbf{V}_k^* \hat{I}_k (R_2 - |\hat{I}_k|^2) \\ \hat{\phi}_{k+1} &= \hat{\phi}_k + \Delta_\phi \text{Im}(\hat{I}_k \hat{\mathbf{I}}_k^* e^{j\hat{\phi}_k}) \end{aligned} \quad (11-5-33)$$

式中, \hat{I}_k 是基于 \hat{I}_k 的输出判决, 且

$$R_2 = \frac{E(|I_k|^4)}{E(|I_k|^2)} \quad (11-5-34)$$

式(11-5-33)所示算法的收敛性在戈达尔(Godard, 1980 年)的论文中有证明。初始时, 除中心(参考)抽头外, 均衡器的各系数设置成零。中心抽头按下述条件设置:

$$|c_0|^2 > \frac{E|I_k|^4}{2|x_0|^2[E(|I_k|^2)]^2} \quad (11-5-35)$$

该条件对于该算法的收敛是充分的, 但不是必要的。戈达尔在电话信道上进行了模拟, 该信道具有典型的频率响应特性, 且传输速率为 7 200~12 000 b/s。模拟结果表明式(11-5-31)的算法运行得较好, 并导致在 5 000~20 000 次迭代中收敛, 这取决于信号的星座。初始时, 在均衡

之前眼图是闭合的。收敛要求的迭代次数比具有确知训练序列均衡信道要求的次数大一个数量级。从均衡器调整过程开始,在用式(11-5-33)确定的面向判决的相位估计算法中,没有遇到明显的困难。

11.5.3 基于二阶和高阶信号统计量的盲均衡算法

众所周知,接收信号序列的二阶统计量(自相关)提供了信道特性的幅度信息,而不是相位信息。然而,如果接收信号的自相关函数是周期的,如数字调制信号,这种说法是不正确的。在这种情况下,有可能从接收信号获得信道幅度和相位的测量。接收信号的这种循环的平稳特性形成信道估计算法的基础,该算法由童(Tong, 1994 年, 1995 年)等人设计。

利用更高阶的统计方法,从接收信号估计信道响应也是可能的。特别是,若信道输入是非高斯的,那么一个线性离散时不变系统的冲激响应可以从接收信号的累积量获得。下面介绍一种估计信道冲激响应的简单方法,它是根据接收信号序列的四阶累积量进行的。这种方法是由吉安拉基斯(Giannakis, 1987 年)和吉安拉基斯与孟德尔(Giannakis & Mendel, 1989 年)提出的。为简单起见,接收信号序列是实值的。四阶累积量定义为

$$\begin{aligned} c(v_k, v_{k+m}, v_{k+n}, v_{k+l}) &\equiv c_r(m, n, l) \\ &= E(v_k v_{k+m} v_{k+n} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+m}) E(v_{k+n} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+n}) E(v_{k+m} v_{k+l}) \\ &\quad - E(v_k v_{k+l}) E(v_{k+m} v_{k+n}) \end{aligned} \quad (11-5-36)$$

(一个高斯信号过程的四阶累积量是零。)因此,可得到

$$c_r(m, n, l) = c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) \sum_{k=0}^{\infty} f_k f_{k+m} f_{k+n} f_{k+l} \quad (11-5-37)$$

当信道的输入序列 $\{I_n\}$ 统计独立且同分布时, $c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) = k$ (常数) 称做峰态(Kurtosis)。那么,如果信道响应的长度是 $L+1$, 可以令 $m = n = l = -L$, 则有

$$c_r(-L, -L, -L) = k f_L f_0^3 \quad (11-5-38)$$

类似地,如果令 $m = 0$, $n = L$ 及 $l = p$, 得到

$$c_r(0, L, p) = k f_L f_0^2 f_p \quad (11-5-39)$$

如果将式(11-5-38)和式(11-5-39)结合起来,可得到具有一个标度因子的冲激响应如下

$$f_p = f_0 \frac{c_r(0, L, p)}{c_r(-L, -L, -L)} \quad (p = 1, 2, \dots, L) \quad (11-5-40)$$

累积量 $c_r(m, n, l)$ 是由接收信号序列 $\{v_n\}$ 的样值平均来估计的。

基于高阶统计量的另一种方法是由哈兹那可斯和尼基亚斯(Hatzinakos 和 Nikias, 1991 年)提出的。他们介绍了第一个基于多谱的自适应盲均衡方法,称为倒三谱均衡算法(TEA)。这种方法利用接收信号序列 $\{v_n\}$ 的四阶累积量的复倒谱(倒三谱)来估计信道的响应特性。TEA 只取决于 $\{v_n\}$ 的四阶累积量,并且它能够分别地重构信道的最小相位和最大相位特性,然后由测得的信道特性计算信道均衡器的系数。TEA 中所用的基本方法是计算接收序列 $\{v_n\}$ 的倒三谱,它是 $\{v_n\}$ 对数倒三谱的(三维)傅里叶反变换(倒三谱是四阶累积量序列 $c_r(m, n, l)$ 的三维离散傅里叶变换)。均衡器的系数由倒谱系数计算。

通过将信道估计与信道均衡分离,对 ISI 使用任何类型的均衡器都是可能的,即线性的或判决反馈或最大似然序列检测。这类算法的主要缺点是在对接收信号进行高阶矩(累积量)的估计中涉及的数据量大及其内在的计算复杂性。

总之,我们介绍了 3 种类型的盲均衡算法及其在数字通信中的应用。上述 3 类算法是基于最大似然准则来联合估计信道冲激响应和数据序列的。这些算法是最佳的,并且只需比较少的接收信号样值来进行信道估计。然而,当 ISI 横跨许多符号时,这些算法的复杂性比较大。在某些信道上,如移动无线信道,ISI 的跨度比较短,这些算法实现简单。在电话信道上,ISI 横跨许多符号,但通常不太严重,一般采用 LMS 型(随机梯度)算法。

11.6 文献与参考资料

勒基(Lucky,1965 年,1966 年)研究了数字通信的自适应均衡。他的算法基于峰值失真准则,并且导致了迫零算法。勒基的成果是一项重大成就,在其成果发表后的 5 年内促进了高速调制解调器的迅速发展。与此同时,韦德罗(Widrow,1966 年,1970 年)设计了 LMS 算法,在普罗基斯和米勒(Proakis 和 Miller,1969 年)的指导性论文中描述并分析了该算法在二维(同相和正交分量)信号自适应均衡方面的应用。

普罗基斯(Proakis,1975 年)给出了在 1965~1975 年间研究的自适应均衡算法的指导性论述。有关自适应均衡的更近期的指导性论述在库里西(Qureshi,1985 年)的论文中给出。自适应均衡技术上的重大成就从 1965 年勒基(Lucky)的成果开始,连同昂格伯克和克沙卡(Ungerboeck 和 Csajka,1976 年)提出的网格编码调制研究成果,促使了可商用的高速调制解调器的研发,它们具有在电话信道上速率为 9 600~28 800 b/s 的传输能力。

更快速收敛算法在自适应均衡方面的应用是由戈达尔(Godard,1974 年)提出的。11.4.1 节所述的 RLS(卡尔曼)算法的推导遵循皮西波诺(Picinbono,1978 年)提出的方法。对于一般信号估计应用的 RLS 格型算法是莫夫(Morf,1977 年),莫夫与李(Morf & Lee,1978 年)的研究成果。还有几位学者研究了这些算法的应用,包括迈克霍尔(Makhoul,1978 年)、萨托里斯和帕克(Satorius 和 Pack,1981 年)、萨托里斯和亚历山大(Satorius 和 Alexander,1979 年)以及林和普罗基斯(Ling 和 Proakis,1982 年,1984 年,1985 年,1986 年)。自适应均衡的快速 RLS 卡尔曼算法首先由福尔科纳和柳(Falconer 和 Liung,1978 年)描述。上述参考资料只是已经发表的有关自适应均衡和其他应用的 RLS 算法的几篇重要论文。海金(Haykin,1996 年)的著作中给出了 RLS 算法的综述性论述。

塞脱(Sato,1975 年)关于盲均衡的最初成果集中在 PAM(一维)信号星座上。随后,在几位学者设计的算法中,将该成果推广到二维和多维信号星座,这些学者是戈达尔(Godard,1980 年)、本维尼斯特和古尔萨(Benveniste 和 Goursat,1984 年)、塞脱(Sato,1986 年)、福切尼(Foschini,1985 年)、皮克奇和普拉蒂(Picchi 和 Prati,1987 年)以及夏尔威和温斯坦(Shalvi 和 Weinstein,1990 年)。基于接收信号二阶和高阶矩应用的盲均衡是由吉安拉基斯(Giannakis,1987 年),吉安拉基斯与孟德尔(Giannakis & Mendel,1989 年)哈兹那哥斯和尼基亚斯(Hatzinakos 和 Nikias,1991 年)以及童(Tong,1994 年,1995 年)等人提出的。最大似然准则用于联合信道估计与数据检测,在塞脱(Sato,1994 年)塞沙德里(Seshadri,1994 年)、高希和韦伯(Ghosh 和 Weber,1991 年)、泽尔瓦斯(Zervas,1991 年)等人以及雷海利(Raheli,1995 年)等人的论著中

述及。最后,丁(Ding,1990年)、丁(Ding,1989年)等人和约翰逊(Johnson,1991年)研究了随机梯度盲均衡算法的收敛特性。

习题

11-1 图 P11-1 所示为具有高斯白噪声的等效离散时间信道。

(a) 假定使用一个线性均衡器对信道进行均衡,试求三抽头均衡器的抽头系数 c_{-1} 、 c_0 和 c_1 。为简化计算,令 AWGN 为零。

(b) (a) 中线性均衡器的抽头系数由下列算法递推确定:

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k - \Delta \mathbf{G}_k, \mathbf{C}_k = [c_{-1k} \ c_{0k} \ c_{1k}]^T$$

其中 $\mathbf{G}_k = \Gamma \mathbf{C}_k - \xi$ 是梯度向量, Δ 是步长。试求 Δ 值的范围,以保证递推算法收敛。为简化计算,令 AWGN 为零。

(c) 一个判决反馈均衡器具有两个前馈抽头和一个反馈抽头,试求这些抽头的权值。为简化计算,令 AWGN 为零。

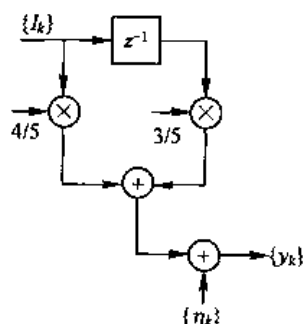


图 P11-1

11-2 参照习题 10-18,回答以下问题:

(a) 试求 Δ 的最大值,它用于确保在自适应模式下工作时均衡器系数收敛。

(b) 三抽头均衡器在自适应模式下工作时,产生的自噪声方差是什么? 将其表示成 Δ 的函数。假定当 $N_0 = 0.1$ 时,把三抽头均衡器的自噪声方差限制到最小 MSE 的 10%,试问 Δ 为何值。

(c) 如果均衡器的最佳系数按最陡下降法递推计算,递推方程可以表示成如下形式:

$$\mathbf{C}_{n+1} = (\mathbf{I} - \Delta \Gamma) \mathbf{C}_n + \Delta \xi$$

其中, \mathbf{I} 是单位矩阵。上式代表 3 个耦合的一阶差分方程组,它们可以通过线性变换将矩阵 Γ 对角化来解耦,即 $\Gamma = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$ 。其中 $\mathbf{\Lambda}$ 是对角矩阵,以 Γ 的特征值作为对角元素; \mathbf{U} 是(归一化的)模态矩阵,由习题 10-18(b)的解得到。令 $\mathbf{C}' = \mathbf{U}^T \mathbf{C}$,试求 \mathbf{C}' 的稳态解,再计算 $\mathbf{C} = (\mathbf{U}^T)^{-1} \mathbf{C}' = \mathbf{U} \mathbf{C}'$ 。从而证明该答案与习题 10-18(a)的结果一致。

11-3 一个长度为 N 的周期伪随机序列用来调整一个 N 抽头线性均衡器的系数,这时可以用离散傅里叶变换(DFT)在频域高效地计算。假设 $\{y_n\}$ 是均衡器输入端的 N 个接收样值序列(以符号速率抽样)。均衡器系数按以下步骤计算:

(a) 计算一个周期的均衡器输入序列 $\{y_n\}$ 的 DFT,即

$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi nk/N}$$

(b) 计算期望的均衡器频谱

$$C_k = \frac{X_k Y_k^*}{|Y_k|^2} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

其中, $|X_k|$ 为训练序列的预计算的 DFT。

(c) 计算 $|C_k|$ 的逆 DFT, 以得到均衡器系数 $\{c_n\}$ 。试证明在无噪声条件下, 以上步骤可以导致一种均衡器, 其频率响应在 N 个等间隔频率 $f_k = k/NT, k = 0, 1, \dots, N-1$ 上等于信道逆折叠谱的频率响应。

11-4 试证明在 MSE 最小化中的梯度向量可以表示为:

$$\mathbf{G}_k = -E(\epsilon_k \mathbf{V}_k^*)$$

其中误差 $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$, 并且 \mathbf{G}_k 的估计值

$$\hat{\mathbf{G}}_k = -\epsilon_k \mathbf{V}_k^*$$

满足条件 $E(\hat{\mathbf{G}}_k) = \mathbf{G}_k$ 。

11-5 吉特林(Gitlin, 1982 年)等人的论文提出的抽头泄漏 LMS 算法可以表示为

$$\mathbf{C}_N(n+1) = w\mathbf{C}_N(n) + \Delta\epsilon(n)\mathbf{V}_N^*(n)$$

其中 $0 < w < 1$, Δ 是步长, $\mathbf{V}_N(n)$ 是时刻 n 的数据向量。试求 $\mathbf{C}_N(n)$ 均值的收敛条件。

11-6 有一个随机过程:

$$x(n) = gv(n) + w(n) \quad (n = 0, 1, \dots, M-1)$$

其中 $v(n)$ 为已知序列, g 是随机变量且 $E(g) = 0$ 及 $E(g^2) = G$ 。过程 $w(n)$ 是白噪声序列, 且

$$\gamma_{ww}(m) = \sigma_w^2 \delta_m$$

试求 g 的线性估计器的系数, 即

$$\hat{g} = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)x(n)$$

使均方误差最小。

11-7 数字横向滤波器可以用频率抽样的形式来实现, 其系统函数为(见习题 10-25):

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 - z^{-M}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H_k}{1 - e^{j2\pi k/M} z^{-1}} \\ &= H_1(z)H_2(z) \end{aligned}$$

其中 $H_1(z)$ 为梳形滤波器, $H_2(z)$ 为并行谐振器组, $\{H_k\}$ 为离散傅里叶变换(DFT)的值。

(a) 假设采用自适应滤波器来实现这种结构, 并用 LMS 算法调整滤波器(DFT)参数 $\{H_k\}$ 。试给出这些参数的时间更新方程, 并绘出该自适应滤波器的结构。

(b) 假设本结构用做自适应信道均衡器, 其中期望信号为

$$d(n) = \sum_{k=0}^{M-1} A_k \cos \omega_k n, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{M}$$

对于这种形式的期望信号,试问对 DFT 系数 $\{H_k\}$ 的 LMS 自适应算法比具有系数 $\{h(n)\}$ 的直接形式的结构有何优势(参见 Proakis, 1970 年)?

11-8 有一个性能指数如下:

$$J = h^2 + 40h + 28$$

假定用如下最陡下降算法来搜索 J 的最小值

$$h(n+1) = h(n) - \frac{1}{2} \Delta g(n)$$

其中, $g(n)$ 为梯度。

(a) 试求 Δ 的取值范围,要求能为调整过程提供一个过阻尼系统。

(b) 试对于该范围内的某个 Δ 值,将作为 n 的函数 J 表达式画成曲线。

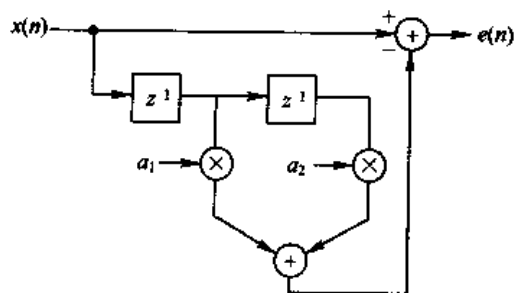


图 P11-9

11-9 图 P11-9 为一个线性预测器,试求系数 a_1 和 a_2 。已知输入信号的自相关 $\gamma_{xx}(m)$ 为

$$\gamma_{xx}(m) = b^{|m|} \quad (0 < b < 1)$$

11-10 试求与习题 11-9 中的线性预测器相对应的格型滤波器及其最佳反射系数。

11-11 图 P11-11 为一个自适应 FIR 滤波器,系统 $C(z)$ 由如下系统函数表征:

$$C(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$$

试求使均方差最小的自适应横向(FIR)滤波器 $B(z) = b_0 + b_1z^{-1}$ 的最佳系数。加性噪声为白的,且方差 $\sigma_w^2 = 0.1$ 。

11-12 一个 $N \times N$ 相关矩阵 Γ 具有特征值 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N > 0$ 以及相关联的特征向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$ 。该矩阵可以表示为

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

(a) 如果 $\Gamma = \Gamma^{1/2} \Gamma^{1/2}$, 其中 $\Gamma^{1/2}$ 为 Γ 的平方根。试证明 $\Gamma^{1/2}$ 可以表示为

$$\Gamma^{1/2} = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{1/2} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

(b) 利用该表达式,试确定计算 $\Gamma^{1/2}$ 的步骤。

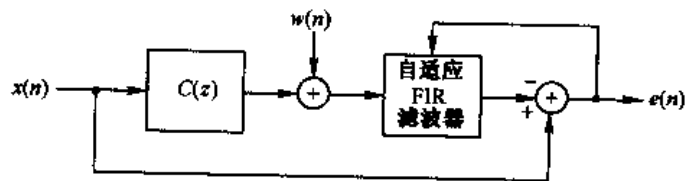


图 P11-11

第 12 章 多信道和多载波系统

在某些应用场合,希望将同样的携带信息的信号在几条信道上传输。这种传输模式最初用于一个或多个信道不可靠的概率比较高的情况。例如,像电离层散射和对流层散射这样的无线信道遭受因多径造成的信号衰落,使得信道在短时间内不可靠。另外,多信道信号传输有时用在军事通信系统中,作为克服传输信号阻塞影响的手段。通过在多重信道上传输同样的信息,我们利用信号分集法使接收机恢复信息。

另一种形式的多信道通信是多载波传输,其中信道的频带被划为若干条子信道,且信息在每条子信道上传输。将信道频带划为若干窄带信道的基本原理将在下面阐述。

本章将研究多信道信号传输和多载波传输两种情况。先介绍多信道传输。

12.1 在 AWGN 信道中的多信道数字通信

本节主要关心在固定信道上的多信道信号传输,其中固定信道的差别在子衰减和相移。多信道数字信号传输系统的具体模型描述如下:信号的波形一般表示为

$$S_m^{(n)}(t) = \operatorname{Re}[S_{lm}^{(n)}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

$$(0 \leq t \leq T; \quad n = 1, 2, \dots, L, \quad m = 1, 2, \dots, M) \quad (12-1-1)$$

式中, L 是信道的数目, M 是信号波形的数目。假定信号波形是等能量且先验等概的。在 L 条信道上传输的波形 $|S_m^{(n)}(t)|$ 受到衰减因子 $|\alpha_n|$ 标度变换、相移 $\{\phi_n\}$, 并受到加性噪声的恶化。由 L 条信道接收到的等效低通信号为

$$r_l^{(n)}(t) = \alpha_n e^{-j\phi_n} S_{lm}^{(n)}(t) + z_n(t)$$

$$(0 \leq t \leq T; \quad n = 1, 2, \dots, L, \quad m = 1, 2, \dots, M) \quad (12-1-2)$$

式中, $\{S_m^{(n)}(t)\}$ 和 $\{z_n(t)\}$ 分别是在 L 条信道上的等效低通发送波形和加性噪声过程。假定 $\{z_n(t)\}$ 是相互统计独立且同分布的高斯噪声随机过程。

下面研究接收机的两种类型的处理方法,即相干检测和非相干检测。相干检测接收机估计信道参数 $|\alpha_n|$ 和 $\{\phi_n\}$, 并用这些参数估值计算判决变量。假设定义 $g_n = \alpha_n e^{-j\phi_n}$ 且令 \hat{g}_n 为 g_n 的估值。多信道接收机将 L 个接收信号中的每一个信号与相应的发送信号复制品进行相关运算,再将每个相关器的输出乘以相应的估值 $|\hat{g}_n^*|$, 并将结果的信号相加。因此,相干检测的判决变量为下列相关度量

$$CM_m = \sum_{n=1}^L \operatorname{Re} \left[\hat{g}_n^* \int_0^T r_l^{(n)}(t) S_{lm}^{(n)*}(t) dt \right] \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (12-1-3)$$

在非相干检测中,不必估计信道参数。解调器判决的依据是匹配滤波器输出的包络之和(包络检测)或者包络平方之和(平方律检测)。通常,在 AWGN 中,包络检测的性能与平方律检测性能几乎没有区别。然而,在 AWGN 信道中,多信道信号传输的平方律检测比包络检测容易分析得多。因此,我们主要关心 L 个信道接收信号的平方律检测,它产生的判决变量为

$$CM_m = \sum_{n=1}^L \left| \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{lm}^{(n)*}(t) dt \right|^2 \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (12-1-4)$$

首先研究二进制信号传输。假定 $s_{li}^{(n)} (n=1, 2, \dots, n)$ 是 L 个发送波形, 那么 $CM_2 > CM_1$ 时, 或等价于差值 $D = CM_1 - CM_2 < 0$ 时, 发生差错。对于非相干检测, 该差值为

$$D = \sum_{n=1}^L (|X_n|^2 - |Y_n|^2) \quad (12-1-5)$$

式中, 变量 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 定义为

$$\begin{aligned} X_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{li}^{(n)*}(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots, L) \\ Y_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) s_{li}^{(n)*}(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots, L) \end{aligned} \quad (12-1-6)$$

$\{X_n\}$ 是相互统计独立且同分布的高斯随机变量, $\{Y_n\}$ 变量也同样如此。然而, 对于任何 n , $\{X_n\}$ 与 $\{Y_n\}$ 也许是相关的。对于相干检测, 差值 $D = CM_1 - CM_2$ 为

$$D = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^L (X_n Y_n^* + X_n^* Y_n) \quad (12-1-7)$$

式中, 定义

$$\begin{aligned} Y_n &= g_n \quad (n = 1, 2, \dots, L) \\ X_n &= \int_0^T r_l^{(n)}(t) [s_{li}^{(n)*}(t) - s_{li}^{(n)*}(t)] dt \end{aligned} \quad (12-1-8)$$

如果通过对接收信号在一个或多个信号传输间隔时间上的观测得到估值 $\{g_n\}$, 如附录 C 所述, 则其统计特征由高斯分布描述。那么, $\{Y_n\}$ 可表征为相互统计独立且同分布的高斯随机变量。上述说法也适用于变量 $\{X_n\}$ 。正如在非相干检测中那样, 我们考虑 X_n 与 Y_n 之间的相关性, 而不考虑 $m \neq n$ 时 X_m 和 Y_n 之间的相关性。

12.1.1 二进制信号

附录 B 推导了复高斯随机变量的一般二次形式

$$D = \sum_{n=1}^L (A |X_n|^2 + B |Y_n|^2 + C X_n Y_n^* + C^* X_n^* Y_n) \quad (12-1-9)$$

小于零的概率, 式中 A 、 B 和 C 为常数。这个概率由附录 B 中的式 (B-21) 确定, 它是在 AWGN 中二进制多信道信号传输的错误概率。有几个特例尤为重要。

如果二进制信号是双极性的, 且 $\{g_n\}$ 的估值是理想的, 正如相干 PSK 那样, 错误概率可表示成简单的形式

$$P_b = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \quad (12-1-10)$$

式中

$$\gamma_b = \frac{\mathcal{E}}{N_0} \sum_{n=1}^L |g_n|^2 = \frac{\mathcal{E}}{N_0} \sum_{n=1}^L a_n^2 \quad (12-1-11)$$

是比特 SNR。如果各信道完全相同, $a_n = a$ (对所有 n), 那么,

$$\gamma_b = \frac{L\mathcal{E}}{N_0} a^2 \quad (12-1-12)$$

我们看到, $L\mathcal{E}$ 是 L 条信号总的发送信号能量。这一结果说明接收机以一种最佳的方式将 L

条信道的能量合并在一起,也就是说,把总的发送信号能量在 L 条信道中划分没有引起性能的损失,可以得到与单个信号波形以能量 $L\epsilon$ 在一条信道上传输情况相同的性能。这个性质仅当估值 $\hat{g}_n = g_n$ (对所有 n) 时才成立。如果估值不理想,会发生性能损失,其损失量取决于估值的质量,如附录 C 所述。

对 $\{g_n\}$ 的理想估计构成一个极端情况。在其他极端情况中,有二进制 DPSK 信号传输。在 DPSK 中,估值 $\{g_n\}$ 是在先前信号传输间隔中匹配滤波器输出端的(归一化的)信号加噪声的样值,是可用来估计 $\{g_n\}$ 的最差估值。对于二进制 DPSK,由式(B-21)可得到错误概率为

$$P_b = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-\gamma_b} \sum_{n=1}^{L-1} c_n \gamma_b^n \quad (12-1-13)$$

式中,定义

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{L-1-n} \binom{2L-1}{k} \quad (12-1-14)$$

γ_b 是式(12-1-11)定义的比特 SNR,也是式(12-1-12)中所有信道同时的比特 SNR。这个结果可与单一信道($L=1$)的错误概率相比较。为了简化比较,假定 L 条信道具有相同的衰减因子。因此,对相同的 γ_b 值,多信道系统的性能劣于单一信道系统的性能,即总的发送信号能量在 L 条信道中划分的结果导致性能损失,其损失量取决于 L 。

正交信号在 L 条信道上传输的平方律检测中也会产生性能损失。二进制正交信号传输的错误概率表达式在形式上与式(12-1-13)给出的二进制 DPSK 的错误概率表达式相同,只是其中的 γ_b 由 $\frac{1}{2}\gamma_b$ 代替。这就是说,采用非相干检测二进制正交信号传输的性能劣于二进制 DPSK 3 dB。然而,在 L 条信道上,接收信号的非相干合并引起的性能损失与二进制 DPSK 的情况相同。

图 12-1-1 说明了 L 个信号的非相干(平方律)合并引起的损失是 L 的函数。虽然没有表示出错误概率,但是根据图 5-2-12 所示的二进制 DPSK 错误概率表达式

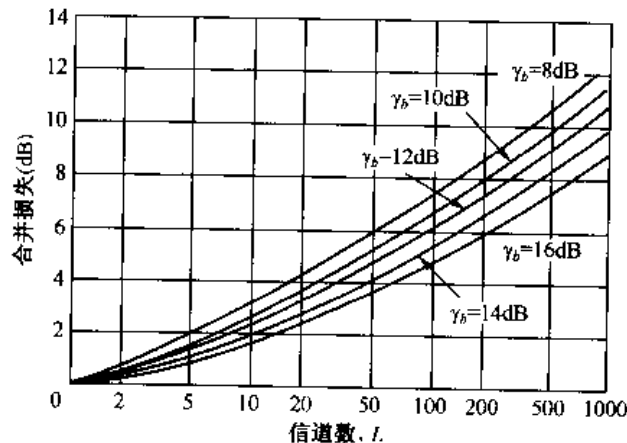


图 12-1-1 在二进制多信道信号非相干检测及合并中的合并损失

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b} \quad (12-1-15)$$

的曲线,再根据相应 L 值的非相干合并损失来降低所要求的比特 SNR γ_b ,很容易求得错误概率。

12.1.2 M 元正交信号

现在研究 M 元正交信号传输。它对 L 条信道上的信号采用平方律检测和合并,其判决变量由式(12-1-4)给出。假设信号 $s_{in}^{(n)}(t)$ ($n = 1, 2, \dots, L$) 在 L 条 AWGN 信道上传输,那么,判决变量为

$$\begin{aligned} CM_1 \equiv U_1 &= \sum_{n=1}^L |2\mathcal{E}\alpha_n + N_{n1}|^2 \\ CM_2 \equiv U_m &= \sum_{n=1}^L |N_{nm}|^2 \quad (m = 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \quad (12-1-16)$$

式中 $\{N_{nm}\}$ 是均值为零且方差为 $\sigma^2 = \frac{1}{2}E(|N_{nm}|^2) = 2\mathcal{E}N_0$ 的复高斯随机变量。因此, U_1 可以统计描述为非中心 χ^2 随机变量,它有 $2L$ 个自由度和非中心参数

$$s^2 = \sum_{n=1}^L (2\mathcal{E}\alpha_n)^2 = 4\mathcal{E}^2 \sum_{n=1}^L \alpha_n^2 \quad (12-1-17)$$

利用式(2-1-118),可求得 U_1 的 PDF 为

$$p(u_1) = \frac{1}{4\mathcal{E}N_0} \left(\frac{u_1}{s^2} \right)^{(L-1)/2} \exp\left(-\frac{s^2 + u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right) I_{L-1} \left[\frac{s\sqrt{u_1}}{2\mathcal{E}N_0} \right] \quad u_1 \geq 0 \quad (12-1-18)$$

另一方面, $\{U_m\}$ ($m = 2, 3, \dots, M$) 是统计独立且同 χ^2 分布的随机变量,其中每个具有 $2L$ 个自由度。利用式(2-1-110),可求得 U_m 的 PDF 为

$$\begin{aligned} p(u_m) &= \frac{1}{(4\mathcal{E}N_0)^L (L-1)!} u_m^{L-1} e^{-u_m/4\mathcal{E}N_0} \\ &\quad (u_m \geq 0; m = 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \quad (12-1-19)$$

符号错误概率是

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - P_c \\ &= 1 - P(U_2 < U_1, U_3 < U_1, \dots, U_M < U_1) \\ &= 1 - \int_0^\infty [P(U_2 < u_1 | U_1 = u_1)]^{M-1} p(u_1) du_1 \end{aligned} \quad (12-1-20)$$

但

$$P(U_2 < u_1 | U_1 = u_1) = 1 - \exp\left(-\frac{u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right)^k \quad (12-1-21)$$

因此,

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - \int_0^\infty \left[1 - e^{-u_1/4\mathcal{E}N_0} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{u_1}{4\mathcal{E}N_0}\right)^k \right]^{M-1} p(u_1) du_1 \\ &= 1 - \int_0^\infty \left(1 - e^{-v} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{v^k}{k!} \right)^{M-1} \left(\frac{v}{\gamma} \right)^{(L-1)/2} e^{-(\gamma+v)} I_{L-1}(2\sqrt{\gamma v}) dv \end{aligned} \quad (12-1-22)$$

式中

$$\gamma = \mathcal{E} \sum_{n=1}^L \alpha_n^2 / N_0$$

可以采用数值计算法来计算式(12-1-22)中的积分,也可以将式(12-1-22)中的 $(1-x)^{M-1}$ 项展开,然后逐项积分。用这种方法可得出有限项总和形式的 P_M 表达式。

另一种方法是使用一致边界

$$P_M < (M-1)P_2(L) \quad (12-1-23)$$

式中, $P_2(L)$ 是在 U_1 与 $M-1$ 个判决变量 $|U_m|$ ($m=2, 3, \dots, M$) 之间选择时的错误概率。由二进制正交信号传输性能的讨论, 得出

$$P_2(L) = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-k\gamma_b/2} \sum_{n=0}^{L-1} c_n \left(\frac{1}{2} k\gamma_b \right)^n \quad (12-1-24)$$

式中, c_n 由式(12-1-14)确定。对于比较小的 M 值, 式(12-1-23)中的一致边界对于大多数实际应用来说是充分紧密的。

12.2 多载波通信

由第10章和第11章对非理想线性滤波器信道的研究, 我们已看到, 该信道引入了 ISI, 与理想信道相比使性能受到损伤。性能损伤的程度取决于频率响应的特性。而且接收机的复杂性随着 ISI 的跨度增加而增加。

对于特定的信道特性, 通信系统的设计人员必须在发送功率和接收机复杂性受约束的情况下决定如何有效地利用可用带宽来可靠地传输信息。对于一个非理想线性滤波器信道, 一种意见是使用单个载波的系统, 它以规定的速率 R 符号/s 以串行方式传输信息序列。在此信道中, 时间弥散一般比符号速率大得多, 因此信道的非理想频率响应特性导致了 ISI。因此, 均衡器对于补偿信道失真是必要的。

作为这种方法的一个例子, 我们列举电话交换网中音带信道数据传输调制解调器, 它们是根据国际电联(ITU)的标准 V.34 设计的。这种调制解调器使用了单一载波的 QAM, 它能自适应地选择载波和符号速率(从几个规定的数值中选择), 以达到所期望性能(差错率)要求下的最大吞吐量。在初始建立电话电路时, 测量信道的频率响应, 然后根据测量结果来选择符号速率和载波频率。

在有信道失真的情况下, 设计带宽利用率高的通信系统的另一种方法是将可用信道带宽划分为若干子信道, 每一条子信道近似于理想的。为了详细地说明, 假设 $C(f)$ 是一个非理想的带宽为 W 的带限信道频率响应, 加性高斯噪声功率密度谱为 $\Phi_{nn}(f)$ 。将带宽 W 划分成宽度为 Δf 的 $N = W/\Delta f$ 个子带, 选择 Δf 足够小, 以至在每一个子带中, $|C(f)|^2/\Phi_{nn}(f)$ 近似为常数。选择发送信号功率的频率分布为 $P(f)$, 其约束条件为

$$\int_W P(f) df \leq P_{av} \quad (12-2-1)$$

式中, P_{av} 是发送机可用的平均功率。然后, 在 N 个子信道上发送数据。下面将评估非理想加性高斯噪声信道的容量。

12.2.1 非理想线性滤波器信道的容量

理想带限 AWGN 信道的容量是

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_{av}}{WN_0} \right) \quad (12-2-2)$$

式中, C 是容量, 单位为比特/秒(b/s), W 是信道带宽, P_{av} 是平均发送功率。在多载波系统

中,当 Δf 足够小时,子信道的容量为

$$C_i = \Delta f \log_2 \left[1 + \frac{\Delta f P(f_i) |C(f_i)|^2}{\Delta f \Phi_{nn}(f_i)} \right] \quad (12-2-3)$$

因此,信道的总容量为

$$C = \sum_{i=1}^N C_i = \Delta f \sum_{i=1}^N \log_2 \left[1 + \frac{P(f_i) |C(f_i)|^2}{\Phi_{nn}(f_i)} \right] \quad (12-2-4)$$

$\Delta f \rightarrow 0$ 取极限时,得到整条信道的容量(单位为 b/s)为

$$C = \int_W \log_2 \left[1 + \frac{P(f) |C(f)|^2}{\Phi_{nn}(f)} \right] df \quad (12-2-5)$$

在式(12-2-1)确定的 $P(f)$ 约束条件下,使 C 最大化的 $P(f)$ 可以通过下列积分式的最大化来确定:

$$\int_W \left\{ \log_2 \left[1 + \frac{P(f) |C(f)|^2}{\Phi_{nn}(f)} \right] + \lambda P(f) \right\} df \quad (12-2-6)$$

式中, λ 为拉格朗日(Lagrange)乘法因子,可以选择它以满足约束条件。通过变量的微积分进行最大化运算,则发送信号功率的最佳分布是下列方程的解

$$\frac{1}{P(f) + \Phi_{nn}(f) / |C(f)|^2} + \lambda = 0 \quad (12-2-7)$$

因此, $P(f) + \Phi_{nn}(f) / |C(f)|^2$ 必须是常数,调整该值可满足式(12-2-1)中平均功率的约束条件,即

$$P(f) = \begin{cases} K - \Phi_{nn}(f) / |C(f)|^2 & (f \in W) \\ 0 & (f \notin W) \end{cases} \quad (12-2-8)$$

具有加性高斯噪声的非理想线性滤波器信道容量的表达式由香农(Shannon, 1949 年)提出。该结果的意义是当信道 $\text{SNR} |C(f)|^2 / \Phi_{nn}(f)$ 高时,信号功率也相应较高;信道 SNR 低时则低。图 12-2-1 所示为这个发送功率分布的结果。可以看到,如果将 $\Phi_{nn}(f) / |C(f)|^2$ 解释为单位深度碗的底部,将数量为 P_{av} 的水注入碗,则水在碗中散布以达到容量。这称做关于作为频率函数的最佳功率分布的注水解释。

值得注意的是,信道 $\text{SNR} |C(f)|^2 / \Phi_{nn}(f)$ 是常数(对所有 $f \in W$)时,信道容量最小。在这种情况下, $P(f)$ 是常数(对所有 $f \in W$)。这等价为如果信道频率响应是理想的,即 $C(f) = 1$ (对所有 $f \in W$),那么根据最大容量的观点,最坏的噪声功率分布是高斯白噪声。

以上的研究提出了以下建议:多载波调制提供一个能产生接近于容量的传输速率的解决方案,多载波调制将可用的信道带宽划分为若干较窄宽度 $\Delta f = W/N$ 的子带。每一个子带中的信号可以独立编码,并以同步符号速率 $1/\Delta f$ 且最佳功率配置 $P(f)$ 来调制。如果 Δf 足够小,那么 $C(f)$ 在每个子带范围内基本上是常数,因为 ISI 可以忽略,因此没有均衡的必要。

多载波调制已应用于无线信道和电话信道的调制解调器中。多载波调制已作为标准应用于数字音频广播。

多载波调制的一个特别应用是铜线用户环路的数字传输。图 12-2-2 示出了典型用户线路信道的衰减特性。我们看到,作为频率的函数,信道衰减迅速增加。这种特性很难通过单个调制载波和接收机中的一个均衡器来达到高传输速率。ISI 在性能方面的代价是很大的。另一方面,具有最佳功率分布的多载波调制为实现更高的传输速率提供了潜在的能力。

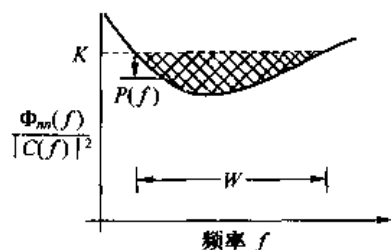


图 12-2-1 基于注水解释的最佳功率分布

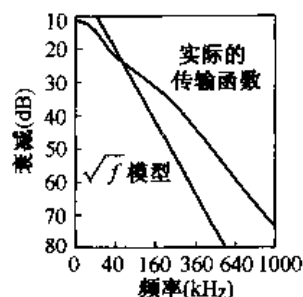


图 12-2-2 24 号线 12 英尺 PIC(聚乙烯绝缘电缆)环路的衰减特性

在用户线传输中比较突出的噪声是串话干扰,它来自于同一电缆中其他电话线路上的信号。这种类型的噪声的功率分布也与频率有关,这可以在可用发送功率的配置中考虑。

凯尔列特(Kalet,1989 年)提出了针对非理想线性滤波器信道的多载波 QAM 系统的设计方法。在这种方法中,在平均功率以及所有子载波的符号错误概率相等的约束条件下,通过各子载波间的最佳功率分配的设计以及对每个子载波中每个符号的比特数(QAM 信号星座图的大小)最佳选择的设计,可得到最大的总比特率。

下面介绍多载波 QAM 调制器和解调器的实现,在发送机中它基于离散傅里叶变换(DFT)生成多载波,在接收机中利用 DFT 对接收信号进行解调。

12.2.2 基于 FFT 的多载波系统

本节将描述一个多载波通信系统,它使用快速傅里叶变换(FFT)算法在发送机中合成信号,并在接收机中对接收信号进行解调。FFT 是实现离散傅里叶变换(DFT)的有效计算手段。

图 12-2-3 为多载波通信系统的方框图。串/并缓存器将信息序列分解成 N_f 比特的帧。每一帧中的 N_f 比特被分成 \tilde{N} 组,其中第 i 组被分配 \tilde{n}_i 比特,且

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{n}_i = N_f \quad (12-2-9)$$

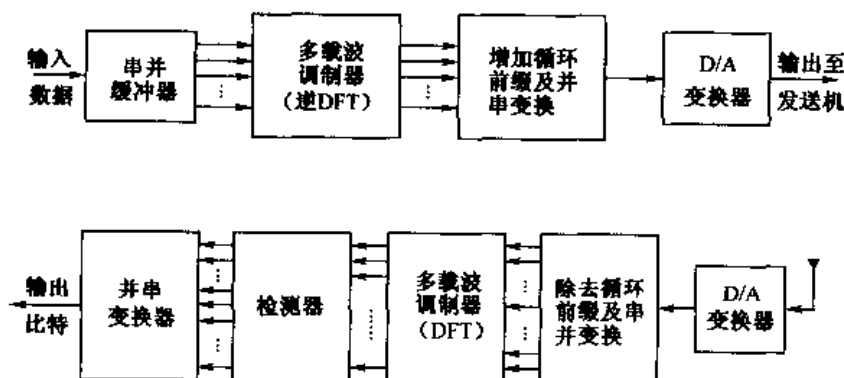


图 12-2-3 多载波通信系统

每一组可以分别编码,因此第 i 组编码器的输出比特数是 $n_i \geq \tilde{n}_i$ 。

为了便于分析,将多载波调制看做由 \tilde{N} 个独立的 QAM 信道所组成,每一条信道以符号速率 $1/T$ 进行操作,但每条信道具有各自不同的 QAM 星座,即第 i 条信道将使用 $M_i = 2^{n_i}$ 个信号点。用 $X_k (k=0, 1, \dots, \tilde{N}-1)$ 表示相应于各子信道上的信息符号的复信号点。为了用信息符号 $\{X_k\}$ 调制 \tilde{N} 个子载波,使用逆 DFT(IDFT)。

然而,如果计算 $\{X_k\}$ 的 \tilde{N} 点 IDFT,将得到一个复时间级数,它不等价于 \tilde{N} QAM 调制子载波。我们改由如下定义来生成 $N=2\tilde{N}$ 个信息符号:

$$X_{N-k} = X_k^* \quad (k=1, \dots, \tilde{N}-1) \quad (12-2-10)$$

且 $X_0 = \text{Re}(X_0)$, $X_{\tilde{N}} = \text{Im}(X_0)$ 。因此,符号 X_0 分解成两部分,两者均为实数。从而, N 点 IDFT 产生实序列

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi nk/N} \quad (n=0, 1, \dots, N-1) \quad (12-2-11)$$

式中, $1/\sqrt{N}$ 是标度因子。

序列 $\{x_n, 0 \leq n \leq N-1\}$ 相应于 \tilde{N} 个子载波信号总和 $x(t)$ 的样值, $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kt/T} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (12-2-12)$$

式中, T 是符号的持续时间。我们看到,子载波的频率为 $f_k = k/T, k=0, 1, \dots, \tilde{N}$ 。式 (12-2-11) 中的离散时间序列 $\{x_n\}$ 表示 $x(t)$ 在 $t = nT/N$ 时刻的抽样值,其中 $n=0, 1, \dots, N-1$ 。

式 (12-2-10) 确定的数据 $\{X_k\}$ 的 IDFT 计算可以看做每个数据点 X_k 与下列相应向量的乘法运算:

$$\mathbf{v}_k = [v_{k0} \quad v_{k1} \quad \dots \quad v_{k(N-1)}] \quad (12-2-13)$$

式中

$$v_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j(2\pi/N)kn} \quad (12-2-14)$$

如图 12-2-4 所示。在任何情况下, DFT 的计算可以用 FFT 算法有效地进行。

实际上,信号样值 $\{x_n\}$ 通过数/模(D/A)变换器,其输出在理想情况下是信号波形 $x(t)$ 。信道输出的波形是

$$r(t) = x(t) * c(t) + n(t) \quad (12-2-15)$$

式中, $c(t)$ 是信道的冲激响应, $*$ 表示卷积。通过把每个子信道的带宽 Δf 选择得很小,符号的持续时间 $T = 1/\Delta f$ 与信道弥散时间相比较就大了。具体地讲,假设信道弥散覆盖 $v+1$ 个信号样值,其中 $v \ll N$ 。避免 ISI 影响的一种方法是在连续的分组传输之间插入一个持续时间为 vT/N 的时间保护带。

避免 ISI 的另一种方法是给每一个分组的 N 个信号样值 $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ 添加一个循环前缀,该分组样值的循环前缀由样值 $x_{N-v}, x_{N-v+1}, \dots, x_{N-1}$ 组成。将这些新的样值添加在每个分组的开端。注意,循环前缀加入数据分组,使得分组的长度增加到 $N+v$ 个样值,其

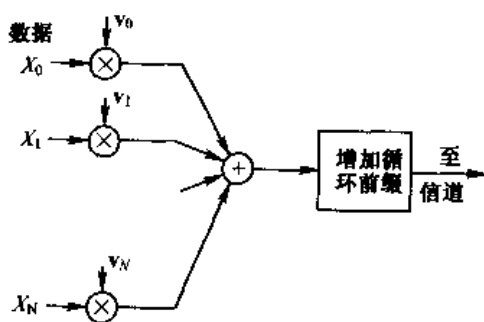


图 12-2-4 基于逆 DFT 的多载波调制的信号合成

编号为 $n = -v, \dots, N-1$, 其中头 v 个样值构成前缀。如果 $\{c_n, 0 \leq n \leq v\}$ 表示信道冲激响应样值, 则它与 $\{x_n, -v \leq n \leq N-1\}$ 的卷积产生接收序列 $\{r_n\}$ 。我们的兴趣在于 $0 \leq n \leq N-1$ 范围内的样值 $\{r_n\}$, 根据这些样值, 采用 N 点 DFT 解调方法来恢复发送序列。因此, $\{r_n\}$ 的头 v 个样值被舍弃。

从频率域观点来看, 当信道冲激响应是 $\{c_n, 0 \leq n \leq v\}$ 时, 它在子载波频率 $f_k = k/N$ 处的频率响应是

$$C_k \equiv C\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^v c_n e^{-j2\pi nk/N} \quad (12-2-16)$$

由于循环前缀, 连续分组(帧)的发送信息序列不发生干扰, 因此解调序列为

$$\hat{X}_k = C_k X_k + \eta_k \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (12-2-17)$$

式中, $\{\hat{X}_k\}$ 是 N 点 DFT 解调器的输出, η_k 是恶化信号的加性噪声。注意, 由于选择 $N \gg v$, 所以因循环前缀引起的速率损失可以忽略。

如图 12-2-3 所示, 接收信号通过模/数(A/D)变换器之后, 通过计算接收信号的 DFT 来解调信息。DFT 计算可以看做 A/D 变换器输出的接收信号样值 $\{r_n\}$ 与 v_n^* 的乘法运算, 这里 v_n 由式(12-2-13)定义。像调制器中那样, 解调器中的 DFT 计算也是采用 FFT 算法来有效地进行的。

在将数据传输到检测器和译码器之前, 估计和补偿信道因子 $\{C_k\}$ 是很简单的。训练信号可以用来在接收机中测量 $\{C_k\}$, 该训练序列由在每个子载波(或未调制子载波)上已知的已调制序列组成。如果信道参数随时间慢变化, 通过采用面向判决方式在检测器或译码器输出端进行判决, 也可能跟踪该时间变化。因此, 多载波系统可以是自适应的。

通过测量每个子信道中的 SNR, 采用配置平均发送功率和每个子信道所携带比特数的方法, 可以使发送速率最佳化。子信道的 SNR 定义为

$$\text{SNR}_k = \frac{TP_k |C_k|^2}{\sigma_{nk}^2}$$

式中, T 是符号持续时间, P_k 是分配到第 k 个子信道上的平均功率, $|C_k|^2$ 是第 k 个子信道频率响应幅度的平方, σ_{nk}^2 是第 k 个子信道中噪声的方差。根据这些 SNR 的测量值, 可以求得每个子信道的容量, 正如 12.2.1 节所阐述的。而且, 通过对每个子信道配置比特和功率也可以使系统的性能最佳化, 这在周(Chow, 1995 年)等人和费雪与赫伯(Fischer & Huber, 1996 年)的论文中有所论述。

上述类型的多载波 QAM 调制已有实际应用, 包括电话线路上的高速传输, 如数字用户线路。

除 DFT 外, 其他类型的实现也是可能的。例如, 当子载波数比较小时, 如 $N \leq 32$, 执行 DFT 运算的数字滤波器组替代基于 FFT 的实现。当子载波数目比较大时, 如 $N > 32$, 则基于 FFT 的系统在计算方面更有效。

对 DFT 类型的调制器和解调器的限制是由频域中比较大的旁瓣引起的, 这是在 DFT 类型滤波器组中固有的。子载波的第一个旁瓣只比峰值下降 13 dB, 因此基于 DFT 的实现方法容易受到信道间的干扰(ICI), 除非采用全循环前缀。如果因信道异常使 ICI 成为一个问题, 可以采用其他类型的旁瓣低得多的数字滤波器组。特别是, 与小波基滤波器结合在一起的多速率数字滤波器组具有完善的重构性质, 这是一种有吸引力的方法(参见查恩斯(Tzannes,

1994 年)及里佐斯(Rizos,1994 年)等人的论著)。

12.2.3 多载波系统的峰值平均比最小化

多载波调制的一个主要问题是,发送信号所特有的比较高的峰值平均功率比(PAR)。通常,当许多不同子信道中的信号同相相加时,发送信号就出现大的峰值。当多载波信号由数字合成时,这样大的信号峰值会导致 D/A 变换器中信号电压的钳位,同时/或者会使功率放大器饱和,从而引起发送信号的互(交)调失真。当子载波数目 N 比较大时,可以使用中心极限定理将 N 个子载波上的合并信号建模为零均值高斯过程。在这样的模型中,电压 PAR 与 \sqrt{N} 成正比。

为了避免互调失真,通常降低发送信号的功率,从而发送机的功率放大器可以工作在线性范围。这种功率降低或“功率退避”使得通信系统运行效率低下。例如,如果 PAR 是 10 dB,那么功率退避也同为 10 dB 来避免互调失真。

已经设计出多种方法来降低多载波系统中的 PAR。最简单的一种方法是,在每个子载波中插入不同的相移。这些相移可采用伪随机方式选取,或者采用某种算法来降低 PAR。例如,我们可以存储一小组 N 个伪随机选择的相移,在已调制子载波的 PAR 比较大时使用。在任何信号间隔中所使用的那一组伪随机相移的信息可以在 N 个其中之一子载波上发送到接收机。另一种方法是,使用单独一组伪随机相移,这组相移可以通过计算机模拟找到,其方法是在 N 个子载波上对全体可能发送的数据符号上进行模拟使 PAR 降低到一个可接受的水平。

另一种可以降低 PAR 的方法是,用虚拟符号调制一个小子集的子载波,所选的虚拟符号是用来降低 PAR 的。因为,虚拟符号不必受到特定信号星座的幅度和相位取值的限制,因此,对虚拟符号的设计是非常灵活的。携带虚拟符号的子载波可以在整个频带上分配。因为以虚拟符号调制子载波使数据速率的吞吐量下降,所以最好在全部子载波中只有一小部分用于此目的。

用虚拟符号调制所分配子载波的另一种方法是,选择子载波的一个子集,该子集子载波已携带数据并且以这样一种方式扩展信号星座:在接收机中利用模 q 运算来正确检测数据,其中 q 是适当的整数。例如,如果每个子载波调制采用矩形 16 点 QAM,一个子载波子集的最小扩展的信号星座可以由 32 点信号星座组成,它是在原始星座外层点的附近再添加 16 点而形成的。当原始信号星座的 PAR 超过预定的量时,所选择子载波的信号点则由最小扩展集的信号点来代替,这样 PAR 就可降低。这种方式也许需要几次迭代,每一次使用一个不同的子载波把 PAR 降低到一个期望值。有兴趣的读者可以参考泰纳多和矢菲(Tellado & Cioffi, 1998 年)的论文,该论文阐述了这种方法。

在数字合成的多载波信号中,PAR 可以保持在一个规定的限度内,其方法是在 D/A 变换器中对信号钳位。通常钳位会引起发送数据序列的差错。在这种情况下,如果钳位不经常发生,偶尔的差错可以通过引入适当的纠错码来纠正。

由于在实际应用中的重要性,许多人研究了多载波系统中降低 PAR 的问题,除了上述的方法外还研究了其他的方法。有兴趣的读者可以参考以下作者的论文:波义德(Boyd,1986 年),波波维克(Popovic,1991 年),琼斯(Jones,1994 年)等人,威尔金森与琼斯(Wilkinson & Jones,1995 年),乌里奇(Wulich,1996 年),塔诺克与杰法克哈尼(Tarokh & Jafarkhani,2000

年)以及泰纳多和乔菲(Tellado & Cioffi, 1999 年)。

12.3 文献与参考资料

多信道信号传输通常用在时变信道上克服信道衰落的影响。第 14 章将研究该问题,其中将提供一些已发表的参考文献。与本章多信道数字通信研究特别有关的是普赖斯(Price, 1962 年)的两篇论著。

多载波数字通信系统方面的文献很多。该系统已实现并应用了 35 年之久。最早的一种系统用于 HF 频段的数字传输,该系统由道尔兹(Doeltz, 1957 年)等人提出,称为动态复用(Kineplex)。多载波系统设计方面其他的早期研究工作在张(Chang, 1966 年)和萨尔茨伯格(Saltzberg, 1967 年)的论文中述及。将 DFT 应用于多载波系统的调制和解调是由温斯坦和埃伯特(Weinstein 和 Ebert, 1971 年)提出的。

近年来,多载波数字传输应用于在各种信道上传输数据、传真和视频,包括窄带(4 kHz)交换电话网络、48 kHz 基群电话频带、数字用户线路、蜂窝无线系统和音频广播等。有兴趣的读者可以参阅参考文献中许多论文,如 Hirosaki(1981 年)、Hirosaki(1986 年)和周(Chow, 1991 年)等人的论文以及宾厄姆(Bingham, 1990 年)的综述论文。凯尔列特(Kalet, 1989 年)提出了在给定发送机功率和信道特性的约束条件下,多载波 QAM 系统速率最佳化的设计方法。瓦迪纳桑(Vaidyanathan, 1993 年)、查恩斯(Tzannes, 1994 年)和里佐斯(Rizos, 1994 年)等人的论著介绍了多速率数字滤波器。斯达尔(Starr, 1999 年)等人的著作论述了多载波调制在数字用户线上数字传输的应用。

习题

12-1 X_1, X_2, \dots, X_N 是一组 N 个统计独立且同分布的实高斯随机变量,其矩为 $E(X_i) = m$ 和 $\text{var}(X_i) = \sigma^2$ 。

(a) 定义

$$U = \sum_{n=1}^N X_n$$

试求 U 的 SNR,其定义为

$$(\text{SNR})_U = \frac{[E(U)]^2}{2\sigma_U^2}$$

其中, σ_U^2 为 U 的方差。

(b) 定义

$$V = \sum_{n=1}^N X_n^2$$

试求 V 的 SNR,其定义为

$$(\text{SNR})_V = \frac{[E(V)]^2}{2\sigma_V^2}$$

其中, σ_V^2 为 V 的方差。

(c) 试在同一个图上绘出 $(\text{SNR})_U$ 和 $(\text{SNR})_V$ 与 m^2/σ^2 的关系曲线, 并从图形上比较 $(\text{SNR})_U$ 和 $(\text{SNR})_V$ 。

(d) 针对多信道各信号的相干检测和合并与平方律检测和合并的比较, 试说明(c)中的结论有什么意义。

12-2 二进制通信系统在两个分集信道上传输同样的信息。两个接收信号是

$$r_1 = \pm \sqrt{\mathcal{E}_b} + n_1$$

$$r_2 = \pm \sqrt{\mathcal{E}_b} + n_2$$

式中, $E(n_1) = E(n_2) = 0$, $E(n_1^2) = \sigma_1^2$ 和 $E(n_2^2) = \sigma_2^2$, 且 n_1 和 n_2 是不相关的高斯变量。检测器根据 r_1 和 r_2 的线性合并, 即

$$r = r_1 + kr_2$$

进行判决。

(a) 试求使错误概率最小的 k 值。

(b) 针对 $\sigma_1^2 = 1$ 、 $\sigma_2^2 = 3$ 以及 $k = 1$ 或 k 为(a)中求出的最佳值, 试绘出错误概率曲线, 并作比较。

12-3 试按照

(a) 额外的信道带宽

(b) 额外的信号能量

来评估循环前缀(用在多载波调制中以避免 ISI)的代价。

12-4 令 $x(n)$ 是长度为 N 的有限持续时间信号, 并令 $X(k)$ 为 $x(n)$ 的 N 点 DFT。假设填补 L 个零点到 $x(n)$ 上, 再计算 $(N+L)$ 点的 DFT, 即 $X'(k)$ 。试问 $X(0)$ 和 $X'(0)$ 之间有什么关系? 若把 $|X(k)|$ 和 $|X'(k)|$ 画在一张图上, 试说明这两个图形之间的关系。

12-5 试证明式(12-2-11)中的序列 $\{x_n\}$ 相当于式(12-2-2)中信号 $x(t)$ 的抽样值。

12-6 试证明序列 $\{X_k, 0 \leq k \leq N-1\}$ 的 IDFT 可以通过把序列 $\{X_k\}$ 经过 N 个线性离散时间滤波器组来计算。滤波器的系统函数为

$$H_n(z) = \frac{1}{1 - e^{j2\pi n/N} z^{-1}}$$

在 $n = N$ 时对滤波器输出抽样。

12-7 针对 $L = 1$ 及 $L = 2$ 绘出 $P_2(L)$ 的曲线, 且将之作为 $10\lg\gamma_b$ 的函数。求当 $\gamma_b = 10$ 时, 由于合并损耗导致的 SNR 损失。

第 13 章 数字通信用扩频信号

数字信息传输用扩频信号的特征是其带宽 W 远大于信息速率 $R(\text{b/s})$, 即扩频信号的带宽扩展因子 $B_c = W/R$ 远大于 1。扩频信号中这种固有的冗余度, 可用来克服一些无线和卫星信道中传输数字信息时所遇到的严重干扰。由于编码波形也用大于 1 的带宽扩展因子来表征, 而且编码是引入冗余度的一种有效方法, 因此编码是扩频信号设计中的一个重要因素。

扩频信号设计的第二个重要因素是伪随机性, 它使信号看上去很像随机噪声, 而且使指定接收机之外的其他接收机很难解调。该要素与这类信号的使用或用途密切相关。

具体地说, 扩频信号有如下用途:

- 对抗或者抑制干扰的有害影响。如人为干扰、信道中其他用户引起的干扰以及多径传播引起的自干扰。
- 以低功率发送来隐蔽信号, 使得窃听者难以在背景噪声中检测出信号。
- 在有其他收听者时, 实现信息的保密。

除了通信应用外, 扩频信号还用于雷达及导航中距离(延迟)和距离变化率(速度)的精确测量。为简便起见, 我们只讨论数字通信应用。

在对抗人为干扰时, 对通信机至关重要的是试图破坏通信的干扰机, 除了信道总带宽和所用的调制类型(PSK、FSK 等)外, 并不知道信号特征的先验知识。如果数字信息按第 8 章所述的方法编码, 则高级干扰机可容易地模拟出发送机发送的信号, 从而扰乱接收机。为了防止这种可能性的发生, 发送机在每个发送的编码信号波形中引入不可预测的或随机(伪随机)的码元, 它对指定的接收机是已知的, 对干扰机则是不知道的。因此, 干扰机只能合成和发射不含伪随机图样(pattern)的干扰信号。

在多址通信系统中, 许多用户共享一个共同的信道带宽, 因此存在来自其他用户的干扰。在任一给定时间内, 一部分用户可同时在该共同信道上向相应的接收机发送信息。假设所有用户对各自的信息序列采用相同的编码规律编码和译码, 那么该共同频谱上的各发送信号可通过在每一发送信号中叠加不同的伪随机图样(也叫伪码)来彼此区分。因此, 对于特定的接收机, 由于已知相应发送机所采用的伪随机图样(密钥), 因而能恢复发送给它的信息。这种允许多用户同时使用一条共同信道来传输信息的通信技术, 通常称为码分多址(CDMA)。CDMA 将在 13.2 节和 13.3 节中研究。

信道中的时间弥散传播引起的可分辨多径分量可看做自干扰的一种形式。这种形式的干扰可通过在发送信号中引入伪随机图样来抑制, 如下所述。

用编码的方法扩展带宽并把得到的信号用低平均功率发送出去, 可使消息隐藏在背景噪声之中。由于发送信号的电平很低, 所以叫做“隐藏信号”。它被偶然的收听者截获(检测)的概率很小, 因此也称为低截获概率(LPI)信号。

通过在发送消息上叠加伪随机图样, 可使消息保密。已知发送机所用的伪随机图样或密钥的特定接收机可解调出消息, 其他不知道密钥的接收机则不能解调出该消息。

下面将介绍若干不同类型扩频信号的特征和应用, 将着重论述扩频信号在对抗干扰(抗干

扰或 AJ 信号)、CDMA 和 LPI 信号中的应用。在讨论该信号设计之前,将简要介绍上述应用的信道特征。

13.1 扩频数字通信系统的模型

图 13-1-1 所示的方框图表示扩频数字通信系统模型的基本组成原理,其发送端的输入和接收端的输出均为二进制信息序列。信道编码器和译码器、调制器和解调器是系统的基本组成,如第 5、7、8 章所述。除了这些之外,还有两个完全相同的伪随机图样发生器,一个在发送端与调制器相接,另一个在接收端与解调器相接。该发生器产生的伪随机或伪噪声(PN)二进制序列在调制器中施加到发送信号上,在解调器中从接收信号中去掉。

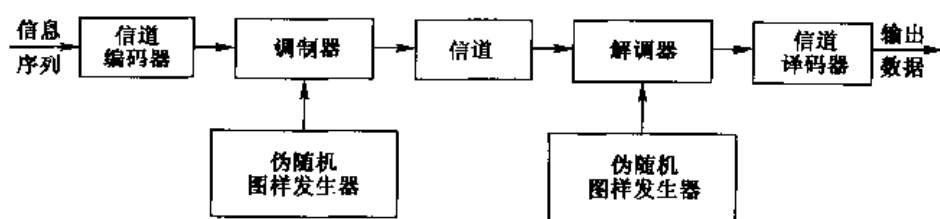


图 13-1-1 扩频数字通信系统模型

为了解调接收信号,要求接收机产生的 PN 序列与接收信号中所含的 PN 序列同步。初始阶段,在传输信息之前,可通过发送一个固定的伪随机比特图样来获得同步,该图样即使在出现干扰时也能被接收机以很高的概率识别出来。当两端的发生器建立时间同步后,信息传输便可开始。

携带信息的信号通过信道传输时将引入干扰。干扰特征在很大程度上取决于干扰的来源。按其相对于携带信息的信号带宽,干扰可分为宽带干扰和窄带干扰,亦可按时间分为连续干扰和脉冲(时间不连续)干扰。例如,人为干扰信号可由传输信息带宽内一个或多个正弦波组成,该正弦波的频率是固定不变的或是按某种规则随时间变化的。第二个例子,在 CDMA 中,由信道中其他用户产生的干扰可能是宽带干扰,也可能是窄带干扰,这取决于为获得多址所采用的扩频信号类型。若为宽带干扰,则可表征为等效的加性高斯白噪声。下面几节将研究这些类型的干扰和其他干扰。

对扩频信号的论述将主要集中在有窄带和宽带干扰时的数字通信系统性能,而且只研究两种调制方式:PSK 和 FSK。PSK 适用于收发信号间相位相干能保持较长一段时间的情况,该段时间比发送信号带宽的倒数长。另一方面,FSK 适用于因信道时变对通信链路影响而不能保持这种相位相干的情况。这可能是两个高速航空器之间通信链路情况或高速航空器与地面终端之间通信链路情况。

调制器中产生的 PN 序列和 PSK 调制结合在一起,使 PSK 信号的相位伪随机地偏移,如 13.2 节所述。所产生的调制信号称为直接序列(DS)或伪噪声(PN)扩频信号。当它与二进制或 M 元($M > 2$)FSK 结合使用时,伪随机序列按伪随机方式选择发送信号的频率,由此产生的信号叫做跳频(FH)扩频信号。我们将简要描述其他形式的扩频信号,重点是 PN 和 FH 扩频信号。

13.2 直接序列扩频信号

在图 13-1-1 所示的模型中,假定编码器的输入信息速率为 $R(\text{b/s})$,可用的信道带宽为 $W(\text{Hz})$,并假定调制方式为二进制 PSK。为了利用整个可用的信道带宽,载波的相位按 PN 发生器的图样以 W 次/s 的速率伪随机地偏移。 W 的倒数,记为 T_c ,定义为矩形脉冲的宽度。该脉冲称为码片(chip), T_c 称为码片间隔。此脉冲是 DS 扩频信号中的基本单元。

如果定义 $T_b = 1/R$ 为相应于一个信息比特传输时间的矩形脉冲的宽度,则带宽扩展因子 W/R 可表示为

$$B_e = \frac{W}{R} = \frac{T_b}{T_c} \quad (13-2-1)$$

实际系统中,比值 T_b/T_c 是一个整数

$$L_c = \frac{T_b}{T_c} \quad (13-2-2)$$

它是每信息比特的码片数,即 L_c 是比特宽度 $T_b = 1/R$ 内,发送信号中发生相移的次数。图 13-2-1(a)所示为 PN 信号和数据信号之间的关系。

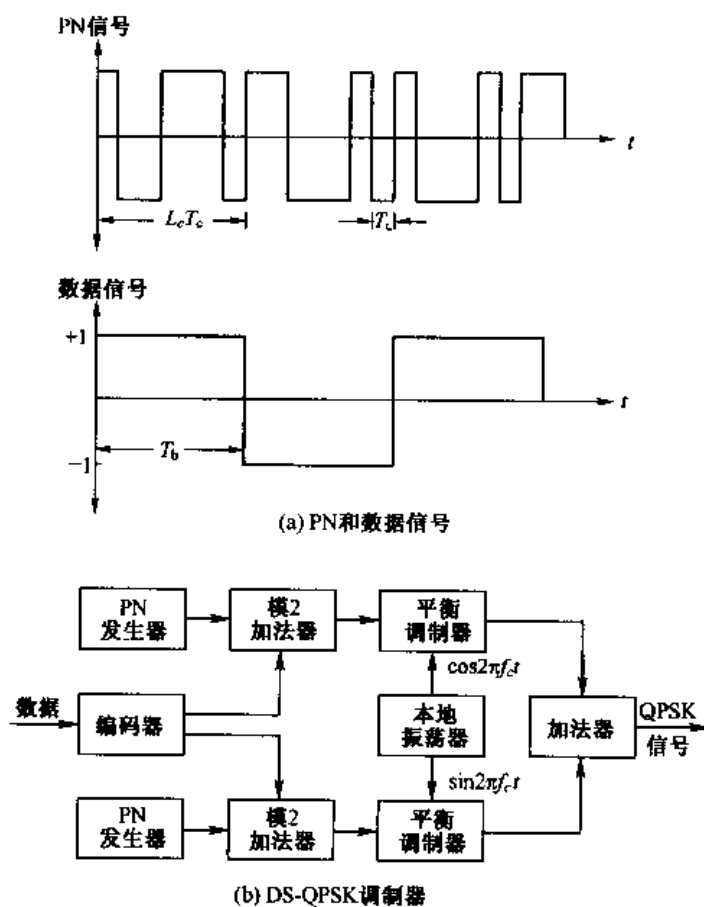


图 13-2-1 用于 DS 扩频系统的 PN 和数据信号(a)及 QPSK 调制器(b)

假设编码器每次取 k 个信息比特并生成一个二进制线性 (n, k) 分组码。可用来传送 n 个码元的时间宽度为 kT_b 秒, 在此时间间隔内的码片数为 kL_c , 从而可选择该码的分组长度为 $n = kL_c$ 。如果编码器生成一个速率为 k/n 的二进制卷积码, 则在时间间隔 kT_b 内的码片数仍然为 $n = kL_c$, 且码率 $R/c = k/n = 1/L_c$ 。因此, 下面的讨论对分组码和卷积码都适用。

把 PN 序列加到发送信号的一种方法是通过与 PN 序列模 2 加来直接改变该编码比特^①, 因此每个编码比特都是通过与 PN 序列的一个比特相加改变的。如果 b_i 表示 PN 序列的第 i 个比特, c_i 为编码器输出的相应的比特, 则模 2 加为

$$a_i = b_i \oplus c_i \quad (13-2-3)$$

于是, 若 $b_i = 1$ 且 $c_i = 0$ 或 $b_i = 0$ 且 $c_i = 1$, 则 $a_i = 1$; 若 $b_i = 1$ 且 $c_i = 1$ 或 $b_i = 0$ 且 $c_i = 0$, 则 $a_i = 0$ 。因此, $b_i = c_i$ 时 $a_i = 0$, $b_i \neq c_i$ 时 $a_i = 1$ 。所以, 按如下惯例将序列 $\{a_i\}$ 映射为二进制 PSK 信号, 其形式为 $s(t) = \pm \text{Re}[g(t)e^{j2\pi f_c t}]$ 。

$$g_i(t) = \begin{cases} g(t - iT_c) & (a_i = 0) \\ -g(t - iT_c) & (a_i = 1) \end{cases} \quad (13-2-4)$$

式中, $g(t)$ 表示时间宽度为 T_c 的任意形状的脉冲。

编码序列 $\{c_i\}$ 与 PN 发生器生成的序列 $\{b_i\}$ 的模 2 加也可表示为两个波形相乘。为了证明这一点, 假设按照如下关系式将编码序列映射为二进制 PSK 信号:

$$c_i(t) = (2c_i - 1)g(t - iT_c) \quad (13-2-5)$$

类似地, 将波形 $p_i(t)$ 定义为

$$p_i(t) = (2b_i - 1)p(t - iT_c) \quad (13-2-6)$$

式中, $p(t)$ 是脉宽为 T_c 的矩形脉冲。因此, 相应于第 i 编码比特的等效低通发送信号为

$$\begin{aligned} g_i(t) &= p_i(t)c_i(t) \\ &= (2b_i - 1)(2c_i - 1)g(t - iT_c) \end{aligned} \quad (13-2-7)$$

这个信号和由序列 $\{a_i\}$ 得出的式(13-2-4)的结果一致。因此, 先将编码比特和 PN 序列模 2 加, 而后映射为二进制 PSK 信号, 完全等效于将编码比特产生的二进制 PSK 信号与一个单位幅度的矩形脉冲序列相乘。序列的每个脉宽为 T_c , 极性按式(13-2-6)由 PN 序列确定。虽然模 2 加之后再 PSK 调制比波形相乘更容易, 但是在解调中, 研究式(13-2-7)给出的相乘形式的发送信号比较方便。图 13-2-1(b)所示为四相 PSK DS 扩频调制器的功能框图。

第 i 个码元的等效低通接收信号为^②

$$\begin{aligned} r_i(t) &= p_i(t)c_i(t) + z(t) \\ &= (2b_i - 1)(2c_i - 1)g(t - iT_c) + z(t) \end{aligned} \quad iT_c \leq t \leq (i+1)T_c \quad (13-2-8)$$

式中, $z(t)$ 表示使携带信息的信号恶化的干扰或人为干扰信号。假定干扰是均值为零的平稳随机过程。

① 当想要四相 PSK 时, 将一个 PN 序列加到同相信号分量携带的信息序列上, 将第二个 PN 序列加到正交分量携带的信息序列上。在许多 PN 扩频系统中, 同样的二进制信息序列加到两个 PN 序列上, 以便形成两个正交分量。因此, 利用二进制信息流产生了四相 PSK 信号。

② 为简单起见, 假定信道衰减 $\alpha = 1$ 且信道相移为零。由于假定采用相干 PSK 检测, 所以在解调中, 任何信道的相移都已补偿。

如果 $z(t)$ 是复高斯过程的样本函数, 则最佳解调器用与波形 $g(t)$ 匹配的滤波器或相关器来实现, 如图 13-2-2 所示。在匹配滤波器的实现方案中, 匹配滤波器的抽样输出乘以 $(2b_i - 1)$, 后者是在 PN 发生器适当同步后由解调器中的 PN 发生器获得的。因为当 $b_i = 0$ 和 $b_i = 1$ 时 $(2b_i - 1)^2 = 1$, 所以 PN 序列对接收编码比特的影响可以消除。

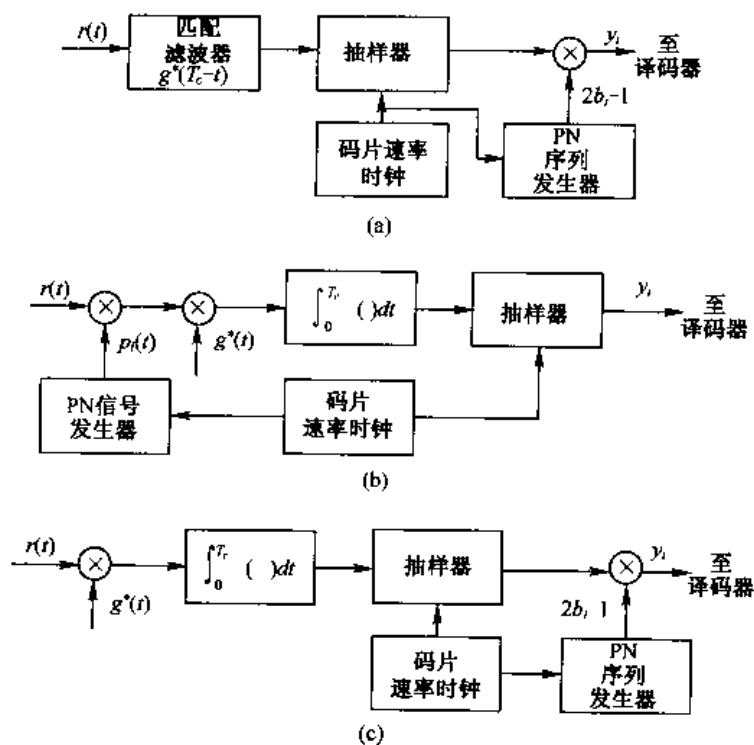


图 13-2-2 用于 PN 扩频信号的可能的解调器结构

由图 13-2-2 还可以看到, 用两种方法都能够完成互相关。第一种方法如图 13-2-2(b) 所示, 包括如下步骤: 先将 $r_i(t)$ 与 PN 发生器输出产生的波形 $p_i(t)$ 相乘, 然后与 $g^*(t)$ 互相关运算, 并在每个码片间隔中对输出抽样。第二种方法如图 13-2-2(c) 所示, 涉及下述步骤: 首先与 $g^*(t)$ 互相关, 并对相关器的输出抽样, 然后将该输出与 PN 发生器输出 $(2b_i - 1)$ 相乘。

如果 $z(t)$ 不是高斯随机过程, 那么图 13-2-2 所示的解调方法不再是最佳的。尽管如此, 仍然可以用这 3 种解调器结构中的任何一种解调接收信号。当干扰 $z(t)$ 的统计特性不是预先已知的, 这当然是一种可能的方法。下面介绍的另一种方法在匹配滤波器或相关器之前用一个自适应滤波器抑制窄带干扰。该方法的基本原理将在后面介绍。

13.2.1 节将推导宽带和窄带干扰存在时, DS 扩频系统的差错率性能。此时假定解调器是图 13-2-2 所示的 3 种等效结构中的任何一种。

13.2.1 译码器的差错率性能

令解调器非量化输出记为 $y_j, 1 \leq j \leq n$ 。首先研究线性二进制 (n, k) 分组码, 不失一般性, 假设发送的是全零码字。

采用软判决译码的译码器计算相关度量

$$CM_i = \sum_{j=1}^n (2c_{ij} - 1) y_j \quad (i = 1, 2, \dots, 2^k) \quad (13-2-9)$$

式中, c_{ij} 表示第 i 个码字中的第 j 个比特。相应于全零码字的相关度量为

$$\begin{aligned} CM_1 &= 2n\mathcal{E}_c + \sum_{j=1}^n (2c_{1j} - 1)(2b_j - 1)v_j \\ &= 2n\mathcal{E}_c - \sum_{j=1}^n (2b_j - 1)v_j \end{aligned} \quad (13-2-10)$$

式中 v_j ($1 \leq j \leq n$) 是恶化第 j 个编码比特的加性噪声项, \mathcal{E}_c 是码片能量。 v_j 定义为

$$v_j = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{T_c} g^*(t) z[t + (j-1)T_c] dt \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (13-2-11)$$

类似地, 相应于重量为 w_m 的码字 C_m 的相关度量为

$$CM_m = 2\mathcal{E}_c n \left(1 - \frac{2w_m}{n} \right) + \sum_{j=1}^n (2c_{mj} - 1)(2b_j - 1)v_j \quad (13-2-12)$$

根据 8.1.4 节使用的方法, 下面确定 $CM_m > CM_1$ 的概率。 CM_m 与 CM_1 之差为

$$\begin{aligned} D &= CM_1 - CM_m \\ &= 4\mathcal{E}_c w_m - 2 \sum_{j=1}^n c_{mj} (2b_j - 1)v_j \end{aligned} \quad (13-2-13)$$

由于码字 C_m 的重量为 w_m , 所以式(13-2-13)中包含的噪声项和式中有 w_m 个非零分量。假设该码的最小距离足够大, 可以用中心极限定理求出噪声分量的总和。当 PN 扩频信号的带宽扩展因子为 10 或更大时^①, 这个假设是成立的。因此, 噪声分量的总和可建模为高斯随机变量。因为 $E(2b_j - 1) = 0$ 且 $E(v_j) = 0$, 故式(13-2-13)中第二项的均值也为零。方差为

$$\sigma_m^2 = 4 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{mi} c_{mj} E[(2b_j - 1)(2b_i - 1)] E(v_i v_j) \quad (13-2-14)$$

假定 PN 发生器生成的二进制数字序列是不相关的, 则

$$E[(2b_j - 1)(2b_i - 1)] = \delta_{ij} \quad (13-2-15)$$

且

$$\sigma_m^2 = 4w_m E(v^2) \quad (13-2-16)$$

式中, $E(v^2)$ 是 $\{v_j\}$ 集合中任一元素的二阶矩。该二阶矩很容易由下式计算

$$\begin{aligned} E(v^2) &= \int_0^{T_c} \int_0^{T_c} g^*(t) g(\tau) \phi_{zz}(t - \tau) dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \Phi_{zz}(f) df \end{aligned} \quad (13-2-17)$$

式中 $\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} E[z^*(t) z(t + \tau)]$ 是自相关函数, $\Phi_{zz}(f)$ 是干扰 $z(t)$ 的功率密度谱。

由此可见, 当发送信号占有带宽^② 内干扰谱平坦, 即

$$\Phi_{zz}(f) = J_0 \quad |f| \leq \frac{1}{2} W \quad (13-2-18)$$

时, 式(13-2-17)中的二阶矩为 $E(v^2) = 2\mathcal{E}_c J_0$ 。因此, 式(13-2-16)中干扰项的方差为

$$\sigma_m^2 = 8\mathcal{E}_c J_0 w_m \quad (13-2-19)$$

① 典型地, 扩频信号的带宽扩展因子是 10 到 100 或更高的数量级。

② 如果带通信道的带宽为 W , 那么等效低通信道的带宽为 $\frac{1}{2} W$ 。

在这种情况下, $D < 0$ 的概率为

$$P_2(m) = Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{J_0}} w_m\right] \quad (13-2-20)$$

编码比特能量 \mathcal{E}_c 可以用信息比特能量 \mathcal{E}_b 表示为

$$\mathcal{E}_c = \frac{k}{n} \mathcal{E}_b = R_c \mathcal{E}_b \quad (13-2-21)$$

把上式代入式(13-2-20), 即得

$$\begin{aligned} P_2(m) &= Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{J_0}} R_c w_m\right] \\ &= Q(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}) \end{aligned} \quad (13-2-22)$$

式中, $\gamma_b = \mathcal{E}_b/J_0$ 是信息比特信噪比。码字错误概率的一致上边界为

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q(\sqrt{2\gamma_b R_c w_m}) \quad (13-2-23)$$

其中 $M = 2^k$ 。注意, 该表达式与 AWGN 信道中的线性二进制分组码的软判决译码的码字错误概率相同。

上面推导了分组码的公式, (n, k) 卷积码的推导过程与之类似, 其结果是如下等效比特错误概率的上边界

$$P_b \leq \frac{1}{k} \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d Q(\sqrt{2\gamma_b R_c d}) \quad (13-2-24)$$

式中, 系数集合 $\{\beta_d\}$ 是由转移函数 $T(D, N)$ 导数的展开式得到的, 如 8.2.3 节所述。

下面研究以载波(对于等效低通信号来说是以直流为中心)为中心的窄带干扰问题。将总(平均)入为干扰功率定义为 $J_{\text{av}} = J_0 W$, 其中 J_0 是等效宽带干扰(人为干扰信号)的功率谱密度值。窄带干扰可用下列功率密度谱表征

$$\Phi_{xx}(f) = \begin{cases} \frac{J_{\text{av}}}{W_1} = \frac{J_0 W}{W_1} & (|f| \leq \frac{1}{2} W_1) \\ 0 & (|f| > \frac{1}{2} W_1) \end{cases} \quad (13-2-25)$$

式中, $W \gg W_1$ 。

将 $\Phi_{xx}(f)$ 的表达式(13-2-25)代入式(13-2-17), 得

$$E(v^2) = \frac{J_{\text{av}}}{W_1} \int_{-w_1/2}^{w_1/2} |G(f)|^2 df \quad (13-2-26)$$

$E(v^2)$ 的值取决于 $g(t)$ 的谱特征。下面的例子将研究两种特殊情况。

例 13-2-1 假设 $g(t)$ 为图 13-2-3(a) 所示的矩形脉冲, $|G(f)|^2$ 为相应的能量密度谱, 如图 13-2-3(b) 所示。对于式(13-2-25)给出的窄带干扰, 总干扰的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= 4w_m E(v^2) \\ &= \frac{8\mathcal{E}_c w_m T J_{\text{av}}}{W_1} \int_{-w_1/2}^{w_1/2} \left(\frac{\sin \pi f T_c}{\pi f T_c} \right)^2 df \end{aligned}$$

$$= \frac{8\mathcal{E}_c w_m J_{av}}{w_1} \int_{\beta/2}^{\beta/2} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx \quad (13-2-27)$$

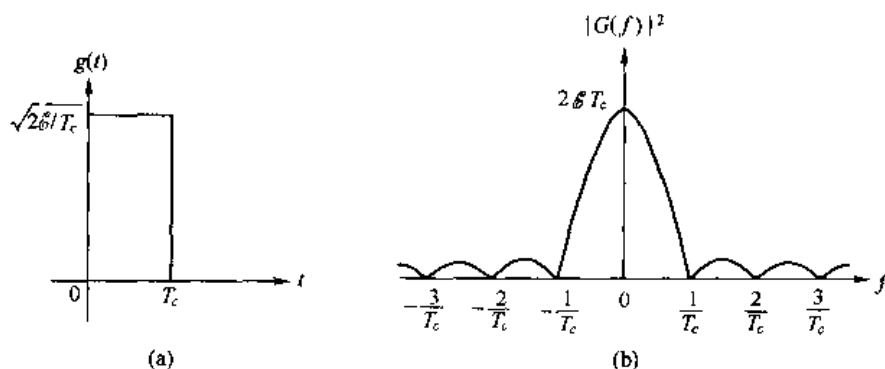


图 13-2-3 矩形脉冲及其能量密度谱

式中, $\beta = W_1 T_c$ 。图 13-2-4 给出了 $0 \leq \beta \leq 1$ 范围内该积分的值, 其上界为 $W_1 T_c$ 。因此, $\sigma_m^2 \leq 8\mathcal{E}_c w_m T_c J_{av}$ 。

在 W_1 趋近于零的极限情况下, 干扰为在载频处的一个冲激。在这种情况下, 干扰是一个纯单频, 通常称之为连续波形(CW)人为干扰信号, 其功率密度谱为

$$\Phi_{zz}(f) = J_{av} \delta(f) \quad (13-2-28)$$

与判决变量 $D = CM_1 - CM_m$ 对应的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= 4w_m J_{av} |G(0)|^2 \\ &= 8w_m \mathcal{E}_c T_c J_{av} \end{aligned} \quad (13-2-29)$$

CW 人为干扰的码字错误概率的上边界为

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{J_{av} T_c} w_m} \right] \quad (13-2-30)$$

$\mathcal{E}_c = R_c \mathcal{E}_b$, 且 $T_c \approx 1/W$, $J_{av}/W = J_0$ 。因此, 式(13-2-30)可表示为

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{J_0} R_c w_m} \right] \quad (13-2-31)$$

这就是前面讨论宽带干扰得到的结果。该结果表明, CW 人为干扰和等效宽带人为干扰对性能的影响是相同的。这种等效性将在下面进一步讨论。

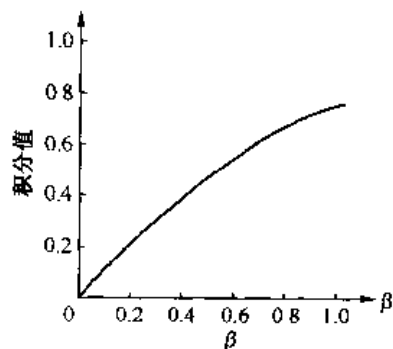


图 13-2-4 (13-2-27)式定义的积分值曲线图

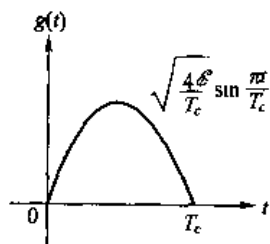


图 13-2-5 正弦信号脉冲

例 13-2-2 当发送信号脉冲 $g(t)$ 为图 13-2-5 所示的半个周期正弦波时, 存在平均功率为 J_{av} 的 CW 人为干扰的情况下, 求 DS 扩频系统的性能。半个周期的正弦波信号脉冲为

$$g(t) = \sqrt{\frac{4\mathcal{E}_c}{T_c}} \sin \frac{\pi t}{T_c} \quad (0 \leq t \leq T_c) \quad (13-2-32)$$

该脉冲干扰的方差为

$$\sigma_m^2 = 4w_m J_{av} |G(0)|^2$$

$$= \frac{64}{\pi^2} \mathcal{E}_b T_c J_{av} w_m \quad (13-2-33)$$

因此,码字错误概率的上边界为

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left[\sqrt{\frac{\pi^2 \mathcal{E}_b}{4 J_{av} T_c} R_c w_m} \right] \quad (13-2-34)$$

可以看出,用此脉冲获得的性能比矩形脉冲得到的好 0.9 dB。当该脉冲形状用于偏移 QPSK 时,导致 MSK 信号。MSK 调制常用于 DS 扩频系统。

1. 处理增益和干扰容限

通过用平均功率表示信号比特能量 \mathcal{E}_b ,可以得到关于 DS 扩频信号性能特征的解释,即 $\mathcal{E}_b = P_{av} T_b$,其中 P_{av} 是平均信号功率, T_b 是比特间隔。下面研究在 CW 人为干扰下,例 13-2-1 所述矩形脉冲获得的性能。将 \mathcal{E}_b 和 J_0 代入式(13-2-31),得到

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left[\sqrt{\frac{2 P_{av} T_b}{J_{av} T_c} R_c w_m} \right] = \sum_{m=2}^M Q \left[\sqrt{\frac{2 P_{av}}{J_{av}} L_c R_c w_m} \right] \quad (13-2-35)$$

式中 L_c 是每信息比特的码片数, P_{av}/J_{av} 是信号与人为干扰的功率比。

该结果与在宽带人为干扰情况下的结果相同,其性能由式(13-2-23)确定。信号比特能量为

$$\mathcal{E}_b = P_{av} T_b = \frac{P_{av}}{R} \quad (13-2-36)$$

式中, R 是信息速率(b/s)。人为干扰信号的功率密度谱可表示为

$$J_0 = \frac{J_{av}}{W}$$

利用式(13-2-36)和式(13-2-37)中的关系,比值 \mathcal{E}_b/J_0 可表示为

$$\frac{\mathcal{E}_b}{J_0} = \frac{P_{av}/R}{J_{av}/W} = \frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \quad (13-2-37)$$

比值 J_{av}/P_{av} 是人为干扰与信号功率之比,该比值通常大于 1。比值 $W/R = T_b/T_c = B_c = L_c$ 是带宽扩展因子,或等价于每信息比特的码片数。该比值通常叫做 DS 扩频系统的处理增益(processing gain),它表示由于扩展了发送信号带宽而获得的抗干扰能力的增益。如果把 \mathcal{E}_b/J_0 看做达到指定的差错率性能所需要的信噪比,把 W/R 看做可获得的带宽扩展因子,则比值 J_{av}/P_{av} 称为 DS 扩频系统的干扰容限(jamming margin)。换句话说,干扰容限是满足指定的差错率的要求下, J_{av}/P_{av} 能选取的最大值。

线性二进制 (n, k) 码软判决译码器的性能可用处理增益和干扰容限表示为

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q \left(\sqrt{\frac{2 W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c w_m \right) \leq (M-1) Q \left(\sqrt{\frac{2 W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c d_{\min} \right) \quad (13-2-38)$$

可见,除了处理增益 W/R 和 J_{av}/P_{av} 之外,性能还取决于第三个因子 $R_c w_m$ 。这个因子叫做编码增益(coding gain),其下边界为 $R_c d_{\min}$ 。因此,DS 扩频信号能达到的干扰容限取决于处理增益和编码增益。

我们可用 dB 表示这 3 个公式之间的关系为

$$(\text{SNR})_{\text{dB}} = \left(\frac{W}{R} \right)_{\text{dB}} + (R_c d_{\min})_{\text{dB}} - \left(\frac{J_{av}}{P_{av}} \right)_{\text{dB}} \quad (13-2-39)$$

式中 $(\text{SNR})_{\text{dB}}$ 为接收机获得某一特定电平性能时所要求的信噪比。

2. 未编码的 DS 扩频信号

上述利用 (n, k) 码生成的 DS 扩频信号定义的性能结果可针对一种普通码型, 即二进制重复码来具体说明。在这种情况下, $k=1$ 非零码字的重量为 $w=n$, 于是 $R_c w=1$, 从而二进制信号传输系统的性能简化为

$$\begin{aligned} P_2 &= Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{J_0}} \right] \\ &= Q \left[\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} \right] \end{aligned} \quad (13-2-40)$$

注意, 普通(重复)码没有编码增益, 但可获得处理增益 W/R 。

例13-2-3 假设要求用未编码的 DS 扩频系统达到 10^{-6} 或更低的差错率性能。可用的带宽扩展因子是 $W/R=1000$ 。试求干扰容限。

未编码的二进制 PSK 达到 10^{-6} 比特错误概率所需要的 \mathcal{E}_b/J_0 为 10.5 dB, 处理增益是 $10 \lg 1000 = 30$ dB。因此, 干扰与信号功率比的最大允许值, 即干扰容限为

$$10 \lg \frac{J_{av}}{P_{av}} = 30 - 10.5 = 19.5 \text{ dB}$$

因该干扰容限是用未编码的 DS 扩频系统获得的, 故还可利用信息序列编码增加此容限。

对于未编码(重复码)的 DS 扩频系统, 其调制和解调过程还可从其他观点解释。例如, 在调制器中, 用矩形脉冲的重复码产生的信号波形和脉宽为 T_b 的单位幅度矩形脉冲 $s(t)$ 或其负脉冲是一样的, 此脉冲的正或负分别取决于信息比特是 1 或 0。这可以从式(13-2-7)看出来, 其中单个信息比特内的编码码片 $\{c_i\}$ 为全 1 或全 0。PN 序列乘以 $s(t)$ 或 $-s(t)$ 。于是, 当信息比特为 1 时, 由 PN 发生器产生的 L_c 个 PN 码片用相同的极性发送。另一方面, 当信息比特为 0 时, L_c 个 PN 码片乘以 $-s(t)$, 故极性相反。

图 13-2-6 说明了以相关器实现的重复码解调器。由此可见, 积分器的积分区间就是比特间隔 T_b 。因此, 重复码的译码器可省去, 其功能已包含在解调器中。

下面定性地评估这个解调过程对干扰 $z(t)$ 的影响。干扰 $z(t)$ 与 PN 发生器的输出

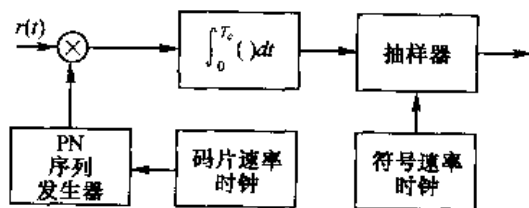


图 13-2-6 重复码的相关型解调器

$$w(t) = \sum_i (2b_i - 1) p(t - iT_c)$$

相乘, 得

$$v(t) = w(t)z(t)$$

波形 $w(t)$ 和 $z(t)$ 是统计独立的随机过程, 其均值都为零, 自相关函数分别为 $\phi_{ww}(\tau)$ 和 ϕ_{zz}

(τ)。乘积 $v(t)$ 也是一个随机过程,其自相关函数等于 $\phi_{ww}(\tau)$ 和 $\phi_{zz}(\tau)$ 的乘积。因此,过程 $v(t)$ 的功率密度谱等于 $w(t)$ 的功率密度谱与 $z(t)$ 的功率密度谱的卷积。

两个谱卷积的结果扩展了功率的带宽。由于 $w(t)$ 的带宽占据了可用信道带宽 W ,因此两个谱卷积的结果在宽度为 W 的频带上扩展了 $z(t)$ 的功率密度谱。若 $z(t)$ 为一窄带过程,即其功率密度谱的带宽远小于 W ,过程 $v(t)$ 的功率密度谱将占据至少 W 的带宽。

图 13-2-6 所示的互相关运算所用积分器的带宽近似等于 $1/T_b$ 。因为 $1/T_b \ll W$,故总干扰功率中只有一小部分出现在相关器输出端。于是,这一部分近似等于带宽 $1/T_b$ 和 W 的比值,即

$$\frac{1/T_b}{W} = \frac{1}{WT_b} = \frac{T_c}{T_b} = \frac{1}{L_c}$$

换句话说,来自 PN 发生器的信号与干扰相乘,把干扰扩展到信号带宽 W ,相乘之后的窄带积分仅输出总干扰的一部分即 $1/L_c$ 。因此,未编码的 DS 扩频系统的性能增强了 L_c 倍(L_c 为处理增益)。

3. 线性码和二进制重复码的级联

如上所述,二进制重复码提供了一个抗干扰或人为干扰信号的容限,但没有得到编码增益。为了改善性能,可使用线性(n_1, k)分组码或卷积码,其中 $n_1 \leq n = kL_c$ 。一种可能是选择 $n_1 < n$,并将每个码比特重复 n_2 次,于是 $n = n_1 n_2$ 。因此通过(n_1, k)码和二进制($n_2, 1$)重复码的级联可构造一个线性(n_1, k)码。这可看做一种普通形式的级联码,其中外码是(n_1, k)码,内码是重复码。

由于重复码得不到编码增益,因此组合码的编码增益简化为(n_1, k)外码的编码增益。整个组合码的编码增益为

$$R_c w_m = \frac{k}{n} w_m \quad (m = 2, 3, \dots, 2^k)$$

组合码的重量 $\{w_m\}$ 为

$$w_m = n_2 w_m^0$$

式中, $\{w_m^0\}$ 是外码的重量。因此,组合码的编码增益为

$$R_c w_m = \frac{k}{n_1 n_2} n_2 w_m^0 = \frac{k}{n_1} w_m^0 = R_c^0 w_m^0 \quad (13-2-41)$$

它正是外码获得的编码增益。

如果(n_1, k)外码采用硬判决译码,也能获得编码增益(基于软判决译码的)。($n_2, 1$)重复码的比特差错概率为

$$\begin{aligned} p &= Q \left[\sqrt{\frac{2n_2 \mathcal{E}_c}{J_0}} \right] = Q \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{J_0} R_c^0} \right] \\ &= Q \left[\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c^0 \right] \end{aligned} \quad (13-2-42)$$

则线性(n_1, k)分组码的码字差错概率上边界为

$$P_M \leq \sum_{m=i+1}^{n_1} \binom{n_1}{m} p^m (1-p)^{n_1-m} \quad (13-2-43)$$

式中 $t = \left\lceil \frac{1}{2}(d_{\min} - 1) \right\rceil$, 或者

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M [4p(1-p)]^{w_m^0/2} \quad (13-2-44)$$

式中, 后者为契尔诺夫边界。对于一个 (n_1, k) 二进制卷积码, 误比特率上边界为

$$P_b \leq \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (13-2-45)$$

式中, 若 d 为奇数, $P(d)$ 由式(8-2-28)定义; 若 d 为偶数, $P(d)$ 由式(8-2-29)定义。

4. 用于 DS 扩频系统的级联码

从上面的讨论容易看出, 用更强有力的码代替重复码, 除了可获得处理增益外, 还能得到编码增益, 因而使系统的性能得到改善。从本质上讲, DS 扩频系统的目标是构造具有较大最小距离的低速率长码。应用级联码可以很好地做到这一点。当二进制 PSK 与 DS 扩频结合使用时, 级联码码字的码元必须用二进制形式表示。

当内码和外码都采用软判决译码时, 能得到最好的性能。然而, 为了减少译码复杂性, 通常的方法是内码用软判决译码, 外码用硬判决译码。这些译码方式的差错率性能的表达式部分地取决于内码和外码所选用的码型(是分组码还是卷积码)。例如, 两个分组码的级联整体上可看做一个长的二进制 (n, k) 分组码, 其性能由式(13-2-38)确定。其他码型的组合码性能也不难推导出来。为简单起见, 我们不考虑这些组合码的情况。

13.2.2 DS 扩频信号的应用

本节将简要讨论编码的 DS 扩频信号的 3 种专门用途: 抗人为干扰信号; 以低功率电平发送信号, 将通信信号隐藏在背景噪声之中; 在同一信道上同时传输若干个信号, 即 CDMA。

1. 抗人为干扰的应用

13.2.1 节中导出在窄带或宽带人为干扰下 DS 扩频信号的差错率性能。这里以 3 种码为例说明人为干扰存在时数字通信系统的性能。第一种码是 $(24, 12)$ 戈莱(Golay)码, 由表 8-1-1 所示的重量分布表征, 其最小距离为 $d_{\min} = 8$ 。第二种码是 $(24, 11)$ 删信戈莱码, 通过选择重量恒为 12 的 2 048 个码字面获得。当然, 这种删信码是非线性的。这两种码将与重复码结合使用。第三种码是最大长度移位寄存器码。

采用软判决译码时, $(24, 12)$ 戈莱码的差错率性能如下:

$$P_M \leq \left[759 Q \left(\sqrt{\frac{8W/R}{J_{\text{av}}/P_{\text{av}}}} \right) + 2576 Q \left(\sqrt{\frac{12W/R}{J_{\text{av}}/P_{\text{av}}}} \right) + 759 Q \left(\sqrt{\frac{16W/R}{J_{\text{av}}/P_{\text{av}}}} \right) + Q \left(\sqrt{\frac{24W/R}{J_{\text{av}}/P_{\text{av}}}} \right) \right] \quad (13-2-46)$$

式中 W/R 是处理增益, $J_{\text{av}}/P_{\text{av}}$ 为干扰容限。由于 $n = n_1 n_2 = 12 W/R$ 及 $n_1 = 24$, 故每个编码比特实际上重复 $n_2 = W/2R$ 次。例如, 若 $W/R = 100$ (处理增益为 20 dB), 则重复码的分组长度是 $n_2 = 50$ 。

如果采用硬判决译码, 一个编码比特的差错概率为

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) \quad (13-2-47)$$

相应地,码字的差错概率的上边界是

$$P_M \leq \sum_{m=4}^{24} \binom{24}{m} p^m (1-p)^{24-m} \quad (13-2-48)$$

另外,对硬判决译码亦可使用契尔诺夫(Chernoff)边界,即

$$P_M \leq 759[4p(1-p)]^4 + 2576[4p(1-p)]^6 + 759[4p(1-p)]^8 + [4p(1-p)]^{12} \quad (13-2-49)$$

图 13-2-7 示出了(24, 12)戈莱码的性能,它是干扰容限 J_{av}/P_{av} 的函数,并以处理增益作为参数。契尔诺夫边界可用来计算硬判决译码的差错概率。软判决译码的差错概率主要由下列项决定

$$759Q\left(\sqrt{\frac{8W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right)$$

