



普通高等教育“十二五”规划电气信息类系列教材



# 数字信号 处理

主 编 李永全 杨顺辽 孙祥娥



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>



普通高等教育“十二五”规划电气信息类系列教材



→ 电路分析

→ 数字电子技术

→ 模拟电子技术

→ 单片机原理及应用

→ **数字信号处理**

→ 数字信号处理实现与实践

→ 计算机控制技术

→ 计算机网络及应用

数字信号处理  
PDG

ISBN 978-7-5409-7269-5



9 787560 972695 >

- 策划编辑: 王红梅
- 责任编辑: 刘万飞
- 封面设计: 刘 卉

定价: 29.80元



普通高等教育“十二五”规划电气信息类系列教材



# 数字信号处理

主 编 李永全 杨顺辽 孙祥娥



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

## 内 容 简 介

本书较详细地介绍了数字信号处理的基本理论和分析方法。全书共分9章,第1章介绍离散时间信号和系统的有关概念和时域的分析方法;第2章介绍离散时间信号和系统的 $z$ 域、频域的理论和分析方法;第3、4章介绍离散傅里叶变换的基本原理、快速算法和主要的应用;第5~7章为数字滤波器的有关内容,包括数字滤波器的结构、IIR数字滤波器和FIR数字滤波器的设计方法;第8章探讨了数字信号处理中的有限长效应;第9章讨论了多采样率数字信号处理的基础知识。本书通过细致的理论介绍,再加上较丰富的举例说明,可使读者较容易掌握有关的理论和知识,便于自学。

本书可作为大专院校电子信息工程、通信工程、自动控制、计算机应用本科专业理论课程的教材,也可以作为在通信、信息技术、图像处理、语音处理、地震勘探信号处理等有关领域从事信号处理的科技工作者的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/李永全 杨顺辽 孙祥娥 主编. —武汉:华中科技大学出版社, 2011.9  
ISBN 978-7-5609-7269-5

I. 数… II. ①李… ②杨… ③孙… III. 数字信号处理-高等学校-教材  
IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 149785 号

### 数字信号处理

李永全 杨顺辽 孙祥娥 主编

策划编辑:王红梅

责任编辑:刘万飞

封面设计:刘 卉

责任校对:周 娟

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:华中科技大学印刷厂

开 本:787mm×960mm 1/16

印 张:16.75

字 数:425千字

版 次:2011年9月第1版第1次印刷

定 价:29.80元



华中科技大学出版社

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换  
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务  
版权所有 侵权必究



## 前 言

数字信号处理中,变换域分析和数字滤波器设计是两大主要内容,而且从多年的本科教学实践来看,学习数字信号处理的难点也在这两个方面:一是各种变换的含义、特点及其相互关系;二是数字滤波器设计过程中参数的含义及其与滤波器设计之间的联系。因此,本书在系统地讲解有关数字信号处理基本概念和基本理论的基础上,采用了如下一些措施,力图使读者对数字信号处理的有关内容有深刻的理解并能形成有机的整体。

(1) 将各种变换之间的联系加以较详细的比较。拉普拉斯变换与  $z$  变换、 $z$  变换与序列的傅里叶变换,以及离散傅里叶变换与  $z$  变换和序列的傅里叶变换之间的区别和联系,并对四种傅里叶变换,即连续非周期信号的傅里叶变换、连续周期信号的傅里叶级数、离散非周期信号的离散时间傅里叶变换以及离散周期信号的离散傅里叶级数进行了对比。

(2) 离散傅里叶变换是数字信号处理的核心,离散傅里叶变换的定义分别从两个方面加以推导:一是由周期序列的傅里叶级数来得出离散傅里叶变换的定义;二是从序列的傅里叶变换在频域离散化的角度得出离散傅里叶变换的定义,并以图形的方式从连续时间信号的采样一直到得出离散傅里叶变换的过程加以形象化地显示并给予说明。

(3) 在巴特沃斯数字滤波器的设计过程中,将归一化频率不再定义在 3dB 截止频率上,而是定义在任意通带截止频率处,从而使得其与切比雪夫滤波器的设计一致,这样的处理方式还使得在 IIR 其他各型巴特沃斯滤波器设计过程中意义更加明确、过程更加简单。

(4) 书中列举了大量的例题,特别是在序列的傅里叶变换、离散傅里叶变换及滤波器的设计等部分,这些较丰富的例题,可以使读者掌握有关原理和性质在理论分析和设计中的应用,并对数字滤波器设计的例题结果加以显示和分析,便于读者自学。

本书对数字信号处理的基本理论进行了细致的讲解,而这些理论和算法的实现及配套教材《数字信号处理实现与实践》中有详细的介绍,因此,将该教材与本书配合使用,会取得更好的学习效果。

本书的第 1~3 章由李永全、杨顺辽编写,第 4 章由孙祥娥、李永全编写,第 5~7 章由杨顺辽、李永全编写,第 8~9 章由孙祥娥编写。长江大学电信学院的同事对本

书也给予了大力的帮助,同时参考了许多作者编写的书籍资料,在此向他们一并表示衷心的感谢。

由于时间较为紧张,再加上编者的水平有限,对于本书出现的不足之处,恳请读者不吝批评指正,我们将不胜感激。

编 者

2011 年 5 月



# 目 录

1 离散时间信号与系统的时域分析 .....	(1)
1.1 离散时间信号——序列 .....	(2)
1.1.1 序列的时域表示 .....	(2)
1.1.2 序列的基本运算 .....	(2)
1.1.3 基本序列 .....	(4)
1.1.4 序列的周期性 .....	(6)
1.1.5 序列的能量和功率 .....	(6)
1.1.6 用单位冲击序列表示任意序列 .....	(7)
1.2 离散时间系统 .....	(8)
1.2.1 线性系统 .....	(8)
1.2.2 时不变系统 .....	(9)
1.2.3 线性时不变系统输入与输出之间关系 .....	(10)
1.2.4 离散时间系统的因果性和稳定性 .....	(13)
1.2.5 离散时间系统的时域描述 .....	(14)
1.3 连续信号的采样 .....	(15)
1.3.1 采样定理 .....	(16)
1.3.2 采样信号的恢复 .....	(18)
1.4 序列的线性相关 .....	(20)
1.4.1 线性相关的定义 .....	(20)
1.4.2 线性相关与线性卷积的关系 .....	(21)
本章小结 .....	(22)
思考与练习 .....	(22)
2 离散时间信号与系统的变换域分析 .....	(25)
2.1 序列的 $z$ 变换 .....	(25)
2.1.1 $z$ 变换的定义 .....	(25)
2.1.2 $z$ 变换的收敛域 .....	(26)
2.2 逆 $z$ 变换 .....	(29)
2.2.1 围线积分法(留数法) .....	(30)
2.2.2 部分分式展开法 .....	(31)
2.2.3 长除法(幂级数展开法) .....	(34)
2.3 $z$ 变换的性质和定理 .....	(35)

2.4	序列的离散傅里叶变换 .....	(40)
2.4.1	序列的傅里叶变换的定义 .....	(40)
2.4.2	序列的傅里叶变换的主要性质 .....	(42)
2.4.3	序列的傅里叶变换举例 .....	(45)
2.5	拉普拉斯变换、 $z$ 变换、序列的傅里叶变换的关系 .....	(47)
2.5.1	拉普拉斯变换与 $z$ 变换的关系 .....	(47)
2.5.2	$z$ 变换与序列傅里叶变换的关系 .....	(48)
2.6	线性时不变离散时间系统的变换域分析 .....	(49)
2.6.1	线性时不变离散时间系统的变换域描述 .....	(49)
2.6.2	系统频率响应的意义及定性确定方法 .....	(50)
2.6.3	系统的分类 .....	(53)
	本章小结 .....	(54)
	思考与练习 .....	(55)
3	离散傅里叶变换 .....	(58)
3.1	周期序列的傅里叶级数 .....	(58)
3.2	离散傅里叶变换 .....	(61)
3.2.1	离散傅里叶变换的定义 .....	(61)
3.2.2	离散傅里叶变换定义导出的图形解释 .....	(62)
3.3	几种傅里叶变换的比较 .....	(64)
3.4	离散傅里叶变换的性质 .....	(67)
3.5	离散傅里叶变换举例 .....	(72)
3.6	频域采样定理 .....	(74)
	本章小结 .....	(78)
	思考与练习 .....	(79)
4	快速傅里叶变换 .....	(82)
4.1	直接计算离散傅里叶变换的问题及改进的途径 .....	(82)
4.2	按时间抽取(DIT)的基-2 FFT 算法 .....	(83)
4.2.1	算法原理 .....	(83)
4.2.2	运算量分析与比较 .....	(86)
4.2.3	运算规律 .....	(87)
4.3	按频率抽取的基-2 FFT 算法 .....	(88)
4.3.1	算法原理 .....	(88)
4.3.2	运算量分析与比较 .....	(90)
4.4	快速傅里叶逆变换(IFFT)算法 .....	(90)
4.5	$N$ 为合数的快速傅里叶变换算法 .....	(92)

4.5.1	算法原理	(92)
4.5.2	运算量分析	(93)
4.6	线性调频 $z$ 变换算法	(94)
4.6.1	算法基本原理	(94)
4.6.2	线性调频 $z$ 变换的实现步骤	(96)
4.7	FFT 的应用	(97)
4.7.1	频谱分析	(97)
4.7.2	用快速傅里叶变换计算线性卷积	(100)
	本章小结	(103)
	思考与练习	(104)
5	数字滤波器的结构	(107)
5.1	数字滤波器结构的表示方法	(107)
5.2	IIR 数字滤波器的结构	(109)
5.2.1	直接 I 型结构	(109)
5.2.2	直接 II 型结构	(110)
5.2.3	级联型结构	(110)
5.2.4	并联型结构	(111)
5.3	FIR 数字滤波器的结构	(113)
5.3.1	直接型结构	(114)
5.3.2	级联型结构	(114)
5.3.3	线性相位型结构	(115)
5.3.4	快速卷积型结构	(116)
5.3.5	频率采样型结构	(117)
5.4	数字滤波器的格型结构	(120)
5.4.1	全零点系统的格型结构	(120)
5.4.2	全极点系统的格型结构	(123)
	本章小结	(124)
	思考与练习	(125)
6	IIR 数字滤波器的设计	(127)
6.1	引言	(127)
6.1.1	滤波器的分类	(128)
6.1.2	滤波器的技术指标	(129)
6.1.3	IIR 数字滤波器的设计方法	(130)
6.2	模拟低通滤波器的设计	(131)
6.2.1	概述	(132)

6.2.2	巴特沃斯模拟低通滤波器的设计 .....	(133)
6.2.3	切比雪夫 I 型模拟低通滤波器的设计 .....	(138)
6.3	IIR 数字低通滤波器的设计 .....	(143)
6.3.1	脉冲响应不变法设计 IIR 数字低通滤波器 .....	(143)
6.3.2	双线性变换法设计 IIR 数字低通滤波器 .....	(147)
6.4	IIR 数字高通、带通及带阻滤波器的设计 .....	(152)
6.4.1	先利用模拟频率变换,再设计各型数字滤波器 .....	(152)
6.4.2	由数字低通滤波器设计其他类型数字滤波器 .....	(162)
	本章小结 .....	(165)
	思考与练习 .....	(166)
7	FIR 数字滤波器的设计 .....	(168)
7.1	线性相位 FIR 数字滤波器的特性 .....	(169)
7.1.1	线性相位 FIR 数字滤波器的相位特性 .....	(169)
7.1.2	线性相位 FIR 数字滤波器的幅度特性 .....	(171)
7.1.3	线性相位 FIR 数字滤波器的零点特性 .....	(174)
7.2	窗函数法设计 FIR 数字滤波器 .....	(175)
7.2.1	基本方法 .....	(175)
7.2.2	常用的窗函数 .....	(178)
7.2.3	几种常用线性相位 FIR 数字滤波器的设计 .....	(182)
7.3	频率采样法设计线性相位 FIR 数字滤波器 .....	(188)
7.4	线性相位 FIR 数字滤波器的等纹波优化设计 .....	(194)
7.4.1	线性相位 FIR 数字滤波器幅度特性的统一表示 .....	(194)
7.4.2	切比雪夫最佳逼近法设计 FIR 数字滤波器的原理 .....	(196)
7.5	IIR 数字滤波器与 FIR 数字滤波器的比较 .....	(199)
	本章小结 .....	(200)
	思考与练习 .....	(201)
8	数字信号处理的有效字长效应 .....	(203)
8.1	二进制数的表示与量化误差 .....	(204)
8.1.1	二进制数的表示 .....	(204)
8.1.2	量化误差 .....	(207)
8.2	A/D 转换器的量化误差 .....	(212)
8.2.1	量化误差的统计分析 .....	(212)
8.2.2	量化信噪比与所需字长的关系 .....	(214)
8.2.3	量化噪声通过线性非时变系统 .....	(215)
8.3	系数量化对数字滤波器的影响 .....	(216)

8.3.1	极点位置灵敏度 .....	(216)
8.3.2	系数量化对二阶子系统极点位置的影响 .....	(219)
8.3.3	频率响应偏差的统计分析 .....	(222)
8.4	数字滤波器的运算量化效应 .....	(225)
8.4.1	IIR 数字滤波器定点运算舍入误差的统计分析 .....	(225)
8.4.2	IIR 数字滤波器定点加法运算的溢出问题 .....	(229)
8.4.3	极限环振荡 .....	(230)
8.4.4	定点运算的溢出振荡 .....	(232)
8.4.5	浮点运算的有限字长效应 .....	(233)
8.5	快速傅里叶变换算法的有限字长效应 .....	(233)
8.5.1	蝶形运算的统计模型 .....	(234)
8.5.2	防止溢出和快速傅里叶变换输出的信噪比 .....	(235)
8.5.3	浮点快速傅里叶变换算法中的量化效应 .....	(237)
本章小结 .....		(238)
思考与练习 .....		(238)
9	多抽样率数字信号处理 .....	(241)
9.1	抽样率变换的基本理论 .....	(241)
9.1.1	按整数因子 $M$ 抽取 .....	(242)
9.1.2	按整数因子 $L$ 插值 .....	(244)
9.1.3	按分数因子变换抽样率 .....	(245)
9.2	多抽样率系统的网络结构与实现 .....	(246)
9.2.1	直接型 FIR 结构的高效实现 .....	(246)
9.2.2	多相滤波器结构 .....	(248)
本章小结 .....		(250)
思考与练习 .....		(251)
参考文献 .....		(254)

# 离散时间信号与系统的时域分析

本章重点内容：序列的表示方法；序列的基本运算及常用序列；序列的周期性、能量和功率；离散时间系统的线性时不变性、因果稳定性；卷积运算及离散时间系统的描述；奈奎斯特采样定理及采样信号的恢复；相关运算及其与卷积的关系。

在信号处理中，信号往往用数学中的函数形式  $x(t)$  来表示，其表示的可以是不同的物理量，如温度、压力、声音、光照强度等，但这些物理量都可以通过传感器转换为电信号。因此，在信号处理中往往用  $x(t)$  表示电信号，它可以是电流信号，也可以是电压信号。自变量  $t$  可以是时间，也可以是别的变量；可以是一维变量，也可以是多维变量。若自变量  $t$  表示时间，则  $x(t)$  称为时域信号；若自变量  $t$  表示空间距离（如图像信号），则  $x(t)$  称为空域信号；若自变量  $t$  表示频率，则  $x(t)$  称为频域信号。

如果自变量  $t$  为定义在时间轴上的连续变量，则  $x(t)$  为连续时间信号，也称为模拟信号；若自变量  $t$  为定义在时间轴上的离散变量，则  $x(t)$  为离散时间信号，这时往往将  $x(t)$  改记为  $x(nT_s)$ ，其中  $T_s$  表示相邻两个点之间的时间间隔，又称为采样周期， $n$  取整数。为了简化表示，一般将  $x(nT_s)$  简记为  $x(n)$ ，这里  $n$  仍然取整数， $x(n)$  往往又称为离散时间序列，简称序列。

处理离散时间信号的系统，称为离散时间系统。离散时间系统就是要使离散时间信号发生“改变”，即处理，以达到所需要的目的。因此，离散时间信号的处理，其核心就是离散时间系统的设计。设计出不同的离散时间系统，就会得到不同的处理结果。当然，这里沿用“系统”这一概念，并不意味着离散时间系统一定是由硬件构成的。后面会发现，数字信号处理中的系统往往都是一些数学计算，这恰恰是数字信号处理的优点所在。

为了理解离散数字信号处理的原理并设计离散时间系统，就需要知道离散时间信号与离散时间系统的时域特性，这就是本章讨论的主要内容。当然，在后面两章



中会发现,在变换域中描述信号与系统的特性会更加方便。

## 1.1 离散时间信号——序列

### 1.1.1 序列的时域表示

在数字信号处理中,信号用数字序列来表示,该序列称为一组样本。一个序列的一个样本值用  $x(n)$  表示,其中自变量  $n$  取整数,当  $n$  为非整数时没有定义。序列用  $\{x(n)\}$  表示,为了表示简单,一般也用  $x(n)$  来表示一个序列,本书采用这一简化的表示方法。

如果一个序列用一组样本值来表示,即一一列出每个样本的取值,则这种表示方法称为列举法。往往在时间序号  $n=0$  处的样本下面用一个箭头  $\uparrow$  表示,其右边的样本值对应于  $n$  为正值的部分,而它左边的值对应  $n$  为负值的部分。

比如,有一个序列为

$$x(n) = \{3, -2, 1.5, -0.5, 0, 0.8, 1.9, -3.4\}$$

$\uparrow$

则表示当  $n=0$  时的值  $x(0)$  为  $-0.5$ ,  $n=-1$  时的值  $x(-1)$  为  $1.5$ ,  $n=1$  时的值  $x(1)$  为  $0$  等。

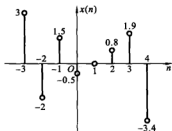


图 1-1 序列的图形表示

如果将序列以波形图的方式表示,则称为图示法。图 1-1 所示即为上例序列的波形,其横坐标虽然是连续的,但是仅在整数点上有意义;纵坐标代表样点信号的值。显然,用图示法来表示序列比较直观。在实际的信号处理中,往往需要显示出信号的波形,以直观地观察信号的特点。

离散时间序列往往也用闭合的公式来表示,如

$$x(n) = 2\sin(\omega n), \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

表示正弦序列。

### 1.1.2 序列的基本运算

离散信号处理中,常常需要如下的几种基本运算。

#### 1. 序列的乘积

两个序列的乘积是指将两个序列的样本值逐点对应相乘,即

$$y(n) = x_1(n)x_2(n) \quad (1-1)$$

**例 1-1** 已知序列  $x_1(n) = \begin{cases} 2^{-n}, & n \geq 1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$ ,  $x_2(n) = \begin{cases} n+1, & n \geq 0 \\ 2^n, & n < 0 \end{cases}$ , 试计算

$$y(n) = x_1(n)x_2(n).$$

解 根据已知条件可得

$$y(n) = \begin{cases} (n+1)2^{-n}, & n \geq 0 \\ 1, & n = -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

## 2. 序列的相加

将两个序列的样本值逐点相加,就实现了序列的相加运算,即

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (1-2)$$

例 1-2 序列与例 1-1 相同,试计算  $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$ 。

解 根据已知条件可得

$$y(n) = \begin{cases} 2^{-n} + n + 1, & n \geq 0 \\ 5/2, & n = -1 \\ 2^n, & n < -1 \end{cases}$$

## 3. 序列乘常数

将序列的每个样本值均乘以一个常数就是序列与常数相乘,即

$$y(n) = Ax(n) \quad (1-3)$$

序列和常数相乘,就实现了序列的放大,其功能类似于对模拟信号的增益为  $A$  的放大器的功能。

## 4. 序列的移位

所谓序列的移位,又称为序列的时移,即

$$y(n) = x(n-k) \quad (1-4)$$

当  $k > 0$  时,将序列  $x(n)$  向右平移  $k$  位;当  $k < 0$  时,将序列  $x(n)$  向左平移  $k$  位。

例 1-3 试求将例 1-1 中的  $x_1(n)$  向右平移 3 位的表达式  $y(n)$ 。

解 显然,将序列  $x_1(n)$  向右平移 3 位,即为  $x_1(n-3)$

$$y(n) = x_1(n-3) = \begin{cases} 2^{-(n-3)}, & n-3 \geq -1 \\ 0, & n-3 < -1 \end{cases} = \begin{cases} 2^{3-n}, & n \geq 2 \\ 0, & n < 2 \end{cases}$$

## 5. 序列的反转

序列  $x(n)$  的时间反转形式,即

$$y(n) = x(-n) \quad (1-5)$$

也称折叠运算,即以  $n=0$  为对称轴左右对折。显然,例 1-1 中序列  $x_1(n)$  的反转为

$$y(n) = x(-n) = \begin{cases} 2^n, & n \leq 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

## 6. 序列的差分

将同一序列  $x(n)$  的相邻的样本值相减就是序列的差分运算,即

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \quad (1-6)$$

或  $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$  (1-7)

即为序列的差分运算,式(1-6)称为前向差分,即  $n$  点前的值  $x(n+1)$  与当前值的差;式(1-7)称为后向差分,即当前值与  $n$  点后的值  $x(n-1)$  的差。

序列的差分运算对应于连续信号的微分运算。当对序列进行多次差分时,就变成了高阶差分,如

$$\nabla^2 x(n) = \nabla[\nabla x(n)] = \nabla[x(n) - x(n-1)] = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) \quad (1-8)$$

实现了二次差分,相当于连续信号的二阶微分运算。

**例 1-4** 试求例 1-1 中序列  $x_1(n)$  的前向一阶差分和后向一阶差分。

**解** 根据差分的定义可知,要计算前向差分和后向差分,只需要先计算出  $x_1(n+1)$  和  $x_1(n-1)$ ,然后再根据定义分别计算,即

$$\Delta x_1(n) = x_1(n+1) - x_1(n) = \begin{cases} 2^{-n-1} - 2^{-n} & n \geq -1 \\ 2 & n = -2 \\ 0 & n < -2 \end{cases} = \begin{cases} -2^{-n-1}, & n \geq -1 \\ 2, & n = -2 \\ 0, & n < -2 \end{cases}$$

$$\nabla x_1(n) = x_1(n) - x_1(n-1) = \begin{cases} 2^{-n} - 2^{1-n} & n \geq 0 \\ 2 & n = -1 \\ 0 & n < -1 \end{cases} = \begin{cases} -2^{-n}, & n \geq 0 \\ 2, & n = -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

### 1.1.3 基本序列

下面介绍几种基本序列,它们在离散时间信号的分析及离散时间系统的分析和设计中具有重要作用。例如,可以把任意一个离散时间序列用这些基本序列表示出来。另外一个基本应用是采用系统对某些基本序列的响应来描述离散时间系统的特性,这也是离散时间信号处理的基础。如果任意一个离散时间信号可以用这些基本序列表示出来,那么利用这种对系统的描述方法,就可以方便地计算出该系统对任意信号的响应。最常见的序列是单位冲激序列、单位阶跃序列、正弦序列、指数序列等。

#### 1. 单位冲激序列

单位冲激序列是最简单、也是用得最多的序列之一,记为  $\delta(n)$ ,定义如下

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1-9)$$

该序列仅有一个样点的值为非 0,即在  $n=0$  时才为 1,其他点的值全为 0。该序列是离散时间系统描述的基础。

平移  $k$  个样本的单位冲激序列表示为

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (1-10)$$

## 2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列记为  $u(n)$ , 定义如下

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1-11)$$

即  $u(n)$  只有在  $n$  为非负数时才为 1, 其他时均为 0。平移  $k$  个样本的单位阶跃序列表示为

$$u(n-k) = \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases} \quad (1-12)$$

显然, 单位冲激序列  $\delta(n)$  和单位阶跃响应  $u(n)$  间的关系为

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k), \quad \delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-13)$$

即  $u(n)$  是  $\delta(n)$  的累加, 而  $\delta(n)$  是  $u(n)$  的差分。

## 3. 矩形序列

矩形序列记为  $R_N(n)$ , 定义如下

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-14)$$

其中,  $N$  为矩形序列的长度。平移  $k$  个样本的矩形序列表示为

$$R_N(n-k) = \begin{cases} 1, & k \leq n \leq N+k-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-15)$$

显然, 根据定义可得  $R_N(n)$  与  $u(n)$  和  $\delta(n)$  的关系为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N), \quad R_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) \quad (1-16)$$

## 4. 正弦序列和指数序列

正弦序列在实际应用中也经常遇到

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad -\infty < n < +\infty \quad (1-17)$$

其中,  $A$  为振幅,  $\omega_0$  为角频率,  $\varphi$  为相位, 三者均为实数。

指数序列是以取实数或复数的  $n$  次幂作为第  $n$  个样本值的序列, 即

$$x(n) = A a^n, \quad -\infty < n < +\infty \quad (1-18)$$

其中,  $A$  和  $a$  为实数或复数。在数字信号处理中用得最多的指数序列是

$$x(n) = |A| [e^{(\sigma + j\omega_0)}]^n, \quad -\infty < n < +\infty \quad (1-19)$$

根据欧拉公式, 上式可变为

$$x(n) = |A| e^{\sigma n} \cos(\omega_0 n) + j |A| e^{\sigma n} \sin(\omega_0 n) \quad (1-20)$$

当  $n > 0$  时, 上式的实部和虚部具有恒定 ( $\sigma = 0$  时)、增长 ( $\sigma > 0$  时) 和衰减 ( $\sigma < 0$  时) 振幅的实正弦序列。

### 1.1.4 序列的周期性

对于一个序列  $x(n)$ , 如果对于所有  $n$ , 存在一个最小的正整数  $N$ , 满足

$$x(n) = x(n+N) \quad (1-21)$$

则称序列  $x(n)$  是周期序列, 周期为  $N$ 。

下面讨论正弦序列  $x(n) = A \sin(n\omega_0 + \varphi)$  的周期性。

根据  $x(n)$  的定义, 显然有

$$x(n+N) = A \sin[(n+N)\omega_0 + \varphi] = A \sin[N\omega_0 + n\omega_0 + \varphi]$$

根据正弦函数的周期性, 仅有当  $N\omega_0 = 2k\pi$ ,  $k$  为整数时, 才能满足

$$x(n) = x(n+N)$$

这时, 正弦序列就是周期序列, 其周期为满足  $N = 2k\pi/\omega_0$  的最小正整数。注意,  $N$ 、 $k$  必须为整数; 否则, 该序列就不为周期序列。

**例 1-5** 试判断序列  $x_1(n) = 2\sin(0.2\pi n + 1)$ ,  $x_2(n) = \sin\left(\frac{4}{3}\pi n\right)$  和  $x_3(n) = 1.2\sin(10\pi n + 2)$  的周期性。

**解** (1) 对于序列  $x_1(n)$ , 显然有  $\omega_0 = 0.2\pi$ , 所以有

$$N = \frac{2k\pi}{\omega_0} = \frac{2k\pi}{0.2\pi} = 10k$$

当取  $k=1$  时,  $N$  有最小正整数 10, 故该序列为周期序列, 周期为 10。

(2) 对于序列  $x_2(n)$ , 显然有  $\omega_0 = 4\pi/3$ , 所以有

$$N = \frac{2k\pi}{\omega_0} = \frac{2k\pi}{\frac{4}{3}\pi} = 1.5k$$

当  $k=2$  时,  $N$  有最小正整数 3, 故该序列为周期序列, 周期为 3。

(3) 对于序列  $x_3(n)$ , 显然有  $\omega_0 = 10$ , 所以有

$$N = \frac{2k\pi}{\omega_0} = \frac{2k\pi}{10} = 0.2k\pi$$

由于  $\pi$  的存在, 无论  $k$  取何整数, 都不能使  $N$  取正整数, 故该序列为非周期序列。

上述讨论过程同样适用于指数为纯虚数的复指数序列, 因为根据式 (1-20), 可将复指数序列转换为复正弦序列。

### 1.1.5 序列的能量和功率

序列  $x(n)$  的能量  $E$  定义为序列各样点值的平方和, 即

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \quad (1-22)$$

一个样本值均为有限值的无限长序列, 其能量可能是有限的, 也可能是无限的。

例如,  $x_1(n) = \begin{cases} 1/n, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases}$  该序列往往也表示为  $x_1(n) = \frac{1}{n}u(n-1)$ , 显然该序列的

能量

$$E = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

为有限值;而序列  $x_2(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} u(n-1)$  的能量为

$$E = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

为无限值。

无限长非周期序列的平均功率  $P$  定义为

$$P = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K |x(n)|^2 \quad (1-23)$$

周期为  $N$  的周期序列的平均功率定义为

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad (1-24)$$

即一个周期的能量的平均。同样,无限长序列的平均功率可能是有限的,也可能是无限的。

如果一个信号的能量无限,而平均功率有限,则称该信号为功率信号。同样,如果信号的能量有限(当然根据定义,其平均功率肯定为0),则称该信号为能量信号。周期序列属于功率信号,而有限长序列属于能量信号。

**例 1-6** 试判断序列  $x(n) = 2(-1)^n u(n)$  是能量信号还是功率信号。

**解** 根据能量的定义,显然其能量为

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} |2(-1)^n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} 4 = +\infty$$

而其平均功率为

$$P = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K |2(-1)^n u(n)|^2 = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=0}^K 4 = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{4(K+1)}{2K+1} = 2$$

故该序列为功率信号。

### 1.1.6 用单位冲击序列表示任意序列

单位冲击序列在线性时不变系统的分析中具有重要作用,任意序列均可表示为单位冲击序列的加权和,即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \delta(n-m) \quad (1-25)$$

显然上式利用了单位冲击序列的定义,即  $\delta(n-m)$  仅在  $n=m$  时才等于1,而在其他点的值均为0。因此有

$$x(m) \delta(n-m) = \begin{cases} x(n), & n=m \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例如, 序列  $x(n) = \{3, -2, 1.5, -0.5, 0, 0.8, 1.9, -3.4\}$  可表示成  $x(n) =$

$$\sum_{m=-3}^4 x(m) \delta(n-m) = 3\delta(n+3) - 2\delta(n+2) + 1.5\delta(n+1) - 0.5\delta(n) + 0.8\delta(n-2) + 1.9\delta(n-3) - 3.4\delta(n-4)。$$

## 1.2 离散时间系统

离散时间系统可以对一给定的输入序列进行处理, 得到一个输出序列 (见图 1-2)。常用的离散时间系统为单输入/单输出离散时间系统, 若以  $T[\ ]$  来表示这种运算, 则一个离散时间系统可表示为



图 1-2 离散时间系统的示意图

$$y(n) = T[x(n)]$$

实际的离散时间系统所处理的都是数字信号, 运算所产生的也都是数字信号, 最常见的离散时间系统就是数字滤波器, 其实从广义上来说, 任何一个离散时间系统都可称为数字滤波器。当然, 并不是所有的系统的目的都是滤波, 但滤波器的设计原理和方法对于所有离散时间系统具有普遍意义。

本书重点讨论的是应用最广泛的线性时不变的离散时间系统。

### 1.2.1 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统, 若某个输入由若干信号加权组成, 则系统的输出就是每个信号对应输出的加权和。叠加性其实包含了可加性和齐次性两个性质。

#### 1. 可加性

$$\text{设} \quad y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

若有  $y_1(n) + y_2(n) = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = T[x_1(n) + x_2(n)]$   
则称系统满足可加性。

#### 2. 齐次性

对于任意常数  $a$ , 若满足

$$ay(n) = aT[x(n)] = T[ax(n)]$$

则称系统具有齐次性。

综合可加性和齐次性, 对于任意常数  $a_1, a_2$  和任意序列  $x_1(n), x_2(n)$ , 线性性可表示为

$$a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) = a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)] = T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)]$$

这就是判断一个系统是否满足线性性的依据。

### 1.2.2 时不变系统

时不变性是常用离散时间系统的第二个要求,对于一个时不变系统,如果  $y(n)$  是  $x(n)$  的输出(响应),那么当输入

$$x_1(n) = x(n - n_0)$$

时,对应的响应为

$$y_1(n) = y(n - n_0)$$

即当输入存在移位时,系统的输出也有相应的移位。时不变性保证对一个给定的输入,系统的输出是独立于输入作用时间的。

**例 1-7** 试判断如下系统  $y(n] = T[x(n)] = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$  的线性性与时不变性。

**解 线性性** 设有任意序列  $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$  和任意常数  $a_1$ 、 $a_2$ , 则

$$\begin{aligned} T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] &= \sum_{m=-\infty}^n [a_1 x_1(m) + a_2 x_2(m)] \\ &= a_1 \sum_{m=-\infty}^n x_1(m) + a_2 \sum_{m=-\infty}^n x_2(m) \\ &= a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)] = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \end{aligned}$$

所以,系统为线性系统。

**时不变性** 因为

$$T[x(n - n_0)] = \sum_{m=-\infty}^n x(m - n_0)$$

令  $l = m - n_0$ , 则上式右边变为

$$\sum_{l=-\infty}^{n-n_0} x(l) = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x(m) = y(n - n_0)$$

所以,系统为时不变系统。

**例 1-8** 试判断系统  $y(n] = T[x(n)] = 2x(2n) + 3$  的线性性和时不变性。

**解 线性性** 设有任意序列  $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$  和任意常数  $a_1$ 、 $a_2$ , 则

$$\begin{aligned} T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] &= 2[a_1 x_1(2n) + a_2 x_2(2n)] + 3 \\ &= a_1 [2x_1(2n) + 3] + a_2 [2x_2(2n) + 3] - 3a_1 - 3a_2 + 3 \\ &= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) - 3a_1 - 3a_2 + 3 \neq a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \end{aligned}$$

显然,该系统为非线性系统。

**时不变性** 因为

$$\begin{aligned} T[x(n - n_0)] &= 2x(2n - n_0) + 3 = 2x[2(n - n_0/2)] + 3 \\ &= y(n - n_0/2) \neq y(n - n_0) \end{aligned}$$

所以,该系统为时变系统。



例 1-9 试判断系统  $y(n] = T[x(n)] = \text{Re}[x(n)]$  的线性性和时不变性。

解 线性性 设有任意序列

$$x_1(n) = r_1(n) + j p_1(n)$$

显然有

$$y_1(n) = r_1(n)$$

由于线性系统对于任意常数都应满足齐次性,因此,只要找到一个常数,使得系统不满足齐次性,就能证明该系统不为线性系统。现假定常数  $a = j$ ,则有

$$T[a x_1(n)] = T\{j[r_1(n) + j p_1(n)]\} = \text{Re}[-p_1(n) + j r_1(n)] = -p_1(n)$$

而

$$a y_1(n) = j y_1(n) = j r_1(n)$$

显然

$$T[j x_1(n)] \neq j y_1(n)$$

所以,该系统为非线性系统。

时不变性 因为

$$T[x(n - n_0)] = \text{Re}[x(n - n_0)] = r_1(n - n_0) = y_1(n - n_0)$$

所以,该系统为时不变系统。

一个线性时不变系统包含如下三种基本运算单元(如图 1-3 所示):

- (1) 加法器,实现序列的相加;
- (2) 系数乘法器,实现序列和常数相乘的运算;
- (3) 延时器,实现序列的延时操作。

系统如果存在上述三种以外的运算,则该系统就不满足线性时不变系统的条件。例 1-8 中存在常数相加运算,例 1-9 中存在取实部运算,这些运算的存在使得这两个系统均不为线性时不变系统。

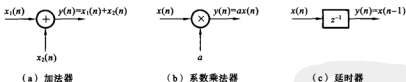


图 1-3 线性时不变系统的基本运算单元

### 1.2.3 线性时不变系统输入与输出之间关系

线性时不变系统可以由它的单位脉冲响应完全描述,如果知道一个系统的单位脉冲响应,就可以得到系统对任意输入的输出。

所谓单位脉冲响应,是指单位冲击序列的响应,即输入为单位冲击序列  $\delta(n)$  时的输出,一般用  $h(n)$  表示,即  $h(n) = T[\delta(n)]$ 。

现将任意序列  $x(n)$  用式(1-25)的单位冲击序列加权求和的形式表示出来。由于系统为线性时不变系统,因此  $\delta(n-1)$  的响应为  $h(n-1)$ ,  $\delta(n-2)$  的响应为  $h(n-2)$ , ..., 依次类推,可得  $x(n)$  的响应  $y(n)$  为

$$y(n) = T\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)T[\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \quad (1-27)$$

式(1-27)称为序列  $x(n)$  与  $h(n)$  的卷积和, 简称为卷积, 简记为

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (1-28)$$

式(1-28)表明, 一个线性时不变系统对于任意输入序列的响应为该输入序列与系统单位脉冲响应的卷积。而不同的系统, 其单位脉冲响应也就不同, 因此可以用单位脉冲响应来描述一个系统。

### 1. 卷积运算的性质

卷积运算具有如下一些性质。

(1) 交换律, 即

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (1-29)$$

交换律表明, 如果把单位脉冲响应改做输入, 而把输入改做系统的单位脉冲响应, 则输出不变。

(2) 结合律, 即

$$x(n) * h_1(n) * h_2(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \quad (1-30)$$

表明两个线性时不变系统级联后仍然是一个线性时不变系统, 级联后系统的单位脉冲响应为两个系统单位脉冲响应的卷积, 且其单位脉冲响应与它们的级联顺序无关。

(3) 分配率, 即

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1-31)$$

表明两个系统的并联等效为一个系统, 该系统的单位脉冲响应为两个系统的单位脉冲响应的和。

### 2. 卷积运算的过程

卷积可以直接按式(1-27)来计算, 也可以采用变换域方法来计算。用变换域来计算的方法将在后续章节中讨论, 直接按式(1-27)计算卷积的过程如下:

- (1) 变量代换, 将  $x(n)$  和  $h(n)$  进行变量代换得到  $x(m)$  和  $h(m)$ ;
- (2) 反转(反折), 将  $h(m)$  进行反转得到  $h(-m)$ ;
- (3) 平移, 将  $h(-m)$  移位  $n$ , 得到  $h(n-m)$ , 当  $n$  为正数时右移  $n$  位, 当  $n$  为负数时左移  $n$  位。

(4) 相乘, 将  $h(n-m)$  与  $x(m)$  在  $m$  相同的对应点相乘;

(5) 求和, 将所有乘积结果累加, 即得到  $n$  时刻的卷积值。

对所有的  $n$  值, 重复上述步骤, 就可以得到所有的卷积值  $y(n)$ 。

## 例 1-10 设

$$x(n) = \begin{cases} n/2, & 1 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad h(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求  $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

解 根据卷积的定义,可得

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=1}^2 x(m)h(n-m)$$

根据  $y(n)$  的计算式可知,  $m$  最小取 1, 最大取 2 (这是由  $x(m)$  的非 0 区间确定的), 而  $h(n-m)$  仅在变量为 0, 1 时有非 0 值。因此当  $n < 1$  时,  $x(m)$  和  $h(n-m)$  总有一个为 0; 当  $n > 3$  时,  $x(m)$  和  $h(n-m)$  也是总有一个为 0 (如图 1-4 所示)。分段考虑如下:

(1) 当  $n < 1$  时, 由于  $x(m)$  和  $h(n-m)$  总有一个为 0, 故  $y(n) = 0$ ;

(2) 当  $1 \leq n \leq 3$  时, 有

$$y(1) = x(1)h(0) + x(2)h(-1) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$y(2) = x(1)h(1) + x(2)h(0) = \frac{1}{2} \times 2 + 1 \times 1 = 2$$

$$y(3) = x(1)h(2) + x(2)h(1) = 1 \times 2 = 2$$

(3) 当  $n > 3$  时, 由于  $x(m)$  和  $h(n-m)$  总有一个为 0, 故  $y(n) = 0$ 。

综上所述, 可得

$$y(n) = \frac{1}{2}\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3)$$

本例题卷积计算的图解如图 1-4 所示。

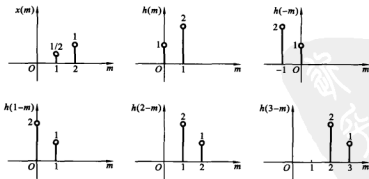


图 1-4 卷积计算的图解

本例题表明, 参与卷积的两个序列长度均为 2, 而卷积结果的序列长度为 3。一般地, 如果一个序列长度为  $N$ , 另一个序列长度为  $M$ , 则这两个序列卷积所得序列的长度为  $N+M-1$ 。

## 1.2.4 离散时间系统的因果性和稳定性

## 1. 因果性

因果性是指系统某时刻的输出只取决于该时刻和该时刻以前的输入,如果系统现在的输出与未来的输入有关,则该系统为非因果系统。

线性时不变离散时间系统满足因果性的充要条件就是在  $n < 0$  时,系统的单位脉冲响应全为 0,即

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (1-32)$$

**证 充分条件** 若  $n < 0$  时,  $h(n) = 0$ , 则

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m)$$

因而

$$y(n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n_0} x(m)h(n_0-m)$$

即  $y(n_0)$  仅与  $m \leq n_0$  时的  $x(m)$  值有关,满足因果系统的条件。

**必要条件** 用反证法来证明。已知系统为因果系统,现假设  $n < 0$  时,  $h(n) \neq 0$ , 则

$$y(n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n_0} x(m)h(n_0-m) + \sum_{m=n_0+1}^{+\infty} x(m)h(n_0-m)$$

根据假设条件,在等式右边的第二项求和式中必然至少有一项不为 0,即  $y(n_0)$  至少和  $m > n_0$  时的一个  $x(m)$  值有关,这显然与系统是因果系统的前提条件相矛盾。因此,  $n < 0$  时  $h(n) = 0$  是系统因果性的必要条件。

一般地,将  $n < 0$  时  $x(n) = 0$  的序列称为因果序列。

频率特性为理想矩形的理想低通滤波器、理想微分器以及理想的  $90^\circ$  移相等均为非因果系统,在物理上是不可实现的。

## 2. 稳定性

稳定性是系统能够正常工作的先决条件,所谓稳定性是指当输入有界时,系统的输出也有界,即若  $|x(n)| \leq M < +\infty$ , 则  $|y(n)| \leq P < +\infty$ 。

线性时不变系统是稳定系统的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty \quad (1-33)$$

即系统的单位脉冲响应绝对可和。

**证 充分条件** 若  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = P < +\infty$ , 如果输入信号  $x(n)$  有界,即对于所有的  $n$  皆满足  $|x(n)| \leq M < +\infty$ , 则

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x(m)| |h(n-m)|$$

$$\leq M \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(n-m)| = M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = MP < +\infty$$

即输出信号有界。

**必要条件** 采用反证法。已知系统稳定, 现假设

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = +\infty$$

对于如下的有界输入

$$x(n) = \begin{cases} 1, & h(-n) \geq 0 \\ -1, & h(-n) < 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } y(0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(0-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(-m)| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| = +\infty$$

即在  $n=0$  时输出无界, 这与系统稳定的条件相矛盾, 故  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$  是系统稳定性的必要条件。

**例 1-11** 试判断单位脉冲响应为

$$h(n) = a^n u(n+1), \quad a \neq 0$$

的系统的因果性和稳定性。

**解 因果性** 因为  $h(n) = a^n u(n+1)$ ,  $a \neq 0$ , 根据单位阶跃函数  $u(n)$  的定义可知, 当  $n=-1$  时,  $h(n) = a^n \neq 0$ 。不满足  $n < 0$  时  $h(n) = 0$  的因果性条件, 故该系统为非因果系统。

**稳定性** 因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| &= \sum_{n=-1}^{+\infty} |a^n| = \sum_{n=-1}^{+\infty} |a|^n = \frac{|a|^{-1} - |a|^{+\infty}}{1 - |a|} \\ &= \begin{cases} 1/(1 - |a|), & |a| < 1 \\ +\infty, & |a| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

所以, 当  $|a| < 1$  时, 系统是稳定的; 当  $|a| \geq 1$  时, 系统是不稳定的。

## 1.2.5 离散时间系统的时域描述

线性时不变的离散时间系统仅包含常数和序列相乘、序列相加及序列的延时等三种基本运算单元, 因此, 单输入/单输出线性时不变离散时间系统的输入/输出关系常用如下的常数线性差分方程来描述

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (1-34)$$

上式可表示成

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \quad (1-35)$$

其中,系数  $a_k$ 、 $b_k$  和延时阶数  $M$ 、 $N$  由系统决定。上述方程之所以称为常系数线性差分方程,是因为方程的所有系数  $a_k$ 、 $b_k$  均为常数,而且各  $y(n-k)$  和各  $x(n-k)$  项均为一次幂。这种描述方式与连续时间线性时不变系统的常系数线性微分方程描述相对应。

在前面的内容中可以看出,系统的单位脉冲响应也能描述系统的有关特性,下面来分析系统的单位脉冲响应与系统的差分方程之间的关系。

由于系统的单位脉冲响应是输入为单位冲击序列时的响应输出,因此,只需将差分方程的一般输入  $x(n)$  及其各阶延时换成  $\delta(n)$ ,则所得输出  $y(n)$  即为单位脉冲响应  $h(n)$ ,即

$$h(n) = \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k h(n-k) \quad (1-36)$$

这样就得到了单位脉冲响应的递推关系。

常系数线性差分方程的求解有许多种方法,包括时域方法和变换域法两大类。时域方法有根据差分方程的递推关系求解的迭代法、根据单位脉冲响应利用卷积关系的卷积法等,变换域法通常用第2章将要介绍的  $z$  变换法。

**例 1-12** 试求差分方程  $y(n)=ay(n-1)+x(n)$  的单位脉冲响应,初始条件为  $y(n)=0, n<0$ 。

**解** 对单位脉冲响应,  $x(n)=\delta(n)$ ,  $y(n)=h(n)$ , 因此有

$$h(n)=ah(n-1)+\delta(n)$$

$$h(0)=ah(-1)+\delta(0)=1$$

$$h(1)=ah(0)+\delta(1)=a$$

$$h(2)=ah(1)+\delta(2)=a^2$$

依此类推可得

$$h(n)=ah(n-1)+\delta(n)=a^n$$

因此可得单位脉冲响应为  $h(n)=a^n u(n)$ 。

显然,该系统是一个因果系统。注意差分方程的解与初始条件有关,即使是同一个差分方程,如果初始条件改变,其结果也就不同。

### 1.3 连续信号的采样

数字信号处理有许多优点,然而实际得到的大多数信号都是连续的,这就面临着如何将连续信号离散化的问题,这一过程就是连续信号的采样。采样就是利用周期性的采样脉冲序列  $p(t)$ ,从连续信号  $x_a(t)$  中抽取出一系列的离散值  $\hat{x}_a(t)$  的过程。采样是连续信号数字化的第一步,  $\hat{x}_a(t)$  再经过量化编码后即为数字信号。理想采样过程如图 1-5 所示。

显然,采样过程为  $\hat{x}_a(t)=x_a(t)p(t)$ ,即采样脉冲序列和连续信号的乘积,因此采样过程可以看成是脉冲调幅过程,被调脉冲是采样脉冲。当采样脉冲宽度为  $\tau$  时

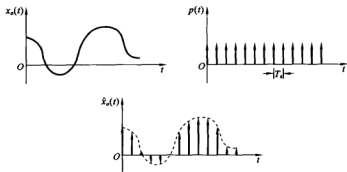


图 1-5 连续信号的理想采样

为实际采样,当脉冲宽度  $\tau \rightarrow 0$  时,就是理想采样。

信号被采样后其频谱会有什么变化?在什么条件下,可从采样信号  $\hat{x}_s(t)$  中不失真地恢复出原信号  $x_a(t)$ ?这显然是采样过程中极为感兴趣的问题。

### 1.3.1 采样定理

当脉冲宽度  $\tau \rightarrow 0$  时,采样过程为理想采样(当  $\tau \leq T_s$  时,可近似看成是理想采样),理想采样过程中  $p(t)$  是单位冲击序列  $\delta_{T_s}(t)$ ,即

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s) \quad (1-37)$$

$T_s$  称为采样周期或采样间隔,对应的  $f_s = 1/T_s$  称为采样频率。理想采样的输出为

$$\hat{x}_s(t) = x_a(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_a(t)\delta(t - mT_s) \quad (1-38)$$

因为  $\delta(t - mT_s)$  仅在  $t = mT_s$  时才不为 0,所以

$$\hat{x}_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_a(mT_s)\delta(t - mT_s) \quad (1-39)$$

即  $\hat{x}_s(t)$  是  $x_a(t)$  在离散时刻  $mT_s$  的样点值的集合。

在连续信号与系统中已知,时域相乘对应于频域的卷积运算。下面假设各信号的傅里叶变换为

$$X_a(j\Omega) = \text{FT}[x_a(t)]$$

$$\Delta_{T_s}(j\Omega) = \text{FT}[\delta_{T_s}(t)]$$

$$\hat{X}_s(j\Omega) = \text{FT}[\hat{x}_s(t)]$$

其中,  $\text{FT}[\ ]$  表示傅里叶变换。现对式(1-38)两端取傅里叶变换可得

$$\hat{X}_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [\Delta_{T_s}(j\Omega) * X_a(j\Omega)] \quad (1-40)$$

其中

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (1-41)$$

由于  $\delta_{T_s}(t)$  是周期函数, 可以表示成傅里叶级数

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{jk\Omega_s t}$$

其中

$$\Omega_s = 2\pi/T_s = 2\pi f_s$$

为采样角频率。傅里叶级数的系数

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta_{T_s}(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s) e^{-jk\Omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \end{aligned}$$

在上述推导过程中, 考虑到了在积分区间  $|t| < T_s/2$  内, 只有一个冲击函数  $\delta(t)$ , 而当  $m \neq 0$  时的  $(t - mT_s)$  都在积分区间以外, 而且还利用了  $\delta(t)$  的如下关系

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt$$

根据上述推导结果, 可得

$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\Omega_s t} \quad (1-42)$$

因此有

$$\Delta_{T_s}(j\Omega) = F[\delta_{T_s}(t)] = F\left[\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\Omega_s t}\right] = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F[e^{jk\Omega_s t}]$$

而

$$F[e^{jk\Omega_s t}] = 2\pi \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

所以

$$\Delta_{T_s}(j\Omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (1-43)$$

将式(1-43)代入式(1-40)可得

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) * X_a(j\Omega) \right] = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(j\theta) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(j\theta) \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \quad (1-44) \end{aligned}$$

因此, 一个连续信号经过采样后, 其频谱将以采样角频率  $\Omega_s = 2\pi/T_s$  为间隔周期延拓, 幅度为原来的  $1/T_s$ , 如图 1-6 所示。

理想采样后信号的频谱, 是频率的周期函数, 周期为  $\Omega_s = 2\pi/T_s$ , 频谱的幅度为原来的  $1/T_s$ 。在采样间隔一定的情况下,  $T_s$  为常数, 因此, 除了常数因子  $1/T_s$  外, 每个延拓的频谱分量与原信号的频谱相同。因此, 只要各延拓分量之间不发生频谱上的交叠(如图 1-6(b)所示), 则有可能恢复出原信号。

对于信号频率限制在某一最高频率  $\Omega_h$  之内的带限信号(如图 1-6(a)所示), 只要  $\Omega_s \geq 2\Omega_h$ , 则原信号的频谱和各延拓分量的频谱之间就不会发生混叠(如图 1-6(b)所示)。这时对于延拓后的频谱, 只要采用一个截止频率为  $\Omega_s/2$  的理想低通滤波器来进行滤波, 就可以得到不失真的原连续信号的频谱, 再通过傅里叶逆变换, 就



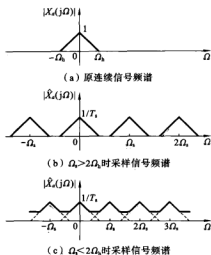


图 1-6 采样后频谱的周期延拓

于信号最高频率的 2 倍,即

可以不失真地恢复原连续信号。为了避免  $1/T_s$  因子的影响,可采用如下的理想低通滤波器滤波

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T_s, & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases} \quad (1-45)$$

如果  $\Omega_s < 2\Omega_b$ , 则各周期延拓的分量间将产生频谱的交叠,称为频谱混叠现象,如图 1-6(c)所示。这时无论采用何种滤波器滤波,均不能不失真地恢复原连续信号。

一般将采样频率的一半  $f_s/2$  称为折叠频率,它如同一面镜子,一旦信号频谱超过它,就会被折叠回来。

由此,可以得出奈奎斯特采样定理:若  $x_a(t)$  是频带宽度有限的,要想采样后能够不失真地恢复原信号,则采样频率必须大于或等

$$f_s \geq 2f_b \quad (1-46)$$

若信号  $x_a(t)$  不是频带宽度有限的,为了避免混叠,一般在对信号采样之前进行低通滤波,该滤波器称为抗混叠滤波器,该滤波器的截止频率为  $f_s/2$ ,以滤除高于  $f_s/2$  的频率分量而避免混叠失真。

### 1.3.2 采样信号的恢复

如果满足奈奎斯特采样定理,即信号的最高频率不大于折叠频率,则采样后不会产生频谱混叠,可以不失真地恢复原信号。为了避免  $1/T_s$  因子的影响,可采用式(1-45)所示的理想低通滤波器滤波。采样的恢复如图 1-7 所示。

图 1-7 所示的系统的输出为  $Y(j\Omega) = \hat{X}_s(j\Omega) H(j\Omega)$   
 $= X_s(j\Omega)$ , 故输出端的信号即为原连续信号为  $y(t)$   
 $= x_a(t)$ 。

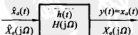


图 1-7 采样的恢复

理想低通滤波器是物理不可实现的,但在一定的精度范围内,可用一个可实现的低通滤波器来逼近它。

下面从时域的角度来分析采样恢复过程。

式(1-45)的理想低通滤波器的冲击响应应为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}$$

由  $\hat{x}_s(t)$  与  $h(t)$  卷积积分就可得理想滤波器的输出为

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_s(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_s(\tau) \delta(\tau - mT_s) \right] h(t-\tau) d\tau \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\tau) h(t-\tau) \delta(\tau - mT_s) d\tau \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_s(mT_s) h(t - mT_s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_s(mT_s) \frac{\sin[\pi(t - mT_s)/T_s]}{\pi(t - mT_s)/T_s}
 \end{aligned} \quad (1-47)$$

这就是信号重建的抽样内插公式,由信号的抽样值  $x_s(mT_s)$  经此公式得到连续信号  $x_s(t)$ ,  $\frac{\sin[\pi(t - mT_s)/T_s]}{\pi(t - mT_s)/T_s}$  称为内插函数,如图 1-8 所示。在采样点  $mT_s$  上的值为 1,而在其余的采样点上,其值全为 0。 $x_s(t)$  等于各  $x_s(mT_s)$  乘对应内插函数的总和。在每个采样点上,只有该点所对应的内插函数不为 0,这使得在各采样点上信号值保持不变,采样点之间的值由加权采样值叠加而成,如图 1-9 所示。

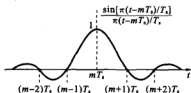


图 1-8 内插函数

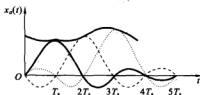


图 1-9 采样的内插恢复

**例 1-13** 对由频率分别为  $f_1 = 250 \text{ Hz}$ 、 $f_2 = 400 \text{ Hz}$ 、 $f_3 = 1\,500 \text{ Hz}$  和  $f_4 = 2\,500 \text{ Hz}$  的正弦信号线性组合的连续时间信号  $x_s(t)$  进行采样,采样频率为  $2 \text{ kHz}$ ,采样以后的信号通过一个截止频率为  $1\,000 \text{ Hz}$  的理想模拟低通滤波器,从而得到连续时间信号  $y(t)$ ,试求  $y(t)$  中所包含的频率成分。

**解** 因为采样频率为  $2 \text{ kHz}$ ,因此采样后信号频谱是原信号频谱以采样频率  $2 \text{ kHz}$  为周期进行周期延拓。由于正弦信号具有正负频率,各频率分量  $f_i$  的周期延拓频率为  $\pm f_i \pm 2\,000 \times k$ ,其中  $k$  为整数。下面依次算出各频率的延拓分量:

$f_1 = 250 \text{ Hz}$ ,周期延拓后的频率分量为  $250 \text{ Hz}$ 、 $1\,750 \text{ Hz}$ 、 $2\,250 \text{ Hz}$ 、 $3\,750 \text{ Hz}$ 、...

$f_2 = 400 \text{ Hz}$ ,周期延拓后的频率分量为  $400 \text{ Hz}$ 、 $1\,600 \text{ Hz}$ 、 $2\,400 \text{ Hz}$ 、 $3\,600 \text{ Hz}$ 、...

$f_3 = 1\,500 \text{ Hz}$ ,周期延拓后的频率分量为  $1\,500 \text{ Hz}$ 、 $500 \text{ Hz}$ 、 $3\,500 \text{ Hz}$ 、 $2\,500 \text{ Hz}$ 、...

$f_4 = 2\,500 \text{ Hz}$ ,周期延拓后的频率分量为  $2\,500 \text{ Hz}$ 、 $4\,500 \text{ Hz}$ 、 $1\,500 \text{ Hz}$ 、 $6\,500 \text{ Hz}$ 、...

采样后的信号通过截止频率为  $1\,000 \text{ Hz}$  的理想模拟低通滤波器滤波后, $y(t)$  的频率分量为  $250 \text{ Hz}$ 、 $400 \text{ Hz}$ 、 $500 \text{ Hz}$ 。

和原频率分量相比,采样后的信号多了 500 Hz 的频率分量,这是由  $f_3 = 1\ 500$  Hz 的频率分量所造成的,造成的原因就是频谱混叠。根据奈奎斯特采样定理,要保证没有混叠失真,采样频率至少应达到  $2\ 500\text{ Hz} \times 2 = 5\text{ kHz}$ 。

## 1.4 序列的线性相关

在实际应用中,有时需要将一个或多个信号与参考信号进行比较,以确定每对信号之间的相似性。如在数字通信中,一个数据符号集由一套专门的离散时间序列表示,如果其中某个序列被传输,接收器必须将接收到的信号和这个符号集中的每个可能序列作比较,从而确定传输的是哪个特定的序列。在图像处理的模板匹配和视频的运动估计中,也需要检测两个信号之间的相似程度。而检测周期信号的周期也往往要用到信号的自相关运算。

### 1.4.1 线性相关的定义

互相关序列  $r_{xy}(m)$  是对一对能量信号  $x(n)$  和  $y(n)$  之间相似性的度量,定义如下

$$r_{xy}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-m) \quad (1-48)$$

上式表明,  $r_{xy}(m)$  表示在  $m$  时刻的值等于将  $x(n)$  保持不动而  $y(n)$  移动  $m$  个值后两个序列对应相乘再相加的结果。如果  $m$  为正,表示序列  $y(n)$  相对于序列  $x(n)$  右移了  $|m|$  个样点值;如果  $m$  为负,表示  $y(n)$  左移  $|m|$  个样点值。

式(1-48)中的下标  $xy$  的顺序表示  $x(n)$  是参考序列,在时间上固定不动,而  $y(n)$  作相对的平移。如果希望  $y(n)$  作参考序列而  $x(n)$  作相对平移,则相应的互相关序列为

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)x(n-m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k+m)x(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y[k-(-m)] = r_{xy}(-m) \end{aligned} \quad (1-49)$$

显然,  $r_{yx}(m)$  可通过序列  $r_{xy}(m)$  反转来得到。

如果互相关的序列  $x(n)$  和  $y(n)$  为同一序列,则互相关就变成了自相关,即

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n-m) \quad (1-50)$$

自相关函数  $r_{xx}(m)$  反映信号  $x(n)$  与其自身作了一段平移之后的  $x(n-m)$  的相似程度,一般将  $r_{xx}(m)$  简记为  $r_x(m)$ 。

由自相关定义式(1-50)可知

$$r_x(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) = E$$

即自相关在变量为0时的值  $r_x(0)$  为信号  $x(n)$  的能量, 是  $r_x(m)$  中的最大值。如果  $x(n)$  不是能量信号,  $r_x(0)$  将趋于无穷大。

对于功率信号, 其相关函数定义为

$$r_{xy}(m) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K x(n)y(n-m) \quad (1-51)$$

$$r_x(m) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K x(n)x(n-m) \quad (1-52)$$

如果  $x(n)$  是周期信号, 周期为  $N$ , 根据式(1-52), 则其自相关函数为

$$\begin{aligned} r_x(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x[n-(N+m)] = r_x(N+m) \end{aligned} \quad (1-53)$$

上式表明, 对于周期序列, 其自相关函数也是周期序列, 而且它们的周期相同, 这也是自相关往往用来检测周期信号的周期的依据。

**例 1-14** 设指数序列  $x(n) = e^{-n}u(n)$ , 试计算其自相关函数。

**解** 根据自相关函数的定义, 有

$$r_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n-m) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}e^{-(n-m)} = e^m \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} = \frac{e^m}{1-e^{-2}}$$

显然,  $r_x(m)$  也是一指数序列。

## 1.4.2 线性相关与线性卷积的关系

对比卷积的定义式(1-27)和相关的定义式(1-48)可发现, 二者极为相似, 它们之间必然存在一定的联系, 将卷积的定义式重写如下

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)y(n-m)$$

为了便于与相关的定义式相比较, 将上式中的  $n$  和  $m$  对换, 得

$$x(m) * y(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(m-n)$$

将相关的定义式重写如下

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y[-(m-n)] = x(m) * y(-m)$$

显然, 相关的运算可以通过卷积运算来实现, 后续章节常采用这种方法来计算相关。

尽管相关和卷积在计算形式上有相似之处, 但二者所表示的物理含义完全不同。线性卷积表示线性时不变系统输入、输出与单位脉冲响应之间的关系, 而相关只是反应两个信号之间的相似程度, 与系统无关。

## 本章小结

掌握离散时间信号和系统的时域特性是数字信号处理的基础。序列有列举法、图示法和公式法等表示方法,图示法具有直观的优点。常见的序列的运算有相加、序列相乘、平移、反转、常数相乘、差分等,常见的序列有单位冲击序列、单位阶跃序列、矩形序列、正弦序列和指数序列等。能量有限的信号称为能量信号,能量无限而功率有限的信号称为功率信号,有限长序列是能量信号,周期信号是功率信号。任何一个序列均可表示为单位冲击序列的加权和的形式,这是推导卷积运算关系的基础。

线性时不变的离散时间系统是最常用的系统,满足可加性、齐次性和时不变性。线性时不变系统的输出、输入与单位脉冲响应满足卷积运算关系。因果性是系统物理可实现的条件,稳定性是系统应用的先决条件。线性时不变离散时间系统包括序列相加、序列乘常数和序列的延迟三种基本运算,可以用常数系数线性差分方程来描述。当然,系统的单位脉冲响应也能反映系统的特性,也往往是描述系统的有效方法。

实际的信号往往都是连续信号,要采用数字信号处理的方法来处理,就必须对其采样。采样过程是连续信号与周期性的采样脉冲串相乘积的过程,采样后信号的频谱是原信号频谱以采样频率为周期的周期延拓。为了保证从采样后的信号中能不失真地恢复原信号,采样频率不能小于被采样信号最高频率的2倍,这就是奈奎斯特采样定理。从采样信号中恢复原信号的过程,其实就是低通滤波的过程,从时域的角度来看就是内插的过程。

当需要判断两个序列的相似性程度时,就要用到序列的相关运算,相关运算具有极为广泛的用途。如果相关运算的序列为同一序列,就为自相关运算,自相关的变量为0时的值为序列的能量。周期序列的自相关与序列具有相同的周期。相关和卷积具有密切的联系,但它们的物理含义完全不同。

## 思考与练习

### 1-1 已知序列

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & -4 \leq n \leq -1 \\ n-2, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 画出  $x(n)$  的图形,标上各点的值;
- (2) 试用  $\delta(n)$  及其相应的延迟表示  $x(n)$ ;
- (3) 令  $y_1(n) = 2x(n-1)$ ,试画出  $y_1(n)$  的图形;

(4) 令  $y_2(n) = 3x(n+2)$ , 试画出  $y_2(n)$  的图形;

(5) 将  $x(n)$  向右平移四个采样点再反转, 试画出其图形。

1-2 对 1-1 题给出的  $x(n)$ , 解答下列问题:

(1) 画出  $x(-n)$  的图形;

(2) 计算  $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$ , 并画出其波形;

(3) 计算  $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$ , 并画出其波形。

1-3 判断下列序列是否周期性的, 若是周期性的, 试确定其周期。

$$(1) x(n) = A \cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2) x(n) = A \sin\left(\frac{13\pi}{3}n\right)$$

$$(3) x(n) = e^{j(n/6 - \pi)}$$

1-4 设系统的输入为  $x(n]$ , 输出为  $y(n]$ , 根据下列输出与输入的关系, 判断系统的线性性和时不变性。

$$(1) y(n) = T[x(n)] = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

$$(2) y(n) = T[x(n)] = x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{7}n - \frac{\pi}{6}\right) \quad (3) y(n) = T[x(n)] = x^2(n)$$

$$(4) y(n) = T[x(n)] = \sum_{m=-\infty}^n x(m) \quad (5) y(n) = T[x(n)] = x(n^2)$$

1-5 已知线性时不变系统的输入为  $x(n]$ , 系统的单位脉冲响应为  $h(n]$ , 试求系统的输出  $y(n]$ , 并画图。

$$(1) x(n) = \delta(n), h(n) = R_5(n)$$

$$(2) x(n) = R_3(n), h(n) = R_4(n)$$

$$(3) x(n) = \delta(n-2), h(n) = 0.5^* R_3(n)$$

$$(4) x(n) = u(-n-1), h(n) = 0.5^* u(n)$$

1-6 判断下列系统的线性性、时不变性、因果性和稳定性。

$$(1) T[x(n)] = x(n-2)$$

$$(2) T[x(n)] = 2x(n) + 3$$

$$(3) T[x(n)] = nx(n)$$

$$(4) T[x(n)] = x(n+2) + 2x(n)$$

1-7 已知系统的差分方程为  $y(n) = x(n+1) - 2x(n) + x(n-1)$ , 试判断该系统的线性性、时不变性、因果性和稳定性。

1-8 设  $c(n) = a^*$ ,  $x(n)$  和  $y(n)$  为任意序列, 试证明:

$$[c(n)x(n)] * [c(n)y(n)] = c(n)[x(n) * y(n)]$$

1-9 设  $x(n]$ 、 $y(n]$  和  $w(n]$  为 3 个任意序列, 试证明:

$$(1) \text{卷积的结合律 } x(n) * [y(n) * w(n)] = [x(n) * y(n)] * w(n)$$

$$(2) \text{卷积的分配率 } x(n) * [y(n) + w(n)] = x(n) * y(n) + x(n) * w(n)$$

1-10 已知  $y(n) = x(n) * h(n)$  和  $y_1(n) = x(n - N_1) * h(n - N_2)$ , 试用  $y(n)$  表示  $y_1(n)$ 。

1-11 对由频率分别为  $f_1 = 250$  Hz、 $f_2 = 450$  Hz、 $f_3 = 1\,000$  Hz 和  $f_4 = 1\,250$  Hz 的正弦信号线性组合的连续时间信号  $x_s(t)$  进行采样, 采样频率为 1 kHz, 将采

样以后的信号通过一个截止频率为 500 Hz 的理想模拟低通滤波器,从而得到连续时间信号  $y(t)$ ,试求  $y(t)$  中所包含的频率成分。

1-12 对 3 个正弦信号  $x_{a1}(t) = \cos 2\pi t$ ,  $x_{a2}(t) = \cos 6\pi t$ ,  $x_{a3}(t) = \cos 10\pi t$  进行理想采样,采样频率为 8 Hz,试画出从 0 开始的两个周期的采样结果的图形。

1-13 计算下述序列的自相关序列。

(1)  $x(n) = a^n u(n)$

(2)  $x(n) = R_N(n)$

1-14 试计算周期序列  $x(n) = (-1)^n$  的自相关序列并确定其周期。



# 2

## 离散时间信号与系统的变换域分析

本章重点内容：序列的 $z$ 变换和逆 $z$ 变换的定义、性质及求解方法；序列的傅里叶变换的定义、性质及求解方法；拉普拉斯变换、 $z$ 变换及序列的傅里叶变换之间的关系；线性时不变离散时间系统的变换域描述、系统频率响应的定性确定方法及系统的类型。

第1章介绍了离散时间信号与系统的时域分析方法，而在变换域中对离散时间信号和系统进行分析是另一种重要的方法。在连续时间信号与系统的分析方法中，变换域方法有拉普拉斯变换和傅里叶变换，而在离散时间信号与系统的变换域分析方法中，采用 $z$ 变换和序列的傅里叶变换，又称离散时间傅里叶变换(Discrete Time Fourier Transform, DTFT)。其中 $z$ 变换与拉普拉斯变换在连续时间信号与系统的分析中的作用相同，它使得描述离散时间系统的差分方程变为简单的代数方程，从而使得其求解过程大大简化。序列的傅里叶变换类似于连续信号的傅里叶变换，只是一个处理的对象是离散时间信号，一个处理的对象是连续时间信号。

### 2.1 序列的 $z$ 变换

$z$ 变换是离散时间信号和系统分析的重要工具，在离散时间信号和系统的分析和设计中具有重要作用。

#### 2.1.1 $z$ 变换的定义

$z$ 变换的定义可以由离散时间信号直接给出，也可以由采样信号的拉普拉斯变换过渡到 $z$ 变换。下面推导由拉普拉斯变换过渡到 $z$ 变换的过程。

将连续时间信号采样后的表达式(1-39)重写如下



$$\hat{x}_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_a(mT_s) \delta(t - mT_s) \quad (2-1)$$

其中:  $\hat{x}_a(t)$  是连续时间信号  $x_a(t)$  的采样值。现对  $\hat{x}_a(t)$  进行拉普拉斯变换, 得

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_a(mT_s) \delta(t - mT_s) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_a(mT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s) e^{-st} dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_a(mT_s) e^{-smT_s} = X(e^{sT_s}) \end{aligned} \quad (2-2)$$

令

$$z = e^{sT_s} \quad (2-3)$$

并将  $x_a(mT_s)$  简记为一般的时间序列  $x(n)$ , 则式(2-2)变为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (2-4)$$

这样,  $\hat{x}_a(t)$  的拉普拉斯变换形式就变成了另一复变量  $z$  的变换形式, 这就是  $z$  变换。

## 2.1.2 $z$ 变换的收敛域

$z$  变换的定义式(2-4)是无穷多项的累加求和, 显然, 只有当式(2-4)收敛时才有意义。对于任意给定的序列  $x(n)$ , 使其  $z$  变换收敛的所有  $z$  值的集合称为  $X(z)$  的收敛域。将使  $X(z)$  的分母为 0, 即  $X(z)$  趋于无穷大的点称为极点, 而将使  $X(z)$  为 0 的点称为零点, 将零极点画在  $z$  平面上得到的图形称为零极点分布图。显然, 收敛域中不包含极点。

按照级数理论, 式(2-4)收敛的充要条件是满足绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) z^{-n}| < +\infty \quad (2-5)$$

要满足上述条件,  $|z|$  值必须在一定范围内, 这个范围就是收敛域。不同形式的序列其收敛域形式也不同, 下面分别进行讨论。

### 1. 有限长序列

这类序列只是在有限区间  $n_1 \leq n \leq n_2$  之间时  $x(n)$  的取值才不全为 0, 而在此区间之外序列值全为零, 则其  $z$  变换变为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

即为有限项之和, 因此只要级数的每一项有限, 级数就一定收敛。由于  $x(n)$  的每个样点值都是有限的, 所以只要  $|z^{-n}|$  为有限值, 有限长序列的  $z$  变换就能收敛。

当  $0 < |z| < +\infty$  时(往往称为有限  $z$  平面),  $|z^{-n}|$  肯定是有有限, 因此在这个区

域内,有限长序列的 $z$ 变换就一定收敛。但是 $z=0$ 和 $|z|=+\infty$ 时 $|z^{-n}|$ 是否有限,还取决于 $n_1$ 和 $n_2$ 的取值情况,讨论如下。

(1) 当 $n_1 \geq 0$ 时, $x(n)$ 取非零值时的序号 $n$ 均不小于零,则 $|z^{-n}|$ 中不存在 $z$ 的正次幂。因此,当 $|z|=+\infty$ 时, $|z^{-n}|$ 为有限值,这时的收敛域包括 $|z|=+\infty$ ,即收敛域为 $0 < |z| \leq +\infty$ 。

(2) 当 $n_2 \leq 0$ 时, $x(n)$ 取非零值时的序号 $n$ 均不大于零,则 $|z^{-n}|$ 中不存在 $z$ 的负次幂。因此,当 $z=0$ 时, $|z^{-n}|$ 为有限值,这时的收敛域包括 $z=0$ ,即收敛域为 $0 \leq |z| < +\infty$ 。

(3) 当 $n_1 < 0$ 而 $n_2 > 0$ 时, $|z^{-n}|$ 中既存在 $z$ 的负次幂,也存在 $z$ 的正次幂。因此, $z=0$ 和 $|z|=+\infty$ 时 $|z^{-n}|$ 均可能无限,这时的收敛域不能包括 $z=0$ 和 $|z|=+\infty$ ,即收敛域为 $0 < |z| < +\infty$ 。

## 2. 右边序列

这类序列是指只在 $n \geq n_1$ 时, $x(n)$ 取值不全为0;在 $n < n_1$ 时, $x(n)$ 全为0。其 $z$ 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

上式右边的第一项为有限长序列的 $z$ 变换,按照上面的讨论,其收敛域为有限 $z$ 平面。而第二项是 $z$ 的非正幂级数,按级数收敛的阿贝尔(N. Abel)定理可知,存在一个收敛半径 $R_{x-}$ ,级数在以原点为中心、 $R_{x-}$ 为半径的圆外任何点都收敛。综合两项的收敛域,当两项均收敛时整个级数才收敛。因此,如果 $R_{x-}$ 是收敛域的最小半径,则右边序列的 $z$ 变换的收敛域为 $R_{x-} < |z| < +\infty$ 。

如果 $n_1 \geq 0$ ,这类右边序列称为因果序列,这时 $x(n)$ 的 $z$ 变换中不存在第一项,即级数中不包含 $z$ 的正次幂,因此其收敛域包含 $|z|=\infty$ ,即 $R_{x-} < |z| \leq +\infty$ 或 $|z| > R_{x-}$ 。

$|z|=+\infty$ 处 $z$ 变换收敛是因果序列的特征,因果序列的 $z$ 变换的收敛域包含 $|z|=+\infty$ ;反之,如果一个序列 $z$ 变换的收敛域包含 $|z|=+\infty$ ,则该序列一定是因果序列。因果序列的收敛域如图2-1所示。

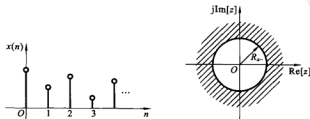


图 2-1 因果序列及其收敛域

### 3. 左边序列

这类序列是指只在  $n \leq n_2$  时,  $x(n)$  取值不全为 0; 在  $n > n_2$  时,  $x(n)$  全为 0。其  $z$  变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

等式右边第二项是有限长序列的  $z$  变换, 收敛域为有限  $z$  平面, 第一项是  $z$  的正幂级数, 按阿贝尔定理, 必存在收敛半径  $R_{x+}$ , 级数在以原点为中心、 $R_{x+}$  为半径的圆内任何一点都收敛。综合两项的收敛区域, 左边序列的收敛区域为  $0 < |z| < R_{x+}$ 。

如果  $n_2 < 0$ , 则其  $z$  变换右端不存在第二项, 即不存在  $z$  的负次幂, 这样的序列称为反因果序列, 其收敛域应包括  $z=0$ , 即  $|z| < R_{x+}$ 。左边序列的收敛域如图 2-2 所示。

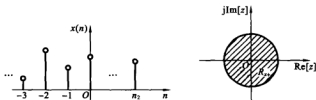


图 2-2 左边序列及其收敛域 ( $z=0$  除外)

### 4. 双边序列

这类序列是指  $n$  为任意值时, 即  $-\infty < n < +\infty$  时  $x(n)$  均有不为 0 的值, 可以把它看成是一个左边序列和一个右边序列之和, 即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

因此, 该序列为左边序列和右边序列收敛域的公共部分, 如果右边序列的收敛半径为  $R_{x-}$ , 左边序列的收敛半径为  $R_{x+}$ , 且满足  $R_{x-} < R_{x+}$ , 则双边序列存在公共收敛区域  $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ 。这是一个环状区域, 如图 2-3 所示。

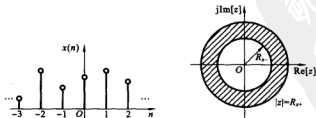


图 2-3 双边序列及其收敛域

**例 2-1** 求序列  $x(n] = \delta(n)$  的  $z$  变换及其收敛域。

**解** 根据  $z$  变换的定义有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) z^{-n} = \delta(0) z^0 = 1$$

该序列只有  $n=0$  时的一个点为非 0 值, 显然, 收敛域包括整个  $z$  平面。

**例 2-2** 求序列  $x(n)=a^n u(n)$  的  $z$  变换及其收敛域。

**解** 这是一因果序列, 根据  $z$  变换的定义有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^{+\infty}}{1 - az^{-1}}$$

显然, 只有当  $|az^{-1}| < 1$ , 即  $|z| > |a|$  时上式才收敛, 即

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

**例 2-3** 求序列  $x(n) = -a^n u(-n-1)$  的  $z$  变换及其收敛域。

**解** 这是一个左边序列, 根据  $z$  变换的定义, 有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = - \frac{(az^{-1})^{-\infty} - 1}{1 - az^{-1}}$$

显然, 只有当  $|az^{-1}| > 1$ , 即  $|z| < |a|$  时上式才收敛, 即

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|$$

其  $z$  变换的结果与例 2-2 的结果相同, 只是收敛域不同。因此, 对于不同的  $x(n)$  其  $z$  变换结果可能相同, 只是收敛域不同。为了保证由  $z$  变换求解出的序列的唯一性, 必须指出  $z$  变换的收敛域。这两个例题表明了  $z$  变换的收敛域的重要性。

**例 2-4** 求序列  $x(n) = a^{|n|}$  的  $z$  变换及其收敛域。

**解** 这是一个双边序列, 根据  $z$  变换的定义有

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (az)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \\ &= \frac{az - (az)^{+\infty}}{1 - az} + \frac{1 - (az^{-1})^{+\infty}}{1 - az^{-1}} \end{aligned}$$

显然, 只有当  $|az| < 1$  且  $|az^{-1}| < 1$ , 即  $|a| < |z| < \left| \frac{1}{a} \right|$  时上式才收敛, 即

$$X(z) = \frac{az}{1 - az} + \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |a| < |z| < \left| \frac{1}{a} \right|$$

## 2.2 逆 $z$ 变换

2.1 节说明了如何由序列求出其  $z$  变换和收敛域, 本节将讨论如何由  $z$  变换及其收敛域求解序列本身, 即逆  $z$  变换的求解问题。

由  $z$  变换的定义式(2-4)可知,  $X(z)$  是  $z$  的幂级数展开, 其系数即为序列  $x(n)$

的值。因此,求逆 $z$ 变换实质上就是求 $X(z)$ 的幂级数展开式。

逆 $z$ 变换的求解通常有三种方法:围线积分法(留数法)、部分分式展开法和长除法。下面分别对这三种方法加以讨论。

## 2.2.1 围线积分法(留数法)

利用柯西积分公式,可得 $X(z)$ 的逆 $z$ 变换公式如下

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (2-6)$$

其中,  $\oint_C [\ ]$  表示围线积分,  $C$  为在收敛域内逆时针环绕原点的一条闭合曲线。直接计算围线积分较麻烦,若被积函数  $X(z) z^{n-1}$  是有理分式,一般采用留数定理来求解。

