

全国注册岩土工程师 执业资格考试应试指导

基础部分（上）

天津大学土木工程系



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书按国家最新规范、紧紧扣住了注册岩土工程师基础部分考试大纲编写。概念性问题讲述深入而简单,讲述时难点要点突出,例题评述仔细而明了。

本书最大特点是编写了大量模拟试题,以此巩固概念以达到全面了解考试内容的目的,并附有参考答案以供对照学习。

参加我校辅导班的学员每年的通过率都在70%~80%左右,本书是在我校多年办辅导班的复习教材的基础上经过整理而编写成书。是办学习辅导班的最好教材,亦可作为自学复习的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

全国注册岩土工程师执业资格考试应试指导基础部分. 上/天津大学土木工程系编. —天津:天津大学出版社, 2003.5

ISBN 7-5618-1768-1

I. 全... II. 天... III. 岩土工程-工程技术人员-资格考试-自学参考资料 IV. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 032654 号

出版发行 天津大学出版社

出 版 人 杨风和

地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内 (邮编: 300072)

电 话 发行部: 022-27403647 邮购部: 022-27402742

印 刷 河北省昌黎县人民胶印厂

经 销 全国各地新华书店

开 本 185mm×260mm

印 张 28.5

字 数 711 千

版 次 2003 年 5 月第 1 版

印 次 2003 年 5 月第 1 次

印 数 1—4 000

定 价 128.00 元 (上下册)

全国注册岩土工程师 执业资格考试应试指导 基础部分

名誉主任	顾晓鲁				
主任	郑刚				
副主任	严驰	刘春原			
委员	顾晓鲁	姜忻良	翁鹿年	康谷贻	陈环
	刘锡良	戴自强	窦远明	李忠献	吴家珣
	刘惠兰	贾启芬	刘津明	王成华	李砚波
	丁阳	朱济祥			
秘书	谷岩	刘畅	周伟毅		

前 言

随着我国各个方面与国际接轨,实行个人执业制度在土木工程、勘察、设计领域已成为大势所趋,个人执业制度将极大地发挥广大土木工程技术人员的工作积极性和创造力。因此,通过注册土木工程师执业资格考试并取得个人执业资格,成为广大土木工程技术人员关注的一件大事。

自实行注册土木工程师执业资格考试以来,天津大学受天津市建委的委托,连续多年举办了注册土木工程师(结构、岩土)执业资格考试辅导培训班,集中了天津大学优秀师资力量,对考生进行考前集中培训与辅导。参加过培训的考生的考试通过率大大高于全国平均水平。因此,近年来,陆续有河北、山东等其他外省市的考生前来参加天津大学举办的培训班。为满足广大考生的要求,天津大学组织参加考前培训辅导班授课的教师,并邀请河北工业大学部分有较深造诣的教师及天津市一些全国知名专家,组成编写委员会,将其辅导材料进行系统的总结与完善,编写成《全国注册岩土工程师执业资格考试应试指导》及《全国一、二级注册结构工程师执业资格考试应试指导》,希望这两套辅导教程能为广大土木工程技术人员顺利通过考试助一臂之力。

本书的特点是,参加编写人员多次参加了考前辅导班的授课,对近年来考题有深入研究,根据参加过辅导班的考生考试情况多次修订与完善授课讲义,在此基础上,结合2003年考试大纲,对涉及考试内容与规范进行了重点突出的分析与讲解,并附有典型例题题解及点评,并有大量试题与参考答案,同时指出答题易出错之处,特别适于考生进行考前复习。

本书在编写过程中得到了多位勘察设计大师的指点与帮助,本书编委会在此表示衷心感谢。

本书编委会
2003年4月

参加编写人员名单

基础知识部分

参编人员:

1. 数学 杨万禄
2. 物理 王学信
3. 普通化学 付希贤
4. 理论力学 毕学涛
5. 材料力学 王彦群
6. 流体力学 李德筠

专业基础部分

参编人员:

7. 计算机应用基础 罗安定
8. 电工电子技术 刘全忠
9. 工程经济 郑立群
10. 土木工程材料 刘惠兰
11. 工程测量 岳树信
12. 职业法规 韩明
13. 土木工程施工与管理 刘津明
14. 结构力学与结构设计
李增福 戴自强 李砚波 张晋元 丁阳 韩庆华 陈志华
15. 岩体力学与土力学 严驰 朱济祥 邱长林 李飒
16. 工程地质 朱济祥
17. 岩体工程与基础工程
严驰 朱济祥 李飒 邱长林

目 录

1 高等数学	1
1.1 函数、极限、连续	1
1.1.1 函数	1
模拟试题及参考答案	2
1.1.2 极限	3
模拟试题及参考答案	8
1.1.3 连续	9
模拟试题及参考答案	11
1.2 一元函数微分学	12
1.2.1 导数与微分	12
模拟试题及参考答案	16
1.2.2 微分中值定理	17
模拟试题及参考答案	19
1.2.3 导数应用	19
模拟试题及参考答案	23
1.3 一元函数积分学	24
1.3.1 不定积分	24
模拟试题及参考答案	27
1.3.2 定积分	28
模拟试题及参考答案	33
1.3.3 定积分应用	34
模拟试题及参考答案	36
1.4 向量代数与空间解析几何	37
1.4.1 向量代数	37
模拟试题及参考答案	39
1.4.2 空间解析几何	40
模拟试题及参考答案	44
1.5 多元函数微分法及其应用	46
1.5.1 偏导数与全微分	46
模拟试题及参考答案	50
1.5.2 偏导数的应用	51
1.6 重积分	53
1.6.1 二重积分	53
模拟试题及参考答案	56
1.6.2 三重积分	58

1.7 曲线积分	59
1.7.1 第一类曲线积分	59
1.7.2 第二类曲线积分	61
1.8 无穷级数	63
1.8.1 数项级数	63
模拟试题及参考答案	67
1.8.2 幂级数	68
模拟试题及参考答案	71
1.8.3 傅里叶级数	73
1.9 常微分方程	75
1.9.1 一阶微分方程的解法	75
模拟试题及参考答案	78
1.9.2 二阶常系数线性微分方程的解法	80
模拟试题及参考答案	82
1.10 向量分析	83
模拟试题及参考答案	86
1.11 线性代数	87
1.11.1 n 阶行列式	87
1.11.2 矩阵及其运算	90
1.11.3 向量组的线性相关性与矩阵的秩	94
1.11.4 线性方程组	97
1.11.5 矩阵的特征值与特征向量	101
1.11.6 二次型	103
模拟试题及参考答案	104
1.12 概率与数理统计	106
1.12.1 随机事件与概率	106
1.12.2 随机变量的概率分布与数字特征	111
1.12.3 数理统计的基本概念	119
1.12.4 参数估计	121
1.12.5 假设检验	124
1.12.6 方差分析	126
模拟试题及参考答案	127
2 普通物理	130
2.1 热学	130
2.1.1 气体状态参量、平衡态、平衡过程	130
2.1.2 理想气体状态方程	130
2.1.3 理想气体的压强和温度	131
2.1.4 能量按自由度均分、理想气体的内能	132
2.1.5 麦克斯韦速率分布律	132

2.1.6	平均碰撞频率和平均自由程	134
2.1.7	内能、热量和功	135
2.1.8	热力学第一定律及其对等值过程和绝热过程的应用	136
2.1.9	循环与热机, 热机效率	138
2.1.10	热力学第二定律及其统计意义	139
2.1.11	可逆过程和不可逆过程	139
2.1.12	熵	140
2.2	机械波	141
2.2.1	机械波的产生与传播	141
2.2.2	描述波的物理量及其相互关系	141
2.2.3	平面简谐行波表达式	142
2.2.4	波的能量能流	143
2.2.5	波的叠加原理、波的干涉、驻波	144
2.2.6	多普勒效应	145
2.2.7	声学基本知识	146
2.3	波动光学	147
2.3.1	光的干涉	147
2.3.2	光的衍射	150
2.3.3	光的偏振	153
	模拟试题	158
	模拟试题参考答案	165
3	普通化学	166
3.1	化学反应的基本规律	166
	模拟试题	174
	模拟试题参考答案	176
3.2	溶液与离子平衡	176
	模拟试题	184
	模拟试题参考答案	186
3.3	氧化还原与电化学	186
	模拟试题	193
	模拟试题参考答案	195
3.4	原子结构与周期律	195
	模拟试题	201
	模拟试题参考答案	202
3.5	化学键与晶体结构	203
	模拟试题	207
	模拟试题参考答案	209
3.6	有机化学	209
	模拟试题	217

模拟试题参考答案	218
4 理论力学	219
4.1 静力学	219
4.1.1 静力学基本概念及静力学公理	219
模拟试题	221
4.1.2 平面汇交力系及平面力偶系	221
模拟试题	223
4.1.3 平面任意力系	227
模拟试题	228
4.1.4 空间力系及重心	231
模拟试题	233
4.1.5 摩擦	236
模拟试题	237
4.2 运动学	239
4.2.1 点的运动学	239
模拟试题	241
4.2.2 刚体的基本运动	242
模拟试题	243
4.2.3 点的合成运动	244
模拟试题	246
4.2.4 刚体平面运动	249
模拟试题	252
4.3 动力学	255
4.3.1 质点运动微分方程	255
模拟试题	256
4.3.2 动力学基本量的计算	257
模拟试题	261
4.3.3 动力学普遍定理	264
模拟试题	267
4.3.4 达朗贝尔原理	269
模拟试题	271
4.3.5 虚位移原理	272
模拟试题	274
4.3.6 单自由度系统的振动	275
模拟试题	276
模拟试题参考答案	278
5 材料力学	279
5.1 绪论	279
5.2 轴向拉伸与压缩	280

5.3 剪切	286
5.4 扭转	289
5.5 截面的几何性质	294
5.6 弯曲内力	299
5.7 弯曲应力	304
5.8 弯曲变形	311
5.9 应力状态与强度理论	317
5.10 组合变形	328
5.11 压杆稳定	336
模拟试题	340
模拟试题参考答案	368
6 流体力学	370
6.1 流体的主要物理力学性质	370
模拟试题	373
6.2 流体静力学	374
模拟试题	388
6.3 流体运动学	390
模拟试题	397
6.4 流体动力学	397
模拟试题	409
6.5 流动阻力和能量损失	410
模拟试题	420
6.6 有压管流	421
模拟试题	428
6.7 明渠恒定均匀流	429
模拟试题	431
6.8 堰流	432
模拟试题	433
6.9 渗流	433
模拟试题	437
6.10 量纲分析和相似理论	438
模拟试题	442
模拟试题参考答案	443
主要参考文献	444

1 高等数学

1.1 函数、极限、连续

1.1.1 函数

1. 内容摘要

1) 函数的定义

若变量 x 在某一实数集合 X 中每取一个值, 变量 y 都有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记为

$$y = f(x).$$

实数集合 X 称为函数的定义域; 确定 x 与 y 关系的对应规律为函数的对应规律.

在函数概念中重点理解: 函数符号 $y = f(x)$; 应会求函数的定义域; 分段函数.

2) 函数的性质

(1) 有界性: 若存在 $M > 0$, 使得在 (a, b) 内任意点 x , 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界; 否则为无界. 如 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 是有界函数, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 而在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有界.

(2) 单调性: 若对 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增 (减), 区间 (a, b) 为 $f(x)$ 的单调增 (减) 区间, 如 $y = e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为单增函数, $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 为单调减函数.

(3) 奇偶性: 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内为偶函数, 若 $f(-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 为奇函数, 例 $f(x) = \sin x$ 为奇函数, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数, $f(x) = \cos x$ 为偶函数.

(4) 周期性: 若 $f(x)$ 存在 l , 使 $f(x+l) = f(x)$, 称 $f(x)$ 为周期函数, 称诸 l 中的最小正数 T 为 $f(x)$ 的周期.

3) 反函数

$y = f(x)$ 的反函数记为 $x = f^{-1}(y)$ 或 $y = f^{-1}(x)$. 函数与它的反函数的定义域与值域互换, 例 $y = e^x$ 的反函数为 $y = \ln x$.

4) 初等函数

(1) 基本初等函数: 幂函数 $y = x^\mu$, 指数函数 $y = a^x$, $y = e^x$, 对数函数 $y = \log_a x$, $y = \ln x$, 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$, 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$. 要求熟悉基本初等函数的图形及其性质.

(2) 复合函数: $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

(3) 初等函数: 由常数和基本初等函数经有限次四则运算和复合步骤所构成的, 且用一个解析式子表示的函数称为初等函数.

要求对初等函数能熟练地拆成若干个基本初等函数或基本初等函数的四则运算.

2. 例题

例1 求函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + \arcsin(x-2)$ 的定义域.

解 因为 $\begin{cases} x-1 \neq 0, \\ |x-2| \leq 1, \end{cases}$ 解得 $1 < x \leq 3$.

例2 设 $f(e^x+1) = xe^x + e^x + 1$, 求 $f(x)$.

解 设 $u = e^x + 1$, $x = \ln(u-1)$,

$$f(u) = (u-1) \ln(u-1) + u - 1 + 1 = (u-1) \ln(u-1) + u,$$

则 $f(x) = (x-1) \ln(x-1) + x$.

例3 设 $f(x) = \ln x$, 证明: $f(x) + f(x+1) = f[x(x+1)]$.

解 $f(x) + f(x+1) = \ln x + \ln(x+1) = \ln[x(x+1)]$.

因为 $f[x(x+1)] = \ln[x(x+1)]$, 所以

$$f(x) + f(x+1) = f[x(x+1)].$$

例4 设 $f(x) = 3x+5$, 求 $f[f(x)-2]$.

解 $f[f(x)-2] = 3[f(x)-2] + 5 = 3[3x+5-2] + 5 = 9x+14$.

例5 已知 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = x+1$, 求 $\varphi(x)$.

解 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)} = x+1$,

于是 $\varphi(x) = \ln(x+1)$.

模拟试题及参考答案

1. 函数 $y = \frac{x-1}{\ln x} + \sqrt{16-x^2}$ 的定义域为 ().

- (A) $(0, 1)$ (B) $(0, 1) \cup (1, 4)$
(C) $[0, 4]$ (D) $(0, 1) \cup (1, 4]$

2. 下列各对函数中为同一函数的是 ().

- (A) $f(x) = \lg(x^2-9)$ 与 $g(x) = \lg(x-3) + \lg(x+3)$
(B) $f(x) = x$ 与 $g(x) = (\sqrt{x})^2$
(C) $f(x) = e^{\ln x}$ 与 $g(x) = x$

(D) $f(x) = \sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$

3. 下列函数中, 是偶函数的是 ().

- (A) $f(x) = x^2 \sin x$ (B) $f(x) = \lg \frac{1-x^2}{1+x^2}$
(C) $f(x) = x + \cos x$ (D) $f(x) = \frac{a^x-1}{a^x+1}$

4. 设 $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$, 则 $f(x)$ 等于 ().

- (A) $1+x$ (B) $1+x^2$

(C) $2-2x^2$

(D) $2+2x^2$

解答

1. (D)

$$\text{因为 由 } \begin{cases} \ln x \neq 0, \\ x > 0, \\ 16 - x^2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0, \\ -4 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

所以定义域为 $(0, 1) \cup (1, 4]$.

2. (D)

因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 且对应规律也一样, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

3. (B)

$$\text{因为 } f(-x) = \lg \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \lg \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x), \text{ 所以 (B) 是偶函数.}$$

4. (C)

$$\text{因为 } f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right),$$

所以 $f(x) = 2(1 - x^2)$, 应选 (C).

1.1.2 极限

1. 内容摘要

1) 极限的概念

(1) 数列的极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 x_n 无限接近于某一个确定的数值 A , 则称 A 为该数列 x_n 的极限, 或称数列 x_n 收敛于 A , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

若数列 $\{x_n\}$ 有极限, 称 $\{x_n\}$ 收敛, 否则发散;若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必有界, 反之不一定成立.

(2) 函数的极限

① $x \rightarrow \infty$ 时, 函数的极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

如果 x 无限远离原点时, $f(x)$ 无限接近某一常数 A , 则称当 x 趋于无穷时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

如果 x 沿数轴正向无限远离原点时, 称 x 趋于正无穷, 上述极限记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

如果 x 沿数轴负向无限远离原点时, 称 x 趋于负无穷, 上述极限记为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

② $x \rightarrow x_0$ 时, 函数的极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

如果当 x 无限趋近 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

③左、右极限.

x_0 点的左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ($x \rightarrow x_0^-$, 表示 x 小于 x_0 而趋近于 x_0).

x_0 点的右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ ($x \rightarrow x_0^+$, 表示 x 大于 x_0 而趋近于 x_0).

④ $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件是: $f(x)$ 在 x_0 点的左极限与右极限都存在, 且相等.

2) 无穷大与无穷小

(1) 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0$, 称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时为无穷小.

(2) 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时为无穷大.

(3) 两者关系如下:

若 $\lim f(x) = \infty$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = 0$;

若 $\lim f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(4) 无穷小的性质:

若 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$, 则有

$$\lim (\alpha(x) \pm \beta(x)) = 0; \lim (\alpha(x) \cdot \beta(x)) = 0;$$

$\lim u(x) \cdot \alpha(x) = 0$, 其中 $u(x)$ 为有界函数.

(5) 无穷小的比较:

设 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记为

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$ ($c \neq 0, 1$), 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(6) 等价无穷小的代换定理:

若 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则有

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 几个常用的等价无穷小如下:

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

3) 函数极限的四则运算法则

若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则有

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

4) 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

5) 求函数极限的方法

求函数的极限是极限部分的重点, 其方法可归纳为以下几种.

(1) 直接利用极限四则运算法则求极限.

(2) 先进行恒等变换 (如消去公因子; 分子、分母同乘共轭根式等), 再用极限四则运算法则求极限.

(3) 利用两个重要极限求极限.

(4) 利用无穷小的性质及无穷小与无穷大的关系求极限.

(5) 利用等价无穷小代换求极限.

(6) 利用洛必达法则求极限等.

2. 例题

$$\text{例 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + x}.$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{一般结论: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ 0, & n < m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

$$\text{例 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x-x^2}-1}.$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{\sqrt{1-x-x^2}+1}{-x-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x-x^2}+1}{-1-x} = -2.$$

$$\text{例 3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - (x^2+x+1)}{x^3-1} = \infty.$$

$$\text{例 4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}.$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{例 5} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 6 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{1}{2}.$

例 7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{3x-2}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{3x-2} = \frac{1}{3}.$

例 8 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot x.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 1.$

例 9 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot 2} = e^2.$

例 10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x+1}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3} \cdot (-3)} = e^{-3}.$

例 11 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-2}} = e^3.$

例 12 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}.$

解 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cdot x = x.$

例 13 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x.$

解 原式 $= 0$ ($\frac{1}{x}$ 为无穷小, $\sin x$ 是有界函数, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$).

例 14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$

例 15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \tan x}{x^2}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2.$

例 16 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2)$.

例 17 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1}$.

解 原式 $= 0$ (因 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, $|\sin \frac{1}{x-1}| \leq 1$).

例 18 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数哪个是 x 的高阶无穷小, 同阶无穷小, 等价无穷小.

(A) $\tan^3 x$, (B) $\csc x - \cot x$, (C) $x + x^2 \sin \frac{1}{x}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^3 x}{x} = 0$, 所以 $\tan^3 x$ 是 x 高阶无穷小.

$$\text{又因 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2},$$

所以 $\csc x - \cot x$ 与 x 是同阶无穷小.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \sin \frac{1}{x} \right) = 1,$$

故 $x + x^2 \sin \frac{1}{x}$ 与 x 是等价无穷小.

例 19 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\ln(1 + x^2)}$.

解 因为, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1 + x^2) \sim x^2$, 利用等价无穷小代换定理得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\ln(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1.$$

例 20 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0, \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$,

即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的极限不存在.

例 21 求 $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1, \\ 3x^2, & x \geq 1, \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 1$ 时的极限.

解 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x^2 = 3$,
 即 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

例 22 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + bx + 6}{1 - x} = 5$, 求 b 值.

解 因为上式极限存在, 故有 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + bx + 6) = 0$,

即 $1 + b + 6 = 0$, 得 $b = -7$.

例 23 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = 2$, 求 a 值.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{ax} \cdot a} = e^a = 2$,
所以 $a = \ln 2$.

例 24 下列极限计算中, 错误的是 ().

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{x} \cdot \sin \frac{x}{2^n} = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$
(C) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x} = e^2$

解 (B)

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ 是错误的.

模拟试题及参考答案

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{t}{x}$ 的值是 ().

- (A) 0 (B) 1
(C) t (D) 不存在

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2+1}-1}{x^2}$ 的值是 ().

- (A) 3 (B) 2
(C) 1 (D) 0

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \tan x}$ 的值是 ().

- (A) 1 (B) -1
(C) 2 (D) -2

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-tx^2)}{x \sin x}$ 的值等于 ().

- (A) $-t$ (B) $1-t$
(C) 1 (D) -1

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin \frac{2}{x} + \sin 2x)$ 的值是 ().

- (A) 不存在 (B) ∞
(C) 0 (D) 2

解答

1. (A)

因为 x 为无穷小, $\sin \frac{t}{x}$ 是有界函数, $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{t}{x} = 0$.

2. (C)

因为, $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{2x^2+1}-1 \sim \frac{1}{2} \cdot 2x^2 = x^2$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

3. (C)

因为 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos 2x \sim \frac{1}{2} \cdot (2x)^2 = 2x^2$, $x \tan x \sim x^2$.

所以
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

4. (A)

因为 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1 - tx^2) \sim -tx^2$, $x \sin x \sim x^2$,

所以
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - tx^2)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-tx^2}{x^2} = -t.$$

5. (A)

因为
$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{2}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x \text{ 不存在.}$$

所以, 两个函数和的极限不存在, 故选 (A).

1.1.3 连续

1. 内容摘要

1) 函数连续的定义

(1) 函数在点 x_0 连续的定义.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$), 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

(3) 左、右连续的定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在点 x_0 是左连续; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在点 x_0 是右连续.

(4) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的定义: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

2) 函数的间断点及其分类

(1) 函数的间断点: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点. x_0 为 $f(x)$ 的间断点的判别方法:

① $f(x)$ 在点 x_0 没有定义;

② 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$.

凡满足上面三条中的任何一条者, 均称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

(2) 间断点分类:

第一类间断点: 若点 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

在第一类间断点中, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则称点 x_0 是可去间断点.

第二类间断点: 若点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 但不是第一类间断点, 则称它为 $f(x)$ 的第二类间断点.

3) 连续函数的性质

(1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是连续函数.

(2) 连续函数的复合函数是连续的.

(3) 基本初等函数在其定义域内是连续的, 初等函数在其定义区间内是连续的.

4) 闭区间上连续函数的性质

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界. 即存在 $M > 0$, 使得当 $x \in [a, b]$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq M$.(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m , 即在 $[a, b]$ 上必存在 m, M , 使 $m \leq f(x) \leq M$ 恒成立.(3) 介值定理: 若 M, m 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 当 μ 满足 $m < \mu < M$ 时, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = \mu$.(4) 零点存在定理: 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

2. 例题

例1 求 $f(x) = x \arctan \frac{1}{x-1}$ 的间断点.解 $x=1$ 为间断点, 又因
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2},$$
 即在 $x=1$ 点左、右极限不相等, 故 $x=1$ 为第一类间断点($x=1$ 也称为跳跃间断点).
例2 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 求间断点.解 $x=1, x=2$ 为 $f(x)$ 的间断点.
 又因 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = -2$ (即在 $x=1$ 点, 极限存在),

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty,$$

故 $x=1$ 为可去间断点, $x=2$ 为第二类间断点(也是无穷型间断点).

例3 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.解 因为 $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$,故点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点.

例4 要使函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \neq 0, \\ k, & x = 0, \end{cases} \text{ 处处连续, 求 } k \text{ 值.}$$

解 因为 $x \neq 0$ 时 $f(x)$ 连续, 要使点 $x=0$ 处 $f(x)$ 连续, 必满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 2) = 2 = f(0) = k,$$

即 $k=2$.

例5 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-2x} + a, & x \leq 0, \\ \lambda \ln(1+x) + 1, & x > 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 a 的值是 ().

- (A) 0 (B) 1
(C) -1 (D) λ

解 (A)

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-2x} + a) = 1 + a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\lambda \ln(1+x) + 1] = 1$$

由 $1 + a = 1$, 得 $a = 0$.

例6 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少存在一个根介于1和2之间.

证 设 $f(x) = x^5 - 3x - 1$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 又 $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 25 > 0$. 由零点存在定理可知至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少存在一个根介于1和2之间.

模拟试题及参考答案

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+1} + a, & 0 < x \leq 1, \\ k(x-1) + 3, & x > 1, \end{cases}$

要使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 则 a 的值是 ().

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x-1}, & x < 0, \end{cases}$ 的连续区间是 ().

- (A) $(-\infty, +10)$ (B) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
(C) $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & x < 0, \\ x^2 + a, & x \geq 0, \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则数 a 等于 ().

- (A) e (B) -1 (C) 0 (D) 1

4. 设 $f(x) = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ().

- (A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点
(C) 无穷间断点 (D) 连续点

5. 方程 $x - \sin x - 1 = 0$ 在下列区间中至少有一个根的区间是 ().

- (A) $(-\infty, 0)$ (B) $(0, \pi)$
(C) $(\pi, 4)$ (D) $(4, +\infty)$

解答

1. (D)

因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 所以在 $x=1$ 处极限一定存在, 即

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{4}{x+1} + a \right) = 2 + a, \lim_{x \rightarrow 1^+} [k(x-1) + 3] = 3.$$

$$2 + a = 3, a = 1.$$

2. (D)

因为 $f(x)$ 在 $x > 0$, $x < 0$ 上都是连续的, 在 $x = 0$ 处, 极限不存在, 即不连续, 所以应选 (D).

3. (C)

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处必连续, 即满足

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + a) = a, \text{ 所以 } a = 0.$$

4. (B)

因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义, 所以 $x = 0$ 是间断点, 又左极限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = -1$ 存在,

右极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = 1$ 存在, 且左、右极限不相等, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

5. (B)

因为 $f(x) = x - \sin x - 1$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且有 $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi - 1 > 0$, 所以在 $(0, \pi)$ 中至少有一个根, 应选 (B).

1.2 一元函数微分学

1.2.1 导数与微分

1. 内容摘要

1) 导数的定义

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

或写成

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2) 导函数的定义

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

仍然是 x 的函数称为导函数.

两者的关系: $f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}$.

3) 导数的几何意义

$f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

法线方程: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

4) 函数可导性与连续性的关系

若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 必连续, 反之不成立.

5) 求导法则

(1) 基本初等函数的导数公式:

$$\textcircled{1} (c)' = 0.$$

$$\textcircled{2} (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$$

$$\textcircled{3} (\sin x)' = \cos x.$$

$$\textcircled{4} (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\textcircled{5} (\tan x)' = \sec^2 x.$$

$$\textcircled{6} (\cot x)' = -\csc^2 x.$$

$$\textcircled{7} (\sec x)' = \sec x \tan x.$$

$$\textcircled{8} (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

$$\textcircled{9} (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$\textcircled{10} (e^x)' = e^x.$$

$$\textcircled{11} (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$\textcircled{12} (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\textcircled{13} (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\textcircled{14} (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\textcircled{15} (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\textcircled{16} (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(2) 函数的和、差、积、商的求导法则:

设 $u(x), v(x)$ 可导, 则有

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

(3) 复合函数求导法则:

$y = f(u), u = \varphi(x)$, 则 $y = f[\varphi(x)]$ 的导数公式:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

(4) 隐函数的求导方法:

设 $F(x, y) = 0$, 确定 y 是 x 的隐函数 $y = y(x)$, 对等式

$$F[x, y(x)] = 0$$

两端对 x 求导 (把 y 看做中间变量), 则可求得 $\frac{dy}{dx}$.

(5) 参量方程确定的函数的求导方法:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$$

(6) 高阶导数:

二阶及二阶以上的导数统称高阶导数, $f(x)$ 的 n 阶导数可记为 $f^{(n)}(x)$, 或 $y^{(n)}$ 或

$$\frac{d^ny}{dx^n}, \text{ 显然 } \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right].$$

6) 微分的定义

若 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的增量, 可写成

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 记为 $dy = A\Delta x$, 或写成

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

$f(x)$ 在点 x 的微分记为

$$dy = f'(x)dx.$$

7) 函数 $f(x)$ 可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 可导.

8) 微分的几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分是 $f'(x)$ 在点 x_0 处增量的近似值, $dy = f'(x_0)\Delta x$. 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线当自变量 x 有增量 Δx 时的纵坐标的增量.

9) 微分公式 (略)

2. 例题

1) 利用导数概念计算下列各题

例 1 设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导, 求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$.

解 原式 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = f'(x_0)$.

例 2 设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0) = 2$, 求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$.

解 原式 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - [f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)]}{\Delta x} = 2f'(x_0) = 4$.

例 3 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

例 4 设函数 $f(x) = (x - a)g(x)$, 其中函数 $g(x)$ 在点 $x = a$ 处连续, 求 $f'(a)$.

解 因 $g(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)g(x) - 0}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

例 5 求曲线 $y = x^3 + e^x + 1$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线和法线方程.

解 $y'|_{x=0} = (3x^2 + e^x)|_{x=0} = 1$.

切线方程: $y - 2 = x$, 即 $y = x + 2$.

法线方程: $y - 2 = -x$, 即 $y = 2 - x$.

例 6 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1, & x \leq 0, \\ ax + 2, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 a 的值是 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) -1

解 选 (D)

因为 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$.

于是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} + 1 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x} = -1$ ($e^{-x} - 1 \sim -x$),

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax+2-2}{x} = a,$$

所以

$$a = -1.$$

2) 求显函数的导数

例 7 $f = e^x \cos x + \ln 2.$

解 $y' = e^x \cos x - e^x \sin x.$

例 8 $y = (100x+1)^{10}.$

解 $y' = 10^3 (100x+1)^9.$

例 9 $y = \sin^2 x^2 - \arcsin \sqrt{x}.$

解 $y' = 2\sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x \sin 2x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$

例 10 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

解 $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

例 11 $y = \tan x \cdot \sec x.$

解 $y' = \sec^3 x + \sec x \cdot \tan^2 x.$

例 12 $y = f(\sin^2 x).$

解 $y' = f'(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x = f'(\sin^2 x) \sin 2x.$

例 13 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot 2t}$, 求 $f'(t).$

解 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx} = te^{2t};$
 $f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = (1+2t)e^{2t}.$

3) 求隐函数的导数

例 14 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 确定 $y = y(x)$, 求 $y'.$

解 $\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} (2x + 2yy'),$

解出 $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

例 15 $y = \tan(x+y)$ 确定 $y = y(x)$, 求 $y'.$

解 $y' = \sec^2(x+y) \cdot (1+y'),$

解得 $y' = \frac{\sec^2(x+y)}{1 - \sec^2(x+y)} = -\csc^2(x+y).$

4) 求参量方程确定的函数的导数

例 16 $\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t \cos t \end{cases}$ 确定 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - t \sin t}{(1 - \sin t) - t \cos t}.$

5) 求二阶导数

例 17 $y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$, 求 $y''.$

解 $y' = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$,

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

例 18 求 $y = x^2 + 1 - \sqrt[3]{1 + x^2}$ 的微分.

解 $y' = 2x - \frac{1}{3}(1 + x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$,

$$dy = y' dx = 2x \left(1 - \frac{1}{3}(1 + x^2)^{-\frac{2}{3}}\right) dx.$$

例 19 求 $y = e^{2x} \sin 3x$ 的微分.

解 $dy = d(e^{2x} \sin 3x) = \sin 3x d(e^{2x}) + e^{2x} d(\sin 3x)$
 $= 2\sin 3x e^{2x} dx + 3e^{2x} \cos 3x dx = e^{2x} (2\sin 3x + 3\cos 3x) dx.$

模拟试题及参考答案

1. 曲线 $L: \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 相应点处的切线斜率是 ().

(A) $-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $-2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

2. 由方程 $y = \arctan(x + y)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 是 ().

(A) $\frac{1}{x+y}$; (B) $-\frac{1}{(x+y)^2}$;
 (C) $\frac{1}{(x+y)^2}$; (D) $\frac{1}{(x+y)^2 - 1}$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+1} + a, & 0 < x \leq 1, \\ k(x-1) + 3, & x > 1. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续而且可导,

则 k 的值是 ().

(A) 2 (B) -2 (C) -1 (D) 1

4. 曲线 $L: \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases}$ 在对应 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处切线方程是 ().

(A) $2\sqrt{2}x + y - 3 = 0$ (B) $-2\sqrt{2}x + y - 2 = 0$
 (C) $2\sqrt{2}x - y - 3 = 0$ (D) $2\sqrt{2}x + y - 2 = 0$

5. 设 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, 则 $dy|_{x=1}$ 是 ().

(A) $2dx$ (B) $-2dx$ (C) $\frac{1}{2}dx$ (D) $-\frac{1}{2}dx$

解答

1. (C)

因为切线的斜率 $k = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}$.

2. (C)

因为 $y' = \frac{1}{1 + (x+y)^2} \cdot (1+y')$, 解得 $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$.

3. (C)

因为由 $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续, 可得出 $a=1$, 又因 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导, 即

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ 存在.}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{4}{x+1} + 1 - 3}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(1-x)}{(x-1)(x+1)} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k(x-1) + 3 - 3}{x - 1} &= k, \end{aligned}$$

所以 $k = -1$.

4. (D)

$$\text{因为 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left. \frac{-2\sin 2t}{\cos t} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2},$$

当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, 对应曲线上的点: $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_0 = 0$. 于是切线方程为

$$y - 0 = -2\sqrt{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ 整理得 } 2\sqrt{2}x + y - 2 = 0.$$

5. (C)

$$\text{因为 } dy|_{x=1} = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' \Big|_{x=1} dx = \frac{1}{2} dx.$$

1.2.2 微分中值定理

1. 内容摘要

1) 罗尔定理: 若 $f(x)$ 满足

(1) 在 $[a, b]$ 上连续, (2) 在 (a, b) 上可导, (3) $f(a) = f(b)$,

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

2) 拉格朗日中值定理: 若 $f(x)$ 满足:

(1) 在 $[a, b]$ 上连续, (2) 在 (a, b) 内可导,

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

3) 洛必塔法则

(1) 未定式 $\frac{0}{0}$ 的情形.

设①当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $f(x) \rightarrow 0$, $F(x) \rightarrow 0$;

②在点 a 的某去心邻域内 (或当 $|x| > N$ 时), $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在, 且 $F'(x) \neq 0$;

$$\textcircled{3} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在 (或为无穷大).}$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\frac{0}{0}$ 型, 且 $f'(x)$, $F'(x)$ 满足上述三个条件, 则可再运用洛必塔法则, 即

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

(2) 未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的情形, 也有相应的洛必塔法则.

洛必塔法则可直接求 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 对于 $0 \cdot \infty$ 型, $\infty - \infty$ 型以及 0^0 , 1^∞ , ∞^0 型的未定式, 必须先通过变形化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 然后再运用洛必塔法则.

2. 例题

1) 拉格朗日中值定理

例 1 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理, 求 ξ 值.

解 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), x_1 < \xi < x_2$.

将 $f(x)$ 代入上式得

$$\frac{ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c}{x_2 - x_1} = 2a\xi + b,$$

即 $a(x_2 + x_1) + b = 2a\xi + b$,

得 $\xi = \frac{x_2 + x_1}{2}$.

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理, $a < x_1 < x_2 < b$, 则至少存在一点 ξ , 使下面四个式子中哪一个成立.

(A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \xi \in (x_1, x_2)$

(B) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \xi \in (a, b)$

(C) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \xi \in (x_1, x_2)$

(D) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(b - a), \xi \in (x_1, x_2)$

答案显然 (B) 式是成立的.

2) 应用洛必塔法则求极限

例 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right)$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$.

例 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right)$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$.

例 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + x^2} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \right)$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$.

例 6 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad (\infty - \infty \text{ 型})$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} / \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right) = \frac{1}{2}$.

例 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \quad (0 \cdot \infty \text{ 型})$.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

例 8 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (0^0 型).

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x}} = e^0 = 1.$$

模拟试题及参考答案

1. 在下列函数中, 对所指定的区间满足拉格朗日中值定理条件的是 ().

- (A) $f(x) = |x-1|$ ($0 \leq x \leq 3$)
 (B) $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$)

(C) $f(x) = \frac{1}{x}$ ($0 \leq x \leq 1$)

(D) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ ($0 \leq x \leq 1$)

2. $g = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上满足罗尔定理条件的 ξ 是 ().

- (A) 0; (B) $\frac{\pi}{2}$; (C) π ; (D) $\frac{3}{2}\pi$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有两个不同实根, 则在 (a, b) 内, 方程 $f'(x) = 0$ ().

- (A) 至少有一个根 (B) 没有根 (C) 只有一个根 (D) 有两个根

4. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2$ 的值是 ().

- (A) 0 (B) 1 (C) $-\ln 2$ (D) $\ln 2$

解答

1. 选 (D)

2. 选 (B)

3. 选 (A)

因为 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有两个实根, 不妨设 $x_1 < x_2$, $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, 于是 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足罗尔定理条件, 故在 (x_1, x_2) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$, 因 ξ 在 (x_1, x_2) 内, 所以必在 (a, b) 内.

4. (C).

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \ln 2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln 2}{\frac{1}{x}} = -\ln 2.$$

1.2.3 导数应用

1. 内容摘要

1) 函数的单调性判别法

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

(1) 若在 (a, b) 内, $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加.

(2) 若在 (a, b) 内, $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减小.

2) 求 $y = f(x)$ 的单调增(减)区间的方法

- (1) 先求 $f(x)$ 的导数, 令 $f'(x) = 0$, 求出导数等于零的点及导数不存在的点.
- (2) 上述这些点将 $f(x)$ 的定义域分成若干个部分区间.
- (3) 判定每个区间内导数 $f'(x)$ 的符号, 即可求出 $f(x)$ 的单调增减区间.

3) 函数的极值

- (1) 函数取得极值的充分与必要条件.

①必要条件: 若 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且在 x_0 点取得极值, 则必有 $f'(x_0) = 0$. 使导数等于零的点称为驻点.

函数导数不存在的点, 在该点也可能取得极值. 上述两种点称为极值的嫌疑点.

- ②充分条件:

第一充分条件: 在极值嫌疑点的两侧 $f'(x)$ 变号, 由左向右, 当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由正变负, 则在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$. $f'(x)$ 由负变正, 则在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$. 若 $f'(x)$ 不变号, 在点 x_0 处不取得极值.

第二充分条件: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值 $f(x_0)$; $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值 $f(x_0)$.

- (2) 求极值的步骤:

- ①求 $f(x)$ 的极值嫌疑点;
- ②用充分条件判定每个极值嫌疑点, 是不是极值点, 若是, 是极大点还是极小点.

4) 函数的最大值和最小值

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 一定有最大值与最小值. 具体求法:

- (1) 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的全部极值嫌疑点: x_1, x_2, \dots, x_n ;
- (2) 求出 $f(x)$ 在点 $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ 处的函数值, 其中最大者为最大值, 最小者为最小值.

5) 曲线的凹凸性与拐点

- (1) 定义 (略).
- (2) 曲线凹凸性的判定法.

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内有二阶导数,

- ①若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凹弧 (∪).
- ②若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凸弧 (∩).
- ③拐点: 曲线凹凸弧的分界点, 称为曲线的拐点. 拐点的横坐标满足: $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在, 且在 x_0 点两侧 $f''(x)$ 变号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 称为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

6) 曲线的水平渐近线与垂直渐近线

- (1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线 $y = A$.
- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 则曲线 $y = f(x)$ 有垂直渐近线 $x = a$.

7) 弧微分

曲线 $y = f(x)$ 在任一点 (x, y) 处的弧微分是

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

曲线的参数方程为: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} a \leq t \leq \beta$, 则弧微分

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

2. 例题

1) 利用导数符号讨论函数的增减性

例 1 $f(x) = x - \operatorname{arccot} x$, 研究其增减性.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 又

$$f'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

故 $f(x) = x - \operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增的.

例 2 讨论 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$ 的单调增减区间.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = -1, x_2 = 2.$$

在 $(-\infty, -1)$ 内, $f'(x) > 0$, 该区间为单调增区间;

在 $(-1, 2)$ 内, $f'(x) < 0$, 该区间为单调减区间;

在 $(2, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0$, 该区间为单调增区间.

2) 求函数的极值

例 3 求 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 的极值.

$$\text{解 } f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1, 1$.

$$f''(-1) = \frac{1}{2} > 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } x = -1 \text{ 处取得极小值, 极小值 } f(-1) = -\frac{1}{2}.$$

$$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } x = 1 \text{ 处取得极大值, 极大值 } f(1) = \frac{1}{2}.$$

例 4 已知 $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$, 在 $x=1, x=2$ 处有极值, 求常数 a 与 b 的值.

解 $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$, 因 $x=1, x=2$ 处有极值, 故有

$$f'(1) = a + 2b + 1 = 0, \quad f'(2) = \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0.$$

$$\text{解 } \begin{cases} a + 2b + 1 = 0, \\ \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0, \end{cases} \text{ 得 } a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{6}.$$

例 5 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$, 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值, a 的值应为 ().

$$(A) -2 \quad (B) 2 \quad (C) \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad (D) -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

解 按可导函数取得极值的必要条件:

$$f'(x) = a \cos x + \cos 3x = 0, \text{ 将 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 代入上式有}$$

$$a \cdot \frac{1}{2} + (-1) = 0,$$

$a = 2$, 故选 (B)

例 6 求 $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$ 在 $[0, 10]$ 上的最大值和最小值.

解 $f'(x) = \frac{5-x}{\sqrt{x}(10-x)}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 5$.

计算 $f(5) = 5$, $f(0) = 0$, $f(10) = 0$.

最大值 $f(5) = 5$, 最小值 $f(0) = f(10) = 0$.

例 7 在平面上通过点 $P(1, 4)$ 引一直线, 要使它在两个坐标轴上截距都为正, 且它们的和最小, 求这条直线方程.

解 设过点 $(1, 4)$ 的直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$),

则有 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$ 设两截距之和为 S .

则有 $S = a + b = \frac{b}{b-4} + b = f(b)$.

求导 $f'(b) = \frac{4}{(b-4)^2} + 1 = 0$, 得 $b = 2, 6$.

代入 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$, 得 $a = -1, a = 3$. 根据题意, 得 $a = 3, b = 6$, 所求直线方程为

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1.$$

3) 讨论曲线的凹凸性与拐点

例 8 讨论曲线 $y = \ln(x^2 - 1)$ 的凹凸性.

解 函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1}, \quad y'' = \frac{-2(1 + x^2)}{(x^2 - 1)^2}.$$

当 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 时, $y'' < 0$, 故曲线 $y = \ln(x^2 - 1)$ 是凸弧.

例 9 求曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ 的凹凸区间与拐点.

解 $y' = 3x^2 - 6x - 5$, $y'' = 6x - 6$.

令 $y'' = 0$, 得 $x = 1$.

在 $(-\infty, 1)$ 内, $y'' < 0$, 曲线是凸弧;

在 $(1, +\infty)$ 内, $y'' > 0$, 曲线是凹弧.

所以 $x = 1$ 是拐点的横坐标, $f(1) = -1$, 拐点 $(1, -1)$.

4) 求曲线的渐近线

例 10 求曲线 $y = \frac{1}{x^2 + x}$ 的渐近线.

解 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + x} = 0$, $y = 0$ 为水平渐近线.

又因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 + x} = \infty$, 故 $x = 0$, $x = -1$ 为垂直渐近线.

例 11 求曲线 $y = 1 + e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

解 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{\frac{1}{x}}) = 2$, 故 $y = 2$ 为水平渐近线.

又因 $\lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + e^{\frac{1}{x}}) = +\infty$, 故 $x = 0$ 为垂直渐近线.

模拟试题及参考答案

1. 下列命题中正确的是 ().

(A) 单调函数的导数必为单调函数

(B) 设 $f'(x)$ 为单调函数, 则 $f(x)$ 也是单调函数

(C) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内只有一个驻点 x_0 , 则此 x_0 必为 $f(x)$ 的极值点

(D) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且有一个极值点 x_0 , 则 $f'(x_0) = 0$

2. 关于函数 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, 正确的结论是 ().

(A) 没有极值

(B) 只有一个极值, 且是极小值

(C) 只有一个极值, 且是极大值

(D) 有多于一个极值

3. 函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$ 的单调减少区间是 ().

(A) $[0, 4]$

(B) $[4, +\infty]$

(C) $[-\infty, 0]$

(D) $[-4, 0]$

4. 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的拐点是 ().

(A) $(-\sqrt{2}, e^{-2}), (\sqrt{2}, e^{-2})$

(B) $(-1, e^{-1}), (1, e^{-1})$

(C) $(-2, e^{-4}), (2, e^{-4})$

(D) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$

5. 曲线 $y = \frac{e^x}{x^2 + x - 2}$ 垂直与水平渐近线的总条数为 ().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

解答

1. (D)

由极值存在的必要条件, 可知应选 (D).

2. (D)

因为 $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$, 解得两个驻点 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$.

$$f''(x) = 6x + 2,$$

在驻点处有: $f''(-1) = -4 < 0$, $x_1 = -1$ 为极大点.

$$f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0, x_2 = \frac{1}{3} \text{ 为极小点.}$$

所以选 (D).

3. (A)

$$\text{因为 } f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

所以 x 在 $(0, 4)$ 有 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上是单调减少.

4. (D)

$$\text{因为 } y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. 且在点 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 两侧 y'' 变号. 所以曲线 $y = e^{-x^2}$ 有两

个拐点, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$.

5. (C)

$$\text{因为 } y = \frac{e^x}{x^2 + x - 2} = \frac{e^x}{(x+2)(x-1)},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^x}{(x+2)(x-1)} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{(x+1)(x-1)} = \infty$,
 $x = -2$, $x = 1$ 是两条垂直渐近线.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + x - 2} = 0$, $y = 0$ 是水平渐近线, 一共三条渐近线.

1.3 一元函数积分学

1.3.1 不定积分

1. 内容摘要

1) 不定积分的概念

(1) 原函数: 若 $F'(x) = f(x)$, 或 $dF(x) = f(x)dx$, 称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

例 $(\sin x)' = \cos x$, $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

(2) 不定积分: $f(x)$ 的全体原函数叫 $f(x)$ 的不定积分, 记为 $\int f(x)dx = F(x) + c$ ($F'(x) = f(x)$).

(3) $f(x)$ 的任意两个原函数之差为一常数.

(4) 原函数与不定积分的关系:

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, $f(x)$ 的不定积分为 $\int f(x)dx = F(x) + c$

2) 不定积分性质

(1) 不定积分与导数 (或微分) 的关系:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \text{ 或 } d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \text{ 或 } \int df(x) = f(x) + c.$$

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k 为常数.

$$(3) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

3) 基本积分表

$$\int 0dx = c,$$

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c \quad (\mu \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad (x \neq 0),$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c, \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + c,$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c, \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

4) 基本积分法

(1) 第一换元积分法: 设 $F'(u) = f(u)$.

$$\int g(x) dx = \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \xrightarrow{u=\varphi(x)} \int f(u) du = F(u) + c = F[\varphi(x)] + c.$$

(2) 第二换元积分法: 设 $F'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t)$.

$$\int f(x) dx \xrightarrow{x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F(t) + c = F[\varphi^{-1}(x)] + c.$$

5. 分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

若被积函数是幂函数和指数函数的乘积, 设 u 为幂函数.

若被积函数是幂函数和正弦(余弦)函数乘积, 设 u 为幂函数.

若被积函数是幂函数和对数函数或反三角函数的乘积, 设 u 为对数函数、反三角函数.

若被积函数是指数函数与正弦(余弦)函数的乘积, 设 u 为指数函数或正弦(余弦)函数均可.

2. 例题

1) 利用不定积分概念解题

例1 若 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

解 因为 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

有 $f'(x) = 1 - x$,

$$f(x) = \int (1-x) dx = x - \frac{1}{2}x^2 + c.$$

由 $f(0) = 0$ 代入上式得 $c = 0$, 故 $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$.

例2 设 $\int f(x) dx = F(x) + c$, 求 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx$.

解 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = - \int f(e^{-x}) d(e^{-x}) = -F(e^{-x}) + c.$

例3 若 $\int f(x) e^{-\frac{1}{x}} dx = -e^{-\frac{1}{x}} + c$, 求 $f(x)$.

解 因为 $(-e^{-\frac{1}{x}})' = f(x) e^{-\frac{1}{x}}$,

即 $-\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = f(x) e^{-\frac{1}{x}}$, 故 $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

例4 若 xe^x 是 $f(x)$ 的原函数, 求 $\int xf'(x) dx$.

解 因为 $f(x) = (xe^x)' = (1+x)e^x$,

$$\int xf'(x) dx = xf(x) - \int f(x) dx = x(1+x)e^x - xe^x + c = x^2 e^x + c.$$

2) 利用不定积分性质解题

例5 求 $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$.

解 原式 = $\int \frac{1-2x+x^2}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int (x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{3}}) dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + c.$

例 6 求 $\int \frac{3x^2}{1+x^2} dx.$

解 原式 = $3 \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = 3(x - \arctan x) + c.$

例 7 求 $\int 2^x e^x dx.$

解 原式 = $\int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln 2e} + c = \frac{(2e)^x}{1 + \ln 2} + c.$

例 8 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$

解 原式 = $\int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + c.$

3) 利用第一换元法解题 (凑微分 → 换元 → 积分 → 还原)

例 9 求 $\int \sin 5x dx.$

解 原式 = $\frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) \xrightarrow{u=5x} \frac{1}{5} \int \sin u du = -\frac{1}{5} \cos u + c = -\frac{1}{5} \cos 5x + c$

例 10 求 $\int \frac{1}{(x-4)^2} dx.$

解 原式 = $\int (x-4)^{-2} d(x-4) = -\frac{1}{x-4} + c.$

例 11 求 $\int (3-2x)^5 dx.$

解 原式 = $-\frac{1}{2} \int (3-2x)^5 d(3-2x) = -\frac{1}{12} (3-2x)^6 + c.$

例 12 求 $\int x(x^2-2)^3 dx.$

解 原式 = $\int (x^2-2)^3 \frac{1}{2} d(x^2-2) = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 + c = \frac{1}{8} (x^2-2)^4 + c.$

例 13 求 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

解 原式 = $-\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} + c.$

例 14 求 $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx.$

解 原式 = $-\int \cos \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin \frac{1}{x} + c.$

例 15 求 $\int \frac{1}{x \ln x} dx.$

解 原式 = $\int \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln |\ln x| + c.$

例 16 求 $\int \cos^3 x \sin x dx.$

解 原式 = $-\int \cos^3 x d(\cos x) = -\frac{1}{4} \cos^4 x + c.$

例 17 求 $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$.

解 原式 $= \int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx = x - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = x - \ln(e^x + 1) + c$.

例 18 求 $\int \cos^3 x dx$.

解 原式 $= \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c$.

4) 利用第二换元法解题

例 19 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx (a > 0)$.

解 令 $x = a \tan t$, $dx = a \sec^2 t dt$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{a \sec^2 t dt}{a \sec t} = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + c \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + c = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c. \end{aligned}$$

例 20 求 $\int \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx$.

解 令 $t = \sqrt{2x}$, $x = \frac{1}{2} t^2$, $dx = t dt$.

$$\text{原式} = \int \frac{t}{1+t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = t - \ln |1+t| + c = \sqrt{2x} - \ln |1 + \sqrt{2x}| + c.$$

5) 利用分部积分法解题

例 21 求 $\int x \sin 2x dx$.

解 原式 $= -\frac{1}{2} \int x d(\cos 2x) = -\frac{1}{2} [x \cos 2x - \int \cos 2x dx] = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$.

例 22 求 $\int (x+1)e^x dx$.

解 原式 $= \int (x+1)d(e^x) = (x+1)e^x - \int e^x dx = xe^x + c$.

例 23 求 $\int \ln(1+x^2) dx$.

解 原式 $= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctan x) + c$.

例 24 求 $\int \arctan x dx$.

解 原式 $= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$.

模拟试题及参考答案

1. 下列公式中不正确的是 ().

(A) $d \int f(x) dx = f(x)$ (B) $d \int f'(x) dx = df(x)$

(C) $\int f'(x) dx = f(x) + c$ (D) $\int df(x) = f(x) + c$

2. 下列各式中正确的是 ().

$$(A) \int f'(3-2x)dx = -\frac{1}{2}f(3-2x) + c$$

$$(B) \int f'(3-2x)dx = -f(3-2x) + c$$

$$(C) \int f'(3-2x)dx = -f(3-2x) + c$$

$$(D) \int f'(3-2x)dx = \frac{1}{2}f(3-2x) + c$$

3. 若 $f'(\sin^2 x) = \tan^2 x$ ($0 < x < 1$), 则 $f(x)$ 是 ().

$$(A) \frac{1}{1-x} - 1 + c \quad (0 < x < 1) \quad (B) -\ln(1-x) - x + c \quad (0 < x < 1)$$

$$(C) \ln(1-x) - x + c \quad (0 < x < 1) \quad (D) -\ln x - x + c \quad (0 < x < 1)$$

4. $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 的全部原函数为 ().

$$(A) \frac{1}{x^2} + c \quad (B) x - \ln x$$

$$(C) x + \frac{1}{x^2} + c \quad (D) x - \ln|x| + c$$

5. 设 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\int xf(x)dx$ 是 ().

$$(A) \ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2 x + c \quad (B) x\ln x - x + c$$

$$(C) \ln x + c \quad (D) \ln x - x + c$$

解答

1. (A)

2. (A)

$$\text{因为 } \int f'(3-2x)dx = -\frac{1}{2} \int f'(3-2x)d(3-2x) = -\frac{1}{2}f(3-2x) + c.$$

3. (B)

$$\text{因为 } f'(\sin^2 x) = \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}, \text{ 所以 } f'(t) = \frac{t}{1-t}.$$

$$f(t) = \int \frac{t}{1-t} dt = - \int \frac{1-t-1}{1-t} dt = - \int dt + \int \frac{dt}{1-t} = -t - \ln(1-t) + c,$$

$$\text{即 } f(x) = -x - \ln(1-x) + c.$$

4. (D)

$$\text{因为全部函数为 } \int (1 - \frac{1}{x})dx = x - \ln|x| + c.$$

5. (A)

$$\text{因为 } f(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{所以 } \int xf(x)dx = \int \frac{1 - \ln x}{x} dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2 x + c$$

1.3.2 定积分

1. 内容摘要

1) 定积分概念

(1) 定义: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

定积分是和式的极限, 是个数, 该数值仅与 $f(x)$ 与积分区间 $[a, b]$ 有关, 与积分变量 x 无关.

(2) 定积分存在的充分条件:

① $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

② $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个第一类间断点, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

(3) 定积分的几何意义:

$\int_a^b f(x) dx$ 表示介于 x 轴, 曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a$, $x = b$ 之间的各部分面积的代数和.

2) 定积分的性质

$$(1) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$(2) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

$$(3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$(4) f(x) = 1, \int_a^b f(x) dx = \int_a^b dx = b - a.$$

$$(5) f(x) \geq 0, [a, b], \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$$(6) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上 } f(x) \leq g(x), \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$(7) \text{ 若在 } [a, b] \text{ 上 } m \leq f(x) \leq M, \text{ 则 } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

$$(8) \text{ 积分中值定理 } \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), a \leq \xi \leq b.$$

$$\text{定义: } \int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3) 微积分基本公式

(1) 变上限的函数: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $x \in [a, b]$, 则

$$\int_a^x f(t) dt$$

是上限 x 的函数, 记为

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

(2) 变上限函数的导数

$$\varphi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

(3) 牛顿—莱布尼茨公式 (微积分基本公式):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad (F'(x) = f(x)).$$

4) 定积分的计算

(1) 定积分换元法:

$$\int_a^b f(x)dx \xrightarrow{x=\varphi(t)} \int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) \Big|_a^\beta = F(\beta) - F(a),$$

式中 $x = \varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上单调, 有连续导数 $\varphi'(t)$, 且 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

(2) 定积分换元法要点: 用 $x = \varphi(t)$ 把变量 x 换为新变量 t 时, 积分限也要换成对应于新变量 t 的积分限 (积分变量与积分限同时换), 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数 $F(t)$ 后, 用牛—莱公式即可, 不需把 $F(t)$ 换成 x 的函数.

(3) 偶函数与奇函数在对称区间上的积分:

①若 $f(x)$ 是偶函数, 则有

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

②若 $f(x)$ 是奇函数, 则有

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

(4) 定积分分部积分法

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

5) 广义积分

(1) 无穷区间上的广义积分

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx; \\ \int_{-\infty}^b f(x)dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

(2) 被积函数有无穷型间断点的广义积分. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

无穷型间断点在区间的右端点, 或在区间内任一点的广义积分与上式类似.

2. 例题

1) 利用定积分性质计算

例 1 比较 $\int_1^2 \ln x dx$, $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ 的大小

解 因为, 当 $x < e$ 时, $\ln x < 1$, 故在 $[1, 2]$ 上有 $0 < (\ln x)^2 < \ln x$, 所以

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx < \int_1^2 \ln x dx.$$

例 2 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{x} dx$, $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ 比较 I_1 , I_2 , I_3 的大小.

解 因为当 $0 < x < 1$ 时, 有 $\sin^2 x < x < \sqrt{x}$, 所以 $I_3 < I_1 < I_2$.

例 3 估计 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 + \sin^2 x) dx$ 的值.

解 因为在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上, 有 $1 \leq 1 + \sin^2 x \leq 2$, 故有 $\pi \leq I \leq 2\pi$.

2) 求变限定积分的导数

例 4 求 $\frac{d}{dx} \int_x^0 e^t \sin t^2 dt$.

解 原式 $= - \frac{d}{dx} \int_0^x e^t \sin t^2 dt = -e^x \sin x^2$.

例 5 求 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3} dt$.

解 原式 $= \sqrt{1+(x^2)^3} \cdot (x^2)' = 2x \sqrt{1+x^6}$.

例 6 求 $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \ln(1+t^2) dt$.

解 原式 $= \frac{d}{dx} [\int_{x^2}^0 \ln(1+t^2) dt + \int_0^{x^3} \ln(1+t^2) dt] = -2x \ln(1+x^4) + 3x^2 \ln(1+x^6)$.

例 7 求 $\frac{d}{dx} \int_1^x t \cos^2 t dt$, 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 的值.

解 $\frac{d}{dx} \int_1^x t \cos^2 t dt \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = x \cos^2 x \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{8}$.

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^0 t^2 dt}{\int_0^x t(t + \sin t) dt}$.

解 属于 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 应用洛必达法则, 得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1 + \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2} \int_0^x t^2 e^{t^2} dt}{x}$.

解 属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 应用洛必达法则得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{t^2} dt}{x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + 2x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 10 设 $x = \int_0^t \cos u du$, $y = \int_0^t \sin u du$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$.

3) 利用牛—莱公式计算定积分

例 11 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$ ($|\sin x|$ 为偶函数).

解 原式 $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

另一解法 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

注: 被积函数带有绝对值时, 必须按绝对值定义去掉绝对值符号, 再积分.

例 12 求 $\int_{-1}^2 |1-x| dx$.

解 因为 $|1-x| = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$

原式 $= \int_{-1}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = -\frac{1}{2}(1-x)^2 \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \Big|_1^2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

例 13 求 $\int_4^9 (\sqrt{x} + x) dx$.

解 原式 $= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_4^9 = \frac{271}{6}$.

例 14 下列结论中, 错误的是 ().

(A) $\int_a^a f(x^2) dx = 2 \int_0^a f(x^2) dx$ (B) $\int_0^{2\pi} \sin^{10} x dx = \int_0^{2\pi} \cos^{10} x dx$

(C) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \sin 7x dx = 0$ (D) $\int_0^1 10^x dx = 9$

解 选 (D)

因为 $\int_0^1 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} \Big|_0^1 = \frac{10}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 10} = \frac{9}{\ln 10}$, 而不等于 9.

4) 利用定积分第一换元法解题

例 15 求 $\int_0^2 x e^{x^2} dx$.

解 原式 $= \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2} dx^2 \xrightarrow{u=x^2} \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$.

注: 计算熟练后, 新的积分变量可以不写出来, 积分限也就不需要变了.

例 16 求 $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

解 原式 $= \int_1^e \sqrt{\ln x} d \ln x = \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^e = \frac{2}{3}$.

5) 利用定积分第二换元法解题

例 17 求 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

解 令 $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t dt$.

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 |\cos t| 2 \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2(t + \frac{1}{2} \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$.

6) 利用定积分分部积分法解题

例 18 求 $\int_0^1 x e^{-x} dx$.

解 原式 $= - \int_0^1 x de^{-x} = - \left[x e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx \right] = 1 - \frac{2}{e}$.

例 19 求 $\int_0^1 \arccos x dx$.

解 原式 $= x \arccos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1$.

7) 利用函数奇、偶性计算对称区间上定积分

例 20 求 $\int_{-2}^2 \frac{\sin^7 x \cos^4 x}{1+x^2} dx$.

解 因为被积函数是奇函数, 积分区间对称, 故原式 $= 0$.

例 21 求 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$.

解 因为 $\sin^2 x$ 为偶函数, 积分区间对称, 所以

原式 $= 2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \pi$.

8) 计算广义积分

例 22 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

解 原式 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^b \frac{1}{(1+x^2)^2} d(1+x^2)$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2(1+x^2)} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+b^2)} \right] = \frac{1}{2}$.

例 23 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

解 原式 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2[\sqrt{b} - 1] = \infty$, 发散.

例 24 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$

解 $x = a$, 是被积函数的无穷型间断点. 于是

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\arcsin \frac{x}{a} \right] \Big|_0^{a-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{a-\epsilon}{a} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

模拟试题及参考答案

1. 下列正确的是 ().

(A) 若 $\int_a^b f(x) dx = 0, (a > 0)$ 则 $f(x)$ 必为奇函数

(B) $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$

(C) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, 在 $(-10, +10)$ 内为偶函数

(D) $\frac{d}{dx} \int_0^{2x} e^{t^2} dt = e^{4x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt}{x^2}$ 的值应为 ().

(A) ∞ (B) 0 (C) 1 (D) 不存在且非无穷大

3. $\int_0^1 f(2x)dx$ 的值应为 () .

(A) $\int_0^2 f(t)dt$ (B) $\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$

(C) $2\int_0^2 f(t)dt$ (D) $\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$

4. $f(x) = x^3 + x$, 则 $\int_{-2}^2 f(x)dx$ 应等于 () .

(A) 0 (B) 8 (C) $\int_0^2 f(x)dx$ (D) $2\int_0^2 f(x)dx$

5. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ 应等于 () .

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) 0

解答

1. (B)

因为 在区间(0,1)上, e^{x^2} 满足不等式: $1 < e^{x^2} < e$, 由定积分性质可得 $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$.

2. (C)

因为 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4} \cdot 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^4} = 1$.

3. (D)

因为 设 $2x = t$, $dx = \frac{1}{2}dt$, 于是

$$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt.$$

4. (A)

因为 $f(x) = x^3 + x$ 是奇函数, 在对称区间上积分为 0.

5. (A)

因为 原式 $= 2 \int_1^{+\infty} \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

1.3.3 定积分应用

1. 内容摘要

1) 平面图形的面积

(1) 由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$ ($a < b$), $y=0$ 所围成的曲边梯形面积:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

(2) 由曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$) 和直线 $x=a$, $x=b$ ($a < b$) 围成图形的面积:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

(3) 由曲线 $x=f(y)$, $x=g(y)$ ($f(y) \geq g(y)$) 和直线 $y=c$, $y=d$ ($c < d$) 围成图形

的面积:

$$S = \int_c^d [(f(y) - g(y))] dy.$$

(4) 曲线 $r = r(\theta)$, 射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$) 围成曲边扇形的面积:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

2) 旋转体的体积

(1) 由曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) 及直线 $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$) 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

(2) 由曲线 $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) 及直线 $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$) 所围成曲边梯形绕 y 轴旋转的体积:

$$V = \int_c^d \pi \varphi^2(y) dy.$$

(3) 平面图形 $y = g(x)$, $y = f(x)$ ($f(x) \geq g(x)$), $x = a$, $x = b$, 绕 x 轴旋转的体积.

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

3) 平面曲线的弧长

(1) 直角坐标情形: 设曲线方程 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 则弧长

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

(2) 参数方程情形:

设曲线的参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 则弧长

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

2. 例题

例 1 求由曲线 $y = x^2 - 1$ 和 $y = x + 1$ 围成图形的面积.

解 求二曲线交点, 由 $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = x + 1, \end{cases}$ 得 $(-1, 0)$, $(2, 3)$.

$$S = \int_{-1}^2 [(x + 1) - (x^2 - 1)] dx = \frac{27}{6}.$$

例 2 求由曲线 $y = x^2$ 及其在点 $(1, 1)$ 的切线和 y 轴围成图形的面积.

解 切线方程: $y - 1 = 2x|_{x=1} (x - 1)$, 即 $y = 2x - 1$.

$$S = \int_0^1 [x^2 - (2x - 1)] dx = \frac{1}{3}.$$

例 3 求由曲线 $x = y^2$, $y = -x$ 和 $y = 1$ 围成图形的面积.

解 $S = \int_0^1 [y^2 - (-y)] dy = \frac{5}{6}.$

例4 求椭圆 $x = 2\cos\theta$, $y = \sin\theta$ 的面积.

解 由对称性

$$S = 4S_1 = 4 \int_0^2 y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin\theta (-2\sin\theta) d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = 2\pi.$$

例5 求圆 $\rho = 2a\cos\theta$ ($a > 0$) 介于 x 轴与射线 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 间的图形的面积.

解
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} [2a\cos\theta]^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta d\theta = a^2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

例6 求由 $x = y^2$, $x = 2$ 及 x 轴围成图形绕 x 轴旋转的旋转体积.

解
$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 x dx = 2\pi.$$

例7 求由 $y = x^2$ 和 $x = y^2$ 围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体体积.

解
$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{10}\pi.$$

例8 求 $y = x^2/4$, $y = 1$ 所围成平面图形绕 y 轴旋转一周所生成的旋转体体积.

解
$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 4y dy = 2\pi.$$

例9 计算曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

解
$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

例10 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的长度.

解
$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a [-2\cos \frac{t}{2}] \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

模拟试题及参考答案

1. 曲线 $y = \ln x$, x 轴及直线 $x = e$, $x = 4$ 围成的图形的面积是 ().

- (A) $8\ln 2$ (B) $8\ln 2 - 4$ (C) $8\ln 2 + 4$ (D) $4\ln 2$

2. 由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 2x - 1$ 及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积是 ().

- (A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{30}$ (D) $\frac{\pi}{15}$

3. 螺旋线 $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ 上相应于 t 从 0 到 2π 的一段弧长为 ().

- (A) $2\sqrt{2}\pi$ (B) 2π (C) $\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$ (D) 4π

4. 设一金属棒长 3m, 离棒左端 x m 处的线密度为 $\rho(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ kg/m, 则此棒的质量为 ().

- (A) 1 kg (B) 2 kg (C) 3 kg (D) 4 kg

5. 利用定积分的几何意义, 求 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

- (A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}a^2$ (C) $\frac{\pi}{4}a^2$ (D) πa^2

解答

1. (B)

$$\begin{aligned}\text{因为图形的面积 } S &= \int_e^4 \ln x dx = x \ln x \Big|_e^4 - \int_e^4 dx \\ &= 4 \ln 4 - e - (4 - e) = 4 \ln 4 - 4 = 8 \ln 2 - 4.\end{aligned}$$

2. (C)

$$\text{因为 } V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{30}.$$

3. (A)

$$\text{因为 } S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t)' ^2 + (\sin t)' ^2 + (t')^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

4. (D)

$$\text{因为 } m = \int_0^3 \rho(x) dx = 2 \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 4 \sqrt{x+1} \Big|_0^3 = 4 \text{ kg}.$$

5. (C)

因为定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 的数值在几何上表示由 x 轴, y 轴, 和 $x^2 + y^2 = a^2$ 在第一象限内的曲线所围成的面积, 该面积为半径为 a 的圆面积的 $\frac{1}{4}$, 即

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

1.4 向量代数与空间解析几何

1.4.1 向量代数

1. 内容摘要

1) 向量概念

(1) 既有大小, 又有方向的量, 叫向量, 可用有向线段 \overrightarrow{AB} 表示, 向量的长度叫向量的模, 记为 $|\overrightarrow{AB}|$.

有时向量也可用字母 \vec{a} 表示

单位向量: 模为 1 的向量, 称为单位向量. \vec{a} 的单位向量记为 \vec{a}^0 , 即 $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

(2) 向量坐标表示法: 向量 \overrightarrow{OM} 的终点坐标 $M(x, y, z)$, \overrightarrow{OM} 可写成 $\overrightarrow{OM} = xi + yj + zk$. 称 $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$ 为 \overrightarrow{OM} 的坐标表示, 向量 \overrightarrow{OM} 的模 $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

向量 \overrightarrow{OM} 的方向余弦

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

且 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

2) 向量的运算

设 $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

(1) 加减法: $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$.

(2) 数乘: $\lambda \vec{a} = |\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1|$.

(3) 数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

(4) 向量积: 向量 $\vec{a} \times \vec{b}$ 如下定义.

其模 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

$\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向按右手法则, 且垂直于 \vec{a}, \vec{b} .

$\vec{a} \times \vec{b}$ 的坐标表示法为

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

性质 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (不满足交换律).

3) 两向量间的关系 (\vec{a}, \vec{b} 为非零向量)

关系	向量表示	向量坐标表示
\vec{a}, \vec{b} 的夹角 φ	$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }$	$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
\vec{a} 与 \vec{b} 垂直	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$
\vec{a} 与 \vec{b} 平行	$\vec{a} \times \vec{b} = 0$	$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

2. 例题

1) 向量的坐标表达

例 1 已知 $A(1, 3, -2), B(-1, 0, 2)$, 求 $\overrightarrow{AB}, |\overrightarrow{AB}|$

解 $\overrightarrow{AB} = \{-2, -3, 4\},$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

例 2 已知 $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, 求 \vec{a} 的模, \vec{a} 的方向余弦

解 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{26},$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{26}}, \cos \gamma = \frac{-4}{\sqrt{26}}.$$

2) 向量的运算

例 3 已知 $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j}$, 求 $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

解 $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3\{2, 1, -1\} - 2\{3, 1, 0\} = \{0, 1, -3\} = \vec{j} - 3\vec{k}.$

例 4 已知 $\vec{a} = \{3, 2, -1\}, \vec{b} = \{1, -1, 2\}$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 和 $\vec{a} \times \vec{b}$

解 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 2 = -1.$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}.$$

例 5 已知 $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, 求 \vec{a}, \vec{b} 夹角及 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影 $\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a}$

解 $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \times 1 + (-1) \times 3 + 4 \times (-2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{-9}{\sqrt{21} \sqrt{14}} = \frac{-9}{7\sqrt{6}}.$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{-9}{7\sqrt{6}}\right).$$

$$\text{Prj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{9}{\sqrt{14}}.$$

例 6 若向量 $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ 与 $\vec{b} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + l\vec{k}$ 平行, 求 l 值.

解 因为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 有

$$\frac{1}{-2} = \frac{-3}{6} = \frac{6}{l}, \text{ 所以 } l = -12.$$

例 7 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为向量, 下列等式中正确的是 ().

$$(A) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2; \quad (B) \vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \vec{b};$$

$$(C) (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2;$$

$$(D) (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}$$

解 选 (A)

$$\text{因为 } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2.$$

所以选 (A)

模拟试题及参考答案

1. 设向量 $\vec{a} = \{3, 5, -2\}$, $\vec{b} = \{2, 1, 4\}$, 要使得向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 垂直于 z 轴, 则 λ 的值应等于 ().

- (A) 0 (B) -2 (C) 2 (D) 1

2. 设向量 $\vec{a} = \{-2, 4, 4\}$, $\vec{b} = \{0, 6, 3\}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 ().

$$(A) \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad (B) \arccos \frac{2}{\sqrt{6}};$$

$$(C) \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad (D) \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3. 已知三点 $M(5, 3, 2)$, $N(1, -4, 6)$, $P(-3, 7, 1)$. 下述结论正确的是 ().

- (A) 三点在一直线上 (B) 三点构成非等腰三角形
(C) 三点构成等腰三角形 (D) 三点构成等腰直角三角形

4. 已知两点 $M(5, 3, 2)$, $N(1, -4, 6)$, 则单位向量 \overrightarrow{MN} 可表示为 ().

$$(A) \{-4, -7, 4\} \quad (B) \left\{-\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9}\right\}$$

$$(C) \left\{\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{4}{9}\right\} \quad (D) \{4, 7, -4\}$$

5. 设 \vec{a}, \vec{b} 为非零向量, 下列命题中错误的是 ().

$$(A) \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ 的充要条件是存在实数 } \lambda, \text{ 使 } \vec{b} = \lambda\vec{a}$$

$$(B) \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ 的充要条件是 } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$(C) \vec{a} \perp \vec{b} \text{ 的充要条件是 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(D) \vec{a} \perp \vec{b} \text{ 的充要条件是 } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

解答

1. (C)

因为 $\lambda\vec{a} + \vec{b} \perp z$ 轴, 所以向量 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 在 z 轴上的投影为 0, 而 $\lambda\vec{a} + \vec{b} = \{3\lambda + 2, 5\lambda +$

$1, -2\lambda + 4|$.

于是 $-2\lambda + 4 = 0$, 即 $\lambda = 2$.

2. (C)

$$\text{因为 } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{36}{6 \cdot \sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

所以 $\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. (D)

$$\text{因为 } \overrightarrow{MN} = \{-4, -7, 4\}, \quad |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{16 + 49 + 16} = 9.$$

$$\overrightarrow{NP} = \{-4, 11, -5\}, \quad |\overrightarrow{NP}| = \sqrt{16 + 121 + 25} = 9\sqrt{2}.$$

$$\overrightarrow{MP} = \{-8, 4, -1\}, \quad |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{64 + 16 + 1} = 9.$$

且有 $|\overrightarrow{MN}|^2 + |\overrightarrow{MP}|^2 = |\overrightarrow{NP}|^2$, 所以选 (D).

4. (B)

$$\text{因为 } \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{7}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = 1, \text{ 即该向量的模为 } 1, \text{ 所以是单位向量.}$$

5. (D)

因为对任意两个非零向量 \vec{a}, \vec{b} , 都满足:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2,$$

不需要 \vec{a} 与 \vec{b} 垂直这个条件.

1.4.2 空间解析几何

1. 内容摘要

1) 平面方程

(1) 平面点法式方程: 过 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点, 且法线向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$, 则平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

(2) 平面的一般式方程:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\text{法向量 } \vec{n} = \{A, B, C\}).$$

(3) 平面的截距式方程:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

其中 a, b, c 依次为平面在 x 轴, y 轴, z 轴上的截距.

(4) 两平面平行、垂直条件:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

两平面垂直的充要条件是: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

两平面平行的充要条件是: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

2) 直线方程

与直线平行的非零向量 \vec{s} 称直线的方向向量.

(1) 设直线过 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量 $\vec{s} = \{l, m, n\}$ 的标准式方程:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

(2) 参量式方程:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l, \\ y = y_0 + \lambda m, \quad (\lambda \text{ 为参数}) . \\ z = z_0 + \lambda n, \end{cases}$$

(3) 直线的一般式方程 (面交式):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

3) 两直线的平行、垂直条件:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

两直线垂直的充要条件是: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

两直线平行的充要条件是: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

4) 平面与直线关系

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

平面 π 与直线 L 垂直的充要条件: $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$.

平面 π 与直线 L 平行的充要条件: $Al + Bm + Cn = 0$.

5) 二次曲面

(1) 柱面方程.

母线平行 z 轴, 准线为 $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ 的柱面方程为 $f(x, y) = 0$.

例如, $x^2 + y^2 = R^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x^2 - 2py = 0$ 等, 都是母线平行 z 轴的柱面方程, 在空间直角坐标系中, 只含两个变量的方程其图形表示柱面, 缺少哪个变量柱面母线就平行于哪个轴.

(2) 旋转曲面.

曲线 $L: \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ 绕 x 轴旋转所产生的旋转曲面方程为 $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$; 绕 y 轴旋转所产生的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$.

(3) 二次曲面.

球面方程: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

椭球面方程: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

椭圆抛物面方程: $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p > 0, q > 0)$.

锥面方程: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

单叶双曲面方程: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

双叶双曲面方程: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$

2. 例题

1) 求平面方程

例1 过点 $A(1, 2, -3)$, $B(-2, 1, 5)$, 且平行 Oz 轴的平面方程.

解 因为 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$, $\vec{n} \perp \vec{k}$, 有

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j},$$

得 $(x-1) - 3(y-2) = 0$, 或写成 $x - 3y + 5 = 0$.

例2 过 $A(1, 2, 1)$ 与直线 $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ 的平面方程.

解 知直线过点 $M(0, 1, 1)$, $\vec{s} = \{0, 1, 1\}$, 有

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$, $\vec{n} \perp \vec{s}$, 取

$$\vec{n} = \overrightarrow{AM} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k},$$

得 $(x-1) - (y-2) + (z-1) = 0$.

例3 设平面 π 通过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($x - 2y - 2z$) 的球心, 且垂直于直线 L :

$$\begin{cases} x=0, \\ y+z=0, \end{cases} \text{ 则平面 } \pi \text{ 的方程是 () .}$$

(A) $y - z = 0$

(B) $y + z = 0$

(C) $4x + y + z = 0$

(D) $2x + 2y - z = 0$

解 选 (A)

将球面改写成 $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 36$.

于是球心坐标为 $(2, -4, -4)$, 直线 L 的方向向量 $\vec{s} = \{0, 1, -1\}$, 以 \vec{s} 作为平面 π 的法线向量, 则 π 的点法式方程为

$$(y+4) - (z+4) = 0,$$

即 $y - z = 0$.

2) 求直线方程

例4 过点 $M(0, 1, -1)$ 与平面 $3x - 4z + 1 = 0$ 垂直的直线方程.

解 因为 $\vec{s} = \{3, 0, -4\}$, 得

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{-4}.$$

例5 过点 $A(0, -1, 4)$ 与直线 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-y+2z=0, \end{cases}$ 平行的直线方程.

解 因为 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$,

得 $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

例 6 已知 $L: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-7}$ 与 $\pi: 6x - 4y + 14z + 10 = 0$.

判断其相对位置.

解 因为 $\vec{s} = \{-3, 2, -7\}$, $\vec{n} = \{6, -4, 14\}$, 得 $\frac{-3}{6} = \frac{2}{-4} = \frac{-7}{14}$, 所以 $L \perp \pi$.

3) 二次曲面

例 6 指出二次曲面的名称:

(1) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 2$;

(2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

(3) $y^2 + z^2 = 4$;

(4) $z^2 = x^2 + y^2$;

(5) $z = x^2 + y^2$.

解 (1) 球心在 $(-1, 2, 0)$ 点, 半径为 $\sqrt{2}$ 的球面.

(2) 球心在 $(0, 0, 0)$ 点, 半径为 R 的上半球面.

(3) 准线为 yOz 面上, 圆心 $(0, 0)$, $R=2$ 的圆, 且母线平行 x 轴的圆柱面.

(4) 对称轴为 z 轴, 顶点在 $(0, 0, 0)$ 点的圆锥面.

(5) 对称轴为 z 轴, 以抛物线 $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转的旋转抛物面.

例 7 试建立曲面方程:

(1) 球心在 $(4, -2, 1)$, 半径为 2 的球面方程;

(2) 直线 $\begin{cases} z = y \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 oz 轴旋转所成旋转面方程;

(3) 抛物线 $\begin{cases} z = x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 oz 轴旋转所成的旋转抛物面方程;

(4) 准线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$, 母线平行 oz 轴的柱面方程;

(5) 准线为 $\begin{cases} z = 2 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$, 母线平行 oy 轴的柱面方程.

解 (1) $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

(2) $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

(3) $z = x^2 + y^2 + 1$.

(4) $x^2 + y^2 = R^2$.

(5) $z = 2 - x^2$.

例 8 将椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程是 ().

(A) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

$$(C) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad (D) \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

解 选 (C)

因为绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程应该是: 原椭圆方程中的 $\frac{x^2}{9}$ 不变, 将 $\frac{z^2}{4}$ 变成 $\frac{z^2 + y^2}{4}$, 即为

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

模拟试题及参考答案

1. 平行于 x 轴且经过点 $(4, 0, -2)$ 和点 $(2, 1, 1)$ 的平面方程是 ().

- (A) $x - 4y + 2z = 0$ (B) $3x + 2z - 8 = 0$
(C) $3y - z - 2 = 0$ (D) $3x + 3y + z - 10 = 0$

2. 过两点 $M(3, -2, 1)$ 和 $N(-1, 0, 2)$ 的直线方程是 ().

- (A) $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ (B) $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$
(C) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ (D) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-1}$

3. 在空间直角坐标系中, 方程 $x=2$ 表示为 ().

- (A) x 轴上的点 $(2, 0, 0)$
(B) xOy 平面上的直线 $x=z$
(C) 过点 $(2, 0, 0)$ 且平行于 yOz 平面的平面
(D) 过点 $(2, 0, 0)$ 的任意平面

4. 设直线 $L: \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4, \end{cases}$ 则 L 的参数方程是 ().

- (A) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$
(C) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

5. 已知两直线 $L_1: \begin{cases} 3x + z = 4, \\ y + 2z = 9, \end{cases} L_2: \begin{cases} 6x - y = 7, \\ 3y + 6z = 1, \end{cases}$ 这两直线的关系为 ().

- (A) 平行但不重合 (B) 重合
(C) 垂直 (D) 相交但不垂直

6. 下列关于曲面方程的结论中, 错误的是 ().

- (A) $z + 2x^2 + y^2 = 0$ 表示椭圆抛物面
(B) $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示双叶双曲面
(C) $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$ 表示圆锥面
(D) $y^2 = 5x$ 表示抛物柱面

7. 空间曲线 $L: \begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ z = 4 - 3x^2 - 2y^2, \end{cases}$ 在 xOy 坐标平面上的投影曲线为 ().

(A) $x^2 + y^2 = 1$

(B) $x^2 + 2y^2 = 1$

(C) $4 - 3x^2 - 2y = 0$

(D) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

解答

1. (C)

因为平面方程 $3y - z - 2 = 0$ 不出现 x ，即平面平行于 x 轴，且又过两点 $(4, 0, -2)$ 及 $(2, 1, 1)$ ，所以选 (C)。

2. (B)

因为过两点 $M(3, -2, 1)$ 和 $N(-1, 0, 2)$ 的直线的方向向量 \vec{s} 必平行于 $\overrightarrow{MN} = \{-4, 2, 1\}$ ，而 B 表示的直线方程的 $\vec{s} // \overrightarrow{MN}$ ，且过点 $M(3, -2, 1)$ 。

3. (C)

因为 (C) 表示的平面上的任一点 M 的横坐标 $x = 2$ 。

4. (A)

因为直线 $L: \begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4, \end{cases}$ 过点 $M_0(1, 1, 1)$ ，且 L 的方向向量 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ，其中 $\vec{n}_1 = \{1, -1, 1\}$ 是平面 $x - y + z = 1$ 的法向量， $\vec{n}_2 = \{2, 1, 1\}$ 是平面 $2x + y + z = 4$ 的法向量。

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = \{-2, 1, 3\}$$

于是直线 L 的一般式方程就可写成直线参数方程 (A)。

5. (A)

$$\text{因为 } L_1 \text{ 的方向向量 } \vec{s}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{-1, -6, 3\}.$$

$$L_2 \text{ 的方向向量 } \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \{-1, -6, 3\}$$

所以 $L_1 // L_2$ ，但 L_1 和 L_2 分别在两个平行平面 $y + 2z = 9$ 及 $3y + 6z = 1$ 上，故选 (A)。

6. (B)

因为方程 (B) 表示的是单叶双曲面。

7. (D)

因为将空间曲线方程中，消去 z 得 $x^2 + y^2 = 1$ ，即空间曲线在母线平行 z 轴的柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 上，在 xOy 坐标平面上投影，即得投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

1.5 多元函数微分法及其应用

1.5.1 偏导数与全微分

1. 内容摘要

1) 多元函数基本概念

(1) 二元函数的定义: 若对平面域 D 中的每一点 (x, y) , 变量 z 都有惟一确定的实数值与之对应, 则称 z 是 x, y 的二元函数, 记作

$$z = f(x, y) \text{ 或 } z = z(x, y),$$

称 x, y 为自变量, z 为因变量, D 为定义域.

(2) $z = f(x, y)$ 的几何意义: $z = f(x, y)$ 的图形在空间表示一张曲面.

2) 偏导数

设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限值为 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, f_x(x_0, y_0), \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \text{ 或 } z_x(x_0, y_0).$$

同理可定义 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处, 对 y 的偏导数, 并记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, f_y(x_0, y_0), \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \text{ 或 } z_y(x_0, y_0).$$

若 $f(x, y)$ 在域 D 内每一点都有偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$, 这两个偏导数仍为二元函数, 常称为偏导函数, 简称偏导数.

3) 一阶偏导数的求法

多元函数对 x 求偏导数时, 把其余的自变量皆看做常量, 因此, 就变成一元函数求导问题, 一元函数的所有求导公式和求导法则都适用于求多元函数偏导数.

4) 高阶偏导数

$z = f(x, y)$ 的二阶及二阶以上的偏导数统称高阶偏导数, 若 $z = f(x, y)$ 的一阶偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 存在, 函数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 的偏导数称为 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数, 记为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y).$$

称 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 为 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数, 若 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 连续, 则有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (\text{混合偏导数相等}).$$

5) 全微分

(1) 定义: 若 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 仅与 x, y 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分, 记为

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

(2) 计算: 若 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微, 则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在, 且

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial z}{\partial y},$$

于是

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

6) 复合函数微分法

(1) 设 $z = f(u, v)$ 具有连续偏导数, $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 偏导数存在, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 对 x, y 的偏导数公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) $z = f(u, v), u = \varphi(x), v = \psi(x)$, 则复合函数 $z = f[\varphi(x), \psi(x)]$ 对 x 的全导数公式:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

(3) 设 $z = f(x, v), v = \varphi(x, y)$, 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

7) 隐函数微分法

若方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定二元隐函数 $z = z(x, y)$, 函数 $F(x, y, z)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $F_z \neq 0$, 则偏导数公式为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

8) 方向导数

设 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某一邻域内有定义, 则它在点 P 处沿方向 l (设 x 转到方向 l 的转角为 α) 的方向导数定义为

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}.$$

其中, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\Delta x = \rho \cos \alpha$, $\Delta y = \rho \sin \alpha$, 当 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处可微时, 有

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha.$$

2. 例题

1) 求下列函数的偏导数

例 1 $z = x \cos y - 2ye^x + 2^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y - 2ye^x + 2^x \ln 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin y - 2e^x$.

例 2 $z = x^y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

例 3 $z = e^{x^2+y^2}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$.

例 4 $z = \arctan(e^{x^2+y^2} + e^{xy})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xe^{x^2+y^2} + ye^{xy}}{1 + (e^{x^2+y^2} + e^{xy})^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2ye^{x^2+y^2} + xe^{xy}}{1 + (e^{x^2+y^2} + e^{xy})^2}$.

例 5 设 $z = e^{3x-2y}$, $x = \cos t$, $y = t^2$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

解 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 3e^{3x-2y} (-\sin t) - 2e^{3x-2y} 2t = -3\sin t e^{3\cos t - 2t^2} - 4te^{3\cos t - 2t^2}$.

例 6 设 $z = e^u \sin v$, $u = xy$, $v = x + y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v = e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)]$.
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v = e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)]$.

注: 对于具体的复合函数, 可将中间变量函数代入, 化为基本自变量的函数, 再求偏导.

如例 6 中, 有 $z = e^{xy} \sin(x+y)$.

2) 求下列抽象复合函数的偏导数

例 7 设 $z = f(x^2 + y^2, \frac{x}{y})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{x}{y}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

例 8 设 $z = f(x, x \cos y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $v = x \cos y$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \cos y \frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -x \sin y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

例 9 设 $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 求 $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta;$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta.$$

3) 求隐函数的偏导数

例 10 设方程 $2xz - 2xyz + e^{xyz} = 0$, 确定隐函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $F(x, y, z) = 2xz - 2xyz + e^{xyz}$, 则

$$F_x = 2z - 2yz + yze^{xyz},$$

$$F_y = -2xz + xze^{xyz},$$

$$F_z = 2x - 2xy + xye^{xyz}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2z - 2yz + yze^{xyz}}{2x - 2xy + xye^{xyz}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-2xz + xze^{xyz}}{2x - 2xy + xye^{xyz}}.$$

例 11 设方程 $z = x \ln \frac{z}{y}$, 确定隐函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = z - x \ln \frac{z}{y}$.

$$F_x = -\ln \frac{z}{y}, \quad F_y = -x \frac{y}{z} \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) = \frac{x}{y},$$

$$F_z = 1 - x \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} = 1 - \frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\ln \frac{z}{y}}{1 - \frac{x}{z}} = \frac{z \ln \frac{z}{y}}{z - x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{\frac{x}{y}}{1 - \frac{x}{z}} = -\frac{xz}{y(z - x)}.$$

4) 求函数的全微分

例 12 求 $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的全微分 dz .

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (y^2 dx - xy dy).$$

例 13 求 $z = f(u)$, $u = xy + \frac{y}{x}$, 求 dz .

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du} \left(y - \frac{y}{x^2}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du} \left(x + \frac{1}{x}\right).$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(y - \frac{y}{x^2}\right) \frac{dz}{du} dx + \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{du} dy.$$

5) 求函数的方向导数

例 14 设函数 $u = x^2y$, 射线 \vec{l} 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta$, 求函数在点 $(1, 1)$ 处的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 2xy \Big|_{(1,1)} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = x^2 \Big|_{(1,1)} = 1,$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1,1)} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1)} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1)} \cos\beta = 2\cos\alpha + \cos\beta.$$

例 15 求函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 沿向量 $\vec{l} = x\vec{i} + y\vec{j}$ 的方向导数.

解 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}.$

由它可得

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r},$$

于是

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{x}{r} \cos\alpha + \frac{y}{r} \cos\beta = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

模拟试题及参考答案

1. 设 $z = e^u \cos v$, $u = xy$, $v = x - y$, 则 z 在 $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 等于 ().

- (A) 1 (B) -1 (C) $\frac{\pi}{2} + 1$ (D) $\frac{\pi}{2} - 1$

2. 设 $z = xy^2 + y \ln y - y$, 在 $x = 1$, $y = 1$ 处的全微分 dz 等于 ().

- (A) $dx + dy$ (B) $dx - dy$ (C) $dx + 2dy$ (D) $dx - 2dy$

3. 设 $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^2 + 1$, 则 $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=0}$ 等于 ().

- (A) e^2 (B) $-e^2$ (C) e^{-2} (D) $-e^{-2}$

4. 函数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处, 沿方向 $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j}$ 的方向导数是 ().

- (A) $-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) -2 (D) 2

5. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 是函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数的 ().

- (A) 必要而非充分条件 (B) 充分而非必要条件
(C) 既非充分也非必要条件 (D) 充分必要条件

解答

1. (A)

因为 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}, y=0} = [xe^{xy} \cos(x+y) + e^{xy} \sin(x-y)] \Big|_{x=\frac{\pi}{2}, y=0} = 1.$

2. (C)

因为 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1, y=1} = (y^2) \Big|_{x=1, y=1} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=1, y=1} = (2xy + \ln y + 1 - 1) \Big|_{x=1, y=1} = 2.$

所以 $dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = dx + 2dy.$

3. (C)

因为 $z = e^{x-2y} = e^{\sin t - 2t^3 - 2}.$

$$\frac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3 - 2} \cdot (\cos t - 6t^2),$$

所以 $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=0} = e^{-2}.$

4. (A)

因为 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta,$

其中 $\vec{l} = \{1, 1\}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}},$

于是 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\sqrt{2}}{2} 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} (-2y) = \sqrt{2} (x - y),$

$$\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(1,2)} = -\sqrt{2}.$$

5. (B)

1.5.2 偏导数的应用

1. 内容摘要

1) 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

令 $t = t_0$, 可得到 Γ 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 则曲线在该点的切线与法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

2) 曲面的切平面与法线

设曲面 Σ 的方程为 $F(x, y, z) = 0$, 则曲面在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面和法线方程分别为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

3) 多元函数的极值

(1) 极值定义: 若对点 (x_0, y_0) 的邻域内任何点 (x, y) , 恒有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) > f(x_0, y_0)),$$

则称 $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极大(或极小)值.

(2) 极值存在的必要条件: 若 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微且取得极值, 则必有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0.$$

(3) 极值存在的充分条件: 设 $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$,

且 $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$.

当 $B^2 - AC < 0$ 时, (x_0, y_0) 是极值点. 且当 $A < 0$ (或 $C < 0$) 时, $f(x_0, y_0)$ 为极大值; 当 $A > 0$ (或 $C > 0$) 时, $f(x_0, y_0)$ 为极小值.

当 $B^2 - AC > 0$ 时, (x_0, y_0) 不是极值点.

当 $B^2 - AC = 0$ 时, 不能判定 (x_0, y_0) 是否为极值点.

2. 例题

例 1 求曲线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin \frac{t}{2}$, 在点 $M_0\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处的切线方程与法平面方程.

解 点 $M_0\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 所对应的参数 $t = \frac{\pi}{2}$.

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 - \cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

于是切线方程为
$$\frac{x - \frac{\pi}{2} + 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

法平面方程为
$$\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) + (y - 1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0,$$

整理得
$$x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0.$$

例 2 在曲线 $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ 上求一点, 使此点的切线平行于平面 $x + 2y + z - 4 = 0$.

解 曲线的切线的方向向量 $\vec{\tau} = \{x'_t, y'_t, z'_t\} = \{1, 2t, 3t^2\}$, 而平面 $x + 2y + z - 4 = 0$ 的法向量 $\vec{n} = \{1, 2, 1\}$.

由题给出的条件得 $\vec{\tau} \perp \vec{n}$, 即

$$\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 1 + 4t + 3t^2 = 0,$$

解方程得 $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$, 对应点为 $(-1, 1, -1)$ 或 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$.

例 3 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线方程.

解 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, 曲面的法向量

$$\vec{n} = \{F_x, F_y, F_z\}_{(1,1,1)} = \{2, 4, 6\}.$$

所以在 $(1, 1, 1)$ 点的切平面方程为

$$2(x - 1) + 4(y - 1) + 6(z - 1) = 0,$$

即
$$x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

法线方程为
$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}.$$

例 4 曲面 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(\sqrt{2}, -1, 1)$ 处的法线方程是 ().

(A) $\frac{x - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 1}{-1}$

(B) $\frac{x - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 1}{1}$

(C) $\frac{x - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 1}{-1}$

(D) $\frac{x - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 1}{1}$

解 选 (C)

因为曲面 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(\sqrt{2}, -1, 1)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = \{F_x, F_y, F_z\}_{(\sqrt{2}, -1, 1)}, \text{ 其中 } F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z,$$

$$F_x = 2x, F_y = -2y, F_z = -1.$$

即 $\vec{n} = \{2\sqrt{2}, 2, -1\}$

曲面 $z = x^2 - y^2$ 在点 $(\sqrt{2}, -1, 1)$ 处的法线方程为

$$\frac{x - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 1}{-1}.$$

例 5 求函数 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3y = 0, \\ z_y = 3y^2 - 3x = 0, \end{cases}$ 得驻点 $(0, 0), (1, 1)$.

$$z_{xx} = 6x, z_{xy} = -3, z_{yy} = 6y.$$

在点 $(0, 0)$ 处: $B^2 - AC = 9 - 0 = 9 > 0$, $(0, 0)$ 不极值点.

在点 $(1, 1)$ 处: $B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0$, 又 $A = 6 > 0$, 所以 $z|_{(1,1)} = -1$ 为极小值.

1.6 重积分

1.6.1 二重积分

1. 内容摘要

1) 二重积分的定义

函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上的二重积分是指下述和式的极限:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 为任意分割域 D 为 n 个子域的第 i 个子域, 且表示其面积, 而 (ξ_i, η_i) 是 $\Delta\sigma_i$ 上任取的点, λ 是 n 个子域的直径中的最大值.

2) 二重积分的几何意义

当 $f(x, y) \geq 0$ 时, 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的数值等于以曲面 $z = f(x, y)$ 为曲顶, 以积分域 D 为底的曲顶柱体的体积, 即

$$v = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

3) 二重积分的性质

设 $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ 在 D 上连续, 则有

$$(1) \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

$$(2) \iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

$$(3) \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma \quad (D = D_1 + D_2).$$

(4) 若在 D 上有 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

(5) 设 M, m 是 $f(x, y)$ 在域 D 上的最大值和最小值, σ 是 D 的面积, 则有

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma.$$

(6) 若 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma,$$

其中 σ 为域 D 的面积.

4) 二重积分计算

(1) 直角坐标系下二重积分的计算, 化二重积分为两个定积分 (累次积分).

①若积分域 D 表示为

$$D: \begin{cases} y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \\ a \leq x \leq b. \end{cases}$$

二重积分化为先对 y 积分, 后对 x 积分的两次定积分:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

②若积分域 D 表示为

$$D: \begin{cases} x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$$

二重积分化为先对 x 积分, 后对 y 积分的两次定积分:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

(2) 极坐标系下二重积分的计算, 化为极坐标系下二重积分的要点:

把被积函数中 x, y 换成:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \text{ 面积元素 } d\sigma = r dr d\theta.$$

①极点 O 不在积分域 D 内, D 表示:

$$D: \begin{cases} r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \\ \alpha \leq \theta \leq \beta. \end{cases}$$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

②极点 O 在 D 内, D 表示:

$$D: \begin{cases} 0 \leq r \leq r(\theta), \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

(3) 计算二重积分的主要步骤:

①画出积分域的图形;

②选坐标系: 根据积分域 D 的形状及被积函数 $f(x, y)$ 的特点, 确定坐标系;

③选择积分次序. 在直角坐标系下, 选择是先对 x 积分, 还是先对 y 积分. 在极坐标系下, 总是先对 r 积分, 后对 θ 积分;

④确定累积积分限, 计算两次定积分.

(4) 更换积分次序. 更换积分次序可以把复杂的累次积分化为比较简单的累次积分,

$$\text{即} \quad \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

更换积分次序的步骤:

①根据积分限确定二重积分的积分域;

②根据积分域的图形, 确定另一积分次序的累次积分.

2. 例题

1) 直角坐标系二重积分计算

例 1 计算 $\iint_D x e^{xy} dx dy$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

$$\text{解} \quad \text{原式} = \int_0^1 dx \int_0^1 e^{xy} d(xy) = \int_0^1 e^{xy} \Big|_0^1 dx = \int_0^1 (e^x - 1) dx = (e^x - x) \Big|_0^1 = e - 2.$$

例 2 计算 $\iint_D (6x + y) d\sigma$, 其中 $D: y = x, x = 5y, y = 1$ 围成.

$$\text{解} \quad \text{原式} = \int_0^1 dy \int_y^{5y} (6x + y) dx = \int_0^1 76y^2 dy = \frac{76}{3}.$$

例 3 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 $D: x = y^2, y = x - 2$ 围成.

解 求交点 $\begin{cases} x = y^2, \\ y = x - 2, \end{cases}$ 得 $(1, -1), (4, 2)$.

$$\text{原式} = \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx = \int_{-1}^2 y \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{y^2}^{y+2} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (y^3 + 4y^2 + 4y - y^5) dy = \frac{45}{4}.$$

2) 极坐标系二重积分计算

例 4 计算 $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$, 其中 $D: y = \sqrt{1-x^2}, y = x(x > 0), y = 0$ 围成.

$$\text{解} \quad \text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 e^{r^2} r dr = \frac{\pi}{8} (e - 1).$$

例 5 计算 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} d\sigma$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2}{3 \times 2} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta - 1) d\theta = -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

3) 更换二次积分次序

例 6 交换二次积分 $I = \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx$ 积分次序.

解 $D: y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2,$

则 $I = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$

例 7 改变二次积分 $I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$ 积分次序.

解 $D: y \leq x \leq 2-y, \quad 0 \leq y \leq 1,$

则 $I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$

4) 求体积

例 8 由曲面 $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 2, z = 0, x = 0, y = 0$ 第一卦限部分围成的体积

解 $V = \iint_D (2 - x - y) dx dy \quad (D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.)$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2 - x - y) dy = \int_0^1 \left[(2-x)y - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(1-x^2) \right] dx = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

5) 利用二重积分性质, 讨论二重积分

例 9 设 $I_1 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma, \quad I_2 = \iint_D \sin^2(x+y) d\sigma, \quad I_3 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma,$

其中, $D: \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ \frac{1}{2} \leq x+y \leq 1, \end{cases}$ 比较它们的大小.

解 当 $(x, y) \in D$ 时, 则三个被积函数满足

$$\ln(x+y) \leq \sin^2(x+y) \leq (x+y)^2,$$

故有

$$I_1 \leq I_2 \leq I_3.$$

例 10 估计二重积分 $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ 的值, 其中, $D: x^2 + y^2 = 4.$

解 当 $(x, y) \in D$ 时, $9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 25,$

故

$$9 \times 4\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 25 \times 4\pi,$$

即

$$36\pi \leq I \leq 100\pi.$$

模拟试题及参考答案

1. 设域 D 由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 所围成, 则下列等式中不成立的是 ().

(A) $\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 dx \int_1^x xy dy$ (B) $\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 x dx \int_1^x y dy$

(C) $\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 x dx \int_1^2 y dy$ (D) $\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 y dy \int_y^2 x dx$

2. 设 G 是以 $O(0, 0), M(1, -1)$ 及 $N(1, 1)$ 为顶点的闭三角形域, $f(x, y)$ 在 G 上连续, 下列式中错误的是 ().

(A) $\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 f(x, y) dx$

$$(B) \iint_G f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

$$(C) \iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dy$$

$$(D) \iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^0 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$$

3. 设 G 为圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$, 则下列式子中正确的是 ().

$$(A) \iint_G \sin(x^2 + y^2) dx dy = \iint_G \sin 4 dx dy$$

$$(B) \iint_G \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \sin r^2 dr$$

$$(C) \iint_G \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \sin r^2 dr$$

$$(D) \iint_G \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sin r^2 dr$$

4. 若 G 是四分之一圆域: $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$. 用极坐标计算二重积分 $\iint_G \sin(x^2 + y^2) dx dy$, 其值为 ().

$$(A) \frac{\pi}{4} (1 - \cos 1)$$

$$(B) \frac{\pi}{2} (1 - \cos 1)$$

$$(C) \frac{\pi}{2} (\cos 1 - 1)$$

$$(D) \frac{\pi}{4} (\cos 1 - 1)$$

5. 设二重积分 $I = \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy$, 下列式子中正确的是 ().

$$(A) I = \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy$$

$$(B) I = \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy$$

$$(C) I = \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$$

$$(D) I = \int_1^2 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

解答

1. (C) 2. (B) 3. (C) 4. (A)

$$\begin{aligned} \text{因为 } \iint_G \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \iint_G \sin r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2} \sin r^2 d(r^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\cos r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} (-\cos 1 + 1) \\ &= \frac{\pi}{4} (\cos 1 - 1). \end{aligned}$$

5. (C)

因为二重积分 I 的积分域 $D = D_1 + D_2$, 其中

$$D_1: \begin{cases} \sqrt{x} \leq y \leq x, \\ 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} \sqrt{x} \leq y \leq 2, \\ 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

而 D 又可表示为: $D: \begin{cases} y \leq x \leq y^2, \\ 1 \leq y \leq 2, \end{cases}$

于是 $I = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} f(x, y) dx$.

1.6.2 三重积分

1. 内容摘要

1) 三重积分的定义

设函数 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭域 Ω 上连续, 则三重积分是指下述和式极限, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

2) 三重积分计算

(1) 在直角坐标系中的算法:

若域 Ω 由不等式 $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$ 表示, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

(2) 在柱坐标系下的算法:

根据公式 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$. 将三重积分变换为柱坐标进行计算, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz.$$

(3) 在球坐标系下的算法

根据公式 $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$, 将三重积分变换为球坐标进行计算, 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr.$$

2. 例题

例 1 计算 $I = \iiint_{\Omega} y dv$, Ω 是由 $z=0$, $y+z=1$ 及 $y=x^2$ 所围成的区域.

解 域 Ω 可表示为 $\begin{cases} 0 \leq z \leq 1-y, \\ x^2 \leq y \leq 1, \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} y dv = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy \int_0^{1-y} dz \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y(1-y) dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{6} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{8}{35}. \end{aligned}$$

例 2 在柱坐标系下计算, 以圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 为底, 以 $z = x^2 + y^2$ 为曲顶的曲顶柱体的体积.

解 $V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_0^{r^2} dz$

$$= 2\pi \cdot \int_0^2 r^3 dr = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

例3 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

解 利用球坐标, 域 Ω 可表示为

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq R, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{5} \pi R^5 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

例4 计算由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的立体体积的三次积分为 ().

- (A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 z dz \int_{r^2}^r dz$ (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 dz$
 (C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr$ (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr$

解 选 (A).

选柱坐标系计算立体的体积, 应为

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^r dz.$$

1.7 曲线积分

1.7.1 第一类曲线积分 (对弧长的曲线积分)

1. 内容摘要

1) 第一类曲线积分的定义

设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线, 函数 $f(x, y)$ 在 L 上连续, $f(x, y)$ 沿曲线 L 的第一类曲线积分为

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

其中 Δs_i 表示曲线段 L 任意分成 n 个子弧段中的第 i 个子弧段 (也表示第 i 个子弧段的长度), 点 (ξ_i, η_i) 是 Δs_i 上任取的点, $\lambda = \max \{ \Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n \}$.