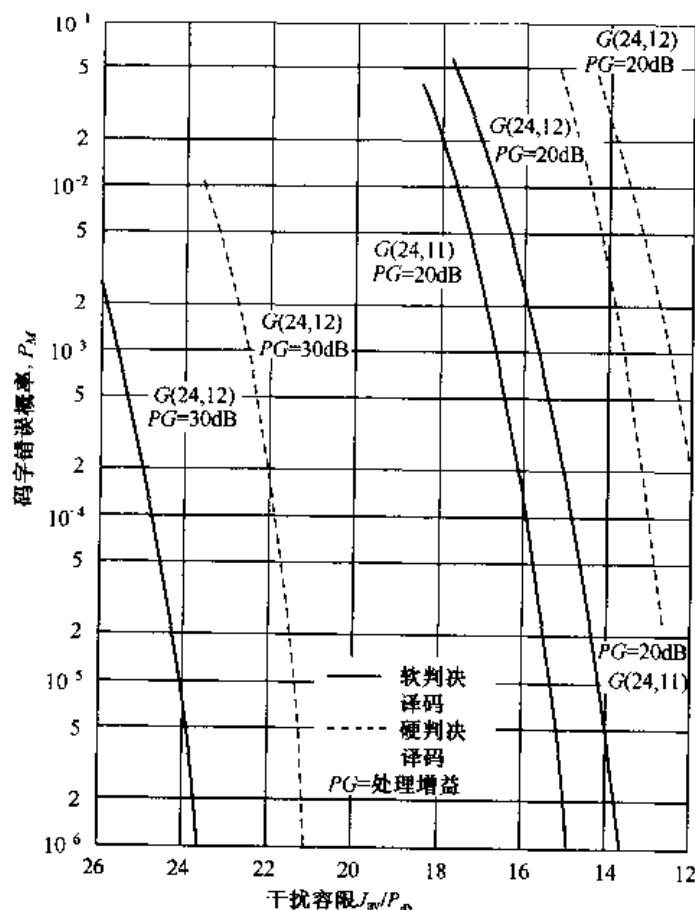


图 13-2-7 用在 DS 扩频信号中的戈莱码的性能

而硬判决译码的差错概率主要由式(13-2-49)中的 $759[4p(1-p)]^4$ 项决定。因此,软判决译码^① 的编码增益至多 $10\lg 4 = 6$ dB。我们还看到,相应于 $W/R = 1000$ (30 dB) 的两条曲线与 $W/R = 100$ (20 dB) 的两条曲线形状相同,只是后者相对于前者向右移动了 10 dB,该移位就是这两种扩频信号处理增益的差别。

(24,11)删信戈莱码的差错率性能上边界对于软判决译码为

$$P_M \leq 2047 Q \left(\sqrt{\frac{11 \bar{W}/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) \quad (13-2-50)$$

对于硬判决译码为^②

$$P_M \leq 2047 [4p(1-p)]^6 \quad (13-2-51)$$

式中, p 由下式定义

$$p = Q \left(\sqrt{\frac{11 \bar{W}/R}{J_{av}/P_{av}}} \right) \quad (13-2-52)$$

图 13-2-7 也画出了 $W/R = 100$ 时该码的性能。由图可见, (24,11)删信戈莱码比 (24,12) 戈莱码的性能大约好 1 dB。

我们不研究采用一个分组码与一个低速率 ($1/n_2$) 重复码级联的情况,而研究采用单一低速率码的情况。一个特别适合的低速率码集合是 8.1.3 节所述的最大长度移位寄存器码集合。对于这种码,集合

$$\begin{aligned} (n, k) &= (2^m - 1, m) \\ d_{\min} &= 2^{m-1} \end{aligned} \quad (13-2-53)$$

除了全零码字外,所有码字具有相同的重量 2^{m-1} 。因此,软判决译码的差错率的上边界为^③

$$\begin{aligned} P_M &\leq (M-1) Q \left(\sqrt{\frac{2 \bar{W}/R}{J_{av}/P_{av}}} R_c d_{\min} \right) \\ &\leq 2^m Q \left(\sqrt{\frac{2 \bar{W}/R}{J_{av}/P_{av}}} \frac{m 2^{m-1}}{2^m - 1} \right) \\ &\leq 2^m \exp \left(- \frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \frac{m 2^{m-1}}{2^m - 1} \right) \end{aligned} \quad (13-2-54)$$

当 m 为适度值时, $R_c d_{\min} \approx \frac{1}{2} m$, 于是式 (13-2-54) 为

$$P_M \leq 2^m Q \left(\sqrt{\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}}} m \right) \leq 2^m \exp \left(- \frac{m W/R}{2 J_{av} P_{av}} \right) \quad (13-2-55)$$

因此,编码增益至多为 $10\lg \frac{1}{2} m$ 。

例如,如果选择 $m = 10$, 则 $n = 2^{10} - 1 = 1023$ 。因为 $n = kW/R = mW/R$, 故 $W/R \approx 102$ 。所以处理增益约为 20 dB, 编码增益为 7 dB。该性能与 (24,11)删信戈莱码得到的结果相差无几。采用较大的 m 值,可获得较高的编码增益。

① 相对于未编码系统的性能,由于 759 这个相乘因子增加了差错概率,所以编码增益小于 6 dB。

② 这里提醒读者,对于大的信号集合,一致边界不是很紧密的。

③ 由最大长度移位寄存器码产生的 $M = 2^m$ 个波形组成一个单纯形集合(见习题 8-20)。5.2.4 节给出的错误概率精确表达式可用于很大 M 值的情况,此时一致边界变得很松散。

假如把硬判决译码用于最大长度移位寄存器码,那么,由契尔诺夫边界定出的差错率上边界为

$$P_M \leq (M-1)[4p(1-p)]^{d_{\min}/2} = (2^m-1)[4p(1-p)]^{2^{m-2}} \quad (13-2-56)$$

式中,

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}R_c}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}} \frac{m}{2^m-1}}\right) \quad (13-2-57)$$

当 $m=10$ 时,码字差错率 P_M 与 (24,11) 删信戈莱码硬判决译码的结果相似。

上述结果说明了单级编码的性能。采用级联码可获得更大的编码增益。

2. 低功率可检测信号的传输

在低功率可检测信号的传输中,相对于信道背景噪声和接收机前端产生的热噪声,信号以很低的功率电平发送。若 DS 扩频信号占用带宽 W , 加性噪声的谱密度为 $N_0 W/\text{Hz}$, 则在带宽 W 内的平均噪声功率是 $N_{av} = WN_0$ 。

在预定接收机中,接收信号的平均功率为 P_{av} 。如果希望使预定接收机附近的接收机无法觉察信号的存在,信号可用很低的功率电平发送,从而 $P_{av}/N_{av} \ll 1$ 。例如,假设二进制 PSK 被用来发送信息。预定接收机的差错率可表示为

$$\begin{aligned} P_M &< MQ \left[\sqrt{\frac{2\varepsilon_b}{N_0} R_c d_{\min}} \right] \\ &< MQ \left[\sqrt{2 \left(\frac{W}{R} \right) \left(\frac{P_{av}}{N_{av}} \right) R_c d_{\min}} \right] \end{aligned}$$

根据这个式子,我们可以看出:即使 $P_{av}/N_{av} \ll 1$, 预定接收机也能借助于处理增益和编码增益恢复携带信息的信号。然而,任何其他接收机,因为没有 PN 序列的先验知识,将不具有处理增益和编码增益的优点,因此很难检测出携带信息的信号。我们说这种信号被截获的概率很低,称为低截获概率(LPI)信号。

13.2.1 节给出的错误概率结果也适用于预定接收机中 LPI 信号的解调和译码。

3. 码分多址

由于有处理增益和编码增益,DS 扩频信号的性能提高了,利用该特性可使许多 DS 扩频信号占据同一信道带宽,只要每个信号拥有自己特有的 PN 序列。因此,使几个用户在同一信道带宽上同时传送消息是可能的。每个用户(一对发送机/接收机)以其特有的 PN 码在共同的信道带宽内传送信息,这种数字通信方式叫做码分多址(CDMA)或扩频多址(SSMA)。

每个 PN 信号解调时,来自信道中其他同时通信的用户的信号表现为加性干扰。干扰电平的变化取决于任意给定时间上的用户数。CDMA 的主要优点是如果每个用户发送信息的时间周期较短,能容纳大量用户。在这种多址系统中,比较容易增加新用户或减少用户数而不破坏系统的正常工作。

下面来确定 CDMA 系统中能够支持同时传送的信号数目^①。为了简单起见,假定所有信

^① 本节中,来自其他用户的干扰作为随机过程处理。如果用户之间没有协同工作,就是这种情况。第 15 章将研究 CDMA 传输,其中来自其他用户的干扰是已知的且可被接收机抑制。

号的平均功率都相同。因此,如果有 N_u 个同时通信的用户,则在给定接收机中期望的信噪干扰功率比为

$$\frac{P_{av}}{J_{av}} = \frac{P_{av}}{(N_u - 1)P_{av}} = \frac{1}{N_u - 1} \quad (13-2-58)$$

因此,给定接收机的软判决译码性能上边界为

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{N_u - 1}} R_c w_m\right) \leq (M - 1) Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{N_u - 1}} R_c d_{\min}\right) \quad (13-2-59)$$

在这种情况下,假定来自其他用户的干扰是高斯的。

作为一个例子,假设当

$$\frac{W/R}{N_u - 1} R_c d_{\min} = 20$$

时,可达到期望的性能等级(错误概率为 10^{-6})。那么,CDMA 系统能支持的最大用户数为

$$N_u = \frac{W/R}{20} R_c d_{\min} + 1 \quad (13-2-60)$$

若 $W/R = 100$ 且 $R_c d_{\min} = 4$ (采用 (24, 12) 戈莱码的结果), 则最大用户数是 $N_u = 21$ 。若 $W/R = 1\,000$ 且 $R_c d_{\min} = 4$, 最大用户数为 $N_u = 201$ 。

在求信道中同时存在的最大用户数时,隐含地假设 PN 码序列是相互正交的,来自其他用户的干扰只在功率上相加。然而,许多 PN 码序列之间的正交性不易做到,特别是当所需的 PN 码序列数目很大时。事实上,对于 CDMA 系统,选择一组好的 PN 序列是很重要的,这一点在技术文献中得到相当的重视。我们将在 13.2.5 节简要讨论这个问题。

4. 基于 DS 扩频的数字蜂窝 CDMA 系统

在北美,直接序列 CDMA 已经被采纳作为数字蜂窝语音通信的一种多址方法。这种数字蜂窝通信系统由 Qualcomm 公司提出和研究,并被电信业协会(TIA)标准化为 IS-95 标准,以用于 800 MHz 和 1 900 MHz 频带。

从某一基站到移动接收机的传输带宽(前向链路)一般为 1.25 MHz,而从移动接收机到基站的传输信号(反向链路)也需要带宽为 1.25 MHz 的单独信道。在前向链路和反向链路中传输的信号都是 DS 扩频信号,其码片(chip)速率均为 1.2288×10^6 码片/s(约 1 兆码片/s)。

5. 前向链路

图 13-2-8 给出信号从基站传输到移动接收机的调制器方框图。语音编码器是码激励线性预测(CELP)编码器,它以可变速率 9 600 b/s、4 800 b/s、2 400 b/s 等产生数据,其中码率在帧间隔为 20 ms 的范围内是激活语音用户的函数。从语音编码器中输出的数据用一个速率为 1/2、约束长度为 $K=9$ 的卷积码进行编码。对于数据率为 4 800 b/s、2 400 b/s 或者 1 200 b/s 的低激活率语音,卷积编码器输出的符号重复 2 次、4 次或者 8 次,以便保持 9 600 b/s 的恒定比特率。在这些低激活率语音中,发射机功率减少了 3 dB、6 dB 或者 9 dB,于是,对所有的语音速率,每比特发射的能量保持恒定。因此,低激活语音导致较低的发射机功率,从而只对其他用户产生很低的干扰电平。

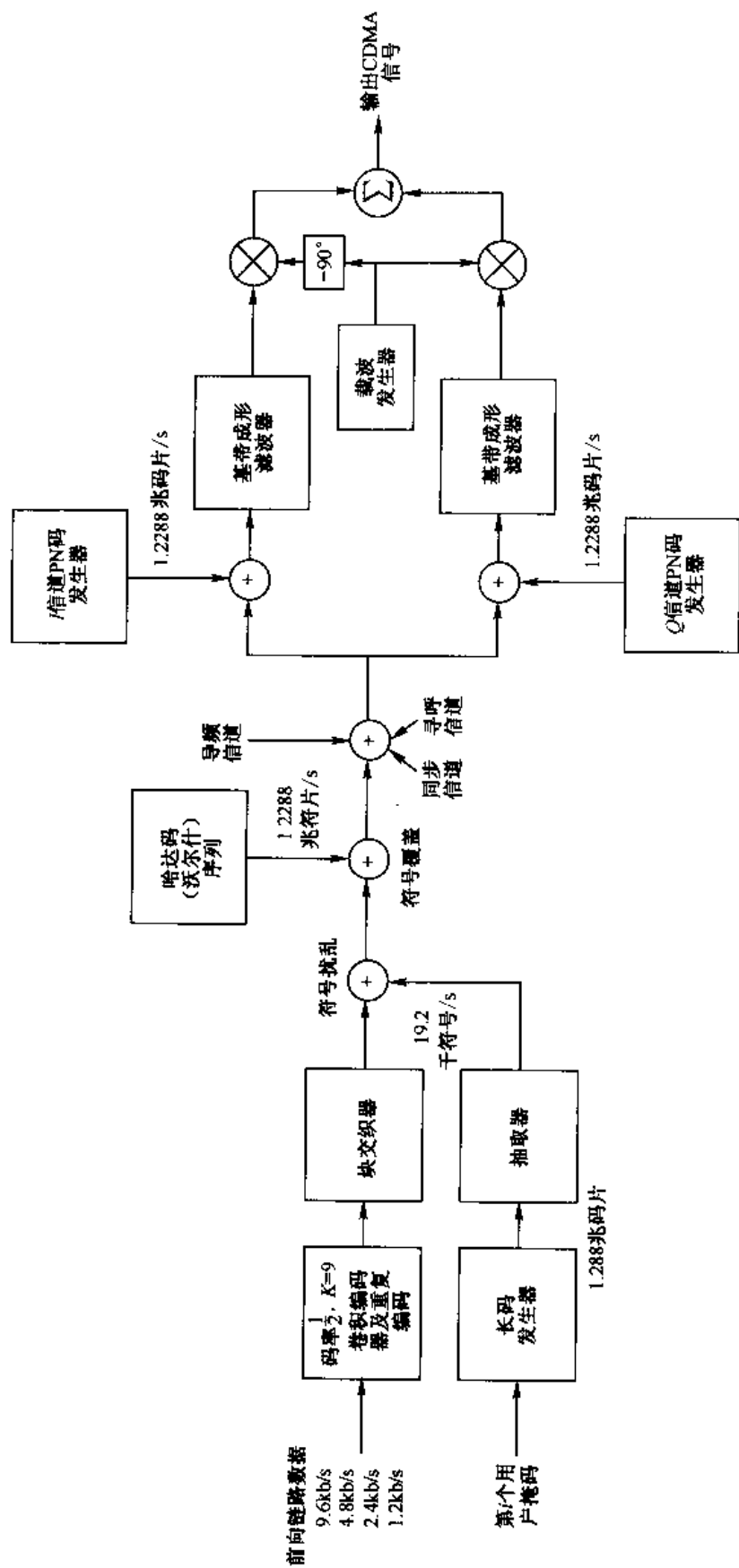


图13-2-8 IS-95前向链路方框图

每帧编码比特通过一个块状交织器,以便克服由于信号经过信道传输所产生的突发误差影响。块状交织器输出的数据比特(码率为 19.2 kb/s)通过与码片率为 1.2288 兆码片/s 的长码($N=2^{42}-1$)发生器的输出相乘而被打乱,而其输出以 64 倍率对 19.2 千码片/s 的数据进行抽取。长码用来很好地识别前向链路和反向链路上移动台的呼叫。

信道上的每一个用户分配一个长度为 64 的哈达码(或者沃尔什码)序列。每一个基站分配 64 个正交哈达码序列,从而有 64 个可用信道。其中的一个哈达码序列(全零序列)用来传输某一导频信号,该信道可用来测量信号长度、载波相位偏移等信道特性。这些参数在接收机上用来进行相位相干解调。另一个哈达码序列用来提供时间同步。其中一个信道(如果需要的话可能更多个信道)用于呼叫,剩余的 61 个信道分配给不同的用户。

每个用户用所分配的哈达码序列与数据序列相乘。于是,每一个编码数据比特都与一个长度为 64 的哈达码序列相乘。得到的二进制序列由于和两个长度为 $N=2^{15}$ 的 PN 序列相乘而扩展,产生同相和正交的信号分量。从而使二进制数据信号转换成了四相信号,而且 I 和 Q 分量均用基带频谱成形滤波器来滤波。不同基站用 PN 序列的不同偏移来识别。所有 64 个信道的信号同步发送,以使得不存在信道多径失真时,由于哈达码序列的正交性,任何移动接收机接收到的其他用户信号不受干扰。

在接收机中,RAKE 解调器用来分辨主多径信号分量,然后对这些信号分量进行相位校准,并根据其信号强度进行加权,而这些信号强度由相位估计得到或由导频信号导出。最后,这些分量被合并,并通过维持比(Viterbi)软判决译码器。RAKE 解调器将在第 14 章详细描述。

6. 反向链路

从移动发射机到基站的反向链路调制器不同于前向链路调制器,其框图如图 13-2-9 所示。该调制器设计中需要重点考虑的问题是,从各种发射机发送到基站的信号是异步的,因此用户之间的干扰要大得多。其次,移动发射机通常是由电池供电,因而其发射信号的功率有限。为了补偿这些重要限制,在反向链路中采用 $K=9$,速率为 $1/3$ 的卷积码。尽管在 AWGN 信道中,这种码与前项链路中速率为 $1/2$ 的码本质上具有相同的编码增益,但在衰落信道中它具有更高的编码增益,它形成数字蜂窝通信链路的一个特征。在第 14 章中处理衰落信道通信问题时,我们将看到这一点。与前向链路相同,对于低激活语音,卷积编码输出比特重复 2 次、4 次或者 8 次;而编码比特率为 28.8 kb/s。

对每个 20 ms 的帧,576 个编码比特呈块状交织并通过调制器。数据用 $M=64$ 的正交信号集来调制,该信号集采用长度为 64 的哈达码序列。这样,一个 6 比特的数据块映射为 64 个哈达码序列之一。结果,在调制器的输出端得到 307.2 kb/s 的比特(或码片)率。我们注意到,在差错率为 10^{-6} 的情况下,采用 64 元正交调制比对应的二进制对映传信方式(antipodal signaling)每比特信噪比(SNR)下降了近 3.5 dB。

为了减少对其他用户的干扰,首先对传输码元符号重复的时间位置进行随机化处理,使得在语音低激活时不会依时间等间隔地发生连续突发。在经过随机发生器以后,用码率为 1.2288 兆码片/s 的 PN 长码发生器的输出对信号进行扩频。因此,对调制器出来的哈达码序列的每一比特,只有 4 个 PN 码片,从而反向链路的处理增益非常低。然后,乘法器输出端得到的码率为 1.2288 兆码片/s 的二进制序列进一步与两个长度为 $N=2^{15}$ 的同码率 PN 序列相乘,从而得到用基带频谱成形滤波器滤波的 I 和 Q 信号分量(QPSK 信号),并将这些信号送

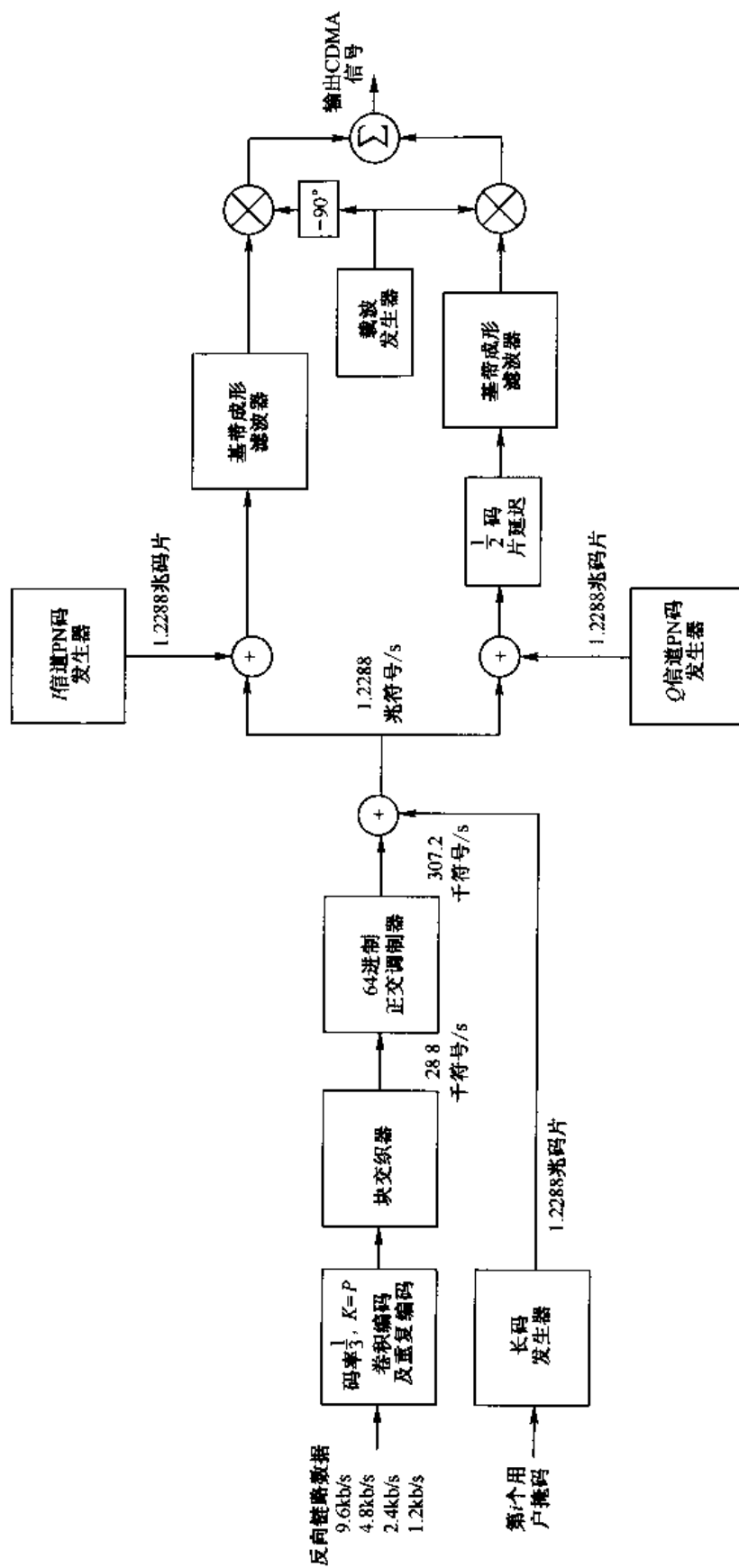


图13-2-9 IS-PS前向链路方框图

到积分混频器。在基带滤波器之前, Q 信道信号在时间上比 I 信道信号延迟了 1.5 个码片, 结果, 两个基带滤波器的输出为补偿 QPSK 信号。

尽管码片作为补偿 QPSK 信号传输, 解调器对 $M = 64$ 的正交哈达码波形进行非相干解调来恢复编码的数据比特。在计算过程中采用快速哈达码变换以减少解调过程的计算复杂度。调制器的输出再输入到维特比检测器, 其输出用来合成语音信号。

13.2.3 脉冲干扰对 DS 扩频系统的影响

至此, 我们已经研究了连续干扰或人为干扰对 DS 扩频信号的影响。可以看到, 处理增益和编码增益提供了一种克服这种干扰的有害影响的手段。然而, 有一种人为干扰对 DS 扩频系统性能有严重的影响。这种人为干扰信号由脉冲组成, 其频谱如噪声那样平坦, 且覆盖整个信号带宽 W 。该干扰通常称为脉冲干扰或部分时间人为干扰。

假设在信号带宽 W 内干扰源的平均功率为 J_{av} , 从而 $J_0 = J_{av}/W$ 。干扰源不是连续发送脉冲, 而是在 1% 时间内以功率 J_{av}/α 发送脉冲, 即在给定的瞬间, 干扰源发送的概率是 α 。为简单起见, 假定干扰脉冲覆盖整数个信号传输间隔, 因此它影响到整数个信号比特。当干扰源不发送时, 假定发送的比特被无差错接收; 当干扰源正在发送时, 未编码的 DS 扩频系统的错误概率是 $Q(\sqrt{2\alpha\mathcal{E}_b/J_0})$, 所以平均比特错误概率为

$$P_2(\alpha) = \alpha Q(\sqrt{2\alpha\mathcal{E}_b/J_0}) = \alpha Q\left(\sqrt{\frac{2\alpha W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) \quad (13-2-61)$$

该干扰源选择占空率 (duty cycle) α 以使差错概率最大。将式 (13-2-61) 对 α 微分, 可知当

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{0.71}{\mathcal{E}_b/J_0} & (\mathcal{E}_b/J_0 \geq 0.71) \\ 1 & (\mathcal{E}_b/J_0 < 0.71) \end{cases} \quad (13-2-62)$$

时, 发生最坏情况的脉冲干扰的差错概率为

$$P_2 = \begin{cases} \frac{0.083}{\mathcal{E}_b/J_0} = \frac{0.083J_{av}/P_{av}}{W/R} & (\mathcal{E}_b/J_0 > 0.71) \\ Q\left(\sqrt{\frac{2W/R}{J_{av}/P_{av}}}\right) & (\mathcal{E}_b/J_0 < 0.71) \end{cases} \quad (13-2-63)$$

图 13-2-10 所示为式 (13-2-61) 中 $\alpha = 1.0, 0.1, 0.01$ 时的差错率性能以及基于 α^* 的最坏情况的性能。通过连续高斯噪声干扰和最坏情况脉冲干扰的差错率比较, 可以看出两者的性能差别较大, 在差错率 10^{-6} 时约 40 dB。

应该指出, 上述分析适用于干扰源脉冲持续时间等于或大于比特持续时间的场合。此外, 实际的考虑因素会禁止干扰源达到高的峰值功率 (小的 α 值)。不过, 由式 (13-2-63) 确定的错误概率可作为最坏的脉冲干扰情况下未编码二进制 PSK 性能的上边界。显然, 在这样的干扰情况下, DS 扩频系统的性能极差。

如果把编码简单地加到 DS 扩频系统中, 那么相对于未编码系统的性能改善量就是编码增益。于是, 编码增益使 \mathcal{E}_b/J_0 减少, 其限度在大多数情况下小于 10 dB。性能差的原因是当干扰信号开启时, 干扰脉冲信号的持续时间会影响到许多个连续的编码比特。因此, 由于干扰源的突发特性, 码字错误概率很高。

为了改善性能, 应该在信道传输之前将编码比特交织。如 8.1.9 节所述, 交织的作用是使

被干扰源撞击的编码比特统计独立。

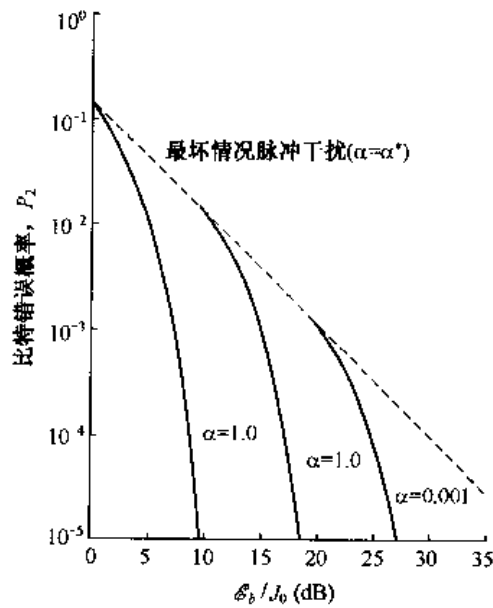


图 13-2-10 具有脉冲干扰的 DS 二进制 PSK 的性能

图 13-2-11 所示为包括交织/解交织在内的数字通信系统的方框图。图中还示出接收机知道干扰源状态的可能性,亦即知道干扰源何时开启或关闭。干扰状态的信息(叫做边信息)有时候可从对邻近频带信道噪声功率电平 的测量来获得。在此研究两种极端情况,即不知道干扰源状态或完全知道干扰源状态。在任何情况下,表示干扰源状态的随机变量 ζ 由如下概率表征:

$$P(\zeta = 1) = \alpha, \quad P(\zeta = 0) = 1 - \alpha$$

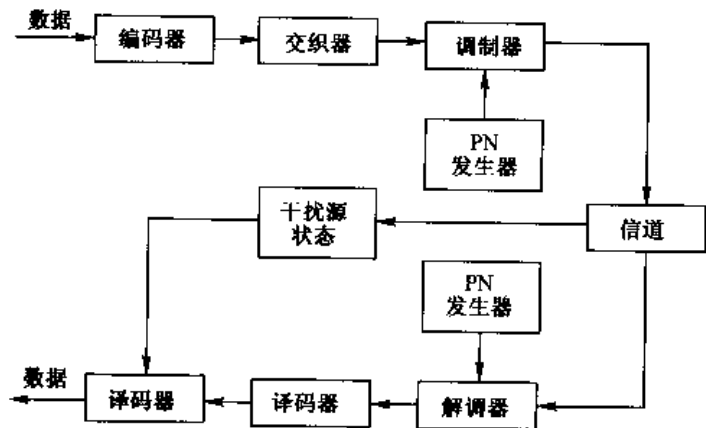


图 13-2-11 AJ(抗干扰)通信系统框图

当干扰源开启时,信道可建模为功率密度谱 $N_0 = J_0/\alpha = J_{av}/\alpha W$ 的 AWGN 信道;当干扰源关闭时,信道中不存在噪声。干扰源状态的知识意味着译码器知道何时 $\zeta = 1$ 以及何时 $\zeta = 0$,并在相关计算中利用这个信息。例如,译码器利用该间隔内的噪声功率电平的倒数对每个编码比特的解调器输出进行加权;否则,译码器为受干扰的比特给出零权值(删除)。

首先研究无干扰源状态知识下的干扰影响。假设一对交织/解交织器导致对编码比特的

冲撞是统计独立的。作为编码改善性能的一个例子,引用马丁和麦克亚当(Martin&McAdam, 1980年)的论文的结果,该论文评价了在最坏情况脉冲干扰下二进制卷积码的性能,研究了硬判决和软判决维特比译码。通过量化解调器输出为8电平,得到软判决。为此,采用均匀量化器,其中对脉冲干扰源噪声电平进行阈值间隔最佳化。当脉冲干扰源开启时,量化器在限制解调器输出大小上起着重要作用。该限制作用保证对编码比特的任何冲撞都不会使相应的路径度量发生严重偏离。

在编码系统中,脉冲干扰源的最佳占空率一般与SNR成反比,但其值不同于式(13-2-62)所示的未编码系统的值。图13-2-12所示为码率是1/2的卷积码在硬判决和软判决两种译码方式下的最佳干扰源占空率。图13-2-13和图13-2-14所示为对于约束长度为 $3 \leq K \leq 9$ 且码率为1/2的卷积码,最坏脉冲干扰源下的差错率结果。例如,当 $P_2 = 10^{-6}$ 时,带有软判决译码的 $K=7$ 卷积码要求 $\mathcal{E}_b/J_0 = 7.6$ dB,硬判决译码要求 $\mathcal{E}_b/J_0 = 11.7$ dB。SNR相差4.1 dB是相当大的。在连续高斯噪声的情况下,差错率为 10^{-6} 对应的SNR在软判决译码时为5 dB,在硬判决译码时为7 dB。因此,最坏脉冲干扰源对性能的损伤,软判决译码为2.6 dB,硬判决译码为4.7 dB。损伤程度随着卷积码约束长度的减小而增大。然而,重要的是人为干扰引起的信噪比损失减少了,从未编码系统的40 dB损失减少到 $K=7$ 和码率为1/2卷积码编码系统的5dB以下的损失。

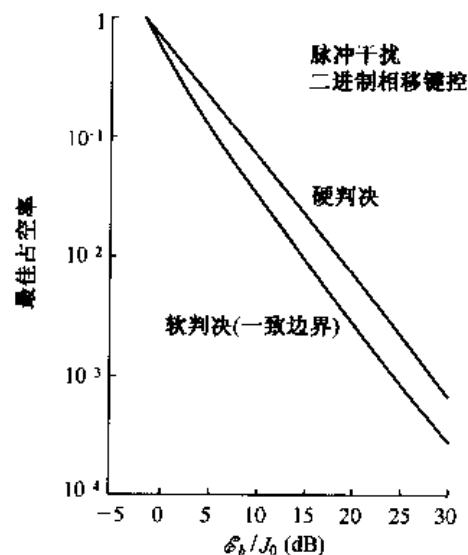


图 13-2-12 脉冲干扰源的最佳占空率

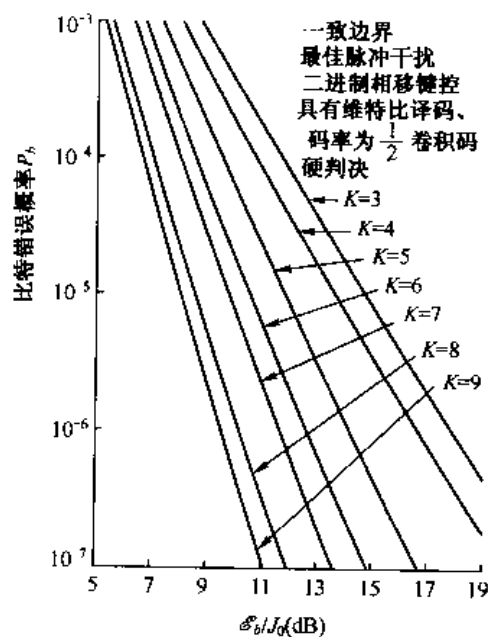


图 13-2-13 在最佳脉冲干扰时,采用码率为1/2的卷积码且用硬判决维特比译码的二进制 PSK 的性能

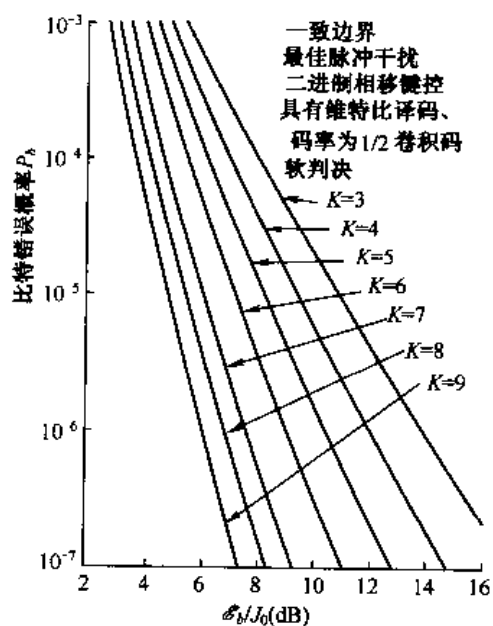


图 13-2-14 在最佳脉冲干扰时,采用码率为1/2的卷积码且用软判决维特比译码的二进制 PSK 的性能

评价一个编码的抗人为干扰(AJ)通信系统性能的比较简单的方法是使用由奥姆拉和莱维特(Omura & Levitt, 1982 年)提出的截止率参数 R_0 。例如,若采用二进制编码调制,截止率可表示为

$$R_0 = 1 - \lg(1 + D_a) \quad (13-2-64)$$

式中,因子 D_a 取决于信道噪声特征和译码处理方式。我们记得,对于 AWGN 信道上的二进制 PSK 和软判决译码,

$$D_a = e^{-\mathcal{E}_c/N_0} \quad (13-2-65)$$

式中, \mathcal{E}_c 是编码比特能量。对于硬判决译码,

$$D_a = \sqrt{4p(1-p)} \quad (13-2-66)$$

式中, p 是编码的比特错误概率。从而, $N_0 \equiv J_0$ 。

对于编码二进制 PSK,在脉冲干扰时,奥姆拉和莱维特(Omura & Levitt, 1982 年)证明了如下结果:

对具有干扰源状态知识的软判决译码,

$$D_a = \alpha e^{-\alpha \mathcal{E}_c/N_0} \quad (13-2-67)$$

对没有干扰源状态知识的软判决译码,

$$D_a = \min_{\lambda \geq 0} \{ [\alpha \exp(\lambda^2 \mathcal{E}_c N_0 / \alpha) + 1 - \alpha] \exp(-2\lambda \mathcal{E}_c) \} \quad (13-2-68)$$

对具有干扰源状态知识的硬判决译码,

$$D_a = \alpha \sqrt{4p(1-p)} \quad (13-2-69)$$

对没有干扰源状态知识的硬判决译码,

$$D_a = \sqrt{4\alpha p(1-\alpha p)} \quad (13-2-70)$$

式中,二进制 PSK 硬判决译码的错误概率为

$$p = Q \left[\sqrt{\frac{2\alpha \mathcal{E}_c}{N_0}} \right]$$

图 13-2-15 所示为上述情况下, \mathcal{E}_c/N_0 函数的 R_0 曲线。注意,这些曲线表示了 $\alpha = \alpha^*$ 最坏值(该值对于 \mathcal{E}_c/N_0 的每个值使 D_a 最大或使 R_0 最小)时的截止率。还应注意,在软判决译码和没有干扰源状态知识的情况下, $R_0 = 0$ 。这是由解调器输出没有被量化而造成的。

图 13-2-15 中的曲线也可用来评估编码系统的性能。为了说明评估过程,假设希望确定在最坏脉冲干扰下,编码二进制 PSK 的错误概率为 10^{-6} 时需要的 SNR。作为特例,假设采用速率为 1/2 和 $K=7$ 的卷积码。下面计算 AWGN 信道中采用软判决译码、码率为 1/2 且 $K=7$ 卷积码的性能。图 8-2-22 中, $P_2 = 10^{-6}$ 时要求的 SNR 为

$$\mathcal{E}_b/N_0 \approx 5 \text{ dB}$$

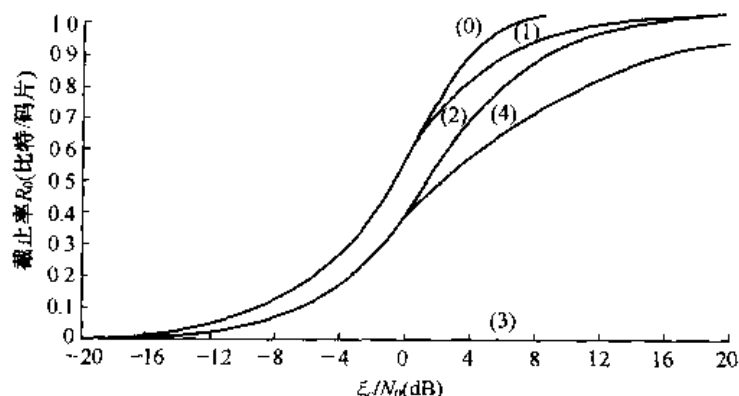
因为该码的码率为 1/2,故

$$\mathcal{E}_c/N_0 \approx 2 \text{ dB}$$

回到图 13-2-15 中的曲线,对于 AWGN 信道(参考系统),当 $\mathcal{E}_c/N_0 = 2 \text{ dB}$ 时,相应的截止率为

$$R_0 \approx 0.74 \text{ 比特/符号 (bit/symbol)}$$

如果有另一种信道具有不同噪声特征(最坏情况脉冲噪声信道)但具有相同的截止率 R_0 值,那么比特错误概率的上边界相同,即在此情况下为 10^{-6} 。因此,可利用这个截止率来确定最



标号说明

- (0) AWGN (\$\alpha=1\$) 中软判决译码
- (1) 具有干扰源状态信息的软判决
- (2) 具有干扰源状态信息的硬判决
- (3) 没有干扰源状态信息的软判决
- (4) 没有干扰源状态信息的硬判决

图 13-2-15 编码 DS 二进制 PSK 调制的截止率

坏脉冲干扰源信道要求的 SNR。从图 13-2-13 中的曲线可得

$$\frac{\mathcal{E}_c}{J_0} = \begin{cases} 10 \text{ dB} & \text{对于没有干扰源状态知识的硬判决译码} \\ 5 \text{ dB} & \text{对于具有干扰源状态知识的硬判决译码} \\ 3 \text{ dB} & \text{对于具有干扰源状态知识的软判决译码} \end{cases}$$

因此,对于码率为 $1/2$ 、 $K=7$ 的卷积码,相应的 \mathcal{E}_c/J_0 分别是 13 dB、8 dB 和 6 dB。

通过使用与 AWGN 信道相应的差错率曲线,可用一般方法来生成最坏脉冲干扰信道的编码二进制信号的差错率曲线。上述方法可推广到如欧姆拉和莱维特 (Omura & Levitt, 1982 年) 提出的 M 元编码信号。

通过比较图 13-2-15 所示的编码 DS 二进制 PSK 调制的截止率,在截止率低于 0.7 的情况下,与 AWGN 信道 ($\alpha=1$) 的性能相比,具有软判决译码和干扰源状态信息的系统没有 SNR 的损失。另一方面,当 $R_0=0.7$ 时,在 AWGN 信道与没有干扰源状态信息的硬判决之间存在 6 dB 的 SNR 性能差异。当截止率低于 0.4 时,如果干扰源状态是未知的,那么硬判决译码没有 SNR 损失。然而,在 AWGN 信道中,硬判决译码比较判决译码预期损失 2 dB。

13.2.4 DS 扩频系统中窄带干扰的删除

业已证明,DS 扩频信号可以减少信道中其他用户造成的干扰和人为干扰。当干扰为窄带时,接收信号与 PN 码序列复制品之间的互相关函数通过横跨 PN 信号所占领带进行扩频,从而减少了干扰电平。这样,干扰就等价于具有相对平坦频谱的低电平噪声。同时,在扩频之前,互相关函数运算将理想响应压缩到由信息信号所占的频带内。因此,窄带干扰功率下降量等于处理增益。

由窄带干扰所引起的 DS 扩频通信系统抗扰性能的下降,可通过解扩前的信号滤波获得改善,并可通过在理想信号上引入一定的失真来减少干扰电平。这个滤波可利用 DS 信号的宽带谱特征来完成,而且干扰的窄带特征可描述如下。

具体而言,我们考虑图 13-2-16 所示的解调器。接收信号通过一个与码片脉冲 $g(t)$ 相匹配的滤波器。该滤波器的输出每隔 T_c 时间被同步采样,于是得到

$$r_j = 2\epsilon_c(2b_j - 1)(2C_{ij} - 1) + v_j \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (13-2-71)$$

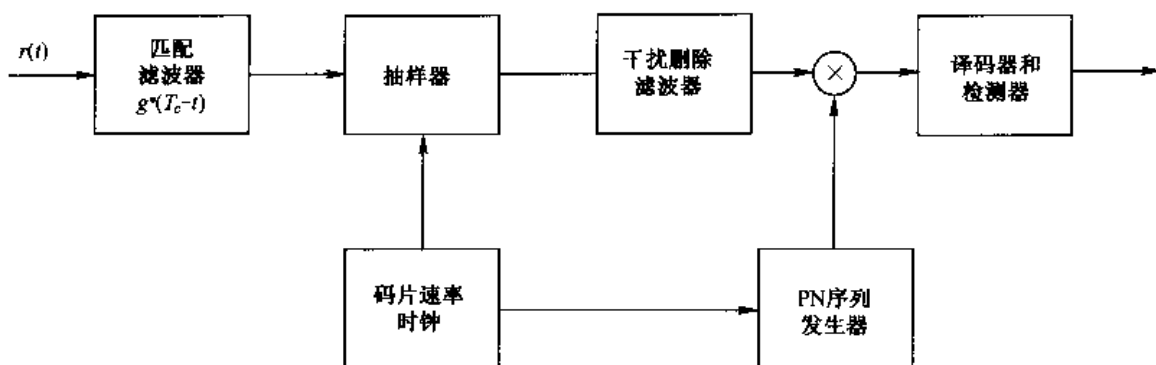


图 13-2-16 受窄带干扰恶化的 PN 扩频信号解调器

这里, ϵ_c 为码片脉冲的能量, $\{b_j\}$ 为 PN 序列的二进制值, v_j 表示附加噪声以及干扰项。附加噪声假设由两部分组成, 一部分对应于宽带噪声(通常为热噪声), 另一部分对应于窄带干扰。因此, 我们可以将 r_j 表示为

$$r_j = s_j + i_j + n_j \quad (13-2-72)$$

这里, s_j 为信号成份, i_j 为窄带干扰, n_j 宽带噪声。

抽样器输出端收到的信号序列 $\{r_j\}$ 再输入到一个离散时间滤波器, 它对窄带干扰序列 $\{i_j\}$ 进行估计, 并从 $\{r_j\}$ 中减去估计值 \hat{i}_j 。该滤波器可以是线性或者非线性的; 得到的信号序列 $\{r_j - \hat{i}_j\}$ 输入到 PN 相关器, 其输出通过解码器。

1. 基于线性预测的干扰的估计和抑制

将接收信号通过一个线性横向滤波器, 可以估计其中的干扰成份 i_j 。基于线性预测的高效计算算法可用来估计干扰。在这种方法中, 窄带干扰基本上可建模为白噪声激励一个全极点滤波器所产生的结果。从而使该滤波器的输出是一个自回归(AR)过程。线性预测可用来估计全极点模型的系数; 而且所估计的预测系数, 确定了一个可用来抑制窄带干扰的适当的噪声白化全零点(横向)滤波器(简称白化滤波器——译者注)。

此刻, 我们假设已知序列 $\{i_j\}$ 的统计值, 且 $\{i_j\}$ 是一个平稳随机序列。那么, 由于 $\{i_j\}$ 的窄带特性, 我们可由 $r_{j-1}, r_{j-2}, \dots, r_{j-m}$ 预测 i_j , 即

$$\hat{i}_j = \sum_{l=1}^m a_{ml} r_{j-l} \quad (13-2-73)$$

式中 $\{a_{ml}\}$ 为 m 阶线性预测器的系数。这里需要强调的是, 式(13-2-73)预测了干扰而不是信号 s_j ; 因为 PN 码片是不相关的, 从而 s_j 和 r_{j-l} ($l=1, 2, \dots, m$) 也不相关, 这里 m 小于 PN 序列的长度。

式(13-2-73)中的系数可通过将预测器系数 r_j 和 \hat{i}_j 的均方误差最小化来得到。这得到如下线性方程组(称为 Yule-Walker 方程):

$$\sum_{l=1}^m a_{ml} \phi(k-l) = \phi(k) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (13-2-74)$$

式中 $\phi(k) = E(r_j r_{j+k})$ 为接收信号 $\{r_j\}$ 的自相关函数。这些方程在前面 3.5 节模拟信号源编

码时遇到过。

求解式(13-2-74)中预测滤波器系数,需要知道 $\Phi(k)$ 的自相关函数。实际上, $\{i_j\}$ 和 $\{r_j\}$ 的自相关函数通常是不知道的,而且 $\{r_j\}$ 还可能随时间上缓慢变化(非平稳干扰)。在这种情况下,最小二乘型算法,比如 Burg 算法,特别适合于自适应地估计线性预测滤波器系数,正如克特丘姆和普罗基斯(Ketchum & Proakis,1982 年)论文所阐述的。

例 13-2-4 让我们考虑 PN 扩频信号中窄带干扰占 20% 的情况。干扰信号的平均功率比信号的平均功率高 20 dB,宽带噪声的平均功率比信号的平均功率低 20 dB。图 13-2-17 示出了当干扰等分布在 4 个频带时,16 抽头和 29 抽头 FIR 滤波器的频谱特征。通常,为了达到很好的抑制效果,滤波器中的抽头数目要 4 倍于干扰带宽。容易看出,干扰抑制滤波器所起的作用是一个陷波滤波器。事实上,该滤波器将整个噪声和干扰进行白化,以便在其输出端产生近似平滑的功率谱密度。在对于干扰进行抑制时,由于信号在时间上扩频,滤波器也会使所希望的信号失真。

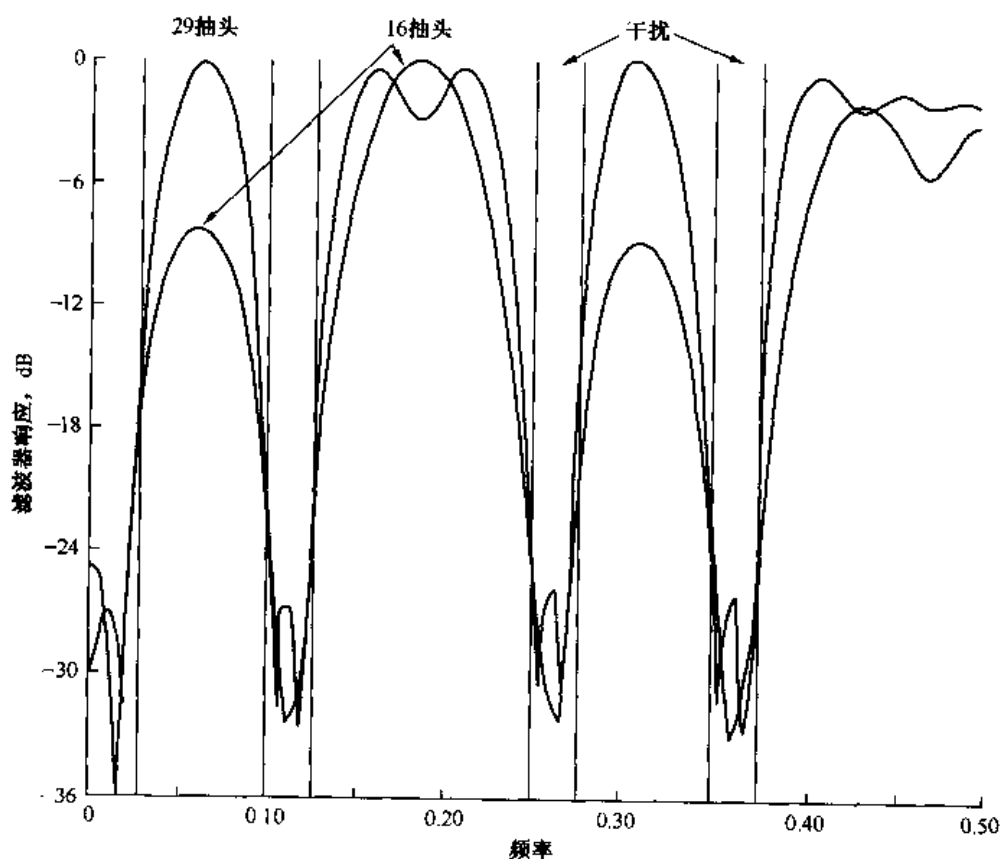


图 13-2-17 4 个干扰频带、16 个抽头和 29 个抽头滤波器的频率响应特性

2. 干扰抑制性能的改善

由于在抑制滤波器输出端噪声加干扰的谱比较平滑,因此在抑制滤波器后面的匹配滤波器或者互相关函数应该对失真信号进行处理。这可通过与干扰抑制滤波器相匹配的滤波器来

完成,即在 PN 相关器后面接一个脉冲响应为 $\{-a_{mm}, -a_{mm-1}, \dots, -a_{m1}, 1\}$ 的离散时间滤波器。实际上,我们可以将干扰抑制滤波器和匹配滤波器组合成单个滤波器,该滤波器具有如下脉冲响应:

$$\begin{aligned} h_0 &= -a_{mm} \\ h_k &= -a_{mm-k} + \sum_{l=0}^{k-1} a_{mm-l} - a_{mk-l} \quad (1 \leq k \leq m-1) \\ h_m &= 1 + \sum_{l=1}^m a_{ml}^2 \\ h_{m+k} &= h_{m-k} \quad (0 \leq k \leq m) \end{aligned} \quad (13-2-75)$$

该组合滤波器是一个具有 $K=2m+1$ 个抽头的线性相位(对称)横向滤波器。脉冲响应可以通过将每一项除以 h_m 进行归一化。这样,中心抽头归一化为 1。为了证明干扰抑制滤波器的效果,我们比较了 DS 系统有无干扰抑制滤波器时的性能。为此,采用输出信噪比 SNR 作为方便的性能指标。由于 PN 相关器的输出具有高斯特性,在 SNR 和差错率之间存在一一对应关系。

当没有抑制滤波器时,用 U_1 表示的 PN 相关器输出,其均值为 $2\epsilon_c L_c$, 方差为 $L_c[2\epsilon_c N_0 + \phi_{ii}(0)]$, 其中 $\phi_{ii}(k)$ 是序列 $\{i_j\}$ 的自相关函数, L_c 为每比特或者每个符号的码片数。输出 SNR 定义为均值平方与两倍方差之比。因此,没有抑制滤波器时的 SNR 为

$$\text{SNR}_{n0} = \frac{\epsilon_c L_c}{N_0 + \phi_{ii}(0)/2\epsilon_c} \quad (13-2-76)$$

当带有干扰抑制滤波器,且该滤波器具有式(13-2-75)所定义的对称脉冲响应及中心抽头归一化为 1 时,相关器的输出均值也是 $2\epsilon_c L_c$ 。但是,输出方差现由 3 部分组成:第一个对应于附加宽带噪声,第二个对应于残留窄带干扰,第三个对应于引入抑制滤波器产生时间扩散所带来的自身噪声。方差可以表示为[见克特丘姆和普罗基斯(Ketchum & Proakis, 1982 年)]:

$$\begin{aligned} \text{var}(U_1) &= 2L_c \epsilon_c N_0 \sum_{k=0}^K h_k^2 + L_c \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K h(l)h(k)\phi_{ii}(k-l) \\ &\quad + 4L_c \epsilon_c^2 \sum_{k=0}^{K/2-1} \left(2 - \frac{k}{L_c}\right) h_k^2 \end{aligned} \quad (13-2-77)$$

因此,滤波器输出的 SNR 为均值平方和两倍方差之比。带有抑制滤波器的 SNR 和没有抑制滤波器的 SNR 的比值为

$$\eta_0 = \frac{N_0 + \phi_{ii}(0)/2\epsilon_c}{N_0 \sum_{k=0}^K h_k^2 + \frac{1}{2\epsilon_c} \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K h(k)h(l)\phi_{ii}(k-l) + 2\epsilon_c \sum_{k=0}^{K/2-1} \left(2 - \frac{k}{L_c}\right) h_k^2} \quad (13-2-78)$$

该比值称为干扰抑制的改善因子。可以画出没有滤波时每个码片的归一化信噪比 SNR,而且定义为

$$\frac{\text{SNR}_{n0}}{L_c} = \frac{\epsilon_c}{N_0 + \phi_{ii}(0)/2\epsilon_c} \quad (13-2-79)$$

得到的 η_0 和 SNR_{n0}/L_c 的关系图具有通用性,因为对给定的 ϵ_c 、 N_0 和 $\phi_{ii}(0)$,它对具有任意处理增益的 PN 扩频系统都适用。

作为例子,图 13-2-18 画出了当单频带、等幅、随机相位正弦波包括 DS 扩频信号带宽 20% 时改善因子(分贝)与 SNR_{n0}/L_c 之间的关系。干扰抑制滤波器由一个 9 抽头的抑制滤波器构成,它对应于 4 阶预测器。这些数值结果表明,在进行 PN 相关计算和解码前采用陷波滤波器来抑制干扰是非常有效的,从而提高了系统的干扰容限。

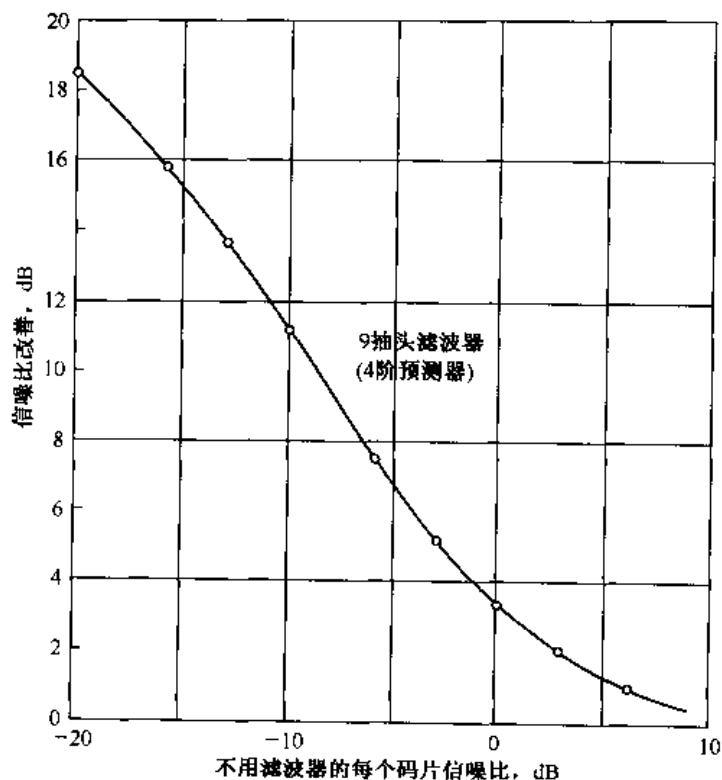


图 13-2-18 与匹配滤波器级联的干扰抑制滤波器的改善因子

许多作者都考虑采用线性自适应 FIR 滤波器抑制 DS 扩频系统中窄带干扰。感兴趣的读者可参考 13.6 节所引用的参考文献。从实际考虑,从宽带信号中消除窄带信号是为了在宽带 CDMA 系统上叠加窄带数字蜂窝系统。

3. 基于非线性滤波的干扰估计和抑制

当信号 $\{s_k\}$ 分量和宽带噪声 $\{n_k\}$ 分量为高斯随机过程时,用来预测窄带干扰(建模为高斯自回归 AR 过程)的线性 FIR 滤波器是最佳的最小均方误差滤波器。然而,DS 扩频信号序列 $\{s_k\}$ 是非高斯的。因而,线性估计滤波器是次最佳的,在这个意义上该滤波器不是抑制窄带干扰的最好滤波器。最佳窄带干扰估计器是非线性的。

如果将状态向量定义为

$$\mathbf{X}_k = [i_k \ i_{k-1} \ \cdots \ i_{k-m+1}]^t \quad (13-2-80)$$

其中 m 为 AR 模型的阶数,则有可能将状态向量和观测序列表示为如下状态空间形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= \Phi \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_k \\ r_k &= \mathbf{H} \mathbf{X}_k + (n_k + S_k) \end{aligned} \quad (13-2-81)$$

式中 Φ 为由 AR 模型参数确定的状态转移矩阵, \mathbf{W}_k 为激励 AR 模型的白高斯过程, $\mathbf{H} = [100 \cdots 0]$ 。我们想到,在已知 $r_{k-1} = [r_{k-1}, r_{k-2}, \dots, r_0]$ 的情况下, k 时刻的最小均方误差估计器为

条件均值 $E(r_k | r_{k-1})$ 。如果信号序列 $\{s_k\}$ 和宽带噪声 $\{n_k\}$ 为高斯过程, 对应于条件均值的状态 x_k 的最佳估计器可从卡尔曼滤波线性预测器中得到。由于 $\{s_k\}$ 为非高斯过程, 条件均值是一个简化非线性函数, 一般情况下它是非常复杂的。然而, 对条件均值的估计, 有可能导出降低复杂性的近似式。这种方法在威贾扬和普尔 (Vijayan & Poor, 1990 年)、加斯和普尔 (Garth & Poor, 1992 年) 以及鲁斯奇和普尔 (Rusch & Poor, 1994 年) 的论文中均作了描述。图 13-2-19 示出近似条件均值非线性滤波器的一般结构。非线性函数 $\tanh(x)$ 提供了软判决型反馈信号分量。在上面引用的论文中给出了这一类抑制窄带干扰滤波器的性能分析和模拟结果。

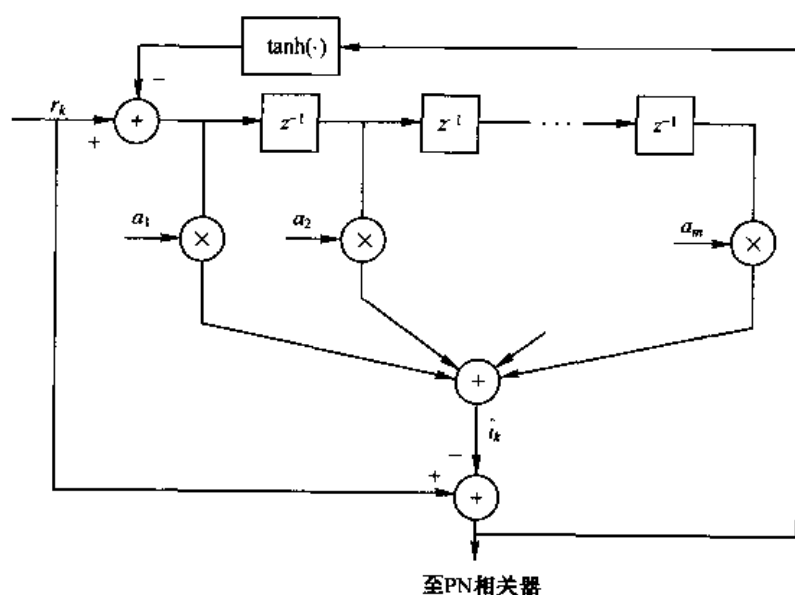


图 13-2-19 非线性删除滤波器

13.2.5 PN 序列的生成

在扩频应用中, PN 序列的生成是技术文献中颇受重视的问题。我们将简要讨论某些 PN 序列的构成, 以及这些序列的自相关和互相关函数的重要性质。对于这个问题更全面的论述, 请参考戈隆布 (Golomb, 1967 年) 的著作。

至今, 最广为人知的二进制 PN 序列是最大长度移位寄存器序列, 如 8.1.3 节中所述, 在 13.2.2 节中作为低速率编码应用也提及。最大长度移位寄存器序列, 或简称为 m 序列, 其长度为 $n = 2^m - 1$ 比特, 由 m 级线性反馈移位寄存器生成, 如图 13-2-20 所示。该序列是周期序列, 其周期为 n 。每个周期包含 2^{m-1} 个“1”和 $2^{m-1} - 1$ 个“0”。

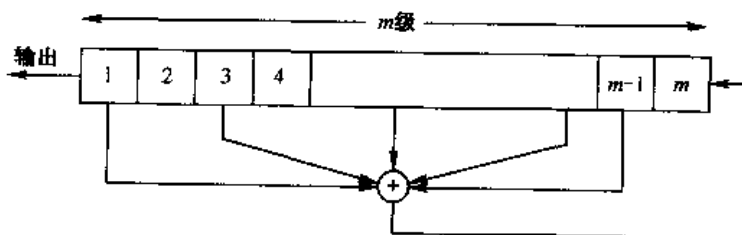


图 13-2-20 一般的 m 级线性反馈移位寄存器

在 DS 扩频应用中,具有元素 $\{0,1\}$ 的二进制序列按关系式

$$p_i(t) = (2b_i - 1)p(t - iT)$$

映射为相应的正、负脉冲序列,式中 $p_i(t)$ 是和 $\{0,1\}$ 元素序列中的 b_i 元素对应的脉冲,即具有元素 $\{0,1\}$ 的二进制序列映射为具有元素 $\{-1,1\}$ 的二进制序列。具有元素 $\{-1,1\}$ 的等效序列称为双极性序列,因为它导致正、负幅度的脉冲。

周期性 PN 序列的一个重要特征是其自相关函数也是周期性的,该函数通常可用双极性序列定义为

$$\phi(j) = \sum_{i=1}^n (2b_i - 1)(2b_{i+j} - 1) \quad (0 \leq j \leq n-1) \quad (13-2-82)$$

式中, n 是周期。显然,当 r 为任一整数时, $\phi(j + rn) = \phi(j)$ 。

理想情况下,一个伪随机序列的自相关函数具有 $\phi(0) = n$ 且 $1 \leq j \leq n-1$ 时 $\phi(j) = 0$ 的特性。在 m 序列中,该伪随机序列的周期自相关函数为

$$\phi(j) = \begin{cases} n & (j = 0) \\ -1 & (1 \leq j \leq n-1) \end{cases} \quad (13-2-83)$$

n 很大,即对于长 m 序列, $\phi(j)$ 的非峰值与峰值之比 $\phi(j)/\phi(0) = -1/n$ 很小,而且从实用观点来看,它是无关紧要的。因此,从自相关函数来看, m 序列几乎是理想的。

在 PN 扩频信号抗干扰应用中,PN 序列的周期必须足够大,以防干扰者知道 PN 发生器的反馈连接方式。然而,这个要求在多数情况下是不现实的,因为干扰者只要通过观察 PN 序列的 $2m$ 个码片即可确定反馈连接方式。PN 序列的这个弱点是由该发生器的线性特性引起的。为了减少 PN 序列抗干扰方面的弱点,可以将移位寄存器的几级输出序列或几个不同 m 序列的输出以非线性方式组合起来,以便产生一个使干扰者难以知晓的非线性序列。进一步避免上述弱点的办法是按发送机和预定接收机事先约定的方案,频繁地改变移位寄存器的反馈连接方式和/或级数。

在某些应用中,PN 序列的互相关特性和自相关特性同样重要。例如,在 CDMA 系统中,每个用户分配一个特定的 PN 序列。在理想情况下,各用户的 PN 序列应是相互正交的。这样,任一用户受到的来自其他用户传输的干扰电平是根据功率相加的。然而,实际应用的 PN 序列呈现某种相关性。

具体地,我们来研究 m 序列类型。已知(萨尔瓦特和珀斯利(Sarwate 和 Pursley,1980 年)提出)任何一对周期相同的 m 序列之间的周期互相关函数具有较大的峰值。表 13-2-1 列出了当 $3 \leq m \leq 12$ 时,各对 m 序列之间周期互相关函数的峰值幅度 ϕ_{\max} 。该表也列出了在 $3 \leq m \leq 12$ 范围内,长度为 $n = 2^m - 1$ 的 m 序列的数目。由表可知,长度为 n 的 m 序列的数目随 m 的增加而迅速增加。还可看出,对于大多数序列,互相关函数的峰值幅度 ϕ_{\max} 与自相关函数峰值之比是一个较大的百分数。

如此大的互相关值是 CDMA 不希望的。尽管有可能选择 m 序列的一个小的子集使其具有相对较小的互相关峰值,但该子集中的序列数太小而不能应用于 CDMA。

比 m 序列具有更好的周期互相关特性的 PN 序列由戈尔德(Gold,1967 年,1968 年)和 Kasami(1966 年)提出,它们从 m 序列导出,说明如下。

戈尔德和 Kasami 证明了确有某些长度为 n 的 m 序列对呈现出三值互相关函数,其值为 $\{-1, -t(m), t(m) - 2\}$,其中

$$t(m) = \begin{cases} 2^{(m+1)/2} + 1 & (\text{奇数 } m) \\ 2^{(m+2)/2} + 1 & (\text{偶数 } m) \end{cases} \quad (13-2-84)$$

表 13-2-1 m 序列和戈尔德(Gold)序列的峰值互相关

m	$n = 2^m - 1$	m 序列数	峰值互相关			
			ϕ_{\max}	$\phi_{\max}/\phi(0)$	$t(m)$	$z(m)/\phi(0)$
3	7	2	5	0.71	5	0.71
4	15	2	9	0.60	9	0.60
5	31	6	11	0.35	9	0.29
6	63	6	23	0.36	17	0.27
7	127	18	41	0.32	17	0.13
8	255	16	95	0.37	33	0.13
9	511	48	113	0.22	33	0.06
10	1023	60	383	0.37	65	0.06
11	2047	176	287	0.14	65	0.03
12	4095	144	1407	0.34	129	0.03

例如,若 $m = 10$, 则 $t(10) = 2^6 + 1 = 65$, 且周期互相关函数的 3 个可能值为 $\{-1, -65, 63\}$ 。因此,这一对 m 序列的最大互相关值是 65。但是,具有不同反馈连接方式的 10 级移位寄存器生成的一族 60 种可能序列,其互相关函数的峰值为 $\phi_{\max} = 383$, 两者峰值相差约 6 倍。这两个长度为 n 的 m 序列的周期互相关函数取 3 个可能值 $\{-1, -t(m), t(m) - 2\}$ 。这种 m 序列叫做优选序列(preferred sequences)。

对于一对优选序列 $\mathbf{a} = [a_1 a_2 \dots a_n]$ 和 $\mathbf{b} = [b_1 b_2 \dots b_n]$, 通过 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的 n 次循环移位形式(反之亦然)作模 2 加,可构成一组长度为 n 的序列,于是得到 n 个新的周期性序列^①,其周期为 $n = 2^m - 1$ 。也可将原序列 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 包括在内,总共有 $n + 2$ 个序列。按这种方法构造的 $n + 2$ 个序列称为戈尔德(Gold)序列。

例 13-2-5 研究长度为 $n = 31 = 2^5 - 1$ 的戈尔德序列的生成。如上所述,当 $m = 5$ 时,互相关峰值为

$$t(5) = 2^3 + 1 = 9$$

彼得森和韦尔登(Peterson & Weldon, 1972 年)导出了两个优选序列,如下面两个多项式所示:

$$h_1(p) = p^5 + p^2 + 1$$

$$h_2(p) = p^5 + p^4 + p^2 + p + 1$$

用来生成两个 m 序列和相应的戈尔德序列的移位寄存器如图 13-2-21 所示。在这种情

① 生成 n 个新序列的等效方法是采用长度为 $2m$ 的具有反馈连接的移位寄存器,该反馈连接由多项式 $h(p) = h_1(p)h_2(p)$ 规定,其中 $h_1(p)$ 和 $h_2(p)$ 是规定 m 级移位寄存器反馈连接的多项式。该移位寄存器生成 m 序列 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 。

况下,存在 33 个不同的序列,相应于这两个 m 序列的 33 个相对相位。其中,31 个序列是非最大长度序列。

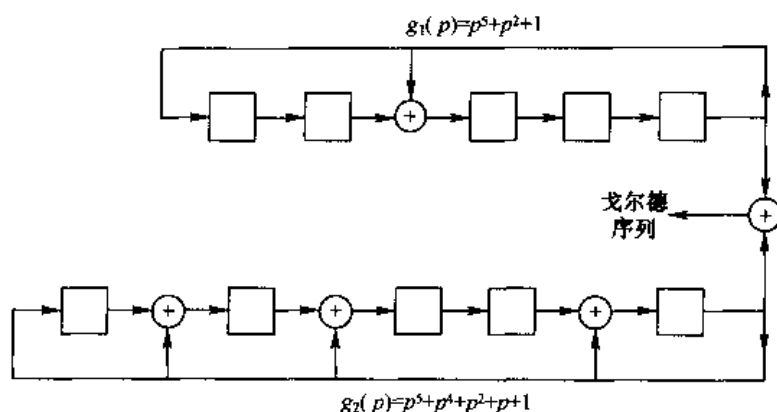


图 13-2-21 长度为 31 的 Gold 序列的生成

除了 a 和 b 序列外,戈尔德序列集不包含长度为 n 的最大长度移位寄存器序列。因此,其自相关函数不是二值的。戈尔德(1968 年)已证明, $n+2$ 个戈尔德序列的集合中的任何一对序列的互相关函数都是三值的,其可能的值为 $\{-1, -t(m), t(m)-2\}$,其中 $t(m)$ 由式 (13-2-84) 定义。与此类似,戈尔德序列的非峰值自相关函数也取值于集合 $\{-1, -t(m), t(m)-2\}$ 。因此,自相关函数的非峰值上边界为 $t(m)$ 。

表 13-2-1 列出了戈尔德序列非峰值自相关函数和峰值互相关函数的值,即 $t(m)$ 。表中还列出以 $\phi(0)$ 归一化后的 $t(m)$ 值。

任意戈尔德序列对的 3 种互相关可能值中每一种发生的频率对系统设计者来说也是令人感兴趣的。在表 13-2-2 中,我们给出当 m 为奇数的 3 种值发生的频率。

表 13-2-2 长度为 $n=2^m-1$, m 为奇数的戈尔德码互相关值发生的频率

互 相 关 值	发 生 频 率
-1	$2^{n-1}-1$
$-[2^{(m+1)/2}+1]$	$2^{n-2}-2^{(n-3)/2}$
$2^{(m+1)/2}-1$	$2^{n-2}+2^{(n-3)/2}$

在 M 序列集合中的任意一对周期为 n 的二进制序列之间,将戈尔德序列的峰值互相关值与已知的互相关下边界进行比较。韦尔奇(Welch,1974 年)导出的 ϕ_{\max} 的下界为

$$\phi_{\max} \geq n \sqrt{\frac{M-1}{Mn-1}} \quad (13-2-85)$$

n 和 M 值都很大时,上式近似为 $\phi_{\max} \approx \sqrt{n}$ 。对于 Gold 序列, $n=2^m-1$, 因此该下边界为 $\phi_{\max} \approx 2^{m/2}$ 。对于戈尔德序列,相对于 $\phi_{\max}=t(m)$,当 m 为奇数时,该边界将小 $\sqrt{2}$ 倍;当 m 为偶数时则小 2 倍。因此,戈尔德序列无法获得较低的边界值。

以与生成戈尔德序列相似的步骤可生成一个较小的 $M=2^{m/2}$ 二进制序列集,其周期为 $M=2^m+1$, $n=2^m-1$, 其中 m 为偶数。生成的步骤如下:从 m 序列 a 出发,从 a 的每 $2^{m/2}+1$

比特中提取值来组成二进制序列 **b**。因此,序列 **b** 是由序列 **a** 中每 $2^{m/2} + 1$ 个比特抽取 1 比特组成的。可以证明,这样产生的序列 **b** 也是周期序列,其周期为 $2^{m/2} - 1$ 。例如,若 $m = 10$,则 **a** 的周期为 $n = 1023$,**b** 的周期为 31。因此,如果观察序列 **b** 的 1023 比特,将看到 31 比特的序列重复 33 次。若取序列 **a** 和 **b** 的 $n = 2^m - 1$ 个比特,并且将序列 **a** 中的比特与序列 **b** 及其所有 $2^{m/2} - 2$ 次循环移位的比特进行模 2 加,结果将形成一个新的序列集。若将序列 **a** 包括在该序列集内,可得到一个长度为 $n = 2^m - 1$ 的 $2^{m/2}$ 个二进制序列集。这些序列称为 Kasami 序列。这些序列的自相关函数和互相关函数取值于集合 $\{-1, -(2^{m/2} + 1), 2^{m/2} - 1\}$ 。因此,该序列集内的任意一对序列的最大互相关值为

$$\phi_{\max} = 2^{m/2} + 1 \quad (13-2-86)$$

ϕ_{\max} 的值满足长度为 $n = 2^m - 1$ 的 $2^{m/2}$ 个序列集的 Welch (Welch) 下边界。因此, Kasami 序列是最优的。

除了熟知的戈尔德序列和 Kasami 序列之外,其他二进制序列也适用于 CDMA。感兴趣的读者可参考斯肖尔茨 (Scholtz, 1979 年)、奥尔森 (Olson, 1977 年) 和萨尔瓦特及珀斯利 (Sarwate & Pursley, 1980 年) 的论著。

最后要指出,虽然我们讨论了一对周期序列之间的周期互相关函数,但在许多实用 CDMA 系统中,信息比特持续时间仅包含一个周期序列的一小部分。在这种情况下,两个周期序列之间的部分周期互相关很重要。林德霍尔姆 (Lindholm, 1968 年) 韦恩伯格和沃尔夫 (Wainberg & Wolf, 1970 年)、弗雷德里克森 (Fredricsson, 1975 年)、贝基尔等 (Bekir et al., 1978 年) 和珀斯利 (Pursley, 1979 年) 的论著中讨论了这个问题。

13.3 跳频扩频信号

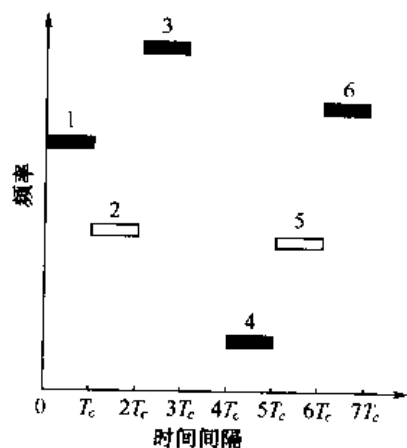


图 13-3-1 跳频(FH)图样的一个例子

在跳频(FH)扩频通信系统中,把可用的信道带宽分割成大量相邻的频率间隙(简称频隙)。在任一信号传输间隔内,发送信号占据一个或多个可用的频隙。在每个信号传输间隔内,按照 PN 发生器的输出伪随机地选择一个或数个频隙。图 13-3-1 所示为在时-频平面上的一个特定的 FH 图样。

图 13-3-2 为 FH 扩频系统发送机和接收机的方框图。调制通常是二进制或 M 元 FSK。例如,若采用二进制 FSK,相应于传输 1 或 0,调制器选择两个频率中的一个。得到的 FSK 信号在频率上搬移一个量,该频率搬移量由 PN 发生器的输出序列确定,即由 PN 发生器输出序列依次选择频率合成器合成的某一频率。该频率与调制器的输出混频,再将频率搬移后的信号发送到信道。例如,PN 发生器输出的 m 个比特可用来规定 $2^m - 1$ 种可能的频率搬移。

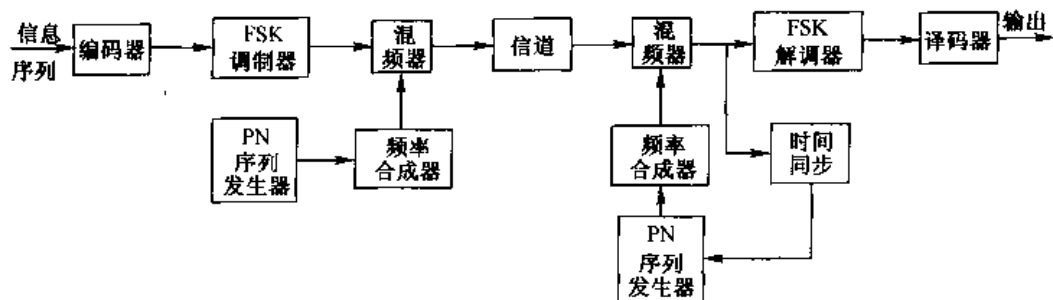


图 13-3-2 FH 扩频系统框图

在接收机中,有一个与发送端相同的 PN 发生器与接收信号同步,并用来控制频率合成器的输出。因此,在接收机中通过合成器的输出与接收信号混频可将发送机引入的伪随机频率搬移出去,再用 FSK 解调器对得到的信号解调,便可恢复原信号。用来维持 PN 发生器与频率搬移的接收信号同步的信号通常从接收信号中提取。

虽然在 AWGN 信道中,PSK 调制能给出比 FSK 更好的性能,但在跳频图样所用的频率合成中很难保持相位相干。同时,当信号在信道中传播时,信号在一个很宽的带宽上从一个频率跳到另一频率,要保持相位相干也很困难。因此,非相干检测 FSK 常用于 FH 扩频信号。

在图 13-3-2 所示的 FH 系统中,载波频率在每个信号传输间隔内是伪随机跳变的。 M 个载有信息的单频是频率相隔 $1/T_c$ 的相邻频率,这里 T_c 是信号传输间隔。这种跳频方式叫做分组跳频(block hopping)。

另一种跳频方式是独立的单频跳变,它较少受到人为干扰策略的损伤。在这种跳频方式中,调制器输出的 M 个可能的单频分配给分散的频隙。图 13-3-3 示出了实现该方式的一种方法,图中由 PN 发生器输出的 m 个比特和 k 个信息比特来确定发送信号的频隙。

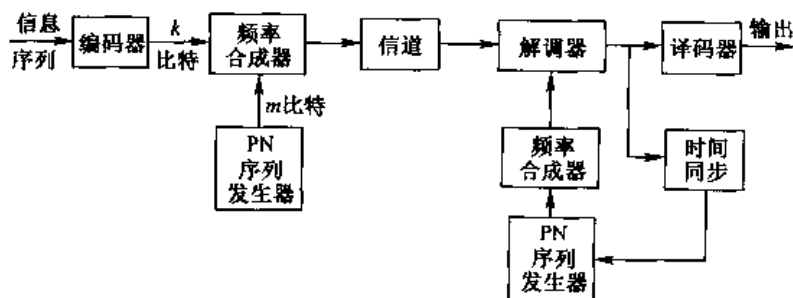


图 13-3-3 独立单频 FH 扩频系统框图

通常选择 FH 速率等于或大于(编码或未编码的)符号速率。若每个符号多次跳频,就是快跳频信号。另一方面,若跳频按符号速率进行,就是慢跳频信号。

快跳频用于 AJ(抗人为干扰)场合,能防止所谓的跟随器式干扰源(follower jammer)有足够的时间截获频率,并将该频率连同若干邻近频率一起重发,以便产生干扰信号分量。然而,把一个信号分成若干个跳频单元也会带来不良后果,这是因为各分散单元的能量是以非相干方式合并的。因此,解调器遭受到非相干合并损失形式的损伤,如 12.1 节所述。

FH 扩频信号主要用在需要 AJ(抗人为干扰)设计方案的数字通信系统和 CDMA 中,在这些应用中,许多用户共享共同的带宽。在大多数情况下,FH 信号优于 DS 扩频信号,这是因为

DS 扩频信号对同步要求严格。特别地,DS 系统的定时和同步必须在码片间隔 $T_c = 1/W$ 的几分之一的时间间隔内建立。另一方面,在 FH 系统中,码片间隔是在一个带宽为 $B \ll W$ 的特定频隙内发送一个信号所用的时间,该间隔约 $1/B$,远大于 $1/W$ 。因此,FH 系统的定时要求不像 DS 系统那么严格。

13.2.2 节和 13.2.3 节将集中讨论 FH 扩频信号在 AJ(抗人为干扰)和 CDMA 系统中的应用。首先将确定在宽带 AWGN 干扰下编码和未编码 FH 信号的差错率性能,再研究在 AJ 和 CDMA 应用中出现的一种更严重的干扰形式——部分频带干扰。采用编码来对抗这种形式的干扰将获得良好的效果。13.3.3 节以 FH CDMA 系统的一个例子来讨论,该系统用于卫星信道的移动用户。

13.3.1 AWGN 信道中的 FH 扩频信号的性能

下面研究宽带干扰下的 FH 扩频信号的性能,该干扰可统计表征为 AWGN 且功率密度谱为 J_0 。对于非相干检测的二进制正交 FSK 和慢跳频(1 跳/比特),其错误概率在 5.4.1 节中导出,即

$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b/2} \quad (13-3-1)$$

式中, $\gamma_b = \mathcal{E}_b/J_0$ 。另一方面,如果比特间隔再分成 L 个子间隔,且 FH 二进制 FSK 在每个子间隔上传输,可得到快 FH 信号。将与 L 个子间隔相应的匹配滤波器输出信号进行平方律合并,根据 12.1 节的结果,可得该 FH 信号的差错率性能为

$$P_2(L) = \frac{1}{2^{2L-1}} e^{-\gamma_b/2} \sum_{i=0}^{L-1} K_i \left(\frac{1}{2} \gamma_b \right)^i \quad (13-3-2)$$

式中,比特 SNR 是 $\gamma_b = \mathcal{E}_b/J_0 = L\gamma_c$, γ_c 是 L 个码片符号中的码片 SNR,

$$K_i = \frac{1}{i!} \sum_{r=0}^{L-1-i} \binom{2L-1}{r} \quad (13-3-3)$$

对于给定的比特 SNR γ_b ,式(13-3-2)的差错率大于式(13-3-1)的差错率。对于给定的差错率和给定的 L ,SNR 的这种差别叫做非相干合并损失,如 12.1 节所述且如图所示。

编码改善了 FH 扩频系统的性能,其改善量通常称为编码增益,编码增益取决于编码参数。假设用线性二进制 (n, k) 分组码和二进制 FSK 调制,以每编码比特跳频一次来发送比特。平方律解调后的 FSK 信号再用软判决译码,码字错误概率的上边界为

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M P_2(m) \quad (13-3-4)$$

式中, $P_2(m)$ 是发送全零码字时,在第 m 个码字和全零码字之间判决的错误概率。 $P_2(m)$ 表达式在 8.1.4 节中导出,且其形式与式(13-3-2)及式(13-3-3)一样,只是其中的 L 用 w_m 代替, γ_b 用 $\gamma_b R_c w_m$ 代替。这里 w_m 是第 m 个码字的重量, R_c 是码率。乘积 $R_c w_m$ 表示编码增益,它不小于 $R_c d_{\min}$ 。于是求得在宽带干扰下,慢跳频的分组码 FH 系统的性能。

通过重新解释式(13-3-4)中的二进制事件概率 $P_2(m)$,可求得快跳频(n_2 跳/编码比特)系统的错误概率。 n_2 跳/编码比特可以解释为一个重复码,它和一个重量分布为 $\{w_m\}$ 的特殊 (n_1, k) 二进制线性码组合时,得到重量分布为 $\{n_2 w_m\}$ 的 $(n_1 n_2, k)$ 二进制线性码。因此, $P_2(m)$ 的形式与式(13-3-2)相同,只是其中的 L 用 $n_2 w_m$ 代替, γ_b 用 $\gamma_b R_c n_2 w_m$ 代替,这里 $R_c =$

$k/n_1 n_2$ 。注意, $\gamma_b R, n_2 w_m = \gamma_b w_m k/n_1$ 正是由特殊的 (n_1, k) 码得到的编码增益。因此, 使用重复码导致非相干合并损失的增加。

使用硬判决译码和慢跳频时, 非相干检测解调器输出端的编码比特错误概率为

$$p = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b R_c / 2} \quad (13-3-5)$$

利用契尔诺夫边界, 容易求出码字错误概率的上边界为

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (13-3-6)$$

如果使用 n_2 跳/编码比特的快跳频, 并且像软判决译码那样, 将相应于 n_2 次跳频的匹配滤波器平方律检测输出相加, 以形成该编码比特的两个判决变量, 那么误比特率 p 也由式(13-3-2)确定, 只是其中的 L 用 n_2 代替, γ_b 用 $\gamma_b R_c n_2$ 代替。因此, 在宽带干扰下, 快速 FH 系统的性能比慢速 FH 系统的性能差, 其差值等于 n_2 次跳频接收信号的非相干合并损失。

在快速跳频系统中, 无论硬判决还是软判决译码, 使用重复码都不产生编码增益, 编码增益仅来自 (n_1, k) 分组码。因此, 在用非相干组合的快速 FH 系统中, 重复码不产生效率。一种更有效的编码方法是采用单独的低速率二进制码, 或者采用级联码。把非二进制码与 M 元 FSK 结合使用, 可以得到性能的附加改善。这种情况的错误概率边界可从 12.1 节给出的结果中获得。

虽然在以上描述中只评估了线性分组码的性能, 但也可比较容易地导出二进制卷积码的性能。宽带干扰下跳频信号软判决维特比译码和硬判决维特比译码时的错误概率推导留给读者作为练习。

比特能量 \mathcal{E}_b 可以表示为 $\mathcal{E}_b = P_{av}/R$, 其中 R 是信息速率(b/s), 且 $J_0 = J_{av}/W$ 。因此, γ_b 也可表示为

$$\gamma_b = \frac{\mathcal{E}_b}{J_0} = \frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \quad (13-3-7)$$

在这个表达式中, 对于 FH 扩频信号而言, 可把 W/R 看做处理增益, 而把 J_{av}/P_{av} 看做干扰容限。

13.3.2 部分频带干扰下 FH 扩频信号的性能

本节研究的部分频带干扰可建模为零均值高斯随机过程, 其功率密度谱在总带宽 W 的一部分 α 上是平坦的, 其他部分为零。在功率密度谱不为零的范围内, 其值为 $\Phi_{xx}(f) = J_0/\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ 。这种干扰模型可应用于人为干扰信号, 或应用于 FH CDMA 系统中来自其他用户的干扰。

假设部分频带干扰来自人为干扰源, 该干扰源可选择 α 使其对通信系统的影响最佳。在采用二进制 FSK 调制和非相干检测的未编码伪随机慢跳频 FH 系统中, 接收信号受到人为干扰的概率为 α , 不受人为干扰的概率为 $1 - \alpha$ 。当它受到人为干扰时, 其错误概率为 $\frac{1}{2} \exp(-\mathcal{E}_b/2J_0)$; 不受干扰时, 解调将无差错。因此, 平均错误概率为

$$P_2(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha \exp\left(-\frac{\alpha \mathcal{E}_b}{2J_0}\right) \quad (13-3-8)$$

式中, \mathcal{E}_b/J_0 也可表示为 $(W/R)/(J_{av}/P_{av})$ 。

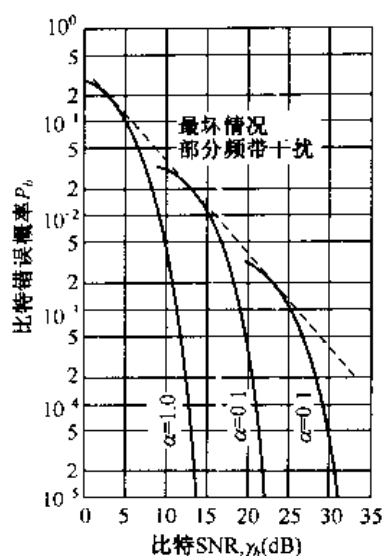


图 13-3-4 具有部分频带干扰的二进制 FSK 性能

图 13-3-4 示出了不同 α 值时的差错率,它是 \mathcal{E}_b/J_0 的函数。干扰源的最佳策略是选择 α 值,以使错误概率最大。将 $P_2(\alpha)$ 微分,并在区间 $0 \leq \alpha \leq 1$ 内求极值,可得

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{E}_b/2J_0} = 2 \frac{J_{av}/P_{av}}{W/R} & (\mathcal{E}_b/J_0 \geq 2) \\ 1 & (\mathcal{E}_b/J_0 < 2) \end{cases} \quad (13-3-9)$$

对于最坏部分频带人为干扰源,其相应的错误概率为

$$P_2 = \frac{e^{-1}}{\mathcal{E}_b/J_0} = \left[e \left(\frac{W/R}{J_{av}/P_{av}} \right) \right]^{-1} \quad (13-3-10)$$

尽管全频带人为干扰源的错误概率是按指数递减的,但最坏部分频带人为干扰的错误概率只与 \mathcal{E}_b/J_0 成反比。这个结果类似于二进制 FSK 在瑞利衰落信道中(见 14.3 节)的差错率性能,也类似于未编码的 DS 扩频系统受到最坏情况脉冲干扰时(见 13.2.3 节)的差错率性能。

正如下面将要证明的,通过编码方法获得的信号分集提供了相对于未编码系统性能的显著改善。这种信号设计的方法对于衰落信道上的信号传输也同样有效,第 14 章将证明。

为了说明在有部分频带干扰下的 FH 扩频信号分集的效益,假设相同的信息符号用二进制 FSK 在 L 个独立跳频上发送。这可通过把信号传输间隔再划分为 L 个子间隔实现,正如前面介绍快跳频时说的。在除去跳频图样之后,信号通过一对匹配滤波器进行解调,该滤波器的输出用平方律检测,并在每个子间隔末尾抽样。和 L 个跳频相对应的平方律检测信号经加权及求和形成一对判决变量(度量),记为 U_1 和 U_2 。

当判决变量 U_1 包含信号分量时, U_1 和 U_2 为

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{k=1}^L \beta_k |2\mathcal{E}_c + N_{1k}|^2 \\ U_2 &= \sum_{k=1}^L \beta_k |N_{2k}|^2 \end{aligned} \quad (13-3-11)$$

式中, β_k 表示加权系数, \mathcal{E}_c 表示 L 个码片符号中每个码片的信号能量, $\{N_{jk}\}$ 表示匹配滤波器输出端的加性高斯噪声项。

如果使发送频率在一次或多次跳频中被成功地撞击,那么加权系数的最佳选择可防止人为干扰源使合并器饱和。理想的 β_k 应选为等于相应噪声项 $|N_k|$ 方差的倒数。因此,每个码片的噪声方差可通过这个加权归一化到 1,相应的信号也就被标度变换了。这意味着当某一特殊跳频上的信号频率受到人为干扰时,相应的加权值是很小的;而在给定的跳频上没有人为干扰时,权值比较大。实际上,对于部分边界噪声人为干扰,加权通过利用具有增益的 AGC 来完成,AGC 的增益是根据发送单频相邻的频带中的噪声功率测量值来设置的。这等效于解码器具有边信息(即人为干扰源状态的知识)。

假设宽带高斯噪声的功率密度谱为 N_0 ,且在 αW 频带上存在部分频带干扰,此干扰也是高斯型的,其功率密度谱为 J_0/α 。在部分频带干扰的情况下,噪声项 N_{1k} 和 N_{2k} 的二阶矩为

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{2} E(|N_{1k}|^2) = \frac{1}{2} E(|N_{2k}|^2) = 2\mathcal{E}_c \left(N_0 + \frac{J_0}{\alpha} \right) \quad (13-3-12)$$

在这种情况下,选取 $\beta_k = 1/\sigma_k^2 = [2\mathcal{E}_c (N_0 + J_0/\alpha)]^{-1}$ 。在无部分频带干扰时, $\sigma_k^2 = 2\mathcal{E}_c N_0$, 故 $\beta_k = (2\mathcal{E}_c N_0)^{-1}$ 。注意, β_k 是一个随机变量。

如果 $U_2 > U_1$, 则解调产生差错。虽然能够求出准确的错误概率, 但借助契尔诺夫边界可得出一个更容易评价和解释的结果。具体地, 错误概率的契尔诺夫(上)边界为

$$\begin{aligned} P_2 &= P(U_2 - U_1 > 0) \leq E \{ \exp[v(U_2 - U_1)] \} \\ &= E \left\{ \exp \left[-v \sum_{k=1}^L \beta_k (|2\mathcal{E}_c + N_{1k}|^2 - |N_{2k}|^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (13-3-13)$$

式中, v 是一个变量, 其最佳值可得到可能的最紧密边界。

将式(3-3-13)对噪声分量的统计量和加权系数 $\{\beta_k\}$ 的统计量求平均, 其中干扰的统计特性使得 $\{\beta_k\}$ 是随机的。首先保持 $\{\beta_k\}$ 固定不变, 对噪声统计量求平均, 得到

$$\begin{aligned} P_2(\beta) &= E \left[\exp \left(-v \sum_{k=1}^L \beta_k |2\mathcal{E}_c + N_{1k}|^2 + v \sum_{k=1}^L \beta_k |N_{2k}|^2 \right) \right] \\ &= \prod_{k=1}^L E \left[\exp(-v\beta_k |2\mathcal{E}_c + N_{1k}|^2) \right] E \left[\exp(v\beta_k |N_{2k}|^2) \right] \\ &= \prod_{k=1}^L \frac{1}{1 - 4v^2} \exp \left(\frac{-4\mathcal{E}_c^2 \beta_k v}{1 + 2v} \right) \end{aligned} \quad (13-3-14)$$

因为 FSK 单频受人为干扰的概率为 α , 所以 $\beta_k = [2\mathcal{E}_c (N_0 + J_0/\alpha)]^{-1}$ 的概率为 α , $\beta_k = (2\mathcal{E}_c N_0)^{-1}$ 的概率为 $1 - \alpha$ 。于是, 契尔诺夫边界为

$$\begin{aligned} P_2 &\leq \prod_{k=1}^L \left\{ \frac{\alpha}{1 - 4v^2} \exp \left[\frac{-2\mathcal{E}_c v}{(N_0 + J_0/\alpha)(1 + 2v)} \right] + \frac{1 - \alpha}{1 - 4v^2} \exp \left[\frac{-2\mathcal{E}_c v}{N_0(1 + 2v)} \right] \right\} \\ &= \left\{ \frac{\alpha}{1 - 4v^2} \exp \left[\frac{-2\mathcal{E}_c v}{(N_0 + J_0/\alpha)(1 + 2v)} \right] + \frac{1 - \alpha}{1 - 4v^2} \exp \left[\frac{-2\mathcal{E}_c v}{N_0(1 + 2v)} \right] \right\}^L \end{aligned} \quad (13-3-15)$$

下一步是将式(13-3-15)的边界对变量 v 最佳化。然而, 目前形式的边界表达式很难处理。如果假设 $J_0/\alpha \gg N_0$, 使得式(13-3-15)中的第二项与第一项相比可以忽略, 这样可大大简化计算。换言之, 令 $N_0 = 0$, 则 P_2 的边界简化为

$$P_2 \leq \left\{ \frac{\alpha}{1 - 4v^2} \exp \left[\frac{-2\alpha v \mathcal{E}_c}{J_0(1 + 2v)} \right] \right\}^L \quad (13-3-16)$$

容易证明, 该边界相对于 v 的最小值和相对于 α (最坏部分频带干扰) 的最大值分别发生在 $\alpha = 3J_0/\mathcal{E}_c \leq 1$ 和 $v = \frac{1}{4}$ 处。应用这些参数值, 式(13-3-16)简化为

$$P_2 \leq P_2(L) = \left(\frac{4}{e\gamma_c} \right)^L = \left(\frac{1.47}{\gamma_c} \right)^L, \quad \gamma_c = \frac{\mathcal{E}_c}{J_0} = \frac{\mathcal{E}_b}{LJ_0} \geq 3 \quad (13-3-17)$$

式中, γ_c 是 L 个码片符号中的码片 SNR。等效地,

$$P_2 \leq \left[\frac{1.47(J_{av}/P_{av})}{W/R} \right]^L, \quad \frac{W/R}{L(J_{av}/P_{av})} \geq 3 \quad (13-3-18)$$

式(13-3-17)的结果首先是由维特比和雅各布斯(Viterbi & Jacobs, 1975 年)导出的。

可以看到,最坏部分频带干扰的错误概率随码片 SNR γ_c 的增大而指数减小。这一结果与瑞利衰落信道分集技术的性能特征相似(见 14.4 节)。式(13-3-17)的右边表示如下:

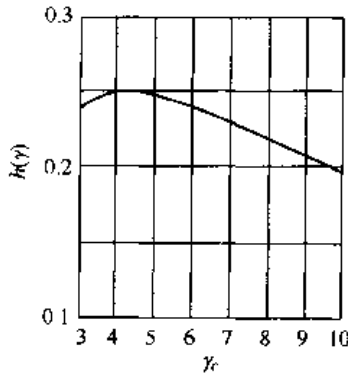


图 13-3-5 函数 $h(\gamma_c)$ 的图形

$$P_2(L) = \exp[-\gamma_b h(\gamma_c)] \quad (13-3-19)$$

式中, $h(\gamma_c)$ 函数定义为

$$h(\gamma_c) = -\frac{1}{\gamma_c} \left[\ln\left(\frac{4}{\gamma_c}\right) - 1 \right] \quad (13-3-20)$$

$h(\gamma_c)$ 的曲线如图 13-3-5 所示。我们看到,该函数在 $\gamma_c = 4$ 处有最大值 $\frac{1}{4}$ 。因此,最佳码片 SNR 为 $10\lg\gamma_c = 6$ dB。在最佳 SNR 处,差错率的上边界为

$$P_2 \leq P_2(L_{\text{opt}}) = e^{-\gamma_b/4} \quad (13-3-21)$$

将式(13-3-21)的错误概率边界与式(13-3-1)给出的二进制 FSK 在平坦噪声谱中的错误概率相比,可以看出,最坏部分频带干扰和 L 个码片平方律合并中的非相干合并损失的综合影响是 3 dB。但要强调指出,对于某一给定的 ϵ_b/J_0 ,当分集的阶数不是最佳选择时,该损失较大。

受部分频带干扰恶化的跳频系统可用编码改善其性能。特别地,如果采用具有 $M=2^k$ 个码字和每个码字 L 阶分集的分组正交码,码字错误概率的上边界为

$$P_M \leq (2^k - 1)P_2(L) = (2^k - 1) \left(\frac{1.47}{\gamma_c} \right)^L = (2^k - 1) \left(\frac{1.47}{k\gamma_b/L} \right)^L \quad (13-3-22)$$

等效比特错误概率的上边界为

$$P_b \leq 2^{k-1} \left(\frac{1.47}{k\gamma_b/L} \right)^L \quad (13-3-23)$$

图 13-3-6 所示为 $L=1, 2, 4, 8$ 和 $k=1, 3$ 时的比特错误概率。当分集是最佳选择时,该上边界为

$$\begin{aligned} P_b &\leq 2^{k-1} \exp\left(-\frac{1}{4}k\gamma_b\right) \\ &= \frac{1}{2} \exp\left[-k\left(\frac{1}{4}\gamma_b - \ln 2\right)\right] \end{aligned} \quad (13-3-24)$$

