

第一章 概 论

1.1 绪 言

本书叙述涡运动的原理, 这里说的涡包括涡量场和涡旋. 从其形态而言, 可以认为, 涡量场是一种分布涡, 而涡旋是集中涡. 下面分别叙述涡量场、涡旋以及研究涡运动的意义.

1.1.1 涡量场

为了给出涡量的定义, 需要回顾流体力学教科书中的亥姆霍兹速度分解定理^[2~4]. 流场中某点 P 的邻域内任一点 Q 上的速度 V 可用泰勒级数表示为

$$V = V_P + \delta r \cdot \nabla V \quad (1.1.1)$$

此处 δr 和 ∇V 分别为 Q 点相对于 P 点的位置矢量和速度梯度张量. ∇V 还可分解为对称张量 e 和反对称张量 Ω . 式(1.1.1)化为

$$V = V_P + \delta r \cdot e + \delta r \cdot \Omega \quad (1.1.2)$$

其中
$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1.3)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.1.4)$$

现分别说明 e 和 Ω 的意义.

首先, 已经清楚, 对称张量 e_{ij} 按其物理意义即为**应变速率张量**. 当 $i=j$ 时, e_{ii} 表示沿对角线上三个正应变速率分量之和, 也就是流体的体积应变速率, 可表示为

$$e_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \Theta \quad (1.1.5)$$

这里 Θ 称为**胀量**(expanon), 表示 P 点邻域内流体体积的相对变化速率. 当 $i \neq j$ 时, e_{ij} 表示剪切应变速率的各个分量.

其次, 反对称张量 Ω_{jk} 可以与单位全反对称三阶张量 ϵ_{ijk} 缩并而得到一个与 Ω_{jk} 对应的矢量:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \Omega_{jk} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \epsilon_{ikj} \frac{\partial V_j}{\partial x_k}) \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} = (\nabla \times \mathbf{V})_i \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

这里引出了**涡量** ω 的数学定义为

$$\omega = \nabla \times \mathbf{V} \quad (1.1.7)$$

于是式(1.1.2)的最后一项可写为

$$\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \omega \times \delta \mathbf{r} \quad (1.1.8)$$

由此可见, 涡量可理解为流体微团绕其中心作刚性旋转的角速度之两倍. 关于涡量的物理意义, 将在 1.1.2 节中作进一步阐述.

据上所述, 从运动学的角度, 我们可以将流动分为两类: 具有涡量的流场称为**有旋流动**; 仅具有应变速率的流场称为**无旋流动**, 也称**势流**.

另外, 从动力学角度来分析, 涡量场通常又和粘性流动存在着对应关系. 例如物面的边界层、分离流区、尾迹区等粘性流动, 必然分布着涡量或一个个涡旋. 这两者之间的联系来源于: 涡量和应变速率都是由流场的速度梯度造成的; 速度梯度大, 应变速率和涡量一般也大. 流体的粘性应力大小取决于应变速率, 特别是剪切应变速率的大小. 因此涡量场和粘性流自然存在因果关系. 不过, 对于高雷诺数 Re 流动, 由于粘性扩散不显著, 特别在无界流场条件下, 涡运动可以按无粘流动计算.

1.1.2 涡量的物理意义

人们对涡量为何定义为刚性旋转角速度之两倍，一直不好解释，像 Sommerfeld, Robertn 这些学者将它说成是“美的误差”，“不幸的因子”。不过，Lindgren(1980)对此提出了一个合理的解释。

现采用流线坐标系(图 1.1)，也就是说，在流线上的某一点 P 取三个自然坐标轴：切线、主法线和副法线，分别用 t 、 n 和 b 表示它们的单位矢量。为便于理解，可假定为定常流动，这时流线就是迹线。设某流体微团沿迹线运动，在某时刻位于 P ，其速度矢量为 V ，这时的曲率中心位于 O ，曲率半径为 R 。

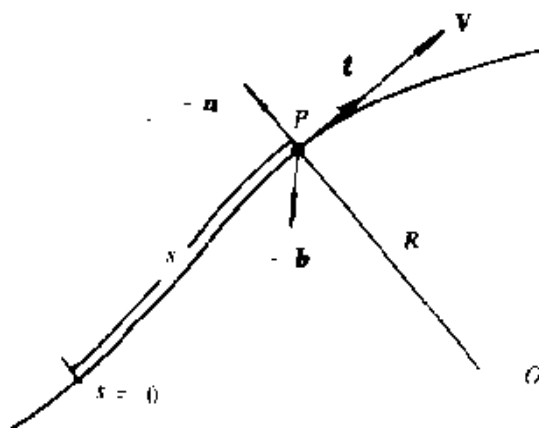


图 1.1 流线坐标系

现写出涡量矢量(式 1.1.7)在流线坐标系中的表达式^[5,6]：

$$\left. \begin{aligned} \omega_t &= (t \cdot \nabla \times t)V \\ \omega_n &= \frac{dV}{db} \\ \omega_b &= \frac{V}{R} - \frac{dV}{dn} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.9)$$

在 ω 的三个分量中，无疑沿副法线方向的 ω_b 是最主要的，因为它

与密切面 (t, n) 内流场的速度分布有关. 如果是平面流动, 则 ω_s 就是整个涡量的大小. 现分析 ω_s 的物理意义, 它由两部分组成:

(1)第一部分: $\omega_{s1} = V/R$, 表示流体微团绕曲率中心 O 作整体旋转的角速度;

(2)第二部分: $\omega_{s2} = -\frac{dV}{dn}$, 表示流体微团绕其中心 P 点作局部旋转的角速度.

下面举几个典型例子作直观的阐述.

例一、圆柱状流体以等角速度 Ω 作刚性旋转

如图 1.2 所示, 流体微团 P 以速度 V 和半径 r 绕中心 O 作等速圆周运动. 这是个平面流动. 流体微团的涡量 ω_p 由以下两部分组成:

(1)整体旋转角速度 $\omega_1 = V/r = \Omega$

(2)局部旋转角速度 $\omega_2 = -\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dr} = \Omega$ (1.1.10)

于是 $\omega_p = \omega_1 + \omega_2 = 2\Omega$ (1.1.11)

由此不难理解, 为什么涡量等于流体微团作刚性旋转的角速度之两倍.

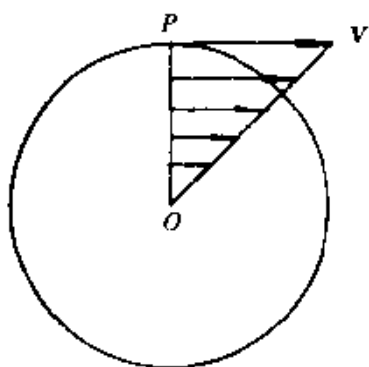


图 1.2 流体的刚性旋转

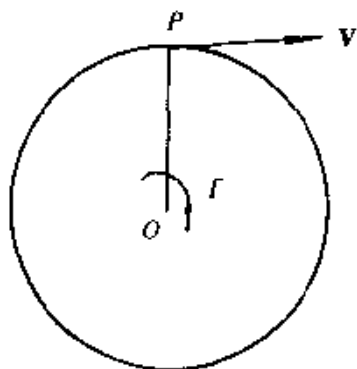


图 1.3 点涡的流场

例二、速度环量为 Γ 的点涡流场

在图 1.3(第四页)的点涡流场中, 设流体微团 P 以速度 V 和半径 r 绕涡心 O 作等速圆周运动, 需要满足点涡流场的关系式:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.1.12)$$

流体微团的涡量 ω_p 由以下两部分组成:

$$(1) \text{ 整体旋转角速度 } \omega_1 = \frac{V}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \quad (1.1.13)$$

$$(2) \text{ 局部旋转角速度 } \omega_2 = -\frac{dV}{du} = \frac{dV}{dr} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \quad (1.1.14)$$

$$\text{于是} \quad \omega_p = \omega_1 + \omega_2 = 0 \quad (1.1.15)$$

以上表明, 流体微团在点涡流场中的两种旋转角速度彼此抵消, 因此点涡流场是个势流场.

例三、平面泊肃叶(Poiseuille)流动

如图 1.4 所示, 在平面泊肃叶流动中, 任一流体微团 P 沿着 $y=\text{常数}$ 的直线以速度 V 运动, 需要满足以下关系:

$$V = \frac{3}{2}U_m(1 - y^2/h^2) \quad (1.1.16)$$

其中 U_m 为平均速度.

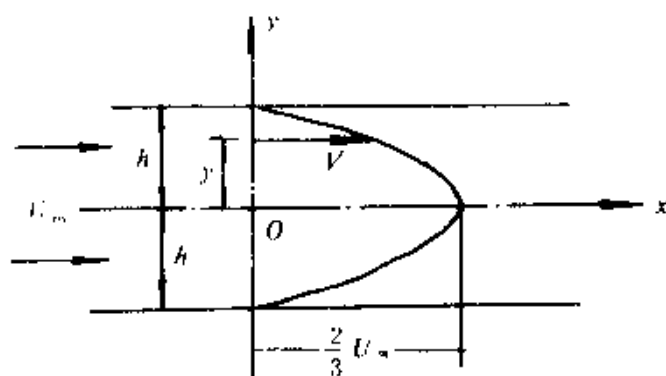


图 1.4 平面泊肃叶流动

由于流线是直线, 曲率半径 $R = \infty$, 因此整体旋转角速度 $\omega_1 = 0$. 于是涡量 ω_p 只由局部旋转角速度 ω_2 决定, 即

$$\omega_p = \omega_2 = -\frac{dV}{dy} = 3U_m y/h^2 \quad (1.1.17)$$

由此可知, 在两侧壁面上, $\omega_p = \pm 3U_m/h$, 其绝对值达到最大, 在中心线上, $y=0$, $\omega_p=0$.

1.1.3 涡旋

涡旋是涡量聚集的涡结构. Lugt(1983)对它下的定义为^[7]: 涡旋是一群绕公共中心旋转的流体微团. Saffman(1979)下了略有差别的定义: 涡旋是以无旋流体或物面为边界的有限体积的旋转流体.

流体的**粘性**摩阻是形成涡旋的主要因素, 在自然界和工程中有着最广泛的实例. 比如: 火山喷发时, 由于火山口边缘的摩阻作用, 形成了巨大的涡环; 在桥墩后面脱泻出一个个漩涡, 流向下游; 飞机在作中等攻角飞行时, 翼前缘发生流动分离而形成脱体涡, 这是非线性升力的来源.

流体的**斜压性**是形成涡旋的第二个因素. 比如: 野营篝火上方因热对流形成的涡环; 大气上下之间因温度差发生热对流而形成鱼鳞状云(一种 Bénard 胞涡); 等等.

地球上的大气和海洋都受到地球自转而引起的科氏力的作用, 这是一种**非保守力**, 是形成涡旋的第三个因素. 地球上的大范围涡旋的生成通常是流体的斜压性和科氏力综合作用的结果. 例如: 台风、气旋和反气旋, 北大西洋环流(其中包括墨西哥湾暖流、美国东南沿海的湾流), 等等.

Lugt(1983)对各种尺度的涡旋列表举例^[7], 现摘录示于表 1.1.

表 1.1 各种涡旋的尺度谱

涡旋的名称	涡结构尺度
液氮中的量子涡	10^{-8}cm
最小的湍流涡	0.1cm
昆虫引起的涡旋 乌贼喷射的涡环	$0.1\sim 10\text{cm}$
尘卷 潮水中的漩涡	$1\sim 10\text{m}$
火山爆发的涡环 热对流云	$100\sim 1000\text{m}$
湾流的涡旋 台风 大气高压和低压系统	$100\sim 2000\text{km}$
海洋环流 大气环流 地球内部的热对流胞涡	$2000\sim 5000\text{km}$
木星的红斑 土星环 太阳黑子	$5000\sim 10^5\text{km}$
银河的涡旋星系	用光年计

1.1.4 研究涡运动的意义

综上所述,可知涡量来源于流场存在速度梯度,是描述有旋流动的一个运动学物理量;涡量场在某些情况下会演化成一个个离散的涡量聚集的涡旋,因此,要研究粘性流动,特别是分离流

动,离不开研究涡运动。

近年来人们对湍流有了新的认识,它兼有随机性和有序性。它的基本结构之一是各种尺度的涡(eddy),既有大量的随机的小涡构成背景流场,又有大尺度的拟序的涡结构在统计意义上存在。

由此足以说明研究涡运动的重要性;涡量是流动的一个基本物理量;涡旋是流动中常见的一种基本形态;涡又是湍流的一种基本结构;另外,在处理流体力学问题中,点涡及其线分布和面分布又是一种基本解,这是面元法和涡方法的基础。这样,我们就不难理解Küchemann(1965)的一句名言:“涡旋是流体运动的肌腱”。

涡运动因其固有的非定常性和非线性的复杂机制,又因其对自然界的探索和工程应用有巨大的意义,一直是流体力学中具有挑战性的常盛不衰的研究前沿。涡运动研究领域所要解决的实质性问题主要有两个方面:一方面要弄清楚涡的形成、发展和衰亡以及涡旋之间、涡旋与其它因素(指可压缩性、激波、声波、加热、自由表面和固体表面等等)之间相互作用的规律和机理;另一方面要研究如何采用有效的激发手段对涡旋起主导作用的流动实施有效的控制。

谈到涡控制,这是一个新观念和新方向,它表明人们的指导思想已从片面追求如何避免发生分离流动而进入到设法利用和控制非定常分离流和涡运动。以机翼理论为例,过去长时期以来,人们一直习惯于使翼面上不要过早发生流动分离,保持“附着流型”。60年代起,航空界利用机翼前缘分离涡以产生稳定的非线性升力,因而转移到了“脱体涡流型”。70年代以后,人们开始认识到,利用弱非定常激发和涡旋的非线性效应,可以对翼面上的涡运动实行有效的控制,获得更大的气动效益,也就是说,未来的目标是“非定常脱体涡流型”,但目前还只处在研究的初期阶

段。

最近三十年来,对不可压缩流体中涡运动的理论研究和应用研究,已经有了长足进展^[1,4]。涡运动研究具有强大的动力,因为它与湍流、大气现象、海洋物理、流动控制、增升减阻、气动噪声等方面都有十分密切的关系,它对航空航天、动力机械、化学工程、海洋工程、仿生学等广泛的工程领域都十分重要。

1.2 运动学关系

本节列举与本书有关的流体运动学知识。

1.2.1 流场的描述

一、速度场的描述

速度场可用流线、迹线、烟线(Streak line,又称脉线)作几何描述。

流线是流场中任一时刻的一条几何曲线,其上各点的速度矢量均与这曲线相切。流线方程为

$$\delta \mathbf{r} \times \mathbf{V} = 0 \quad (1.2.1)$$

此处 \mathbf{r} 是曲线上任一点的矢径, \mathbf{V} 是速度矢量。

迹线是指同一流体质点在运动过程中画出的轨迹,迹线方程为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \quad (1.2.2)$$

图 1.5 表示圆柱形涡旋向外扩张的过程,形象地显示了流线和迹线。

在流动显示测试中,可以在固定点上放置染色体,因而不同时刻流经该处被染了色的流体质点在其后的某个时刻会组成一条染色曲线,称为烟线。图 1.6 给出了烟线的图象。

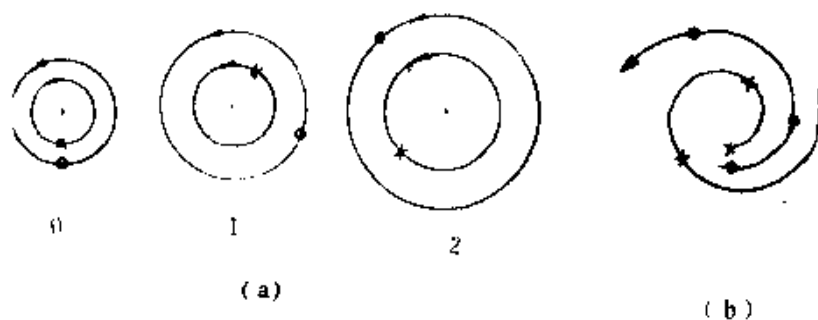


图 1.5 圆柱形涡旋扩张过程

(a)流线; (b)迹线

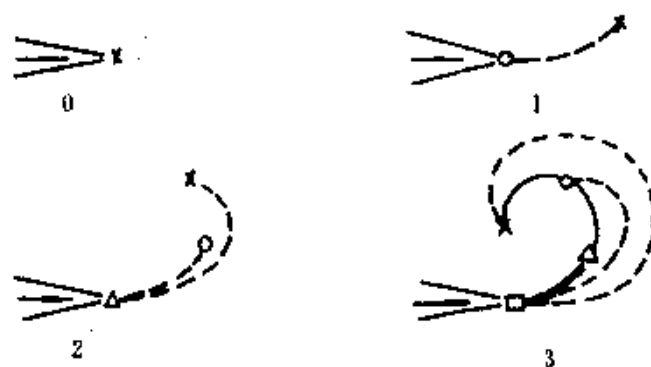


图 1.6 烟线定义简图

——烟线, ----迹线

在非定常流场中, 流线、迹线和烟线是彼此不同的曲线, 只有在定常流中, 三者彼此重合。

还有, 运动参考系的转换, 包括惯性参考系之间的转换在内, 流线、迹线和烟线都要改变几何形状。一个典型的例子见图 1.7, 在边界层内速度受到一个正弦行波的扰动, c 是波速, 图 1.7a

是静止观察者所看到的流线, 图 1.7b 是随波速 c 运动的标架内观察者看到的流线, 即所谓的“猫眼”流线. 图 1.7c 则是临界层上的烟线形状.

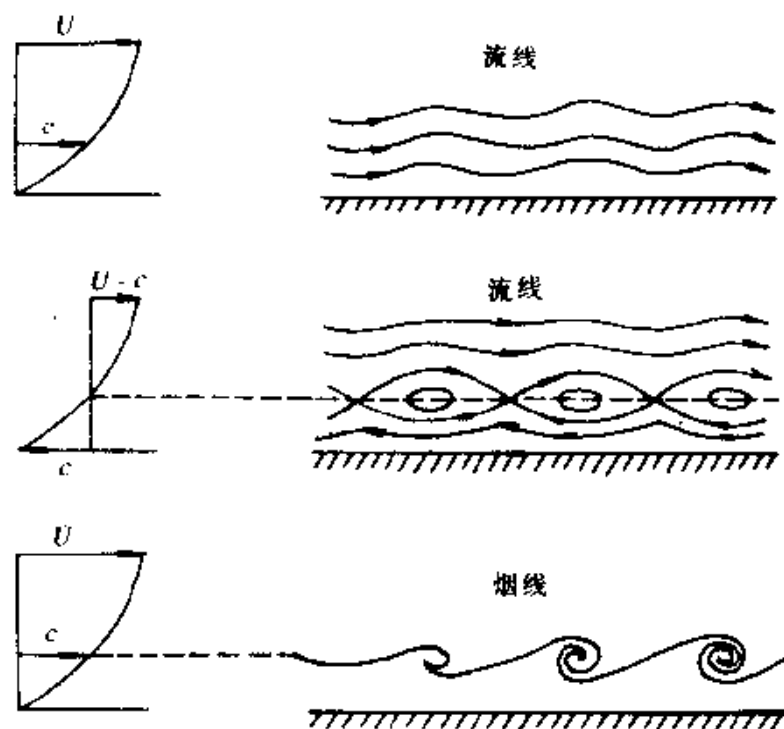


图 1.7 不同参考系下的流线和烟线

现在说明**速度环量**, 它的定义为

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (1.2.3)$$

它是描述速度场的又一类物理量, 旨在度量某条封闭周线 C 内涡旋的总强度.

速度环量的物质导数等于**加速度环量**.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (1.2.4)$$

二、涡量场的描述

涡量场可用涡线和涡管来描述。

涡线是某一时刻涡量场中的一条条曲线，其上各点的涡量矢量与之相切。涡线方程是

$$\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} = 0 \quad (1.2.5)$$

如在涡量场中任取一条可收缩的回线(不是涡线)，在其上每一点都引出一条涡线，这些涡线即组成**涡管**。

涡管强度是用涡通量：

$$\iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \delta S \quad (1.2.6)$$

来表示，其中 S 是涡管的任意截曲面， \mathbf{n} 是该截曲面的法向单位矢量。利用斯托克斯定理

$$\iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \delta S = \oint_C \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (1.2.7)$$

可见，涡管强度可用其截曲面的周界上的速度环量 Γ 来表示。

三、涡量场的性质

涡量场的基本性质：它是一个管式矢量场，也就是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0 \quad (1.2.8)$$

据此，可以导出与此等价的其它性质，例如：

- (1) 涡管强度沿管长不变， $\Gamma = \text{常数}$ ；
- (2) 涡线和涡管都不能在流体中终止。

关于涡量场的运动学特性我们将在下一章中进一步阐述。

1.2.2 运动学基本方程

可压缩流体的连续性方程为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.2.9)$$

其中 ρ 是密度， $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 可用胀量 Θ 来表示。

对于不可压缩流体,连续性方程简化为

$$\Theta = \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.2.10)$$

对于平面不可压缩流动;利用流函数 ψ 与速度分量 (u, v) 的关系式

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (1.2.11)$$

和涡量的定义:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2.12)$$

即可导出泊松方程

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (1.2.13)$$

1.3 动力学方程和能量方程

本节列出了原始变量的纳维-斯托克斯方程(N-S 方程)、涡量动力学方程和速度环量动力学方程. 最后,又列出了克罗柯方程.

1.3.1 N-S 方程

粘性可压缩牛顿流体的动力学方程,即可压缩 N-S 方程为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla (\lambda \Theta) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (2\mu \mathbf{e}) \quad (1.3.1)$$

此处 \mathbf{f} 为单位质量彻体力; p 为压强; μ 和 λ 分别为粘性系数和第二粘性系数; Θ 为胀量,见式(1.1.5); \mathbf{e} 为应变速率张量,见式(1.1.3).

如果是斯托克斯流体, $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$; 又如果粘性系数是均布的, $\nabla \mu = 0$; 则上式可简化为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla \Theta + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.3.2)$$

此处 $\nu = \mu/\rho$ 称为运动粘性系数.

如果又是不可压缩流体, N-S 方程再简化为

$$\frac{dV}{dt} = f - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 V \quad (1.3.3)$$

1.3.2 涡量动力学方程

基于 N-S 方程(1.3.2), 将其等式的左边分解为

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - V \times \omega \quad (1.3.4)$$

然后对 N-S 方程的两边都做旋度运算, 即可得到粘性可压缩流体的涡量动力学方程, 又称涡量输运方程:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & (\omega \cdot \nabla) V - \omega (\nabla \cdot V) + \nabla \times f \\ & - \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p + \nu \nabla^2 \omega \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

现在来对这方程右边的五项分别说明其物理意义.

第一项: $(\omega \cdot \nabla) V$ 表示由于流场的速度梯度引起涡线的伸缩和弯曲, 从而使涡量的大小和方向都发生变化. 现利用图 1.8 说明如下: 如图(a)所示, Q 点是在同一涡线上与 P 点邻近, 两点间的速度矢量之差为 δV . 它可以分解为平行于和垂直于 ω 的两个分量 δV_{\parallel} 和 δV_{\perp} . 考虑到涡线的微段 PQ 同时也是流体的物质微段, δV_{\parallel} 使物质微段伸缩, δV_{\perp} 使它弯曲, 由此引起了涡量矢量的变化. 事实上,

$$(\omega \cdot \nabla) V \approx |\omega| \cdot \lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\delta V}{PQ} = |\omega| \lim_{PQ \rightarrow 0} \left(\frac{\delta V_{\parallel}}{PQ} + \frac{\delta V_{\perp}}{PQ} \right) \quad (1.3.6)$$

其中 $\frac{\delta V_{\parallel}}{PQ}$ 的极限是物质微段在 P 点的正应变速率, $\frac{\delta V_{\perp}}{PQ}$ 的极限是相应的剪切应变速率. 将式(1.3.6)代入式(1.3.5), 可知

$$\left(\frac{1}{|\omega|} \frac{d\omega}{dt} \right)_1 = \lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\delta V_{\parallel}}{PQ}$$

$$\left(\frac{1}{|\omega|} \frac{d\omega}{dt} \right)_2 = \lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\delta V_{\perp}}{PQ}$$

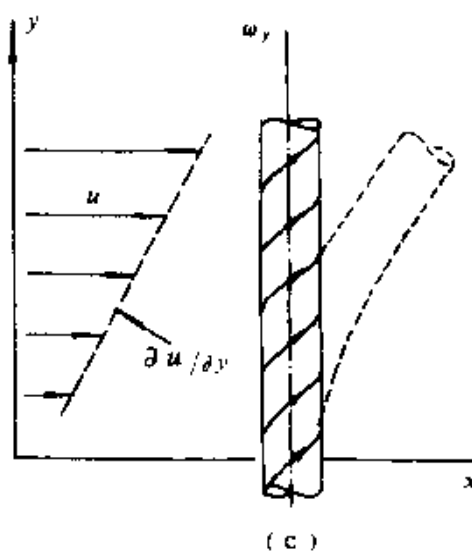
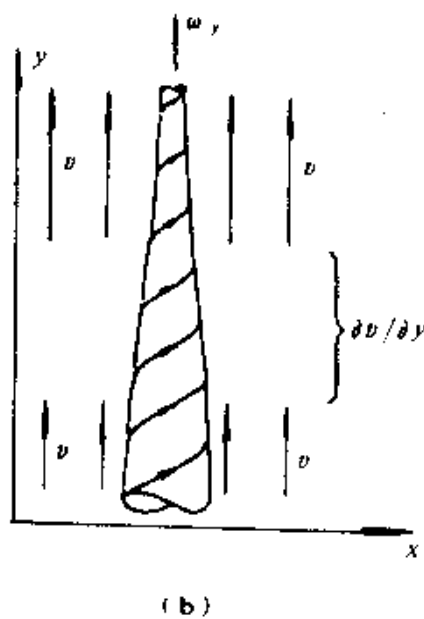
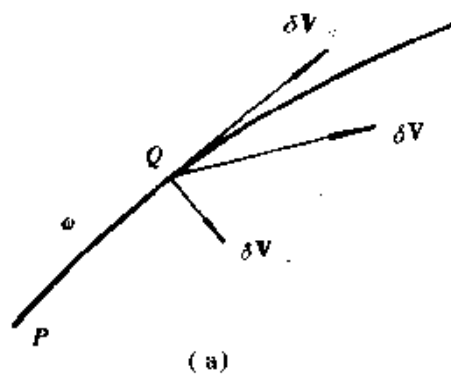


图 1.8 涡线的伸缩和弯曲

(a)示意图 (b)涡管拉伸 (c)涡管弯曲

由此可见，沿涡线的正应变速率等于涡量大小的相对变化速率；而沿涡线的剪切变形速率等于 ω 的单位矢量的变化速率。图(b)

和(c)分别给出涡管拉伸和弯曲的图象;拉伸使涡管变细,涡量值相应增大;弯曲使涡量的方向发生变化.

第二项: $\omega(\nabla \cdot V)$ 表示流体微团的体积变化引起涡量大小发生变化. 这是由于: 流体微团体积的变化导致转动惯量的增减, 考虑到在保守力场的无粘流中, 微团的角动量应是守恒的, 因而转动惯量的增减影响到涡量大小的变化.

第三项: $\nabla \times f$ 为彻体力的贡献. 如果彻体力有势, $f = -\nabla \Pi$, 则 $\nabla \times f = 0$. 因此只有非保守力(例如旋转参考系中的科氏力)方能引起涡量的变化, 这方面将在第八章中详述.

第四项: $\nabla \left(\frac{1}{\rho} \times \nabla p \right)$, 其中 $1/\rho$ 是比容. 对于正压流体, 压强是比容的单值函数, 则这一项为零. 反之, 对于斜压流体, 即有两个独立的热力学变量, 则将发生热对流, 引起涡量变化. 这个问题还将在第八章中叙述.

对于第四项, 还可变换一下形式. 在绝热条件下

$$-\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p = \nabla T \times \nabla s \quad (1.3.7)$$

此处 T 和 s 分别表示温度和比熵.

第五项: $\nu \nabla^2 \omega$ 表示涡量的粘性扩散效应, 这方面将在第三章中详述. 我们将看到, 涡量因粘性而产生, 因粘性而扩散, 最终因粘性而耗散. 如用无量纲量表示, 这一项可写成 $\frac{1}{Re} \nabla^2 \omega$. 由此可见, 在高雷诺数 Re 流动中, 粘性扩散效应可略去不计.

下面再列出涡量动力学方程在若干约束条件下的简化形式.

对于彻体力有势的无粘流动, 这个方程为

$$\frac{d\omega}{dt} - (\omega \cdot \nabla)V + \omega(\nabla \cdot V) = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \nabla p \quad (1.3.8)$$

上式与连续性方程(1.2.9)组合, 可以写成 Silberein 定理:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) = \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla\right)V + \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \frac{\nabla p}{\rho} \quad (1.3.9)$$

如果又是正压流体, 则式(1.3.9)简化为亥姆霍兹方程:

$$\text{helm } \omega = \frac{d\omega}{dt} - (\omega \cdot \nabla)V + \omega(\nabla \cdot V) = 0 \quad (1.3.10)$$

$$\text{或} \quad \text{helm } \omega = \frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times (V \times \omega) + \omega(\nabla \cdot V) = 0 \quad (1.3.11)$$

这个方程在以后将会经常用到.

对于物体力有势的不可压缩粘性流动, 涡量动力学方程(1.3.5)简化为

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla)V + \nu \nabla^2 \omega \quad (1.3.12)$$

如果又是平面不可压缩粘性流动, 上式进一步简化为

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \omega \quad (1.3.13)$$

只是在平面不可压缩无粘流动情况, 流体微团在运动过程中始终保持涡量不变, 即

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (1.3.14)$$

1.3.3 速度环量动力学方程

根据式(1.2.4)

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{dV}{dt} \cdot \delta r$$

现将 N-S 方程(1.3.2)代入上式, 即得速度环量动力学方程:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C f \cdot \delta r - \oint_C \frac{dp}{\rho} + \oint_C \nu \nabla^2 V \cdot \delta r \quad (1.3.15)$$

利用热力学关系, 对于绝热流动, 上式右边第二项还可表示为

$$\oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C T ds \quad (1.3.16)$$

速度环量动力学方程各项的物理意义可以从涡量动力学方程中所对应各项的物理意义加以类推。

对于物体力有势的正压流体, 速度环量动力学方程简化为

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \nu \nabla^2 \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (1.3.17)$$

如果又是无粘流体, 最后可简化成

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (1.3.18)$$

这就是开尔文定理: 对于物体力单值有势的正压流体的无粘流动, 沿任意可收缩的封闭物质周线的速度环量是个运动不变量。

1.3.4 能量方程

对于可压缩流动, 除了运动学和动力学方程外, 还必须与能量方程联立求解。

如果是无粘流动, 能量方程可写成克罗柯(Crocco)方程的形式(其推导过程见参考书目[8])

$$\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \left(h + \frac{V^2}{2} \right) - T \nabla s + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (1.3.19)$$

其中 h 为比焓, s 为比熵。由此可知, 除了粘性作用以外, 涡量取决于以下三个因素: 流场中能量的不均匀性、熵值的不均匀性以及速度场的非定常性。

对于粘性流动, 能量方程中要计入由粘性引起的能量耗散。在第 3.3 节中将导出用涡量表示的不可压缩流体的粘性耗散函数。

第二章 涡量运动学特性

在上一章中,我们介绍了涡量的概念及涡量场的几何描述,本章将进一步阐述涡量运动学的若干重要特性,诸如:若给定了涡量场如何确定速度分布,速度的远场渐近特性,以及涡量矩的空间守恒性质等.这里讲述的是涡量场的总体性质,不涉及具体涡运动的形态.但是,这些特性却是任何一种特殊的涡运动都必须普遍遵循的原则,是研究各种涡运动的基础.

应当指出,涡量运动学是流体运动学的一个组成部分,但是,当流体中有涡存在时,其流动形态要比无旋流动丰富得多,也复杂得多.涡运动是强非线性的,一个复杂的涡运动问题必须把它的运动学和动力学问题耦合在一起研究.

2.1 给定涡量和胀量确定速度分布

若给定涡量和胀量,要确定流体的速度分布,这是流体力学中的一个经典命题,任何一本流体力学教科书中都会讲到^[2,3],它是研究涡量场总体特性的基础.然而,对这一经典问题的理解和应用仍在不断深化,如广义毕奥-萨伐尔(Biot-Savart)公式的利用、边界条件的“超定”问题的理解等.本节将以足够的篇幅给予系统的叙述.

从1.1.1节我们知道,流场中一点邻域内的瞬时速度可以分解成以下三种运动产生的速度之和:(1)胀量为 Θ 的各向同性的体积膨胀率;(2)体积不变的纯变形速率;(3)角速度为 $\frac{1}{2}\omega$ 的刚体

式旋转. 由此可见, 流体中涡量 ω 和胀量 Θ 的分布同时反映着速度分布的信息. 现在我们要问: 若已知流体中的涡量和胀量, 如何才能确定流体的速度? 如何才能唯一地确定速度? 体积不变的纯变形运动在其中又起什么作用? 等等, 现在我们首先来研究这个命题的唯一性问题.

2.1.1 命题的唯一性问题

设流体在一个有限的单连通区域内运动, 若已知区域内所有点上的涡量 ω 和胀量 Θ , 以及边界上所有点的法向分速度 V_n , 则该区域中流体的运动即可唯一地确定. 就是说, 设已知

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \Theta \quad \text{在 } \mathcal{V} \text{ 内} \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \omega \quad \text{在 } \mathcal{V} \text{ 内} \quad (2.1.2)$$

$$\text{及} \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_b \cdot \mathbf{n} \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (2.1.3)$$

则区域 \mathcal{V} 内的速度可以唯一地被确定, 其中 S 是包围区域 \mathcal{V} 的边界, V_b 是边界上的速度, \mathbf{n} 是边界外法线单位矢量.

现证明如下:

假设在区域 \mathcal{V} 内有两个速度 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 同时满足方程(2.1.1)和(2.1.2)以及边界条件(2.1.3), 对于它们的差 $\mathbf{u} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$, 显然有

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \text{在 } \mathcal{V} \text{ 内}$$

$$\text{及} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{在 } S \text{ 上}$$

这表明差速度 \mathbf{u} 是一个无旋的管式矢量场. 它存在速度势 φ , 使得 $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, 且 φ 满足拉普拉斯(Laplace)方程:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{在 } \mathcal{V} \text{ 内}$$

及边界条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{在 } S \text{ 上}$$

差速度 u 在 V' 内的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_{V'} |u|^2 dV' = \frac{1}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0$$

由此可见, 在区域内及边界上处处有 $u=0$, 意即 $V_1=V_2$, 这就证明了不可能有两个不同的速度场同时满足方程(2.1.1)–(2.1.3).

如果已知的是边界上的切向分速度

题,我们在第三和第九章中将进一步阐述.

对于多连通区域,除去边界条件(2.1.3)或者(2.1.4)以外,还需增加循环常数的给定条件,即如果有一个或几个固体边界存在的话,围绕每个固体的循环常数必须已知(参见目[9],§35).

2.1.2 速度分解和速度积分表达式

在解决了唯一性问题以后,我们现在来寻找满足运动学方程(2.1.1)和(2.1.2)及边界条件(2.1.3)的解,即确定一个速度场,使它的旋度和散度在流体内所有点上具有给定的值且满足给定的速度边界条件.这个问题可以分成以下步骤来进行:首先,不考虑边界条件,去寻找满足方程(2.1.1)和(2.1.2)的特解,然后再在给定的空间内和边界条件下求速度场的定解问题.

现在先来求方程(2.1.1)和(2.1.2)的特解.我们首先注意到运动学微分方程(2.1.1)和(2.1.2)是线性的,因而可以把速度分解.这里要用到矢量分析中一个重要的定理,该定理说:任意一个位置矢量函数 \mathbf{a} 可以分解成标量势函数 φ 的梯度和矢量势函数 \mathbf{A} 的旋度之和

$$\mathbf{a} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.1.5)$$

今令 \mathbf{a} 是速度矢量 \mathbf{V} ,则 \mathbf{V} 可分解成 $\mathbf{V}_1 = \nabla\varphi$ 和 $\mathbf{V}_2 = \nabla \times \mathbf{A}$,于是问题化为:

(1)寻找速度 \mathbf{V}_1 使它满足

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = \nabla^2\varphi = \Theta \quad (2.1.6a)$$

$$\nabla \times \mathbf{V}_1 = 0 \quad (2.1.6b)$$

这是一个有源无旋问题.方程(2.1.6a)是泊松方程,它的一个特解为

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Theta'}{R} dV' \quad (2.1.7)$$

其中 V 是流体占有的空间, $dV' = dx' dy' dz'$ 是体积微元, \mathbf{r} 是

坐标原点至观察点的矢径, r' 是坐标原点至积分动点的矢径, $R = r - r'$ 是积分动点至观察点的矢量, $R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$, $\Theta' = \Theta(r')$. 对(2.1.7)式求梯度

$$V_1(r) = \nabla \varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \Theta' \nabla \frac{1}{R} dV' \quad (2.1.8)$$

或者

$$V_1(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Theta' R}{R^3} dV' \quad (2.1.8a)$$

其中 $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ 是对 $r(x, y, z)$ 的梯度算子.

(2) 寻找速度 V_2 使它满足

$$\nabla \cdot V_2 = 0 \quad (2.1.9a)$$

$$\nabla \times V_2 = \nabla \times (\nabla \times A) = \omega \quad (2.1.9b)$$

这是一个无源有旋问题, 由矢量公式,

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

因为 V_2 的选择有一定任意性, 可以这样选择矢量势 A , 使得 A 既满足 $V_2 = \nabla \times A$, 又满足 $\nabla \cdot A = 0$, 这样(2.1.9b)式化为

$$\nabla^2 A = -\omega \quad (2.1.10)$$

它的三个分量是三个泊松方程, 其解为

$$A(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega}{R} dV' \quad (2.1.11)$$

对上式求旋度得

$$V_2 = \nabla \times A = -\frac{1}{4\pi} \int \omega \times \nabla \frac{1}{R} dV' \quad (2.1.12)$$

或者

$$V_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega \times R}{R^3} dV' \quad (2.1.12a)$$

这就是毕奥-萨伐尔公式.

(3) 在求得以上两个特解以后, 现在来求给定空间内的定解问题. 因为由式(2.1.8)和(2.1.12)计算出来的速度在边界上一般不能满足边界条件(2.1.3), 我们必须寻找第三个速度矢量 V_3 , 使得

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V} - (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$$

由式(2.1.6)、(2.1.9)和(2.1.3)可知 \mathbf{V}_3 满足方程

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_3 = \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0 \quad \text{在 } \mathcal{V} \text{ 内} \quad (2.1.13a)$$

$$\nabla \times \mathbf{V}_3 = \nabla \times \mathbf{V} - \nabla \times \mathbf{V}_2 = 0 \quad \text{在 } \mathcal{V} \text{ 内} \quad (2.1.13b)$$

及边界条件

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_b - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) \quad \text{在 } S \text{ 上} \quad (2.1.14)$$

这是一个无源无旋问题, 因此存在一个速度势 φ_p , 使得

$$\mathbf{V}_3 = \nabla \varphi_p, \quad \nabla^2 \varphi_p = 0 \quad (2.1.15)$$

确定速度 \mathbf{V}_3 的问题归结为求解 φ_p 的拉普拉斯方程, 因为在(1)、(2)两步中 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 在边界上的速度已经确定, 边界条件(2.1.14)的等号右端各项都是已知的了. 根据调和函数的数学理论, 这时 φ_p 有唯一的解.

利用格林公式, $\varphi_p(r)$ 可以表示成边界积分形式(见[9], § 57, 58 或[2], § 2.9).

$$\varphi_p(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{R} \nabla' \varphi - \varphi \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS' \quad (2.1.16)$$

其中 $\nabla' = i \frac{\partial}{\partial x'} + j \frac{\partial}{\partial y'} + k \frac{\partial}{\partial z'}$ 是对 $r' (x', y', z')$ 的梯度算子, \mathbf{n} 是流体边界 S 的外法线单位矢量(见图 2.1). 上式积分号内第一项表示边界表面上强度为 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 的源分布产生的速度势, 第二项是强度为 φ 的偶极子面分布产生的速度势. 上式是构成现代面元法(或边界积分方程方法)的理论基础, 一旦确定了边界面上的源分布或偶极子分布, 就可确定整个流场中的速度势 φ_p 和速度分布 \mathbf{V}_3 , 具体算法详见 Hess(1972).

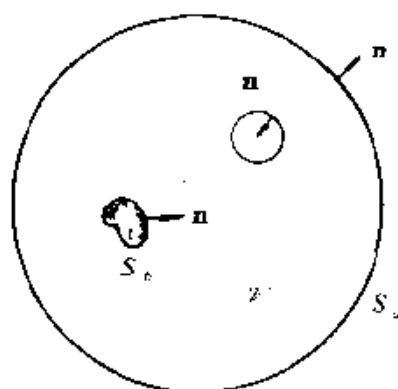


图 2.1 控制域示意图. 流体占有的空间 V 被边界 S 所包围,
 $S = S_o \cup S_i$, S_o 和 S_i 分别为内外边界

由上述三部分求得的速度在流体占有的空间内所有点上具有给定的涡量和胀量. 同时满足给定的法向速度边界条件. 由唯一性定理可知, 这三部分的合成速度将是唯一的.

2.1.3 几个问题的讨论

速度场原则上可以根据上述三个步骤求出, 然而还有一些细节问题需要进一步考虑.

一、积分的收敛性问题

在积分(2.1.7)中, 当 $R=0$ 时, 被积函数变成无穷大, 积分属于奇异积分. 在数学上可证明(例如参见[10]), 对于

$$\int_V \frac{C}{R^\alpha} dV$$

型的奇异体积分, 当 $\alpha < 3$ 时存在, $\alpha \geq 3$ 时不存在. 所以积分(2.1.7)是收敛的. 并可进一步证明: 若 φ' 在 V 内直到边界 S 上连续, 则 $\varphi(r)$ 及其一阶偏导数在整个空间内连续, 偏导数仍可按一般的积分号下取微商的方法得到. 也就是说, 从(2.1.7)的积分号下直接取微商求得式(2.1.8)是正确的.

然而, 对于式(2.1.8), 却不能在积分号下继续对 r 求微商.

因为那样将导致积分发散($\alpha \geq 3$). 但是我们仍可采取另外一种办法求出 $\varphi(r)$ 的二阶微商. 因为 $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, 式(2.1.8)可以写成

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla' \left(\frac{\Theta'}{R} \right) dV' = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{R} \nabla' \Theta' dV'$$

利用高斯公式得到

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\Theta'}{R} \mathbf{n} dS' = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{R} \nabla' \Theta' dV'$$

上式被积函数中只含有 $\frac{1}{R}$, 根据上述定理, 它的偏微商仍然存在. 上式的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_S \Theta' \mathbf{n} \cdot \nabla' \frac{1}{R} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla' \Theta' \cdot \nabla' \frac{1}{R} dV' \quad (2.1.17)$$

再在 \mathcal{V} 内挖去以 $P(r)$ 点为中心、 ϵ 为半径的小球(参见图 2.1), 记挖去后的流体空间为 \mathcal{V}_ϵ , 在 \mathcal{V}_ϵ 内应用格林第二公式

$$\int_{\mathcal{V}_\epsilon} (F \Delta G + \nabla F \cdot \nabla G) dV = \oint_S F \mathbf{n} \cdot \nabla G dS + \oint_{S_\epsilon} F \mathbf{n} \cdot \nabla G dS$$

令 $G = \frac{1}{R}$, $F = \Theta$, 因为 P 点在 \mathcal{V}_ϵ 外面, 上述积分是正常积分, $\Delta G = 0$, 上式化为

$$\int_{\mathcal{V}_\epsilon} \nabla' \Theta' \cdot \nabla' \frac{1}{R} dV' = \oint_S \Theta' \mathbf{n} \cdot \nabla' \frac{1}{R} dS' + \oint_{S_\epsilon} \Theta' \mathbf{n} \cdot \nabla' \frac{1}{R} dS'_\epsilon$$

在小球面上, 对 \mathcal{V}_ϵ 来说的外法线是小球面的内法线, 故 $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2}$, $R = \epsilon$, $\oint_{S_\epsilon} \Theta' \mathbf{n} \cdot \nabla' \frac{1}{R} dS'_\epsilon$ 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时的极限等于

$4\pi\Theta(r)$. 将以上结果代入式(2.1.17), 得到

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = \Theta$$

上式表明,若 Θ 在 \mathcal{V} 内一阶导数连续,则 $\varphi(r)$ 在 \mathcal{V} 内有二阶连续导数,并且 $\varphi(r)$ 确实是 $\nabla^2 \varphi = \Theta$ 的解.

上面关于 $\varphi(r)$ 二阶导数的运算可用一个简化的形式表示:

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(r-r') \quad (2.1.18)$$

其中 $\delta(r)$ 是狄拉克(Dirac) δ 函数. 因此

$$\int_{\mathcal{V}} \Theta' \nabla'^2 \frac{1}{R} dV' = -4\pi \int_{\mathcal{V}} \Theta' \delta(r-r') dV' = -4\pi\Theta(r)$$

因为 $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$,

二 $\nabla \cdot A = 0$ 的物理意义

在推导方程(2.1.10)过程中,我们曾假设 $\nabla \cdot A = 0$, 现在来研究这个条件如何才能得到满足. 对式(2.1.11)求散度, 并利用 $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, 得到

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \omega' \cdot \nabla \frac{1}{R} dV \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\omega'}{R} \right) dV = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{R} \nabla' \cdot \omega' dV \end{aligned}$$

因为 $\nabla \cdot \omega = 0$, 并由高斯定理得到

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\omega' \cdot n}{R} dS' \quad (2.1.19)$$

由上式可见,若在区域的边界面 S 上,处处满足 $\omega \cdot n = 0$, 就能保证区域内 $\nabla \cdot A = 0$. 但是,在一般情况下我们并不能保证在边界上满足这一条件. 当在边界面上 $\omega \cdot n \neq 0$ 时,可以人为地将涡量场延拓到区域的外面,如图 2.2 所示. 若在区域 \mathcal{V} 内有给定的涡量场 ω , 延拓后的区域为 \mathcal{V}_{ex} , 涡量场为 ω_{ex} , 延拓的方法不是唯一的,有许多方法可以做到这一点,但是要求延拓后的区域 \mathcal{V}_{ex} 内涡量场满足下列条件:

(1) 在延拓边界 S_{ex} 上,处处有 $\omega_{ex} \cdot n = 0$

(2) 在两个区域交界面 S 上, $\omega \cdot n = \omega_{ex} \cdot n$

(3) 在 \mathcal{V}_{ex} 内 $\nabla \cdot \omega_{ex} = 0$

于是, 在扩大的区域 $\mathcal{V} \cup \mathcal{V}_{ex}$ 内

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\omega'}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_{ex}} \frac{\omega'_{ex}}{R} dV' \quad (2.1.20)$$

$$V_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \omega' \times \nabla \frac{1}{R} dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_{ex}} \omega'_{ex} \times \nabla \frac{1}{R} dV' \quad (2.1.21)$$

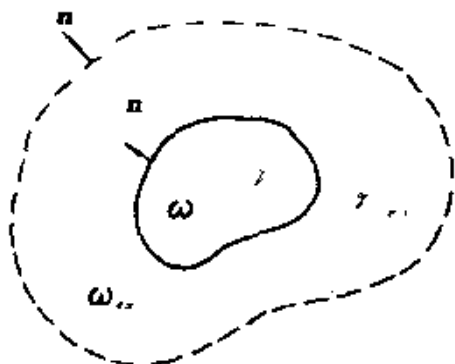


图 2.2 涡量场的延拓

我们不难验证, 在区域 \mathcal{V} 内, 上式内仍旧满足方程(2.1.9a, b). 对式(2.1.20)求散度, 可知

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\omega \cdot n}{R} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\omega_{ex} \cdot n}{R} dS' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{ex}} \frac{\omega_{ex} \cdot n}{R} dS' = 0, \end{aligned}$$

这是因为在 S 面上 \mathcal{V} 的外法线正等于 \mathcal{V}_{ex} 的内法线, 方向相反, 由延拓要求的条件(1)和(2), 故有 $\nabla \cdot A = 0$ 成立.

对式(2.1.21)求旋度

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V}_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathscr{V}'} \nabla \times (\boldsymbol{\omega}' \times \nabla \frac{1}{R}) dV' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathscr{V}_{ex}'} \nabla \times (\boldsymbol{\omega}_{ex}' \times \nabla \frac{1}{R}) dV'\end{aligned}$$

由矢量公式

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (2.1.22)$$

则

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V}_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathscr{V}' \cup \mathscr{V}_{ex}'} \boldsymbol{\omega}' \nabla \cdot (\nabla \frac{1}{R}) dV' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathscr{V}' \cup \mathscr{V}_{ex}'} (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R} dV'\end{aligned}$$

因为 $\nabla^2 \frac{1}{R} = \nabla'^2 \frac{1}{R}$, $(\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R} = (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla') \nabla' \frac{1}{R}$, 又因为观察点位于 \mathscr{V}' 内, 对于 \mathscr{V}_{ex}' , 上述积分都是正常积分, $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$. 于是

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V}_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathscr{V}'} \boldsymbol{\omega}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathscr{V}' \cup \mathscr{V}_{ex}'} (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla') \nabla' \frac{1}{R} dV' \\ &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_S (\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}) \nabla' \frac{1}{R} dS' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{S'} (\boldsymbol{\omega}_{ex}' \cdot \mathbf{n}) \nabla' \frac{1}{R} dS' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{ex}'} (\boldsymbol{\omega}_{ex}' \cdot \mathbf{n}) \nabla' \frac{1}{R} dS'\end{aligned}$$

由条件(1)和(2), 可知在 \mathscr{V}' 内 $\nabla \times \mathbf{V}_2 = \boldsymbol{\omega}$. 同样方法可证明在 \mathscr{V}' 内 $\nabla \cdot \mathbf{V}_2 = 0$. 所以延拓后 \mathbf{A} (式(2.1.20)) 和 \mathbf{V}_2 (式(2.1.21)) 的

确是式(2.1.9a, b)的解.

区域延拓以后, V_2 在 S 面上的速度值会变化, 在第三步骤求解无源无旋问题时, 其解 $\nabla\varphi_p$ 将依赖于延拓的方式.

2.1.4 速度积分公式(续)

当流场内有固体存在或者流体被固体表面包围时, 除上小节所述区域延拓方法以外, 还有两种更实用的方法考虑固体表面存在的影响.

一、流-固耦合运动学系统

我们发现, 固体运动速度 $V_s = V_0 + \Omega \times r$ 也满足

$$\nabla \cdot V_s = 0, \quad \nabla \times V_s = 2\Omega \quad (2.1.23)$$

的运动学关系, 其中 Ω 是固体运动的角速度. 也就是说, 固体运动产生的速度场与流体运动的速度场受同样的运动学关系控制. 因此, 2.1.2 节中给出的公式(2.1.8)和(2.1.12)等在流-固耦合系统的整个空间内成立, 只要在固体占有空间用 $2\Omega = \omega_s$ 表示即可. 但是, 在流固接触的固体表面上必须使用粘附条件. 这样才能保证满足涡量场在固体表面上的延拓条件 $\omega \cdot n = \omega_s \cdot n$.

在静止固壁上任意画出封闭周线 C , 应用斯托克斯公式 $\oint_C V \cdot dr = \int_S n \cdot \omega dS$, 由于存在粘附条件 $V=0$, 所以在静止固壁上 $\omega \cdot n = 0$, 即涡线总是处于壁面上. 对于运动壁面, 可把坐标系固结于物体上, 此时 $\omega_s \cdot n = 0$, 其中 $\omega_s = \nabla \times V_s$ 是非惯性坐标系中的相对涡量. $\omega_r = \omega - 2\Omega$ (参见[11] § 21.05), 所以 $\omega \cdot n = 2\Omega \cdot n$. 由此可以推论, 若空间任意曲面上速度连续, 则穿过该曲面的涡量的法向分量必相等.

二、广义毕奥-萨伐尔公式

第二种考虑固壁存在的常用方法是在积分公式(2.1.8)和(2.1.12)中增加边界影响的积分项.

根据(一)段的思想,在流-固耦合运动学系统的整个空间内,速度表达式可写成

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V} \cup \mathcal{V}_b} (\Theta' \nabla' \frac{1}{R} + \boldsymbol{\omega}' \times \nabla' \frac{1}{R}) dV'$$

其中 \mathcal{V} 和 \mathcal{V}_b 分别为流体和固体占有的体积.在固体内部, $\Theta' = 0$, $\boldsymbol{\omega}' = 2\boldsymbol{\Omega}$,所以由固体涡量诱导的那部分速度为

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_b} 2\boldsymbol{\Omega}' \times \nabla' \frac{1}{R} dV' = \frac{1}{4\pi} \int (\nabla' \times \mathbf{V}_b) \times \nabla' \frac{1}{R} dV'$$

在上式中利用下面的矢量公式

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} &= (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \\ &\quad + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) - \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

并注意到 \mathbf{r} 在固体的外面时, $\nabla' \cdot \frac{1}{R} = 0$,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_b} [(\nabla' \frac{1}{R} \cdot \nabla') \mathbf{V}_b + (\mathbf{V}_b \cdot \nabla') \nabla' \frac{1}{R} \\ &\quad - \nabla' (\nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{V}_b)] dV' \end{aligned}$$

再利用高斯公式,有

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_b} [(\nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{V}_b + (\mathbf{V}_b \cdot \mathbf{n}) \nabla' \frac{1}{R} \\ &\quad - \mathbf{n} (\nabla' \frac{1}{R} \cdot \mathbf{V}_b)] dS' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_b} [(\mathbf{V}_b \cdot \mathbf{n}) \nabla' \frac{1}{R} + \nabla' \frac{1}{R} \times (\mathbf{V}_b \times \mathbf{n})] dS \end{aligned}$$

所以,流体内部一点的速度为

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} (\Theta' \nabla' \frac{1}{R} + \boldsymbol{\omega}' \times \nabla' \frac{1}{R}) dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_b} [(\mathbf{V}_b \cdot \mathbf{n}) \nabla' \frac{1}{R} - (\mathbf{V}_b \times \mathbf{n}) \times \nabla' \frac{1}{R}] dS' \quad (2.1.25)$$

其中 \mathbf{V}_b 是固体表面速度, 上式又称为广义毕奥-萨伐尔公式, 从格林公式出发, 也可推出上述公式, 不过要麻烦得多 (Wu, 1973). 从以上推导还可看出, 流-固耦合系统的做法和式 (2.1.25) 是完全等价的.

在以下几章的讲述中我们将略去胀量的影响, 除非特别指明的以外, 主要讨论不可压缩流中的涡运动问题.

2.2 涡量矩守恒

式 (1.2.8) 已指出, 由涡量的定义 $\nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}$ 可以立刻得到 $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. 从涡量场的这一运动学基本性质出发, 可以推出涡量各阶矩守恒的特性.

假设流体充满无穷大空间, 初始时刻 ($t=0$) 涡量分布聚集在有限尺寸的空间内 (compact support), 或者随距离 r 呈指数律衰减, 则在以后时间内 ($t>0$) 涡量分布将有

$$|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)| = O(e^{-br}) \quad (2.2.1)$$

b 是一正常数, 由涡量产生的速度在无穷远处趋向于零,

$$|\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)| \rightarrow 0 \quad \text{当 } r \rightarrow \infty \quad (2.2.2)$$

由于涡量场是一个管式矢量场 ($\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$), 我们来研究它的空间积分 $\int \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV$. 利用高斯定理, 有

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV = \oint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.2.3)$$

如前 § 1.2.1 节所述, 由此可以得到著名的亥霍兹涡通量守恒定理, 再利用高斯定理,

$$\int_V \nabla \cdot (\omega x_i) dV = \oint_S \omega \cdot n x_i dS$$

如果 S 是个半径充分大的球面, $|\omega|$ 在远场又衰减得充分快, 从上述面积分看出, 只要要求 $|\omega| \sim O(a^{-m})$ ($m > 3$), a 为球半径, 当 $a \rightarrow \infty$ 时, 面积分收敛到零. 由于 $\nabla x_i = \delta_{ij}$, 上式左边可写成

$$\int_V \omega_i dV = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.4)$$

或者, 写成矢量形式为

$$\int_V \omega dV = 0 \quad (2.2.4a)$$

这称为**总涡量守恒原理**. 这个结果反映了这样一个事实: 作为涡量场几何描述的涡管, 在三维空间中总应是呈闭合的涡环, 致使涡量在空间的总积分在所有方向上都为零. 当存在固体表面时, 如前所述, 可把整个空间处理成一个流-固耦合的运动学系统. 按照统一的流-固系统来解释, 涡管是不能终止在固壁或自由表面上的. 当固壁旋转时, 固壁表面涡通量守恒, $\omega \cdot n = 2\Omega \cdot n$, 涡管将穿过固壁形成封闭涡环; 当固壁静止时, 固壁上 $\omega \cdot n = 0$, 涡管沿边界表面继续延伸, 涡管截面呈喇叭状沿表面扩大. 在无穷远处, $|\omega| \rightarrow 0$, 也应理解成涡管截面积在无穷远处将是无限扩大的. 图 2.3 是旋风形成的涡管示意图, 可以印证上述推论.

下面再来引出涡量各阶矩守恒的关系式

涡量的一阶矩 $\int x_i \omega_j dV$ ($i, j = 1, 2, 3$) 共有九个分量, 但是因为

$$\begin{aligned} \int (x_i \omega_j + x_j \omega_i) dV &= \int \nabla \cdot (x_i x_j \omega) dV \\ &= \int x_i x_j \omega \cdot n dS, \end{aligned}$$

上述面积分只要对 $|\omega|$ 在远场的衰减特性以更强的限制, 即要求 $|\omega| \sim O(a^{-m})$ ($m > 4$), 当 $a \rightarrow \infty$ 时上式趋近于零. 于是,

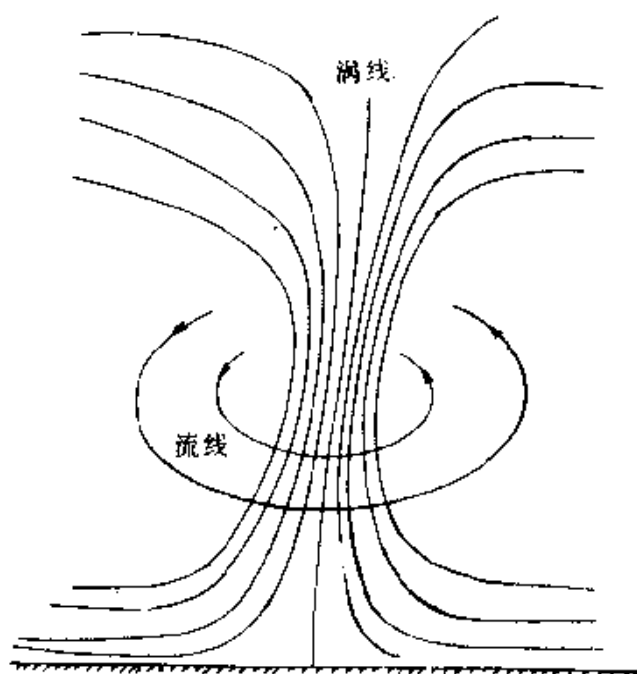


图 2.3 旋风形成的涡管示意图

$$\int_{\infty} (x_i \omega_j + x_j \omega_i) dV = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3, j \geq i) \quad (2.2.5)$$

由此可见, 在九个一阶矩中存在六个相容条件(2.2.5).

进而可以计算涡量的二阶矩, 因为

$$\int \nabla \cdot (x_i x_j x_k \omega) dV = \int x_i x_j x_k \omega \cdot n dS$$

若 $|\omega| \sim O(a^{-m})$ ($m > 5$), 当 $a \rightarrow \infty$ 时, 面积分趋于零. 于是, 上式左边经过微商后可化为

$$\int_{\infty} x_i^2 \omega_i dV = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{不求和}) \quad (2.2.6a)$$

$$\int_{\infty} x_i^2 \omega_j dV + 2 \int_{\infty} x_i x_j \omega_i dV = 0$$

$$(i, j = 1, 2, 3, i \neq j) \quad (2.2.6b)$$

$$\text{及} \quad \int_{\infty} x_1 x_2 \omega_3 dV + \int_{\infty} x_1 \omega_2 x_3 dV + \int_{\infty} \omega_1 x_2 x_3 dV = 0 \quad (2.2.6c)$$

二阶矩 $\int x_i x_j \omega_k dV$ 共有十八个分量. 存在十个相容条件(2.2.6).

对于更高阶矩也可以用可样方法做下去. 进一步研究指出 (Ting, 1983), 对于 n 阶矩 $\int \nabla \cdot (x_1 x_2 \cdots x_n \omega) dV$ 有 $\frac{3}{2}(n+2)(n+1)$ 个分量, 存在 $\frac{1}{2}(n+3)(n+2)$ 个相容条件, 只要求 $|\omega|$ 在远场满足 $|\omega| \sim O(a^{-m})$ ($m > 3+n$). 关于式(2.2.1)要求的涡量分布条件, 以上假定的关于 $|\omega|$ 在远场衰减的特性总是能满足的.

还可以证明, 除了这些相容性条件以外, 还存在六个**积分不变量**. 但是这些积分不变量不能仅从涡量是管式矢量场 ($\nabla \cdot \omega = 0$) 特性中推出, 还必须借助于涡量动力学方程(1.3.12). 我们将放在下一章涡量动力学特性中讲述. 为使本节内容完整起见, 不妨先给出其结果如下:

对于**一阶矩** ($n=1$), 我们三个非零的时间不变量

$$\frac{1}{2} \int r^2 \omega dV = I \quad (2.2.7)$$

对于**二阶矩** ($n=2$), 我们也有三个非零的时间不变量

$$\int r^2 \omega dV = M \quad (2.2.8)$$

对于 $n \geq 3$, 不存在任何时间不变量.

在 18 个二阶矩中, 我们有 10 个相容条件和 3 个时间不变量. 因此还剩下 5 个线性独立的积分. 可以选择如下:

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \int (x_2^2 - x_3^2) \omega_1 dV, \\ G_2(t) &= \int (x_1^2 - x_3^2) \omega_2 dV, \\ G_3(t) &= \int (x_1^2 - x_2^2) \omega_3 dV \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$H_1(t) = \int (2x_2x_3\omega_1 - x_1x_2\omega_3 - x_1x_3\omega_2) dV$$

$$H_2(t) = \int (2x_1x_3\omega_2 - x_1x_2\omega_3 - x_2x_3\omega_1) dV \quad (2.2.10)$$

其中 I 和 M 是常数, 仅由初始涡量分布决定. 若 $t=0$ 时已知 $\omega(r, 0)=\zeta(r)$, 则 $I = \frac{1}{2} \int r \times \zeta dV$, $M = \int r^2 \zeta dV$. G_i 和 H_i 仅是时间的函数.

研究总涡量及其各阶矩积分至少有两方面作用, 一是在后面叙述矢量势 A 和速度 V 的远场渐近特性时要用到它们; 二是在数值计算中可用来控制总体误差. 上述这些不变量是在整个空间内成立的, 而数值求解只能在有限大区域内进行. 在有限大区域内得到的数值结果与这些不变量的偏差能够用来评价区域大小对数值解精度的总体影响.

2.3 速度远场渐近特性

在许多场合下, 我们需要知道速度在远场的渐近特性. 现在来研究它们.

在矢量势和涡量诱导的速度公式(2.1.11)和(2.1.12)中, 若观察点 P 离积分动点 Q 足够远, 被积函数 $\frac{1}{R}$ 可以展开成 r' 的幂

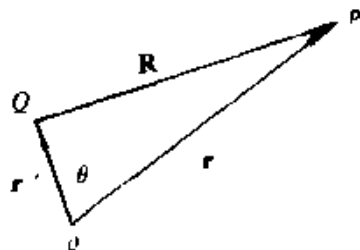


图 2.4 $1/R$ 的展开示意图

级数, 如图 2.4 所示.

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta)^{1/2},$$

则
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} [1 + (\alpha^2 - 2\alpha\mu)]^{-1/2}$$

其中
$$\alpha = \frac{r'}{r} < 1, \quad \mu = \cos\theta$$

利用泰勒级数展开

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 \dots,$$

$\frac{1}{R}$ 可展开成

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\mu) \quad (2.3.1)$$

其 $P_n(\mu)$ 是第 n 阶勒襄德 (Legendre) 多项式, $P_0(\mu) = 1$, $P_1(\mu) = \mu$, $P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$, $P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$, ...

