

# A First Course in Mathematical Modeling

(Fifth Edition)

# 数学建模

(原书第5版)

Frank R. Giordano

(美) William P. Fox

Steven B. Horton

著

叶其孝 姜启源 等译



机械工业出版社  
China Machine Press

本书仅提供部分阅读，如需完整版，请联系QQ: 2011705918

提供各种IT类, 其它类书籍pdf下载，如有需要，请QQ:2011705918

注：链接至淘宝，整理那么多资料也不容易，请多多见谅！非诚勿扰！

[点击购买完整版](#)

提供各种IT类书籍pdf下载，如有需要，请 **QQ: 2011705918**

注：链接至淘宝，不喜者勿入！整理那么多资料也不容易，请多多见谅！非诚勿扰！

**更多资源请点击**

# A First Course in Mathematical Modeling

(Fifth Edition)

# 数学建模

(原书第5版)

Frank R. Giordano  
(美) William P. Fox 著  
Steven B. Horton

叶其孝 姜启源 等译



机械工业出版社  
China Machine Press

## 图书在版编目 (CIP) 数据

数学建模 (原书第 5 版) / (美) 吉奥丹诺 (Giordano, F. R.) 等著; 叶其孝等译. —北京: 机械工业出版社, 2014.10

(华章数学译丛)

书名原文: A First Course in Mathematical Modeling, Fifth Edition

ISBN 978-7-111-47952-9

I. 数… II. ① 吉… ② 叶… III. 数学模型 IV. O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 210702 号

本书版权登记号: 图字: 01-2013-7844

Frank R. Giordano, William P. Fox and Steven B. Horton, A First Course in Mathematical Modeling, Fifth Edition (978-1-285-07749-9).

Copyright © 2014, 2009, 2003 by Brooks/Cole, a part of Cengage Learning.

Original edition published by Cengage Learning. All Rights reserved.

China Machine Press is authorized by Cengage Learning to publish and distribute exclusively this simplified Chinese edition. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only (excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan). Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

Cengage Learning Asia Pte. Ltd.

151 Lorong Chuan, #02-08 New Tech Park, Singapore 556741

本书原版由圣智学习出版公司出版. 版权所有, 盗印必究.

本书中文简体字翻译版由圣智学习出版公司授权机械工业出版社独家出版发行. 此版本仅限在中华人民共和国境内 (不包括中国香港、澳门特别行政区及中国台湾) 销售. 未经授权的本书出口将被视为违反版权法的行为. 未经出版者预先书面许可, 不得以任何方式复制或发行本书的任何部分.

本书封面贴有 Cengage Learning 防伪标签, 无标签者不得销售.

本书旨在指导学生初步掌握数学建模的思想和方法, 共分两大部分: 离散建模和连续建模, 通过本书的学习, 学生将有机会在创造性模型和经验模型的构建、模型分析以及模型研究方面进行实践, 增强解决问题的能力.

本书对于用到的数学知识力求深入浅出, 涉及的应用领域相当广泛, 适合作为高等院校相关专业的数学建模教材和参考书, 也可作为参加国内外数学建模竞赛的指导用书.

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 迟振春

责任校对: 董纪丽

印 刷: 藁城市京瑞印刷有限公司

版 次: 2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

开 本: 186mm × 240mm 1/16

印 张: 31.25

书 号: ISBN 978-7-111-47952-9

定 价: 99.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991 88361066

投稿热线: (010) 88379604

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzsj@hzbook.com

版权所有 · 侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光 / 邹晓东

# 译者序

数学建模(Mathematical Modeling)是用数学方法解决各种实际问题的桥梁,随着计算机的发明和计算机技术的飞速发展,数学的应用日益广泛,数学建模的作用越来越重要,而且已经渗透到各种领域,可以毫不夸张地说,数学和数学建模无处不在,甚至报刊中也越来越多地出现数学建模、建模和数学模型这样的术语(包括它们的英文名称 Mathematical Modeling、Modeling 和 Mathematical Model),它们正在成为人们日常生活和语言交流中常见的术语。

纵观历史,任何成功的技术必定会受到教育领域的重视,特别是高等教育更应该与时俱进,及时反映社会发展的需要。近年来符号和模型的作用已经成为数学教育所关注的中心议题,世界各国越来越多的大学(甚至中学)开设了数学建模的必修或选修课。数学教育界的一些有识之士认为,应该尽早地让学生学习并初步掌握数学建模的思想和方法,而且正在努力身体力行。实际上,这样做不仅有利于培养学生解决实际问题的能力和创新精神,而且会使学生对数学有更深入的理解,从而增强学习数学的兴趣和主动性,其结果必然是大大增强面对 21 世纪严峻挑战的竞争力。

在我国,从 20 世纪 80 年代初开始就有一些大学开设数学建模课程,20 世纪 90 年代初开始举办的全国大学生数学建模竞赛更是取得了极大的成果,并推动了我国的数学教育改革。我国数学教育界越来越多的人士也在研究如何尽早地让学生接触到数学建模的思想和方法。在教育部的领导下,由全国大学生数学建模竞赛组委会组织和实施的研究课题“将数学建模思想和方法融入大学数学主干课程教学中的研究与试验”正是这种努力的一部分。然而,要卓有成效地实现尽早地让学生学习并初步掌握数学建模的思想和方法,必须真正做到“以学生为中心、教师是关键、领导是保证”。就教师是关键而言,如果没有教师自身和集体的钻研和实践,以及结合学生实际情况的因材施教,也不可能完成上述任务。

我们翻译的这本书反映了美国几位教授在传播数学建模的思想和方法方面所做的努力。该书第 5 版的三位作者分别为:Frank R. Giordano 教授,他曾任美国西点军校(美国军事学院, United States Military Academy)数学系系主任,现为美国海军研究生院(Naval Postgraduate School)教授,多年来一直是美国大学生数学建模竞赛(MCM)的主要组织者,也是美国大学生数学建模竞赛组委会的主任;William P. Fox 教授,他也曾在美国西点军校任教,现为美国海军研究生院教授,他是美国中学生数学建模竞赛(HiMCM,即由 COMAP 于 1999 年开始组织的美国中学生数学建模竞赛)组委会的主任;Steven B. Horton,他是美国西点军校的教授。三位作者在应用数学研究、数学建模和微积分的教学方面富有经验并著有多部广受欢迎的教材。

本书可以作为我国从事数学建模教学的教师学习和钻研的素材。由于本书对于用到的数学

知识力求深入浅出,涉及的应用领域又相当广,因此也适合作为各类高校数学教师的教学参考书和学生的课外读物或参加大学生数学建模竞赛的培训教材.

本书是在第3版中译本(2005年机械工业出版社出版)、第4版中译本(2009年机械工业出版社出版)的基础上,按照第5版原版修订而成的.全书由以下几位教授共同完成:前言、网站内容和第1、2、8章由叶其孝翻译,第3、4章由孙山泽翻译,第5、6、9章和附录A由姜启源翻译,第7、10、13章由谢金星翻译,第11、12章和部分习题答案由唐云翻译.叶其孝通校了全部译文.第4版中译本的第9、10章及附录B、C、D(由王强等翻译)已不在本书中,原文分别作为第5版的第14、15章及附录B、C、D放在网站上,相应的译文可到华章网站([www.hzbook.com](http://www.hzbook.com))下载.

感谢机械工业出版社华章公司在引进本书以及编辑、出版过程中所做的努力,使广大读者及时得到本书的中译本.

译 者

2014年6月于北京

# 前言

为及早向学生传授建模的知识,本教材的第1版是为了在讲授商业或工程微积分基础课程的同时或紧随其后开设数学建模课而构思设计的.在第2版中,我们加进了离散动力系统、线性规划和数值搜索法以及概率建模入门等内容.此外,我们扩写了有关模拟(仿真)引论这一节.在第3版中,我们把某些简单动力系统的求解方法列入本书以揭示解的长期行为.我们在利用微分方程进行建模这一章中加进了基本的数值解法.在第4版中,我们增加了讨论图论建模的新的一章.图论是逐渐受到关注的对当代可能发生问题的建模进行深入研究的一个领域.本章试图从数学建模的角度来介绍图论并鼓励学生对图论进行更深入的学习.我们还在用微分方程建模这一章中增加了新的两节:有关分离变量和线性方程的讨论.本书的许多读者表达了如下的愿望:应该将一阶微分方程的解析解作为学习数学建模课程的一部分包含在教材中.在第5版中我们新增加了两章——第9章“决策论建模”和第10章“博弈论”.决策论,也称为决策分析,是为了帮助人们在包含机会和风险的复杂情景下的多种备选方案中做出选择的数学模型的集成.博弈论则扩展了决策论以包括各种决策,在这种决策下决策者所做出决策的支付依赖于另外一个或多个决策者的决策.我们讲述了完全和部分冲突博弈.

本教材组织为两大部分:第一部分离散建模(第1~10章和第14章),第二部分连续建模(第11~13章和第15章).采用这种组织结构,可以在不要求用微积分的第一部分的基础上教授完整的建模课程.第二部分讨论基于最优化和微分方程的连续建模,可以和大学一年级的微积分课程同时讲授.本教材涉及数学建模过程中的所有阶段.本教材的网站([http://www.cengage.com/math/book\\_content/0495011592\\_giordano/student\\_cd/START\\_HERE.html](http://www.cengage.com/math/book_content/0495011592_giordano/student_cd/START_HERE.html))包括了软件、额外的建模情景和研究课题,以及到美国大学生数学建模竞赛(Mathematical Contest in Modeling, MCM)过去赛题的链接.我们要感谢 Sol Garfunkel 和数学及其应用联合会(Consortium for Mathematics and its Applications, COMAP)的职员为制作网站所做的工作以及对本前言后面标题为“教学资源”部分中提及的建模活动的支持.

## 目标和定位

本课程一直是学习数学和应用数学之间的桥梁.本书向学生提供了在学习数学的早期就了解应用问题的各部分是怎样捏合在一起的机会,包含大量数学科学、运筹学、工程、管理和生命科学等许多学术领域中常见的有意义和实际的问题.

本教材介绍完整的建模过程,使学生实践以下数学建模的各个方面并能增强解决问题的能力:

1. 创造性和经验模型的构建:给定一种现实情景,学习识别问题、做出假设和收集数据、提出模型、测试假设、必要时精炼模型、在情况适宜时看看模型和数据是否一致,以及分析模型的基本数学结构以评价并不完全精确地满足假设时对结论的敏感性.

2. 模型分析:给定一个模型,学会反向推理以揭示那些不一定是显式表示的基本假设,审慎严谨地评估这些假设和手头要处理的情景相符合的程度,并估计不完全精确地满足假设时



对结论的敏感性.