因此得到性能的改善量为 $10\lg[k(1 - 2.77/\gamma_b)]$ 。例如,如果 $\gamma_b = 10$ 且 $k=3$ (即八进制调制),其改善量为 3.4 dB;当 $k=5$ 时,改善量为 5.6 dB。

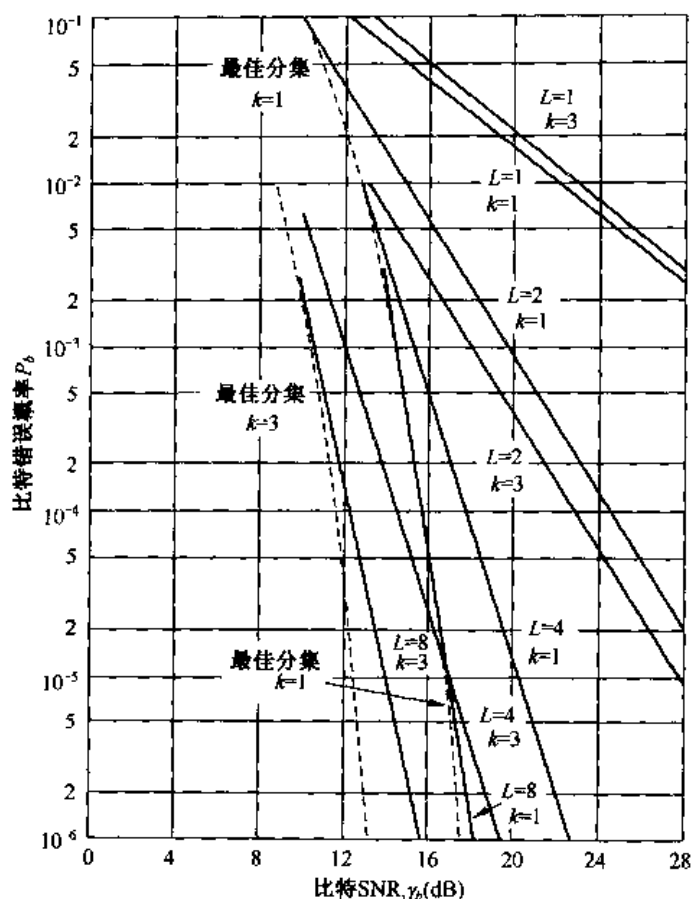


图 13-3-6 最坏部分频带干扰信道中,具有 L 阶分集的二进制和八进制 FSK 的性能

将级联码和软判决译码结合使用可进一步获益。在下面的例子中,在具有部分频带干扰的信道上采用双 k 卷积码作为外码,将哈达马码(Hadamard code)作为内码。

例 13-3-1 假设对于每个码比特采用带有启-闭键控(OOK)调制的哈达马 $H(n, k)$ 恒重码,该码的最小距离是 $d_{\min} = \frac{1}{2}n$ 。因此,用 OOK 调制得到的有效分集阶数是 $\frac{1}{2}d_{\min} = \frac{1}{4}n$, 每个码字发送 $\frac{1}{2}n$ 个 FH 的单频。因此,当这个码被单独使用时,有

$$\gamma_c = \frac{k}{\frac{1}{2}n} \gamma_b = 2R_c \gamma_b \quad (13-3-25)$$

对于部分频带干扰信道,这些码在软判决译码时的比特差错率性能的上边界为

$$P_b \leq 2^{k-1} P_2 \left(\frac{1}{2} d_{\min} \right) = 2^{k-1} \left(\frac{1.47}{2R_c \gamma_b} \right)^{n/4} \quad (13-3-26)$$

于是,如果哈达马 (n, k) 码用做内码,码率为 $1/2$ 的双 k 卷积码用做外码(见 8.2.9 节),那么在最坏部分频带干扰下的比特差错率性能为(见式(8-2-56))

$$P_b \leq \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \sum_{m=4}^{\infty} \beta_m P_2 \left(\frac{1}{2} m d_{\min} \right) = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \sum_{m=4}^{\infty} \beta_m P_2 \left(\frac{1}{2} m n \right) \quad (13-3-27)$$

式中, $P_2(L)$ 由式(13-3-17)求出, 其中

$$\gamma_c = \frac{k}{n} \gamma_b = R_c \gamma_b \quad (13-3-28)$$

图 13-3-7 所示为双 k 码 ($k=5, 4, 3$) 分别与哈达马码 $H(20, 5)$ 、 $H(16, 4)$ 、 $H(12, 3)$ 级联时的性能。

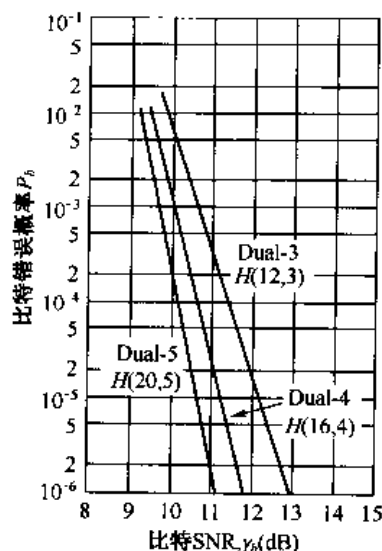


图 13-3-7 最坏部分频带干扰信道中, 与哈达马码级联的双 k 码的性能

以上集中讨论了软判决译码。另一方面, 硬判决译码得到的性能比软判决译码得到的相差很多(几个分贝)。然而, 在级联编码方案中, 把内码的软判决译码和外码的硬判决译码混合在一起, 是译码复杂性与性能之间一个合理的折衷。

FH 扩频系统中的另一个严重威胁是部分频带多频人为干扰。这种干扰的影响类似于频谱平坦的部分频带噪声人为干扰。通过编码获得的分集是改善 FH 系统性能的一种有效手段。通过对解调器输出适当加权来抑制干扰源的影响, 可获得附加的性能改善。

13.3.3 基于 FH 扩频信号的 CDMA 系统

13.2.2 节研究了基于 DS 扩频信号的 CDMA 系统。正如本书前面指出的, 采用基于 FH 扩频信号的 CDMA 系统也是可能的。在这样的系统中, 每一对发送机-接收机拥有自己的伪随机跳频图样。除了这一点区别外, 所有用户的发送机和接收机都相同, 即有相同的编码器、译码器、调制器和解调器。

基于 FH 扩频信号的 CDMA 系统, 由于其定时要求不像 DS 扩频信号那么严格, 因此对移动用户(陆地、空中、海上)特别有吸引力。另外, 频率合成技术及有关硬件的发展使跳频系统的可能带宽远大于现有 DS 扩频系统所能达到的带宽, 因此使用跳频可获得更大的处理增益。使用 FH 的 CDMA 系统的容量也较大。维特比(Viterbi, 1978 年)已证明, 采用双 k 编码和 M 元 FSK 调制有可能最多容纳高达 $\frac{3}{8} W/R$ 的用户同时通信, 这些用户在带宽为 W 的信道上以信息速率 R b/s 传送信息。

最早建造的 CDMA 系统之一是基于 FH 编码扩频信号的, 用来为小型移动(陆地、海上、

空中)终端提供多址战术卫星通信,每个终端在信道上间歇地发送短消息。该系统称为战术卫星通信系统(TATS),德鲁伊赫特和伯恩斯坦(Drouihet & Bernstein,1969年)的论文中介绍了该系统。

TATS系统使用一种八进制里德-所罗门(Reed-Solomon)(7,2)码^①。在该系统中,编码器输入的两个3比特信息符号生成一个7符号的码字。每一个3比特编码符号用八进制FSK调制发送。8个可能的频率相互间隔 $1/T_c$ Hz,其中 T_c 是单个频率传输的(码片)持续时间。一个码字除了有7个符号外,还包括第八个符号。该符号及其相应的频率是固定的,并在每个码字开始时发送,用做提供接收机的定时和频率同步^①。因此,每个码字的发送时间为 $8T_c$ s。

TATS系统传送信息的速率为75 b/s和2400 b/s。因此, T_c 分别为10毫秒(ms)和312.5微秒(μ s)。对应于一个编码符号的每一个单频是频率跳变的,所以当信息速率为75 b/s时,跳频速率是100跳/秒(hop/s);信息速率为2400 b/s时,跳频速率是3200跳/秒。

在里德-所罗门(7,2)码中,有 $M=2^6=64$ 个码字,且最小码距为 $d_{\min}=6$ 。这意味着,这种码的有效分集阶数为6。

在接收机中,接收信号首先被解跳频,然后通过由并行的8个匹配滤波器组成的一个滤波器组解调,每个滤波器调谐到8个可能频率之一上。每个滤波器输出经包络检测后量化成4比特(16种电平之一),并馈送给译码器。译码器取出56个滤波器输出值,它相应于每个7符号码字的接收,用适当的包络检测输出线性组合的办法形成64个判决变量,这些变量与(7,2)码中的64个可能的码字相对应。按照最大判决变量对码字进行判决。

通过限制匹配滤波器输出为16个电平,信道中其他用户的干扰(串音)只会引起较小的性能损失(如一个码片上有强干扰,性能损失为0.75 dB。7个码片中2个码片上有强干扰时,性能损失为1.5 dB)。TATS系统中的AGC时间常数大于码片间隔 T_c ,以致于没有必要采用13.3.2节所述的解调器输出最佳加权方式。

在AWGN及最坏部分频带干扰下的TATS信号错误概率的推导,留给读者作为练习(见习题13-23和13-24)。

13.4 其他类型的扩频信号

DS和FH是实际中最常用的扩频信号形式,还有其它方法可在扩频信号中引入伪随机性。一种类似于FH的方法是跳时(TH)。在TH中,时间间隔远大于信息速率的倒数,该时间间隔被划分为大量的时隙。编码信息符号以一个或多个码字组成一个码块,在一个伪随机选择的时隙中发送。PSK调制可用来发送编码比特。

举例来说,假设时间间隔 T 被划分为1000时隙,每个时隙的宽度为 $T/1000$ 。当信息比特率为 R b/s时, T s内发送的比特数就是 RT 。编码将该数目增加到 RT/R_c 比特,其中 R_c 为码率。因此,咱 $T/1000$ s时间间隔内必须发送 RT/R_c 个比特。如果采用二进制PSK调制方法,那么比特率就是 $1000R/R_c$,所需要的带宽约为 $W=1000R/R_c$ 。

TH扩频系统发送机和接收机的方框图如图13-4-1所示。由于发送信号的突发特性,在

^① 因为涉及移动用户,故存在与传输有关的多普勒频率偏移。在信号解调中必须跟踪和补偿该频率偏移。同步信号的使用可解决这个问题。

TH 系统的发送机中必须有缓存器,如图 13-4-1 所示。在接收机中,也要使用一个缓存器,以便向用户提供均匀的数据流。

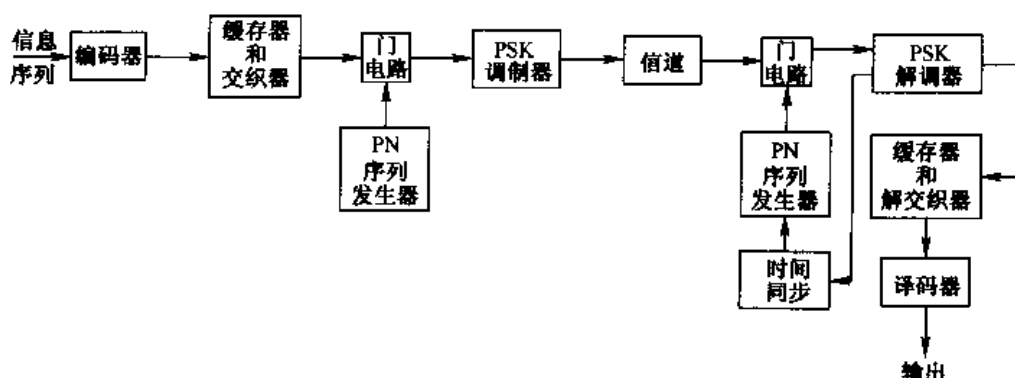


图 13-4-1 跳时(TH)扩频系统框图

正如部分频带干扰会使未编码的 FH 扩频系统性能损伤那样,部分时间(脉冲式)干扰对 TH 扩频系统也有类似的影响。编码和交织是对抗这种类型干扰的有效手段,正如在 FH 和 DS 系统中证明的。或许,TH 系统的主要缺点是对定时要求严格,不仅比 FH 系统严格,还比 DS 系统严格。

其他类型的扩频信号可以通过 DS、FH 和 TH 的组合来得到。例如,可以得到一个混合 DS/FH,它是 PN 序列与跳频的结合。单个跳频中发送的信号是由相干解调的 DS 扩频信号组成的。来自不同跳频的接收信号是以非相干方式合并的(包络或平方律合并),因为在一跳内进行相干检测,所以优于纯 FH 系统。然而,性能上得益的代价是增加了系统复杂性、提高了成本以及对定时的更严格要求。

另一个可能的混合扩频信号是 DS/TH。它不像 DS/FH 那样实用,主要是因为系统复杂性增加了以及对定时的要求更严格了。

13.5 扩频系统的同步

接收机对所接收的扩频信号的同步可分为两个阶段:初始捕捉阶段和信号被初始捕捉后的跟踪阶段。

1. 捕捉

在直接序列扩频系统中,PN 码必须在码片间隔为 $T_c \approx 1/W$ 的一个小范围内达到同步。初始同步问题可看做试图使接收机时钟与发送机时钟在时间上同步的问题。通常,在扩频系统中使用一个极准确且稳定的时钟。因此,准确时钟可使接收机与发送机之间的时间不确定性降低。然而,由于发送机与接收机之间距离的不确定性,所以总有初始定时的不确定性。当两个移动用户之间通信时,这是一个很特殊的问题。在任何情况下,建立初始同步的常规过程是发送机发送一个已知的伪随机数据序列给接收机。接收机以一种搜索模式连续地寻找该序列,以便建立初始同步。

假设初始定时的不确定性为 T_u ,码片持续时间为 T_c 。如果在加性噪声和其他干扰下初

始同步发生,为了在每一时刻测试同步,有必要驻留时间 $T_d = NT_c$,如果在(粗略的)时间节拍为 $T_c/2$ 的时间不确定间隔上搜索,那么建立初始同步所需的时间为

$$T_{\text{init sync}} = \frac{T_u}{\frac{1}{2} T_c} NT_c = 2NT_u \quad (13-5-1)$$

显然,发送给接收机的同步序列必须至少和 $2NT_c$ 一样长,以便接收机有足够的时间以串行的方式进行必要的搜索。

从原理上讲,匹配滤波器或互相关是建立初始同步的最佳方法。匹配滤波器(它与已知的伪随机序列产生的数据波形相匹配)连续地搜索预定阈值超过量,一旦搜索到,初始同步就建立起来,并且解调器进入“数据接收”模式(状态)。

另外,可以采用图 13-5-1 所示的滑动相关器。该相关器通常以离散时间间隔 $\frac{1}{2} T_c$ 不确定地循环通过,并且使接收信号与已知的同步序列进行相关运算。在时间间隔 NT_c (N 个码片)上进行互相关运算,该相关器输出与阈值相比较,确定是否存在已知的信号序列。如果未超过该阈值,那么已知的参考序列在时间上提前 $\frac{1}{2} T_c$ s,而且重复该相关过程。这些操作一直进行到检测出信号或者在定时不确定间隔 T_u 上搜索完成为止。在后一种情况中,搜索过程被重复。

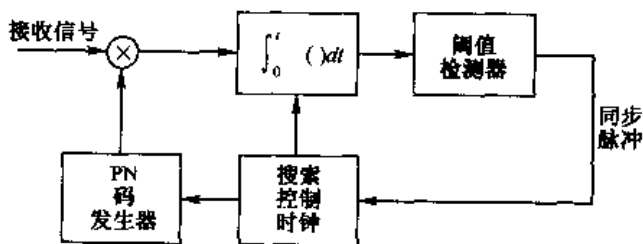


图 13-5-1 用于 DS 信号捕捉的滑动相关器

类似的过程也可用于 FH 信号。在这种情况下,问题是使 PN 码同步,以便控制跳频图样。为了完成这个初始同步,向接收机发送一个已知的 FH 信号。接收机中的初始捕捉系统搜索这个已知的 FH 信号图样。例如,采用一个匹配滤波器组,它调谐到已知图样的发送频率上,其输出必然是适当延时的、包络或平方律检测的、加权的(如果必要的话)以及相加的(非相干积分),以便产生输出信号,再与阈值比较。当超过阈值时,表明信号出现。搜索过程通常在时间上连续进行,直到超过阈值。表示上述信号捕捉方案的框图如图 13-5-2 所示。作为一种替代方案,采用单一的一对匹配滤波器-包络检测器,前置一个跳频图样发生器,后置一个检测积分器和一个阈值检测器。图 13-5-3 示出了一种基于串行搜索的结构,它与 DS 扩频信号的滑动相关器相似。

DS 信号的滑动相关器或与 FH 信号相对应的系统(如图 13-5-3 所示)本质上是进行一种串行搜索,一般较耗费时间。另一种方案可引入某种程度的并行机制,通过两个或多个相关器并行操作并在非重叠时隙上搜索来实现。在这种情况下,搜索时间减少,其代价是系统实现更加复杂,费用更高。图 13-5-2 所示为 FH 信号的这种并行实现方案。

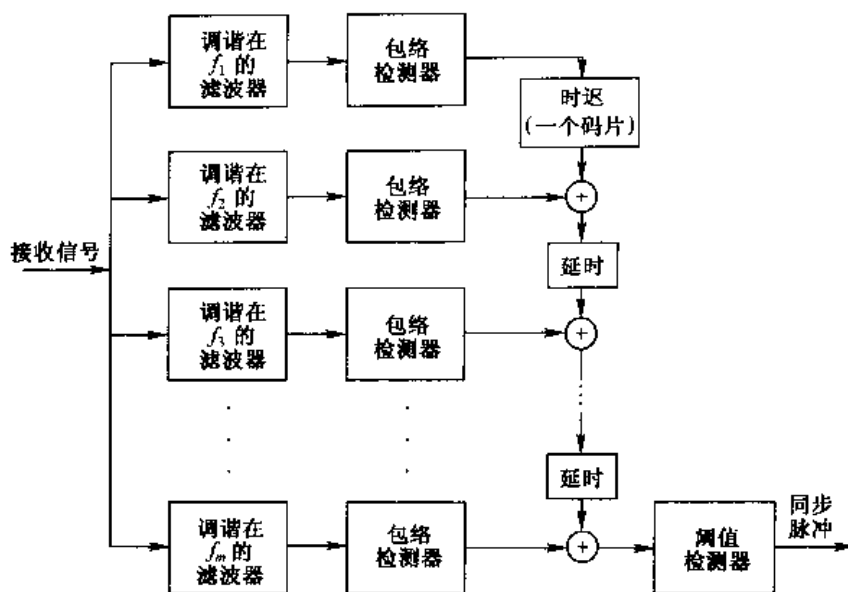


图 13-5-2 FH 信号捕捉系统

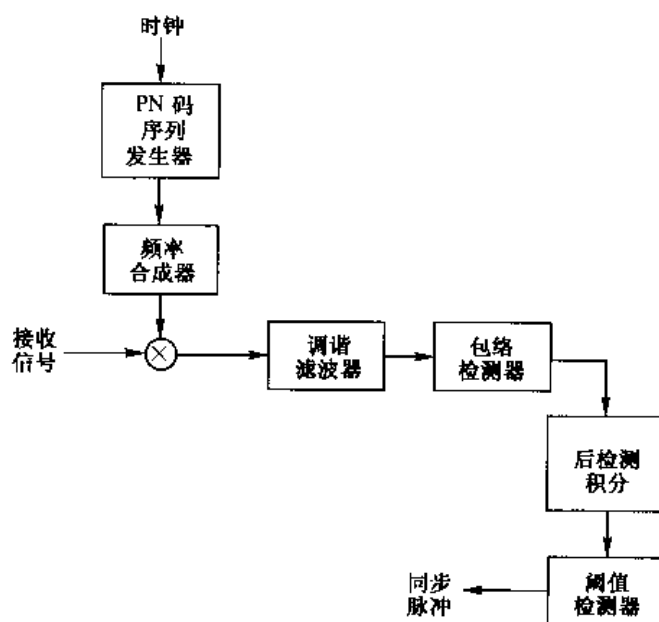


图 13-5-3 另一种 FH 信号捕捉系统

在搜索模式期间可能存在误告警,它以设定的系统误告警率发生。为了处理偶发的误告警,需要附加检验方法或电路,以证实相关器输出的接收信号保持在阈值之上。使用这样的检测策略,引起误告警的大噪声脉冲将只引起暂时的阈值超过量。另一方面,当信号出现时,在发送信号的持续时间之内,相关器或匹配滤波器输出将一直停留在阈值上。因此,如果证实失败,搜索重新开始。

另一个初始搜索策略称为序贯搜索,由沃德(Ward,1965 年)以及沃德和尤(Ward & Yiu, 1977 年)提出。在这个方法中,把搜索过程中每级延时上的驻留时间做成可变的,其方法是采用具有可变积分周期的相关器并将其(有偏)输出与两个阈值进行比较。于是,存在如下 3 种可能的判决:

- (1) 若相关器输出超过上阈值,宣布初始同步已建立。

(2) 若相关器输出低于下阈值,宣布在该级延时上信号不存在,而且搜索过程在不同级的延时重新开始。

(3) 若相关器输出落在两个阈值之间,将积分时间增加一个码片时间,产生的输出再一次与两个阈值相比较。

因此,对每个码片间隔都重复步骤(1)、(2)、(3),直至相关器输出超过上阈值或低于下阈值。

序贯搜索方法属于沃德(Ward,1947年)提出的序贯估计方法类型。从平均搜索时间最小化的意义上讲,该方法是更有效的搜索方法。序贯搜索的搜索时间小于固定驻留时间积分器的搜索时间。

在上述讨论中,我们只研究了建立初始同步中的时间不确定性。初始同步的另一面是频率不确定性。如果发送机和/或接收机为移动台,它们之间的相对运动速度将导致接收信号中的多普勒频移(相对于发送信号)。因为接收机通常不可能先验地知道其相对运动速度,所以多普勒频移是未知的,而且必须利用频率搜索方法来确定。这样的搜索通常在适当的量化频率不确定性间隔并行地完成,或在时间不确定性间隔串行地完成,图 13-5-4 所示为这种方案的方框图。还可设计适用于 FH 信号的多普勒频率搜索方法。

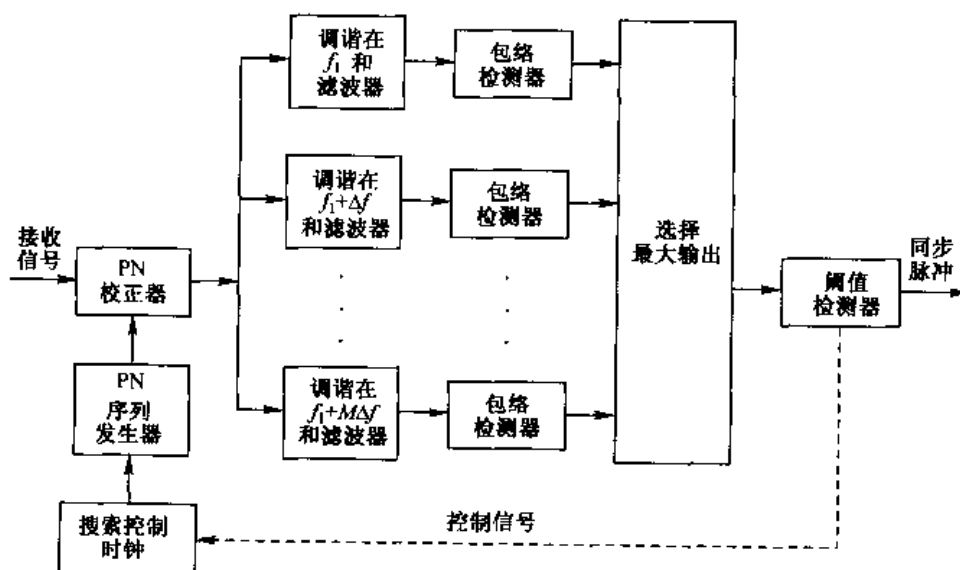


图 13-5-4 DS 系统中多普勒频偏的初始搜索

2. 跟踪

一旦信号被捕捉,初始搜索过程即停止,而开始精细地同步与跟踪。跟踪用来维持接收机中 PN 码发生器与接收信号的同步,包括精细的码片同步和相干解调中的载波相位跟踪。

DS 扩频信号中通常使用的跟踪环是如图 13-5-5 所示的延时锁定环(DLL,简称锁时环)。在这个跟踪环中,接收信号加到两个乘法器上并与本地 PN 码发生器的两个输出相乘,这两个输出间的延时量为 $2\delta \leq T_c$ 。因此,两个乘积信号是接收信号与两个不同延时值的 PN 序列的互相关,其结果经由带通滤波、包络(或平方律)检测和减法运算。产生的差值信号加到环路滤波器,以驱动压控时钟(VCC)。该 VCC 作为 PN 码信号发生器的时钟。

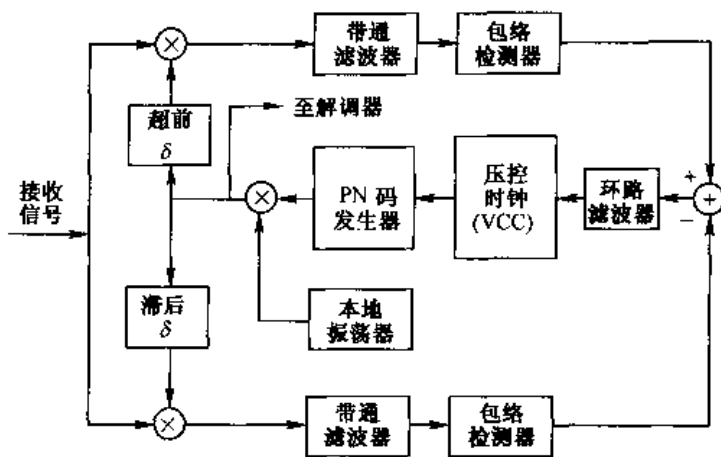


图 13-5-5 PN 码跟踪锁时环(DLL)

如果同步不准确,那么一个相关器的滤波输出将超过另一个,VCC 将适当超前或滞后。在平衡点处,两个相关器的滤波输出将等量地偏离其峰值,而且 PN 码发生器输出将准确地与馈送到解调器的接收信号同步。用来跟踪 DS 信号的 DLL 的实现,等效于 6.3.2 节所述如图 6-3-5 所示的早-迟门比特跟踪同步器。

用做 DS 信号时间跟踪的另一种方法是使用 T 型抖动环(TDL),其方框图如图 13-5-6 所示。TDL 用单“臂”结构代替图 13-5-5 中的双“臂”结构。通过提供合适的门控波形,有可能使“单臂”实现等效于“双臂”实现。在这种情况下,将码时钟步进或步退一个时间量 δ ,然后有规律地在两个延时值处对互相关函数进行抽样。在 $\pm \delta$ 处抽样的互相关包络具有幅度调制,其相对于 T 型抖动(tau-dither)调制器的相位确定了跟踪误差的正负号。

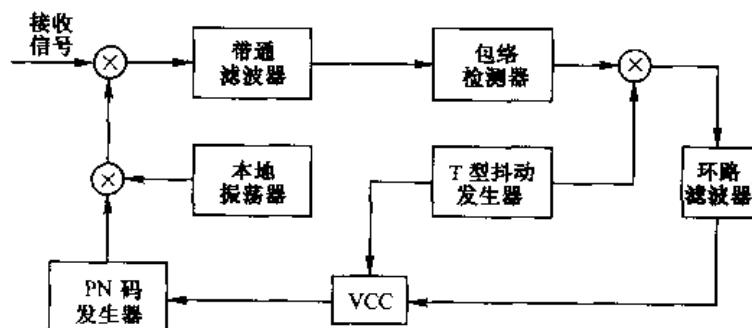


图 13-5-6 T 型抖动环(TDL)

TDL 的主要优点是实现成本低,因为它消除了常规的 DLL 所采用的两个臂中的一个臂。另一个优点是 TDL 不像 DLL 那样存在两个臂的幅度增益不平衡时固有的性能损伤。

通过在偏离峰值的 $\pm \delta$ 处对信号相关函数的抽样(如图 13-5-7(a)所示),DLL(及其等效的 TDL)产生一个误差信号。产生的误差信号如图 13-5-7(b)所示。DLL 性能分析与 6.2 节中锁相环(PLL)的性能分析相似。如果这种分析不是对 DLL 两个臂中的包络检测器进行的,那么该环类似于一个科斯塔斯(Costas)环。一般地,DLL 中的时间估计误差的方差与环路的 SNR 成反比,它取决于环路的输入 SNR 和环路的带宽。如同平方 PLL,由于包络检测器中固有的非线性,其性能稍有损伤,但这种损伤比较小。

FH 扩频信号的典型跟踪技术如图 13-5-8(a)所示。该方法基于如下前提条件:虽然已获得初始捕捉,但在接收信号与接收机时钟之间仍存在小的定时误差。首先,带通滤波器调谐到某一中

频,其带宽在 $1/T_c$ 数量级,其中 T_c 为码片间隔。带通滤波器的输出经包络检测与时钟信号相乘,从而产生一个驱动环路滤波器的三电平信号,如图 13-5-8(b)所示。注意,当码片过渡(来自本机的正弦波)与进来的信号过渡不同时发生时,环路滤波器的输出可能是负的或正的,这取决于 VCC 相对于输入信号的定时是滞后还是超前。该环路滤波器输出的误差信号作为调整 VCC 定时信号的控制信号,以便驱动频率合成的脉冲式正弦波达到与接收信号适当的同步。

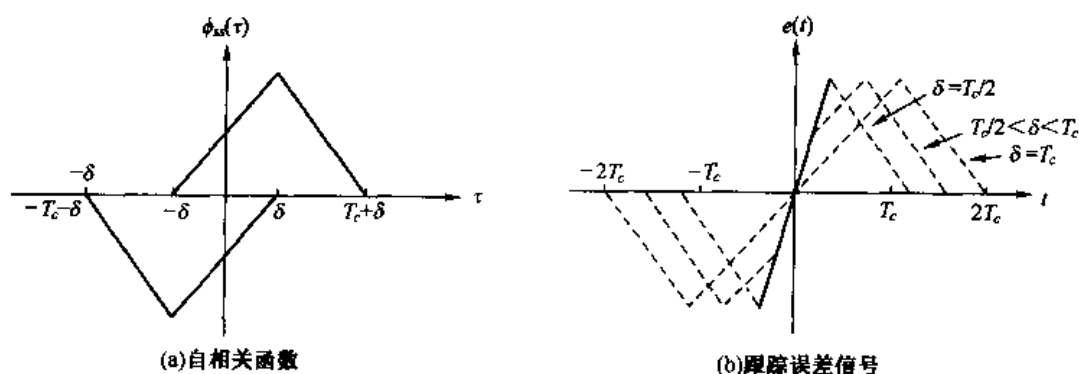
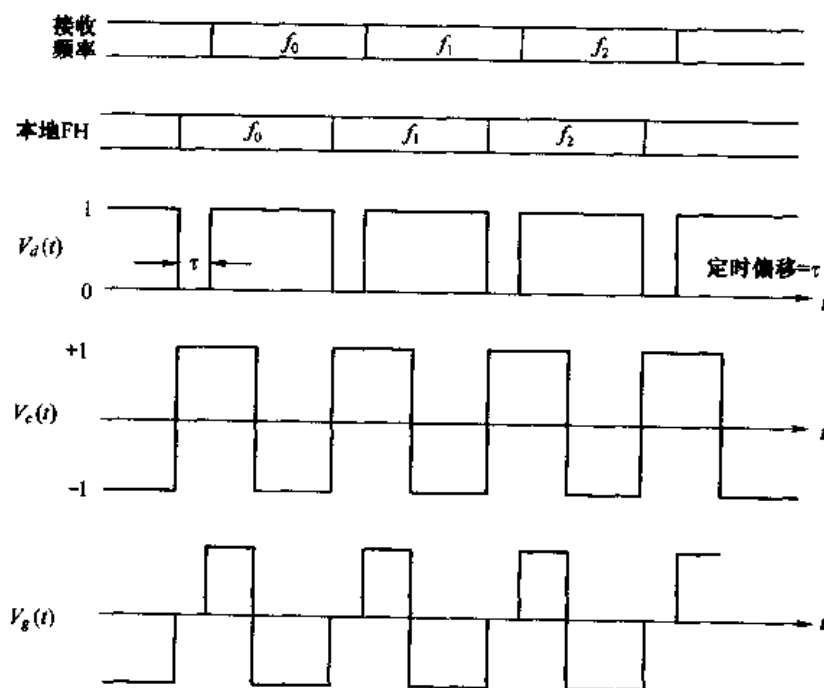
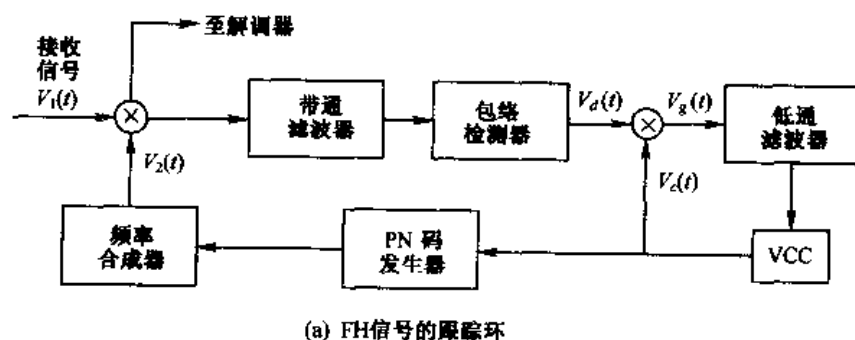


图 13-5-7 DLL 中的自相关函数和误差信号跟踪



(b) 跟踪FH信号的波阵面

图 13-5-8 FH 信号的跟踪方法

13.6 文献与参考资料

本章是扩频信号及其性能必不可少的引导性概述。关于扩频信号与系统的信号捕捉技术、码跟踪方法、混合扩频系统,以及其他更专门化的论述,可在有关技术文献中找到。

从历史上看,早期的扩频系统是为军用保密(AJ)数字通信系统的应用而研发的。实际上,在1970年之前,大多数关于扩频通信系统的设计和开发工作是保密的。此后,这个趋势发生了逆转。现已公开的文献包含扩频信号分析与设计的所有方面的大量出版物,还有许多论及扩频信号传输技术应用于商用通信的许多出版物,如办公室间无线通信(Pahlavan,1985年)的著作)、移动用户无线通信(Yue,1983年)和数字蜂窝通信(Viterbi,1995年)方面的出版物。

肖尔茨(Scholtz,1982年)的论文论述了1920年~1960年间扩频通信系统的发展历史。基本概念的综述可从肖尔茨(Scholtz,1977年)和皮克霍尔茨等(Pickholtz et al.,1982年)的论文中找到。这些论文包括大量以前工作的参考文献。此外,维特比(Viterbi,1979年,1985年)的两篇论文提供了DS和FH信号传输技术的性能特性的评论。

关于扩频信号与系统分析和设计各方面的综合论述,包括同步技术,可以在西蒙等(Simon et al.,1985年)、齐尔默和彼得森(Ziemer & Peterson,1985年)以及霍姆斯(Holmes,1982年)的论著中找到。除此之外,IEEE通信汇刊扩频通信专辑(1977年8月、1982年5月)和IEEE通信选题专辑(1985年9月、1989年5月、1990年5月、1993年6月)中发表了大量有关扩频通信各种课题的论文,包括多址技术、同步技术及各种类型干扰下的性能分析。发表在IEEE期刊上的大量论文还以著作的形式由IEEE出版社重印(狄克逊(Dixon,1976年)、库克等(Cook et al,1983年))。建议将戈隆布(Golomb,1967年)的著作作为有关移位寄存器研究的基本参考书,它可帮助读者深入研究这个课题。

习题

13-1 按照例13-2-2概括的过程,当信号脉冲为

$$g(t) = \sqrt{\frac{16\mathcal{E}_c}{3T_c}} \cos^2\left[\frac{\pi}{T_c}\left(t - \frac{1}{2}T_c\right)\right], \quad 0 \leq t \leq T_c$$

时,试求DS扩频系统在CW干扰下的差错率性能。

13-2 图P13-2所示为在未编码(平凡重复码)数字通信系统中,PN扩频信号和窄带干扰

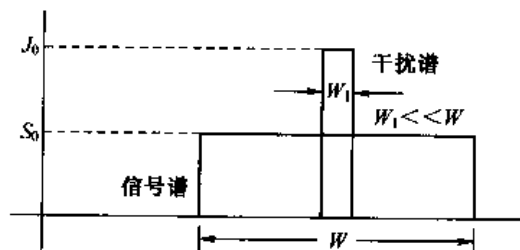


图 P13-2

的功率密度谱。参考图13-2-6所示的该信号的解调器,试画出 $r(t)$ 与PN发生器输出相乘之后,该信号和干扰的(近似)谱特性草图。当每比特PN码片数为 L_c 时,试求出现在相关器输出的那部分总干扰。

- 13-3 研究 DS 扩频系统中作为外码的里德-所罗门码(31,3)($q=32$ 元符号表)与作为内码的哈达马(16,5)二进制码的级联。假定对两种码进行软判决译码。试求基于级联码最小距离的比特错误概率的上(一致)边界。
- 13-4 哈达马(n, k) = ($2^m, m+1$)码是一种具有 $d_{\min}=2^{m-1}$ 的低速率码。对于具有二进制 PSK 调制和软判决或硬判决译码的 DS 扩频信号,试求这类码的性能。
- 13-5 具有 $d_{\text{free}}=10$ 、码率为 $1/2$ 的卷积码用来对以 1 000 速率发生的数据序列进行编码。调制是二进制 PSK。DS 扩频序列具有 10 MHz 的码片速率。
- (a) 试求编码增益。
- (b) 试求处理增益。
- (c) 假设 $\mathcal{E}_b/J_0=10$ dB,试求干扰容限。
- 13-6 总数为 30 的等功率用户用 CDMA 共享相同的通信信道。每个用户以 10 kb/s 的速率通过 DS 扩频和二进制 PSK 发送信息。试求比特错误概率为 10^{-5} 时的最小码片速率。接收机的加性噪声在此忽略不计。
- 13-7 设计一个具有处理增益 1 000 dB 和二进制 PSK 调制的 CDMA 系统。如果每个用户具有等功率和错误概率为 10^{-6} 的期望量级的性能,试求用户数。若处理增益为 500,重复以上计算。
- 13-8 某一 DS 扩频系统在单频干扰下以速率 1 000 b/s 发送信息。干扰功率比期望信号大 20 dB,且获得满意性能需要的 \mathcal{E}_b/J_0 为 10 dB。
- (a) 试求满足技术要求所需要的扩展带宽。
- (b) 若干扰源为脉冲干扰源,试求导致最坏情况干扰的脉冲占空率和相应的错误概率。
- 13-9 某 CDMA 系统由 15 个等功率用户组成,它们以速率 10 000 b/s 发送信息,每个用户采用一个码片速率为 1 MHz 的 DS 扩频信号。调制为二进制 PSK。
- (a) 试求 \mathcal{E}_b/J_0 ,其中 J_0 是组合干扰的谱密度。
- (b) 试求处理增益。
- (c) 处理增益应该增加多少才能允许双倍用户而不影响输出 SNR?
- 13-10 某 DS 二进制 PSK 扩频信号具有 500 dB 的处理增益。如果期望的错误概率为 10^{-5} ,试求连续单频干扰源的干扰容限。
- 13-11 如果干扰源是占空率为 1% 的脉冲式噪声干扰源,重做习题 13-10。
- 13-12 研究一 DS 扩频信号:

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n p(t - nT_c)$$

式中, c_n 是周期为 $N=127$ 的周期性 m 序列, $p(t)$ 是持续时间为 $T_c=1\mu\text{s}$ 的矩形脉冲。试求信号 $c(t)$ 的功率密度谱。

- 13-13 假设 $\{c_{1i}\}$ 和 $\{c_{2i}\}$ 分别是周期为 N_1 和 N_2 的两个二进制(0,1)周期序列。试求由 $\{c_{1i}\}$ 与 $\{c_{2i}\}$ 模 2 和形成的序列的周期。
- 13-14 在 DS 扩频系统中,使用一个 $m=10$ 的 ML 移位寄存器产生伪随机序列。码片持续时间是 $T_c=1\mu\text{s}$,比特持续时间是 $T_b=NT_c$,其中 N 是 m 序列的长度(周期)。
- (a) 试求系统的处理增益(dB)。

- (b) 当需要的 $\mathcal{E}_b/J_0 = 10$ 且干扰源是平均功率为 J_{av} 的单频干扰源时, 试求干扰容限。
- 13-15 某 FH 二进制正交 FSK 系统采用一个用来产生 ML 序列的 $m = 15$ 级线性反馈移位寄存器。该移位寄存器的每一状态选择跳频图样中 L 个非重叠频带之一。比特率为 100 b/s, 跳频速率是每比特一次, 解调器采用非相干检测。试求:
- 该信道的跳频带宽。
 - 处理增益。
 - AWGN 下的错误概率。
- 13-16 考虑习题 13-15 所述的 FH 二进制正交 FSK 系统。假设跳频速率增加到 2 hop/bit (跳/比特)。接收机运用平方律合并, 以在 2 次跳频上合并信号。试求:
- 该信道的跳频带宽。
 - 处理增益。
 - AWGN 下的错误概率。
- 13-17 在快 FH 扩频系统中, 信息通过 FSK 发送, 采用非相干检测。假设 $N = 3$ hop/bit (跳/比特), 每一跳中的信号采用硬判决译码。
- 在功率密度谱为 $\frac{1}{2} N_0$ 的 AWGN 信道中, $\text{SNR} = 13$ dB (在 3 次跳频上的总 SNR), 试求该系统的错误概率。
 - 将(a)中的结果与每比特一次跳频的 FH 扩频系统的错误概率进行比较。
- 13-18 一个具有非相干检测的慢 FH 二进制 FSK 系统运行在 $\mathcal{E}_b/J_0 = 10$ 、跳频带宽为 2 GHz 且比特率为 10 kb/s 的环境下。试求:
- 该系统的处理增益。
 - 当干扰源为部分频带干扰源时, 试求最坏情况干扰下所占的带宽。
 - 最坏部分频带干扰源的错误概率。
- 13-19 试求二进制卷积码与二进制 FSK 组合的 FH 扩频信号的错误概率。信道干扰是 AWGN。FSK 解调器输出经平方律检测后送至译码器, 该译码器进行如 8.2 节所述的最佳软判决维特比译码。假定跳频速率为每编码比特一跳。
- 13-20 对于硬判决维特比译码, 重做习题 13-19。
- 13-21 当以每编码比特 L 跳的速率快跳频时, 重做习题 13-19。
- 13-22 当以每编码比特 L 跳的速率进行快跳频且译码器为硬判决维特比译码器时, 重做习题 13-19。在硬判决之前, 先进行每编码比特 L 个码片的平方律检测和合并。
- 13-23 13.3.3 节给出的 TATS 信号由并行的 8 个匹配滤波器组 (八进制 FSK) 解调, 且每个滤波器的输出被平方律检测。7 个信号间隔中的每一个获得的 8 个输出 (56 个总输出) 用来组成 64 个可能的相应于里德-所罗门 (7, 2) 码的判决变量。对于 AWGN 和软判决译码, 试求码字错误概率的上 (一致) 边界。
- 13-24 对于最坏部分频带干扰的信道, 重做习题 13-23。
- 13-25 试从式 (13-2-61) 导出式 (13-2-62) 和式 (13-2-63)。
- 13-26 证明式 (13-3-14) 由式 (13-3-13) 得出。
- 13-27 试从式 (13-3-16) 导出式 (13-3-17)。

13-28 用来构造长度为 $n=7$ 的戈尔德码(Gold)序列的生成多项式为

$$h_1(p) = p^3 + p + 1$$

$$h_2(p) = p^3 + p^2 + 1$$

试生成长度为 7 的所有戈尔德码,并求一个序列与另一个序列的互相关。

13-29 13.2.3 节利用截止率参数 R_0 证明了脉冲干扰下具有交织编码系统的错误概率的评估技术。利用图 P13-29 给出的码率为 $1/2$ 和 $1/3$ 的卷积码及其软判决维特比译码的错误概率曲线,试求脉冲干扰下与编码系统相应的差错率,在 $K=3,5,7$ 的条件下进行该计算。

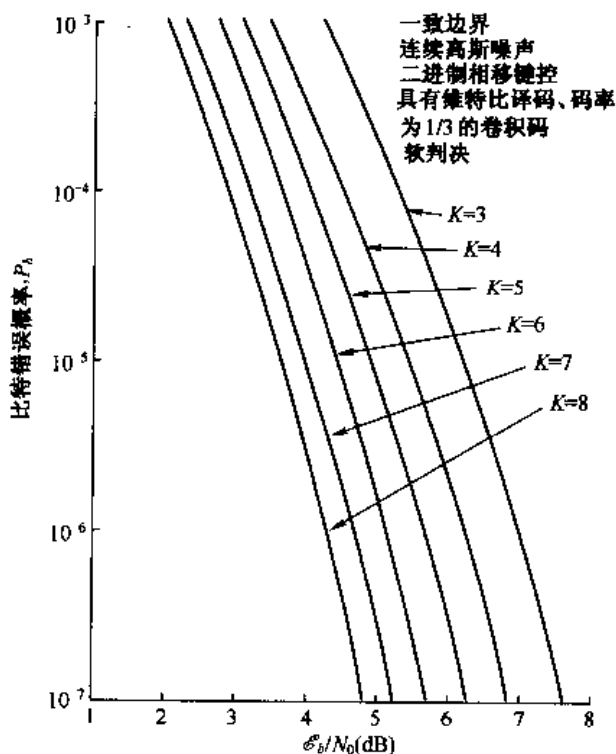


图 P13-29

13-30 在具有脉冲干扰和软判决译码的编码和交织 DS 二进制 PSK 调制中,截止率为

$$R_0 = 1 - \log_2(1 + \alpha e^{-\alpha \mathcal{E}_c/N_0})$$

式中, α 为系统受干扰的部分时间, $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_b R$, R 为比特率,且 $N_0 \equiv J_0$ 。

(a) 证明比特 SNR 为

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} = \frac{1}{\alpha R} \ln \frac{\alpha}{2^{1-R_0} - 1}$$

(b) 试求使所需 \mathcal{E}_b/N_0 最大的 α 值(最坏情况脉冲干扰),并求 \mathcal{E}_b/N_0 的最大值。

(c) 在最坏情况脉冲干扰下并在 AWGN ($\alpha=1$) 条件下画出 $10\log(\mathcal{E}_b/rN_0)$ 与 R_0 的关系曲线,其中 $r = R_0/R$ 。由此可得到有关最坏情况脉冲干扰影响的什么结论?

13-31 在具有部分频带干扰和软判决译码相干解调的编码及交织的跳频 q 元 FSK 调制中,截止率为

$$R_0 = \log_2 \left[\frac{q}{1 + (q-1)\alpha e^{-\epsilon_c/2N_0}} \right]$$

式中, α 为系统受干扰的部分频带, ϵ_c 为码片(或单频)能量,且 $N_0 \equiv J_0$ 。

(a) 证明比特 SNR 为

$$\frac{\epsilon_b}{N_0} = \frac{2}{\alpha R} \ln \frac{(q-1)\alpha}{q 2^{-R_0} - 1}$$

(b) 试求使所需 ϵ_b/N_0 最大的 α 值(最坏部分频带干扰),并求 ϵ_b/N_0 的最大值。

(c) 在(b)求出的 ϵ_b/N_0 结果中定义 $r = R_0/R$,画出 $10\log(\epsilon_b/rN_0)$ 与归一化截止率 $R_0/\log_2 q$ ($q=2,4,8,16,32$) 的关系曲线。将该图与习题 13-30(c) 的结果比较。由此可得出有关最坏部分频带干扰影响的什么结论? 增加符号表数目 q 的影响是什么? 习题 13-30(c) 的结果与 $q \rightarrow \infty$ 时 q 元 FSK 之间的 SNR 的代价是多少?

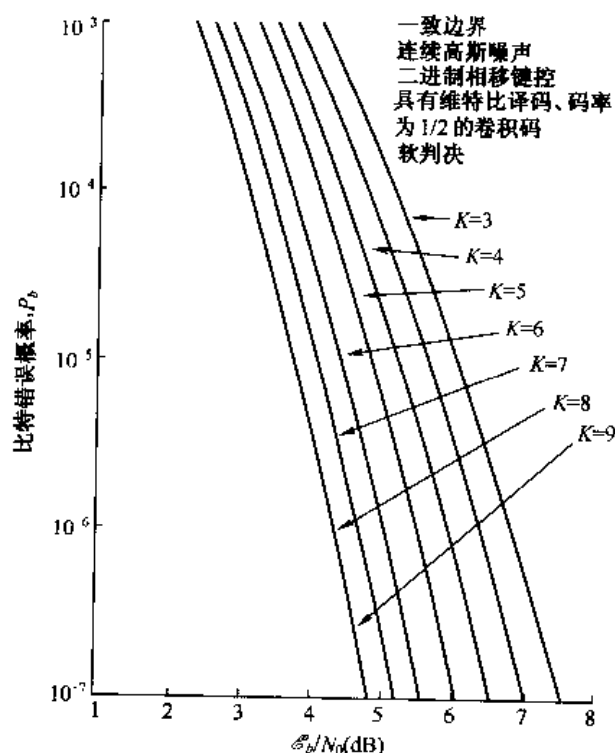


图 P13-30

第 14 章 通过多径衰落信道的数字通信

前几章介绍了在传统 AWGN 信道或 AWGN 线性滤波器信道上传输信号的数字通信系统的设计及性能。为获得良好的性能,线性滤波器信道的固有失真要求特殊的信号设计技术和相当复杂的自适应均衡算法。

本章针对更复杂的信道,即随机时变冲激响应信道,研究信号设计、接收机结构和接收机性能等问题。这个特征用来对许多无线信道上的信号传输进行建模,这些无线信道包括 3~30 MHz 频段 (HF) 上的短波电离层无线通信、300~3 000 MHz 频段 (UHF) 和 3 000~30 000 MHz 频段 (SHF) 上的对流层散射视距之外的无线通信,以及 30~300 MHz 频段 (VHF) 上的电离层前向散射通信。这些信道的时变冲激响应是媒质物理特征不断变化的结果。例如,在 HF 频段,反射发送信号的电离层中的电离子总是处在运动之中。在信道的用户看来,离子的运动是随机的。因此,如果在 HF 频段中在两个相距较宽的时间间隔内发送同一信号,收到的两个信号是不同的。于是,所产生的时变响应应以统计的术语来论述。

我们将首先研究信道统计特性,讨论多径衰落信道上的数字信号传输。然后评价在这样的信道上进行通信时所涉及的几种基本数字信号传输技术的性能,该性能结果将证实接收信号衰落特性所引起的信噪比严重损失,还将证明利用高效率的调制/编码和解调/译码技术可大大减少信噪比的损失。

14.1 多径衰落信道的特征

如果在时变多径信道上传输极短的脉冲(理想情况下为一个冲激),接收信号将表现为一串脉冲,如图 14-1-1 所示。因此,多径媒质的一个特征是在该信道上传输的信号中引入了时间扩展。

多径媒质的第二个特征是由媒质结构的时变引起的。时变导致多径特性随时间而变,也可以说,如果一次又一次地重复脉冲探测(pulse-sounding)试验,将会看到接收脉冲串的变化,包括各个脉冲大小和脉冲间相对延时的变化,还包括脉冲数量的变化,如图 14-1-1 所示。由于时间变化对于信道上的用户而言是不可预测的,因此,统计表征时变多径信道是合理的。

为此,考察信道对发送信号的影响。发送信号一般可表示为

$$s(t) = \operatorname{Re}[s_l(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (14-1-1)$$

假设存在多条传播路径,且与每条路径有关的是传播延时和衰减因子。传播延时和衰减因子两者都因媒质结构的变化而随时间变化。于是,接收的带通信号为

$$x(t) = \sum_n a_n(t)s(t - \tau_n(t)) \quad (14-1-2)$$

式中, $a_n(t)$ 是第 n 条传播路径上接收信号的衰减因子, $\tau_n(t)$ 为第 n 条传播路径的传播延时。将式(14-1-1)的 $s(t)$ 代入式(14-1-2),得

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[\sum_n a_n(t) e^{j2\pi f_c \tau_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)) \right] e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (14-1-3)$$

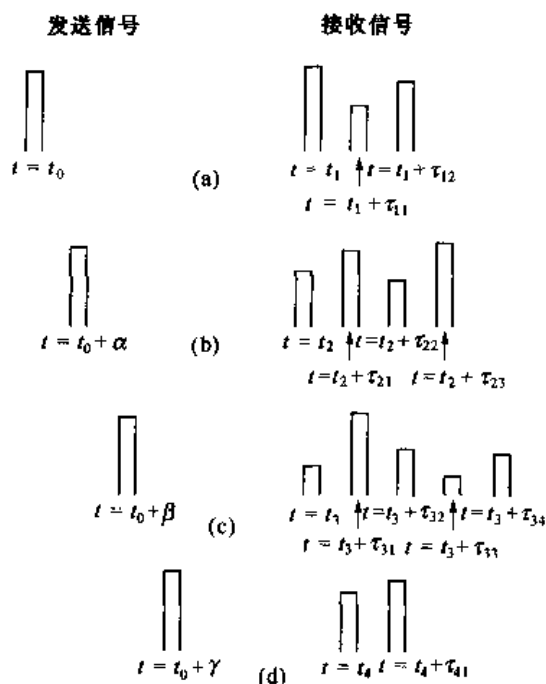


图 14-1-1 时变多径信道对于很窄的脉冲响应的例子

从式(14-1-3)可明显看出,等效低通接收信号为

$$r_l(t) = \sum_n a_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} s_l(t - \tau_n(t)) \quad (14-1-4)$$

因为 $r_l(t)$ 是等效低通信道对等效低通信号 $s_l(t)$ 的响应,因此,等效低通信道可用如下时变脉冲响应描述

$$c(\tau; t) = \sum_n a_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \delta(\tau - \tau_n(t)) \quad (14-1-5)$$

对于某些信道,例如对流层散射信道,把接收信号看做由连续多径分量组成的更合适。在这种情况下,接收信号表示为积分形式

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau; t) s(t - \tau) d\tau \quad (14-1-6)$$

式中, $a(\tau; t)$ 表示在延时 τ 和在 t 时刻信号分量的衰减。把式(14-1-1)的 $s(t)$ 代入式(14-1-6),得

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau; t) e^{-j2\pi f_c \tau} s_l(t - \tau) d\tau \right] e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (14-1-7)$$

因为式(14-1-7)的积分表示 $s_l(t)$ 与等效低通时变冲激响应 $a(\tau; t)$ 的卷积,故有

$$c(\tau; t) = a(\tau; t) e^{-j2\pi f_c \tau} \quad (14-1-8)$$

式中, $c(\tau; t)$ 表示 $t - \tau$ 时刻施加的冲激在 t 时刻的信道响应。于是,式(14-1-8)是等效低通冲激响应的合适定义,该定义适用于连续多径信道的结果,而式(14-1-5)适用于含有离散多径分量的信道。

下面研究在频率 f_c 处的未调载波的传输问题。对于所有的 $t, s_l(t) = 1$ 。由式(14-1-4)

给出的离散多径情况下的接收信号简化为

$$r_l(t) = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} = \sum_n \alpha_n(t) e^{-j\theta_n(t)} \quad (14-1-9)$$

式中, $\theta_n(t) = 2\pi f_c \tau_n(t)$ 。因此, 接收信号由若干具有幅度 $\alpha_n(t)$ 和相位 $\theta_n(t)$ 的时变向量(相位复向量)之和组成。注意, 媒质大的动态变化将使 $\alpha_n(t)$ 变化足够大, 从而引起接收信号大的变化。另一方面, 每当 τ_n 变化 $1/f_c$ 时, $\theta_n(t)$ 将变化 2π 弧度。但 $1/f_c$ 很小, 因此 θ_n 发生比较小的媒质运动时 $\theta_n(t)$ 变化 2π 弧度。与不同信号路径相关联的延时 $\tau_n(t)$ 以不同的速率, 而且以不可预测的(随机)方式变化。这意味着, 式(14-1-9)中的接收信号 $r_l(t)$ 可以看做随机过程。当存在大量路径时, 可应用中心极限定理, 也就是说, $r_l(t)$ 可建模为复高斯随机过程。这表明时变冲激响应 $c(\tau; t)$ 是一个以 t 为变量的复高斯随机过程。

式(14-1-9)确定地体现在接收信号 $r_l(t)$ 中的信道多径传播模型将引起信号的衰落。衰落现象主要是相位 $\{\theta_n(t)\}$ 时变的结果, 也就是说, 和向量 $\{\alpha_n e^{-j\theta_n}\}$ 关联的随机时变相位 $\{\theta_n(t)\}$ 时常引起该向量的破坏性相加, 这个现象的结果是接收信号很小或实际上为零。另外, 向量 $\{\alpha_n e^{-j\theta_n}\}$ 建设性的相加结果将使接收信号比较大。因此, 接收信号的幅度变化, 称为信号衰落, 是由于信道的时变多径特征引起的。

当冲激响应 $c(\tau; t)$ 建模为零均值复高斯过程时, 任何时刻 t 的包络 $|c(\tau; t)|$ 是瑞利(Rayleigh)分布的。在这种情况下, 该信道称为瑞利衰落信道。在媒质中, 除了随机运动散射分量外, 还存在固定散射或信号反射分量, $c(\tau; t)$ 不再建模为具有零均值的。包络 $|c(\tau; t)|$ 具有赖斯(Rice)分布, 该信道称为赖斯衰落信道。另外一种用于对衰落信号包络建模的概率分布函数是 Nakagami-m 分布, 这些衰落信道模型将在 14.1.2 节研究。

14.1.1 信道相关函数和功率谱

本节先研究一些有用的相关函数和功率密度谱函数, 这些函数定义了多径衰落信道特征。首先是等效低通冲激响应 $c(\tau; t)$, 它可表征为以 t 为变量的复随机过程。假设 $c(\tau; t)$ 是广义平稳的, 则 $c(\tau; t)$ 的自相关函数为

$$\phi_c(\tau_1, \tau_2; \Delta t) = \frac{1}{2} E[c^*(\tau_1; t) c(\tau_2; t + \Delta t)] \quad (14-1-10)$$

在大多数无线传输媒质中, 同路径延时 τ_1 相关联的信道衰减和相移与路径延时 τ_2 相关联的信道衰减和相移是不相关的。这通常叫做非相关散射。假设两个不同延时的散射是不相关的, 把它并入式(14-1-10), 可得

$$\frac{1}{2} E[c^*(\tau_1; t) c(\tau_2; t + \Delta t)] = \phi_c(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (14-1-11)$$

如果令 $\Delta t = 0$, 那么产生的自相关函数 $\phi_c(\tau; 0) \equiv \phi_c(\tau)$ 就是信道平均功率输出, 它是延时 τ 的函数。由于这个原因, 通常把 $\phi_c(\tau)$ 叫做信道的多径强度分布或延时功率谱。通常地, $\phi_c(\tau; \Delta t)$ 给出的平均功率输出是延时 τ 和观测时间差 Δt 的函数。

实际上, 函数 $\phi_c(\tau; \Delta t)$ 可通过发送很窄的脉冲(或者等效地发送某一宽带信号)并使接收信号与其延时信号互相关来测量。典型地, 测量函数 $\phi_c(\tau)$ 可用图 14-1-2 所示的函数表示。 $\phi_c(\tau)$ 基本为

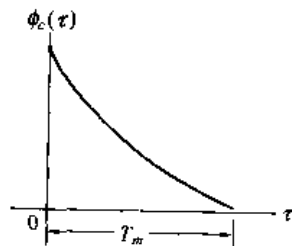


图 14-1-2 多径强度分布

非零值的 τ 的范围称为信道多径扩展,记做 T_m 。

与上述时变多径信道特征完全类似的特征也出现在频域。通过取 $c(\tau; t)$ 的傅里叶变换,可得到时变转移函数 $C(f; t)$, 其中 f 是频率变量。因此,

$$C(f; t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (14-1-12)$$

如果 $c(\tau; t)$ 建模为以 t 为变量的零均值复高斯随机过程,那么 $C(f; t)$ 也具有相同的统计特性。在假设信道为广义平稳的条件下,定义自相关函数

$$\phi_C(f_1, f_2; \Delta t) = \frac{1}{2} E[C^*(f_1; t) C(f_2; t + \Delta t)] \quad (14-1-13)$$

因为 $C(f; t)$ 是 $c(\tau; t)$ 的傅里叶变换,所以通过傅里叶变换找出 $\phi_C(f_1, f_2; \Delta t)$ 与 $\phi_c(\tau; \Delta t)$ 的关系是很容易的。这个关系很容易通过将式(14-1-12)代入式(14-1-13)建立,因此,

$$\begin{aligned} \phi_C(f_1, f_2; \Delta t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[c^*(\tau_1; t) c(\tau_2; t + \Delta t)] e^{j2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau_1; \Delta t) \delta(\tau_1 - \tau_2) e^{j2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau_1; \Delta t) e^{j2\pi(f_1 - f_2)\tau_1} d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau_1; \Delta t) e^{-j2\pi\Delta f\tau_1} d\tau_1 \equiv \phi_c(\Delta f; \Delta t) \end{aligned} \quad (14-1-14)$$

式中, $\Delta f = f_2 - f_1$ 。由式(14-1-14)可以看出, $\phi_c(\Delta f; \Delta t)$ 是多径强度分布的傅里叶变换。非相关散射的假设意味着 $C(f; t)$ 的频域自相关函数仅仅是频率差 $\Delta f = f_2 - f_1$ 的函数,因此,把 $\phi_c(\Delta f; \Delta t)$ 叫做信道的频率间隔、时间间隔相关函数是恰当的。在实际中,通过发送一对间隔为 Δf 的正弦波,并使两个相对延时 Δt 的接收信号互相关,即可测量该函数。

在式(14-1-14)中,令 $\Delta t = 0$, 利用 $\phi_c(\Delta f; 0) \equiv \phi_c(\Delta f)$ 和 $\phi_c(\tau; 0) \equiv \phi_c(\tau)$, 该变换关系是

$$\phi_c(\Delta f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau) e^{-j2\pi\Delta f\tau} d\tau \quad (14-1-15)$$

该关系如图 14-1-3 所示。 $\phi_c(\Delta f)$ 是以频率为变量的自相关函数,提供了信道频率相干性的一种度量。作为 $\phi_c(\Delta f)$ 与 $\phi_c(\tau)$ 之间傅里叶变换关系的一个结果,多径扩展的倒数是信道相干带宽的度量,即

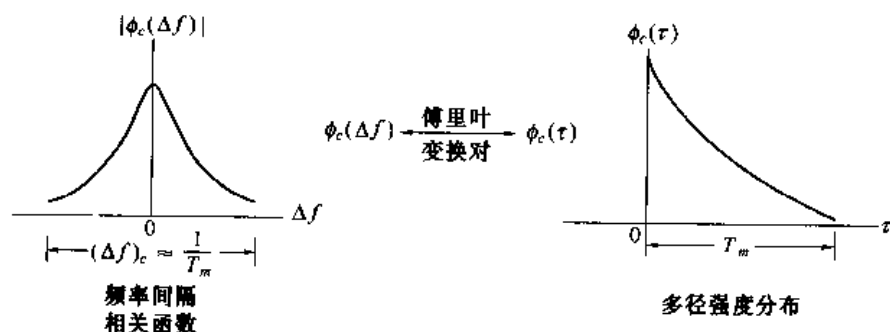


图 14-1-3 $\phi_c(\Delta f)$ 与 $\phi_c(\tau)$ 之间的关系

$$(\Delta f)_c \approx \frac{1}{T_m} \quad (14-1-16)$$

式中, $(\Delta f)_c$ 表示相干带宽。因此, 频率间隔大于 $(\Delta f)_c$ 的两个正弦波受到信道的影响不同。当携带信息的信号通过信道传输时, 如果 $(\Delta f)_c$ 比发送信号带宽小, 那么该信道称为频率选择性信道。在这种情况下, 信道使信号严重失真。另一方面, 如果 $(\Delta f)_c$ 比发送信号带宽大, 那么该信道称为频率非选择性信道。

观察由 $\phi_c(\Delta f; \Delta t)$ 中的参数 Δt 测量时的信道时变情况。信道的时间变化表现为多普勒展宽, 还表现为谱线的多普勒位移。为了建立多普勒效应与信道时间变化的关系, 定义 $\phi_c(\Delta f; \Delta t)$ 对变量 Δt 的傅里叶变换为函数 $S_c(\Delta f; \lambda)$, 即

$$S_c(\Delta f; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\Delta f; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (14-1-17)$$

令 Δf 为零, 并利用 $S_c(0; \lambda) \equiv S_c(\lambda)$, 则式(14-1-17)变为

$$S_c(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (14-1-18)$$

函数 $S_c(\lambda)$ 是一个功率谱, 它给出信号强度与多普勒频率 λ 之间的关系。因此, $S_c(\lambda)$ 叫做信道多普勒功率谱。

由式(14-1-18)可见, 如果信道是时不变的, 则 $\phi_c(\Delta t) = 1$ 且 $S_c(\lambda)$ 为 delta 函数 $\delta(\lambda)$ 。因此, 若信道中没有时间变化, 在纯单频传输中观测不到频谱展宽。

$S_c(\lambda)$ 基本为非零的 λ 值的范围叫做信道多普勒扩展 B_d 。由于 $S_c(\lambda)$ 通过傅里叶变换和 $\phi_c(\Delta t)$ 有关, 因此 B_d 的倒数为信道相干时间的度量, 即

$$(\Delta t)_c \approx \frac{1}{B_d} \quad (14-1-19)$$

式中, $(\Delta t)_c$ 表示相干时间。显然, 一个慢变信道具有大的相干时间, 或等效为小的多普勒扩展。图 14-1-4 说明了 $\phi_c(\Delta t)$ 与 $S_c(\lambda)$ 之间的关系。

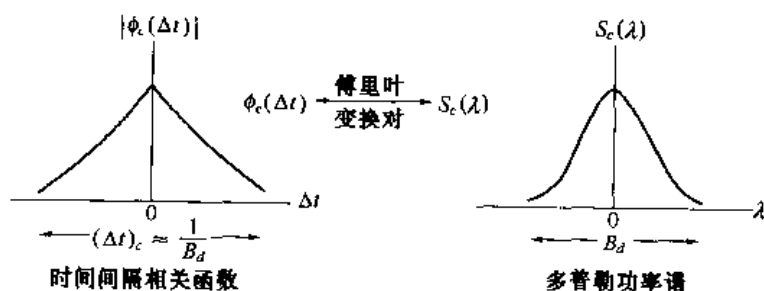


图 14-1-4 $\phi_c(\Delta t)$ 与 $S_c(\lambda)$ 之间的关系

现已建立了涉及变量 $(\tau, \Delta f)$ 的 $\phi_c(\Delta f; \Delta t)$ 与 $\phi_c(\tau; \Delta t)$ 之间的傅里叶变换关系, 以及涉及变量 $(\Delta f, \lambda)$ 的 $\phi_c(\Delta f; \Delta t)$ 与 $S_c(\Delta f; \lambda)$ 之间的傅里叶变换关系。此外, 还有两种傅里叶变换关系用来表示 $\phi_c(\tau; \Delta t)$ 与 $S_c(\Delta f; \lambda)$ 的关系, 从而组成闭环。定义一个新的函数(记做 $S(\tau; \lambda)$)是以 Δt 为变量的 $\phi_c(\tau; \Delta t)$ 的傅里叶变换, 得到期望的关系

$$S(\tau; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d\Delta t \quad (14-1-20)$$

由此得出 $S(\tau; \lambda)$ 和 $S_C(\Delta f; \lambda)$ 为傅里叶变换对, 即

$$S(\tau; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S_C(\Delta f; \lambda) e^{j2\pi\tau\Delta f} d\Delta f \quad (14-1-21)$$

再则, $S(\tau; \lambda)$ 和 $\phi_C(\Delta f; \Delta t)$ 是相关的, 其关系表示为如下双傅里叶变换形式:

$$S(\tau; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_C(\Delta f; \Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} e^{j2\pi\tau\Delta f} d\Delta t d\Delta f \quad (14-1-22)$$

这个新的函数 $S(\tau; \lambda)$ 叫做信道散射函数, 它提供了信道平均功率输出的度量, 是延时 τ 及多普勒频率 λ 的函数。

4 种函数 $\phi_C(\Delta f; \Delta t)$ 、 $\phi_C(\tau; \Delta t)$ 、 $\phi_C(\Delta f; \lambda)$ 、 $S(\tau; \lambda)$ 之间的关系如图 14-1-5 所示。

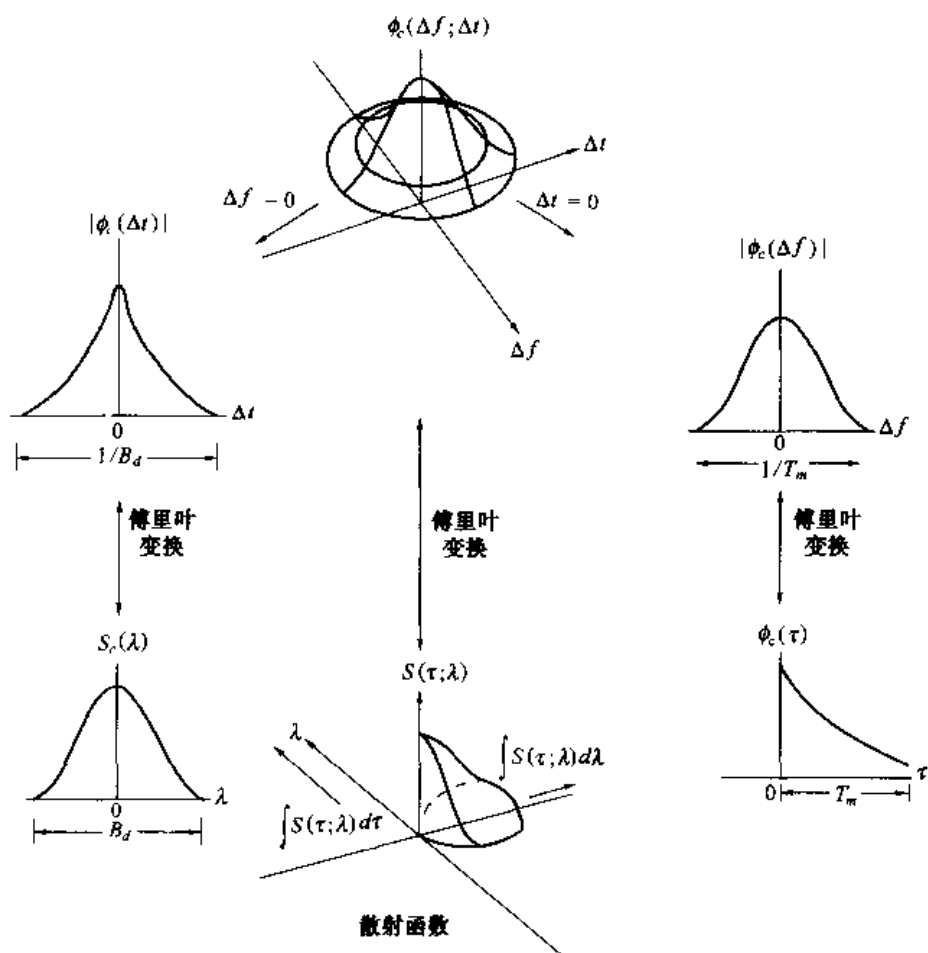


图 14-1-5 信道相关函数与功率谱之间的关系

例 14-1-1 对流层散射信道的散射函数

在 150 英里对流层散射链路上测量的散射函数如图 14-1-6 所示。用来探测信道的信号具有 $0.1\mu\text{s}$ 的时间分辨率, 因此延时轴以增量 $0.1\mu\text{s}$ 量化。从这个图可以看出, 多径扩展 $T_m = 0.7\mu\text{s}$ 。另一方面, 多普勒扩展(可定义为每一个信号路径功率谱的 3 dB 带宽)随每个信号路径而变化。例如, 在一个路径内小于 1Hz, 在其他路径内为几赫。为此, 取各种路径的 3 dB 带宽的最大者, 称其为多普勒扩展。

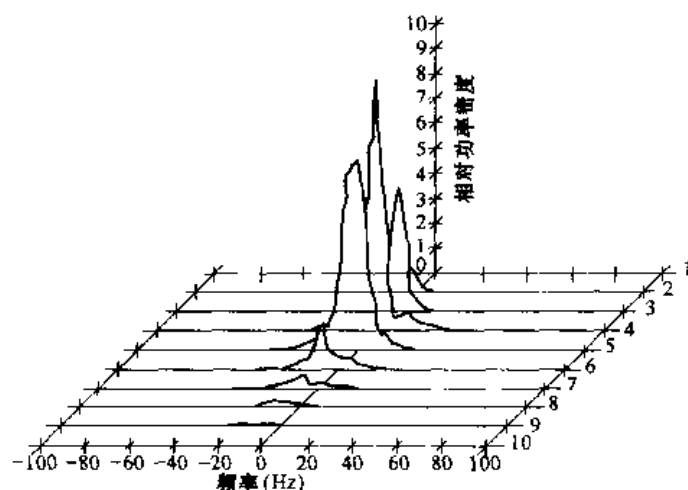


图 14-1-6 中距离对流层散射信道的散射函数。抽头延时增量为 0.1 微秒(μs)

例 14-1-2 移动无线信道的多径强度轮廓图

移动无线信道的多径强度轮廓图主要取决于地形的类型。在世界各地各种不同情况下,人们作了许多测量。在城市和郊区,多径扩展的典型值在 $1 \sim 10 \mu\text{s}$ 之间变化。在乡村多山地区,多径扩展值要大得多,其典型值在 $10 \sim 30 \mu\text{s}$ 之间变化。图 14-1-7 示出了在这两种地形下,广泛用来评价系统性能的两模型的多径强度轮廓图。

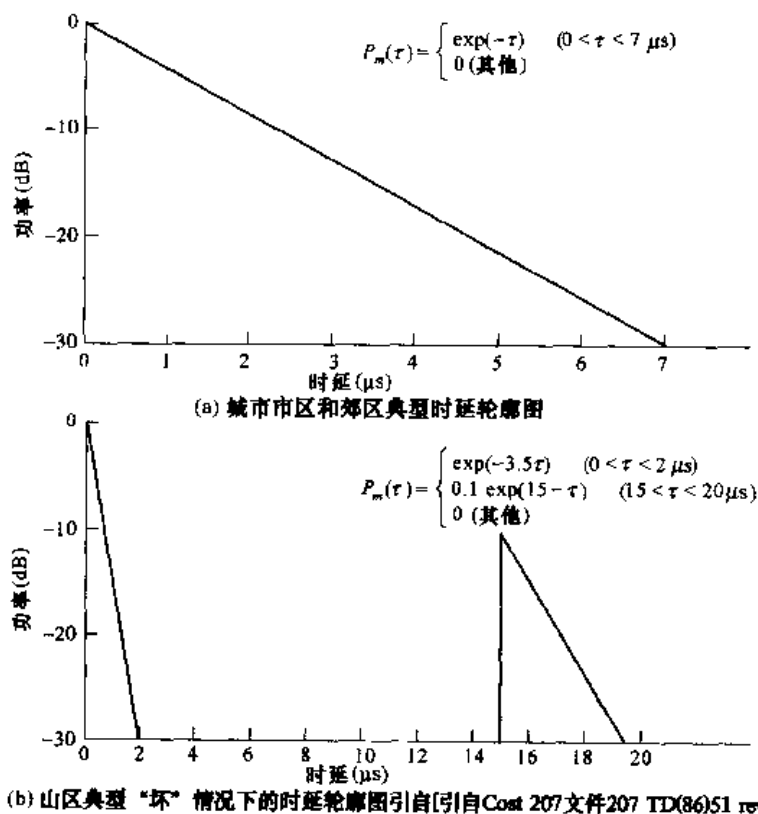


图 14-1-7 Cost207 平均功率时延轮廓图

例 14-1-3 移动无线信道的多普勒功率谱

一个广泛采用的移动无线信道多普勒功率谱模型就是所谓 Jakes 模型(Jakes, 1974 年)。在该模型中,时变传递函数 $C(f;t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned}\phi_C(\Delta t) &= \frac{1}{2} E[C^*(f;t)C(f;t + \Delta t)] \\ &= J_0(2\pi f_m \Delta t)\end{aligned}$$

其中 $J()$ 是第一类零阶贝赛尔函数, $f_m = v f_0 / c$ 为最大多普勒频率, v 是以米/秒(m/s)为单位的车速, f_0 为载波频率, c 为光速(3×10^8 m/s)。将自相关函数进行傅立叶变换可得多普勒功率谱

$$\begin{aligned}S_c(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_C(\Delta t) e^{-j2\pi\lambda \Delta t} d\Delta t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} J_0(2\pi f_m \Delta t) e^{-j2\pi\lambda \Delta t} d\Delta t \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi f_m} \frac{1}{\sqrt{1 - (f/f_m)^2}} & (|f| \leq f_m) \\ 0 & (|f| > f_m) \end{cases}\end{aligned}$$

图 14-1-8 示出了 $\phi_C(\Delta t)$ 和 $S_c(\lambda)$ 之间的关系。

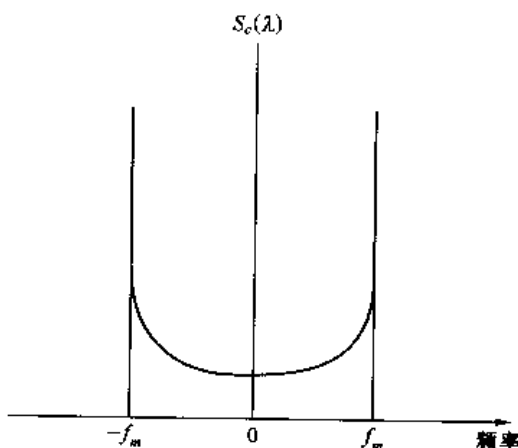


图 14-1-8 移动无线信道多普勒谱模型

14.1.2 衰落信道的统计模型

有几种概率分布可用做衰落信道的统计特性的模型。当信道中传送到接收机的信号的散射分量数目很大时,如电离层和对流层中的信号传播,应用中心极限定理可得到信道冲激响应的高斯过程模型。如果该过程是零均值的,那么任何时刻信道响应的包络都具有瑞利概率分布,而相位在 $(0, 2\pi)$ 区间内是均匀分布的,即

$$P_R(r) = \frac{2r}{\Omega} e^{-r^2/\Omega} \quad r \geq 0 \quad (14-1-23)$$

式中

$$\Omega = E(R^2) \quad (14-1-24)$$

可见,瑞利分布可用单一参数 $E(R^2)$ 表征。

信道响应包络的另一种统计模型是由式(2-1-147)中的 PDF 给出的 Nakagami- m 分布。与瑞利分布相比较,瑞利分布可以用单一参数来匹配衰落信道统计数据,而 Nakagami- m 分布包含两个参数,即参数 m 和二阶矩 $\Omega = E(R^2)$ 。因此,在对观测信号统计数据匹配时,Nakagami- m 分布更灵活、更精确。Nakagami- m 分布能用来对比瑞利分布条件更苛刻的衰落信道进行建模,瑞利分布是它的一种特殊情况($m = 1$)。例如,图林(Turin, 1972 年)和 Suzuki (1977 年)已经证明,Nakagami- m 分布最适合用于郊区无线多径信道接收的数据信号。

赖斯分布也是两参数分布,可用式(2-1-241)给出的 PDF 分布表示,其中参数为 s 和 σ^2 。在等效 χ^2 分布中, s^2 叫做非中心参数。该参数表示接收信号的非衰落信号分量(有时称为镜像分量)的功率。

有许多遭到衰落的无线信道基本上是具有多径分量的视距(LOS)通信链路,这些多径分量来自周围地形的二次反射(或信号路径)。在这些信道中,多径分量的数目小,因此信道可用稍简单的形式建模。下面引用两个信道模型。

作为第一个例子,考虑飞机到地面的通信链路,其中有一条直接路径及一个相对直接路径延时为 t_0 的单--多径分量。这样,信道的冲激响应可建模为

$$c(\tau; t) = \alpha\delta(\tau) + \beta(t)\delta(\tau - \tau_0(t)) \quad (14-1-25)$$

式中, α 是直接路径的衰减因子, $\beta(t)$ 表示由地面反射造成的时变多径信号分量。通常, $\beta(t)$ 可表征零均值高斯随机过程。该信道模型的转移函数为

$$C(f; t) = \alpha + \beta(t)e^{-j2\pi f\tau_0(t)} \quad (14-1-26)$$

该信道符合前面定义的赖斯衰落模型。具有衰减 α 的直接路径表示镜像分量, $\beta(t)$ 表示瑞利衰落分量。

有一个类似的模型适用于由遍布世界的电话公司进行长距离话音和视频传输的微波 LOS 无线信道。对于这样的信道,鲁姆勒(Rummler, 1979 年)开发出一种基于信道测量的三径模型,该测量是在 6 GHz 频带的典型 LOS 链路上进行的。两个多径分量的延时差较小,因此鲁姆勒开发的模型具有如下信道转移函数:

$$C(f) = \alpha[1 - \beta e^{-j2\pi(f-f_0)\tau_0}] \quad (14-1-27)$$

式中, α 为总衰减参数, β 是由多径分量引起的形状参数, f_0 为衰落最小的频率, τ_0 是直接路径和多径分量之间的相对延时。这种简化的模型可用来拟合由信道测量得到的数据。

鲁姆勒发现,参数 α 和 β 可表征为随机变量,在实际应用中,它们近似于统计独立。根据信道测量,他发现 β 的分布具有 $(1 - \beta)^{2.3}$ 的形式。 α 的分布可用对数正态分布(即 $-\lg\alpha$ 为高斯分布)来建模。对于 $\beta > 0.5$,求出均值 $-20\lg\alpha$ 为 25 dB,标准偏差 5 dB。对于较小的 β 值,均值减为 15 dB。由测量确定的延时参数为 $\tau_0 = 6.3$ ns。 $C(f)$ 的幅度平方响应为:

$$|C(f)|^2 = \alpha^2[1 + \beta^2 - 2\beta\cos 2\pi(f - f_0)\tau_0] \quad (14-1-28)$$

图 14-1-9 画出了 $\tau_0 = 6.3$ ns 时 $|C(f)|$ 的曲线,它是频率 $f - f_0$ 的函数。注意,多径分量的影响在 $f - f_0$ 和 $1/\tau_0 \approx 159$ MHz 多重倍数处产生深度衰减。通过比较,典型的信道带宽是 30 MHz。隆格伦和鲁姆勒(Lundgren & Rummler, 1979 年)利用该模型确定了数字无线系统的差错率性能。

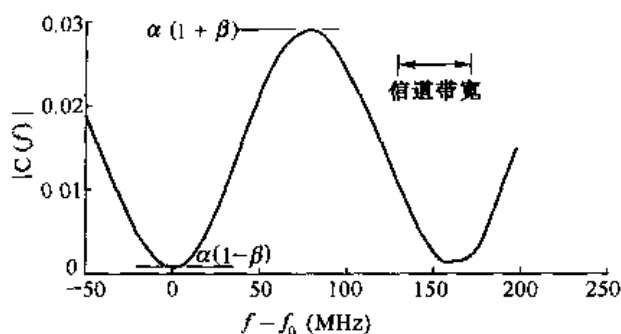


图 14-1-9 LOS 信道模型的幅频响应

14.1.3 移动无线信道的传播模型

在 5.5.2 节所述链路预算的计算中,我们已经刻划出无线电波沿自由空间传播的路径损耗与 d^2 (d 为发射机和接收机之间的距离)之间的反比关系。然而,在移动无线信道中,信号通常不沿自由空间或者视线方向传播。移动无线信道中平均路径损耗可表征为与 d^p 成反比,其中 $2 \leq p \leq 4$ 且 d^4 为最坏情况下的模型。因此,路径损耗通常比自由空间的损耗更加严重。

在移动无线通信中,有许多因素会影响路径损耗。这些因素包括基站天线高度、移动天线高度、工作频率、大气条件以及有无建筑物和树等。结合这些因素,可以建立不同的平均路径损耗模型。例如,一个大城市市区的模型是一个 Hata 模型,其平均路径损耗(dB)为

$$\text{平均路径损耗} = 69.55 + 26.16 \lg f - 13.82 \lg h_t - a(h_r) + (44.9 - 6.65 \lg h_t) \lg d \quad (14-1-29)$$

其中 f 是以 MHz 为单位的工作频率 ($150 < f < 1500$)、 h_t 是以 m 为单位的发射机天线高度 ($30 < h_t < 200$)、 h_r 是以 m 为单位的接收机天线高度 ($1 < h_r < 10$)、 d 是以 km 为单位的发射机和接收机之间的距离 ($1 < d < 20$),且有

$$a(h_r) = 3.2(\lg 11.75 h_r)^2 - 4.97 \quad (f \geq 400 \text{ MHz}) \quad (14-1-30)$$

移动无线传播的另一个问题是发射机和接收机之间大建筑物、树木和高地等大障碍物所造成的信号阴影效应。阴影通常建模为一个乘性的且通常是随时间缓变的随机过程。即接收信号可在数学上表示为

$$r(t) = A_0 g(t) s(t) \quad (14-1-31)$$

其中 A_0 表示平均路径损耗, $s(t)$ 表示发射信号, $g(t)$ 为表示阴影效应的随机过程。在任意时刻,阴影过程的统计模型服从正态对数分布。正态对数分布的概率密度函数为

$$p(g) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}g} e^{-(\lg g - \mu)^2 / 2\sigma^2} & (g \geq 0) \\ 0 & (g < 0) \end{cases} \quad (14-1-32)$$

若定义一个新的随机变量 X 为 $X = \ln g$, 则有

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (14-1-33)$$

随机变量 X 表示以 dB 为单位测得的路径损耗, μ 是以 dB 为单位的平均路径损耗, σ 是以 dB 为单位的路径损耗标准偏移。对于典型的蜂窝和微波环境, σ 的变化范围是 5~12 dB。

14.2 信号特征对信道模型选择的影响

根据 14.1 节关于时变多径信道的自相关函数统计特性的讨论,下面研究信号特征对选择信道模型的影响,该模型适合于特定信号。为此,令 $s_l(t)$ 是信道上传输的等效低通信号,设 $S_l(f)$ 为其频谱,那么等效低通接收信号(不含加性噪声)可按照时域变量 $c(\tau; t)$ 和 $s_l(t)$ 表示为

$$r_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) s_l(t - \tau) d\tau \quad (14-2-1)$$

或用频域函数 $C(f; t)$ 和 $S_l(f)$ 表示为

$$r_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f; t) S_l(f) e^{j2\pi ft} df \quad (14-2-2)$$

假设通过调制(幅度调制或相位调制,或两种调制),速率为 $1/T$ (T 为信号传输间隔)的基本脉冲 $s_l(t)$ 在信道上发送数字信息。由式(14-2-2)可明显看出,由转移函数 $C(f; t)$ 表征的时变信道使信号 $S_l(f)$ 失真。如果 $S_l(f)$ 的带宽 W 大于信道相干带宽 $(\Delta f)_c$, 则 $S_l(f)$ 在该带宽各处受到不同的增益和相移。在这种情况下,把该信道叫做频率选择性信道。 $C(f; t)$ 的时间变化引起附加失真,该失真表现为接收信号强度的变化,称为衰落。应当强调,频率选择性和衰落被视为两种不同形式的失真。前者取决于多径扩展,或等价地取决于相对发送信号带宽 W 的信道相干带宽;后者取决于信道的时间变化,大体上由相干时间 $(\Delta t)_c$ 表征,或等效地由多普勒扩展 B_d 表征。

信道对发送信号 $s_l(t)$ 的影响是信号带宽和信号持续时间 4 种选择的一个函数。例如,如果选择信号传输间隔 T 满足条件 $T \gg T_m$, 则该信道引入的符号间干扰量可以忽略。如果信号脉冲 $s_l(t)$ 的带宽为 $W \approx 1/T$, 则条件 $T \gg T_m$ 意味着

$$W \ll \frac{1}{T_m} \approx (\Delta f)_c \quad (14-2-3)$$

即信号带宽 W 远小于信道相干带宽,因此该信道是频率非选择性的。换句话说, $S_l(f)$ 中的所有频率分量在通过信道传输时经受相同的衰减和相移,这意味着在由 $S_l(f)$ 占据的带宽内,信道的时变转移函数 $C(f; t)$ 是以频率为变量的复常数。因为 $S_l(f)$ 的频率含量集中在 $f=0$ 附近,所以 $C(f; t) = C(0; t)$, 因此式(14-2-2)简化为

$$\begin{aligned} r_l(t) &= C(0; t) \int_{-\infty}^{\infty} S_l(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= C(0; t) s_l(t) \end{aligned} \quad (14-2-4)$$

于是,当信号带宽 W 远小于信道相干带宽 $(\Delta f)_c$ 时,接收信号就是发送信号乘以复随机过程 $C(0; t)$, 该随机过程表示信道的时变特征。在这种情况下,由于 $W \ll (\Delta f)_c$, 因此接收的多径分量是不可分辨的。

频率非选择信道的转移函数 $C(0; t)$ 可表示为

$$C(0; t) = \alpha(t) e^{-j\phi(t)} \quad (14-2-5)$$

$\alpha(t)$ 和 $\phi(t)$ 分别表示等效低通信道的包络和相位。当 $C(0; t)$ 建模为零均值复高斯随机过程时,对于固定的 t 值,包络 $\alpha(t)$ 是瑞利分布的, $\phi(t)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 区间上的相位均匀分布。频率

非选择性信道的快衰落可由相关函数 $\phi_c(\Delta t)$ 确定,或者由多普勒功率谱 $S_c(\lambda)$ 确定。另一种方法是用信道参数 $(\Delta t)_c$ 或 B_d 表征衰落的快速性。

例如,假设有可能选择信号带宽 W ,使之满足条件 $W \ll (\Delta f)_c$,并选择信号传输间隔 T 满足条件 $T \ll (\Delta t)_c$ 。因为 T 小于信道的相干时间,所以信道衰减和相移至少在一个信号传输间隔内基本固定不变。满足该条件的信道称为慢衰落信道。当 $W \approx 1/T$ 时,信道是频率非选择性的且是慢衰落的,意味着 T_m 和 B_d 的乘积必须满足条件 $T_m B_d < 1$ 。

乘积 $T_m B_d$ 叫做信道的扩展因子。若 $T_m B_d < 1$,称信道是欠扩展的,否则称信道是过扩展的。几种信道的多径扩展、多普勒扩展以及扩展因子列在表 14-2-1 中。由表可见,若干无线信道,包括用做无源反射器的月球信道,是欠扩展的。因此,有可能选择信号 $S_i(t)$,使得这些信道是频率非选择性的且是慢衰落的。慢衰落特性意味着信道特征变化缓慢,使得人们能够测量信道。

表 14-2-1 几种时变多径信道的多径扩展、多普勒扩展及其扩展因子

信道类型	多径持续时间	多普勒扩展	扩展因子
短波电离层传播(HF)	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10^{-1} \sim 1$	$10^{-4} \sim 10^{-2}$
极光干扰下的电离层传播(HF)	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10 \sim 100$	$10^{-2} \sim 1$
电离层正向散射(VHF)	10^{-3}	10	10^{-3}
对流层散射(SHF)	10^{-6}	10	10^{-5}
轨道散射(X 频带)	10^{-4}	10^3	10^{-1}
最大天顶角月球反射 ($f_0 = 0.4 \text{ kmc}$)	10^{-2}	10	10^{-1}

14.3 节将确定在频率非选择性慢衰落信道上,二进制信号传输的差错率性能。该信道的模型分析起来是最简单的,更重要的是它使我们能够深入了解衰落信道上数字信号传输的性能特征。该模型还能提供有效的信号波形类型,以便克服信道引起的衰落。

由于当信号带宽 W 小于信道相干带宽 $(\Delta f)_c$ 时,接收信号中的多径分量是不可分辨的,所以此时的接收信号通过单一衰落路径到达接收机。另一方面,可以选择 $W \gg (\Delta f)_c$,使得信道变为频率选择性信道。后面将讨论,在此条件下,接收信号中的多径分量是可分辨的,其分辨率为 $1/W$ 延时。本章还将说明,频率选择性信道可建模为具有时变抽头系数的抽头延时线(横向)滤波器,还将导出在此频率选择性信道模型上的二进制信号传输的性能。

14.3 频率非选择性慢衰落信道

本节将推导二进制 PSK 和二进制 FSK 信号在频率非选择性慢衰落信道上传输时的差错率性能。正如 14.2 节所述,频率非选择性信道将导致发送信号 $s_i(t)$ 的乘性失真,信道慢衰落条件意味着至少在一个信号传输间隔内,乘法过程可看做一个常数。因此,若发送信号为 $s_i(t)$,在一个信号传输间隔内的等效低通接收信号为

$$r_i(t) = ae^{-j\phi} s_i(t) + z(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (14-3-1)$$

式中, $z(t)$ 表示恶化信号的复高斯白噪声过程。

假设信道衰落足够慢,以致于相移 ϕ 能够从接收信号中无误差地估计出来。在这种情况下

下,能够实现接收信号的理想相干检测。于是,接收信号可用一个匹配滤波器(对于二进制 PSK 的情况)或一对匹配滤波器(对于二进制 FSK 的情况)来处理。可用来确定二进制通信系统性能的一种方法是计算判决变量,并根据它确定差错率。本书已对于固定(时不变)信道执行了上述操作,即对于某一固定衰减 α ,已导出二进制 PSK 和二进制 FSK 的差错率。根据式(5-2-5),作为接收 SNR γ_b 函数的二进制 PSK 差错率为

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \quad (14-3-2)$$

式中, $\gamma_b = \alpha^2 \epsilon_b / N_0$ 。由式(5-2-10)确定的二进制 FSK 相干检测差错率的表达式为

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{\gamma_b}) \quad (14-3-3)$$

把式(14-3-2)和式(14-3-3)看做条件差错率,其条件是 α 为固定不变的。为了得到 α 随机变化时的差错率,必须将式(14-3-2)和式(14-3-3)中的 $P_2(\gamma_b)$ 对 γ_b 的概率密度函数求平均,即必须计算如下积分

$$P_2 = \int_0^{\infty} P_2(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (14-3-4)$$

式中, $P_2(\gamma_b)$ 是 α 为随机变量时 γ_b 的概率密度函数。

1. 瑞利衰落(Rayleigh Fading)

因为 α 是瑞利分布的,故 α^2 为具有两个自由度的 χ^2 分布。因此, γ_b 也是 χ^2 分布的。容易证明

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{\bar{\gamma}_b} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_b} \quad (\gamma_b \geq 0) \quad (14-3-5)$$

式中, $\bar{\gamma}_b$ 是平均信噪比,它定义为

$$\bar{\gamma}_b = \frac{\epsilon_b}{N_0} E(\alpha^2) \quad (14-3-6)$$

$E(\alpha^2)$ 是 α^2 的平均值。

现在,把式(14-3-5)代入式(14-3-4),并分别对式(14-3-2)和式(14-3-3)确定的 $P_2(\gamma_b)$ 积分。对于二进制 PSK,积分结果为

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{1 + \bar{\gamma}_b}} \right] \quad (14-3-7)$$

如果以式(14-3-3)确定的 $P_2(\gamma_b)$ 重积分,得到二进制 FSK 相干检测的差错率为

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{2 + \bar{\gamma}_b}} \right] \quad (14-3-8)$$

在得到差错率表达式(14-3-7)和式(14-3-8)的过程中,假定在慢衰落时得到的相移估值是无噪的。这样一个理想条件实际上是不成立的。在这种情况下,式(14-3-7)和式(14-3-8)应该看做在瑞利衰落时可能得到的最好性能。附录 C 将研究在噪声中的相位的估计问题,还将评价二进制和多相 PSK 的差错率性能。

在衰落足够快的信道上,不大可能通过许多信号传输间隔上对接收信号的相位平均来

得到稳定的相位参考估计,而 DPSK 是另一种可供选择的信号传输方法。由于 DPSK 只要求相继的两个信号传输间隔内的相位稳定,因此这种调制技术在信号衰落中十分稳健(robust)。在推导衰落信道二进制 DPSK 性能的过程中,再次从无衰落信道的差错率出发,即

$$P_2(\gamma_b) = \frac{1}{2}e^{-\gamma_b} \quad (14-3-9)$$

将该表达式以及式(14-3-5)中的 $P(\gamma_b)$ 代入式(14-3-4)中的积分。由积分的结果得出二进制 DPSK 的差错率为

$$P_2 = \frac{1}{2(1 + \bar{\gamma}_b)} \quad (14-3-10)$$

如果根本不选择信道相移的估计,而采用二进制正交 FSK 信号的非相干(包络或平方律)检测器,则无衰落信道的差错率为

$$P_2(\gamma_b) = \frac{1}{2}e^{-\gamma_b/2} \quad (14-3-11)$$

将 $P_2(\gamma_b)$ 对瑞利衰落信道衰减求平均,得到的差错率为

$$P_2 = \frac{1}{2 + \bar{\gamma}_b} \quad (14-3-12)$$

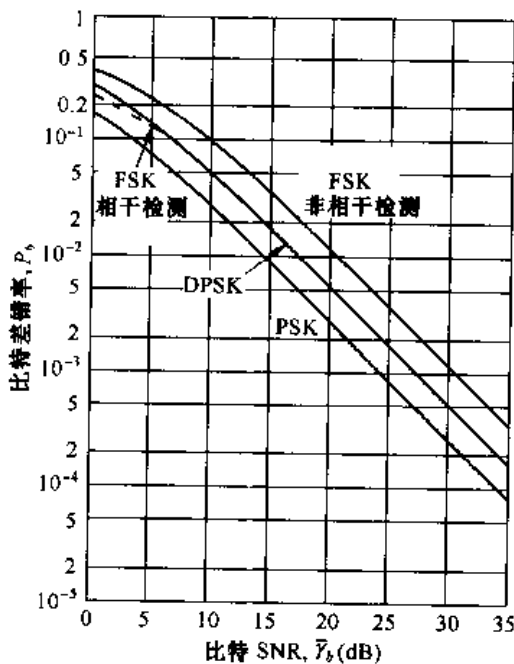


图 14-3-1 瑞利衰落信道上二进制信号传输的性能

图 14-3-1 所示为式(14-3-7)、式(14-3-8)、式(14-3-10)和式(14-3-12)的差错率。比较这 4 种二进制信号传输系统的性能,特别是大 SNR(即 $\gamma_b \gg 1$)时的差错率,式(14-3-7)、式(14-3-8)、式(14-3-10)和式(14-3-12)的差错率可简化为

$$P_2 \approx \begin{cases} 1/4\bar{\gamma}_b & \text{对于相干 PSK} \\ 1/2\bar{\gamma}_b & \text{对于相干正交 FSK} \\ 1/2\bar{\gamma}_b & \text{对于 DPSK} \\ 1/\bar{\gamma}_b & \text{对于非相干正交 FSK} \end{cases} \quad (14-3-13)$$

由式(14-3-13)可见,相干 PSK 优于 DPSK 3 dB,并且优于非相干 FSK 6 dB,该差错率只与 SNR 呈反比下降。与此相比,无衰落信道的差错率随 SNR 指数下降。这意味着,在衰落信道上,发送机必须发送较大功率以便得到低差错率。在许多情况下,由于技术上和经济上的原因,发送较大功率是不可能的,因此在衰落信道上获得可接受性能的另一个方法是使用冗余度,这可通过分集技术获得,详见 14.4 节的讨论。

2. Nakagami 衰落

如果 α 由 Nakagami- m 分布来统计表征,则随机变量 $\gamma_b = \alpha^2 \mathcal{E}_b / N_0$ 的 PDF 为

$$p(\gamma) = \frac{m^m}{\Gamma(m)} \gamma^{m-1} e^{-m\gamma/\bar{\gamma}} \quad (14-3-14)$$

式中, $\gamma = E(\alpha^2)E/N_0$ 。

任何调制方法的平均差错率都可由无衰落信道的适当差错率在衰落信号统计的特性上平均得到。

作为由 Nakagami- m 衰落统计特性获得性能的例子, 图 14-3-2 所示为以 m 为参数的二进制 PSK 系统的差错率, $m=1$ 对应于瑞利衰落。由图 14-3-2 可见, 当 m 在 $m=1$ 之上增加时, 性能将得到改善, 这说明该衰落不是很严重。另一方面, 当 $m < 1$ 时, 性能比瑞利衰落还差。