2) 第一类曲线积分的性质

$$(1) \int_L k f(x, y) ds = k \int_L f(x, y) ds.$$

$$(2) \int_L [f(x, y) \pm g(x, y)] ds = \int_L f(x, y) ds \pm \int_L g(x, y) ds.$$

(3) 若 $L = L_1 + L_2$, 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds.$$

(4) $\int_L f(x, y) ds = \int_{-L} f(x, y) ds$, 其中 $-L$ 表示与 L 反向的有向曲线弧.

3) 计算方法——化为定积分

(1) 若 $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq \beta,$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^\beta f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (a < \beta).$$

(2) 若 $L: y = y(x) \quad a \leq x \leq b$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (a < b).$$

2. 例题

例1 $\int_L (x + y) ds$, 其中 L 是半径为 a , 圆心在原点的上半圆周.

解 $L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = a \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = a dt.$$

$$\int_L (x + y) ds = \int_0^\pi (a \cos t + a \sin t) a dt = a^2 (\sin t - \cos t) \Big|_0^\pi = 2a^2.$$

例2 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $O(0, 0)$ 与 $B(1, 1)$ 之间的一段弧.

解 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx$,

$$\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{12} [(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}] \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

例3 $\oint_L (x + y) ds$, L 是以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ 为顶点的三角形周界.

解 \overline{OA} 、 \overline{AB} 、 \overline{BO} 的方程分别为 $y=0$, $x+y=1$, $x=0$.

$$\begin{aligned} \oint_L (x + y) ds &= \int_{OA} (x + y) ds + \int_{AB} (x + y) ds + \int_{BO} (x + y) ds \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 [x + (1 - x)] \sqrt{2} dx + \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

例4 计算 $I = \oint_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解 $L: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds = \int_0^{2\pi} e^a \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = a e^a \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a e^a$$

例5 设 L 是以 $O(0, 0)$, $P(1, 0)$, $Q(1, 1)$ 为顶点的三角形边界,

求 $\int_L (x + y) ds$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int_L (x+y)ds &= \int_{OP} (x+y)ds + \int_{PQ} (x+y)ds + \int_{QO} (x+y)ds \\ &= \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1+y)dy + \int_0^1 2x\sqrt{1+y^2}dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

1.7.2 第二类曲线积分

1. 内容摘要

1) 第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)的定义

设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线, 函数 $P(x, y)$ 在 L 上连续, $P(x, y)$ 在有向曲线 L 上对坐标 x 的第二类曲线积分为

$$\int_L P(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i,$$

其中 Δx_i 是 Δs_i (Δs_i 是将 L 任意分割成 n 个有向子弧段的第 i 个小弧段, 也表示子弧段的长度) 在 x 轴上的投影. 点 (ξ_i, η_i) 是在 Δs_i 上任意取的点, $\lambda = \max \{ \Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_m \}$.

类似地可以定义: $\int_L Q(x, y)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$.

2) 第二类曲线积分的性质

(1) 当 $L = L_1 + L_2$ 时, 有

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

(2) $\int_L Pdx + Qdy = - \int_{-L} Pdx + Qdy$, 其中 $-L$ 表示与 L 反向的有向曲线弧.

3) 计算方法——化为定积分

(1) 若 $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq \beta.$

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^\beta \{ P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t) \} dt$$

(2) 若 $L: y = f(x), a \leq x \leq b.$

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \{ P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]f'(x) \} dx.$$

4) 格林公式

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在有界闭域 D 内及其边界曲线 L 上具有一阶连续的偏导数, 则

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

其中 L 取正向.

5) 平面曲线积分与路径无关的条件

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通域 D 上具有一阶连续偏导数, 则曲线积分 $\int_L Pdx +$

Qdy 与路径无关的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 D 内恒成立.

2. 例题

例 1 $\int_L xy dx$, L 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧

解
$$\int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 y (y^2)' dy = \int_{-1}^1 2y^4 dy = \frac{4}{5}$$

例 2 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, L 为有向折线 OAB , 点 $O(0, 0)$, 点 $A(1, 0)$, 点 $B(1, 1)$.

解
$$\int_L 2xy dx + x^2 dy = \int_{OA} 2xy dx + x^2 dy + \int_{AB} 2xy dx + x^2 dy.$$

在 OA 上, $y = 0$,
$$\int_{OA} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 2x \cdot 0 dx = 0.$$

在 AB 上, $x = 1$,
$$\int_{AB} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 1 \cdot dy = 1.$$

原式 $= 0 + 1 = 1$.

例 3 $\int_L y^2 dx - x^2 dy$, 其中 L 是 $y = x^2$ 上从 $x = -1$ 到 $x = 1$ 的一段弧.

解
$$\int_L y^2 dx - x^2 dy = \int_{-1}^1 [(x^2)^2 - x^2 \cdot 2x] dx = \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^3) dx = \frac{2}{5}$$

例 4 设 L 是顶点为 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ 的正方形边界, 取正向, 求

$$\int_L y dx - (e^{y^2} + x) dy.$$

解 应用格林公式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (-1 - 1) dx dy = -2 \iint_D dx dy = -2 \cdot \sigma = -2, \sigma \text{ 为域 } D \text{ 的面积.} \end{aligned}$$

其中 $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = -(e^{y^2} + x)$.

例 5 设 L 是上半圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$ 的周界, 求曲线积分 $\oint_L (e^x \sin 2y - y) dx + (2e^x \cos 2y - 1) dy$, L 取正向.

解 应用格林公式计算闭路的曲线积分

$$P(x, y) = e^x \sin 2y - y, \quad Q(x, y) = 2e^x \cos 2y - 1,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2e^x \cos 2y - 2e^x \cos 2y + 1 = 1,$$

于是

$$\begin{aligned} &\oint_L (e^x \sin 2y - y) dx + (2e^x \cos 2y - 1) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = \frac{1}{2}(\pi \cdot 1^2) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

例6 验证曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(0,\pi)} e^x (\cos y dx - \sin y dy)$ 与路径无关, 并计算其值.

解 $P(x, y) = e^x \cos y$, $Q(x, y) = -e^x \sin y$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以曲线积分与路径无关. 取直线段 \overline{OB} 为积分路径, 其中 $B(0, \pi)$, 则在 \overline{OB} 上, $x=0$, $dx=0$. 于是

$$\text{原式} = \int_0^\pi (-\sin y) dy = \cos y \Big|_0^\pi = -2$$

1.8 无穷级数

1.8.1 数项级数

1. 内容摘要

1) 无穷级数基本概念

(1) 设已给数列 $\{u_n\} = u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$.

称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ 为无穷级数, u_n 称为通项或一般项, 因每一项都是常数, 所以也叫数项级数或常数项级数.

(2) 级数的收敛与发散:

设 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 存在, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; S 称级数的和. 即

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散:

(3) 级数收敛的必要条件: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4) 收敛级数的性质:

①° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛, 且有 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

②° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$,

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

2) 正项级数敛散性的判别法

(1) 比较判别法. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 且 $u_n \leq v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 且 $u_n \geq v_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

比较判别法的要点是: 大的收敛 \rightarrow 小的收敛;
小的发散 \rightarrow 大的发散.

(2) 比值判别法: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 若极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q,$$

则当 $q < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; $q > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; 当 $q = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛、发散不确定

(3) 几个主要级数的敛散性:

① 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, 发散;

② 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, 公比为 q , 当 $|q| < 1$ 时收敛, $|q| \geq 1$ 时发散;

③ p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$), 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

3) 交错级数

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$ ($u_n > 0$) 为交错级数.

(2) 莱布尼茨判别法: 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足

$$\textcircled{1} \quad u_n \geq u_{n+1}, \quad \textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则级数收敛, 且和 $S \leq u_1$.

4) 绝对收敛与条件收敛

(1) 定义: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛; 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是绝对收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛.

(2) 绝对收敛判别法:

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛.

② 若用比值判别法得到 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

5) 判断一个正项级数敛散性的步骤

判断一个正项级数的敛散性通常可按下列的顺序考虑的: 首先应用级数收敛的必要条件进行判断, 若不能确定级数的敛散性, 再采用比值判别法. 若还不能确定, 可采用比较判别法, 或直接讨论 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 是否存在, 即整理成如下的顺序.

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(2) 采用比值判别法.

(3) 采用比较判别法.

(4) 讨论 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 是否存在.

2. 例题

1) 判断下列级数的敛散性

例 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

解 因为 $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} < \frac{1}{2}$, 所 $u_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n < \left(\frac{1}{2} \right)^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ 收敛, 由比较

判别法得原级数收敛.

例 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 $u_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$, 因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

例 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$,

由比值判别法得原级数收敛.

例 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n-1}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{2(n+1)-1} \cdot \frac{2n-1}{3^n} = 3 > 1$,

由比值判别法得原级数发散.

例 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, 故原级数发散.

例 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^n}$.

解 因为 $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \neq 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^n}$ 发散.

例 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{\ln^n 3}{3^n} \right)$.

解 因 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛, 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n 3}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln 3}{3} \right)^n$ 收敛, 由收敛级数性质可

得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{\ln^n 3}{3^n} \right)$ 收敛.

2) 讨论下列级数的敛散性

例 8 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

解 该级数为交错级数 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

显然 $u_n > u_{n+1}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 根据莱布尼茨法则得原级数收敛.

例 9 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$.

解 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} = 0$, 且 $\frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$,

根据莱布尼茨判别法, 则得交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ 是收敛的.

例 10 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!} \neq 0$, 所以级数发散.

3) 讨论下列级数的敛散性

例 11 判断任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n^2}$ 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛.

解 因为 $\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n^2} \right|$ 收敛, 且原级数是绝对收敛.

例 12 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$ 的敛散性, 若收敛是绝对收敛还是条件收敛.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, 且满足 $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}$, 根据莱布尼茨判别法, 知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$ 是收敛的.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 故原级数是条件收敛.

例 13 在下列的论断中, 错误的是 ().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

解 显然 (B) 是错误的 ().

例 14 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是 ().

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$
(C) $u_n \leq \frac{1}{n^2}$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在 ($S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$)

解 选 (D) 根据级数收敛的定义, 即得 (D) .

模拟试题及参考答案

1. 下列命题正确的是 () .

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散
 (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛
 (D) 若级数的部分和数列有界, 则级数收敛

2. 下列的级数中, 发散的是 () .

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{3}$

3. 下列级数中, 是条件收敛的级数是 () .

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100}{n(n+1)}$

4. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ () .

- (A) 发散 (B) 收敛于 a
 (C) 收敛于 0 (D) 收敛于 $a - a_0$

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$, 则下列命题正确的是 () .

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在
 (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 可能不存在 (D) $\{S_n\}$ 为单调数列

解答

1. (C)

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 于是从某一项开始, 以后的各项必满足 $0 \leq u_n^2 \leq u_n$, 再由比较判别法可得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

2. (D)

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{3} \neq 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{3}$ 发散.

3. (A)

因为 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 所以

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛.

4. (D)

因为 $S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_0) = a - a_0$.

5. (B)

因为由级数收敛定义可知, 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 必存在.

1.8.2 幂级数

1. 内容摘要

1) 幂级数的基本概念

(1) 定义: 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 为幂级数, 当 $x_0 = 0$ 时, 变成 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(2) 幂级数的收敛半径 R :

对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若存在常数 $R > 0$, 级数在 $(-R, R)$ 内收敛, 在 $(-R, R)$ 外发散, 则称 R 为收敛半径 (R 可以为 $+\infty$, 也可以为 0).

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 收敛半径也为 R , 且在区间 $|x - x_0| < R$ 内收敛.

2) 幂级数收敛半径, 收敛区间的求法

(1) 收敛半径 R , 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则

当 $\rho \neq 0$ 时, $R = \frac{1}{\rho}$;

当 $\rho = 0$ 时, $R = +\infty$;

当 $\rho = +\infty$ 时, $R = 0$.

(2) 收敛区间:

当 R 为有限数且 $R \neq 0$ 时, 讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 的敛散性, 从而确定出收敛区间是 $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R)$, $[-R, R]$ 这四种情况的一种.

当 $R = +\infty$ 时, 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$;

当 $R = 0$ 时, 收敛区间仅为一点 $x = 0$.

3) 幂级数的性质:

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \text{ 在 } (-R, R) \text{ 内收敛, 且有 } \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间内是绝对收敛的, 其和函数是连续的, 在该收敛区间

内可逐项求导和逐项积分, 即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

4) 函数的幂级数展开式

(1) 称级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots,$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数.

称级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

为 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

5) 几个常用函数的幂级数展开式

$$(1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$(2) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$(3) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$(4) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1),$$

$$(5) \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (-1 < x \leq 1).$$

2. 例题

1) 求下列幂级数的收敛半径

例 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}.$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 3^n}{(n+1) 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} = \rho.$

$$R = \frac{1}{\rho} = 3.$$

例 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot n^2}.$

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n n^2}{3^{n+1} (n+1)^2} = \frac{1}{3}.$

$\rho = \frac{1}{3}, R = 3$, 级数在以点 2 为中心, $R = 3$ 为半径的开区间内收敛.

2) 求下列幂级数的收敛区间

例3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} = \rho$, 收敛半径 $R=2$.

当 $x=-2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ 发散;

当 $x=2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

原级数的收敛区间为 $(-2, 2)$.

例4 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{5} \right)^n$ 的收敛区间.

解 原级数 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} x^n$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n5^n}{(n+1)5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{5} = \rho, R=5.$$

当 $x=-5$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ 收敛; 当 $x=5$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

原级数的收敛区间为 $[-5, 5)$.

例5 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛半径及收敛区间.

解 对缺项级数, 应用比值判别法, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2(n+1)+1} (2n+1)}{[2(n+1)+1] |x|^{2n+1}} = |x|^2,$$

故当 $|x|^2 < 1$ 时, 即 $|x| < 1$ 时, 幂级数收敛, 所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, 是收敛的,

当 $x=-1$ 时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, 是收敛的.

于是所求幂级数的收敛区间为 $[-1, 1]$.

例6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛半径及收敛区间

解 因为 $u_n = \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) |x|^{2n} \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot |x|^{2n-2} \cdot (2n-1)} = \frac{1}{2} |x|^2,$$

故当 $\frac{1}{2} |x|^2 < 1$ 时, 即 $|x| < \sqrt{2}$ 时, 幂级数绝对收敛, 所以收敛半径 $R=\sqrt{2}$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$ 发散, 于是幂级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3) 将下列函数展成 x 的幂级数

例7 将 $f(x) = \cos 2x$ 展成 x 的幂级数.

解 利用 $\cos x$ 的展开式, 则得

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{2n!} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

例 8 将 $f(x) = a^x$ 展成 x 的幂级数.

解 利用 e^x 的展开式, 则得

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty).$$

例 9 将 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 展成 x 的幂级数.

解 利用 $\frac{1}{1-x}$ 的展开式, 则得

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \quad (-3 < x < 3)$$

例 10 将 $f(x) = \frac{1}{3-x}$ 展成 $(x-1)$ 的幂级数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (x-1)^n \quad (-1 < x < 3) \end{aligned}$$

例 11 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$ 的和函数是().

- (A) $\frac{1}{1+x} \quad (-1 < x < 1)$ (B) $\frac{x}{1+x} \quad (-1 < x < 1)$
 (C) $\frac{x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$ (D) $\frac{x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$

解 选 (B).

$$\begin{aligned} \text{因为 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n &= x - x^2 + x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} x^n + \cdots \\ &= x(1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots) \\ &= \frac{x}{1+x} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

模拟试题及参考答案

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}$ 的收敛半径 R 等于().

- (A) 2 (B) 3 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{n+1}$ 的收敛区间是:

- (A) $(-2, 2)$ (B) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 (C) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 的收敛区间是 ().

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-2, 0)$
(C) $(1, 3)$ (D) $[1, 3]$

4. 幂级数 $x - x^3 + x^5 - \dots + (-1)^n x^{2n+1} + \dots$ $(-1 < x < 1)$ 的和函数是 ().

- (A) $\arctan x$ (B) $\frac{x}{1+x^2}$
(C) $\sin x$ (D) $x \cos x$

5. 幂级数 $x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+1} + \dots$ $(-1 \leq x \leq 1)$ 的和函数是 ().

- (A) $x \sin x$ (B) $\frac{x^2}{1+x^2}$
(C) $x \ln(1-x)$ (D) $x \ln(1+x)$

解答

1. (B)

$$\text{因为 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \sqrt{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 3.$$

2. (C)

$$\text{因为 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$, 收敛.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, 发散.

所以级数的收敛区间为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. (D)

$$\text{因为 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

于是 $-1 < x-2 < 1$ 即 $1 < x < 3$ 级数收敛.

当 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 收敛, 当 $x=3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

所以级数的收敛区间为 $[1, 3)$.

4. (B)

因为幂级数是公比为 $-x^2$ 的等比级数, 所以级数的和函数应 $S(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

5. (D)

$$\text{因为 } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\text{于是 } x \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

所以幂级数的和函数是 $x \ln(1+x)$.

1.8.3 傅里叶级数

1. 内容摘要

1) 收敛定理: 若 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足狄氏条件:

- (1) 连续, 或至多有有限多个第一类间断点;
- (2) 逐段单调.

则 $f(x)$ 的傅叶里级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 且有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点,} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 为间断点,} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm \pi. \end{cases}$$

傅里叶系数公式

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, \dots.$$

2) 奇、偶函数的傅立叶级数

(1) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的满足收敛定理的奇函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数为正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的满足收敛定理的偶函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数为余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

3) 以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数

若 $f(x)$ 是以 $2l$ ($l > 0$) 为周期的满足收敛定理条件的函数, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), \quad (1)$$

其中, 系数 a_n, b_n 由下面的公式给出:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

傅立叶级数 (1), 设其和函数为 $S(x)$, 则在 $[-l, l]$ 上有

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-l, l) \text{ 为连续点,} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \in (-l, l) \text{ 为间断点,} \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}, & x = \pm l. \end{cases}$$

4) 对于半个周期长度的区间 (如 $[0, \pi]$ 或 $[0, l]$) 上的函数 $f(x)$, 可以经过奇延拓或偶延拓, 展为正弦级数或余弦级数.

2. 例题

例 1 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 展成傅里叶级数时, 求该级数在点 $x=0$ 处的值.

解 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 根据收敛定理, 级数在点 $x=0$ 处收敛于

$$\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

例 2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

若将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数, 问该级数在 $x=-3\pi$ 处收敛于何值.

解 所给函数满足收敛定理, 当 $x=-3\pi$ 为函数的间断点, 因此 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=-3\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(-3\pi-0) + f(-3\pi+0)}{2} = \frac{0 + (-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 其中 $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$, 则

$S(-\frac{\pi}{2})$ 的值是().

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{3}{4}\pi$ (C) $-\frac{3}{4}\pi$ (D) 0

解 选 (C)

因为 将 $f(x)$ 做奇式延拓, $f(x)$ 在 $x=-\frac{\pi}{2}$ 处是第一类间断点, 于是

$$S(-\frac{\pi}{2}) = \frac{f(-\frac{\pi}{2}-0) + f(-\frac{\pi}{2}+0)}{2} = \frac{-\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{3}{4}\pi.$$

例 4 将

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

展开为傅立叶级数.

解 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx = -\frac{\pi}{2},$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx = \frac{1}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n], n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad n = 1, 2, \dots.$$

故 $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} [1 - (-1)^n] \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right\}, \quad x \in (-\pi, \pi)$

当 $x = \pm\pi$ 时, 傅立叶级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0) + f(-\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+0}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

例 5 将函数 $f(x) = x^2$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上展开成傅立叶级数.

解 $f(x) = x^2$, 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为偶函数, 其 $l = \frac{\pi}{2}$. $f(x)$ 的傅立叶级数为余弦级数, 有

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{\pi^2}{6},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2nx dx = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

于是 $f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 2nx, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

1.9 常微分方程

1.9.1 一阶微分方程的解法

1. 内容摘要

1) 微分方程的基本概念

(1) 微分方程: 凡含有自变量、未知函数与未知函数的导数 (或微分) 的方程, 称为微分方程.

(2) 微分方程的阶: 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 叫微分方程的阶.

(3) 微分方程的解: 若函数 $y = \varphi(x)$ 代入微分方程后, 能使方程的两端恒等, 则称 $y = \varphi(x)$ 为微分方程的解.

(4) 微分方程的通解: 如果微分方程的解所含独立任意常数的个数与方程的阶数相等, 这个解称为方程的通解.

(5) 定解条件: 确定通解中任意常数的条件, 称为定解条件.

(6) 特解: 满足定解条件的解, 称为微分方程的特解.

2) 可分离变量方程

(1) 若一阶微分方程可表示为

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y),$$

或 $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0,$

则方程称为可分离变量方程.

(2) 解法: 先分离变量, 再积分求解, 即将上式化为

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx, \text{ 或 } \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx.$$

此时, 变量已经分离了, 两端积分即可.

3) 一阶线性微分方程

(1) 称 $y' + p(x)y = Q(x)$ 为一阶线性非齐次微分方程.

称 $y' + p(x)y = 0$ 为一阶线性齐次微分方程.

(2) 解法: 代入通解公式求解.

$y' + p(x)y = 0$ 的通解为

$$y = ce^{-\int p(x)dx}.$$

$y' + p(x)y = Q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

4) 可降阶的高阶微分方程

(1) $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程.

解法: 直接通过积分 n 次, 即可得到通解.

(2) $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程.

解法: 方程右端不显含未知函数 y , 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为 $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$, 这是变量 x, p 的一阶微分方程, 设其通解为 $p = \varphi(x, c_1)$, 于是原方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2.$$

(3) $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程.

解法: 方程右端不显含自变量 x , 令 $y' = p$, 则

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

原方程化为 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$

这是关于 y, p 的一阶微分方程, 设其通解为 $p = \varphi(y, c_1)$, 于是原方程的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = x + c_2.$$

2. 例题

1) 可分离变量方程

例 1 解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x + xy^2}{y + x^2y}.$

解 $\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{x}{1+x^2}dx, \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln c,$

$$1 + y^2 = c(1 + x^2).$$

例2 解微分方程 $xy' - y \ln y = 0$.

解 $\frac{1}{y \ln y} dy = \frac{dx}{x}, \ln(\ln y) = \ln x + \ln c, \quad \ln y = cx,$

故 $y = e^{cx}.$

例3 解微分方程 $2x \sin y dx + (x^2 + 3) \cos y dy = 0.$

解 $\frac{2x}{x^2 + 3} dx + \frac{\cos y}{\sin y} dy = 0, \ln(x^2 + 3) + \ln \sin y = \ln c,$

故 $(x^2 + 3) \sin y = c$

例4 解初值问题

$$\begin{cases} (y - x^2 y) dy + x dx = 0, \\ y|_{x=\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

解 $y dy = \frac{x}{x^2 - 1} dx, \quad \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{c}{2},$

$y^2 = \ln |x^2 - 1| + c$, 代入初值得 $c = 0$.

故 $y^2 = \ln |x^2 - 1|.$

2) 一阶线性微分方程

例5 解微分方程 $y' + 2xy = 0$.

解 $y = ce^{-\int 2x dx} = ce^{-x^2}.$

例6 解微分方程 $y' - y \tan x = 0$.

解 $y = ce^{\int \tan x dx} = ce^{-\ln \cos x} = \csc x.$

例7 解微分方程 $y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$

解 $y = e^{\int \frac{2}{x+1} dx} \left[\int (x+1)^3 e^{-\int \frac{2}{x+1} dx} dx + c \right]$
 $= (x+1)^2 \left[\int (x+1)^3 \frac{1}{(x+1)^2} dx + c \right] = (x+1)^2 \left[\frac{(x+1)^2}{2} + c \right].$

例8 解微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^2.$

解 $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int x^2 e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c \right) = e^{\ln x} \left(\int x^2 e^{\ln x} dx + c \right)$
 $= \frac{1}{x} \left(\int x^2 \cdot x dx + c \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{x^4}{4} + c \right).$

例9 方程 $y' = p(x)y$ 的通解是 ().

(A) $y = e^{-\int p(x) dx} + c$ (B) $y = e^{\int p(x) dx} + c$

(C) $y = ce^{-\int p(x) dx}$ (D) $y = ce^{\int p(x) dx}$

选 (D)

因为方程可写成 $y' - p(x)y = 0$, 于是

$$y = ce^{-\int -p(x) dx} = ce^{\int p(x) dx}.$$

3) 可降阶微分方程

例 10 求 $y'' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解 对方程两端积分得

$$y' = \int (e^{2x} - \cos x) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + c_1,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + c_1 \right) dx = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + c_1 x + c_2.$$

例 11 求 $y'' = 1 + y'^2$ 的通解.

解 方程右端不显含 y . 令 $y' = p$, $y'' = p'$ 代入方程得

$$p' = 1 + p^2,$$

于是

$$\frac{dp}{1+p^2} = dx.$$

两端积分得 $\arctan p = x + c_1$, 即 $p = \tan(x + c_1)$,

故

$$y = \int \tan(x + c_1) dx = -\ln |\cos(x + c_1)| + c_2.$$

例 12 求 $yy'' - y' = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 1$ 的特解.

解 方程不显含 x , 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$yp \frac{dp}{dy} - p = 0.$$

分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, 两端积分得

$$\ln |p| = \ln |y| + c_1.$$

由初始条件 $x=1$ 时, $y=1$, $y'=1$, 得 $c_1=0$.

即

$$p = y,$$

故

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

分离变量得

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

于是

$$\ln |y| = x + c_2.$$

再由 $y|_{x=1} = 1$, 得 $c_2 = -1$. 方程的特解为

$$\ln |y| = x - 1,$$

$$y = e^{x-1}.$$

模拟试题及参考答案

1. 方程 $xy' - y \ln y = 0$, 满足 $y|_{x=1} = e$ 的解是 ()

(A) $y = e^{2-x}$

(B) $y = e^x$

(C) $y = e^{\sin \frac{x}{2}}$

(D) $y = e^{\tan \frac{x}{4}}$

2. 垂直于 x 轴的动直线与过原点的曲线 $y = y(x)$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) 以及 x 轴围成以 $[0, x]$ 为底边的曲边梯形, 其面积为 $y^3(x)$. 函数 $y(x)$ 所满足的微分方程是 ().

(A) $3yy' = 1$

(B) $3y^{-1}y' = 1$

(C) $y' = 3y + 1$

(D) $y' = 3y^{-1} + 1$

3. 满足方程 $3yy' = 1$, $y|_{x=0} = 0$ 的解是 ().

(A) $y^2 - x$

(B) $y^2 + x = 0$

(C) $3y^2 - 2x = 0$

(D) $2y - 3x^2 = 0$

4. 将质量为 m 的物体在空气中竖直上抛, 初速度为 v_0 . 若空气阻力与物体的速度 $v(t)$ 成正比, 比例系数为 k , g 为重力加速度, $v(t)$ 所满足的微分方程是 ().

(A) $m \frac{dv}{dt} = kv$

(B) $m \frac{dv}{dt} = -kv$

(C) $m \frac{dv}{dt} = -kv - mg$

(D) $m \frac{dv}{dt} = -kv + mg$

5. 在上题中, 当初速度 $v|_{t=0} = v_0$ 时, $v(t)$ 等于 ().

(A) $v_0 e^{\frac{k}{m}t}$

(B) $v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$

(C) $\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{gm}{k}$

(D) $\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}$

解答

1. (B)

因为方程 $xy' - y \ln y = 0$, 变量分离得 $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x}$, 两端积分得

$$\int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln(\ln y) = \ln x + \ln c,$$

$$\ln y = cx, \quad y = e^{cx}.$$

代入初始条件 $y|_{x=1} = e$, 得

$$e = e^c, \quad c = 1,$$

于是, 方程的特解为 $y = e^x$.

2. (A)

因为 $y^3 = \int_0^x y dx$, 两端对 x 求导得

$$3y^2 \cdot y' = y,$$

于是 $y(x)$ 满足的方程为 $3yy' = 1$.

3. (C)

因为 由方程 $3yy' = 1$, 可得 $y' = \frac{1}{3y}$, 变量分离后, 再积分得

$$3y dy = dx,$$

$$\int 3y dy = \int dx, \quad \frac{3}{2}y^2 = x + c,$$

将 $y|_{x=0} = 0$, 代入得 $c = 0$,

于是 $\frac{3}{2}y^2 = x$, 即 $3y^2 - 2x = 0$.

4. (C)

由牛顿第二定律得 $m \frac{dv}{dt} = -kv - mg$.

5. (C)

因为 由方程可得 $\frac{dv}{kv+mg} = -\frac{dt}{m}$,

并有
$$\frac{\frac{1}{k}d(kv+mg)}{kv+mg} = -\frac{dt}{m},$$

两端积分
$$\ln(kv+mg) = -\frac{k}{m}t + c_1,$$

$$kv+mg = c_2 e^{-\frac{k}{m}t},$$

解出 v 得
$$v = ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}.$$

代入 $v|_{t=0} = v_0$, 得 $v_0 = c - \frac{mg}{k}$, $c = v_0 + \frac{mg}{k}$,

于是满足初始条件的解为

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}.$$

1.9.2 二阶常系数线性微分方程的解法

1. 内容摘要

1) 二阶线性方程解的结构

称
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

为二阶线性非齐次方程. 若 $f(x) = 0$, 称

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

为二阶线性齐次方程.

(1) 若 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程 (2) 的解, 则 $y = y_1(x) + y_2(x)$ 也是 (2) 的解.

(2) 若 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程 (2) 的解, 且 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关, 则 $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ 是 (2) 的通解.

(3) 设 y^* 是方程 (1) 的特解, Y 是方程 (2) 的通解, 则 $y = y^* + Y$ 是非齐次方程 (1) 的通解.

2) 二阶线性常系数齐次方程的解法

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \text{ 为常数.} \quad (2)$$

称 $r^2 + pr + q = 0$ 为微分方程 (2) 的特征方程;

称 $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 为微分方程 (2) 的特征根.

根据微分方程 (2) 的两个特征根, 可写出方程 (2) 的通解.

(1) 当特征方程有相异实根 $r_1 \neq r_2$ 时, 方程 (2) 的通解:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

(2) 当特征方程有二重根 $r_1 = r_2 = r$ 时, 方程 (2) 的通解:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{rx}.$$

(3) 当特征方程有共轭复根 $\alpha \pm \beta i$ ($\beta \neq 0$) 时, 方程 (2) 的通解:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

3) 二阶线性常系数非齐次方程的解法

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (1)$$

(1) 设 $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$, $p(x)$ 为多项式. 则设非齐次方程的特解

$y^* = x^k Q(x)e^{\alpha x}$, 其中 $Q(x)$ 是与 $p(x)$ 同次多项式,

$$k = \begin{cases} 0, & \alpha \text{ 不是特征根,} \\ 1, & \alpha \text{ 是单根,} \\ 2, & \alpha \text{ 是重根.} \end{cases}$$

(2) 设 $f(x) = A\sin\beta x + B\cos\beta x$.

设非齐方程的特解

$$y^* = x^k (a\sin\beta x + b\cos\beta x),$$

其中

$$k = \begin{cases} 0, & \pm i\beta \text{ 不是特征根,} \\ 1, & \pm i\beta \text{ 是特征根.} \end{cases}$$

求出非齐次方程的特解 y^* , 则方程 (1) 的通解为

$$y = y^* + Y \quad (Y \text{ 是对应齐次方程的通解}).$$

2. 例题

1) 求二阶线性常系数齐次方程的解.

例 1 求解 $y'' - \pi y = 0$.

解 $r^2 - \pi = 0$, $r_{1,2} = \pm\sqrt{\pi}$.

$$y = c_1 e^{\sqrt{\pi}x} + c_2 e^{-\sqrt{\pi}x}.$$

例 2 求解 $y'' + 3y = 0$.

解 $r^2 + 3 = 0$, $r_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$.

$$y = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x.$$

例 3 求解 $y'' - 4y' + 4y = 0$.

解 $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r_{1,2} = 2$.

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}.$$

例 4 求解 $y'' - 3y' - 4y = 0$.

解 $r^2 - 3r - 4 = 0$, $r_1 = -1$, $r_2 = 4$.

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}.$$

例 5 求解 $y'' + 5y' = 0$.

解 $r^2 + 5r = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = -5$.

$$y = c_1 + c_2 e^{-5x}.$$

例 6 方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为 ().

(A) $c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2$ (B) $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

(C) $(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) e^{-x}$ (D) $c_1 e^{-x} \sin 2x + c_2$

解 选 (C)

因为 方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$.

$$\text{特征根为 } r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

所以 方程的通解为 $y = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

2) 写出下列二阶线性常系数非齐次方程的特解形式

例 7 $y'' - y = 5x^2$.

解 $r^2 - 1 = 0$, $r_{1,2} = \pm 1$.

$$y^* = ax^2 + bx + c.$$

例 8 $y'' - 2y = e^{2x}$.

解 $r^2 - 2 = 0$, $r_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

$$r^* = Ae^{2x}.$$

例 9 $y'' + 4y = \sin 2x$.

解 $r^2 + 4 = 0$, $r_{1,2} = \pm 2i$.

$$y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

例 10 $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$.

解 $r^2 + 2r + 1 = 0$, $r_{1,2} = -1$.

$$y^* = (Ax + B)x^2e^{-x}.$$

3) 求下列二阶线性常系数非齐次方程的通解

例 11 $y'' - 2y' + y = 2x$.

解 $r^2 - 2r + 1 = 0$, $r_{1,2} = 1$.

$$Y = (c_1 + c_2x)e^x.$$

设 $y^* = Ax + B$ 代入方程, 得

$$-2A + Ax + B = 2x, \quad A = 2, \quad B = 4.$$

$$y^* = 2x + 4.$$

$$\text{通解 } y = Y + y^* = (c_1 + c_2x)e^x + 2x + 4.$$

模拟试题及参考答案

1. 方程 $y'' + 4y = 0$ 的通解是 ()

(A) $c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

(B) $(c_1 + c_2x)e^{2x}$

(C) $c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

(D) $e^{2x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

2. 方程 $y'' + 4y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$ 的特解是 () .

(A) $\frac{1}{2}\sin 2x$

(B) $\frac{1}{2}\cos 2x$

(C) $-\frac{1}{2}\sin 2x$

(D) $-\frac{1}{2}\cos 2x$

3. 非齐次方程 $y'' + 4y = \frac{1}{2}\sin 2x$ 的特解形式是 () .

(A) $a\sin 2x$

(B) $ax\sin 2x$

(C) $a\sin 2x + b\cos 2x$

(D) $ax\sin 2x + bx\cos 2x$

4. 方程 $y'' + 8y' + 16y = e^x$ 的一个特解是 $\frac{e^x}{25}$, 则它的通解是 () .

(A) $y = (c_1 + c_2x)e^{-4x} + \frac{e^x}{25}$

(B) $y = c_1e^{-4x} + c_2 + \frac{e^x}{25}$

(C) $y = c_1xe^{-4x} + c_2 + \frac{e^x}{25}$

(D) $y = c_1x^2e^{-4x} + c_2 + \frac{e^x}{25}$

5. 设方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 有特解 $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$. 则对应的齐次方程

$y'' + py' + qy = 0$ 的通解是 ().

(A) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

(B) $y = c_1 e^x + c_2 x$

(C) $y = c_1 x + c_2 e^{2x}$

(D) $y = c_1 (e^x - x) + c_2 (e^{2x} - x)$

解答

1. (C)

因为方程的特征方程为 $r^2 + 4 = 0$, 其特征根为 $r_{1,2} = \pm 2i$. 所以方程的通解为

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

2. (A)

因为方程的通解为 $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$, 由 $y|_{x=0}$, 可得 $0 = c_1$. 于是 $y = c_2 \sin 2x$, $y' = 2c_2 \cos 2x$.

再由 $y'|_{x=0} = 1$, 得 $1 = 2c_2$, 即 $c_2 = \frac{1}{2}$.

所以方程的特解为 $y = \frac{1}{2} \sin 2x$.

3. (D)

因为齐次方程 $y'' + 4y = 0$, 特征根为 $r_{1,2} = \pm 2i$.

所以非齐次方程的特解形式为

$$y^* = x (a \cos 2x + b \sin 2x).$$

4. (A)

因为方程 $y'' + 8y' + 16y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 + 8r + 16 = 0, \text{ 特征根为 } r_{1,2} = -4.$$

于是齐次方程的通解为 $Y = (c_1 + c_2 x) e^{-4x}$.

再由非齐次方程通解的结构定理, 可得非齐次方程的通解为

$$y = Y + y^* = (c_1 + c_2 x) e^{-4x} + \frac{e^x}{25}.$$

5. (D)

因为, 由解的结构定理可知, $e^x - x$, $e^{2x} - x$ 是对应齐次方程的解, 又因 $e^x - x$, 与 $e^{2x} - x$ 是线性无关的, 故两解的线性组合为齐次方程的通解.

$$y = c_1 (e^x - x) + c_2 (e^{2x} - x).$$

1.10 向量分析

1. 内容摘要

1) 向量函数

定义: 设 \vec{A} 为变向量, t 为自变量, 如果对于 t 在某个范围内的每一个数值, \vec{A} 都有一个确定的向量和它对应, 则称 \vec{A} 为 t 的向量函数.

向量函数 $\vec{A}(t)$ 按基本单位向量的分解式为

$$\vec{A}(t) = \varphi(t) \vec{i} + \psi(t) \vec{j} + \omega(t) \vec{k} \quad (\text{即三个分向量之和}).$$

其中 $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ 称为 $\vec{A}(t)$ 的坐标函数.

2) 向量方程与空间曲线

设 $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ 为定义域 I 上的函数, 若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in I, \text{ 可表示空间一条曲线 } \Gamma, \text{ 则把}$$

曲线 Γ 上的点 $M(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ 的向径记 $\vec{A}(t) = \vec{OM} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \omega(t)\vec{k}$ 称为曲线 Γ 的向量方程, 而 Γ 称为向量方程的图形, 即 Γ 是由向量方程 $\vec{A}(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \omega(t)\}$ 所表示的终端曲线.

例如: 已知圆柱螺旋线的参数方程为

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = b\theta,$$

则其向量方程为

$$\vec{r}(\theta) = a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{j} + b\theta \vec{k}.$$

3) 向量函数的导数与微分

(1) 向量函数的导数.

定义: 设向量函数 $\vec{A}(t)$ 在点 t 处的增量 $\Delta \vec{A}$ 与对应的 Δt 之比

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t},$$

在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 其极限存在, 则称此极限为向量函数 $\vec{A}(t)$ 在点 t 处的导数 (简称导向量), 记作 $\frac{d\vec{A}}{dt}$ 或 $\vec{A}'(t)$, 即

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

若 $\vec{A}(t)$ 由坐标式给出:

$$\vec{A}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \omega(t)\vec{k},$$

且函数 $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$ 可导, 则有

$$\vec{A}'(t) = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j} + \omega'(t)\vec{k} = \{\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)\}.$$

例如: 圆柱螺旋线的向量方程为

$$\vec{r}(\theta) = a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{j} + b\theta \vec{k},$$

则其导向量为

$$\vec{r}'(\theta) = -a \sin \theta \vec{i} + a \cos \theta \vec{j} + b \vec{k}.$$

(2) 向量函数的导数的几何意义.

向量方程 $\vec{A}(t)$ 确定一条空间曲线 Γ , $\vec{A}(t)$ 对应于 Γ 上的点 M , 导数向量 $\vec{A}'(t)$ 是在点 M 处的切线上, 其方向恒指向 t 增大的一方, 所以导数向量 $\vec{A}'(t)$ 的几何意义表示 t 所对应空间曲线点 M 的一个切向向量.

例如 求曲线 $\vec{A}(t) = \{2 \cos t, \sin t, t\}$, 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时的切线方程.

解 由 $\vec{A}'(t)|_{t=\frac{\pi}{2}} = \{-2 \sin t, \cos t, 1\}|_{t=\frac{\pi}{2}} = \{-2, 0, 1\}$,

知当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, 曲线点 M 的坐标为 $M(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

于是曲线过点 M 的切线方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{1}.$$

(3) 向量函数的微分.

定义: 设向量函数 $\vec{A} = \vec{A}(t)$, 则称

$$d\vec{A} = \vec{A}'(t) dt$$

为向量函数在 t 处的微分.

4) 向量函数的积分

(1) 向量函数的不定积分.

定义: 若 $\vec{B}'(t) = \vec{A}(t)$, 则称 $\vec{B}(t)$ 为 $\vec{A}(t)$ 的一个原函数. $\vec{A}(t)$ 的全体原函数, 叫做 $\vec{A}(t)$ 的不定积分, 记为

$$\int \vec{A}(t) dt = \vec{B}(t) + \vec{C}.$$

若 $\vec{A}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \omega(t)\vec{k}$, 则有

$$\int \vec{A}(t) dt = \left(\int \varphi(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int \psi(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int \omega(t) dt \right) \vec{k}.$$

(2) 向量函数的定积分.

若 $\vec{B}(t)$ 是 $\vec{A}(t)$ 的一个原函数, 则有

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{A}(t) dt = \vec{B}(T_2) - \vec{B}(T_1).$$

若 $\vec{A}(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \omega(t)\}$,

则有
$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{A}(t) dt = \left\{ \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t) dt, \int_{T_1}^{T_2} \psi(t) dt, \int_{T_1}^{T_2} \omega(t) dt \right\}.$$

2. 例题

例 1 向量方程 $\vec{r}(t) = \{2+t, 1+3t, -1+5t\}$, $-\infty < t < +\infty$, 表示的是什么曲线.

解 曲线对应的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -1 + 5t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty,$$

也可写成 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{5}$.

即该曲线是过点 $(2, 1, -1)$, 方向向量 $\vec{s} = \{1, 3, 5\}$ 的直线.

例 2 设向量函数 $\vec{A}(t) = \{t^4+1, te^t, \cos 2t\}$, 求导数向量 $\vec{A}'(t)$.

解 $\vec{A}'(t) = \{(t^4+1)', (te^t)', (\cos 2t)'\} = \{4t^3, (t+1)e^t, -2\sin 2t\}$.

例 3 曲线的向量方程 $\vec{A}(t) = \sin^2 t \vec{i} + \sin 2t \vec{j} + \cos t \vec{k}$, 求曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切向量.

解 $\vec{A}'(t) = 2\sin t \cos t \vec{i} + 2\cos 2t \vec{j} - \sin t \vec{k},$

$$\vec{A}'(t) \big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}.$$

例 4 求向量函数 $\vec{A}(t) = \{t^2, \sin t, e^{2t}\}$ 的不定积分.

解
$$\begin{aligned} \int \vec{A}(t) dt &= \left\{ \int t^2 dt, \int \sin t dt, \int e^{2t} dt \right\} \\ &= \left\{ \frac{t^3}{3} + c_1, -\cos t + c_2, \frac{1}{2} e^{2t} + c_3 \right\} = \left\{ \frac{t^3}{3}, -\cos t, \frac{1}{2} e^{2t} \right\} + \vec{C}. \end{aligned}$$

例5 已知 $\vec{A}(t) = (1+t^2)\vec{i} + (-4t^2)\vec{j} + (1-2t)\vec{k}$, 求 $\int_0^2 \vec{A}(t) dt$.

解 $\int_0^2 \vec{A}(t) dt = \left\{ \int_0^2 (1+t^2) dt, \int_0^2 -4t^2 dt, \int_0^2 (1-2t) dt \right\} = \left\{ \frac{14}{3}, -16, -2 \right\}$.

模拟试题及参考答案

1. 求曲线 $x = t^2 + 1$, $y = 4t - 3$, $z = 2t^2 - 6t$, 在 $t = 2$ 处的单位切向量.

解 $\vec{A}(t) = (t^2 + 1)\vec{i} + (4t - 3)\vec{j} + (2t^2 - 6t)\vec{k}$.

切向量 $\vec{A}'(t) = 2t\vec{i} + 4\vec{j} + (4t - 6)\vec{k} = \{2t, 4, (4t - 6)\}$.

$$\vec{A}'(t)|_{t=2} = \{4, 4, 2\}.$$

单位切向量: $\vec{A}^0(t) = \frac{4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{16+16+4}} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$.

2. 一质点沿一曲线 $\vec{r} = e^{-t}\vec{i} + 2\cos 3t\vec{j} + 2\sin 2t\vec{k}$ 运动, 其中 t 为时间, 求在 $t = 0$ 时质点速度的大小.

解 $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -e^{-t}\vec{i} - 6\sin 3t\vec{j} + 4\cos 2t\vec{k}$,

$$\vec{v}(t)|_{t=0} = -\vec{i} + 4\vec{k} = \{-1, 0, 4\}.$$

$$|\vec{v}(t)|_{t=0} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}.$$

于是, 在 $t = 0$ 时, 质点速度的大小, 即速度的模 $|\vec{v}(t)|_{t=0} = \sqrt{17}$.

3. 写出曲线 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ 的向量方程, 并说明是何种曲线.

解 曲线的向量方程为

$$\vec{r} = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}, \text{ 该曲线为 } xOy \text{ 平面上的椭圆.}$$

4. 求曲线 $x = a \sin^2 t$, $y = a \sin 2t$, $z = a \cos t$, 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切向量.

解 曲线的向量方程为

$$\vec{r}(t) = a \sin^2 t \vec{i} + a \sin 2t \vec{j} + a \cos t \vec{k}.$$

曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切向量为

$$\vec{r}'(t)|_{t=\frac{\pi}{4}} = [(2a \sin t \cdot \cos t) \vec{i} + 2a \cos 2t \vec{j} - a \sin t \vec{k}]|_{t=\frac{\pi}{4}}$$

$$= a\vec{i} - a \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k} = \left\{ a, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} a \right\}.$$

5. 求曲线 $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ 上的点, 使该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.

解 曲线在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$, 则切线的方向向量必然垂直平面的法线向量, 即垂直于 $\vec{n} = \{1, 2, 1\}$.

曲线在该点的切向量 $\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k} = \{1, 2t, 3t^2\}$.

由 $\vec{r}'(t) \perp \vec{n}$, 可得 $1 \times 1 + 2t \times 2 + 3t^2 \times 1 = 0$,

即 $3t^2 + 4t + 1 = 0$, 得 $t = -1, -\frac{1}{3}$.

将 $t = -1, -\frac{1}{3}$, 代入曲线方程, 得两个点 M_1, M_2 . 其中

$$M_1(t, t^2, t^3)|_{t=-1} = (-1, 1, -1); M_2(t, t^2, t^3)|_{t=-\frac{1}{3}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right).$$

6. 证明圆柱螺旋线

$$\vec{r} = a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{j} + b \theta \vec{k}$$

的切线与 z 轴之间成定角.

证: 圆柱螺旋线上的任一点 M 的切向量为

$$\vec{r}' = -a \sin \theta \vec{i} + a \cos \theta \vec{j} + b \vec{k},$$

z 轴的向量可取为 $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$, 于是

$$\vec{r}' \cdot \vec{k} = |\vec{r}'| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos \gamma,$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{r}' \cdot \vec{k}}{|\vec{r}'| \cdot |\vec{k}|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

故得到圆柱螺旋线与 z 轴之间的夹角 γ 为一个定角.

7. 求等速圆周运动 $\vec{r} = R \cos \omega t \vec{i} + R \sin \omega t \vec{j}$ 的速度向量 \vec{v} 和加速度向量 \vec{a} .

解 $\vec{v} = \vec{r}' = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j}$.

$$\vec{a} = \vec{v}' = -R\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \vec{j}.$$

1.11 线性代数

1.11.1 n 阶行列式

1. 内容摘要

1) 定义: 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2) n 阶行列式

$$\text{设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 为 } n \text{ 阶行列式.}$$

余子式: 元素 a_{ij} 的余子式, 是将 a_{ij} 所在的行与列去掉, 剩下的 $n-1$ 阶行列式叫 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} .

代数余子式: M_{ij} 与 $(-1)^{i+j}$ 乘积称为 a_{ij} 的代数余子式, 记为 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

3) n 阶行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

即 n 阶行列式的值等于任一行(列)的元素与其对应的代数余子式乘积之和.

例如
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

4) 行列式的性质

- (1) 若行列式中有一行 (或一列) 元素全为 0, 则行列式等于 0.
- (2) 若行列式中有两行 (或两列) 元素全相同, 则行列式等于 0.
- (3) 若行列式中有两行 (列) 元素成比例, 则行列式等于 0.
- (4) 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D'$.
- (5) 互换行列式的两行 (列), 行列式变号.
- (6) 行列式的某一行 (列) 中所有元素都乘以同一数 k , 等于用数 k 乘此行列式.
- (7) 把行列式的某一行 (列) 各元素乘以同一数, 然后加到另一行 (列) 的对应元素上, 行列式值不变.

例
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 7 = -27$$

5) 克拉默法则

含有 n 个未知数 x_1, x_2, \dots, x_n 的 n 个线性方程的方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

克拉默法则: 若 (1) 的系数行列式不等于零, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组 (1) 有惟一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

式中 D_j ($j=1, 2, \dots, n$) 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组右端自由项代替后得到的 n 阶行列式, 由克拉默法则得到如下定理.

定理 1 若线性方程组 (1) 的系数行列式 $D \neq 0$, 则 (1) 有惟一解.

根据定理 1 可知, 如果线性方程组 (1) 无解或两个以上不同的解, 则它的系数行列式 $D = 0$.

称
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

为齐次线性方程组.

定理 2 若方程组 (2) 的系数行列式 $D \neq 0$, 则 (2) 只有零解 (或若 (2) 有非零解, 则 $D=0$).

2. 例题

$$\text{例 1} \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

$$\text{例 2} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \text{ (上三角形行列式)}.$$

$$\text{例 3} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 2 = 6 \text{ (下三角形行列式)}.$$

$$\begin{aligned} \text{例 4} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -8 \times (-2-5) = 56. \end{aligned}$$

例 5 求满足下列方程的实数 x, y, z , 使

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

解 将行列式按第一列展开得

$$1 - x \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

即 $1 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$, 于是 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$,

从而得, $x = y = z = 0$.

例 6 问 λ 取何值时, 齐次方程组有非零解.

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + (6-\lambda)y = 0, \\ 2x + (4-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

解 若方程组有非零解, 则系数行列式 $D=0$, 即

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(6-\lambda) \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda) = 0, \end{aligned}$$

得 $\lambda = 2$, $\lambda = 5$, 或 $\lambda = 8$.

例 7 问 λ 取何值, 方程组

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (\lambda + 2)x_2 - 4x_3 = 0, \text{ 有非零解.} \\ -2x_1 - 4x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 0, \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 7) = 0,$

故 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = -7$, 方程组有非零解.

例 8 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

正确的答案为 ().

- (A) 有无穷多个解 (B) 有惟一解
(C) 有多于 1 个的有限个解 (D) 无解

解 (B)

因为非齐次线性方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 25 - 7 = 18 \neq 0,$$

所以方程组有惟一解.

1.11.2 矩阵及其运算

1. 内容摘要

1) 矩阵的定义及几种特殊矩阵

(1) 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成的 m 行 n 列的表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n},$$

称为 m 行 n 列的矩阵.

(2) 几种常见的特殊矩阵如下:

① 所有元素都是零的矩阵称为零矩阵, 记为 $\mathbf{0}$. 即

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

② 行数 $m = 1$ 的矩阵, 即 $1 \times n$ 矩阵

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

称为行矩阵.

列数 $n=1$ 的矩阵, 即 $m \times 1$ 矩阵, 称为列矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

③ 行、列数相等 ($m=n$) 的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为 n 阶方阵.

④ 主对角元素都是 1, 其余元素都是 0 的 n 阶方阵称为 n 阶单位矩阵, 记为 E , 有

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

2) 矩阵的运算

(1) 矩阵相等定义:

若 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 且它们对应元素相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$), 即称 A, B 两矩阵相等, 记为 $A=B$.

(2) 矩阵的加法:

若 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$,

则 $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$.

(3) 数与矩阵相乘:

$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$, 即 λ 乘 A 的所有元素.

(4) 矩阵的乘法:

设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$,

$$C = AB = (c_{ij})_{m \times n},$$

其中矩阵 C 的第 i 行, 第 j 列的元素

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}.$$

(5) 矩阵的转置: 把矩阵 A 的行换成同序数的列, 得到一个新矩阵, 称为 A 的转置矩阵, 记为 A' 或 A^T . 转置矩阵, 满足下列运算规律.

$$(A')' = A,$$

$$(A+B)' = A' + B',$$

$$(\lambda A)' = \lambda A',$$

$$(AB)' = B'A'.$$

若方阵 A 满足 $A' = A$, 则称 A 是对称矩阵.

(6) 方阵的行列式: 方阵 A 的行列式, 记为 $|A|$, 方阵行列式满足下列运算规律 (A, B 为方阵, λ 是一个数).

$$\begin{aligned} |A'| &= |A|, \\ |\lambda A| &= \lambda^n |A|, \\ |AB| &= |A| \cdot |B|. \end{aligned}$$

3) 逆矩阵

(1) 定义: 对于 n 阶方阵 A , 若有一个 n 阶方阵 B , 使

$$AB = BA = E,$$

则称 A 是可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 记为

$$B = A^{-1}.$$

(2) 逆矩阵的性质: 可逆矩阵 A 的逆阵是惟一的.

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A, \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, \\ (A')^{-1} &= (A^{-1})', \quad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}. \end{aligned}$$

(3) 方阵 A 可逆的充要条件、逆矩阵的求法: 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$,

且
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

记 A^* 为 A 的伴随方阵, 则

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. 例题

例 1 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$, 求 $A+B, AB$.

解 $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -8 \end{bmatrix},$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ 8 & -16 \end{bmatrix}.$$

例 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, 求 AB .

解 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$

例 3 求 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 的逆阵 A^{-1} .

解 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$

例 4 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 X .

解 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$AX = B,$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

例 5 设 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 设 $A = \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}.$

$$A_1^{-1} = \left(\frac{1}{5} \right), \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

例 6 已知矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 x 值.

解 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$

$$2x = 2, \quad x = 1.$$

例 7 设方阵 A 满足 $A^2 - 2A + 3E = 0$, 证明 A 可逆, 并求出 A^{-1} .

证 由 $A^2 - 2A + 3E = 0$, 得 $A(A - 2E) = -3E$,

$$A \left(-\frac{1}{3} \right) (A - 2E) = E,$$

令

$$-\frac{1}{3} (A - 2E) = B, \text{ 于是 } AB = E,$$

故

$$A^{-1} = B = -\frac{1}{3} (A - 2E).$$

例 8 对任一个 n 阶方阵 A , 证明 $(A + A')$ 是对称矩阵.

证 由 $(A + A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A'$.

根据对称矩阵的定义, 可知 $A + A'$ 是对称矩阵.

例 9 设矩阵 $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, 则其逆矩阵 P^{-1} 是 ().

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$(C) \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$(D) \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

解 (D)

因为 $P^{-1} = \frac{1}{|P|} P^*$, 其中 $|P| = 8 - 5 = 3$.

$$P^* = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 于是 } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

例 10 设 A 是一个 n 阶方阵, 已知 $|A| = 2$, 则 $|-2A|$ 等于 ().

(A) $(-2)^{n+1}$ (B) $(-1)^n 2^{n+1}$

(C) -2^{n+1} (D) -2^2

解 选 (B)

因为 $|-2A| = (-2)^n |A| = (-1)^n 2^n \cdot 2 = (-1)^n 2^{n+1}$.

1.11.3 向量组的线性相关性与矩阵的秩

1. 内容摘要

1) n 维向量及其运算

定义: n 个有顺序的数 a_1, a_2, \dots, a_n 所组成的数组 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 叫 n 维向量.

相等: 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$,

当 $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 称 α 与 β 相等, 记为 $\alpha = \beta$.

零向量: 称 $0 = (0, 0, \dots, 0)$ 为零向量.

运算: $\alpha \pm \beta = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n)$,

$\lambda \alpha = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

2) 线性相关与线性无关

定义: 设 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 若存在一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_m 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0,$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

对于 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 如果只有在 k_1, k_2, \dots, k_m 全为 0 时, 才能使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

3) 最大线性无关组, 向量组的秩

(1) 最大线性无关组. 设向量组 T .

①在 T 中如果有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;

② T 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 T 的一个最大无关组. 数 r 称向量组 T 的秩.

(2) 性质: ①仅含零向量的向量组的秩为 0; ②向量组线性无关 \Leftrightarrow 最大无关组是它本

身; ③ n 维向量组的秩 $r \leq n$, $n+1$ 个 n 维向量组线性相关.

4) 矩阵的秩

(1) 设矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D \neq 0$, 而所有包含 D 的 $r+1$ 阶子式 (若存在的话) 全为 0, 则称 A 的秩为 r , 记为 $R(A) = r$.

(2) 矩阵秩的性质: ① $m \times n$ 矩阵 A , 则 $R(A) \leq \min(m, n)$; ② $R(A) = A$ 的行向量组的秩 = A 的列向量组的秩; ③ 矩阵 A , 经有限次初等变换, 不改变 A 的秩.

5) 向量的内积与范数

(1) 向量的内积定义:

$$\text{设 } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

则称 $[X, Y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

为向量 X 与 Y 的内积

当 X, Y 都是列向量时, 有

$$[X, Y] = X'Y.$$

类似地, 对于 n 维行向量

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n), Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

称 $[X, Y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$

为 X, Y 的内积, 或写成 $[X, Y] = XY'.$

称 $\|X\| = \sqrt{[X, X]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

为向量 X 的长, 或称 X 的范数.

当 $\|X\| = 1$, 称向量 X 为单位向量.

(2) 正交向量组与正交矩阵.

若两向量 X, Y 满足 $[X, Y] = 0$ 时, 称 X 与 Y 是正交的.

两两正交的非零向量构成的向量组, 称为正交向量组.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为正交向量组, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 必线性无关.

正交矩阵: 若 A 为 n 阶实方阵, 且满足

$$AA' = A'A = E \quad (\text{即 } A' = A^{-1}),$$

则称 A 为正交矩阵.

正交矩阵性质: ① 正交矩阵 A 的行列式 $|A| = \pm 1$. ② 正交矩阵 A 的行向量组及列向量组, 都是正交向量组, 且每个向量都是单位向量. ③ 若 A 是正交矩阵, 则 A', A^{-1}, A^* 也是正交矩阵. ④ 两个同阶的正交矩阵 A, B 的乘积 AB , 也是正交矩阵.

2. 例题

例 1 讨论向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 2, 5), \alpha_3 = (1, 3, 6)$ 的线性相关性.

解 设有一组数 x_1, x_2, x_3 使

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = 0,$$

即 $(x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 5x_2 + 6x_3) = (0, 0, 0).$

从而得到
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \text{ 令 } x_3 = -1, \text{ 则有 } x_1 = x_2 = 1. \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

即得一组不全为 0 的数 1, 1, -1, 使

$1\alpha_1 + 1\alpha_2 + (-1)\alpha_3 = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例 2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, 讨论 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性相关性.

解 设有 x_1, x_2, x_3 使

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0,$$

即 $x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + x_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$,

$$(x_1 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + (x_2 + x_3)\alpha_3 = 0,$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故有

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

此方程组系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 故方程组只有零解, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 所以

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关

例 3 仅含一个非零向量的向量组线性无关.

例 4 含有零向量的向量组线性相关.

例 5 向量组的个数大于向量组的维数, 则向量组线性相关.

例 6 讨论下列向量组的线性相关性.

(1) $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 3, 1), \alpha_3 = (4, 8, 2), \alpha_4 = (5, 8, 7)$;

(2) $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4), \alpha_2 = (2, 1, 2, 5), \alpha_3 = (0, 0, 0, 0)$;

(3) $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 4, 6)$;

(4) $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$.

解

(1) 向量个数大于向量的维数, 即 (1) 线性相关.

(2) 中有 0 向量, 所以 (2) 线性相关.

(3) 中满足: $-2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, 故 (3) 线性相关.

(4) 线性无关 (因为 $|A| \neq 0$).

例 7 求 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩.

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$, 而含 D 的三阶子式只有两个, 且都等于 0, 所以 $R(A) = 2$.

例 8 讨论 $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 是否为正交矩阵.

解 已知 $A = A'$, 由正交矩阵定义, 验证

$$AA' = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

所以 A 为正交矩阵.

1.11.4 线性方程组

1. 内容摘要

1) 线性方程组的一般概念

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

(1) 若 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, 称方程组 (1) 为 n 元线性齐次方程组, 否则称为 n 元线性非齐次方程组.

(2) 若方程组有解, 称方程组是相容的. 若无解称方程组不相容.

对于相容方程组, 若 $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \cdots, x_n = k_n$ 是它的解, 则称向量 $X = \xi = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$

是方程组的一个解向量, 简称解.

$$(3) \text{ 记 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则方程组可写成 $AX = \beta$, A 称方程组的系数矩阵, 称

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

为方程组的增广矩阵.

2) 线性方程组有解的充要条件: 系数矩阵 A 与增广矩阵 \overline{A} 秩相等, 即 $R(A) = R(\overline{A})$.

当 $R(A) \neq R(\overline{A})$ 时, 方程组无解;

当 $R(A) = R(\overline{A}) = r$ 时, 方程组有解, 且 $r = n$ 时, 方程组有惟一解; $r < n$ 时, 方程组有无穷多解.

3) 线性方程组解的结构

(1) 齐次线性方程组解的结构: 对于 n 元线性齐次方程组

$$AX=0, \text{ 其中 } A=(a_{ij})_{m \times n}.$$

$$\textcircled{1} \text{ 至少有一个零解 } X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$AX=0 \text{ 有惟一零解} \Leftrightarrow R(A)=n.$$

$$AX=0 \text{ 有非零解} \Leftrightarrow R(A)<n.$$

当 $m=n$ 时, (A 为 n 阶方阵).

$$AX=0 \text{ 只有零解} \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

$$AX=0 \text{ 有非零解} \Leftrightarrow |A| = 0.$$

 $\textcircled{2}$ 解的性质(I) 若 X_1, X_2 是 $AX=0$ 的解, 则 $X_1 + X_2$ 也是 $AX=0$ 的解.(II) 若 X_1 是 $AX=0$ 的解, k 是常数, 则 kX_1 也是 $AX=0$ 的解.当 X_1, X_2, \dots, X_s 是 $AX=0$ 的解, 则

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_sX_s \text{ 也是 } AX=0 \text{ 的解}.$$

 $\textcircled{3}$ 基础解系: 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 $AX=0$ 的解, 且满足(I) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性无关.(II) $AX=0$ 的任一解 ξ 都可用 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性表示, 则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 $AX=0$ 的基础解系.(III) $AX=0$ 的基础解系的个数等于 $n - R(A)$.(IV) 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 $AX=0$ 的基础解系, 则 $AX=0$ 的通解

$$\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_s\xi_s.$$

(2) 非齐次线性方程组解的结构: 若已知 $AX=\beta$ 的特解 η 及 $AX=0$ 的一个基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$, 则 $AX=\beta$ 的通解为

$$X = \eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

2. 例题

$$\text{例 1 讨论 } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \text{ 是否有非零解.} \\ 3x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解 } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}, |A| \neq 0, \text{ 故方程组仅有惟一零解.}$$

$$\text{例 2 讨论 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \text{ 是否有非零解.}$$

$$\text{解 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r = R(A) = 2 < n, \text{ 故方程组有非零解,}$$

其基础解系的个数 $= n - r = 1$.

例 3 问当 λ 取何值时, 齐次方程组

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (\lambda + 2)x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解.

解 当 $|A| = 0$ 时, 方程组有非零解.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 7).$$

当 $|A| = 0$, 得 $\lambda = 2$, $\lambda = -7$.

例 4 当 λ 为何值时,

$$\begin{cases} (\lambda - 1)(\lambda + 2)x_3 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1), \\ (\lambda - 1)x_2 + (1 - \lambda)x_3 = \lambda(1 - \lambda), \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

有惟一解, 无解, 有无穷多个解.

$$\text{解 } \overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) & (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right].$$

(1) 当 $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$ 时, 方程组系数行列式 $|A| \neq 0$, 方程组有惟一解.

(2) 当 $\lambda = -2$ 时, $R(A) = 2$, $R(\overline{A}) = 3$, $R(A) \neq R(\overline{A})$ 方程组无解.

(3) 当 $\lambda = 1$ 时, $R(A) = R(\overline{A}) = 1 < 3$, 有无穷多解

例 5 给出线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$$

下述结论错误的是 ().

(A) $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$ 时, 方程组有惟一解

(B) $\lambda = -2$ 时, 方程组无解

(C) $\lambda = 1$ 时, 方程组有无穷多组解

(D) $\lambda = 2$ 时, 方程组无解

解 方程组系数矩阵

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda^3 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right] \\ & \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (1 - \lambda)(\lambda + 2) & 1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)(1-\lambda^2) \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right]$$

(A) $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$, 有惟一解 (因为 $|A| \neq 0$) .

(B) $\lambda = -2$ 时, 有 $R(A) < R(B)$, 所以无解 .

(C) $\lambda = 1$ 时, $R(A) = R(B) = 1 < n$, 所以有无穷组解 .

(D) $\lambda = 2$ 时, $|A| \neq 0$, 有惟一解, 所以 (D) 是错的 .

例 6 设 8 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量所组成向量组的最大无关向量组含 5 个向量, 则矩阵 A 的秩是 () .

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8

解 解向量组所组成向量组的最大无关向量组的个数就是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系所含解向量的个数. 即

$$5 = n - R(A).$$

$$R(A) = n - 5 = 8 - 5 = 3 \quad (n \text{ 为方程组未知数的个数}).$$

所以应选 (A) .

例 7 设 A 为矩阵, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $AX=0$ 的解, 则矩阵 A 为 () .

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

解 选 (D)

因为, α_1, α_2 线性无关, 方程组 $AX=0$ 线性无关解的个数 $= n - R(A)$,

即 $2 = 3 - R(A), R(A) = 1$, 所以选 (D) .

例 8 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 齐次线性方程组 $AX=0$ 仅有零解的充分必要条件是 () .

(A) A 的行向量组线性无关

(B) A 的行向量组线性相关

(C) A 的列向量组线性相关

(D) A 的列向量组线性无关

解 选 (D)

因为方程组 $AX=0$ 可写成这种形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是矩阵 A 的列向量组.

于是, 方程组 $AX=0$, 又可写成向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0.$$

因为上式, 只有 x_1, x_2, \dots, x_n 全为零时才成立, 根据线性无关定义得, A 的列向量组, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性无关的.

1.11.5 矩阵的特征值与特征向量

1. 内容摘要

1) 矩阵的特征值与特征向量

设 A 为 n 阶方阵, λ 是一个数, 称 $|A - \lambda E| = 0$ 为矩阵 A 的特征方程 (λ 的 n 次方程).

特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 的根, 称为矩阵 A 的特征值 (在复数域上 $|A - \lambda E| = 0$ 有 n 个根).

若 λ_i 是 A 的一个特征值, 齐次方程组

$$(A - \lambda_i E)X = 0$$

的非零解 X , 称为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量.

2) 特征值与特征向量的性质

(1) 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn},$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |A|.$$

(2) 矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量是齐次方程组 $(A - \lambda_i E)X = 0$ 的全部非零解. 若 P_1, P_2, \dots, P_s 是齐次方程组的一个基础解系, 则属于 λ_i 的全部特征向量为

$$X = k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_s P_s.$$

(3) 矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

2. 例题

例 1 求 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0,$

解出 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4.$

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 对应的特征向量应满足

$$(A - 2E)X = 0, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

即

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_1 = x_2$, 所以对应的特征向量可取 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_2 = 4$ 时, 由

$$\begin{bmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

解得 $x_1 = -x_2$, 所以对应的特征向量可取为 $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以 p_1, p_2 两个向量是线性无关的.

例 2 求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值.

解 得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

例 3 设矩阵 $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, 则矩阵 P 的特征值是 ().

(A) 2, 4

(B) 1, -1

(C) -2, 4

(D) 2, -4

解 由 $|P - \lambda E| = 0$, 即 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, 得 $(3-\lambda)^2 - 1 = 0$, 于是矩阵 P 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$, 选 (A).

例 4 矩阵 $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征向量是 ().

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

解 由上题知矩阵 P 的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$.

对于 $\lambda_1 = 2$, 方程组 $(P - 2E)X = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

于是, $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \end{cases} x_1 = x_2$, 取 $x_1 = x_2 = 1$, 特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

对于 $\lambda_2 = 4$, 方程组 $(P - 4E)X = 0$, 即

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \text{ 得 } x_1 = x_2, \text{ 取 } x_1 = 1, x_2 = -1, \text{ 特征向量为 } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ 故}$$

矩阵 P 的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 所以选 (D).

例 5 设方阵 A 的特征值 λ 所对应的特征向量为 ξ , 那么 $A^2 - E$ 以 ξ 作为其特征向量所对应的特征值是 ().

- (A) λ (B) $2\lambda - 1$
(C) $\lambda^2 - 1$ (D) λ^2

解 设 $A^2 - E$ 以 ξ 作为特征向量的特征值为 μ , 于是有

$$(A^2 - E - \mu E) \xi = 0,$$

$$(A^2 - (\mu + 1)E) \xi = 0, \quad \text{即} \quad A^2 \xi = (\mu + 1) \xi.$$

因 λ 是 A 的特征值, 于是 A^2 的特征值为 λ^2 , 即

$$(A^2 - \lambda^2 E) \xi = 0, \quad \text{故} \quad A^2 \xi = \lambda^2 \xi.$$

于是得

$$(\mu + 1) \xi = \lambda^2 \xi, \quad \text{即} \quad \mu + 1 = \lambda^2,$$

所以

$$\mu = \lambda^2 - 1, \quad \text{选 (C).}$$

1.11.6 二次型

1. 内容摘要

1) 定义: 含有 n 个变量的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n,$$

称为二次型.

2. 二次型矩阵表示

令 $a_{ji} = a_{ij}$, 则有

$$f = X'AX, \quad \text{其中} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

A 为对称矩阵, 并称 A 为二次型 f 的矩阵, A 的秩就称为 f 的秩.

3) 正定二次型

(1) 定义: 设有实二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = X'AX$, 若对任何 $X \neq 0$, 都有 $f(X) > 0$, 则称 f 为正定二次型, 并称 A 是正定的, 记为 $A > 0$, 若对任何 $X \neq 0$, 都有 $f(X) < 0$, 则称 f 是负定二次型, 并称 A 是负定的, 记为 $A < 0$.

(2) $f(X) = X'AX$ 正定性的判定条件;

① A 为正定 $\Leftrightarrow A$ 的特征值全为正;

② A 为正定 $\Leftrightarrow A$ 的各阶主子式都为正, 即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

③ A 为负定 $\Leftrightarrow A$ 的特征值全都小于零;

④ A 为负定 \Leftrightarrow 奇数阶主子式为负, 而偶数阶主子式为正.

例 1 $f = x^2 - 3z^2 - 4xy + yz$ 用矩阵表示.

$$f = [x, y, z] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

例2 判别二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

解 f 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$

因为, $a_{11} = -5 < 0$, $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0$, $|A| = -80 < 0$,

即 A 的奇数阶主子式为负, 而偶数阶主子式为正, 所以二次型 f 是负定的.

例3 判定二次型 $f = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy + 2xz + 6yz$ 的正定性.

解 二次型 f 的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

A 的各级主子式为

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

所以 f 是正定二次型 (A 是正定矩阵).

例4 t 取何值时, 二次型

$$f = x^2 + 2xy - 2xz + 2y^2 + 4tyz + 5z^2$$

是正定二次型.

解 二次型 f 的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2t \\ -1 & 2t & 5 \end{bmatrix}.$$

若 f 为正定, 需使各级主子式都大于零, 即

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2t \\ -1 & 2t & 5 \end{vmatrix} = -(4t^2 + 4t - 3) > 0,$$

故当 t 满足

$$-\frac{3}{2} < t < \frac{1}{2} \text{ 时, } f \text{ 是正定二次型.}$$

模拟试题及参考答案

1. 设矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 则 PQ 为 ().

- (A) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 9 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (D) 没有意义

2. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵, 已知 $|A|=2$, $|B|=3$, 则 $|BA^{-1}|$ 等于

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 6 (D) 5

3. 设 $P^{-1}AP=A$, 其中 P 为 2 阶可逆方阵, $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $|A^{10}|$ 的值是 ().

- (A) -2^{10} (B) 2^{10} (C) -2^9 (D) 2^9

4. 设 $A=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, 则 A 的伴随矩阵 A^* 为 ().

- (A) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

5. 设可逆方阵 A 满足 $A^2-2A+3E=0$, 则 A^{-1} 为 ().

- (A) $-\frac{1}{3}(A-2E)$ (B) $3(A-2E)$
- (C) $-\frac{1}{3}(A-2E)$ (D) $-\frac{1}{3}(A+2E)$

6. 设 $A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$), 则矩阵 A

的秩等于 ().

- (A) n (B) 0 (C) 1 (D) 2

7. 4 阶方阵 A 的秩为 2, 则其伴随矩阵 A^* 的秩为: ().

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

解答

1. (B)

因为 $PQ=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

2. (B)

因为 $|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1$, 则有 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$.

又因 $|BA^{-1}| = |B| \cdot |A^{-1}| = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

3. (B)

因为 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 $A = PAP^{-1}$.

于是 $A^{10} = (PAP^{-1}) \cdot (PAP^{-1}) \cdots (PAP^{-1})$
 $= PA^{10}P^{-1}$.

再根据矩阵的行列式性质, 得

$$|A|^{10} = |PA^{10}P^{-1}| = |P| \cdot |\Lambda^{10}| \cdot |P^{-1}| = |\Lambda^{10}| = (-2)^{10} = 2^{10}.$$

4. (D)

因为 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

5. (A)

因为 由 $A^2 - 2A + 3E = 0$, 可得 $A(A - 2E) = -3E$, 两端左乘 A^{-1} ,

得 $A - 2E = -3A^{-1}$, 即 $A^{-1} = -\frac{1}{3}(A - 2E)$.

6. (C)

因为, A 的任何一个二阶子式均为 0. 所以 $R(A) = 1$.

7. (A)

根据矩阵的定义可知, 由于 A 的秩是 2, 所以 A 的所有三阶子式都是零, 而 A^* 的所有元素都是 A 的三阶子式, 故 A^* 的所有元素都是零, 即 A^* 是零矩阵, 所以 A^* 的秩为 0.

1.12 概率与数理统计

1.12.1 随机事件与概率

1. 内容摘要

1) 随机事件及其概率

随机事件通常用字母 A, B, C 等表示.

随机事件概率记为 $P(A) = p$, p 值刻画随机事件 A 发生可能性的大小.

对任何随机事件 A 都有

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

$P(U) = 1$, 称 U 是必然事件, $P(V) = 0$, 称 V 是不可能事件.

2) 古典概型

(1) 等可能完备事件组. 如果一个事件组 A_1, A_2, \dots, A_n , 它满足下列三条性质:

① A_1, A_2, \dots, A_n 发生的机会相同 (等可能性); ② 在任一次试验中 A_1, A_2, \dots, A_n 至少有一个发生 (完全性); ③ 在任一次试验中 A_1, A_2, \dots, A_n 至多有一个发生 (互不相容性).

则称该事件组是等可能完备事件组, 或称等概基本事件组, 称其中任一事件 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为基本事件.

(2) 古典概型

若 A_1, A_2, \dots, A_n 是一个等概基本事件组, 事件 B 是由其中的某 m 个基本事件所构成, 事件 B 的概率为

$$P(B) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

利用式 (1) 来计算事件的概率的模型称为古典概型.

3) 事件的运算及概率的加法公式

(1) 事件的包含与相等: 设有两个事件 A 与 B , 如果 A 发生, 那么 B 必发生, 则称事件 B 包含事件 A , 记作

$$A \subset B, \text{ 或 } B \supset A.$$

如果事件 A 包含 B , 同时事件 B 也包含事件 A , 称 A 与 B 相等, 记作

$$A = B.$$

(2) 事件的和与积: “两事件 A 与 B 中至少有一个发生” 也是一个事件, 称为 A 与 B 的和, 记作 $A \cup B$, 或 $A + B$.

“两事件 A 与 B 同时发生” 也是一个事件, 称为 A 与 B 的积, 记作 AB 或 $A \cap B$.

(3) 对立事件与事件的差: 如果在每次试验中, 事件 A 与事件 B 必有一个发生, 但不能同时发生, 即

$$A \cup B = U, AB = V,$$

则称 B 是 A 的对立事件 (或 A 是 B 的对立事件), 记为 $B = \bar{A}$ (或 $A = \bar{B}$).

“ A 发生而 B 不发生” 也是一个事件, 称为 A 与 B 之差, 记作

$$A - B.$$

(4) 事件的互不相容: 在一次试验中, 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即

$$AB = V (\text{不可能事件}),$$

则称 A 与 B 是互不相容的事件.

(5) 概率的加法公式

① 概率的加法公式 I: 如果事件 A, B 互不相容, 则

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

该公式可以推广到 n 个事件的情形. 设 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容, 则

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

② 概率加法公式 II: 对任意两事件 A, B 有

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

4) 条件概率·乘法公式·独立性

(1) 条件概率: 如果 A, B 是条件组 S 下的两个随机事件, $P(A) \neq 0$, 则称在 A 发生的前提下, B 发生的概率为条件概率, 记作 $P(B|A)$.

(2) 乘法公式: 条件概率 $P(B|A)$ 与事件的原概率的关系为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

概率的乘法公式:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A),$$

或

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B).$$

(3) 事件的独立性: 设有两个事件 A, B 如果满足

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

则称 A, B 是相互独立的 (一个事件的发生, 不影响另一事件发生)。

5) 独立试验序列概型

独立试验序列概型计算公式: 设单次试验中, 事件 A 发生的概率为 p ($0 < p < 1$), 则在 n 次重复试验中

$$P(A \text{ 发生 } k \text{ 次}) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p, k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

6) 全概公式与逆概公式

(1) 全概公式: 若事件组 A_1, A_2, \dots, A_n 满足:

① A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容, 且 $P(A_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$);

② $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$.

则对任一事件 B 皆有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

满足上述①, ②条件的事件组 A_1, A_2, \dots, A_n 叫做完备事件组。

(2) 逆概公式: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为一完备事件组, 则对任一事件 B ($P(B) \neq 0$), 有

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

逆概公式也称贝叶斯公式。

2. 例题

例 1 有 5 件产品, 其中三件是正品, 两件是次品, 现任取两件产品都是正品的概率是多少。

解 设任取两件产品都是正品为 B , 则

$$P(B) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} \quad (C_5^2 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10, C_3^2 = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3).$$

例 2 设有 6 件产品, 其中有 2 件是次品, 现从中任取两件, 问无次品的概率是多少?

解 设 $B =$ “任取两件无次品”, 则

$$P(B) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{\frac{4 \times 3}{1 \times 2}}{\frac{6 \times 5}{1 \times 2}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

例 3 有 10 件产品, 其中有 4 件是次品, 今任取 3 件求其中恰有一件次品的概率

解 设 $B =$ “恰有一件次品”。这是古典概型的题目, 基本事件总数为 C_{10}^3 , 使 B 发生的基本事件数为 $C_4^1 \cdot C_6^2$, 则

$$P(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

例4 某种饮料浓缩液每箱装12听,不法商人在每箱中换进4听假冒货.今质检人员从一箱中随机抽取3听进行检测,查出正好1听是假冒货的概率是().

- (A) $\frac{12}{55}$ (B) $\frac{2}{11}$ (C) $\frac{28}{55}$ (D) $\frac{41}{55}$

解 设 $B =$ “查出正好1听是假冒货”.该题是古典概型的题目,基本事件总数 C_{12}^3 ,使 B 发生的基本事件数为: $C_8^2 \cdot C_4^1$.

于是
$$P(B) = \frac{C_8^2 \cdot C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{112}{220} = \frac{28}{55},$$

所以选 (C)

例5 在10个产品中有6个正品,4个次品,从中任抽取两个,问至少有一个是次品的概率.

解 设 $A =$ “抽到两个次品”, $B =$ “抽到一个次品”(A 与 B 是互不相容), $M =$ “至少抽到一个次品”,则

$$P(M) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} + \frac{C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{6 + 24}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

另一解法: $C =$ “没有抽到次品”,则

$$P(M) = 1 - P(C) = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = 1 - \frac{15}{45} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

例6 十把钥匙有三把能开门锁,今任取两把,求能打开门锁的概率.

解 设 $B =$ “能打开门锁”.基本事件总数 $C_{10}^2 = 45$.

使 B 发生的基本事件数:

两把全能开门锁的钥匙, $C_3^2 = 3$;

一把能开门锁,一把不能开, $C_3^1 \cdot C_7^1 = 21$.

使 B 发生的基本事件数: $3 + 21 = 24$.

于是 $P(B) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$

另一解法: 设 $\bar{B} =$ “不能打开门锁”.

$$P(\bar{B}) = \frac{C_7^2}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15},$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{8}{15}.$$

例7 设事件 A, B 满足

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{4}, P(AB) = \frac{1}{8}.$$

试求事件 A, B 至少有一个发生的概率.

解 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$

例8 设事件 E, F 互斥(互不相容), $P(E) = p, P(F) = q$, 求 $P(\bar{E} \cup F)$.

解 $P(\bar{E} \cup F) = P(\bar{E}) = 1 - p.$

例 9 从 5 个球 (3 新, 2 个旧) 中, 每次取一个, 无放回地取两次, 试求: 第一次取到新球的概率; 在第一次取到新球的条件下, 第二次取到新球的概率.

解 $A =$ “第一次取到新球”, $B =$ “第二次取到新球”.

$$P(A) = \frac{3}{5};$$

$$P(B|A) = \frac{2}{4}.$$

例 10 设一个产品分两道工序各独立生产, 第一道工序的次品率是 10%, 第二道工序的次品率是 3%, 问该产品的次品率是多少.

解 先求正品率.

设 $A =$ “任取一个为正品”, $A_i =$ “第 i 道工序是正品, 其中 A_1, A_2 是独立的.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = (1 - P(\bar{A}_1)) \cdot (1 - P(\bar{A}_2)) \\ &= (1 - 10\%) \cdot (1 - 3\%) = 0.873. \end{aligned}$$

设 $B =$ “任取一个为次品”.

$$P(B) = 1 - P(A) = 0.127, \text{ 注意 } P(B) \neq P(\bar{A}_1 \bar{A}_2).$$

或
$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= 0.1 + 0.03 - 0.1 \times 0.03 = 0.127. \end{aligned}$$

例 11 甲、乙两人向同一目标射击, 甲击中目标的概率为 0.6, 乙击中目标的概率为 0.5, 求目标被击中的概率.

解 $A =$ “甲击中”, $B =$ “乙击中”, $C =$ “目标被击中”, 则

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad (A, B \text{ 独立}) \\ &= 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8. \end{aligned}$$

例 12 甲、乙两人独立对同一目标射击, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中, 则它是甲射中的概率是多少?

解 $A =$ “甲击中”, $B =$ “乙击中”, $C =$ “目标被击中”,

由上题知 $P(C) = 0.8$.

所求的概率是

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75.$$

例 13 两台机床加工同样的零件, 第一台出现次品的概率是 0.04, 第二台出现次品的概率是 0.02, 加工出来的零件放在一起, 第一台占 25%, 从这批零件中任意取出一个, 求它是次品的概率.

解 设事件 A_i 表示 “任意取出的零件是由第 i 台机床加工的”, $i = 1, 2$. 事件 B 表示 “任意取出的零件是次品”.

$$B = BU = B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2,$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(BA_1) + P(BA_2) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \\ &= 0.25 \times 0.04 + 0.75 \times 0.02 = 0.025. \end{aligned}$$

例 14 有一批电子元件, 其中一等品占 95%, 二等品占 4%, 三等品占 1%, 它们能正

常工作 3 000 小时以上的概率分别为 0.9, 0.8, 0.6.

(1) 在这批元件中任取一个, 求它能正常工作 3 000 小时以上的概率.

(2) 从这批元件中任取一个, 经测试它能正常工作 3 000 小时以上, 问这个元件是一等品的概率是多少?

解 设事件 A_i 表示“取到的元件为 i 等品”, $i=1, 2, 3$. 事件 B = “取到的元件能正常工作 3 000 小时以上.”

由题意, $P(A_1) = 0.95$, $P(A_2) = 0.04$, $P(A_3) = 0.01$.

$P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) = 0.8$, $P(B|A_3) = 0.6$.

(1) 由全概公式得

$$P(B) = 0.95 \times 0.9 + 0.04 \times 0.8 + 0.01 \times 0.6 = 0.893.$$

(2) 由逆概公式得

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.95 \times 0.9}{0.893} = 0.957.$$

1.12.2 随机变量的概率分布与数字特征

1. 内容摘要

1) 随机变量

(1) 定义: 若对于条件组 S 下的每一个可能结果 ω 都有惟一的实数值 $X(\omega)$ 与之对应, 则称实值变量 $X(\omega)$ 为一随机变量, 简记为 X .

(2) 随机变量的分类:

如果随机变量 X 的可能取值都能一一列举出来, 则称 X 为离散型随机变量;

如果随机变量 X 的所有可能取值不能一一列举出来, 则称 X 为非离散型随机变量, 其中最常见的非离散型随机变量是连续型随机变量.

2) 离散型随机变量

(1) 概率分布列 设离散型随机变量 X 可能取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, 称式子

$$p_k = P\{X = x_k\} \quad (k=1, 2, \dots)$$

为 X 的概率分布列, 其中 $p_k \geq 0$ ($k=1, 2, \dots$), 且 $\sum_k p_k = 1$.

有时也将 X 的可能取值与相应的概率列成下表:

X	x_1	x_2	\dots	x_k	\dots
P	p_1	p_2	\dots	p_k	\dots

称此表为 X 的概率分布表.

概率分布列和概率分布表统称为概率分布.

(2) 几种常用的概率分布列:

①二项分布: 如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

($0 < p < 1$, $q = 1 - p$), 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记为

$$X \sim B(n, p).$$

②两点分布: 如果随机变量 X 的概率分布为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0),$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布.

④ Γ 分布. 如果随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

其中

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

则称 X 服从 Γ 分布, 简记为 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

4) 分布函数与随机变量函数的分布

(1) 分布函数:

① 分布函数的定义: 设 X 是一随机变量, 称函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

为 X 的分布函数.

② 分布函数的性质:

(i) $0 \leq F(x) \leq 1, -\infty < x < +\infty$;

(ii) $F(x)$ 是 x 的不减函数;

(iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

③ 离散型随机变量的分布函数: 设 X 的概率分布列为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

则 X 的分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k.$$

④ 连续型随机变量的分布函数: 设 X 的密度函数为 $p(x)$, 则 X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx.$$

(2) 随机变量函数的分布:

① 随机变量函数的定义: 设 $f(x)$ 是 x 的函数, 当随机变量 X 取值为 x 时, Y 取值 $y = f(x)$, 此时 Y 也是一个随机变量, 称其为随机变量 X 的函数, 记为 $Y = f(X)$.

② 随机变量函数的分布:

(i) 设 X 是离散型随机变量, 其概率分布表为

X	x_1	x_2	\dots	x_k	\dots
$P\{X = x_i\}$	p_1	p_2	\dots	p_k	\dots

$Y = f(X)$ 也是一个离散型随机变量, 记 $y_i = f(x_i)$, 如果 y_i 值互不相等, 则 Y 的概率分布为

Y	y_1	y_2	\dots	y_k	\dots
$P\{Y = y_i\}$	p_1	p_2	\dots	p_k	\dots

当 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), \dots$ 不是互不相等时, 应把那些相等的值分别合并, 并根据概率的加法公式把相应的 p_i 相加, 即得到 Y 的概率分布.

(ii) 设连续型随机变量 X 的密度为 $p_X(x)$, 又函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 连续且处处大于零 (或小于零), $y=f(x)$ 取值为 (A, B) , 则 $Y=f(X)$ 的密度函数为

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X[g(y)] |g'(y)|, & y \in (A, B), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

5) 期望

(1) 期望定义:

① 设离散型随机变量 X 的概率分布是

X	x_1	x_2	\dots	x_n	\dots
P	p_1	p_2	\dots	p_n	\dots

即 $P\{X=x_k\} = p_k \ (k=1, 2, \dots)$, 则称和数

$$\sum_k x_k p_k$$

为随机变量 X 的期望 (或数学期望), 记作 $E(X)$.

② 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $p(x)$, 若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx$$

收敛, 则称

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

为 X 的期望, 记作 $E(X)$.

(2) 随机变量函数的期望:

① 离散型随机变量函数的期望: 设随机变量 X 的概率分布是

$$P\{X=x_i\} = p_i \quad (i=1, 2, \dots),$$

Y 是 X 的函数, 即 $Y=f(X)$, 则 Y 的期望是

$$E[f(X)] = \sum_i f(x_i) p_i.$$

② 连续型随机变量函数的期望: 设连续型随机变量 X 的密度是 $p(x)$, Y 是 X 的函数, 即 $Y=f(X)$, 则 $Y=f(X)$ 的数学期望是

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx.$$

(3) 期望的简单性质: ① $E(b) = b$ (b 为常数); ② $E(kX) = kE(X)$ (k 为常数); ③ $E(kX+b) = kE(X) + b$.

6) 方差

(1) 方差的定义:

① 设离散型随机变量的概率分布为

标准正态分布的分布函数记为 $\Phi(x)$, 即

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$\Phi(x)$ 有如下性质: $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

当 $X \sim N(0, 1)$ 时, $P\{a < X < b\} = \Phi(b) - \Phi(a)$;

当 $X \sim (\mu, \sigma^2)$ 时, $P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

2. 例题

例1 在 100 件产品中, 有 95 件是正品, 5 件是次品, 现从中任取一件, 取到正品的概率 = 0.95, 取到次品的概率 = 0.05, 定义随机变量 X 为

$$X = \begin{cases} 1, & \text{当取到正品,} \\ 0, & \text{当取到次品.} \end{cases}$$

则 X 服从两点分布.

X 的概率分布表为

X	0	1
p	0.05	0.95

例2 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求常数 c , 求 X 落在 $(0.3, 0.7)$ 内的概率.

解

$$\begin{aligned} (1) \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= \int_{-\infty}^0 p(x) dx + \int_0^1 cx dx + \int_1^{+\infty} p(x) dx \\ &= \int_0^1 cx dx = \frac{c}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{c}{2} = 1, c = 2. \end{aligned}$$

$$(2) P\{0.3 < X < 0.7\} = \int_{0.3}^{0.7} 2x dx = x^2 \Big|_{0.3}^{0.7} = 0.4.$$

例3 设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $P\{X < 0\}$.

$$\text{解} \quad P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 p(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

例4 设 $X \sim N(0.5, 0.3^2)$, 求 $P\{X < 0\}$.

解 作变换 $Y = \frac{X-0.5}{0.3}$, 则 $Y \sim N(0, 1)$, 故

$$\begin{aligned} P\{X < 0\} &= P\left\{Y < \frac{0-0.5}{0.3}\right\} = P\{Y < -1.67\} = \Phi(-1.67) \\ &= 1 - \Phi(1.67) = 0.0475. \end{aligned}$$

例5 设 X 的概率密度为 $p(x)$, 求 X 落在 (a, b) 内的概率.

$$\text{解} \quad P\{a < X < b\} = \int_a^b p(x) dx.$$

例6 设 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求 (1) $P\{X \leq 2\}$, $P\{X > 3\}$; (2) 求 X 的密度函数 $p(x)$.

解 (1) $P\{X \leq 2\} = F(2) = 1 - e^{-2} = 0.8647$,

$$P\{X > 3\} = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3} = 0.0498;$$

$$(2) p(x) = F'(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

例 7 设 X 的分布密度为

$$p(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \text{求 } X \text{ 的分布函数.}$$

解 $F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^x p(t) dt$.

当 $x < 0$ 时, $F(x) = 0$,

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } F(x) &= \int_{-\infty}^x p(x) dx = \int_{-\infty}^0 p(x) dx + \int_0^x p(x) dx \\ &= \int_0^x p(x) dx = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 1 \leq x < 2 \text{ 时, } F(x) &= \int_{-\infty}^x p(x) dx = \int_{-\infty}^0 p(x) dx + \int_0^1 p(x) dx + \int_1^x (2 - x) dx \\ &= \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^x = 2x - \frac{x^2}{2} - 1, \end{aligned}$$

当 $x \geq 2$ 时, $F(x) = 1$.

即 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

例 8 设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $E(X)$.

$$\text{解 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

例 9 设 X 的概率密度 $p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 求 $E(X)$.

$$\text{解 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

例 10 若随机变量 X 在 $[0, \pi]$ 上服从均匀分布, 求期望 $E[\sin X]$.

$$\text{解 } X \text{ 的密度函数 } p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\text{于是 } E[\sin X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x p(x) dx = \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \sin x dx = -\frac{\cos x}{\pi} \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

例 11 设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $D(X)$.

解
$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx = 1.$$

例 12 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(1) 试说明 X 服从正态分布, 并指出 μ, σ^2 的值;

(2) 求 $P(|X| \leq \frac{1}{\sqrt{2}})$, (3) 求 $D(2X+2)$.

解 (1) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}},$

与正态分布的概率密度的形式比较可得

$$X \sim N(0, \frac{1}{2}), \text{ 即 } \mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (2) P(|X| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) &= P(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) = \Phi\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] - \Phi\left[\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - 0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \\ &= 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826. \end{aligned}$$

$$(3) D(2X+2) = 4D(X) = 4 \times \frac{1}{2} = 2.$$

例 13 设随机变量 X 的概率密度为

$$p_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数, 求 $Y = -2X + 1$ 的概率密度.

解 $y = -2x + 1$ 是严格连续单调可导函数, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 反函数

$$0 < x = g(y) = \frac{1-y}{2} < +\infty,$$

$$g'(y) = -\frac{1}{2}.$$

$p_x(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 以外为零, 由于

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_x[g(y)] |g'(y)|, & y \in (A, B), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

所以

$$p_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{\lambda(1-y)}{2}} \cdot \left| \frac{-1}{2} \right|, & y < 1, \\ 0, & y \geq 1, \end{cases}$$

于是

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{-\frac{\lambda(1-y)}{2}}, & y < 1, \\ 0, & y \geq 1. \end{cases}$$

例 14 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 X 的数学期望与方差.

解 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 (2-x)xdx = 1.$

由于 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, 而 $E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot xdx + \int_1^2 x^2(2-x)dx = \frac{7}{6}$,

所以 $D(X) = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}.$

例 15 设 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ kx^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

求 k 值.

解 $p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2kx, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_0^1 2kxdx = kx^2 \Big|_0^1 = k = 1.$

例 16 设离散型随机变量 X 服从参数 $\lambda = 2$ 的泊松分布, 求随机变量 $2X$ 的方差 $D(2X)$.

解 已知 $D(X) = \lambda = 2$,

于是 $D(2X) = 2^2 D(X) = 4\lambda = 8.$

1.12.3 数理统计的基本概念

1. 内容摘要

1) 总体

一般把所研究的对象的全体叫做总体, 总体中每一个个体叫做样本, 从数学上说, 所谓总体, 就是一个随机变量 X .

2) 样本

如果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 而且每个 X_i ($i=1, 2, \dots, n$) 与总体 X 有相同的概率分布, 称随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 Z 的样本, 样本中所包含个体的数量 n 称为样本的容量.

3) 统计量

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的一个样本, $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为一个连续函数, 若 $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 中不含有任何未知参数, 则 $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量.

4) 介绍几种常用统计量的分布

(1) χ^2 分布: 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且都服从 $N(0, 1)$ 分布, 则统计量

$$\xi = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

服从 n 个自由度的 χ^2 分布.

设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且都服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布, 则统计量

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (\text{即样本的平均值, 也是随机的})$$

服从正态分布, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 统计量

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1) \quad (\text{自由度为 } n-1).$$

(2) t 分布: 设 ξ 与 η 相互独立, 且 ξ 服从 $N(0, 1)$ 分布, η 服从 $\chi^2(n)$ 分布, 则统计量

$$\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}}$$

服从 n 个自由度的 t 分布, 即 $\zeta = t(n)$.

设 X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 2$) 相互独立, 且都服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布, 则统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

服从 $n-1$ 个自由度的 t 分布, 即 $T \sim t(n-1)$, 其中

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

为样本方差.

(3) F 分布: 设 ξ 与 η 是相互独立的, 且 ξ 服从 $\chi^2(n_1)$ 分布, η 服从 $\chi^2(n_2)$ 分布, 则

$$\zeta = \frac{\xi/n_1}{\eta/n_2}$$

服从自由度为 n_1, n_2 的 F 分布, 即 $\zeta \sim F(n_1, n_2)$.

设 $n_1 + n_2$ 个随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是相互独立的, 且 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 均服从 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 分布, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 均服从 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 分布, 则

$$\xi = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad (\text{即两个样本方差之比})$$

服从自由度为 n_1-1, n_2-1 的 F 分布, 即 $\xi \sim F(n_1-1, n_2-1)$.

2. 例题

例 1 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布, X_1, X_2, \dots, X_n 是从中抽取的样本, 试求:

$$(1) E(\bar{X}), D(\bar{X}); (2) E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right).$$

解 由于 X 服从指数分布, 即 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

所以

$$(1) E(\bar{X}) = E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

$$(2) E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = E\left(\frac{n-1}{n} S^2\right) = \frac{n-1}{n} E(S^2) = \frac{n-1}{n} D(X) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\lambda^2}.$$

例 2 设 $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个容量为 10 的样本, 其中 $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma^2 > 0$. 记 $\bar{X}_9 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i$, 则 $\bar{X}_9 - X_{10}$ 所服从的分布是 ().

(A) $N(0, \frac{10}{9}\sigma^2)$

(B) $N(0, \frac{8}{9}\sigma^2)$

(C) $N(0, \sigma^2)$

(D) $N(0, \frac{11}{9}\sigma^2)$

解 选 (A)

因为 $E(\bar{X}_9) = \mu$, $D(\bar{X}_9) = \frac{1}{9}\sigma^2$, $E(X_{10}) = \mu$, $D(X_{10}) = \sigma^2$,

于是

$$E[\bar{X}_9 - X_{10}] = E(\bar{X}_9) - E(X_{10}) = 0,$$

$$D(\bar{X}_9 - X_{10}) = D(\bar{X}_9) + D(X_{10}) = \frac{1}{9}\sigma^2 + \sigma^2 = \frac{10}{9}\sigma^2,$$

所以

$$\bar{X}_9 - X_{10} \sim N(0, \frac{10}{9}\sigma^2).$$

例 3 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 样本均值为 \bar{X} , 样本方差为 S^2 , 则统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

服从于 ().

(A) 正态分布

(B) t 分布

(C) χ^2 分布

(D) F 分布

解 选 (B)

例 4 设 X, Y 是两个方差相等的正态总体, $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$, $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ 分别是 X, Y 的样本, 样本的方差为 S_1^2, S_2^2 , 则统计量

$$\xi = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

服从 F 分布, 它的自由度为 ().

(A) $(n_1 - 1, n_2 - 1)$

(B) (n_1, n_2)

(C) $(n_1 + 1, n_2 + 1)$

(D) $(n_1 + 1, n_2 - 1)$

解 选 (A)

1.12.4 参数估计

1. 内容摘要

设总体 X 服从 $f(x, \theta)$ 的分布, 其中 θ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是从总体 X

中抽取的样本, 用样本的函数即统计量去估计未知参数, 这就是参数估计, 参数估计有二种形式: 点估计与区间估计.

1) 点估计

就是通过样本构造适当的统计量, 对未知参数进行估计.

(1) 期望与方差的点估计:

用样本的均值 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ 作为总体期望的估计, 即 $E(\bar{X}) = E(X)$.

用样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 作为总体方差的点估计, 即 $D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X)$.

(2) 极大似然估计:

①似然函数: 设总体 X 的分布密度是 $p(x; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 是未知参数, 给定样本值 x_1, x_2, \cdots, x_m 之后, 令

$$\begin{aligned} L_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \\ = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m), \end{aligned}$$

其中, $L_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ 叫做样本 x_1, x_2, \cdots, x_n 的似然函数.

②定义: 如果 $L_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ 在 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m$ 达到最大值, 则称 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m$ 分别是 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 的极大似然估计.

(3) 求极大似然估计的步骤:

①写出似然函数

$$L_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m);$$

②对似然函数取对数

$$\ln L_n = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m);$$

③对 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 分别求偏导数, 并令其为 0, 即

$$\frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m);$$

④解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_1} = 0, \\ \frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_2} = 0, \\ \cdots \cdots \\ \frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_m} = 0, \end{cases}$$

得 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_m$, 即为所求.

2) 区间估计

点估计作为未知参数的近似值, 误差有多大, 希望能够估计出一个范围, 并知道这个范围包含参数真值的可靠程度, 这就是区间估计的问题.

(1) 置信区间和置信度: 设总体 X 的分布密度为 $p(x, \theta)$, 含有一个未知参数 θ , 对于给定 α ($0 < \alpha < 1$), 若由样本 X_1, X_2, \dots, X_n 确定两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 满足

$$P\{|\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}|\} = 1 - \alpha,$$

则称区间 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ 是 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间, $1 - \alpha$ 为置信度.

(2) 正态总体期望的区间估计: 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本.

① 方差 σ^2 已知为 σ_0^2 , μ 置信度为 95% 的置信区间是

$$\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}, \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \right],$$

μ 的 99% 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - 2.58\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}, \bar{X} + 2.58\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \right].$$

② 方差 σ^2 未知, μ 的置信度 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - \lambda\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \bar{X} + \lambda\sqrt{\frac{S^2}{n}} \right],$$

其中 λ 满足 $P(|T| \leq \lambda) = 1 - \alpha$, T 服从自由度为 $n - 1$ 的 t 分布.

(3) 正态总体方差的区间估计: 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本, σ^2 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间是

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\lambda_2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\lambda_1} \right],$$

其中 λ_1, λ_2 满足: $P(\chi^2 < \lambda_1) = \frac{\alpha}{2}$, $P(\chi^2 > \lambda_2) = \frac{\alpha}{2}$. χ^2 服从自由度 $n - 1$ 的 χ^2 分布.

2. 例题

例 1 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 即

$$P\{X = x_i\} = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \quad (x_i = 0, 1, 2, \dots),$$

求参数 λ 的极大似然估计.

解 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本, X_i 的分布列为

$$P\{X = x_i\} = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \quad (x_i = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\text{似然函数} \quad L_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!},$$

对似然函数取对数

$$\ln L_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!),$$

对 λ 求导数, 得似然方程

$$\frac{\partial \ln L_n}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0.$$

解出

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

即是 λ 的最大似然估计.

例 2 随机地从一批零件中抽取 16 个, 测得其长度 (单位 cm) 如下:

2.14, 2.10, 2.13, 2.15, 2.13, 2.12, 2.13, 2.10,

2.15, 2.12, 2.14, 2.10, 2.13, 2.11, 2.14, 2.11,

该零件长度分布为正态的且 $\sigma = 0.01$ (cm), 试求总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 用 X 表示该批零件的长度, $E(X) = \mu$, 根据所给样本值计算:

$$\bar{x} = \frac{1}{16} (2.14 + 2.10 + \cdots + 2.11) = 2.125 \text{ (cm)},$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{15} \times 4.4 \times 10^{-3} = 2.933 \times 10^{-4} \text{ (cm}^2\text{)},$$

$$S \approx 0.0171 \text{ (cm)}.$$

$$\text{计算 } 1.96 \sqrt{\frac{D(X)}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{(0.01)^2}{16}} = 1.96 \times \frac{0.01}{4} = 0.0049 \text{ (} n=16, D(X)=(0.01)^2 \text{)},$$

于是所求 μ 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - 1.96 \sqrt{\frac{D(X)}{n}}, \bar{x} + 1.96 \sqrt{\frac{D(X)}{n}} \right] = [2.1201, 2.1299].$$

1.12.5 假设检验

1. 内容摘要

假设检验即通过样本观察值, 来判断某个假设是否成立.

1) 假设检验的基本方法

先假定所要检验的假设 H_0 成立, 在此前提下, 根据给定的 α 值, 使用样本构造概率不超过 α 的小概率事件. 然后, 根据一次试验的结果, 即样本观察值, 看上述小概率事件在此次试验中是否发生, 如果未发生, 此时说假设 H_0 是相容的, 我们不否定 H_0 , 否则就否定 H_0 . α 称为检验水平或检验标准.

2) 两类错误

第一类错误: 当原假设 H_0 成立时, 在此前提下, 使用样本构成的小概率事件, 在一次试验中发生了, 应该拒绝原假设 H_0 , 从而犯了“以真为假”的错误, 称这种错误为第一类错误, α 是犯第一类错误的概率.

第二类错误: 原假设不成立, 但结果却接受 H_0 , 从而犯了“以假为真”的错误, 称为第二类错误, 用 β 表示犯第二类错误的概率.

3) 正态总体中未知参数的假设检验

(1) 方差已知时, 关于期望 μ 的检验程序:

① 提出待检验 $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 已知);

② 根据样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 计算统计量

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

的数值.

③对于检验水平 α , 查正态分布数值表, 得临界值 λ ;

④将 $|U|$ 与 λ 比较, 当 $|U| > \lambda$ 时, 拒绝 H_0 , 当 $|U| \leq \lambda$ 时, H_0 是相容的 (此时需接受 H_0).

(2) 方差 σ^2 未知, 关于期望的检验程序;

①提出待检验的假设 $H_0: \mu = \mu_0$;

②根据样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 计算统计量

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

的数值;

③对于检验水平 α , 自由度 $= n - 1$, 查 t 分布临界值表, 得临界值 λ ;

④将 $|T|$ 与 λ 进行比较, 作出判断, 当 $|T| > \lambda$ 时拒绝 H_0 , 当 $|T| \leq \lambda$ 时, H_0 是相容的, 可接受 H_0 .