3. 模型研究: 学生要研究一个特定的领域以获得对某些行为(性态)的更深入理解, 并学会使用早已创建或早已知晓的模型和知识.

### 对学生基础知识的要求和课程内容

因为我们的愿望是尽可能早地在课程中向学生传授建模的经验, 所以仅在学习第 11、12 和 13 章时需要学生对一元微积分有基本的了解. 尽管在建模过程中也要教某些不熟悉的数学概念和思想, 但重点是应用中学毕业生早已了解的数学知识. 第一部分尤其如此. 建模课程将激励学生去学习诸如线性代数、微分方程、最优化和线性规划、数值分析、概率论和统计学这样的更高级的课程. 这些课程的作用在全书中都做了提示.

此外, 本教材中的情景和习题不是作为特定数学方法的应用而设计的. 这些情景和习题要求学生具有创造性智慧, 能运用基本概念去求得没有确定答案的问题的合理解决方案. 本教材没有详细讲解某些数学方法(例如, 蒙特卡罗模拟、曲线拟合和量纲分析), 因为它们常常不是大学教材的正式内容. 教师应该发现本教材在通过习题和研究课题来满足学生的特殊需要而改编教材方面有很大的灵活性. 我们用本书既教过本科生的课程也教过研究生的课程, 甚至用作教师讨论班的基本内容.

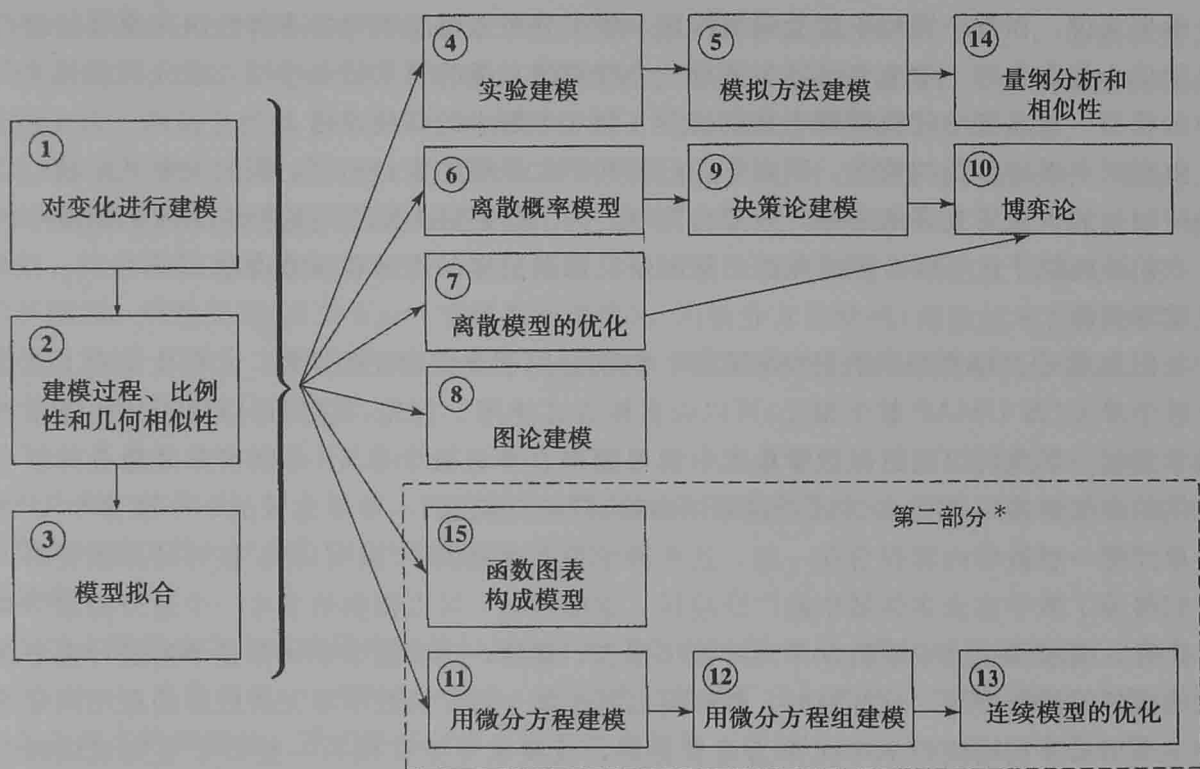
### 本教材的内容组织

借助于图 1 能最好地了解本教材的内容组织. 前 10 章和第 14 章组成第一部分, 只要求预微积分(pre-calculus)<sup>⊖</sup>课程的数学知识作为必需的预备知识. 我们从应用简单的有限差分方程对变化进行建模的思想开始. 对学生来说, 这种方法是相当直观的, 而且为我们提供了若干具体模型来继续支持第 2 章对建模过程的讨论. 我们在第 2 章中对模型进行分类、分析建模过程以及构建在后两章中要再讨论的若干比例模型或子模型. 第 3 章向学生讲述用特殊类型的曲线去拟合所收集数据集的三个准则, 重点是最小二乘准则. 第 4 章讨论怎样抓住所收集到的数据集的趋势. 在这种经验模型的构建过程中, 我们从用简单的单项式模型去近似地拟合所收集到的数据集开始, 并逐渐过渡到更为复杂的插值模型, 包括多项式光滑模型和三次样条模型. 第 5 章讨论了模拟模型. 用一个经验模型来拟合某些收集到的数据, 然后用蒙特卡罗模拟来复制所考察的行为或性态. 这种讲述方式最终促进了对概率论和统计学的学习.

第 6 章提供了概率建模的一个引论, 在前面讲过的情景和分析的基础上介绍了马尔可夫过程、可靠性以及线性回归等论题. 第 7 章利用第 3 章提出的另外两个准则讲述了寻求最优拟合模型的问题. 线性规划是用准则之一来寻求“最优”模型的方法, 数值搜索方法可以作为另一个准则. 最后介绍包括二分法和黄金分割法在内的数值搜索方法. 第 9 和 10 章讨论具有风险和不确定性的决策问题, 这些问题中或者只有一个决策者(第 9 章)或者有两个或多个决策者(第 10 章). 然后第一部分就跳到第 14 章, 专讲在物理科学和工程中极其重要的论题——量纲分析.

第二部分用来学习连续模型. 在第 11 和 12 章中我们对动态的(随时间变化的)情景进行建模. 这两章是建立在第 1 章讲述的离散分析的基础上的, 但现在考虑的是时间连续变化的情景. 第 13 章专讲连续优化. 第 15 章讨论连续图形模型的构建, 探究所构建模型的

⊖ 在美国许多学校开设预微积分(pre-calculus)课程, 作为正式选修微积分课程前的必修课. ——译者注



\* 第二部分要求一元微积分作为并修课程。

图1 章节组织和讲授次序

敏感性，这些模型构建在假设的基础上。学生有机会来求解只用到初等微积分的连续优化问题，该章还介绍了约束优化问题。

### 学生研究课题

学生研究课题是任何建模课程必不可少的组成部分。本教材包括了创造性模型和经验模型的构建、模型分析和模型研究方面的研究课题。因此我们建议将包括数学建模所有三个方面的研究课题组合构成一门课程。如果研究课题提出的情景没有唯一解，那么这些课题就是最有启发性的。某些研究课题用到真实的数据，这些数据或者是提供给学生的，或者是学生不难收集到的。把个人和小组的研究课题结合起来也是很重要的。在教师希望开发学生的个人建模技巧时，采用个人研究课题是很合适的。在课程的较早阶段，采用小组研究课题，将给学生一次“合力攻关”聚会的非常兴奋、激动的经验。本教材推荐了多种多样的研究课题，诸如构建各种情景的模型，完成 UMAP 的教学单元<sup>⊖</sup>，或研究教材、课堂中作为例子讲述的模型等。对于

⊖ 由 COMAP 公司研发和销售分发的 UMAP 教学单元 (Module)。UMAP 是 Undergraduate Mathematics and Its Applications (大学数学及其应用) 的缩写，同时也是在美国大学数学教学方面很有影响的季刊《The Journal of Undergraduate Mathematics and Its Applications》的缩写，该刊每年第三期刊登一年一度的美国大学生数学建模竞赛 (Mathematical Contest in Modeling, MCM) 和跨学科建模竞赛 (Interdisciplinary Contest in Modeling, ICM) 的总结、优秀论文和对优秀论文的评述。Module 是模块的意思，但在教学中它还有如下的意思：A unit of education or instruction with a relatively high teacher-to-student ratio, in which a single topic or a small section of a broad topic is studied for a given period of time (一种有相当高师生比的教育或教授单元，其中的单个论题或一个大论题的小部分在给定阶段的时间内学习)。——译者注

每个学生来说,在整个课程中接受模型构建、模型分析或模型研究的多样性研究课题的组合并建立起信心是重要的.学生也可能会选择一个特别感兴趣的情景研制模型,或分析在另一门课程中的模型.在典型的建模课程中我们推荐 5 到 8 个短小的研究课题.

就指派本教材涉及的情景、家庭作业习题和研究课题的数目而言,我们发现采用精心且完整地研制过的少量研究课题来做,效果会更好.为了能在更大范围内选择许多应用领域中的问题,我们还提供了比可以合理指派的习题和研究课题更多的习题和研究课题.

### 教学资源

我们发现 COMAP 提供的资料非常好,特别适用于我们建议的课程.大学生课堂上适用的单个教学单元(即 UMAP 教学单元)可以以多种方式使用.首先,它们可以用于某些课堂教学的教学素材.学生可以通过做教学单元中的习题来自学该教学单元(可以很方便地去掉教学单元提供的详细解答).另一种方式就是采用本教材“研究课题”小节中建议的一个或多个 UMAP 教学单元把一组教学内容捏合在一起.这些教学单元也提供了“模型研究”极好的原始资料,因为它们覆盖了数学在众多领域中的广泛应用.这样做时,可以提供给学生一个适当的教学单元进行研究,要求学生完成该教学单元并做出报告.最后,这些教学单元都是学生进行模型构建研究的极好的情景资源.这样做时,教师可以基于某个特定的教学单元所处理的应用问题给学生写一个情景并利用该教学单元作为背景材料,或要求学生在稍后一些日子里完成该教学单元.本教材的网站中包括教材中提及的大多数 UMAP 教学单元.想获得新开发的跨学科课题的有关信息,可以写信给 COMAP,地址是 57 Bedford Street, Suite 210, Lexington, MA 02173,或打电话 1-800-772-6627 给 COMAP,或发电子邮件给 [order@comap.com](mailto:order@comap.com).