根据留数定理,若被积函数  $X(z) z^{n-1}$  在围线  $C$  上连续,在围线  $C$  以内有  $K$  个极点  $z_k$ ,而在围线  $C$  以外有  $M$  个极点  $z_m$  ( $K, M$  均为有限值),则有

$$x(n) = \sum_{k=1}^K \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_k} \quad (2-7a)$$

及

$$x(n) = - \sum_{m=1}^M \text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (2-7b)$$

其中,  $\text{Res}[\ ]$  表示取留数。表明序列  $x(n)$  等于  $X(z) z^{n-1}$  在围线  $C$  以内的所有留数的和,也等于围线  $C$  以外所有留数的和的负值。

在实际计算中,到底选择式(2-7a)还是式(2-7b),要视极点分布的具体情况而定。如果在  $z = +\infty$  处  $X(z) z^{n-1}$  有多重极点,这时采用围线内的极点求留数计算比较简单,即采用式(2-7a)计算,如果在  $z = 0$  处  $X(z) z^{n-1}$  有多重极点,这时采用围线外的极点求留数计算比较简单,即采用式(2-7b)计算。

这样利用留数定理,逆 $z$ 变换的求解就变成了留数的计算问题,计算过程大为简化。下面讨论留数的求解方法。

设  $z_i$  是  $X(z) z^{n-1}$  的单重极点,则其留数为

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_i} = [(z-z_i) X(z) z^{n-1}]_{z=z_i} \quad (2-8)$$

如果  $z_i$  是  $X(z) z^{n-1}$  的多重( $l$  阶)极点,则其留数为

$$\text{Res}[X(z) z^{n-1}]_{z=z_i} = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} [(z-z_i)^l X(z) z^{n-1}]_{z=z_i} \quad (2-9)$$

下面通过例题说明围线积分法求解逆 $z$ 变换的方法。

**例 2-5** 已知序列的 $z$ 变换为

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

试求其逆 $z$ 变换。

**解** 根据收敛域可知,该序列为因果序列,即  $n \geq 0$ 。

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^n}{z-a}$$

由于  $n \geq 0$ , 所以  $z=0$  不是  $X(z)z^{n-1}$  的极点, 在逆时针绕原点的围线内仅有极点  $z=a$ , 其留数为

$$[(z-a)X(z)z^{n-1}]_{z=a} = \left[ (z-a) \frac{z^n}{z-a} \right]_{z=a} = a^n$$

由于该序列为因果序列, 所以有

$$x(n) = a^n, \quad n \geq 0 \quad \text{或} \quad x(n) = a^n u(n)$$

**例 2-6** 已知序列的  $z$  变换为

$$X(z) = \frac{1}{(1-az)(1-az^{-1})}, \quad |a| < |z| < |a^{-1}|$$

试求其逆  $z$  变换。

**解** 根据收敛域可知, 该序列为双边序列。

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{(1-az)(1-az^{-1})} = \frac{z^n}{-a(z-a^{-1})(z-a)}$$

在收敛域  $|a| < |z| < |a^{-1}|$  内, 作一条逆时针绕原点的闭合曲线, 如图 2-4 所示。

当  $n \geq 0$  时,  $z=0$  不是  $X(z)z^{n-1}$  的极点, 在围线  $C$  以内只有一个极点  $z=a$ , 其留数为

$$[(z-a)X(z)z^{n-1}]_{z=a} = \left[ (z-a) \frac{z^n}{-a(z-a^{-1})(z-a)} \right]_{z=a} = \frac{a^n}{1-a^2}$$

则有

$$x(n) = \frac{a^n}{1-a^2}, \quad n \geq 0$$

当  $n < 0$  时,  $X(z)z^{n-1}$  在围线内除了极点  $z=a$  外,  $z=0$  也是多重极点, 仍然按式(2-7a)来计算围线积分就比较麻烦。  $X(z)z^{n-1}$  在围线外, 只有一个极点  $|z|=|a^{-1}|$ ,  $z=+\infty$  不是其极点, 因此按式(2-7b)来计算围线积分比较简单。

$$-[(z-a^{-1})X(z)z^{n-1}]_{z=a^{-1}} = -\left[ (z-a^{-1}) \frac{z^n}{-a(z-a^{-1})(z-a)} \right]_{z=a^{-1}} = \frac{a^{-n}}{1-a^2}$$

则有

$$x(n) = \frac{a^{-n}}{1-a^2}, \quad n < 0$$

总结以上结果可得

$$x(n) = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}$$

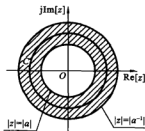


图 2-4 例 2-6 的收敛域及围线

## 2.2.2 部分分式展开法

在实际应用中,  $X(z)$  一般是  $z$  的有理分式

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (2-10)$$

则  $X(z)$  可以展开成以下的部分分式展开式

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n} + \sum_{k=1}^{M-r} \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^r \frac{C_k}{[1 - z_k z^{-1}]^k} \quad (2-11)$$

其中:  $z_i$  为  $X(z)$  的一个  $r$  阶极点,  $z_k$  是  $X(z)$  的单极点,  $B_n$  是  $X(z)$  的整式部分的系数。当  $M \geq N$  时存在  $B_n$  ( $M = N$  时仅有  $B_0$  项),  $M < N$  时  $B_n = 0$ ,  $B_n$  可用长除法求得。

根据留数定理, 系数  $A_k$  可用下式求得

$$A_k = (1 - z_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=z_k} = (z - z_k) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=z_k} = \text{Res} \left[ \frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_k} \quad (2-12)$$

系数  $C_k$  可由下式求得

$$C_k = \frac{1}{(r-k)!} \left\{ \frac{d^{r-k}}{dz^{r-k}} \left[ (z - z_i)^r \frac{X(z)}{z^k} \right] \right\}_{z=z_i} \quad (2-13)$$

展开式的系数确定后, 根据收敛域的不同, 再分别求出式(2-11)右边各项的逆  $z$  变换(可以利用表 2-1 中的基本  $z$  变换对的结果), 原序列就是各个序列之和。

表 2-1 一些常用的  $z$  变换对

序 列	$z$ 变 换	收 敛 域
$\delta(n)$	1	全部 $z$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$u(-n-1)$	$-\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  >  a $
$a^n u(-n-1)$	$-\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  <  a $
$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$ z  > 0$
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z  > 1$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$e^{-j\omega_0 n} u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}}$	$ z  > 1$

续表

序 列	$z$ 变 换	收 敛 域
$\sin(n\omega_0)u(n)$	$\frac{\sin\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$ z >1$
$\cos(n\omega_0)u(n)$	$\frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$ z >1$
$(r^n \sin(n\omega_0))u(n)$	$\frac{r\sin\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z >r$
$(r^n \cos(n\omega_0))u(n)$	$\frac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z >r$

用部分分式法求  $z$  变换时,较方便的方法是把  $X(z)$  转换成  $z$  的正幂次表示式,再求  $\frac{X(z)}{z}$  (单极点时)或  $\frac{X(z)}{z^j}$  ( $r$  重极点时)部分分式展开的各项系数。

例 2-7 已知序列的  $z$  变换为

$$X(z) = \frac{2+z^{-1}+z^{-2}}{1+5z^{-1}-6z^{-2}}, \quad 1 < |z| < 6$$

试求其逆  $z$  变换。

解 根据收敛域可知,该序列为双边序列。先把  $X(z)$  写成  $z$  的正幂次形式,并求其极点为

$$X(z) = \frac{2z^2+z+1}{z^2+5z-6} = \frac{2z^2+z+1}{(z-1)(z+6)}$$

再将  $X(z)$  两端除以  $z$ ,得

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2+z+1}{(z-1)(z+6)z}$$

将上式展开成部分分式形式,即

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z+6} + \frac{A_3}{z}$$

再按式(2-12)求得各项系数分别为

$$A_1 = (z-1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{2z^2+z+1}{(z+6)z} \Big|_{z=1} = \frac{4}{7}$$

$$A_2 = (z+6) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-6} = \frac{2z^2+z+1}{(z-1)z} \Big|_{z=-6} = \frac{79}{30}$$

$$A_3 = z \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=0} = \frac{2z^2+z+1}{(z-1)(z+6)} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{6}$$

因此有

$$X(z) = \frac{\frac{4}{7}z}{z-1} + \frac{\frac{79}{30}z}{z+6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{79}{30}}{1+6z^{-1}} - \frac{1}{6}$$

本例题中收敛域为  $1 < |z| < 6$ , 上式右边第一项的极点为  $z=1$ , 收敛域在  $|z| =$



1 的单位圆外部,因此该极点所对应的序列为因果序列。第二项极点为  $z = -6$ , 收敛域在  $|z| = 6$  的单位圆内部,因此该极点所对应的序列为反因果序列。根据表 2-1 中  $u(n)$ 、 $a^n u(-n-1)$  及  $\delta(n)$  的  $z$  变换对,可得

$$x(n) = \frac{4}{7}u(n) - \frac{79}{30}(-6)^n u(-n-1) - \frac{1}{6}\delta(n)$$

### 2.2.3 长除法(幂级数展开法)

因为  $x(n)$  的  $z$  变换定义为  $z$  的幂级数,所以,只要在给定的收敛域内把  $X(z)$  展开成幂级数,则级数的系数就是序列  $x(n)$ 。

在利用长除法求逆  $z$  变换时,同样要根据收敛域判断序列  $x(n)$  的性质,然后再展开成相应的  $z$  的幂级数。当  $X(z)$  的收敛域为  $|z| > R_x$  时,  $x(n)$  为右边序列,此时应将  $X(z)$  展开成  $z$  的负幂级数,  $X(z)$  分子、分母应按  $z$  的降幂排列进行长除;如果  $X(z)$  的收敛域为  $|z| < R_x$  时,  $x(n)$  为左边序列,此时应将  $X(z)$  展开成  $z$  的正幂级数,  $X(z)$  分子、分母应按  $z$  的升幂排列进行长除。

**例 2-8** 利用长除法求例 2-5 中  $z$  变换

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

的逆  $z$  变换。

**解** 根据收敛域可知,该序列为因果序列,应按  $z$  的降幂排列进行长除,即

$$\begin{array}{r} 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots \\ z-a \overline{) z} \\ \underline{z-a} \phantom{+ \cdots} \\ a \\ \underline{a-a^2 z^{-1}} \phantom{+ \cdots} \\ a^2 z^{-1} \\ \underline{a^2 z^{-1} - a^3 z^{-2}} \phantom{+ \cdots} \\ a^3 z^{-2} \\ \vdots \end{array}$$

即

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

所以有

$$x(n) = a^n u(n)$$

**例 2-9** 利用长除法求例 2-6 中  $z$  变换

$$X(z) = \frac{1}{(1-az)(1-az^{-1})}, \quad |a| < |z| < |a^{-1}|$$

的逆  $z$  变换。

**解** 根据收敛域可知该序列为双边序列,将  $X(z)$  部分分式分解为

$$X(z) = \frac{1}{(1-az)(1-az^{-1})} = \frac{1}{1-a^2} \left[ \frac{q}{z-a} + \frac{1}{1-az} \right]$$

上式右边第一项的极点为  $z=a$ , 而收敛域在  $|z|=|a|$  的外部, 故对应于右边序列;  
第二项对应的极点为  $z=a^{-1}$ , 而收敛域在  $|z|=|a^{-1}|$  的内部, 故对应于左边序列。

对右边序列, 分子、分母按降幂排列进行长除, 有

$$\begin{array}{r} az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} \dots \\ z-a \overline{) a} \\ \underline{a - a^2 z^{-1}} \\ a^2 z^{-1} \\ \underline{a^2 z^{-1} - a^3 z^{-2}} \\ a^3 z^{-2} \\ \underline{a^3 z^{-2} - a^4 z^{-3}} \\ a^4 z^{-3} \\ \dots \end{array}$$

由此可得序列为

$$x(n) = \frac{a^n}{1-a^2}, \quad n > 0$$

对左边序列, 分子、分母按升幂排列进行长除, 有

$$\begin{array}{r} 1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 \dots \\ 1-az \overline{) 1} \\ \underline{1 - az} \\ az \\ \underline{az - a^2 z^2} \\ a^2 z^2 \\ \underline{a^2 z^2 - a^3 z^3} \\ a^3 z^3 \\ \dots \end{array}$$

由此可得序列为

$$x(n) = \frac{a^{-n}}{1-a^2}, \quad n \leq 0$$

总结上述结果, 同样可得

$$x(n) = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}$$

## 2.3 z 变换的性质和定理

下面介绍  $z$  变换的一些性质和定理, 利用这些性质和定理, 可以使得  $z$  变换的求解大为简化。

### 1. 线性性

$z$  变换是一种线性变换, 满足叠加原理。如果序列  $x(n)$  和  $y(n)$  的  $z$  变换是  $X(z)$  和  $Y(z)$ , 即

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[y(n)] = Y(z), \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \quad \max(R_{x-}, R_{y-}) < |z| < \min(R_{x+}, R_{y+}) \quad (2-14)$$

其中,  $a, b$  为任意常数。相加后  $z$  变换的收敛域为两个序列  $z$  变换收敛域的重叠部分。如果线性组合后某些极点和零点相互抵消, 则收敛域可能扩大。

**例 2-10** 试求序列  $x(n] = a^n \cos(\omega_0 n) u(n)$  的  $z$  变换。

**解** 根据欧拉公式, 有

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$

根据表 2-1 可知

$$Z[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

所以有

$$Z[a^n e^{j\omega_0 n} u(n)] = \frac{1}{1 - ae^{j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > |ae^{j\omega_0}| = |a|$$

$$Z[a^n e^{-j\omega_0 n} u(n)] = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > |ae^{-j\omega_0}| = |a|$$

利用  $z$  变换的线性性可得

$$\begin{aligned} Z[a^n \cos(\omega_0 n) u(n)] &= \frac{1}{2} \{ Z[a^n e^{j\omega_0 n} u(n)] + Z[a^n e^{-j\omega_0 n} u(n)] \} \\ &= \frac{1}{2(1 - ae^{j\omega_0} z^{-1})} + \frac{1}{2(1 - ae^{-j\omega_0} z^{-1})} \\ &= \frac{1 - z^{-1} a \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} a \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

### 2. 序列的移位

如果序列  $x(n)$  的  $z$  变换为

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则有

$$Z[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2-15)$$

其中,  $n_0$  为任意整数, 可以为正(右移), 也可以为负(左移)。

**证** 按  $z$  变换的定义有

$$Z[x(n - n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - n_0) z^{-n} = z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m} = z^{-n_0} X(z)$$

**例 2-11** 设  $Z[x(n)] = X(z)$ ,  $|z| > R_x$ , 试用  $X(z)$  表示  $y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)$  的  $z$  变换并确定其收敛域。

**解** 由于

$$x(n) = \sum_{m=0}^n x(m) - \sum_{m=0}^{n-1} x(m) = y(n) - y(n-1)$$

由  $z$  变换的线性性及移位特性,有

$$X(z) = Y(z) - z^{-1}Y(z)$$

所以有

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

由于  $Y(z)$  存在极点  $z=1$ , 而收敛域中不存在极点, 故  $Y(z)$  的收敛域在  $|z|=1$  以外与  $X(z)$  的收敛域重合, 即

$$|z| > \max[R_x, 1]$$

### 3. 序列乘指数序列 ( $z$ 域尺度变换)

若序列  $x(n)$  乘以指数序列  $a^n$ ,  $a$  是常数, 若

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_x^- < |z| < R_x^+$$

则

$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad |aR_x^-| < |z| < |aR_x^+| \quad (2-16)$$

**证** 根据  $z$  变换的定义有

$$Z[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (z/a)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad R_x^- < \left|\frac{z}{a}\right| < R_x^+$$

这个性质表明, 若  $z=z_1$  是  $X(z)$  的极点, 则  $X(z/a)$  将在  $z/a=z_1$ , 即  $z=az_1$  处为极点。如果  $a$  为实数, 则表示其  $z$  变换将在  $z$  平面上缩小或扩大, 零极点在  $z$  平面沿径向移动; 如果  $a$  为复数, 则在  $z$  平面上, 零极点既有幅度的伸缩, 又有角度的旋转。

### 4. 序列的反转

若

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_x^- < |z| < R_x^+$$

则

$$Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{1}{R_x^+} < |z| < \frac{1}{R_x^-} \quad (2-17)$$

**证** 根据  $z$  变换的定义有

$$\begin{aligned} Z[x(-n)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) (z^{-1})^{-n} \\ &= X\left(\frac{1}{z}\right), \quad R_x^- < |z^{-1}| < R_x^+ \end{aligned}$$

## 5. 序列的共轭

一个复序列  $x(n)$  的共轭序列为  $x^*(n)$ , 若

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2-18)$$

证 根据  $z$  变换的定义有

$$Z[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)z^{-n} = \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(z^*)^{-n} \right]^* = X^*(z^*), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

6. 序列的线性加权 ( $z$  域微分)

若已知

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$Z[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2-19)$$

证 由  $z$  变换的定义有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

上式两端对  $z$  求导得

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{d}{dz} (z^{-n}) = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)z^{-n} = -z^{-1} Z[nx(n)]$$

所以有

$$Z[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

因此序列的线性加权 (乘  $n$ ) 等效于其  $z$  变换求导数再乘以  $(-z)$ , 依次类推可得

$$Z[n^m x(n)] = \left( -z \frac{d}{dz} \right)^m X(z) \quad (2-20)$$

其中,  $\left( -z \frac{d}{dz} \right)^m$  表示  $m$  阶导数, 即

$$\left( -z \frac{d}{dz} \right)^m = -z \frac{d}{dz} \left\{ -z \frac{d}{dz} \left[ -z \frac{d}{dz} \cdots \left( -z \frac{d}{dz} X(z) \right) \right] \cdots \right\}$$

## 7. 初值定理

对于因果序列  $x(n)$ , 有

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = x(0) \quad (2-21)$$

证 由于  $x(n)$  为因果序列, 则有

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

所以有

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = x(0)$$

## 8. 终值定理

如果  $x(n)$  为因果序列, 且  $X(z)$  的极点处于单位圆 ( $|z|=1$ ) 以内 (单位圆上最多在  $z=1$  处可有一阶极点), 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (2-22)$$

证 根据序列的移位性质有

$$Z[x(n+1) - x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} = (z-1)X(z)$$

因为  $x(n)$  为因果序列, 所以有

$$(z-1)X(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=-1}^n [x(m+1) - x(m)]z^{-m}$$

由于  $x(n)$  为因果序列, 且  $X(z)$  的极点处于单位圆 ( $|z|=1$ ) 以内 (单位圆上最多在  $z=1$  处可有一阶极点), 故  $(z-1)X(z)$  中因子  $(z-1)$  将抵消  $z=1$  处可能的极点, 因此  $(z-1)X(z)$  在  $1 \leq |z|$  上都收敛, 可以取  $z \rightarrow 1$  的极限

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=-1}^n [x(m+1) - x(m)] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{[x(0) - 0] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \cdots \\ &\quad + [x(n+1) - x(n)]\} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [x(n+1)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) \end{aligned}$$

## 9. 时域卷积定理

若

$$Z[x(n)] = X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[h(n)] = H(z), \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\text{则 } Z[y(n)] = X(z)H(z), \quad \max[R_{x-}, R_{h-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{h+}] \quad (2-23)$$

证 根据  $z$  变换的定义有

$$\begin{aligned} Z[y(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) * h(n)]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \right]z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \sum_{n=m-\infty}^{+\infty} h(n-m)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m} \sum_{n=m-\infty}^{+\infty} h(n-m)z^{-(n-m)} \\ &= X(z)H(z), \quad \max[R_{x-}, R_{h-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{h+}] \end{aligned}$$

时域卷积定理是  $z$  变换的重要定理, 由第 1 章可知, 系统的输出等于输入与系统单位脉冲响应的卷积, 利用卷积定理, 可通过求解  $X(z)H(z)$  的逆  $z$  变换而求出输出序列。根据相关和卷积之间的关系, 可以很容易地得出时域相关的  $z$  变换

$$R_{xy}(z) = X(z)Y(z^{-1}) \quad (2-24)$$

例 2-12 若

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$h(n) = b^n u(n) - ab^{n-1} u(n-1)$$

试用卷积定理求  $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

解 根据  $z$  变换的求解方法可得

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$H(z) = \frac{z}{z-b} - \frac{a}{z-b} = \frac{z-a}{z-b}, \quad |z| > |b|$$

根据时域卷积定理有

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-b}, \quad |z| > |b|$$

再求其逆  $z$  变换得

$$y(n) = x(n) * h(n) = Z^{-1}[Y(z)] = b^n u(n)$$

### 10. 序列相乘(区域复卷积定理)

若

$$y(n) = x(n)h(n)$$

且

$$X(z) = Z[x(n)], \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$H(z) = Z[h(n)], \quad R_{h-} < |z| < R_{h+}$$

则

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) v^{-1} dv, \quad R_{x-} R_{h-} < |z| < R_{x+} R_{h+} \quad (2-25)$$

其中,  $C$  是  $v$  平面上  $X\left(\frac{z}{v}\right)$  与  $H(v)$  公共收敛域中绕原点逆时针旋转的闭合曲线。

## 2.4 序列的离散傅里叶变换

序列的离散傅里叶变换,即离散时间傅里叶变换,是离散时间信号分析与处理的重要工具之一。它给出了序列频谱的概念,并可从频域来对离散时间信号和系统进行分析。 $z$  变换是用  $z$  的幂级数  $z^{-n}$  对序列进行展开的,而序列的离散傅里叶变换是用  $e^{-j\omega n}$  作为基函数对序列进行正交展开的,这与连续信号的傅里叶变换以  $e^{-j\omega t}$  对连续信号进行展开类似。

### 2.4.1 序列的傅里叶变换的定义

序列的傅里叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (2-26)$$

注意,它是  $\omega$  的连续函数,这也是在第3章将要介绍离散傅里叶变换的原因。

由于有

$$e^{-j\omega n} = e^{-j(\omega + 2\pi M)n}$$

其中,  $M$  为整数。所以有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j(\omega + 2\pi M)n} = X[e^{j(\omega + 2\pi M)}]$$

因此,序列的傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$  是周期函数,周期为  $2\pi$ 。序列的傅里叶变换是序列的频谱,在频谱分析与数字滤波器设计中经常用到。

下面讨论序列的傅里叶变换与  $z$  变换的关系。

比较序列的傅里叶变换的定义式(2-26)与  $z$  变换的定义式(2-4)可知,序列的傅里叶变换是  $z$  变换在  $z = e^{j\omega}$  时的特殊情况,故有

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (2-27)$$

$X(e^{j\omega})$  一般为  $\omega$  的复变函数,可表示为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} \quad (2-28)$$

其中,  $X_R(e^{j\omega})$ 、 $X_I(e^{j\omega})$  分别为  $X(e^{j\omega})$  的实部和虚部。 $|X(e^{j\omega})|$  通常称为幅频特性或幅度谱,而  $\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})]$  称为相位谱,且有

$$|X(e^{j\omega})| = [X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})]^{1/2} \quad (2-29a)$$

$$\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})] = \arctan\left[\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right] \quad (2-29b)$$

它们都是  $\omega$  的连续函数和周期为  $2\pi$  的周期函数。

下面推导由  $X(e^{j\omega})$  求  $x(n)$  的公式,即序列的傅里叶反变换(IDTFT)的公式。

将式(2-26)两边乘以  $e^{j\omega m}$ ,并在  $-\pi \sim \pi$  这一周期内对  $\omega$  积分,则有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(n-m) = 2\pi x(m) \end{aligned}$$

$$\text{所以有} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2-30)$$

这就是序列的傅里叶反变换公式。

上式中利用到了

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \frac{e^{j\omega(m-n)} - e^{-j\omega(m-n)}}{j(m-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2j\sin[\pi(m-n)]}{j(m-n)} = \frac{2\sin[\pi(m-n)]}{m-n}$$

由于  $m, n$  为整数,  $\sin[\pi(m-n)] = 0$ , 故只有在分母为 0, 即  $m = n$  时上式才可能不为 0。当  $m = n$  时取极限, 可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \frac{2\sin[\pi(m-n)]}{m-n} = 2\pi\delta(n-m)$$

序列的傅里叶反变换公式还可由逆  $z$  变换的公式(2-6)得到。由于序列的傅里叶变换是  $z$  变换在  $z = e^{j\omega}$  时的特殊情况,而收敛域中的闭合围线对应  $\omega$  由  $-\pi \sim \pi$ , 所以有

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega(n-1)} de^{j\omega} \\ &= \frac{j}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$



## 2.4.2 序列的傅里叶变换的主要性质

由于序列的傅里叶变换是  $z$  变换在  $z = e^{j\omega}$  时的特殊情况, 因此其性质均可与  $z$  变换的性质对应。

### 1. 线性性

若  $X_1(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_1(n)]$ ,  $X_2(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_2(n)]$ ,  $a, b$  为任意常数, 则有

$$\text{DTFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (2-31)$$

### 2. 序列的时移

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ , 则

$$\text{DTFT}[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (2-32)$$

即时域的移位对应于频域的相移。

### 3. 序列乘指数序列

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ , 则

$$\text{DTFT}[a^n x(n)] = X\left(\frac{e^{j\omega}}{a}\right) \quad (2-33)$$

### 4. 序列乘复指数序列(调制)

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ , 则

$$\text{DTFT}[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (2-34)$$

即时域的调制对应于频域的移位。

### 5. 序列的线性加权

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ , 则

$$\text{DTFT}[nx(n)] = j \frac{d}{d\omega} [X(e^{j\omega})] \quad (2-35)$$

时域的线性加权对应于频域的一阶导数乘以  $j$ 。

### 6. 序列的反转

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ , 则

$$\text{DTFT}[x(-n)] = X(e^{-j\omega}) \quad (2-36)$$

时域的反转对应于频域的反转。

### 7. 序列的共轭

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ , 则

$$\text{DTFT}[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega}) \quad (2-37)$$

时域的共轭对应于频域的共轭且反转。

以上性质的证明与  $z$  变换对应的性质的证明方法类似, 请读者自行证明。

## 8. 时域卷积定理

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ ,  $H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)]$ , 则

$$\text{DTFT}[x(n) * h(n)] = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (2-38)$$

即时域的卷积对应于频域的乘积。

证 由序列傅里叶变换定义式和卷积定义式可得

$$\begin{aligned} \text{DTFT}[x(n) * h(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) \right] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-m) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j\omega m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n-m) e^{-j\omega(n-m)} \\ &= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

由相关和卷积之间的关系, 并利用时域卷积定理, 可容易得出时域相关定理为

$$\text{DTFT}[R_{xy}(m)] = X(e^{j\omega})Y(e^{-j\omega}) \quad (2-39)$$

## 9. 频域卷积定理

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ ,  $Y(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[y(n)]$ , 则

$$\text{DTFT}[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi} [X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})] \quad (2-40)$$

即时域的相乘对应于频域的卷积并除以  $2\pi$ 。

证 由序列的傅里叶变换定义可得

$$\begin{aligned} \text{DTFT}[x(n)y(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta \right] y(n)e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} [X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})] \end{aligned}$$

## 10. 帕斯瓦尔定理

若  $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ , 则有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2-41)$$

时域的总能量等于频域的总能量, 即能量守恒。

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)e^{j\omega n} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right]^* d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

### 11. 对称性质

若序列  $x_e(n)$  满足

$$x_e(n) = x_e^*(-n) \quad (2-42)$$

则称序列  $x_e(n)$  为共轭对称序列。对应地,若序列  $x_o(n)$  满足

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) \quad (2-43)$$

则称序列  $x_o(n)$  为共轭反对称序列。显然任何一个序列  $x(n)$  均可表示成共轭对称序列和共轭反对称序列之和

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (2-44)$$

其中

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \quad (2-45)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)] \quad (2-46)$$

对式(2-44)两端求离散时间傅里叶变换,有

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_e(n)] + \text{DTFT}[x_o(n)]$$

而根据式(2-45)、式(2-46)及序列的傅里叶变换的性质有

$$\text{DTFT}[x_e(n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{j\omega})] = X_R(e^{j\omega}) \quad (2-47)$$

$$\text{DTFT}[x_o(n)] = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j\text{Im}[X(e^{j\omega})] = jX_I(e^{j\omega}) \quad (2-48)$$

表明序列  $x(n)$  共轭对称部分的离散时间傅里叶变换对应于  $X(e^{j\omega})$  的实部,而共轭反对称部分的离散时间傅里叶变换对应于  $X(e^{j\omega})$  的虚部(包括  $j$ )。

若将序列  $x(n)$  表示成实部和虚部和的形式,即

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

对上式两边进行离散时间傅里叶变换,得

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_r(n)] + j\text{DTFT}[x_i(n)]$$

若定义

$$X_r(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_r(n)] \quad (2-49)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = j\text{DTFT}[x_i(n)] \quad (2-50)$$

由于  $x_r(n)$ 、 $x_i(n)$  均为纯实数,利用离散时间傅里叶变换的共轭性质可得

$$\text{DTFT}[x_r(n)] = X_r(e^{j\omega}) = X_r^*(e^{-j\omega}) \quad (2-51)$$

$$j\text{DTFT}[x_i(n)] = X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \quad (2-52)$$

这表明,序列  $x(n)$  的实部的离散时间傅里叶变换具有共轭对称性,而其虚部(包括  $j$ )的离散时间傅里叶变换具有共轭反对称性。

若  $x(n)$  为实数序列,显然其离散时间傅里叶变换具有共轭对称性,若  $x(n)$  为纯虚数序列,则其离散时间傅里叶变换具有共轭反对称性。

## 2.4.3 序列的傅里叶变换举例

下面通过一些例题说明利用序列的傅里叶变换的定义来求解其傅里叶变换的方法,以及序列傅里叶变换的性质的一些应用。

**例 2-13** 若

$$x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1$$

试求  $X(e^{j\omega})$ 。

**解** 由序列的傅里叶变换的定义有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

因为  $|a| < 1$ , 所以  $|ae^{-j\omega}| < 1$ , 根据等比数列求和公式则有

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

**例 2-14** 若

$$x(n) = \delta(n - m)$$

试求  $X(e^{j\omega})$ 。

**解** 由序列的傅里叶变换的定义有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - m) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega m}$$

显然有

$$|X(e^{j\omega})| = 1, \quad \varphi(\omega) = -\omega m$$

其幅度特性恒等于 1, 具有这种特性的系统称为全通系统, 其相位为  $\omega$  的线性函数, 称  $X(e^{j\omega})$  具有线性相位特性。

**例 2-15** 设理想数字低通滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

试求其单位脉冲响应  $h(n)$ 。

**解** 这其实就是序列的傅里叶反变换的求解

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi j n} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

**例 2-16** 已知  $x(n) = 2\delta(n+3) + \delta(n+1) - 2\delta(n) + 3\delta(n-1) - 2\delta(n-2) - \delta(n-4)$ , 其离散时间傅里叶变换为  $X(e^{j\omega})$ , 试确定下列各式的值: (1)  $X(e^0)$ ;

(2)  $X(e^{j\pi})$ ; (3)  $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ ; (4)  $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$ ; (5)  $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$ 。

**解** (1) 根据序列的傅里叶变换的定义有

$$X(e^{j0}) = X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = 2+1-2+3-2-1=1$$

(2) 根据序列的傅里叶变换的定义,有

$$\begin{aligned} X(e^{j\pi}) &= X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(-1)^n \\ &= -2-1-2-3-2-1=-11 \end{aligned}$$

(3) 根据序列的傅里叶反变换的定义,有

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = 2\pi \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \right]_{n=0} = 2\pi x(0) = -4\pi$$

(4) 根据序列的傅里叶变换的帕斯瓦尔定理有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = 46\pi$$

(5) 根据序列的傅里叶变换的线性加权性质和帕斯瓦尔定理有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |nx(n)|^2 = 156\pi$$

**例 2-17** 设序列  $x(n)=\delta(n+1)-2\delta(n)+3\delta(n-1)-2\delta(n-2)$  的离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega})=X_R(e^{j\omega})+jX_I(e^{j\omega})$$

其中,  $X_R(e^{j\omega})$ 、 $X_I(e^{j\omega})$  分别为  $X(e^{j\omega})$  的实部和虚部。若序列  $y(n)$  的离散时间傅里叶变换为

$$\text{DTFT}[y(n)] = X_I(e^{j\omega}) + jX_R(e^{j\omega})e^{j\omega}$$

试求序列  $y(n)$ 。

**解** 根据序列的傅里叶变换的对称性质有

$$X_R(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_r(n)] = \text{DTFT}\left\{\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]\right\}$$

$$jX_I(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_i(n)] = \text{DTFT}\left\{\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]\right\}$$

所以有

$$X_I(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[-jx_i(n)]$$

再根据序列的移位性质可得

$$jX_R(e^{j\omega})e^{j\omega} = \text{DTFT}[jx_r(n+1)]$$

因此

$$\text{DTFT}[y(n)] = X_I(e^{j\omega}) + jX_R(e^{j\omega})e^{j\omega} = \text{DTFT}[-jx_i(n) + jx_r(n+1)]$$

即

$$y(n) = -jx_i(n) + jx_r(n+1)$$

而

$$x^*(-n) = -2\delta(n+2) + 3\delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-1)$$

可求得

$$x_r(n) = -\delta(n+2) + 2\delta(n+1) - 2\delta(n) + 2\delta(n-1) - \delta(n-2)$$

$$x_s(n) = \delta(n+2) - \delta(n+1) + \delta(n-1) - \delta(n-2)$$

故 
$$y(n) = -j\delta(n+3) + j\delta(n+2) - j\delta(n+1) + 2j\delta(n) - j\delta(n-1)$$

## 2.5 拉普拉斯变换、 $z$ 变换、序列的傅里叶变换的关系

本节将讨论拉普拉斯变换、 $z$  变换、序列的傅里叶变换之间的关系。

### 2.5.1 拉普拉斯变换与 $z$ 变换的关系

推导  $z$  变换的定义式时,得出了  $z$  变换的复变量  $z$  与拉普拉斯变换的复变量  $s$  之间的对应关系式(2-3),现重写如下

$$z = e^{sT_s}$$

其中,  $T_s$  为采样周期。现将  $s$  平面用直角坐标系表示为

$$s = \sigma + j\Omega$$

而  $z$  平面用极坐标表示为

$$z = re^{j\omega}$$

显然有

$$re^{j\omega} = e^{(\sigma + j\Omega)T_s} = e^{\sigma T_s} e^{j\Omega T_s}$$

因此可得

$$r = e^{\sigma T_s}, \quad \omega = \Omega T_s \quad (2-53)$$

即  $z$  的模仅与  $s$  的实部有关,而  $z$  的相位角仅与  $s$  的虚部有关。

#### 1. $r$ 与 $\sigma$ 的关系

$r$  与  $\sigma$  的关系对应如下。

- (1)  $\sigma = 0$  ( $s$  平面的虚轴) 对应于  $r = 1$  ( $z$  平面的单位圆)。
- (2)  $\sigma < 0$  ( $s$  平面的左半平面) 对应于  $r < 1$  ( $z$  平面单位圆内部)。
- (3)  $\sigma > 0$  ( $s$  平面的右半平面) 对应于  $r > 1$  ( $z$  平面单位圆外部)。

其映射关系如图 2-5 所示。

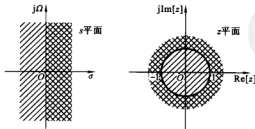


图 2-5  $s$  平面  $\sigma$  与  $z$  平面  $r$  的映射关系

#### 2. $\omega$ 与 $\Omega$ 的关系

$\omega$  与  $\Omega$  的关系如下。

- (1)  $\Omega = 0$  ( $s$  平面的实轴) 对应于  $\omega = 0$  ( $z$  平面的正实轴)。

(2)  $\Omega = \Omega_0$  (常数) ( $s$  平面平行于实轴的直线) 对应于  $\omega = \Omega_0 T_s$  ( $z$  平面始于原点辐射角为  $\omega = \Omega_0 T_s$  的辐射线)。

(3)  $\Omega$  由  $-\pi/T_s$  增长到  $\pi/T_s$  ( $s$  平面为  $2\pi/T_s$  的一个水平条带) 对应于  $\omega$  由  $-\pi$  到  $\pi$  ( $z$  平面绕原点旋转一周)。因此,  $\Omega$  每增加一个采样角频率  $2\pi/T_s$ ,  $\omega$  就增加一个  $2\pi$ , 如图 2-6 所示。

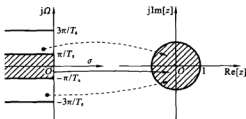


图 2-6  $s$  平面与  $z$  平面的多值映射关系

显然,  $s$  平面到  $z$  平面的映射是多值映射关系, 正是这种多值映射关系, 使得连续时间信号采样后有可能导致频谱混叠。第 6 章数字滤波器设计过程中, 将寻求多值映射关系变为——对应的映射关系的变换方法。

### 2.5.2 $z$ 变换与序列傅里叶变换的关系

序列的傅里叶变换与  $z$  变换的关系可由式(2-27)来说明, 重写如下

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}}$$

即序列的傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$  是  $z$  变换  $X(z)$  在  $z=e^{j\omega}$  时的特殊情况, 而  $z=e^{j\omega}$  的模为 1, 即单位圆。因此, 序列的傅里叶变换是  $z$  变换在单位圆上的特殊情况。

根据 2.4 节可知  $z$  平面的单位圆对应于  $s$  平面的虚轴, 即  $s=j\Omega$ 。由连续信号的傅里叶变换可知, 傅里叶变换是拉普拉斯变换在虚轴的特例。因此序列的傅里叶变换与连续信号的傅里叶变换意义相同, 即信号的频谱。

连续信号傅里叶变换的变量为  $\Omega$ , 而离散时间傅里叶变换的变量为  $\omega$ , 它们之间的关系可由式(2-53)得到

$$\omega = \Omega T_s = \frac{\Omega}{f_s} = \frac{2\pi f}{f_s} \quad (2-54)$$

其中,  $\omega$  称为数字频率,  $f_s$  为采样频率。式(2-54)表明了数字频率  $\omega$  和模拟频率  $f$  之间的对应关系, 即数字频率可以看做是模拟角频率  $\Omega$  对采样频率的归一化值, 或是模拟频率对采样频率的比值再乘以  $2\pi$ 。

根据奈奎斯特采样定理,  $f_s/2$  是采样信号能取的最高频率, 对应的数字频率  $\omega = \pi$ , 因此  $\omega = \pi$  也就是数字频率能取的最高频率。由于序列的傅里叶变换是以  $2\pi$  为周期的, 所以数字频率  $\omega$  的有效取值范围为  $-\pi \sim \pi$  或  $0 \sim 2\pi$ , 而  $\pi \sim 2\pi$  范围内的取值与  $-\pi \sim 0$  内的值完全相同。

## 2.6 线性时不变离散时间系统的变换域分析

由第1章可知,一个线性时不变的离散时间系统在时域中,可以由它的单位脉冲响应来表示,也可以由线性差分方程来描述。下面探讨在变换域中系统的描述和分析方法。

### 2.6.1 线性时不变离散时间系统的变换域描述

#### 1. 系统函数和系统的频率响应

系统的输出  $y(n)$ 、输入  $x(n)$  与单位脉冲响应  $h(n)$  的卷积关系为

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对上式两端取  $z$  变换,根据  $z$  变换的时域卷积定理有

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$\text{则} \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2-55)$$

$H(z)$  是系统单位脉冲响应  $h(n)$  的  $z$  变换,称为系统函数(又称转移函数)。若对  $h(n)$  进行离散时间傅里叶变换,即

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

称  $H(e^{j\omega})$  为系统的频率响应(又称系统的传输函数)。显然,根据序列的傅里叶变换与  $z$  变换的关系可知,在单位圆上的系统函数就是系统的频率响应。

#### 2. 几种线性时不变系统描述方法之间的联系

到目前为止,有了描述系统的四种方法,即单位脉冲响应、线性差分方程、系统函数和系统的频率响应。这四种描述方法从不同角度描述了线性时不变离散时间系统的特性:单位脉冲响应描述了系统在最特殊的输入——单位冲击序列的作用下系统的响应;线性差分方程描述了任意输入情况下系统的输出;系统函数从  $z$  变换域角度来描述系统;而系统的频率响应则从离散时间傅里叶变换,即频域来描述系统。它们之间联系的纽带就是系统的单位脉冲响应。

下面来分析差分方程与系统函数之间的关系。

根据第1章系统的差分方程描述式(1-35),重写如下

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

其中,系数  $a_k$ 、 $b_k$  和延时阶数  $M$ 、 $N$  由系统决定。对上式两端作  $z$  变换,并根据  $z$  变换的线性性和移位特性可得

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k}$$



所以有

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2-56)$$

显然,给定系统的四种描述方法的任意一种,就能求出其他三种描述方法。

### 3. 系统因果稳定性的变换域判定

第1章给出了在时域中判定一个系统因果稳定性的依据,即系统的单位脉冲响应必须是因果的  $h(n)=0(n<0)$  和绝对可和的  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$ 。而  $z$  变换的收敛域是满足  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)z^{-n}| < +\infty$  的那些  $z$  值确定的,因此,如果系统函数的收敛域包括单位圆  $|z|=1$ ,则肯定满足  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$  的条件,即系统是稳定的。反之也成立,即如果系统是稳定的,则其收敛域一定包括单位圆。

因果系统的单位脉冲响应是因果序列,而因果序列的  $z$  变换的收敛域为  $R_z < |z| \leq +\infty$ ,即因果序列的收敛域是半径为  $R_z$  的圆的外部,且包括  $z=+\infty$ 。

综合上述两点可以得出:一个因果稳定的离散时间系统的系统函数  $H(z)$  必须从单位圆到  $z=+\infty$  的整个  $z$  平面内收敛,也就是说,系统函数的全部极点必须在单位圆内部。

例 2-18 已知系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{z-3}{(1-2z^{-1})(1-3z)}, \quad 2 < |z| \leq +\infty$$

试判断该系统的因果稳定性。

解 该系统的系统函数的收敛域为  $2 < |z| \leq +\infty$ ,包括  $z=+\infty$ ,因此该系统是因果的系统,但是收敛域不包括单位圆  $|z|=1$ ,因此该系统是不稳定的。

## 2.6.2 系统频率响应的意义及定性确定方法

为了研究离散时间线性时不变系统对输入频谱的处理作用,有必要研究系统对复指数或正弦序列的响应。

设系统的输入是频率为  $\omega$  的复指数序列,即

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < +\infty$$

线性时不变系统的单位脉冲响应为  $h(n)$ ,利用卷积关系可得系统的输出为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{-j\omega m} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \quad (2-57)$$

其中,  $H(e^{j\omega})$  为单位脉冲响应  $h(n)$  的离散时间傅里叶变换,即系统的频率响应。由式(2-57)可以看出,在稳定状态下,当系统的输入为复指数序列  $e^{j\omega n}$  时,系统的输出也含有  $e^{j\omega n}$ ,只是被复函数值  $H(e^{j\omega})$  加权。

和连续系统一样,当系统的输入为正弦序列时,系统的输出为同频的正弦序列,只是其幅度受到系统频率响应的幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 加权,而输出的相位则为输入相位与系统相位响应之和。

下面利用系统函数 $H(z)$ 在 $z$ 平面上的零极点分布,直观、定性地求出系统的频率响应。

对系统函数式(2-56)进行因式分解得

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = A z^{(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (z - c_k)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)} \quad (2-58)$$

其中, $A$ 为实常数, $c_k$ 和 $d_k$ 分别为 $H(z)$ 的零点和极点。对于一个稳定的系统,其收敛域包括单位圆,即其傅里叶变换存在。将上式用 $z=e^{j\omega}$ 代替,即得系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^M (e^{j\omega} - c_k)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} \quad (2-59)$$

则 $H(e^{j\omega})$ 的模为

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{k=1}^M |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - d_k|} \quad (2-60)$$

$H(e^{j\omega})$ 的相位角为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[A] + \sum_{k=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_k] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N-M)\omega \quad (2-61)$$

显然,无论是 $H(e^{j\omega})$ 的模还是相位均受到零点 $c_k$ 和极点 $d_k$ 的影响。在单位圆上的零点,将使得 $|H(e^{j\omega})|$ 的幅度为零,即传输零点,而单位圆附近的零点将使得 $|H(e^{j\omega})|$ 出现凹谷。在单位圆内靠近单位圆的极点将使 $|H(e^{j\omega})|$ 出现凸峰,极点在单位圆外则系统不稳定。因此利用这种几何直观的方法,适当地控制零点和极点的个数及位置,就能改变系统的频率响应特性。

图2-7表示了有两个极点和两个零点的系统的频率响应的几何解释和频率响应的幅度变化规律。图中用“o”表示零点,用“x”表示极点。零点处于0和 $\pi$ 处,极点处于 $\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 附近,因此,频率响应在0、 $\pi$ 和 $2\pi$ 处出现凹谷,在 $\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 附近出现凸峰。

**例 2-19** 设系统的差分方程为

$$y(n) = x(n) + 0.9y(n-1)$$

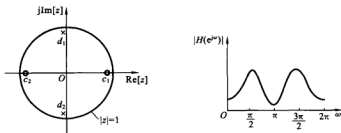


图 2-7 零极点分布与频率响应的定性关系

试求系统的频率响应。

**解** 根据差分方程可知,该系统当时的输出  $y(n)$  只与当时的输入  $x(n)$  和以前的输出  $y(n-1)$  有关,而与该时刻以后的输入无关,故该系统为因果系统。由差分方程可求得系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}, \quad |z| > 0.9$$

该系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - 0.9e^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - 0.9\cos\omega) + j0.9\sin\omega}$$

其幅度响应为

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.81 - 1.8\cos\omega}}$$

相位响应为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\arctan\left(\frac{0.9\sin\omega}{1 - 0.9\cos\omega}\right)$$

其零极点分布和幅度特性如图 2-8 所示。极点在 0.9 处,零点在原点处,由于在原点的零极点单位圆各处的距离相等,故在原点处的零极点对系统的幅度特性没有影响。在单位圆上从正横轴沿逆时针方向旋转,在正横轴 ( $\omega=0$ ) 处靠近极点最近,故幅度最大,随着逆时针旋转,离极点越来越远,故幅度逐渐减小,在负横轴处 ( $\omega$

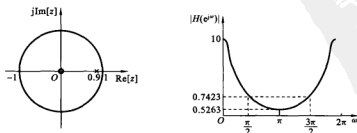


图 2-8 例 2-19 的零极点分布和幅度特性

$=\pi$ )离极点最近,幅度最小,然后幅度再逐渐增加。由于数字频率最高到 $\pi$ ,因此该系统具有低通滤波特性。

## 2.6.3 系统的分类

### 1. 无限长单位脉冲响应(IIR)系统

系统函数的定义式(2-56)重写如下

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

其中,分母多项式系数 $a_k$ 只要有一个不为零,则系统在有限 $z$ 平面( $0 < |z| < +\infty$ )上将会出现极点,若该极点不被零点所抵消,则系统函数 $H(z)$ 的逆变换 $h(n)$ 就会有无穷多项,即系统的单位脉冲响应是无限长的,这样的系统称为IIR系统。

对于IIR系统,由于其单位脉冲响应为无限长,故不能采用卷积计算其响应,只能用差分方程或 $z$ 变换的方法来求解。由于至少有一个 $a_k$ 不为0,即差分方程为

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

上式必然至少存在一项 $y(n-k)$ ,即当时的输出 $y(n)$ 不仅与输入有关,而且还与以前的输出 $y(n-k)$ 有关,故IIR系统中存在输出到输入的反馈,这种结构常称为递归结构。

### 2. 有限长单位脉冲响应(FIR)系统

若系统函数的定义式(2-56)中所有 $a_k$ 均为0,这样 $H(z)$ 在有限 $z$ 平面不存在极点,式(2-56)变为

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (2-62)$$

这时系统的单位脉冲响应为

$$h(n) = b_k, \quad k=0, 1, \dots, M$$

单位脉冲响应的长度为有限长,这样的系统称为FIR系统。由于其单位脉冲响应为有限长,故可以采用卷积计算公式直接计算系统的响应。

另一方面,由于所有 $a_k$ 均为0,则其差分方程为

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

故其输出仅与输入有关,而与以前的输出无关,故不存在输出到输入的反馈,这种结构称为非递归结构。

由于IIR系统和FIR系统的结构不同,特性也不相同,故设计方法也不同,第6章和第7章将分别介绍这两种系统的设计方法。

### 3. 全通系统

全通系统是根据系统的幅度特性来分类的,若系统的幅度特性满足

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (2-63)$$

即系统的幅度特性在整个频率范围内均为常数,这样的系统称为全通系统。

一个  $N$  阶全通系统的系统函数表达式为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k^* z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = z^{-N} \frac{D^*(z^{-1})}{D(z)}, \quad a_0 = 1 \quad (2-64)$$

全通系统的零极点具有如下特点:若  $p_k$  为  $H(z)$  的极点,则  $(p_k^{-1})^*$  一定为零点,对实系数有理分式  $H(z)$ ,极点和零点均是共轭成对出现的。这样全通系统的零点与极点相对单位圆是镜像共轭成对的。

### 4. 最小相位系统和最大相位系统

最小相位系统和最大相位系统是根据系统的相位特性来进行分类的。对于稳定的因果系统,要求其所有极点均处于单位圆内部,但对零点并没有限制。

所谓的最小相位系统是指系统的所有零点均处于单位圆内的系统,而最大相位系统是指所有零点均处于单位圆外的系统。显然,根据全通系统的零极点特性可知,一个稳定因果的全通系统所有极点均处于单位圆内部,而其所有零点与极点相对单位圆镜像共轭成对,因此其所有零点均位于单位圆外部,故全通系统是最大相位系统。

之所以将零点处于单位圆内的系统称为最小相位系统,是因为这种系统的相位滞后总是小于所有其他具有相同幅度特性的系统的相位滞后。

既有零点处于单位圆内,也有零点处于单位圆外的系统称为混合相位系统,显然混合相位系统可由最小相位系统和全通系统级联而成。

## 本章小结

$z$  变换是离散时间信号和系统分析的重要工具,类似于连续信号的拉普拉斯变换。 $z$  变换是无穷多项的累加求和,因此在确定  $z$  变换的表达式的同时必须确定其收敛域,否则将毫无意义。逆  $z$  变换的求解有围线积分法、部分分式展开法和长除法,利用  $z$  变换的性质将会使得  $z$  变换的求解过程比较简单,理解  $z$  变换的性质对离散时间信号和系统的分析具有重要意义。

序列的傅里叶变换将得到序列的频谱,它是以  $2\pi$  为周期的连续函数,其性质可由  $z$  变换的性质类推而得,其中离散傅里叶变换的对称性将使得计算更加灵活方便。离散时间傅里叶变换是离散时间信号和系统分析的极为重要的工具。

拉普拉斯变换、 $z$  变换与离散时间傅里叶变换之间有密切的联系。拉普拉斯变

换与  $z$  变换之间是多值映射关系,而  $z$  变换与离散时间傅里叶变换之间是一般与特殊的关系,即离散时间傅里叶变换是  $z$  变换在单位圆上的特殊情况。数字频率  $\omega$  与模拟频率  $f$  之间的关系是滤波器设计的基础,根据采样定理,数字频率最高取值为  $\pi$ 。

系统函数和系统的频率响应是线性时不变离散时间系统的重要描述工具,系统函数是系统单位脉冲响应的  $z$  变换,而系统的频率响应是系统单位脉冲响应的离散时间傅里叶变换,系统的四种描述方法之间有密切的联系,而联系的纽带就是系统的单位脉冲响应。在变换域中可以根据系统的收敛域判定系统的因果稳定性,因果稳定的系统收敛域一定包括单位圆和无穷远点。系统函数的零极点对系统的频率响应具有重要的影响,可以根据系统函数的零极点位置定性地确定系统的频率响应,也可以通过零极点的个数和位置来控制系统的频率响应。

IIR 系统的单位脉冲响应为无限长,在有限的  $z$  平面上存在极点,存在输出到输入的反馈,而 FIR 系统的单位脉冲响应为有限长,在有限的  $z$  平面上不存在极点,也不存在输出到输入的反馈,这两种系统的设计方法完全不同。全通系统其幅度特性在整个频率范围内为常数,其零极点相对于单位圆镜像共轭对称。最小相位系统的所有零点均处于单位圆内,而最大相位系统的所有零点均处于单位圆外。

## 思考与练习

2-1 求以下序列的  $z$  变换并确定收敛域。

$$(1) \delta(n-n_0)$$

$$(2) -0.5\delta(n+2)-0.2\delta(n+1)+\delta(n)-0.3\delta(n-1)+\delta(n-1)-0.6\delta(n-3)$$

$$(3) a^n[\cos(\omega_0 n)+\sin(\omega_0 n)]u(n) \quad (4) (0.3)^n u(-n-1)$$

$$(5) a^{|n|} \quad (6) (0.25)^n u(n)+(0.25)^{-n} u(-n-1)$$

2-2 用围线积分法、部分分式展开法、长除法求下列  $z$  变换的逆  $z$  变换。

$$(1) X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}, |z|>0.5 \quad (2) X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}, |z|<0.4$$

$$(3) X(z)=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}, |z|>|a^{-1}|$$

$$(4) X(z)=\frac{z^{-5}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}, 0.5<|z|<2$$

$$(5) X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)}, \frac{1}{5}<|z|<\frac{1}{3}$$

$$(6) X(z)=z^{-1}-2z^{-4}-0.5z^{-6}, |z|>0$$

2-3 已知序列如下,试用  $z$  变换的性质求解  $X(z)$ 。

$$(1) x(n) = (n+1)u(n)$$

$$(2) x(n) = na^n u(n)$$

$$(3) x(n) = r^n \cos(\omega_0 n) u(n)$$

2-4 有一序列  $y(n) = x(n+3) * h(n-1)$ 。其中,  $x(n) = (0.5)^n u(n)$ ,  $h(n) = (0.3)^n u(n)$ , 试利用  $z$  变换的性质求解  $Y(z)$ 。

2-5 若已知序列  $x(n]$  的  $z$  变换为

$$X(z) = \frac{1+j}{1-(1+j)z^{-1}}, \quad |z| > \sqrt{2}$$

试求共轭序列  $x^*(n)$ 。

2-6 试用  $z$  变换的时域卷积定理求解  $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

$$(1) x(n) = a^n u(n), h(n) = b^n u(-n) \quad (2) x(n) = a^n u(n), h(n) = \delta(n-2)$$

$$(3) x(n) = a^n u(n), h(n) = u(n-1)$$

2-7 求以下序列  $x(n]$  的频谱  $X(e^{j\omega})$ 。

$$(1) x(n) = \delta(n-n_0)$$

$$(2) x(n) = a^n u(n-3), |z| < 1$$

$$(3) x(n) = e^{(a+j\omega_0)n} u(n)$$

$$(4) x(n) = a^n R_N(n)$$

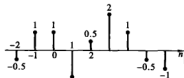
2-8 若  $x(n]$  和  $y(n]$  为因果且为有限值的实序列, 试证明:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega}) d\omega = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \right] \cdot \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) d\omega \right]$$

2-9 设序列  $x(n]$  的波形如题图 2-1 所示, 其傅里叶变换为  $X(e^{j\omega})$ , 试计算下列值。

$$(1) X(e^{j0}) \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (4) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$$



题图 2-1

2-10 已知序列  $x(n]$  的波形如题图 2-1 所示, 其傅里叶变换为  $X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$ , 试求下列傅里叶逆变换并画出其波形。

$$(1) X_R(e^{j\omega})$$

$$(2) X_I(e^{j\omega})$$

$$(3) X_R(e^{j\omega}) e^{j2\omega}$$

2-11 已知  $y(n) = x_1(n) * x_2(n) * x_3(n)$  为三个序列的卷积, 试证明以下两个等式。

$$(1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \right] \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n) \right] \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_3(n) \right]$$

$$(2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n y(n) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x_1(n) \right] \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x_2(n) \right] \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x_3(n) \right]$$

2-12 设系统由如下的差分方程描述

$$y(n) = 0.5y(n-1) - 0.6y(n-2) + x(n)$$

(1) 求系统函数  $H(z)$  并画出其零点分布图;

(2) 限定系统是因果的, 写出  $H(z)$  的收敛域并判断系统的稳定性。

2-13 设系统由如下的差分方程描述

$$y(n) = -0.4y(n-2) + x(n) + 0.5x(n-1)$$

(1) 求系统函数  $H(z)$  并画出其零点分布图;

(2) 定性画出幅频特性  $|H(e^{j\omega})|$ 。

2-14 理想高通滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 1, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

试求其单位脉冲响应。

2-15 一个因果的线性时不变系统, 其系统函数有一对极点  $z_1 = 0.9$ 、 $z_2 = -0.8$ , 在  $z=0$  处有一阶零点, 且有  $H(z)|_{z=1} = 2$ , 试求其系统函数  $H(z)$  和单位脉冲响应  $h(n)$ 。

2-16 线性时不变因果系统的差分方程如下

$$y(n) = -r^2 y(n-2) + 2r y(n-1) \cos \theta + x(n)$$

试用  $z$  变换求解输入为  $x(n) = a^n u(n)$  时系统的响应。





## 离散傅里叶变换

本章重点内容：周期序列的傅里叶级数的定义及物理含义；离散傅里叶变换的定义；几种傅里叶变换的比较；离散傅里叶变换的性质；离散傅里叶变换的定义及性质在计算中的应用；频域采样不失真恢复序列的条件以及由离散傅里叶变换恢复 $z$ 变换及离散时间傅里叶变换的过程。

第2章讨论了序列的傅里叶变换和 $z$ 变换，它们是离散时间信号和系统分析的重要工具。在实际使用中用得最多的是有限长序列，当然也可以采用离散时间傅里叶变换或 $z$ 变换来进行分析。但是序列的傅里叶变换是数字频率 $\omega$ 的连续函数，不能直接借用计算机等工具直接计算，还需要将数字频率 $\omega$ 离散化。本章将要介绍的离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)，是对有限长序列，并将数字频率 $\omega$ 离散化后的傅里叶变换。离散傅里叶变换在理论上极为重要，而且其存在快速算法，因此，离散傅里叶变换在数字信号处理中处于核心地位。

离散傅里叶变换和周期序列的傅里叶级数(Fourier Series, FS)在本质上是相同的，因此在介绍离散傅里叶变换之前，先介绍周期序列的傅里叶级数，也称为离散傅里叶级数(Discrete Fourier Series, DFS)。

### 3.1 周期序列的傅里叶级数

设 $x(n) = x(n+rN)$ 是以 $N$ 为周期的周期序列， $r$ 为任意整数，通常用符号 $\tilde{x}(n)$ 表示该序列为周期序列。由于周期序列的取值是周期性重复出现的，因此对于任何 $z$ 值，其 $z$ 变换都不收敛，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(n)| |z^{-n}| = +\infty \quad (3-1)$$

也不存在严格意义上的傅里叶变换。

但是，类似于连续周期信号可以展开成复指数函数的傅里叶级数，周期序列也

可以展开成复指数序列的傅里叶级数,即用周期为  $N$  的复指数序列(正弦型序列)来表示。对于周期为  $T$  的连续时间信号,可以用复指数基函数  $\{e^{j2\pi k t/T}\}$  ( $-\infty < k < +\infty$  的整数)来展开,其基频为  $\Omega_0 = 2\pi/T$ ,基波为  $e^{j2\pi t/T}$ 。与此对应,周期为  $N$  的周期序列  $\tilde{x}(n)$ ,也可以用基序列  $\{e^{j2\pi kn/N}\}$  将其展开,基频为  $2\pi/N$ ,基波为  $e^{j2\pi n/N}$ 。与连续时间信号的基函数  $\{e^{j2\pi k t/T}\}$  有无穷多个不同,由于

$$e^{j2\pi n/N(k+rN)} = e^{j2\pi kn/N}, \quad r \text{ 为任意整数}$$

因此,  $e^{j2\pi kn/N}$  是以  $N$  为周期的周期序列,故基序列  $\{e^{j2\pi kn/N}\}$  只有  $N$  个是独立的,可以用这  $N$  个值将周期序列展开。

为了方便,通常将  $e^{-j2\pi n/N}$  简记为  $W_N$ ,则  $e^{j2\pi kn/N} = W_N^{-rk}$ 。 $W_N$  具有如下性质。

$$(1) \text{ 周期性} \quad W_N^r = W_N^{(r+N)}, \quad r \text{ 为任意整数} \quad (3-2a)$$

$$(2) \text{ 共轭对称性} \quad W_N^r = (W_N^{-r})^* \quad (3-2b)$$

$$(3) \text{ 可约性} \quad W_N^m = W_N^r \quad (3-2c)$$

(4) 正交性

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^r (W_N^m)^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(r-m)n} = \begin{cases} 1, & k-m=rN \\ 0, & k-m \neq rN, r \text{ 为任意整数} \end{cases} \quad (3-2d)$$

周期序列  $\tilde{x}(n)$  可以展开为如下的离散傅里叶级数

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-rk} \quad (3-3)$$

上式表明将周期序列  $\tilde{x}(n)$  展开成了  $N$  项之和,每项对应于基波的  $k$  次谐波。其中,  $\frac{1}{N} \tilde{X}(k)$  是  $k$  次谐波的系数。

式(3-3)两端同乘以  $W_N^r$  ( $r$  为  $0 \sim N-1$  之间的整数),然后在  $n=0$  到  $N-1$  的一个周期内求和

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^r = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-rk} \right] W_N^r = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-(k-r)n} \right] = \tilde{X}(r)$$

将  $r$  换成  $k$  可得

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^k \quad (3-4)$$

这就是求  $k$  从  $0$  到  $N-1$  的  $N$  个谐波系数的公式。显然  $\tilde{X}(k)$  也是一个以  $N$  为周期的周期序列。

将式(3-3)和式(3-4)看成一个变换对,式(3-4)为周期序列傅里叶级数的正变换,式(3-3)为周期序列傅里叶级数的反变换。

周期序列的傅里叶级数  $\tilde{X}(k)$  可以看成是对序列  $\tilde{x}(n)$  的一个周期作  $z$  变换,然后在  $z$  平面的单位圆上等间隔角  $2\pi/N$  采样而得,也就是对一个周期的序列的傅里叶变换的数字频率  $\omega$  从  $0$  到  $2\pi$  沿逆时针方向等间隔角  $2\pi/N$  采样而得,第  $k$  个采

样点在  $\omega = 2k\pi/N$  处, 即

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2k\pi/N} \quad (3-5)$$

由于离散傅里叶级数和序列的傅里叶变换之间存在上述联系, 因此序列的傅里叶变换的许多性质可以类推到离散傅里叶级数, 如线性性、移位性、对称性等, 而这些性质和后面将要介绍的离散傅里叶变换的性质也极为相似。因此这里将不介绍离散傅里叶级数的性质。

下面定义一种新的卷积运算——周期卷积。

如果周期序列  $\tilde{x}(n)$  和  $\tilde{h}(n)$  具有相同的周期  $N$ , 则称

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{h}(n-m) \quad (3-6)$$

为序列  $\tilde{x}(n)$  和  $\tilde{h}(n)$  的周期卷积, 记为

$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}(n) \otimes \tilde{h}(n)$$

周期卷积和第 1 章介绍的线性卷积不同, 周期卷积是两个周期相同的序列的卷积, 卷积结果也具有相同的周期, 其求和是在一个周期内进行的。而线性卷积结果的序列长度为参与卷积的两个序列长度之和再减 1。在计算的过程中, 它们的区别在于线性卷积是线性移位, 而周期卷积是周期移位。图 3-1 表明了周期为 6 的序列周期移位的基本过程。

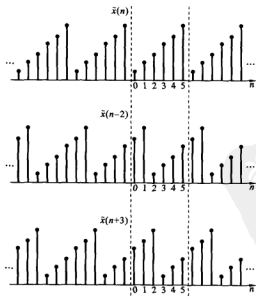


图 3-1 周期为 6 时周期移位示意图

从图 3-1 可以看出, 周期移位和线性移位过程完全相同,  $\tilde{x}(n-2)$  就是将序列右

移2位,而 $\tilde{x}(n+3)$ 就是将序列左移3位。但是,一般只关心一个周期的样点值,因此从一个周期样点值来看, $\tilde{x}(n-2)$ 相当于将一个周期的值右移2位,同时移出的样点值再依次从左端移入; $\tilde{x}(n+3)$ 相当于将一个周期的值左移3位,同时移出的样点值再依次从右端移入。

与序列的傅里叶变换一样,离散傅里叶级数也满足卷积定理,即

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)], \quad \tilde{H}(k) = \text{DFS}[\tilde{h}(n)]$$

则有

$$\tilde{Y}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n) \otimes \tilde{h}(n)] = \tilde{X}(k) \tilde{H}(k) \quad (3-7)$$

即周期序列的周期卷积的离散傅里叶级数等于两个周期序列的离散傅里叶级数的乘积。

## 3.2 离散傅里叶变换

对于在实际使用中常用到的有限长因果序列,往往希望用计算机来计算其傅里叶变换,但是计算机只能处理离散的值,而序列的傅里叶变换是 $\omega$ 的连续函数。因此,有必要寻求对有限长序列且是离散值的傅里叶变换,这就是离散傅里叶变换。

### 3.2.1 离散傅里叶变换的定义

根据3.1节可知,周期序列的傅里叶级数是离散的,如果将一个长度为 $N$ 的有限长因果序列 $x(n)$ 看做周期序列的一个周期,则根据周期序列的傅里叶级数的定义,可以得到类似于周期序列傅里叶级数的形式,即

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-8)$$

这就是离散傅里叶变换的定义式。因此,离散傅里叶变换可以看做是将一个有限长因果序列展开成傅里叶级数,谐波频率为 $2\pi k/N$  ( $k=0, 1, \dots, N-1$ )。虽然 $x(n)$ 是有限长序列,但根据 $W_N^k$ 的周期性可知,离散傅里叶变换 $X(k)$ 是周期的,周期为 $N$ ,只不过这里仅取了 $k=0, 1, \dots, N-1$ 这一个周期的值。下面从另一个角度来看离散傅里叶变换的定义。

根据序列傅里叶变换的定义式可知,一个长度为 $N$ 的有限长因果序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$ 是 $\omega$ 的以 $2\pi$ 为周期的周期函数,现对 $\omega$ 在 $(0, 2\pi)$ 上从0开始等角度间隔地采样 $N$ 个点,则第 $k$ 个点的数字频率 $\omega_k$ 为 $2\pi k/N$ ,上式变为

$$X(e^{j\omega_k}) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^k$$

显然与式(3-8)相同。因此,离散傅里叶变换  $X(k)$  为序列在离散频率点  $2\pi k/N$  上的频谱值。需要说明的是,离散傅里叶变换  $X(k)$  的定义式中序列长度  $N$  (即累加求和的项数)与数字频率的采样点数  $N$  (即  $W_N^k$  中的  $N$ ) 为相同的值,这并不是绝对的。也就是说,序列长度和数字频率采样点数可以相同,也可以不同(在频域采样定理中我们将介绍它们之间必须满足的条件)。在离散傅里叶变换的定义式中,为了简单,将它们用同一变量表示,但是它们的含义是不同的。

因此,离散傅里叶变换的物理含义可从两个方面去理解:一是有限长序列在离散频率点上的频谱值;二是有限长序列展开成基频为  $2\pi/N$  的傅里叶级数的系数。

既然可以将有限长因果序列看做周期序列的一个周期而得出离散傅里叶变换的定义,与离散傅里叶级数的反变换推导过程相同,同样也可以得出由离散傅里叶变换  $X(k)$  来求解序列  $x(n)$  的离散傅里叶逆变换(IDFT)的定义式为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-9)$$

显然,  $W_N^{-kn}$  是以  $N$  为周期的序列,因此离散傅里叶逆变换  $x(n)$  也是周期的,周期为  $N$ ,同样在逆变换的定义式中,仅取出了  $x(n)$  一个周期  $n=0, 1, \dots, N-1$  的值。

所以,一个有限长序列的离散傅里叶变换  $X(k)$  是以  $N$  为周期的无限长序列,这里只取了其  $k=0, 1, \dots, N-1$  的一个周期值,其离散傅里叶逆变换  $x(n)$  也是以  $N$  为周期的无限长序列,同样只取了其  $n=0, 1, \dots, N-1$  的一个周期值。

### 3.2.2 离散傅里叶变换定义导出的图形解释

下面以图形的方式从连续信号  $x(t)$  经过采样得到离散傅里叶变换的整个过程来解释离散傅里叶变换。

设  $x(t)$  是长度为  $T$  的连续时间信号,其傅里叶变换为  $X(j\Omega)$ , 该信号在理论上无限带宽的,通过截止频率为  $\Omega_s$  的抗混叠滤波器滤波,则其最高频率为  $\Omega_s$ , 如图 3-2(a) 所示。现在用采样脉冲  $\delta_{T_s}(t) = T_s \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_s)$  对  $x(t)$  采样,令  $T = NT_s$ , 则采样得到的序列  $x(nT_s)$  为  $N$  点序列。由于采样脉冲  $\delta_{T_s}(t)$  的幅度为  $T_s$ , 根据第 1 章介绍的采样脉冲的频谱式(1-43)有

$$\Delta_{T_s}(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$\delta_{T_s}(t)$  和  $\Delta_{T_s}(j\Omega)$  如图 3-2(b) 所示。根据式(1-44)可得采样后序列的频谱,即  $x(nT_s)$  的离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=n\Omega_s} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j\Omega - k\Omega_s)$$

则  $X(e^{j\omega})$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数,如图 3-2(c) 所示。

由于  $X(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的以  $2\pi$  为周期的连续函数,需要对其频谱进行采样以得到离

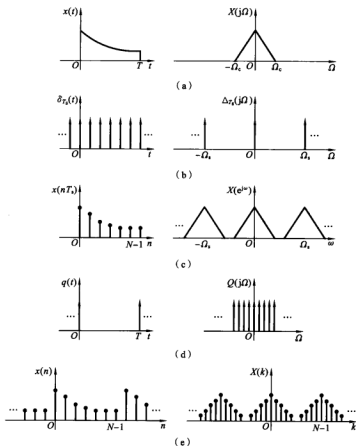


图 3-2 离散傅里叶变换的图形解释

散的频谱。类似于时域的采样,设频域采样的采样函数为

$$Q(j\Omega) = \Omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (3-10)$$

其中,  $\Omega_0 = \frac{\Omega_s}{N} = \frac{2\pi}{NT_s} = \frac{2\pi}{T}$ 。

这样,频域中一个周期的采样点数也为  $N$ 。仿照由  $\delta_{Ts}(t)$  得到  $\Delta T_s(j\Omega)$  的方法,可以得出  $Q(j\Omega)$  对应的时域信号  $q(t)$

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (3-11)$$

$Q(j\Omega)$ 、 $q(t)$  的波形如图 3-2(d) 所示。

和时域采样过程相似,在频域中,用  $Q(j\Omega)$  乘以  $X(e^{j\omega})$  来完成对  $X(e^{j\omega})$  的采样,得到  $X(k)$ ,  $X(k)$  是周期函数,周期为  $N$ 。由  $X(k)$  进行逆变换即得  $x(n)$ ,  $x(n)$  也是

周期的,周期同样为  $N$ 。 $X(k)$  和  $x(n)$  的波形,如图 3-2(e)所示。

显然,图 3-2(e)所示为离散傅里叶级数变换对,对其各取一个周期即为离散傅里叶变换对。

**例 3-1** 已知  $x(n) = R_4(n)$ , 试分别求  $N=4$  和  $N=8$  时的离散傅里叶变换  $X(k)$ 。

**解** 在本例题中序列长度和频域采样点数不一定相同,注意它们之间的区别。由离散傅里叶变换的定义式,可得  $N=4$  时

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) W_4^{nk} = \sum_{n=0}^3 e^{-j2\pi nk/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时,} \quad X(k) = 1+1+1+1=4$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时,} \quad X(k) = 1-j-1+j=0$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时,} \quad X(k) = 1-1+1-1=0$$

$$\text{当 } k=3 \text{ 时,} \quad X(k) = 1+j-1-j=0$$

$$\text{所以有,} \quad X(k) = \{4, 0, 0, 0\}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

当  $N=8$  时

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) W_8^{nk} = \sum_{n=0}^3 e^{-j2\pi nk/8} = \frac{1 - e^{-j8\pi k/8}}{1 - e^{-j\pi k/4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

显然,对于同一序列,离散傅里叶变换的点数不同,则所得  $X(k)$  的长度也不同,取值也不同。

### 3.3 几种傅里叶变换的比较

至此,有了连续信号的傅里叶变换、周期连续信号的傅里叶级数、离散时间傅里叶变换、离散傅里叶级数和离散傅里叶变换等几种傅里叶变换形式,下面对它们加以归纳。

#### 1. 连续时间、连续频率——傅里叶变换

这就是信号与系统课程中介绍的连续时间非周期信号的傅里叶变换,它在时间上是连续的,所得频谱也是频率的连续函数。这一变换对为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3-12a)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3-12b)$$

时域连续函数得到频域非周期的频谱,时域的非周期性使得频域为连续的谱密度函数。

#### 2. 连续时间、离散频率——傅里叶级数

若连续时间信号  $x(t)$  是周期为  $T_0$  的周期信号,则  $x(t)$  可以展开成傅里叶级数

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3-13a)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3-13b)$$

其中,  $\Omega_0 = 2\pi/T_0$  为离散频谱相邻两谱线之间的角频率间隔,  $k$  为谐波序号。

这一变换对的示意图如图 3-3 所示。时域的连续函数其频谱是非周期的频率函数, 而时域的周期性导致其频谱的离散性。

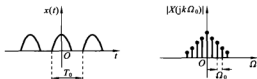


图 3-3 连续周期信号及其非周期离散频谱

### 3. 离散时间、连续频率——序列的傅里叶变换

这就是第 2 章讨论的离散时间傅里叶变换, 即

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3-14a)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-14b)$$

其中,  $\omega$  是数字频率,  $\omega = \Omega T$ ,  $\Omega = 2\pi f_s = 2\pi f_s / f_s$  是连续变量, 而  $X(e^{j\omega})$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数。这一变换对的示意图如图 3-4 所示。

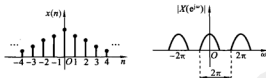


图 3-4 离散非周期序列及其连续周期的频谱

显然, 时域的离散化导致频域的周期延拓, 而时域的非周期性导致频域的连续性。

### 4. 离散时间、离散频率——离散傅里叶变换

这就是本章介绍的离散傅里叶变换, 为了便于对比其变换对重写如下

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-15a)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-15b)$$

这一变换对的示意图如图 3-2(e) 所示, 为了便于比较重画在图 3-5 中。



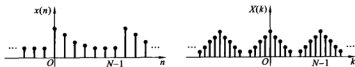


图 3-5 离散周期时间函数及其周期离散的频谱

显然,时域的离散导致其频域的周期性,而时域的周期性导致其频域的离散,也就是说,一个域的离散会导致另一个域的周期延拓。

### 5. 离散傅里叶变换与离散傅里叶级数的关系

前面已经介绍,一个长度为  $N$  的因果有限长序列  $x(n)$  可以看做是周期为  $N$  的周期序列  $\tilde{x}(n)$  的一个周期,即

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3-16)$$

称  $x(n)$  为  $\tilde{x}(n)$  的主值区间。而周期序列  $\tilde{x}(n)$  显然也可以看成是有限长序列  $x(n)$  的周期延拓,用如下符号表示

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N \quad (3-17)$$

其中,  $((n))_N$  表示“ $n$  对  $N$  取余数”,即若

$$n = kN + n_1, \quad 0 \leq n_1 \leq N-1, \quad k \text{ 为整数}$$

则有

$$((n))_N = n_1$$

即不管  $n_1$  加多少整数倍的  $N$ ,其余数皆为  $n_1$ ,也就是说,周期性重复出现的  $x((n))_N$  其数值是相等的,即是以  $N$  为周期性的。

例如,  $N=10$  时,  $n=35$  的余数为

$$n=35=3 \times 10 + 5$$

所以

$$((35))_{10} = 5$$

而  $n=-23$  的余数为

$$n=-23 = -3 \times 10 + 7$$

所以

$$((-23))_{10} = 7$$

因此,在周期为 10 时,有  $\tilde{x}(35) = x(5)$ ,  $\tilde{x}(-23) = x(7)$ 。

同样道理,频域的周期序列  $\tilde{X}(k)$  也可以看做是有限长序列  $X(k)$  的周期延拓,而有限长序列  $X(k)$  可看做是周期序列  $\tilde{X}(k)$  的主值区间,即

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-18)$$

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \quad (3-19)$$

因此,离散傅里叶变换  $X(k)$  是离散傅里叶级数  $\tilde{X}(k)$  的主值区间,而离散傅里叶级数可看做是离散傅里叶变换的周期延拓。相对应的,离散傅里叶逆变换是离散傅里叶级数反变换的主值区间,而离散傅里叶级数的反变换是离散傅里叶逆变换的周期延拓。

## 6. 离散频率与数字频率和模拟频率之间的关系

第2章讨论了数字频率 $\omega$ 和模拟频率 $f$ 之间的关系,即

$$\omega = \Omega T_s = \frac{2\pi f}{f_s} \quad (3-20)$$

其中, $T_s$ 为采样间隔, $f_s$ 为采样频率。本章又引入了将数字频率 $\omega$ 离散化后的离散频率 $k$ 。下面来讨论离散频率 $k$ 与数字频率 $\omega$ 和模拟频率 $f$ 之间的关系。

离散傅里叶变换是在单位圆上对序列的傅里叶变换的等角度间隔的采样,即在 $0 \sim 2\pi$ 之间以 $0$ 为起点等间隔地采样 $N$ 个点,则每两个采样点之间的间隔为 $2\pi/N$ ,第 $k$ 个采样点的频率为 $2\pi k/N$ ,因此有如下对应关系

$$k \Rightarrow \omega_k = \frac{2\pi k}{N} \Rightarrow f = \frac{f_s}{N} k \quad (3-21)$$

当 $k=N/2$ 时,对应的数字频率为 $\pi$ ,对应的模拟频率为 $f_s/2$ ,也就是信号的最高频率。而 $N/2+1 \leq k \leq N-1$ 则与模拟信号的负频率 $[-f_s/2, 0)$ 对应。

## 3.4 离散傅里叶变换的性质

由于离散傅里叶变换的定义与离散时间傅里叶变换和离散傅里叶级数之间的关系,离散傅里叶变换的性质在本质上是与离散傅里叶级数的概念有关的,且与离散时间傅里叶变换的性质类似。

### 1. 线性性

若两个序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的离散傅里叶变换分别为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ ,则有

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (3-22)$$

其中, $a, b$ 为任意常数。

当两序列的长度相同均为 $N$ 时, $aX_1(k) + bX_2(k)$ 的长度也为 $N$ ;而当两个序列长度不同时,则按较长的序列的长度来计算离散傅里叶变换,较短的序列要补零延长至与较长序列长度相同, $aX_1(k) + bX_2(k)$ 的长度与较长序列长度相同。