(3) 未知期望 μ , 关于方差的检验程序;

①提出待检验的假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$;

②根据样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 计算统计量

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$$

的数值;

③对于检验水平 α , 自由度 $= n - 1$, 查 χ^2 分布临界值表, 得临界值 λ ($P\{x^2 > \lambda\} = \alpha$);

④比较 W 与 λ 的值, 作出判断, 当 $W > \lambda$ 时, 拒绝 H_0 ; 当 $W \leq \lambda$ 时, H_0 相容, 可接受 H_0 .

2. 例题

例 1 8 名学生独立测同一物质的比重, 分别测得其值为

11.49, 11.51, 11.52, 11.53, 11.47, 11.46, 11.55, 11.50 (单位: g/cm^3).

假定测定值服从正态分布, 试根据这些数据检验这物质的实际比重是否为 11.53.

解 按题意, 检验假设 $H_0: \mu = 11.53$, 且 σ^2 未知.

(1) 提出原假设 $H_0: \mu = 11.53$.

(2) 计算统计量 $T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$ 的值,

$$\bar{x} = \frac{1}{8} (11.49 + 11.51 + \dots + 11.50) = 11.50,$$

$$S^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (x_i - 11.50)^2 = (0.03)^2,$$

$$T = \frac{11.50 - 11.53}{\frac{0.03}{\sqrt{8}}} \approx 2.83.$$

(3) 查 t 分布临界值表, $\alpha = 0.05$, 自由度 $= 8 - 1 = 7$,

$$P\{|T| > 2.365\} = 0.05,$$

得 $\lambda = 2.365$.

(4) 判断: $|T| \approx 2.83 > 2.365$, 故拒绝 H_0 , 即在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下, 认为这物质的比重不是 $11.53 \text{ (g/cm}^3\text{)}$.

1.12.6 方差分析

1. 内容摘要

在很多实际问题中, 往往需要我们去研究、判断某些试验条件的变化, 对试验结果有无显著影响的问题, 而方差分析就是解决这类问题的一个有效方法, 这里只介绍单因素试验的方差分析方法.

1) 问题与模型

假设在试验中只考虑因素 A 在变化, 而其他因素保持不变, 因素 A 取 a 个不同的水平 A_1, A_2, \dots, A_a . 我们的问题是: 各个不同的水平 A_i ($i = 1, 2, \dots, a$) 对试验结果有无显著的影响.

记在水平 A_i 下的试验结果为 X_i , 在方差分析中仅讨论下述模型: 假定各 X_i 相互独立, 都服从正态分布, 而且各 X_i 的方差都相等, 即假定

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2) \quad i = 1, 2, \dots, a,$$

其中, μ_i 与 σ^2 均为未知常数.

于是, 我们的问题归结为如何判断假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$$

是否成立的问题.

由以上模型可知, 单因素方差分析就是检验方差的几个正态总体的期望是否有显著差异的一种统计方法.

2) 方差分析的一般步骤

按照假设检验的步骤, 利用了一个在 H_0 成立条件下服从 F 分布的统计量

$$F = \frac{(n-a) S_A}{(a-1) S_E} = \frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E} \sim F(a-1, n-a),$$

建立了一个对 H_0 的检验法则, 即方差分析法, 其一般步骤可归纳如下:

(1) 提出假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$.

(2) 由样本观测值 x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, a, j = 1, 2, \dots, m$), 计算 S_A 与 S_E , 从而算得 F 值, 其中

$$S = S_A + S_E,$$

$$S = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x})^2, \text{ 是总离差平方和,}$$

$$S_A = m \sum_{i=1}^a (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \text{ 是因素 } A \text{ 的离差平方和,}$$

$$S_E = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \text{ 是误差平方和,}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^m x_{ij}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{ij}.$$

列出方差分析表, 即

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因素 A	S_A	$a-1$	$\frac{S_A}{a-1}$	$F_A = \frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
误差	S_E	$n-a$	$\frac{S_E}{n-a}$	
总和	S	$n-1$		

(3) 由事先给定的 α (检验水平), 查 F 分布临界值表, 得临界值 $F_\alpha(a-1, n-a)$.

(4) 判断: 若 $F > F_\alpha(a-1, n-a)$, 则拒绝 H_0 , 即认为因素 A 的不同水平对试验结果有显著的影响; 若 $F \leq F_\alpha(a-1, n-a)$, 则接受 H_0 .

2. 例题

例 1 三个工厂生产同一型号的电池, 进行质量评比时, 从各工厂的产品中分别抽取五个电池, 测得电池的耐用时数如下:

工厂 \ 电池号	电池耐用时数				
A_1	45	48	50	45	52
A_2	42	45	43	48	52
A_3	45	52	55	56	57

设各工厂生产的电池的耐用时数都服从正态分布, 检验它们的均值是否有显著差异, 取 $\alpha = 0.1$.

解 由题设算出 $\bar{x}_1 = 48$, $\bar{x}_2 = 46$, $\bar{x}_3 = 53$, $\bar{x} = 49$. 其中 $a = 3$, $m = 5$, $n = 15$. 例出方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 值
因素 A	130	2	65	3.94
误差	198	12	16.5	
总和	328	14		

查 F 分布临界值 $F_{0.1}(2, 12) = 2.81$.

由于 $F_A = 3.94 > 2.81$, 因此拒绝 H_0 , 即三个厂生产的电池质量有显著差异.

模拟试题及参考答案

1. 重复进行一项试验, 事件 A 表示“第一次失败且第二次成功”, 则事件 \bar{A} 表示 ().

- (A) 两次均失败 (B) 第一次成功或第二次失败
(C) 第一次成功且第二次失败 (D) 两次均成功

2. 设 $\varphi(x)$ 为连续型随机变量的概率密度, 则下列结论中一定正确的是 ().

- (A) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ (B) $\varphi(x)$ 在定义域内单调不减
(C) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$

3. 已知随机变量 X 满足 $P(|X - E(X)| \geq 2) = \frac{1}{16}$, X 的方差记为 $D(X)$, 则下列结果中一定正确的是 ().

- (A) $D(X) = \frac{1}{4}$ (B) $D(X) > \frac{1}{4}$
 (C) $P(|X - E(X)| < 2) = \frac{15}{16}$ (D) $D(X) < \frac{1}{4}$

第 4、5、6、7 题目中, 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其余.} \end{cases}$$

4. $P(0 < X < 0.5)$ 的值为 ().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$

5. 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为 ().

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}$

$$(C) F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad (D) 1$$

6. 随机变量 X 的期望 $E(X)$ 为 ().

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 1

7. 随机变量 X 的方差 $D(X)$ 为 ().

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) 2

8. 设 $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个容量为 10 的样本, 其中 $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma^2 > 0$, 记 $\bar{X}_5 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i$, 则 $\frac{1}{\sigma^2} [\sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X}_5)^2 + \sum_{i=6}^{10} (X_i - \mu)^2]$ 服从 χ^2 分布, 其自由度为 ().

- (A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 10

9. 如果随机变量 X 与 Y 满足 $D(X+Y) = D(X-Y)$, 则下列结论中正确的是 ().

- (A) X 与 Y 独立 (B) $D(Y) = 0$
 (C) $D(X) \cdot D(\bar{Y}) = 0$ (D) X 与 Y 不相关

解答

1. (C)

因为 \bar{A} 是 A 的对立事件, 所以 \bar{A} 表示为第一次成功且第二次失败.

2. (C)

因为, 由概率密度函数的性质, 可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$.

3. (C)

因为 $P(|X - E(X)| < 2) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$, 所以选 (C) .

4. (B)

因为 $P(0 < X < 0.5) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{16}$, 所以应选 (B) .

5. (C)

因为 $F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$.

当 $x < -1$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$.

当 $-1 \leq x < 1$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^x \frac{3}{2} x^2 dx$
 $= \frac{1}{2} x^3 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2}$.

当 $x \geq 1$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x^2 dx + \int_1^x 0 dx = 1$

所以

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

6. (A)

因为 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{2} x^2 dx$
 $= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$ (被积函数为奇函数, 在对称区间积分为 0) .

7. (C)

因为 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2)$
 $= \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3}{2} x^2 dx = 3 \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{5}$,

所以应选 (C) .

8. (A)

因为 设 $\xi = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X}_5)^2$, ξ 服从 χ^2 分布, 自由度为 4.

设 $\eta = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=6}^{10} (X_i - \mu)^2$, η 服从 χ^2 分布, 自由度为 5.

所以, 随机变量 $\xi + \eta$ 服从自由度为 9 的 χ^2 分布 .

9. (D)

因为 $D(Z + Y) = D(X - Y)$, 即协方差 $\sigma_{XY} = 0$, 所以
 Z 与 Y 不相关 .

2 普通物理

2.1 热学

2.1.1 气体状态参量、平衡态、平衡过程

1. 气体状态参量

在热学中，为了描述物体的状态，常采用一些表示物体有关特性的物理量作为描述状态的参数，称为状态参量。在普通物理中，热学的研究对象主要是理想气体。对于一定量的理想气体，一般用下述三个参量来描述它的状态：

体积 (V) ——指气体分子所能达到的空间，而不是气体分子本身体积的总和。在密闭容器中，气体的体积就是容器的容积。单位是米³ (m³)；升 (L)。

压强 (p) ——是气体作用在容器器壁单位面积上的正压力，是气体分子对器壁碰撞的统计平均表现。压强的单位是帕斯卡 (Pa) 即牛顿/米² (N·m⁻²)。工程上与日常生活中还有时用标准大气压 (atm) 和厘米汞高，毫米汞高等。换算关系为：

$$1 \text{ 标准大气压 (atm)} = 760 \text{ mmHg} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

温度 (T)，通俗地说，它是物体冷热程度的量度。从本质上说它取决于物质分子热运动的剧烈程度。温度的分度方法即温标，在物理学中常用的有两种，一种是热力学温标 T (或称绝对温标)，单位是开尔文 (K)，另一种是摄氏温标 ($t^\circ\text{C}$)，两者的关系是

$$t = T - 273.15$$

2. 平衡态

在热学中，把所研究的由大量分子构成的物体或物体系统称为热力学系统，简称系统。在普通物理中主要涉及热力学系统的平衡态的研究。所谓平衡态，是指在不受外界影响的条件下，一系统的宏观性质不随时间改变的状态。

3. 平衡过程

当系统与外界交换能量时，它的状态将发生改变，其间会经历许多中间状态，如果过程所经历的所有中间状态都无限接近平衡状态，这个过程被称为准静态过程或称平衡过程。

2.1.2 理想气体状态方程

实际上，温度不太低，压强不太高的气体遵从如下实验规律

$$pV = \frac{M}{\mu}RT \quad (2.1-1)$$

其中 M ——气体质量；

μ ——气体的摩尔质量；

R ——气体普适恒量， $R = 8.31 \text{ (J/mol}\cdot\text{K)}$ 。

这就是理想气体状态方程，满足这一方程的气体称为理想气体。方程表示了当系统处于平衡态时，各状态参量之间的关系。

下面我们将导出理想气体状态方程的又一种常用的形式。

设每个分子的质量为 m ，气体分子总数为 N ，每摩尔气体的分子数为 N_0 （等于 $6.023 \times 10^{23}/\text{mol}$ ，称为阿佛加德罗常数），则式 (2.1-1) 变为

$$p = \frac{1}{V} \frac{M}{\mu} RT = \frac{1}{V} \frac{Nm}{N_0 m} RT = \frac{NR}{VN_0} T$$

令 $\frac{N}{V} = n$ —— 气体分子数密度

$$\frac{R}{N_0} = k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \text{ —— 玻尔兹曼常数}$$

则 $p = nkT$ (2.1-2)

这是理想气体状态方程的又一种形式，它清楚地表明，气体的压强取决于温度与分子数密度。

2.1.3 理想气体的压强和温度

1. 理想气体的微观模型

分子热运动是杂乱无章的，我们研究的对象又是由大量分子组成的系统，所以热学方法无需去跟踪每一个分子研究它的力学行为。从讨论气体的宏观表现而言，也没有必要去弄清每个分子的行为。气体分子热运动理论采用了统计平均的方法去研究它们，为此我们建立了如下的理想气体微观模型：

- (1) 分子本身的大小相对于它们之间的距离可忽略。
- (2) 分子之间的碰撞，分子与容器壁之间碰撞是完全弹性的。
- (3) 除碰撞之外，分子与分子之间，分子与器壁之间的作用力可忽略，分子重力不计。
- (4) 在热平衡状态下，分子沿各方向的运动几率均等。

2. 理想气体的压强公式

从上述模型出发，运用统计、平均方法可导出理想气体压强公式

$$p = \frac{2}{3} n \bar{w} = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right) \quad (2.1-3)$$

其中 $\bar{w} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$ —— 分子平均平动动能。从此公式本身及公式的导出思路，我们可以得出关于压强的微观统计解释：压强作为宏观量是微观量的统计平均值。公式表明：压强与分子数密度成正比；与气体分子热运动的平均平动动能成正比。也可以说，压强是分子热运动平均平动动能密度的量度。

3. 理想气体的温度公式

从式 (2.1-2) 与式 (2.1-3) 得出

$$\bar{w} = \frac{3}{2} kT \quad (2.1-4)$$

从此式可看出温度的微观本质或温度的统计意义：气体分子的平均平动动能只与温度有关，换句话说，温度是分子平均平动动能的量度。热运动的“剧烈程度”这种模糊说法有了确切的统计含义，即分子平均平动动能的大小。由于温度与大量分子的平均平动动能相联系，所以温度是大量分子热运动的集体表现。对于单个或少数几个分子，统计假设不成立，谈论其温度是没有意义的。

将 $\bar{w} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$ 代入式 (2.1-4) 可得理想气体的方均根速率

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad (2.1-5)$$

2.1.4 能量按自由度均分、理想气体的内能

1. 能量按自由度均分

(1) 分子的自由度

决定一个分子的空间位置所需的独立坐标数目称为分子的自由度数, 以字母 i 表示之。单原子分子有 3 个平动自由度, 其 $i=3$ 。刚性双原子分子有 3 个平动自由度, 2 个转动自由度, 所以 $i=5$ 。刚体三原子或多原子分子有 3 个平动自由度, 3 个转动自由度, 所以 $i=6$ 。

(2) 能量按自由度均分原理

由于分子热运动是大量分子极其杂乱的运动, 分子间及分子与器壁的碰撞极度频繁, 决定了各自由度之间的能量交换极快, 统计平均而言, 可认为不存在优势自由度。即: 在热平衡状态下, 物质分子的每个自由度都具有相同的平均动能。

设气体分子有 i 个自由度, 则每个分子的总平均动能为

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT \quad (2.1-6)$$

2. 理想气体的内能

对于理想气体, 由于不计分子间的引力、斥力及分子重力, 分子系统的势能及重力势能不计, 所以理想气体的内能是气体分子各种形式动能的总和。

$$\text{对于一个分子} \quad \bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT$$

$$\text{一摩尔理想气体} \quad E_{\text{mol}} = N_0 \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} RT$$

$$M \text{ 千克理想气体} \quad E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT \quad (2.1-7)$$

其中 $\frac{M}{\mu}$ 是摩尔数。

由此可见, 一定量、一定种类的理想气体, 其内能是温度的单值函数。

2.1.5 麦克斯韦速率分布律

1. 麦克斯韦速率分布函数

理想气体在热平衡状态下, 分子速率在 $v \rightarrow v + dv$ 区间的分子数占总分子数的比率为

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = f(v) dv$$

麦克斯韦速率分布函数表示分子的速率分布在 v 附近的单位速率区间内的分子数占总分子数的比率为

$$f(v) = \frac{dN}{N dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (2.1-8)$$

2. 麦克斯韦速率分布曲线

分布函数 $f(v)$ 也可用图线表示, 称为麦克斯韦速率分布曲线。

如果用纵坐标表示 $f(v)$, 横坐标表示 v 。显然 $v=0$ 时, $f(v)=0$ 。 $v \rightarrow \infty$ 时, $f(v) \rightarrow 0$ 。现以速率分布曲线 (图 2.1-1) 为例, 重点了解速率分布函数的物理意义。

(1) 小矩形面积 (以斜线表示) 的意义。小矩形面积为 $f(v) \cdot dv = \frac{dN}{Ndv} \cdot dv = \frac{dN}{N}$, 表示分布在 $v \rightarrow v+dv$ 区间内分子数占总分子数的比率, 或表示某分子速率在 $v \rightarrow v+dv$ 区间的几率, 则速率在 $v_1 \rightarrow v_2$ 区间内的分子数为

$$\Delta N = \int_{v_1}^{v_2} N f(v) dv$$

(2) 整个曲线下面积的意义

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = \int_0^{\infty} \frac{dN}{N} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} dN = \frac{N}{N} = 1$$

上式表示速率在 $0 \rightarrow \infty$ 之间气体的分子数与总分子数之比为 1, 即

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

该式称归一化条件。这是分布函数 $f(v)$ 必须满足的条件, 这是由 $f(v)$ 本身性质所决定的。

(3) 曲线极大值处相对应的 v_p 表示什么? $f(v)$ 曲线极大值处相对应的速率值 v_p 称为最可几速率。它说明具有很大速率或很小速率的分子为数很少, 其比率较低, 而具有中等速率的分子数很多, 比率很高。而在一定温度下, 速率大小与 v_p 相近的气体分子的比率最大。所以, v_p 表示在相同的速率区间内, 气体分子速率在 v_p 附近的几率最大。显然, 在 v_p 处满足 $\frac{df(v)}{dv} = 0$ 。应该注意, v_p 不是速率的极大值。

(4) T 变化时, $f(v)$ 曲线如何变化。对一定量理想气体, 不同温度有不同形状的速率分布曲线 (图 2.1-2)。温度越高, 速率大的分子增多, v_p 向速率增大的方向偏移, 所以曲线将拉宽。由归一化条件可知, 曲线下总面积恒等于 1。于是, 曲线高度降低, 变得平坦。若温度降低, 则曲线极大值向左偏移, 曲线变高变尖锐。

3. 由麦克斯韦速率分布函数求速率的三个统计平均值

(1) 最可几速率 v_p

由 $f(v)$ 极大值条件 $\frac{df(v)}{dv} = 0$, 得

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

(2) 算术平均速率 \bar{v}

由算术平均值定义

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

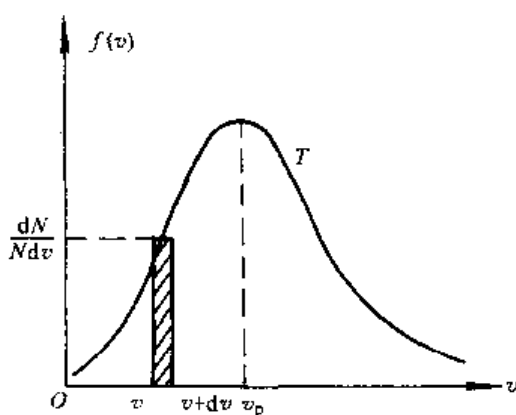


图 2.1-1

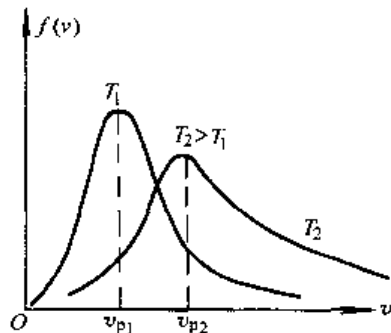


图 2.1-2

将麦克斯韦速率分布函数 $f(v)$ 代入积分得

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

(3) 方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$

$$\overline{v^2} = \int_0^N v^2 \frac{dN}{N} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv$$

将分布函数 $f(v)$ 代入上式积分并开方可得

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

应该注意,这三种速率都是对大量气体分子来讲的,而且是在 $0 \rightarrow \infty$ 区间内求得的三种速率值。

当同种气体处于同一平衡状态(同一温度 T)时,有 $\sqrt{\overline{v^2}} > \bar{v} > v_p$,且随着温度 T 增加而分别增大。当不同气体处于同一平衡状态时,三种速率均与 $\sqrt{\mu}$ 成反比。

三种速率具有不同的物理意义,有不同的应用。当讨论速率分布时,要了解最可几速率;当计算分子热运动的平均自由程时要用到算术平均速率 \bar{v} ;当要计算分子的平均平动动能时要用到方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 。

2.1.6 平均碰撞频率和平均自由程

分子碰撞这个微观过程对于热现象的解释是十分关键的,我们可以用平均碰撞频率和平均自由程这两个统计平均量来表示分子碰撞的频繁程度及分子无碰撞自由飞行的平均距离。

分子平均碰撞频率为

$$\bar{Z} = \sqrt{2} n \pi d^2 \bar{v} \quad (2.1-9)$$

其中 n ——分子数密度;

d ——分子有效直径;

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \text{——分子算术平均速率。}$$

\bar{Z} 的物理含义是:对时间平均而言,一个分子在单位时间内与其他分子的碰撞次数,从式 (2.1-9) 可知,分子愈大, \bar{v} 愈高 (T 愈高), 分子密度愈大, 碰撞愈频繁, 其数量级是每秒几十亿次。

利用式 (2.1-9) 可导出平均自由程

$$\bar{\lambda} = 1/\sqrt{2} n \pi d^2 = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 P} \quad (2.1-10)$$

其物理含义是:分子在相继发生的两次碰撞间所经过的平均路程。

例 2.1.1 一容器内贮有氧气,其压强 $p = 1.0 \text{ atm}$, 温度为 27°C , 求:(1) 单位体积内的分子数;(2) 氧气的密度;(3) 氧分子的质量;(4) 分子的平均平动动能;(5) 分子的平均动能。

解

$$(1) n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 2.45 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

(2) 由 $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 得

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 32 \times 10^{-3}}{8.31 \times 300} = 1.30 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

(3) 由 $\rho = nm$ 得

$$m = \frac{\rho}{n} = \frac{1.30}{2.45 \times 10^{25}} = 5.31 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

$$(4) \bar{\epsilon}_{\text{平}} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$(5) \bar{\epsilon} = \frac{3+2}{2}kT = \frac{5}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 1.04 \times 10^{-20} \text{ J}$$

例 2.1.2 说明下列各式的物理意义

$$(1) f(v)dv, \quad (2) Nf(v)dv, \quad (3) nf(v)dv,$$

$$(4) \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv, \quad (5) \int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv, \quad (6) \int_0^{\infty} vf(v)dv,$$

$$(7) \int_0^{\infty} v^2 f(v)dv$$

答

(1) $f(v)dv = \frac{dN}{N}$, 表示平衡状态下, 处在速率间隔 $v \rightarrow v+dv$ 内的分子数占总分子数的比率。

(2) $Nf(v)dv = dN$, 表示平衡态下, 处在速率间隔 $v \rightarrow v+dv$ 内的分子数。

(3) $nf(v)dv = n \frac{dN}{N} = \frac{dN}{V}$, 表示平衡态下, 单位体积中处于速率间隔 $v \rightarrow v+dv$ 内的分子数。

(4) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \frac{\int_{v_1}^{v_2} dN}{N}$, 表示平衡态下, 速率间隔 $v_1 \rightarrow v_2$ 内的分子数占总分子数的比率。

(5) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} dN$, 表示平衡态下, 速率间隔 $v_1 \rightarrow v_2$ 内的分子数。

(6) $\int_0^{\infty} vf(v)dv$, 表示平衡态下, 大量分子热运动的速率的算术平均值。

(7) $\int_0^{\infty} v^2 f(v)dv$, 表示平衡状态下, 大量分子热运动的速率平方的平均值。

2.1.7 内能、热量和功

1. 内能

热力学系统在一定状态下具有一定的能量, 称为热力学系统的内能。对于理想气体其内能表达式为

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT$$

内能是状态量, 只是系统状态的单值函数。对于理想气体, 它只是温度 T 的单值函数。一定量的理想气体, 从状态温度 T_1 变到状态温度 T_2 时, 其内能增量只与始末状态有关,

而与过程无关, 即

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) \quad (2.1-11)$$

2. 功和热量

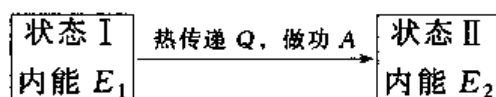
实验证明, 系统状态的变化总是通过外界对系统做功或向系统传热或二者兼有来实现。可见就改变系统状态而言, 两者是等效的, 但本质上有区别。做功是通过物体宏观位移来完成的, 而传递热量则是通过分子热运动和碰撞来实现的。

功和热都是过程量, 是系统内能变化的量度。

2.1.8 热力学第一定律及其对等值过程和绝热过程的应用

1. 热力学第一定律

一般情况下, 系统状态的变化往往同时伴随着做功与热传递, 它们之间有何关系呢? 设某系统 (如一定量的理想气体) 经历如下过程



据普遍的能量守恒与转化定律应有

$$Q = (E_2 - E_1) + A \quad (2.1-12)$$

这就是热力学第一定律的表达式。

系统吸热 $Q > 0$, 放热 $Q < 0$, 系统对外做正功 $A > 0$, 对外做负功 $A < 0$, 对于状态的微小变化, 应有

$$dQ = dE + dA \quad (2.1-13)$$

这是热力学第一定律的微分形式。

2. 热力学第一定律对理想气体等值过程的应用, 摩尔热容量

(1) 等容过程。气体体积不变, 对外做功为零, 则有

$$\left. \begin{aligned} Q_v &= E_2 - E_1, \\ dQ_v &= dE \end{aligned} \right\} \quad (2.1-14)$$

表明: 系统从外界所吸收的热量全部用于增加自己的内能, 反之, 系统向外放热则全部取自于系统内能。

等容过程中系统与外界的热交换量 Q_v 可具体计算如下

$$\left. \begin{aligned} Q_v &= E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) \\ dQ_v &= dE = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R dT \end{aligned} \right\} \quad (2.1-15)$$

引入定容摩尔热容量 C_v 。设有 1 mol 理想气体, 在等容过程中吸取热量 dQ_v , 温度升高 dT , 则定义

$$C_v = \left(\frac{dQ_v}{dT} \right)_{1 \text{ mol}}$$

从式 (2.1-15), 因为 $\frac{M}{\mu} = 1$, 所以

$$C_v = \frac{i}{2} R dT/dT = \frac{i}{2} R \quad (2.1-16)$$

定容摩尔热容量 C_v 的物理意义是: 1 mol 理想气体在体积不变的情况下, 温度升高 1 K 所吸收的热量。

式 (2.1-15) 可写为

$$\left. \begin{aligned} Q_v &= \frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1) \\ dQ_v &= \frac{M}{\mu} C_v dT \end{aligned} \right\} \quad (2.1-17)$$

(2) 等压过程。气体的压强不变, 气体对外做功为 $A_p = p(V_2 - V_1)$ 或 $dA = p dV$, 则有

$$\left. \begin{aligned} Q_p &= (E_2 - E_1) + p(V_2 - V_1) \\ dQ_p &= dE + p dV \end{aligned} \right\} \quad (2.1-18)$$

由于

$$E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$$

$$p(V_2 - V_1) = p \left(\frac{M}{\mu} \frac{RT_2}{P} - \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{P} \right) = \frac{M}{\mu} R (T_2 - T_1)$$

则

$$\left. \begin{aligned} Q_p &= \frac{M}{\mu} \left(\frac{i}{2} R + R \right) (T_2 - T_1) \\ dQ_p &= \frac{M}{\mu} \left(\frac{i}{2} R + R \right) dT \end{aligned} \right\} \quad (2.1-19)$$

引入定压摩尔热容量 $C_p = \left(\frac{dQ_p}{dT} \right)_{1 \text{ mol}}$, 容易导出

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = C_v + R \quad (2.1-20)$$

则

$$\left. \begin{aligned} Q_p &= \frac{M}{\mu} C_p (T_2 - T_1) \\ dQ_p &= \frac{M}{\mu} C_p dT \end{aligned} \right\} \quad (2.1-21)$$

令

$$\nu = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$$

称 ν 为比热容比。

(3) 等温过程。对于等温过程, 理想气体的内能不变, 即 $E_2 - E_1 = 0$, $dE = 0$, 则有

$$\left. \begin{aligned} Q_T &= A_T \\ dQ_T &= dA_T \end{aligned} \right\} \quad (2.1-22)$$

表明: 系统吸热全部用于对外做功, 反之外界对系统做功, 系统又全部传递给外界。

等温过程中的功可用下式计算

$$A_T = \frac{M}{\mu} RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{M}{\mu} RT \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad (2.1-23)$$

3. 热力学第一定律对绝热过程的应用

绝热过程是指系统与外界始终没有热交换的过程, $Q=0$, $dQ=0$, 热力学第一定律写为

$$E_2 - E_1 + A_Q = 0$$

$$\left. \begin{aligned} A_Q &= -\frac{M}{\mu} C_v (T_2 - T_1) \\ dA_Q &= -\frac{M}{\mu} C_v dT \end{aligned} \right\} \quad (2.1-24)$$

可见, 当 $T_2 < T_1$ 时 $A_Q > 0$, 即系统内能减少用于对外做功。反之, 如 $A_Q < 0$, 即外界对系统做功转化为系统内能增加 ($T_2 > T_1$)。

对于绝热过程, 可由状态方程和热力学第一定律导出

$$\left. \begin{aligned} PV^\nu &= \text{恒量} \\ V^{\nu-1} T &= \text{恒量} \\ P^{\nu-1} T^{-1} &= \text{恒量} \end{aligned} \right\} \quad (2.1-25)$$

式 (2.1-25) 称为绝热方程。

绝热过程中的功, 也可由压力做功定义式 $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ 求出。由 $pV^\nu = c$, 则有

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V^\nu} dV = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\nu - 1}$$

2.1.9 循环与热机, 热机效率

1. 循环与热机

物质系统的状态周而复始的过程称为循环, 在 $p-V$ 图上用闭曲线表示。将热不断转化为功的装置称为热机, 其中的工作物质经历正循环——顺时针方向进行的循环, 如图 2.1-3 所示。热机中的基本过程是, 系统经历正循环将自高温热源所吸收的热量 Q_1 部分用于对外做净功 A (图中闭曲线所包围的面积), 部分向低温热源放出热量 $|Q_2|$, 系统回到原状态。

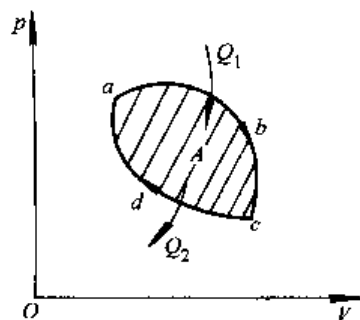


图 2.1-3 正循环

2. 热机效率 η

如图 2.1-3 工作物质从 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ 经历一个正循环, $\Delta E = 0$ (回到原始状态, 内能未变), 净功 $A > 0$, 则系统净吸热 $Q_1 - |Q_2| > 0$, 据热力学第一定律应有 $Q_1 - |Q_2| = A$ 。

热机效率定义为

$$\eta = \frac{\text{系统对外所作净功}}{\text{系统从高温热源吸收的热量}}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \\ &= 1 - \frac{\text{放热}}{\text{吸热}} \end{aligned} \quad (2.1-26)$$

3. 致冷机与致冷系数

致冷机是以外界做功为代价, 使某处温度逐步降低的装置。其中的工作物质经历负循环——逆时针方向进行的循环, 如图 2.1-4 所示。致冷机中的基本过程是, 工作物质将从低温热源所吸收的热量连同外界对它做的净功一并以热的形式传给高温热源, 从而达到使低温热源不断降温的目的。从图 2.1-4 显见净功 $A < 0$, 对于一个负循环, 能量关系是

$$|Q_1| = Q_2 + |A|$$

定义致冷系数 $w = \frac{\text{从低温热源吸热}}{\text{外界做的净功}}$

$$\text{则} \quad w = \frac{Q_2}{|A|} \quad (2.1-27)$$

4. 卡诺循环

卡诺循环是一个理想循环，它由两个绝热过程和两个等温过程所组成，其工作物质为理想气体。通过对各过程的分析，可导出卡诺热机的效率为

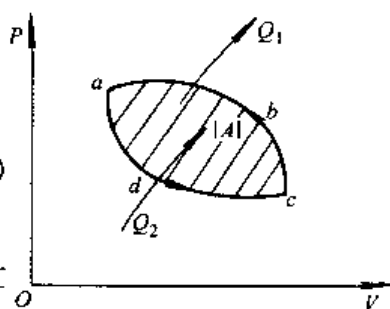


图 2.1-4 负循环

$$\eta_{\text{卡}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (2.1-28)$$

式中 T_1 表示高温热源的温度， T_2 表示低温热源的温度。可见，要完成一次循环，至少要有高温和低温两个热源。

式 (2.1-28) 只适用卡诺循环。它指出卡诺循环只与两个热源的温度有关，而与工作物质无关。它指出了提高热机效率的途径，即提高高温热源的温度 T_1 或降低低温热源的温度 T_2 。但效率总是小于 100%。热机效率的研究促使热力学第二定律的建立。

逆向运行的卡诺循环，可做成卡诺致冷机，其致冷系数为

$$w_{\text{卡}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (2.1-29)$$

2.1.10 热力学第二定律及其统计意义

任何一个热力学过程都必须遵守热力学第一定律；但不违背热力学第一定律的过程并非都能实现。这里有个过程进行的方向和限度问题。热力学第一定律没有涉及这个问题，而热力学第二定律则说明了这个问题，它有多种表述，这里介绍两种公认的表述。

1. 开尔文表述

不可能制成一种循环动作的热机，只从单一热源吸取热量，使之完全变为有用功，而其他物体不发生任何变化。

2. 克劳修斯表述

热量不可能自动地从低温物体传向高温物体。

可以证明开尔文表述和克劳修斯表述是等价的。

热力学第二定律本质上是一条统计规律，它指出：一般说来，一个不受外界影响的封闭系统，其内部发生的过程，总是由几率小的状态向几率大的状态进行；由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行。

由于热力学第二定律从本质上讲是一条统计规律，因此，对少量分子组成的系统是不适用的。另外热力学第二定律是确立在有限的时空观点上的，不能无限外推。

2.1.11 可逆过程和不可逆过程

为进一步理解热力学第二定律关于过程进行的方向性，必须明确什么是可逆过程和不可逆过程。

设有一从状态 $a \rightarrow$ 状态 b 的过程 L (图 2.1-5)，若沿此过程 L 逆向变化从状态 $b \rightarrow$ 状态 a ，周围的一切 (包括系统和外界) 都能恢复原状，则该过程 L 称为可逆过程。反之，

如果系统和外界不能恢复原状，过程 L 称不可逆过程。

必须指出，实际进行的热力学过程都是不可逆过程，这种不可逆过程的特点是过程自发进行的单向性。热力学第二定律的实质是指出了一切自发过程进行的不可逆性，也就是自发过程进行的单向性。

可逆过程是实际过程在一定条件下的理想化。热力学过程为可逆过程的条件：过程必须是无摩擦及其他能量耗散的平衡过程。

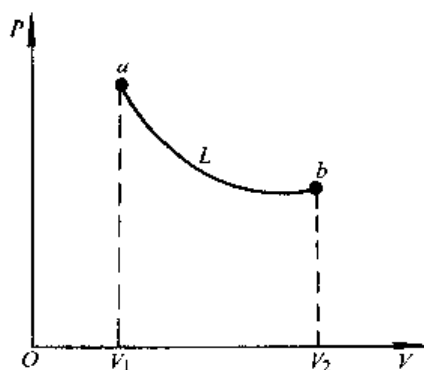


图 2.1-5

2.1.12 熵

一切实际的自发过程都是不可逆的，这种不可逆性说明系统达到终态和初态之间存在着某种属性的本质差别，这种属性可用一个新的状态函数熵来描述。下面就熵的概念做几点简单说明：

(1) 熵是状态量，是状态的单值函数。

(2) 熵是相对量。我们关心的常常是计算两个状态之间的熵差。

(3) 熵增原理：在封闭系统中发生任何不可逆过程，都要导致熵的增加，熵只有对可逆过程才是不变的。

对于理想气体的绝热自由膨胀，这个过程和外界没有热交换，也没有做功的现象发生，但这个过程是不可逆过程。所以，根据热力学第一定律可知系统的内能不变，根据熵增原理可知系统的熵增加了。

例 2.1.3 1 mol 的氢气做如图 2.1-6 所示的循环过程。其中 ab 是等温膨胀过程， bc 是等容冷却过程， ca 是绝热压缩过程。已知： $T_a = 400\text{ K}$ ， $T_c = 300\text{ K}$ ， $\ln 2 = 0.693$ 。求：(1) 各过程吸收或放出的热量；(2) 循环的净功；(3) 循环的效率。

解

(1) 等温膨胀吸热

$$\begin{aligned} Q_{ab} &= A = RT_a \ln \frac{2V_a}{V_a} \\ &= 8.31 \times 400 \times 0.693 = 2\,303.5\text{ J} \end{aligned}$$

等容冷却吸收热量

$$\begin{aligned} Q_{bc} &= \Delta E = E_c - E_b = \frac{i}{2} R(T_c - T_a) \\ &= -\frac{5}{2} \times 8.31 \times 100 = -2\,077.5\text{ J} \end{aligned}$$

(负号表示放热)

绝热过程 $Q_{ca} = 0$

(2) 循环净功 $A_{\text{净}} = Q_{ab} + Q_{bc} = 2\,303.5 - 2\,077.5 = 226\text{ J}$

(3) 循环效率 $\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{226}{2\,303.5} = 9.8\%$

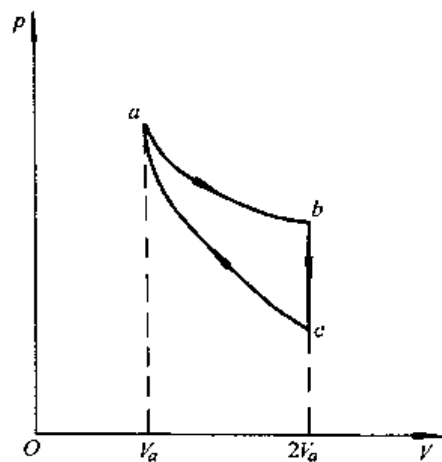


图 2.1-6

例 2.1.4 试证明绝热线与等温线不能相交于两点。

证 利用反证法证明。如果等温线 ab 与绝热线 acb 有两个交点 a 和 b ，如图 2.1-7 所示。则 $abca$ 就构成一个循环可对外做功而不引起其他变化，而且此循环只从单一热源取热。这样就违反了热力学第二定律的开尔文说法。因此绝热线与等温线不能相交于两点。

例 2.1.5 一卡诺热机在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 之间工作。若提高高温热源温度 ΔT 或降低低温热源温度 ΔT ，这两种方法都可提高热机的效率。问在改变相同 ΔT 的条件下，哪种方法使热机效率提得较高？

解 当高温热源温度升高 ΔT ，达到 $T_1 + \Delta T$ ，而低温热源温度 T_2 不变时

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1 + \Delta T}$$

当高温热源温度 T_1 不变，而低温热源温度 T_2 降低 ΔT ，达到 $T_2 - \Delta T$ 时

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1 + \Delta T}}{1 - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1}} = \frac{T_1}{T_1 + \Delta T} < 1$$

所以 $\eta_1 < \eta_2$ 。

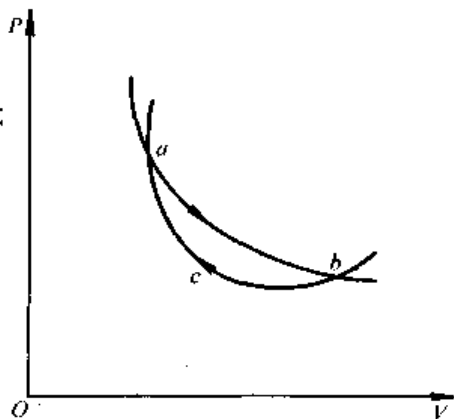


图 2.1-7

2.2 机械波

2.2.1 机械波的产生与传播

1. 产生机械波的条件

(1) 必须要有引起振动的波源；(2) 有能够传播机械振动的弹性介质。两者缺一不可。

2. 波的传播

在弹性介质中，若其中一质点受到扰动，引起振动，并相继带动其相邻质点的振动，由此及彼，振动状态就传播开去，形成波。这里必须明确：(1) 在波动的形成过程中，介质质点只在平衡位置附近做振动，并不随波移动。波传播的是振动的相位（状态）。(2) 介质质点的振动方向与波的传播方向是两个不同概念，两者方向不一定一致。(3) 介质质点的振动是波源振动的重复，但在波的传播方向上，质点的相位依次落后。

3. 波的分类

(1) 根据介质质点的振动方向和波的传播方向之间的关系来区分：

横波——介质质点的振动方向和波的传播方向相互垂直；

纵波——介质质点的振动方向和波的传播方向相互平行。

(2) 按波阵面形状区分：

波在传播过程中，同一时刻波到达的各点所连成的曲面称为波阵面。在同一波阵面上，介质各质点的振动相位相同，所以亦称同相面。波的传播方向称为波线，在各向同性均匀介质中传播的波，波线垂直于波阵面。

按波阵面形状可将机械波分为平面波和球面波，如图 2.2-1 所示。

2.2.2 描述波的物理量及其相互关系

1. 描述波动的物理量

波长 (λ) ——波线上振动状态（相位）完全相同的相邻两点之间的距离。

周期 (T) ——一个完整波形通过波线上一点所需的时间。显然，也就是该点完成一次全振动的时间，所以波的周期等于振动周期。

频率 (ν) ——单位时间通过波线上一点的完整波形的数目, 即 $\nu = 1/T$, 所以波的频率等于振动的频率。也就是说, 波的频率 (或周期) 由波源决定, 与介质无关。

波速 (u) ——振动相位在介质中的传播速度, 或者说, 波形在介质中的移动速度。波速取决于传播波的介质的性质。

在流体 (气体和液体) 中只能传播纵波, 波速的大小为

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.2-1)$$

式中, K 为流体的体积模量, ρ 为密度。在气体中 (如理想气体), 声波的波速大小可根据式 (2.2-1) 化为

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

式中, γ 是气体定压摩尔热容量与定容摩尔热容量的比值, p 是气体的压强, R 是摩尔气体恒量, T 是热力学温度, μ 是气体的摩尔质量。

在固体中既可传播纵波, 也可传播横波, 波速大小分别为

$$u_{\text{纵}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.2-2)$$

式中, E 为固体的弹性模量, ρ 为固体的密度。

$$u_{\text{横}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.2-3)$$

式中, G 为固体的切变模量, ρ 为固体的密度。

2. 波长 (λ)、频率 (ν) 和波速 u 之间关系

$$u = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T} \quad (2.2-4)$$

式中, 波速 u 取决于介质的性质 (弹性波的传播速度决定于介质的惯性与弹性), 而与其他无关; 频率 ν 由波源所决定; 而波长 λ 是一个反映波在空间周期性的物理量, 取决于介质和波源振动频率。

2.2.3 平面简谐行波表达式

设有一平面谐波在无限大、均匀、对波无吸收的介质中沿 x 轴正向以速度 u 传播。设处于坐标原点 O 处的质点的振动表达式为

$$y_0 = A \cos \omega t$$

则平面谐波的表达式为

$$\begin{aligned} y &= A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \\ &= A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.2-5)$$

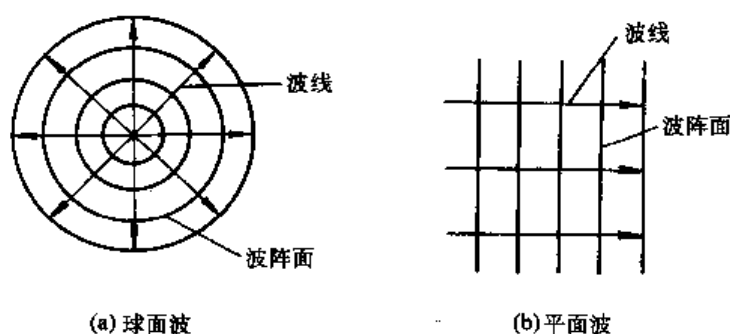


图 2.2-1

必须指出:

(1) 表达式中含有 t 和 x 两个自变量, y 表示在任意时刻 t 波线上任一处于 x 位置的质点的位移, 描述了波形的传播。若 x 一定, 则式 (2.2-5) 表示离坐标原点为 x 的一个质点的振动表达式, 式中 $\left(-\omega \frac{x}{u}\right)$ 项表示该质点的相位比坐标原点 O 处质点的相位落后值。若 t 一定, 则式 (2.2-5) 表示某时刻 t 的波形。

(2) 式 (2.2-5) 对横波与纵波均适用。但要注意, 对于横波, 质点的振动位移 y 与波的传播方向 (即波速 u 的方向) 垂直; 对于纵波, 质点振动位移 y 与波的传播方向 (u 的方向) 相互平行。

(3) 若平面谐波沿 x 轴负方向以波速 u 传播, 则波的表达式为

$$\begin{aligned} y &= A \cos \omega \left(t + \frac{x}{u} \right) = A \cos \left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \\ &= A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.2-6)$$

应该注意: 波的表达式 (2.2-5) 和式 (2.2-6) 是在坐标原点处质点振动初相位 φ 为零的特定条件下给出的形式。实际上, 坐标原点的选取是任意的, 坐标原点处质点振动的初相位 φ 可以不为零, 应根据 $t=0$ 时刻坐标原点处质点的初始振动状态 (y_0) 确定初相位 φ 的数值, 建立该质点的振动表达式, 即

$$y = A \cos (\omega t + \varphi)$$

然后根据波速 u 的方向、 x 轴的方向以及沿波传播方向质点的振动相位依次落后的原则, 写出平面简谐行波的表达式。

2.2.4 波的能量能流

在波动过程中, 每个质元都在振动, 且有弹性形变, 因而必有动能和势能, 下面给出结论。

1. 波动质元的能量

设波动质元的体积为 dV , 介质密度为 ρ , 则质元质量为 $dm = \rho dV$, 可以证明质元动能等于

$$dW_k = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

质元势能 $dW_p = dW_k$, 质元总能量

$$dW = dW_k + dW_p = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

这就是说, 波动质元的动能与势能的变化同步, 质元总能量既是 x 的函数也是 t 的函数。波动质元的能量与孤立谐振子的能量表现出完全不同的规律。

2. 波的瞬时能量密度

$$w = \frac{dW}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

能量密度的周期平均值

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

3. 能流和能流密度

平均能流 \bar{P} 的定义是：单位时间内垂直通过某面积 S 的能量，称为通过该面的平均能流，则

$$\bar{P} = \bar{w} \cdot u \cdot S \quad (\text{单位是 } \text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W}),$$

能流密度 I 的定义是：单位时间垂直通过单位面积的能量，则

$$I = \bar{P}/S = \bar{w} \cdot u = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \quad (2.2-7)$$

I 也称为波的强度。 I 的单位是 $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ (功率密度)。

2.2.5 波的叠加原理、波的干涉、驻波

1. 波的叠加原理

当几列波在同一介质中传播而相遇时，在重叠区域内任一质点振动的位移是各列波单独存在时在该点引起的位移的矢量和；换言之，每列波都是独立地保持自己原有的特性（频率、波长、振动方向等）对该点的振动给出自己的一份贡献，就像在各自的路径中并没有遇到其他波一样，这一事实称为波的叠加原理。

2. 波的干涉

两列振动方向相同、频率相同、相位差恒定的波，在同一介质中传播，相遇重叠时会出现介质中有些质点的振动始终加强，有些质点的振动始终减弱的现象，这种现象称为波的干涉。能产生干涉现象的波称为相干波，它们的波源称为相干波源。下面讨论两列相干波在均匀、无吸收的介质中某点相遇时，该点振动出现振幅最大和最小的条件，即干涉条件。

设 S_1 和 S_2 是两个相干波源（图 2.2-2），它们的振动表达式分别为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

它们发出的相干波在介质中某点 P 相遇， P 点将参与两个同方向、 S_1 同频率的振动，其振动表达式分别为

$$y_{1P} = A_1 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_1}{u}\right) + \varphi_1\right]$$

$$= A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \varphi_1\right);$$

$$y_{2P} = A_2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_2}{u}\right) + \varphi_2\right]$$

$$= A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \varphi_2\right)$$

两相干波在介质中该点所引起的振动的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$= \begin{cases} \pm 2k\pi & (k=0, 1, \dots), A = A_1 + A_2, \text{干涉加强(合振幅最大)}, \\ \pm (2k+1)\pi & (k=0, 1, \dots), A = |A_1 - A_2| \text{干涉减弱(合振幅最小)} \end{cases} \quad (2.2-8)$$

若 $\varphi_2 = \varphi_1$ ，上述条件可简化为

$$\delta = r_1 - r_2 = \begin{cases} \pm k\lambda & (k=0, 1, \dots), A = A_1 + A_2, \text{干涉加强} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (k=0, 1, \dots), A = |A_1 - A_2|, \text{干涉减弱} \end{cases} \quad (2.2-9)$$

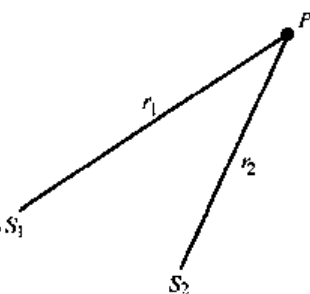


图 2.2-2

δ 为从 S_1 和 S_2 发出的两相干波到达相遇点时所经过的路程之差, 称为波程差。

3. 驻波

两列振幅相同的相干波, 在同一直线上沿相反方向传播叠加而成的波称为驻波。它是干涉现象的一种特例。

(1) 驻波的特征。驻波的特征是没有振动状态 (即相位) 的传播; 波线上各点在振动时, 波形驻定不动, 因而没有能量的传播。其中那些振幅为零, 即始终静止不动的点称为波节, 那些振幅最大的点称为波腹, 其余各点以确定的振幅在各自的平衡位置附近振动。相邻两波节之间各质点的振动是同相位的; 在一个波节两侧的各质点的振动是反相位的。相邻两波节或波腹间的距离等于半波长。利用此特点可以测定波长。

(2) 半波损失。当波由介质 1 (密度为 ρ_1 , 波速为 u_1) 垂直入射到介质 2 (密度为 ρ_2 , 波速为 u_2), 在分界面上反射, 若 $\rho_1 u_1 \ll \rho_2 u_2$, 可以认为: 波从波疏介质射向波密介质在界面上反射, 反射点为波节, 表明入射波和反射波的相位差为 π , 这相当于半波长的波程差, 故形象地称为半波损失; 若 $\rho_1 u_1 \gg \rho_2 u_2$, 可以认为: 波从波密介质射向波疏介质而在界面上反射, 反射点为波腹, 这时不存在半波损失。

2.2.6 多普勒效应

波源和观察者都相对于介质静止时, 观察者接收到的频率与波源的频率相同。如果波源或观察者或两者同时相对于介质运动, 则观察者接收到的频率就不同于波源的频率, 这种现象称为多普勒效应。下面介绍有关结论。

为简单计, 设波的传播方向、波源与观察者的运动均在一条直线上。

波源 S 相对于介质的速度为 v_s , 观察者 B 相对于介质的速度为 v_B , 波速为 u , 波源的频率为 ν_0 观测频率为 ν 。

(1) $v_s = 0$, $v_B = 0$, 即波源与观察者均相对于介质静止, 此时

$$\nu = \nu_0$$

(2) $v_s = 0$, $v_B \neq 0$, 波源静止, 观察者相对于介质运动, 此时

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_B}{u} \right) \quad (2.2-10)$$

① B 朝向 S 运动, 取 $v_B > 0$, 则 $\nu > \nu_0$; ② B 背离 S 运动, 取 $v_B < 0$, 则 $\nu < \nu_0$ 。

(3) $v_B = 0$, $v_s \neq 0$, 即观测者静止, 波源相对于介质运动, 此时

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{u}{u - v_s} \right) \quad (2.2-11)$$

① S 朝向 B 运动, 取 $v_s > 0$, $\nu > \nu_0$; ② S 背离 B 运动, 取 $v_s < 0$, $\nu < \nu_0$ 。

(4) $v_s \neq 0$, $v_B \neq 0$, 即波源和观察者都相对于介质运动, 此时

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{u + v_B}{u - v_s} \right) \quad (2.2-12)$$

v_s 与 v_B 的正负规定仍如前述。

多普勒效应在日常生活中常有表现, 如站在铁路边上看到鸣笛的火车驶来时, 笛声尖锐 ($v_s > 0$ $\nu > \nu_0$), 火车离去时笛声变低 ($v_s < 0$) ($\nu < \nu_0$)。

2.2.7 声学基本知识

1. 声波、超声波、次声波

在弹性介质内传播的机械波，频率在 $16 \sim 20\,000$ Hz 范围内能使人产生听觉，称为声波，频率低于 16 Hz 的波称为次声波，超过 20 000 Hz 的称为超声波，次声与超声均不能引起听觉。

次声波亦称亚声波，自然现象的地震，火山喷发、海啸、大气湍流、磁爆中都有次声波发生。现代科技中次声现象已用于像地震预报、气象探测、战略军事侦察等领域，形成了一门新兴学科——次声学。

超声波的应用则更早更广。例如用超声波作无损探伤、超声焊接、清洗、粉碎等。在标准状态的空气中，声波的传播速度为 331 m/s。

2. 声强和声强级

声强的物理意义就是波的能流密度，俗称响度。工程技术中常用到声强级的概念，声强级的符号是 L_I ，其定义为

$$L_I = \lg \frac{I}{I_0}, \text{ 单位: 贝 [尔] (B) .}$$

其中， $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ，是正常人对 1 000 Hz 声音的闻阈，亦称标准声强， I 是实际声强。

实际中常用的声强级单位是分贝 (dB)，它是 1 贝尔的十分之一。用分贝为单位的声强级是

$$L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (\text{dB}) \quad (2.2-13)$$

例 2.2.1 一平面简谐波的波动方程为

$$y = 0.02 \cos \pi(5x - 200t)$$

式中 x, y 以 m 计，时间以 s 计。试求振幅、波长、频率、相位和波速。

解

(1) 用比较法求解。将给定的波动方程变为

$$\begin{aligned} y &= 0.02 \cos \pi(5x - 200t) \\ &= 0.02 \cos 200\pi \left(t - \frac{x}{40} \right) \\ &= 0.02 \cos 2\pi \left(\frac{t}{0.01} - \frac{x}{0.4} \right) \end{aligned}$$

上式与波动方程的标准形式比较可得

$$A = 0.02 \text{ m}, T = 0.01 \text{ s}, \lambda = 0.4 \text{ m}, \nu = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz}, u = \frac{\lambda}{T} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

波沿 x 轴正向传播。

(2) 用物理量的物理意义求解。

当 $\cos \pi(5x - 200t) = \pm 1$ 时，位移的绝对值有最大为 $A = 0.02 \text{ m}$

由质点振动的圆频率 $\omega = 200\pi$ ，得

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{200\pi} = 0.01 \text{ s} \\ \nu &= \frac{1}{T} = \frac{1}{0.01} = 100 \text{ Hz} \end{aligned}$$

波长是指同一时刻,同一波线上相位差为 2π 的两质点间的距离。设此两点的坐标分别为 x_1 和 x_2 , 代入给定的波动方程式得

$$\pi(5x_2 - 200t) - \pi(5x_1 - 200t) = 2\pi$$

化简得

$$x_2 - x_1 = \lambda = 0.4 \text{ m}$$

波速又称相速,是相位传播的速度。设 t_1 时刻 x_1 点的相位在 t_2 时刻传到 x_2 点,则有

$$\pi(5x_2 - 200t_2) = \pi(5x_1 - 200t_1)$$

波速

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{200}{5} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.3 波动光学

2.3.1 光的干涉

1. 相干光的获得

(1) 光的相干条件。相干光必须同时满足三个条件,即:频率相同,光振动的方向相同,相遇点的相位差恒定。

(2) 相干光的获得。获得相干光的基本思想是设法将一束光分成两束光,然后让它们经过不同路径相遇,这两束光即满足相干光的条件。

下面讨论一些光的干涉现象的实例。

2. 杨氏双缝干涉

如图 2.3-1 所示,缝 S 形成一单色光源,两相干光源(即双缝) S_1 、 S_2 相距为 d ,

两缝中心到屏幕的距离为 D ($d \ll D$),两相干光在屏幕上 P 处相遇, $\overline{OP} = x$, $\overline{S_1P} = r_1$, $\overline{S_2P} = r_2$ 。

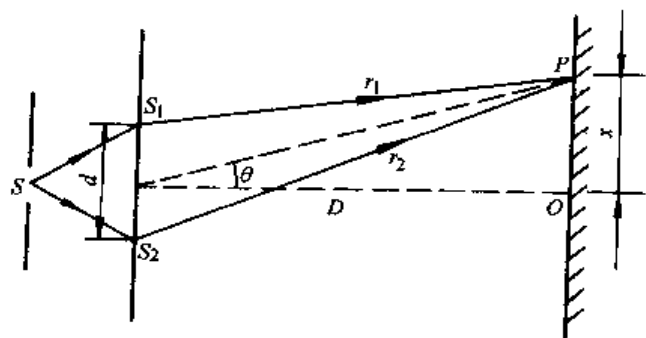


图 2.3-1

两相干光在 P 处相遇时,若双缝 S_1 、 S_2 对称于缝 S ,则它们的相位差为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \\ &= \begin{cases} \pm 2k\pi & (k=0,1,2,\dots) \text{明} \\ \pm (2k-1)\pi & (k=1,2,\dots) \text{暗} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3-1)$$

式中, λ 为相干光在真空中波长。

波程差为

$$\begin{aligned} \delta &= r_2 - r_1 = d \sin\theta = d \frac{x}{D} \\ &= \begin{cases} \pm k\lambda & (k=0,1,2,\dots) \text{明} \\ \pm (2k-1)\frac{\lambda}{2} & (k=1,2,\dots) \text{暗} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3-2)$$

屏幕上明纹中心的位置为

$$x = \pm k \frac{D}{d} \lambda \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2.3-3)$$

式中 $k=0$ 为中央(零级)明纹, $k=1$ 为一级明纹中心,其余依次类推。

屏幕上的暗纹中心的位置为

$$x = \pm (2k - 1) \frac{D}{d} \lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3-4)$$

式中 $k=1$ 为一级暗纹, $k=2$ 为二级暗纹, 依次类推。

条纹间距 (指相邻明条纹或相邻暗条纹之间的距离) 为

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda \quad (2.3-5)$$

显然, 条纹是等间隔明暗交替分布的。

若用白光照射缝 S , 则在屏上除中央明纹呈白色外, 其余各级明纹均为由紫到红的彩色条纹。

3. 等厚薄膜的干涉

1) 光程

由于光在不同介质中传播的速度不同, 所以相同频率的光在不同介质中的波长也不同。为方便起见, 引入光程的概念。

我们将光在折射率为 n 的介质中经过的几何路程 x 等效地折算成光在真空中经过的路程 X , 称为光程, 即

$$X = nx \quad (2.3-6)$$

由上可知, 对于光的干涉起决定作用的是光程差。这样我们在处理问题时, 虽然光束通过不同介质, 其波长有所变化, 但引入光程后, 则波长就一律为真空中波长。

2) 半波损失

光从光疏介质射向光密介质而在界面上反射时, 反射光存在着相位 π 的突变, 这相当于增加 (或减少) 半个波长的附加光程差, 称为半波损失。

3) 等厚薄膜的干涉 (等倾干涉)

折射率为 n_2 , 厚度为 e 的匀厚薄膜处在折射率为 n_1 的介质中 (如图 2.3-2), 且 $n_2 > n_1$, 面光源上同一点发出的光以入射角 i 射向薄膜, 经薄膜上、下表面反射的光在薄膜上表面相遇产生干涉。当两条反射光线的光程差为

$$\begin{aligned} \delta &= 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} \\ &= \begin{cases} 2k \cdot \frac{\lambda}{2} & k=1, 2, 3, \dots \text{明} \\ (2k+1) \frac{\lambda}{2} & k=0, 1, 2, \dots \text{暗} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3-7)$$

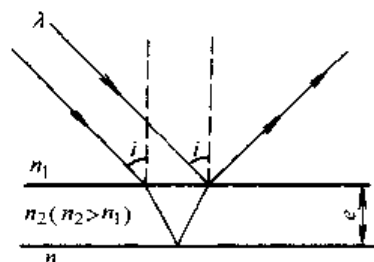


图 2.3-2

式 (2.3-7) 说明当 e, n_1, n_2 一定时, 两条反射光线的光程差随入射角 i 而改变。这样, 不同的干涉明条纹和暗条纹相应地具有不同的倾角, 而同干涉条纹上的各点都具有同一的倾角, 因此这种干涉条纹叫做等倾干涉条纹。等倾条纹为一系列同心圆环。

4. 劈尖干涉

如果薄膜的厚度不均匀, 如图 2.3-3 (a) 所示, 两块平面玻璃片, 一端互相叠合, 另一端夹一薄纸片, 这时, 在两玻璃片之间形成的空气薄膜称为空气劈尖, 两玻璃片的交线称为棱边, 在平行于棱边的线上, 劈尖的厚度是相等的。若波长为 λ 的单色光垂直入射, 则在劈尖上、下表面反射的反射光线在劈尖上表面相遇, 其光程差为

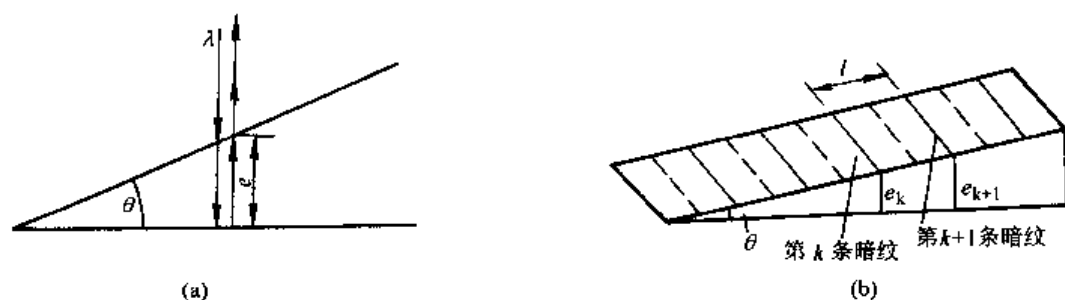


图 2.3-3

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & k = 1, 2, \dots, \text{明} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k = 0, 1, 2, \dots, \text{暗} \end{cases} \quad (2.3-8)$$

式中 e 为光照射处劈尖的厚度。

由上可知，劈尖同一厚度对应同一条干涉条纹，所以干涉条纹为一系列平行于棱边的明暗相间等距分布的平行线。这种入射角 i 一定（这里 $i=0$ ），干涉条纹随薄膜厚度 e 变化， e 相同处于同一条纹上，这种干涉称等厚干涉。

由式 (2.3-8) 可知， $e=0$ 时棱边是暗纹，其余依次是一级明纹；一级暗纹；二级明纹；二级暗纹……。

由式 (2.3-8) 可知，相邻两明（或暗）纹对应的劈尖厚度差为 $\frac{\lambda}{2}$ 。显然，劈尖厚度每增加（或减少） $\frac{\lambda}{2}$ ，明（或暗）纹的级次将增加（或减少）一级。而每相邻两明暗纹对应的劈尖的厚度差应为 $\frac{\lambda}{4}$ 。这是迈克尔逊干涉仪测定微小距离的基本原理。

由图 2.3-3 (b) 可知，相邻明纹（或暗纹）中心间距离称条纹宽度 l 。显然，条纹宽度 l 与劈尖夹角 θ 间关系为

$$l \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad (2.3-9)$$

式 (2.3-9) 告诉我们，当入射光波长确定时， θ 角越大（或越小），条纹宽度 l 将越密（或越宽）。

应该注意：上述结论均是对劈尖为空气时得出的。

5. 牛顿环

如图 2.3-4 所示，在曲率半径很大的平凸透镜和平板玻璃（折射率为 n_1 ）之间形成一厚度不均匀的空气层（ $n_2=1$ ， $n_2 < n_1$ ）。单色光垂直照射时，在空气层上、下表面反射的光，因干涉而得到一系列明暗相间的同心环状干涉条纹，称为牛顿环。

若入射光波长为 λ ，入射角 $i=0$ ，当空气层上、下表面反射光在上表面相遇时的光程差为

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & k = 1, 2, \dots, \text{明} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k = 0, 1, 2, \dots, \text{暗} \end{cases} \quad (2.3-10)$$

由于在同一半径 r 下, 空气层的厚度 e 相等, 故对应着同一条干涉环纹, 所以牛顿环也是等厚干涉条纹。

由式 (2.3-10) 可知, 平凸透镜和平板玻璃在 O 处接触, 在 O 处由于 e 为零, 故两条反射光线的光程差为 $\lambda/2$, 所以接触处为一暗斑。

利用几何关系可以证明, 明环和暗环半径分别为

$$\begin{cases} r = \sqrt{(k - \frac{1}{2})R\lambda} & k = 1, 2, \dots, \\ r = \sqrt{kR\lambda} & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.3-11)$$

式中 R 为平凸透镜的曲率半径。

利用牛顿环可测定入射单色光的波长和平凸透镜的曲率半径。

6. 迈克尔逊干涉仪

迈克尔逊干涉仪是利用光的干涉原理制成的仪器, 它可用来测量微小长度和光波波长。其主要构造和光路如图 2.3-5 所示。若平面镜 M_1 严格垂直平面镜 M_2 , 且分光镜 G_1 到

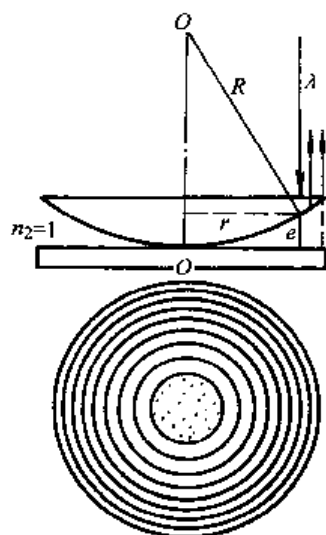


图 2.3-4

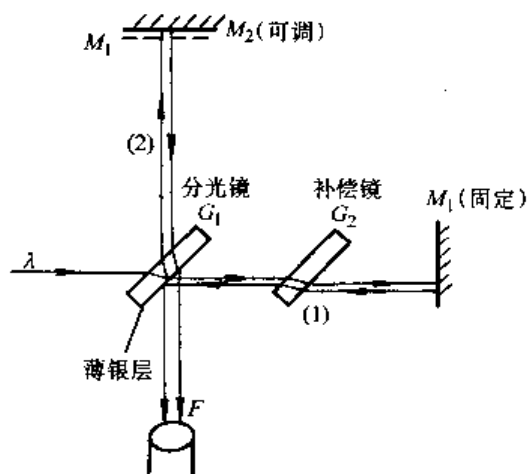


图 2.3-5

M_1 的距离近似等于 G_1 到 M_2 的距离, 则分光镜形成的 M_1 的虚像 M'_1 在 M_2 附近, 且平行于 M_2 , M'_1 与 M_2 之间形成等厚空气层, 在望远镜 F 中将观察到相应的环状等倾条纹。若 M_1 不严格垂直 M_2 , 则在 M'_1 与 M_2 之间就形成空气劈尖, 在望远镜中将观察到相应的等厚条纹。图中的玻璃片 G_2 是一补偿镜。

每当 M_2 平移 $\lambda/2$, 在望远镜内的视场中就有一条明条纹移过; 若在视场中有 N 条明条纹移过, 则 M_2 平移的距离为

$$\Delta d = N \frac{\lambda}{2} \quad (2.3-12)$$

2.3.2 光的衍射

1. 惠更斯-菲涅耳原理

菲涅耳在惠更斯原理的基础上进一步假定, 从同一波阵面上各点所发出的子波, 经传播而在空间某点相遇时, 也可相互叠加而产生干涉现象。这个经过发展了的惠更斯原理称为惠

更斯-菲涅耳原理。它指出在衍射波场中出现衍射条纹的明暗, 实质上是子波干涉的结果, 用惠更斯-菲涅耳原理可以定量计算衍射区域中任一点处的光振动的强弱。但计算较复杂。

2. 夫琅和费单缝衍射

单色平行光垂直入射到单缝上, 缝后放一透镜, 在透镜的焦平面上放一屏, 如图 2.3-6。这种衍射称为夫琅和费衍射, 是一种最简单的衍射。我们用菲涅耳半波带法可得到屏上产生明暗条纹的条件。

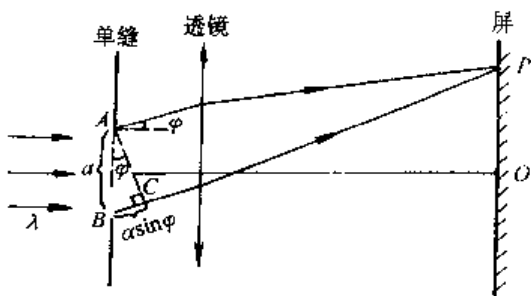


图 2.3-6

$$(1) \text{ 明条纹条件} \quad a \sin \varphi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (2.3-13)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, \text{ 明}$$

式中 a 为单缝的宽度, φ 为衍射角。

$$(2) \text{ 暗条纹条件} \quad a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} \quad (2.3-14)$$

$$k = 1, 2, \dots, \text{ 暗}$$

$$(3) \text{ 中央明条纹条件:} \quad -\lambda < a \sin \varphi < \lambda \quad (2.3-15)$$

(4) 各级明纹宽度为

$$l = \frac{f\lambda}{a} \quad (2.3-16)$$

式中 f 为透镜焦距。

中央明纹的宽度为其他各级明纹宽度的两倍。条纹亮度随级次增大而减弱。

(5) λ 一定时, a 越小, 衍射角 φ 越大, 衍射现象越显著。反之, 在 a 越大时, φ 越小, 衍射现象越不明显。

(6) 白光入射, 出现彩色条纹。

3. 衍射光栅

(1) 光栅常数。光栅是由大量的等宽、等间距的单缝所组成的光学器件, 缝宽 (单缝的透光部分) a 与缝间距 (两相邻单缝之间不透光部分) b 之和 ($a+b$) 称为光栅常数。光栅常数越小, 单位长度的单缝数越多, 光栅越精密。

(2) 光栅公式。单色平行光垂直照射在光栅上, 经凸透镜会聚, 在位于透镜焦平面的屏上出现明暗相间的条纹, 称为光栅衍射条纹, 如图 2.3-7 所示。光栅衍射条纹的明、暗是单缝衍射和缝间干涉的总效果。

光栅衍射在屏上出现的明纹又细又亮, 两明纹之间有较宽的暗区, 我们比较关心明条纹的位置

$$(a+b) \sin \varphi = \pm k\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3-17)$$

$k=0$ 为中央明条纹, $k=1$ 为一级明纹, 以此类推。

(3) 衍射光栅中的缺级、重级和限级。

缺级: 若衍射光栅的某一级明条纹 (k 级) 对应的衍射角为 φ , 而在这个 φ 处恰好是单缝衍射的第 k' 级暗纹处, 这时光栅衍射的第 k 级明纹就不见了, 称为缺级。缺级条件显然是

$$\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'} \text{ (为整数)}$$

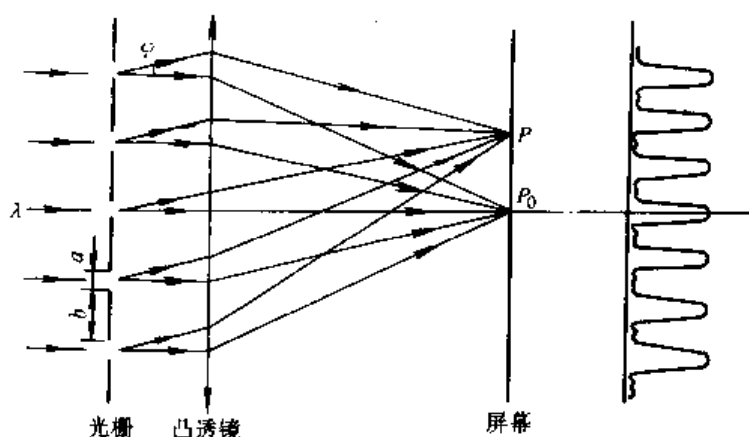


图 2.3-7

重级：若有两种不同波长的单色光入射同一光栅，这就有可能较大波长的低级次和较小波长的高级次具有相同的衍射角，于是就出现了重级。重级条件显然是

$$k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$$

限级：由于 $|\sin \varphi| \leq 1$ ，所以当光栅常数和入射光波长一定时， k 值有限，即明纹条数有限。

(4) 白光入射光栅，除中央明纹外，其他各级明纹都成为彩色光谱。

4. 小圆孔的衍射、光学仪器分辨本领

单色平行光垂直入射在小圆孔上，经凸透镜会聚，在位于透镜焦平面的屏幕上出现明暗交替的圆环，中心光斑称为爱里斑。

若入射光波长为 λ ，圆孔直径为 D ，透镜焦距为 f ，爱里斑直径为 d ，如图 2.3-8 所示，爱里斑对透镜光心张角

$$2\theta = \frac{d}{f} = 2.44 \frac{\lambda}{D}$$

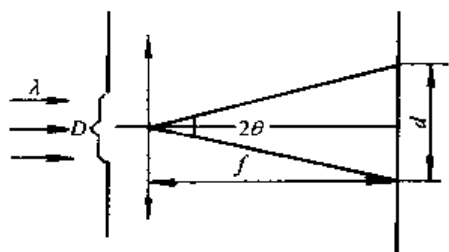


图 2.3-8

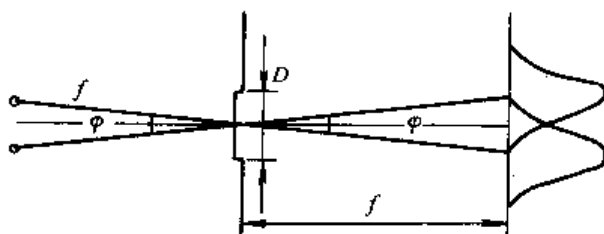


图 2.3-9

对一个光学仪器来说，如果一个点光源的衍射图样的中央最亮处（爱里斑中心）恰好与另一个点光源的衍射图样的第一个最暗处相重合，如图 2.3-9 所示，这时两个点光源恰好能被仪器分辨（该条件称瑞利准则）。此时，两个点光源的衍射图样的中央最亮处（两个爱里斑的中心）之间的距离为爱里斑的半径，两个点光源对透镜光心的张角为

$$\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (2.3-18)$$

式中 φ 称为最小分辨角 (因为 $\varphi = \theta \approx \sin \theta$)。

最小分辨角的倒数称为该仪器的分辨率, 即

$$\text{光学仪器分辨率} = \frac{1}{\varphi} = \frac{D}{1.22\lambda} \quad (2.3-19)$$

显然, 由式 (2.3-18) 或 (2.3-19) 可知, 要提高光学仪器分辨率的途径是增大仪器的孔径 D , 或减小入射光波的波长 λ 。

5. x 射线衍射

伦琴射线亦称 X 射线。X 射线通过晶体时, 也会产生衍射现象。若一束平行单色 X 射线, 以掠射角 φ 射向晶体的晶面, 一部分被表面层原子所散射, 其余部分将被晶体内部各原子层所散射。设各原子层 (或晶面) 之间的距离为 d (称为晶格常数), 则被相邻的上、下两原子层 (晶面) 散射的 X 射线的光程差满足

$$2d \sin \varphi = k\lambda \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (2.3-20)$$

时为相互干涉加强, 如图 2.3-10 所示, 式 (2.3-20) 称为布喇格公式。

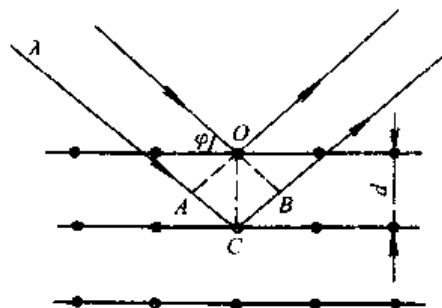


图 2.3-10

2.3.3 光的偏振

1. 自然光和偏振光

1) 自然光

光是电磁波, 光矢量 E 在垂直于光的传播方向的平面内振动。由于光源是大量原子发出的光彼此独立, 所以光振动在垂直于光的传播方向的平面内沿各个方向的强度相等, 这种性质的光称为自然光。

我们可将自然光的光振动正交分解为两个相互垂直而振幅相等的光振动, 用 “ \cdot ” 表示垂直纸面的分振动, 用 “ $|$ ” 表示在纸面内的分振动, 如图 2.3-11 所示。上述两个相互垂直的光振动之间没有固定的相位关系。

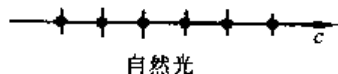


图 2.3-11

2) 偏振光和部分偏振光

偏振光: 把自然光的两个互相垂直的光振动中的一个全部去掉, 使光振动在垂直于光的传播方向的平面内只沿一个方向振动, 这种光称为 (线) 偏振光或完全偏振光, 如图 2.3-12 所示。它的光强度为自然光的强度的一半。



图 2.3-12

a) 光振动垂直纸面的偏振光 b) 光振动在平行于纸面内的偏振光

部分偏振光: 如果把自然光的两个互相垂直的光振动中的一个只去掉一部分, 就成为部分偏振光, 如图 2.3-13 所示。



图 2.3-13

a) 垂直纸面光振动较强的部分偏振光 b) 在纸面内光振动较强的部分偏振光

2. 反射和折射时光的偏振、布儒斯特定律

(1) 反射和折射时光的偏振。如图 2.3-14 (a) 所示, 自然光以入射角 i_0 从折射率 n_1 的介质射向折射率为 n_2 的介质, 其反射光和折射光都为部分偏振光, 偏振化程度与入射角 i 有关。

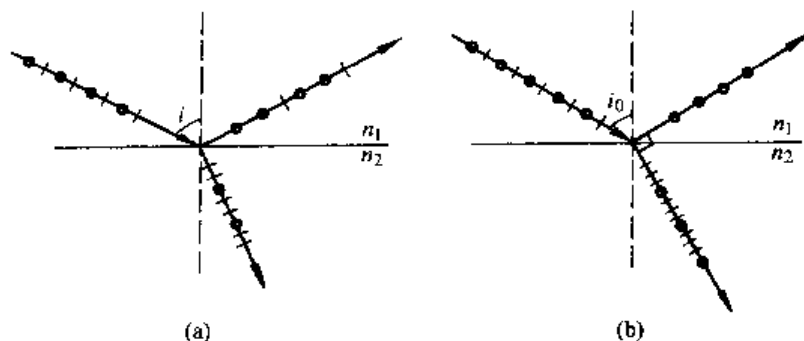


图 2.3-14

(2) 布儒斯特定律。当入射角 i_0 满足

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.3-21)$$

时, 反射光为完全偏振光, 光矢量的振动方向如图 2.3-14 (b) 所示。

3. 偏振片的起偏和检偏、马吕斯定律

(1) 起偏和检偏

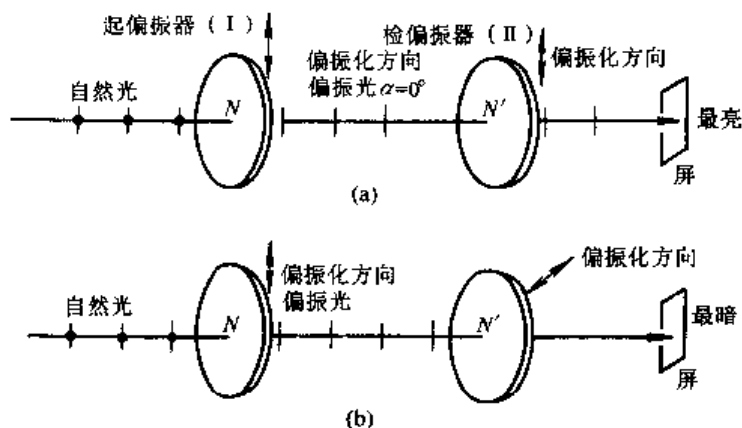


图 2.3-15

自然光通过偏振片 N 后成为偏振光, 其光矢量的振动方向与偏振片的偏振化方向一致, 如图 2.3-15 所示。这时, 偏振片 N 就成为起偏振器。为了检验入射光是否为偏振光, 可使偏振片 N' 旋转。当 N' 的偏振化方向与入射光的光矢量振动方向一致时, 屏上最亮; 当旋转 N' 偏振片时, 屏上亮度逐渐减弱; 当旋转至 N' 的偏振化方向和入射光的光矢量振动方向垂直时, 屏上最暗。这时, 偏振片 N' 就成了检偏器。

(2) 马吕斯定律

若起偏振器的偏振化方向与检偏振器的偏振化方向之间的夹角为 α ，通过起偏振器后的偏振光的强度为 I_0 ，通过检偏振器后的偏振光的强度为 I ，则

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \quad (2.3-22)$$

称为马吕斯定律。

4. 光的双折射现象

1) 光的双折射现象

光通过各向异性晶体，出现两束折射光线，这种现象称为双折射现象。其中一束光线遵从折射定律，称为寻常光线，用 o 表示，也称 o 光；另一束光线不遵从折射定律，称为非常光线，用 e 表示，也称 e 光。出现双折射现象的原因是由于 o 、 e 光在晶体中沿各个方向的传播速度不同（因而折射率也不同），如图 2.3-16。

2) 光轴

光沿某一特定方向通过各向异性晶体时，不产生双折射现象，在这个方向， o 、 e 光的传播速度相同，这个特定的方向就是晶体的光轴。注意，光轴代表一个方向，而不是一条直线。

3) 主截面

通过光轴并与晶体的任一晶面正交的面称为该晶体的主截面。

当入射光线在主截面内时， o 、 e 光均在主截面内，但 o 光的振动方向垂直于主截面， e 光的振动方向平行于主截面， o 光和 e 光都是偏振光。

4) 尼科耳棱镜

利用方解石晶体可制成尼科耳棱镜，用它可使自然光转变为偏振光。所以可以作为起偏器和检偏器使用，如图 2.3-17。

5. 椭圆偏振光和圆偏振光

自然光通过偏振片 I 成为振幅为 A_1 的偏

振光，让其垂直通过光轴平行于晶面的厚度为 d 的晶体，形成 o 光（振动面与晶体的主截面垂直）和 e 光（振动面与晶体的主截面平行），两者频率相同且沿同一方向传播。若晶体光轴与偏振片的偏振化方向夹角为 α ，则 o 、 e 光的振幅分别为 $A_o = A_1 \sin \alpha$ ， $A_e = A_1 \cos \alpha$ ，如图 2.3-18 所示，两束光通过晶体后的相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{d |n_o - n_e|}{\lambda} \quad (2.3-23)$$

式中， n_o 为 o 光在晶体中的折射率； n_e 为 e 光在垂直于晶体光轴方向上的主折射率。

(1) 若 $\Delta\varphi = k\pi$ (k 为整数)，则通过晶体后两束光合成为线偏振光。

(2) 若 $\Delta\varphi \neq k\pi$ 时，通过晶体后两束光合成为椭圆偏振光。

(3) 若 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\pi$ ，且 $\alpha = 45^\circ$ ($A_e = A_o$)，则通过晶体后两束光合成为圆偏振光。

使 o 、 e 光的光程差为 $\frac{\lambda}{4}$ （即相位差为 $\frac{\pi}{2}$ ）的晶片称为 $\frac{1}{4}$ 波片， $\frac{1}{4}$ 波片的最小厚度为 $d =$

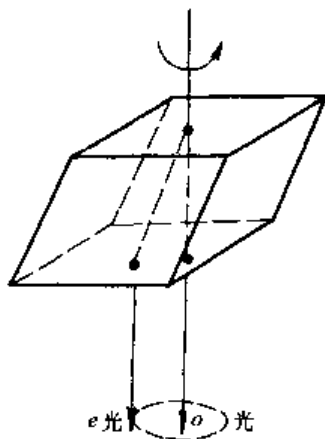


图 2.3-16

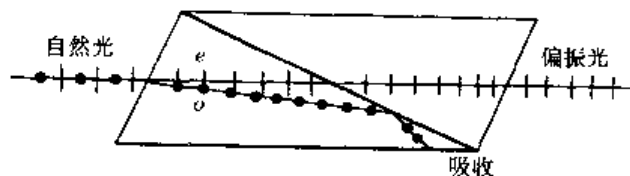


图 2.3-17

$\frac{\lambda}{4(n_o - n_e)}$, 不同波长的光, $\frac{1}{4}$ 波片的最小厚度不同, 使 o 、 e 光的光程差为 $\frac{\lambda}{2}$ (相位差为 π) 的晶片称为 $\frac{1}{2}$ 波片, $\frac{1}{2}$ 波片的最小厚度为 $d = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)}$ 。它也是对一定波长而言的。在 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 这种 $\frac{1}{2}$ 波片可用来使线偏振光的振动面旋转 $\frac{\pi}{2}$ 。

6. 偏振光的干涉

振幅为 A_1 的偏振光通过晶体后形成 o 、 e 光, 这两束光频率相同, 存在一定相位差, 只是由于振动方向相互垂直而不相干, 于是利用偏振片 II (偏振化方向与偏振片 I 的偏振化方向正交, 如图 (2.3-19) 把 o 、 e 光的振动方向引到同一方向, 这样就成为两束相干的偏振光, 通过偏振片 II 后, o 、 e 光的振幅为

$$A_{2o} = A_{2e} = A_1 \cos \alpha \sin \alpha$$

o 、 e 光的总相位差

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{d(n_o - n_e)}{\lambda} + \pi$$

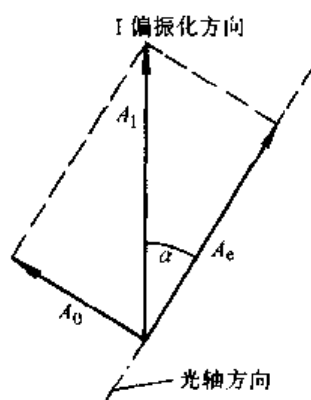


图 2.3-18

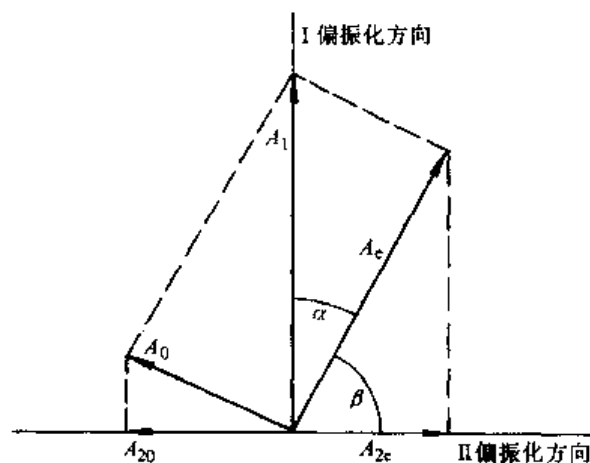


图 2.3-19

当

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 2k\pi & (k \text{ 为整数}) \quad \text{明} \\ (2k+1)\pi & \quad \quad \quad \text{暗} \end{cases}$$

或者说, 当 o 、 e 光的光程差为

$$\delta = d(n_o - n_e) = \begin{cases} (2k-1)\frac{\lambda}{2} & (k \text{ 均为整数}) \quad \text{明} \\ k\lambda & \quad \quad \quad \text{暗} \end{cases}$$

7. 人为双折射现象

下面介绍几种人为双折射及其应用。

(1) 光弹性效应。非晶体透明物质, 如玻璃、赛璐珞等, 当存在内应力时, 也能呈现双折射现象。通过对干涉条纹形状的分析, 可以研究应力的分布。

(2) 电光效应。某些物质在通常情况下是各向同性的物质, 不具有双折射性质, 但在外加电场作用下, 可转化为各向异性物质, 产生双折射。这种现象叫电致双折射, 又叫克尔效应。

(3) 磁致双折射。和电场作用下产生双折射现象一样, 在磁场的作用下, 某些原来各向同性的物质, 也可变成各向异性物质, 产生双折射。这种现象称为磁致双折射。

例 2.3.1 在双缝干涉实验中, 用钠光灯作光源 ($\lambda = 589.3 \text{ nm}$), 双缝距屏 $D = 500 \text{ mm}$, 双缝间距为 $d = 1.2 \text{ mm}$, 计算相邻明条纹或相邻暗条纹间距 Δx 。

$$\text{解 } \Delta x = \frac{D}{d} \cdot \lambda = \frac{500}{1.2} \times 589.3 \times 10^{-6} = 0.25 \text{ mm}$$

例 2.3.2 用曲率半径 $R = 4.5 \text{ m}$ 的平凸透镜作牛顿环实验, 测得第 k 个暗环半径 $r_k = 4.95 \text{ mm}$, 第 $k+5$ 个暗环半径 $r_{k+5} = 6.065 \text{ mm}$, 问所用单色光的波长是多大?

解 由牛顿环暗环公式 $r = \sqrt{kR\lambda}$ 可知

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} \quad r_{k+5} = \sqrt{(k+5)R\lambda}$$

二式联立得

$$\lambda = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5R} = \frac{6.065^2 - 4.95^2}{5 \times 4.5 \times 10^3} = 5.46 \times 10^{-4} \text{ nm}$$

例 2.3.3 用波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的平行光, 垂直入射于宽度为 $a = 0.15 \text{ mm}$ 的狭缝上, 缝后以焦距 $f = 40 \text{ cm}$ 的凸透镜把衍射光会聚于屏幕上, 试求中央明纹及其他各明条纹宽度。

解 各级明条纹宽度为

$$l = \frac{f\lambda}{a} = \frac{400 \times 6.328 \times 10^{-4}}{0.15} = 1.7 \text{ mm}$$

中央明条纹宽度为其他各级明条纹宽度的 2 倍。

例 2.3.4 在通常亮度下, 人眼睛瞳孔直径约为 3 mm , 视觉感受最灵敏的光波波长为 550 nm , 问人眼最小分辨角是多大?

解

$$\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D} = \frac{1.22 \times 5.5 \times 10^{-4}}{3} = 2.24 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.8'$$

例 2.3.5 波长 $\lambda = 546.1 \text{ nm}$ 的绿光垂直照射于每厘米有 3 000 条刻线的光栅上, 该光栅的刻痕宽与透光缝宽相等, 问能看到几条光谱线?

解 光栅常数 $a + b = \frac{1}{3\,000} \text{ cm}$, 且 $a = b$, 入射光波长

$$\lambda = 546.1 \text{ nm} = 5.461 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

根据光栅公式

$$(a + b)\sin\varphi = \pm k\lambda$$

当 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, $k = 6.1$, 但 k 值只能取整数, 所以最多只能看到从中央明纹到第六级光谱线。

题中又给出条件 $a = b$, 这表明 $k = 2, 4, 6$ 的谱线缺级, 因此只能看到 $k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5$ 的各级谱线, 共有 7 条。

例 2.3.6 水的折射率为 1.33, 玻璃的折射率为 1.50, 当自然光从水中射向玻璃而反射时, 起偏振角 (布儒斯特角) 为多少?

解 由布儒斯特定律

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1.50}{1.33} = 1.128$$

所以

$$i_0 = 48.44^\circ$$

例 2.3.7 若入射自然光光强为 I_0 , 检偏器尼科耳 B 的主截面与起偏器尼科耳 A 的主截面夹角为 20° 时, 透过尼科耳 B 的光强是多少?