将 $\frac{1}{R}$ 近似表达式代入式 (2.1.11), 我们得到矢量势

$$A(r, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^m A^{(n)}(r, t) + O(r^{-m-2}) \quad (2.3.2)$$

其中
$$A^{(n)}(r, t) = \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\infty} \omega(r', t) r'^n P_n(r, r') dV' \quad (2.3.3)$$

$r^n P_n(\mu)$ 是 x_i 的 n 阶齐次多项式. 可以设法把被积函数中的 r 放到积分号外面来. 事实上, $\frac{1}{R}$ 可改写成

$$\frac{1}{R} = C^{(0)} + C^{(1)} \cdot r' + \frac{1}{2} C^{(2)} : r' r' + \dots \quad (2.3.4)$$

$$C^{(0)} = \frac{1}{r}, \quad C^{(1)} = \frac{r}{r^3}, \quad C^{(2)} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3rr}{r^5} \quad (2.3.5)$$

其中 $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ 和 $C^{(2)}$ 分别为标量、矢量和二阶张量; \cdot 表示张量的双点积; I 为二阶单位张量; rr 是并矢, 它们仅是 r 的函数, 代

入(2.3.2)和(2.3.3)式, 分别得到

$$A_i^{(0)} = \frac{1}{r} \int \omega_i dV \quad (2.3.6a)$$

$$A_i^{(1)} = \frac{x_j}{r^3} \int \omega_i x_j dV \quad (2.3.6b)$$

$$A_i^{(2)} = \frac{1}{2r^3} (3 \frac{x_j x_k}{r^2} - \delta_{jk}) \int \omega_i x_j x_k dV \quad (2.3.6c)$$

我们还可以进一步利用 § 2.2 节中涡量矩积分的相容关系和积分不变量化简上面的式子。由总涡量为零立刻可知 $A^{(0)} = 0$ 。又因为 $\frac{r}{r^3} = -\nabla \frac{1}{r}$, 并根据式(2.2.5), $\int \omega_i x_j dV = \frac{1}{2} \int (x_j \omega_i - x_i \omega_j) dV$, 故 $A^{(1)}$ 可写成

$$A^{(1)} = \nabla \frac{1}{r} \times I \quad (2.3.7)$$

式中 I 由式(2.3.7)给出, 是个时间不变量。

$A^{(2)}$ 写出来比较复杂, $A_i^{(2)}$ 分量可写成

$$A_i^{(2)} = \frac{1}{2r^5} \begin{bmatrix} 3x_1^2 - r^2 & 3x_1x_2 & 3x_1x_3 \\ 3x_1x_2 & 3x_2^2 - r^2 & 3x_2x_3 \\ 3x_1x_3 & 3x_2x_3 & 3x_3^2 - r^2 \end{bmatrix} ;$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(M_2 - G_2) & -\frac{1}{2}(M_3 + G_3) \\ -\frac{1}{2}(M_2 + G_2) & M_1 + G_1 & 2H_1/3 \\ -\frac{1}{2}(M_3 + G_3) & 2H_1/3 & M_1 - G_1 \end{bmatrix}$$

(2.3.8)

$A_2^{(2)}$ 和 $A_3^{(2)}$ 可以类似地写出。因此写到二阶项为止的 A 为

$$A(r, t) = \frac{1}{4\pi} (A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)}) + O(r^{-4}) \quad (2.3.9)$$

由式(2.1.12)可知, 分别对 A 的各项求旋度就可得到速度在

远场的渐近表达式

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}^{(0)} + \mathbf{V}^{(1)} + O(r^{-n}), \quad n \geq 4 \quad (2.3.10)$$

其中
$$\mathbf{V}^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times \int \boldsymbol{\omega}' dV' = 0$$

$$\mathbf{V}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{r} \times \mathbf{I} \right) = \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\mathbf{I} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right)$$

算子 ∇ 只对 r 运算, $\boldsymbol{\omega}'$ 和 r' 看成是常量. 由总涡量为零可知 $\mathbf{V}^{(0)} = 0$, 即首项对远场速度无贡献. $\mathbf{V}^{(1)}$ 的物理意义是明显的, $\mathbf{I} \cdot \nabla \frac{1}{r}$ 不是别的, 正是偶极子速度势的表达式, 所以 $\mathbf{V}^{(1)}$ 在远场的速度贡献相当于在原点的一个偶极子在 r 处诱导的速度, 偶极子的强度和方位为 \mathbf{I} . 速度的下一项贡献是 $\mathbf{V}^{(2)}$, 由于它的表达式太复杂, 这里不拟写出. $\mathbf{V}^{(2)}$ 是一个在原点的“四极子”的贡献. 由式(2.3.7)可看出, 只要当 r 足够远, $|\boldsymbol{\omega}| < O(r^{-4})$, 积分 \mathbf{I} 收敛, 则在远场, $|\mathbf{A}|$ 将以 $O(r^{-2})$ 量级衰减, 而 $|\mathbf{V}|$ 将以 $O(r^{-3})$ 量级衰减.

在前面讨论各阶涡量矩的相容条件时, 我们曾对涡量场的远场衰减特性给予不同程度的限制: $|\boldsymbol{\omega}| \sim O(r^{-m})$, ($m > n+3$, n 为涡量矩阶数). 这些限制一般总是能满足的, 因为在 2.2 节开头我们已经假设涡量场分布集中在有限尺度的空间内或以指数律衰减. 它的实际物理意义是: 以物体在粘性流体中从静止开始的运动为例, 从物面产生的涡量是集中分布在物面附近及尾迹区内. 涡量大致以流体绕物体运动的速率向下游对流, 同时以距离的指数律向四周扩散, 因此在有限的时间内涡量总是主要集中在有限的空间, 在无穷远处衰减到零.

2.4 二维涡量场的运动学特性

以上三节我们集中讲述了三维空间内涡量场的运动学特性.

对于二维流动, 首先需要强调的是二维涡量场特性不是三维流动的特例. 二维涡运动与三维涡运动有许多本质的差别. 例如二维流中涡矢量总是垂直于运动平面且伸展到无穷远, 涡线不存在拉伸和扭曲. 因此三维涡运动形态要比二维涡运动形态丰富和复杂得多. 又因为三维拉普拉斯方程的基本解是 $\frac{1}{r}$, 而二维拉普拉斯方程的基本解是 $\ln r$. 它在无穷远处有对数奇点. 这些特点将直接影响到二维流的速度、动量和动能的特性.

2.4.1 二维毕奥-萨伐尔速度公式

二维流中, 毕奥-萨伐尔公式(2.1.12)可写成

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}'}{R^3} dS(\mathbf{r}') dz' \quad (2.4.1)$$

其中体积微元 $dV' = dS' \cdot dz'$, dS' 是平面面积微元, dz' 垂直于运动平面. 因为 $\mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}'$ 与 z' 无关, 可先对 z' 积分上式, 得

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{y - y'}{R^2} \omega' dS' \quad (2.4.2a)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x - x'}{R^2} \omega' dS' \quad (2.4.2b)$$

其中 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $r' = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$. 这就是二维毕奥-萨伐尔公式. 引进矢量势 $\mathbf{A} = (0, 0, \phi)$ 和 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, ϕ 为二维流函数, $u = \partial\phi/\partial y$, $v = -\partial\phi/\partial x$, 则

$$\mathbf{A}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int \omega(x', y') \ln R dS' \quad (2.4.3)$$

$$\mathbf{V}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int \boldsymbol{\omega}' \times \nabla' \ln R dS' \quad (2.4.4)$$

当流场内有固体存在时, 速度表达式可写成

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}}{R^2} dS'$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{R(V_b \cdot n) - (V_b \times n) \times R}{R^2} dl \quad (2.4.5)$$

式中 S 为流体占有的区域, C 是物体边界, V_b 是物面运动速度, n 为物面外法线单位矢量.

可以证明, 上式第二个积分等价于

$$\frac{1}{2\pi} \omega_b \times \int \frac{R}{R^2} dS', \quad \omega_b = 2\Omega_b$$

Ω_b 是物体的角速度. 所以, 与三维流情形一样, 在流-固耦合运动学系统中, 式(2.4.4)仍旧成立.

2.4.2 涡量矩守恒特性

对于二维流, 由于涡量总是垂直于运动平面, $\omega = \omega_3 k$, 可以证明, 不存在三维流中那样的相容条件. 而且, 由于涡线延伸至无穷远, 不像在三维空间中能形成封闭的曲线, 所以二维流中总环量 $\Gamma = \int \omega dS$ 可以不为零. 若假设在平面内 $|\omega| = O(e^{-pr})$, ($p > 0$), r 是平面极坐标距离, 我们可以得到下列积分不变量(详见 §3.4 节):

$$\int \omega_3 k dS = \Gamma k \quad (2.4.6)$$

$$\int \omega_3 r \times k dS = I \quad (2.4.7a)$$

$$I_x = \int y \omega_3 dS, \quad I_y = - \int x \omega_3 dS \quad (2.4.7b)$$

$$\int r^2 \omega_3 dS = 4\nu \Gamma t + D_3 \quad (2.4.8)$$

其中 Γ , I , D_3 都是常量. 需要指出, 在二维流中流体的总环量是个时间不变量, 但它可以不为零, 这是由于涡线是无穷长直线引起的. Γ , I 和 D_3 都由初始条件确定, 若 $\omega_3(r, 0) = \zeta_3(r)$, 则

$$\Gamma = \int \zeta_3 dS, \quad I = \int \mathbf{r} \times \zeta_3 \mathbf{k} dS, \quad D_3 = \int r^2 \zeta_3 dS.$$

二维流中二阶矩 $\int x_i x_j \omega_3 dS$ ($i, j = 1, 2$) 共有三个分量, 除积分(2.4.8)式外, 另外两个关系为

$$G_3(t) = \int (x_1^2 - x_2^2) \omega_3 dS \quad (2.4.9)$$

$$H_3(t) = \int 2x_1 x_2 \omega_3 dS \quad (2.4.10)$$

上述关系式虽然是运动学量的积分, 但它们不能仅从运动学方程推出, 必须借助于动力学方程, 请详见第三章.

2.4.3 速度远场渐近特性

二维流中矢量势 A 的公式(2.4.3)中的被积函数核是 $\ln R$, 而不是三维流矢量势公式(2.1.11)中的 $\frac{1}{R}$, 欲求远场近似, 需先将 $\ln R$ 在原点展开成 \mathbf{r}' 的幂级数

$$\ln R = \ln r - \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^4} + \dots \quad (2.4.11)$$

或可写为

$$\ln R = \ln r - \mathbf{r}' \cdot \nabla \ln r + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla (\nabla \ln r) + \dots$$

其中 $\mathbf{r}' \mathbf{r}'$ 是并矢, $\nabla \nabla \ln r$ 是二阶张量, $:$ 表示张量的双点积. 将上式代入式(2.4.3), 得到

$$A = -\frac{1}{2\pi} \ln r \cdot \left(\int \boldsymbol{\omega}' dS' \right) + \frac{1}{2\pi} \int (\mathbf{r}' \cdot \nabla \ln r) \boldsymbol{\omega}' dS' + \dots$$

因为 $\nabla \ln r \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}') = \mathbf{r}' (\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \ln r) - \boldsymbol{\omega}' (\mathbf{r}' \cdot \nabla \ln r)$

及 $\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \ln r = 0$, 所以

$$A = \phi \mathbf{k} = -\frac{\Gamma \mathbf{k}}{2\pi} \ln r - \frac{1}{2\pi} \nabla \ln r \times \mathbf{I} + \dots \quad (2.4.12)$$

$$\mathbf{V} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\nabla\ln r \times \mathbf{k} - \frac{1}{2\pi}\nabla(\nabla\ln r \cdot \mathbf{I}) + O(r^{-n}), \quad n \geqslant 2 \quad (2.4.13)$$

式中 \mathbf{I} 由式(2.4.7)给出. 这表明, 远场速度近似地等于在原点的一个强度为 Γ 的点涡和一个强度为 \mathbf{I} 的偶极子产生的诱导速度之叠加. 再精确些的公式是考虑四极子、八极子等的贡献. 流场的速度环量不为零时, 速度在远场的量级为 $O(r^{-1})$; 若速度环量为零, 速度在远场以 $O(r^{-2})$ 的量级衰减. 一个计及四极子贡献的流函数公式可写成

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, t) = & \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{1}{2\pi r}(I_y \cos\theta - I_x \sin\theta) \\ & - \frac{1}{2\pi r^2}[G_2(t)\cos 2\theta + H_2(t)\sin 2\theta] + O(r^{-3}) \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

其中 $G_2(t)$ 和 $H_2(t)$ 由式(2.4.9)和(2.4.10)给出.

研究速度远场近似公式的意义在于:

1、进行快速计算. 用速度的积分公式(2.1.12)和(2.4.2)计算速度场是很花费时间的. 但当 r 与 r' 相距甚远时, 用远场近似公式计算可以大大减少计算工作量. 从式(2.3.10)和(2.4.13)可见, 每一项速度表达式都是由两部分构成: 一是 $\frac{1}{r}$ 或 $\nabla\ln r$ 对 r 的导数, 它们仅是观察点矢径 r 的函数, 与涡量分布无关; 另一部分是涡量的各阶矩, 特别是对于一阶矩, 是一些时间不变量, 可一劳永逸地计算出来. 发展快速计算方法是提高积分形式的计算效率的关键, 其中多极子展开法是常用的一种方法.

2、改进边界条件. 在外部流动中计算域总是有限的, 在有限域边界上用无穷远边界条件肯定会引起误差. 若在有限域边界上用远场近似公式代替无穷远条件, 可以提高计算精度; 或者在相同精度要求下, 可以减小计算域及其工作量.

3、这是今后研究涡量场动量、动能特性的基础。

2.5 螺旋度

在三维流场中流体流动的**螺旋度**(Helicity)由 Moffatt(1969)定义为

$$H(t) = \int_V \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} dV \quad (2.5.1)$$

而被积函数称为**螺旋度密度**

$$h(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.5.2)$$

这是一个与三维流场中涡系的拓扑结构(如涡管的缠绕和扭结数)有关的物理量。为了说明这一点,首先看一个最简单的例子:均匀流中固体式旋转的涡核。涡核内流体的速度

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

其中 \mathbf{U} , $\boldsymbol{\Omega}$ 为常矢量,则涡量为

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = 2\boldsymbol{\Omega}$$

螺旋度密度为

$$h = 2\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{常量}$$

如果 $\mathbf{U} // \boldsymbol{\Omega}$ 且同向,这时流线正好是个螺旋线。容易证明此时

$$u = -\Omega y, \quad v = \Omega x, \quad w = U,$$

流线方程为

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = \frac{U}{\Omega} \theta + C$$

其中 θ 为螺旋角,上式代表一族圆柱螺旋线(图2.5),其间距为 $d = \frac{2\pi U}{\Omega}$ 。

较复杂的例子见图2.6, L_1 和 L_2 是两个涡环,彼此串成链状,

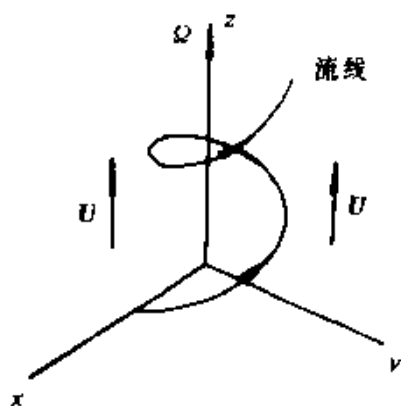


图2.5 流线是螺旋线

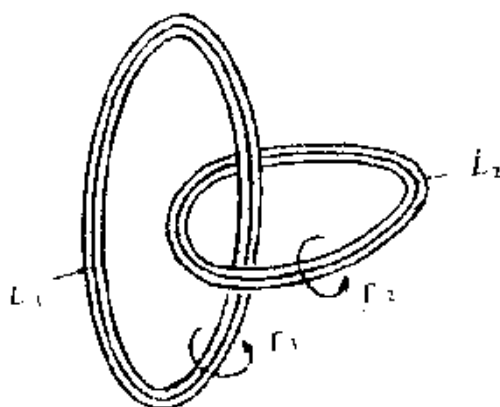


图2.6 涡线的缠绕和扭结

Γ_1 和 Γ_2 分别为它们的强度, 因为 $\omega dV = \Gamma dl$, 其中 dV 和 dl 分别是涡管的体积微元和涡管轴线的有向线元, 所以 L_1 的螺旋度可计算如下:

$$\oint_{L_1} \mathbf{V} \cdot \omega dV = \Gamma_1 \oint_{L_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}_1$$

又根据斯托克斯定理, 上式沿周线 L_1 的线积分等于穿过张在 L_1 上的一个开曲面的涡通量. 在现在的例子中它等于 $\pm n\Gamma_2$, n 是涡线 L_2 缠绕 L_1 的次数, \pm 号与坐标系有关. 于是有

$$\oint_{L_1} \mathbf{V} \cdot \omega dV = \pm n\Gamma_1\Gamma_2,$$

同理, L_2 的螺旋度为

$$\oint_{L_2} \mathbf{V} \cdot \omega dV = \Gamma_2 \oint_{L_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}_2 = \pm n\Gamma_1\Gamma_2$$

于是此例中总的螺旋度为

$$H(t) = \pm 2n\Gamma_1\Gamma_2 \quad (2.5.3)$$

对于更一般的情形, 如果第 i 个闭合涡线的强度为 Γ_i , 穿过该闭

合回路上开曲面的涡通量为 K_i (也就是绕该回路的速度环量为 K_i)， K_i 的值是其它涡线穿过该曲面的次数(代数和)与各该涡线强度的积之总和，即

$$K_i = \sum_j \alpha_{ij} \Gamma_j \quad (2.5.4)$$

其中 α_{ij} 是第 i 和 j 个涡线之间的缠绕数，它可以是正的或负的整数(依赖于坐标系)或为零。对于一条涡线，如果自身不扭结，它可以连续变形收缩为一点，此时该涡线对自身 K_i 的贡献为零。如果它是扭结的，则 α_{ii} 称自缠绕数。于是，第 i 个涡线的螺旋度为

$$h_i(t) = \Gamma_i K_i \quad (2.5.5)$$

在开尔文速度环量守恒定理的条件下，即加速度有势的流动中，可以证明，螺旋度是个不变量。设 \mathcal{V} 是含有涡量的物质体积，其界面上 $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ ，则

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} dV \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) dV \\ &= \int_{S(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 - p - \Pi \right) dS \\ &\quad + 2 \int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega} dV + \int_{S(t)} (\boldsymbol{n} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{V} dS \end{aligned}$$

其中 Π 是彻体力中保守力部分之势， \mathbf{F} 是另外非保守的彻体力部分。当彻体力为单值、保守时， $\mathbf{F} = 0$ ，所以

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (2.5.6)$$

由此得证，在上述条件下，螺旋度是个运动不变量。

第三章 涡量动力学特性

与前一章的宗旨一样,本章讲述的仅限于涡量场的总体特性,而不涉及具体的涡运动形态.具体地说,本章将给出涡量场的动量和动能等随时间的变化特性;阐明涡量生成、扩散和耗散的机制;最后研究涡量与物体的相互作用,给出作用于运动物体上的流体动力与涡量场整体积分之间的关系.因为这些时间特性与动力学方程及流场特性,如流体是否正压、是否无粘等有关,故称为动力学特性.

3.1 亥姆霍兹涡量定理

涡量场随时间的变化特性中最基本的莫过于亥姆霍兹关于涡量动力学的几个定理.

对于正压流体、物体力有势的无粘流动,涡量动力学方程(1.3.10)存在一次积分.为证明这一点,引入拉格朗日变量 ξ ,它与欧拉变量的关系为 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\xi,t)$, $\mathbf{V}=\mathbf{V}(\mathbf{x}(\xi,t),t)$,则变形速率张量可表示成

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial \xi_a} \frac{\partial \xi_a}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_a}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_\xi = \frac{\partial \xi_a}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_a} \right)$$

$$\text{而} \quad \frac{\partial \xi_a}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_a} \right) + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_a} \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{\partial \xi_a}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_a} \frac{\partial \xi_a}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_a} \delta_{ij} = 0$$

所以式(1.3.10)可写成

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) = \frac{\omega_j}{\rho} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} = - \frac{\omega_j}{\rho} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi_a} \frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{\partial \xi_a}{\partial x_j} \right)$$

再用 $\frac{\mathcal{K}_i}{\partial x_i}$ 乘以上式两边, 并注意到 $\frac{\mathcal{K}_i \partial x_i}{\partial x_i \mathcal{K}_a} = \delta_{ia}$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{K}_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \mathcal{K}} \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) + \frac{\omega_i}{\rho} \delta_{ia} \frac{\partial}{\partial \mathcal{K}} \left(\frac{\mathcal{K}_a}{\partial x_i} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{K}} \left(\frac{\omega_i}{\rho} \frac{\mathcal{K}_i}{\partial x_i} \right) &= 0 \end{aligned}$$

即
$$\frac{\omega_i}{\rho} \frac{\mathcal{K}_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right), \quad \text{或者} \quad \frac{\omega_i}{\rho} = \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right) \frac{\partial x_j}{\mathcal{K}_i}$$

写成矢量形式

$$\frac{\omega}{\rho} = \left(\frac{\omega_0}{\rho_0} \cdot \nabla_{\xi} \right) \mathbf{x}(\xi, t) \quad (3.1.1)$$

式中 $\nabla_{\xi} \mathbf{x}$ 是从欧拉变量变为拉格朗日变量的变形张量, 式(3.1.1)是式(1.3.10)的一次积分. 它表明, 对于正压、彻体力有势的无粘流动, 如果某些流体质点在初始时刻涡量为零, $\omega_0(\xi, 0) = 0$, 则在以后时间 $\omega(\xi, t)$ 亦恒为零. 反之, 初始时刻具有涡量的流体质点在后继时间内将始终保持有涡量, 虽然质点的涡量会有变化. 上述结果表明了无旋运动的保持性原理.

由公式(3.1.1)可以证明亥姆霍兹第一和第二定理:

定理1: 对于彻体力有势的正压流体的无粘流动, 某一时刻构成一条涡线的流体质点, 在运动的全部时间过程中仍将构成同一条涡线. 换言之, 涡线是由相同流体质点组成的物质线并随流体一道运动(涡线保持性定理).

定理2: 在上述相同假设条件下, 涡管在运动过程中的涡管强度保持不变.

现证明如下.

设 $t=0$ 时刻某条涡线为 L_0 , 由涡线上点的位置 $\mathbf{x}_0 = \xi$ 作为其拉格朗日坐标. 由涡线定义有

$$\omega_0 \times \delta \mathbf{x}_0 = 0 \quad \text{或} \quad \omega_{0j} = \lambda_0 \delta x_{0j} = \lambda_0 \delta \xi_j \quad (3.1.2)$$

λ_0 为标量. 在 t 时刻, 构成涡线 L_0 的流体质点运动到新位置

$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\xi, t)$, 记该曲线为 L . 由式(3.1.1), 此时流体质点的涡量为

$$\frac{\omega_i}{\rho} = \left(\frac{\omega_i}{\rho}\right)_0 \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{\rho_0} \lambda_c \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \delta \xi_j,$$

所以 $\omega_i = \lambda \delta x_i$, 即 $\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{x} = 0$ (3.1.3)

其中 $\lambda = \frac{\rho}{\rho_0} \lambda_c$ 为标量. 这就证明了 L 仍旧是一条涡线. 式(3.1.2)和(3.1.3)还可写成

$$\frac{\omega/\rho}{|\omega_0/\rho_0|} = \frac{\delta \mathbf{x}}{|\delta \mathbf{x}_0|} \quad (3.1.4)$$

上式表明, 当涡线被拉伸时, 涡量将增加.

涡面和涡管是由涡线组成的, 不难推论得到涡面和涡管的保持性定理.

涡线、涡面和涡管都是由相同流体质点组成的物质线、面和体积, 因此, 涡管的质量应该守恒: $\rho \delta S \cdot \delta \mathbf{x} = \rho_0 \delta S_0 \cdot \delta \mathbf{x}_0$, δS 和 $\delta \mathbf{x}$ 是一段涡管的截面积和长度, 代入(3.1.4)式得到

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \delta \mathbf{S} = \omega_0 \cdot \delta \mathbf{S}_0 \quad (3.1.5)$$

这就证明了定理2.

在 § 1.2 节中我们曾介绍过一个涡管强度守恒定理, 那是一个基于 $\boldsymbol{\omega}$ 是管式矢量场的性质 $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$ 的运动学定理, 对于粘性流或无粘流均成立. 它表明的是同一时刻一条涡管的空间性质, 它并不能回答该涡管的流体质点在后继时间内是否仍旧构成同一条涡管, 以及涡管强度是否随时间变化. 只有考察涡量场的动力学性质后才能知道, 当本节所述亥姆霍兹涡量定理的条件成立时, 涡管强度则不但有空间的守恒性, 而且也不随时间改变.

当考虑到流体粘性时, 上述定理不再成立. 但是, 在大 Re 数下, 涡量的对流作用占主导地位, 而粘性扩散作用在短时间范围内可略去, 这样, 本来是粘性流动产物的涡运动可以化简成无粘流动问题加以处理. 这时开尔文速度环量守恒定理和亥姆霍兹涡量定理的重要性就显而易见.

3.2 涡量场的冲量和冲量矩

本节讨论中流体有旋流动的冲量和冲量矩问题.

3.2.1 涡量和脉冲外力的冲量

设流体充满无穷大空间并在无穷远处静止,单位质量的流体的动量,按动量的定义为

$$\int \mathbf{v} dV$$

但是,从涡量诱导的速度在远场的近似表达式(2.3.10)可知,当 $r \rightarrow \infty$ 时, $|\mathbf{V}| \sim O(r^{-3})$,而积分域的尺度也是 $O(r^3)$,根据2.1.3节叙述的收敛性条件,若直接积分该式,该动量积分不是绝对收敛的,仅是条件收敛,即它的积分值同控制面趋近无穷大的形状有关.为了避免这个困难,我们来研究下面的问题.

若已知 t_0 时刻的流体速度场 $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0)$. 我们可设想该速度分布是这样产生的:充满无穷大空间并处于静止的流体,在 $t = t_0$ 时刻有一部分流体受到外界脉冲力 \mathbf{F} 的瞬间作用,使整个流体产生了具有给定速度 $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0)$ 的运动. 具有分布形式的脉冲外力 \mathbf{F} 可写成

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}) \delta(t - t_0)$$

对不可压缩流体的 N-S 方程两边从 t_0 到 $t_0 + \delta t$ 积分, $\delta t \ll 1$, 则

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) dt = \\ & - \nabla \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} \frac{p}{\rho} dt + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \delta(t - t_0) dt + \nu \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} \nabla^2 \mathbf{V} dt \end{aligned}$$

由于把脉冲外力看成是在无穷小时间 δt 内作用的无穷大的力,给

出了有限值的冲量,而在这段时间间隔内,一切有限大小的力的影响都可忽略不计;于是在此时间间隔内流体获得了有限的速度增量. 因此,对流项和粘性项可忽略不计. 当 $\delta t \rightarrow 0$ 时,得到

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0) = -\nabla P + \mathbf{i}(\mathbf{r}) \quad (3.2.1)$$

其中, $P = \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t_0+\delta t} p dt$ 称为压力冲量, $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ 称为脉冲外力冲量. 由此可见, $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ 可以看成是由于压力冲量和脉冲力冲量的作用而产生的流动.

分别对上式求散度和旋度,得到

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot \mathbf{i} \quad (3.2.2)$$

$$\text{和} \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{i} \quad (3.2.3)$$

由方程(3.2.1)和(3.2.2)可知,即使 $\mathbf{i}=0$,仅由作用在流体上的压力冲量也能使流动瞬间改变,并且产生一个无旋流动. 且 $P = -\varphi$, 其中 φ 为速度势.

由式(3.2.3)可见,由于脉冲外力作用,在一部分流体上产生了涡量,也就是产生了有旋流动. 流体因生成涡量而增加了动量. 我们并不关心脉冲外力是如何施加到流体上的,所关心的只是找到流体的动量和涡量之间的关系.

3.2.2 流体的冲量

对于一个三维空间与位置有关的矢量 \mathbf{b} 有下列等式存在(二维情况不适用)

$$\int_V \mathbf{b} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{b}) dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) dS \quad (3.2.4)$$

今令 $\mathbf{b}=\mathbf{i}$, 并利用式(3.2.3), 对整个空间积分,

$$\int_V \mathbf{i} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{i}) dS$$

因为 i 仅作用在流体的有限空间内, 在无穷远边界上 i 消失, 所以得到

$$\int i dV = \frac{1}{2} \int r \times \omega dV = I \quad (3.2.5)$$

上式左边是分布的脉冲外力冲量的主矢, 右边称为**流体的冲量**. 因此, 流体的冲量的含义是: 在分布的脉冲外力冲量的作用下流体从静止达到了具有给定速度的运动, 根据动量定理, 也就是流体获得了动量增量.

流体的冲量也可用下面的方法计算得到(参见[2], § 7.2 或 [12], § 3.3).

在有限体积 \mathcal{V} 内流体的动量, 利用式(3.2.4), 令 $b=V$, 可写成

$$\int_{\mathcal{V}} V dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} r \times \omega dV + \frac{1}{2} \int_S [V(n \cdot r) - n(V \cdot r)] dS \quad (3.2.6)$$

这表明体积 \mathcal{V} 内流体的动量等于流体的冲量加上一个表面积分. 这个表面积分值是不确定的, 与 S 表面形状有关. 如果 S 是个半径为 a 的充分大的球面, 在球面上远场速度公式(2.3.10)成立,

$r=an$, $V=\frac{1}{4\pi a^3}[3n(I \cdot n)-I]$, 则面积分化为

$$\frac{1}{2} \frac{I}{4\pi a^2} \int (n_i n_j - 1) dS = -\frac{1}{3} I$$

因为 $\frac{1}{4\pi a^2} \int n_i n_j dS = \frac{1}{3} \delta_{ij}$. 将上述结果代入式(3.2.6), 得到

$$\int_{\mathcal{V}} V dV = \frac{2}{3} I \quad (3.2.7)$$

这就是在有限大球面内流体的动量. 虽然这个表达式与半径 a 无关, 但无论 a 如何增大, 球外流体对冲量的贡献也不能被忽略. 球外那部分流体的冲量可以用一种巧妙方法求出.

设一个半径为 a 的刚性球在充满无穷大空间且在无穷远处静

止的无粘流体中以速度 $U(t)$ 平动. 若坐标原点瞬时与球心重合, 其速度势和速度分别为^[2,3]

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{2}a^3\boldsymbol{U} \cdot \nabla \frac{1}{r} \\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{2}a^3\nabla(\nabla \frac{1}{r} \cdot \boldsymbol{U})\end{aligned}$$

将(2.3.10)式与上式相比,立刻发现只要取

$$\boldsymbol{I} = 2\pi a^3\boldsymbol{U},$$

两式在形式上就完全一样,这意味着由涡量场在远场产生的速度场等价于半径为 a 的圆球以速度 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}/2\pi a^3$ 平动时产生的无旋速度场. 由刚体平动给予流体的冲量为(参见[2], § 6.4)

$$\rho V_0 a_{ij} U_j = \frac{2}{3}\pi a^3 \rho U_i = \frac{1}{3}\rho I_i \quad (3.2.8)$$

其中 V_0 为球体积, a_{ij} 是虚拟质量系数, 对于球 $a_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}$, (参见[2] § 6.4, 6.8). 于是流体总冲量为式(3.2.7)和(3.2.8)之和:

$$\frac{2}{3}\boldsymbol{I} + \frac{1}{3}\boldsymbol{I} = \frac{1}{2} \int_{\infty} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega} dV \quad (3.2.9)$$

3.2.3 冲量的时间变化率

作为度量流体动量增量的冲量, 它随时间的变化率可对上式求时间微商而得到

$$\frac{d\boldsymbol{I}}{dt} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{r} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} dV$$

将涡量动力学方程(1.3.12)和(1.3.11)代入上式, 得

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{I}}{dt} &= \frac{1}{2} \int \boldsymbol{r} \times [\nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega})] dV \\ &\quad - \frac{1}{2}\nu \int \boldsymbol{r} \times [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega})] dV \quad (3.2.10)\end{aligned}$$

利用矢量公式(3.2.4), 分别令 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{b} = \nabla \times \boldsymbol{\omega}$, 上式右手

第一个积分化为

$$\int \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega})] dS$$

上式的面积分当 $r \rightarrow \infty$ 时趋近于零. 又因为

$$\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

第一个积分也可化为面积分

$$\int \mathbf{n} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \right) dS - \int (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{V} dS$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, 上述面积分也趋于零. 因此, 式(3.2.10)中第一个积分等于零. 此外, 式(3.2.10)中粘性项积分化为

$$\nu \int \nabla \times \boldsymbol{\omega} dV + \frac{1}{2} \nu \int \mathbf{r} \times [\mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega})] dS$$

第一项可化成 $\nu \int \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} dS$, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 上述两个面积分均趋于零. 于是,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV = 0 \quad (3.2.11)$$

该式表明, 对于三维无穷大空间内流体的运动, 无论是粘性流还是无粘流, 当不存在非保守初体力时, 流体的冲量是个时间不变量. 这就证明了式(2.2.7)的结论.

3.2.4 流体的冲量矩

分布的脉冲外力的冲量对原点的矩为 $\int \mathbf{r} \times i dV$, 因为

$$\nabla \times (r^2 \mathbf{i}) = r^2 \nabla \times \mathbf{i} + 2\mathbf{r} \times \mathbf{i}$$

所以

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times i dV = -\frac{1}{2} \int r^2 \nabla \times i dV + \frac{1}{2} \int \mathbf{n} \times (r^2 \mathbf{i}) dS \quad (3.2.12)$$

脉冲外力冲量 i 只作用在有限体积的流体上, 在远场消失, 并将式 (3.2.3) 代入上式, 得到

$$M = -\frac{1}{2} \int_{\infty} r^2 \omega dV \quad (3.2.13)$$

称为流体的冲量矩.

流体的冲量矩也是一个时间不变量, 可证明如下:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= -\frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} dV \\ &= -\frac{1}{2} \int r^2 [\nabla \times (V \times \omega) \\ &\quad - \nu \nabla \times (\nabla \times \omega)] dV \end{aligned}$$

利用矢量公式 (3.2.12), 令 $i = V \times \omega$, 并利用高斯公式, 上式右手第一项积分化为

$$-\frac{1}{2} \int \{r^2 n \times (V \times \omega) + |V|^2 (n \times r) - 2(n \cdot V)(r \times V)\} dS$$

由速度和涡量在远场的衰减特性可知, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 该面积分趋于零.

同理可证粘性项积分项也趋于零. 所以, 当不存在非保守物体力时, 三维无界流体的冲量矩也是个时间不变量

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int r^2 \omega dV = 0 \quad (3.2.14)$$

这就又证明了式 (2.2.8) 的结论.

如果直接计算流体的动量矩, 我们会发现, 在无穷大流体空间内直接积分 $\int r \times V dV$ 是发散的. 在一个充分大的包含所有涡量在内的体积中, 流体的动量矩利用式 (3.2.12) 可写成

$$\int_V r \times V dV = -\frac{1}{2} \int_V r^2 \nabla \times V dV - \frac{1}{2} \int_S r^2 n \times V dS$$

如果该体积是个圆球, 球面上 r 是常数, 面积分又可以化为体积分

$$\int n \times V dS = \int \nabla \times V dV = 0$$

因为根据假设该球体已包含了所有涡量,总涡量应守恒,所以

$$\int r \times V dV = -\frac{1}{2} \int r^2 \omega dV = M \quad (3.2.15)$$

在此情形下,流体的冲量矩就等于包含所有涡量于其中的球体内流体的动量矩.这是由于,作用在球面上的压力冲量对原点的矩为零.

3.3 涡量场的动能和能量耗散

本节将给出无界流场中流体有旋运动的动能积分表达式,并揭示动能的变化与能量耗散之间的关系.

3.3.1 动能及其时间变化率

首先我们注意到,在远场 $|V| \sim O(r^{-3})$ 衰减,不像动量和动量矩那样,动能积分 $\frac{1}{2} \int |V|^2 dV$ 不存在发散问题.为了揭示流体动能与涡量的关系,现在我们首先来推导用涡量表示的动能表达式.

因为 $V = \nabla \times A$, 这里 A 为矢量势,所以 $|V|^2$ 可写成 $|V|^2 = V \cdot (\nabla \times A) = A \cdot \omega - \nabla \cdot (A \times V)$. 于是流体动能为

$$T(t) = \frac{1}{2} \int |V|^2 dV = \frac{1}{2} \int A \cdot \omega dV - \frac{1}{2} \int n \cdot (A \times V) dS$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, $|A| \sim O(r^{-2})$, 面积分趋于零. 再将式(2.1.11)代入上式,于是得

$$T(t) = \frac{1}{8\pi} \iint \frac{\omega \cdot \omega'}{R} dV(r) dV'(r') \quad (3.3.1)$$

式中有两重体积分,这称为**动能第一表达式**.

或者,利用矢量公式

$$\nabla \cdot [\mathbf{V}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})] = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \mathbf{r} \right) = \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \mathbf{V} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$$

动能积分式还可写成

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int |\mathbf{V}|^2 dV = \int \mathbf{V} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV + \frac{1}{2} \int |\mathbf{V}|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dS \\ &\quad - \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) dS \end{aligned}$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, 式中两个面积分均趋于零, 因此, 流体的动能第二表达式为

$$T = \int \mathbf{V} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV \quad (3.3.2)$$

动能的时间变化率可直接从定义出发, $\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 dV$, 将不可压缩流体的 N-S 方程 (1.3.3) 代入, 并假设彻体力有势, 那么可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \int \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} dV = - \int \nabla \cdot \left(\mathbf{V} \frac{p}{\rho} + \mathbf{V}\Pi \right) dV \\ &\quad - \nu \int \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) dV \end{aligned}$$

上式右手第一项积分化为面积分后, 当 $r \rightarrow \infty$ 时积分趋于零, 第二项还可进一步化为

$$\nu \int \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) dV + \nu \int \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} dV$$

将前一项化为面积分后, 取 $r \rightarrow \infty$ 时的极限仍为零, 最后得到

$$\frac{dT}{dt} = - 2\nu \int \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^2 dV, \quad \boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}| \quad (3.3.3)$$

由此可见, 动能不像流体的冲量和冲量矩, 仅在无粘流中才是时间不变量, 在粘性流中它不守恒, 流体动能的不守恒性显然应该与粘性流中存在不可逆的耗散过程有关, 所以总有 $dT/dt < 0$. 在这方面, 物理量

$$Q(t) = \int \frac{1}{2} \omega^2 dV \quad (3.3.4)$$

将起到特殊作用,称为**拟熵**(Enstrophy).

3.3.2 能量的耗散

下面将给出流体能量的耗散与涡量的关系. 我们知道,不可压缩流体的能量耗散函数可写成^[2,3]

$$\phi = 2\nu e_{ij}e_{ij} \quad (3.3.5)$$

其中 $e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i})$ 是应变速率张量. 由于

$$e_{ij}e_{ij} = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\omega^2 + \nabla \cdot [(V \cdot \nabla)V] \quad (3.3.6)$$

以及 $(V \cdot \nabla)V = \nabla(\frac{|V|^2}{2}) - V \times \omega$

所以 $\phi = 2\nu\{\frac{1}{2}\nabla^2|V|^2 - \nabla \cdot (V \times \omega) + \frac{1}{2}\omega^2\}$

对整个流体空间积分,得到**能量的耗散率**为

$$\Phi = 2\nu \int \frac{1}{2}|\omega|^2 dV + 2\nu \int [n \cdot \nabla \frac{|V|^2}{2} - n \cdot (V \times \omega)] dS \quad (3.3.7)$$

其中控制面 S 应包括固体边界和无穷远边界. 在下列情形下上式中的面积分为零:(1)流体内部没有固体内边界,流体在无穷远处静止;(2)流体被静止的固体边界包围. 因此,上式化为

$$\Phi = 2\nu \int \frac{1}{2}|\omega|^2 dV = 2\nu Q > 0 \quad (3.3.8)$$

将式(3.3.3)代入,得到

$$\frac{dT}{dt} = -2\nu Q = -\Phi \quad (3.3.9)$$

由此可见,不可压流体中能量耗散率是与流体中涡量绝对值的大

小直接相关的. 能量耗散的机制可以从拟熵的演化中给予解释.

3.3.3 拟熵的物理意义

涡量是个矢量. 总涡量守恒原理仅表明流场中涡管总以闭合形式出现, 即在每一时刻流场各处的涡矢量精确地相互抵消了, 它并不表征流场内涡量的绝对值的大小. 拟熵 $\int \frac{1}{2} \omega^2 dV$ 则可以作为衡量物质体积内涡量绝对值大小的量度.

根据不可压缩流动的涡量动力学方程(1.3.12), 拟熵的演化方程可写成

$$\frac{dQ}{dt} = \int \omega \cdot \frac{d\omega}{dt} dV = \int \omega \cdot [(\omega \cdot \nabla)V] dV + \nu \int \omega \cdot \nabla^2 \omega dV$$

由高斯定理, 上式化为

$$\frac{dQ}{dt} = \int \omega \cdot [(\omega \cdot \nabla)V] dV + \nu \int n \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) dS - \nu \int \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2 dV \quad (3.3.10)$$

现在我们来研究一下各项的物理意义及其在能量耗散中起到的作用.

(1) 等式(3.3.10)右边第一项 $\omega \cdot [(\omega \cdot \nabla)V]$ 是最重要的一项. 请回忆第一章中关于 $(\omega \cdot \nabla)V$ 项的解释(图1.7). 它表明由于应变速率使涡管拉伸和弯曲所引起的涡矢量大小和方向的变化. 如果流体的拉伸率沿着 ω 方向是正的, 则 $\omega \cdot [(\omega \cdot \nabla)V]$ 也就是正的. 这一项对拟熵的贡献是使 $\frac{dQ}{dt} > 0$, 因为 $Q > 0$, 所以涡管的拉伸使拟熵增强, 促使能量耗散加快, 加速机械能的损失.

(2) 第二项 $\nu n \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right)$ 是拟熵穿过界面的粘性扩散. 它与 $\frac{1}{2} \omega^2$ 的局部梯度有关.

(3) 第三项 $\nu \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2$ 是涡量的粘性耗散项, 它总是使拟熵减

小.

3.3.4 湍流中的拟涡

在湍流中存在各种不同尺度和不同形状的大大小小的拟序涡(eddy),它们在湍流场中连续地运动、伸缩和变形.为表示湍流涡量值的增强程度,可先进行雷诺分解

$$\omega_i = \Omega_i + \omega_i', \quad e_{ij} = E_{ij} + e_{ij}', \quad V_i = V_i + v_i'$$

其中大写字母代表平均量,带撇的小写字母代表涨落量.代入涡量动力学方程,分解后有^[13]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i \right) = & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\Omega_i \overline{\omega_i' v_j'})}_{\text{输运项}} + \underbrace{\overline{v_j' \omega_i'}}_{\text{交换项}} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} \\ & + [\underbrace{\Omega_i \Omega_j E_{ij}}_{\text{拉伸项}} + \underbrace{\Omega_i \overline{\omega_j' e_{ij}'}}_{\text{拉伸项}}] + \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i \right)}_{\text{粘性扩散项}} - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i} \right)^2}_{\text{耗散项}} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega_i' \omega_i' \right) = & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_j' + \frac{1}{2} \omega_i' \omega_i' \right)}_{\text{输运项}} - \underbrace{\overline{v_j' \omega_i'}}_{\text{交换项}} \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} \\ & - [\underbrace{\overline{\omega_i' \omega_j' e_{ij}'}}_{\text{拉伸项}} + \underbrace{\overline{\omega_i' \omega_j' E_{ij}}}_{\text{拉伸项}} + \underbrace{\overline{\Omega_j \omega_i' e_{ij}'}}_{\text{拉伸项}}] \\ & + \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{1}{2} \omega_i' \omega_i' \right)}_{\text{粘性扩散项}} - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial \omega_i'}{\partial x_i} \right)^2}_{\text{耗散项}} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

上两式中各项的物理意义已简明地标出.在式(3.3.11)中,右手第一项是由于湍流涡量与速度之间的相互作用引起了 $\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i$ 的输运,类似于平均动能方程中的输运项.第二项是平均涡量与湍流涡量之间的交换,类似于平均动能与湍流动能之间的交换.值得注意的是该项与式(3.3.12)中相应的项正好反号,这清楚地

表明了 $\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i$ 和 $\frac{1}{2} \overline{\omega_i' \omega_i'}$ 之间的交换机理. 第三项是因涡线拉伸, 其中包括由于平均应变率引起的平均涡量的拉伸 ($\Omega_i \Omega_i E_{ij}$), 以及由脉动应变率引起的湍流涡量的拉伸, 使 $\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i$ 增大. 与第三项相对应, 在 (3.3.12) 式中也有类似的项 $\Omega_i \overline{\omega_j' e_{ij}'}$ 存在, 它表明由于脉动的应变率使湍流涡量拉伸的后果是既使 $\frac{1}{2} \Omega_i \Omega_i$ 增大, 也使 $\frac{1}{2} \overline{\omega_i' \omega_i'}$ 加强. 第四、五项分别为粘性扩散和耗散项.

再将 (3.3.6) 式作雷诺分解后得

$$\overline{e_{ij}' e_{ij}'} = \frac{1}{2} \overline{\omega_i' \omega_i'} + \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \overline{v_i' v_j'}$$

在大 Re 数下, 可近似认为^[13]

$$\frac{1}{2} \overline{\omega_i' \omega_i'} \approx \overline{e_{ij}' e_{ij}'}$$

再根据湍流耗散率的定义 $\epsilon = 2\nu \overline{e_{ij}' e_{ij}'}$, 得

$$\epsilon \approx 2\nu \left(\frac{1}{2} \overline{\omega_i' \omega_i'} \right) \quad (3.3.13)$$

该式表明了湍流耗散率 ϵ 与湍流拟熵 $\frac{1}{2} \overline{\omega_i' \omega_i'}$ 之间的关系.

大量的实验和数值模拟研究已经表明, 在湍流中占优势的是涡管的平均长度普遍被伸长. 涡管长度被拉伸的结果会逐次地产生更小尺度的运动. 这种**串级**(cascade)现象是湍流的一个显著特征. 从大涡到小涡到更小的涡(Eddy)的能量串级输运过程, 从本质上讲, 是靠涡管的不断拉伸来完成的. 涡管的平均伸长可以用拟熵 Q 来量度, 而 Q 是与能量耗散率 Φ 成正比, 而 Φ 则与该系统的熵增有关. 所以涡管的线长度可看成是一类熵, 具有熵的功能. 这就是我们把 Q 称为拟熵的原因.

3.4 二维涡量场动力学特性

本节讲述二维涡量场的流体动量、动量矩和动能及其随时间的变化率,请读者注意分析它们与三维涡量场特性的差异。

二维流体的动量、动量矩和动能的直接积分是不存在的,因为在二维流中环量可以不为零。对于非零环量的涡量场,速度在远场的量级为 $O(r^{-1})$ (见式(2.4.13)),而积分域的尺度为 $O(r^2)$,当 $r \rightarrow \infty$ 时,动量积分 $\int V dS$ 是发散的。即使对于环量为零的涡量场,速度在远场的量级为 $O(r^{-2})$,积分 $\int V dS$ 也只是条件收敛,不是绝对收敛。动量矩和动能积分,情形也是如此。

对于总涡量不为零的情形, $\Gamma = \int \omega dS \neq 0$, 我们可以研究两个流动之差

$$\psi_1 = \psi(x, y) - \left(-\frac{1}{2\pi} \ln r \cdot \int \omega' dS' \right)$$

的流体动量、动量矩和动能等。式中 $-\frac{1}{2\pi} \ln r \cdot \int \omega' dS'$ 是放置在原点的强度为 $\Gamma_\infty = \int \omega' dS'$ 的集中涡产生的定常流动之流函数,它是导致积分发散的原因。

与三维流情形类似,某个时刻涡量场的运动可以想象为:有一个分布的脉冲外力的冲量作用于流体上,使整个流体产生从零到给定速度的运动。我们虽然不能直接计算流体的动量和动量矩,但却可以计算在上述意义下流体的冲量和冲量矩。

3.4.1 流体的冲量

三维矢量公式(3.2.4)对于二维情况是不正确的。二维情形下,存在下述公式

$$\int_S \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{b}) dS = \int_S \mathbf{b} dS - \oint_C \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) dl \quad (3.4.1)$$

其中 C 是 x - y 平面上面积 S 的廓线, \mathbf{n} 是 C 的外法线单位矢量. 对以 S 为底, 单位长为高的柱体体积, 运用高斯公式, 即可得到上式. 令 $\mathbf{b} = \mathbf{i}$, 且根据式 (3.2.2), $\nabla \times \mathbf{i} = \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$, 以及当 C 充分大以后, 线积分为零, 所以二维流体的冲量为

$$\int_S \mathbf{i} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} dS = \mathbf{I}, \quad (3.4.2)$$

即
$$I_x = \int y \omega dS, \quad I_y = - \int x \omega dS$$

请注意二维流体冲量的定义与三维的比较, 相差一个因子 $\frac{1}{2}$ (见式 (3.2.4)).

二维流体的冲量也是个时间不变量. 因为

$$\frac{d}{dt} \int x \omega dS = \int x \frac{\partial \omega}{\partial t} dS = \int x \left\{ \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} \right) \right\} dS$$

上式进一步可化为

$$\frac{d}{dt} \int x \omega dS = - \int u \omega dS + \text{线积分项}$$

当 $S \rightarrow \infty$ 时, 涡量以指数律衰减, 线积分为零. 再将式 (2.4.2a) 代入上式, 可得

$$\frac{d}{dt} \int x \omega dS = - \iint \frac{y - y'}{(x - x')^2 + (y - y')^2} \omega'(x', y') \omega(x, y) dS dS$$

考虑到被积函数的对称性质及无限积分域, 可知上述积分为零, 即

$$\frac{d}{dt} \int x \omega dS = 0 \quad (3.4.3a)$$

同理
$$\frac{d}{dt} \int y \omega dS = 0 \quad (3.4.3b)$$

或合写为

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad (3.4.3c)$$

由此证明了二维流体的冲量是个时间不变量。上式正是涡量一阶矩守恒式(2.4.7)，它的物理意义是明显的。类似于质心，我们可以定义**涡量中心**：

$$X = \frac{\int x \omega dS}{\int \omega dS}, \quad Y = \frac{\int y \omega dS}{\int \omega dS} \quad (3.4.4)$$

这表明，当环量不为零时，涡量分布可以随时间变化，但**涡量中心**却是个时间不变量。

计算二维流体冲量的另一种办法是先计算在一个半径为 a 的充分大的圆内的由两个流动之差产生的流体动量

$$\int_{r \leq a} \mathbf{V}_1 dS = \int_S \nabla \times \mathbf{A}_1 dS = \oint_C \mathbf{n} \times \mathbf{A}_1 dC$$

其中 C 是 $r=a$ 的圆周， $\mathbf{A}_1 = (0, 0, \psi_1)$ 是两个流动之差的矢量势。

在 C 上 ψ_1 的首项是偶极子引起的， $\psi_1 k \approx -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{I}}{r^2} \right)$ (见式(2.4.12))， $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ，代入上式运算后得到

$$\int_{r \leq a} \mathbf{V}_1 dS = \frac{1}{2} \mathbf{I} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dS \quad (3.4.5)$$

圆外流体对冲量的贡献等价于半径为 a 的刚性圆柱突然从静止以适当速度平动施给流体的冲量。这部分的冲量大小也等于 $\frac{1}{2} \mathbf{I}$ ，所以二维无界流体的冲量为 \mathbf{I} 。请读者自己证明这一点。

3.4.2 流体的冲量矩

由式(3.2.12)可知，二维流体的冲量矩的形式与三维情形完全相同

$$\mathbf{M} = - \int \frac{1}{2} r^2 \boldsymbol{\omega} k dS \quad (3.4.6)$$

与三维情形不同的是,对于粘性流动,二维冲量矩不是个时间不变量. 因为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int (x^2 + y^2) \omega dS &= - \int (x^2 + y^2) \left[\frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} \right] dS \\ &\quad + \nu \int (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dS \\ &= 2 \int (xu + yv) \omega dS + 4\nu \int \omega dS\end{aligned}$$

将式(2.4.2a, b)代入上式,右手第一项积分为零. 于是有

$$\frac{d}{dt} \int (x^2 + y^2) \omega dS = 4\nu I',$$

$$\text{即} \quad \int (x^2 + y^2) \omega dS = 4\nu I' t + D_3 \quad (3.4.7)$$

这就是式(2.4.8)的结果,据此可以定义一个弥散长度

$$L^2 = \frac{\int [(x - X)^2 + (y - Y)^2] \omega dS}{\int \omega dS} \quad (3.4.8)$$

它表示涡量围绕其中心分布的散布度. 由式(3.4.7)可知,在无粘运动中弥散长度是一个运动不变量.

3.4.3 流体的动能

如本节开头所述,动能的直接积分将导致积分发散,现在我们来具体考察一下这种情形. 首先,在一个有限大区域内计算流体的动能

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (u^2 + v^2) dS = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial \psi}{\partial y} - v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dS$$

利用涡量定义 $\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$, 上式化为

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\psi \omega + \frac{\partial(\psi u)}{\partial y} - \frac{\partial(\psi v)}{\partial x} \right] dS$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \psi \omega dS - \frac{1}{2} \oint_C \psi \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$

其中 C 是面积 S 的周线. ψ 在无穷远处有对数无穷大. 但根据假设, 涡量或者聚集在有限区域, 或者以指数律衰减, 所以第一项面积分是收敛的. 第二项线积分是发散的. 若周线 C 取成半径为 a 的一个大圆, 将远场公式(2.4.12)和(2.4.13)代入, 得到

$$\oint_C \psi \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2\pi} \ln a \cdot \left(\int \omega dS \right)^2 + O(a^{-1}) \quad (3.4.9)$$

这个积分当 $a \rightarrow \infty$ 时趋于无穷大, 是造成无穷大动能的原因, 但因为 $\left(\int \omega dS \right)^2$ 是个常量, 它不随时间改变, 而我们感兴趣的问题往往不是动能本身的大小, 而是涡量分布随时间的变化对动能的影响. 只有 $\int \psi \omega dS$ 项是与涡分布有关的那部分动能. 为简化符号, 把二维涡量场中两个流动之差的这部分动能也记为 T , 其表达式可写为

$$T = \frac{1}{2} \int \psi \omega dS = - \frac{1}{8\pi} \iint_S \omega(x, y) \omega'(x', y') \cdot \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2] dS dS' \quad (3.4.10)$$

读者还可以证明, 对二维流动, 同样存在相同于式(3.3.3)的关系

$$\frac{dT}{dt} = -2\nu \int \frac{1}{2} \omega^2 dS \quad (3.4.11)$$

3.4.4 小结

至此, 我们可以来总结一下涡量场的主要积分特性. 对于具有保守物体力的不可压缩流动, 对于三维流动情形, 不管是否有粘或无粘流动, 总涡量为零, 流体冲量和冲量矩都是时间不变量. 在二维流动情况, 总涡量即环量可以不为零, 但仍旧是时间不变量.

冲量也是个时间不变量。但冲量矩却不同,仅在无粘流动情况下才是时间不变量。对于动能,无论三维流或二维流情形,都有 $dT/dt = -2\nu Q$, $Q = \int \frac{1}{2} \omega^2 dV$ 。显然,在无粘流中,动能也是个时间不变量。

3.5 涡量在固壁面上的生成及扩散

在前面的研究中,我们是把涡量场存在作为前提条件的。然而,流场中的涡量究竟是如何产生的呢?根据第一章开尔文速度环量定理,速度环量的不守恒性来源于:非保守体积力、斜压性和粘性。前两个因素我们将在第八章“旋转流体中的涡运动”中讲述。这里,我们着重讨论粘性的作用;对于保守体积力的均质不可压缩流体,流体内部的涡量是从流-固交界面上产生并扩散到流体内部去的。这个重要事实是直接和固壁的粘附条件相联系的。

3.5.1 一个简单例子

为阐明上述论点,现举无穷大平板上方的流动问题来说明。在初始时刻原来静止的流体突然以 U_0 平行于壁面运动。为使问题更典型化,在初始时刻对流体再施加一个切向压强梯度。根据 3.1.2 节中所阐明的道理,流体从静止突然起动的瞬间,流动是无旋的。在此例中就是有一个平行于壁面的均匀流。此时刻,为满足壁面的粘附条件,可以想象在壁面上产生一层面涡(一种切向速度的间断面),使流体跨过面涡从速度 U_0 降为零。

在后继时间内,流体的运动由 N-S 方程控制。对于二维平板,可化简为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ u &= 0; \quad t > 0, y = 0 \\ u &= U_0; \quad t = 0, y > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

其解为

$$\begin{aligned} u(y, t) &= U_0 \operatorname{erf}(\eta) - \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\left(\frac{y^2}{2} + \nu t \right) \operatorname{erf}(\eta) \right. \\ &\quad \left. + y \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} e^{-\eta^2} - \frac{y^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

其中 $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \quad \operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta'$

涡量为

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_0}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\eta^2} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\sqrt{\frac{4\nu t}{\pi}} e^{-\eta^2} - y(1 - \operatorname{erf}(\eta)) \right] \quad (3.5.3)$$

式(3.5.2)和(3.5.3)实际上是两部分解的迭加, 右手第一项是流体突然起动($u(y, 0) = U_0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0$)的解, 第二项是静止流体被突然

施加一个切向压力梯度($u(y, 0) = 0, \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$)后的非定常响应. 从此解中还可引出一个重要的物理量: **涡量流率**, 它定义为

$\sigma = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial y}$. 由式(3.5.3)可导出

$$\sigma = \frac{U_0}{\sqrt{\pi t}} \eta e^{-\eta^2} - \frac{\partial p}{\partial x} [1 - \operatorname{erf}(\eta)] \quad (3.5.4)$$

图3.1画出了 $U_0 = 1, -\frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial x} = 1$ 在 $\sqrt{4\nu t} = 0.01, 0.015, 0.02$ 和 0.025 时速度、涡量和涡量流率的分布曲线. 图 a, b, c 是流体突然起动的解. 从图 a 中可以看出, 当 $t \rightarrow 0$ 时速度在壁面附近有一个急剧变化, 随着时间增长, 速度剖面趋于平坦. 图 b 表明在运动刚

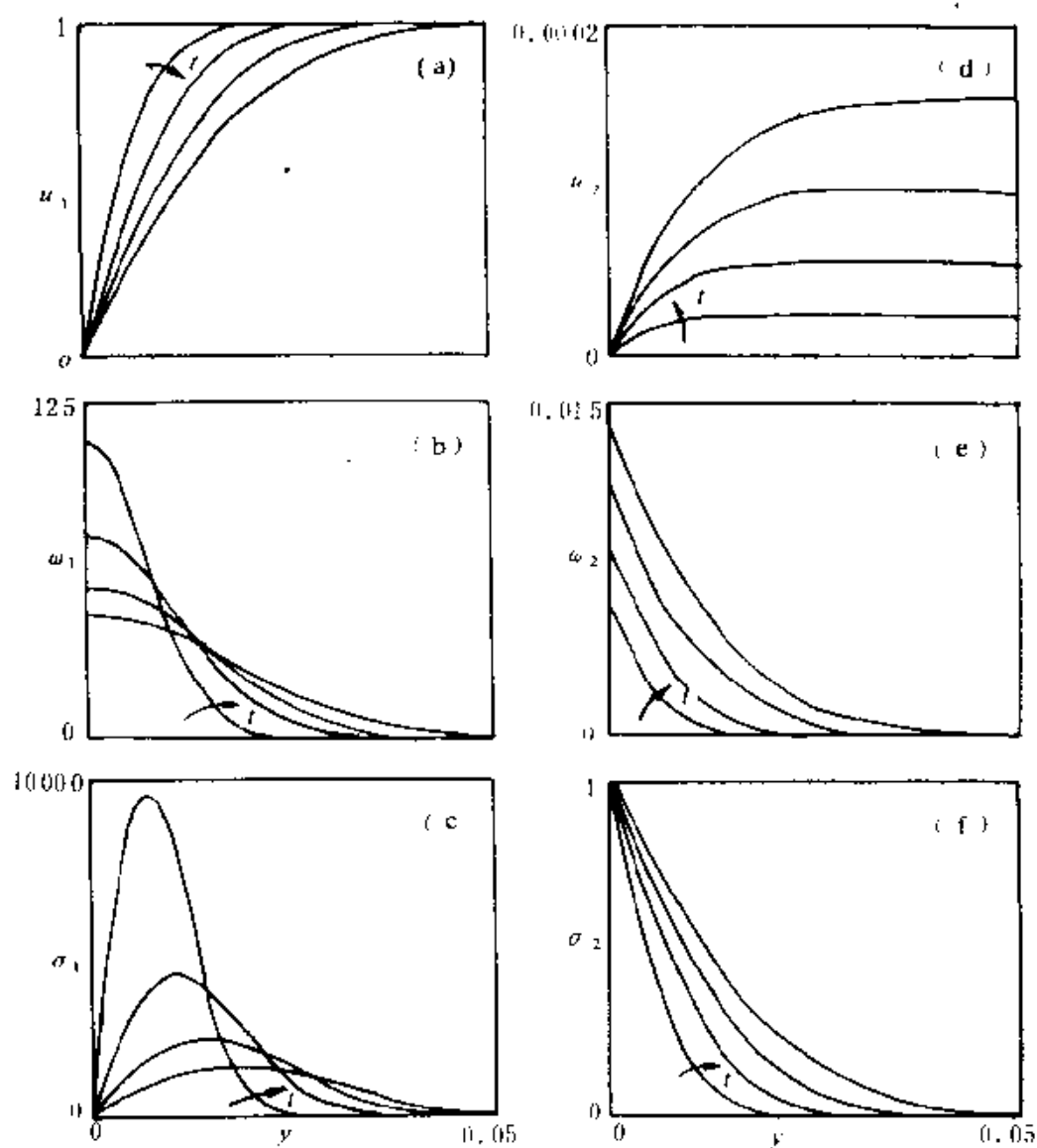


图3.1 无穷大平板上速度、涡量和涡量流率的变化

开始时涡量主要集中在壁面附近,并以指数律向外迅速扩散.扩散距离随 $\sqrt{\nu t}$ 增加,而壁面涡量却随时间增长而减小.图c是涡量流率的变化,值得注意的是在 $t \rightarrow 0$ 时壁面附近 σ 有一个又大又尖锐的峰值.但在壁面上($y=0$)涡量流率却是零.图d-f是流动对切向压力梯度的响应,有点与非定常泊肃叶(Poiseuille)流类

似, 壁面涡量随时间单调增加, 涡量流率的最大值在壁面上, 并恒等于1.

上述例子具有典型意义, 对于任意物形的非定常粘性流动, 在非常接近壁面处和非常小时间内, 切向动量方程就可近似用式(3.5.1)表示, 因此上述分析定性地表示了在非常短时间内壁面附近的流动状态.

3.5.2 壁涡量和壁涡量流率

为了研究一般情形下壁面涡量的生成与向流体内部的扩散, 我们先研究一下静止固壁上涡量矢量、壁剪切力和壁流线之间的几何关系.

可以证明^[11], 在静止固壁上涡线总是落在壁面上, 壁面切应力与涡量之间有

$$\tau_n = -\mu n \times \omega \quad (3.5.5)$$

另一方面, 壁面涡线处处与壁面流线正交^[6], 这样, 壁面切应力矢量与壁流线方向一致. 我们可以取壁面上一点的法线、流线和涡线建立局部正交坐标系(见图3.2).

由式(3.5.5)可见, 壁面涡量的生成与壁面切应力有直接关系, 而式(3.5.5)是利用了粘附条件才能得到. 所以, 正是有了粘附条件, 壁面涡量才能生成. 一个简单的例子可说明这一点. 若取垂直于壁面的 AB 直线表示某时刻 t_0 由氢气泡产生的时间线. 在以后时间, AB 将随流体质点一起运动(图3.3). 由于壁面粘附条件, 在壁面上速度为零. 稍稍离开壁面一点距离, 由于不均匀的切变速度, 使时间线不断变形. 形象点讲, 壁面上流体微团因存在粘附条件不可能作直线平移运动, 而是在剪切力形成的力矩作用下引起旋转运动, 这就是壁面涡量生成的物理原因.

但是, 正如热流大小正比于温度梯度而不取决于温度本身一

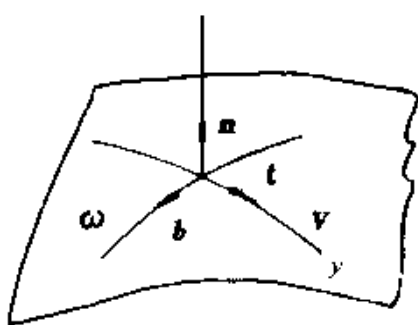


图3.2 静止壁面上流线和涡线

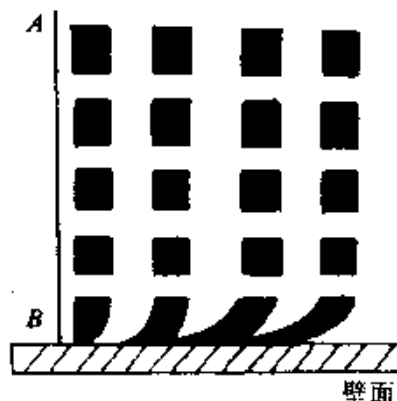


图3.3 壁面附近涡气泡时间线的时间演变示意图

样,壁面涡量的大小并不表示流入流体内部涡量的多少。莱特希尔(Lighthill)首先引入了**涡量流率**(或称**涡量源强度**)这个物理量:

$$\sigma = -\nu(n \cdot \nabla)\omega \quad (3.5.6)$$

其中 n 为壁面外法线单位矢量。为了理解它的物理意义,可以在壁面附近取一个控制面,对此写出涡量动力学方程(1.3.12)的积分形式,由此可以看到,式(3.5.6)在控制面上的积分等于 $d\omega/dt$ 在该区域中的变化率。因此,涡量流率表示单位时间内通过单位面积的涡通量。式(3.5.6)表明涡量流率正比于涡量的法向导数。那么涡量的法向导数又受什么因素制约呢?在壁面上,N-S方程化为

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nu\nabla \times \omega \quad (3.5.7)$$

将上式在壁流线方向投影,并忽略曲率影响以后,近似有

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\nu\frac{\partial \omega_z}{\partial n} = \sigma_x \quad (3.5.8)$$

它表明壁面涡量流率直接与切向压力梯度有关。在顺压梯度区 $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$, 则 $\frac{\partial \omega_z}{\partial n} > 0$, 壁涡量向流体内扩散。在逆压梯度区 $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$, 则 $\frac{\partial \omega_z}{\partial n}$

<0 , 此时涡量的最大值在流体内部, 涡量向壁面扩散, 或者说, 在逆压梯度区在壁面上有与顺压区壁涡量符号相反的涡量生成. 当 $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ 时壁面没有涡量流率. 这在图 3.1e, f 中也可看出这一点. 图 3.4 是在不同切向压力梯度情形下速度和涡量剖面以及涡量流率的示意图.