### 2. 循环移位性质

所谓循环移位是指以序列的长度 $N$ 为周期,将其延拓成周期序列,将周期序列加以移位,然后再取主值区间的过程,即一端移出的序列值再依次从另一端移入。一个有限长序列的循环移位定义为

$$y(n) = x((n-m))_N R_N(n) \quad (3-23)$$

$m > 0$ 时向右循环移位, $m < 0$ 时向左循环移位。因此,循环移位过程与如图3-1所示的周期移位过程相同,只不过仅取主值区间。

若序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换为 $X(k)$ ,则式(3-21)的离散傅里叶变换为

$$Y(k) = \text{DFT}[x((n-m))_N R_N(n)] = W_N^m X(k) \quad (3-24)$$

即时域的循环移位对应于频域引入一个和频率成正比的线性相移  $W_N^k$ , 对频谱的幅度没有影响。

证 根据离散傅里叶变换的定义有

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x((n-m))_N W_N^{nk}$$

令  $r=n-m$ , 则有

$$Y(k) = \sum_{r=-m}^{N-1-m} x((r))_N W_N^{(r+m)k} = W_N^{mk} \sum_{r=-m}^{N-1-m} x((r))_N W_N^{rk}$$

由于  $x((r))_N$  和  $W_N$  是以  $N$  为周期的, 从  $r=-m$  到  $r=N-1-m$  的求和与  $r=0$  到  $r=N-1$  的求和相同, 所以有

$$Y(k) = W_N^{mk} \sum_{r=0}^{N-1-m} x((r))_N W_N^{rk} = W_N^{mk} \sum_{r=0}^{N-1} x((r))_N W_N^{rk} = W_N^{mk} X(k)$$

同样, 根据频域和时域的对偶关系可以得出

$$\text{IDFT}[X((k-l))_N R_N(n)] = W_N^{nl} x(n) \quad (3-25)$$

即时域序列的调制等效于频域的循环移位。该性质的证明与上述证明过程类似, 请读者自行证明。

### 3. 对偶性

若

$$\text{DFT}[x(n)] = X(k)$$

则

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx((-k))_N R_N(k) \quad (3-26)$$

证 根据离散傅里叶变换的定义有

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

上式中  $k$  用  $n$  表示,  $n$  用  $l$  表示有

$$X(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W_N^{nl}$$

$$\text{则有 } \text{DFT}[X(n)] = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W_N^{nl} \right] W_N^{nk} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(l+k)}$$

根据  $W_N$  的正交性公式(3-2d), 有

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(l+k)} = \begin{cases} N, & l+k = rN \\ 0, & l+k \neq rN \end{cases}, \quad r \text{ 为整数}$$

而 DFT 是取主值区间, 因此有

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx((-k))_N R_N(k)$$

### 4. 复共轭序列

若

$$\text{DFT}[x(n)] = X(k)$$

则

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*((N-k))_N R_N(k) \quad (3-27)$$

证 根据离散傅里叶变换的定义有

$$\text{DFT}[x^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^n = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) W_N^{-n}]^*$$

由于  $W_N$  的周期性, 所以有  $W_N^{-n} = W_N^{(N-k)n}$ , 则

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) W_N^{-n}]^* = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* \\ &= X^*((N-k))_N R_N(n) \end{aligned}$$

### 5. 循环共轭对称性

在第2章曾介绍序列的傅里叶变换的对称性质, 与其类似, 离散傅里叶变换也具有对称性质, 只不过这里是循环共轭对称性质。

有限长序列的循环共轭对称和反对称序列分别为

$$x_{cp}(n) = \frac{1}{2} [x((n))_N + x^*((N-n))_N] R_N(n) \quad (3-28)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2} [x((n))_N - x^*((N-n))_N] R_N(n) \quad (3-29)$$

显然这和第2章介绍的共轭对称序列和共轭反对称序列有所不同。循环共轭对称序列和循环共轭反对称序列都是周期序列的主值区间, 也就是先将序列  $x(n)$  周期延拓, 然后再计算其共轭对称和共轭反对称序列, 最后再取其主值区间即为循环共轭对称和反对称序列。显然, 任何一个有限长序列  $x(n)$ , 均可表示成循环共轭对称序列和循环共轭反对称序列之和, 即

$$x(n) = x_{cp}(n) + x_{op}(n) \quad (3-30)$$

则有

$$\text{DFT}[x_{cp}(n)] = \text{Re}[X(k)] \quad (3-31)$$

$$\text{DFT}[x_{op}(n)] = \text{jIm}[X(k)] \quad (3-32)$$

即循环共轭对称序列的离散傅里叶变换对应于序列傅里叶变换的实部, 循环共轭反对称序列的离散傅里叶变换对应于序列离散傅里叶变换的虚部, 包括  $\text{j}$ 。这与序列的傅里叶变换的对称性结论一致。

证 根据离散傅里叶变换的定义有

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x_{cp}(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} [x((n))_N + x^*((N-n))_N] \right\} W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} x^*((N-n)) W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{2} X(k) + \frac{1}{2} \sum_{m=N}^1 x^*((m)) W_N^{(N-m)k} \\ &= \frac{1}{2} X(k) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk} \right]^* \\ &= \frac{1}{2} X(k) + \frac{1}{2} X^*(k) = \text{Re}[X(k)] \end{aligned}$$

在证明过程中用到了

$$W_N^{(N-m)k} = W_N^{-mk} = (W_N^{mk})^*$$

同理,可以证明式(3-29)成立,只需将上述证明过程中的“+”换成“-”即可,请读者自己推导。

根据傅里叶变换的对偶性,可以得出

$$\text{DFT}\{\text{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k) \quad (3-33)$$

$$\text{DFT}\{\text{jIm}[x(n)]\} = X_{op}(k) \quad (3-34)$$

即序列实部的离散傅里叶变换对应于序列离散傅里叶变换的循环共轭对称部分,而序列虚部(包括j)的离散傅里叶变换对应于序列离散傅里叶变换的循环共轭反对称部分。

证 由于

$$\text{jIm}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

所以有

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{\text{jIm}[x(n)]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \right\} W_N^k \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^k - \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^k \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^k - \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-k} \right]^* \right\} \\ &= \frac{1}{2} [X((k))_N - X^*((-k))_N] R_N(k) = X_{op}(k) \end{aligned}$$

## 6. 循环卷积定理

两个长度为  $N$  的有限长序列  $x(n)$  和  $h(n)$  的循环卷积定义为

$$y(n) = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N \right] R_N(n) = x(n) \otimes y(n) \quad (3-35)$$

即循环卷积相当于周期延拓后的序列  $\tilde{x}(n)$  和  $\tilde{h}(n)$  作周期卷积后再取主值区间。若  $x(n)$  和  $h(n)$  的离散傅里叶变换为  $X(k)$  和  $H(k)$ , 则有

$$\text{DFT}[y(n)] = X(k) H(k) \quad (3-36)$$

即时域中的循环卷积对应于其离散傅里叶变换的乘积,这也与前述变换的结论一致。

证 根据离散傅里叶变换的定义有

$$\begin{aligned} \text{DFT}[y(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N \right] W_N^k \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} h((n-m))_N W_N^k = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{r=-m}^{N-1-m} h((r))_N W_N^{(m+r)k} \end{aligned}$$

$$= \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^m \right] \left[ \sum_{r=0}^{N-1} h(r) W_N^* \right] = X(k) H(k)$$

利用时域与频域的对偶性,可得

$$\text{DFT}[x(n)h(n)] = \frac{1}{N} X(k) \otimes H(k) \quad (3-37)$$

即时域的乘积,对应于其离散傅里叶变换的循环卷积再除以  $N$ ,这与序列的傅里叶变换的性质对应。

证 根据离散傅里叶变换的定义可得

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x(n)h(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)h(n)W_N^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X(r)W_N^{rn} \right] h(n)W_N^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X(r) \sum_{n=0}^{N-1} h(n)W_N^{(k-r)n} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{r=0}^{N-1} X(r)H((k-r)_N) \right] R_N(k) \\ &= \frac{1}{N} X(k) \otimes H(k) \end{aligned}$$

**例 3-2** 已知序列  $x_1(n)=R_4(n)$ ,  $x_2(n)=R_4(n-2)$ , 试求  $N=8$  时两序列的循环卷积  $x(n)$ 。

**解** 循环卷积的计算步骤与线性卷积的计算步骤相同,区别在于移位的方式不同。计算过程如图 3-6 所示。

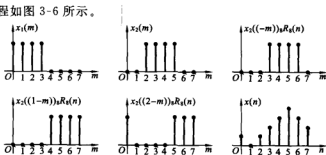


图 3-6 例 3-2 循环卷积计算示意图

先作变量代换,得  $x_1(m)$  和  $x_2(m)$ ,然后将  $x_2(m)$  周期延拓并反折再取主值区间得  $x_2((-m))_8R_8(n)$ ,然后再进行循环移位,依次得  $x_2((1-m))_8R_8(n)$ 、 $x_2((2-m))_8R_8(n)$ 、...,然后在对对应点相乘再累加,即可得循环卷积  $x(n)$ 。

### 7. 循环相关定理

和循环卷积的定义类似,实序列的循环相关的定义为

$$r_{xy}(m) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((n-m))_N \right] R_N(m) \quad (3-38)$$

和线性相关与线性卷积的关系类似,循环相关与循环卷积间也满足

$$r_{xy}(m) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((n-m))_N \right] R_N(m) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((-m+n))_N \right] R_N(m)$$

$$= x(m) \otimes y(-m)$$

显然,利用循环卷积定理可以得出序列的循环相关定理,即

$$\text{DFT}[r_{xy}(m)] = X(k)Y^*(k) \quad (3-39)$$

该性质请读者自行证明。

### 8. 帕斯瓦尔定理

在序列的傅里叶变换的性质中讨论了帕斯瓦尔定理,下面给出离散傅里叶变换的帕斯瓦尔定理表达式,即

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \quad (3-40)$$

证 因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \right] y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} y^*(n)W_N^{-nk} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W_N^{nk} \right]^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \end{aligned}$$

当  $x(n)=y(n)$  时,则为

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3-41)$$

即时域中的能量等于频域中的能量,即能量守恒。上式也给出了在频域中计算能量的公式。

## 3.5 离散傅里叶变换举例

下面通过举例来说明离散傅里叶变换的计算方法及其性质的应用。

**例 3-3** 已知  $x(n)$  的 15 点离散傅里叶变换  $X(k)$  为

$$X(k) = \begin{cases} 4, & k=0 \\ 1, & 1 \leq k \leq 14 \end{cases}$$

试求  $x(n)$ 。

**解** 若直接根据离散傅里叶逆变换的定义式计算较麻烦,下面利用离散傅里叶变换的线性性加以求解。

将  $X(k)$  表示为

$$X(k) = R_{15}(k) + 3\delta(k)$$

由于  $\text{DFT}[\delta(n)] = R_N(k)$ ,  $N$  点  $\text{DFT}[R_N(n)] = N\delta(k)$ , 令

$$x_1(n) = \delta(n), \quad x_2(n) = \frac{3}{N}R_{15}(n) = \frac{1}{5}R_{15}(n)$$

则

$$X(k) = \text{DFT}[x_1(n) + x_2(n)]$$

所以有

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) = \delta(n) + \frac{1}{5}R_{15}(n)$$

**例 3-4** 已知  $x(n)$  是一个长度为  $N$  的序列 ( $0 \leq n \leq N-1$ ), 其  $N$  点离散傅里叶变换为  $X(k)$ 。现定义  $2N$  点序列  $y(n) = x(n) + x(n-N)$ , 求  $y(n)$  的  $2N$  点离散傅里叶变换  $Y(k)$  与  $X(k)$  之间的关系。

**解 方法一** 根据离散傅里叶变换的定义直接求解

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} [x(n) + x(n-N)] W_N^{nk/2} = \sum_{n=0}^{2N-1} x(n) W_N^{nk/2} + \sum_{n=0}^{2N-1} x(n-N) W_N^{nk/2}$$

由于  $x(n)$  是一个长度为  $N$  的序列 ( $0 \leq n \leq N-1$ ), 故  $n$  从 0 到  $2N-1$  的求和与  $n$  从 0 到  $N-1$  的求和相等, 而  $x(n-N)$  只在  $N \leq n \leq 2N-1$  时为非 0 值, 所以有

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk/2} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n-N) W_N^{nk/2} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk/2} + \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{(N+m)k/2} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk/2} + \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk/2} (-1)^k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk/2} [1 + (-1)^k] \\ &= X\left(\frac{k}{2}\right) [1 + (-1)^k] = \begin{cases} 2X(k/2), & k \text{ 为偶数} \\ 0, & k \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

**方法二** 利用离散傅里叶变换是  $z$  变换在单位圆上的等间隔采样, 显然有

$$Y(z) = Z[x(n) + x(n-N)] = (1 + z^{-N})X(z)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n) + x(n-N)] = (1 + e^{-j\omega N})X(e^{j\omega})$$

$Y(k)$  是对  $Y(z)$  在单位圆上的  $2N$  点等间隔采样, 即对  $\omega$  的等间隔采样, 所以有

$$\begin{aligned} Y(k) &= [1 + e^{-j2\pi Nk/(2N)}] X[e^{j2\pi k/(2N)}] \\ &= [1 + (-1)^k] X[e^{j2\pi k/(2N)}] \\ &= \begin{cases} 2X(k/2), & k \text{ 为偶数} \\ 0, & k \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

上述结果表明, 序列重复延长 1 倍, 则其离散傅里叶变换为在原离散傅里叶变换两个样点值之间插入 0 值使长度延长 1 倍, 幅度增加 1 倍。

**例 3-5** 已知  $x(n)$  是一个长度为  $N$  的序列 ( $0 \leq n \leq N-1$ ), 其  $N$  点离散傅里叶变换为  $X(k)$ 。试求  $\text{DFT}\{\text{DFT}[x(n)]\}$  的表达式。

**解** 这其实就是对  $X(k)$  再进行离散傅里叶变换。

$$\begin{aligned} x(m) &= \text{DFT}\{\text{DFT}[x(n)]\} = \text{DFT}[X(k)] = \text{DFT}\left[\sum_{k=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}\right] W_N^{km} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n+m)k}\right] \end{aligned}$$

由于  $0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq N-1$ , 因此  $0 \leq n+m \leq 2N-2$ 。根据  $W_N$  的正交性公式 (3-2d) 可知

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n+m)k} = \begin{cases} N, & n+m = rN \\ 0, & n+m \neq rN \end{cases}, \quad r \text{ 为整数}$$



根据  $0 \leq n+m \leq 2N-2$  可知,  $r$  只能取 0 或 1, 即  $n=-m$  或  $n=N-m$ 。根据离散傅里叶变换的周期性, 序号  $n=-m$  和  $n=N-m$  所取的值相等, 统一为  $n=N-m$ 。所以有

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n+m)k} \right] = N \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \Big|_{n=N-m} = Nx((N-m))_N R_N(m)$$

将上式变量用习惯的  $n$  表示可得

$$\text{DFT}\{\text{DFT}[x(n)]\} = Nx((N-n))_N R_N(n)$$

**例 3-6** 已知  $x(n) = \{-0.5, 0, 1, 2, -3\}$ ,  $X(k)$  是其 6 点的离散傅里叶变换:

(1) 若有限长序列  $y_1(n)$  的 6 点离散傅里叶变换为  $Y_1(k) = W_6^4 X(k)$ , 试求  $y_1(n)$ ;

(2) 若有限长序列  $y_2(n)$  的 6 点离散傅里叶变换为  $X(k)$  的实部, 试求  $y_2(n)$ 。

**解** 利用离散傅里叶变换的性质来求解较为简单。

(1) 根据离散傅里叶变换循环移位性质, 即

$$Y_1(k) = \text{DFT}[x((n-m))_N R_N(n)] = W_N^m X(k)$$

可知

$$Y_1(k) = \text{DFT}[x((n-4))_6 R_6(n)] = W_6^4 X(k)$$

所以有

$$y_1(n) = x((n-4))_6 R_6(n) = \{1, 2, -3, 0, -0.5, 0\}$$

(2) 根据离散傅里叶变换的对称性可知,  $X(k)$  的实部对应于序列的循环共轭对称部分, 即

$$y_2(n) = \frac{1}{2} [x((n))_6 + x^*((6-n))_6] R_6(n)$$

而  $x(n)$  是实序列, 所以有

$$y_2(n) = \frac{1}{2} [x((n))_6 + x((6-n))_6] R_6(n) = \{-0.5, 0, -1, 2, -1, 0\}$$

### 3.6 频域采样定理

由前面的讨论可知, 离散傅里叶变换  $X(k)$  是序列的傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$  在单位圆上的等间隔采样。与时域采样类似, 频域采样也需要解决两个问题, 一是在什么条件下频域采样才能保证时域的不失真? 二是如何根据采样后的结果  $X(k)$  恢复原信号  $X(e^{j\omega})$ ? 本节将讨论这两个问题。

下面讨论一般性的序列  $x(n)$ , 即非周期无限长的绝对可和的序列, 其  $z$  变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

由于绝对可和, 故其离散时间傅里叶变换存在且连续, 收敛域包括单位圆。

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$ 是以  $2\pi$  为周期的周期连续函数。现对  $X(e^{j\omega})$  的变量  $\omega$  在  $0 \sim 2\pi$  之间以 0 为起始点等角度间隔采样  $N$  点,即相当于对其  $z$  变换  $X(z)$  在单位圆上以  $z=1$  为起始点逆时针等角度间隔采样  $N$  点,则第  $k$  个点对应的数字频率为  $2\pi k/N$ ,即有

$$X(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-42)$$

现在的问题在于,这样采样后能否恢复序列  $x(n)$ 。现对  $X(k)$  进行离散傅里叶逆变换得

$$x_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

将式(3-42)代入上式可得(为了变量之间的区分,将其中的变量  $n$  用  $m$  代替)

$$\begin{aligned} x_N(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j2\pi mk/N} \right] W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} \end{aligned}$$

由于  $W_N$  的正交性,即

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m-n = rN \\ 0, & m-n \neq rN \end{cases}, \quad r \text{ 为整数}$$

所以有

$$x_N(n) = \left[ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN) \right] R_N(n) \quad (3-43)$$

上式表明,经过频域采样恢复的序列  $x_N(n)$  是原序列  $x(n)$  以采样点数  $N$  为周期的周期延拓。在第1章中已知时域中的采样会导致频域的周期延拓,在此对应地频域中的采样也会导致时域的周期延拓。

如果序列  $x(n)$  为无限长,显然,无论采样多少点,周期延拓后各周期之间就会出现混叠。如果  $x(n)$  为有限长,当采样点数小于其序列长度时也会出现周期之间的混叠,只有当序列为有限长,且采样点数不小于序列长度时,恢复的序列周期之间才不会出现混叠,如图3-7所示。这就是频域采样定理,即频域采样点数  $N$  必须大于或等于序列长度  $L$ 。

$$N \geq L \quad (3-44)$$

既然  $N$  个频域采样点的  $X(k)$  能不失真地代表  $N$  点的有限长序列,那么  $N$  个采样值  $X(k)$  就一定能够完整地表达  $X(z)$  及  $X(e^{j\omega})$ 。下面进行推导。

对于有限长序列  $x(n) (0 \leq n \leq N-1)$  其  $z$  变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

根据离散傅里叶逆变换有

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

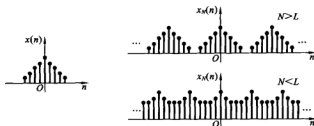


图 3-7 时域恢复示意图

将上式代入  $x(n)$  的  $z$  变换可得

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z)
 \end{aligned} \quad (3-45)$$

其中

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3-46)$$

称为插值函数。

下面讨论插值函数的零极点分布情况。令插值函数的分母为 0, 则有

$$z_p = W_N^{-k}$$

一个极点。而令插值函数的分子为 0, 则有

$$z = e^{j2\pi r/N}, \quad r = 0, 1, \dots, N-1$$

共  $N$  个零点, 而其中  $r=k$  时的零点与极点抵消。因此, 插值函数只在本身采样点  $r=k$  处不为 0, 而在其他采样点上全为 0。

下面来看恢复的离散时间傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$  的表达式, 根据序列的傅里叶变换与  $z$  变换之间的关系, 由式(3-45)和式(3-46)可得

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega}) \\
 \Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)N}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)N/2]} e^{-j[(N-1)\omega/2 + \pi k/N]} = \Phi\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)
 \end{aligned} \quad (3-47)$$

其中

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j[(N-1)\omega/2]} \quad (3-48)$$

所以有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (3-49)$$

内插函数的幅度特性和相位特性如图 3-8 所示。

从插值函数的幅度特性可以看出,插值函数在本采样点上的值为 1,而在其他采样点上的值为 0。从其相位特性上看,插值函数具有线性相位特性,由于每隔  $2\pi/N$  的整数倍,  $\Phi(\omega)$  就会翻转,即由正变负或由负变正,而正负极性的突变就是相位的突变,所以每隔  $2\pi/N$  的整数倍插值函数的相位要加上  $\pi$ 。

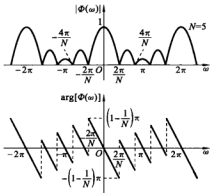


图 3-8 内插函数的幅度特性和相位特性

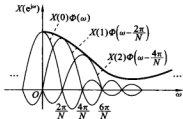


图 3-9 由内插函数求得  $X(e^{j\omega})$  的示意图

由内插函数得到  $X(e^{j\omega})$  的示意图如图 3-9 所示。各采样点上  $X(e^{j\omega})$  精确地等于  $X(k)$ ,而各采样点之间的  $X(e^{j\omega})$  由各采样点的加权插值函数在所求  $\omega$  点上的值的叠加而成。

**例 3-7** 已知序列  $x(n] = (0.5 + n/10)R_8(n)$  的离散时间傅里叶变换为  $X(e^{j\omega})$ ,  $X_1(k)$  是对  $X(e^{j\omega})$  进行  $N=6$  的等间隔采样的函数,起点为  $\omega=0$ ,试计算  $X_1(k)$  在  $N=6$  时的离散傅里叶逆变换  $x_1(n)$ 。

**解** 根据离散时间傅里叶变换的定义有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j\omega n}$$

对  $X(e^{j\omega})$  进行  $N=6$  的等间隔采样,起点为  $\omega=0$ ,则有

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j2\pi kn/6}$$

所以有

$$x_1(n) = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 \left[ \sum_{m=0}^7 x(m) e^{-j2\pi km/6} \right] W_6^{-nk} = \frac{1}{6} \sum_{m=0}^7 x(m) \sum_{k=0}^5 W_6^{(m-n)k}$$

同样,根据  $W_N$  的正交性,可得

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \left[ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+6r) \right] R_6(n) \\ &= \left\{ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} [0.5 + (n+6r)/10] R_8(n+6r) \right\} R_6(n), \quad r \text{ 为整数} \end{aligned}$$

显然,  $R_6(n+6r)$  中只有变量  $0 \leq n+6r \leq 7$  时才为非 0 值, 而  $R_6(n)$  只有在  $0 \leq n \leq 5$  范围内为非 0 值, 所以  $r$  可以取 0 和 1,  $r$  取 0 时,  $n$  可取  $0 \sim 5$ , 而  $r$  取 1 时,  $n$  只能取 0 与 1。所以有

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x(0) + x(6) = 1.6, & x_1(1) &= x(1) + x(7) = 1.8, & x_1(2) &= x(2) = 0.7 \\ x_1(3) &= x(3) = 0.8, & x_1(4) &= x(4) = 0.9, & x_1(5) &= x(5) = 1 \end{aligned}$$

显然, 和  $x(n)$  相比,  $x_1(0)$  与  $x(0)$ 、 $x_1(1)$  与  $x(1)$  不相等, 即造成了混叠失真, 这是由于序列长度(8)大于采样点数(6), 不满足频域采样定理的条件而造成的。

当然, 本题可以直接利用频域采样恢复的序列的表达式(3-43)直接计算。

**例 3-8** 已知序列  $x(n) = 2\delta(n) - 0.5\delta(n-1) + \delta(n-2) + 3\delta(n-3) - \delta(n-4)$ ,  $X(k)$  是  $x(n)$  的 8 点离散傅里叶变换, 若有限长序列  $y(n)$  的 4 点离散傅里叶变换满足  $Y(k) = X(2k)$ , 试求  $y(n)$ 。

**解** 根据题意,  $Y(k) = X(2k)$  相当于在  $X(k)$  中隔一个点抽取一个值, 而  $X(k)$  相当于在频域等间隔采样 8 点, 因此,  $Y(k)$  相当于在频域等间隔采样 4 点。根据频域采样恢复的序列的结果式(3-43)有

$$y(n) = \left[ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+4r) \right] R_4(n)$$

$x(n+4r)$  中只有变量  $0 \leq n+4r \leq 4$  时才为非 0 值, 而  $R_4(n)$  只有在  $0 \leq n \leq 3$  范围内为非 0 值, 所以  $r$  可以取 0 和 1,  $r$  取 0 时,  $n$  可取  $0 \sim 3$ , 而  $r$  取 1 时,  $n$  只能取 0。所以有

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) + x(4) = 1, & y(1) &= x(1) = -0.5 \\ y(2) &= x(2) = 1, & y(3) &= x(3) = 3 \end{aligned}$$

即  $y(n) = \delta(n) - 0.5\delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$ 。

## 本章小结

与连续时间周期信号类似, 周期序列也可以展开成傅里叶级数, 即基波及其谐波的加权和, 而傅里叶级数除以周期就是对应谐波的加权系数。傅里叶级数的性质与离散时间傅里叶变换的性质对应, 周期卷积与线性卷积的区别在于移位方式不同, 周期卷积的移位相当于从一个周期的一边移出的样点值再依次从另一端移进, 且卷积后仍然是具有相同周期的周期序列。

将有限长序列看做是周期序列的一个周期, 可以从周期序列的傅里叶级数推出离散傅里叶变换的定义。同样, 离散傅里叶变换也可以看做是有限长序列的傅里叶变换的数字频率等间隔采样的结果。离散傅里叶变换在数字信号处理中处于核心地位, 它可借助计算机来计算。

经过对几种傅里叶变换的比较, 可知一个域的周期性会导致另一个域的离散化; 反之, 一个域的离散化会导致另一个域的周期延拓。离散傅里叶变换是周期序列傅里

叶级数的主值区间,而周期序列的傅里叶级数可以看做是离散傅里叶变换的周期延拓。模拟频率、数字频率和离散频率之间的关系是数字滤波器设计和频谱分析时的基础。

离散傅里叶变换的性质可由序列的傅里叶变换的性质类推而得,它们具有相同的结论,但是在表达形式上有所不同。循环卷积与周期卷积类似,其移位过程是循环移位,卷积后序列长度与参与卷积的较长序列长度相同。离散傅里叶变换的性质在计算中具有重要作用,也是深刻理解离散傅里叶变换的基础。

与时域的采样导致频域的周期延拓相似,频域的采样也会导致时域的周期延拓,因此,在频域采样过程中,采样点数不能小于序列长度,否则会导致时域的混叠失真。通过内插函数,离散傅里叶变换可以恢复序列的 $z$ 变换和序列的傅里叶变换。

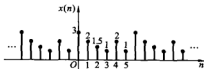
## 思考与练习

### 3-1 已知序列

$$p(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - kN)$$

试求其傅里叶级数。

### 3-2 试求如图题图 3-1 所示的周期为 6 的序列 $x(n)$ 的傅里叶级数。



题图 3-1

### 3-3 已知周期为 6 的序列 $x(n)$ 如图题图 3-1 所示,周期为 6 的序列 $h(n)$ 的一个周期值为 $R_6(n)$ ,试作图计算它们的周期卷积 $y(n)$ 。

### 3-4 试计算如下序列的 $N$ 点离散傅里叶变换。

(1)  $x(n) = R_N(n)$

(2)  $x(n) = \delta(n)$

(3)  $x(n) = a^n R_N(n)$

(4)  $x(n) = \delta(n - n_0), 0 \leq n_0 \leq N-1$

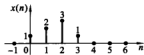
(5)  $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$

(6)  $x(n) = a \cos(\omega_0 n) R_N(n)$

### 3-5 已知序列的离散傅里叶变换 $X(k)$ 如下,试求 $x(n)$ 。

$$(1) X(k) = \begin{cases} Ne^{j\theta}/2, & k=m \\ Ne^{-j\theta}/2, & k=N-m \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2) X(k) = \begin{cases} -Ne^{j\theta}/2, & k=m \\ Ne^{-j\theta}/2, & k=N-m \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中,  $k$  为  $0 \leq m \leq N/2$  的整数。



题图 3-2

3-6 已知序列  $x(n]$  为如题图 3-2 所示的长度为 4 的序列, 试画出下列序列的波形。

- (1)  $x((n-2))_5 R_5(n)$       (2)  $x((n))_5 R_5(n)$   
 (3)  $x((-n))_6 R_6(n)$       (4)  $x((3-n))_4 R_6(n)$

3-7 已知  $X(k)$  为序列  $x(n)$  的  $N$  点离散傅里叶变换, 试证明如下的初值定理

$$x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

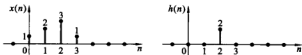
3-8 设  $x(n)$  的长度为  $N$ ,  $X(k)$  是  $x(n)$  的  $N$  点离散傅里叶变换, 令

$$y(n) = x((n))_N R_{rN}(n), \quad r \text{ 为整数}$$

试求  $y(n)$  的  $rN$  点离散傅里叶变换  $Y(k)$  与  $X(k)$  之间的关系。

3-9 试证明若长度为  $N$  的序列  $x(n)$  实偶对称, 即满足  $x(n) = x(N-n)$ , 则其  $N$  点的离散傅里叶变换  $X(k)$  也实偶对称, 即满足  $X(k) = X(N-k)$ ; 若  $x(n)$  实奇对称, 即满足  $x(n) = -x(N-n)$ , 则  $X(k)$  为纯虚数且奇对称。

3-10 已知长度为 4 的序列  $x(n)$  和  $h(n)$  如题图 3-3 所示, 试作图求它们的 4 点循环卷积  $y(n)$ 。



题图 3-3

3-11 已知定义在  $0 \leq n \leq 9$  范围内的有限长序列  $x(n)$  为

$$x(n) = \{3, -1, 0.5, 2, 1, 0, -0.5, -2, 1, 1.5\}$$

$X(k)$  为其 10 点离散傅里叶变换, 不直接计算  $X(k)$ , 试求:

(1)  $X(0)$

(2)  $X(6)$

(3)  $\sum_{k=0}^9 X(k)$

(4)  $\sum_{k=0}^9 X(k) W_{10}^{2k}$

(5)  $\sum_{k=0}^9 |X(k)|^2$

(6)  $\sum_{k=0}^9 X(k) e^{-j3\pi k/5}$

3-12 已知定义在  $0 \leq n \leq 8$  范围内的有限长序列  $x(n)$  为

$$x(n) = \{-1, 1, 1.5, -2, 1, 0, 0.5, 2, -1\}$$

$X(k)$  为其 9 点离散傅里叶变换, 试求:

(1)  $X(k)$  的实部  $\text{Re}[X(k)]$  的离散傅里叶逆变换;

(2)  $X(k)$  的虚部 (包括  $j$ )  $\text{Im}[X(k)]$  的离散傅里叶逆变换;

(3)  $\text{Im}[X(k)] + j\text{Re}[X(k)]$  的离散傅里叶逆变换。

3-13 已知长度为  $N$  的有限长因果序列  $x(n)$  的  $N$  点离散傅里叶变换为  $X(k)$ , 试计算

$$y(n) = \text{DFT}\{\text{DFT}\{\text{DFT}\{\text{DFT}[x(n)]\}\}\}$$

- 3-14 已知序列  $x(n) = a^n u(n)$ ,  $0 < a < 1$ , 现对  $x(n)$  的  $z$  变换在单位圆上作  $N$  等份采样, 采样值为  $X(k) = X(z)|_{z=e^{j2\pi k/N}}$ , 试求  $X(k)$  的  $N$  点离散傅里叶逆变换。
- 3-15 已知序列  $x(n) = R_{10}(n)$ ,  $X(k)$  是对  $X(e^{j\omega})$  进行 6 点的等间隔采样值, 起点为  $\omega=0$ , 试求  $X(k)$  的 6 点离散傅里叶逆变换。





## 快速傅里叶变换

本章重点内容: DIT-FFT 算法的原理和运算特点; DIF-FFT 算法的原理和运算特点; DFT 算法和基-2 FFT 算法运算量的比较; DIT-FFT 算法和 DIF-FFT 算法的关系; 快速傅里叶逆变换算法的实现;  $N$  为合数的快速傅里叶变换算法和线性调频  $z$  变换; 利用快速傅里叶变换进行谱分析; 利用快速傅里叶变换进行线性卷积的计算。

离散傅里叶变换在离散时间信号处理算法和系统的分析、设计及实现中起着十分重要的作用, 通过离散傅里叶变换, 能够在频域中分析信号和系统的特点, 实现在频域中信号的处理和系统的设计。离散傅里叶变换的各种有效算法使其成为离散时间系统诸多实际应用中十分重要的一部分。

离散傅里叶变换的快速算法可以追溯到图基(J. W. Tukey)和库利(T. W. Cooley)于 1965 年发表的《机器计算傅里叶级数的一种算法》, 之后迅速形成一套高效运算方法, 统称为快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)。快速傅里叶变换使离散傅里叶变换的运算效率显著提高, 为数字信号处理技术应用于各种信号的实时处理创造了良好的条件, 大大推动了数字信号处理技术的发展。

快速傅里叶变换的方法很多, 本章将主要讨论库利-图基的基-2 FFT 算法的基本思想和具体实现, 杜哈梅尔(P. Dohamel)和霍尔曼(H. Hollmann)提出的分裂基快速算法, 以及线性调频  $z$  变换, 在讨论快速傅里叶变换各种算法的基础上, 简单介绍快速傅里叶变换实际应用实例。

### 4.1 直接计算离散傅里叶变换的问题及改进的途径

一个长度为  $N$  的有限长序列  $x(n)$  的离散傅里叶变换为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4-1)$$

其中,  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 。

考虑  $x(n)$  为复数序列的一般情况。直接计算某一个  $X(k)$  值需要  $N$  次复数乘法和  $(N-1)$  次复数加法, 因此计算全体  $N$  个  $X(k)$ , 共需  $N^2$  次复数乘法及  $N(N-1)$  次复数加法运算。当  $N \gg 1$  时,  $N(N-1) \approx N^2$ 。  $N$  点离散傅里叶变换所需的乘法和加法运算次数均与  $N^2$  成正比。当  $N$  仅为 1 024 时,  $N^2$  就达到 1 048 576, 这对于信息量越来越大的实际信号处理而言, 运算量相当可观, 有时甚至是不能接受的。所以, 减少离散傅里叶变换的运算量, 提高信号处理的效率, 才能使离散傅里叶变换在各种科学和工程计算中得到应用。

如果信号  $x(n)$  的长度为  $N$ , 则离散傅里叶变换的运算量与  $N^2$  成正比。如果  $N$  点离散傅里叶变换分解为几个较短的离散傅里叶变换, 可使乘法次数大大减少。此外, 旋转因子  $W_N$  具有明显的周期性和对称性。

周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)} \quad (4-2)$$

对称性

$$(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk} = W_N^{N-nk} \quad (4-3)$$

由周期性和对称性, 有

$$\begin{aligned} W_N^{(k+N/2)} &= -W_N^k \\ W_N^{2kn} &= e^{-j2\pi \cdot 2kn/N} = e^{-j2\pi kn/(N/2)} = W_{N/2}^{kn} \end{aligned}$$

快速傅里叶变换算法就是不断地把长序列的离散傅里叶变换分解成几个短序列的离散傅里叶变换, 并利用旋转因子  $W_N$  的周期性和对称性来减少离散傅里叶变换的运算次数。

## 4.2 按时间抽取(DIT)的基-2 FFT 算法

在众多快速傅里叶变换算法中, 基-2 FFT 算法是应用较为广泛的一种快速算法, 分为时域抽取(Decimation In Time, DIT)快速傅里叶变换算法(DIT-FFT 算法)和按频域抽取(Decimation In Frequency, DIF)快速傅里叶变换算法(DIF-FFT 算法)。基-2 FFT 算法要求信号长度是 2 的整数幂, 当信号实际长度不满足此条件时, 对信号进行补零延长, 使信号长度满足这一条件。本节将介绍 DIT-FFT 算法。

### 4.2.1 算法原理

DIT-FFT 算法在时域将信号进行奇偶分解, 设信号  $x(n)$  的长度为  $N$ , 且满足  $N=2^M$ ,  $M$  为自然数, 按  $n$  的奇偶分解把  $x(n)$  分解为两个长为  $N/2$  点的子序列

$$x_1(r) = x(2r), \quad r=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$x_2(r) = x(2r+1), \quad r=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

则  $x(n)$  的离散傅里叶变换为

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{k(2r+1)} \\
 &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_N^{2kr} W_N^k
 \end{aligned}$$

由于

$$W_N^{2kr} = e^{-j2\pi \cdot 2kr/N} = e^{-j2\pi kr/(N/2)} = W_{N/2}^{kr}$$

故有

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{kr} \\
 &= X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-4)
 \end{aligned}$$

其中,  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$  分别为  $x_1(r)$  和  $x_2(r)$  的  $N/2$  点离散傅里叶变换。

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-5)$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-6)$$

由于  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$  周期为  $N/2$ , 且  $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ 。考虑到式(4-5)、式(4-6)中  $k = 0, 1, \dots, N/2-1$ , 而式(4-4)中  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $k$  的取值范围不同, 还应进一步考虑  $k$  从  $N/2$  到  $N-1$  的情况。

令式(4-4)中  $k = 0, 1, \dots, N/2-1$ , 则后半段可表示为  $k + N/2$ , 式(4-4)可以表示为

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4-7)$$

这样, 一个  $N$  点离散傅里叶变换可以根据式(4-7)由分解成两个  $N/2$  点的离散傅里叶变换计算得到, 式(4-7)称为蝶形运算, 可用图 4-1 所示的流图表示, 其中  $W_N^k$  称为旋转因子。

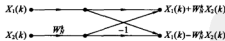
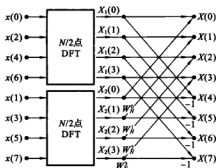


图 4-1 蝶形运算流图

图 4-2 显示了  $N=8$  时的离散傅里叶变换一次时域抽取蝶形运算流图。

经过一次时域抽取, 一个  $N$  点的离散傅里叶变换运算被分解成两个  $N/2$  点的离散傅里叶变换和  $N/2$  个蝶形运算。一个  $N/2$  点离散傅里叶变换需要  $(N/2)^2$  次复乘和  $(N/2)(N/2-1)$  次复加, 一个蝶形运算需要一个复乘和两个复加, 这样  $N$  点的离散傅里叶变换经过一次分解后的运算量为  $(N^2/2 + N/2)$  次复乘和  $N(N/2-1) + N = N^2/2$  次复加, 运算量减少了近一半。

由于  $N=2^M$ , 因而  $N/2$  仍然是偶数, 可以进一步将  $N/2$  点的离散傅里叶变换化为两个  $N/4$  点的离散傅里叶变换进行, 为此再一次将序列  $x_1(r)$  按时间顺序奇偶

图 4-2  $N$  点离散傅里叶变换的一次时域抽取蝶形运算流程图 ( $N=8$ )

分解为  $x_3(l)$  和  $x_4(l)$ 。

$$\begin{cases} x_3(l) = x_1(2l) \\ x_4(l) = x_1(2l+1) \end{cases}, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

那么  $X_1(k)$  可表示为

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l) W_{N/2}^{2kl} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l+1) W_{N/2}^{k(2l+1)} \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{kl} \\ &= X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} X_3(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{kl} \\ X_4(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{kl} \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

同理有

$$\begin{cases} X_1(k) = X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k) \\ X_1\left(k + \frac{N}{4}\right) = X_3(k) - W_{N/2}^k X_4(k) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (4-8)$$

对  $X_2(k)$  也可进行同样的分解

$$\begin{cases} X_2(k) = X_5(k) + W_{N/2}^k X_6(k) \\ X_2\left(k + \frac{N}{4}\right) = X_5(k) - W_{N/2}^k X_6(k) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (4-9)$$

其中

$$\begin{cases} X_5(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_5(l) W_{N/4}^{kl} \\ X_6(k) = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_6(l) W_{N/4}^{kl} \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

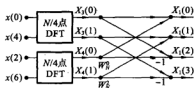


图 4-3  $N$  点离散傅里叶变换的二次  
时域抽取蝶形运算流程图 ( $N=8$ )

$$\begin{cases} x_2(l) = x_2(2l) \\ x_2(l) = x_2(2l+1) \end{cases}, \quad l=0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1$$

经过第二次分解,  $N/2$  点离散傅里叶变换分解为两个  $N/4$  点离散傅里叶变换和式(4-8)或式(4-9)的  $N/4$  个蝶形运算, 如图 4-3 所示。依次类推, 经过  $M-1$  次分解后将  $N$  点离散傅里叶变换分解成  $N/2$  个两点离散傅里叶变换, 图 4-4 给出了  $N=8$  时一个完整的基-2 DIT-FFT 算法运算流程图。

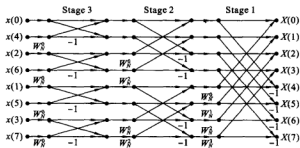


图 4-4  $N$  点基-2 DIT-FFT 算法运算流程图 ( $N=8$ )

## 4.2.2 运算量分析与比较

由 DIT-FFT 算法的分解过程和图 4-4 可见,  $N=2^M$  时, 离散傅里叶变换进行  $M$  级分解, 每级有  $N/4$  个蝶形运算。每个蝶形运算需一次复乘和两次复加, 这样  $M$  级总共需要的运算量的乘次数为  $(N/2) \cdot M = (N/2) \log_2 N$ , 复加次数为  $N \cdot M = N \log_2 N$ 。

与直接计算离散傅里叶变换的复乘次数  $N^2$  和复加次数  $N(N-1)$  相比, 当  $N$  足够大时, 运算量大大减少。例如, 若  $N=1024$ , 两种方法的运算量比较

$$\frac{N^2}{(N/2) \log_2 N} = \frac{1048576}{5120} \approx 205$$

效率提高了 200 多倍。图 4-5 给出了基-2 DIT-FFT 算法的运算量和直接计算离散傅里叶变换的运算量与计算点数  $N$  的关系曲线, 由此图可更直观的看出快速傅里叶变换算法的优越性。

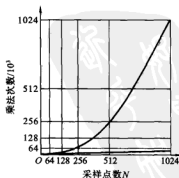


图 4-5 直接计算离散傅里叶变换与快速傅里叶变换算法运算量的比较

## 4.2.3 运算规律

## 1. 原位运算

DIT-FFT 算法由蝶形运算组成,蝶形运算的优点是可以进行原位运算或者同址运算。如图 4-4 所示,每一级蝶形运算仅需要用到本级的数据而不需要前一级的数据,这样就可把每一级蝶形运算的输入与输出在运算前后存储在同一存储单元中,即原位运算。原位运算可以节省存储单元、降低设备成本,这在快速傅里叶变换的硬件实现时尤为重要。

## 2. 倒序重排

DIT-FFT 算法需要一直将  $N$  点输入序列按照奇偶分成两组 2 点离散傅里叶变换,每一次分解都会将每组输入数据重新按照奇偶排列,这样做的最终结果将导致输入序列的存放要按照序号码位颠倒的顺序排放。

设原二进制码按从高位到低位排列,所谓码位倒置是指将原二进制数的码位倒过来从低位到高位排列,得到新的二进制数。码位倒置是由于对输入序列  $x(n)$  按序号的奇偶不断分组而造成的。以  $N=8, M=3$  为例,将  $n$  表示为三位二进制数  $(n_2 n_1 n_0)$ ,分组过程见图 4-6。第一次分组按最低位  $n_0$  为 0 和 1 将  $x(n)$  分为奇偶两组,  $n_0$  为 0 在上半部分,  $n_0$  为 1 在下半部分。第二次又按  $n_1$  为 0 和 1 分别对奇偶组分解,最后按  $n_2$  为 0 和 1 进行分组,这就导致了码位倒置的顺序。表 4-1 列出了  $N=8$  时用二进制数表示的顺序数及相应的倒码数。

表 4-1 顺序与倒序对照表

顺序	二进制数	倒码	倒码顺序
0	000	0	000
1	001	4	100
2	010	2	010
3	011	6	110
4	100	1	001
5	101	5	101
6	110	3	011
7	111	7	111

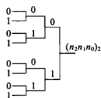


图 4-6 倒码的树状图

3. 旋转因子  $W_N$  的变化规律

$N$  点 DIT-FFT 算法运算流图中,每级都有  $N/2$  个蝶形,每个蝶形都要乘以旋转因子  $W_N$  的  $k$  次幂  $W_N^k$ ,但各级的旋转因子和循环方式都有所不同。用  $L$  表示从左到右的运算级数 ( $L=1, 2, \dots, M$ )。观察图 4-4 不难发现,第  $L$  级共有  $2^{L-1}$  个不同的旋转因子。 $N=2^3=8$  时的各级旋转因子分别为

$$L=1 \text{ 时, } W_N^k = W_{N/4}^k = W_{2^L}^k, \quad J=0$$

$$L=2 \text{ 时, } W_N^k = W_{N/2}^k = W_{2^L}^k, \quad J=0, 1$$

$$L=3 \text{ 时, } W_N^k = W_{N/4}^k = W_{2^L}^k, \quad J=0, 1, 2, 3$$

对于  $N=2^M$ , 第  $L$  级的旋转因子分别为

$$W_N^k = W_{2^L}^k, \quad J=0, 1, 2, \dots, 2^{L-1}-1$$

由于

$$2^L = 2^M 2^{L-M} = N 2^{L-M}$$

$$\text{所以 } W_N^k = W_{N \cdot 2^{L-M}}^k = W_N^{J \cdot 2^{L-1}}, \quad J=0, 1, 2, \dots, 2^{L-1}-1 \quad (4-10)$$

$$p = J \cdot 2^{M-L} \quad (4-11)$$

这样, 第  $L$  级运算的旋转因子可以由式(4-10)和式(4-11)确定。

### 4.3 按频率抽取的基-2 FFT 算法

DIT-FFT 算法是在时域对序列进行奇偶抽取、频域前后划分的一种快速算法, DIF-FFT 算法则是在频域对序列进行奇偶抽取、时域前后划分的一种快速算法。基-2 DIF-FFT 算法同样要求信号序列长度为 2 的整数次幂。

#### 4.3.1 算法原理

已知  $x(n)$  的离散傅里叶变换为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

按序列  $x(n)$  按照前后对半分解, 则  $X(k)$  的分解为两个长为  $N/2$  点子序列的离散傅里叶变换

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) W_N^{(n+N/2)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + W_N^{Nk/2} x(n+N/2)] W_N^{nk} \end{aligned} \quad (4-12)$$

由于

$$W_N^{kN/2} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ 为偶数} \\ -1, & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (4-13)$$

$$W_N^{2rK} = W_{N/2}^{rk}$$

当  $k$  取偶数时,

$$k = 2r, r=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+N/2)] W_{N/2}^{rn}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n+N/2)] W_{N/2}^n \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^n
 \end{aligned} \quad (4-14)$$

其中  $x_1(n) = x(n) + x(n+N/2)$ ,  $n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$

当  $k$  取奇数时,

$$\begin{aligned}
 k &= 2r+1, r=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\
 X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+N/2)] W_N^{(2r+1)n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n+N/2)] W_N^r W_{N/2}^n \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^n
 \end{aligned} \quad (4-15)$$

其中  $x_2(n) = [x(n) - x(n+N/2)] W_N^r$ ,  $n=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$

这样求  $N$  点离散傅里叶变换再次化成了求两个  $N/2$  点离散傅里叶变换。 $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的关系可由图 4-7 所示的蝶形运算流图符号表示。

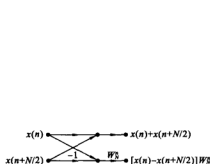


图 4-7 DIF-FFT 算法蝶形运算流图

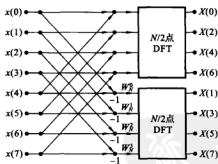
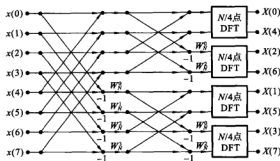


图 4-8 DIF-FFT 算法的一次频域分解运算流图 ( $N=8$ )

图 4-8 给出了  $N=8$  时的一次分解运算流图。由于  $N/2$  仍然为 2 的整数幂, 继续将长度为  $N/2$  的序列分解成前半段和后半段,  $N/2$  点离散傅里叶变换被分解成偶数部分和奇数部分, 如图 4-9 所示。这样继续分解下去, 经过  $M-1$  次分解, 最后分解为  $N/2$  个两点离散傅里叶变换, 这  $N/2$  个两点离散傅里叶变换的输出就是序列  $x(n)$  的  $N$  点离散傅里叶变换  $X(k)$ 。图 4-10 给出了  $N=8$  时完整的 DIF-FFT 算法的运算流图。

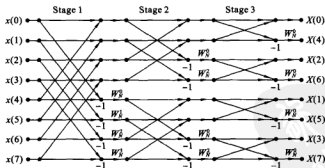


图 4-9 DIF-FFT 算法的二次频域分解运算流程图 ( $N=8$ )

### 4.3.2 运算量分析与比较

这种方法的每一次输出,都是按  $X(k)$  在频域进行奇偶分解的,因此称为基数为 2 的频域抽取快速傅里叶变换算法。比较图 4-4 与图 4-10 可见,DIF-FFT 算法与 DIT-FFT 算法类似,共有  $M$  级运算,每级有  $N/2$  个蝶形运算,也可按原位进行计算,所以两种方法的运算次数与存储量相同。

二者不同的是 DIF-FFT 算法输入序列为自然序列,而输出为码位倒置序列。因此,为了获得自然顺序的输出,在  $M$  级蝶形运算完成后还必须进行倒码排序。此外两种方法的蝶形运算过程亦不相同,DIF-FFT 算法是先相乘后加减,而 DIT-FFT 算法为先加减后相乘。

图 4-10 DIF-FFT 算法的频域完整分解流程图 ( $N=8$ )

## 4.4 快速傅里叶逆变换(IFFT)算法

一个长度为  $N$  的有限长序列  $x(n)$  的离散傅里叶变换为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-16)$$

其中,  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 。其对应的离散傅里叶逆变换为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-17)$$

比较式(4-16)与式(4-17),二者仅存在一个比例因子  $1/N$  和旋转因子  $W_N$  的指数互为相反数这两个差异,将离散傅里叶变换中的旋转因子  $W_N^n$  改为  $W_N^{-n}$ ,最后乘以  $1/N$ ,就是离散傅里叶逆变换的计算公式。因此,将离散傅里叶变换流图中各级的旋转因子  $W_N^n$  改为  $W_N^{-n}$  输出,再乘以  $1/N$  就可用来计算离散傅里叶逆变换,此时流图的输入是  $X(k)$ ,输出为  $x(n)$ ,快速傅里叶变换流图变成快速离散傅里叶逆变换 IFFT 流图。在快速傅里叶逆变换运算中,将  $1/N$  分解为  $(1/2)^M$ ,分散到每一级蝶形运算中。图 4-11 给出了  $N=8$  时 DIT-IFFT 算法的运算流图。

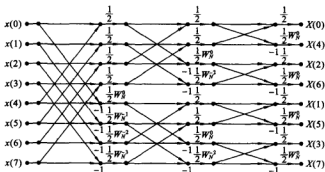


图 4-11  $N=8$  时 DIT-IFFT 算法的蝶形运算流图

上述快速傅里叶逆变换算法实现起来比较方便,但仍需编写新的程序才行进行运算。利用离散傅里叶变换的性质,可以直接利用快速傅里叶变换程序计算快速傅里叶逆变换。由于

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

所以

$$x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk}$$

两边取共轭,于是有

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right]^* \\ &= \frac{1}{N} [\text{DFT}(X^*(k))]^* \end{aligned} \quad (4-18)$$

因此求解快速傅里叶逆变换时,先对  $X(k)$  取共轭,然后输入快速傅里叶变换程序计算,再将计算结果取共轭并乘上  $1/N$  就得到了  $x(n)$ ,这种方法只需要一个快速傅里叶变换程序就可进行正反变换的快速计算。

此外,利用旋转因子的周期性

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{(N-n)k} = \frac{1}{N} \text{DFT}[x_1(N-n)]$$

利用该式,对  $X(k)$  直接进行快速傅里叶变换,然后将结果顺序倒排,再乘以常数  $1/N$ ,也能够完成离散傅里叶逆变换的计算。

## 4.5 $N$ 为合数的快速傅里叶变换算法

时域抽取和频域抽取的基-2 FFT 算法,具有程序简单、计算效率高、对存储量要求不很高等优点,因而在实际中得到了最广泛的应用。算法要求变换长度  $N$  等于 2 的整数次幂,如果  $N$  不满足这一条件,通常有以下两种处理办法。

(1) 用补零的办法将  $x(n)$  延长为  $2^M$ , 即  $M = [\log_2 N] + 1, N = 2^M$ 。例如,  $N = 480$  时,  $M = [\log_2 480] + 1 = 9, N = 2^M = 512$ ,可在序列  $x(n)$  的末尾填补 32 使序列长度变成  $512 = 2^9$ 。

(2) 采用以任意数为基数的快速傅里叶变换算法。

虽然尾部补零点并不影响序列的傅里叶变换,只是增加了频域采样点并改变了频域采样点的位置,保持频谱  $X(k)$  的形状不发生改变。但如果补零太多,则会降低快速傅里叶变换的效率,同时也很难计算指定频率点上的离散傅里叶变换值。这时可以应用任意基数的快速傅里叶变换来计算。

### 4.5.1 算法原理

如果  $N$  是复合数,即  $N = p_1 p_2 p_3 \cdots p_v$ , 共  $v$  个因子。令

$$N = p_1 q_1 \quad (4-19)$$

其中

$$q_1 = p_2 p_3 \cdots p_v \quad (4-20)$$

在时间域将序列  $x(n)$  每隔  $p_1$  点抽取一点,这样就形成了  $p_1$  个长度为  $q_1$  点的序列

$$\begin{cases} x(p_1 r) \\ x(p_1 r + 1) \\ \vdots \\ x(p_1 r + p_1 - 1) \end{cases} \quad r = 0, 1, \cdots, (q_1 - 1), \text{共 } p_1 \text{ 组}$$

记  $x_l(r) = x(p_1 r + l), \quad r = 0, 1, \cdots, (q_1 - 1), \quad l = 0, 1, \cdots, (p_1 - 1) \quad (4-21)$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{l=0}^{p_1-1} \sum_{r=0}^{q_1-1} x(p_1 r + l) W_N^{(p_1 r + l)k} \\ &= \sum_{l=0}^{p_1-1} W_N^{lk} \sum_{r=0}^{q_1-1} x(p_1 r + l) W_N^{r p_1 k} \\ &= \sum_{l=0}^{p_1-1} G_l(k) W_N^{lk}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1, l = 0, 1, \cdots, p_1 - 1 \quad (4-22) \end{aligned}$$

利用  $W_N^{p_1 k} = W_{N/p_1}^k = W_{q_1}^k$ , 上式中的  $G_l(k)$  为

$$G_l(k) = \sum_{r=0}^{q_1-1} x(p_1 r + l) W_N^{p_1 k} = \sum_{r=0}^{q_1-1} x_l(r) W_{q_1}^k, \quad k = 0, 1, \dots, q_1 - 1 \quad (4-23)$$

是长为  $q_1$  点的离散傅里叶变换。可见以上过程将一个长为  $N$  点的离散傅里叶变换化为  $p_1$  个长为  $q_1$  点的离散傅里叶变换, 因而可减少运算量。

由于  $q_1 = p_2 p_3 \cdots p_v$ , 可继续令  $q_1 = p_2 q_2$ ,  $q_2 = p_3 \cdots p_v$ , 则将长为  $q_1$  点的离散傅里叶变换 ( $G_l(k)$ ) 化为  $p_2$  个长为  $q_2$  点的离散傅里叶变换, 这样一直进行下去, 直到最后变为  $p_v$  点的离散傅里叶变换为止, 大大地减少了运算量。由于在这种算法中采用了不同的长度来进行抽取, 故这种算法有时也称为混合基 FFT 算法。

例如,  $N = 3 \times 6 = 18$ ,  $p_1 = 3$ ,  $q_1 = 6$ , 将  $x(n)$  分为 3 组, 每组长度为 6, 则

$$p = \begin{cases} x(0) & x(3) & x(6) & x(9) & x(12) & x(15) \\ x(1) & x(4) & x(7) & x(10) & x(13) & x(16) \\ x(2) & x(5) & x(8) & x(11) & x(14) & x(17) \end{cases}$$

图 4-12 给出了  $N = 6 \times 3 = 18$  时混合基一次分解为 3 个 6 点离散傅里叶变换流程图。

经过一次分解后的 3 个 6 点离散傅里叶变换每个又分别可分解为 3 个 2 点的离散傅里叶变换, 如图 4-13 所示。

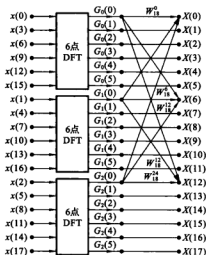


图 4-12  $N = 6 \times 3 = 18$  时一次分解为 3 个 6 点离散傅里叶变换流程图

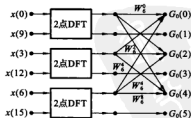


图 4-13  $N = 6 = 3 \times 2$  的离散傅里叶变换流程图

#### 4.5.2 运算量分析

复数乘法的运算量大于复数加法的运算量, 所以需分析乘法的运算量的减少情

况。分析式(4-22),包含  $p_1$  个长为  $q_1$  点的离散傅里叶变换和  $p_1$  个离散傅里叶变换与旋转因子相乘  $W_N^a$ ,分别需要复数乘法次数为  $p_1 q_1^2$  和  $N(p_1 - 1)$ 。这样一次抽取后计算式(4-22)的复乘次数为

$$N(p_1 - 1) + p_1 q_1^2 \quad (4-24)$$

同理,当  $q_1$  点的离散傅里叶变换化为  $p_2$  个  $q_2$  点的离散傅里叶变换计算时所需要的复乘次数为

$$q_1(p_2 - 1) + p_2 q_2^2 \quad (4-25)$$

则二次抽取后总乘法运算量就变成

$$N(p_1 - 1) + p_1[q_1(p_2 - 1) + p_2 q_2^2] = N(p_1 - 1) + N(p_2 - 1) + p_1 p_2 q_2^2 \quad (4-26)$$

依此类推,分解到最后的因子  $p_v$  时,总的复乘次数为

$$N(p_1 - 1) + N(p_2 - 1) + \cdots + N(p_v - 1) = N(p_1 + p_2 + \cdots + p_v - v) \quad (4-27)$$

显然比直接计算长度为  $N$  的离散傅里叶变换的运算量  $N^2$  要少得多。

当  $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_v = 2$  时,式(4-27)化为

$$N(2v - v) = Nv = N \log_2 N$$

成为基-2 FFT 算法的运算量,因此基-2 FFT 算法是混合基算法在各个因子都等于 2 时的特例。

## 4.6 线性调频 $z$ 变换算法

对窄带信号进行频谱分析时,为了提高频率分辨率,希望在某一窄频带内频率的采样点能够足够密集,带外则不需要考虑,此时只需要计算单位圆上某一段的频谱值。语音信号处理中,常常需要知道其  $z$  变换的极点所在处的复频率,如果极点位置离单位圆较远,只利用单位圆上的频谱,就很难知道极点所在处的复频率,此时就需要采样点在接近这些极点的曲线上。实际应用中存在的这些待分析的频率采样点并不均匀地分布在单位圆上,只分析单位圆的某一部分的频率特征,或者采样点不在单位圆上等一些不是分析单位圆上等间隔频率采样点处的频谱时,可以用线性调频  $z$  变换(也称 Chirp- $z$  变换)来解决。这种  $z$  变换是沿螺旋线上采样点计算的  $z$  变换,是一种适用于更为一般情况下由  $x(n)$  求  $X(z_k)$  的快速变换算法。

### 4.6.1 算法基本原理

一个长度为  $N$  的有限长序列  $x(n)$ ,其  $z$  变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (4-28)$$

为了使  $z$  沿  $z$  平面更一般的路径上采样,现沿  $z$  平面上的一段螺旋线对  $z$  作  $M$  点等分角的采样,这些采样点  $z_k$  为

$$z_k = A W^{-k}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4-29)$$

其中,  $A$  和  $W$  为复数, 用极坐标形式表示分别为

$$A = A_0 e^{j\theta_0}, \quad W = W_0 e^{-j\varphi_0} \quad (4-30)$$

其中,  $A_0$  和  $W_0$  为实数。将式(4-30)代入式(4-29), 有

$$z_k = A_0 e^{j\theta_0} W_0^{-k} e^{jk\varphi_0} = A_0 W_0^{-k} e^{j(k\varphi_0 + \theta_0)} \quad (4-31)$$

采样点  $z_k$  所在的路径如图 4-14 所示。图中,  $A_0$  表示起始采样点即  $z_0$  的矢量长度, 通常  $A_0 \leq 1$ , 否则  $z_k$  将处于单位圆外;  $\theta_0$  表示起始采样点  $z_0$  的矢量的相角, 正负均可;  $\varphi_0$  表示两相邻采样点矢量之间的角度差,  $\varphi_0$  为正, 表示  $z_k$  沿逆时针方向旋转;  $W_0$  表示螺旋线的伸展率。当  $W_0 > 1$ , 随着  $k$  的增加螺旋线向内盘旋;  $W_0 < 1$  时, 随着  $k$  的增加螺旋线向外盘旋;  $W_0 = 1$  时, 对应于半径为  $A_0$  的一段弧线,  $A_0 = 1$  是弧线为单位圆的一部分。

在  $M=N$ ,  $A=A_0 e^{j\theta_0}$ ,  $W=W_0 e^{-j\varphi_0} = e^{-j2\pi/N}$  时, 各  $z_k$  等间隔均匀分布在单位圆上, 对应于序列的离散傅里叶变换。

将式(4-31)代入式(4-28), 有

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [AW^{-k}]^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{kn}, \quad 0 \leq k \leq M-1$$

利用  $nk = \frac{1}{2} [n^2 + k^2 - (k-n)^2]$ , 得到

$$\begin{aligned} X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) A^{-n} W^{[n^2 + k^2 - (k-n)^2]/2} \\ &= W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) A^{-n} W^{n^2/2}] W^{-(k-n)^2/2}, \quad 0 \leq k \leq M-1 \end{aligned}$$

令  $y(n) = x(n) A^{-n} W^{n^2/2}$ ,  $h(n) = W^{-n^2/2}$

$$\text{则} \quad X(z_k) = W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) h(k-n), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (4-32)$$

式(4-32)说明,  $X(z_k)$  可通过计算  $y(n)$  与  $h(n)$  的卷积, 再乘以  $W^{-k^2/2}$  得到。计算流程图如图 4-15 所示。

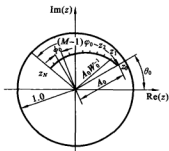


图 4-14 线性调频  $z$  变换的螺旋线频率采样点



图 4-15 线性调频  $z$  变换的计算流程图

序列  $h(n) = W^{-n^2/2}$  是频率随时间线性增加的复指数序列,在雷达系统中这种信号称为线性调频信号,上述变换称为线性调频  $z$  变换,简称为 CZT。下面介绍用离散傅里叶变换(快速傅里叶变换)计算线性调频  $z$  变换的步骤。

#### 4.6.2 线性调频 $z$ 变换的实现步骤

$X(z_k)$  主要是计算  $y(n)$  与  $h(n)$  的卷积,首先考虑进行卷积的两个序列的长度以及应取的范围。序列  $x(n)$  的长度为  $N$  (即  $0 \leq n \leq N-1$ ), 所以  $y(n)$  的长度也是  $N$ , 如图 4-16 所示。序列  $h(n) = W^{-n^2/2}$  是无限长序列,但  $X(z_k)$  只有  $k \in [0, M-1]$  共  $M$  点,因此只需要  $h(n)$  中有限个点值。

令  $g(n) = y(n) * h(n)$ ,  $M$  点  $X(z_k)$  值对应于  $M$  点  $g(n)$ , 有

$$g(0) = \sum_{m=0}^{N-1} y(m)h(0-m)$$

$$g(M-1) = \sum_{m=0}^{N-1} y(m)h(M-1-m)$$

当  $m$  由 0 变到  $N-1$  时,  $h(-m)$  中  $m$  取最小值  $-(N-1)$ ,  $h(M-1-m)$  中  $m$  取最大的值  $(M-1)$ , 所需要的  $h(n)$  取值区间为  $[-(N-1), (M-1)]$ , 长度  $N+M-1$ , 如图 4-16(b) 所示。线性卷积  $g(n)$  的长度为  $2N+M-2$ ,  $g(n)$  的非零区间为  $[-(N-1), (N+M-2)]$ 。

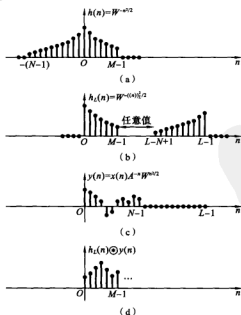


图 4-16 计算线性调频  $z$  变换所用的序列

若要用循环卷积计算线性卷积  $g(n)$ , 则需使循环卷积的长度  $L$  大于或等于线性卷积的长度, 故在用快速傅里叶变换算法进行快速卷积计算时, 应选择  $L=2N+M-2$ 。但由于只需要计算  $[0, M-1]$  点的  $g(n)$ , 在区间  $[0, M-1]$  之外的值是否发生不影响  $X(z_k)$  的求取。因此,  $L$  的长度可以减小到不小于  $N+M-1$ , 基-2 FFT 算法计算卷积时, 应选择  $L \geq N+M-1$ , 且满足  $L=2^m$  ( $m$  为自然数) 的最小值。

若选择  $L=N+M-1$ ,  $y(n)$  尾部应补零  $M-1$  个, 并将  $h(n)$  在  $[-(N-1), (M-1)]$  上的一段序列以  $L$  为周期进行周期延拓, 再取主值序列形成  $h_L(n)$ , 如图 4-16 (c) 所示。用快速卷积法计算如序列  $y(n)$  和  $h_L(n)$  的循环卷积。应当注意, 当选择  $L=2^m > N+M-1$  时,  $y(n)$  应补  $L-N$  个零点, 而  $h(n)$  应从  $[(M-L), (M-1)]$  区间上截取 (或按上述区间  $[-(N+1), (M-1)]$  截取后在  $-N+1$  点前面补  $L-(N+M-1)$  个零点) 后, 以  $L$  为周期进行周期延拓。

与标准 DFT(FFT) 算法相比较, 线性调频  $z$  变换有以下特点。

- (1) 输入序列长度  $N$  和输出序列长度不需要相等, 且均可为素数。
- (2) 频率点  $z_k$  的起始点  $z_0$  及相邻两点的夹角  $\varphi_0$  是任意的, 因此可从任意频率点开始对输入数据进行窄带高分辨率的谱分析。
- (3) 谱分析路径可以是螺旋形的。
- (4) 当  $A=1, M=N, W=e^{j2\pi/N}$  时,  $z_k$  均匀分布在单位圆上。此时线性调频  $z$  变换就是序列的离散傅里叶变换。可见离散傅里叶变换是线性调频  $z$  变换的特例。

因此, 可以说线性调频  $z$  变换是一种更灵活的谱分析工具, 它具有适应性强和运算效率高等优点。

## 4.7 FFT 的应用

离散傅里叶变换的快速算法——快速傅里叶变换的出现, 使离散傅里叶变换在数字通信、语音信号处理、图像处理、系统分析、雷达理论、光学、医学、地震及数值分析等各个领域都得到广泛应用。在众多的应用中最基础的仍然是卷积和相关运算, 以及用离散傅里叶变换对连续信号和序列进行谱分析等最基本的应用, 本节将介绍用快速傅里叶变换计算卷积的基本原理以及用离散傅里叶变换对连续信号和序列进行谱分析等最基本的应用。

### 4.7.1 频谱分析

信号的频谱分析就是对信号的傅里叶变换进行分析。连续信号与系统的频谱函数也是连续函数, 不便直接用计算机进行计算, 快速傅里叶变换是一种时域和频域均离散化的变换, 适合数值运算, 成为分析离散信号和系统的有力工具。对连续信号和系统, 可以通过时域采样, 应用离散傅里叶变换进行近似谱分析。下面分别介绍用快速傅里叶变换对连续信号和离散信号 (序列) 进行谱分析的基本原理和方



法,以及需要注意的事项。

### 1. 利用快速傅里叶变换对连续信号进行谱分析

连续时间信号  $x(t)$  的频谱函数  $X(jf)$  也是连续函数,为了利用快速傅里叶变换对从  $x(t)$  进行频谱分析,首先对  $x(t)$  进行时域采样获得  $x(n) = x(nT)$ ,再对  $x(n)$  进行快速傅里叶变换,得到的  $X(k)$  则是  $x(n)$  的傅里叶变换  $X(jf)$  在频率区间  $[0, 2\pi]$  上的  $N$  点等间隔采样。这里  $x(n)$  和  $X(k)$  均为有限长序列。然而有限持续时间信号的频谱是无限宽的,有限频谱信号的持续时间是无限长的,持续时间有限的带限信号是不存在的。因此,根据采样定理采样时,上述两种情况下的采样序列  $x(n)$  和  $X(k)$  均应为无限长,不满足快速傅里叶变换的变换条件。实际处理上,为防止时域采样后产生频谱混叠,宽频信号在处理前要经过抗混叠滤波器,压制幅度较小的高频成分,使连续信号的频宽小于折叠频率。同样地,持续时间很长的信号不便存储和计算,只能提取有限点进行快速傅里叶变换。

通过上述分析可见,快速傅里叶变换对连续信号的谱分析必然是近似的,其近似程度与信号带宽、采样频率相截取长度有关。从工程应用角度而言,滤除幅度很小的高频成分和截去幅度很小的部分时间信号是允许的。因此,实际中常假设  $x(t)$  是经过预滤波和截取处理的有限长带限信号。

设连续信号  $x(t)$  的持续时间为  $T_p$ ,最高频率为  $f_c$ 。对  $x(t)$  以采样频率  $f_s \geq 2f_c$  采样得到信号  $x(n)$ ,长度为  $N$ 。 $x(t)$  的傅里叶变换  $X(jf)$  仍是频率  $f$  的连续周期函数,对  $X(jf)$  在区间  $[0, f_s]$  上等间隔采样  $N$  点,记为  $X(k)$ ,根据连续时间信号与其采样信号的频谱特征,有

$$X(k) = T \cdot \text{DFT}[x(n)] \quad (4-33)$$

因此连续信号的频谱特性可以通过对连续信号采样并进行离散傅里叶变换再乘以  $T$  的近似方法得到。对持续时间有限的带限信号,在满足时域采样定理时,上述分析方法不会丢失频率特性的信息,但分析结果  $X(k)$  看不到  $X(jf)$  的全部频谱特性,而只能看到  $N$  个离散采样点的频谱特性,这就是所谓的栅栏效应。持续时间无限长信号在分析中要进行截断处理,会产生频率混叠和泄漏现象,使谱分析产生误差。为减少这种截断误差,可适当加长  $T_p$ ,增加采样点数  $N$  或用窗函数处理后再进行离散傅里叶变换。

对连续信号进行谱分析时,要关注的主要问题是谱分析范围和频率分辨率。谱分析范围受采样频率  $f_s$  的限制,根据奈奎斯特采样定理,要求信号的最高频率  $f_c < f_s/2$ 。频率分辨率用频率采样间隔  $F$  描述,表示分析中能够分辨的两个频谱分量的最小间隔。 $F$  越小,谱分析就越接近  $X(jf)$ ,频率分辨率较高。下面讨论用快速傅里叶变换对连续信号谱分析的参数选择原则。

对连续时间信号进行谱分析时,采样频率  $f_s$ 、信号持续时间  $T_p$ 、采样点数  $N$  和频率分辨率  $F$  满足如下关系式

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p} \quad (4-34)$$

根据奈奎斯特采样定理有  $f_s > 2f_c$ ,  $F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$ , 为保证不减小频率分析范围, 同时具备较高的频率分辨率, 就要增加采样点数  $N$ , 即增加信号的持续时间  $T_p$ 。采样点数  $N$  和信号持续时间  $T_p$  分别为

$$N > \frac{2f_c}{F}, \quad T_p \geq \frac{1}{F} \quad (4-35)$$

**例 4-1** 用快速傅里叶变换对信号进行频谱分析, 已知信号的最高频率为  $f_c = 1.25$  kHz, 要求频率分辨率为  $F \leq 10$  Hz, 试确定:

- (1) 采样间隔  $T$ ;
- (2) 采用基-2 FFT 算法的最小样点数  $N$ , 以及与此相对应的最小记录长度;
- (3) 按确定的参数所获得的实际分辨率。
- (4) 若保持  $f_c$  不变, 要求谱分辨率增加 1 倍, 用快速傅里叶变换求解频谱的最少采样点数和最少记录时间是多少?