学生小组研究课题的主要来源就是美国大学生数学建模竞赛(MCM)和跨学科建模竞赛(ICM).可以通过网站提供的链接来获得这些课题,为了适合所教班级的特定目标,教师要做一些修改.这些研究课题也是培训拟参加 MCM 和 ICM 的参赛队的极好资源,当前这两个竞赛是在美国国家安全局(National Security Agency, NSA)、美国工业与应用数学学会(Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM)、美国运筹学和管理科学学会(Institute for Operations Research and the Management Sciences, IORMS)以及美国数学协会(Mathematical Association of America, MAA)的资助下由 COMAP 主办的.有关竞赛的更多信息可以与 COMAP 联系或访问其网站 [www.comap.com](http://www.comap.com).

### 技术的作用

技术是使用本教材来做数学建模的一个不可缺少的部分.技术可以用来支持所有各章中的模型求解.我们决定把各种技术的使用放在网站上,而不是把各种各样的技术直接纳入教材里模型的解释中.在网站上,学生可以找到用 Microsoft® Excel®, Maple®, Mathematica® 以及德州仪器公司生产的包括 TI-83 和 84 系列在内的图形计算器写的样板程序.

我们在以下课题(用 Maple 的指令和编程方法可以很好地支持这些课题)的讨论中解释 Maple 的使用方法:差分方程、比例性、拟合模型(最小二乘法)、经验模型、模拟、线性规划、量纲分析、用微分方程建模、用微分方程组建模以及连续模型的优化.网站上提供了出现于所提及的各章中的解释性例子的 Maple 活页练习题.

用 Mathematica 来阐述它们在差分方程、比例性、拟合模型(最小二乘法)、经验模型、模拟、线性规划、图论、量纲分析、用微分方程建模、用微分方程组建模以及连续模型的优化中的使用方法. 网站上提供了有关章节中解释性例子所用到的数学的电子数据表格.

Excel 是一种电子数据表格, 用它可以得到数值解, 而且可以方便地得到图形. 因此, 用 Excel 来解释迭代过程和差分方程的图形解. 它也可以用作计算和画出以下内容的图形: 比例性函数、拟合模型、经验模型(此外, 它还可以用来做差分表, 构造并画三次样条的图形)、蒙特卡罗模拟、线性规划(有关 Excel 求解器的说明)、用微分方程建模(用欧拉和龙格-库塔方法的数值近似)、用微分方程组建模(数值解)以及离散和连续模型的优化(诸如二分法和黄金分割搜索那样的单变量优化的搜索方法).

TI 计算器也是一种强有力的技术工具. 本教材的许多内容可以用 TI 计算器来完成. 我们用差分方程、比例性、拟合模型、经验模型(幂次阶梯和其他变换)、模拟以及微分方程(构造数值解的欧拉方法)来说明 TI 计算器的使用方法.

### 致谢

我们永远感谢在本书的研究和编写过程中给予帮助的每个人. 我们特别要感谢(已退休的) Jack M. Pollin 准将和 Carroll Wilde 博士, 感谢他们激发了我们教数学建模课程的兴趣以及对我们事业的支持和指导. 我们要感谢许多同事在审阅第 1 版的手稿以及在提出问题和修改意见方面的帮助, 他们是 Rickey Kolb、John Kenelly、Robert Schmidt、Stan Leja、Bard Mansager, 特别是 Steve Maddox 和 Jim McNulty. 我们要特别感谢 Maurice D. Weir 作为前 4 版的作者之一所做出的贡献. 我们还要特别感谢 Richard West 对第 5 版的审稿所起的作用.

我们还受惠于本教材涉及的许多 UMAP 材料的作者或合作者, 他们是 David Cameron、Brindell Horelick、Michael Jaye、Sinan Koont、Stan Leja、Michael Wells 和 Carroll Wilde. 此外, 我们要感谢 Solomon Garfunkel 以及整个 COMAP 公司的职员在本教材所有 5 版的出版中给予的合作: 他们是在所有层次上数学建模的先锋和捍卫者. 我们也要感谢 Tom O'Neil 及其学生对网站的制作所做出的贡献以及在支持建模活动方面的有益建议. 我们要感谢 Amy H. Erickson 博士, 感谢她对网站所做出的很多贡献.

感谢第 5 版的审稿人: John Dossey、Robert Burks 和 Richard West.

任何一本数学教材的产生都是一个复杂的过程, 我们感到特别幸运的是有 Brooks/Cole 和 Cengage 出版社高质量和创造性的职员队伍. 我们要感谢在第 5 版的出版过程中和我们一起工作的 Cengage 的所有工作人员, 特别要感谢策划编辑 Molly Taylor、课题开发编辑 Shaylin Walsh-Hogan. 我们也要感谢 Prashanth Kamavarapu 和 PreMedia Global 生产公司提供的生产服务.

# 网 站 内 容

## 大学数学应用教学单元

大学数学应用教学单元(The Undergraduate Applications in Mathematics modules, UMAP)是由数学及其应用联合会股份有限公司(Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., COMAP, 电话为 800-772-6627, 网址为 [www.comap.com](http://www.comap.com))研制和生产的. UMAP 特别适合作为我们建议的数学建模课程的补充材料. 以下的 UMAP 都可以作为研究课题、进一步阅读材料或者额外增加的习题, 从网站中很容易得到它们.

- UMAP 60~62      资源分配(The Distribution of Resources)
- UMAP 67          神经系统的建模(Modeling the Nervous System)
- UMAP 69          羊的消化过程(The Digestive Process of Sheep)
- UMAP 70          遗传学中的选择(Selection in Genetics)
- UMAP 73          流行病学(Epidemics)
- UMAP 74          渗透性示踪法(Tracer Methods in Permeability)
- UMAP 75          范尔德曼模型(Feldman's Model)
- UMAP 208        一般均衡: I(General Equilibrium: I)
- UMAP 211        人的咳嗽(The Human Cough)
- UMAP 232        单种反应物反应动力学(Kinetics of Single-Reactant Reactions)
- UMAP 234        放射性链: 母体及其生产物(Radioactive Chains: Parents and Daughters)
- UMAP 269        蒙特卡罗方法: 随机数字的应用(Monte Carlo: The Use of Random Digits)
- UMAP 270        拉格朗日乘数法: 在经济学中的应用(Lagrange Multipliers: Applications to Economics)
- UMAP 292 ~ 293    倾听地球: 可控震源地震学(Listening to the Earth: Controlled Source Seismology)
- UMAP 294        差别定价和消费者剩余(Price Discrimination and Consumer Surplus)
- UMAP 303        计划生育创新技术的扩散(The Diffusion of Innovation in Family Planning)
- UMAP 304        盲目支持者(党羽)的增长 I(Growth of Partisan Support I)
- UMAP 305        盲目支持者(党羽)的增长 II(Growth of Partisan Support II)
- UMAP 308        理查得森军备竞赛模型(The Richardson Arms Race Model)
- UMAP 311        军备竞赛的几何(The Geometry of the Arms Race)
- UMAP 321        借助于最小二乘法准则的曲线拟合(Curve Fitting via the Criterion of Least Squares)
- UMAP 322        差分方程及其应用(Difference Equations with Applications)

- UMAP 327 调整速率：直接速率(Adjusted Rates: The Direct Rate)
- UMAP 331 上升-下降(Ascent-Descent)
- UMAP 332 预算过程 I(The Budgetary Process I)
- UMAP 333 预算过程 II(The Budgetary Process II)
- UMAP 340 泊松随机过程(The Poisson Random Process)
- UMAP 341 微积分中极大-极小理论的 5 个应用(Five Applications of Max-Min Theory from Calculus)
- UMAP 376 微分、曲线概述和成本(代价)函数(Differentiation, Curve Sketching, and Cost Functions)
- UMAP 453 二维情形的线性规划：I(Linear Programming in Two Dimensions: I)
- UMAP 454 二维情形的线性规划：II(Linear Programming in Two Dimensions: II)
- UMAP 468 变分法及其在力学中的应用(Calculus of Variations with Applications in Mechanics)
- UMAP 506 汽车方向标和操纵轮子转向之间的关系(The Relationship Between Directional Heading of an Automobile and Steering Wheel Deflection)
- UMAP 517 拉格朗日乘数法和多级火箭的设计(Lagrange Multipliers and the Design of Multistage Rockets)
- UMAP 518 寡头卖主垄断的竞争(Oligopolistic Competition)
- UMAP 520 随机游动：随机过程引论(Random Walks: An Introduction to Stochastic Processes)
- UMAP 522 无约束优化(Unconstrained Optimization)
- UMAP 526 量纲分析(Dimensional Analysis)
- UMAP 539 如果你这样做，我就这样做……个人的阈值和群体行为(I Will If You Will...Individual Threshold and Group Behavior)
- UMAP 551 生命的节律：经验拟合模型介绍(The Pace of Life: An Introduction to Empirical Model Fitting)
- UMAP 564 搞清楚量纲(Keeping Dimensions Straight)
- UMAP 590 随机数(Random Numbers)
- UMAP 610 鲸鱼和磷虾：一个数学模型(Whales and Krill: A Mathematical Model)
- UMAP 628 竞争捕猎模型(Competitive Hunter Models)
- UMAP 675 洛特卡-伏泰勒捕食模型(The Lotka-Volterra Predator-Prey Model)
- UMAP 684 利用初等矩阵的线性规划(Linear Programming via Elementary Matrices)
- UMAP 709 血细胞种群模型、动态疾病和混沌(A Blood Cell Population Model, Dynamical Diseases, and Chaos)
- UMAP 737 几何规划(Geometric Programming)



## UMAP 738

## 哈代-维恩伯格均衡(The Hardy-Weinberg Equilibrium)

## 过去的数学建模竞赛试题

过去的数学建模竞赛试题是建模研究课题或者设计一个问题的极好的资料来源. 网站中提供了所有竞赛试题:

Mathematical Contest in Modeling(MCM): 1985~2012

Interdisciplinary Contest in Modeling(ICM): 1997~2012

High School Contest in Modeling(HiMCM): 1998~2012

## 充满活力的跨学科应用研究课题(ILAP)

充满活力的跨学科应用研究课题(Interdisciplinary Lively Applications Projects, ILAP)是由数学及其应用联合会股份有限公司(Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., COMAP, 电话为 800-772-6627, 网址为 [www.comap.com](http://www.comap.com))研制和生产的. ILAP 是与另一个学科作为合作伙伴共同设计的, 既从数学的角度也从另一个学科的角度进行深入的模型研制和分析. 我们发现以下 ILAP 特别适合于数学建模课程.