解 自然光进入尼科耳后分解为 o 光和 e 光, 二者光强相等, 各为 $I_0/2$ 。其中 o 光被偏折以后吸收掉, 因此透出 A 而入射于尼科耳 B 的光强只是 $I_0/2$ 。

由马吕斯定律, 可得透出 B 的光强 I 为

$$I = \left(\frac{I_0}{2}\right) \cos^2 20^\circ = 0.44 I_0$$

模拟试题

1. 有两种理想气体, 第一种压强为 p_1 , 体积为 V_1 , 温度为 T_1 , 总质量为 M_1 , 摩尔质量为 μ_1 ; 第二种的压强为 p_2 , 体积为 V_2 , 温度为 T_2 , 总质量为 M_2 , 摩尔质量为 μ_2 。

当 $V_1 = V_2$, $T_1 = T_2$, $M_1 = M_2$ 时, 则 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 为 ()。

$$(A) \frac{\mu_1}{\mu_2} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \quad (B) \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (C) \frac{\mu_1}{\mu_2} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \quad (D) \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

2. 若理想气体的体积为 V , 压强为 p , 温度为 T , 一个分子的质量为 m , k 为波耳兹曼常数, R 为摩尔气体常量, 该理想气体的分子数为 ()。

$$(A) pV/m \quad (B) pV/(kT) \quad (C) pV/(RT) \quad (D) pV/(mT)$$

3. 两瓶不同种类的理想气体, 它们的温度和压强都相同, 但体积不同, 则单位体积内的气体分子数 n , 单位体积内的气体分子的总平动动能 (E_K/V), 单位体积内的气体质量 ρ 分别有如下的关系 ()。

$$(A) n \text{ 不同}, (E_K/V) \text{ 不同}, \rho \text{ 不同} \quad (B) n \text{ 不同}, (E_K/V) \text{ 不同}, \rho \text{ 相同}$$

$$(C) n \text{ 相同}, (E_K/V) \text{ 相同}, \rho \text{ 不同} \quad (D) n \text{ 相同}, (E_K/V) \text{ 相同}, \rho \text{ 相同}$$

4. 分子的平均平动动能, 分子的平均动能, 分子的平均能量, 在一定温度时有如下关系 ()。

$$(A) \text{三者一定相等} \quad (B) \text{前两者相等}$$

$$(C) \text{后两者相等} \quad (D) \text{对于单原子理想气体三者相等}$$

5. $f(v)$ 是麦克斯韦速率分布函数, n 是单位体积内所具有的分子数, 则 $nf(v)dv$ 的物理意义是 ()。

$$(A) \text{单位体积内速率为 } v \text{ 的分子数目}$$

$$(B) \text{单位体积内分子速率在 } v \rightarrow v+dv \text{ 间隔内的分子数占总分子数的比率}$$

$$(C) \text{分子速率为 } v \text{ 的分子总数}$$

$$(D) \text{单位体积内, 分子速率在 } v \rightarrow v+dv \text{ 区间中的分子数目}$$

6. $f(v)$ 是麦克斯韦速率分布函数, 则 $\int_0^\infty v f(v) dv$ 表示的是 ()。

$$(A) \text{方均根速率} \quad (B) \text{最可几速率}$$

$$(C) \text{算术平均速率} \quad (D) \text{与速率无关}$$

7. 一定量的理想气体, 在温度不变的条件下, 当容积增大时, 分子的平均碰撞次数 \bar{Z} 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的变化情况是 ()。

- (A) \bar{Z} 减小而 $\bar{\lambda}$ 不变 (B) \bar{Z} 减小而 $\bar{\lambda}$ 增大
(C) \bar{Z} 增大而 $\bar{\lambda}$ 减小 (D) \bar{Z} 不变而 $\bar{\lambda}$ 增大

8. 一定量的理想气体, 等容升温, 则分子的 ()。

- (A) $\bar{\lambda}$ 增加, \bar{z} 增加 (B) $\bar{\lambda}$ 不变, \bar{z} 增加
(C) $\bar{\lambda}$ 不变, \bar{z} 不变 (D) $\bar{\lambda}$ 增加, \bar{z} 不变

9. 在一封闭容器中盛有 1 mol 氦气 (视作理想气体), 这时分子无规则运动的平均自由程仅决定于 ()。

- (A) 压强 p (B) 体积 V (C) 温度 T (D) 平均碰撞频率 \bar{Z}

10. 在标准状态下, 若氢气 (可视作刚性双原子分子的理想气体) 和氮气的体积比为 $V_1/V_2 = 1/2$, 则其内能之比 E_1/E_2 为 ()。

- (A) 1/2 (B) 5/3 (C) 5/6 (D) 3/10

11. 对于理想气体系统来说, 在下列过程中, 哪个过程系统所吸收的热量、内能的增量和对外做的功三者均为负值? ()。

- (A) 等容降压过程 (B) 等温膨胀过程
(C) 绝热膨胀过程 (D) 等压压缩过程

12. 质量一定的理想气体, 从相同状态出发, 分别经历等温过程、等压过程和绝热过程, 使其体积增加一倍。那么气体温度的改变 (绝对值) 在 ()。

- (A) 绝热过程中最大, 等压过程中最小
(B) 绝热过程中最大, 等温过程中最小
(C) 等压过程中最大, 绝热过程中最小
(D) 等压过程中最大, 等温过程中最小

13. 一定量某理想气体按 $pV^2 = \text{恒量}$ 的规律膨胀, 则膨胀后理想气体的温度 ()。

- (A) 将升高 (B) 将降低
(C) 不变 (D) 升高还是降低, 不能确定

14. 1 mol 的单原子分子理想气体从状态 A 变为状态 B, 如果不知是什么气体, 变化过程也不知道, 但 A、B 两态的压强、体积和温度都知道, 则可求出 ()。

- (A) 气体所做的功 (B) 气体内能的变化
(C) 气体传给外界的热量 (D) 气体的质量

15. 热力学第二定律可表述为 ()。

- (A) 功可以完全变为热, 但热不能完全变为功
(B) 热量不能从低温物体传到高温物体
(C) 热可以完全变为功, 但功不能完全变为热
(D) 热量不能自动地由低温物体传到高温物体

16. 热力学第二定律指出: 一个不受外界影响的封闭系统, 其内部发生的过程 ()。

- (A) 总是保持系统熵不变
(B) 总是沿着无序减少的方向进行
(C) 总是由包含微观状态数目多的宏观状态向包含微观状态数目少的宏观状态进行

(D) 总是由几率小的状态向几率大的状态进行

17. “理想气体和单一热源接触作等温膨胀时, 吸收的热量全部用来对外做功”。对此说法, 有如下几种评论, 正确的是 ()。

- (A) 不违反热力学第一定律, 但违反热力学第二定律
- (B) 不违反热力学第二定律, 但违反热力学第一定律
- (C) 不违反热力学第一定律, 也不违反热力学第二定律
- (D) 违反热力学第一定律, 也违反热力学第二定律

18. 理想气体向真空作绝热膨胀, 则 ()。

- (A) 膨胀后, 温度不变, 压强减小
- (B) 膨胀后, 温度降低, 压强减小
- (C) 膨胀后, 温度升高, 压强减小
- (D) 膨胀后, 温度不变, 压强增加

19. 关于可逆过程的判断 ()。

- (A) 可逆热力学过程一定是准静态过程
- (B) 准静态过程一定是可逆过程
- (C) 可逆过程就是能向相反方向进行的过程
- (D) 凡无摩擦的过程, 一定是可逆过程

20. 关于可逆过程和不可逆过程有以下几种说法。

- (1) 可逆过程一定是平衡过程
- (2) 平衡过程一定是可逆过程
- (3) 不可逆过程一定找不到另一过程使系统和外界同时复原
- (4) 非平衡过程一定是不可逆过程

以上说法, 正确的是 ()。

- (A) (1)、(2)、(3) (B) (2)、(3)、(4)
- (C) (1)、(3)、(4) (D) (1)、(2)、(3)、(4)

21. 设高温热源的热力学温度是低温热源的热力学温度的 n 倍, 则理想气体在一次卡诺循环中, 传给低温热源的热量是从高温热源吸取的热量的 ()。

- (A) n 倍 (B) $n-1$ 倍 (C) $\frac{1}{n}$ 倍 (D) $\frac{n+1}{n}$ 倍

22. 在温度分别为 327°C 和 27°C 的高温热源和低温热源之间工作的热机, 理论上最大效率为 ()。

- (A) 25% (B) 50% (C) 75% (D) 91.74%

23. 一定量的理想气体向真空作绝热自由膨胀, 体积由 V_1 增至 V_2 , 在此过程中气体的 ()。

- (A) 内能不变, 熵减少 (B) 内能不变, 熵增加
- (C) 内能不变, 熵不变 (D) 内能增加, 熵增加

24. 若一平面简谐波的波动方程为 $y = A \cos(Bt - Cx)$, 式中 A 、 B 、 C 为正值恒量, 则 ()。

- (A) 波速为 C (B) 周期为 $\frac{1}{B}$ (C) 波长为 $\frac{2\pi}{C}$ (D) 角频率为 $\frac{2\pi}{B}$

25. 在简谐波传播过程中, 沿传播方向相距为 $\frac{1}{2}\lambda$ (λ 为波长) 的两点的振动速度必定 ()。
- (A) 大小相等, 而方向相反 (B) 大小和方向均相同
(C) 大小不同, 方向相同 (D) 大小不同, 而方向相反
26. 机械波波动方程为 $y = 0.03\cos 6\pi(t + 0.01x)$ (SI), 则 ()。
- (A) 其振幅为 3 m (B) 其周期为 $\frac{1}{3}$ s
(C) 其波速为 10 m/s (D) 波沿 x 轴正向传播
27. 频率为 100 Hz, 传播速度为 300 m/s 的平面简谐波, 波线上两点振动的相位差为 $\frac{1}{3}\pi$, 则此两点相距 ()。
- (A) 2 m (B) 2.19 m (C) 0.5 m (D) 28.6 m
28. 一平面简谐波在弹性介质中传播时, 某一时刻在传播方向上介质中某质元在负的最大位移处, 则它的能量是 ()。
- (A) 动能为零, 势能最大 (B) 动能为零, 势能为零
(C) 动能最大, 势能最大 (D) 动能最大, 势能为零
29. 一平面简谐波在弹性介质中传播, 在某一瞬时, 介质中某质元正处于平衡位置, 此时它的能量是 ()。
- (A) 动能为零, 势能最大 (B) 动能为零, 势能为零
(C) 动能最大, 势能最大 (D) 动能最大, 势能为零
30. 一平面简谐波在弹性介质中传播, 在介质质元从最大位移处回到平衡位置的过程中 ()。
- (A) 它的势能转换成动能
(B) 它的动能转换成势能
(C) 它从相邻的一段介质质元获得能量, 其能量逐渐增加
(D) 它把自己的能量传给相邻的一段介质质元, 其能量逐渐减小
31. 一平面简谐波在弹性介质中传播, 在介质质元从平衡位置运动到最大位移处的过程中 ()。
- (A) 它的动能转换成势能
(B) 它的势能转换成动能
(C) 它从相邻的一段质元获得能量其能量逐渐增大
(D) 它把自己的能量传给相邻的一段质元, 其能量逐渐减小
32. 已知一平面简谐波的波动方程为 $y = 0.1\cos 2\pi(2t - 0.1x)$ ($x \geq 0$) (SI), 当 $t = \frac{T}{4}$ 时, 在 $x = \frac{\lambda}{4}$ 处质点的振动速度为 ()。
- (A) $0.4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (B) $-0.4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (C) $0.4 \pi^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (D) 0
33. 两相干波源 S_1 与 S_2 相距 $\frac{3}{4}\lambda$ (λ 为波长), 设两波在 S_1 、 S_2 连线上传播时, 它们的振幅都是 A , 且不随距离变化, 已知在该直线上在 S_1 左侧各点的合成波的强度为其中一

个波强度的 4 倍, 则两波源应满足的相位条件是 ()。

- (A) S_1 比 S_2 超前 $\frac{3\pi}{2}$ (B) S_1 比 S_2 超前 2π
 (C) S_2 比 S_1 超前 $\frac{3\pi}{2}$ (D) S_2 比 S_1 超前 2π

34. 两相干平面简谐波振幅都是 4 cm, 两波源相距 30 cm, 相位差为 π , 在两波源连线的中垂线上任意一点 P , 两列波叠加后合振幅为 ()。

- (A) 8 cm (B) 16 cm (C) 30 cm (D) 0

35. 在一根很长的弦线上 (视为 x 轴), 有两列波传播, 其方程式为

$$y_1 = 6.0 \times 10^{-2} \cos \frac{\pi}{2}(x - 40t)(\text{SI})$$

$$y_2 = 6.0 \times 10^{-2} \cos \frac{\pi}{2}(x + 40t)(\text{SI})$$

它们叠加后形成驻波, 则波节的位置是 ()。

- (A) $x = \pm 2k \text{ m}$ (B) $x = \pm (2k + 1)/2 \text{ m}$
 (C) $x = \pm (2k + 1) \text{ m}$ (D) $x = \pm (2k + 1)/4 \text{ m}$

36. 一细绳垂直固接于墙壁的 A 点, 一列波沿细绳传播, 并在 A 点反射, 已知绳中 D 点到 A 点距离为 $\frac{\lambda}{8}$, 则 D 点处入射波比反射波的相位 ()。

- (A) 超前 $\frac{5\pi}{2}$ (B) 超前 $\frac{\pi}{2}$ (C) 超前 $\frac{3\pi}{2}$ (D) 超前 $\frac{2\pi}{3}$

37. 正在报警的警钟, 每隔 0.5 s 响一声, 一声接一声地响着。有一个人在以 60 km/h 的速度向警钟所在地接近的火车中, 若声速为 $u = 340 \text{ m/s}$, 则这个人每分钟听到的响声为 ()。

- (A) 100 响 (B) 126 响 (C) 200 响 (D) 2 响

38. 两种声音的声强级差 1 分贝, 则它们的强度之比为 ()。

- (A) 0.26 (B) 126 (C) 0.026 (D) 1.26

39. 在双缝干涉实验中, 两缝间距离为 d , 双缝与屏幕之间的距离为 D ($D \gg d$)。波长为 λ 的平行单色光垂直照射到双缝上, 屏幕上干涉条纹中相邻暗纹之间的距离是 ()。

- (A) $2\lambda D/d$ (B) $\lambda d/D$ (C) dD/λ (D) $\lambda D/d$

40. 在双缝干涉实验中, 光的波长为 600 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$), 双缝间距为 2 mm, 双缝与屏的间距为 300 cm。在屏上形成的干涉图样的明条纹间距为 ()。

- (A) 4.5 mm (B) 0.9 mm (C) 3.1 mm (D) 1.2 mm

41. 在双缝干涉实验中, 为使屏上的干涉条纹间距变大, 可以采用的办法是 ()。

- (A) 使屏靠近双缝 (B) 使两缝的间距变小
 (C) 把两缝的宽度稍微调窄 (D) 改用波长较小的单色光源

42. 某单色光在折射率为 n 的介质中由 A 点传到 B 点, 相位 φ 变化为 π , 则 A 、 B 两点间光所走的几何路程为 (λ 为真空中波长) ()。

- (A) $\frac{\lambda}{2n}$ (B) $\frac{\lambda}{2}$ (C) λ (D) $\frac{\lambda}{n}$

43. 用波长为 λ 的平行单色光垂直照射折射率为 n 的劈尖薄膜, 形成等厚干涉条纹, 若

测得相邻两明条纹的间距为 l , 则劈尖角 θ 为 ()。

- (A) $\frac{\lambda}{2l}$ (B) $\frac{\lambda}{2nl}$ (C) $\arctan \frac{\lambda}{2l}$ (D) $\arcsin \frac{\lambda}{2l}$

44. 若用一片透明的云母片将杨氏双缝装置中的上面一条缝盖住, 则 ()。

- (A) 干涉图样不变 (B) 干涉图样反差
(C) 干涉条纹上移 (D) 干涉条纹下移

45. 用白光做杨氏双缝实验, 在屏幕上将看到彩色干涉条纹, 若用两块纯红色和纯蓝色的滤光片, 分别同时遮住双缝, 则屏幕上 ()。

- (A) 干涉条纹的亮度发生改变 (B) 干涉条纹的宽度发生改变
(C) 产生红光和蓝光的两套彩色干涉条纹 (D) 不产生干涉条纹

46. 若把牛顿环装置 (都是用折射率为 1.52 的玻璃制成的) 由空气搬入折射率为 1.33 的水中, 则干涉条纹 ()。

- (A) 中心暗斑变成亮斑 (B) 变疏 (C) 变密 (D) 间距不变

47. 一束波长为 λ 的单色光由空气垂直入射到折射率为 n 的透明薄膜上, 透明薄膜放在空气中, 要使反射光得到干涉加强, 则薄膜最小的厚度为 ()。

- (A) $\lambda/4$ (B) $\lambda/(4n)$ (C) $\lambda/2$ (D) $\lambda/(2n)$

48. 在迈克耳逊干涉仪的一条光路中插入一块折射率为 n , 厚度为 d 的透明薄片, 插入这块薄片使这条光路的光程改变 ()。

- (A) $(n-1)d$ (B) $2(n-1)d$ (C) $2nd$ (D) nd

49. 若迈克耳逊干涉仪的反射镜 M_2 平移距离为 0.322 0 mm 时, 测得某单色光的干涉条纹移过 1 024 条, 则该单色光的波长为 ()。

- (A) 6.289×10^{-7} m (B) 5×10^{-7} m
(C) 4×10^{-7} m (D) 7×10^{-7} m

50. 在单缝夫琅和费衍射实验中, 波长为 λ 的单色光垂直入射到宽度为 $a = 4\lambda$ 的单缝上, 对应于衍射角为 30° 的方向, 单缝处波阵面可分成的半波带数目为 ()。

- (A) 2 个 (B) 4 个 (C) 6 个 (D) 8 个

51. 波长为 λ 的单色平行光垂直入射到一狭缝上, 若第一级暗纹的位置对应的衍射角为 $\theta = \pm \pi/6$, 则缝宽的大小为 ()。

- (A) $\frac{\lambda}{2}$ (B) λ (C) 2λ (D) 3λ

52. 波长 $\lambda = 500$ nm 的单色光垂直照射在一缝宽 $a = 0.25$ mm 的单缝处, 在衍射图样中, 中央明条纹一侧第三条暗条纹和另一侧第三条暗条纹之间的距离为 12 mm, 则透镜焦距为 ()。

- (A) 1.2 m (B) 2.0 m (C) 1.0 m (D) 0.5 m

53. 一单色平行光束垂直照射在宽度为 1.0 mm 的单缝上, 在缝后放一焦距为 2.0 m 的会聚透镜。已知位于透镜焦平面处的屏幕上的中央明条纹宽度为 2.0 mm, 则入射光波长约为 ()。

- (A) 1 000 nm (B) 400 nm (C) 500 nm (D) 600 nm

54. 一束白光垂直照射到一光栅上, 在形成的同一级光栅光谱中, 偏离中央明纹最远的是 ()。

- (A) 紫光 (B) 绿光 (C) 黄光 (D) 红光

55. 若用衍射光栅准确测定一单色可见光的波长, 在下列各种光栅常数的光栅中选择哪一种最好? ()。

- (A) 1.0×10^{-1} mm (B) 5.0×10^{-1} mm
(C) 1.0×10^{-2} mm (D) 1.0×10^{-3} mm

56. 一束平行单色光垂直入射到光栅上, 当光栅常数 ($a+b$) 为下列哪种情况时 (a 代表每条缝的宽度), $k=3, 6, 9$ 等级次的主极大均不出现? ()。

- (A) $a+b=2a$ (B) $a+b=3a$ (C) $a+b=4a$ (D) $a+b=6a$

57. 某元素的特征光谱中含有波长分别为 $\lambda_1=450$ nm 和 $\lambda_2=750$ nm ($1 \text{ nm}=10^{-9} \text{ m}$) 的光谱线。在光栅光谱中, 这两种波长的谱线有重叠现象, 重叠处 λ_2 的谱线的级数将是 ()。

- (A) 2, 3, 4, 5…… (B) 2, 5, 8, 11……
(C) 2, 4, 6, 8…… (D) 3, 6, 9, 12……

58. 天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 4.84×10^{-6} 弧度, 由它们发出的光波波长 $\lambda=5.50 \times 10^{-5}$ cm, 若能分辨出这两颗星, 望远镜物镜的口径至少为 ()。

- (A) 10 cm (B) 13.9 cm (C) 50 cm (D) 100 cm

59. 我们比较两条单色的 X 射线的谱线时注意到, 谱线 A 在一个晶体的光滑面成 30° 的掠射角处给出第一级反射极大。已知谱线 B 的波长为 0.097 nm。这谱线 B 在与同一晶体的同一光滑面成 60° 的掠射角处, 给出第三级的反射极大, 则谱线 A 的波长为 ()。

- (A) 0.158 nm (B) 0.168 nm (C) 0.148 nm (D) 0.178 nm

60. 自然光以 60° 的入射角照射到某两介质交界面时, 反射光为完全偏振光, 则知折射光为 ()。

- (A) 完全偏振光且折射角是 30°
(B) 部分偏振光且只是在该光由真空入射到折射率为 $\sqrt{3}$ 的介质时, 折射角是 30°
(C) 部分偏振光, 但须知两种介质的折射率才能确定折射角
(D) 部分偏振光且折射角是 30°

61. 今测得釉质的起偏振角 $i_0=58.0^\circ$, 它的折射率为 ()。

- (A) 1.60 (B) 1.50 (C) 1.40 (D) 1.70

62. 一束光强 I_0 的自然光垂直穿过两个偏振片, 且此两偏振片的偏振化方向成 45° 角, 若不考虑偏振片的反射和吸收, 则穿过两个偏振片后的光强 I 为 ()。

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4} I_0$ (B) $\frac{I_0}{4}$ (C) $\frac{I_0}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2} I_0$

63. 三个偏振片 P_1, P_2 与 P_3 堆叠在一起, P_1 与 P_3 的偏振化方向相互垂直, P_2 与 P_1 的偏振化方向间的夹角为 30° 。强度为 I_0 的自然光垂直入射于偏振片 P_1 , 并依次透过偏振片 P_1, P_2 与 P_3 , 则通过三个偏振片后的光强为 ()。

- (A) $I_0/4$ (B) $3I_0/8$ (C) $3I_0/32$ (D) $I_0/16$

64. 两尼科耳棱镜的主截面间的夹角由 30° 转到 45° , 则透射光的强度变化为 ()。

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

65. 一束自然光和线偏振光组成混合光, 垂直通过一偏振片, 以此入射光束为轴旋转偏

振片,测得透射光强度的最大值是最小值的5倍,则入射光束中自然光与线偏振光的强度之比最接近()。

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$

66. 一束圆偏振光通过二分之一波片后透出的光是()。

- (A) 线偏振光
(B) 部分偏振光
(C) 和原来旋转方向相同的圆偏振光
(D) 和原来旋转方向相反的圆偏振光

67. 单色光通过两个偏振化方向正交的偏振片。在两偏振片之间放入一双折射晶片,在下述两种情形中,能否观察到干涉花样?()。

- ①晶片的主截面与第一偏振片的偏振化方向平行;
②晶片的主截面与第一偏振片的偏振化方向垂直。

- (A) ①能, ②不能 (B) ②能, ①不能
(C) ①②都能 (D) ①②都不能

68. 在双缝干涉实验中,用单色自然光在屏上形成干涉条纹。若在两缝后放一偏振片,则()。

- (A) 干涉条纹的间距不变,但明纹的亮度加强
(B) 干涉条纹的间距不变,但明纹的亮度减弱
(C) 干涉条纹的间距变窄,但明纹的亮度减弱
(D) 无干涉条纹

模拟试题参考答案

1. (D) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5. (D) 6. (C) 7. (B) 8. (B)
9. (B) 10. (C) 11. (D) 12. (D) 13. (B) 14. (B) 15. (D)
16. (D) 17. (A) 18. (A) 19. (A) 20. (C) 21. (C) 22. (B)
23. (B) 24. (C) 25. (A) 26. (B) 27. (C) 28. (B) 29. (C)
30. (C) 31. (D) 32. (D) 33. (C) 34. (D) 35. (C) 36. (C)
37. (B) 38. (D) 39. (D) 40. (B) 41. (B) 42. (A) 43. (B)
44. (C) 45. (C) 46. (C) 47. (B) 48. (B) 49. (A) 50. (B)
51. (C) 52. (C) 53. (C) 54. (D) 55. (D) 56. (B) 57. (D)
58. (B) 59. (B) 60. (D) 61. (A) 62. (B) 63. (C) 64. (D)
65. (D) 66. (D) 67. (D) 68. (B)

3 普通化学

3.1 化学反应的基本规律

3.1.1 化学反应方程式及其计算

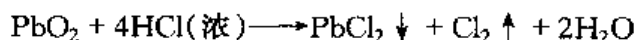
1. 化学反应方程式

化学反应方程式(简称反应式)是根据质量作用定律,用元素符号和分子式(或化学式)表示化学变化中质量关系的式子。例如,反应式



表示氢氧化钠与硫酸发生中和反应,生成硫酸钠和水。

当需要标明反应物、生成物的物理状态时,可用字母(g)、(l)、(s)分别表示气态、液态和固态,也可用符号“↑”、“↓”分别表示反应中有气体产生或难溶物生成,(aq)表示水溶液。例如



2. 化学反应方程式的计算

在一个配平了的化学反应中,各物质化学式前的系数之比等于其物质的量之比。据此,可进行反应物的量和理论产量间的相互换算。

例 3.1.1 烟道气中的 SO_2 可以用氢氧化钙溶液吸收,其反应式为



为了除去烟道气中 1 kg SO_2 , 需要 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{Ca}(\text{OH})_2$ 溶液多少升?(已知 SO_2 的摩尔质量为 $64.1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

解 设所需 $\text{Ca}(\text{OH})_2$ 的量为 x 。由反应式可知 $n(\text{Ca}(\text{OH})_2) : n(\text{SO}_2) = 2 : 2$ 。

因为
$$n(\text{SO}_2) = \frac{1000 \text{ g}}{64.1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 15.6 \text{ mol}$$

根据 $n(\text{Ca}(\text{OH})_2) : n(\text{SO}_2) = 2 : 2 = x : 15.6$

得
$$x = 15.6 \text{ mol}$$

所需 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{Ca}(\text{OH})_2$ 溶液的体积为

$$\frac{15.6 \text{ mol}}{0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}} = 156 \text{ L}$$

答 需要 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{Ca}(\text{OH})_2$ 溶液 156 L 。

3.1.2 反应热与热化学方程式

1. 反应热

化学反应时所放出或吸收的热,称为反应的热效应,简称热效应或反应热,用符号 Q 表示。规定吸热反应的反应热为正值 ($Q > 0$),放热反应的反应热为负值 ($Q < 0$)。反应热

的单位为千焦 (kJ)。

通常化学反应是在恒压条件下进行的, 当反应只做体积功和在恒压条件下进行时, 其热效应 Q_p (恒压反应热) 在化学热力学中等于 ΔH (称为焓变), 单位为 $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。

2. 热化学方程式

表示化学反应与反应热关系的方程式称为热化学方程式。例如



式中, $\Delta_r H^\ominus$ 称为反应焓变, 下标 r 表示一般的化学反应。

由于反应热与反应方向、反应条件、物态、物量有关, 因此书写热化学方程式应注意以下几点。

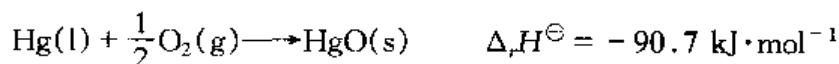
(1) 必须标出物质的聚集状态。因为状态不同, 反应热的数值也不同。如上例, 若生成的 H_2O 为气态, 则 $\Delta_r H^\ominus = -241.82 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。

(2) 反应的温度、压力等条件对反应热有影响, 但通常不大。如果反应条件是 298.15 K 和 100 kPa, 则可略去不写。若限定在 100 kPa 下进行的则称为标准反应热, 如 $\Delta_r H^\ominus$ 中的 “ \ominus ” 即表示化学热力学中规定的标准状态。

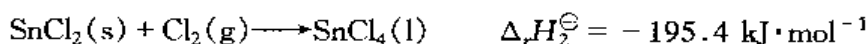
(3) 同一反应, 其反应热数据与方程式中物质的计量系数有关。例如



(4) 正、逆反应的反应热绝对值相同, 符号相反。例如



反应热一般可通过实验测定。如果一个反应是若干反应之和, 则总反应的反应热必然是各分步的反应热之和, 此即赫斯 (Hess) 定律。例如



两式相加得 $\text{Sn}(\text{s}) + 2\text{Cl}_2(\text{g}) \longrightarrow \text{SnCl}_4(\text{l}) \quad \Delta_r H^\ominus = -545.2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

应用赫斯定律可从理论上计算一些难于或无法直接测定的反应热。

3.1.3 化学反应速率

1. 化学反应速率及其表示方法

化学反应速率的传统定义, 可用单位时间内反应物浓度的减少 (或生成物浓度的增加) 来表示, 而且习惯取正值。单位通常为 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ 。可表示为

$$\text{平均速率} \quad \bar{v} = - \frac{\Delta c(\text{反应物})}{\Delta t}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta c(\text{生成物})}{\Delta t}$$

或瞬时速率

$$v = - \frac{dc(\text{反应物})}{dt}$$

$$v = \frac{dc(\text{生成物})}{dt}$$

但是, 用不同物质的浓度变化率表示的反应速率, 其数值可能有所不同。因此, 需注明

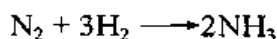
所选用的物质。

目前,国际上普遍采用的化学反应速率 v 为

$$v = \frac{1}{\gamma_B} \cdot \frac{dc_B}{dt}$$

式中, γ_B 为反应中物质 B 的化学计量数 (反应物用负值, 生成物用正值); dc_B/dt 表示由化学反应随时间 (t) 引起物质 B 的浓度 (c_B) 的变化速率。

例如, 在给定条件下, 合成氨反应:



起始浓度 / ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	2.0	3.0	0
2 s 末浓度 / ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	1.8	2.4	0.4

该反应的平均速率根据不同物质的浓度变化可分别表示为 $v_{\text{N}_2} = -\frac{\Delta c(\text{N}_2)}{\Delta t} = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$,

$$v_{\text{H}_2} = -\frac{\Delta c(\text{H}_2)}{\Delta t} = 0.3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_{\text{NH}_3} = \frac{\Delta c(\text{NH}_3)}{\Delta t} = 0.2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1},$$

数值显然是不同的。而

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{1} \cdot \frac{(1.8 - 2.0) \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}{(2 - 0) \text{ s}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(2.4 - 3.0) \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}{(2 - 0) \text{ s}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(0.4 - 0) \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}{(2 - 0) \text{ s}} = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

如此表示的反应速率的量值与表示速率的物质的选择无关。

2. 影响化学反应速率的因素

化学反应速率首先取决于反应物本性, 对一给定的化学反应来说, 反应速率还与反应物的浓度 (或压力)、温度和催化剂等因素有关。

1) 浓度的影响——质量作用定律

一定温度下, 对于一些简单的由反应物一步转变为生成物的反应 (称为基元反应), 反应速率与各反应物浓度幂 (幂次为分子式前系数) 的乘积成正比。这一规律称为质量作用定律。对于某一基元反应



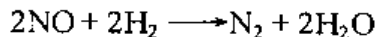
其反应速率方程式为

$$v = k[\text{A}]^a \cdot [\text{B}]^b$$

式中, k 为该温度下的反应速率常数。浓度项的指数之和 ($a + b$) 称为反应级数。浓度 $[\text{A}]$ 也可表示为 $c(\text{A})$ 。

一定温度下, 不同反应的 k 值不同, 且 k 值越大, 反应速率越大。对同一反应来说, k 值与反应物浓度无关, 只随反应的温度及催化剂等因素而改变。

实际上, 大多数化学反应是由若干个基元反应组成的复杂反应 (非基元反应)。此时, 质量作用定律虽适用于其中每一过程, 但往往不适用于总的反应。例如, 反应

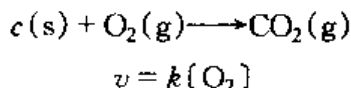


由实验测定: $v = k[\text{NO}]^2 \cdot [\text{H}_2]$, 反应级数为 3。经研究, 该反应由以下两步进行:



显然, 第一步慢反应成为整个反应速率的控制步骤, 所以反应速率方程式应由此而定。

在书写反应速率表达式时应注意: 反应式中液态和固态纯物质的浓度 (认为密度为常数, 并入 k 内) 不列入其中。例如, 反应



2) 温度对反应速率的影响——阿伦尼乌斯公式

温度对反应速率的影响十分显著。对大多数化学反应来说, 温度升高, 反应速率增大。实验指出, 温度每升高 10°C , 反应速率或反应速率常数一般增大 $2 \sim 4$ 倍。阿伦尼乌斯 (Arrhenius) 根据实验, 得出反应速率常数与温度之间的定量关系:

$$k = A \cdot e^{-E_a/RT}$$

或

$$\lg k = \lg A - \frac{E_a}{2.303RT}$$

式中, k 为速率常数, T 为绝对温度, R 为摩尔气体常数 ($8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), E_a 为反应的活化能, A 为频率因子, 是与反应有关的特征常数。

上式表明, 若温度 T 增大 (即 $\frac{1}{T}$ 减小), 则 k 值增大, 反应速率 v 也增大。

3) 反应的活化能与催化剂

从阿伦尼乌斯公式可以看出, 在一定温度下, 反应的活化能 E_a 越小, 则反应速率或速率常数就越大, 而且影响很大。

活化能通常由实验测得, 一般化学反应的活化能为 $60 \sim 240 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。

过渡状态理论认为: 化学反应的发生是具有足够大能量的反应物分子 (称为活化分子), 在有效碰撞 (能使反应物分子转变成产物分子的碰撞) 后首先形成一种称为活化配合物的状态, 然后再分解为产物。

图 3.1-1 中, E_I 、 E_{II} 分别表示反应物和产物的平均能量, E^* 表示活化配合物具有的能量。 $E_{a(\text{正})} = E^* - E_I$ 为正反应的活化能; $E_{a(\text{逆})} = E^* - E_{II}$ 为逆反应的活化能。可逆反应的反应热

$$\Delta_r H = E_{a(\text{正})} - E_{a(\text{逆})}$$

若 $E_{a(\text{正})} < E_{a(\text{逆})}$, 则 $\Delta_r H < 0$, 正反应为放热反应, 逆反应为吸热反应。

催化剂通常是指能增加化学反应速率, 而本身的组成、质量和化学性质在反应前后保持不变的物质。催化剂能改变反应的历程, 降低反应的活化能, 从而增大反应速率。

综上, 可用活化分子和活化能的概念, 进一步讨论浓度、温度和催化剂对反应速率的影响。

(1) 浓度的影响: 在一定温度下, 反应物浓度增大, 单位体积内分子总数增多, 活化分子数相应增多 (活化分子百分数未变), 单位时间内有效碰撞次数增多, 反应速率加快。

(2) 温度的影响: 温度升高, 反应物分子的平均能量升高, 从而使活化分子百分数增大

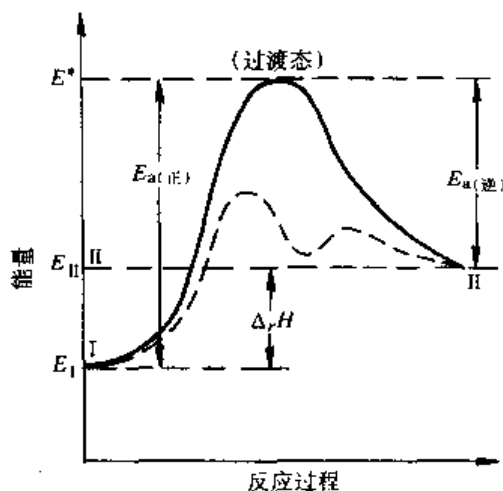


图 3.1-1 反应系统中活化能示意图

(分子总数未变), 活化分子数增多, 单位时间内有效碰撞次数增多, 反应速率增大。

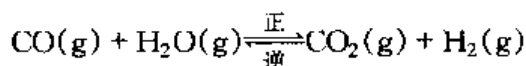
(3) 催化剂的影响: 催化剂可改变反应历程 (如图 3.1-1 中虚线所示), 降低反应的活化能, 从而使活化分子百分数大大增加, 单位时间内有效碰撞次数增多, 反应速率明显加大。

3.1.4 化学平衡

1. 可逆反应与化学平衡

通常化学反应都具有可逆性, 只是程度不同而已。

在同一条件下, 既能向一个方向进行, 又能向相反方向进行的反应称为可逆反应。例如

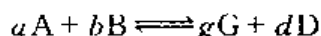


对于一个可逆反应, 当其正反应和逆反应的速率相等时, 反应物和生成物的浓度不再随时间而改变, 这种状态称为化学平衡。化学平衡是一种动态平衡。

2. 平衡常数

1) 浓度平衡常数

实验表明, 对任一可逆反应



在一定温度下达到平衡时, 生成物适当次幂的乘积与反应物适当次幂的乘积之比是一个常数。

$$K_c = \frac{[\text{G}]^g [\text{D}]^d}{[\text{A}]^a [\text{B}]^b}$$

式中, $[\text{A}]$ 、 $[\text{B}]$ 、 $[\text{G}]$ 、 $[\text{D}]$ 分别表示四种物质在平衡时的浓度; K_c 称为浓度平衡常数或实验平衡常数。

若式中各平衡浓度用相对浓度, 即 $c(\text{G})/c^\ominus$ 、 $c(\text{D})/c^\ominus$ 、 $c(\text{A})/c^\ominus$ 、 $c(\text{B})/c^\ominus$ 表示 (c^\ominus 为标准浓度: $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$), 所得的 K 则无单位, 称为标准平衡常数, 用 K^\ominus 表示。

2) 气相反应的平衡常数

对于气体反应, 可用平衡时各组分气体的分压来写出压力平衡常数 K_p 。

在气体混合物中, 如果各组分气体之间不发生化学反应, 分子间的引力又可忽略, 则它们就互不干扰, 如同单独存在一样, 各自对器壁施加压力。某一组分气体所产生的压力称为该气体的分压, 它等于该气体单独占有与混合气体相同体积时所产生的压力。混合气体的总压力等于各组分气体的分压之和, 这称为分压定律。即

$$p = p_A + p_B + p_C + \cdots$$

式中, p 表示总压, p_A 、 p_B 、 p_C ……分别表示混合气体中 A、B、C 等组分气体的分压力。

若混合气体由 A、B 两种气体组成, 其物质的量分别为 n_A 、 n_B , 根据气体状态方程可得

$$p_A = p \frac{n_A}{n_A + n_B} \text{ 或 } p_A = px_A$$

$$p_B = p \frac{n_B}{n_A + n_B} \text{ 或 } p_B = px_B$$

式中, x_A 、 x_B 分别是气态物质 A、B 的摩尔分数。

由于同温同压下, 气态物质的量与它的体积成正比, 因此可导出混合气体中组分气体 B 的体积分数等于气体 B 的摩尔分数。即

$$\frac{V_B}{V_{\text{总}}} = \frac{n_B}{n_{\text{总}}}$$

代入前式可得

$$p_B = \frac{V_B}{V_A} p$$

对于任一气相可逆反应 (反应物和生成物都是气体)



可得

$$K_p = \frac{p_G^g \cdot p_D^d}{p_A^a p_B^b}$$

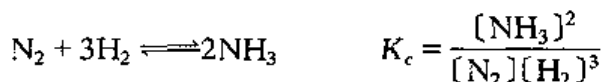
式中, p_A 、 p_B 、 p_G 、 p_D 分别表示气体物质 A、B、G、D 在平衡时的分压; K_p 称为压力平衡常数。

实际上, 式中 p_A 、 p_B 、 p_G 、 p_D 常用相对分压 p_A/p^\ominus 、 p_B/p^\ominus 、 p_G/p^\ominus 、 p_D/p^\ominus 表示, p^\ominus 为标准压力 (100 kPa)。此时, 得出的 K_p 无单位, 称为标准平衡常数, 用 K^\ominus 表示。

平衡常数 K_c (K_p) 值随温度而变化, 但不随浓度 (压力) 的改变而变化。K 值的大小表明反应进行的程度。如果一个反应的 K_c (K_p) 值越大, 表明反应向正反应进行的趋势越大, 达到平衡时生成物浓度 (或分压) 越大, 或反应物浓度 (或分压) 越小。

3) 书写平衡常数表达式时应注意的问题

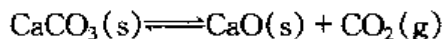
(1) 同一反应, 平衡常数表达式随方程式的写法不同而变。例如



若写成

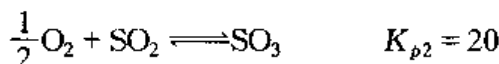
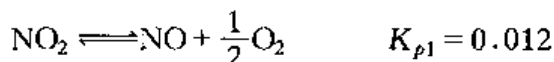


(2) 反应式中的固态、液态纯物质, 不写入平衡常数表达式。例如

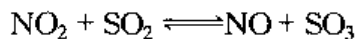


$$K_p = p_{CO_2}$$

(3) 如果某反应可表示为若干个反应的总和, 则该反应的平衡常数是各反应平衡常数之乘积。例如



则反应



的

$$K_{p3} = 0.012 \times 20 = 0.24$$

3. 有关化学平衡的计算

平衡常数是反应进行程度的标志, 根据平衡常数数值, 可以计算平衡时反应物、生成物的含量, 进而计算反应物的转化率。反之, 也可根据转化率、浓度等数据计算平衡常数。

$$\alpha = \text{反应物转化率} \% = \frac{\text{某反应物已转化的量}}{\text{反应物起始时的量}} \times 100 \%$$

或

$$\alpha = \text{反应物转化率} \% = \frac{\text{某反应物起始浓度} - \text{某反应物平衡浓度}}{\text{某反应物的起始浓度}} \times 100 \%$$

例 3.1.2 763.8 K 时, 反应 $H_2(g) + I_2(g) \rightleftharpoons 2HI(g)$ 的 $K_c = 45.7$ 。如果反应开始时

H_2 和 I_2 的浓度均为 $1.00 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, 求反应达平衡时各物质的平衡浓度及 I_2 的平衡转化率。

解 设达平衡时 $[\text{HI}] = x \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

	$\text{H}_2(\text{g}) + \text{I}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{HI}(\text{g})$		
始态浓度 / ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	1.00	1.00	0
变化浓度 / ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	$-\frac{x}{2}$	$-\frac{x}{2}$	x
平衡浓度 / ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	$1.00 - \frac{x}{2}$	$1.00 - \frac{x}{2}$	x

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{[\text{HI}]^2}{[\text{H}_2][\text{I}_2]} \\ &= \frac{x^2}{(1.00 - \frac{x}{2})(1.00 - \frac{x}{2})} = 45.7 \end{aligned}$$

解得 $x = 1.54$

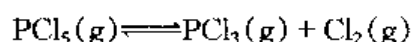
所以平衡时各物质的浓度为

$$[\text{H}_2] = [\text{I}_2] = (1.00 - 1.54/2) \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 0.23 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{HI}] = 1.54 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{I}_2 \text{ 的平衡转化率 } \alpha = \frac{1.00 - 0.23}{1.00} \times 100\% = 77\%$$

例 3.1.3 在 250°C 和 100 kPa 下, PCl_5 按下式分解



已知 PCl_5 的转化率 $\alpha = 80\%$, 求该反应的 K_p 值。

解 设 PCl_5 起始时的物质的量为 $n \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 、总压 $p = 100 \text{ kPa} / 100 \text{ kPa} = 1$, 则

	$\text{PCl}_5(\text{g}) \rightleftharpoons \text{PCl}_3(\text{g}) + \text{Cl}_2(\text{g})$		
起始时物质的量 / mol	n	0	0
平衡时物质的量 / mol	$n(1 - \alpha)$	$n\alpha$	$n\alpha$
平衡时物质的总量 / mol	$n(1 + \alpha)$		
平衡时物质的摩尔分数	$\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$	$\frac{\alpha}{1 + \alpha}$	$\frac{\alpha}{1 + \alpha}$
平衡时物质的分压	$\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}p$	$\frac{\alpha}{1 + \alpha}p$	$\frac{\alpha}{1 + \alpha}p$

由于

$$K_p = \frac{p_{\text{Cl}_2} p_{\text{PCl}_3}}{p_{\text{PCl}_5}}$$

则

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{\frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} p^2}{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} p} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} p \\ K_p &= \frac{(0.8)^2}{1 - (0.8)^2} \times 1 = 1.78 \end{aligned}$$

答 该反应的 K_p 为 1.78。

4. 化学平衡的移动

外界条件改变时, 平衡状态向另一种平衡状态的转化叫做平衡移动。利用平衡常数可以判断一个可逆反应在一定条件下的反应方向。

对于任一可逆反应



达平衡时, K_c 、 K_p 为已知。

任意状态 (或起始状态) 时, 各物质的浓度为 $[A']$ 、 $[B']$ 、 $[G']$ 、 $[D']$ 。

$$\text{令 } Q_c = \frac{[G'] [D']}{[A'] [B']} \quad Q_c \text{ 称为浓度商。}$$

对于气相反应, 令

$$Q_p = \frac{p_{G'}^g \cdot p_{D'}^d}{p_{A'}^a \cdot p_{B'}^b} \quad Q_p \text{ 称为压力商}$$

式中 $p_{A'}$ 、 $p_{B'}$ 、 $p_{G'}$ 、 $p_{D'}$ 表示任意状态 (或起始状态) 时各气态物质的分压。

显然, 若 $Q_c < K_c$ (或 $Q_p < K_p$), 表明该反应将自左向右进行, 即向正反应方向进行;

若 $Q_c > K_c$ (或 $Q_p > K_p$), 表明该反应将自右向左进行, 即向逆反应方向进行;

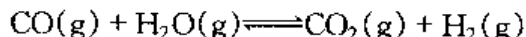
若 $Q_c = K_c$ (或 $Q_p = K_p$), 表明该反应已达到平衡状态。

1) 浓度对化学平衡的影响

在一定温度下, 当一可逆反应达到平衡后, 若增加反应物浓度或者减少生成物浓度 (则 $Q < K$), 化学平衡向正反应方向移动; 增加生成物浓度或减少反应物浓度 (则 $Q > K$), 化学平衡向逆方向移动。

2) 压力对化学平衡的影响

对于有气态物质参加的反应来说, 某一气态物质的分压变化或反应容器体积的变化, 都会引起反应系统总压的改变。增加总压力, 使平衡向气体分子总数减少的方向移动; 降低总压力, 使平衡向气体分子总数增加的方向移动。如果反应前后气态物质的分子总数相等, 例如



则无论增加或减小总压力, 都不能影响化学平衡。

3) 温度对化学平衡的影响

温度不仅对化学反应速率有影响, 而且, 温度的变化会使平衡常数的数值改变, 从而使平衡移动。

如果正反应是吸热反应, 则温度升高使平衡常数增大, 即平衡向正反应方向移动; 如果正反应是放热反应, 温度升高使平衡常数减小, 即平衡向逆反应方向移动。

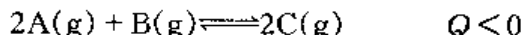
温度对化学平衡影响的实质是: 升高温度使正、逆反应速率都增大, 但增大的倍数不等。在可逆反应中, 升高温度使吸热反应的速率比放热反应的速率增加得更多一些, 因此平衡就向吸热方向移动。反之, 降低温度, 平衡就向放热方向移动。

4) 催化剂的影响

催化剂只能以同样倍数增加正、逆反应速率, 不能使平衡移动。

综上所述, 各种外界条件对化学平衡的影响, 可按吕·查德理 (Le Chatelier) 原理来判断, 即当体系达到平衡后, 如果改变体系平衡的条件 (浓度、压力或温度) 之一, 平衡将向减弱这个改变的方向移动。

例 3.1.4 对于平衡体系



下列看法, 你认为如何?

(1) 由于 $K_p = \frac{p_C^2}{p_A^2 p_B}$, 随着反应的进行, p_C 逐渐增大, p_A 、 p_B 逐渐减小, 因此平衡常数 K_p 逐渐增大。

(2) 温度升高, 使 $v_{(\text{逆})}$ 增大, $v_{(\text{正})}$ 减小, 故平衡向右移动。

(3) 加入催化剂, 使 $v_{(\text{正})}$ 增大, 平衡向右移动。

(4) 增加总压力使 p_A 、 p_B 增大, $v_{(\text{正})}$ 增大, 故平衡向右移动。

(5) 加入稀有气体氩 (Ar), 使总压力增加到原来的 2 倍, 平衡将向右移动。

解 (1) 不对。平衡常数表达式中的 p_A 、 p_B 、 p_C 分别是气态物质 A、B、C 平衡时的分压。反应过程中 K_p 不变。

(2) 不对。温度升高, 使 $v_{(\text{正})}$ 、 $v_{(\text{逆})}$ 都增大。由于该反应是放热, $v_{(\text{逆})}$ 比 $v_{(\text{正})}$ 增加得更多, 平衡应向左移动。即升高温度, 平衡向吸热反应的方向移动。

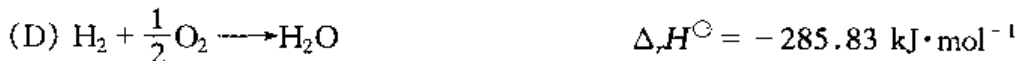
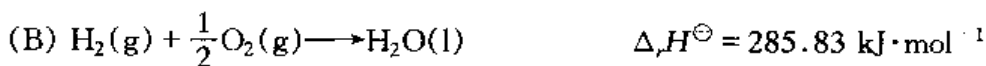
(3) 不对。催化剂使 $v_{(\text{正})}$ 、 $v_{(\text{逆})}$ 都增大, 不会使平衡移动。

(4) 说法不妥。增加总压力, 平衡向气体分子总数减少的方向移动, 即平衡向右移动。

(5) 不对。稀有气体氩 (Ar) 不参与反应, 不改变各气态物质在平衡时的分压, 所以平衡不发生移动。

模拟试题

1. 在 298 K、100 kPa 条件下, 已知氢气和氧气合成 1 mol 的水, 放出 285.83 kJ 热量, 下列热化学方程式正确的是 ()。



2. 反应 $\text{N}_2 + 3\text{H}_2 \longrightarrow 2\text{NH}_3$ 的平均反应速率可表示为 $-dc(\text{N}_2)/dt$, 也可以表示为 ()。

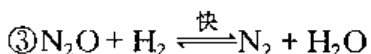
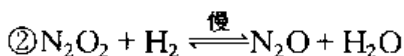
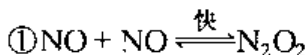


3. 当反应 $\text{A}_2(\text{g}) + \text{B}_2(\text{g}) \longrightarrow 2\text{AB}(\text{g})$ 的速率方程为 $v = k[\text{A}_2][\text{B}_2]$ 时, 可以得出此反应 ()。

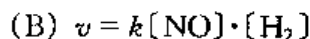
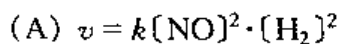
(A) 是基元反应 (B) 是非基元反应

(C) 无法肯定是否为基元反应 (D) 是一个快反应

4. 已知反应 $2\text{NO}(\text{g}) + 2\text{H}_2(\text{g}) \longrightarrow \text{N}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ 的反应机理:



总反应速率方程是 ()。





5. 反应 $\text{A}(\text{g}) + \text{B}(\text{g}) \longrightarrow \text{C}(\text{g})$ 的速率方程为 $v = k[\text{A}]^2 \cdot [\text{B}]$, 若使密闭的反应容积增大一倍, 则其反应速率为原来的 ()。



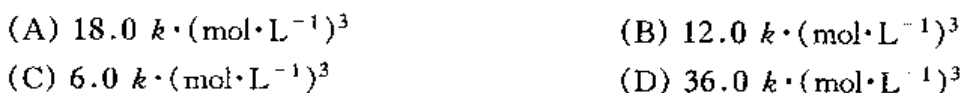
6. 298 K, 反应 $\text{N}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2(\text{g}) \longrightarrow 2\text{NH}_3(\text{g})$ 的 $\Delta_r H^\ominus = -922 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, 若升高温度, 则 ()。



7. 某吸热反应, 正反应的活化能是 $30 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, 逆反应的活化能是 ()。



8. 温度一定时, 基元反应 $\text{A} + 2\text{B} \longrightarrow \text{C}$ 的速率常数为 k , 若某一时刻 (时间以 s 计), A 的浓度为 $2.0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, B 的浓度为 $3.0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, 则反应速率 v 是 ()。



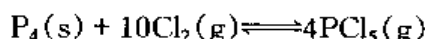
9. 反应 $\text{S}(\text{s}) + \text{O}_2(\text{g}) \longrightarrow \text{SO}_2(\text{g})$ 的 $\Delta_r H^\ominus < 0$, 欲增加正反应速率, 下列措施中无用的是 ()。



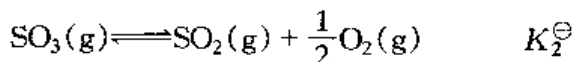
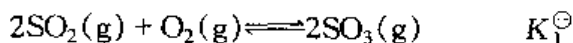
10. 升高温度可以增加反应速率, 主要原因是 ()。



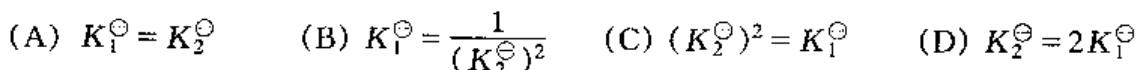
11. 下列反应浓度平衡常数 K_c 表达式是 ()。



12. 某温度下, 下列反应的平衡常数



K_1^\ominus 与 K_2^\ominus 的关系是 ()。



13. 298 K, 总压力为 101.3 kPa 的混合气体中含有 H_2 、 He 、 N_2 、 CO_2 四种气体, 其质量均为 1 g , 它们分压的大小顺序是 ()。



14. 气体反应 $\text{A}(\text{g}) + \text{B}(\text{g}) \rightleftharpoons \text{C}(\text{g})$ 在密闭容器中反应达到平衡, 如果温度不变, 但体积

缩小了 $\frac{2}{3}$, 则平衡常数为原来的 ()。

- (A) 3 倍 (B) 9 倍 (C) 2 倍 (D) 不变

15. 298 K, 反应 $\text{N}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{NH}_3(\text{g})$ 在密闭容器中反应达到平衡, 若加入惰性气体, 估计会出现 ()。

- (A) 平衡右移, 氨产量增加 (B) 平衡左移, 氨产量减少
(C) 平衡状态不变 (D) 正反应速率加快

16. 已知 $\text{SO}_2(\text{g}) + \frac{1}{2}\text{O}_2(\text{g}) \rightleftharpoons \text{SO}_3(\text{g}), \Delta_r H^\ominus < 0$ 其压力平衡常数 K_p 将 ()。

- (A) 随温度升高而增大 (B) 随温度升高而减小
(C) 随 SO_2 、 O_2 分压增加而增大 (D) 随 SO_3 分压增加而增大

17. 已知反应 $2\text{A}(\text{g}) + 2\text{B}(\text{s}) \rightleftharpoons 2\text{C}(\text{g}) + \text{D}(\text{g})$ 的 $\Delta_r H^\ominus < 0$, 若欲提高 $\text{A}(\text{g})$ 的转化率, 理论上可采取的方法是 ()。

- (A) 高温高压 (B) 低温高压 (C) 低温低压 (D) 高温低压

18. 在温度和压强不变的条件下, 1 L NO_2 在高温时按 $2\text{NO}_2 \rightleftharpoons 2\text{NO} + \text{O}_2$ 分解, 达到平衡时, 体积变为 1.2 L, 此时, NO_2 的转化率为 ()。

- (A) 1% (B) 40% (C) 20% (D) 50%

19. 在一定条件下, 已建立化学平衡的某可逆反应, 当改变反应条件使化学平衡向正反应方向移动时, 下列有关叙述正确的是 ()。

- (A) 生成物的体积分数一定增加 (B) 反应物浓度一定降低
(C) 生成物的产量一定增加 (D) 使用了合适催化剂

20. 下列叙述中错误的是 ()。

- (A) 催化剂不能使化学平衡发生移动
(B) 催化剂可使正、逆反应的反应速率都加大
(C) 可逆反应达平衡时, 各反应物及生成物的浓度不随时间而变
(D) 可逆反应达平衡时, 反应物与生成物的浓度相等

模拟试题参考答案

1. (A) 2. (B) 3. (C) 4. (C) 5. (D) 6. (C) 7. (B) 8. (A)
9. (D) 10. (C) 11. (C) 12. (B) 13. (A) 14. (D) 15. (C) 16. (B)
17. (C) 18. (B) 19. (C) 20. (D)

3.2 溶液与离子平衡

3.2.1 溶液的浓度及其计算

1. 溶液的浓度

一定量溶剂或溶液中所含溶质的量称为溶液的浓度。常见的浓度表示方法有以下几种:

(1) 质量百分浓度: 溶质的质量占全部溶液质量的百分率, 常用%表示。

$$\text{质量百分浓度}(\%) = \frac{\text{溶质的质量}}{\text{溶剂的质量} + \text{溶质的质量}} \times 100\%$$

(2) 物质的量浓度(体积摩尔浓度)用 1 升溶液中所含溶质的物质的量来表示。单位为 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 。

$$\text{物质的量浓度} = \frac{\text{溶质的物质的量}}{\text{溶液的体积}}$$

(3) 质量摩尔浓度: 1 kg 溶剂中所含溶质的物质的量称为质量摩尔浓度。单位为 $\text{mol} \cdot \text{kg}^{-1}$ 。

$$\text{质量摩尔浓度} = \frac{\text{溶质的物质的量}}{\text{溶剂的质量}}$$

(4) 摩尔分数浓度: 溶质的物质的量占溶液的物质的量的分数称为摩尔分数浓度, 简称摩尔分数。常用 x 表示。

设由溶质 A 和溶剂 B 组成的溶液, 它们的物质的量分别为 n_A 和 n_B , 则

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

2. 溶液浓度的计算

上述几种浓度表示方法可以相互换算。

例 3.2.1 20% HCl 的密度为 $1.10 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 。试计算该溶液的物质的量浓度、质量摩尔浓度和摩尔分数。

解

(1) 1 L 20% HCl 溶液中含 HCl 的物质的量为 (HCl 的摩尔分子量为 $36.5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$):

$$\frac{1\,000 \text{ cm}^3 \times 20\% \times 1.10 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}}{36.5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \doteq 6.0 \text{ mol}$$

$$\text{HCl 的物质的量浓度} = \frac{6.0 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 6.0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

(2) 1 000 g H_2O 中含 HCl 的物质的量为

$$\frac{1\,000 \text{ g} \times \frac{20 \text{ g}}{80 \text{ g}}}{36.5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \doteq 6.9 \text{ mol}$$

$$\text{HCl 的质量摩尔浓度} = \frac{6.9 \text{ mol}}{1\,000 \text{ g}} = 6.9 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1}$$

(3) 在 100 g 20% HCl 中

$$n_{\text{HCl}} = \frac{20 \text{ g}}{36.5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0.55 \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{80 \text{ g}}{18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 4.4 \text{ mol}$$

$$x_{\text{HCl}} = \frac{0.55 \text{ mol}}{4.4 \text{ mol} + 0.55 \text{ mol}} = 0.11$$

答 该溶液的物质的量浓度为 $6.0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, 质量摩尔浓度为 $6.9 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1}$, 摩尔分数为 0.11。

3.2.2 稀溶液的通性

不同的溶液往往具有不同的性质, 如颜色、密度等。但所有溶液又都有一些共同的性质(通性), 如溶液的蒸气压下降、沸点升高、凝固点下降和渗透压, 这些性质与溶质的本性无关, 只与溶液中溶质的粒子数有关, 称为溶液的依数性。

1. 溶液的蒸气压下降

液体表面的一部分分子脱离液面而成为蒸气, 这种过程称为蒸发。蒸发时所吸收的热量

称为蒸发热（汽化热），单位为 $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。与蒸发相反的过程称为凝结。

液体在一定温度下的蒸发速率是恒定的，当其液相和气相处于平衡（即蒸发速率与凝结速率相等）状态时，蒸气所具有的压力是定值，称为该温度下的饱和蒸气压，简称蒸气压。当温度升高时，液体的蒸气压迅速增大，如图 3.2-1 中的 H_2O 线。

实验证明，在相同温度下，难挥发非电解质溶液的蒸气压总是低于纯溶剂的蒸气压，其差值称为溶液的蒸气压下降。

拉乌尔（Raoult）根据大量实验提出，难挥发非电解质稀溶液的蒸气压下降和溶质的摩尔分数浓度成正比，这称为拉乌尔定律。

$$\Delta p = x_A p^\circ$$

式中， Δp 为溶液的蒸气压下降值（ $p_{\text{溶剂}} - p_{\text{溶液}}$ ）； p° 为溶剂的饱和蒸气压； x_A 为溶质的摩尔分数浓度。

2. 溶液的沸点升高和凝固点下降

液体的蒸气压等于外界压力（101 325 Pa）时，液体就沸腾，此时的温度称为沸点（ T_{bp} ）。由于加入难挥发物质后，引起溶液的蒸气压下降，因此溶液的沸点总是要高于纯溶剂的沸点。如水的标准沸点为 100°C ，溶液必须在 $100 + T_{\text{bp}}$ 温度时，它的蒸气压才能等于外压（如图 3.2-1 所示），且溶液越浓，沸点升高越多。这称为溶液的沸点升高。

固态物质也能蒸发（升华），也有相应的蒸气压，图 3.2-1 中示出冰的蒸气压曲线。当固相物质冰的蒸气压与液相物质水的蒸气压相等时的温度，称为凝固点（ T_{fp} ，即冰点）。由于溶液的蒸气压下降，所以溶液的凝固点总是低于纯溶剂的凝固点，这称为溶液的凝固点下降。

实验证明：溶液的沸点升高和凝固点下降与溶液的质量摩尔浓度成正比，而与溶质的本性无关。这也称为拉乌尔定律。数学表达式为

$$\Delta T_{\text{bp}} = k_{\text{bp}} m$$

$$\Delta T_{\text{fp}} = k_{\text{fp}} m$$

式中， ΔT_{bp} 、 ΔT_{fp} 分别表示溶液的沸点上升和凝固点下降度数； m 表示溶液的质量摩尔浓度； k_{bp} 、 k_{fp} 分别称为溶剂的沸点升高常数和凝固点下降常数（浓度为 $1 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1}$ 时溶液的沸点升高度数和凝固点下降度数）。溶剂不同， k_{bp} 、 k_{fp} 的数值亦不同。

水的 $k_{\text{bp}} = 0.52^\circ\text{C} \cdot \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ， $k_{\text{fp}} = 1.86^\circ\text{C} \cdot \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。

3. 溶液的渗透压

动物的肠衣、细胞膜、膀胱膜等能选择地允许溶剂分子透过，而不允许溶质分子（或离子）透过，称为半透膜。由于半透膜的存在，使两种不同浓度溶液间产生水的扩散现象，叫做渗透现象。如果在溶液的液面上施加一定压力，则可阻止溶剂的渗透。为了使渗透停止而向溶液液面施加的压力，称为渗透压。

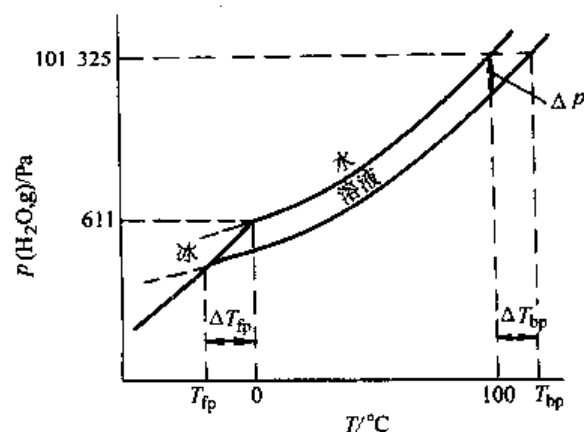


图 3.2-1 水溶液的沸点上升和凝固点下降示意图

难挥发非电解质稀溶液的渗透压 (π) 与溶液的量浓度 ($\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$) 及绝对温度 (T) 成正比。即

$$\pi = cRT = \frac{n}{V}RT$$

式中, c 为物质的量浓度; n 为溶质的物质的量; V 表示溶液的体积; R 为摩尔气体常数。

例 3.2.2 纯苯的凝固点为 $5.40\text{ }^{\circ}\text{C}$, 将 0.322 g 萘溶于 80 g 苯, 该溶液的凝固点为 $5.24\text{ }^{\circ}\text{C}$, 已知苯的 k_{fp} 为 $5.12\text{ }^{\circ}\text{C}$, 求萘的摩尔质量。

解 根据拉乌尔定律的数学表达式为

$$m = \frac{\Delta T_{\text{fp}}}{k_{\text{fp}}} = \frac{5.40\text{ }^{\circ}\text{C} - 5.24\text{ }^{\circ}\text{C}}{5.12\text{ }^{\circ}\text{C}\cdot\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}} \\ = 0.0313\text{ mol}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$1\text{ }000\text{ g 纯苯中所含萘的质量} = \frac{0.322\text{ g}\times 1\text{ }000\text{ g}}{80\text{ g}} = 4.03\text{ g}$$

$$\text{萘的摩尔质量} = \frac{4.03\text{ g}}{0.0313\text{ mol}\cdot\text{kg}^{-1}} = 129\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

答 萘的摩尔质量为 $129\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ (萘的分子式为 C_{10}H_8 , 摩尔质量的理论值为 128)。

例 3.2.3 下列水溶液中, 沸点最高的为 (), 凝固点最高的是 ()。

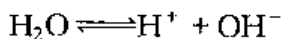
- (A) $0.1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}\text{HAc}$ (B) $0.1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}\text{CaCl}_2$
(C) $0.1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}\text{NaCl}$ (D) $0.1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ 葡萄糖

解 稀溶液的依数性, 可按单位体积内溶质的粒子数而定性比较。以上四个溶液的浓度均为 $0.1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, 但是, 强电解质 CaCl_2 、 NaCl 的粒子数分别近于原来的 3 倍和 2 倍, 弱电解质 HAc 的粒子浓度也略大于 $0.1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, 葡萄糖为非电解质, 粒子浓度为 $0.1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, 由此可知, 一定量溶剂中, 溶质粒子数增加的顺序为葡萄糖 $<$ HAc $<$ NaCl $<$ CaCl_2 , 与沸点升高的顺序及凝固点下降的顺序相同, 所以沸点最高的为 (B), 而凝固点最高的为 (D)。

3.2.3 弱电解质的电离平衡

1. 水的离子积和溶液的 pH 值

精密的电导仪测出水有极弱的导电能力。原因是纯水中存在着解离平衡



且

$$K = \frac{[\text{H}^+][\text{OH}^-]}{[\text{H}_2\text{O}]}$$

298.15 K 时可测得

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] = 1 \times 10^{-7}\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

达平衡时, $[\text{H}_2\text{O}]$ 可认为是一常数, 则

$$K_{\text{w}} = [\text{H}^+][\text{OH}^-] = 1 \times 10^{-14}$$

式中, K_{w} 称为水的离子积。

溶液的酸碱性通常用 H^+ 或 OH^- 离子浓度来表示。为了方便, 常用 H^+ 离子浓度的负对数, 并用符号 pH 表示。

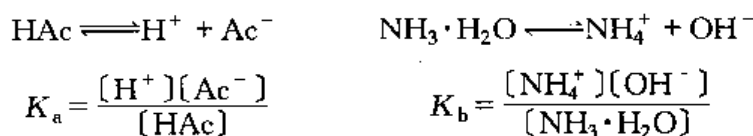
$$\text{pH} = -\lg[\text{H}^+]$$

且 $\text{pH} = 14 - \text{pOH}$
 当 $\text{pH} < 7$ 即 $[\text{H}^+] > 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 溶液呈酸性 (pH 越小, 酸性越强)
 $\text{pH} = 7$ $[\text{H}^+] = 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 溶液呈中性
 $\text{pH} > 7$ $[\text{H}^+] < 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 溶液呈碱性 (pH 越大, 碱性越强)
 例如, $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{NH}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$ 溶液中, $[\text{OH}^-] = 1.32 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$\begin{aligned}\text{pH} &= 14 - \text{pOH} = 14 + \lg(1.32 \times 10^{-3}) \\ &= 14 + 0.12 - 3 = 11.12\end{aligned}$$

2. 一元弱酸、弱碱的电离平衡

一元弱酸如醋酸 (乙酸, 简称为 HAc) 和一元弱碱如氨水 ($\text{NH}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$) 等, 在水溶液中只是部分电离 (解离), 这一电离是可逆过程, 达到的平衡称为电离平衡。例如



式中, 各物质的浓度均为平衡浓度, 单位为 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 。通常用 K_a 表示弱酸的电离常数, K_b 表示弱碱的电离常数。

电离常数的大小反映了该电解质电离程度的大小及其酸碱性的相对强弱。电离常数只随温度而变, 与浓度无关。

弱电解质电离程度的大小也常用达平衡后已电离弱电解质浓度的百分数, 即电离度 (α) 来表示。

$$\alpha = \frac{\text{已电离弱电解质的浓度 (或物质的量)}}{\text{弱电解质的起始浓度 (或物质的量)}} \times 100\%$$

一元弱电解质的电离常数 K_i 与 α 的关系如下:

$$K_i = c\alpha^2$$

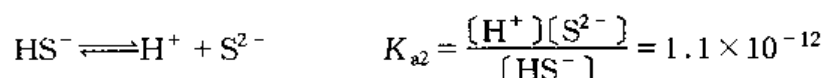
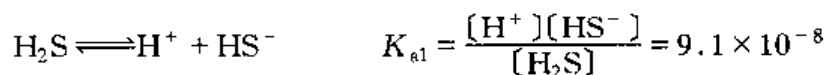
$$\alpha = \sqrt{\frac{K_i}{c}}$$

式中, c 为弱电解质的浓度。这种关系称为稀释定律。

可以看出, 在一定温度下 α 随 c 而变化。溶液稀释时, c 减小, α 增大; 反之浓度增大, α 减小。

3. 多元弱酸的电离平衡

分子中含有两个或两个以上可电离氢原子的酸称为多元酸。常见的有氢硫酸 H_2S 、碳酸 H_2CO_3 等。多元弱酸在水溶液中的电离是分级 (分步) 进行的, 平衡时每一级都有一个相应的电离平衡常数。以 H_2S 为例



应注意的是: ①二元弱酸的 $K_2 \ll K_1$, 因此, 溶液中 H^+ 浓度主要由第一步电离决定, 即比较多元弱酸的酸性强弱, 只需比较其 K_1 ; ②多元弱酸中, 每种离子浓度只有一个值, 且满足同时建立的各步平衡; ③由于 K_{a2} 更小, 故可认为 $[\text{H}^+] \approx [\text{HS}^-]$, 但 $[\text{H}^+] \neq$

$2[S^{2-}]$ 。 H_2S 溶液中除了 H_2O 以外, H_2S 是数量最多的粒子。

4. 同离子效应和缓冲溶液

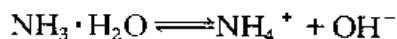
1) 同离子效应

在弱电解质溶液中, 加入与该弱电解质具有相同离子的强电解质时, 使弱电解质电离度降低的现象, 称为同离子效应。

例如, 在 HAc 溶液中加入完全电离的 $NaAc$ 或 NH_4Ac 后, 由于溶液中 Ac^- 浓度大大增加, 使 HAc 电离平衡向左移动, HAc 的电离度下降, 溶液中 H^+ 浓度减小, pH 值升高。

例 3.2.4 在 $0.40 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 氨水溶液中, 加入等体积 $0.40 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} NH_4Cl$ 溶液, 求混合溶液中 OH^- 浓度、 pH 值和 $NH_3 \cdot H_2O$ 的电离度 (已知 $K_{NH_3 \cdot H_2O} = 1.79 \times 10^{-5}$)。

解 两种溶液等体积混合后浓度各减小一半, 均为 $0.20 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 。设已电离 $NH_3 \cdot H_2O$ 的浓度为 x , 则



起始浓度 / ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) 0.20 0.20 0

平衡浓度 / ($\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) $0.20 - x$ $0.20 + x$ x

因 K_b 值很小 $0.20 \pm x \approx 0.20$

所以

$$x = [OH^-] = 1.79 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$pH = 14 - pOH = 14 + \lg [OH^-] = 9.30$$

由于溶液中氨的浓度为 $0.20 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, 所以氨的电离度

$$\alpha = \frac{x}{c} = \frac{1.79 \times 10^{-5}}{0.20} \times 100\% \approx 0.009\%$$

可计算得知, 不加 NH_4Cl 时, $0.20 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 氨水溶液的 $[OH^-] = 1.9 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $pH = 11.3$, $\alpha = 0.95\%$ 。

2) 缓冲溶液

能够抵御外加少量酸、碱而保持溶液 pH 值基本不变的作用, 称为缓冲作用, 具有缓冲作用的溶液称为缓冲溶液。由弱酸及其盐 (如 $HAc-NaAc$)、弱碱及其盐 (如 $NH_3 \cdot H_2O-NH_4Cl$), 以及多元弱酸的两种不同的盐 (如 $NaHCO_3-Na_2CO_3$ 、 $NaH_2PO_4-Na_2HPO_4$) 等, 均可组成缓冲对, 成为缓冲溶液。

缓冲溶液的缓冲作用遵循平衡移动原理, 同时, 溶液中含有足量的抗酸成分和抗碱成分。

有关缓冲溶液 pH 值的计算公式如下:

弱酸及其盐组成的缓冲溶液

$$[H^+] = K_a \frac{c_{\text{酸}}}{c_{\text{盐}}}$$

$$pH = pK_a - \lg \frac{c_{\text{酸}}}{c_{\text{盐}}}$$

弱碱及其盐组成的缓冲溶液

$$[OH^-] = K_b \frac{c_{\text{碱}}}{c_{\text{盐}}}$$

$$\text{pH} = 14 - \text{p}K_b + \lg \frac{c_{\text{碱}}}{c_{\text{盐}}}$$

以上式中, $\text{p}K_a = -\lg K_a$; $\text{p}K_b = -\lg K_b$; $\text{pOH} = -\lg[\text{OH}^-]$; $c_{\text{酸}}$ 、 $c_{\text{碱}}$ 、 $c_{\text{盐}}$ 分别为弱酸、弱碱及其盐的浓度。

显然, 缓冲溶液的 pH 值主要取决于 K_a 或 K_b 。当 $c_{\text{酸}}/c_{\text{盐}}$ 或 $c_{\text{碱}}/c_{\text{盐}}$ 比值为 1 时, 缓冲溶液的 pH 就等于 $\text{p}K_a$ 或 $(14 - \text{p}K_b)$, 且此时缓冲容量最大 (即抗酸或抗碱能力均最强)。用水稀释时, $c_{\text{酸}}$ 、 $c_{\text{碱}}$ 、 $c_{\text{盐}}$ 将同比降低, 故 pH 值不变。但缓冲溶液的缓冲能力是有限的, 加入大量酸或碱, pH 值将发生较大变化。

例 3.2.5 计算 $0.10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{HAc}$ 和 $0.10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{NaAc}$ 组成的缓冲溶液的 pH 值 (已知 $K_{\text{HAc}} = 1.77 \times 10^{-5}$)。

解 方法 (1)

设 $[\text{H}^+]$ 为 x , 则

$$\begin{array}{l} \text{HAc} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{Ac}^- \\ \text{平衡浓度} / (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}) \quad 0.10 - x \quad x \quad 0.10 + x \\ K_{\text{HAc}} = \frac{[\text{H}^+][\text{Ac}^-]}{[\text{HAc}]} = \frac{x(0.10 + x)}{0.10 - x} \approx \frac{0.1x}{0.1} = x \\ x = [\text{H}^+] = 1.77 \times 10^{-5} \\ \text{pH} = -\lg[\text{H}^+] = 5 - \lg 1.77 = 4.75 \end{array}$$

方法 (2)

$$\text{pH} = \text{p}K_a - \lg \frac{c_{\text{酸}}}{c_{\text{盐}}} = 4.75 - \lg \frac{0.10}{0.10} = 4.75$$

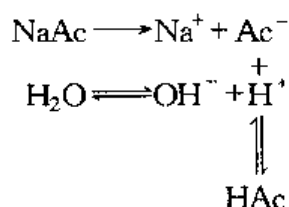
答 缓冲溶液的 pH 为 4.75。

3.2.4 盐类的水解平衡

盐类的水解是指盐的组分离子与水电离出来的 H^+ 或 OH^- 结合成弱电解质的反应, 它是中和反应的逆反应。由于弱电解质的生成, 破坏了水的电离平衡, 引起溶液 pH 值的改变, 这是水解反应的实质。

1. 水解常数 (K_h)

对于一元弱酸强碱的盐, 如 NaAc

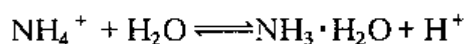


其离子方程式为 $\text{Ac}^- + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HAc} + \text{OH}^-$

$$\text{水解常数} \quad K_h = \frac{[\text{HAc}][\text{OH}^-]}{[\text{Ac}^-]} = \frac{K_w}{K_a}$$

这类盐实际是阴离子 (如 Ac^-) 发生水解, 使溶液呈碱性。显然, 酸越弱 (K_a 越小), 则 K_h 越大, 即水解的程度越大, 溶液的碱性越强。

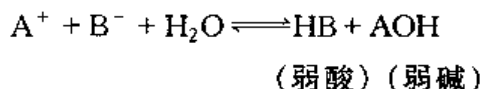
对于一元弱碱强酸盐, 如 NH_4Cl , 可如上分析得出离子方程式为



$$K_h = \frac{[\text{NH}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}][\text{H}^+]}{[\text{NH}_4^+]} = \frac{K_w}{K_b}$$

这类盐水解后, 溶液呈酸性。且 K_b 越小, K_h 越大, 酸性越强。

弱酸弱碱盐(如 NH_4Ac), 解离出来的阴、阳离子均能发生水解。例如弱酸弱碱盐 AB 水解



弱酸弱碱盐溶液的酸碱性视水解产物的 $K_{a(\text{HB})}$ 和 $K_{b(\text{AOH})}$ 的相对大小而定。

多元弱酸强碱盐的水解是分级进行的, 溶液的酸碱性主要依据一级水解的程度来判断。

2. 水解度

水解常数 K_h 反映了盐的水解程度。盐类的水解程度, 也可以用水解度 (h) 来衡量。

$$h = \frac{\text{已水解盐的物质的量 (或浓度)}}{\text{始态盐的物质的量 (或浓度)}} \times 100\%$$

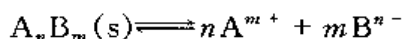
一般来说, 盐溶液浓度越小, 温度越高, 盐的水解度越大。

3.2.5 多相离子平衡

难溶电解质的饱和溶液中存在着溶解和结晶的动态平衡。这种固体中的离子与溶液中离子之间的平衡关系称为多相离子平衡, 也称为沉淀—溶解平衡。

1. 溶度积 (K_{sp})

一定温度下, 难溶电解质在达到沉淀—溶解平衡时, 饱和溶液中离子浓度适当次幂的乘积是一个常数。用一般式表示



溶度积常数表达式

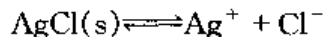
$$K_{sp, \text{A}_n\text{B}_m} = [\text{A}^{m+}]^n [\text{B}^{n-}]^m$$

式中 K_{sp} 称为溶度积常数, 简称溶度积。 A_nB_m 是固体, 不写入表达式。

2. 溶解度

难溶电解质的溶解度通常用符号 S 表示, 是指在一定温度下, 物质的饱和溶液的物质

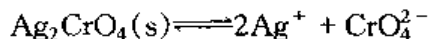
的量浓度, 单位为 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 。例如



AgCl 的溶解度

$$S = [\text{Ag}^+] = [\text{Cl}^-]$$

又如,



Ag_2CrO_4 的溶解度

$$S = [\text{CrO}_4^{2-}] = \frac{1}{2}[\text{Ag}^+]$$

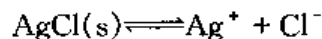
3. 溶解度和溶度积的关系

溶解度和溶度积都能反映难溶电解质溶解能力的大小, 并可以相互换算。

例 3.2.6 298 K, 氯化银的溶解度为 $1.33 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, 铬酸银的溶度积为 1.12×10^{-12} , 试计算 AgCl 的溶度积和 Ag_2CrO_4 的溶解度 (以 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 为单位)。

解

(1) 难溶电解质 AgCl 的饱和溶液中

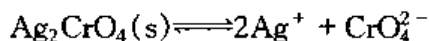


所以

$$[\text{Ag}^+] = [\text{Cl}^-] = 1.33 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$K_{\text{sp}} \cdot \text{AgCl} = [\text{Ag}^+][\text{Cl}^-] = (1.33 \times 10^{-5})^2 = 1.77 \times 10^{-10}$$

(2) 设 Ag_2CrO_4 的溶解度为 S , 根据



可得

$$[\text{CrO}_4^{2-}] = S, [\text{Ag}^+] = 2S$$

$$K_{\text{sp}} \cdot \text{Ag}_2\text{CrO}_4 = [\text{Ag}^+]^2[\text{CrO}_4^{2-}] = (2S)^2 \cdot (S) = 1.12 \times 10^{-12}$$

所以

$$S = 6.54 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

答 AgCl 的溶度积为 1.77×10^{-10} , Ag_2CrO_4 的溶解度为 $6.54 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 。

上述结果表明, AgCl 的溶度积比 Ag_2CrO_4 的溶度积大, 但 AgCl 的溶解度反而比 Ag_2CrO_4 的溶解度小。这是因为 AgCl 、 Ag_2CrO_4 属于不同类型的难溶电解质, 且它们的 K_{sp} 数值又相差不大的缘故。

应该注意, 相同类型的难溶电解质, 如同属 AB 型 (AgCl 、 AgBr), 其溶度积愈大, 溶解度也愈大; 溶度积愈小, 溶解度也愈小。而不同类型的难溶电解质, 如 AgCl 和 Ag_2CrO_4 分别属于 AB 型和 A_2B 型, 不能认为其溶度积小, 溶解度也一定小, 必要时需要进行计算。

模拟试题

1. 一定外压下, $0.01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 糖水的沸点为 T_1 , $0.01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 食盐水的沸点为 T_2 , 则 ()。

- (A) $T_1 = T_2$ (B) $T_1 < T_2$ (C) $T_1 > T_2$ (D) 无法判断

2. 某溶液的 pH 值为 5.5, 则其 H^+ 浓度为 ()。

- (A) $3 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (B) $3.5 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
(C) $5.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (D) $5.5 \times 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

3. 将 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 的 HAc 溶液加水稀释到原来体积的 2 倍时, 其 H^+ 离子浓度和 pH 值的变化趋势为 ()。

- (A) 增大和减小 (B) 减少和增大
(C) 为原来的一半和减小 (D) 为原来的一倍和减小

4. pH 为 1.0 和 3.0 的两种强酸的水溶液等体积混合后, 溶液的 pH 值为 ()。

- (A) 1.0 (B) 1.5 (C) 2.0 (D) 1.3

5. 在某温度时, 已知 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 氢氰酸 (HCN) 的电离度为 0.010%。该温度时 HCN 的标准电离常数 K_a^\ominus 是 ()。

- (A) 1.0×10^{-5} (B) 1.0×10^{-4} (C) 1.0×10^{-9} (D) 1.0×10^{-6}

6. 已知 $0.010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 某一弱酸的 pH=4.55, 则其 K_a 为 ()。

- (A) 5.8×10^{-2} (B) 9.8×10^{-3} (C) 7.8×10^{-8} (D) 8.6×10^{-7}

7. 向氨水中加入少量下列物质, 使氨水 pH 值增加最多的是 ()。

- (A) $\text{NH}_4\text{Cl}(\text{s})$ (B) $\text{NaOH}(\text{s})$ (C) $\text{HCl}(\text{aq})$ (D) $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$

8. 下列说法中正确的是 ()。

- (A) 在稀 HCl 水溶液中, 只存在 H^+
(B) 在稀 NaOH 水溶液中, $K_w^\ominus > 1.0 \times 10^{-14}$
(C) 在稀 NaCl 水溶液中, $K_w^\ominus = 1.0 \times 10^{-14}$

- (D) 在稀 HAc 水溶液中, $K_w^\ominus < 1.0 \times 10^{-14}$
9. HAc 水溶液中存在的物种有 ()。
- (A) HAc (B) HAc, H_2O , H^+ , Ac^- , OH^-
(C) HAc, H_2O (D) H_2O , HAc, H^+ , Ac^-
10. 在 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 氨水与 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ NH_4Cl 混合液中, 已知 $K_{NH_3 \cdot H_2O}^\ominus = 1.8 \times 10^{-5}$, H^+ 浓度为 () $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 。
- (A) 1.34×10^{-3} (B) 9.46×10^{-12}
(C) 1.80×10^{-5} (D) 5.56×10^{-10}
11. 将 $1 \text{ L } 4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 氨水与 $1 \text{ L } 2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 盐酸溶液混合, 混合后 OH^- 离子浓度为 () ($K_{NH_3 \cdot H_2O}^\ominus = 1.8 \times 10^{-5}$)。
- (A) $1.8 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (B) $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
(C) $2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (D) $8.0 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
12. 在 100 mL 的 $0.14 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ HAc 溶液中, 加入 100 mL 的 $0.10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ NaAc 溶液, 则该溶液的 pH 值是 () (HAc 的 $pK_a = 4.75$)。
- (A) 9.40 (B) 4.75 (C) 4.60 (D) 9.25
13. 将 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 的 HAc 与 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 的 NaAc 混合溶液中加水稀释至原来体积的 2 倍, 其 H^+ 离子浓度和 pH 值变化为 ()。
- (A) 原来的 $1/2$ 和增大 (B) 不变和不变
(C) 原来的 $1/2$ 和减小 (D) 减小和增大
14. 在氨水中加入一些 NH_4Cl 晶体, 会使 ()。
- (A) 氨水的电离常数 K_b 增大 (B) 溶液的 pH 值增大
(C) 氨水的电离度 α 增大 (D) 溶液的 pH 值减小
15. $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ HAc 和等体积的 NaAc 混合, 欲使溶液的 pH 为 5, 混合的酸与盐的浓度比应是 () ($K_{HAc} = 1.76 \times 10^{-5}$)。
- (A) 1.78 (B) $1/1.78$ (C) $10^{2.5}$ (D) $10^{-2.5}$
16. 已知 $K_{HCN}^\ominus = 5.0 \times 10^{-10}$, 则 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 的 NaCN 溶液中水解常数为 ()。
- (A) 2×10^{-5} (B) 5×10^{-10} (C) 2.2×10^{-6} (D) 5×10^{-24}
17. pH 和体积相同的 HAc 溶液和 HCl 溶液, 分别与过量 Na_2CO_3 溶液反应, 在相同条件下, 放出的 CO_2 的体积是 ()。
- (A) 一样多 (B) HCl 比 HAc 多 (C) HAc 比 HCl 多 (D) 无法比较
18. 在 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 的下列溶液中, 叙述正确的是 ()。
- (A) K_2S $c(K^+) = 2c(S^{2-})$ (B) H_2S $c(H^+) = 2c(S^{2-})$
(C) $NaHCO_3$ $c(Na^+) = c(HCO_3^-)$ (D) K_2SO_4 $c(K^+) = 2c(SO_4^{2-})$
19. 下列叙述中正确的是 ()。
- (A) 难溶电解质离子浓度的乘积就是该物质的溶度积
(B) 溶液中组成难溶电解质的离子积大于它的溶度积时就产生沉淀
(C) 溶度积大者, 其溶解度就大
(D) 用水稀释有 AgCl 固体的溶液时, AgCl 的溶度积不变, 其溶解度增大

20. 298 K, $K_{sp, CaCO_3} = 8.7 \times 10^{-9}$, $CaCO_3$ 在水中的溶解度为 ()。

- (A) $9.3 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (B) $8.7 \times 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
(C) $8.7 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (D) $4.4 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

21. 当 $Mg(OH)_2$ 固体在水中建立平衡时, $Mg(OH)_2(s) \rightleftharpoons Mg^{2+} + 2OH^-$ 为使 $Mg(OH)_2$ 固体量减少, 需要加入少量的 ()。

- (A) Na_2S (B) $MgSO_4$ (C) $NaOH$ (D) NH_4NO_3

22. 25 °C 时, PbI_2 的溶解度为 $1.52 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, 它的 K_{sp}^\ominus 为 ()。

- (A) 2.8×10^{-8} (B) 1.4×10^{-8}
(C) 2.31×10^{-6} (D) 3.5×10^{-7}

23. 下列各组溶液中属缓冲溶液的是 ()。

- (A) $0.2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} NH_3 \cdot H_2O$ 与 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} HCl$ 等体积混合
(B) $0.2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} HCl$ 与 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} NH_3 \cdot H_2O$ 等体积混合
(C) $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} NaAc$ 与 $0.2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} HCl$ 等体积混合
(D) $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} NH_3 \cdot H_2O$ 与 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} HCl$ 等体积混合

24. Ag_2CrO_4 与 $AgSCN$ 的溶度积几乎相同 (1×10^{-12}), 下列比较溶解度 S 的式子正确的是 ()。

- (A) $S_{(AgSCN)} = S_{(Ag_2CrO_4)}$ (B) $S_{(AgSCN)} > S_{(Ag_2CrO_4)}$
(C) $S_{(AgSCN)} < S_{(Ag_2CrO_4)}$ (D) $2S_{(AgSCN)} = S_{(Ag_2CrO_4)}$

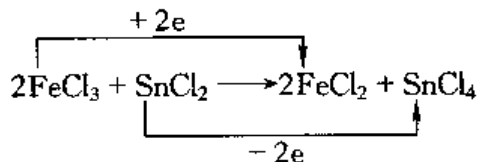
模拟试题参考答案

1. (B) 2. (A) 3. (B) 4. (D) 5. (C) 6. (C) 7. (B) 8. (C)
9. (D) 10. (D) 11. (A) 12. (C) 13. (B) 14. (D) 15. (B) 16. (A)
17. (C) 18. (D) 19. (B) 20. (A) 21. (D) 22. (B) 23. (A) 24. (C)

3.3 氧化还原与电化学

3.3.1 氧化还原反应的基本概念

氧化还原反应的特征是: 反应前后元素的化合价(氧化数)有变化, 这种变化的实质是反应物之间电子转移的结果。在氧化还原反应中, 化合价升高的过程称为氧化, 化合价降低的过程称为还原; 化合价升高的物质叫还原剂, 化合价降低的物质叫氧化剂。例如



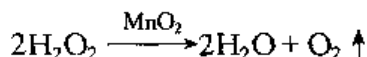
$SnCl_2$ 被氧化, 为还原剂; $FeCl_3$ 被还原, 为氧化剂。

可将反应分写成两个过程(写成离子式):



这种分别表示氧化、还原过程的式子称为半反应式。氧化、还原是同时进行的, 而且氧化剂化合价的降低值必定等于还原剂化合价的升高值。

也有的氧化还原反应，氧化剂和还原剂是同一种物质。如反应



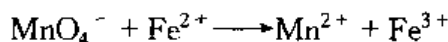
其中 H_2O_2 既是氧化剂又是还原剂。

2. 氧化还原方程式的配平

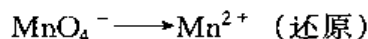
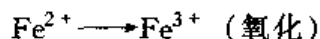
氧化还原方程式配平的方法很多，以下仅介绍离子—电子法配平。

依据的原则，一是：氧化剂所得到的电子（化合价降低）的总数与还原剂失去电子（化合价升高）的总数相等；二是：反应前后各元素的原子总数相等。现以酸性介质中 KMnO_4 与 FeSO_4 反应生成 MnSO_4 和 $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ 的反应为例来说明配平的步骤。

(1) 根据实验事实或反应规律写出未配平的离子反应方程式（不能写成离子式的，仍保留分子式）。

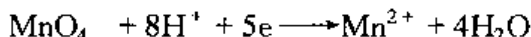
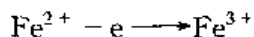


(2) 将其分写成两个半反应。



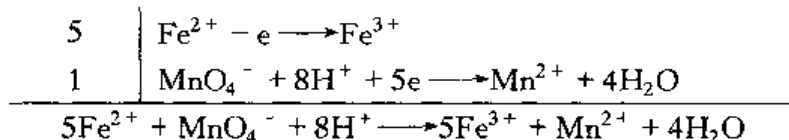
(3) 分别配平两个半反应。

加入一定数目的电子，使每个半反应式两边电荷数相等；并使原子数目也相等。



需要注意的是，若反应在酸性介质中进行，则生成物中不得有 OH^- 离子；若在碱性介质中进行，则生成物中不得有 H^+ 离子。

(4) 根据配平原则 1，将两个半反应式各乘以适当系数，然后合并两个半反应式。



(5) 根据配平原则 2，核对各元素的总数在反应前后是否相等。

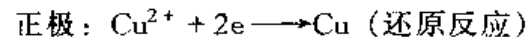
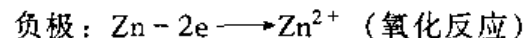
3.3.2 原电池

1. 原电池的组成和电极反应

原电池是将氧化还原的化学能直接转变为电能的装置。

例如，铜锌原电池（如图 3.3-1）由 $\text{Zn}-\text{ZnSO}_4$ 、 $\text{Cu}-\text{CuSO}_4$ 两个半电池组成，两个烧杯中的电解质溶液用倒置 U 型玻璃管，即盐桥联通，管内充满含有 KCl 饱和溶液的琼脂冻胶。盐桥中的 K^+ 离子、 Cl^- 离子会分别移向 CuSO_4 和 ZnSO_4 溶液，起着沟通两种电解质溶液及保持电中性的作用，保证了电池反应的继续进行。

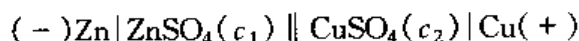
原电池中电子流出的电极称为负极（如 Zn 电极），电子流入的电极为正极（如 Cu 电极），电极上发生的反应叫做电极反应（半电池反应）。如



二式相加的总反应为电池反应： $\text{Zn} + \text{Cu}^{2+} \longrightarrow \text{Cu} + \text{Zn}^{2+}$

2. 原电池符号和氧化还原电对

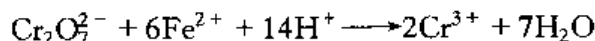
原电池的装置可用符号表示。例如铜锌原电池可写为：



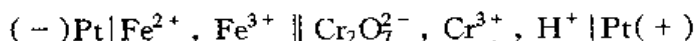
习惯上将负极写在左边, 正极写在右边, 分别用“(一)”、“(+)”表示; “|”表示固相与液相、液相与气相等的分界面; “||”表示盐桥; c_1 、 c_2 分别表示两种溶液的物质的量浓度(若为 $1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ 则可不示出), 如为气体, 则以分压表示。

每个半电池含有同一元素不同价态的两种物质, 由同一元素高价态(氧化型)物质与低价态(还原型)物质构成的一对称为氧化还原电对, 简称电对。如 Zn 半电池和 Cu 半电池的电对分别以 Zn^{2+}/Zn 和 Cu^{2+}/Cu 表示。非金属单质及其相应离子、同一元素的两种不同价态离子、金属及其难溶盐等都可组成相应的电对。例如 H^+/H_2 , O_2/OH^- , $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$, $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$, AgCl/Ag , $\text{Hg}_2\text{Cl}_2/\text{Hg}$ 等。

一般说来, 凡能自发进行的氧化还原反应都可以构成原电池。例如



此时, 组成原电池的符号应写为

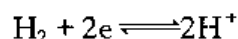


注意: 由于 $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ 、 $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$ 电对中没有固体导体, 因此必须外加一个能导电而不参与反应的惰性电极(如铂、石墨等); 不同价态离子之间无界面, 用“,”隔开; H^+ 离子参与了氧化还原反应, 应写入相应的半电池中。

3.3.3 电极电势

1. 电极电势及其测定

原电池所以能产生电流, 是由于两个电极具有不同的电极电势(电极电位)。电极电势的产生与金属及其盐溶液间的相互作用有关, 可用双电层理论解释。目前, 电极电势的绝对值尚无法测定, 但可用比较的方法确定它的相对值。通常用标准氢电极作为比较的标准, 并规定其电极电势为零。如图 3.3-2 所示, 将镀有铂黑的铂片浸入 H^+ 离子浓度为 $1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ 的酸溶液中, 并不断通入 100 kPa 的纯氢气流。电极反应为



这种电极称为标准氢电极, 电池符号记作 $\text{Pt}|\text{H}_2(100\text{ kPa})|\text{H}^+(1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1})$ 。电极电势表示为 $E_{\text{H}^+/\text{H}_2}^\ominus = 0\text{ V}$, “ \ominus ”表示标准态。

欲测定某电极的电势, 可将该电极与标准氢电极组成原电池, 确定正、负极, 测量原电池的电动势, 由于 $E_{\text{H}^+/\text{H}_2}^\ominus = 0\text{ V}$, 所以可确定欲测电极的电势 ($E_{\text{电池}} = E_{(+)} - E_{(-)}$)。

2. 标准电极电势

若待测电极处于标准态(有关离子浓度均为 $1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, 有关气体分压均为 100 kPa), 测得的电动势为标准电动势 ($E_{\text{电池}}^\ominus$)。由于

$$E_{\text{电池}}^\ominus = E_{(+)}^\ominus - E_{(-)}^\ominus$$

故测得的电极电势称为标准电极电势, 符号为 $E_{\text{氧化态}/\text{还原态}}^\ominus$ 。例如, $E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^\ominus = -0.76\text{ V}$, $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\ominus = 0.34\text{ V}$ 等。一些常用电对在 298.15 K 时的标准电势值可在有关书籍附录或手册

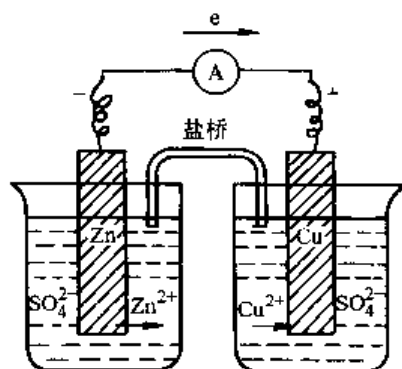


图 3.3-1 铜锌原电池的装置示意图

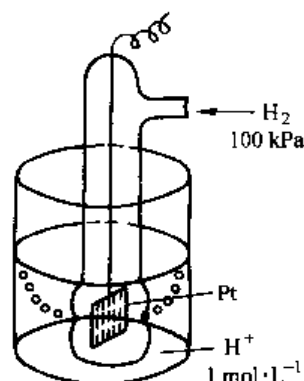
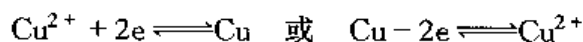


图 3.3-2 标准氢电极结构简图

中查到。

标准电极电势反映了各种物质在标准状态下氧化还原能力的强弱。电极电势代数值越小,表示该电对中还原态物质的还原能力越强,氧化态物质的氧化能力越弱;反之,电极电势代数值越大,表示该电对中氧化态物质的氧化能力越强,还原态物质的还原能力越弱。在使用电极电势表时应注意:

(1) 电极电势不随电极反应形式的改变而变化。例如



以上两种情况下都为 $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^{\ominus} = 0.34 \text{ V}$ 。

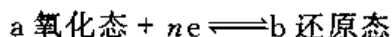
(2) 电极电势不随电极反应式的化学计量数的改变而变化。例如



以上两种情况下都为 $E_{\text{O}_2/\text{OH}^-}^{\ominus} = 0.40 \text{ V}$ 。

3. 浓度对电极电势的影响

在非标准状态下,离子浓度(或气体分压)对电极电势有一定影响。298.15 K 时,其定量关系可用能斯特(W. Nernst)方程式表示。对于任一电极反应

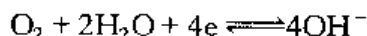


$$E_{\text{氧化态/还原态}} = E_{\text{氧化态/还原态}}^{\ominus} + \frac{0.059}{n} \lg \frac{[\text{氧化态}]^a}{[\text{还原态}]^b}$$

式中, $E_{\text{氧化态/还原态}}$ 为电极在某一浓度时的电极电势; $E_{\text{氧化态/还原态}}^{\ominus}$ 为电极的标准电极电势; n 为电极反应中转移的电子数; $[\text{氧化态}]$ 、 $[\text{还原态}]$ 分别表示电极反应中氧化态或还原态物质的浓度; a 、 b 分别表示氧化态、还原态物质前面的化学计量数。常数 0.059, 有的书中用 0.059 17。

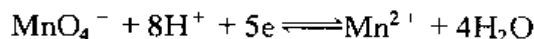
应用能斯特方程式进行有关计算时, 必须注意以下几点:

(1) 参与电极反应的纯固体、纯液体, 不列入能斯特方程式中; 若是气体, 则用相对分压 (p/p^{\ominus} , $p^{\ominus} = 100 \text{ kPa}$) 表示。如



$$E_{\text{O}_2/\text{OH}^-} = E_{\text{O}_2/\text{OH}^-}^{\ominus} + \frac{0.059}{4} \lg \frac{p_{\text{O}_2}/p^{\ominus}}{[\text{OH}^-]^4}$$

(2) 在电极反应中, 若有介质 H^+ 或 OH^- 参与反应, 必须将其浓度及计量系数写入能斯特方程式中。例如



$$E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}} = E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}}^{\ominus} + \frac{0.059}{5} \lg \frac{[\text{MnO}_4^-][\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]}$$

浓度对电极电势的影响可归纳如下:

(1) 离子浓度对电极电势有影响, 但一般不大。

(2) 当氧化态物质的浓度增大或还原态物质的浓度减小时, 都会使电极电势值增大, 反之则减小。

(3) 介质的酸碱性对含氧酸盐的影响较大。

4. 电极电势的应用

1) 判断原电池的正、负极, 计算电动势

在原电池中, 电极电势代数值较大的电极为正极, 电极电势代数值较小的为负极。原电池的电动势为

$$E_{\text{电池}}^{\ominus} = E_{(+)}^{\ominus} - E_{(-)}^{\ominus}$$

非标准态时, 可用能斯特方程式分别计算 $E_{(+)}$ 和 $E_{(-)}$, 然后计算 $E_{\text{电池}}$ 。

2) 判断氧化剂或还原剂的相对强弱

电极电势的代数值越大, 其氧化态物质的氧化性越强; 电极电势的代数值越小, 其还原态物质的还原性越强。例如

$$\text{已知 } E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^{\ominus} = 0.54 \text{ V} \quad E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\ominus} = 0.77 \text{ V} \quad E_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}}^{\ominus} = 1.36 \text{ V}$$

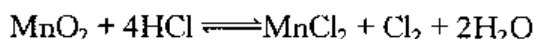
则以上三组电对中氧化剂的氧化性强弱顺序为 $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} > \text{Fe}^{3+} > \text{I}_2$; 还原剂的还原性强弱顺序为 $\text{I}^- > \text{Fe}^{2+} > \text{Cr}^{3+}$ 。

3) 判断氧化还原反应进行的方向

对任一氧化还原反应, 当作为氧化剂的电对的电极电势大于作为还原剂的电对的电极电势时, 该反应可正向进行。如果两电对的电极电势值较接近, 则应考虑浓度等因素对电极电势的影响。

例 3.3.1

(1) 判断下列反应在标准状态下能否向右进行?



(2) 实验室为什么能用 MnO_2 和浓盐酸反应制取氯气?

解

(1) 查电极电势表得

$$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + 2\text{e} \rightleftharpoons \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O} \quad E_{\text{MnO}_2/\text{Mn}^{2+}}^{\ominus} = 1.22 \text{ V}$$

$$\text{Cl}_2 + 2\text{e} \rightleftharpoons 2\text{Cl}^- \quad E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}^{\ominus} = 1.36 \text{ V}$$

因为 $E_{\text{MnO}_2/\text{Mn}^{2+}}^{\ominus} < E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}^{\ominus}$

所以在标准状态下, 该反应不能向右进行。

(2) 如果在实验室使用浓盐酸, 并假定 $[\text{H}^+] = [\text{Cl}^-] = 12 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$[\text{Mn}^{2+}] = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad p_{\text{Cl}_2} = 100 \text{ kPa}$$

$$E_{\text{MnO}_2/\text{Mn}^{2+}} = E_{\text{MnO}_2/\text{Mn}^{2+}}^{\ominus} + \frac{0.059}{2} \lg \frac{[\text{H}^+]^4}{[\text{Mn}^{2+}]}$$

$$= 1.22 \text{ V} + \frac{0.059}{2} \lg \frac{(12)^4}{0.1}$$

$$= 1.22 \text{ V} + 0.16 \text{ V} = 1.38 \text{ V}$$

$$E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-} = E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}^{\ominus} + \frac{0.059}{2} \lg \frac{p_{\text{Cl}_2}}{[\text{Cl}^-]^2}$$

$$= 1.36 \text{ V} + \frac{0.059}{2} \lg \frac{1}{(12)^2}$$

$$= 1.36 \text{ V} - 0.06 \text{ V} = 1.30 \text{ V}$$

在这样的条件下, $E_{\text{MnO}_2/\text{Mn}^{2+}} > E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}$, 反应可以向右进行, 即可用二氧化锰与浓盐酸反应制取氯气。

4) 计算氧化还原反应的平衡常数

298.15 K 时, 氧化还原反应的平衡常数和相应的原电池的标准电动势有以下关系式:

$$\lg K = \frac{nE_{\text{电池}}^{\ominus}}{0.059}$$

式中 n 为氧化还原反应中得失电子总数。

例 3.3.2 试计算下列反应在 298 K 时的平衡常数。



解 查电极电势表知 $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^{\ominus} = 0.34 \text{ V}$ $E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^{\ominus} = -0.76 \text{ V}$

$$\begin{aligned} E_{\text{电池}}^{\ominus} &= E_{(+)}^{\ominus} - E_{(-)}^{\ominus} = E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^{\ominus} - E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^{\ominus} \\ &= 0.34 \text{ V} - (-0.76) \text{ V} = 1.10 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\lg K^{\ominus} = \frac{nE_{\text{电池}}^{\ominus}}{0.059 \text{ V}} = \frac{2 \times 1.10 \text{ V}}{0.059 \text{ V}} = 37.26$$

$$K^{\ominus} = 1.8 \times 10^{37}$$

因为

$$K^{\ominus} = \frac{[\text{Zn}^{2+}]}{[\text{Cu}^{2+}]} = 1.8 \times 10^{37}$$

则 K^{\ominus} 值越大, 表明该反应进行得越完全, 即达平衡时, Cu^{2+} 几乎都被 Zn 还原。

3.3.4 电解

1. 基本概念

直流电通过电解质溶液 (或熔融液), 在电极上将发生氧化还原反应, 使电解液分解, 这样的过程称为电解。

电解一般在电解池 (槽) 中进行, 电解池是将电能直接转变成化学能的装置。在电解池中, 与直流电源正极相连的电极称为阳极, 电解时阳极发生氧化反应; 与直流电源负极相连的电极称为阴极, 电解时阴极发生还原反应。在电解中, 得到电子或失去电子的过程都叫做放电。

例如, 以石墨作电极, 电解 $0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ NaOH}$ 溶液时,

阴极: $4\text{H}^{+} + 4\text{e}^{-} \longrightarrow 2\text{H}_2 \uparrow$ (还原反应)

阳极: $4\text{OH}^{-} - 4\text{e}^{-} \longrightarrow 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2 \uparrow$ (氧化还原)

总反应 $2\text{H}_2\text{O} \xrightarrow{\text{电解}} 2\text{H}_2 \uparrow + \text{O}_2 \uparrow$

2. 电解产物的一般规律

尽管影响电解产物的因素很多, 如电解产物析出时的电极电势与物质的标准电极电势、有关离子浓度 (或气体分压) 及超电压有直接关系。但是, 判断电解产物的依据依然符合: 电解时, 在阳极上首先放电的必定是易给出电子的物质, 即析出电极电势代数值较小的还原态物质; 在阴极上首先放电的必定是易得到电子的物质, 即析出电极电势代数值较大的氧化态物质。简单盐类水溶液电解产物的一般规律如下。

(1) 用石墨或铂作电极, 电解卤化物、硫化物溶液时, 在阳极上一般得到卤素、硫; 电极电势代数值较大 (大于 $E_{\text{H}^{+}/\text{H}_2}^{\ominus}$) 的金属 (如 Cu^{2+} 、 Ag^{+} 等) 盐溶液时, 在阴极上一般得到相应的金属。

(2) 用石墨或铂作电极, 电解含氧酸 (如 HNO_3 、 H_2SO_4) 或含氧酸盐溶液时, 在阳极上一般得到氧; 电解电极电势代数值很小的金属 (如 Na^{+} 、 K^{+} 、 Mg^{2+} 、 Ca^{2+}) 盐溶液时, 在阴极上一般得到氢。

(3) 电解电极电势比 $E_{\text{H}^{+}/\text{H}_2}^{\ominus}$ 小的金属 (如 Zn^{2+} 、 Ni^{2+}) 的盐溶液时, 在阳极一般总是

得到相应的金属；而用一般金属作阳极进行电解时，一般是阳极溶解。

例如，用石墨作为电极，电解 CuCl_2 溶液时，阳极产物是 Cl_2 ，阴极产物是 Cu ；用石墨作为电极电解 Na_2SO_4 溶液时，相当于电解水，阴极得到 H_2 ，阳极得到 O_2 ；用金属镍作为电极，电解 NiSO_4 溶液时，阴极有金属 Ni 析出，而阳极是镍逐渐溶解成为 Ni^{2+} 离子。

3.3.5 金属腐蚀与防护

当金属与周围介质接触时，由于发生化学作用或电化学作用而遭受破坏的现象称为金属腐蚀。

1. 金属腐蚀的分类

1) 化学腐蚀

单纯由化学作用引起的腐蚀，即金属在高温下与干燥的气体接触，或在非电解质液体中发生的腐蚀。例如钢铁在高温时被氧化生成氧化皮（ FeO 、 Fe_2O_3 、 Fe_3O_4 等）或金属输油管道与石油中有机硫化物的反应。

2) 电化学腐蚀

当金属与电解质溶液接触时，由电化学作用引起的腐蚀称为电化学腐蚀。金属在常温下以电化学腐蚀为主。

电化学腐蚀的特点是形成腐蚀电池。在腐蚀电池中，发生氧化反应的称为阳极，发生还原反应的称为阴极。例如在钢铁的电化学腐蚀中，铁是腐蚀电池的阳极，铁中的杂质（ FeC_3 等）是腐蚀电池的阴极。电化学腐蚀的分类如下。

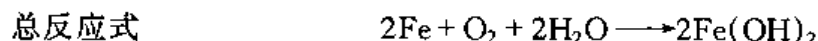
（1）析氢腐蚀：钢铁在酸性较强的介质中，一般发生析氢腐蚀。其反应如下：



Fe^{2+} 与 H_2O 作用生成 $\text{Fe}(\text{OH})_2$ ，进而被氧化、脱水，最终成为 Fe_2O_3 铁锈。

这类腐蚀过程中有氢气析出，故称为析氢腐蚀。

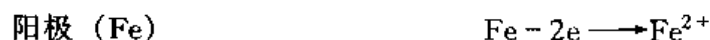
（2）吸氧腐蚀：钢铁在中性或酸性很弱的介质中，一般发生吸氧腐蚀。其反应如下：



$\text{Fe}(\text{OH})_2$ 最终被氧化、脱水成为 Fe_2O_3 。

这类腐蚀有氧气参与反应，故称为吸氧腐蚀。由于 O_2 的氧化能力比 H^+ 强，所以在大气中金属的电化学腐蚀一般以吸氧腐蚀为主。

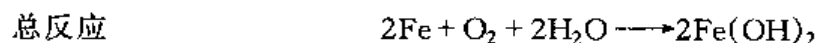
（3）浓差腐蚀（差异充气腐蚀）：钢铁表面因氧气分布不均而引起的腐蚀称为浓差腐蚀或差异充气腐蚀（实质仍属于吸氧腐蚀）。其反应如下：



（氧气浓度较小部分）



（氧气浓度较大部分）



埋入地下的金属管道、海水对船坞的“水线腐蚀”都是浓差腐蚀。

2. 金属腐蚀的防护

金属防腐的方法很多。例如组成耐蚀合金(含 Ni 或 Cr 不锈钢),或采用油漆、电镀、搪瓷等覆加保护层。下面介绍缓蚀剂法和阴极保护法。

1) 缓蚀剂法

在腐蚀介质中,加入少量某种物质后,能防止或显著延缓腐蚀,这种物质称为缓蚀剂。例如无机缓蚀剂 Na_2CrO_4 、 Na_3PO_4 、 ZnSO_4 等,有机缓蚀剂如 $(\text{CH}_2)_6\text{N}_4$ (六次甲基四胺,乌洛托品)等。其缓蚀作用常是在金属表面形成或吸附一层保护膜。

2) 阴极保护法(电化学保护法)

借助于直流电源使被保护的金属成为阴极,而得到保护的方法称为外加电流阴极保护法。借助于外加阳极(连接较活泼的金属)使被保护的金属成为阴极,这种保护方法称为牺牲阳极阴极保护法。

模拟试题

1. 烟道气中的 SO_2 可用 $\text{Ca}(\text{OH})_2$ 溶液吸收,其化学反应方程为 $2\text{Ca}(\text{OH})_2 + 2\text{SO}_2 + \text{O}_2 \longrightarrow 2\text{CaSO}_4 + x$, 式中 x 应是 ()。

- (A) H_2O (B) $2\text{H}_2\text{O}$ (C) $\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$ (D) $4\text{H}_2\text{O}$

2. 配平方程式 $\text{FeSO}_4 + \text{KClO}_3 + \text{H}_2\text{SO}_4 \longrightarrow \text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3 + \text{KCl} + \text{H}_2\text{O}$, H_2O 前面的化学计量数是 ()。

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

3. 反应 $3\text{NO}_3^- + 8\text{Al} + 5\text{OH}^- + 18\text{H}_2\text{O} \longrightarrow 3\text{NH}_3 + 8\text{Al}(\text{OH})_4^-$ 中的还原剂是 ()。

- (A) NO_3^- (B) $\text{Al}(\text{OH})_4^-$ (C) Al (D) H_2O

4. 已知反应 $3\text{Cl}_2 + 6\text{NaOH} \longrightarrow \text{NaClO}_3 + 5\text{NaCl} + 3\text{H}_2\text{O}$, 对于 Cl_2 在反应中所起作用的正确评述是 ()。

- (A) Cl_2 既是氧化剂, 又是还原剂
(B) Cl_2 是氧化剂, 不是还原剂
(C) Cl_2 是还原剂, 不是氧化剂
(D) Cl_2 既不是氧化剂, 又不是还原剂

5. 将反应 $5\text{Fe}^{2+} + \text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ \longrightarrow \text{Mn}^{2+} + 5\text{Fe}^{3+} + 4\text{H}_2\text{O}$ 设计为原电池, 电池符号为 ()。

- (A) $(-)\text{Fe}|\text{Fe}^{3+}, \text{Fe}^{2+}||\text{MnO}_4^-, \text{Mn}^{2+}, \text{H}^+|\text{Mn}(+)$
(B) $(-)\text{Pt}|\text{Fe}^{3+}, \text{Fe}^{2+}||\text{MnO}_4^-, \text{Mn}^{2+}, \text{H}^+|\text{Pt}(+)$
(C) $(-)\text{Pt}|\text{MnO}_4^-, \text{Mn}^{2+}, \text{H}^+||\text{Fe}^{3+}, \text{Fe}^{2+}|\text{Pt}(+)$
(D) $(-)\text{Pt}|\text{Fe}^{3+}, \text{Fe}^{2+}||\text{MnO}_4^-, \text{Mn}^{2+}|\text{Pt}(+)$

6. 由电极反应 $\text{Cu}^{2+} + 2\text{e} \rightleftharpoons \text{Cu}$ $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\ominus = 0.34 \text{ V}$, 推测电极反应 $2\text{Cu} - 4\text{e} \rightleftharpoons 2\text{Cu}^{2+}$ 的 $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\ominus$ 值为 ()。

- (A) -0.68 V (B) $+0.68 \text{ V}$ (C) -0.34 V (D) $+0.34 \text{ V}$

7. 用能斯特方程式计算 $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$ 的电极电势, 下列叙述正确的是 ()。

- (A) Mn^{2+} 浓度增大, 则电极电势值增大
(B) H^+ 浓度的变化对电极电势的影响比 Mn^{2+} 变化影响大
(C) 溶液稀释, $c(\text{MnO}_4^-)/c(\text{Mn}^{2+})$ 值不变, 电极电势值不变
(D) MnO_4^- 浓度减小, 电极电势值增大

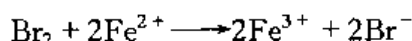
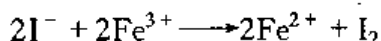
8. 在下列半反应中 $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$, 当 $[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = [\text{Cr}^{3+}] = 1.0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ 溶液中的 $\text{pH} = 3.0$ 时, $E_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}}$ 值为 () (已知 $E_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}}^\ominus = 1.33 \text{ V}$)。

- (A) 1.33 V (B) 1.26 V (C) 0.917 V (D) 0.36 V

9. 已知 $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\ominus = 0.342 \text{ V}$, $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^\ominus = 0.536 \text{ V}$, $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^\ominus = 0.771 \text{ V}$, $E_{\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}}^\ominus = 0.151 \text{ V}$, 试判断还原剂的还原性由强到弱的是 ()。

- (A) Cu , I^- , Fe^{2+} , Sn^{2+} (B) I^- , Fe^{2+} , Sn^{2+} , Cu
(C) Sn^{2+} , Cu , I^- , Fe^{2+} (D) Fe^{2+} , Sn^{2+} , I^- , Cu

10. 已知下列反应均按正方向进行



由此判断下列电对的电极电势代数值符合由大到小排列顺序的是 ()。

- (A) $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^\ominus$, $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^\ominus$, $E_{\text{Br}_2/\text{Br}^-}^\ominus$ (B) $E_{\text{Br}_2/\text{Br}^-}^\ominus$, $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^\ominus$, $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^\ominus$
(C) $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^\ominus$, $E_{\text{Br}_2/\text{Br}^-}^\ominus$, $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^\ominus$ (D) $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^\ominus$, $E_{\text{Br}_2/\text{Br}^-}^\ominus$, $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^\ominus$

11. 下列两电极反应: $\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu}$, $\text{I}_2 + 2\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{I}^-$, 离子浓度增大时, 电极电势变化正确的是 ()。

- (A) $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}$ 变小, $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}$ 变小 (B) $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}$ 变大, $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}$ 变大
(C) $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}$ 变小, $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}$ 变大 (D) $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}$ 变大, $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}$ 变小

12. 某一电池由下列两个半电池组成:



反应 $\text{A} + \text{B}^{2+} \rightleftharpoons \text{A}^{2+} + \text{B}$ 的平衡常数是 10^4 , 则该电池的标准电动势是 ()。

- (A) +0.118 V (B) +1.20 V (C) +0.07 V (D) -0.50 V

13. 已知 $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^\ominus = 0.771 \text{ V}$, $E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}}^\ominus = 1.491 \text{ V}$, 反应 $5\text{Fe}^{3+} + \text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ \longrightarrow 5\text{Fe}^{2+} + \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$ 在 298 K 时的标准平衡常数是 ()。

- (A) 6.94×10^{-60} (B) 1.47×10^{12} (C) 1.04×10^{61} (D) 60.8

14. 电解 $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ FeSO}_4$ 和 $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ ZnSO}_4$ 的混合溶液, 用石墨作电极, 在阳极的产物是 ()。