**解** (1) 按采样定理, 采样间隔  $T$  为

$$T \leq \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2.5 \times 10^3} \text{ s} = 0.4 \text{ ms}$$

(2) 最小样点数  $N$  为

$$N_{\min} \geq \frac{2f_c}{F} = \frac{1/T}{10} = 250$$

当采用基-2 FFT 算法时, 要求

$$N = 2^{\lceil \log_2 250 \rceil + 1} = 256$$

与此相对应的最少记录时间为

$$T_p = 256 \times 0.4 \text{ ms} = 1.024 \text{ s}$$

(3) 按确定的参数所获得的实际分辨率

$$F = \frac{f_s}{256} = 9.76 \text{ Hz}$$

(4) 在保持  $f_c$  不变条件下, 为使谱分辨率增加 1 倍, 要使信号持续时间增加 1 倍, 即

$$N_1 = 2N = 512$$

$$T_{p1} = 512 \times 0.4 \text{ ms} = 2.048 \text{ s}$$

## 2. 利用快速傅里叶变换对序列进行谱分析

序列的傅里叶变换进行  $N$  等分采样就是序列的离散傅里叶变换, 因此可以用快速傅里叶变换来进行序列的谱分析。

对周期为  $N$  的周期序列  $\tilde{x}(n)$ , 其频谱  $\tilde{X}(k)$  也以  $N$  为周期。根据离散傅里叶变换隐含的周期性, 截取  $x(n)$  的主值序列  $x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$ , 并进行  $N$  点离散傅

里叶变换,得到

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}[\tilde{x}(n)R_N(n)] = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (4-36)$$

可以用  $X(k)$  表示  $\tilde{x}(n)$  的频谱结构。

如果  $\tilde{x}(n)$  的周期预先不知道,则可先截取  $M$  点进行离散傅里叶变换,再将截取长度扩大 1 倍截取  $2M$  点,比较两种截取长度,如果二者的主谱差别满足分析误差,则取其中任一个表示  $\tilde{x}(n)$  的频谱。否则,继续将截取长度加倍,直至前后两次分析所得主谱频率差别满足误差要求为止。

## 4.7.2 用快速傅里叶变换计算线性卷积

### 1. 利用循环卷积计算线性卷积的条件

设两个相同长度的有限长序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$ , 如果  $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ , 且  $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$ ,  $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$ ,  $Y(k) = \text{DFT}[y_2(n)]$ , 则有

$$Y(k) = \text{DFT}[y_2(n)] = X_1(k)X_2(k)$$

因此,循环卷积既可在时域直接计算,也可以在频域计算。当  $N$  很大时,利用快速傅里叶变换在频域计算的速度快得多。

线性时不变系统的输出是系统输入与系统单位冲击响应的线性卷积,而在大量的实际信号处理中,通常会假设系统是线性时不变的,因此许多实际问题都会涉及线性卷积的计算。如果能够将线性卷积转化成循环卷积,就能够用快速傅里叶变换快速计算。

设  $x(n)$  和  $h(n)$  均为有限长序列,长度分别为  $M$  和  $N$ , 其线性卷积  $y(n)$  和循环卷积  $y_c(n)$  分别为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m), \quad 0 \leq n \leq N+M-2 \quad (4-37)$$

$$y_c(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n) \quad (4-38)$$

其中,  $L \geq \max[N, M], x((n))_L = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rL)$

所以

$$\begin{aligned} y_c(n) &= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rL-m) R_L(n) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n+rL-m) R_L(n) \end{aligned}$$

由于  $h(n)$  仅在  $0 \leq n \leq N-1$  范围内取非零值,故有

$$\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n+rL-m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n+rL-m) = y(n+rL)$$

因此可化为

$$y_c(n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y(n+pL)R_L(n) \quad (4-39)$$

式(4-39)说明  $y_c(n)$  是将  $y(n)$  以  $L$  为周期进行周期延拓后再取主值区间所得的序列。由于  $y(n)$  的长度为  $N+M-1$ , 因此只有当循环卷积的长度  $L \geq N+M-1$  时,  $y(n)$  以  $L$  为周期的周期延拓才不会出现混叠现象。此时取主值序列, 应有  $y(n) = y_c(n)$ ,  $0 \leq n \leq N_1$ , 若  $L < N_1$ , 则  $y(n)$  以  $L$  为周期进行周期延拓必产生混叠现象,  $y(n)$  将不等于  $y_c(n)$ 。由此证明了利用循环卷积计算线性卷积的条件为  $L \geq M+N-1$ 。

图 4-17 显示了利用快速傅里叶变换进行线性卷积的流程图, 具体步骤如下:

(1) 将序列  $x(n)$  和  $h(n)$  补零延长, 使其长度  $L \geq N_1 = N+M-1$ , 若采用基-2 FFT, 还应使  $L$  为不小于  $N_1$  的 2 的最小整数次幂;

(2) 作  $x(n)$  和  $h(n)$  的长为  $L$  点的快速傅里叶变换得到  $X(k)$  和  $H(k)$ , 并求它们的积  $Y(k) = X(k)H(k)$ ;

(3) 求  $Y(k)$  的快速傅里叶逆变换并取前  $N_1$  点, 获得线性卷积的结果  $y(n) = \text{IFFT}[Y(k)]$ ,  $0 \leq n \leq N_1$ 。

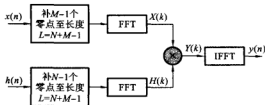


图 4-17 快速傅里叶变换计算线性卷积的流程图

当两个序列的长度相差不大时, 用循环卷积计算线性卷积比直接计算线性卷积的速度要快很多。而某些场合中, 参与线性卷积计算的两个序列的长度相差很大, 用上述快速卷积法直接计算线性卷积, 除要求对短序列补充很多零点以外, 还必须将长序列全部输入后才能进行快速计算, 这会使存储容量大, 运算时间长, 并且处理延时很大, 很难实时处理。而且某些应用场合中序列长度不定或者认为是无限长, 采集的地震信号时, 要实现这类信号的实时处理, 直接套用上述方法是不可行的。解决这个问题的方法是将长序列分段计算, 这种分段处理法有重叠相加法和重叠保留法两种。

## 2. 重叠相加法

设  $h(n)$  的长度为  $N$ ,  $x(n)$  的长度为无限长, 取段长  $M$  尽量与  $N$  接近, 则

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(n)$$

其中,  $x_k(n) = x(n)R_M(n-kM)$ 。

这样  $x(n)$  和  $h(n)$  的卷积可表示为

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n) * h(n) = h(n) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(n) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [x_k(n) * h(n)] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(n)
 \end{aligned} \quad (4-40)$$

其中

$$y_k(n) = x_k(n) * h(n) \quad (4-41)$$

$y_k(n)$  是长度分别为  $M$  和  $N$  的两个序列的线性卷积, 对式(4-41)可利用前述的基-2 FFT 算法进行计算, 快速傅里叶变换的长度为  $L=M+N-1$ 。分别计算出各段的卷积后, 再按式(4-40)将结果相加, 就得到了最后的结果。由于  $y_k(n)$  的长度为  $L=M+N-1$ , 而  $x_k(n)$  长度为  $M$ , 因此相邻两段  $y_k(n)$  必然有  $N-1$  点的重叠, 将重叠部分叠加起来, 就成为最后的输出序列, 这就是“重叠相加法”名称的由来, 实际相加时只需将这些重叠的部分相加即可, 其过程如图 4-18 所示。

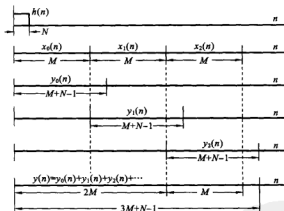


图 4-18 重叠相加法计算过程

将以上的推导进行归纳, 得到重叠相加法的步骤如下:

- (1) 将  $h(n)$  补零延长到  $L=M+N-1$ , 并计算长为  $L$  的快速傅里叶变换, 得到  $H(k)$ ;
- (2) 分别将  $x_k(n)$  补零延长到  $L=M+N-1$ , 并计算长为  $L$  的快速傅里叶变换, 得到  $X_k(k)$ ;
- (3) 计算  $Y_k(k) = X_k(k) H(k)$ , 并求  $Y_k(k)$  长为  $L$  的反变换,  $y_k(n) = \text{IFFT}[Y_k(k)]$ ;
- (4) 将  $y_k(n)$  的重叠部分相加, 最后得到结果,  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(n)$ 。

### 3. 重叠保留法

设序列  $h(n)$  长度为  $N$ ，现在将序列  $x(n)$  分段，每段长为  $M$ ，然后各段向前多取  $N-1$  个样点，并在信号前面补  $N-1$  个零，这样每一段  $x_k(n)$  的长度为  $L=M+N-1$ ，分段情况如图 4-19 所示。

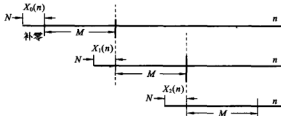


图 4-19 重叠保留法信号的分段方法

对每一段  $x_k(n)$  与  $h(n)$  进行循环卷积  $y'_k(n)$

$$y'_k(n) = x_k(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{L-1} [x_k(m)h((n-m))_L]R_L(n) \quad (4-42)$$

$y'_k(n)$  长度为  $M+N-1$ 。而线性卷积  $y_k(n) = x_k(n) * h(n)$  的长度为  $L=M+2N-2$ ，大于循环卷积的长度，必然产生混叠，即当  $0 \leq n \leq N-2$  时  $y'_k(n)$  的值混有  $h((n-m))_L R_L(m)$  与  $x_k(m)$  尾部的卷积值，在  $N-1 \leq n \leq L-1$  范围内  $h((n-m))_L R_L(m) = h(n-m)$ ，此时  $y'_k(n)$  与  $y_k(n)$  相等，将这部分  $y'_k(n)$  保留下来（如图 4-20 所示），最后衔接起来最后就构成了正确的  $y_k(n)$ ，这也是重叠保留法名称的由来，即输入的每段序列重叠了  $N-1$  点，但每段的循环卷积的输出只保留了  $M$  点。

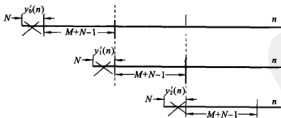


图 4-20 重叠保留法各段保留的结果

本章小结

离散傅里叶变换作为信号处理和分析的基础工具，需要具备高效运算的性能。而直接计算离散傅里叶变换的计算量会随着待处理信号长度  $N$  的增加而急剧增加，不利于数字信号的实时处理要求。快速傅里叶变换则解决了运算量的问题，保证了信号处理的实时性。

基-2 DIT-FFT 算法和基-2 DIF-FFT 算法是两种最基本的快速傅里叶算法,要求信号长度为 2 的整数次幂。基-2 DIT-FFT 算法在时域将信号进行奇偶分解,将信号最终分解成 2 点傅里叶变换,通过 DIT-FFT 算法的蝶形运算完成傅里叶变换的计算。基-2 DIF-FFT 算法在时域将信号进行前后分解,在频域对信号进行奇偶分解,通过 DIF-FFT 算法的蝶形运算完成傅里叶变换的计算。两种快速傅里叶变换都将直接计算的复乘次数由  $N^2$  减小到  $(N/2)\log_2 N$ ,保证了信号处理的实时性。

利用离散傅里叶变换和离散傅里叶反变换之间的关系,可以直接利用傅里叶正变换的程序实现傅里叶反变换,用一个计算机系统完成了两种运算。

当信号长度不便于整理成 2 的整数次幂时,可以采用混合基的 FFT 算法。混合基的 FFT 算法同样能够提高运算效率,达到快速计算的目的,基-2 FFT 则是混合基 FFT 算法的特例。线性调频  $z$  变换则能够实现窄带信号的频谱分析及其他一些特殊要求的谱分析。

利用快速傅里叶变换对信号进行谱分析时,要关注的主要问题是谱分析范围和频率分辨率。谱分析范围受采样频率  $f_s$  的限制,为不减小频率分析范围,同时具备较高的频率分辨率,则需要增加采样点数  $N$ ,即增加信号的持续时间  $T_p$ 。

## 思考与练习

- 4-1 两个有限长序列  $x(n)$  和  $y(n)$  的零值区间分别为  $x(n)=0, n<0, 10\leq n$  和  $y(n)=0, n<0, 22\leq n$ 。对每个点作 25 点离散傅里叶变换,即

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)], \quad k=0,1,\dots,24$$

$$Y(k)=\text{DFT}[y(n)], \quad k=0,1,\dots,24$$

$$\text{如果} \quad F(k)=X(k) \cdot Y(k), \quad k=0,1,\dots,24$$

$$f(n)=\text{IDFT}[F(k)], \quad k=0,1,\dots,24$$

试问在哪点上  $f(n)=x(n)*y(n)$ ? 问为什么?

- 4-2 如果计算机的速度为每个复乘平均需要  $50 \mu\text{s}$ ,每个复加需要  $10 \mu\text{s}$ ,用来计算  $N=2048$  点离散傅里叶变换,问直接计算和用快速傅里叶变换计算各需要多少时间? 按照这样的速度,用快速傅里叶变换进行快速卷积对信号进行处理时,估计可实现实时处理的信号的最高频率。
- 4-3 如果将通用计算机换成数字信号处理专用单片机 TMS320 系列,所计算复乘和复加仅需要  $50 \text{ ns}$  左右。重做题 4-2。
- 4-4 已知  $X(k)$  和  $Y(k)$  是两个  $N$  点实序列  $x(n)$  和  $y(n)$  的离散傅里叶变换,若要从  $X(k)$  和  $Y(k)$  求  $x(n)$  和  $y(n)$ ,为提高运算效率,试设计用一次  $N$  点快速傅里叶逆变换来完成。
- 4-5 设  $x(n)$  是长度为  $2N$  的序列,  $X(k)$  为  $x(n)$  的  $2N$  点 DFT。
- (1) 试设计用一次  $N$  点快速傅里叶变换完成计算  $X(k)$  的高效算法。

(2) 若已知  $X(k)$ , 试设计用一次  $N$  点快速傅里叶逆变换实求  $x(n)$  的  $2N$  点离散傅里叶逆变换运算。

4-6 画出 8 点基-2DIF-FFT 算法的运算流程图, 要求输入输出均为顺序。

4-7 按照下面的离散傅里叶逆变换算法

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} [\text{DFT}[X^*(k)]^*]$$

画出利用已知的快速傅里叶变换子程序编写快速傅里叶逆变换程序的框图。

4-8 用微处理机对实数列作频谱分析, 要求频谱分辨率为  $F \leq 50$  Hz, 信号最高频率为 1 kHz, 试确定以下各参数:

- (1) 最小记录时间  $T_{\min}$ ;
- (2) 最大采样间隔  $T_{\max}$ ;
- (3) 最小采样点数  $N_{\min}$ ;
- (4) 在频带不变的情况下, 将频率分辨率提高 1 倍的  $N$  值。

4-9 已知调幅信号的载波频率  $f_c = 1$  kHz, 调制信号频率  $f_m = 100$  kHz, 用快速傅里叶变换对其进行谱分析, 试问:

- (1) 最小记录时间  $T_p$ ;
- (2) 最低采样频率  $f_s$ ;
- (3) 最少采样点数  $N$ 。

4-10 已知单位脉冲响应长度为 55, 输入序列长度为 1 100, 用快速傅里叶变换快速卷积法计算这两个序列的线性卷积, 取快速傅里叶变换的长度为 64。

- (1) 确定采用重叠相加法计算以上线性卷积所需要使用快速傅里叶变换和快速傅里叶逆变换的最小次数;
- (2) 确定采用重叠保留法计算以上线性卷积所需要使用快速傅里叶变换和快速傅里叶逆变换的最小次数。

4-11 用重叠保留法通过快速傅里叶变换对长序列进行滤波处理, 设 FIR 滤波器的长度为 50, 取快速傅里叶变换的长度为 128, 信号分段的长度为 100, 循环卷积输出序列的标号为  $n=0$  到  $n=127$ , 为了保证用重叠保留法滤波后构成的输出序列的正确, 试确定:

- (1) 输入各段必须重叠的样点数  $M$ ;
- (2) 每一段滤波输出所保留的样点数  $P$ ;
- (3) 求对每一段滤波输出所保留的  $P$  个样点的起点和终点标号, 即从每个 128 点的循环卷积的输出中保留哪些点用于前后衔接构成最后的滤波输出。

4-12 已知滤波器的单位脉冲响应为  $h(n) = a^{-|n|}$ ,  $|a| < 1$ ,  $-\infty < n < +\infty$ ,  $x(n)$  在  $n=0, 1, \dots, 200$  间取非零值, 用快速傅里叶变换方法求  $y(n) = x(n) * h(n)$ ,  $n=0, 1, \dots, 54$ 。



- (1) 为了求出指定的输出点的  $y(n)$ , 需要  $h(n) = a^{-|n|}$  的哪些点参加卷积运算, 指出这些点的开始点和结束点的范围。
- (2) 为了保证用基-2 FFT 算法正确计算  $y(n), n=0, 1, \dots, 54$  时最小的 FFT 长度。
- (3) 画出用快速傅里叶变换快速滤波的完整方框图。
- 4-13 已知  $x(n)$  当  $0 \leq n \leq 7$  时等于 1,  $n$  为其他值时  $x(n)$  均为 0。  $z$  平面路径为  $A(0)=0.6, \theta_0=\pi/3, W_0=1.2, \varphi_0=\pi/10$ 。现在计算复频谱  $X(z_k)$  ( $k=0, 1, \dots, 9$ ), 要求:
- (1) 画出  $z_k$  的路径;
- (2) 写出  $y(n), h(n)$  的表达式;
- (3) 当利用循环卷积  $g_e(n) = y(n) \otimes h'(n)$  来计算线性卷积  $g_l(n) = y(n) * h(n)$  时, 写出  $h'(n)$  的分段表达式;
- (4) 若用基-2 FFT 算法计算循环卷积, 写出  $h'(n)$  的分段表达式。
- 4-14 线性频调  $z$  变换是否可以用来计算一个有限时宽信号  $h(n)$  的  $z$  变换  $H(z)$ , 为什么?



## 数字滤波器的结构

本章重点内容:数字滤波器结构的信号流图表示方法;IIR 数字滤波器的直接 II 型、级联型、并联型结构及其特点;FIR 数字滤波器的直接型、级联型、线性相位型和频率采样型结构及其特点。

一个实际的物理信号和一个实际的物理系统是密不可分的,信号的产生、传输及处理离不开系统,一个系统离开了信号也就失去了存在的意义。所以,离散时间系统的分析与综合和离散信号的分析与处理都是数字信号处理的重要内容。数字滤波器(Digital Filter, DF)是离散时间系统的一种,是仅对离散时间信号作特定滤波处理的离散时间系统。为此,在第 1、2 章对离散时间系统的介绍的基础上,本章及后续的两章以数字滤波器为重点,详细地介绍离散时间系统的综合问题,即数字滤波器的表示和设计问题。

数字滤波器的结构极为重要,对于同一数字滤波器,采用不同结构所需的存储单元和乘法次数也不相同。存储单元的数量将影响数字滤波器的复杂性,乘法次数将影响数字滤波的运算速度。在有限精度(有限字长)情况下,不同结构的误差、稳定性也不相同。

### 5.1 数字滤波器结构的表示方法

由第 1、2 章内容可知,一个数字滤波器,可以用系统的单位脉冲响应  $h(n)$ 、系统函数  $H(z)$ 、传输函数  $H(e^{j\omega})$  表示,也可以用常系数线性差分方程来表示。 $H(z)$  是单位脉冲响应  $h(z)$  的  $z$  变换,即

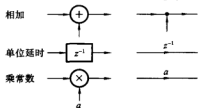
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5-1)$$

传输函数  $H(e^{j\omega})$  是单位脉冲响应  $h(n)$  的傅里叶变换,即

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (5-2)$$

直接由系统函数可以得出常系数线性差分方程,即

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (5-3)$$



方框图表示法 信号流图表示法

图 5-1 基本运算的方框图表示及流图表示

由式(5-3)可以看出,数字滤波器的作用就是把输入序列  $x(n)$  通过一定的运算,变换成输出序列  $y(n)$ ,使其达到特定的要求。实现一个数字滤波器需要几种基本的运算单元——加法器、单位延时器和常数乘法器。这些基本的单元可以有两种表示法——方框图法和信号流图法,因而一个数字滤波器的运算结构也有这两种表示方法,如图 5-1 所示。

信号流图表示本质上与方框图表示法等效,用方框图表示比较明显直观,用信号流图表示更加简单方便。下面以一个二阶数字滤波器为例

$$y(n] = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n) \quad (5-4)$$

其方框图结构如图 5-2 所示,等效信号流图如图 5-3 所示,显然它比图 5-2 简单方便。

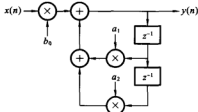


图 5-2 式(5-4)二阶数字滤波器的方框图

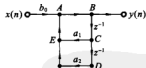


图 5-3 图 5-2 的数字滤波器的信号流图

图 5-3 中 A、B、C、D、E 称为网络节点,  $x(n)$  为输入节点或源节点,表示注入流图的外部输入或信号源,源节点只有输出没有输入,  $y(n)$  处为输出节点或阱节点,阱节点只有输入没有输出。如果某节点有一个输入、一个或多个输出,则该节点相当于分支节点(如节点 B、C、D);如果某个节点有两个或两个以上输入,则此节点相当于相加器(如节点 A、E)。节点之间用有向支路连接,任一节点的值等于它的所有输入支路的信号之和。输入每个节点的每个支路的信号值等于这一支路起点节点信号值乘以支路上的传输系数。如果支路上没有标出传输系数值,则认为其传输系数为 1。延迟支路用延迟算子  $z^{-1}$  表示,表示单位延时。因此,图 5-3 中 5 个节点值分别为

$$\begin{aligned} y(n) &= w_B(n) \\ w_C(n) &= w_B(n-1) = y(n-1) \\ w_D(n) &= w_C(n-1) = y(n-2) \end{aligned}$$

$$w_E(n) = a_1 w_C(n) + a_2 w_D(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)$$

$$w_A(n) = b_0 x(n) + w_E(n) = b_0 x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)$$

而  $w_B(n) = w_A(n)$ , 且  $w_B(n)$  又等于  $y(n)$ , 所以有  $y(n) = w_A(n)$ , 即实现了式(5-4)。故图 5-3 能清楚地表示出数字滤波器的运算步骤和运算结构, 下面均只采用信号流图来分析数字滤波器的结构。

由于无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器与有限长单位脉冲响应(FIR)数字滤波器在结构上各有不同的特点, 故下面对它们分别加以讨论。

## 5.2 IIR 数字滤波器的结构

IIR 数字滤波器有以下几个特点:

- (1) 系统的单位脉冲响应  $h(n)$  是无限长的;
- (2) 系统函数  $H(z)$  在有限  $z$  平面 ( $0 < |z| < +\infty$ ) 上存在极点;
- (3) 存在着输出到输入的反馈, 结构上是递归型的。

上述 3 个特点在本质上是一致相通的, 可从 IIR 数字滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5-5)$$

$$\text{或差分方程} \quad y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (5-6)$$

中得到体现。式(5-5)中分母多项式系数  $a_k$  表明在有限  $z$  平面上存在极点, 在式(5-6)中系数  $a_k$  表明存在着输出到输入的反馈。但是, 同一种 IIR 系统函数可以有多种不同的结构, 主要有直接 I 型、直接 II 型、级联型和并联型四种。

### 5.2.1 直接 I 型结构

在式(5-6)中,  $\sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$  表示将输入  $x(n)$  及延迟后的输入  $x(n-k)$ , 组成  $M$  节的延时网络, 把每节延时抽头后加权(加权系数是  $b_k$ ), 然后把结果相加。  
 $\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$  表示将输出加以延时, 组成  $N$  节的延时网络, 再将每节延时抽头后加权(加权系数是  $a_k$ ), 然后再把结果相加。最后输出的结果  $y(n)$  是由上述两个和式相加而成。由于包含了输出的延时部分  $[y(n-k)]$  项, 故它是个有反馈的网络, 显然是由式(5-6)中第一项和式构成了反馈网络。

直接实现上述运算过程的结构称为直接 I 型结构, 其结构流图如图 5-4 所示。图中, 总的网络是由上面讨论的两个网络级联而成的, 第一个网络实现零点的控制, 第二个网络实现极点的控制。

由图 5-4 可以看出, IIR 数字滤波器的直接 I 型结构需要  $N+M$  级延时单元、 $N+M$  次乘法及  $N+M$  次加法运算。

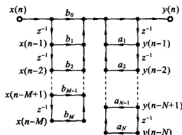


图 5-4 IIR 数字滤波器的直接 I 型结构

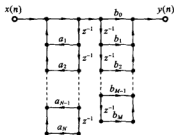


图 5-5 调换直接 I 型输入、输出子系统顺序

## 5.2.2 直接 II 型结构

直接 I 型结构需要  $N+M$  级延时单元,输入和输出各需要若干次延时,如能将输入和输出的延时单元合并,就能有效地减少延时单元的数量。一个线性时不变系统,若交换其级联子系统的次序,系统函数是不变的。在直接 I 型结构的基础上,若将两个子系统的顺序调换(如图 5-5 所示),并合并延时单元,即可得到 IIR 数字滤波器的另一种结构,即直接 II 型结构或典范型结构,如图 5-6 所示。

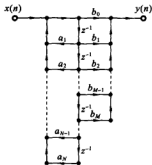


图 5-6 直接 II 型结构

直接 II 型结构只需要  $N$  个延时单元(一般  $N \geq M$ ),因此,比直接 I 型延时单元要少。在用软件实现时,它可以节省存储单元,在用硬件实现时,可以节省寄存器,优于直接 I 型结构。

要控制一个滤波器的性能,最好是直接控制其零极点的位置。但是,无论是直接 I 型还是直接 II 型结构,在阶数一定的情况下,要控制滤波器的性能,只能控制系数  $a_k$  和  $b_k$ 。但是,这些系数与极点和零点的关系不直接,每个  $a_k$  系数的变化都会影响系统函数的所有极点的分布,每个  $b_k$  系数的变化都会影响系统函数的所有零点的分布,因而调整起来比较困难。同时,由于直接型结构具有高度反馈性,对滤波器系数的有限字长变化敏感,易出现不稳定或产生较大的误差。

## 5.2.3 级联型结构

将式(5-5)的系统函数的分子、分母多项式进行因式分解,则可表示为

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (5-7)$$

其中,  $c_k, d_k$  分别为系统函数的零点和极点,  $A$  为常数。通常系数  $a_k$  和  $b_k$  为实数, 所以  $c_k$  和  $d_k$  总是共轭成对地出现, 若将共轭成对的零极点配成二次有理分式的形式, 则式(5-7)可化为

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^M (1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^N (1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})} \quad (5-8)$$

其中,  $M' = \left[ \frac{M+1}{2} \right], N' = \left[ \frac{N+1}{2} \right]$ , 这里  $\lceil \cdot \rceil$  表示取整。如果  $M$  为奇数, 则有一个  $\beta_{2k}$  为 0; 如果  $N$  为奇数, 则有一个  $\alpha_{2k}$  为 0。将分子、分母相组合, 则可分解成有相同形式的子网络结构, 即实系统的二阶因子形式

$$H(z) = A \prod_k \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_k H_k(z) \quad (5-9)$$

若  $M \neq N$  (一般  $M \leq N$ ), 则存在一些系数  $\beta_{2k}$  或  $\beta_{1k}$  为 0。  $H_k(z)$  称为二阶节或一阶节,  $H_k(z)$  一般用直接 II 型结构来实现。一个六阶系统的级联型结构如图 5-7 所示。

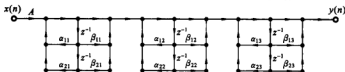


图 5-7 六阶 IIR 数字滤波器的级联型结构

级联型结构的特点是调整系数  $\alpha_{1k}$  和  $\alpha_{2k}$  就能单独地调整滤波器的第  $k$  对极点, 而不影响其他零极点。同样, 调整系数  $\beta_{1k}$  和  $\beta_{2k}$  就能单独地调整滤波器的第  $k$  对零点, 而不会影响到其他的零极点。所以, 这种结构, 便于准确控制滤波器零极点, 从而便于调整滤波器频率响应特性。

当  $M=N$  时, 分子、分母中二阶因子配合成的二阶节可以有  $\left( \left[ \frac{N+1}{2} \right] \right)!$  种, 而各二阶节的排列次序也可以有  $\left( \left[ \frac{N+1}{2} \right] \right)!$  种, 它们都代表同一个系统函数。但是, 当用二进制表示时, 只能采用有限位的字长, 其所带来的误差大小, 对不同的实现方案也就不同, 因而对于配合与排列次序, 就存在着优化的问题。另外, 级联各节之间的变量值不能太大, 也不能太小。太大则可能在定点制运算中产生溢出现象, 太小则有可能信噪比太小。因此, 各级联节之间要有电平的放大或缩小控制。级联型结构具有最少的存储器。

## 5.2.4 并联型结构

将因式分解的系统函数展开成部分分式的形式

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k} \quad (5-10)$$

将上式右边第一项中具有共轭成对的  $z_k$  合并成二阶的形式

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} \quad (5-11)$$

其中,  $z_k$  为系统的极点,  $N = N_1 + 2N_2$ , 表明系统是由  $N_1$  个一阶子系统、 $N_2$  个二阶子系统及延时加权单元并联而成的。为了结构上的一致性, 一般也将一阶节组成实系数二阶多项式, 当  $M=N$  时, 有

$$H(z) = B_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = B_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} H_k(z) \quad (5-12)$$

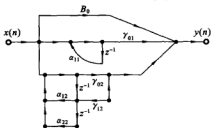


图 5-8 三阶 IIR 数字滤波器的并联型结构

其中,  $\lfloor (N+1)/2 \rfloor$  表示取  $(N+1)/2$  的整数部分。当  $N$  为奇数时, 包含有一个一阶节。图 5-8 给出了  $M=N=3$  时的并联型结构。

并联型结构所用的加法器、乘法器、延时单元基本与级联型结构的相同, 可以通过调整  $\alpha_{1k}$  和  $\alpha_{2k}$  来单独调整一对极点的位置, 但是, 不能像级联型那样单独调整零点的位置。在要求有准确的传输零点的场合, 宜采用级联型结构。由于并联型各节基本是并联的, 各节的运算误差对其他节没有影响, 不会像级联型结构那样产生误差积累, 所以其比级联型的误差一般要小些。

除了上述结构外, 还有其他的结构, 取决于线性信号流图理论中的多种运算处理方法。当然各种信号流图都保持输入到输出的传输关系不变, 即系统函数是一致的。比如利用信号流图的转置定理(如果将线性时不变网络中所有支路方向倒转, 并将输入和输出相互交换, 则其系统函数不变), 即可得到相应信号流图的转置型结构。转置型结构所需的加法器、乘法器和延时单元与其原型结构相同。例如, 对图 5-6 所示的直接 II 型结构, 转置后的网络如图 5-9 所示, 画成输入在左、输出在右的习惯形式, 则如图 5-10 所示。

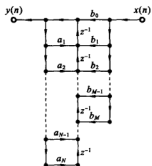


图 5-9 直接 II 型的转置型结构

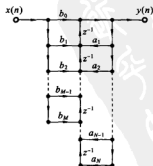


图 5-10 将图 5-9 画成输入在左、输出在右的形式

例 5-1 已知系统的传输函数为

$$H(z) = \frac{0.44z^2 + 0.362z + 0.02}{z^3 + 0.4z^2 + 0.18z - 0.2}$$

试画出其直接 II 型、级联型和并联型结构流图。

解 将原式写成  $z^{-1}$  的有理分式, 可得

$$H(z) = \frac{0.44z^{-1} + 0.362z^{-2} + 0.02z^{-3}}{1 - (-0.4z^{-1} - 0.18z^{-2} + 0.2z^{-3})}$$

由此, 可以画出直接 II 型结构如图 5-11(a) 所示。将上式写成级联的形式

$$H(z) = \left[ \frac{0.44 + 0.362z^{-1} + 0.02z^{-2}}{1 - (-0.8z^{-1} - 0.5z^{-2})} \right] \left( \frac{z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}} \right)$$

则得级联型结构信号流图如图 5-11(b) 所示。再将  $H(z)$  部分分式分解得

$$H(z) = -0.1 + \frac{0.6}{1 - 0.4z^{-1}} + \frac{-0.5 - 0.2z^{-1}}{1 - (-0.8z^{-1} - 0.5z^{-2})}$$

则得并联型结构流图如图 5-11(c) 所示。

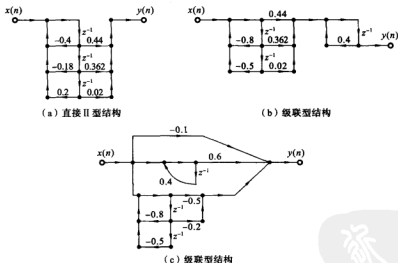


图 5-11 例 5-1 的信号流图结构

### 5.3 FIR 数字滤波器的结构

FIR 数字滤波器有以下几个特点:

- (1) 系统的单位脉冲响应  $h(n)$  仅在有限个  $n$  值处不为 0;
- (2) 系统函数在有限  $z$  平面 ( $0 < |z| < +\infty$ ) 上不存在极点;
- (3) 不存在输出到输入的反馈, 结构上主要是非递归结构, 但在有些结构中 (如



频率采样型)也包含有递归部分。

假设 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  为一个  $N$  点序列,  $0 \leq n \leq N-1$ , 则滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (5-13)$$

说明该系统有  $N-1$  阶极点在  $z=0$  处, 有  $N-1$  个零点位于  $z$  平面。

FIR 数字滤波器有直接型、级联型、线性相位型、快速卷积型和频率采样型等几种结构。

### 5.3.1 直接型结构

式(5-13)所示的系统差分方程为

$$y(n] = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x[n-m] \quad (5-14)$$

很明显, 这就是线性时不变系统的卷积公式, 也是  $x(n)$  的延时链的横向结构。根据差分方程可以直接画出系统的结构信号流程图如图 5-12 所示, 该结构称为直接型结构, 也称为卷积型、横截型结构, 图 5-13 是其转置型结构。

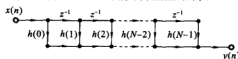


图 5-12 FIR 数字滤波器的直接型结构

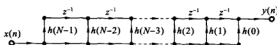


图 5-13 图 5-12 的转置型结构

### 5.3.2 级联型结构

将系统函数分解成实系数二阶因子的乘积形式

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{\lceil \frac{N-1}{2} \rceil} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}) \quad (5-15)$$

其中,  $\lceil (N-1)/2 \rceil$  表示取  $(N-1)/2$  的整数部分。当  $N$  为偶数时,  $N-1$  为奇数, 除有  $\lceil (N-1)/2 \rceil$  个二阶子系统外, 还有一个一阶子系统, 图 5-14 给出了  $N$  为奇数时的级联型结构。

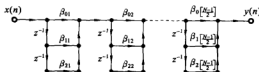


图 5-14 FIR 数字滤波器的级联型结构

级联型结构的每一个子系统控制一对零点,而对其他零点没有影响,故在需要控制系统的零点时,可以采用这种结构。但是,显然这种结构所需要的乘法次数比直接型的要多。

### 5.3.3 线性相位型结构

滤波器具有线性相位,在某些应用领域极为重要,如数据传输及图像处理等领域。FIR 数字滤波器满足一定条件时,可以做到严格线性相位特性。

如果 FIR 数字滤波器单位脉冲响应  $h(n)$  为实数,  $0 \leq n \leq N-1$ , 且满足以下条件:

$$\text{偶对称} \quad h(n) = h(N-1-n) \quad (5-16a)$$

$$\text{奇对称} \quad h(n) = -h(N-1-n) \quad (5-16b)$$

则 FIR 数字滤波器具有严格的线性相位特性。有关线性相位 FIR 数字滤波器的性质将在第 7 章详细讨论,这里先推导这种滤波器的结构。下面对  $N$  为偶数和  $N$  为奇数两种情况分别加以讨论。

#### 1. $N$ 为偶数

当  $N$  为偶数时,有

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{N/2-1} h(m)x(n-m) + \sum_{m=N/2}^{N-1} h(m)x(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} h(m)x(n-m) + \sum_{m=0}^{N/2-1} h(N-1-m)x[n-(N-1-m)] \end{aligned}$$

将偶对称或奇对称的条件代入上式有

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N/2-1} h(m) \{x(n-m) \pm x[n-(N-1-m)]\} \quad (5-17)$$

其中,“ $\pm$ ”取“+”号表示  $h(n)$  满足偶对称条件,取“-”号表示  $h(n)$  满足奇对称条件。由式(5-17)可画出  $N$  为偶数时的线性相位 FIR 数字滤波器的直接型结构信号流图,如图 5-15 所示。

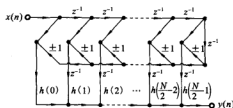


图 5-15  $N$  为偶数时,具有线性相位的 FIR 数字滤波器结构

( $h(n)$  偶对称时  $\pm 1$  取  $+1$ ,  $h(n)$  奇对称时  $\pm 1$  取  $-1$ )

#### 2. $N$ 为奇数

当  $N$  为奇数时,与  $N$  为偶数的原理相同,只是  $h\left(\frac{N-1}{2}\right)$  项无对称项

$$y(n) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)x\left(n - \frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=0}^{(N-3)/2} h(m)\{x(n-m) \pm x[n - (N-1-m)]\} \quad (5-18)$$

且当  $h(n)$  满足奇对称条件时,  $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$ , 而“ $\pm$ ”取“-”号。由式(5-18)可画出  $N$  为奇数时的线性相位 FIR 滤波器的结构, 如图 5-16 所示。

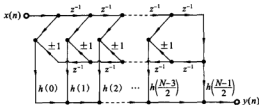


图 5-16  $N$  为奇数时, 具有线性相位的 FIR 滤波器结构

( $h(n)$  偶对称时  $\pm 1$  取  $+1$ ,  $h(n)$  奇对称时  $\pm 1$  取  $-1$ , 且  $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$ , 即  $h\left(\frac{N-1}{2}\right)$  处的连线断开)

由图 5-15 和图 5-16 可以看出, 线性相位型 FIR 数字滤波器结构比一般直接型结构可以节省一半数量的乘法次数, 加法次数几乎不变。

例 5-2 设 FIR 数字滤波器的系统函数为

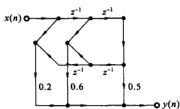


图 5-17 例 5-2 的线性相位结构图

$H(z) = 0.2 + 0.6z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.6z^{-3} + 0.2z^{-4}$   
试画出其线性相位型结构。

解 根据  $H(z)$  的表达式可知, 该滤波器是偶对称、 $N$  为 5 的线性相位 FIR 数字滤波器, 并且有

$$h(0) = h(4) = 0.2, h(1) = h(3) = 0.6, h(2) = 0.5$$

故其线性相位结构如图 5-17 所示。

### 5.3.4 快速卷积型结构

由 FIR 数字滤波器的线性差分方程(5-14)可知, FIR 数字滤波器的输出  $y(n)$  为输入  $x(n)$  与系统的单位脉冲响应  $h(n)$  的卷积和。根据第 4 章中讲解的有关内容可知, 可以用快速傅里叶变换来计算线性卷积, 即用两序列的圆周卷积代替线性卷积。设  $x(n)$  有  $N_1$  点非零值 ( $0 \leq n \leq N_1 - 1$ ),  $h(n)$  有  $N_2$  点非零值 ( $0 \leq n \leq N_2 - 1$ ), 则快速卷积的计算步骤回顾如下:

(1) 将序列  $x(n)$  和  $h(n)$  补 0 延长成  $L$  点序列,  $L \geq N_1 + N_2 - 1$  ( $L$  一般取 2 的整数次幂)

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

(2) 求  $x(n)$  与  $h(n)$  各自的  $L$  点快速傅里叶变换

$$X(k) = \text{FFT}[x(n)], \quad L \text{ 点}$$

$$H(k) = \text{FFT}[h(n)], \quad L \text{ 点}$$

(3) 将  $X(k)$  与  $H(k)$  相乘得

$$Y(k) = X(k)H(k), \quad L \text{ 点}$$

(4) 求  $Y(k)$  的  $L$  点快速傅里叶逆变换得  $y(n)$ ,  $y(n)$  的前  $N_1 + N_2 - 1$  点就是  $x(n)$  和  $h(n)$  的线性卷积

$$y(n) = x(n) * h(n), \quad 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$$

这样,就得到如图 5-18 所示的快速卷积结构。当  $N_1, N_2$  较大时,用这种结构计算线性卷积要快得多。

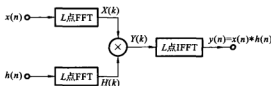


图 5-18 FIR 数字滤波器的快速卷积型结构

### 5.3.5 频率采样型结构

第 3 章介绍了频域采样的基本理论,给定一个 FIR 系统的单位脉冲响应  $h(n)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ , 其离散傅里叶变换  $H(k)$  实际上是傅里叶变换  $H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$  在单位圆上的  $N$  个采样值,可以得出由  $H(k)$  表示  $H(z)$  的公式

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \quad (5-19)$$

这个公式为 FIR 数字滤波器提供了另外一种结构——频率采样型结构,这种结构由两部分级联构成,即

$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \quad (5-20)$$

其中,级联的第一部分

$$H_c(z) = 1 - z^{-N} \quad (5-21)$$

为由  $N$  节延时单元构成的梳状滤波器,是由  $N$  节延时单元组成的全零点网络。

令  $H_c(z) = 1 - z^{-N} = 0$ , 即  $z_k^N = 1 = e^{j2\pi k}$ , 则有

$$z_k = e^{j\frac{2\pi k}{N}}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

即在单位圆上有  $N$  个等间隔的零点,其频率响应特性为

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N} = 2je^{-j\omega N/2} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \quad (5-22)$$

因而幅度响应为

$$|H_c(e^{j\omega})| = 2 \left| \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \right|$$

梳状滤波器的结构及幅频特性如图 5-19 所示。

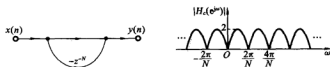


图 5-19 梳状滤波器的结构及幅频特性

级联的第二部分为

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (5-23)$$

它由  $N$  个一阶网络并联组成, 每个一阶网络在单位圆上有一个极点

$$z_{pk} = W_N^{-k} = e^{j2\pi k/N}$$

即该网络在频率为  $\omega = 2\pi k/N$  处响应为无穷大, 故等效于谐振频率为  $2\pi k/N$  的谐振器。一阶网络的极点正好与梳状滤波器的一个零点相抵消, 从而使得在该频率上的频率响应等于  $H(k)$ 。这样,  $N$  个一阶网络的极点就和梳状滤波器的  $N$  个零点相互抵消, 从而在  $N$  个频域采样点上的频率响应就分别等于  $N$  个  $H(k)$  值。FIR 数字滤波器的频率采样型结构如图 5-20 所示。

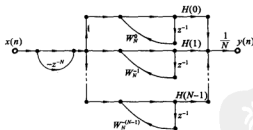


图 5-20 FIR 数字滤波器的频率采样型结构

频率采样型结构的优点是它的系数  $H(k)$  就是滤波器在  $\omega = 2\pi k/N$  处的频率响应, 因此, 控制滤波器的频率响应很方便, 且当单位脉冲响应的点数相同时, 可以利用同一结构, 只需改变乘法系数, 就可以得到不同的滤波器, 便于模块化和标准化。但是, 结构中所乘的系数  $H(k)$  及  $W_N^{-k}$  都是复数, 增加了乘法次数和存储量。而且所有极点刚好处于单位圆上, 由系数  $W_N^{-k}$  决定, 由于多种误差的存在, 梳状滤波器的零点和一阶网络的极点不一定能完全抵消, 在单位圆上的极点将使得系统变得不稳定。为了克服可能存在的不稳定问题, 可以在半径为  $r$  ( $r < 1$  但接近于 1) 的圆上

对  $H(z)$  进行采样,即用  $rz^{-1}$  来代替式(5-19)中的  $z^{-1}$ ,得

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - rW_N^k z^{-1}} \quad (5-24)$$

这时的极点为  $rW_N^k$ ,处于单位圆内,即使没有被完全抵消,也可以消除不稳定问题。

**例 5-3** 已知  $h(n)$  为实序列的 FIR 滤波器,  $N=8$ , 其频率响应的采样值  $H(k)$  为

$$H(0)=10, \quad H(1)=1+2j$$

$$H(2)=2, \quad H(3)=1.5-0.5j$$

$$H(4)=2.5$$

(1) 求出  $k=5, 6, 7$  的  $H(k)$  的值;

(2) 画出其频率采样型结构信号流程图。

**解** (1) 因为  $h(n)$  为实序列, 所以  $H(k)$  具有共轭对称性, 即

$$H(k) = H^*(N-k) = H^*(8-k)$$

所以有

$$H(5) = H^*(8-5) = H^*(3) = 1.5 + 0.5j$$

$$H(6) = H^*(8-6) = H^*(2) = 2$$

$$H(7) = H^*(8-7) = H^*(1) = 1-2j$$

(2) 其频率采样型结构如图 5-21 所示。

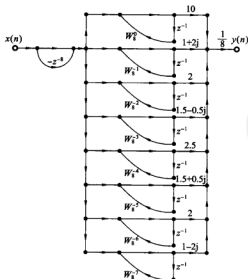


图 5-21 例 5-3 的结构信号流程图

## 5.4 数字滤波器的格型结构

至此,分别讨论了 IIR 和 FIR 数字滤波器的各种结构形式,这些结构形式各有自己的应用背景和优缺点。

1973 年, Gay 和 Markel 提出了一种新的结构形式,即格型(lattice)结构,它具有以下一些优点:

(1) 由于它的模块化结构,便于实现高速并行处理;

(2) 一个  $M$  阶格型滤波器可以具备从 1 阶到  $M$  阶的  $M$  个横向滤波器的输出性能;

(3) 它对有限字长的舍入误差 insensitive。

这些优点使得这种结构在现代谱估计、语音信号处理、自适应滤波等方面得到了广泛的应用。下面分别就全零点系统、全极点系统的格型结构加以讨论。

### 5.4.1 全零点系统的格型结构

一个  $M$  阶的全零点 FIR 数字滤波器的系统函数  $H(z)$  可写为

$$H(z) = B(z) = \sum_{i=0}^M h(i)z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^M b_i^{(M)}z^{-i} \quad (5-25)$$

其中,  $b_i^{(M)}$  表示  $M$  阶 FIR 数字滤波器的第  $i$  个系数。假定  $H(z)$  的首项系数  $h(0)=1$ , 该系统的格型结构如图 5-22 所示。

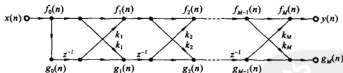


图 5-22 全零点系统的格型结构

由图 5-22 所示的信号流图可以总结出格型结构的一些重要特点。

(1) FIR 数字滤波器的直接型结构中有  $M$  个参数  $h(i)$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ), 共需  $M$  次乘法、 $M$  次延迟; 在 FIR 数字滤波器的格型结构中也有  $M$  个参数  $k_i$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ),  $k_i$  称为反射系数, 共需  $2M$  次乘法、 $M$  次延迟。注意: 图中的  $f_i(n)$  和  $g_i(n)$  为中间输出变量, 不是相乘的系数。

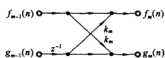


图 5-23 全零点系统格型结构基本传输单元

(2) 信号的传递从左至右, 中间没有反馈回路。若输入是  $x(n)$ , 则  $x(n)$  通过信号流图的上部通路立即出现在输出端, 使得  $y(0)=h(0)=1$ 。 $x(n)$  通过下部通路时, 分别经过一次延迟、二次延迟, 直到  $M$  次延迟后出现在输出端。

(3) 格型结构中的基本传输单元如图 5-23 所

示,它们有如下的关系

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m g_{m-1}(n-1), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (5-26a)$$

$$g_m(n) = k_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (5-26b)$$

并且有

$$f_0(n) = g_0(n) = x(n) \quad (5-27)$$

$$f_M(n) = y(n) \quad (5-28)$$

其中,  $f_{m-1}(n)$ 、 $g_{m-1}(n)$  分别是第  $m$  个基本传输单元的上、下端的输入序列,  $f_m(n)$ 、 $g_m(n)$  分别是该基本传输单元的上、下端的输出序列。该基本传输单元的形状类似快速傅里叶变换中的蝶形单元。

(4) 定义  $B_m(z)$ 、 $\bar{B}_m(z)$  分别为由输入端到第  $m$  个基本传输单元上端和下端所对应的系统函数,即

$$B_m(z) = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} = 1 + \sum_{i=1}^m b_i^{(m)} z^{-i}, \quad m=1, 2, \dots, M \quad (5-29a)$$

$$\bar{B}_m(z) = \frac{G_m(z)}{G_0(z)}, \quad m=1, 2, \dots, M \quad (5-29b)$$

可以看出,当  $m=M$  时,  $B_M(z) = B(z) = H(z)$ 。 $m-1$  级的  $B_{m-1}(z)$  通过级联一个图 5-23 所示的基本单元就可得到  $m$  级的  $B_m(z)$ , 因此,格型结构有着模块化的结构形式。

下面推导如何由给定的系数  $h(i)$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ) 求出格型结构的参数  $k_i$  ( $i=1, 2, \dots, M$ )。对式(5-26)两边作  $z$  变换,有

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + k_m z^{-1} G_{m-1}(z) \quad (5-30a)$$

$$G_m(z) = k_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \quad (5-30b)$$

将式(5-30)分别除以  $F_0(z)$ 、 $G_0(z)$ , 考虑式(5-29)的表示方法,可得

$$B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \quad (5-31a)$$

$$\bar{B}_m(z) = k_m B_{m-1}(z) + z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \quad (5-31b)$$

或者反过来,得到

$$B_{m-1}(z) = \frac{1}{1-k_m^2} [B_m(z) - k_m \bar{B}_m(z)] \quad (5-32a)$$

$$\bar{B}_{m-1}(z) = \frac{1}{1-k_m^2} [-z k_m B_m(z) + \bar{B}_m(z)] \quad (5-32b)$$

式(5-31)、式(5-32)给出了格型结构中从高阶到低一阶或从低阶到高一阶的系统函数的递推关系。注意:  $B_M(z) = B(z)$ , 即包含有  $B(z)$  在内, 也包含有  $\bar{B}_m(z)$ 。下面继续推导不包含  $\bar{B}_m(z)$  的递推关系。

由式(5-29)的定义可知,  $B_0(z) = \bar{B}_0(z) = 1$ , 根据式(5-31)显然有

$$B_1(z) = B_0(z) + k_1 z^{-1} \bar{B}_0(z) = 1 + k_1 z^{-1}$$

$$\bar{B}_1(z) = k_1 B_0(z) + z^{-1} \bar{B}_0(z) = k_1 + z^{-1}$$

即

$$\bar{B}_1(z) = z^{-1} B_1(z^{-1})$$



令  $m=1, 2, \dots, M$ , 不难推出

$$\bar{B}_m(z) = z^{-m} B_m(z^{-1}) \quad (5-33)$$

将上式代入式(5-31)和式(5-32), 有

$$B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-m} B_{m-1}(z^{-1}) \quad (5-34a)$$

$$B_{m-1}(z) = \frac{1}{1-k_m^2} [B_m(z) - k_m z^{-m} B_m(z^{-1})] \quad (5-34b)$$

这样, 得到了由高阶到低一阶以及由低阶到高一阶的系统函数的递推关系, 这种递推关系仅包含有  $B(z)$ 。

下面再给出反射系数  $k_i$  与滤波器各系数之间的递推关系。将式(5-29a)及由该式得到的  $B_{m-1}(z)$  分别代入式(5-34)中, 可分别得到两组递推关系

$$\left. \begin{aligned} b_i^{(m)} &= k_m \\ b_i^{(m)} &= b_i^{(m-1)} + k_m b_{m-i}^{(m-1)} \end{aligned} \right\} \quad (5-35a)$$

$$\left. \begin{aligned} k_m &= b_m^{(m)} \\ b_i^{(m-1)} &= \frac{1}{1-k_m^2} [b_i^{(m)} - k_m b_{m-i}^{(m)}] \end{aligned} \right\} \quad (5-35b)$$

上式中,  $i=1, 2, \dots, m-1; m=2, 3, \dots, M$ 。

在实际工作中, 一般首先给出  $H(z) = B(z) = B_M(z)$ , 可以按如下步骤求出反射系数  $k_i (i=1, 2, \dots, M)$ :

(1) 由式(5-35a)求出  $k_M = b_M^{(M)}$ ;

(2) 从式(5-35b), 由  $k_M$  及已知系数  $b_1^{(M)}, b_2^{(M)}, \dots, b_M^{(M)}$  求出  $B_{M-1}(z)$  的系数  $b_1^{(M-1)}, b_2^{(M-1)}, \dots, b_{M-1}^{(M-1)}$ , 或者由式(5-34b)直接求出  $B_{M-1}(z)$ , 得到反射系数  $k_{M-1} = b_{M-1}^{(M-1)}$ ;

(3) 重复步骤(2), 可全部求出  $k_M, k_{M-1}, \dots, k_1$  和  $B_{M-1}(z), B_{M-2}(z), \dots, B_1(z)$ 。

**例 5-4** 一个 FIR 系统的系统函数为

$$H(z) = 1 - 1.7z^{-1} + 1.53z^{-2} - 0.648z^{-3}$$

试求其格型结构。

**解** 这是一个三阶全零点系统, 因而

$$b_1^{(3)} = -1.7, \quad b_2^{(3)} = 1.53, \quad b_3^{(3)} = -0.648, \quad k_3 = b_3^{(3)} = -0.648$$

按照式(5-35b), 可得

$$b_1^{(2)} = \frac{1}{1-k_3^2} [b_1^{(3)} - k_3 b_2^{(3)}] = 1.7239 \times (-0.7086) = -1.2215$$

$$b_2^{(2)} = \frac{1}{1-k_3^2} [b_2^{(3)} - k_3 b_1^{(3)}] = 1.7239 \times 0.4284 = 0.7385$$

所以

$$k_2 = b_2^{(2)} = 0.7385$$

因而

$$B_1(z) = 1 - 1.2215z^{-1} + 0.385z^{-2}$$

同样, 可得

$$b_1^{(1)} = \frac{1}{1-k_z^2} [b_1^{(2)} - k_z b_1^{(2)}] = 2.1997 \times (-0.3194) = -0.7026$$

所以  
因而

$$k_1 = b_1^{(1)} = -0.7026$$

$$B_1(z) = 1 - 0.7026z^{-1}$$

图 5-24 为本例题的格型结构信号流图。

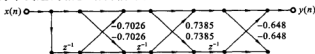


图 5-24 例 5-4 中全零点数字滤波器的格型结构信号流图

### 5.4.2 全极点系统的格型结构

全极点 IIR 数字滤波器的系统函数  $H(z)$  可表示为

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M a_i^{(M)} z^{-i}} \quad (5-36)$$

其中,  $a_i^{(M)}$  表示  $M$  阶全极点系统的第  $i$  个系数。显然, 全极点系统的传输函数是全零点系统传输函数的倒数; 或者说, 全极点滤波器是全零点滤波器的逆滤波器。将式(5-26a)进行变化后与式(5-26b)重写如下

$$f_{m-1}(n) = f_m(n) - k_m g_{m-1}(n-1), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (5-37a)$$

$$g_m(n) = k_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (5-37b)$$

这就是全极点系统格型结构的基本单元, 如图 5-25 所示。这时,  $f_m(n)$  是上支路的输入序列,  $f_{m-1}(n)$  是上支路的输出序列, 而  $g_{m-1}(n)$  是下支路的输入序列,  $g_m(n)$  是下支路的输出序列。假定系统为  $M$  阶系统, 并令  $x(n) = f_M(n)$ ,  $f_0(n) = g_0(n) = y(n)$ , 由图 5-25 作为基本传输单元所构成的全极点格型结构如图 5-26 所示。

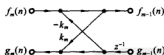


图 5-25 全极点系统格型结构基本传输单元

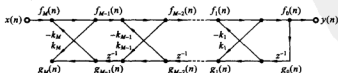


图 5-26 全极点系统的格型结构

对于一个给定的全极点 IIR 数字滤波器的系统函数, 可以用前面求解全零点 FIR 数字滤波器格型结构参数  $k_i$  的式(5-35)对全极点 IIR 数字滤波器系统函数的分母进行求解, 就可以得到全极点 IIR 滤波器格型结构的参数  $k_i$ 。

但是, 对于一个稳定的全极点滤波器, 必须保证它的所有极点都在单位圆内, 可

以证明,保证全极点 IIR 滤波器稳定的充分必要条件是,利用式(5-35)求得的所有反射系数  $k_i$  都必须满足  $|k_i| \leq 1 (i=1, 2, \dots, M)$ 。因此,式(5-35)还可以用来检测全极点系统的稳定性。

**例 5-5** 给定一个全极点 IIR 系统,其系统函数为例 5-4 全零点 FIR 系统的倒数,即

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 - 1.7z^{-1} + 1.53z^{-2} - 0.648z^{-3}}$$

试求其格型结构。

**解** 由例 5-4 的结果,可得

$$k_3 = -0.648, \quad k_2 = 0.7385, \quad k_1 = -0.7026$$

其格型结构如图 5-27 所示。

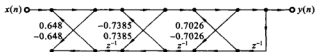


图 5-27 例 5-5 的格型结构

上面给出了全零点 FIR 数字滤波器和全极点 IIR 数字滤波器的格型结构求解方法,对于零极点 IIR 数字滤波器的格型结构,本书不作详细讨论,读者可参考相关文献。

## 本章小结

采用信号流图来表示数字滤波器的结构具有简单方便的特点。对于 IIR 数字滤波器,直接 II 型结构比直接 I 型结构所需延时单元少,但是直接型具有高度反馈,易出现不稳定或产生较大误差,且控制零极点不直接。级联型结构能够方便地控制零极点,但是,存在误差积累,且要考虑级联各单元间的优化顺序问题。并联型结构可以单独调整一对极点,但不能方便地调整零点,不存在误差积累。

线性相位 FIR 数字滤波器具有严格的线性相位特性,与直接型结构相比较,可以减少一半数量的乘法运算。频率采样型结构的优点是它的系数就是滤波器在采样点处的频率响应,控制滤波器的频率响应很方便,且当单位脉冲响应的点数相同时,可以利用同一结构得到不同的滤波器,便于模块化和标准化。但是,结构中所乘的系数都是复数,增加了乘法次数和存储量。而且所有极点刚好处于单位圆上,由于多种误差的存在,当梳状滤波器的零点和一阶网络的极点不一定能完全抵消时,就会使得系统变得不稳定,但这可以通过修正采样点的位置来解决这一问题。

格型结构具有模块化结构,便于实现高速并行处理,能够产生中间滤波输出结果,且对舍入误差 insensitive,具有广泛的用途。全极点 IIR 数字滤波器格型结构参数的确定与全零点 FIR 数字滤波器格型结构参数的确定相同,它们之间呈互逆的关系。

## 思考与练习

- 5-1 画出由下列差分方程定义的离散时间系统的直接Ⅰ型和直接Ⅱ型结构。

$$y(n) - 0.7y(n-1) + 0.1y(n-2) - 0.5y(n-3) = x(n) + 0.3x(n-1) - 0.8x(n-2)$$

- 5-2 试用直接Ⅰ型和直接Ⅱ型结构实现如下系统函数。

$$H(z) = \frac{2 + 3.5z^{-1} - 0.8z^{-2} + 1.6z^{-3}}{3 + 0.6z^{-1} - 0.5z^{-2} + z^{-3}}$$

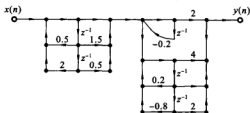
- 5-3 用级联型结构实现如下系统函数。

$$H(z) = \frac{3(1+z^{-1})(2-1.2z^{-1}+0.6z^{-2})}{(1-0.8z^{-1})(1+0.9z^{-1}-0.6z^{-2})}$$

- 5-4 用并联型结构实现如下系统函数。

$$H(z) = \frac{5.2 + 1.58z^{-1} + 1.41z^{-2} - 1.6z^{-3}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

- 5-5 写出题图 5-1 所示结构流图的系统函数和差分方程。



题图 5-1

- 5-6 已知 FIR 数字滤波器的输入序列  $x(n]$  与输出序列  $y[n]$  之间有如下关系

$$y[n] = x[n] - 0.3x[n-1] + 0.5x[n-2] + 0.6x[n-3] - x[n-4]$$

试画出其直接型结构。

- 5-7 已知 FIR 数字滤波器的传输函数为

$$H(z) = 1 + 0.5z^{-1} + 2z^{-2} - 0.25z^{-3} + 2z^{-4} + 0.5z^{-5} + z^{-6}$$

试画出其直接型和线性相位型结构。

- 5-8 试画出下述 FIR 数字滤波器的直接型和线性相位型结构。

$$H(z) = 1 - 0.5z^{-1} + 2z^{-2} - 2z^{-4} + 0.5z^{-5} - z^{-6}$$

- 5-9 用频率采样型结构实现以下系统函数,采样点数  $N=4$ 。

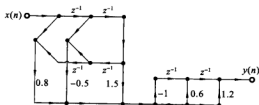
$$H(z) = 1 - 0.5z^{-1} + z^{-2}$$

- 5-10 写出题图 5-2 所示结构流图的系统函数和差分方程。

- 5-11 已知  $h[n]$  为实序列的 FIR 数字滤波器,  $N=8$ , 其频率响应的采样值  $H[k]$  为

$$H[0] = 19, \quad H[1] = 1.5 + 3j, \quad H[2] = 0, \quad H[3] = 1.5 - 0.1j, \quad H[4] = 5$$

(1) 求出  $k=5, 6, 7$  的  $H[k]$  的值;



题图 5-2

(2) 画出其频率采样型结构信号流程图。

- 5-12 已知  $H(z) = 1 - 0.4z^{-1} - 0.8z^{-2} + 0.86z^{-3}$ , 试求出该滤波器的格型结构反射系数, 并画出信号流程图。
- 5-13 已知  $H(z) = \frac{1}{1 - 0.6z^{-1} - 0.2z^{-2} + 0.84z^{-3}}$ , 试画出该滤波器的格型结构。

## IIR 数字滤波器的设计

本章重点内容:滤波器的指标及其实际意义;巴特沃斯模拟低通滤波器的设计方法;脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的原理和方法;先利用模拟域频率变换,再设计各型数字滤波器的原理和方法;数字低通滤波器到其他各型数字滤波器的变换关系。

数字滤波器的设计问题,其实就是要得到一个系统函数,使该系统的频率响应特性能够达到设计要求。系统函数的零极点个数及位置将决定系统的频率响应特性,零极点的个数由系统函数的阶数决定,零极点的位置由系统函数的系数决定。

### 6.1 引言

滤波技术通常包括滤波器设计和滤波过程的实现两方面的内容,本章和第 7 章将介绍数字滤波器的设计方法,滤波过程的实现是指以何种方式实现对输入信号的滤波。数字滤波过程从本质上来讲是通过数值计算来实现滤波的;既可以通过专用的数字电路或数字设备来实现,需要延迟器、乘法器、加法器和存储器,也可以通过软件在计算机上实现,即时域线性卷积和频域乘积的程序。模拟滤波器只能由硬件来实现,元件是  $R$ 、 $L$ 、 $C$  及运算放大器或开关元件等。数字滤波器的实现要比模拟滤波器容易,且获得的滤波器性能要更理想。第 5 章讨论的数字滤波器的结构,实际上就是实现传输函数的不同算法,因此,从某种意义上讲,也可以说是滤波器的实现方法。

由第 1 章可知,单位脉冲响应为  $h(n)$  的一个线性时不变离散时间系统,其输入  $x(n)$  与输出  $y(n)$  的关系是

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (6-1)$$

即卷积和的关系,若它们的傅里叶变换存在,则输入、输出的频域关系是

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (6-2)$$

假定  $|X(e^{j\omega})|$ 、 $|H(e^{j\omega})|$  如图 6-1(a)、(b) 所示, 那么  $|Y(e^{j\omega})|$  将如图 6-1(c) 所示。这样, 输入信号  $x(n]$  通过滤波器  $h(n)$  后, 输出  $y(n)$  中不再含有  $|\omega| > \omega_c$  的频率成分, 而使  $|\omega| < \omega_c$  的成分“不失真”地得以通过。因此, 设计出不同形状的  $|H(e^{j\omega})|$ , 可以得到不同的滤波结果。

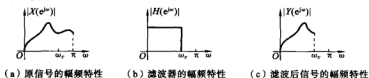


图 6-1 滤波原理

### 6.1.1 滤波器的分类

滤波器的种类很多, 分类方法也不同, 可以从功能上来分, 也可以从实现方法上来分, 或者从设计方法上来分类等。总的来说, 滤波器可以分为两大类: 经典滤波器和现代滤波器。经典滤波器是假定输入信号  $x(n)$  中的有用成分和希望去除的成分各占有不同的频带, 如果有用信号和噪声的频谱相互重叠, 那么经典滤波器将无能为力。

现代滤波器理论研究的主要内容是从含有噪声的数据记录中估计出信号的某些特征或信号本身。一旦信号被估计出, 那么估计出的信号将比原信号会有更高的信噪比。现代滤波器理论源于维纳在 20 世纪 40 年代及随后的工作, 维纳滤波器是这类滤波器的典型代表。此外, 还有卡尔曼滤波器、线性预测器、自适应滤波器等。

本书仅讨论经典滤波器的设计问题。经典滤波器从功能上总的可分为四种: 低通 (Low Pass, LP)、高通 (High Pass, HP)、带通 (Band Pass, BP) 和带阻 (Band Stop, BS) 滤波器。图 6-2 给出了四种数字滤波器理想幅频特性, 但是, 这种理想滤波器, 在物理上是不可能实现的。例如, 对于理想的低通滤波器, 它的单位脉冲响应从  $-\infty$  到  $+\infty$  都有非零值, 是无限长、非因果的。在实际工作中, 设计出的滤波器都是在某些准则下对理想滤波器的近似, 这样虽然不能达到理想的滤波效果, 但是保证了滤波器是物理可实现的, 即是因果且稳定的系统。

图 6-2 中频率变量以数字频率  $\omega (\omega = \Omega T_s = \Omega / f_s, \Omega$  为模拟角频率,  $T_s$  为采样间隔,  $f_s$  为采样频率) 来表示, 所以, 数字滤波器设计中必须确定采样频率  $f_s$ 。需要说明的是, 图中给出了  $-2\pi \sim 2\pi$  之间的幅度特性, 但是, 根据奈奎斯特采样定理, 频率特性只能限制于折叠频率  $\omega_s/2 = \pi$  范围之内, 通常仅考虑  $-\pi \sim \pi$  之间的特性。

对于数字滤波器, 从实现方法上, 有 IIR 数字滤波器和 FIR 数字滤波器两种, 其系统函数分别是

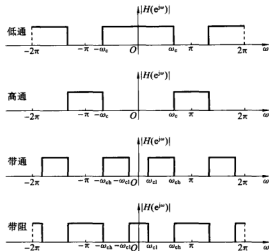


图 6-2 四种理想数字滤波器的幅频特性

FIR 数字滤波器

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (6-3)$$

IIR 数字滤波器

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (6-4)$$

这两类滤波器无论从性质上还是在设计方法上都有很大的区别。FIR 数字滤波器可以根据给定的频率特性直接进行设计,而 IIR 数字滤波器最通用的设计方法是利用已经成熟的模拟滤波器的设计方法来进行设计。

### 6.1.2 滤波器的技术指标

一般来说,滤波器的技术指标往往以频率响应的幅度特性的允许误差来表征。

6.1.1 指出,理想的滤波器物理上是不可实现的,不可实现的根本原因是从一个频带到另一个频带之间的突变。为了物理可实现,从一个频带到另一个频带之间应有过渡区间,且通带和阻带内的取值也不应该严格为 1 或 0,应该给以较小的容限。图 6-3 所示的是可实现的低通滤波器的幅度特性。在通带内,幅度响应以误差  $\epsilon_p$  逼近于 1,在阻带中,幅度响应以误差小于  $\epsilon_s$  而逼近于 0。 $\omega_p$  为通带截止频率, $\omega_s$  为阻带截止频率, $\omega_s - \omega_p$  为过渡带,在过渡带内,频率响应平滑地从通带下降到阻带。

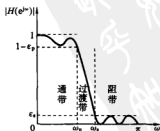


图 6-3 实际的低通滤波器幅频特性



在实际的工程应用中,设计滤波器所给定的技术指标往往是通带允许的最大衰减  $\delta_p$  及阻带应达到的最小衰减  $\delta_s$ 。 $\delta_p$ 、 $\delta_s$  的定义及与  $\epsilon_p$ 、 $\epsilon_s$  的关系为

$$\delta_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j\omega_p})|}{|H(e^{j\omega_s})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| = -20 \lg (1 - \epsilon_p) \quad (6-5a)$$

$$\delta_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j\omega_p})|}{|H(e^{j\omega_s})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| = -20 \lg \epsilon_s \quad (6-5b)$$

其中,假定  $|H(e^{j\omega})| = 1$  已被归一化了。例如,当  $|H(e^{j\omega})|$  在  $\omega_p$  处下降为 0.707 时,则  $\delta_p = 3$  dB,在  $\omega_s$  处下降为 0.001 时,  $\delta_s = 60$  dB。

滤波器频率响应的相位特性也是滤波器的重要性能指标,对于相位特性

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]}{\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})]} \quad (6-6)$$

其中,  $\operatorname{Im}[\ ]$  表示取虚部,  $\operatorname{Re}[\ ]$  表示取实部。从信号不失真角度讲,通常要求  $\varphi(\omega)$  具有线性特性,即

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega \text{ 或 } \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \text{ 为常数}$$

IIR 数字滤波器难以满足严格的线性相位特性,FIR 数字滤波器能实现严格的线性相位特性。

滤波器的技术指标一般是根据实际要求加以确定的,这些技术指标是滤波器设计的出发点和依据,也是检验设计出的滤波器是否满足要求的标准,脱离了具体的技术指标,滤波器的设计将毫无意义。

### 6.1.3 IIR 数字滤波器的设计方法

无论是 IIR 数字滤波器还是 FIR 数字滤波器的设计都包括三个基本问题:

- (1) 根据实际需要确定滤波器的技术指标;
- (2) 设计一个因果稳定的系统,使其系统函数逼近所需要的技术指标;
- (3) 利用有限精度算法来实现这个系统函数,包括选择运算结构(如第 5 章的各种运算结构)、选择合适的字长及有效数字的处理方法(舍入、截尾等)(这将在第 8 章讨论)。

本章和第 7 章讨论第二个问题,即逼近性能要求或系统函数的设计。

如式(6-4)所示,IIR 数字滤波器的系统函数可表示为  $z^{-1}$  的有理分式的形式,重写如下

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

一般满足  $M \leq N$ ,这类系统称为  $N$  阶系统。IIR 数字滤波器的设计,就是确定系统函数的阶数  $N$ ,并求出滤波器的各系数  $a_k$  和  $b_k$ ,使得系统的频率特性满足技术指标

的要求,通常有两种方法。

### 1. 利用模拟滤波器的理论来进行设计

由于模拟滤波器理论已很成熟,有许多严谨的设计公式和大量的图表可以利用,可用这些已有的技术来解决数字滤波器的设计问题。

首先要设计一个合适的模拟滤波器,然后将其变换为满足预定指标的数字滤波器。这种方法适合于设计幅度特性比较规则的滤波器,如低通、高通、带通、带阻滤波器,这种方法是本章重点介绍的内容。

本方法的关键就是如何将模拟滤波器的系统函数  $H(s)$  转换为数字滤波器的系统函数  $H(z)$ ,即如何实现  $s$  平面到  $z$  平面的映射,在映射过程中,必须满足两个条件。

(1) 必须保证模拟频率映射为数字频率,且保证二者的频率特性基本一致。这就要求变换  $s$  平面的虚轴  $j\Omega$  映射到  $z$  平面的单位圆 ( $z=e^{j\omega}$ ) 上,且数字滤波器的频率响应和模拟滤波器的频率响应基本保持不变;

(2) 保证将因果、稳定的模拟滤波器转换为数字滤波器后,仍然是因果、稳定的。这就要求  $s$  平面左半平面的极点必须映射到  $z$  平面的单位圆内。

有许多方法可以实现这种映射,本章将介绍两种常用的映射方法:一种是从时域的角度出发进行映射,称为脉冲响应不变法;另一种是从频域的角度出发进行映射,称为双线性变换法。

### 2. 计算机辅助设计法

如果要设计的滤波器的幅频特性是任意的或者是形状比较复杂的,则借助模拟滤波器的方法就比较困难,这时可以采用计算机辅助设计法进行优化设计。

首先要确定一种最优准则,如均方误差最小准则、最大误差最小准则等。若所希望的滤波器的幅度响应为  $|H_d(e^{j\omega})|$ ,所设计出的实际滤波器的幅度响应为  $|H(e^{j\omega})|$ ,如采用均方误差最小准则,设  $|H_d(e^{j\omega})|$  与  $|H(e^{j\omega})|$  在指定的一组离散的频率点  $\omega_i (i=1, 2, \dots, M)$  上的均方误差为

$$\epsilon^2 = \sum_{i=1}^M [|H_d(e^{j\omega_i})| - |H(e^{j\omega_i})|]^2$$

然后,通过调整系统函数的系数  $a_k$  和  $b_k$ ,分别计算  $\epsilon^2$ ,最后求出使  $\epsilon^2$  最小的一组系数  $a_k$  和  $b_k$ ,就可完成设计。这种设计一般得不到闭合形式的系统函数表达式,在滤波器的阶数较高时,上述问题实际上是一个多变量最优化问题,需要进行大量的迭代运算,故离不开计算机。

本书主要介绍利用模拟滤波器的理论来设计数字滤波器的方法。

## 6.2 模拟低通滤波器的设计

在具体介绍利用模拟滤波器的理论来设计数字滤波器的方法之前,先简单介绍

模拟滤波器设计的一些基本概念,并介绍两种常用的模拟滤波器:巴特沃斯(Butterworth)滤波器和切比雪夫(Chebyshev) I 型滤波器的设计方法。

## 6.2.1 概述

给定模拟低通滤波器的技术指标  $\delta_p$ 、 $\delta_s$ 、 $\Omega_p$  及  $\Omega_s$ , 其中,  $\delta_p$  为通带允许的最大衰减,  $\delta_s$  为阻带应达到的最小衰减,  $\delta_p$  和  $\delta_s$  的单位为 dB,  $\Omega_p$  为通带上限模拟角频率(也叫通带截止频率),  $\Omega_s$  为阻带下限模拟角频率(也叫阻带截止频率)。现希望设计一个低通滤波器, 其系统函数为

$$H(s) = \frac{d_0 + d_1 s + \cdots + d_{N-1} s^{N-1} + d_N s^N}{c_0 + c_1 s + \cdots + c_{N-1} s^{N-1} + c_N s^N} \quad (6-7)$$

其对数幅度响应  $10\lg|H(j\Omega)|^2$  (其中,  $H(j\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega}$ ) 在  $\Omega_p$ 、 $\Omega_s$  处分别达到  $\delta_p$ 、 $\delta_s$  的要求。

$\delta_p$ 、 $\delta_s$  都是  $\Omega$  的函数, 它们的大小取决于  $|H(j\Omega)|$  的形状, 为此, 定义一个衰减函数  $\delta(\Omega)$

$$\delta(\Omega) = 10\lg \left| \frac{X(j\Omega)}{Y(j\Omega)} \right|^2 = 10\lg \frac{1}{|H(j\Omega)|^2} = -10\lg |H(j\Omega)|^2 \quad (6-8)$$

$$\text{或} \quad |H(j\Omega)|^2 = 10^{-\delta(\Omega)/10} \quad (6-9)$$

显然, 有  $\delta_p = \delta(\Omega_p) = -10\lg |H(j\Omega_p)|^2$ ,  $\delta_s = \delta(\Omega_s) = -10\lg |H(j\Omega_s)|^2$ , 这样式(6-8)把模拟低通滤波器的四个技术指标和滤波器的幅度平方特性联系了起来。如果能由  $\delta_p$ 、 $\delta_s$ 、 $\Omega_p$  及  $\Omega_s$  求出  $|H(j\Omega)|^2$ , 再由  $|H(j\Omega)|^2$  就有可能求出所需要的  $H(s)$ 。

为了由幅度平方特性  $|H(j\Omega)|^2$  求得模拟滤波器的系统函数  $H(s)$ , 可以利用实函数的傅里叶变换存在共轭对称性的性质

$$H^*(j\Omega) = H(-j\Omega)$$

所以有

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega) = H(j\Omega)H(-j\Omega) \quad (6-10)$$

由于  $j\Omega$  代表  $s$  平面的虚轴, 故利用解析延拓可得

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) \Big|_{s=j\Omega} = H(s)H(-s) \quad (6-11)$$

为了得到因果、稳定的实有理系统函数, 从幅度平方特性求得所需的系统函数的方法如下:

- (1) 解析延拓, 令  $s = j\Omega$  代入  $|H(j\Omega)|^2$ , 得到  $H(s)H(-s)$ , 并求其零点;
- (2) 取  $H(s)H(-s)$  所有在左半平面的极点作为  $H(s)$  的极点;
- (3) 按需要的相位条件(如最小相位、混合相位等)取  $H(s)H(-s)$  一半的零点作为  $H(s)$  的零点。

显然, 幅度平方特性  $|H(j\Omega)|^2$  在模拟滤波器的设计中起到了重要的作用。目前, 已经有几种不同类型的  $|H(j\Omega)|^2$  表达式, 它们代表了几种不同类型的滤波器, 如巴特沃斯滤波器、切比雪夫 I 型滤波器、切比雪夫 II 型滤波器、椭圆滤波器等。

由于每一个滤波器的频率范围将直接取决于设计者的应用目的,因此应是千差万别的。为了设计规范化,需要将滤波器的频率参数作归一化处理,归一化的基准频率通常选用通带截止频率  $\Omega_p$ 。设所给的实际频率为  $\Omega$ ,归一化后的频率为

$$\lambda = \Omega / \Omega_p \quad (6-12)$$

显然,  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_s = \Omega_s / \Omega_p$ 。并令归一化复数变量为  $p$ ,  $p = j\lambda$ , 显然可以得出归一化后的复数变量  $p$  与归一化前的复数变量  $s$  之间的关系为

$$p = j\lambda = j\Omega / \Omega_p = s / \Omega_p \quad (6-13)$$

## 6.2.2 巴特沃斯模拟低通滤波器的设计

巴特沃斯滤波器的幅度平方特性为

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (6-14)$$

其中,  $\Omega_c$  为通带 3 dB 截止频率,  $N$  为待定的滤波器阶数。因此,要得到  $|H(j\Omega)|^2$ , 必须确定  $\Omega_c$  和  $N$ 。

令  $\lambda = \Omega / \Omega_c$ , 即以通带 3 dB 截止频率  $\Omega_c$  为基准归一化处理, 则模平方函数变为

$$|H(\lambda)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^{2N}} \quad (6-15)$$

由式(6-8)及式(6-9), 有

$$\delta(\lambda) = 10 \lg(1 + \lambda^{2N})$$

则

$$\lambda^{2N} = 10^{\delta(\lambda)/10} - 1$$

即

$$\lambda_p^{2N} = 10^{\delta_p/10} - 1$$

$$\lambda_s^{2N} = 10^{\delta_s/10} - 1$$

所以, 有

$$N = \lg \sqrt{\frac{10^{\delta_s/10} - 1}{10^{\delta_p/10} - 1}} / \lg(\lambda_s / \lambda_p) = \lg \sqrt{\frac{10^{\delta_s/10} - 1}{10^{\delta_p/10} - 1}} / \lg(\Omega_s / \Omega_p) \quad (6-16)$$

将  $\Omega = \Omega_p$ ,  $\Omega = \Omega_s$  代入式(6-15)并由式(6-9)可得

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p / \Omega_c)^{2N}} = 10^{-\delta_p/10} \quad (6-17a)$$

$$|H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}} = 10^{-\delta_s/10} \quad (6-17b)$$

因此, 得

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{\delta_p/10} - 1}} \quad (6-18a)$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{\delta_s/10} - 1}} \quad (6-18b)$$

式(6-16)计算出的  $N$  可能为小数, 实际中要取大于它的整数。将计算出的  $N$  值代入式(6-18a)或式(6-18b)就可以求出  $\Omega_c$ , 式(6-18a)和式(6-18b)计算出的结果可

能不一致。在实际中常用式(6-18b)来确定 $\Omega_c$ ,由式(6-18b)求解可以保证在 $\Omega_c$ 处能恰好满足阻带衰减要求,同时,在 $\Omega_p$ 处的特性将超出通带衰减要求,可以在 $\Omega_p$ 处留有一定的余量。如采用式(6-18a)来确定 $\Omega_c$ ,则可以保证在 $\Omega_p$ 处能恰好满足通带衰减要求,同时在 $\Omega_c$ 处的特性将超出阻带衰减要求。

当 $\delta_p=3$  dB,即 $\Omega_p=\Omega_c$ 为3 dB截止频率时, $\lambda_p=1$ ,根据式(6-16),这时参数 $N$ 为

$$N = \lg \sqrt{10^{\delta_s/10} - 1} / \lg \lambda_p \quad (6-19)$$

下面简单讨论归一化巴特沃斯低通滤波器幅频特性的一些特点。

(1) 当 $\Omega=0$ 时, $\lambda=0$ , $|H(j\lambda)|^2=1$ ,即在 $\Omega=0$ 处无衰减。

(2) 当 $\Omega=\Omega_c$ 时, $\lambda=1$ , $|H(j\lambda)|^2=0.5$ , $\delta=3$  dB。

(3) 当 $\lambda$ 由0增加到1时, $|H(j\lambda)|^2$ 单调减少, $\delta(\Omega)$ 单调增加, $N$ 越大, $|H(j\lambda)|^2$ 减小得越慢,即在通带内 $|H(j\lambda)|^2$ 越平坦。

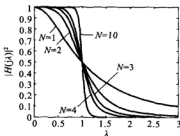


图 6-4  $N$  取不同值时巴特沃斯滤波器的 $|H(j\lambda)|^2$  曲线

(4) 当 $\Omega>\Omega_c$ ,即 $\lambda>1$ 时, $|H(j\lambda)|^2$ 也随着 $\lambda$ 的增加而单调减小,但因 $\lambda>1$ ,所以这时比通带内衰减速度快, $N$ 越大,衰减速度越快,当 $\lambda=\lambda_p$ 时, $\delta(\Omega)=\delta_s$ 。 $|H(j\lambda)|^2$ 随 $N$ 取不同值时的曲线如图 6-4 所示。

因为 $p=j\lambda$ ,由式(6-15),有

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1+(p/j)^{2N}} = \frac{1}{1+(-1)^N p^{2N}} \quad (6-20)$$

为求其极点,令 $1+(-1)^N p^{2N}=0$

$$\text{解得} \quad p_k = e^{j(2k+N-1)\pi/2N}, \quad k=1,2,\dots,2N \quad (6-21)$$

这样, $H(p)H(-p)$ 的 $2N$ 个极点等间隔地分布在 $s$ 平面半径为1的单位圆上,相距为 $\pi/N$ 弧度。 $N=3$ 和 $N=4$ 时的极点分布如图 6-5 所示。

图 6-5(a)表明,当 $N=3$ 时, $H(p)H(-p)$ 共有6个极点,均匀地分布在单位圆上,极点间的间隔为 $\pi/3$ ,在 $s$ 平面的左半平面和右半平面各有3个极点。图 6-5(b)表明,当 $N=4$ 时, $H(p)H(-p)$ 共有8个极点,均匀地分布在单位圆上,极点间的间隔为 $\pi/4$ ,在 $s$ 平面的左半平面和右半平面各有4个极点。

为了保证所设计的滤波器是稳定的,因此,把左半平面的极点赋与 $H(p)$ ,即

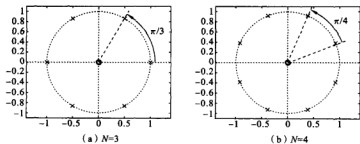
$$p_k = e^{j(2k+N-1)\pi/2N}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (6-22)$$

这样就有

$$H(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_N)} \quad (6-23)$$

即得到了归一化的系统函数 $H(p)$ 。

根据式(6-13)归一化后的变量 $p$ 和归一化前的变量 $s$ 的关系,在求得 $H(p)$ 后,

图 6-5  $N$  取不同值时的极点分布

用  $s/\Omega_c$  代替变量  $p$ , 即得到实际需要的系统函数  $H(s)$

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\Omega_c} \quad (6-24)$$

这就完成了模拟滤波器的设计。

上述推导过程是以通带 3 dB 截止频率  $\Omega_c$  为基准归一化处理后的设计过程,但是,往往有时通带截止频率  $\Omega_p$  处的衰减并不为 3 dB。下面在上述过程的基础上,推导用任意通带截止频率  $\Omega_p$  来归一化处理的设计过程。

将式(6-14)变为

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \cdot \frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (6-25)$$

令  $\lambda = \Omega/\Omega_p$ , 则有  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_c = \Omega_c/\Omega_p$ , 因此, 式(6-25)可表示为