- 汽车资金(Car Financing)
- 警惕氯仿(三氯甲烷 II)(Choloform Alert)
- 饮用水(Drinking Water)
- 电力(Electric Power)
- 森林火灾(Forest Fires)
- 博弈(对策)论(Game Theory)
- 把盐排出去(Getting the Salt Out)
- 保健(Health Care)
- 医疗保险费(Health Insurance Premiums)
- 单足跳环圈(Hopping Hoop)
- 桥梁分析(Bridge Analysis)
- 赠品专款(Lagniappe Fund)
- 湖泊污染(Lake Pollution)
- 发射航天飞机(Launch the Shuttle)
- 环保警察(Pollution Police)
- 岔道和高速公路(Ramps and Freeways)
- 红光和蓝光光盘(Red & Blue CDs)
- 药物中毒(Drug Poisoning)
- 航天飞机(Shuttle)
- 储备鱼塘(Stocking a Fish Pond)
- 幸存的早期美国人(Survival of Early Americans)
- 红绿灯(Traffic Lights)

- 旅游天气预报(Travel Forecasting)
- 预付学费(Tuition Prepayment)
- 机动车尾气(Vehicle Emissions)
- 水的净化(Water Purification)

### 技术和软件

为了使用教材、研究课题和 ILAP 中所讨论的技术手段，数学建模常常需要技术的帮助。我们提供了利用电子表格(Excel)、计算机代数系统(Maple<sup>®</sup>、Mathematica<sup>®</sup>、Matlab<sup>®</sup>)以及图形计算器(TI)等技术的广泛的例子，应用领域包括：

- |            |               |
|------------|---------------|
| • 差分方程     | • 可靠性模型       |
| • 拟合模型     | • 线性规划        |
| • 经验模型的构建  | • 黄金分割搜索      |
| • 分割的差分表   | • 常微分方程的欧拉方法  |
| • 三次样条     | • 常微分方程组的欧拉方法 |
| • 蒙特卡罗模拟模型 | • 非线性最优化      |
| • 离散概率模型   |               |

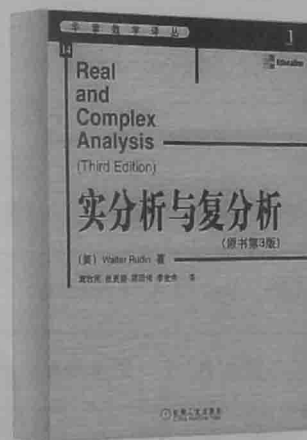
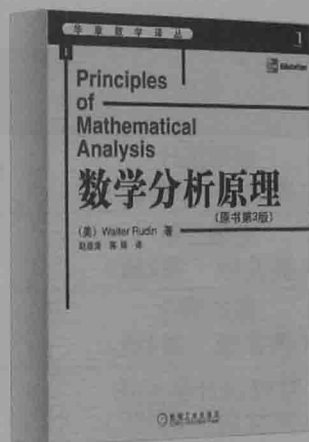
### 技术实验室

包括在实验室环境下为学生设计的例子和习题。有以下论题：

- |           |            |
|-----------|------------|
| • 差分方程    | • 线性规划     |
| • 比例性     | • 离散优化搜索方法 |
| • 拟合模型    | • 常微分方程    |
| • 经验模型的构建 | • 常微分方程组   |
| • 蒙特卡罗模拟  | • 连续优化搜索方法 |



## 推荐阅读



### ■ 时间序列分析及应用：R语言（原书第2版）

作者：Jonathan D. Cryer Kung-Sik Chan  
ISBN: 978-7-111-32572-7  
定价：48.00元

### ■ 随机过程导论（原书第2版）

作者：Gregory F. Lawler  
ISBN: 978-7-111-31544-5  
定价：36.00元

### ■ 数学分析原理（原书第3版）

作者：Walter Rudin  
ISBN: 978-7-111-13417-6  
定价：28.00元

### ■ 实分析与复分析（原书第3版）

作者：Walter Rudin  
ISBN: 978-7-111-17103-9  
定价：42.00元

### ■ 数理统计与数据分析（原书第3版）

作者：John A. Rice  
ISBN: 978-7-111-33646-4  
定价：85.00元

### ■ 统计模型：理论和实践（原书第2版）

作者：David A. Freedman  
ISBN: 978-7-111-30989-5  
定价：45.00元

# 目 录

译者序

前言

网站内容

第 1 章 对变化进行建模 .....	1
例 1 测试比例性 .....	1
1.1 用差分方程对变化进行建模 .....	3
例 1 储蓄存单 .....	3
例 2 抵押贷款买房 .....	4
1.2 用差分方程近似描述变化 .....	6
例 1 酵母培养物的增长 .....	7
例 2 再论酵母培养物的增长 .....	7
例 3 接触性传染病的传播 .....	9
例 4 血流中地高辛的衰减 .....	10
例 5 冷冻物体的加热 .....	10
1.3 动力系统的解法 .....	13
例 1 再论储蓄存单 .....	13
例 2 污水处理 .....	15
例 3 地高辛处方 .....	18
例 4 投资年金 .....	18
例 5 活期储蓄账户 .....	20
例 6 再论投资年金 .....	22
1.4 差分方程组 .....	26
例 1 汽车租赁公司 .....	26
例 2 特拉法尔加战斗 .....	28
例 3 竞争猎兽模型——斑点 猫头鹰和隼 .....	31
例 4 一个支线机场的旅客趋势 .....	34
例 5 离散流行病模型 .....	37
第 2 章 建模过程、比例性和几何 相似性 .....	43
2.1 数学模型 .....	44
例 1 车辆的停止距离 .....	48
2.2 利用比例性进行建模 .....	52

例 1 开普勒第三定律 .....	53
2.3 利用几何相似性进行建模 .....	60
例 1 从不动的云层落下的雨滴 .....	61
例 2 钓鱼比赛中的建模 .....	62
例 3 “骇鸟”尺寸的建模 .....	65
2.4 汽车的汽油里程 .....	70
2.5 体重和身高、力量和灵活性 .....	73
第 3 章 模型拟合 .....	77
3.1 用图形为数据拟合模型 .....	79
3.2 模型拟合的解析方法 .....	83
3.3 应用最小二乘准则 .....	88
3.4 选择一个好模型 .....	92
例 1 车辆的停止距离 .....	94
例 2 比较准则 .....	96
第 4 章 实验建模 .....	99
4.1 Chesapeake 海湾的收成和其他的 单项模型 .....	99
例 1 收获蓝鱼 .....	102
例 2 收获蓝蟹 .....	102
4.2 高阶多项式模型 .....	107
例 1 带式录音机的播放时间 .....	108
4.3 光滑化：低阶多项式模型 .....	113
例 1 再论带式录音机的播放时间 .....	113
例 2 再论带式录音机的播放时间 .....	116
例 3 车辆的停止距离 .....	117
例 4 酵母培养物的增长 .....	119
4.4 三阶样条模型 .....	122
例 1 再论车辆的停止距离 .....	128
第 5 章 模拟方法建模 .....	134
5.1 确定行为的模拟：曲线下的面积 .....	135
5.2 随机数的生成 .....	138
5.3 随机行为的模拟 .....	141
5.4 存储模型：汽油与消费需求 .....	147
5.5 排队模型 .....	154

例 1 港口系统 .....	154	8.5 与数学规划的联系 .....	239
例 2 早高峰时间 .....	160	例 1 顶点覆盖 .....	239
第 6 章 离散概率模型 .....	163	例 2 最大流 .....	241
6.1 离散系统的概率模型 .....	163	第 9 章 决策论建模 .....	244
例 1 再论汽车租赁公司 .....	163	9.1 概率和期望值 .....	245
例 2 投票趋势 .....	164	例 1 掷骰子 .....	247
6.2 部件和系统可靠性建模 .....	167	例 2 人寿保险 .....	247
例 1 串联系统 .....	167	例 3 轮盘赌 .....	247
例 2 并联系统 .....	168	例 4 改建现有的高尔夫球场还是 建造新的高尔夫球场 .....	247
例 3 串并联组合系统 .....	168	例 5 再论改建现有的高尔夫球场 还是建造新的高尔夫球场 .....	248
6.3 线性回归 .....	170	9.2 决策树 .....	249
例 1 美国黄松 .....	171	例 1 建造新的高尔夫球场还是改建 现有的高尔夫球场 .....	249
例 2 再论钓鱼比赛 .....	172	例 2 再论 Hardware & Lumber 公司的 决策 .....	252
第 7 章 离散模型的优化 .....	175	例 3 地方电视台 .....	252
7.1 优化建模概述 .....	175	9.3 序列决策和条件概率 .....	255
例 1 确定生产计划方案 .....	176	例 1 拉斯维加斯赌场轮盘赌 .....	255
例 2 航天飞机的载货问题 .....	178	例 2 再论拉斯维加斯赌场轮盘赌 .....	257
例 3 分段线性函数逼近 .....	178	例 3 再论 Hardware & Lumber 公司 序列决策 .....	258
7.2 线性规划(一): 几何解法 .....	184	9.4 利用各种准则的决策 .....	262
例 1 木匠问题 .....	184	例 1 投资与状态 .....	263
例 2 数据拟合问题 .....	186	例 2 投资策略 .....	265
7.3 线性规划(二): 代数解法 .....	190	第 10 章 博弈论 .....	270
例 1 木匠问题的代数解法 .....	191	10.1 博弈论: 完全冲突 .....	270
7.4 线性规划(三): 单纯形法 .....	193	例 1 一个有纯策略的完全冲突博弈 .....	270
例 1 再论木匠问题 .....	196	例 2 一个有混合策略的完全冲突博弈: 投球手和击球手的较量 .....	272
例 2 使用单纯形表 .....	199	例 3 一个部分冲突的博弈: 囚徒困境 .....	273
7.5 线性规划(四): 敏感性分析 .....	200	10.2 完全冲突博弈的线性规划模型: 纯策略与混合策略 .....	276
7.6 数值搜索方法 .....	205	例 1 投球手和击球手的较量 .....	276
例 1 二分搜索方法 .....	207	例 2 再论 Home Depot 和 Ace 五金店的 位置 .....	288
例 2 黄金分割搜索方法 .....	209	10.3 再论决策论: 与大自然的博弈 .....	291
例 3 再论模型拟合准则 .....	210	例 1 一个制造企业与经济 .....	291
例 4 工业流程优化 .....	211		
第 8 章 图论建模 .....	214		
8.1 作为模型的图 .....	214		
8.2 图的描述 .....	220		
8.3 图模型 .....	221		
8.4 利用图模型来解决问题 .....	232		
例 1 求解最短路径问题 .....	232		
例 2 求解最大流问题 .....	234		