- (A) H_2 (B) O_2 (C) SO_2 (D) OH^-

15. 用铜电极电解 CuCl_2 水溶液时, 其阳极的电极反应主要是 ()。

- (A) $4\text{OH}^- - 4\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$ (B) $2\text{Cl}^- - 2\text{e}^- \longrightarrow \text{Cl}_2$
(C) $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \longrightarrow \text{H}_2$ (D) $\text{Cu} - 2\text{e}^- \longrightarrow \text{Cu}^{2+}$

16. 含有杂质的铁在水中发生吸氧腐蚀, 则阳极反应是 ()。

- (A) $\text{Fe} \longrightarrow \text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^-$ (B) $\text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e}^- \longrightarrow 4\text{OH}^-$
(C) $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \longrightarrow \text{H}_2$ (D) $\text{Fe}^{2+} + 2\text{OH}^- \longrightarrow \text{Fe}(\text{OH})_2$

17. 将钢管一部分埋在沙土中, 另一部分埋在黏土中, 埋入黏土中的部分成为腐蚀电池的 ()。

- (A) 阳极 (B) 正极 (C) 负极 (D) 阴极

18. 下列防止金属腐蚀的方法中错误的是 ()。

- (A) 金属表面涂刷油漆
(B) 在外加电流保护法中, 被保护金属直接与电源正极相连

(C) 在外加电流保护法中, 被保护金属直接与电源负极相连

(D) 为了保护铁制管道可使其与锌片相连

模拟试题参考答案

1. (B) 2. (B) 3. (C) 4. (A) 5. (B) 6. (D) 7. (B) 8. (C)
9. (C) 10. (B) 11. (D) 12. (A) 13. (C) 14. (B) 15. (D) 16. (B)
17. (A) 18. (B)

3.4 原子结构与周期律

通常情况下, 发生化学反应时只涉到核外电子运动状态的改变, 原子核并不发生变化。

3.4.1 微观粒子的波粒二象性和统计性规律

1913年, 玻尔 (Bohr) 理论成功地将氢原子光谱与氢原子结构联系起来, 并进行了解释。但是不能解释光谱中的精细结构, 也不能解释多电子原子的光谱。

1924年德布罗依 (de Broglie) 提出, 电子、原子等微粒具有波、粒二象性。若电子质量为 m 、运动速率为 v , 其对应的波长 λ 可由下式求得 (德布罗依关系式)。

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

式中, h 为普朗克常数, h 将波、粒二象性联系起来。动量 $p = mv$ 。日后, 二象性得到实验证实。

对于电子衍射实验得到的明暗相间的环纹, 量子力学认为: 原子中个别电子的运动无确定的轨迹, 即无确定的轨道, 但有一定规律。大量粒子的综合表现成为衍射图样。可见, 电子的波动性遵循统计性规律, 电子等物质的微粒波是具有统计性的几 (概) 率波。

3.4.2 原子结构

1. 波函数与原子轨道

1) 波函数与原子轨道

波函数 (通常用 Ψ 表示) 是 1926 年薛定谔 (Schrödinger) 提出的描述微观粒子运动规律的一种数学函数式——薛定谔方程。它是一个二阶偏微分方程, 式中包括体现微粒粒子性的物理量 (质量 m 、势能 V 、总能量 E 等)。

波函数不是具体的数值, 而是用空间坐标描写波的数学函数式, 它对应于电子的一种状态。量子力学中, 将描述原子中单个电子运动状态的波函数称为原子轨道 (或称原子轨函, 以示与玻尔轨道概念的区别)。即原子轨道是波函数的同义词。

2) 原子轨道的角度分布图

将波函数 Ψ 的角度分布部分 (Y) 做图, 所得的图像就称为原子轨道的角度分布图。如图 3.4-1 实线部分所示。可看出, s 轨道的为球形; p_x 、 p_y 、 p_z 轨道的皆为哑铃形 (双球形), 只是空间伸展方向不同; d 轨道的为花瓣形。

2. 量子数

在求解薛定谔方程时, 为了得到合理的解, 自然引出一些量子化条件。

1) 主量子数 (n)

主量子数 n 表示原子轨道离核的远近。它是描述原子轨道能量高低的主要因素。 n 可取 1、2、3、4 等正整数, 其中每一个 n 值代表一个电子层, n 越小; 表示电子层离核越

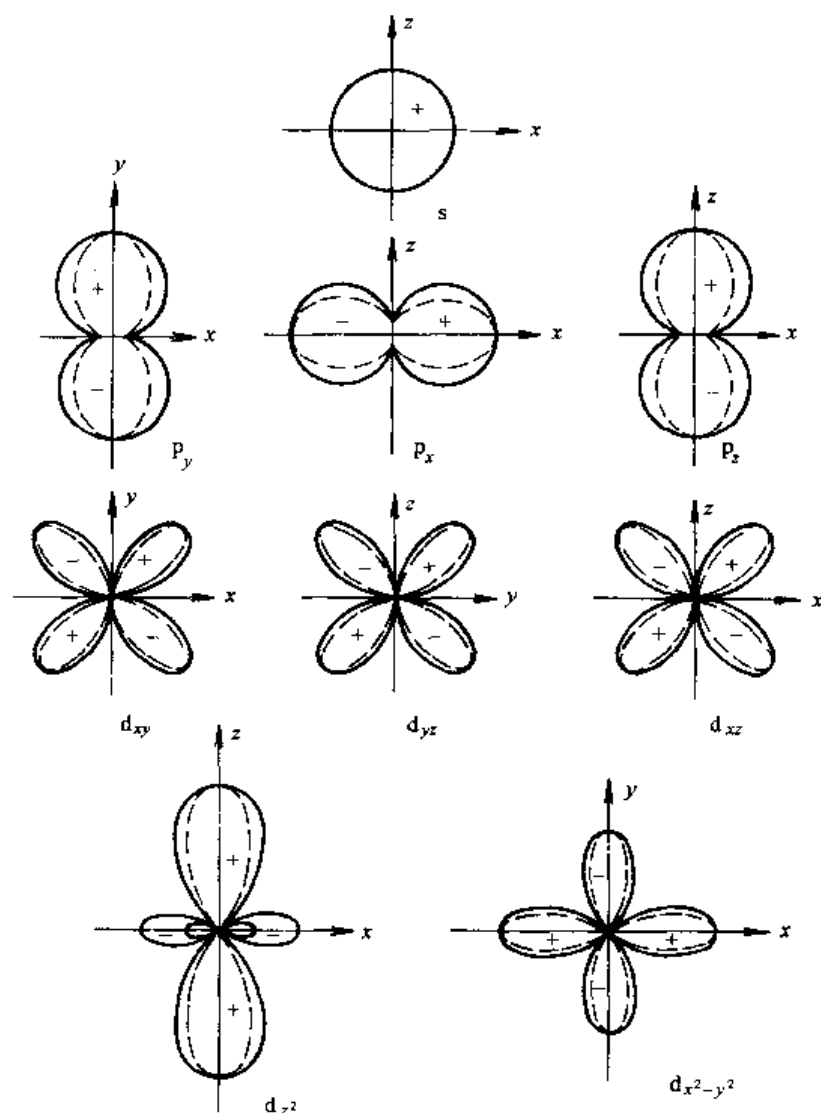


图 3.4-1 s、p、d 原子轨道 (实线部分)、电子云 (虚线部分)
角度分布剖面图

近, 所处状态的能量越低。可用符号 K、L、M、N、O 等分别表示 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 的电子层。

2) 副量子数 (l)

l 又称角量子数, 决定电子运动角动量的大小。因而可以确定电子亚层或原子轨道的形状。在多电子原子中, l 值的大小还影响原子轨道的总能量。 l 的取值受 n 所限, 为 $l=1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 的正整数。如 $n=1$, l 只能取 0, $n=2$, l 可以取 0, 1 两个数值, 表示两个不同的亚层。 l 值越大, 能级越高。可用符号 s、p、d、f、……分别表示 $l=0, 1, 2, 3, \dots$ 等的电子亚层, 并对应球形、哑铃形、花瓣形等不同形状。

3) 磁量子数 (m)

磁量子数 m 表征了每个亚层中原子轨道的数目及原子轨道的空间取向。 m 的取值受 l 的限制, 即 $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ 。

在没有外磁场的情况下, 同一亚层 (n 、 l 值相同, m 值不同) 的原子轨道 (如 $2p_x$ 、 $2p_y$ 、 $2p_z$) 具有相同的能量, 称为等价轨道或简并轨道。

如上所述, n 、 l 、 m 三个量子数的各自取值一定, 相应波函数的函数式, 即一个特定原子轨道的大小、形状和伸展方向亦随之确定。

4) 自旋量子数 (m_s)

m_s 有两个取值 $+\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{2}$ 。通常可用正、反箭头 $\uparrow \downarrow$ 来表示电子的两种不同的所谓自旋状态。“自旋”并非经典的自旋概念。

四个量子数的允许取值和相应的核外电子运动的可能状态数可见表 3.4.1。

表 3.4.1 核外电子运动的可能状态数

主量子数 n	电子层 符 号	角量子数 l	原子轨道 符号	磁量子数 m	轨道空间 取向数	电子层中 轨道总数	自旋量子 数 m_s	状态数	
								各轨道	各电子层
1	K	0	1s	0	1	1	$\pm \frac{1}{2}$	2	2
2	L	0	2s	0	1	4	$\pm \frac{1}{2}$	2	8
		1	2p	-1, 0, +1	3		$\pm \frac{1}{2}$	6	
3	M	0	3s	0	1	9	$\pm \frac{1}{2}$	2	18
		1	3p	-1, 0, +1	3		$\pm \frac{1}{2}$	6	
		2	3d	-2, -1, 0, +1, +2	5		$\pm \frac{1}{2}$	10	
4	N	0	4s	0	1	16	$\pm \frac{1}{2}$	2	32
		1	4p	-1, 0, +1	3		$\pm \frac{1}{2}$	6	
		2	4d	-2, -1, 0, +1, +2	5		$\pm \frac{1}{2}$	10	
		3	4f	-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3	7		$\pm \frac{1}{2}$	14	

3. 几 (概) 率密度和电子云

1) 几率密度和电子云

波函数的平方 Ψ^2 可以反映电子在空间某位置上单位体积内出现的几率大小, 即几率密度。为了形象地表示核外电子运动的几率分布情况, 化学上习惯用小黑点的疏密表示电子出现几率密度的相对大小。这种空间图像叫做电子云。小黑点较密的地方, 表示几率密度较大, 单位体积内电子出现的机会多。

2) 电子云的角度分布图

将 $|\Psi|^2$ 的角度分布部分做图, 所得的图像称为电子云角度分布图 (见图 3.4-1 虚线部分)。只是应注意, 原子轨道的角度分布图带有正、负号, 而电子云角度分布图均为正值 (习惯不标出); 又因原子轨道的 Y 值 < 1 , $|Y|^2$ 更小, 所以电子云角度分布图较“瘦”。

4. 多电子原子的核外电子分 (排) 布

氢原子轨道的能量决定于主量子数 n ; 而多电子原子轨道的能量不仅与主量子数 n 有关, 还与角量子数 l 有关。根据光谱实验结果, 可归纳出有关原子轨道能级的三条规律。

1) 多电子原子轨道能级

(1) 当主量子数 n 相同时, 轨道能量随着角量子数 l 值的增大而升高。例如, $E_{ns} < E_{np} < E_{nd}$ 等。

(2) 当角量子数 l 相同时, 轨道能量随着主量子数 n 值的增大而升高。例如, $E_{1s} < E_{2s} < E_{3s}$ 等。

(3) 当主量子数和角量子数都不同时, 有时会出现能级交错现象。例如, $E_{4s} < E_{3d}$, $E_{5s} < E_{4d}$ 等。

1939 年, 鲍林 (L. Pauling) 总结出原子轨道近似能级图, 其由低到高的顺序为: $1s$; $2s, 2p$; $3s, 3p$; $4s, 3d, 4p$; $5s, 4d, 5p$; $6s, 4f, 5d, 6p$; $7s \cdots$ 。能量相近的几个轨道组成能级组, 以分号 “;” 隔开。

2) 原子核外电子分布原则

(1) 泡利 (Pauli) 不相容原理: 在同一个原子中, 不能有四个量子数完全相同的电子存在。即在每一个轨道中最多只能容纳 2 个自旋方向相反的电子。

(2) 能量最低原理: 电子的分布总是尽先占据能量最低的轨道, 即使整个电子能量处于最低状态 (基态)。为了便于记忆, 可参阅电子填入轨道顺序图 3.4-2。

(3) 洪德 (Hund) 规则: 内容有二。① 在同一亚层的各个等价轨道上, 电子的排布将尽可能分占不同的轨道, 并且自旋相同。例如, 氮原子的 $2p$ 轨道有 3 个电子, 将分占不同轨道 ($2p_x^1 2p_y^1 2p_z^1$), 且 3 个电子自旋相同。

② 在等价轨道上分布的电子处于全充满 (np^6 、 nd^{10} 、 nf^{14})、半充满 (np^3 、 nd^5 、 nf^7) 或全空 (np^0 、 nd^0 、 nf^0) 状态时, 原子具有较低的能量和较大的稳定性。

3) 原子的核外电子分布式和外层电子分布式

(1) 原子的核外电子分布式: 多电子原子中的电子在各个轨道上分布的式子称为核外电子分布式, 简称电子分布式。

可根据以上介绍规律和原则依次填入电子, 再按主量子数进行调整, 即得到各元素基态原子的电子分布式。例如钪 (Sc) 原子 (序数为 21) 的核外电子排布式似为

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^1$$

但在书写电子分布式时, 要按主量子数进行调整, 即将 $3s$ 轨道放在 $4s$ 前面, 与同层的 $3s$ 、 $3p$ 轨道写在一起。即

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^1 4s^2$$

这也可以表明 Sc 原子最外层 $4s$ 轨道已被电子填满, 而次外层 $3d$ 却未充满。

又如 24 号铬 (Cr) 原子的电子分布式为

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^1 \quad \text{而不是} \quad 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^4 4s^2$$

再如 29 号铜 (Cu) 原子的电子分布式为

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1 \quad \text{而不是} \quad 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^9 4s^2$$

这是因为此时 $3d$ 轨道处于半充满 ($3d^5$) 或全充满 ($3d^{10}$), 能量较低, 较稳定。

当然, 也有少数副族元素 (特别是第 6、7 周期中的某些元素) 的电子分布不符合三个

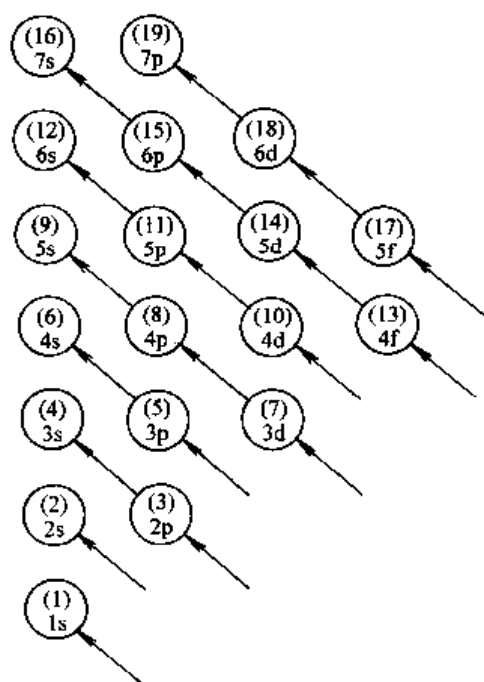


图 3.4-2 电子填入轨道顺序图

原则。

特别指出,在书写核外电子分布式时,为简便起见,如 Mg, Sc 或 Cu 的电子分布式可分别写成 $[\text{Ne}] 3s^2$, $[\text{Ar}] 3d^1 4s^2$ 和 $[\text{Ar}] 3d^{10} 4s^1$ 形式。即用该元素前一周期的稀有气体的元素符号 $[\text{Ne}]$ (氖)、 $[\text{Ar}]$ (氩),表示原子中内层电子 $1s^2 2s^2 2p^6$ 或 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$,及其相应原子核所组成的一个原子实体称为“原子实”。

(2) 原子的外层电子分布式:由于化学反应通常只涉及外层电子的变化,所以一般不必写出完整的电子分布式,只写出外层电子分布式,又称为价层电子构型。对于主族元素即为最外层电子分布的形式。例如 Cl 原子的外层电子分布式为 $3s^2 3p^5$, Mg 原子的外层电子分布式为 $3s^2$ 。对于副族元素则是指最外层 s 电子和次外层 d 电子的分布式。例如, Cr 原子的外层电子分布式为 $3d^5 4s^1$, Sc 为 $3d^1 4s^2$ 。对于镧系和锕系元素,还需考虑外数第三层 f 电子。

4) 离子的电子分布式和外层(价层)电子构型

原子失去电子的顺序是按原子的电子分布式从外到内的次序,而不一定是电子填充顺序的逆过程。例如,锰(Mn)原子电子填充是先 $4s^2$ 后 $3d^5$,而 Mn^{2+} 的电子分布式为 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5$ 。即首先失去的是 4s 电子。

值得注意的是, Mn 原子的外层电子分布式为 $3d^5 4s^2$,而 Mn^{2+} 的外层电子分布式不能只写 $3d^5$,而应将整个一层 $3s^2 3p^6 3d^5$ 书写完全。

3.4.3 周期律

元素周期表是元素性质周期性变化的表现形式。常见的长式周期表,如图 3.4-3 所示。从周期表中可看出电子层结构与周期律之间的关系(此图在本章最后)。

1. 能级组与元素的周期

周期表中每一横排元素称为一周期,共有 7 个周期。

元素在周期表中所处的周期数等于该元素原子的电子层数,即最大主量子数 n 。每周期元素的数目等于相应能级组中原子轨道所能容纳的电子数,如表 3.4.2 所示。周期表中镧系或锕系 15 个元素占一个位置,是因为这些元素的最外层 6s 或 7s 充满后,电子填充到 4f 或 5f 层,因而性质极为相似。

表 3.4.2 能级组与各周期元素数目的关系

周 期	能级组	最大主量子数 n	相应能级组中原子轨道	电子最大容量	元素数目
1	1	1	1s	2	2
2	2	2	2s2p	8	8
3	3	3	3s3p	8	8
4	4	4	4s3d4p	18	18
5	5	5	5s4d5p	18	18
6	6	6	6s4f5d6p	32	32
7	7	7	7s5f6d7p	(23) (未完)	23 (未完)

2. 价层电子构型与族

周期表中的纵行(共 18 列)为族。主族元素及第 I B、II B 族元素的族数等于最外层电子数;第 III B 至第 VII B 族元素的族数等于最外层电子数与次外层 d 电子数之和。第 VIII (又称 VII B)族包括三个纵行,最外层与次外层 d 电子数之和为 8 至 10。零族(又称 VIII A)元素最外层电子数为 8 或 2。副族元素称为过渡元素;镧系、锕系元素统称为内过渡元素。

3. 元素的分区

周期表按元素原子中最后一个电子填入的亚层而划分为如图 3.4-4 所示的五个区域。

两性氧化物：例如铝、锡、铅等的氧化物，多为周期表中靠近非金属的一些金属元素。

不成盐氧化物：例如 CO 、 NO 等。它们与水、酸、碱都不反应。

氧化物及水合物之酸碱性有以下变化规律。

(1) 在同一周期中，从左到右各主族元素最高价氧化物及其水合物的酸性逐渐增强，碱性逐渐减弱。以第 3 周期为例

NaO	MgO	Al_2O_3	SiO_2	P_2O_5	SO_3	Cl_2O_7
NaOH	Mg(OH)_2	Al(OH)_3	H_2SiO_3	H_3PO_4	H_2SO_4	HClO_4
碱性强	碱性中强	两性	酸性弱	酸性中强	酸性强	酸性特强
						→酸性增强 (碱性减弱)

长周期中副族及第ⅦB 元素的氧化物及水合物的酸碱性递变规律与主族相似。例如

Sc_2O_3	TiO_2	V_2O_5	CrO_3	Mn_2O_7
Sc(OH)_3	Ti(OH)_4	HVO_3	H_2CrO_4	HMnO_4
碱性	两性	酸性弱	酸性中强	酸性强
				→酸性增强 (碱性减弱)

(2) 在同一族中，从上而下，各元素相同价态的氧化物及其水合物的酸性逐渐减弱 (碱性逐渐增强)。例如在第 V A 族中

N_2O_3	P_2O_3	As_2O_3	Sb_2O_3	Bi_2O_3
HNO_2	H_3PO_4	H_3AsO_3	Sb(OH)_3	Bi(OH)_3
酸性	酸性	两性偏酸	两性	弱碱性
				→碱性增强 (酸性减弱)

(3) 不论主族还是副族，对同一元素不同价态的氧化物，高价态的氧化物及其水合物的酸性比低价态的要强。例如

HClO	HClO_2	HClO_3	HClO_4
			→酸性增强
CrO	Cr_2O_3	CrO_3	
Cr(OH)_2	Cr(OH)_3	H_2CrO_4	
碱性	两性	酸性	
			→酸性增强

模拟试题

- 下列叙述中错误的是 ()。
 - 电子云示意图中，小黑点疏密表示电子出现的几率密度的大小
 - 某一原子轨道是电子的一种空间运动状态，即波函数
 - 对于多电子原子来说，主量子数 n 决定原子轨道的能量
 - 对于多电子原子来说，主量子数 n 和角量子数 l 决定原子轨道的能量
- p_z 波函数角度分布的形状是 ()。
 - 双球形
 - 球形
 - 四瓣梅花形
 - 橄榄形
- 下列各套量子数，不合理的是 ()。
 - $n=2, l=1, m=-1$
 - $n=2, l=0, m=-1$

- (C) $n=3, l=1, m=0$ (D) $n=3, l=0, m=0$
4. 量子数 $n=3, l=2$ 时, 可允许的最多电子数为 ()。
- (A) 6 (B) 2 (C) 8 (D) 10
5. 下列电子构型中属于原子基态的是 ()。
- (A) $1s^2 2s^2 2p^5 4f^1$ (B) $1s^2 2p^2$ (C) $1s^2 2s^1 2p^1$ (D) $1s^2 2s^2$
6. 24 号元素 Cr 的基态原子价层电子分布式正确的是 ()。
- (A) $3d^6 4s^0$ (B) $3d^5 4s^1$ (C) $3d^4 4s^2$ (D) $3d^3 4s^2 4p^1$
7. 13 号铝的基态电子构型的正确表达式为 ()。
- (A) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^3$ (B) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1 3p^4$
(C) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$ (D) $1s^2 2s^2 2p^3 3s^2 3p^4$
8. 在下列电子结构式中, 不能正确表示基态原子的电子结构式的是 ()。
- (A) $[\text{He}] 2s^2$ (B) $[\text{Ne}] 3s^2 3p^4$
(C) $[\text{Ar}] 4s^2 4p^5$ (D) $[\text{Ar}] 3d^6 4s^2$
- 说明: $[\text{He}]$ 表示 $1s^2$ 结构, $[\text{Ne}]$ 表示 $1s^2 2s^2 2p^6$ 结构, $[\text{Ar}]$ 表示 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ 结构。
9. 已知某元素 +3 价离子的电子分布式为 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2$, 该元素在周期表中属于 ()。
- (A) VB 族 (B) IIIB 族 (C) VA 族 (D) IIIA 族
10. 某元素的原子有 5 个电子层, 该元素属于 ()。
- (A) 第 2 周期 (B) 第 3 周期 (C) 第 4 周期 (D) 第 5 周期
11. 最外电子层上有两个电子, 其量子数 $n=5, l=0$ 的元素是 ()。
- (A) s 区元素 (B) ds 区元素
(C) 两者均有可能 (D) 两者均不可能
12. 比较原子半径大小, 下列叙述中错误的是 ()。
- (A) $K > Na$ (B) $S > P$ (C) $Al > Si$ (D) $Na > Mg$
13. 下列元素电负性大小顺序正确的是 ()。
- (A) $N < O < P$ (B) $O < N < P$ (C) $P < N < O$ (D) $P < O < N$
14. 氧化物水合物的酸性符合由强到弱次序排列的是 ()。
- (A) $\text{SO}_3 \text{ CO}_2 \text{ Al}_2\text{O}_3 \text{ CaO}$ (B) $\text{CaO} \text{ SO}_3 \text{ CO}_2 \text{ Al}_2\text{O}_3$
(C) $\text{CaO} \text{ CO}_2 \text{ SO}_3 \text{ Al}_2\text{O}_3$ (D) $\text{CaO} \text{ Al}_2\text{O}_3 \text{ CO}_2 \text{ SO}_3$
15. 下列氧化物不是两性氧化物的是 ()。
- (A) Al_2O_3 (B) SnO (C) MgO (D) PbO
16. 下列物质中, 酸性最强的是 ()。
- (A) HMnO_4 (B) H_3AsO_4 (C) H_3BO_3 (D) H_2SO_3
17. 下列氧化物中既可与稀 H_2SO_4 , 又可与稀 NaOH 作用的是 ()。
- (A) CO (B) SiO_2 (C) Cu_2O (D) Al_2O_3

模拟试题参考答案

1. (C) 2. (A) 3. (B) 4. (D) 5. (D) 6. (B) 7. (C) 8. (C)
9. (A) 10. (D) 11. (C) 12. (B) 13. (C) 14. (A) 15. (C) 16. (A)

17. (D)

3.5 化学键与晶体结构

3.5.1 化学键

除了稀有气体是单原子分子以外, 物质通常都是以原子 (或离子) 组成的分子或晶体形式存在。化学上将这种分子或晶体中相邻原子 (或离子) 之间强烈的相互作用力叫做化学键。化学键主要有离子键、共价键和金属键三种类型。

1. 离子键

1) 离子键的形成

电负性较小的金属原子 (如 Na、K 等) 和电负性较大的非金属原子 (如 F、Cl 等) 在一定条件下相遇时, 前者易失去电子形成正离子, 后者易获得电子形成负离子。正、负离子以静电引力形成的化学键称为离子键。由离子键形成的化合物叫做离子化合物。

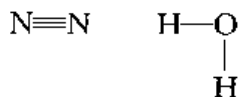
2) 离子键的特点

离子键的特点是没有方向性和饱和性。这是因为离子的电场具有球形对称性, 只要空间许可, 可在任何方向且与多个异电荷离子成键。

2. 共价键

1) 价键理论

(1) 共价键的形成: 同种非金属元素或电负性相差不大的元素原子, 以共用电子对而形成的化学键称为共价键。通过共价键形成的化合物为共价化合物, 其中元素的化合价等于共用电子对的数目。共用电子对除用 “:” 表示外, 还可用短线 “—” 表示, 称为结构式。例如



(2) 共价键的特点: 共价键的特点是具有饱和性和方向性。

饱和性是指原子中自旋相反的未成对电子配对后, 就不能再继续成键。例如, 一个 H 原子与一个 Cl 原子的未成对电子形成共价键后, 就不能再与另一个 Cl 原子成键, 这就是共价键的饱和性。

方向性是指两个原子形成共价键时, 只有对称性相同的原子轨道 (波函数的正、负号相同) 才能有效重叠, 重叠越多, 两核间的电子云密度越大, 形成的共价键就越稳定。因此除 s-s (轨道皆为球形) 键无方向性外, s-p 键或 p-p 键等都必须沿一定的方向重叠。如图 3.5-1, 形成 HCl 分子时, 只有 H 原子的 1s 轨道沿着 Cl 原子的 3p 轨道的对称轴方向同号重叠 (图 3.5-1 (a)), 才能达到最大程度的有效重叠, 这就是共价键的方向性。

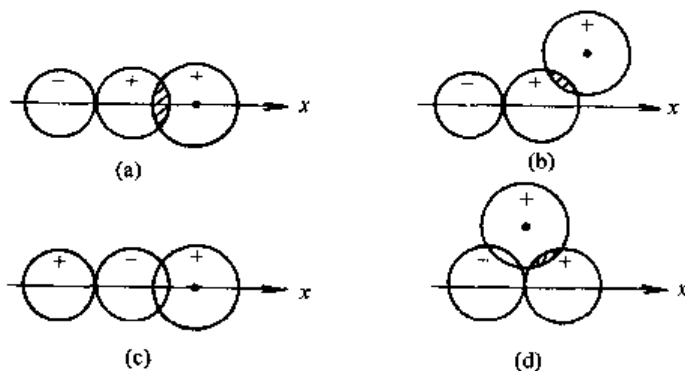


图 3.5-1 s 和 p_x 轨道 (角度分布) 的重叠方式示意图

(3) 共价键的分类：根据成键原子轨道重叠方式的不同，可将共价键分为 σ 键和 π 键。

① σ 键是两原子轨道沿键轴（两核连线）方向以“头碰头”方式进行重叠。如图 3.5-2 (a)。

② π 键是两原子轨道沿键轴（如 x 轴）方向以“肩并肩”方式进行重叠。如图 3.5-2 (b)。

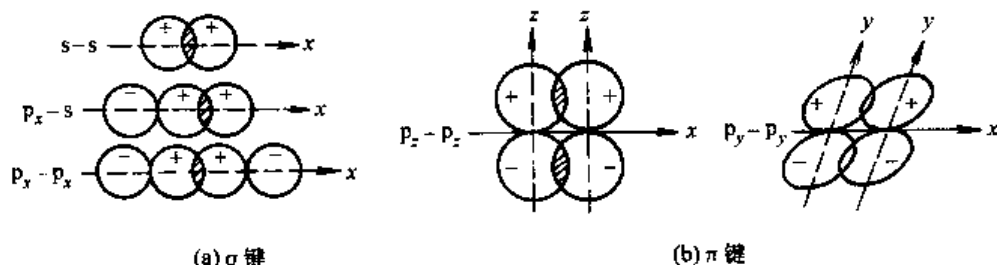


图 3.5-2 σ 键和 π 键示意图

共价单键一般是 σ 键。双键（如 $\text{CH}=\text{CH}$ ）由一个 σ 键和一个 π 键组成。叁键（如 $\text{N}\equiv\text{N}$ ）由一个 σ 键和两个 π 键组成。

一般来说， σ 键比 π 键稳定，不容易断裂。因为 σ 键的重叠部分集中在两核的联线上。

2) 杂化轨道理论

杂化轨道理论可以较好地解释和预见分子的空间构型。

(1) 杂化轨道理论要点：

① 在原子化合成分子的过程中，部分能量相近的原子轨道会重新组合，形成新的原子轨道。这种原子轨道混合、重组的过程称为杂化，杂化后的原子轨道称为杂化轨道。

② 有几个原子轨道参加杂化，就形成几个杂化轨道。

③ 杂化轨道的成键能力比未杂化的强，形成的键更牢固、分子更稳定。

(2) 几种典型的杂化轨道。

① sp 杂化：由 1 个 s 轨道和 1 个 p 轨道组合成 2 个 sp 杂化轨道。每个 sp 杂化轨道都含有 $\frac{1}{2}s$ 和 $\frac{1}{2}p$ 成分，两个等同的 sp 杂化轨道间的夹角为 180° （呈直线形）。

例如，实验测知 BeCl_2 分子是一个直线形的共价分子。杂化轨道理论认为： Be 原子（价电子构型为 $2s^2$ ）在形成 BeCl_2 分子过程中，一个 $2s$ 电子激发到 $2p$ 轨道，同时激发后的 1 个 $2s$ 轨道和 1 个 $2p$ 轨道发生杂化，形成两个完全等同的杂化轨道（轨道间夹角为 180° ）。它们分别与 2 个 Cl 原子的 $3p$ 轨道重叠，形成 2 个 $\text{Be}-\text{Cl}$ σ 键，从而形成空间构型为直线形的 BeCl_2 分子。

注意，除 BeCl_2 外，周期表 II B 族 Zn 、 Cd 、 Hg 元素的某些共价化合物（如 ZnCl_2 、 HgCl_2 、 CdCl_2 等）， BeH_2 、 CO_2 、 CS_2 、 C_2H_2 、 HCN 等也都是以 sp 杂化方式形成的直线形分子。

② sp^2 杂化：由 1 个 s 轨道和 2 个 p 轨道杂化，形成 3 个等同的 sp^2 杂化轨道，每个轨道中含有 $\frac{1}{3}s$ 和 $\frac{2}{3}p$ 成分。3 个 sp^2 杂化轨道位于同一平面，互成 120° （呈平面正三角形）。

例如，实验测知 BF_3 具有平面正三角形结构。杂化轨道理论认为： B 原子（价电子构型为 $2s^2 2p^1$ ）在形成 BF_3 分子过程中，有 1 个 $2s$ 电子激发到 1 个空的 $2p$ 轨道，同时激发后的 1 个 $2s$ 轨道和 2 个 $2p$ 轨道杂化形成 3 个等同的 sp^2 杂化轨道（轨道夹角为 120° ）。它们分别与 3 个 F 原子的 $2p$ 轨道重叠，形成 3 个 $\text{B}-\text{F}$ σ 键，从而形成空间构型为平面正三角形的

BF₃ 分子。

注意,除 BF₃ 外,ⅢA (B、Al、Ga) 的气态卤化物分子、C₂H₄ 等也是以 sp² 杂化方式成键的。

③sp³ 杂化,由 1 个 s 轨道和 3 个 p 轨道发生杂化,形成 4 个等同的 sp³ 杂化轨道,每个杂化轨道中含有 $\frac{1}{4}$ s 和 $\frac{3}{4}$ p 轨道成分,轨道间夹角为 109°28′ (呈空间正四面体)。

例如,CH₄ 分子,C 原子 (价层电子构型为 2s²2p²) 在成键过程中有 1 个 2s 电子激发到 1 个空的 2p 轨道,同时激发后的 1s 轨道和 3 个 2p 轨道发生杂化形成 4 个等同的 sp³ 杂化轨道 (轨道间夹角为 109°28′)。它们分别与 4 个 H 原子的 1s 轨道重叠形成 4 个 C—H σ 键,从而形成空间构型为正四面体的 CH₄ 分子。

注意,除 CH₄ 外,其他ⅣA 的一些化合物如 CCl₄、SiH₄、GeCl₄ 等也是以 sp³ 杂化方式成键的。

以上三种杂化均为等性杂化。“等性”不用注明。

④sp³ 不等性杂化,如果在杂化轨道中含有不参加成键的孤对 (独对) 电子,则形成不完全等同的杂化轨道,这种杂化称为 sp³ 不等性杂化 (辨别杂化类型时,必须写明“不等性杂化”,以与③中等性 sp³ 杂化区分)。主要有以下两类。

以 NH₃ 分子为例:N 原子 (价电子构型为 2s²2p³) 在成键过程中,有 1 个 2s 轨道 (已充满电子) 和 3 个 2p 轨道组合成 4 个 sp³ 不等性杂化轨道。因为其中 1 个 sp³ 杂化轨道为孤对电子所占据,其余 3 个 sp³ 不等性杂化轨道和 3 个 H 原子的 1s 轨道重叠,形成 3 个 N—H σ 键。由于孤对电子所占据的杂化轨道电子云比较密集,对 3 个成键电子所占轨道起了较大的排斥作用。因此 NH₃ 分子中 N—H 键间夹角为 107° (比 109°28′ 略小)。NH₃ 分子的空间构型为三角锥形。

注意,除 NH₃ 分子外,其他ⅤA 族的一些化合物,如 PH₃、PCl₃、AsH₃ 等也都是以不等性 sp³ 杂化成键的。

以 H₂O 分子为例:O 原子 (价电子构型为 2s²2p⁴) 在成键过程中,有 1 个 2s 轨道和 3 个 2p 轨道组合成 sp³ 不等性杂化轨道。因为其中 2 个 sp³ 杂化轨道已为孤对电子所占据,其余 2 个不等性 sp³ 杂化轨道和 2 个 H 原子的 1s 轨道重叠,形成 2 个 O—H σ 键,它们之间的夹角更被“压小”为 104°40′ (与 109°28′ 比较)。H₂O 分子的空间构型为“V”字形 (或折线形)。

注意,除 H₂O 分子外,其他ⅥA 族的一些化合物,如 OF₂、H₂S 等也都是以 sp³ 不等性杂化方式成键的。

3.5.2 分子间力和氢键

1. 极性分子和非极性分子

在任何分子中都有带正电荷的原子核和带负电荷的电子,且正、负电荷电量相等,所以分子呈电中性。可以设想分子中的正、负电荷都有自己的“电荷重心”。正、负电荷重心重合的分子称为非极性分子,不重合的称为极性分子。

分子的极性常用分子的偶极矩 (μ) 来衡量。分子偶极矩是分子中正、负电荷重心上的电荷量 q 与正、负电荷重心距离 d (又称偶极长) 的乘积,即

$$\mu = q d$$

μ 的单位为 $\text{C}\cdot\text{m}$ (库·米)。

分子的偶极矩可通过实验测定, 从相关书籍或手册中可以查到。分析得知, μ 值为零的分子是非极性分子; μ 值不为零的是极性分子, μ 值越大表示分子的极性越大。

对于双原子分子来说, 分子的极性与键的极性一致。如果键是非极性键, 则分子是非极性分子; 如果键是极性键, 分子就是极性分子。

对于多原子分子来说, 分子是否有极性, 不仅取决于键的极性, 而且与分子的空间构型有关。例如, BF_3 分子中的 $\text{B}-\text{F}$ 键和 NH_3 分子中的 $\text{N}-\text{H}$ 键都是极性键。但 BF_3 分子为平面正三角形, 即空间构型对称, 键的极性相互抵消, 正、负电荷重心重合 ($\mu=0$), 所以为非极性分子。而 NH_3 分子的空间构型是三角锥形, 键的极性不能抵消, 正、负电荷重心不能重合 ($\mu\neq 0$), 所以是极性分子。

2. 分子间相互作用力

分子间的相互作用力包括分子间力和氢键。

1) 分子间力

分子间力是在分子间存在的一种较弱 (一般比共价键的键能小 1~2 个数量级) 的作用力, 又称范德华力。分子间力包括以下三种作用力。

(1) 取向力 当两个极性分子靠近时, 同极相斥、异极相吸。这种由于分子取向而产生的作用力称为取向力。分子的极性越强, 取向力越大。

(2) 诱导力 当极性分子接近非极性分子时, 极性分子使非极性分子的正、负电荷重心发生偏移, 从而产生一定的极性, 并相互作用。这种作用力称为诱导力。两个极性分子, 可相互诱导产生诱导力。

(3) 色散力 非极性分子由于原子核和核外电子都在不断运动, 分子内正、负电荷重心会由于瞬时的位置变化而不相重合, 这样的相邻分子之间产生相互作用。这种作用力称为色散力。一般说来, 分子量越大的分子越易变形, 色散力也就越大。

综上所述, 分子间力的本质是静电引力。在非极性分子之间只有色散力; 在非极性分子和极性分子之间存在着色散力和诱导力; 在极性分子之间同时存在着色散力、诱导力和取向力。由表 3.5.1 可以看出, 色散力是分子间力中最普遍的一种。在三种作用力中, 除了极性很强的分子 (如 H_2O) 间作用力是以取向力为主以外, 一般分子之间主要是色散力。对同系列的分子来说, 如表 3.5.1 中 HCl 、 HBr 、 HI , 随分子量的增大, 色散力增大 (分子间力增大), 它们的熔点、沸点相应地增高。

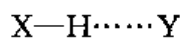
表 3.5.1 一些物质分子间作用力 ($\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$) 的分配

分 子	取向力	诱导力	色散力	总 和
Ar	0.000	0.000	8.49	8.49
CO	0.003	0.008	8.74	8.85
HI	0.025	0.113	25.8	25.9
HBr	0.686	0.502	21.9	23.1
HCl	3.30	1.00	16.8	21.1
NH_3	13.3	1.55	14.9	29.8
H_2O	36.3	1.92	8.99	47.2

2) 氢键

除上述三种分子间力以外, 某些化合物还存在另一种与分子间力大小接近的作用力——

氢键。氢键是指分子中的氢原子与电负性较大的 X 原子（如 F、O、N 原子）以极性共价键结合时，还能吸引另一个电负性较大，而半径又较小的 Y 原子（X、Y 原子可同可不同）的孤对电子所形成的分子内或分子间的键。可简单示意如下：



氢键有类似共价键的方向性和饱和性。

HF、H₂O、NH₃ 分子间都存在氢键，所以比其同系列氢化物的沸点都高。Cl 原子的电负性虽较大，但 Cl 原子半径亦较大，所以 HCl 分子间无氢键。另外，在无机含氧酸、有机羧酸、醇、胺、蛋白质等物质的分子之间也存在氢键。

3.5.3 晶体的内部结构与性质

固态物质可分为晶体和非晶体。晶体一般都有规则的几何外形、固定的熔点及各向异性的性质。而非晶体则没有这些性质。

若将晶体内部的微粒看成是几何学上的点，这些点按一定规则排列构成的几何图形叫做晶格或点阵。晶格中能够代表结构特征的最基本的重复单元叫做晶胞。晶胞在空间无限无隙地堆砌就构成晶体。

根据晶格结点上微粒种类和粒子间作用力的不同，可将晶体分为离子晶体、原子晶体、分子晶体和金属晶体四种基本类型。

晶体的四种基本类型及其有关性质可简明地如下表 3.5.2 所示。

表 3.5.2 晶体的基本类型及其性质

晶体类型	离子晶体	原子晶体	分子晶体	金属晶体
晶格结点上的微粒	正、负离子	原子	分子（极性分子或非极性分子）	金属原子或金属离子
微粒间的作用力	离子键	共价键	分子间力（氢键）	金属键
熔点、沸点	较高	高	低	一般较高，部分低（低熔金属）
硬度	较大	高硬度	软	一般较大
导电性	固态为不良导体， 熔化或水溶液易导电	绝缘体或半导体	绝缘体	良导体
导热性	差	差	差	良好
延展性	差	差	差	良好
实例	活泼金属的氧化物、 氢氧化物和大多数无机 盐类	金刚石、晶体硅、 晶体硼、SiC、SiO ₂ 等	多数非金属单质、 稀有气体、非金属之 间化合物、大多数有 机化合物等	金属或金属合金
应用	耐火材料 电解质	高硬材料 半导体	低温材料 绝缘材料 溶剂	金属及合金 材料

模拟试题

1. 下列叙述中正确的是（ ）。

(A) 多原子分子中, 键的极性越强, 分子的极性也越强

(B) 具有极性共价键的分子一定是极性分子

(C) 非极性分子中的化学键一定是非极性共价键

(D) 分子中的键是非极性键, 分子一定是非极性分子

2. 下列全部以共用电子对成键的物质是 ()。

(A) NaOH (B) NH_4Cl (C) BF_3 (D) NaCl

3. 下列分子中既有极性键又有非极性键的是 ()。

(A) NH_4OH (B) H_2O_2 (C) HCN (D) CCl_4

4. 下列物质中, 键有极性, 分子没有极性的是 ()。

(A) H_2O (B) CHCl_3 (C) BF_3 (D) PCl_3

5. 下列物质中, 键有极性, 分子也有极性的是 ()。

(A) CCl_4 (B) CO (C) BeCl_2 (D) N_2

6. 下列物质中既存在离子键又存在共价键的是 ()。

(A) NaCl (B) K_2O (C) KF (D) Na_2O_2

7. 指出下列各组中键的极性最强的化合物:

a 组: (A) LiCl (B) BeCl_2 (C) BCl_3 (D) CCl_4 ()。

b 组: (A) SiF_4 (B) SiCl_4 (C) SiBr_4 (D) SiI_4 ()。

c 组: (A) H_2O (B) H_2S (C) H_2Se (D) H_2Te ()。

8. 用杂化理论推测, 分子的空间构型为平面三角形的是 ()。

(A) NF_3 (B) BF_3 (C) AsH_3 (D) SbH_3

9. BF_3 分子中, 成键时中心原子 B 采用 ()。

(A) sp^3 杂化 (B) sp 杂化 (C) sp^2 杂化 (D) sp^3 不等性杂化

10. H_2S 分子中, S 原子成键的杂化轨道类型为 ()。

(A) sp^3 杂化 (B) sp 杂化 (C) sp^2 杂化 (D) sp^3 不等性杂化

11. 下列物质中, 只需克服色散力就能沸腾的是 ()。

(A) H_2O (l) (B) Br_2 (l) (C) CHCl_3 (l) (D) NH_3 (l)

12. 下列物质存在氢键的是 ()。

(A) HBr (B) C_2H_6 (C) H_2SO_4 (D) CH_3Cl

13. HF 纯液体中存在的作用力是 ()。

(A) 分子间力 (B) 分子间力和氢键

(C) 分子间力、氢键和离子键 (D) 离子键

14. 下列各固态物质中, 硬度最大的是 ()。

(A) NaCl (B) CaCl_2 (C) H_2O (D) SiC

15. 某物质具有较低的熔点和沸点, 且又难溶于水, 易溶于有机溶剂, 而又不导电, 这种物质可能是 ()。

(A) 极性分子型物质 (B) 非极性分子型物质

(C) 离子型物质 (D) 金属晶体

16. 下列晶体熔化时要破坏共价键的是 ()。

(A) SiC (B) MgO (C) CO_2 (D) Cu

17. 下列分子中偶极矩不等于零的是 ()。

(A) BeCl_2

(B) BCl_3

(C) CO_2

(D) NH_3

模拟试题参考答案

1. (D) 2. (C) 3. (B) 4. (C) 5. (B) 6. (D) 7. 皆为 (A)

8. (B) 9. (C) 10. (D) 11. (B) 12. (C) 13. (B) 14. (D)

15. (B) 16. (A) 17. (D)

3.6 有机化学

3.6.1 有机化合物的特点、分类及命名

1. 有机化合物的特点

(1) 有机化合物分子间的作用力较弱, 常温下一般为液态或气态。即使为固态有机物, 也以分子间力所维持, 所以一般熔点较低, 大多在 300°C 以下。

(2) 有机物对热不稳定, 受热易分解或炭化变黑。绝大多数可以燃烧, 完全燃烧后产物为 CO_2 和 H_2O 等。

(3) 有机物分子一般极性较弱或者是非极性分子。因此一般难溶或不溶于水中, 而易溶于苯、四氯化碳、丙酮、乙醇等非极性或非极性的有机溶剂中。

(4) 有机化合物的反应, 多是分子中共价键的断裂和形成反应, 所以大多数有机物反应速率较慢, 常辅以加热、光照或加催化剂等来加速反应。

(5) 有机反应体系中往往同时伴随若干副反应, 所以产物常为混合物。

(6) 有机物有同分异构现象。即存在分子式相同而结构和性质不同的现象。如分子式 $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$, 可表示乙醇 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ 和乙醚 CH_3OCH_3 两种化合物。因此, 有机化合物一般不用分子式而用结构式或结构简式表示。

2. 有机化合物的分类

有机化合物常按碳链骨架和官能团进行分类。

1) 按碳链骨架分类

(1) 开链化合物 (链烃):

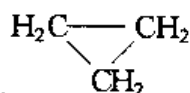
这类化合物中只连接氢原子的碳骨架成直链, 或带有支链的开链。例如

丙烷 $\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_3$ 1, 3-丁二烯 $\text{H}_2\text{C}=\text{CH}-\text{CH}=\text{CH}_2$

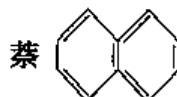
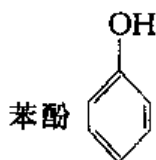
(2) 碳环化合物 (环烃):

这类化合物中含有完全由只连接氢原子的碳原子构成的环。根据环的特点又分为:

① 脂环族化合物: 例如环丙烷

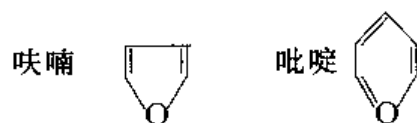


② 芳香族化合物: 例如



③ 杂环化合物: 这类化合物分子中的环是由碳原子及其他元素的原子 (如 N、O、S 等)

构成的。例如

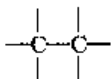
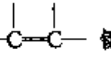
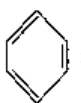
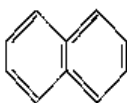
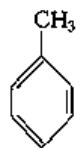
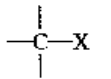
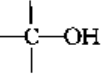
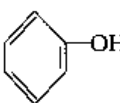
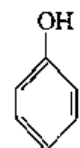
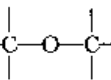
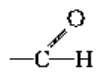




2) 按官能团分类

是将含有相同官能团的化合物归为一类。

官能团是指能反映某类化合物特性的原子或原子团。如双键、叁键、卤素原子、羟基、醛基、羰基（或酮基）、羧基、氨基、氰基、硝基、磺酸基等。这些官能团在分子中往往是最活泼的部分，对化学性质有决定性的作用。表 3.6.1 中列出一些常见有机化合物的类别及其结构特征。其中 R、R' 代表烃基（如甲基—CH₃）；Ar、Ar' 代表芳（香）烃基（如苯基—C₆H₅）。

表 3.6.1 一些有机化合物的类别及其结构特征

类 名	通 式	官能团或其他结构特征	实 例
链烃	R—H		
烷烃	C _n H _{2n+2}	全部为  键	丙烷 CH ₃ CH ₂ CH ₃
烯烃	C _n H _{2n}	含  键	乙烯 CH ₂ =CH ₂
二烯烃	C _n H _{2n-2}	含两个双键	1, 3-丁二烯 CH ₂ =CH—CH=CH ₂
炔烃	C _n H _{2n-2}	含 —C≡C— 键	乙炔 CH≡CH
芳香烃	Ar—H	含  环或  环等	甲苯 
卤代烃	R—X	含  键	一氯甲烷 CH ₃ Cl
醇	R—OH	含  键	乙醇 CH ₃ CH ₂ OH
酚	Ar—OH	 (—OH 直接连在苯环上)	酚 
醚*	R—O—R' (R, R' 可以相同)	含  键	(二)乙醚 CH ₃ CH ₂ OCH ₂ CH ₃
醛*	RCHO	含  键	乙醛 CH ₃ CHO
酮*	 (R, R' 可以相同)	含  两边都连碳原子	丙酮 CH ₃ COCH ₃

(续)

类 名	通 式	官能团或其他结构特征	实 例
羧酸*	RCOOH	含 $\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{OH} \end{array}$	乙酸 CH_3COOH (HAc)
酯*	RCOOR' (R, R'可以相同)	含 $\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{OR} \end{array}$	乙酸乙酯 $\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3$
胺* (伯胺)	RNH_2	含 $\begin{array}{c} \text{H} \\ \\ -\text{N} \\ \\ \text{H} \end{array}$	乙胺 $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{NH}_2$
腈	RCN	含 $-\text{C}\equiv\text{N}$	丙烯腈 $\text{CH}_2=\text{CH}-\text{CN}$
硝基化合物*	$\text{R}-\text{NO}_2$	含 $-\text{NO}_2$	硝基苯 $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$
磺酸*	$\text{R}-\text{SO}_3\text{H}$	含 $-\text{SO}_3\text{H}$	苯磺酸 $\text{C}_6\text{H}_5\text{SO}_3\text{H}$

* 在这些化合物的通式中, R 和 R' 都可用 Ar 和 Ar' 代替。

3. 有机化合物的命名

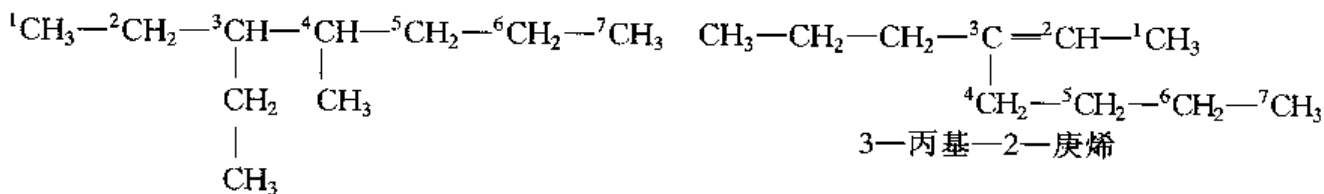
有机物的命名重点介绍系统命名法。

1) 链烃及其衍生物的命名

(1) 选择含有特征官能团的最长碳链为主链。主链中的碳原子数分别用甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸、十一、十二、十三……表示, 分别称某烷、某烯、某醇、某醛、某酸等。卤原子、硝基、磺酸基及支链都看做取代基。

(2) 从靠近特征官能团 (或链烃的支链) 开始, 将主链上的碳原子用阿拉伯数字 1, 2, 3……编号。特征官能团的位置用它所连的碳原子的号数来表示, 写在某烯、某醇、某醛、某酸等前面。

(3) 取代基的位置用它所连碳原子的号数来表示, 写在母体化合物名称的前面。相同取代基的数目用 1、2、3 等汉文数字表示。含有几种不同的取代基时, 将简单的写在前面, 复杂的写在后面。例如



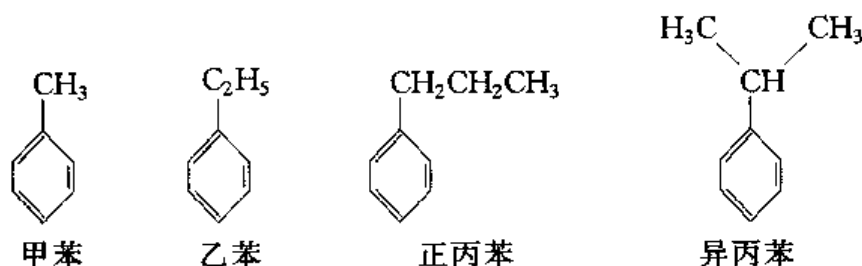
3-丙基-2-庚烯

4-甲基-3-乙基庚烷

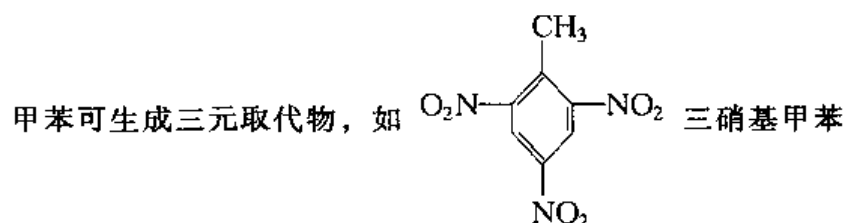
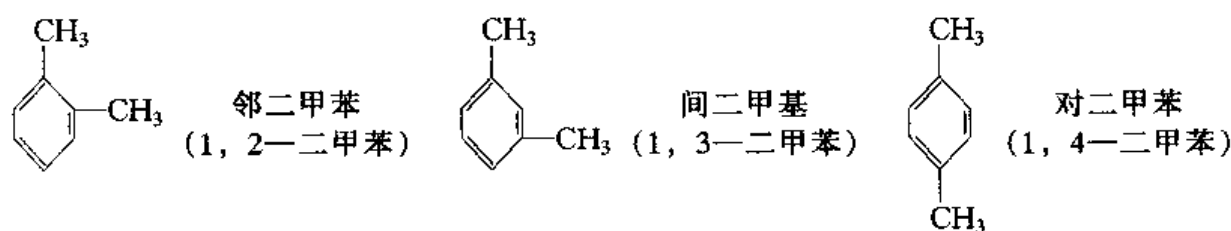
2) 芳香烃及其衍生物的命名

主要介绍单环芳烃的命名。

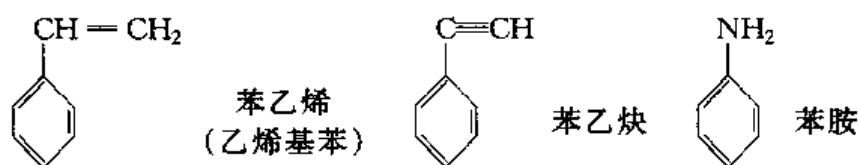
(1) 苯环上氢原子被烷基取代而成的苯的一元取代物, 在命名时以苯为母体, 烷基为取代基。例如



(2) 苯的二元取代物有三种异构体。由于取代基位置不同，在命名时应名称前加邻、间、对等字，或用 1, 2—、1, 3—及 1, 4— 表示。例如



(3) 对于结构复杂或支链上有官能团的化合物，也可以把支链作为母体、苯环作为取代基（苯分子减去一个氢原子后的基团叫作苯基）来命名。例如



3.6.2 有机化合物的重要有机反应

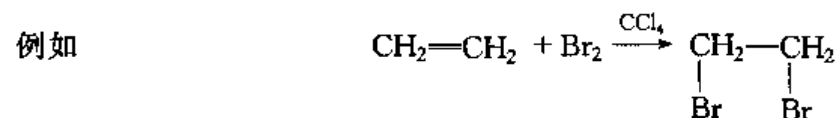
1. 加成反应

在具有不饱和键的有机化合物中，不饱和键部分断裂加上两个一价的原子或原子团的反应叫做加成反应。

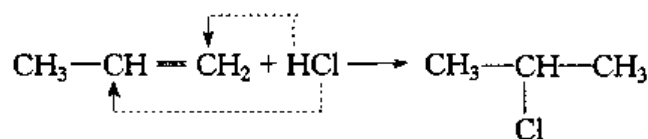
1) 不饱和烃的加成反应

将溴的四氯化碳溶液滴到烯烃中，溴的红棕色很快消失。利用这一反应可鉴别有机化合物是否存在碳碳双键（或叁键）。

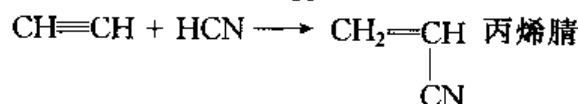
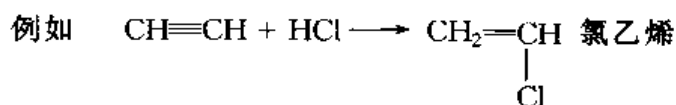
(1) 烯烃。



结构不对称的烯烃与极性化合物（如 H_2O 、 HCl 、 HClO 等）加成时，极性化合物中带正电的部分（如 H 原子）加到双键含氢较多的碳原子上。这称做马氏规律。例如



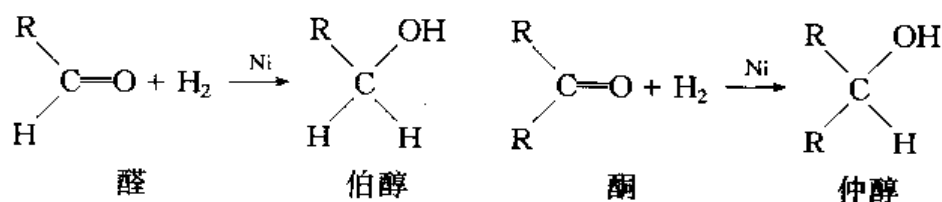
(2) 炔烃。



氯乙烯与丙烯腈是重要的高聚物单体。

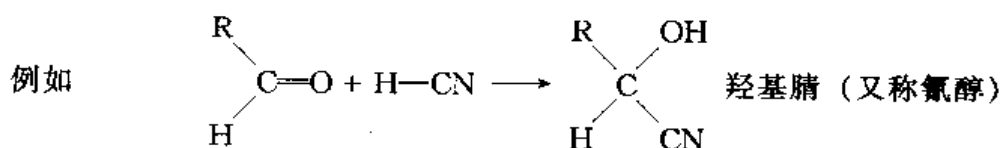
2) 醛和酮的加成反应

羰基中 π 键易断裂发生加成反应。例如醛、酮在催化剂 (Ni 、 Cr 、 Cu) 作用下发生加成反应。



(伯、仲、叔、季分别表示某原子与 1 个、2 个、3 个、4 个碳原子直接相连)

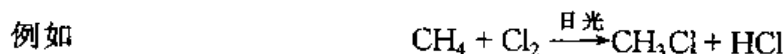
当醛、酮与结构不对称的化合物起加成反应时，后者分子中带负电部分加到羰基的碳原子上，带正电部分加到羰基的氧原子上。



2. 取代反应

取代反应是指有机化合物中氢原子被其他原子或原子团代替的反应。

1) 烷烃的取代

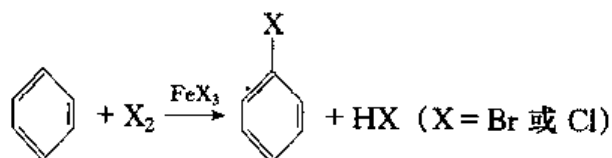


上述反应 H 原子逐步被取代，得到 CH_3Cl 、 CH_2Cl_2 、 CHCl_3 、 CCl_4 的混合物。主要产物为 CHCl_3 和 CCl_4 。 CH_3Cl 为一氯取代物， CH_2Cl_2 为二氯取代物。

2) 芳烃的取代

苯的取代主要是卤化、硝化、磺化和烷基化等。

例如



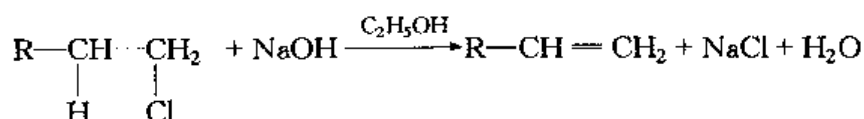
在一定条件下，苯也可被取代生成硝基苯 (如 $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$)、苯磺酸 (如 $\text{C}_6\text{H}_5\text{SO}_3\text{H}$) 和烷基苯 (如甲苯 $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$) 等。

3. 消去反应

消去反应是指在有机物分子中失去一个简单分子 (如 HCl 、 H_2O 等)，通常同时生成不饱和化合物的反应。

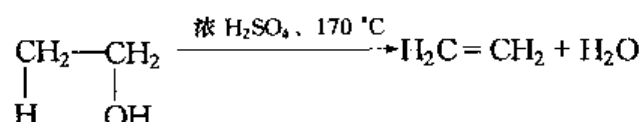
1) 卤代烃的消去反应

卤代烃与 NaOH (或 KOH) 的乙醇溶液共热发生消去反应。例如



2) 醇的消去反应

醇在一定高温、并有催化剂存在下发生消去反应。例如

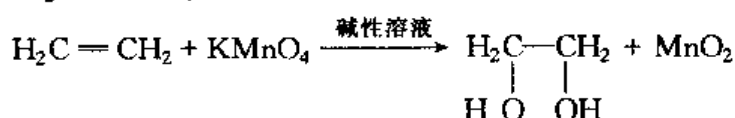


4. 氧化反应

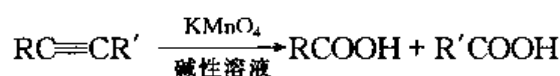
有机化学的氧化反应一般是指与氧化合 (分子中加入氧) 或失氢 (分子中去掉氢) 的反应。

1) 不饱和烃的部分氧化

在一般氧化剂 (O_2 、 KMnO_4) 碱性溶液作用下, 可使烯烃中的 π 键断裂。例如



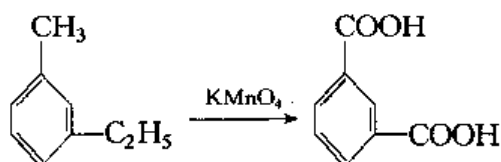
炔烃氧化时, 一般叁键中的 σ 键和 π 键均断裂。例如



使氧化剂紫红色的 KMnO_4 溶液退色, 这是不饱和键的鉴定方法。

2) 芳烃的氧化

苯环不易氧化, 但烷基苯较易氧化。例如



3) 醛的氧化

醛很容易被氧化成酸。可利用以下反应来鉴别醛。

(1) 加入多伦试剂 (硝酸银的氨水溶液) 形成银镜反应。



(2) 加入斐林试剂 (硫酸铜溶液与酒石酸钾钠的碱性溶液混合而成), 生成红色的氧化铜沉淀。但苯甲醛不能与斐林试剂反应。



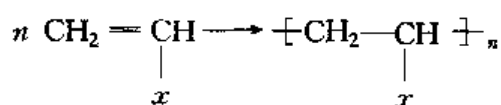
3.6.3 高分子化合物的合成反应

由低分子化合物 (单体) 结合形成高分子化合物 (高聚物) 的反应称为聚合反应, 可分为以下两种。

1. 加成聚合 (加聚)

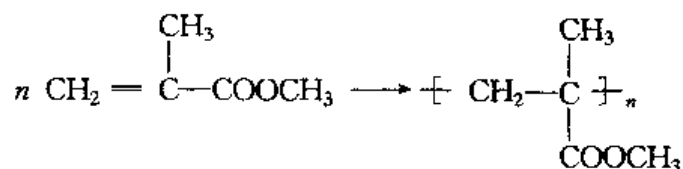
由一种或多种含不饱和键的单体, 通过加成的方式相互结合成为高聚物的反应称为加成

聚合。这种高聚物的化学成分与单体相同。



其中 x 为不同的原子或原子团。

例如, 甲基丙烯酸甲酯可聚合成聚甲基丙烯酸甲酯 (又称有机玻璃)。反应如下:



由一种单体参加的加聚反应又称为均聚反应, 生成的高聚物叫均聚物。表 3.6.2 列出一些碳链聚合物及其单体。

表 3.6.2 一些碳链聚合物及其单体

聚 合 物			单 体	
名称	符号	结构 (简) 式	名称	结构 (简) 式
聚乙烯	PE	$\left(\text{CH}_2 - \text{CH}_2 \right)_n$	乙烯	$\text{CH}_2 = \text{CH}_2$
聚丙烯	PP	$\left(\text{CH}_2 - \underset{\substack{ \\ \text{CH}_3}}{\text{CH}} \right)_n$	丙烯	$\text{CH}_2 = \underset{\substack{ \\ \text{CH}_3}}{\text{CH}}$
聚苯乙烯	PS	$\left(\text{CH}_2 - \underset{\substack{ \\ \text{C}_6\text{H}_5}}{\text{CH}} \right)_n$	苯乙烯	$\text{CH}_2 = \underset{\substack{ \\ \text{C}_6\text{H}_5}}{\text{CH}}$
聚氯乙烯	PVC	$\left(\text{CH}_2 - \underset{\substack{ \\ \text{Cl}}}{\text{CH}} \right)_n$	氯乙烯	$\text{CH}_2 = \underset{\substack{ \\ \text{Cl}}}{\text{CH}}$
聚四氟乙烯	PTFE	$\left(\text{CF}_2 - \text{CF}_2 \right)_n$	四氟乙烯	$\text{CF}_2 = \text{CF}_2$
聚丙烯腈	PAN	$\left(\text{CH}_2 - \underset{\substack{ \\ \text{CN}}}{\text{CH}} \right)_n$	丙烯腈	$\text{CH}_2 = \underset{\substack{ \\ \text{CN}}}{\text{CH}}$
聚甲基丙烯酸甲酯	PMMA	$\left(\text{CH}_2 - \underset{\substack{\text{CH}_3 \\ \\ \text{COOCH}_3}}{\text{C}} \right)_n$	甲基丙烯酸甲酯	$\text{CH}_2 = \underset{\substack{\text{CH}_3 \\ \\ \text{COOCH}_3}}{\text{C}}$
聚异戊二烯	PIP	$\left(\text{CH}_2 - \underset{\substack{ \\ \text{CH}_3}}{\text{C}} = \text{CH} - \text{CH}_2 \right)_n$	异戊二烯	$\text{CH}_2 = \underset{\substack{ \\ \text{CH}_3}}{\text{C}} - \text{CH} = \text{CH}_2$

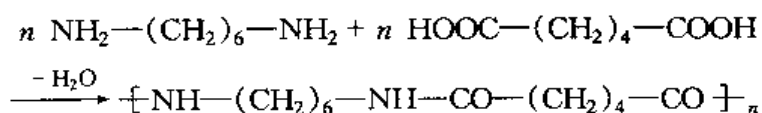
由两种或两种以上单体参加的加聚反应又称为共聚反应, 生成的高聚物叫共聚物。如丁腈橡胶、丁苯橡胶、ABS 树脂等。

2. 缩合聚合 (缩聚)

具有两个或两个以上官能团的一种或多种单体之间相互结合, 失去低分子化合物 (一般

是 H_2O 、 NH_3 、卤化氢等) 而成为高聚物的过程称为缩合聚合。这种高聚物的化学成分与单体不同。

例如, 己二胺和己二酸相互缩合, 同时析出水, 形成聚己二酰己二胺 (或称聚酰胺 66, 商品名称为尼龙-66)。其反应式如下



显然, 己内酰胺 $\text{HN}-(\text{CH}_2)_5-\text{CO}$ 是合成尼龙-6 的单体, 而且是通过加聚反应合成的。

3.6.4 几种重要的高分子化合物

高聚物按其结构对称性的不同, 可分为极性和非极性的两类。非极性高聚物是指分子链中链节结构对称的高聚物, 如聚乙烯、聚四氟乙烯等。极性高聚物是指分子链中链节结构不对称的高聚物, 如聚氯乙烯、聚酰胺等。一般来说, 高聚物的极性越小, 则其电绝缘性越好。

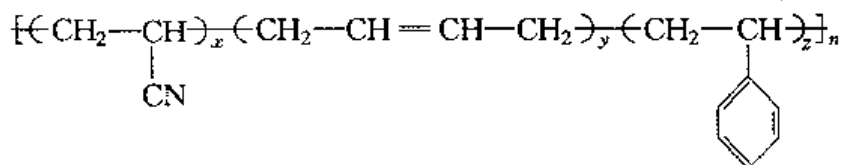
对于合成高分子化合物, 按工艺性质和用途分类, 可分为塑料、合成纤维、合成橡胶等。

应当指出, 各类合成的有机高分子材料之间并无严格界限。例如, 尼龙、涤纶可做纤维, 也可制成塑料; 环氧树脂既可配成胶粘材料, 也可加工成塑料。

1. 工程塑料

塑料的主要特点是具有塑性。工程塑料有较高力学强度、良好的化学稳定性等优点, 可代替金属作为工程材料。

例如, 常见的 ABS 树脂是丙烯腈 (A)、丁二烯 (B) 和苯乙烯 (S) 的共聚物, 其结构式为



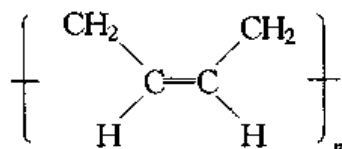
ABS 树脂保持了聚苯乙烯优良的电性能和加工成型性, 由于其中丁二烯可提高弹性和冲击强度, 丙烯腈可增加耐热、耐腐蚀性和表面硬度, 因此成为综合性能优良的刚韧兼备的工程材料。

2. 合成橡胶

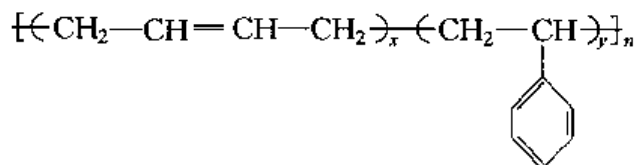
天然橡胶的化学组成是聚异戊二烯 (结构简式见表 3.6.2)。

常用的合成橡胶是由 1, 3-丁二烯及其衍生物加聚而成的丁二烯类高聚物, 例如, 顺丁橡胶、丁腈橡胶和丁苯橡胶。

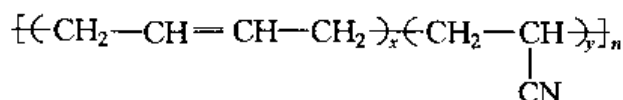
由 1, 3-丁二烯加聚生成顺式-1, 4-聚丁二烯, 习惯上称为顺丁橡胶。可用下式表示



由 1, 3-丁二烯与苯乙烯两种单体加聚得到丁苯橡胶。一般可用下式表示



由 1, 3-丁二烯与丙烯腈 ($\text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CN}$) 两种单体加成, 可制得丁腈橡胶。一般可用下式表示



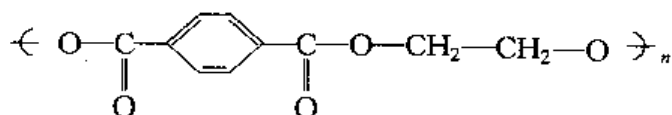
合成橡胶常与天然橡胶掺在一起使用。

3. 合成纤维

生活上常用的合成纤维有尼龙-66、涤纶等。

聚酰胺纤维, 如尼龙-66 (结构简式前面介绍过), 它的拉伸强度大, 弹性好。

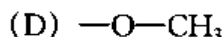
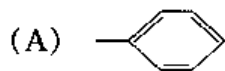
涤纶是一种聚酯纤维, 它的织物挺括、易洗涤, 但吸水性差。其结构式如下:



单体为对苯二酸和乙二醇, 聚合时有 H_2O 生成。

模拟试题

1. 下列基团不是烃基的是 ()。



2. 甲苯苯环上的某一氢原子被乙基所取代, 能得到多少种取代物 ()。

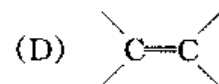
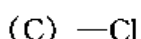
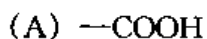
(A) 1 种

(B) 2 种

(C) 3 种

(D) 4 种

3. 某有机物含有下列哪种官能团时, 既能发生氧化反应、酯化反应, 又能发生消去反应 ()。



4. 下列反应不属于氧化反应的是 ()。

(A) 甲烷燃烧

(B) 乙炔通过 KMnO_4 溶液

(C) 醇在一定条件下生成醛

(D) 乙炔催化加氢

5. 苯与 Cl_2 在光催化作用下, 生成氯苯的反应是 ()。

(A) 加成

(B) 消去

(C) 氧化

(D) 取代

6. 下列说法中错误的是 ()。

(A) 取代反应仅限于烷烃上的氢原子被其他原子或原子团替代的反应

(B) 苯的氯化、硝化和烷基化都属于取代反应

(C) 有机化学中, 氧化反应一般是指分子中加氧或去氢的反应

(D) 不饱和烃可发生加成反应

7. 下列单体能发生聚合反应的是 ()。

(A) C_2H_6 (B) C_2H_4 (C) CH_3-COOH (D) $HO-CH_2-CH_3$

8. 下列化合物中不能进行缩聚反应的是 ()。

(A) $HOOC-CH_2CH_2CH_2-COOH$ (B) $HO-CH_2CH_2-OH$

(C) $H_2N-(CH_2)_5-COOH$ (D) $HN-(CH_2)_5-CO$

9. 下列物质中只能生成一种一氯取代物的是 ()。

(A) CH_4 (B) C_3H_8

(C) $CH_3CH_2CH_2CH_3$ (D) $CH_3CH_2CH(CH_3)_2$

10. $\begin{array}{c} OH & CH_3 \\ | & | \\ CH-CH_2-C-CH_3 \\ | & | \\ CH_3 & CH_3 \end{array}$ 的正确命名是 ()。

(A) 4, 4-二甲基-2-戊醇

(B) 2, 2-二甲基-4-戊醇

(C) 2-羟基-4, 4-二甲基戊醇

(D) 2, 2-二甲基-4-羟基戊烷

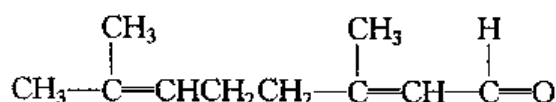
11. 在下列化合物中不能进行加成反应的是 ()。

(A) $CH \equiv CH$ (B) $RCHO$ (C) CH_3COCH_3 (D) $C_2H_5OC_2H_5$

12. 苯乙烯与丁二烯反应后的产物是 ()。

(A) 合成纤维 (B) 丁苯橡胶 (C) 合成树脂 (D) 聚苯乙烯

13. 已知柠檬酸的结构简式为:



判断下列说法不正确的是 ()。

(A) 可使 $KMnO_4$ 溶液退色

(B) 它可与银氨溶液发生银镜反应

(C) 它可使溴水退色

(D) 它在催化剂的作用下的加氢, 最后产物的分子式是 $C_{10}H_{20}O$

14. 尼龙在常温下可溶于的溶剂是 ()。

(A) CCl_4 (B) 甲酸 (C) 二甲苯 (D) 苯

15. PVC 高聚物是 ()。

(A) 聚丙烯 (B) 聚四氟乙烯 (C) 聚氯乙烯 (D) 聚苯乙烯

16. ABS 树脂是下列哪一组单体的共聚物 ()。

(A) 丁二烯、苯乙烯、丙烯腈 (B) 丁二烯、氯乙烯、苯烯腈

(C) 苯乙烯、氯丁烯、丙烯腈 (D) 苯烯腈、丁二烯、苯乙烯

模拟试题参考答案

1. (D) 2. (C) 3. (B) 4. (D) 5. (D) 6. (A) 7. (B) 8. (D)

9. (A) 10. (A) 11. (D) 12. (B) 13. (D) 14. (B) 15. (C) 16. (A)

4 理论力学

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学，它由静力学、运动学及动力学三部分组成。

4.1 静力学

4.1.1 静力学基本概念及静力学公理

静力学研究三个问题：物体的受力分析、力系的简化及力系的平衡。平衡是指物体相对于惯性参考系保持静止或做匀速直线运动。研究的物体只限于刚体，所谓刚体是在任意力作用下其内部任二点距离保持不变的物体，刚体是一个理想化的力学模型。

1. 力的概念

力是物体间相互的机械作用，这种作用使物体运动状态和形状发生变化，理论力学只研究物体运动状态变化。力是矢量，按矢量运算规则进行运算。

2. 静力学公理

二力平衡公理：作用在刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要与充分条件是二力大小相等，方向相反且共线，这里应指出此公理只适用于刚体。

加减平衡力系公理：在已知力系上加上或减去任意平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用。此公理也只适用于刚体。

力的平行四边形公理：作用于物体上同一点的两个力应按平行四边形规则合成。

作用与反作用公理：两物体间相互作用力同时存在，且等量、反向、共线，分别作用在这两个物体上。

3. 约束及约束反力

阻碍物体运动的限制条件称为约束。约束对物体的限制作用，实际上就是力的作用，称为约束反力。约束反力的方向必与该约束所能够阻碍的位移方向相反，依此可确定约束反力的方向，而约束反力的大小是未知的，应依据平衡方程或动力学方程确定。常见几种类型的约束反力作用点及方向表述如下。

柔软约束：作用点在柔软约束与物体的接触点，方向沿柔软约束背离物体。

光滑面约束：作用点在光滑面与物体的接触点，方向沿接触表面的公法线，指向受力物体。

光滑铰链约束：由于物体上所受已知力不同，铰的柱面与孔的接触点不定，因而铰链约束的反力不但其大小未知，方向也是未知的，但反力的作用点是作用在铰链中心上。铰链支座是铰链约束的一种形式。

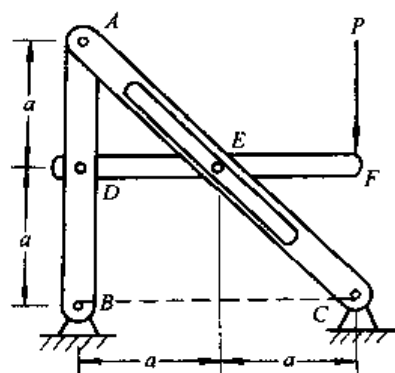
滚动支座是光滑面约束的另一种形式，其约束反力垂直于支承面，指向不定，可假设。

4. 分离体 受力图

为表示物体的受力情况，将要研究的物体从周围物体中分离出来，单独画出其简图，这

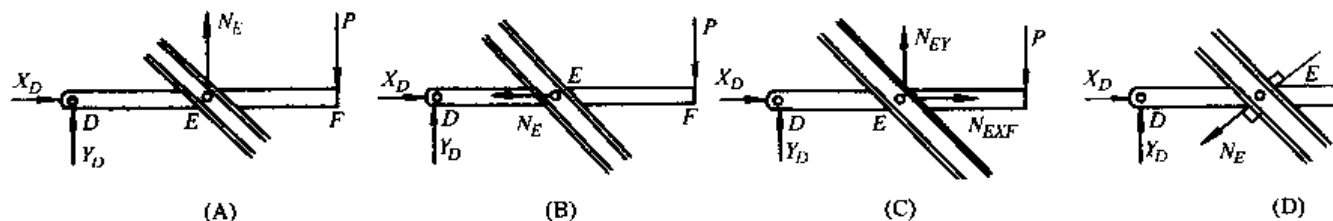
就是分离体,也称为研究对象,将分离体上的主动力和约束反力全部画出,此受力的简图图形,称作受力图。

这里强调指出两点:一是作受力分析时要注意判断结构中是否存在二力杆,二力杆所受的反力方向能依二力平衡公理予以确定,这样将减少一个未知量,简化了计算过程。二是在对刚体系统作受力分析时,应分辨哪些力是内力,哪些力是外力。内力是系统内物体间的相互作用力,由于成对地作用在系统中,作用效应相互抵消,因此在受力图中不必画出,外力是系统以外的物体给系统的作用力,这些力应准确无误地画在受力图上。



例 4.1.1 图

例 4.1.1 构架 ABC 由三杆 AB、AC 和 DF 组成,杆 DF 上的销钉 E 插在杆 AC 的槽内,载荷 P 如图示,则销钉 E 所受的力应是下列四个图中的哪一个? ()



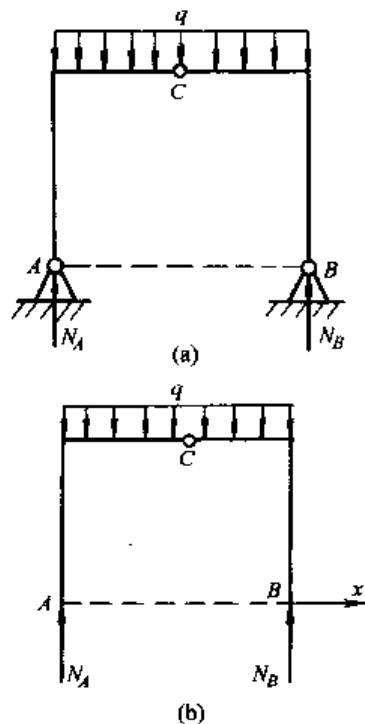
解 AC 杆上的槽对销钉 E 的约束是一个双面的光滑面约束, N_E 应是槽的法线方向,由于光滑面是双面的, N_E 的指向可以假设,正确答案应是 (D)。(C) 答案错在 N_E 的指向已知,而不是未知,不应用正交的两分力表示。

例 4.1.2 一三铰拱受有均布铅垂载荷,受力图如图示,试判断其是否正确? ()

- (A) 正确 无水平载荷, A、B 处反力应无水平分量
- (B) 错误 受力图中未画出铰链 C 的反力
- (C) 错误 AC 和 BC 构件均为二力构件, A、B 处反力应有水平分量
- (D) 错误 A、B 处有水平分力, 受力图中未画出

解 正确答案应是 (D), 因为三铰拱是处于平衡状态, 在水平轴 x 上诸力投影之和应为零, 即 $\sum F_x = 0$, 有 $X_A = X_B = 0$ 或 $X_A = -X_B \neq 0$ (大小相等, 反向) 两种结果, 由图 (b) 看出, AC、CB 可以对铰 C 有相对转动, 若有微小转动, A 和 B 处必有水平方向的微小位移, 铰链支座 A、B 必阻碍其运动, 产生水平反力, 因而结论是 $X_A = -X_B \neq 0$, 即 $X_A = -X_B$ 。(B) 的答案正确, 解释错, 因铰 C 处的反力是内力, 不画出, 而 (C) 同样是答案正确, 解释错, AC 和 BC 不是二力构件。

若应用已学过的知识, 对 AC 或 BC 取分离体, 应用 $\sum m_C = 0$ 立即得出 A 和 B 处有水平分力。



例 4.1.2 图

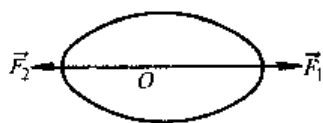
模拟试题

4.1 \vec{F}_1, \vec{F}_2 共线, 方向相反, 且 $\vec{F}_1 = -2\vec{F}_2$, 则其合力 \vec{R} 表示为 ()。

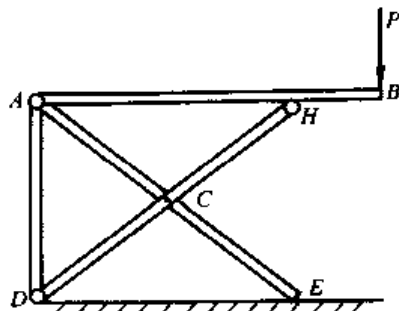
- (A) $\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ (B) $\vec{R} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$ (C) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (D) $\vec{R} = -\vec{F}_2$

4.2 杆重不计, 指出图示结构中的二力杆为 ()

- (A) AB 杆 (B) AE 杆 (C) AD 杆 (D) DH 杆



题 4.1 图



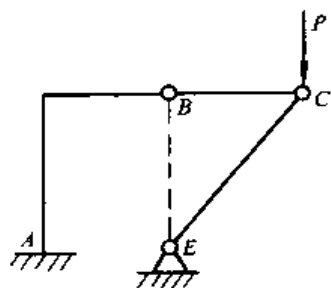
题 4.2 图

4.3 如图所示结构由 AB、BC、CE 三杆铰接而成, A 处为固定端, 各杆重不计, 铰 C 上作用一铅垂力 P, 则二力杆为 ()。

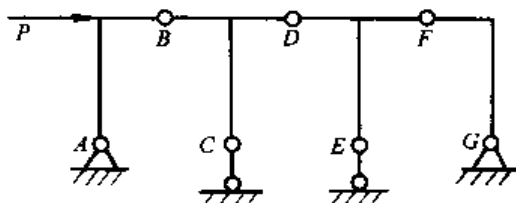
- (A) AB、BC、CE (B) BC、CE (C) AB (D) 均不是二力杆

4.4 图示结构受一水平力 P 的作用, 铰支座 A 的反力 \vec{R}_A 的作用线应该是 ()。

- (A) \vec{R}_A 沿水平线 (B) \vec{R}_A 沿铅垂线 (C) \vec{R}_A 沿 AB 连线 (D) 无法判断



题 4.3 图



题 4.4 图

4.5 加减平衡力系, 公理适用于 ()。

- (A) 刚体 (B) 变形体 (C) 连续体 (D) 任何物体

4.1.2 平面汇交力系及平面力偶系

1. 力多边形

力多边形是平面汇交力系合成的几何图形。画力多边形规则是: 平面汇交力系中诸力按序依次首尾相接, 形成一个缺口的多边形, 则合力为沿多边形的相反方向连接的缺口, 即由第一个力的首连向最后一个力的尾所构成的矢量是合力。

请注意二点: 一是多边形的构成必须是各矢量的首尾相接, 二是无论力多边形多么复杂, 合力一定是第一个力的首连向最后一个力的尾。

平面汇交力系平衡的必要与充分条件是力多边形自行封闭, 这是平面汇交力系平衡的几何条件。平面汇交力系的解析条件为:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

2. 力偶

由两个大小相等、方向相反且不共线组成的力系，称为力偶。显然，力偶没有合力，既不能用一个力代替，也不能与一个力平衡。力偶对物体有转动效应而无移动效应。力偶的转动效应由力偶矩来度量，图 4.1-1 示出一力偶 (\vec{F}, \vec{F}') ，其力偶臂为 d ，则力偶矩 M 表示为 $M = Fd$

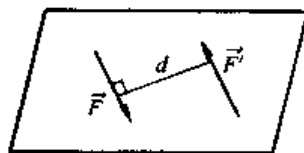


图 4.1-1

力偶的转向不同，转动效应也不同，一般以逆时针方向转动为正，顺时针方向转动为负。力偶矩是个代数量，一般表示为：

$$M = \pm Fd$$

在力偶运算中应注意：①力偶对任意轴的投影均为零，②力偶对任一点之矩就等于力偶矩。

平面内任意个力偶可合成一个合力偶，合力偶矩等于各个力偶矩的代数和，即

$$M = \sum m$$

平面力偶系平衡的必要与充分条件：诸力偶矩的代数和等于零，即

$$\sum m = 0$$

例 4.1.3 平面汇交力系的力多边形如图示，此四个力在 y 轴投影之和为 ()。

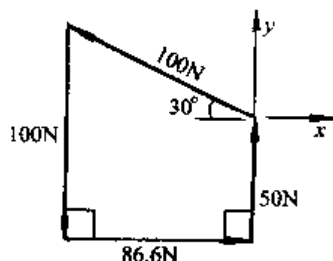
- (A) 86.6N (B) 0 (C) -100N (D) 50N

解 正确答案 (B)。力多边形封闭，此汇交力系合力等于零，又根据合力投影定理；合力在任一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和，此四力在 y 轴投影之和应等于零。

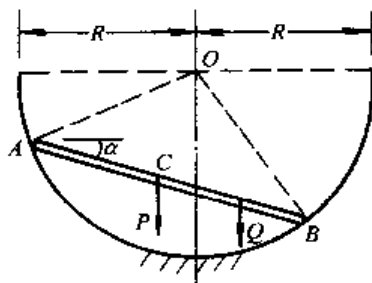
例 4.1.4 杆长为 $2a$ 的 AB 杆置于半径为 R 的固定半圆槽内， C 为 AB 杆的重心，图示为 AB 杆的平衡位置，求重力 P 对圆槽 O 点之矩，即 $m_0(\vec{P}) = ?$ ()。

- (A) $\sqrt{R^2 - a^2} P \sin \alpha$ (B) $-\sqrt{R^2 - a^2} P \cos \alpha$

- (C) $\sqrt{R^2 - a^2} P \tan \alpha$ (D) $-\sqrt{R^2 - a^2} P \tan \alpha$



例 4.1.3 图



例 4.1.4 图

解 力 P 对 O 点之矩应等于 P 乘以 P 到 O 点之垂直距离，但此力臂的求得要经过复杂的几何计算，对此，应该应用合力矩定理：合力对任一点的力矩等于各分力对同一点力矩的代数和，将 P 力分解为正交的二分力，一分力 $P \sin \alpha$ 沿杆 AB 方向，另一分力 $P \cos \alpha$ 沿杆 AB 的垂直方向，其作用线通过 O 点，对 O 点之矩为零，这样，有

$$m_0(\vec{P}) = m_0(\vec{P} \sin \alpha) = \sqrt{R^2 - a^2} P \sin \alpha$$

此题给出提示：当计算力矩时，往往应用合力矩定理更简便。

例 4.1.5 三铰拱在 C 点作用一水平力 $P = 300 \text{ kN}$ ，若 AC 杆与铅垂线成 α 角，该杆最多只能承受 150 kN ，若要结构不致于破坏，角 α 应为多少？（ ）。

- (A) $\alpha = 0^\circ$ (B) $\alpha = 30^\circ$
(C) $\alpha = 45^\circ$ (D) $\alpha = 60^\circ$

解 AC 和 BC 杆均为二力杆，未知量为 S_B 与 α ，由于只要求 α ，因此，在汇交力系的两个平衡方程中，列出一个只包含未知量 α 的方程即可求解，处理的方法是：取投影轴 x 平行于未知量 S_B 的方向。 y 轴垂直于 S_B 的方向，则平衡方程 $\sum Y = 0$ 中将避开 S_B ，只包含 α ，有

$$\sum Y = 0 \quad P \sin 30^\circ - S_A \cos(\alpha - 30^\circ) = 0$$

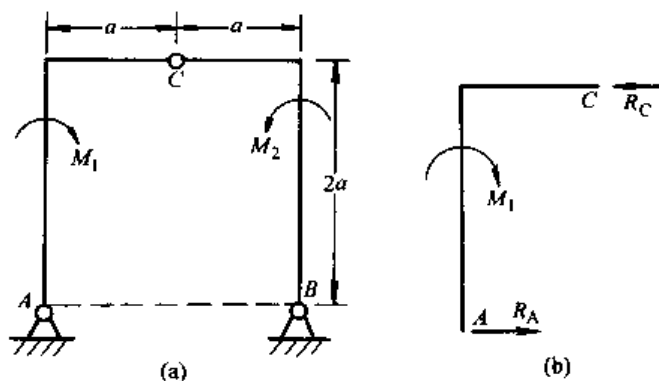
即 $300 \frac{1}{2} - 150 \cos(\alpha - 30^\circ) = 0 \quad \cos(\alpha - 30^\circ) = 1 \quad \alpha = 30^\circ \quad \text{应选 (B)}$

例 4.1.6 三铰拱上作用有大小相等，转向相反的二力偶 M_1, M_2 ，其力偶矩大小为 $m_1 = m_2 = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ， $a = 1 \text{ m}$ ，如图示。略去自重，求支座 A 的反力（ ）。

- (A) $R_A = 0$ (B) $R_A = 50 \text{ kN} \rightarrow$
(C) $R_A = 50 \text{ kN} \leftarrow$ (D) $R_A = 100 \text{ kN} \uparrow$

解 由于载荷 M_1 和 M_2 的力偶矩大小相等，转向相反，由 $\sum m = 0$ ，有 $m_1 - m_2 = 0$ ，则有 $R_A = R_B = 0$ 或 $\vec{R}_A = -\vec{R}_B \neq 0$ ，方向沿 AB 方向。为此，取分离体 AC，如图 (b) 所示

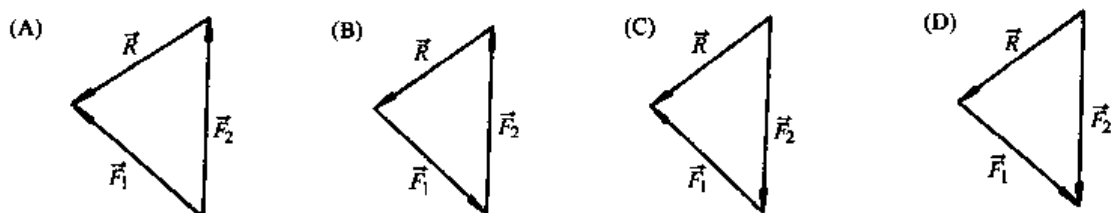
$$\sum m = 0 \quad R_A \times 2a = m_1 \quad R_A = 50 \text{ kN} \rightarrow \quad \text{应选 (B)}$$



例 4.1.6 图

模拟试题

4.6 在下列四个力三角形中，表示 $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ 的图是（ ）。



题 4.6 图

4.7 一平面汇交力系 ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$) 的力矢关系如图所示, 可知该力系的合力 \vec{R} 等于 ()。

- (A) 零 (B) \vec{F}_2 (C) \vec{F}_5 (D) \vec{F}_3

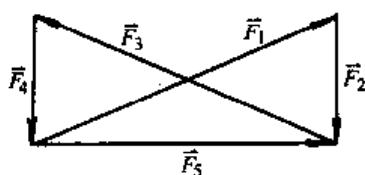
4.8 梁 AB 受有三角形分布的载荷, 如图示, 载荷最大值为 q , 试求合力 R 的大小及作用线的位置 h ()。

(A) $R = \frac{1}{3}ql, h = \frac{2}{3}l$

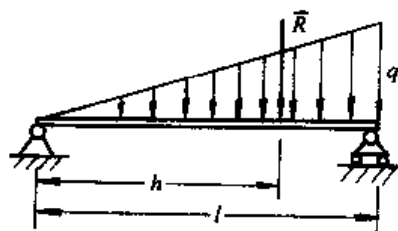
(B) $R = \frac{1}{2}ql, h = \frac{2}{3}l$

(C) $R = ql, h = \frac{l}{2}$

(D) $R = \frac{1}{2}ql, h = \frac{1}{3}l$



题 4.7 图



题 4.8 图

4.9 力 $F = 10 \text{ N}$ 作用在 B 点上, 此力对 A 点之矩 $m_A(\vec{F}) = ?$ ()。

(A) $-50 \text{ N}\cdot\text{cm}$

(B) $0 \text{ N}\cdot\text{cm}$

(C) $-35.355 \text{ N}\cdot\text{cm}$

(D) $35.355 \text{ N}\cdot\text{cm}$

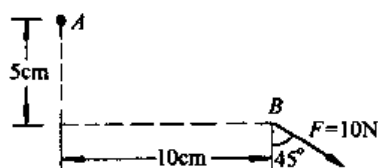
4.10 手柄 AB 长 0.25 m , 在柄端 B 处作用一其大小为 40 N 的力, 则此力对 A 点的最大力矩以及相应的角 α 的值为 ()。

(A) $m_A(\vec{F}) = 100 \text{ N}\cdot\text{m}, \alpha = 60^\circ$

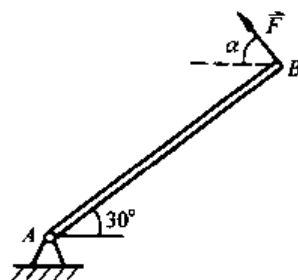
(B) $m_A(\vec{F}) = -10 \text{ N}\cdot\text{m}, \alpha = 30^\circ$

(C) $m_A(\vec{F}) = 10 \text{ N}\cdot\text{m}, \alpha = 60^\circ$

(D) $m_A(\vec{F}) = 8.7 \text{ N}\cdot\text{m}, \alpha = 90^\circ$



题 4.9 图



题 4.10 图

4.11 在图示支架中, AC 杆的内力为 ()。

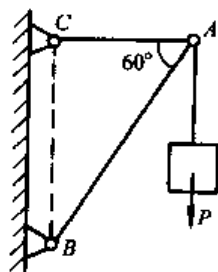
- (A) $\frac{P}{\tan 30^\circ}$ (B) $-\frac{P}{\tan 60^\circ}$ (C) $P \tan 30^\circ$ (D) $P \cos 60^\circ$

4.12 用一组绳悬挂一重物, 其重为 P , 绳 1 与绳 3 位于水平位置, 绳 2 与绳 4 倾斜如图所示, 绳 4 受的拉力为 ()。

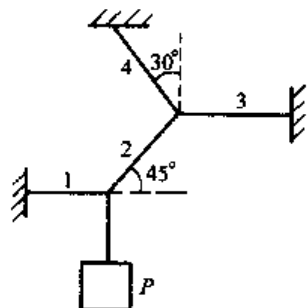
- (A) $T = \frac{2}{3}\sqrt{2}P$ (B) $T = \frac{1}{3}\sqrt{2}P$ (C) $T = \frac{1}{3}\sqrt{3}P$ (D) $T = \frac{2}{3}\sqrt{3}P$

4.13 铰接四连杆机构 CABD 如图所示, 在铰链 A、B 上分别作用有 \vec{P} 和 \vec{Q} , 使机构保持平衡, 如不计自重, 则 AB 杆的内力为 ()。

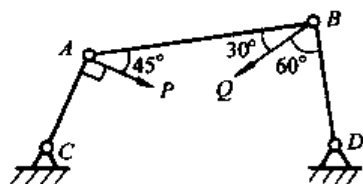
- (A) $S_{AB} = -Q \cos 30^\circ = -\frac{P}{\cos 45^\circ}$ (B) $S_{AB} = Q \cos 30^\circ = \frac{P}{\cos 45^\circ}$
(C) $S_{AB} = -Q \sin 30^\circ = -\frac{P}{\sin 45^\circ}$ (D) $S_{AB} = Q \sin 30^\circ = \frac{P}{\sin 30^\circ}$



题 5.11 图



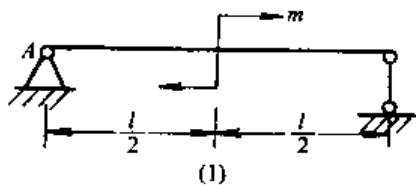
题 4.12 图



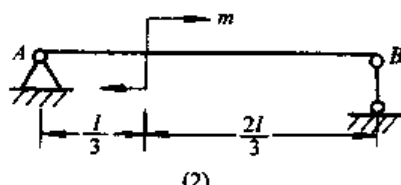
题 4.13 图

4.14 三个简支梁所载荷相同, 均为力偶, 其力偶矩为 m , 支座如图所示, 分别以 N_{A1} , N_{A2} , N_{A3} 表示三种情况下支座 A 的反力, 它们的关系为 ()。

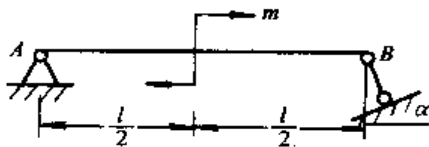
- (A) $N_{A2} < N_{A1} = N_{A3}$ (B) $N_{A2} = N_{A3} = N_{A1}$
(C) $N_{A1} = N_{A2} > N_{A3}$ (D) $N_{A2} = N_{A1} < N_{A3}$



(1)



(2)



(3)

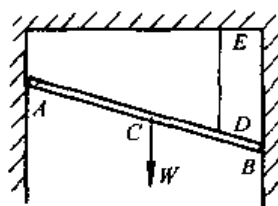
题 4.14 图

4.15 均质杆 AB, 长为 l , 重为 W , 在 D 处用铅直绳将杆吊于光滑槽内, 在槽 A、B 处对杆作用的反力 N_A 、 N_B 有关系式 ()。

- (A) $N_A > N_B$ (B) $N_A < N_B$ (C) $N_A = N_B = 0$ (D) $N_A = N_B \neq 0$

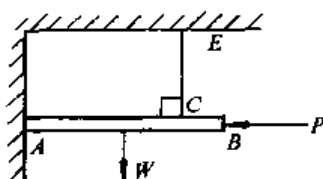
4.16 重为 W 的均质杆 AB 受有绳 CE 的约束, A 端与光滑面接触, 今沿水平杆 AB 方向作用一力 P , 则 AB 杆的平衡状态为 ()。

- (A) P 大于某一值时能平衡
(C) P 为任何值时都能平衡



题 4.15 图

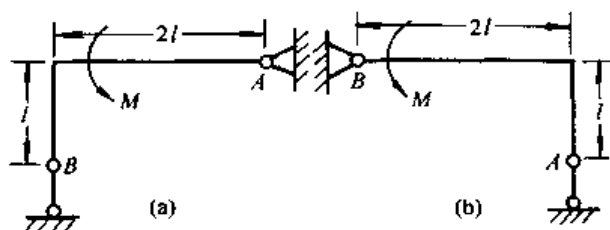
- (B) P 大于零时能平衡
(D) P 为任何值时均不能平衡



题 4.16 图

4.17 如图所示, 曲杆重不计, 其上作用一力偶矩为 M 的力偶, 则图 (a) 中的 B 点反力比图 (b) 中 A 的反力 ()。

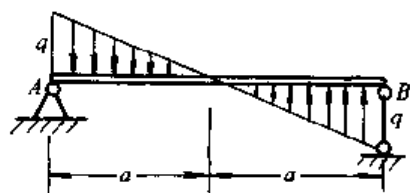
- (A) 大 (B) 小
(C) 相同 (D) 不能确定



题 4.17 图

4.18 简支梁受分布荷载如图所示, 支座 A 、 B 的反力是 ()。

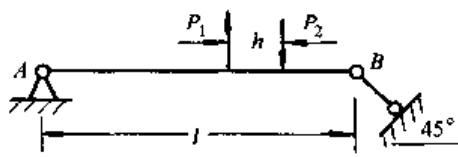
- (A) $R_A = 0, R_B = 0$ (B) $R_A = \frac{1}{3}qa \uparrow, R_B = \frac{1}{3}qa \uparrow$
(C) $R_A = \frac{1}{3}qa \uparrow, R_B = \frac{1}{3}qa \downarrow$ (D) $R_A = \frac{1}{3}qa \downarrow, R_B = \frac{1}{3}qa \uparrow$



题 4.18 图

4.19 水平简支梁如图所示, 不计杆自重, 如外力 \vec{P}_1 与 \vec{P}_2 相互平行且铅垂, 又 $P_1 = P_2 = P$, 则支座 A 的反力 R_A 为 ()。

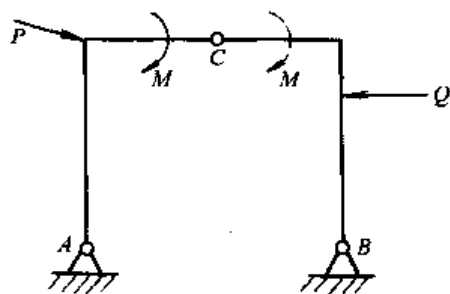
- (A) $R_A = \frac{\sqrt{2}Ph}{l}$ 铅垂向上 (B) $R_A = \frac{\sqrt{2}Ph}{l}$, 铅垂向下
(C) $R_A = \frac{\sqrt{2}Ph}{l}$, 平行于链杆 B 并倾斜向上 (D) $R_A = \frac{\sqrt{2}Ph}{l}$, 平行链杆 B 并倾斜向下



题 4.19 图

4.20 三铰拱上作用有力 P 、 Q 和力偶矩为 m 的力偶 M , 若不改变力偶矩的大小和转向将力偶平移到 BC 上 (如虚线所示), 则三铰拱 A 、 B 、 C 处的约束反力为 ()。

- (A) 都不变 (B) 只有 C 处不变
(D) 都改变 (D) 只有 C 处改变



题 4.20 图

4.21 一平衡力偶系的各力偶分别位于相互平行的二平面内, 可知该力偶系独立平衡方程的个数是 ()。

- (A) 4 个 (B) 3 个 (C) 2 个 (D) 1 个

4.1.3 平面任意力系

1. 平面任意力系的简化

力的平移：一个力 \vec{F} 可以由原作用点 A 平行移动到另一点 B ，但必须附加一个力偶，其力偶矩等于原力对 B 点的力矩。

设有平面力系 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ，现将这力系简化：在力系所在的平面内任取一点 O 作为简化中心，将诸力分别向 O 点平移，最后得一主矢 \vec{R}' 和一主矩 M_0 ，如图 4.1.2 所示。

主矢： $R'_x = \sum X$ $R'_y = \sum Y$ $R' = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}$, $\cos\alpha = \frac{R'_x}{R'}$, $\cos\beta = \frac{R'_y}{R'}$