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{2N}} \quad (6-26)$$

依据式(6-16)有

$$N = \lg \sqrt{\frac{10^{0.5/\lambda_c^{2N}} - 1}{10^{0.5/\lambda_p^{2N}} - 1}} / \lg(\lambda_c) \quad (6-27)$$

根据式(6-18b)求解出的  $\Omega_c$  可得

$$\lambda_c = \frac{\Omega_c}{\Omega_p} = \frac{\Omega_s/\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.5/\lambda_p^{2N}} - 1}} = \frac{\lambda_s}{\sqrt[2N]{10^{0.5/\lambda_p^{2N}} - 1}} \quad (6-28)$$

式(6-24)的变量代换关系为

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\Omega_c} = H(p) \Big|_{p=s/\Omega_p \cdot \Omega_p/\Omega_c} = H(p) \Big|_{p=s/\lambda_c \Omega_p} \quad (6-29)$$

即变量代换的关系式中要除以  $\lambda_c$ 。显然, 这时的通带截止频率并不限定于 3 dB 截止频率, 可以是任意衰减的通带截止频率, 3 dB 截止频率是  $\lambda_c = 1$  的特殊情况。这样的处理在设计低通滤波器时显示不出其优点, 但是在设计高通、带通、带阻滤波器时, 如果通带衰减不是 3 dB 将十分有用, 这将在后面详细介绍。

因此, 可总结出巴特沃斯模拟低通滤波器的设计过程如下。

- (1) 归一化处理。即令  $\lambda = \Omega/\Omega_p$ , 根据已知的  $\Omega_p, \Omega_s$ , 则有  $\lambda_p = 1, \lambda_s = \Omega_s/\Omega_p$ 。
- (2) 求解  $\lambda_c$  和阶数  $N$ 。根据式(6-27)求解阶数  $N$ , 根据式(6-28)求解  $\lambda_c$ 。
- (3) 构造归一化系统函数  $H(p)$ 。 $H(p)$  的极点为  $p_k = e^{j(2k+N-1)\pi/2N}$ ,  $k=1, 2, \dots, N$ 。则有

$$H(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_N)}$$

- (4) 得到滤波器的系统函数  $H(s)$ 。由式(6-29)可得系统函数为

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\lambda_p \Omega_p}$$

**例 6-1** 试设计一模拟巴特沃斯低通滤波器, 要求通带截止频率  $f_p = 5\,000$  Hz, 通带最大衰减  $\delta_p = 3$  dB, 阻带起始频率  $f_s = 10\,000$  Hz, 阻带最小衰减  $\delta_s = 30$  dB。

**解** 因为  $\delta_p = 3$  dB,  $\Omega_c = \Omega_p$ , 首先, 将频率归一化, 有

$$\Omega_p = 2\pi \times f_p = 10\,000\pi \text{ Hz}, \quad \Omega_s = 2\pi \times f_s = 20\,000\pi \text{ Hz}, \quad \lambda_p = \lambda_c = 1, \quad \lambda_s = 2$$

因为  $\delta_p = 3$  dB, 所以由式(6-27)有

$$N = \lg \sqrt{10^{\delta_s/10} - 1} / \lg \lambda_s = \lg \sqrt{10^3 - 1} / \lg 2 = 4.982, \quad \text{取 } N = 5$$

由式(6-21)得 5 个极点分别是

$$p_1 = e^{j3\pi/5}, \quad p_2 = e^{j4\pi/5}, \quad p_3 = -1, \quad p_4 = e^{j6\pi/5}, \quad p_5 = e^{j7\pi/5}$$

这样由式(6-23)得

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+0.618p+1)(p^2+1.618p+1)}$$

最后得到滤波器得系统函数为

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\lambda_p \Omega_p} = \frac{1}{(s+10^4\pi)(s^2+0.618\pi \times 10^4 s + 10^8 \pi^2)(s^2+1.618\pi \times 10^4 \pi + 10^8 \pi^2)}$$

设计出的模拟滤波器的幅度响应如图 6-6 所示, 在通带截止频率 5 000 Hz 处, 衰减为 2.999 dB, 在阻带截止频率 10 000 Hz 处, 衰减为 30.09 dB, 满足了所指定的设计指标要求。

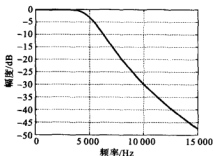


图 6-6 例 6-1 滤波器的幅度响应

由图 6-6 可以看出, 巴特沃斯滤波器的幅频特性在整个频率范围内都是单调下降的, 在满足给定的模拟低通滤波器的技术指标  $\delta_p, \delta_s, \Omega_p$  及  $\Omega_s$  时, 则在频带的其他地方就会超过指标要求, 因而设计出的滤波器的阶数就偏大。

为了使得滤波器的设计过程简单化和标准化, 一般确定滤波器的阶数  $N$  后, 可通过查表得到归一化后的系统函数的分母多项式(见表 6-1)及其因式分解形式(见表

6-2)。这样,巴特沃斯低通滤波器的设计过程,就简化为在确定出 $\lambda_c$ 和阶数 $N$ 后,直接查表得到归一化滤波器的系统函数,然后再通过变量代换得到所需的滤波器。因此在例6-1中,确定出阶数 $N=5$ 后,可以直接查表6-1或表6-2,得出归一化巴特沃斯低通滤波器的系统函数,而不需要再求解其极点,设计过程将大为简化。

表6-1 归一化巴特沃斯分母多项式

$N$	分母多项式
2	$1+1.4142p+p^2$
3	$1+2p+2p^2+p^3$
4	$1+2.6131p+3.4142p^2+2.6131p^3+p^4$
5	$1+3.2361p+5.2361p^2+5.2361p^3+3.2361p^4+p^5$
6	$1+3.8637p+7.4641p^2+9.1416p^3+7.4641p^4+3.8637p^5+p^6$
7	$1+4.4940p+10.0978p^2+14.5920p^3+14.5920p^4+10.0978p^5+4.4940p^6+p^7$
8	$1+5.1528p+13.1371p^2+21.8462p^3+25.6884p^4+21.8462p^5+13.1371p^6+5.1528p^7+p^8$
9	$1+5.7588p+16.5817p^2+31.1634p^3+41.9864p^4+41.9864p^5+31.1634p^6+16.5817p^7+5.7588p^8+p^9$

表6-2 归一化巴特沃斯分母多项式因式分解结果

$N$	分母多项式因式分解
1	$p+1$
2	$p^2+1.4142p+1$
3	$(p+1)(p^2+p+1)$
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$
5	$(p+1)(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)$
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4120p+1)(p^2+1.9319p+1)$
7	$(p+1)(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)$
8	$(p^2+0.3029p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$
9	$(p+1)(p^2+0.3473p+1)(p^3+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8794p+1)$

**例6-2** 试设计一模拟巴特沃斯低通滤波器,要求通带截止频率 $f_p=100\text{ Hz}$ ,通带最大衰减 $\delta_p=1\text{ dB}$ ,阻带起始频率 $f_s=300\text{ Hz}$ ,阻带最小衰减 $\delta_s=20\text{ dB}$ 。

**解** (1) 归一化处理,得

$$\Omega_p = 2\pi \times f_p = 200\pi, \quad \Omega_s = 2\pi \times f_s = 600\pi, \quad \lambda_p = 1, \quad \lambda_s = 3$$

(2) 求解 $\lambda_c$ 和阶数 $N$ 。

根据式(6-27)有



$$N = \lg \sqrt{\frac{10^{8_s/10} - 1}{10^{8_p/10} - 1}} / \lg(\lambda_s) = \lg \sqrt{\frac{10^2 - 1}{10^{0.1} - 1}} / \lg 3 = 2.7063, \quad \text{取 } N = 3$$

根据式(6-28)有

$$\lambda_c = \frac{\lambda_s}{\sqrt[2N]{10^{8_s/10} - 1}} = \frac{3}{\sqrt[6]{10^2 - 1}} = 1.3948$$

(3) 查表 6-1 得 3 阶归一化巴特沃斯模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

(4) 得到滤波器的系统函数为

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\lambda_c} = \frac{6.7309 \times 10^8}{s^3 + 1.7528 \times 10^3 s^2 + 1.5361 \times 10^6 s + 6.7309 \times 10^8}$$

设计出的模拟滤波器的幅度响应如图 6-7 所示,在通带截止频率 100 Hz 处,衰减为 0.5319 dB,在阻带截止频率 300 Hz 处,衰减为 20.01 dB,满足所指定的设计指标要求。

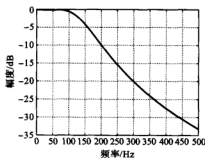


图 6-7 例 6-2 滤波器的幅度响应

### 6.2.3 切比雪夫 I 型模拟低通滤波器的设计

切比雪夫 I 型模拟低通滤波器的幅度平方特性为

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\Omega)} \quad (6-30)$$

其中,  $\epsilon$  为小于 1 的正数,是控制通带纹波大小的一个参数,  $\epsilon$  越大,通带纹波也越大。

$C_N(\Omega)$  是  $N$  阶切比雪夫多项式,定义为

$$C_N(\Omega) = \begin{cases} \cos[N \arccos \Omega], & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arccosh} \Omega], & |\Omega| > 1 \end{cases} \quad (6-31)$$

其中,  $\cosh$  为双曲余弦函数,  $\operatorname{arccosh}$  为反双曲余弦函数。

以上多项式可由下式得到

$$C_{N+1}(\Omega) = 2\Omega C_N(\Omega) - C_{N-1}(\Omega), \quad N \geq 1 \quad (6-32)$$

例如,当  $|\Omega| \leq 1$  时,有

$$\begin{aligned}
 C_0(\Omega) &= \cos^0 \Omega = 1, & C_1(\Omega) &= \cos[\arccos \Omega] = \Omega \\
 C_2(\Omega) &= 2\Omega^2 - 1, & C_3(\Omega) &= 4\Omega^3 - 3\Omega \\
 C_4(\Omega) &= 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1, & C_5(\Omega) &= 16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega
 \end{aligned}$$

图 6-8 画出了  $N=0, 1, 2, 3, 4, 5$  时切比雪夫多项式特性曲线。由图可知, 在  $|\Omega| \leq 1$  时, 切比雪夫多项式具有等纹波幅度特性, 且具有  $N$  个过零点。

与 6.2.2 相同, 在切比雪夫滤波器设计时, 也采用频率归一化的方法, 令  $\lambda = \Omega/\Omega_p$  以  $\Omega_p$  为基准归一化处理, 式(6-31)的变量换成归一化频率  $\lambda$ , 切比雪夫多项式为

$$C_N(\lambda) = \begin{cases} \cos[N \arccos \lambda], & |\lambda| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arccosh} \lambda], & |\lambda| > 1 \end{cases} \quad (6-33)$$

$\lambda=1$  时对应  $\Omega=\Omega_p$ 。由图 6-8 所知, 当  $\lambda \leq 1$ , 即  $\Omega \leq \Omega_p$  时的通带内, 切比雪夫多项式具有等纹波特性, 这样就保证了幅度平方特性

$$|H(j\lambda)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\lambda)} \quad (6-34)$$

在通带内也具有等纹波特性, 因此通带内的衰减呈等纹波均匀分布, 其纹波幅度大小由  $\epsilon$  决定。而在  $\lambda > 1$ , 即  $\Omega > \Omega_p$  通带外,  $\lambda$  增加,  $C_N^2(\lambda)$  单调增加, 则  $|H(j\lambda)|^2$  单调下降, 图 6-9 给出了  $N=2, 3, 4, 5, 6$  时  $|H(j\lambda)|^2$  的曲线。

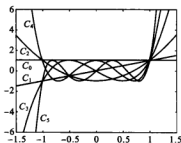


图 6-8 切比雪夫多项式特性

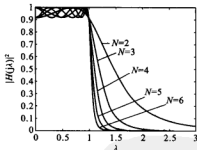


图 6-9  $N$  取不同值时切比雪夫 I 型滤波器的  $|H(j\lambda)|^2$  曲线 ( $\epsilon=0.3$ )

切比雪夫模拟低通滤波器的设计与巴特沃斯滤波器的设计一样, 也分为三个步骤进行。

(1) 将频率归一化, 得到归一化的幅度平方特性(式(6-34)所示)。

(2) 求  $\epsilon$  和  $N$ 。

由式(6-8)及式(6-9), 有

$$\delta(\lambda) = 10 \lg[1 + \epsilon^2 C_N^2(\lambda)]$$

则

$$\epsilon^2 C_N^2(\lambda) = 10^{\delta(\lambda)/10} - 1$$

即

$$\epsilon^2 C_N^2(\lambda_p) = 10^{\delta_p/10} - 1$$

$$\epsilon^2 C_N^2(\lambda_s) = 10^{\delta_s/10} - 1 = \epsilon^2 \cosh^2[N \operatorname{arccosh} \lambda_s]$$

因为  $\lambda_p = 1$ ,  $C_N^2(1) = 1$ , 所以有

$$\epsilon^2 = 10^{A_p/10} - 1 \quad (6-35)$$

所以有  $\cosh^2[\text{Narcosh}\lambda_s] = \frac{10^{A_s/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}$ , 则有

$$N = \frac{\text{arcosh}\left(\sqrt{\frac{10^{A_s/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}}\right)}{\text{arcosh}\lambda_s} \quad (6-36)$$

(3) 确定  $H(s)$ 。

因为  $p = j\lambda$ , 所以归一化的系统函数  $H(p)$  与  $H(-p)$  之积为

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(p/j)} \quad (6-37)$$

其极点  $p_k$  应满足

$$1 + \epsilon^2 C_N^2(-jp) = 0$$

上式又可写成

$$\cos[\text{Narccos}(-jp)] = \pm j/\epsilon$$

为求解该方程, 定义

$$\varphi = \arccos(-jp), \quad \text{即} \quad p = j\cos\varphi$$

显然,  $\varphi$  应是复数, 令  $\varphi = \varphi_1 + j\varphi_2$ , 由三角恒等公式及欧拉公式有

$$p = j\cos(\varphi_1 + j\varphi_2) = \sin\varphi_1 \sinh\varphi_2 + j\cos\varphi_1 \cosh\varphi_2 \quad (6-38a)$$

$$\cos(N\varphi) = \cos(N\varphi_1) \cosh(N\varphi_2) - j\sin(N\varphi_1) \sinh(N\varphi_2) = \pm j/\epsilon \quad (6-38b)$$

令式(6-38b)等号两侧实部与实部相等, 虚部与虚部相等, 得

$$\cos(N\varphi_1) \cosh(N\varphi_2) = 0 \quad (6-39a)$$

$$\sin(N\varphi_1) \sinh(N\varphi_2) = \pm 1/\epsilon \quad (6-39b)$$

故有

$$\cos(N\varphi_1) = 0$$

$$N\varphi_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad \text{或} \quad \varphi_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2N}$$

将  $N\varphi_1$  代入式(6-39b)可得

$$\sinh(N\varphi_2) \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\right] = \pm 1/\epsilon$$

因为  $\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\right] = \pm 1$ , 所以有

$$\sinh(N\varphi_2) = 1/\epsilon, \quad N\varphi_2 = \text{arsinh}(1/\epsilon), \quad \varphi_2 = \frac{1}{N} \text{arsinh}(1/\epsilon)$$

将  $\varphi_1, \varphi_2$  代入式(6-38a), 可得  $H(p)H(-p)$  的极点为

$$p_k = \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right] \sinh\left[\frac{1}{N} \text{arsinh}(1/\epsilon)\right] + j\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right] \cosh\left[\frac{1}{N} \text{arsinh}(1/\epsilon)\right], \quad (6-40)$$

其中,  $k = 1, 2, \dots, 2N$ 。如果令  $p_k = \sigma_k + j\gamma_k$ , 则可得

$$\left[\frac{\sigma_k}{\sinh \varphi_2}\right]^2 + \left[\frac{\gamma_k}{\cosh \varphi_2}\right]^2 = 1$$

这是一个椭圆方程,它说明切比雪夫 I 型低通滤波器的极点的实部和虚部满足椭圆方程,即  $p_k$  落在椭圆圆周上。

由式(6-40)求出的  $2N$  个极点中,把左半平面的一半极点赋与  $H(p)$ 。规定  $\varphi_2 > 0, k=1, 2, \dots, N$ , 那么

$$p_k = \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right] \sinh\left[\frac{1}{N} \operatorname{arsinh}(1/\epsilon)\right] + j \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right] \cosh\left[\frac{1}{N} \operatorname{arsinh}(1/\epsilon)\right] \quad (6-41)$$

其中,  $k=1, 2, \dots, N$ , 上式的实部小于零,即这  $N$  个极点属于  $H(p)$ 。考虑到切比雪夫多项式首项系数的特点,最后有

$$H(p) = \frac{1}{\epsilon \times 2^{N-1} \prod_{k=1}^N (p - p_k)} \quad (6-42)$$

得到的实际系统函数为

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\Omega_p} = \frac{\Omega_p^N}{\epsilon \times 2^{N-1} \prod_{k=1}^N (s - p_k \Omega_p)} \quad (6-43)$$

**例 6-3** 设计一个切比雪夫 I 型低通滤波器,通带截止频率  $f_p = 3$  MHz,阻带起始频率  $f_s = 12$  MHz,通带衰减要求小于 0.1 dB,阻带衰减应大于 60 dB。

**解** 首先,将频率归一化,得  $\lambda_p = 1, \lambda_s = 4$ 。

由式(6-35)有

$$\epsilon^2 = 10^{0.1/10} - 1 = 0.023\ 3, \quad \epsilon = 0.152\ 6$$

由式(6-36)可得

$$N = \frac{\operatorname{arcosh} \delta}{\operatorname{arcosh} \lambda_s} = 4.6, \quad \text{取 } N = 5$$

按式(6-38)~式(6-41)求出极点  $p_k$ ,得到归一化后得系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{2^4 \epsilon (p + 0.539\ 8)(p^2 + 0.333\ 1p + 1.194\ 9)(p^2 + 0.872\ 0p + 0.635\ 9)}$$

最后,求得的实际系统函数为

$$\begin{aligned} H(s) &= H(p) \Big|_{p=s/\Omega_p} \\ &= \frac{0.974\ 9 \times 10^{16}}{(s + 1.015\ 8 \times 10^7)(s^2 + 6.278\ 8 \times 10^6 s + 4.245\ 9 \times 10^{14})} \\ &\quad \times \frac{1}{(s^2 + 1.643\ 7 \times 10^7 s + 2.259\ 5 \times 10^{14})} \end{aligned}$$

设计出的模拟滤波器的幅频特性如图 6-10(a)所示。图 6-10(a)表明在通带截止频率 3 MHz 处衰减为 0.197 dB,大于 0.1 dB,在阻带截止频率 12 MHz 处,衰减为 67.37 dB,满足设计要求。图 6-10(b)是放大后通带的幅频特性(绝对值),显然,切比雪夫滤波器在通带具有等纹波特性。

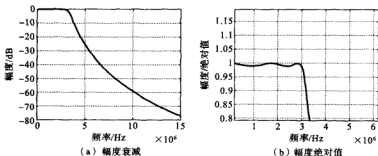


图 6-10 例 6-3 滤波器的幅频响应

切比雪夫模拟低通滤波器和巴特沃斯模拟低通滤波器一样,归一化后的常用系数  $\epsilon$  及各阶滤波器的多项式系数都已制成表格和曲线,设计时可以直接查用,无需逐步的计算。通带衰减为 0.5 dB、1 dB、2 dB 和 3 dB 时,滤波器阶数为 7 及以内的切比雪夫 I 型滤波器的系数结果见表 6-3。因此切比雪夫低通滤波器的设计,主要在于确定参数  $\epsilon$  和  $N$ ,然后查表即可。

表 6-3 归一化切比雪夫 I 型分母多项式系数

$\delta_p = 0.5 \text{ dB}, \epsilon = 0.3493114, \epsilon^2 = 0.1220184$	
N	分母多项式
1	$2.8628 + p$
2	$1.5162 + 1.4256p + p^2$
3	$0.7157 + 1.5349p + 1.2529p^2 + p^3$
4	$0.3791 + 1.0255p + 1.7169p^2 + 1.1974p^3 + p^4$
5	$0.1789 + 0.7525p + 1.3096p^2 + 1.9374p^3 + 1.1725p^4 + p^5$
6	$0.0948 + 0.4324p + 1.1719p^2 + 1.5898p^3 + 2.1718p^4 + 1.1592p^5 + p^6$
7	$0.0447 + 0.2821p + 0.7557p^2 + 1.6479p^3 + 1.8694p^4 + 2.4127p^5 + 1.1512p^6 + p^7$
$\delta_p = 1 \text{ dB}, \epsilon = 0.508847, \epsilon^2 = 0.2589254$	
N	分母多项式
1	$1.9652 + p$
2	$1.1025 + 1.0978p + p^2$
3	$0.4913 + 1.2384p + 0.9883p^2 + p^3$
4	$0.2756 + 0.7426p + 1.4539p^2 + 0.9528p^3 + p^4$
5	$0.1228 + 0.5805p + 0.9744p^2 + 1.6888p^3 + 0.9368p^4 + p^5$
6	$0.0689 + 0.3071p + 0.9393p^2 + 1.2021p^3 + 1.9308p^4 + 0.9283p^5 + p^6$
7	$0.0307 + 0.2137p + 0.5486p^2 + 1.3575p^3 + 1.4288p^4 + 2.1761p^5 + 0.9231p^6 + p^7$

续表

$\delta_p = 2\text{dB}, \epsilon = 0.7647831, \epsilon^2 = 0.5848932$	
N	分母多项式
1	$1.3076 + p$
2	$0.6368 + 0.8038p + p^2$
3	$0.3269 + 1.0222p + 0.7378p^2 + p^3$
4	$0.2058 + 0.5168p + 1.2565p^2 + 0.7162p^3 + p^4$
5	$0.0817 + 0.4593p + 0.6395p^2 + 1.4995p^3 + 0.7065p^4 + p^5$
6	$0.0514 + 0.2103p + 0.7715p^2 + 0.8670p^3 + 1.7459p^4 + 0.7012p^5 + p^6$
7	$0.0204 + 0.1661p + 0.3825p^2 + 1.1444p^3 + 1.0392p^4 + 1.9935p^5 + 0.6979p^6 + p^7$
$\delta_p = 3\text{ dB}, \epsilon = 0.9976283, \epsilon^2 = 0.9952632$	
N	分母多项式
1	$1.0024 + p$
2	$0.7079 + 0.6449p + p^2$
3	$0.2506 + 0.9283p + 0.5972p^2 + p^3$
4	$0.1770 + 0.4048p + 1.1691p^2 + 0.5816p^3 + p^4$
5	$0.0626 + 0.0479p + 0.5489p^2 + 1.4150p^3 + 0.5744p^4 + p^5$
6	$0.0442 + 0.1634p + 0.6991p^2 + 0.6909p^3 + 1.6628p^4 + 0.5707p^5 + p^6$
7	$0.0157 + 0.1462p + 0.3000p^2 + 1.0518p^3 + 0.8314p^4 + 1.9116p^5 + 0.5684p^6 + p^7$

## 6.3 IIR 数字低通滤波器的设计

6.2 节讨论了模拟低通滤波器的设计方法,并给出了这些设计完整的计算公式和图表。因此,应尽量地利用这些成果来进行数字滤波器的设计。本节将讨论如何利用模拟滤波器来设计数字滤波器,介绍两种常用的方法——脉冲响应不变法和双线性变换法。

### 6.3.1 脉冲响应不变法设计 IIR 数字低通滤波器

脉冲响应不变法是从已知的模拟滤波器的系统函数出发,求解 IIR 数字滤波器的一种方法。它从时域出发,使求得的数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  等于模拟滤波器的单位冲激响应  $h(t)$  的采样值,即

$$h(n) = h(t) \big|_{t=nT_s} \quad (6-44)$$

其中,  $T_s$  为采样间隔。采用脉冲响应不变法时,得到了模拟滤波器的系统函数  $H(s)$

后,根据拉普拉斯反变换,可求得模拟滤波器的单位冲激响应为

$$h(t) = L^{-1}[H(s)]$$

然后,对  $h(t)$  以  $T_s$  为间隔进行采样得到

$$h(n) = h(nT_s)$$

再对  $h(n)$  进行  $z$  变换就可得到数字滤波器的系统函数  $H(z)$ ,从而完成数字滤波器的设计,下面推具体的设计公式。

设  $H(z)$  和  $H(s)$  分别是  $h(n)$  和  $h(t)$  的  $z$  变换和拉普拉斯变换,即

$$H(z) = Z[h(n)], \quad H(s) = L[h(t)]$$

假定模拟系统函数  $H(s)$  只有单阶极点,且分母多项式的阶次高于分子多项式的阶次(常用的巴特沃斯滤波器和切比雪夫滤波器都能满足这个假设),将  $H(s)$  表示为部分分式形式

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (6-45)$$

其中,  $A_k$  为常数,  $s_k$  为  $H(s)$  的单阶极点。则其拉普拉斯反变换为

$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (6-46)$$

其中,  $u(t)$  为单位阶跃函数。再对  $h(t)$  采样得

$$h(n) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k n T_s} u(n T_s) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T_s})^n u(n) \quad (6-47)$$

对上式取  $z$  变换,得

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T_s} z^{-1}} \quad (6-48)$$

这就是要设计的数字滤波器的系统函数  $H(z)$ 。

$s_k$  为模拟滤波器  $H(s)$  的极点,由式(6-48)可知,  $z_k = e^{s_k T_s}$  为数字滤波器  $H(z)$  的极点。对于稳定的模拟滤波器,其极点  $s_k$  在  $s$  平面的左半平面,即  $s_k$  的实部小于零,显然数字滤波器的极点  $|z_k| = |e^{s_k T_s}| < 1$ ,即数字滤波器的极点位于  $z$  平面的单位圆内,故采用脉冲响应不变法得到的数字滤波器也是稳定的。

根据第1章的采样定理可知,  $h(n)$  的频谱  $H(e^{j\Omega})$  是  $h(t)$  的频谱  $H(j\Omega)$  的周期延拓

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(j\Omega - jk\Omega_s) \quad (6-49)$$

即采样后的频谱是模拟信号频谱  $H(j\Omega)$  以  $\Omega_s = 2\pi/T_s$  为周期的无限延拓。如果模拟滤波器的频率响应是带限于折叠频率  $f_s/2$  ( $f_s = 1/T_s$  为采样频率)之内的,即

$$H(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s} \quad (6-50)$$

则模拟滤波器的频率响应经过周期延拓后不会产生混叠,而且数字滤波器的频率响应才能等于模拟滤波器的频率响应(相差一个常数因子  $1/T_s$ )

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} H(j\Omega) = \frac{1}{T_s} H\left(j \frac{\omega}{T_s}\right), \quad |\omega| < \pi \quad (6-51)$$

否则将会产生混叠。显然,对于高通和带阻滤波器,不能满足式(6-50)的要求,所以,脉冲响应不变法不适合设计高通、带阻等滤波器。

由式(6-51)可知,数字滤波器的频率响应与模拟滤波器的频率响应的差别是多了个常数乘法因子  $1/T_s = f_s$ , 当采样频率很高时,这将会使滤波器的增益很大,这往往是不希望的,为此,可对式(6-44)要作如下修正

$$h(n) = T_s h(t) \Big|_{t=nT_s} \quad (6-52)$$

由 6.2 节可知,在设计模拟低通滤波器时,查表得到的系统函数为归一化的系统函数  $H(p)$ , 要得到实际的滤波器系统函数  $H(s)$  需作如下变量代换

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\Omega_p} \quad (6-53)$$

其中,  $\Omega_p$  为模拟低通滤波器的归一化频率(通带截止角频率)。下面推导直接根据归一化模拟低通滤波器的系统函数  $H(p)$  得到数字滤波器的系统函数  $H(z)$  的公式。

根据式(6-53), 则式(6-45)应变为

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\Omega_p} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(s/\Omega_p) - p_k} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k \Omega_p}{s - p_k \Omega_p} \quad (6-54)$$

其中,  $A_k$  为  $H(p)$  部分分式分解的系数,  $p_k$  为  $H(p)$  的单阶极点, 其拉普拉斯反变换为

$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k \Omega_p e^{p_k \Omega_p t} u(t) \quad (6-55)$$

根据式(6-52), 对  $T_s h(t)$  进行采样得

$$h(n) = \sum_{k=1}^N T_s A_k \Omega_p (e^{p_k \Omega_p T_s})^n u(n) \quad (6-56)$$

再对  $h(n)$  进行  $z$  变换得

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k \Omega_p T_s}{1 - e^{p_k \Omega_p T_s} z^{-1}} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k \omega_p}{1 - e^{p_k \omega_p} z^{-1}} \quad (6-57a)$$

其中,  $\omega_p = T_s \Omega_p$  为数字滤波器的通带截止数字频率。这样, 通过脉冲响应不变法, 就直接根据归一化的低通模拟滤波器系统函数  $H(p)$  得到了 IIR 数字低通滤波器。注意, 对于巴特沃斯滤波器, 要将上式中的  $\omega_p$  乘以系数  $\lambda_c$ 。

脉冲响应不变法设计 IIR 数字低通滤波器的步骤总结如下。

(1) 将已知的数字滤波器指标  $\omega_p$ 、 $\omega_s$ 、 $\delta_p$  及  $\delta_s$  变换为模拟滤波器的频率指标, 即

$$\Omega_p = \omega_p / T_s = \omega_p f_s, \quad \Omega_s = \omega_s / T_s = \omega_s f_s$$

衰减特性指标  $\delta_p$  及  $\delta_s$  不变。

(2) 再按 6.2 节设计模拟低通滤波器的方法求得归一化模拟滤波器的左半平面极点  $p_k$  及系统函数  $H(p)$ , 将  $H(p)$  部分分式分解得到分解系数  $A_k$ 。



(3) 利用式(6-57a)得到数字滤波器的系统函数  $H(z)$ 。如是巴特沃斯滤波器, 则要根据式(6-28)计算  $\lambda_c$ , 并将式中的  $\omega_p$  乘以系数  $\lambda_c$ , 即

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k \lambda_c \Omega_p T_s}{1 - e^{j\lambda_c \Omega_p T_s} z^{-1}} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k \lambda_c \omega_p}{1 - e^{j\lambda_c \omega_p} z^{-1}} \quad (6-57b)$$

**例 6-4** 试用脉冲响应不变法设计一巴特沃斯低通数字滤波器, 通带截止频率  $\omega_p = 0.2\pi$ , 阻带下限频率  $\omega_s = 0.4\pi$ , 通带最大衰减  $\delta_p$  为 3 dB, 阻带最小衰减  $\delta_s$  为 20 dB, 给定  $T_s = 0.001$  s。

**解** (1) 将数字滤波器的技术指标转化为模拟滤波器的技术指标, 得

$$\Omega_p = \omega_p / T_s = 200\pi, \quad \Omega_s = \omega_s / T_s = 400\pi, \quad \delta_p = 3 \text{ dB}, \quad \delta_s = 20 \text{ dB}$$

因为  $\delta_p = 3 \text{ dB}$ , 所以  $\Omega_c = \Omega_p$ 。

(2) 令  $\lambda = \Omega / \Omega_p$  进行归一化, 得  $\lambda_p = \lambda_c = 1, \lambda_s = 2$ , 求阶数  $N$

$$N = \lg \sqrt{10^{\delta_s/10} - 1} / \lg \lambda_s = \lg \sqrt{10^2 - 1} / \lg 2 = 3.3147, \quad \text{取 } N = 4$$

(3)  $N=4$  时左半平面的极点为

$$s_k = e^{j(2k+3)\pi/8}, \quad k=1, 2, 3, 4$$

(4) 求部分分式分解求  $A_k$

$$A_k = \prod_{i=1, i \neq k}^4 \frac{1}{(s_k - s_i)}, \quad k=1, 2, 3, 4$$

(5) 根据式(6-57b)得

$$H(z) = \frac{\pi}{10} \left[ \frac{-1.8478 + 0.8848z^{-1}}{1 - 1.3150z^{-1} + 0.6182z^{-2}} + \frac{1.8478 - 0.4098z^{-1}}{1 - 1.0870z^{-1} + 0.3132z^{-2}} \right]$$

图 6-11 为该滤波器的幅度与相位响应曲线。由图 6-11 可以看出, 巴特沃斯滤波器的幅度特性是单调递减的, 在  $\omega_p = 0.2\pi$  处, 幅度衰减为 1.452 dB; 在  $\omega_s = 0.4\pi$  处, 幅度衰减为 20.1 dB, 均在指标范围内, 满足设计的指标要求。但不具有严格的线性相位特性。

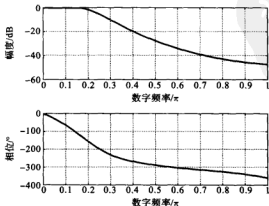


图 6-11 例 6-4 的幅度与相位特性曲线

**例 6-5** 试用脉冲响应不变法设计一巴特沃斯低通数字滤波器, 通带截止频率  $f_p=1$  kHz, 阻带下限频率  $f_s=2.5$  kHz, 通带最大衰减  $\delta_p$  为 2 dB, 阻带最小衰减  $\delta_s$  为 20 dB, 给定  $T_s=0.0001$  s。

**解** (1) 根据已知的模拟频率指标有

$$\omega_p=2\pi f_p T_s=0.2\pi, \quad \delta_p=2 \text{ dB}, \quad \delta_s=20 \text{ dB}$$

(2) 令  $\lambda=\Omega/\Omega_p$  进行归一化, 得  $\lambda_p=1, \lambda_s=2.5$ , 求阶数  $N$

$$N=\lg\sqrt{\frac{10^{\delta_s/10}-1}{10^{\delta_p/10}-1}}/\lg\lambda_s=\lg\sqrt{\frac{10^2-1}{10^{0.2}-1}}/\lg 2.5=2.8001, \quad \text{取 } N=3$$

$$\lambda_c=\frac{\lambda_s}{\sqrt[2N]{10^{\delta_s/10}-1}}=1.1623$$

(3)  $N=3$  时左半平面的极点为

$$s_k=e^{j(2k+2)\pi/6}, \quad k=1, 2, 3$$

(4) 求部分分式分解求  $A_k$

$$A_k=\prod_{i=1, i \neq k}^3 \frac{1}{(s_k-s_i)}, \quad k=1, 2, 3$$

(5) 则有数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\sum_{k=1}^N \frac{A_k \lambda_c \omega_p}{1-e^{j\theta_k} \lambda_c \omega_p z^{-1}}=\frac{0.116z^{-1}+0.0715z^{-2}}{1-1.6z^{-1}+1.02z^{-2}-0.232z^{-3}}$$

设计出的滤波器频率响应如图 6-12 所示。在通带截止频率 1 kHz 处的衰减为 1.429 dB, 在阻带截止频率 2.5 kHz 处衰减为 20.14 dB, 满足设计指标要求。

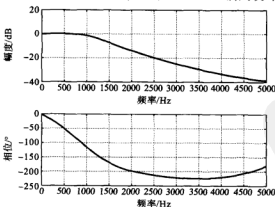


图 6-12 例 6-5 的幅度与相位特性曲线

### 6.3.2 双线性变换法设计 IIR 数字低通滤波器

脉冲响应不变法将模拟滤波器的单位冲激响应  $h(t)$  采样后得到数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$ , 但是时域的采样有可能导致频域的混叠失真, 不能设计高通、

带阻等滤波器。转换所遵循的规则是第2章拉普拉斯平面( $s$ 平面)与 $z$ 平面之间的映射关系,即 $z=e^{Ts}$ ,数字频率 $\omega$ 和模拟角频率 $\Omega$ 之间是线性关系为 $\omega=\Omega T_s$ 。但是,由第2章可知, $s$ 平面与 $z$ 平面之间的映射不是一一对应的关系,而是多值映射的关系, $s$ 平面的虚轴 $j\Omega$ 上每隔 $2\pi/T_s$ 便映射到 $z$ 平面单位圆上一周,引起频域的混叠。

为了克服这个缺点,希望能找到由 $s$ 平面到 $z$ 平面的另外的映射关系,这种映射关系应能保证:

- (1)  $s$ 平面的整个虚轴 $j\Omega$ 只映射为 $z$ 平面的单位圆一周;
- (2) 若 $H(s)$ 是稳定的,由 $H(s)$ 映射得到的 $H(z)$ 也应该是稳定的;
- (3) 这种映射是可逆的,既能由 $H(s)$ 得到的 $H(z)$ ,也能由 $H(z)$ 得到的 $H(s)$ ;
- (4) 如果 $H(j\Omega)|_{\Omega=0}=1$ ,则 $H(e^{j\omega})|_{\omega=0}$ 也应等于1。

满足上述四个条件的映射关系称为双线性变换,即

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (6-58)$$

显然,有

$$z = \frac{1+(T_s/2)s}{1-(T_s/2)s} \quad (6-59)$$

及 
$$j\Omega = \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}{e^{j\omega/2}(e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2})} = j \frac{2 \sin(\omega/2)}{T_s \cos(\omega/2)} = j \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

即模拟角频率和数字频率之间的关系

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6-60)$$

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T_s}{2}\right) \quad (6-61)$$

注意,这是一种非线性的映射关系,当 $\omega$ 由0变到 $\pi$ 时, $\tan(\omega/2)$ 由0变到 $+\infty$ ;当 $\omega$ 由0变到 $-\pi$ 时, $\tan(\omega/2)$ 由0变到 $-\infty$ ,即 $s$ 平面的整个虚轴 $j\Omega$ 只映射到 $z$ 平面单位圆一周,这种频率映射关系利用了正切函数的非线性特点,把整个 $j\Omega$ 压缩到了 $-\pi$ 到 $\pi$ ,即单位圆上。

当已有了模拟低通滤波器 $H(s)$ 后,经过变量代换

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = -2(1-z^{-1})/T_s(1+z^{-1})} \quad (6-62)$$

即为用双线性变换法得到的数字滤波器。

下面仍然推导直接由归一化模拟低通滤波器 $H(p)$ 经过双线性变换得到数字滤波器的方法。当给定了数字滤波器的技术指标 $\omega_p$ 、 $\omega_s$ 、 $\delta_p$ 及 $\delta_s$ 后,首先将数字频率转换为模拟角频率

$$\Omega_p = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right), \quad \Omega_s = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) \quad (6-63)$$

而 $\delta_p$ 及 $\delta_s$ 不变,再利用6.2节介绍的方法设计出模拟低通滤波器,查表得到的是归

一化的系统函数  $H(p)$ , 然后由  $H(p)$  转换为  $H(s)$ , 再由  $H(s)$  得到  $H(z)$ , 变换关系为

$$p = \frac{s}{\Omega_p}, \quad s = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

所以, 有

$$p = \frac{s}{\Omega_p} = \frac{T_s}{2} \frac{1}{\tan(\omega_p/2)} \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1}{\tan(\omega_p/2)} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

这样, 系数  $2/T_s$  被约掉。可见由归一化的系统函数  $H(p)$  进行双线性变换, 可以将其省去(注意, 如果不是由归一化系统函数进行双线性变换, 系数  $2/T_s$  就不能省略), 即有如下关系

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (6-64)$$

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (6-65)$$

$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6-66)$$

$$\omega = 2\arctan\Omega \quad (6-67)$$

由此用双线性变换法设计 IIR 数字低通滤波器的步骤可总结如下。

(1) 将已知的数字频率指标  $\omega_p, \omega_s, \delta_p$  及  $\delta_s$  变换为模拟滤波器的频率指标, 即

$$\Omega_p = \tan(\omega_p/2), \quad \Omega_s = \tan(\omega_s/2)$$

衰减特性指标  $\delta_p$  及  $\delta_s$  不变。

(2) 再按 6.2 节设计模拟低通滤波器的方法求得归一化模拟滤波器的系统函数  $H(p)$ 。

(3) 进行变量代换得到数字滤波器的系统函数  $H(z)$ , 即

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=(1-z^{-1})/\Omega_p(1+z^{-1})} \quad (6-68a)$$

这样就实现了数字滤波器的设计。如是巴特沃斯滤波器, 则要根据式(6-28)计算  $\lambda_c$ , 并将上式中的变量代换关系式除以  $\lambda_c$ , 即

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=(1-z^{-1})/\lambda_c\Omega_p(1+z^{-1})} \quad (6-68b)$$

有时, 设计数字滤波器时, 从实际需要出发, 得到的技术指标是模拟频率, 只是以数字滤波器的方式来实现。采用脉冲响应不变法时, 可以直接利用这些模拟频率的指标来设计模拟低通滤波器, 因为数字频率和模拟频率之间成线性关系, 但是, 用双线性变换法来设计时, 必须先将这些模拟频率指标通过  $\omega = \Omega T_s$  转换为数字频率, 然后再采用上述的设计步骤进行设计。

**例 6-6** 试用双线性变换法设计一巴特沃斯低通数字滤波器, 技术指标与例 6-4 相同, 即通带截止频率  $\omega_p = 0.2\pi$ , 阻带下限频率  $\omega_s = 0.4\pi$ , 通带最大衰减  $\delta_p$  为 3 dB, 阻带最小衰减  $\delta_s$  为 20 dB, 给定  $T_s = 0.001$  s。

解 (1) 将数字低通滤波器指标转化为模拟低通滤波器指标, 即

$$\Omega_p = \tan(\omega_p/2) = 0.3249, \quad \Omega_s = \tan(\omega_s/2) = 0.7265, \quad \delta_p = 3 \text{ dB}, \quad \delta_s = 20 \text{ dB}$$

因为  $\delta_p = 3 \text{ dB}$ , 所以  $\Omega_c = \Omega_p$ 。

(2) 令  $\lambda = \Omega/\Omega_p$  进行归一化, 得  $\lambda_p = \lambda_c = 1, \lambda_s = 2.2361$ , 求阶数  $N$

$$N = \lg \sqrt{10^{\delta_s/10} - 1} / \lg \lambda_s = \lg \sqrt{10^2 - 1} / \lg 2.2361 = 2.8551, \quad \text{取 } N = 3$$

(3) 查表得归一化模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

(4) 根据式(6-68b)得

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=(1-z^{-1})/\lambda_c \Omega_p (1+z^{-1})} = \frac{0.0198 + 0.0595z^{-1} + 0.0595z^{-2} + 0.0198z^{-3}}{1 - 1.7153z^{-1} + 1.1387z^{-2} - 0.2647z^{-3}}$$

图 6-13 为该滤波器的幅度与相位响应曲线。由图 6-13 可以看出, 在  $\omega = 0.2\pi$  处, 幅度衰减为 2.566 dB; 在  $\omega = 0.4\pi$  处, 幅度衰减为 20.09 dB, 均在指标范围内, 满足设计的指标要求。同脉冲响应不变法一样, 也不具有严格的线性相位特性。

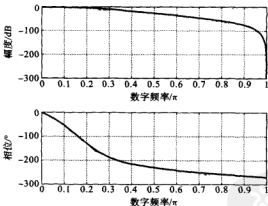


图 6-13 例 6-6 的幅度与相位特性曲线

例 6-4 和例 6-6 表明, 对于同样指标要求的数字滤波器, 采用脉冲响应不变法和采用双线性变换法得到的结果并不相同, 脉冲响应不变法设计的滤波器的阶数为 4 阶, 双线性变换法的为 3 阶, 从幅度与相位响应曲线来看, 两种方法都满足设计指标的要求, 但都不具有严格的线性相位特性。

例 6-7 试用双线性变换法设计一巴特沃斯低通数字滤波器, 技术指标是通带上限频率  $f_p = 100 \text{ Hz}$ , 阻带下限频率  $f_s = 300 \text{ Hz}$ ,  $\delta_p = 1 \text{ dB}$ ,  $\delta_s = 30 \text{ dB}$ , 采样间隔为  $0.001 \text{ s}$ 。

解 (1) 将模拟滤波器指标转化为数字滤波器指标, 即

$$\omega_p = \Omega_p T_s = 2\pi \times 100 \times 0.001 = 0.2\pi, \quad \omega_s = \Omega_s T_s = 2\pi \times 300 \times 0.001 = 0.6\pi$$

(2) 将数字滤波器指标转化为模拟低通滤波器指标并归一化, 得

$\Omega_p = \tan(\omega_p/2) = 0.324\ 9$ ,  $\Omega_s = \tan(\omega_s/2) = 1.376\ 4$ ,  $\delta_p = 1\ \text{dB}$ ,  $\delta_s = 30\ \text{dB}$   
归一化得  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_s = 1.376\ 7/0.324\ 9 = 4.237\ 3$

(3) 求解  $N$  和  $\lambda_c$

$$N = \lg \sqrt{\frac{10^{\delta_s/10} - 1}{10^{\delta_p/10} - 1}} / \lg(4.237\ 3) = 1.793\ 2/0.627 = 2.860\ 1, \text{ 取 } N=3$$

$$\lambda_c = \frac{\lambda_s}{\sqrt[2N]{10^{\delta_s/10} - 1}} = 1.340\ 2$$

(4) 查表得 3 阶归一化模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

(5) 因此有

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=(1-z^{-1})/\lambda_c \rho_p(1+z^{-1})} = \frac{0.035\ 4 + 0.106\ 1z^{-1} + 0.106\ 1z^{-2} + 0.035\ 4z^{-3}}{1 - 1.391\ 1z^{-1} + 0.856\ 6z^{-2} - 0.182\ 6z^{-3}}$$

其频率响应曲线如图 6-14 所示。在通带截止频率 100 Hz 处, 幅度衰减为 0.676 7 dB; 在阻带截止频率 300 Hz 处, 幅度衰减为 30 dB; 均在指标范围内, 满足设计的指标要求。

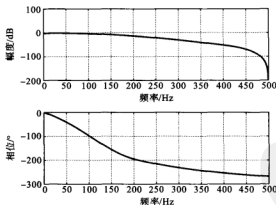


图 6-14 例 6-7 的幅度与相位特性曲线

双线性变换法最大的优点是避免了频率响应的混叠现象, 根本原因是非线性的正切映射关系, 使得  $s$  平面和  $z$  平面之间的多值映射变成了一一对应的映射关系。但是, 这样会使得模拟角频率  $\Omega$  和数字频率  $\omega$  之间存在着严重的非线性关系, 这种非线性关系会产生如下两个问题: 一个是一个线性相位的模拟滤波器经过双线性变换后, 不再是线性相位的; 另一个是这种非线性关系要求模拟滤波器的幅度响应必须是分段常数型, 即某一频率段的幅度响应近似等于某个常数, 一般典型的低通、高通、带通、带阻滤波器具有这一特性。因此, 双线性变换法适合于设计这些典型的滤波器, 而对于非分段常数型滤波器(如微分器), 采用双线性变换法就不合适了。

## 6.4 IIR 数字高通、带通及带阻滤波器的设计

6.3 节说明了如何由模拟低通滤波器设计数字低通滤波器,下面讨论在归一化模拟低通滤波器的基础上如何设计高通、带通和带阻数字滤波器。有两种基本方法:一种方法是将归一化模拟低通滤波器通过频率变换得到其他类型的模拟滤波器,然后再通过双线性变换得到对应的数字滤波器;另一种方法就是将归一化模拟低通滤波器通过双线性变换成为数字低通滤波器,然后再通过频率变换得到对应类型的滤波器。两种方法如图 6-15 所示。

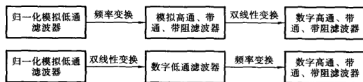


图 6-15 数字高通、带通和带阻滤波器设计的两种基本方法

对于第一种方法,在实际设计中往往采用简化的形式,即首先找出归一化模拟低通滤波器与数字高通、带通、带阻滤波器之间的从  $s$  平面到  $z$  平面的映射关系,然后直接将归一化模拟低通滤波器变换为所需的数字滤波器。

### 6.4.1 先利用模拟频率变换,再设计各型数字滤波器

#### 1. 归一化模拟低通滤波器变换成数字高通滤波器

设归一化模拟低通滤波器的系统函数为  $H_L(p)$ ,归一化模拟高通滤波器的系统函数为  $H_H(p)$ ,模拟低通滤波器变换为模拟高通滤波器即以变量  $p^{-1}$  代替变量  $p$

$$H_H(p) = H_L(p^{-1}) \quad (6-69)$$

对  $H_H(p)$  进行变量代换,即  $p = s/\Omega_p$  得到实际模拟高通滤波器的系统函数  $H(s)$  为

$$H(s) = H_H\left(\frac{s}{\Omega_p}\right) = H_L\left(\frac{\Omega_p}{s}\right) \quad (6-70)$$

再对  $H(s)$  进行双线性变换,就可得到数字高通滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} = H_L(p) \Big|_{p=\Omega_p(1+z^{-1})/(1-z^{-1})} \quad (6-71)$$

这种方法设计数字高通滤波器的具体步骤如下。

(1) 将数字高通滤波器的技术指标  $\omega_p$ 、 $\omega_s$ 、 $\delta_p$  及  $\delta_s$  变换为模拟高通滤波器的频率指标  $\Omega_p = \tan(\omega_p/2)$ ,  $\Omega_s = \tan(\omega_s/2)$ , 衰减特性指标  $\delta_p$  及  $\delta_s$  不变,并作归一化处理得  $\eta_p = 1$ ,  $\eta_s = \Omega_s/\Omega_p$ 。

(2) 利用频率变换关系  $\lambda\eta = 1$ , 将模拟高通滤波器的归一化频率转换为模拟低通滤波器的归一化频率  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_s = \Omega_p/\Omega_s$ , 并有归一化变量  $p = j\lambda$ 。

(3) 设计模拟低通滤波器,得归一化模拟低通滤波器系统函数  $H(p)$ 。

(4) 经过变量代换,得到数字高通滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=p_0(1+z^{-1})/(1-z^{-1})} \quad (6-72a)$$

如果是巴特沃斯滤波器,则要根据式(6-28)计算  $\lambda_c$ ,并将上式中的变量代换关系除以系数  $\lambda_c$ .

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=p_0(1+z^{-1})/\lambda_c(1-z^{-1})} \quad (6-72b)$$

**例 6-8** 试设计一巴特沃斯数字高通滤波器,要求通带下限频率  $\omega_p = 0.8\pi$ ,阻带上限频率  $\omega_s = 0.44\pi$ ,通带衰减不大于 3 dB,阻带衰减不小于 20 dB.

**解** (1) 将数字高通滤波器指标转化为模拟高通滤波器的指标,并归一化得

$$\Omega_p = \tan(\omega_p/2) = 3.0777, \quad \Omega_s = \tan(\omega_s/2) = 0.8273, \quad \delta_p = 3 \text{ dB}, \quad \delta_s = 20 \text{ dB}$$

从而有  $\eta_p = 1, \quad \eta_s = 0.2688$

(2) 因为  $\delta_p = 3 \text{ dB}$ , 由  $\lambda\eta = 1$  得

$$\lambda_p = \lambda_c = 1, \quad \lambda_s = 3.7203$$

(3) 设计模拟低通滤波器。

因为  $\delta_p = 3 \text{ dB}$ , 所以阶数  $N$  为

$$N = \lg \sqrt{10^{0.3} - 1} / \lg \lambda_s = \lg \sqrt{10^2 - 1} / \lg 3.7203 = 1.488, \quad \text{取 } N = 2$$

查表有归一化模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 1.4142p + 1}$$

(4) 求得数字高通滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=p_0(1+z^{-1})/\lambda_c(1-z^{-1})} = \frac{0.0675 - 0.1349z^{-1} + 0.0675z^{-2}}{1 + 1.143z^{-1} + 0.4128z^{-2}}$$

其频率响应曲线如图 6-16 所示。在  $\omega = 0.8\pi$  处,幅度衰减为 1.842 dB,在  $\omega = 0.44\pi$  处,幅度衰减为 20.04 dB;均在设计要求的指标范围内,满足设计的指标要求。

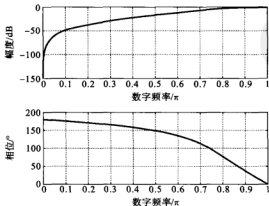


图 6-16 例 6-8 的幅度与相位特性曲线



例 6-9 试设计一巴特沃斯数字高通滤波器,要求通带下限频率  $f_p=400$  Hz,阻带上限频率  $f_s=200$  Hz,通带衰减不大于 1.5 dB,阻带衰减不小于 20 dB,采样间隔  $T_s$  为 0.001 s。

解 (1) 将模拟高通滤波器的指标转化为数字高通滤波器的指标,即

$$\omega_p = 2\pi f_p T_s = 0.8\pi, \quad \omega_s = 2\pi f_s T_s = 0.4\pi$$

(2) 将数字高通滤波器的指标转化为模拟高通滤波器的指标,并归一化得

$$\Omega_p = \tan(\omega_p/2) = 3.0777, \quad \Omega_s = \tan(\omega_s/2) = 0.7265, \quad \delta_p = 1.5 \text{ dB}, \quad \delta_s = 20 \text{ dB}$$

从而有

$$\eta_p = 1, \quad \eta_s = 0.2361$$

由  $\lambda\eta=1$  得

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_s = 4.2355$$

(3) 设计模拟低通滤波器,求解  $N$  和  $\lambda_c$

$$N = \lg \sqrt{\frac{10^{\delta_s/10} - 1}{10^{\delta_p/10} - 1}} / \lg(\lambda_s) = \lg \sqrt{\frac{10^2 - 1}{10^{0.15} - 1}} / \lg 4.2355 = 1.8984, \quad \text{取 } N = 2$$

$$\lambda_c = \frac{\lambda_s}{\sqrt[2N]{10^{\delta_s/10} - 1}} = 1.3428$$

查表有归一化模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 1.4142p + 1}$$

(4) 所求得的数字高通滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{1-\lambda_c(1+z^{-1})}{1-\lambda_c(1-z^{-1})}} = \frac{0.1053 - 0.2106z^{-1} + 0.1053z^{-2}}{1 + 0.8959z^{-1} + 0.3172z^{-2}}$$

其频率响应曲线如图 6-17 所示。在 400 Hz 处,幅度衰减为 1.15 dB;在 200 Hz 处,幅度衰减为 19.98 dB;基本在设计要求的指标范围内,满足设计的指标要求。

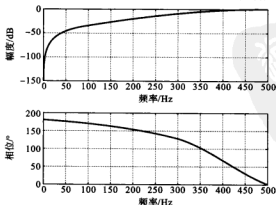


图 6-17 例 6-9 的幅度与相位特性曲线

## 2. 归一化模拟低通滤波器转换成数字带通滤波器

数字带通滤波器一般有四个频率指标  $\omega_{s1}$ 、 $\omega_{pl}$ 、 $\omega_{ph}$  及  $\omega_{sh}$  和两个幅度衰减特性指

标  $\delta_s$  和  $\delta_p$ ,  $\omega_{pl}$  和  $\omega_{ph}$  分别是通带的下限和上限频率,  $\omega_{sl}$  是下阻带的上限频率,  $\omega_{sh}$  是上阻带的下限频率。

首先,要将带通滤波器的数字频率指标转换为模拟带通滤波器的频率指标:  $\Omega_{pl} = \tan(\omega_{pl}/2)$ ,  $\Omega_{ph} = \tan(\omega_{ph}/2)$ ,  $\Omega_{sl} = \tan(\omega_{sl}/2)$ ,  $\Omega_{sh} = \tan(\omega_{sh}/2)$ ,  $\Omega_{pl}$  和  $\Omega_{ph}$  分别是通带的下限和上限频率,  $\Omega_{sl}$  是下阻带的上限频率,  $\Omega_{sh}$  是上阻带的下限频率。下面寻求归一化模拟低通滤波器和模拟带通滤波器之间的关系。

先作归一化处理,定义  $\Omega_{BW} = \Omega_{ph} - \Omega_{pl}$  为通带带宽,并以此为参考对  $\Omega$  进行归一化处理,即  $\eta_{sl} = \Omega_{sl}/\Omega_{BW}$ ,  $\eta_{sh} = \Omega_{sh}/\Omega_{BW}$ ,  $\eta_{pl} = \Omega_{pl}/\Omega_{BW}$ ,  $\eta_{ph} = \Omega_{ph}/\Omega_{BW}$ , 再定义  $\Omega_0^2 = \Omega_{pl}\Omega_{ph}$  为通带的中心频率,归一化为  $\eta_0^2 = \eta_{pl}\eta_{ph}$ ,  $q = j\eta$  为归一化的复变量。归一化的模拟带通滤波器与模拟低通滤波器的幅度特性如图 6-18 所示,模拟带通滤波器归一化频率  $\eta$  与模拟低通滤波器归一化频率  $\lambda$  之间的一些主要对应关系见表 6-4。

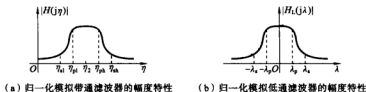


图 6-18 模拟带通滤波器与模拟低通滤波器幅度特性的对应关系

表 6-4  $\eta$  和  $\lambda$  的对应关系

$\eta$	0	$\eta_{pl}$	$\eta_{ph}$	0	$\eta_{sh}$	$\eta_{sl}$	$+\infty$
$\lambda$	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	$\lambda_p$	$\lambda_s$	$+\infty$

模拟低通滤波器归一化频率  $\lambda$  和模拟带通滤波器归一化频率  $\eta$  之间的映射关系

$$\lambda = \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta} \quad (6-73)$$

通过式(6-73)可以实现频率变换。利用所得到的归一化模拟低通滤波器的技术指标  $\lambda_p$ ,  $\lambda_s$ ,  $\delta_p$  及  $\delta_s$ , 可设计出归一化模拟低通滤波器的系统函数  $H(p)$ 。因为

$$p = j\lambda = j \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta} = j \frac{(q/j)^2 - \eta_0^2}{(q/j)} = \frac{q^2 + \eta_0^2}{q} = \frac{\left(\frac{s}{\Omega_{BW}}\right)^2 + \frac{\Omega_{pl}\Omega_{ph}}{\Omega_{BW}^2}}{s/\Omega_{BW}} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s\Omega_{BW}} \quad (6-74)$$

所以有

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=(s^2 + \Omega_0^2)/\Omega_{BW}} \quad (6-75)$$

式(6-75)即为所设计的模拟带通滤波器的系统函数。再通过双线性变换,就可得到数字带通滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} = H(p) \Big|_{p=[(1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2]/\Omega_{BW}(1-z^2)} \quad (6-76)$$

这种设计数字带通滤波器的具体步骤与设计数字高通滤波器的步骤基本相同,

只是归一化和频率变换关系有所不同,具体如下。

(1) 将数字带通滤波器的技术指标  $\omega_{pl}$ 、 $\omega_{ph}$ 、 $\omega_{sl}$ 、 $\omega_{sh}$ 、 $\delta_p$  及  $\delta_s$  变换为模拟带通滤波器的频率指标:  $\Omega_{pl} = \tan(\omega_{pl}/2)$ ,  $\Omega_{ph} = \tan(\omega_{ph}/2)$ ,  $\Omega_{sl} = \tan(\omega_{sl}/2)$ ,  $\Omega_{sh} = \tan(\omega_{sh}/2)$ ,  $\Omega_{BW} = \Omega_{ph} - \Omega_{pl}$ ,  $\Omega_0^2 = \Omega_{pl}\Omega_{ph}$ 。以  $\Omega_{BW}$  为参考对  $\Omega$  进行归一化处理得:  $\eta_{pl} = \Omega_{pl}/\Omega_{BW}$ ,  $\eta_{ph} = \Omega_{ph}/\Omega_{BW}$ ,  $\eta_{sl} = \Omega_{sl}/\Omega_{BW}$ ,  $\eta_{sh} = \Omega_{sh}/\Omega_{BW}$ ,  $\eta_0^2 = \eta_{pl}\eta_{ph}$ , 衰减特性指标  $\delta_p$  及  $\delta_s$  不变。

(2) 利用频率变换关系  $\lambda = (\eta^2 - \eta_0^2)/\eta$ , 将模拟带通滤波器的归一化频率  $\eta$  转换为模拟低通滤波器的归一化频率  $\lambda$ , 得  $\lambda_p$ 、 $\lambda_{sl}$  和  $\lambda_{sh}$

$$\lambda_p = \frac{\eta_{ph}^2 - \eta_0^2}{\eta_{ph}} = \eta_{ph} - \eta_{pl} = 1, \quad \lambda_{sl} = \frac{\eta_{sl}^2 - \eta_0^2}{\eta_{sl}}, \quad \lambda_{sh} = \frac{\eta_{sh}^2 - \eta_0^2}{\eta_{sh}}$$

$\lambda_s$  有  $\lambda_{sl}$  和  $\lambda_{sh}$  两个值, 为了保证滤波器的衰减特性, 应取绝对值较小者, 并有归一化变量  $p = j\lambda$ 。

(3) 设计模拟低通滤波器, 得归一化模拟低通滤波器系统函数  $H(p)$ 。

(4) 经过变量代换, 得到数字带通滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(p) \Big|_{p = (1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2/\Omega_{BW}(1-z^{-2})} \quad (6-77a)$$

如果是巴特沃斯滤波器, 则要根据式(6-28)计算  $\lambda_c$ , 并将上式中的变量代换关系除以系数  $\lambda_c$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p = (1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2/\lambda_c\Omega_{BW}(1-z^{-2})} \quad (6-77b)$$

下面通过例题说明数字带通滤波器的设计过程。

**例 6-10** 试设计一巴特沃斯数字带通滤波器, 要求通带下限频率  $\omega_{pl} = 0.3\pi$ , 通带上限频率  $\omega_{ph} = 0.4\pi$ , 下阻带的上限频率  $\omega_{sl} = 0.2\pi$ , 上阻带的下限频率  $\omega_{sh} = 0.5\pi$ , 通带衰减不大于 3 dB, 阻带衰减不小于 18 dB。

**解** (1) 将数字带通滤波器指标转化为模拟带通滤波器的指标, 并归一化得

$$\Omega_{pl} = \tan(\omega_{pl}/2) = 0.5095, \quad \Omega_{ph} = \tan(\omega_{ph}/2) = 0.7265$$

$$\Omega_{sl} = \tan(\omega_{sl}/2) = 0.3249, \quad \Omega_{sh} = \tan(\omega_{sh}/2) = 1$$

计算中心频率  $\Omega_0^2$  和通带带宽  $\Omega_{BW}$

$$\Omega_0^2 = \Omega_{pl}\Omega_{ph} = 0.3702, \quad \Omega_{BW} = \Omega_{ph} - \Omega_{pl} = 0.2170$$

对频率指标归一化

$$\eta_{sl} = \Omega_{sl}/\Omega_{BW} = 1.4973, \quad \eta_{sh} = \Omega_{sh}/\Omega_{BW} = 4.6081$$

$$\eta_{pl} = \Omega_{pl}/\Omega_{BW} = 2.3480, \quad \eta_{ph} = \Omega_{ph}/\Omega_{BW} = 3.3480$$

$$\eta_0^2 = \eta_{pl}\eta_{ph} = 7.8609$$

(2) 进行频率变换。由  $\lambda = (\eta^2 - \eta_0^2)/\eta$  将模拟带通滤波器的归一化频率  $\eta$  变换为模拟低通滤波器的归一化频率  $\lambda$ , 得  $\lambda_p$ 、 $\lambda_{sl}$  和  $\lambda_{sh}$

$$\lambda_p = \frac{\eta_{ph}^2 - \eta_0^2}{\eta_{ph}} = \eta_{ph} - \eta_{pl} = 1, \quad \lambda_{sl} = \frac{\eta_{sl}^2 - \eta_0^2}{\eta_{sl}} = -3.7529, \quad \lambda_{sh} = \frac{\eta_{sh}^2 - \eta_0^2}{\eta_{sh}} = 2.9022$$

$\lambda_s$  有  $\lambda_{sl}$  和  $\lambda_{sh}$  两个值, 为了保证滤波器的衰减特性, 应取绝对值较小者, 故取  $\lambda_s = 2.9$ 。

(3) 设计模拟低通滤波器。 $\delta_p=3$  dB, 所以  $\lambda_p=\lambda_c=1$ , 由  $\lambda_s=2.9$ ,  $\delta_s=18$  dB, 有

$$N = \lg \sqrt{10^{\delta_s/10} - 1} / \lg \lambda_s = 1.9389, \quad \text{取 } N=2$$

查表得归一化模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 1.4142p + 1}$$

(4) 求得数字带滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= H(p) \Big|_{p=(1-z^{-1})^2 + \alpha_0^2(1+z^{-1})^2 / \lambda_s \alpha_{\text{BW}}(1-z^{-2})} \\ &= \frac{0.0201 - 0.0402z^{-2} + 0.0201z^{-4}}{1 - 1.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}} \end{aligned}$$

其频率响应曲线如图 6-19 所示。在通带下限频率  $\omega=0.3\pi$  处, 幅度衰减为 2.317 dB; 在通带上限频率  $\omega=0.4\pi$  处, 幅度衰减为 2.896 dB; 在下阻带上限频率  $\omega=0.2\pi$  处, 幅度衰减为 22.33 dB; 在上阻带下限频率  $\omega=0.5\pi$  处, 幅度衰减为 17.97 dB; 均在设计要求的指标范围内, 满足设计的指标要求。与其他类型的 IIR 数字滤波器一样, 仍然不具有严格线性相位特性。

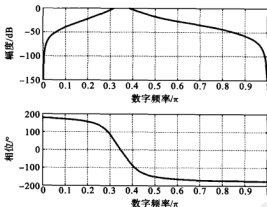


图 6-19 例 6-10 的幅度与相位特性曲线

**例 6-11** 试设计一巴特沃斯数字带通滤波器, 要求通带下限频率  $f_{pl}=400$  Hz, 通带上限频率  $f_{ph}=600$  Hz, 下阻带的上限频率  $f_{sl}=200$  Hz, 上阻带的下限频率  $f_{sh}=800$  Hz, 通带衰减不大于 1 dB, 阻带衰减不小于 18 dB, 采样频率  $f_s$  为 2 000 Hz。

**解** (1) 将模拟带通滤波器指标转化为数字带通滤波器的指标, 即

$$\omega_{pl} = 2\pi f_{pl}/f_s = 0.4\pi, \quad \omega_{ph} = 2\pi f_{ph}/f_s = 0.6\pi$$

$$\omega_{sl} = 2\pi f_{sl}/f_s = 0.2\pi, \quad \omega_{sh} = 2\pi f_{sh}/f_s = 0.8\pi$$

(2) 将数字带滤波器的指标转化为模拟带通滤波器的指标, 即

$$\Omega_{pl} = \tan(\omega_{pl}/2) = 0.7265, \quad \Omega_{ph} = \tan(\omega_{ph}/2) = 1.3764$$

$$\Omega_{sl} = \tan(\omega_{sl}/2) = 0.3249, \quad \Omega_{sh} = \tan(\omega_{sh}/2) = 3.0777$$

计算中心频率  $\Omega_c^2$  和通带带宽  $\Omega_{BW}$

$$\Omega_c^2 = \Omega_{pl} \Omega_{ph} = 1, \quad \Omega_{BW} = \Omega_{ph} - \Omega_{pl} = 0.6499$$

对频率指标归一化得

$$\eta_{pl} = \Omega_{pl} / \Omega_{BW} = 0.4999, \quad \eta_{ph} = \Omega_{ph} / \Omega_{BW} = 4.7357$$

$$\eta_{pl} = \Omega_{pl} / \Omega_{BW} = 1.1179, \quad \eta_{ph} = \Omega_{ph} / \Omega_{BW} = 2.1179$$

$$\eta_0^2 = \eta_{pl} \eta_{ph} = 2.3676$$

(3) 进行频率变换。由  $\lambda = (\eta^2 - \eta_0^2) / \eta$  将模拟带通滤波器的归一化频率  $\eta$  变换为模拟低通滤波器的归一化频率  $\lambda$ , 得  $\lambda_p$ 、 $\lambda_{pl}$  和  $\lambda_{ph}$

$$\lambda_p = \frac{\eta_{ph}^2 - \eta_0^2}{\eta_{ph}} = \eta_{ph} - \eta_{pl} = 1, \quad \lambda_{pl} = \frac{\eta_{pl}^2 - \eta_0^2}{\eta_{pl}} = -4.2362, \quad \lambda_{ph} = \frac{\eta_{ph}^2 - \eta_0^2}{\eta_{ph}} = 4.2358$$

$\lambda_s$  有  $\lambda_{pl}$  和  $\lambda_{ph}$  两个值, 为了保证滤波器的衰减特性, 应取绝对值较小者, 故取  $\lambda_s = 4.2358$ 。

(4) 设计模拟低通滤波器。由  $\lambda_p = 1$ ,  $\lambda_s = 4.2358$ ,  $\delta_p = 1$  dB,  $\delta_s = 18$  dB, 有

$$N = \lg \sqrt{\frac{10^{\delta_s/10} - 1}{10^{\delta_p/10} - 1}} / \lg \lambda_s = \lg \sqrt{\frac{10^{1.8} - 1}{10^{0.1} - 1}} / \lg 4.2359 = 1.898, \quad \text{取 } N = 2$$

$$\lambda_c = \frac{\lambda_s}{\sqrt{10^{\delta_s/10} - 1}} = 1.5089$$

查表得归一化模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 1.4142p + 1}$$

(5) 求得数字带通滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=(1-z^{-1})^2 + \Omega_c^2(1+z^{-1})^2 / \lambda_c \Omega_{BW}(1-z^{-2})} = \frac{0.1234 - 0.2468z^{-2} + 0.1234z^{-4}}{1 + 0.7856z^{-2} + 0.2829z^{-4}}$$

其频率响应曲线如图 6-20 所示。在通带截止频率 400 Hz 和 600 Hz 处, 幅度

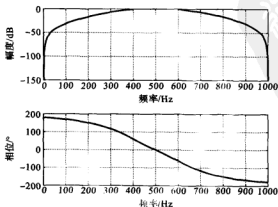


图 6-20 例 6-11 的幅度与相位特性曲线

衰减为 0.818 4 dB;在阻带截止频率 200 Hz 和 800 Hz 处,幅度衰减为 18.15 dB;均在设计要求的指标范围内,满足设计的指标要求。

### 3. 归一化模拟低通滤波器变换成数字带阻滤波器

数字带阻滤波器一般有四个频率指标  $\omega_{sl}$ 、 $\omega_{pl}$ 、 $\omega_{ph}$  及  $\omega_{sh}$  和两个幅度衰减特性指标  $\delta_s$  和  $\delta_p$ 。 $\omega_{pl}$  是下通带上限频率,  $\omega_{ph}$  是上通带下限频率,  $\omega_{sl}$  是阻带的下限频率,  $\omega_{sh}$  是阻带的上限频率。

类似于模拟低通滤波器与模拟高通滤波器之间的频率变换关系,模拟带阻滤波器和模拟带通滤波器的频率变换关系也满足倒数关系,即如果  $\eta'$  是模拟带通滤波器的归一化频率,  $\eta$  是模拟带阻滤波器的归一化频率,则有  $\eta'\eta=1$ 。因此,根据模拟低通滤波器与模拟带通滤波器之间的频率变换关系,可得模拟低通滤波器归一化频率  $\lambda$  与模拟带阻滤波器的归一化频率  $\eta$  的关系为

$$\lambda = \frac{\eta}{\eta^2 - 1} \quad (6-78)$$

由归一化模拟低通滤波器来设计数字带阻滤波器可以参照归一化模拟低通滤波器到数字带通滤波器的变换关系。

下面给出设计数字带阻滤波器的步骤。

(1) 将数字带阻滤波器指标转化为模拟带阻滤波器的指标,并归一化,得

$$\Omega_{pl} = \tan(\omega_{pl}/2), \quad \Omega_{ph} = \tan(\omega_{ph}/2) \\ \Omega_{sl} = \tan(\omega_{sl}/2), \quad \Omega_{sh} = \tan(\omega_{sh}/2)$$

计算中心频率  $\Omega_0^2$  和通带带宽  $\Omega_{BW}$

$$\Omega_0^2 = \Omega_{pl}\Omega_{ph}, \quad \Omega_{BW} = \Omega_{ph} - \Omega_{pl}$$

对频率指标以  $\Omega_{BW}$  归一化

$$\eta_{sl} = \Omega_{sl}/\Omega_{BW}, \quad \eta_{sh} = \Omega_{sh}/\Omega_{BW}, \quad \eta_{pl} = \Omega_{pl}/\Omega_{BW}, \quad \eta_{ph} = \Omega_{ph}/\Omega_{BW}, \quad \eta_0^2 = \eta_{pl}\eta_{ph}$$

(2) 进行频率变换。由  $\lambda = \eta/(\eta^2 - 1)$  将带阻滤波器的归一化频率  $\eta$  变换为低通滤波器的归一化频率  $\lambda$ , 得  $\lambda_p$ ,  $\lambda_{sl}$  和  $\lambda_{sh}$

$$\lambda_p = \frac{\eta_{ph}}{\eta_{ph}^2 - 1} = 1, \quad \lambda_{sl} = \frac{\eta_{sl}}{\eta_{sl}^2 - 1}, \quad \lambda_{sh} = \frac{\eta_{sh}}{\eta_{sh}^2 - 1}$$

为了保证滤波器的衰减特性,应取二者中绝对值较小者作为  $\lambda_i$ 。

(3) 根据  $\lambda_p=1$ 、 $\lambda_i$ 、 $\delta_p$  及  $\delta_s$  设计模拟低通滤波器,得归一化模拟低通滤波器系统函数  $H(p)$ 。

(4) 得到数字带阻滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(p) \Big|_{p = \Omega_{BW}(1-z^{-2})/\lambda_i[(1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2]} \quad (6-79a)$$

如果是巴特沃斯滤波器,则要根据式(6-28)计算  $\lambda_c$ , 并将式中的变量代换关系式除以系数  $\lambda_c$ 。

$$H(z) = H(p) \Big|_{p = \Omega_{BW}(1-z^{-2})/\lambda_c[(1-z^{-1})^2 + \Omega_0^2(1+z^{-1})^2]} \quad (6-79b)$$

**例 6-12** 有一以采样频率为 1 000 Hz 采样得到的数字信号, 已知受到了频率为 100 Hz 的噪声的干扰, 现要设计一巴特沃斯滤波器滤除该噪声, 要求 3 dB 的通带边频为 95 Hz 和 105 Hz, 阻带的下边频为 99 Hz, 阻带的上边频为 101 Hz, 阻带衰减不小于 13 dB。

**解** 此滤波器为阻带很窄的陷波器, 给出的是模拟频率, 首先根据模拟频率与数字频率的关系, 将模拟频率转换为数字频率  $\omega = 2\pi f/f_s$ , 有

$$\omega_{pl} = \frac{2\pi \times 95}{1\,000} = 0.19\pi, \quad \omega_{ph} = \frac{2\pi \times 105}{1\,000} = 0.21\pi$$

$$\omega_{sl} = \frac{2\pi \times 99}{1\,000} = 0.198\pi, \quad \omega_{sh} = \frac{2\pi \times 101}{1\,000} = 0.202\pi$$

(1) 将数字带阻滤波器指标转化为模拟带阻滤波器的指标, 并归一化, 得

$$\Omega_{pl} = \tan(\omega_{pl}/2) = 0.307\,6, \quad \Omega_{ph} = \tan(\omega_{ph}/2) = 0.342\,4$$

$$\Omega_{sl} = \tan(\omega_{sl}/2) = 0.321\,4, \quad \Omega_{sh} = \tan(\omega_{sh}/2) = 0.328\,4$$

计算中心频率  $\Omega_0^2$  和通带带宽  $\Omega_{BW}$

$$\Omega_0^2 = \Omega_{pl}\Omega_{ph} = 0.101, \quad \Omega_{BW} = \Omega_{ph} - \Omega_{pl} = 0.034\,78$$

对频率指标以  $\Omega_{BW}$  归一化

$$\eta_{pl} = \Omega_{pl}/\Omega_{BW} = 8.844\,2, \quad \eta_{ph} = \Omega_{ph}/\Omega_{BW} = 9.844\,7$$

$$\eta_{sl} = \Omega_{sl}/\Omega_{BW} = 9.240\,9, \quad \eta_{sh} = \Omega_{sh}/\Omega_{BW} = 9.442\,2, \quad \eta_0^2 = \eta_{pl}\eta_{ph} = 87.069$$

(2) 进行频率变换。由  $\lambda = \eta/(\eta^2 - \eta_0^2)$  将模拟带阻滤波器的归一化频率  $\eta$  变换为模拟低通滤波器的归一化频率  $\lambda$ , 显然有

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_{sl} = \frac{\eta_{sl}}{\eta_{sl}^2 - \eta_0^2} = -5.517, \quad \lambda_{sh} = \frac{\eta_{sh}}{\eta_{sh}^2 - \eta_0^2} = 4.526$$

取二者中绝对值较小者作为  $\lambda_s = 4.526$ 。

(3) 设计模拟低通滤波器。因为  $\delta_p = 3$  dB, 所以  $\lambda_p = \lambda_c = 1, \lambda_s = 4.526, \delta_s = 13$  dB 有

$$N = \lg \sqrt{10^{\delta_s/10} - 1} / \lg \lambda_s = 0.974\,3, \quad \text{取 } N = 1$$

查表得归一化模拟低通滤波器的系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p+1}$$

(4) 得到数字带阻滤波器的系统函数为

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=a_{BW}(1-z^{-2})/\lambda_s[(1-z^{-1})^2 + a_0^2(1+z^{-1})^2]} = \frac{0.969 - 1.582\,4z^{-1} + 0.969z^{-2}}{1 - 1.583z^{-1} + 0.939z^{-2}}$$

其频率响应曲线如图 6-21 所示。在通带下限频率 95 Hz 处, 幅度衰减为 2.2 dB; 在通带上限频率 105 Hz 处, 幅度衰减为 2.9 dB; 在阻带中心频率 100 Hz 处, 幅度衰减为 21.1 dB。与其他类型的 IIR 数字滤波器一样, 仍然不具有严格线性相位特性。

**例 6-13** 试设计一巴特沃斯带阻滤波器, 要求下通带上限频率  $\omega_{pl} = 0.2\pi$ , 上通

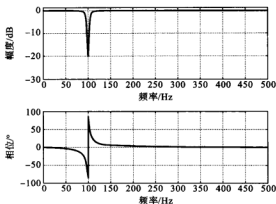


图 6-21 例 6-12 的幅度与相位特性曲线

带下限频率  $\omega_{pl}=0.8\pi$ , 阻带的下限频率  $\omega_{sl}=0.4\pi$ , 阻带的上限频率  $\omega_{sh}=0.6\pi$ , 通带衰减不大于 2 dB, 阻带衰减不小于 20 dB。

解 (1) 将数字带阻滤波器的频率指标转化为模拟带阻滤波器的频率指标并归一化, 得

$$\Omega_{pl} = \tan(\omega_{pl}/2) = 0.3249, \quad \Omega_{ph} = \tan(\omega_{ph}/2) = 3.0777$$

$$\Omega_{sl} = \tan(\omega_{sl}/2) = 0.7265, \quad \Omega_{sh} = \tan(\omega_{sh}/2) = 1.3764$$

计算中心频率  $\Omega_0^2$  和通带带宽  $\Omega_{BW}$

$$\Omega_0^2 = \Omega_{pl}\Omega_{ph} = 0.9999, \quad \Omega_{BW} = \Omega_{ph} - \Omega_{pl} = 2.7528$$