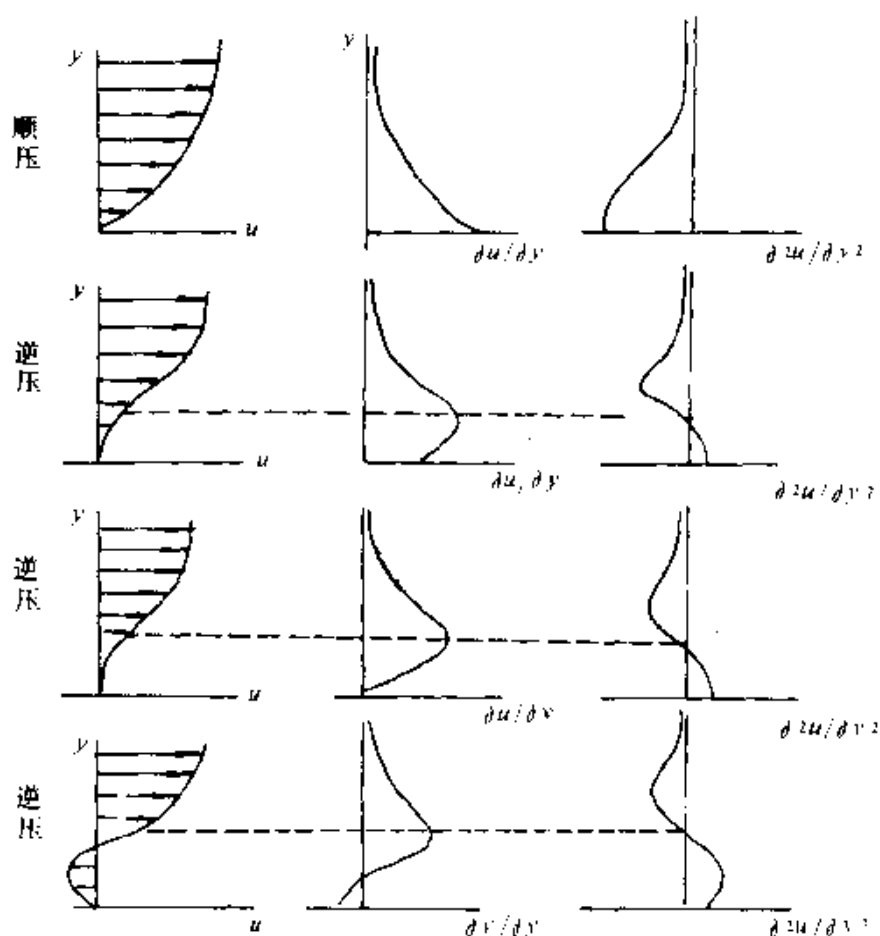


图 3.4 顺压、逆压梯度下的速度、涡量和涡量流率示意图

壁面涡量流率一般形式也可写成

$$\sigma = -n \times \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.5.9)$$

当壁面运动时,加速度也是产生壁面涡量流率的原因,此时涡量流率则可写成

$$\sigma = -n \times \left(\nabla \frac{p}{\rho} + \frac{dV_b}{dt} \right) \quad (3.5.10)$$

$\frac{dV_b}{dt}$ 是壁面运动加速度,它可看成是一种折合压强梯度.

3.6 作用在物体上的流体动力

流体与物体相互作用时,流体施加给物体以流体动力和力矩,这些力特性往往是我们特别关心的目标.本节将以一种简洁形式给出流体动力与涡量场特性之间的关系.

设物体在流体中运动,流体充满无穷大空间,并在无穷远处静止,则涡量主要集中在固体附近及其下游的区域内.作一个充分大的球面(图3.5),把固体及涡量都包含在内.在大球面上及其以外的地方,忽略涡量和粘性.记流体作用在物体上的流体动力的

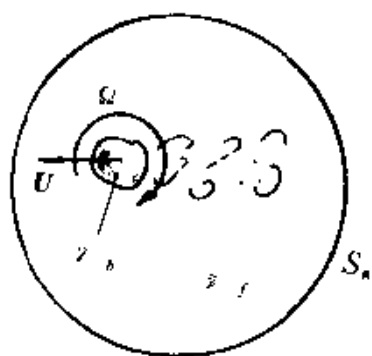


图3.5 求物体上的流体动力简图

主矢为 F ,则由动量定理,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_f} \rho V dV = -F - \int_{S_c} p n dS \quad (3.6.1)$$

式中 \mathcal{V}_f 是球内流体占有体积. 在上式中加減 $\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_b} \rho V dV$, 则有

$$F = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_b} \rho V dV - \int_{S_c} p n dS + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_b} \rho V dV \quad (3.6.2)$$

在大球面上压强由非定常伯努利方程确定如下:

$$p = \rho C(t) - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2$$

当球半径 a 充分大时, $|\mathbf{V}| \sim O(a^{-3})$, $\frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2$ 项相比之下可忽略不计, 由远场速度近似公式(2.3.10)可知,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\mathbf{I}}{r}$$

$$\int p n dS = -\rho \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} n dS = -\frac{1}{4\pi} \rho \frac{\partial}{\partial t} \int (\nabla \cdot \frac{\mathbf{I}}{r}) n dS$$

因为 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{a} \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{a}}{a^3}$, 所以,

$$-\int p n dS = -\frac{1}{3} \rho \frac{d\mathbf{I}}{dt} \quad (3.6.3)$$

式中 \mathbf{I} 是流体的冲量.

当流体充满整个球内空间后, 球内流体的动量由(3.2.6)式表示, 即

$$\rho \int_{\mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_b} \mathbf{V} dV = \frac{2}{3} \rho \mathbf{I} \quad (3.6.4)$$

将式(3.6.4)代入式(3.6.2), 得

$$\mathbf{F} = -\rho \frac{d\mathbf{I}}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_b} \mathbf{V} dV \quad (3.6.5)$$

用同样方法可证明, 对于二维流动情况, 固体上受到的流体动力

的主矢与上式有相同形式的表达式, 只不过流体的冲量的定义不同, 即

$$I = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV \text{ (三维)}, \quad I = \int \mathbf{r} \times k \boldsymbol{\omega} dS \text{ (二维)} \quad (3.6.6)$$

式(3.6.5)表明, 作用在固体表面上的流体动力(包括粘性应力)的主矢由两部分组成: 一部分是分布涡量的矩在整个空间内积分的时间变化率, 第二部分是假想的“排斥流体”(固体所排开的同体积流体)的动量变化率, 即非定常的附加质量效应. 在这里, “排斥流体”的速度场等于固体运动的速度场.

同理, 物体受到的流体动力的主矩(二、三维)为

$$L = \rho \frac{dM}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \int_{V_0} \mathbf{r} \times \mathbf{V} dV \quad (3.6.7)$$

其中

$$M = -\frac{1}{2} \int r^2 \boldsymbol{\omega} dV$$

第四章 涡旋流动的若干精确解

4.1 引言

自从流体力学基本方程建立以来,人们就致力于寻求这些方程在各种边界条件和初始条件下的精确解.在数值求解中,采用离散化的方法不仅会改变方程解的定量精度,而且有可能改变其定性性质,甚至两者之解可以毫不相关.因此人们仍在不断地以解析手段努力寻找原始方程在若干简化条件下的精确解.以解析表达式出现的精确解一方面对于认识和分析流体运动规律具有十分重要的意义,同时又为检验各类数值方法的可靠性和精确度提供了依据.

由于流体力学基本方程的非线性,求精确解是一件相当困难的工作.在 N-S 方程的非线性项不能消去的情况下,至今只有极少数流动才可以求得精确解.它们的发现是高度的物理直觉和数学技巧相结合的结果.粘性流体运动方程精确解的几个范例,在朗道和栗弗席兹的经典名著《流体力学》中有详细介绍^[15].

本章介绍的 N-S 方程的若干精确解均有助于揭示一些典型的涡旋流动结构的基本特征.深入地研究它们,探索其涡核内外的涡量分布、速度分布和压强分布的规律,并分析涡量扩散的过程,不仅对于认识涡旋流动的典型结构具有重要意义,而且也是进一步研究更复杂涡旋流动的基础.在下面各节中,首先将介绍点涡和兰金(Rankine)复合涡,它们属于二维定常轴对称涡;其次将给出奥辛(Oseen)涡和泰勒(Taylor)涡,它们描述点涡涡量粘性扩

散的非定常过程;随后讲到的伯格(Surgers)涡则是一种典型的具有轴向流的轴对称涡;最后介绍的希尔(Hill)球涡则是涡旋流动中涡线呈圆环形的典型例子。本章的内容限于不可压缩流动,而且这些涡旋的涡量分布均具有轴对称性;只是在少数特别申明的情况下,才涉及可压缩流动的问题。

4.2 点涡和兰金涡

如上所述,本章研究的涡旋流动都具有轴对称性。这时,在柱坐标 (r, θ, z) 中,不可压缩粘性流的 N-S 方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu (\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2}) \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} &= \nu (\nabla^2 V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2}) \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_z \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1)$$

连续性方程为

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.2.2)$$

其中, (V_r, V_θ, V_z) 分别是速度矢量 V 在 (r, θ, z) 方向的分量, 及

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.2.3)$$

4.2.1 点涡

现讨论最简单的情况,假定涡旋流是二维定常的。这时 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ 和 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, 并且 $V_r = V_z = 0$ 。这里 $V_r = 0$, 排除了源(汇)存在的可能。于是有 $V_\theta = V_\theta(r)$, $p = p(r)$, 式(4.2.1)进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \\ \frac{d^2 V_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{dr} - \frac{V_\theta}{r^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

连续性方程(4.2.2)可自动满足. 为便于求解, 引入

$$\Gamma = 2\pi r V_\theta \quad (4.2.5)$$

这是沿半径为 r 的圆周线上的速度环量. 这时, 式(4.2.4)的第二个方程可改写为

$$\frac{d^2 \Gamma}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Gamma}{dr} = 0 \quad (4.2.6)$$

其通解为

$$\Gamma = \frac{C_1}{2} r^2 + C_2 \quad (4.2.7)$$

式中 C_1 和 C_2 是积分常数. 由总涡量守恒性质(第二章), $r \rightarrow \infty$ 时, Γ 应保持有限值, 所以积分常数 $C_1 = 0$, 而 $\Gamma = C_2$ 为一常数. 这样从式(4.2.5)得到流场的速度分布为

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (4.2.8)$$

这就是熟知的点涡解. 它在 $r=0$ 处具有奇异性. 由于点涡的流场是势流, 点涡也称为势涡.

从式(4.2.4)的第一个方程并利用式(4.2.8)可以得到点涡流场的压强分布为

$$p = p_\infty - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2} = p_\infty - \frac{1}{2} \rho V_\theta^2 \quad (4.2.9)$$

从式(4.2.8)求得的涡量场是

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right) \quad (4.2.10)$$

由此可见点涡的涡量场除了 $r=0$ 点之外处处为零.

点涡作为拉普拉斯方程的基本解, 在流体力学和空气动力学

中有重要应用,在物理学中也有应用,如超流体中量子化涡等,请详见第七章和第九章.

4.2.2 兰金涡

对于点涡来说,在 $r=0$ 处, V_θ 是无穷大. 为了避免这一奇性, 兰金(1882)提出了复合涡模型. 即在通解(4.2.7)中确定积分常数时, 把流场分成两个区域. 以任意选定的 $r=r_0$ 的圆周为界, 在 $r \geq r_0$ 的区域中, 令 $C_1=0, C_2 \neq 0$, 于是有 $V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, 它满足无穷远处的边界条件; 而在 $r \leq r_0$ 的区域中, 令 $C_1 \neq 0, C_2=0$, 有 $V_\theta = \frac{C_1}{4\pi} r$, 从而避免了 $r=0$ 点的奇性. 这两个区域的速度分布在 $r=r_0$ 处匹配. 于是得到的解有以下速度分布形式:

$$\left. \begin{aligned} V_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} r, & r &\leq r_0 \\ V_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r}, & r &\geq r_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.11)$$

相应的涡量分布为

$$\left. \begin{aligned} \omega_z &= \frac{\Gamma}{\pi r_0^2}, & r &< r_0 \\ \omega_z &= 0, & r &> r_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.12)$$

涡量全部集聚在 $r < r_0$ 的区域, 称为涡核. 在涡核内的流体作刚体式旋转, 角速度是 $\Omega = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2}$.

由式(4.2.11)描述的涡旋精确解称为**兰金复合涡**, 或简称**兰金涡**(Rankine vortex). 其压强分布可以由积分式(4.2.4)中的第一个方程, 并利用在涡核边缘处内外压强连续的条件得到

$$\left. \begin{aligned} p &= p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right), & r &\leq r_0 \\ p &= p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2}, & r &\geq r_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.13)$$

兰金涡的速度分布也可以用如下方式来实现:将半径为 r_0 的无限长薄壁圆筒绕其轴以角速度 Ω 作匀速转动,在壁面摩擦力作用下,筒壁内外流体在运动充分长时间后达到定常状态.此时该流场的速度分布与兰金涡完全一致.但是在转筒问题中,压强分布在筒壁($r=r_0$ 处)两侧并不一定连续,因而这与兰金涡仍有差别.

兰金涡作为二维定常轴对称涡,本质上是一个无粘涡旋模型,粘性系数并不在方程以及它的解中出现.涡核的存在对消除点涡的速度奇性起十分关键的作用,这是一种比点涡在物理上更现实和更具普遍性的模型.但是从上面的分析可见:涡核半径的大小只能根据实验或经验来确定.

为了对涡核存在的必然性及其尺度从另一个角度作些分析,现遵循 Milne-Thomson 的作法来讨论可压缩流体中的二维定常轴对称涡旋^[11].尽管这一分析已不能归入精确解的范畴.

兰金涡的流线是一族同心圆,在 $r > r_0$ 的势流区中,各圆周上有相同的环量.假定可压缩流体中的涡旋也遵从同样规律.引入涡马赫数,定义为 $Ma = \frac{V_\theta}{c}$, 其中 c 是当地声速,式(4.2.11)中的第二个方程成为

$$r = \frac{\Gamma}{2\pi Ma c} = \frac{\Gamma}{2\pi Ma c_\infty} \cdot \frac{c_\infty}{c} \quad (4.2.14)$$

式中 c_∞ 是无穷远处的声速.用理想气体的能量方程

$$\frac{c_\infty^2}{c^2} = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)Ma^2 \quad (4.2.15)$$

代入式(4.2.14),得到了 r 与 Ma 之间的关系式

$$r = \frac{\Gamma}{2\pi c_\infty} \sqrt{\frac{1}{Ma^2} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)} \quad (4.2.16)$$

上式表明,可压缩流中的涡旋随 r 减小而 Ma 增大.当 $Ma \rightarrow \infty$ 时,势流区存在一个最小值 r_{\min} 为

$$r_{\min} = \frac{\Gamma}{2\pi c_{\infty}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (4.2.17)$$

这就从另一个角度说明了涡核存在的必要性,而且应满足条件

$$r_0 \geq \frac{\Gamma}{2\pi c_{\infty}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (4.2.18)$$

读者不难从式(4.2.16)中自行确定势流区中超声速区与亚声速区的分界线.

图 4.1 给出了兰金涡的速度分布, 其中涡核内外的速度分布在 r_0 处不是一种光滑过渡, 这是没有涉及粘性效应的结果. 事实上, 在粘性作用下, 这种过渡必定是光滑的, 并且涡量要向外扩散, 使涡核的半径随时间增加. 下一节我们将深入讨论这一问题, 给出二维非定常轴对称涡精确解的典型例子.

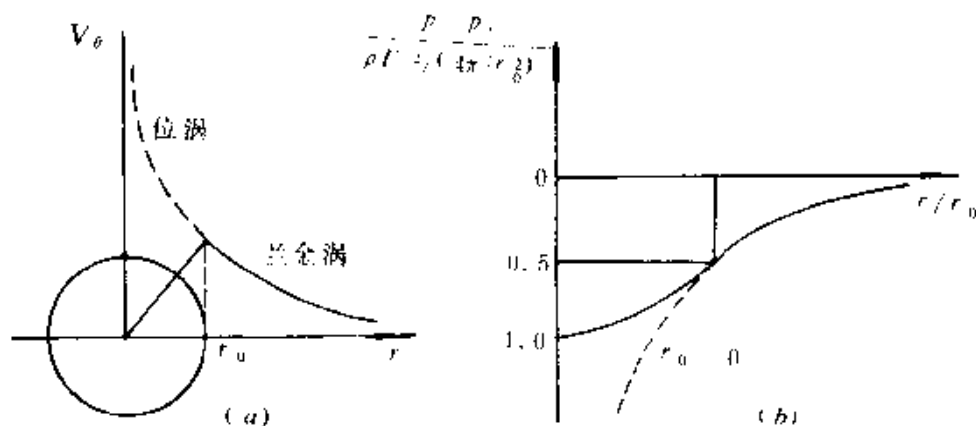


图 4.1 兰金涡(实线)和势涡(虚线)的速度和压强分布

4.3 奥辛涡和泰勒涡

兰金涡作为 N-S 方程的精确解,从本质上讲是一个无粘涡模型,因为粘性系数最终没有在控制方程(4.2.4)中出现. 若要考虑涡量扩散和能量耗散这些粘性效应时,如果不向涡旋中持续地补

充能量,涡旋流的定常态是不能维持的,这时就必须放弃定常流动的假定。这一节要导出具有粘性扩散效应的非定常平面轴对称涡旋精确解。

现在来研究初始强度为 Γ_0 的一个点涡的粘性扩散过程。仍采用上节的柱坐标系,从控制方程(4.2.1)出发。假定在时间历程中有 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, 并保持着 $V_r = V_z = 0$, 而 $V_\theta = V_\theta(r, t)$, $p = p(r, t)$, 这时,式(4.2.1)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_\theta^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.1)$$

而连续性方程(4.2.2)自动满足。为了便于求解,把上式中的第二个方程改写成

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) \quad (4.3.2)$$

其中 Γ 是以点涡为中心的任一圆周上的速度环量,由式(4.2.5)给出。初始条件和边界条件分别为

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ 时, } \quad \Gamma(r, 0) &= \Gamma_0 \\ t > 0 \text{ 时, } \quad \Gamma(0, t) &= 0 \\ \Gamma(\infty, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

该问题中有关的参变量是: Γ, Γ_0, ν, r 和 t , 可组成以下两个独立的无量纲数

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \quad \text{和} \quad \eta = \frac{r}{\sqrt{\nu t}}$$

令 $\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = f(\eta)$, 代入式(4.3.2), 得到有关函数 f 的常微分方程

$$f'' + \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{\eta} \right) f' = 0 \quad (4.3.4)$$

积分后,利用式(4.3.3)给出的定解条件,得到

$$\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right) \quad (4.3.5)$$

由式(4.2.5)进一步求出速度分布和涡量分布

$$V_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right) \quad (4.3.6)$$

$$\omega_z = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad (4.3.7)$$

以上结果也可以从平面不可压缩粘性流动的涡量动力学方程(1.3.13)出发而求得.

由式(4.3.6)和(4.3.7)描述的非定常平面轴对称涡旋精确解称为**奥辛涡**(Oseen vortex),该模型是奥辛于1912年提出的.有的书上称之为**兰姆涡**(Lamb vortex).图4.2中给出了不同时刻奥辛涡的涡量分布曲线.从 $t=0$ 时刻的点涡开始,涡量以脉冲形式聚集在 $r=0$ 处,随着时间的进程,涡量逐渐向外扩散.在任一时刻,涡量分布主要聚集在半径为 $r=4\sqrt{\nu t}$ 的圆内;从式(4.3.5)计算,该圆周内的涡通量已占总值的98%以上.由此,可把 $4\sqrt{\nu t}$ 定义为奥辛涡的涡核半径.图4.3给出了流场中任一固定点 $r=a$ 处,涡量随时间 t 的变化曲线.在 $t=0$ 时刻,点涡的涡量还没有开始向外扩散,该处的涡量为零.随着时间的增长,该处的涡量会逐渐增大;在达到一个极大值之后,又会随时间而逐渐减小.在式(4.3.7)中取 $r=a$ 后,代入极值条件 $\frac{d\omega_z}{dt}=0$,就可以得到 ω_z 极大值为 $\frac{\Gamma_0}{\pi a^2 e}$;这时, $t=\frac{a^2}{4\nu}$.

奥辛涡的速度分布曲线由图4.4给出.从中可以看到,兰金涡所存在的速度不光滑过渡在这里由于考虑了粘性效应已不再出现.速度剖面图中存在有一个极大值.应该指出:奥辛涡的涡核半径与边界层厚度类似,可以有多种定义.如果仿照兰金涡的情况,把速度达到极大值处的 r 定义为涡核半径 r_0 的话,从式(4.3.

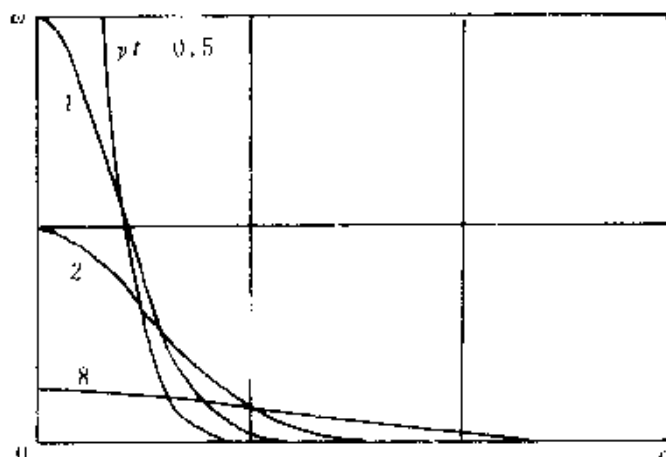
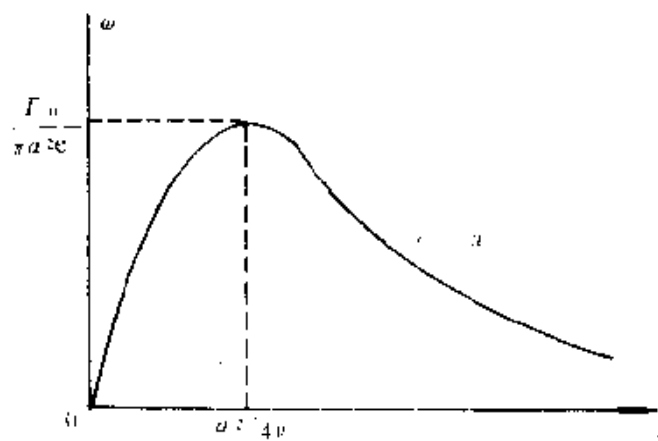


图 4.2 奥辛涡量的衰减

图 4.3 空间任一点 $r=a$ 处涡量随时间的变化

6) 可以算出涡核半径为

$$r_0 = 2.414 \sqrt{\nu t} \quad (4.3.8)$$

相应的速度极大值为

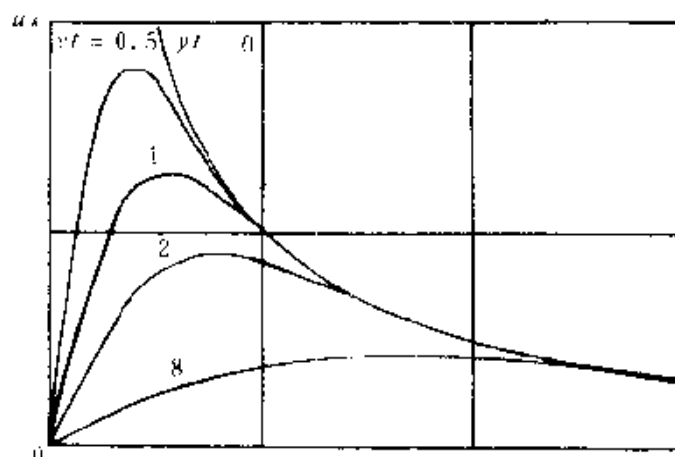


图 4.4 奥辛涡的速度剖面

$$V_{\max} = 0.0508 \frac{\Gamma_0}{\sqrt{\nu t}} \quad (4.3.9)$$

以及相应的速度环量为

$$\Gamma_1 = 0.716 \Gamma_0 \quad (4.3.10)$$

在速度表达式(4.3.6)中,当 $\frac{r^2}{4\nu t} \ll 1$ 时,有近似解 $V_\theta \approx \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} r$,相当于以角速度 $\frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t}$ 旋转的刚体,即兰金涡核区的速度分布;而在 $\frac{r^2}{4\nu t} \gg 1$ 时,则有 $V_\theta \approx \frac{\Gamma_0}{2\pi r}$,这正是无粘势涡的速度分布规律。

把式(4.3.6)代入式(4.3.1)第一式,积分后得

$$p - p_\infty = \frac{\rho \Gamma_0^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{r^3} [1 - \exp(-\frac{r^2}{4\nu t})]^2 dr \quad (4.3.11)$$

奥辛涡代表了典型的二维粘性涡核的衰减规律,从图 4.2 可以看出,在 $t=0$ 时涡量集中在 $r=0$ 处,随时间增长,涡量在空间逐渐扩散开来,但是每一时刻的总涡量大小不变,即

$$\Gamma_0 = \int_0^{\infty} 2\pi r \omega dr \quad (4.3.12)$$

应该指出的是,事实上存在一类类似于奥辛涡的二维非定常粘性涡旋的精确解。例如,如果把式(4.3.6)对时间微商,就得到

另一个涡旋解,称为**泰勒涡**(Taylor vortex),其速度和涡量分布为

$$V_\theta = \frac{Mr}{4\pi\nu t^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad (4.3.13)$$

$$\omega_z = \frac{M}{2\pi\nu t^2} \left(1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad (4.3.14)$$

其中 M 为流体的动量矩。

图 4.5 给出了 V/V_{\max} 随无量纲距离 $r/\sqrt{4\nu t}$ 的变化,其中 V/V_{\max} 为

$$\frac{V}{V_{\max}} = \sqrt{2e} \frac{r}{4\nu t} \exp\left(-r^2/4\nu t\right) \quad (4.3.15)$$

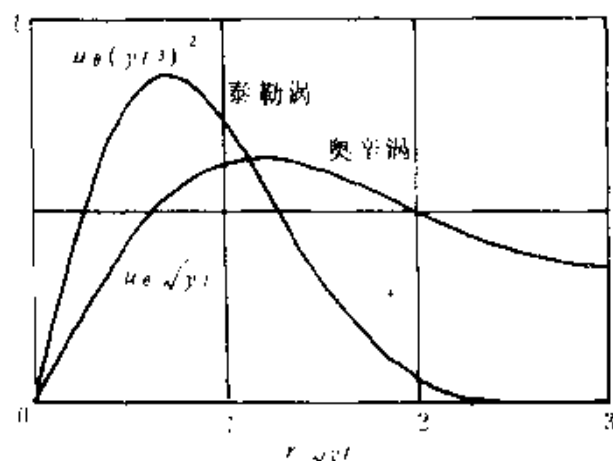


图 4.5 泰勒涡与奥辛涡的速度分布的比较

由式(4.3.13)可见,当 $\frac{r^2}{4\nu t} \ll 1$ 时, $V_\theta \approx \frac{M}{4\pi\nu t^2} r$,说明泰勒涡涡

核也可近似认为在作刚体式旋转;但当 $\frac{r^2}{4\nu t} \gg 1$ 时,泰勒涡的速度衰减比势涡来得更快.比较奥辛涡和泰勒涡,可以发现:奥辛涡的总涡量为 Γ_0 ,动量为无穷大,动能及其耗散率都是无穷大,而泰勒涡的总涡量为 0,动量矩为常数,动能及其耗散率是有限值.从这个意义上讲,泰勒涡比奥辛涡更接近物理真实.

对于可压缩粘性流体中涡旋现象的分析要困难得多, 尽管这时已难以得到涡旋流动的精确解, 但我们在一定的近似程度下, 仍可以对可压缩性影响作一些初步分析^[16]. 注意到式(4.3.1)中的第一个方程作为径向动量方程, 对于流线为同心圆的平面流动都是成立的. 它可以作为可压缩粘性流动分析的出发点. 假定涡马赫数足够小, 热力学过程可以使用等熵关系

$$p = \kappa \rho^\gamma \quad (4.3.16)$$

并且假定在不可压缩流中得到的奥辛涡速度分布表达式(4.3.6)仍然近似成立. 现引入新的无量纲变量 $\eta = \frac{r}{r_c}$, 把式(4.3.6)和式(4.3.9)合并成

$$\frac{V_z}{V_{em}} = \frac{1.4}{\eta} (1 - e^{-1.256\eta^2}) \quad (4.3.17)$$

而式(4.3.1)中的径向动量方程成为

$$\frac{1}{\rho V_{em}^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{V_\theta}{V_{em}} \right)^2 \quad (4.3.18)$$

把式(4.3.10)和式(4.3.11)代入上式后, 可以求出相对密度的变化规律为

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = [1 - \beta(t)H(\eta)]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.3.19)$$

其中

$$\beta(t) = \frac{\Gamma_0^2(\gamma-1)}{16\pi^2(1.256\nu)\gamma\kappa\rho_\infty^{\gamma-1}} \frac{1}{t}$$

$$H(\eta) = A(\eta) + B(\eta_\infty) - B(\eta)$$

而

$$A(\eta) = \frac{1}{2\eta^2} (1 - e^{-1.256\eta^2})^2$$

$$B(\eta) = 1.256 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1.256\eta^2)^n}{nn!} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2.512\eta^2)^m}{mm!} \right]$$

根据以上结果, 图 4.6 给出了不同时刻相对密度随无量纲半径 η 的变化曲线. 从图中可以看到, 在靠近涡核中心处的密度是最低

的,但是随着时间进程,当涡量逐渐向外扩散,涡核半径增大之后,核心处的密度与无穷远处密度的差别就越小。

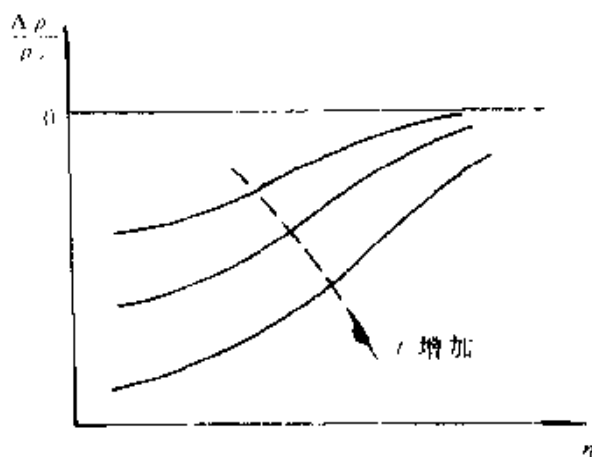


图 4.6 可压缩粘性涡相对密度随无量纲半径 η 的变化

在结束奥辛涡的讨论时应该指出:由于未能考虑轴向流,二维不可压缩流动的涡旋精确解只是一种理想化的模型,在实验中,即使在严格控制的二维条件下也会在涡旋中出现轴向流动,二维涡旋流动模型使涡旋运动丧失了许多重要的特征,如涡管的伸缩和弯曲效应,也会推迟流动不稳定性的发生,下一节中我们将研究有轴向流的轴对称涡旋精确解。

4.4 有轴向流的定常轴对称涡

本节研究有轴向流的轴对称涡旋精确解,在柱坐标系中,其控制方程是由动量方程(4.2.1)和连续性方程(4.2.2)组成,从连续性方程可知,由于有轴向流 V_z 存在,一般会导致径向流的出现。

我们限于讨论定常流情形,现寻求运动方程具有以下形式的解

$$V_r = V_r(r), \quad V_\theta = V_\theta(r), \quad V_z = V_z(r, z) \quad (4.4.1)$$

在求非线性问题的解析解时,对解的形式作出基于物理直觉的判断和作出相应的假定常常是十分重要的.

这里假定只有轴向流 V_z 与坐标 z 有关,将式(4.4.1)代入控制方程(4.2.1),其周向分量的动量方程化为

$$V_r \frac{dV_\theta}{dr} + \frac{V_r V_\theta}{r} = \nu \left(\frac{d^2 V_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{dr} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) \quad (4.4.2)$$

引入速度环量 $\Gamma = 2\pi r V_\theta$ 后,上式可以化为

$$\frac{d^2 \Gamma}{dr^2} = \left(\frac{1}{r} + \frac{V_r}{\nu} \right) \frac{d\Gamma}{dr} \quad (4.4.3)$$

其通解是

$$\Gamma = C_1 \int_0^r x \exp \left(\int_0^x \frac{V_r(s)}{\nu} ds \right) dx + C_2 \quad (4.4.4)$$

式中的积分常数 C_1 和 C_2 由边界条件确定. 考虑到 $r \rightarrow 0$ 的涡核中心处,应满足 $\Gamma \rightarrow 0$ 的条件,则可定出 $C_2 = 0$; 在 $r \rightarrow \infty$ 处, $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$, 则可确定出

$$C_1 = \Gamma_0 / H(\infty)$$

$$\text{其中} \quad H(r) = \int_0^r x \exp \left(\int_0^x \frac{V_r(s)}{\nu} ds \right) dx \quad (4.4.5)$$

代入式(4.4.4)得到

$$\Gamma = \Gamma_0 \frac{H(r)}{H(\infty)} \quad (4.4.6)$$

这样余下的问题就是如何确定式(4.4.5)中的径向速度 V_r .

4.4.1 伯格斯(Burgers)涡

为此 Burgers 假定该问题的轴向流速度具有以下形式

$$V_z = 2az, \quad a > 0 \quad (4.4.7)$$

即与 z 是简单的线性关系,并与径向坐标 r 无关. 把式(4.4.7)代入连续性方程(4.2.2),得到

$$\frac{d(rV_r)}{dr} = -2ar \quad (4.4.8)$$

其通解是

$$V_r = -ar + \frac{C}{r}$$

考虑到 $r \rightarrow 0$ 处, V_r 应该有限, 所以积分常数 C 是零. 从而有径向速度的表达式

$$V_r = -ar \quad (4.4.9)$$

将它代入式(4.4.6)后得到

$$\Gamma = \Gamma_0 [1 - \exp(-\frac{ar^2}{2\nu})] \quad (4.4.10)$$

进而求出周向速度

$$V_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} [1 - \exp(-\frac{ar^2}{2\nu})] \quad (4.4.11)$$

和涡量分布

$$\omega_r = \omega_z = 0, \quad \omega_\theta = \frac{a\Gamma_0}{2\pi\nu} \exp(-\frac{ar^2}{2\nu}) \quad (4.4.12)$$

以上得到的精确解称为**伯格斯(Burgers)涡**, 这是具有轴向流的定常轴对称涡旋流动的一个典型例子. 其基本的流动形态是: 流体在作轴对称周向运动的同时, 沿着径向从外向内流动, 并以 $z=0$ 为对称平面沿 z 轴的正反两个方向向外流动(见图4.7).

伯格斯涡的周向速度分布如图4.7所示. 其极大值可以从式(4.4.11)中求出为

$$V_{\theta m} \approx 0.0508 \Gamma_0 \sqrt{\frac{2a}{\nu}} \quad (4.4.13)$$

并在

$$r_c \approx 2.2414 \sqrt{\frac{\nu}{2a}} \quad (4.4.14)$$

处出现. 仿照上一节的作法, 我们可以把式(4.4.14)中的 r_c 定义

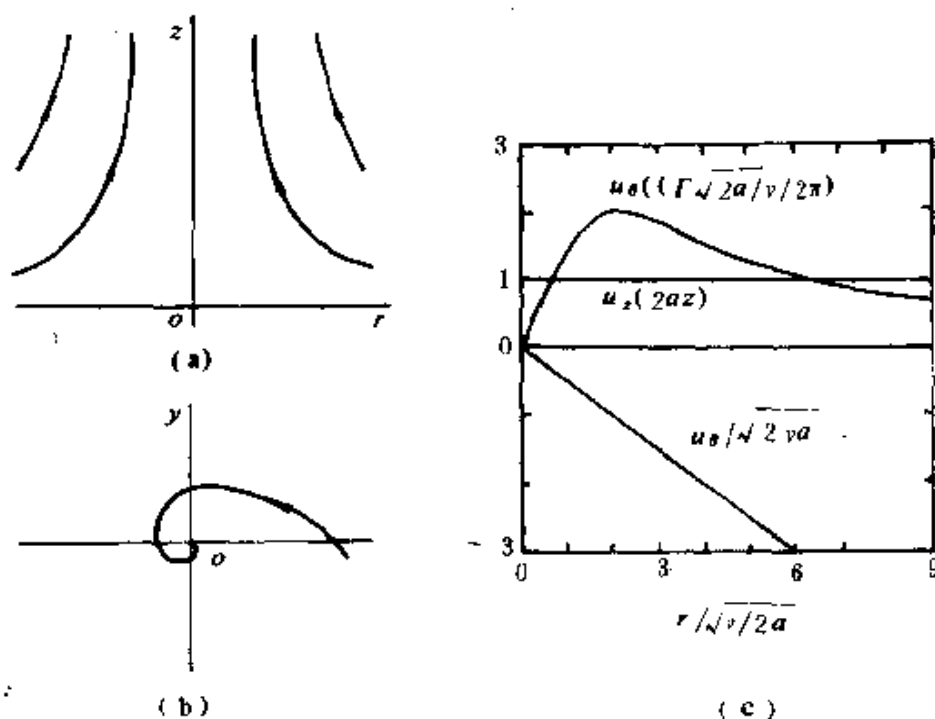


图4.7 伯格斯涡: (a) Stokes 流函数; (b) 流体质点迹线在 xy 平面上的投影; (c) 速度剖面.

为伯格斯涡的涡核半径. 在涡核区内, 若 $r \ll \sqrt{\frac{2\nu}{a}}$, 则 $V_\theta \approx \frac{a\Gamma_0}{4\pi\nu}r$,

流体近似作刚体式旋转; 在 $r \gg \sqrt{\frac{2\nu}{a}}$ 的外区, 则 $V_\theta \approx \frac{\Gamma_0}{2\pi r}$, 这正是二维势涡的速度分布. 不难看出, 图4.7给出的伯格斯涡的周向速度分布曲线与图4.4中奥辛涡的速度分布曲线十分相似. 把式(4.3.6)与式(4.4.11)相比, 可以发现, 对于非定常的奥辛涡来说, 当把时间冻结在 $t = \frac{1}{2a}$ 上, 两式的形式完全一致. 这说明了定常的伯格斯涡所以能够存在, 正在于当涡量向外扩散时, 从外向内的径向流不断地把涡量从外带向涡核, 正好使扩散掉的涡量得到了补偿.

把式(4.4.7)、(4.4.9)和(4.4.11)给出的速度分布代入式

(4.2.1)中第二和第三个方程,积分后得到伯格斯涡的压强分布为

$$p(r, z) = p_0 - \frac{\rho}{2}(4a^2z^2 + a^2r^2) + \rho \int_0^r \frac{V_\theta^2}{r} dr \quad (4.4.15)$$

注意到 $r=0, z=0$ 处, $V_r=V_\theta=V_z=0$, 可知 p_0 是驻点压强, 而涡心轴线上的压强为

$$p(0, z) = p_0 - 2\rho a^2 z^2 \quad (4.4.16)$$

伯格斯涡计入了涡旋运动中普遍存在的三维效应, 与兰金涡和奥辛涡相比更具有现实意义, 能较好地反映出现实生活中某些涡旋流动的主要特性. 它的不足之处是在坐标原点处出现驻点, 而且当 $r \rightarrow \infty$ 和 $z \rightarrow \infty$ 时, 在无穷远处的 $V_r \rightarrow -\infty$ 和 $V_z \rightarrow \infty$, 这些从物理上看都是不真实的. 此外, 由于轴向速度被假定为只是 z 坐标的函数, 使得它与另两个速度分量之间的耦合过弱. 实际上, 涡旋的轴向流是与坐标 r 有关的, 从而与其它速度分量之间应具有强耦合的性质. 作为轴向流速随坐标 r 变化的涡旋流动精确解的一个典型例子, 本节最后介绍 Sullivan 涡.

4.4.2 苏利文(Sullivan)涡

我们来研究这样的问题: 为了求解(4.4.6), 设轴向流的 V_z 与坐标 r, z 均有关, 并具有以下形式

$$V_z = 2az[1 - b \exp(-\frac{ar^2}{2\nu})], \quad a > 0 \quad (4.4.17)$$

代入连续性方程(4.2.2), 得到

$$\frac{d(rV_r)}{dr} = -2ar(1-b)\exp(-\frac{ar^2}{2\nu}) \quad (4.4.18)$$

其解为

$$V_r = -ar + \frac{2b\nu}{r}(1 - \exp(-\frac{ar^2}{2\nu})) \quad (4.4.19)$$

为确定积分常数, 这里已经使用了 $r=0$ 处 V_r 应保持有限值的条件. 将式(4.4.19)代入式(4.4.6)后, 得到

$$V_z = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{H(ar^2/2\nu)}{H(\infty)} \quad (4.4.20)$$

其中

$$H(x) = \int_0^x \exp\left(-s + b \int_0^s \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau\right) ds \quad (4.4.21)$$

以上得到的涡旋精确解称为**苏利文涡**。我们来分析一下它的特点。

从式(4.4.19)得知,苏利文涡的径向速度在 r_c 处变为零。 r_c 的位置由以下方程确定

$$\frac{ar_c^2}{2b\nu} = 1 - \exp\left(-\frac{ar_c^2}{2\nu}\right) \quad (4.4.22)$$

在 $|r| > |r_c|$ 的区域,有 $V_r < 0$,这是由 $a > 0$ 所决定的。因而,在 $|r| < |r_c|$ 的区域,有 $V_r > 0$ 。考虑到当 $\frac{ar^2}{2\nu} \ll 1$ 时, $V_r = ar(b-1)$,所以 $b > 1$ 是必要的。如图4.8所示 r 内外的流体都会向 $|r| = |r_c|$ 处汇聚,从而在 r_c 处产生轴向流动。作为补充,在 z 轴处另有反向的轴向流出现。轴向流的这种特征也可以从式(4.4.17)得到。在 $r = 0$ 处, $V_z = 2az(1-b)$ 。当 $z > 0$ 时, $V_z < 0$,然后随 r 的增加变为 $V_z > 0$ 。由此可以看出:在 $|r| \rightarrow \infty$ 时,虽然苏利文涡的速度分布与伯格斯特涡相同,但在涡旋内部的结构上苏利文涡会呈现出复杂的双胞结构(见图4.8)。这种具有轴对称性的双胞结构,对涡量场来说体现为分量 ω_θ 的存在。从式(4.4.1)求出

$$\omega_\theta = -\frac{2a^2bzr}{\nu} \exp\left(-\frac{ar^2}{2\nu}\right) \quad (4.4.23)$$

它在 $r=0$ 时为零,然后, $|\omega_\theta|$ 随 r 的增大而增大,在 $|r| = \sqrt{\frac{\nu}{a}}$ 处,出现极值点,这时

$$\omega_{\theta m} = -\frac{2a^2bz}{\sqrt{ave}} \quad (4.4.24)$$

而在 $|r| \rightarrow \infty$ 时, ω_θ 迅速衰减为零.

苏利文涡所揭示的双胞涡结构,通过对龙卷风的观察已得到

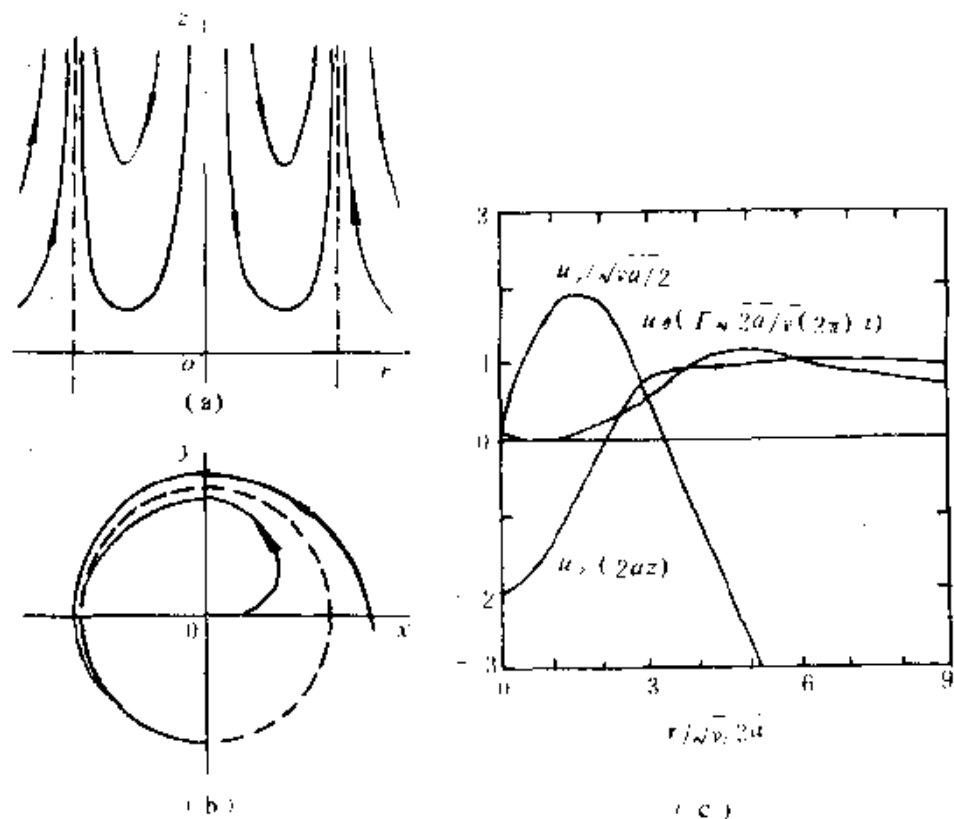


图4.8 苏利文(Sullivan)涡

(a) Stokes 流函数, (b) 流体质点迹线在 xy 平面上的投影, (c) 速度剖面

了证实. 其后, Leslie 和 Snow (1980) 用龙卷风模拟器在实验室中成功地再现了这一现象. Bellamy-Knights (1970) 研究了 N-S 方程的非定常双胞涡解, 对此感兴趣的读者可进一步参阅有关文献.

4.5 希尔球涡

本章以上各节中研究的涡旋精确解, 尽管它们的形态各异, 复杂程度不同, 但有一个共同点是: 在柱坐标系中, 都具有周向的

速度分量 V_z 。现在我们来讨论 $V_\theta=0$ 的轴对称定常涡旋流动精确解(图4.9)。由于速度只有 V_r 和 V_z 两个分量,可引入 Stokes 流函数 ψ ,即

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.5.1)$$

这时,连续性方程(4.2.2)自动得以满足。涡量的三个分量中 $\omega_r = \omega_z = 0$,而

$$\omega_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (4.5.2)$$

将式(4.5.1)代入上式后,得到了流函数与涡量之间的关系

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r\omega_\theta \quad (4.5.3)$$

考虑到涡量矢与子午面垂直的特点,同时轴对称流中 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$,因而本问题中涡线必定是一族以 z 轴为中心的圆周。 ω_θ 可由涡量动力学方程(1.3.12)求解,在此情形下涡量动力学方程可写成

$$V_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) + V_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega}{r} \right) = \nu r \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (4.5.4)$$

可以证明

$$\omega_\theta = -Kr \quad (4.5.5)$$

是它的解,其中 K 是一常数。这只要把式(4.5.5)代入式(4.5.4)后,就可以验证这一点,因为这时有:

对流项

$$(V \cdot \nabla) \omega = (V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z}) \omega e_\theta = V_r \frac{\partial \omega}{\partial r} e_\theta = -KV_r e_\theta$$

涡管拉伸项

$$(\omega \cdot \nabla) V = \frac{\omega}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r e_\theta - V_z e_z) = \omega \frac{V_r}{r} e_r = -KV_r e_\theta$$

粘性项

$$\nu \nabla^2 \omega = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega) \right] e_\theta = 0$$

项 $\nu \nabla^2 \omega$ 自动为零说明: 式(4.5.5)给出的涡量解, 不存在粘性扩散效应. 因此, 它也是无粘流基本方程的解. 实际上, 解(4.5.5)式满足无粘流中的涡管强度守恒定理和流体质量守恒定律. 现证明如下.

考虑一个半径为 r 的涡环, 其涡核截面积为 δS . 根据赫姆霍兹涡管强度守恒定理, 有

$$\Gamma = \omega \delta S = \text{常数}$$

又因为带有涡量的流体为一物质体系, 根据不可压缩流的质量守恒定律应有

$$2\pi r \rho \delta S = \text{常数}$$

这就给出了与式(4.5.5)相同的解.

将式(4.5.5)代入流函数方程(4.5.3)后, 我们有

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = Kr^2 \quad (4.5.6)$$

该方程存在以下形式的解

$$\psi = \frac{1}{10} Kr^2 (r^2 + z^2 - a^2) \quad (4.5.7)$$

它在球面 $r^2 + z^2 = a^2$ 上, $\psi = 0$. 由式(4.5.7)给出的涡旋精确解描述了在半径为 a 的球内部, 具有与 r 成正比的涡量分布这一种涡旋流动结构, 通常称作希尔球涡(Hill's spherical vortex). 其速度分布是

$$V_r = -\frac{1}{5} Krz, \quad V_z = \frac{1}{5} K(2r^2 + z^2 - a^2) \quad (4.5.8)$$

在球面上

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_z^2} = \frac{1}{5} Kar, \quad r^2 + z^2 = a^2 \quad (4.5.9)$$

图4.9给出了希尔球涡内流线和涡线的示意图. 在以 $z=0$ 平

面为分界面的上下两个半球内, 径向速度的方向相反. 在 $z=h$ 平面与球的截面上, 轴向速度为 $V_z = \frac{1}{5}K(2r^2 + h^2 - a^2)$. 它在 $r = \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{2}}$ 的圆周内外的方向相反. 对于 $z=0$ 的平面, 径向速度为零, 只有轴向速度; 在 $r=0$ 和 $r=a$ 的位置, V_z 大小相等、方向相反, 而 $V_z=0$ 的情形出现在 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的圆周上.

从图4.9中可以看出, 球涡是由无数个同轴的圆形涡环组成的. 当同一涡环上的流体质点沿流线运动远离对称轴时, 涡环被拉伸, 涡量与 r 成正比增加. 然而, 由于涡环拉伸而增加的涡量却被流体的对流而抵消了, 所以球涡内粘性扩散效应为零, 涡核大小

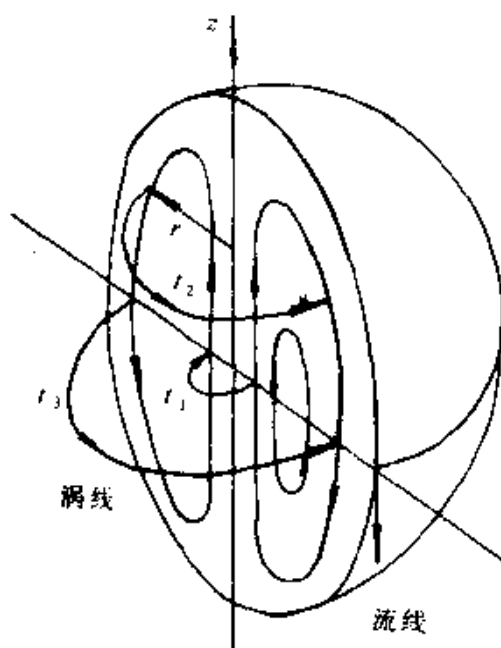


图4.9 希尔球涡

保持不变, 这就是涡量与 r 成正比以及扩散项为零的物理意义.

为了确定出希尔球涡内的压强分布, 将速度分布式(4.5.8)代

入 N-S 方程(4.2.1), 得到

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{25}\rho K^2(a^2r - 2r^3) \quad (4.5.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2}{25}\rho K^2(a^2z - z^3) + 2\rho Kv \quad (4.5.11)$$

积分式(4.5.10)后求出

$$p = \frac{1}{50}\rho K^2 r^2(r^2 - a^2) + f(z)$$

代入式(4.5.11)后, 再次积分即可确定出

$$f(z) = \frac{1}{25}\rho K^2(a^2z^2 - \frac{1}{2}z^4) + 2\rho K vz + C$$

结合以上两式即得到压强分布

$$p = \frac{1}{50}\rho K^2[r^2(r^2 - a^2) + 2z^2a^2 - z^4] + 2\rho K vz + p_0 \quad (4.5.12)$$

其中 p_0 是 $r=z=0$ 点的压强, 在球面上 $z^2+r^2=a^2$, 压强分布为

$$p = \frac{1}{50}\rho K^2 a^2 z^2 + 2\rho K vz + p_0 \quad (4.5.13)$$

为了确定未知常数 K 和 p_0 , 可以利用希尔球涡处于无粘流体均匀来流中的定态绕流的条件. 当速度为 U 的均匀来流沿 z 轴绕经圆球时, 在球面上的速度分布是

$$v = \frac{5}{2}U \frac{r}{a}, \quad \text{在 } r^2 + z^2 = a^2 \text{ 上} \quad (4.5.14)$$

使球涡内外的速度在球面上匹配, 式(4.5.9)中的常数即可确定,

$K = \frac{15U}{2a^2}$. 使希尔球涡在来流中保持静止的另一个重要条件是球

涡内外的压强在球面上连续. 我们知道, 处于定态绕流中的球面压强为^[1]

$$p = \frac{1}{8}\rho U^2 \left(\frac{9z^2}{a^2} - 5 \right) + p_\infty \quad (4.5.15)$$

经与式(4.5.13)联立求解,即可找到球心处的驻点压强 p_0 与无穷远处压强 p_∞ 的关系,

$$p_0 = p_\infty - \frac{5}{8}\rho U^2 \quad (4.5.16)$$

这说明希尔球涡中心处的压强必须小于无穷远处来流的压强,其差值正比于来流速度的平方.

总之,在球表面上内外速度和压强都是连续的. 涡线覆盖在球面上,在球面上 $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. 但是球内外涡量有一个跃变,球外为无旋流,球内是有旋流动. 进一步研究还表明,在球面上剪切应力是不连续的,所以,严格说来,整个流动并不是 N-S 方程的一个精确的定常流解.

第五章 面涡及其演化

在大雷诺数的情形下,流场中涡量分布的一个显著特点是:涡量大都集中分布在某些局部区域中,以层状分布形态存在的有一定厚度的涡量集中区称为**涡层**(vortex layer),通常出现在大雷诺数流动的固壁边界层和射流边界层内,也常见于物体尾迹中和具有尖角边缘的物体分离流中,例如从机翼前、后缘拖出的尾涡面,从钝物体分离的剪切流等等是最常见的一些例子.

涡量呈层状和柱状集中分布是自然界和工程中常见的典型形态,**面涡**(sheet vortex)和**线涡**(line vortex)是这些形态在无粘流中的一种理想化旋涡模型;而无穷长直线涡在平面流动中就蜕化为**点涡**(point vortex)模型.在以下三章中我们将主要叙述这三类典型的涡旋运动,着重基本概念、基本理论问题和基本运动规律的分析,它们是研究复杂涡运动的基础.

在介绍了三维面涡上一般的相容关系和二维面涡随时间演化的控制方程(K-R 方程)以后,本章着重研究二维面涡的几个理论问题,即面涡的不稳定性和奇点形成问题,面涡演化过程中螺旋形集中涡的形成问题等.

5.1 面涡上的相容关系

考虑厚度为 ϵ 的涡层,在其中介面上任取一点 P 和围绕 P 的面积微元 δS ,以 δS 为横截面在涡层内划出一块母线平行于点 P 的法线方向的微元柱体(见图5.1).设层内涡量为 ω ,则体积微元内的涡量为 $\omega\delta V = \omega\delta S \cdot \epsilon$.作为一种理想化的极限情形,令 $\epsilon \rightarrow 0$

的同时, $\omega \rightarrow \infty$, 并保持 $\omega \cdot \varepsilon$ 为有限值 γ , 即

$$\gamma = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty}} \omega \cdot \varepsilon \quad (5.1.1)$$

则 $\omega \delta V = \omega \varepsilon \delta S \approx \gamma \delta S$

这种不计厚度的具有涡量奇性分布的曲面, 称为**面涡**, 在面涡上。涡量可以表示成

$$\omega = \gamma \delta(n) \quad (5.1.2)$$

其中 γ 称为**面涡密度**或**面涡强度**, n 是离面涡的法向距离, $\delta(n)$ 是狄拉克 δ 函数。

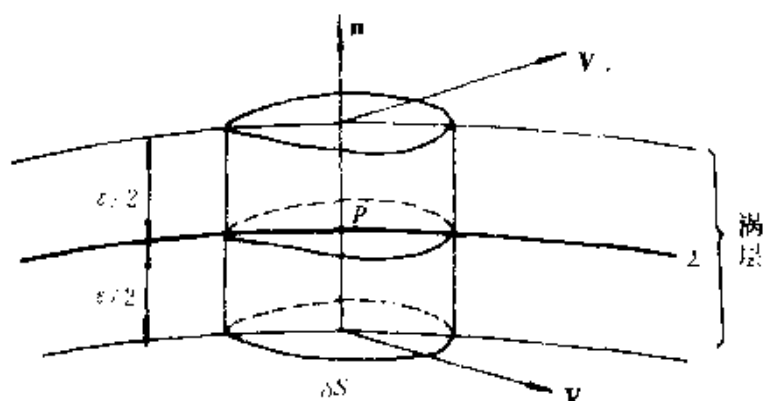


图 5.1 涡层和面涡

我们现在来分析面涡两侧物理量必须满足的**相容关系**。

再回到图5.1所示厚度为 ε 的涡层情形。对图中体积微元应用高斯定理：

$$\omega \delta V \approx n \times (V_+ - V_-) \delta S + \text{侧表面积分}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 侧表面积分是高阶小量, 可以略去不计。利用式(5.1.1), 我们就可以得到

$$\gamma = n \times (V_+ - V_-) \quad (5.1.3a)$$

$$\text{或者} \quad (\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-) = \gamma \times \mathbf{n} \quad (5.1.3b)$$

其中下标“+”和“-”分别表示从两个不同的侧面沿法向逼近面涡上同一点时的值。

再对图5.1中的体积微元 δV 使用质量守恒定理,并取 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限,不难得到关系式

$$(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.1.4)$$

式(5.1.3)和(5.1.4)表明面涡是速度的一个切向间断面,速度的法向分量在面涡两侧却是连续的。面涡两侧切向速度间断的大小等于面涡的强度(或称面涡密度 γ)。如果考虑到在没有取极限之前,流体中速度场处处连续这一事实,将速度在 P 点附近作泰勒展开,则有

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_+ &= \mathbf{V}_P + \frac{1}{2}\epsilon(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{V}_P, \\ \mathbf{V}_- &= \mathbf{V}_P - \frac{1}{2}\epsilon(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{V}_P \end{aligned}$$

把以上两式相加后,就得到

$$\mathbf{V}_P = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-) \quad (5.1.5)$$

无论 ϵ 怎么小,这一结果都是成立的。这样面涡上任一点 P 的速度就等于在该点两侧的速度之算术平均值。

关于面涡两侧压强的相容条件可以通过动量定理给出。现对图5.1中涡层的体积微元 δV 应用动量定理,在法线方向上我们可以得到

$$\begin{aligned} (p_+ - p_-)\delta S + \rho[(\mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_P) \cdot \mathbf{n}]^2\delta S - \\ \rho[(\mathbf{V}_- - \mathbf{V}_P) \cdot \mathbf{n}]^2\delta S + \text{侧表面动量流率} = 0 \end{aligned}$$

并取 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限。以式(5.1.4)代入上式后,得到

$$p_+ = p_- \quad (5.1.6)$$

这说明面涡两侧的压强是连续的。从式(5.1.3)到式(5.1.6)给出

了面涡作为无粘流中的切向速度间断面所必须满足的**相容条件**。

由此可见,从数学观点来看,面涡只不过是内嵌于无粘流场中的切向速度的间断面。众所周知,还有另一类法向速度的间断面(激波),须知,无粘流欧拉方程的解是允许存在有限个间断面的,间断面上的相容关系保证了欧拉方程之解在全区域内存在。

但是上述面涡的相容关系,并不能确定面涡的运动。面涡的运动仍需用毕奥-萨伐尔公式计算。将式(5.1.2)代入式(2.1.12),得到三维空间面涡诱导速度公式如下:

$$\mathbf{V}(P) = \frac{1}{4\pi} \int \gamma(\mathbf{r}(G)) \times \frac{\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}(G)}{|\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}(G)|^3} dS \quad (5.1.7)$$

式中 $\mathbf{r}(P)$ 和 $\mathbf{r}(G)$ 分别为空间点 P 和面涡上点 G 的位置矢量(见图5.2)。当 $\mathbf{r}(P)$ 落在面涡表面上时,就得到面涡本身的自诱导速度为^[12]

$$\lim_{P \rightarrow Q} \mathbf{V}(Q) = \pm \frac{1}{2} \gamma(Q) \times \mathbf{n}(Q) \pm \frac{1}{4\pi} \oint \gamma(G) \times \frac{\mathbf{r}(Q) - \mathbf{r}(G)}{|\mathbf{r}(Q) - \mathbf{r}(G)|^3} dS \quad (5.1.8)$$

式中积分是取柯西积分主值;当 P 点从 \mathbf{n} 的正向逼近 Q 点时,取正号;反之,取负号(见图5.2)。

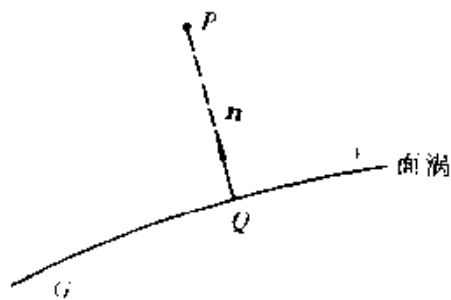


图 5.2 式(5.1.8)用图

5.2 二维面涡自诱导运动的 Birkhoff-Rott 方程

5.2.1 Birkhoff-Rott 方程

在平面流动的情况下, 二维面涡是运动平面上的连续曲线, 可以在复平面上来研究它. 这时, 式(5.1.7)或式(2.4.4)可写成:

$$u - iv = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\gamma(l', t)}{Z - \xi(l', t)} dl' \quad (5.2.1)$$

其中曲线 C 是二维面涡的几何形状, l 是沿 C 的弧长, $\xi(l, t)$ 是面涡上的点, Z 是复平面上的任意一点,

$$Z = x + iy. \quad (5.2.2)$$

现考虑二维面涡的演化问题. 认为面涡的运动完全是在其自诱导作用下产生的. 根据式(5.2.1), 面涡的自诱导速度为

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\gamma(l', t)}{\xi(l, t) - \xi(l', t)} dl' \quad (5.2.3)$$

其中 $\bar{\xi}$ 是 ξ 的复共轭; 积分取柯西主值, 它代表点 Z 从面涡两侧逼近 C 曲线上的 ξ 点时的算术平均值. 这一定义与式(5.1.5)中给出的面涡运动速度是一致的. 设 ξ_1 和 ξ_2 代表二维面涡上两个流体质点的位置, $\Gamma(\xi_1, \xi_2)$ 是这两个流体质点间的面涡段所具有的环量. 在面涡演化过程中, 尽管 ξ_1 和 ξ_2 的位置不断发生变化, 但在无外力存在的情况下, Γ 是一个守恒量, 即

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (5.2.4)$$

这样不妨把 Γ 作为一个拉格朗日变量, 面涡的轨迹可以表示为 $\xi(l, t)$. 若进一步考虑 $\gamma = \left(\frac{\partial \xi}{\partial l}\right)^{-1}$ 和 $\gamma dl = d\Gamma$, 则式(5.2.3)可以写成以下形式

$$\frac{d\bar{\zeta}(F, t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dF'}{\zeta(F, t) - \zeta(F', t)} \quad (5.2.5)$$

这就是无界域中二维自由面涡自诱导运动的控制方程, 也称为 Birkhoff-Rott 方程(以下简写成 B-R 方程). 若给定面涡初始时刻的位置和涡密度分布, 就可以通过求解 B-R 方程来确定其演化过程.

5.2.2 B-R 方程的精确解

貌似简单的 B-R 方程是一个强非线性的奇异积分-微分方程, 它的数学特性却是非常复杂的. 对方程解的存在性和唯一性还缺少充分的论据; 对初值问题的提法的适定性还有待深入的研究; 此外, 面涡本身所具有的不稳定性使得其演化过程变得相当复杂. 这样, 寻找在给定初始条件下的精确解, 更是一件十分困难的工作.

根据 Lighthill(1951)的看法, 当一个方程描述着力学或物理学问题时, 它总应该是正则的. 这里, 正则(regular)是指函数在它的定义域中连续并存在着各阶导数. 因此, 为了保证 B-R 方程的正则性, 面涡的初值应满足一定的条件. 对于一个在初始时刻平直的面涡, 其上的涡密度分布 γ 若满足下述 Lighthill 定理, 它就是适定的. Lighthill(1951)定理, 可以叙述为:

如果函数 $\sqrt{1-x^2}\gamma(x)$ 是正则的, $x \in [-1, 1]$, 则积分 $\int_{-1}^1 \frac{\gamma(x')}{x-x'} dx'$ 也是正则的, x 与 x' 的定义域相同.