主矩： $M_0 = \sum m_0(\vec{F})$

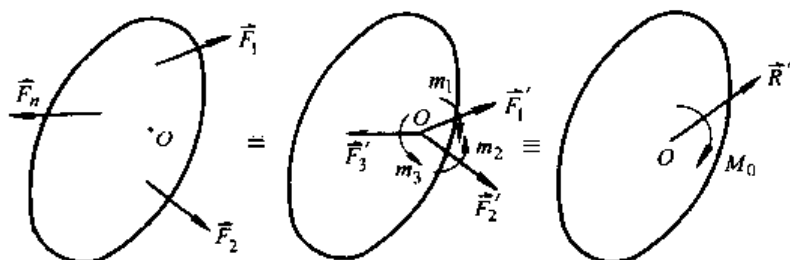


图 4.1-2

由上述可以看出：①力矢 \vec{R}' 与简化中心位置的选择无关，而主矩 M_0 与简化中心位置的选择有关，②力矢 \vec{R}' 不是合力。

计算结果分析：① $\vec{R}' \neq 0$, $M_0 = 0$ ，合成为合力；② $\vec{R}' = 0$, $M_0 \neq 0$ ，合成为力偶；③ $\vec{R}' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ 合成为合力，如图 4.1-3 所示；④ $\vec{R}' = 0$, $M_0 = 0$ ，平衡。

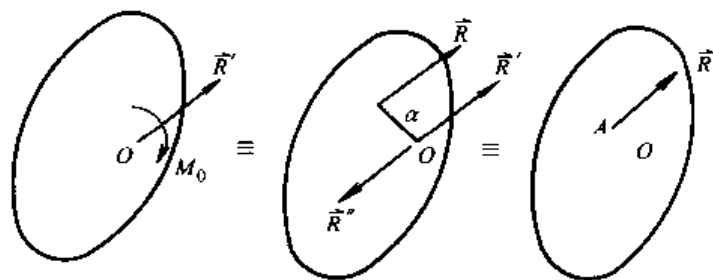


图 4.1-3

2. 平面任意力系平衡方程

基本式： $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum m_0 = 0$ 。

二矩式： $\sum m_A = 0$, $\sum m_B = 0$, $\sum X = 0$, x 轴不得垂直于 A 与 B 的连线。

三矩式： $\sum m_A = 0$, $\sum m_B = 0$, $\sum m_C = 0$, A, B, C 三点不得共线。

例 4.1.7 如例 4.1.1 所示构架 ABC ，杆 DF 杆上销钉 E 所受的反力为 ()。

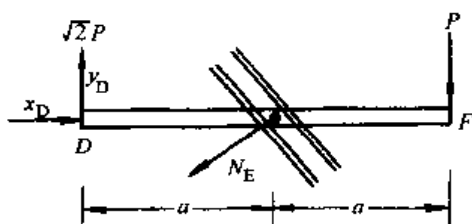
- (A) $-2\sqrt{2}P$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}P$ (C) $2P$ (D) $-\sqrt{2}P$

解 DF 杆受力图如图所示。

$$\sum m_D = 0, \quad P \times 2a + N_E \cos 45^\circ \times a = 0,$$

$$N_E = -2\sqrt{2}P \quad \text{选 (A)}$$

提示：当题文只要求解一个未知力时，解题原则是列出的平衡方程中只包含此未知力，避开其他未知量。一般是取未知力所在的物体为分离体，画受力图后列方程即可求得。



例 4.1.7 图

例 4.1.8 图示一钢筋混凝土水槽底宽 1 m，水深 0.5 m，已知单位体积水的重量 $\gamma = 9.8 \text{ kN/m}^3$ ，求在 1 m 长度的水槽上由水引起的约束反力为 ()。

(A) $X_A = 0$ $Y_A = 4.9 \text{ kN}$ $M_A = 2.45 \text{ kN}\cdot\text{m} \uparrow$

(B) $X_A = -1.225 \text{ kN}$ $Y_A = 4.9 \text{ kN}$ $M_A = 2.45 \text{ kN}\cdot\text{m} \uparrow$

(C) $X_A = 0$ $Y_A = 4.9 \text{ kN}$ $M_A = 2.65 \text{ kN}\cdot\text{m} \uparrow$

(D) $X_A = -1.225 \text{ kN}$ $Y_A = 4.9 \text{ kN}$ $M_A = 2.65 \text{ kN}\cdot\text{m} \uparrow$

解 水槽受力图如图示。

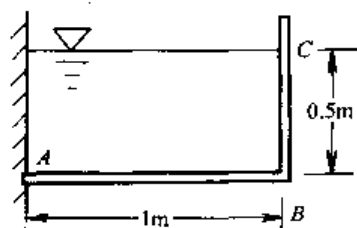
$$q_1 = \gamma h = 9.8 \times 0.5 = 4.9 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = \gamma h = 9.8 \times 0.5 = 4.9 \text{ kN/m}$$

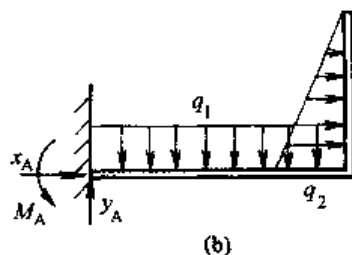
$$\sum X = 0 \quad X_A = \frac{1}{2} q_2 \times 0.5 \times 1 = 1.225 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_A = q_1 \times 1 \times 1 = 4.9 \text{ kN} \uparrow$$

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0 \quad M_A &= q_1 \times 1 \times 0.5 + \frac{1}{2} q_2 \times 0.5^2 \times \frac{1}{3} \\ &= 2.45 + 0.208 = 2.65 \text{ kN}\cdot\text{m} \uparrow \end{aligned}$$



(a)



(b)

例 4.1.8 图

选 (D)

提示：A 处为固定端，接触面作用了一群约束反力，向固定端 A 简化后得主矢的两个分量，即 X_A 、 Y_A 和主矩 M_A ，因而固定端反力包括两个反力和一个反力偶，切记此点，在求其反力时不要认为只有 X_A 、 Y_A 是反力，而反力偶不是其反力。

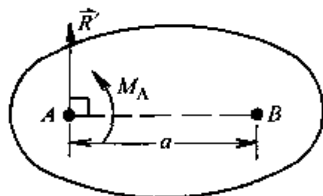
模拟试题

4.22 某平面任意力系向作用面内任一点简化，得主矢，主矩均不为零，则其简化的最后结果为 ()。

- (A) 一力偶 (B) 一合力 (C) 平衡 (D) 不能确定

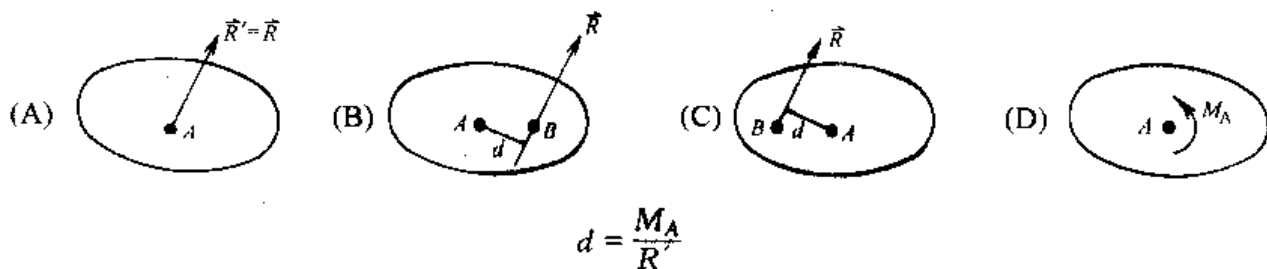
4.23 一平面力系向 A 点简化，其主矢为 \vec{R}' ，主矩为 M_A ，若再向 B 点简化，其主矢 \vec{R}'' 和主矩 M_B 应为 ()。

- (A) $\vec{R}'' = \vec{R}'$ $M_B = M_A + R'a$ (B) $\vec{R}'' = \vec{R}'$ $M_B = \frac{M_A}{R'}$
 (C) $\vec{R}'' = R'$ $M_B = M_A - R'a$ (D) $\vec{R}'' = \vec{R}'$ $M_B = R'a$



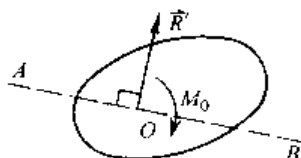
题 4.23 图

4.24 平面力系向 A 点简化，得到主矢 $\vec{R}' \neq 0$ ，主矩 $M_A \neq 0$ 且为顺时针转向，问最后合成结果为下列情形 ()。



4.25 平面力系向 O 点简化得主矢 \vec{R}' 和主矩 M_0 ，除 O 点外，力系向哪点简化主矩仍等于 M_0 ？（ ）。

- (A) 过 O 点与 \vec{R}' 垂直的左半线上的任一点，即 OA 线上任一点
 (B) 过 O 点与 \vec{R}' 垂直的右半线上的任一点，即 OB 线上任一点
 (C) 过 O 点与 \vec{R}' 垂直线上的任一点
 (D) \vec{R}' 作用线上的任一点



题 4.25 图

4.26 一平面力系分别向 A 、 B 简化，其主矩为 M_A 和 M_B ，且 $M_A = M_B$ ，转向相同，则此力系合成的最后结果是下列情形（ ）。

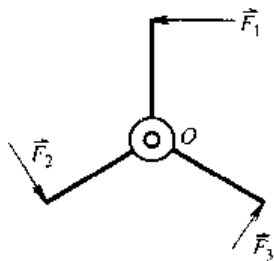
- (A) 力 (B) 力偶 (C) 力螺旋 (D) 不能确定

4.27 一铰盘有三个等长的柄，柄的长度为 l ，三个柄均在水平面上，其间夹角都是 120° 。如在水平面内每个柄端分别作用一垂直于柄的 \vec{F}_1 ， \vec{F}_2 ， \vec{F}_3 ，且有 $F_1 = F_3 = F_2 = F$ ，该力系向 O 简化后主矢 \vec{R}' 及主矩 M_0 应为（ ）。

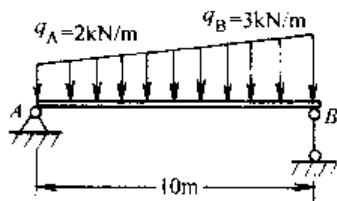
- (A) $R' = 0$ $M_0 = 3Pl \searrow$
 (B) $R' = 0$ $M_0 = 3Pl \nearrow$
 (C) $R' = 2P$ ， \vec{R}' 水平向右， $M_0 = 3Pl \searrow$
 (D) $R' = 2P$ ， \vec{R}' 水平向左， $M_0 = 3Pl \nearrow$

4.28 简支梁受线荷载如图所示，此荷载的合力大小为（ ）。

- (A) 50 kN (B) 25 kN (C) 10 kN (D) 30 kN



题 4.27 图



题 4.28 图

4.29 在图示结构 D 点作用一水平力 $P = 2$ kN，支座 A 、 B 、 C 三处的约束反力分别为（ ）。

- (A) $R_A = 2$ kN \leftarrow ， $R_B = 1$ kN \uparrow ， $R_C = 1$ kN \downarrow
 (B) $R_A = 2$ kN \rightarrow ， $R_B = 1$ kN \downarrow ， $R_C = 1$ kN \uparrow

(C) $R_A = 2 \text{ kN} \rightarrow$, $R_B = 1 \text{ kN} \uparrow$, $R_C = 1 \text{ kN} \uparrow$

(D) $R_A = 2 \text{ kN} \rightarrow$, $R_B = 1 \text{ kN} \downarrow$, $R_C = 1 \text{ kN} \downarrow$

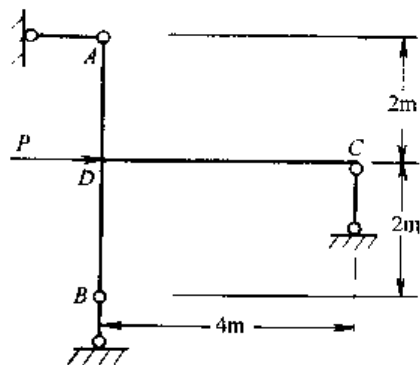
4.30 一支架用铰 A 与 B 水平支承于墙上, 支架受力偶矩为 M 的力偶作用如图所示, 如支架重量不计, 则支架的支座 B 的反力作用线应是 ()

(A) \vec{R}_B 沿水平线

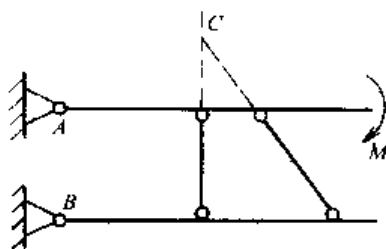
(B) \vec{R} 沿铅直线

(C) \vec{R}_B 通过 C 点

(D) \vec{R}_B 的作用线无法确定



题 4.29 图



题 4.30 图

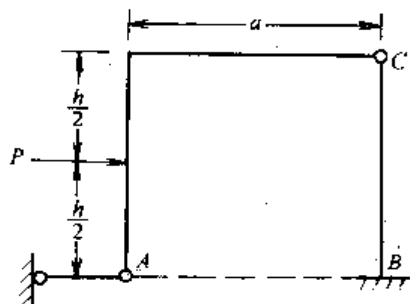
4.31 结构及其所受荷载如图所示, 固定端 B 的约束反力为 ()。

(A) $X_B = \frac{P}{2} \rightarrow$, $Y_B = 0$, $M_B = \frac{Ph}{2} \uparrow$

(B) $X_B = \frac{P}{2} \leftarrow$, $Y_B = 0$, $M_B = \frac{Ph}{2} \uparrow$

(C) $X_B = \frac{P}{2} \rightarrow$, $Y_B = 0$, $M_B = \frac{Ph}{2} \downarrow$

(D) $X_B = \frac{P}{2} \leftarrow$, $Y_B = 0$, $M_B = \frac{Ph}{2} \downarrow$



题 4.31 图

4.32 五根等长的无重量直杆铰接成杆系结构, 杆 BD 所受力的大小等于 ()。

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}P$

(B) P

(C) 0

(D) $\frac{3}{\sqrt{3}}P$

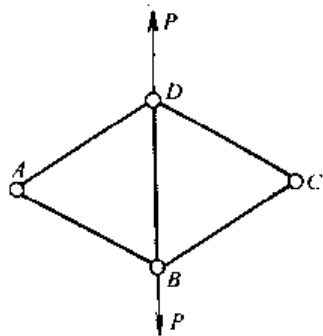
4.33 五根等长的无重量直杆铰接成杆系结构, 杆 BD 所受力的大小等于 ()。

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}P$

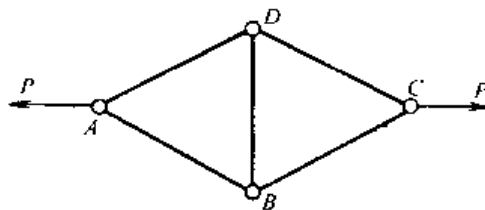
(B) P

(C) 0

(D) $\frac{3}{\sqrt{3}}P$



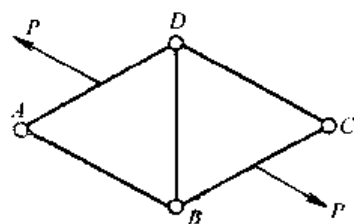
题 4.32 图



题 4.33 图

4.34 五根等长的无重量直杆铰接成杆系结构, 杆 BD 所受力的的大小等于 ($\vec{P} \parallel AB \parallel DC$) ()。

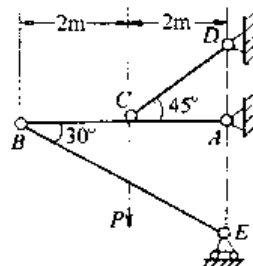
- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}P$ (B) P (C) 0 (D) $\frac{3}{\sqrt{3}}P$



题 4.34 图

4.35 一构架如图所示, 不计自重, 载荷为 P , 则支座 E 和 D 的反力 N_E 和 N_D 的大小等于 ()。

- (A) $N_E = P, N_D = \sqrt{2}P$
 (B) $N_E = \frac{P}{2}, N_D = \sqrt{2}P$
 (C) $N_E = \sqrt{2}P, N_D = \sqrt{2}P$
 (D) $N_E = \frac{P}{2}, N_D = \frac{1}{\sqrt{2}}P$



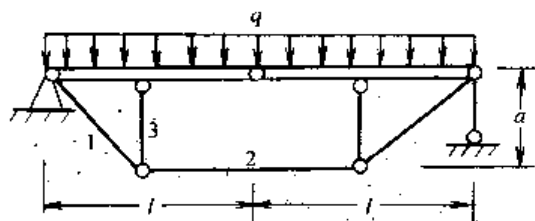
题 4.35 图

4.36 图示一组合结构, q 、 l 、 a 均为已知, 杆重不计, 求杆 2 所受的作用力 S_2 ()。

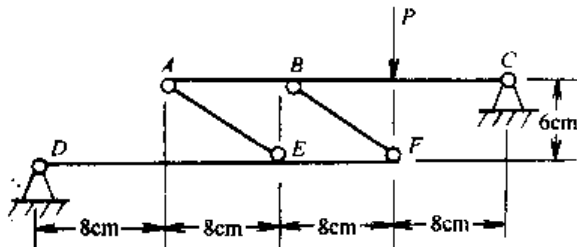
- (A) $S_2 = qa$ (B) $S_2 = \frac{ql^2}{2a}$ (C) $S_2 = \frac{qa^2}{l}$ (D) $S_2 = \frac{2ql^2}{a}$

4.37 图示机架由 ABC 和 DEF 及 AE 杆、 BF 杆组成, $AC \parallel DF$, $AE \parallel BF$, 若 P 已知, 不计自重, D 处的反力大小为 ()。

- (A) $\frac{3}{5}P$ (B) $\frac{4}{5}P$ (C) $\frac{P}{3}$ (D) P



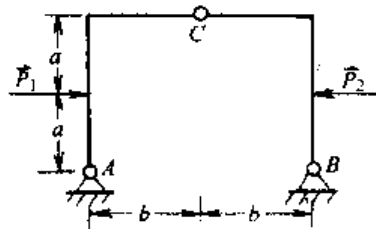
题 4.36 图



题 4.37 图

4.38 在图示三铰刚架上作用有力 \vec{P}_1 和 \vec{P}_2 , 且 $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$, 则支座 A 、 B 的约束反力 \vec{R}_A 、 \vec{R}_B 为 ()。

- (A) $R_A = R_B = 0$ (B) $\vec{R}_A = -\vec{R}_B = -\frac{\vec{P}_1}{2}$
 (C) $\vec{R}_A = -\vec{R}_B = -\vec{P}_1$ (D) $\vec{R}_A \neq \vec{R}_B$



题 4.38 图

4.1.4 空间力系及重心

1. 力在直角坐标轴上的投影

设 \vec{F} 与正交坐标系 $Oxyz$ 三轴间的夹角分别为 α 、 β 、 γ , 如图 4.1-4 所示, 则力 \vec{F} 在 x 轴、 y 轴、 z 轴的投影为

$$X = F \cos \alpha$$

$$Y = F \cos \beta$$

$$Z = F \cos \gamma$$

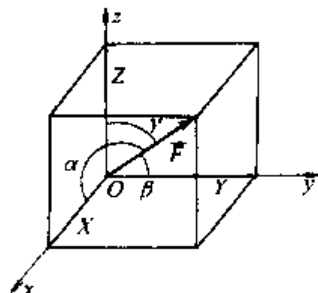


图 4.1-4

力在空间坐标系的投影还可以利用二次投影法, 即先将力 \vec{F} 投影到 z 轴和 xy 平面上, 得 F_z 和 \vec{F}_{xy} , 再将 \vec{F}_{xy} 投影到 x 、 y 轴上, 如图 4.1-5 所示, 于是得到

$$X = F \sin \gamma \cos \varphi$$

$$Y = F \sin \gamma \sin \varphi$$

$$Z = F \cos \gamma$$

2. 力对轴之矩

力 \vec{F} 对任一 z 轴之矩为力 \vec{F} 在垂直 z 轴的平面上投影对该平面与 z 轴交点之矩, 力对轴之矩是代数量, 符号规定: 从轴的正端来看, 若力的这个投影使物体绕该轴逆时针方向转动, 则取正号, 反之为负。

计算力对轴之矩的解析式为

$$M_z(\vec{F}) = yZ - zY$$

$$M_y(\vec{F}) = zX - xZ$$

$$M_x(\vec{F}) = xY - yX$$

式中 X 、 Y 、 Z 为力 \vec{F} 在三轴上的投影, x 、 y 、 z 为力 \vec{F} 作用点的坐标。

3. 力对点之矩与力对通过该点的轴之矩的关系

在空间情形, 力对点之矩由三个因素所确定, 即力矩的大小、转向、和力作用线与矩心所组成平面的方位, 可用矢量来表示

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

上式为力对点之矩的矢积表达式, 即力对点之矩矢等于矩心到该力作用点的矢径 \vec{r} 与该力 \vec{F} 的矢量积, 如图 4.1-6 所示。

力 \vec{F} 对 O 点之矩与该力对通过 O 点三个坐标轴之矩的关系式为

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) &= m_x(\vec{F})\vec{i} + m_y(\vec{F})\vec{j} + m_z(\vec{F})\vec{k} \\ &= (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k} \end{aligned}$$

即力对点之矩矢在通过该点的某轴的投影等于力对该轴之矩。

4. 空间力系的简化

与平面力系的简化一样, 空间力系向任一点简化得一主矢 \vec{R}' 和主矩 \vec{M}_0 。

$$\vec{R}' = \sum X\vec{i} + \sum Y\vec{j} + \sum Z\vec{k}$$

$$\vec{M}_0 = \sum m_x\vec{i} + \sum m_y\vec{j} + \sum m_z\vec{k}$$

简化最后结果: ① $\vec{R}' = 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, 合成为力偶; ② $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_0 = 0$, 合成为力; ③ $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, 且 $\vec{M}_0 \perp \vec{R}'$, 合成为力; ④ $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$, 若 \vec{M}_0 不垂直于 \vec{R}' , 将合

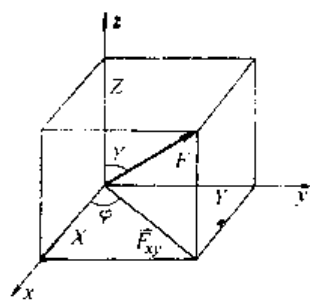


图 4.1-5

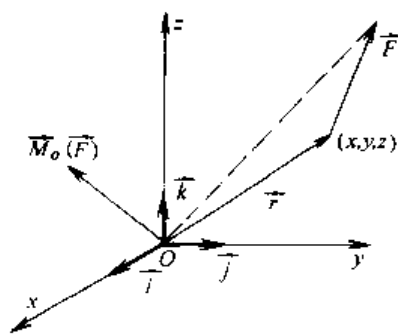


图 4.1-6

成为力螺旋。

5. 空间力系平衡方程

空间任意力系平衡方程为

$$\begin{aligned}\sum X &= 0, & \sum Y &= 0, & \sum Z &= 0 \\ \sum m_x &= 0, & \sum m_y &= 0, & \sum m_z &= 0\end{aligned}$$

空间汇交力系平衡方程为

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0$$

空间平行力系平衡方程为

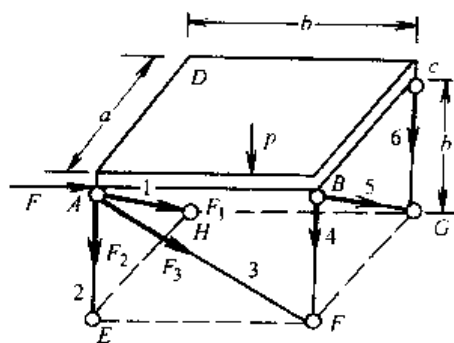
$$\sum Z = 0, \quad \sum m_x = 0, \quad \sum m_y = 0$$

空间力偶系平衡方程为

$$\sum m_x = 0, \quad \sum m_y = 0, \quad \sum m_z = 0$$

例 4.1.9 图示一均质长方形板由六根直杆支持在水，平位置，约束均为铰接，板重为 P ，在 A 处作用一水平力 F ，有 $F=2P$ ，杆 4、杆 5、杆 6 的内力为（ ）。

- (A) $F_4=0, F_5=0, F_6=-\frac{P}{2}$
 (B) $F_4=0, F_5=0, F_6=\frac{P}{2}$
 (C) $F_4=0, F_5=0, F_6=0$
 (D) $F_4=0, F_5=\frac{P}{2}, F_6=-\frac{P}{2}$



例 4.1.9 图

解 受力图如图所示， $\sum m_{AB} = 0, -F_6 \times a - P \times \frac{a}{2} = 0, F_6 = -\frac{P}{2}$

$$\sum m_{AE} = 0, \quad F_5 = 0$$

$$\sum m_{AC} = 0, \quad F_4 = 0$$

提示：空间力系平衡方程共六个，三个投影式和三个力矩式，这是平衡方程的基本式。一般讲，力矩方程比较灵活，只要方程中只含有一个未知量，这个方程必定是独立的，例如，此例中还可利用 $\sum m_{EF} = 0$ 求出 F_1 ， $\sum m_{FG} = 0$ 求出 F_2 ， $\sum m_{BC} = 0$ 求出 F_3 ，当然，选择矩轴时，应充分利用力平行于轴或相交于轴时力矩为零的结论。

6. 重心

重心坐标公式为

$$x_c = \frac{\sum px}{\sum p}, \quad y_c = \frac{\sum py}{\sum p}, \quad z_c = \frac{\sum pz}{\sum p}$$

工程上常需求平面图形的重心，其重心公式为

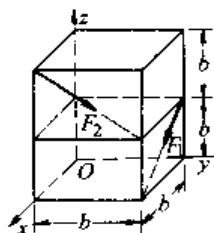
$$x_c = \frac{\sum x \Delta s}{S} = \frac{\int_s x ds}{S}, \quad y_c = \frac{\sum y \Delta s}{S} = \frac{\int_s y ds}{S}$$

模拟试题

4.39 图示二力 $F_1 = F_2 = F$ ，且 b 已知，求 \vec{F}_1, \vec{F}_2 对 x, y, z 轴力矩之和，即

$\sum m_x, \sum m_y, \sum m_z$ ()。

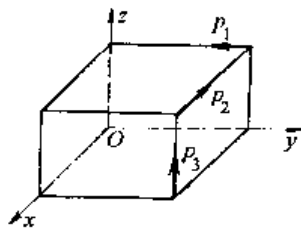
- (A) $\sum m_x = \frac{3}{\sqrt{2}}Fb, \sum m_y = \frac{2}{\sqrt{2}}Fb, \sum m_z = \frac{2}{\sqrt{2}}Fb$
 (B) $\sum m_x = \frac{-3}{\sqrt{2}}Fb, \sum m_y = \frac{2}{\sqrt{2}}Fb, \sum m_z = 0$
 (C) $\sum m_x = \frac{3}{\sqrt{2}}Fb, \sum m_y = -\frac{2}{\sqrt{2}}Fb, \sum m_z = 0$
 (D) $\sum m_x = \frac{3}{\sqrt{2}}Fb, \sum m_y = -\frac{2}{\sqrt{2}}Fb, \sum m_z = \frac{2}{\sqrt{2}}Fb$



题 4.39 图

4.40 三力 $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ 的大小均等于 P , 沿立方体的棱边作用如图示, 如立方体棱边长为 a , 则此三力对坐标轴之矩的代数和分别为 ()。

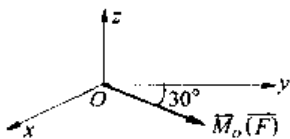
- (A) $\sum m_x = 2Pa, \sum m_y = -2Pa, \sum m_z = Pa$
 (B) $\sum m_x = 2Pa, \sum m_y = -Pa, \sum m_z = Pa$
 (C) $\sum m_x = Pa, \sum m_y = -2Pa, \sum m_z = Pa$
 (D) $\sum m_x = 2Pa, \sum m_y = -2Pa, \sum m_z = 2Pa$



题 4.40 图

4.41 已知空间力 \vec{F} 对 O 点之矩矢 $\vec{M}_O(\vec{F})$ 位于 Oxy 平面内, 如图所示。则力 \vec{F} 对 Oy 轴之矩 $M_y(\vec{F})$ 为 ()。

- (A) $\frac{1}{2}M_O(\vec{F})$ (B) $-\frac{1}{2}M_O(\vec{F})$
 (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}M_O(\vec{F})$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}M_O(\vec{F})$



题 4.41 图

4.42 一空间力系向某点 O 简化后, 若主矢 \vec{R}' 和主矩 \vec{M}_O 均不为零, 且此两矢量互相垂直, 则力系简化的最后结果是 ()。

- (A) 合力 (B) 合力偶 (C) 力螺旋 (D) 平衡

4.43 空间力系向一点简化, 得主矢 \vec{R}' 和主矩 \vec{M}_O , \vec{R}' 与 \vec{M}_O 成 α 角 ($\alpha \neq 90^\circ$) 其合成的最后结果是下列情形 ()。

- (A) 力螺旋 (B) 力偶 (C) 力 (D) 不能确定

4.44 任意二力的最后合成结果是下列情形 ()。

- (A) 力螺旋 (B) 力偶 (C) 力 (D) 不能确定

4.45 一汇交于 O 点的平面汇交力系满足力矩方程式 $\sum m_A(\vec{F}) = 0$, 如果设力系不是平衡力系, 则力系可简化为 ()。

- (A) 一合力偶 (B) 一合力 \vec{R} 与 OA 连线斜交
 (C) 一合力 \vec{R} 与 OA 连线正交 (D) 一合力 \vec{R} 与 OA 连线重合

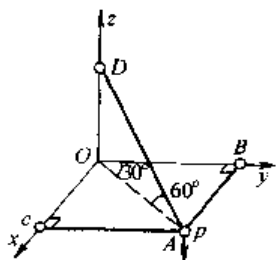
4.46 在图示支架中, 杆 AB 的内力为 ()。

- (A) $-\frac{P}{2}$ (B) $-\sqrt{3}P$ (C) $-\frac{\sqrt{3}P}{6}$ (D) $-\frac{P}{4}$

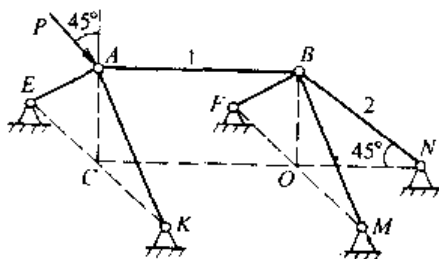
4.47 一空间桁架由六根杆组成如图示, 在节点 A 作用一力 P , 此力与杆 2 在铅垂矩

形 $ABCO$ 平面内, 且与铅垂线成 45° 角, 等腰三角形 EAK , FBM 的顶点 A 、 B 处都是直角, 且 $\triangle EAK = \triangle FBM$, 若 $P = 1 \text{ kN}$, 则杆 1 和杆 2 的内力分别为 ()。

- (A) $S_1 = 0.707 \text{ kN}$, $S_2 = -1 \text{ kN}$ (B) $S_1 = -0.707 \text{ kN}$, $S_2 = -1 \text{ kN}$
(C) $S_1 = -0.707 \text{ kN}$, $S_2 = 1 \text{ kN}$ (D) $S_1 = 0.707 \text{ kN}$, $S_2 = 1 \text{ kN}$



题 4.46 图



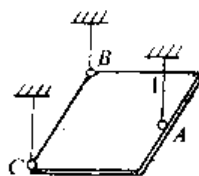
题 4.47 图

4.48 重量为 G 的均质矩形板, 用三根铅垂链杆悬挂于水平位置, 则杆 1 的内力为 ()。

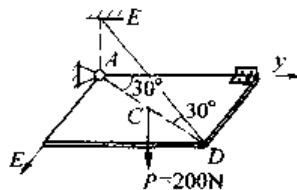
- (A) G (B) $\frac{G}{4}$ (C) $\frac{G}{2}$ (D) $\frac{G}{3}$

4.49 均质等厚矩形板位于水平, 板重为 P , 求绳索 DE 的拉力 T ()。

- (A) $T = \frac{P}{2}$
(B) $T = 2P$
(C) $T = P$
(D) $T = \frac{\sqrt{3}}{2}P$



题 4.48 图



题 4.49 图

4.50 正方形板 $ABCD$, 自重不计, 求杆 2 (DG 杆) 的内力 S_2 ()。

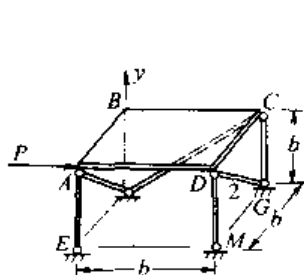
- (A) $S_2 = P$ (B) $S_2 = -P$ (C) $S_2 = -1.414P$ (D) $S_2 = 1.414P$

4.51 如图示空间结构由六根杆铰接而成, 各杆重量不计, 则内力为零的杆件是 ()。

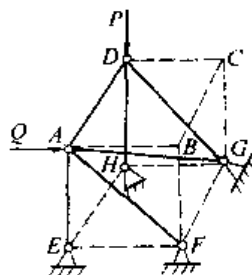
- (A) AD , AG , DG (B) AD , DG (C) AD , AG (D) DG , AG

4.52 图示为六杆支撑的水平板, 在板角 A 处作用一铅直力 P , 如各杆端均为铰接, 且杆、板自重不计, 则内力为零的杆是 ()。

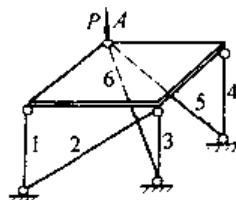
- (A) 1, 2, 3 杆 (B) 2, 3, 4 杆 (C) 3, 4, 5 杆 (D) 2, 5, 6 杆



题 4.50 图



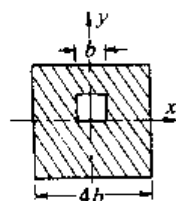
题 4.51 图



题 4.52 图

4.53 如图所示, 边长为 $4b$ 的正方形均质薄板, 挖去一个边长为 b 的正方形孔, 则其余下部分的重心坐标为 ()。

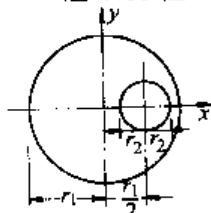
- (A) $x_c = 0, y_c = -\frac{b}{30}$ (B) $x_c = 0, y_c = \frac{b}{30}$
 (C) $x_c = 0, y_c = -\frac{b}{2}$ (D) $x_c = 0, y_c = 0$



题 4.53 图

4.54 半径为 r_1 的均质圆盘上有一半径为 r_2 的圆孔, 如二圆心之距为 $\frac{r_1}{2}$, 则此带孔圆盘的重心位置为 ()。

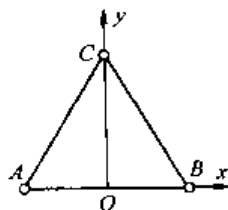
- (A) $x_c = \frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}, y_c = 0$ (B) $x_c = 0, y_c = 0$
 (C) $x_c = \frac{-r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}, y_c = 0$ (D) $x_c = \frac{-r_1 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}, y_c = 0$



题 4.54 图

4.55 三根长度都是 l 的均质杆铰接成一等边三角形构架, 如图示, 如 AB 杆重 $2P$, BC 及 CA 杆各重 P , 求构架的重心坐标是 ()。

- (A) $x_c = 0, y_c = \frac{1}{4}l\sin 60^\circ$ (B) $x_c = 0, y_c = \frac{1}{3}l\sin 60^\circ$
 (C) $x_c = 0, y_c = \frac{2}{3}l\sin 60^\circ$ (D) $x_c = 0, y_c = \frac{1}{2}l\sin 60^\circ$



题 4.55 图

4.1.5 摩擦

1. 摩擦力的概念

两个表面粗糙的物体, 当其表面间有相对滑动趋势或相对滑动时, 彼此作用有阻碍相对滑动的阻力, 此力称为摩擦力, 摩擦力作用在相互接触处, 方向与相对滑动的趋势或相对滑动的方向相反, 大小待定。静摩擦力与一般约束反力不同, 由于物体间接触面的粗糙程度不同, 摩擦力不能无限增大, 其值总在一定的范围内, 即在零与最大值之间, 设以 F 表示摩擦力, 则 $0 \leq F \leq F_{\max}$ 。

F_{\max} 称为最大摩擦力, 或极限摩擦力, 由库伦定律确定:

$$F_{\max} = \mu N$$

式中, μ 为摩擦系数; N 为法线反力。

2. 考虑摩擦时物体的平衡问题

考虑摩擦时, 只要在画受力图时将摩擦力考虑在内列平衡方程就可求解, 特殊之处在于要分辨物体处于哪种状态:

(1) 物体处于平衡状态, 摩擦力 F 的大小在零和最大值之间, 即 $0 < F < F_{\max}$, 摩擦力的指向可以假设, 应用平衡方程可求解。

(2) 物体处于平衡的临界状态, 此时摩擦力 $F = F_{\max} = \mu N$, 要正确判断摩擦力的指向, 由于物体处于平衡状态, 应用平衡方程可求解。

(3) 物体处于运动状态, 摩擦力为动摩擦力, 其大小为 $F = \mu' N$, 式中 μ' 为动摩擦系数, 由实验知, $\mu' < \mu$, 应用动力学方程可求解。

3. 摩擦角

摩擦力 \vec{F} 与接触面法线反力 N 的合力称为全反力 \vec{R} , 即 $\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}$, 当物体处于平衡

临界状态时, 全反力 \vec{R} ($\vec{R} = \vec{F}_{\max} + \vec{N}$) 与法线的夹角 φ_m , 称作摩擦角,

如图 4.1-7 所示, 由图示可得 $\tan \varphi_m = \frac{\mu N}{N} = \mu$

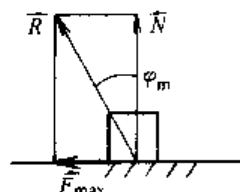


图 4.1-7

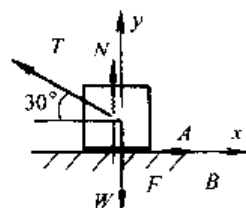
由摩擦角的定义可知:

(1) 如果作用于物体上的全部主动力的合力作用线在摩擦角 φ_m 之内, 则无论这个力多么大, 物体必保持静止。

(2) 如果作用于物体上的全部主动力的合力作用线在摩擦角 φ_m 之外, 则无论这个力多么小, 物体一定会滑动。

例 4.1.10 物块重 $W = 70 \text{ kN}$, 作用力 $T = 20 \text{ kN}$, A、B 间的摩擦系数 $\mu = 0.3$, 物块 A 所受的摩擦力为 ()。

- (A) $F = 25 \text{ kN}$ (B) $F = 18 \text{ kN}$
(C) $F = 17.32 \text{ kN}$ (D) $F = 20 \text{ kN}$



例 4.1.10 图

解 物块 A 在 T 、 W 作用下的运动状态未知, 对此首先假定物块是平衡状态, 这样, 有

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 \quad N &= 70 - 20\sin 30^\circ = 60 \text{ kN} \\ \sum X = 0 \quad F &= 20\cos 30^\circ = 17.32 \text{ kN} \end{aligned}$$

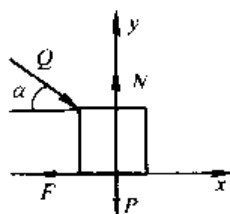
由上述计算中得知, 只要摩擦面提供 17.32 kN 的摩擦力, 物块即平衡, 下面要验证摩擦面能提供的最大摩擦力为多少, 于是, 有

$$F_{\max} = \mu N = 0.3 \times 60 = 18 \text{ kN},$$

$$F = 17.32 < F_{\max}. \text{ 平衡, 摩擦力 } F = 17.32 \text{ kN} \quad \text{应选 (C)}$$

例 4.1.11 物块重 P , 放置于粗糙的水平面上, 摩擦系数为 f , 问不致使物块滑动的 Q 力应是 ()。

- (A) $Q \leq \frac{fP}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$ (B) $Q \leq \frac{fP}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$
(C) $Q \geq \frac{fP}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$ (D) $Q \geq \frac{fP}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$



例 4.1.11 图

解 这是物体处于平衡临界情况问题, 摩擦力为最大值 F_{\max}

$$\begin{aligned} \sum X = 0 \quad Q \cos \alpha &= F_{\max} \\ \sum Y = 0 \quad N &= P + Q \sin \alpha \quad \text{又} \quad F_{\max} = fN \\ f(P + Q \sin \alpha) &= Q \cos \alpha \quad Q = \frac{fP}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \end{aligned}$$

$Q = \frac{fP}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$ 是物体处于平衡临界状态的数值, 答案为

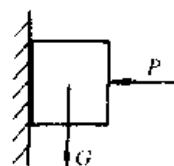
$$Q \leq \frac{fP}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \quad \text{应选 (B)}$$

模拟试题

4.56 物块重 G 在水平力 P 作用下平衡, 接触面间的摩擦系数为 μ , 则物块受到的摩擦力 F 等于 ()。

- (A) $F = \mu P$ (B) $F = \mu G$ (C) $F = G$ (D) $F = P$

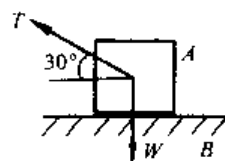
4.57 物块重 $W = 60 \text{ kN}$, 作用力 $T = 20 \text{ kN}$, A、B 间的摩擦系数 $\mu = 0.5$, 求 A 物块所受的摩擦力 F ()。



题 4.56 图

- (A) $F = 25 \text{ kN}$ (B) $F = 20 \text{ kN}$
 (C) $F = 17.32 \text{ kN}$ (D) $F = 15 \text{ kN}$

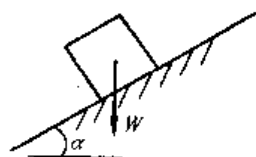
4.58 如题 4.57 图所示, 若 $W = 60 \text{ kN}$, $T = 40 \text{ kN}$, A、B 间的静摩擦系数 $f = 0.5$, 动滑动摩擦系数 $f' = 0.4$, 求 A 物块所受的摩擦力 F ()。



题 4.57 图

- (A) $F = 25 \text{ kN}$ (B) $F = 10\sqrt{3} \text{ kN}$ (C) $F = 16 \text{ kN}$ (D) $F = 20 \text{ kN}$

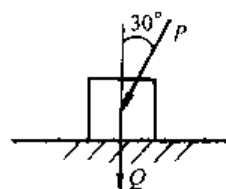
4.59 重 W 的物块放在倾角为 α 的斜面上, 物体与斜面间的摩擦系数 $\mu = 0.4$, 若 $W = 60 \text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$, 则物块处于下列状态 ()。



题 4.59 图

- (A) 静止状态 (B) 临界平衡状态
 (C) 滑动状态 (D) 条件不足, 不能确定

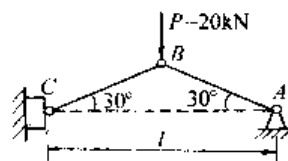
4.60 物体重为 Q , 作用力为 P , 已知 P 力与铅直线成 30° , 摩擦角 $\varphi_m = 14^\circ$, $P = Q = 0.6 \text{ kN}$, 问物块处于下列状态 ()。



题 4.60 图

- (A) 静止状态
 (B) 运动状态
 (C) 临界平衡状态
 (D) 在 $P = Q = 0.6 \text{ kN}$ 时能静止, P 再大将运动

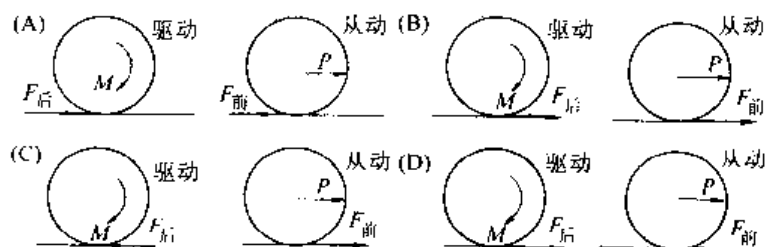
4.61 系统如图示, 若系统处于平衡状态时, 试求物块 C 与墙间的摩擦角的取值范围 ()。



题 4.61 图

- (A) $\varphi_m \geq 30^\circ$ (B) $\varphi_m \leq 30^\circ$
 (C) $\varphi_m \geq 15^\circ$ (D) $\varphi_m \leq 15^\circ$

4.62 汽车运行时, 前后轮均向前滚动, 后轮是驱动轮, 前轮是从动轮, 图示驱动轮和从动轮的四种摩擦力方向, 正确的是 ()。

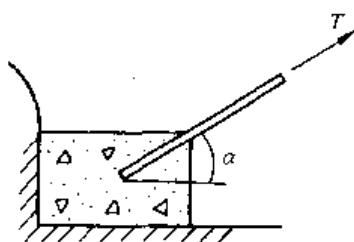


4.63 一混凝土锚锭如图示, 设砣重 W , 与土壤间的摩擦系数为 f , 铁索与水平线夹角为 α , 如 $W > T \sin \alpha$, 不致使砣块滑动的拉力 T 应该是 ()。

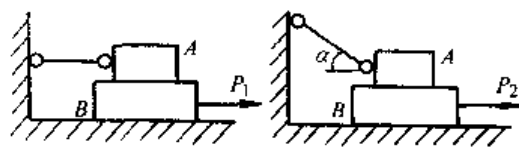
- (A) $T \leq \frac{W}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$ (B) $T \leq \frac{fW}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$
 (C) $T \geq \frac{W}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$ (D) $T \geq \frac{fW}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$

4.64 图示二图中物块 A, B 分别重 P_A , P_B , 物块 A 与墙壁之间用一连杆相连, 如各接触面间的摩擦系数均为 f , 则使物块 B 滑动的水平力 P_1 和 P_2 间的关系是 ()。

- (A) $P_1 = P_2$ (B) $P_1 > P_2$ (C) $P_1 < P_2$ (D) 无法判断



题 4.63 图



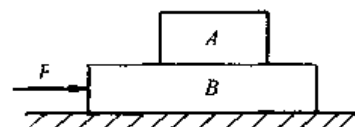
题 4.64 图

4.65 A 块与 B 块叠放如图示, 各接触面处均考虑摩擦。当 B 块受力 \vec{F} 作用沿水平面运动时, A 块仍静止于 B 块上, 于是 ()。

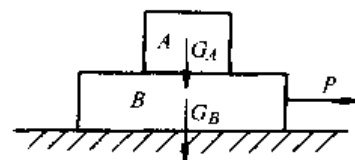
- (A) 各接触面处的摩擦力都做负功
- (B) 各接触面处的摩擦力都做正功
- (C) A 块上的摩擦力做正功
- (D) B 块上的摩擦力做正功

4.66 重量分别为 G_A 、 G_B 的两物块相叠放在水平面上, 并受图中所示之力 \vec{P} 的作用而处于平衡状态, 各接触面上的摩擦系数均为 f 。B 块作用于 A 块的摩擦力 \vec{F}_A 为 ()。

- (A) $F_A = 0$
- (B) $F_A = fG_A$ (\leftarrow)
- (C) $F_A = fG_A$ (\rightarrow)
- (D) $F_A = P$ (\rightarrow)



题 4.65 图



题 4.66 图

4.2 运动学

4.2.1 点的运动学

点的运动学研究点相对于某个参考系的几何位置随时间变化的规律, 包括点的位置、速度和加速度。

1. 矢径法

如图 4.2-1 所示, 在参考系上选固定点 O, 自 O 点向动点 M 作矢量 \vec{r} , 称为矢径。当动点运动时, 矢径 \vec{r} 随时间而变化, 有

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

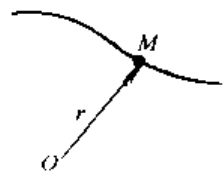


图 4.2-1

上式称为矢径法运动方程, 动点的速度 \vec{v} 等于矢径 \vec{r} 对时间的一阶导数, 即

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

由上式知, 速度沿轨迹的切线方向。

动点的加速度 \vec{a} 等于速度 \vec{v} 对时间的一阶导数或矢径 \vec{r} 对时间的二阶导数。即

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

2. 直角坐标法

取直角坐标系 $Oxyz$, 动点 M 的位置由其直角坐标 x 、 y 、 z 表示, 如图 4.2-2 所示。 x 、 y 、 z 随时间而变化有

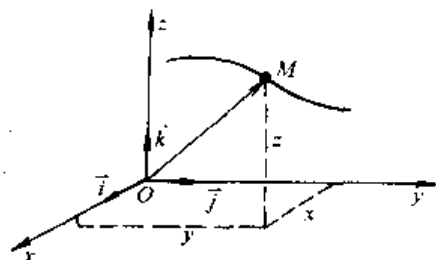


图 4.2-2

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

上式称为直角坐标法运动方程。又

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

则速度 \vec{v} 为
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

式中, $\frac{dx}{dt}$ 、 $\frac{dy}{dt}$ 、 $\frac{dz}{dt}$ 分别为速度 \vec{v} 在 x 、 y 、 z 轴上的投影, 即

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

加速度 \vec{a} 为
$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

式中, $\frac{dv_x}{dt}$ 、 $\frac{dv_y}{dt}$ 、 $\frac{dv_z}{dt}$ 分别为加速度 \vec{a} 在 x 、 y 、 z 轴上的投影, 即

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

3. 自然法

与矢径法和直角坐标法不同, 自然法是利用点的运动轨迹的几何特性来描述点的运动, 动点 M 的位置是这样确定的: 在点的运动轨迹上任选一参考点 O , 并规定参考点的一侧为正向, 另一侧为负向, 如图 4.2-3 所示。点 M 位置由弧长 S 来确定, 即

$$s = s(t)$$

上式称作自然法运动方程、动点 M 的速度 v 等于

$$v = \frac{ds}{dt}$$

当 $\frac{ds}{dt} > 0$ 时, s 随时间而增大, 点沿轨迹正向运动; 当 $\frac{ds}{dt} < 0$ 时, 点沿轨迹的负方向运动。

动点 M 的加速度 \vec{a} 有两个分量: 沿轨迹的切线方向, 以 a_τ 表示, 称为切向加速度, 另一分量沿轨迹的主法线方向, 指向曲率中心, 以 a_n 表示, 称为法向加速度, 有

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

应用自然法描述点的运动, 可以把点的轨迹的几何特性和点的运动密切联系在一起, 切向加速度反映点运动速度大小对时间的变化率, 或者说, 点运动速度大小的变化产生切向加速度; 而法向加速度反映点运动速度方向变化的变化率, 或者说, 点运动速度方向的变化产生法向加速度, 由此得出:

(1) 当 $a_\tau \equiv 0$, $a_n \neq 0$, 点做匀速曲线运动;

(2) 当 $a_\tau \equiv 0$, $a_n \equiv 0$, 点做匀速直线运动;

(3) 当 $a_\tau \neq 0$, $a_n \equiv 0$, 点做变速直线运动;

(4) 当 $a_\tau \neq 0$, $a_n \neq 0$, 点做变速曲线运动;

(5) 当 $v > 0$, $a_\tau > 0$ 或 $v < 0$, $a_\tau < 0$ 时, 点做加速运动, 前者沿轨迹正向做加速运动, 后者沿轨迹负向做加速运动;

(6) 当 $v > 0$, $a_\tau < 0$ 或 $v < 0$, $a_\tau > 0$ 时, 点做减速运动, 前者沿轨迹正向做减速运动, 后者沿轨迹负向做减速运动。

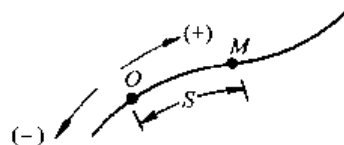


图 4.2-3

最后指出：当点的运动轨迹已知时，一般应用自然法描述运动，否则应用直角坐标法研究运动。

例 4.2.1 点做直线运动，已知运动方程 $S = 5t - 2.5t^2$ (m, s)，其轨迹方程 $3x - 4y = 0$ ， $t = 2$ s 时点走过的路程为 ()。

- (A) 1.25 m (B) 2.5 m
(C) 5 m (D) 6.25 m

解 运动方程 $S = 5t - 2.5t^2$ ，取 O 点为参考点。

$$v = \frac{ds}{dt} = 5 - 5t, a_t = -5, a_n = 0$$

当 $t = 0$ 时， $S = 0$ ， $v = 5$ ， $a_t = -5$ ，点沿轨迹正向以初速 5 m/s 运动做减速运动。 $v = 0$ 时， $t = 1$ s，此时 $v = 0$ ， $a_t = -5$ m/s²，点开始变向，沿负方向加速运动，当 $t = 1$ s 时，点走过 2.5 m，即 $t = 1$ 时， $S = 5 - 2.5 = 2.5$ m， $t = 2$ 时， $S = 10 - 10 = 0$ ，点在原点 O 的位置，即在 $t = 1$ 至 $t = 2$ s 间，点又走过 2.5 m，路程： $S = 5$ m。

模拟试题

4.67 点沿螺线自外向内运动，如图示。已知运动方程 $S = 4 + 3t$ (cm, s)，点的加速度的变化情况 ()。

- (A) 越来越小 (B) 越来越大
(C) 匀速运动， \vec{a} 无变化 (D) 条件不足，难以判断



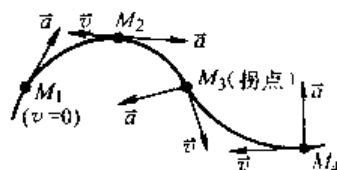
题 4.67 图

4.68 点做曲线运动，下列哪种情形是越运动越快，做加速运动？()。

- (A) $a_t > 0$ (B) $v > 0$ $a_n > 0$
(C) $a_t < 0$ (D) $v < 0$ $a_t < 0$

4.69 图中画出了某动点沿曲线运动到 M_1 ， M_2 ， M_3 ， M_4 点时其速度 \vec{v} 和加速度 \vec{a} 的方向。问动点在哪两点位置时， \vec{v} 和 \vec{a} 的方向才有可能正确的 ()。

- (A) M_1 和 M_2 (B) M_2 和 M_4
(C) M_2 和 M_3 (D) M_1 和 M_4



题 4.69 图

4.70 点做匀速曲线运动时，其切向加速度 \vec{a}_t 和法向加速度 \vec{a}_n 的值为 ()。

- (A) $a_t = 0$ ， $a_n \neq 0$ (B) $a_t \neq 0$ ， $a_n = 0$
(C) $a_t = 0$ ， $a_n = 0$ (D) $a_t \neq 0$ ， $a_n \neq 0$

4.71 点做曲线运动，其运动方程为 $x = 5\cos 5t^2$ ， $y = 5\sin 5t^2$ ，如以起始位置为基点计算弧长，则点沿轨迹的运动方程为 ()。

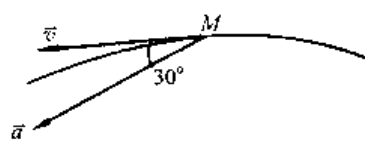
- (A) $S = 25t^2$ ； (B) $S = 25t$ ；
(C) $S = 50t^2$ ； (D) $S = 50t$ 。

4.72 点做直线运动，运动方程 $x = 12t - t^3$ (x 以 cm， t 以 s 计)，当 $t = 3$ s 时， $x = 9$ cm，可以计算出点在 3 秒钟内经过的路程为 ()。

- (A) 9 cm (B) 16 cm (C) 25 cm (D) 23 cm

4.73 点 M 沿一平面曲线轨迹运动, 某瞬时, 其速度大小 $v = 5 \text{ m/s}$, 加速度大小 $a = 10 \text{ m/s}^2$, 两者间夹角为 30° 如图示, 此时点所在处轨迹的曲率半径 ρ 是 ()

- (A) 2.5 m (B) 1 m
(C) $\frac{5}{3}\sqrt{3} \text{ m}$ (D) 5 m



题 4.73 图

4.2.2 刚体的基本运动

刚体的基本运动是指刚体的两种简单的运动: 刚体的平行移动 (简称平动) 和刚体绕定轴转动。

1. 刚体的平动

平动的运动特征: 在刚体内任取一直线, 当刚体在运动中此直线始终与它的最初位置平行, 这种运动称为平动。

可以证明: 当刚体平动时, 其上各点的轨迹相同; 在每一瞬时, 各点的速度相同, 加速度也相同。

根据这个结论, 刚体的平动可以归结为点的运动, 就是说, 当刚体内任一点的运动已知, 其他点的运动均与它相同, 而那个任一点的运动可以应用点的直角坐标法和自然法求解。

2. 刚体绕定轴转动

刚体绕定轴转动的特征是: 当刚体运动时, 若刚体有一条直线固定不动, 这种运动称为定轴转动。

定轴转动中, 首先要确定刚体在空间的位置、转动的速度和转动的加速度, 在此基础上再研究刚体上各点的速度和加速度。

刚体绕定轴转动时, 通过转轴作一固定平面 I, 再作一个与刚体一起转动的运动平面 II, 如图 4.2-4 所示, 则刚体在空间位置可由二平面的夹角 φ 来确定, 显然 φ 是时间的函数, 有 $\varphi = \varphi(t)$

上式称为刚体转动方程。刚体转动角速度以 ω 表示:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

刚体转动角加速度以 α 表示, 有

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

角速度 ω 和角加速度 α 的单位分别为 rad/s 和 rad/s^2 , 工程上习惯将角速度称为转数, 以 n 表示, 单位为 r/min , ω 与 n 的变换关系是:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

刚体内各点的速度: 刚体内任一点 M , 到轴之距为 r , 对 M 点来讲, r 为常数, 于是得出 M 点是以轴上 O 点为心, r 为半径的圆周运动, 如图 4.2-5 示, 应用自然法, 得出

$$v = r\omega$$

同样可以求出 M 点的加速度:

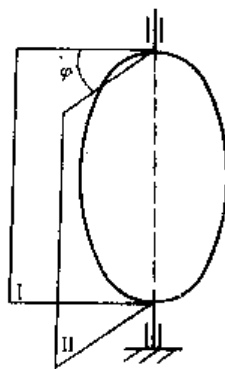


图 4.2-4

$$a_t = r\alpha \quad a_n = r\omega^2$$

这里应指出以下一点:

(1) 角速度 ω 和角加速度 α 同号, 即 $\omega > 0, \alpha > 0$ 或 $\omega < 0, \alpha < 0$ 时, 刚体做加速转动; 角速度 ω 和角加速度 α 异号, 即 $\omega > 0, \alpha < 0$ 或 $\omega < 0, \alpha > 0$ 时, 刚体做减速转动。

(2) 作一垂直于转轴的平面, 截出刚体的横截面, 如图 4.2-6 所示。取截面径向各点, 由 $v = r\omega$ 知, \vec{v} 与 r 成线性关系, 如 (a) 图所示, 同样, a_t 与 a_n 均与 r 成线性关系, 又, $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$, $a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$, 加速度 \vec{a} 也与 r 成线性关系, 如图 (b)、(c) 所示。

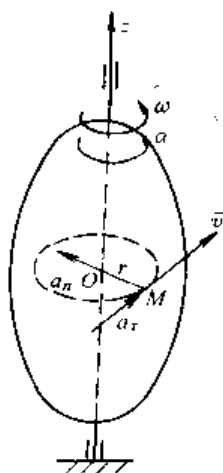


图 4.2-5

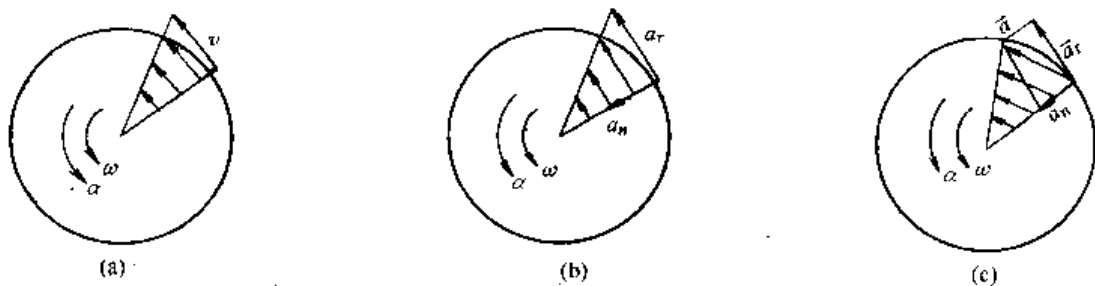
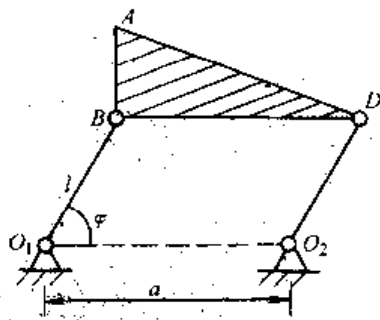


图 4.2-6

模拟试题

4.74 刚性三角板 ABD 与机构的 B 、 D 点铰接, $O_1O_2 = BD = a$, $O_1B = O_2D = l$, 取 $a = 30$ cm, $l = 20$ cm, $AB = 15$ cm, 已知 O_1B 杆的运动规律 $\varphi = 2(1+t)$ rad, A 点速度的大小和方向有 ()。

- (A) $v = 40$ cm/s, $\vec{v} \perp O_1B$, 指向斜上
- (B) $v = 40$ cm/s, $\vec{v} \perp O_1B$, 指向斜下
- (C) $v = 40$ cm/s, $\vec{v} \perp AB$, 指向朝左
- (D) $v = 40$ cm/s, $\vec{v} \perp AB$, 指向朝右



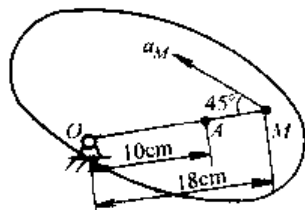
题 4.74 图

4.75 题 4.74 图所示 A 点的加速度大小和方向为 ()。

- (A) $a = 160$ cm/s², $\vec{a} \parallel AB$, 指向 B
- (B) $a = 160$ cm/s², $\vec{a} \perp AB$, 指向左
- (C) $a = 80$ cm/s², $\vec{a} \perp AB$, 指向左
- (D) $a = 80$ cm/s², $\vec{a} \parallel BO_1$, 指向斜下

4.76 已知刚体上一点 M 的加速度 $a_M = 20$ cm/s², 方向如图所示, A 点的速度和加速度为 ()。

- (A) $v_A = 15.96$ cm/s, $\perp OA$; $a_A = 14.14$ cm/s², $\perp OA$, 指向未知
- (B) $v_A = 8.86$ cm/s, $\perp OA$, $a_A = 11.1$ cm/s², $\perp OA$ 指向未知



题 4.76 图

(C) $v_A = 8.86 \text{ cm/s}$, $\perp OA$, $a_A = 11.1 \text{ cm/s}^2$, 平行 \vec{a}_M , 指向也相同

(D) 转动方程未知, ω 为未知数, 不能求出 v_A , $a_A = 11.1 \text{ cm/s}^2$, 平行 \vec{a}_M

4.77 如果知道定轴转动的刚体上距离轴 R 处某点法向加速度, 则 ()

(A) 就可以求得刚体转动角速度大小和转向

(B) 刚体转动角速度大小和转向都不能求得

(C) 只能求得刚体转动角速度的大小, 不能确定其转向

(D) 不能求得刚体转动角速度的大小, 只能确定其转向

4.2.3 点的合成运动

点的运动对于不同的参考系是不同的, 点的合成运动是研究点相对于不同参考系运动之间的关系。

1. 绝对运动 相对运动 牵连运动

设取两个参考系, 对于一般工程事业, 是把固定在地球上的坐标系称为静参考系, 以 $Oxyz$ 坐标系表示; 把固定在相对地球运动的参考体上的坐标系称为动参考系, 以 $O'x'y'z'$ 表示, 这样, 对于动点 M 的运动可以区分三种运动:

(1) 动点相对于静参考系的运动, 称为绝对运动;

(2) 动点相对于动参考系的运动, 称为相对运动;

(3) 动参考系相对静参考系的运动, 称为牵连运动。

区分三种运动是个难点, 可以这样来分析: 以相对运动为例说明, 动点相对动参考系的运动实际上就是读者随同动参考系一起运动所观察到的动点运动, 同样, 读者在地球上观察到的动点运动为绝对运动, 观察到的动参考系的运动为牵连运动。例如, 研究一直行的自行车轮胎上一点的运动, 读者在地球上观察到此点的运动, 是动点的绝对运动, 它的轨迹是一个摆线 (或称旋轮线), 若将自行车作为动参考系, 读者在自行车上观察到动点的运动, 是相对运动, 显然动点的相对运动轨迹是圆周运动, 而读者在地球上观察到的自行车的运动, 即动参考系的运动是牵连运动, 它作平动。

根据定义可知, 绝对运动和相对运动都是指点的运动, 可能是做直线运动或曲线运动, 由直角坐标法或自然法可求解, 而牵连运动是刚体的运动, 可能是平动、定轴转动及下面要研究的平面运动。

动点在绝对运动中的轨迹、速度和加速度, 称为绝对轨迹、绝对速度和绝对加速度。动点在相对运动中的轨迹、速度和加速度, 称为相对轨迹、相对速度和相对加速度。动点的牵连速度和牵连加速度是这样定义的: 在任一瞬时, 动参考系上与动点重合的那一点的速度和加速度称为该瞬时的牵连速度和牵连加速度。牵连速度和牵连加速度的求法是第二难点, 可以这样理解定义: 动点牵连速度是动参考系上一点的速度, 此点是该瞬时动参考系上与动点重合的那一点, 可以称为牵连点, 就是说, 牵连点的速度是动点的牵连速度。不同瞬时有位置不同的牵连点, 确定牵连点后, 就可以依动参考系的运动求出牵连速度, 以上论述同样适用于牵连加速度, 例如, 有 OA 杆绕 O 轴以匀速 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 转动。设一动点沿 OA 运动, 运动方程 $x' = 40t + 10$ (cm, s)。设取杆 OA 为动参考系, 求动点 $t = 1 \text{ s}$ 和 $t = 2 \text{ s}$ 时的牵连速度? 当

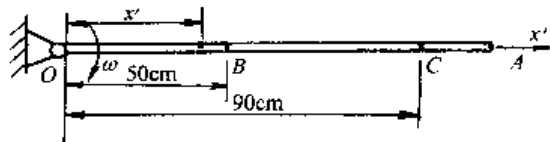


图 4.2-7

$t=1\text{ s}$ 时, $x'=50\text{ cm}$, 杆 OA 上的 B 点与动点重合, 牵连点为 B , 牵连速度 $v_e=0.5\times 2=1\text{ m/s}$ 。方向垂直于 OA , 指向与 ω 转向一致。当 $t=2\text{ s}$ 时, $x'=90\text{ cm}$, 杆 OA 上的 C 点与动点重合, 牵连点为 C , 牵连速度 $v_e=0.9\times 2=1.8\text{ m/s}$ 。方向垂直于 OA , 指向与 ω 转向一致。

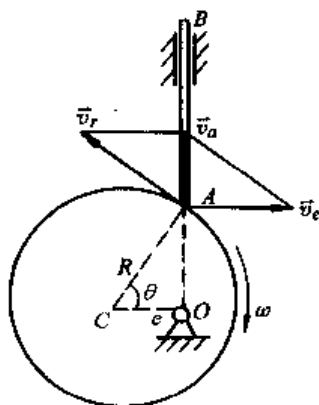
2. 速度合成定理

设以 \vec{v}_a 表示动点的绝对速度, 以 \vec{v}_r 表示动点的相对速度和以 \vec{v}_e 表示牵连速度, 则动点的速度合成定理可以表述如下。

速度合成定理: 动点在某瞬时的绝对速度等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和, 即

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

例 4.2.2 如图所示, 半径为 R , 偏心距为 e 的凸轮, 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动, 杆 AB 能在滑槽中上下平动, 杆的端点 A 始终与凸轮接触, 且 OAB 成一直线, 求图示位置时杆 AB 的速度。



例 4.2.2 图

解 取杆 AB 的 A 点为动点, 凸轮为动参考系。已知杆 AB 做平动, 可以得知, 动点 A 的绝对运动是直线运动, \vec{v}_a 的大小待求, 方向沿铅垂方向。动点 A 的相对运动是以凸轮中心 C 为心, 半径为 R 的圆周运动, \vec{v}_r 的大小未知, 方向为圆周 A 点的切线方向。在图示瞬时, 动参考系凸轮上的 A 点与杆 AB 上的 A 点重合, 牵连点是凸轮上的 A 点, 牵连运动是定轴转动, 于是有牵连速度 \vec{v}_e 的大小为 $v_e = OA\omega = \sqrt{R^2 - e^2}\omega$ 方向为垂直于 OA 指向右端, 将 \vec{v}_a 、 \vec{v}_e 、 \vec{v}_r 画在例 4.2.2 的图上, 根据速度合成定理, 三者应构成平行四边形, 于是

$$v_a = v_e \cot \theta = \sqrt{R^2 - e^2} \frac{e}{\sqrt{R^2 - e^2}} \omega = e\omega$$

速度合成定理中的绝对速度 \vec{v}_a 、相对速度 \vec{v}_r 和牵连速度 \vec{v}_e 均为矢量, $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ 中共有三个速度的大小和三个方向, 共六个量, 因此, 当已知其中四个量可求出另外两个未知量。

点的合成运动的第三个难点是动点和动参考系的选取, 一般情况下, 动点和动参考系要依据题意, 自己选取。选取的原则有二: 一是动点与动参考系要分别选在不同的物体上, 这样才能将复杂的运动分解为绝对运动、相对运动和牵连运动, 二是选取动参考系应使相对运动的轨迹已知, 这样, 相对速度的方向已知, 减小一个未知量, 便于求解。例如, 例 4.2.2 中, 动参考系选定为凸轮, 其相对轨迹为圆, 方向已知。

3. 加速度合成定理

加速度合成定理: 动点在某瞬时的绝对加速度 \vec{a}_a 等于该瞬时它的牵连加速度 \vec{a}_e 、相对加速度 \vec{a}_r 与科氏加速度 \vec{a}_k 的矢量和, 即

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$$

式中 \vec{a}_k 称为科氏加速度,

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

式中 $\vec{\omega}_e$ 为牵连运动的角速度矢, \vec{v}_r 为动点的相对速度, 科氏加速度等于动参考系角速度矢与动点的相对速度矢的矢积的两倍, 根据矢积运算规则, \vec{a}_k 的大小为

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\theta$$

式中, θ 为 $\vec{\omega}_e$ 与 \vec{v}_r 两矢量间的最小夹角, \vec{a}_k 垂直于 $\vec{\omega}_e$ 与 \vec{v}_r , 指向按右手法则确定, 如图 4.2-8 所示。

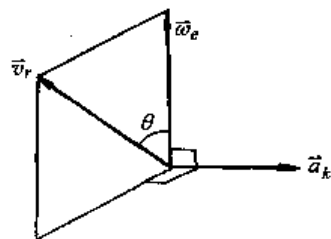
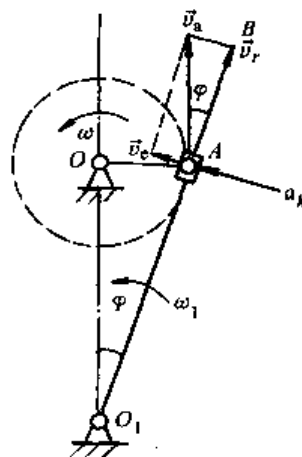


图 4.2-8

当牵连运动为平动时, $\vec{\omega}_e = 0$, 有 $\vec{a}_k = 0$, 即当牵连运动为平动时, 科氏加速度 \vec{a}_k 等于零, 其加速度合成定理为: 动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度与相对加速度的矢量和, 即

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

例 4.2.3 图示一急回机构, 曲柄 OA 的一端 A 与滑块用铰链连接, 当曲柄 OA 以匀角速 ω 绕 O 轴转动时, 滑块在摇杆 O_1B 上滑动, 并带动摇杆 O_1B 绕 O_1 轴转动, 设曲柄长 $OA = r$, 两轴间距 $O_1O = l$, 当选取滑块 A 为动点, 摇杆 O_1B 为动参考系时, 求动点 A 的牵连速度 \vec{v}_e 、相对速度 \vec{v}_r 和动点 A 的科氏加速度 \vec{a}_k 。



例 4.2.3 图

解 动点 A 的绝对运动为以 O 为心、 r 为半径的圆周运动、相对运动为动点沿 O_1B 的直线运动, 牵连运动为摇杆 O_1B 的定轴转动。速度矢量图如图示, 根据 $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$,

$$\text{有 } v_e = v_a \sin\varphi, \quad v_r = v_a \cos\varphi$$

$$\text{而 } \sin\varphi = \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}} \quad v_e = \frac{r^2 \omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

$$\text{而 } \cos\varphi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} \quad v_r = \frac{rl\omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

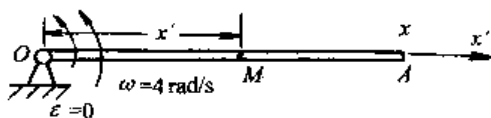
牵连角速度为 ω_1 , $\omega_1 = \frac{v_e}{l} = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$, $\vec{\omega}_1$ 垂直纸面朝上, 则

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_r$$

$$a_k = 2\omega_1 v_r \sin 90^\circ = \frac{2r^3 l \omega^2}{(\sqrt{l^2 + r^2})^3}, \text{ 方向如图示。}$$

模拟试题

4.78 动点 M 在绕 O 轴转动的 OA 杆上运动, 运动方程 $x' = 5t^2$ (cm, s), 取 OA 杆为动坐标系, 求 $t = 1$ s 时动点的相对速度 \vec{v}_r 和牵连速度 \vec{v}_e 有 ()。



题 4.78 图

(A) $v_r = 10$ cm/s 沿 x' 轴负向, $v_e = 10$ cm/s, 沿 x' 轴正向

(B) $v_r = 5$ cm/s, 沿 x' 轴正向, $v_e = 20$ cm/s, $\perp x$ 轴向上

(C) $v_r = 10$ cm/s, 沿 x' 轴正向, $v_e = 20$ cm/s, $\perp x'$ 轴向上

(D) $v_r = 10 \text{ cm/s}$, 沿 x' 轴正向, $v_e = 20 \text{ cm/s} \perp x'$ 轴向下

4.79 如题 4.78 图所示, 求 $t = 1 \text{ s}$ 时动点 M 的牵连加速度 \vec{a}_e ()。

(A) $a_{er} = 0$, $a_{en} = 20 \text{ cm/s}^2 \perp OM$ 朝上

(B) $a_{er} = 10 \text{ cm/s}^2$, $a_{en} = 80 \text{ cm/s}^2$ 沿 x' 轴负向

(C) $a_{er} = 10 \text{ cm/s}^2$, $a_{en} = 20 \text{ cm/s}^2 \perp OM$ 朝下

(D) $a_{er} = 0$, $a_{en} = 80 \text{ cm/s}^2$ 沿 x' 轴负向

4.80 如题 4.78 图所示, 求 $t = 1 \text{ s}$ 时动点 M 的科氏加速度 \vec{a}_k 有 ()。

(A) $a_k = 40 \text{ cm/s}^2 \rightarrow$

(B) $a_k = 40 \text{ cm/s}^2 \leftarrow$

(C) $a_k = 80 \text{ cm/s}^2 \downarrow$

(D) $a_k = 80 \text{ cm/s}^2 \uparrow$

4.81 直角杆 OAB 和直杆 CD 用小圆环套住, OAB 杆以角速度 ω 绕 O 转动带动圆环 M 运动, 以圆环为动点, 直角杆 OAB 为动系, 问 M 点的相对轨迹及牵连速度 \vec{v}_e 的方向 ()

(A) 直线 CD , \vec{v}_e 沿 CD 朝右

(B) 直线 AB , \vec{v}_e 沿 AB , 指 B

(C) 直线 AB , \vec{v}_e 垂直 OM , 朝左上

(D) 直线 CD , \vec{v}_e 沿 AB 指 A

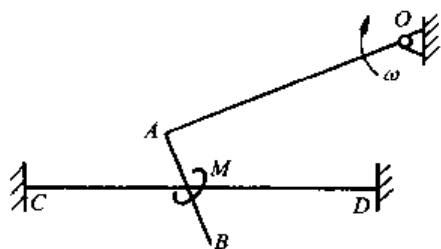
4.82 小环 M 套在平行四连杆的 AB 上, 以 \vec{v}_r 向右运动, 已知 ω , 求小环 M 对动系 AB 的科氏加速度为 ()。

(A) 0

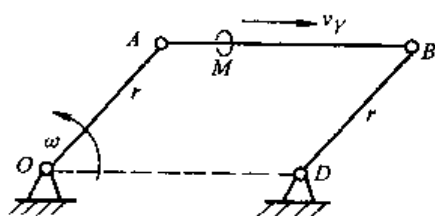
(B) $2\omega v_r$, $\perp AB$ 朝上

(C) $2\omega v_r$, $\perp AB$ 朝下

(D) $2\omega v_r$, 垂直纸面向下



题 4.81 图



题 4.82 图

4.83 如题 4.82 图所示, 若 ω 为常数, 求小环的牵连加速度 \vec{a}_e ()。

(A) 0

(B) $r\omega^2$, 平行 AO , 指向左下

(C) $r\omega^2$, 垂直 OA , 指向左上

(D) $AM\omega^2$, 沿 AB 指 B

4.84 半径为 R 的半圆形凸轮以匀速 u 沿水平向右运动, 带动从动杆 AB 沿铅直方向运动, 求当 $\varphi = 30^\circ$ 时相对于凸轮的速度为 ()。

(A) $\frac{3u}{\sqrt{3}}$, A 的切线方向, 指左上

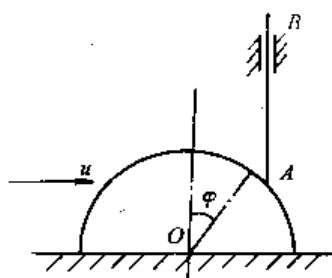
(B) u , 水平指右

(C) $\frac{1u}{\sqrt{3}}$, A 的切线方向, 指左上

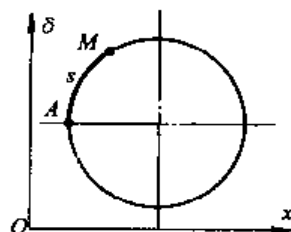
(D) $\frac{2u}{\sqrt{3}}$, A 的切线方向, 指左上

4.85 如图所示, 图形板做平动, 板上 A 点的运动方程为: $x_A = 2\cos 3t$, $y_A = 3\sin 3t$, 动点 M 沿圆周以 $s = 2t$ 的运动规律运动 (x, y, s 以 cm 计, t 以 s 计), 当 $t = \frac{\pi}{2} \text{ s}$ 时, 动点 M 的牵连速度 \vec{v}_e 和相对速度 \vec{v}_r 的大小为 ()。

- (A) $v_e = 9 \text{ cm/s}$, $v_r = 2 \text{ cm/s}$ (B) $v_e = 6 \text{ cm/s}$, $v_r = 2 \text{ cm/s}$
 (C) $v_e = 9 \text{ cm/s}$, $v_r = \pi \text{ cm/s}$ (D) $v_e = 6 \text{ cm/s}$, $v_r = \pi \text{ cm/s}$

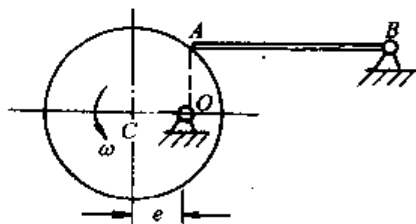


题 4.84 图



题 4.85 图

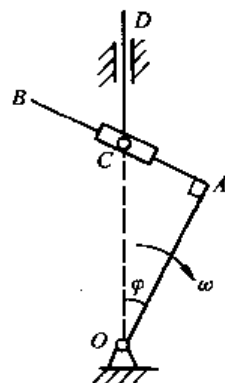
4.86 半径为 r , 偏心距为 e 的凸轮以匀角速度 ω 绕 O 轴转动。杆 AB 长 l , A 端置于凸轮上, B 端用铰链支承。在图示位置 AB 杆水平, 且 A, O 二点在同一铅垂线上, 此时杆端 A 的速度 \vec{v}_A 是 ()。



题 4.86 图

- (A) $v_A = e\omega$, 铅直向上
 (B) $v_A = e\omega$, 铅直向下
 (C) $v_A = \sqrt{r^2 - e^2} \omega$ 水平向左
 (D) $v_A = \sqrt{r^2 - e^2} \omega$, 水平向右

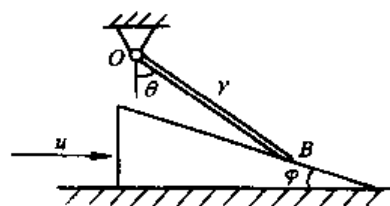
4.87 直角杆 OAB 绕垂直于图面的 O 轴转动, 套筒 C 可沿 AB 段滑动, O, C, D 三点位于同一铅垂线上, $OA = r$, 当 $\varphi = 30^\circ$ 时, 杆的角速度为 ω 而角加速度 $\varepsilon = 0$ 。在此瞬时 CD 杆的速度为 ()。



题 4.87 图

- (A) $\frac{\sqrt{3}r\omega}{3}$ (B) $r\omega$
 (C) $\frac{2r\omega}{3}$ (D) $2r\omega$

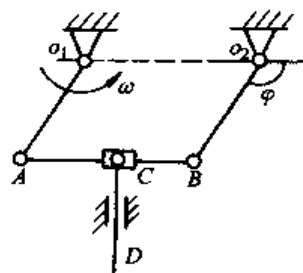
4.88 $\varphi = 30^\circ$ 的尖劈以匀速 $u = 200 \text{ mm/s}$ 沿水平向右运动, 使杆 OB 绕 O 转动, $r = 200\sqrt{3} \text{ mm}$, $\theta = 30^\circ$ 时, 杆 OB 的 $\omega =$ ()。



题 4.88 图

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ rad/s}$ (B) $\frac{1}{3} \text{ rad/s}$
 (C) $\sqrt{3} \text{ rad/s}$ (D) 3 rad/s

4.89 图示机构中 $O_1O_2 = AB$, $O_1A = O_2B = 100 \text{ mm}$, O_1A 以匀角速转动, $\omega = 2 \text{ rad/s}$, 以杆 AB 为动系, 套筒的牵连速度 \vec{v}_e 、牵连加速度 \vec{a}_e 及科氏加速度 \vec{a}_k ()



题 4.89 图

- (A) $v_e = 20 \text{ cm/s}$, $\perp O_1A$ 指右下, $a_e = 40 \text{ cm/s}^2$, $\parallel O_1A$ 指右上, $a_k = 20 \text{ cm/s}^2$, $\parallel CD$, 指上

- (B) $v_e = 20 \text{ cm/s}$, $\perp O_1A$ 指右下, $a_e = 40 \text{ cm/s}^2$, $\parallel O_1A$ 指右下, $a_k = 0$
 (C) $v_e = 20 \text{ cm/s}$, $\perp O_1A$ 指右下, $a_e = 40 \text{ cm/s}^2$, $\parallel O_1A$ 指右上, $a_k = 0$
 (D) $v_e = 40 \text{ cm/s}$, $\perp O_1A$ 指右上, $a_e = 20 \text{ cm/s}^2$, $\parallel O_1A$ 指右上, $a_k = 20 \text{ cm/s}^2$, $\parallel CD$ 指上

4.90 在点的合成运动中, 点的速度合成定理的适用范围是 ()。

- (A) 牵连运动为平动 (B) 牵连运动为定轴转动
 (C) 牵连运动为平面运动 (D) 牵连运动为任何运动

4.2.4 刚体平面运动

刚体平面运动是一种较为复杂的运动形式, 它具有以下运动特征: 在运动中, 刚体上任一点与某一固定平面的距离保持不变, 即刚体内各点到该固定平面的距离保持不变, 刚体的这种运动称为平面运动。

1. 平面运动的分解

根据刚体平面运动的运动特征, 平面运动可以简化为平面图形在其平面内的运动, 如图 4.2-9 所示的图形 s 在 Oxy 平面内的运动, 此平面图形的位置可由图形任一直线 $O'P$ 的位置所确定, $O'P$ 线段的位置由 O' 点的位置和 $O'P$ 线段在平面上的方位所确定, 即由 $x_{O'}$ 、 $y_{O'}$ 和 φ 来确定, $x_{O'}$ 、 $y_{O'}$ 和 φ 都是时间 t 的函数, 即 $x_{O'} = x(t)$ $y_{O'} = y(t)$ $\varphi = \varphi(t)$ 上式称为平面图形的运动方程。

平面图形的运动可以按照合成运动的方法给以分解, 取固定于地球的静参考系 Oxy 和相对于地球做平动的动参考系 $O'x'y'$, 动参考系原点 O' 任选, 称为基点, 如图 4.2-10 所示。这样, 平面图形的运动可看做图形随基点 O' 的平动和绕基点 O' 转动的组合, 随基点 O' 的平动是图形的牵连运动, 绕基点 O' 转动是图形的相对运动。图 4.2-11 示出一在直线轨道上行驶的车轮, 车厢速度为 $v_{O'}$, 车轮作平面运动, 取平动参考系 $O'x'y'$, 原点为车轴 O' , 这样, 车轮的运动就是随 O' 点的平动和绕 O' 点的转动, 平动速度为 $v_{O'}$, 转动角速度为 ω 。可以看出, 选取平动的动参考系后, 就把较为复杂的平面运动分解为两个简单的运动: 平动和定轴转动。

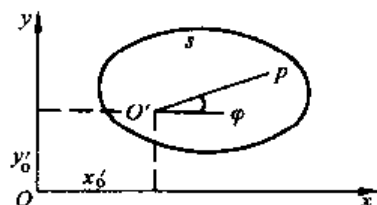


图 4.2-9

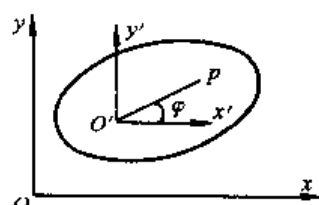


图 4.2-10

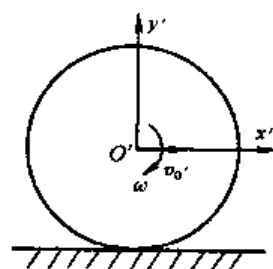


图 4.2-11

基点的选取是任意的, 基点不同, 其平动速度和加速度是不同的, 设选取不同的两个基点 O' 和 O'' , 如图 4.2-12 所示, 显然

O' 点和 O'' 点的速度 $\vec{v}_{O'}$ 和 $\vec{v}_{O''}$ 不同, 其加速度 $\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}$ 和 $\vec{a}_{O''} = \frac{d\vec{v}_{O''}}{dt}$ 也不同。但 $O'O''$ 连线与 x' 和 x'' 轴的夹角都是 φ , 则角速度 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ 相等, 角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ 也相等, 综合上述, 可得出结

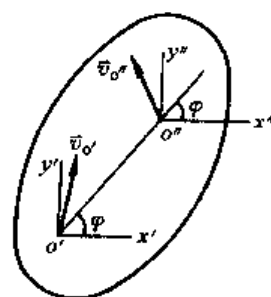


图 4.2-12

论：平面运动可取任意基点而分解为平动和转动，其中平动的速度和加速度与基点的选择有关，而平面图形绕基点转动的角速度和角加速度与基点选择无关。

2. 求平面图形内各点速度的基点法

由前述可知，平面图形的运动可以分解为两个运动：牵连运动（即随同基点 O' 的平动）和相对运动（即绕基点 O' 的转动）。根据速度合成定理，图形上任一点 M 的速度将由随同基点 O' 的平动速度和绕基点 O' 的转动速度合成而得。这种方法称为基点法。方法如下：

设已知平面图形上 O' 点的速度 $\vec{v}_{O'}$ 和图形绕 O' 点的转动角速度 ω ，如图 4.2-13 所示。取 O' 点为基点，则 M 点的牵连速度为基点 O' 的速度 $\vec{v}_{O'}$ （平动速度）和绕基点 O' 的转动速度 $\vec{v}_{MO'}$ 的矢量和，即

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_{MO'}$$

式中 $\vec{v}_{MO'}$ 中的下标表示 M 点相对 O' 点的相对速度。 $\vec{v}_{MO'}$ 的大小： $v_{MO'} = O'M\omega$ ，方向垂直于 $O'M$ ，指向与图形转动方向一致。

例 4.2.4 曲柄连杆机构如例 4.2.4 图所示， $OA = r$ ， $AB = \sqrt{3}r$ ，如曲柄 OA 以匀角速度 ω 转动， $\varphi = 60^\circ$ 时连杆上 B 点的速度大小为（ ）。

- (A) $v_B = \frac{2\sqrt{3}}{3}r\omega$ (B) $v_B = \frac{1}{\sqrt{3}}r\omega$ (C) $v_B = \frac{\sqrt{3}}{2}r\omega$ (D) $v_B = \frac{2\sqrt{3}}{2}r\omega$

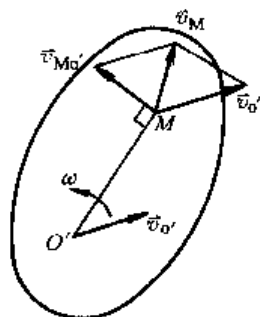
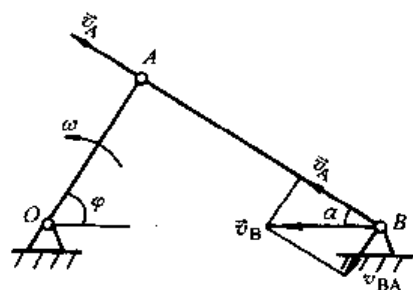


图 4.2-13



例 4.2.4

解 选 (A)。此机构中 OA 杆作绕定轴 O 转动，连杆 AB 作平面运动， $v_B = r\omega$ ，方向如图所示，以 AB 杆的 A 点为基点， B 点的牵连速度是基点 A 的速度， B 点的相对速度为 $v_{BA} = AB\omega_{AB}$ ，方向垂直于 AB ，而 B 点速度 \vec{v}_B 的方向已知，如图所示，这样，根据速度合成定理

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \\ v_B &= \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r\omega\end{aligned}$$

3. 求平面图形内各点速度的瞬心法

由基点法可知，平面图形上各点速度各不相同，若存在一个速度为零的点，而以此点为基点，那么，各点的牵连速度均为零，其速度就是相对转动速度，这样，求图形上各点的速度将大为简化，可以证明，每一瞬时，平面图形上都唯一地存在一个速度为零的点，这个在某瞬时速度为零的点，称为瞬时速度中心，简称瞬心，以瞬心为基点求各点速度的方法称为瞬心法。

瞬心位置的确定:

(1) O' 点的速度 $\vec{v}_{O'}$ 和绕 O' 转动角速度 ω 为已知, 则垂直于 $\vec{v}_{O'}$ 直线上各点的速度如图 4.2-14 (a) 所示, 显然, C 点速度为零时, 即 $v_{CO'} = v_{O'}$, 有 $v_{CO'} = O'C\omega$, $OC' = \frac{v_{O'}}{\omega}$, 这样得出寻求瞬心 C 的方法是: 瞬心 C 必定在各点速度的垂线上, 由速度方向按角速度 ω 转至 $\vec{v}_{O'}$ 的垂线上量取 $O'C = \frac{v_{O'}}{\omega}$ 即求得, 除已知一点速度大小和方向及图形转动角速度 ω 可求得瞬心外, 只要掌握瞬心必定在各点的垂线上就可以寻求到不同已知条件找瞬心的方法。

(2) 已知任二点速度的方向, 瞬心在 C 点, 如图 4.2-14 (b) 所示。

(3) 已知 \vec{v}_A 、 \vec{v}_B , 有 $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$, 且 $\vec{v}_A \perp \overline{AB}$, 瞬心在 C 点, 如图 (c), (d) 所示。

(4) 已知 \vec{v}_A 、 \vec{v}_B , 有 $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$, 但 \vec{v}_A 不垂直于 AB , 瞬心 C 在无穷远处, 此情形称为瞬时平动, \vec{v}_A 必定等于 \vec{v}_B , 也就是此瞬时图形各点速度相等, 应该注意的是此瞬时角速度 $\omega = 0$, 而角加速度 $\alpha \neq 0$, 如图 (e) 所示。

(5) 图形在固定面上只滚动不滑动, 即做纯滚动时, 瞬心 C 在图形与固定面的接触点, 如图 (f)。

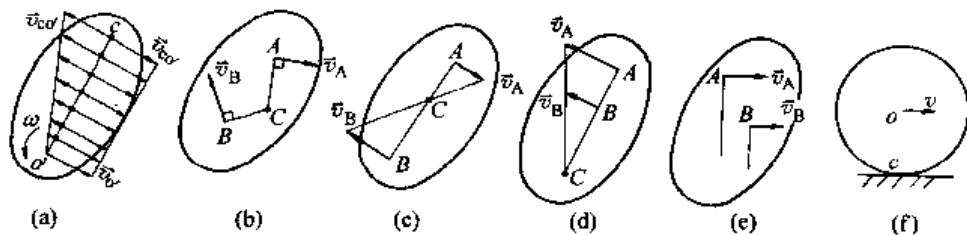


图 4.2-14

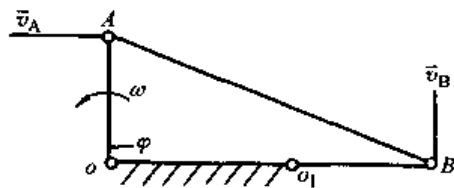
例 4.2.5 四连杆机构 $OABO_1$ 中, $OA = O_1B = \frac{1}{2}AB = l$, 曲柄 OA 以角速度 ω 逆时针转动, 当 $\varphi = 90^\circ$ 时, 如图 4.2.5 图所示, 其曲柄 O_1B 重合于 O_1O 的延长线上, 求曲柄 O_1B 上 B 点的速度 v_B 为 ()。

(A) $v_B = \sqrt{3}l\omega \downarrow$

(B) $v_B = \sqrt{3}l\omega \uparrow$

(C) $v_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \downarrow$

(D) $v_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \uparrow$



例 4.2.5 图

解 应选 (B)。OA、 O_1B 杆均为定轴转动, 杆 AB 为平面运动, \vec{v}_A 、 \vec{v}_B 的方向如图示, 瞬心位于 O 点, 由杆 OA 得 $v_A = l\omega$, 由杆 AB , 瞬心在 O 点, 有 $v_A = l\omega_{AB}$, 于是有

$$\omega_{AB} = \omega$$

$OB = \sqrt{3}l$, 有

$$v_B = \sqrt{3}l\omega \uparrow$$

4. 应用速度投影定理求平面图形上各点的速度

速度投影定理: 同一平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。

例 4.2.6 应用速度投影定理求例 4.2.4 中曲柄连杆机构中 B 点的速度, v_B 的大小。

解 A 、 B 两点的速度 \vec{v}_A 、 \vec{v}_B 如图 4.2.4 图所示, 应用速度投影定理:

$$v_A = v_B \cos \alpha, \quad v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r \omega$$

5. 求平面图形内各点的加速度

设已知平面图形上某点 O' 的加速度 $a_{O'}$ 及图形的角速度 ω 和角加速度 α ，可求出平面图形上任一点的加速度，由于牵连运动是平动，由点的加速度合成定理得

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{MO'}^r + \vec{a}_{MO'}^n$$

式中， $\vec{a}_{MO'}^r$ 、 $\vec{a}_{MO'}^n$ 分别是 M 点相对基点 O' 的相对加速度的切向和法向分量，而

$$a_{MO'}^r = O'M\alpha, \quad a_{MO'}^n = O'M\omega^2$$

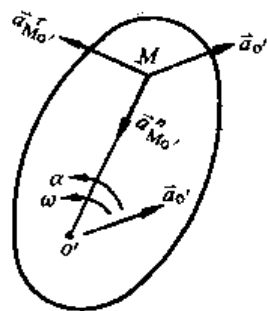


图 4.2-15

方向如图所示。

例 4.2.7 车轮沿直线作纯滚动，已知车轮半径为 R ，轮心 O 的速度为 v_O ，加速度为 \vec{a}_O ，求车轮上瞬心 C 和 A 点的加速度 ()。

- (A) $a_C = 0, a_{Ax} = 2a_O, a_{Ay} = -\frac{v_O^2}{R}$ (B) $a_C = R\omega^2 \uparrow, a_{Ax} = 2a_O, a_{Ay} = \frac{v_O^2}{R}$
 (C) $a_C = 0, a_{Ax} = -2a_O, a_{Ay} = \frac{v_O^2}{R}$ (D) $a_C = R\omega^2 \downarrow, a_{Ax} = 2a_O, a_{Ay} = -\frac{v_O^2}{R}$

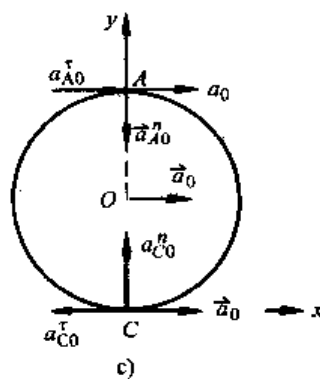
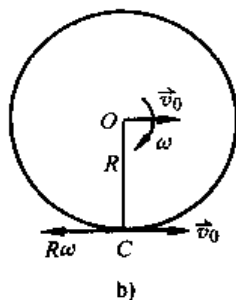
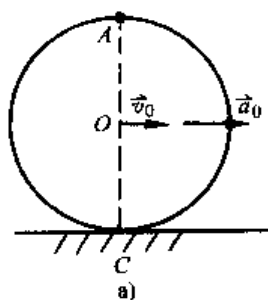
解 应选 (D)。以轮心 O 为基点，求瞬心 C 的速度 \vec{v}_C 和加速度 \vec{a}_C 。已知 $v_C = 0$ ，有 $v_O = R\omega$ ， $\omega = \frac{v_O}{R}$ ，速度矢量图如图 (b) 示，以 O 为基点，求瞬心 C 的加速度 a_C ：牵连加速度为 a_O ，相对法向加速度 $a_{CO}^n = R\omega^2$ ，切向加速度 $a_{CO}^t = R\alpha$ ，加速度矢量图如图 (c) 所示，由于车轮作纯滚动，瞬心 C 在水平方向的加速度分量应为零，

$$\text{于是有 } a_O = R\alpha, \quad \alpha = \frac{a_O}{R}$$

$$\text{得到 } a_C = a_{CO}^n = R\omega^2 \uparrow, \quad \omega = \frac{v_O}{R}, \quad \alpha = \frac{a_O}{R}$$

再求 A 点的加速度；以 O 为基点， A 点的牵连加速度为 \vec{a}_O ，相对法向加速度 $a_{AO}^n = R\omega^2 = \frac{v_O^2}{R}$ ，相对切向加速度 $a_{AO}^t = R\alpha = a_O$ ，加速度矢量图如图 (c) 所示。于是得到 A 点加

$$\text{速度 } a_{Ax} = a_O + a_{AO}^t = 2a_O, \quad a_{Ay} = -a_{AO}^n = -\frac{v_O^2}{R}$$



例 4.2.6 图

模拟试题

4.91 曲柄连杆机构在图示位置时 B 点的速度 \vec{v}_B 和加速度 \vec{a}_B 为 ()。

(A) $v_B = r\omega \uparrow$, $a_B = \frac{1}{2}r\omega^2 \leftarrow$

(B) $v_B = 0$, $a_B = 0$

(C) $v_B = 0$, $a_B = \frac{3}{2}r\omega^2 \leftarrow$

(D) $v_B = r\omega \uparrow$, $a_B = \frac{3}{2}r\omega^2 \rightarrow$

4.92 曲柄连杆机构在图示位置时 B 点的速度 \vec{v}_B 和加速度 \vec{a}_B 为 ()。

(A) $v_B = 0$ $a_B = r\omega^2 \rightarrow$

(B) $v_B = r\omega \rightarrow$ $a_B = \sqrt{3}r\omega^2 \leftarrow$

(C) $v_B = r\omega \leftarrow$ $a_B = \sqrt{3}r\omega^2 \leftarrow$

(D) $v_B = r\omega \leftarrow$ $a_B = \frac{1}{\sqrt{3}}r\omega^2 \rightarrow$

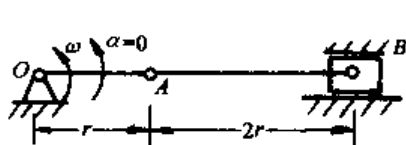
4.93 半径为 R 的圆柱体在固定水平面上做纯滚动, 圆心 O 的速度为 \vec{v}_O , 圆柱体角速度 ω 及 A、B、D 的速度为 ()。

(A) $\omega = \frac{v_O}{R}$ $v_A = \frac{\sqrt{3}}{2}v_O$, $\vec{v}_A \perp CA \searrow$ $v_B = 2v_O \rightarrow$ $v_D = \frac{\sqrt{3}}{2}v_O$, $\vec{v}_D \perp CD \swarrow$

(B) $\omega = \frac{v_O}{R}$ $v_A = \sqrt{2}v_O$, $\vec{v}_A \perp CA \searrow$ $v_B = 2v_O \rightarrow$ $v_D = \sqrt{2}v_O$, $\vec{v}_D \perp CD \nearrow$

(C) $\omega = \frac{v_O}{R}$ $v_A = \sqrt{2}v_O$, $\vec{v}_A \perp CA \searrow$ $v_B = \sqrt{3}v_O \rightarrow$ $v_D = 0$

(D) $\omega = \frac{v_O}{R}$ $v_A = \sqrt{2}v_O$, $\vec{v}_A \perp OA \searrow$ $v_B = 2v_O \rightarrow$ $v_D = \sqrt{2}v_O$, $\vec{v}_D \perp CD \searrow$



题 4.91 图

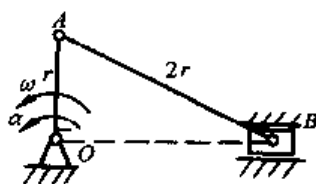


图 4.92 图

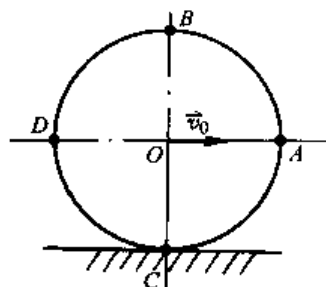


图 4.93 图

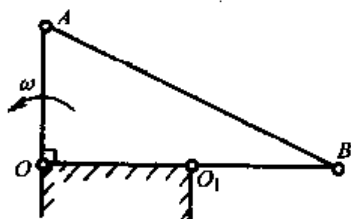
4.94 四连杆机构 $OABO_1$ 中 $OO_1 = OA = O_1B = 100$ mm, OA 在图示位置时 $\omega = 2$ rad/s, 当 OO_1 与 O_1B 在一直线时 AB 杆的角速度 ω_{AB} 和 O_1B 杆的角速度 ω_{O_1B} 为 ()。

(A) $\omega_{AB} = 2$ rad/s $\omega_{O_1B} = 4$ rad/s (B) $\omega_{AB} = 2$ rad/s $\omega_{O_1B} = 4$ rad/s

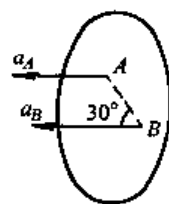
(C) $\omega_{AB} = 4$ rad/s $\omega_{O_1B} = 4$ rad/s (D) $\omega_{AB} = 2$ rad/s $\omega_{O_1B} = 4$ rad/s

4.95 平面图形上 A、B 两点的加速度相等, 即 $\vec{a}_A = \vec{a}_B$, 则此瞬时平面图形的角速度 ω 和角加速度 α 应是 ()。

(A) $\omega = 0$ $\alpha = 0$ (B) $\omega \neq 0$ $\alpha = 0$ (C) $\omega \neq 0$ $\alpha \neq 0$ (D) $\omega = 0$ $\alpha \neq 0$



题 4.94 图



题 4.95 图

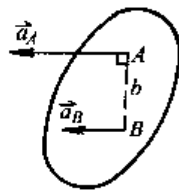
4.96 平面图形上 A、B 两点之矩为 b, 即 $AB = b$, 有 $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, 而 $\vec{a}_A \parallel \vec{a}_B$, $a_B =$

$\frac{1}{2}a_A$, 平面图形角加速度的大小和转向为 ()。

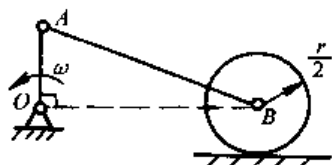
- (A) $\alpha = \frac{a_B}{b}$ ↺ (B) $\alpha = \frac{a_A}{b}$ ↺ (C) $\alpha = \frac{a_A}{b}$ ↻ (D) $\alpha = \frac{a_B}{b}$ ↻

4.97 机构如图所示, 曲柄的角速度 ω , $OA = r$, 轮的半径为 $\frac{r}{2}$ 均已知, 若轮做纯滚动求轮 B 角速度 ω ()。

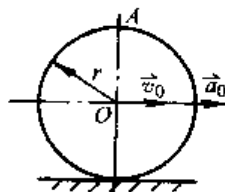
- (A) 0 (B) $\frac{\omega}{2}$ ↺ (C) ω ↻ (D) 2ω ↻



题 4.96 图



题 4.97 图



题 4.98 图

4.98 一圆柱体在水平面上做纯滚动, 已知其中心 O 的速度 \vec{v}_O 和加速度 \vec{a}_O , 则圆柱体边缘最高点 A 的加速度是下列情形中的 ()。

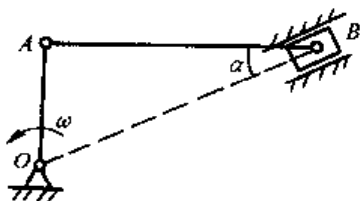
- (A) (B) (C) (D)

4.99 如图所示曲柄连杆机构, $OA = 30 \text{ cm}$, $\omega = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ 为常量, 在图示位置时 ($OA \perp AB$, $\alpha = 30^\circ$), 滑块 B 的速度 \vec{v}_B 的大小和杆 AB 的角速度 ω_{AB} 分别为 ()。