对频率指标以  $\Omega_{BW}$  归一化

$$\eta_{pl} = \Omega_{pl}/\Omega_{BW} = 0.1180, \quad \eta_{ph} = \Omega_{ph}/\Omega_{BW} = 1.1180$$

$$\eta_{sl} = \Omega_{sl}/\Omega_{BW} = 0.2639, \quad \eta_{sh} = \Omega_{sh}/\Omega_{BW} = 0.5, \quad \eta_0^2 = \eta_{pl}\eta_{ph} = 0.1319$$

(2) 进行频率变换。由  $\lambda = \eta/(\eta^2 - \eta_0^2)$  将模拟带阻滤波器的归一化频率  $\eta$  变换为模拟低通滤波器的归一化频率  $\lambda$ , 显然有

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_{sl} = \frac{\eta_{sl}}{\eta_{sl}^2 - \eta_0^2} = -4.2389, \quad \lambda_{sh} = \frac{\eta_{sh}}{\eta_{sh}^2 - \eta_0^2} = 4.2337$$

取二者绝对值较小者, 故有  $\lambda_s = 4.2337$ 。

(3) 设计模拟低通滤波器。由  $\lambda_p = 1, \lambda_s = 4.2337, \delta_p = 2 \text{ dB}, \delta_s = 20 \text{ dB}$  有

$$N = \lg \sqrt{\frac{10^{\delta_s/10} - 1}{10^{\delta_p/10} - 1}} / \lg \lambda_s = \lg \sqrt{\frac{10^8 - 1}{10^{0.2} - 1}} / \lg 4.2337 = 1.7780, \quad \text{取 } N = 2$$

$$\lambda_c = \frac{\lambda_s}{\sqrt{10^{\delta_s/10} - 1}} = 1.3422$$

查表得 2 阶归一化模拟低通滤波器系统函数为

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 1.4142p + 1}$$



(4) 求得数字带阻滤波器系统函数为

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=(1-z^{-2})a_{BW}/a_p[(1-z^{-1})^2 + a_0^2(1+z^{-1})^2]} = \frac{0.2857 + 0.5714z^{-2} + 0.2857z^{-4}}{1 - 0.0288z^{-2} + 0.1717z^{-4}}$$

其频率响应曲线如图 6-22 所示。在下通带上限频率  $\omega_{ph} = 0.2\pi$  处, 幅度衰减为 1.179 dB; 在上通带下限频率  $\omega_{ph} = 0.8\pi$  处, 幅度衰减为 1.108 dB; 在阻带下限频率  $\omega_{sh} = 0.4\pi$  处, 幅度衰减为 20.2 dB; 在阻带上限频率  $\omega_{sh} = 0.6\pi$  处, 幅度衰减为 19.71 dB; 在阻带中心频率  $\omega_0 = 0.5\pi$  处, 幅度衰减为 33 dB; 基本达到技术指标要求。与其他类型的 IIR 数字滤波器一样, 仍然不具有严格线性相位特性。

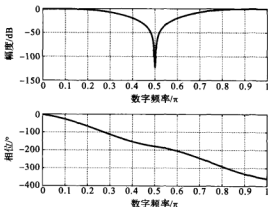


图 6-22 例 6-13 的幅度与相位特性曲线

## 6.4.2 由数字低通滤波器设计其他类型数字滤波器

6.3 节介绍了由归一化模拟低通滤波器设计数字低通滤波器的方法, 下面讨论如何由数字低通滤波器设计其他类型的数字滤波器的方法。

如果给定一个数字低通滤波器  $H_L(z)$ , 同样通过一定的变换来设计其他各种类型的数字滤波器  $H_d(Z)$ , 这种变换是将  $H_L(z)$  的  $z$  平面映射变到  $H_d(Z)$  的  $Z$  平面, 这一映射关系为

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) \quad (6-80)$$

则有

$$H_d(Z) = H_L(z) \Big|_{z^{-1} = G(Z^{-1})} \quad (6-81)$$

下面讨论对变换函数  $G(Z^{-1})$  的要求。总的来说就是要使一个因果稳定的数字低通有理系统函数  $H_L(z)$  变换后得到的  $H_d(Z)$  也同样是因果稳定的有理函数形式, 有以下结论。

(1)  $z$  平面的单位圆必须映射到  $z$  平面的单位圆上。

(2) 为了保证因果稳定性,  $z$  平面的单位圆内部必须映射到  $Z$  平面的单位圆

内部。

(3) 变换函数  $G(Z^{-1})$  必须是  $Z^{-1}$  的有理函数。

设  $\theta$  和  $\omega$  分别是  $z$  平面与  $Z$  平面的数字频率变量, 即  $z = e^{j\theta}$ ,  $Z = e^{j\omega}$ , 根据式 (6-80) 有

$$e^{-j\theta} = G(e^{-j\omega}) = |G(e^{-j\omega})| e^{j\arg[G(e^{-j\omega})]} \quad (6-82)$$

显然有

$$|G(e^{-j\omega})| = 1 \quad (6-83a)$$

$$\theta = -\arg[G(e^{-j\omega})] \quad (6-83b)$$

式 (6-83a) 表明函数  $G(Z^{-1})$  在其  $Z$  平面的单位圆上幅度必须恒等于 1, 即为全通函数, 由第 2 章可知全通函数为

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \prod_{i=1}^N \frac{Z^{-1} - a_i^*}{1 - a_i Z^{-1}} \quad (6-84)$$

其中,  $a_i$  是  $G(Z^{-1})$  的极点。  $G(Z^{-1})$  的零点都是极点的共轭倒数, 极点可以是实数, 也可以是复数, 为了保证稳定性不变, 必须保证所有极点均在单位圆内, 即  $|a_i| < 1$ 。由第 2 章可知, 对于  $N$  阶全通系统, 当频率  $\omega$  由 0 变到  $\pi$  时, 全通系统的相位变化量为  $N\pi$ 。下面介绍数字低通滤波器与其他类型数字滤波器的转换关系。

### 1. 数字低通滤波器——数字低通滤波器

即由数字低通滤波器  $H_L(z)$  变换得到的还是一数字低通滤波器  $H_d(Z)$ , 但是二者的通带截止频率不同, 假定  $H_L(z)$  的通带截止频率为  $\theta_p$ ,  $H_d(Z)$  的通带截止频率为  $\omega_p$ 。当  $\theta$  由 0 变到  $\pi$  时, 显然相应地  $\omega$  也由 0 变到  $\pi$ , 根据全通函数相位变化量为  $N\pi$  可知, 应有  $N=1$ , 即变换函数为一阶全通函数

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \frac{Z^{-1} - a}{1 - aZ^{-1}} \quad (6-85)$$

其中,  $a$  为待定实数。代入  $z = e^{j\theta}$ ,  $Z = e^{j\omega}$ , 则得频率变换关系

$$e^{-j\theta} = \frac{e^{-j\omega} - a}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (6-86)$$

将  $\theta = \theta_p$ ,  $\omega = \omega_p$  代入式 (6-86) 可得

$$a = \frac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)} \quad (6-87)$$

从而确定了整个变换函数。

因此, 可以由已有的通带截止频率为  $\theta_p$  的数字低通滤波器  $H_L(z)$  变换得到新的通带截止频率为  $\omega_p$  的数字低通滤波器  $H_d(Z)$

$$H_d(Z) = H_L(z) \Big|_{z^{-1} = (Z^{-1} - a)/(1 - aZ^{-1})} \quad (6-88)$$

### 2. 数字低通滤波器——数字高通滤波器

低通数字滤波器变为高通数字滤波器, 只需将低通频率响应在单位圆上旋转

$180^\circ$ ,也就是将  $z$  变成  $-Z$  即可,这就是旋转变换。现要将通带截止频率为  $\theta_p$  的数字低通滤波器  $H_L(z)$  变换为通带截止频率为  $\omega_p$  的数字高通滤波器  $H_d(Z)$ ,只需将式(6-85)中的  $Z^{-1}$  变为  $-Z^{-1}$

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \frac{-Z^{-1} - a}{1 + aZ^{-1}} = -\frac{Z^{-1} + a}{1 + aZ^{-1}} \quad (6-89)$$

将  $\theta_p$  和  $\omega_p$  代入上式可得

$$a = -\frac{\cos\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)} \quad (6-90)$$

因此,可以由已有的通带截止频率为  $\theta_p$  的数字低通滤波器  $H_L(z)$  变换得到新的通带截止频率为  $\omega_p$  的数字高通滤波器为

$$H_d(Z) = H_L(z) \Big|_{z^{-1} = -(Z^{-1} + a)/(1 + aZ^{-1})} \quad (6-91)$$

### 3. 数字低通滤波器——数字带通滤波器

数字带通滤波器一般有两个通带截止频率指标  $\omega_{pl}$  和  $\omega_{ph}$ ,  $\omega_{pl}$  是通带下限频率,  $\omega_{ph}$  是通带上限频率。要将通带截止频率为  $\theta_p$  的数字低通滤波器  $H_L(z)$  变换为数字带通滤波器  $H_d(Z)$ 。  $H_L(e^{j\theta})$  和  $H_d(e^{j\omega})$  的幅度特性如图 6-23 所示,其中  $\omega_0$  为带通滤波器的通带中心频率。

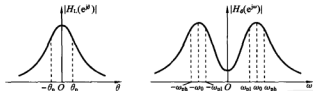


图 6-23 数字低通滤波器与数字带通滤波器的幅度特性曲线

由图 6-23 可得数字低通变换为数字带通滤波器,必须满足以下映射关系

$$\begin{aligned} \omega = \pm\omega_0 &\rightarrow \theta = 0 \quad \text{即} \quad Z = e^{\pm j\omega_0} \rightarrow z = 1 \\ \omega = 0, \pi &\rightarrow \theta = \pm\pi \quad \text{即} \quad Z = \pm 1 \rightarrow z = -1 \end{aligned}$$

所以,当数字低通滤波器频率  $\theta$  由 0 变到  $\pi$  时,数字带通滤波器  $\omega$  由  $\omega_0$  变到  $\pi$ ;当数字低通滤波器频率  $\theta$  由  $-\pi$  变到 0 时,数字带通滤波器  $\omega$  由 0 变到  $\omega_0$ 。可见当  $\omega$  由 0 变到  $\pi$  时,相应的  $\theta$  变化  $2\pi$ ,故全通变换函数的阶数  $N=2$ 。

则有

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-1} - a^*}{1 - a^* Z^{-1}} \times \frac{Z^{-1} - a}{1 - a Z^{-1}} \quad (6-92)$$

由数字低通滤波器与数字带通滤波器的映射关系可知,当  $Z^{-1} = 1$  时  $z^{-1} = -1$ , 可得

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = -\frac{Z^{-1} - a^*}{1 - a^* Z^{-1}} \times \frac{Z^{-1} - a}{1 - a Z^{-1}} \quad (6-93)$$

将  $\omega_{pl}$ 、 $\omega_{ph}$ 、 $\omega_0$ 、 $\theta_p$  代入式(6-93)可得数字低通滤波器到数字带通滤波器的变换关系

$$H_d(Z) = H_L(z) \Big|_{z^{-1} = -[(k+1)Z^{-2} - 2aZ^{-1} + (k-1)] / [(k-1)Z^{-2} - 2aZ^{-1} + (k+1)]} \quad (6-94)$$

其中

$$a = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{ph} + \omega_{pl}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{ph} - \omega_{pl}}{2}\right)} \quad (6-95)$$

$$k = \tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \cot\left(\frac{\omega_{ph} - \omega_{pl}}{2}\right) \quad (6-96)$$

#### 4. 数字低通滤波器——数字带阻滤波器

数字带阻滤波器一般有两个通带截止频率指标  $\omega_{pl}$  和  $\omega_{ph}$ ， $\omega_{pl}$  是下通带上限频率， $\omega_{ph}$  是上通带下限频率。数字带通滤波器变为数字带阻滤波器也满足旋转变换关系，只需将带通频率响应在单位圆上旋转  $180^\circ$ ，也就是将  $z$  变成  $-z$  即可。再利用数字低通滤波器到数字带通滤波器的变换关系，可得数字低通滤波器到数字带阻滤波器的变换关系为

$$H_d(Z) = H_L(z) \Big|_{z^{-1} = [(1+k)Z^{-2} - 2aZ^{-1} + (1-k)] / [(1-k)Z^{-2} - 2aZ^{-1} + (1+k)]} \quad (6-97)$$

其中

$$a = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{ph} + \omega_{pl}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{ph} - \omega_{pl}}{2}\right)} \quad (6-98)$$

$$k = \tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \tan\left(\frac{\omega_{ph} - \omega_{pl}}{2}\right) \quad (6-99)$$

由数字低通滤波器变换到其他类型数字滤波器原理比较直观，只需经过变量代换即可实现高通、带通、带阻数字滤波器，所得数字滤波器的衰减特性与数字低通滤波器相同，要得到不同衰减特性的各型数字滤波器，必须设计出相应衰减特性的数字低通滤波器。

## 本章小结

滤波技术通常包括滤波器的设计和滤波过程的实现两方面的内容，本书讲述滤波器设计的有关内容。滤波器设计的出发点是各项技术指标，设计结果也需要用各项技术指标加以验证。

IIR 数字滤波器设计的常用方法，是利用模拟滤波器设计的成果，将模拟滤波器转换为数字滤波器，熟悉模拟低通滤波器的设计方法是设计 IIR 数字滤波器的基础，本书介绍了巴特沃斯和切比雪夫 I 型模拟低通滤波器的设计方法。注意，在设计巴特沃斯滤波器时，要考虑系数  $\lambda_c$ 。

脉冲响应不变法是从时域出发,对归一化模拟低通滤波器的单位冲激响应等间隔采样,来实现模拟滤波器到数字滤波器的转换的方法。采样必须满足采样定理的要求,否则易导致频谱的混叠,该方法不适合设计高通、带阻等数字滤波器。双线性变换法从变换域的角度出发,采用非线性变换关系,将  $s$  平面到  $z$  平面的多值映射变成一一对应的映射关系,实现模拟滤波器到数字滤波器的转换,避免了频谱的混叠,但是相位特性不再具有线性变换关系,且只适合于设计分段常数型滤波器,如低通、高通、带通、带阻滤波器等。

数字高通、带通、带阻滤波器的设计,可以将模拟低通滤波器变换为模拟各型滤波器,然后再进行双线性变换,设计出各型数字滤波器(如是巴特沃斯滤波器,则要考虑系数  $\lambda_c$ ),也可以根据数字低通滤波器,进行频率变换得到衰减特性相同的其他各型数字滤波器。

## 思考与练习

- 6-1 试设计一巴特沃斯模拟低通滤波器,通带截止频率  $f_p = 500$  Hz,阻带截止频率  $f_s = 1\,000$  Hz,通带衰减不能超过 2 dB,阻带衰减不能小于 20 dB。
- 6-2 试设计一切比雪夫 I 型模拟低通滤波器,通带截止频率  $f_p = 500$  Hz,阻带截止频率  $f_s = 1\,000$  Hz,通带衰减不能超过 2 dB,阻带衰减不能小于 20 dB。
- 6-3 已知以下模拟滤波器的系统函数,用脉冲响应不变法求相应的数字滤波器的系统函数。

$$(1) H(s) = \frac{16(s+2)}{(s+3)(s+2)(s+1)}; \quad (2) H(s) = \frac{s+8}{(s+1)(s+4)}$$

- 6-4 用脉冲响应不变法设计一巴特沃斯型 IIR 低通滤波器,通带上限频率  $\omega_p = 0.2\pi$ ,阻带下限频率为  $\omega_s = 0.5\pi$ ,通带衰减不能超过 3 dB,阻带衰减不小于 16 dB。
- 6-5 用脉冲响应不变法设计一切比雪夫 I 型 IIR 低通滤波器,通带上限频率  $\omega_p = 0.2\pi$ ,阻带下限频率为  $\omega_s = 0.5\pi$ ,通带衰减不能超过 3 dB,阻带衰减大于 16 dB。
- 6-6 已知模拟滤波器的系统函数与题 6-3 相同,用双线性变换法求相应的数字滤波器的系统函数。
- 6-7 用双线性变换法设计一巴特沃斯型 IIR 低通滤波器,通带上限频率  $\omega_p = 0.2\pi$ ,阻带下限频率为  $\omega_s = 0.5\pi$ ,通带衰减不能超过 3 dB,阻带衰减大于 16 dB。
- 6-8 用双线性变换法设计一巴特沃斯型 IIR 数字低通滤波器,技术指标是通带上限频率  $f_p = 100$  Hz,阻带下限频率  $f_s = 300$  Hz,  $\delta_p = 1$  dB,  $\delta_s = 22$  dB,采样间隔为 0.001 s。
- 6-9 现有一语音信号,采样率为 10 kHz,为了检测其基音频率,要滤除 900 Hz 以

上的信号,要求 1 000 Hz 以上衰减不能低于 40 dB,900 Hz 及以下的信号衰减不能超过 3 dB,试设计一巴特沃斯滤波器满足上述要求。

- 6-10 设计一巴特沃斯型 IIR 数字高通滤波器,技术指标是通带下限频率  $f_p = 5$  kHz,阻带上限频率  $f_s = 3$  kHz,  $\delta_p = 3$  dB,  $\delta_s = 30$  dB,采样间隔为 0.000 1 s。
- 6-11 试设计一巴特沃斯数字高通滤波器,要滤除 4 kHz 以下的信号,要求 4 kHz 以上的衰减不能超过 2 dB,3 kHz 及以下的信号衰减不能低于 60 dB,采样间隔为 0.1 ms。
- 6-12 设计一巴特沃斯型 IIR 带通数字滤波器,要求在通带范围  $0.4\pi \sim 0.6\pi$  之间的最大衰减不能超过 3 dB,阻带截止频率分别为  $0.2\pi$  和  $0.8\pi$ ,阻带衰减不能小于 20 dB。
- 6-13 设计一巴特沃斯型 IIR 带通数字滤波器,要求在通带范围 4~6 kHz 之间的最大衰减不能超过 1 dB,阻带截止频率分别为 2 kHz 和 8 kHz,阻带衰减不能小于 20 dB,采样频率为 20 kHz。
- 6-14 设计一巴特沃斯型 IIR 数字带阻滤波器,其通带 3 dB 边频分别为 20 kHz 和 80 kHz,阻带边频分别为 40 kHz 和 60 kHz,阻带衰减不能超过 25 dB,采样频率为 200 kHz。
- 6-15 设计一巴特沃斯型 IIR 数字带阻滤波器,其通带边频分别为  $0.3\pi$  和  $0.6\pi$ ,通带衰减最大为 1.5 dB,阻带边频分别为  $0.4\pi$  和  $0.5\pi$ ,阻带衰减最小为 15 dB。
- 6-16 已知 IIR 低通数字滤波器的系统函数为

$$H_L(z) = \frac{0.223(1+z^{-1})^2}{1-0.2952z^{-1}+0.187z^{-2}}$$

其通带上限频率为  $0.42\pi$ ,试设计一通带上限频率为  $0.57\pi$  的数字低通滤波器。

- 6-17 已知 IIR 数字低通滤波器的系统函数及通带上限频率与上题相同,试设计一通带下限频率为  $0.61\pi$  的数字高通滤波器。
- 6-18 已知切比雪夫 I 型 IIR 数字低通滤波器的系统函数为

$$H_L(z) = \frac{0.1494(1+z^{-1})^2}{1-0.7076z^{-1}+0.3407z^{-2}}$$

其通带上限频率为  $0.27\pi$ ,试设计一通带截止频率分别为  $0.35\pi$  和  $0.55\pi$  的数字带通滤波器。

- 6-19 试利用数字低通——数字低通的变换原理,将例 6-12 的数字陷波器变换到模拟陷波频率为 50 Hz 处。

## FIR 数字滤波器的设计

本章重点内容:线性相位 FIR 数字滤波器的相位特性、幅度特性和零点特性;用窗函数法设计线性相位低通、高通、带通和带阻 FIR 数字滤波器的基本方法;频率采样法设计线性相位 FIR 数字滤波器的方法;IIR 滤波器与 FIR 数字滤波器的比较。

一个离散时间系统  $H(z)=X(z)/Y(z)$ ,若分母多项式  $Y(z)$  的系数除了常数项外其余都为 0,那么该系统就为 FIR 系统,即

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{N-1} z^{-(N-1)} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}$$

显然,系数  $b_0, b_1, \cdots, b_{N-1}$  就是该系统的单位脉冲响应  $h(0), h(1), \cdots, h(N-1)$ ,且当  $n \geq N$  时,  $h(n) = 0$ ,即 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应是有限长的。

由于 FIR 数字滤波器只有零点,因此这类滤波器不像 IIR 数字滤波器那样易取得比较好的通带和阻带衰减特性。要取得较好的衰减特性,一般要求 FIR 数字滤波器的阶次要高,即  $N$  要大,这是 FIR 数字滤波器的缺点。但是, FIR 数字滤波器也有自己突出的优点。首先,系统稳定性好;其次,易实现严格的线性相位特性;最后, FIR 数字滤波器的单位脉冲响应是有限长的,可以采用快速傅里叶变换算法来实现滤波过程,从而可以大大提高运算效率。

这里最感兴趣的是具有线性相位的 FIR 数字滤波器。对非线性相位的 FIR 数字滤波器,一般可以用 IIR 数字滤波器来代替,因此,本章主要讨论具有线性相位特性的 FIR 数字滤波器的设计。

由第 6 章的讨论可知, IIR 数字滤波器的设计方法主要是借助模拟滤波器的设计方法。IIR 数字滤波器的设计中的各种变换方法对 FIR 数字滤波器的设计是不合适的,因为 IIR 数字滤波器的设计方法是面向零极点系统的,而 FIR 数字滤波器仅包含零点。目前, FIR 数字滤波器的设计主要是以理想滤波器频率特性为基础,

然后以某种方式加以逼近。这些方法有窗函数法、频率采样法及最佳一致逼近法等,本章将较为详细地讨论这些方法。

## 7.1 线性相位 FIR 数字滤波器的特性

FIR 数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  是有限长的 ( $0 \leq n \leq N-1$ ), 其  $z$  变换为

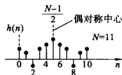
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (7-1)$$

在有限的  $z$  ( $0 < |z| < +\infty$ ) 平面内有  $N-1$  个零点, 在  $z$  平面原点  $z=0$  处有  $N-1$  阶极点。第 5 章讨论过具有线性相位特性的 FIR 数字滤波器的结构, 如果  $h(n)$  满足偶对称或奇对称的条件 (如图 7-1、图 7-2 所示)

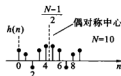
$$\text{偶对称} \quad h(n) = h(N-1-n) \quad (7-2a)$$

$$\text{奇对称} \quad h(n) = -h(N-1-n) \quad (7-2b)$$

则 FIR 数字滤波器就能具有严格的线性相位特性。

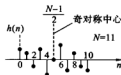


(a)  $N$  为奇数

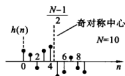


(b)  $N$  为偶数

图 7-1  $h(n)$  偶对称



(a)  $N$  为奇数



(b)  $N$  为偶数

图 7-2  $h(n)$  奇对称

下面推导 FIR 数字滤波器的线性相位特性。

### 7.1.1 线性相位 FIR 数字滤波器的相位特性

#### 1. $h(n)$ 偶对称

由偶对称  $h(n) = h(N-1-n)$  可得

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-(N-1-n)} = z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^n \quad (7-3)$$

因此有

$$H(z) = z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \quad (7-4)$$



于是

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} [H(z) + z^{-(N-1)} H(z^{-1})] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1)} z^n] \\ &= z^{-(N-1)/2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \frac{1}{2} [z^{-[n-(N-1)/2]} + z^{[n-(N-1)/2]}] \end{aligned} \quad (7-5)$$

所以有

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[ \omega \left( n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \quad (7-6)$$

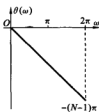


图 7-3  $h(n)$  偶对称时的

线性相位特性

显然,  $\varphi(\omega)$  是  $\omega$  的线性函数, 并且通过原点, 即具有严格的线性相位特性, 如图 7-3 所示, 滤波器有  $(N-1)/2$  个抽样的延迟, 等于单位脉冲响应  $h(n)$  长度的一半。

## 2. $h(n)$ 奇对称

与  $h(n)$  偶对称时类似, 由奇对称  $h(n) = -h(N-1-n)$ , 可得

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = - \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n) z^{-n} \\ &= - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-(N-1-n)} = - z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^n \end{aligned} \quad (7-9)$$

因此有

$$H(z) = -z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \quad (7-10)$$

于是

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} [H(z) - z^{-(N-1)} H(z^{-1})] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} - z^{-(N-1)} z^n] \\ &= z^{-(N-1)/2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \frac{1}{2} [z^{-[n-(N-1)/2]} - z^{[n-(N-1)/2]}] \end{aligned} \quad (7-11)$$

所以有

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = j e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[ \omega \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right] \quad (7-12)$$

可以看出, 上式的求和项内全部为实数。仍然将  $H(e^{j\omega})$  表示成相位函数  $\varphi(\omega)$  和幅度函数  $H(\omega)$  的形式, 则有

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] \quad (7-13)$$

$$\varphi(\omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega + \frac{\pi}{2} \quad (7-14)$$

显然,  $\varphi(\omega)$  仍然是  $\omega$  的线性函数, 即具有严格的线性相位特性, 但是不通过原点, 在零点处有  $\pi/2$  的截距, 如图 7-4 所示。与偶对称一样, 也有  $(N-1)/2$  个采样的延迟, 而且还产生  $90^\circ$  的相移。这种使所有频率的相移均为  $90^\circ$  的网络, 称为  $90^\circ$  移相网络, 或者称为正交变换网络, 它和理想低通滤波器、理想微分器一样, 有着极为重要的理论和实际意义。因而,  $h(n)$  呈奇对称时, FIR 滤波器将是一个具有准确的线性相位的理想正交变换网络。

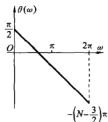


图 7-4  $h(n)$  奇对称时的线性相位特性

### 7.1.2 线性相位 FIR 数字滤波器的幅度特性

下面分四种情况分别讨论幅度函数  $H(\omega)$  的特点。

#### 1. $h(n)$ 偶对称, $N$ 为奇数

在  $h(n)$  偶对称的幅度函数式(7-7)中,  $h(n)$  对  $(N-1)/2$  呈偶对称, 满足  $h(n) = h(N-1-n)$ , 并且  $\cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$  也对  $(N-1)/2$  呈偶对称, 满足

$$\cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] = \cos\left[\left[\frac{N-1}{2} - (N-1-n)\right]\omega\right]$$

因而, 整个求和运算内各项之间均满足第  $n$  项与第  $(N-1-n)$  项是相等的。所以可以把两两相等的项合并, 即依次将  $n=0$  与  $n=N-1$  项合并,  $n=1$  与  $n=N-2$  项合并等, 合并后共有  $(N-1)/2$  项, 由于  $N$  为奇数, 故余下中间一项  $n=(N-1)/2$ , 则幅度函数可表示为

$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

在上式中令  $(N-1)/2 - n = m$  有

$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{(N-1)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos(m\omega)$$

上式可统一表示成

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(n\omega) \quad (7-15)$$

其中,  $a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$ ;  $a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$ ,  $n=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ 。

由此可以看出, 当  $h(n)$  偶对称,  $N$  为奇数时,  $\cos(n\omega)$  对于  $\omega=0, \pi, 2\pi$  皆为偶对称, 所以幅度函数  $H(\omega)$  对  $\omega=0, \pi, 2\pi$  也呈偶对称。因此, 这种情况适合于设计任何关于这些点为偶对称的滤波器, 如常用的低通、高通、带通、带阻滤波器。  $h(n)$  偶对称,

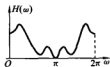


图 7-5  $h(n)$  偶对称、 $N$  为奇数时的幅度特性

$N$  为奇数时的幅度特性如图 7-5 所示。

## 2. $h(n)$ 偶对称, $N$ 为偶数

和  $h(n)$  偶对称,  $N$  为奇数情况的讨论相同, 不同点仅在于  $N$  是偶数, 故没有单独的项, 皆可两两合并成  $N/2$  项, 即

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

令  $n = N/2 - m$  有

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{N/2} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \cos\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

可表示成

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \quad (7-16)$$

其中,  $b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ 。

由此可看出, 当  $h(n)$  偶对称,  $N$  为偶数时,  $H(\omega)$  具有以下特点。

(1) 当  $\omega = \pi$  时,  $\cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right] = \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 0$ , 故  $H(\pi) = 0$ , 也就是  $H(z)$  在  $z = -1$  处必然有一个零点。

(2) 由于  $\cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$  对  $\omega = \pi$  呈奇对称, 所以  $H(\omega)$  对  $\omega = \pi$  呈奇对称, 对  $\omega = 0, 2\pi$  呈偶对称。

(3) 如果一个滤波器在  $\omega = \pi$  时,  $H(\omega)$  不为零 (如高通或带阻滤波器), 则不能使用这种滤波器。

当  $h(n)$  偶对称,  $N$  为偶数时, 其幅度特性如图 7-6 所示。

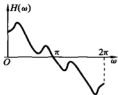


图 7-6  $h(n)$  偶对称、 $N$  为偶数时的幅度特性

## 3. $h(n)$ 奇对称, $N$ 为奇数

$h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数时, 幅度函数式 (7-13) 中, 由于  $h(n) = -h(N-1-n)$ , 所以有

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right) = -h\left(N-1 - \frac{N-1}{2}\right) = -h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

也就是中间项  $h\left(\frac{N-1}{2}\right)$  一定为零。

$h(n)$  是奇对称的,  $\sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$  也是奇对称的, 即

$$\sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right] = -\sin\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] = -\sin\left[\left[\frac{N-1}{2} - (N-1-n)\right]\omega\right]$$

这样乘积的结果, 上式求和运算的第  $n$  项与第  $(N-1-n)$  项是相等的, 可以将两两

相等的项合并,合并后有  $(N-1)/2$  项,可得

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

令  $m = \frac{N-1}{2} - n$  可得

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{(N-1)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \sin(n\omega)$$

可表示为

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(n\omega) \quad (7-17)$$

其中,  $c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$ ,  $n=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ 。

由此可以看出,当  $h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数时,  $H(\omega)$  具有以下特点。

(1) 由于  $\sin(n\omega)$  在  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处都为零,因此  $H(\omega)$  在  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处必为零,也就是  $H(z)$  在  $z=\pm 1$  处有零点,故不适合设计在  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处不为零的滤波器,如低通、高通、带阻滤波器等。

(2) 由于  $\sin(n\omega)$  在  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处都呈奇对称,故  $H(\omega)$  在  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处也呈奇对称。

$h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数时的幅度特性如图 7-7 所示。

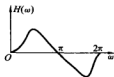


图 7-7  $h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数时的幅度特性

#### 4. $h(n)$ 奇对称, $N$ 为偶数

这和  $h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数情况的讨论相同,但两两合并后共有  $N/2$  项,因而有

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \sin\left[\left(\frac{N}{2} - n\right)\omega\right]$$

令  $n = \frac{N}{2} - m$  可得

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{N/2} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \sin\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

可表示为

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right] \quad (7-18)$$

其中,  $d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right)$ ,  $n=1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ 。

由此可以看出,当  $h(n)$  奇对称,  $N$  为偶数时,  $H(\omega)$  具有以下特点。

(1) 由于  $\sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$  在  $\omega=0, 2\pi$  处为零,所以  $H(\omega)$  在  $\omega=0, 2\pi$  处也为零,

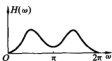


图 7-8  $h(n)$  奇对称,  $N$  为偶数时的幅度特性

也就是  $H(z)$  在  $z=1$  处有零点, 故不适合设计在  $\omega=0, 2\pi$  处不为零的滤波器, 如低通、带阻滤波器等。

(2) 由于  $\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$  在  $\omega=0, 2\pi$  处呈奇对称, 在  $\omega=\pi$  呈偶对称, 故  $H(\omega)$  在  $\omega=0, 2\pi$  处呈奇对称, 在  $\omega=\pi$  呈偶对称。

$h(n)$  奇对称,  $N$  为偶数时的幅度特性如图 7-8 所示。

### 7.1.3 线性相位 FIR 数字滤波器的零点特性

由式(7-4)和式(7-10)可知, 线性相位 FIR 数字滤波器的系统函数  $H(z)$  满足

$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

其中,  $h(n)$  偶对称时“ $\pm$ ”取“+”,  $h(n)$  奇对称时“ $\pm$ ”取“-”。若  $z_i$  是  $H(z)$  的零点, 显然有

$$H(z_i) = \pm z_i^{-(N-1)} H(z_i^{-1}) = 0$$

因此,  $z_i^{-1}$  也一定是  $H(z)$  的零点。由于滤波器的  $h(n)$  为实数, 所以  $H(z)$  为实系数多项式, 则零点  $z_i$  是共轭成对出现的, 这样  $z_i^*$  和  $(z_i^*)^{-1}$  也是  $H(z)$  的零点。

线性相位 FIR 数字滤波器的零点必是互为倒数的共轭对, 或者说是共轭镜像的。具体来说, 令  $z_i = r_i e^{j\theta_i}$ , 则有以下四种情况。

(1) 零点  $z_i$  既不在实轴上, 也不在单位圆上, 即  $r_i \neq 1, \theta_i \neq 0, \pi$ , 零点是两组互为倒数的共轭对, 如图 7-9(a) 所示, 其基本系统是两个实系数二阶多项式的乘积。

(2) 零点  $z_i$  在单位圆上, 但不在实轴上, 即  $r_i = 1, \theta_i \neq 0, \pi$ , 此时零点的共轭值就是它的倒数, 如图 7-9(b) 所示, 其基本系统是一个实系数二阶多项式。

(3) 零点  $z_i$  在实轴上, 但不在单位圆上, 即  $r_i \neq 1, \theta_i = 0$  或  $\theta_i = \pi$ , 此时零点是实

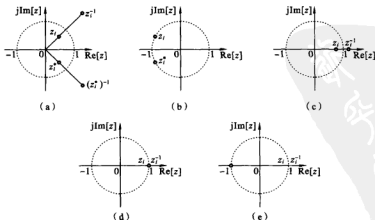


图 7-9 线性相位 FIR 数字滤波器的零点位置

数,它没有复共轭对称点,只有倒数,倒数也在实轴上,如图 7-9(c)所示,其基本系统是一个实系数二阶多项式。

(4) 零点  $z_i$  既在实轴上,也在单位圆上,即  $r_i=1, \theta_i$  等于 0 或  $\pi$ ,这时零点只有两种可能,即  $z_i=1$  或  $z_i=-1$ ,分别如图 7-9(d)和 7-9(e)所示,其基本系统是一个实系数一阶多项式。

由上述讨论可以看出,一个具有线性相位的 FIR 数字滤波器,其系统函数可以表示成上述各基本系统的级联形式,即

$$H(z) = \left[ \prod_k H_k(z) \prod_l H_l(z) \prod_m H_m(z) \prod_n H_n(z) \right]$$

这些一阶、二阶基本系统都有对称的系数,因此它们也都具有线性相位特性。

当  $h(n)$  偶对称,  $N$  为偶数时,  $H(\pi)=0$ , 包含有图 7-9(e)所示的零点; 当  $h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数时,  $H(\pi)=H(0)=0$ , 包含有图 7-9(d)和图 7-9(e)所示的零点; 当  $h(n)$  奇对称,  $N$  为偶数时,  $H(0)=0$ , 包含有图 7-9(d)所示的零点。

以上较详细地讨论了 FIR 数字滤波器的相位、幅度和零点特性,可以根据实际需要选择合适类型的 FIR 数字滤波器。 $h(n)$  奇对称时,该滤波器的所有频率成分将产生  $90^\circ$  的相移,该类滤波器的幅度特性近似于差分幅度特性,差分器和希尔伯特变换器需要这一特性。当设计一般用途的滤波器时,如低通、高通、带通、带阻滤波器等,  $h(n)$  多取偶对称,长度  $N$  往往取为奇数。

## 7.2 窗函数法设计 FIR 数字滤波器

理想滤波器在物理上是不可实现的,其单位脉冲响应是无限长、非因果的。窗函数法,就是从时域出发,用有限长、因果的单位脉冲响应  $h(n)$  去逼近理想滤波器的无限长、非因果的单位脉冲响应的方法。窗函数法又叫傅里叶级数法。

### 7.2.1 基本方法

现有一理想滤波器的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$ , 要求设计一 FIR 数字滤波器,其频率响应  $H(e^{j\omega})$  是对  $H_d(e^{j\omega})$  的逼近。先由  $H_d(e^{j\omega})$  的傅里叶反变换得到其单位脉冲响应  $h_d(n)$ , 即

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (7-19)$$

由于  $H_d(e^{j\omega})$  是矩形频率特性,故  $h_d(n)$  一定是无限长且非因果的序列。而要设计的滤波器的  $h(n)$  是有限长且是因果的,所以要用有限长的  $h(n)$  来逼近无限长的  $h_d(n)$ 。最直接的方法是截断  $h_d(n)$ ,或者说,用一有限长的窗函数序列  $w(n)$  来截取  $h_d(n)$ , 即

$$h(n) = h_d(n)w(n) \quad (7-20)$$

因此,窗函数的形状和长度的选择就极为关键。

下面以一个通带截止频率为  $\omega_c$  的线性相位的理想低通滤波器为例来加以讨论

论。设理想低滤波器的群时延为  $a$ , 即有

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega a}, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (7-21)$$

这表明, 在通带  $|\omega| \leq \omega_c$  范围内,  $H_d(e^{j\omega})$  的幅度为常数 1, 相位是  $-\omega a$ 。将上式代入式(7-19)可得

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n} e^{j\omega a} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-a)]}{\pi(n-a)} \quad (7-22)$$

$h_d(n)$  如图 7-10 所示, 它是以  $a$  为对称中心的偶对称、无限长、非因果的序列。要得到有限长的  $h(n)$ , 一种简单的办法就是用矩形窗  $R_N(n)$  对  $h_d(n)$  进行截取。但是, 按照线性相位 FIR 数字滤波器的条件,  $h(n)$  必须是对称的, 对称中心为长度的一半, 即  $(N-1)/2$ , 因而, 必须有  $a = (N-1)/2$ , 所以有

$$\begin{cases} h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases} \\ a = (N-1)/2 \end{cases} \quad (7-23)$$

将式(7-22)代入式(7-23)得

$$h(n) = \frac{\sin\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega_c\right]}{\pi\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7-24)$$

$n$  为其他值时  $h(n)$  为零。得到的  $h(n)$  一定满足  $h(n) = h(N-1-n)$  这一线性相位的偶对称条件。图 7-10 给出了  $h_d(n)$ 、 $R_N(n)$  及其傅里叶变换的幅度波形。

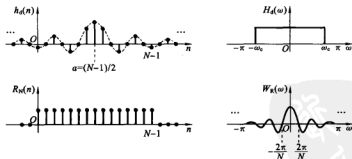


图 7-10 理想低滤波器的  $h_d(n)$  和  $H_d(\omega)$  及矩形窗  $R_N(n)$  及  $W_N(\omega)$

设矩形窗的频率响应为  $W_R(e^{j\omega})$

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (7-25)$$

也可将其表示成幅度函数与相位函数的乘积

$$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\omega(N-1)/2} \quad (7-26)$$

其中

$$W_R(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (7-27)$$

$W_R(e^{j\omega})$  就是第 3 章讨论过的频域采样内插函数(差一个常数因子  $1/N$ ), 其幅度函数  $W_R(\omega)$  在  $\omega = \pm 2\pi/N$  之内为一个主瓣, 两侧形成许多衰减振荡的旁瓣, 如图 7-10 所示。

下面将理想滤波器的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$  也表示成

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega) e^{-j\omega(N-1)/2} \quad (7-28)$$

其中,  $H_d(\omega)$  为幅度。由于加窗的过程就是在时域中理想滤波器的单位脉冲响应  $h_d(n)$  和窗函数  $w(n)$  的乘积, 按复卷积定理有, 加窗所得滤波器的频率响应  $H(e^{j\omega})$  为理想滤波器的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$  和窗函数的频率响应  $W_R(e^{j\omega})$  的卷积

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\theta(N-1)/2} W_R(\omega-\theta) e^{-j(N-1)(\omega-\theta)/2} d\theta \\ &= e^{-j\omega(N-1)/2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega-\theta) d\theta \end{aligned} \quad (7-29)$$

同样令

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{-j\omega(N-1)/2} \quad (7-30)$$

则实际求得的 FIR 数字滤波器的幅度函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega-\theta) d\theta \quad (7-31)$$

由此可见, 对实际 FIR 数字滤波器频率响应的幅度函数  $H(\omega)$  起影响的是窗函数频率响应的幅度函数  $W_R(\omega)$ 。上式的卷积过程可用图 7-11 说明。

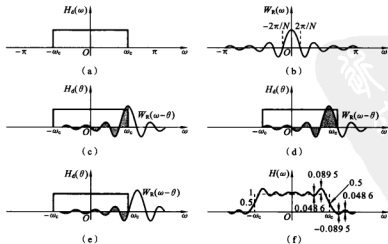


图 7-11 加矩形窗的卷积过程



从图 7-11 中可以总结出加矩形窗处理对理想低通滤波器频率响应产生了以下几点影响。

(1) 在理想频率特性由通带到阻带的跳变处形成一个过渡带, 过渡带的宽度等于窗口的频率响应  $W_R(\omega)$  的主瓣宽度, 即  $4\pi/N$ 。注意, 这里的过渡带是指通带肩峰与阻带肩峰之间的宽度, 滤波器的实际过渡带比  $4\pi/N$  要稍小些。

(2) 在截止频率  $\omega_c$  的两边  $\omega = \omega_c \pm \frac{2\pi}{N}$  (即过渡带的两边) 处,  $H(\omega)$  出现最大的肩峰值, 肩峰的两侧 (在过渡带外) 形成起伏振荡, 振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度。

(3) 增加截取长度  $N$ , 则在主瓣附近的窗的频率响应近似为  $N \sin x / x$ , 其中,  $x = N\omega/2$ , 可见, 改变  $N$ , 只能改变窗口函数频谱的主瓣宽度、波动的频率快慢和  $W_R(\omega)$  的绝对值的大小, 而不能改变主瓣和旁瓣的相对比例。这个相对比例由  $\sin x / x$  决定, 或者说由窗口函数的形状来决定。因此, 当截取长度  $N$  增加时, 只会减小过渡带宽  $4\pi/N$ , 而不会改变肩峰的相对值。矩形窗的相对最大肩峰值为 8.95%,  $N$  增加时,  $2\pi/N$  减小, 起伏振荡频率加快, 但最大肩峰的相对值总是 8.95%, 这种现象称为吉布斯 (Gibbs) 效应。窗口函数频谱的肩峰大小, 影响到  $H(\omega)$  通带的平稳性和阻带的衰减大小, 对滤波器的性能有很大影响。

为了减小吉布斯效应的影响, 改善滤波器的性能, 一般采用其他类型的窗函数对  $h_d(n)$  进行加窗处理。窗函数频谱的主瓣应该包含尽可能多的能量, 旁瓣的幅度应尽可能地小, 以降低通带内的纹波, 并加大阻带的衰减, 但这往往会加宽过渡带宽。下面介绍一些常用的窗函数。

## 7.2.2 常用的窗函数

由上述可知, 矩形窗截取造成的最大肩峰始终为 8.95%, 导致阻带最小衰减为  $20\lg(8.95\%) = -21$  dB, 这个衰减量在工程上往往不够。为了加大阻带衰减, 只能改变窗函数的形状。从式 (7-31) 及图 7-11 所示的频域卷积过程可以看出, 只有当窗函数的能量集中在主瓣, 旁瓣能量越小, 即越逼近于冲激函数时,  $H(\omega)$  才能逼近  $H_d(\omega)$ 。

显然, 希望窗函数满足以下两项要求。

(1) 窗函数幅度谱的主瓣宽度决定了过渡带的宽度, 因此窗函数幅度谱的主瓣应尽可能地窄, 以获得较窄的过渡带。

(2) 最大旁瓣的相对幅度决定了通带纹波和阻带衰减的大小, 因此窗函数幅度谱的最大旁瓣幅度应尽可能地小, 以减小通带纹波, 增大阻带衰减。

但是, 上述两项要求不能同时得到满足, 主瓣变窄会导致旁瓣幅度增加, 旁瓣幅度减小会导致主瓣的宽度加宽。因此, 窗函数的选取, 往往是在满足阻带衰减的条件下, 尽可能地使过渡带变窄。

前面已经讨论了矩形窗的特点, 下面介绍其他一些常用窗函数。

### 1. 巴特列特窗

巴特列特(Bartlett)窗又称为三角形窗,其窗函数为

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (7-32)$$

其频率响应为

$$W(e^{j\omega}) = \frac{2}{N-1} \left\{ \frac{\sin\left[\frac{(N-1)\omega}{4}\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right\}^2 e^{-j\omega(N-1)/2} \quad (7-33)$$

巴特列特窗的主瓣宽度为  $8\pi/N$ 。也就是在  $N$  相同的情况下比矩形窗的主瓣宽度增加了 1 倍。

### 2. 汉宁窗

汉宁(Hanning)窗又称为升余弦窗,其窗函数为

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (7-34)$$

其频率响应为

$$W(e^{j\omega}) = \left\{ 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \right\} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

其幅度响应为

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \quad (7-35)$$

可见汉宁窗的幅度响应是三个矩形窗幅度响应的移位加权,使旁瓣相互抵消,能量更集中在主瓣,其代价是主瓣宽度增加了 1 倍,即为  $8\pi/N$ 。

### 3. 汉明窗

汉明(Hamming)窗又称为改进的升余弦窗,其窗函数为

$$w(n) = \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (7-36)$$

其幅度响应为

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \quad (7-37)$$

与汉宁窗相比,主瓣相同均为  $8\pi/N$ ,但旁瓣幅度更小。

### 4. 布莱克曼窗

布莱克曼(Blackman)窗又称二阶升余弦窗,其窗函数为

$$w(n) = \left[ 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (7-38)$$

其幅度响应为

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \\ + 0.04 \left[ W_R\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right) \right] \quad (7-39)$$

旁瓣的幅度进一步降低,但是主瓣宽度增加为  $12\pi/N$ 。

图 7-12 给出了前述五种窗函数的波形,这五种窗函数均以  $(N-1)/2$  为中心呈对称关系。

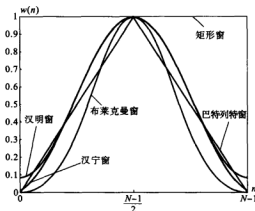


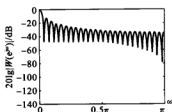
图 7-12 常用的几种窗函数

图 7-13 是  $N=51$  时这五种窗函数的频谱,从上到下依次是矩形窗、巴特列特窗、汉宁窗、汉明窗和布莱克曼窗。从图中可以看出,图 7-13 中矩形窗的主瓣宽度最小,但是旁瓣衰减也是最小的,图 7-13 中布莱克曼窗的旁瓣衰减最大,但是主瓣宽度也是最大的。从主瓣宽度和旁瓣衰减大小的综合考虑,汉明窗具有较小的主瓣宽度和较大的旁瓣衰减。

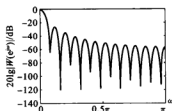
图 7-14 是利用这五种窗函数设计同一指标,即  $N=11$ 、理想滤波器的截止频率为  $\omega_c=0.5\pi$  的 FIR 线性相位低通滤波器的幅度特性,从上到下依次是采用矩形窗、巴特列特窗、汉宁窗、汉明窗和布莱克曼窗所设计出的滤波器的幅度特性曲线。从图中可知,采用矩形窗时在  $0.5\pi$  处的衰减是 6.3 dB,采用巴特列特窗、汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗时,  $0.5\pi$  处的衰减均是 6.0 dB。在阻带中,采用矩形窗时第一旁瓣衰减是 21.74 dB,采用巴特列特窗、汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗时,第一旁瓣衰减分别是 27.95 dB、44.01 dB、52.21 dB 和 75.3 dB。

## 5. 凯泽窗

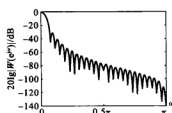
凯泽(Kaiser)窗的窗函数为



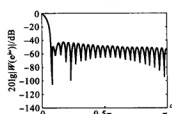
(a) 矩形窗



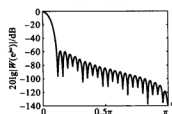
(b) 巴特列特窗



(c) 汉宁窗

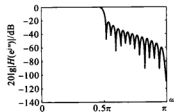


(d) 汉明窗

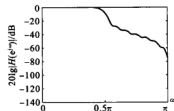


(e) 布莱克曼窗

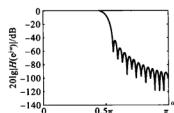
图 7-13 常用窗函数的傅里叶变换



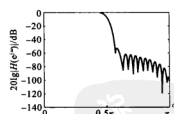
(a) 矩形窗



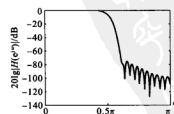
(b) 巴特列特窗



(c) 汉宁窗



(d) 汉明窗



(e) 布莱克曼窗

图 7-14 用加窗函数设计的低通滤波器的幅度响应

$$w(n) = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(1-\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7-40)$$

其中,  $I_0(\cdot)$  是第一类变形零阶贝塞尔函数,  $\beta$  是一个可以自由选择参数, 可同时调整主瓣宽度与旁瓣电平。  $\beta$  越大, 窗口频谱的旁瓣越小, 但是主瓣宽度增加,  $\beta$  越小, 窗口频谱的主瓣宽度就越小, 旁瓣幅度增加。  $\beta$  值可以根据阻带衰减  $\delta_s$  的大小根据以下经验公式进行选择

$$\beta = \begin{cases} 0, & \delta_s \leq 21 \\ 0.584 \cdot 2(\delta_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\delta_s - 21), & 21 < \delta_s < 50 \\ 0.110 \cdot 2(\delta_s - 8.7), & \delta_s \geq 50 \end{cases} \quad (7-41)$$

给定过渡带宽  $\Delta\omega$ , 则凯泽窗 FIR 数字滤波器的阶数  $N$  可由下式估计

$$N = \frac{\delta_s - 7.95}{2.286\Delta\omega} \quad (7-42)$$

表 7-1 归纳了以上几种窗口的主要性能, 可为设计 FIR 数字滤波器时选择窗口类型的依据。

表 7-1 常用窗函数的基本参数

窗函数	旁瓣峰值/dB	过渡带宽 $\Delta\omega$	阻带最小衰减/dB
矩形窗	-13	$1.8\pi/N$	-21
巴特利特窗	-25	$4.2\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$6.2\pi/N$	-44
汉明窗	-41	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$11\pi/N$	-74
凯泽窗 ( $\beta=7.865$ )	-57	$10\pi/N$	-80

## 7.2.3 几种常用线性相位 FIR 数字滤波器的设计

下面介绍常用的低通、高通、带通和带阻线性相位 FIR 数字滤波器的窗函数设计方法和设计过程。首先归纳窗函数法设计 FIR 数字滤波器的步骤如下。

(1) 利用表 7-1, 根据阻带最小衰减要求选定窗口函数, 再由过渡带宽确定  $N$  的大小, 得到  $w(n)$ 。

(2) 计算出相应的理想滤波器的单位脉冲响应  $h_d(n)$ 。

(3) 求得所设计的 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n) = h_d(n)w(n)$ ,  $n=0, 1, \dots, N-1$ 。

(4) 为了验证设计结果是否满足设计要求, 可以求  $H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)]$  加以验证, 如不满足要求, 则需重新设计。

### 1. 线性相位 FIR 低通数字滤波器的设计

截止频率为  $\omega_c$  的理想低通滤波器的单位脉冲响应已在式(7-22)中给出,现重写如下

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n} e^{j\omega a} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-a)]}{\pi(n-a)}$$

根据阻带衰减和过渡带宽的要求,选取合适的窗函数。下面通过例题说明具体的设计步骤。

**例 7-1** 设计一线性相位 FIR 低通数字滤波器,通带截止频率  $f_p=1$  kHz,阻带起始频率  $f_s=2$  kHz,阻带衰减  $\delta_s$  不小于 50 dB,采样间隔  $T_s=0.1$  ms。

**解** (1) 求对应的数字频率指标。

通带截止频率为

$$\omega_p = 2\pi f_p T_s = 0.2\pi$$

阻带起始频率为

$$\omega_s = 2\pi f_s T_s = 0.4\pi$$

(2) 选取窗函数。由阻带衰减确定窗函数,由过渡带宽确定  $N$ 。

由于要求  $\delta_s$  不小于 50 dB,根据表 7-1 知,可选汉明窗。所要求的过渡带宽  $\Delta\omega$  为

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$$

由于汉明窗的过渡带宽满足  $\Delta\omega = \frac{6.6\pi}{N}$ ,所以

$$N = \frac{6.6\pi}{\Delta\omega} = 33$$

时延常数

$$a = \frac{N-1}{2} = 16$$

所以有

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right] R_N(n) = \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{\pi n}{16}\right)\right] R_{33}(n)$$

(3) 求  $h_d(n)$ 。由所给定的低通数字滤波器的过渡带求理想低通滤波器的截止频率  $\omega_c$  为

$$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = 0.3\pi$$

并将时延常数代入式(7-22)得

$$h_d(n) = \frac{\sin[\omega_c(n-a)]}{\pi(n-a)} = \frac{\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}$$

(4) 求  $h(n)$ 。由  $h(n) = h_d(n)w(n)$ ,得

$$h(n) = \frac{\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)} \left[0.54 - 0.46\cos\left(\frac{\pi n}{16}\right)\right] R_{33}(n)$$

由  $h(n)$  得出幅度特性和相位特性如图 7-15 所示。由设计结果可知,在通带截止

频率 1 kHz 处,衰减为 0.079 7 dB;在阻带起始频率 2 kHz 以后,最小衰减为 46.87 dB。从相位特性来看,所设计的数字滤波器在通带范围内具有严格的线性相位特性。

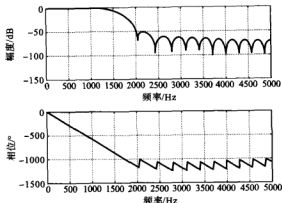


图 7-15 例 7-1 的幅度特性和相位特性

## 2. 线性相位 FIR 高通数字滤波器的设计

理想高通滤波器的频率响应为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega a}, & \omega_c \leq |\omega| < \pi \\ 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases} \quad (7-43)$$

其中,  $a$  为时延常数,应取为  $(N-1)/2$ , 它的单位脉冲响应为

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-a)\pi] - \sin[(N-a)\omega_c]}{\pi(n-a)} \quad (7-44)$$

选定窗函数  $w(n)$ , 即可得到所需的线性相位 FIR 高通数字滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

滤波器的阻带衰减与选用哪种窗函数有关,而滤波器的过渡带宽既与窗函数的形状有关,也与窗口长度有关。注意,设计高通滤波器时,其单位冲激响应只能是偶对称的(这也是低通、带通和带阻滤波器所要求的),且高通滤波器的  $N$  只能取奇数(在设计常用滤波器时,最好在习惯上  $N$  都取成奇数)。

FIR 高通数字滤波器的窗函数法设计过程和低通滤波器的设计过程基本相同。

**例 7-2** 试设计一线性相位 FIR 高通数字滤波器,通带下限频率  $\omega_p = 0.6\pi$ , 阻带上限频率  $\omega_s = 0.3\pi$ , 阻带最小衰减不小于 60 dB。

**解** (1) 选取窗函数。根据  $\delta_s = 60$  dB, 可选择布莱克曼窗, 过渡带宽为

$$\Delta\omega = \omega_p - \omega_s = 0.3\pi$$

由布莱克曼窗的过渡带宽确定阶数  $N$ , 即

$$N = \frac{11\pi}{0.3\pi} = 36.67, \quad \text{故取 } N = 37$$

所以,时延常数  $\alpha = (N-1)/2 = 18$ ,故窗函数为

$$w(n) = \left[ 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{18}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{\pi n}{9}\right) \right] R_{37}(n)$$

(2) 求理想高通滤波器的单位脉冲响应  $h_d(n)$ 。由所给定的高通数字滤波器的过渡带求理想高通滤波器的截止频率  $\omega_c$ ,即

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.45\pi$$

所以,理想高通滤波器的单位脉冲响应为

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-18)\pi] - \sin[0.45(n-18)\pi]}{\pi(n-18)}$$

(3) 求  $h(n)$ 。由  $h(n) = h_d(n)w(n)$ ,得

$$h(n) = \frac{\sin[(n-18)\pi] - \sin[0.45(n-18)\pi]}{\pi(n-18)} \left[ 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{18}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{\pi n}{9}\right) \right] R_{37}(n)$$

图 7-16 所示的为所设计的高通数字滤波器的幅度特性和相位特性。由图可知,在频率  $\omega_p = 0.6\pi$  处,衰减为 0.003 dB,在  $\omega_s = 0.3\pi$  以内,最小衰减为 71.54 dB。在通带内,具有严格的线性相位特性。

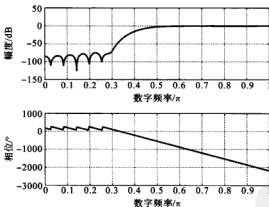


图 7-16 例 7-2 的幅度特性和相位特性

### 3. 线性相位 FIR 带通数字滤波器的设计

理想带通滤波器的频率响应为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega a}, & \omega_{cl} \leq |\omega| \leq \omega_{ch} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7-45)$$

其中,  $a$  为时延常数,应取为  $(N-1)/2$ ,  $\omega_{cl}$  和  $\omega_{ch}$  为通带下边频和通带上边频。它的单位脉冲响应为

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-a)\omega_{ch}] - \sin[(n-a)\omega_{cl}]}{\pi(n-a)} \quad (7-46)$$



其设计过程与低通滤波器的设计过程类似,下面通过举例加以说明。

**例 7-3** 有一段用采样率为 10 kHz 采样得到的语音,现要对 2~3 kHz 之间的语音信号加以提取,要求 1.5 kHz 以下及 3.5 kHz 以上的语音信号最少要有 40 dB 的衰减,试设计一 FIR 带通数字滤波器实现上述要求。

**解** (1) 求对应的数字频率指标。

通带下边频为  $\omega_{pl}=2\pi f_{pl}/f_s=0.4\pi$ , 通带上边频为  $\omega_{ph}=2\pi f_{ph}/f_s=0.6\pi$ 。

下阻带上边频为  $\omega_{sl}=2\pi f_{sl}/f_s=0.3\pi$ , 上阻带下边频为  $\omega_{sh}=2\pi f_{sh}/f_s=0.7\pi$ 。

(2) 选取窗函数。根据阻带衰减  $\delta_s=40$  dB, 可选汉宁窗, 过渡带宽  $\Delta\omega$  为

$$\Delta\omega=\omega_{pl}-\omega_{sl}=0.1\pi$$

由汉宁窗的过渡带宽确定阶数  $N$ , 即

$$N=6.2\pi/(0.1\pi)=62, \quad \text{取 } N \text{ 为奇数}=63$$

所以, 时延常数  $a=(N-1)/2=31$ , 故窗函数为

$$w(n)=0.5\left[1-\cos\left(\frac{\pi n}{31}\right)\right]R_{63}(n)$$

(3) 求理想带通滤波器的单位脉冲响应  $h_d(n)$ 。由所给定的带通数字滤波器的过渡带求理想带通滤波器的截止频率  $\omega_{cl}$  和  $\omega_{ch}$ , 即

$$\omega_{cl}=(\omega_{pl}+\omega_{sl})/2=0.35\pi, \quad \omega_{ch}=(\omega_{ph}+\omega_{sh})/2=0.65\pi$$

所以, 理想带通滤波器的单位脉冲响应为

$$h_d(n)=\frac{\sin[0.65(n-31)\pi]-\sin[0.35(n-31)\pi]}{\pi(n-31)}$$

(4) 求  $h(n)$ 。由  $h(n)=h_d(n)w(n)$  得

$$h(n)=\frac{\sin[0.65(n-31)\pi]-\sin[0.35(n-31)\pi]}{2\pi(n-31)}\left[1-\cos\left(\frac{\pi n}{31}\right)\right]R_{63}(n)$$

图 7-17 所示的为所设计的带通数字滤波器的频率特性。

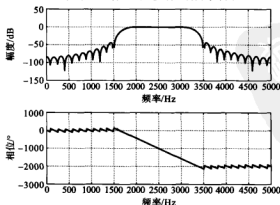


图 7-17 例 7-3 的幅度特性和相位特性

图 7-17 表明,在通带边频  $0.4\pi$  和  $0.6\pi$  处,衰减为 0.021 dB;在  $0.3\pi$  以内和  $0.7\pi$  以上的阻带范围内,最小衰减为 45.28 dB。在通带范围内,具有严格的线性相位特性。

#### 4. 线性相位 FIR 带阻数字滤波器的设计

理想带阻滤波器的频率响应为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega a}, & |\omega| \leq \omega_{cl} \text{ 和 } |\omega| \geq \omega_{ch} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7-47)$$

其中,  $a$  为时延常数,应取为  $(N-1)/2$ ,  $\omega_{cl}$  和  $\omega_{ch}$  分别为下通带上边频和上通带下边频。单位脉冲响应为

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-a)\pi] + \sin[(n-a)\omega_{cl}] - \sin[(n-a)\omega_{ch}]}{\pi(n-a)} \quad (7-48)$$

注意,线性相位 FIR 带阻数字滤波器和高通数字滤波器一样,只能采用偶对称单位脉冲响应,且  $N$  必须为奇数来设计。其设计过程与 FIR 低通数字滤波器的设计过程类似,下面仍然通过举例来说明。

**例 7-4** 有一段用采样率为 10 kHz 采样得到的语音,现要滤除 2~3 kHz 的语音信号,最小衰减不能小于 50 dB,要求 1.5 kHz 以下及 3.5 kHz 以上的语音信号基本没有衰减,试设计一滤波器实现上述要求。

**解** (1) 求对应的数字频率指标。

下通带上边频为  $\omega_{pl} = 2\pi f_{pl}/f_s = 0.3\pi$ , 上通带下边频为  $\omega_{ph} = 2\pi f_{ph}/f_s = 0.7\pi$ 。

阻带下边频为  $\omega_{sl} = 2\pi f_{sl}/f_s = 0.4\pi$ , 阻带上边频为  $\omega_{sh} = 2\pi f_{sh}/f_s = 0.6\pi$ 。

(2) 选取窗函数。根据阻带衰减  $\delta_s = 50$  dB, 选汉明窗, 过渡带宽为

$$\Delta\omega = \omega_{sl} - \omega_{pl} = 0.1\pi$$

由汉明窗的过渡带宽确定阶数  $N$ , 即

$$N = 6.6\pi / (0.1\pi) = 66, \quad \text{取 } N = 67$$

所以, 时延常数  $a = (N-1)/2 = 33$ , 故窗函数为

$$w(n) = \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{\pi n}{33}\right) \right] R_{37}(n)$$

(3) 求理想带阻滤波器的单位脉冲响应  $h_d(n)$ 。由所给定的带阻数字滤波器的过渡带宽求理想带阻滤波器的截止频率  $\omega_{cl}$  和  $\omega_{ch}$ , 即

$$\omega_{cl} = (\omega_{pl} + \omega_{sl})/2 = 0.35\pi, \quad \omega_{ch} = (\omega_{ph} + \omega_{sh})/2 = 0.65\pi$$

所以, 理想带通滤波器的单位脉冲响应为

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-33)\pi] + \sin[0.35(n-33)\pi] - \sin[0.65(n-33)\pi]}{\pi(n-33)}$$

(4) 求  $h(n)$ 。由  $h(n) = h_d(n)w(n)$ , 得

$$h(n) = \frac{\sin[(n-33)\pi] + \sin[0.35(n-33)\pi] - \sin[0.65(n-33)\pi]}{\pi(n-33)}$$

$$\times \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{\pi n}{33}\right) \right] R_{47}(n)$$

图 7-18 所示的为所设计的带阻数字滤波器的频率特性。在阻带边频 2 kHz 和 3 kHz 处,衰减为 51.11 dB。阻带范围内其他地方衰减都要大于这个衰减值。通带截止频率 1.5 kHz 和 3.5 kHz 处,有 0.026 dB 的衰减,几乎为零衰减。在通带范围内,具有严格的线性相位特性。

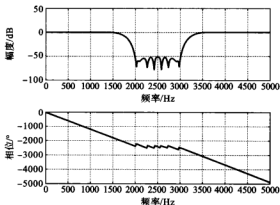


图 7-18 例 7-4 的幅度特性和相位特性

窗函数法设计 FIR 数字滤波器的优点是简单,设计过程有规律可循,许多公式可以直接利用,因而很实用。其缺点:在通带和阻带截止频率处的衰减特性不如 IIR 数字滤波器那么好控制,当不能得到理想滤波器单位脉冲响应的闭合表达式时,要用求和代替积分,用计算机来实现。上面只介绍了一些通用滤波器的设计方法,其他一些滤波器的设计,如线性差分器、希尔伯特变换器等,可以参考有关文献。

### 7.3 频率采样法设计线性相位 FIR 数字滤波器

窗函数法是从时域的角度出发,把理想滤波器的单位脉冲响应  $h_d(n)$  截取为有限长、因果的  $h(n)$ ,使所得到的频率响应  $H(e^{j\omega})$  逼近于理想的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$  的方法。

频率采样法从频域出发,对给定的理想滤波器的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$  在一个周期内进行  $N$  点的等间隔采样,即

$$H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = 2\pi k/N} = H_d(e^{j2\pi k/N}) \quad (7-49)$$

再对  $H_d(k)$  作离散傅里叶逆变换,得到  $N$  点单位采样序列  $h(n)$ ,即

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7-50)$$

由第 3 章频域采样的内插公式可知,利用这  $N$  个采样值可得滤波器的系统函数

$H(z)$ 和频率响应  $H(e^{j\omega})$ , 即

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \quad (7-51)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (7-52)$$

其中,  $\Phi(\omega)$  是内插函数

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (7-53)$$

将上式代入式(7-52)并化简, 得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \cdot \frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi k}{N}(N-1)} \cdot \frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} \quad (7-54)$$

由此可以看出, 连续函数  $H(e^{j\omega})$  是由  $N$  个离散值  $H_d(k)$  作为权重和内插函数线性组合而成的结果。显然, 采样值越多, 即  $N$  值越大,  $H(e^{j\omega})$  对  $H_d(e^{j\omega})$  的近似程度就越高。

由式(7-50)求  $h(n)$  时, 求和范围是  $0 \sim N-1$ , 由于是在一个周期内的等间隔采样, 故包含了  $0 \sim 2\pi$  整个频率范围。但一般情况下, 给定的理想滤波器的频率响应  $H_d(e^{j\omega})$  只给出了  $0 \sim \pi$  之间的值, 因而只能得到  $k$  取前部分时的采样值, 其余  $\pi \sim 2\pi$  部分的采样值则需要根据线性相位的对称条件来构造得到。一般通用滤波器, 如低通、高通、带通和带阻滤波器等, 都满足偶对称条件, 下面以偶对称条件为例来说明频率采样法的设计过程。

设希望设计出的滤波器  $h(n)$  的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{j\theta(\omega)} \quad (7-55)$$

其中,  $H(\omega)$  为幅度响应函数,  $\theta(\omega)$  为相位响应函数。对线性相位 FIR 数字滤波器,  $h(n)$  满足偶对称条件, 根据 7.2 节的结论, 其相位特性应满足

$$\theta(\omega) = -\frac{(N-1)\omega}{2} \quad (7-56)$$

根据 7.2 节介绍的线性相位 FIR 数字滤波器的幅度特性和相位特性的特点可知, 在  $h(n)$  满足偶对称条件下, 滤波器的幅度函数  $H(\omega)$  满足: 若  $N$  为奇数时,  $H(\omega)$  关于  $\pi$  呈偶对称, 即  $H(\omega) = H(2\pi - \omega)$ ; 若  $N$  为偶数时,  $H(\omega)$  关于  $\pi$  呈奇对称, 即  $H(\omega) = -H(2\pi - \omega)$ 。

令  $H_d(k) = H(k) e^{j\theta(k)}$  为对理想滤波器  $H_d(e^{j\omega})$  的采样值, 则幅度值为

$$\begin{cases} H(k) = H(N-k), & N \text{ 为奇数} \\ H(k) = -H(N-k) \text{ 且 } H\left(\frac{N}{2}\right) = -H\left(\frac{N}{2}\right) = 0, & N \text{ 为偶数} \end{cases}$$

相位采样值为

$$\theta(k) = -\frac{N-1}{2} \times \frac{2\pi}{N}k = -\frac{N-1}{N}\pi k$$

所以有 
$$\theta(N-k) = -\frac{N-1}{N}\pi(N-k) = -(N-1)\pi + \frac{N-1}{N}\pi k$$

当  $N$  为奇数时,  $N-1$  为偶数, 所以  $e^{-j[(N-1)\pi + (N-1)k\pi/N]} = e^{j(N-1)k\pi/N}$ , 故有

$$\theta(N-k) = \frac{N-1}{N}\pi k, \quad k=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

当  $N$  为偶数时,  $N-1$  为奇数, 所以  $e^{-j[(N-1)\pi + (N-1)k\pi/N]} = e^{j\pi + j(N-1)k\pi/N}$ , 故有

$$\theta(N-k) = \pi + \frac{N-1}{N}\pi k, \quad k=1, 2, \dots, N/2-1$$

根据上述结果, 并利用  $N$  为偶数时具有如下关系

$$H_d(N-k) = H(N-k)e^{j\theta(N-k)} = -H(k)e^{j\pi + j(N-1)k\pi/N} = H(k)e^{j(N-1)k\pi/N}$$

综合可得无论  $N$  为奇数还是偶数, 都具有如下设计公式

$$\begin{cases} H(N-k) = H(k) \\ \theta(N-k) = \frac{N-1}{N}\pi k, \quad k=1, 2, \dots, \left[\frac{N-1}{2}\right] \end{cases} \quad (7-57)$$

可表示为

$$H_d(N-k) = H_d^*(k), \quad k=1, 2, \dots, \left[\frac{N-1}{2}\right] \quad (7-58)$$

只是当  $N$  为偶数时,  $H\left(\frac{N}{2}\right) = 0$ , 上式中  $[\ ]$  表示取整。这样就能根据理想滤波器

$H_d(e^{j\omega})$  在  $0 \sim \pi$  之间的  $\left[\frac{N-1}{2}\right]$  个采样值  $H_d(k) (k=1, 2, \dots, \left[\frac{N-1}{2}\right])$ , 采用式

(7-58) 的构造方法, 构造得到其余的采样值  $H_d(k) (k=\left[\frac{N}{2}\right]+1, \left[\frac{N}{2}\right]+2, \dots, N-1)$ 。然后再根据式(7-51)或式(7-54)得到所设计滤波器的系统函数  $H(z)$  或频率响

应  $H(e^{j\omega})$ , 或根据式(7-50)求得  $h(n)$ 。显然和窗函数法一样, 设计高通和带阻滤波器时,  $N$  不能取偶数。

频率采样法设计 FIR 数字滤波器的步骤可归纳如下。

(1) 根据要求确定采样值  $H_d(k) = H(k)e^{j\theta(k)}$ ,  $H(k)=1, \theta(k) = -(N-1)k\pi/N$  ( $k=0, 1, \dots, \left[\frac{N-1}{2}\right]$ )。

(2) 按式(7-58)构造采样值  $H_d(k) (k=\left[\frac{N}{2}\right]+1, \left[\frac{N}{2}\right]+2, \dots, N-1)$ 。

(3) 由  $H_d(k)$  根据式(7-51)构成所设计的滤波器的系统函数  $H(z)$ , 或者根据式(7-54)求出频率响应  $H(e^{j\omega})$ , 或者根据式(7-50)求得  $h(n)$ 。

**例 7-5** 用频率采样法设计一个 FIR 低通数字滤波器, 其通带截止频率是采样频率的  $1/10$ , 采样点数  $N$  为 20。

解 (1) 由采样点数  $N$  为 20, 通带截止频率是采样频率的  $1/10$ , 可知通带内仅有两个采样值, 即

$$H_d(0) = 1 \times e^{-j(N-1)\pi \times 0/N} = 1, \quad H_d(1) = 1 \times e^{-j(N-1)\pi \times 1/N} = e^{-j19\pi/20}$$

阻带内所有采样值为 0。

(2) 根据式(7-58)构造  $H_d(N-k)$

$$H_d(19) = H_d^*(1) = 1 \times e^{j(N-1)\pi \times 1/N} = e^{j19\pi/20}, \quad \text{其他值为 0。}$$

(3) 由式(7-50)求得

$$h(0) = h(19) = -0.04877, \quad h(1) = h(18) = -0.0391$$

$$h(2) = h(17) = -0.0207, \quad h(3) = h(16) = 0.0046$$

$$h(4) = h(15) = 0.03436, \quad h(5) = h(14) = 0.0656$$

$$h(6) = h(13) = 0.0954, \quad h(7) = h(12) = 0.12071$$

$$h(8) = h(11) = 0.1391, \quad h(9) = h(10) = 0.14877$$

图 7-19、图 7-20 所示的为所设计出的滤波器的单位脉冲响应、幅度特性和相位特性。

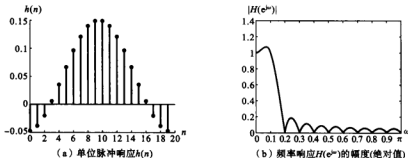


图 7-19 例 7-5 滤波器的  $h(n)$  和  $H(e^{j\omega})$  的幅度

图 7-19(a)表明,所设计出的滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  具有偶对称特性,图 7-19(b)为所设计出的滤波器频率响应的幅度绝对值,在  $0.07\pi$  处有一上冲,幅度为 1.074,第一旁瓣峰值出现在  $0.25\pi$  处,幅度为 0.1825。图 7-20 所示的为设计出的滤波器的幅度特性(单位为 dB)和相位特性,在  $0.07\pi$  处上冲幅度为 0.62 dB,旁瓣的最小衰减只有 14.75 dB。在通带范围内具有严格的线性相位特性。

设计出的滤波器在通带内有较大的上冲及在阻带内有较大的纹波,这主要是由  $H_d(e^{j\omega})$  在  $\omega_c$  处跳变所造成的。解决的办法是使  $H_d(e^{j\omega})$  由 1 变为 0 时不要突变,在中间人为地加一过渡点。如令

$$H_d(2) = 0.5e^{-j19 \times 2\pi/20}, \quad H_d(18) = 0.5e^{j19 \times 2\pi/20}$$

这时所得滤波器幅频特性如图 7-21 中实线所示,图中虚线与图 7-19(b)相同。可以看出,增加了  $H_d(2)$  后,通带内上冲减小(最大为 1.02),阻带内的纹波也大为减小(最大为 0.05)。但是,过渡带加宽了。

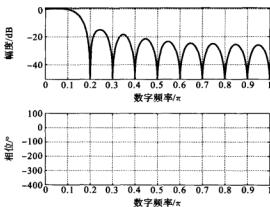
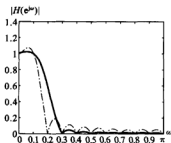


图 7-20 例 7-5 滤波器的幅度特性和相位特性

图 7-21 增加过渡点所得滤波器的  $H(e^{j\omega})$  的幅度

上面对  $H_d(2)$  幅值的指定是任意的,得到的结果也不是最优的,要达到最好的效果,应采用一些优化的方法加以确定,但求解较麻烦,一般凭经验,幅值取 0.3~0.5 之间。如果进一步增加过渡点,阻带的衰减会更大。如果想在增大阻带衰减的同时又不增加过渡带宽,可将采样点数增加,即增加滤波器的阶数,这样当然也就增加了运算时间。

**例 7-6** 用频率采样法设计一个线性相位 FIR 带通数字滤波器,其通带频率是 400 Hz~700 Hz,采样频率为 2 000 Hz,滤波器的阶数为 25。

**解** (1) 将模拟频率转化为数字频率指标,即

$$\omega_{cl} = 2\pi \times 400 / 2\,000 = 0.4\pi, \quad \omega_{ch} = 2\pi \times 700 / 2\,000 = 0.7\pi$$

(2) 确定通带内的采样值。由于  $N=25$ , 则  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{25} = 0.08\pi$ 。

所以第 5、6、7、8 采样点在通带内,有

$$H_d(5) = e^{-j24\pi \times 5/25}, \quad H_d(6) = e^{-j24\pi \times 6/25}, \quad H_d(7) = e^{-j24\pi \times 7/25}, \quad H_d(8) = e^{-j24\pi \times 8/25}$$

(3) 根据式(7-58)构造  $H_d(N-k)$ , 即

$$H_d(20) = e^{j24\pi \times 5/25}, \quad H_d(19) = e^{j24\pi \times 6/25}, \quad H_d(18) = e^{j24\pi \times 7/25}, \quad H_d(17) = e^{j24\pi \times 8/25}$$

其他值均为 0。

(4) 由式(7-50)求得

$$\begin{aligned} h(0) &= h(24) = -0.014\,5, & h(1) &= h(23) = -0.035\,5, & h(2) &= h(22) = 0.064\,7 \\ h(3) &= h(21) = 0.046\,5, & h(4) &= h(20) = -0.064\,0, & h(5) &= h(19) = -0.016\,3 \\ h(6) &= h(18) = -0.013\,6, & h(7) &= h(17) = -0.024\,7, & h(8) &= h(16) = 0.145\,5 \\ h(9) &= h(15) = 0.040\,6, & h(10) &= h(14) = -0.269\,5 \end{aligned}$$

$$h(11)=h(13)=-0.0193, \quad h(12)=0.3200$$

所设计出的滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  和幅度特性(绝对值)如图 7-22 所示。 $h(n)$  满足偶对称条件,  $|H(e^{j\omega})|$  在通带具有较大的上冲(0.441 4 $\pi$  处为 1.193, 0.609 4 $\pi$  处为 1.19), 在阻带内也有较大的纹波(0.29 $\pi$  处为 0.104 5, 0.757 8 $\pi$  处为 0.113 5)。其频率响应如图 7-23 所示, 在通带下边频为 400 Hz 处, 衰减为 0.026 dB, 在通带上边频为 600 Hz 处, 衰减为 4.417 dB。要得到较好的性能, 需加过渡点或增加采样点数。

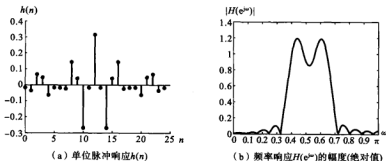


图 7-22 例 7-6 滤波器的  $h(n)$  和  $H(e^{j\omega})$  的幅度

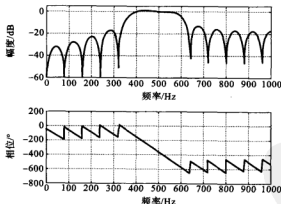


图 7-23 例 7-6 滤波器的频率响应

由以上讨论可知, 频率采样法在原理上比较简单直接, 在计算上可以借用快速傅里叶变换, 因此, 计算上也不复杂。通过改变采样点数和设置过渡点, 一般能得到满意的结果, 当然要得到最佳效果, 过渡点的幅度要反复优化, 比较繁琐。和窗函数法一样, 其缺点是不易精确地确定其阻带和通带的边缘特性。对于通带较窄的滤波器, 由于只有少数几个采样点的值不为零, 设计时比较简单, 这种方法适合于设计窄带滤波器。