例 2 再论投资策略 .....	295	例 8 .....	363
10.4 确定纯策略解的其他方法 .....	297	例 9 再论牛顿冷却定律 .....	364
10.5 $2 \times 2$ 完全冲突博弈的其他 简便解法 .....	303	例 10 再论资源有限的人口增长 .....	365
例 1 让击球手和投球手较量中的 期望值相等 .....	304	11.7 线性方程 .....	367
例 2 击球手和投球手的零头法 .....	306	例 1 .....	371
10.6 部分冲突博弈: 经典的两人博弈 .....	308	例 2 .....	372
例 1 没有交流的囚徒困境 .....	310	例 3 .....	372
例 2 威胁与承诺的组合 .....	313	例 4 水污染 .....	373
10.7 建模例子 .....	317	第 12 章 用微分方程组建模 .....	376
例 1 Bismarck 海战 .....	317	12.1 一阶自治微分方程组的图形解 .....	376
例 2 足球中的罚点球 .....	319	例 1 线性自治微分方程组 .....	377
例 3 再论击球手和投球手的较量 .....	320	例 2 非线性自治微分方程组 .....	378
例 4 古巴导弹危机 .....	323	12.2 竞争捕猎模型 .....	380
例 5 2007~2008 年的编剧协会 罢工事件 .....	326	12.3 捕食者-食饵模型 .....	386
第 11 章 用微分方程建模 .....	331	12.4 两个军事方面的例子 .....	392
11.1 人口增长 .....	333	例 1 Lanchester 战斗模型 .....	392
11.2 对药剂量开处方 .....	340	例 2 军备竞赛的经济方面 .....	397
11.3 再论刹车距离 .....	346	12.5 微分方程组的欧拉方法 .....	401
11.4 自治微分方程的图形解 .....	348	例 1 方程组的欧拉方法应用 .....	401
例 1 画相直线及解曲线的草图 .....	349	例 2 轨线和解曲线 .....	402
例 2 汤的冷却 .....	351	例 3 连续的 SIR 传染病模型 .....	404
例 3 再论逻辑斯谛增长 .....	352	第 13 章 连续模型的优化 .....	408
11.5 数值近似方法 .....	353	13.1 库存问题: 送货费用和储存费用 最小化 .....	408
例 1 欧拉法的运用 .....	355	13.2 多变量函数的优化方法 .....	415
例 2 再论储蓄存单 .....	356	例 1 竞争性产品生产中的 利润最大化 .....	415
11.6 分离变量法 .....	359	例 2 非线性最小二乘 .....	419
例 1 .....	360	13.3 连续约束优化 .....	421
例 2 .....	361	例 1 石油转运公司 .....	421
例 3 .....	361	例 2 航天飞机的水箱 .....	423
例 4 .....	362	13.4 可再生资源的管理: 渔业 .....	424
例 5 .....	362	附录 A 美国大学生数学建模竞赛试题 (1985~2012) .....	431
例 6 .....	363	部分习题答案 .....	462
例 7 .....	363		

# 第 1 章 对变化进行建模

## 引言

为了更好地了解世界，人们常常用数学(例如，使用函数或方程)来描述某种特定现象。这种数学模型是现实世界现象的理想化，但永远不会是完全精确的表示。尽管任何模型都有其局限性，但是好的模型能提供有价值的结果和结论。在本章中我们将重点介绍对变化进行建模。

## 数学模型

在对现实对象进行建模时，人们常常对预测未来某个时刻变量的值感兴趣。变量可能是人口、房地产的价值或者患有一种传染病的人数。数学模型常常能帮助人们更好地了解一种行为或规划未来。可以把数学模型看做为了研究一种特定的实际系统或人们感兴趣的行为而设计的数学结构。如图 1-1 所示，从模型中，人们能得到有关该行为的数学结论，而阐明这些结论有助于决策者规划未来。

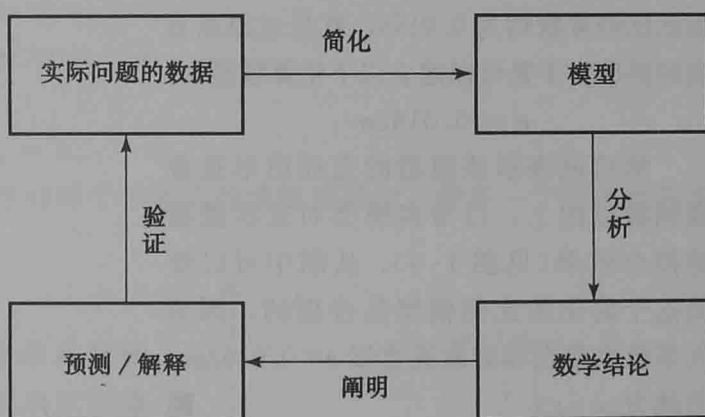


图 1-1 从考察实际数据开始的建模过程的流程图

## 简化

多数模型简化了现实的情况。一般情况下，模型只能近似地表示实际的行为。一种非常强有力的简化关系就是比例性。

**定义** 两个变量  $y$  和  $x$  是(互成)比例的，如果一个变量总是另一个变量的常数倍，即，如果对某个非零常数  $k$

$$y = kx$$

我们记为  $y \propto x$ 。

这个定义的意思是说  $y$  关于  $x$  的图形位于通过原点的一条直线上。在测试给定的数据集是否合理地呈现一种比例关系时，观察图形是有用的。如果比例性是合理的，那么一个变量对另一个变量的图形应该近似地位于通过原点的一条直线上。下面举一个例子。

### 例 1 测试比例性

考虑如图 1-2 所示的弹簧-质量系统。做一个测量弹簧的伸长作为置于弹簧末端的质量(以重量计)的函数的实验。表 1-1 为该实验收集到的数据。弹簧的伸长对于置于弹簧末端的质量(或重量)的散点图展现了它是过原点的一条近似直线(图 1-3)。

看来该数据遵从比例性法则，伸长  $e$  与质量  $m$  成比例，或者用符号表示为  $e \propto m$ 。该直线

看似通过原点. 用几何知识来观察数据是否合乎成比例的假设, 如果是的话, 就去估计斜率  $k$ . 在本例中, 假设这两种数据成比例看来是合理的, 所以选位于直线上的两点(200, 3.25)和(300, 4.875)来估算比例常数. 计算连接这两点的直线的斜率为:

表 1-1 弹簧-质量系统

质量	伸长	质量	伸长	质量	伸长	质量	伸长
50	1.000	200	3.250	350	5.675	500	8.000
100	1.875	250	4.375	400	6.500	550	8.750
150	2.750	300	4.875	450	7.250		

$$\text{斜率} = \frac{4.875 - 3.25}{300 - 200} = 0.01625$$

因此比例常数约为 0.0163, 就是过原点直线的斜率, 于是可以建立以下估算模型:

$$e = 0.0163m$$

然后把表示该模型的直线图形重叠画到散点图上, 以考察模型对这些数据的拟合效果(见图 1-4). 从图中可以看出这个简化的比例模型是合理的, 因为大多数点落在非常靠近直线  $e = 0.0163m$  的地方.

## 对变化进行建模

对变化进行建模的一个非常有用的范例就是

$$\text{未来值} = \text{现在值} + \text{变化}$$

人们往往希望根据现在知道的东西加上精心观测到的变化来预测未来. 在这种情形中, 可以先按照公式

$$\text{变化} = \text{未来值} - \text{现在值}$$

来研究变化.

通过收集一段时间中的数据并画出该数据的图形, 我们常常可以识别出能够抓住这种变化趋势的模型的模式. 如果这种行为是在离散时间段上发生的, 那么前面的模型构建就导致本章要介绍的差分方程. 如果行为在时间上是连续发生的, 那么模型构建就导致了第 11 章要介绍的微分方程. 这两者都是描述

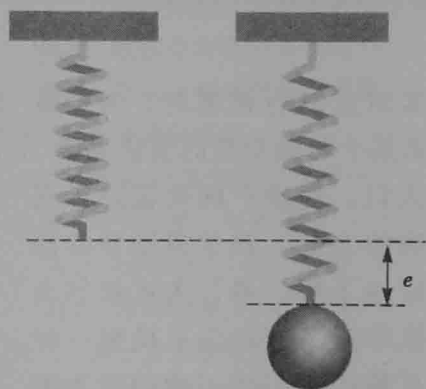


图 1-2 弹簧-质量系统

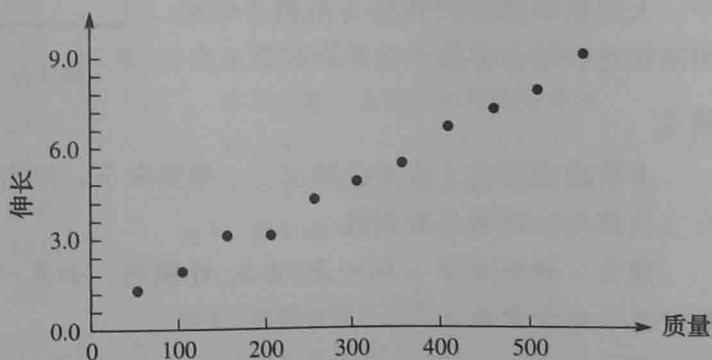


图 1-3 来自弹簧-质量系统的数据

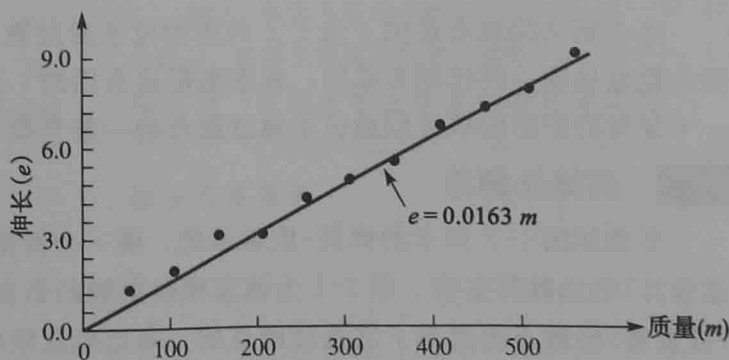


图 1-4 来自弹簧-质量系统的数据和比例模型直线

和预测行为变化的强有力的方法。

## 1.1 用差分方程对变化进行建模

在本节中我们将建立数学模型以描述所观察到的行为中的变化。当观察变化时，我们常常想要了解为什么变化以这样的方式发生，可能去分析不同的条件对行为的影响或者去预测将来会发生什么。数学模型可以使我们在影响行为的不同条件下做数学实验，以帮助我们更好地了解行为。