根据 Lighthill 定理, 以下给出面涡演化的两个典型例子.

1. 考虑这样一个初值问题, $t=0$ 时, 面涡位于实轴上, 其涡密度分布为

$$\gamma(x) = \frac{2\Gamma_0}{\pi} \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1] \quad (5.2.6)$$

由于 $\sqrt{1-x^2}\gamma(x) = \frac{2\Gamma_0}{\pi}(1-x^2)$ 是一个正则函数, 该问题是适定的, 该面涡的总环量是

$$\int_{-1}^1 \gamma(x) dx = \Gamma_0$$

其演化规律是

$$\xi = x \exp(i\Gamma_0 t / \pi) \quad (5.2.7)$$

为了证明这一点, 引入变换

$$x = -\cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi] \quad (5.2.8)$$

将式(5.2.6), (5.2.7)和(5.2.8)代入 B-R 方程

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} = \frac{i\Gamma_0}{\pi} \cos\theta \exp(-i\Gamma_0 t / \pi) \\ \text{右边} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' \cdot \frac{\Gamma_0}{\pi} \exp(-i\Gamma_0 t / \pi) \\ &= \frac{i\Gamma_0}{\pi} \cos\theta \exp(-i\Gamma_0 t / \pi) \end{aligned}$$

其中利用了以下三角恒等式

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = \frac{\pi \sin n\theta}{\sin\theta}, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (5.2.9)$$

上式只在开区间 $(0, \pi)$ 内成立, 这一点在以上推导时应加以特别注意. 于是我们证明了式(5.2.7)确是 B-R 方程在该初值问题时的解. 它表明该面涡以角速度 $\frac{\Gamma_0}{\pi}$ 绕原点作刚体式匀速转动而不改变形状. 这是 B-R 方程的一个典型的精确解算例.

2. 另一个令人感兴趣的例子是涡密度分布由下式给出的初值问题

$$\gamma(x) = 2Ux / \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1] \quad (5.2.10)$$

这里 $\sqrt{1-x^2}\gamma(x) = 2Ux$ 也是一个正则函数, 满足 Lighthill 定理中的条件. 利用式(5.2.9), 同样可以证明满足初始条件(5.2.10)的 B-R 方程的解为

$$\zeta = x - iUt, \quad x \in (-1, 1) \quad (5.2.11)$$

这是沿虚轴方向作平移的匀速运动, 但是上式仅在开区间 $(-1, 1)$ 中成立. 在面涡的两个端点 ± 1 处, 速度是无穷大. 在端点速度奇性的影响下, 事实上该面涡无法保持匀速平移运动而不改变外形. 初始时刻平直的面涡在演化过程中会从两个端点逐渐卷起, 形成两个对称的螺旋状结构, 其中集中了大部分面涡的环量. 该问题与机翼尾涡的卷起密切相关, 具有十分重要的意义. 它是以下二节重点讨论的内容.

5.3 机翼尾涡面卷起的近似模型

在机翼理论中, 无气动扭转的椭圆机翼具有最小的诱导阻力. 令人感兴趣的是: 它的展向涡密度分布正好满足 Lighthill 定理中最简单的正则条件, 即式(5.2.10). 研究这种面涡的自诱导运动具有典型意义, 它的实用背景就是飞机尾涡面的卷起.

5.3.1 流动的物理图象

众所周知, 从飞机尾缘处拖出的平直面涡在向下游运动的过程

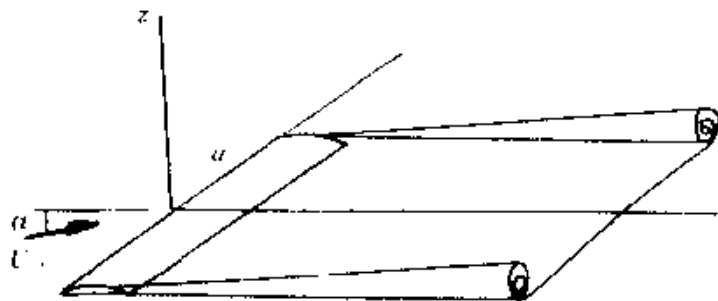


图 5.3 尾涡面卷起的近似模型

程中会逐渐卷成一对集中涡(见图5.3)。由于物理量在主流方向上的变化比横流平面内的变化缓慢,可以采用二维时间相关比拟近似,将该三维定常面涡近似等价于相应的二维面涡的非定常运动问题。令 $z = U_{\infty}t$, 在横流平面内 $U = U_{\infty} \sin \alpha \approx U_{\infty} \alpha$, 其中 U_{∞} 为来流速度, α 为攻角。在初始时刻, 涡量分布在直线段 $[-a, a]$ 上, 相应于机翼的尾缘, 其中涡密度分布函数为

$$\gamma(x) = 2U_{\infty}\alpha x / \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a] \quad (5.3.1)$$

则在尾缘下游任一坐标站 z 处的横流平面($z = \text{常数}$)上, 尾涡的形状由相应时刻 $t = z/U_{\infty}$ 的二维面涡演化的形状确定, 尾涡面的演化大致可以分成三个阶段:

- (1) 平直面涡生成的初始阶段
- (2) 面涡的卷起过程
- (3) 远下游的集中涡的形成

本节将先给出该问题的一个定性的近似分析, 下一节再详细讨论面涡是如何卷起的。

5.3.2 具有椭圆环量分布的面涡

上述椭圆环量分布的面涡, 我们也可以用另一种方法得到。在无穷远处静止的在无粘不可压缩流体中, 当一块二维平板沿其法向作匀速运动时, 在平板上, 速度势可以表示成

$$\varphi = \pm U \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \pm 0 \quad (5.3.2)$$

其中 U 是平板的运动速度, 绝对坐标系 (xy) 瞬时地与平板一致, x 方向沿着平板, y 方向与平板运动方向相一致(图5.4), 平板的位置为 $|x| \leq a, y=0$, 沿板面的切向速度为

$$u(x, \pm 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm Ux / \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \pm 0 \quad (5.3.3)$$

沿平板的法向速度为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = U \quad (5.3.4)$$

由此可见，在平板两侧是一个切向速度的间断面，该平板可以看成是由一个二维面涡所构成。将上式代入(5.1.3)所得到的面涡强度是与式(5.3.1)相一致的。只要令 $U = U_0 \alpha$ ，该面涡不是一种自由面涡，它可以不必满足面涡的动力学相容条件(5.1.6)，即可以承受载荷，通常称为附着面涡。如果我们在某一瞬间突然撤去平板，该面涡就仍旧留在流场中。图5.4中给出了该问题初始时刻的速度剖面，从中可以明显看到在面涡两个端点处速度分布的奇异性，正是由于端点的速度奇异性，流场中的自由面涡会逐渐卷成一对集中涡。

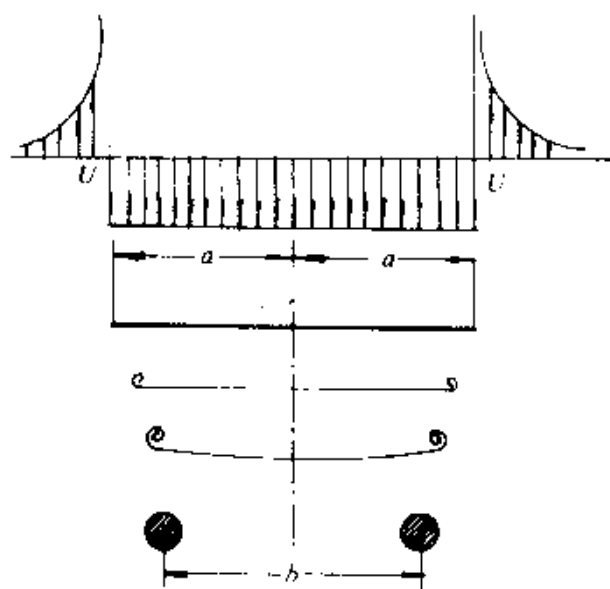


图 5.4 平板运动在两端点产生速度奇性，从那里卷起两个涡旋

5.3.3 集中涡的近似模型

如前所述,从机翼后缘平直面涡到远下游集中涡的形成,这中间经历了面涡逐渐卷起的过程.所谓集中涡的近似模型是指我们暂时不管面涡卷起的中间阶段,认为平直面涡直接卷成了一对反向旋转的集中涡(图5.4).根据流体的冲量守恒和动能守恒等原理,可以估算出集中涡核的半径及两涡之间的距离.

考虑到演化过程中问题的对称性和环量的守恒性,可以计算出每一个集中涡的强度为

$$\Gamma = \int_0^a \gamma(x) dx = 2Ua \quad (5.3.5)$$

面涡在演化过程中,流体的冲量应守恒.初始时刻的流体冲量由式(3.2.5)计算得到为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\gamma(x) dx = \pi Ua^2 \quad (5.3.6)$$

卷起的集中涡的冲量为 Γb . 由此可以确定该涡对的间距为

$$b = \frac{1}{2}\pi a \quad \text{或} \quad \frac{b}{2a} = \frac{\pi}{4} \approx 0.79 \quad (5.3.7)$$

为了确定卷起的集中涡的涡核半径.需要计算流体的动能.以 δ 表示涡核半径.假定涡量在涡核中均匀分布,则有

$$\pi\delta^2\omega = \Gamma \quad \text{或} \quad \omega = \frac{2Ua}{\pi\delta^2} \quad (5.3.8)$$

这时涡核内流体作刚体式旋转,其速度分布为 $\frac{\Gamma}{2\pi\delta^2}r$, 则涡核内流体的动能为

$$T_1 = 2 \cdot \frac{\rho}{2} \int_0^{\delta} \left(\frac{\Gamma r}{2\pi\delta^2}\right)^2 2\pi r dr = \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi} \quad (5.3.9)$$

涡核外的区域是无旋流动.其流函数为

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log\left(\frac{r}{r'}\right) \quad (5.3.10)$$

式中 r 和 r' 分别是观察点到两个涡心的距离.由此可以得到核外

区域的动能为

$$T_2 = -\frac{\rho}{2} \oint \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl \quad (5.3.11)$$

其中积分路线为沿着两个涡核的边界圆, 在涡核边界上

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log\left(\frac{b}{\delta}\right) + O\left(\frac{\delta}{b}\right), \quad \oint \frac{\partial \psi}{\partial n} dl = -\Gamma \quad (5.3.12)$$

代入式(5.3.11), 则有

$$T_2 \approx \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \log\left(\frac{b}{\delta}\right) \quad (5.3.13)$$

在初始时刻, 流场的动能为

$$T = \frac{\rho}{2} \iint (\nabla \varphi)^2 dx dy = -\frac{\rho}{2} \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = -2\rho \int_0^a \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \quad (5.3.14)$$

将式(5.3.3)代入上式, 考虑到在平板上 $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = U$, 积分后得到

$$T = \frac{1}{2} \pi \rho U^2 a^2 = \frac{\pi \rho \Gamma^2}{8} \quad (5.3.15)$$

因为无粘流中动能是个时间不变量(见 § 3.4), 最后由式(5.3.9)、(5.3.13)和(5.3.15)有

$$\frac{\Gamma^2}{8\pi} + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \log \frac{b}{\delta} = \frac{\pi \Gamma^2}{8} \quad \text{或} \quad \frac{\delta}{b} \approx 0.11 \quad (5.3.16)$$

如果以最大切向速度来定义涡核半径, 则以上结果比实验测量的结果略微偏大. 这种不一致性主要来源于涡核中涡量均匀分布的假定.

5.4 面涡的卷起和集中涡的形成

5.4.1 卡登(Kaden)螺旋线

在上节的近似模型中缺少对面涡卷起过程的仔细分析, 本节

将进一步分析尾涡卷成集中涡的过程, 若假定两个涡之间相距足够远, 它们的相互作用小到可以忽略的情况下, 可以用一个半无限长平直面涡的卷起来表示半边尾涡面的卷起(图5.5), 则其强度和环量分布分别是

$$\gamma = Cx^{-1/2}, \quad \Gamma = 2Cx^{1/2} \quad (5.4.1)$$

其中 C 是一常数, 它的量约为 $1.5^2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

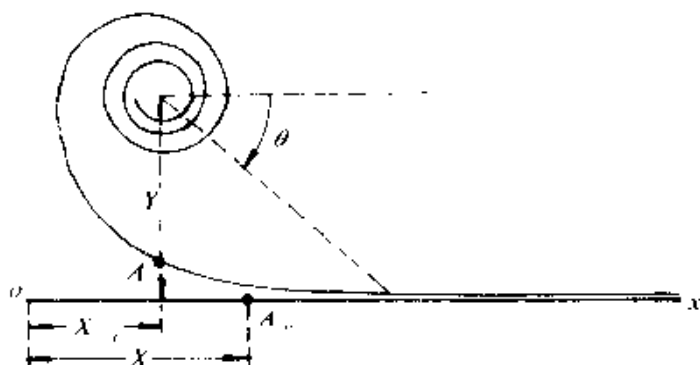


图 5.5 半无限长平直面涡卷起示意图

这就构成了 B-R 方程的一个初值问题. 以 Γ 作为拉格朗日变量, 设面涡的初始状态为

$$\xi(\Gamma, 0) = \frac{\Gamma^2}{4C^2}, \quad \Gamma \in (0, \infty) \quad (5.4.2)$$

考虑到该问题没有特征长度, 在演化过程中, ξ 是 Γ, t 和 C 的函数, 通过量纲分析可以得到

$$\xi(\Gamma, t, C) = (Ct)^{2/3} f(\tau) \quad (5.4.3)$$

其中 τ 是无量纲相似变数, 即

$$\tau = \Gamma C^{-1/3} t^{-1/3} \quad (5.4.4)$$

把以上两式代入 B-R 方程(5.2.5), 就得到了关于函数 $f(\tau)$ 的一个微分-积分方程

$$2\bar{f} - \tau \frac{d\bar{f}}{d\tau} = -\frac{3i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau'}{f(\tau) - f(\tau')} \quad (5.4.5)$$

在初始时刻 $t=0$, 相应于 $\tau=\infty$, 从式(5.4.3)和(5.4.2)得到方程(5.4.5)的边界条件

$$f(\tau) = \frac{\Gamma^2}{4C^2}(Ct)^{-2/3} = \frac{\tau^2}{4} \quad \text{当 } \tau \rightarrow \infty \quad (5.4.6)$$

将 $f = \frac{\tau^2}{4}$ 代入方程(5.4.5), 可以发现它实际上是该方程在区间 $\tau \in (0, \infty)$ 的精确解, 但是遗憾的是在 $\tau \rightarrow 0$ 处, 它不是该方程的解. 而 $\tau \rightarrow 0$, 对应于面涡端点附近或 t 充分大时面涡的属性, 正是我们最关心的事情.

迄今为止, 方程(5.4.5)的解析形式的解还没有找到. 通常可以通过两条途径来研究面涡卷起的特性: 一是数值解, 二是研究涡心邻域内的渐近特性. 以下我们通过简单的几何论证和涡量场特性分析来讨论涡心邻域的渐近特性.

为了分析时间足够长后解的性质, 假定这时面涡所卷成螺旋型结构的核心部分是由近似于圆形的彼此靠近的同心圆族组成. 取以螺旋中心为原点的极坐标系, 通过量纲分析, 可以把绕半径为 r 的圆上的环量写成

$$\Gamma(r) = 2C(\lambda r)^{1/2} \quad (5.4.7)$$

式中 λ 是待定的无量纲常数. 该圆周上的周向速度为

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{C\lambda^{1/2}}{\pi r^{1/2}} \quad (5.4.8)$$

现考虑面涡上拉格朗日坐标为 Γ_p 的某一流体质点, 它的径向坐标从式(5.4.7)可确定为

$$r_p = \frac{\Gamma_p^2}{4\lambda C^2} \quad (5.4.9)$$

它的周向速度为 $V_\theta = r_p \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_p$, 代入式(5.4.8), 对时间 t 积分后得到该流体质点的周向坐标为

$$\theta_p = \frac{C}{\pi} \lambda^{1/2} r_p^{3/2} t + \theta_0 \quad (5.4.10)$$

于是

$$r \approx \left(\frac{C^2 \lambda}{\pi^2} \right)^{1/3} \left(\frac{t}{\theta - \theta_0} \right)^{2/3} \quad (5.4.11)$$

上式表明, 对于小的 r 值或大的 t 值, 面涡卷起的形状近似为螺线, 这就是所谓的卡登(Kaden)螺线.

5.4.2 参数确定

上式是对于原点在涡心的极坐标系下写出的, 要想知道涡心相对于初始平直面涡位置的变化, 还需确定待定常数 λ 和涡心的坐标 X_c 和 Y_c .

一、确定常数 λ

写出卡登螺线核心区的涡量场

$$\omega(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = \frac{1}{2} \frac{C}{\pi} \lambda^{1/2} r^{-3/2} \quad (5.4.12)$$

若认为核心区内半径为 R 的圆周内的环量来源于初始时刻的平直面涡在 $0-X$ 段的环量, 则从环量守恒律(2.4.6)得到

$$2\pi \int_c^R r \omega dr = \int_0^X C x^{-1/2} dx. \quad (5.4.13)$$

又从涡量矩守恒式(2.4.8)得到

$$-\pi \int_c^R r^3 \omega dr = \int_c^X C (x - X_c)^2 x^{-1/2} dx \quad (5.4.14)$$

式中

$$X_c = \int_0^X C x^{1/2} dx / \int_0^X C x^{-1/2} dx. \quad (5.4.15)$$

X_c 是 $0-X$ 段面涡的“涡量中心”, 也就是卡登螺线涡心的 x 方向的坐标. 从式(5.4.12)——(5.4.15)可以解出

$$X = \lambda R, \quad \lambda = \frac{3}{2} \quad (5.4.16)$$

这里, λ 表示面涡被拉长的程度. X 段的面涡被卷入到 $R = X/\lambda$ 的

涡核内部, Pullin(1978)通过对方程(5.4.5)做数值解, 得出 $\lambda \sim 2$. 由此我们有了一个量级上的估计: 面涡在卷起过程中的确被拉长了, 但并不如想像的会被拉长的那样厉害, R 与 X 之比并非是高阶小量.

二、确定螺线中心位置

如前所述, 环量为 $\Gamma = 2CX^{1/2}$ 的 $0-X$ 段初始平直面涡, 被卷入到半径为 $R = X/\lambda$ 、环量为 $2C(\lambda R)^{1/2}$ 的圆形涡核内. 由 y 方向的涡量矩守恒式(2.2.7)得到

$$\int_0^X x\gamma dx = 2C(\lambda R)^{1/2}X_c$$

将 $\gamma = Cx^{-1/2}$ 代入上式左边, 得到

$$X_c = \frac{1}{3}X \quad (5.4.17)$$

这个结果与式(5.4.15)是一致的. 另一方面, x 方向的涡量矩却是不守恒的. 这是由于以下的事实引起的: 涡强为 $\gamma = Cx^{-1/2}$ 的半无穷长平直面涡可以由半无穷长平板的绕流产生, 当半无穷长平板突然被抽走以后, 该面涡就被留在流体中. 我们知道, 当流体流过半无穷长平板前缘时, 有前缘吸力作用在平板上; 反之, 流体受到平板的反作用拉力. 前缘吸力可以这样求得^[3], 以前缘为圆心, a 为半径作圆(图5.6), 将布拉修斯公式应用于圆周上, 有

$$(F_x - iF_y)_{LE} = \frac{1}{2}i \oint \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ \quad (5.4.18)$$

半无穷长平板绕流的复速度势为

$$W(Z) = CZ^{1/2}$$

代入式(5.4.18), 并应用留数定理得到

$$F_x - iF_y = -\frac{\pi C^2}{4} \quad (5.4.19)$$

根据动量定理, t 时刻 x 方向流体动量的增量为 $2C(\lambda R)^{1/2}Y_c$, 外

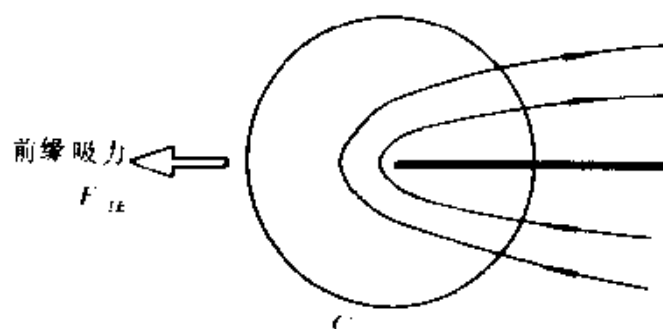


图 5.6 前缘吸力计算

力的冲量为 $-\frac{\pi C^2}{4}t$, 所以,

$$2C(\lambda R)^{1/2}Y_c = -\frac{1}{4}\pi C^2t, \quad \text{或 } X^{1/2}Y_c = -\frac{1}{8}\pi Ct \quad (5.4.20)$$

在式(5.4.17)和(5.4.20)中仍有 X 作为参数存在, 只有设法消去 X , 才能得到 $X_c(t)$, $Y_c(t)$. 考虑到自由面涡是不承载的, 面涡上位于 X 处流体质点的运动速度等于涡核在该点的诱导速度, 所以

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{C(\lambda R)^{1/2}}{\pi} \frac{Y_c}{Y_c^2 + (X - X_c)^2} \quad (5.4.21)$$

由式(5.4.17)、(5.4.20)和(5.4.21)求得

$$X_c = 0.14(Ct)^{2/3}, \quad Y_c = 0.61(Ct)^{2/3} \quad (5.4.22)$$

三、螺旋面渐近方程

至此, 我们已经可以写出当 $\tau \rightarrow 0$ 时卡登螺线的坐标方程, 把式(5.4.3)写成模与幅角形式,

$$\zeta = \zeta_0 + re^{i\theta} = (Ct)^{2/3} \{ f(0) + g(\tau) \exp[i\phi(\tau)] \},$$

利用式(5.4.9)–(5.4.11), 得到当 $\tau \rightarrow 0$ 时的渐近式

$$\left. \begin{aligned} g(\tau) &= (Ct)^{-2/3}r \approx \tau^2/4\lambda \\ \phi(\tau) &= \theta \approx 8\lambda^2/\pi\tau^3 \\ f(0) &= (Ct)^{-2/3}\zeta_0, \quad \zeta_0 = X_c + i Y_c \end{aligned} \right\} \quad (5.4.23)$$

最后得到

$$\zeta(\Gamma, t) \sim (Ct)^{2/3}(0.14 + i0.61) + \frac{1}{6}\left(\frac{\Gamma}{C}\right)^2 \exp\left\{i \frac{18}{\pi}\left(\frac{C^{4/3}}{\Gamma}\right)^3 t\right\} \quad (5.4.24)$$

面涡强度则可确定如下:

$$\frac{1}{\gamma} = \left| \frac{d\zeta}{d\Gamma} \right| = \frac{t^{1/3}}{C^{2/3}} \left| \frac{df(\tau)}{d\tau} \right| \approx \frac{6\lambda}{\pi\tau^2} \frac{t^{1/3}}{C^{2/3}}$$

所以
$$\gamma \propto \frac{\tau^2}{t^{1/3}} \propto \frac{\Gamma^2}{t} \propto \frac{r}{t} \propto \frac{t^{1/3}}{\theta^{2/3}} \quad (5.4.25)$$

这表明,当逼近螺线中心时,或者对固定的 r ,当 $t \rightarrow \infty$ 时,面涡强度 γ 减小;当螺旋面卷紧时,面涡被连续地拉长.

图5.7是用数值方法计算得到的卡登螺线.

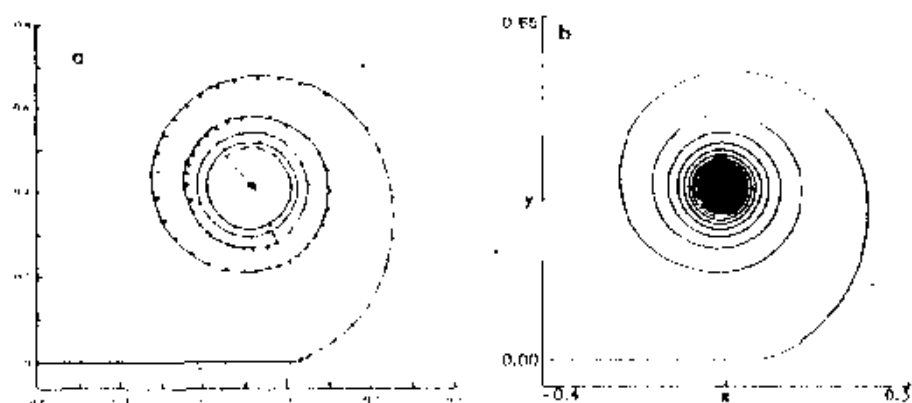


图 5.7 卡登螺线计算结果 左图是 Pullin 自相似解结果,
右图是 Krasny 的计算结果, $t=1, \delta=0.025$

5.4.3 相似性解和高阶近似

关于面涡卷起问题的进一步研究主要有两个方面。一是寻找

一般面涡强度分布下的相似性解；二是求解 B-R 方程的高阶近似。下面分别叙述之。

一、相似性解(Saffman & Baker(1979))

进一步研究表明，上述卡登问题，只不过是—族相似性解中的一个，对于环量分布为

$$\Gamma(x, 0) \sim x^{2-1/m} \quad (5.4.26)$$

的初始面涡，依照上述两小节的做法，可以解得螺旋型方程，其形式为

$$r \sim K \left(\frac{t}{2\pi\theta} \right)^m \quad (5.4.27)$$

$$\Gamma(r) \sim K^{1/m} r^{2-1/m} \quad (5.4.28)$$

其中 K 是有量纲常数，常见的几种有物理背景的流动是：

当 $m=2/3$, $N=1$ ，这是卡登螺旋，相应于椭圆载荷机翼的尾涡面。

当 $m=1$, $N=1$ ，这是细长体假设下三角翼前缘拖出的锥形脱体涡。

当 $m=(1+\nu)/(2-\mu)$, $N=1$ ，这是顶角为 β ($0 \leq \beta \leq \pi$) 的楔，以正比于 t^ν 的速度加速运动时，从顶角拖出的面涡，其中 ν, μ 是常数，且 $\mu = \pi/(2\pi - \beta)$ 。

当 $m=1$, $N=2$ ，这表示初始为无穷长均匀平直的面涡绕一点的双支螺旋。

$N=1, 2$ 分别表示单支和双支螺旋线。

螺旋面涡中心附近涡量分布为

$$\omega(r, t) \sim \left(2 - \frac{1}{m}\right) K^{1/m} \pi^{-1} r^{-1/m} \quad (5.4.29)$$

面涡强度为

$$\gamma = 2\pi m \left(2 - \frac{1}{m}\right) \frac{r}{t} \quad (5.4.30)$$

这表明面涡的卷绕部分受到强烈的拉伸，涡强 γ 随 $1/t$ 减小。

当 $\Gamma \rightarrow 0$ 时, 螺旋面的参数方程为

$$\zeta(\Gamma, t) \sim K t^m \zeta_0 + (\Gamma^m / K)^{1/(2m-1)} \exp[i \frac{1}{2\pi} (\frac{K^2}{\Gamma})^{1/(2m-1)} t] \quad (5.4.31)$$

其中 ζ_0 是个复常数, 与螺旋中心位置有关.

二、高阶近似

上述卡登螺线及其它相似性解只是一级近似的结果. 寻找高阶近似是很困难的. Moore(1975)对卡登问题曾经计算过高一阶近似.

在式(5.4.23)中将 $\phi(\tau)$ 改写成

$$\phi(\tau) = \theta \sim 8\lambda^2 / \pi\tau^3 + \varepsilon \quad (5.4.32)$$

及
$$f(\tau) = f(\theta) + G(\tau) \exp[i 8\lambda^2 / \pi\tau^3 + i\varepsilon] \quad (5.4.33)$$

对式(5.4.5)作渐近分析, 得到式(5.4.32)中的函数 G 为

$$G(\tau) = \frac{\tau^2}{4\lambda} + [A \exp(\frac{16\lambda^2}{\pi\tau^3} i) + B \exp(-\frac{16\lambda^2}{\pi\tau^3} i)] \tau^{3n+2} \quad (5.4.34)$$

其中 $n = \frac{1}{3}(\sqrt{13}-1) = 0.87$. A 和 B 是复常数. 这一结果表明螺线经高阶修正后, 它的形状略呈椭圆形. 这与 Krasny(1987)用数值计算得到的结果是一致的(见图5.8). 关于以上渐近分析的详细过程可以参阅 Moore(1975)的论文.

5.5. 面涡的线性和非线性演化

在本章的最后一节, 我们将介绍关于面涡在受扰动下演化的两个基本的理论问题, 即开尔文-亥姆霍兹不稳定性及奇点的形成问题.

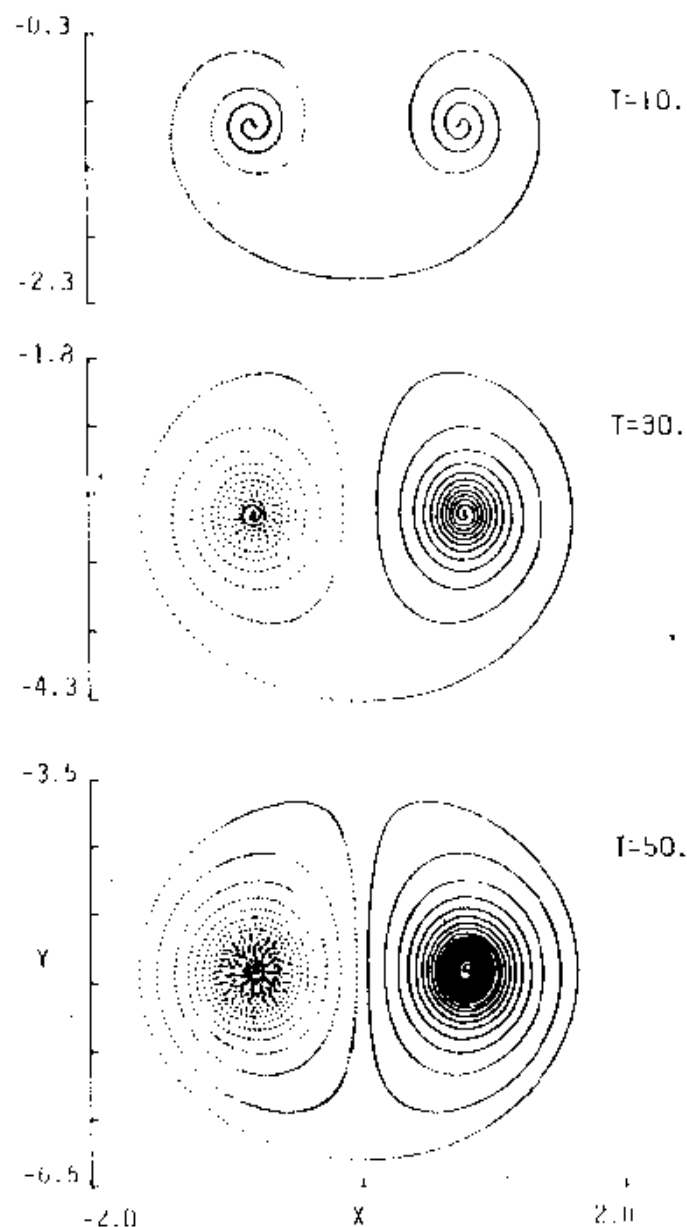


图 5.8 椭圆分布环量的尾涡卷起的后期阶段(Krasny)

5.5.1 开尔文-亥姆霍兹(K-H)不稳定性

面涡的动力学特征之一是它的开尔文-亥姆霍兹不稳定性(K-H不稳定性),即无限长等强度平直面涡对二维小扰动的不稳定性.

在任何局部接近于平直的面涡中,扰动初期增长的原因在实

质上也是由于 K-H 不稳定性. 为了说明这一点, 将面涡未受扰动时的位置和强度分别表示为

$$\zeta(\Gamma, 0) = \frac{\Gamma}{U}, \quad \gamma = U \quad (5.5.1)$$

在一个周期性的无限小扰动作用下, 面涡的位置变为

$$\zeta(\Gamma, t) = \frac{\Gamma}{U} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{in\Gamma_0} \quad (5.5.2)$$

其中 $|a_n(t)| \ll 1$. 注意到

$$\zeta(\Gamma + \frac{2\pi}{\alpha}) = \zeta(\Gamma) + \frac{2\pi}{\alpha U} \quad (5.5.3)$$

故波长是

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha U} \quad (5.5.4)$$

把式(5.5.2)代入 B-R 方程(5.2.5), 我们有

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{a}_n}{dt} e^{-in\Gamma_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\Gamma'}{\frac{\Gamma - \Gamma'}{U} [1 + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{in\Gamma_0} - e^{in\Gamma'_0}}{(\Gamma - \Gamma')U}]}$$

令 $\theta = \Gamma' - \Gamma$

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{a}_n}{dt} e^{-in\Gamma_0} &= \frac{iU}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta/\theta}{1 - \sum_{-\infty}^{\infty} U a_n e^{in\Gamma_0} (1 - e^{in\theta_0})/\theta} \\ &= \frac{iU}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta} [1 + \sum_{-\infty}^{\infty} U a_n e^{in\Gamma_0} (\frac{1 - e^{in\theta_0}}{\theta}) + O(a_n^2)] \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

注意到主值积分 $\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta} = 0$, 进而 $\oint_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{in\theta_0}) \frac{d\theta}{\theta^2} = \pi n a$, 因此对式(5.5.5)取一阶近似, 有

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{da_n}{dt} e^{-in\Gamma_0} = \frac{iU^2 a}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} n a_n e^{in\Gamma_0} \quad (5.5.6)$$

考虑到 $e^{-in\Gamma_0}$ 的系数相等, 我们有

$$\frac{d\bar{a}_n}{dt} = \frac{-i\pi n U}{\lambda} a_n, \quad -\infty < n < \infty \quad (5.5.7)$$

由此可知, 第 n 个傅里叶系数 a_n 和 a_{-n} 的增长将正比于 e^σ , 其中

$$\sigma = \pm \pi n U / \lambda \quad (5.5.8)$$

只要 σ 不为零, 扰动将会以 $e^{\pi U n / \lambda}$ (或 $e^{-\pi U n / \lambda}$) 增长 (或衰减), 但每一个衰减模总对应有一个增长模存在, 所以面涡总是不稳定的. 面涡的这种线性不稳定性称为 K-H 不稳定性. 上式表明, 对于较高的扰动模数 n 和较短的波长 λ , 扰动的增长率较快, 在数学文献中这种现象被称为 Hadamard 意义下的不适定性.

上述对面涡的不稳性分析是通过对 B-R 方程的线化分析得到的. 其优点是与前面几节的叙述风格一致, 系统性好, 缺点是不够物理直观. 一种更直观和流行的分析方法介绍如下^[2]

如图 5.9 所示, 考虑上下两层等密度不可压缩流体分别以 $U_{1,2} = \pm U/2$ 相向流动, 在未施加扰动之前, 交界面就是强度为 $\gamma = U$ 的平直均匀面涡, 现取它为 $y=0$ 平面. 除面涡外两侧流体是

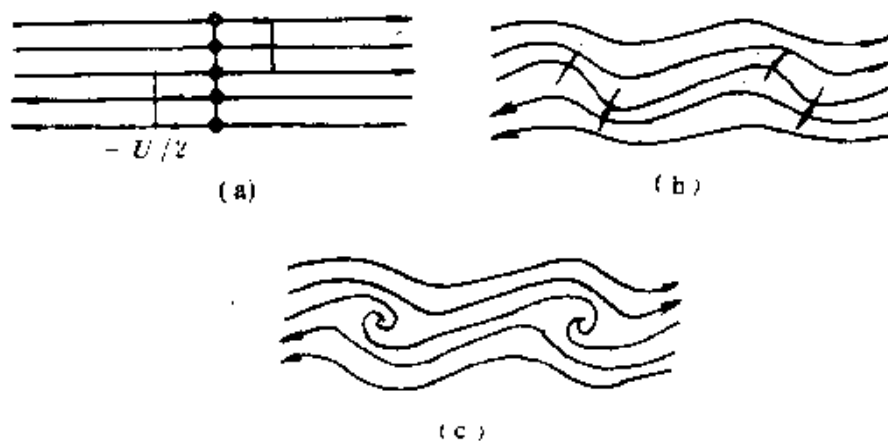


图 5.9 K-H 不稳定性

无旋的. 现对面涡施加一小扰动, 扰动后的面涡形状为

$$y_1 = h(x, t) \quad (5.5.9)$$

存在速度势

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{U}{2}x + \phi, & \text{当 } y > h \\ \varphi_2 &= -\frac{U}{2}x + \phi, & \text{当 } y < h\end{aligned}\quad (5.5.10)$$

其中 ϕ 为扰动速度势, 它们应满足拉普拉斯方程

$$\Delta\phi_{1,2} = 0 \quad (5.5.11)$$

边界条件为:

(1) 无穷远处

$$\frac{\partial\phi_{1,2}}{\partial x} = \pm \frac{U}{2} + \frac{\partial\phi_{1,2}}{\partial x} \rightarrow \pm \frac{U}{2}, \quad \text{当 } y \rightarrow \pm \infty$$

所以
$$\frac{\partial\phi_{1,2}}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \text{当 } y \rightarrow \pm \infty \quad (5.5.12)$$

(2) 面涡表面上的运动学条件

$$\left. \frac{\partial\phi_{1,2}}{\partial y} \right|_{y=h} = \frac{\partial h}{\partial t} \pm \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.5.13)$$

(3) 面涡表面上的动力学条件

因面涡两侧压力相等, 由伯努利方程得

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \frac{U}{2} \frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{U}{2} \frac{\partial\phi_2}{\partial x} \quad (5.5.14)$$

在方程(5.5.13)和(5.5.14)的推导过程中, 已引用了小扰动线性化假设. 根据线性稳定性分析的一般方法, 把扰动量写成正则模形式

$$(h, \phi_1, \phi_2) = (\hat{h}(y), \hat{\phi}_1(y), \hat{\phi}_2(y))e^{i(\alpha x - \beta t)} + C.C \quad (5.5.15)$$

其中 α 为 x 方向波数, β 为圆频率, $C.C$ 表示复共轭. 将上式代入控制方程(5.5.11), 得到 $\hat{\phi}_{1,2}$ 的常微分方程, 并利用无穷远条件(5.5.12), 解得

$$\hat{\phi}_1 = A_1 e^{-\alpha y} \quad (5.5.16)$$

$$\hat{\varphi}_2 = A_2 e^{ay} \quad (5.5.17)$$

由运动学条件(5.5.13)可得

$$\begin{aligned} -\alpha A_1 &= i(\alpha \frac{U}{2} - \beta) \hat{h} \\ \alpha A_2 &= -i(\alpha \frac{U}{2} + \beta) \hat{h}, \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

再由动力学条件(5.5.14), 得

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\alpha \frac{U}{2} + \beta}{\alpha \frac{U}{2} - \beta} \quad (5.5.19)$$

比较式(5.5.18)和(5.5.19), 得

$$\beta = \pm i\alpha U/2 \quad (5.5.20)$$

其中 $\alpha = 2\pi/\lambda$, λ 为波长. 如果小扰动形式是任意的, 可以把它分解成各个傅里叶分量的线性叠加. 所以对于任意周期性的小扰动, 面涡的一般形式可写成

$$h(t) = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(2\pi x/\lambda) + B_n \sin(2\pi x/\lambda)] \exp(n\pi\gamma t/\lambda) \quad (5.5.21)$$

其中 ϵ 是个小量, A_n 和 B_n 是初始扰动的第 n 项傅里叶系数, $\gamma = U$ 为面涡强度. 该式表明, 对所有可能的扰动, 面涡都是不稳定的, 振幅随时间以指数律增长; 且波长愈短, 愈不稳定; 涡强愈大, 增长也愈快.

5.5.2 奇点的形成

由于 K-H 不稳定性, 扰动会有任意的增长, Saffman & Baker (1979) 曾做过这样的定性分析: 选择 $A_n = B_n = \exp(-|n|^{1/2} - n\pi\gamma t_0/\lambda)$, 代入式(5.5.21)后发现, 当 $t \leq t_0$, 可以得到任意小振幅的光滑波形. 但对于 $t > t_0$, 则扰动是处处发散的. 这就意味

着,面涡的初始问题可能是不适定的.

以上分析仅是在线性不稳定理论的框架内得到的.当扰动增长到一定程度之后,非线性效应就不再可以被忽略了.在非线性阶段,面涡的演化将呈现出什么特点?这是涡动力学中令人注目的一个问题.过去,对B-R方程的数学特性研究得还不充分,例如,对它的解的存在性和唯一性、初值问题的提法是否适定等都缺乏深入研究.但是,在这些方面近年来已有了长足进展(Moore(1984),Caflisch(1988),(1991)).

Moore(1984)首先分析了B-R方程的非线性演化问题.对无穷长均匀平直面涡,给一个解析形式的初始扰动:

$$\zeta(\Gamma, 0) = \Gamma + i\epsilon \sin \Gamma, \quad \epsilon \ll 1, \quad (5.5.22)$$

然后将 ζ 展开成

$$\zeta(\Gamma, t) = \Gamma + 2i \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin n\Gamma, \quad A_n(0) = \frac{1}{2} \epsilon \delta_{n1} \quad (5.5.23)$$

代入B-R方程(5.2.5),并将 A_n 展开成幂级数.

$$A_n = \epsilon^n A_{n0} + \epsilon^{n+2} A_{n2} + \dots \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.5.24)$$

得到的是无穷多个含有无穷多未知数的非线性方程组.并且 A_{n0} 可以递推地加以确定,经过一系列运算,Moore得到了 A_n 在大 n 下的渐近表达式

$$\epsilon^n A_{n0} \approx t^{-1} (2\pi)^{-1/2} (1+i) n^{-3/2} \exp\left\{n\left(1 + \frac{1}{2}t + \ln \frac{1}{4}\epsilon t\right)\right\} \quad (5.5.25)$$

由此可以找出一个临界时间 t_c .当 $t > t_c$ 以后,系数失去指数衰减特性.由上式确定的 t_c 是

$$1 + \frac{1}{2}t_c + \ln t_c = \ln(4/\epsilon) \quad (5.5.26)$$

当 $t \rightarrow t_c$ 时, 在面涡 $\Gamma = 2n\pi$ 处出现曲率为无穷大的奇点.

Moore 还用另一种巧妙的方法把 B-R 方程近似为一组一阶非线性偏微分方程组.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.27)$$

其中 g 和 h 大致可以看成是 $aZ/d\Gamma$ 和 $y=i\Gamma$ 的位相和振幅. 该方程组的性质是双曲型的, 等价的黎曼不变量形式为

$$\left. \begin{aligned} g - \ln h &= \text{const.} && \text{在 } \frac{dy}{dt} = \frac{1}{h} \text{ 上,} \\ g + \ln h &= \text{const.} && \text{在 } \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{h} \text{ 上,} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.28)$$

因为由此确定的特征线在时-空平面上不是直线, 可以预期, 在一定时间后会形成“激波”, 即形成奇点. 用这种方法估计的奇点形成时间在忽略掉 $(\ln(\frac{1}{2}))^{-1}$ 以后, 与式 (5.5.26) 一致. 用方程组 (5.5.28) 研究奇点形成还有一个优点, 就是它是微分方程, 只涉及局部量运算.

Meiron (1982) 等人利用 Taylor 时间级数展开得到了与 Moore 一致的结论, Caflishch (1988) 更严格地论证了 Moore 的结论. 目前对于这个问题的认识是: 对于涡量均匀分布的无穷长平直面涡, 若初始小扰动是解析函数, 在一个有限时间内 ($t < t_c$) 有光滑解存在, 则 B-R 方程是适定的; 在 $t > t_c$ 后, 面涡上形成奇点, 此时虽然面涡仍旧连续, 但在奇点处有无穷大曲率, 对于 $\zeta = \Gamma + i\epsilon \sin \Gamma$ ($\epsilon \ll 1$), 临界时间约为 $t_c = 2|\ln \epsilon| + O(\ln |\ln \epsilon|)$.

当 $t > t_c$ 以后, 面涡以奇点为中心卷成螺旋型集中涡, 正如前一节叙述的. 再以后, 面涡演化受卷起的旋涡之间的相互作用所支配, 如涡旋组对和涡旋合并等.

数学家和流体力学家对奇点形成问题之所以感兴趣是因为它在物理上和数学上的重要性. 在物理上, 奇性导致面涡的卷起, 最终导致流动的混合及小尺度结构的生成. 奇性还是可压缩流中噪音的强烈来源. 虽然粘性、表面张力、有限厚度等光滑效应可以光滑掉面涡的奇性, 但奇性的这些影响仍旧存在. 因此我们可以认为, 奇性作为一个理想化现象, 是对更实际更复杂现象的简化描写. 在数学上, 奇性对研究面涡问题适定性是重要的, 同时, 它还可以作为一个模型问题, 促进对其它更困难的奇性问题, 如涡斑 (vortex patches)、瑞利-泰勒 (Rayleigh-Taylor) 问题、非定常边界层和三维欧拉方程等问题中的奇性作深入了解.

5.5.3 数值试验

上述关于 B-R 初值问题和奇点形成问题的解析研究方法, 只能进行到 $t \rightarrow t_c$ 时为止. 在 $t > t_c$ 以后, B-R 方程具有奇性的解的存在性问题仍旧是一个悬而未决的问题. 但是, 实验和数值计算表明, $t > t_c$ 以后面涡要卷成螺旋状集中涡. 其中 Krasny (1988) 的数值试验是有代表性的.

Krasny 用离散涡方法对面涡奇点的形成及卷起问题进行了数值模拟. 在面涡演化的数值计算中主要的困难来自以下两点: 1) 舍入误差所引入的人工扰动产生了所谓的短波不稳定性; 2) 如何处理奇点的形成和螺旋的卷起. 对于无限长平直面涡的周期性扰动这一典型的初值问题, 在 $t < t_c$ 时, 可以用高精度计算机和滤波技术有效地抑制人工误差导致的短波不稳定性, 得到了与 Moore 理论分析一致的结果. 其后, 为了克服奇点形成以及面涡密集地卷起所造成的数值困难, Krasny 在数学模型中引入了光滑因子 δ , 这样, B-R 方程中具有柯西奇性的核函数 $K(Z)$ 被一个无奇性的核函数 $K_\delta(z)$ 近似取代, 即

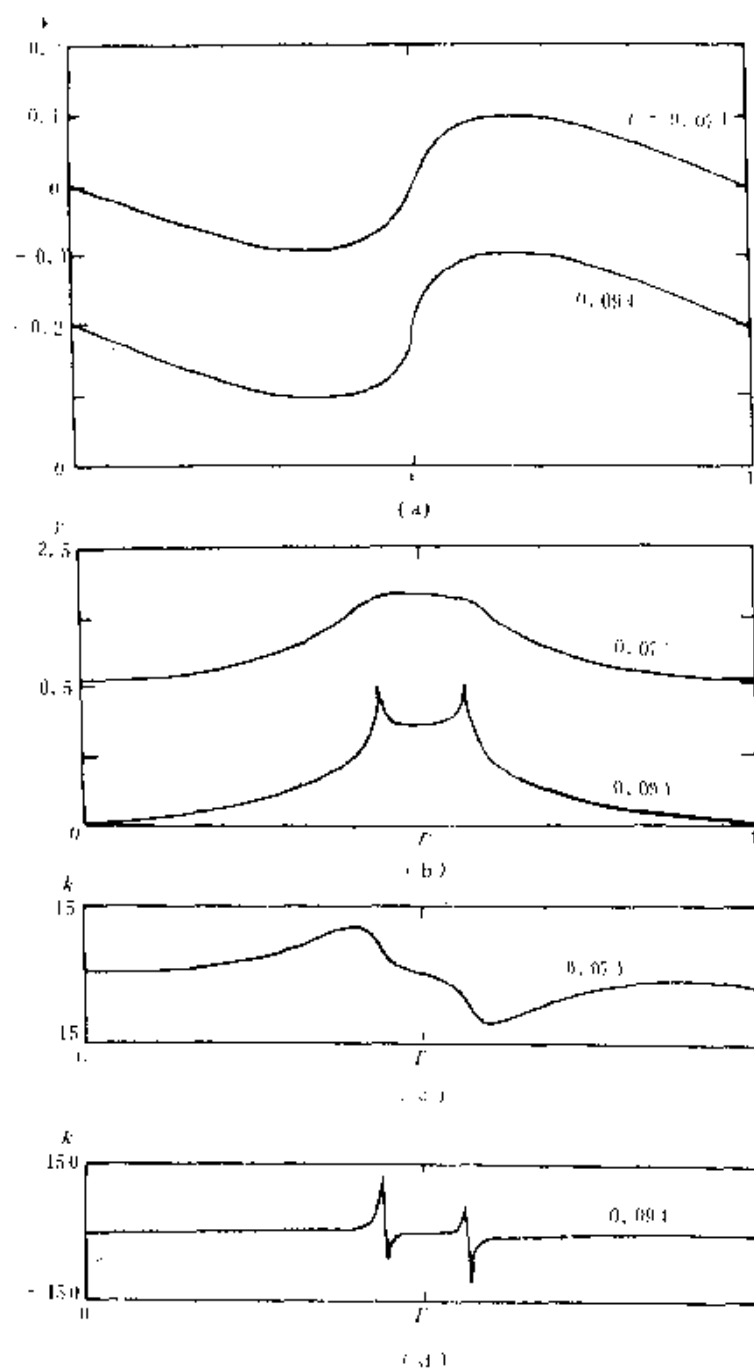


图5.10 面涡上奇点的形成(Krasny, 1988)

(a)点涡位置;(b)面涡强度;(c) $t=0.071$ 的曲率 k ;(d) $t=0.094$ 的曲率 k

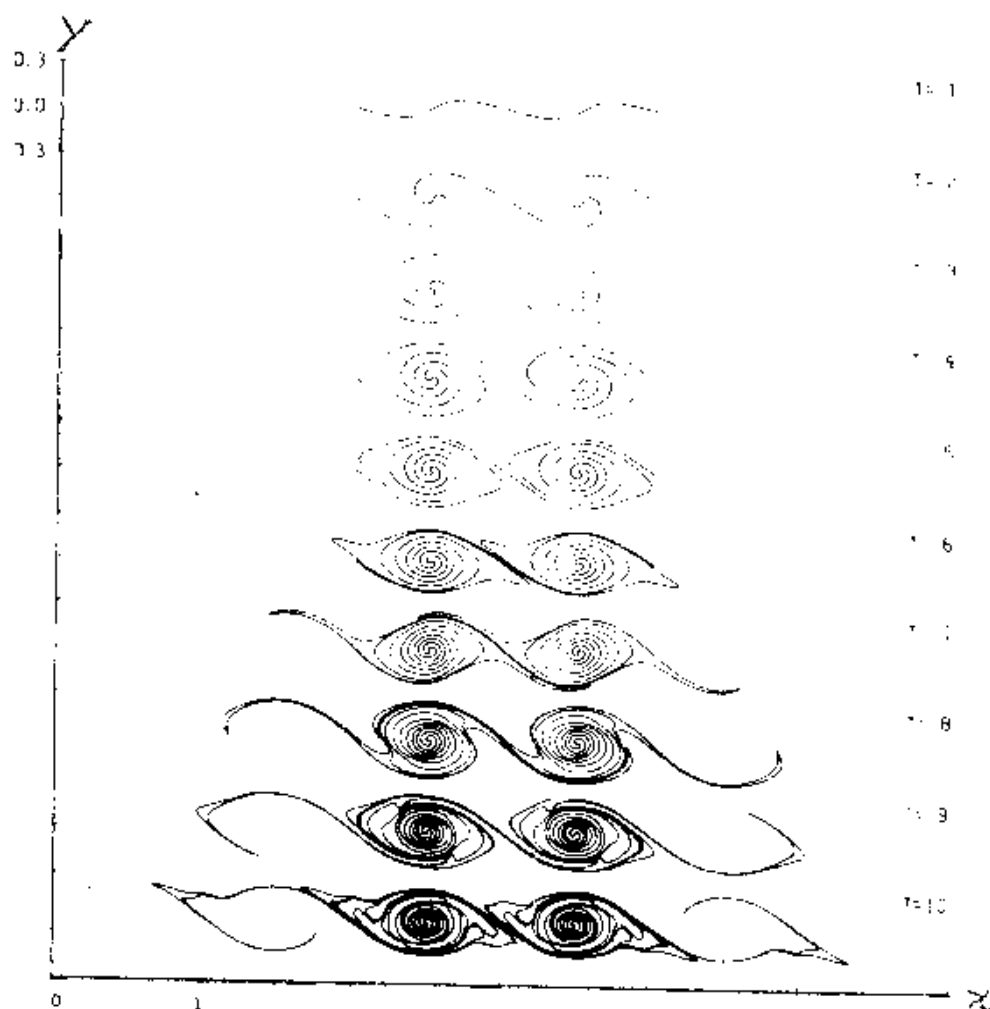


图5.11 周期性扰动下无穷长均直面涡长时间的演化(Krasny, 1988)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial t} &= \int K_{\delta}(Z - Z') d\Gamma \\ K_{\delta}(Z) &= K(Z) \frac{|Z|^2}{|Z|^2 + \delta^2} \\ K(Z) &= -\frac{i}{2\pi Z} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.29)$$

从而在数值上比 B-R 方程易于处理. 在具体计算中, 先选定一个 δ 值, 通过增加离散涡数目 N 和减小时间步长 Δt 可得到一个光滑

解,然后减小 δ 值,重复上述过程再得到一个光滑解. 这样反复进行下去,如果 $\delta \rightarrow 0$ 时能得到收敛的光滑解,则这个极限就是 B-R 方程的一个弱解. 图 5. 10(见第 128 页)是计算出的奇点形成过程,图 5. 11(见第 129 页)给出了周期性扰动下面涡长时间演化过程的数值结果.

第六章 涡索和线涡

本章将讨论三维柱状涡(columnar vortex)的简化模型——涡索(vortex filament)和线涡(line vortex)及其有关的基本特性。这是一类在自然界和工程中广泛存在的涡旋运动形态。龙卷风和三角翼前缘脱体涡是三维柱状涡的最典型的两个例子。龙卷风的巨大能量具有极强的破坏力,它的时速超过200公里,所到之处吸卷着碰到的一切,造成灾难性的后果。研究它的运动规律,及时地加以预报,对于人类生活和生产是极其重要的。类似的还有台风和其它飓风。三角翼的前缘脱体涡产生的非线性升力可以大大改善三角翼的气动性能,对前缘涡的研究已成为空气动力学中的一个热点,它也是人类利用和控制涡旋的一个范例。

本章由两个主要部分组成:一是讨论一般涡索的运动,给出局部自诱导近似公式以及由此导出的非线性薛定谔方程和孤立波解;二是讨论一种特殊形状的涡索——轴对称涡环的运动。

6.1 三维线涡的自诱导运动

首先,我们来给出涡索和线涡的定义。在第1.2节涡量场的描述中我们曾引入了涡管和涡管强度的概念。这里我们把被无旋流场所包围的具有充分小横截面 σ 的细长涡管定义为**涡索**(vortex filament);而把横截面积趋于零,但涡管强度保持不变的极限称为**线涡**(line vortex),即

而
$$\omega dV = \omega \sigma dV = \Gamma dV$$

$$I' = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty}} \omega d \quad (6.1.1)$$

式中 dV 和 dI 分别是涡索的体积微元和长度线元, 由此可见在线涡上, 涡量变为无穷大, 它是涡量呈奇性分布的空间曲线.

若已知线涡的空间位置曲线 C 和强度 Γ , 我们就可以计算它对流场内任一点的诱导速度. 从毕奥-萨伐尔公式(2.1.13)出发, 得到

$$\mathbf{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{R} \times \delta \mathbf{l}}{R^3} \quad (6.1.2)$$

这是线涡的诱导速度公式(毕奥-萨伐尔公式). 其中, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\delta \mathbf{l}$ 是线涡的有向线元.

当我们研究三维线涡的运动时, 其最主要的特征是所谓的**自诱导运动**, 即线涡在受自身诱导的速度影响下所产生的变形运动. 这时式(6.1.2)右边是一个奇异积分, 下面来详细地分析它的渐近特性.

考虑线涡上一点 O 及其邻域 $-L \leq s \leq L$, 其中变量 s 代表沿线涡量度的弧长. 为了描述问题方便, 取原点在点 O 处的自然坐标系 (x_1, x_2, x_3) , 它的三个基矢量 \mathbf{t} , \mathbf{n} 和 \mathbf{b} 分别沿线涡的切线、主法线和副法线方向. 由定义

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t} \quad (6.1.3)$$

由微分几何中的运算公式, $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ 之间有几何关系

$$d\mathbf{t}/ds = k\mathbf{n} \quad (6.1.4a)$$

$$d\mathbf{n}/ds = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \quad (6.1.4b)$$

$$d\mathbf{b}/ds = -\tau\mathbf{n} \quad (6.1.4c)$$

其中 k, τ 分别是空间曲线的曲率和挠度(见图 6.1).

在过点 O 的法平面上, 任一场点 P 的位置可以表示成

$$\mathbf{r} = x_2\mathbf{n} + x_3\mathbf{b} \quad (6.1.5)$$

在点 O 邻域内, 线涡上任一点 Q 的矢径在一阶近似的情况下则是

$$r' \approx st + \frac{1}{2}ks^2n + O(s^3k^2) \quad (6.1.6)$$

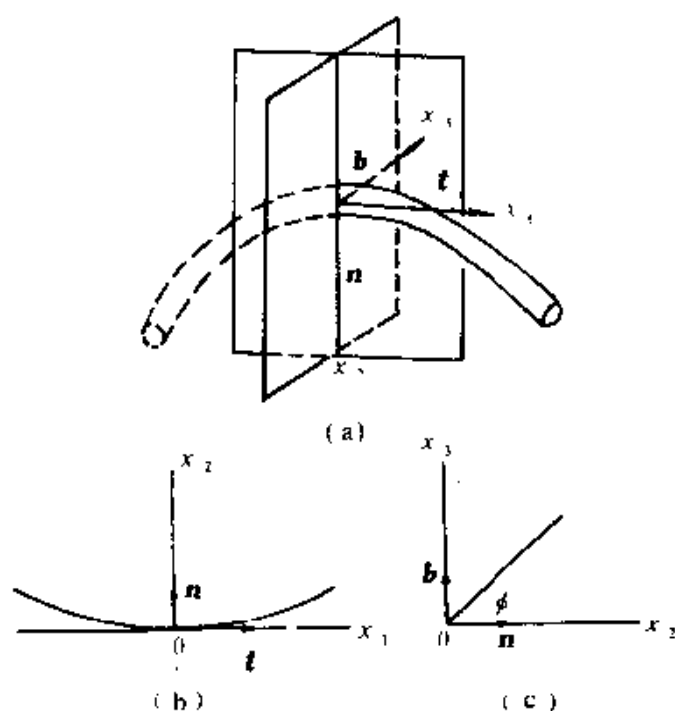


图 6.1 固结于线涡上的自然坐标系

其中 k 是线涡的曲率. 在上式两边对 s 取微分, 得到

$$dl \approx (t + ksn)ds \quad (6.1.7)$$

R 作为 PQ 两点之间的距离, 再利用式(6.1.4)到(6.1.7)可以求出

$$\frac{R \times dl}{R^3} = \frac{-ksx_3t + x_3n - (x_2 + \frac{1}{2}s^2k)b}{[r^2 + s^2(1 - x_2k) + \frac{1}{4}k^2s^4]^{3/2}} ds \quad (6.1.8)$$

在将 P 点的坐标 $(0, x_2, x_3)$ 用极坐标 $(0, r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ 表示之后, 将上式代入式(6.1.2), 就得到了线涡邻域段 $(-L \leq s \leq L)$ 对 P 点产生的诱导速度.

$$V(P) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-L/r}^{L/r} \frac{(b \cos \varphi - n \sin \varphi) r^{-1} + \frac{1}{2} k m^2 b + k m \sin \varphi}{[1 + m^2(1 - k r \cos \varphi) + \frac{1}{4} k^2 r^2 m^4]^{3/2}} dm \quad (6.1.9)$$

其中 $m = \frac{s}{r}$ 是无量纲长度. 在 $r \rightarrow 0$ 的极限情况下, 式(6.1.9)中被积函数的分母渐近值为 $(1+m^2)^{3/2}$. 利用有关的积分公式, 最后可以求出线涡的自诱导公式

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} (b \cos \varphi - n \sin \varphi) + \frac{\Gamma k}{4\pi} b \ln \frac{L}{r} + \text{有界项} \quad (6.1.10)$$

其中加上的有界项是指线涡邻域之外 ($s < -L, s > L$) 的其余部分产生的诱导速度.

在线涡的自诱导速度公式(6.1.10)中, 点 O 邻域内那部分线涡产生的诱导速度起着主导作用; 因而在线涡的自诱导运动中, 主要由局部自诱导所控制, 其它部分的作用可以忽略不计. 在上式中, 右边第一项具有 $\frac{L}{r}$ 的奇性, 它是线涡诱导的周向旋转速度, 表明线涡附近的流体质点以线涡为轴, 局部地围绕线涡旋转. 它并不能引起线涡的移动. 第二项表明线涡在其副法线方向上有一运动速度, 它的大小与线涡强度及曲率成正比. 该项具有对数奇性. 因此, 对于一根线涡, 在任何曲率不为零的地方, 都存在来源于第二项的无穷大自诱导运动速度.

应该指出, 奇异性的出现在物理上是不真实的. 为了避免这一问题, 需要在线涡模型中引入涡核. 对于半径为 ϵ 的涡索, 自诱导公式可写成

$$V = \frac{\Gamma k}{4\pi} \ln\left(\frac{L}{\epsilon}\right) b + O(1) \quad (6.1.11)$$

这里式(6.1.10)的右边第一项已经略去. 因为我们关心的是涡索

本身的变形运动,而第一项对此并无贡献.若 ϵ 足够地小,考虑到对数函数的特性, $\ln \frac{L}{\epsilon}$ 在涡索运动时变化并不大,在选用适当的时间或长度特征量之后,式(6.1.11)可以进一步近似为

$$V = kb \quad (6.1.12)$$

这个如此简单的方程可以相当好地描述孤立的涡索在无界不可压缩流体中的自诱导运动,称为涡索的**局部诱导近似**(Local Induction Approximation;简称LIA)方程.正是从局部诱导近似方程出发,Hasimoto(1972)导出了涡索动力学中的非线性薛定谔方程.从理论上首次预示了涡索运动的孤立波解,我们在下一节将详细介绍这一工作.

6.2 非线性薛定谔方程

我们在局部诱导近似方程的框架下来讨论涡索的自诱导运动.把涡索的位置表示成

$$r = r(s, t)$$

其中 s 是沿涡索轴心线测量的距离, t 是时间.仍采用上节的自然坐标系.局部诱导近似方程(6.1.12)可写成

$$\frac{\partial r}{\partial t} = V = kb \quad (6.2.1)$$

这里我们已经假定了涡索的运动没有拉伸,从而弧长 s 可作为拉格朗日变量.

把局部诱导近似方程(6.2.1)两边对 s 求偏导数,并以式(6.1.3)和(6.1.5)代入,得到

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mathcal{Re} [(\partial k / \partial s + ik\tau)(b + in)] \quad (6.2.2)$$

其中 \mathcal{Re} 代表取实部.为了建立控制涡索曲率 k 和挠度 τ 的特征

方程, Hasimoto 在 (n, ib) 平面上引入了以下矢量

$$N = (n + ib)\psi/k \quad (6.2.3)$$

其中

$$\psi = k \exp\left(i \int_0^s \tau ds\right) \quad (6.2.4)$$

是一个以曲率为振幅、以挠度的积分为相位的波函数。将它代入式(6.2.2)之后,我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mathcal{R}e \left(i \frac{\partial \psi}{\partial s} N^* \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} N^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial s} N \right) \quad (6.2.5)$$

这里我们用“*”代表取复函数的共轭值。

将式(6.2.3)和(6.2.4)代入式(6.2.5)得到

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mathcal{R}e \left(\psi N^* \right) = \frac{1}{2} (\psi N^* + \psi^* N) \quad (6.2.6)$$

在矢量 N 的表达式(6.2.3)两边对 s 求导,并以式(6.1.4b)和(6.1.4c)代入后有

$$\frac{\partial N}{\partial s} = -\psi t \quad (6.2.7)$$

进一步对上式两边求时间的导数,并以式(6.2.5)代入,得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N}{\partial s} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial t} t - \frac{1}{2} i \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} N^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial s} N \right) \quad (6.2.8)$$

这实际上是局部诱导近似方程基于波函数的一种表达形式。

Hasimoto 巧妙地从另一个角度给出了 $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N}{\partial s} \right)$ 。他先证明了

$$\frac{\partial N}{\partial t} = i(aN + \frac{\partial \psi}{\partial s} t) \quad (6.2.9)$$

其中 a 是待定的实函数,然后对上式取 s 的偏导数并使用式(6.2.6)和(6.2.7),得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial N}{\partial s} \right) = i \left[\frac{\partial a}{\partial s} N - \psi a t - \frac{\partial \psi}{\partial s^2} t - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial s} (\psi N^* + \psi^* N) \right] \quad (6.2.10)$$

将上式与式(6.2.8)相联立,则有

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} t + \frac{i}{2} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial s} N = i \left(\frac{\partial a}{\partial s} N - \psi a t - \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} t - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \psi^* N \right) \quad (6.2.11)$$

这是一个矢量方程,它在 t 和 N 两个方向上的投影分别为

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \psi a \right) \quad (6.2.12)$$

$$\frac{1}{2} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial s} = \frac{\partial a}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \psi^* \quad (6.2.13)$$

积分式(6.2.13),得到

$$a = \frac{1}{2} (\psi \psi^* + A) \quad (6.2.14)$$

其中 A 是积分常数,将 a 的表达式代入式(6.2.12),最后有

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2} (|\psi|^2 + A) \psi \quad (6.2.15)$$

这表明内嵌于无粘不可压缩流体中的孤立细长涡索在作没有拉伸的运动时,控制其曲率和挠度的特征方程是一个**非线性薛定谔方程**.