## 7.4 线性相位 FIR 数字滤波器的等纹波优化设计

7.2 节和 7.3 节分别介绍了设计线性相位 FIR 数字滤波器的窗函数法和频率采样法,用这两种方法设计出的滤波器的频率响应都是在某种意义上对所给理想滤波器频率响应的逼近。从理论来看,对某个函数  $f(x)$  的逼近一般有三种方法:插值法、最小平方逼近法和一致逼近法。

插值法的设计要点就是寻找一多项式(或三角多项式),使它在插值点上的值是准确一致的,在非插值点上,是插值点的值的某种组合,显然这存在一定的误差。7.3 节介绍的频率采样法就可以看作是插值法,它在采样点  $\omega_k$  上保证了  $H_d(k) = H_d(e^{j\omega_k})$ ,在非采样点上,是内插函数与  $H_d(e^{j\omega_k})$  加权的线性组合。

所谓最小平方逼近法,就是在所需的范围内,使逼近函数与原函数之间总的误差最小,但不能保证每个局部位置的误差都最小的方法。7.2 节介绍的加矩形窗的窗函数法就是一种最小平方逼近法,该方法在频率跳变处出现了较大的过冲(吉布斯现象),加其他窗函数后就不再属于最小平方逼近法了。

另外一种逼近法就是使得在所需区间内误差较均匀一致,且使最大误差达到最小的方法,切比雪夫逼近理论解决了最佳逼近的存在性、唯一性及如何构造的问题。下面介绍切比雪夫最佳逼近的基本方法。

切比雪夫最佳逼近法又称为等纹波逼近法。设所希望设计的滤波器幅度响应为  $H_d(\omega)$ ,实际逼近的幅度响应为  $H(\omega)$ ,则加权误差为

$$e(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H(\omega)] \quad (7-59)$$

其中,  $W(\omega)$  为预先指定的加权函数,用来说明滤波器的各频带的不同逼近精度。在要求误差较小的频带,  $W(\omega)$  取较大的值;允许误差较大的频带,  $W(\omega)$  取较小的值。将所指定的频带记为  $\Theta$ ,切比雪夫最佳逼近的准则就是,选择 FIR 滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$ ,使得在  $\Theta$  内误差函数  $e(\omega)$  的最大绝对值达到最小,将该最小值记为  $\|\xi(\omega)\|$ ,则有

$$\|\xi(\omega)\| = \min_{h(n)} \max_{\omega \in \Theta} |e(\omega)| \quad (7-60)$$

### 7.4.1 线性相位 FIR 数字滤波器幅度特性的统一表示

7.1 节指出了满足线性相位的条件就是  $h(n)$  偶对称或奇对称,下面认为线性相位的条件总是满足的,仅就幅度特性加以讨论。满足线性相位条件的 FIR 滤波器的幅度特性有四种情况,可统一表示成

$$H(\omega) = Q(\omega)P(\omega) \quad (7-61)$$

其中,  $Q(\omega)$  是已知的三角函数,  $P(\omega)$  是关于  $\cos(n\omega)$  的线性组合。表 7-2 列出了四种不同情况的  $Q(\omega)$  及  $P(\omega)$  的表达式。

表 7-2 用  $H(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$  表示四种线性相位 FIR 数字滤波器的幅度特性

线性相位 FIR 数字滤波器的四种情况	$Q(\omega)$	$P(\omega)$
$h(n)$ 偶对称, $N$ 为奇数	1	$\sum_{n=0}^{(N-1)/2} \tilde{a}(n) \cos(\omega n)$
$h(n)$ 偶对称, $N$ 为偶数	$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$	$\sum_{n=0}^{N/2-1} \tilde{b}(n) \cos(\omega n)$
$h(n)$ 奇对称, $N$ 为奇数	$\sin(\omega)$	$\sum_{n=0}^{(N-3)/2} \tilde{c}(n) \cos(\omega n)$
$h(n)$ 奇对称, $N$ 为偶数	$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$	$\sum_{n=0}^{N/2-1} \tilde{d}(n) \cos(\omega n)$

表中第一种情况, 即  $h(n)$  偶对称、 $N$  为奇数时的系数  $\tilde{a}(n)$  和原系数相等, 其余三种情况的系数  $\tilde{b}(n)$ 、 $\tilde{c}(n)$ 、 $\tilde{d}(n)$  与原系数  $b(n)$ 、 $c(n)$ 、 $d(n)$  的关系分别为

$$\begin{cases} b(1) = \tilde{b}(0) + \frac{1}{2}\tilde{b}(1) \\ b(n) = \frac{1}{2}[\tilde{b}(n-1) + \tilde{b}(n)], \quad n=2, 3, \dots, N/2-1 \\ b\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2}\tilde{b}\left(\frac{N}{2}-1\right) \end{cases} \quad (7-62)$$

$$\begin{cases} c(1) = \tilde{c}(0) - \frac{1}{2}\tilde{c}(2) \\ c(n) = \frac{1}{2}[\tilde{c}(n-1) - \tilde{c}(n+1)], \quad n=2, 3, \dots, \frac{N-5}{2} \\ c(n) = \frac{1}{2}\tilde{c}(n-1), \quad n = \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (7-63)$$

$$\begin{cases} d(1) = \tilde{d}(0) - \frac{1}{2}\tilde{d}(1) \\ d(n) = \frac{1}{2}[\tilde{d}(n-1) - \tilde{d}(n)], \quad n=2, 3, \dots, N/2-1 \\ d\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2}\tilde{d}\left(\frac{N}{2}-1\right) \end{cases} \quad (7-64)$$

将式(7-61)代入式(7-59)得

$$e(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \left[ \frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega) \right] \quad (7-65)$$

令

$$\hat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \quad (7-66)$$

$$\hat{H}_d(\omega) = \frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)} \quad (7-67)$$

则有

$$e(\omega) = \hat{W}(\omega) [\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)] \quad (7-68)$$

因此,最优化问题就变成了选择  $P(\omega)$  的系数使误差函数  $e(\omega)$  的最大绝对值达到最小的问题,得到了  $P(\omega)$ , 就得到了所设计出的滤波器  $Q(\omega)P(\omega)$ 。

#### 7.4.2 切比雪夫最佳逼近法设计 FIR 数字滤波器的原理

切比雪夫最佳逼近法是基于如下的交错定理而形成的。

**交错定理** 设  $P(\omega)$  为  $\cos(n\omega)$  的线性组合为

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(n\omega)$$

$P(\omega)$  在  $\Theta$  上能唯一地逼近连续函数  $\tilde{H}_d(\omega)$  的充分必要条件是: 加权误差函数  $e(\omega)$  在  $\Theta$  内至少有  $N+1$  个极值频率点, 即在  $\Theta$  内必须存在  $N+1$  个频率点  $\omega_i$ 。其中,  $\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_N$ , 且

$$e(\omega_i) = -e(\omega_{i+1}), \quad i=0, 1, \dots, N-1$$

及

$$|e(\omega_i)| = \max_{\omega \in \Theta} [e(\omega)]$$

交错定理表明存在唯一一组系数  $a_n$ , 使得对所有关于  $\cos(n\omega)$  的  $N-1$  次线性组合, 它所具有的  $e(\omega)$  最大绝对值能达到最小, 从而由  $a_n$  可求得唯一一组最优的滤波器系数  $h(n)$ 。由于最佳逼近的充要条件是加权误差函数  $e(\omega)$  在逼近区间上至少有  $N+1$  个极值频率点, 且误差极值正负交错出现, 故具有等纹波性质。

下面以第一种情况, 即  $h(n)$  偶对称、 $N$  为奇数、即  $Q(\omega)=1$  时为例, 来讨论线性有相位滤波器幅度响应极值数目的约束问题。将余弦函数  $\cos(n\omega)$  表示成  $\cos\omega$  的多项式, 有

$$\cos(n\omega) = \sum_{m=0}^n a_m^{(n)} (\cos\omega)^m$$

其中,  $a_m^{(n)}$  为常数。将上式代入式(7-61), 因为  $Q(\omega)=1$ , 所以有

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a_n \sum_{m=0}^n a_m^{(n)} (\cos\omega)^m$$

将上式表示成

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{(N-1)/2} a(k) (\cos\omega)^k$$

其中,  $a(k)$  是与  $a_n$  和  $a_m^{(n)}$  有关的常数。为了求极值频率, 将  $H(\omega)$  对  $\omega$  求微分, 得

$$\frac{d}{d\omega} [H(\omega)] = -\sin\omega \sum_{k=1}^{(N-1)/2} k a(k) (\cos\omega)^{k-1} \quad (7-69)$$

式(7-69)右边余弦函数多项式的最高阶次为  $(N-3)/2$ , 应有  $(N-3)/2$  个根,  $\sin\omega$  在  $\omega=0$  和  $\omega=\pi$  处有两个根, 所以在区间  $[0, \pi]$  上,  $H(\omega)$  有  $(N+1)/2$  个极值点。对逐段恒定的幅度特性(低通、高通、带通和带阻滤波器就具有这一特性),  $H(\omega)$  的极值点就是  $e(\omega)$  的极值点。根据最佳一致逼近准则, 误差函数  $e(\omega)$  至少应有  $(N+3)/2$  个极值, 因此,  $e(\omega)$  本身至少还应增加一个极值。

对理想低通滤波器,其边界频率  $\omega_p$  和  $\omega_s$  也是  $e(\omega)$  的极值点(但不是  $H(\omega)$  的极值点),这样  $e(\omega)$  就有  $(N+5)/2$  个极值点(这种情况称为超波纹逼近)。如  $N=13$ 、 $(N+1)/2=7$  时的幅度特性  $H(\omega)$  最多有 7 个极值点,而误差函数有 9 个极值点,如图 7-24 所示。如果是带通滤波器,共有 2 个过渡带,每个过渡带增加 2 个极值点,这样  $e(\omega)$  就有  $(N+9)/2$  个极值点。对于其他类型的滤波器,都能满足最佳一致逼近准则的极值点条件。

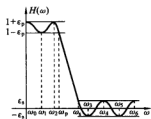


图 7-24  $N=13$  时低通滤波器的极值特性

切比雪夫最佳逼近法设计滤波器时,多采用雷米兹(Remez)交换算法。下面讨论该算法的计算过程。将式(7-68)重写如下

$$e(\omega) = \hat{W}(\omega) [\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)]$$

设已知在  $\Theta$  内有  $(r+1)$  个极值频率点  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r$ , 将这些频率值代入上式,按最佳逼近定理,有

$$\hat{W}(\omega_i) [\hat{H}_d(\omega_i) - P(\omega_i)] = -(-1)^i \epsilon, \quad i=0, 1, \dots, r \quad (7-70)$$

其中 
$$\epsilon = \max_{\omega \in \Theta} |e(\omega)|, \quad P(\omega_i) = \sum_{n=0}^{r-1} a_n \cos(n\omega_i)$$

将式(7-70)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \cos(2\omega_0) & \cdots & \cos[(r-1)\omega_0] & \frac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos(\omega_1) & \cos(2\omega_1) & \cdots & \cos[(r-1)\omega_1] & \frac{-1}{\hat{W}(\omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_{r-1}) & \cos(2\omega_{r-1}) & \cdots & \cos[(r-1)\omega_{r-1}] & \frac{(-1)^{r-1}}{\hat{W}(\omega_{r-1})} \\ 1 & \cos(\omega_r) & \cos(2\omega_r) & \cdots & \cos[(r-1)\omega_r] & \frac{(-1)^r}{\hat{W}(\omega_r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_d(\omega_0) \\ \hat{H}_d(\omega_1) \\ \vdots \\ \hat{H}_d(\omega_{r-1}) \\ \hat{H}_d(\omega_r) \end{bmatrix} \quad (7-71)$$

上式的系数矩阵是非奇异的方阵,解此方程组,可唯一地求出系数  $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$  及偏差  $\epsilon$ , 即可构成最佳滤波器  $H(e^{j\omega})$ 。

但是,这样存在两个问题。一是极值点  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r$  事先并不知道,当然就无法求解式(7-71);二是直接求解方程组式(7-71)比较困难。为此, J. H. McClellan 等人利用数值分析中的雷米兹交换算法,靠一次次的迭代求得一组极值点,而且在每一次迭代过程中避免直接求解式(7-71)。现将该算法的步骤总结如下。

(1) 在通带  $0 \leq \omega \leq \omega_p$  和阻带区间  $\omega_s \leq \omega \leq 2\pi$  等间隔地取  $(r+1)$  个频率  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \omega_r$  作为极值点的初始位置,然后按下式计算  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{\sum_{k=0}^r \beta_k \hat{H}_d(\omega_k)}{\sum_{k=0}^r (-1)^k \beta_k \hat{W}(\omega_k)} \quad (7-72)$$

其中

$$\beta_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^r \frac{1}{\cos \omega_i - \cos \omega_k} \quad (7-73)$$

如果对所有的频率  $\omega$ , 都有  $|e(\omega)| \leq |\epsilon|$ , 说明  $\epsilon$  是纹波的极值, 所给初始值恰是极值点。一般会在某些频率处, 总有  $|e(\omega)| > |\epsilon|$ , 说明需要更换某些极值点, 得到一组新的极值点。

(2) 对(1)确定的极值点  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \omega_r$  中的每一个点, 都在其附近检查是否在某个频率处有  $|e(\omega)| > |\epsilon|$ , 若有, 则在该点附近找出局部极值点并替换原来的点。检查完毕后, 就得到一组新的极值点  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}, \omega_r$ , 再次采用第一步的方法求出  $\epsilon$ , 判断是否满足  $|e(\omega)| \leq |\epsilon|$ 。若满足则停止迭代, 否则执行下一步。

(3) 利用和(2)相同的方法, 把在各频率点处使  $|e(\omega)| > |\epsilon|$  的点作为新的极值点, 从而又得到一组新的极值点。

重复上述步骤, 最后  $\epsilon$  收敛到自己的上限, 再采用如下公式得到

$$P(\omega_i) = \hat{H}_d(\omega_i) - (-1)^i \frac{\epsilon}{\hat{W}(\omega_i)}, \quad i=0, 1, \dots, r-1 \quad (7-74)$$

利用拉格朗日(Lagrange)插值公式得到

$$P(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\gamma_i P(\omega_i)}{\cos \omega - \cos \omega_i}}{\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\gamma_i}{\cos \omega - \cos \omega_i}} \quad (7-75)$$

其中

$$\gamma_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{r-1} \frac{1}{\cos \omega_i - \cos \omega_k} \quad (7-76)$$

一般定义  $\hat{W}(\omega)$  如下

$$\hat{W}(\omega) = \begin{cases} \epsilon_p / \epsilon_s, & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (7-77)$$

其中,  $\epsilon_p$  为通带纹波大小,  $\epsilon_s$  为阻带纹波大小。这样,  $P(\omega)$  就是最佳一致逼近  $\hat{H}_d(\omega)$ 。

在迭代过程中, 指定了边频(如低通滤波器的  $\omega_p$  和  $\omega_s$ )为极值点。根据前面对  $e(\omega)$  的极值点的分析可知, 在低通滤波器时有  $r+2$  个极值点, 在利用交错定理时, 只用到了  $r+1$  个极值点。每次迭代时, 若出现了多于  $r+1$  个极值点, 就保留  $|\epsilon|$  最大的那  $r+1$  个极值点作为下次迭代的初始猜测极值点。

求出  $P(\omega)$  后, 由于  $P(\omega)$  满足

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} a_n \cos(n\omega)$$

因为  $a_n$  为实数, 根据欧拉公式, 有

$$P(\omega) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=0}^{r-1} a_n e^{-jn\omega} \right] = \operatorname{Re} [F(a_n)] \quad (7-78)$$

其中,  $F(\cdot)$  表示傅里叶变换。为了求出滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$ , 就要求出  $a_n$ , 显然可以利用离散傅里叶反变换来求解  $a_n$ 。将  $P(\omega)$  在频域采样, 设采样点数为  $M$ , 则采样值

$$P(k) = P(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/M} = \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=0}^{r-1} a_n e^{-j2\pi kn/M} \right] \quad (7-79)$$

根据离散傅里叶变换的性质, 序列  $a_n$  的离散傅里叶变换的实部即  $P(k)$  的逆变换等于  $a_n$  的共轭对称部分, 由于没有混叠 (线性相位 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  为有限长  $N$ , 都可满足不混叠的采样要求  $M > N$ ), 且  $a_n$  为实数, 显然结果就等于  $a_n$  本身。这样, 求出  $P(k)$  的离散傅里叶逆变换, 即可求得  $a_n$ , 从而求得  $h(n)$ 。

对于不同情况, 上述过程中  $r$  的取值不同。当  $h(n)$  偶对称、 $N$  为奇数时,  $r = \frac{N+1}{2}$ ;  $h(n)$  偶对称、 $N$  为偶数时,  $r = \frac{N}{2}$ ;  $h(n)$  奇对称、 $N$  为奇数时,  $r = \frac{N-1}{2}$ ;  $h(n)$  奇对称、 $N$  为偶数时,  $r = \frac{N}{2}$ 。

在采用雷米兹变换算法之前, 首先要指定极值点数  $r$ , 即要较精确地估计出阶数  $N$ 。对于低通滤波器, 在给定滤波器的  $\omega_p$ 、 $\omega_s$ 、 $\epsilon_p$  和  $\epsilon_s$ , 当  $|\epsilon_s| \leq |\epsilon_p|$  时,  $N$  值可由下式进行估计

$$N = \frac{2\pi f(\epsilon_p, \epsilon_s)}{\omega_s - \omega_p} + g(\epsilon_p, \epsilon_s) \frac{\omega_s - \omega_p}{2\pi} + 1 \quad (7-80)$$

其中

$$f(\epsilon_p, \epsilon_s) = \lg \{ \epsilon_s [a_1 (\lg \epsilon_p)^2 + a_2 \lg \epsilon_p + a_3] \} + a_4 (\lg \epsilon_p)^2 + a_5 \lg \epsilon_p + a_6 \quad (7-81)$$

$$g(\epsilon_p, \epsilon_s) = 11.012\,17 + 0.512\,44 (\lg \epsilon_p - \lg \epsilon_s) \quad (7-82)$$

式 (7-81) 中

$$a_1 = 0.005\,309, \quad a_2 = 0.071\,14, \quad a_3 = -0.476\,1$$

$$a_4 = -0.002\,26, \quad a_5 = -0.594\,1, \quad a_6 = -0.427\,8$$

也可以采用如下公式粗略的估计  $N$

$$N = \frac{-10 \lg(\epsilon_p \epsilon_s) - 15}{14(\omega_s - \omega_p)/2\pi} \quad (7-83)$$

## 7.5 IIR 数字滤波器与 FIR 数字滤波器的比较

(1) 相位特性的比较。FIR 数字滤波器可以得到严格的线性相位特性, 而 IIR

数字滤波器则不能。IIR 数字滤波器的滤波性能越好,其相位非线性就越严重。如果 IIR 数字滤波器在得到线性相位的同时,还能满足滤波技术指标要求,则必须加全通网络进行相位校正,这样会大大增加滤波器的阶数。

(2) 幅度特性的比较。IIR 数字滤波器能够较好地控制幅度特性,使通带衰减、阻带衰减、过渡带宽得到较精确的控制。FIR 数字滤波器对幅度特性没有较精确的控制,一般需要反复验证、修改才得以实现。

(3) 滤波器阶数的比较。在相同的技术指标下,IIR 数字滤波器由于存在输出对输入的反馈,可以用比 FIR 数字滤波器少的阶数来满足指标要求,所用的存储单元少、运算次数少,较为经济。一般在相同技术指标时,采用 FIR 数字滤波器的阶数比 IIR 数字滤波器的高 5~10 倍。

(4) 稳定性的比较。FIR 数字滤波器主要采用非递归结构,无论在理论上还是实际的有限精度的运算中都是稳定的,有限精度运算误差也较小。IIR 数字滤波器必须采用递归结构,极点必须在  $z$  平面的单位圆内才能稳定,有限精度运算有时会导致不稳定。

(5) 运算速度的比较。由于 FIR 数字滤波器的单位脉冲响应为有限长,因而可以采用快速傅里叶变换的算法,运算速度要快得多。IIR 数字滤波器则不能这样运算。

(6) 设计过程的比较。IIR 数字滤波器可以利用模拟滤波器设计的已有的闭合公式、表格,因而计算工作量小,对计算工具要求不高。FIR 数字滤波器则一般没有现成的设计公式,对通带、阻带滤波器的衰减控制无显式表达式,一般 FIR 数字滤波器的设计要借助计算机。

(7) 适用范围的比较。IIR 数字滤波器主要设计规格化的、频率特性为分段常数的标准低通、高通、带通和带阻滤波器。FIR 数字滤波器要灵活得多,如频率采样设计法,可适应各种幅度特性及相位特性的要求,可设计出正交变换器、微分器和线性调频器等各种系统,适应性较广。

## 本章小结

FIR 数字滤波器的单位脉冲响应满足偶对称或奇对称条件时,具有严格的线性相位特性,在奇对称时会有  $90^\circ$  的相移。在单位脉冲响应的对称性不同、滤波器阶数取奇数或偶数时,其幅度特性也不同。在设计通用的低通、高通、带通和带阻滤波器时,一般都采用单位脉冲响应呈偶对称,滤波器阶数一般也取为奇数。线性相位 FIR 数字滤波器的零点是呈共轭镜像的。

窗函数法从时域出发,通过加窗,用一个单位脉冲响应有限长、因果的滤波器去逼近理想滤波器。该方法的关键就在于窗函数的选取和窗口长度(也就是单位脉冲响应的长度,即滤波器的阶数)的确定,一般根据滤波器的阻带衰减的要求选取窗函

数,根据过渡带宽来确定窗口长度。阻带衰减越大,过渡带宽就会增加;过渡带宽越小,阻带衰减也会跟着减小。汉明窗具有较大的阻带衰减和较小的过渡带宽,应用比较广泛;矩形窗存在吉布斯效应,一般很少采用。确定窗函数后,将窗函数与理想滤波器的单位脉冲响应相乘,就能得到窗函数法设计出的线性相位 FIR 数字滤波器。

频率采样法从频域出发,对理想滤波器的频率响应进行等间隔采样,保证在采样点上,所设计的滤波器与理想滤波器具有一致的频率响应,在采样点之间采用频域内插函数进行插值而得到所设计的滤波器。由于已知的理想滤波器的频率响应一般在  $0 \sim \pi$  之间,因此,采用频率采样法时,就要根据线性相位的条件,构造  $\pi \sim 2\pi$  区间的采样值。在用频率采样法设计出的滤波器纹波较大时,可以通过人为设置过渡点的方法来减小纹波,从而得到较大的阻带衰减。当然代价就是过渡带加宽,在增加采样点数(即滤波器阶数)时,可以得到较小的过渡带宽。

切比雪夫最佳逼近法的设计目标是使设计出的滤波器与理想滤波器的最大绝对值误差达到最小。该方法基于交错定理,采用雷米兹交换算法来设计 FIR 数字滤波器,借助计算机,通过多次迭代,往往能得到最佳的设计结果。

线性相位 FIR 数字滤波器和 IIR 数字滤波器相比,突出的优点是具有严格的线性相位特性,而且稳定性高,运算速度快,可设计各种幅度特性的滤波器。但是在相同的技术指标下,FIR 数字滤波器所需阶数往往高于 IIR 数字滤波器的 5~10 倍,且对通带、阻带滤波器的衰减特性控制不明显,设计过程往往需要借助计算机来完成。

## 思考与练习

- 7-1 试用窗函数法设计一线性相位 FIR 低通数字滤波器,要求阻带最小衰减不能低于 50 dB,通带边频  $\omega_p = 0.2\pi$ ,阻带边频  $\omega_s$  为  $0.4\pi$ 。
- 7-2 现有一语音信号,采样频率为 10 kHz,为了检测其基音频率,要滤除 900 Hz 以上的信号,要求 1 000 Hz 以上衰减不能低于 40 dB,900 Hz 及以下的信号基本无衰减,试用窗函数法设计出该线性相位 FIR 低通数字滤波器。
- 7-3 试用窗函数法设计一线性相位 FIR 高通数字滤波器,要求阻带最小衰减不能低于 50 dB,通带边频  $\omega_p = 0.7\pi$ ,阻带边频  $\omega_s$  为  $0.6\pi$ 。
- 7-4 试设计一线性相位 FIR 高通数字滤波器,要滤除 4 kHz 以下的信号,要求 4 kHz 以上基本无衰减,3 kHz 及以下的信号衰减不能低于 60 dB,采样间隔为 0.1 ms,试用窗函数法设计出该线性相位 FIR 高通数字滤波器。
- 7-5 试用窗函数法设计一线性相位 FIR 带通数字滤波器,要求阻带最小衰减不能低于 50 dB,通带下边频  $\omega_{pl} = 0.4\pi$ ,阻带下边频  $\omega_{sl} = 0.3\pi$ ,通带上边频  $\omega_{ph} = 0.6\pi$ ,阻带上边频  $\omega_{sh} = 0.7\pi$ 。



- 7-6 试用窗函数法设计一线性相位 FIR 带阻数字滤波器, 要求阻带最小衰减不能低于 50 dB, 下通带上边频  $\omega_{pl} = 0.3\pi$ , 阻带下边频  $\omega_{sl} = 0.4\pi$ , 上通带下边频  $\omega_{ph} = 0.7\pi$ , 阻带下边频  $\omega_{sh} = 0.6\pi$ 。
- 7-7 试用频率采样法设计一线性相位 FIR 低通数字滤波器, 通带边频  $\omega_p = 0.2\pi$ , 采样点数  $N$  为 20。
- 7-8 试用频率采样法设计一线性相位 FIR 高通数字滤波器, 通带边频  $\omega_p = 0.8\pi$ , 采样点数  $N$  为 25。
- 7-9 试用频率采样法设计一线性相位 FIR 带通数字滤波器, 通带下边频  $\omega_{pl} = 0.4\pi$ , 通带上边频  $\omega_{ph} = 0.6\pi$ , 采样点数  $N$  为 21。
- 7-10 试用频率采样法设计一线性相位 FIR 带阻数字滤波器, 下通带上边频  $\omega_{pl} = 0.2\pi$ , 上通带下边频  $\omega_{ph} = 0.8\pi$ , 采样点数  $N$  为 21。
- 7-11 试用频率采样法设计一线性相位 FIR 低通数字滤波器, 采样点数  $N$  为 25, 幅度采样值为

$$H_d(k) = \begin{cases} 1, & k=0, 1, 2 \\ 0.5, & k=3 \\ 0, & k=4 \sim 12 \end{cases}$$

- 7-12 如果一个线性相位带通数字滤波器的频率响应为

$$H_{BP}(e^{j\omega}) = H_{BP}(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

- (1) 试证明

$$H_{BS}(e^{j\omega}) = [1 - H_{BP}(\omega)] e^{j\varphi(\omega)}$$

表示一个线性带阻数字滤波器;

- (2) 用带通数字滤波器的单位脉冲响应  $h_{BP}(n)$  来表示带阻数字滤波器的单位脉冲响应  $h_{BS}(n)$ 。



## 数字信号处理的有效字长效应

本章重点内容：二进制数的表示与量化误差；A/D 转换器中的量化误差的分析；系数量化对数字滤波器的影响；数字滤波器的运算量化效应；快速傅里叶变换算法的有限字长效应。

数字信号处理的对象是数字信号，处理的方式是数值运算方式，因此数字信号处理的实质是一组数值运算。在前面的分析讨论中均未涉及精度问题，均认为数是无限精度的。这是从设计的角度来讨论的，而从实现数字信号处理的角度考虑，无论是用专用硬件还是用计算机软件来实现，数字系统中的每一个数总是用有限字长的二进制数码表示的，运算过程中需要的数字信号的值、系统的系数和运算过程的结果都是存储在有限字长的存储单元中的，此时数字的精度就是有限的。从设计的无限精度到实现时的有限精度，会产生相对于原设计系统的误差，严重时会导致系统崩溃。例如，理论设计的稳定滤波器由于系数的量化误差导致极点由单位圆内偏移到单位圆外，滤波器不再稳定而无法使用。通常把这种二进制数的位数有限而造成的计算结果的误差或处理性能的变坏，称为有限字长效应。显然，在数字信号处理软件实现或硬件实现中，在进行设计和对处理结果进行误差分析时，有限字长效应是必须考虑的重要问题。在数字系统中有三种因为有限字长的影响而引起误差的因素：

- (1) A/D 变换的量化效应；
- (2) 系数的量化效应；
- (3) 数字运算过程的有限字长效应。

存储单元的位数有限是上述三种因素能够引起误差的根本原因。同时误差与数的表示方法、所采用的运算方式、字的长短、尾数的处理方式及系统结构形式等都有关系。这三种因素所造成的影响是很复杂的，要同时分析其综合影响十分困难，只能将上述三种效应分别单独地加以分析，以计算出它们的影响。

下面首先讨论二进制数码的表示方法。

## 8.1 二进制数的表示与量化误差

先回顾一下二进制数的两种表示方法——定点表示和浮点表示,然后熟悉一下负数的原码、反码和补码表示方法,最后讨论二进制表示的数用截尾或舍入处理后所引入的误差。

### 8.1.1 二进制数的表示

计算机广泛应用二进制计数,因为二进制计数对计算机而言有许多优点。

- (1) 容易实现,二进制数的每位只有两个不同的稳定状态 0 和 1,易于表示。
- (2) 工作可靠,不同状态之间的转换是质变而非量变。
- (3) 运算规则简单,只有 0 与 0、0 与 1、1 与 1 相互运算三条口诀。
- (4) 逻辑判断方便,有逻辑代数作为设计工具,0 和 1 与真和假相对应,逻辑运算与算术运算能够统一。

计算机内的任何信息都是用二进制编码表示和运算的,任何数字都是用 0 和 1 两种状态来表示的,数据小数点表示目前存在着 2 种约定的方法:定点表示法和浮点表示法。

#### 1. 定点数的表示

定点表示法是约定计算机中所有数据小数点的位置是固定不变的。该位置在计算机设计时已被隐含地规定,无需再表明小数点的位置。这样的数称为定点数。

定点运算,可以把小数点位置固定在数的任意位置。一般不采用纯整数的形式,因为两定点整数相乘仍为定点整数,而其位数等于参加运算的两整数位数之和,必须利用截尾或舍入法和和的位数限定到规定的字长,这将造成无法容忍的误差。若把小数点定在二进制数的中间,该数既有整数部分又有小数部分,每次乘法运算之后都必须重新确定小数点在乘积中的正确位置,这会引发数值转换上的困难。故通常把小数点的位置定在数的最高位之前,使计算机所表示的数都是纯小数。用纯小数进行定点运算的优点如下。

- (1) 两定点纯小数相乘仍为定点纯小数,虽然乘积的位数也会增加,但由截尾或舍入法所引起的误差不会太大。
- (2) 定点纯小数相乘的结果永远都不会溢出。
- (3) 定点纯小数相加有可能溢出,但可通过比例因子来调整。

例,纯小数 0.1101110 在定点机中的存放形式可表示如下。

	1	1	0	1	1	1	0
--	---	---	---	---	---	---	---

● 小数点的位置(隐含规定)

定点数所能表示的数其动态范围小,要考虑加法运算结果的溢出问题。而浮点

表示法所能表示数的动态范围非常大,溢出的可能性也很小。

## 2. 浮点数的表示

在科学计算中,可能会涉及很大的数或很小的数,这些数用16位字长计算机的定点表示法是无法表示的,但可用浮点数表示。

浮点数的小数点位置是不固定的,它随每个数的大小而变化。浮点数的一级表示如下

$$N = M \cdot R^P \quad (8-1)$$

其中, $M$ 是数的尾数部分, $R$ 是数的基数, $P$ 是阶(Exponent)。

计算机内浮点数的基数 $R$ 通常是2,但也有以 $R=16$ 或 $R=8$ 为基数的。在基数确定后,浮点数就完全由尾数和阶决定了。

$M$ 和 $P$ 本身均为定点数,都包括数值和符号。尾数的符号就是该数的符号,而阶的符号表示小数点在尾数部分的位置。一个浮点数可以表示如下。

$S_p$	$P_n$	$S_m$	$M_r$
-------	-------	-------	-------

其中, $S_p$ 是阶 $P$ 的符号位, $P_n$ 是阶 $P$ 的绝对值部分, $S_p$ 称为阶码; $S_m$ 是尾数 $M$ 的符号位,即浮点数 $N$ 的符号位,称为尾符或数符; $M_r$ 是尾数的绝对值部分,称为尾码。

$S_p$ 、 $P_n$ 、 $S_m$ 、 $M_r$ 所占位数不同,浮点数的表示也就不相同。目前,各计算机厂商均支持IEEE的浮点数表示方法。下面介绍浮点数的两个概念:规格化和对阶。

(1) 规格化是移动小数点的位置,使尾数变成其标准格式的过程。由于浮点数的小数点是可以移动的,所以同一个浮点数可以有多种表示方法。通常,标准的格式要求能够表示最多的有效位数,也就是选择同一个浮点数的各种表示方法中精度最高的一种为标准格式。

(2) 对阶是移动一个浮点数的小数点位置,使两个数的小数点对齐(阶码相同)的过程。

## 3. IEEE 浮点数

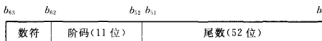
IEEE浮点数规定:规格化浮点数的小数点在数符 $S_m$ 的后面,且小数点前有一个隐含“1”,即其尾数可表示 $1 \sim 2$ 之间的数。其阶码连同阶符统一编码,浮点数的基数为2。IEEE浮点数格式分单精度和双精度两种,单精度数为32位的,双精度数是64位的。

单精度浮点数的阶码用8位表示(含符号位),尾数含符号位共24位。双精度浮点数的阶码占11位,尾数含符号位共53位。

单精度浮点数格式如下。

$b_{31}$	$b_{23}$	$b_{22}$	$b_{21}$	$b_0$
数符	阶码(8位)	尾数(23位)		

双精度浮点数格式如下。



对单精度数,阶码=0表示阶为 $-127$ ,尾数要乘以 $2^{-127}$ ;阶码=7Fh表示阶为0,尾数要乘以 $2^0$ ;阶码=FFh表示阶为 $+128$ ,尾数要乘以 $2^{128}$ 。

32位浮点数所能表示的绝对值最小的非零数值是 $\pm 1 \times 2^{-127} = \pm 5.877 \times 10^{-39}$ ,若小于该数,则表示为机器零,用全0表示;它能表示的绝对值最大的数是 $\pm 2 \times 2^{128} = \pm 6.8 \times 10^{38}$ ,若超出这一范围,则产生上溢出。

对数 $+1.0 = 1.0 \times 2^0$ ,单精度表示为

0011,1111,1000,000,0...00b=3F800000h

对数 $-128.0625 = -1.00000000001 \times 2^7$ ,规格化表示为

1100,0011,0000,0000,0001,00...0b=C3001000h

对双精度数,其阶码有11位;当阶码是3FFh时,表示阶为0,尾数要乘以 $2^0$ ;当阶码为0时,表示阶为 $-1023$ ,尾数要乘以 $2^{-1023}$ ;阶码是7FFh时,表示阶为 $+1024$ ,尾数要乘以 $2^{1024}$ 。

64位浮点数所能表示的绝对值最小的非零数值是 $\pm 1 \times 2^{-1023} = \pm 8.99 \times 10^{-307}$ ,它能表示的绝对值最大的数是 $\pm 2 \times 2^{1024} = \pm 3.595 \times 10^{303}$ 。

#### 4. 浮点数运算

浮点数运算中加法与减法比较简单,而乘法和除法要复杂得多,现分别说明运算规则。

(1) 加/减法运算。首先依据小阶向大阶看齐的原则使两个操作数的阶码相同,然后进行尾数相加/减,接着对结果进行规格化,在对阶或规格化的过程中,有时需要按照一定的规则作舍入处理,最后判定是否有溢出发生。

(2) 乘/除法运算。两个操作数的尾数相乘/除,得出积/商及余数的尾数并对其规格化,对两个操作数的阶码相加/减,得出积/商的阶码并规格化,然后给积/商的尾数加上符号位,当尾数的位数超出了寄存器的有效位数时,要进行舍入处理。最后判定积/商是否溢出。

#### 5. 浮点数的特点

与定点数相比,浮点数有如下特点。

- (1) 浮点数表示的数值范围大。
- (2) 一般来说,浮点数运算的精度较高。
- (3) 由于浮点运算要分别对阶码和尾数进行运算,所以浮点运算比定点运算复杂,它所需的硬件设备也更多。

#### 6. 带符号数的表示

不论是定点数还是浮点数,其运算过程都可以归结为定点小数的运算。一个带符号数在计算机中可以分别用原码、反码或补码三种方法表示。习惯上,把计算机

中存放的数称为机器数,原码、反码、补码都是机器数。对于正数,其原码、反码、补码相同,而负数的原码、反码和补码是不同的。

设任意数  $x$  的  $(b+1)$  位码的形式为

$$a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_b \quad (8-2)$$

其中,整数位  $a_0$  表示符号位,0 表示正数,1 表示负数。小数位  $a_1 a_2 a_3 \cdots a_b$  表示  $b$  位字长的尾数值,  $a_i$  表示第  $i$  位二进制码 ( $i=0,1,\cdots,b$ ),取值可为 0 或 1。

(1) 原码。小数点左边的第 1 位是符号位,0 表示正数,1 表示负数。小数点右边的各位是小数的绝对值。

$$[x]_{\text{原}} = \begin{cases} |x|, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + |x| \text{ (或 } 1 - x), & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

式(8-2)表示的十进制数  $x$  为

$$x = (-1)^{a_0} \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}$$

原码的优点是简单直观,特点是符号位与数值位在运算时要区别对待。用原码进行乘除运算很方便,可先进行尾数的乘/除运算,再把结果的符号加上。但用原码进行加减运算则非常复杂,要首先判断两个加数是否同号,同号时绝对值相加,异号时绝对值相减,做减法时还要判断谁减谁,故原码表示法很少用于加/减运算。

(2) 反码。正数的反码表示与其原码相同,即

$$[x]_{\text{反}} = x, \quad x > 0$$

负数的反码由其绝对值按位求反后得到,即

$$[x]_{\text{反}} = 2 - [x]_{\text{原}}$$

式(8-2)表示的十进制负数  $x$  为

$$x = -a_0(1 - 2^{-b}) + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}$$

(3) 补码。正数的补码表示与其原码相同,即

$$[x]_{\text{补}} = x, \quad x > 0$$

负数的补码由它的绝对值求反加 1 后得到。补码可表示为

$$[x]_{\text{补}} = \begin{cases} |x|, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + [x]_{\text{反}}, & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

式(8-2)表示的十进制负数  $x$  为

$$x = -a_0 + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} = -1 + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}$$

### 8.1.2 量化误差

定点二进制数的乘法和浮点二进制数的加法和乘法的运算,在运算结束后字长都会增加,因而需要利用截尾或舍入法对尾数进行处理。现在假定原来的二进制数

是  $b$  位字长, 运算后增加到  $b_1$  位字长, 因此需要将此  $b_1$  位字长的二进制数限制到  $b$  位字长。截尾的方法是去掉最右边的  $b_1 - b$  位。舍入的方法是: 当最右边的  $b_1 - b$  位的值大于  $2^{-b-1}$  时, 在舍去最右边的  $b_1 - b$  位的同时, 给数的末位加 1 (权值为  $2^{-b}$ ), 即“入”; 当最右边的  $b_1 - b$  位的值小于  $2^{-b-1}$  时, 仅舍去最右边的  $b_1 - b$  位, 即“舍”, 使舍入后的值最接近舍入之前的值。

用截尾或舍入法处理二进制的尾数所造成的误差分别称为截尾误差或舍入误差。截尾误差或舍入误差又由于所用二进制数的位数  $b$ , 数的运算方式是定点制还是或浮点制, 负数的表示法是原码、反码、补码而有所不同, 下面分别加以分析。

### 1. 定点运算的截尾误差和舍入误差

#### 1) 截尾误差

(1) 对于正小数  $x \geq 0$ , 原码、反码、补码的首位  $a_0$  均为“0”, 表示法相同, 因而量化影响也相同。截尾前  $x$  有  $b_1$  位, 故

$$x = \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

截尾后  $x$  有  $b$  位, 记做  $Q_T[x]$ , 有

$$Q_T[x] = \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}$$

以  $E_T$  表示截尾误差, 则有

$$E_T = Q_T[x] - x = \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i} - \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i} = - \sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

正小数截尾后数值变小, 故截尾误差总是负的。当被截位  $a_i$  ( $i=b+1$  到  $i=b_1$ ) 均为 1 时, 为最大截尾误差

$$E_{T\max} = - \sum_{i=b+1}^{b_1} 2^{-i} = - (2^{-b} - 2^{-b_1})$$

因而有

$$-(2^{-b} - 2^{-b_1}) \leq E_T \leq 0$$

令  $q = 2^{-b}$ , 表示最小码位所表示的权值, 称为量化间距或量化步阶, 因此下式成立

$$-q < -(q - 2^{-b_1}) \leq E_T \leq 0$$

或

$$-q < E_T \leq 0, \quad x > 0 \quad (8-3)$$

(2) 对于负小数  $x < 0$ , 由于  $a_0 \neq 0$ , 不同码制  $x$  的表示法各不相同, 因而产生的量化误差也不相同。

① 对于原码, 截尾后负小数的绝对值变小, 负小数的原码截尾误差是正数, 即

$$x = (-1) a_0 \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i} = - \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

$$Q_T[x] = - \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}$$

所以

$$E_T = Q_T[x] - x = \sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

满足

$$0 \leq E_T \leq -(2^{-b} - 2^{-b_1})$$

即

$$0 \leq E_T < q, \quad x < 0 \quad (8-4)$$

② 对于补码, 有

$$x = -a_0 + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i} = -1 + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

$$Q_T[x] = -1 + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}$$

所以

$$E_T = Q_T[x] - x = - \sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

显然有

$$-q < E_T \leq 0, \quad x < 0 \quad (8-5)$$

③ 对于反码, 有

$$x = -a_0(1 - 2^{-b}) + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i} = -(1 - 2^{-b_1}) + \sum_{i=1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

$$Q_T[x] = -(1 - 2^{-b}) + \sum_{i=1}^b a_i 2^{-i}$$

所以

$$E_T = Q_T[x] - x = (2^{-b} - 2^{-b_1}) - \sum_{i=b+1}^{b_1} a_i 2^{-i}$$

当被截位  $a_i (i=b+1 \text{ 到 } i=b_1)$  均为 0 时, 为最大截尾误差; 全为 1 时,  $E_T$  为最小截尾误差, 满足

$$0 \leq E_T \leq -(2^{-b} - 2^{-b_1})$$

即

$$0 \leq E_T < q, \quad x < 0 \quad (8-6)$$

由上面的讨论有以下结论。

(1) 原码与反码的截尾误差与数的正负有关: 正数时误差为负, 当  $x \geq 0$  时,  $-q < E_T \leq 0$ ; 负数时误差为正, 当  $x < 0$  时,  $0 \leq E_T < q$ 。

(2) 补码的截尾误差皆为负数, 对所有的  $x$ , 有  $-q < E_T \leq 0$ 。



(3) 补码、原码与反码截尾量化的非线性特性分别如图 8-1(a)、(b)所示。

## 2) 舍入误差

由前所述,舍入是根据最右边的  $b_1-b$  位的绝对值是否大于  $2^{-b-1}$ ,按最接近的值取  $b$  位码,选择靠得最近的量化层标准值为舍入后的值的,因此不论是正数、负数,也不论是原码、补码、反码,舍入误差总是处在  $\pm q/2$  之间,用  $Q_R[x]$  表示对  $x$  作舍入处理,  $E_R$  表示舍入误差,有

$$E_R = Q_R[x] - x, \quad -\frac{q}{2} \leq E_R \leq \frac{q}{2} \quad (8-7)$$

当被舍入的数恰好在两个量化层标准值的正中间时,可规定恒取上入,或恒取下舍,或是采用随机舍入。图 8-2 画出了定点舍入处理的量化特性。

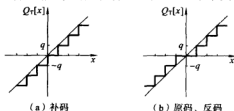


图 8-1 定点截尾处理的量化特性 ( $q=2^{-b}$ )



图 8-2 定点舍入处理的量化特性

比较图 8-1 和图 8-2 可看出,舍入误差是对称分布的,而补码截尾误差是单极性分布的,因而它们的统计特性不同。一般来说,舍入误差的影响要小,所以应用得多一些。

表 8-1 归纳了浮点运算的相对误差的结论。

表 8-1 定点运算中的截尾和舍入误差 ( $q=2^{-b}$ )

		截尾误差	舍入误差
正数		$-q < E_T \leq 0$	$-q/2 \leq E_R \leq q/2$
负数	原码	$0 \leq E_T < q$	
	反码	$0 \leq E_T < q$	
	补码	$-q < E_T \leq 0$	

## 2. 浮点运算的截尾误差和舍入误差

浮点数用  $x=2^c \cdot M$  表示,  $c$  为阶码,  $M$  为尾数。对浮点数进行截尾或舍入处理只涉及尾数的字长,只有尾数  $M$  产生误差,  $M$  的误差引起  $x$  的误差,因而可运用定点误差分析的结果。另一方面,由于阶码  $c$  的存在,浮点数  $x$  的截尾和舍入误差又与  $c$  的大小有关系,即两个尾数相同而阶码不同的数,在同样尾数量化处理的情况下,误差的大小是不一样的。

例如,  $x_1$  和  $x_2$  是两个尾数相同而阶码不同的数, 即

$$x_1 = 0.110\ 1 \times 2^{000} = 0.812\ 5, \quad x_2 = 0.110\ 1 \times 2^{101} = 26$$

$$Q_R[x_1] = 0.11 \times 2^{000} = 0.75, \quad Q_R[x_2] = 0.11 \times 2^{101} = 24$$

则

$$E_{R1} = Q_R[x_1] - x_1 = 0.062\ 5, \quad E_{R2} = Q_R[x_2] - x_2 = 2$$

可以看出, 在舍去相同尾数的情况下, 由于  $x_2$  是  $x_1$  的 32 倍, 其量化误差  $E_{R1}$  就是  $E_{R2}$  的 32 倍。因而在浮点制中, 采用相对误差而不是绝对误差更能反映误差的特点。浮点数  $x = 2^c \cdot M$  的相对误差定义为

$$\epsilon = \frac{Q_R[x] - x}{x} = \frac{[M] - M}{M} \quad (8-8)$$

其中,  $Q_R[x]$  表示截尾或舍入处理后的浮点数,  $[M]$  表示截尾或舍入处理后的尾数, 处理前后阶码  $c$  保持不变。绝对误差可表示成

$$E = Q_R[x] - x = \epsilon x \quad (8-9)$$

下面分别就浮点舍入和浮点截尾分析  $\epsilon$  的误差范围。

#### 1) 浮点舍入

$x = 2^c \cdot M$  中尾数  $M$  的误差在  $\pm \frac{q}{2}$  之间, 即

$$-\frac{q}{2} \leq E_{RM} \leq \frac{q}{2}$$

而  $x$  的阶码为  $c$ , 则

$$-2^c \frac{q}{2} \leq Q_R[x] - x = \epsilon_R x \leq 2^c \frac{q}{2}$$

其中,  $\epsilon_R$  表示舍入相对误差, 当  $x > 0$  时, 有  $\frac{1}{2} 2^c \leq x < 2^c$ , 代入上式, 可得舍入相对误差为

$$-q < \epsilon_R \leq q, \quad x > 0 \quad (8-10)$$

当  $x < 0$  时, 有  $-2^c < x \leq -\frac{1}{2} 2^c$ , 代入上式, 可得舍入相对误差为

$$-q \leq \epsilon_R < q, \quad x < 0 \quad (8-11)$$

#### 2) 浮点截尾

(1) 当  $x > 0$  时,  $a_0 = 0$ , 三种码制的截尾误差均为  $-q < E_T \leq 0$ , 因此

$$-2^c q < \epsilon_R x \leq 0, \quad x > 0$$

由于  $\frac{1}{2} 2^c \leq x < 2^c$ , 取  $x_{\min} = 2^{c-1}$ , 可得

$$-2q < \epsilon_R \leq 0, \quad x > 0 \quad (8-12)$$

(2) 当  $x < 0$  时,  $a_0 = 1$ , 原码和反码的截尾误差为  $0 \leq E_T < q$ , 因此

$$0 \leq \epsilon_R x < 2^c q, \quad x < 0$$

由于  $-2^r < x \leq -\frac{1}{2}2^r$ , 取  $x_{\text{int}} = -2^{r-1}$ , 可得

$$-2q < \epsilon_R \leq 0, \quad x < 0$$

对于补码, 截尾误差为  $-q < E_T \leq 0$ , 相应地, 可得

$$0 \leq \epsilon_R < 2q, \quad x < 0 \quad (8-13)$$

表 8-2 归纳了浮点运算相对误差的结论。

表 8-2 浮点运算中的相对误差 ( $\Delta = 2^{-b}$ )

		截尾误差	舍入误差
正数		$-q < E_T \leq 0$	$-q < \epsilon_R \leq q$
负数	原码	$-2q < \epsilon_R \leq 0$	$-q \leq \epsilon_R < q$
	反码	$-2q < \epsilon_R \leq 0$	
	补码	$0 \leq \epsilon_R < 2q$	

## 8.2 A/D 转换器的量化误差

A/D 转换器是将输入的模拟信号  $x_a(t)$  转换为  $b$  位二进制数字信号的器件。 $b$  的数值可以是 8、12 或高至 20。任何 A/D 转换器都包括采样与量化二个部分。首先采样产生采样序列  $x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$ ,  $x_a(nT)$  在时间上是离散的而在幅度上是连续的, 可以将它看成是一个无限精度的数字信号, 用  $x(n)$  表示。在满足采样定理的前提下, 模拟信号时间离散化的过程是可逆的。然后对采样序列进行量化, 量化是对采样序列进行幅度上的离散化之后, 用某种格式的数字代码表示的过程。与信号的时间离散化过程不同, 量化过程是不可逆的, 经量化得到的数字信号不可能不失真地恢复原信号, 它必定要引入量化误差或量化噪声。量化噪声的大小决定了 A/D 转换器的动态范围, 是衡量 A/D 转换器性能的一个最重要指标。

根据采样定理, A/D 转换器前一般都加一个前置模拟低通滤波器, 以便滤除高于折叠频率(采样频率之半)的频率, 此外, 由于 A/D 转换器总是定点制的, 必须使信号不超过 A/D 转换器的动态范围, 为此, 模拟输入信号必须乘一个比例因子, 使它满足 A/D 转换器动态范围的要求。

### 8.2.1 量化误差的统计分析

前面对一个具体的一个数  $x$  作了截尾或舍入处理时量化误差的分析, 但是在数字信号处理中  $x(n)$  ( $n=0, 1, \dots$ ) 通常是一个序列, 所以讨论量化过程产生的误差估计更重要的是用统计的观点去分析整个序列的量化误差而不能停留在对一个数的量化误差分析上, 这要求求得量化误差的统计效应。下面用统计的方法分析量化误差。

设量化器的输入信号为随机序列  $x(n)$ , 其量化误差也为随机序列  $e(n)$ , 则

$$e(n) = Q[x(n)] - x(n) \quad (8-14)$$

为便于分析, 假设  $e(n)$  具有下列特性:

- (1)  $e(n)$  是一个平稳随机序列;
- (2)  $e(n)$  与信号  $x(n)$  也不相关;
- (3)  $e(n)$  本身的任意两个值之间不相关, 具有白噪声性质;
- (4)  $e(n)$  在其误差范围内均匀等概率分布。

这种统计假定在实际工作中并不一定符合, 特别是当输入为直流或者方波这类规则信号的采样信号及量化级数  $N$  很小时, 误差就不能认为是线性独立和白色的。输入信号越不规则, 如语言信号及音乐信号, 这种假定就越接近于实际, 也就是说, 只要信号足够复杂且量化台阶足够小, 此统计模型就更加有效, 并可由这种统计平均分析得到一些具有指导意义的结果。

根据以上假设,  $e(n)$  可看成是一个与信号序列完全不相关的具有均匀分布特性的白噪声序列, 它与信号的关系是相加性的。在这些假定下, 图 8-3 所示的实际 A/D 变换器的非线性模型就变成等效线性过程的统计模型, 如图 8-4 所示, 即在理想采样器的输出端加入了一个量化白噪声序列  $e(n)$ 。

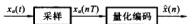


图 8-3 A/D 转换原理图

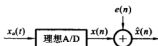


图 8-4 A/D 转换的统计模型

现在计算  $e(n)$  的两个最重要的统计参数, 均值  $m_e$  及方差  $\sigma_e^2$ ,  $m_e$  实际上代表了噪声的直流分量, 而  $\sigma_e^2$  则代表了除去直流分量后量化噪声的平均功率。

$$m_e = E[e(n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} ep(e)de \quad (8-15)$$

$$\sigma_e^2 = E[(e(n) - m_e)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (e - m_e)^2 p(e)de \quad (8-16)$$

其中,  $E[\ ]$  表示取数字期望。  $p(e)$  是误差值  $e(n)$  的概率密度, 由于假定  $e(n)$  是平稳的, 求数字期望时与  $n$  无关, 所以可不用序号值  $n$ 。

A/D 变换器总是采用定点制表示信号  $x(n)$ , 由上述  $e(n)$  的第(4)条假定, 量化噪声的概率分布如图 8-5 所示。

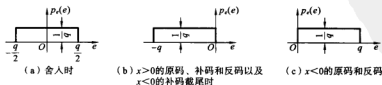


图 8-5 三种误差范围的概率密度函数

(1) 舍入处理。由前述可知,舍入误差为  $-q/2 \leq e(n) \leq q/2$ ,  $e(n)$  的概率分布密度为  $1/q$ , 如图 8-5(a) 所示, 因此可得均值  $m_e$  及方差  $\sigma_e^2$

$$m_e = \int_{-q/2}^{+q/2} e p_R(e) de = \int_{-q/2}^{+q/2} \frac{1}{q} e de = \frac{1}{2q} e^2 \Big|_{-q/2}^{+q/2} = 0 \quad (8-17)$$

$$\sigma_e^2 = \int_{-q/2}^{+q/2} (e - m_e)^2 p_R(e) de = \int_{-q/2}^{+q/2} \frac{1}{q} e^2 de = \frac{1}{3q} e^3 \Big|_{-q/2}^{+q/2} = \frac{1}{12} q^2 \quad (8-18)$$

(2) 截尾处理。对于  $x \geq 0$  的三种码制和  $x < 0$  的补码,  $e(n)$  的误差为  $-q < e(n) \leq 0$ , 在误差范围内概率分布密度为  $1/q$ , 如图 8-5(b) 所示, 因此可得均值  $m_e$  及方差  $\sigma_e^2$

$$m_e = \int_{-q}^{+q} e p_T(e) de = \int_{-q}^0 \frac{1}{q} e de = \frac{1}{2q} e^2 \Big|_{-q}^0 = -\frac{1}{2} q \quad (8-19)$$

$$\sigma_e^2 = \int_{-q}^{+q} (e - m_e)^2 p_T(e) de = \int_{-q}^0 \frac{1}{q} \left( e + \frac{q}{2} \right)^2 de = \frac{1}{12} q^2 \quad (8-20)$$

对于  $x < 0$  的原码和反码,  $e(n)$  的误差为  $0 \leq E_T < q$ , 在误差范围内概率分布密度为  $1/q$ , 如图 8-5(c) 所示, 因此可得均值  $m_e$  及方差  $\sigma_e^2$

$$m_e = \int_{-q}^{+q} e p_T(e) de = \int_0^q \frac{1}{q} e de = \frac{1}{2q} e^2 \Big|_0^q = \frac{1}{2} q \quad (8-21)$$

$$\sigma_e^2 = \int_{-q}^{+q} (e - m_e)^2 p_T(e) de = \int_0^q \frac{1}{q} \left( e - \frac{q}{2} \right)^2 de = \frac{1}{12} q^2 \quad (8-22)$$

由上面关于均值  $m_e$  及方差  $\sigma_e^2$  讨论可见, 各种情况的方差  $\sigma_e^2$  均为  $\frac{1}{12} q^2$ , 不同的只是均值  $m_e$ , 分别为  $0, -q/2, q/2$ 。

量化噪声的方差  $\sigma_e^2$  与量化间隔的平方 ( $q^2$ ) 成正比,  $q = 2^{-b}$  为量化间隔, 因此信号处理时选用的字长  $b+1$  越长, 量化噪声的方差越小。另外, 由于截尾噪声具有直流量, 将影响信号的频谱结构, 因此一般采用舍入处理。

## 8.2.2 量化信噪比与所需字长的关系

在模拟信号的采样处理中, 量化噪声是一个相加性噪声序列, 量化过程看做无限精度的信号  $x(n)$  与量化噪声  $e(n)$  的叠加, 因而可以用信噪比的概念来衡量 A/D 变换器的优劣, 进而选择 A/D 变换器的位数  $b$ , 以满足技术要求。

把信号的平均功率  $\sigma_x^2$  与量化噪声的平均功率  $\sigma_e^2$  之比称为量化的信噪比, 即

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2}{q^2/12} = 12 \cdot 2^{2b} \cdot \sigma_x^2$$

信噪比用对数表示时记作 SNR, 单位 dB, 有

$$\text{SNR(dB)} = 10 \lg \left[ \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right] = 6.02b + 10.79 + 10 \lg(\sigma_x^2) \quad (8-23)$$

由式(8-23)看出, 信号功率  $\sigma_x^2$  越大, 信噪比当然越高; 另一方面, 随着字长  $b$  的增加, 信噪比也增大, 字长  $b$  每增加 1 位, 信噪比增加约 6 dB。字长越长, A/D 变换

器的信噪比越高。

为了使信号不超过定点制运算所允许的动态范围,用一个小于1的正数  $A(0 < A < 1)$  去乘  $x(n)$ ,这样信号的方差变为  $A^2\sigma_x^2$ ,而量化误差的方差仍为  $\sigma_e^2$ ,于是

$$\text{SNR(dB)} = 10\lg\left[\frac{A^2\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right] = 6.02b + 10.79 + 10\lg(\sigma_x^2) + 20\lg A \quad (8-24)$$

式(8-24)中,由于  $0 < A < 1$ ,  $\lg A$  为负数,因此压缩输入信号幅度,将使信噪比减小。实际信号大多比较复杂,在平均值附近出现的概率最大,信号电平偏离平均值的幅度越大,其出现概率就越小。一般这个幅度偏离平均值  $(3 \sim 4)\sigma_x$  的概率是很小的。当信号的幅度概率为正态分布时,信号幅度的平均值  $\pm 4\sigma_x$  以内的概率在99%以上。因此,可以这样选择  $A$  值:使  $4A\sigma_x \leq 1$ ,把  $4\sigma_x$  值的信号  $x(n)$  用衰减因子  $A$  衰减到小于或等于1,这样可以使产生限幅的信号概率非常小,由  $4A\sigma_x \leq 1$  可得  $A\sigma_x \leq \frac{1}{4}$ ,取  $A\sigma_x = \frac{1}{4}$ ,代入式(8-24)得

$$\text{SNR(dB)} = 10\lg\left[\frac{A^2\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right] = 6.02b + 10.79 + 20\lg(A\sigma_x) = 6.02b - 1.25 \quad (8-25)$$

由式(8-25)可以看出,若需得到信噪比大于70 dB,至少需要满足  $b=12$  b。但是,字长过长也无必要,因为输入信号  $x_e(t)$  本身也有一定的信噪比,字长长到  $A/D$  变换器的量化噪声比  $x_e(t)$  的噪声电平更低就没有意义了。

由此,为提高信噪比,可以增大输入信号,但这受到  $A/D$  变换器动态范围的限制,还可以增加字长  $b$ ,但这又受到输入信号  $x_e(t)$  信噪比的限制。

### 8.2.3 量化噪声通过线性非时变系统

当量化信号通过一线性时不变系统时,输入的误差或量化噪声也会出现在最后的输出中,以误差或噪声的形式表现出来。假定系统是完全理想的,即是无限精度的,也就是说,系统实现时带来的误差及运算带来的误差暂都不考虑,把它们看成是独立于量化噪声而引起的误差,可单独计算,然后将结果叠加在一个线性系统  $H(z)$  的输入端,加上一个量化序列  $\hat{x}(n) = x(n) + e(n)$ ,则系统的输出为

$$\hat{y}(n) = \hat{x}(n) * h(n) = [x(n) + e(n)] * h(n) = y(n) + e_f(n)$$

其中,  $y(n) = x(n) * h(n)$  是信号  $x(n)$  的输出,

$e_f(n) = e(n) * h(n)$  是量化噪声  $e(n)$  的输出,图

8-6 表示了量化噪声通过线性系统的框图。

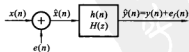


图 8-6 量化噪声通过线性系统

设  $e(n)$  是定点补码舍入误差,  $e(n)$  的均值

为  $m_e$ , 方差为  $\sigma_e^2$ , 则系统量化噪声的输出  $e_f(n)$  的均值  $m_f$  和方差  $\sigma_f^2$  计算如下

$$m_f = E[e_f(n)] = E[e(n) * h(n)] = m_e \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) = 0 \quad (8-26)$$

$$\sigma_f^2 = E[(e_f(n) - m_f)^2] = E[e_f^2(n)] = \sigma_e^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h^2(m) \quad (8-27)$$

根据帕斯瓦尔定理,  $\sigma_f^2$  也可以用下式表示

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{T-1} h^2(m) = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \oint_C H(z) H(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (8-28)$$

或者在单位圆上计算, 即

$$\sigma_f^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) d\omega = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (8-29)$$

如果  $e(n)$  是补码截尾白噪声, 经过分析可知, 输出噪声的方差  $\sigma_f^2$  不变, 输出的均值  $m_f$  如下

$$\begin{aligned} m_f &= E[e_f(n)] = E[e(n) * h(n)] = E\left[\sum_{m=0}^{+\infty} h(m)e(n-m)\right] \\ &= m_e \sum_{m=0}^{+\infty} h(m) = m_e H(e^j) \end{aligned} \quad (8-30)$$

这表明, 如果用截尾处理, 则线性系统的输出有直流分量, 将对信号的频谱结构产生影响, 这当然是要避免的。

## 8.3 系数量化对数字滤波器的影响

理论方法设计出的滤波器系统函数, 其系数都是无限精度的, 而滤波器的所有系数都必须以有限长的二进制形式存放在存储器中, 所以必须对理想的系数量化, 这样就使实际系数与原系数值之间存在误差, 造成滤波器的零点极点位置发生偏离, 影响滤波器的性能。如果系数量化误差很大, 则 IIR 数字滤波器的极点就可能移出单位圆, 导致系统不稳定而不能使用。

系数量化对滤波器的影响固然与字长有关, 但与滤波器的结构也有密切的关系。极点灵敏度的分析将能反映不同结构的情形下, 系数量化对零极点位置的影响。

### 8.3.1 极点位置灵敏度

极点位置灵敏度是指每个极点位置对各系数偏差的敏感程度。这个概念和分析方法同样适合于零点位置灵敏度分析。由于极点位置能决定系统的稳定性, 同时极点的位置对系统性能的影响亦较大, 所以这里只讨论系数量化对极点位置的影响。

系数量化后零极点离开了它们应有的位置, 使滤波器的特性与所要求的频率响应不同, 所以一个网络结构对系数量化的灵敏度是用系数量化引起的零极点的位置误差来衡量的。不同形式的系统结构, 在相同的系数量化间距情况下, 其量化灵敏度是不同的, 这是比较各种结构形式的重要标准。

理想数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (8-31)$$

式(8-31)表示的是一个无限精度的  $N$  阶直接型结构的 IIR 滤波器的系统函数, 对系数  $a_i, b_i$  量化后, 其实际传递函数为

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{i=0}^M \hat{b}_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i z^{-i}}$$

其中,  $\hat{a}_i, \hat{b}_i$  是系数  $a_i, b_i$  的量化结果, 即

$$\hat{a}_i = a_i - \Delta a_i, \quad \hat{b}_i = b_i - \Delta b_i$$

下面讨论系数量化误差对极点的影响。由式(8-31), 原系统函数  $H(z)$  的分母多项式为

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} = \prod_{k=1}^N (1 - z_k z^{-1}) \quad (8-32)$$

令  $A(z)=0$ , 得到  $H(z)$  的极点为

$$z = z_k, \quad k=1, 2, \dots, N$$

系数量化后的极点  $\hat{z}$  为

$$\hat{z} = z_k + \Delta z_k, \quad k=1, 2, \dots, N$$

$\Delta z_k$  为极点位置的偏差量, 它是由各个系数偏差  $\Delta a_i$  引起的, 因此

$$\Delta z_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial z_k}{\partial a_i} \Delta a_i, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (8-33)$$

由式(8-33)可得出以下结论:  $\frac{\partial z_k}{\partial a_i}$  值的大小决定着系数  $a_i$  的偏差  $\Delta a_i$  对极点位置偏差  $\Delta z_k$  的影响程度;  $\frac{\partial z_k}{\partial a_i}$  越大,  $\Delta a_i$  对  $\Delta z_k$  的影响也越大;  $\frac{\partial z_k}{\partial a_i}$  越小,  $\Delta a_i$  对  $\Delta z_k$  的影响就越小。所以,  $\frac{\partial z_k}{\partial a_i}$  就是极点  $z_k$  对系数  $a_i$  变化的灵敏度。下面根据  $A(z)$  来求这个极点位置灵敏度  $\frac{\partial z_k}{\partial a_i}$  的表达式

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial A(z)}{\partial z_k} \right)_{z=z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial a_i} \right) &= \left( \frac{\partial A(z)}{\partial a_i} \right)_{z=z_k} \\ \left( \frac{\partial z_k}{\partial a_i} \right) &= \left. \frac{\partial A(z) / \partial a_i}{\partial A(z) / \partial z_k} \right|_{z=z_k} \end{aligned} \quad (8-34)$$

由式(8-32)得

$$\left( \frac{\partial A(z)}{\partial a_i} \right) = -z^{-i} \quad (8-35)$$



$$\left(\frac{\partial A(z)}{\partial z_k}\right) = -z^{-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (1 - z_l z^{-1}) = z^{-N} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (z - z_l) \quad (8-36)$$

将式(8-35)、式(8-36)代入式(8-34),得极点位置灵敏度为

$$\frac{\partial z_k}{\partial a_i} = \frac{z_k^{N-i}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (z_k - z_l)} \quad (8-37)$$

由式(8-37)可以看到,分母中的每一个因子 $(z_k - z_l)$ 代表着某一极点 $z_l$ 指向当前极点 $z_k$ 的矢量,而整个分母正是所有极点指向当前极点 $z_k$ 的矢量积。这些矢量越长即极点彼此间距离越远,极点位置灵敏度就越低;这些矢量越短即极点彼此越密集时,极点位置灵敏度就越高。例如,一个共轭极点在虚轴附近的带通滤波器如图8-7(a)所示,一个共轭极点在实轴附近的低通滤波器如图8-7(b)所示,前者极点间距离比后者的长,因此前者的极点位置灵敏度比后者的低,也即在相同程度的系数量化下所造成的误差,前者比后者小。

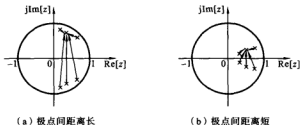


图 8-7 极点位置灵敏度与极点间距离成反比

高阶直接型滤波器的极点数目多而密集,而低阶直接型滤波器的极点数目少而稀疏,因而前者对系数量化误差要敏感得多。

另一方面,并联型结构及级联型结构不同于直接型结构,其每一对共轭极点是单独用一个二阶子系统实现的,每一对共轭极点的位置误差与它们到系统其他极点的距离是无关的。由于每对极点只受与之有关的两个系数的影响,而且级联或并联后,每个子系统的极点密集度就比直接型高阶网络的要稀疏得多,因而极点位置受系数量化的影响比直接型结构要小得多。

现在用一个低通滤波器作为例子,来说明系数的微小变动将对极点位置产生很大影响,并可能使系统变为不稳定。

**例 8-1** 设一低通滤波器的传递函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2.9425z^{-1} + 2.8934z^{-2} - 0.9508z^{-3}} = \frac{1}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2} - a_3z^{-3}}$$

其中,  $a_1 = 2.9425$ ,  $a_2 = -2.8943$ ,  $a_3 = 0.9508$ 。分析计算系数量化对极点位置的影响。

**解** 经计算求得  $H(z)$  的极点分别是  $z_1 = 0.99$ ,  $z_2 = 0.98e^{j\pi/3}$ ,  $z_3 = z_2^* =$

$0.98e^{-j\beta^*}$ , 于是有

$$H(z) = \frac{1}{(1-0.99z^{-1})(1-0.98e^{j\beta^*}z^{-1})(1-0.98e^{-j\beta^*}z^{-1})} \quad (8-38)$$

由式(8-33)知,各系数量化引起的第  $k$  个极点  $z_k$  的偏移  $\Delta z_k$  应该考虑最坏的可能,即从  $i=1$  到  $i=N$ (这里  $N=3$ ),各  $\Delta a_i$  导致的第  $k$  个极点的偏移  $\Delta z_k$  应该相加起来。一般来讲,各系数量化所产生的第  $i$  个极点的总的偏移大于一个系数量化所引起的极点位置的偏移。

下面研究当  $\Delta a_1 = \Delta a_3 = 0$  时,仅仅由一个系数  $a_2$  的量化所引起的极点  $z_1$  的变化  $\Delta z_1$ ,这种情况并不是最坏的情况。如果这种情况下系数  $a_2$  的量化已导致极点位置过大地移动,那当所有系数同时有量化误差时可能出现的最坏情况将比下面讨论的结果更加严重。

由于  $\Delta a_1 = \Delta a_3 = 0$ , 所以

$$\Delta z_1 = \frac{z_1 \Delta a_2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} = \frac{0.99 \Delta a_2}{(0.99 - 0.98e^{j\beta^*})(0.99 - 0.98e^{-j\beta^*})}$$

如果字长为 8 位,则由量化引起的误差  $\Delta a_i$  可达  $\frac{q}{2} = \frac{1}{512}$ , 约为 0.002, 求得  $\Delta z_1 = 0.2578$ , 于是  $\hat{z}_1 = z_1 + \Delta z_1 = 0.99 + 0.2578 = 1.248$ , 极点远远超出单位圆, 这样的变化显然是太大了。

下面再研究  $\Delta z_1 = 0.01$ , 即将极点  $z_1$  移到单位圆上需要的字长。因为极点移到单位圆上是稳定性要求的极限情况, 即  $\Delta z_1$  超过 0.01 系统就会变得不稳定。将  $\Delta z_1 = 0.01$  代入式(8-38), 得  $\Delta a_2 = 0.00007578$ , 相比于  $a_2 = 2.945$ , 其量化误差等于  $7.578 \times 10^{-5}$ , 这会使量化后系统的极点移到单位圆上。如果  $a_2$  的量化误差再大一些, 系统就要不稳定了, 而  $7.578 \times 10^{-5}$  在二进制数中为  $2^{-11} < 7.578 \times 10^{-5} < 2^{-10}$ , 所以字长至少要 14 位。可见一个三阶系统对字长的要求已经非常严格了, 如果阶数再高对量化误差的要求将更加苛刻。

现在反过来考察用三个一阶的环节级联或并联组成这个系统。由于每一个环节中极点从 0.99 变到 1.00, 允许变化 0.01 而且这个环节的稳定性并不受另一环节影响, 所以其所需字长为 7 位就够了。

由上面例子可以得出如下结论: 系数量化对零极点位置的影响与零极点位置的分布及滤波器的结构均有密切的关系。对于高阶滤波器来说, 在给定字长的条件下, 为了使系数量化的影响最小, 应避免采用直接型的结构, 而应尽量分解为最低阶的级联结构或并联结构。对于极点灵敏度很高的场合, 可以用双精度的系数, 以便有效地达到精度的要求。

### 8.3.2 系数量化对二阶子系统极点位置的影响

高阶系统用直接型网络结构实现是不合适的, 级联型和并联型优于直接型。但是级联型和并联型的基本子系统是二阶节, 如何实现这个基本二阶节也有着不同的

情况。级联型和并联型中的一个具有共轭极点的二阶系统也有各种不同的结构,而且不同结构对于系数量化的敏感度也是不同的。

设二阶 IIR 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (8-39)$$

具有一对共轭对称的复极点,即

$$z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$$

$$\begin{aligned} 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} &= (1 - re^{j\theta} z^{-1})(1 - re^{-j\theta} z^{-1}) \\ &= 1 - 2r\cos\theta \cdot z^{-1} + r^2 z^{-2} \end{aligned}$$

得到

$$r^2 = a_2, \quad r\cos\theta = -\frac{a_1}{2} \quad (8-40)$$

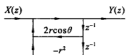


图 8-8 共轭对称极点组成的基本二阶网络的直接型实现

用直接实现法来实现  $H(z)$ , 则数字网络如图 8-8 所示。

式(8-40)说明,对于二阶网络,其极点的半径  $r$  完全由系数  $a_2$  决定,极点在实轴上的坐标值  $r\cos\theta$  取决于系数  $a_1$ 。如果  $a_1, a_2$  用 3 位字长表示,  $b=3$  (不算符号位), 表 8-3 表示了这 3 位字长一共只能有 8 种不同值, 因而只

能表达 8 种半径  $r$  值和  $\pm \frac{7}{8}$  之间的 15 种实轴坐标  $r\cos\theta$  值, 这样 3 位字长的系数所能表达的极点位置就如图 8-9 中的网眼节点那样, 只限制在  $z$  平面的一些有限的固定位置上。如果所需要的极点位置不在这些网眼节点上, 就只能以最靠近的一个节点来代替这一极点位置, 这样就引入了极点位置误差, 如果误差很大, 还有可能使共轭极点变成实极点(实极点的位置不在图所示的网眼点上), 这时就会产生严重的误差, 甚至使系统失去稳定。

表 8-3 3 位字长系数所能表达的共轭极点参数

$ a_1 $ 3 位二进制码 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$	所表达的 $ a_1 $ 的值	极点横坐标 $ r\cos\theta  =  a_1 /2$	$a_2$ 3 位二进制码 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$	所表达的 $a_2$ 的值	极点半径 $r = \sqrt{a_2}$
0.00	0.00	0.000	0.000	0.000	0.000
0.01	0.25	0.125	0.001	0.125	0.354
0.10	0.50	0.250	0.010	0.250	0.500
0.11	0.75	0.375	0.011	0.375	0.612
1.00	1.00	0.500	0.100	0.500	0.707
1.01	1.25	0.625	0.101	0.625	0.789
1.10	1.50	0.750	0.110	0.750	0.865
1.00	1.75	0.875	0.111	0.875	0.935

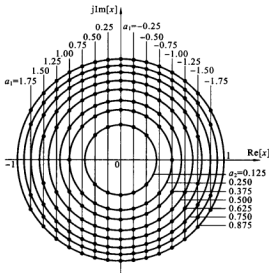


图 8-9 3 位字长系数所能表达的共轭极点位置

例如,有一对共轭极点  $z_{1,2}=0.73e^{\pm j10^\circ}$ , 得到

$$a_2=r^2=0.5, \quad r\cos\theta=-a_1/2=0.73\times\cos10^\circ=0.72$$

如果系数  $a_1, a_2$  采用舍入的方法进行量化, 实际取  $r^2=0.5, r\cos\theta=0.75$ , 因此实际极点位置可算出

$$1-2r\cos\theta \cdot z^{-1}+r^2z^{-2}=0$$

即

$$1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}=0$$

得极点

$$z_1=1, \quad z_2=0.5$$

因此一对共轭极点经过系数量化以后变成了一对实极点, 其中一个极点位于单位圆上, 使系统不稳定。

零点位置与系数  $a_1, a_2$  的关系也是这样。因此可得出结论: 系数量化使零极点位置的取值范围由一个连续域变为一个离散的  $z$  平面点阵, 造成零极点的漂移, 导致系统特性的改变。另外, 还会发现, 在  $z$  平面上量化位置的分布密度是不均匀的。在实轴附近分布得稀, 在虚轴附近分布得密; 在半径小的地方分布得稀, 在半径大的地方分布得密。这样就会使实轴附近的极点 (如低通、高通滤波器) 量化误差较大, 而虚轴附近的极点 (如带通滤波器) 量化误差较小。这种分布只是二阶直接型结构的情况, 不同结构的滤波器, 系数对零极点位置的影响是不一样的。

另一种实现上述系统函数的数字网络是 Gold 和 Rader 于 1967 年的一篇文章中, 而后在 1969 年在他的《讯号的数字处理》一书中提出的, 该网络结构如图 8-10 所示。

该网络的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r(\cos\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}} \quad (8-41)$$

对于无限精度的系数,图 8-8 与图 8-10 所示的两个网络系统其函数的极点是相同的。但是图 8-10 中,系数量化是对  $r\cos\theta$  及  $r\sin\theta$  进行的,因而所得到的网络节点只在  $z$  平面是均匀分布的,如图 8-9 所示,这与图 8-11 是不同的。因而这里系数量化对  $z$  平面的所有区域,所产生的误差是相同的。

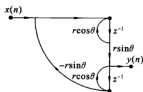


图 8-10 实现复共轭极点的对偶式结构

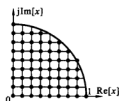


图 8-11 具有共轭极点对的二阶数字网络耦合形式实现情况下,系数量化为 3 位时极点的可能位置

### 8.3.3 频率响应偏差的统计分析

系数量化将引起零极点的偏移,对于 IIR 数字滤波器,极点的偏移将带来稳定性问题。然而,零极点的偏移首先表现为频率特性的偏差。由上面的讨论已知,由极点位置灵敏度而形成的极点偏差并不能直接求得频率响应的偏差,尤其是在高阶情况下,系数很多,它们的量化误差就更带有随机性。因此,应采用统计分析的方法将系数量化误差看做一个随机变量,以此来分析估计滤波器频率响应的偏差。

#### 1. IIR 数字滤波器系数量化的统计分析

现在仍以  $N$  阶 IIR 数字滤波器直接型结构为例,其理想精度的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

其中,  $a_i$ 、 $b_i$  为系数。量化后的系数为  $\hat{a}_i$ 、 $\hat{b}_i$ , 有

$$\hat{a}_i = a_i + \Delta a_i, \quad \hat{b}_i = b_i + \Delta b_i$$

其中,  $\Delta a_i$ 、 $\Delta b_i$  是系数的量化误差。如果系数  $\hat{a}_i$ 、 $\hat{b}_i$  采用小数点后  $b$  位字长,并假定采用舍入方式进行量化,则误差  $\Delta a_i$ 、 $\Delta b_i$  的变化范围皆为  $(-q/2, q/2]$ , 假定在此范围内误差是均匀分布的,因而均值为零,方差为  $\frac{1}{12}q^2$ , 则系数量化后,实际的系统函数为