**定义** 数列  $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$  的一阶差分是

$$\Delta a_0 = a_1 - a_0$$

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1$$

$$\Delta a_2 = a_3 - a_2$$

$$\Delta a_3 = a_4 - a_3$$

对每个正整数  $n$ ，第  $n$  个一阶差分是

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

从图 1-5 可以看到，一阶差分表示该序列两个相邻值的增加或减少，即在一个时间周期里序列图中的垂直变化。

### 例 1 储蓄存单

考虑一开始价值为 1000 美元的储蓄存单在月利率为 1% 的条件下的累积价值。下面的数列表示该储蓄存单逐月的价值：

$$A = (1000, 1010, 1020.10, 1030.30, \dots)$$

其一阶差分为：

$$\Delta a_0 = a_1 - a_0 = 1010 - 1000 = 10$$

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 1020.10 - 1010 = 10.10$$

$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = 1030.30 - 1020.10 = 10.20$$

注意，一阶差分表示在一个时间周期里数列的变化，在储蓄存单的例子中即是所得的利息。

对发生在离散时间段上的变化的建模，一阶差分是有用的。在这个例子中，从一个月到一个月储蓄存单价值的变化仅仅是该月所得的利息。如果  $n$  是月数而  $a_n$  是  $n$  个月后储蓄存单的价值，那么每个月价值的变化(或者利息增长)由第  $n$  个差分

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 0.01a_n$$

来表示。可以把这个表达式改写为以下差分方程：

$$a_{n+1} = a_n + 0.01a_n$$

我们还知道一开始的存款 1000 美元(初值)，于是就得了以下动力系统模型：

$$a_{n+1} = 1.01a_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$a_0 = 1000$$

(1-1)

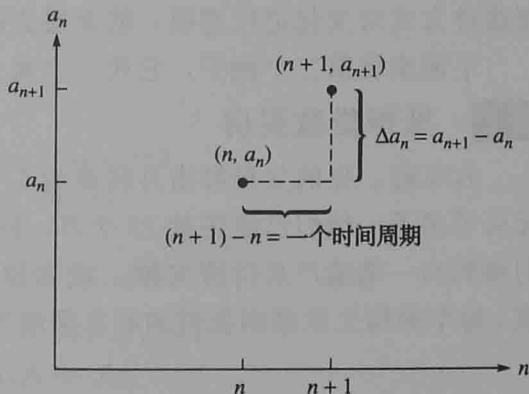


图 1-5 序列的一阶差分就是在一个时间周期里序列图中的增加



其中  $a_n$  是  $n$  个月后的利息累计总值. 因为  $n$  表示非负整数  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , 方程(1-1)可表示无穷多个代数方程, 称为动力系统. 动力系统能够描述从一个周期到下一个周期的变化. 知道了该序列中的某一项, 就可以通过差分方程算出紧接着它的下一项, 但是不能直接算出任意特定项的值(例如, 100 个周期后的储蓄值). 我们可以迭代这个序列到  $a_{100}$  来得到这项的值.

因为这是我们常常看到的变化, 通过表示或近似表示从一个周期到下一个周期的变化就可以构建差分方程. 修改一下这个例子, 如果要从账户中每月提款 50 美元, 那么一个周期里存款的变化就应该是该周期里挣的利息减去月提款, 或者如下表示:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 0.01a_n - 50$$

在大多数例子中, 用数学方式描述变化不会像这里所说的那样精确. 常常需要画出变化, 观察模式, 然后用数学术语来描述变化. 即, 试图寻求

$$\text{变化} = \Delta a_n = \text{某个函数 } f$$

变化可能是数据序列中前一项的函数(就像没有月提款的情形), 或者还包含某些外来的项(诸如上面提到的提款数或涉及周期  $n$  的一个表达式). 因此, 本章在构建表示变化的模型时, 是在离散时间段上对变化进行建模的, 可以用以下公式表达:

$$\text{变化} = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n = f(\text{该序列中的项, 外来项})$$

用这种方式对变化进行建模, 就是要去决定或近似决定表示该变化的函数  $f$ .

下面来看第二个例子, 它用一个差分方程精确地对现实世界中的行为建立模型.

## 例 2 抵押贷款买房

六年前, 你的父母筹措月利率为 1%、每月还款为 880.87 美元的 20 年贷款资金 80 000 美元买了房子. 他们已经还款 72 个月, 同时想知道他们还欠多少抵押贷款, 他们正在考虑用他们得到的一笔遗产来付清欠款. 或者他们可以重新根据偿还期长短, 以不同利率偿还抵押贷款. 每个周期欠款额因要付的利息而增加, 又因每月还款而减少:

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = 0.01b_n - 880.87$$

求解  $b_{n+1}$  并加进初始条件就给出了动力系统模型:

$$b_{n+1} = b_n + 0.01b_n - 880.87$$

$$b_0 = 80\,000$$

其中  $b_n$  表示  $n$  个月后的欠款. 因此

$$b_1 = 80\,000 + 0.01(80\,000) - 880.87 = 79\,919.13$$

$$b_2 = 79\,919.13 + 0.01(79\,919.13) - 880.87 = 79\,837.45$$

就给出了序列

$$B = (80\,000, 79\,919.13, 79\,837.45, \dots)$$

从  $b_2$  计算  $b_3$ , 从  $b_3$  计算  $b_4$ , 如此依次计算下去, 我们得到  $b_{72} = 71\,523.11$  美元. 该序列如图 1-6 所示.

我们来总结一下例 1 和例 2 中介绍的重要思路.



**定义** 一个序列就是定义域为全体非负整数集合上的一个函数, 其值域为实数的一个子集. 一个动力系统就是序列各项之间的一种关系. 数值解就是满足该动力系统的一张数值表.

在本节的习题中我们将讨论其他可以用差分方程来确切建模的行为. 下一节中, 我们将用差分方程来近似表示所观察到的变化. 在收集了变化的数据并识别出行为的模式后, 我们将用比例性概念来测试和拟合所提出的模型.

月 $n$	欠款额 $b_n$
0	80 000.00
1	79 919.13
2	79 837.45
3	79 754.96
4	79 671.64
5	79 587.48
6	79 502.49
7	79 416.64
8	79 329.94
9	79 242.37
10	79 153.92
11	79 064.59
12	78 974.37

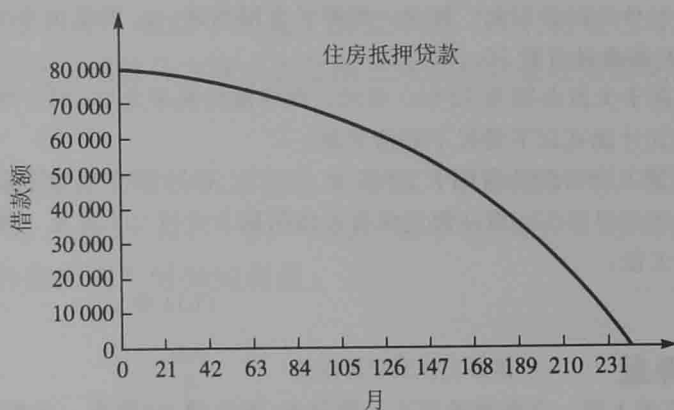


图 1-6 例 2 的序列和图



## 习题

### 序列

1. 写出下列序列的前五项  $a_0 \sim a_4$ :

(a)  $a_{n+1} = 3a_n, a_0 = 1$

(b)  $a_{n+1} = 2a_n + 6, a_0 = 0$

(c)  $a_{n+1} = 2a_n(a_n + 3), a_0 = 4$

(d)  $a_{n+1} = a_n^2, a_0 = 1$

2. 求序列第  $n$  项的公式.

(a)  $\{3, 3, 3, 3, 3, \dots\}$

(b)  $\{1, 4, 16, 64, 256, \dots\}$

(c)  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$

(d)  $\{1, 3, 7, 15, 31, \dots\}$

### 差分方程

3. 考察下列序列, 写出差分方程以表示作为序列中前一项的函数的第  $n$  个区间上的变化.

(a)  $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

(b)  $\{2, 4, 16, 256, \dots\}$

(c)  $\{1, 2, 5, 11, 23, \dots\}$

(d)  $\{1, 8, 29, 92, \dots\}$

4. 写出满足下列差分方程的序列的前五项:

(a)  $\Delta a_n = \frac{1}{2}a_n, a_0 = 1$

(b)  $\Delta b_n = 0.015b_n, b_0 = 1000$

(c)  $\Delta p = 0.001(500 - p_n), p_0 = 10$

(d)  $\Delta t_n = 1.5(100 - t_n), t_0 = 200$

### 动力系统

5. 代入  $n = 0, 1, 2, 3$ , 写出由下列动力系统表示的前四个代数方程:

(a)  $a_{n+1} = 3a_n, a_0 = 1$

(b)  $a_{n+1} = 2a_n + 6, a_0 = 0$

(c)  $a_{n+1} = 2a_n(a_n + 3), a_0 = 4$

(d)  $a_{n+1} = a_n^2, a_0 = 1$

6. 写出你认为可以用动力系统来建模的若干行为的名称.

### 确切地对变化进行建模

对习题 7~10, 写出能对所述情景的变化确切建模的动力系统的公式.

7. 目前你在储蓄账户上有月付利息为 0.5% 的存款 5000 美元, 你每个月再存入 200 美元.

8. 你的信用卡上有月付利息 1.5% 的欠款 500 美元. 你每月偿还 50 美元并且不再有新的欠款.
9. 你的父母正在考虑一项贷款期限 30 年、每月要支付 0.5% 利息的 100 000 美元抵押贷款. 试建立一个能够在 360 次付费后还清抵押贷款(借款)的月供  $p$  表示的模型. 提示: 如果  $a_n$  表示  $n$  个月后的欠款, 那么  $a_0$  和  $a_{360}$  表示什么呢?
10. 你的祖父母有一份养老金(年金). 每月把上一个月结余的 1% 作为利息自动存入养老金. 你的祖父母每月初要取出 1000 美元作为生活费用. 目前他们的养老金为 50 000 美元. 试用动力系统对养老金建模. 养老金会用光吗? 什么时候用光? 提示: 当养老金用光时,  $a_n$  的值为多少?
11. 对 0.5% 的利率重做习题 10.
12. 你当前的信用卡欠款余额为 12 000 美元, 而当前的利率为 19.9%/年. 利息是按月计算的. 确定什么样的月还款  $p$  美元才能在以下情况下还清欠款:
  - (a) 2 年, 假定不会有新的信用卡支付.
  - (b) 4 年, 假定不会有新的信用卡支付.
13. 再次考虑上面的习题 12. 现在假定你每月用信用卡支付 105 美元. 确定什么样的月还款  $p$  美元才能在以下情况下还清欠款:
  - (a) 2 年.
  - (b) 4 年.