非线性薛定谔方程在理论物理中有广泛的应用和深入的研究.它的一个重要特性是可以存在**孤立波解**.这是一种引起人们广泛兴趣的典型的非线性波.在线性波理论中,色散波的速度是随波长的不同而变化的.而在非线性波中,当非线性效应与色散效应正好相互抵消时,波的速度和形状将不会随时间而改变,即形成稳定传播的具有类粒子性的孤立波.从局部诱导近似方程出发,导出了非线性薛定谔方程的这一事实,揭示出涡运动与非线性波的密切关系,极大地开拓了人们的视野.这一开创性的工作引导人们从理论和实验上对涡索自诱导运动中可能存在孤立波解进行研究,下一节将进一步讨论这一问题.

6.3 涡索的孤立波解

考虑一个以恒速 c 沿涡索传播的孤立波. 若假定无穷远处涡索上的边界条件是曲率为零,

$$k = 0, \quad \text{在 } s \rightarrow \infty \text{ 处} \quad (6.3.1)$$

取随孤立波一起运动的参考系, 引入新的变量

$$\xi = s - ct \quad (6.3.2)$$

则曲率 k 和挠度 τ 成为 ξ 的函数, 从而波函数为

$$\psi = k(\xi) \exp\left(i \int_0^s \tau(\xi) ds\right) \quad (6.3.3)$$

将它代入非线性薛定谔方程(6.2.15), 并注意到

$$\frac{1}{2}(|\psi|^2 + A)\psi = \frac{1}{2}(k^2 + A)k \exp\left(i \int_0^s \tau(\xi) ds\right) \quad (6.3.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(-c \frac{dk}{d\xi} + ik \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^s \tau ds\right) \exp\left(i \int_0^s \tau(\xi) ds\right) \quad (6.3.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \left(\frac{dk}{d\xi} + ik\tau\right) \exp\left(i \int_0^s \tau(\xi) ds\right) \quad (6.3.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = \left(\frac{d^2 k}{d\xi^2} + 2i\tau \frac{dk}{d\xi} - k\tau^2 + ik \frac{d\tau}{d\xi}\right) \exp\left(i \int_0^s \tau(\xi) ds\right) \quad (6.3.7)$$

则有

$$ic \frac{dk}{d\xi} + k \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^s \tau ds - i2\tau \frac{dk}{d\xi} + ik \frac{d\tau}{d\xi} + \frac{d^2 k}{d\xi^2} - k\tau^2 + \frac{1}{2}(k^2 + A)k \quad (6.3.8)$$

比较虚部和实部后可得

$$c \frac{dk}{d\xi} = 2\tau \frac{dk}{d\xi} + k \frac{d\tau}{d\xi} \quad (6.3.9)$$

$$k \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^s \tau ds = \frac{d^2 k}{d\xi^2} - k\tau^2 + \frac{1}{2}k(k^2 + A) \quad (6.3.10)$$

将式(6.3.9)直接积分,得到

$$k^2(c - 2\tau) = 0 \quad (6.3.11)$$

其中积分常数由边界条件(6.3.1)确定。考虑到该问题中曲率 k 不恒为零,从而有

$$c = 2\tau \quad (6.3.12)$$

这说明,在该孤立波解中,沿涡索的挠度是一常数,且不随时间变化,孤立波的速度是挠度的两倍。

由于 τ 不随时间而变化, $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \tau ds = 0$, 式(6.3.10)成为

$$\frac{d^2 k}{d\xi^2} - k(\tau^2 - \frac{1}{2}A) + \frac{1}{2}k^3 = 0 \quad (6.3.13)$$

该常微分程满足边界条件(6.3.1)的解是

$$k = 2 \sqrt{\tau^2 - \frac{A}{2}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\tau^2 - \frac{A}{2}} \xi\right) \quad (6.3.14)$$

这表明在孤立波传播的过程中,涡索的曲率由双曲正割函数确定,并与常数 A 的值有关。根据以上结果,可以进一步确定存在孤立波解的涡索的实际形状。为此,将(6.3.12)代入式(6.1.4)和(6.1.5),得到

$$\frac{\partial^2 b}{\partial s^2} = -\tau^2 b + \tau k t \quad (6.3.15)$$

再利用式(6.1.4),则有

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial s^2} + \tau^2 b \right) \right] + k \frac{\partial b}{\partial s} = 0 \quad (6.3.16)$$

从以上微分方程可以求出涡索的形状,得到以恒速 c 传播的螺旋状扭曲的孤立波。

图6.2给出的 Hasimoto(1972)计算结果表明,在决定孤立波形状的参数中, $T = \tau / \sqrt{\tau^2 - \frac{A}{2}}$ 起着重要的作用,图中给出的 $T = 2.0, 1.0$, 和 0.5 的三种结果,代表三种不同的典型情况。当 $T < 1$

时,从侧视图上可以看到涡索已明显地扭曲成环.

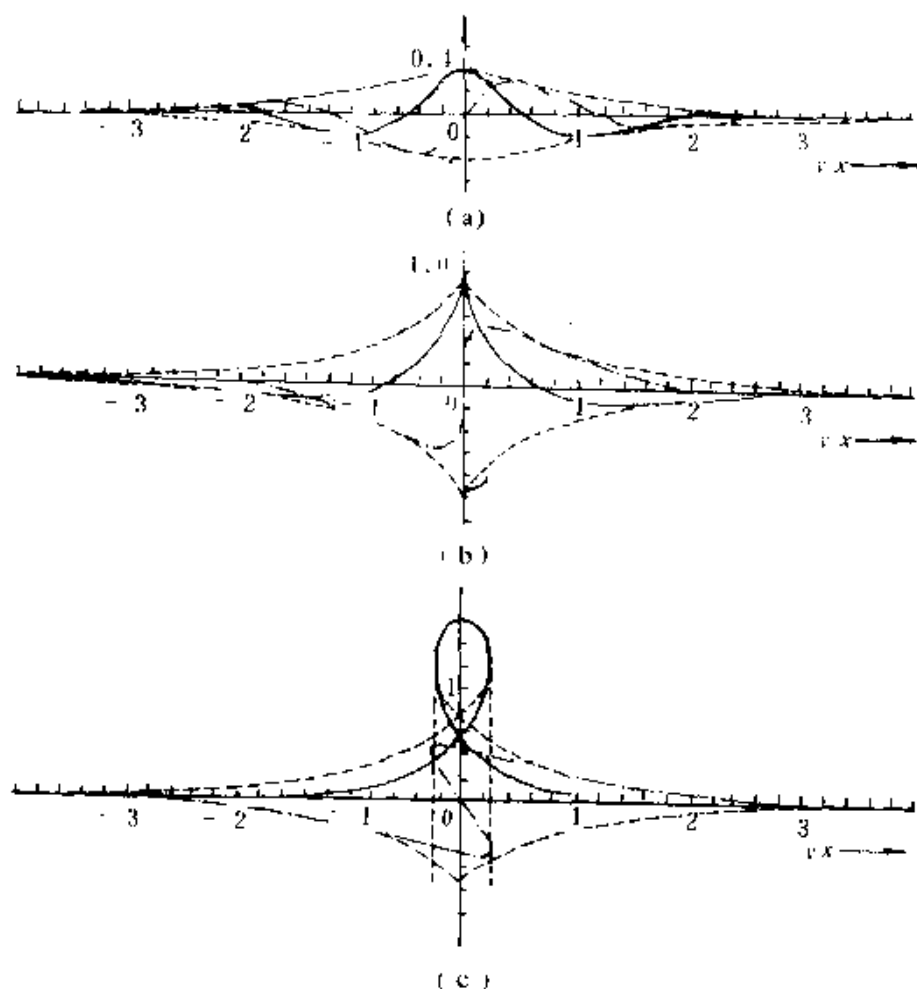


图6.2 涡索上的孤立波形状

——涡索在 xy 平面上的投影; ---, 涡索在 xz 平面上的投影;

..... v_r 为垂直轴的包络线. (a) $T=2.0$, (b) $T=1.0$, (c) $T=0.5$

图6.3是 Aref 和 Flinchem (1985) 用局部诱导近似对两个孤立波碰撞做的数值模拟. 从图(a)到(i)可以看到一根直涡索上两个孤立波经碰撞、合并后又形状不变地分开, 各自走自己的路.

Hopfinger 等人(1982)的实验研究已证实了孤立波沿涡索的

传播. 他们在一个旋转的水桶内观察到了孤立波沿着扭曲变形的涡索在传播, 其波形与 Hasimoto 的理论计算结果十分相似. 在自然界的龙卷风中已发现, 在一定条件下会扭出一个孤立波 (Aref 和 Flinchum 1985).

在本节的最后, 我们介绍一下 Betchev 内禀方程, 它可以被认为是涡索动力学中非线性薛定谔方程的另一种表示形式.

从孤立波传播速度以涡索挠度为特征量的结果受到启发, 令

$$u = 2\tau, \quad \rho = k^2 \quad (6.3.17)$$

引入 u 的势函数

$$\varphi = \int_s^1 u ds = 2 \int_s^1 \tau ds \quad (6.3.18)$$

这样波函数 (6.2.4) 可改写成

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\varphi/2) \quad (6.3.19)$$

代入非线性薛定谔方程, 注意到

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + i \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \psi \quad (6.3.20)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + i \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \psi \quad (6.3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + i \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 \psi + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)^2 + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right] \psi \quad (6.3.22)$$

$$\text{和} \quad \frac{1}{2} (|\psi|^2 + A) \psi = \frac{1}{2} (\rho + A) \psi \quad (6.3.23)$$

则式 (6.2.15) 可写成以下形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + \rho + A \quad (6.3.24)$$

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \quad (6.3.25)$$

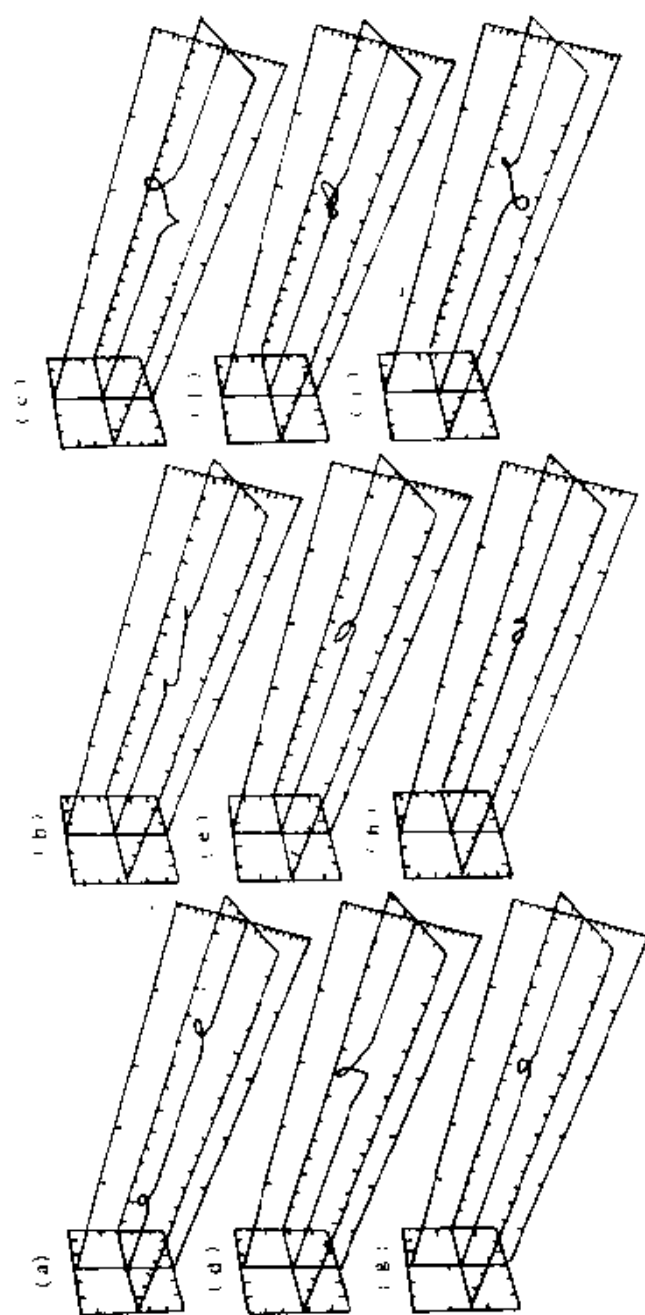


图6.3 涡索上两个孤立波的碰撞

其中式(6.3.24)为实部,式(6.3.25)为虚部.若将式(6.3.24)两边对 s 取偏导数,考虑到 $\frac{\partial \phi}{\partial s} = u$,则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)^2 \right] \quad (6.3.26)$$

而式(6.3.25)可以改写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\rho u) = 0 \quad (6.3.27)$$

以上两式称为 Betchev 内禀方程,它们与流体力学中的基本方程在形式上十分相似.事实上,式(6.3.27)类似于守恒形式的连续性方程,而式(6.3.26)可以进一步改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial s} \left[\rho u^2 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right) - \rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \ln \rho \right) \right] = 0 \quad (6.3.28)$$

它类似于一个无体力项的守恒形式的动量方程.这两个内禀方程深刻地揭示了涡索在自诱导运动中挠度和曲率之间的内涵关系(Betchev 1965).

6.4 涡 环

涡环是自然界中常见的一种涡运动形态,在实验室中很容易产生,例如用活塞推动流体从圆形孔中流出,吸烟者吐出的烟圈等是常见的例子.它在声音的生成(涡声)、流体的输运和混合以及涡相互作用等方面都有重要作用,一直受到流体力学家及物理学家的重视.涡环的研究涉及多方面的知识,例如它的形成是一个面涡动力学的问题,它的稳态运动涉及存在性问题,它的变形运动又涉及稳定性问题等等.本节只重点讲述无粘涡环的运动,有兴趣的读者可参阅最新的述评文章(Shariff & Leonard, 1992).

6.4.1 轴对称涡环的数学表述

本节首先从轴对称无粘不可压缩流的基本方程出发,推导出

具有涡核结构的轴对称涡环的流函数的一般表达式;然后,作为一个特例,给出无涡核结构的圆形线涡运动的解析解.

取柱坐标系 (r, θ, z) ,并使 z 轴是圆形线涡的对称轴线.对于无周向(θ -向)运动速度的轴对称流动(swirl-free), $V_\theta = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, 速度 V 可表示为

$$V(r, z) = V_r(r, z)e_r + V_z(r, z)e_z, \quad (6.4.1)$$

e_r, e_θ, e_z 分别为 r, θ, z 方向的单位矢量.由此可以引进斯托克斯流函数 ψ ,

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.4.2)$$

在上述假设下涡量只剩下周向分量,即 $\omega = \omega e_\theta$.于是泊松方程可写为

$$\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad \omega_r = \omega_z = 0 \quad (6.4.3)$$

而涡量动力学方程(1.3.10)则简化为

$$\frac{d(\omega/r)}{dt} = 0 \quad (6.4.4)$$

又由于 $V = \nabla \times A$, A 为矢量势函数,在上述同样假设下,可知 A 为

$$A(A_r, A_\theta, A_z) = (0, \frac{\psi}{r}, 0) \quad (6.4.5)$$

上式只要直接验证就可以证明这一点.

如图6.4所示,现在来求空间任一点 $P(r, \theta, z)$ 的流函数 $\psi(r, z)$ 表达式.利用式(6.4.5)及(2.1.11), $\psi(P) = r_P A_\theta(P) = r_P A(P) \cdot e_\theta(P)$, 所以

$$\psi(r, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{r\omega' e_\theta \cdot e_\theta}{R} dV' \quad (6.4.6)$$

其中 $\omega' e_\theta$ 是积分动点 $Q(r', \theta', z')$ 上的值, $R = |r_P - r_Q|$, $dV' = r' dr' d\theta' dz'$, $e_\theta \cdot e_\theta = \cos(\theta - \theta')$, 所以上式又可写成

$$\psi(r, z) = \iint \omega' G(z - z', r, r') dr' dz' \quad (6.4.7)$$

$$G(z - z', r, r') = \frac{1}{4\pi} r r' \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{R} d\beta, \quad \beta = \theta - \theta' \quad (6.4.8)$$

$$R = \{(z - z')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')\}^{1/2} \quad (6.4.9)$$

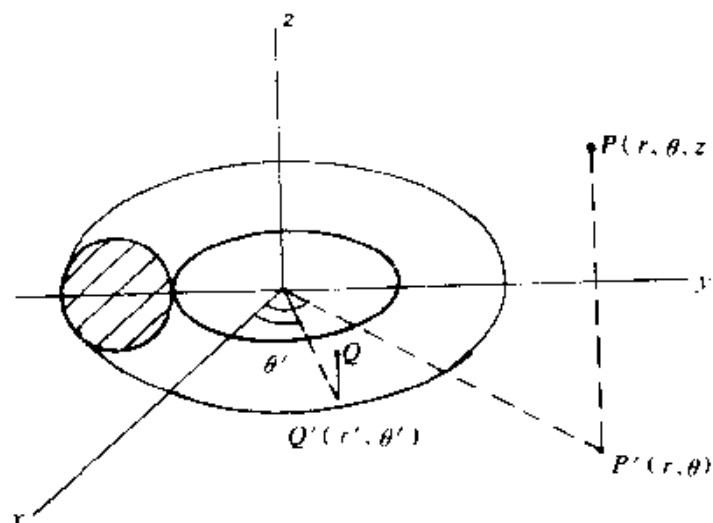


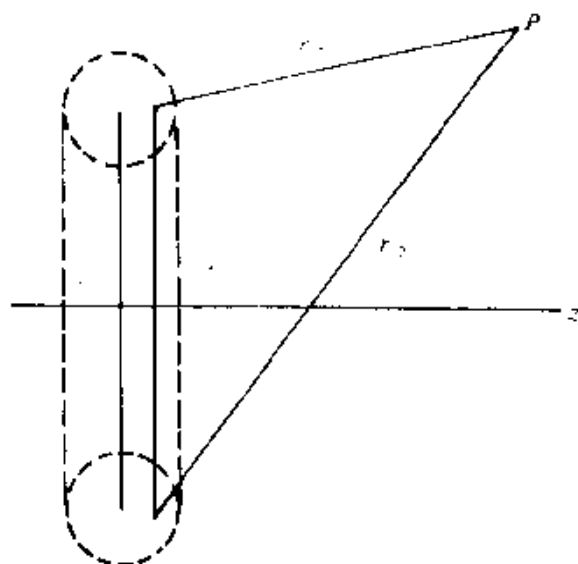
图6.4 轴对称涡环示意图

被积函数 G 的积分可以求出,为此,先作如下变换,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (z - z')^2 + (r - r')^2 \\ r_2^2 &= (z - z')^2 + (r + r')^2 \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

式中 r_1, r_2 有简单的几何意义,它们分别是点 P 到涡环上的最小和最大距离(见图6.5),则式(6.4.9)可化为

$$R^2 = r_1^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + r_2^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} = r_2^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \cos^2 \frac{\beta}{2} \right\} \quad (6.4.11)$$

图6.5 r_1, r_2 的几何示意图

再作进一步变换,令

$$\phi = \frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (6.4.12)$$

$$k^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4rr'}{r_2^2} \quad (6.4.13)$$

则有

$$R^2 = r_2^2(1 - k^2 \sin^2 \phi)$$

$$4rr' \cos \beta = r_2^2(2 - k^2) - 2r_2^2(1 - k^2 \sin^2 \phi)$$

将它们代入式(6.4.8),得到

$$G(z - z', r, r') = \frac{\sqrt{rr'}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\} \quad (6.4.14)$$

式中 $K(k)$ 和 $E(k)$ 分别是其模为 k 的第一类和第二类椭圆积分, 即

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (6.4.15)$$

式(6.4.7)和(6.4.14)表示了没有周向速度(swirl-free)的具有任意涡核结构的轴对称涡环的运动。但是,因为一般不知道涡核内涡量 ω 的分布,我们还无法积分出式(6.4.7)。只有在圆形线涡的特殊情形下我们可以得到它的解析解。

下面,我们来求单个圆形线涡的速度场。

对于半径为 r_0 的圆形线涡, $r' = r_0, \omega = \Gamma_0 \delta(r - r') \delta(z' - z)$,代入式(6.4.7),我们得到圆形线涡在空间任一点产生的流函数为

$$\phi(r, z) = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sqrt{rr_0} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\} \quad (6.4.16)$$

由此可求出径向和轴向速度为

$$V_r = - \frac{\Gamma k}{4\pi r_0} \left(\frac{z}{r_0} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \left\{ -K(k) + \frac{2 - k^2}{2(1 - k^2)} E(k) \right\} \quad (6.4.17)$$

$$V_z = - \frac{\Gamma k}{4\pi r_0} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ K(k) - \frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{2 - k^2} \right) \frac{r_0}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} \right) E(k) \right\} \quad (6.4.18)$$

式中
$$k = 2 \sqrt{\frac{r_0 r}{z^2 + (r + r_0)^2}}$$

圆形线涡中心($z=0, r=0$)的速度则为

$$V_0 = - \frac{\Gamma}{2r_0} e_z \quad (6.4.19)$$

由此可见,圆形线涡以等速沿其轴线方向运动而不改变其外形,它是可以从毕奥-萨伐尔公式得到封闭形式解析解的典型例子之一。图6.6是圆形线涡的流线图。

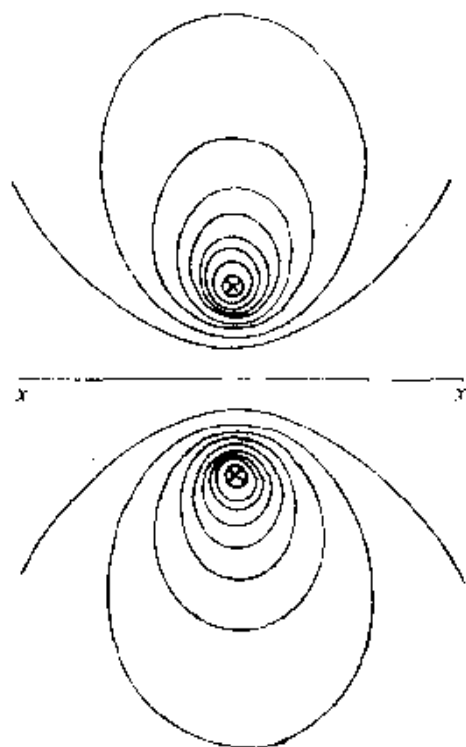


图6.6 圆形线涡的流线图

6.4.2 薄核涡环(直接法)

一、存在性问题

真实的涡环总具有有限大小的涡核,在式(6.4.7)中我们只有知道了涡核内的涡量分布,流函数积分式才能求出(无论解析的还是数值的).在涡环研究的历史上,人们对涡环的稳态运动有浓厚的兴趣,研究表明,涡环的运动速度与涡环内涡量分布形式有关.

一个有兴趣的问题是在无粘流体中涡环稳态运动的存在性问题.即要决定在什么样的涡量分布和涡环截面形状下,涡环可以有不变的运动速度和外形.

先假定涡环存在这样的稳态运动,就可以将坐标系与涡环固

结在一起,流动就变成定常的了,定常流的流函数 Ψ 可写成 $\Psi = -\frac{1}{2}Ur^2 + \phi$, 其中 U 是涡环运动速度, ϕ 是涡环在无穷远处静止的流体中产生的流函数,即式(6.4.7),对于定常流,应满足下述两个条件:

(1)由式(6.4.4)可知,涡核内的 ω/r 沿流线应不变,即 ω 可表示成

$$\omega = rF(\Psi) \quad (6.4.20)$$

(2)涡核截面边界是条流线,即 $\Psi = \text{常数}$.

因此涡环稳态运动的存在性问题就归结为能否找到下述积分方程

$$\Psi(r, z) = -\frac{1}{2}Ur^2 + \int_{\Sigma} r' F(\Psi(r', z')) G(z - z', r, r') dr' dz' \quad (6.4.21)$$

之解 Ψ , 满足涡核截面边界是一条流线的条件. 问题的困难在于运动速度 U 及涡核截面形状都是未知的,需要在求解过程中确定. Frankel(1970)给出了充分小核的薄涡环的存在性解. 本节将根据 Frankel 方法,给出其中最简单的一种情形,即均匀涡量分布的圆形涡核的薄涡环.

二、均匀涡核

设涡环截面为半径是 a 的圆,圆心至对称轴的距离为 r_0 . 对于薄核涡环 $a/r_0 \ll 1$. 现引进新坐标系,如图6.7所示.

$$\begin{aligned} z &= \sigma \cos \alpha, & r &= r_0 + \sigma \sin \alpha \\ z' &= \sigma' \cos \alpha', & r' &= r_0 + \sigma' \sin \alpha' \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

代入式(6.4.10)得到

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma' \cos(\alpha - \alpha') \\ r_2^2 &= 4r_0^2 + 4r_0(\sigma \sin \alpha + \sigma' \sin \alpha') + \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma' \cos(\alpha + \alpha') \end{aligned} \quad (6.4.23)$$

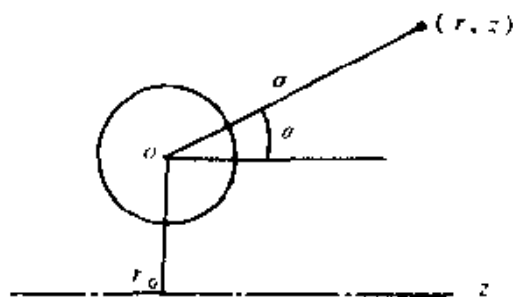


图6.7 式(6.4.22)简图

当场点 P 处于涡核内部时, $r_1/r_2 \ll 1$, $k^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \approx 1$, 椭圆积分近似为

$$\begin{aligned} K(k) &= \ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{4} k'^2 (\ln \frac{4}{k'} - 1) + \dots \\ E(k) &= 1 + \frac{1}{2} k'^2 (\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2}) + \dots \end{aligned} \quad (6.4.24)$$

式中 $k'^2 = 1 - k^2 \approx r_1^2/r_2^2$, 称为补模. 于是,

$$\left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k) \approx \ln \frac{4}{k'} - 2 + O(k'^2 \ln k') \quad (6.4.25)$$

$$\ln \frac{4}{k'} = \ln \frac{4r_2}{r_1} \approx \ln \left\{ \frac{8r_0}{r_1} (1 + \delta) \right\} \quad (6.4.26)$$

$$\delta = \frac{1}{2r_0} (\sigma \sin \alpha + \sigma' \sin \alpha') \ll 1 \quad (6.4.27)$$

$$(rr')^{1/2} = r_0(1 + \delta) \quad (6.4.28)$$

将式(6.4.25)–(6.4.28)代入式(6.4.14), 得到

$$G \approx \frac{r_0}{2\pi} (1 + \delta) \ln \frac{8r_0}{r_1} - 2 - \delta + O\left(\frac{r_0^2}{r_1^2} \ln \frac{r_0}{r}\right) \quad (6.4.29)$$

对于均匀涡量分布及圆形涡核, 在新坐标系下有

$$\omega' = \omega_0 \frac{r'}{r_0} = \omega_0 \left(1 + \frac{\sigma' \sin \alpha'}{r_0}\right) \quad (6.4.30)$$

$$dr' dz' = \sigma' d\sigma' d\alpha' \quad (6.4.31)$$

将式(6.4.29)–(6.4.31)代入式(6.4.21),得到

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{1}{2} U r_0^2 \left(1 + \frac{2\sigma}{r_0} \sin \alpha\right) + \frac{r_0 \omega_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \left(1 + \frac{\sigma \sin \alpha + 3\sigma' \sin \alpha'}{2r_0}\right) \right. \\ & \cdot \ln \left[\sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma' \cos(\alpha - \alpha') \right]^{-1/2} \\ & \left. - \frac{1}{2r_0} (\sigma \sin \alpha + 5\sigma' \sin \alpha') \right\} \sigma' d\sigma' d\alpha' \end{aligned} \quad (6.4.32)$$

上述积分可以求出,只要利用下述定积分

$$\int_0^{2\pi} \ln \{ \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma' \cos(\alpha - \alpha') \}^{1/2} d\alpha = \begin{cases} 2\pi \ln \sigma', & \text{若 } \sigma' > \sigma \\ 2\pi \ln \sigma, & \text{若 } \sigma > \sigma' \end{cases} \quad (6.4.33)$$

最后得到

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma, \alpha) = & -\frac{1}{2} U r_0^2 \left(1 + \frac{2\sigma}{r_0} \sin \alpha\right) + \frac{\Gamma r_0}{2\pi} \left(\ln \frac{8r_0}{a} - \frac{3}{2} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right. \\ & \left. + \frac{\sigma}{2r_0} \sin \alpha \left[\ln \frac{8r_0}{a} + 1 - \frac{5\sigma^2}{4a^2} \right] + O\left(\frac{a^2}{r_0^2} \ln \left(\frac{r_0}{a}\right)\right) \right) \end{aligned} \quad (6.4.34)$$

式中 $\Gamma = \pi a^2 \omega_0$ 是通过涡核截面的涡量流率,即涡环强度.定常流中涡核表面是条流线,令 $\sigma = a$,对任意 α , $\Psi = \text{常数}$.于是,在上式中取 $\sin \alpha$ 的系数为零,得到

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left[\ln \frac{8r_0}{a} - \frac{1}{4} \right] + O\left(\frac{\Gamma a^2}{r_0^3} \ln \frac{r_0}{a}\right) \quad (6.4.35)$$

这正是开尔文(1867)得到的公式.

请注意,式(6.4.34)仅是核内部的流函数,不是全场适用的,因为我们用了近似假设(6.4.24).将式(6.4.35)代入(6.4.34),得核内流函数 $\Psi(\sigma \leq a)$ 为

$$\Psi = \frac{\Gamma r_0}{2\pi} \left\{ \frac{3}{4} \ln \frac{8r_0}{a} - \frac{23}{16} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right\} + \frac{\Gamma \sigma \sin \alpha}{4\pi} \left\{ \frac{5}{4} - \frac{5\sigma^2}{4a^2} \right\} + O\left(\frac{a}{r_0}\right) \quad (6.4.36)$$

由此可以确定 $\Psi = \text{常数}$ 时的流线形状

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{5\sigma}{4r_0} \sin \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{a^2}\right) = \text{常数} = \frac{\sigma_0^2}{a^2}$$

此处 σ_0 是个常数. 上式的一级近似为

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{5}{8} \frac{a^2 - \sigma_0^2}{r_0} \sin \alpha, \quad 0 \leq \sigma \leq a \quad (6.4.37)$$

它表明流线是一族半径为 σ_0 的偏心圆, 其圆心在对称轴上方的 $r_0 + \frac{5}{8} \frac{(a^2 - \sigma_0^2)}{r_0}$ 处. 当 $\sigma_0 = 0$ 时, 流线收缩为一点, 这是驻点, 位于对称轴上方 $r_0 + \frac{5}{8} \frac{a^2}{r_0}$ 处.

更高阶近似表明, 涡核不再是个圆, 读者可参阅 Frankel (1972) 文章, 这里不再赘述.

6.4.3 任意涡量分布涡环的传播速度(能量法)

上两小节我们是通过求出流函数的积分是才得到涡环运动的速度, 我们称它为直接法. 另外一种计算薄核涡环速度的方法是借助于动能和动量关系, 我们称之为能量法. 后者可以避免繁琐的数学运算, 较易于推广到包括周向速度 (swirl)、粘性、非定常性和可压缩性的情况. 该方法最早由 Lamb (参见 [9], § 162) 使用, Saffman (1970) 又把它用于任意薄核外形和任意涡量分布的涡环.

将坐标轴固结于无穷远处静止的流体. 涡环运动的速度 V 可分解成它的平移速度 U 和相对速度 u .

$$V = U + u \quad (6.4.38)$$

由流体动能和冲量表达式 (3.3.2) 和 (3.2.5) 得

$$T = \int V \cdot (r \times \omega) dV = 2U \cdot I + \int u \cdot (r \times \omega) dV \quad (6.4.39)$$

现在我们分别来计算上式各项. 对于有周向速度的轴对称流动,

(1) 动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int |V'|^2 dV' \\ &= \pi \int_V (V_r'^2 + V_\theta'^2 + V_z'^2) r' dr' dz' \\ &= \pi \int (V_r' \frac{\partial \psi}{\partial r'} - V_\theta' \frac{\partial \psi}{\partial z'}) dr' dz' + \pi \int r' V_\theta'^2 dr' dz' \end{aligned}$$

对上式右手第一个积分利用分部积分, 考虑到无穷远处速度衰减到零, 上式变成

$$T = \pi \int \psi \omega_\theta dr' dz' + \pi \int r' V_\theta'^2 dr' dz' \quad (6.4.40)$$

上式中 ψ 由式(6.4.7)给出. 对于薄核涡环, 仅用到一级近似的 G (在式(6.4.29)中略掉 δ 项)为

$$G(\sigma, a, \sigma', a') = \frac{r_0}{2\pi} (\ln \frac{8r_0}{r_1} - 2) \quad (6.4.41)$$

而且, 在一级近似下涡核截面是半径为 a 的圆, 涡量仅是 σ 的函数 $\omega_\theta = \omega_0(\sigma')$, 流体质点的迹线为同心圆. 将上式代入(6.4.7)式

$$\begin{aligned} \psi &\approx \psi_0(\sigma) = \int \omega_0 G \sigma' d\sigma' d\sigma' \\ &= r_0 \int \sigma' \omega_0(\sigma') [\ln 8r_0 - 2 - \ln \hat{r}_1] d\sigma' \end{aligned} \quad (6.4.42)$$

其中 $\hat{r}_1 = \sigma$, 若 $\sigma > \sigma'$; $\hat{r}_1 = \sigma'$, 若 $\sigma' > \sigma$. 再定义速度环量

$$\Gamma_0(\sigma) = \int_0^\sigma 2\pi \sigma' \omega_0(\sigma') d\sigma'$$

且 $\Gamma = \Gamma_0(a)$. 对式(6.4.42)分部积分得

$$\psi_0(\sigma) = \frac{r_0 \Gamma}{2\pi} (\ln \frac{8r_0}{a} - 2) + \frac{r_0}{2\pi} \int_a^\sigma \frac{\Gamma_0(\sigma')}{\sigma'} d\sigma',$$

所以动能式(6.4.40)第一项有

$$\pi \int \omega_\theta \psi \sigma' d\sigma' d\alpha' \approx \frac{1}{2} r_0 \Gamma^2 \left(\ln \frac{8r_0}{a} - 2 \right) + \frac{1}{2} r_0 \int_0^\infty \frac{\Gamma_0^2(\sigma')}{\sigma'} d\sigma' \quad (6.4.43)$$

(2) 流体冲量在 z 方向分量

$$I_z = \frac{1}{2} \int r'^2 \omega_\theta' dr' dz' d\theta' = \pi \int (r_0 + \sigma' \sin \alpha')^2 \omega_\theta(\sigma') \sigma' d\sigma' d\alpha' \\ \approx \pi \Gamma r_0^2 \quad (6.4.44)$$

(3) 在式(6.4.39)中最后一项

$$\int \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV = 2\pi \int r \omega_\theta (ru_z - zu_r) dr dz \\ + 2\pi \int ru_\theta (\omega_r z - \omega_z r) dr dz \quad (6.4.45)$$

式中 u_r, u_θ 和 u_z 是 \mathbf{u} 的三个分量. 因为 $\omega_r = -\frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r}$.

上式最后一项化成

$$\pi \int ru_\theta^2 dr dz = \pi \int \left[\frac{\partial}{\partial z} (zru_\theta^2) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_\theta^2) \right] dr dz \quad (6.4.46)$$

该式最后一项化为线积分后趋于零, 因为速度在无穷远处为零.

将式(6.4.43—46)代入式(6.4.39), 得到

$$\frac{1}{2} r_0 \Gamma^2 \left(\ln \frac{8r_0}{a} - 2 \right) + \frac{1}{2} r_0 \int_0^\infty \frac{\Gamma_0^2(\sigma')}{\sigma'} d\sigma' \\ = 2U\pi\Gamma r_0^2 + 2\pi \int r \omega_\theta (ru_z - zu_r) dr dz \quad (6.4.47)$$

因此现在只剩下上式的最后一项需要处理. 直接计算这一项比较困难. 可以采用一种所谓“兰姆变换”的方法来求解.

对于定常流, ω_θ 的动力学方程可写成

$$\frac{\partial u_z \omega_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_r \omega_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^2}{\partial r}$$

两边乘以 zr^2 后可得

$$\begin{aligned} r^2 u_z \omega_\theta - r z u_r \omega_\theta &= r u_\theta^2 - 3 r z u_r \omega_\theta + \frac{\partial}{\partial r} (z r^2 u_r \omega_\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (z r u_\theta^2 - z r^2 u_z \omega_\theta) \end{aligned}$$

对两边取体积分, 考虑到轴对称性和最后两项化为线积分后在无穷远处消失, 所以得到

$$2\pi \int (r^2 u_z \omega_\theta - r z u_r \omega_\theta) dr dz = 2\pi \int r u_\theta^2 dr dz - 6\pi \int r z u_r \omega_\theta dr dz \quad (6.4.48)$$

在一级近似下, $\omega_\theta = \omega_\theta(\sigma)$, $u_r = \Gamma_\theta(\sigma)/2\pi\sigma \cdot \cos\alpha$, $u_\theta = u_\theta(\sigma)$,

$\Gamma_\theta(\sigma) = \int_0^\sigma 2\pi\sigma' \omega_\theta(\sigma') d\sigma'$, 所以

$$\begin{aligned} 2\pi \int r u_\theta^2 dr dz &= 2\pi \int (r_0 + \sigma \sin\alpha) u_\theta^2(\sigma) \sigma d\sigma d\alpha = 4\pi^2 r_0 \int_0^a \sigma u_\theta^2(\sigma) d\sigma \\ 6\pi \int r z u_r \omega_\theta dr dz &= \frac{3r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \int_0^a \Gamma_\theta(\sigma) d\Gamma_\theta(\sigma) \\ &\quad + \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \sin\alpha d\alpha \cdot \int_0^a \sigma \Gamma_\theta d\Gamma_\theta \\ &= \frac{3}{4} r_0 \Gamma_\theta^2(a) \end{aligned}$$

将它们代入式(6.4.47), 得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} r_0 \Gamma_\theta^2 \left(\ln \frac{8r_0}{a} - 2 \right) + \frac{1}{2} r_0 \int_0^a \frac{\Gamma_\theta^2(\sigma)}{\sigma} d\sigma \\ &= 2\pi r_0^2 U \Gamma - \frac{4}{3} r_0 \Gamma^2 + 4\pi^2 r_0 \int_0^a \sigma u_\theta^2(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

由此求出涡环运动速度 U 为

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{a} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\Gamma^2} \int_0^a \frac{\Gamma_\theta^2(\sigma)}{\sigma} d\sigma - \frac{8\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^a \sigma u_\theta^2(\sigma) d\sigma \right) \quad (6.4.49)$$

于是, 涡环产生的流体动能为

$$T = \frac{1}{2} r_0 \Gamma^2 \left(\ln \frac{8r_0}{a} - 2 + \frac{1}{I_0^2} \int_0^a \frac{I_0^2(\sigma)}{\sigma} d\sigma + \frac{4\pi^2}{I_0^2} \int_0^a \sigma u_{\theta}^2(\sigma) d\sigma \right) \quad (6.4.50)$$

由此可见, 涡环运动速度及动能均与核内涡量分布的结构有关. 对于无周向速度 ($u_{\theta}=0$) 的均匀涡核, $\frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma} = \frac{\sigma^2}{a^2}$, 代入式 (6.4.49), 得到

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{a} - \frac{1}{4} \right) \quad (6.4.51)$$

$$T = \frac{1}{2} r_0 \Gamma^2 \left(\ln \frac{8r_0}{a} - \frac{7}{4} \right) \quad (6.4.52)$$

$$\mathbf{I} = \rho \pi \Gamma r_0^2 \mathbf{e}_z \quad (6.4.53)$$

这就回到了开尔文的结果.

对于空心涡核的涡环, $\Gamma(\sigma) = \Gamma H(a - \sigma)$, H 是单位阶跃函数, 式 (6.4.49) 中积分为零, 得到

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} \left(\ln \frac{8r_0}{a} - \frac{1}{2} \right) \quad (6.4.54)$$

这正是 Hicks (1885) 的结果.

第七章 点涡系动力学

点涡运动的研究可以一直追溯到流体力学发展的早期阶段, 1855 年亥姆霍兹引入点涡的概念, 并奠定了点涡系运动的理论基础. 它一直是流体力学的经典内容之一, 而且这个古老的问题目前仍然受到人们的十分重视, 其原因来自两个方面: 其一是在物理上发现了新应用, 它可以应用于原子结构、大尺度气象图形、超流体和超导体等多种物理问题. 特别是最近, 随着非线性动力学的新发展, 人们把点涡系看成是一种哈密顿(Hamilton)动力学系统, 可以从非线性动力系统的观点来研究点涡系的混沌, 并企图由此研究湍流产生的机理. 另一个原因出自计算流体力学中涡方法的发展, 点涡系动力学是二维涡方法的理论基础. 数值计算中出现的新问题, 需要人们去深入研究点涡系的性质和规律.

本章将首先回顾一下点涡系运动的经典结果, 接着介绍点涡系动力学的若干新进展, 它们分别是点涡系的静力学问题、相似性解、稳定性分析及不可积性与混沌.

7.1 点涡系动力学的经典理论

本节给出点涡系的运动方程以及几个重要的积分不变量.

7.1.1 无界流体中的点涡运动

若干个相互平行的无限长直线涡, 在它们的垂直平面内的投影就组成了二维点涡系. 二维点涡系流场的涡量分布是离散的, 可表示为

$$\omega_a = \sum \Gamma_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad \mathbf{r} = xi + yj \quad (7.1.1)$$

其中 δ 是 Dirac δ 函数.

这样,二维点涡系的无粘不可压缩运动方程组就变得特别简单,第 α 个涡满足

$$\nabla^2 \psi_a = -\omega_a = -\Gamma_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

及

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = 0$$

第 α 个涡的流函数则为

$$\psi_a = -\frac{\Gamma_a}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|$$

所有点涡产生的流函数为 $\psi = -\sum \psi_a$, 于是,可求出无穷远处静止的无界流场中点涡系产生的流函数为

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{a=1}^N \Gamma_a \ln[(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2]^{1/2} \quad (7.1.2)$$

除总环量 $\sum \Gamma_a$ 守恒外,由涡量矩守恒特性可以得到点涡系的三个时间不变量,由式(2.4.7)和(2.4.8)或(3.4.3)得到

$$G_x = \sum x_a \Gamma_a, \quad G_y = \sum y_a \Gamma_a \quad (7.1.3)$$

$$M = \sum (x_a^2 + y_a^2) \Gamma_a \quad (7.1.4)$$

G_x, G_y 和 M 都是时间不变量,分别称为点涡系的质心矩和惯性矩. 于是点涡系的质心为

$$\bar{X} = \frac{\sum x_a \Gamma_a}{\sum \Gamma_a} \text{ 和 } \bar{Y} = \frac{\sum y_a \Gamma_a}{\sum \Gamma_a} \quad (7.1.5)$$

也是时间不变量.

与点涡分布有关的那部分动能,式(3.4.10)变成

$$T = -\frac{1}{4\pi} \sum_{a=1}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ a \neq \beta}}^N \Gamma_a \Gamma_\beta \ln[(x_a - x_\beta)^2 + (y_a - y_\beta)^2]^{1/2} \quad (7.1.6)$$

它也是个时间不变量

其实,在复平面上研究点涡的不可压缩平面无旋流动的运动规律,更加简便,在无穷远处静止的无界流体中描述点涡运动的复速度势为

$$W(Z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \ln(Z - Z_{\alpha}), \quad Z = x + iy \quad (7.1.7)$$

由于一个孤立的点涡不能在流体中移动,因此第 α 个点涡是在其它 $N-1$ 个点涡诱导下运动,于是

$$\begin{aligned} u_{\alpha} - iv_{\alpha} &= \frac{d\bar{Z}_{\alpha}}{dt} = \frac{d}{d\bar{Z}} \left[W(Z) - \frac{\Gamma_{\alpha}}{2\pi i} \ln(Z - Z_{\alpha}) \right] \Big|_{Z=Z_{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_{\beta} \frac{1}{Z_{\alpha} - Z_{\beta}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

其中 \sum' 代表求和时不包括 $\beta = \alpha$ 的项, \bar{Z} 是 Z 的共轭复数. 式(7.1.7)是亥姆霍兹于 1858 年建立的,称为点涡系运动方程,是本章研究问题的出发点.

例 1 强度为 Γ_1 和 Γ_2 的两个点涡(A_1 和 A_2)分别位于 Z_1 和 Z_2 , 试确定其运动的迹线.

该流场的复速度势为

$$W(Z) = \frac{1}{2\pi i} [\Gamma_1 \ln(Z - Z_1) + \Gamma_2 \ln(Z - Z_2)] \quad (7.1.9)$$

点涡 A_1 的速度仅由点涡 A_2 所诱导,即

$$u_1 - iv_1 = -\frac{i}{2\pi} \frac{\Gamma_2}{Z_1 - Z_2}$$

同理,点涡 A_2 的速度为

$$u_2 - iv_2 = -\frac{i}{2\pi} \frac{\Gamma_1}{Z_2 - Z_1}$$

这两个点涡的质心坐标为

$$Z_c = \frac{\Gamma_1 Z_1 + \Gamma_2 Z_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

它们的运动迹线随 Γ_1 和 Γ_2 的大小和符号而不同。

由图 7.1 可见, 两个点涡运动的速度都垂直于 $\overline{A_1 A_2}$ 连线, 它们的大小分别为 $V_1 = \Gamma_2 / 2\pi \cdot \overline{A_1 A_2}$, $V_2 = \Gamma_1 / 2\pi \cdot \overline{A_1 A_2}$. 当 Γ_1 和 Γ_2 同号时, 则质心 G 位于 $\overline{A_1 A_2}$ 连线上, 两个点涡沿同心圆绕质心旋转, 其角速度为 $\Omega = V_2 / \overline{GA_2} = V_1 / \overline{GA_1}$ (图 7.1a). 当 Γ_1 和 Γ_2 异号时, 质心位于 $\overline{A_1 A_2}$ 连线的延长线上 (图 7.1b); 特别是当 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ 时其质心在无穷远处, 两个点涡以同样速度作垂直于 $\overline{A_1 A_2}$ 的运动 (图 7.1c).

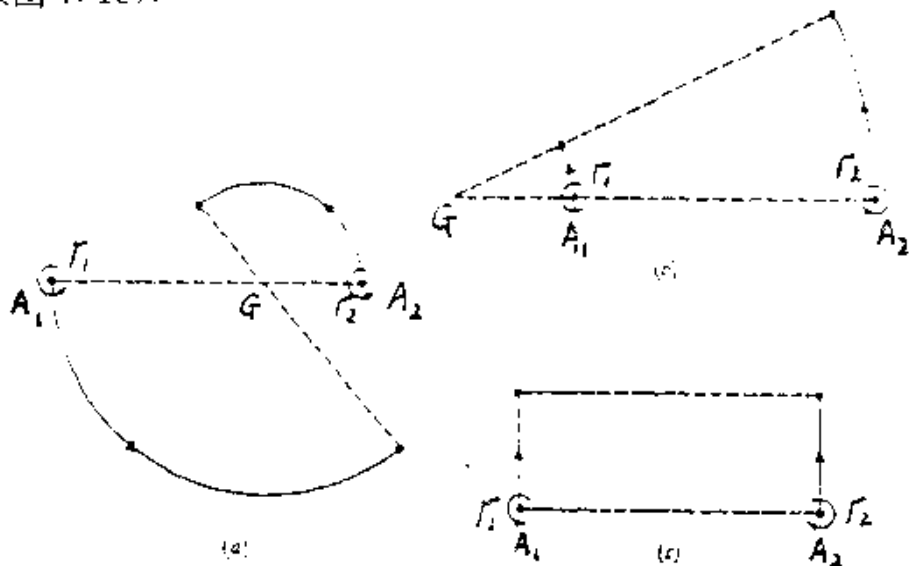


图 7.1 两个点涡在无界流体中的运动

例 2 等强度 Γ 的三个点涡位于正三角形的三个顶点上, 试确定其运动的迹线。

由几何关系可知, 正三角形外接圆半径为 $r = a/\sqrt{3}$, a 为三角形边长。适当选择坐标系后, 复速度势为

$$W(Z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} [\ln(Z - r)(Z - re^{i2\pi/3})(Z - re^{i4\pi/3})]$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(Z^3 - r^3) \quad (7.1.10)$$

任意一个点涡的运动速度等于其它两个点涡的诱导速度之和. 不失一般性, 对于位于 $(r, 0)$ 处的点涡,

$$\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= \frac{d}{dZ} [W(Z) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(Z - r)]_{Z=r} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma}{r} \end{aligned}$$

即 $u_1 = V_x = 0, v_1 = V_y = \Gamma/2\pi r$, 这表明三个点涡将绕圆心作等速圆周运动, 其角速度为 $\Omega = \Gamma/2\pi r^2 = 3\Gamma/2\pi a^2$.

例3 试确定单一涡列的运动(参见[11], 13.71).

同转向、等强度、等间距沿一条直线排列的无穷多点涡构成单一涡列(图7.2a). 其复速度势为

$$W(Z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi Z}{a} \quad (7.1.11)$$

每个点涡的速度应是相同的. 对于 $Z=0$ 处的点涡而言, 其速度为

$$\begin{aligned} u_0 - iv_0 &= \frac{d}{dZ} (W(Z) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln Z)_{Z=0} \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{\pi}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi Z}{a} \right) - \frac{1}{Z} \right]_{Z=0} = 0 \end{aligned}$$

这表明涡列是静止的. 图7.2b 是其流线图, 可见在点涡附近流线是封闭的, 外部流线是开放的. 在远离涡列处流线趋于与涡列平行, 即在无穷远处的诱导速度为

$$u_\infty - iv_\infty = \frac{dW}{dZ} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\pi}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi Z}{a} \right) \Big|_{Z \rightarrow \pm \infty} = \mp \frac{\Gamma}{2a}$$

因此, 在足够远处涡列的作用类似于无穷长均匀平直面涡.

例4 试确定卡门涡街的运动(参见[11], 13.72).

两列互相平行、等强度且异转向的无穷长涡列交错排列构成卡门涡街, 见图7.3a, 其复速度势为

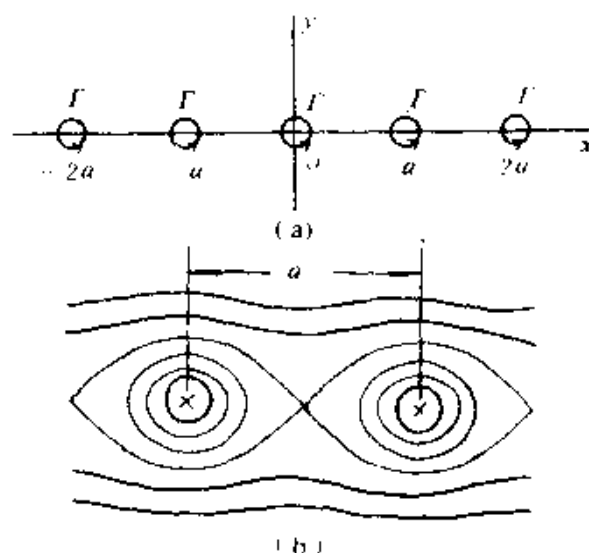


图 7.2 (a) 无穷长单一涡列 (b) 流线图

$$W(Z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{a} (Z - \frac{ib}{2})}{\sin \frac{\pi}{a} (Z - \frac{a}{2} + \frac{ib}{2})} \quad (7.1.12)$$

如前所述, 处于同一排的点涡彼此的诱导速度为零, 但它们会受到另一排点涡的诱导而产生速度, 位于 $Z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ib$ 处的点涡, 它的速度是

$$\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{d}{dZ} \ln \sin \frac{\pi}{a} (Z - \frac{ib}{2}) \right]_{Z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ib} \\ &= \frac{\Gamma}{2a} \tanh \frac{\pi b}{a}. \end{aligned}$$

因此, 下排涡列以速度 $V = \frac{\Gamma}{2a} \tanh(\frac{\pi b}{a})$ 沿 x 轴移动. 类似地, 上排涡列也以同样速度沿同方向移动. 如果观察者以此速度随涡街移动, 其流谱为图 7.3b 所示. 关于涡街的稳定性问题将在 7.3 节中叙述.

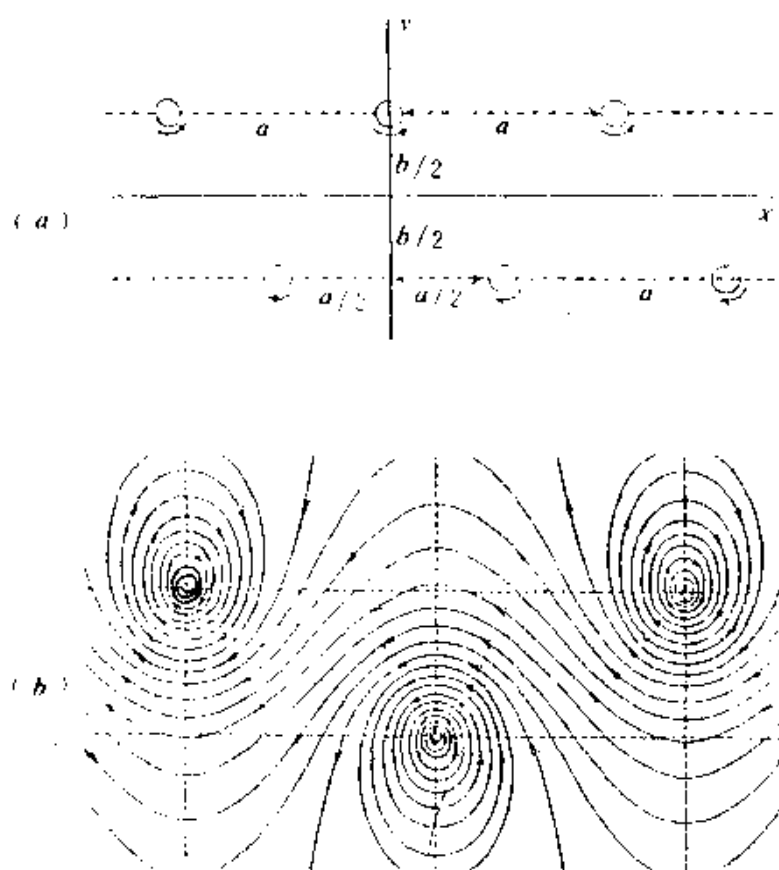


图7.3 (a)卡门涡街示意图 (b)流线

7.1.2 边界和背景流场对点涡系运动的影响

当点涡系存在于有背景流动和有固体边界的流场中时,如果背景流动又是无旋运动,则流动的复速度势仍旧存在,只不过有时很复杂. 通常是利用镜象法或保角变换方法,寻找在变换平面内的复速度势,进而求出点涡的运动速度.

例5 圆定理(参见[2],[3]).

设流场内有一圆柱,在圆外有一点涡,则该流场的复速度势分别由三部分叠加而成:点涡本身、在圆内的反演点 a^2/\bar{z}_0 上的一个同强度但异号的点涡、以及在圆心的一个同强度且同号的点涡(图7.4),即

$$W(Z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{Z(Z - Z_0)}{Z - (a^2/\bar{Z}_0)} \quad (7.1.13)$$

其中 Z_0 和 a 分别为点涡几何位置和圆半径, $|Z_0| > a$.

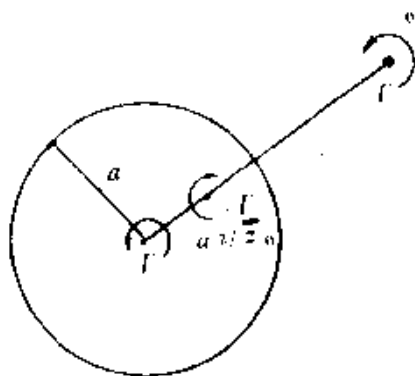


图7.4 圆定理

例6 钝体尾迹.

在大 Re 数下钝体尾迹可以用无粘离散涡模型来近似 (Sarpkaya et al., 1979). 假设钝体又可以保角变换成圆, 利用圆定理(7.1.13), 在变换平面 ($\zeta = \xi + i\eta$) 内的复位势为

$$W(\zeta) = V(\zeta + \frac{a^2}{\bar{\zeta}}) + \frac{1}{2\pi i} \sum \Gamma_j \ln \frac{\zeta(\zeta - \zeta_j)}{\zeta - a^2/\bar{\zeta}_j} \quad (7.1.14)$$

第 k 个点涡的速度为

$$\begin{aligned} u_k - iv_k &= \frac{d\bar{Z}_k}{dt} = \frac{d}{dZ} [W(Z) - \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \ln(Z - Z_k)]_{Z=Z_k} \\ &= \left[V(1 - \frac{a^2}{\bar{\zeta}_k^2}) + \frac{1}{2\pi i} \sum \Gamma_j (\frac{1}{\zeta_k} + \frac{1}{\zeta_k - \zeta_j} - \frac{1}{\zeta_k - a^2/\bar{\zeta}_j}) \right] \left(\frac{d\zeta}{dZ} \right)_{Z_k} \\ &\quad - \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \left(\frac{1}{Z - Z_k} - \frac{d\zeta/dZ}{\zeta - \zeta_k} \right)_{Z=Z_k} \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

上式最后一项, 根据洛必达法则, 可写为

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(\xi - \xi_k) - (Z - Z_k)d\xi/dZ}{(Z - Z_k)(\xi - \xi_k)} = -\frac{d^2\xi/dZ^2}{2d\xi/dZ} \quad (7.1.16)$$

式(7.1.14)~(7.1.16)在空气动力学中有重要应用,例如可用它们来模拟细长翼和翼身组合体在大攻角下的脱体涡的卷起(如尹协远(1984)).

综上所述,点涡系的许多经典结果现在仍旧十分重要,这里不拟一一赘述.以下几节将着重介绍点涡系动力学的若干新进展.

7.2 点涡系静力学问题

这里所谓的静力学问题是指点涡之间相对位置不变的情形,因此既包括点涡系完全静止,也广义地包括刚体式平移和旋转的情况.静力学问题使得求解常微分方程组(7.1.8)的初值问题简化为求解一个代数方程组,从而有希望得到解析形式的结果.涡静力学(Vortex statics)这个名词是开尔文最早提出的,近年来在这方面有不少新结果.

首先我们讨论点涡系完全静止的情形.

现在我们先来证明:对于强度分别为+1和-1的 N^+ 和 N^- 个点涡($N^+ > N^-$),若要点涡保持静止,则它们的数目必须满足

$$N^+ = \frac{1}{2}j(j+1), \quad N^- = \frac{1}{2}j(j-1) \quad (7.2.1)$$

其中 j 是正整数.

为此,令点涡系的总涡元数为 N ,在式(7.1.8)中令 $\frac{d\bar{Z}_\alpha}{dt} = 0$, 有

$$\sum_{\beta=1}^N \frac{\Gamma_\beta}{\bar{Z}_\alpha - \bar{Z}_\beta} = 0 \quad (7.2.2)$$

上式两边乘以 $\Gamma_\alpha \bar{Z}_\alpha$,然后对 α 从1到 N 求和

$$\sum_a^N \Gamma_a Z_a \sum_\beta^N \frac{\Gamma_\beta}{Z_a - Z_\beta} = 0$$

取 $Z_a = Z_a - Z_\beta + Z_\beta$, 从上式进一步可以得到

$$\sum_a^N \sum_\beta^N \Gamma_a \Gamma_\beta = 0$$

或者写成

$$\left(\sum_a^N \Gamma_a\right)^2 - \sum_a^N \Gamma_a^2 = 0$$

根据给定的条件, 上式中 Γ_a 中有 N^+ 个 $(+1)$ 和 N^- 个 (-1) , 这样有

$$(N^+ - N^-)^2 = N^+ + N^-$$

令 $j = N^+ - N^-$, 与上式联立求解就得到了式(7.2.1).

当 $j=1$ 时, $N^+=1$ 而 $N^-=0$, 这是只有一个点涡的情况, 很明显, 在无界流体中该点涡的位置不会发生变化.

当 $j=2$ 时, $N^+=3$ 而 $N^-=1$. 我们不难从式(7.2.2)来确定它们结构的形式. 为简单起见, 不妨把强度为 -1 的点涡置于坐标原点. 这时点涡运动方程成为

$$\frac{1}{Z_1 - Z_2} + \frac{1}{Z_1 - Z_3} = \frac{1}{Z_1}$$

$$\frac{1}{Z_2 - Z_3} + \frac{1}{Z_2 - Z_1} = \frac{1}{Z_2}$$

$$\frac{1}{Z_3 - Z_2} + \frac{1}{Z_3 - Z_1} = \frac{1}{Z_3}$$

和

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = 0$$

从以上四式中, 根据 Z_1 、 Z_2 和 Z_3 的完全对称性可以判断, 这三个正涡的位置应位于一个等边三角形的顶点, 负涡位于其中心处(见图 7.5). 三角形的边长是一个任意参数.

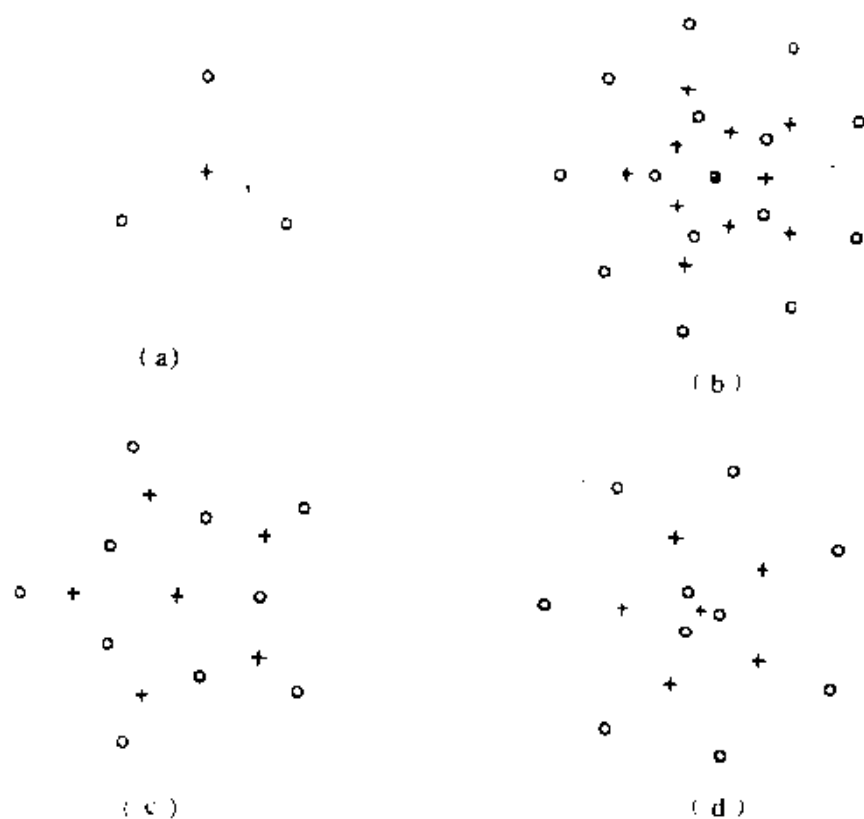


图7.5 点涡系完全静止时的平衡位置

(a) 1个强度为 $+1$ 和3个强度为 -1 的点涡的平衡

(b) 10个强度为 $+1$ 和15个强度为 -1 的点涡的平衡

(c, d) 6个强度为 $+1$ 和10个强度为 -1 的点涡的平衡

对于点涡数目多的系统,并非如此一目了然.但由于 Tkachenko(1964)建立了点涡系平衡的约束方程以及后来 Adler 和 Moser(1978)给出的递推解法,把解决点涡系力学平衡问题往前推进了一步,今叙述如下.

考虑由 N^+ 和 N^- 个点涡组成的涡系,它们的强度大小相等,但转向相反.这两类点涡的位置分别以 $Z_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, N^+)$ 和 $\xi_\mu (\mu = 1, 2, \dots, N^-)$ 表示.现可以将点涡系静止方程(7.2.2)改写如下:

对于位于 Z_α 的正涡应满足

$$\sum_{\beta}^{N^+} (Z_\alpha - Z_\beta)^{-1} - \sum_{\lambda}^{N^-} (Z_\alpha - \xi_\lambda)^{-1} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N^+) \quad (7.2.3)$$

对于位于 ξ_μ 的负涡则有

$$\sum_{\beta}^{N^+} (\xi_\mu - Z_\beta)^{-1} - \sum_{\lambda}^{N^-} (\xi_\mu - \xi_\lambda)^{-1} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, N^-) \quad (7.2.4)$$

若令

$$P(Z) = \prod_{\alpha}^{N^+} (Z - Z_\alpha), \quad Q(Z) = \prod_{\mu}^{N^-} (Z - \xi_\mu) \quad (7.2.5)$$

其中 \prod 是连乘符号. 多项式 $P(Z)$ 和 $Q(Z)$ 等于零的根分别是正、负号点涡的位置. 在式(7.2.5)两边分别对 Z 求导后, 并以 ' 表示对 Z 的导数, 得到

$$P'(Z) = P(Z) \sum_{\alpha}^{N^+} (Z - Z_\alpha)^{-1} \quad (7.2.6)$$

$$Q'(Z) = Q(Z) \sum_{\mu}^{N^-} (Z - \xi_\mu)^{-1} \quad (7.2.7)$$

将以上两式再次对 Z 求导, 并以式(7.2.3)和式(7.2.4)代入后, 可以写成

$$P''(Z) = 2P(Z) \sum_{\alpha}^{N^+} \sum_{\mu}^{N^-} (Z - Z_\alpha)^{-1} (Z - \xi_\mu)^{-1} \quad (7.2.8)$$

$$Q''(Z) = -2Q(Z) \sum_{\alpha}^{N^+} \sum_{\mu}^{N^-} (Z - \xi_\mu)^{-1} (Z - Z_\alpha)^{-1} \quad (7.2.9)$$

最后, 我们有

$$PQ'' + QP'' = 2P'Q' \quad (7.2.10)$$

该方程是 Tkachenko(1964)建立的.