3. 其他衰落信号统计特性

根据上述过程, 人们能够对其他类型的衰落信号统计特性(如赖斯分布)确定各种调制方法的性能。

对赖斯分布衰落统计的错误概率可从林斯利(Linsley, 1964 年)的论文中找到。对于 Nakagami- m 衰落统计, 可参见埃斯波西托(Esposito, 1967 年)、Miyagaki 等(1978 年)、查拉斯(Charash, 1979 年)、阿尔·胡萨里(Al-Hussani, 1985 年)和博利厄等(Beaulieu et al., 1991 年)的论文。

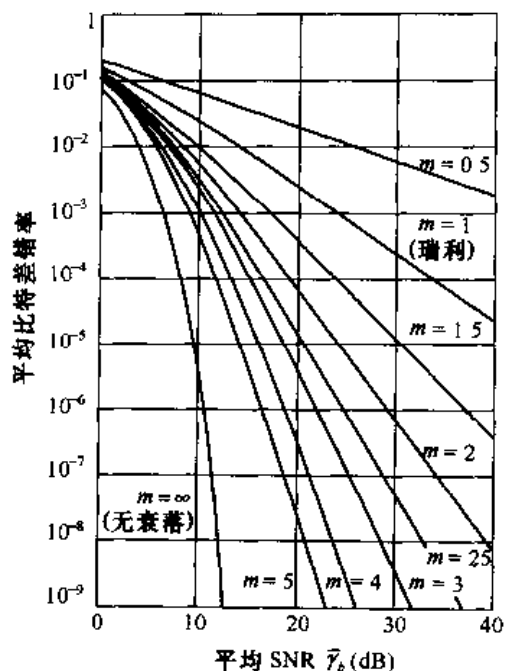


图 14-3-2 两相 PSK 符号的非分集接收平均差错率

14.4 多径衰落信道的分集技术

分集技术基于当信道衰减大(即信道处于深度衰落)时接收中将发生差错的事实。如果能够把独立衰落信道上发送的几个相同的信息信号的复制品供给接收机, 那么所有信号分量同时衰落的概率将大大减小, 也就是说, 如果 p 为任一信号衰落低于某一临界值的概率, 则 p^L 是相同信号的所有 L 个独立衰落的复制品低于该临界值时的概率。有几种方法可为接收机提供携带相同信息的信号的 L 个独立衰落的复制品。

一种方法是采用频率分集, 即携带相同信息的信号在 L 个不同载波上发送, 相邻载波的间隔等于或超过信道的相干带宽(Δf_c)。

第二种方法是采用时分集, 即携带相同信息的信号在 L 个不同时间隙上发送, 相邻时间隙的间隔等于或超过信道的相干时间(Δt_c), 以获得携带相同信息的信号的 L 个独立衰落分量。

应当注意, 衰落信道与突发差错信道相吻合。可以把以不同频率或不同时间隙(或两者)传输相同信息的方式看做重复编码的一种简单形式。以时间(Δt_c)或以频率(Δf_c)的分集传输的分离本质上是重复码中比特分组交织的一种形式, 该编码方式中, 试图分解突发差错以获得独立的差错。本章将证明, 一般地, 与非平凡编码相比, 重复编码是浪费带宽的编码。

另一个获得分集的常用方法是采用多重天线。例如, 可以采用单个发射天线和多重接收天线。后者必须分隔得足够远, 使得信号中的多径分量在天线上的传播延时有很大的区别。通常要求在两个天线之间至少相隔 10 个波长, 以获得独立的衰落信号。

一种更复杂的分集方法是采用带宽远大于信道相干带宽(Δf_c)的信号。带宽为 W 的信

号将分辨多径分量,从而将若干独立的衰落信号路径提供给接收机,其时间分辨率为 $1/W$ 。因此,由于多径扩展为 T_m s,所以有 $T_m W$ 个可分辨的信号分量。因为 $T_m \approx 1/(\Delta f)_c$,可辨信号分量的数目为 $W/(\Delta f)_c$ 。于是,宽带信号的使用刚好可看做阶数为 $L = W/(\Delta f)_c$ 的频率分集的另一方法。处理宽带信号的最佳接收机将在 14.5 节导出,该接收机通常称为 RAKE 相关器或 RAKE 匹配滤波器,由普赖斯和格林(Price & Green, 1958 年)发明。

实际应用中还有其他分集技术,例如到达角度分集和极化分集,但这些技术不如上述技术应用广泛。

14.4.1 二进制信号

下面研究具有分集的二进制数字通信系统的差错率性能。首先描述具有分集的通信系统的数学模型。假设有 L 条分集信道传送相同的携带信息的信号,又假设每条信道为频率非选择的、慢衰落的且其包络统计特性为瑞利分布,再假设 L 条分集信道之间的衰落过程是相互统计独立的,每条信道的信号受到零均值加性高斯白噪声过程的恶化。假设 L 条信道的噪声过程是相互统计独立的,且具有相同的自相关函数。于是, L 条信道的等效低通接收信号为

$$r_{lk}(t) = \alpha_k e^{j\varphi_k} s_{km}(t) + z_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, L, m = 1, 2) \quad (14-4-1)$$

式中, $|\alpha_k e^{-j\varphi_k}|$ 表示 L 条信道的衰减因子和相移, $s_{km}(t)$ 表示发送到第 k 信道的第 m 信号, $z_k(t)$ 表示第 k 信道上的加性高斯白噪声。在集合 $\{s_{km}(t)\}$ 内的所有信号具有相同的能量。

第 k 条信道接收信号的最佳解调器由两个匹配滤波器组成,其一具有冲激响应

$$b_{k1}(t) = s_{k1}^*(T - t) \quad (14-4-2)$$

另一个具有冲激响应

$$b_{k2}(t) = s_{k2}^*(T - t) \quad (14-4-3)$$

当然,若二进制 PSK 是用来发送信息的调制方法,则 $s_{k1}(t) = -s_{k2}(t)$ 。因此,二进制 PSK 只需要一个匹配滤波器。紧接匹配滤波器的是合并器,它形成两个判决变量。获得最佳性能的合并器由每个匹配滤波器输出与相应的复值(共轭)信道增益 $\alpha_k e^{-j\varphi_k}$ 相乘组成,该乘法的作用是补偿信道中的相移,并通过正比于信号强度的因子对信号加权。于是,要对强信号比弱信号进行更大的加权。执行复值加权运算后有两个和值,一个由相应于发送 0 的匹配滤波器的加权输出的实部组成,一个由相应于发送 1 的匹配滤波器的加权输出的实部组成。布伦纳(Brenna, 1959 年)把这种最佳合并器叫做最大比合并器。当然,最佳合并器的实现基于假设信道衰减 $\{\alpha_k\}$ 和相移 $\{\phi_k\}$ 已知,也就是说, $\{\alpha_k\}$ 和相移 $\{\phi_k\}$ 的估值中不包含噪声。有噪估计对多相 PSK 差错率性能的影响在附录 C 中研究。

上述二进制数字通信系统模型的框图如图 14-4-1 所示。

首先研究具有 L 阶分集的二进制 PSK 的性能,其最大比合并器的输出为如下形式的单一判决变量:

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{Re} \left(2\mathcal{E} \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \alpha_k N_k \right) \\ &= 2\mathcal{E} \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \alpha_k N_{kr} \end{aligned} \quad (14-4-4)$$

式中, N_{kr} 表示复高斯噪声变量的实部

$$N_k = e^{j\phi_k} \int_0^T z_k(t) s_k^*(t) dt \quad (14-4-5)$$

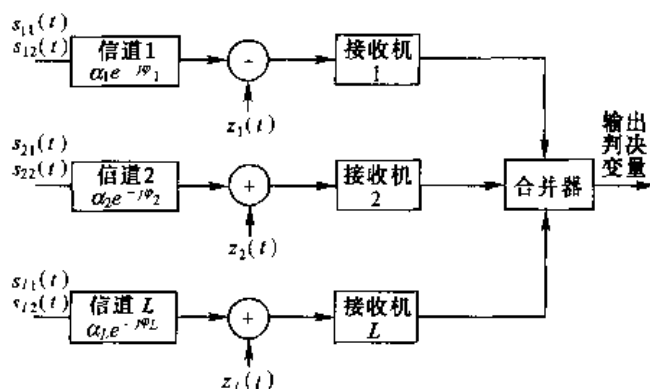


图 14-4-1 具有分集的二进制数字通信模型

推导差错率要遵照 14.3 节所述的方法,即首先得到以固定衰减因子集 $\{\alpha_k\}$ 为条件的差错率,然后将该条件差错率对 $\{\alpha_k\}$ 的概率密度函数求平均。

瑞利衰落

对于某一固定集合 $\{\alpha_k\}$,判决变量 U 是高斯的,其均值为

$$E(U) = 2\epsilon \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 \quad (14-4-6)$$

方差为

$$\sigma_U^2 = 2\epsilon N_0 \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 \quad (14-4-7)$$

对于这些均值和方差, U 小于零的概率是

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{2\gamma_b}) \quad (14-4-8)$$

其中,比特 SNR γ_b 为

$$\gamma_b = \frac{\epsilon}{N_0} \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^L \gamma_k \quad (14-4-9)$$

式中, $\gamma_b = \epsilon \alpha_k^2 / N_0$ 为第 k 条信道的瞬时 SNR。现在必须确定概率密度函数 $p(\gamma_b)$,该函数最容易由 γ_b 的特征函数求出。首先,对于 $L=1$, $\gamma_b = \gamma_1$ 具有由式(14-3-5)确定的 χ^2 概率密度函数。容易证明, γ_1 的特征函数为

$$\psi_{\gamma_1}(j\nu) = E(e^{j\nu\gamma_1}) = \frac{1}{1 - j\nu\bar{\gamma}_c} \quad (14-4-10)$$

式中, $\bar{\gamma}_c$ 为信道的平均 SNR,假设它对所有信道都相同,即

$$\bar{\gamma}_c = \frac{\epsilon}{N_0} E(\alpha_k^2) \quad (14-4-11)$$

与 k 无关。这个假设适用于本节的所有结果。因为在 L 条信道上的衰落是相互统计独立的,所以 $\{\gamma_k\}$ 是统计独立的。因此,总和 γ_b 的特征函数是式(14-4-10)的 L 次幂,即

$$\psi_{\gamma_b}(j\nu) = \frac{1}{(1 - j\nu\bar{\gamma}_c)^L} \quad (14-4-12)$$

这是具有 $2L$ 个自由度的 χ^2 分布随机变量的特征函数。从式(2-1-107)可得概率密度函数 $p(\gamma_b)$ 为

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{(L-1)! \bar{\gamma}_c^L} \gamma_b^{L-1} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_c} \quad (14-4-13)$$

以上推导的最后一步是将式(14-4-8)中的条件差错率在衰落信道统计特性上求平均。于是, 计算积分

$$P_2 = \int_0^\infty P_2(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (14-4-14)$$

式(14-4-14)有一个闭式解为

$$P_2 = \left[\frac{1}{2}(1-\mu) \right]^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left[\frac{1}{2}(1+\mu) \right]^k \quad (14-4-15)$$

其中,

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c}} \quad (14-4-16)$$

若信道的平均 SNR $\bar{\gamma}_c$ 满足条件 $\bar{\gamma}_c \gg 1$, 则 $\frac{1}{2}(1+\mu) \approx 1$, $\frac{1}{2}(1-\mu) \approx 1/4\bar{\gamma}_c$, 且

$$\sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} = \binom{2L-1}{L} \quad (14-4-17)$$

因此, 当 $\bar{\gamma}_c$ 足够大(大于 10 dB)时, 式(14-4-15)的差错率近似为

$$P_2 \approx \left(\frac{1}{4\bar{\gamma}_c} \right)^L \binom{2L-1}{L} \quad (14-4-18)$$

由式(14-4-18)可见, 差错率随 $1/\bar{\gamma}_c$ 的 L 次幂而变化。因此对于分集, 差错率与 SNR 的 L 次幂呈反比减小。

得到带有分集的二进制 PSK 性能之后, 考虑相干检测的二进制正交 FSK。在这种情况下, 最大比合并器输出的两判决变量为

$$\begin{aligned} U_1 &= \operatorname{Re} \left(2\epsilon \sum_{k=1}^L a_k^2 + \sum_{k=1}^L a_k N_{k1} \right) \\ U_2 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^L a_k N_{k2} \right) \end{aligned} \quad (14-4-19)$$

这里, 假设发送信号为 $s_{k1}(t)$, 且 $\{N_{k1}\}$ 和 $\{N_{k2}\}$ 是匹配滤波器输出的两组噪声分量, 其差错率就是 $U_2 > U_1$ 的概率。除了此处有双倍噪声功率之外, 以上计算类似于 PSK 的计算。因此, 当 $\{a_k\}$ 固定时, 条件差错率为

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{\gamma_b}) \quad (14-4-20)$$

利用式(14-4-13)将 $P_2(\gamma_b)$ 对衰落求平均可知, 只要用 $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_c$ 代替 $\bar{\gamma}_c$, 由式(14-4-15)得出的结果仍然适用。也就是说, 式(14-4-15)是相干检测二进制正交 FSK 的差错率表达式, 其中参数 μ 为

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{2+\bar{\gamma}_c}} \quad (14-4-21)$$

对于大的 $\bar{\gamma}_c$ 值,性能 P_2 可近似为

$$P_2 \approx \left(\frac{1}{2\bar{\gamma}_c} \right)^L \binom{2L-1}{L} \quad (14-4-22)$$

比较式(14-4-22)和式(14-4-18)可知,相干检测二进制 PSK 和正交 FSK 之间的 3 dB 性能差异不仅存在于非衰落、非弥散信道,也存在于衰落信道。

在上述关于相干检测二进制 PSK 和 FSK 的讨论中,假设接收机中使用了复值信道参数 $\{\alpha_k e^{-j\phi_k}\}$ 的无噪声估值。因为信道是时变的,所以参数 $\{\alpha_k e^{-j\phi_k}\}$ 不能被准确地估计。事实上,某些信道上的时间变化可能相当快,以致于妨碍了相干检测的实现。在这种情况下,应该考虑应用 DPSK 或非相干检测 FSK。

首先研究 DPSK。为了使 DPSK 成为可行的数字信号传输方法,信道变化必须足够慢,以至于在两个相继的信号传输间隔上的信道相移 $\{\phi_k\}$ 不发生明显的变化。在此假设两个相继信号传输间隔内的信道参数 $\{\alpha_k e^{-j\phi_k}\}$ 保持不变,二进制 DPSK 合并器将产生一个输出判决变量

$$U = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L (2\mathcal{E}\alpha_k e^{-j\phi_k} + N_{k2})(2\mathcal{E}\alpha_k e^{j\phi_k} + N_{k1}^*) \right] \quad (14-4-23)$$

其中, $\{N_{k1}\}$ 和 $\{N_{k2}\}$ 表示两个相继信号传输间隔内的匹配滤波器输出端的接收噪声分量,差错率就是 $U < 0$ 的概率。因为 U 是附录 B 中所述复高斯随机变量的一般二次型的特例,所以差错率可直接从附录 B 得到。另一种方法是利用式(12-1-3)给出的差错率(该式适用于在 L 条时不变信道上传送的二进制 DPSK),并对瑞利衰落信道统计特性求平均,可得条件差错率为

$$P_2(\gamma_b) = \left(\frac{1}{2} \right)^{2L-1} e^{-\gamma_b} \sum_{k=0}^{L-1} b_k \gamma_b^k \quad (14-4-24)$$

式中, γ_b 由式(14-4-9)确定,

$$b_k = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{L-1-k} \binom{2L-1}{n} \quad (14-4-25)$$

容易证明, $P_2(\gamma_b)$ 在由式(14-4-13)中的 $p(\gamma_b)$ 确定的衰落信道统计特性上求平均可得

$$P_2 = \frac{1}{2^{2L-1}(L-1)!(1+\bar{\gamma}_c)^L} \sum_{k=0}^{L-1} b_k (L-1+k)! \left(\frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c} \right)^k \quad (14-4-26)$$

这表明,式(14-4-26)的结果可处理成式(14-4-15)的形式,也适用于相干 PSK 和 FSK。对于二进制 DPSK,式(14-4-15)中的参数 μ 为(见附录 C)

$$\mu = \frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c} \quad (14-4-27)$$

当 $\bar{\gamma}_c \gg 1$ 时,式(14-4-26)中的差错率近似为

$$P_2 \approx \left(\frac{1}{2\bar{\gamma}_c} \right)^L \binom{2L-1}{L} \quad (14-4-28)$$

非相干检测正交 FSK 是本节研究的最后一种信号传输技术,它既适合于慢衰落,又适合于快衰落。下面介绍的性能分析基于如下假设:衰落足够慢,以致信道参数 $\{\alpha_k e^{-j\phi_k}\}$ 在信号传输间隔的持续时间内保持不变。多信道信号的合并器是一种平方律合并器,其输出由下列两个判决变量组成

$$U_1 = \sum_{k=1}^L |2\mathcal{E}a_k e^{-j\theta_k} + N_{k1}|^2$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^L |N_{k2}|^2 \quad (14-4-29)$$

其中,假设 U_1 包含信号。因此,差错率为 $U_2 > U_1$ 的概率。

正如在 DPSK 中那样,在推导平方律合并 FSK 性能时,可选择两种方法之一。12.1 节中已述,平方律合并 FSK 差错率的表达式与用 $\frac{1}{2}\gamma_b$ 代替 γ_b 时 DPSK 的差错率表达式相同,即 FSK 系统需要 3 dB 的附加信噪比,以达到时不变信道的同样性能。因此,当用 $\frac{1}{2}\gamma_b$ 代替 γ_b 时,式(14-4-24)给出的 DPSK 条件差错率适用于平方律合并 FSK,对衰落求式(14-4-24)的平均的结果(由式(14-4-26)确定)也一定适用于用 $\frac{1}{2}\bar{\gamma}_c$ 代替 $\bar{\gamma}_c$ 的 FSK。式(14-4-26)和式(14-4-15)是等效的,因此式(14-4-15)给出的差错率也适用于带参数 μ 的平方律合并 FSK,该参数为

$$\mu = \frac{\bar{\gamma}_c}{2 + \bar{\gamma}_c} \quad (14-4-30)$$

皮尔斯(Pierce, 1958 年)提出的求判决变量 $U_2 > U_1$ 概率的另一种推导方法如上述方法一样方便,它从概率密度函数 $p(U_1)$ 和 $p(U_2)$ 出发。因为复随机变量 $\{a_k e^{-j\theta_k}\}$ 、 $\{N_{k1}\}$ 、 $\{N_{k2}\}$ 都是零均值高斯分布的,故判决变量 U_1 和 U_2 服从具有 $2L$ 个自由度的 χ^2 概率分布,即

$$p(U_1) = \frac{1}{(2\sigma_1^2)^L (L-1)!} U_1^{L-1} \exp\left(-\frac{U_1}{2\sigma_1^2}\right) \quad (14-4-31)$$

式中

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{2} E(|2\mathcal{E}a_k e^{-j\theta_k} + N_{k1}|^2) \\ &= 2\mathcal{E}N_0(1 + \bar{\gamma}_c) \end{aligned}$$

类似地

$$p(U_2) = \frac{2}{(2\sigma_2^2)^L (L-1)!} U_2^{L-1} \exp\left(-\frac{U_2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (14-4-32)$$

式中

$$\sigma_2^2 = 2\mathcal{E}N_0$$

差错率正是 $U_2 > U_1$ 的概率。这个概率由式(14-4-15)得到,其中 μ 由式(14-4-30)定义,其证明留做练习。

当 $\bar{\gamma}_c \gg 1$ 时,平方律检测 FSK 的性能可进一步简化,如其他二进制多信道系统那样。在这种情况下,差错率的近似表达式为

$$P_2 \approx \left(\frac{1}{\bar{\gamma}_c}\right)^L \binom{2L-1}{L} \quad (14-4-33)$$

图 14-4-2 示出了 $L=1, 2, 4$ 时的 PSK、DPSK,以及平方律检测正交 FSK 的差错率性能。该性能曲线是平均比特 SNR $\bar{\gamma}_b$ 的函数, $\bar{\gamma}_b$ 与平均信道 SNR $\bar{\gamma}_c$ 相关

$$\bar{\gamma}_b = L\bar{\gamma}_c \quad (14-4-34)$$

图 14-4-2 的结果清楚地说明了分集的优点,它是克服由衰落引起的 SNR 严重损失的一个有效手段。

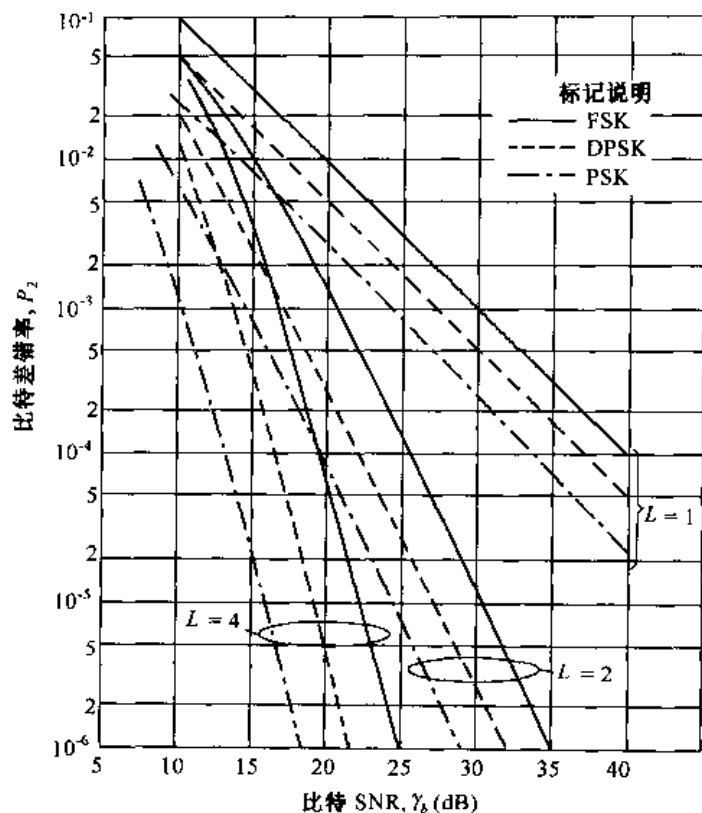


图 14-4-2 具有分集的二进制信号的性能

Nakagami 衰落

把本节推广到其他衰落信道是一件很简单的事情。我们将简要研究 Nakagami 信道。为此,让我们将单信道 SNR 参数 $\gamma_b = \alpha^2 \epsilon_b / N_0$ 情况下由前面的式(14-3-14)给出 Nakagami 的 PDF

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{\Gamma(m)(\bar{\gamma}_b/m)^m} \gamma_b^{m-1} e^{-\gamma_b/(\bar{\gamma}_b/m)} \quad (14-4-35)$$

与式(14-3-13)给出的瑞利(Rayleigh)衰落 L -信道 SNR 情况下得到的 PDF

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{(L-1)! \bar{\gamma}_c^L} \gamma_b^{L-1} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_c} \quad (14-4-36)$$

进行比较。注意到,在 L 阶分集系统情况下 $\bar{\gamma}_b = \bar{\gamma}_c / L$ 。因此很清楚,当 $L = m = \text{整数}$ 时,两种情况下的 PDF 结果完全相同。当 $L = m = 1$ 时,这两种 PDF 对应于简单的瑞利衰落信道系统。对于 Nakagami 参数 $m = 2$ 的情况,单信道系统的性能相同于双分集($L = 2$)瑞利衰落信道的性能。更一般地,具有 m 为整数的 Nakagami- m 衰落的单信道系统等效于瑞利衰落信道中 L -信道分集系统。由于这个等效, Nakagami- m 随机变量的特征函数必须是如下形式

$$\phi_{\gamma_b}(jv) = \frac{1}{(1 - jv \bar{\gamma}_b/m)^m} \quad (14-4-37)$$

上式给出的结果与用来表示瑞利衰落信道 L 阶分集系统中合并信号特征函数的式(14-4-12)给出的结果一致。因此可得出如下结论:独立衰落的 Nakagami 衰落信道中 K -信道系统发送等效于瑞利衰落信道中 $L = Km$ 信道分集。

14.4.2 多相信号

瑞利衰落信道上的多相信号传输在附录 C 中详细介绍。本节将引用 M 元 PSK 和 DPSK 系统中的符号差错率以及四相 PSK 和 DPSK 比特差错率的一般结果。

M 元 PSK 和 DPSK 系统中的符号差错率的一般结果为

$$P_M = \frac{(-1)^{L-1}(1-\mu^2)^L}{\pi(L-1)!} \left(\frac{\partial^{L-1}}{\partial b^{L-1}} \left\{ \frac{1}{b-\mu^2} \left[\frac{\pi}{M}(M-1) - \frac{\mu \sin(\pi/M)}{\sqrt{b-\mu^2 \cos^2(\pi/M)}} \cot^{-1} \frac{-\mu \cos(\pi/M)}{\sqrt{b-\mu^2 \cos^2(\pi/M)}} \right] \right\} \right) \Big|_{b=1} \quad (14-4-38)$$

式中,对于 PSK,

$$\mu = \sqrt{\frac{\gamma_c}{1+\gamma_c}} \quad (14-4-39)$$

对于 DPSK,

$$\mu = \frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c} \quad (14-4-40)$$

这里, $\bar{\gamma}_c$ 仍是平均信道接收 SNR, 比特 SNR 为 $\bar{\gamma}_b = \bar{L}\bar{\gamma}_c/k$, 其中 $k = \log_2 M$ 。

四相 PSK 和 DPSK 的比特差错率的推导基础是一对信息比特按照格雷(Gray)码映射为 4 个相位, 附录 C 中导出的比特差错率为

$$P_b = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{2-\mu^2}} \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1-\mu^2}{4-2\mu^2} \right)^k \right] \quad (14-4-41)$$

式中,对于 PSK 和 DPSK, μ 分别由式(14-4-39)和式(14-4-40)得到。

图 14-4-3 所示为 $M=2, 4, 8$ 和 $L=1$ 时, DPSK 和相干 PSK 的符号差错率。注意, DPSK 和相干 PSK 之间的性能差异对 M 的 3 个值都约为 3 dB。事实上, 当 $\bar{\gamma}_b \gg 1$ 和 $L=1$ 时, 对于 DPSK, 式(14-4-38)可近似为

$$P_M \approx \frac{M-1}{(M \log_2 M) [\sin^2(\pi/M)] \bar{\gamma}_b} \quad (14-4-42)$$

对于 PSK, 近似为

$$P_M \approx \frac{M-1}{(M \log_2 M) [\sin^2(\pi/M)] 2 \bar{\gamma}_b} \quad (14-4-43)$$

因此, 当高 SNR 时, 瑞利衰落信道上的相干 PSK 比 DPSK 好 3 dB。当 L 增加时, 这个差别仍然保持。

图 14-4-4 所示为 $L=1, 2, 4$ 时, 两相、四相和八相 DPSK 信号传输的比特差错率。带有格雷(Gray)编码的八相 DPSK 的比特差错率表达式不在此处给出, 可在普罗基斯(Proakis, 1968 年)的论文中找到。在这种情况下, 两相和四相 DPSK 的性能(近似)相同, 而八相 DPSK 较差约 3 dB。虽然这里没有列出相干 PSK 的比特差错率, 但可证明两相和四相相干 PSK 可得到相同的性能。

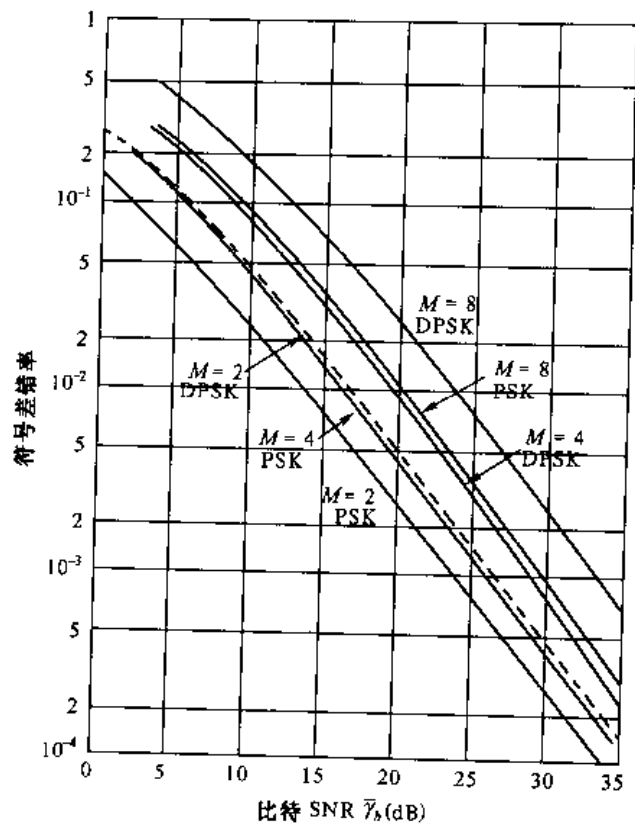


图 [4.4-3] 瑞利衰落中 PSK 和 DPSK 的符号差错率

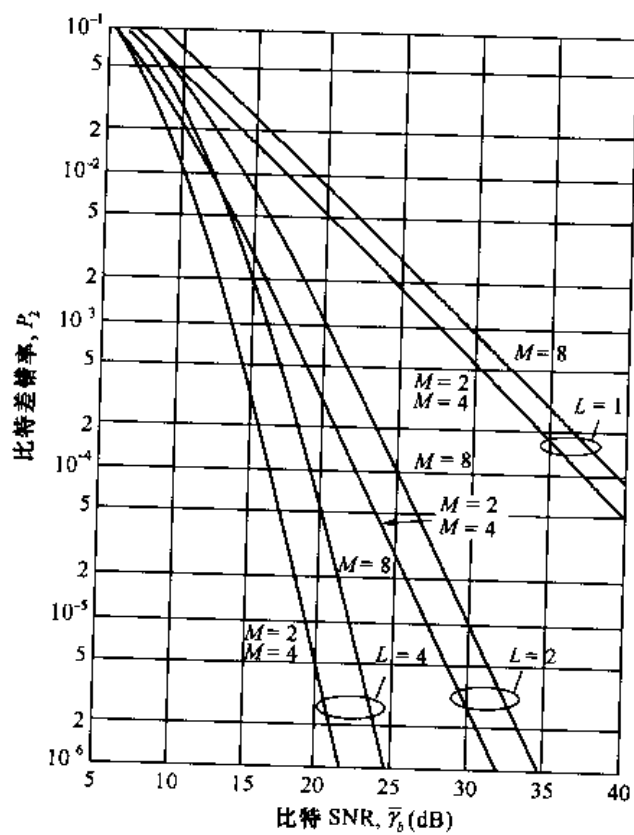


图 14-4-4 瑞利衰落中具有分集的 DPSK 的比特差错率

14.4.3 M 元正交信号

本节将确定 M 元正交信号在瑞利衰落信道上传输的性能,并且评价高阶信号符号集相对于二进制符号集的优点。正交信号可看做具有最小频率间隔的 M 元 FSK,该最小频率间隔是 $1/T$ 的整数倍, T 为信号传输间隔。相同的携带信息的信号沿 L 条分集信道传输。假定每条分集信道是频率非选择性的和慢衰落的,且假定 L 条信道的衰落过程是相互统计独立的。加性高斯白噪声过程恶化了每条分集信道上的信号,假定加性噪声过程是相互统计独立的。

虽然用公式描述 M 元通信系统的结构和分析分集信道的最大比合并器的性能比较容易,但人们更喜欢在一个实际系统中采用非相干检测。因此,本节主要讨论分集信号的平方律合并。包含信号的合并器输出为

$$U_1 = \sum_{k=1}^L |2\epsilon a_k e^{-j\varphi_k} + N_{k1}|^2 \quad (14-4-44)$$

其余 $M-1$ 个合并器的输出为

$$U_m = \sum_{k=1}^L |N_{km}|^2 \quad (m = 2, 3, 4, \dots, M) \quad (14-4-45)$$

当 $m = 2, 3, \dots, M$ 时,差错率就是 1 减去 $U_1 > U_m$ 的概率。因为信号是正交的,且加性噪声过程相互统计独立,所以随机变量 U_1, U_2, \dots, U_M 也是相互统计独立的。 U_1 的概率密度函数由式(14-4-31)确定。另一方面, U_2, \dots, U_M 是同分布的,并由式(14-4-32)的边缘概率密度函数描述。由于 U_1 固定,联合概率 $P(U_2 < U_1, U_3 < U_1, \dots, U_m < U_1)$ 等于 $P(U_2 < U_1)$ 的 $M-1$ 次幂,于是

$$\begin{aligned} P(U_2 < U_1) &= \int_0^{U_1} p(U_2) dU_2 \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right)^k \end{aligned} \quad (14-4-46)$$

式中, $\sigma_2^2 = 2\epsilon N_0$ 。为了得到正确判决的概率,将该概率的 $M-1$ 次幂对 U_1 的概率密度函数求平均。若用 1 减去这个结果,即得哈恩(Hahn, 1962 年)提出的如下形式的差错率:

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - \int_0^\infty \frac{1}{(2\sigma_1^2)^L (L-1)!} U_1^{L-1} \exp\left(-\frac{U_1}{2\sigma_1^2}\right) \\ &\quad \times \left[1 - \exp\left(-\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{U_1}{2\sigma_2^2}\right)^k\right]^{M-1} dU_1 \\ &= 1 - \int_0^\infty \frac{1}{(1+\bar{\gamma}_c)^L (L-1)!} U_1^{L-1} \exp\left(-\frac{U_1}{1+\bar{\gamma}_c}\right) \\ &\quad \times \left(1 - e^{-U_1} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{U_1^k}{k!}\right)^{M-1} dU_1 \end{aligned} \quad (14-4-47)$$

式中, $\bar{\gamma}_c$ 是平均分集信道 SNR, 平均比特 SNR 为 $\bar{\gamma}_b = \bar{L}\bar{\gamma}_c / \log_2 M = \bar{L}\bar{\gamma}_c / k$ 。

式(14-4-47)的积分可用闭式表示为双求和形式。这很容易由下列结果得到,如果有下列展开式:

$$\left(\sum_{k=0}^{L-1} \frac{U_1^k}{k!} \right)^m = \sum_{k=0}^{m(L-1)} \beta_{km} U_1^k \quad (14-4-48)$$

其中, β_{km} 为上述展开式的系数集。那么, 式(14-4-47)简化为

$$P_M = \frac{1}{(L-1)!} \sum_{m=1}^{M-1} \frac{(-1)^{m+1} \binom{M-1}{m}}{(1+m+m\bar{\gamma}_c)^L} \times \sum_{k=0}^{m(L-1)} \beta_{km} (L-1+k)! \left(\frac{1+\bar{\gamma}_c}{1+m+m\bar{\gamma}_c} \right)^k \quad (14-4-49)$$

当不存在分集($L=1$)时, 式(14-4-49)的差错率简化为

$$P_M = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{(-1)^{m+1} \binom{M-1}{m}}{1+m+m\bar{\gamma}_c} \quad (14-4-50)$$

符号差错率 P_M 可转换为等效的比特差错率, 只要用 $2^{k-1}/(2^k-1)$ 乘以 P_M 即可。

虽然式(14-4-49)给出的 P_M 表达式是闭式的, 但当 M 和 L 值很大时计算将相当麻烦。一个替代的方法是根据式(14-4-47)用数值积分计算 P_M 。下列图中示出的结果是由式(14-4-47)产生的。

首先考察平方律合并 M 元正交信号传输的差错率性能, 它是分集阶次函数。图 14-4-5 和图 14-4-6 表示总 SNR(定义为 $\bar{\gamma}_t = L\bar{\gamma}_c$) 保持不变时, 在 $M=2$ 和 $M=4$ 两种情况下, P_M 作为 L

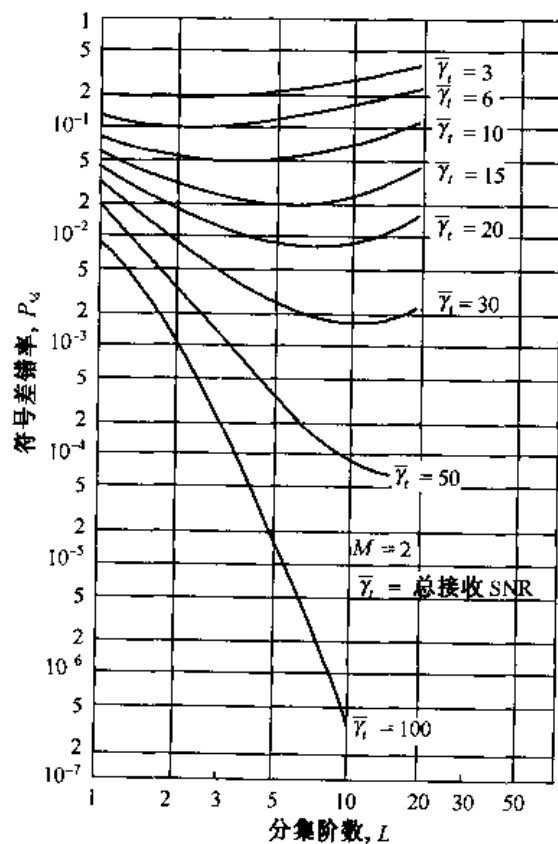


图 14-4-5 平方律检测二进制正交信号的
作为分集函数的性能

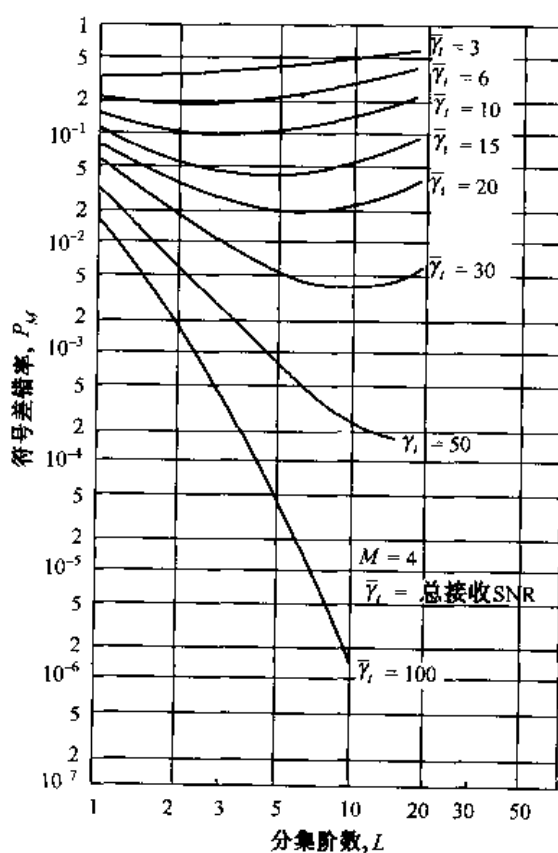


图 14-4-6 平方律检测 $M=4$ 正交信号的
作为分集函数的性能

函数的特性。这些结果表明,对于每个 $\bar{\gamma}_t$, 存在一个最佳分集阶次。也就是说,对于任一 $\bar{\gamma}_t$, 存在一个 P_M 对应于最小的 L 值。仔细观察这些图还可看出,当 $\bar{\gamma}_c = \bar{\gamma}_t/L \approx 3$ 时,得到 P_M 的最小值。这个结果与符号集的大小 M 无关。

再考察差错率 P_M 作为平均比特 SNR(定义为 $\bar{\gamma}_b = \bar{L}\gamma_c/k$) 的函数的情况(如果把 M 元正交 FSK 看做编码的一种形式^①, 把分集的阶次看做重复编码中符号被重复的次数, 则 $\bar{\gamma}_b = \bar{\gamma}_c/R_c$, 其中 $R_c = k/L$ 是码率)。当 $M=2, 4, 8, 16, 32$ 及 $L=1, 2, 4$ 时, P_M 与 $\bar{\gamma}_b$ 的关系曲线如图 14-4-7 所示, 这些结果表明 M 和 L 增加时的性能增益。注意, L 的增加将获得大的性能增益, 并且 L 小时, 由 M 的增加所获得的性能增益也比较小。然而, 当 L 增加时, 由增加 M 获得的增益将增大, 因为这两个参数的增加都导致带宽扩展, 即

$$B_c = \frac{LM}{\log_2 M} \quad (14-4-51)$$

图 14-4-7 所示的结果表明 L 的增加比 M 的相应增加更有效。正如在 14.6 节将要看到的, 编码是在衰落信道传送信号中获得分集的一种带宽有效的工具。

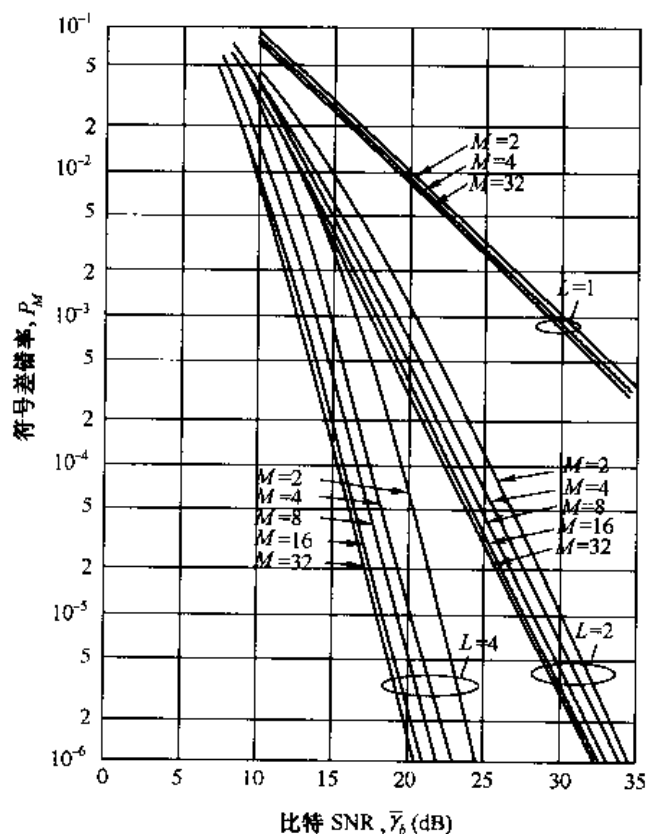


图 14-4-7 以 M 和 L 为参数的正交信令的性能

契尔诺夫(Chernoff)边界

本小节研究具有 L 阶分集的二进制正交信号的传输差错率的契尔诺夫上边界, 它在讨论

^① 14.6 节将证明, 具有分集的 M 元正交 FSK 可看做一个分组正交码。

衰落信道的编码时很有用。首先研究式(14-4-29)给出的两个判决变量 U_1 和 U_2 的表达式, 其中 U_1 由平方律合并的信号加噪声项组成, U_2 由平方律合并的噪声项组成。二进制差错率 $P_2(L)$ 为

$$\begin{aligned} P_2(L) &= P(U_2 - U_1 > 0) \\ &= P(X > 0) = \int_0^{\infty} p(x) dx \end{aligned} \quad (14-4-52)$$

其中, 随机变量 X 为

$$X = U_2 - U_1 = \sum_{k=1}^L (|N_{k2}|^2 - |2\epsilon a_k + N_{k1}|^2) \quad (14-4-53)$$

U_1 中的相位项 φ_k 被舍弃, 因为它不影响平方律检测器的性能。

令 $S(X)$ 表示单位阶跃函数, 那么式(14-4-52)中的差错率为

$$P_2(L) = E[S(X)] \quad (14-4-54)$$

根据 2.1.5 节的研究, 契尔诺夫边界可由指数函数在约束单位阶跃函数得到, 即

$$S(X) \leq e^{\xi X} \quad (\xi \geq 0) \quad (14-4-55)$$

其中, 参数 ξ 被优化, 以便得到一个紧密边界。于是,

$$P_2(L) = E[S(X)] \leq E(e^{\xi X}) \quad (14-4-56)$$

由式(14-4-53)对随机变量 X 进行替换, 注意到和式中的随机变量是相互统计独立的, 可得

$$P_2(L) \leq \prod_{k=1}^L E(e^{\xi |N_{k2}|^2}) E(e^{-\xi |2\epsilon a_k + N_{k1}|^2}) \quad (14-4-57)$$

但

$$E(e^{\xi |N_{k2}|^2}) = \frac{1}{1 - 2\xi\sigma_2^2} \quad \left(\xi < \frac{1}{2\sigma_2^2} \right) \quad (14-4-58)$$

且

$$E(e^{-\xi |2\epsilon a_k + N_{k1}|^2}) = \frac{1}{1 + 2\xi\sigma_1^2} \quad \left(\xi > \frac{-1}{2\sigma_1^2} \right) \quad (14-4-59)$$

式中, $\sigma_2^2 = 2\delta N_0$, $\sigma_1^2 = 2\epsilon N_0(1 + \bar{\gamma}_c)$, $\bar{\gamma}_c$ 是平均分集信道 SNR。注意, σ_2^2 和 σ_1^2 与 k 无关, 即 L 条分集信道上的加性噪声项及衰落统计量是同分布的。因此, 式(14-4-57)简化为

$$P_2(L) \leq \left[\frac{1}{(1 - 2\xi\sigma_2^2)(1 + 2\xi\sigma_1^2)} \right]^L \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2\sigma_2^2} \right) \quad (14-4-60)$$

在式(14-4-60)的右边对 ξ 求微分, 当

$$\xi = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2} \quad (14-4-61)$$

时, 上边界被最小化。将式(14-4-61)中的 ξ 代入式(14-4-60), 得到契尔诺夫上边界

$$P_2(L) \leq \left[\frac{4(1 + \bar{\gamma}_c)}{(2 + \bar{\gamma}_c)^2} \right]^L \quad (14-4-62)$$

式(14-4-62)也可表示为

$$P_2(L) \leq [4p(1 - p)]^L \quad (14-4-63)$$

式中, $p = 1/(2 + \bar{\gamma}_c)$ 是无分集衰落信道上二进制正交信号传输的差错率。

把式(14-4-62)的契尔诺夫边界与下式给出的二进制正交信号传输及 L 个分集信号平方

律合并的精确差错率

$$P_2(L) = \left(\frac{1}{1 + \bar{\gamma}_c} \right)^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left(\frac{1 + \bar{\gamma}_c}{2 + \bar{\gamma}_c} \right)^k \quad (14-4-64)$$

$$= p^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} (1-p)^k$$

进行比较,可得到该边界的紧密性。图 14-4-8 示出了这个比较,当 $L=1$ 时,契尔诺夫上边界的距离精确差错率约为 6 dB,随着 L 增加,它更紧密。例如,当 $L=4$ 时,该边界与精确差错率之差约 2.5 dB。

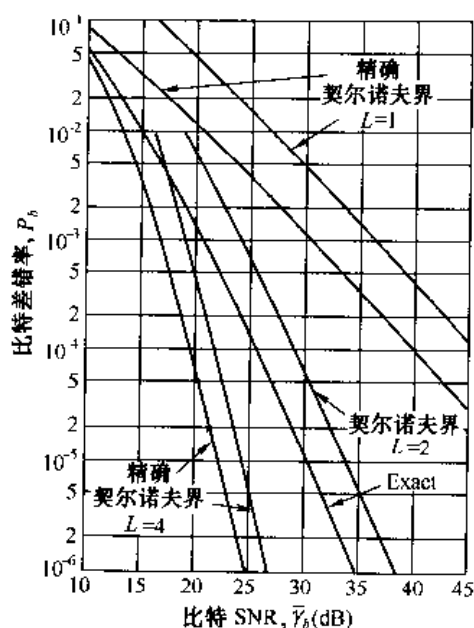


图 14-4-8 契尔诺夫边界与精确差错率的比较

具有分集的 M 元正交信号传输的差错率上边界可借助于一致边界

$$P_M \leq (M-1)P_2(L) \quad (14-4-65)$$

来确定。式中对于 $P_2(L)$,可利用式(14-4-64)或式(14-4-62)定义的契尔诺夫边界。

14.5 在频率选择性慢衰落信道中的数字信号传输

当信道的扩展因子满足条件 $T_m B_d \ll 1$ 时,有可能选择带宽为 $W \ll (\Delta f)_c$ 且持续时间为 $T \ll (\Delta t)_c$ 的信号,于是该信道是频率非选择性的和慢衰落的。在这样的信道中,分集技术可用来克服衰落的严重影响。

当带宽 $W \gg (\Delta f)_c$ 对用户可用时,可把该信道划分为大量频分复用(FDM)子信道,这些子信道在中心频率处的相互间距至少为 $(\Delta f)_c$ 。那么,相同的信号可在 FDM 子信道上发送,由此可获得频率分集。本节将讨论另一种方法。

14.5.1 抽头延时线信道模型

本节将证明,获得基本相同结果的一种更直接的方法是采用带宽为 W 的宽带信号。由

于假设 $T \ll (\Delta t)_c$, 因此信道仍然是慢衰落的。假设 W 是实带通信号占有的带宽, 则等效低通信号 $s_l(t)$ 的频带占用为 $|f| \leq \frac{1}{2}W$ 。因为 $s_l(t)$ 带限于 $|f| \leq \frac{1}{2}W$, 所以利用抽样定理可得到该信号为

$$s_l(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l\left(\frac{n}{W}\right) \frac{\sin[\pi W(t - n/W)]}{\pi W(t - n/W)} \quad (14-5-1)$$

$s_l(t)$ 的傅里叶变换为

$$S_l(f) = \begin{cases} \frac{1}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(n/W) e^{-j2\pi n/W} & (|f| \leq \frac{1}{2}W) \\ 0 & (|f| > \frac{1}{2}W) \end{cases} \quad (14-5-2)$$

频率选择信道的无噪接收信号为

$$r_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f; t) S_l(f) e^{j2\pi ft} df \quad (14-5-3)$$

式中, $C(f; t)$ 是时变转移函数。用式(14-5-2)代替式(14-5-3)中的 $S_l(f)$, 得

$$\begin{aligned} r_l(t) &= \frac{1}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(n/W) \int_{-\infty}^{\infty} C(f; t) e^{j2\pi f(t - n/W)} df \\ &= \frac{1}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(n/W) c(t - n/W; t) \end{aligned} \quad (14-5-4)$$

式中, $c(\tau; t)$ 是时变冲激响应。式(14-5-4)具有卷积和的形式, 因此能表示为另一形式

$$r(t) = \frac{1}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_l(t - n/W) c(n/W; t) \quad (14-5-5)$$

定义一组时变信道系数

$$c_n(t) = \frac{1}{W} c\left(\frac{n}{W}; t\right) \quad (14-5-6)$$

那么, 用这些信道系数表示式(14-5-5)为

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) s_l(t - n/W) \quad (14-5-7)$$

式(14-5-7)中的接收信号的形式意味着时变频率选择性信道可建模或表示为具有抽头间隔 $1/W$ 和抽头加权系数 $|c_n(t)|$ 的抽头延时线。事实上, 根据式(14-5-7)可以推出该信道的低通冲激响应为

$$c(\tau; t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) \delta(\tau - n/W) \quad (14-5-8)$$

相应的时变转移函数为

$$C(f; t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{-j2\pi fn/W} \quad (14-5-9)$$

于是, 利用带宽为 $\frac{1}{2}W$ (其中 $W \gg (\Delta f)_c$) 的等效低通信号, 可在多径延时分布内获得 $1/W$ 的分辨率。由于总的多径扩展为 T_m , 因此对于所有的实际用途, 信道的抽头延时线模型可截断为 $L = \lfloor T_m W \rfloor + 1$ 个抽头, 无噪接收信号为

$$r_l(t) = \sum_{n=1}^L c_n(t) s_l\left(t - \frac{n}{W}\right) \quad (14-5-10)$$

截断的抽头延时线模型如图 14-5-1 所示。根据 14.1 节介绍的信道统计特性,时变抽头权值 $\{c_n(t)\}$ 是一个复平稳随机过程。在瑞利衰落的情况下,幅度 $|c_n(t)| \equiv a_n(t)$ 是瑞利分布的,相位 $\varphi_n(t)$ 是均匀分布的。由于 $\{c_n(t)\}$ 表示相应于 L 个不同延时 $\tau = n/W, n = 1, 2, \dots, L$ 的抽头权值,因此 14.1 节的不相关散射的假设意味着 $\{c_n(t)\}$ 是互不相关的。当 $\{c_n(t)\}$ 是高斯随机过程时,它们是统计独立的。

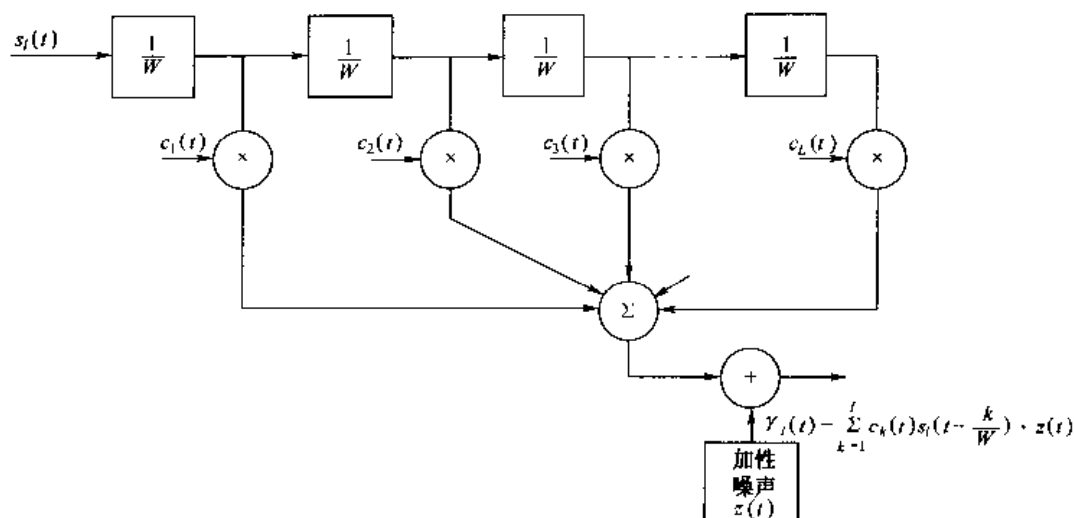


图 14-5-1 频率选择信道的抽头延时线模型

14.5.2 RAKE 解调器

下面研究在频率选择性信道上的数字信号传输问题,该信道用具有统计独立时变抽头权值 $\{c_n(t)\}$ 的延时线来建模。具有统计独立抽头权值的抽头延时线模型在接收机中提供了相同发送信号的 L 个复制品,因此,以最佳方法处理接收信号的接收机将获得等效 L 阶分集通信系统的性能。

下面研究在该信道上的二进制信号传输。设有两个等能量的信号 $s_{i1}(t)$ 和 $s_{i2}(t)$,它们是双极性的或正交的,其持续时间 T 满足条件 $T \gg T_m$ 。于是,可以忽略由多径引起的任何符号间干扰。因为信号的带宽超过信道的相干带宽,所以接收信号为

$$r_i(t) = \sum_{k=1}^L c_k(t) s_{li}(t - k/W) + z(t) \quad (14-5-11)$$

$$\approx v_i(t) + z(t) \quad (0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2)$$

式中, $z(t)$ 是零均值复高斯白噪声过程。此时假设信道抽头权值已知,则最佳接收机由与 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 匹配的两个滤波器组成。解调器输出用符号率取样,而且样值通过一个判决电路,该判决电路用来选择相应于最大输出的信号。一种等效最佳接收机采用互相关代替匹配滤波器。在这两种情况下,二进制信号相干检测的判决变量都可表示为

$$U_m = \operatorname{Re} \left[\int_0^T r_l(t) v_m^*(t) dt \right]$$

$$= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L \int_0^T r_l(t) c_k^*(t) s_{lm}^*(t - k/W) dt \right] \quad (m = 1, 2) \quad (14-5-12)$$

图 14-5-2 说明了判决变量计算所涉及的操作。在最佳接收机的实现中,两种参考信号被延时

并与接收信号 $r_i(t)$ 作相关运算。

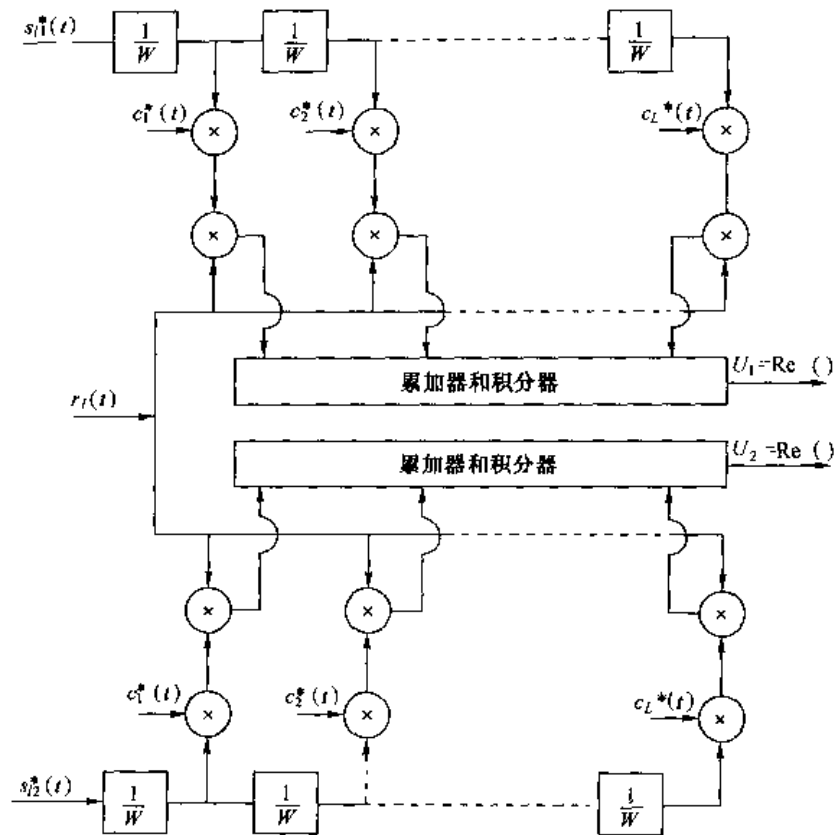


图 14-5-2 宽带二进制信号的最佳解调器(延时参考配置)

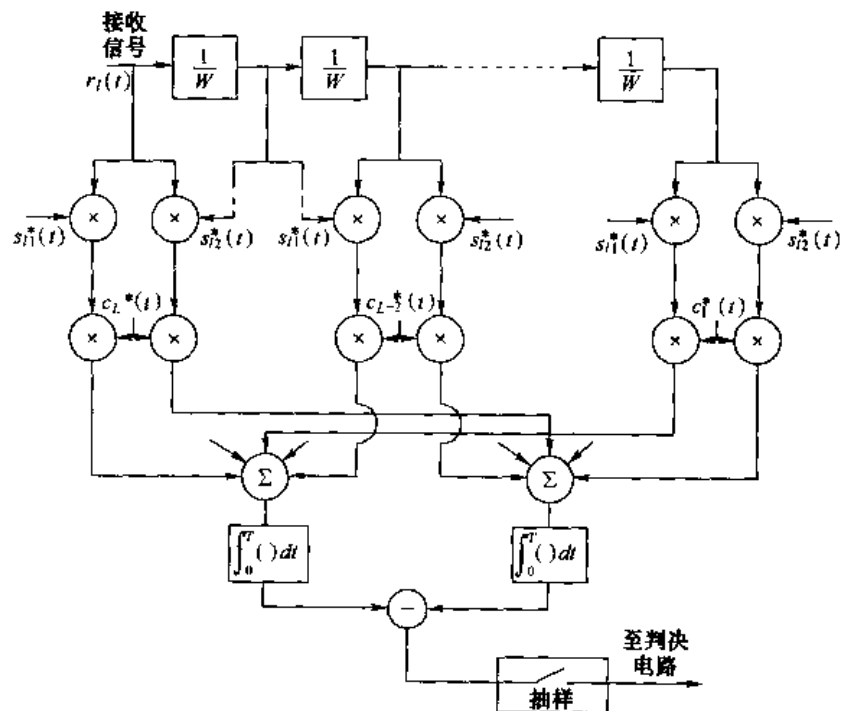


图 14-5-3 宽带二进制信号的最佳解调器(延时接收信号配置)

最佳接收机的另一种实现采用单一的延时线,接收信号 $r_l(t)$ 通过该延时线。每一抽头的信号与 $c_k(t)s_{lm}^*(t)$ 相关,其中 $k=1,2,\dots,L$ 且 $m=1,2$ 。该接收机结构如图 14-5-3 所示。实际上,抽头延时线接收机试图收集来自所有接收信号路径的信号能量,这些接收信号路径都在延时线覆盖的范围内,而且携带相同信息,其作用类似于普通花园的草耙(rake)。因此普赖斯和格林(Price & Green, 1958 年)创造出“RAKE 接收机”这个名称,用来形象地表示该接收机的结构。

14.5.3 RAKE 接收机的性能

本节将评价 RAKE 接收机的性能,该评价是在衰落足够慢,以致于能够准确地(没有噪声)估计 $c_k(t)$ 的条件下进行的。另外,在任何一个信号传输间隔内,把 $c_k(t)$ 看做常数,记做 c_k 。于是,式(14-5-12)中的判决变量为

$$U_m = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L c_k^* \int_0^T r(t) s_{lm}^*(t - k/W) dt \right] \quad (m = 1, 2) \quad (14-5-13)$$

假设发送的信号为 $s_{l1}(t)$,则接收信号为

$$r_l(t) = \sum_{n=1}^L c_n s_{l1}(t - n/W) + z(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (14-5-14)$$

把式(14-5-14)代入式(14-5-13),得

$$\begin{aligned} U_m = & \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L c_k^* \sum_{n=1}^L c_n \int_0^T s_{l1}(t - n/W) s_{lm}^*(t - k/W) dt \right] \\ & + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L c_k^* \int_0^T z(t) s_{lm}^*(t - k/W) dt \right] \quad (m = 1, 2) \end{aligned} \quad (14-5-15)$$

通常,宽带信号 $s_{l1}(t)$ 和 $s_{l2}(t)$ 是由伪随机序列产生的,因此该信号具有如下特性

$$\int_0^T s_{li}(t - n/W) s_{li}^*(t - k/W) dt \approx 0 \quad (k \neq n, i = 1, 2) \quad (14-5-16)$$

如果设计二进制信号满足这个特性,那么式(14-4-15)可简化为^①

$$\begin{aligned} U_m = & \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L |c_k|^2 \int_0^T s_{l1}(t - k/W) s_{lm}^*(t - k/W) dt \right] \\ & + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^L c_k^* \int_0^T z(t) s_{lm}^*(t - k/W) dt \right] \quad (m = 1, 2) \end{aligned} \quad (14-5-17)$$

当二进制信号是双极性的,一个判决变量就足够了。在这种情况下,式(14-5-17)简化为

$$U_1 = \operatorname{Re} \left(2\sigma \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^L \alpha_k N_k \right) \quad (14-5-18)$$

其中, $\alpha_k = |c_k|$ 且

$$N_k = e^{j\varphi_k} \int_0^T z(t) s_{l1}^*(t - k/W) dt \quad (14-5-19)$$

式(14-5-18)与式(14-4-4)给出的判决变量相同,后者相应于 L 阶分集系统中的最大比合并

^① 虽然式(14-5-16)规定的正交特性可通过适当地选择伪随机序列而得到满足,但 $s_{li}(t - n/W)$ 和 $s_{li}^*(t - n/W)$ 的互相关引起信号的相关自噪声,它最终限制了性能。为简单起见,在以下的计算中不考虑自噪声项。因此,下面介绍的性能结果应该看做下边界(理想 RAKE)。通过把自噪声看做噪声功率为其方差的附加的高斯噪声分量,可获得近似的 RAKE 接收机性能。

器。因此,具有理想(无噪)信道抽头权值估计的 RAKE 接收机等效于 L 阶分集系统中的最大比合并器。于是,当所有抽头权值具有相同均方值,即对所有 $k, E(\alpha_k^2)$ 都相同时,RAKE 接收机的差错率性能由式(14-4-15)和式(14-4-16)确定。另一方面,当对所有 k ,其均方值 $E(\alpha_k^2)$ 不同时,必须重新推导差错率性能,因为此时的式(14-4-15)不再适用。

下面将在 $|\alpha_k|$ 的均方值不同的条件下,推导二进制双极性和正交信号的差错率。从条件差错率

$$P_2(\gamma_b) = Q(\sqrt{\gamma_b(1-\rho_r)}) \quad (14-5-20)$$

出发开始讨论。式中,双极性信号的 $\rho_r = -1$,正交信号的 $\rho_r = 0$,且

$$\begin{aligned} \gamma_b &= \frac{\epsilon}{N_0} \sum_{k=1}^L \alpha_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^L \gamma_k \end{aligned} \quad (14-5-21)$$

$\{\gamma_k\}$ 中的每一个服从具有两个自由度的 χ^2 分布,即

$$p(\gamma_k) = \frac{1}{\bar{\gamma}_k} e^{-\gamma_k/\bar{\gamma}_k} \quad (14-5-22)$$

式中, $\bar{\gamma}_k$ 是第 k 条路径的平均 SNR, 定义为

$$\bar{\gamma}_k = \frac{\epsilon}{N_0} E(\alpha_k^2) \quad (14-5-23)$$

由式(14-4-10)可知, γ_k 的特征函数为

$$\phi_{\gamma_k}(jv) = \frac{1}{1 - jv\bar{\gamma}_k} \quad (14-5-24)$$

因为 γ_b 是 L 个统计独立分量 $\{\gamma_k\}$ 之和,故 γ_b 的特征函数为

$$\phi_{\gamma_b}(jv) = \prod_{k=1}^L \frac{1}{1 - jv\bar{\gamma}_k} \quad (14-5-25)$$

对式(14-5-25)中的特征函数取傅里叶反变换,即得 γ_b 的概率密度函数

$$p(\gamma_b) = \sum_{k=1}^L \frac{\pi_k}{\bar{\gamma}_k} e^{-\gamma_b/\bar{\gamma}_k} \quad (\gamma_b \geq 0) \quad (14-5-26)$$

式中, π_k 定义为

$$\pi_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^L \frac{\bar{\gamma}_k}{\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_i} \quad (14-5-27)$$

当式(14-5-20)的条件差错率对式(14-5-26)的概率密度函数求平均时,

$$P_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \pi_k \left[1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_k(1-\rho_r)}{2 + \bar{\gamma}_k(1-\rho_r)}} \right] \quad (14-5-28)$$

这个差错率可近似为 ($\bar{\gamma}_k \gg 1$)

$$P_2 \approx \binom{2L-1}{L} \prod_{k=1}^L \frac{1}{2\bar{\gamma}_k(1-\rho_r)} \quad (14-5-29)$$

通过比较 $\rho_r = -1$ 时的式(14-5-29)和式(14-4-18)可以看出,在每条路径的 SNR 不等和相等

的两种情况下,可得到相同形式的渐近特性。

在推导 RAKE 接收机差错率性能的过程中,假设信道抽头权值的估计是理想的。实际上,只要信道衰落足够慢,例如 $(\Delta t)_c/T \geq 100$ (T 为信号传输间隔),就能得到比较好的估计。图 14-5-4 所示为二进制信号传输波形正交时估计抽头权值的一种方法,该估值为每一抽头处低通滤波器的输出。在任一时刻,进来的信号是 $s_{i1}(t)$ 或 $s_{i2}(t)$,因此用来估计 $c_k(t)$ 的低通滤波器的输入包含来自一个相关器的信号加噪声以及来自其他相关器的噪声。这个信号估计方法不适合于双极性信号,因为此时两个相关器输出的相加将导致信号相消,而单一相关器可用于双极性信号。在携带信息的信号被除去后,其输出馈送到低通滤波器的输入端。为了完成这个工作,必须把一个信号传输间隔的延时引入到信道估计过程中,如图 14-5-5 所示,即首先接收机必须对接收信号中的信息是 $+1$ 还是 -1 作出判决,再在馈送该信号进入低通滤波器之前使用该判决,以从相关器输出中除去该信息。

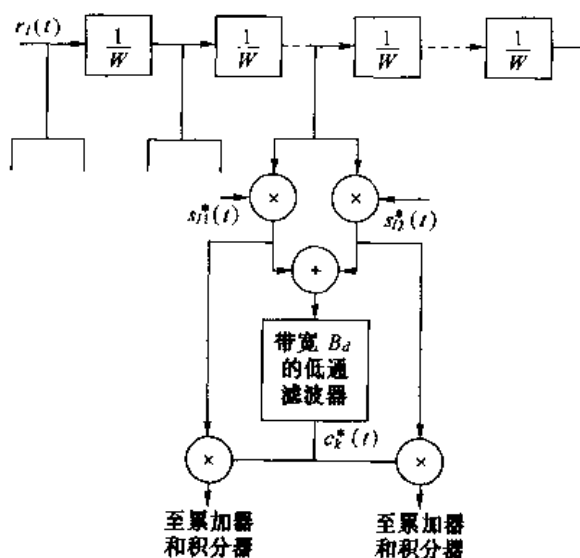


图 14-5-4 二进制正交信号的信道抽头权值估计

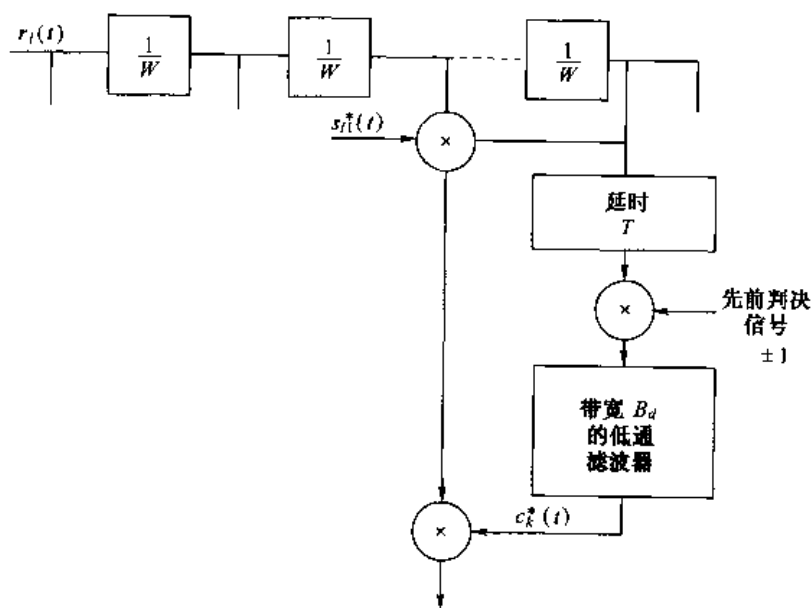


图 14-5-5 二进制双极性信号的信道抽头权值估计

如果不估计频率选择性信道的抽头权值,可使用 DPSK 信号传输方式或非相干检测正交信号传输方式。DPSK 的 RAKE 接收机结构如图 14-5-6 所示。显然,当传送的信号波形 $s_l(t)$ 满足式(14-5-16)的正交特性时,式(14-4-23)给出的 L 阶分集系统的判决变量是相同的。因此,当所有的信号路径具有相同 SNR $\bar{\gamma}_c$ 时,二进制 DPSK 系统中 RAKE 接收机的差错率性能与具有 $\mu = \bar{\gamma}_c / (1 + \bar{\gamma}_c)$ 的式(14-4-15)的结果相同。另一方面,当信噪比 $\{\bar{\gamma}_k\}$ 不同时,该差错率可通过将式(14-4-24)表示的时不变信道条件下的差错率对式(14-5-26)的 γ_b 概率密度函数求平均得到。这个积分结果为

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2L-1} \sum_{m=0}^{L-1} m! b_m \sum_{k=1}^L \frac{\pi_k}{\bar{\gamma}_k} \left(\frac{\bar{\gamma}_k}{1 + \bar{\gamma}_k}\right)^{m+1} \quad (14-5-30)$$

其中, π_k 由式(14-5-27)定义, b_m 由式(14-4-25)定义。

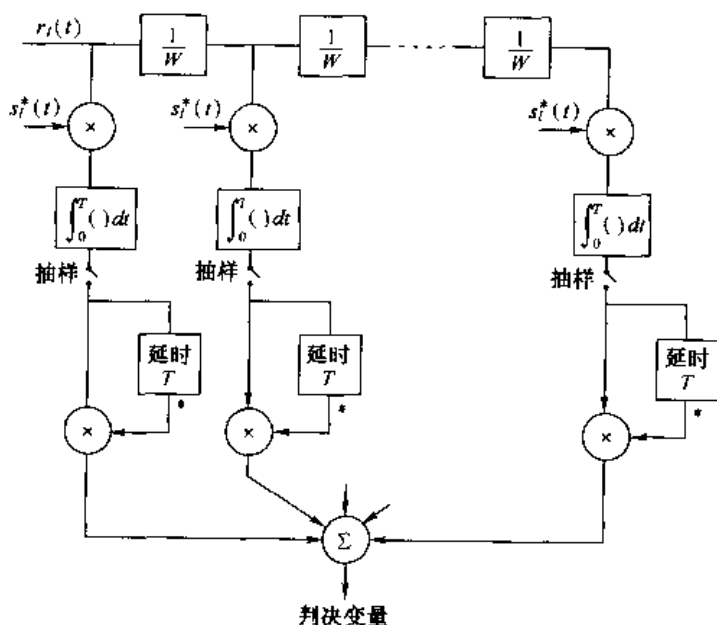


图 14-5-6 DPSK 信号的 RAKE 解调器

最后,我们研究频率选择性信道上的二进制信号传输问题,在接收机中采用平方律检测。这种形式的信号适合于信道衰落足够快,难于有好的信道抽头权值估计的情况或信道估计器的费用很高的情况。具有每一抽头信号平方律合并的 RAKE 接收机如图 14-5-7 所示,在其性能计算中,再一次假定式(14-5-16)给出的正交特性成立,那么 RAKE 输出的判决变量为

$$U_1 = \sum_{k=1}^L |2\mathcal{E}_{C_k} + N_{k1}|^2$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^L |N_{k2}|^2 \quad (14-5-31)$$

这里假定 $s_{l1}(t)$ 是发送信号。该判决变量与式(14-4-19)给出的判决变量是相同的,它们适用于 L 阶分集的正交信号。因此,当所有信号路径都具有相同 SNR 时,平方律检测正交信号的 RAKE 接收机的性能由式(14-4-15)确定,其中 $\mu = \bar{\gamma}_c / (2 + \bar{\gamma}_c)$ 。如果各信号路径的 SNR 不同,可用 $\frac{1}{2} \gamma_b$ 代替 γ_b 后的式(14-4-24)中的条件差错率对式(14-5-26)的概率密度函

数 $p(\gamma_b)$ 求平均, 其结果由式(14-5-30)确定, 其中 γ_k 用 $\frac{1}{2}\gamma_k$ 代替。

在上面的分析中, 假设图 14-5-7 所示正交信号的平方律合并的 RAKE 解调器在每一级延时上包含一个信号分量。否则, 其性能将恶化, 因为某些抽头相关器只贡献噪声。在这些条件下, 抽头相关器的低电平、只有噪声的贡献应从合并器中排除, 正如查伊(Chyi, 1988 年)等证明的。

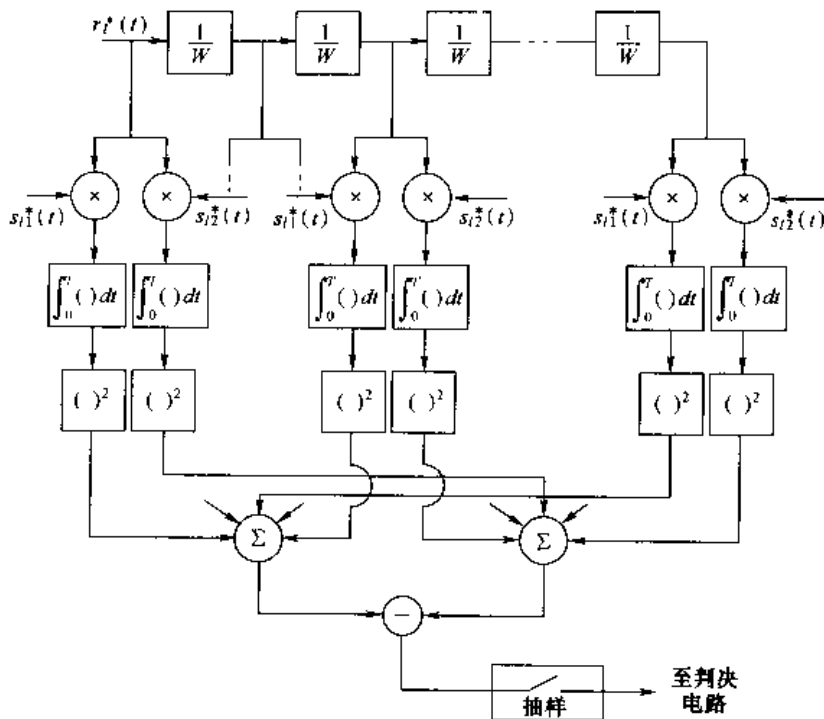


图 14-5-7 正交信号平方律合并的 RAKE 解调器

本节讨论了频率选择性信道上的信号传输问题。本节介绍的 RAKE 接收机配置可推广到多电平信号传输的情况。事实上, 如果选择 M 元 PSK 或 DPSK, RAKE 接收机的结构将保持不变, 只是因 RAKE 相关器的 PSK 和 DPSK 检测器的不同而不同。

14.5.4 符号间干扰信道的接收机结构

如上所述, 通过多径信道发送的宽带信号波形——时间分辨率 $1/W$ (W 为信号带宽) 区分多径分量。通常, 将这种宽带信号作为直接扩频信号, 其中 PN 扩频序列为线性反馈移位寄存器(例如, 最大长度线性反馈移位寄存器)的输出。加到该序列上的调制是二进制 PSK、QPSK、DPSK 或二进制正交调制。要求的比特率确定了比特间隔或符号间隔。

我们上面描述的 RAKE 接收机是基于比特间隔 $T_b \gg T_m$ 条件(即存在可忽略不计的 ISI)的最佳接收机。当这个条件不满足时, RAKE 接收机的输出将受到 ISI 的损害。在这种情况下, 需要一个均衡器来抑制 ISI。

特别地, 假设使用二进制 PSK 调制并用 PN 序列进行扩频。发送信号的带宽足够宽以便分辨两个或多个多径分量。在接收机端, 当信号解调为基带后, 利用信道响应匹配滤波器伴随以抑制 ISI 用均衡器的 RAKE 系统进行处理。RAKE 输出以比特率抽样, 而且这些样值送到均衡器。在这种情况下, 合适的均衡器将是用维持比算法实现的最大似然序列估计器

(MLSE)或判决反馈均衡器。该接收机结构如图 14-5-8 所示。

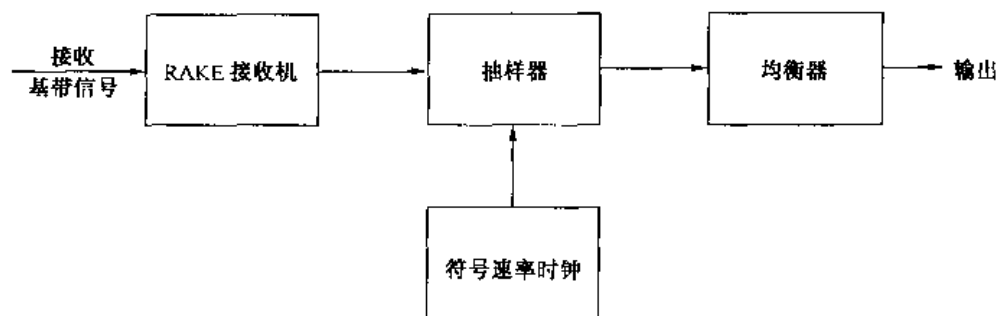


图 14-5-8 处理被 ISI 恶化的宽带信号的接收机结构

其他接收机结构也是这样的。若 PN 序列的周期等于比特间隔,即 $LT_c \approx T_b$, T_c 为码片(chip)间隔, L_c 是每比特码片数,则一个与扩频序列匹配的固定滤波器可用于处理接收信号,且其后跟随一个自适应均衡器,如分数间隔 DFE,如图 14-5-9 所示。在这种情况下,匹配滤波器输出以数倍码片速率(例如两倍码片速率)进行取样,并把结果馈送给分数间隔 DFE。DFE 中反馈滤波器以比特间隔隔开抽头。自适应 DFE 要求一个训练序列来调整信道多径结构的系数。

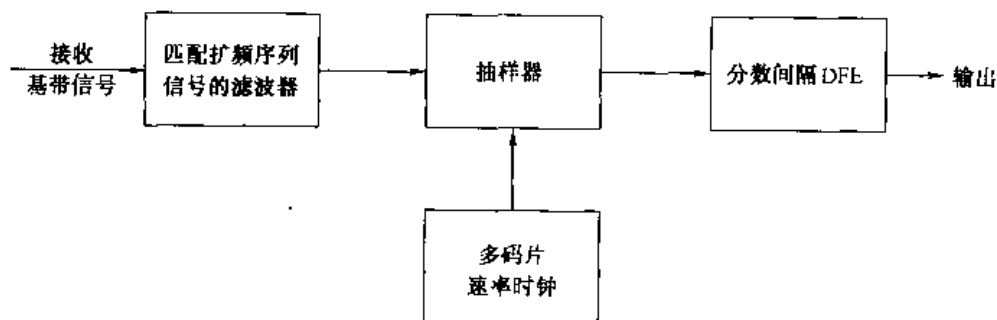


图 14-5-9 处理被 ISI 恶化的宽带信号的另一接收机结构

同样简单的接收机结构,是用其带宽与发送信号带宽匹配的低通滤波器代替扩频匹配滤波器。这种滤波器的输出可用码片速率的整数倍速率取样,且样值再通过一个自适应分数间隔 DFE。在这种情况下,DFE 中反馈滤波器的系数将与扩频序列和信道多径的组合相适应。阿伯杜尔拉赫曼等(Abdulrahman et al., 1994 年)考虑采用直接序列扩频信号。

泰勒等(Taylor et al., 1998 年)提供了均衡技术及其在无线信道中性能的广泛评述。

14.6 用于衰落信道的编码波形

前面已经证明:在克服由信道时变弥散特性引起的衰落的不利影响中,分集技术很有效。时间和/或频率分集技术可看做信息序列重复(分组)编码的一种形式。根据这个观点,前述合并技术表示该重复码的软判决译码。因为重复码是一种平凡的编码形式,考虑从更有效的码型获得附加的效益,特别地,编码为获得衰落信道分集提供了一种有效的手段。由一种码提供的分集量直接与其最小距离有关。

正如 14.4 节所述,时间分集是通过在多个时间间隔内发送携带相同信息的信号分量获得的,这些时间间隔由等于或超过信道相干时间(Δt_c)的一个量相互分隔。类似地,频率分集通

过在多个频率间隙内发送携带相同信息的信号分量获得,该频率间隙由至少等于信道相干带宽 $(\Delta f)_c$ 的一个量来相互分隔。因此,这些携带相同信息的信号分量经受统计独立的衰落。

为了把这些要点推广到编码的信息序列,只要求相应于某一特殊码或码符号的信号波形的衰落与相应于任何其他码比特或码符号的信号波形无关。这个要求可能使可用时频空间的利用率降低,即在该二维信号传输空间内存在很大的未用部分。为了减少这种低效性,大量码字按时间或按频率或同时按时间和频率进行交织,在交织过程中,相应于某一给定码比特或符号的波形独立地衰落。因此,假设时频信号传输空间被分成许多互不重叠的时-频单元,对应于一个码比特或码符号的信号波形在此单元内发送。

除了假设给定码字的信号分量统计独立衰落外,还假设使接收信号恶化的加性噪声分量是统计独立且在时-频空间的各单元之间均匀分布的高斯白噪声过程。又假设邻近单元间有足够的间隔,使得单元间的干扰可忽略不计。

一个重要的问题是用于发送编码信息序列的调制技术。如果信道衰落得足够慢而能够建立起相位参考,那么可采用 PSK 和 DPSK。如果不可能,在接收机中采用非相干检测的 FSK 调制是合适的。在以下的讨论中,假设对于发送信号占据的不同单元的信号不可能建立一个或多个参考相位,因而选择非相干检测的 FSK 调制。在本节的最后部分,我们主要讨论编码信号的相位相干检测。

用来评价差错率性能的数字通信系统模型如图 14-6-1 所示。编码器可以是二进制的、非二进制的,或者非二进制编码器与二进制编码器的级联,编码器产生的码可以是分组码、卷积码,或者在级联情况下分组码和卷积码的一种混合。

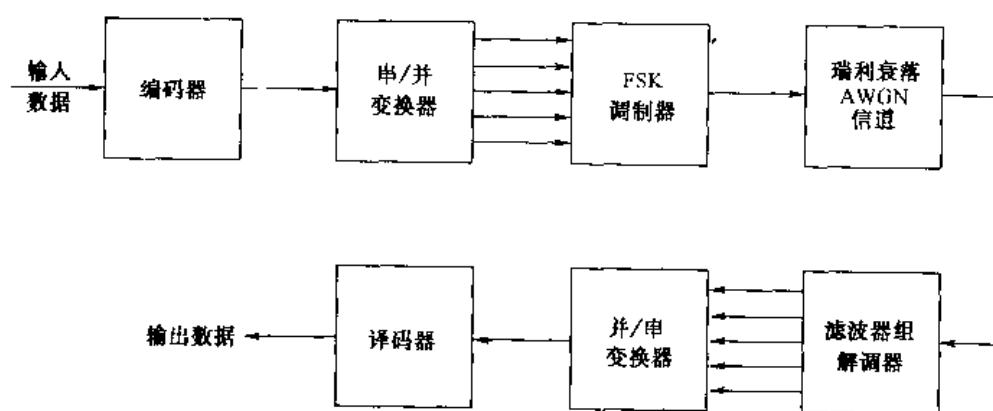


图 14-6-1 具有 FSK 调制/解调和编码/译码的通信系统模型

为了阐明 FSK 型(正交)信号的调制、解调以及译码,研究一种线性二进制分组码,其中 k 个信息比特编码为 n 个比特的分组。为了简化且不失一般性,假设一个码字的所有 n 个比特在多频单元信道上同时发送。一个有 $\{c_{ij}\}$ 比特的码字 C_i 以如下方式映射为 FSK 信号波形:如果 $c_{ij} = 0$,发送单频 f_{0j} ;如果 $c_{ij} = 1$,发送单频 f_{1j} 。这意味着 $2n$ 个单频或单元可用于发送 n 个比特的码字,但任何信号传输间隔内只发送 n 个单频。因为每个码字传送 k 个信息比特,所以 FSK 的带宽扩展因子为 $B_e = 2n/k$ 。

接收信号的解调器将该信号分成 $2n$ 个相应于发送机中可用单频频率的谱分量。于是,解调器可实现为 $2n$ 个滤波器组,其中每个滤波器匹配于可能发送的单频之一。 $2n$ 个滤波器的输出被非相干检测。由于在 $2n$ 个频率单元中,瑞利衰落和加性高斯白噪声是相互统计独

立和均匀分布的随机过程,因此,最佳最大似然软判决译码准则要求这些滤波器的响应为平方律检测,并对每个码字适当合并,形成 $M=2^k$ 个判决变量,选择相应于最大判决变量的码字。如果采用硬判决译码,则最佳最大似然检测器选择相对于接收码字具有最小汉明距离的码字。

虽然上述讨论假设使用分组码,但卷积编码器也很容易用于图 14-6-1 所示的框图中。例如,如果采用二进制卷积码,那么输出序列的每个比特可用二进制 FSK 发送。卷积码的最大似然软判决译码准则可利用维特比(Viterbi)算法来高效实现,在该算法中,在网格中的任一点处,幸存序列的度量由通过该网格的相应路径的平方律合并的输出组成。另一方面,如果采用硬判决译码,维特比算法利用汉明距离作为度量来实现。

14.6.1 线性二进制分组码软判决译码的差错率

下面研究上述瑞利衰落信道上传输的线性二进制码 (n, k) 的译码问题。基于最大似然准则的最佳软判决译码器形成如下 $M=2^k$ 个判决变量:

$$\begin{aligned} U_i &= \sum_{j=1}^n [(1 - c_{ij}) |y_{0j}|^2 + c_{ij} |y_{1j}|^2] \\ &= \sum_{j=1}^n [|y_{0j}|^2 + c_{ij} (|y_{1j}|^2 - |y_{0j}|^2)] \quad (i = 1, 2, \dots, 2^k) \end{aligned} \quad (14-6-1)$$

式中, $|y_{rj}|^2, j=1, 2, \dots, n$, 且 $r=0, 1$ 表示 $2n$ 个滤波器输出的平方包络, 这些滤波器被调谐到 $2n$ 个可能发送的单频上。按照相应于集合 $\{U_i\}$ 中的最大判决变量对码字作出判决。

本节将确定软判决译码器的差错率性能。为此, 假设发送全零码字 C_1 , 平均单频或单元接收信噪比记做 $\bar{\gamma}_c$ 。 n 个单频总的接收信噪比为 $n\bar{\gamma}_c$, 因此平均比特 SNR 为

$$\bar{\gamma}_b = \frac{n\bar{\gamma}_c}{k} = \frac{\bar{\gamma}_c}{R_c} \quad (14-6-2)$$

式中, R_c 为码率。

相应于码字 C_1 的判决变量 U_1 由式(14-6-1)确定, 其中 $c_{ij}=0$ (对于所有 j)。判为第 m 个码字的概率是

$$\begin{aligned} P_2(m) &= P(U_m > U_1) = P(U_1 - U_m < 0) \\ &= P\left[\sum_{j=1}^n (c_{1j} - c_{mj}) (|y_{1j}|^2 - |y_{0j}|^2) < 0\right] \\ &= P\left[\sum_{j=1}^{w_m} (|y_{0j}|^2 - |y_{1j}|^2) < 0\right] \end{aligned} \quad (14-6-3)$$

式中, w_m 为第 m 个码字的重量。式(14-6-3)的概率正是 w_m 阶分集二进制正交 FSK 平方律合并的差错率, 即

$$P_2(m) = p^{w_m} \sum_{k=0}^{w_m-1} \binom{w_m-1+k}{k} (1-p)^k \quad (14-6-4)$$

$$\leq p^{w_m} \sum_{k=0}^{w_m-1} \binom{w_m-1+k}{k} = \left[\frac{2w_m-1}{w_m} \right] p^{w_m} \quad (14-6-5)$$

式中

$$p = \frac{1}{2 + \bar{\gamma}_c} = \frac{1}{2 + R_c \bar{\gamma}_b} \quad (14-6-6)$$

另一种方法是利用 14.4 节导出的契尔诺夫(Chernoff)上边界,用此处的记号,该上边界为

$$P_2(m) \leq [4p(1-p)]^{w_m} \quad (14-6-7)$$

$M-1$ 个非零重量码字的二进制差错事件总和给出该差错率的上边界,因此

$$P_M \leq \sum_{m=2}^M P_2(m) \quad (14-6-8)$$

因为线性码字的最小距离等于最小重量,因此

$$(2 + R_c \bar{\gamma}_b)^{-w_m} \leq (2 + R_c \bar{\gamma}_b)^{-d_{\min}}$$

利用这个关系式,连同式(14-6-5)和式(14-6-8)得出一个简单的(比较稀疏)上边界为

$$P_M < \sum_{m=2}^M \left[\frac{2^{w_m} - 1}{w_m} \right] \frac{1}{(2 + R_c \bar{\gamma}_b)^{d_{\min}}} \quad (14-6-9)$$

该边界表明,这种码提供的有效分集阶次等于 d_{\min} 。一种更简单的边界是一致边界

$$P_M < (M-1)[4p(1-p)]^{d_{\min}} \quad (14-6-10)$$

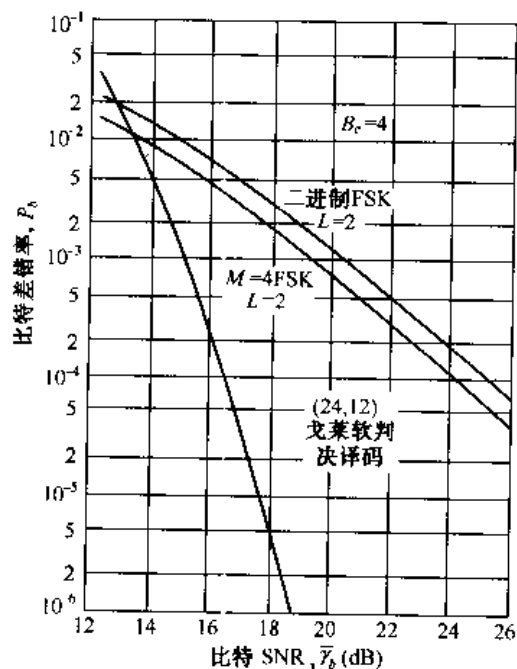


图 14-6-2 $B_c=4$ 时常规分集与编码的性能实例

复杂性。

14.6.2 线性二进制分组码硬判决译码的差错率

线性二进制 (n, k) 码的硬判决译码获得的性能边界如 8.1.5 节所述,这些边界可应用于一般的二进制输入、二进制输出的无记忆(二进制对称)信道,因此可不加修改地应用于码字中符号统计独立的瑞利衰落 AWGN 信道。当非相干检测二进制 FSK 用做调制和解调技术时,评价这些边界需要的比特差错率由式(14-6-6)定义。

当应用式(8-1-89)给出的硬判决译码差错率的契尔诺夫(Chernoff)上边界时,将获得结果

上式由式(14-6-7)定义的契尔诺夫边界得出。

作为说明瑞利衰落信道编码效益的一个例子,图 14-6-2 中画出了用 $(24, 12)$ 扩展戈莱码得到的性能和二进制 FSK 及四进制 FSK(每个具有双分集)的性能。由于扩展戈莱码要求总数为 48 单元和 $k=12$,因此带宽扩展因子为 $B_c=4$,这也是 $L=2$ 的二进制和四进制 FSK 的带宽扩展因子。于是,3 种形式的波形以相同的带宽扩展因子为基础进行比较。注意,在 $P_b=10^{-4}$ 处,高莱码的性能优于四进制 FSK 6 dB;而在 $P_b=10^{-5}$ 处,这个差异约 10 dB。

戈莱码性能优越的原因是它具有大的最小距离($d_{\min}=8$),它转化为等效的八阶($L=8$)分集,而二进制和四进制 FSK 只有二阶分集。而这种码使得能够更有效地利用可用的信道带宽,该码的优越性能必须付出的代价是增加译码

$$P_2(m) \leq [4p(1-p)]^{w_m/2} \quad (14-6-11)$$

且 P_M 是由式(14-6-8)确定的上边界。比较起来,当采用软判决译码时, $P_2(m)$ 的契尔诺夫上边界由式(14-6-7)确定。可以看出,硬判决译码的影响是使任意两个码字之间的距离减小一半。当一个码字的最小距离比较小时,在衰落信道中距离减小一半比在无衰落信道中更值得注意。

为了便于说明,在图 14-6-3 中画出采用硬判决和软判决译码时(23,12)高莱码的性能。在 $P_b = 10^{-5}$ 处,性能差别约为 6 dB,与无衰落 AWGN 信道中的软判决与硬判决译码之间 2 dB 的性能差别相比,这是一个相当大的性能差异。注意,性能差异随着 P_b 的减小而增加。简言之,这些结果表明在瑞利衰落信道上的软判决译码的效益超过硬判决译码。

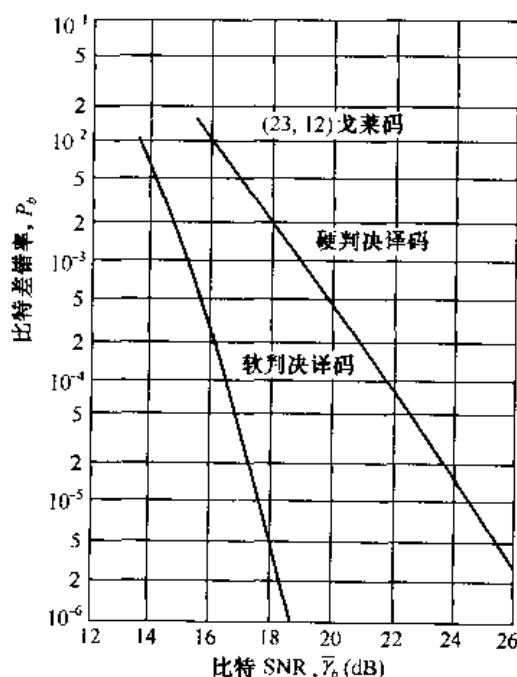


图 14-6-3 硬判决译码与软判决译码的性能比较

14.6.3 用于瑞利衰落信道的卷积码性能的上边界

本节将推导瑞利衰落 AWGN 信道中二进制卷积码的性能。编码器每次接收 k 个二进制数字,发出 n 个二进制数字,于是码率为 $R_c = k/n$ 。编码器输出的二进制数字利用二进制 FSK 在瑞利衰落信道传送,它在接收机中被平方律检测。软判决或硬判决译码的译码器进行最大似然序列估计,借助维特比算法高效实现。

首先研究软判决译码。在这种情况下,维特比算法计算的度量就是解调器平方律检测输出的总和。假设发送全零序列,按照 8.2.3 节所述的步骤容易证明,全零序列的相应度量与首次汇合于全零状态的另一序列的相应度量之间两两比较的差错率为

$$P_2(d) = p^d \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d-1+k}{k} (1-p)^k \quad (14-6-12)$$

式中, d 是两个序列中不同的比特位置数, p 由式(14-6-6)确定,即 $P_2(d)$ 正好是平方律检测和 d 阶分集的二进制 FSK 的差错率。另外对于 $P_2(d)$,利用式(14-6-7)所示的契尔诺夫边

界,任何情况下的比特差错率均有上边界,如 8.2.3 节所述,其表达式为

$$P_b < \frac{1}{k} \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d P_2(d) \quad (14-6-13)$$

式中,求和式中的加权因子 β_d 可由式(8-2-25)的转移函数 $T(D, N)$ 的一阶导数展开式获得。

当在接收机中进行硬判决译码时,8.2.4 节导出的二进制卷积码的差错率性能仍然适用,即 P_b 的上边界仍是式(14-6-13)的结果。当 d 为奇数时, $P_2(d)$ 由式(8-2-28)定义;当 d 为偶数时, $P_2(d)$ 由式(8-2-29)定义,或者由式(8-2-23)定出其契尔诺夫上边界, p 由式(14-6-6)定义。

正如分组编码的情况,当硬判决和软判决译码的 $P_2(d)$ 使用各自的契尔诺夫边界时,硬判决译码的影响相对于软判决译码的距离(分集)减半。

下列数值结果说明了带软判决维特比译码的二进制且码率为 $1/n$ 、最大自由距离卷积码在 $n=2,3,4$ 时的差错率性能。首先,图 14-6-4 表示码率为 $1/2$ 的卷积码在约束长度 3、4、5 时的性能,二进制 FSK 调制的带宽扩展因子为 $B_e = 2n$ 。因为约束长度的增加将引起译码复杂性的增加及最小自由距离的相应增加,所以系统设计者在选择码的时候要权衡这两个因素。

增加距离而不增加码约束长度的另一种方法是将每个输出比特重复 m 次,这等效于码率减小 m 倍或者带宽扩展同样的倍数,其结果是卷积码的最小自由距离为 md_{free} , d_{free} 为没有重复的原始码的最小自由距离。根据最小距离的观点,这种码与码率为 $1/mn$ 的最大自由距离码的性能几乎一样好。有重复的码的差错率性能的上边界为

$$P_b < \frac{1}{k} \sum_{d=d_{\text{free}}}^{\infty} \beta_d P_2(md) \quad (14-6-14)$$

式中, $P_2(md)$ 由式(14-6-12)定义。图 14-6-5 示出了约束长度为 5,有重复 ($m=1,2,3,4$) 的码率为 $1/2$ 的码的性能。