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{\sum_{i=0}^M \hat{b}_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i z^{-i}} \\
 H(z) &= \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} + \sum_{i=0}^M \Delta b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} - \sum_{i=1}^N \Delta a_i z^{-i}} = \frac{B(z) + \Delta B(z)}{A(z) - \Delta A(z)} \\
 &= \frac{B(z)}{A(z)} + \frac{B(z) + \Delta B(z)}{A(z) - \Delta A(z)} - \frac{B(z)}{A(z)} = H(z) + \frac{B(z) + \Delta A(z) H(z)}{A(z) - \Delta A(z)} \\
 &= H(z) + H_E(z)
 \end{aligned}$$

得到系统函数的偏差为

$$H_E(z) = \hat{H}(z) - H(z) = \frac{B(z) + \Delta A(z) H(z)}{A(z) - \Delta A(z)} \quad (8-42)$$

$$\text{其中, } \Delta A(z) = \sum_{i=1}^N \Delta a_i z^{-i}, \Delta B(z) = \sum_{i=0}^M \Delta b_i z^{-i}.$$

所以,实际滤波器的系统函数  $\hat{H}(z)$  可表示成无限精度滤波器的系统函数  $H(z)$  和偏差滤波器系统函数  $H_E(z)$  的并联,如图 8-12 所示。在式(8-42)中,代入  $z = e^{j\omega}$ ,得到系数量化造成的系统频率响应的偏差为

$$H_E(e^{j\omega}) = \hat{H}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})$$

为了分析系数量化引起的频率特性偏差大小,可以用频响的均方偏差来描述

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_E(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \oint_C H_E(z) H_E(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (8-43)$$

将  $H_E(z)$  的表达式(8-42)代入式(8-43),就能计算出偏差  $\epsilon^2$  的值。为了估计  $\epsilon^2$  的大小,假定  $\Delta a_i, \Delta b_i$  都是独立的均匀等概率分布的随机变量,在舍入的情况下,它们的平均值及方差分别为

$$E[\Delta a_i] = E[\Delta b_i] = 0$$

$$\sigma^2 = E[\Delta a_i^2] = E[\Delta b_i^2] = q^2/12$$

因此均方偏差  $\epsilon^2$  也是一个随机变量,它的均值即为频响偏差  $\sigma_\epsilon^2$

$$\sigma_\epsilon^2 = E[\epsilon^2] = E\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_E(e^{j\omega})|^2 d\omega\right] = E\left[\frac{1}{2\pi} \oint_C H_E(z) H_E(z^{-1}) \frac{dz}{z}\right]$$

为简化分析,将  $\hat{H}(z)$  作一阶近似,即

$$H_E(z) \approx \frac{B(z) + \Delta A(z) H(z)}{A(z)}$$

因此

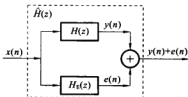


图 8-12 系数量化的统计分析模型

$$\sigma_\epsilon^2 = E[\epsilon^2]$$

$$= E \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\sum_{r=0}^M \Delta b_r z^{-r} + H(z) \sum_{k=1}^N \Delta a_k z^{-k}}{A(z)} \cdot \frac{\sum_{i=0}^M \Delta b_i z^i + H(z^{-1}) \sum_{j=1}^N \Delta a_j z^j}{A(z^{-1})} \frac{dz}{z} \right]$$

考虑到  $\Delta a_i, \Delta b_i$  都是统计独立的,有

$$E[\Delta a_i \Delta b_i] = E[\Delta b_i \Delta a_i] = 0; \quad E[\Delta b_i \Delta b_j] = 0, \quad i \neq j; \quad E[\Delta a_i \Delta a_j] = 0, \quad k \neq j$$

所以

$$\sigma_\epsilon^2 = \left[ \sum_{r=0}^M E[\Delta b_r^2] \right] \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z} + \left[ \sum_{k=1}^N E[\Delta a_k^2] \right] \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{H(z)H(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{q^2}{12} \left[ \frac{M+1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z} + \frac{N}{2\pi j} \oint_C \frac{H(z)H(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z} \right] \quad (8-44)$$

当滤波器理论设计完之后,  $H(z), A(z), M$  和  $N$  都已确定, 便可以利用式(8-44)估算在频率响应的偏离方差  $\sigma_\epsilon^2$  的值, 来确定滤波器系数所需的字长  $b$ 。

实际上, 对一个具体滤波器来说, 系数量化误差是固定值, 并非随机变量, 其频率响应的均方偏差  $\epsilon^2$  也是一个固定值。把它们都看成随机变量是为了对  $\epsilon^2$  的大小作一个概率估计, 即  $\sigma_\epsilon^2$  是  $\epsilon^2$  最可能出现的估值, 滤波器阶数越高, 系数越多, 这种估计的收敛性就越好。

## 2. FIR 数字滤波器系数量化的统计分析

设 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n}$$

对各系数  $h(n)$  进行量化成为  $\hat{h}(n)$ , 有

$$\hat{h}(n) = h(n) + e(n)$$

则

$$H(z) = \sum_{n=0}^N \hat{h}(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^N e(n)z^{-n}$$

$$\text{令 } E(z) = \sum_{n=0}^N e(n)z^{-n}, z = e^{j\omega}, \text{ 则}$$

$$E(z) = \hat{H}(z) - H(z)$$

$$E(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N e(n)e^{j\omega n}$$

$$\text{所以} \quad E(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N e(n)e^{j\omega n} \leq \sum_{n=0}^N |e(n)| e^{j\omega n} = \sum_{n=0}^N |e(n)|$$

以上分析说明, FIR 数字滤波器的系数量化, 会使系统函数产生误差, 而这个误差不会超过  $\sum_{n=0}^N |e(n)|$ 。当作定点舍入处理时, 因为  $|e(n)| \leq q/2$ , 所以

$$E(e^k) \leq \sum_{n=0}^N |e(n)| \leq \frac{(N+1)q}{2} \quad (8-45)$$

利用式(8-45)可根据给定的误差指标决定系数的量化字长。

不论是 IIR 数字滤波器还是 FIR 数字滤波器,系数量化后的频率响应都必须用计算机进行校核,以保证其性能符合技术要求。

## 8.4 数字滤波器的运算量化效应

实现数字滤波器的基本数学运算是一个常数去乘某数或是两数相加。运算过程中的有限字长效应与所用的数制(定点制、浮点制)、码制(原码、反码、补码)及量化方式(舍入、截尾)都有复杂的关系。使用定点制时,每次乘法都会引入舍入或截尾误差,加法计算时要考虑动态范围。而使用浮点制时,每次加法和乘法均会引入误差。因此在滤波网络中,不论是 IIR 数字滤波器,还是 FIR 数字滤波器,凡是存在系数相乘运算的地方,都有一个量化误差噪声源,它们均会对系统的输出产生误差。根据叠加定理,滤波器输出端的噪声等于作用于滤波器结构中不同位置上的量化噪声在输出端发生的响应的总和,由此不难计算滤波器输出端的信噪比。在工程实现中,人们关心的是选用多少位的量化字长,以保证滤波器的输出端达到一定的信噪比。由于字长只能是整数,所以在用字长计算信噪比时,没有必要精确地计算这些量化误差,为简化分析和计算,可以采用统计的方法来掌握量化误差的一个平均效应。

为了便于用统计方法分析这些量化误差的平均效应,假定:

- (1) 所有这些噪声都是平稳的白噪声序列;
- (2) 所有噪声都与信号不相关,并且各噪声之间也互不相关;
- (3) 每个误差噪声都在其误差范围内呈均匀等概率分布。

### 8.4.1 IIR 数字滤波器定点运算舍入误差的统计分析

在定点制中,理想相乘如图 8-13(a)所示,每次相乘运算  $y(n) = ax(n)$  都要作一次舍入或截尾处理,因此会引入非线性,由前面讨论得知,尾数一般多采用舍入处理,如图 8-13(b)所示,  $[\cdot]$  表示舍入处理。采用统计分析方法,可以将舍入误差  $e(n)$  作为独立噪声叠加到信号上,可以继续用线性信号流图来表示,如图 8-13(c)所示。

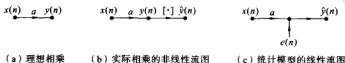


图 8-13 定点相乘运算的信号流图表示



采用统计分析方法后,实际的输出可以表示为

$$\hat{y}(n) = y(n) + e(n)$$

而每一个噪声源  $e_f(n)$  所造成的输出噪声,可以利用白噪声通过线性系统的式(7-26)及式(7-27)分别求得  $e_f(n)$  所造成的输出噪声的方差及均值,重写如下

$$\sigma_f^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi j} \oint_C H_r(z) H_r(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \sigma_e^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_r^2(m)$$

$$m_f = m_r \sum_{n=0}^{+\infty} h_r(n)$$

其中,  $h_r(n)$  是从  $e_f(n)$  加入的节点到输出节点间的系统的单位采样响应,  $H_r(z)$  是  $h_r(n)$  的  $z$  变换。由于可以作线性系统处理,因此最后将所有的输出噪声线性叠加就得到总的输出噪声为

$$e(n) = \sum_{f=1}^K e_f(n) \quad (8-46)$$

方差为

$$\sigma_j^2 = \sum_{f=1}^K \sigma_{fj}^2 \quad (8-47)$$

这种分析方法可以应用于任何结构的 IIR 数字滤波器和 FIR 数字滤波器。下面用一个实例来说明这种应用。同时通过这个实例证明一个重要结论:有限字长效应与滤波器的结构型式有密切关系。

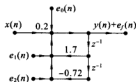
**例 8-2** 已知一个 IIR 数字滤波器的系统函数如下,用定点制算法,尾数舍入,分别求出直接型、级联型和并联型实现系统时量化误差的方差  $\sigma_j^2$ 。

$$H(z) = \frac{0.2}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$$

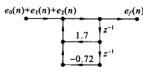
**解** (1) 直接型结构。

$$H(z) = \frac{0.2}{1-1.7z^{-1}+0.72z^{-2}}$$

直接型结构的信号流图如图 8-14(a)所示。图中  $e_0(n)$ 、 $e_1(n)$ 、 $e_2(n)$  分别是与系数 0.2、1.7 及 -0.72 相乘后的舍入噪声。它们均经过相同的传输网络  $H_1(z) = \frac{1}{A(z)}$ ,  $A(z)$  表示分母多项式,如图 8-14(b)所示,即



(a) 相乘引入的舍入噪声



(b) 三个舍入噪声通过相同的传输网络

图 8-14 直接型的舍入噪声

$$e(n) = [e_0(n) + e_1(n) + e_2(n)] * h_1(n)$$

$$\sigma_e^2 = 3 \cdot \frac{q^2}{12} = \frac{q^2}{4}$$

$h_1(n)$  是  $H_1(z)$  的单位脉冲响应。输出噪声的方差是

$$\begin{aligned}\sigma_{e1}^2 &= \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \oint_C \frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})(1-0.9z)(1-0.8z)} \frac{dz}{z} \\ &= \sigma_e^2 \left[ \frac{0.9}{(0.9-0.8)(1-0.8 \times 0.9)(1-0.9^2)} + \frac{0.8}{(0.8-0.9)(1-0.9 \times 0.8)(1-0.8^2)} \right] \\ &= 89.80\sigma_e^2 = 22.45q^2\end{aligned}$$

(2) 级联型。

级联型可以有几种排列形式, 先令  $A_1(z) = (1-0.9z^{-1})$ , 并把 0.2 置于第一级, 即

$$H(z) = \frac{0.2}{1-0.9z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-0.8z^{-1}} = \frac{0.2}{A_1(z)} \frac{1}{A_2(z)}$$

其结构的流程图如图 8-15 所示。 $e_0(n)$ 、 $e_1(n)$  通过网络  $H_1(z)$ ,  $e_2(n)$  通过网络  $H_2(z)$ , 即

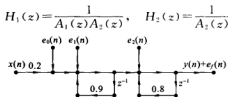


图 8-15 级联型的舍入噪声

输出噪声的方差是

$$\begin{aligned}\sigma_{e1}^2 &= \frac{\sigma_{1e}^2}{2\pi} \oint_C \frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z^{-1})(1-0.9z)(1-0.8z)} \frac{dz}{z} \\ &\quad + \frac{\sigma_{2e}^2}{2\pi} \oint_C \frac{1}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} \frac{dz}{z} \\ &= 89.80\sigma_{1e}^2 + 2.78\sigma_{2e}^2\end{aligned}$$

第一级有两个误差源, 第二级有一个误差源, 故有

$$\sigma_{1e}^2 = 2 \cdot \frac{q^2}{12} = \frac{q^2}{6}, \quad \sigma_{2e}^2 = \frac{q^2}{12}$$

所以

$$\sigma_{e1}^2 = 15.02q^2$$

再令  $A_1(z) = (1-0.8z^{-1})$ , 并把 0.2 置于第二级, 则有

$$H(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}} \cdot \frac{0.2}{1-0.9z^{-1}} = \frac{1}{A_1(z)} \frac{0.2}{A_2(z)}$$

其结构的信号流程图如图 8-16 所示。 $e_2(n)$  通过网络  $H_1(z)$ ,  $e_0(n)$ 、 $e_1(n)$  通过网

络  $H_2(z)$

$$H_1(z) = \frac{1}{A_1(z)}, \quad H_2(z) = \frac{1}{A_1(z)A_2(z)}$$

输出噪声的方差是

$$\begin{aligned} \sigma_{f_{v2}}^2 &= \frac{\sigma_{1r}^2}{2\pi j} \oint_C \frac{0.2^2}{(1-0.9z^{-1})(1-0.8z)(1-0.9z)(1-0.8z)} \frac{dz}{z} \\ &\quad + \frac{\sigma_{2r}^2}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.9z)} \frac{dz}{z} \\ &= 3.592\sigma_{1r}^2 + 5.26\sigma_{2r}^2 \end{aligned}$$

则第一级有一个误差源,第二级有两个误差源,故有

$$\sigma_{1r}^2 = \frac{q^2}{12}, \quad \sigma_{2r}^2 = 2 \cdot \frac{q^2}{12} = \frac{q^2}{6}$$

所以

$$\sigma_{f_{v1}}^2 = 1.176q^2$$

由此可以看出,系数  $b_i$  和  $A(k)$  的排列不同,输出误差也有所不同。一般来说,距单位圆远的极点和系数  $b_i$  置于较后级的误差会小些。

(3) 并联型。

$$H(z) = \frac{7.2}{1-0.9z^{-1}} - \frac{6.4}{1-0.8z^{-1}} = \frac{7.2}{A_1(z)} + \frac{6.4}{A_2(z)}$$

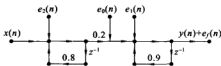


图 8-16 级联型的舍入噪声

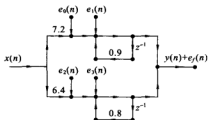


图 8-17 并联型型的舍入噪声

其结构信号流程图如图 8-17 所示。并联型结构需要 4 个系数,因此共有四个舍入噪声,  $e_0(n)$ 、 $e_1(n)$  通过网络  $H_1(z)$ ,  $e_2(n)$ 、 $e_3(n)$  通过网络  $H_2(z)$ , 有

$$H_1(z) = \frac{1}{A_1(z)}, \quad H_2(z) = \frac{1}{A_2(z)}$$

因此输出的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_{fp}^2 &= \frac{\sigma_{1r}^2}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} \frac{dz}{z} + \frac{\sigma_{2r}^2}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{(1-0.9z^{-1})(1-0.9z)} \frac{dz}{z} \\ &= (2.78 + 5.26)\sigma_{1r}^2 = 8.04\sigma_{1r}^2 \end{aligned}$$

则第一级、第二级都有两个误差源,故有

$$\sigma_r^2 = \sigma_{1r}^2 = \sigma_{2r}^2 = 2 \cdot \frac{q^2}{12} = \frac{q^2}{6}$$

所以

$$\sigma_{\delta}^2 = 1.34q^2$$

比较这三种结构的误差大小, 可以看到, 直接型结构的输出误差最大, 级联型的其次, 并联型结构的误差最小。这是因为直接型结构中所有舍入误差都要经过全部网络的反馈环节, 在反馈过程中, 误差积累得很大。级联型结构中, 每个舍入误差只通过其后面的反馈环节, 而与前面的反馈环节无关, 误差积累要比直接型的小。并联型结构中, 每个并联网络的舍入误差仅仅通过本通路的反馈环节, 与其他并联网络无关, 积累作用最小, 误差也就最小。

由此得出结论: 对 IIR 数字滤波器, 从有限字长效应来看, 不论是哪一种型式, 直接型结构都是最差的, 运算误差最大, 特别在高阶时应避免采用; 级联型结构较好, 而并联型结构具有最小的运算误差。

#### 8.4.2 IIR 数字滤波器定点加法运算的溢出问题

定点制中, 两个  $b$  位的小数相加仍是  $b$  位小数, 不会产生量化误差。但当总和的绝对值大于 1 时将会溢出。在系统不溢出时, 舍入噪声是输出误差的主要来源; 而发生溢出时, 符号位变号——和为正数时变为负值, 和为负数则变成正值, 因此带来很大误差。对于 IIR 数字滤波器, 还会发生溢出振荡, 因此避免溢出是非常重要的。所有的相加运算, 均可能产生溢出。要避免溢出, 就必须使每个相加点的输入端都引入比例因子  $A$  加以限制, 使相加点的数值绝对值保持小于 1。

设  $x(n)$  表示滤波器的输入信号,  $y_k(n)$  表示滤波器第  $k$  个相加节点上的输出信号,  $h_k(n)$  表示从滤波器输入端到第  $k$  个相加节点的单位脉冲响应, 响应的系统函数为  $H_k(z)$ 。为使  $y_k(n)$  不发生溢出, 需要在输入端引入比例因子  $A_k$ , 则

$$y_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_k(m) A_k x(n-m)$$

若  $x_{\max}$  表示输入信号的最大幅度, 即  $|x(n)| \leq x_{\max}$ , 则有

$$|y_k(n)| \leq A_k x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h_k(m)|$$

要使  $y_k(n)$  不发生溢出, 需使  $|y_k(n)| < 1$ , 所以

$$A_k \leq \frac{1}{x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h_k(m)|} \quad (8-48)$$

式(8-48)表示为使第  $k$  个相加节点不溢出需在输入端引入的比例因子。如果系统中共有  $K$  个相加节点, 为使系统在运算中均不溢出, 则应选择其中最小的比例因子作为系统比例因子的最终选择, 即

$$A = \min_{1 \leq k \leq K} \{A_k\}$$

$A$  就是确保系统运算不出现溢出所需附加的比例因子值。这样确定的比例因子, 对于各种类型的输入信号, 只要满足  $|x(n)| \leq x_{\max}$ , 系统便能确保不会出现溢出。它

常用于比较复杂的且接近白噪声的宽带输入信号。

对式(8-48),令  $A_k=1$ , 得到保证第  $k$  个节点上不出现溢出时的最大输入值上限为

$$|x_{\max}| \leq \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_k(m)}$$

### 8.4.3 极限环振荡

IIR 数字滤波器是一个反馈系统,在无限精度的情况下,当它的所有极点均位于单位圆内时,系统肯定是稳定的。即当去掉输入信号后,随着  $n$  的增加,系统输出逐渐衰减趋向于零。可是在有限字长情况下,量化过程的非线性作用,使系统输出将不随  $n$  的增加而趋于零。可能会衰减到某一非零的范围幅度,而后呈现振荡特性。这种现象称为零输入极限环振荡。

数字滤波器的极限环特性很复杂,很难分析,下面以舍入处理的一阶 IIR 数字滤波器为例来说明这一现象。设一阶 IIR 系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad (8-49)$$

在无限精度运算下,其差分方程为

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

在定点运算中,每次乘法运算均要对尾数进行舍入处理。因此,实际的非线性差分方程可表示为

$$\hat{y}(n) = Q_R[a\hat{y}(n-1)] + x(n)$$

一阶 IIR 网络的非线性信号流程图如图 8-18 所示。

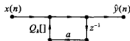


图 8-18 一阶 IIR 网络的非线性信号流程图

在无限精度情况下,如果输入信号  $x(n) = \frac{7}{8}\delta(n)$ , 其输出  $y(n) = \frac{7}{8}a^n$ , 只要  $|a| < 1$ , 系统稳定,  $y(n)$  将逐渐衰减为零。

但是,在有限精度运算时,情况就不同了。为简化讨论,取寄存器字长为 4 位,这相当于  $b=3$ , 系数  $a=0.5=0.100b$ , 输入信号  $x(n)$  的幅度  $7/8=0.111b$ , 将以上非线性差分方程的每一步运算结果列成表 8-4, 这样可以清楚地看到整个运算过程。

分析这个运算过程,输出停留在  $\hat{y}(n)=1/8$  上,而不是衰减到零。如图 8-19(a) 所示,  $\hat{y}(n)=1/8$  以下也称为“死带”区域。如果系数  $a$  是负数,则每乘一次  $a$ ,  $\hat{y}(n)$  就改变一次符号。因此,输出将是正负相间的不衰减振荡,如图 8-19(b) 所示,这时  $\hat{y}(n)$  在  $\pm 1/8$  之间作周期性稳态振荡。

为什么会产生这种现象呢? 观察表 8-4 的最后一行可以看出,当  $\hat{y}(n-1)=$

表 8-4  $a=0.100$  的一阶网络运算过程

$n$	$x(n)$	$\hat{y}(n-1)$	$a\hat{y}(n-1)$	$Q_h[a\hat{y}(n-1)]$	$\hat{y}(n)$
0	0.111	0.000	0.000000	0.000	0.875
1	0.000	0.111	0.011100	0.100	0.500
2	0.000	0.100	0.010000	0.010	0.250
3	0.000	0.010	0.001000	0.001	0.125
4	0.000	0.001	0.000100	0.001	0.125
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

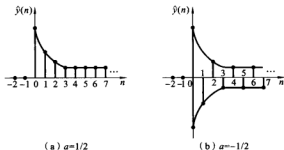


图 8-19 零输入极限环振荡

0.001时,  $a\hat{y}(n-1)=0.000\ 100$ , 数值被衰减了, 但经过舍入处理后,  $Q_h[a\hat{y}(n-1)]=0.001$ , 又变成原来  $\hat{y}(n-1)$  的数值, 因而输出就保持不变。也就是说, 只要满足关系式

$$|Q_h[a\hat{y}(n-1)]| = |\hat{y}(n-1)| \quad (8-50)$$

舍入处理就使系数  $a$  失效, 也就是等效于使  $a$  换成绝对值为 1 的系数  $a'$ ,  $a' = \frac{a}{|a|}$ , 这时一阶滤波器的极点变成  $a' = \pm 1$ , 代入式(8-49), 可得等效系统函数为

$$H'(z) = \frac{1}{1 - a'z^{-1}} = \frac{1}{1 \pm z^{-1}}$$

这说明,  $a=1/2$  时, 只有极点  $z=1$ , 对应的周期为 1, 对应的数字角频率为  $2\pi$  或 0, 所以又称为零频率极限环振荡;  $a=-1/2$  时, 只有极点  $z=-1$ , 对应的振荡周期为 2, 对应数字角频率为  $\pi$ 。

下面分析振荡幅度和字长的关系。

由于舍入误差的绝对值在  $q/2$  以内, 因此

$$|Q_h[a\hat{y}(n-1)] - a\hat{y}(n-1)| \leq \frac{q}{2}$$

或

$$|Q_R[a\hat{y}(n-1)] - |a||\hat{y}(n-1)| \leq \frac{q}{2}$$

将极限环振荡时的式(8-50)代入此式,可得

$$|\hat{y}(n-1)| - |a||\hat{y}(n-1)| \leq \frac{q}{2}$$

可得

$$|\hat{y}(n-1)| \leq \frac{q/2}{1-|a|}$$

此式定义了一阶 IIR 网络的死带范围,表明极限环幅度与量化间隔成正比,因此增加字长(减小量化间隔)将使极限环振荡减弱。例如,  $b=3$ , 故有  $q=2^{-3}=1/8$ ,  $|a|=0.5$ , 有

$$|\hat{y}(n)| = |\hat{y}(n-1)| = \frac{1/16}{1-0.5} = 0.125$$

这与表 8-4 结果一致。

#### 8.4.4 定点运算的溢出振荡

除了零输入极限环振荡所确定的误差之外,溢出也可能产生比之更大的误差,并在输出的最大幅度界限内振荡,所以称为溢出极限环振荡。

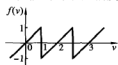


图 8-20 补码加法运算的非线性性

溢出极限环振荡产生的原因是进行定点加法运算时存在溢出。如果两个小于 1 的正数之和大于或等于 1, 定点制运算就会把 1 加到符号位上, 把一个大于 1 的正数变成了一个负数。对于补码, 越是从大于 1 的数去接近 1, 则负数就接近 -1, 产生更严重的非线性性, 如图 8-20 所示。

下面以定点补码运算的二阶 IIR 数字滤波器为例进行讨论, 此二阶数字滤波器的差分方程为

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + x(n)$$

系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - (p_1 + p_2)z + p_1 p_2}$$

$$p_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}$$

首先, 考虑系统的稳定性。稳定的条件是  $H(z)$  的两个极点  $p_1, p_2$  在单位圆内,  $|p_{1,2}| < 1$  即由此可得  $a_1, a_2$  的值域为图 8-21 所示的大三角形, 即  $a_1, a_2$  落于大三角形之内才能满足  $|p_{1,2}| < 1$ 。

其次, 为了保证不溢出, 要满足  $|y(n)| = |a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)| < 1$ , 并由此式求出  $a_1, a_2$  的关系。显然, 若

$$|a_1| + |a_2| < 1 \quad (8-51)$$

则必定满足  $|y(n)| < 1$ ,  $|a_1| + |a_2| < 1$  相当于图 8-21 所示的阴影部分, 式(8-51)便是系统不产生溢出极限环振荡的充要条件。

图 8-21 中 I、II 两部分分别表示周期为 1 和 2 的溢出极限环振荡的  $a_1$ 、 $a_2$  的值域。

由于溢出极限环的振荡幅度为 1, 数字滤波器无法对数据进行滤波, 这种情况可以通过饱和型和加法运算的办法加以消除。饱和加法器的特点是, 当相加器的输入之和大于 1 或小于 -1 时, 就分别以 1 和 -1 代表相加结果, 其特性如图 8-22 所示, 这样就能克服溢出振荡。

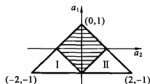


图 8-21 二阶 IIR 系统溢出极限环特性与系数之间的关系

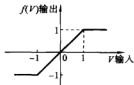


图 8-22 补码饱和加法器特性

### 8.4.5 浮点运算的有限字长效应

与定点运算一样, 浮点运算的有限字长效应采用统计的方法进行分析, 这里不再重复, 只做以下几点说明。

(1) 浮点乘法和浮点加法之后都需要进行尾数量化, 所以信号流图中乘法支路之后或加法节点处都将叠加一个量化噪声。

(2) 浮点制的舍入或截尾处理只影响尾数的字长, 不影响阶码, 但所产生的误差值却与阶码值有关。因此在浮点制系统的分析中用相对误差比用绝对误差更适合。

(3) 浮点制系统的输出误差大小也与系统的结构有关。8.4.4 小节关于系统结构对输出误差的影响的结论同样成立。

(4) 取相同的尾数字长时, 浮点运算的误差要比定点运算的误差小。因为浮点制中可以充分利用尾数的字长, 使每一个数不论其数值大小, 都能保持同样的相对精度。

(5) 浮点制系统的字长一定时, 其输出的信噪比为一常数; 而在定点制系统中, 输出噪声的方差与信号无关, 因此信号越大, 输出的信噪比越大。

## 8.5 快速傅里叶变换算法的有限字长效应

从运算的角度分析, 快速傅里叶变换与数字滤波器一样都是系统, 因此, 二者的有限字长效应分析方法基本上是相同的。不同的是快速傅里叶变换运算是一个复



数运算,因此误差源是一个复数,同时快速傅里叶变换运算有多个输入端及多个输出端,各误差源对不同的输出端的影响是不同的。这里以 DIT 为例进行有限字长效应分析,并且针对的是舍入情况,其他快速傅里叶变换算法及截尾运算结果是相似的。

### 8.5.1 蝶形运算的统计模型

DIT-FFT 运算自始至终按照蝶形进行运算,先来分析蝶形运算输出端的误差。

第  $m+1$  级蝶形运算公式为

$$X_{m+1}(i) = X_m(i) + W_N^i X_m(j)$$

$$X_{m+1}(i) = X_m(i) - W_N^i X_m(j)$$

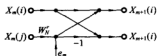


图 8-23 定点制算法的蝶形运算

定点制运算中只有乘法引入量化误差,加法运算不引入误差。因此,蝶形运算只在乘以系数  $W_N^i$  时引入一个误差源  $e_m$ ,在乘法支路输出端加入噪声源,其统计模型如图 8-23 所示。 $W_N^i X_m(j)$  是复数相乘,所产生的误差  $e_m$  就是一个复数。因为一个复数相乘要由四个实数相乘来构成,每个实数相乘都将引入一个相应的误差。因而共有四个误差  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  和  $e_4$ 。假设是舍入量化,则有

$$\begin{aligned} Q_e[X_m(j)W_N^i] &= X_m(j)W_N^i + e_m \\ &= \{ \text{Re}[X_m(j)]\text{Re}[W_N^i] + e_1 - \text{Im}[X_m(j)]\text{Im}[W_N^i] + e_2 \} \\ &\quad + j\{ \text{Re}[X_m(j)]\text{Im}[W_N^i] + e_3 + \text{Im}[X_m(j)]\text{Re}[W_N^i] + e_4 \} \end{aligned}$$

因此

$$e_m = e_1 + e_2 + j(e_3 + e_4)$$

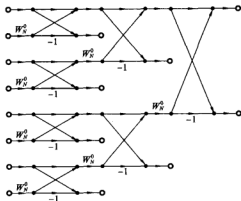
为计算误差  $e_m$  的方差,对误差  $e_i$  作与前面类似的假定,假定所有误差源都是彼此独立并且均匀等概率分布。由于是舍入处理。因此  $e_i$  的方差  $\sigma_{e_i}^2 = \frac{q^2}{12}$ ,则复数  $e_m$  的方差  $\sigma_{e_m}^2$  为

$$\begin{aligned} \sigma_{e_m}^2 &= E[|e_m|^2] = E[|e_1|^2] + E[|e_2|^2] + E[|e_3|^2] + E[|e_4|^2] \\ &= 4\sigma_{e_i}^2 = \frac{q^2}{3} \end{aligned} \quad (8-52)$$

当该误差源  $e_m$  通过本级及后级蝶形时,将乘以系数 1、-1 或  $W_N^i$ 。分析乘以  $W_N^i$  后的方差影响

$$E[|e_m W_N^i|^2] = |W_N^i|^2 \cdot E[|e_m|^2] = \sigma_{e_m}^2$$

因此,  $e_m$  通过所有后级蝶形时,其方差保持不变,所以每个噪声源传输到输出端的方差仍为  $\sigma_{e_m}^2$ 。在快速傅里叶变换的第  $k$  个输出端  $X(k)$  端的量化噪声应考虑所有能够通向  $X(k)$  端的噪声。考察 DIT-FFT 运算信号流图,每一个输出端都与  $N-1$  个蝶形相连,即有  $N-1$  个量化噪声源对每个输出端有贡献。图 8-24 表示  $N=8$  时

图 8-24 对  $x(0)$  有联系的蝶形 ( $N=8$ )

DIT-FFT 算法中, 连接到  $X(0)$  的各蝶形结情况。因而, 在终端, 即在离散傅里叶变换  $X(k)$  上叠加的输出噪声的均方值为

$$\sigma_F^2 = (N-1)\sigma_B^2 \approx N\sigma_B^2 = \frac{Nq^2}{3} \quad (8-53)$$

即和 FIR 数字滤波器的直接型实现一样, 输出噪声的总方差正比于  $N$ 。

### 8.5.2 防止溢出和快速傅里叶变换输出的信噪比

在定点制中, 为避免溢出, 信号的最大值要受到一定的限制。在保证不发生溢出的条件下讨论快速傅里叶变换输出信噪比的大小才有实际意义。分析蝶形运算

$$X_{m+1}(i) = X_m(i) + W_N^r X_m(j)$$

$$|X_{m+1}(i)| \leq |X_m(i)| + |W_N^r| |X_m(j)| = |X_m(i)| + |X_m(j)|$$

同样, 有

$$|X_{m+1}(j)| \leq |X_m(i)| + |X_m(j)|$$

所以

$$\max\{|X_{m+1}(i)|, |X_{m+1}(j)|\} \leq 2\max\{|X_m(i)|, |X_m(j)|\} \quad (8-54)$$

式(8-54)表示, 蝶形运算的输出最大值不超过(但有可能等于)输入端最大值的 2 倍。从前一级到后一级, 最大模值是逐级递减的, 只要最后一级不出现溢出, 则前一级计算一定不会溢出。

有以下三种防止溢出的办法。

#### 1. 输入端一次衰减法

由蝶形公式可以证明

$$\max\{|X_{m+1}(i)|, |X_{m+1}(j)|\} \leq 2\max\{|X_m(i)|, |X_m(j)|\} = N\max|x(n)|$$

为使  $X(k)$  不溢出, 即  $\max|X(k)| \leq 1$ , 输入  $x(n)$  应满足条件

$$|x(n)| \leq \frac{1}{N}$$

若  $x(n)$  在  $(-1/N, 1/N)$  内等概率分布, 则  $x(n)$  的方差为

$$\sigma_x^2 = E[|x(n)|^2] = \frac{1}{3N^2} \quad (8-55)$$

由于  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^k$ , 输出信号的方差为

$$E[|X(k)|^2] = \sum_{n=0}^{N-1} E[|x(n)|^2] |W_N^k|^2 = N\sigma_x^2 = \frac{1}{3N}$$

输出信噪比为

$$\text{SNR} = \frac{E[|X(k)|^2]}{\sigma_F^2} = \frac{1}{N^2 q^2} \quad (8-56)$$

信噪比与  $N^2$  成反比,  $N$  增加 1 倍, 信噪比下降  $3/4$ , 或者要保持运算精度不变, 每增加一级运算, 字长也需相应增加 1 位。这种防止溢出的办法, 使得输入幅度被限制得过小, 造成输出信号/噪声比值过小。

## 2. 逐级衰减法

由式(8-54)知, 蝶形运算的输出最大值不超过输入端最大值的 2 倍, 输入是满足  $|x(n)| \leq 1$  的, 因而, 如果对每个蝶形节点的两个输入支路都乘上比例因子  $1/2$ ,

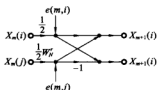


图 8-25 乘比例因子  $1/2$  后的蝶形节点统计模型

其统计模型如图 8-25 所示, 就可保证蝶形节点运算不发生溢出, 对  $L = \log_2 N$  级蝶形, 就相当于设置了  $\left(\frac{1}{2}\right)^L = \frac{1}{N}$  的比例因子。与一次衰减法等效, 不同之处在于这里把  $1/N$  的比例因子分散到各级运算之中。因此这里在保持输出信号方差式(8-55)不变的情况下, 输入幅度却增加了  $N$  倍, 达到

$$|x(n)| \leq 1$$

现在求输出噪声的方差。由于每一输入信号均乘以  $1/2$ , 因此每个蝶形有两个乘法运算, 即有两个误差源  $e_{m1}, e_{m2}$ 。若每个误差源的方差为  $\sigma_B^2$ 。则蝶形运算总的误差方差为

$$\sigma_F^2 = E[|e_{m1}|^2] + E[|e_{m2}|^2] = 2\sigma_B^2$$

同样有系数  $1/2$  存在, 各误差源到输出端的传输系数不再是  $\pm 1$  或  $W_N^k$  的连乘积, 而是  $\frac{1}{2}W_N^k$  或  $-\frac{1}{2}W_N^k$  的连乘积, 连乘次数与蝶形位置有关。因此第  $m$  级蝶形的误差源在输出端的误差方差  $\sigma_Q^2$  为

$$\sigma_Q^2 = \sigma_B^2 \cdot 2^{-2(M-m)}$$

总的输出方差为

$$\begin{aligned}\sigma_F^2 &= \sum_{m=1}^M 2^{M-m} \sigma_Q^2 = \sum_{m=1}^M 2^{M-m} \sigma_B^2 2^{-2(M-m)} = \sum_{m=1}^M 2^{-(M-m)} \sigma_B^2 \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sigma_B^2 = 4 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sigma_B^2 \approx 4 \sigma_B^2 = \frac{4}{3} q^2\end{aligned}$$

输出信噪比为

$$\text{SNR} = \frac{E[|X(k)|^2]}{\sigma_F^2} = \frac{1/(3N)}{4q^2/3} = \frac{1}{4Nq^2} \quad (8-57)$$

与式(8-56)相比,信噪比有了很大的提高。为保证运算精度不变,  $N$  增加 4 倍, 字长才需要增加 1 位。

### 3. 成组浮点运算

将原始数据用成组浮点制表示为

$$\text{Re}[x(i)] = 2^p \text{Re}[x'(i)], \quad \text{Im}[x(i)] = 2^p \text{Im}[x'(i)]$$

这样来保证  $\text{Re}[x'(i)] < 1, \text{Im}[x'(i)] < 1$ , 这里  $p$  为某个整数, 称为共阶数。以  $[x'(i)]$  作为快速傅里叶变换的初始数据进行变换, 计算按定点运算进行, 一旦某个蝶形节点计算中出现溢出, 则将整个这一级的序列(运算过的, 未运算的)全部左移 1 位(即乘  $1/2$  因子), 并在阶码  $p$  上加 1, 然后运算从发生溢出的蝶形继续下去。当以后某级蝶形运算又出现溢出时, 再对该级的输入乘上  $1/2$  衰减因子, 并在阶码  $p$  上加 1 继续运算, 直到  $L$  级计算完为止。这种办法要增加检验溢出的判断步骤。

如果在整个变换过程中, 一次溢出也没有发生, 输出信号方差最大, 当输入为白噪声型信号时, 其值为

$$\sigma_X^2 = N\sigma_x^2 = \frac{N}{3}, \quad |x(n)| < 1 \text{ 时}$$

输出信噪比为

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_F^2} = \frac{N/3}{N\sigma_B^2} = \frac{1}{q^2}$$

最坏的情况是各级都产生了衰减, 这相当于逐级衰减法。所以成组浮点法快速傅里叶变换的信噪比的变化范围为

$$\frac{1}{4Nq^2} \leq \text{SNR} \leq \frac{1}{q^2} \quad (8-58)$$

### 8.5.3 浮点快速傅里叶变换算法中的量化效应

浮点快速傅里叶变换算法的量化效应本节不做详细分析, 仅仅将其与定点快速傅里叶变换算法的量化效应分析进行比较, 指出它们的相同点和差异。

采用的分析方法基本相同。

(1) 对输入信号和舍入噪声做同样的假设。

(2) 对任一输出节点, 考虑与其相连的那些蝶形。

与定点快速傅里叶变换算法误差分析不同之处如下。

(1) 浮点加法和浮点乘法之后都需做尾数处理,都会引入噪声源,因此模型设计与定点快速傅里叶变换系统的有所不同。

(2) 对浮点制系统,考察量化带来的相对误差比较合理,因此要把模型中的绝对误差  $e_i(m, j)$  换算成相对误差  $\epsilon_i(m, j)$ ,再进行分析。

(3) 浮点快速傅里叶变换系统任一输出节点处的输出信噪比为

$$\frac{E\{|X(k)|^2\}}{E\{|e_j(k)|^2\}} = \frac{1}{2L\sigma_e^2} \quad (8-59)$$

其中,  $L = \log_2 N$  是快速傅里叶变换的蝶形运算级数,  $\sigma_e^2$  是各相对误差  $\epsilon_i(m, j)$  的方差,它与  $q^2$  成正比。由式(8-59)可知,输出信噪比与  $L$  成反比。如果  $L$  增加到原来的 4 倍,为了保持相同的信噪比,只要求字长增加 1 位。

## 本章小结

分析信号处理中的有限字长效应能够避免或者减小系统实现时相对于原设计系统的误差,避免系统崩溃。在数字系统中,有三种因为有限字长的影响而引起误差的来源,即 A/D 变换的量化效应、系数的量化效应和数字运算过程中的有限字长效应,而存储单元的位数有限是上述三种因素能够引起误差的根本原因。

A/D 转换的量化噪声随字长的增加而减小,但 A/D 转换器的字长受其集成电路特性限制,字长越长,器件工作速度越慢。IIR 数字滤波器系数的量化误差会使系统零、极点发生偏差,系统的频率响应特性发生变化。线性时不变系统的有限字长效应与系统实现的结构有关,FIR 数字滤波器的有限字长效应在输出端的影响与字长和滤波器的阶数有关,IIR 系统的极点分布越密集,极点灵敏度越高,直接型滤波器的阶数越高,灵敏度也越高。浮点快速傅里叶变换运算的输出信噪比随着级数的增加而下降,下降趋势远小于定点运算快速傅里叶变换的输出信噪比。

经过对几种傅里叶变换的比较,可知一个域的周期性会导致另一个域的离散化,相反,一个域的离散化会导致另一个域的周期延拓。离散傅里叶变换是周期序列傅里叶级数的主值区间,而周期序列的傅里叶级数可以看做是离散傅里叶变换的周期延拓。模拟频率、数字频率和离散频率之间的关系是数字滤波器设计和频谱分析的基础。

离散傅里叶变换的性质可由序列傅里叶变换的性质类推而得,它们具有相同的结论,但是在表达形式上有所不同。循环卷积与周期卷积类似,其移位过程是循环移位,卷积后序列长度与参与卷积的较长序列长度相同。离散傅里叶变换的性质在计算中具有重要作用,也是深刻理解离散傅里叶变换的基础。

## 思考与练习

8-1 将下列十进制数分别用  $b=4$  位的原码、反码和补码表示。

$$x_1=0.062\ 5, \quad x_2=0.937\ 5, \quad x_3=-0.062\ 5$$

8-2 若以下二进制码分别是原码、反码和补码时,请算出其所表示的十进制数值。

$$x_1=0.111\ 0, \quad x_2=0.100\ 0, \quad x_3=1.111\ 1, \quad x_4=1.000\ 1$$

8-3 A/D 变换器的字长为  $b$ , 采用舍入处理, 输入信号必须乘以比例因子  $A$  以使其最大绝对值不超过 1, 试求:

(1) 当输入为正弦随机相位序列  $x_s(nT) = B\cos(\omega_0 n + \theta)$ ,  $\theta$  在  $\theta[0, 2\pi]$  上均匀等概率分布时, A/D 变换的输出信噪比  $\sigma_s^2/\sigma_e^2$ ;

(2) 当输入为一个随机信号, 且  $x(n)$  的峰值是  $\sigma_x$  的  $\pm 3$  倍, 求这时 A/D 变换的输出信噪比  $\sigma_s^2/\sigma_e^2$ , 并问若要求得到 80 dB 的信噪比, 字长应该多少位。

8-4 设数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 1.256\ 876\ 3z^{-1} + 0.876\ 295\ 4z^{-2}}$$

现用 8 位字长的寄存器来存放其系数, 试求此时该滤波器的实际  $\hat{H}(z)$  表示式。

8-5 试画出题 8-4 中  $H(z)$  和  $\hat{H}(z)$  的零极点分布图, 定性分析  $|H(e^{j\omega})|$  和  $|\hat{H}(e^{j\omega})|$  的差异, 指出由于寄存器字长有限对滤波器的影响。

8-6 一个一阶 IIR 网络其差分方程为  $y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + x(n)$ , 其输入序列为  $x(n) = 0.5\mu(n)$ 。

(1) 试求在无限精度下网络的输出  $y(n)$ 、以及当  $n \rightarrow +\infty$  时的输出稳态值  $y(\infty)$ 。

(2) 当网络采用  $b=4$  位字长的定点运算时, 尾数采用截尾处理, 计算  $0 \leq n \leq 5$  以内的 6 点输出值  $\hat{y}(n)$ 。并求其稳态响应值  $\hat{y}(+\infty)$ 。

(3) 当尾数采用舍入处理时, 重复本题中的问题(2)。

8-7 一个一阶 IIR 网络, 理想运算的差分方程是  $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ , 今用定点制原码运算, 尾数作截尾处理。求证: 只要  $|a| < 1$ , 就不会发生极限环振荡。

8-8 一个二阶 IIR 滤波器, 其差分方程为  $y(n) = y(n-1) - ay(n-2) + x(n)$ , 现采用  $b=3$  位的定点制运算, 舍入处理。

(1) 当系数  $a=0.75$ , 零输入  $x(n)=0$ , 初始条件为  $\hat{y}(-2)=0, \hat{y}(-1)=0.5$ , 求  $0 \leq n \leq 9$  的 10 点输出值  $\hat{y}(n)$ 。

(2) 证明当  $Q_R[a\hat{y}(n-2)] = \hat{y}(n-2)$  时发生零输入极限振荡, 并用等效极点迁移来解释这个现象。

8-9 两个一阶 IIR 网络  $H_1(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}, H_2(z) = \frac{1}{1-0.1z^{-1}}$ , 用定点制运算, 舍入处理, 要求输出精度  $\sigma_s^2/\sigma_y^2 = -80$  dB, 问各需几位尾数数字。

8-10 对二阶系统  $y(n) = y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n)$ , 数用  $b$  位(小数点后的位数)字长定点实现。令  $x(n)=0, y(-1)=A, y(-2)=0, A \neq 0$ , 求:

(1)  $A$  的死区, 即使  $Q[-r^2 A] = -A$  的  $A$  值;

(2) 由  $A$  的下限, 求可能有死区的  $r$  值范围。

8-11 设数字滤波器系统函数为

$$H(z) = \frac{0.06}{1 - 0.6z^{-1} + 0.25z^{-2}} = \frac{0.06}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

利用  $a_1, a_2$  变化造成的极点位置灵敏度,  $a_1, a_2$  分别造成极点在正常值的 0.2%、0.3% 内变化, 试确定所需的最小字长。

8-12 一个二阶 IIR 网络的传递函数为

$$H(z) = \frac{0.4 - 0.34z^{-1}}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$$

现用 6 位字长的定点制运算实现它, 尾数作舍入处理。试分别计算其直接 I 型和直接 II 型结构的输出舍入噪声方差值。

8-13 根据题 8-12 网络传递函数, 解答下列问题。

- (1) 试计算级联型结构的输出舍入噪声方差值。
- (2) 改变级联网络的前后次序, 再计算输出舍入噪声方差。
- (3) 改变级联网络中零点与极点的搭配关系, 再计算输出舍入噪声方差。
- (4) 试问此传递函数可以有多少种串接型结构? 不同的结构运算精度是否不同?

8-14 用并联型结构实现以上传递函数, 并计算输出舍入噪声方差。与以上两题结果比较, 哪一种结构运算精度最高? 哪种最差?

8-15 一个  $N$  阶 FIR 滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i}$$

采用直接型结构, 用 6 位字长舍入方式对其系数取量化。

- (1) 试用统计方法估算由于系数量化所引起的频率响应偏离的方差  $\sigma_e^2$ 。
- (2) 当  $N=1024$  时, 若要求  $\sigma_e^2 \leq 10^{-8}$ , 则系数字长  $b$  应该需要多少位?

## 多抽样率数字信号处理

本章重点内容:抽样率变换的基本理论,包括按整数因子 $M$ 抽取、按整数因子 $L$ 插值和按分数因子变换抽样率;多抽样率系统的网络结构与实现,包括直接型FIR结构的高效实现和多相滤波器结构。

在前面各章所讨论的数字信号处理都是将抽样频率看做恒定值,即一个离散系统中只有一个抽样率,数字信号在处理过程中各样值间的时间间隔 $T$ 始终相同,系统各部分的工作速率也是相同的。但是,随着信息技术的快速发展,经常会遇到抽样率转换问题,常常需要系统能工作在多抽样率状态,能够处理不同抽样速率的信号。例如,数字电话系统需要发送和接收语音、传真、视频等不同类型的信号,这些信号的频率成分相差很大,带宽各不相同,要求该系统应具有多种抽样频率并自动完成抽样率的转换。对非平稳信号做谱分析和编码时,对不同的信号段可根据其频率成分的不同采用不同的抽样频率,从而达到既满足抽样定理又最大限度减少数据量的目的。因此,建立在抽样率转换基础上的多抽样率数字信号处理已经越来越重要,成为数字信号处理学科中的重要内容之一。

抽样率转换的实现通常有三种方法。第一种方法是对原始的模拟信号进行重抽样,前提是模拟信号可以再生或者被记录,这在多数情况下是不现实的。第二种方法是将 $x(n)$ 经过D/A转换成模拟信号 $x(t)$ ,再按照新的抽样率对 $x(t)$ 进行A/D转换得到新的抽样值。这种方法可以做到与原抽样率无关地任意选择新的抽样率,但会再次受到A/D和D/A量化误差的干扰,从而导致前后不同抽样率的数字信号之间存在较大的误差。第三种方法是对信号 $x(n)$ 在数字域中进行抽样率的变换,已得到新的抽样信号,这种方法显然是最优的。

### 9.1 抽样率变换的基本理论

减少抽样率以去掉多余数据的过程称为信号的抽取(Decimation)或欠抽样



(Down-Sampling), 增加抽样率以增加数据的过程称为信号的插值 (Interpolation) 或过抽样 (Up-Sampling)。下面将讨论抽样率变换的原理和方法。

### 9.1.1 按整数因子 $M$ 抽取

若将信号  $x(n)$  的抽样频率由  $f_s$  减小到  $f'_s = f_s/M$ , 则可由信号  $x(n)$  每  $M$  个样点中抽取一个, 依次作为新序列  $x'(n)$  的样点值, 即

$$x'(n) = x(Mn), \quad n \in (-\infty, +\infty) \quad (9-1)$$

令

$$x_1(n) = \begin{cases} x(n), & n=0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = x(n)p(n) = x(n) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(n-Mi) \quad (9-2)$$

其中,  $p(n)$  为脉冲串序列, 在  $M$  的整数倍上取值为 1, 其余为 0。信号的抽取过程如图 9-1 所示。

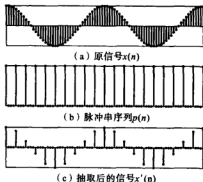


图 9-1 信号抽取示意图

设  $\omega_1$  和  $\omega_2$  分别表示  $x(n)$  和  $x'(n)$  的数字频率,  $\Omega$  表示原模拟信号的角频率, 有

$$\omega_2 = \Omega/f'_s = M\Omega/f_s = M\omega_1 \quad (9-3)$$

又  $X(e^{j\omega_1})$ ,  $X_1(e^{j\omega})$ ,  $X'(e^{j\omega_2})$  分别为信号  $x(n)$ ,  $x_1(n)$  和  $x'(n)$  的傅里叶变换, 即

$$\begin{aligned} X_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)p(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi nk/M} \right] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi k/M)}) \end{aligned} \quad (9-4)$$

$$\begin{aligned} X'(e^{j\omega_2}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x'(n)e^{-j\omega_2 n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(Mn)e^{-j\omega_2 n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(Mn)e^{-j\omega_2 n} \\ &\approx X_1(e^{j\omega_2/M}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega_2 - 2\pi k)/M}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega_1 - 2\pi k/M)}) \end{aligned} \quad (9-5)$$

因此, 抽取因子为  $M$  的信号  $x'(n)$  频谱  $X'(e^{j\omega_2})$  是  $M$  个不同移位的原信号  $x(n)$  频谱  $X(e^{j\omega_1})$  之和,  $X'(e^{j\omega_2})$  的频谱幅度是原来  $X(e^{j\omega_1})$  频谱幅度的  $1/M$ 。图 9-2 表示

了抽取因子不同时的信号频谱(幅度),图 9-2(a)是原始信号  $x(n)$  的频谱  $X(e^{j\omega})$ ,图 9-2(b)、(c)、(d)表示了抽取因子分别为 2、4、8 时的频谱  $X'(e^{j\omega})$ ,并给出了对应的数字频率刻度。

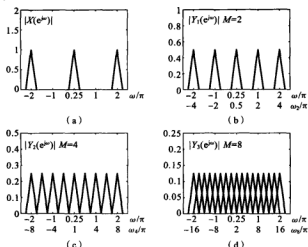


图 9-2 不同抽取因子的信号频谱分析

当  $M=2$  时,频谱没有混叠,但由于抽取因子较小,处理的数据量没有明显减少;当  $M=8$  时,出现频谱混叠,说明抽取因子过大;当  $M=4$  时,在不产生频谱混叠的情况下使抽样率达到了最低,这种情况称为最大抽取。

由抽样定理可知,如果原信号  $x(n)$  的抽样频率  $f_s \geq 2f_c$ ,则抽样后不会发生频谱混叠,经过  $M$  倍抽取后的信号  $x'(n)$ ,如果  $f'_s = f_s/M \geq 2f_c$ ,则  $M$  倍抽取后不会发生频谱混叠。即在原信号  $x(n)$  的抽样频率满足  $f_s \geq 2Mf_c$  时, $M$  倍抽取后的信号才不会发生频谱混叠,对于不同的  $M$  而言,已具有抽样频率为  $f_s$  的原信号  $x(n)$  是无法保证对所有的  $M$  都保证  $f_s \geq 2Mf_c$ 。因此可以在抽取之前让信号  $x(n)$  通过一个截止频率为  $\pi/M$  的理想低通数字滤波器,压缩频带,然后再抽取。图 9-3 显示了按整数因子进行最大抽取的抽取系统框图。

理想低通滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由式(9-3)和式(9-5)知,设  $x(n)$ 、 $y(n)$  的数字频率  $\omega_x$  和  $\omega_y$ ,一个周期内的频谱  $X(e^{j\omega_x})$  和  $Y(e^{j\omega_y})$  的关系为

$$\omega_y = M\omega_x \quad (9-6)$$

$$Y(e^{j\omega_y}) = \frac{1}{M} X(e^{j\omega_x}) \quad (9-7)$$



图 9-3 按整数因子进行最大抽取的抽取系统

### 9.1.2 按整数因子 $L$ 插值

如果将  $x(n)$  的抽样频率由  $f_s$  增加  $L$  倍到  $f'_s = Lf_s$ , 得到  $v(n)$ 。这里仅讨论零值内插, 就是在原序列  $x(n)$  的相邻抽样点之间插入  $L-1$  个零值, 然后再对其进行低通滤波, 最后形成新序列  $v(n)$ 。插值过程如图 9-4 所示, 插值系统框图如图 9-5 所示。

令

$$v(n) = \begin{cases} x(n/L), & n=0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9-8)$$

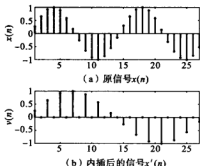


图 9-4 信号插值示意图

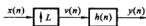


图 9-5 按整数因子插值的系统流程图

设  $\omega_x$  和  $\omega_v$  分别表示  $x(n)$  和  $v(n)$  的数字频率,  $\Omega$  表示模拟角频率, 有

$$\omega_v = \Omega / f'_s = \Omega / L f_s = \omega_x / L \quad (9-9)$$

$X(e^{j\omega_x})$ 、 $V(e^{j\omega_v})$  分别为信号  $x(n)$  和  $v(n)$  的傅里叶变换, 即

$$\begin{aligned} V(e^{j\omega_v}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v(n) e^{-j\omega_v n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n/L) e^{-j\omega_v n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n/L) e^{-j\omega_x n/L} \\ &= X(e^{j\omega_x}) \end{aligned} \quad (9-10)$$

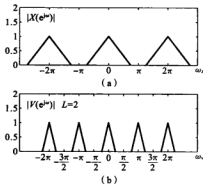


图 9-6 插值前后的信号频谱分析

令  $z = e^{j\omega_v}$ , 则

$$V(z) = X(z^L)$$

图 9-6 分析显示了插值前后信号频谱之间的关系。分析显示, 在原始信号  $x(n)$  的一个周期  $[-\pi, \pi]$  内, 插值信号  $v(n)$  的频谱  $V(e^{j\omega_v})$  变成了  $L$  个周期, 周期为  $2\pi/L$ , 多余的  $L-1$  个周期称为  $X(e^{j\omega_x})$  的映像, 这是由插零后抽样率升高引起的。当  $-\pi/L \leq \omega_v \leq \pi/L$  时,  $V(e^{j\omega_v})$  与  $X(e^{j\omega_x})$  相等。为消除多余的映像, 须将  $v(n)$  通过一理想低通滤波器以截取  $-\pi/L \leq \omega_v \leq \pi/L$  的信号。理想低通滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega_y}) = \begin{cases} C, & |\omega_y| \leq \pi/L \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$Y(e^{j\omega_y}) = H(e^{j\omega_y})X(e^{j\omega_y}) = CX(e^{j\omega_y}), \quad |\omega_y| \leq \pi/L$$

有

$$y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega_y}) d\omega_y = \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} X(e^{j\omega_y}) d\omega_y = \frac{C}{L} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega_x}) d\omega_x = \frac{C}{L} x(0)$$

为保证  $x(0)$  与  $y(0)$  相等, 有  $C=L$ 。  $v(n)$  通过一理想低通滤波器后, 零点值将不再为零, 从而得到插值后的输出  $y(n)$ 。

### 9.1.3 按分数因子变换抽样率

如果将  $x(n)$  的抽样频率由  $f_s$  变换为增加  $L$  倍到  $f'_s = Lf_s/M$ , 这里  $M$  和  $L$  互质, 可以通过抽取与插值相结合的方法实现。得到  $v(n)$ 。由于抽取引起数据量减少, 有可能导致信息的丢失, 因此合理的方法是先将一个  $L$  倍插值的系统与一个  $M$  倍抽取的系统进行级联, 如图 9-7 所示。这种工作方式中, 理想低通滤波器  $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$  所处理信号的频率都是  $Lf_s$ , 滤波器工作频率相同, 因此可以将这两个合并成一个, 即

$$H(e^{j\omega_v}) = \begin{cases} L, & |\omega_v| \leq \min(\pi/L, \pi/M) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9-11)$$

其中,  $\omega_v = \omega_x/L$ 。

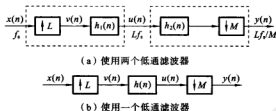


图 9-7 分数因子  $L/M$  变换抽样率的系统流程图

已知  $x(n)$  和  $v(n)$  之间关系为

$$v(n) = \begin{cases} x(n/L), & n=0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{且} \quad u(n) = v(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-kL)x(k) \quad (9-12)$$

利用式(9-1), 有

$$y(n) = u(Mn) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(Mn - kL)x(k) \quad (9-13)$$

令

$$k = [nL/M] - i$$

其中,  $[ ]$  表示向下取整, 则

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h\left(Mn - \left[\frac{Mn}{L}\right]L + iL\right)x(-i) \quad (9-14)$$

而  $Mn - \left[\frac{Mn}{L}\right]L = \text{mod}(Mn, L) = \langle Mn \rangle_L$ , 表示求余数, 最终分数因子  $L/M$  变换抽样率的系统的输入  $x(n)$  和输出  $y(n)$  之间关系为

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(iL + \langle Mn \rangle_L)x\left(\left[\frac{Mn}{L}\right] - i\right) \quad (9-15)$$

因此, 该系统可以认为是将  $x(n)$  通过了一个时变滤波器得到的输出  $y(n)$ 。记该时变滤波器为  $g(n, m)$ , 有

$$g(n, m) = h(nL + \langle Mm \rangle_L), \quad -\infty < n, m < +\infty \quad (9-16)$$

因为  $g(n, m + kL) = h(nL + \langle Mm + kML \rangle_L) = h(nL + \langle Mm + kML \rangle_L)$

所以,  $g(n, m)$  是以变量  $m$  为周期, 周期为  $L$ 。

$x(n)$  和  $y(n)$  频谱之间关系可以由抽取和插值中的基本关系推导得出, 即

$$\begin{aligned} U(e^{j\omega_v}) &= H(e^{j\omega_v})V(e^{j\omega_v}) = H(e^{j\omega_v})X(e^{j\omega_v}) = \begin{cases} LX(e^{j\omega_v}), & |\omega_v| \leq \min(\pi/L, \pi/M) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ Y(e^{j\omega_y}) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} U(e^{j\omega_y - 2\pi k/M}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(e^{j\omega_y - 2\pi k/M})X(e^{j(\omega_y - 2\pi k)/M}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{M}X(e^{j\omega_y/M}), & |\omega_y| \leq \min(\pi, M\pi/L) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (9-17)$$

其中,  $\omega_y = M\omega_v = \frac{M}{L}\omega_x$ 。

## 9.2 多抽样率系统的网络结构与实现

在图 9-3 和图 9-5 所示的抽取器和插值器中滤波的卷积运算是在抽样率较高的一侧进行的。在抽取器的运算中, 如果先做抗混叠滤波的卷积计算然后抽取, 则必然有很多计算工作量是徒劳的, 而且一个卷积的计算必须在输入信号的一个抽样时间间隔内完成, 这样就使得每秒钟的乘法次数很高。实现插值器的计算问题也有类似的问题。期望的多抽样率系统应该是把乘法运算安排在低抽样率的一侧以便每秒钟内的乘法次数最少, 因此必要对多抽样率系统的网络结构进行研究, 以期得到只需最少乘法次数的实现方法。

由于 FIR 数字滤波器由于具有稳定的性能和线性相位的特点, 在实现多抽样率系统时大多数采用的 FIR 数字滤波器。

### 9.2.1 直接型 FIR 结构的高效实现

#### 1. 抽取系统

利用 FIR 直接型结构, 可以实现图 9-3 所示的抽取器。设 FIR 低通数字滤波

器单位脉冲响应为  $h(n)$ , 长度为  $N$ , 则有图 9-8(a) 所示的抽取系统, 系统的差分方程表示为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (9-18)$$

这种直接型结构,  $h(n)$  工作在高抽样率状态, 在一个抽样时间间隔内系统需要进行  $N$  次乘法运算和  $N-1$  次加法运算, 即  $x(n)$  的每一个点都要与  $h(n)$  相乘, 但每  $M$  个点最后只有一个数据被保留, 其余的  $M-1$  数据被浪费, 因此可以先对输入信号  $x(n)$  做抽取, 然后再与  $h(n)$  相乘, 这样在  $M$  个抽样时间间隔内才需要进行  $N$  次乘法运算和  $N-1$  次加法运算, 系统信号流图如图 9-8(b) 所示。这种结构相对于图 9-8(a) 所示的直接型结构效率提高了  $M$  倍, 称为抽取器的高效实现。该系统的输入、输出之间关系为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(Mn-k) \quad (9-19)$$

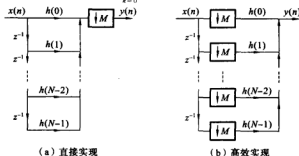


图 9-8 抽取器的滤波器实现

考虑到 FIR 数字滤波器具有线性相位的特征,  $h(n)$  是奇对称或者偶对称的, 因此可以进一步减少计算量, 系统结构如图 9-9 所示。

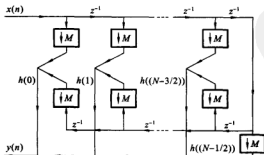


图 9-9 抽取器的线性相位 FIR 数字滤波器实现

## 2. 插值系统

同样地, 可以利用 FIR 直接型结构实现图 9-5 所示的插值器, 如图 9-10(a) 所

示。此时 FIR 数字滤波器  $h(n)$  同样工作在高抽样率状态, 在一个抽样时间间隔内系统需要进行  $N$  次乘法运算和  $N-1$  次加法运算, 但参与乘法运算的输入数据中每  $L$  个点只有一个数据是非零值, 其余的  $L-1$  数据均为零, 这些  $L-1$  个乘法运算是不需要的。因此可以用图 9-10(b) 所示的网络结构实现插值系统的高效实现, 如果 FIR 数字滤波器是线性相位的, 运算效率还能够进一步提高。该高效系统的差分方程表示为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x\left(\frac{n}{L} - k\right) \quad (9-20)$$

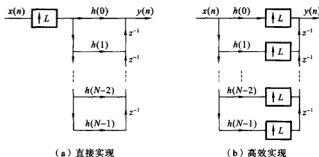


图 9-10 插值器的滤波器实现

## 9.2.2 多相滤波器结构

假定 FIR 数字滤波器长度  $N=6$ , 抽取因子  $M=2$ , 分析式 (9-20)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(Mn - k)$$

与  $h(0)$  相乘的是  $x(Mn)$ , 即  $\{x(n), x(n+2), x(n+4), \dots\}$ ; 与  $h(1)$  相乘的是  $x(Mn-1)$ , 即  $\{x(n-1), x(n+1), x(n+3), \dots\}$ ; 与  $h(2)$  相乘的是  $\{x(n-2), x(n), x(n+2), \dots\}$ , 是输入到  $h(0)$  序列的  $M$  点延迟; 同样的, 与  $h(3)$  相乘的序列是输入到  $h(1)$  序列的  $M$  点延迟, 如图 9-11 所示。

令  $k = Mq + i$ ,  $i = 0, 1, \dots, [N/M]$ , 则式 (9-20) 可以改写成

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} h(Mq + i)x(Mn - q - i) \quad (9-21)$$

按照式 (9-21), 可以将图 9-11 中的抽取结构分成  $M$  组, 每一组具有相同结构的小 FIR 系统, 如图 9-12 所示。图中的单位延迟

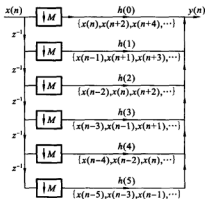


图 9-11  $N=6, M=2$  的抽取结构

$z^{-1}$ 将输入序列分成  $N/M$  组, 每组一次相差一个延迟, 各组经过  $M$  倍抽取器后, 经过子滤波器完成信号的抽取。图中子滤波器的结构相同, 滤波器系数相差  $M$  个延迟, 因此这种滤波器称为多相滤波器(Polyphase Filter)。

定义多相滤波器每一个子滤波器的单位冲击响应为

$$p_k(n) = h(k + nM), \quad k=0, 1, \dots, M-1, \quad n=0, 1, \dots, N/M-1 \quad (9-22)$$

对于图 9-12 所示的多相滤波器结构, 有  $p_0(n) = \{h(0), h(2), h(4)\}$ ,  $p_1(n) = \{h(1), h(3), h(5)\}$ , 正是各子滤波器的系数。

类似地,  $L$  倍插值器的多相滤波器的单位冲击响应为

$$p_k(n) = h(k + nL), \quad k=0, 1, \dots, L-1, \quad n=0, 1, \dots, N/L-1 \quad (9-23)$$

图 9-13 显示了  $N=6, L=2$  的插值器的多相滤波器结构。

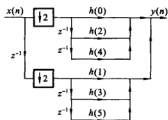


图 9-12 抽取器的多相滤波器结构

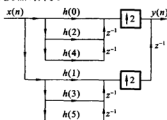


图 9-13 插值器的多相滤波器结构

在抽取器和插值器的多相滤波器结构讨论基础上, 可以进一步分析  $L/M$  倍的抽样率转换器的网络结构。根据式(9-16), 多相滤波器的采样响应  $g(n, m)$  为

$$g(n, m) = h(nL + \langle Mm \rangle_L), \quad n=0, 1, \dots, K-1, \quad m=0, 1, \dots, L-1 \quad (9-24)$$

其中,  $K=N/L$ 。假设  $N=30, L=5, M=3$ , 则  $K=N/L=6$ , 多相滤波器的系数分别为

$$g(0, m) = h(0 + \langle 3m \rangle_5) = \{h(0), h(3), h(1), h(4), h(2)\}$$

$$g(1, m) = h(5 + \langle 3m \rangle_5) = \{h(5), h(8), h(6), h(9), h(7)\}$$

$$g(2, m) = h(10 + \langle 3m \rangle_5) = \{h(10), h(13), h(11), h(14), h(12)\}$$

$$g(3, m) = h(15 + \langle 3m \rangle_5) = \{h(15), h(18), h(16), h(19), h(17)\}$$

$$g(4, m) = h(20 + \langle 3m \rangle_5) = \{h(20), h(23), h(21), h(24), h(22)\}$$

$$g(5, m) = h(25 + \langle 3m \rangle_5) = \{h(25), h(28), h(26), h(29), h(27)\}$$

根据多相结构的思想, 可以把式(9-14)和式(9-15)的  $L/M$  倍的抽样率转换器的输入  $x(n)$  和输出  $y(n)$  之间关系分别改写如下

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h\left(Mn - \left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor L + iL\right) x\left(\left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor - i\right) \quad (9-25)$$

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(iL + \langle Mn \rangle_L) x\left(\left\lfloor \frac{Mn}{L} \right\rfloor - i\right) \quad (9-26)$$

考虑式(9-24), 式(9-26)又可以表示为



$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i, \langle n \rangle_L) x\left(\left[\frac{Mn}{L}\right] - i\right) \quad (9-27)$$

利用式(9-27)分析  $L/M$  倍抽样率转换器的工作原理。根据所给定的  $M, L$ , 设计一低通滤波器  $h(n)$ , 使之逼近为频率特性

$$H_d(e^{j\omega_s}) = \begin{cases} L, & |\omega_s| \leq \min(\pi/L, \pi/M) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

采用 FIR 数字滤波器以保证线性相位和有效计算, 因此有  $h(n) = h(N-n-1)$ , 且  $N=KL$ 。

根据式(9-24), 长度为  $N$  的 FIR 数字滤波器被分成了长度都为  $K$  的  $L$  组子滤波器组  $g(n, m)$ ,  $n=0, 1, \dots, K-1, m=0, 1, \dots, L-1$ 。根据式(9-27), 输入数据  $x(n)$  的序号按照  $\left[\frac{Mn}{L}\right]$  转换, 对一个固定的  $n$ , 序号随  $n$  负向减 1。例如,  $N=30, L=5, M=3$ , 此时输出分别是

$$y(0) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i, 0) x(0-i)$$

$$y(1) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i, 1) x(0-i)$$

$$y(2) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i, 2) x(1-i)$$

$$y(3) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i, 3) x(1-i)$$

$$y(4) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i, 4) x(2-i)$$

$$y(5) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(i, 5) x(3-i)$$

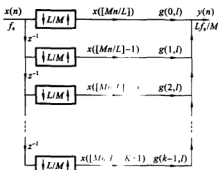


图 9-14  $L/M$  倍的多相滤波器结构

对输出数据  $y(n)$ ,  $n$  每改变一次, 输入数据  $x(n)$  的序号只有当  $Mn/L$  为整数时才发生变化。据此, 可得到图 9-14 所示的抽样率转换结构。

## 本章小结

随着信息技术的快速发展, 经常需要系统能够工作在多抽样率状态, 能够处理不同抽样速率的信号。信号的多抽样率处理可以简单划分为整数  $M$  的抽取、整数  $L$  的插值及有理数  $L/M$  的变换抽样率处理。

抽取因子为  $M$  的信号频谱是  $M$  个不同移位的原信号频谱之和, 频谱幅度是原来信号频谱幅度的  $1/M$ ; 插值因子为  $L$  的差值信号频谱是将在原信号频谱的一个周

期内,差值变成  $L$  个周期,周期为  $2\pi/L$ 。有理数  $L/M$  的变抽样率处理,按照先进行一个  $L$  倍插值的处理然后通过一个  $M$  倍抽取的系统完成,信号频谱与原信号频谱之间关系遵循相应的抽取和内插原则。

鉴于 FIR 数字滤波器具有稳定的性能和线性相位,因此多数情况下采用的 FIR 数字滤波器,包括直接型 FIR 结构的高效实现和多相滤波器结构。

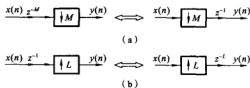
## 思考与练习

9-1 设信号  $x(n]=a^n u(n)$ ,  $0 < |a| < 1$ 。

- (1) 求其频谱  $X(e^{j\omega_1})$ 。
- (2) 将  $x(n]$  按  $M=2$  抽取后得到  $y(m)$ , 写出  $y(m)$  的频谱  $Y(e^{j\omega_2})$ , 并说明设  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的关系。
- (3) 求信号  $x(2n)$  的频谱, 并证明该频谱与  $y(m)$  的频谱相同。

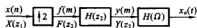
9-2 证明下面两题。

- (1) 题图 9-1(a) 的两个系统等效, 即信号延迟  $M$  个样本后作  $M$  倍抽取和先做  $M$  倍抽取再延迟一个样本是等效的。
- (2) 题图 9-1(b) 的两个系统等效, 即信号延迟一个样本再做  $L$  倍插值和先做  $L$  倍插值再延迟  $L$  个样本是等效的。



题图 9-1

9-3 设信号  $x_a(t)$  的最高频率为  $\Omega_c$ , 用奈奎斯特抽样率  $\Omega_s = 2\Omega_c$  对  $T_s x_a(t)$  抽样, 得到离散信号  $x(n)$ , 这里  $T_s = 2\pi/\Omega_s$  为抽样周期(间隔)。试说明  $x(n)$  经过题图 9-2 所示的插零处理和 D/A 变换之后, 能够完全恢复原信号  $x_a(t)$ 。这里不考虑量化误差, 并且假设数字滤波器  $H(z_2)$  和模拟滤波器  $H(\Omega)$  都是理想的低通滤波器,  $H(z_2)$  的截止频率  $\omega_c = T_s \Omega_c / 2$ ,  $H(\Omega)$  的截止频率为  $\Omega_c$ 。



题图 9-2

9-4 设  $x(n]$  和  $y(n)$  分别表示一个抽取器的输入和输出序列, 它们之间的关系为

$$y(n) = T[x(n)] = x(nM)$$

试证明这个抽取器是一个线性时变系统。

9-5 设  $x(n]$  和  $y(n]$  分别表示一个插值器的输入和输出序列,它们之间的关系为

$$y(n) = T[x(n)] = \begin{cases} x(n/L), & n=0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

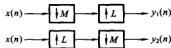
试证明这个插值器是一个线性时变系统。

9-6 已知两个多抽样系统如题图 9-3 所示。

(1) 写出  $Y_1(z)$ 、 $Y_2(z)$ 、 $Y_1(e^{j\omega})$  和  $Y_2(e^{j\omega})$  的表达式。

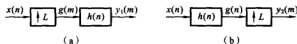
(2) 若  $M=L$ , 试分析两个系统是否等效?

(3) 若  $M \neq L$ , 试说明  $y_1(n) = y_2(n)$  的充要条件是什么, 并说明理由。



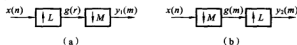
题图 9-3

9-7 证明:插零和滤波的顺序是可交换的,即证明题图 9-4(a)与(b)两个结构等效。



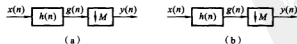
题图 9-4

9-8 证明:当且仅当  $M$  和  $L$  互为质数时,题图 9-5(a)、(b)所示的两个结构等效,即抽取和插值的顺序是可交换的。



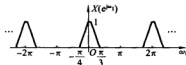
题图 9-5

9-9 证明:抽取和滤波的顺序是可交换的,即证明题图 9-6(a)与(b)所示的两个结构等效。



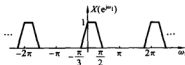
题图 9-6

9-10 对于抽取系统,如果输入信号  $x(n]$  的频谱如题图 9-7 所示,试分别画出抽取因子分别为 2、3、4 时输出信号的频谱,问哪种情况属于最大抽取?



题图 9-7

- 9-11 对于插值系统,如果输入信号  $x(n]$  的频谱如题图 9-8 所示,如果插值因子  $L=2$ ,试分别画出信号  $v(m)$  和  $y(m)$  的频谱。



题图 9-8

- 9-12 设计一个  $M=4$  的抽取器,要求滤波器是线性相位 FIR 型的,阻带衰减不小于 20 dB,过渡带宽度小于  $0.22\pi$ 。试求出该滤波器冲激响应  $h(n)$  的表达式,并分别用直接型高效结构和多相结构滤波器来实现该抽取器。
- 9-13 设计一个  $L=3$  的插值器,要求滤波器是线性相位 FIR 型的,阻带衰减不小于 20 dB,过渡带宽度小于  $0.45\pi$ 。试求出该滤波器冲激响应  $h(n)$  的表达式,并分别用直接型高效结构和多相结构滤波器来实现该插值器。
- 9-14 用一个长度为 9 的 FIR 低通滤波器构造一个  $M=3$  的抽取器,设滤波器冲激响应  $h(n)$  已知。分别用直接型结构、高效结构和多相结构来实现,比较三种实现方式的计算量。



## 参考文献

- [1] 奥法尼德斯(Orfanidis, S. J.). 信号处理导论[M]. 英文影印版. 北京:清华大学出版社, 1998.
- [2] 米特拉(Mitra, S. K.). 数字信号处理——基于计算机的方法[M]. 2版. 孙洪, 余翔宇, 等译. 北京:电子工业出版社, 2005.
- [3] 奥本海姆(Oppenheim, A. V.), 谢弗(Schafer, R. W.). 数字信号处理[M]. 董士嘉译. 北京:科学出版社, 1981.
- [4] 海因斯(Hayes, M. H.). 全美经典学习指导系列—数字信号处理[M]. 张建华, 卓力, 张延华, 译. 北京:科学出版社, 2002.
- [5] 普罗奇斯(Proakis, J. G.)等. 数字信号处理:原理、算法与应用[M]. 张晓林, 译. 北京:电子工业出版社, 2004.
- [6] 胡广书. 数字信号处理:理论、算法与实现[M]. 北京:清华大学出版社, 1997.
- [7] 程佩青. 数字信号处理教程[M]. 北京:清华大学出版社, 2007.
- [8] 刘益成, 孙祥娥. 数字信号处理[M]. 2版. 北京:电子工业出版社, 2009.
- [9] 靳希, 杨尔滨, 赵玲. 信号处理原理与应用[M]. 2版. 北京:清华大学出版社, 2008.
- [10] 姚天任, 江太辉. 数字信号处理[M]. 3版. 武汉:华中科技大学出版社, 2007.
- [11] 刘泉, 阙大顺, 郭志强. 数字信号处理原理与实现[M]. 北京:电子工业出版社, 2009.
- [12] 高西全. 数字信号处理:原理、实现及应用[M]. 北京:电子工业出版社, 2010.
- [13] 英格尔(Ingle, V. K.), 普罗克斯(Proakis, J. G.). 数字信号处理及其 Matlab 实现[M]. 2版. 陈怀琛, 译. 北京:电子工业出版社, 2008.
- [14] 胡广书. 数字信号处理导论[M]. 北京:清华大学出版社, 2005.
- [15] 张延华, 姚林泉, 郭玮. 数字信号处理:基础与应用[M]. 北京:机械工业出版社, 2005.
- [16] 丁玉美, 高希全. 数字信号处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1995.
- [17] 楼顺天, 刘小东, 李博菡. 基于 Matlab7. x 的系统分析与设计:信号处理[M]. 2版. 西安:西安电子科技大学出版社, 2005.
- [18] 余成波, 陶红艳, 杨善, 等. 数字信号处理及 Matlab 实现[M]. 2版. 北京:清华大学出版社, 2008.
- [19] 薛年喜. Matlab 在数字信号处理中的应用[M]. 2版. 北京:清华大学出版

- 社,2008.
- [20] 周辉,董正宏. 数字信号处理基础及 Matlab 实现[M]. 北京:中国林业出版社/北京希望电子出版社,2006.
- [21] 陈怀琛. 数字信号处理教程:Matlab 释义与实现[M]. 2 版. 北京:电子工业出版社,2008.
- [22] 丛玉良,王宏志. 数字信号处理原理及其 Matlab 实现[M]. 北京:电子工业出版社,2005.
- [23] 杨述斌,李永全. 数字信号处理原理实践教程[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2007.