该方程表示当点涡系静止时应满足的条件,但是还无法求解它,1978年 Adler 和 Moser 提出了解方程(7.2.10)的一种巧妙的递推方法.他们利用了下列恒等式

$$\begin{aligned} & f_n(f''_{n+1}f_{n+2} + f_{n+1}f'_{n+2} - 2f_{n+1}f_{n+2}) \\ &= f_{n+1}(f_n f_{n+2} - f_n f'_{n+2} - f_{n+1}^2)' \\ &+ f_{n+2}(f''_n f_{n+1} + f_n f'_{n+1} - 2f_n' f_{n+1}) \\ &- 2f_{n+1}(f_n f_{n+2} - f_n' f_{n+2} - f_{n+1}^2) \quad (7.2.11) \end{aligned}$$

不难发现,等式左边括号和右边第二个括号内的式子在形式上与式(7.2.10)完全相同,不妨可以把式(7.2.10)写成

$$f''_m f_{m+1} + f_m f'_{m+1} - 2f_m f_{m+1} = 0 \quad (7.2.12)$$

形式,这里已令 $P=f_{m+1}, Q=f_m$. 而式(7.2.11)中右手第一个括号与第三个括号内的式子在形式上也完全相同. 现在如果我们已知方程(7.2.12)在 $m=n$ 时的解,从式(7.2.11)可以发现,我们只要再能得到最后一个括号内的式子,即

$$f_m f_{m+2} - f_m' f_{m+2} - f_{m+1}^2 = 0 \quad (7.2.13)$$

的解,那么就得到 $m=n+1$ 时式(7.2.12)的解,这样下一组 P 和 Q 就能求得.

现从 $m=0$ 开始,显然 $f_0=1, f_1=Z$ 是方程(7.2.12)的一组解. 将 f_0, f_1 代入方程(7.2.13),得到

$$f_2 = Z^2$$

其解是 $f_2 = \frac{1}{3}Z^3 + C$. 这里, C 是复常数. 由此可知 $m=1$ 时的解为

$$Q = f_1 = Z, \quad P = f_2 = \frac{1}{3}Z^3 + C$$

取 $Q(Z)=0$ 及 $P(Z)=0$ 的根正是前述 $j=2$ 时的结果(见图7.5a). 对于较大数目的 j , 相应的点涡系结构已变得十分复杂,在图7.5b中给出了 $j=5$ 的结果,而图7.5c,d 中给出的是 $j=4$ 时的两种可能

结果.

其次,我们来讨论**刚体式平移**情形.

当点涡系作刚体式平移运动时,其点涡强度之和应该是零,即

$$\sum_{\alpha}^N \Gamma_{\alpha} = 0 \quad (7.2.14)$$

为了证明这一点,只要在点涡系运动方程(7.1.8)两边乘上 Γ_{α} 后对 α 求和,并注意到右边项当交换下标 α 和 β 时具有反对称性,因而可以消去,就可以得到式(7.2.14)的结果.进一步的研究还表明,正负两种涡的数目相等,并满足

$$N^+ = N^- = \frac{1}{2}j(j-1) \quad (j=1,2,\dots) \quad (7.2.15)$$

这时,决定涡系中点涡位置的方程由 Campbell 和 Kadtke(1987)给出为

$$PQ'' + QP'' + 2\lambda(PQ' - QP') = 2P'Q' \quad (7.2.16)$$

其中常数 λ 是与涡系平移速度及点涡强度有关的量.

平移涡系的最简单例子是涡对($j=1$),它们的速度 $\frac{\Gamma}{2\pi b}$ 沿点涡连线的法向运动, b 是点涡间的距离. 在图7.6中给出了 $j=2$ 和 3 时作平移运动的点涡系结构,在这里,与静止点涡系结构的解相似,对每一确定的 j ,解并不一定是唯一的.

最后我们讨论由 N 个强度为 Γ 的同方向旋转的点涡组成的点涡系作**刚体式旋转**的问题. 若以 Ω 代表角速度,则第 α 个点涡的运动速度为

$$\frac{d\bar{Z}_{\alpha}}{dt} = -\Omega r_{\alpha} \sin\theta - i\Omega r_{\alpha} \cos\theta = -i\Omega \bar{Z}_{\alpha} \quad (7.2.17)$$

代入点涡系运动方程(7.1.8)后,得到

$$\bar{Z}_{\alpha} = \frac{\Gamma}{2\pi\Omega} \sum_{\beta}^N \frac{1}{Z_{\alpha} - Z_{\beta}}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (7.2.18)$$

这是描述作匀速转动的点涡系的数学模型. 作为一个非线性代数

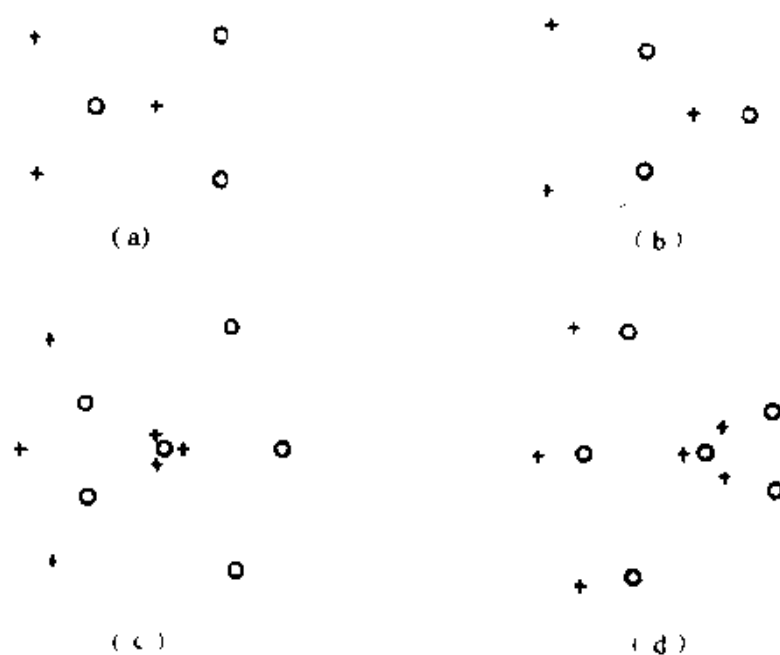


图7.6 作刚体式平移时点涡的平衡结构

(a), (b) $j=2$, 正负点涡个数各为3的情形(c), (d) $j=3$, 正负点涡个数各为6的情形

方程组, 式(7.2.18)的解析求解并不是一件简单的工作, 但可以用标准的数值方法求解. $N=2$ 是最简单的情况, 这时无界域中只有两个相距为 b 的点涡, 它们在相互诱导作用下, 以角速度 $\Omega = \Gamma / \pi b^2$ 绕点涡连线的中心旋转. 当 $N=3$ 时, 可以有两种涡系结构. 一种是点涡位于等边三角形的三个顶点, 另一种结构是一个点涡位于另外两个点涡连线的中点上. 当点涡数目较大时, 情况比较复杂. 一种特殊的情况是 N 个点涡均布在半径为 a 的圆周上, 这时点涡系将以角速度 Ω 绕圆心旋转而不改变形状. 考虑到在时刻 t 第 α 个点涡的位置为

$$Z_0 = a \exp[i(\frac{2\pi}{N}\alpha + \Omega t)] \quad (7.2.19)$$

将上式代入式(7.2.18),就得到点涡系作刚体式旋转时的角速度表达式

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\Gamma}{4\pi a^2} \sum_j^N [1 + i \operatorname{ctg} \frac{\pi(\beta - \alpha)}{N}] \\ &= \frac{\Gamma(N-1)}{4\pi a^2} \end{aligned} \quad (7.2.20)$$

Campbell 和 Ziff(1979)用数值方法分析了当 $N \leq 30$ 时点涡系作刚体式旋转的所有可能情况,图7.7给出了 $N=2, 6, 11$ 和 12 时的典型结果. 对于每一个给定的 N , 其解并不是唯一的. 进一步的研究表明, 当点涡在单一的圆周上排列时, 只有当 $N < 7$ 才是稳定的(详见下一节分析).

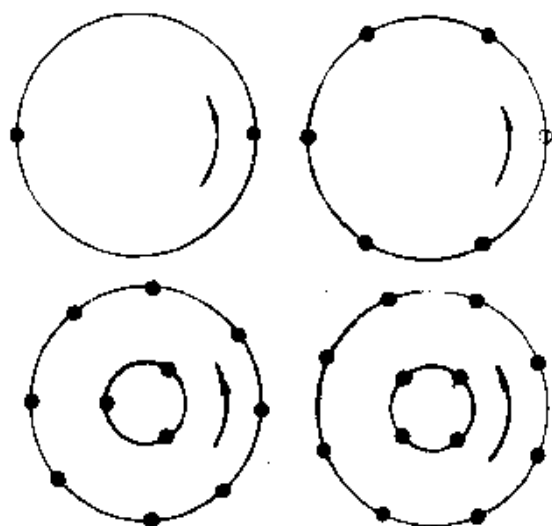


图7.7 $N=2, 6, 11$ 和 12 时作刚体式旋转的点涡系阵图.

以上研究在凝聚态物理及液氮的超流体流动现象中有着重要的应用背景. 在液氮中, 当温度接近绝对零度 ($T < 2.18\text{K}$) 时, 液氮出现了超流性. 在实验中观察到有真正的线涡存在, 每条线涡的环

量是量子化的, $\Gamma = h/m$, 其中 h 是普朗克(Planck)常数, m 是 He I 原子的质量. 并且可以观察到这些点涡排列成不同形式(如图 7.7c, d)在旋转, 在单一圆周上旋转的点涡数不大于 7. 有关材料可进一步参阅 Aref(1983)和 Aref 等人(1988)的述评. 图 7.7 为 $N = 2, 6, 11$ 和 12 时作刚体式旋转的点涡系阵图.

7.3 点涡系稳定性分析

在上两节中, 我们分析了作刚体式平移或旋转的点涡系问题. 这些特殊运动形态的点涡系阵图在运动过程中具有形状不变的特性. 为了研究在时间历程中出现扰动后, 上述阵图是否仍维持不变, 需要进行稳定性分析.

7.3.1 正多边形点涡系的稳定性

现考虑正多边形点涡系的线性稳定性问题. 它是由 N 个等强度点涡均布在半径为 a 的圆周上构成. 以 Γ 代表点涡强度, 在无界域中该点涡系统绕圆心以式(7.2.20)给出的角速度 Ω 作刚体式旋转. 在时刻 t , 其位置可以表示为

$$Z_\alpha^0 = a \exp[i(2\pi\alpha/N + \Omega t)], \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (7.3.1)$$

其中上标 0 代表平衡位置. 在受到扰动后

$$Z_\alpha = Z_\alpha^0 + \Delta Z_\alpha = (a + r_\alpha) \exp[i(2\pi\alpha/N + \Omega t + \theta_\alpha)] \quad (7.3.2)$$

这里 $r_\alpha \ll 1, \theta_\alpha \ll 1$, 均是小扰动. 将式(7.4.1)和式(7.4.2)相减, 略去高阶小量后, 可以得到

$$\Delta Z_\alpha = (r_\alpha + ia\theta_\alpha) \exp[i(2\pi\alpha/N + \Omega t)] \quad (7.3.3)$$

考虑到平衡位置 Z_α^0 和受到扰动后的位置 Z_α . 这两种情况均满足点涡系运动方程(7.1.8), 则可以求出扰动量的控制方程

$$\frac{d\Delta Z_a}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{\beta}^{N-1} \frac{\Delta Z_a - \Delta Z_{\beta}}{(Z_a^0 - Z_{\beta}^0)^2} \quad (7.3.4)$$

将式(7.3.1)和(7.3.3)代入上式,分离方程的实部和虚部之后,有

$$\frac{4\pi a}{\Gamma} \dot{r}_a = A\theta_a - \sum_{\beta}^{N-1} C_{\beta} \theta_{a+\beta} \quad (7.3.5)$$

$$\frac{4\pi a^3}{\Gamma} \dot{\theta}_a = Br_a - \sum_{\beta}^{N-1} C_{\beta} r_{a+\beta} \quad (7.3.6)$$

式中 $\dot{r}_a, \dot{\theta}_a$ 分别表示对时间的微商;以及按惯例,下标 $a+\beta = (a+\beta) \bmod N$, 以及

$$A = \sum_{\alpha}^{N-1} \frac{1}{1 - \cos \frac{2\alpha\pi}{N}} = \frac{1}{6}(N^2 - 1) \quad (7.3.7)$$

$$B = \sum_{\alpha}^{N-1} \frac{\cos \frac{2\alpha\pi}{N}}{1 - \cos \frac{2\alpha\pi}{N}} = \Omega - \frac{1}{6}(N-1)(N-11) \quad (7.3.8)$$

$$C_{\beta} = \frac{1}{1 - \cos \frac{2\beta\pi}{N}} \quad (7.3.9)$$

现令扰动具有以下形式

$$r_a = f(t) \exp[2k\alpha\pi i/N] \quad (7.3.10)$$

$$\theta_a = g(t) \exp[2k\alpha\pi i/N] \quad (7.3.11)$$

其中,在不失一般性的情况下,我们可以设

$$0 \leq k < N \quad (7.3.12)$$

这里 k 代表了扰动的不同模式,比如当 $k=0$ 时各个点涡的扰动相同,与 a 无关. 将式(7.3.10)和(7.3.11)代入方程(7.3.5)和(7.3.6),得到了关于未知函数 f, g 的常微分方程组,即

$$\frac{4\pi a}{\Gamma} \dot{f} = (A - S)g \quad (7.3.13)$$

$$\frac{4\pi a^3}{l^3} \bar{g} = (B - S)f \quad (7.3.14)$$

其中

$$S = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\exp[2k\beta\pi i/N]}{1 - \cos \frac{2\beta\pi}{N}} = \frac{1}{6}(N^2 - 1) - k(N - k) \quad (7.3.15)$$

将式(7.3.13)和(7.3.14)两边对时间求导后,得到

$$\left(\frac{4\pi a^2}{l^3}\right)^2 \dot{\bar{f}} = \sigma f \quad (7.3.16)$$

$$\left(\frac{4\pi a^2}{l^3}\right)^2 \dot{\bar{g}} = \sigma g \quad (7.3.17)$$

其中

$$\sigma = (A - S)(B - S) = k(N - k)[k(N - k) - 2(N - 1)] \quad (7.3.18)$$

由此可见, f 和 g 随时间是否衰减取决于 $\exp[\frac{\Gamma t}{4\pi a^2} \sqrt{\sigma}]$ 中 σ 的符号. 考虑到 σ 中 k 和 $N - k$ 总是大于零这一事实, σ 的正负由

$$D = k(N - k) - 2(N - 1) \quad (7.3.19)$$

确定. 不难证明, 当 $N < 7$ 时, 有 $D < 0$, 这时扰动不会随时间而增长, 点涡系的运动是线性稳定的; 当 $N = 7$ 时, 对 $k = 3$ 或 4 的扰动模式有 $D = 0$, 呈现出中性稳定; 当 $N > 7$ 时, 出现使 $D > 0$ 的 k 值, 点涡系的运动呈线性不稳定性. 因此, 正多边形点涡系在作刚体式匀速转动时, 保持线性稳定性的必要条件是点涡数目 N 不大于 7.

7.3 卡门涡街的稳定性

作为点涡系稳定性分析的另一个典型例子是卡门涡街. 现考虑强度为 Γ , 初始时刻位于 al ; 强度为 $-\Gamma$, 初始时刻位于 $(a + \frac{1}{2})l - ih$ 的两列交错排列的点涡, 其中 $a = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 对于没有扰

动的情况, 涡列在诱导作用下沿 x 轴方向以速度 (参见 7.1 节例 4)

$$V = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{th}\left(\frac{k\pi}{l}\right) \quad (7.3.20)$$

作刚体式平移. 在受到扰动之后, 上下涡列的位置为

$$Z_a = (\alpha l + Vt + \Delta x_a) + i\Delta y_a \quad (7.3.21)$$

$$Z_a = \left(\alpha \pm \frac{1}{2}\right)l + Vt + \Delta x'_a + i\Delta y'_a \quad (7.3.22)$$

其中 $(\Delta x_a, \Delta y_a)$ 和 $(\Delta x'_a, \Delta y'_a)$ 都是小扰动, 现令扰动具有以下形式

$$\Delta x_a = f(t) \exp[2\pi\alpha p i] \quad (7.3.23)$$

$$\Delta y_a = g(t) \exp[2\pi\alpha p i] \quad (7.3.24)$$

$$\Delta x'_a = f'(t) \exp[2\pi\alpha p i] \quad (7.3.25)$$

$$\Delta y'_a = g'(t) \exp[2\pi\alpha p i] \quad (7.3.26)$$

不失一般性, 可以设 $0 \leq p \leq 1$, p 可以视为一个无量纲的亚谐波数, 不同的 p 值代表不同的扰动模式. 若 $p = \frac{1}{2}$, 扰动波长为 $2l$, 这时奇数 (或偶数) 涡都以同样的方式运动; 若 p 很小, 则扰动是一种波长很长的起伏; 如果 $p = 0$, 则每列涡中各涡受到的扰动相同.

将式 (7.3.20) — (7.3.26) 代入点涡系运动方程 (7.1.8), 现考虑上下涡列中 $\alpha = 0$ 的这一对点涡的运动, 在略去高阶小量并经过实部和虚部分离之后, 得到^[12]

$$\frac{2\pi l^2}{\Gamma} \dot{f} = -A g - B f' - C g' \quad (7.3.27)$$

$$\frac{2\pi l^2}{\Gamma} \dot{g} = -A f - C f' + B g' \quad (7.3.28)$$

$$\frac{2\pi l^2}{\Gamma} \dot{f}' = A g' - B f + C g \quad (7.3.29)$$

$$\frac{2\pi l^2}{\Gamma} \dot{g}' = A f' + C f + B g \quad (7.3.30)$$

其中

$$A = \pi^2 \{ 2p(1-p) - \operatorname{sech}^2(\mu\pi) \} \quad (7.3.31)$$

$$B = i\pi^2 \left\{ 2p \frac{\cosh[\mu\pi(1-2p)]}{\cosh(\mu\pi)} - \frac{\sinh(2\mu\pi p)}{\cosh^2(\mu\pi)} \right\} \quad (7.3.32)$$

$$C = \pi^2 \left\{ \frac{\cosh(2\mu\pi p)}{\cosh^2(\mu\pi)} - 2p \frac{\cosh[\mu\pi(1-2p)]}{\cosh(\mu\pi)} \right\} \quad (7.3.33)$$

$$\text{而} \quad \mu = \frac{h}{l} \quad (7.3.34)$$

我们把 $f=f', g=g'$ 的情况称为对称扰动, 而 $f=-f', g=g'$ 的情况称为反对称扰动, 这两类扰动具有相同的稳定性. 不难解出, 它们的解正比于 $e^{\sigma t}$, 其中

$$\sigma = \mp iB + \sqrt{A^2 - C^2} \quad (7.3.35)$$

式中对称扰动取“-”号; 反对称扰动取“+”号. 由于 A 和 C 是实数, 稳定性要求 $A^2 \leq C^2$. 从图 7.8 中可以看到, 对应于每一个 μ 值, 都有一定范围的波数 p 会导致涡列的失稳. 只是当

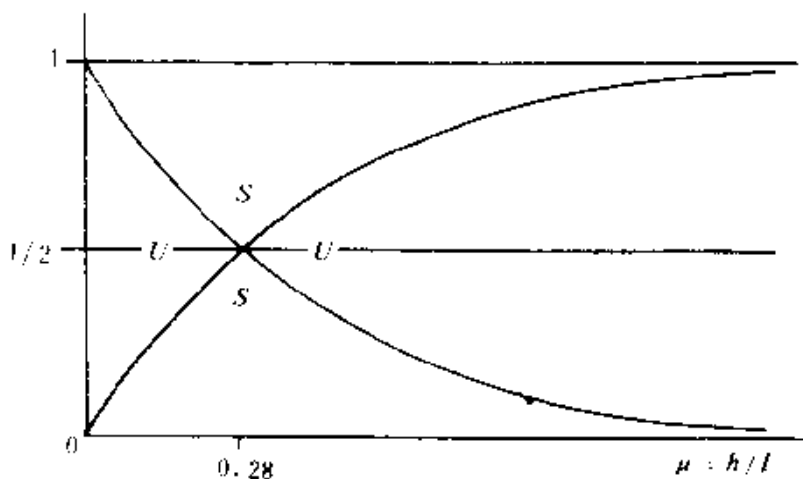
$$\mu_c = \frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \sqrt{2} \doteq 0.281 \quad (7.3.36)$$

时, 涡街对于所有波数 p 的扰动都是稳定的, 而对 $p = \frac{1}{2}$ 的扰动, 涡街是中性稳定的.

进一步研究表明, 如果考虑运动方程的二阶项, 即使满足线性稳定性的必要条件, 卡门涡街也呈现出弱不稳定性, 当用有限涡核的模型取代点涡模型时, 卡门涡街稳定性的必要条件与式 (7.3.36) 略有不同, 这时, μ_c 还将依赖于涡核的面积. 关于这方面研究的进展可以参见 Saffman (1988) 的述评.

7.4 点涡系的相似性解

本节先推导出点涡系运动相似性解的控制方程, 然后讨论点涡系的塌缩这一有趣现象, 并指出它在点涡系动力学研究中的

图7.8 卡门涡街在 $p-\mu$ 平面内的稳定性边界

重要作用。

所谓点涡系的相似性解是指：在运动过程中各个点涡之间的相互位置保持几何相似。

在二维点涡系的运动中，如果点涡的位置可以表示成

$$Z_\alpha = k_\alpha f(t), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (7.4.1)$$

将它代入点涡系运动方程(7.1.8)后，可以分解成以下两个方程

$$\mathcal{J} \frac{df}{dt} = C \quad (7.4.2)$$

$$Ck_\alpha = \frac{i}{2\pi} \sum_{\beta}^N \frac{\Gamma_\beta}{\bar{k}_\alpha - \bar{k}_\beta} \quad (7.4.3)$$

其中 $C = A + iB$ 是一个复常数，与点涡系的运动方式有关，方程(7.4.2)、(7.4.3)的解称为无界域中点涡系运动的相似性解。

当初始条件 $f(0) = 1$ 时，方程(7.4.2)的解是

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2At+1} \exp\left[\frac{iB}{2A} \ln(2At+1)\right], & A \neq 0 \\ \exp(iBt), & A = 0 \end{cases} \quad (7.4.4)$$

在以上相似性解中,当 $A=B=0$ 时, $f(t)=1$, 点涡系的位置不随时间而变化; 当 $A=0, B \neq 0$ 时, 点涡系作刚体式转动而不改变其形状. 这里我们着重考虑 $A \neq 0$ 的情况. 从式(7.4.4)可以看到, 随着时间的进程, 当 $t=-A/2$ 时, 会出现 $f(t)=0$ 的情况. 这说明, 在一定条件下, 点涡系的各个点涡可以会聚到同一个点上. 这一现象称为点涡系的**塌缩**(collapse).

现在我们来研究三点涡系统的塌缩问题, 这是一个著名的例子, 在研究点涡系动力学的定性特性中有特殊意义.

由式(7.1.3)和(7.1.4)可推出下列关系

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} r_{\alpha\beta}^2 = \sum \Gamma_{\alpha} M - (G_x^2 + G_y^2) = \text{常数} \quad (7.4.5)$$

其中 $r_{\alpha\beta}^2 = (x_{\alpha} - x_{\beta})^2 + (y_{\alpha} - y_{\beta})^2$ 代表第 α 和第 β 个点涡之间的距离. 当塌缩发生时, 所有点涡间的距离收缩为零, 即 $r_{\alpha\beta}=0$, 由此可知, 塌缩的一个必要条件是式(7.4.5)中的常数为零. 特别是, 对于三个点涡有

$$\Gamma_1 \Gamma_2 r_{12}^2 + \Gamma_2 \Gamma_3 r_{23}^2 + \Gamma_1 \Gamma_3 r_{13}^2 = 0 \quad (7.4.6)$$

另外, 点涡的强度和初始位置决定着点涡系的运动, 对于三个点涡而言, 其强度的调和平均值

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_3} \right) \quad (7.4.7)$$

是一个重要的参数. 可以证明: 在三点涡系统中出现塌缩的另一个必要条件是 $h=0$ (参见 Aref 1979), 即

$$\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_3} = 0 \quad (7.4.8)$$

例如, 取满足条件(7.4.8)的一组点涡强度 $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = (2, 2, -1)$. 相应地满足式(7.4.6)的这些点涡的初始位置是 (参见 Kimura, 1988)

$$\left. \begin{aligned} Z_1 = x_1 + iy_1 &= \frac{3 + \sqrt{3} \cos \theta}{6} l + i \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{6} l \\ Z_2 = x_2 + iy_2 &= \frac{3 - \sqrt{3} \cos \theta}{6} l + i \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{6} l \\ Z_3 = x_3 + iy_3 &= \frac{2\sqrt{3} \cos \theta}{3} l - i \frac{2\sqrt{3} \sin \theta}{3} l \end{aligned} \right\} \quad (7.4.9)$$

其中 $l = |Z_1 - Z_2|$. 将上式代入式(7.4.3), 得到

$$A = \frac{-6 \sin 2\theta}{(5 - 3 \cos 2\theta)l}, \quad B = \frac{18 - 6 \cos 2\theta}{(5 - 3 \cos 2\theta)l} \quad (7.4.10)$$

从式(7.4.4)即可确定该三点涡系统发生塌缩的时间为

$$t = \frac{5 - 3 \cos 2\theta}{12 \sin 2\theta} l^2 \quad (7.4.11)$$

其条件是初始时刻的点涡位置满足 $\sin 2\theta > 0$. 当 $\sin 2\theta = 0$ 时, 从式(7.3.4)可知三点涡系作刚体式旋转; 当 $\sin 2\theta < 0$ 时, 三点涡系将作自相似膨胀(self-similar expansion)运动.

不失一般性, 适当选取坐标系使点涡 Γ_1 和 Γ_2 的初始位置为 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$, 则满足条件(7.4.6)和(7.4.8)的第3个点涡的初始位置为

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} + \sqrt{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2}} l \cos \theta \\ y_3 &= \sqrt{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2}} l \sin \theta \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

其中 $l = |x_2 - x_1|$. 这是一个以 Γ_1 和 Γ_2 的涡心为圆心,

$\sqrt{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2}}$ 为半径的圆周(见图7.9). 当 Γ_3 位于图中 P_1, P_2, P_3

和 P_4 的任一位置时, 点涡系作刚体式旋转. 这里 P_1 和 P_3 是点涡 Γ_1 和 Γ_2 连线延长线与圆周的交点, P_2 和 P_4 是点涡 Γ_1 和 Γ_2 连线垂

直平分线与圆周的交点。当点涡 Γ_3 的初始位置位于圆弧 P_1P_2 和 P_3P_4 上时, 点涡系的运动会发生自相似塌缩; 当点涡 Γ_3 的初始位置位于圆弧 P_1P_4 和 P_2P_3 上时, 点涡系的运动导致了自相似膨胀 (参见 Aref, 1979). 图 7.10 给出了三点涡系作自相似运动时某一段时间间隔内的迹线。

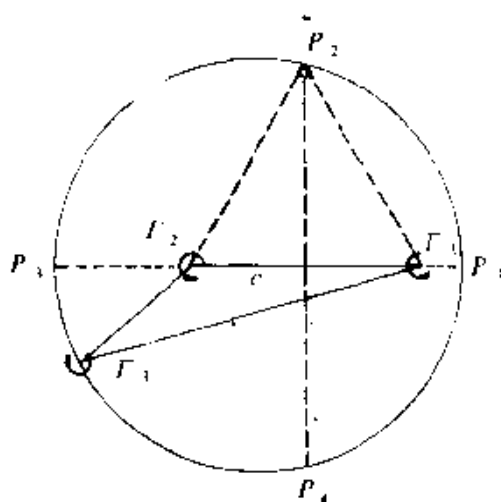


图 7.9 Γ_3 位于不同位置时三点涡系可分别作旋转, 膨胀和塌缩运动

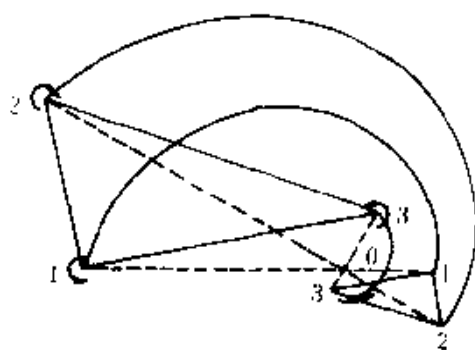


图 7.10 三点涡系自相似运动

点涡系塌缩现象的发生表明在一般情形下可能产生奇点, 这就排除了对于所有初始条件和所有时间, 都能给出关于点涡系运动方程 (7.1.8) 的存在性和唯一定理的可能性. 这是点涡系运动的定性特性中的一个重要性质. 从这点出发, 在下一节中我们将进一步讨论点涡系运动的可积性和不可积性, 以及由此出现的混沌行为.

7.5 点涡系的混沌

本节首先说明点涡系是一个哈密顿系统, 然后介绍作为哈密

顿系统的点涡运动的混沌行为. 这是当今涡动力学理论研究的热点之一.

7.5.1 点涡系的哈密顿(Hamilton)系统

早在基尔霍夫(Kirchhoff)年代就知道, 可以把点涡系的运动方程用一个哈密顿函数来表示^[9]. 近年来, 它又成为人们关注的焦点之一, 其原因在于: 随着非线性动力系统理论的发展, 哈密顿系统的混沌行为是混沌学说的一个重要组成部分. 流体力学家们还希望从这里找到湍流机理研究的新途径.

首先我们来推导无界域中点涡系的哈密顿函数.

在无穷远处静止的流体中点涡系的运动方程是式(7.1.8). 对式(7.1.8)两边乘以 Γ_a 得到

$$\Gamma_a \frac{d\bar{Z}_a}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_a \Gamma_j}{Z_a - Z_j} = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \Gamma_a \Gamma_j \frac{\partial}{\partial Z_a} \ln(Z_a - Z_j) \quad (7.5.1)$$

于是, 我们可以引入函数

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_a \sum_j \Gamma_a \Gamma_j \ln |Z_a - Z_j| \quad (7.5.2)$$

则式(7.5.1)可以写成

$$\Gamma_a \frac{d\bar{Z}_a}{dt} = 2i \frac{\partial H}{\partial Z_a} \quad (7.5.3)$$

利用 $\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, 式(7.5.3)的实部和虚部分别为

$$\Gamma_a \frac{dx_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_a}, \quad \Gamma_a \frac{dy_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_a} \quad (7.5.4)$$

若记 $q_a = \sqrt{|\Gamma_j|} x_a$, $p_a = \sqrt{|\Gamma_a|} \text{sign}(\Gamma_a) y_a$, 上式又可改写成

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_a} \quad (7.5.5)$$

这正是正则形式的哈密顿方程, q_a 相当于点涡系的广义坐标, p_a

相当于广义动量,故 H 称为点涡系的**哈密顿函数**. 从式(7.1.6)可知哈密顿函数表示了流体总动能中与点涡分布相对位置有关的那部分动能.

当有固壁存在或有背景流动的情形下,哈密顿函数的形式要比式(7.5.2)复杂. 我们现在来推导它的一般形式. 在一般情形下,流动的复速度势由下列几部分叠加组成:(1)由边界运动或循环常数产生的无旋流动的复速度势;(2)点涡系的复速度势;(3)镜象涡系产生的复速度势. 它的一般形式可写成

$$W(Z) = f(Z) + \sum_j^N \Gamma_j G(Z, Z_j) = \varphi + i\psi \quad (7.5.6)$$

式中 $f(Z)$ 是边界运动的无旋流部分, G 称为广义格林函数. 我们知道,在无界流体中,

$$G = \frac{1}{2\pi i} \ln(Z - Z_0)$$

它是无旋流动的一个基本解,或称格林函数. 当有固壁存在时,满足边界条件的格林函数的具体形式虽然不一定知道,但它的一般形式可写成

$$G(Z; Z_j) = \frac{1}{2\pi i} \ln(Z - Z_j) + g(Z; Z_j) \quad (7.5.7)$$

其中函数 g 应是 Z 的单值解析函数. g 可看成是由于边界而引起的镜象涡系的复速度势. 在边界上 G 应满足 $\text{Im}(G) = 0$ 条件,即 G 的虚部为零,这表明由点涡系及其镜象涡系的综合诱导作用总是使边界成为一条流线.

在式(7.5.6)中对 Z 取微商并在 $Z = Z_0$ 处取值,再以 Γ_0 遍乘各项,得到

$$\begin{aligned} \Gamma_0 \frac{d\bar{Z}_0}{dt} &= \Gamma_0 \frac{d}{dZ} (W - \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(Z - Z_0))_{Z=Z_0} \\ &= \Gamma_0 \frac{df(Z_0)}{dZ} + \sum_{j=1}^N \Gamma_0 \Gamma_j \frac{\partial G(Z_0; Z_j)}{\partial Z_0} + \Gamma_0^2 \left. \frac{\partial g(Z; Z_0)}{\partial Z} \right|_{Z=Z_0} \end{aligned} \quad (7.5.8)$$

由上式可知,相应的哈密顿函数应定义成

$$H = \text{Im} \left[\sum \Gamma_a f(Z_a) + \frac{1}{2} \sum_{a \neq \beta} \sum \Gamma_a \Gamma_\beta G(Z_a; Z_\beta) + \frac{1}{2} \sum \Gamma_a^2 g(Z_a; Z_\beta) \right] \quad (7.5.9)$$

对此可以直接验证,即将式(7.5.9)代入后,式(7.5.8)仍旧可以写成式(7.5.3)或式(7.5.5)的形式.

例如,对于圆外的点涡运动,由圆定理(见7.1节例5)即可确定广义格林函数,其中

$$g(Z; Z_\beta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{Z}{Z - a^2/\bar{Z}_\beta}$$

由此可写出相应的哈密顿函数.

哈密顿正则方程还可写成泊松括号(Poisson bracket)的形式,它的定义是

$$[f, g] = \sum_j \frac{1}{\Gamma_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \quad (7.5.10)$$

利用泊松括号,运动方程(7.5.4)可改写为

$$\frac{dx_a}{dt} = [x_a, H], \quad \frac{dy_a}{dt} = [y_a, H] \quad (7.5.11)$$

由此可看出,利用泊松括号只不过是一种书写形式,但是,我们之所以要引进它,因为用它来讨论哈密顿系统的可积性特别方便,这在下面我们会看到这点.

7.5.2 不可积性和混沌

所谓混沌(chaos),是非线性动力系统的一种通有的属性,即在确定性的动力系统中局限于有限相空间的高度不稳定的运动.它与传统意义上的随机现象的区别在于:发生混沌行为的控制方程和初值条件所构成的是个确定性问题,而随机运动只能在统计意义上确定;混沌行为对初值条件极端敏感,初始条件的微扰可以

导致解的运动迹线的本质变化. 混沌运动的短期行为是可以预测的, 但它的长期行为却是不可预测的; 而随机运动的短期行为是不可预测的, 但它对初始条件倒不敏感.

讨论哈密顿系统的混沌行为, 其核心是关于可积性(Integrability)的概念. 在式(7.5.5)中如果 p_i, q_i 每个有 N 个分量, 我们说这个哈密顿系统有 N 个自由度. 如果 H 是时间的显函数, 则系统的自由度多一个. 所谓可积性, 并不意味着我们要用已知函数来计算出它们的解, 而是表示这样一种能力, 即能够找出足够多的运动常数, 从而可以定性地预测在相空间内的运动. 而传统的经典力学所考虑的只是可积的运动方程. 在这里, 运动方程可以被完全分成与自由度一样多的独立方程组. 在十分理想的情形下, 可以求出它们的积分, 作为时间和初始条件的函数.

判断哈密顿系统的可积性, 是依据下述的刘维(Liouville)定理:

设有 N 个自由度的哈密顿系统, 如果存在 N 个线性独立的且互相对易的首次积分 $f_i = f_i(p, q)$, 即 $[f_i, f_j] = 0$. 这样的系统称为可积系统.

让我们用上述定理先来看看无界流体中的点涡系情形.

若某函数 f 是正则方程(7.5.5)的一次积分, 则必有 $[f, H] = 0$. 由于式(7.5.2)的哈密顿函数的对称性, 容易证明, 前面讲过的质量矩 G_x, G_y 和惯性矩 M 上是三个独立的一次积分.

$$[G_x, H] = 0, \quad [G_y, H] = 0 \quad (7.5.12)$$

$$[M, H] = 0 \quad (7.5.13)$$

式中 $G_x = \sum F_n x_n$, $G_y = \sum F_n y_n$, $M = \sum F_n (x_n^2 + y_n^2)$ 是三个积分常数, 同时, 因为 $[H, H] = 0$, H 又不显含时间 t , 故 H 本身也是个一次积分.

我们还可发现, 上述一次积分中 M 和 G_x (或 M 和 G_y) 是对易的, 即

$$[M, G_x] = 0, \quad (\text{或} [M, G_y] = 0) \quad (7.5.14)$$

但是, G_x 和 G_y 却不是对易的:

$$[G_x, G_y] = \sum_i^N \Gamma_i \quad (7.5.15)$$

由此我们可以知道, 对于无穷远处静止的无界流体中的点涡系, 存在三个独立的且互相对易的一次积分. 对于某个二点涡系, 只需要知道质量矩这一个积分就足以确定它们的运动, 因此是完全可积的. 对于某个三点涡系, 也是可积的. 系统可积的阈值数是 $N_c=3$. 当 $N_c>3$ 以后, 一般情形下是不可积的, 此时混沌将不可避免.

当有边界或外部背景流动存在, 一次积分的数目会减少, 可积情形的阈值数也随之减少. 业已发现, 半平面或圆边界中阈值数 $N_c=2$. 对于一般边界而言, 阈值数可能只有 $N_c=1$.

为了说明点涡系的混沌行为, 下面举一个例子.

7.5.3 半圆内两个点涡的运动

Kimura(1988)研究了半圆内两个点涡的运动.

一般说来, 在一个圆内的两个点涡运动是可积的, 可以证明这时的两个独立的首次积分是 H 和 M :

$$4\pi H = \sum \Gamma_j^2 \ln(1 - Z_j \bar{Z}_j) + \sum \sum \Gamma_i \Gamma_j \ln \frac{|1 - Z_i \bar{Z}_j|}{|Z_i - Z_j|}$$

$$M = \frac{1}{2} \sum \Gamma_j Z_j \bar{Z}_j$$

因此存在 $[M, H]=0$.

当边界变成半圆时, 因为失去了对原点的旋转对称, M 不再是首次积分. 若两个点涡位于 Z_1 和 Z_2 处, 由镜像法知要有 8 个点涡才能消去边界影响 (图 7.11). 不失一般性, 可取圆半径 $r=1$ 及 $\Gamma_1=1, \Gamma_2=-1$ 情况来研究.

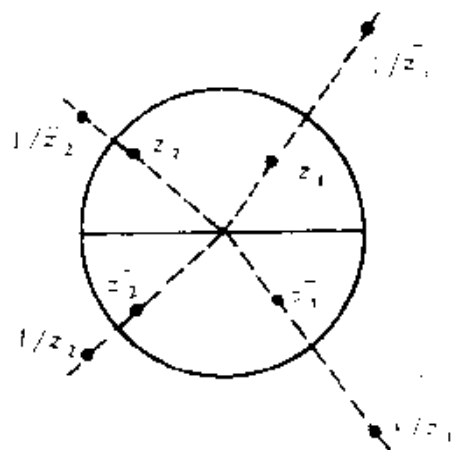


图7.11 半圆内两个点涡及其镜像涡

在数值模拟之前应先找出某些特解,如平衡点或周期性轨道等.在本情况中,存在两组平衡点:一组是稳定的,在 $F_1(r_1, \theta_1) = [(\sqrt{17}-4)^{1/4}, \pi/4]$ 和 $F_2(r_2, \theta_2) = [(\sqrt{17}-4)^{1/4}, \frac{3}{4}\pi]$ 处;另一组是不稳定的,在点 $(r_1, \theta_1) = (0.75264 \dots, \frac{\pi}{2})$ 和 $(r_2, \theta_2) = (0.25578 \dots, \frac{\pi}{2})$ 处.我们把初始涡中的一个放在 $F_1(r_1, \theta_1)$ 处,另一个涡的初始位置则分别放在 a, b, \dots, f, g 处(见图7.12).然后用四阶 Runge-Kutta 方法积分运动方程,要保证能量 $E = \exp(-8\pi H)$ 精确到八位有效数字.

计算结果表明,点涡运动可分辨出四种不同类型的轨迹:

(1)双周期性轨迹

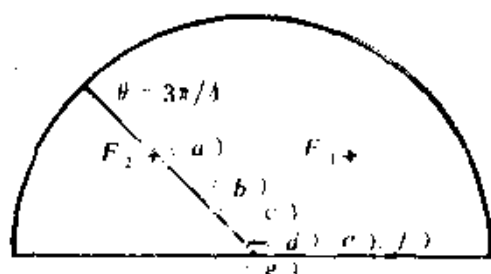
P_1 : 围绕固定平衡点运动,平衡点位于

$$Z_{1c} \cdot Z_{2c} = \pm (\sqrt{19}-4)^{1/4} \exp(\pm \pi i/4)$$

见图7.13(a).

P_2 : 绕半圆内的单个涡的平衡轨迹.

该平衡轨迹为

图7.12 点涡的平衡点(F_1, F_2)和初始位置

$$(r - \frac{1}{r})^2 + 4\sin^2\theta = cr^2(r - \frac{1}{r})^2\sin^2\theta$$

此类情况见图7.13(b).

(2)混沌性轨迹

C_1 : 分开涡对的“摇摆”(Wobbling)型, 见图7.13(c).

C_2 : “弹子”型(Billiard)轨迹. 初始时两个涡很接近, 一对涡作直线运动, 碰壁后分开, 每个涡各自与其镜像涡配对沿壁面反向运动, 再次相遇后又一次配对, 从壁面出发作直线运动, 如此相遇又分开, 其轨迹充满了整个半圆(图7.13(d)).

从上例可见, 点涡可以从一种规则运动态, 中间经过混沌阶段, 又进入另一种规则态. 从能量上区别, 当 $T \leq 114$, 是前一种(P_1)双周期运动; $T \geq 383$, 是 P_2 型双周期运动; $114 \leq T \leq 383$ 是不规则混沌态. 而且可以发现, 从 P_2 变成 C_1 是非常急剧的, 初始半径仅有微小改变(约 $10^{-3}\%$).

这个例子表明, 用极少的点涡得到了混沌. 当 N 很大时, 点涡系的混沌性质与湍流有很多相似之处. 但是, 因为湍流是流体强三维的非定常运动, 用二维点涡模拟不免存在着固有的缺陷. 尽管如此, 当前点涡系的混沌的研究仍在发展之中. 有兴趣的读者不妨关心其最新动态.

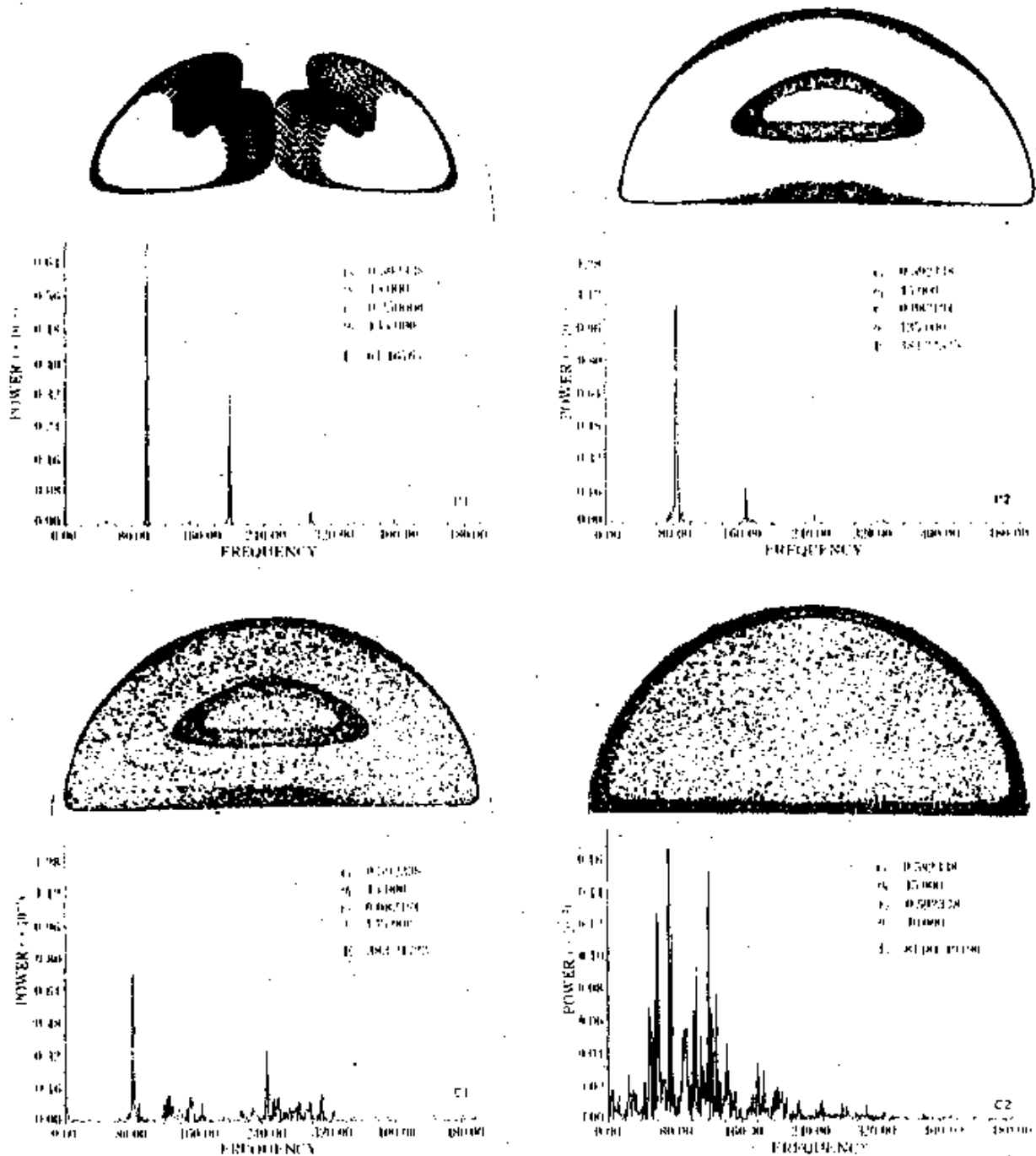


图7.13 点涡对的轨迹及其功率谱

第八章 旋转系统中的流体运动

8.1 引言

本章叙述流体在旋转系统中流动(或简称旋转流体运动)的规律.

众所周知,地球就是一个匀速旋转系统,地球上的大气层和海洋都是它表面的一薄层流体,因此学习本章的基础知识有助于理解大气和海洋的运动现象.此外,要解决叶轮机以及旋转容器等工程问题,也需要这方面的理论知识.以下的叙述限于不可压缩流体,侧重于地球流体力学的范畴.

设某系统以匀角速度 Ω 旋转,则该系统中的流体因旋转系统的牵连运动而产生一个均匀的涡量场,其涡量等于 2Ω ,称为行星涡量场.此外,还要叠加一个因流体相对于该系统运动的相对运动流场.

人们发现,由于行星涡量场的存在,流体运动将呈现若干新的现象.在本章中将要讲到的有:(1)地转流动的二维性;(2)旋转平面上的流体边界层是 N-S 方程的精确解;(3)受扰动的旋转流体具有伪弹性,会出现剪切波和波动现象.产生这些新现象的原因是旋转流体运动中存在科氏力(Coriolis force)的作用.

8.1.1 旋转流体中的科氏力和离心力

旋转参考系中质点的加速度(用下标 R 表示)与惯性参考系中该质点的加速度(用下标 I 表示)之间的关系为

$$a_I = \left(\frac{dV}{dt}\right)_I = \left(\frac{dV_R}{dt}\right)_R + 2\Omega \times V_R + \Omega \times (\Omega \times r) + \frac{d\Omega}{dt} \times r \quad (8.1.1)$$

其中等式左边是惯性参考系中的绝对加速度;等式右边的第一项为相对加速度,第二项为科氏加速度,第三项是向心加速度,第四项为转动(切向)加速度.对于匀速旋转系统,切向加速度等于零.

将式(8.1.1)代入不可压缩流体的 N-S 方程(1.3.3)中,得到

$$\left(\frac{dV_R}{dt}\right)_R = -2\Omega \times V_R - \Omega \times (\Omega \times r) + f - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 V_R \quad (8.1.2)$$

在上式中已利用了等式 $\nabla^2 V_I = \nabla^2 V_R$,这是由于

$$V_I = V_R + \Omega \times r$$

我们发现,在匀速旋转参考系中写出的动力学方程(8.1.2)中,多出了两项,即

$$(1) \quad f_c = -2\Omega \times V_R \quad (8.1.3)$$

它表示作用于单位质量流体微团上的科氏力;

$$(2) \quad f_c = -\Omega \times (\Omega \times r) = \Omega^2 r_1 \quad (8.1.4)$$

此处 r_1 为从旋转轴到某流体微团的垂直距离矢量(图8.1). f_c 表示作用于单位质量流体微团上的离心力.离心力是一种保守力,可以写为

$$f_c = \nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 r_1^2 \right) \quad (8.1.5)$$

在本章中,我们都是在旋转参考系中研究问题,所涉及的都是相对运动,为简便计,以下均略去下标 R . 于是方程(8.1.2)可表示为

$$\frac{dV}{dt} = f_c + f_c + f - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 V \quad (8.1.6)$$

对于地球上的流体运动(图8.1),由于纬度 φ 的不同,当地旋转角速度的分量 Ω_φ 是变化的,即

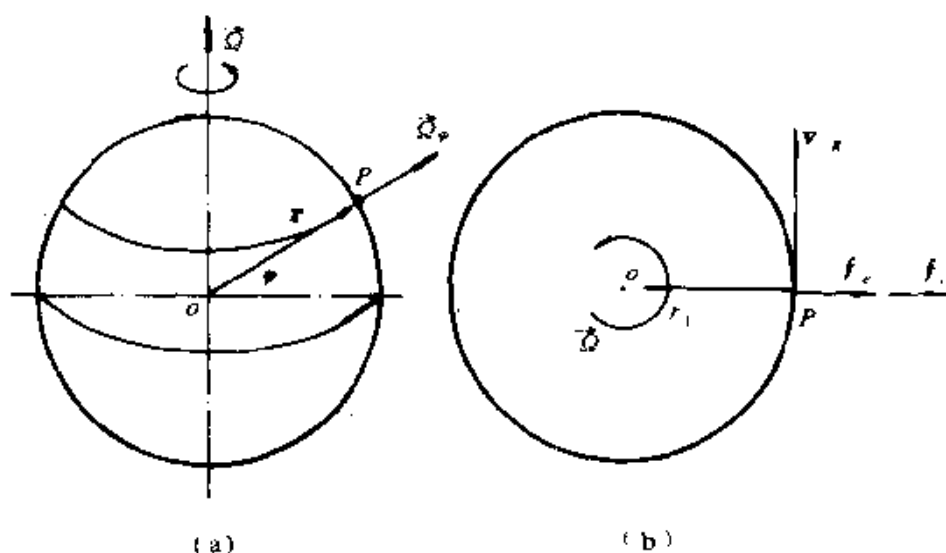


图8.1 (a)地球旋转坐标系 (b)相对速度、科氏力和离心力示意图

$$\Omega_\varphi = \Omega \sin\varphi \quad (8.1.7)$$

设 V_φ 为相对速度在当地水平面上的分量, 则作用于单位质量流体的科氏力在当地水平面上的分量为

$$(f_c)_\varphi = 2\Omega V_\varphi \sin\varphi \quad (8.1.8)$$

式中的 $2\Omega_\varphi$ 定义为科氏参数 (Coriolis parameter) k_c , 即

$$k_c = 2\Omega \sin\varphi \quad (8.1.9)$$

关于科氏力 f_c 的方向, 在北半球, 是作用于流体相对速度 V 之右方, 成 90° , 见图 8.1(b). 因此科氏力使流体运动速度不断改变方向, 但所作之功等于零.

由此不难解释大气中的气旋和反气旋的成因. 如果地面上某处因局部高温引起气流上升, 出现低压, 其周围地区即有气流向该处汇集, 由于科氏力的作用, 这些气流不断向右偏转 (是指北半球), 于是形成了气旋 (图 8.2a). 当该处上升气流到达上空后, 又形成局部高压区, 产生气流流向周围区域, 同样由于科氏力的作用

而形成了反气旋(图8.2b). 因此低压区产生气旋, 高压区产生反气旋, 两者成对出现(图8.2c)

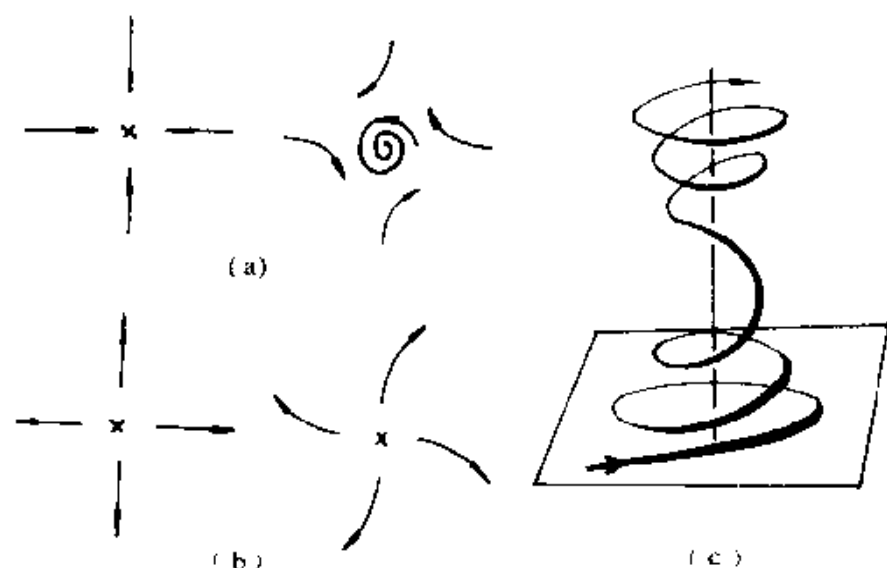


图8.2 北半球的气旋示意图。

(a)气旋; (b)反气旋; (c)气旋和反气旋并存

8.1.2 分层流体中的浮力效应

地球上的大气和海洋都是弱分层流体, 其密度 ρ 随高度而变化. 尽管它们的流速远小于声速, 可以当作不可压缩流体, 但是其密度的不均匀分布仍需在方程中给予反映. 为此, 我们设

$$\rho = \rho_0(1 + \sigma), \quad \sigma \ll 1 \quad (8.1.10)$$

其中 ρ_0 为参考密度, 例如可以取平均密度; σ 是密度的相对变化, 即

$$\sigma = \Delta\rho/\rho, \quad \Delta\rho = \rho - \rho_0 \quad (8.1.11)$$

根据布辛涅斯克近似(Boussinesq approximation): 密度的微小变化, 对流体运动方程中的惯性项和粘性项不产生影响, 唯一的影响体现在所产生的浮力上; 再有, 假定密度变化 σ 与温度变化存在线

性关系,即

$$\sigma = -\alpha \Delta T \quad (8.1.12)$$

其中 α 是流体的膨胀系数,对于完全气体, $\alpha = 1/T$.

现将式(8.1.10)代入方程(8.1.6),并且将式中的单位质量彻体力 f 写成重力加速度 g ,得

$$\frac{dV}{dt} = f_c + f_g + (1 + \sigma)g - \nabla\left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \nu \nabla^2 V \quad (8.1.13)$$

其中重力和离心力都是保守力,重力可写为

$$g = -\nabla \Pi \quad (8.1.14)$$

此处 Π 为重力场的势能. 将式(8.1.5)和(8.1.14)代入方程(8.1.13),有

$$\frac{dV}{dt} = f_c + \sigma g - \nabla\left(\Pi - \frac{1}{2}\Omega^2 r_1^2 + \frac{p}{\rho_0}\right) + \nu \nabla^2 V \quad (8.1.15)$$

式中的 σg 即为由于密度变化而产生的浮力.

为了讨论浮力对涡旋生成的作用机理,我们在方程(8.1.15)的右边只保留一项浮力,然后对等式两边作旋度运算,在不可压缩流体的条件下,其结果为

$$\text{helm } \omega = \frac{d\omega}{dt} - (\omega \cdot \nabla)V = \nabla \sigma \times g \quad (8.1.16)$$

$$(1) \text{ 当 } \nabla \sigma // g \text{ 时, } \text{helm } \omega = 0; \quad (8.1.17)$$

$$(2) \text{ 当 } \nabla \sigma \text{ 与 } g \text{ 相交时, } \text{helm } \omega \neq 0 \quad (8.1.18)$$

我们知道,流体在静力平衡下,等压面与重力 g 正交. 对于上述第一个情形,是指密度梯度与重力平行,也就是等密度面与等压面重合,属于正压流体. 式(8.1.17)表明,在正压流体情况下,涡量不生不灭.

对于第二个情形,是指等密度面与等压面斜交,属于斜压流体,因此导致涡量生成.

在 1.3.2 节中, 我们对涡量动力学方程 (1.3.5) 中 $\nabla(\frac{1}{\rho}) \times \nabla p$ 项曾作过同样的讨论, 因此用浮力来表达, 只是不同的表达方式而已.

伯耶尔克内斯 (Bjerknes, 1898) 曾对环量动力学方程 (1.3.15) 中的

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{dp}{\rho}$$

作过流体的斜压性对速度环量变化的分析和计算, 称为**伯耶克内斯定理** (参见 [3] § 8.1). 我们这里对浮力生成涡旋的讨论, 实际上是这个定理的推论.

现举例说明季风的成因 (图 8.3). 在夏天, 陆地比海洋的温度高, 使大气中的等密度面与等压面斜交, 因出现热对流而生成涡旋, 其环流的方向按 $\nabla\sigma \times g$ 的方向决定. 于是就有季风从凉海吹向暖陆, 形成环流. 涡旋的生成率取决于 $\nabla\sigma \times g$ 交角的大小. 类似的例子诸如地球上中纬度地区吹向赤道的贸易风, 等等.

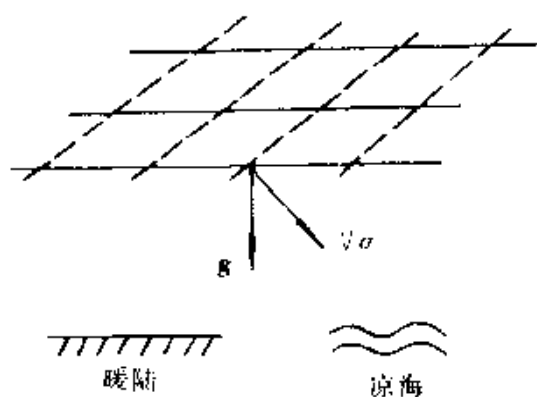


图 8.3 由于斜压性形成季风

8.2 基本方程

本节叙述旋转系统中流体运动的基本方程和流动相似性参数.

8.2.1 几种形式的基本方程

现在来导出在匀速旋转的参考系中,采用布辛涅斯克近似的流体所应满足的连续性方程、动力学方程和能量方程.

一、连续性方程

不可压缩流体相对于旋转参考系的连续性方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (8.2.1a)$$

对于平面流动,还可导出泊松方程,其形式与式(1.2.13)相同,即

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (8.2.1b)$$

二、动力学方程

原始变量形式的 N-S 方程已在前面导出,见式(8.1.15),即

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \sigma \mathbf{g} - \nabla \left(H + \frac{p}{\rho_0} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (8.2.2)$$

式中的离心力项 $\nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 r_0^2 \right)$ 贡献很小,故略去不计. 现将上式改写一个形式,由式(1.3.4)知,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

将它代入式(8.2.2),于是得旋转流体的 N-S 方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = - (2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{V} + \sigma \mathbf{g} - \nabla \left(H + \frac{p}{\rho_0} + \frac{V^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (8.2.3)$$

密度的相对变化 σ 是由温度差或盐浓度差引起的,它一般满足以下方程

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma = \chi \nabla^2 \sigma + \tilde{Q} \quad (8.2.4)$$

其中 χ 为扩散系数, \tilde{Q} 为由内部加热产生的源项. 为了简化问题, 上式可近似为密度变化在运动中守恒, 即

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma = 0 \quad (8.2.5)$$

对方程(8.2.3)的两边做旋度运算, 就得到旋转流体的涡量动力学方程.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = [(2\Omega + \omega) \cdot \nabla] \mathbf{V} + \nabla \sigma \times \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \omega \quad (8.2.6)$$

将方程(8.2.2)代入到加速度环量的关系式(1.2.4)中, 可导出旋转流体的环量动力学方程.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_C (2\Omega \times \mathbf{V}) \cdot \delta \mathbf{r} + \oint_C \sigma \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r} + \nu \oint_C (\nabla^2 \mathbf{V}) \cdot \delta \mathbf{r} \quad (8.2.7)$$

上列几种形式的动力学方程与惯性系中的相应方程相比, 其差别在于: 在旋转系统中要考虑科氏力和浮力的贡献. 关于科氏力和浮力的物理含意已在8.1节中作了阐述.

三、能量方程

将方程(8.2.3)的两边对 \mathbf{V} 取标积, 就得到旋转流体的能量方程.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right) = & -\nu \omega^2 + \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} \sigma \\ & - \nabla \cdot \left[\mathbf{V} \left(\Pi + \frac{p}{\rho_0} + \frac{V^2}{2} \right) + \nu (\omega \times \mathbf{V}) \right] \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

可以对上式在某个体积内积分, 以便理解其中各项的物理意义: 等式左边表示总动能的当地变化率; 等式右边第一项表示动能的粘

性耗散率;第二项表示浮力做的功率;第三项表示机械能的输入率. 为了便于理解第三项的具体含意,可将体积分变换为面积分,则方括号中的第一项表示机械能(势能、压力能和动能之和)流入的通量,其第二项表示切向粘性力所做的功率.

8.2.2 旋转流体的相似性参数

现将方程(8.2.6)写成无量纲化形式,为此引入由以下的特征量组成的量纲关系:

$$\omega = U\omega^*/L, \quad t = t^*/\Omega, \quad \Omega = \Omega k, \quad g = gk, \\ V = UV^*$$

其中带星号的量是无量纲量,于是导出了无量纲形式的旋转流体涡量动力学方程

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t} + Ro[(V^* \cdot \nabla^*)\omega^* - (\omega^* \cdot \nabla^*)V^*] \\ = 2k \cdot \nabla^* V^* - \frac{1}{Fr}(\nabla^* \sigma \times k + Ek \nabla^*{}^2 \omega^* \quad (8.2.9)$$

其中 Ro 称为罗斯比数(Rossby number), Ek 称为埃克曼数(Ekman number), Fr 称为旋转流体的弗劳德数(Froude number),它们的表达式为

$$Ro = U/\Omega L \quad (8.2.10)$$

$$Ek = \nu/\Omega L^2 \quad (8.2.11)$$

$$Fr = \Omega^2 L/g \quad (8.2.12)$$

下面分别说明它们的物理意义.

一、罗斯比数 Ro

现将式(8.2.10)写成以下形式

$$Ro = U/\Omega L \sim \frac{U^2/L}{\Omega U} \sim \frac{[\omega]}{[\Omega]}$$

可见罗斯比数的含意为

$$Ro \sim \frac{\text{相对运动的惯性力}}{\text{科氏力}} \sim \frac{\text{相对运动的涡量}}{\text{行星涡量}}$$

当 $Ro \ll 1$ 时, 这表示旋转效应起主宰作用, 旋转系统内相对运动的变化影响很小. 可以取极限 $Ro \rightarrow 0$, 将相对运动的变化略去不计.

当 $Ro \gg 1$ 时, 这表示旋转效应是微不足道的, 接近于惯性参考系中的流动规律.

地球表面上时间和空间的大尺度流动, 例如中纬度地区上空自西向东的西风带、大气低压系统、台风、海洋环流等, 都属于小罗斯比数情况, 科氏力起着主宰作用. 不妨来估算一下大气低压系统的 Ro 数量级. 取纬度 30° 处的科氏参数 k_c 作为特征涡量 Ω , 这里的 $k_c \sim 10^{-4} 1/s$; 对流层中风速 U 约为 $10 m/s$; 低压系统的特征长度约为 $10^3 km$, 由此可算出 $Ro \sim 10^{-1}$.