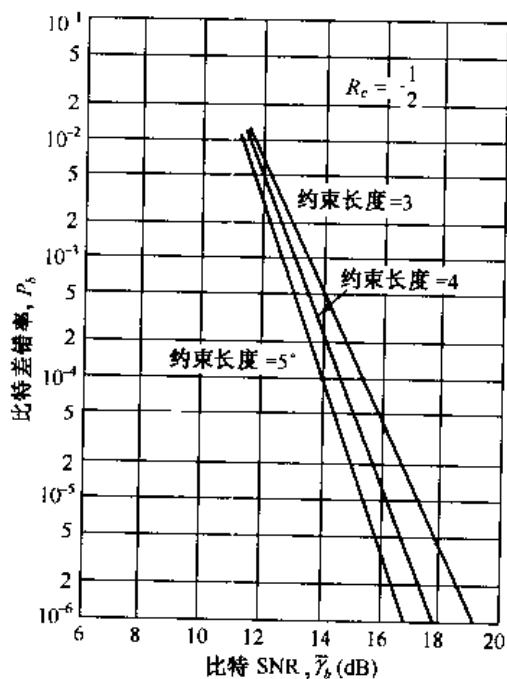


图 14-6-4 码率为 $1/2$ 的二进制卷积码的软判决译码的性能

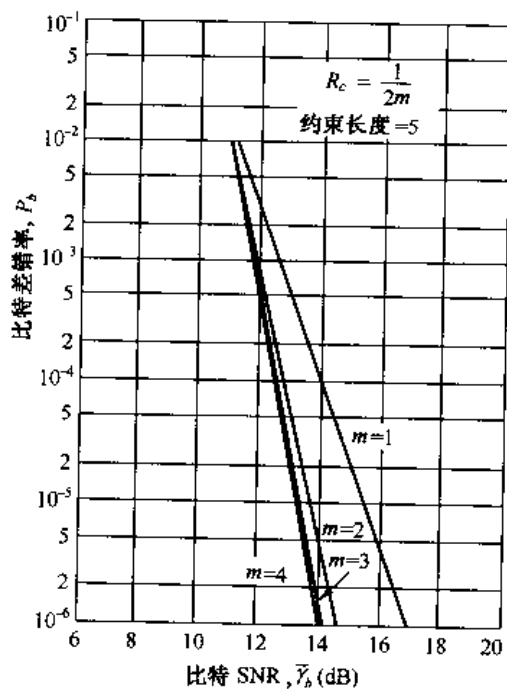


图 14-6-5 码率为 $1/2m$ 且约束长度为 5 的二进制卷积码软判决译码的性能

14.6.4 衰落信道中恒重码和级联码的应用

以上对瑞利衰落信道编码的论述都是基于应用二进制 FSK 调制技术的,它是用来发送码字中每个二进制数字的。对于这个调制技术, (n, k) 码中所有 2^k 个码字具有相同的发送能量,而且在 n 个发送单频上的衰落为统计独立和均匀分布的条件下, $M = 2^k$ 个可能码字的平均接收信号的能量也相同。因此,在软判决译码器中,按最大判决变量判决码字。

接收码字具有相同的平均 SNR 是接收机实现的一个重要因素。如果接收码字不具有相同的平均 SNR,接收机必须对每个接收码字提供偏差补偿以使得它等能量。一般来说,确定合适的偏差项很困难,因为要求估计平均接收信号功率。因此,接收码字的等能量条件大大简化了接收机处理。

当码字恒重,即当每个码字具有相同数目的 1 时,存在另一种产生码字等能量波形的调制方法。注意,这样的码是非线性的。不过,可以假设把单频或单元分配给 2^k 个码字的每个比特位置,因此,一个 (n, k) 二进制分组码具有 n 个分配的单频。如果相应于码字中的某一特定位(比特)为 1,则发送一个单频信号来构造波形,否则在该时间间隔内不发送此单频。这样用来发送编码比特的调制技术叫做启闭键控(OOK)技术。因为该码是恒重码(如 w),所以每个编码的波形由 w 个发送单频组成,这些单频取决于每个码字中 1 的位置。

如同 FSK,假定在信道传输的 OOK 信号中的所有单频在频带各处和前后各码字时间上的衰落都是独立的。每个单频的接收信号包络由瑞利分布统计描述。假设每个频率单元的噪声是统计独立的加性高斯白噪声。

接收机采用最大似然(软判决)译码,把接收波形映射为 M 个可能发送的码字之一。为此,采用 n 个匹配滤波器,每个滤波器匹配 n 个单频之一。由于假设 n 个频率单元的信号衰落和加性高斯白噪声是统计独立的,因此匹配滤波器输出包络的平方及合并可生成如下判决变量

$$U_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} |y_j|^2 \quad (i = 1, 2, \dots, 2^k) \quad (14-6-15)$$

式中, $|y_j|^2$ 为相应于第 j 个频率的滤波器包络平方, $j = 1, 2, \dots, n$ 。

恒重条件似乎严重制约了对码的选择,但情况并非如此。为了说明这一点,下面将简要介绍构造恒重码的方法。

1. 方法 1:线性码的非线性变换

一般地,如果在任意二进制码的每个码字中用一个二进制序列替代每个 0,以另一个序列替代每个 1,则当这两个替代序列等重量且等长度时,将得到恒重二进制分组码。如果该序列的长度为 v 且原始码是一个 (n, k) 码,那么所产生的恒重码是 (vn, k) 码,其重量是替代序列重量的 n 倍,其最小距离是原始码的最小距离乘以两个替代序列之间的距离。于是,当 v 为偶数时,使用互补序列将导致最小距离为 vd_{\min} 且重量为 $\frac{1}{2}vn$ 的码字。

这个方法最简单的形式是当 $v = 2$ 时,其中每个 0 被 01 对替代,每个 1 被互补序列 10 替代,反之亦然。作为一个例子,取 $(24, 12)$ 扩展戈莱码作为初始码。原始码和所产生的恒重码参数列在表 14-6-1 中。

表 14-6-1 方法 1 生成的恒重码的例子

码 参 数	原始戈莱码	恒 重 码
n	24	48
k	12	12
M	4096	4096
d_{\min}	8	16
w	可变	24

注意,这个替代过程可看做一个单独的编码。该辅助编码不改变码字的信息内容,只改变其发送形式。因为新的码字是由“开启(on)”和“关闭(off)”的比特对组成的,使用该码字 OOK 传输产生的波形与基本线性码的二进制 FSK 调制获得的波形相同。

2. 方法 2:删信(expurgation)

在这个方法中,从一个任意二进制分组码中挑选一个子集,该子集由某一重量的所有码字组成。通过改变重量 w 的选择,可由一个初始码获得几种不同的恒重码。由于产生的删信码的码字可看做该集合中任何一个码字所有可能排列的子集,因此戈德耳(Gaarder, 1971 年)用术语“二进制删信排列调制(BEXPERM)”描述这种码。事实上,用其他方法构造的恒重二进制分组码也可看做 BEXPERM 码。在某种意义上,这种产生恒重码的方法与第一种方法相反,其中码字长度保持不变而码的大小 M 变化。显然,恒重子集的最小距离不小于原始码的最小距离。作为一个例子,考虑(24, 12)戈莱码,生成两种不同的恒重码,如表 14-6-2 所示。

表 14-6-2 由删信生成的恒重码的例子

码 参 数	原 始 码	恒 重 码 1	恒 重 码 2
n	24	24	24
k	12	9	11
M	4096	759	2576
d_{\min}	8	≥ 8	≥ 8
w	可变	8	12

3. 方法 3:哈达马矩阵

这种方法似乎直接形成一个恒重二进制分组码,但实际上它是删信方法的一种特殊情况。在这种方法中,用 8.1.2 节所述的方法形成哈达马矩阵,通过选择该矩阵的行(码字)产生恒重码。哈德马矩阵是由 0 和 1 元素组成的一个 $n \times n$ 阶矩阵(n 为偶整数),该矩阵具有任一行 $\frac{1}{2}n$ 位置上的元素不同于其他行的特性。该矩阵有一行元素通常为全 0。

在其余各行中,一半元素为 0,另一半元素为 1。通过选择这 $n-1$ 行及其补码,可得到 $2(n-1)$ 个码字的哈达马码。选择这些码字中的 $M \approx 2^k \leq 2(n-1)$ 个码字,可得到一个哈德马码,记做 $H(n, k)$,其中每个码字传送 k 个信息比特。产生的码具有恒定重量 $\frac{1}{2}n$ 和最小距离 $d_{\min} = \frac{1}{2}n$ 。

由于 n 个频率单元用来发送 k 个信息比特,因此 $H(n, k)$ 哈达马码的带宽扩展因子为

$$B_e = \frac{n}{k} \quad \text{单元/信息比特}$$

它是码率的倒数。此外,平均比特信噪比(SNR) $\bar{\gamma}_b$ 与平均单元 SNR $\bar{\gamma}_c$ 有关,其关系式为

$$\bar{\gamma}_c = \frac{k}{\frac{1}{2}n} \bar{\gamma}_b = 2 \frac{k}{n} \bar{\gamma}_b = 2R_c \bar{\gamma}_b = \frac{2\bar{\gamma}_b}{B_e} \quad (14-6-16)$$

在固定带宽的约束条件下,比较恒重哈达马码与常规 M 元正交波形集(其中每个波形具有分集 L)的性能。 M 个具有分集的正交波形等效于分组长度为 $n = LM$ 及 $k = \log_2 M$ 的分组正交码。例如,若 $M = 4$ 和 $L = 2$,分组正交码的码字为

$$C_1 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$C_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$C_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$C_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$

采用 OOK 调制发送这些码字,要求 $n = 8$ 个单元,由于每个码字传送 $k = 2$ 个比特信息,因此带宽扩展因子 $B_e = 4$ 。一般地,分组正交码记为 $O(n, k)$,带宽扩展因子为

$$B_e = \frac{n}{k} = \frac{LM}{k} \quad (14-6-17)$$

此外,比特 SNR 与单元 SNR 有关,其关系式为

$$\bar{\gamma}_c = \frac{k}{L} \bar{\gamma}_b = M \left(\frac{k}{n} \right) \bar{\gamma}_b = M \frac{\bar{\gamma}_b}{B_e} \quad (14-6-18)$$

现将讨论这些码的性能特征。首先,14.4 节已经给出了在分集瑞利衰落信道上 M 元正交信号传输的精确的码字(符号)差错率。如前所述,该表达式相当难计算,特别是当 L 或 M 或二者很大时,也就是说,对于 M 个正交波形集,符号差错率的上边界为

$$P_M \leq (M-1)P_2(L) = (2^k-1)P_2(L) < 2^k P_2(L) \quad (14-6-19)$$

式中, $P_2(L)$ 为两个正交波形的差错率,每个波形都具有分集 L ,该差错率由式(14-6-12)确定,其中 $p = 1/(2 + \bar{\gamma}_c)$ 。如前所述,比特差错率由 P_M 与 $2^{k-1}/(2^k-1)$ 相乘得出。

只要注意到发送码字和任何其他码字之间的判决差错率以 $P_2\left(\frac{1}{2}d_{\min}\right)$ 为边界(由上面可知),即可得到哈达马 $H(n, k)$ 码的码字差错率的上(一致)边界,其中 d_{\min} 是码的最小距离。因此, P_M 的上边界为

$$P_M \leq (M-1)P_2\left(\frac{1}{2}d_{\min}\right) < 2^k P_2\left(\frac{1}{2}d_{\min}\right) \quad (14-6-20)$$

于是,用于 OOK 调制的码的“有效分集阶”为 $\frac{1}{2}d_{\min}$ 。比特差错率可近似为 $\frac{1}{2}P_M$,或在稍有越界的情况下近似为 P_M 乘以因子 $2^{k-1}/(2^k-1)$,该因子在上面曾用于正交码。选择后者用于下面的差错率计算。

图 14-6-6 表示几种不同的带宽扩展因子下选择的几种哈达马码的差错率性能。从这些曲线可明显地看到由符号集大小 M (或 k , 因为 $k = \log_2 M$) 和带宽扩展因子的增加带来的益处。例如,重复两次的 $H(20, 5)$ 码将导致一个码,记为 ${}_2H(20, 5)$ 且带宽扩展因子为 $B_e = 8$ 。图 14-6-7 所示为这两种码的性能比较,该比较是以等带宽扩展因子为基础的。由此可见,哈

达马码的差错率曲线比分组正交码的相应曲线更陡峭,这个特征是由于对于相同的带宽扩展因子,哈达马码比分组正交码提供更多的分集。换句话说,哈达马码可比分组正交码提供更好的带宽效率。然而,当低信噪比时,低分集码优于高分集码,因为在瑞利衰落信道上,分集信号中存在一个总接收 SNR 的最佳分布。因此,在低 SNR(高差错率)范围内,分组正交码的曲线跨越哈达马码的曲线。

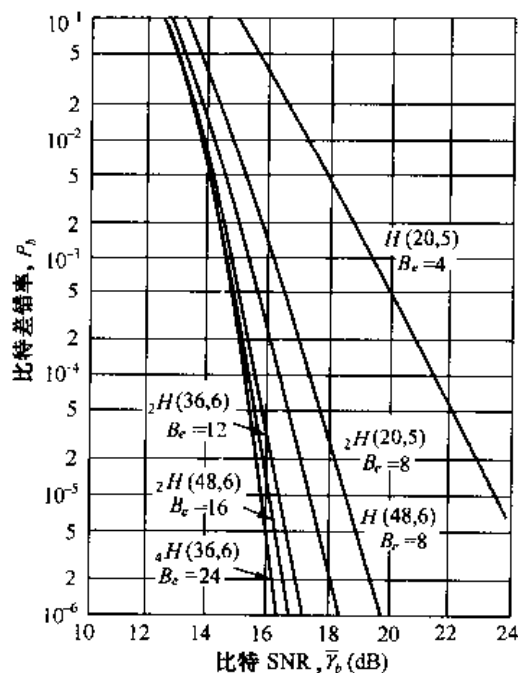


图 14-6-6 哈达马码的性能

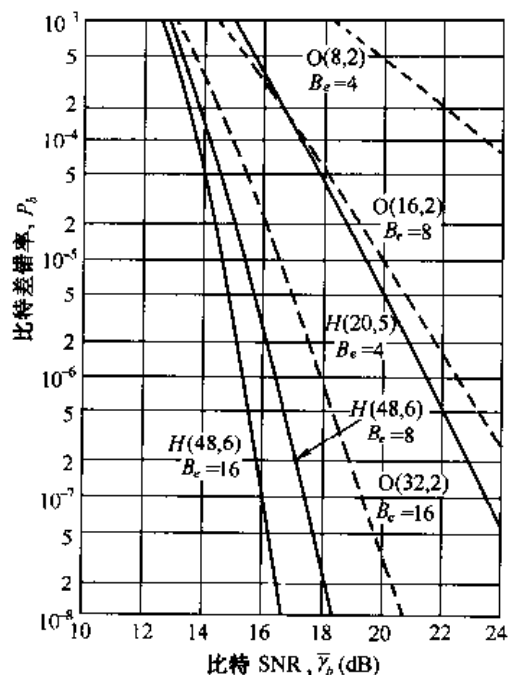


图 14-6-7 哈达马码与分组正交码的性能比较

4. 方法 4: 级联

在这个方法中,首先研究两个码:一个是二进制码,另一个是非二进制码。二进制码为内码,且为 (n, k) 恒重(非线性)分组码。非二进制码(它可能是线性的)为外码。为了与内码相区别,用大写字母表示外码,例如 (N, K) 码,其中 N 和 K 按 q 元符号集的符号来度量。符号集的大小 q (在该符号集定义了外码)不能超过内码中的码字数。按照二进制内码字而不是按 q -元符号定义的外码是新的码。

$q = 2^k$ 且内码大小为 2^k 是一种重要的特殊情况,其码字数为 $M = 2^{kK}$,而且其级联结构是一个 (nN, kK) 码。该级联码的带宽扩展因子是内码和外码带宽扩展因子的乘积。

下面证明在瑞利衰落信道上利用级联码获得的优越性能。特别地,构造一种级联码,其外码是一个双 k (非二进制)卷积码,内码为哈达马码或分组正交码,即把用做调制的 M 元($M = 2^k$)正交信号的双 k 码看做级联码。假设在考虑的所有情况中均采用软判决解调和维特比译码。

双 k 卷积码的差错率性能由式(8-2-39)给出的转移函数求导得到。对于一个码率为 $1/2$ 且无重复的双 k 码,其比特差错率的上边界为

$$P_b < \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \sum_{m=4}^{\infty} \beta_m P_2(m) \quad (14-6-21)$$

式中, $P_2(m)$ 由式(14-6-12)定义, 上式适合于双 k 编码器的每个 k 比特输出符号映射为 $M=2^k$ 个正交码字之一的情况。

例如, 一个码率为 $1/2$ 的双 2 码可采用 4 元正交码 $O(4,2)$ 作为内码。当然, 产生的级联码带宽扩展因子是内、外码带宽扩展因子的乘积。于是, 在这个例子中, 内码和外码的码率均为 $1/2$, $B_e = (4/2)(2) = 4$ 。

注意, 若双 k 码的每个符号重复 r 次, 等效于使用一个具有 $L=r$ 阶分集的正交码。如在上述例子中选取 $r=2$, 则产生的正交码记做 $O(8,2)$, 码率 $1/2$ 的双 2 码的带宽扩展因子为 $B_e=8$ 。因此, 当正交码具有 L (阶) 分集时, 式(14-6-21)中的 $P_2(m)$ 项必须由 $P_2(mL)$ 代替。因为哈达马码具有“有效分集” $\frac{1}{2}d_{\min}$, 故当哈达马码用做具有双 k 外码的内码时, 如果 $P_2(m)$ 由 $P_2\left(\frac{1}{2}md_{\min}\right)$ 代替, 那么式(14-6-21)给出的级联码比特差错率的上边界仍然适用。由于这些修改, 将哈达马码或分组正交码作为内码的码率为 $1/2$ 的双 k 卷积码, 就可以评价由式(14-6-21)确定的级联码比特差错率的上边界。于是, 产生的级联码带宽扩展因子是内码带宽扩展因子的两倍。

首先考虑码级联产生的性能增益。图 14-6-8 所示为当带宽扩展因子 $B_e=4, 8, 16, 32$ 时具有分组正交内码的双 k 码的性能, 以及与分组正交码的性能比较。由级联产生的性能增益是显著的。例如, 在差错率为 10^{-6} 和 $B_e=8$ 时, 双 k 码优于正交分组码 7.5 dB。简言之, 该增益可归结为由码级联获得的分集的增加(最小距离的增加)。类似地, 图 14-6-9 所示为 $B_e=8$ 和 $B_e=12$ 时具有哈达马内码的两个双 k 码的性能与单独哈达马码的性能比较。由此可见, 码级联产生的性能增益仍然显著, 但显然不如图 14-6-8 所示的, 其原因是单独哈达马码产生大分集, 以致子码级联引起的分集增加未导致图 14-6-9 所涵盖的差错率范围内那样大的性能增益。

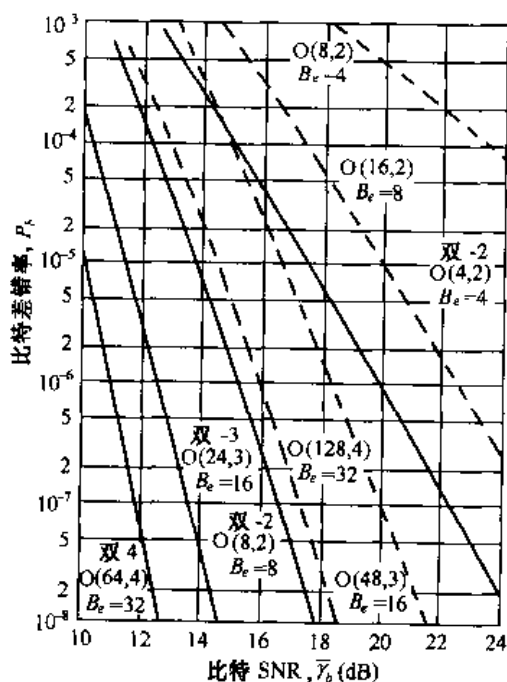


图 14-6-8 分组正交码与具有分组正交内码的双 k 码的性能比较

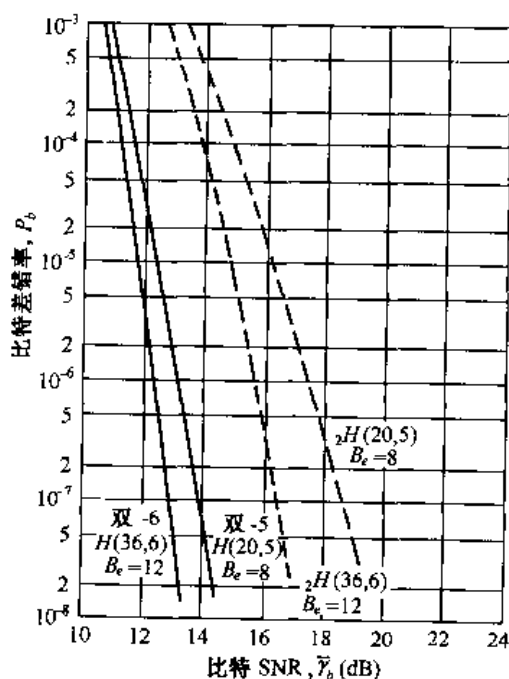


图 14-6-9 哈达马码与具有哈达马内码的双 k 码的性能比较

上述结果表明,在瑞利衰落信道上采用具有良好距离特性且用软判决译码的码有优越的性能,这可作为具有分集的常规 M 元正交信号传输的一种替代方案。另外,该结果说明在此信道上码级联的增益,其中将双 k 卷积码作为外码,将哈达马码或分组正交码作为内码。虽然将双 k 码用做外码,但其结果类似于用里德-所罗门(Reed-Solomon)码作为外码的结果。内码的选择有更大的余地。

外码和内码选择中的重要参数是为获得特定等级的性能所需要的级联码最小距离。因为许多码都能满足性能要求,最终的选择是根据译码复杂性和带宽的要求作出的。

14.6.5 基于截止率的系统设计

上面关于编码波形的讨论中证明了衰落信道各种编码的有效性,特别是软判决译码和码级联的优点,因为它们是增加最小距离以增加编码波形分集数的一种手段。本节将研究随机选择的码字,并推导差错率的上(一致)边界,它取决于瑞利衰落信道的截止率参数。

首先研究图 14-6-1 所示的通信系统模型。调制器具有 q 元正交 FSK 波形集。通过从 q 个单频的波形集当中选择 n 个单频,分组长度为 n 的码字映射为波形。解调是将信号通过 q 个匹配滤波器组及其跟随的平方律检测器来实现的。假设译码为软判决,于是解调器的平方律检测输出以等加权的形式进行适当的合并(相加),形成 M 个判决变量,它们相应于 M 个可能的发送码字。

为了计算 AWGN 瑞利衰落信道差错率的一致边界,首先计算涉及判决变量 U_1 的二进制差错率,其中判决变量 U_1 相应于发送的码字,其他 $M-1$ 个判决变量相应于其他码字。令 U_2 为其他判决变量,且假设 U_1 和 U_2 具有 l 个共同的单频。这 l 个单频对 U_1 和 U_2 的贡献是相同的,因此形成差值 $U_1 - U_2$ 时将抵消。由于两个判决变量在 $n-l$ 个单频上不同,因此差错率是 $n-l$ 阶分集的二进制正交 FSK 系统的差错率。该差错率的精确形式由式 (14-6-4) 定义,其中 $p = 1/(2 + \bar{\gamma}_c)$, 且 $\bar{\gamma}_c$ 是每个平均单频 SNR。为简单起见,选用这个二进制事件差错率的契尔诺夫(Chernoff)边界,它由式 (14-6-7) 定义,即

$$P_2(U_1, U_2 | l) \leq [4p(1-p)]^{n-l} \quad (14-6-22)$$

下面在大量二进制通信系统上求平均。存在 q^n 个可能的码字,从中随机地选择两个码字,于是每个码字被选的概率相等。那么,两个随机选择的码字具有 l 个共同单频的概率为

$$P(l) = \binom{n}{l} \left(\frac{1}{q}\right)^l \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{n-l} \quad (14-6-23)$$

对式 (14-6-23) 给出的 l 的概率分布求式 (14-6-22) 的平均,得到

$$\begin{aligned} \overline{P_2(U_1, U_2)} &= \sum_{l=0}^n P_2(U_1, U_2 | l) P(l) \\ &\leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left(\frac{1}{q}\right)^l \left[4\left(1 - \frac{1}{q}\right)p(1-p)\right]^{n-l} \\ &\leq \left[\frac{1}{q} [1 + 4(q-1)p(1-p)]\right]^n \end{aligned} \quad (14-6-24)$$

使用 $M = 2^k$ 个随机选择码字的各通信系统的一致边界是

$$\overline{P_M} \leq (M-1) \overline{P_2(U_1, U_2)} < M \overline{P_2(U_1, U_2)} \quad (14-6-25)$$

合并式 (14-6-24) 和式 (14-6-25), 可得到符号差错率的上边界为

$$\bar{P}_M < 2^{-n(R_0 - R_c)} \quad (14-6-26)$$

其中, $R_c = k/n$ 为码率。 R_0 为截止率, 定义为

$$R_0 = \log_2 \frac{q}{1 + 4(q-1)p(1-p)} \quad (14-6-27)$$

式中

$$p = \frac{1}{2 + \bar{\gamma}_c} \quad (14-6-28)$$

图 14-6-10 示出了当 $q=2, 4, 8$ 时, R_0 作为 $\bar{\gamma}_c$ 的函数的图形。

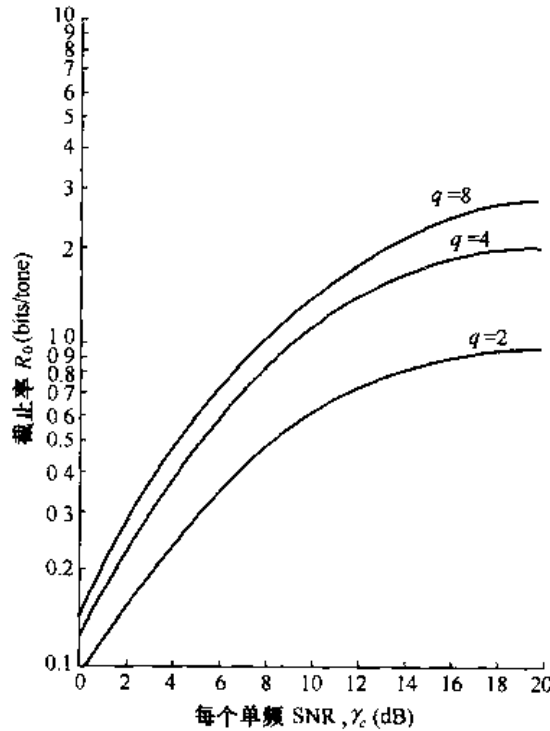


图 14-6-10 瑞利衰落信道作为 $\bar{\gamma}_c$ 的函数的截止率

如果用每比特 SNR 表示 \bar{P}_M , 可得到式(14-6-26)的另一种形式

$$\bar{P}_M < 2^{-k[\bar{\gamma}_c g(q, \bar{\gamma}_c) - 1]} \quad (14-6-29)$$

其中, $g(q, \bar{\gamma}_c)$ 为

$$g(q, \bar{\gamma}_c) = \frac{R_0}{\bar{\gamma}_c} = \frac{1}{\bar{\gamma}_c} \log_2 \left[\frac{q}{1 + 4(q-1)p(1-p)} \right] \quad (14-6-30)$$

图 14-6-11 画出了 $g(q, \bar{\gamma}_c)$ 作为 $\bar{\gamma}_c$ 的函数的图形, 其中 q 为参数。首先, 每一个 q 值存在一个最佳的 $\bar{\gamma}_c$, 它使差错率最小。对于大的 q 值, $\bar{\gamma}_c$ 的值近似为 $\bar{\gamma}_c = 3$ (5 dB), 它与前面对普通平方律分集合并的观察结果一致。当 $q \rightarrow \infty$ 时, 函数 $g(q, \bar{\gamma}_c)$ 趋于极限, 即

$$\lim_{q \rightarrow \infty} g(q, \bar{\gamma}_c) = g_\infty(\bar{\gamma}_c) = \frac{1}{\bar{\gamma}_c} \log_2 \left[\frac{(2 + \bar{\gamma}_c)^2}{4(1 + \bar{\gamma}_c)} \right] \quad (14-6-31)$$

当 $\bar{\gamma}_c = 3$ 时, $g_\infty(\bar{\gamma}_c)$ 为

$$g_\infty(3) = \max_{\bar{\gamma}_c} g_\infty(\bar{\gamma}_c) = 0.215 \quad (14-6-32)$$

因此,对于总 SNR 的最佳划分,式(14-6-29)的差错率为

$$\bar{P}_M < 2^{-0.215k(\bar{\gamma}_b - 4.65)} \quad (14-6-33)$$

这个结果表明,如果平均比特 SNR $\bar{\gamma}_b > 4.65$ (6.7 dB),以最佳码片 SNR 可使差错率任意小。一个比较适中的值 $q = 20$,即可接近最小值。如图 14-6-11 所示,只要 $\bar{\gamma}_b > 5$ (7 dB),就有 $g(20, 3) = 0.2$,以致 $P_M \rightarrow 0$ 。另一方面,如果 $q = 2$,则 $g(2, \bar{\gamma}_c)$ 的最大值 ≈ 0.096 ,且相应的最小比特 SNR 为 10.2 dB。

在二进制 FSK 波形 ($q = 2$) 的情况下,可容易地比较非量化(软判决)解调器输出的截止率与二进制量化的截止率,

$$R_Q = 1 - \lg[1 + \sqrt{4p(1-p)}], \quad Q = 2 \quad (14-6-34)$$

如式(7-3-6)定义。图 14-6-12 所示为 R_0 和 R_Q 的图形。注意,当截止率低于 0.3 时, R_0 和 R_Q 之间的差异约为 3 dB,在高截止率上,这个差异迅速增加。将量化电平增加到 $Q = 8$ (3 比特)时,该损失可大大减少。

当 $q > 2$ 时,也可比较非量化软判决译码与量化判决译码之间的相对性能。

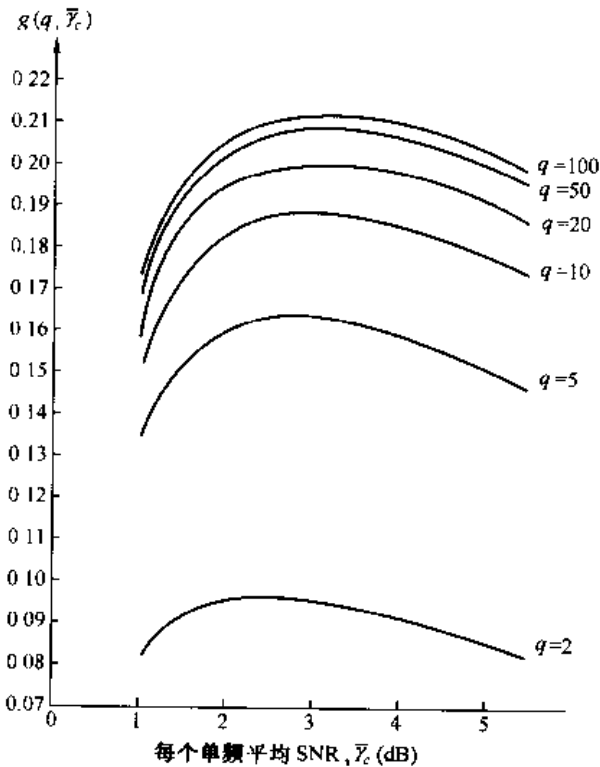


图 14-6-11 函数 $g(q, \bar{\gamma}_c)$ 的图形

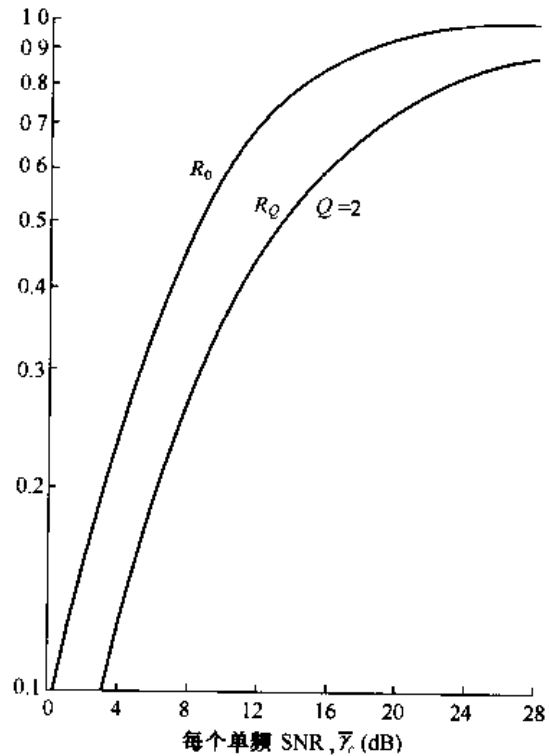


图 14-6-12 编码二进制 FSK 的(非量化)
软判决和硬判决译码的截止率

14.6.6 编码相位相干通信系统的性能——比特交织编码调制

我们对编码通信系统中衰落信道的处理主要集中在非相关检测编码 PSK 信号波形。这些波形通常比 PSK 或者 QAM 信号对信道衰落具有更强的稳健性,因为后者需要相位相干解调。另一方面,有些信道中的衰落十分缓慢,可以进行 PSK 和 QAM 信号的相位相干解调。在本节中,我们简要考虑通过二进制 PSK 进行编码比特传输的编码信号的性能。

图 14-6-13 给出带有编码的数字通信系统的模型。我们假设编码器产生 (n, k) 线性二进制分组码^①。为了确保任何码字中的比特独立衰落,对序列进行了比特交织。我们假设比特交织深度超过信道相干时间。每个编码比特以二进制 PSK 的形式通过频率衰落信道传输,并且在接收机进行相干解调。

为了计算带有软判决解码的编码系统的差错率,我们再次利用 4.4.1 节得到的最大比合并分集接收结果。特别地,如假设发送全零码,则二进制事件的差错率为

$$P_2(w_m) = \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{w_m} \sum_{k=0}^{w_m-1} \binom{w_m-1+k}{k} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^k \quad (14-6-35)$$

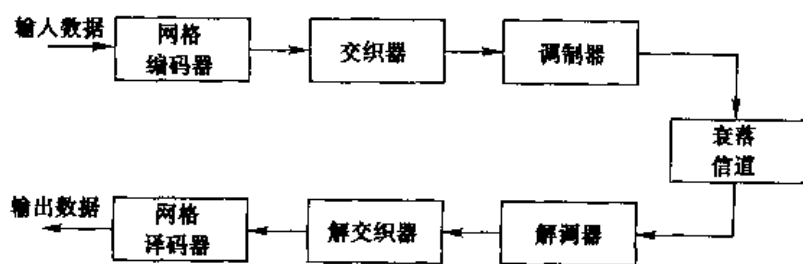


图 14-6-13 网格编码的调制系统框图

式中 w_m 为第 m 阶码字的权值,对于一个理想信道增益估计,即信道衰落过程的理想估计

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{1 + \bar{\gamma}_c}} \quad (14-6-36)$$

式中 $\bar{\gamma}_c$ 为每个编码比特的平均 SNR。对于某一码字误差,可以采用联合边界的方法来获得差错率上界

$$\begin{aligned} P_M &< \sum_{m=2}^M P_2(w_m) < (M-1)P_2(d_{\min}) \\ &< 2^k \binom{2d_{\min}-1}{d_{\min}} \left(\frac{1}{4R_c\bar{\gamma}_b}\right)^{d_{\min}} \end{aligned} \quad (14-6-37)$$

其中 $M=2^k$, R_c 为码率, $\bar{\gamma}_b$ 为每比特平均 SNR。

相比之下,对于硬判决编码,只需将式(14-6-37)中给出的 P_M 表达式简单地修改为用 $d_{\min}/2$ 代替 d_{\min} 即可。

我们看到,采用相位相干调制的通信系统比采用 FSK 的非相干系统性能提高了 6 dB。而且,由于 PSK 比 FSK 需要更少的带宽,相位相干系统的带宽扩展因子也减少了。因此,如果信道的相位稳定性很好,足以支持相位相干调制,即么采用带有比特交织的编码相位相干通信系统优于采用相位非相干调制的系统。通过采用附录 C 描述的分析方法,很容易确定相位估计误差对系统性能的影响。

在上面的讨论中,我们讨论了把比特交织编码序列映射为二进制 PSK 调制的问题。进一步推广,就是将比特交织序列再分为 m 位子序列,并把 M 进制 $(M=2^m)$ 调制(例如 M 进制 PSK 或 M 进制 QAM)应用于相位相干调制和解调。格雷(Gray)编码能用于将 m 位子序列映

① 可以用卷积码代替分组码。

射到 M 进制信号星座图上的信号点。对于软判决解码,带有 M 进制调制的比特交织序列的差错率同样随每比特 SNR 的倒数呈指数增加,其中指数为该码的最小(汉明)距离。

如同非相干解调编码 FSK 信号的情况,在编码相位相干系统作为增加码间最小汉明(Hamming)距离的实际方法中,码级联是人们所热切希望的。相位相干系统级联码的性能分析类似于前面已经阐述的非相干解调系统。

14.6.7 网格编码调制

网格编码调制曾在 8.3 节介绍过,作为在带宽受限信道上获得编码增益的一种手段,希望在此信道上以比特率/带宽比 $R/W > 1$ 传输。对这样的信道设计数字通信系统时,使用带宽效率高的多电平或多相调制(PAM、PSK、DPSK 或 QAM),它使得 $R/W > 1$ 。当编码用于带宽受限信道的信号设计时,人们期望获得编码增益而无需扩展信号带宽,如 8.3 节所述。这可用两种方法实现,一是增加相应的未编码系统星座中的信号点数,以补偿由编码引入的冗余度;二是设计网格码,使得发送符号序列的欧氏距离大于未编码系统每个符号的欧氏距离,该发送符号序列相应于汇合在网格中任一节点的路径。

比较起来,上述编码方案与 FSK 或 PSK 调制结合在一起,扩展了用来获得信号分集的已调制信号带宽。但结合 FSK 调制(它不是带宽效率高的调制方式)后,上述编码方案将不适用于带宽受限信道。

当设计衰落信道的网格编码信号波形时,可以采用应用于设计卷积编码方案的相同原理。特别地,衰落信道的任何编码信号设计的最重要目标是达到尽可能大的信号分集,这意味着编码器的连续输出符号必须被交织,或者在传输中必须有足够的时间间隔或频率间隔,以便在等于或超过网格码最小自由距离的符号序列中获得独立的衰落。因此,用图 14-6-13 所示的框图来表示这样一个网格编码调制系统,其中编码器是一个网格编码器,而交织器被看做将连续的编码符号隔开以使序列中的每个符号衰落独立(通过符号的频率或时间间隔)的器件。该接收机由一个信号解调器组成,其输出被解交织并馈送给网格译码器。

如上所示,达到高带宽效率的候选调制方法是 M 元 PSK、DPSK、QAM 和 PAM,这个选择在很大程度上取决于信道特征。如果接收信号的幅度快速变化,则 QAM 和 PAM 可能特别脆弱,因为必须用宽带自动增益控制(AGC)来补偿信道变化。此时,PSK 或 DPSK 更适合,因为信息是由信号相位而不是信号幅度传送的。DPSK 还有其他优点,即只要求在两个连续的符号上的载波相位相干。然而,相对于 PSK、DPSK 的 SNR 有损失。

网格码设计的目标是达到尽可能大的自由距离,因为该参数等效于接收信号的分集数。在常规的昂格伯克(Ungerboeck)网格编码方式中,网格中的每一分支相应于单个 M 元(PSK、DPSK、QAM)输出信道符号。最短错误事件路径定义为其自身与正确路径之间具有最小非零距离的错误事件路径,令 L 为其长度。换句话说, L 是最短错误事件路径的 M 元符号与正确路径的 M 元符号之间的汉明距离。因此,若假设发送序列相应于网格中的全零路径,则 L 是具有非零 M 元符号的最短长度路径的分支数。在具有并行路径的网格图中,把路径限制为具有一个分支的最短错误事件长度,使得 $L = 1$,意味着这样的网格码不提供衰落信道的分集,从而差错率与符号 SNR 成反比。因此,在衰落信道的常规网格编码中,人们不希望设计一种在网格中具有并行路径的码,因为这样的码将得不到分集。这是常规的码率为 $m/(m+1)$ 的网格码的情况,其中当状态数小于 2^m 时,将强迫该码具有并行路径。

增加最小自由距离(从而增加码中的分集阶数)的一种方法是在信号点星座中引入不对称性。这个方法更有效,西蒙和迪夫萨拉尔(Simon & Divsalar, 1985 年)、迪夫萨拉尔和尤恩(Divsalar & Yuen, 1984 年)以及迪夫萨拉尔等人(Divsalar, 1987 年)研究了该码。

一种增加距离 L (从而增加分集阶数)的更有效方法是采用多重网格码调制(MTCM)。如图 14-6-14 所示的 MTCM 中,把编码器的 b 个输入比特编码为 c 个输出比特,再分成 k 组,每组 m 个比特,则 $c = km$ 。每个 m 比特组映射为一个 M 元符号,从而得到 M 个输出符号。特殊情况下的 $k = 1$ 相应于常规昂格伯克(Ungerboeck)码。利用 k 个 M 元输出符号,可设计出距离 $L = k$ 的平行路径的网格码,于是获得与 $(\epsilon/N_0)^k$ 成反比衰减的差错率。

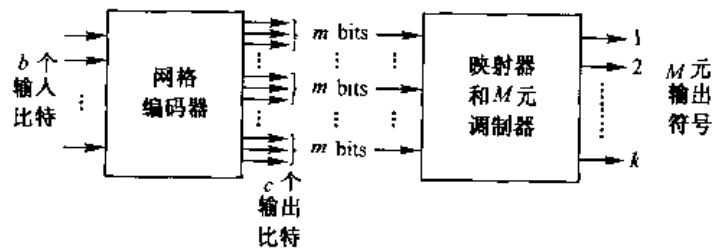


图 14-6-14 MTCM 发送机框图

网格码译码器设计中的一个重要考虑是利用有关每个符号的信道衰减的边信息。在形成判决度量的译码器中带有平方律合并的 FSK 的情况下,不必知道解调符号的信道衰减。但采用相干检测时,每个解调符号的最佳欧氏距离的度量为 $|y_n - \alpha_n s_n|^2$, 其中 α_n 是每个解调符号 s_n 的信道衰减, r_n 为解调输出。因此,通过该网格的任一给定路径的分支度量之和为

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(i)}) = \sum_n |r_n - \alpha_n s_n^{(i)}|^2$$

式中,上标 (i) 表示通过该网格的第 i 条路径。必须进行信道衰减估计,以实现最佳网格译码器。在 PSK 调制和解调的情况下,信道衰减和相应的估计将在附录 C 中研究。衰减和相位估计质量对 PSK(未编码)调制性能的影响也将在附录 C 中评估。

维特比(Viterbi et al., 1989 年)、泽哈威(Zehavi, 1992 年)和卡尔等(Caire et al., 1998 年)在他们的论文中研究了一种与常规恩格伯克(Ungerboeck)网格编码(TCM)有所不同的方法。它不是将编码和调制联合优化,而是将两个功能分开。在这种方法中,采用了带有最大自由汉明(Hamming)距离和特定约束长度的二进制卷积码。首先将编码器的输出比特交织,然后通过映射器将 m 位的分组映射为 PSK 或者 QAM 信号星座图。利用比特交织,带有理想信道状态信息的瑞利衰落信道编码调制的差错率性能,随着每比特 SNR 的幂的增加(一直增加到卷积码最小自由(汉明)距离的幂)呈反向减小。卡尔等在论文中详细比较了瑞利信道上比特交织编码调制和带有符号交织的常规编码调制的性能。

14.7 多天线系统

在接收端采用多天线是不需扩展传输信号带宽而获得抗衰落空间分集的标准方法。空间分集也可以通过在发射端采用多天线来实现。例如,可以通过采用两个发射天线和一个接收天线的方法来实现双重分集(见习题 14-16)。

多个发射天线也可以用来产生多个空间信道,从而提供了提高传输数据率的能力。特别

地,对于 N 个发射天线和 M 个接收天线的情况^①,数据率可增加 N 倍;并且对每 N 个发射信号,可同时提供 M 阶的接收分集来抗衰落。由于 N 个发射天线上的信号不具有正交结构,空间信道上会存在信道间干扰(ICI)。在本节中,我们将介绍适合于多个发射和接收天线的检测算法,并计算其有无编码时的性能。

图 14-7-1 给出采用多个发射和接收天线来增加数据率的通信系统的一般结构。首先,数据被编码和交织。在编码数据的情况下,必须采用交织器,以便确保编码比特或符号各自独立衰落。然后,对 N 个符号块进行串/并变换,每个符号馈送给 N 个相同调制器中的一个,而且每个调制器连接到一个空间上隔开的天线。这样, N 个符号并行传输,并通过 M 个空间上隔开的接收天线进行接收,这里 $M \geq N$ 。

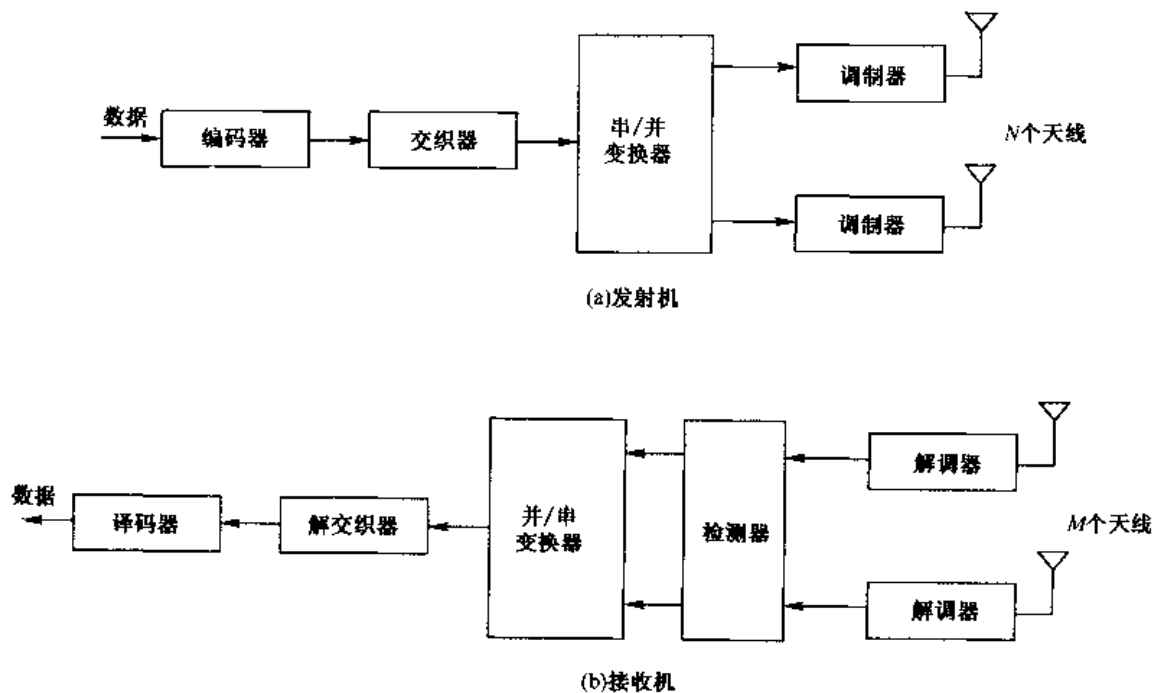


图 14-7-1 多发射天线和多接收天线通信系统

首先,假设从发射天线到接收天线的每个信号都经历非频率选择性瑞利衰落。其次,假设信号从 N 个发射天线到 M 个接收天线传播时间差相对于符号持续时间 T 是很小的,以使得对于实际情况,从 N 个发射天线到接收天线的信号是同步的。从而,我们可以把信令间隔内接收天线上接收到的等效低通信号表示为

$$r_{lm}(t) = \sum_{n=1}^N d_n a_{mn} g(t) + z_m(t) \quad (0 \leq t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M) \quad (14-7-1)$$

其中 $g(t)$ 为调制滤波器的脉冲波形(脉冲响应), a_{mn} 为第 n 个发射天线与第 m 个接收天线之间的复数值零均值高斯信道增益; d_n 为第 n 个天线发射的符号, $z_m(t)$ 为加性高斯白噪声(AWGN)过程的采样函数。信道系数 $|a_{mn}|$ 是等分布的、从信道到信道统计独立的,而且从编码符号到编码符号带有交织的。人们可从二进制或者扩展的 PSK/QAM 信号星座图提取符号信息。

来自 M 个接收天线中每个天线上的信号解调器由一个对脉冲 $g(t)$ 的匹配滤波器(或一

① 对这种情况,我们假设 $M \geq N$ 。

个互相关器)组成,其输出在每个符号间隔端点进行采样。对应于第 k 个信令间隔内的第 m 个天线的解调器输出可以表示为

$$y_m(k) = \sum_{n=1}^N d_n(k) a_{mn}(k) + \eta_m(k) \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (14-7-2)$$

其中信号脉冲 $g(t)$ 的能量归一化为 1, $\eta_m(k)$ 为加性高斯噪声分量。解调器的 M 个软输出通过信号检测器。为了方便起见,式(14-7-2)可用矩阵形式表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{d} \quad (14-7-3)$$

其中 $\mathbf{y} = [y_1(k), \dots, y_M(k)]^T$, $\mathbf{d} = [d_1(k), \dots, d_N(k)]^T$, $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1(k), \dots, \eta_M(k)]^T$, \mathbf{A} 为信道系数的 $M \times N$ 矩阵。图 14-7-2 示出了多个发射器和接收器信号的模型。

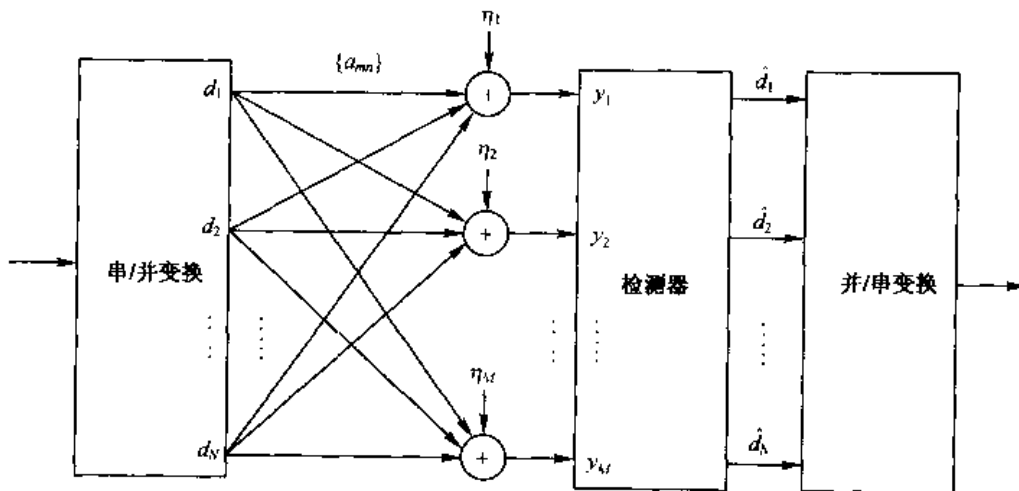


图 14-7-2 多天线通信系统的离散时间模型

1. 最大似然检测器(MLD)

由于 M 个接收天线上的加性噪声是(统计独立)高斯的,因此联合条件 PDF $p(\mathbf{y}|\mathbf{d})$ 也是高斯的。因此,MLD 通过选择符号向量 \mathbf{d} ,使得欧氏距离最小化。

$$\mu(\mathbf{d}) = \sum_{m=1}^M \left| y_m(k) - \sum_{n=1}^N a_{mn}(k) d_n(k) \right|^2 \quad (14-7-4)$$

2. 最小均方误差(MMSE)检测器

MMSE 检测器将接收到的信号样值 $y_1(k), \dots, y_M(k)$ 进行线性合并,以便对发射符号 $d_1(k), \dots, d_M(k)$ 进行估计。线性合并可用矩阵形式表示为

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (14-7-5)$$

其中 \mathbf{W} 为一个 $N \times M$ 的加权矩阵,它用来将均方误差

$$J(\mathbf{W}) = E[\|\mathbf{e}\|^2] = E[\|\mathbf{d} - \mathbf{W} \mathbf{y}\|^2] \quad (14-7-6)$$

最小化。 $\hat{\mathbf{d}}$ 的每一个值则量化为最接近的发送符号值。

3. 反向信道检测器(ICD)

ICD 也通过合并接收信号样值形成对 $\hat{\mathbf{d}}$ 的估计。然而,在这种情况下,我们令 $M = N$,并

选取加权矩阵 \mathbf{W} , 使得信道间干扰完全消除, 即

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \quad (14-7-7)$$

$\hat{\mathbf{d}}$ 的每一个值然后量化为最接近的发送符号值。

除了最大似然检测器是非线性之外, 一定还能设计其他一些性能介于最优 MLD、线性 ICD 以及 MMSE 等检测器之间的非线性检测算法。然而, 我们这里将不考虑这些检测器。

图 14-7-3、图 14-7-4 分别示出 $(M, N) = (2, 2)$ 和 $(M, N) = (2, 3)$ 情况下, 通过计算机模拟得到的不带编码的瑞利衰落信道上 3 种检测器的性能。在两种情况下, 信道系数的方差完全相同并被归一化, 以使得下式成立:

$$\sum_{n,m} E[|a_{nm}|^2] = 1 \quad (14-7-8)$$

二进制 PSK 调制的差错率作为每比特平均 SNR 的函数被画在图中。在式(14-7-8)所给出的信道系数能量归一化的情况下, 平均接收信号能量就是发射信号能量。

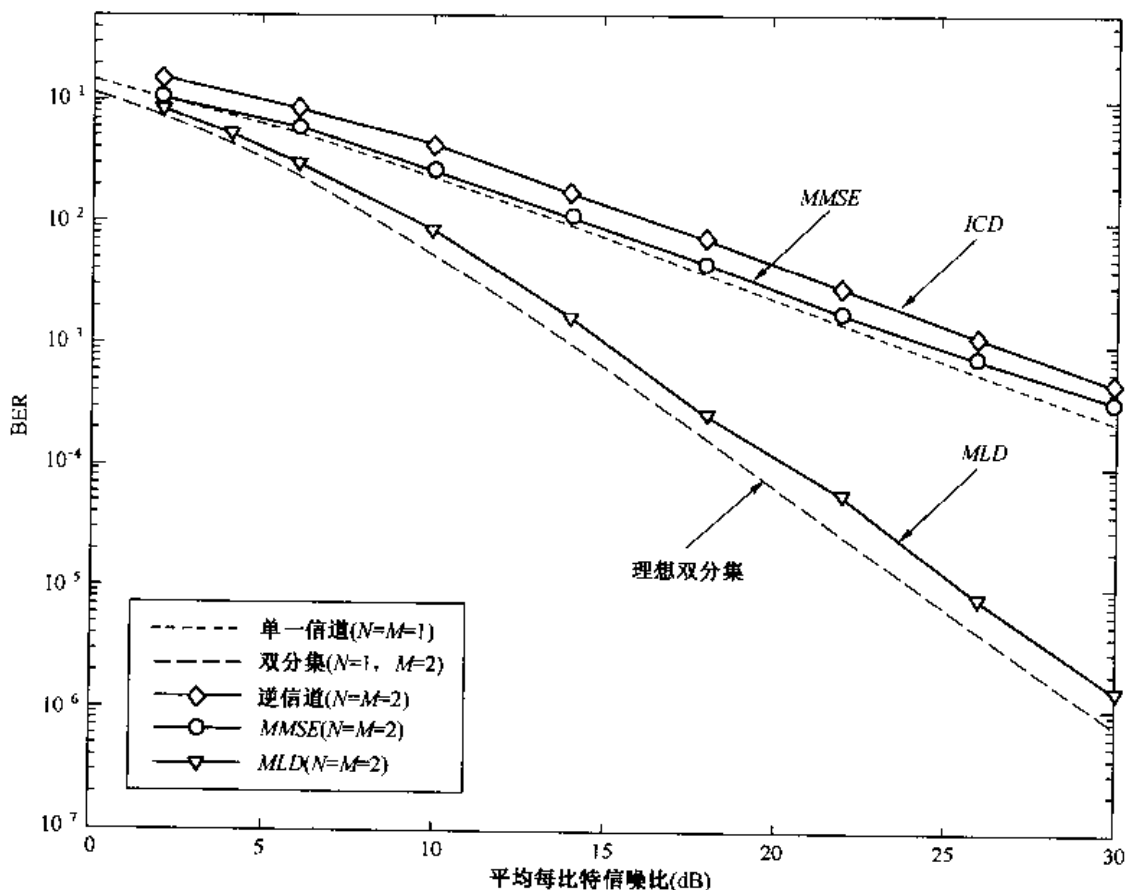


图 14-7-3 具有 $M=2$ 个接收天线的 MLD、MMSE 和反向信道检测器的性能

这些结果表明, MLD 利用了接收信号的 M 阶全分集, 因此在没有信道间干扰的情况下, 其性能可与 M 个接收信号的最大比合并器 (MRC) 相比拟。对于 $N=2$ 发射天线的情况, MMSE 和 ICD 两种线性检测器的差错率随 SNR 的 $(M-1)$ 次幂呈反比减小。一般地, 可以证明 (见尼乔霍斯等 (Nichols et al., 1988 年) 和温特斯等 (Winters et al., 1994 年) 的论文), 对任意 $M > N$, MLD 可以达到 M 阶分集, 线性检测器可以达到 $M - N + 1$ 阶分集。

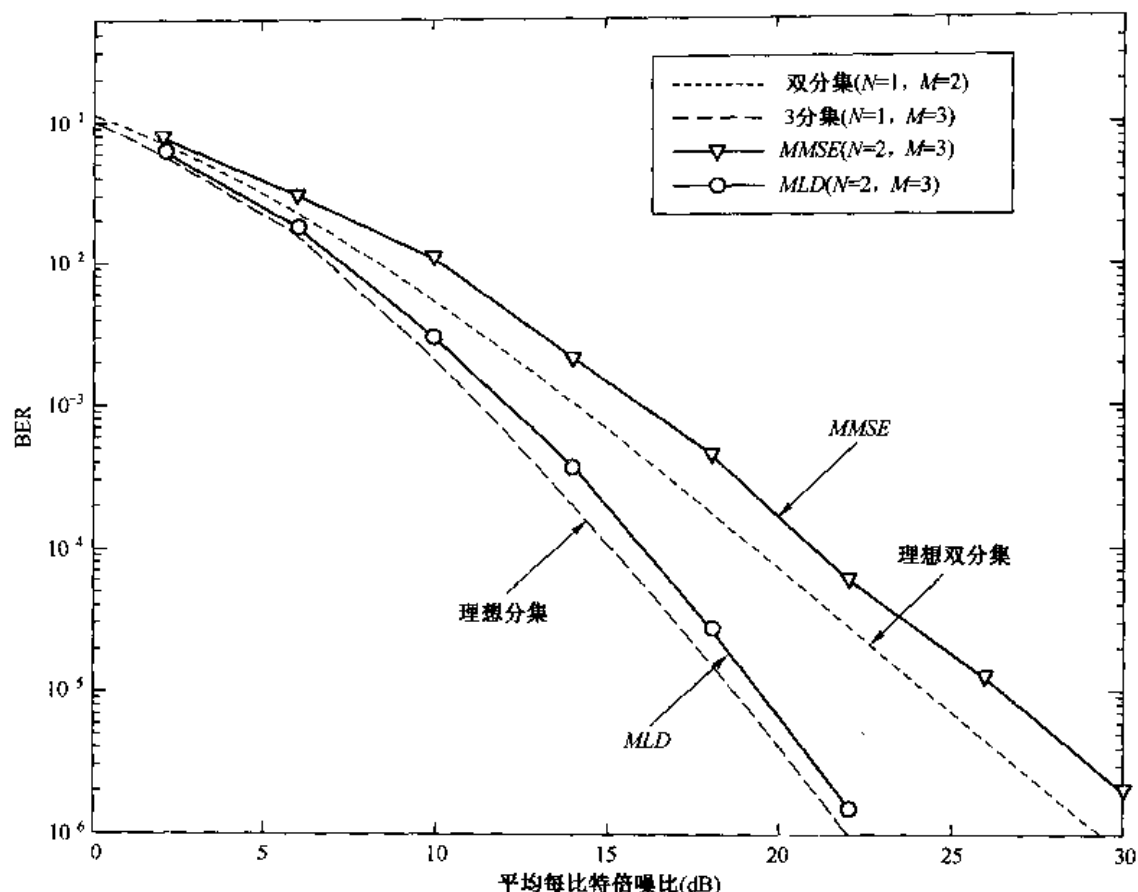


图 14-7-4 具有 $M=3$ 个接收天线的 MLD、MMSE 检测器的性能

通过增加带有交织技术的编码,可以进一步增强多天线系统的性能。编码提供了一种进一步增加分集阶数的方法。对于软判决解码,分集阶数增加到 d_{\min} (或者 d_{free}) 倍;对于硬判决解码,分集阶数增加到 $d_{\min}/2$ (或者 $d_{\text{free}}/2$) 倍。我们利用一个速率 $R_t = 1/2$ 、 $d_{\text{free}} = 5$ 的卷积码来验证编码效益。图 14-7-5、图 14-7-6 分别示出当 $(M, N) = (2, 2)$ 和 $(M, N) = (3, 2)$ 时,硬判决译码和软判决译码二进制 PSK 多天线系统的性能。我们看到,带有交织技术的编码进一步提高了多天线系统的性能,其代价是数据率降低到码率的倒数。对于 $M=3$ 、 $N=2$ 的硬判决译码,我们看到,带有编码的 MMSE 检测器性能几乎和带有编码的 MLD 检测器一样好。此外,对于 MLD,我们也看到,软判决译码超过硬判决译码的优越性;例如,在 10^{-5} 处,其性能相差超过 5 dB。该性能优势是因为两类解码器所能达到的分集阶数相差 2 倍。我们还看到,与 14.6.6 节给出的编码系统的理想性能相比,软判决译码器的性能在 $P_2 = 10^{-5}$ 处恶化了大约 2 dB。这一损失是由于采用多个发射天线所产生的干扰造成的。对于采用多个发射天线增加数据率所造成的其他性能结果,读者可参阅温特斯等 (Winters et al. 1994 年)、福斯奇尼和坎斯 (Foschini & Gans, 1998 年)、布杰克和普鲁吉斯 (Bjerke & Proakis, 1999 年) 的论文。

采用多个发射天线和接收天线的另一种编码方法,在塔诺克等 (Tarokh et al., 1998 年, 1999 年) 和阿拉莫蒂 (Alamouti, 1998 年) 的论文作了描述。在这些论文中,特意根据发射和接收天线的数目设计了格型码,其目的就是为了实现信号分集。这一类用于多天线系统的网格码称为空-时码 (Space-time codes)。

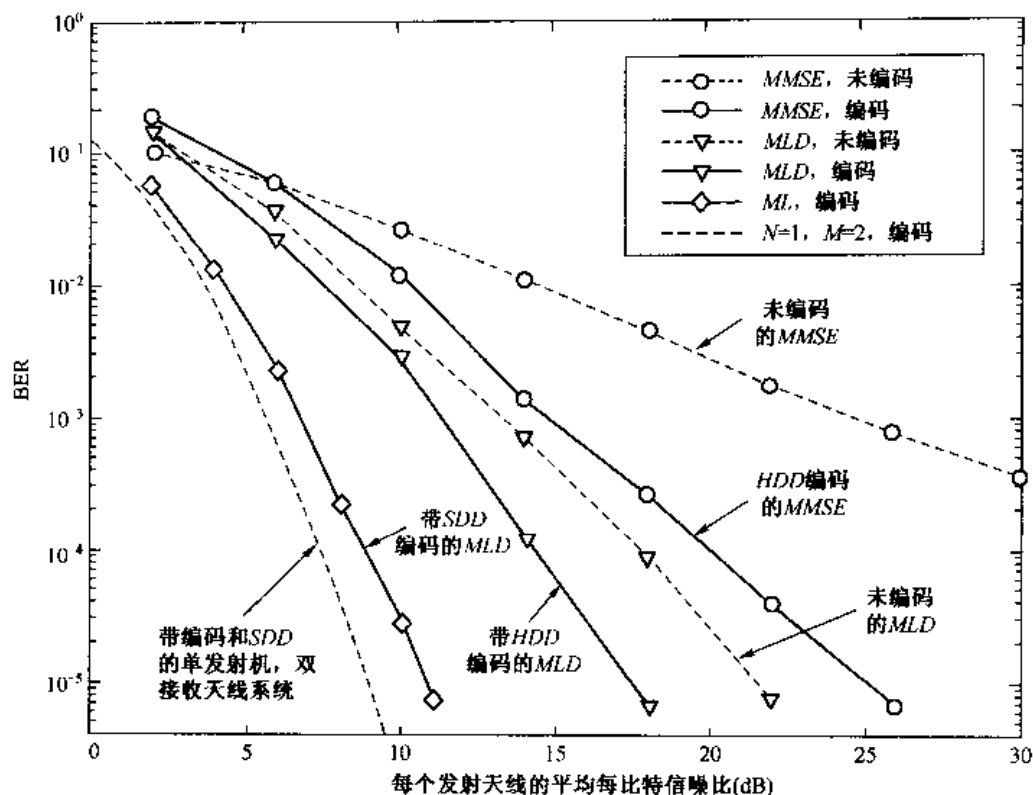


图 14-7-5 $N=M=2$ 编码系统 ($R_c = 1/2, d_{free} = 5$) 的性能

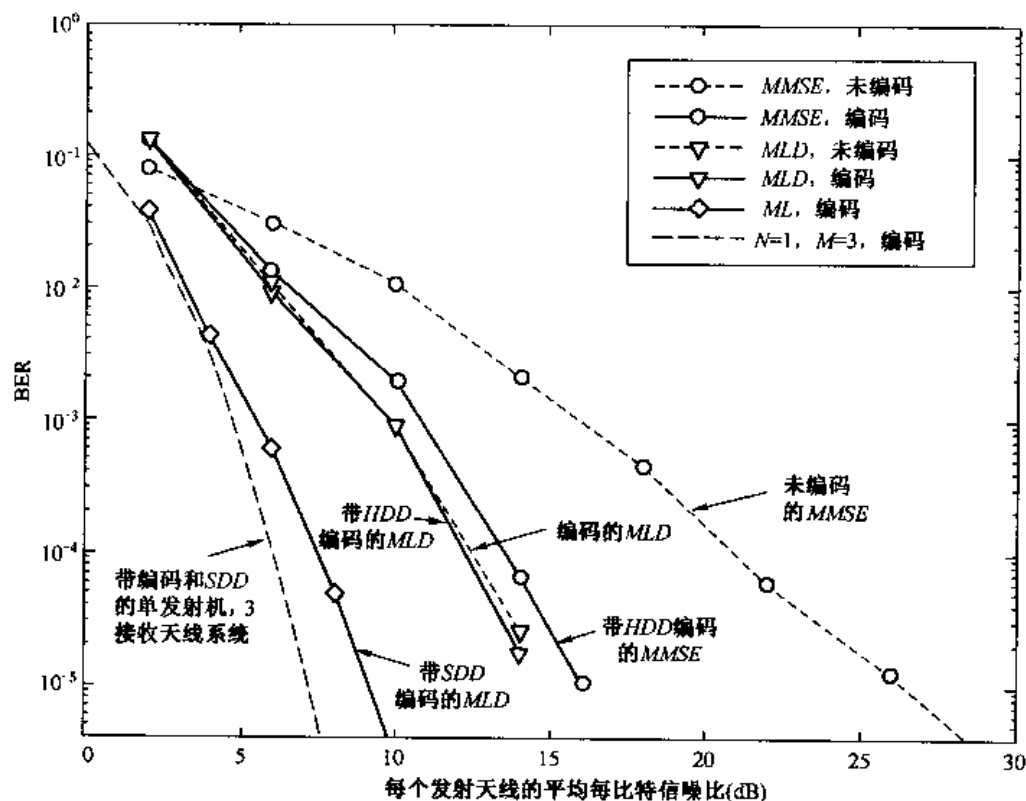
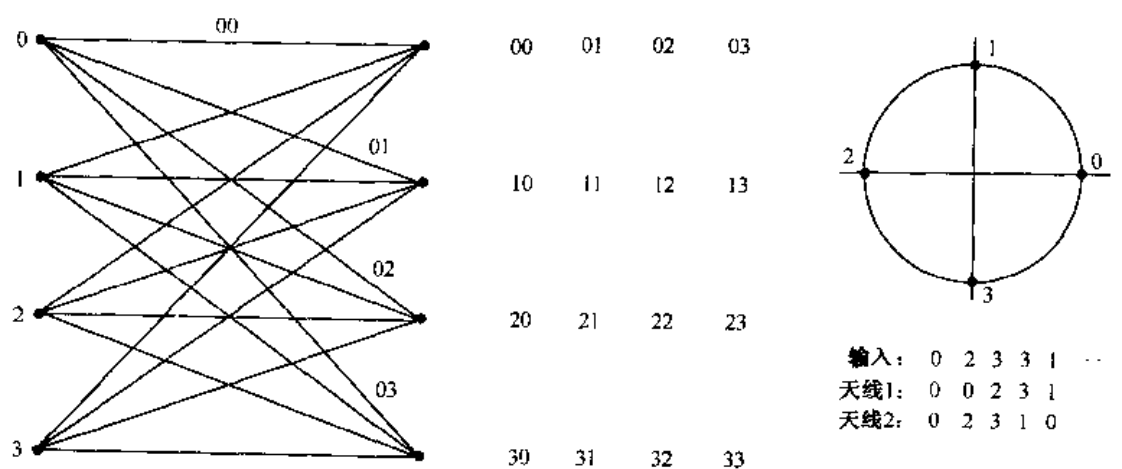
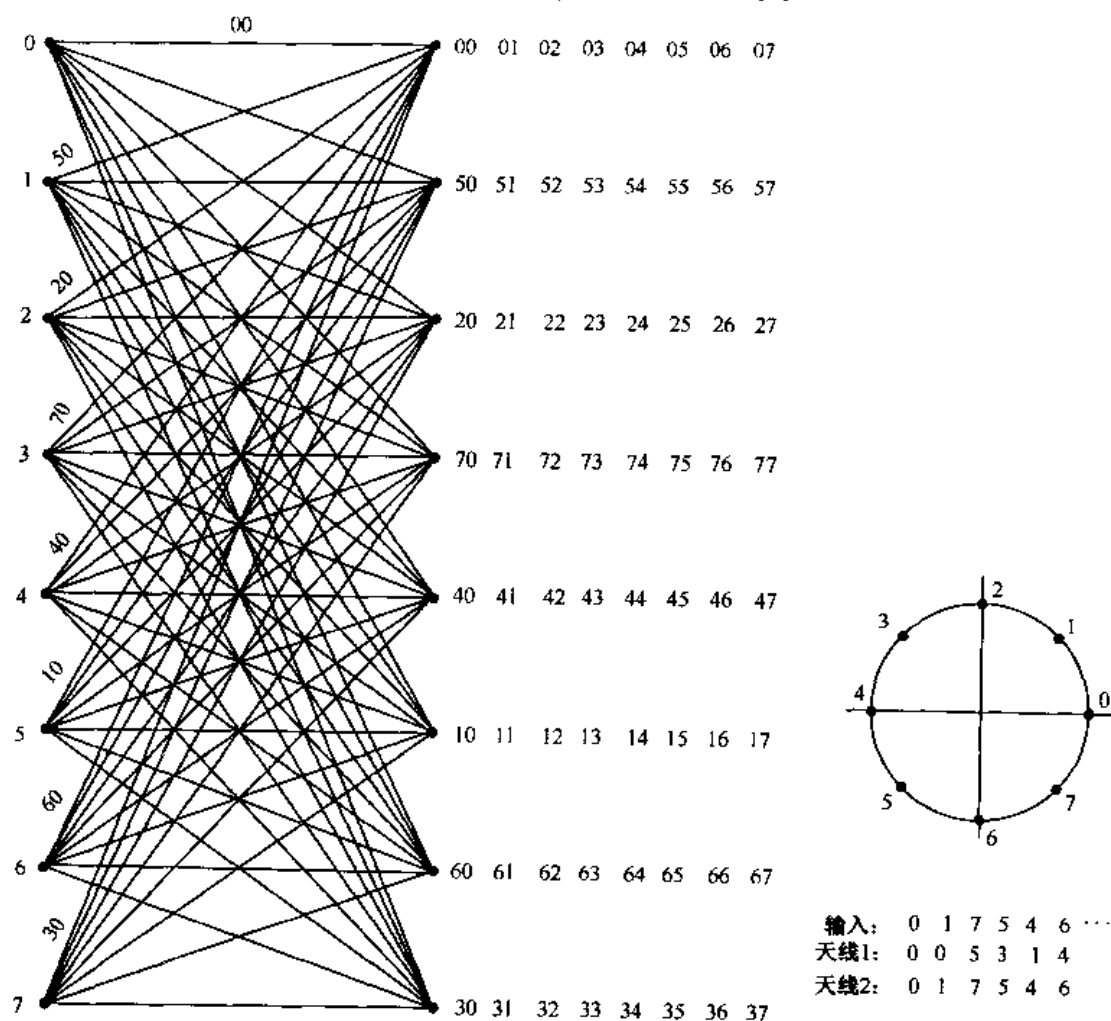


图 14-7-6 $N=2, M=3$ 编码系统 ($R_c = 1/2, d_{free} = 5$) 的性能

图 14-7-7 给出两种空-时码的网格结构。第一种码为具有 4 种状态的 4-PSK 空-时码。对于每个输入符号,编码器的两个输出符号在两个不同的发射天线上同时发送,而且这两个天



(a)4-PSK, 4状态、空-时码



(b)8-PSK, 8状态、空-时码

图 14-7-7 两个发射天线的两种空-时码

线放置得距离足够远,以便得到独立衰落。于是,4-PSK 空-时码可以达到双分集和每个信息符号两比特传输速率。第二种码是具有 8 个状态的 8-PSK 空-时网格码。如同 4-PSK 码的情况,对于每 3 比特的输入符号,有两个输出符号。这两个符号同时发送,第一个在其中一个天线,第二个在另一个天线。这样,这个码获得每个信息符号 3 比特的传输速率,并且获得带有两个发射天线的双重分集。通过在接收机采用多重天线,利用这两种码中的任何一种码,还可获得附加的分集。

在塔诺克等(Tarokh et al., 1998 年)的论文中考虑了空-时码的设计,并且在塔诺克等(Tarokh et al., 1999 年)的论文中又考虑了空-时块状网格码的设计。

14.8 文献与参考资料

本章研究了有关多径衰落信道上数字通信的课题。我们从信道的统计特性出发,介绍了信道特征在数字信号设计以及性能上的各种结果。可以看出,利用分集传输和接收可增强通信系统的可靠性。我们还证明了,信道编码和软判决译码为在这种信道上获得分集提供了一个带宽效率高的手段。

普赖斯(Price, 1954 年, 1956 年)对多径衰落信道特征和在这些信道上实现可靠的数字通信所必需的信号和接收机设计进行了开拓性的研究,其他学者在此基础上也作出了许多有意义的贡献,如普赖斯和格林(Price & Green, 1958 年, 1960 年)、凯拉斯(Kailath, 1960 年, 1961 年)以及格林等(Green et al., 1962 年)的研究工作。各种信道条件下的分集传输和分集合并技术在皮尔斯(Pierce, 1958 年)、布伦南(Brennan, 1959 年)、图林(Turin, 1961 年, 1962 年)、皮尔斯和斯坦(Pierce & Stein, 1960 年)、巴罗(Barrow, 1963 年)、贝洛和内林(Bello & Nelin, 1962 年, 1963 年)以及林赛等人(Lindsey et al., 1964 年)的论文述及。

许多研究者描述了衰落信道编码,特别是维特比和雅各布斯(Viterbi & Jacobs, 1975 年)以及奥登瓦尔德(Odenwalder, 1976 年)在其著作中提出了使用具有 M 元正交 FSK 的双 k 码。蔡斯(Chase, 1976 年)在论文中强调了在衰落信道数字通信中编码的重要性。皮珀等(Pieper et al., 1978 年)证明了具有软判决译码的级联编码获得的效益,其中里德-所罗门码用做外码,哈达马码用做内码。普罗基斯和拉赫曼(Proakis & Rahman, 1979 年)研究了具有分组正交码或将哈达马(Hadamard)码做为内码的双 k 码的性能。拉赫曼(Rahman, 1981 年)评价了最大自由距离二进制卷积码的差错率性能。沃曾克拉夫特和雅可布斯(Wozencraft & Jacobs, 1965 年)导出了瑞利衰落信道的截止率。

通过衰落信道通信的信息论方面的研究由比格列尔里(Beglieri, 1998 年)等的论文给出。瑞利衰落信道 Turbo 码的设计和分析由威尔森和霍尔(Wilson & Hall, 1998 年)的论文所考虑。

许多学者研究了衰落信道的网格编码调制,这在很大程度上是由移动和蜂窝通信的应用推动的。例如,泽哈威(Zehavi, 1992 年)的论文研究了 8-PSK 调制的网格码。比格列尔里(Beglieri, 1991 年)等人的著作中给出了该课题导引性的论述,并给出了大量的参考文献。编码调制方面更新的研究由卡尔等(Caire et al., 1998 年)以及萨利希和普罗基斯(Salehi & Proakis, 1995 年)给出。

有关衰落信道上数字通信的论述主要集中于瑞利衰落信道模型,这主要是由于该模型已

被普遍接受用来描述衰落对无线信道的影响,也由于其数学处理比较容易。虽然其他统计模型,如赖斯(Rice)衰落模型或 Nakagami 衰落模型可能更适合表征某些实际信道上的衰落,但本章介绍的可靠通信设计中的一般方法还是采用瑞利衰落信道模型。艾洛伊利和戈尔德史密斯(Alouini & Goldsmith, 1998 年),西蒙和艾洛伊利(Simon & Alouini, 1998 年, 2000 年),以及安那马莱等(Annamalai et al., 1998 年, 1999 年)提出了各种衰落信道模型中数字通信系统的差错率性能评价的统一方法。无线通信的更一般论述由拉帕波特(Rappaport, 1996 年)的著作给出。

习题

14-1 多径衰落信道散射函数 $S(\tau, \lambda)$ 在 $0 \leq \tau \leq 1$ ms 和 -0.1 Hz $\leq \lambda \leq 0.1$ Hz 的取值范围内是非零的。假设散射函数按这两个变量近似是均匀的。

(a) 给出如下参数的值。

- 信道的多径扩展
- 信道的多普勒扩展
- 信道的相干时间
- 信道的相干带宽
- 信道的扩展因子

(b) 参考(a)中的答案说明如下结论:

- 信道是频率非选择性的
- 信道是慢衰落的
- 信道是频率选择性的

(c) 假设有一个带宽为 10 kHz 的频率分配,希望该信道的传输速率为 100 b/s。试设计一个具有分集的二进制通信系统,并说明调制类型、子信道数、相邻载波间的频率间隔、用在设计中的信号传输间隔。证明你的参数选择。

14-2 研究一个衰落信道上发送二进制序列的二进制通信系统。调制为三阶频率分集 ($L=3$) 的正交 FSK。解调器由匹配滤波器和跟随的平方律检测器组成。假设 FSK 载波按照瑞利包络分布独立且同样地衰落。在分集信号上的加性噪声是零均值高斯的,其自相关函数为 $\frac{1}{2} E[Z_k^*(t) z_k(t+\tau)] = N_0 \delta(\tau)$ 。噪声过程是相互统计独立的。

(a) 发送信号可看做由如下重复码产生的具有平方律检测的二进制 FSK:

$$1 \rightarrow \mathbf{C}_1 = [1 \ 1 \ 1], \quad 0 \rightarrow \mathbf{C}_0 = [0 \ 0 \ 0]$$

试求平方律检测信号之后硬判决译码器的差错率性能 P_{2h} 。

(b) 计算 $\bar{\gamma}_c = 100$ 和 $\bar{\gamma}_c = 1\ 000$ 时的 P_{2h} 。

(c) 当采用软判决译码器时,计算 $\bar{\gamma}_c = 100$ 和 $\bar{\gamma}_c = 1\ 000$ 时的差错率 P_{2s} 。

(d) 考虑(a)中结果的推广。若采用分组长度为 L (L 为奇数)的重复码,试求硬判决译码器的差错率 P_{2h} ,与软判决译码器的差错率 P_{2s} 相比较。假设 $\bar{\gamma}_c \gg 1$ 。

14-3 假设二进制信号 $s_i(t)$ 在衰落信道上传输且接收信号为

$$r_l(t) = \pm a s_l(t) + z(t) \quad (\leq t \leq T)$$

其中, $z(t)$ 是零均值高斯白噪声, 其自相关函数为

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$$

发送信号的能量为 $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^T |S_l(t)|^2 dt$ 。信道增益 a 由如下功率密度函数确定:

$$p(a) = 0.1 \delta(a) + 0.9 \delta(a-2)$$

(a) 试求解调器采用与 $s_l(t)$ 匹配的滤波器时的平均差错率 P_2 。

(b) 试问 \mathcal{E}/N_0 趋于无穷大时 P_2 趋近何值?

(c) 假设相同信号在两个增益 a_1 和 a_2 的统计独立衰落的信道上传输, 其中

$$p(a_k) = 0.1 \delta(a_k) + 0.9 \delta(a_k - 2) \quad (k=1, 2)$$

两个信道中的噪声是统计独立且同分布的。解调器对每个信道采用一个匹配滤波器, 且两个滤波器的输出简单相加后形成判决变量。试求平均 P_2 。

(d) 对于(c)中的情况, 当 \mathcal{E}/N_0 趋近无穷大时 P_2 趋近何值?

14-4 某一多径衰落信道具有多径扩展 $T_m = 1$ s 和多普勒扩展 $B_d = 0.01$ Hz。信号传输可用的带通上的总信道带宽为 $W = 5$ Hz。为了减小符号间的干扰影响, 信号设计者选择脉冲持续时间 $T = 10$ s。

(a) 试求相干带宽和相干时间。

(b) 信道是频率选择性的吗? 请解释。

(c) 信道是慢衰落还是快衰落? 请解释。

(d) 假设在频率分集模型中, 二进制数据通过(双极性)相干检测 PSK 以频率分集模式在信道上传输。试说明如何利用可用信道带宽获得频率分集, 可得到多大分集?

(e) 对于(d)中的情况, 试问为达到差错率 10^{-6} , 每个分集所需的近似的分集 SNR 是多少?

(f) 假设宽带信号用于传输且 RAKE 接收机用于解调。试问在 RAKE 接收机中需要多少抽头?

(g) 说明 RAKE 接收机是否可实现为具有最大比合并的相干接收机。

(h) 如果二进制正交信号被用作 RAKE 接收机中具有平方律后检测合并的宽带信号, 试问为达到差错率 10^{-6} , 所需的近似的 SNR 为多少(假设所有抽头具有相同的 SNR)?

14-5 在图 P14-5 所示的二进制通信系统中, $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 是具有零均值和相同自相关函数 $\phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$ 的统计独立的高斯白噪声过程。抽样值 U_1 和 U_2 表示匹配滤波器输出的实部。如果发送 $s_l(t)$, 则有

$$U_1 = 2\mathcal{E} + N_1$$

$$U_2 = N_1 + N_2$$

其中, \mathcal{E} 是发送信号的能量且

$$N_k = \operatorname{Re} \left[\int_0^T s_l^*(t) z_k(t) dt \right] \quad (k=1, 2)$$

显然, U_1 和 U_2 是相关的高斯变量, N_1 和 N_2 是独立高斯变量。因此

$$p(n_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{n_1^2}{2\sigma^2}\right)$$

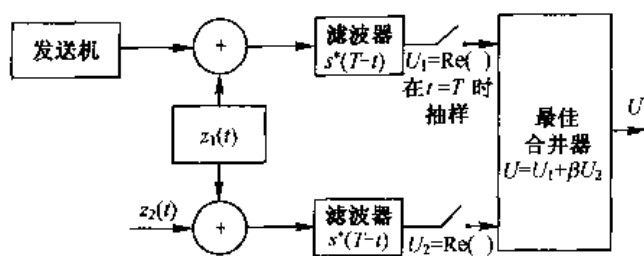


图 P14-5

$$p(n_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{n_2^2}{2\sigma^2}\right)$$

其中, N_k 的方差是 $\sigma^2 = 2\mathcal{E}N_0$ 。

(a) 证明: 当发送 $s(t)$ 时, U_1 和 U_2 的联合概率密度函数为

$$p(U_1, U_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(U_1 - 2\mathcal{E})^2 - U_2(U_1 - 2\mathcal{E}) + \frac{1}{2}U_2^2\right]\right\}$$

当一个 $s(t)$ 被发送时, U_1 和 U_2 的联合概率密度函数为

$$p(U_1, U_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(U_1 + 2\mathcal{E})^2 - U_2(U_1 + 2\mathcal{E}) + \frac{1}{2}U_2^2\right]\right\}$$

(b) 根据最大似然比, 证明 U_1 和 U_2 的最佳合并导致判决变量:

$$U = U_1 + \beta U_2$$

其中, β 是常数。试问 β 的最佳值是多少?

(c) 假设发送 $s(t)$, 试求 U 的概率密度函数。

(d) 假设发送 $s(t)$, 试求差错率, 并将其表示为 SNR \mathcal{E}/N_0 的函数。

(e) 如果仅 $U = U_1$ 为判决变量, 试问性能损失多少?

14-6 考虑图 P14.6 所示的具有分集的二进制通信系统模型。信道具有固定衰减和相移。 $\{z_k(t)\}$ 是均值为零且自相关函数为

$$\phi_{zz}(t) = \frac{1}{2} E[z_k^*(t) z_k(t + \tau)] = N_0 \delta(\tau)$$

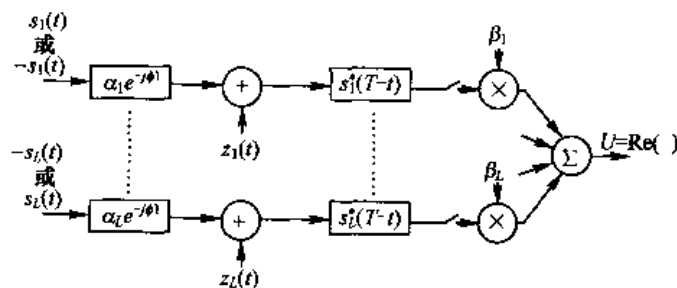


图 P14-6

的复高斯白噪声过程(注意, 谱密度 $\{N_{0k}\}$ 都不相同)。噪声过程 $\{z_k(t)\}$ 是相互统计独立的, β_k 是待确定的复值加权因子, 合并器的判决变量为

$$U = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^L \beta_k U_k\right) \underset{1}{\overset{1}{>}} 0$$

(a) 试求发送 +1 时的 PDF $p(U)$ 。

(b) 试求作为权值 $\{\beta_k\}$ 函数的差错率 P_2 。

(c) 试求使 P_2 最小的 $\{\beta_k\}$ 值。

14-7 试求在瑞利衰落信道上具有 L 阶分集的二进制正交信号传输的差错率。两个判决变量的 PDF 由式(14-4-31)和式(14-4-32)确定。

14-8 码率为 $1/3$, $L=3$ 且具有式(8-2-5)所示转移函数的二进制卷积码用来在瑞利衰落信道通过二进制 PSK 发送数据。假设相应于编码比特的发送波形是独立衰落的。试求:

(a) 硬判决译码的差错率,并画出曲线。

(b) 软判决译码的差错率,并画出曲线。

14-9 在具有 L 阶分集的瑞利衰落信道上通过二进制双极性信号传输二进制序列。当发送 $s_l(t)$ 时,等效低通接收信号为

$$r_k(t) = \alpha_k e^{j\phi_k} s_l(t) + z_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, L)$$

L 条子信道中的衰落是统计独立的。加性噪声项 $\{z_k(t)\}$ 是零均值、统计独立且同分布的高斯白噪声过程,其自相关函数为 $\phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$ 。 L 个信号中的每一个通过一个与 $s_l(t)$ 匹配的滤波器,其输出经相移校正后为

$$U_k = \operatorname{Re} \left[e^{j\phi_k} \int_0^T r_k(t) s_l^*(t) dt \right] \quad (k = 1, 2, \dots, L)$$

$\{U_k\}$ 经线性合并器合并形成判决变量

$$U = \sum_{k=1}^L U_k$$

(a) 试求以 $\{\alpha_k\}$ 的固定值为条件的 U 的 PDF。

(b) 当 $\{\alpha_k\}$ 是统计独立且同分布的瑞利随机变量时,试求差错率的表达式。

14-10 在瑞利衰落中具有 L 阶分集的二进制 FSK 的差错率的契尔诺夫边界已被证明为

$$P_2(L) < [4p(1-p)]^L = \left[4 \frac{1 + \bar{\gamma}_c}{(2 + \bar{\gamma}_c)^2} \right]^L \\ < 2 \bar{\gamma}_c g(\bar{\gamma}_c)$$

式中

$$g(\bar{\gamma}_c) = \frac{1}{\bar{\gamma}_c} \log_2 \left[\frac{(2 + \bar{\gamma}_c)^2}{4(1 + \bar{\gamma}_c)} \right]$$

(a) 画出 $g(\bar{\gamma}_c)$ 并求其近似最大值及该最大值发生时 $\bar{\gamma}_c$ 的值。

(b) 对于给定的 $\bar{\gamma}_b$, 试求最佳分集阶数。

(c) 在最大化 $g(\bar{\gamma}_c)$ (最佳分集) 的条件下, 试将 $P_2(L)$ 与无衰落 AWGN 信道中二进制 FSK 的差错率相比较, 后者为

$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b/2}$$

试求由于衰落和非相干(平方律)合并引起的 SNR 损失。

14-11 DS 扩频系统用于分辨两径无线信号传播情况下的多径信号分量。若次要路径长度比直接路径长度长 300 m, 试求分辨多径信号分量需要的最小码片速率。

14-12 一个基带数字通信系统采用如图 P14-12(a) 所示的信号传输两个等概率信息。假设这里研究的是“一次突发(one shot)”通信问题, 即上述信息只发送一次并且此后

不再发送。信道没有衰减($\alpha=1$),且噪声是具有功率密度谱 $\frac{1}{2}N_0$ 的 AWGN。

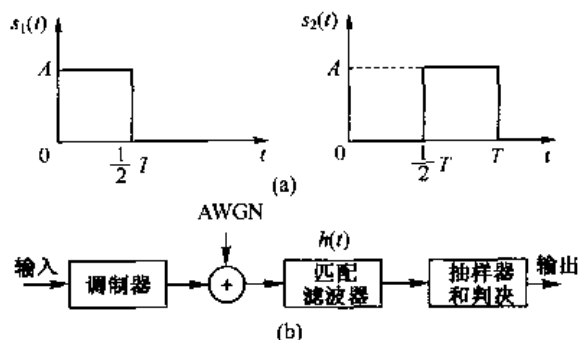


图 P14-12

- 试求表示该信号的合适的标准正交基。
- 在框图中,对采用匹配滤波器的最佳接收机给出准确的说明,并标记在该图中。
- 试求最佳接收机的差错率。
- 证明该最佳接收机可利用一个滤波器(见图 P14-12(b)的框图)实现。匹配滤波器、抽样器和判决器的特征是什么?
- 假设信道非理想且具有 $c(t) = \delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t - \frac{1}{2}T)$ 的冲激响应。运用与(d)相同的匹配滤波器,设计一个最佳接收机。
- 假设信道冲激响应为 $c(t) = \delta(t) - a\delta(t - \frac{1}{2}T)$, 其中 a 是一个在 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量。运用与(d)相同的匹配滤波器,设计一个最佳接收机。

14-13 通信系统采用双天线分集和二进制正交 FSK 调制。在这两个天线上的接收信号为

$$r_1(t) = \alpha_1 s(t) + n_1(t)$$

$$r_2(t) = \alpha_2 s(t) + n_2(t)$$

其中, α_1 和 α_2 是统计独立同分布(iid)的瑞利随机变量。 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 是统计独立的零均值白高斯随机过程,其功率密度谱为 $\frac{1}{2}N_0$ 。这两个信号被解调、平方,然后在检测之前被合并(求和)。

- 草拟整个接收机的功能框图,包括解调器、合并器和检测器。
- 画出检测器的差错率曲线,并与没有分集的情况相比较。

14-14 图 P14-14 所示的两个等效低通信号用来发送一个二进制序列。信道的等效低通冲激响应为 $h(t) = 4\delta(t) - 2\delta(t - T)$ 。为避免连续传输间的脉冲重叠,选择传输速率 $R = 1/2T$ b/s。发送信号是等概的,而且受到零均值加性高斯白噪声的恶化。该噪声的等效低通表示 $z(t)$ 的自相关函数为

$$\phi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} E[z^*(t)z(t+\tau)] = N_0\delta(\tau)$$

- 求两种可能的无噪声等效低通接收波形。
- 详细说明最佳接收机,并画出用于最佳接收机的所有滤波器的等效低通冲激响应的草图。假设信号是相干检测的。

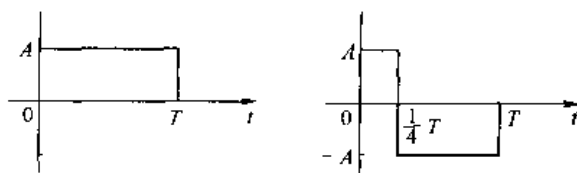


图 P14-14

- 14-15 通过在 Nakagami- m 分布中改变变量 $\gamma = \alpha^2 \mathcal{E}_b / N_0$, 试证明式(14-3-14)。
- 14-16 考虑使用两个发射天线和一个接收天线的数字通信系统。两个发射天线充分隔开, 以便在信号传输时提供双重空间分集。传输方案如下: s_1, s_2 表示将要用两个天线发射出去的--维或者二维信号星座图中的一对符号, 而且在两个信号间隔内来自第一个天线发射的信号为 (s_1, s_2^*) , 而第二个天线发射的信号为 $(s_1, -s_2^*)$ 。单个接收天线在两个符号间隔接收到的信号为

$$r_1 = h_1 s_1 + h_2 s_2^* + n_1$$

$$r_2 = h_1 s_1 + h_2 s_1^* + n_2$$

其中 (h_1, h_2) 表示复值信道增益, 并将共假设为均值为零、方差为 1 且统计独立的高斯信号。信道路径增益 (h_1, h_2) 在两个信号间隔内假设为常数, 而且对接收器来说是已知的。 (n_1, n_2) 表示加性高斯白噪声, 其均值为零、方差为 σ^2 , 并且不相关。

- (a) 证明如何从 (r_1, r_2) 恢复发射符号 (s_1, s_2) 并获得双重分集接收。
- (b) 当 (s_1, s_2) 对的能量为 (E_s, E_s) 且调制方式为二进制 PSK 时, 求差错率。
- (c) 当调制方式为 QPSK 时, 重复(b)的过程。
- 14-17 如 14.6.6 节所示, 对于二进制 PSK 编码比特的相干检测, 瑞利衰落信道上码字差错率上边界由式(14-6-37)给出。
- (a) 从式(14-6-35)出发, 证明二进制 PSK、DPSK、FSK(带有非相干检测)码字差错率上边界和软判决译码可表示为

$$P_M < 2^k \binom{2d_{\min} - 1}{d_{\min}} \left(\frac{1}{\beta R_c \bar{\gamma}_b} \right)^{d_{\min}}$$

其中, 对于 PSK, $\beta = 4$; 对于 DPSK, $\beta = 2$; 而对于 FSK, $\beta = 1$ 。

(b) 将 P_M 上边界表示为

$$P_M < 2^k \binom{2d_{\min} - 1}{d_{\min}} e^{-d_{\min} R_c \bar{\gamma}_b f(\bar{\gamma}_c)}$$

其中

$$f(\bar{\gamma}_c) = \frac{1}{\bar{\gamma}_c} \ln \beta \bar{\gamma}_c$$

证明: 当 $f(\bar{\gamma}_c)$ 取最大值时 $\bar{\gamma}_c$ 的值为 $\bar{\gamma}_c = e/\beta$ 。

(c) 对(b)中得到的 $f(\bar{\gamma}_c)$ 的最大值, 证明 P_M 的上边界可表示为:

$$P_M < 2^k \binom{2d_{\min} - 1}{d_{\min}} e^{-k(\beta d_{\min} \bar{\gamma}_b / n e \ln 2)}$$

并求当 k 增加到无穷大时, 使该上边界为零时 $\bar{\gamma}_b$ 的最小值; 而且当 $d_{\min}/n = 1/2$ 时, 对 PSK、DPSK 和 FSK 求 $\bar{\gamma}_b$ 的最小值。

第 15 章 多用户通信

至此,我们介绍的通信系统仅限于包含一个发射机和一个接收机的单一通信链路。本章的研究重点将转向多用户和多条通信链路的情况,将研究多个用户接入共用信道以便传送信息的各种方式。本章介绍的多址方法是构成现有和未来有线和无线通信网的基础,包括卫星通信网、蜂窝和移动通信网以及水下声音传送网络。

15.1 多址技术

目前有多种类型的多用户通信系统,区分这些通信系统是很有益处的。一种多用户通信系统是如图 15-1-1 所示的多址系统,该系统中的大量用户共用通信信道以传送信息到接收机。这个共用信道可以是卫星通信系统的上行链路,也可以是与接入中心计算机的一组终端连接的电缆,还可以是与某一无线接收机相联系供多个用户使用的无线频谱的某个频带。例如,在移动蜂窝通信系统中,用户是该系统中任一特定小区中的移动发射机,接收机在该特定小区的基站之中。

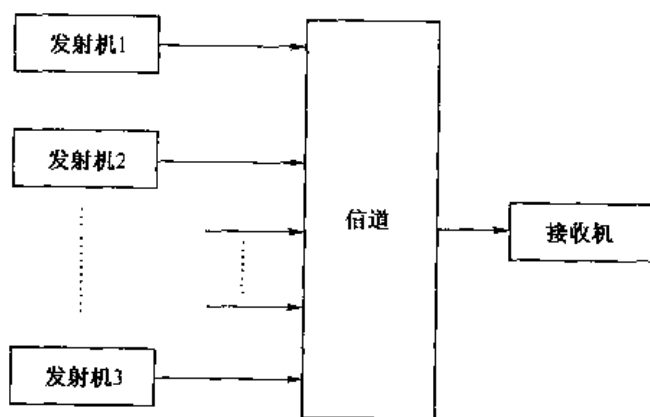


图 15-1-1 多址系统

第二种类型的多用户通信系统是广播网。在该网络中,一部发射机发送信息到多个接收机,如图 15-1-2 所示。广播系统包括普通无线电和 TV 广播系统,以及卫星系统的下行链路。

多址系统和广播网络是最常用的多用户通信系统。第三种类型的多用户系统是存储和转发网络,如图 15-1-3 所示。第四种类型是如图 15-1-4 所示的双向通信系统。

本章将集中研究多用户通信的多址方法。一般来说,存在几种不同的方式,使多个用户通过通信信道把信息发送到接收机。一种简单的方法是把可用信道带宽划分为许多(如 K 个)频率互不重叠的子信道,如图 15-1-5 所示,并按用户请求把子信道分配给每个用户。这种方法一般叫做频分多址(FDMA),通常用于有线信道,可容纳多个用户的话音和数据传输。

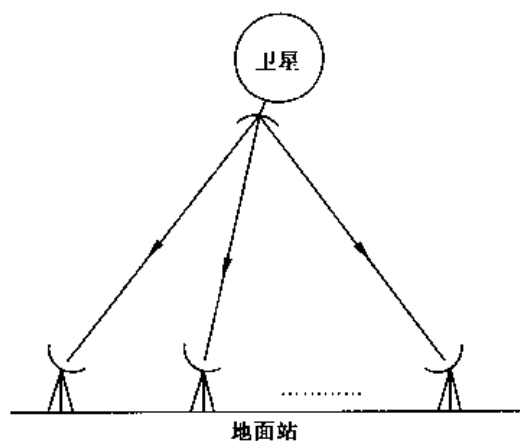


图 15-1-2 广播网络

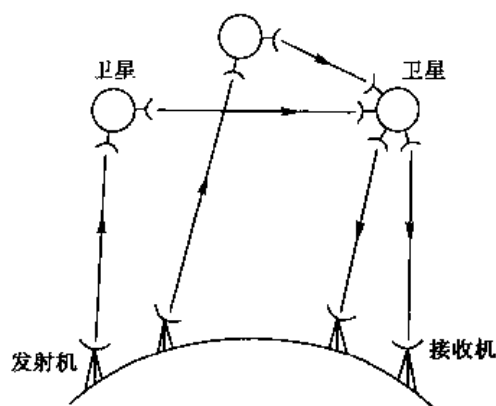


图 15-1-3 具有卫星转发器的存储和转发通信网



图 15-1-4 双向通信信道

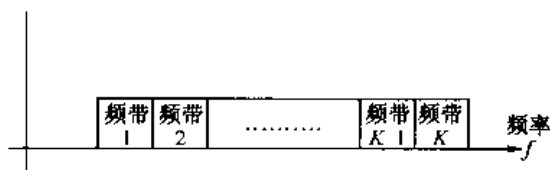


图 15-1-5 信道划分成不重叠的频带

多址系统中用来产生多个子信道的另一种方法是把持续时间 T_f (称为帧持续时间) 划分为 K 个互不重叠的子间隔, 每个间隔的持续时间为 T_f/K 。然后, 每个要发送信息的用户都分配一帧中的一个特定时隙。这个多址方式叫做时分多址 (TDMA), 常用于数据和数字语音的传输。