### 研究课题

1. 随着汽油价格的上涨, 今年你希望买一辆新的(混合动力)汽车. 你把选择范围缩小到以下几种 2012 车型: Ford Fiesta、Ford Focus、Chevy Volt、Chevy Cruz、Toyota Camry Hybrid、Toyota Prius 和 Toyota Corolla. 每家公司都向你提供如下的“优惠价”. 你有能力支付多达 60 个月的大约 500 美元的月还款. 采用动力系统的方法来确定你可以买哪种新的汽车.

2012 车型	“优惠价”(美元)	预付款(美元)	利率和贷款持续时间
Ford Fiesta	14 200	500	年利率 4.5%, 60 个月
Ford Focus	20 705	750	年利率 4.38%, 60 个月
Chevy Volt	39 312	1000	年利率 3.28%, 60 个月
Chevy Cruz	16 800	500	年利率 4.4%, 60 个月
Toyota Camry	22 955	0	年利率 4.8%, 60 个月
Toyota Camry Hybrid	26 500	0	年利率 3%, 48 个月
Toyota Corolla	16 500	900	年利率 4.25%, 60 个月
Toyota Prius	19 950	1000	年利率 4.3%, 60 个月

2. 你正在考虑月利率为 0.4% 的 250 000 美元的 30 年抵押贷款.
  - (a) 确定 360 个月还清贷款的月还款  $p$ .
  - (b) 现在假设你已经还了 8 年的月还款, 而且你现在有机会来重新制定还款计划. 你可以在以下两种情况下进行选择: 或者是年利率为 4% 的每月还款的 20 年贷款, 或者是年利率为 3.8% 的每月还款的 15 年贷款. 每种贷款都要支付 2500 美元的交易费. 确定 20 年和 15 年贷款的月还款  $p$ . 你认为重新制定还款计划正确吗? 如果正确的话, 你喜欢 20 年还是 15 年的选择?

## 1.2 用差分方程近似描述变化

在大多数例子中, 数学地描述变化不会像前节给出的储蓄存单和抵押贷款案例中那样有确切的步骤. 一般情况下, 我们必须画出变化, 观察模式, 然后用数学术语来近似描述变化. 在本节中我们将近似表示某些观察到的变化以得到表达式

$$\text{变化} = \Delta a_n = \text{某个函数 } f$$

我们从区分连续发生的变化和在离散的时间区间上发生的变化开始。

## 离散变化与连续变化

当我们构建涉及变化的模型时，重要的区别就在于某些变化是在离散的时间区间上发生的（诸如账户中利息的存入）；在另一些情形，变化是连续地发生的（诸如在暖和的日子里一罐冷冻的软饮料的温度变化）。差分方程表示了离散时间区间情形中的变化。以后我们会知道离散变化和连续变化之间的关系（为此要研究微积分）。就以下的几个模型来说，我们将通过考察取自离散时间区间上的数据来近似描述连续变化。用差分方程来近似描述连续变化是模型简化的一个例子。

### 例 1 酵母培养物的增长

图 1-7 中的数据是从测量酵母培养物增长的实验收集来的。图形显示可以假设种群量的变化和当前种群量的大小成比例。即， $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k p_n$ ，其中  $p_n$  表示  $n$  小时后种群生物量的多少，而  $k$  是一个正常数。 $k$  的值依赖于时间的测量。

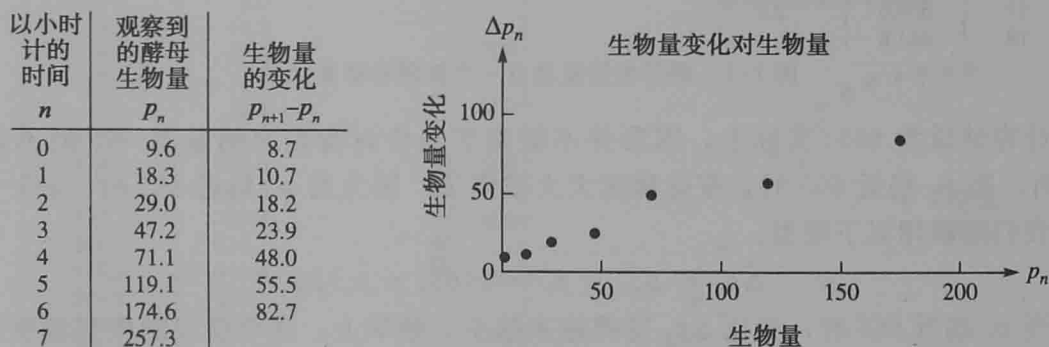


图 1-7 酵母培养物增长对以小时计的时间

数据取自 R. Pearl, "The Growth of Population," *Quart. Rev. Biol.* 2(1927): 532-548.

虽然该数据的图形并不恰好位于过原点的一条直线上，但是可以用一条过原点的直线来近似。把尺子放在数据上近似做一条过原点的直线，我们估算出该直线的斜率大约为 0.5。利用直线斜率的估计  $k=0.5$ ，我们假设比例模型为

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = 0.5 p_n$$

它给出预测  $p_{n+1} = 1.5 p_n$ 。这个模型预测种群量总是增长的，这是可疑的。

### 模型的改进：对出生、死亡和资源的建模

如果在一个周期里出生和死亡都和种群量成正比，那么例 1 所说明的那样种群量的变化应该和种群量成正比。但是，某些资源（例如，食物）只能支持某个最大限度的种群量而不能支持无限增长的种群量。当接近这个最大限度时，增长就会慢下来。

### 例 2 再论酵母培养物的增长

**寻求模型** 图 1-8 中的数据表明在一个受限制的区域里，随时间增长实际发生的酵母培养物的增长观察次数超过图 1-7 给出的 8 次观察。

从图 1-8 中数据表的第 3 列可以看出当资源变得更为有限或受到更多限制时，每小时种群量的变化就变得比较小。从种群量对时间的图形看，种群量趋于一个极限值或容纳量，我们根

以小时计的 时间 $n$	酵母 生物量 $p_n$	变化/小时 $p_{n+1}-p_n$
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7
7	257.3	93.4
8	350.7	90.3
9	441.0	72.3
10	513.3	46.4
11	559.7	35.1
12	594.8	34.6
13	629.4	11.4
14	640.8	10.3
15	651.1	4.8
16	655.9	3.7
17	659.6	2.2
18	661.8	

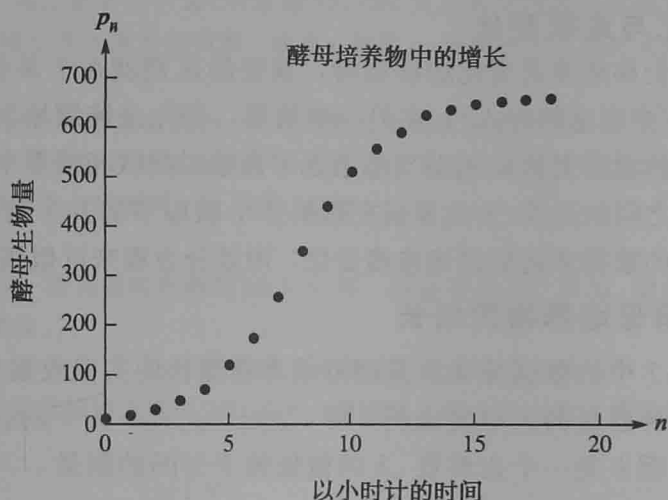


图 1-8 酵母生物量趋近一个极限种群量水平

据图形估计容纳量为 665 (实际上, 图形并不能确切地告诉我们容纳量是 665 而不是 664 或 666). 然而, 当  $p_n$  趋近 665 时, 变化确实大大减慢了. 因为当  $p_n$  趋近 665 时,  $665 - p_n$  变得更小了, 我们建议用以下模型:

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n = k(665 - p_n)p_n$$

这造成了当  $p_n$  趋近 665 时, 变化  $\Delta p_n$  变得越来越小. 数学上, 这个假设的模型说明变化  $\Delta p_n$  和乘积  $(665 - p_n)p_n$  成比例. 为测试模型, 画出  $(p_{n+1} - p_n)$  对  $(665 - p_n)p_n$  的图形, 看看是否存在合理的比例性. 然后来估算比例常数  $k$ .

考察图 1-9, 我们看到  $(p_{n+1} - p_n)$  对  $(665 - p_n)p_n$  的图形确实合理地近似于过原点的一条直线. 我们估计近似表示该数据的直线的斜率约为  $k \approx 0.00082$ , 这就给出模型

$p_{n+1} - p_n$	$p_n(665 - p_n)$
8.7	6291.84
10.7	11 834.61
18.2	18 444.00
23.9	29 160.16
48.0	42 226.29
55.5	65 016.69
82.7	85 623.84
93.4	104 901.21
90.3	110 225.01
72.3	98 784.00
46.4	77 867.61
35.1	58 936.41
34.6	41 754.96
11.4	22 406.64
10.3	15 507.36
4.8	9050.29
3.7	5968.69
2.2	3561.84

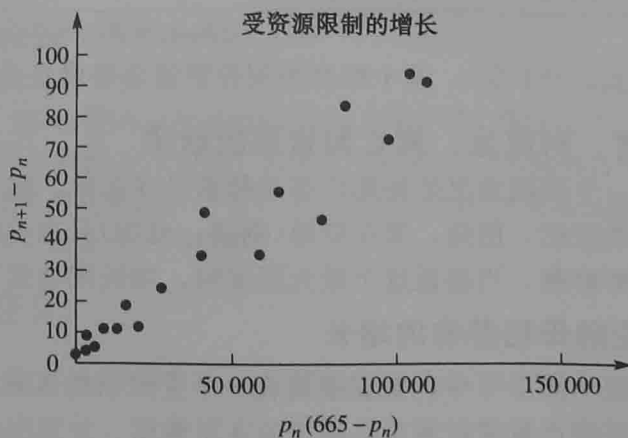


图 1-9 测试受限制的增长模型

$$p_{n+1} - p_n = 0.00082(665 - p_n)p_n \quad (1-2)$$

数值地求解模型 对  $p_{n+1}$  解方程(1-2)给出

$$p_{n+1} = p_n + 0.00082(665 - p_n)p_n \quad (1-3)$$

该方程的右边关于  $p_n$  是二次的. 这种动力系统是非线性的, 而且一般不能求得解析解. 也就是说, 通常不能求得用  $n$  来表示  $p_n$  的公式解. 但是, 如果给定  $p_0 = 9.6$ , 我们可以代入该表达式求得  $p_1$ :

$$p_1 = p_0 + 0.00082(665 - p_0)p_0 = 9.6 + 0.00082(665 - 9.6)9.6 = 14.76$$

类似地, 我们可以把  $p_1 = 14.76$  代入方程(1-3)算得  $p_2 = 22.63$ . 以这种方式迭代, 为给出模型的数值解我们算得一张数值表. 模型预测的数值解以及预测和观察值对时间的图形如图 1-10 所示. 注意到模型很好地抓住了所观察到的数据的趋势.