参考书[7]列举了地球上若干流动现象的 Ro 数量级, 见表 8.1.

表 8.1 罗斯比数估算举例

流动现象	特征长度 L	特征速度 U	Ro 数量级
浴缸涡	1 cm	0.1 m/s	10^5
尘卷	3 m	10 m/s	3×10^4
龙卷风	50 m	150 m/s	3×10^4
台风	500 km	50 m/s	1
低压系统	1,000 km	10 m/s	10^{-1}
海洋环流	3,000 km	1.5 m/s	5×10^{-3}

一般认为, 需要计入地效转应的临界 Ro 数约为 10^4 .

二、埃克曼数 Ek

将式(8.2.11)写成如下形式:

$$Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2} \sim \frac{\nu U / L^2}{\Omega U} \sim \frac{U / \Omega L}{U L / \nu}$$

可见埃克曼数的含意为

$$Ek \sim \frac{\text{粘性力}}{\text{科氏力}} \sim \frac{Ro}{Re}$$

地球上的时间和空间大尺度流动,除了靠近地面的流层中粘性力比较显著以外,都属于 $Ek \ll 1$ 情况. 以海洋环流为例,纬度 30° 处的科氏参数量级为 $k_c \sim 10^{-4} 1/s$,海水的运动粘性系数 $\nu \cong 10^{-2} \text{cm}^2/s$,尺度 $L \cong 10^3 \text{km}$,可估算出 $Ek \sim 10^{-14}$. 即使 ν 采用湍流粘性系数之值, Ek 数仍然很小. 这表明,在地面边界层以上,这些流动都可按无粘流处理.

三、旋转流体的弗劳德数 Fr

式(8.2.12)可写为

$$Fr = \frac{\Omega^2 L}{g} \sim \frac{\Omega U}{g}$$

由此知弗劳德数的含意为

$$Fr \sim \frac{\text{科氏力}}{\text{重力}}$$

在地球流体力学问题中,重力的作用是重要的,因此 Fr 数一般比较小. 但是旋转流体的科氏力通常是不宜忽略的,所以 Fr 数不宜取极限值.

8.3 地转流动

上一节已讲到,当旋转流体中的旋转效应十分显著时,罗斯比数和埃克曼数都很小: $Ro \ll 1$, $Ek \ll 1$. 现在我们定义一种简化的理想流动,称为地转流动(Geostrophic flow),在这种流动中, $Ro \rightarrow 0$, $Ek \rightarrow 0$,这表示旋转系统中流体的相对运动变化及其粘性作用都可略去不计. 于是方程(8.2.2)简化为

$$2\Omega \times V = \sigma g = \nabla(H + p/\rho_0) \quad (8.3.1)$$

或者改写为

$$2\Omega \times V = (1 + \sigma)g - \nabla p / \rho_0 \quad (8.3.2)$$

这就是地转流动方程。

需要说明,它是一个数学上退化的方程,比原来的基本方程(8.2.2)低一阶,它不可能给出满足所有边界条件和初始条件的解。其结果是:地转流动不能单独存在作为整个旋转流场之解,它只可能与非地转流动同时并存,也就是说,地转流动只存在于符合其相应限制条件的某些局部流场。

8.3.1 大气层中的地转流动近似

现在来研究高纬度地区大气层在等高面(即当地的水平面)的地转流动规律

前面曾说过,大气层的等高面就是等压面,这是从总体上分析问题时的近似论断。但是作局部分析时,由于不存在流体的静力平衡条件,等压面与等高面是相交的,因此在等高面上存在一族等压线(图8.4)。

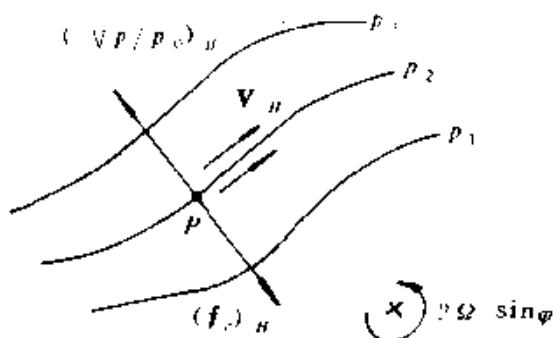


图8.4 大气层等高面上地转风示意图

首先,将地转流动方程在等高面上投影,得

$$(-2\Omega \times V)_H = \left(\frac{\nabla p}{\rho_0}\right)_H \quad (8.3.3)$$

这表示,在等高面上科氏力与压力梯度作用力两者的水平分量应满足二力平衡条件.

然后,将方程(8.3.3)应用于分析给定等压线族如图示的平面定常流场.根据给定的等压线图确定 $\nabla(p/\rho_0)_H$.于是科氏力分量 $(f_c)_H$ 随之而定,最后大气风速的水平分量 V_H 的大小和方向都可求出.人感兴趣的是:大气层等高面上的等压线就是气流的流线(也是迹线).这就是传统的天气分析的理论基础.

8.3.2 泰勒-普劳德曼(Taylor-Proudman)定理

根据地转流动的假定 $Ro \rightarrow 0, Ek \rightarrow 0$,将方程(8.2.6)简化为

$$(2\Omega \cdot \nabla)V + \nabla\sigma \times g = 0 \quad (8.3.4)$$

设流体是均密度的, $\nabla\sigma=0$,则上式再简化为

$$2\Omega \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (8.3.5)$$

该式说明流速 V 与旋转轴的高度无关.这就是著名的**泰勒-普劳德曼(Taylor-Proudman)定理**:由于旋转效应起主宰作用,均密度无粘流场与沿转轴的纵向坐标无关,具有二维流动特性.

对于上述结论,泰勒(1921)和后来一些学者都做了实验验证.他用一个旋转圆筒,其中装满了水,由泵压系统不断从筒顶沿周向注入水,并从筒底不断放水,以保持筒中的水有相对运动.他在筒中放一短的固体柱或一圆球,可以在横向或沿纵向移动.在短柱与筒顶的中间某水平截面上放置几个染色源,如图8.5所示.他惊奇地发现,在短柱的上下实际上连着一根纵向水柱,后人称之为**泰勒流体柱**,跟随着短柱一起横向移动,柱外染色液流不进这根水柱之内,柱内的染色液也流不出柱外(见图8.5a).另外,还可在筒底放上染色液,(见图8.5b).如果将圆球往上提升,则会看到,在圆

球下面有一根染色液柱随着圆球上移. 这样, 泰勒流体柱的实验证实了均密度流体地转流动的二维性质. 但是正如前面已指出的, 筒中的地转流动必定与非地转流动同时存在, 相互作用, 因此筒中的详细流动结构是十分复杂的, 相当多的实验旨在探索这一复杂流场的规律.

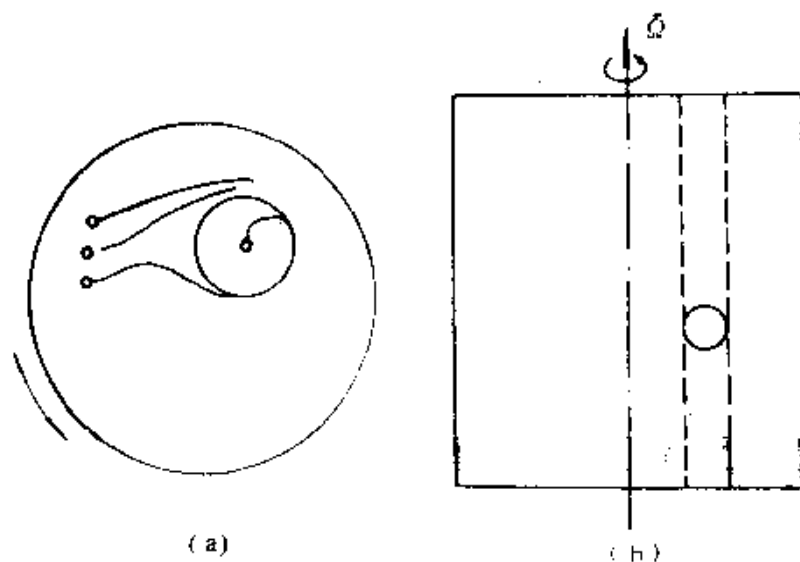


图8.5 泰勒流体柱示意图

(a) 顶视图 (b) 侧视图

8.3.3 热成风

我们再回过头来讨论地转流动方程(8.3.4). 对于斜压流体, $\nabla\sigma \times g$ 是不等于零的. 现取 z 轴向上, 与 Ω 方向一致, 建立一个直角坐标系, $V = (u, v, w)$, $g = (0, 0, -g)$, 则方程(8.3.4)可写成三个分量形式

$$2\Omega \frac{\partial}{\partial z}(u, v, w) = g\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}, -\frac{\partial \sigma}{\partial x}, 0\right) \quad (8.3.6)$$

式中前两个分量方程就是**热成风方程**,它建立了水平面内的地转流速在铅垂方向的变化率与密度梯度的水平分量之间的关系.

所谓热成风,是指大气因受热不均形成密度梯度,成为斜压流体,引起了大气的热对流.在8.1节末我们介绍了季风的成因,这就是热成风的例子.它的控制方程就是式(8.3.6).

我们还可以将方程(8.3.6)与方程(8.2.5)联立起来.在定常等熵的条件下导出

$$2\Omega\left(\frac{\partial}{\partial z}(v/u)\right) = \frac{g\omega}{u^2 + v^2} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (8.3.7)$$

式(8.3.6,7)两式表明,当铅垂方向的密度梯度大时,水平面内流速大小在该方向的变化甚快,但是速度方向的变化却很缓慢.

热对流是除了旋转效应以外,引起大气和海洋运动的另一种机制.热对流会生成新的相对涡量,但是方程(8.2.4)表明,这些相对涡量可以通过 $(2\Omega \cdot \nabla)V$ 所表示的涡管伸缩和弯曲来加以抵销.正由于这样,地球上的时间和空间都是大尺度的流动方可维持小 Ro 数的条件,即相对涡量总是远小于行星涡量.

8.4 埃克曼(Ekman)层

地转流动这一简化模型在靠近旋转壁面时失效,因为粘性力显著, Ek 数不再是小量.这就必须在地转流动方程(8.3.2)中加上粘性力项,即

$$2\Omega \times V = (1 + \sigma)g - \nabla p/\rho_0 + \nu \nabla^2 V \quad (8.4.1)$$

现取坐标系如图8.6所示.先作一个假定: $V(u, v, w) = V(z)$, 即速度矢量仅与坐标 z 有关,而与 x 和 y 无关.这样,根据连续性方程(8.2.1a),导出 $w = 0$, 即流动是二维性质的.

据此,将方程(8.4.1)写为以下的分量形式

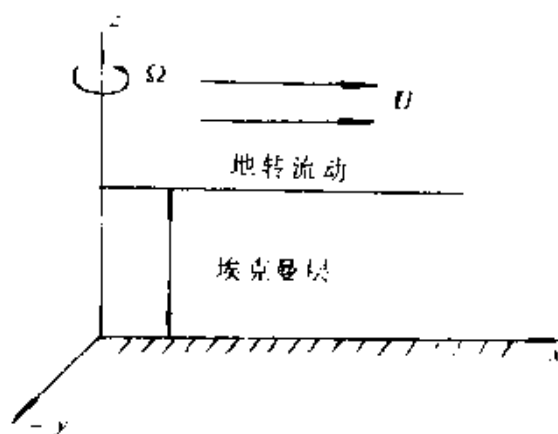


图8.6 埃克曼层

$$-2\Omega v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8.4.2a)$$

$$2\Omega u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (8.4.2b)$$

$$(1 - \sigma)g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8.4.2c)$$

其边界条件为

$$z = 0, \quad u = v = 0; \quad (8.4.3a)$$

$$z \rightarrow \infty, \quad u = U, \quad v = 0 \quad (8.4.3b)$$

其中 U 为地转流动的速度.

先对式(8.4.2c)分别取对 x 和 y 的偏导数,有

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (8.4.4)$$

由此可见,粘性层中水平面上的压力梯度与 z 无关,其值可从粘性层外的地转流动方程中得到.为此,写出地转流动方程的分量形式

$$\begin{aligned} -\Omega v &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 2\Omega u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

将边界条件(8.4.3b)代入上式,即解出

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= 2\Omega U \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

将式(8.4.6)代入式(8.4.2a,b),得到以下方程

$$\begin{aligned} -2\Omega v &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ -2\Omega(U - u) &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

引进复速度

$$W = \frac{1}{U}(u + iv) \quad (8.4.8)$$

将方程(8.4.7)合写成复变量方程

$$\nu \frac{d^2 W}{dz^2} - 2i\Omega(W - 1) = 0 \quad (8.4.9)$$

又将边界条件(8.4.3)相应地表示为

$$\begin{aligned} z = 0, \quad W &= 0 \\ z \rightarrow \infty, \quad W &= 1 \end{aligned} \quad (8.4.10)$$

由此可解得式(8.4.9-10)的精确解,它是旋转壁面的粘性层,称为埃克曼层(Ekman layer),即

$$W = 1 - \exp\left[\left(\frac{2i\Omega}{\nu}\right)^{1/2} z\right] \quad (8.4.11)$$

将实部和虚部分开,得

$$\begin{aligned} u &= U[1 - e^{-z/\delta_E} \cos(z/\delta_E)] \\ v &= Ue^{-z/\delta_E} \sin(z/\delta_E) \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

其中
$$\delta_E = (\nu/\Omega)^{1/2} \quad (8.4.13)$$

表示埃克曼层厚度,它随运动粘性系数变大而增厚,又随旋转角速度增加而减薄.它与旋转壁面的尺度大小无关,所以埃克曼层的

厚度处处相等. 显然, 这与惯性系中的平板边界层的流动特征有很大差别. 平板边界层内的流速越来越受到粘性力的阻滞, 使边界层厚度随着往下游的距离而不断增厚; 并且它不存在精确解, 只有布拉修斯近似解. 这两者为何不同? 读者可加分析.

埃克曼层内的速度分布(式8.4.12)可用极线图来表示(图8.7). 由图可见, 埃克曼层内流速的方向是随着高度 z/δ_E 而不断偏转的. 在地面附近, $z/\delta_E \rightarrow 0$ 时, 流速方向偏离埃克曼层之外的地转风方向达 45° (实际上小于此值, 因大气呈湍流状态). 在北半球, 层内流速方向是由地转风方向往左偏. 在 $z/\delta_E \approx 3$ 时, 层内流速方向与地转风方向相一致. 两者速度大小的比值约等于 1.1.

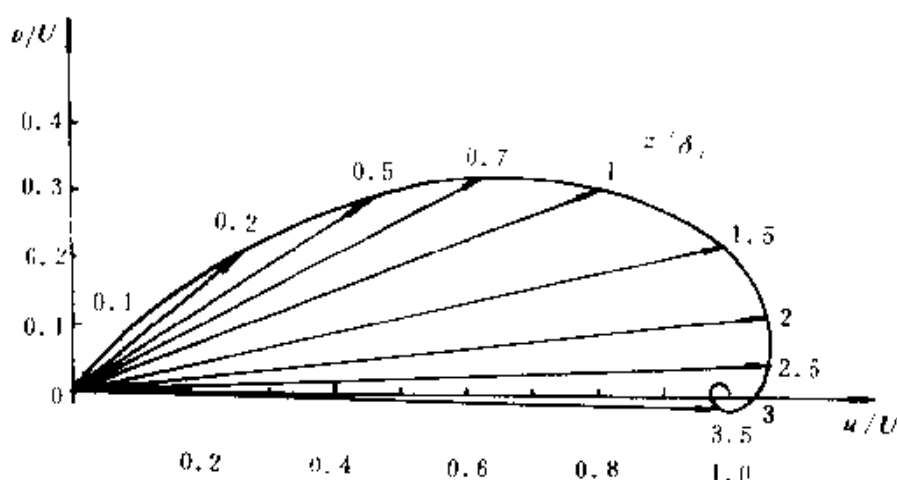


图8.7 埃克曼风速螺旋

对于大尺度的大气运动现象, 地球表面的大气边界层实际上可分为两层: 紧靠着地面的是湍流底层, 其中流速很小, 科氏力可略去不计; 在湍流底层之上是要考虑科氏力作用的埃克曼层. 湍流底层的厚度约 $20 \sim 200\text{m}$, 埃克曼层(也呈湍流态)的厚度约为 $500 \sim 1300\text{m}$.

对于海洋,由于风驱动表面海水,产生切应力,使表层海水流动,因而在海面附近存在一个粘性层,同样是埃克曼层。最早,在1902年,海洋测绘学家 Nansen 发现北冰洋上飘流的冰块总是偏离海风的方向,向右偏转几十度,他判断是由地转效应造成的^[14]。后来,他的学生 Ekman(1905)给出了上面叙述的精确解。

8.5 旋转流体的波动现象

本来,流体区别于固体的一个主要特征是:无粘流体不能承受剪应力,因而也不承载剪切波(横波)。以装满在封闭容器中的均质液体为例,如果容器不旋转,则液体在受到任意的微小扰动下的运动可以用无粘势流的拉普拉斯方程和壁面的不穿透条件来加以描述。根据势流理论,这个方程之解是唯一的,不存在波动现象。

但是,当上述容器一旦绕铅垂轴作稳定旋转时,许多实验以及理论分析都已证明,旋转流体在一定条件下具有波动性质,也就是说旋转流体被赋予了伪弹性性质,它在受到扰动后会会发生弹性-惯性振荡,出现惯性波,这是一种剪切波。

我们可以对旋转流体为何出现波动的机理作一点直观的解释^[15]。设有单位质量的某个流体微团在受扰动后以速度 V 在与旋转轴正交的平面内运动,它始终受到科氏力的作用,其大小等于 $2\Omega V$,其方向与 V 垂直,于是该流体微团的运动迹线是个半径为 r 的圆。在略去旋转系统的离心力的情况下,可计算如下:

$$V^2/r = 2\Omega r \quad (8.5.1)$$

由此知

$$r = V/2\Omega$$

流体微团绕圆周一次的时间为

$$T = 2\pi r/V = \pi/\Omega \quad (8.5.2)$$

这就是流体振荡的周期,它等于旋转系统的周期之二倍。

流体振荡的圆频率则为

$$\tilde{\omega} = 2\pi/T = 2\Omega \quad (8.5.3)$$

可见流体振荡的圆频率等于行星涡量。

以上两式表明,流体的振荡周期或频率与初始扰动速度无关。

由于旋转系统中任何流体微团在受扰动后都具有返回原处的趋向,因此旋转流体中出现波动现象是不难理解的。

下面概略地介绍两种波动现象。一种是匀速旋转流体(行星涡量不变)中的惯性波,另一种是由于科氏参数变化引起的罗斯比波。

8.5.1 匀速旋转流体中的惯性波

现在来研究地转流动因受扰动而产生的非定常流动^[19],所采用的基本方程是在地转流动方程(8.3.2)中加上非定常项 $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$,在均密度情况下有

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho_0} \quad (8.5.4)$$

称为非定常地转流动方程。

取直角坐标系,使 z 轴沿着 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向,上面方程的三个分量形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (8.5.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (8.5.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (8.5.7)$$

在式(8.5.7)中已将常数 g 包含到压强项中,对式(8.5.5)和(8.5.6)分别取对 t 的偏微商,并加以代换,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\Omega u = -\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} - 2\frac{\partial p}{\partial y} \quad (8.5.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\Omega^2 = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial p}{\partial x} \quad (8.5.9)$$

对以上两式分别取对 x 和 y 的偏微商后相加,得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\Omega^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) \quad (8.5.10)$$

再对式(8.5.7)取对 z 的偏微商,并利用连续性方程(8.2.1a),导出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (8.5.11)$$

将式(8.5.10)和(8.5.11)合并,消去速度分量,最终得出庞加莱(Poincare)方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 p + 4\Omega^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (8.5.12)$$

为了检验这个方程是否具有波动性质,可以试找一下旋转流体中发生驻波的条件,为此,将

$$p = P(x, y, z)e^{-i\tilde{\omega}t}$$

代入到方程(8.5.12)中,其中的圆频率 $\tilde{\omega}$ 为实数,可得

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{(4\Omega^2 - \tilde{\omega}^2)}{\tilde{\omega}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (8.5.13)$$

当 $\tilde{\omega} > 2\Omega$ 时,这个方程是椭圆型的;当 $\tilde{\omega} < 2\Omega$ 时,这个方程是双曲型的,就存在波动解。由此可见,在一定条件下,非定常地转流动方程是双曲型的,可以求解出惯性波。

限于篇幅,不准备在这里列举算例,为了说明波动现象,不妨介绍一个实验的流动显示(参见[18])。

如图8.8所示,在一个装满水的以角速度 Ω 旋转的圆筒中放置一个可以上下振动的盘,当这个盘作小幅振动,其圆频率 $\tilde{\omega} < 2\Omega$ 时,振动盘边缘上出现了速度间断面(剪切层),它沿着特征线传播,其图象很象可压缩流中的马赫锥。图中的两族特征线将整个旋转流场分为四个区,其中 I 区和 IV 区没有受到扰动,而 II 区

和Ⅲ区则是扰动区。

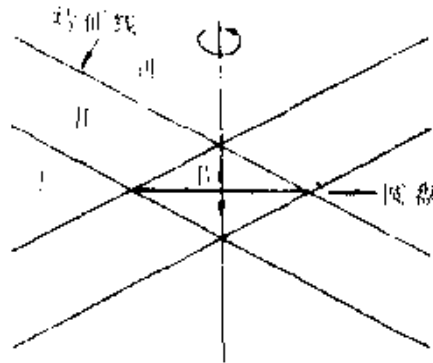


图8.8 在旋转流体中振动的圆盘产生的波系

8.5.2 科氏参数变化时的罗斯比(Rossby)波

前面8.1.1节中已说明,科氏参数 k_c (8.1.9)随着纬度的变化而变化,从式(8.1.8)可知,科氏参数的变化将引起科氏力的水平分量的变化.当中纬度地区上空的西风带自西向东流动的过程中遇到扰动时,它会往南和往北偏摆,随之引起科氏参数的不断变化,其结果是西风带发生波动现象,如图8.9所示.罗斯比(1939)研究了 this 大气非定常运动问题,得到了波动解,人们称为**罗斯比波**.

现在来简述这个问题的分析方法.旋转流体的涡量动力学方程(8.2.6)可改写为如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega + 2\Omega) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\omega + 2\Omega) = [(\omega + 2\Omega) \cdot \nabla]\mathbf{V} + \nabla\sigma \times \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \omega \quad (8.5.14)$$

大尺度的大气运动可以视为地转流动,即 $Ro \rightarrow 0$, $Ek \rightarrow 0$;再将它简化为均密度平面流动.于是上式简化为

$$\frac{d}{dt}(\omega + k_c) = 0 \quad (8.5.15)$$

在该式中已将行星涡量写为当地的科氏参数, 而且暂时保留了对流项.

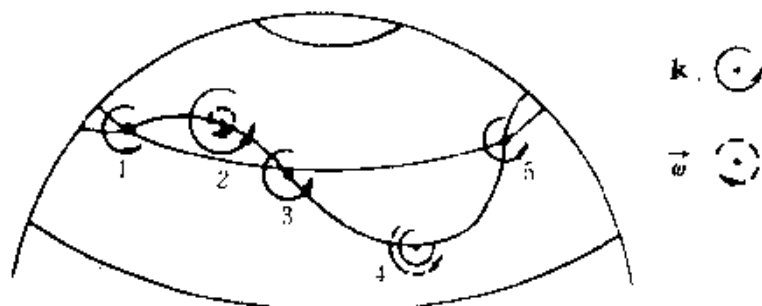


图8.9 罗斯比波

设在西风带的某个等高面内取二维直角坐标系, 将 x 轴取在某个参考纬度线上, 指向东, y 轴则指向北, 则在参考纬度 φ_0 附近的任一纬度 φ 上, 有关系式

$$\varphi = \varphi_0 + y/R, \quad (8.5.16)$$

此处 R 为地球半径, 由此可找到两个纬度上科氏参数之间的近似关系式

$$k_c = (k_c)_0 + \beta y \quad (8.5.17)$$

其中

$$\beta = 2\Omega \cos \varphi_0 / R,$$

将式(8.5.17)代入方程(8.5.15), 并且去掉对流项(因为 $Ro \rightarrow 0$), 得到

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \beta v = 0 \quad (8.5.18)$$

其中 v 为 y 向的速度分量.

现采用流函数 ψ 作为变量, 将泊松方程(8.2.1b)代入上式

后,导出了变科氏参数的非定常大气运动方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \beta (\partial \psi / \partial x) = 0 \quad (8.5.19)$$

对这个方程进行求解,最终可得出

$$\psi = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \quad (8.5.20)$$

$$c = U - \beta \lambda^2 / 4\pi^2 \quad (8.5.21)$$

其中 U 为参考纬度上西风带的平均流速, λ 为波长; c 为相速度, A 为波幅.

由此可见,对于西风带受扰动的变科氏参数的运动,理论分析得出的是一个波动解,称为罗斯比波.

据 Mason(1971)记载,为了观察西风带的罗比斯波,曾从新西兰放上一个气球,维持在约12km 的高度.随着西风带一起飘动,用无线电信号测量气球的位置.气球共运行了102天,绕地球8周半,最后记录出了它的运动轨迹,具体显示出了罗斯比波的图象,类似于图8.9中的波动曲线.

对罗斯比波可以作这样的物理解释:方程(8.5.15)实际上是惯性系内开尔文定理的一个推论,即相对涡量 ω 与行星涡量 k_c 之和等于绝对涡量;在前面所作的无粘、均密度、平面流动的假定下,绝对涡量应是个时间不变量.

$$\omega + k_c = \text{常数} \quad (8.5.22)$$

如图8.9所示,当西风带在参考纬度上从位置1因受扰动而往北偏转时, k_c 增大,而 ω 必须减小,也就是说,必须产生负方向的相对涡量,方程(8.5.22)方能满足;因此气流在到达位置2时就往南偏,产生了负方向的 ω ,图上用虚线表示;后来当气流折回到参考纬度上的位置3时,由于惯性而继续往南运动,结果引起 k_c 减小,使气流在到达位置4时又往北偏,生成了正方向的 ω . 如此反复偏摆前进,形成了波动现象.

第九章 涡方法

现实世界中形形色色的涡运动现象是很复杂的, 控制涡运动的方程——N-S 方程是个高度非线性的偏微分方程, 很少能找到封闭形式的解析解, 绝大多数情形下必须借助于数值求解. 涡方法因其诱人的优点而越来越受到人们的重视, 已发展成为计算流体力学中一类重要的数值方法. 本章将对不可压缩流动的几种涡方法作必要的介绍, 并讨论其优缺点; 还要介绍涡方法的最新发展, 特别是确定性涡方法, 最后, 将介绍应用涡方法作数值模拟的典型算例.

9.1 二维涡方法

二维不可压缩非定常粘性流动由 N-S 方程和连续性方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (9.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (9.1.2)$$

以及描写特定运动的初边值条件

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}) \quad (\text{初始条件}) \quad (9.1.3)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_b, t) = \mathbf{V}_b(t) + \Omega(t) \mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_{ref}) \quad (\text{物面条件}) \quad (9.1.4)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{V}_\infty, \quad \text{当 } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (\text{无穷远条件}) \quad (9.1.5)$$

所控制. 其中 \mathbf{r}_b 和 \mathbf{r}_{ref} 分别为物面坐标和物体转动参考点的位置. $\Omega(t)$ 是物体的旋转角速度, 式(9.1.4)表示流体在物面上的粘附条件.

在涡方法中,我们不用上述原始变量形式的方程,而是用涡量-流函数或涡量-速度作为变量的方程.

根据方程(1.3.12),不可压缩粘性流动的涡量动力学方程为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nu \nabla^2 \omega \quad (\text{三维流}) \quad (9.1.6)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (\text{二维流}) \quad (9.1.7)$$

在二维流动中引进流函数 ϕ , 即 $u = \partial \phi / \partial y$ 和 $v = -\partial \phi / \partial x$, 代入连续性方程则自动满足, 代入涡量的定义(1.1.7)写成泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\omega \quad (9.1.8)$$

于是方程(9.1.7)和(9.1.8)完全等价于二维 N-S 方程组(9.1.1)和(9.1.2). 用涡量-流函数变量组消去了未知函数压强 p , 减少了一个未知量, 但是在边界条件上却引起了麻烦, 它要把速度边界条件转变成涡量的形式. 关于涡量边界条件的表达式下面还要专门讨论. 涡方法就是把涡元视为粒子, 在拉格朗日框架内离散求解上述方程(9.1.7-8)的一类方法. 它实质上是一种粒子方法. 以下分成无粘流和粘性流的涡方法分别叙述之.

9.1.1 二维无粘流的涡方法

在二维无粘流中方程(9.1.7)和(9.1.8)简化为

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (9.1.9)$$

和

$$\nabla^2 \phi = -\omega$$

这等价于二维不可压缩无粘流的欧拉方程组. 求解它们特别简单, 涡量对每个流体质点是守恒的, 因此只要解一个泊松方程. 拉格朗日框架是着眼于追踪每个粒子运动的时间历程, 若记 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ 为空间坐标, α 为粒子的拉格朗日坐标, $\chi(\alpha, t)$ 是粒子的迹线, 则粒子的迹线由求解常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi(\alpha, t)}{\partial t} &= V(\chi(\alpha, t), t) \\ \chi(\alpha, 0) &= \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9.1.10)$$

得到. 上式中粒子 α 的速度由泊松方程(9.1.8)的解提供, 这个解就是毕奥-萨伐尔公式(2.4.2)

$$V(r, t) = (K * \omega) = \int K(r - r') \omega(r', t) dV' + V_\infty \quad (9.1.11)$$

$$\text{其中} \quad K(r - r') = \frac{-(y - y'), (x - x')}{2\pi |r - r'|^2} \quad (9.1.12)$$

这里, 用 $(f * g)$ 表示了二个函数的卷积, 它的定义是

$$f * g = \int f(\xi - \eta) g(\eta) d\eta$$

式(9.1.10-11)仍旧是对连续的涡量场给出的.

涡方法的第一步是要将连续的涡量场离散化成若干个涡元 (“粒子”),

$$\omega^h(r, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \delta(r - \chi_j(t)) \quad (9.1.13)$$

其中 $\delta(r)$ 是狄拉克 δ 函数; N 是涡元总数; $\omega^h(r, t)$ 表示在时刻 t 场点 r 处涡量的近似值, $\omega^h(r, t) \approx \omega(r, t)$; $\chi_j(t)$ 是 $\chi(\alpha_j, t)$ 的简写. 它表示 t 时刻第 j 个涡元占有 $r = \chi(\alpha_j, t)$ 的位置, 于是第 i 个涡元的运动满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi(\alpha_i, t)}{\partial t} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Gamma_j K(\chi_i - \chi_j) + V_\infty \\ \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (9.1.14)$$

这就是经典的点涡运动微分方程. Rosenhead(1931)首先用它计算了椭圆环量分布的尾涡面的卷起, 他用了十个等强度点涡代替连续的尾涡面, 得到了尾涡面卷起情形, 如图9.1所示. 到了1964

年, Takami 企图用更多的离散点涡、更精确的积分方法重复上述问题的研究, 结果却得不到光滑卷起的涡面。以上这段时期可称为古典涡方法阶段。其特点是用无粘点涡模型研究二维无粘面涡在无界流体中的运动, 式(9.1.12)的被积函数中 K 是个奇异核, 直接用它计算点涡运动最终将导致混乱。

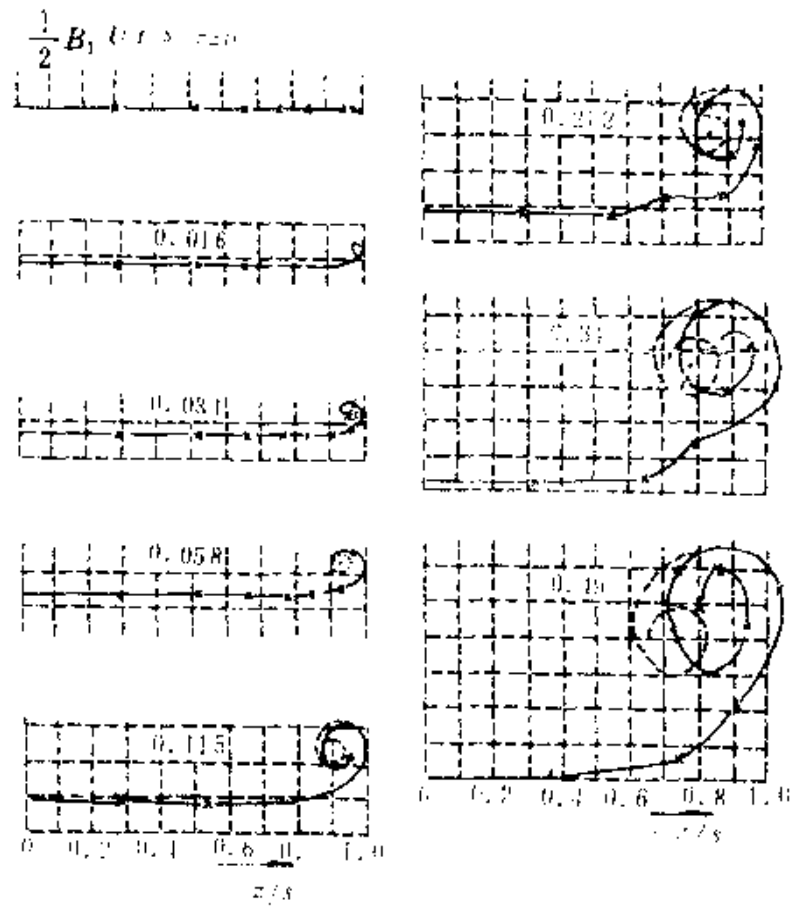


图9.1 椭圆环量分布的尾涡面的卷起的早期离散涡方法模拟

现代的涡方法是以 Chorin(1973)提出的涡团法为标志, 其特征有两点: 一是把无粘流的涡方法发展到可以考虑粘性扩散效应, 从而成为解 N-S 方程的一种数值方法; 二是用有一定大小的涡核代替原先的点涡, 使核函数 K 非奇异化。关于第一点, 我们在

9.1.2小节中将详细叙述,关于第二点,因为它仍然是针对无粘流的,故放在这里先讲.

如前所述, K 是个奇异核函数,当两个点涡无限接近时会诱导出无穷大速度,导致涡元的杂乱无章的运动. 为了抑制涡元的混乱运动,便提出了各种光滑技术,其中以非奇异化核函数方法最为重要. Chorin 提出了涡团(vortex blob)的概念,它是涡量高度集中的小区域. 涡团有一定的大小和形状,迄今为止,提出的涡团有圆形的,椭圆形的,或者是一定长短的涡片(vortex sheet). 最常用的是圆形涡团. 设 $f(r)$ 为某个轴对称函数,且满足归一化条件

$$\int f(r) dS = 1$$

其中 r 是从涡团中心量起的距离, dS 是面积微元. 再定义光滑函数

$$f_\sigma(r) = \frac{1}{\sigma^2} f\left(\frac{r}{\sigma}\right) \quad (9.1.15)$$

对圆形涡团而言, σ 相当于涡团半径. 非奇异化的方法是用 f_σ 代替 δ 函数,则涡量场离散化公式(9.1.13)可改写成

$$\omega^h(r, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j f_\sigma(r - X_j(t)) \quad (9.1.16)$$

从中可以看出,涡团的涡量分布的形式和范围主要取决于 f 和 σ 的选择, f_σ 是个迅速衰减的函数,涡量主要集中在 $r < \sigma$ 的区域内. 当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, f_σ 趋近 δ 函数. 通常 f 称为形函数, σ 称为截断参数. f_σ 称为光滑函数.

在引入涡团以后,速度场的离散式(9.1.14)改写成

$$V^h(r, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j K_\sigma(r - X_j(t)) \quad (9.1.17)$$

其中

$$K_\sigma(r) = K * f_\sigma \quad (9.1.18)$$

K_σ 称为非奇异核函数. 于是,若已知 t 时刻涡元位置 $X_j^h(t)$,则在 t

+ Δt 时刻它的位置近似为

$$X_j^k(t + \Delta t) \approx X_j^k(t) + \Delta t V_j^k(X_j^k(t), t) \quad (9.1.19)$$

这是一阶欧拉积分格式,也可用其它高阶格式,如预估—校正格式等. 在 $t + \Delta t$ 时刻涡元的速度由 (9.1.17) 式得到

$$V_i^k(t + \Delta t) \approx \sum_j^K K_{ij}(X_i^k(t + \Delta t) - X_j^k(t + \Delta t)) \Gamma_j \quad (9.1.20)$$

这样就完成了从 t 到 $t + \Delta t$ 的推进.

根据无粘涡方法收敛性分析表明,离散化的精度依赖于:(1)形函数 f 的选择;(2)涡元的初始分布;(3)截断参数 σ 与涡元之间分开的距离 h 之比 σ/h 等. 涡量场 $\omega(r, t)$ 按式 (9.1.16) 的离散化相当于用 f_{σ} 展开,因此形函数就起着有限差分法中多项式内插或有限元法中基函数的类似作用. 目前,常用的二维形函数有

(1) 倒数分布

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi r} & r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (9.1.21)$$

(2) 均匀分布 (兰金涡模型)

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sigma^2} & r < \sigma \\ 0 & r > \sigma \end{cases} \quad (9.1.22)$$

(3) 二阶高斯核

$$f(r) = \frac{1}{\pi} e^{-r^2} \quad (9.1.23)$$

(4) 四阶高斯核

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} [4e^{-r^2} - e^{-r^2/2}] \quad (9.1.24)$$

除了上述引入涡核的非奇异性核函数方法以外还有一种光滑技术,它是在 K 分母上加上个小量 σ^2 .

$$K_\sigma = K(r) \frac{|r|^2}{|r|^2 + \sigma^2} \quad (9.1.25)$$

σ 是个人工光滑参数, 当远离涡元中心时, $K_\sigma \approx K$; 当接近涡心时, 其性质近似为固体涡核, Krasny 用这种光滑技术计算了一系列复杂面涡的运动, 详见第 5.5 节及后面的算例.

涡量场的初始离散常采用均匀网格划分, 在每个网格中放一涡元, 位于 $\chi(\alpha_j, 0)$ 的涡元, 其强度为

$$\Gamma_j = \omega(\chi(\alpha_j, 0), 0) h^2 \quad (9.1.26)$$

h 为涡元间初始间距. Hald (1979) 对于欧拉方程的收敛性证明要求 h 和 σ 之间满足

$$\sigma = h^q \quad q \in (0, 1) \quad (9.1.27)$$

这里 q 值取决于形函数的形式, 例如对于倒数分布核 (9.1.21). Hald 建议取 $q = 1/2$. Ghoniem (1988) 通过大量数值试验表明, 为达到长时间内精度的要求, 需保证 $\sigma > h$, 即相邻涡元之间应该彼此有部分重叠, 他认为 $\sigma/h = 1.1 \sim 1.5$ 是最佳选择.

9.1.2 粘性流的涡方法

如前所述, 现代的涡方法已发展到能模拟粘性流动, 这里的关键问题是如何用粒子方法模拟粘性扩散项, 目前主要有两类方法: 一类是 Chorin (1973) 年提出的随机涡方法, 已得到广泛的应用; 另一类是新发展起来的确定性涡方法, 以下分别叙述之.

一、随机涡方法

Chorin 提出, 把涡量动力学方程 (9.1.7) 分裂成两步来求解:

(1) 对流部分

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\omega}{Dt} \right) &= -V \cdot \nabla \omega \\ \nabla^2 \psi &= -\omega \end{aligned} \quad (9.1.28a)$$

(2) 粘性扩散部分

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_i = \nu \nabla^2 \omega \quad (9.1.28b)$$

这种数值方法称为算子分裂方法或分步方法. Chorin 的思想是在拉格朗日框架内求解上述两组方程. 第一组方程实际上是求解无粘流, 已在上面 9.1.1 小节中叙述. 第二组是个热扩散型方程. 鉴于充分多的粒子经历布朗运动随机过程的解与粘性扩散方程的解具有相同形式, Chorin (1973) 提出了用涡元的随机走步来模拟涡量的扩散过程. 我们知道, 一维热扩散型方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

的基本解是格林函数

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \exp(-x^2/4\nu t)$$

这与一个均差为零, 标准偏差为 σ , 的随机变量的概率密度函数在形式上是一致的, 即

$$P(\eta_x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp(-\eta_x^2/2\sigma_x^2) \quad (9.1.29)$$

其中 P 和 η_x 分别为概率密度函数和随机变量. 对于二维情形, 概率密度函数 $P(\eta_x, \eta_y, t) = P(\eta_x, t)P(\eta_y, t)$, 这样, 可以用大量涡元在 x, y 方向上作两组独立的、具有均差为零、标准差为高斯分布 $\sigma = \sqrt{2\nu t}$ 的随机位移来模拟方程 (9.1.28b) 的解. 在 Δt 时间内每个涡元的随机走步为

$$\begin{cases} \Delta x_j = \{4\nu\Delta t \ln(1/P_j)\}^{1/2} \cos Q_j \\ \Delta y_j = \{4\nu\Delta t \ln(1/P_j)\}^{1/2} \sin Q_j \end{cases} \quad (9.1.30)$$

其中 P_j 和 Q_j 分别是在 $(0, 1)$ 和 $(0, 2\pi)$ 区间内均匀分布的两个相互独立的随机数.

假设在 t 时刻涡元位置 $x_j(t), y_j(t)$ 已给定, 则在 $t + \Delta t$ 时刻涡元的新位置为

$$\begin{cases} x_j(t + \Delta t) = x_j(t) + u_j(t)\Delta t + \Delta x_j \\ y_j(t + \Delta t) = y_j(t) + v_j(t)\Delta t + \Delta y_j \end{cases} \quad (9.1.31)$$

而每个涡元的环量 Γ_j 不随时间变化.

用随机走步法使我们有可能将涡方法推广到求解 N-S 方程. 在这方面已得到了若干很好的结果. 可以模拟许多粘性流动, 如钝体尾迹等. 但是, 随机涡方法精度较低, 随机涨落及其误差通常随 $1/N$ 减小 (N 是涡元总数), 必须有大量的涡元方可. 由于涡元随机走步的特性, 致使壁面的涡量分布和压强分布等也发生随机涨落, 使得壁面上物理量不易算准, 往往需要在若干时间步内求平均值或做滤波. 因此, 随机涡方法很难做到对非定常 N-S 方程的实时精确的模拟.

为了试验随机涡方法的精度, 请看下面的算例.

一维扩散方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

初始条件为

$$\omega(x, 0) = f(x) = xe^{-x^2}$$

边界条件为

$$\omega(0, t) = 0, \quad \omega(\infty, t) = 0$$

该方程的精确解为

$$\omega_{\text{精确}}(x, t) = \frac{x \exp(-x^2/(1+4\nu t))}{(1+4\nu t)^{3/2}}$$

当涡元总数 N 不同时, 随机涡方法的解与精确解之比较见图 9.2, 其中 $\Delta t = 0.5, T = 10$. 我们可以发现随机涡方法对于 N 收敛得很慢, Milizano & Saffman (1977) 估计为 $O(1/\sqrt{N})$.

二、确定性涡方法

由于随机走步方法的精度低, 促使人们要设法提高计算粘性扩散过程的精度, 又要保持涡方法作为拉格朗日方法的固有优点,

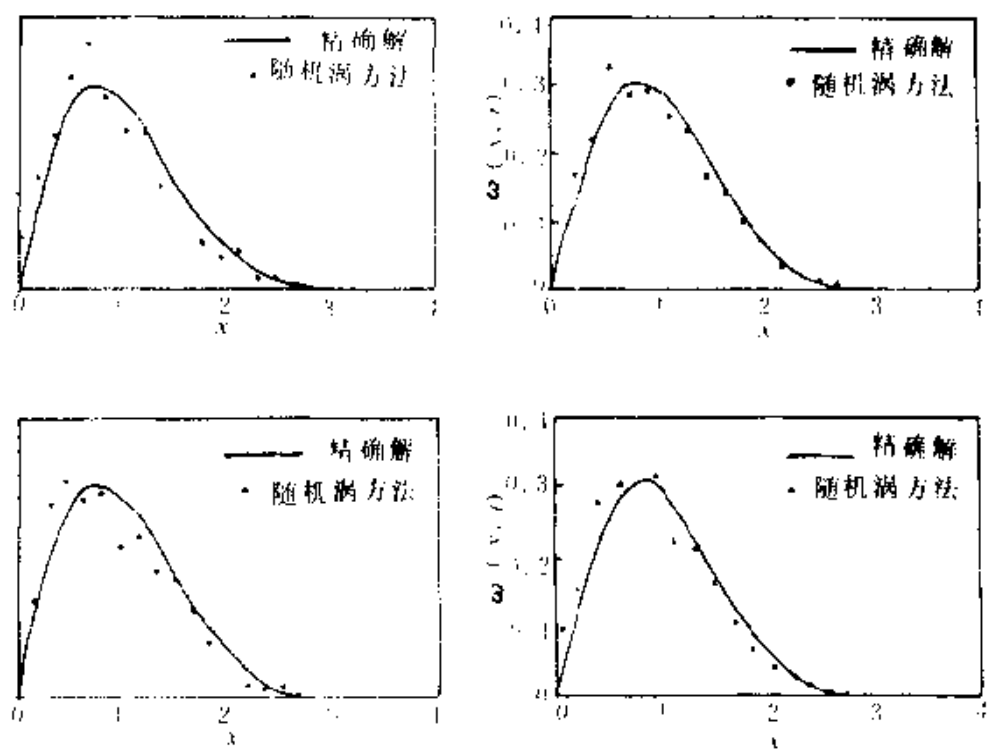


图0.7 随机涡方法与精确解之比较

Raviart 及其合作者 Cottet, Huberson, Mas-Gallic (1987) 提出的方法是基于用一个积分算子近似表示拉普拉斯算子 Δ , 他们定义

$$\Delta^\sigma \omega = \frac{1}{\sigma^2} (f_\sigma * \omega - \omega) \quad (9.1.32)$$

其中 $f_\sigma(r) = f(r/\sigma)/\sigma^2$ 是光滑化函数. 如果这样选择 $f(r)$ 使得存在一个整数 $m \geq 2$, 而且满足

$$\int_{R^2} x_i^2 f(r) dS = 2, \quad \int_{R^2} r^\alpha f(r) dS = 0, \quad 1 \leq |\alpha| \leq m-1,$$

其中 $dS = dx dy$, R^2 表示在 (x, y) 平面上积分, 那么可以证明

$$\Delta^\sigma \omega \approx \Delta \omega$$

将式 (9.1.32) 代入涡量扩散方程 (9.1.7), 得到

$$\frac{d\omega(r, t)}{dt} = \frac{\nu}{\sigma^2} \int [\omega(\xi) - \omega(r)] f_\sigma(r - \xi) dS(\xi) \quad (9.1.33)$$

将上述积分式对涡元离散化, 得到

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{\nu h^2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j(t) - \Gamma_i(t)) f_\sigma(x_i - x_j) \quad (9.1.34)$$

该法已证明是稳定的 (Degond & Mas-Gallic, 1989), 只要

$$\nu \leq C_0 \sigma^2$$

此处 C_0 是一个正常数.

(2) 形函数求导法 (Fishelov, 1990)

与式 (9.1.32) 定义不同, Fishelov 用涡量场与光滑函数 f_σ 的

于是涡量动力学方程(9.1.7)右手项对涡元加以离散后得到

$$\frac{d\omega_i^h(t)}{dt} = \nu \sum_{j=1}^N \Delta f_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \omega_j^h(t) h^2, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9.1.36)$$

(3) 格林函数方法

我们知道, 二维涡量扩散方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega$$

在无界域中有精确解,

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \iint_{R^2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \omega(\mathbf{r}', 0) dS' \quad (9.1.37)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{1}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4\nu t}\right) \quad (9.1.38)$$

其中 $\omega(\mathbf{r}, 0)$ 是初始涡量分布, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ 是无界域的格林函数. 一种总涡量守恒型的离散格式可以得到如下.

对于任一个涡元 P_i 在 t 时刻的环量为

$$\begin{aligned} \Gamma_i(t) &= \iint_{P_i} \omega(\mathbf{r}, t) dS = \iint_{P_i} \iint_{R^2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \omega(\mathbf{r}', 0) dS' dS \\ &= \iint_{P_i} \iint_{R^2 - P_i} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \omega(\mathbf{r}', 0) dS' dS \\ &\quad + \iint_{P_i} \iint_{P_i} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \omega(\mathbf{r}', 0) dS' dS \end{aligned} \quad (9.1.39)$$

由总涡量守恒性质可知, 涡元 P_i 在 t 时刻与初始时刻($t=0$)含有的总涡量之差应等于在 t 时间内由 P_i 扩散出去的总涡量与其它涡元在相同时间内扩散进 P_i 的总涡量之代数和, 所以利用式(9.1.41)可得

$$\iint_{P_i} \omega(\mathbf{r}, t) dS - \iint_{P_i} \omega(\mathbf{r}, 0) dS = \iint_{P_i} \iint_{R^2 - P_i} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \omega(\mathbf{r}', 0) dS' dS$$

$$= \iint_{P_i} \iint_{R^2 - P_i} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \omega(\mathbf{r}, 0) dS' dS \quad (9.1.40)$$

将上式离散化,并把前一个时间步终止时的涡量分布作为下一时刻的初值,则经 Δt 时间后任一涡元的环量值为

$$\Gamma_i(t + \Delta t) = \Gamma_i(t) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\nu\Delta t} (\Gamma_j |P_i| - \Gamma_i |P_j|) \\ \cdot \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2}{4\nu\Delta t}\right)$$

$|P_i|$ 是涡元的大小,若初始时涡元是均匀分布的, $|P_i| = h^2$. 上式又可写成

$$\Gamma_i(t + \Delta t) = \Gamma_i(t) + \frac{h^2}{4\pi\nu\Delta t} \sum_j (\Gamma_j(t) - \Gamma_i(t)) \\ \cdot \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2}{4\nu\Delta t}\right) \quad (9.1.41)$$

还有其它一些确定性方法,如 Russo (1990) 提出的 δ 函数求导格式,陆志云等 (Lu, Z Y *et al.* 1991) 提出的格林函数格式,王东耀等 (1994) 提出的自适应涡元确定性算法,等等,不再一一枚举. 值得指出的是,这些格式提出都还不久,孰优孰劣,还有待全面评估.

9.2 三维涡方法

三维涡方法在原理上与二维涡方法基本上相同,但在涡量动力学方程中多出了 $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ 一项,如前所述,它表示涡管的拉伸和弯曲,使得涡矢量的大小和方向都要变化,所以三维涡方法要比二维涡方法复杂得多,计算工作量也大得多,远不如二维涡方法发展得那样充分. 目前多数算例仅限于研究无界空间内涡量场的无粘演变过程,对于粘性流,特别是存在粘附壁面条件下如何处理,研究的还很少. 以下仅讨论无粘流情形.

由毕奥-萨伐尔公式确定的速度场为

$$V(r, t) = \int K(r - r') \times \omega(r') dV'$$

$$K(r) = -\frac{r}{4\pi|r|^3} \quad (9.2.1)$$

根据方程(1.3.10), 三维无粘涡量动力学方程为

$$\frac{d}{dt} \omega(r, t) = (\omega(r, t) \cdot \nabla) V(r, t) \quad (9.2.2)$$

它的等价的积分形式是(见式(3.1.1)),

$$\omega(\alpha, t) = (\omega(\alpha, 0) \cdot \nabla_\alpha) r(\alpha, t) \quad (9.2.3a)$$

其中 α 是拉格朗日坐标, ∇_α 是欧拉变量和拉格朗日变量之间的变形张量, 上式可写成张量形式为

$$\omega_i = \omega_{j_0} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_{j_0}} \quad (9.2.3b)$$

上面三式就成为我们构造三维涡方法计算格式的基础. 在式(9.2.2)的左边, 是涡量的物质导数, 它是拉格朗日形式的. 但是其右边的 $\nabla V(r, t)$ 是速度梯度张量, 它是欧拉形式的. 为构造纯拉格朗日型的格式, 必须设法用拉格朗日形式来表示它, 有如下三种方法.

与二维情形一样, 先要将涡量场离散化, 假定初始时刻涡元是均匀地离散在体积元之内, 随后, 涡元随流体质点沿迹线运动, 在 t 时刻, 涡量场可近似离散成

$$\omega^h(r, t) = \sum_j^N f_j(r - X_j^h(t)) \omega_j^h(t) h^3 \quad (9.2.4)$$

其中 $f_\sigma(r)$ 是光滑函数, $f_\sigma(r) = \sigma^{-3} f(r/\sigma)$, f 是个球对称函数, 同样, 速度核可以非奇异化成

$$V^h(r, t) = \sum_j K_\sigma(r - X_j^h(t)) \times \omega_j^h(t) h^3 \quad (9.2.5)$$

式中 $K_\sigma(r) = K(r) * f_\sigma$.

方法一 涡丝法

如果我们沿着涡线来离散涡元, 令 Γ_j 是第 j 个涡元的涡管强

度, δl_j 是沿该涡管中心线上的有向线段. 正如 6.1 节所述, 一个离散的体积元内的 $(\delta V = h^3)$ 的总涡量可写成 $\omega_j(t)h^3 = \Gamma_j \delta l_j(t)$. 根据亥姆霍兹涡管强度守恒定理, Γ_j 是不变的. 于是式 (9.2.5) 可改写为

$$\mathbf{V}^h(\mathbf{r}, t) = \sum_j \Gamma_j \mathbf{K}_s(\mathbf{r} - \mathbf{x}_j^h(t)) \times \delta l_j(t) \quad (9.2.6)$$

由于涡元速度为

$$\frac{d\mathbf{x}_j^h(t)}{dt} = \mathbf{V}_j^h(\mathbf{x}_j^h(t), t) \quad (9.2.7)$$

而涡线长度为

$$\delta l_j(t) = \frac{1}{2} |\mathbf{x}_{j+1}^h(t) - \mathbf{x}_j^h(t)| \quad (9.2.8)$$

于是, 式 (9.2.6—9.2.8) 即构成三维涡方法的解: 设在 t 时刻 $\mathbf{x}_j^h(t)$, $\mathbf{V}_j^h(t)$ 和 $\delta l_j(t)$ 为已知, 涡线的强度由初始条件确定, 则在 $t + \Delta t$ 时刻, $\mathbf{x}_j^h(t + \Delta t)$ 由式 (9.2.7) 加以积分得到. 再由式 (9.2.8) 求出 $\delta l_j(t + \Delta t)$, 最后由式 (9.2.6) 计算出 $\mathbf{V}_j^h(t + \Delta t)$. 这样完成了从 t 到 $t + \Delta t$ 时刻的推进. 在该方法中, 涡元线长度的拉伸是由它的端点的位置确定的. 该方法又称涡丝法, 事实上, 在飞机空气动力学中早已用它来模拟细长机翼前缘脱体涡的卷起.

方法二 涡量一次积分法

该法是直接利用涡量的一次积分式 (9.2.3). 它的离散形式为

$$\omega_j^h(t) = (\omega_j^h(o) \cdot \nabla_\alpha^h) \mathbf{x}_j^h(t) \quad (9.2.9)$$

其中 ∇_α^h 是 $\mathbf{x}_j^h(t)$ 相对于 α_j 的差分算子; 而 $\alpha_j = \mathbf{x}_j(o)$. 上式与式 (9.2.5) 和 (9.2.7) 相组合, 构成了第二种求解方法.

方法三 核函数求导法

该法是利用非奇异核函数直接求导, 将式 (9.2.5) 求微商, 有

$$\nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_j [\nabla \mathbf{K}_s(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_j^h(t))] \times \omega_j^h(t) h^3 \quad (9.2.10)$$

式中 ∇V 是速度梯度张量 $\partial V_i/\partial x_j$ 。式(9.2.2)、(9.2.10)和式(9.2.5)、(9.2.7)构成了一组 (χ, ω) 的常微分方程组,从而涡元的位置及涡量可在拉格朗日框架内计算。

式(9.2.2)还可写成另外两种形式,即对称形式

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{1}{2}[\nabla V_i^j + (\nabla V_i^j)^T] \cdot \omega_j \quad (9.2.11)$$

和转置形式

$$\frac{d\omega_i}{dt} = (\nabla V_i^j)^T \cdot \omega_j \quad (9.2.12)$$

$(\nabla V_i^j)^T$ 是 ∇V_i^j 的转置。有的作者(如 Beale (1986), Rehbach (1978)),推荐用对称形式(9.2.11)代替(9.2.10),认为它更简单且平均值为零,因此可能导致改善精度。但转置形式有离散的总涡量守恒的优点(Choquin et al 1988)。

Beale 等(1991)用以上三种算法计算了有周向速度的轴对称涡环,比较了它们的精度,见表9.1。其中相对误差定义为

$$\text{相对误差} = \left[\frac{\sum_i |V_i - u_i|^2 r_i}{\sum_i |u_i|^2 r_i} \right]$$

其中 u 是作为比较基准的另一种数值解(Eybeland, 1988)。从比较结果看出,还是第三种算法采用式(9.2.2)的计算精度最好,式(9.2.11)和(9.2.12)并未显示出预期的优越性。事实上,方法二在理论上讲,只要速度计算是稳定的,则涡量计算自动是稳定的。在实际上,式(9.2.9)的计算量比式(9.2.5)小得多。缺点是必须保留涡元的拉格朗日坐标,并且每一涡元周围需有足够多的涡元,使得差分算子 ∇_i^j 得以算准。

用以上最好的一种算法(9.2.2)计算的若干积分量相对于初始量的相对变化 $Q(t)/Q(0) \sim 1$,见表9.2。

三维涡方法计算所要求的内存和机时都很多,所以在实用中

不可避免地要采用快速求和的技术,如多极子展开法和 VIC 方法等,见9.4节。

表9.1 速度场相对误差

时间	(9.2.9)	(9.2.2)	(9.2.11)	(9.2.12)	(9.2.2)*
0.0	0.094	0.094	0.094	0.094	0.083
0.4	0.097	0.095	0.112	0.143	0.084
0.8	0.107	0.098	0.167	0.269	0.086
1.2	0.120	0.100	0.245		0.089
1.6	0.139	0.103			0.091
2.0	0.161	0.106			0.095
2.4	0.189	0.111			0.098
2.8	0.218	0.117			0.102
3.2	0.251	0.128			0.110
3.6		0.153			0.125
4.0		0.181			0.143
4.4		0.222			0.170
4.8					0.203
5.2					0.255

*表示一种精细网格, $h=1/12$, $\sigma=2.74h$, 4328个涡元

表9.2 积分量的相对变化

t	1.2	2.4	3.6	4.8	5.2
动能	0.010	0.002	0.083	0.051	0.381
螺旋度	-0.007	-0.006	0.035	0.171	0.227
拟熵	0.004	0.013	0.113	0.550	0.898
冲量	0	0.001	0.029	0.120	0.166
冲量矩	-0.051	-0.018	-0.004	-0.210	-0.131
环量	-0.001	0.000	0.026	0.115	0.162

9.3 边界条件问题

这里仅讨论二维涡方法的边界条件,至于三维涡方法还很少见到有固体边界存在时的算例发表。

在以涡量为变量的 N-S 方程的数值解中,如何正确地给出涡量边界条件是一个长期探索的关键问题。在以原始变量 (V, p) 表示的 N-S 方程组中以速度表示的粘附边界条件是适定的。在以涡量和流函数 (ω, ψ) 为变量的方程组中,对于解流函数的泊松方程而言,粘附条件是超定了,这里只要满足法向不穿透条件就足够了。而在解涡量动力学方程时却没有直接的涡量边界条件可资利用。因此对涡量动力学方程需要提出一个适定的等价粘附条件,使得它能符合涡量场和速度场之间的运动学关系,又能反映涡量在壁面上生成的物理机制。

在有限差分方法中,早期的壁涡公式是微分形式的。例如一阶和二阶壁涡公式可以写成^[20]

$$\omega(x, 0) = -f''_0(x) - \frac{2}{\Delta y^2}[\psi(x, \Delta y) - f_0(x)] - \frac{2}{\Delta y}g_0(x) \quad (9.3.1)$$

$$\begin{aligned} \omega(x, 0) = & -f''_0(x) + \frac{1}{2\Delta y^2}[\psi(x, 2\Delta y) - 8\psi(x, \Delta y) \\ & + 7f_0(x)] - \frac{3}{\Delta y}g_0(x) \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

式中 $\psi(x, 0) = f_0(x)$, $\partial\psi(x, 0)/\partial n = g_0(x)$ 是壁面上速度的粘附边界条件, Δy 是离开壁面的一个网格距离。

Lighthill(1963)曾这样描述涡量在壁面上的生成过程:若在 t 时刻假定我们已经得到了个正确的涡量场,则在 $t + \Delta t$ 时刻,由于流场内涡量的对流和扩散,一般而言,此时涡量场在壁面上诱导的速度不会满足粘附条件,即

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n} \neq \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{V}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{U}_s \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (9.3.3)$$

\mathbf{V}_1 和 \mathbf{U}_s 分别为流体中涡量场产生的速度和物面运动的速度, \mathbf{n} 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别是壁面的法向和切向单位矢量. 于是我们可以先找出一个速度势函数 φ , 使得

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{流场内} \quad (9.3.4)$$

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{U}_s - \mathbf{V}_1) \cdot \mathbf{n} \quad \text{壁面上} \quad (9.3.5)$$

这样得到的速度 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \nabla \varphi$ 既满足涡量动力学方程, 又满足不穿透条件.

要满足速度不穿透条件, 比较容易做到, 可以有多种办法实现, 在涡方法中常用的方法有:

- (1) 镜象法
- (2) 面元法(边界积分法)
- (3) 容量矩阵法

其中(1)法对简单外形是方便的, 它常与保角变换方法连用, 将物体变换成圆或无穷长平板, 然后再利用镜象涡; (2)法可以适用于任意复杂外形, 常在纯拉格朗日型方法中使用; (3)法一般用于拉格朗日-欧拉型混合方法, 与 VIC 和 FFT 快速算法相结合, 方能显出其优越性, (可参见尹协远(1992)).

然而, 这样做的结果, 一般仍然会在壁面上产生滑移速度, 这个滑移速度实际上是不存在的, 必然有某种机制将它抵消掉. Lighthill 认为, 可以设想有一涡层覆盖在壁面上, 得以恰好抵消掉滑移速度.

从这个思路出发, 可以构造出两类涡量边界条件: 涡量的 Dirichlet 型条件和 Neumann 型边界条件.

以下介绍三种典型的给出壁面涡量条件的方法:

- (1) Chorin(1973)新生涡方法

Chorin 认为壁面上涡层的强度应该是 $\gamma(x, 0) = V_s$ 而

$$V_s = \mathbf{V}(x, 0) \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$$= [D_t - (\mathbf{V}_1 + \nabla \varphi)] \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (9.3.6)$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是沿壁面切向单位矢量, 于是 Choirn(1973)提出, 用在壁面上产生新生涡元的办法来满足壁面的无滑移条件. 具体做法是将壁面划分成许多小区段, 在每个时间步, 每个小段上生成一个相应强度的涡元, 使其诱导速度正好抵消掉切向速度 V_t (见图9.3).

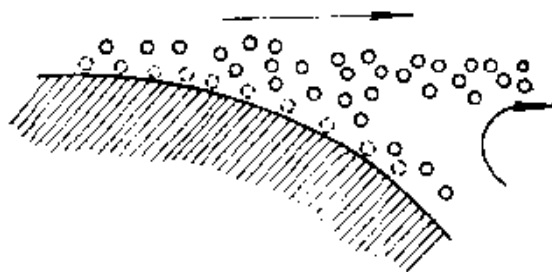


图9.3 新生涡元在壁面上生成示意图

Choirn 的新生涡技术的优点是十分简便, 物理意义也是明了的, 用这种方法不用事先确定分离点的位置, 在计算中分离点可以自动出现. 该办法的缺点是不够精确, 没有考虑新生涡之间诱导速度的影响; 另一个缺点是每一时间步都有许多新生涡元产生, 长时间后涡元总数会达到计算无法承受的程度.

(2) 吴镇远(1976)方法

吴镇远等人则是利用广义毕奥-萨伐尔公式(2.4.5):

$$\begin{aligned} 2\pi\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = & \int_S \frac{\omega \mathbf{k}' \times \mathbf{R}}{R^3} dS + \int_C \frac{\mathbf{R}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})}{R^2} dl \\ & - \int_C \frac{(\mathbf{V} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{R}}{R^2} dl \end{aligned}$$

式中涡量的区域积分也包括壁面涡量在内, 在边界以外流场内的涡量是在以前时间内从壁面上产生并流入到流体中去的, 是已知的, 而为满足粘附条件的生成的壁面涡量却是未知的, 待求的. 吴

把 D 分成两个区域, 将紧靠边界一个网格内的区域作为边界区, 并设 $\gamma \approx \omega \cdot h$ 作为边界上涡层强度, 这样就得到了一个关于 γ 的边界积分方程, 在求出 γ 以后, 边界涡量即为 $\omega_b = \gamma/h$. 关于这种方法的详细叙述读者可参阅吴镇远(1976).

以上两种方法都属于 Dirichlet 型边界条件.