在 FDMA 和 TDMA 中, 信道基本上分割为独立的单用户子信道。从这个意义上说, 前面介绍的单用户通信系统的设计方法可直接应用于多用户通信, 除了增加一项给用户分配可用信道的任务外, 在多址环境下不会遇到其他新问题。

用户接入网络的数据具有突发特性时, 将发生有趣的事情。换句话说, 来自单用户的信息传输将时而夹杂着没有信息传输的静默期, 且静默期可能大于传输期。在含有中心计算机的计算机通信网中, 各种终端的用户常遇到这种情况。在某种程度上, 这也是承载数字化语音的移动蜂窝通信系统中常发生的事情, 因为典型的话音信号包含长的间歇。

在各个用户的传输是突发的和低占空率的环境下, 由于分配给用户的一定比例的可用频隙或时隙并不传送信息, 因此 FDMA 和 TDMA 的效率不高。低效设计的多址系统最终将使信道中同时接入的用户数受到限制。

FDMA 和 TDMA 的一个替代方法是应用直接序列扩频来达到多个用户分享一条信道或

子信道。在这个方法中,每个用户分配一个惟一的码序列或特征序列(signature sequence),该序列允许用户将信息信号扩展到所分配的整个频带。在接收端,通过求接收信号与每一个可能的用户特征序列的互相关,可分离出各用户信号。通过设计具有较小互相关的码序列,还可使来自多个发送机的接收信号解调过程固有的串音最小化。这种多址方式称为码分多址(CDMA)。

在 CDMA 中,用户以随机方式接入信道,从而多用户之间信号传输在时间和频率上完全重叠。通过伪随机码序列,每个信号的频谱扩展,从而在接收机中解调和分离这些信号很容易。因此,CDMA 有时也称为扩频多址(SSMA)。

CDMA 的一种替代方法是非扩频随机接入。在这种情况下,当两个用户试图同时利用共用信道时,它们的传输将相互冲突和干扰,此时将丢失信息,必须重传该信息。为了处理冲突,必须建立具有冲突消息的重传协议。下面将介绍冲突消息重传调度的协议。

15.2 多址方式的容量

下面,我们将以各种多址方式在带宽为 W 的理想 AWGN 信道上获得的信息速率为标准来比较 FDMA、TDMA 和 CDMA。首先比较 K 个用户的容量,其中每个用户具有平均功率 $P_i = P, 1 \leq i \leq K$ 。在带宽为 W 的理想带限 AWGN 信道中,单用户的容量为

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{WN_0} \right) \quad (15-2-1)$$

其中, $\frac{1}{2}N_0$ 为加性噪声的功率密度谱。

在 FDMA 中,每个用户分配一个带宽 W/K 。因此,每个用户的容量为

$$C_K = \frac{W}{K} \log_2 \left[1 + \frac{P}{(W/K)N_0} \right] \quad (15-2-2)$$

且 K 个用户的总容量为

$$KC_K = W \log_2 \left(1 + \frac{KP}{WN_0} \right) \quad (15-2-3)$$

于是,总容量等效于具有平均功率 $P_{av} = KP$ 的单个用户的容量。

对于一个固定的带宽 W ,随着用户数 K 的线性增加,总容量趋于无限。另一方面,随着 K 的增加,每个用户分配到较小的带宽(W/K),所以分配给每个用户的容量减小。图 15-2-1 所示为用信道带宽 W 归一化的每个用户的容量 C_K ,它是 \mathcal{E}_b/N_0 的函数,其中 K 为参数。该表达式为

$$\frac{C_K}{W} = \frac{1}{K} \log_2 \left[1 + K \frac{C_K}{W} \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \right) \right] \quad (15-2-4)$$

式(15-2-4)更紧凑的形式可通过定义归一化总容量 $C_n = KC_K/W$ 获得,该容量为每单位带宽上所有 K 个用户的总比特率。因此,式(15-2-4)可表示为

$$C_n = \log_2 \left(1 + C_n \frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \right) \quad (15-2-5)$$

或

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} = \frac{2^{C_n} - 1}{C_n} \quad (15-2-6)$$

C_n 相对于 \mathcal{E}_b/N_0 的变化如图 15-2-2 所示。由图可见, 当 \mathcal{E}_b/N_0 在最小值 $\ln 2$ 之上增加时, C_n 随之增加。

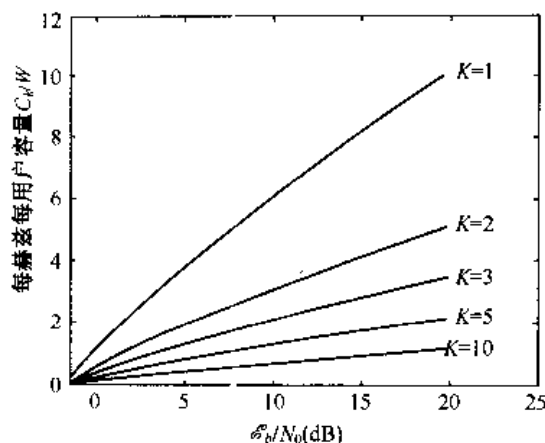


图 15-2-1 FDMA 的归一化容量与 \mathcal{E}_b/N_0 的函数关系

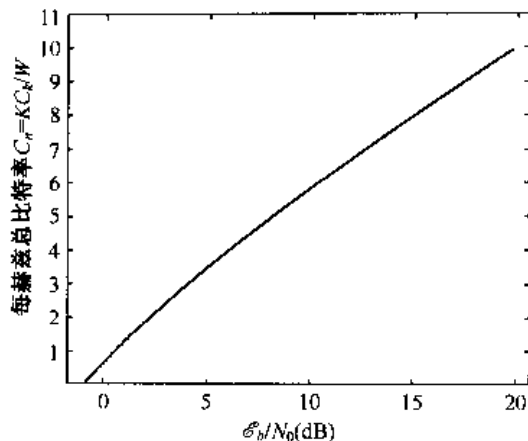


图 15-2-2 FDMA 的每赫兹总容量与 \mathcal{E}_b/N_0 的函数关系

在 TDMA 系统中, 每个用户在 $1/K$ 时间内通过带宽为 W 的信道以平均功率 KP 发送信号。因此, 每用户容量为

$$C_K = \left(\frac{1}{K} \right) W \log_2 \left(1 + \frac{KP}{WN_0} \right) \quad (15-2-7)$$

它与 FDMA 系统的容量相同。从实用的观点, 在 TDMA 中, 当 K 很大时, 对发送机来说, 保持发送机功率为 KP 是不可能的。因此, 存在一个实际的限制, 当超过此限制时, 发送机功率不能随着 K 的增加而增加。

在 CDMA 系统中, 每个用户发送一个带宽为 W 、平均功率为 P 的伪随机信号。系统容量取决于 K 个用户协同工作的程度。其极端情况是非协同 CDMA, 此时每个用户信号的接收机不知道其他用户的扩频波形, 或者在解调过程中忽略它们。这叫做单用户检测。因此, 在每个用户接收机中都把其他用户信号看做干扰。在这种情况下, 多用户接收机由一组 K 个单用户接收机组成。如果假设每个用户的伪随机信号波形是高斯的, 则每个用户信号将受到功率为 $(K-1)P$ 的高斯干扰和功率为 WN_0 的加性高斯噪声的恶化。因此, 每个用户的容量为

$$C_K = W \log_2 \left[1 + \frac{P}{WN_0 + (K-1)P} \right] \quad (15-2-8)$$

或者

$$\frac{C_K}{W} = \log_2 \left[1 + \frac{C_K}{W} \frac{\mathcal{E}_b/N_0}{1 + (K-1)(C_K/W)\mathcal{E}_b/N_0} \right] \quad (15-2-9)$$

图 15-2-3 所示的 C_K/W 随 \mathcal{E}_b/N_0 而变化, 其中 K 为参数。

对于大量用户的情况, 可以使用近似式 $\ln(1+x) \leq x$, 从而,

$$\frac{C_K}{W} \leq \frac{C_K}{W} \frac{\mathcal{E}_b/N_0}{1 + K(C_K/W)(\mathcal{E}_b/N_0)} \log_2 e \quad (15-2-10)$$

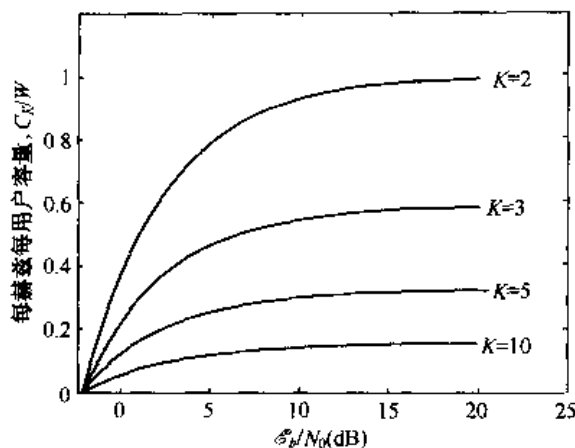


图 15-2-3 非协同 CDMA 的归一化容量与 E_b/N_0 的函数关系

或

$$\begin{aligned} C_n &\leq \log_2 e - \frac{1}{E_b/N_0} \\ &\leq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{E_b/N_0} < \frac{1}{\ln 2} \end{aligned} \quad (15-2-11)$$

在这种情况下,总容量并不像 TDMA 和 FDMA 那样随着 K 增加而增加。

另一方面,假设 K 个用户按时间同步发送信号,多用户接收机已知所有用户的扩频波形,而且对所有用户信号进行联合解调和检测,这叫做多用户检测。于是,每个用户分配到一个速率 R_i ($1 \leq i \leq K$),以及包含功率为 P 的一组 2^{nR_i} 个码字的码本。在每一信号间隔内,每个用户从其码本中选择任意一个码字,比如 \mathbf{X}_i ,且所有用户同时发送它们的码字。于是,接收机的译码器观测到

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^K \mathbf{X}_i + \mathbf{Z} \quad (15-2-12)$$

式中, \mathbf{Z} 是加性噪声向量。最佳译码器选择 K 个分别来自各码本的码字,其相应的向量之和在欧氏距离上最接近于接收向量 \mathbf{Y} 。

对于 AWGN 信道中的 K 个用户,在假设每个用户等功率的情况下,可获得的 K 维速率区域由下列方程确定:

$$R_i < W \log_2 \left(1 + \frac{P}{WN_0} \right) \quad (1 \leq i \leq K) \quad (15-2-13)$$

$$R_i + R_j < W \log_2 \left(1 + \frac{2P}{WN_0} \right) \quad (1 \leq i, j \leq K) \quad (15-2-14)$$

$$R_{\text{Sum}}^{\text{Mu}} = \sum_{i=1}^K R_i < W \log_2 \left(1 + \frac{KP}{WN_0} \right) \quad (15-2-15)$$

其中 $R_{\text{Sum}}^{\text{Mu}}$ 是由采用多用户检测的 K 个用户获得的总速率。在所有速率都相等的特殊情况下,不等式(15-2-15)比其他 $K-1$ 个不等式有优势。由此得出结论:如果在上述不等式规定的容量区域内选择 K 个协同同步用户的速率,则随着码组长度 n 趋于无限, K 个用户的差错率将趋于零。

根据上述讨论可以推断, K 个用户的速率之和随着 K 的增大而趋于无限。因此,由于用户协同同步工作,CDMA 的容量具有类似于 FDMA 和 TDMA 的形式。注意,如果选择 CDMA

系统的所有速率都相同且等于 R , 式(15-2-15)简化为

$$R < \frac{W}{K} \log_2 \left(1 + \frac{KP}{WN_0} \right) \quad (15-2-16)$$

它与 FDMA 和 TDMA 中的速率限制相同。在这种情况下, CDMA 没有获得比 TDMA 和 FDMA 更高的速率。然而, 如果选择 K 个用户的速率不等, 使得不等式(15-2-13) ~ (15-2-15) 成立, 则在可获取的速率区域内有可能找到一些点(速率组合), 使得 CDMA 中 K 个用户的速率之和超过 FDMA 和 TDMA 的容量。

例 15-2-1 研究采用上述编码信号的 CDMA 系统中的两个用户。两个用户的速率必须满足不等式:

$$R_1 < W \log_2 \left(1 + \frac{P}{WN_0} \right) \quad (15-2-17)$$

$$R_2 < W \log_2 \left(1 + \frac{P}{WN_0} \right) \quad (15-2-18)$$

$$R_1 + R_2 < W \log_2 \left(1 + \frac{2P}{WN_0} \right) \quad (15-2-19)$$

式中, P 为每个用户的平均发送功率, W 为信号带宽。试求两用户 CDMA 系统的容量区域。

图 15-2-4 给出了具有编码信号波形的两用户 CDMA 系统容量区域的表示形式, 这里

$$C_i = W \log_2 \left(1 + \frac{P_i}{WN_0} \right) \quad (i = 1, 2)$$

是相应于功率为 $P_1 = P_2 = P$ 的两个用户的容量。注意, 如果用户 1 以容量 C_1 发送, 则用户 2 的最大发送速率为

$$\begin{aligned} R_{2m} &= W \log_2 \left(1 + \frac{2P}{WN_0} \right) - C_1 \\ &= W \log_2 \left(1 + \frac{P}{P + WN_0} \right) \end{aligned} \quad (15-2-20)$$

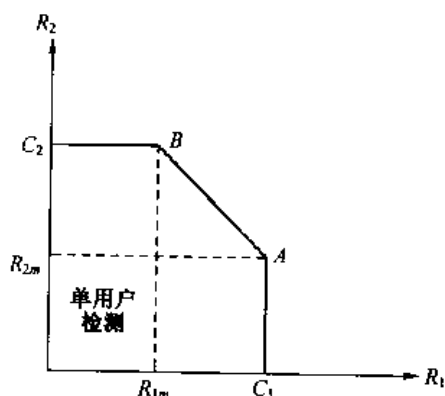


图 15-2-4 两用户 CDMA 多址高斯信道的容量区域

如图 15-2-4 中 A 点所示。这个结果的解释如下: 首先, 速率 R_{2m} 是在检测用户 2 的信号时把用户 1 的信号看做等效加性噪声的情况下得到的。另一方面, 用户 1 可以以容量 C_1 发送, 由于接收机知道用户 2 发送的信号, 因此在检测用户 1 的信号时可消除用户 2 对它的影响。

由于对称性, 如果用户 2 以容量 C_2 发送, 也存在同样的情况。那么, 用户 1 能够发送最大的速率 $R_{1m} = R_{2m}$, 如图 15-2-4 中 B 点所示。在这种情况下, 把用户 1 和用户 2 的角色互换, 仍可得到与上类似的解释。

将 A 点和 B 点用一条直线相连, 它由式(15-2-19)定义。容易看出, 这条直线是可获得速率区域的边界, 因为该直线上的任意一点都相应于最大速率 $W \log_2 (1 + 2P/WN_0)$, 该速率可通过两个用户简单地时分复用该信道而获得。

下一节将考虑多用户 CDMA 系统信号的检测问题,评估几种接收机结构的性能和计算复杂性的问题。

15.3 码分多址

在 TDMA 和 FDMA 这两种多址方式中,把信道分成许多独立的单用户子信道,即互不重叠的时隙或频带。在 CDMA 中,分配给每个用户的是不同的标记序列(或波形),用户用它对携带信息的信号进行调制和扩频。标记序列也允许接收机对信道中多个用户传送的消息进行解调,这些消息同时发送,而且一般来说是异步的。

本节将研究多用户 CDMA 信号的解调和检测问题。我们将看到,最佳的极大似然检测器的计算复杂性随用户数的增加而指数增加,这样高的复杂性成为设计具有较低计算复杂性的次最佳检测器的动因。本节还将研究各种检测器的性能特性。

15.3.1 CDMA 信号与信道模型

研究一条同时被 K 个用户分享的信道。每个用户分配到一个持续时间为 T 的标记波形 $g_k(t)$,其中 T 为符号间隔。标记波形为

$$g_k(t) = \sum_{n=0}^{L-1} a_k(n) p(t - nT_c) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (15-3-1)$$

式中, $\{a_k(n), 0 \leq n \leq L-1\}$ 是一个取值为 $\{\pm 1\}$ 的 L 个码片组成的伪噪声(PN)码序列, $p(t)$ 是脉宽为 T_c 的脉冲, T_c 为码片间隔。因此,每个符号有 L 个码片且 $T = LT_c$ 。不失一般性,假设所有 K 个标记波形具有单位能量,即

$$\int_0^T g_k^2(t) dt = 1 \quad (15-3-2)$$

特征波形之间的互相关特性在信号检测器的度量及其性能中起着重要作用。定义如下互相关(式中 $0 \leq \tau \leq T$ 且 $i < j$)

$$\rho_{ij}(\tau) = \int_{\tau}^T g_i(t) g_j(t - \tau) dt \quad (i \leq j) \quad (15-3-3)$$

$$\rho_{ji}(\tau) = \int_0^{\tau} g_i(t) g_j(t + T - \tau) dt \quad (i \leq j) \quad (15-3-4)$$

式(15-3-3)和式(15-3-4)的互相关应用于 K 个用户间的异步传输。对于同步传输,我们只需要 $\rho_{ij}(0)$ 。

为简单起见,假设采用二进制双极性信号发送每个用户的信息。因此,令第 k 个用户信息序列用 $\{b_k(m)\}$ 表示,其中每个信息比特的值可为 ± 1 。为方便计,考虑传输的是具有任意长度比,如 N 的一个比特块。那么,第 k 个用户的数据块为

$$\mathbf{b}_k = [b_k(1) \cdots b_k(N)]^t \quad (15-3-5)$$

相应的等效低通发送波形为

$$s_k(t) = \sqrt{\epsilon_k} \sum_{i=1}^N b_k(i) g_k(t - iT) \quad (15-3-6)$$

式中, ϵ_k 为比特信号能量。 K 个用户合成的发送信号为

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{k=1}^K s_k(t - \tau_k) \\
 &= \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_k} \sum_{i=1}^N b_k(i) g_k(t - iT - \tau_k)
 \end{aligned} \quad (15-3-7)$$

式中, $|\tau_k|$ 为传输延时, 它满足条件 $0 \leq \tau_k < T, k = 1, 2, \dots, K$ 。不失一般性, 假设 $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_K < T$, 这是多用户在异步模式下的发送信号模型。在同步传输的特殊情况下, $\tau_k = 0, 1 \leq k \leq K$ 。不失一般性, 在式(15-3-3)和式(15-3-4)给出的互相关表达式中, τ 的值也可约束为 $0 \leq \tau < T$ 。

假设发送信号受到 AWGN 的恶化, 则接收信号为

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (15-3-8)$$

式中, $s(t)$ 由式(15-3-7)确定, $n(t)$ 是功率密度谱为 $\frac{1}{2}N_0$ 的噪声。

15.3.2 最佳接收机

最佳接收机定义为接收机在时间间隔 $0 \leq t \leq NT + 2T$ 上观测接收信号, 对于给定接收信号 $r(t)$, 它能选出最可能的比特序列 $\{b_k(n), 0 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq K\}$ 。本节首先研究同步传输, 然后研究异步传输。

1. 同步传输

在同步传输中, 每个(用户)干扰源完整地产生一个符号对期望符号进行干扰。在加性高斯白噪声中, 只要考虑一个信号间隔内 ($0 \leq t \leq T$) 接收的信号并确定最佳接收机就足够了。因此, $r(t)$ 可以表示为

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_k} b_k(1) g_k(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (15-3-9)$$

最佳的最大似然接收机首先计算对数似然函数

$$\Lambda(\mathbf{b}) = \int_0^T \left[r(t) - \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_k} b_k(1) g_k(t) \right]^2 dt \quad (15-3-10)$$

然后选择使 $\Lambda(\mathbf{b})$ 最小的信息序列 $\{b_k(1), 0 \leq k \leq K\}$ 。若将式(15-3-10)中的积分展开, 可得

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\mathbf{b}) &= \int_0^T r^2(t) dt - 2 \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_k} b_k(1) \int_0^T r(t) g_k(t) dt \\
 &\quad + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_j \epsilon_k} b_k(1) b_j(1) \int_0^T g_k(t) g_j(t) dt
 \end{aligned} \quad (15-3-11)$$

我们看到, 涉及 $r^2(t)$ 的积分对所有可能的序列 $\{b_k(1)\}$ 是共同的, 且与确定发送哪个序列无关, 因此可以略去。下列项

$$r_k = \int_0^T r(t) g_k(t) dt \quad (1 \leq k \leq K) \quad (15-3-12)$$

表示接收信号与 K 个标记序列中的每一个的互相关。可以用匹配滤波器代替互相关器。关于 $g_k(t)$ 和 $g_j(t)$ 的积分可简单表示为

$$\rho_{jk}(0) = \int_0^T g_j(t) g_k(t) dt \quad (15-3-13)$$

因此,式(15-3-11)可用相关度量的形式表示为

$$C(\mathbf{r}_K, \mathbf{b}_K) = 2 \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_k} b_k(1) r_k - \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_j \epsilon_k} b_k(1) b_j(1) \rho_{jk}(0) \quad (15-3-14)$$

这些相关量度也可用向量内积的形式表示为

$$C(\mathbf{r}_K, \mathbf{b}_K) = 2\mathbf{b}_K^t \mathbf{r}_K - \mathbf{b}_K^t \mathbf{R}_s \mathbf{b}_K \quad (15-3-15)$$

式中

$$\mathbf{r}_K = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_K]^t, \quad \mathbf{b}_K = [\sqrt{\epsilon_1} b_1(1) \ \cdots \ \sqrt{\epsilon_K} b_K(1)]$$

\mathbf{R}_s 是相关矩阵,其元素为 $\rho_{jk}(0)$ 。由此可见,最佳检测器必须知道接收信号的能量才能计算相关度量。图 15-3-1 画出最优的用户接收机框图。

在 K 个用户的信息序列中,有 2^K 种可能的比特选择。最佳检测器计算每个序列的相关度量,并选择能产生最大相关度量的序列。由此可见,最佳检测器的复杂性随用户数 K 呈指数增加。

总之,符号同步传输的最佳接收器由一组 K 个相关器或匹配滤波器紧接一个检测器组成,该检测器计算由式(15-3-15)给出的相应于 2^K 种可能的发送信息序列的 2^K 个相关度量。然后,该检测器选择相应于最大相关度量的序列。

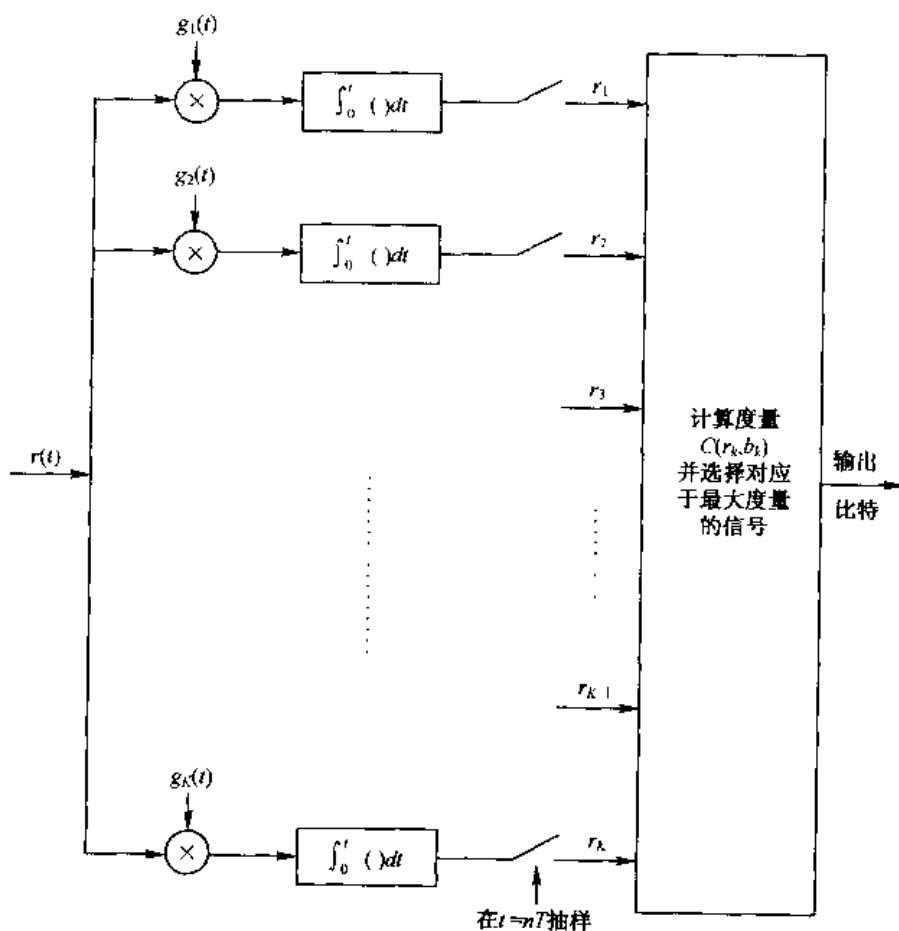


图 15-3-1 同步传输最佳多用户接收机

2. 异步传输

在这种情况下,每个干扰源形成完整的两个连续符号叠加到期望符号上。假设接收机已知 K 个用户的接收信号能量 $\{\epsilon_k\}$ 和传输延时 $\{\tau_k\}$ 。显然,这些参数必须在接收机中被测出或由用户通过某个控制信道提供给接收机作为边信息。

最佳最大似然接收机计算对数似然函数

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{b}) &= \int_0^{NT+2T} \left[r(t) - \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_k} \sum_{i=1}^N b_k(i) g_k(t - iT - \tau_k) \right]^2 dt \\ &= \int_0^{NT+2T} r^2(t) dt - 2 \sum_{k=1}^K \sqrt{\epsilon_k} \sum_{i=1}^N b_k(i) \int_0^{NT+2T} r(t) g_k(t - iT - \tau_k) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \sqrt{\epsilon_k \epsilon_l} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_k(i) b_l(j) \int_0^{NT+2T} g_k(t - iT - \tau_k) g_l(t - jT - \tau_l) dt \end{aligned} \quad (15-3-16)$$

式中, \mathbf{b} 表示来自 K 个用户的数据序列。涉及 $r^2(t)$ 的积分可以略去,因为它对所有可能的信息序列是共同的。积分

$$r_k(i) \equiv \int_{iT+\tau_k}^{(i+1)T+\tau_k} r(t) g_k(t - iT - \tau_k) dt \quad (1 \leq i \leq N) \quad (15-3-17)$$

表示每个信号间隔内第 k 个用户相关器或匹配滤波器的输出。积分

$$\begin{aligned} &\int_0^{NT+2T} g_k(t - iT - \tau_k) g_l(t - jT - \tau_l) dt \\ &= \int_{iT-\tau_k}^{NT+2T-iT-\tau_k} g_k(t) g_l(t + iT - jT + \tau_k - \tau_l) dt \end{aligned} \quad (15-3-18)$$

可容易地分解为涉及互相关 $\rho_{kl}(\tau) = \rho_{kl}(\tau_k - \tau_l)$ ($k \leq l$ 时) 和 $\rho_{kl}(k > l$ 时) 的两项。因此,对数似然函数可用相关度量表示,该量度涉及 K 个相关器或匹配滤波器的输出 $\{r_k(i), 0 \leq k \leq K, 0 \leq i \leq N\}$, 它们与 K 个标记序列一一对应。利用向量记号,可以证明 NK 个相关器或匹配滤波器的输出 $\{r_k(i)\}$ 为

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_N \mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (15-3-19)$$

式中,定义

$$\mathbf{r} = [\mathbf{r}'(1) \quad \mathbf{r}'(2) \quad \cdots \quad \mathbf{r}'(N)]^t$$

$$\mathbf{r}(i) = [r_1(i) \quad r_2(i) \quad \cdots \quad r_K(i)]^t \quad (15-3-20)$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}'(1) \quad \mathbf{b}'(2) \quad \cdots \quad \mathbf{b}'(N)]^t$$

$$\mathbf{b}(i) = [\sqrt{\epsilon_1} b_1(i) \quad \sqrt{\epsilon_2} b_2(i) \quad \cdots \quad \sqrt{\epsilon_K} b_K(i)]^t \quad (15-3-21)$$

$$\mathbf{n} = [\mathbf{n}'(1) \quad \mathbf{n}'(2) \quad \cdots \quad \mathbf{n}'(N)]^t$$

$$\mathbf{n}(i) = [n_1(i) \quad n_2(i) \quad \cdots \quad n_K(i)]^t \quad (15-3-22)$$

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a(0) & \mathbf{R}_a'(1) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_a(1) & \mathbf{R}_a(0) & \mathbf{R}_a'(1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_a(1) & \mathbf{R}_a(0) & \mathbf{R}_a'(1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_a(1) & \mathbf{R}_a(0) \end{bmatrix} \quad (15-3-23)$$

$\mathbf{R}_a(m)$ 是一个 $K \times K$ 矩阵, 其元素为

$$R_{kl}(m) = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t - \tau_k) g_l(t + mT - \tau_l) dt \quad (15-3-24)$$

高斯噪声向量 $\mathbf{n}(i)$ 的均值为零且自相关矩阵为

$$E[\mathbf{n}(k)\mathbf{n}^T(j)] = \frac{1}{2}N_0\mathbf{R}_a(k-j) \quad (15-3-25)$$

注意, 式(15-3-19)中的向量 \mathbf{r} 构成一组用来估计发送比特 $b_k(i)$ 的充分统计量。

如果采用分组处理方法, 最佳 ML 检测器必须计算 2^{NK} 个相关度量并选择长度为 N 、相应于最大相关度量的 K 个序列。显然, 在实际中, 这种方法由于计算太复杂而无法实现, 特别当 N 和 K 较大时。一种替代方法是采用维特比算法的 ML 序列估计。为了构造一个序贯型检测器, 利用如下事实: 每个发送符号最多重叠 $2K-2$ 个符号。因此, 相对于分组大小参数 N 的计算复杂性大大降低, 但计算量与 K 的指数相关并不能降低。

很明显, 采用维特比算法的最佳 ML 接收机涉及很高的计算复杂性, 以致于它在实际应用中只限于用户数极少(例如 $K < 10$)的通信系统。对于大的 K 值, 应采用类似于第 8 章介绍的序贯译码或堆栈算法的序贯型检测器。下面将研究几种次最佳检测器, 其复杂性仅随 K 线性增长。

15.3.3 次最佳检测器

在上面的讨论中我们看到, K 个 CDMA 用户的最佳检测器的计算复杂性随 K 呈指数增长, 其计算量以每个调制符号算术运算的次数(加法和乘法/除法)来衡量。本节将研究计算复杂性随用户数 K 线性增长的次最佳检测器。我们将从最简单的称为常规(单用户)检测器的次最佳检测器开始讨论。

1. 传统单用户检测器

在传统单用户检测器中, 每个用户接收机由解调器组成, 该解调器将接收信号与用户标记序列进行相关运算, 并把相关器的输出传递到检测器, 此检测器根据单一相关器输出作出判决。这样, 常规检测器忽略了信道中其他用户的存在, 或等效地, 假设噪声加干扰的总和是白高斯的。

首先研究同步传输的情况。此时, 对于间隔 $0 \leq t \leq T$ 内的信号, 第 k 个用户相关器的输出为

$$r_k = \int_0^T r(t) g_k(t) dt \quad (15-3-26)$$

$$= \sqrt{\mathcal{E}_k} b_k(1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \sqrt{\mathcal{E}_j} b_j(1) \rho_{jk}(0) + n_k(1) \quad (15-3-27)$$

式中, 噪声分量 $n_k(1)$ 为

$$n_k(1) = \int_0^T n(t) g_k(t) dt \quad (15-3-28)$$

因为 $n(t)$ 是功率密度谱为 $\frac{1}{2}N_0$ 的高斯白噪声, 所以 $n_k(1)$ 的方差为

$$E[n_k^2(1)] = \frac{1}{2}N_0 \int_0^T g_k^2(t) dt = \frac{1}{2}N_0 \quad (15-3-29)$$

显然, 如果标记序列是正交的, 则由式(15-3-27)的中间项确定的其他用户的干扰将消失, 此时

常规单用户检测器是最优的。另一方面,如果有一个或多个其他标记序列不与该用户标记序列正交,则当一个或多个其他用户信号功率电平(或接收信号能量)远大于第 k 个用户功率电平时,来自其他用户的干扰将过大。这种情况在多用户通信中一般称为远-近问题(干扰),它使得有必要在常规检测中采用某种形式的功率控制。

在异步传输中,常规检测器更易受到其他用户干扰的影响。这是因为不可能设计出对所有两两用户对、对所有时间偏差(offset)都能保持正交的标记序列。因此,在采用常规单用户检测的异步传输中,来自其他用户的干扰不可避免。在这种情况下,由于各用户的发送信号功率不等而引起的远-近干扰将特别严重。实际解决办法一般要求一种由接收机控制的功率调整方法,接收机的控制是通过一个单独的通信信道实现的,所有用户连续地监测该信道。另一种选择是采用下面介绍的任何一种多用户检测器。

2. 解相关检测器

常规检测器的复杂性随用户数线性增长,但它对远-近干扰的脆弱性要求某种形式的功率控制。现在设计另外一种形式的检测器,该检测器的复杂性也随用户数线性增长,但不受其他用户干扰的损伤。

首先研究符号同步传输的情况。在这种情况下,表示 K 个匹配滤波器输出的接收信号向量为

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{R}_s \mathbf{b}_K + \mathbf{n}_K \quad (15-3-30)$$

式中, $\mathbf{b}_K = [\sqrt{\epsilon_1} b_1(1) \quad \sqrt{\epsilon_2} b_2(1) \cdots \sqrt{\epsilon_K} b_K(1)]^T$ 。噪声向量 $\mathbf{n}_K = [n_1(1) \quad n_2(1) \cdots n_K(1)]^T$ 的协方差为

$$E(\mathbf{n}_K \mathbf{n}_K^T) = \frac{N_0}{2} \mathbf{R}_s \quad (15-3-31)$$

因噪声是高斯的,故 \mathbf{r}_K 由均值为 $\mathbf{R}_s \mathbf{b}_K$ 且协方差为 \mathbf{R}_s 的 K 维高斯 PDF 描述,即

$$p(\mathbf{r}_K | \mathbf{b}_K) = \frac{1}{\sqrt{(N_0 \pi)^K \det \mathbf{R}_s}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} (\mathbf{r}_K - \mathbf{R}_s \mathbf{b}_K)^T \mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{r}_K - \mathbf{R}_s \mathbf{b}_K) \right] \quad (15-3-32)$$

\mathbf{b}_K 的最佳线性估计值是使似然函数

$$\Delta(\mathbf{b}_K) = (\mathbf{r}_K - \mathbf{R}_s \mathbf{b}_K)^T \mathbf{R}_s^{-1} (\mathbf{r}_K - \mathbf{R}_s \mathbf{b}_K) \quad (15-3-33)$$

最小化的 \mathbf{b}_K 值。该最小化结果是

$$\mathbf{b}_K^0 = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{r}_K \quad (15-3-34)$$

取 \mathbf{b}_K^0 中每个元素的符号即可获得检测符号,即

$$\hat{\mathbf{b}}_K = \text{sgn}(\mathbf{b}_K^0) \quad (15-3-35)$$

图 15-3-2 所示为该接收机的结构。由式(15-3-34)和式(15-3-35)可以看出,解相关器一般要知道相对延时以便形成 \mathbf{R}_s ,但不需要知道信号幅度。

因为通过对相关器输出向量进行线性变换可得到 \mathbf{b}_K^0 的估值,所以计算复杂性与 K 呈线性关系。

由式(15-3-34)得到的 \mathbf{b}_K 的最佳(最大似然)线性估计不同于最佳非线性 ML 序列检测器,后者求取使似然函数最大的最佳离散值 $\{\pm 1\}$ 序列。同时,估值 \mathbf{b}_K^0 是使由式(15-3-15)得

到的相关度量最大的最佳线性估值。

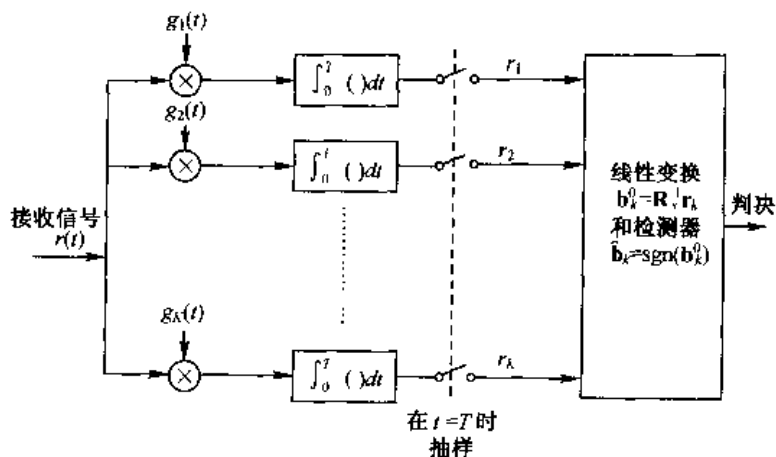


图 15-3-2 解相关接收机的结构

通过研究 $K=2$ 个用户的情况,可以得到关于该检测器的解释。该检测器按式(15-3-34)计算 b_K^0 ,并根据式(15-3-35)判决。在这种情况下,

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (15-3-36)$$

$$\mathbf{R}_s^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \quad (15-3-37)$$

式中

$$\rho = \int_0^T g_1(t) g_2(t) dt \quad (15-3-38)$$

因此,如果把接收信号

$$r(t) = \sqrt{\mathcal{E}_1} b_1 g_1(t) + \sqrt{\mathcal{E}_2} b_2 g_2(t) + n(t) \quad (15-3-39)$$

与 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 作相关运算,可得

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_1} b_1 + \rho \sqrt{\mathcal{E}_2} b_2 + n_1 \\ \rho \sqrt{\mathcal{E}_1} b_1 + \sqrt{\mathcal{E}_2} b_2 + n_2 \end{bmatrix} \quad (15-3-40)$$

式中, n_1 和 n_2 是相关器输出的噪声分量,因此

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2^0 &= \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{r}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_1} b_1 + (n_1 - \rho n_2)/(1 - \rho^2) \\ \sqrt{\mathcal{E}_2} b_2 + (n_2 - \rho n_1)/(1 - \rho^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15-3-41)$$

这是一个非常有趣的结果,因为变换 \mathbf{R}_s^{-1} 消除了两个用户之间的干扰分量,因而消除了远-近干扰,也就不需要功率控制了。

如果用下面两个修正的标记波形

$$g'_1(t) = g_1(t) - \rho g_2(t) \quad (15-3-42)$$

$$g'_2(t) = g_2(t) - \rho g_1(t) \quad (15-3-43)$$

与式(15-3-39)中给出的 $r(t)$ 作相关运算,可得到与式(15-3-41)相似的结果。这就意味着,

通过求接收信号与修正的标记波形的相关,可去掉或解相关多用户干扰。因此,基于式(15-3-34)的检测器称为解相关检测器。

在异步传输中,相关器输出的接收信号由式(15-3-19)确定。因此,对数似然函数为

$$\Lambda(\mathbf{b}) = (\mathbf{r} - \mathbf{R}_N \mathbf{b})' \mathbf{R}_N^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{R}_N \mathbf{b}) \quad (15-3-44)$$

式中, \mathbf{R}_N 由式(15-3-23)定义, \mathbf{b} 由式(15-3-21)确定。容易证明,使 $\Lambda(\mathbf{b})$ 最小的向量 \mathbf{b} 为

$$\mathbf{b}^0 = \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{r} \quad (15-3-45)$$

这是 \mathbf{b} 的 ML 估值,又是由一组匹配滤波器或相关器输出的线性变换得到的。

因为 $\mathbf{r} = \mathbf{R}_N \mathbf{b} + \mathbf{n}$, 故由式(15-3-45)可得

$$\mathbf{b}^0 = \mathbf{b} + \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{n} \quad (15-3-46)$$

所以, \mathbf{b}^0 是 \mathbf{b} 的无偏估值。这意味着多用户干扰已被消除,正如符号同步传输的情况。因此,这个用于异步传输的检测器也称为解相关检测器。

获得式(15-3-45)答案的一种方法是采用附录 D 所述的平方根分解法。当然,还有许多对矩阵 \mathbf{R}_N 求逆的方法,包括对信号解相关的迭代方法。

3. 最小均方误差检测器

在上述讨论中已证明,通过使式(15-3-44)的二次对数似然函数最小化,可得到 \mathbf{b} 的线性 ML 估值,于是得到由式(15-3-45)给出的结果,它是对一组相关器或匹配滤波器输出进行线性变换后的估值。

还可获得另一种结果,只要挑选线性变换 $\mathbf{b}^0 = \mathbf{A}\mathbf{r}$, 并确定其中的矩阵 \mathbf{A} , 使得最小化均方误差(MSE)

$$\begin{aligned} J(\mathbf{b}) &= E[(\mathbf{b} - \mathbf{b}^0)'(\mathbf{b} - \mathbf{b}^0)] \\ &= E[(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{r})'(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (15-3-47)$$

其中期望值是相对于数据向量 \mathbf{b} 和加性噪声向量 \mathbf{n} 的。通过迫使误差 $(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{r})$ 和数据向量 \mathbf{r} 正交可以得到最佳矩阵 \mathbf{A} 。于是有

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{r})\mathbf{r}'] &= \mathbf{0} \\ E(\mathbf{b}\mathbf{r}') - \mathbf{A}E(\mathbf{r}\mathbf{r}') &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (15-3-48)$$

首先考虑同步传输情况。我们有

$$E(\mathbf{b}_K \mathbf{r}'_K) = E(\mathbf{b}_K \mathbf{b}'_K) \mathbf{R}'_S = \mathbf{D} \mathbf{R}'_S \quad (15-3-49)$$

和

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_K \mathbf{r}'_K) &= E[(\mathbf{R}_S \mathbf{b}_K + \mathbf{n}_K)(\mathbf{R}_S \mathbf{b}_K + \mathbf{n}_K)'] \\ &= \mathbf{R}_S \mathbf{D} \mathbf{R}'_S + \frac{N_0}{2} \mathbf{R}'_S \end{aligned} \quad (15-3-50)$$

其中 \mathbf{D} 为对角元素为 $\{\epsilon_k, 1 \leq k \leq K\}$ 的对角矩阵。把式(15-3-49)、式(15-3-50)代入式(15-3-48),并对 \mathbf{A} 求解,我们有

$$\mathbf{A}^0 = \left(\mathbf{R}_S + \frac{N_0}{2} \mathbf{D}^{-1} \right)^{-1} \quad (15-3-51)$$

则

$$\mathbf{b}^0_K = \mathbf{A}^0 \mathbf{r}_K \quad (15-3-52)$$

且

$$\hat{\mathbf{b}}_K = \text{sgn}(\mathbf{b}_K^0) \quad (15-3-53)$$

类似地,对于异步传输,可以证明:使 $J(\mathbf{b})$ 最小化的 \mathbf{A} 的最佳选择为

$$\mathbf{A}^0 = \left(\mathbf{R}_N + \frac{1}{2} N_0 \mathbf{I} \right)^{-1} \quad (15-3-54)$$

从而

$$\mathbf{b}^0 = \left(\mathbf{R}_N + \frac{1}{2} N_0 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{r} \quad (15-3-55)$$

则检测器的输出为 $\hat{\mathbf{b}} = \text{sgn}(\mathbf{b}^0)$ 。

式(15-3-52)或式(15-3-55)给出的估值叫做 \mathbf{b} 的最小均方误差 (MMSE) 估计。注意,当 $\frac{1}{2} N_0$ 与 \mathbf{R}_N 的对角线元素相比较小时,MMSE 的解接近式(15-3-45)给出的 ML 解。另一方面,当噪声电平与 \mathbf{R}_N 的对角线元素中的信号电平相比较小时, \mathbf{A}^0 接近于单位矩阵乘以 $N_0/2$ 。在这个低 SNR 的情况下,该检测器基本上忽略了来自其他用户的干扰,因为加性噪声是支配项。也应该注意到,MMSE 准则产生 \mathbf{b} 的有偏估计,从而存在某种残留的多用户干扰。

为了执行求取 \mathbf{b} 值的计算,求解线性方程组

$$\left(\mathbf{R}_N + \frac{1}{2} N_0 \mathbf{I} \right) \mathbf{b} = \mathbf{r} \quad (15-3-56)$$

如前所示,其解可利用矩阵 $\mathbf{R}_N + \frac{1}{2} N_0 \mathbf{I}$ 的平方根分解求得。于是,检测 NK 个比特要求 $3NK^2$ 次乘法。因此,计算复杂性是每比特 $3K$ 次乘法,与分组长度 N 无关,与 K 呈线性关系。

我们看到,无论解相关检测器,还是 MMSE 检测器都呈现出想望的抗远-近效应特性。事实上,在解相关检测器中,完全消除了来自其他用户的干扰。

我们还看到,上述解相关检测器和 MMSE 检测器都是涉及对来自 K 个相关器或者匹配滤波器的数据块进行线性变换。这些线性变换类似于第 10 章所述符号间干扰 (ISI) 的线性均衡。事实上,解相关检测器类似于迫零线性均衡器,而 MMSE 检测器类似于线性 MMSE 均衡器。因此,这些异步传输用多用户检测器可利用每个用户带有可调节系数的抽头延迟线滤波器来实现。并且对每个用户信号,可以选择滤波器系数来消除用户间的干扰或者使 MSE 最小化。于是,可以对接收到的信息比特用有限延迟进行连续估计,而不是块状估计。

判决反馈型滤波器可用来代替线性滤波器实现多用户检测器,以便连续处理数据。特别地,谢等人 (Xie et al., 1990 年) 证明了,可以采用带有有限延迟的判决反馈均衡器从接收信号中连续恢复发送比特。因此,单个用户通信系统中被 ISI 恶化了的信号的检测与异步传输多用户系统中信号的检测具有某种类似性。

4. 其他类型的多用户检测器

由于人们对开发商用 CDMA 通信系统的广泛兴趣,多用户检测算法的设计仍然是一个十分活跃的研究领域。本章所讨论的内容,主要针对最佳 MLSE 算法、次最佳线性 (MMSE 和解相关检测) 算法以及基于硬判决的非线性连续干扰消除算法。

除了这些相对简单的算法,许多文献中还介绍了大量更为复杂的算法,这些算法适合于 ISI 的时间色散信道。此外,人们还可以假设其他用户的特征波形知识不能用于某一用户接

收机的情况,从而用户接收机既面对发挥间干扰(ISI),也面对多址干扰(MAI)。对于这种情况,可以设计自适应干扰抑制算法,它类似于前面第10章、第11章所述的均衡算法。

多用户CDMA系统中抑制ISI和MAI的自适应算法在阿伯杜尔拉赫曼等(Abdulrahman et al., 1994年)、霍宁(Honig, 1998年)、米勒(Miller, 1995年, 1996年)、拉帕吉克和弗西狄克(Rapajic & Vucetic, 1994年)、米特雷和普尔(Mitra & Poor, 1995年)的论文中作了详细介绍。在某些情况中,自适应算法被设计成无须使用任何训练符号也能收敛。这些算法称为盲多用户检测算法。这些算法的例子讨论在霍宁等(Honig et al., 1995年)、马德豪(Madhow, 1998年)、王和普尔(Wang & Poor, 1998年)、本斯利和艾赞(Bensley & Aazhang, 1996年)的论文之中。

在CDMA系统中使用多个发射天线和/或接收天线,除了为每个用户提供采用时间滤波的机会外,还为它们提供了采用空间滤波的机会,以便降低ISI和MAI。王和普尔(Wang & Poor, 1999年)论述了多天线系统盲多用户检测算法。

一般地,CDMA通信系统中各个用户发送的信号要经过单级编码或者级联编码。一种更好的策略,不是根据调制器来分离译码器中信号处理,而是根据译码器使用软信息度量来增强对解调器中MAI和ISI的抑制。于是,人们能够设计出抑制MAI和ISI的Turbo型迭代解调-译码算法。编码CDMA系统的这类算法可参阅里德等(Reed et al., 1998年)、莫赫(Moher, 1998年)、亚历山大(Alexander et al., 1999年)、王和普尔(Wang & Poor, 1999年)的论文。

15.3.4 连续干扰抵消

另一种多用户检测技术称为连续干扰抵消(SIC)。这种技术在检测到干扰信号波形时,一次一个地将它们从接收信号中除去。一种方法就是按照接收功率递减的顺序解调用户。于是,具有最强接收信号的用户第一个被解调。在一个信号被解调和检测之后,检测到的信息被用来从接收信号中减去特定用户的信号。

在对第 k 个用户的发送信息作判决时,我们假设对 $k+1, \dots, K$ 个用户的判决是正确的,并且忽略了 $1, \dots, k-1$ 个用户的存在。因此,对于同步传输,第 k 个用户信息比特的判决为

$$\hat{b}_k = \text{sgn} \left[r_k - \sum_{j=k+1}^K \sqrt{\epsilon_j} \rho_{jk}(0) \hat{b}_j \right] \quad (15-3-57)$$

其中 r_k 为对应于第 k 个用户特征序列的相关器或者匹配滤波器的输出。

这种基于按接收功率递减顺序解调用户信号的方法不考虑用户之间的互相关函数。另一种解调用户信号的方法是根据互相关器或匹配滤波器输出端的功率,即根据相关度量

$$E \left\{ \left[\int_0^T g_k(t) r(t) dt \right]^2 \right\} = \epsilon_k + \sum_{j \neq k} \epsilon_j \rho_{jk}^2(0) + \frac{N_0}{2} \quad (15-3-58)$$

它适用于同步传输的情况。

对于多用户干扰的SIC,我们考察如下情况。首先,为了消除干扰,SIC要求我们估计用户所接收到的信号功率。估计误差会产生剩余多用户干扰,从而导致性能下降。其次,对于比检测到的用户信号更弱的那些用户信号的干扰,可将其看做附加干扰。第三,用户信息比特解调中的计算复杂度与用户数成线性关系。

SIC很容易推广到异步信号传输。在这种情况下,需要对用户信号强度和时延作出估计。

最后,我们需要注意的是,式(15-3-57)给出的SIC多用户检测器也是次最佳检测器,因为软弱的用户信号被看做了附加干扰。用于同步传输的联合最佳干扰抵消器可定义按下式计

算判决 \hat{b}_k 的检测器:

$$\hat{b}_k = \text{sgn} \left[r_k - \sum_{j \neq k} \sqrt{\epsilon_{j|k}}(0) \hat{b}_j \right] \quad (15-3-59)$$

多级干扰抵消(MIC)

基于 MIC 的多用户检测是一种在检测用户比特和抵消干扰时采用多次迭代的技术。通过一个例子,很容易描述该方法。

例 15-3-1 两个用户和同步传输

对于检测器的第一级,可利用 SIC 或者任何次最佳检测器。例如,假设我们在第一级采用解相关检测器。

第一级(解相关检测器)

$$\hat{b}_1 = \text{sgn}(r_1 - \rho r_2)$$

$$\hat{b}_2 = \text{sgn}(r_2 - \rho r_1)$$

第二级

$$\hat{\hat{b}}_1 = \text{sgn}(r_1 - \sqrt{\epsilon_2} \hat{b}_2 \rho)$$

$$\hat{\hat{b}}_2 = \text{sgn}(r_2 - \sqrt{\epsilon_1} \hat{b}_1 \rho)$$

第三级

$$\hat{\hat{\hat{b}}}_1 = \text{sgn}(r_1 - \sqrt{\epsilon_2} \hat{\hat{b}}_2 \rho)$$

$$\hat{\hat{\hat{b}}}_2 = \text{sgn}(r_2 - \sqrt{\epsilon_1} \hat{\hat{b}}_1 \rho)$$

当两次连续两次迭代之间判决没有变化时,可以中止计算。

连续干扰抵消以及多级干扰抵消是两类多址干扰抵消技术,它们受到许多研究人员的广泛关注。我们引用瓦拉纳西和艾赞(Varanasi & Aazhang, 1990 年)、帕特尔和霍尔兹曼(Patel & Holtzman, 1994 年)、布赫尔等(Buehrer et al., 1996 年, 1999 年)、迪夫萨拉尔等(Divsalar et al., 1998 年)的论文作为参考。

需要说明的是, MIC 是一种次最佳检测器,它并不能收敛于上面定义的联合最佳多用户检测器。

15.3.5 检测器的性能特征

一般地,比特差错率是多用户通信系统的期望性能的度量。在评估多用户干扰对单个用户检测器性能的影响时,可以把在信道中没有其他用户时的单用户接收机的比特差错率作为基准,该差错率为

$$P_k(\gamma_k) = Q(\sqrt{2\gamma_k}) \quad (15-3-60)$$

式中, $\gamma_k = \mathcal{E}_k / N_0$, \mathcal{E}_k 为比特信号能量, $\frac{1}{2} N_0$ 是 AWGN 的功率密度谱。

在同步或异步传输最佳检测器的情况下, 计算差错率是极困难且乏味的。在这种情况下, 可以将式(15-3-60)作为其下边界, 将次最佳检测器的性能作为其上边界。

首先研究次最佳常规单用户检测器。对于同步传输, 第 k 个用户相关器的输出由式(15-3-27)确定。因此, 在来自其他用户的比特序列 \mathbf{b}_i 的条件下, 第 k 个用户的差错率为

$$P_k(\mathbf{b}_i) = Q\left(\sqrt{2\left[\sqrt{\mathcal{E}_k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \sqrt{\mathcal{E}_j} b_j(1) \rho_{jk}(0)\right]^2 / N_0}\right) \quad (15-3-61)$$

那么, 平均差错率是

$$P_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{K-1} \sum_{i=1}^{2^{K-1}} P_k(\mathbf{b}_i) \quad (15-3-62)$$

式(15-3-53)中的概率由 Q 函数中具有最小自变量的项确定, 该最小自变量将导致如下 SNR

$$(\text{SNR})_{\min} = \frac{1}{N_0} \left[\sqrt{\mathcal{E}_k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \sqrt{\mathcal{E}_j} |\rho_{jk}(0)| \right]^2 \quad (15-3-63)$$

因此,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{K-1} Q(\sqrt{2(\text{SNR})_{\min}}) < P_k < \left(\frac{1}{2}\right)^{K-1} (K-1) Q(\sqrt{2(\text{SNR})_{\min}}) \quad (15-3-64)$$

类似的研究可用于获得异步传输的性能边界。

在解相关检测器的情况下, 其他用户干扰完全消除。从而, 差错率为

$$P_k = Q(\mathcal{E}_k / \sigma_k^2) \quad (15-3-65)$$

式中, σ_k^2 为估值 \mathbf{b}^0 的第 k 个元素中噪声的方差。

例 15-3-2 研究两个用户同步传输的情况, 其中 \mathbf{b}_2^0 由式(15-3-41)定义。试求差错率。式(15-3-41)中第一项的信号分量为 $\sqrt{\mathcal{E}_1}$, 噪声分量为

$$n = \frac{n_1 - \rho n_2}{1 - \rho^2}$$

式中, ρ 是两个标记信号之间的相关系数。该噪声的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{E[(n_1 - \rho n_2)]^2}{(1 - \rho^2)^2} \\ &= \frac{1}{1 - \rho^2} \frac{N_0}{2} \end{aligned} \quad (15-3-66)$$

且

$$P_1 = Q\left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_1}{N_0}(1 - \rho^2)}\right] \quad (15-3-67)$$

对于第二个用户的性能, 也能得到类似的结果。因此, 噪声方差增加了 $1/(1 - \rho^2)$ 倍。解相关检测器对多用户干扰的消除是以噪声的增强为代价的。

MMSE 检测器的差错率性能类似于低噪声电平时的解相关检测器的性能。例如, 由式(15-3-55)可见, 当 N_0 相对于信号相关矩阵 \mathbf{R}_N 的对角元素很小时,

$$\mathbf{b}^0 \approx \mathbf{R}_N^{-1} \mathbf{r} \quad (15-3-68)$$

它就是解相关检测器的解。当多用户干扰很低时,MMSE 检测器导致的噪声增强比解相关检测器小,但存在由其他用户引起的残余偏差。因此,MMSE 检测器试图在残余干扰和噪声增强之间作出平衡。

作为表征多用户通信系统性能因数的差错率,可用有或无干扰时的 SNR 比值来替代它。式(15-3-60)特别给出了没有其他用户干扰时第 k 个用户的差错率,此时 SNR 是 $\gamma_k = \mathcal{E}_k / N_0$ 。当存在多用户干扰时,发送一个能量为 \mathcal{E}_k 的信号的用户将具有超过 $P_k(\gamma_k)$ 的差错率 P_k 。有效 SNR γ_{ke} 定义为在达到差错率

$$P_k = P_k(\gamma_{ke}) = Q(\sqrt{2\gamma_{ke}}) \quad (15-3-69)$$

时所需的 SNR。效率定义为比值 γ_{ke}/γ_k ,它表示由多用户干扰引起的性能损失。期望的性能因数 (figure of merit) 就是渐近效率,它定义为

$$\eta_k = \lim_{N_0 \rightarrow 0} \frac{\gamma_{ke}}{\gamma_k} \quad (15-3-70)$$

计算这个性能因数通常比计算差错率简单。

例 15-3-3 研究具有信号能量 \mathcal{E}_1 和 \mathcal{E}_2 的两个符号同步的用户。试求常规检测器的渐近效率。

在这种情况下,很容易由式(15-3-61)和式(15-3-62)得到差错率

$$P_1 = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2(\sqrt{\mathcal{E}_1} + \rho \sqrt{\mathcal{E}_2})^2 / N_0}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{2(\sqrt{\mathcal{E}_1} - \rho \sqrt{\mathcal{E}_2})^2 / N_0}\right)$$

渐近效率更容易计算,由式(15-3-70)和式(15-3-61)可得

$$\eta_1 = \left[\max \left[0, 1 - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1}} |\rho| \right] \right]^2$$

也可得到 η_2 的类似表达式。

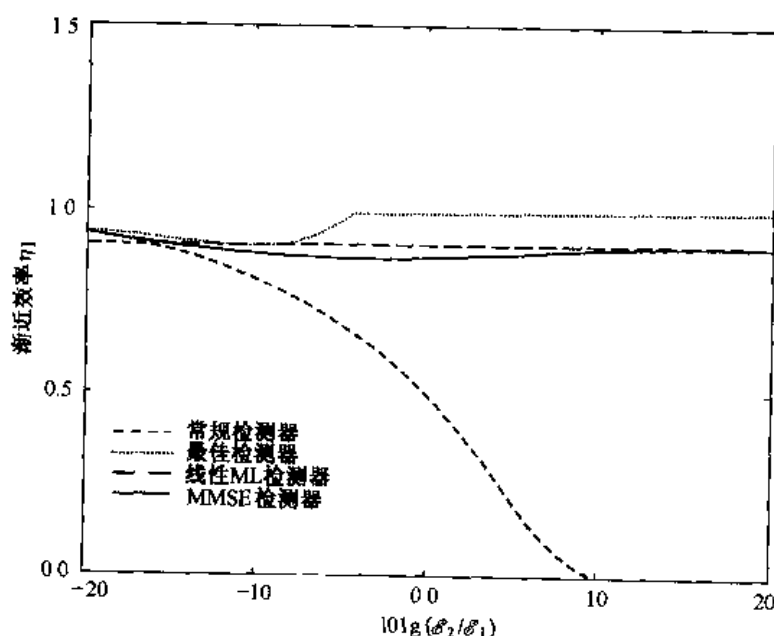


图 15-3-3 两用户同步 DS/SSMA 系统中的最佳(维特比)检测器、常规检测器、MMSE 检测器和 ML 检测器的渐近效率

上面介绍的最佳和次最佳检测器的渐近效率是由韦尔迪(Verdu, 1986 年)、卢帕斯和韦尔迪(Lupas 和 Verdu, 1989 年)以及谢等人(Xie, 1990 年)计算得出的。图 15-3-3 所示为 $K=2$ 个用户同步发送时检测器的渐近效率。由图可见,当干扰很小($\epsilon_2 \rightarrow 0$)时,这些检测器的渐近效率相当大(接近 1),而且相差不大。但随着 ϵ_2 增加,常规检测器的渐近效率迅速恶化,其他线性检测器的性能与最佳检测器相比较好。通过计算差错率可获得类似的结论,但这些计算往往非常冗长。

15.4 随机接入方式

本节将研究以分组形式在共用信道上发送信息的多用户系统。与 15.3 节描述的 CDMA 方式相对照,本方案中的用户信息信号在频率上不扩展。因此,不使用可由多接收天线获得的空时滤波,同时传输的多用户信号就不能在接收机中分离。因为分组按照某种统计模型产生,所以下述接入方式基本上是随机的。当有一个或多个分组需发送时,用户接入信道。当多于一个的用户试图同时发送分组时,分组在时间上重叠,即它们冲突。因此,必须通过设计分组重传的某种信道协议来解决冲突问题。下面将介绍几种随机接入信道协议,用于解决分组传输中的冲突问题。

15.4.1 ALOHA 系统和协议

假设采用随机接入方案。在该方案中,每个用户一有分组就马上发送。当某一用户发送一个分组且该时间间隔内没有其他用户发送分组时,认为该分组发送成功。然而,如果一个或多个其他用户发送分组,且在时间上与第一用户的分组重叠,则冲突发生且传输不成功。图 15-4-1 说明了这种情形。如果用户知道何时它们的分组被成功发送,以及何时它们与其他分组冲突,就可能设计出一种重传冲突分组的方案,这种方案称为信道接入协议。

把有关分组传输成功或不成功的信息反馈给用户是必要的,反馈的方式有多种。无线广播系统中,如采用图 15-4-2 所示的卫星转发器,下行链路将分组广播到所有用户,从而所有发送机都能监测它们的传输,于是可获得如下 3 种信息:不发送分组、成功发送分组或冲突发生。这种反馈给发送机的信息一般记做(0,1,c)反馈。在使用有线或光纤信道的系统中,接收机可在某一单独信道上发送反馈信号。

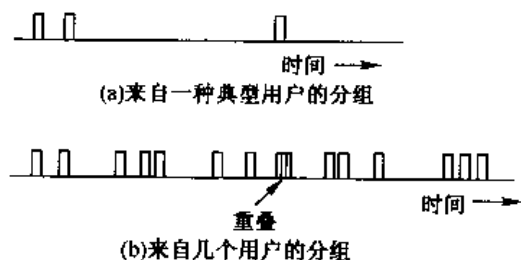


图 15-4-1 随机接入分组传输

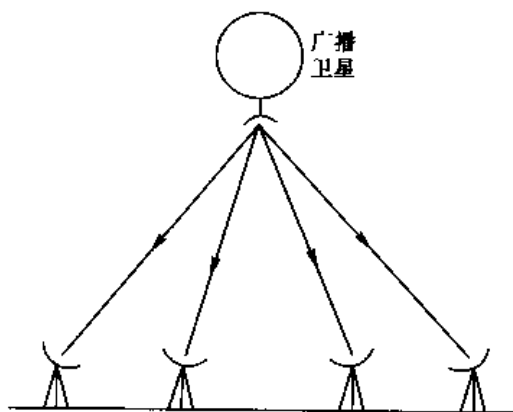


图 15-4-2 广播系统

由美国夏威夷大学阿布拉姆森(Abramson, 1970 年, 1977 年)及其他人发明的 ALOHA 系统采用一个卫星转发器,以广播方式转发接收到的来自接入该卫星的各用户的分组。在这种情况下,所有用户都能够监测卫星传输,因此可确定分组是否已被成功发送。

有两种典型形式的 ALOHA 系统:同步或时隙的、不同步或非时隙的。在非时隙 ALOHA 系统中,用户可在任意时刻开始发送分组。在时隙 ALOHA 系统中,用户需在具有特定开始和结束时刻的时隙内发送该分组。

若假设分组发送的起始时间是泊松点过程,其平均速率为 λ 个分组/s。令 T_p 表示一个分组的持续时间,则归一化信道业务量 G (也称为流入信道业务量)定义为

$$G = \lambda T_p \quad (15-4-1)$$

有许多可用于处理冲突的信道接入协议。这里考虑由阿布拉姆森(Abramson, 1973 年)提出的协议。在阿布拉姆森协议中,冲突的分组以延时 τ 重发,并根据 PDF

$$p(\tau) = \alpha e^{-\alpha \tau} \quad (15-4-2)$$

随机选择 τ , 式中 α 为设计参数。随机延时 τ 被加到初始发送的时间上,分组在新的时间重发。如果再次发生冲突,则随机选择一个新的 τ 值,分组根据第二次发送时间加上新的延时后重发。该过程持续到分组发送成功为止。设计参数 α 确定了重传之间的平均延时, α 值越小,重传之间的延时越大。

令 λ' ($\lambda' < \lambda$) 是分组成功发送的速率,则归一化信道吞吐量为

$$S = \lambda' T_p \quad (15-4-3)$$

可以利用假设的起始时间分布求信道吞吐量 S 与流入信道业务量 G 之间的关系。一个分组和某一给定分组不重叠的概率就是该分组的发送起始时间的前、后 T_p s 内没有分组发送的概率。因为所有分组发送的起始时间都是泊松分布的,故分组不重叠的概率为 $\exp(-2\lambda T_p) = \exp(-2G)$, 因此

$$S = G e^{-2G} \quad (15-4-4)$$

图 15-4-3 所示为这个关系曲线。可以看到,最大吞吐量为 $S_{\max} = 1/2e = 0.184$ 个分组/时隙,它发生在 $G = \frac{1}{2}$ 处。当 $G > \frac{1}{2}$ 时,吞吐量 S 下降。上述研究结果说明,非同步或非时隙随机接入方式的吞吐量相当小,而且效率很低。

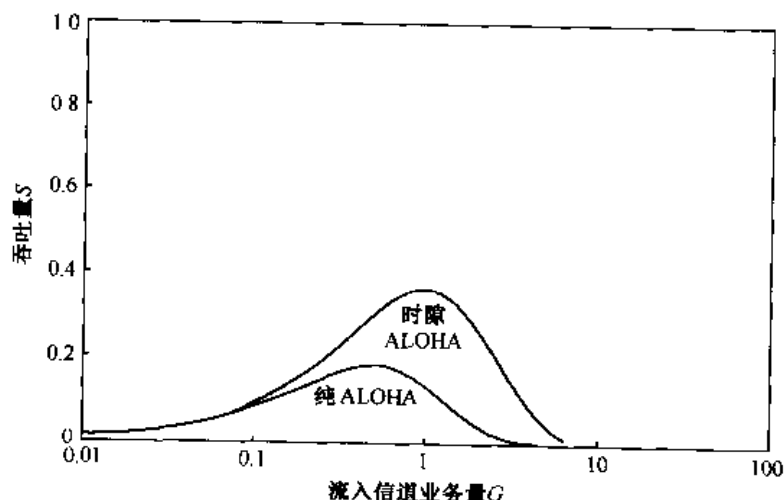


图 15-4-3 ALOHA 系统的吞吐量

时隙 ALOHA 的吞吐量

为了确定时隙 ALOHA 系统的吞吐量,令 G_i 为第 i 个用户在某个时隙发送一个分组的概率。如果所有 K 个用户独立运行,而且用户分组在当前时隙内的发送及其在先前时隙内的发送是统计无关的,则总(归一化)的流入信道业务量为

$$G = \sum_{i=1}^K G_i \quad (15-4-5)$$

注意,在这种情况下, G 可大于 1。

现在,设某一时隙发送的一个分组被无冲突地接收的概率为 $S_i \leq G_i$,那么归一化信道吞吐量为

$$S = \sum_{i=1}^K S_i \quad (15-4-6)$$

第 i 个用户分组与另一个分组不发生冲突的概率是

$$Q_i = \prod_{j=1, j \neq i}^K (1 - G_j) \quad (15-4-7)$$

因此,

$$S_i = G_i Q_i \quad (15-4-8)$$

通过考虑 K 个相同的用户,可得到信道吞吐量的简单表达式,即

$$S_i = \frac{S}{K}, \quad G_i = \frac{G}{K}$$

及

$$S = G \left(1 - \frac{G}{K}\right)^{K-1} \quad (15-4-9)$$

如果令 $K \rightarrow \infty$,则得到吞吐量

$$S = G e^{-G} \quad (15-4-10)$$

图 15-4-3 中也画出了该结果的曲线。在 $G=1$ 处, S 达到最大吞吐量 $S_{\max} = 1/e = 0.368$ 个分组/时隙,它是非时隙 ALOHA 系统吞吐量的两倍。

上述时隙 ALOHA 系统的性能建立在处理冲突的阿布拉姆森协议的基础之上。通过设计更好的协议,有可能获得更高的吞吐量。

阿布拉姆森协议的基本弱点在于没有考虑信道业务量的信息,该信息可通过对所发生冲突的观测而得到。利用卡佩塔纳基斯 (Capetanakis, 1979 年) 设计的树型协议,可获得时隙 ALOHA 系统吞吐量的进一步改善。在该算法中,所有前面的冲突解决之前,不允许用户发送新的分组。只有当冲突的所有分组均被成功发送后,用户才能在新分组产生后立刻在随后的时隙中发送它。如果信道正在清除前面的冲突时产生了一个新的分组,则该分组被存储在缓冲器中。当新分组与其他分组冲突时,每个用户把各自的分组以等概率分配给两个单元(set)之一(如 A 或 B)。如果分组放在单元 A 中,用户在下一时隙发送该分组。若它再次冲突,用户将再一次随机分配这个分组给两个单元之一且重复该发送过程,这个过程持续到单元 A 中的全部分组发送成功为止。然后,按照相同的过程发送单元 B 中的所有分组。所有用户都监测信道的状态,从而知道什么时候所有冲突被解决。

当信道可用于传输新分组时,最早产生的分组将首先发送。为了确立一个队列,时间标度被分成足够短的子间隔,在一个子间隔内,一个用户平均产生约一个分组。于是,每个分组具有一个“时标”,该时标与它产生时的子间隔相关联,属于第一个子间隔的新分组在第一个可用时隙内被发送。如果不存在冲突,则发送第二个子间隔的分组,以此类推。当新的分组产生时,只要存在分组积压,这个过程就继续下去。卡佩塔纳基斯证明,这个信道接入协议的最大吞吐量为 0.43 个分组/时隙。

除了吞吐量之外,随机接入系统的另一个重要的性能度量是发送一个分组的平均传输延时。在 ALOHA 系统中,每个分组的平均发送次数为 G/S 。可以把传输之间的平均等待时间加入该平均次数,从而获得成功传输的平均延时。根据上述讨论可以看到,在阿布拉姆森协议中,参数 α 确定了重新传输之间的平均延时。如果选择小的 α ,则在峰值负载时可获得所期望的对信道负载的平滑效应,其负面影响是较长的重传延时。式(15-4-2)中 α 的选择是一种折衷。另一方面,卡佩塔纳基斯协议已被证明具有较小的分组传输延时。因此,无论在平均延时还是吞吐量方面,卡佩塔纳基斯(Capetanakis)协议都优于阿布拉姆森(Abramson)协议。

随机接入协议的设计中的另一个重要问题是协议的稳定性。在上述 ALOHA 型信道接入协议的讨论中隐含着一个假设,即对于一个给定的输入负载,当进入信道的平均分组数等于成功发送的平均分组数时系统达到平衡点。事实上,可以证明,确立重传策略时不考虑前面不成功传输(分组)的次数的任何信道接入协议(如阿布拉姆森协议)一定是不稳定的,在这一点上,卡佩塔纳基斯算法不同于阿布拉姆森协议。卡佩塔纳基斯算法证明是稳定的。对于随机接入协议的稳定性问题的详细讨论可在马西(Massey,1988 年)的论著中找到。

15.4.2 载波侦听系统和协议

我们已经看到,ALOHA 型(时隙或非时隙的)随机接入协议的吞吐量较低,而且时隙 ALOHA 系统要求用户以同步时隙发送信息。在传输延时较小的信道中,有可能设计具有较高吞吐量的随机接入协议。这种协议的一个例子是具有冲突检测的载波侦听,它在局域网中被用作标准的以太网协议。该协议一般称为带冲突检测的载波侦听多址接入(CSMA/CD)。

CSMA/CD 协议很简单,所有用户监听信道上的传输情况,当检测到信道空闲时,想要发送分组的用户就抢占该信道。当两个或多个用户检测出一个空闲信道并开始传输时,发生冲突。当同时发送的多个用户检测到冲突发生时,它们发送一个称为阻塞信号(jam signal)的特殊信号,用来通知所有冲突用户中断传输。当冲突发生时,载波侦听特性和中断传输功能都可使用信道中断时间(down-time)最小化,从而获得较高的吞吐量。

为了提高 CSMA/CD 的效率,我们来研究具有总线结构的局域网,如图 15-4-4 所示。考虑总线两端(即最大间隔)的两个用户 U_1 和 U_2 ,并令 τ_d 是穿越总线长度时信号的传播延时,则检测一个空闲信道需要的最大时间为 τ_d 。假设 U_1 发送一个持续时间为 T_p 的分组。 τ_d s 以后,用户 U_2 可利用载波侦听捕捉信道并开始发送信息。然而,在 U_2 开始传输后的 τ_d s 内,用户 U_1 不知道有这个传输,因此定义时间间隔 $2\tau_d$ 作为检测冲突的最大时间间隔。如果忽略发送阻塞信号需要的时间,则当 $2\tau_d \ll T_p$ 时 CSMA/CD 协议可获得高吞吐量。

有几种可用于冲突发生时重新安排传输的协议,一种叫做非坚持 CSMA,第二种叫做 1-坚持 CSMA;还有一种是后者的推广,称为 p -坚持 CSMA。

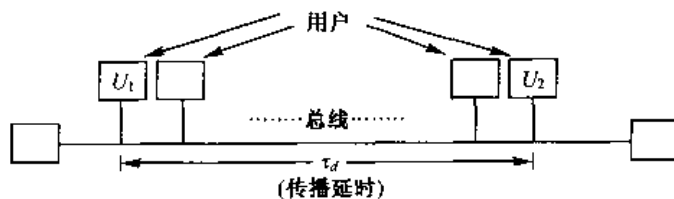


图 15-4-4 具有总线结构的局域网

1. 非坚持 CSMA

在此协议中,要发送一个分组的某一用户侦听信道并按照如下规则操作:

- (1) 若信道空闲,用户发送一个分组。
- (2) 若侦听到信道忙,用户按照某种延时分布在稍后的时间安排传输。在该延时间隔结束时,用户再次侦听信道并重复步骤(1)和(2)。

2. 1-坚持 CSMA

如果某个用户有一个分组要发送,则本协议设计得不让信道空闲,以此获得高吞吐量。因此,用户应根据如下规则检测信道并运行:

- (1) 如果信道是空闲的,用户以“1”的概率发送分组。
- (2) 如果信道忙,用户等待直到信道空闲再以“1”的概率发送分组。注意,在这个协议中,冲突总是发生在有多个用户发送分组时。

3. p -坚持 CSMA

为了降低 1-坚持 CSMA 中的冲突率并增加吞吐量,应该使分组传输的起始时间随机化。特别是当侦听到信道空闲时,想发送一个分组的用户以概率 p 送出该分组,以概率 $1-p$ 对该分组延时 τ 。可用如下方法选择概率 p :使冲突的概率减小,相继(不重叠)传输之间的空闲周期保持很小,其实现的方法是把时间轴划分成持续时间为 τ 的微时隙,并在某一微时隙开始时选择分组传输。总之,在 p -坚持协议中,发送分组的用户应执行如下操作:

- (1) 如果信道侦听是空闲的,则该分组以概率 p 发送,并以概率 $1-p$ 延时 τ 发送。
 - (2) 如果在 $t = \tau$ 处,信道侦听仍然是空闲的,重复步骤(1)。如果冲突发生,用户根据某些预先选择好的传输延时分布安排分组的重传。
 - (3) 如果在 $t = \tau$ 处信道侦听忙,则用户等待,直到信道空闲再执行(1)和(2)的操作。
- 也可以构建上述协议的时隙型版本。

克雷因罗克和托巴吉(Kleinrock 和 Tobagi, 1975 年)分析了非坚持和 p -坚持 CSMA/CD 协议的吞吐量,它基于如下假设:

- (1) 平均重传延时比分组持续时间 T_p 大。
- (2) 由所有分组(包括重传分组)的起始时间定义的点过程的到达间隔时间是独立的且服从指数分布。

对于非坚持 CSMA,吞吐量为

$$S = \frac{Ge^{-aG}}{G(1+2a) + e^{-aG}} \quad (15-4-11)$$

式中,参数 $a = \tau_d/T_p$ 。注意,当 $a \rightarrow 0$ 时, $S \rightarrow G/(1+G)$ 。图 15-4-5 所示为吞吐量与流入(信道)业务量 G 的关系曲线,以 a 为参数。当 $a = 0$ 时,随着 $G \rightarrow \infty$, $S \rightarrow 1$ 。当 $a > 0$ 时, S_{\max} 减小。

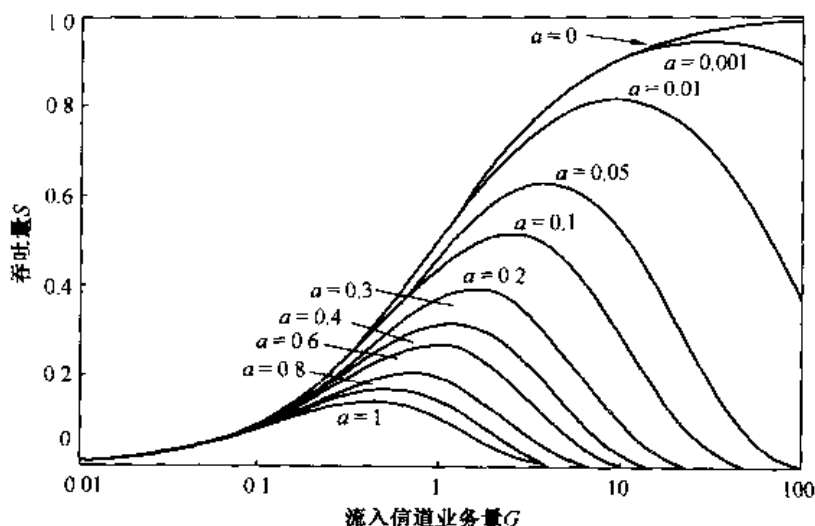


图 15-4-5 非坚持 CSMA 的吞吐量

对于 1-坚持 CSMA, 克雷因罗克和托巴吉(Kleinrock 和 Tobagi, 1975 年)求得的吞吐量为

$$S = \frac{G[1 + G + aG(1 + G + \frac{1}{2}aG)]e^{-G(1+2a)}}{G(1+2a) - (1 - e^{-aG}) + (1 + aG)e^{-G(1+a)}} \quad (15-4-12)$$

在这种情况下,

$$\lim_{a \rightarrow 0} S = \frac{G(1+G)e^{-G}}{G + e^{-G}} \quad (15-4-13)$$

它比非坚持协议具有更小的峰值。

采用 p -坚持协议,有可能增加相对于 1-坚持协议的吞吐量。例如,图 15-4-6 所示为吞吐量与流入(信道)业务量的关系曲线,其中 $a = \tau_d/T_p$ 为固定值且将 p 作为参数。由此可见,当 p 增大且趋于 1 时,最大吞吐量减小。

克莱因罗克和托巴吉(Kleinrock 和 Tobagi, 1975 年)也计算了传输延时。图 15-4-7 所示为时隙非坚持和 p -坚持 CSMA 协议两种情况下延时(用 T_p 归一化后)与吞吐量 S 的关系曲线。为了比较,图中也示出了 ALOHA 时隙和非时隙协议的延时与吞吐量特性的关系曲线。在这个模拟中,只有新产生的分组独立地由泊松分布导出,对冲突和均匀分布随机重传的处理没有更多的假设。这些模拟结果说明了 p -坚持和非坚持协议相对于 ALOHA 协议的优越性能。注意,标记为“最佳 p -坚持”的曲线图是通过将吞吐量的每个值求 p 的最佳值得到的。由图可见,对于小的吞吐量值,1-坚持($p=1$)协议是最佳的。

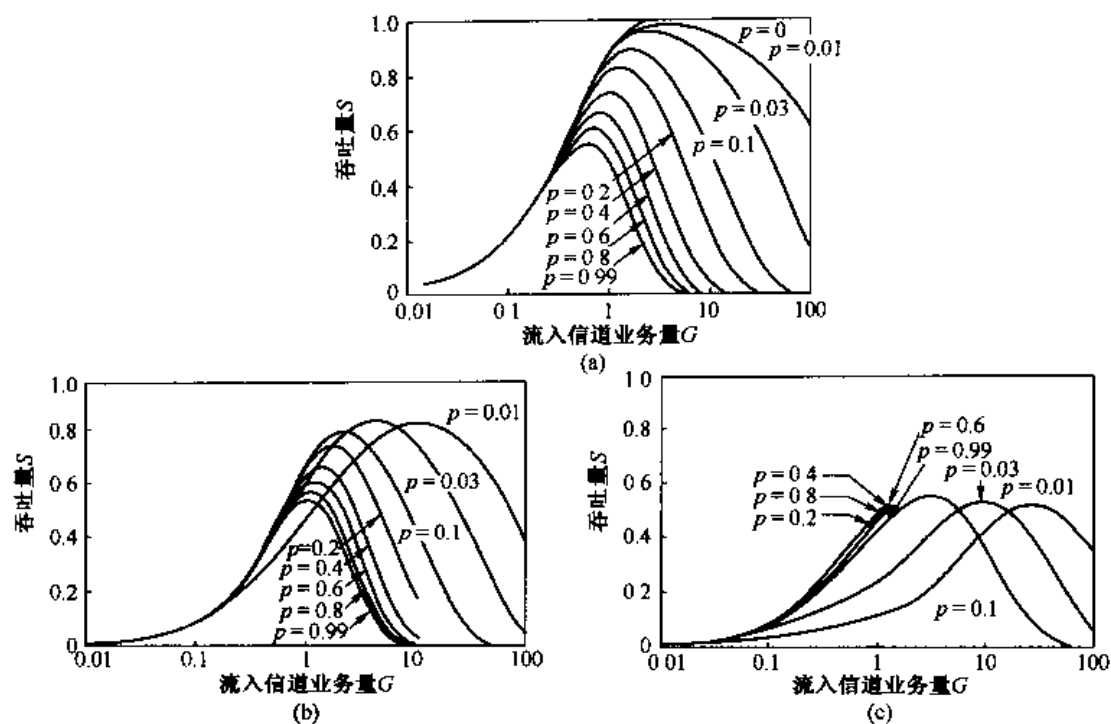


图 15-4-6 p -坚持 CSMA 的信道吞吐量
(a) $a = 0$ (b) $a = 0.01$ (c) $a = 0.1$

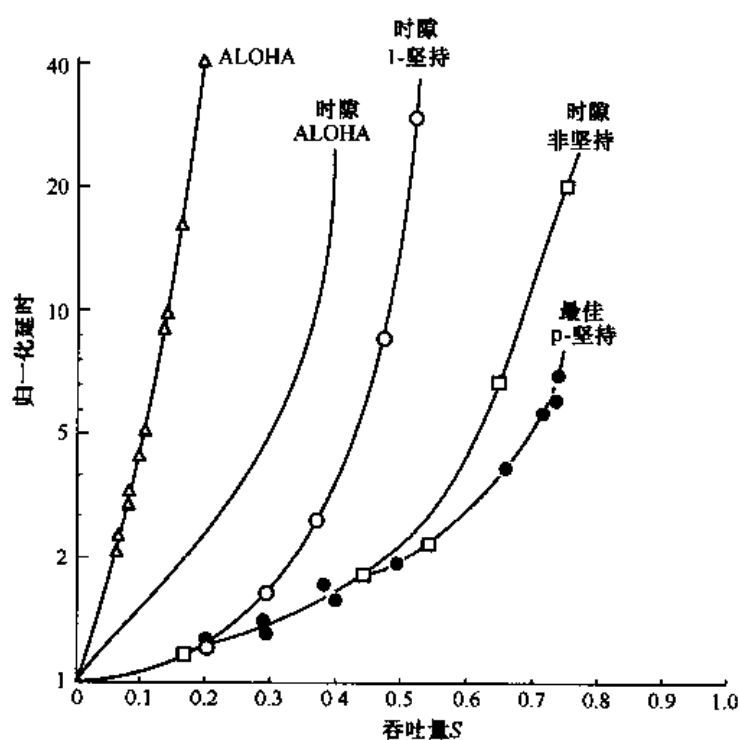


图 15-4-7 模拟($a = 0.01$)得出的吞吐量与延时的关系曲线

15.5 文献与参考资料

FDMA 曾经是过去几十年中用于传输模拟话音的电话通信系统中占统治地位的多址方案。随着采用 PCM、DPCM 和其他语音编码方法的数字话音传输的出现,TDMA 已经代替 FDMA 成为电信网络中占支配地位的多址方案。在过去 30 年中,CDMA 和随机多址方法出现,主要用于无线信号传输和有线局域网。

多用户信息论及多信源编码、多址信道编码和调制中基本的理论的信息限度。大量文献与这些课题有关。有关多址方法,科弗(Cover,1972 年)、埃尔·贾迈勒和科弗(El Gamal & Cover, 1972 年)、伯格曼斯和科弗(Bergmans & Cover, 1974 年)以及惠(Hui, 1984 年)等人有大量的论著。蜂窝 CDMA 系统的容量在吉尔豪森(Gilhausen, 1991 年)等人的论文中可以找到。

多用户通信中信号的解调和检测在最近几年倍受关注。读者可参考韦尔迪(Verdu, 1986 年, 1989 年)、卢帕斯和韦尔迪(Lupas & Verdu, 1990 年)、谢(Xie, 1990 年)、普尔和韦尔迪(Poor & Verdu, 1988 年)、张和布雷迪(Zhang & Brady, 1993 年)、兹沃纳尔和布雷迪(Zvonar & Brady, 1995 年)等人的论文。有关多用户通信信号的设计和解调的早期研究成果可在范·爱藤(Van Etten, 1975 年, 1976 年)、霍伍德和加利亚尔迪(Horwood & Gagliardi, 1975 年)以及凯耶和乔治(Kaye & George, 1970 年)的论文中找到。

作为最早的随机接入系统之一的 ALOHA 系统是由阿布拉姆森(Abramson, 1970 年, 1977 年)和罗伯茨(Roberts, 1975 年)提出的,他们的论文包含非时隙和时隙系统的吞吐量分析。最近,阿布拉姆森(1994 年)研究了一种采用扩频信号的 ALOHA 系统,并且给出了它与 CDMA 系统的联系。有关 ALOHA 系统的稳定性问题可在卡莱阿尔和赫尔曼(Carleial & Hellman, 1975 年)、格茨等(Ghez, 1988 年)以及马西(Massey, 1988 年)的论文中找到。随机接入信道中基于树型算法的稳定协议由卡佩塔纳基斯(Capetanakis, 1979 年)首先提出。本章介绍的载波侦听多址接入协议(CSMA)是由克莱因罗克和托巴吉(Kleinrock & Tobagi, 1975 年)提出的。由阿布拉姆森(1993 年)编辑、IEEE 出版的“多址通信论文选”中也有关于多址通信的论述。

习题

- 15-1 15.3.1 节所述的 CDMA 信号和信道模型的公式中,假设接收信号是实信号。对于 $K > 1$,这个假设意味着所有发送机的相位同步,这在实际系统中不现实。为了适应载波相位不同步的情况,可简单地将式(15-3-1)给出的 K 个用户特征波形变为复值形式

$$g_k(t) = e^{j\theta_k} \sum_{n=0}^{L-1} a_k(n) p(t - nT_c) \quad (1 \leq k \leq K)$$

其中, θ_k 表示第 k 个发送机的恒定相位偏移,正如常用接收机中的情况。

(a) 已知特征波形复值形式,试求最佳 ML 接收机形式。该接收机的计算相关度量类似于式(15-3-15)。

(b) 重新推导类似于式(15-3-19)确定的异步传输的最佳 ML 检测器。

- 15-2 考虑一个与用户数无关且限制每个用户的发送功率为 P 的 TDMA 系统。试求每个用户的容量 C_K 及总容量 KC_K 。画出 C_K 和 KC_K 作为 \mathcal{E}_b/N_0 函数的曲线,并说明 $K \rightarrow \infty$ 时的结果。

- 15-3 研究 AWGN 信道中具有 $K=2$ 个用户的某 FDMA 系统,其中分配给用户 1 的带宽 $W_1 = \alpha W$,分配给用户 2 的带宽 $W_2 = (1-\alpha)W$,其中 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。令 P_1 和 P_2 是两个用户的平均功率。

(a) 试求两个用户的容量 C_1 和 C_2 及其总和 $C = C_1 + C_2$ 与 α 的函数关系。在速率 R_2 随 R_1 变化的二维图上,画出点 (C_2, C_1) 随 α 在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 范围内的变化曲线。

(b) 两个用户的速率必须满足条件

$$\begin{aligned} R_1 &< W_1 \log_2 \left(1 + \frac{P_1}{W_1 N_0} \right) \\ R_2 &< W_2 \log_2 \left(1 + \frac{P_2}{W_2 N_0} \right) \\ R_1 + R_2 &< W \log_2 \left(1 + \frac{P_1 + P_2}{W N_0} \right) \end{aligned}$$

试求当 $P_1/\alpha = P_2/(1-\alpha) = P_1 + P_2$ 时的总容量 C ,证明当 $\alpha/(1-\alpha) = P_1/P_2 = W_1/W_2$ 时可获得最大速率。

- 15-4 研究 AWGN 信道中具有 $K=2$ 个用户的某 TDMA 系统。假设两个发送机的峰值功率限制在 P_1 和 P_2 ,同时令用户 1 在 $100\alpha\%$ 可用时间内发送信息,用户 2 在 $100(1-\alpha)\%$ 可用时间内发送信息。可用带宽为 W 。

(a) 试求容量 C_1 和 C_2 及 $C = C_1 + C_2$,以 α 为参数。

(b) 画出点 (C_2, C_1) 随 α 在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 范围内的变化图。

- 15-5 研究 AWGN 信道中具有 $K=2$ 个用户的某 TDMA 系统。假设两个发送机的平均功率受限制,功率为 P_1 和 P_2 。用户 1 发送 $100\alpha\%$ 可用时间,用户 2 发送 $100(1-\alpha)\%$ 可用时间。可用带宽为 W 。

(a) 试求容量 C_1 和 C_2 及 $C = C_1 + C_2$,以 α 为参数。

(b) 画出点 (C_2, C_1) 随 α 在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 范围内的变化图。

(c) 本题的解与习题 15-3 的 FDMA 系统之间有何相似性?

- 15-6 有一个两用户同步 CDMA 传输系统,其接收信号为

$$r(t) = \sqrt{\epsilon_1} b_1 g_1(t) + \sqrt{\epsilon_2} b_2 g_2(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

且 $(b_1, b_2) = (\pm 1, \pm 1)$ 。噪声过程 $n(t)$ 是零均值高斯白噪声,功率谱密度为 $N_0/2$ 。 $r(t)$ 的解调器如图 P15-6 所示。

(a) 试证明 $t = T$ 时刻相关器的输出 r_1 和 r_2 可以表示为

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\epsilon_1} b_1 + \sqrt{\epsilon_2} \rho + n_1 \\ r_2 &= \sqrt{\epsilon_1} b_1 \rho + \sqrt{\epsilon_2} b_2 + n_2 \end{aligned}$$

(b) 试求 n_1 和 n_2 的方差以及 n_1 与 n_2 的协方差。

(c) 试求联合 PDF $p(r_1, r_2 | b_1, b_2)$ 。

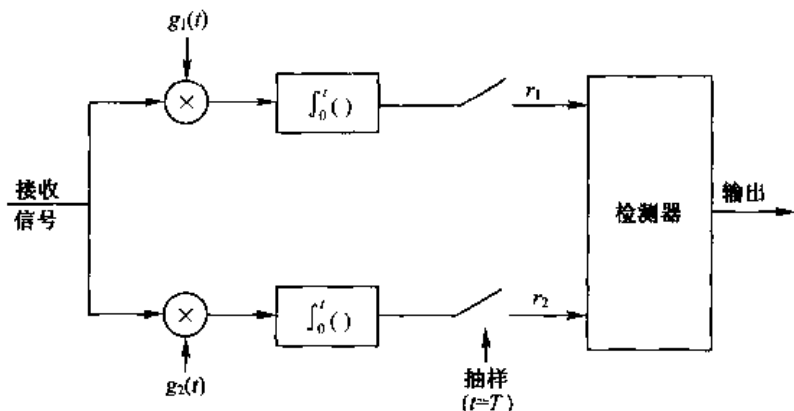


图 P15-6

- 15-7 研究习题 15-6 所述的两用户同步 CDMA 传输系统。对信息比特 b_1 和 b_2 的传统的单用户检测器输出为

$$b_1 = \text{sgn}(r_1)$$

$$b_2 = \text{sgn}(r_2)$$

假设 $P(b_1=1) = P(b_2=1) = \frac{1}{2}$, 且 b_1 和 b_2 相互统计独立, 试求该检测器的差错率。

- 15-8 研究习题 15-6 所述的两用户同步 CDMA 传输系统。 $P(b_1=1) = P(b_2=1) = \frac{1}{2}$, 且 $P(b_1, b_2) = P(b_1)P(b_2)$ 。联合最佳检测器根据最大后验概率 (MAP) 准则进行判决, 即, 检测器计算

$$\max_{b_1, b_2} P[b_1, b_2 | r(t), 0 \leq t \leq T]$$

- (a) 当信息比特 (b_1, b_2) 等概时, 试证明 MAP 准则等价于最大似然 (ML) 准则

$$\max_{b_1, b_2} p[r(t), 0 \leq t \leq T | b_1, b_2]$$

- (b) 试证明 (a) 中的 ML 准则导致联合最佳检测器按照下列规则对 b_1 和 b_2 进行判决

$$\max_{b_1, b_2} \left(\sqrt{\epsilon_1} b_1 r_2 + \sqrt{\epsilon_2} b_2 r_2 - \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \rho b_1 b_2 \right)$$

- 15-9 研究习题 15-6 所述的两用户同步 CDMA 传输系统。 $P(b_1=1) = P(b_2=1) = \frac{1}{2}$, 且 $P(b_1, b_2) = P(b_1)P(b_2)$ 。最佳检测器根据 MAP 准则各自作出判决, 即该检测器计算后验概率

$$P[b_1 | r(t), 0 \leq t \leq T] = P[b_1, b_2 = 1 | r(t), 0 \leq t \leq T] + P[b_1, b_2 = -1 | r(t), 0 \leq t \leq T]$$

和

$$P[b_2 | r(t), 0 \leq t \leq T] = P[b_1 = 1, b_2 | r(t), 0 \leq t \leq T] + P[b_1 = -1, b_2 | r(t)], 0 \leq t \leq T$$

- (a) 试证明: 对信息比特 b_1 的单独的最佳 MAP 检测器的等效试验统计量为

$$\max_{b_1} \left\{ \frac{\sqrt{\epsilon_1} r_1}{N_0} b_1 + \ln \cosh(\sqrt{\epsilon_2} r_2 + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \rho b_1) \right\}$$

(b) 将 $b_1 = 1$ 和 $b_1 = -1$ 代入(a)的表达式中, 试证明(a)中的试验统计量等价于按照下列关系式来选择 b_1

$$\hat{b}_1 = \operatorname{sgn} \left[r_1 - \frac{N_0}{2\sqrt{\epsilon_1}} \ln \frac{\cosh(\sqrt{\epsilon_2} r_2 + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \rho)}{\cosh(\sqrt{\epsilon_2} r_2 - \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \rho)} \right]$$

15-10 CDMA 系统中 K 个用户同步发送时, 试证明其传统的单用户检测器的渐近效率是

$$\eta_k = \max \left[0, 1 - \sum_{j \neq k} \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\epsilon_k}} |\rho_{jk}(0)| \right]$$

15-11 研究习题 15-8 所定义的两用户同步 CDMA 系统的联合最佳检测器。试证明该检测器(符号)差错率的上边界为

$$Pe < Q \left[\sqrt{\frac{2\epsilon_1}{N_0}} \right] + \frac{1}{2} Q \left[\sqrt{\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_1 \epsilon_2 |\rho|}{N_0}} \right]$$

15-12 研究习题 15-8 所定义的两用户同步 CDMA 系统的联合最佳检测器。

(a) 试证明该检测器对用户 1 的渐近效率是

$$\eta_1 = \min \left\{ 1, 1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 2\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} |\rho| \right\}$$

(b) 当 $\rho = 0.1$ 和 $\rho = 0.2$ 时, 试画出并比较联合最佳检测器与传统的单用户检测器的渐近效率。

15-13 研究习题 15-6 中的两用户同步 CDMA 系统。当 $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ 时, 每个用户使用一个解相关检测器, 试求每个用户的差错率。

15-14 有一个两用户同步 CDMA 系统, 其接收信号由习题 15-6 给出。每个用户使用式 (15-3-51) 至式 (15-3-53) 所规定的最小 MSE 检测器。

(a) 试求这两个用户的线性变换矩阵 A^0 。

(b) 当 $N_0 \rightarrow 0$ 时, 试证明 MMSE 检测器趋于解相关检测器。

(c) 当 $N_0 \rightarrow \infty$ 时, 试证明 MMSE 检测器趋于传统的单用户检测器。

15-15 研究图 P15-15 所示的异步通信系统。两个接收机不在同一地点, 而且白噪声过程 $n^{(1)}(t)$ 和 $n^{(2)}(t)$ 是独立的。两个噪声过程是同分布的, 具有功率密度谱 σ^2 和零均值。因为两个接收机的位置不同, 故用户间的相对延时不同, 设接收机 i 中用户 k 的相对延时为 $\tau_k^{(i)}$ 。接收机的所有其他信号参数相同, 且接收机 i 中的接收信号为

$$r^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_k(l) s_k(t - lT - \tau_k^{(i)}) + n^{(i)}(t)$$

式中, s_k 的持续时间是 $[0, T]$ 。假设接收机 i 完全知道波形、能量和相对延时 $\tau_1^{(i)}$ 和 $\tau_2^{(i)}$ 。尽管接收机 i 最终仅对来自发送机 i 的数据感兴趣, 但在接收机的抽样器和其他接收机的后处理电路之间存在一个自由通信链路。在每个后处理器之后, 由

门限检测获得判决。在此,考虑如何选择后处理器和通信链路,以便改进性能。

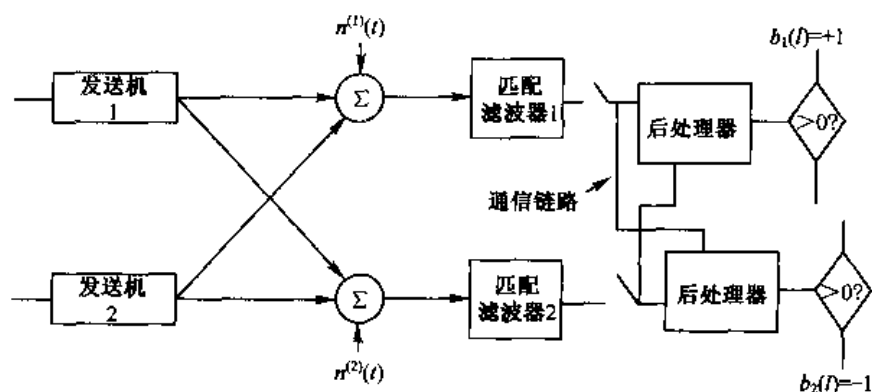


图 P15-15

(a) 不采用通信链路和不进行后处理的一对接收机用户 1 和用户 2 的比特差错率是多少? 利用如下记号

$$y_k(l) = \int s_k(t - lT - \tau_k^{(k)}) r^{(k)}(t) dt$$

$$\rho_{12}^{(1)} = \int s_1(t - \tau_1^{(1)}) s_2(t - \tau_2^{(1)}) dt$$

$$\rho_{21}^{(1)} = \int s_1(t - \tau_1^{(1)}) s_2(t + T - \tau_2^{(1)}) dt$$

$$w_k = \int s_k^2(t - \tau_k^{(1)}) dt = \int s_k^2(t - \tau_k^{(2)}) dt$$

(b) 考虑从通信链路接收 $y_2(l-1)$ 和 $y_2(l)$ 的接收机 1 的后处理,且实现对 $y_1(l)$ 的如下后处理:

$$z_l(l) = y_1(l) - \rho_{21}^{(1)} \text{sgn}[y_2(l-1)] - \rho_{12}^{(1)} \text{sgn}[y_2(l)]$$

试求用户 1 的比特差错率的准确表达式。

(c) 试求(b)中提出的接收机的渐近多用户效率,并与(a)中的结果相比较。这个接收机总的性能总是比(a)中的好吗?