以小时计的时间	观察值	预测值
0	9.6	9.6
1	18.3	14.8
2	29.0	22.6
3	47.2	34.5
4	71.1	52.4
5	119.1	78.7
6	174.6	116.6
7	257.3	169.0
8	350.7	237.8
9	441.0	321.1
10	513.3	411.6
11	559.7	497.1
12	594.8	565.6
13	629.4	611.7
14	640.8	638.4
15	651.1	652.3
16	655.9	659.1
17	659.6	662.3
18	661.8	663.8

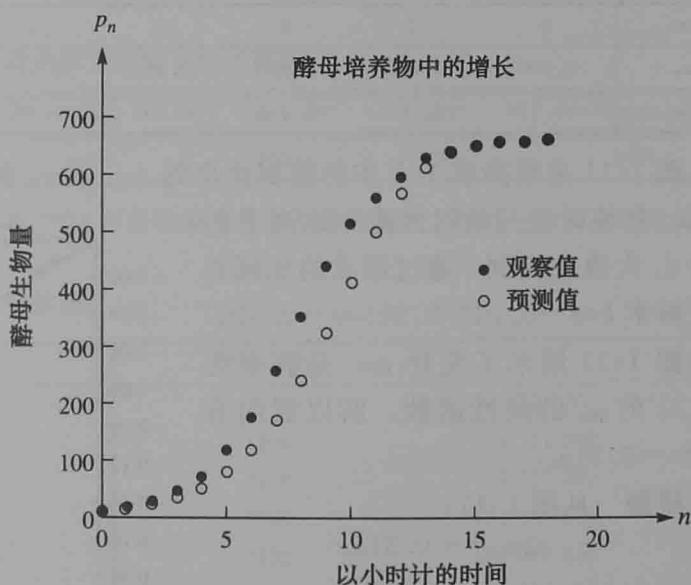


图 1-10 模型的预测值和观察值

### 例 3 接触性传染病的传播

假定学院宿舍里有 400 个学生而且一个或更多个学生得了严重的流感. 令  $i_n$  表示  $n$  个时间周期后受感染的学生数. 假设在已经感染的学生和尚未感染的学生之间存在某种相互作用使疾病得以传播. 如果所有人对于该传染病都是易感的, 那么  $(400 - i_n)$  就表示易感而尚未感染的学生. 如果已经感染的学生在继续传播疾病, 那么我们可以认为变化的已感染者数量和已感染者与易感而尚未感染者的数量的乘积成比例:

$$\Delta i_n = i_{n+1} - i_n = ki_n(400 - i_n) \quad (1-4)$$

在这个模型中乘积  $i_n(400 - i_n)$  表示在时刻  $t$  已感染者与易感而尚未感染者之间可能的相互作用的次数. 这种相互作用的一部分  $k$  将会成为  $\Delta i_n$  所表示的新增的感染.

方程(1-4)和方程(1-2)具有同样的形式, 但是在缺乏数据的情况下我们不能确定比例常数  $k$  的值. 不过, 由方程(1-4)确定的预测值的图形和图 1-10 中酵母种群量的图形一样, 都是

S 形状的.

这个模型可以有許多改进. 例如, 我们可假设一部分人不易被传染, 或者感染周期是有限制的, 或者为防止和未感染者的相互作用, 已感染的学生都搬出了宿舍. 更复杂的模型甚至能分别处理已感染人口和易感染人口.

#### 例 4 血流中地高辛的衰减

地高辛用于治疗心脏病, 医生开的处方上的剂量应能保持血流中地高辛的浓度高于一个有效水平值而又不能超过一个安全水平值(对不同的病人, 这些值会有所不同). 对于血流中初始剂量为 0.5 毫克的情形, 表 1-2 展示该特定病人  $n$  天后在其血流中地高辛的剩余量  $a_n$ , 以及每天的变化  $\Delta a_n$ .

表 1-2 病人血流中地高辛的变化  $a_n$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n$	0.500	0.345	0.238	0.164	0.113	0.078	0.054	0.037	0.026
$\Delta a_n$	-0.155	-0.107	-0.074	-0.051	-0.035	-0.024	-0.017	-0.011	

图 1-11 是根据表 1-2 中的数据画出的  $\Delta a_n$  对  $a_n$  的散点图. 图形展示了在一个时段里的变化  $\Delta a_n$  和该时段开始时血流中地高辛的含量  $a_n$  大致成比例. 通过原点的比例直线的斜率  $k \approx -0.107/0.345 \approx -0.310$ . 因为图 1-11 展示了变化  $\Delta a_n$  是斜率为  $-0.31$  的  $a_n$  的线性函数, 所以我们有  $\Delta a_n = -0.31a_n$ .

模型 从图 1-11,

$$\Delta a_n = -0.31a_n$$

$$a_{n+1} - a_n = -0.31a_n$$

$$a_{n+1} = 0.69a_n$$

给定 0.5 毫克初始剂量的血流中, 地高辛衰减的差分方程模型是:

$$a_{n+1} = a_n - 0.31a_n = 0.69a_n,$$

$$a_0 = 0.5$$

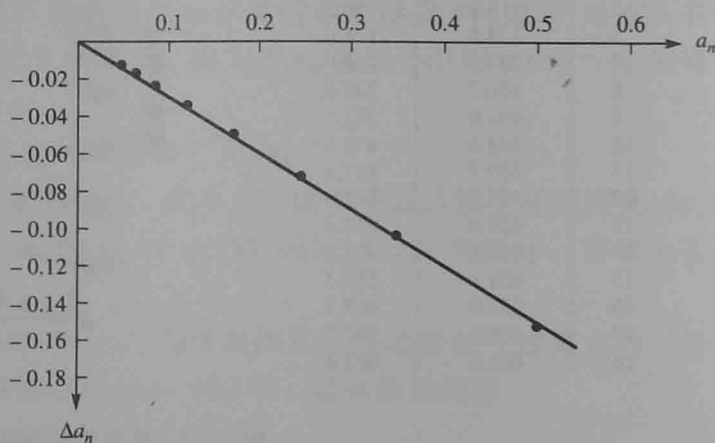


图 1-11 根据表 1-2 数据画出的  $\Delta a_n$  对  $a_n$  的图形表明其为通过原点的直线

#### 例 5 冷冻物体的加热

现在我们来考虑一种连续发生的行为. 假定从冰箱里拿出一罐冷冻过的饮料, 把它放在暖和的教室里并且定时地测量其温度. 饮料一开始的温度为  $40^\circ\text{F}$  而室温为  $72^\circ\text{F}$ . 温度是单位体积能量的一种度量. 因为相对于教室的体积而言饮料的体积是很小的, 我们可以认为室温保持不变. 我们进一步假设整罐饮料有同样的温度, 忽略罐内的温度变化. 我们可以预期当饮料和室温之间的温差变大时, 单位时间里的温度变化就会大一点, 当温差小时单位时间里的温度变化就会小一点. 令  $t_n$  表示  $n$  个时间周期后饮料的温度, 而令  $k$  是一个正比例常数, 我们提出下面的模型:

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = k(72 - t_n)$$

$$t_0 = 40$$

对这个模型可能有许多改进. 尽管我们假设  $k$  是常数, 它实际上依赖于容器的形状和传导性质、两次测温之间相隔的时间等. 此外, 在许多情形中周围环境的温度可能是变化的, 可能有必要考虑罐内饮料的温度是不均匀的. 物体的温度可能在一维(就像细金属线的情形)、二维(诸如一块平板的情形)或者三维(就像太空舱返回地球大气层的情形)空间中变化. ■

我们只是粗略地介绍了对实际变化进行建模时差分方程的威力. 在下一节中, 我们将建立某些这样的模型的数值解, 并观察它们所展示的模式. 观察到各种类型的差分方程的某些模式后, 我们将按其数学结构来对差分方程进行分类. 这将有助于确定所研究的动力系统的长期行为.



### 习题

1. 从引进到塔斯马尼亚岛的新环境里的羊群数量的增长得到下面的数据.<sup>⊖</sup>

年	1814	1824	1834	1844	1854	1864
数量	125	275	830	1200	1750	1650

根据数据画出图形, 能看出某种趋势吗? 画出 1814 年后数量变化对年份的图形. 构建一个能合理地近似描述你所观察到的变化的离散动力系统.

2. 下列数据表示从 1790 年到 2010 年的美国人口数据:

年 份	人 口	年 份	人 口
1790	3 929 000	1910	91 972 000
1800	5 308 000	1920	105 711 000
1810	7 240 000	1930	122 755 000
1820	9 638 000	1940	131 669 000
1830	12 866 000	1950	150 697 000
1840	17 069 000	1960	179 323 000
1850	23 192 000	1970	203 212 000
1860	31 443 000	1980	226 505 000
1870	38 558 000	1990	248 710 000
1880	50 156 000	2000	281 416 000
1890	62 948 000	2010	308 746 000
1900	75 995 000		

求能够相当好地拟合该数据的动力系统模型. 通过画出模型的预测值和数据值来测试你的模型.

3. 社会学家识别出一种称为社会扩散的现象, 即在人群中传播一段信息、一项技术革新或者一种文化时尚. 人群可以分为两类: 知道该信息的人和不知道该信息的人. 在人群数目已知的情形下, 可以合理地假设扩散率与知道该信息的人数和不知道该信息的人数的乘积成比例. 然后记  $a_n$  为总数为  $N$  的人群在  $n$  天后已经知道该信息的人数, 构建一个能近似表示人群中已经知道该信息的人数变化的动力系统.
4. 考虑在人口总数为  $N$  的孤岛上一种传染性很强的疾病的传播问题. 一部分岛上的人到岛外旅行并患上这种

⊖ 改编自 J. Davidson, "On the Growth of the Sheep Population in Tasmania," *Trans. R. Soc. S. Australia* 62(1938): 342-346.