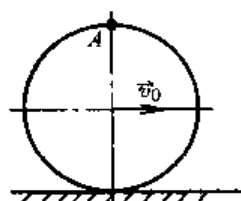
- (A) $v_B = 0.6 \text{ m/s}$, $\omega_{AB} = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ (B) $v_B = 0.6 \text{ m/s}$, $\omega_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s}$
(C) $v_B = 0.45 \text{ m/s}$, $\omega_{AB} = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ (D) $v = 0.45 \text{ m/s}$, $\omega_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s}$

4.100 半径为 R 的圆轮在水平直线轨道上作纯滚动, 如已知轮心速度 \vec{v}_O 是一常量, 则轮缘上 A 点的加速度 \vec{a}_A 的方向是 ()。

- (A) \vec{a}_A 水平指前 (B) \vec{a}_A 水平指后 (C) \vec{a}_A 倾斜指 B (D) \vec{a}_A 铅垂指下



题 4.99 图



题 4.100 图

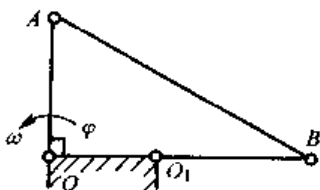
4.101 四连杆机构 $OABO_1$ 中, $OA = O_1B = \frac{1}{2}AB$, 曲柄 OA 以匀角速度 ω 转动, 当 $\varphi = 90^\circ$ 时, 曲柄 O_1B 重合于 OO_1 的延长线, 此时 AB 杆的角速度和角加速度为 ()。

- (A) $\omega_{AB} = \omega$ ↻, $\alpha_{O_1B} = (\sqrt{3} - 3)\omega^2$ ↻ (B) $\omega_{AB} = \omega$ ↺, $\alpha_{O_1B} = -(\sqrt{3} - 3)\omega^2$ ↻

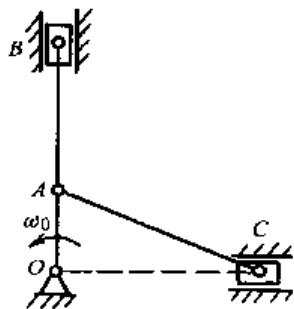
(C) $\omega_{AB} = \omega$, $\alpha_{O_1B} = (3 - \sqrt{3}) \omega^2$ (D) $\omega_{AB} = \omega$, $\alpha_{O_1B} = (3 - \sqrt{3}) \omega^2$

4.102 在图示机构中, 曲柄 OA 以匀角速度 ω_O 转动, 且 $OA = r$, 又 $AB = AC = \sqrt{5}r$ 。当曲柄 OA 与连杆 AB 位于同一铅垂线上时, $OA \perp OC$, 这时连杆 AB 的角速度为()。

(A) 0 (B) $\frac{\sqrt{5}\omega_O}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}\omega_O}{5}$ (D) ω_O



题 4.101 图



题 4.102 图

4.103 某瞬时若平面图形上各点的加速度方向都指向同一点, 则可知此瞬时平面图形的角速度 ω 和角加速度 α 为()。

(A) $\omega = 0$, $\alpha \neq 0$ (B) $\omega \neq 0$, $\alpha = 0$;
(C) $\omega = 0$, $\alpha = 0$ (D) $\omega \neq 0$, $\alpha \neq 0$ 。

4.3 动力学

动力学研究物体的运动与作用力之间的关系, 动力学中物体的抽象模型有质点和质点系。质点是具有一定质量而其几何形状和尺寸大小可以忽略不计的物体。质点系是由几个或无限个相互有联系的质点组成的系统。刚体是质点系的一种, 称为不变质点系。

4.3.1 质点运动微分方程

牛顿第二定律表述为: 质点的质量与加速度的乘积等于作用于质点上各力的矢量和, 即

$$m \vec{a} = \sum \vec{F}$$

牛顿定律适用于惯性参考系, 在绝大多数工程问题中, 可视固结于地球的参考系为惯性参考系, 一般也称惯性坐标系。

根据牛顿定律, 可导出质点的运动微分方程:

$$\text{矢量形式: } m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F} \text{ 或 } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$$

$$\text{直角坐标形式: } m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z$$

$$\text{自然形式: } m \frac{d^2 s}{dt^2} = \sum F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_n, \quad F_b = 0$$

质点运动微分方程可求解两类问题, 即动力学的两类问题:

- (1) 设已知质点的运动规律, 求质点所受的力, 这是第一类问题;
- (2) 设已知作用于质点上的力, 求质点的运动规律, 这是第二类问题。

例 4.3.1 小球重 W , 用 $\alpha = 60^\circ$ 的两绳 AC 和 BD 悬挂处于静止状态, 现将 BD 绳剪断, 剪断瞬时 AC 绳的张力为()。

- (A) $T = W$ (B) $T = 2W$ (C) $T = \frac{\sqrt{3}}{2}W$ (D) $T = \frac{1}{2}W$

解 应选 (D)。剪断 BD 绳前是静力学问题, 由剪断 BD 绳瞬时起变为动力学问题, 同时也给出此问题的初始条件: 小球的初速度 $\vec{v}_0 = 0$, 初加速度的法向分量 $a_{On} = 0$, 切向加速度 $a_{Ot} \neq 0$ 。

应用质点运动微分方程的自然形式, 可求出张力 T

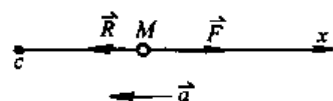
$$\frac{v^2}{\rho} = \Sigma F_n \quad T - W \cos 60^\circ = 0 \quad T = \frac{W}{2}$$

另一方程为 $ma_t = W \sin \alpha$, 可得出 $a_t = g \sin \alpha$, 这是剪断瞬时的情况, 若求剪断后的运动规律, 可取任意位置, 画受力图后列自然法运动微分方程即可求解, 请读者求解。

模拟试题

4.104 质点 M 的质量为 m , 受有二个力 \vec{F} 和 \vec{R} 的作用, 产生水平向左的加速度 \vec{a} , 它的动力学方程为 ()。

- (A) $m\vec{a} = \vec{R} - \vec{F}$ (B) $-m\vec{a} = \vec{F} - \vec{R}$
(C) $m\vec{a} = \vec{R} + \vec{F}$ (D) $-m\vec{a} = \vec{R} - \vec{F}$



题 4.104 图

4.105 如题 4.104 图所示, 质点 M 的运动微分方程为 ()。

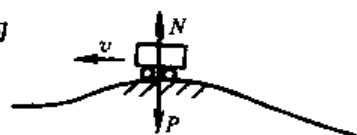
- (A) $m\ddot{x} = F - R$ (B) $-m\ddot{x} = F - R$
(C) $m\ddot{x} = R - F$ (D) $-m\ddot{x} = R - F$

4.106 重为 W 的人乘电梯铅垂上升, 当电梯加速上升、匀速上升及减速上升时, 人对地板的压力分别为 P_1 、 P_2 、 P_3 , 它们之间的关系为 ()。

- (A) $P_1 = P_2 = P_3$ (B) $P_1 > P_2 > P_3$
(C) $P_1 < P_2 < P_3$ (D) $P_1 < P_3 > P_2$

4.107 汽车重 P , 以匀速 \vec{v} 驶过拱桥, 在桥顶处曲率半径为 R , 在此处桥面给汽车的约束反力 \vec{N} 为 ()。

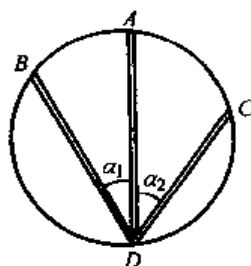
- (A) $N = P$ (B) $N = P + \frac{Pv^2}{gR}$
(C) $N = P - \frac{Pv^2}{gR}$ (D) $N = P - \frac{Pv}{gR}$



题 4.107 图

4.108 在铅直面内有一圆板刻有三道光滑细槽 AD 、 BD 、 CD , AD 槽沿铅直方向, 长为圆板直径, 现有三个质量相等的小球在重力作用下自静止开始同时自 A 、 B 、 C 三点沿槽运动, 下列四种情形中正确的是 ()。

- (A) A 球先到达 D 点 (B) B 球先到达 D 点
(C) C 球先到达 D 点 (D) 三球同时到达 D 点



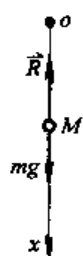
题 4.108 图

4.109 质量相等的两个质点, 在相同的力的作用下, 它们的速度和加速度是 ()。

- (A) 都相等 (B) 都不相等
(C) 速度相等, 加速度不相等
(D) 速度可能相等, 也可能不相等, 但加速度一定相等

4.110 质量为 m 的物体 M 在地面附近自由降落, 它所受的空气阻力的大小为 $R = Kv^2$, 其中 K 为阻力系数, v 为物体速度, 该物体所能达到的最大速度为 ()。

- (A) $v = \sqrt{\frac{mg}{K}}$ (B) $v = \sqrt{m_g K}$ (C) $v = \sqrt{\frac{g}{K}}$ (D) $v = \sqrt{gK}$



题 4.110 图

4.3.2 动力学基本量的计算

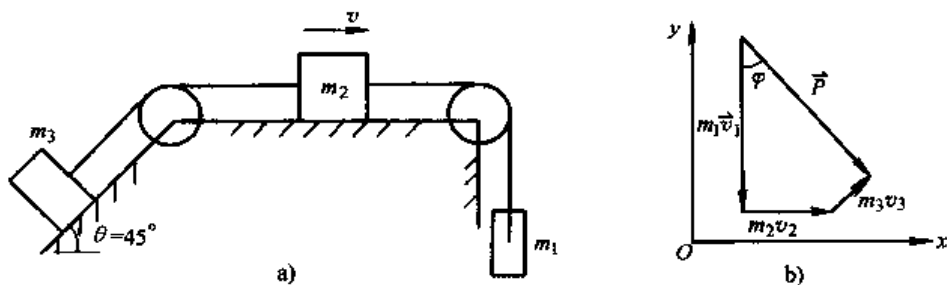
1. 动量

质点的质量与速度的乘积称为质点的动量, 以 $m\vec{v}$ 表示, 动量是矢量与速度方向一致, 动量的单位为 $\text{kg}\cdot\text{m/s}$ 。

质点系的动量定义为质点系内各质点动量的矢量和, 即

$$\vec{P} = \sum m\vec{v}$$

例 4.3.2 设三个物块用绳相连, 如图示, 其质量分别为 $m_1 = 2m_2 = 4m_3$, 求此质点系的动量。



例 4.3.2 图

解 动量 $\vec{P} = \sum m\vec{v}$, $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$, 矢量图如图 (b) 示, 将 \vec{P} 投影到 x 、 y 轴上, 有

$$P_x = m_2 v_2 + m_3 v_3 \cos 45^\circ = (2m_3 + 0.707m_3) v = 2.707m_3 v$$

$$P_y = m_3 v_3 \cos 45^\circ - m_1 v_1 = 0.707m_3 v - 4m_3 v = -3.293m_3 v$$

$$P = \sqrt{(2.707)^2 + (-3.293)^2} \times m_3 v = 4.263m_3 v$$

$$\tan \varphi = \frac{2.707}{3.293} = 0.822, \quad \varphi = 39.42^\circ$$

引入质心 C 的概念, 质心 C 的矢径为

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m\vec{r}}{M}$$

式中 M 为质点系的质量, $M = \sum m$, 对上式求导, 有

$$\frac{d}{dt} M \vec{r}_C = \frac{d}{dt} \sum m\vec{r} \quad \text{即} \quad M\vec{v}_C = \sum m\vec{v}$$

由此得到

$$\vec{P} = M\vec{v}_C$$

上式表明, 质点系的动量等于质心速度与质点系质量的乘积。

刚体是不变的质点系, 其质心是确定的点, 应用 $\vec{P} = M\vec{v}_C$ 求刚体的动量是非常方便的。

例 4.3.3 质量为 M , 长为 l 的均质细长杆置于相互垂直的水平面和铅垂面上, 如图示。

若已知 A 端的速度为 \vec{v} , 水平指向右边, 则 AB 杆在图示位置的动量为 ()。

- (A) $P_x = M \frac{v}{2}, P_y = \frac{Mv}{2}$ (B) $P_x = -\frac{Mv}{2}, P_y = -\frac{Mv}{2}$
 (C) $P_x = -\frac{Mv}{2}, P_y = \frac{Mv}{2}$ (D) $P_x = \frac{Mv}{2}, P_y = -\frac{Mv}{2}$

解 应选 (D)。 AB 杆做平面运动, 瞬心在 C' 点, 应用瞬心法, 有

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} l \omega, \quad \omega = \frac{2v}{\sqrt{2}l}$$

AB 杆质心速度 $v_C = \frac{l}{2} \omega = \frac{v}{\sqrt{2}}$, 方向沿 BA 方向, 指向 A 点。

AB 杆动量 $P = M \frac{v}{\sqrt{2}}$ 方向沿 \vec{v}_C 方向, 在 x, y 轴投影为

$$P_x = M \frac{v}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ = \frac{Mv}{2}$$

$$P_y = -M \frac{v}{\sqrt{2}} \sin 45^\circ = -\frac{Mv}{2}$$

2. 动量矩

质点的动量矩定义为质点 M 的动量 $m\vec{v}$ 对点 O 之矩, 即

$$\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$$

如图 4.3-1 (a) 所示, \vec{r} 为由 O 引向质点 M 的矢径。

对于平面问题, 有 $M_O(m\vec{v}) = mv \cdot d$

如图 (b) 所示, d 为动量臂, 与空间情形不同, 动量矩 $mv d$ 是代数量, 规定逆时针方向为正, 顺时针方向为负, 动量矩的单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 。

质点系对 O 点的动量矩定义为各质点对同一点 O 的动量矩的矢量和。即

$$\vec{L}_O = \sum \vec{M}_O(m\vec{v})$$

质点系对某轴 z 的动量矩等于各质点对同一 z 轴的动量矩的代数和, 即

$$L_z = \sum M_z(m\vec{v})$$

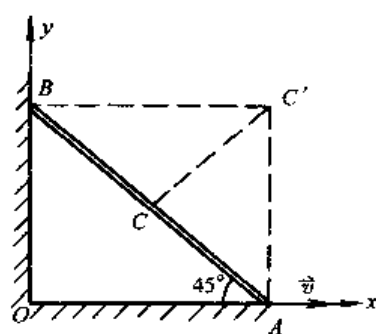
L_z 是代数量, 规定逆时针方向为正, 顺时针方向为负。

刚体绕定轴转动的动量矩的计算较简单, 也是经常需要计算的量, 如图 4.3-2 所示的定轴转动刚体, 它对转轴 z 的动量矩 L_z 为

$$L_z = \sum m_z(m\vec{v}) = \sum m v \cdot r = \sum m r^2 \omega = \omega \sum m r^2$$

令 $J_z = \sum m r^2$, J_z 为刚体对 z 轴的转动惯量, 于是有

$$L_z = J_z \omega$$



例 4.3.3 图

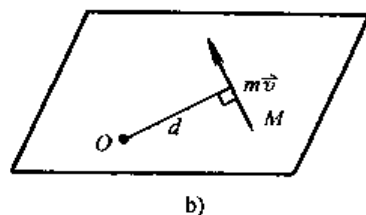
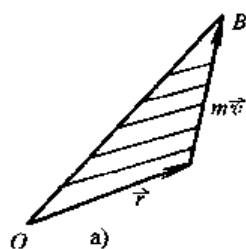


图 4.3-1

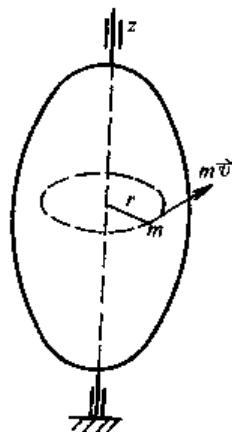


图 4.3-2

即绕定轴转动刚体对其转轴的动量矩等于刚体对转轴的转动惯量与转动角速度的乘积。

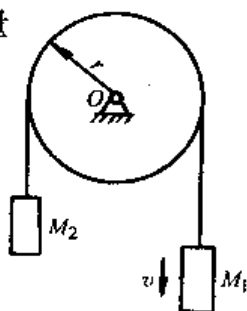
例 4.3.3 两重物 M_1 和 M_2 的质量分别为 m_1 和 m_2 ，二重物系在不计重量的软绳上，绳绕过定滑轮，滑轮半径为 r ，质量为 M ，则此滑轮系统对转轴 O 之动量矩为 ()。

(A) $L_O = (m_1 + m_2 - \frac{1}{2}M)rv$ ↘

(B) $L_O = (m_1 - m_2 - \frac{1}{2}M)rv$ ↘

(C) $L_O = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)rv$ ↘

(D) $L_O = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)rv$ ↘



例 4.3.3 图

解 应选 (C)。滑轮系统的动量矩为物体 A 和 B 及滑轮动量矩的代数和，即

$$L_O = m_1 vr + m_2 vr + J\omega$$

滑轮的转动惯量 $J_O = \frac{1}{2}Mr^2$ ，于是有

$$L_O = m_1 vr + m_2 vr + \frac{1}{2}Mr^2 \frac{v}{r} = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)rv$$

3. 转动惯量

(1) 刚体转动惯量定义：刚体内各质点的质量与质点到轴的垂直距离平方的乘积之和，即

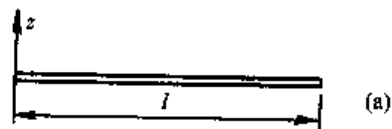
$$J_z = \sum mr^2$$

转动惯量的单位是 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

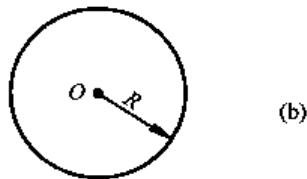
要熟记两种简单形状物体的转动惯量：均质细长杆和均质圆板的转动惯量。

均质细长杆： $J_z = \frac{1}{3}ml^2$

均质圆板： $J_O = \frac{1}{2}MR^2$



(a)



(b)

图 4.3-3

(2) 惯性半径：刚体对 z 轴的转动惯量 J_z 也可以表示为刚体的质量 M 与某个长度 ρ 的平方之和，即 $J_z = M\rho^2$ ， ρ 称为惯性半径。

(3) 平行轴定理：物体对两个平行轴的转动惯量有关系式：

$$J'_z = J_{Cz} + md^2$$

提示二点：一是二平行轴必应有一轴通过质心 C ，二是通过质心轴的转动惯量与其平行的诸轴相比转动惯量最小。

4. 动能

质点的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$ ，动能是标量，恒为正，动能的单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ ，即 J (焦耳)

质点系的动能 T 等于

$$T = \sum \frac{1}{2}mv^2$$

即质点系的动能为质点系内各质点动能的算术和。

平动刚体的动能: $T = \frac{1}{2} m v_C^2$

定轴转动刚体的动能: $T = \frac{1}{2} J_C \omega^2$

平面运动刚体的动能: $T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$

例 4.3.4 试计算例 4.3.2 和例 4.3.3 所示二系统的动能。

解 例 4.3.2 中, $T = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} m_3 v^2$
 $= \frac{1}{2} \times 4 m_3 v^2 + \frac{1}{2} \times 2 m_3 v^2 + \frac{1}{2} m_3 v^2$
 $T = \frac{7}{2} m_3 v^2$

例 4.3.3 中, $T = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2$
 $= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{4} M v^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M) v^2$

5. 力的冲量

力的冲量 \vec{s} 为

$$\vec{s} = \int_0^t \vec{F} dt$$

冲量是矢量, 它与作用力的方向一致, 冲量的单位为 $N \cdot s$, 当作用力为常力时, 冲量可表示为

$$\vec{s} = \vec{F} t$$

6. 力的功

常力的功表示为

$$W = F \cos \theta \cdot s$$

变力的功表示为

$$W = \int_0^s F \cos \theta \cdot ds$$

功的单位是 J (焦耳)。

几种常见力所做的功:

(1) 重力的功:

$$W = mg (z_{C1} - z_{C2})$$

式中 $z_{C1} - z_{C2}$ 为运动始末位置其质心的高度差

(2) 弹性力的功:

$$W = \frac{1}{2} k (\delta_1^2 - \delta_2^2)$$

式中 k 为弹簧的刚度系数, δ_1 和 δ_2 分别为始末位置弹性的变形量。

(3) 定轴转动刚体上作用力的功:

$$W = M \varphi$$

式中, M 为刚体上作用力对转轴的力矩, φ 为刚体的转角。

模拟试题

4.111 均质圆盘质量为 m , 可绕 O 轴转动, 图示瞬时角速度为 ω , 求图示位置动量 \vec{K} ()。

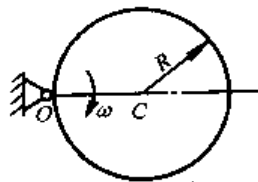
- (A) $K = mR\omega \uparrow$ (B) $K = mR\omega \downarrow$ (C) $K = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \downarrow$ (D) $K = \frac{1}{4}mR^2\omega^2 \uparrow$

4.112 质量为 m 的均质圆盘在半径为 R 的固定圆弧内只滚不滑, θ , $\ddot{\theta}$ 为 OC 线的角速度和角加速度, 则圆盘的动量 \vec{K} 为 ()。

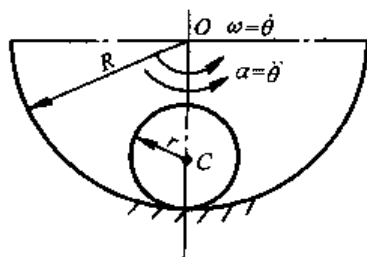
- (A) $K = mr\dot{\theta}$ $\vec{K} \perp OC \rightarrow$ (B) $K = m(R-r)\dot{\theta}$ $\vec{K} \perp OC \rightarrow$
(C) $K = m\frac{R-r}{r}\dot{\theta}$ $\vec{K} \perp OC \leftarrow$ (D) 0

4.113 图示均质圆轮, 质量为 m , 半径为 R , 由挂在绳上的重量为 W 的物块使其绕质心轴 O 转动。设重物的速度为 \vec{v} , 不计绳重, 则系统的动量的大小是 ()。

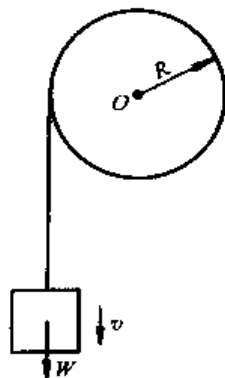
- (A) $\frac{W}{g}v$ (B) mv (C) $\frac{W}{g}v + mv$ (D) $\frac{W}{g}v - mv$



题 4.111 图



题 4.112 图



题 4.113 图

4.114 图示坦克的履带质量为 m_1 , 两个车轮质量均为 m_2 , 车轮被看做均质圆盘, 半径为 R , 设坦克前进速度为 \vec{v} , 则此系统的动量为 ()。

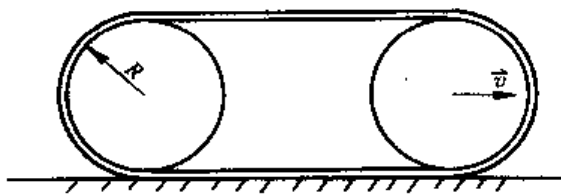
- (A) $P = (m_1 + 2m_2)v \rightarrow$ (B) $P = 2m_2v \rightarrow$
(C) $P = (2m_2 - m_1)v \rightarrow$ (D) $P = (m_1 - 2m_2)v \leftarrow$

4.115 椭圆规尺 AB 长 $2l$, 重为 $2P$, 曲柄 OC 长为 l 重为 P , 而滑块 A 和 B 重量均忽略不计, 规尺和曲柄的重心分别在其中点处, 如曲柄以匀角速度 ω 转动, 该系统的动量大小是 ()。

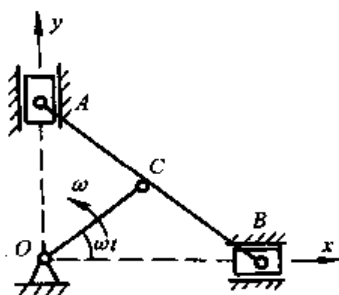
- (A) $K_x = \frac{5P}{2g}l\omega \sin\omega t, K_y = -\frac{5P}{2g}l\omega \cos\omega t$
(B) $K_x = -\frac{5P}{2g}l\omega \sin\omega t, K_y = \frac{5P}{2g}l\omega \cos\omega t$
(C) $K_x = -\frac{5P}{2g}l\omega, K_y = \frac{5P}{2g}l\omega$
(D) $K_x = \frac{5P}{2g}l\omega, K_y = -\frac{5P}{2g}l\omega$

4.116 质量为 m 的均质圆盘绕 O 轴转动, 则圆盘对 O 轴动量矩 ()。

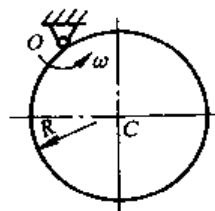
- (A) $mR^2\omega$ (B) $\frac{1}{2}mR^2\omega^2$ (C) $\frac{3}{2}mR^2\omega$ (D) $\frac{3}{4}mR^2\omega$



题 4.114 图



题 4.115 图



题 4.116 图

4.117 求题 4.113 图中的系统在该瞬时对转轴 O 的动量矩为 ()

- (A) $\frac{W}{g}Rv - \frac{1}{2}mRv$ (B) $\frac{1}{2}mRv$
(C) $\frac{W}{g}Rv + \frac{1}{2}mRv$ (D) $\frac{W}{g}Rv$

4.118 质量为 M 的大圆环绕 z 轴以匀速 ω 转动, 质量为 m 的小圆环套在大圆环上以相对速度 $v_r = u$ 按图示方向运动, 求小圆环对 z 轴的动量矩的大小 ()。

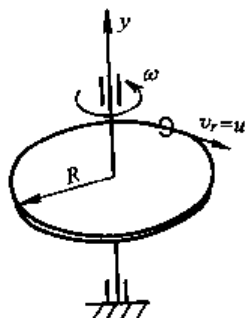
- (A) muR (B) $mR^2\omega$ (C) $m(r\omega + u)R$ (D) $m(R\omega - u)R$

4.119 各重为 P 的两物块 A 和 B 用绳连接并将此绳缠绕在均质滑轮 O 上, 如图示, 如滑轮半径为 R , 重为 Q , 角速度为 ω , 则系统对 O 轮的动量矩为 ()。

- (A) $H_0 = \frac{Q}{2g}R^2\omega$ (B) $H_0 = \frac{2P}{g}R^2\omega$
(C) $H_0 = \frac{R^2\omega}{g}(\frac{1}{2}Q + 2P)$ (D) $H_0 = \frac{R^2\omega}{g}(\frac{1}{2}Q - 2P)$

4.120 圆心角为 60° 的钢制圆弧 AB , 质量为 m , 半径为 R , 其质心 C 距圆心 O 之距 $OC = \frac{3R}{\pi}$, 求圆弧 AB 对质心 C 的转动惯量 J_C ()。

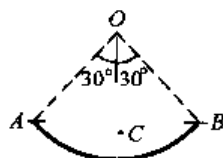
- (A) $J_C = mR^2 + \frac{9mR^2}{\pi^2}$ (B) $J_C = mR^2 - \frac{9mR^2}{\pi^2}$
(C) $J_C = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{9mR^2}{\pi^2}$ (D) $J_C = \frac{1}{2}mR^2 - \frac{9mR^2}{\pi^2}$



题 4.118 图



题 4.119 图



题 4.120 图

4.121 图示质量为 m 半径为 R 的均质半圆板, 求此板对圆心 O 的转动惯量 J_O ()。

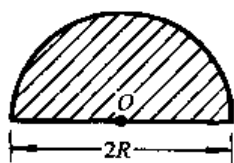
(A) $J_O = \frac{1}{4}mR^2$ (B) $J_O = \frac{1}{2}mR^2$ (C) $J_O = mR^2$ (D) $J_O = 2mR^2$

4.122 长为 a 宽为 b 质量为 m 的均质矩形薄板如图示, 薄板对相互平行的三轴 z_1 , z_2 , z_3 的转动惯量分别为 J_{z_1} , J_{z_2} , J_{z_3} , 试比较谁最大谁最小 ()。

- (A) J_{z_1} 最大, J_{z_2} 最小 (B) J_{z_2} 最大, J_{z_1} 最小
(C) J_{z_2} 最小, J_{z_3} 最大 (D) J_{z_1} 最大, J_{z_3} 最小

4.123 力 \vec{F} 作用在一沿直线运动的质点上, 此力始终与轨迹重合, 力的大小随时间而变化, $F(t)$ 如图示, 力在最初 3 s 内的冲量大小为 ()。

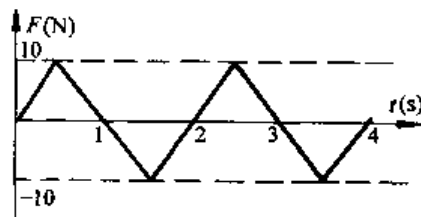
- (A) $10 \text{ N}\cdot\text{s}$ (B) $5 \text{ N}\cdot\text{s}$ (C) $15 \text{ N}\cdot\text{s}$ (D) $-10 \text{ N}\cdot\text{s}$



题 4.121 图



题 4.122 图



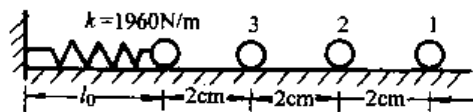
题 4.123 图

4.124 质点受弹簧力作用而运动, l_0 为弹簧自然长度, k 为弹簧刚度系数, 质点由位置 1 到位置 2 和由位置 3 到位置 2 弹簧力所做的功为 ()。

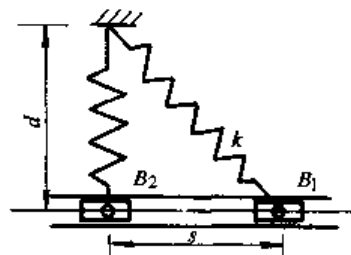
- (A) $W_{12} = -1.96 \text{ J}$ $W_{32} = 1.176 \text{ J}$ (B) $W_{12} = 1.96 \text{ J}$ $W_{32} = 1.176 \text{ J}$
(C) $W_{12} = 1.96 \text{ J}$ $W_{32} = -1.176 \text{ J}$ (D) $W_{12} = -1.196 \text{ J}$ $W_{32} = -1.176 \text{ J}$

4.125 滑块置于水平滑道内, 弹簧刚度系数 $k = 500 \text{ N/m}$, 自然长度 $l = 0.35 \text{ m}$, $d = 0.4 \text{ m}$, 将物块向右拉至 $s = 0.3 \text{ m}$ 位于 B_1 处, 然后由静止释放, 滑块由 B_1 至 B_2 处, 即 $s = 0$ 处弹力的功 ()。

- (A) $5 \text{ N}\cdot\text{m}$ (B) $-5 \text{ N}\cdot\text{m}$ (C) $5.625 \text{ N}\cdot\text{m}$ (D) $-6.25 \text{ N}\cdot\text{m}$



题 4.124 图



题 4.125 图

4.126 一均质圆盘半径为 R , 重量为 Q 可绕水平轴 O 转动, 绕在圆盘上的细绳的两端分别吊有重为 P_1 和 P_2 的重物, 系统的动能为 ()。

- (A) $T = \frac{R^2 \omega^2}{g} (Q + P_1 + P_2)$ (B) $T = \frac{1}{2} \frac{R^2 \omega^2}{g} (\frac{1}{2} Q + P_1 + P_2)$
(C) $T = \frac{1}{2} \frac{R^2 \omega^2}{g} (\frac{1}{2} Q - P_1 + P_2)$ (D) $T = \frac{1}{2} \frac{R^2 \omega^2}{g} (Q - P_1 - P_2)$

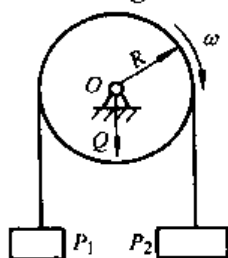
4.127 图示链条传动机构的大齿轮以角速度 ω 转动, 已知大齿轮半径为 R , 对 O_1 轴的转动惯量为 J_1 , 小齿轮半径为 r , 对 O_2 轴的转动惯量为 J_2 , 又链条质量为 m , 系统的动

能为 ()。

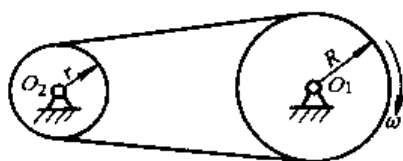
- (A) $T = \frac{1}{2} \omega (J_1 + \frac{R^2}{r^2} J_2 + mR^2)$ (B) $T = \frac{1}{2} \omega^2 (J_1 + \frac{R^2}{r^2} J_2 + mR^2)$
 (C) $T = \frac{1}{2} \omega (J_1 + \frac{R^2}{r^2} J_2)$ (D) $T = \frac{1}{2} \omega^2 (J_1 + \frac{R^2}{r^2} J_2)$

4.128 在重量为 P 的均质圆柱体的中心 O 处铰接一重量也为 P 的直杆 OA ，此直杆的另一端 A 则靠在斜面上，如图所示，今使圆柱体做纯滚动，若某瞬时 O 点速度为 \vec{v} ，则此瞬时系统的动能为 ()。

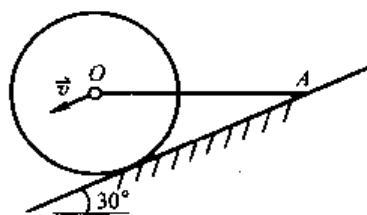
- (A) $\frac{5Pv^2}{4g}$ (B) $\frac{3Pv^2}{4g}$ (C) $\frac{Pv^2}{g}$ (D) $\frac{2Pv^2}{g}$



题 4.126 图



题 4.127 图



题 4.128 图

4.3.3 动力学普遍定理

动力学普遍定理是动量定理、动量矩定理及动能定理的统称，这三个定理从不同侧面表述了质点系运动变化与其受力间的关系。

1. 动能定理

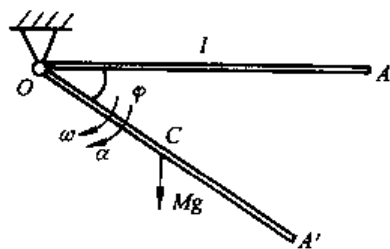
动能定理表述为：具有理想约束的质点系在某一段运动过程中，起点和终点的动能改变量等于作用于质点系的全部主动力在这段过程中所做功之和，即

$$T_2 - T_1 = \Sigma W_F$$

式中， T_1 和 T_2 分别为质点系在起点和终点的动能，而 ΣW_F 为全部主动力做功之和。应注意的是主动力中有系统的外力和内力，在一般情况下，内力做功不为零。

例 4.3.5 长为 l 、质量为 M 的均质杆 OA ，初始时位于水平位置，由静止释放，当 OA 杆转到 OA' 时，其角速度和角加速度为 ()。

- (A) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin \varphi}$, $\alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$
 (B) $\omega = \sqrt{\frac{3}{l} g \cos \varphi}$, $\alpha = \frac{3g}{2l} \sin \varphi$
 (C) $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} \sin \varphi}$, $\alpha = \frac{3g}{l} \cos \varphi$
 (D) $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} \cos \varphi}$, $\alpha = \frac{3g}{l} \sin \varphi$



例 4.3.5 图

解 应选 (A)。应用功能定理：开始时，动能 $T_0 = 0$ ，当转至与水平成 φ 角时，其动能为

$$T = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} M l^2 \omega^2$$

动能方程为

$$\frac{1}{6} M l^2 \omega^2 = M g \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$$\omega^2 = \frac{3}{l} g \sin \varphi$$

求导, 有

$$2\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{l} g \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$$

当求解质点系有关运动参量时, 例如求速度、加速度、角速度和角加速度时, 应用动能定理较为简捷, 因为主动力一般是已知的。这样就避开未知的反力可简便地求解出未知的运动参数。

2. 动量定理

动量定理表述为: 在某一时间间隔内, 质点系动量的改变量等于这段时间作用于质点系外力冲量的矢量和, 即

$$\vec{P} - \vec{P}_0 = \Sigma \vec{s}^{(e)}$$

式中 \vec{P}_0 和 \vec{P} 分别代表在某一时间间隔内, 起始和终止时的动量, 而 $\Sigma \vec{s}^{(e)}$ 代表所有外力冲量之矢量和。

如果作用于质点系的外力主矢恒为零, 则质点系动量保持不变, 即

$$\vec{P} = \text{常量}$$

这种情形称为质点系动量守恒, 若外力主矢在某一轴的投影恒为零, 则质点系动量在同一轴上投影保持不变。

3. 质心运动定理

质心运动定理表述为: 质点系的质量与质心加速度的乘积等于作用于质点系上外力的矢量和, 即

$$M \vec{a}_C = \Sigma \vec{F}^{(e)}$$

或

$$M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \Sigma \vec{F}^{(e)}, \quad M \frac{d \vec{v}_C}{dt} = \Sigma \vec{F}^{(e)}$$

质心运动定理是质点系动量定理的另一种表达形式, 它在直角坐标系上的投影式为

$$Ma_{Cx} = \Sigma F_x^{(e)}, \quad Ma_{Cy} = \Sigma F_y^{(e)}, \quad Ma_{Cz} = \Sigma F_z^{(e)}$$

或在自然轴的投影式为 $m \frac{v_C}{\rho} = \Sigma F_n^{(e)}, \quad m \frac{dv_C}{dt} = \Sigma F_\tau^{(e)}, \quad \Sigma F_b^{(e)} = \dots$

若作用于质点系上的外力主矢恒为零, 则有质心运动守恒。

例 4.3.6 试求例 4.3.5 中轴 O 的约束反力。

由例 4.3.5 中已求出杆 OA' 的 ω 和 α ,

$$\omega^2 = \frac{3}{l} g \sin \varphi, \quad \alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$$

则质心加速度为

$$a_{cn} = \frac{l}{2} \omega^2 = \frac{3}{2} g \sin \varphi, \quad a_{ct} = \frac{l}{2} \alpha = \frac{3}{4} g \cos \varphi$$

应用质心运动定理:

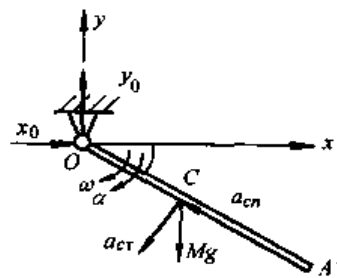


图 4.3-5

$$Ma_{cx} = \Sigma X^{(e)}, \quad M \left(\frac{-3}{2} g \sin \varphi \cos \varphi + \frac{3}{4} g \cos \varphi \sin \varphi \right) = X_O$$

$$Ma_{cy} = \Sigma Y^{(e)}, \quad M \left(\frac{3}{2} g \sin \varphi \sin \varphi - \frac{3}{4} g \cos \varphi \cos \varphi \right) = Y_O - Mg$$

于是, 得

$$X_O = -\frac{3}{4} Mg \sin \varphi \cos \varphi$$

$$Y_O = Mg + \frac{3}{2} Mg (\sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi)$$

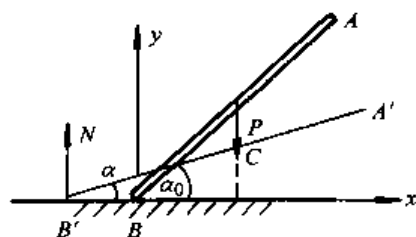
例 4.3.7 长 $2l$ 的均质杆 AB , 其一端 B 搁置在光滑水平面上, 并与水平成 α_0 角, 求当杆倒下时, A 点之轨迹方程。

解 画受力图, AB 杆作用有铅垂二力: P 和 N , 有 $\Sigma X = 0$, $Ma_{cx} = 0$, 即 $a_{cx} = 0$, 有质心运动守恒。

则 $\frac{dv_{cx}}{dt} = 0$, $v_{cx} = \text{常数}$, 由于初始时, 杆静止, $v_{cx} = 0$,

即 $\frac{dx_c}{dt} = 0$, $x_c = \text{常数}$, 就是说, 当杆倒下后, 质心的 x 坐标

不变, 质心的轨迹沿铅垂运动, 当任意瞬时, 杆 AB 位置在图示的 $A'B'$ 处



例 4.3.7 图

$$x'_A = l \cos \alpha_0 + l \cos \alpha$$

$$y'_A = 2l \sin \alpha$$

整理后, 有

$$(x'_A - l \cos \alpha_0)^2 + \left(\frac{y'_A}{2}\right)^2 = l^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

A 点轨迹为

$$(x'_A - l \cos \alpha_0)^2 + \left(\frac{y'_A}{2}\right)^2 = l^2 \quad \text{椭圆。}$$

4. 动量矩定理

动量矩定量表述为: 质点系对某固定点 O 的动量矩对时间的导数等于作用于质点系的外力对同一点的力矩矢量和, 即

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Sigma \vec{m}_O (\vec{F}^{(e)})$$

它的投影式为

$$\frac{dL_x}{dt} = \Sigma m_x (\vec{F}^{(e)}) \quad , \quad \frac{dL_y}{dt} = \Sigma m_y (\vec{F}^{(e)}) \quad , \quad \frac{dL_z}{dt} = \Sigma M (\vec{F}^{(e)})$$

当外力对于某点的力矩之和等于零时, 质点系对于该点的动量矩守恒, 同样, 当外力对某轴力矩之和等于零时, 质点系对于该轴的动量矩守恒。

例 4.3.8 试应用动量矩定理求解例 4.3.5。

应用动量矩定理: $\frac{d}{dt} J_O \omega = Mg \frac{l}{2} \cos \varphi$

$$\text{即} \quad \frac{1}{3} M l^2 \frac{d\omega}{dt} = Mg \frac{l}{2} \cos \varphi \quad \alpha = \frac{3g}{2l} \cos \varphi$$

$$\text{对 } \frac{d\omega}{dt} = \alpha \text{ 积分} \quad \omega d\omega = \frac{3g}{2l} \cos \varphi d\varphi \quad \frac{1}{2} \omega^2 = \frac{3g}{2l} \sin \varphi$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} \sin \varphi$$

5. 刚体运动微分方程

(1) 刚体平动微分方程:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \Sigma x \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \Sigma y \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \Sigma z$$

(2) 刚体绕定轴转动微分方程:

$$J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Sigma m_z (\vec{F})$$

(3) 刚体的平面运动微分方程:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \Sigma x, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \Sigma y, \quad J_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Sigma m_c (\vec{F})$$

模拟试题

4.129 均质细杆 OA 长为 l 可在铅垂平面内绕固定水平轴 O 转动, 当杆在图示铅垂位置时, 如给以杆角速度 ω 使杆恰能转到水平位置, 则 ω 应 ()。

(A) $\omega = \frac{3g}{l}$ (B) $\omega = \frac{3g}{2l}$ (C) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ (D) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$

4.130 半径为 R 质量为 m 的均质圆盘由铰支座和绳约束, 铰 O 与质心 C 位于水平, 求: (1) 剪断绳的瞬间, 圆盘的 ω_O 和 α_O ; (2) OC 转至与水平成 90° 时圆盘的 ω 和 α ()。

(A) $\omega_O = 0$ 和 $\alpha_O = \frac{4g}{3R}$, $\omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}}$ 和 $\alpha = \frac{2g}{3R}$

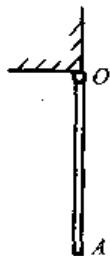
(B) $\omega_O = 0$ 和 $\alpha_O = \frac{2g}{3R}$, $\omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}}$ 和 $\epsilon = 0$

(C) $\omega_O = 0$ 和 $\alpha_O = \frac{g}{3R}$, $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ 和 $\alpha = 0$

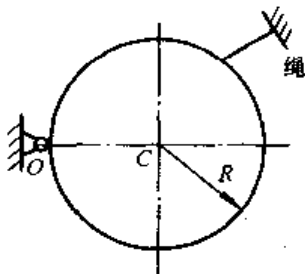
(D) $\omega_O = 0$ 和 $\alpha_O = \frac{4g}{3R}$, $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ 和 $\epsilon = \frac{2g}{3R}$

4.131 链条长为 l , 质量为 m , 展开放在光滑的桌面上, 开始时链条静止, 受到干扰后下滑, 链条离开桌面时的速度大小 ()。

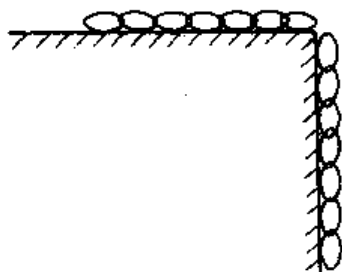
(A) $v = \sqrt{2gl}$ (B) $v = \sqrt{3gl}$ (C) $v = gl$ (D) $v = \sqrt{gl}$



题 4.129 图



题 4.130 图



题 4.131 图

4.132 质量为 m 长为 $2l$ 的均质直杆的 A 端置于光滑水平面上, 若初瞬时杆质心 C 的速度 $\dot{x}_c = 0.577 \text{ m/s}$, $\dot{y}_c = -0.816 \text{ m/s}$, 则 $t = 2 \text{ s}$ 时质心速度在 x 轴的投影应为 ()。

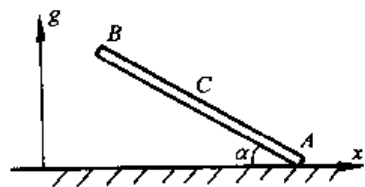
(A) 1.154 m/s (B) 0.577 m/s (C) 19.6 m/s (D) 0.288 m/s

4.133 均质圆盘重量为 G , 半径为 R , 受力偶矩为 M 的力偶作用而在铅垂图面内绕通过圆盘中心 O 的水平轴转动, 则此圆盘角加速度 α 的大小为 ()。

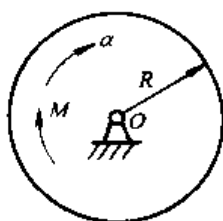
- (A) $\frac{Mg}{GR^2}$ (B) $\frac{(M+GR)}{GR^2}g$ (C) 0 (D) $\frac{2Mg}{GR^2}$

4.134 在两个半径及质量均相同的均质滑轮 A 及 B 上, 各绕以不计质量的绳如图所示, A 轮绳末端挂一重量为 P 的重物, B 轮绳末端作用一铅垂向下的力 \vec{F} , 如 $\vec{F} = \vec{P}$, 则此两轮的角加速度大小之间的关系为 ()。

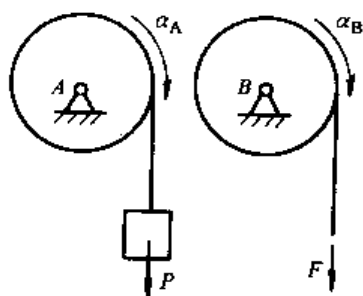
- (A) $\alpha_A = \alpha_B$ (B) $\alpha_A > \alpha_B$ (C) $\alpha_A < \alpha_B$ (D) 无法判断



题 4.132 图



题 4.133 图



题 4.134 图

4.135 质量与半径均相同的三个均质滑轮, 在绳端作用有力或挂有重物, 如图所示, 则各轮转动的角加速度 α 间的关系是下列情形中的 ()。

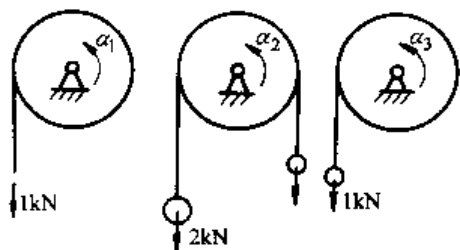
- (A) $\alpha_1 = \alpha_3 \neq \alpha_2$ (B) $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$
(C) $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$ (D) $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3$

4.136 一刚体受力系作用后做匀速直线平动, 则作用在此刚体上的力系是 ()。

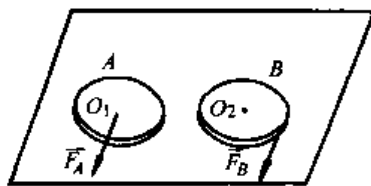
- (A) 汇交力系 (B) 平行力系
(C) 平面力系 (D) 平衡力系

4.137 两个半径和质量相同的均质圆盘 A , B 放在光滑水平面上, 分别受到 \vec{F}_A , \vec{F}_B 的作用, 如图所示, 如 $\vec{F}_A = \vec{F}_B$, 但在盘上作用的位置不同, 则此两圆盘在任一瞬时的质心加速度 \vec{a}_{O1} 和 \vec{a}_{O2} 的关系为 ()。

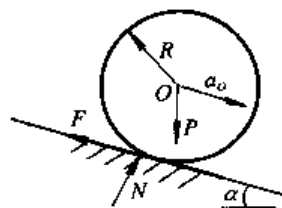
- (A) \vec{a}_{O1} 与 \vec{a}_{O2} 异向等值 (B) \vec{a}_{O1} 与 \vec{a}_{O2} 同向等值
(C) \vec{a}_{O1} 与 \vec{a}_{O2} 同向, 但 $\vec{a}_{O1} > \vec{a}_{O2}$ (D) \vec{a}_{O1} 与 \vec{a}_{O2} 同向, 但 $\vec{a}_{O1} < \vec{a}_{O2}$



题 4.135 图



题 4.137 图



题 4.138 图

4.138 均质圆柱体质量为 m , 半径为 R , 沿斜面纯滚动向下运动, 设静滑动摩擦系数为 f , 动滑动摩擦系数为 f' , 则圆柱的摩擦力是下列情形中的 ()。

- (A) $F = f'N$ (B) $F = fN$ (C) $fN \geq F \geq 0$ (D) $fN > F > 0$

4.139 如题 4.138 图所示, 求: (1) F 的大小; (2) a_O 的大小; (3) α 的大小和转向。()。

(A) $F = \frac{1}{3} mgsin\alpha$, $a_O = \frac{2}{3} gsin\alpha$, $\alpha = \frac{2g}{3R} sin\alpha$

(B) $F = \frac{2}{3} mgsin\alpha$, $a_O = \frac{1}{3} gsin\alpha$, $\alpha = \frac{4g}{3R} sin\alpha$

(C) $F = \frac{1}{3} mgsin\alpha$, $a_O = \frac{1}{3} gsin\alpha$, $\alpha = \frac{4g}{3R} sin\alpha$

(D) $F = \frac{1}{3} mgsin\alpha$, $a_O = \frac{1}{3} gsin\alpha$, $\alpha = \frac{2g}{3R} sin\alpha$

4.3.4 达朗贝尔原理

达朗贝尔原理提出研究动力学一个新的普遍方法, 将动力学问题从形式上转化为静力学问题, 再应用动静法求解。

1. 惯性力的概念

惯性力的大小等于质点的质量与其加速度的乘积, 方向与加速度的方向相反, 即

$$\vec{F}_g = -m \vec{a}$$

\vec{F}_g 表示质点的惯性力, 惯性力是一个实际存在的力, 它是当质点周围的其他物体迫使质点获得加速度时, 由于质点具有惯性而给予周围物体的反抗力, 它实际作用在质点周围的其他物体上, 虽然它并没有作用在质点上, 仍称之为质点的惯性力。

2. 刚体惯性力系的简化

刚体内每一质点都存在惯性力, 这些惯性力组成一惯性力系, 这里先研究惯性力系的简化。

(1) 刚体做平动: 设刚体做平动, 在某瞬时的加速度为 \vec{a} , 根据平动的特点, 体内各点的加速度也是 \vec{a} , 由各质点组成的惯性力系为一同向平行力系, 可以进一步合成为一通过质心 C 的合力, 即

$$\vec{F}_{gR} = -M \vec{a}_C$$

于是得出结论: 平动刚体的惯性力系可以简化为通过质心的合力, 其大小等于刚体的质量与加速度的乘积, 合力的方向与加速度方向相反。

(2) 刚体绕定轴转动: 这里讨论的刚体是具有对称平面、且转动轴垂直于对称面的情形, 将惯性力系向转动轴与对称面的交点 O 简化, 或者说, 简化中心在转动轴上, 得惯性力 F_{gR} 和惯性力偶 M_{gO} :

$$\vec{F}_{gR} = -M \vec{a}_c = -M (\vec{a}_{cr} + \vec{a}_{cn})$$

$$M_{gO} = -J_z \alpha$$

可以得出结论: 刚体绕定轴转动时, 惯性力系向转轴简化得一惯性力和惯性力偶。这个惯性力等于刚体的质量与质心加速度的乘积, 方向与质心加速度方向相反, 作用线通过转

轴；这个惯性力偶的力偶矩等于刚体对转轴 z 的转动惯量与角加速度的乘积，转向与角加速度相反。

以上结论是对简化中心在转轴而言的。若简化中心选取在质心上，则惯性力和惯性力偶为：

$$\begin{aligned}\vec{F}_{gR} &= -M \vec{a}_c \\ M_{gc} &= -J_c \alpha\end{aligned}$$

(3) 刚体平面运动：这里只讨论刚体有对称平面，且对称面平行于此平面运动情形，惯性力系向质心 c 简化，得一惯性力 \vec{F}_{gR} 和惯性力偶 M_{gc} ：

$$\begin{aligned}\vec{F}_{gR} &= -M \vec{a}_c \\ M_{gc} &= -J_c \alpha\end{aligned}$$

可以结论为：刚体平面运动时，惯性力系可以简化为一惯性力和一惯性力偶，这个惯性力通过质心，大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积，其方向与加速度方向相反；这个惯性力偶的力偶矩等于刚体对质心的转动惯量与角加速度的乘积，其转向与角加速度的转向相反。

3. 达朗贝尔原理

质点达朗贝尔原理：在质点运动的每一瞬时，如果在质点上假想地加上惯性力，则作用于质点上的主动力、约束反力及虚加在质点上的惯性力在形式上组成一平衡力系，即

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

依据达朗贝尔原理，应用静力学中列写平衡方程的方法去求解动力学问题，这种方法称为动静法。

质点系达朗贝尔原理：质点系中每个质点上真实作用的主动力、约束反力和虚加在质点上的惯性力形式上组成平衡力系。

质点系上所有的主动力，约束反力和虚加的惯性力是个空间力系，如果将主动力与约束反力按内力和外力分类，则有整个质点系的全部外力、内力和虚加在各质点上的惯性力组成平衡力系，由于内力是成对的存在，所以，这个形式上平衡力系的平衡条件应为：

$$\sum \vec{F}^{(e)} + \sum \vec{F}_g = \vec{0}$$

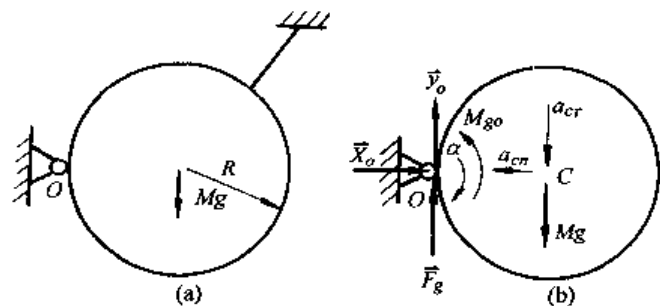
$$\sum m_O (\vec{F}^{(e)}) + \sum m_O (\vec{F}_g) = \vec{0}$$

例 4.3.9 一半径为 R ，质量为 M 的圆盘静止在图示位置，求剪断绳的瞬时轴 O 的约束反力 (C)

- (A) $X_O = 0, Y_O = \frac{2}{3} mg$;
- (B) $X_O = 0, Y_O = Mg$;
- (C) $X_O = 0, Y_O = \frac{1}{3} Mg$;
- (D) $X_O = 0, Y_O = -\frac{1}{3} Mg$ 。

解 剪断绳的瞬时，质心加速度 $a_{cn} = 0$,

$$a_{cr} = R\alpha$$



例 4.3.9 图

转动刚体的惯性力为: $F_g = ma_{cr} = MR\alpha$, 方向与 \vec{a}_{cr} 反向。

转动刚体的惯性力偶矩: $M_{go} = (\frac{1}{2}MR^2 + MR^2)\alpha = \frac{3}{2}MR^2\alpha$

将惯性力和惯性力偶虚加在刚体上, 应该注意的是惯性力 \vec{F}_g 的作用线应通过转轴, 或者说, 惯性力 \vec{F}_g 作用转轴 O 上, 如图 (b) 示, 应用平衡条件:

$$\Sigma m_o = 0, \quad M_{go} - MgR = 0, \quad \frac{3}{2}MR^2\alpha = mgR, \quad \alpha = \frac{2g}{3R}$$

$$\Sigma X = 0, \quad X_o = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad Y_o - Mg + F_g = 0, \quad Y_o = Mg - MR\alpha = \frac{1}{3}Mg$$

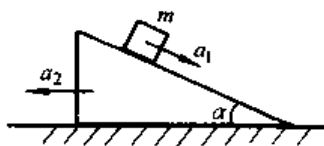
模拟试题

4.140 质量为 m 的物块沿三棱柱以加速度 \vec{a}_1 沿斜面下滑, 三棱柱又以 \vec{a}_2 沿水平面向左运动, 则物块的惯性力为 ()。

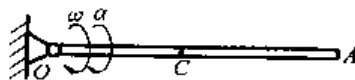
- (A) $-m\vec{a}_1$ (B) $-m\vec{a}_2$ (C) $-m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$ (D) $-m(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)$

4.141 如图所示, 均质杆 OA 长为 l , 质量为 m , 以角速度 ω 及角加速度 α 绕 O 轴转动, 则惯性力系的简化结果为 ()。

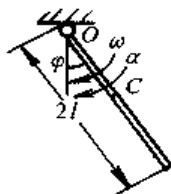
- (A) $\vec{R}_g = -m\vec{a}_c$ (作用于 O), $M_{go} = \frac{-1}{12}ml^2\alpha$
 (B) $\vec{R}_g = -m\vec{a}_c$ (作用于 O), $M_{go} = \frac{1}{3}ml^2\alpha$
 (C) $\vec{R}_g = -m\vec{a}_c$ (作用于质心), $M_{go} = \frac{-m}{3}l^2\alpha$
 (D) $\vec{R}_g = -m\vec{a}_c$ (作用于质心), $M_{go} = \frac{-1}{24}ml^2\alpha$



题 4.140 图

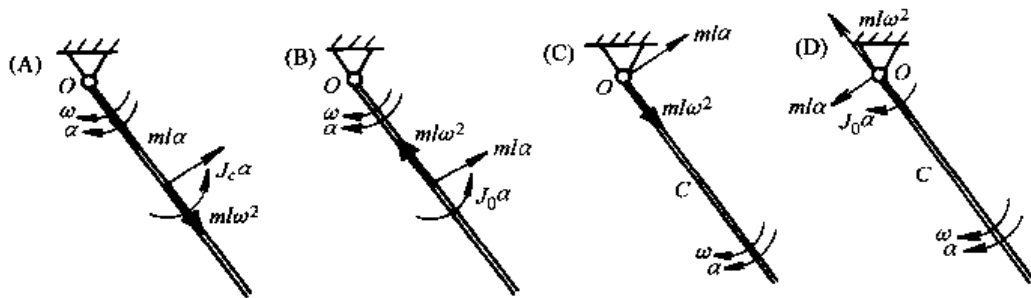


题 4.141 图



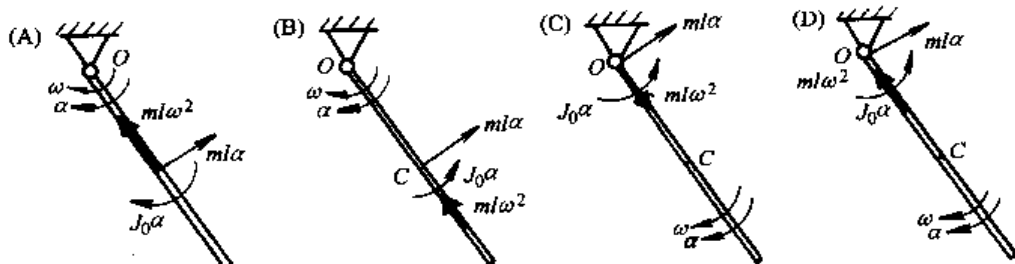
题 4.142 图

4.142 绕 O 轴转动的均质杆 OA , 质量为 m , c 为质心, 惯性力系由下列四个图中表出, 正确的是 ()。



题 4.142 图

4.143 如题 4.142 图所示, 下列四图表示出的惯性力系正确的是 ()。



题 4.143 图

4.144 均质圆轮重 P , 安装在水平转轴中点, 转轴垂直于圆轮对称平面, 若安装时偏心距为 e , 当轮心 C 运动到最低位置时, A, B 轴承反力为 ()。

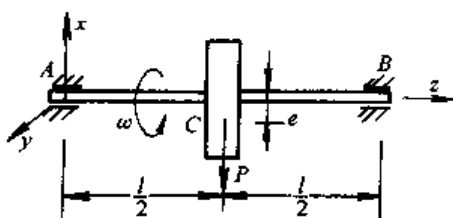
- (A) $Y_A = Y_B = 0$ $X_A = X_B = \frac{P}{2} (1 - \frac{e\omega^2}{g})$
 (B) $Y_A = Y_B = 0$, $X_A = X_B = \frac{P}{2} (1 + \frac{e\omega^2}{g})$
 (C) $Y_A = Y_B = 0$ $X_A = X_B = \frac{P}{2}$
 (D) $Y_A = Y_B = 0$, $X_A = X_B = \frac{P}{2g} e\omega^2$

4.145 均质细直杆 OA 的质量为 m , 长为 l , 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动如图所示, 此时将 OA 杆的惯性力系向 O 点简化, 其惯性力主矢 \vec{R}' 和惯性力主矩 M'_O 的数值分别为 ()。

- (A) $R' = 0$ $M'_O = 0$ (B) $R' = \frac{1}{2} ml\omega^2$, $M'_O = \frac{1}{3} ml^2\omega^2$
 (C) $R' = ml\omega^2$, $M'_O = \frac{1}{2} ml^2\omega^2$ (D) $R' = \frac{1}{2} ml\omega^2$, $M'_O = 0$

4.146 质量为 m , 半径为 R 的均质圆轮绕垂直于图面的水平轴 O 转动, 其角速度为 ω 。在图示瞬时, 轮心 C 在最低位置, 这时轴承 O 施加于轮的附加动反力 N'_O 为 ()。

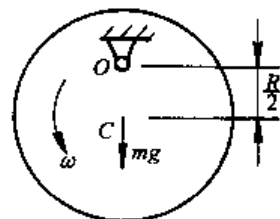
- (A) $N'_O = \frac{mR\omega}{2} \uparrow$ (B) $N'_O = \frac{mR\omega}{2} \downarrow$ (C) $N'_O = \frac{mR\omega^2}{2} \uparrow$ (D) $N'_O = mR\omega^2 \uparrow$



题 4.144 图



题 4.145 图



题 4.146 图

4.3.5 虚位移原理

虚位移原理是应用功的概念分析系统的平衡问题, 是研究静力学平衡问题的解析方法。

1. 虚位移概念

虚位移定义: 在某瞬时, 质点系为约束所容许的任何无限小的位移, 虚位移也称可能位移, 一般用 δx 、 δs 或 $\delta \vec{r}$ 表示。例如, 图 4.3-4 所示的曲柄连杆机构中, 图 (a) 和图

(b) 示出的都是 A 和 B 的虚位移。

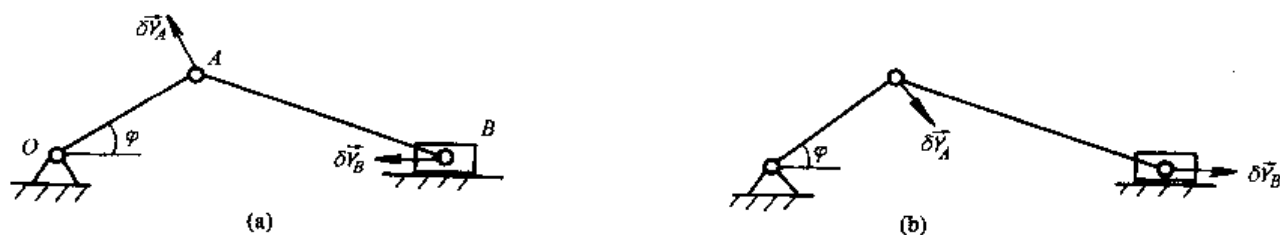


图 4.3-4

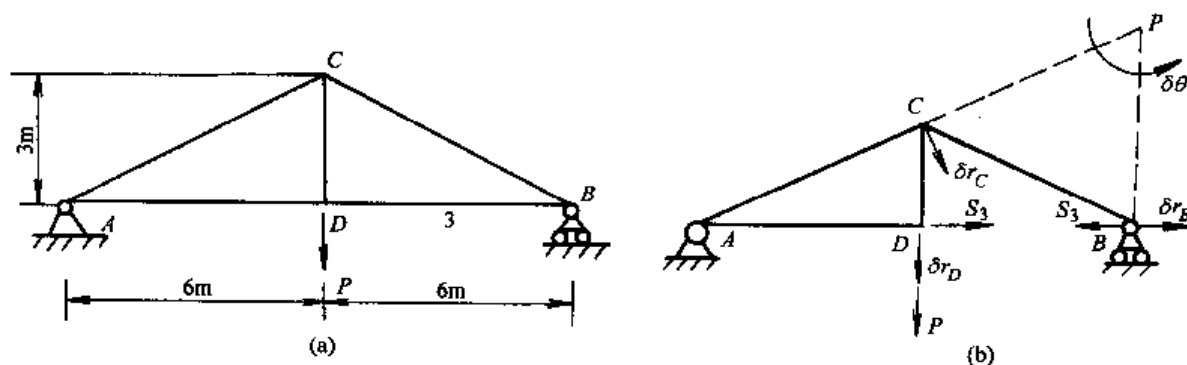
虚位移与实位移是两个不同的概念，实位移是在一定的力作用下，满足给定的起始条件，在一定的时间间隔中，朝着一定的方向所产生真实的位移。对于微小的实位移可表示为 $d\vec{r} = \dot{\vec{r}} dt$ 。而虚位移是一个用来反映约束在给定瞬时的性质的几何概念，它只是在给定瞬时，为约束所允许的、任何无限小的位移，与时间、作用力和起始条件无关。实位移有确定的方向，而虚位移可能有多个甚至无限多个不同的方向。当然，对于定常约束，若实位移是微小的，它也属于虚位移中的一个。

虚功也是常遇到的一个概念。虚功是指力 \vec{F} 在质点的虚位移 $\delta\vec{r}$ 上所做的功，用 δW 表示。虚功也是一个假想的概念，不能引起动能的改变。

2. 虚位移原理

对于具有理想约束的质点系，其平衡条件是：作用于质点系的主动力在任何虚位移中所做虚功的和等于零。这就是虚位移原理，也称虚功原理。

例 4.3.10 图示桁架中，已知 $AD = DB = 6\text{ m}$ ， $CD = 3\text{ m}$ ，节点 D 处载荷为 P ，试应用虚位移原理求杆 3 的内力。



例 4.3.10 图

解 解除杆 3，画出其力 S_3 。给出系统的虚位移： $\triangle ACD$ 可绕轴 O 转动 $\delta\varphi$ ，点 C 和 D 有虚位移 δr_C 和 δr_D ，杆 CB 可作平面运动，瞬心在 P，CB 杆可绕瞬心有微小转角 $\delta\theta$ ，B 点的虚位移为 δr_B ，虚功方程：

$$P\delta r_D - S_3\delta r_B = 0$$

建立虚位移间的几何关系： $\frac{\delta r_D}{\delta r_C} = \frac{6}{3\sqrt{3}}$ ， $\frac{\delta r_B}{\delta r_C} = \frac{6}{3\sqrt{3}}$ ，有 $\delta r_D = \delta r_B$

代入虚功方程中，有 $S_3 = P$ （拉力）

模拟试题

4.147 图示一物体系统, 若给出 C 点的虚位移, 试求均布载荷的虚功 ()。

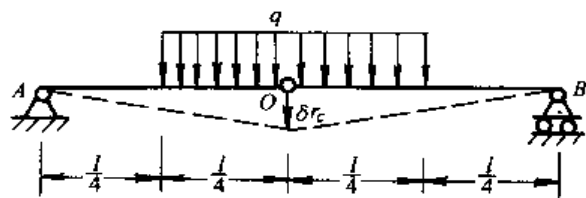
- (A) $\frac{1}{2} ql \delta r_C$ (B) $\frac{3}{8} ql \delta r_C$ (C) $\frac{3}{4} ql \delta r_C$ (D) $2 ql \delta r_C$

4.148 以 \vec{F} 表示主动力, \vec{N} 表示约束反力, $\delta \vec{r}$ 表示虚位移, 则理想约束条件可用公式表示为 ()

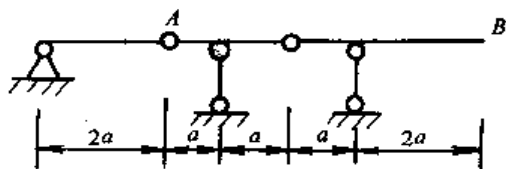
- (A) $\sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = 0$ (B) $\sum \vec{N} \cdot \delta \vec{r} = 0$
(C) $\sum F \cdot \delta r = 0$ (D) $\sum N \cdot \delta r = 0$

4.149 在如图所示系统中, A、B 两点的虚位移之比为 ()。

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

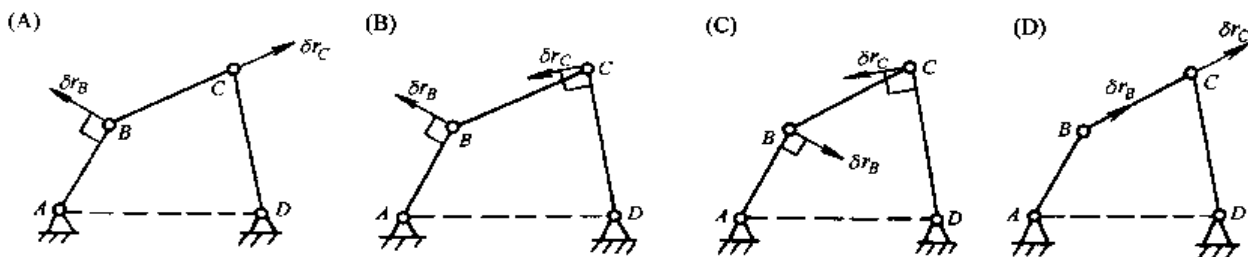


题 4.147 图



题 4.149 图

4.150 图示一四连杆系统, 图给出 B 点和 C 点虚位移 δr_B 和 δr_C 的四种情形, 其中正确的是 ()。



4.151 图示结构中 C 点和 B 点的虚位移 δr_C 和 δr_B 的关系式为 ()。

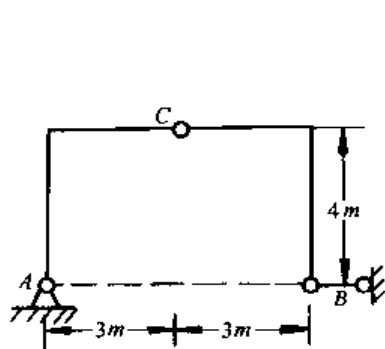
- (A) $\frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{6}{5}$ (B) $\frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{5}{6}$ (C) $\frac{\delta r_C}{\delta r_B} = 1$ (D) $\frac{\delta r_C}{\delta r_B} = \frac{3}{4}$

4.152 图示的构架平衡时各力作用点 A, B, C 的虚位移 δr_A 、 δr_B 、 δr_C 的大小关系为 ()。

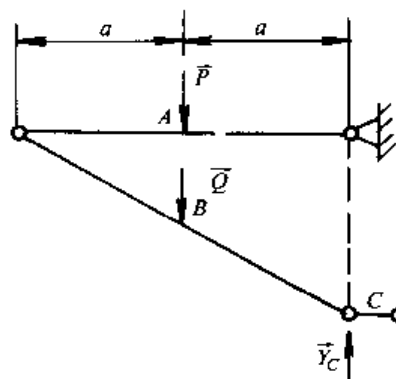
- (A) $\delta r_A = \delta r_B = \delta r_C$ (B) $\delta r_A = \delta r_B = \frac{\delta r_C}{2}$
(C) $2\delta r_A = \delta r_B = \delta r_C$ (D) $\delta r_A = \delta r_B, \delta r_C = 0$

4.153 图示机构在 M 和 P 作用下处于平衡, 若给 AC 杆 C 点以虚位移 $\delta \vec{r}_C$, 则可知 B 点虚位移 δr_B 大小为 ()。

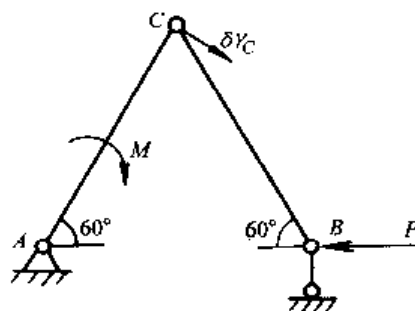
- (A) $\sqrt{3} \delta r_C$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2} \delta r_C$ (C) $\frac{1}{2} \delta r_C$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}} \delta r_C$



题 4.151 图



题 4.152 图



题 4.153 图

4.3.6 单自由度系统的振动

1. 仅受恢复力作用而产生的振动称为自由振动

对于质量—弹簧系统，如图 4.3.5 所示，其运动微分方程为

$$\ddot{x} + p^2 x = 0$$

运动方程为

$$x = A \sin(pt + \alpha)$$

其中 $p^2 = \frac{k}{m}$ 。积分常数 A 称为振幅， α 称为初位相，有

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{p^2}}, \quad \alpha = \arctan \frac{px_0}{v_0}$$

其中 x_0, v_0 为起始条件。

自由振动的周期 $T = \frac{2\pi}{p}$ ；频率 $f = \frac{1}{T}$ ，圆频率 $p = 2\pi f$

结论：①自由振动是简谐运动；②自由振动只决定于系统的物理参数：质量 m 和刚性系数 k ，与运动的初始条件无关；③自由振动的振幅和初位相 α 由运动初始条件 x_0, v_0 来决定。

频率和周期是自由振动的两个重要参数，可用以下几种方法求解：

(1) 列写振动的微分方程，并化为标准形式： $\ddot{x} + p^2 x = 0$ ，即可求解频率值，列写振动微分方程可应用质点系动力学普遍定理。

(2) 若系统具有一个弹簧系统，则可应用静平衡方法将并联弹簧和串联弹簧化解为一个等效弹簧，应用 $p = \frac{1}{T}$ 公式求解。

对刚度系数为 k_1 和 k_2 的并联弹簧，等效刚度系数 $K = k_1 + k_2$

对刚度系数为 k_1 和 k_2 的串联弹簧，等效刚度系数 $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

(3) 若已知或可求出静变形 δ_{st} ， $p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{P/\delta_{st}}{P/g}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$ ，将 δ_{st} 代入即可求解。

2. 强迫振动

在外加激振力作用下的振动称为强迫振动。这里只讨论简谐激振力，简谐激振力为

$$F = H \sin(\omega t + \varphi)$$

H 为激振力的力幅， ω 为其圆频率， φ 是初位相。

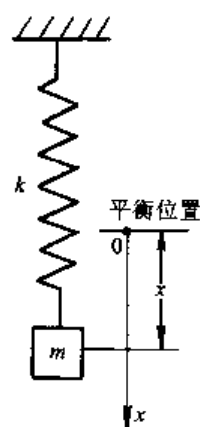


图 4.3-5

强迫振动微分方程为

$$\ddot{x} + p^2 x = h \sin(\omega t + \varphi)$$

运动方程为

$$x = A \sin(pt + \alpha) + B \sin(\omega t + \varphi)$$

强迫振动为

$$B \sin(\omega t + \varphi)$$

B 为强迫振动的振幅

$$B = \frac{h}{p^2 - \omega^2}$$

结论：①强迫振动的频率与干扰力的频率相同，与系统的固有频率无关；②强迫振动是一个等幅的简谐振动；③当 $p = \omega$ 时，即激励力频率等于系统的固有频率时，振幅 B 在理论上应趋向无穷大，这种现象称为共振。

模拟习题

4.154 质量—弹簧系统做自由振动，下列叙述正确的是 ()。

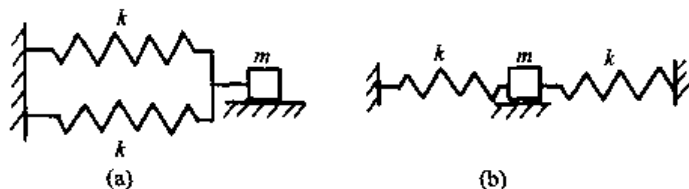
- (A) 周期和振幅与初始条件有关
- (B) 周期和振幅与初始条件无关
- (C) 周期与初始条件有关，振幅与初始条件无关
- (D) 周期与初始条件无关，振幅与初始条件有关

4.155 图示 (a)、(b) 给出两个质量—弹簧系统，其振动的周期 ()。

- (A) $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$
- (B) $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$, $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$
- (C) $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$
- (D) $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$, $T_b = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$

4.156 图示质量—弹簧系统中， m 为质量， k 为弹簧刚度。该系统的固有频率为 ()。

- (A) $\sqrt{\frac{2k}{m}}$
- (B) $\sqrt{\frac{k}{m}}$
- (C) $\sqrt{\frac{k}{2m}}$
- (D) $\sqrt{\frac{m}{2k}}$



题 4.155 图

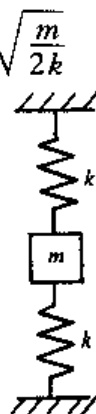


图 4.156 图

4.157 质量—弹簧系统的振子质量为 m ，弹簧系数为 k ，若将此弹簧剪短一半后，再和原来的振子组成新系统，求此新系统的固有频率 ()。

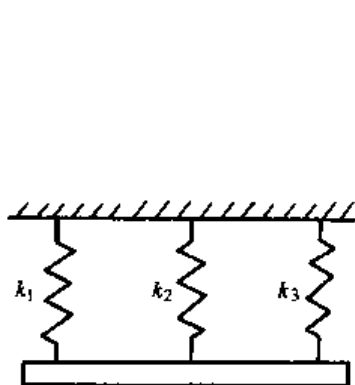
- (A) $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$
- (B) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- (C) $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
- (D) $\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}}$

4.158 如图所示三弹簧并联，若刚度系数 $K_1 = K_2 = K_3$ ，则系统的刚度系数 K 为 ()。

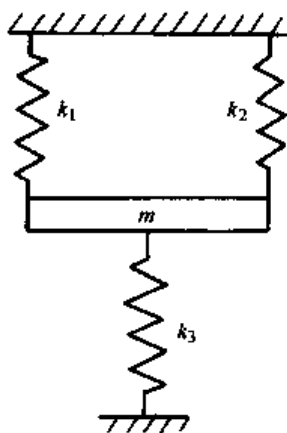
- (A) $3K_1$ (B) $\frac{1}{3}K_1$ (C) $\frac{1}{6}K_1$ (D) $6K_1$

4.159 已知图中所示的三根弹簧的刚性系数分别为 K_1, K_2, K_3 ，振体的质量为 m ，则此系统沿铅垂方向振动的固有频率为 ()

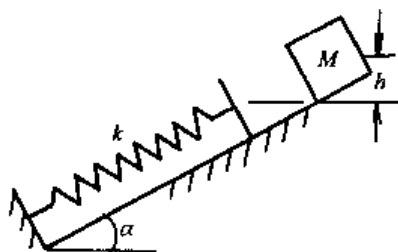
- (A) $\sqrt{\frac{K_1 + K_2 + K_3}{m}}$ (B) $\sqrt{\frac{(K_1 + K_2) K_3}{m (K_1 + K_2 + K_3)}}$
(C) $\sqrt{\frac{(K_1 + K_3) K_2}{m (K_1 + K_2 + K_3)}}$ (D) $\sqrt{\frac{(K_2 + K_3) K_1}{m (K_1 + K_2 + K_3)}}$



题 4.158 图



题 4.159 图

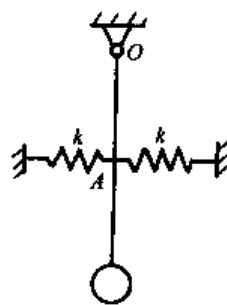


题 4.160 图

4.160 小车 M 重为 P 在斜面上自高度 h 处滑下与缓冲器相撞，斜面倾角为 α ，缓冲器弹簧刚度系数为 k ，如缓冲器质量不计，斜面摩擦不计，小车碰撞后系统的自由振动周期为 ()。

- (A) $T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gk}} \sin\alpha$ (B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{P \sin\alpha}{gh}}$
(C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gk \sin\alpha}}$ (D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gk}}$

4.161 小球重为 P ，刚性接于杆的一端，杆的另一端铰接于 O 点，杆长 l ，在其中点 A 的两边各连接一弹性系数为 k 的弹簧，如图示，



题 4.161 图

如杆和弹簧质量不计，小球可视为质点，则系统做微摆动时的运动微分方程是 ()。

- (A) $\frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi} = (Pl - \frac{1}{2} l^2 k) \varphi$ (B) $\frac{P}{g} l \ddot{\varphi} = (-Pl + \frac{1}{2} l^2 k) \varphi$
(C) $\frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi} = (Pl - \frac{1}{2} lk) \varphi$ (D) $\frac{P}{g} l \ddot{\varphi} = -(Pl + \frac{1}{2} l^2 k) \varphi$

4.163 已知单自由度系统的振动固有频率 $\omega_n = 2$ ，若在其上分别作用幅值相同而频率分别为 $\omega_1 = 1$ ， $\omega_2 = 2$ ， $\omega_3 = 3$ 的简谐干扰力，则下列哪种情况表明此系统做强迫振动的振幅? ()。

- (A) $\omega_1 = 1$ 时振幅最大， ω_2 时最小 (B) $\omega_2 = 2$ 时振幅最大， ω_3 时最小
(C) $\omega_2 = 2$ 时振幅最大， ω_1 时最小 (D) $\omega_3 = 3$ 时振幅最大， ω_2 时最小

5 材料力学

5.1 绪论

5.1.1 基本概念

1. 材料力学的任务

在构件能安全工作的条件下,以最经济的代价,为构件确定合理的形状和尺寸,选择适当的材料,为构件的设计提供必要的理论基础和计算方法。

构件安全工作的条件有以下三条:

(1) 具有必要的强度,指构件抵抗破坏的能力。构件在外力作用下不会发生意外的断裂或显著变形。

(2) 具有必要的刚度,指构件抵抗弹性变形的能力。构件在规定的使用条件下不会产生过分的变形。

(3) 具有必要的稳定性,指构件保持原始平衡构形的能力。构件在规定的使用条件下,不会发生失稳现象。

2. 材料力学的研究对象

材料力学主要研究对象是构件中的杆以及由若干杆组成的简单杆系等。

杆件的形状与尺寸由其轴线和横截面确定。轴线通过横截面的形心,横截面与轴线正交。

根据轴线与横截面的特征,杆件可分为直杆与曲杆,等截面杆与变截面杆。

3. 基本假设

(1) 均匀、连续假设:构件内任意一点的材料力学性能与该点位置无关,且毫无空隙地充满构件所占据的空间。

(2) 各向同性假设:构件材料的力学性能没有方向性。

(3) 小变形假设:本课主要研究弹性范围内的小变形。小变形假设可使问题得到如下的简化:①忽略构件变形对结构整体形状及荷载的影响;②构件的复杂变形可处理为若干基本变形的叠加。

4. 内力及应力

内力:在外力作用下构件发生变形,构件内部相邻各质点间沿力作用方向的相对位置发生变化,同时构件各质点之间产生附加内力(简称内力),其作用是力图使各质点恢复其原始位置。

求内力的方法——截面法:截面法是材料力学研究内力的一个基本方法,其步骤如下。

①截开:在需求内力的截面处,将构件假想截分为两部分;②代替:任取一部分为研究对象,弃去另一部分,并以内力代替弃去部分对留下部分的作用;③平衡:对留下部分建立平衡方程,求出该截面的内力。

应力：截面内一点处内力的分布集度。单位是： N/m^2 (Pa)、 N/mm^2 (MPa) 等。应力可分为正应力 σ 和切应力 τ (剪应力)。

$$\text{正应力} \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad (\text{垂直于作用截面})$$

$$\text{切应力} \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad (\text{平行作用截面})$$

式中 ΔN 、 ΔQ 分别是微面积 ΔA 上的垂直和平行于微面的内力分量。

5. 位移、变形及应变

位移：构件内任一点由其原来位置到新位置的连线称为该点的线位移。构件内某一线段 (或平面) 由原始位置所转过的角度称为该线段 (或平面) 的角位移。

变形：构件形状的改变。

应变：构件内任一点处的变形程度。应变又可分为线应变 ϵ 和切应变 γ ，均为无量纲量。

线应变 ϵ 表示变形前构件内任一点处的一条微线段，变形后的长度改变量与其原始长度之比。切应变 γ 表示过构件内任一点的两个互相垂直的微线段，变形后两个微线段的角度改变量。

6. 构件的基本变形

杆件受外力作用后发生的变形是多种多样的，但最基本的变形是以下四种：拉伸 (或压缩)、剪切、扭转和弯曲。其他一些复杂的变形都可以由以上四种变形组合而成。

5.2 轴向拉伸与压缩

5.2.1 基本概念和主要公式

1. 轴向拉伸与压缩的概念

受力特征：作用于直杆两端的外力或其合力的大小相等、指向相反，作用线沿杆件轴线。

变形特征：杆件主要产生轴向伸长 (或缩短) (如图 5.2-1 所示)。



图 5.2-1

2. 横截面上的内力及应力

内力：拉压杆横截面上的内力，其作用线与杆轴线重合，称为轴力，用 N 表示。轴力 N 的正负号规定：拉力为正，压力为负。

轴力图：表示沿杆件轴线各横截面上轴力变化规律的图线。轴力图以平行于杆轴线的 x 轴为横坐标，表示横截面位置，以 N 轴为纵坐标，表示横截面上的轴力值。

横截面上的应力：

平面假设：直杆在轴向拉伸 (或压缩) 时，变形后的横截面仍保持为平面。

根据平面假设和圣维南原理，在离加力点一定距离之外，横截面上各点的纵向变形是均匀的，内力分布也是均匀的，并且垂直于横截面。设横截面积为 A ，则有拉伸 (或压缩) 正应力：

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (5.2-1)$$

当构件上因有切口、开槽、螺纹等,使局部截面尺寸急剧改变,在截面尺寸急剧改变处应力分布不再均匀,发生应力局部增大现象,此现象称为应力集中。

3. 强度条件

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma] \quad (5.2-2)$$

式中 $[\sigma]$ 为许可应力。利用强度条件,可解决以下三类问题:

(1) 校核强度。

(2) 选择截面尺寸

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$$

(3) 确定许可荷载

$$[N] \leq [\sigma] A$$

4. 斜截面上的应力

图 5.2-2 的 $k-k$ 斜截面的法线与 x 轴夹角为 α , 则该面上的正应力和切应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= p_{\alpha} \cdot \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} &= p_{\alpha} \cdot \sin \alpha = (\sigma/2) \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.2-3)$$

角 α 以逆时针为正, 反之为负。

5. 拉压变形与胡克定律

纵向变形的胡克定律:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (5.2-4)$$

在比例极限内, 杆的纵向变形 Δl 与轴力 N 、杆长 l 成正比, 与乘积 EA 成反比。乘积 EA 称为杆的抗拉压刚度, 其中 E 为材料的弹性模量。变形的正负号以伸长为正, 缩短为负。

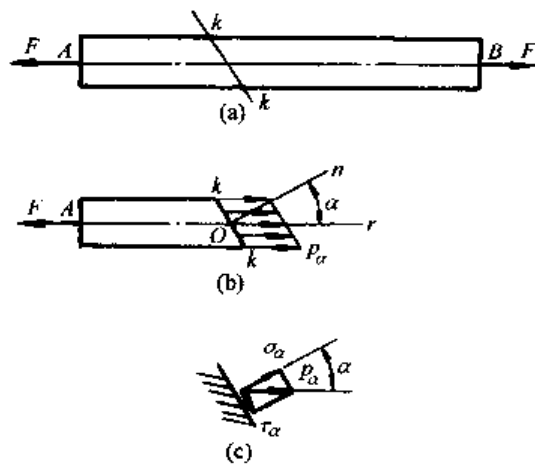


图 5.2-2

纵向线应变:

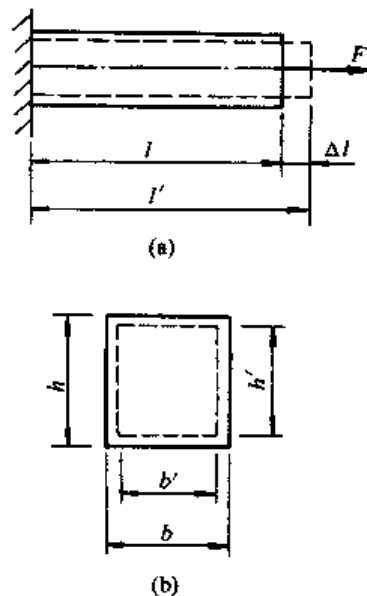


图 5.2-3

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (5.2-5)$$

用应力、应变表示的胡克定律：

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (5.2-6)$$

上式表明，在比例极限内线应变与正应力成正比。

横向线应变：

$$\epsilon' = \frac{b_1 - b}{b} = -\nu \epsilon \quad (5.2-7)$$

泊松比（横向变形系数） ν ：

$$\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| = -\frac{\epsilon'}{\epsilon}$$

材料的弹性模量 E 、泊松比 ν 与切变模量 G 之间存在如下关系：

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.2-8)$$

6. 简单拉压超静定（静不定）问题

结构未知力的个数多于静力平衡方程个数时，只用静力平衡条件将不能求解全部未知力，这类问题称为超静定问题，未知力个数与静力平衡方程数之差称为超静定的次数（或阶数）。

解决超静定问题的关键是找出补充方程——首先根据结构各部分变形协调条件建立变形几何方程，再利用力与变形之间的物理关系将变形几何方程改写成用力表示的补充方程，将补充方程与静力平衡方程联立求解，即可得出全部未知力。

7. 轴向拉压应变能

杆件在外力作用下发生变形，同时在杆内贮存的能量称为应变能。用 W 表示外力功，用 U 表示应变能。在线弹性范围内，杆内应变能等于外力功，则轴向拉压应变能为

$$U = W = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{\Delta l^2 EA}{2l} \quad (5.2-9)$$

比能（应变能密度）：单位体积内的应变能，用 u 表示。轴向拉压杆的弹性比能：

$$u = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E \epsilon^2}{2} \quad (5.2-10)$$

8. 材料拉压时的力学性能

图 5.2-4 为低碳钢拉伸应力-应变曲线。

由低碳钢的 $\sigma-\epsilon$ 曲线可看出，整个拉伸过程可分为以下四个阶段：

(1) 弹性阶段 OA 。 A' 点的应力 σ_p 称为比例极限， A 点的应力 σ_e 称为弹性极限。

(2) 屈服阶段 $B'C$ 。 B 点应力 σ_s 称为屈服极限。

(3) 强化阶段 CD 。在此阶段卸载内卸载会出现“冷作硬化”现象。

(4) 局部变形阶段 DE 。 D 点过后，试件出现“颈缩”现象。到达 E 点试件断裂。 D

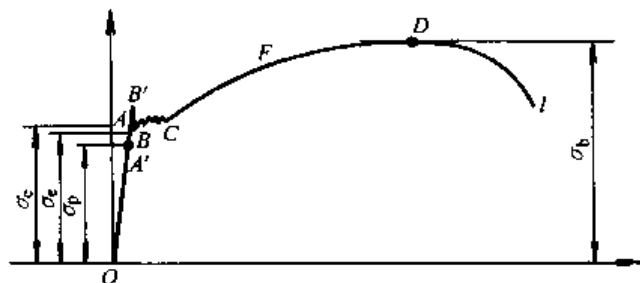


图 5.2-4

点应力 σ_b 称为强度极限。

5.2.2 重点和难点

(1) 用截面法求内力时总是假设内力是正的。画轴力图时正值画在 x 轴上方，负值画在 x 轴下方。

(2) 直杆斜截面应力中， $\alpha=0$ 时有最大正应力，其值为 $\sigma_{\max} = \sigma = N/A$ ； $\alpha=45^\circ$ 时有最大切应力，其值为 $\tau_{\max} = \sigma/2$ 。

(3) 对于变截面杆或轴力为变数杆，利用胡克定律计算杆件轴向变形时，应分段计算变形，然后代数相加得全杆变形。

(4) 求解拉压超静定问题的关键是根据结构的变形协调条件列出变形几何方程。在列变形几何方程时，注意所假设的杆件变形应是杆件可能发生的变形，假设的内力方向应与变形一致。

(5) 拉伸试验中出现的四个阶段，三个强度特征值 σ_p 、 σ_s 及 σ_b 是静载、常温下低碳钢的重要性质。“冷作硬化”是低碳钢类塑性材料的一个重要现象。

(6) 低碳钢类塑性材料的抗拉压性质相同，铸铁类脆性材料的抗压强度远大于抗拉强度。

5.2.3 例题与解题指导

例 5.2.1 试画出图 5.2-5 (a) 直杆的轴力图。

解 此直杆在 A、B、C、D 点承受轴向外力。先求 AB 段轴力。在段内任一截面 1-1 处将杆件截开，考察左段（图 5.2-5 (b)）。在截面上设出正轴力 N_1 。由此段的平衡方程 $\sum X=0$ 得

$$N_1 - 6 = 0, \quad N_1 = +6 \text{ kN}$$

N_1 得正值，说明原先假设拉力是正确的，同时也表明轴力是正的。AB 段内任一截面的轴力都等于 +6 kN。再求 BC 段轴力，在 BC 段任一截面 2-2 处将杆件截开，仍考察左段（图 5.2-5 (c)），在截面上仍设正的轴力 N_2 ，由 $\sum X=0$ 得

$$-6 + 18 + N_2 = 0$$

$$N_2 = -12 \text{ kN}$$

N_2 得负，说明原先假设拉力是不对的（应为压力），同时又表明轴力 N_2 是负的。BC 段内任一截面的轴力都等于 -12 kN。同理得 CD 段内任一截面的轴力都是 -4 kN。

画内力图，以水平轴 x 表示杆的截面位置，以垂直 x 的坐标轴表示截面的轴力，按选定的比例尺画出轴力图，如图 5.2-5 (d) 所示。由此图可知数值最大的轴力发生在 BC 段内。

解题指导：利用截面法求轴力时，在切开的截面上总是设出正轴力 N ，然后由 $\sum X=0$ 求出轴力 N 。如 N 得正，说明是正轴力（拉力）；如得负，则说明是负轴力（压力）。

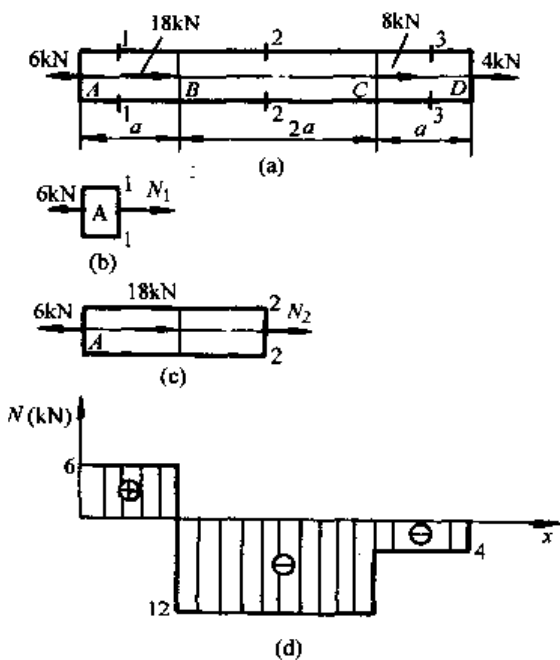


图 5.2-5

例 5.2.2 试求自由悬挂的直杆 (图 5.2-6a) 由纵向均匀分布荷载 q (力/长度) 引起的应力和纵向变形。设杆长 l 、截面积 A 及弹性模量 E 均已知。

解 在杆上距下端为 x 处取一任意横截面 $m-m$, 则该截面轴力为 $N(x) = qx$, 根据此式可作出轴力图如图 5.2-6(b) 所示。 $m-m$ 截面的应力为 $\sigma(x) = N(x)/A = qx/A$ 。显然, 悬挂端有最大轴力 $N_{\max} = ql$ 及最大正应力 $\sigma_{\max} = ql/A$ 。

求杆纵向变形, 由于各横截面上轴力不等, 不能直接应用公式 (5.2-4), 而应从长为 dx 的微段出发。在 x 处取微段 dx , 其纵向伸长可写为

$$\Delta(dx) = \frac{N(x)dx}{EA}$$

杆件的总伸长

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA} = \int_0^l \frac{qx}{EA} dx = \frac{q}{EA} \int_0^l x dx = \frac{ql^2}{2EA}$$

研究上端固定杆件由于自重引起的伸长时, 杆件自身重量就是一种均匀纵向分布力, 此时单位杆长的分布力 $q = A \cdot 1 \cdot \gamma$, 此处 γ 是材料单位体积的重量即容重。将 q 代入上式得到

$$\Delta l = \frac{A\gamma \cdot l^2}{2EA} = \frac{(Al\gamma)l}{2EA} = \frac{Gl}{2EA}$$

此处 $G = Al\gamma$ 是整个杆的重量。上式表明等直杆自重引起的总伸长等于全部重量集中于下端时伸长的一半。

解题指导: 对于轴力为变数的杆, 利用胡克定律计算杆件轴向变形时, 应分段计算变形, 然后代数相加得全杆变形, 当轴力是连续函数时则需利用积分求杆变形。

例 5.2.3 图 5.2-7 所示两根圆截面杆材料相同, 试计算两杆的应变能, 并比较其大小。

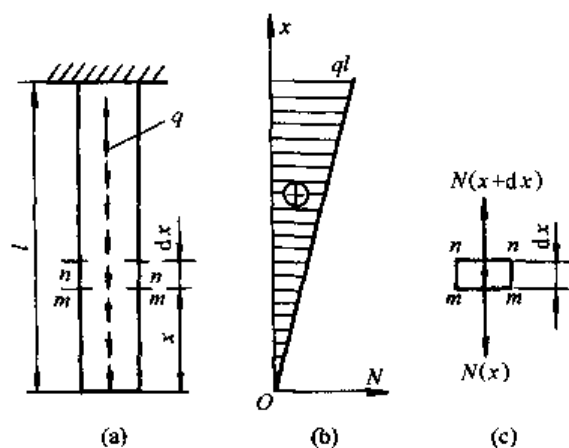


图 5.2-6

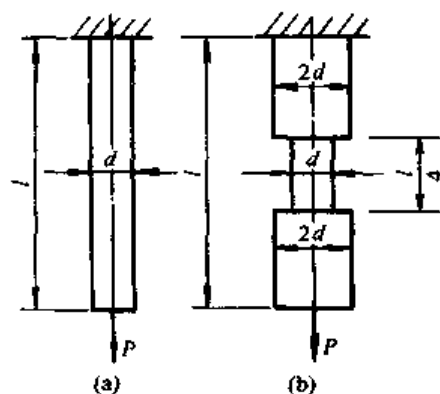


图 5.2-7

解

a 杆:

$$U_a = \frac{P^2 l}{2EA} = \frac{P^2 l}{2E \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2P^2 l}{E\pi d^2}$$

$$b \text{ 杆: } U_b = 2 \times \frac{P^2 \left(\frac{3}{8} l \right)}{2E \frac{\pi (2d)^2}{4}} + \frac{P^2 \left(\frac{l}{4} \right)}{2E \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{7P^2 l}{8E\pi d^2}$$

$$\text{两杆应变能之比: } \frac{U_a}{U_b} = \frac{2}{7} = \frac{16}{8}$$

解题指导: 从本例可看出, 在受力相同的情况下, 刚度小的杆件应变能大。

例 5.2.4 平行杆系 1、2、3 悬吊着刚性横梁 AB 如图 5.2-8 (a) 所示。在横梁上作用着荷载 G。如杆 1、2、3 的截面积、长度、弹性模量均相同, 分别为 A、l、E。试求三根杆的轴力 N_1 、 N_2 、 N_3 。

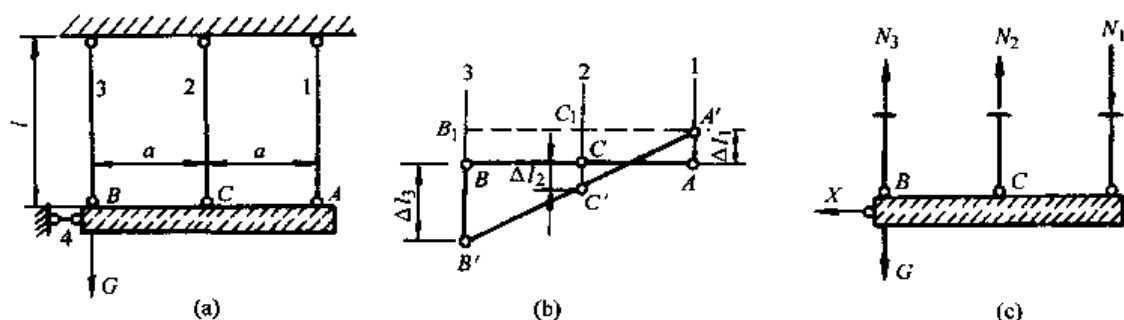


图 5.2-8

解 设在荷载 G 作用下, 横梁移动到 $A'B'$ 位置 (图 5.2-8 (b)), 则杆 1 的缩短量为 Δl_1 , 而杆 2、3 的伸长量为 Δl_2 、 Δl_3 。取横梁 AB 为分离体, 如图 5.2-8 (c), 其上除荷载 G 外, 还有轴力 N_1 、 N_2 、 N_3 以及 X。由于假设 1 杆缩短, 2、3 杆伸长, 故应将 N_1 设为压力, 而 N_2 、 N_3 设为拉力。

(1) 平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0, & X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0, & -N_1 + N_2 + N_3 - G &= 0 \\ \Sigma m_B(F) &= 0, & -N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

三个平衡方程中包含四个未知力, 故为一次超静定问题。

(2) 变形几何方程: 由变形关系图 5.2-8 (b) 可看出 $B_1B' = 2C_1C'$, 即 $\Delta l_3 + \Delta l_1 = 2(\Delta l_2 + \Delta l_1)$, 或

$$-\Delta l_1 + \Delta l_3 = 2\Delta l_2 \quad (b)$$

(3) 物理方程:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA} \quad (c)$$

将式 (c) 代入式 (b), 然后与式 (a) 联立求解, 可得

$$N_1 = G/6, \quad N_2 = G/3, \quad N_3 = 5G/6$$

解题指导: 在解超静定问题中, 假定各杆的轴力是拉力、还是压力, 要以变形关系图中各杆是伸长还是缩短为依据, 两者之间必须一致。经计算三杆的轴力均为正, 说明正如变形

关系图中所设, 杆 2、3 伸长, 而杆 1 缩短。

5.3 剪切

5.3.1 基本概念和主要公式

1. 剪切变形的概念

在构件相对的两个侧面上作用一对大小相等、方向相反、作用线平行且相距很近的力, 构件的变形主要是沿受剪面 $m-m$ 发生相对错动。如图 5.3-1 及图 5.3-2 所示的铆接结构中的铆钉。

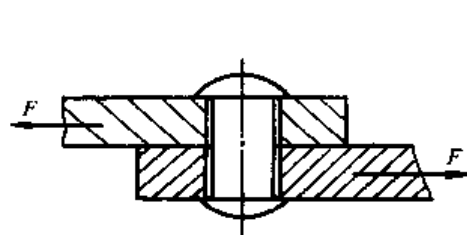


图 5.3-1

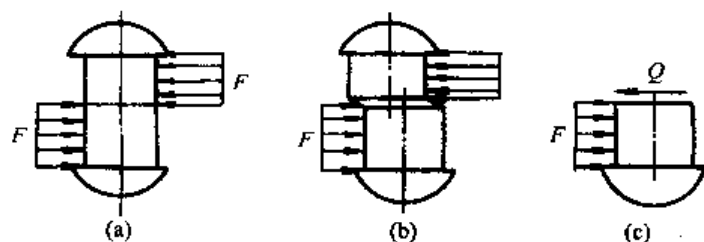


图 5.3-2

2. 剪切强度的实用计算

名义切应力：假定剪切面上的切应力均匀分布。于是，切应力 τ 为

$$\tau = \frac{Q}{A_Q} \quad (5.3-1)$$

相应切应力强度条件为

$$\tau = \frac{Q}{A_Q} \leq [\tau] \quad (5.3-2)$$

式中， Q 为剪切面上的内力—剪力； A_Q 为剪切面的面积； $[\tau]$ 为许可切应力。

3. 挤压强度的实用计算

名义挤压应力 σ_{bs} ：假定挤压面上的挤压应力均匀分布，则名义挤压应力 σ_{bs}

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} = \frac{F_{bs}}{dt} \quad (5.3-3)$$

相应的挤压强度条件

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} = \frac{F_{bs}}{dt} \leq [\sigma_c] \quad (5.3-4)$$

式中， F_{bs} 为挤压力， $[\sigma_{bs}]$ 为许可挤压应力， A_{bs} 为挤压面的计算面积。如挤压面是平面，按实际面积计算，当挤压面为半圆柱形曲面时，其挤压计算面积等于挤压面向挤压力方向的投影面积。如图 5.3-3 所示， $A_{bs} = dt$ 。

4. 切应力互等定理 剪切胡克定律

(1) 纯剪切：若某点的单元体上只有切应力而无正应力，称该点的应力状态为纯剪切。如图 5.3-4 (a) 所示。在切应力作用下，相邻棱边所夹直角的改变量，称为剪应变，用 γ 表示，其单位为 rad。如图 5.3-4 (b) 所示。