15-16 在纯 ALOHA 系统中,信道比特率为 2 400 b/s。假设每个终端平均每分钟发送 100 比特的消息。

(a) 试求能够使用该信道的最大终端数。

(b) 若采用时隙 ALOHA,重做(a)。

15-17 纯 ALOHA 系统的吞吐量也可以由关系式 $G = S + A$ 推导而得,其中 A 为平均(归一化)重传率。试证明 $A = G(1 - e^{-2G})$,然后求解 S 。

15-18 对于泊松过程,在时间间隔 T 内 k 次到达的概率为

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(a) 试求间隔 T 内的平均到达次数。

(b) 试求间隔 T 内到达次数的方差 σ^2 。

(c) 在间隔 T 内至少一次到达的概率是多少?

(d) 在间隔 T 内正好有一次到达的概率是多少?

- 15-19 参见习题 15-18, 平均到达率 $\lambda = 10$ packet/s(分组/秒)。试求:
- (a) 两次到达之间的平均时间。
 - (b) 在 1 s、100 ms 内其他分组到达的概率。
- 15-20 考虑一个纯 ALOHA 系统。该系统运行的吞吐量 $S = 0.1$, 并以泊松到达率 λ 产生分组。
- (a) 试求 G 的值。
 - (b) 试求为发送一个分组而试传的平均次数。
- 15-21 考虑一个总线传输速率为 10 Mb/s 的 CSMA/CD 系统。总线为 2 km, 传播延时是 $5 \mu\text{s}/\text{km}$, 分组长度为 1 000 比特。试求:
- (a) 端到端延时 τ_d 。
 - (b) 分组持续时间 T_p 。
 - (c) 比值 τ_d/T_p 。
 - (d) 该总线的最大利用率和最大比特率。

附录 A 列文森-杜宾算法

列文森-杜宾(Levinson-Durbin)算法是一种用来确定线性方程组

$$\Phi_p \mathbf{a}_p = \Phi_p \quad (\text{A-1})$$

解的阶递归算法,其中 Φ_p 是一个 $p \times p$ 托伯利兹(Toeplitz)矩阵。 \mathbf{a}_p 是预测器系数向量,可表示为

$$\mathbf{a}_p = [a_{p1} \quad a_{p2} \quad \cdots \quad a_{pp}]$$

Φ_p 是一个 p 维向量,其元素为

$$\Phi_p = [\phi(1) \quad \phi(2) \quad \cdots \quad \phi(p)]$$

对于一阶($p=1$)预测器,我们得解

$$\begin{aligned} \phi(0)a_{11} &= \phi(1) \\ a_{11} &= \phi(1)/\phi(0) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

一阶预测器的残余均方误差(MSE)为

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \phi(0) - a_{11}\phi(1) \\ &= \phi(0) - a_{11}^2\phi(0) \\ &= \phi(0)(1 - a_{11}^2) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

一般地,可以用($m-1$)阶预测器的系数来表示 m 阶预测器系数的解。于是,把 \mathbf{a}_m 表示为两个向量之和,即

$$\mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m-1} \\ k_m \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

式中,向量 \mathbf{d}_{m-1} 和标量 k_m 待定。于是, Φ_m 还可表示为

$$\Phi_m = \begin{bmatrix} \Phi_{m-1} & \Phi_{m-1}^r \\ \Phi_{m-1}^r & \phi(0) \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

式中, Φ_{m-1}^r 刚好是反序的向量 Φ_{m-1} 。

现在

$$\begin{bmatrix} \Phi_{m-1} & \Phi_{m-1}^r \\ \Phi_{m-1}^r & \phi(0) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m-1} \\ k_m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \Phi_{m-1} \\ \phi(m) \end{bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

由式(A-6)得到两个方程。第一个方程为如下矩阵方程

$$\Phi_{m-1} \mathbf{a}_{m-1} + \Phi_{m-1} \mathbf{d}_{m-1} + k_m \Phi_{m-1}^r = \Phi_{m-1} \quad (\text{A-7})$$

$\Phi_{m-1} \mathbf{a}_{m-1} = \Phi_{m-1}$, 从而式(A-7)简化为

$$\Phi_{m-1} \mathbf{d}_{m-1} + k_m \Phi_{m-1}^r = 0 \quad (\text{A-8})$$

这个方程的解为

$$\mathbf{d}_{m-1} = -k_m \Phi_{m-1}^{-1} \Phi_{m-1}^r \quad (\text{A-9})$$

Φ_{m-1}^r 刚好是反序的 Φ_{m-1} 。从而, 式(A-9)的解就是反序的 \mathbf{a}_{m-1} 乘以 $-k_m$, 即

$$\mathbf{d}_{m-1} = -k_m \begin{bmatrix} a_{m-1, m-1} \\ a_{m-1, m-2} \\ \dots \\ a_{m-1, 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A-10})$$

由式(A-6)得到的第二个方程为如下标量方程

$$\Phi_{m-1}^{r'} \mathbf{a}_{m-1} + \Phi_{m-1}^{r'} \mathbf{d}_{m-1} + \phi(0) k_m = \phi(m) \quad (\text{A-11})$$

利用式(A-10), 可从式(A-11)消去 \mathbf{d}_{m-1} 。结果的方程给出 k_m , 即

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{\phi(m) - \Phi_{m-1}^{r'} \mathbf{a}_{m-1}}{\phi(0) - \Phi_{m-1}^{r'} \Phi_{m-1}^{-1} \Phi_{m-1}^r} \\ &= \frac{\phi(m) - \Phi_{m-1}^{r'} \mathbf{a}_{m-1}}{\phi(0) - \mathbf{a}_{m-1}' \Phi_{m-1}} \\ &= \frac{\phi(m) - \Phi_{m-1}^{r'} \mathbf{a}_{m-1}}{\mathcal{E}_{m-1}} \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

式中 \mathcal{E}_{m-1} 是残余 MSE, 由下式确定

$$\mathcal{E}_{m-1} = \phi(0) - \mathbf{a}_{m-1}' \Phi_{m-1} \quad (\text{A-13})$$

用式(A-10)代替式(A-4)中的 \mathbf{d}_{m-1} , 得到如下阶递归关系:

$$a_{mk} = a_{m-1, k} - k_m a_{m-1, m-k}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (\text{A-14})$$

及

$$a_{mm} = k_m$$

最小 MSE 亦可递归计算, 于是

$$\mathcal{E}_m = \phi(0) - \sum_{k=1}^m a_{mk} \phi(k) \quad (\text{A-15})$$

在式(A-15)中利用式(A-14), 得到

$$\mathcal{E}_m = \phi(0) - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1, k} \phi(k) - a_{mm} \left[\phi(m) - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1, m-k} \phi(k) \right] \quad (\text{A-16})$$

式(A-16)中方括号内的项就是式(A-12)中 k_m 的分子, 因此

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_{m-1} - a_{mm}^2 \mathcal{E}_{m-1} \\ &= \mathcal{E}_{m-1} (1 - a_{mm}^2) \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

附录 B 多信道二进制信号的差错率

在 AWGN 信道上采用二进制信号传输系统来传送信息的多信道通信系统中,检测器的判决变量可用复高斯随机变量表示为一般二次型的特殊情况:

$$D = \sum_{k=1}^L (A |X_k|^2 + B |Y_k|^2 + CX_k Y_k^* + C^* X_k^* Y_k) \quad (\text{B-1})$$

其中 A, B 和 C 是常数, X_k 和 Y_k 是一对相关的复高斯随机变量。对于所考虑的信道, L 对变量 $|X_k, Y_k|$ 是相互统计独立且均匀分布的。

差错率是 $D < 0$ 的概率。该概率计算如下。

从一般二次型的特征函数(记做 $\Psi_D(jv)$)开始。 $D < 0$ 的概率(记做差错率 P_b)为

$$P_b = P(D < 0) = \int_{-\infty}^0 p(D) dD \quad (\text{B-2})$$

式中 $p(D)$ (D 的概率密度函数)与 $\Psi_D(jv)$ 有关,其关系用如下傅里叶变换表示

$$p(D) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_D(jv) e^{-jvD} dv$$

因此,

$$P_b = \int_{-\infty}^0 dD \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_D(jv) e^{-jvD} dv \quad (\text{B-3})$$

交换上式中的积分次序,首先对 D 积分,其结果为

$$P_b = -\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty+j\epsilon}^{\infty+j\epsilon} \frac{\Psi_D(jv)}{v} dv \quad (\text{B-4})$$

式中插入一个小正数 ϵ ,以便将积分路径从 $v=0$ 处移开。 ϵ 必须为正数,以便允许交换积分的次序。

因为 D 是统计独立的随机变量之和,所以 D 的特征函数可分解为 L 个特征函数的乘积,每个函数对应于各随机变量 d_k ,其中

$$d_k = A |X_k|^2 + B |Y_k|^2 + CX_k Y_k^* + C^* X_k^* Y_k$$

d_k 的特征函数为

$$\phi_{d_k}(jv) = \frac{v_1 v_2}{(v + jv_1)(v - jv_2)} \exp \left[\frac{v_1 v_2 (-v^2 \alpha_{1k} + jv \alpha_{2k})}{(v + jv_1)(v - jv_2)} \right] \quad (\text{B-5})$$

式中,参数 v_1, v_2, α_{1k} 和 α_{2k} 与复高斯随机变量 X_k 和 Y_k 的均值 \bar{X}_k 和 \bar{Y}_k 及二阶(中心)矩 $\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{yy}$ 有关,其关系如下($|C|^2 - AB > 0$):

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{w^2 + \frac{1}{4(\mu_{xx}\mu_{yy} - |\mu_{xy}|^2)(|C|^2 - AB)}} - w \\ v_2 &= \sqrt{w^2 + \frac{1}{4(\mu_{xx}\mu_{yy} - |\mu_{xy}|^2)(|C|^2 - AB)}} + w \\ w &= \frac{A\mu_{xx} + B\mu_{yy} + C\mu_{xy}^* + C^*\mu_{xy}}{4(\mu_{xx}\mu_{yy} - |\mu_{xy}|^2)(|C|^2 - AB)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1k} &= 2(|C|^2 - AB)(|X_k|^2 \mu_{yy} + |\bar{Y}_k|^2 \mu_{xx} - \bar{X}_k^* \bar{Y}_k \mu_{xy} - \bar{X}_k \bar{Y}_k^* \mu_{xy}^*) \\
\alpha_{2k} &= A|\bar{X}_k|^2 + B|\bar{Y}_k|^2 + C\bar{X}_k^* \bar{Y}_k + C^* \bar{X}_k \bar{Y}_k^* \\
\mu_{xy} &= \frac{1}{2} E[(X_k - \bar{X}_k)(Y_k - \bar{Y}_k)^*]
\end{aligned} \tag{B-6}$$

由于随机变量 d_k 独立, D 的特征函数为

$$\begin{aligned}
\Psi_D(jv) &= \prod_{k=1}^L \Psi_{d_k}(jv) \\
\Psi_D(jv) &= \frac{(v_1 v_2)^L}{(v + jv_1)^L (v - jv_2)^L} \exp \left[\frac{v_1 v_2 (jv \alpha_2 - v^2 \alpha_1)}{(v + jv_1)(v - jv_2)} \right]
\end{aligned} \tag{B-7}$$

式中

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^L \alpha_{1k}, \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^L \alpha_{2k} \tag{B-8}$$

用式(B-7)代替式(B-4)中的 $\Psi_D(jv)$, 得到

$$P_b = - \frac{(v_1 v_2)^L}{2\pi j} \int_{\infty - j\epsilon}^{\infty + j\epsilon} \frac{dv}{v(v + jv_1)^L (v - jv_2)^L} \exp \left[\frac{v_1 v_2 (jv \alpha_2 - v^2 \alpha_1)}{(v + jv_1)(v - jv_2)} \right] \tag{B-9}$$

该积分计算如下:

第一步, 把指数函数表示为如下形式

$$\exp \left(-A_1 + \frac{jA_2}{v + jv_1} - \frac{jA_3}{v - jv_2} \right)$$

这里, 很容易证明常数 A_1, A_2, A_3 为

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1 v_1 v_2 \\
A_2 &= \frac{v_1^2 v_2}{v_1 + v_2} (\alpha_1 v_1 + \alpha_2) \\
A_3 &= \frac{v_1 v_2^2}{v_1 + v_2} (\alpha_1 v_2 - \alpha_2)
\end{aligned} \tag{B-10}$$

第二步, 通过如下变量替换, 执行从 v 平面到 p 平面的保角变换:

$$p = - \frac{v_1}{v^2} \frac{v - jv_2}{v + jv_1} \tag{B-11}$$

在 p 平面中, 式(B-9)的积分为

$$P_b = \frac{\exp[v_1 v_2 (-2\alpha v_1 v_2 + \alpha_2 v_1 - \alpha_2 v_2)/(v_1 + v_2)^2]}{(1 + v_2/v_1)^{2L-1}} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(p) dp \tag{B-12}$$

式中

$$f(p) = \frac{[1 + (v_2/v_1)p]^{2L-1}}{p^L(1-p)} \exp \left[\frac{A_2(v_2/v_1)}{v_1 + v_2} p + \frac{A_3(v_1/v_2)}{v_1 + v_2} \frac{1}{p} \right] \tag{B-13}$$

这里, Γ 是包围原点且半径小于 1 的圆形围线。

第三步, 计算如下积分

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(p) dp &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{(1 + (v_2/v_1)p)^{2L-1}}{p^L(1-p)} \\
&\quad \times \exp \left[\frac{A_2(v_2/v_1)}{v_1 + v_2} p + \frac{A_3(v_1/v_2)}{v_1 + v_2} \frac{1}{p} \right] dp
\end{aligned} \tag{B-14}$$

为了便于以后的处理,引入常数 $a \geq 0$ 和 $b \geq 0$, 且

$$\frac{1}{2}a^2 = \frac{A_3(v_1/v_2)}{v_1 + v_2}, \quad \frac{1}{2}b^2 = \frac{A_2(v_2/v_1)}{v_1 + v_2} \quad (\text{B-15})$$

把函数 $[1 + (v_2/v_1)p]^{2L-1}$ 展成二项式级数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(p) dp &= \sum_{k=0}^{2L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k \\ &\times \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{p^k}{p^L(1-p)} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{2}b^2 p\right] dp \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

式(B-16)中的围线积分是贝塞尔函数的一种表示。求解它, 可利用如下关系式:

$$I_n(ab) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \left(\frac{a}{b}\right)^n \int_{\Gamma} \frac{1}{p^{n+1}} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{2}b^2 p\right] dp \\ \frac{1}{2\pi j} \left(\frac{b}{a}\right)^n \int_{\Gamma} p^{n-1} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{2}b^2 p\right] dp \end{cases}$$

其中 $I_n(x)$ 是第一类 n 阶修正贝塞尔函数, 以贝塞尔函数表示的马库姆(Marcum) Q 函数的级数表达式为

$$Q_1(a, b) = \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n I_n(ab)$$

首先, 考虑式(B-16)中 $0 \leq k \leq L-2$ 的情况。此时, 其围线积分写成如下形式:^①

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{1}{p^{L-k}(1-p)} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{2}b^2 p\right] dp = Q_1(a, b) \exp\left[\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] + \sum_{n=1}^{L-1-k} \left(\frac{b}{a}\right)^n I_n(ab) \quad (\text{B-17})$$

其次, 考虑 $k = L-1$ 的项, 其围线积分可用 Q 函数表示如下

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{1}{p(1-p)} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{2}b^2 p\right] dp = Q_1(a, b) \exp\left[\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \quad (\text{B-18})$$

最后, 考虑 $L \leq k \leq 2L-1$ 的情况,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{p^{k-L}}{1-p} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{2}b^2 p\right] dp \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} p^{k-L+n} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{2}b^2 p\right] dp \\ &= \sum_{n=k+1-L}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n I_n(ab) = Q_1(a, b) \exp\left[\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] - \sum_{n=0}^{k-L} \left(\frac{a}{b}\right)^n I_n(ab) \end{aligned} \quad (\text{B-19})$$

① 该围线积分与广义马库姆 Q 函数有关, 按如下方式

$$Q_m(a, b) \exp\left[\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{1}{p^m(1-p)} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{p} + \frac{1}{2}b^2 p\right] dp$$

定义为

$$Q_m(a, b) = \int_0^{\infty} x(x/a)^{m-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + a^2)\right] I_{m-1}(ax) dx, \quad m \geq 1$$

汇集式(B-16)右边的各项,并利用式(B-17)~(B-19)的结果,则在某些代数运算后,得到如下围线积分表达式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(p) dp = & \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)^{2L-1} \left[\exp\left[\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] Q_1(a, b) - I_0(ab) \right] \\ & + I_0(ab) \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k \\ & + \sum_{n=1}^{L-1} I_n(ab) \sum_{k=0}^{L-1-n} \binom{2L-1}{k} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^n \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k - \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{2L-1-k} \right] \quad (\text{B-20}) \end{aligned}$$

式(B-20)连同式(B-12)确定了差错率。利用如下易证明的恒等式:

$$\exp\left[\frac{v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2} (-2\alpha_1 v_1 v_2 + \alpha_2 v_1 - \alpha_2 v_2)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right]$$

还可得到进一步简化的结果。因此,

$$\begin{aligned} P_b = & Q_1(a, b) - I_0(ab) \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \\ & + \frac{I_0(ab) \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right]}{(1 + v_2/v_1)^{2L-1}} \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k + \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right]}{(1 - v_2/v_1)^{2L-1}} \\ & + \sum_{n=1}^{L-1} I_n(ab) \sum_{k=0}^{L-1-n} \binom{2L-1}{k} \\ & \times \left[\left(\frac{b}{a}\right)^n \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k - \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{2L-1-k} \right], (L > 1) \end{aligned}$$

$$P_b = Q_1(a, b) - \frac{v_2/v_1}{1 + v_2/v_1} I_0(ab) \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right], (L = 1) \quad (\text{B-21})$$

这就是我们所期望的差错率表达式,从而很容易建立参数 a, b 与变量对 $\{X_k, Y_k\}$ 的矩之间的关系。把式(B-10)中的 A_2 和 A_3 代入式(B-15),得到

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{2v_1^2 v_2 (\alpha_1 v_2 - \alpha_2)}{(v_1 + v_2)^2} \right]^{1/2} \\ b &= \left[\frac{2v_1 v_2^2 (\alpha_1 v_1 + \alpha_2)}{(v_1 + v_2)^2} \right]^{1/2} \quad (\text{B-22}) \end{aligned}$$

因为 v_1, v_2, α_1 和 α_2 已在式(B-6)和式(B-8)中直接以变量对 $\{X_k, Y_k\}$ 的矩给出,所以我们的任务至此完成。

附录 C M 相信号自适应接收的差错率

本附录将推导 L 分集分支的时不变加性高斯噪声信道上两相和四相信号传输的差错率, 而且推导 L 分集分支的瑞利衰落加性高斯噪声信道上 M 相信号传输的差错率。由于这两种信道对发送信号引入了加性高斯白噪声和未知或随机的乘性增益及相移, 从而恶化了在信道上传输的信号波形。接收机的处理包括互相关和相加两种操作。前者利用有噪参考信号与每个分集分支上接收的信号加噪声进行互相关, 该有噪参考信号来自于先前接收的携带信息的信号或接收的导频信号, 后者将所有 L 个分集分支的输出相加以形成判决变量。

C.1 M 相信号通信系统的数学模型

在 M 相信号传输的一般情况下, 发送机的信号传输波形为^①

$$s_n(t) = \operatorname{Re}[s_{in}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

式中

$$s_{in}(t) = g(t)\exp\left[j\frac{2\pi}{M}(n-1)t\right] \quad (n = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T) \quad (\text{C-1})$$

T 是信号传输间隔的持续时间。

研究在信号传输间隔的持续时间内, 在 L 条信道上发送 M 个波形之一的情况。假设每条信道通过引入乘性增益和相移(分别用复数 g_k 和加性噪声 $z_k(t)$ 表示)来恶化经由它传输的信号波形。于是, 当发送波形是 $s_{in}(t)$ 时, 第 k 条信道接收的波形为

$$r_{ik}(t) = g_k s_{in}(t) + z_k(t) \quad (0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2, \dots, L) \quad (\text{C-2})$$

假设噪声 $|z_k(t)|$ 是均值为零且自相关函数为 $\phi_z(\tau) = N_0 \delta(\tau)$ 的平稳白高斯随机过程的样本函数, 其中 N_0 是谱密度值。假设这些样本函数是相互统计独立的。

在解调器中, $r_{in}(t)$ 首先通过一个冲激响应与波形 $g(t)$ 匹配的滤波器。该滤波器在 $t = T$ 时刻的抽样输出为

$$X_k = 2\mathcal{E}g_k \exp\left[j\frac{2\pi}{M}(n-1)T\right] + N_k \quad (\text{C-3})$$

式中 \mathcal{E} 是每个信道发送信号的能量, N_k 是第 k 个滤波器的输出噪声样值。解调器试图通过消除在每条信道中引入的相移, 判决在信号传输间隔 $0 \leq t \leq T$ 内 M 个相位中的哪一个相位被发送。在实际中, 这是通过匹配滤波器的输出 X_k 乘以信道增益估值 \hat{g}_k 的复共轭和相移完成的, 其结果是第 k 个滤波器的加权和移相了的抽样输出。该输出而后与其他 $L-1$ 个信道滤波器的加权及移相了的抽样输出相加。

假设第 k 条信道的增益估值 \hat{g}_k 和相移可从导频信号的传输, 或者通过对先前信号传输间隔内接收的携带信息的信号的解调来导出。作为前者的一个例子, 假设某一标记为 $s_{pk}(t)$

^① 实信号的复数表示贯穿以下描述。复数共轭用星号表示。

($0 \leq t \leq T$)的导频信号沿第 k 条信道发送,以便测量信道增益和相移。接收波形为

$$g_k s_{pk}(t) + z_{pk}(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

式中, $z_{pk}(t)$ 是均值为零且自相关函数为 $\phi_p(\tau) = N_0 \delta(\tau)$ 的平稳白高斯随机过程的样本函数。该信号加噪声通过一个与 $s_{pk}(t)$ 匹配的滤波器。滤波器输出在 $t = T$ 时刻抽样得到随机变量 $X_{pk} = 2\mathcal{E}_p g_k + N_{pk}$, 其中 \mathcal{E}_p 是导频信号的能量(假设它在所有信道内都相同), N_{pk} 是加性噪声样值,通过对 X_{pk} 的适当归一化可得到 g_k 的估值,即 $\hat{g}_k = g_k + N_{pk}/2\mathcal{E}_p$ 。

另一方面, g_k 的估值可由携带信息的信号得出,说明如下:如果知道包含在匹配滤波器输出中的信息分量,则 g_k 的估值可由适当归一化该输出得到。例如,由式(C-3)确定的滤波器输出中,信息分量为 $2\mathcal{E} g_k \exp[j(2\pi/M)(n-1)]$, 从而该估值为

$$\hat{g}_k = \frac{X_k}{2\mathcal{E}} \exp\left[-j \frac{2\pi}{M}(n-1)\right] = g_k + \frac{N'_k}{2\mathcal{E}}$$

式中 $N'_k = N_k \exp[-j(2\pi/M)(n-1)]$ 且 N'_k 的 PDF 与 N_k 的 PDF 相同。以这个方式由携带信息的信号得到的估值叫做透视估计(clairvoyant estimate)。尽管物理可实现的接收机不具备这样的透视估计,但它可通过采用一个信号传输间隔的延时并反馈先前信号传输间隔内发送相位的估值来逼近透视估计。

无论 g_k 的估计是由导频信号还是由携带信息的信号获得的,都可通过扩展时间间隔改进估计,方法如普赖斯(Price, 1962 年)提出的那样,把形成估计的时间间隔延长到包含先前的几个信号传输间隔。作为扩展测量间隔的一个结果, g_k 估计的信噪比增加了。当估计间隔为过去无限长的一般情况下,归一化导频信号估计是

$$\hat{g}_k = g_k + \sum_{i=1}^{\infty} c_i N_{pki} / 2\mathcal{E}_p \sum_{i=1}^{\infty} c_i \quad (\text{C-4})$$

式中 c_i 是在先前第 i 个信号间隔导出的 g_k 子估值的加权系数, N_{pki} 为先前第 i 个信号传输间隔内与 $s_{pk}(t)$ 匹配的滤波器输出中的加性高斯噪声样值。类似地,通过消除过去无限长(间隔上)的调制,从携带信息的信号获得的透视估计为

$$\hat{g}_k = g_k + \sum_{i=1}^{\infty} c_i N_{ki} / 2\mathcal{E} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \quad (\text{C-5})$$

正如以上所示,解调器形成 g_k^* 和 X_k 之间的乘积,并把此积与其他 $L-1$ 个信道的乘积相加。结果的随机变量为

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^L X_k \hat{g}_k^* = \sum_{k=1}^L X_k Y_k^* \\ &= z_r + jz_i \end{aligned} \quad (\text{C-6})$$

式中,由定义, $Y_k = \hat{g}_k^*$, $z_r = \text{Re}(z)$ 且 $z_i = \text{Im}(z)$ 。 z 的相位是判决变量,即

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{z_i}{z_r}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\text{Im}\left(\sum_{k=1}^L X_k Y_k^*\right)}{\text{Re}\left(\sum_{k=1}^L X_k Y_k^*\right)}\right] \quad (\text{C-7})$$

C.2 相位 θ 的特征函数和概率密度函数

以下推导基于假设发送信号相位为零,即 $n=1$ 。如果需要,以任何其他发送信号相位为条件的 θ 的 PDF 可通过对 $p(\theta)$ 变换 $2\pi(n-1)/M$ 角度获得。还假设表征 L 条信道的复数 $\{g_k\}$ 是相互

统计独立且同分布的零均值高斯随机变量。这个表征适合于瑞利慢衰落信道。因此, (X_k, Y_k) 是均值为零的相关复高斯随机变量, 而与任何其他变量对 (X_i, Y_i) 是统计独立且同分布的。

在一般分集接收的情况下, 计算概率密度函数 $p(\theta)$ 的方法如下: 首先, 获得 z_r 和 z_i 的联合概率分布函数的特征函数, 其中 z_r 和 z_i 是组成判决变量 θ 的两个分量。其次, 进行特征函数的双重傅里叶变换并得到密度 $p(z_r, z_i)$, 则变换

$$r = \sqrt{z_r^2 + z_i^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{z_i}{z_r}\right) \quad (\text{C-8})$$

得出包络 r 和相位 θ 的联合 PDF。最后, 将这个联合 PDF 对随机变量 r 积分, 得到 θ 的 PDF。

随机变量 z_r 和 z_i 的联合特征函数可表示为如下形式

$$\Psi(jv_1, jv_2) = \left[\frac{\frac{4}{m_{xx}m_{yy}(1-|\mu|^2)}}{\left(v_1 - j \frac{2|\mu|\cos\epsilon}{\sqrt{m_{xx}m_{yy}(1-|\mu|^2)}}\right)^2 + \left(v_2 - j \frac{2|\mu|\sin\epsilon}{\sqrt{m_{xx}m_{yy}(1-|\mu|^2)}}\right)^2 + \frac{4}{m_{xx}m_{yy}(1-|\mu|^2)^2}} \right]^L \quad (\text{C-9})$$

式中, 定义

$$m_{xx} = E(|X_k|^2) \quad \text{对所有 } k \text{ 相同}$$

$$m_{yy} = E(|Y_k|^2) \quad \text{对所有 } k \text{ 相同}$$

$$m_{xx} = E(X_k Y_k^*) \quad \text{对所有 } k \text{ 相同}$$

$$\mu = \frac{m_{xx}}{\sqrt{m_{xx}m_{yy}}} = |\mu| e^{-j\epsilon} \quad (\text{C-10})$$

函数 $\Psi(jv_1, jv_2)$ 关于变量 v_1 和 v_2 的傅里叶变换为

$$p(z_r, z_i) = \frac{(1-|\mu|^2)^L}{(L-1)! \pi 2^L} (\sqrt{z_r^2 + z_i^2})^{L-1} \times \exp[|\mu|(z_r \cos\epsilon + z_i \sin\epsilon)] K_{L-1}(\sqrt{z_r^2 + z_i^2}) \quad (\text{C-11})$$

式中, $K_n(x)$ 是 n 阶修正的汉克尔 (Hankel) 函数。那么, 随机变量的变换 (见式 (C-8)) 可得到如下形式的包络 r 和相位 θ 的联合 PDF

$$p(r, \theta) = \frac{(1-|\mu|^2)^L}{(L-1)! \pi 2^L} r^L \exp[|\mu|r \cos(\theta - \epsilon)] K_{L-1}(r) \quad (\text{C-12})$$

现在, 对变量 r 积分, 得到相位 θ 的边缘 PDF。计算该积分, 得到如下形式的 $p(\theta)$

$$P(\theta) = \frac{(-1)^{L-1} (1-|\mu|^2)^L}{2\pi(L-1)!} \left\{ \frac{\partial^{L-1}}{\partial b^{L-1}} \left[\frac{1}{b - |\mu|^2 \cos^2(\theta - \epsilon)} + \frac{|\mu| \cos(\theta - \epsilon)}{[b - |\mu|^2 \cos^2(\theta - \epsilon)]^{3/2}} \cos^{-1} \left(-\frac{|\mu| \cos(\theta - \epsilon)}{b^{1/2}} \right) \right] \right\} \Big|_{b=1} \quad (\text{C-13})$$

在该方程中,

$$\frac{\partial^L}{\partial b^L} f(b, \mu) \Big|_{b=1}$$

表示在 $b=1$ 处计算的函数 $f(b, \mu)$ 的 L 阶偏导数。

C.3 瑞利慢衰落信道的差错率

本节将推导 M 相信号传输的符号错误概率和二进制数字差错率。这些概率可通过 θ 的概率密度函数和概率分布函数得到。

1. 相位的概率分布函数

为了计算错误概率,需要计算定积分

$$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta$$

其中 θ_1 和 θ_2 是积分限, $p(\theta)$ 由式(C-13)确定。所有的计算都针对实互相关系数 μ 进行, 实值 μ 意味着信号具有对称谱, 这是经常碰到的情况。因为复值 μ 导致 θ 的 PDF 位移 ϵ , ϵ 是一个偏移项, 所以能够以普通方法改变 μ 为实值时的结果来替代 μ 为复值时的更一般情况。

在 $p(\theta)$ 的积分中, 只考虑 $0 \leq \theta \leq \pi$ 范围, 因为 $p(\theta)$ 是一个偶函数。况且, 被积函数及其导数的连续性, 以及积分限 θ_1 和 θ_2 与 b 无关这样一个事实, 允许交换积分和微分的次序。这样做使得积分很容易计算, 表示如下:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\theta) d\theta &= \frac{(-1)^{L-1}(1-\mu^2)^L}{2\pi(L-1)!} \\ &\times \frac{\partial^{L-1}}{\partial b^{L-1}} \left\{ \frac{1}{b-\mu^2} \left[\frac{\mu \sqrt{1-(b/\mu^2-1)x^2}}{b^{1/2}} \cot^{-1} x \right. \right. \\ &\left. \left. - \cot^{-1} \left(\frac{xb^{1/2}\mu}{\sqrt{1-(b/\mu^2-1)x^2}} \right) \right] \right\} \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Bigg|_{b=1} \end{aligned} \quad (C-14)$$

式中, 定义

$$x_i = \frac{-\mu \cos \theta_i}{\sqrt{b - \mu^2 \cos^2 \theta_i}} \quad (i = 1, 2) \quad (C-15)$$

2. 符号差错率

任意 M 相信号传输系统的符号差错率为

$$P_M = 2 \int_{\pi/M}^{\pi} p(\theta) d\theta$$

当式(C-14)在这两个积分限下计算时, 其结果为

$$\begin{aligned} P_M &= \frac{(-1)^{L-1}(1-\mu^2)^L}{\pi(L-1)!} \frac{\partial^{L-1}}{\partial b^{L-1}} \left\{ \frac{1}{b-\mu^2} \left[\frac{\pi}{M}(M-1) \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\mu \sin(\pi/M)}{\sqrt{b-\mu^2 \cos^2(\pi/M)}} \cot^{-1} \left(\frac{-\mu \cos(\pi/M)}{\sqrt{b-\mu^2 \cos^2(\pi/M)}} \right) \right] \right\} \Bigg|_{b=1} \end{aligned} \quad (C-16)$$

3. 二进制数字差错率

首先, 研究两相信号的传输情况。在这种情况下, 二进制数字的差错率通过 PDF $p(\theta)$ 在

$\frac{1}{2}\pi < \theta < 3\pi$ 范围内积分获得。因为 $p(\theta)$ 为偶函数且信号是先验等概的, 故该差错率为

$$P_2 = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} p(\theta) d\theta$$

容易证明, $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi$ 隐含着 $x_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ 隐含着 $x_2 = \mu/\sqrt{b-\mu^2}$ 。因此,

$$P_2 = \frac{(-1)^{L-1}(1-\mu^2)^L}{2(L-1)!} \frac{\partial^{L-1}}{\partial b^{L-1}} \left[\frac{1}{b-\mu^2} - \frac{\mu}{b^{1/2}(b-\mu^2)} \right] \Big|_{b=1} \quad (\text{C-17})$$

完成式(C-17)中的微分运算, 并在 $b=1$ 处计算结果的函数后, 得到如下形式的二进制数字差错率

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \mu \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1-\mu^2}{4} \right)^k \right] \quad (\text{C-18})$$

其次, 研究四相信号传输的情况, 其中应用格雷(Gray)码把一对比特映射为相位。假设发送信号为 $s_{i1}(t)$ 。显然, 当接收相位为 $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi$ 时, 产生单比特差错。当接收相位为 $\frac{3}{4}\pi < \theta < \pi$ 时, 产生双比特差错。也就是说, 二进制数字的差错率为

$$P_{4b} = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} p(\theta) d\theta + 2 \int_{3\pi/4}^{\pi} p(\theta) d\theta \quad (\text{C-19})$$

根据式(C-14)和式(C-19)容易导出

$$P_{4b} = \frac{(-1)^{L-1}(1-\mu^2)^L}{2(L-1)!} \frac{\partial^{L-1}}{\partial b^{L-1}} \left[\frac{1}{b-\mu^2} - \frac{\mu}{(b-\mu^2)(2b-\mu^2)^{1/2}} \right] \Big|_{b=1}$$

因此, 四相信号传输的二进制数字差错率为

$$P_{4b} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{2-\mu^2}} \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1+\mu^2}{4-2\mu^2} \right)^k \right] \quad (\text{C-20})$$

注意, 如果定义 $\rho = \mu/\sqrt{2-\mu^2}$, 以 ρ 表示的 P_{4b} 表达式为

$$P_{4b} = \frac{1}{2} \left[1 - \rho \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1-\rho^2}{4} \right)^k \right] \quad (\text{C-21})$$

换句话说, P_{4b} 具有与式(C-18)定义的 P_2 相同的形式。注意, ρ 像 μ 一样可解释为互相关系数, 因为 ρ 的取值范围为 $0 \leq \rho \leq 1$ (当 $0 \leq \mu \leq 1$ 时)。这个简单的事实将被用在 C.4 节中。

上述用来处理具有格雷码的 M 相信号比特差错率的过程也可用于 $M=8, 16$ 的情况, 普罗基斯(Proakis, 1968 年)在其论著中述及。

4. 互相关系数的计算

上面给出的差错率的表达式取决于单一参数, 即互相关系数 μ 。“透视估计”由式(C-5)定义, 当发送信号波形为 $s_{i1}(t)$ 时, 匹配滤波器输出为 $X_k = 2\mathcal{E}g_k + N_k$ 。因此, 互相关系数为

$$\mu = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(\gamma_c^{-1} + 1)(\gamma_c^{-1} + v)}} \quad (\text{C-22})$$

式中, 定义

$$v = \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \right|^2 / \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

$$\bar{\gamma}_c = \frac{\mathcal{E}}{N_0} E(|g_k|^2) \quad (k = 1, 2, \dots, L) \quad (\text{C-23})$$

参数 v 表示形成估值的有效的信号传输间隔数, $\bar{\gamma}_c$ 是平均信道 SNR。

在差分相位信号传输的情况下, 加权系数是 $c_1 = 1, c_i = 0$ (当 $i \neq 1$ 时)。因此, $v = 1$ 且 $\mu = \bar{\gamma}_c / (1 + \bar{\gamma}_c)$ 。

当 $v = \infty$ 时, 该估值是理想的, 且

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{\bar{\gamma}_c + 1}}$$

最后, 在式(C-4)给出的导频信号估计情况下, 互相关系数为

$$\mu = \left[\left(1 + \frac{r+1}{r\gamma_t} \right) \left(1 + \frac{r+1}{v\gamma_t} \right) \right]^{-1/2} \quad (\text{C-24})$$

式中, 定义

$$\bar{\gamma}_t = \frac{\mathcal{E}}{N_0} E(|g_k|^2)$$

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E} + \mathcal{E}_p$$

$$r = \mathcal{E} / \mathcal{E}_p$$

确定的 μ 值如表 C-1 所示。

表 C-1 瑞利衰落信道

估计类型	互相关系数 μ
透视估计	$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(\bar{\gamma}_c^{-1} + 1)(\bar{\gamma}_c^{-1} + v)}}$
导频信号估计	$\frac{\sqrt{rv}}{(r+1)\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_t} + \frac{r}{r+1}\right)\left(\frac{1}{\gamma_t} + \frac{v}{r+1}\right)}}$
差分相位信号传输	$\frac{\gamma_c}{\gamma_c + 1}$
理想估计	$\sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{\bar{\gamma}_c + 1}}$

C.4 时不变与赖斯衰落信道的差错率

在 C.2 节中, 复值信道增益 $|g_k|$ 表征为零均值高斯随机变量, 它适合于瑞利衰落信道。本节假设信道增益是非零均值的高斯随机变量, 信道增益的估值由解调器完成并运用, 如 C.1 节所述。同时, 判决变量 θ 仍由式(C-7)定义。然而, 在这种情况下, 第 k 条信道的匹配滤波器输出和估值分别为高斯随机变量 X_k 和 Y_k , 它们的非零均值表示为 \bar{X}_k 和 \bar{Y}_k , 且其二阶矩为

$$m_{xx} = E(|X_k - \bar{X}_k|^2) \quad \text{所有信道相同}$$

$$m_{yy} = E(|Y_k - \bar{Y}_k|^2) \quad \text{所有信道相同}$$

$$m_{xy} = E[(X_k - \bar{X}_k)(Y_k^* - \bar{Y}_k^*)] \quad \text{所有信道相同}$$

归一化的协方差为

$$\mu = \frac{m_{xy}}{\sqrt{m_{xx}m_{yy}}}$$

下面只研究具有该信道模型的二相和四相信号传输的差错率。只对每个信道增益的波动分量为零的特殊情况感兴趣,这种情况下的信道是时不变的。除了时不变特性外,如果估值和匹配滤波器输出之间的噪声是互不相关的,那么 $\mu=0$ 。

一般情况下,以上述方式表征的 L 条统计独立的信道上的二相信号传输的差错率可从附录 B 得到。根据它的通用表示形式,二进制差错率为

$$\begin{aligned} P_2 = & Q_1(a, b) - I_0(a) \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \\ & + \frac{I_0(ab) \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right]}{[2/(1-\mu)]^{2L-1}} \sum_{k=0}^{L-1} \binom{2L-1}{k} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^k \\ & + \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right]}{[2/(1-\mu)]^{2L-1}} \\ & \times \sum_{k=1}^{L-1} I_n(ab) \sum_{k=0}^{L-1-k} \binom{2L-1}{k} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^n \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^k - \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{2L-1-k}\right] \quad (L \geq 2) \\ P_2 = & Q_1(a, b) - \frac{1}{2}(1+\mu) I_0(ab) \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right] \quad (L=1) \end{aligned} \quad (C-25)$$

式中,定义

$$\begin{aligned} a &= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \left| \frac{\bar{X}_k}{\sqrt{m_{xx}}} - \frac{\bar{Y}_k}{\sqrt{m_{yy}}} \right|^2 \right]^{1/2} \\ b &= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \left| \frac{\bar{X}_k}{\sqrt{m_{xx}}} + \frac{\bar{Y}_k}{\sqrt{m_{yy}}} \right|^2 \right]^{1/2} \\ Q_1(a, b) &= \int_b^\infty x \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + x^2)\right] I_0(ax) dx \end{aligned} \quad (C-26)$$

$I_n(x)$ 为第一类 n 阶修正贝塞尔函数。

当信道为时不变($\mu=0$)的且信道增益和相位估值由 C.1 节定义时,计算常数 a 和 b 。我们记得,当信号 $s_1(t)$ 被发送时,匹配滤波器输出为 $X_k = 2\mathcal{E}g_k + N_k$ 。透视估值由式(C-5)确定。因此,对于该估计,矩值为 $\bar{X}_k = 2\mathcal{E}g_k$, $\bar{Y}_k = g_k$, $m_{xx} = 4\mathcal{E}N_0$, $m_{xy} = N_0/\mathcal{E}v$, 其中 \mathcal{E} 是信号能量, N_0 是噪声谱密度值, v 由式(C-23)定义。把这些矩值代入式(C-26),得到如下 a 和 b 的表达式:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2}\gamma_b} |\sqrt{v} - 1| \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2}\gamma_b} |\sqrt{v} + 1| \\ \gamma_b &= \frac{\mathcal{E}}{N_0} \sum_{k=1}^L |g_k|^2 \end{aligned} \quad (C-27)$$

这个结果最初由普赖斯(Price, 1962 年)导出。

在式(C-27)中令 $v=1$, 可获得差分相位信号传输的差错率。

其次, 研究导频信号的估值。在这种情况下, 估值由式(C-4)定义, 并且匹配滤波器输出仍为 $X_k = 2\mathcal{E}g_k + N_k$ 。把计算出的矩值代入式(C-26)后, 得到如下 a 和 b 的表达式:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\gamma_t}{2}} \left| \sqrt{\frac{v}{r+1}} - \sqrt{\frac{r}{r+1}} \right| \\ b &= \sqrt{\frac{\gamma_t}{2}} \left(\sqrt{\frac{v}{r+1}} + \sqrt{\frac{r}{r+1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-28})$$

式中

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \frac{\mathcal{E}_r}{N_0} \sum_{k=1}^L |g_k|^2 \\ \mathcal{E}_t &= \mathcal{E} + \mathcal{E}_p \\ r &= \mathcal{E}/\mathcal{E}_p \end{aligned}$$

最后研究在时不变信道 ($\mu=0$) 上四相信号传输时的二进制数字差错率。导出差错率的一个方法是首先确定 θ 的 PDF, 然后在 θ 值的合适范围对该函数积分。但这种方法在数学上已被证明难以实现, 取而代之的是尽管间接但实用的方法, 在这种方法中使用了拉普拉斯变换。简言之, 式(14-4-14)中的积分将 AWGN 信道的差错率 $P_2(\gamma_b)$ 与瑞利衰落信道的差错率 P_2 联系起来, 该积分是一个拉普拉斯变换。因为分别由式(C-18)和式(C-21)给出的瑞利衰落信道的比特差错率 P_2 和 P_{4b} 具有相同的形式, 不同的只是相关系数, 因此时不变信道中的比特差错率也具有相同的形式, 即 $\mu=0$ 时的式(C-25)就是四相信号传输系统的比特差错率, 其中变更参数 a 和 b 可反映不同的相关系数。详细的推导可在普罗基斯(Proakis, 1968 年)的论文中找到。参数 a 和 b 的表达式列于表 C-2。

表 C-2 时不变信道

估计类型	a	b
二相信号传输		
透视估计	$\sqrt{\frac{1}{2}\gamma_b} \sqrt{v}-1 $	$\sqrt{\frac{1}{2}\gamma_b}(\sqrt{v}+1)$
差分相位信号传输	0	$\sqrt{2\gamma_b}$
导频信号估计	$\sqrt{\frac{\gamma_t}{2}}\left \sqrt{\frac{v}{r+1}}-\sqrt{\frac{r}{r+1}}\right $	$\sqrt{\frac{\gamma_t}{2}}\left(\sqrt{\frac{v}{r+1}}+\sqrt{\frac{r}{r+1}}\right)$
四相信号传输		
透视估计	$\sqrt{\frac{1}{2}\gamma_b}\left \sqrt{v+1+\sqrt{v^2+1}}-\sqrt{v+1-\sqrt{v^2+1}}\right $	$\sqrt{\frac{1}{2}\gamma_b}\left(\sqrt{v+1+\sqrt{v^2+1}}+\sqrt{v+1-\sqrt{v^2+1}}\right)$
差分相位信号传输	$\sqrt{\frac{1}{2}\gamma_b}(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}})$	$\sqrt{\frac{1}{2}\gamma_b}(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}})$

续表

估计类型	a	b
导频信号估计	$\sqrt{\frac{\gamma_i}{4(r+1)}} \left \sqrt{v+r+\sqrt{v^2+r^2}} - \sqrt{v+r-\sqrt{v^2+r^2}} \right $	$\sqrt{\frac{\gamma_i}{4(r+1)}} \left(\sqrt{v+r+\sqrt{v^2+r^2}} + \sqrt{v+r-\sqrt{v^2+r^2}} \right)$

附录 D 平方根分解

研究线性方程组

$$\mathbf{R}_N \mathbf{C}_N = \mathbf{U}_N \quad (\text{D-1})$$

的解,其中 \mathbf{R}_N 是 $N \times N$ 阶正定对称矩阵, \mathbf{C}_N 为 N 维待定系数向量, \mathbf{U}_N 是一个任意的 N 维向量。方程组(D-1)可被高效求解,只要把 \mathbf{R}_N 表示为如下分解形式

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{S}_N \mathbf{D}_N \mathbf{S}_N' \quad (\text{D-2})$$

式中 \mathbf{S}_N 为下三角矩阵,其元素为 $\{s_{ik}\}$ 。 \mathbf{D}_N 为对角矩阵,其对角元素为 $\{d_k\}$ 。令 \mathbf{S}_N 的对角元素为 1,即 $s_{ii} = 1$ 。则有

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{k=1}^j s_{ik} d_k s_{jk} \quad (1 \leq j \leq i-1, \quad i \geq 2) \\ r_{11} &= d_1 \end{aligned} \quad (\text{D-3})$$

式中, $\{r_{ij}\}$ 是 \mathbf{R}_N 的元素。因此,元素 $\{s_{ik}\}$ 和 $\{d_k\}$ 可由式(D-3)按下列方程确定:

$$\begin{aligned} d_1 &= r_{11} \\ s_{ij} d_j &= r_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{ik} d_k s_{jk} \quad (1 \leq j \leq i-1, \quad 2 \leq i \leq N) \\ d_i &= r_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^2 d_k \quad (2 \leq i \leq N) \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

因此,式(D-4)以 \mathbf{R}_N 的元素定义了 \mathbf{S}_N 和 \mathbf{D}_N 。

求解式(D-1)分两步完成。将式(D-2)代入式(D-1),有

$$\mathbf{S}_N \mathbf{D}_N \mathbf{S}_N' \mathbf{C}_N = \mathbf{U}_N$$

令

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{D}_N \mathbf{S}_N' \mathbf{C}_N \quad (\text{D-5})$$

则

$$\mathbf{S}_N \mathbf{Y}_N = \mathbf{U}_N \quad (\text{D-6})$$

首先求解式(D-6)中的 \mathbf{Y}_N 。因为 \mathbf{S}_N 为三角形,则

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 \\ y_i &= u_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} y_j \quad (2 \leq i \leq N) \end{aligned} \quad (\text{D-7})$$

得到 \mathbf{Y}_N 后,第二步计算 \mathbf{C}_N ,即

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_N \mathbf{S}_N' \mathbf{C}_N &= \mathbf{Y}_N \\ \mathbf{S}_N' \mathbf{C}_N &= \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{Y}_N \end{aligned}$$

从式

$$c_N = y_N / d_N \quad (\text{D-8})$$

出发, \mathbf{C}_N 的剩余系数可用递归方法获得,即

$$c_i = \frac{y_i}{d_i} - \sum_{j=i+1}^N s_{ji} c_j \quad (1 \leq i \leq N-1) \quad (\text{D-9})$$

进行 \mathbf{R}_N 分解需要的乘法和除法次数与 N^3 成正比。一旦 \mathbf{S}_N 确定, 计算 \mathbf{C}_N 需要的乘法和除法数正比于 N^2 。与此相对照, 当 \mathbf{R}_N 是托伯利兹 (Toeplitz) 矩阵时, 应该用列文森-杜宾算法确定式 (D-1) 的解, 因其乘法和除法次数与 N^2 成正比。另一方面, 在递归最小二乘 (RLS) 公式中, \mathbf{S}_N 和 \mathbf{D}_N 不能用式 (D-3) 的方法计算, 但它们递归地更新。该更新过程可用 N^2 次运算 (乘法和除法) 完成。那么, 向量 \mathbf{C}_N 的求解按照式 (D-5) ~ 式 (D-9) 的步骤进行。因此, 递归最小二乘公式的计算量与 N^2 成正比。

文献与参考资料

- Abdulrahman, A., Falconer, D. D., and Sheikh, A. U. (1994). "Decision Feedback Equalization for CDMA in Indoor Wireless Communications," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 12, pp. 698-706, May.
- Abend, K. and Fritchman, B. D. (1970). "Statistical Detection for Communication Channels with Intersymbol Interference," *Proc. IEEE*, pp. 779-785, May.
- Abramson, N. (1963). *Information Theory and Coding*, McGraw-Hill, New York.
- Abramson, N. (1970). "The ALOHA System—Another Alternative for Computer Communications," *1970 Fall Joint Comput. Conf., AFIDS Conf. Proc.*, vol. 37, pp. 281-285, AFIPS Press, Montvale, N.J.
- Abramson, N. (1977). "The Throughput of Packet Broadcasting Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp. 117-128, January.
- Abramson, N. (1993). *Multiple Access Communications*, IEEE Press, New York.
- Abramson, N. (1994). "Multiple Access in Wireless Digital Networks," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 1360-1369, September.
- Adler, R. L., Coppersmith, D., and Hassner, M. (1983). "Algorithms for Sliding Block Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-29, pp. 5-22, January.
- Alamouti, A. (1998). "A Simple Transmitter Diversity Scheme for Wireless Communications," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. JSAC-16, pp. 1451-1458, October.
- Alexander, P. D., Reed, M. C., Asenstorfer, J. A., and Schlegel, C. B. (1999). "Iterative Multiuser Interference Reduction: Turbo CDMA," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 1008-1014, July.
- Al-Hussaini, E. and Al-Bassiouni, A.A.M. (1985). "Performance of MRC Diversity Systems for the Detection of Signals with Nakagami Fading," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-33, pp. 1315-1319, December.
- Alouini, M. and Goldsmith, A. (1998). "A Unified Approach for Calculating Error Rates of Linearly Modulated Signals over Generalized Fading Channels," *Proc. IEEE ICC'98*, pp. 459-464, Atlanta, GA.
- Altekar, S. A. and Beaulieu, N. C. (1993). "Upper Bounds on the Error Probability of Decision Feedback Equalization," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-39, pp. 145-156, January.
- Anderberg, M. R. (1973). *Cluster Analysis for Applications*, Academic, New York.

- Anderson, J. B., Aulin, T., and Sundberg, C. W. (1986). *Digital Phase Modulation*, Plenum, New York.
- Anderson, R. R. and Salz, J. (1965). "Spectra of Digital FM," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, pp. 1165-1189, July-August.
- Annamalai, A., Tellambura, C., and Bhargava, V. K. (1999). "A Unified Approach to Performance Evaluation of Diversity Systems on Fading Channels," in *Wireless Multimedia Network Technologies*, chap. 17, R. Ganesh ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
- Annamalai, A., Tellambura, C. and Bhargava, V. K. (1998). "A Unified Analysis of MPSK and MDPSK with Diversity Reception in Different Fading Environments," *IEEE Electr. Lett.*, vol. 34, pp. 1564-1565, August.
- Ash, R. B. (1965). *Information Theory*, Interscience, New York.
- Aulin, T. (1980). "Viterbi Detection of Continuous Phase Modulated Signals," *Nat Telecommun. Conf. Record*, pp. 14.2.1-14.2.7, Houston, TX, November.
- Aulin, T., Rydbeck, N., and Sundberg, C. W. (1981). "Continuous Phase Modulation—Part II: Partial Response Signaling," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp. 210-225, March.
- Aulin, T., Sundberg, C. W., and Svensson, A. (1981). "Viterbi Detectors with Reduced Complexity for Partial Response Continuous Phase Modulation," *Conf. Record NTC'81*, pp. A7.6.1-A7.6.7, New Orleans, LA.
- Aulin, T. and Sundberg, C. W. (1981). "Continuous Phase Modulation—Part I: Full Response Signaling," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp. 196-209, March.
- Aulin, T. and Sundberg, C. W. (1982a). "On the Minimum Euclidean Distance for a Class of Signal Space Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 43-55, January.
- Aulin, T. and Sundberg, C. W. (1982b). "Minimum Euclidean Distance and Power Spectrum for a Class of Smoothed Phase Modulation Codes with Constant Envelope," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-30, pp. 1721-1729, July.
- Aulin, T. and Sundberg, C. W. (1984). "CPM—An Efficient Constant Amplitude Modulation Scheme," *Int. J. Satellite Commun.*, vol. 2, pp. 161-186.
- Austin, M. E. (1967). "Decision-Feedback Equalization for Digital Communication Over Dispersive Channels," MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA. Tech. Report No. 437, August.
- Bahl, L. R., Cocke, J., Jelinek, F., and Raviv, J. (1974). "Optimal Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error Rate" *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 284-287, March.
- Barrow, B. (1963). "Diversity Combining of Fading Signals with Unequal Mean Strengths," *IEEE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-11, pp. 73-78, March.
- Bauch, G. and Franz, V. (1998). "Iterative Equalization and Decoding for the GSM System," *Proc. VTC '98*, pp. 2262-2266, April.
- Bauch, G., Khorram, H., and Hagenauer, J. (1997). "Iterative Equalization and Decoding in Mobile Communications Systems," *Proc. European Personal Mobile Commun. Conf. (EPMCC'97)*, pp. 307-312, September.
- Beare, C. T. (1978). "The Choice of the Desired Impulse Response in Combined Linear-Viterbi Algorithm Equalizers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 26, pp. 1301-1307, August.
- Beaulieu, N. C. (1990). "An Infinite Series for the Computation of the Complementary Probability Distribution Function of a Sum of Independent Random Variables and Its Application to the Sum of Rayleigh Random Variables," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-38, pp. 1463-1474, September.

- Beaulieu, N. C. (1994). "Bounds on Recovery Times of Decision Feedback Equalizers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, pp. 2786-2794, October.
- Beaulieu, N. C. and Abu-Dayya, A. A. (1991). "Analysis of Equal Gain Diversity on Nakagami Fading Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-39, pp. 225-234, February.
- Bégin, G. and Haccoun, D. (1989). "High-Rate Punctured Convolutional Codes: Structure, Properties and Construction Technique," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, pp. 1381-1385, December.
- Bégin, G., Haccoun, D., and Paguin, C. (1990). "Further Results on High-Rate Punctured Convolutional Codes for Viterbi and Sequential Decoding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, pp. 1922-1928, November.
- Bekir, N. E., Scholtz, R. A., and Weleh, L. R. (1978). "Partial-Period Correlation Properties of PN Sequences," *1978 Nat. Telecommun. Conf. Record*, pp. 35.1.1-25.1.4, Birmingham, Alabama, November.
- Belfiore, C. A. and Park, J. H., Jr. (1979). "Decision-Feedback Equalization," *Proc. IEEE*, vol. 67, pp. 1143-1156, August.
- Bellini, J. (1986). "Busgang Techniques for Blind Equalization," *Proc. GLOBECOM'86*, pp. 46.1.1-46.1.7, Houston, TX, December.
- Bello, P. A. and Nelin, B. D. (1962a). "Predetection Diversity Combining with Selectivity Fading Channels," *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-10, pp. 32-42, March.
- Bello, P. A. and Nelin, B. D. (1962b). "The Influence of Fading Spectrum on the Binary Error Probabilities of Incoherent and Differentially Coherent Matched Filter Receivers," *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-10, pp. 160-168, June.
- Bello, P. A. and Nelin, B. D. (1963). "The Effect of Frequency Selective Fading on the Binary Error Probabilities of Incoherent and Differentially Coherent Matched Filter Receivers," *IEEE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-11, pp. 170-186, June.
- Benedetto, S., Ajmone Marsan, M., Albertengo, G., and Giachin, E. (1988). "Combined Coding and Modulation: Theory and Applications," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 34, pp. 223-236, March.
- Benedetto, S., Divsalar, D., Montorsi, G., and Pollara, F. (1998). "Serial Concatenation of Interleaved Codes: Performance Analysis, Design and Iterative Decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 909-926, May.
- Benedetto, S., Mondin, M., and Montorsi, G. (1994). "Performance Evaluation of Trellis-Coded Modulation Schemes," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 833-855, June.
- Benedetto, S. and Montorsi, G. (1996). "Unveiling Turbo Codes: Some Results on Parallel Concatenated Coding Schemes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, pp. 409-428, March.
- Bennett, W. R. and Davey, J. R. (1965). *Data Transmission*, McGraw-Hill, New York.
- Bennett, W. R. and Rice, S. O. (1963). "Spectral Density and Autocorrelation Functions Associated with Binary Frequency-Shift Keying," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 42, pp. 2355-2385, September.
- Bensley, S. E. and Aazhang, B. (1996). "Subspace-Based Channel Estimation for Code-Division Multiple Access Communication Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, pp. 1009-1020, August.
- Benveniste, A. and Goursat, M. (1984). "Blind Equalizers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-32, pp. 871-883, August.
- Berger, T. (1971). *Rate Distortion Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Berger, T. and Oibson, J. D. (1998). "Lossy Source Coding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2693-2723, October.

- Berger, T. and Tufts, D. W. (1967). "Optimum Pulse Amplitude Modulation, Part I: Transmitter-Receiver Design and Bounds from Information Theory," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp. 196-208.
- Bergmans, J. W. M. (1995). "Efficiency of Data-Aided Timing Recovery Techniques," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, pp. 1397-1408, September.
- Bergmans, J. W. M., Rajput, S. A., and Van DeLaar, F. A. M. (1987). "On the Use of Decision Feedback for Simplifying the Viterbi Detector," *Philips J. Research*, vol. 42, no. 4, pp. 399-428.
- Bergmans, P. P. and Cover, T. M. (1974). "Cooperative Broadcasting," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 317-324, May.
- Berlekamp, E. R. (1968). *Algebraic Coding Theory*, McGraw-Hill, New York.
- Berlekamp, E. R. (1973). "Goppa Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-19, pp. 590-592.
- Berlekamp, E. R. (1974). *Key Papers in the Development of Coding Theory*, IEEE Press, New York.
- Berrou, C. and Glavieux, A. (1996). "Near Optimum Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, pp. 1261-1271.
- Berrou, C., Glavieux, A., and Thitimajshima, P. (1993). "Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes," *Proc. IEEE Int. Conf. Commun.*, pp. 1064-1070, May, Geneva, Switzerland.
- Bierman, G. J. (1977). *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*, Academic, New York.
- Biglieri, E., Divsalar, D., McLane, P. J., and Simon, M. K. (1991). *Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications*, Macmillan, New York.
- Biglieri, E., Proakis, J. G., and Shamai, S. (1998). "Fading Channels: Information-Theoretic and Communications Aspects," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2619-2692, October.
- Bingham, J. A. C. (1990). "Multicarrier Modulation for Data Transmission: An Idea Whose Time Has Come," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 28, pp. 5-14, May.
- Bjerke, B. A. and Proakis, J. G. (1999). "Multiple Antenna Diversity Techniques for Transmission over Fading Channels," *Proc. WCNC'99*, September, New Orleans, LA.
- Blahut, R. E. (1983). *Theory and Practice of Error Control Codes*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Blahut, R. E. (1987). *Principles and Practice of Information Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Blahut, R. E. (1990). *Digital Transmission of Information*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Bose, R. C. and Ray-Chaudhuri, D. K. (1960a). "On a Class of Error Correcting Binary Group Codes," *Inform. Control*, vol. 3, pp. 68-79, March.
- Bose, R. C. and Ray-Chaudhuri, D. K. (1960b). "Further Results in Error Correcting Binary Group Codes," *Inform. Control*, vol. 3, pp. 279-290, September.
- Boyd, S. (1986). "Multitone Signals with Low Crest Factor," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. CAS-33, pp. 1018-1022.
- Brennan, D. G. (1959). "Linear Diversity Combining Techniques," *Proc. IRE.*, vol. 47, pp. 1075-1102.
- Bucher, E. A. (1980). "Coding Options for Efficient Communications on Non-Stationary Channels," *Rec. IEEE Int. Conf. Commun.*, pp. 4.1.1-4.1.7.
- Buehrer, R. M., Nicoloso, S. P., and Gollamudi, S. (1999). "Linear versus Nonlinear Interference Cancellation," *J. Commun. and Networks*, vol. 1, pp. 118-133, June.

- Buehrer, R. M. and Woerner, B. D. (1966). "Analysis of Multistage Interference Cancellation for CDMA Using an Improved Gaussian Approximation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, pp. 1308-1316, October.
- Burton, H. O. (1969). "A Class of Asymptotically Optimal Burst Correcting Block Codes," *Proc. ICC*, Boulder, CO, June.
- Bussgang, J. J. (1952). "Crosscorrelation Functions of Amplitude-Distorted Gaussian Signals," MIT RLE Tech. Report 216.
- Buzo, A., Gray, A. H., Jr., Gray, R. M., and Markel, J. D. (1980). "Speech Coding Based Upon Vector Quantization," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-28, pp. 562-574, October.
- Cahn, C. R. (1960). "Combined Digital Phase and Amplitude Modulation Communication Systems," *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-8, pp. 150-155, September.
- Cain, J. B., Clark, G. C., and Geist, J. M. (1979). "Punctured Convolutional Codes of Rate $(n-1)/n$ and Simplified Maximum Likelihood Decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-25, pp. 97-100, January.
- Caire, G., Taricco, G., and Biglieri, E. (1998). "Bit-Interleaved Coded Modulation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 927-946, May.
- Calderbank, A. R. (1998). "The Art of Signalling: Fifty Years of Coding Theory," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2561-2595, October.
- Calderbank, A. R. and Sloane, N. J. A. (1987). "New Trellis Codes Based on Lattices and Cosets," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-33, pp. 177-195, March.
- Campanella, S. J. and Robinson, G. S. (1971). "A Comparison of Orthogonal Transformations for Digital Speech Processing," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-19, pp. 1045-1049, December.
- Campopiano, C. N. and Glazer, B. G. (1962). "A Coherent Digital Amplitude and Phase Modulation Scheme," *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-10, pp. 90-95, June.
- Capetanakis, J. I. (1979). "Tree Algorithms for Packet Broadcast Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-25, pp. 505-515, September.
- Caraiscos, C. and Liu, B. (1984). "A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 34-41, January.
- Carayannis, G., Manolakis, D. G., and Kalouptsidis, N. (1983). "A Fast Sequential Algorithm for Least-Squares Filtering and Prediction," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 1394-1402, December.
- Carayannis, G., Manolakis, D. G., and Kalouptsidis, N. (1986). "A Unified View of Parametric Processing Algorithms for Prewindowed Signals," *Signal Processing*, vol. 10, pp. 335-368, June.
- Carleial, A. B. and Hellman, M. E. (1975). "Bistable Behavior of ALOHA-Type Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-23, pp. 401-410, April 1975.
- Carlson, A. B. (1975). *Communication Systems*, McGraw-Hill, New York.
- Chang, D. Y., Gersho, A., Ramamurthi, B., and Shohan, Y. (1984). "Fast Search Algorithms for Vector Quantization and Pattern Matching," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, paper 9.11, San Diego, CA, March.
- Chang, R. W. (1966). "Synthesis of Band-Limited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 1775-1796, December.
- Chang, R. W. (1971). "A New Equalizer Structure for Fast Start-up Digital Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 50, pp. 1969-2001.
- Charash, U. (1979). "Reception Through Nakagami Fading Multipath Channels with Random Delays," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-27, pp. 657-670, April.

- Chase, D. (1972). "A Class of Algorithms for Decoding Block Codes with Channel Measurement Information," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 170-182, January.
- Chase, D. (1976). "Digital Signal Design Concepts for a Time-Varying Ricean Channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 164-172, February.
- Chevillat, P. R. and Eleftheriou, E. (1989). "Decoding of Trellis-Encoded Signals in the Presence of Intersymbol Interference and Noise," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, pp. 669-676, July.
- Chevillat, P. R. and Eleftheriou, E. (1988). "Decoding of Trellis-Coded Signals in the Presence of Intersymbol Interference and Noise," *Conf. Rec. ICC'88*, pp. 23.1.1-23.1.6, June, Philadelphia, PA.
- Chien, R. T. (1964). "Cyclic Decoding Procedures for BCH Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-10, pp. 357-363, October.
- Chow, J. S., Tu, J. C., and Cioffi, J. M. (1991). "A Discrete Multitone Transceiver System for HDSL Applications," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. SAC-9, pp. 895-908, August.
- Chow, J. S., Cioffi, J. M., and Bingham, J. A. C. (1995). "A Practical Discrete Multitone Transceiver Loading Algorithm for Data Transmission over Spectrally Shaped Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, pp. 773-775, February/March/April.
- Chyi, G. T., Proakis, J. G., and Keller, C. M. (1988). "Diversity Selection/Combining Schemes with Excess Noise-Only Diversity Reception Over a Rayleigh-Fading Multipath Channel." *Proc. Conf. Inform. Sci. Syst.*, Princeton University Princeton, NJ, March.
- Cioffi, J. M. and Kailath, T. (1984a). "Fast Recursive-Least Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 304-337, April.
- Cioffi, J. M. and Kailath, T. (1984b). "An Efficient Exact-Least-Squares Fractionally Spaced Equalizer Using Intersymbol Interpolation," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. 2, pp. 743-756, September.
- Clark, A. P., Abdullah, S. N., Jayasinghe, S. J., and Sun, K. H. (1985). "Pseudobinary and Pseudoquaternary Detection Processes for Linearly Distorted Multilevel QAM Signals," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-33, pp. 639-645, July.
- Clark, A. P. and Clayden, M. (1984). "Pseudobinary Viterbi Detector," *Proc. IEE*, vol. 131, part F, pp. 280-218, April.
- Cook, C. E., Ellersick, F. W., Milstien, L. B., and Schilling, D. L. (1983). *Spread Spectrum Communications*, IEEE Press, New York.
- Costas, J. P. (1956). "Synchronous Communications," *Proc. IRE*, vol. 44, pp. 1713-1718, December.
- Costello, D. J., Jr., Hagenauer, J., Imai, H., and Wicker, S. B. (1998). "Applications of Error-Control Coding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2531-2560, October.
- Cover, T. M. (1972). "Broadcast Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 2-14, January.
- Cover, T. M. (1998). "Comments on Broadcast Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2524-2530, October.
- Cover, T. and Thomas, J. (1991). *Elements of Inform. Theory*, Wiley, New York.
- Cramér, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

- Daneshgaran, F. and Mondin, M. (1999). "Design of Interleavers for turbo codes: Iterative Interleaver Growth Algorithms of Polynomial Complexity," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, pp. 1845-1859, September.
- Daut, D. G., Modestino, J. W., and Wismer, L. D. (1982). "New Short Constraint Length Convolutional Code Construction for Selected Rational Rates," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 793-799, September.
- Davenport, W. B., Jr. (1970). *Probability and Random Processes*, McGraw-Hill, New York.
- Davenport, W. B., Jr. and Root, W. L. (1958). *Random Signals and Noise*, McGraw-Hill, New York.
- Davisson, L. D. (1973). "Universal Noiseless Coding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-19, pp. 783-795.
- Davisson, L. D., McEliece, R. J., Pursley, M. B., and Wallace, M. S. (1981). "Efficient Universal Noiseless Source codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-27, pp. 269-279.
- deBuda, R. (1972). "Coherent Demodulation of Frequency Shift Keying with Low Deviation Ratio," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-20, pp. 429-435, June.
- Deller, J. P., Proakis, J. G., and Hansen, H. L. (2000). *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, IEEE Press, New York.
- Ding, Z. (1990). *Application Aspects of Blind Adaptive Equalizers in QAM Data Communications*, Ph.D. Thesis, Department of Electrical Engineering, Cornell University.
- Ding, Z., Kennedy, R. A., Anderson, B. D. O., and Johnson, C. R. (1989). "Existence and Avoidance of Ill-Convergence of Godard Blind Equalizers in Data Communication Systems," *Proc. 23rd Conf. on Inform. Sci. Systems.*, Baltimore, MD.
- Divsalar, D., Simon, M. K., and Raphelli, D. (1998). "Improved Parallel Interference Cancellation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, pp. 258-268, February.
- Divsalar, D., Simon, M. K., and Yuen, J. H. (1987). "Trellis Coding with Asymmetric Modulation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-35, pp. 130-141, February.
- Divsalar, D. and Yuen, J. H. (1984). "Asymmetric MPSK for Trellis Codes," *Proc. GLOBECOM'84*, pp. 20.6.1-20.6.8, Atlanta, GA, November.
- Dixon, R. C. (1976). *Spread Spectrum Techniques*, IEEE Press, New York.
- Dobrushin, R.L. and Lupanova, O.B. (1963). *Papers in Information Theory and Cybernetics* (in Russian), Edited by Dobrushin and Lupanova, Izd. Inostr. Lit., Moscow.
- Doelz, M. L., Heald, E. T., and Martin, D. L. (1957). "Binary Data Transmission Techniques for Linear Systems," *Proc. IRE*, vol. 45, pp. 656-661, May.
- Douillard, C., Jézéquel, M., Berrou, C., Picart, A., Didier, P., and Glavieux, A. (1995). "Iterative Correction of Intersymbol Interference: Turbo-equalization," *ETT European Trans. Telecommun.* vol. 6, pp. 507-511, September/October.
- Drouilhet, P. R., Jr. and Bernstein, S. L. (1969). "TATS—A Bandspread Modulation-Demodulation System for Multiple Access Tactical Satellite Communication," *1969 IEEE Electronics and Aerospace Systems (EASCON) Conv. Record*, Washington, DC, pp. 126-132, October 27-29.
- Duel-Hallen, A. and Heegard, C. (1989). "Delayed Decision-Feedback Sequence Estimation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, pp. 428-436, May.
- Duffy, F. P. and Tratcher, T. W. (1971). "Analog Transmission Performance on the Switched Telecommunications Network," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 50, pp. 1311-1347, April.

- Duman, T. M. and Salehi, M. (1997). "New Performance Bounds for Turbo codes," *Proc. GLOBECOM '97*, pp. 634-638, November, Phoenix, AZ.
- Durbin, J. (1959). "Efficient Estimation of Parameters in Moving-Average Models," *Biometrika*, vol. 46, parts 1 and 2, pp. 306-316.
- Duttweiler, D. L. Mazo, J. E., and Messerschmitt, D. G. (1974). "Error Propagation in Decision-Feedback Equalizers," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 490-497, July.
- Eleftheriou, E. and Falconer, D. D. (1987). "Adaptive Equalization Techniques for HF Channels," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. SAC-5, pp. 238-247, February.
- El Gamal, A. and Cover, T. M. (1980). "Multiple User Information Theory," *Proc. IEEE*, vol. 68, pp. 1466-1483, December.
- Elias, P. (1954). "Error-Free Coding," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-4, pp. 29-37, September.
- Elias, P. (1955). "Coding for Noisy Channels," *IRE Convention Record*, vol. 3, part 4, pp. 37-46.
- Esposito, R. (1967). "Error Probabilities for the Nakagami Channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp. 145-148, January.
- Eyuboglu, M. V. (1988). "Detection of Coded Modulation Signals on Linear, Severely Distorted Channels Using Decision-Feedback Noise Prediction with Interleaving," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-36, pp. 401-409, April.
- Eyuboglu, M. V. and Qureshi, S. U. H. (1989). "Reduced-State Sequence Estimation for Coded Modulation on Intersymbol Interference Channels," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. 7, pp. 989-955, August.
- Eyuboglu, M. V., Qureshi, S. U., and Chen, M. P. (1988). "Reduced-State Sequence Estimation for Trellis-Coded Modulation on Intersymbol Interference Channels," *Proc. GLOBECOM '88*, pp., November, Hollywood, FL.
- Eyuboglu, M. V. and Qureshi, S. U. (1988). "Reduced-State Sequence Estimation with Set Partitioning and Decision Feedback," *IEEE Trans. Commun.* vol. 36, pp. 13-20, January.
- Falconer, D. D. (1976). "Jointly Adaptive Equalization and Carrier Recovery in Two-Dimensional Digital Communication Systems," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 55, pp. 317-334, March.
- Falconer, D. D. and Ljung, L. (1978). "Application of Fast Kalman Estimation to Adaptive Equalization," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-26, pp. 1439-1446, October.
- Falconer, D. D. and Magee, F. R. (1973). "Adaptive Channel Memory Truncation for Maximum Likelihood Sequence Estimation," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 52, pp. 1541-1562, November.
- Falconer, D. D. and Salz, J. (1977). "Optimal Reception of Digital Data Over the Gaussian Channel with Unknown Delay and Phase Jitter," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-23, pp. 117-126, January.
- Fano, R. M. (1961). *Transmission of Information*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Fano, R. M. (1963). "A Heuristic Discussion of Probabilistic Decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-9, pp. 64-74, April.
- Feinstein, A. (1958). *Foundations of Information Theory*, McGraw-Hill, New York.
- Fire, P. (1959). "A Class of Multiple-Error-Correcting Binary Codes for Non-Independent Errors," Sylvania Report No. RSL-E-32, Sylvania Electronic Defense Laboratory, Mountain view, CA, March.

- Fischer, R. F. H. and Huber, J. B. (1996). "A New Loading Algorithm for Discrete Multitone Transmission," *Proc. IEEE GLOBECOM'96*, pp. 724-728, November, London.
- Flanagan, J. L., et al. (1979). "Speech Coding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-27, pp. 710-736, April.
- Forney, G. D., Jr. (1965). "On Decoding BCH Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-11, pp. 549-557, October.
- Forney, G. D., Jr. (1966a). *Concatenated Codes*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Forney, G. D., Jr. (1966b). "Generalized Minimum Distance Decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-12, pp. 125-131, April.
- Forney, G. D., Jr. (1968). "Exponential Error Bounds for Erasure, List, and Decision-Feedback Schemes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-14, pp. 206-220, March.
- Forney, G. D., Jr. (1970a). "Coding and Its Application in Space Communications," *IEEE Spectrum*, vol. 7, pp. 47-58, June.
- Forney, G. D., Jr. (1970b). "Convolutional Codes I: Algebraic Structure," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-16, pp. 720-738, November.
- Forney, G. D., Jr. (1971). "Burst Correcting Codes for the Classic Bursty Channel," *IEEE Trans. Commun. Techn.*, vol. COM-19, pp. 772-781, October.
- Forney, G. D., Jr. (1972). "Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 363-378, May.
- Forney, G. D., Jr. (1974). "Convolutional Codes III: Sequential Decoding," *Inform. Control*, vol. 25, pp. 267-297, July.
- Forney, G. D., Jr. (1988). "Coset Codes I: Introduction and Geometrical Classification," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-34, pp. 671-680, September.
- Forney, G. D., Jr., Gallager, R. G., Lang, G. R., Longstaff, F. M., and Qureshi, S. U. (1984). "Efficient Modulation for Band-Limited Channels," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. SAC-2, pp. 632-647, September.
- Forney, G. D., Jr. and Ungerboeck, G. (1998). "Modulation and Coding for Linear Gaussian Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2384-2415, October.
- Foschini, G. J. (1977). "A Reduced State Variant of Maximum Likelihood Sequence Detection Attaining Optimum Performance for High Signal-to-Noise Ratios," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 23, pp. 605-609.
- Foschini, G. J. (1984). "Contrasting Performance of Faster-Binary Signaling with QAM," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 63, pp. 1419-1445, October.
- Foschini, G. J. (1985). "Equalizing Without Altering or Detecting Data," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 64, pp. 1885-1911, October.
- Foschini, G. J. and Gans, M. J. (1998). "On Limits of Wireless Communications in a Fading Environment When Using Multiple Antennas," *Wireless Personal Commun.*, pp. 311-335, June.
- Foschini, G. J., Gitlin, R. D., and Weinstein, S. B. (1974). "Optimization of Two-Dimensional Signal Constellations in the Presence of Gaussian Noise," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-22, pp. 28-38, January.
- Franaszek, P. A. (1968). "Sequence-State Coding for Digital Transmission," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, p. 143.
- Franaszek, P. A. (1969). "On Synchronous Variable Length Coding for Discrete Noiseless Channels," *Inform. Control*, vol. 15, pp. 155-164.
- Franaszek, P. A. (1970). "Sequence-State Methods for Run-Length-Limited Coding," *IBM J. Res. Dev.*, pp. 376-383, July.
- Franks, L. E. (1969). *Signal Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ.

- Franks, L. E. (1983). "Carrier and Bit Synchronization in Data Communication—A Tutorial Review," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 1107–1121, August.
- Franks, L. E. (1981). "Synchronization Subsystems: Analysis and Design," in *Digital Communications, Satellite/Earth Station Engineering*, K. Feher (ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Franks, L. E. (1980). "Carrier and Bit Synchronization in Data Communication—A Tutorial Review," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 1107–1120, August.
- Fredricsson, S. (1974). "Optimum Transmitting Filter in Digital PAM Systems with a Viterbi Detector," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 20, pp. 479–489.
- Fredricsson, S. (1975). "Pseudo-Randomness Properties of Binary Shift Register Sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-21, pp. 115–120, January.
- Freiman, C. E. and Wyner, A. D. (1964). "Optimum Block Codes for Noiseless Input Restricted Channels," *Inform. Control*, vol. 7, pp. 398–415.
- Frenger, P., Orten, P., Ottosson, T., and Svensson, A. (1998). "Multirate convolutional Codes," Tech. Report No. 21, Communication Systems Group, Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, April.
- Gardner, N. T. (1971). "Signal Design for Fast-Fading Gaussian Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-17, pp. 247–256, May.
- Gabor, A. (1967). "Adaptive Coding for Self Clocking Recording," *IEEE Trans. Electronic Comp.* vol. EC-16, p. 866.
- Gallager, R. G. (1965). "Simple Derivation of the Coding Theorem and Some Applications," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-11, pp. 3–18, January.
- Gallager, R. G. (1968). *Information Theory and Reliable Communication*, Wiley, New York.
- Gardner, F. M. (1979). *Phaselock Techniques*, Wiley, New York.
- Gardner, W. A. (1984). "Learning Characteristics of Stochastic-Gradient Descent Algorithms: A General Study, Analysis, and Critique," *Signal Processing*, vol. 6, pp. 113–133, April.
- Garg, V. K., Smolik, K., and Wilkes, J. E. (1997). *Applications of CDMA in Wireless/Personal Communications*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Garth, L. M. and Poor, H. V. (1992). "Narrowband Interference Suppression in Impulsive Channels," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Sys.*, vol. 28, pp. 81–89, January.
- George, D. A., Bowen, R. R., and Storey, J. R. (1971). "An Adaptive Decision-Feedback Equalizer," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-19, pp. 281–293, June.
- Gersho, A. (1982). "On the Structure of Vector Quantizers," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 157–166, March.
- Gersho, A. and Gray, R. M. (1992). *Vector Quantization and Signal Compression*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Gersho, A. and Lawrence, V. B. (1984). "Multidimensional Signal Constellations for Voiceband Data Transmission," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. SAC-2, pp. 687–702, September.
- Gerst, J. and Diamond, J. (1961). "The Elimination of Intersymbol Interference by Input Pulse Shaping," *Proc. IRE*, vol. 53, July.
- Ghez, S., Verdu, S., and Schwartz, S. C. (1988). "Stability Properties of Slotted Aloha with Multipacket Reception Capability," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 33, pp. 640–649, July.
- Ghosh, M. and Weber, C. L. (1991). "Maximum Likelihood Blind Equalization," *Proc. 1991 SPIE Conf.*, San Diego, CA, July.

- Giannakis, G. B. (1987). "Cumulants: A Powerful Tool in Signal Processing," *Proc. IEEE*, vol. 75, pp. 1333-1334, September.
- Giannakis, G. B. and Mendel, J. M. (1989). "Identification of Nonminimum Phase Systems Using Higher-Order Statistics," *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, vol. 37, pp. 360-377, March.
- Gilbert, E. N. (1952). "A Comparison of Signaling Alphabets," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 31, pp. 504-522, May.
- Gilhousen, K. S., Jacobs, I. M., Podovani, R., Viterbi, A. J., Weaver, L. A., and Wheatley, G. E. III (1991). "On the Capacity of a Cellular CDMA System," *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, vol. 40, pp. 303-312, May.
- Gitlin, R. D., Meadors, H. C., and Weinstein, S. B. (1982). "The Tap Leakage Algorithm: An Algorithm for the Stable Operation of a Digitally Implemented Fractionally Spaced, Adaptive Equalizer," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 61, pp. 1817-1839, October.
- Gitlin, R. D. and Weinstein, S. B. (1979). "On the Required Tap-Weight Precision for Digitally Implemented Mean-Squared Equalizers," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp. 301-321, February.
- Gitlin, R. D. and Weinstein, S. B. (1981). "Fractionally-Spaced Equalization: An Improved Digital Transversal Equalizer," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 60, pp. 275-296, February.
- Glave, F. E. (1972). "An Upper Bound on the Probability of Error due to Intersymbol Interference for Correlated Digital Signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 356-362, May.
- Goblick, T. J., Jr. and Holsinger, J. L. (1967). "Analog Source Digitization: A Comparison of Theory and Practice," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp. 323-326, April.
- Godard, D. N. (1974). "Channel Equalization Using a Kalman Filter for Fast Data Transmission," *IBM J. Res. Dev.*, vol. 18, pp. 267-273, May.
- Godard, D. N. (1980). "Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communications Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 1867-2875, November.
- Golay, M. J. E. (1949). "Note on Digital Coding," *Proc. IRE*, vol. 37, p. 657, June.
- Gold, R. (1967). "Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp. 619-621, October.
- Gold, R. (1968). "Maximal Recursive Sequences with 3-Valued Recursive Cross Correlation Functions," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-14, pp. 154-156, January.
- Golomb, S. W. (1967). *Shift Register Sequences*, Holden-Day, San Francisco, CA.
- Goppa, V. D. (1970). "New Class of Linear Correcting Codes," *Probl. Peredach. Inform.*, vol. 6, pp. 24-30.
- Goppa, V. D. (1971). "Rational Presentation of Codes and (L, g) -codes," *Probl. Peredach. Inform.*, vol. 7, pp. 41-49.
- Gray, R. M. (1975). "Sliding Block Source Coding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-21, pp. 357-368, July.
- Gray, R. M. (1990). *Source Coding Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Gray, R. M. and Neuhoﬀ, D. L. (1998). "Quantization," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2325-2383, October.
- Greefkes, J. A. (1970). "A Digitally Companded Delta Modulation Modem for Speech Transmission," *Proc. IEEE Int. Conf. on Commun.*, pp. 7.33-7.48, June.

- Green, P. E., Jr. (1962). "Radar Astronomy Measurement Techniques," MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA. Tech. Report No. 282, December.
- Gronemeyer, S. A. and McBride, A. L. (1976). "MSK and Offset QPSK Modulation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 809-820, August.
- Gupta, S. C. (1975). "Phase-Locked Loops," *Proc. IEEE*, vol. 63, pp. 291-306, February.
- Haccoun, D. and Bégin, G. (1989). "High-Rate Punctured Convolutional Codes for Viterbi and Sequential Decoding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, pp. 1113-1125, November.
- Hagenauer, J. (1988). "Rate Compatible Punctured Convolutional Codes and Their Applications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 36, pp. 389-400, April.
- Hagenauer, J. and Hoehner, P. (1989). "A Viterbi Algorithm with Soft-Decision Outputs and its Applications," *Proc. IEEE GLOBECOM Conf.*, pp. 1680-1686, November, Dallas, TX.
- Hagenauer, J., Offer, E., Méasson, C., and Mörz, M. (1999). "Decoding and Equalization with Analog Non-Linear Networks," *European Trans. Telecommun.*, vol. 10, pp. 659-680, November/December.
- Hagenauer, J., Offer, E., and Papke, L. (1996). "Iterative Decoding of Binary Block and Convolutional Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-42, pp. 429-445, March.
- Hagenauer, J., Seshadri, N., and Sundberg, C.-E. (1990). "The Performance of Rate-Compatible Punctured Convolutional Codes for Digital Mobile Radio," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, pp. 966-980, July.
- Hahn, P. M. (1962). "Theoretical Diversity Improvement in Multiple Frequency Shift Keying," *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-10, pp. 177-184, June.
- Hamming, R. W. (1950). "Error Detecting and Error Correcting Codes," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 29, pp. 147-160, April.
- Hamming, R. W. (1986). *Coding and Information Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Hancock, J. C. and Lucky, R. W. (1960). "Performance of Combined Amplitude and Phase-Modulated Communication Systems," *IRE Trans. Commun. syst.*, vol. CS-8, pp. 232-237, December.
- Harashima, H. and Miyakawa, H. (1972). "Matched-Transmission Technique for Channels with Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-20, pp. 774-780.
- Hartley, R. V. (1928). "Transmission of Information," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 7, p. 535.
- Hatzinakos, D. and Nikias, C. L. (1991). "Blind Equalization Using a Tricestrum-Based Algorithm," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-39, pp. 669-682, May.
- Haykin, S. (1996). *Adaptive Filter Theory*, 3rd ed., Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.
- Hecht, M. and Guida, A. (1969). "Delay Modulation," *Proc. IEEE*, vol. 57, pp. 1314-1316, July.
- Heegard, C. and Wicker, S. B. (1990). *Turbo Coding*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
- Heller, J. A. (1968). "Short Constraint Length Convolutional Codes," Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, CA *Space Program Summary* 37-54, vol. 3, pp. 171-174, December.
- Heller, J. A. (1975). "Feedback Decoding of Convolutional Codes," in *Advances in Communication Systems*, vol. 4, A. J. Viterbi (ed.), Academic, New York.

- Heller, J. A. and Jacobs, I. M. (1971). "Viterbi Decoding for Satellite and Space Communication," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-19, pp. 835-848, October.
- Helstrom, C. W. (1955). "The Resolution of Signals in White Gaussian Noise," *Proc. IRE*, vol. 43, pp. 1111-1118, September.
- Helstrom, C. W. (1968). *Statistical Theory of Signal Detection*, Pergamon, London.
- Helstrom, C. W. (1991). *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, Macmillan, New York.
- Hildebrand, F. B. (1961). *Methods of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Hirosaki, B. (1981). "An Orthogonality Multiplexed QAM System Using the Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp. 982-989, July.
- Hirosaki, B., Hasegawa, S., and Sabato, A. (1986). "Advanced Group-Band Modem Using Orthogonally Multiplexed QAM Techniques," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-34, pp. 587-592, June.
- Ho, E. Y. and Yeh, Y. S. (1970). "A New Approach for Evaluating the Error Probability in the Presence of Intersymbol Interference and Additive Gaussian Noise," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 49, pp. 2249-2265, November.
- Hocquenghem, A. (1959). "Codes Correcteurs d'Erreurs," *Chiffres*, vol. 2, pp. 147-156.
- Hole, K. J. (1988). "New Short Constraint Length Rate $(n=1)/n$ Punctured Convolutional Codes for Soft-Decision Viterbi Decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 34, pp. 1079-1081, September.
- Holmes, J. K. (1982). *Coherent Spread Spectrum Systems*, Wiley-Interscience, New York.
- Honig, M. L. (1998). "Adaptive Linear Interference Suppression for Packet DS-CDMA," *European Trans. Telecommun. (ETT)*, vol. 9, pp. 173-181, March-April.
- Honig, M. L., Madhow, U., and Verdu, S. (1995). "Blind Adaptive Multiuser Detection," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, pp. 944-960, July.
- Horwood, D. and Gagliardi, R. (1975). "Signal Design for Digital Multiple Access Communications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-23, pp. 378-383, March.
- Hsu, F. M. (1982). "Square-Root Kalman Filtering for High-Speed Data Received over Fading Dispersive HF Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 753-763, September.
- Huffman, D. A. (1952). "A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes," *Proc. IRE*, vol. 40, pp. 1098-1101, September.
- Hui, J. Y. N. (1984). "Throughput Analysis for Code Division Multiple Accessing of the Spread Spectrum Channel," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. SAC-2, pp. 482-486, July.
- Im, G. H. and Un, C. K. (1987). "A Reduced Structure of the Passband Fractionally-Spaced Equalizer," *Proc. IEEE*, vol. 75, pp. 847-849, June.
- Immink, K. A. S. (1990). "Runlength-Limited Sequences," *Proc. IEEE*, vol. 78, pp. 1745-1759, November.
- Immink, K. A. S., Siegel, P. H., and Wolf, J. K. (1998). "Codes for Digital Recorder," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2260-2299, October.
- Itakura, F. (1975). "Minimum Prediction Residual Principle Applied to Speech Recognition," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-23, pp. 67-72, February.
- Itakura, F. and Saito, S. (1968). "Analysis Synthesis Telephony Based on the Maximum-Likelihood Methods," *Proc. 6th Int. Congr. Acoust.*, Tokyo, Japan, pp. C17-C20.
- Jacobs, I. M. (1974). "Practical Applications of Coding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 305-310, May.

- Jacoby, G. V. (1977). "A New Look-ahead Code for Increased Data Density," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. MAG-13, pp. 1202-1204.
- Jakes, W. C. (1974). *Microwave Mobile Communications*, Wiley, New York.
- Jayant, N. S. (1970). "Adaptive Delta Modulation with a One-Bit Memory," *Bell Syst. Tech. J.*, pp. 321-342, March.
- Jayant, N. S. (1974). "Digital Coding of Speech Waveforms: PCM, DPCM, and DM Quantizers," *Proc. IEEE*, vol. 62, pp. 611-632, May.
- Jayant, N. S. (1976). *Waveform Quantization and Coding*, IEEE Press, New York.
- Jayant, N. S. (1990). "High Quality Coding of Telephone Speech and Wideband Audio," *IEEE Commun. Mag.* vol. 28, pp. 10-20, January.
- Jayant, N. S. and Noll, P. (1984). *Digital Coding of Waveforms*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Jelinek, F. (1968). *Probabilistic Information Theory*, McGraw-Hill, New York.
- Jelinek, F. (1969). "Fast Sequential Decoding Algorithm Using a Stack," *IBM J. Res. Dev.*, vol. 13, pp. 675-685, November.
- Johannesson, R. and Zigangirov, K. S. (1999). *Fundamentals of Convolutional Coding*, IEEE Press, New York.
- Johnson, C. R. (1991). "Admissibility in Blind Adaptive Channel Equalization," *IEEE Control Syst. Mag.*, pp. 3-15, January.
- Jones, A. E., Wilkinson, T. A., and Barton, S. K. (1994). "Block Coding Scheme for Reduction of Peak-to-Mean Envelope Power Ratio of Multicarrier Transmission Schemes," *Electr. Lett.*, vol. 30, pp. 2098-2099, December.
- Jones, S. K., Cavin, R. K., and Reed, W. M. (1982). "Analysis of Error-Gradient Adaptive Linear Equalizers for a Class of Stationary-Dependent Process," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 318-329, March.
- Jordan, K. L., Jr. (1966). "The Performance of Sequential Decoding in Conjunction with Efficient Modulation," *IEEE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-14, pp. 283-287, June.
- Justesen, J. (1972). "A Class of Constructive Asymptotically Good Algebraic Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 652-656, September.
- Kailath, T. (1960). "Correlation Detection of Signals Perturbed by a Random Channel," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-6, pp. 361-366, June.
- Kailath, T. (1961). "Channel Characterization: Time-Variant Dispersive Channels, in *Lectures on Communication System Theory*, chap. 6, E. Baghdady (ed.), McGraw-Hill, New York.
- Kalet, I. (1989). "The Multitone Channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-37, pp. 119-124, February.
- Karabed, R. and Siegel, P. H. (1991). "Matched-Spectral Null Codes for Partial-Response Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-37, pp. 818-855, May.
- Kasami, T. (1966). "Weight Distribution Formula for Some Class of Cyclic Codes," *Coordinated Science Laboratory, University of Illinois, Urbana, IL, Tech. Report No. R-285*, April.
- Kawas Kalet, G. (1989). "Simple Coherent Receivers for Partial Response Continuous Phase Modulation," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. 7, pp. 1427-1436, December.
- Kaye, A. R. and George, D. A. (1970). "Transmission of Multiplexed PAM Signals over Multiple Channel and Diversity Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-18, pp. 520-525, October.
- Kelly, E. J., Reed, I. S., and Root, W. L. (1960). "The Detection of Radar Echoes in Noise, Pt. I," *J. SIAM*, vol. 8, pp. 309-341, September.

- Ketchum, J. and Proakis, J. G. (1982). "Adaptive Algorithms for Estimating and Suppressing Narrowband Interference in PN Spread Spectrum Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-30, pp. 913-924, May.
- Kleinrock, L. and Tobagi, F. A. (1975). "Packet Switching in Radio Channels: Part I—Carrier Sense Multiple-Access Modes and Their Throughput-Delay Characteristics," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-23, pp. 1400-1416, December.
- Klovsky, D. and Nikolaev, B. (1978) *Sequential Transmission of Digital Information in the Presence of Intersymbol Interference*, Mir Publishers, Moscow.
- Kobayashi, H. (1971). "Simultaneous Adaptive Estimation and Decision Algorithm for Carrier Modulated Data Transmission Systems," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-19, pp. 268-280, June.
- Kolmogorov, A.N. (1939). "Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 208, p. 2043.
- Kotelnikov, V. A. (1947). "The Theory of Optimum Noise Immunity," Ph.D. Dissertation, Molotov Energy Institute, Moscow. [Translated by R. A. Silverman, McGraw-Hill, New York.]
- Kretzmer, E. R. (1966). "Generalization of a Technique for Binary Data Communication," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-14, pp. 67-68, February.
- Larsen, K. J. (1973). "Short Convolutional Codes with Maximal Free Distance for Rates $1/2$, $1/3$, and $1/4$," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-19, pp. 371-372, May.
- Laurent, P. A. (1986). "Exact and Approximate Construction of Digital Phase Modulations by Superposition of Amplitude Modulated Pulses," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-34, pp. 150-160, February.
- Lee, P. J. (1988). "Construction of Rate $(n-1)/n$ Punctured Convolutional Codes with Minimum Required SNR Criterion," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 36, pp. 1171-1174, October.
- Lee, W. U. and Hill, F. S. (1977). "A Maximum-Likelihood Sequence Estimator with Decision-Feedback Equalizer," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 25, pp. 971-979, September.
- LeGoff, S., Glavieux, A., and Berrou, C. (1994). "Turbo-codes and High Spectral Efficiency Modulation," *Proc. Int. Conf. Commun. (ICC '94)*, pp. 645-649, May, New Orleans, LA.
- Lender, A. (1963). "The Duobinary Technique for High Speed Data Transmission," *AIEE Trans. Commun. Electronics*, vol. 82, pp. 214-218.
- Leon-Garcia, A. (1994). *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Levinson, N. (1947). "The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction," *J. Math. and Phys.*, vol. 25, pp. 261-278.
- Lin, S. and Costello, D. J., Jr. (1983). *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Linde, Y., Buzo, A., and Gray, R. M. (1980). "An Algorithm for Vector Quantizer Design," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 84-95, January.
- Lindell, G. (1985). "On Coded Continuous Phase Modulation," Ph.D. Dissertation, Telecommunication Theory, University of Lund, Lund, Sweden, May.
- Lindholm, J. H. (1968). "An Analysis of the Pseudo-Randomness Properties of Subsequences of Long m -Sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-14, pp. 569-576, July.
- Lindsey, W. C. (1964). "Error Probabilities for Ricean Fading Multichannel Reception of Binary and N -Ary Signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-10, pp. 339-350, October.

- Lindsey, W. C. (1972). *Synchronization Systems in Communications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Lindsey, W. C. and Chie, C. M. (1981). "A Survey of Digital Phase-Locked Loops," *Proc. IEEE*, vol. 69, pp. 410-432.
- Lindsey, W. C. and Simon, M. K. (1973). *Telecommunication Systems Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Ling, F. (1988). "Convergence Characteristics of LMS and LS Adaptive Algorithms for Signals with Rank-Deficient Correlation Matrices," *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, New York, 25.D.4.7, April.
- Ling, F. (1989). "On Training Fractionally-Spaced Equalizers Using Intersymbol Interpolation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, pp. 1096-1099, October.
- Ling, F., Manolakis, D. G., and Proakis, J. G. (1986a). "Finite, Word-Length Effects in Recursive Least Squares Algorithms with Application to Adaptive Equalization," *Annales des Telecommunications*, vol. 41, pp. 1-9, May/June.
- Ling, F., Manolakis, D. G., and Proakis, J. G. (1986b). "Numerically Robust Least-Squares Lattice-Ladder Algorithms with Direct Updating of the Reflection Coefficients," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 837-845, August.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1982). Generalized Least Squares Lattice and Its Applications to DFE," *Proc. 1982, IEEE Int. Conf. on Acoust. Speech, Signal Processing*, Paris, France, May.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1984a). "Numerical Accuracy and Stability: Two Problems of Adaptive Estimation Algorithms Caused by Round-Off Error," *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, pp. 30.3.1-30.3.4, San Diego, CA, March.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1984b). "Nonstationary Learning Characteristics of Least Squares Adaptive Estimation Algorithms," *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing*, pp. 3.7.1-3.7.4, San Diego, CA, March.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1984c). "A Generalized Multichannel Least-Squares Lattice Algorithm with Sequential Processing Stages," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 381-389, April.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1985). "Adaptive Lattice Decision-Feedback Equalizers—Their Performance and Application to Time-Variant Multipath Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-33, pp. 348-356, April.
- Ling, F. and Proakis, J. G. (1986). "A Recursive Modified Gram-Schmidt Algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 829-836, August.
- Ling, F. and Qureshi, S. U. H. (1986). "Lattice Predictive Decision-Feedback Equalizer for Digital Communication Over Fading Multipath Channels," *Proc. GLOBECOM '86*, Houston, TX, December.
- Ling, F. and Qureshi, S. U. H. (1990). "Convergence and Steady State Behavior of a Phase-Splitting Fractionally Spaced Equalizer," *IEEE Trans. Commun.* vol. 38, pp. 418-425, April.
- Ljung, S. and Ljung, L. (1985). "Error Propagation Properties of Recursive Least-Squares Adaptation Algorithms," *Automatica*, vol. 21, pp. 159-167.
- Lloyd, S. P. (1982). "Least Squares Quantization in PCM," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 129-137, March.
- Loeve, M. (1955). *Probability Theory*, Van Nostrand, Princeton, NJ.
- Long, G., Ling, F., and Proakis, J. G. (1987). "Adaptive Transversal Filters with Delayed Coefficient Adaptation," *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Dallas, TX, March.