(3) Neumann 型边界条件 (Hung 和 Kinney, 1988)

最近, 存在一种看法, 认为利用 Neumann 型的涡量边界条件比 Dirichlet 型更适合. 这个争论至今还未有一定的结论. Kinney 等人提出的方法是, 认为在每个时间间隔 Δt 的开始时刻 t , 壁面上精确地满足无滑移条件 $V_x = 0$, 而在 Δt 间隔终了时在壁面上的流体质点具有了滑移速度 $V_x(\Delta t)$. 可以写出壁面附近的切向动量方程

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} - \frac{\partial(V_x^2/2)}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s}$$

式中对流项 $\frac{\partial(V_x^2/2)}{\partial s}$ 与非定常项 $\frac{\partial V_x}{\partial t}$ 相比, 可以忽略不计, 因为若对

时间积分可知, $\int_0^{\Delta t} \frac{\partial(V_x^2/2)}{\partial s} dt$ 是个 Δt 量级的小量, 所以

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} \approx -\frac{\partial p}{\partial s} \quad (9.3.7)$$

另一方面, 根据 Lighthill 模型, 在壁面上应生成新涡层以抵消这个虚假的滑移速度. 根据 3.5 节所述, 新生涡层的涡量流率 $\nu \frac{\partial \omega}{\partial n}$ 应与切向压强梯度 $\partial p / \partial s$ 存在关系

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial n} \quad (3.5.7)$$

将该式与式(9.3.7)联立, 可以得出在 Δt 时刻终止时壁面上的涡量流率为

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial n} = -\frac{V_x(\Delta t)}{\Delta t} \quad (9.3.8)$$

9.4 改进计算效率和离散精度的若干措施

前两节介绍的涡方法是属于纯拉格朗日型的,其中确定涡元速度的办法是用毕奥-萨伐尔公式直接求和,不需要任何空间网格,也就避免了人为划分网格引起的数值扩散误差,自适应性好和数值扩散小是这种方法最突出的优点,但是直接求和法要考虑每个涡元与其余 $N-1$ 个涡元间的相互作用,因此每求一遍涡元速度约需做 $O(N^2)$ 次操作,这里 N 是涡元总数,当 N 很大时,计算时间和费用都是一个沉重的负担,于是,发展快速算法势在必行,目前,快速算法沿着两个不同的方向平行发展着,一是格子涡(VIC)方法,另一是多极子展开法,前者是一种拉格朗日型和欧拉型相结合的混合方法,后者仍是纯拉格朗日型的方法,现以二维涡方法为例分别叙述之。

9.4.1 格子涡(VIC)方法

格子涡(Vortex in Cell (VIC))方法是:先在欧拉框架内用流函数的泊松方程(9.1.8)计算速度场,再在格拉格朗日框架内追踪涡元沿着迹线运动,这种思想最早可追溯到 Harlow(1959)等人的 MAC 方法。

首先在计算平面内划分网格,为了求解泊松方程,先要将涡元携带的涡量分配到相应的网格节点上去,通常用面积加权法,如图9.4所示。

$$\omega(k) = \Gamma_n S(k)/S^* \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (9.4.1)$$

其中 $S(k)$ 是第 n 个涡元在一个网格内的第 k 个节点上的面积权重, Γ_n 是该涡元的强度,把所有涡元的涡量按如上办法分配到相应网格的各个节点上以后,每个网格节点上的合涡量 ω_j 就是已知的了,再针对具体流场列出以流函数表示的内外边界条件,任何

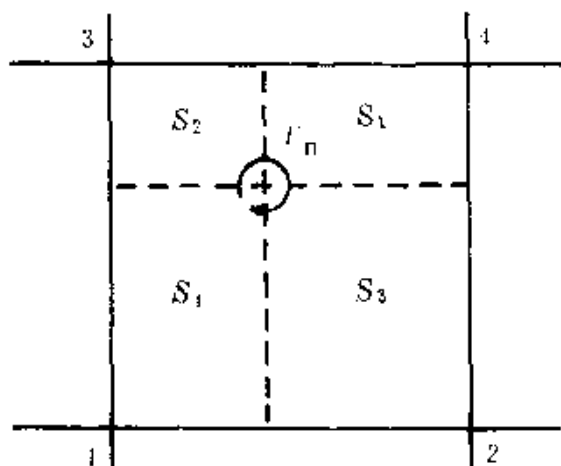


图9.4 面积加权法示意图

一种欧拉框架内的数值方法都可用来求解泊松方程了。在涡方法中大都用快速有效的椭圆型方程数值解法,例如FFT(快速傅里叶变换),见Hockney(1970)。在求得格点上的 ϕ 值以后,用简单的差分格式可得节点上速度

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ v_{ij} &= -\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

下一步则要回到拉格朗日框架内跟踪涡元的运动。根据已求出的网格节点上的速度,再次用面积加权法内插求得各涡元的速度

$$u_v = \frac{1}{S} \sum_1^4 u_k S_k \quad v_v = \frac{1}{S} \sum_1^4 v_k S_k \quad (9.4.3)$$

由此可算出各个涡元在下一时刻的所在的位置。

VIC方法最大优点是速度场的计算效率高。每个时间步只要进行 $O(N) + O(M \log_2 M)$ 次操作,其中 M 是网格数,比之直接求和法的 $O(N^2)$ 要小一个量级。这就有可能引入多得多的涡元数

目,提高流场的分辨率,特别在涡量集中的区域,可以充分发挥拉格朗日型和欧拉型方法的各自的优点。然而,VIC方法的缺点也正是把一种原来不需要网格的方法又重新网格化,这势必带来新的数值扩散,使小于网格尺寸的精细流动结构难于模拟(不过,这也是有限差分法等欧拉型方法的共同特点)。

经对VIC方法仔细研究以后认为,这种方法最重要的数值误差是用(9.4.3)式速度内插引起的各向异性,为了克服这一点,可以用更复杂的内插算法(如三次内插,滤波)和使用不同的网格结构(如六角元和三角元等)。

9.4.2 多极子展开法

涡量诱导的速度在远场用多极子展开近似表达式。在第二章中我们已经讲过,把它用到涡方法中来是基于这样一种想法:某个涡元的速度是其它涡元诱导速度的合成,但只有靠近该涡元的若干涡元影响最大。当两个涡元相互远离时,诱导的速度很小,但是也不能完全忽略不计,因为所有远离的涡元的合成诱导影响还是可观的,Greengard和Robklyn(1987)提出了远场的多极子近似方法。

先把流场中的涡元分成若干个集团,在每个集团内的涡元彼此相距甚近,算作近场;不在该集团内的涡元算作远场。如图9.5所示,把以 R 为半径、以 Z_1 为圆心画出的圆内的涡元作为第I集团,它们对不属该集团的任一 $P(Z)$ 点的诱导速度为

$$\bar{V}(Z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_j^{N_1} \frac{\Gamma_j}{Z - Z_j}$$

其中 N_1 是第I集团内涡元总数。上式可以展开成:

$$\bar{V}(Z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{Z - Z_1} \sum_j^{N_1} \frac{\Gamma_j}{1 - (Z_j - Z_1)/(Z - Z_1)}$$

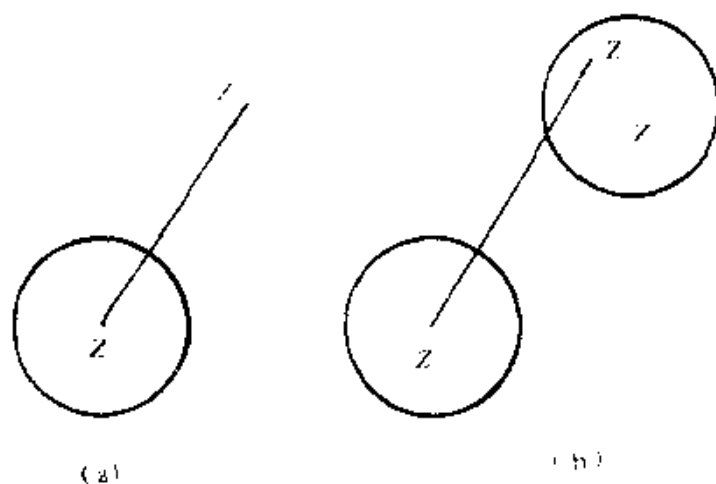


图9.5 多极子展开示意图(a)PB近似(b)BB近似

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{Z - Z_1} \sum_{k=0}^M \frac{a_k}{(Z - Z_1)^k} \quad (9.4.4)$$

其中

$$a_k = \sum_{j=1}^{N_1} F_j (Z_j - Z_1)^k, \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (9.4.5)$$

这里利用了关系式

$$\frac{1}{1-Z} = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k, \quad \text{对于 } |Z| < 1 \quad (9.4.6)$$

并在第 M 项上截断. 一般说, a_k 是些复数, 但 a_0 是实的. 式(9.4.4)和(9.4.5)又称为 PB(Particle-Box)算法.

上述方法还可进一步简化. 若 $P(Z)$ 点属于第 II 个集团, 则 P 点的速度可近似地用圆心 Z_0 点的速度的泰勒展开来表示, 式(9.4.4)可进一步写成

$$\bar{V}(Z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^M \frac{a_k}{(Z_0 - Z_1)^{k+1}} \left[1 + \frac{(Z - Z_1)/(Z_0 - Z_1)}{(Z_0 - Z_1)^{k+1}} \right]^{k+1} \quad (9.4.7)$$

因为

$$\frac{1}{(1+Z)^n} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(m+l-1)!}{(m-1)!l!} Z^l \quad (|Z| < 1)$$

上式最终可以写成

$$\bar{V}(Z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^M b_l (Z - Z_0)^l \quad (9.4.8)$$

其中

$$b_l = \frac{(-1)^l}{(Z_0 - Z_1)^{l+1}} \sum_{k=0}^M \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{a_k}{(Z_0 - Z_1)^k} \quad (9.4.9)$$

这种算法又称为 BB(Box-Box)算法。这种算法的优点还在于能够实现并行运算,详见 Pepin(1990)和 Koumoutsakos(1992)的博士论文。用这种算法,每时间步由 $O(N^2)$ 次操作可降至 $O(N \log N)$ 。

以上介绍的是二维多极子展开。对于三维情形的多极子展开要复杂得多,有一种算法请见 Butke(1991)。

9.4.3 涡元疏密失调的调整

前已述及,要保证长时间内计算精度的要求,必须保持相邻涡元之间存在重叠区,即 $\sigma > h$ 。然而,在一个强剪切流场中,涡元会发生严重的疏密失调现象,当涡元间距的增量达到 $\delta x > \beta h, 1 < \beta < 2$ 时,可按一定的规则增加新涡元,将原来相距为 l 、强度为 Γ_1 和 Γ_2 的同转向涡元分裂成等间距的三个涡元,其强度需重新分配;当涡元过密时,可适当进行涡元合并,以一个新涡元代替原来的两个涡元,新涡元位置为

$$X = \frac{x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad Y = \frac{y \Gamma_1 + y_2 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (9.4.10)$$

上述方法无疑将改善计算精度,但同时又带来新问题。其一,涡元的分裂或合并难于保证二阶涡量矩守恒和动能守恒。其二,以新涡元代替原来的涡元,改变了局部流场特性,会引起新的误差。另一个缺点是损失了涡方法自适应性的优点,需要不断地调整涡元个数。

Koumoutsakos(1992)提出了另一种调整渦元疏密的方案.他是把渦元重新分配在均匀分布的网格上.根据不同的内插公式和内插格点数,分别可以做到一阶、二阶和三阶渦量矩守恒.

可以构造如下内插函数 Δ_n . ($n=1, 2, 3$).

线性内插

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{cases} 1 - \lambda, & 0 \leq \lambda < 1 \\ 0, & \text{其它情形} \end{cases} \quad (9.4.11)$$

二阶内插

$$\Delta_2(\lambda) = \begin{cases} 1 - \lambda^2, & 0 \leq \lambda < 1/2 \\ (1 - \lambda)(2 - \lambda)/2, & 1/2 \leq \lambda < 3/2 \\ 0, & \text{其它情形} \end{cases} \quad (9.4.12)$$

三阶内插

$$\Delta_3(\lambda) = \begin{cases} (1 - \lambda^2)(2 - \lambda)/2, & 0 \leq \lambda < 1 \\ (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)/6, & 1 \leq \lambda < 2 \\ 0, & \text{其它情形} \end{cases} \quad (9.4.13)$$

上面式子中变量 $\lambda = |\mathbf{x}|/h$, h 是网格间距, $|\mathbf{x}|$ 是老渦元到网格点的距离. 对于一维情形, 线性内插是把一个渦元分配到最接近它的两个网格点上, 即分裂成两个新渦元. 二阶内插是把一个老渦元分配到最接近它的三个网格点上, 即分裂成三个新渦元. 一般说来, 对于一阶、二阶和三阶内插分别要用到 2^d , 3^d 和 4^d 个网格点, 其中 d 为维数. 设 $\tilde{\Gamma}_i$ 和 Γ_j 分别表示新、老渦元的强度, \tilde{x}_i, x_j 分别表示新、老渦元的坐标. 于是一维内插为

$$\tilde{\Gamma}_i(\tilde{x}_i) = \Gamma_j(x_j) \Delta\left(\frac{|\tilde{x}_i - x_j|}{h}\right), \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

此处 $M=2, 3$ 或 4 , 视 $\Delta = \Delta_1, \Delta_2$ 或 Δ_3 而定. 二维内插为

$$\tilde{\Gamma}_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \Gamma_j(x_j, y_j) \Delta\left(\frac{|\tilde{x}_i - x_j|}{h}\right) \Delta\left(\frac{|\tilde{y}_i - y_j|}{h}\right)$$

此处 $M=4, 9$ 或 16 , 对应于 Δ_1, Δ_2 或 Δ_3 . 容易验证, 当 $\Delta = \Delta_1, \Delta_2$ 或 Δ_3 时, 除了可保证总环量守恒外, 还分别能做到涡量一阶矩、二阶矩或三阶矩守恒, 但仍不满足动能守恒.

在二维流中, 用二阶内插公式, 将一个老涡元内插到几个格点上的例子见图 9.6.

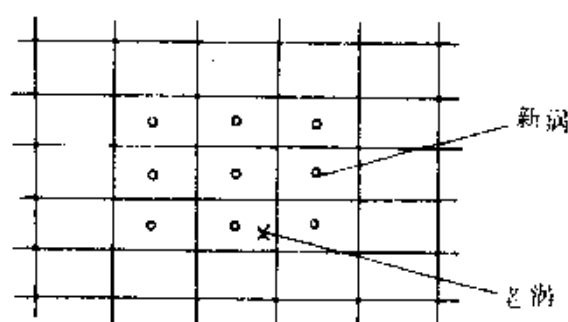


图 9.6 二维流、二阶内插法示意图

9.5 涡方法在非定常流动中的应用

涡方法的应用是各种各样的. 广义的粒子方法更是除了流体力学以外在等离子体中有广泛的应用. 这里仅举出涡方法在涡旋起主导作用的非定常流动中应用的几个典型算例.

一、剪切层的演化

剪切层的数值模拟是人们多年努力的目标. Ghoniem(1988)最近的工作有代表性. 他用 9.1.1 节中叙述的纯拉格朗日形式的二维无粘流涡方法, 采用 Chorin 提出的形函数 f_s 形式 (9.1.21), 当 $\delta x > 1.5h$ 时采用了涡量再分配技术. 图 9.7(a) 是半无穷长剪切层空间演化的情形. 在剪切层发展的早期阶段, 数值结果与空间模式的线性稳定性理论所预测的结果一致. 在非线性区域, 剪切层卷起成大尺度涡结构, 还没有成熟理论存在. 脱涡频率是与线

性稳定性理论预测的空间增长率的 λ 最大不稳定频率相匹配,动量厚度的平均增长则与实验结果一致。此外,平均速度剖面 and 脉动速度的均方根等也与实验符合得相当好,见图9.7(b)。由图9.7(a)还可看出,由于亚谐波不稳定性产生的逐次组对以及大尺度涡结构的 λ 空间增长。

二、圆柱的突然起动

圆柱从静止突然起动是非定常流的一个十分经典的问题。无论实验还是理论都有相当多的结果可供比较。事实上这个问题已成为检验各种数值方法优劣的一个“样板”问题。最近,Smith 和 Stansby (1988)用格子涡方法,Pepin (1990)和 Koumoutsakos (1992)用确定性涡方法,Yin, Sun 和 Zhuang (1991)用分区混合方法(内区用有限差分法、外区用格子涡方法)计算了同一问题,结果表明, Re 数从3000到9500直到 10^5 ,无论流动图像还是壁面涡量、压强分布、分离点和阻力等都与实验结果或已有的理论结果符合得很好(见图9.8),显示了这种方法的 λ 优势。

三、涡环的演化

一个涡环在不可压缩无界流体中的运动是三维涡方法应用的典型算例。Ghoniem (1988)最近对有核涡环做了数值模拟,在涡核的横截面积内用若干个涡元表示,涡元之间彼此有重叠,涡元运动由前述三维无粘流涡方法计算。结果表明,不稳定模式的频率、增长率和形状与不稳定性的理论及实验结果十分一致。图9.9表示了涡环形状随时间的演化过程,其中最重要的动力学变化发生在演化的后期阶段,出现了强的流向涡量分量,在流向并有“发卡”状小尺度涡结构形成,这与实验观察很相似。

最后应该指出,涡方法的应用是多方面的,特别是不少学者努力用涡方法来模拟湍流。本节限于篇幅,未涉及这方面的内容,有兴趣的读者可参阅有关文献,这方面的前景是令人鼓舞的。

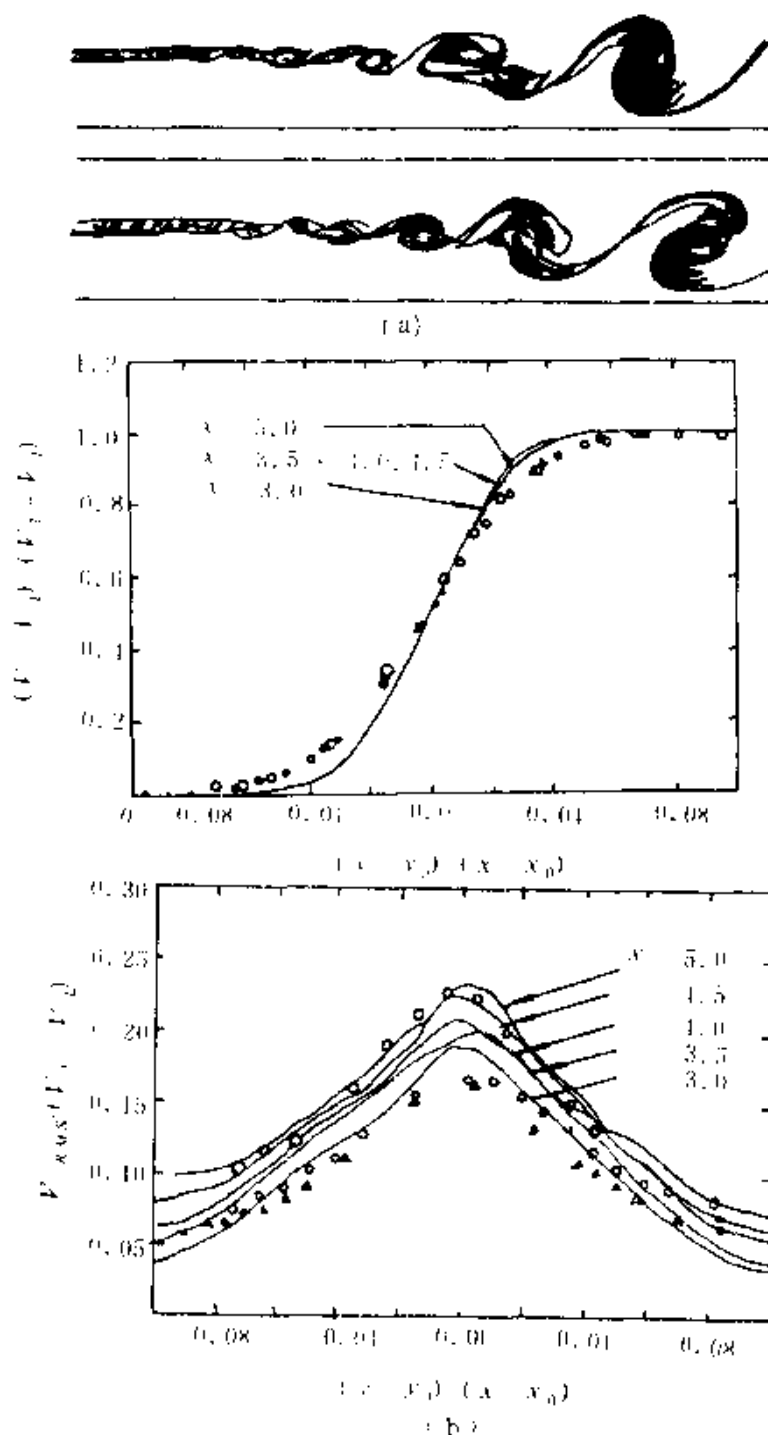
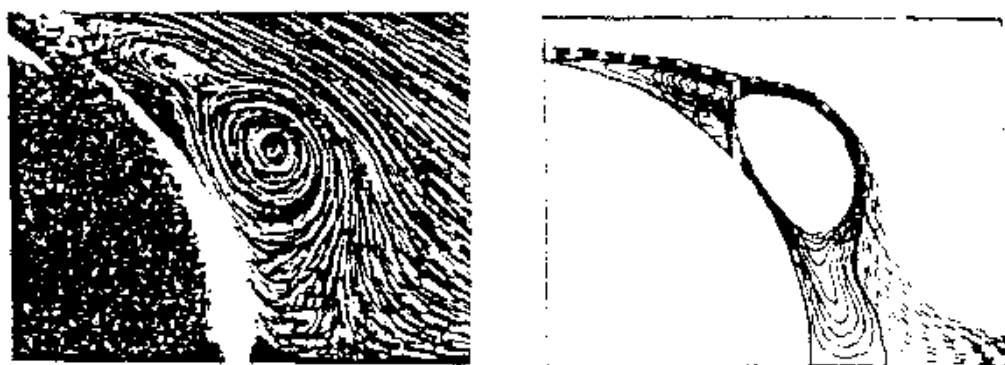


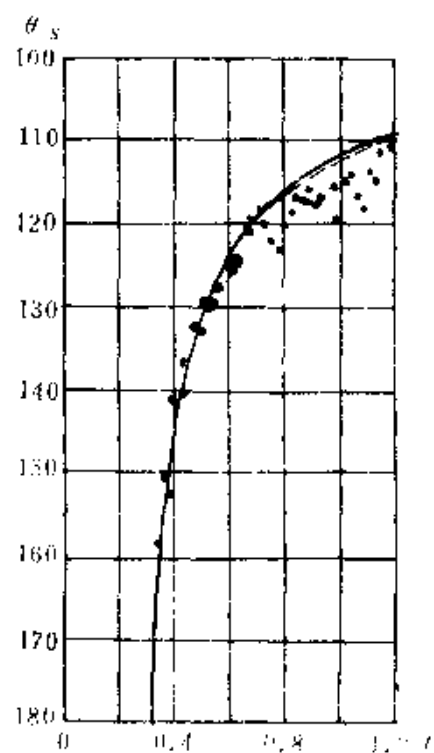
图9.7 半无穷长剪切层的演化

(a)在两个时刻涡元的位置和速度；(b)平均速度(上)和均方根脉动速度(下)。

实线为计算值。



(a)



(b)

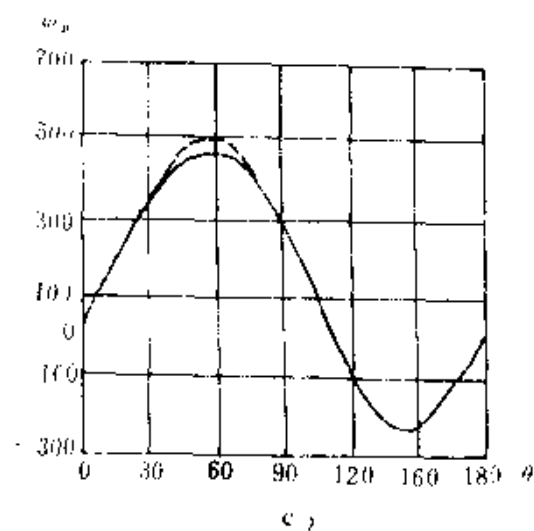


图9.8 圆柱突然起动

(a) $Re=9500$, $t=2.5$ 时流线图与实验比较(b) $Re=10^5$ 分离点位置; (c) $Re=10^5$ 壁面涡量($c=1.0$).

---混合分区法; - Collins & Dennis 级数展开

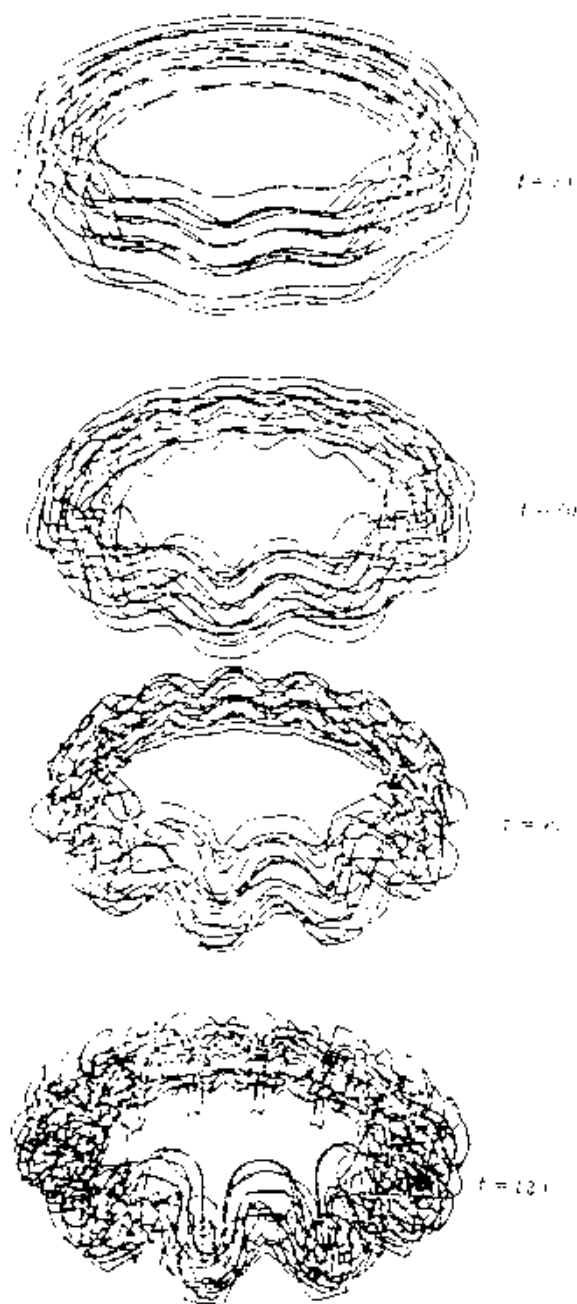


图9.9 涡环不稳定性的演化

习 题

第一章

1.1 若流场速度分布为

$$u = -\frac{cy}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{cx}{x^2 + y^2}, \quad w = 0$$

(1) 试用速度环量来说明运动是否有旋；

(2) 作一围绕 z 轴的任意封闭曲线，试用 Stokes 定理求沿此封闭周线的速度环量，并说明为何此环量值与所取封闭周线形状无关。

1.2 若流场的速度分布为

$$u = -cy, \quad v = cx, \quad w = \sqrt{f(z) - 2c^2(x^2 + y^2)}$$

试证明涡量矢量与速度矢量的方向相同，并求出涡量是速度的多少倍。

1.3 若流场的速度分布为

$$u = y + 2z, \quad v = z + 2x, \quad w = x + 2y$$

试求：(1) 涡量及涡线；

(2) 在 $x + y + z = 1$ 的平面上面积为 $dS = 0.0001m^2$ 的涡索强度；

(3) 在 $z = 0$ 平面上面积为 $dS = 0.0001m^2$ 的涡量通量。

1.4 在平面环形域 $a_1 < r < a_2$ 中，流体的涡量等于一个常数 ω_0 ；而在 $r = a_1$ 上速度为 V_1 ，在 $r < a_1$ 以及 $r \geq a_2$ 区域内 $V = 0$ ，试证涡量为

$$\omega_0 = \frac{2a_1V_1}{a_1^2 - a_2^2}$$

1.5 设平面无界流场中涡量分布为

$$\omega = 2\Omega k, \quad \text{在 } r \leq a \text{ 处}$$

$$\omega = 0, \quad \text{在 } r > a \text{ 处}$$

其中 a, Ω 为常数. 试求速度场, 并计算有旋区内涡旋的部分动能.

1.6 已知流体的速度场为

$$u = -\frac{1}{2}\alpha x - f(r)y, \quad v = -\frac{1}{2}\alpha y + f(r)x, \quad w = \alpha z$$

式中 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, α 为一正常数. 试求:

(1) 质点的迹线, 并证明迹线落在 $(x^2 + y^2)z = \text{常数}$ 的曲面上. 画出示意图;

(2) 涡量场, 并问当 $f(r)$ 取何种形式时运动是无旋的.

1.7 设 ω_P 是 P 点的涡量, n 为过 P 点的某一微面元的单位法向矢量, 试证明流体在此微面元内绕 n 轴旋转的平均角速度为 $\frac{1}{2}\omega_P \cdot n$.

1.8 试证明流体的涡量是应变速率张量主轴旋转角速度的两倍.

1.9 试证明公式(1.1.9).

1.10 设在柱坐标系下速度场为

$$V_r = Ar^{n-1}\cos n\theta, \quad V_\theta = -A_0^{n-1}\sin n\theta, \quad V_z = 0$$

式中 A, n 为常数, 试求流线、迹线和烟线.

1.11 已知

$$\begin{aligned} x &= (a\cos\omega t - b\sin\omega t)e^{-kt} \\ y &= (a\sin\omega t + b\cos\omega t)e^{-kt} \\ z &= ce^{2kt} \end{aligned}$$

式中 ω, k 为常数, a, b, c 为流体质点的拉格朗日坐标. 试求 $t=0$ 时刻过空间点 $(1, 1, 1)$ 的流线、迹线和烟线.

1.12 假设平面流动的流体质点绕固定轴匀速旋转, 其角速度 Ω 的大小与该质点到轴的距离的 n 次方成正比. 试证:

(a) 仅当 $n+2=0$ 时, 运动才是无旋的;

(b) 质点绕其自身转轴的平均角速度为 $\frac{n+2}{2}\Omega$.

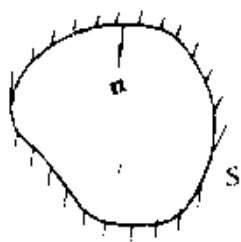
第二章

2.1 由静止固壁包围的流体的涡量场 ω 为已知, 试证明其速度场的矢量势 $A(r)$ 为

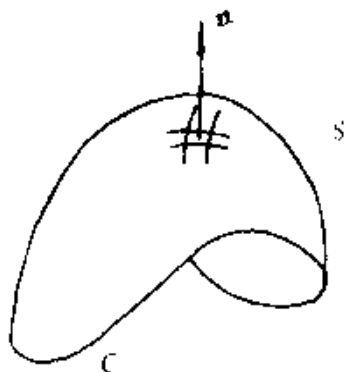
$$A(r) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{n}' \times \mathbf{V}(r')}{s} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\omega(r')}{s} dV'$$

式中 \mathbf{n} 是固壁上内法线单位矢量, $\mathbf{r} = xi + yj + zk$, $\mathbf{r}' = x'i + y'j + z'k$, $s^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$, 矢量势定义为 $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$.

2.2 试证明: 开曲面 S 上强度为 $\mu(r') = \mu(r')\mathbf{n}$ 的偶极子分布在空间任一点 $P(r)$ 所产生的诱导速度等同于在 S 面上分布着强度为 $\gamma(r') = -\mathbf{n} \times \nabla' \mu$ 的面涡在该点的诱导速度以及以该曲面边缘周线 C 为一条线涡产生的诱导速度之和, 并且该线涡的强度等于当地偶极子强度, 即 $\Gamma = \mu|_C$.



题2.1附图



题2.2附图

2.3 根据矢量分析原理, 任何一个位置函数的矢量可以表示成一个标量函数的梯度及一个矢量函数的旋度之和, 即

$$\mathbf{a} = \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{B}$$

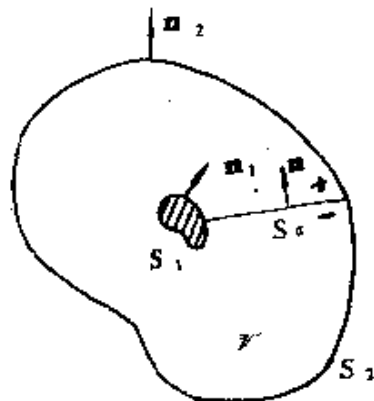
请讨论正文中为何将 V 分解成 V_1, V_2 和 V_3 之和? 这与上述矢量分解原理矛盾吗?

2.4 试证明双连通域内高斯定理可写成

$$\int_V \nabla F dV = \int_{S_2} n_2 F dS_2 - \int_{S_1} n_1 F dS_1 - \int_{S_0} n[F] dS$$

其中 $[F] = F^+ - F^-$ 表示函数 F 穿过隔膜 Σ 的间断值.

2.5 设在半径为1的单位球内有涡量分布 $\omega = (1, 0, 0)$ 和矢量 $B = -\frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)i$, 满足 $\nabla^2 B = -\omega$, 但不满足 $\nabla \cdot B = 0$ 条件, 试找到一个矢量势 A , 使得 A 既满足 $\nabla^2 A = -\omega$, 也满足 $\nabla \cdot A = 0$ 的条件. 并求出相应的速度场.



题2.4附图

2.6 由格林公式

$$\int_V (G \nabla^2 F - F \nabla^2 G) dV = \int_S (G \nabla F - F \nabla G) \cdot n dS$$

令 $G = \frac{1}{R}$, $F = A$, 并考虑到 $\nabla^2 G = -4\pi\delta(r-r')$, $V = \nabla \times A$, $\nabla^2 A = -\omega$, 试证明广义毕奥-萨伐尔公式(2.1.25).

2.7 试证明式(2.4.5)中第二个积分等价于

$$\frac{1}{2\pi} 2\Omega_0 \times \int \frac{R}{r^3} dS$$

其中 Ω_0 是物体的转动角速度.

2.8 若无穷远处有均匀来流 V_∞ 流过静止的固体, 试证明式(2.1.25)变成

$$V(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V (\Theta' \nabla' \frac{1}{R} + \omega' \times \nabla' \frac{1}{R}) dV' + V_\infty$$

2.9 速度场有时也可分解成另一种形式(Monge 分解):

$$V = \nabla \varphi + \lambda \nabla \mu$$

其中 φ, λ, μ 是三个标量函数, 试证明 $\lambda = \text{常数}$ 和 $\mu = \text{常数}$ 的二曲面之交线是涡线.

第三章

3.1 求证式(3.2.1)

3.2 求证式(3.2.14)

3.3 求证式(3.3.3))

3.4 求证式(3.3.8)

3.5 求证式(3.4.7)

3.6 求证在静止的壁面上壁面流线和壁面涡线彼此垂直.

3.7 已知二维流场中涡量分布为

$$\omega = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} e^{-r^2/4\nu t} \quad (\text{奥辛涡})$$

求其总涡量、流体冲量、动能及能量耗散率

3.8 已知二维流场中涡量分布为

$$\omega = \frac{M}{2\pi\nu t} (1 - \frac{r^2}{4\nu t} e^{-r^2/4\nu t}) \quad (\text{泰勒涡})$$

求其总涡量、流体冲量、动能及能量耗散率

第四章

4.1 已知

$$x = e^{-\alpha t/2} \{ X \cos[\frac{\Omega}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)] - Y \sin[\frac{\Omega}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)] \}$$

$$y = e^{-\alpha t/2} \{ Y \cos[\frac{\Omega}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)] + X \sin[\frac{\Omega}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)] \}$$

$$z = Ze^{\alpha t}$$

求速度场及涡量场, 并证明该流动满足连续性方程和涡量动力学方程. 试描述该流动. 当 ω 随 z 增加时涡量如何变化?

4.2 试证明在 xy 平面内长度为 π 的方盒中存在 N-S 方程封闭形式的解

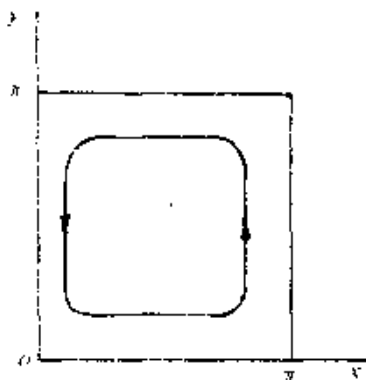
$$\omega_z = -2A \sin x \cos y e^{-2z}$$

A 是任意常数(上式表示 Taylor 栅格涡的衰减), 再写出流函数及速度分布.

4.3 设流体从一个圆筒内流下, 其速度分布为

$$\mathbf{V} = u(r)\theta + w(r)\mathbf{k}$$

试在柱坐标系中计算其涡量, 并描述该流动的涡线、涡面和涡管之形状. 该流动是否可能存在(要满足连续性方程和无粘不可压缩流的涡量动力学方程)?



题4.2附图

4.4 试证明, 当且仅当 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = 0$ 时, 对于二维流动有

$$\nabla^2 \phi = f(\phi)$$

4.5 试证明, 在不可压缩无粘轴对称(non-swirling)流中, 涡量动力学方程简化为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{r} \right) = 0$$

特别是定常流情况, 还可写成

$$\nabla^2 \phi = -r^2 f(\phi)$$

式中 ϕ 为 Stokes 流函数.

4.6 设不可压缩平面流的流线方程为 $\psi = \theta(r)$, 流体速度只依赖于 r 而与 θ 无关, 试证明此时涡量可表示成

$$\omega = \frac{K}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right)$$

其中 K 为常数.

4.7 在 $r \leq a$ 的圆筒内, 筒壁与流体以角速度 Ω 均匀旋转,

$$V_\theta = \Omega r, \quad V_r = 0, \quad r \leq a, \quad t = 0$$

若筒壁突然静止,

$$V_\theta = 0, \quad \text{在 } r = a, \quad t > 0 \text{ 时}$$

求证该流动的解为

$$V_\theta(r, t) = -2\Omega a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n r/a)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \left(\frac{\nu t}{a^2}\right)\right)$$

其中 λ_n 是 $J_1(\lambda) = 0$ 的零点, $\lambda_n > 0$; 并讨论, 要使流体静止, 大约需多少时间?

4.8 试证明在平面极坐标中流函数方程

$$\nabla^2 \psi = c\psi$$

的一个解为

$$\psi = cJ_1(kr)\sin\theta$$

若仿造 Hill 球涡解的作法, 选择外流解, 并适当选择 k 后, 它可以构造出一个 $r=a$ 的圆内“涡偶”的流动.

4.9 试寻找二维不可压缩圆对称粘性涡的一般相似解. 令 $\omega = T(t)f(\eta)$ 及 $\eta = -\frac{1}{4\nu} \frac{r^2}{t}$, 试证明涡量动力学方程有解

$$T = ct^P, \quad P > 0 \quad \text{正整数}$$

和

$$f(\eta) = L_P(\eta) = e^\eta \frac{d^P}{d\eta^P} \{\eta^P e^{-\eta}\}$$

式中 L_P 是 Laguerre (拉盖尔) 多项式.

第五章

5.1 如图示, $V = V_+ \cup V_-$ 是个物质体积, Σ 是其中的一个间

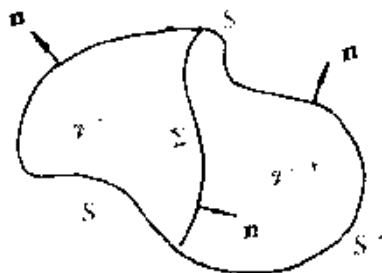
断面,写出该物质体积的质量、动量和能量守恒关系. 试证明在间断面 Σ 两侧有如下“间断跳跃”条件成立:

$$\text{质量守恒} [\rho w_n] = 0$$

$$\text{动量守恒} [\rho V w_n + t] = 0$$

$$\text{能量守恒} [\rho(\epsilon + \frac{1}{2} V \cdot V) w_n] + [t \cdot V - h] = 0$$

式中 $w_n = U_n - V_n^+$, V 是流体质点速度, $V_n^+ = V \cdot n^+$ 是间断面上质点的法向速度, U_n 是间断面法向速度, t, ϵ 和 h 分别是应力矢量、内能和焓. 符号 $[f] = f^+ - f^-$ 表示穿过间断面物理量的跳跃.



题5.1附图

试讨论面涡作为间断面的情形.

5.2 间断面上的相容关系还可利用另一种方法求得. 分别对间断面两侧写出 Euler 方程组, 试证明在间断面 Σ 上的跳跃条件为

$$(\langle V \rangle \cdot n - U_n)[\rho] + \langle \rho \rangle n \cdot [V] = 0$$

$$(\langle V \rangle \cdot n - U_n)[V] + \langle \frac{1}{\rho} \rangle n \cdot [\rho] = 0$$

$$(\langle V \rangle \cdot n - U_n)[p] + \frac{V \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} (\langle V \rangle \cdot n - U_n)[\rho] = 0$$

其中 n, U_n 分别为间断面的单位法线矢量和法向传播速度; 记号 $[f] = f_2 - f_1$, $\langle f \rangle = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. 若将 $[\rho], [p], [V]$ 看成因变量, 从上述齐次线性代数方程组有非零解的条件出发, 试证明存在这样一类间断面(面涡)

$$n \cdot [V] = 0, \quad [\rho] = 0, \quad \text{及} [\rho] \text{ 和 } [V] \text{ 任意.}$$

5.3 由式(5.1.3)、(5.1.4)及(5.1.5), 试证明

$$\gamma \times n = [V], \quad V_+ = V_p + \frac{1}{2}\gamma \times n, \quad V_- = V_p - \frac{1}{2}\gamma \times n$$

5.4 试证明式(5.1.8)。

5.5 试推导二维面涡的 B-R 演化方程(5.2.5)

5.6 如果流动是周期性的, 波长为 λ , 试证明 B-R 方程变成

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial t} = -\frac{i}{2\lambda} \int_0^{\Gamma_0} \operatorname{ctg} \left[\frac{Z(\Gamma, t) - Z(\Gamma', t)}{\lambda} \right] d\Gamma$$

式中 Γ_0 是面涡在一个波长内的总环量。

5.7 试推导卡登螺线的有关公式。

第六章

6.1 试证明, 在 $z > 0$ 的半平面上, 单个涡环所诱导的速度势 φ 和流函数 ψ 可表示成

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{r_0 \Gamma}{2} \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) J_1(kr_0) dk \\ \psi &= -\frac{r_0 \Gamma}{2} r \int_0^\infty e^{-kz} J_1(Kr) J_1(kr_0) dk \end{aligned}$$

6.2 试证明, 对于单个涡环, 在涡环内部的有旋区域内, 以下公式成立:

$$\omega + rf(\psi) = 0$$

或者说 ω/r 只是流函数 ψ 的函数。

6.3 试证明, 对于有封闭流线的均质不可压缩流体的定常粘性流动, 有

$$\nu \oint_C (\nabla \times \omega) dl = 0$$

其中 C 是一条封闭流线。

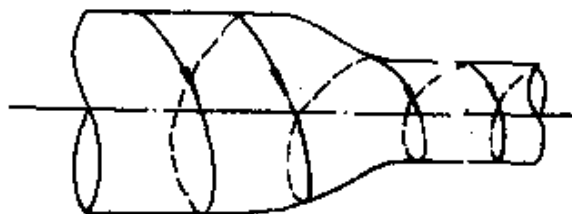
6.4 试证明 Prandtl-Batchelor 定理, 即对于均质不可压缩二维定常粘性流动, 在粘性系数 $\nu \rightarrow 0$ 的极限情形下, 由封闭流线

围成的整个区域内涡量是个常数.

提示:在 $\nu \rightarrow 0$ 时,对于二维定常流动有 $\omega = \omega(\psi)$, 并且可证明题 6.3 中的积分变成

$$\frac{d\omega(\psi)}{d\psi} \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

6.5 试描述:当旋拧流 (swirling flow) 沿圆管进入收缩段时, 涡量分量 (ω_θ, ω_z) 随时间如何变化, $d\omega_\theta/dt$, $d\omega_z/dt$?



题 6.5 附图

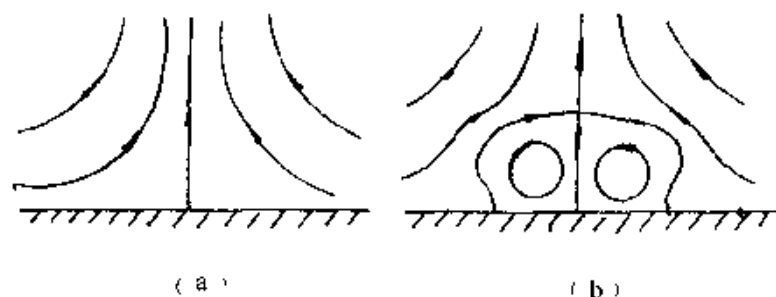
第七章

7.1 无旋流 $u = -\alpha x$, $v = \alpha y$, $\alpha > 0$ 可近似描写后驻点附近流动 (图 a). 若在后驻点附近存在两个强度为 Γ 、转向相反的点涡, 位于 Z_1 和 Z_2 处 (图 b), 试写出复速度势, 并计算点涡运动的速度. 试证明, 当 $Z_1 = d(-1+i)$, $Z_2 = d(1+i)$ 时, 两涡处于静止状态 (驻涡), 其中 $d^2 = \frac{\Gamma}{8\pi\alpha}$.

7.2 试证明上题中的点涡系是不稳定的.

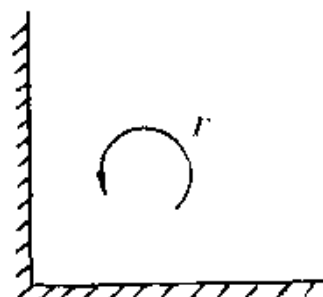
提示: 以 $Z_1 = Z_1/d$, $Z_2 = Z_2/d$, $t' = 4\alpha t$, 将点涡系运动方程无量纲化, 然后在平衡位置加上小扰动, 即 $Z_1 = -1+i+\epsilon_1(t)$, $Z_2 = 1+i+\epsilon_2(t)$, 再分析其稳定性.

7.3 试确定如图示的点涡的运动轨迹, 并用它定性解释飞机



题7.1附图

起飞时尾涡的运动.



题7.3附图

7.4 设两平壁间有一点涡,试求该点涡的运动.

7.5 试证明,图7.3所示卡门涡街的流线方程可以写成

$$\frac{\sin x + \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} = C$$

如果稳定性条件(7.3.36)式成立,则式中常数可以在 $-\sqrt{2}$ 到 $\sqrt{2}$ 范围内变化.

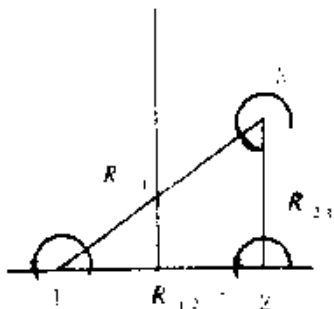
7.6 试证明式(7.2.10).

7.7 试证明式(7.2.16).

7.8 试证明式(7.2.20).

7.9 试证明式(7.4.4).

7.10 设在 $r_1(-1,0)$, $r_2(1,0)$, $r_3(1,\sqrt{2})$ 三点上分别有三个点涡, 其强度分别为 $\Gamma_1=2$, $\Gamma_2=2$, $\Gamma_3=-1$, 试研究三点涡的塌缩.



题7.10附图

提示: 求证

$$\frac{d}{dt} R_{\alpha\beta}^2(t) = -\frac{1}{3\sqrt{2}\pi} R_{\alpha\beta}^2(0), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

$R_{\alpha\beta} = |r_\alpha - r_\beta|$, 因此可知在 $t = 3\sqrt{2}\pi$ 时, $R_{\alpha\beta} = 0$.

第八章

8.1 试由动量方程

$$2\omega \times \mathbf{V} = -g - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

推导出球坐标系 (r, θ, λ) 下的地转流动方程, 其中 θ, λ 分别表示纬度和经度角.

8.2 试推导出球坐标下地转流动的热成风方程

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial z} = -\frac{g}{2\rho\Omega r_0 \cos\theta \sin\theta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right)_\theta$$

$$\frac{\partial V_\lambda}{\partial z} = -\frac{g}{2\rho\Omega r \sin^2\theta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_\lambda$$

式中 $z = r - r_0$, r_0 为地球半径.

8.3 试求 Ekman 层的涡量分布, 并加以讨论.

8.4 在静止的海面上由于风的驱动,在海洋上层形成 Ekman 层,设风应力为 τ_0 ,当地纬度角为 θ ,水的粘性系数为 ν ,密度为 ρ ,试求该层中的速度分布,并画出海水速度随深度变化的极曲线。

若取湍流粘性系数 $\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$, $\tau_0 = 2 \times 10^{-2} \rho_a V_a^2$, ρ_a, V_a 分别为空气密度和风速, $V_a = 10 \text{ m/s}$, 纬度为 $\theta = 45^\circ$, 求海洋表面流速 V_0 以及风驱动海水的深度 δ_m 。

(为简便起见,可认为 τ_0 沿 y 方向,而 z 轴垂直于海平面。)

8.5 取以等速度 U 平移且以等角速度 Ω 旋转的运动坐标系,试证明对于无粘不可压缩流体,若质量力有势,则涡量动力学方程为

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_L + \Omega \times \omega + \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)_R \cdot \nabla\right] \omega = (\omega_l \cdot \nabla) V$$

其中

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_R = V - U - \Omega \times r$$

V 是绝对速度,式中下标 L 和 R 表示惯性参考系和转动坐标系。

8.6 (1) 求证:在小罗斯比数情形下,转动坐标系中的涡量动力学方程可写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \nabla^2\right) \omega + (2\Omega \cdot \nabla) V$$

(2) 利用算子 $(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \nabla^2) \nabla^2$, 设法消去 V , 可证得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \nabla^2\right)^2 \nabla^2 \omega + (2\Omega \cdot \nabla)^2 \omega = 0$$

8.7 设二维翼型在均匀来流中作振荡运动,试证明该运动的控制方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_i} + V_{ij} \cdot \nabla_{ij} \omega_j + \nu \nabla_{ij}^2 \omega_j \\ \nabla_{ij} \cdot \omega_j = 0 \end{cases}$$

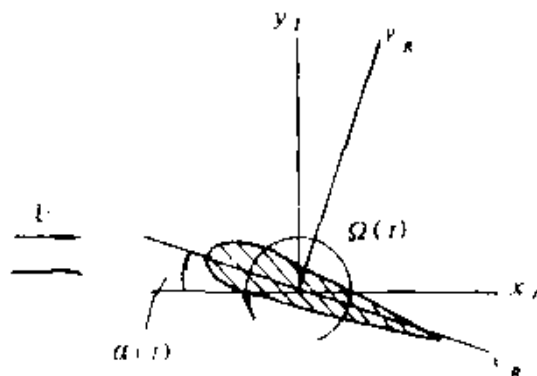
式中下标 i 和 j 分别为在惯性和转动坐标系下取,并证明下述

关系存在

$$\omega_l = \omega_R + 2\Omega(t)$$

$$\phi_l = \phi_R - \frac{1}{2}\Omega(x_R^2 + y_R^2)$$

试写出无穷远处及物面上的边界条件.



题8.7附图

8.8 设 $\lambda(r, t)$ 是任意标量函数, 由不可压缩无粘流涡量动力学方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times V) = 0$$

出发, 试证明

$$\frac{d}{dt}(\omega \cdot \nabla \lambda) = (\omega \cdot \nabla) \frac{d\lambda}{dt}$$

由此可推论, 若 $\lambda(r, t)$ 对流体质点守恒, 则 $\omega \cdot \nabla \lambda$ 也随流体质点守恒, 即

$$\frac{d}{dt}(\omega \cdot \nabla \lambda) = 0 \quad (\text{Ertel 定理})$$

试讨论, 若流体是可压缩、斜压的, 情形将如何?

参考文献

一、书目

- [1] 童秉纲, 张炳暄, 崔尔杰主编. 非定常流与涡运动. 北京: 国防工业出版社, 1993
- [2] Batchelor G K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967
- [3] 庄礼贤, 尹协远, 马晖扬. 流体力学. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1991
- [4] 吴介之, 马晖扬, 周明德. 涡动力学引论. 北京: 高等教育出版社, 1993
- [5] Truesdell C A. *Kinematics of Vorticity*. Bloomington: University of Indiana Press, 1954
- [6] Panton R L. *Incompressible Flow*. New York: John Wiley & Sons, 1984
- [7] Lugt H J. *Vortex Flow in Nature and Technology*. New York: John Wiley & Sons, 1985
- [8] 童秉纲, 孔祥言, 邓国华. 气体动力学. 北京: 高等教育出版社, 1990
- [9] Lamb H. *Hydrodynamics*. (6th ed.). Cambridge University Press, 1932. (中译本: 理论流体动力学, 上、下册. 北京: 科学出版社, 1990)
- [10] 斯米尔诺夫. 高等数学教程. 第二卷第三分册. 北京: 人民教育出版社, 1959
- [11] Milne-Thomson L M. *Theoretical Hydrodynamics*. (中译本: 理论流体动力学. 北京: 机械工业出版社, 1984)
- [12] Saffman P G. *Vortex Dynamics*. New York: Cambridge

- University Press, 1992
- [13] Tennekes H, Lumley J L. A First Course in Turbulence. The MIT Press, 1972
- [14] 孔祥言. 涡旋运动理论. 中国科学技术大学讲义. 1985
- [15] Landau L D, Lifshitz E M. Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Oxford. Pergamon, 1987
- [16] McCormack P D, and Crane L. Physical Fluid Dynamics. London; Academic Press. 1973
- [17] Tritton D J. Physical Fluid Dynamics (2nd ed.). Oxford; Clarendon Press. 1988
- [18] Greenspan H P. The Theory of Rotating Fluids. London; Cambridge University Press. 1969
- [19] Roberts P H, Soward A M. Rotating Fluids in Geophysics. London; Academic Press. 1978
- [20] Peyret R, Taylor T D. Computational Methods for Fluid Flow. New York; Springer-Verlag press. 1983

二、论文

Alder M and Moser J. 1975. On a class of polynomials connected with the Korteweg-de Vries equation. *Commun. Math. Phys.*, 61: 1-30

Aref H. 1979. Motion of three vortices. *Phys. Fluids*, 22 (3): 393-400

Aref H. 1983. Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15: 345-389

Aref H and Flierberg E P. 1985. Dynamics of a vortex filament in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, 148: 477

Aref H, Kadtke J B and Zawadzki I, 1988. Point vortex dynamics; recent results and open problems. *Fluid dynamics Research*, 3:63—74

Beak J T and Majda A, 1982. Vortex method I: higher order accuracy in two and three dimensions. *Math. Comput.* 39: 29—52

Beak J T, 1986. A convergent 3-D vortex method with grid-free stretching. *Math. Comp.*, 46: 401—24 and S 15—20

Beak J T et al, 1991. Numerical tests of 3-D vortex methods using a vortex ring with swirl. *Lecture in Applied Math.*, 28:1—9

Bellamy—Knights P G, 1970. An unsteady two-cell vortex solution of the N-S equations. *J. Fluid Mech.*, 41:673

Betchev R, 1965. On the curvature and torsion of an isolated vortex filament. *J. Fluid Mech.*, 51:477

Buttke T F, 1991. Fast vortex methods in three dimensions. in "*Lecture in Applied Math*", 28: 51-66

Caffisch R E, 1988. Nonlinear analysis for the evolution of vortex sheets. *Fluid Dynamics Research*, 3:75—77

Caffisch R E, 1991. Analysis for the evolution of vortex sheets. (in: *Vortex Dynamics and Vortex Methods*, eds. Anderson C R and Greengard C), American Math. Society, 67—84

Campbell L J and Ziff R M, 1979. Vortex Patterns and energies in a rotating superfluid. *Phys. Rev.* - B 20: 1886—1902

Campbell L J, Kadtke J B, 1987. Stationary configuration of point vortices and other logarithmic objects in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 58:670—673

Choquim J P et al. 1988. Sur l'analyse d'une classe de methodes de vortex tridimensionnelles. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 1988, 306:739—42

Chorin A J, 1973. numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57:785—796

Cottet G H, Mas-Gallic S and Raviart P A, 1988. Vortex methods for incompressible Euler and Navier-Stokes equations. (in : Computational Fluid Dynamic and Reacting Gas Flows). Berlin; Springer-Verlag, 1988

Degond P and Mas-Gallic S, 1989. The weighted particle method for convection-diffusion equations. Part I: the case of an isotropic viscosity; part II: the anisotropic case. *Math. Comput.*, 53: 485—526

Ekman V W, 1905. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents. *Ark. Mat. Astron. Fys. Stockholm*, 2:1

Fishelov D, 1990. A new vortex scheme for viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 86:211—224

Fraenkel L E, 1972. Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid. *J. Fluid Mech.*, 51:119—135

Ghoniem A F and Ng K, 1987. Numerical study of the dynamics of the forced shear layer. *Phys. Fluids.*, 30:706—721

Greengard L and Rokhlin V, 1987. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 73:325—348

Hald O, 1979. Convergence of vortex methods for Euler's equations. I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 16:726—755

Harlow F H, 1959. Report No. LA-2301, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM

Hasimoto H, 1972. A soliton on a vortex filament. *J. Fluid Mech.*, 51:477—485

Hicks W M, 1885. Researches on the theory of vortex rings—part I. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A 176:725—80

Hockney R W, 1970. The Potential calculation and some applications. (in: *Methods of Comput. Phys.*), Academic press, New York, 135—212

Hopfinger E J, Browand F K, Gagne Y, 1982. Turbulence and waves in a rotating tank. *J. Fluid Mech.*, 125:505

Hung S C and Kinney R B, 1988. Unsteady viscous flow over a grooved wall; a comparison of two numerical methods. *Inter. J. for Numer. Method in Fluids*, 8:1403—1437

Kelvin L, 1867. The translatory velocity of a circular vortex ring. *Phil. Mag.*, 33:511—12

Kimura Y, 1988. Chaos and collapse of a system of point vortices. *Fluid Dynamics Research*, 3:98—104

Koumoutsakos P D, 1992. Direct numerical simulations of unsteady separated flows using vortex methods. *Ph. D. thesis, Caltech*

Krasny R, 1986. A study of singularity formation in a vortex sheet by a point vortex approximation. *J. Fluid Mech.*, 167:65—93

Krasny R, 1988. Numerical simulation of vortex sheet evolution. *Fluid Dynamics Research*, 3:93—97

Kuehmann D, 1965. Report on the IUTAM symposium on concentrated vortex motion in fluids. *J. Fluid Mech.*, 21:1

Leeman A, 1985. Computing three-dimensional incompressible flow with vortex elements. *Ann. Rev. Fluid*

Mech., 17:523—559

Leslie F W and Snow J T. 1980. Sullivan's two-celled vortex. *AIAA J.*, 11:1272

Lighthill M J. 1951. A new approach to thin aerofoil theory. *Aeronaut Q.*, 2:193—210

Lighthill M J. 1963. Introduction. (in: *Boundary Layer Theory*, ed. Rosenhead J). New York: Oxford Univ. Press, 54—61

Meiron D I, Baker G R and Orszag S A. 1982. Analysis structure of vortex sheet dynamics, Part I, Kelvin-Helmholtz instability. *J. Fluid Mech.*, 114:283—98

Milizzano F and Saffman P G. 1977. The calculation of large Reynolds number two-dimensional flow using discrete vortices with random walk. *J. Comput. Phys.*, 23:380—392

Moffatt H K. 1969. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.*, 35:117—129

Moore D W. 1975. The rolling up of a semi-infinite vortex sheet. *Proc. Roy. Soc.*, A345:417—430

Moore D W. 1984. Numerical and analytical aspects of Helmholtz instability. (in: *Theoretical and Applied Mechanics*, eds. Nirodson & Olhoff), North-Holland, 629—633

Pepin F. 1990. Simulation of the flow past an impulsively started cylinder using a discrete vortex method. Ph. D. thesis, Caltech

Pullin D I. 1978. The large-scale structure of unsteady self-similar rolled-up vortex sheets. *J. Fluid Mech.*, 88:401—30

Raviart P A. 1987. *Methods particulières*. Lecture notes. Ecole de l'analyse numérique, Centre d'étude du Breausans-

nappe, France

Rehbach C, 1978. Numerical calculation of three-dimensional unsteady flows with vortex sheets. *AIAA paper* 78—111

Rosenhead L, 1931. The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. Roy. Soc., A* 134:170—192

Russo G, 1991. A Lagrangian vortex method for the incompressible N-S equations. *Lecture in Applied Math.*, 28: 585—596

Tong B G, Yin X Y and Sun D J, 1993. The refinements of vortex methods and high angle-of-attack flow simulation. (in: Fluid Dynamics of High Angle of Attack, eds. Kawamura R & Aihara Y), Springer-Verlag Press, 121—132

Tkachenko V K, 1964. Dissertation. Inst. Phys Probl., Moscow, USSR

王东耀, 童秉纲, 马晖扬, 1994. A new deterministic vortex method for N-S equations. *Acta Mech. Sinica.*, 10(1)

Wu J C, 1976. Numerical boundary conditions for viscous flow problems. *AIAA J.*, 14;1042—1049

尹协远等, 1984. 细长三角翼前缘和后缘涡层的卷起及其相互作用. *力学学报*, 16(5)

尹协远, 李平, 童秉纲, 1992. 容量矩阵法在涡方法中的应用. *力学学报*, 24(1):19—25

名词索引

B

- 薄核涡环解法(6.4.2)
- Betchev 内幕方程(6.3)
- 毕奥-萨伐尔公式(2.1.2;2.4.1)
- Birkhoff—Rott 方程(5.2.1;5.2.2)
- B-R 方程高阶近似(5.4.3)
- Bjerknes 定理(8.1.2)
- Boussinesq 近似(8.1.2)
- 不可积性(7.5.2)
- Burgers 涡(4.4.1)

C

- Crocco 方程(1.3.4)

D

- 点涡系动能(7.1.1)
- 点涡系刚体式平移(7.2)
- 点涡系刚体式旋转(7.2)
- 点涡系惯性矩(7.1.1)
- 点涡系哈密顿函数(7.5.1)
- 点涡系完全静止(7.2)
- 点涡系相似解(7.4)
- 点涡系运动方程(7.1.1)
- 点涡系质心矩(7.1.1)
- 地转流动(8.3)
- 地转流动方程(8.3)

动能(3.3.1;3.4.3)

多极子展开(9.4.2)

E

Ekman 层(8.4)

Ekman 数(8.2.2)

二维涡方法(9.1)

F

分层流体的浮力(8.1.2)

G

广义毕奥-萨伐尔公式(2.1.4)

格子涡(VIC)方法(9.4.1)

H

亥姆霍兹方程(1.3.2)

亥姆霍兹涡量定理(3.1)

Hill 球涡(4.5)

混沌(7.5.2)

J

迹线(1.2.1)

集中涡近似模型(5.3.3)

加速度环量(1.2.1)

局部诱导近似(LIA)(6.1)

K

Kaden 螺线(5.4.1;5.4.2;5.4.3)

卡门涡街稳定性(7.3.2)

Kelvin 定理(1.3.3)

K-H 不稳定性

科氏力(8.1.1)

科氏参数(8.1.1)

L

Lamb 涡(4.3)

流体动力(3.6)

流体的冲量(3.2.2;3.4.1)

流体的冲量矩(3.2.4;3.4.2)

流线(1.2.1)

螺旋度(2.5)

M

脉冲外力冲量(3.2.1)

弥散长度(3.4.2)

面涡(5.1)

面涡的奇点形成(5.5.2)

面涡强度(5.1)

面涡相容条件(5.1)

N

能量耗散率(3.3.2)

拟熵(3.3.1;3.3.3;3.3.4)

粘附条件(2.1.1)

O

Oseen 涡(4.3)

P

Poisson 方程(1.2.2)

Q

确定性涡方法(9.1.2)

R

Rankine 渦(4.2.2)

热成风方程(8.3.3)

Rossby 波(8.5.2)

Rossby 数(8.2.2)

S

三点渦自相似膨胀(7.4)

三维渦方法(9.2)

Silberstein 定理(1.3.2)

时间不变量(2.2;2.4.2;3.2.3;3.2.4;3.4.1;3.4.2;7.1.1)

矢量势函数(2.1.2)

势渦(4.2.1)

旋转流体 Froude 数(8.2.2)

旋转流体的惯性波(8.5.1)

旋转流体的基本方程(8.2.1)

速度环量(1.2.1)

速度环量动力学方程(1.3.3;8.2.1)

随机渦方法(9.2)

Sullivan 渦(4.4.2)

T

塌缩(7.4)

Taylor 渦(4.3)

Taylor—Proudman 定理(8.3.2)

W

渦方法边界条件处理(9.3)

渦管(1.2.1)

渦管强度(1.2.1)

涡环(6.4)
 涡控制(1.1.4)
 涡静力学(7.2)
 涡量(1.1.1)
 涡量动力学方程(1.3.2)
 涡量流率(3.5.1;3.5.2)
 涡量矩守恒(2.2;2.4.2)
 涡旋(3.1.3)
 涡团(9.1.1)
 涡索(6.1)
 涡索的薛定谔方程(6.2)
 涡索的孤立波解(6.3)
 涡线(1.2.1)
 涡元疏密失调问题(9.4.3)

X

线涡(6.1)
 线涡自诱导运动(6.1)
 行量涡量场(8.1)

Y

烟线(1.2.1)
 应变速率张量(1.1.1)
 有旋流动(1.1.1;3.2.1)
 圆形线涡解(6.4.1)

Z

胀量(1.1.1)
 正多边形点涡系的稳定性(7.3.1)
 总涡量守恒原理(2.2)