- Long, G., Ling, F., and Proakis, J. G. (1988a). "Fractionally-Spaced Equalizers Based on Singular-Value Decomposition," *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, New York, 25.D.4.10, April.
- Long, G., Ling, F., and Proakis, J. G. (1988b). "Applications of Fractionally-Spaced Decision-Feedback Equalizers to HF Fading Channels," *Proc. MILCOM*, San Diego, CA, October.
- Long, G., Ling, F., and Proakis, J. G. (1989). "The LMS Algorithm with Delayed Coefficient Adaptation," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-37, October.
- Lu, J., Letaief, K. B., Chuang, J. C., and Liou, M. L. (1999). "M-PSK and M-QAM BER Computation Using Signal-Space Concepts," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 181-184, February.
- Lucky, R. W. (1965). "Automatic Equalization for Digital Communications," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, pp. 547-588, April.
- Lucky, R. W. (1966). "Techniques for Adaptive Equalization of Digital Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 255-286.
- Lucky, R. W. and Hancock, J. C. (1962). "On the Optimum Performance of N -ary Systems Having Two Degrees of Freedom," *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-10, pp. 185-192, June.
- Lucky, R. W., Salz, J., and Weldon, E. J., Jr. (1968). *Principles of Data Communication*, McGraw-Hill, New York.
- Lugannani, R. (1969). "Intersymbol Interference and Probability of Error in Digital Systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-15, pp. 682-688, November.
- Lundgren, C. W. and Rumlmer, W. D. (1979). "Digital Radio Outage Due to Selective Fading—Observation vs. Prediction from Laboratory Simulation," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp. 1074-1100, May/June.
- Lupas, R. and Verdu, S. (1989). "Linear Multiuser Detectors for Synchronous Code-Division Multiple-Access Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-35, pp. 123-136, January.
- Lupas, R. and Verdu, S. (1990). "Near-Far Resistance of Multiuser Detectors in Asynchronous Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-38, pp. 496-508, April.
- MacKenzie, L. R. (1973). "Maximum Likelihood Receivers for Channels Having Memory," Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, January.
- MacWilliams, F. J. and Sloane, J. J. (1977). *The Theory of Error Correcting Codes*, North Holland, New York.
- Madhow, U. (1998). "Blind Adaptive Interference Suppression for Direct Sequence CDMA," *Proc. IEEE*, vol. 86, pp. 2049-2069, October.
- Madhow, U. and Honig, M. L. (1994). "MMSE Interference Suppression for Direct-Sequence Spread-Spectrum CDMA," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, pp. 3178-3188, December.
- Magee, F. R. and Proakis, J. G. (1973). "Adaptive Maximum-Likelihood Sequence Estimation for Digital Signaling in the Presence of Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-19, pp. 120-124, January.
- Makhoul, J. (1978). "A Class of All-Zero Lattice Digital Filters: Properties and Applications," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-26, pp. 304-314, August.
- Makhoul, J., Roucos, S., and Gish, H. (1985). "Vector Quantization in Speech Coding," *Proc. IEEE*, vol. 73, pp. 1551-1587, November.

- Martin, D. R. and McAdam, P. L. (1980). "Convolutional Code Performance with Optimal Jamming," *Conf. Rec. Int. Conf. Commun.*, pp. 4.3.1-4.3.7, May.
- Massey, J. L. (1963). *Threshold Decoding*, MIT Press Cambridge, MA.
- Massey, J. L. (1965). "Step-by-Step Decoding of the BCH Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-11, pp. 580-585, October.
- Massey, J. L. (1988). "Some New Approaches to Random Access Communications," *Performance '87*, pp. 551-569. [Reprinted 1993 in *Multiple Access Communications*, N. Abramson (ed.), IEEE Press, New York.]
- Massey, J. L. and Sain, M. (1968). "Inverses of Linear Sequential Circuits," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-17, pp. 330-337, April.
- Matis, K. R. and Modestino, J. W. (1982). "Reduced-State Soft-Decision Trellis Decoding of Linear Block Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 61-68, January.
- Max, J. (1960). "Quantizing for Minimum Distortion," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-6, pp. 7-12, March.
- Mazo, J. E. (1975). "Faster-Than-Nyquist Signaling," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 54, pp. 1451-1462, October.
- Mazo, J. E. (1979). "On the Independence Theory of Equalizer Convergence," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp. 963-993, May.
- McMahon, M. A. (1984). *The Making of a Profession—A Century of Electrical Engineering in America*, IEEE Press, New York.
- Mengali, U. (1977). "Joint Phase and Timing Acquisition in Data Transmission," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp. 1174-1185, October.
- Mengali, U. and D'Andrea, A. N. (1997). *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, Plenum Press, New York.
- Mengali, U. and Morelli, M. (1995). "Decomposition of M-ary CPM Signals into PAM Waveforms," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, pp. 1265-1275, September.
- Meyers, M. H. and Franks, L. E. (1980). "Joint Carrier Phase and Symbol Timing for PAM Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 1121-1129, August.
- Meyr, H. and Ascheid, G. (1990). *Synchronization in Digital Communications*, Wiley Interscience, New York.
- Meyr, H., Moenclaey, M., and Fechtel, S. A. (1998). *Digital Commun. Receivers*, Wiley, New York.
- Miller, K. S. (1964). *Multidimensional Gaussian Distributions*, Wiley, New York.
- Miller, S. L. (1996). "Training Analysis of Adaptive Interference Suppression for Direct-Sequence CDMA Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, pp. 488-495, April.
- Miller, S. L. (1995). "An Adaptive Direct-Sequence Code-Division Multiple Access Receiver for Multiuser Interference Rejection," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, pp. 1746-1755, Feb./March/April.
- Millman, S. (ed.) (1984). *A History of Engineering and Science in the Bell System—Communication Sciences (1925-1980)*, AT&T Bell Laboratories.
- Milstein, L. B. (1988). "Interference Rejection in Spread Spectrum Communications," *Proc. IEEE*, vol. 76, pp. 657-671, June.
- Mitra, U. and Poor, H. V. (1995). "Adaptive Receiver Algorithm for Near-Far Resistant CDMA," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, pp. 1713-1724, April.
- Miyagaki, Y., Morinaga, N., and Namekawa, T. (1978). "Error Probability Characteristics for CPSK Signal Through m-Distributed Fading Channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-26, pp. 88-100, January.
- Moher, M. (1998). "An Iterative Multiuser Decoder for Near-Capacity Communications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, pp. 870-880, July.

- Moon, J. and Carley, L. R. (1988). "Partial Response Signaling in a Magnetic Recording Channel," vol. MAG-24, pp. 2973-2975, November.
- Monsen, P. (1971). "Feedback Equalization for Fading Dispersive Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-17, pp. 56-64, January.
- Morf, M. (1977). "Ladder Forms in Estimation and System Identification," *Proc. 11th Annual Asilomar Conf. on Circuits, Systems and Computers*, Monterey, CA, Nov. 7-9.
- Morf, M., Dickinson, B., Kailath, T., and Vieira, A. (1977a). "Efficient Solution of Covariance Equations for Linear Prediction," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-25, pp. 429-433, October.
- Morf, M. and Lee, D. (1978). "Recursive Least Squares Ladder Forms for Fast Parameter Tracking," *Proc. 1978 IEEE Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, pp. 1362-1367, January 12.
- Morf, M., Lee, D., Nickolls, J., and Vieira, A. (1977b). "A Classification of Algorithms for ARMA Models and Ladder Realizations," *Proc. 1977 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, Signal Processing*, Hartford, CT, pp. 13-19, May.
- Morf, M., Vieira, A., and Lee, D. (1977c). "Ladder Forms for Identification and Speech Processing," *Proc. 1977 IEEE conf. on Decision and Control*, New Orleans, LA, pp. 1074-1078, December.
- Mueller, K. H. and Muller, M. S. (1976). "Timing Recovery in Digital Synchronous Data Receivers," *IEEE Trans. Commun*, vol. COM-24, pp. 516-531, May.
- Mueller, K. H. and Spaulding, D. A. (1975). "Cyclic Equalization—A New Rapidly Converging Equalization Technique for Synchronous Data Communications," *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 54, pp. 369-406, February.
- Mueller, K. H. and Werner, J. J. (1982). "A Hardware Efficient Passband Equalizer Structure for Data Transmission," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-30, pp. 438-541, March.
- Muller, D. E. (1954). "Application of Boolean Algebra to Switching Circuit Design and to Error Detection," *IRE Trans. Comput.*, vol. EC-3, pp. 6-12, September.
- Mulligan, M. G. (1988). "Multi-Amplitude Continuous Phase Modulation with Convolutional Coding," Ph.D. Dissertation, Department of Electrical and Computer Engineering, Northeastern University, June.
- Nakagami, M. (1960). "The m-Distribution—A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading," in *Statistical Methods of Radio Wave Propagation*, W. C. Hoffman (ed.), pp. 3-36, Pergamon Press, New York.
- Natali, F. D. and Walbesser, W. J. (1969). "Phase-Locked Loop Detection of Binary PSK Signals Utilizing Decision Feedback," *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, vol. AES-5, pp. 83-90, January.
- Neyman, J. and Pearson, E. S. (1933). "On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses," *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A*, vol. 231, pp. 289-337.
- Nichols, H., Giordano, A. and Proakis, J. G. (1977). "MLD and MSE Algorithms for Adaptive Detection of Digital Signals in the Presence of Interchannel Interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-23, pp. 563-575, September.
- North, D. O. (1943). "An Analysis of the Factors Which Determine Signal/Noise Discrimination in Pulse-Carrier Systems," RCA Tech. Report No. 6 PTR-6C.
- Nyquist, H. (1924). "Certain Factors Affecting Telegraph Speed," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 3, p. 324.
- Nyquist, H. (1928). "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory," *AIEE Trans.*, vol. 47, pp. 617-644.

- Odenwalder, J. P. (1970). "Optimal Decoding of Convolutional Codes," Ph.D. Dissertation, Department of Systems Sciences, School of Engineering and Applied Sciences, University of California, Los Angeles.
- Odenwalder, J. P. (1976). "Dual- k Convolutional Codes for Noncoherently Demodulated Channels," *Proc. Int. Telemetry Conf.*, vol. 12, pp. 165-174, September.
- Olsen, J. D. (1977). "Nonlinear Binary Sequences with Asymptotically Optimum Periodic Cross Correlation," Ph.D. Dissertation, University of Southern California, December.
- Omura, J. (1971). "Optimal Receiver Design for Convolutional Codes and Channels with Memory Via Control Theoretical Concepts," *Inform. Sci.*, vol. 3, pp. 243-266.
- Omura, J. K. and Levitt, B. K. (1982). "Code Error Probability Evaluation for Antijam Communication Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-30, pp. 896-903, May.
- Osborne, W. P. and Luntz, M. B. (1974). "Coherent and Noncoherent Detection of CPSK," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-22, pp. 1023-1036, August.
- Paaske, E. (1974). "Short Binary Convolutional Codes with Maximal Free Distance for Rates $2/3$ and $3/4$," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 683-689, September.
- Paez, M. D. and Glisson, T. H. (1972). "Minimum Mean Squared Error Quantization in Speech PCM and DPCM Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-20, pp. 225-230, April.
- Pahlavan, K. (1985). "Wireless Communications for Office Information Networks," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 23, pp. 18-27, June.
- Palenius, T. (1991). "On Reduced Complexity Noncoherent Detectors for Continuous Phase Modulation," Ph.D. Dissertation, Telecommunication Theory, University of Lund, Lund, Sweden.
- Palenius, T. and Svensson, A. (1993). "Reduced Complexity Detectors for Continuous Phase Modulation Based on Signal Space Approach," *European Trans. Telecommun.*, vol. 4, pp. 51-63, May/June.
- Papoulis, A. (1984). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York.
- Patel, P. and Holtzman, J. (1994). "Analysis of a Simple Successive Interference Cancellation Scheme in a DS/CDMA System," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 12, pp. 796-807, 1994.
- Paul, D. B. (1983). "An 800 bps Adaptive Vector Quantization Vocoder Using a Perceptual Distance Measure," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Boston, MA, pp. 73-76, April.
- Pearson, K. (1965). *Tables of the Incomplete Γ -Function*, Cambridge University Press, London.
- Peebles, P. Z. (1987). *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*, McGraw-Hill, New York.
- Peterson, R. L., Ziemer, R. E., and Borth, D. E. (1995). *Introduction to Spread Spectrum Communications*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Peterson, W. W. (1960). "Encoding and Error-Correction Procedures for Bose-Chaudhuri Codes," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-6, pp. 459-470, September.
- Peterson, W. W. and Weldon, E. J., Jr. (1972). *Error-Correcting Codes*, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, MA.
- Picchi, G. and Prati, G. (1987). "Blind Equalization and Carrier Recovery Using a Stop-and-Go Decision Directed Algorithm," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-35, pp. 877-887, September.

- Picinbono, B. (1978). "Adaptive Signal Processing for Detection and Communication," in *Communication Systems and Random Process Theory*, J. K. Skwirzynski (ed.), Sijthoff & Nordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands.
- Pickholtz, R. L., Schilling, D. L., and Milstein, L. B. (1982). "Theory of Spread Spectrum Communications—A Tutorial," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-30, pp. 855–884, May.
- Pieper, J. F., Proakis, J. G., Reed, R. R., and Wolf, J. K. (1978). "Design of Efficient Coding and Modulation for a Rayleigh Fading Channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-24, pp. 457–468, July.
- Pierce, J. N. (1958). "Theoretical Diversity Improvement in Frequency-Shift Keying," *Proc. IRE*, vol. 46, pp. 903–910, May.
- Pierce, J. N. and Stein, S. (1960). "Multiple Diversity with Non-Independent Fading," *Proc. IRE*, vol. 48, pp. 89–104, January.
- Plotkin, M. (1960). "Binary Codes with Specified Minimum Distance," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-6, pp. 445–450, September.
- Poor, H. V. and Rusch, L. A. (1994). "Narrowband Interference Suppression in Spread Spectrum CDMA," *IEEE Personal Commun.*, vol. 1, pp. 14–27, Third Quarter.
- Poor, H. V. and Verdu, S. (1988). "Single-User Detectors for Multiuser Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 36, pp. 50–60, January.
- Popovic, B. M. (1991). "Synthesis of Power Efficient Multitone Signals with Flat Amplitude Spectrum," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 39, pp. 1031–1033, July.
- Price, R. (1954). "The Detection of Signals Perturbed by Scatter and Noise," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. PGIT-4, pp. 163–170, September.
- Price, R. (1956). "Optimum Detection of Random Signals in Noise, with Application to Scatter-Multipath Communication," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-2, pp. 125–135, December.
- Price, R. (1962a). "Error Probabilities for Adaptive Multichannel Reception of Binary Signals," MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, Techn. Report No. 258, July.
- Price, R. (1962b). "Error Probabilities for Adaptive Multichannel Reception of Binary Signals," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-8, pp. 305–316, September.
- Price, R. (1972). "Nonlinearly Feedback-Equalized PAM vs. Capacity," *Proc. 1972 IEEE Int. Conf. on Commun.* Philadelphia, PA, pp. 22.12–22.17, June.
- Price, R. and Green, P. E., Jr. (1958). "A Communication Technique for Multipath Channels," *Proc. IRE*, vol. 46, pp. 555–570, March.
- Price, R. and Green, P. E., Jr. (1960). "Signal Processing in Radar Astronomy—Communication via Fluctuating Multipath Media," MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, Tech. Report No. 234, October.
- Proakis, J. G. (1968). "Probabilities of Error for Adaptive Reception of M -Phase Signals," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-16, pp. 71–81, February.
- Proakis, J. G. (1970). "Adaptive Digital Filters for Equalization of Telephone Channels," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, vol. AU-18, pp. 195–200, June.
- Proakis, J. G. (1975). "Advances in Equalization for Intersymbol Interference," in *Advances in Communication Systems*, vol. 4, A. J. Viterbi (ed.), Academic, New York.
- Proakis, J. G. (1998). "Equalization Techniques for High-Density Magnetic Recording," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 15, pp. 73–82, July.
- Proakis, J. G., Drouilhet, P. R., Jr., and Price, R. (1964). "Performance of Coherent Detection Systems Using Decision-Directed Channel Measurement," *IEEE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-12, pp. 54–63, March.

- Proakis, J. G. and Ling, F. (1984). "Recursive Least Squares Algorithms for Adaptive Equalization of Time-Variant Multipath Channels," *Proc. Int. Conf. Commun.* Amsterdam, The Netherlands, May.
- Proakis, J. G. and Manolakis, D. G. (1995). *Introduction to Digital Processing*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Proakis, J. G. and Miller, J. H. (1969). "Adaptive Receiver for Digital Signaling through Channels with Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-15, pp. 484-497, July.
- Proakis, J. G. and Rahman, I. (1979). "Performance of Concatenated Dual- k Codes on a Rayleigh Fading Channel with a Bandwidth Constraint," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-27, pp. 801-806, May.
- Pursley, M. B. (1979). "On the Mean-Square Partial Correlation of Periodic Sequences," *Proc. 1979 Conf. Inform. Science and Systems*, Johns Hopkins University, Baltimore, MD., pp. 377-379, March.
- Qureshi, S. U. H. (1976). "Timing Recovery for Equalized Partial Response Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 1326-1331, December.
- Qureshi, S. U. H. (1977). "Fast Start-up Equalization with Periodic Training Sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-23, pp. 553-563, September.
- Qureshi, S. U. H. (1985). "Adaptive Equalization," *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 1349-1387, September.
- Qureshi, S. U. H. and Forney, G. D., Jr. (1977). "Performance and Properties of a $T/2$ Equalizer," *Natl. Telecom. Conf. Record*, pp. 11.1.1-11.1.14, Los Angeles, CA, December.
- Rabiner, L. R. and Schafer, R. W. (1978). *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Raheli, R., Polydoros, A., and Tzou, C. K. (1995). "Per-Survivor Processing: A General Approach to MLSE in Uncertain Environment," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, pp. 354-364, Feb./March/April.
- Rahman, I. (1981). "Bandwidth Constrained Signal Design for Digital Communication over Rayleigh Fading Channels and Partial Band Interference Channels," Ph.D. Dissertation, Department of Electrical Engineering, Northeastern University, Boston, MA.
- Ramsey, J. L. (1970). "Realization of Optimum Interleavers," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-16, pp. 338-345.
- Rapajic, P. B. and Vucetic, B. S. (1994). "Adaptive Receiver Structures for Asynchronous CDMA Systems," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 12, pp. 685-697, May.
- Raphaelli, D. and Zarai, Y. (1998). "Combined Turbo Equalization and Turbo Decoding," *IEEE Commun. Letters*, vol. 2, pp. 107-109, April.
- Rappaport, T. S. (1996). *Wireless Commun.*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Reed, I. S. (1954). "A Class of Multiple-Error Correcting Codes and the Decoding Scheme," *IRE Trans. Inform.*, vol. IT-4, pp. 38-49, September.
- Reed, I. S. and Solomon, G. (1960). "Polynomial Codes Over Certain Finite Fields," *SIAM J.*, vol. 8, pp. 300-304, June.
- Reed, M. C., Schlegel, C. B., Alexander, P. D., and Asenstorfer, J. A. (1998). "Iterative Multiuser Detection for CDMA with FEC: Near Single User Performance," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, pp. 1693-1699, December.
- Rimoldi, B. E. (1989). "Design of Coded CPFSK Modulation Systems for Bandwidth and Energy Efficiency," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, pp. 897-905, September.
- Rimoldi, B. E. (1988). "A Decomposition Approach to CPM," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 34, pp. 260-270, March.

- Rizos, A. D., Proakis, J. G., and Nguyen, T. Q. (1994). "Comparison of DFT and Cosine Modulated Filter Banks in Multicarrier Modulation," *Proc. Globecom'94*, pp. 687-691, San Francisco, CA, November.
- Roberts, L. G. (1975). "Aloha Packet System with and without Slots and Capture," *Comp. Commun. Rev.*, vol. 5, pp. 28-42, April.
- Robertson, P. and Wörz, T. (1998). "Bandwidth-Efficient Turbo Trellis-Coded Modulation Using Punctured Component Codes," *IEEE J. Selected Areas. Commun.*, vol. 16, pp. 206-218, February.
- Roucos, S., Schwartz, R., and Makhoul, J. (1982). "Segment Quantization for Very-Low-Rate Speech Coding," *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Paris, France, pp. 1565-1569, May.
- Rowe, H. E. and Prabhu, V. K. (1975). "Power Spectrum of a Digital Frequency Modulation Signal," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 54, pp. 1095-1125, July/August.
- Rummler, W. D. (1979). "A New Selective Fading Model: Application to Propagation Data," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp. 1037-1071, May/June.
- Rusch, L. A. and Poor, H. V. (1994). "Narrowband Interference Suppression in CDMA Spread Spectrum Communications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, pp. 1969-1979, April.
- Ryder, J. D. and Fink, D. G. (1984). *Engineers and Electronics*, IEEE Press, New York.
- Salehi, M. and Proakis, J. G. (1995). "Coded Modulation Techniques for Cellular Mobile Systems," in *Worldwide Wireless Communications*, F. S. Barnes (ed.), pp. 215-238, International Engineering Consortium, Chicago, IL.
- Saltzberg, B. R. (1967). "Performance of an Efficient Parallel Data Transmission System," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-15, pp. 805-811, December.
- Saltzberg, B. R. (1968). "Intersymbol Interference Error Bounds with Application to Ideal Bandlimited Signaling," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-14, pp. 563-568, July.
- Salz, J. (1973). "Optimum Mean-Square Decision Feedback Equalization," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 52, pp. 1341-1373, October.
- Salz, J., Sheehan, J. R., and Paris, D. J. (1971). "Data Transmission by Combined AM and PM," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 50, pp. 2399-2419, September.
- Sarwate, D. V. and Pursley, M. B. (1980). "Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences," *Proc. IEEE*, vol. 68, pp. 593-619, May.
- Sato, Y. (1975). "A Method of Self-Recovering Equalization for Multilevel Amplitude-Modulation Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-23, pp. 679-682, June.
- Sato, Y. et al. (1986). "Blind Suppression of Time Dependency and Its Extension to Multi-Dimensional Equalization," *Proc. ICC'86*, pp. 46.4.1-46.4.5.
- Sato, Y. (1994). "Blind Equalization and Blind Sequence Estimation," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E77-b, pp. 545-556, May.
- Satorius, E. H. and Alexander, S. T. (1979). "Channel Equalization Using Adaptive Lattice Algorithms," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-27, pp. 899-905, June.
- Satorius, E. H. and Pack, J. D. (1981). "Application of Least Squares Lattice Algorithms to Adaptive Equalization," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp. 136-142, February.
- Savage, J. E. (1966). "Sequential Decoding—The Computation Problem," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 149-176, January.
- Schlegel, C. (1997). *Trellis Coding*, IEEE Press, New York.
- Scholtz, R. A. (1977). "The Spread Spectrum Concept," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp. 748-755, August.

- Scholtz, R. A. (1979). "Optimal CDMA Codes, 1979 Nat. Telecommun. Conf. Rec., Washington, DC, pp. 54.2.1–54.2.4, November.
- Scholtz, R. A. (1982). "The Origins of Spread Spectrum," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-30, pp. 822–854, May.
- Schonhoff, T. A. (1976). "Symbol Error Probabilities for M -ary CPFSK: Coherent and Noncoherent Detection," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 644–652, June.
- Seshadri, N. (1994). "Joint Data and Channel Estimation Using Fast Blind Trellis Search Techniques," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-42, pp. 1000–1011, March.
- Shalvi, O. and Weinstein, E. (1990). "New Criteria for Blind Equalization of Nonminimum Phase Systems Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-36, pp. 312–321, March.
- Shannon, C. E. (1948a). "A Mathematical Theory of Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379–423, July.
- Shannon, C. E. (1948b). "A Mathematical Theory of Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 623–656, October.
- Shannon, C. E. (1949). "Communication in the Presence of Noise," *Proc. IRE*, vol. 37, pp. 10–21, January.
- Shannon, C. E. (1959a). "Coding Theorems for a Discrete Source with a Fidelity Criterion," *IRE Nat. Conv. Rec.*, pt. 4, pp. 142–163, March.
- Shannon, C. E. (1959b). "Probability of Error for Optimal Codes in a Gaussian Channel," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 38, pp. 611–656, May.
- Shannon, C. E., Gallager, R. G., and Berlekamp, E. R. (1967). "Lower Bounds to Error Probability for Coding on Discrete Memoryless Channels, I and II," *Inform. Control.*, vol. 10, pp. 65–103, January; pp. 527–552, May.
- Shimbo, O. and Celebiler, M. (1971). "The Probability of Error due to Intersymbol Interference and Gaussian Noise in Digital Communication Systems," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-19, pp. 113–119, April.
- Siegel, P. H. and Wolf, J. K. (1991). "Modulation and Coding for Information Storage," *IEEE Commun. Mag.* vol. 30, pp. 68–86, December.
- Simon, M. and Alouini, M. (1998). "A Unified Approach to Performance Analysis of Digital Communication over Generalized Fading Channels," *Proc. IEEE*, vol. 48, pp. 1860–1877, September.
- Simon, M. K. and Alouini, M. S. (2000). *Digital Communication over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis*, Wiley, New York.
- Simon, M. K. and Divsalar, D. (1985). "Combined Trellis Coding with Asymmetric MPSK Modulation," *JPL Publ. 85-24*, Pasadena, CA, May.
- Simon, M. K., Hinedi, S., and Lindsey, W. C. (1995). *Digital Commun. Techniques*, Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.
- Simon, M. K., Omura, J. K., Scholtz, R. A., and Levitt, B. K. (1985). *Spread Spectrum Communications Vol. I, II, III*, Computer Science Press, Rockville, MD.
- Simon, M. K., Omura, J. K., Scholtz, R. A., and Levitt, B. K. (1994). *Spread Spectrum Communications Handbook*, New York: McGraw-Hill.
- Simmons, S. J. and Wittke, P. H. (1983). "Low Complexity Decoders for Constant Envelope Digital Modulation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 31, pp. 1273–1280, December.
- Simon, M. K. and Smith, J. G. (1973). "Hexagonal Multiple Phase-and-Amplitude-Shift Keyed Signal Sets," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-21, pp. 1108–1115, October.
- Slepian, D. (1956). "A Class of Binary Signaling Alphabets," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 35, pp. 203–234, January.

- Slepian, D. (1974). *Key Papers in the Development of Information Theory*, IEEE Press, New York.
- Slepian, D. and Wolf, J. K. (1973). "A Coding Theorem for Multiple Access Channels with Correlated Sources," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 52, pp. 1037-1076.
- Sloane, N. J. A. and Wyner, A. D. (1993). *The Collected Papers of Shannon*, IEEE Press, New York.
- Slock, D. T. M. and Kailath, T. (1991). "Numerically Stable Fast Transversal Filters for Recursive Least-Squares Adaptive Filtering" *IEEE Trans. Signal Processing*, SP-39, pp. 92-114, January.
- Smith, J. W. (1965). "The Joint Optimization of Transmitted Signal and Receiving Filter for Data Transmission Systems," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, pp. 1921-1942, December.
- Stark, H. and Woods, J. W. (1994). *Probability, Random Processes and Estimation Theory for Engineers*, 2nd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Starr, T., Cioffi, J. M., and Silverman, P. J. (1999). *Digital Subscriber Line Technology*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Stenbit, J. P. (1964). Table of Generators for BCH Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-10, pp. 390-391, October.
- Stiffler, J. J. (1971). *Theory of Synchronous Communications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Sundberg, C. E. (1986). "Continuous Phase Modulation," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 24, pp. 25-38, April.
- Suzuki, H. (1977). "A Statistical Model for Urban Multipath Channels with Random Delay," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp. 673-680, July.
- Svensson, A. (1984). "Receivers for CPM", Ph.D. Dissertation, Telecommunication Theory, University of Lund, Lund, Sweden.
- Svensson, A. and Sundberg C.W. (1983). "Optimized Reduced-Complexity Viterbi Detectors for CPM," *Proc. GLOBECOM'83*, pp. 22.1.1-22.1.8, San Diego, CA.
- Svensson, A., Sundberg, C.W., and Aulin, T. (1984). "A Class of Reduced Complexity Viterbi Detectors for Partial Response Continuous Phase Modulation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 32, pp. 1079-1087, October.
- Tang, D. L. and Bahl, L. R. (1970). "Block Codes for a Class of Constrained Noiseless Channels," *Inform. Control*, vol. 17, pp. 436-461.
- Tarokh, V. and Jafarkhani, H. (2000). "On the Computation and Reduction of the Peak-to-Average Power Ratio in Multicarrier Communications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, pp. 37-44, January.
- Tarokh, V., Seshadri, N., and Calderbank, A. R. (1998). "Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Performance Analysis and Code Construction," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-44, pp. 744-765, March.
- Tarokh, V., Jafarkhani, H., and Calderbank, A. R. (1999b). "Space-Time Block Coding for Wireless Communications: Performance Results," *IEEE J. Selected Areas on Commun.*, vol. JSAC-17, pp. 451-460, March.
- Tarokh, V., Jafarkhani, H., and Calderbank, A. R. (1999c). "Space-Time Block Codes from Orthogonal Designs," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-45, pp. 1456-1467, July.
- Tarokh, V., Naguib, A., Seshadri, N., and Calderbank, A. R. (1999a). "Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Performance Criteria in the Presence of Channel Estimation Errors, Mobility and Multiple Paths," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-47, pp. 199-207, February.

- Taylor, D. P., Vitetta, G. M., Hart, B. D., and Mammala, A. (1998). "Wireless Channel Equalization," *European Trans. Telecommun. (ETT)*, vol. 9, pp. 117-143, March/April.
- Tellado, J. and Cioffi, J. M. (1998). "Efficient Algorithms for Reducing PAR in Multicarrier Systems," *Proc. 1998 IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, p. 191, August 16-21, Cambridge, MA. Also in *Proc. 1998 GLOBECOM*, Nov. 8-12, Sydney, Australia.
- Titworth, R. C. and Welch, L. R. (1961). "Power Spectra of Signals Modulated by Random and Pseudorandom Sequences," *JPL Tech. Rep. 32-140*, October 10.
- Thomas, C. M., Weidner, M. Y., and Durrani, S. H. (1974). "Digital Amplitude-Phase-Keying with M -ary Alphabets," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-22, pp. 168-180, February.
- Tomlinson, M. (1971). "A New Automatic Equalizer Employing Modulo Arithmetic," *Electr. Lett.*, vol. 7, pp. 138-139.
- Tong, L., Xu, G., Hassibi, B., and Kailath, T. (1995). "Blind Channel Identification Based on Second-Order Statistics: A Frequency-Domain Approach," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-41, pp. 329-334, January.
- Tong, L., Xu, G., and Kailath, T. (1994). "Blind Identification and Equalization Based on Second-Order Statistics," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-40, pp. 340-349, March.
- Tufts, D. W. (1965). "Nyquist's Problem—The Joint Optimization of Transmitter and Receiver in Pulse Amplitude Modulation," *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 248-259, March.
- Turin, G. L. (1961). "On Optimal Diversity Reception," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-7, pp. 154-166, July.
- Turin, G. L. (1962). "On Optimal Diversity Reception II," *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-12, pp. 22-31, March.
- Turin, G. L. et al. (1972). "Simulation of Urban Vehicle Monitoring Systems," *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, pp. 9-16, February.
- Tyner, D. J. and Proakis, J. G. (1993). "Partial Response Equalizer Performance in Digital Magnetic Recording Channels," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 29, pp. 4194-4208, November.
- Tzannes, M. A., Tzannes, M. C., Proakis, J. G., and Heller, P. N. (1994). "DMT Systems, DWMT Systems and Digital Filter Banks," *Proc. Int. Conf. Commun.*, pp. 31-315, New Orleans, LA, May 1-5.
- Ungerboeck, G. (1972). "Theory on the Speed of Convergence in Adaptive Equalizers for Digital Communication," *IBM J. Res. Dev.*, vol. 16, pp. 546-555, November.
- Ungerboeck, G. (1974). "Adaptive Maximum-Likelihood Receiver for Carrier-Modulated Data-Transmission Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-22, pp. 624-636, May.
- Ungerboeck, G. (1976). "Fractional Tap-Spacing Equalizer and Consequences for Clock Recovery in Data Modems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 856-864, August.
- Ungerboeck, G. (1982). "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 55-67, January.
- Ungerboeck, G. (1987). "Trellis-Coded Modulation with Redundant Signal Sets, Parts I and II," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 25, pp. 5-21, February.
- Ungerboeck, G. and Csajka, I. (1976). "On Improving Data-Link Performance by Increasing the Channel Alphabet and Introducing Sequence Coding," *1976 Int. Conf. Inform. Theory, Ronneby, Sweden*, June.

- Vaidyanathan, P. P. (1993). *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Van Etten, W. (1975). "An Optimum Linear Receiver for Multiple Channel Digital Transmission Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-23, pp. 828-834, August.
- Van Etten, W. (1976). "Maximum Likelihood Receiver for Multiple Channel Transmission Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 276-283, February.
- Van Trees, H. L. (1968). *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I*, Wiley, New York.
- Varanasi, M. K. (1999). "Decision Feedback Multiuser Detection: A Systematic Approach," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, pp. 219-240, January.
- Varanasi, M. K. and Aazhang, B. (1990). "Multistage Detection in Asynchronous Code-Division Multiple Access Communications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, pp. 509-519, April.
- Varsharmov, R. R. (1957). "Estimate of the Number of Signals in Error Correcting Codes," *Doklady Akad. Nauk, S.S.S.R.*, vol. 117, pp. 739-741.
- Verdu, S. (1986a). "Minimum Probability of Error for Asynchronous Gaussian Multiple-Access Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-32, pp. 85-96, January.
- Verdu, S. (1986b). "Multiple-Access Channels with Point-Process Observation: Optimum Demodulation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-32, pp. 642-651, September.
- Verdu, S. (1986c). "Optimum Multiuser Asymptotic Efficiency," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-34, pp. 890-897, September.
- Verdu, S. (1989). "Recent Progress in Multiuser Detection," *Advances in Communications and Signal Processing*, Springer-Verlag, Berlin. [Reprinted in *Multiple Access Communications*, N. Abramson (ed.), IEEE Press, New York.]
- Verdu, S. (1998). *Multiuser Detection*, Cambridge University Press, New York.
- Verdu, S. (1998). "Fifty Years of Information Theory," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 2057-2078, October.
- Vermeulen, F. L. and Hellman, M. E. (1974). "Reduced-State Viterbi Decoders for Channels with Intersymbol Interference," *Conf. Rec. ICC '74*, pp. 37B.1-37B.4, June, Minneapolis, MN.
- Vijayan, R. and Poor, H. V. (1990). "Nonlinear Techniques for Interference Suppression in Spread Spectrum Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, pp. 1060-1065, July.
- Viterbi, A. J. (1966). *Principles of Coherent Communication*, McGraw-Hill, New York.
- Viterbi, A. J. (1967). "Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp. 260-269, April.
- Viterbi, A. J. (1969). "Error Bounds for White Gaussian and Other Very Noisy Memoryless Channels with Generalized Decision Regions," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-15, pp. 279-287, March.
- Viterbi, A. J. (1971). "Convolutional Codes and Their Performance in Communication Systems," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-19, pp. 751-772, October.
- Viterbi, A. J. (1978). "A Processing Satellite Transponder for Multiple Access by Low-Rate Mobile Users," *Proc. Fourth Int. Conf. on Digital Satellite Communications*, Montreal, Canada, pp. 166-174, October.
- Viterbi, A. J. (1979). "Spread Spectrum Communication—Myths and Realities," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 17, pp. 11-18, May.
- Viterbi, A. J. (1985). "When Not to Spread Spectrum—A Sequel," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 23, pp. 12-17, April.

- Viterbi, A. J. (1995). *CDMA: Principles of Spread Spectrum Communications*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Viterbi, A. J. (1990). "Very Low Rate Convolutional Codes for Maximum Theoretical Performance of Spread-Spectrum Multiple-Access Channels," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. 8, pp. 641-649, May.
- Viterbi, A. J. and Jacobs, I. M. (1975). "Advances in Coding and Modulation for Noncoherent Channels Affected by Fading, Partial Band, and Multiple-Access Interference," in *Advances in Communication Systems*, vol. 4, A. J. Viterbi (ed.), Academic, New York.
- Viterbi, A. J. and Omura, J. K. (1979). *Principles of Digital Communication and Coding*, McGraw-Hill, New York.
- Viterbi, A. J., Wolf, J. K., Zehavi, E. and Padovani, R. (1989). "A Pragmatic Approach to Trellis-Coded Modulation," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 27, pp. 11-19, July.
- Wainberg, S. and Wolf, J. K. (1970). "Subsequences of Pseudo-Random Sequences," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-18, pp. 606-612, October.
- Wainberg, S., and Wolf, J. K. (1973). "Algebraic Decoding of Block Codes Over a q -ary Input, Q -ary Output Channel, $Q > q$," *Inform. Control*, vol. 22, pp. 232-247, April.
- Wald, A. (1947). *Sequential Analysis*, Wiley, New York.
- Wang, X. and Poor, H. V. (1998a). "Blind Equalization and Multiuser Detection for CDMA Communications in Dispersive Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, pp. 91-103, January.
- Wang, X. and Poor, H. V. (1998b). "Blind Multiuser Detection: A Subspace Approach," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 91-103, January.
- Wang, X. and Poor, H. V. (1999). "Iterative (Turbo) Soft Interference Cancellation and Decoding for Coded CDMA," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 1046-1061, July.
- Wang, X. and Wicker, S. B. (1996). "A Soft-Output Decoding Algorithm for Concatenated Systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, pp. 543-553, March.
- Ward, R. B. (1965). "Acquisition of Pseudonoise Signals by Sequential Estimation," *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-13, pp. 474-483, December.
- Ward, R. B. and Yiu, K. P. (1977). "Acquisition of Pseudonoise Signals by Recursion-Aided Sequential Estimation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp. 784-794, August.
- Weber, W. J., III, Stanton, P. H., and Sumida, J. T. (1978). "A Bandwidth Compressive Modulation System Using Multi-Amplitude Minimum-Shift Keying (MAMSK)," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-26, pp. 543-551, May.
- Wei, L. F. (1984a). "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space, Part I: 180°," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. SAC-2, pp. 659-671, September.
- Wei, L. F. (1984b). "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space, Part II: Nonlinear Codes," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. SAC-2, pp. 672-686, September.
- Wei, L. F. (1987). "Trellis-Coded Modulation with Multi-Dimensional Constellations," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-33, pp. 483-501, July.
- Weinstein, S. B. and Ebert, P. M. (1971). "Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-19, pp. 628-634, October.
- Welch, L. R. (1974). "Lower Bounds on the Maximum Cross Correlation of Signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 397-399, May.
- Weldon, E. J., Jr. (1971). "Decoding Binary Block Codes on Q -ary Output Channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-17, pp. 713-718, November.

- Werner, J. J. (1991). "The HDSL Environment," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 9, pp. 785-800, August.
- Wesolowski, K. (1987a). "An Efficient DFE and ML Suboptimum Receiver for Data Transmission over Dispersive Channels Using Two-Dimensional Signal Constellations," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-35, pp. 336-339, March.
- Wesolowski, K. (1987b). "Efficient Digital Receiver Structure for Trellis-Coded Signals Transmitted Through Channels with Intersymbol Interference," *Electronics Lett.*, pp. 1265-1267, November.
- Wicker, S. B. (1995). *Error Control Systems for Digital Communication and Storage*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Wicker, S. B. and Bhargava, V. K. (1994). *Reed Solomon Codes and their Applications*, IEEE Press, New York.
- Widrow, B. (1966). "Adaptive Filters, I: Fundamentals," Stanford Electronics Laboratory, Stanford University, Stanford, CA, Tech Report No. 6764-6, December.
- Widrow, B. (1970). "Adaptive Filters," in *Aspects of Network and System Theory*, R. E. Kalman and N. DeClaris (eds.), Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Wiener, N. (1949). *The Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, Wiley, New York. (Reprint of original work published as an MIT Radiation Laboratory Report in 1942.)
- Wilkinson, T. A. and Jones, A. E. (1995). "Minimization of the Peak-to-Mean Envelope Power Ratio of Multicarrier Transmission Schemes by Block Coding," *Proc. IEEE Vehicular Tech. Conf.*, pp. 825-829, July.
- Wilson, S. G. and Hall, E. K. (1998). "Design and Analysis of Turbo Codes on Rayleigh Fading Channels," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. 16, pp. 160-174, February.
- Winters, J. H., Salz, J., and Gitlin, R. D. (1994). "The Impact of antenna Diversity on the Capacity of Wireless Communication Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-42, pp. 1740-1751, Feb./March/April.
- Wintz, P. A. (1972). "Transform Picture Coding," *Proc. IEEE*, vol. 60, pp. 880-920, July.
- Wolf, J. K. (1978). "Efficient Maximum Likelihood Decoding of Linear Block Codes Using a Trellis," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-24, pp. 76-81, January.
- Wozencraft, J. M. (1957). "Sequential Decoding for Reliable Communication," *IRE Nat. Conv. Rec.*, vol. 5, pt. 2, pp. 11-25.
- Wozencraft, J. M. and Jacobs, I. M. (1965). *Principles of Communication Engineering*, Wiley, New York.
- Wozencraft, J. M. and Kennedy, R. S. (1966). "Modulation and Demodulation for Probabilistic Decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-12, pp. 291-297, July.
- Wozencraft, J. M. and Reiffen, B. (1961). *Sequential Decoding*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Wulich, D. (1996). "Reduction of Peak-to-Mean Ratio of Multicarrier Modulation Using Cyclic Coding," *Electr. Lett.*, vol. 32, pp. 432-433, February.
- Wyner, A. D. (1965). "Capacity of the Band-Limited Gaussian Channel," *Bell. Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 359-371, March.
- Xie, Z., Rushforth, C. K., and Short, R. T. (1990a). "Multiuser Signal Detection Using Sequential Decoding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-38, pp. 578-583, May.
- Xie, Z., Short, R. T., and Rushforth, C. K. (1990b). "A Family of Suboptimum Detectors for Coherent Multiuser Communications," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. SAC-8, pp. 683-690, May.

- Yao, K. (1972). "On Minimum Average Probability of Error Expression for Binary Pulse-Communication System with Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 528-531, July.
- Yao, K. and Tobin, R. M. (1976). "Moment Space Upper and Lower Error Bounds for Digital Systems with Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-22, pp. 65-74, January.
- Yasuda, Y., Kashiki, K., and Hirata, Y. (1984). "High-Rate Punctured Convolutional Codes for Soft-Decision Viterbi Decoding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-32, pp. 315-319, March.
- Yue, O. (1983). "Spread Spectrum Mobile Radio 1977-1982," *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, vol. VT-32, pp. 98-105, February.
- Zehavi, E. (1992). "8-PSK Trellis Codes for a Rayleigh Channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 40, pp. 873-884, May.
- Zelinski, P. and Noll, P. (1977). "Adaptive Transform Coding of Speech Signals," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-25, pp. 299-309, August.
- Zervas, E., Proakis, J. G., and Eyuboglu, V. (1991). "A Quantized Channel Approach to Blind Equalization," *Proc. ICC'91*, Chicago, IL, June.
- Zhang, X. and Brady, D. (1993). "Soft-Decision Multistage Detection of Asynchronous AWGN Channels," *Proc. 31st Allerton Conf. on Commun., Contr., Comp.* Allerton, IL, October.
- Zhou, K. and Proakis, J. G. (1988). "Coded Reduced-Bandwidth QAM with Decision-Feedback Equalization," *Conf. Rec. IEEE Int. Conf. Commun.*, Philadelphia, PA, pp. 12.6.1-12.6.5, June.
- Zhou, K., Proakis, J. G., and Ling, F. (1990). "Decision-Feedback Equalization of Time-Dispersive Channels with Coded Modulation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-38, pp. 18-24 January.
- Zigangirov, K. S. (1966). "Some Sequential Decoding Procedures," *Probl. Peredach. Inform.*, vol. 2, pp. 13-25.
- Ziv, J. (1985). "Universal Quantization," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 31, pp. 344-347.
- Ziv, J. and Lempel, A. (1977). "A Universal Algorithm for Sequential Data Compression," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-23, pp. 337-343.
- Ziv, J. and Lempel, A. (1978). "Compression of Individual Sequences via Variable-Rate Coding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-24, pp. 530-536.
- Zvonar, Z. and Brady, D. (1995). "Differentially Coherent Multiuser Detection in Asynchronous CDMA Flat Rayleigh Fading Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-43, pp. 1252-1255, February/March/April.

中英文人名对照表

Aazhang	艾赞	Berrou	伯罗
Abend	阿本德	Besscl	贝塞尔
Abdulrahman	阿伯杜拉赫曼	Bhargava	巴尔加瓦
Abramson	阿布拉姆森	Bierman	比尔曼
Abu-Dayya	阿布载亚	Biglieri	比格列尔里
Adler	阿德勒	Bingham	宾厄姆
Alamouti	阿拉莫蒂	Blahut	布拉胡特
Alexander	亚历山大	Boltzmann	波尔兹曼
Alouini	艾洛伊利	Bose	鲍斯
Altekar	阿特卡	Bowen	鲍恩
Al-Bassiouni	阿尔巴西故里	Boyd	波义德
Al-Hussaini	阿尔胡萨里	Brady	布雷迪
Anderberg	安德伯格	Brenna	布伦纳
Anderson	安德森	Brennan	布伦南
Annamalai	安那马莱	Bucher	布赫
Ascheid	阿斯切德	Burton	伯顿
Ash	阿什	Busgang	巴斯岗
Aulin	奥林	Buzo	布索
Austin	奥斯丁	Cahn	卡恩
Bahl	巴尔	Caire	卡尔
Barrow	巴罗	Calderbank	考尔德班克
Bauch	鲍奇	Campanella	坎帕内拉
Bayes	贝叶斯	Campopiano	喀波皮阿诺
Beaulieu	博利厄	Capetanakis	卡佩塔纳基斯
Beglieri	比格列尔里	Caraiscos	卡瑞斯哥斯
Belfiore	贝尔菲沃	Carleial	卡莱阿尔
Bellini	贝利尼	Carley	卡里
Bello	贝洛	Carlson	卡尔森
Bekir	贝基尔	Carayannis	卡拉扬尼斯
Benedetto	贝内代托	Castello	卡斯泰洛
Bennett	贝内特	Cauchy	柯西
Bensley	本斯利	Cavin	卡温
Benveniste	本维尼斯特	Celebiler	塞尔比勒
Berger	伯格,伯杰	Chang	张
Bergmans	柏格曼斯	Charash	查拉斯
Berlekamp	伯尔坎姆,伯利坎普	Chase	蔡斯
Bernstein	伯恩斯坦	Chebyshev	切比雪夫

Chernoff	契尔诺夫	Elias	埃利斯
Chie	切	Ellersick	埃勒西克
Chien	钱	Esposito	埃斯波西托
Chow	周	Euclidean	欧氏,欧几里德
Chyi	查伊	Eyuboglu	埃尤布奥卢
Cioffi	乔菲	Falconer	福尔科纳
Clark	克拉克	Fano	法诺
Cocke	科克	Feinstein	范斯坦
Cook	库克	Fink	芬克
Coppersmith	科珀施密斯	Fire	法尔
Costas	科斯塔斯	Fischer	费雪
Costello	科斯特洛	Flanagan	弗拉纳根
Cover	科弗	Forney	福尼
Cramer	克拉默	Foschini	福切尼
Cramér-Rao	克拉默-罗	Franaszek	弗兰拉泽克
Csajka	克沙卡	Franks	弗兰克斯
Dant	道特	Fredricsson	弗雷德里克森
Daut	都特	Freiman	弗赖曼
Davenport	达文波特	Fritchman	弗里奇曼
Davey	戴维	Forney	福尼
Davisson	戴维森	Fourier	傅里叶
DeBuda	德布达	Forney	福尼
Deller	德尔勒	Foschini	福西里
Diamond	戴蒙德	Franaszek	佛郎纳则克
Dickinson	迪金森	Franks	弗兰克斯
Ding	丁	Fredricsson	弗雷德里克森
Divsalar	迪夫萨拉尔	Freimon	弗雷曼
Dixon	狄克逊	Fritchman	弗里奇曼
Dobrushin	多布鲁辛	Gaarder	戈德尔
Doeltz	道尔兹	Gabor	加博尔
Doelz	多尔兹	Gagliard	加利亚尔迪
Douillard	多尔纳德	Gallager	加拉杰
Drouilhet	德鲁伊赫特	Galois	伽罗华
Duel	杜尔	Garcia	加西亚
Duffy	达菲	Gardner	加德纳
Duman	杜曼	Garth	加斯
Durbin	杜宾	George	乔治
Durrani	杜拉尼	Gersho	格谢
Duttweiler	唐特威勒	Gerst	格斯特
Ebert	埃伯特	Ghez	格茨
ElGamal	埃尔·贾迈德	Ghosh	高希
Eleftherios	埃莱夫塞里奥斯	Giannakis	吉安拉基斯
Eleftheriou	埃莱夫塞里奥	Gibert	吉伯特

Gilbert	吉尔伯特	Hermite	埃尔米特
Gihoursen	吉尔豪森	Hilbert	希尔伯特
Gish	古什	Hildebrand	希尔德布兰德
Gitlin	吉特林	Hirosaki	广崎
Glave	格拉夫	Ho	何
Glazer	格拉泽	Hocquenghem	霍克奎恩海姆
Glisson	格利森	Hoeher	赫勒尔
Goblick	戈布列克	Holmes	霍姆斯
Godard	戈达尔	Holtzman	霍尔兹曼
Golay	戈莱	Honing	霍宁
Gold	戈尔德	Horwood	霍伍德
Goldsmith	戈尔德史密斯	Hoff	霍夫
Golomb	戈隆布	Holsinger	霍尔西格
Goppa	戈帕	Hsu	许
Goursat	古尔萨	Huber	赫伯
Gram	格拉姆	Huffman	赫夫曼
Gray	格雷	Hui	惠
Greefkes	格里夫凯斯	Immink	伊明克
Green	格林	Itakura	板仓
Gronemeyer	格罗内迈尔	Jacobs	雅各布斯
Groppa	歌帕	Jacoby	雅可比
Guida	古伊达	Jafarkhani	杰法克哈尼
Gupta	古普塔	Jayant	贾扬特
Hadamard	哈达马	Jelinek	杰利内克
Hagenauer	哈根劳尔	Johannesson	约翰尼森
Hahn	哈恩	Johnson	约翰逊
Hall	霍尔	Jones	琼斯
Hallen	霍伦	Jordan	乔丹
Hamming	汉明	Justesen	贾斯特逊
Hancock	汉考克	Kailath	凯拉斯
Hankel	汉克尔	Kalet	凯尔列特
Hansen	汉森	Kalman	卡尔曼
Hartley	哈特利	Kalouptsidis	卡洛普特赛迪斯
Hasegawa	长谷川	Karabed	卡拉伯德
Hassner	哈斯纳	Karhunen	卡尔胡宁, 卡亨南
Hatzinakos	哈兹那可斯	Kasami	风见
Haykin	海金	Kaye	凯
Heald	希尔德	Keller	凯勒
Hecht	赫克特	Kelley	凯利
Heegard	希加德	Kelly	凯利
Heller	海勒	Kennedy	肯尼迪
Hellman	赫尔曼	Ketchum	克特丘姆
Helstrom	海尔斯特朗姆	Kleinrock	克雷因罗克

Klovsky	克洛夫斯基	Makhoul	迈克霍尔
Kobayashi	柯贝雅西	Manolakis	迈诺纳吉斯
Kolmogorov	科尔莫哥洛夫	Marcum	马库姆
Kotelnikov	科捷利尼科夫	Markel	马克尔
Kraft	克拉夫特	Markum	马库姆
Kretzmer	克莱兹姆	Massey	马西
Kronecker	克朗耐克	Martin	马丁
Lang	兰思	Matis	马蒂斯
Laplace	拉普拉斯	Max	马克斯
Larsen	拉森	Mazo	马索
Laurent	劳伦特	McAdam	麦克亚当
Lawerence	劳伦斯	McBride	麦克布莱德
Lee	李	McEliece	麦克艾利斯
Lempel	兰培尔	McLane	麦克莱恩
Lender	莱恩德	McMahon	麦克马洪
Leon	列昂	Meadors	米多尔斯
Leon-Garcia	列昂加西亚	Mendel	孟德尔
Levinson	莱文森(列文森)	Mengali	蒙加利
Levitt	莱维特	Messerschmitt	迈塞施密特
Lin	林舒	Meyers	迈尔斯
Linde	林德	Meyr	梅尔
Lindell	林德尔	Miller	米勒
Lindholm	林德霍尔姆	Millman	米尔曼
Lindsey	林塞	Milstein	米尔斯坦
Ling	林	Miner	迈纳
Liu	刘	Mitra	米特雷
Liung	柳	Miyagaki	宫栢
Ljung	荣	Modestino	莫代斯蒂诺
Lloyd	劳埃德	Moher	莫赫
Loève	洛厄夫	Monsen	蒙森
Long	朗	Montorsi	蒙托西
Longstaff	朗斯塔夫	Moon	穆恩
Lucky	勒基	Morelli	摩尔利
Lugannani	勒岗纳里	Morf	莫夫
Lundgren	隆格伦	Morinaga	森永
Luntz	路兹	Mueller	米勒
Lupanov	卢潘诺夫	Muller	穆勒
Lupas	卢帕斯	Mulligan	马利根
Massey	马西	Namekawa	滑川
MacKenchnie	麦克肯切尼	Nakgami	中上
MacWilliams	麦克威廉斯	Natali	纳塔利
Madhow	马德豪	Neyman	内曼
Magee	马吉	Nelin	内林

Nguyen		Pursley	珀斯利
Nickolls	尼古尔斯	Qureshi	库里西
Nikias	尼基亚斯	Rabiner	拉宾纳
Nikolaev	尼可拉耶夫	Rahman	拉赫曼
Noll	诺尔	Raheli	雷海利
North	诺思	Ramamurthi	拉马穆蒂
Nyquist	奈奎斯特	Ramsey	拉姆齐
Odenwalder	奥登瓦尔德	Rapajic	拉帕吉克
Olsen	奥尔森	Raphaeli	雷费利
Omura	奥姆拉	Rappaport	拉帕波特
Osborne	奥斯本	Raviv	拉维夫
Paaske	巴斯克	Ray-Chaudhuri	雷-乔德赫里
Pack	帕克	Rayleigh	瑞利
Paez	派斯	Reed	里德
Pahlavan	佩赫雷范	Reiffen	瑞峰, 赖芬
Palenius	帕纽斯	Rice	赖斯
Papoulis	帕波利斯	Rizos	里佐斯
Paris	巴里斯	Roberts	罗伯茨
Park	巴克	Robertson	罗伯逊
Parseval	帕什瓦尔	Robinson	鲁宾逊
Patel	帕特尔	Root	鲁特
Paul	保罗	Roucos	罗科斯
Pearson	皮尔逊	Rowe	罗弗
Pebbles	皮伯尔斯	Rummmler	鲁姆勒
Peebles	皮布尔斯	Rusch	鲁斯奇
Peterson	彼得森	Rushforth	鲁西福思
Picchi	皮克奇	Rydbeck	吕德贝克
Picci	皮奇	Ryder	赖德
Picinbono	皮西波诺	Sabato	萨巴托
Pickholtz	皮克霍尔茨	Sain	塞恩
Pieper	皮珀	Saito	塞脱
Pierce	皮尔斯	Salehi	萨利希
Plotkin	普洛特金	Saltzberg	萨尔茨伯格
Podovani	波多瓦利	Salz	扎尔茨
Poisson	普瓦松(泊松)	Sarwate	萨尔瓦特
Polydoros	波利多尔斯	Sato	塞脱
Poor	普尔	Satorius	萨托里斯
Popovic	波波维克	Savage	萨维奇
Prabhu	普拉伯胡	Schafer	谢弗
Prande	普兰奇	Schilling	希林
Prati	普拉蒂	Schlegel	施莱格尔
Price	普赖斯	Schmidt	施密特
Proakis	普罗基斯	Scholtz	肖尔茨

Schonhoff	舍恩霍夫	Tratcher	图雷丘
Schwarz	施万茨	Tu	杜
Schwartz	施瓦茨	Tufts	塔夫茨
Seshadri	塞沙德里	Turin	图林
Shalvi	夏尔威	Tyner	泰勒
Shannon	香农	Tzannes	查恩斯
Sheehan	希恩	Tzou	曹
Shimbo	西姆保	Ungerboeck	恩格伯克, 昂格伯克, 翁格伯克
Shohan	肖恩	Vaidyanathan	瓦迪纳桑
Short	肖特	VanTrees	温·特里斯
Siegel	西格尔	VanEtten	范·爱藤
Simon	西蒙	Varanasi	瓦拉纳西
Simmons	西蒙斯	Varsharmov	乌沙莫夫
Schilling	希林	Verdu	韦尔迪
Slepian	斯莱皮恩, 斯列宾	Vermuelen	维姆尔恩
Sloane	斯隆	Vieira	维埃拉
Slock	斯洛克	Vijayan	威贾扬
Smith	史密斯	Vucetic	弗西狄克
Solomon	所罗门(索罗门)	Viterbi	维特比
Spaulding	斯包丁	Wainberg	韦恩伯格
Stanton	斯坦顿	Walbesser	瓦尔贝塞
Stark	斯达克	Wald	沃尔德
Starr	斯达尔	Walker	沃克
Stein	斯坦	Wallace	华莱士
Stenbit	斯登比特	Wang	王
Stiffler	斯蒂夫勒	Ward	沃德
Storey	斯托里	Weaver	韦弗
Sumida	苏密达	Weber	韦伯
Sundberg	松德贝里	Wei	魏
Suzuki	铃木	Weidner	韦德纳
Svensson	斯温森	Weinstein	温斯坦
Tang	唐	Welch	韦尔奇
Tarokh	塔诺克	Weldon	韦尔登
Tellado	泰纳多	Werner	维尔纳
Thomas	托马斯	Wesolowski	维索洛斯基
Titsworth	蒂茨沃思	Wheatley	惠特利
Tobagi	托巴吉	Wiener	维纳
Tobin	托宾	Wicker	维克
Tomlinson	汤姆林森	Widrow	韦德罗
Toeplitz	特普利茨(托伯利茨)	Wiley	威利
Tombin	托宾	Wilkinson	威尔金森
Tomlinson	汤姆林木	Wilson	威尔森
Tong	童	Wintz	温兹

Wisner	威斯默	Yue	尤尔
Wittke	维基	Yuen	尤恩
Wolf	沃尔夫	Yule	尤尔
Woods	沃兹	Zarai	扎纳伊
Wörz	沃兹	Zehavi	泽哈威
Wozencraft	沃曾克拉夫特	Zelinski	泽林斯基
Wulich	乌里奇	Zervas	泽尔瓦斯
Wyner	怀纳	Zhang	张
Xie	谢	Zhou	周
Xu	徐	Ziemer	齐默尔
Yah	叶	Zigangirov	齐岗吉诺夫
Yao	姚	Ziv	齐夫
Yeh	耶	Zvonar	兹沃纳尔
Yiu	尤		

说明：1. 此译名表包含本书各章以及参考文献中所有的作者名。

2. 译名主要参考《世界姓名译名手册》，化学工业出版社 1987 年出版。

3. 多数人名可在工具书查到，对于许多未查到的，译者根据读音自译。

词 汇 表

Adapti veequa lization	自适应均衡	quantization of	~量化
Adapti veequa lizers	自适应均衡器	optimum	最佳~
accelerating convergence of LMS	加速 LMS 收敛的~	scalar	标量~
blind	盲~	vector	矢量~
decision-feed back	判决反馈~	sampling of	~抽样
linear	线性~	Analytic signal	解析信号
base band	基带~	Antenna:	天线
pass band	带通~	beamwidth	~波束宽度
maximum likelihood sequence estimator	最大似然序列估计器	effective area	~有效区域
reduced-state	减少状态	effective radiated power	~有效辐射功率
Adaptive transform coding	自适应变换编码	illumination efficiency factor	~照明效率因子
Algorithm:	算法	multiple antenna systems	多天线系统
BCJR		A posteriori probability	后验概率
Constant-modulus	恒模~	A priori probability	先验概率
Godard	戈达尔~	Autocorrelation function	自相关函数
Huffman	霍夫曼~	at output of linear system	线性系统输出端~
K means	K 均值~	of cyclostationary process	循环平稳过程的~
Lempel-Ziv	兰培尔-齐夫~	Autocovariance function	自协方差函数
Levinson-Durbin	列文森-杜宾~	Automatic gain control (AGC)	自动增益控制
LMS (MSE)	最小均方(均方误差)~	Average power density spectrum	平均功率密度谱
recursive least-squares(RLS)	递推最小二乘~	Averages	平均
RLS (fast)	RLS(快速)~	central moments	中心矩
RLS (Kalman)	RLS(卡尔曼)~	characteristic function	特征函数
RLS lattice	RLS 网格~	for sum of statistically independent random variables	统计独立随机变量总和
RLS square-root	RLS 平方根~	correlation	相关
Soft-out Viterbi algorithm(SOVA)	软输出维特比算法	covariance	协方差
stochastic gradient	随机梯度~	covariance matrix	协方差矩阵
tap-leakage	抽头泄漏	expected value (mean)	期望值(均值)
Viterbi	维特比	joint moments	联合矩
zero-forcing	迫零~	of stochastic processes	随机过程的~
Amplitude distortion	幅度失真	variance	方差
Amplitude-shift keying	幅移键控	AWGN(additive white Gaussian noise)channel	加性高斯白噪声信道
Analog sources	模拟信源	Band-limited channels(See also channels)	

	带限信道	Block codes	分组码
Bandpass signals	带通信号	binary	二进制~
complex envelope of	--复包络	Concatenated	级联~
envelope of	--包络	Cyclic	循环~
phase of	--相位	Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (BCH)	
quadrature components	正交分量	encoders for	编码器
Bandpass system	带通系统	generator polynomial for	生成多项式
response of	~响应	Golay	戈莱
Bandwidth efficiency	带宽效率	Hamming	汉明
Bandwidth expansion factor	带宽扩展因子	maximum-length shift-register (MLSR)	
Baseband signals	基带信号		最长移位寄存器
delay modulation	延时调制	table of MLSR connections	MLSR 连接表
Miller	密勒	dual code	对偶码
NRZ	非归零	equivalent	等效
NRZI	非归零反转	error correction capability	纠错能力
power spectra of	功率谱	error detection capability	检错能力
Baudot code	博多码	extended	扩展
Bayes theorem	贝叶斯定理	fixed-weight	衡重
BCH (Bose-Chaudhuri-Hocquenghem) codes		generator matrix	生成矩阵
	BCH 码	generator polynomial	生成多项式
Bibliography	文献目录	Golay	戈莱
Binary modulator	二进制调制器	extended	扩展
Binary source	二进制信源	generator polynomial of	生成多项式
Binary symmetric channel (BSC)		performance on AWGN channel	
	二进制对称信道		在高斯信道上的性能
capacity of	~容量	weight distribution	重量分布
transition probability	~转移概率	Hadamard	哈达马
Binomial distribution	二项式分布	Hamming	汉明
Biorthogonal signals	双正交信号	hard-decision decoding	硬判决译码
Bit-interleaved modulation	比特交织调制	linear	线性
Bit interval	比特间隔	maximum-distance-separable	
Blind equalization	盲均衡		最大可分距离
constant modulus algorithm		message polynomial	消息多项式
	恒模算法	minimum distance bounds	最小距离上界
Godard algorithm	戈达尔算法	Elias	埃利斯
joint data and channel estimation		Gilbert-Varsharmov	吉尔伯特-乌沙莫夫
	联合数据与信道估计	Hamming	汉明
maximum-likelihood algorithms		Plotkin	普洛特金
	最大似然算法	nonbinary	非二进制
stochastic gradient algorithms		nonsystematic	非系统的
	随机梯度算法	null space	零空间
with second-order moments		parity-check matrix	奇偶校验矩阵
	以二阶矩	parity polynomial	奇偶校验多项式

perfect	完备	coherence bandwidth	~相干带宽
quasi-perfect	准完备	coherence time	~相干时间
rate	码率	cutoff rate	~截止率
reciprocal polynomial	反多项式	discrete-time model	~离散时间模型
Reed-Solomon	里德-索洛蒙	distortion	失真
serially concatenated	串行级联	amplitude	幅度~
Shortened	缩短	envelope delay	包络延时~
soft-decision decoding	软判决译码	frequency offset	频率偏移~
standard array	标准阵列	impulse noise	冲激噪声~
syndrome	伴随式,校正子	nonlinear	非线性~
systematic	系统的	phase jitter	相位抖动~
Block length	分组长度	squared-error	平方误差~
Burst errors	突发差错	thermal noise	热噪声~
Burst error Correction capability	纠突发差错能力	Distortion-rate function	失真率函数
Capacity(see Channel capacity)	容量	Doppler power spectrum	多普勒功率谱
Carrier	载波	Doppler spread	多普勒展宽(扩展)
Carrier phase estimation	载波相位估计	encoder	编码器
Costas loop	科斯塔斯环	code rate	码率
decision-directed	面向判决~	code word	码字、码组
ML methods	ML(最大似然)方法	fading multipath; characterization of	多径衰落;特征
nondecision directed	非面向判决~	correlation functions for	~相关函数
phase-locked loop	锁相环	impulse response	~冲激响应
squaring loop	平方环	models for	模型
Carrier recovery	载波恢复	transfer function	~传递(转移)函数
Canchy-Schwartz inequality	柯西-施瓦兹不等式	fiber optic	光纤~
Central limit theorem	中心极限定理	frequency nonselective	频率非选择性~
Central moments	中心矩	digital signaling over	数字信号传输
Channel	信道	error rate for	差错率
acoustic	声波的	RAKE demodulator for	RAKE 解调器
additive noise	加性噪声	tap weight estimation of	抽头权值估计
additive white gaussian noise(AWGN)	加性高斯白噪声~	tapped delay line model of	抽头延时线模型
band-limited	带限~	microwave LOS	微波视线
binary symmetric	二进制对称~	models for	模型
capacity	信道容量	additive noise	加性噪声~
AWGN	加性高斯白噪声~	binary symmetric	二进制对称的~
band limited AWGN	带限 AWGN~	discrete memoryless	离散无记忆~
DMC	离散无记忆~	discrete-time	离散时间~
infinite bandwidth AWGN	无限带宽 AWGN~	Hata	哈达
of multiple access methods	多址方法	Jakes' model	杰克斯模型
		linear filter	线性滤波器~
		linear time-variant filter	线性时不变滤波器~

statistical	统计的	effective SNR	有效信噪比
waveform	波形	efficiency of	效率
multipath spread	多径展宽(扩展)	optimum receiver for	最佳接收机
Nakagami fading	Nakagami 衰落	suboptimum detectors for	次最佳检测器
overspread	过扩展	decorrelating	解相关
Rayleigh fading	瑞利衰落	MMSE	最小均方误差
binary signaling over	二进制信号传输	performance	性能
coded waveforms for	编码波形	single user	单一用户
cutoff rate for	截止率	synchronous	同步的
frequency nonselective	频率非选择性	Code rate	码率
M-ary orthogonal signaling over	M 元正交信号传输	Code word	码字
		fixed length	固定长度
multiphase signaling over	多相信号传输	variable length (Huffman)	可变长度(霍夫曼)
Ricean fading	赖斯衰落	Coded modulation	编码调制
scattering function	散射函数	Codes	码
spread factor	扩展因子	source	信源
table	表	instantaneously decodable	即刻可译的
storage	存储		惟一可译的
underspread	欠扩展	uniquely decodable	(see also Block Codes; Convolutional codes)
underwater acoustic	水声	Coding	编码
wireless	无线	entropy	熵
wireline	有线	for AWGN channel: block codes, convolutional codes	对 AWGN 信道: 分组码, 卷积码
Channel encoder	信道编码器		对 BSC 信道
Channel reliability function	信道可靠性函数	for BSC (see Block codes; Convolutional codes)	对 BSC 信道
Characteristic function	特征函数	for Rayleigh fading channel	对瑞利衰落信道
of binomial	二项式 ~		
of chi-square	χ^2 ~	concatenated	级联的
of Gaussian	高斯 ~	constant-weight codes	恒重码
of multivariate Gaussian	多变量高斯 ~	convolutional codes	卷积码
of uniform	均匀 ~	cutoff rate	截止率
Chebyshev inequality	切比雪夫不等式	linear block codes	线性分组码
Chernoff bound	契尔诺夫边界	trellis codes	网格码
for BSC	二进制对称信道 ~	Huffman	霍夫曼
for Rayleigh fading channel	瑞利衰落信道 ~	Noiseless	无噪声
Chi-square distribution	χ^2 分布	speech	语音
central	中心	Coding gain	编码增益
noncentral	非中心	Compandor	压扩器
Code division multiple access (CDMA) 码分多址		Comparison of digital modulation	数字调制的比较
asynchronous	异步	Complementary error function	互补误差函数
capability	容量		
digital cellular	数字蜂窝		
frequency hopped	跳频		

Complete orthonormal functions	完备标准正交函数	partial response	部分响应
Complex envelope	复包络	phase cylinder	相位柱面
of narrowband process	窄带过程~	phase trees of	~相位树
Computational cutoff rate	计算的截止率	power spectrum of	~功率谱
(See also cutoff rate)		representation of	~表示
Concatenated block codes	级联分组码	signal space diagram for	~信号空间图
parallel concatenated(turbo)	并行级联	state trellis	状态网格
serially concatenated	串行级联	trellis of	网格
Concatenated convolutional codes	级联卷积码	Continuously variable slope delta modulation (CVSD)	连续可变斜率增量调制
parallel concatenated(turbo)	并行级联	Convolutional codes	卷积码
serially concatenated	串行级联	applications of	~应用
Conditional cdf (cumulative distribution function)	条件累积分布函数	binary	二进制~
Conditional pdf (probability density function)	条件概率密度函数	catastrophic error propagation	恶性的差错传播
Conditional probability	条件概率	concatenated	级联
Consistent estimate(see Estimate)	一致性估计	constraint length	约束长度
Constraint length	约束长度	decoding	译码
Continuous-phase frequency-shift keying (CPFSK)	连续相位频移键控	Fano algorithm	范诺算法
performance of	~性能	feedback	反馈~
power density spectrum of	~功率密度谱	sequential	序列~
representation of	~表示	stack algorithm	堆栈算法
Continuous-phase modulation (CPM)	连续相位调制	Viterbi	维特比~
demodulation	解调	distance properties of	~距离特性
maximum-likelihood sequence estimation	最大似然序列估计	dual- k	双 k
multiampitude	多幅度	encoder	编码器
multi- h	多 h	generators	生成元
performance of	~性能	hard-decision decoding	硬判决译码
suboptimum	次最佳	minimum free distance	最小自由距离
symbol-by-symbol	逐符号	nonbinary	非二进制
full response	全响应	optimum decoding of	~最佳译码
linear representation	线性表示法	performance on AWGN channel	在 AWGN 信道上的性能
minimum-shift keying (MSK)	最小频移键控	performance on BSC	在 BSC 信道上的性能
modulation index	调制指数	performance on Rayleigh fading channel	在瑞利衰落信道上的性能
multiampitude	多幅度	punctured	穿孔、删除(余)
multi- h	多 h	rate compatible	码率兼容的
		quantized metrics	量化度量
		soft-decision decoding	软判决译码
		state diagram	状态图
		table of generators for maximum free distance	最大自由距离生成元表

transfer function	传递函数	soft-decision	软判决
tree diagram	树图	bounds on performance for AWGN	AWGN 信道性能边界
trellis diagram	网格图	comparison with hard-decision decoding	与硬判决译码比较
Correlation demodulator	相关解调器	Decoding of convolutional codes	卷积码的译码
metrics for	度量	for fading channel performance	对衰落信道性能
Correlative state vector	相关状态向量	feedback	反馈
Coset	陪集	hard-decision	硬判决
Coset leader	陪集首	performance on AWGN channel	在 AWGN 信道上的性能
Covariance	协方差	performance on BSC	在 BSC 信道上的性能
Covariance function	协方差函数	sequential	序列的, 时序的
Cross-correlation function	互相关函数	soft decision	软判决
Cross-power density spectrum	互功率密度谱	stack algorithm	堆栈算法
Cumulative distribution function(cdf)	累积分布函数	Viterbi algorithm	维特比算法
Cutoff rate	截止(速)率	Soft-output	软输出
comparison with channel capacity	与信道容量相比	Delay distortion	延时失真
for binary coded signals	二进制编码信号 ~	Delay power spectrum	延时功率谱
for M -ary input M -ary output vector channel	M 元输入 M 元输出向量信道 ~	Delta modulation(see Source, encoding)	增量调制
for multiampitude signals	多幅度信号 ~	Demodulation/Detection	解调/检测
for noncoherent channel	非相干信道 ~	carrier recovery for	载波恢复
for q -ary input Q -ary output channel	q 元输入 Q 元输出信道 ~	Costas loop	科斯塔斯环
system design with	系统设计	decision-directed	面向判决
CW jamming	连续波阻塞(干扰)	ML methods	最大似然方法
Cyclic codes(see Block codes, cyclic)	循环码	non-decision-directed	非面向判决
cyclic equalization	循环均衡	squaring PLL	平方锁相环
Cyclostationary process	循环平稳过程	coherent	相干 ~
Data compression	数据压缩	of binary signals	二进制信号
Data translation codes	数据转换码	of biorthogonal signals	双正交信号
Decision-feedback equalizer	判决反馈均衡器	comparison of	比较
(see Equalizers; decision-feedback)		of DPSK signals	差分相移键控信号
Decoding of block codes	分组码的译码	of equicorrelated signals	等相关信号
for fading channels: hard-decision, soft-decision	对衰落信道: 硬判决, 软判决	of M -ary binary coded signals	M 元二进制编码信号
hard-decision	硬判决	optimum	最佳
bounds on performance for BSC	BSC 信道性能边界	of orthogonal signals	正交信号
Chernoff bound	契尔诺夫边界	of PAM signals	脉冲幅度调制信号
syndrome	伴随式, 校验子, 校正子	of PSK signals	相移键控信号
table lookup method	查表法	of QAM signals	正交幅度调制信号

correlation-type	相关型	frequency	频率~
of CPFSK	连续相位频移键控信号	performance of	~性能
performance	性能	polarization	极化~
for intersymbol interference	符号间干扰	RAKE	RAKE
		time	时间~
matched filter-type	匹配滤波器型	Double-sideband modulation	双边带调制
maximum-likelihood	最大似然	DPCM (Differential pulse code modulation)	差分脉码调制
maximum likelihood sequence	最大似然序列	DPSK(differential phase-shift keying)	差分相移键控
noncoherent	非相干		
of binary signals	二进制信号	Dual code	对偶码
of M -ary orthogonal signals	M 元正交信号	Dual- k codes	双 k 码
		Duobinary signal	双二进制信号
multichannel	多信道	Early-late gate synchronizer	早-迟门同步器
optimum	最佳	Effective antenna area	有效天线面积
symbol-by-symbol	逐符号的	Effective radiated power	有效辐射功率
Differential encoding	差分编码	Eigenvalue	特征值
Differential entropy	差熵	Eigenvector	特征向量
Differential phase-shift keying	差分相移键控	Elias bound	埃利斯上界
		Encoding(see Block codes;Conventional codes)	编码
Digital communication system model	数字通信系统模型	Energy	能量
		Ensemble averages	集平均
Digital modulator	数字调制器	Entropy	熵
Direct sequence (see Spread spectrum signals)	直接序列	conditional	条件~
		differential	差分~
Discrete cosine transform	离散余弦变换	discrete memoryless sources	离散无记忆信源~
Discrete memoryless channel (DMC)	离散无记忆信道		
		discrete stationary sources	离散平稳信源~
Discrete memoryless source	离散无记忆信源	Entropy coding	熵编码
Discrete random variable	离散随机变量	Envelope	包络
Discrete-time signals	离散时间信号	Envelope detection	包络检测
Distance (see Block codes;Convolutional codes, minimum free distance)	距离	Equalizers(see also Adaptive equalizers)	均衡器
Distortion (see also Channel distortion)	失真	at transmitter	发送机中~
		decision-feedback	判决反馈~
from quantization	量化~	adaptive	自适应
granular noise	散弹噪声~	examples of performance	性能例子
slope overload	斜率过载~	of trellis-coded signals	网格码信号
Distortion rate function	失真率函数	minimum MSE	最小 MSE
Distributions(see Probability distributions)	分布	predictive form	预测形式
		linear	线性~
Diversity	分集	adaptive	自适应~
antenna	天线~		

convergence of MSE algorithm	MSE 算法收敛性	for M -ary equicorrelated	对 M 元等相关
cyclic equalization	循环均衡	for M -ary orthogonal	对 M 元正交
error probability	错误概率	for M -ary PAM	对 M 元 PAM
excess MSE	过剩 MSE	for PSK	对 PSK
examples of performance	性能的例子	for QAM	对 QAM
fractionally spaced	分数间隔	union bound for	联合上界
LMS (MSE) algorithm	最小均方 (MSE) 算法	multichannel	多信道
mean-square error (MSE) criterion	均方误差 (MSE) 准则	noncoherent demodulation	非相干解调
minimum MSE	最小 MSE	for binary signals	对二进制信号
output SNR for	输出信噪比	for M -ary orthogonal	对 M 元正交
passband	带通	Estimate	估计 (值)
peak distortion	峰值失真	biased	有偏的 ~
peak distortion criterion	峰值失真准则	consistent	一致性 ~
phase-splitting	相位分离	efficient	有效的 ~
zero-forcing	迫零	unbiased	无偏的 ~
iterative equation/decoding	迭代方程/译码	Estimate of phase (see also Carrier phase estimation)	相位估计 (值)
maximum a posteriority probability (MAP)	最大后验概率 (MAP)	clairvoyant	透视的
maximum-likelihood sequence estimation	最大似然序列估计	pilot signal	导频信号
reduced-state	减少状态	Estimation, maximum-likelihood sequence (MLSE)	最大似然序列估计
self-recovering (blind)	自恢复 (盲)	Estimation	估计
with trellis-coded modulation	网格编码调制	maximum likelihood	最大似然 ~
using the Viterbi algorithm	采用维特比算法	of carrier phase	载波相位 ~
channel estimator for	信道估计器	of signal parameters	信号参数 ~
performance of	性能	of symbol timing	符号定时 ~
reduced complexity	降低复杂性	of symbol timing and carrier phase	符号定时和载波相位估计
reduced-state	减少状态	performance of	~ 性能
Equivalent codes	等效码	Euclidean	欧氏 (欧几里德)
Equivalent lowpass impulse response	等效低通冲激响应	distance	~ 距离
Equivalent lowpass signal	等效低通信号	weight	~ 重量
Equivocation	疑义度	Events	事件
Error function	误差函数	intersection of	~ 相交
Error probability	差错概率	joint	联合 ~
coherent demodulation:	相干解调	mutually exclusive	互斥 ~
binary coded	二进制编码	null	零 ~
for binary signals	对二进制信号	probability of	~ 概率
for DPSK	对 DPSK	union of	~ 并
for M -ary biorthogonal	对 M 元双正交	Excess bandwidth	过剩带宽
		Excess MSE	过剩 MSE
		Expected value	期望值
		Expurgated codes	删信码

Extended code	扩展码	Golay codes	戈莱码
Extension field	扩展域	extended	扩展~
Extrinsic information	外信息	generator polynomial of	生成多项式
Eye pattern	眼图	performance on AWGN channel	在 AWGN 信道上性能
Fading channels	衰落信道	Gold sequences	戈尔德序列
propagation models	传播模型	Gram-Schmidt procedure	格拉姆-施密特过程
Feedback decoding	反馈译码	Granular noise	散弹噪声
FH spread spectrum signals (See Spread spectrum signals)	跳频扩频信号	Gray encoding	格雷编码
Filter	滤波器	Hadamard codes	哈达马码
integrator	积分器~	Hamming bound on minimum distance	最小距离汉明边界
matched	匹配~	Hamming codes	汉明码
Folded spectrum	折叠谱	Hamming distance	汉明距离
Follower jammer	跟踪干扰器	Hard-decision decoding	硬判决译码
Fourier transform	傅里叶变换	block codes	分组码
Free Euclidian distance	自由欧氏距离	convolutional codes	卷积码
Free-space path loss	自由空间路径损耗	Hata model	哈达模型
Frequency diversity	频率分集	Hilbert transform	希尔伯特变换
Frequency division multiple access	(FDMA) 频分多址	Huffman coding	霍夫曼编码
capacity of	~容量	Illumination efficiency factor	照明效率因子
Frequency-hopped (FH) spread spectrum (see Spread spectrum signals)	跳频扩频	Impulse noise	冲激噪声
Frequency-shift keying (FSK)	频移键控	Impulse response	冲激响应
continuous-phase(CPSK):performance of	连续相位性能	Independent events	独立事件
power density spectrum of	功率密度谱	Independent random variables	独立随机变量
representation of	表示法	Information	信息
Functions of random variables	随机变量函数	equivocation	疑义度
Galois field	伽罗华域	measure of	~测量
Gamma function	伽码函数	mutual	互~
Gaussian distribution	高斯分布	average	平均
multivariate	多变量~	self-	自~
Gaussian noise	高斯噪声	average(entropy)	平均(熵)
Gaussian random process	高斯随机过程	conditional	条件的
Gaussian random variables, linear transformation of	高斯随机变量,线性变换	sequence	序列
Generator matrix	生成矩阵	Information theory	信息论
Generator polynomial	生成多项式	Inner product	内积
Gilbert-Varsharmov bound	吉尔伯特-乌沙莫夫边界	Interleaving	交织
		block	分组
		convolutional	卷积
		uniform	均匀的
		Intersymbol interference	符号间干扰
		controlled(see Partial response signals)	受控的

discrete-time model for	离散时间模型	Linear time-invariant system	线性时不变系统
equivalent white noise filter model	等效白噪声滤波器模型	response to stochastic input	对随机输入的响应
optimum demodulator for	最佳解调器	Linear transformation of random variables	随机变量的线性变换
Inverse filter	逆滤波器	Link budget analysis	链路预算分析
Jacobian	雅可比的	Link margin	链路边际(裕量)
Jakes' model	杰克斯模型	Lloyd-Max quantizer	劳埃德-马克斯量化器
Jamming margin	阻塞(干扰)裕量	Lowpass signal	低通信号
Joint cdf (cumulative distribution function)	联合累积分布函数	Lowpass system	低通系统
Joint pdf (probability density function)	联合概率密度函数	Low probability of intercept	低概率侦听
Joint processes	联合过程	Magnetic recording	磁记录
Kalman (RLS) algorithm	卡尔曼(RLS)算法	normalized density	归一化密度
Kasami sequences	Kasami 序列	Majority logic decoder	大数逻辑译码器
K-means algorithm	K 平均算法	Mapping by set partitioning	分集映射
Kolmogorov-Wiener filter	科尔莫哥夫-维纳滤波器	Marginal probability density	边缘概率密度
Kraft inequality	克拉夫特不等式	Marcum's Q-function	马库姆 Q 函数
Laplace probability density function	拉普拉斯概率密度函数	Markov chain	马尔可夫链
Lattice	格型	transition probability matrix of	~ 转移概率矩阵
filter	~ 滤波器	Matched filter	匹配滤波器
recursive least-squares	递推最小二乘	Maximal ratio combining	最大比合并
Law of large numbers (weak)	大数定律(弱)	performance of	~ 性能
Least favorable pdf	最小合适 pdf	Maximum a posteriori probability (MAP) criterion	最大后验概率准则
Least-squares algorithms	最小二乘算法	Maximum free distance codes, tables of	最大自由距离码
Lempel-Ziv algorithm	兰培尔-齐夫算法	Maximum length shift-register codes	最长移位寄存器码
Levinson-Durbin algorithm	列文森-杜宾算法	Maximum likelihood	最大似然
Likelihood ratio	似然比	parameter estimation	~ 参数估计
Line codes	线路码	for carrier phase	对载波相位~
Linear codes(see Block codes, linear; Convolutional codes)	线性码	for joint carrier and symbol	联合载波和符号的~
Linear equalization(see Equalizers, linear)	线性均衡	for symbol timing	对符号定时~
Linear-feedback shift register, maximum length	线性反馈移位寄存器, 最长	performance of	~ 性能
Linear prediction	线性预测	Maximum-likelihood criterion	最大似然准则
backward	后退~	Maximum-likelihood receiver	最大似然接收机
forward	前向~	Maximum-likelihood sequence detection (MLSD)	最大似然序列检测
residuals	残余~		
Linear predictive coding (LPC)	线性预测编码	Mean-square error (MSE) criterion	均方误差准则
		Mean value	均值
		Microwave LOS channel	微波视线信道

Miller code	密勒码	fixed rate	固定码率
Minimum distance	最小距离	state dependent	状态相关
bounds on	边界	state independent	状态独立
definition	定义	Modulator	调制器
Euclidean	欧氏	binary	二进制
Hamming	汉明	digital	数字的
Minimum-shift keying (MSK)		M-ary	M 元
	最小移频键控	Moments	矩
power spectrum of	~ 功率谱	Morse Code	莫尔斯码
Models	模型	Multicarrier communications	多载波通信
channel	信道 ~	capacity of	~ 容量
source	信源 ~	FFT-based system	基于 FFT 系统
Modified duobinary signal	变型双二进制信号	peak-to-average ratio	峰值平均比
Modulation	调制	Multichannel communications	多信道通信
binary	二进制 ~	with binary signals	二进制信号 ~
biorthogonal	双正交 ~	with M-ary orthogonal signals	M 元正交信号 ~
comparison of	~ 比较	Multipath channels	多径信道
continuous-phase FSK (CPFSK)	连续相位 FSK	Multipath intensity profile	多径强度分布图
power spectrum	功率谱	Multipath spread	多径展宽(扩展)
continuous-phase modulation		Multiple access methods	多址方法
	连续相位调制	capacity of	容量
DPSK	差分相移键控	CDMA	码分多址
equicorrelated (simplex)	等相关的(单纯的)	FDMA	频分多址
frequency-shift keying	频移键控	multistage interference cancellation	
index	~ 指数		多级干扰抵消
linear	线性 ~	random access	随机接入
power spectrum of	~ 功率谱	successive interference cancellation	
M-ary orthogonal	M 元正交		连续干扰抵消
multichannel	多信道	TDMA	时分多址
multidimensional	多维的	Multiple antenna systems	多天线系统
nonlinear	非线性 ~	Inverse channel detector	逆信道检测器
offset QPSK	偏移 QPSK	maximum likelihood detector	最大似然检测器
PAM (ASK)	脉幅调制(幅移键控)		最小 MSE 检测器
PSK	相移键控	minimum MSE detector	
QAM	正交幅度调制	space-time coding for	空时编码
Modulation codes	调制码	Multiple random variables	多随机变量
(see also Partial response signals)		Multistage interference cancellation	
capacity of	容量		多级干扰抵消
Miller code	密勒码	Multisuser communications	多用户通信
NRZ	非归零	Multivariate gaussian distribution	
NRZI	非归零反转		多变量高斯分布
run-length limited	游程长度受限	Mutual information	互信息

average	平均	Partial-band interference	部分频带干扰
Mutually exclusive events	互斥事件	Partial response signals	部分响应信号
Nakagami distribution	Nakagami 分布	duobinary	双二进制 ~
Narrowband interference	窄带干扰	error probability of	~ 错误概率
Narrowband process	窄带过程	modified duobinary	变型双二进制 ~
carrier frequency of	载波频率	precoding for	~ 预编码
Narrowband signal	窄带信号	Partial-time (pulsed) jamming	部分时间(脉冲式)干扰
Noise	噪声	Peak distortion criterion	峰值失真准则
gaussian	高斯 ~	Peak frequency deviation	峰值频率偏移
white	白 ~	Peak-to-average ratio	峰值平均比
Noise equivalent bandwidth	噪声等效带宽	Perfect codes	完备码
Noisy channel coding theorem	有噪信道编码定理	Periodically stationary, wide sense	周期平稳, 广义
Noncoherent combining loss	非相干合并损失	Phase jitter	相位抖动
Nonlinear distortion	非线性失真	Phase-locked loop (PLL)	锁相环
Nonlinear modulation	非线性调制	Costas	科斯塔斯环
Nonstationary stochastic process	非平稳随机过程	decision-directed	面向判决 ~
Norm	范数	M-law type	M 方类型 ~
Normal equations	正规方程	non-decision-directed	非面向判决 ~
Normal random variables(see gaussian distribution)	正态随机变量	square-law type	平方律类型 ~
Null event	零事件	Phase-shift keying (PSK)	相移键控
Null space	零空间	adaptive reception of	自适应接收
Nyquist criterion	奈奎斯特准则	pdf of phase	相位 pdf
Nyquist rate	奈奎斯特速率	performance for AWGN channel	对 AWGN 信道的性能
Offset quadrature PSK (OQPSK)	偏移正交 PSK	performance for Rayleigh fading channel	对瑞利衰落信道的性能
On-off signaling (OOK)	启闭信号传输	Plotkin bound on minimum distance	最小距离普洛特金界
Optimum demodulation (see Demodulation/Detection)	最佳解调	Power density spectrum	功率密度谱
Orthogonal signals	正交信号	at output of linear system	在线性系统的输出端 ~
Orthogonality principle, mean square estimation	正交性原理, 均方估计	of digitally modulated signals	数字已调信号 ~
Orthonormal	标准正交	Prediction(see Linear prediction)	预测
expansion	~ 展开式	Preferred sequences	优选序列
functions	~ 函数	Prefix condition	前缀条件
vector	向量	Probability	概率
Parallel concatenated codes	并行级联码	a priori	先验 ~
Parity check	奇偶校验(一致校验)	a posteriori	后验 ~
matrix	~ 矩阵	conditional	条件 ~
Parity polynomial	校验多项式	of events	事件 ~

joint	联合~	Quadrature components	正交分量
Probability density function	概率密度函数	of narrowband process	窄带过程
Probability distribution function	概率分布函数	properties of	性质
Probability distributions	概率分布	Quantization	量化
binomial	二项式~	block	分组~
chi-square	χ^2	optimization(Lloyd-Max)	最佳~
central	中心	scalar	标量~
noncentral	非中心	vector	向量~
gamma	伽玛~	Quantization error	量化误差
gaussian	高斯~	Quasiperfect codes	准完备码
log normal	对数正态~	Raised cosine spectrum	升余弦谱
multivariate Gaussian	多变量高斯~	excess bandwidth	过剩带宽
multivariate gaussian	多变量高斯~	rolloff parameter	滚降参数
Nakagami	Nakagmi~	RAKE correlator	RAKE 相关器
Rayleigh	瑞利~	RAKE receiver	RAKE 接收机
Rice	赖斯~	for binary antipodal signals	对二进制双极性信号
uniform	均匀~	for binary orthogonal signals	对二进制正交信号
Probability transition matrix	概率转移矩阵	for DPSK signals	对 DPSK 信号
Processing gain	处理增益	for noncoherent detection of orthogonal signals	对正交信号非相干检测
Pseudo-noise (PN) sequences	伪随机噪声序列	Random access	随机接入
autocorrelation function	自相关函数	ALOHA	ALOHA
generation via shift register	移位寄存器生成	carrier sense	载波侦听
Gold	戈尔德	with collision detection	具有碰撞检测
Kasami		non persistent	非坚持
maximal-length	最大长度	l -persistent	l -坚持
peak cross-correlation	峰值互相关	p -persistent	p -坚持
preferred (see also Spread spectrum signals)	优选的	offered channel traffic	提供的信道通信量
Pulse amplitude modulation (PAM)	脉冲幅度调制	slotted ALOHA	时隙 ALOHA
Pulse code modulation (PCM)	脉码调制	throughput	吞吐量
adaptive (ADPCM)	自适应~	unslotted	非时隙
differential (DPCM)	差分~	Random coding	随机编码
Pulsed interference	脉冲干扰	binary coded signals	二进制编码信号
effect on error rate performance	对差错率性能影响	multiamplitude signals	多幅度信号
Punctured convolutional codes	删余卷积码	Random Processes(see Stochastic processes)	随机过程
Quadrature amplitude modulation (QAM)	正交幅度调制	Random variables	随机变量
		function of	~函数
		multiple	多重~
		orthogonal	正交~
		single	单一~

statistically independent	统计独立	average (entropy)	平均(熵)
sums of	总和	Sequential decoding	序列译码
central limit theorem	中心极限定理	Serially concatenated codes	串行级联码
transformation of	变换	Set partitioning	集合划分
Jacobian of	雅可比	Shannon limit	香农极限
linear	线性	Shortened code	截短码
uncorrelated	非相关	Signal constellations	信号星座图
Rate	率, 速率	PAM	PAM~
code	码率	PSK	PSK~
of encoded information(see source encoding)		QAM	QAM~
	编码信息速率	Signal design	信号设计
Rate distortion function	率失真函数	for band-limited channel	对带限信道
of bandlimited gaussian source		for channels with distortion	
	带限高斯信源~	对畸变信道	
of memoryless gaussian source		for no intersymbol interference	
	无记忆高斯信源~		无符号间干扰
table of	表	with partial response pulses	部分响应脉冲
Rayleigh distribution	瑞利分布	with raised cosine spectral pulse	
Rayleigh fading(see Channel, fading Multipath; Channel			升余弦谱脉冲
Rayleigh fade)	瑞利衰落	Signal-to-noise ratio (SNR)	信噪比
Reciprocal polynomial	反多项式	Signals	信号
Recursive least squares (RLS) algorithms		analytic	解析的
	递推最小二乘算法	antipodal	双极性(对映)的
fastRLS	快速 RLS	bandpass	带通~
RLS Kalman	RLS 卡尔曼	baseband	基带~
RLS lattice	RLS 格型	binary antipodal	二进制双极性~
Reed-Solomon codes	里德-索罗门码	binary coded	二进制编码~
References	参考	binary orthogonal	二进制正交~
Reflection coefficients	反射系数	biorthogonal	双正交~
Regenerative repeaters	再生中继器	carrier of	载波
Residuals	残余	characterization of	~特征
Rice distribution	赖斯分布	complex envelope	复包络
Ricean fading channel	赖斯衰落信道	digitally modulated	数字调制的~
Run-length limited codes	游程长度受限码	cyclostationary	周期平稳
fixed rate	固定码率	representation of	表示
state dependent	状态相关	spectral characteristics of	谱特征
state independent	状态独立	discrete-time	离散时间~
Sample function	抽样函数	energy of	~能量
Sample mean	样本均值	envelope of	~包络
Sample space	样本空间	equivalent lowpass	等效低通~
Sampling theorem	抽样定理	lowpass	低通~
scattering function	散射函数	M-ary orthogonal	M 元正交~
Self-information	自信息	multiamplitude	多幅度~

multidimensional	多维~	Huffman	霍夫曼
multiphase	多相~	Lempel-Ziv	兰培尔-兹夫
narrowband	窄带~	linear predictive coding (LPC)	线性预测编码
optimum demodulation of	~最佳解调	pulse code modulation (PCM)	脉码调制
quadrature amplitude modulated (QAM)	正交幅度调制~	subband	子带
quadrature components of	~正交分量	models	模型
properties of	性质	speech	语声
simplex	单纯(形)的~	spectral	谱
speech	语声~	waveform	波形
stochastic	随机~	Source coding	信源编码
autocorrelation of	自相关	Spaced-frequency, spaced-time correlation	频率间隔, 时间间隔相关函数
autocovariance	自协方差	function	谱
bandpass stationary	带通平稳	Spectrum	谱
cross correlation of	互相关	of CPFSK and CPM	CPFSK 和 CPM~
ensemble averages of	集平均	of digital signals	数字信号~
power density spectrum	功率密度谱	of linear modulation	线性调制~
properties of quadrature components	正交分量性质	of signals with memory	有记忆信号~
white noise	白噪声	Specular componet	镜像分量
Signal space representation	信号空间表示法	Spread factor	扩展因子
Signature sequence	签名(特征)序列	table of	~表
Simplex signals	单纯(形)信号	Spread spectrum multiple access (SSMA)	扩频多址
Single-sideband modulation	单边带调制	Spread spectrum signals	扩频信号
skin depth	表层深度	acquisition of	捕获
Slope overload distortion	斜率过载失真	for antijamming	抗干扰(阻塞)
Soft decision decoding	软判决译码	for code division multiple access	(CDMA) 码分多址
block codes	分组码	concatenated codes for	级联码
convolutional codes	卷积码	direct sequence (DS)	直接序列
Source	信源	applications of	应用
analog	模拟~	coding for	编码
binary	二进制~	demodulation of	解调
discrete memoryless (DMS)	离散无记忆~	performance of	性能
discrete stationary	离散平稳~	with pulse interference	脉冲干扰
encoding	~编码	examples of DS	DS 的例子
adaptive DM	自适应 DM	exision of narrowband interference	窄带干扰的删除
adaptive DPCM	自适应 DPCM	frequency-hopped (FH)	跳频
adaptive PCM	自适应 PCM	block hopping	跳块
delta modulation (DM)	增量调制(DM)	follower jammer for	跟随器式干扰源
differential pulse code modulation (DPCM)	差分脉码调制	performance of	性能
discrete memoryless	离散无记忆		

with partial-band interference	部分频带干扰	for multiphase signals	多相信号
hybrid combinations	混合合并	with Costas loop	科斯塔斯环
for low-probability of intercept (LPI)	低截获概率	with decision-feedback loop	判决反馈环
for multipath channels	对多径信道	with phase-locked loop (PLL)	锁相环
synchronization of	同步	with squaring loop	平方环
time-hopped (TH)	跳时	of spread spectrum signals	扩频信号
tracking of	跟踪	sliding correlator	滑动相关器
uncoded PN	未编码 PN	symbol	符号~
Spread spectrum system model	扩频系统模型	Syndrome	伴随式, 校验子
Square-law detection	平方律检测	Syndrome decoding	伴随式译码
Square-root factorization	平方根因式化	System, linear	系统, 线性
Staggered quadrature PSK (SQPSK)	交错(参差)正交 PSK	autocorrelation function at output	在输出端的自相关函数
State diagram	状态图	bandpass, response of	带通, 响应
Stationary stochastic processes	平稳随机过程	power density spectrum at output	在输出端的功率密度谱
strict-sense	狭义(严)平稳	Systematic code	系统码
wide-sense	广义(宽)平稳	Tail probability bounds	尾部概率上边界
Statistical averages	统计平均	Chebyshev inequality	切比雪夫不等式
Statistical independent	统计独立	Chernoff bound	契尔诺夫边界
Steepest-descent (gradient) algorithm	最陡下降(梯度)算法	TATS (tactical transmission system)	战术传输系统
Stochastic process	随机过程	Telegraphy	电报
band limited	带限的	Telephone channels	电话信道
complex-valued	复(值)的	Thermal noise	热噪声
cyclostationary	循环平稳~	Threshold decoder	门限译码器
discrete-time	离散时间~	Time diversity	时分分集
narrowband	窄带~	Time division multiple access (TDMA)	时分多址
nonstationary	非平稳~	capacity of	~容量
strict-sense stationary	狭义(严)平稳~	Toeplitz matrix	托伯利茨矩阵
wide-sense stationary	广义(宽)平稳~	Transfer function	传递函数
Storage channel	存储信道	of convolutional code	卷积码~
Strict-sense stationary	严平稳	of linear system	线性系统~
Subband coding	子带编码	Transformation of random variables	随机变量的变换
Successive interference cancellation	连续干扰抵消	Transition probabilities	转移概率
symbol interval	符号间隔	Transition probability matrix	转移概率矩阵
Synchronization	同步	for channel	信道
carrier	载波~	for delay modulation	延迟调制
effect of noise	噪声的影响	Tree diagram	树图

Trellis-coded modulation	网格编码调制	Variance	方差
encoders for	~编码器	Vector space	向量空间
for fading channels	衰落信道	Vector quantization	向量量化
free Euclidean distance	自由欧氏距离	Viterbi algorithm	维特比算法
st partitioning	集合划分	reduced-state	减少状态
subset decoding	子集译码	Vocal trace	声迹
tables of coding gains for	编码增益表	Voltage-controlled oscillator	(VCO) 压控振荡器
Turbo coded	Turbo 编码	Weak law of large numbers	弱大数定律
Trellis diagram	网格图	Weight	重量
Triangle inequality	三角不等式	of code word	码字~
Tricepstrum equalization algorithm	倒三谱均衡算法	distribution	~分布
		for Golay	戈莱
Turbo codes	Turbo 码	Welch bound	韦尔奇上界
Turo TCM	Turbo 网格编码调制	White noise	白噪声
Uncorrelated random variables	非相关随机变量	Whitening filter	白化滤波器
		Wide-sense stationary	广义(宽)平稳
Uniform distribution	均匀分布	Wiener filter	维纳滤波器
Uniform tree	均匀树	Wireline channels	有线信道
Union bound	一致上界	Yule-Walker equations	尤尔-沃克方程
Union of events	事件的并	Z transform	Z 变换
Uniquely decodable	惟一可译码	Zero-forcing equalizer	迫零均衡器
Universal source coding	通用信源编码	Zero-forcing filter	迫零滤波器
Variable-length encoding	变长编码		