(2) 切应力互等定理：在互相垂直的两个平面上，两平面交线附近且垂直于交线的切应力，总是大小相等，方向均指向或离开该交线，即

$$\tau = \tau'$$

(3) 剪切胡克定律：在弹性范围内，切应力 τ 与剪应变 γ 成正比，即

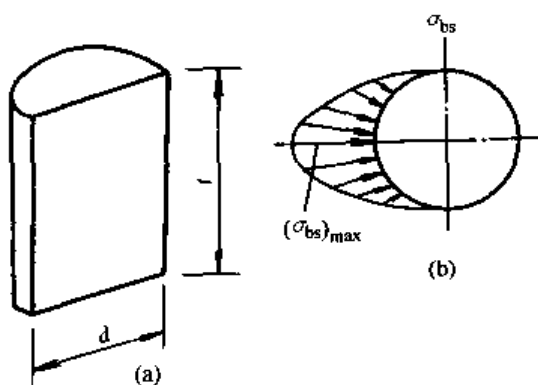


图 5.3-3

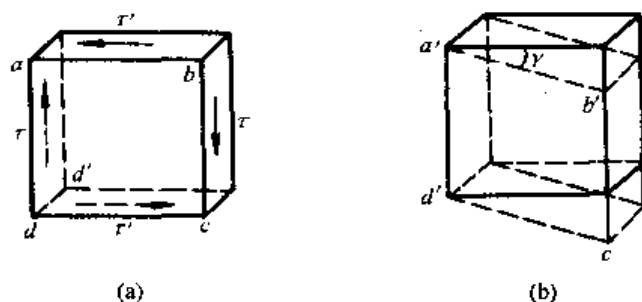


图 5.3-4

$$\tau = G\gamma \quad (5.3-6)$$

式中, G 称为材料的切变模量。

对于各向同性材料, 材料的三个弹性常数, E 、 G 、 ν 有下列关系:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.3-5)$$

即 E 、 G 、 ν 间只有两个独立常数。

5.3.2 重点和难点

(1) 连接件的强度计算关键在于正确确定剪切面 A_Q 、挤压面 A_{bs} 及相应的剪力 Q 和挤压力 F_{bs} 。

(2) 图 5.3-5 所示连接件有两个剪切面, 称为双剪切, 注意双剪切的剪力和挤压面与单剪切 (图 5.3-1) 的区别。

(3) 剪切计算面积为实际受剪面积; 挤压面计算面积, 如挤压面是平面, 按实际挤压面积计算。当挤压面为曲面时取挤压面在挤压力方向的投影面积。对挤压面为半圆柱面, 如铆钉等, 其挤压计算面积为直径乘被连接件厚度: $d \times t$ 。

(4) 对被连接件进行拉伸强度校核时须考虑铆钉孔等对截面有效面积的影响。

5.3.3 例题及解题指导

例 5.3.1 图 5.3-6 所示螺钉承受轴向拉力 F , 已知许可切应力 $[\tau]$ 和拉伸许可应力 $[\sigma]$ 之间的关系为: $[\tau] = 0.6 [\sigma]$, 许可挤压应力 $[\sigma_{bs}]$ 和拉伸许可应力 $[\sigma]$ 之间的关系为: $[\sigma_{bs}] = 2 [\sigma]$ 。试建立 D , d , t 三者间的合理比值。

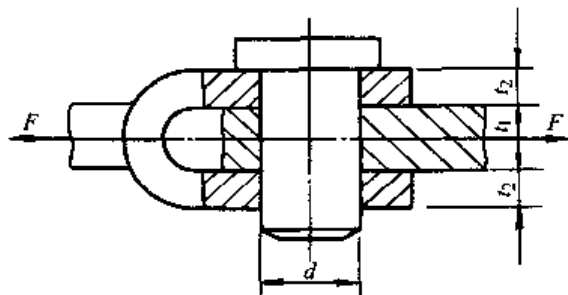


图 5.3-5

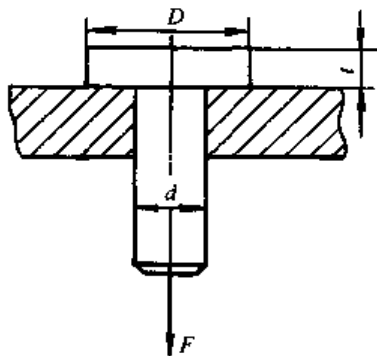


图 5.3-6

解

(1) 螺钉的拉伸强度

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d^2/4} \leq [\sigma]$$

$$d^2 = \frac{4F}{\pi[\sigma]}$$

$$d = 2\sqrt{\frac{F}{\pi[\sigma]}}$$

(2) 螺帽的挤压强度

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_c} = \frac{F}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)} \leq [\sigma_c]$$

$$D^2 = \frac{4F}{\pi[\sigma_{bs}]} + d^2 = \frac{2F}{\pi[\sigma]} + \frac{4F}{\pi[\sigma]} = \frac{6F}{\pi[\sigma]}$$

$$D = \sqrt{6} \times \sqrt{\frac{F}{\pi[\sigma]}} = 2.45 \times \sqrt{\frac{F}{\pi[\sigma]}}$$

(3) 螺帽的剪切强度

$$\tau = \frac{Q}{A_Q} = \frac{F}{\pi dt} \leq [\tau]$$

$$t = \frac{F}{\pi d[\tau]} = \frac{F}{\pi 2\sqrt{\frac{F}{\pi[\sigma]}} \times 0.6[\sigma]} = 0.83 \times \sqrt{\frac{F}{\pi[\sigma]}}$$

得

$$D:d:t = 1.225:1:0.415$$

解题指导：注意此题的剪切面、挤压面。

例 5.3.2 一托板用 8 只铆钉铆于立柱上，如图 5.3-7 (a)，铆钉间距为 a ， $F = 80$ kN，距离 $l = 3a$ 。已知铆钉直径 $d = 20$ mm，许可切应力 $[\tau] = 130$ MPa，试校核铆钉剪切强度。

解 铆钉群的形心 C 位于立柱的 y 轴上。将力 F 向 C 点平移得到一个过 C 点的 y 向力 F 和一个顺时针转动的力偶 Fl 。通过 C 的力 F 在每个铆钉受剪面上引起的剪力相等，其值为 $F/8$ ，如图 5.3-7 (c) 所示，图中只示出 1、2、8 三个铆钉沿负 y 方向的剪力 $F/8$ 。力偶 Fl 在每一铆钉中也引起剪力，假设剪力方向与该铆钉中心至 C 的连线正交，而大小与连线长度成正比。图 5.3-7 (b) 示出 Fl 引起的铆钉剪力；铆钉 1、3、5、7 的剪力都是 Q'_1 ；2、4、6、8 的剪力都是 Q'_2 。诸铆钉的剪力对 C 之矩之和等于 Fl ，即

$$4(Q'_1 \sqrt{2}a) + 4(Q'_2 a) = Fl$$

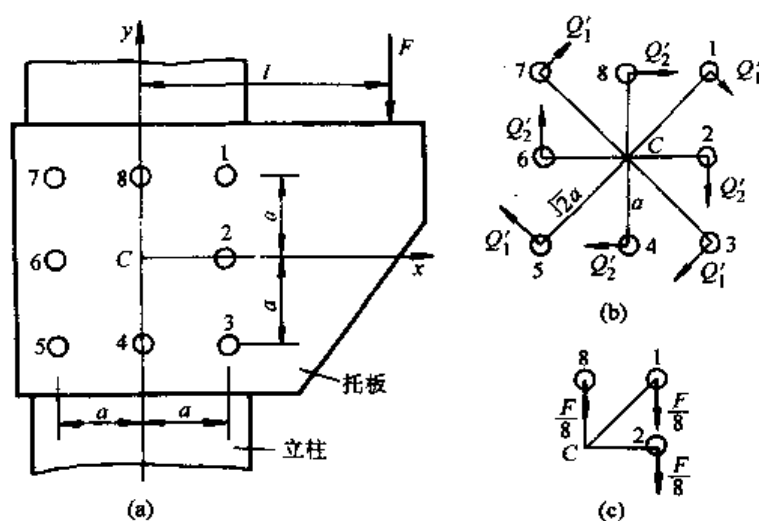


图 5.3-7

再利用 $Q'_1/Q'_2 = \sqrt{2}a/a = \sqrt{2}$, 代入上式得

$$Q'_1 = \frac{Fl\sqrt{2}}{12a} = \frac{\sqrt{2}}{4}F, \quad Q'_2 = \frac{F}{4}$$

铆钉 2 的总剪力 $Q_2 = F/8 + F/4 = 3F/8$ 。铆钉 1 的总剪力是

$$Q_1 = \sqrt{\left[\frac{\sqrt{2}}{4}F \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{4}F \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{F}{8}\right]^2} = \frac{\sqrt{13}}{8}F > Q_2$$

所以铆钉 1、3 受力最为危险, 故

$$\tau = \frac{Q_1}{\pi d^2/4} = \frac{\sqrt{13}}{8} \times 80 \times 10^3 \times \frac{4}{\pi(20)^2} = 115(\text{MPa}) < [\tau]$$

解题指导: 在对铆钉群构成的连接件进行剪切强度计算时, 要正确分析每个铆钉的受力。当外力通过铆钉群中心时, 可以近似看做每个铆钉受力相同。当外力不通过铆钉形心时则应根据实际受力情况分析铆钉受力。

5.4 扭转

5.4.1 基本概念和主要公式

1. 扭转概念

受力特点: 在垂直于杆件轴线的两个相邻平面内作用有反向等值力偶。

变形特点: 两个相邻横截面绕杆轴线发生相对转动。横截面间绕轴线的相对角位移, 称为扭转角, 用 φ 表示。以扭转变形为主的杆件称为轴。

2. 扭矩 扭矩图

外力偶矩的计算:

设传动轴传递的功率 P_k 为 kW, 轴的转速为 n (单位为 r/min), 则该轴承受的外力偶矩为

$$m = 9549 \frac{P_k}{n} \quad (5.4-1)$$

式中, m 单位为 $\text{N}\cdot\text{m}$ 。

扭转内力：受扭杆件横截面上的内力，是作用于横截面平面内的力偶，其力偶矩称为扭矩，用 M_T 表示。

扭矩正负号规定：以右手螺旋法则表示扭矩矢量方向，若该矢量方向与截面外向法线方向一致时为正，反之为负（图 5.4-2）。

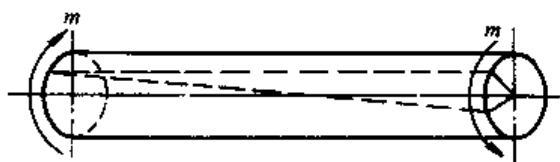


图 5.4-1

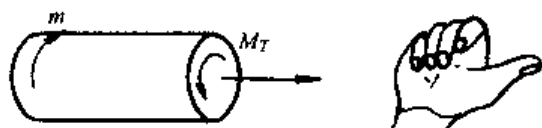


图 5.4-2

扭矩图 横截面上扭矩沿杆轴线分布规律的图线。以横坐标轴表示横截面的位置，纵坐标表示相应横截面上扭矩。

3. 圆轴扭转切应力及强度条件

(1) 圆截面轴扭转切应力公式：

$$\tau_\rho = \frac{M_T \rho}{I_p} \quad (5.4-2)$$

横截面上距圆心为 ρ 的任一点处的切应力值与该点到圆心的距离成正比，方向垂直于该点所在的半径。图 5.4-3 分别为实心圆截面和空心圆截面切应力沿截面半径变化图。

横截面边缘上 ($\rho = R$) 有最大切应力 τ_{\max} ，其值为

$$\tau_{\max} = \frac{M_T R}{I_p} = \frac{M_T}{W_p} \quad (5.4-3)$$

式中， I_p 称为截面的极惯性矩， W_p 称为抗扭截面模量。 I_p ， W_p 是仅与横截面尺寸有关的几何量，分别如下。

实心圆截面（直径为 d ）

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \quad (5.4-4)$$

外径为 D ，内径为 d 的空心圆截面

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad W_p = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \quad (5.4-5)$$

式中， $\alpha = d/D$ 。

(2) 圆轴扭转强度条件：

$$\tau_{\max} = \frac{M_{T\max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (5.4-6)$$

式中， $[\tau]$ 为扭转许可切应力。

由强度条件，可对受扭圆轴进行强度校核、截面设计及确定许可荷载的等三类问题的计算。

4. 圆轴扭转变形与刚度条件

(1) 圆轴扭转变形：

单位长度的扭转角

$$\theta = \frac{M_T}{GI_p} \quad (5.4-7)$$

式中, θ 单位为 rad/m。

对于长为 l , 扭矩 M_T 为常数的等截面圆轴, 两端的相对扭转角

$$\varphi = \frac{M_T l}{GI_p} \quad (5.4-8)$$

式中, GI_p 称为圆轴抗扭刚度。

(2) 圆轴扭转刚度条件:

对于等截面圆轴

$$\theta_{\max} = \frac{M_{T\max}}{GI_p} \leq [\theta] \quad (\text{单位: 弧度}) \quad (5.4-9a)$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{T\max}}{GI_p} \left(\frac{180}{\pi} \right) \leq [\theta] \quad (\text{单位: 角度}) \quad (5.4-9b)$$

上式中, $[\theta]$ 代表单位长度许可扭转角。

利用刚度条件, 同样可对圆轴进行刚度校核、设计截面及确定许可荷载三类问题的计算。

5. 扭转应变能

圆轴因扭转变形而贮存的能量, 称为扭转应变能, 用 U 表示。对于在长度 l 内扭矩 M_T 为常数的等截面圆轴, 扭转应变能

$$U = W = \frac{1}{2} M_T \varphi = \frac{M_T^2 l}{2GI_p} = \frac{GI_p \varphi^2}{2l} \quad (5.4-10)$$

单位体积应变能 (比能) u

$$u = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2} \quad (5.4-11)$$

5.4.2 重点和难点

(1) 对于变扭矩、变截面的受扭圆轴应分段计算扭转角, 再求和得总扭转角; 此类轴的最大切应力不一定是在扭矩最大的横截面上。

(2) 圆轴扭转时横截面上的切应力沿半径线性分布, 在圆心处为零, 外缘处最大, 应力方向垂直于半径, 实心圆截面和空心圆截面的切应力值的连线均过圆心 (见图 5.4-3)。

(3) 空心圆轴扭转的抗扭截面模量 $W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$, 注意式中 α 的指数是 4 次方。

(4) 低碳钢圆轴扭转破坏是沿横截面剪切破坏, 铸铁圆轴扭转破坏是沿与轴线成 45° 的斜面被拉断。

5.4.3 例题和解题指导

例 5.4.1 已知传动轴 (图 5.4-5 (a)) 的转速 $n = 300 \text{ r/min}$, 主动轮 A 输入的功率 $P = 400 \text{ kW}$, 三个从动轮输出的功率分别为 $P_B = 120 \text{ kW}$, $P_C = 120 \text{ kW}$, $P_D = 160 \text{ kW}$ 。试

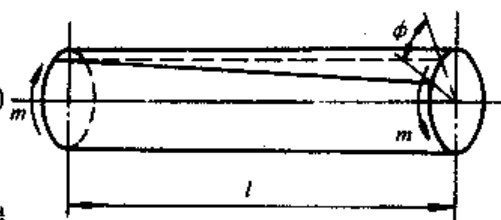


图 5.4-4

画轴的扭矩图。

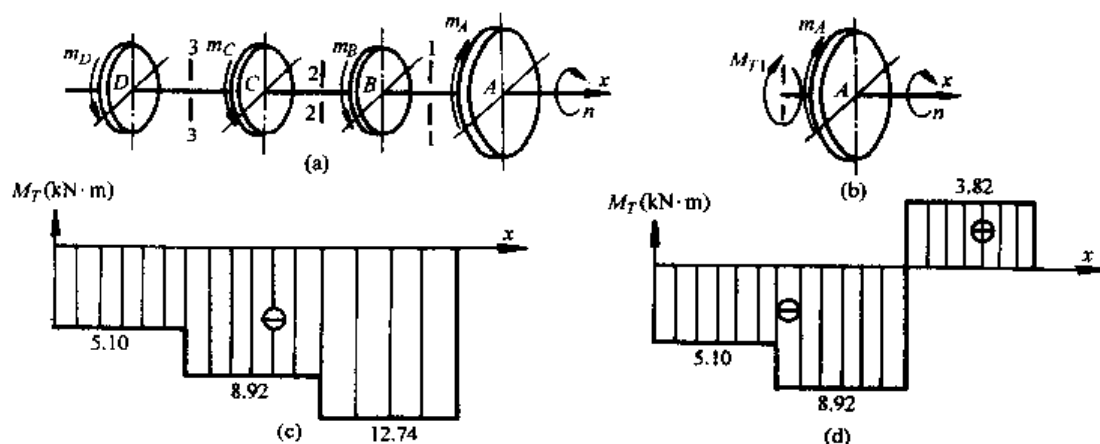


图 5.4-5

解

(1) 计算作用在各轮上的转矩 m 。因为 A 是主动轮，故 m_A 的转向与轴的转向一致；而从动轮上的转矩是轴转动时受到的阻力，故从动轮 B 、 C 、 D 上的转矩方向与轴的转向相反。

$$\begin{aligned} m_A &= 9\,549 \times \frac{N_k}{n} = 9\,549 \times \frac{400}{300} \\ &= 1.274 \times 10^4 \text{ Nm} = 12.74 \text{ (kN}\cdot\text{m)} \\ m_B &= m_C = 3.82 \times 10^3 \text{ Nm} = 3.82 \text{ (kN}\cdot\text{m)} \\ m_D &= 5.10 \times 10^3 \text{ Nm} = 5.10 \text{ (kN}\cdot\text{m)} \end{aligned}$$

(2) 求各段轴的扭矩。先求 1-1 截面扭矩，从该截面切开，保留右段，并在截面上设出正扭矩 M_{T1} (图 5.4-5 (b))。由平衡条件 $\sum m_x = 0$ ，有

$$m_D - m_A - M_{T1} = 0$$

得

$$M_{T1} = -m_A = -12.74 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

这里 M_{T1} 得负，说明该截面的扭矩是负的。在 A 、 B 轮之间所有截面的扭矩都等于 $-12.74 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。仿此可得出 $M_{T2} = -8.92 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $M_{T3} = -5.10 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。

(3) 画扭矩图。以横坐标表示截面位置，以纵坐标表示扭矩，按选定的比例尺作出 AB 、 BC 、 CD 三段轴的扭矩图，因为在每一段内扭矩为常数，故扭矩图由三段水平线组成，如图 5.4-5 (c)。最大的扭矩 $7.64 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 发生在中间段。

解题指导：求轴横截面扭矩时，在截面上总是设出正扭矩 M_T ，再用 $\sum m_x = 0$ 求此扭矩。如 M_T 得正，说明是正扭矩，如得负，则说明是负扭矩。

若将此例中的 A 、 B 轮对调，则扭矩图如图 5.4-5 (d) 所示，由此可知，合理布置荷载可以降低内力的最大值，提高杆件的承载能力。

例 5.4.2 已知传动轴为钢制实心轴，最大扭矩 $M_T = 7.64 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ，材料的许可切应力 $[\tau] = 30 \text{ MPa}$ ，切变模量 $G = 80 \text{ GPa}$ ，许可扭角 $[\theta] = 0.3^\circ/\text{m}$ ，试按强度条件和刚度条

件设计轴径 d 。

解 根据强度条件式 (5.4-6) 得出

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 7.64 \times 10^6}{\pi \times 30}} = 109(\text{mm})$$

再根据刚度条件式 (5.4-9 (b)) 得出

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{M_T \times 32 \times 180}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{7.64 \times 10^6 \times 32 \times 180}{80 \times 10^3 \times \pi^2 \times 0.3 \times 10^{-3}}} = 117(\text{mm})$$

两个直径中应选其中较大者, 即实心轴直径不应小于 117 mm, 说明在此设计中刚度是主要的。

例 5.4.3 已知圆轴受外力偶矩 $m = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 材料的许可切应力 $[\tau] = 60 \text{ MPa}$ 。

(1) 试设计实心圆轴的直径 D_1 ;

(2) 若该轴改为 $\alpha = d/D = 0.8$ 的空心圆轴, 试设计空心圆轴的内、外径 d_2 、 D_2 。

解

(1) 扭矩 $M_T = m = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 实心圆截面直径:

$$D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 2 \times 10^6}{\pi \times 60}} = 55.4(\text{mm})$$

(2) 若改为 $\alpha = 0.8$ 的空心圆轴, 设计外径:

$$D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 2 \times 10^6}{\pi(1-0.8^4) \times 60}} = 66.0(\text{mm})$$

内径 $d_2 = 0.8 \times D_2 = 0.8 \times 66.0 = 52.8 \text{ (mm)}$

(3) 比较二者面积:

$$\text{空心轴的截面积 } A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}(1-\alpha^2) = \frac{\pi 66.0^2}{4}(1-0.8^2) = 1\,231.6(\text{mm}^2)$$

$$\text{实心轴的截面积 } A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi 55.4^2}{4} = 2\,410.5(\text{mm}^2)$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1\,231.6}{2\,410.5} = 0.51$$

解题指导: 由此例可见使用空心圆轴比实心圆轴可以节约很多材料, 其主要原因是空心圆轴的材料布置离轴心较远, 充分发挥了材料的承载能力。

例 5.4.4 计算图 5.4-6 受扭圆轴的应变能。设 $d_1 = 2d_2$, 材料的切变模量为 G 。

解 此轴扭矩是常数, $M_T = m$, 但 AB 和 BC 截面尺寸不同, 因此应分段计算应变能, 然后再相加。有

$$\begin{aligned} U &= U_{AB} + U_{BC} = \frac{M_T^2 L}{2GI_{P1}} + \frac{M_T^2 L}{2GI_{P2}} \\ &= \frac{32m^2 L}{2G\pi(2d_2)^4} + \frac{32m^2 L}{2G\pi d_2^4} \\ &= 17 \frac{m^2 L}{G\pi d_2^4} \end{aligned}$$

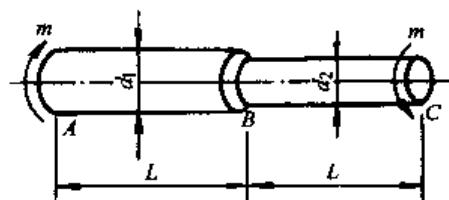


图 5.4-6

5.5 截面的几何性质

5.5.1 基本概念和主要公式

1. 静矩与形心

(1) 静矩：设任意截面如图 5.5-1 所示，面积为 A ， C 点为截面形心。截面对 x 、 y 轴的静矩（面积矩）为：

$$S_x = \int_A y dA = Ay_C \quad (5.5-1a)$$

$$S_y = \int_A x y dA = Ax_C \quad (5.5-1b)$$

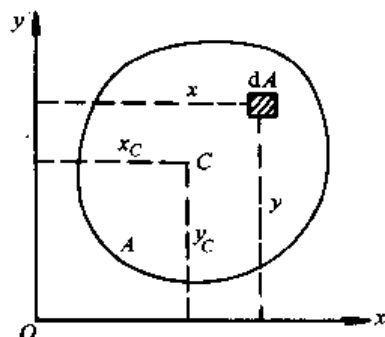


图 5.5-1

同一截面对不同轴的静矩值是不同的，可能为正值、负值或为零。

(2) 形心：设截面形心 C 在任意参考坐标系 xOy 中的坐标为 x_C 、 y_C ，由式 (5.5-1) 可得截面形心的位置 x_C 、 y_C 计算公式：

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A} \\ y_C &= \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{A} \end{aligned} \right\} \quad (5.5-2)$$

由上式可知：若截面对某轴的静矩为零，则该轴必通过截面形心；截面对任一形心轴的静矩为零。

通过截面形心的坐标轴称为形心轴。

(3) 组合截面的静矩和形心：由简单截面组合而成的截面称为组合截面。组合截面对某一轴的静矩，等于各简单截面对同一轴静矩之代数和，即

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^n (S_x)_i = \sum_{i=1}^n A_i y_i \\ S_y &= \sum_{i=1}^n (S_y)_i = \sum_{i=1}^n A_i x_i \end{aligned} \right\} \quad (5.5-3)$$

同理，组合截面的形心坐标 x_C 、 y_C 为

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} \\ y_C &= \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} \end{aligned} \right\} \quad (5.5-4)$$

2. 惯性矩 惯性积

1) 惯性矩

设任意截面如图 5.5-2 所示，其面积为 A ， xOy 为任意直角坐标系。则截面对 x 、 y 轴的惯性矩为

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A x^2 dA \end{aligned} \right\}$$

截面对坐标原点 O 点的极惯性矩

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = I_x + I_y \quad (5.5-6)$$

2) 惯性积

截面对 x 、 y 轴的惯性积

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (5.5-7)$$

3) 惯性矩 惯性积的性质

(1) 惯性矩、惯性积、极惯性矩的量纲均为长度的四次方。

(2) 截面的惯性矩是对某一坐标轴而言的，极惯性矩是对某一点（称为极点）而言的，惯性矩、极惯性矩恒为正值。惯性积是对某一对坐标轴而言的，其值可能为正，可能为负，也可能为零。

(3) 截面对某一点的极惯性矩恒等于以该点为原点的任一对直角坐标轴的惯性矩之和，即

$$I_p = I_x + I_y \quad (5.5-8)$$

(4) 若一对坐标轴中有一轴为截面的对称轴，则截面对这对坐标轴的惯性积必为零；但截面对某一对坐标轴的惯性积为零，这对坐标中却不一定是截面的对称轴。

(5) 由惯性矩、惯性积及极惯性矩的定义可知：

组合截面对任一轴的惯性矩等于各简单截面对该轴惯性矩之和，即

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^n (I_x)_i \\ I_y &= \sum_{i=1}^n (I_y)_i \end{aligned} \right\} \quad (5.5-9)$$

组合截面对任一对坐标轴的惯性积，等于各简单截面对该对坐标轴的惯性积之和，即

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{xy})_i \quad (5.5-10)$$

组合截面对任一点的极惯性矩，等于各简单截面对该点极惯性矩之和，即

$$I_p = \sum_{i=1}^n (I_p)_i \quad (5.5-11)$$

(6) 常用截面的惯性矩：

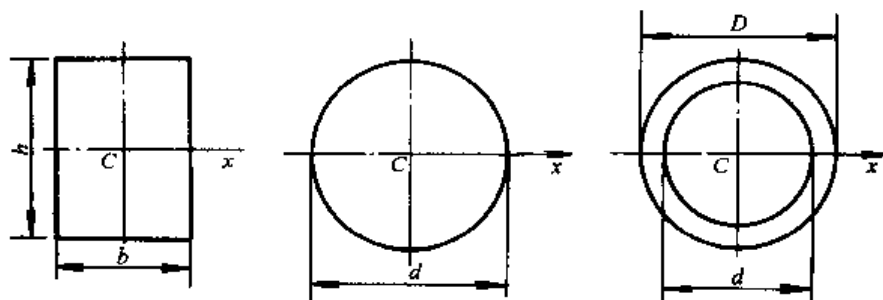


图 5.5-3

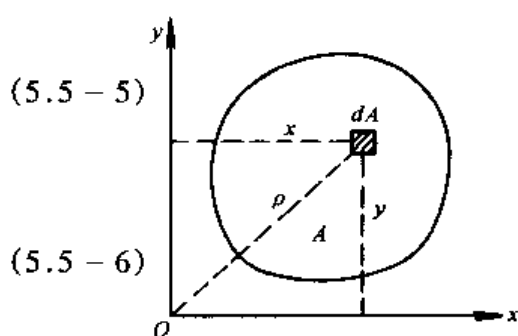


图 5.5-2

$$\text{矩形截面} \quad I_x = \frac{bh^3}{12} \quad (5.5-12)$$

$$\text{圆形截面} \quad I_x = \frac{\pi D^4}{64} \quad (5.5-13)$$

$$\text{空心圆截面} \quad I_x = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \quad (5.5-14)$$

其中, $\alpha = d/D$ 。

3. 形心主惯性轴与形心主惯性矩

主轴: 若截面图形对任意一对正交坐标轴 (x, y) 的惯性积 $I_{xy} = 0$, 则该对坐标轴称为主惯性轴, 简称主轴。若该对坐标轴通过截面形心, 则称该对主轴为形心主轴。

主惯性矩: 截面图形对主轴的惯性矩称为主惯性矩。

形心主惯性矩: 截面图形对一对形心主轴的惯性矩称为形心主惯性矩。

形心主惯性矩是截面图形对通过形心 C 点所有轴的惯性矩中的最大值 (I_{\max}) 和最小值 (I_{\min})。

截面图形对于过形心 C 的任意一对直角坐标轴 x, y 的两个惯性矩之和为常数, 即

$$I_x + I_y = I_{\min} + I_{\max} = I_p \quad (5.5-15)$$

4. 平行移轴公式

任意截面图形, 面积为 A , 形心为 C , x_C, y_C 为形心轴, 如图 5.5-4 所示, 截面对形心轴 x_C, y_C 的惯性矩、惯性积分别为 I_{xC}, I_{yC}, I_{xCyC} 。设 x, y 轴分别与形心轴 x_C, y_C 平行, 相距分别为 a, b , 截面对 x, y 轴的惯性矩、惯性积 I_x, I_y, I_{xy} 分别为

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_{xC} + Aa^2 \\ I_y &= I_{yC} + Ab^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.5-16)$$

$$I_{xy} = I_{xCyC} + Aab \quad (5.5-17)$$

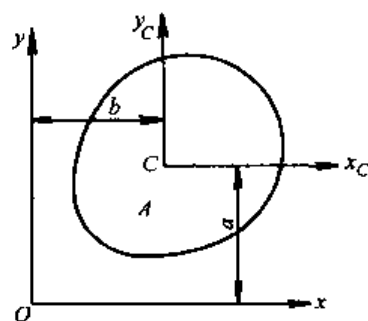


图 5.5-4

式 (5.5-16) 为截面惯性矩的平行移轴公式, 式 (5.5-17) 为截面惯性积的平行移轴公式。

5.5.2 重点和难点

(1) 通过截面形心 C , 至少存在一对形心主轴。

(2) 若截面有两根对称轴, 此两轴即为形心主轴。若截面有一根对称轴, 则该轴必为形心主轴, 另一形心主轴为通过截面形心且与该轴垂直的轴。

(3) 若截面有三根 (或以上) 对称轴时, 则通过形心的任一根轴均为形心主轴, 且形心主惯性矩均相等 (如正方形截面等)。

(4) 在所有相互平行的坐标轴中, 图形对形心轴的惯性矩为最小; 但其惯性积不一定最小。截面惯性矩恒为正值, 截面惯性积的值可能为正, 也可为负或为零。

(5) 平行移轴公式是计算组合图形惯性矩的有效工具, 应熟练掌握。利用平行移轴公式时, 必须以截面对形心轴的惯性矩为基础进行计算。

5.5.3 例题和解题指导

例 5.5.1 求图 5.5-5 所示截面的形心 C 的位置。

解 该截面具有纵对称轴, 则形心一定在此对称轴上, 因此只要求出形心在高度方向的值即可确定形心。选取参考坐标系, 以对称轴为 y 轴, x_0 轴选择截面的下边缘。下面用两种方法计算形心 C 的坐标 y_C 。

解法 1 将该组合截面分割为①、②、③三个矩形截面, 如图 5.5-5。它们的面积 A_i 和形心 C_i 的纵坐标 y_{Ci} 分别是

$$A_1 = 300 \times 10 = 3\,000 \text{ (mm)}^2$$

$$y_{C_1} = 150 \text{ mm}$$

$$A_2 = 300 \times 10 = 3\,000 \text{ (mm)}^2$$

$$y_{C_2} = 150 \text{ mm}$$

$$A_3 = 200 \times 10 = 2\,000 \text{ (mm)}^2$$

$$y_{C_3} = 305 \text{ mm}$$

于是截面形心 C 在参考轴 x_0 、 y 系内的纵坐标 y_C 为

$$y_C = \frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{3 \times 10^3 \times 150 \times 2 + 2 \times 10^3 \times 305}{3 \times 10^3 \times 2 + 2 \times 10^3} = 188.8 \text{ (mm)}$$

解法 2 也可将以上组合截面看做在① 200×310 矩形的基础上, 挖去一个② 180×300 的矩形, 挖去矩形的面积取为负值。于是矩形①、②的面积 A'_i 及形心坐标 y'_{Ci} 分别为

$$A'_1 = 310 \times 200 = 62 \times 10^3 \text{ (mm)}^2, y'_{C_1} = 155 \text{ mm}$$

$$A'_2 = -300 \times 180 = -54 \times 10^3 \text{ (mm)}^2$$

$$y'_{C_2} = 150 \text{ mm}$$

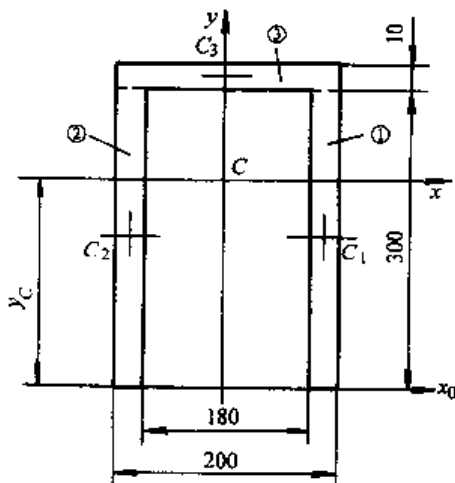


图 5.5-5

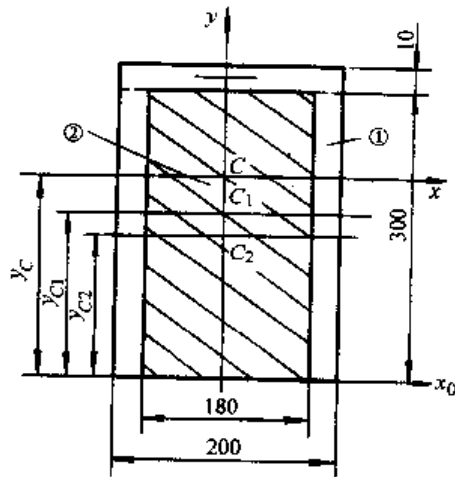


图 5.5-6

截面形心 C 在参考轴 x_0 、 y 坐标系内的纵坐标 y_C 为

$$y_C = \frac{\sum A'_i y'_{Ci}}{\sum A'_i} = \frac{62 \times 10^3 \times 155 - 54 \times 10^3 \times 150}{62 \times 10^3 - 54 \times 10^3} = 188.8 \text{ (mm)}$$

两种解法结果完全相同。

解题指导：计算形心时参考坐标轴可以任意选取，但好的选择可以使计算更容易。本题的第二种解法称为负面积法，是计算截面几何性质时常用的方法。

例 5.5.2 试计算图 5.5-7 所示图形对水平形心轴 x 的形心主惯性矩。

解

(1) 求形心：建立参考坐标轴 x_1 、 y ，形心显然在对称轴 y 上，只需求出截面形心 C 距参考轴 x_1 的距离 y_C 。将该截面分解为两个矩形，各矩形截面的面积 A_i 及自身水平形心轴距参考轴 x_1 的距离 y_{Ci} 分别为：

$$A_{C1} = 200 \times 50 = 10\,000 \text{ (mm}^2\text{)}, y_{C1} = 150 \text{ mm};$$

$$A_{C2} = 50 \times 150 = 7\,500 \text{ (mm}^2\text{)}, y_{C2} = 25 \text{ mm};$$

则

$$y_C = \frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{1 \times 10^4 \times 150 + 7.5 \times 10^3 \times 25}{1 \times 10^4 + 7.5 \times 10^3} = 96.4 \text{ (mm)}$$

(2) 求形心主惯性矩：

因 y 轴是对称轴，所以形心轴 x 、 y 必是形心主轴。

截面 1、2 对自身形心轴的惯性矩是

$$I_{xC1} = \frac{1}{12} \times 50 \times 200^3 = 3.33 \times 10^7 \text{ (mm)}^4$$

$$I_{xC2} = \frac{1}{12} \times 150 \times 50^3 = 1.56 \times 10^5 \text{ (mm)}^4$$

各矩形截面形心 C_i 和截面形心 C 在铅直方向的距离分别为

$$a_1 = 150 - 96.4 = 53.6 \text{ (mm)}, a_2 = 96.4 - 25 = 71.4 \text{ (mm)},$$

因而各矩形截面对形心轴 x 的惯性矩为

$$I_{x1} = I_{xC1} + a_1^2 A_1 = 3.33 \times 10^7 + (53.6)^2 \times 10^4 = 6.21 \times 10^7 \text{ (mm)}^4$$

$$I_{x2} = I_{xC2} + a_2^2 A_2 = 1.56 \times 10^5 + (71.4)^2 \times 7.5 \times 10^3 = 3.84 \times 10^7 \text{ (mm)}^4$$

整个截面对 x 轴的惯性矩为

$$I_x = \sum_{i=1}^2 I_{xi} = 10.01 \times 10^7 \text{ (mm)}^4$$

解题指导：把组合截面分解为几个简单截面，如矩形、圆形，利用这些简单截面的形心位置和对自身形心轴的惯性矩再配合平行移轴公式，不用积分即可求出组合截面的形心、惯性矩。

例 5.5.3 图 5.5-8 所示半径为 R 的半圆形截面，形心 C 与直径轴 x_1 的距离 $y_C = \frac{4R}{3\pi}$ ，求半圆截面对形心轴 x_C 的惯性矩 I_{xC} 。

解 由平行移轴公式可知

$$I_{x1} = I_{xC} + y_C^2 A$$

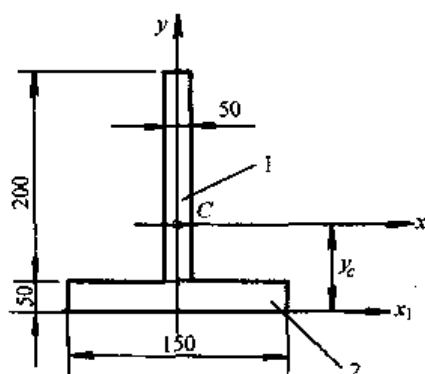


图 5.5-7

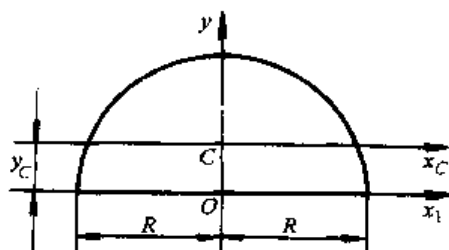


图 5.5-8

所以

$$I_{xC} = I_{x_1} - y_C^2 A \quad (a)$$

已知半径为 R 的整圆对直径的惯性矩为 $I = \frac{\pi R^4}{4}$, 则半圆对直径轴 x_1 的惯性矩为整圆的一半, 即

$$I_{x_1} = \frac{\pi R^4}{8} \quad (b)$$

将式 (b) 及已知值代入式 (a), 得

$$I_{xC} = \frac{1}{8} \pi R^4 - \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \times \frac{\pi R^2}{2} = 0.11 R^4$$

解题指导: 此题是由截面对任意轴的惯性矩 I_{x_1} 反求截面对形心轴的惯性矩 I_{xC} , 在利用平行移轴公式时应注意公式中三项的加减关系。

5.6 弯曲内力

5.6.1 基本概念和主要公式

1. 平面弯曲的概念

受力特征: 外力作用平面 (横向外力或外力偶作用面组成的平面) 与杆件的形心主惯性平面重合或平行, 横向外力作用线通过横截面的弯曲中心。

变形特征: 杆件的轴线由直线变为形心主惯性平面内的一条平面曲线, 称为挠曲线。

以弯曲变形为主要变形的杆件通常称为梁。

梁上荷载主要有集中力、分布力、集中力偶和分布力偶。

根据梁的支座约束情况, 静定梁可分为简支梁、悬臂梁和外伸梁三种。

2. 弯曲内力和内力图

(1) 利用截面法, 可知横截面上有两种内力: 剪力 Q ; 弯矩 M , 如图 5.6-1 所示。

(2) 剪力与弯矩的正负号规定: 以内力对变形的效应确定正负号。在所切横截面的内侧取微段, 凡使该微段沿顺时针方向转动 (错动) 的剪力为正 (图 5.6-2 (a)); 反之为负 (图 5.6-2 (b)); 使该微段弯成下凸的弯矩为正 (图 5.6-2 (c)); 反之为负 (图 5.6-2 (d))。按此规定, 图 5.6-1 所示梁 C 截面的剪力和弯矩均为正, 而且无论研究 C 截面以左部分还是以右部分其结论都一样。

(3) 剪力与弯矩的计算法则: ①横截面上的剪力 Q , 在数值上等于该截面左侧或右侧

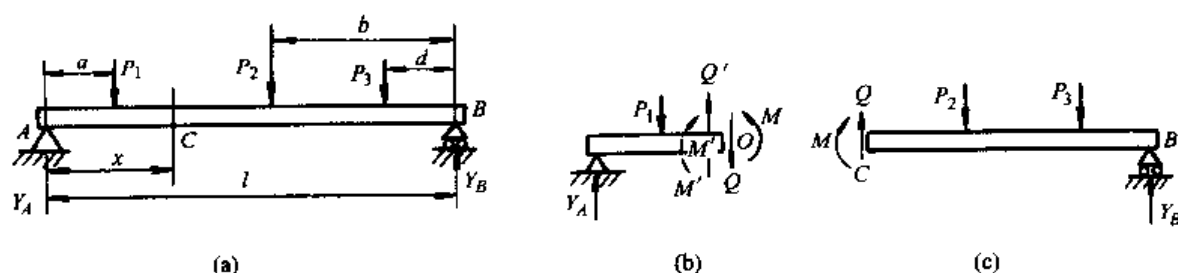


图 5.6-1

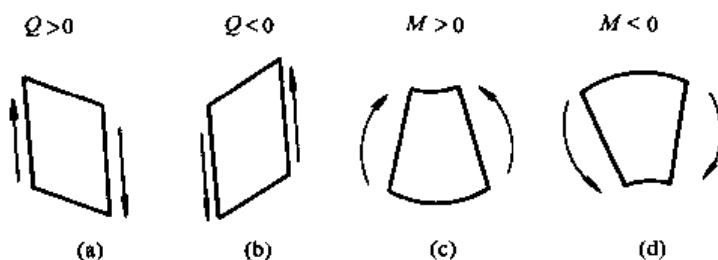


图 5.6-2

梁上全部横向外力的代数和。截面左侧梁的向上横向力（或截面右侧梁的向下横向力）均取正值，反之取负值。②横截面上的弯矩 M ，在数值上等于该截面左侧或右侧梁上全部外力对该截面形心之矩的代数和。无论位于截面左侧或右侧，向上的横向力均产生正弯矩，反之为负弯矩；截面左侧梁上的顺时针外力偶或右侧梁上的逆时针外力偶均产生正弯矩，反之为负弯矩。

(4) 剪力方程与弯矩方程：梁横截面上的剪力和弯矩一般是截面位置 x 的函数，分别称为剪力方程和弯矩方程：

$$Q = Q(x) \quad M = M(x)$$

(5) 剪力图与弯矩图：表示剪力和弯矩沿梁轴线变化的图形称为剪力图 and 弯矩图。作图时，以横坐标 x 表示梁横截面位置，以纵坐标表示内力值。正的剪力坐标轴方向向上；正的弯矩坐标轴向下。

3. 荷载集度 q 与剪力 Q 、弯矩 M 之间的微分关系

坐标轴 x 的原点在梁的左端，分布荷载集度 q 以向上为正，则荷载集度 q 与剪力 Q 、弯矩 M 之间有如下微分关系：

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x) \quad (5.6-1)$$

上述荷载集度 $q(x)$ 与剪力 $Q(x)$ 、弯矩 $M(x)$ 间的微分关系式表明：剪力图某点处的切线斜率，等于相应截面的荷载集度；弯矩图某点处的切线斜率，等于相应截面的剪力；而弯矩图某点处的二阶导数，则等于相应截面处的荷载集度。

5.6.2 重点和难点

弯曲内力是材料力学中的一个重要的基本内容，原理简单但容易出错。应特别加以注意。

(1) 正确地计算支座反力是绘制内力图的关键，应确保无误。因此利用平衡方程求出支座反力后，应进行校核。

(2) 计算梁横截面的内力时，应特别注意外力的方向与其引起的内力符号的关系，以保

证内力的正负号正确。

(3) 梁上荷载不连续时, 剪力和弯矩方程需分段列出。各段方程的 x 坐标原点和方向可以相同, 为了计算方便也可以不同。

(4) 作出梁的内力图后应利用 q 、 Q 、 M 之间的微分关系进行校核, 以确保正确。

(5) 利用剪力 Q 、弯矩 M 与荷载集度 q 之间的微分关系, 可得到下述结论: ①在 $q=0$ 的区段, 剪力图为水平直线, 弯矩图为斜直线; 当 $Q>0$, 弯矩图/(上升), $Q<0$, 弯矩图\ (下降)。②在 $q=c$ (常数) 的区段, 剪力图为斜直线, 弯矩图为抛物线。当 $q(\uparrow)>0$, 剪力图/, 弯矩图—; 当 $q(\downarrow)<0$, 剪力图\, 弯矩图—。③在 $Q=0$ 的点处, 弯矩图有极值; 在 Q 突变处, 弯矩图有一个折角。

(6) 剪力图、弯矩图的一般规律: ①在集中力作用处, 剪力 Q 图有突变, 突变量等于集中力的值, 突变方向与集中力作用方向一致。弯矩 M 图斜率有突变, 出现折角。②在集中力偶作用处, 剪力 Q 图无变化。弯矩 M 图有突变, 突变量等于该集中力偶矩值。③在分布力的起点和终点, 剪力图有拐点; 弯矩图为直线与抛物线的光滑连接。④当梁的简支端或自由端无集中力偶时, 弯矩为零。⑤梁的最大弯矩通常发生在剪力 $Q=0$ 处或集中力、集中力偶作用点处。⑥对称结构承受对称荷载作用时, 剪力图是反对称的 (剪力指向仍是对称的), 弯矩图是对称的。对称结构承受反对称荷载时, 剪力图是对称的, 弯矩图是反对称的。⑦平面刚架的弯矩不分正负号, 但应将弯矩图在杆件受拉的一侧, 此规定与水平直梁正弯矩画在轴线下方的规定完全一致。

5.6.3 例题及解题指导

例 5.6.1 写出图 5.6-3 示各梁的剪力方程和弯矩方程, 并做剪力图 and 弯矩图。

解

(1) 分两段列 Q 、 M 方程:

AC 段:

$$Q(x) = -qx \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

CB 段:

$$Q(x) = -qa \quad (a \leq x \leq 2a)$$

$$M(x) = -qa\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (a \leq x \leq 2a)$$

(2) 作图:

AC 段剪力: 剪力方程是 x 的一次函数, 剪力图是斜直线, 由两点即可确定该直线。当 $x=0$, $Q_A=0$; 当 $x=a$, 得 $Q_C=-qa$ 。

BC 段剪力: 剪力图是水平线, 由于 C 点无集中力作用, C 点剪力连续, $Q=Q_C=-qa$ 。

AC 段弯矩: 弯矩方程是 x 的二次函数, 由 $q=c<0$, q 与弯矩的关系知, 弯矩图是下凸抛物线。当 $x=0$, $M_A=0$; 当 $x=a$, 得 $M_C=-\frac{qa^2}{2}$ 。

BC 段弯矩: 弯矩方程是 x 的一次函数, 弯矩图是斜直线。因梁上没有集中力偶, 弯矩图在 C 点应连续, $x=2a$ 时, $M_B=-\frac{3qa^2}{2}$ 。作出剪力图 and 弯矩图如图示。

例 5.6.2 试绘出图 5.6-4 所示梁的剪力图和弯矩图。

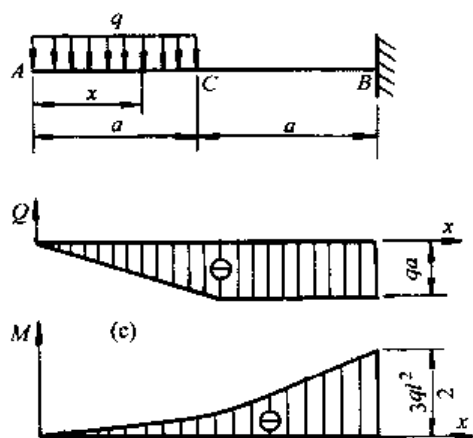


图 5.6-3

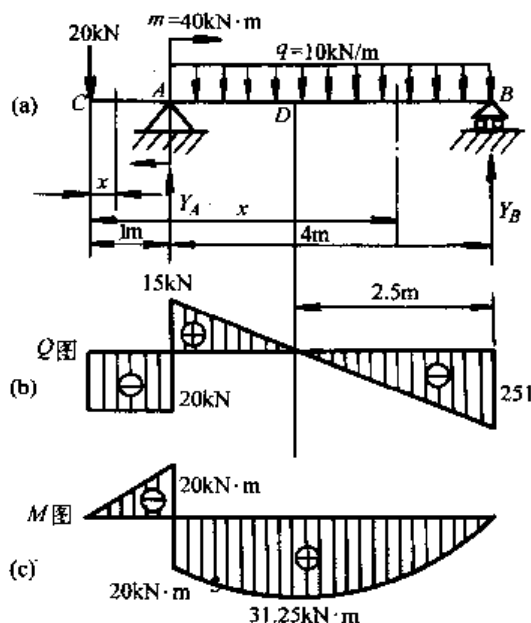


图 5.6-4

解

(1) 利用平衡条件求出 A、B 支座的支反力 Y_A 和 Y_B 。

$$\sum m_A = 0, 20 \times 1 - 40 + Y_B \times 4 - 10 \times 4 \times 2 = 0$$

所以

$$Y_B = 25 \text{ kN}$$

$$\sum m_B = 0, 20 \times 5 - Y_A \times 4 + 10 \times 4 \times 2 - 40 = 0$$

所以

$$Y_A = 35 \text{ kN}$$

(2) 列 CA 段 Q、M 方程：建立坐标系，以 C 端为 x 轴坐标原点，CA 段距左端为 x 的任意截面取左侧为对象，则

$$Q_1 = -20 \quad (0 < x < 1 \text{ m}) \quad (a)$$

$$M_1 = -20x \quad (0 \leq x < 1 \text{ m}) \quad (b)$$

(3) 列 AB 段 Q、M 方程：AB 段距 C 端为 x 的任意截面，如取右侧为对象，则

$$Q_2 = -Y_B + q(5-x) = -25 + 10(5-x) \quad (1 < x < 5) \quad (c)$$

$$M_2 = Y_B(5-x) - q(5-x)(5-x)/2 = 25(5-x) - 5(5-x)^2 \quad (1 < x \leq 5) \quad (d)$$

利用式 (a)、式 (b) 和式 (c)、式 (d) 可绘出 CA 和 AB 段的 Q、M 图 (图 5.6-2 (b), (c))。

(4) 检查 Q、M 图的正确性：①利用集中力、集中力偶作用处的突变关系。梁上 C、A、B 三处分别有集中的力 20 kN (\downarrow)、35 kN (\uparrow)、25 kN (\uparrow)，因而由左向右经过上述各处时，剪力图分别突变 20 kN (\downarrow)、35 kN (\uparrow)、25 kN (\uparrow)，因 C、B 在梁的两端，上述突变表现为 C 右截面剪力为 -20 kN，B 左截面剪力为 -25 kN。梁上 A 处有顺时针集中力偶 40 kN·m，因而 A 处左截面至右截面的弯矩突变 +40 kN·m。②利用微分关系。对于 CA 段，分布荷载集度 $q=0$ ，剪力图为水平直线，弯矩图为斜直线。对于 AB 段， $q=-10 \text{ kN/m}$ ，剪力图为斜直线，并在 A 右 1.5 m 处 (D 截面) 剪力为零。弯矩图为下凸的二次抛物线，并在 D 截面有极大值。

解题指导：截面的内力既可以用截面的左半部分计算也可以用截面的右半部分计算，所得结果相同。画出内力图后利用微分关系和 Q 、 M 图的规律检查内力图的正确性，可以确保结果正确。

例 5.6.3 作出具有中间铰链（图 5.6-5 (a)）梁的弯矩图。

解

(1) 求支反力：在中间铰链处将梁拆开成两部分，其间的相互作用力以 Q_B 代替，如图 5.6-5 (b) 所示。显然，拆开后连续梁可以看成是一个受集中力偶的简支梁和一个梁上受均布力、自由端受集中力 Q_B 的悬臂梁。

由简支梁 AB 很容易求出 Q_B ：

$$Q_B = Y_A = \frac{1}{2} qa$$

(2) 分别作简支梁 AB 和悬臂梁 BC 的弯矩图，如图 5.6-5 (c)。因单个梁的弯矩图很容易得到，作图过程在此不再赘述。注意两个梁的弯矩图应合并画在同一条水平轴线上。

$$|M|_{\max} = qa^2$$

解题指导：①求解有中间铰链的连续梁问题，一般都从铰链处拆开。拆开后能独立存在的部分称为主梁，如图中的 BC 梁；不能独立存在的部分称为辅梁，如图中的 AB 梁。先从辅梁上解出铰链处的约束力，再把此约束力当作外荷载加到主梁上，这样就变成了两个简单梁，作这两个简单梁的内力图并连接到一起，即为有中间铰链梁的内力图。②注意中间铰链 B 允许所连接的两部分有相对转动，故中间铰链只能传递力不能传递力偶。因此只要铰链左右两侧没有集中力偶，其弯矩应为零。

例 5.6.4 利用剪力、弯矩与荷载集度的关系作图 5.6-6 所示梁的剪力图和弯矩图。

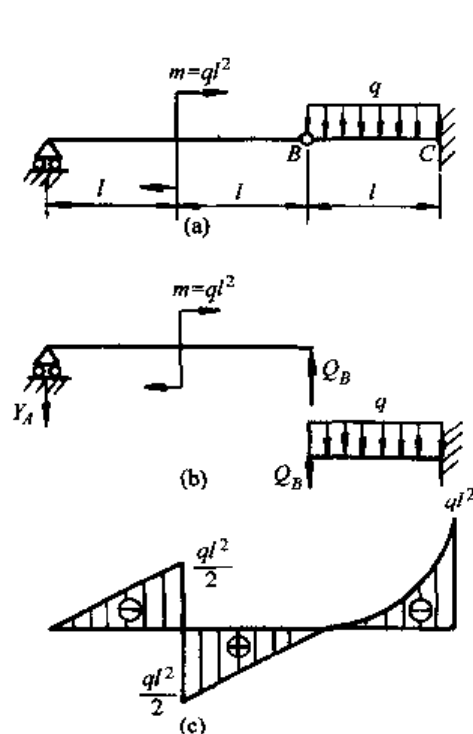


图 5.6-5

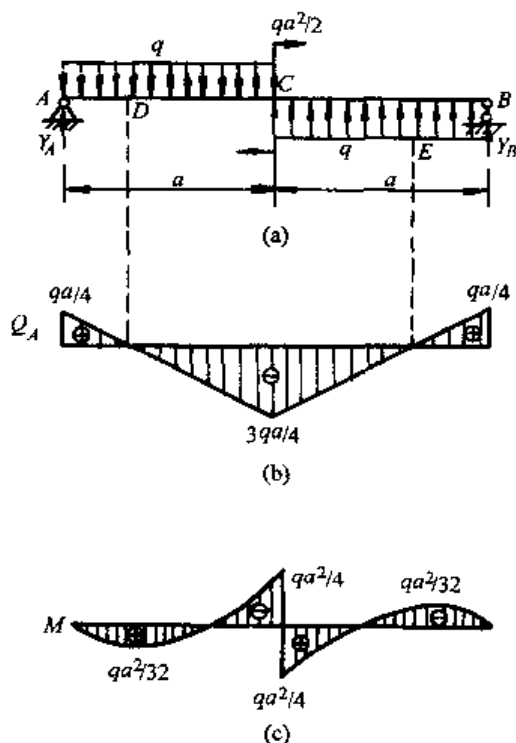


图 5.6-6

解 计算支座反力 $Y_A = Y_B = qa/4$

AC 段剪力: $q = c < 0$, 剪力为下降的斜直线, A 点剪力: $Q_A = qa/4$, C 点偏左剪力: $Q_{C左} = -3qa/4$ 。

AC 段弯矩: $q = c < 0$, 弯矩为下凸抛物线, A 点弯矩: $M_A = 0$, C 点偏左弯矩:

$$M_{C左} = y_A \times a - \frac{1}{2} qa^2 = \frac{1}{4} qa^2 - \frac{1}{2} qa^2 = -\frac{1}{4} qa^2$$

在距离 A 端支座为 $a/4$ 的 D 处, 剪力等于零, 弯矩在此截面应有极值:

$$M_D = y_A \times \frac{a}{4} - \frac{1}{2} q \times \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{qa^2}{32}$$

BC 段剪力: $q = c > 0$, 剪力为上升的斜直线, C 点剪力: 因 C 点无集中力, 剪力在 C 点连续, C 点偏右剪力: $Q_{C右} = Q_{C左} = -3qa/4$; B 点剪力: $Q_B = qa/4$

BC 段弯矩: $q = c > 0$, 弯矩为上凸抛物线, C 点偏右弯矩: $M_{C右} = qa^2/4$, B 点弯矩: $M_B = 0$ 。在距离 B 端支座为 $a/4$ 的 E 处, 剪力等于零, 弯矩有极值: $M_E = -qa^2/32$

根据以上分析和计算, 画出剪力、弯矩图如图 5.6-6 (b)、(c) 所示。

解题指导: 熟练掌握剪力、弯矩图的规律, 可以不写剪力、弯矩方程, 直接绘图。对称结构承受反对称荷载时, 剪力图是对称的, 弯矩图是反对称的。

5.7 弯曲应力

5.7.1 基本概念和主要公式

1. 弯曲正应力

(1) 纯弯曲梁的弯曲正应力。

纯弯曲: 若梁的某一段横截面上的剪力 Q 等于零, 只有弯矩 M 不为零, 称此段梁为纯弯曲。纯弯曲段梁的弯矩为常数。

横力弯曲: 梁的横截面上同时有弯矩 M 和剪力 Q , 称为横力弯曲。

中性层: 弯曲后梁的所有的纵线都弯成曲线, 靠近下缘的纵线伸长, 靠近上缘的纵线缩短。其中有一层纵线弯曲时既不伸长, 也不缩短, 称此层为中性层。中性层与横截面的交线称为中性轴。线弹性平面弯曲时, 中性轴通过横截面形心, 且垂直于弯矩作用平面。见图 5.7-1 所示。

以中性轴为 z 轴, y 轴向下为正, 设弯曲后中性层的曲率半径为 ρ (图 5.7-2), 则距中性轴为 y 处的纵向线应变为

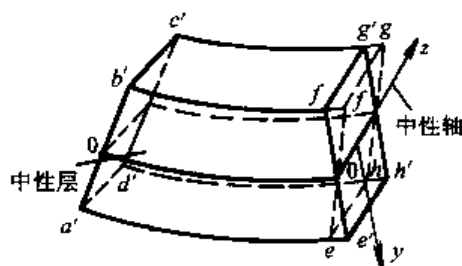


图 5.7-1

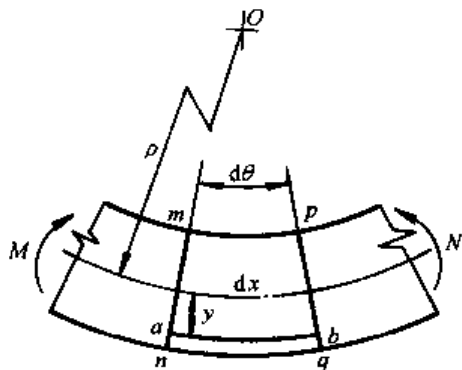


图 5.7-2

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (5.7-1)$$

线应变沿截面高度线性变化。中性轴上各点处的线应变均为零。

中性层曲率与弯矩关系：

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad (5.7-2)$$

式中， I_z 为截面对 z 轴的惯性矩；乘积 EI_z 称为梁的抗弯刚度。

弯曲正应力公式

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad (5.7-3)$$

弯曲正应力沿截面高度线性变化，中性轴上各点处的正应力均为零。

(2) 横力弯曲梁的弯曲正应力。式 (5.7-1) ~ (5.7-3) 是在平面假设（平面假设即横截面变形后仍保持平面，且与变形后的轴线正交）前提下对纯弯梁推导的结果，此假设对于纯弯梁是正确的；横力弯曲梁弯曲变形后截面发生翘曲，不再满足平面假设。但对于细长梁，如梁长 l 与梁高 h 之比 $l/h \geq 5$ 时，横力弯曲的正应力仍可使用纯弯曲的计算公式，因为由此产生的误差 $\leq 2\%$ ，可以满足工程要求。纯弯曲正应力计算公式也可以近似应用到小曲率杆的弯曲中。

2. 弯曲切应力

矩形截面梁的弯曲切应力。设横截面上各点处的切应力均平行于剪力或截面侧边，并沿横截面宽度均匀分布。距中性轴为 y 处的弯曲切应力公式

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b} \quad (5.7-4)$$

式中， Q 为横截面上的剪力； I_z 为整个横截面对中性轴 z 的惯性矩； S_z^* 为距中性轴 y 处横线一侧的部分截面（图 5.7-4y 阴影部分面积）对中性轴 z 的静矩； b 为 y 处横线截面的宽度。

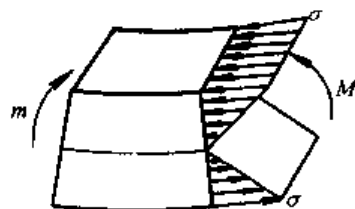


图 5.7-3

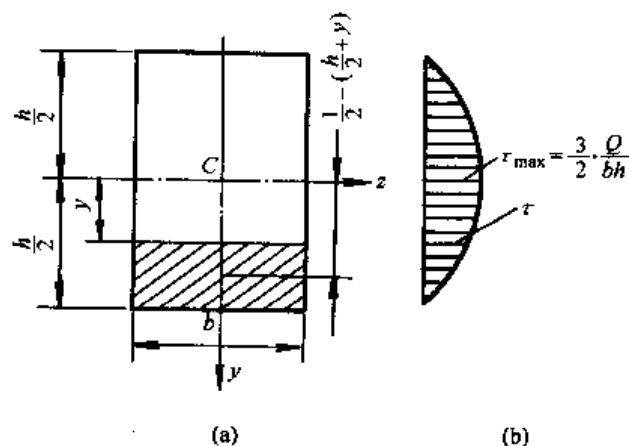


图 5.7-4

切应力沿截面高度呈抛物线分布。最大切应力在中性轴处，其值为

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A} \quad (5.7-5)$$

式中, A 为横截面面积。

3. 弯曲强度条件

1) 弯曲正应力强度条件

横截面上离中性轴 z 最远 ($y = y_{\max}$) 的各点处, 有最大弯曲正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{I_z/y_{\max}} = \frac{M}{W_z} \quad (5.7-6)$$

式中,

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (5.7-7)$$

称为抗弯截面模量。

矩形截面抗弯截面模量

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \quad (5.7-8)$$

圆形截面抗弯截面模量

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \quad (5.7-9)$$

空心圆截面抗弯截面模量

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \quad (5.7-10)$$

式中, $\alpha = \frac{d}{D}$ 。

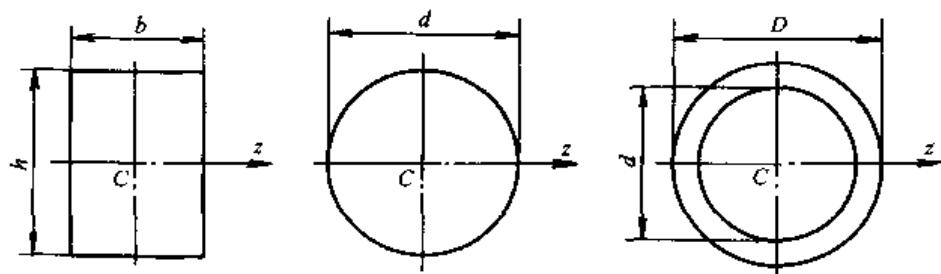


图 5.7-5

对于塑性材料, 其抗力、压能力相等, 弯曲正应力强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (5.7-11)$$

式中, σ_{\max} 是横截面上绝对值最大的正应力。

对于铸铁等脆性材料, 许用拉应力 $[\sigma_t]$ 小于许用压应力 $[\sigma_c]$, 则应按拉伸与压缩应力分别进行强度计算

$$\sigma_{t\max} \leq [\sigma_t] \quad \sigma_{c\max} \leq [\sigma_c] \quad (5.7-12)$$

利用强度条件式 (5.7-11) 或式 (5.7-12) 可以解决以下三类问题:

(1) 强度校核。

(2) 设计截面尺寸, $W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$, 由 W_z 选择截面尺寸。

(3) 确定许可荷载, $M_{\max} \leq [\sigma] W_z$ 。

2) 弯曲切应力强度条件

对于等截面直梁, 切应力强度条件为

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{z\max}^*}{I_z b} \leq [\tau] \quad (5.7-13)$$

式中, Q_{\max} 为梁横截面最大剪力; 弯曲最大切应力通常发生在中性轴处, 因此, $S_{z\max}^*$ 为中性轴一侧的横截面面积对中性轴的静矩; b 为中性轴处截面宽度; I_z 为整个横截面对中性轴的惯性矩。

利用切应力的强度条件, 同样可以处理强度校核, 截面设计以及确定许可荷载等三类问题。

3) 弯曲中心的概念

当横向力作用平面平行于形心主惯性平面并通过某一特定点时, 杆件只发生弯曲而无扭转, 则称该点为弯曲中心。弯曲中心实际上是横截面上弯曲切应力的合力作用点, 因此弯曲中心又称为剪切中心。

薄壁截面梁横截面上的切应力沿壁厚均匀分布, 作用线平行于截面边缘的切线方向, 形成“切应力流”。

设横向力 P 均垂直向下, 并过截面形心, 图 5.7-6 所示工字形和槽形两种薄壁截面的切应力流如图 5.7-6 (a)、图 5.7-6 (b) 所示。显然, 图 5.7-6 (b) 截面上的切应力合力 Q 并不能与外力 P 平衡, 其切应力的合力作用在 A 点, 与外力 P 作用点 C 有偏心距 e , 如图 5.7-6 (c) 所示。剪力 Q 与外力 P 大小相等, 方向相反, 形成力偶, 使杆件发生扭转变形。若要杆件只发生弯曲变形而无扭转, 需要将外力 P 作用点平移到 A 点。 A 点即为图 5.7-6 (b) 槽形薄壁截面的弯曲中心。

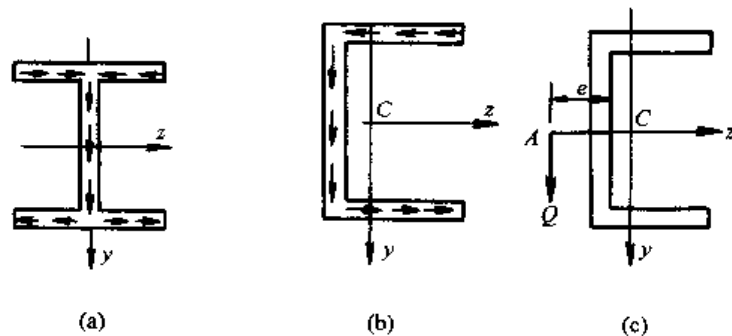


图 5.7-6

4) 弯曲中心的特征

(1) 弯曲中心的位置仅取决于横截面的形状与尺寸, 与外力无关。

(2) 若截面具有一个对称轴时, 弯曲中心必位于该对称轴上; 若截面具有两个对称轴, 两轴交点必是弯曲中心; 由两个狭长矩形组成的截面, 如 T 形, L 形, 十形等, 弯曲中心必位于该两个狭长矩形中线的交点。

(3) 对于不对称实心截面, 其弯曲中心靠近形心。此种截面在荷载作用线通过形心时也将引起扭转; 不过这种截面的抗扭刚度较大, 通常可不考虑它的扭转影响。由于薄壁截面杆的抗扭刚度较小, 必须考虑其弯曲中心位置, 避免横力引起扭转变形。

5.7.2 重点与难点

(1) 若已知杆件弯曲成的曲率半径 ρ 的缘弧时, 由式 (5.7-2) $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}$ 可以求出所施加弯矩。

(2) 发生平面弯曲的条件为：①外力偶作用平面与梁的形心主惯性平面平行；②横向外力作用平面与梁的形心主惯性平面平行并通过截面的弯曲中心。

(3) 通常在进行弯曲强度计算时，应先画出梁的剪力图和弯矩图，在弯矩（绝对值）最大的截面校核弯曲正应力强度，在剪力（绝对值）最大截面校核弯曲切应力强度。

(4) 对于铸铁一类脆性材料梁进行弯曲强度计算时，应找出全梁的最大拉压正应力，然后再分别进行拉、压强度校核。当梁上同时存在正、负弯矩，且横截面以下不对称时，最大拉（或压）应力可能不是在弯矩绝对值最大截面上。

(5) 在进行梁的截面设计时，应同时满足正应力和切应力的强度条件，一般先按正应力强度条件选择截面，然后再进行切应力强度校核。

(6) 最大切应力通常总是发生在中性轴上。

矩形截面最大切应力： $\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$ ；圆形截面最大切应力： $\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}$ ；

圆环形截面最大切应力： $\tau_{\max} = 2 \frac{Q}{A}$ 。

5.7.3 例题和解题指导

例 5.7.1 将一根直径 $d = 1 \text{ mm}$ 的直钢丝绕于直径 $D = 1 \text{ m}$ 的卷筒上（图 5.7-7），已知钢丝的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ ，试求钢丝由于弹性弯曲而产生的最大弯曲正应力。又材料的屈服极限 $\sigma_s = 350 \text{ MPa}$ ，求不使钢丝产生塑性变形的卷筒轴径 D_1 应为多大。

解

(1) 最大弯曲正应力。由式 (5.7-2)，有曲率与弯矩间的关系：

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

即

$$M = \frac{EI_z}{\rho}$$

$$\text{又 } \sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{EI_z y}{\rho I_z} = \frac{Ey}{\rho} = \frac{200 \times 10^9 \times 0.5 \times 10^{-3}}{0.5} = 200 \text{ (MPa)}$$

(2) 求轴径 D_1 ：

$$\sigma_{\max} = \frac{Ey}{\rho} = \sigma_s$$

则

$$\rho = \frac{Ey}{\sigma_s} = \frac{200 \times 10^9 \times 0.5 \times 10^{-3}}{350 \times 10^6} = 0.285 \text{ (m)}$$

得轴径 $D_1 = 0.571 \text{ m}$

解题指导：钢丝的直径 d 远小于卷筒的直径 D ，因此钢丝的曲率半径可以近似为

$$\rho = \frac{D}{2} + \frac{d}{2} \approx \frac{D}{2}。$$

例 5.7.2 T 字形截面铸铁梁的荷载及截面尺寸如图 5.7-8 (a) 所示，C 为 T 形截面的形心，惯矩 $I_z = 6.013 \times 10^4 \text{ (mm}^4\text{)}$ ，材料的许可拉应力 $[\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$ ，许可压应力 $[\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$ ，试校核梁的强度。

解 梁弯矩图如图 5.7-8 (b) 所示。绝对值最大的弯矩为负弯矩，发生于 B 截面上，应力分布如图 5.7-8 (c) 所示。此截面最大拉、压应力分别发生于截面上、下边缘各点处。

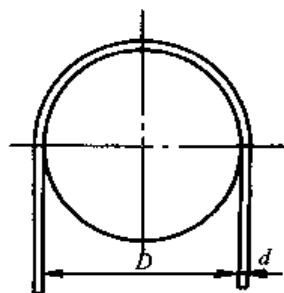


图 5.7-7

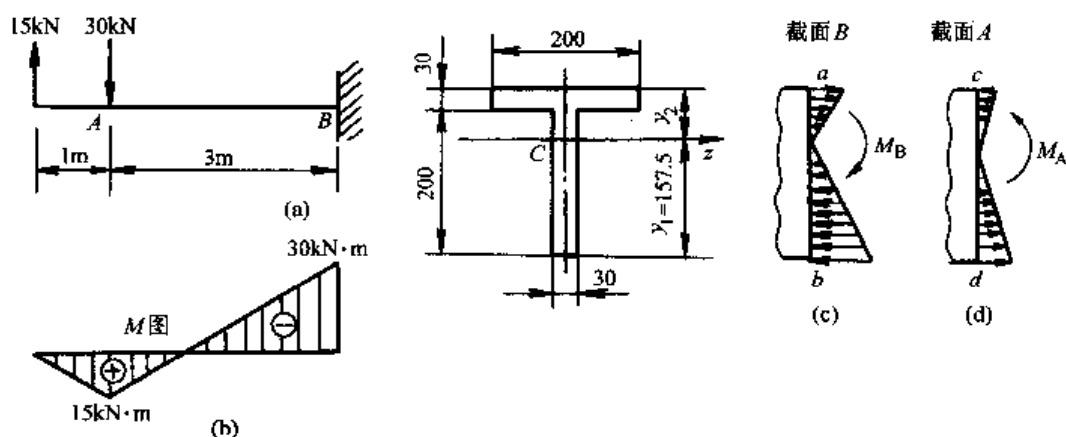


图 5.7-8

$$(\sigma_t)_B = \frac{M_B y_2}{I_z} = \frac{30 \times 10^6 (230 - 157.5)}{6\,013 \times 10^4} = 36.2 (\text{MPa}) < [\sigma_t]$$

$$(\sigma_c)_B = \frac{M_B y_1}{I_z} = \frac{30 \times 10^6 \times 157.5}{6\,013 \times 10^4} = 78.6 (\text{MPa}) < [\sigma_c]$$

虽然 A 截面弯矩的绝对值 $|M_A| < |M_B|$, 但 M_A 为正弯矩, 应力分布如图 5.7-8 (d) 所示。最大拉应力发生于截面下边缘各点, 由于 $y_1 > y_2$, 因此, 全梁最大拉应力究竟发生在哪个截面上, 必须经计算才能确定。A 截面最大拉应力为

$$(\sigma_t)_A = \frac{M_A y_1}{I_z} = \frac{150 \times 10^6 \times 157.5}{6\,013 \times 10^4} = 39.3 (\text{MPa}) < [\sigma_t]$$

最大压应力在 B 截面下边缘处, 最大拉应力在 A 截面下边缘处, 都满足强度条件。

解题指导: 由此例可知, 对于铸铁等脆性材料, 由于拉、压许可应力不等, 通常制成上、下不对称截面, 以充分发挥材料的承载潜力。应特别注意此种梁的弯矩有正、有负时, 可能出现两个危险截面, 而且两个危险点可能不在同一个截面上。

例 5.7-3 矩形截面悬臂梁如图 5.7-9 所示, 试计算梁的最大切应力和最大正应力并比较大小。

解 梁的最大弯矩在固定端处, $M_{\max} = Pl$, 剪力在梁的各截面均为常数, 危险截面在固定端处。

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6Pl}{bh^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh}$$

$$\text{应力比} \quad \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{h}{4l}$$

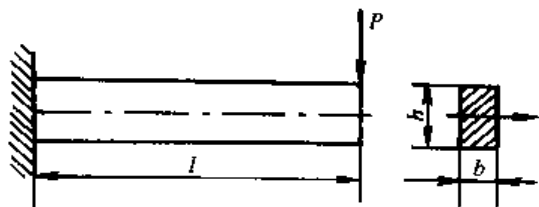


图 5.7-9

解题指导: 对于细长梁, 如 $l = 5h$, 则有 $\tau_{\max} = 0.05 \sigma_{\max}$, 亦即最大切应力远小于最大正应力。这一结论适用于通常的非薄壁截面梁 (指厚壁截面梁及实心截面梁)。

一般说来, 非薄壁截面细长梁横力弯曲的强度计算可以只考查正应力强度, 不必考虑切应力。但对于顺纹方向抗剪强度差的材料, 如木制梁及切应力较大的薄壁截面梁或短梁 (跨度与梁的高度比小于 5), 则需同时进行正应力和切应力的计算。

例 5.7.4 图 5.7-10 所示悬臂梁由三块胶合在一起, 截面尺寸为: $b = 100 \text{ mm}$, $a = 50 \text{ mm}$ 。已知木材的 $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$, $[\tau] = 1 \text{ MPa}$, 胶合面的 $[\tau_j] = 0.34 \text{ MPa}$ 。试求许可荷载 $[P]$ 。

解

(1) 由梁的抗拉强度确定的许可荷载 P_1 :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6P_1 l}{bh^2} \leq [\sigma] \quad (a)$$

$$P_1 \leq \frac{bh^2[\sigma]}{6l} = \frac{100 \times 150^2 \times 10}{6 \times 1000} = 3.75 (\text{kN})$$

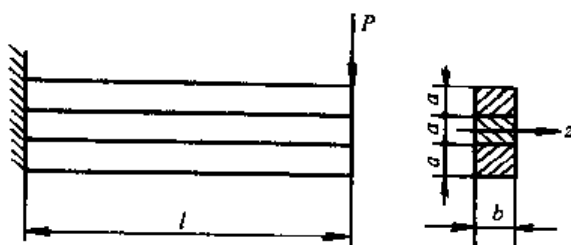


图 5.7-10

(2) 由梁的剪切强度确定的许可荷载 P_2 :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P_2}{bh} \leq [\tau], \quad P_2 \leq \frac{2[\tau]bh}{3} = \frac{2 \times 1 \times 100 \times 150}{3} = 10 (\text{kN})$$

(3) 由胶合面的剪切强度确定的许可荷载 P_3 :

$$\tau_j = \frac{QS_z^*}{I_z b} = \frac{P_3 S_z^*}{I_z b} \leq [\tau_j], \quad P_3 = \frac{[\tau_j] I_z b}{S_z^*}$$

$$S_z^* = 100 \times 50 \times 50 = 2.5 \times 10^5$$

$$P_3 = \frac{0.34 \times 100^2 \times 150^3}{12 \times 2.5 \times 10^5} = 3.83 (\text{kN})$$

在三个荷载中选择最小的, 得胶合梁的许可荷载 $[P] = 3.75 (\text{kN})$ 。

解题指导: 在上面胶合梁中假如胶合层发生破坏, 则杆的弯曲特性随之而改变, 抗弯强度将会显著降低。设三个梁接触面间摩擦力甚小, 每个梁可以自由弯曲, 且弯曲曲率完全一样。这时, 可近似认为每个梁上承担的外力等于 $P/3$, 则每一梁的最大正应力等于

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{(P/3)l}{b(h/3)^2/6} = \frac{6Pl}{bh^2} \times 3$$

与式 (a) 比较, 最大正应力增加了三倍。

例 5.7.5 开口薄壁圆环壁厚 $t \ll R$ (图 5.7-11), 剪力 Q 的方向铅垂向下。试求截面的弯曲中心位置。

解 在环中心线上角 θ 处的切应力可用式 (5.7-4) 计算。截面对中性轴 z 的惯矩为 $I_z = \pi t R^3$, 而 DB 扇形面积对 z 轴的静矩为

$$S_z^* = \int_0^\theta (R \sin \varphi) t R d\varphi = R^2 t (1 - \cos \theta)$$

切应力

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z t} = \frac{Q(1 - \cos \theta)}{t \pi R}$$

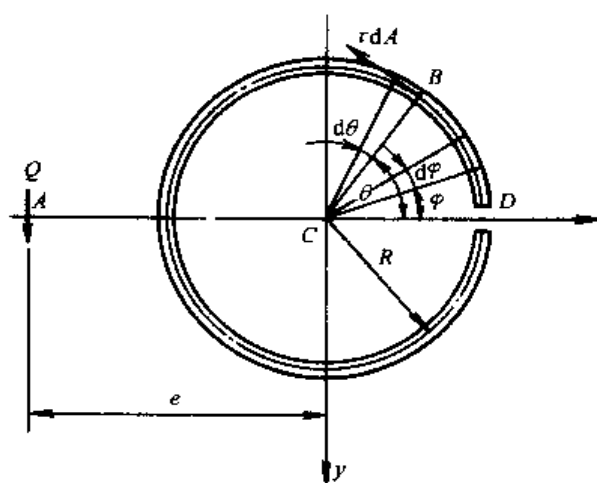


图 5.7-11

微面积 $dA = R t d\theta$ 上的微剪力 τdA 对截面形心 C 的合力矩为

$$M_C = \int_0^{2\pi} \tau \cdot dA \cdot R = \int_0^{2\pi} \frac{Q(1 - \cos\theta)}{t\pi R} R^2 t \cdot d\theta$$

设截面上切应力的合力通过弯曲中心 A 。根据合力矩定理, 合力 Q 对 C 点之矩应等于 M_C , 即 $Q \cdot e = M_C = Q \cdot 2R$, 于是 $e = 2R$, 故弯曲中心 A 离截面形心 C 的距离为 $2R$ 。

解题指导: 由结果可知, 弯曲中心的位置与外力无关, 因此弯曲中心是截面的几何性质。

5.8 弯曲变形

5.8.1 基本概念和主要公式

1. 梁的挠曲线、挠度与转角

挠曲线: 在外力作用下, 梁的轴线由直线变为一条连续而光滑的曲线, 如图 5.8-1, 弯曲变形后的轴线称为挠曲线。在平面弯曲下, 挠曲线位于形心主惯性平面 (或纵向对称平面) 内。在小变形的条件下, 细长梁在剪力作用下的变形忽略不计, 截面形心的轴向位移也可忽略不计。因此, 梁的变形用如下两个基本量度量。

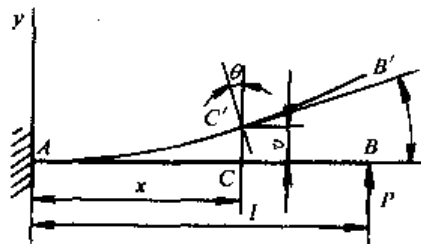


图 5.8-1

挠度: 横截面形心在垂直于梁轴线方向的位移称为挠度, 用 v 表示, 向上为正。梁各横截面挠度的变化规律是 x 的函数

$$v = f(x) \quad (5.8-1)$$

称为梁的挠曲线方程。

转角: 横截面相对原始位置绕中性轴转过的角度, 称为转角, 用 θ 表示, 以逆时针为正。在小变形和平面假设下, 任一横截面的转角 θ 与挠曲线在该截面处的斜率有如下关系

$$\theta = \frac{dv}{dx} \quad (5.8-2)$$

即横截面的转角等于挠曲线在该截面处的斜率。

2. 挠曲线近似微分方程

在线弹性范围, 挠曲线曲率与弯矩有以下关系:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \quad (5.8-3)$$

式中, $1/\rho(x)$ 为挠曲线上任一点处的曲率, EI 为弯曲刚度。

在小变形条件下挠曲线近似微分方程为

$$v'' = \frac{M(x)}{EI} \quad (5.8-4)$$

3. 梁变形的求解

(1) 积分法求梁变形

将挠曲线近似微分方程式 (5.8-4) 积分两次, 得转角方程和挠曲线方程

$$\theta(x) = v' = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C \quad (5.8-5)$$

$$v(x) = \int \left[\int \frac{M(x)}{EI} dx \right] dx + Cx + D \quad (5.8-6)$$

式中, C 与 D 为积分常数, 可利用梁的支座约束条件和挠曲线及转角方程必须连续的条件确定。这些条件称为确定积分常数的边界条件。

积分法是分析梁位移的基本方法。在梁的弯矩方程或抗弯刚度不连续处, 应分段建立挠曲线近似微分方程, 并分段积分 (如分 n 段, 则积分常数共有 $2n$ 个)。在分段处, 挠曲线应光滑 (转角连续)、连续, 即分段截面两侧具有相同的挠度与转角。

2. 叠加法求梁变形

在线弹性小变形条件下, 梁的挠度与转角为梁上荷载的线性齐次式, 故可应用叠加法来计算梁的变形, 即梁上同时受几个荷载作用时的变形, 等于各荷载分别单独作用引起变形的代数和。利用叠加法求梁变形的步骤是, 首先按荷载分解梁, 使之成为几个简单梁, 每个简单梁上只承受一种荷载, 再计算或从表上查得各简单梁的变形, 然后叠加得到总变形。

叠加法更适用于求梁内指定截面的挠度与转角。

3. 卡氏第二定理求梁变形

梁平面弯曲的应变能为

$$U = \int_l \frac{M^2(x)}{2EA} dx = \int_l \frac{EI}{2} (v'')^2 dx \quad (5.8-7)$$

线性弹性体 (杆、结构) 的应变能 U 对任一广义力 P_i 的偏导数, 等于该力对应的广义位移 δ_i 。此关系称为卡氏 (Castigliano) 第二定理。即

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (5.8-8)$$

对于梁, 如广义力 P_i 为力, 广义位移 δ_i 表示 P_i 所在截面沿 P_i 方向的挠度; 如广义力 P_i 为力偶, 广义位移 δ_i 表示 P_i 所在截面的沿力偶方向的转角。若求得的广义位移 δ_i 为正, 表明该位移 δ_i 与相应广义力 P_i 同向, 反之则反向。

由于应变能是对截面位置 x 积分, 卡氏第二定理是对广义力 P_i 求导, 二者互不干扰, 故可以先积分后求导, 或先求导后积分。为计算简便, 可直接应用下面公式计算位移

$$\delta_i = \int_l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial P_i} dx \quad (5.8-9)$$

若杆件上作用着多种内力, 可用下面公式计算广义位移

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \int_l \frac{N(x)}{EA} \frac{\partial N(x)}{\partial P_i} dx + \int_l \frac{M_T(x)}{GI_p} \frac{\partial M_T(x)}{\partial P_i} dx + \int_l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial P_i} dx \quad (5.8-10)$$

4. 梁的刚度条件和提高梁刚度的措施

根据梁弯曲变形时的正常工作要求, 对某些截面的挠度或转角要加以限制。如果许可挠度和许可转角分别记作 $[v]$ 和 $[\theta]$, 则刚度条件可以写作

$$\theta_{\max} \leq [\theta], v_{\max} \leq [v] \quad (5.8-11)$$

$[v]$ 和 $[\theta]$ 的数值根据构件的具体工作条件决定。

5. 变形比较法求解简单超静定（静不定）梁

梁的约束反力数目超过了有效平衡方程数，单纯使用静力平衡不能确定全部未知力的梁称为超静定梁。

多余约束：超出维持平衡所必须的约束称为多余约束，相应的约束反力称为多余约束反力。超静定的次数等于多余约束或多余约束反力的个数。

超静定梁比静定梁有许多优点，如可用较少材料获得较大的刚度和强度，个别约束破坏后仍可工作等。因而超静定梁在工程中得到较多的应用。

超静定梁的解法：①首先去掉多余约束得到静定基；②以约束反力代替去掉的多余约束加到静定基上；③比较多余约束处的变形，多余约束处的变形必须与原超静定梁在该处的约束相一致，由此列出变形协调条件；④利用物理关系，将变形协调条件的位移关系转换成力之间的关系，得到补充方程；⑤补充方程与静力平衡方程联立求解，得到全部未知力。

超静定梁的这种解法称为变形比较法。多余约束的选择不是惟一的，可有不同选择方式，应以便于计算为宜。

5.8.2 重点和难点

(1) 积分法是求解梁变形的最基本方法。注意梁的挠曲线微分方程是建立在以梁左端为坐标轴原点， x 轴向右为正， y 轴向上为正的坐标系上。如使用不同坐标系，必须注意正负号。

(2) 积分法求梁变形时，需注意正确利用挠曲线光滑连续特性寻找确定积分常数的条件。

(3) 对于一些荷载未知，但曲率已知的情况，可利用式 (5.8-3) $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$ 求解。

(4) 为提高梁的弯曲刚度，可以选择弹性模量高的材料。但需注意，各种钢材极限应力差别较大，但它们的弹性模量却相当接近，选用优质钢材只能提高梁的强度并不能提高刚度。

(5) 卡氏第二定理适用于求解线弹性杆（或结构）在小变形下的任意截面和方向的位移。不但能够处理直杆，还可以计算曲杆的位移。

(6) 广义力 P 可以是一个力、一个力偶或分布荷载。广义位移 δ 与广义力 P 的乘积代表广义力的功。与力相应的广义位移是线位移；与力偶相应的广义位移是角位移；与一对力相应的广义位移是该对力作用点的相对线位移；与一对力偶相应的广义位移是该对力偶作用点的相对角位移。

(7) 用卡氏第二定理计算杆或结构上任一点的广义位移时，该点必须作用有与广义位移相应的广义力。如果没有这样的广义力，可在该点加上一个相应的广义力，在求导后，再令所加的广义力等于零。此法称为附加力法。

(8) 因为应变能是内力分量或变形的二次函数，所以两个以上外力引起的同一种基本变形的总应变能不等于各个荷载单独作用引起应变能的叠加。

因为杆件各个基本变形的应变能之间没有耦和关系，所以杆件发生两种以上基本变形时，杆件的总应变能等于各基本变形应变能的叠加。

(9) 用变形比较法解梁的超静定问题中，使用叠加法和卡氏第二定理求多余约束处的位移更为方便。

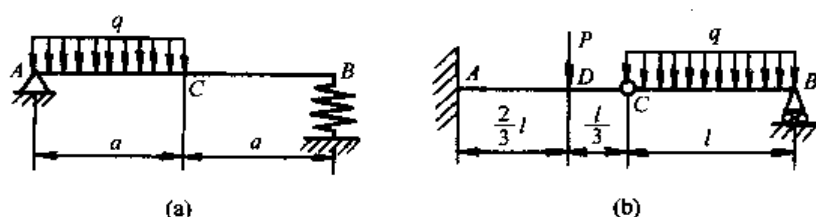


图 5.8-2

5.8.3 例题及解题指导

例 5.8.1 用积分法求图 5.8-2 所示梁挠曲线方程时, 要分几段积分? 将出现几个积分常数? 列出确定其积分常数条件 (弹簧刚度为 k)。

解

(1) 图 (a) 分两段积分, ①AC 段, ②CB 段。4 个积分常数。

边界条件 $v_A = 0, v_B = R_B/k$ (R_B 为 B 点支反力)

连续条件 $v_{C1} = v_{C2}, \theta_{C1} = \theta_{C2}$

(2) 图 (b) 分三段积分, ①AD 段, ②DC 段, ③CB 段。6 个积分常数。

边界条件 $v_A = 0, \theta_A = 0, v_B = 0$

连续条件 $v_{D1} = v_{D2}, \theta_{D1} = \theta_{D2}, v_{C2} = v_{C3}$

解题指导: ①在荷载突变处、中间约束处、截面变化处 (惯性矩 I 突变处) 及材料变化处 (弹性模量 E 值突变处) 均应作为分段积分的分段点; ②中间铰链连接了两根梁, 也应作为分段点; ③各分段点处都应列出连续条件, 中间铰链只限制了两梁在该点的相对位移, 不能限制转动, 故只有一个挠度连续条件。

例 5.8.2 变截面简支梁受到集中力 P 的作用, 如图 5.8-3 (a) 所示, 试用叠加法计算梁自由端 B 处的挠度 v_B 和转角 θ_B 。

解 由于梁在 C 截面处截面尺寸发生变化, 须分两段计算变形, 再进行叠加。首先将梁沿截面变化处 C 截开, 把 CB 段梁暂时看做是在 C 处固支的悬臂梁 (图 5.8-3 (b)), 利用材料力学教材上的典型梁变形表可得 B 点位移:

$$\theta_{B1} = \frac{P(l/2)^2}{2EI} = \frac{Pl^2}{8EI} (\curvearrowright)$$

$$v_{B1} = \frac{P(l/2)^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{24EI} (\downarrow)$$

再求 AC 段 C 截面位移。将外力 P 向 C 点平移, C 点受两个外力: 集中力 P 和集中力偶 $Pl/2$ 。查表可得

$$\theta_C = \frac{P(l/2)^2}{2E(2I)} + \frac{(Pl/2)(l/2)}{E(2I)} = \frac{3Pl^2}{16EI}$$

$$v_C = \frac{P(l/2)^3}{3E(2I)} + \frac{(Pl/2)(l/2)^2}{2E(2I)} = \frac{5Pl^3}{96EI}$$

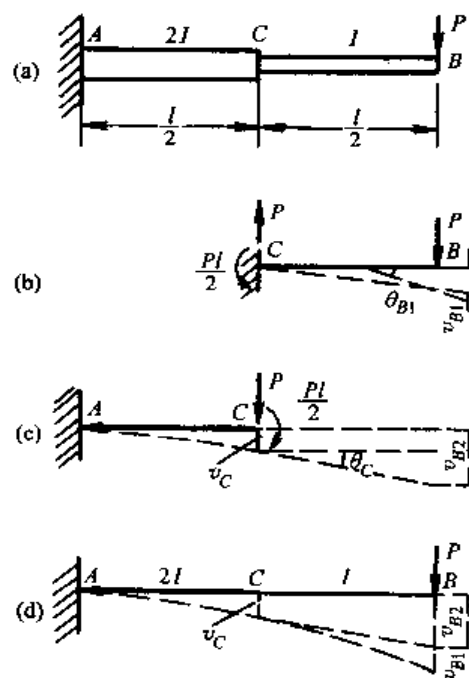


图 5.8 3

注意梁 CB 段的 C 截面是固定在梁 AC 段的 C 截面上, AC 段 C 截面的位移必然会牵动 CB 段, 因此将梁 CB 段下移 v_C , 再使整个 CB 段转动 θ_C 角, 则 CB 段即与图 5.8-3 (c) 的 AC 段衔接而得到整个梁的变形, 如图 5.8-3 (d)。在此拼合过程中 B 点又获得额外的转角 θ_{B2} 和挠度 v_{B2} , 由图 8-10 (c) 可知

$$\theta_{B2} = Q_C$$

$$v_{B2} = v_C + \theta_C \frac{l}{2} = \frac{5Pl^3}{96EI} + \frac{3Pl^2}{16EI} \times \frac{l}{2} = \frac{14Pl^3}{96EI}$$

于是 B 端的挠度和转角为

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} = \frac{Pl^2}{8EI} + \frac{3Pl^2}{16EI} = \frac{5Pl^2}{16EI}$$

$$v_B = v_{B1} + v_{B2} = \frac{Pl^3}{24EI} + \frac{14Pl^3}{96EI} = \frac{3Pl^3}{16EI}$$

解题指导: 此例题设所给出的结构无法由手册或表格中查到, 因此对结构进行了分解, 将其等效化处理为可查表结构, 然后再对结构叠加。叠加原理, 既可以用于荷载的叠加, 也可以用于结构的叠加。

例 5.8.3 抗弯刚度为 EI 的梁支于弹簧刚度为 K 的两个弹簧上, 如图 5.8-4 所示。试用卡氏定理求 C 点挠度。

解

(1) 求支反力, $R_A = P$, $R_B = 2P$ 。

(2) 系统的应变能。弹簧储存的应变能:

弹簧 AA_1 的应变能

$$U_1 = \frac{1}{2} R_A \cdot \frac{R_A}{K} = \frac{P^2}{2K}$$

弹簧 BB_1 的应变能

$$U_2 = \frac{1}{2} R_B \cdot \frac{R_B}{K} = \frac{2P^2}{K}$$

梁的应变能

$$U_3 = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^a \frac{M_2^2}{2EI} dx$$

总应变能: 横梁 AC 和两个弹簧组成一弹性系统。整个系统的能量是:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^a \frac{M_2^2}{2EI} dx + \frac{P^2}{2K} + \frac{2P^2}{K}$$

(3) 求 C 点挠度。将 $M_1 = -R_A x = -Px$, $M_2 = -Px$, 代入上面的应变能表达式, 再利用卡氏第二定理, 得

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^a \frac{M_1}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \int_0^a \frac{M_2}{EI} \frac{\partial M_2}{\partial P} dx + \frac{P}{K} + \frac{4P}{K} = \frac{2Pa^3}{3EI} + \frac{5P}{K}$$

解题指导: 卡氏定理如果用于几个弹性构件组成的弹性系统时, 应变能 U 应是整个弹性系统的总应变能。

解此题时, 也可先把 AC 看成一刚性杆, 由于弹簧变形, A 点上移 P/K , B 点下移

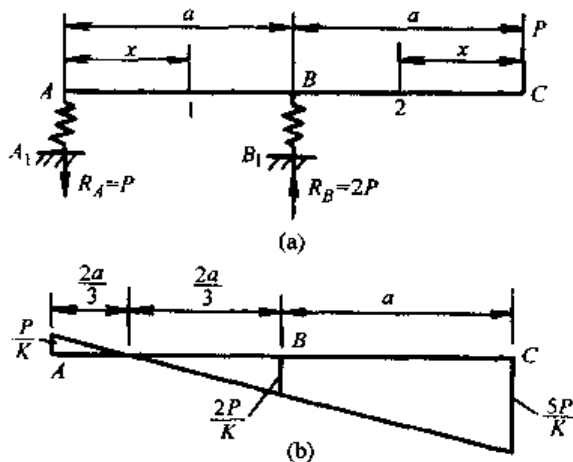


图 5.8-4

$2P/K$, 因而引起 C 点下移 $5P/K$ (见图 5.8-4 (b)), 此项位移即是上式中的第二项。再用卡氏第二定理求出 AC 杆弯曲而引起的 C 点下移, 即上式的第一项。 C 点总位移是这两项的代数叠加。

例 5.8.4 图示刚架各杆的 EI 相等, 试用卡氏第二定理求截面 A 的水平和垂直位移。

解 因求 A 点垂直位移时要对 A 点垂直荷载 P 求导, 为与水平荷载 P 区别分别将两个外力 P 记为 P_1 和 P_2 , 另为求 A 点的水平位移, 在 A 处施加一水平力 P_f 。如图 5.8-5 (b) 所示。在这些力作用下各杆的弯矩方程及其导数如下。

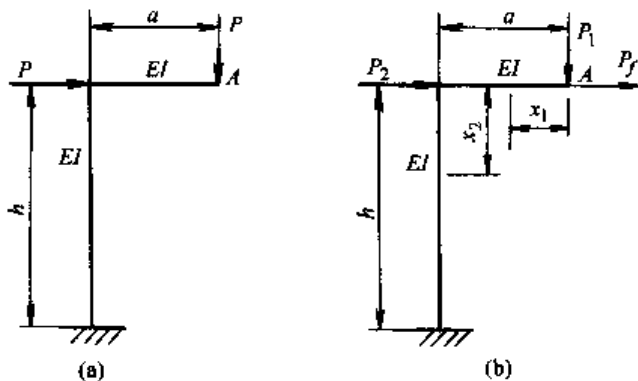


图 5.8-5

水平杆 ($0 \leq x \leq a$):

$$M(x_1) = -P_1 x_1, \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial P_1} = -x_1, \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial P_f} = 0$$

竖杆 ($0 \leq x_2 \leq h$):

$$M(x_2) = -P_1 a - (P_2 + P_f) x_2$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial P_1} = -a, \quad \frac{\partial M(x_2)}{\partial P_f} = -x_2$$

由卡氏第二定理得

$$\begin{aligned} \delta_{Ay} &= \int_0^a \left[\frac{M(x_1)}{EI} \frac{\partial M(x_1)}{\partial P_1} \right] dx_1 + \int_0^h \left[\frac{M(x_2)}{EI} \frac{\partial M(x_2)}{\partial P_1} \right]_{P_f=0} dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a (-P_1 x_1)(-x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^h (-P_1 a - P_2 x_2)(-a) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{P_1 a^3}{3} + P_1 a^2 h + \frac{P_2 a h^2}{2} \right) = \frac{Pa}{EI} \left(\frac{a^2}{3} + ah + \frac{h^2}{2} \right) \\ \delta_{Ax} &= \int_0^a \left[\frac{M(x_1)}{EI} \frac{\partial M(x_1)}{\partial P_f} \right] dx_1 + \int_0^h \left[\frac{M(x_2)}{EI} \frac{\partial M(x_2)}{\partial P_f} \right]_{P_f=0} dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a (-P_1 x_1)(0) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^h (-P_1 a - P_2 x_2)(-x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{P_1 a h^2}{2} + \frac{P_2 h^3}{3} \right) = \frac{Ph^2}{EI} \left(\frac{a}{2} + \frac{h}{3} \right) \end{aligned}$$

解题指导: 当所求位移处没有相应广义力时, 应附加一个广义力, 求导后再令附加力等于零。此法称为附加力法。

例 5.8.5 试解图 5.8-6 所示的超静定梁。

解

(1) 选择静定基。以 B 点约束作为多余约束, 将其除去, 代之以约束反力 R_B , 称之为静定基, 如图 5.8-6 (b)。

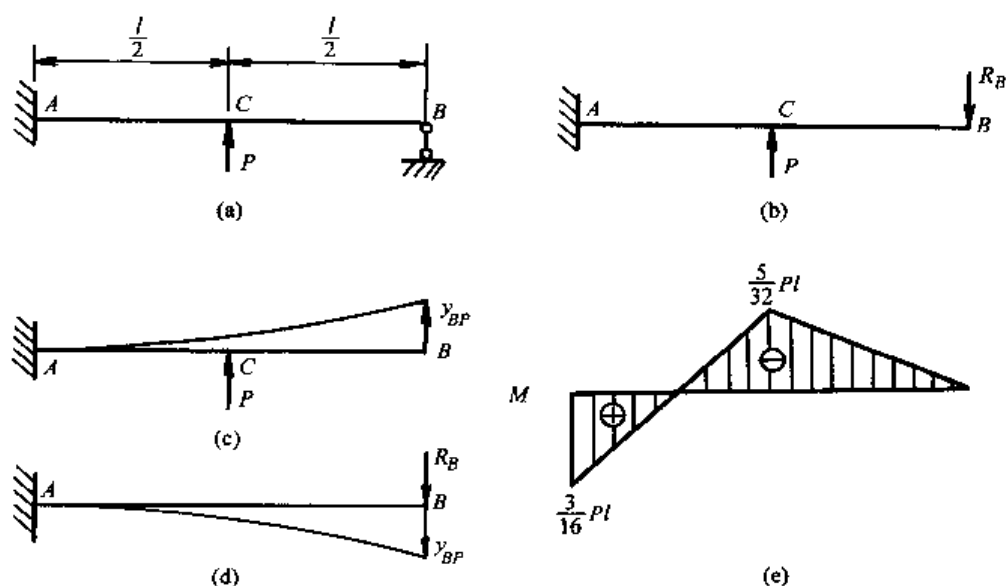


图 5.8-6

(2) 变形协调条件。多余约束 B 处梁的挠度应有:

$$v_B = 0,$$

(3) 利用叠加法求 v_B 。对应图 5.8-6 (b) 应有:

$$v_{BR} + v_{BP} = 0 \quad (a)$$

查表得

$$v_{BR} = -\frac{R_B l^3}{3EI} \quad (\downarrow)$$

$$v_{BP} = +\frac{P}{6EI} \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left(3l - \frac{l}{2}\right) = \frac{5Pl^3}{48EI} \quad (\uparrow)$$

将 v_{BR} 、 v_{BP} 代入式(a)有

$$-\frac{R_B l^3}{3EI} + \frac{5Pl^3}{48EI} = 0$$

解出

$$R_B = \frac{5P}{16}$$

解题指导: 用变形比较法求解超静定梁, 可以选择不同的静定基, 以便于求解为准。例如此例也可以选择 A 端的转角约束作为多余约束, 其静定基如图 5.8-7 所示。

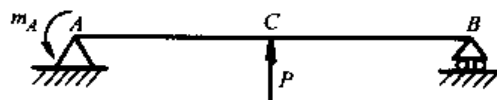


图 5.8-7

5.9 应力状态与强度理论

5.9.1 基本概念和主要公式

1. 应力状态的概念

(1) 一点处的应力状态。通过受力构件内部一点的所有斜截面上的应力情况称为该点处的应力状态。

(2) 单元体。围绕所研究点处切取的边长为无穷小的正六面体, 称为单元体。

因单元体极其微小, 认为各微面上的应力均匀分布, 任意一对相互平行的微面上应力相等。

三对平面上的应力均为直接已知或能通过计算得到的单元体, 称为原始单元体。

(3) 主平面、主应力及主单元体定义。切应力为零的截面称为主平面, 主平面的法线方向称为主方向, 主平面上的正应力称为主应力。主应力通常按代数值的大小, 依次用 σ_1 , σ_2 与 σ_3 表示, 即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

受力构件内任意一点均可找到三个互相正交的主平面和主应力, 由三对互相垂直的主平面所构成的单元体, 称为主单元体。

(4) 应力状态的分类。根据主应力的数值, 将应力状态分为三类:

- ① 单向应力状态: 只有一个主应力不为零的应力状态。
 - ② 平面应力状态 (二向应力状态): 有二个主应力不为零的应力状态。
 - ③ 空间应力状态 (三向应力状态): 三个主应力均不为零的应力状态。
- 二向与三向应力状态, 统称为复杂应力状态。

2. 平面应力状态分析的解析法

平面应力状态单元体只有两对面上有应力作用, 另一对面上应力为零 (该面上切应力为零, 故是主平面), 称为平面应力状态, 如图 5.9-1 所示。以后将平面应力状态的单元体画成平面图形, 如图 5.9-2 (a) 所示。

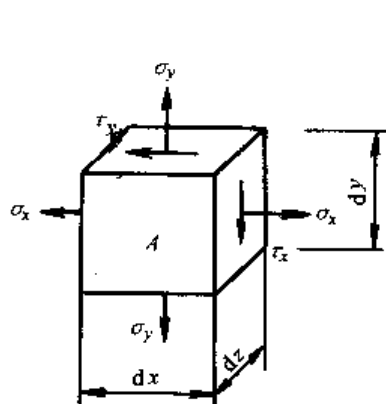


图 5.9-1

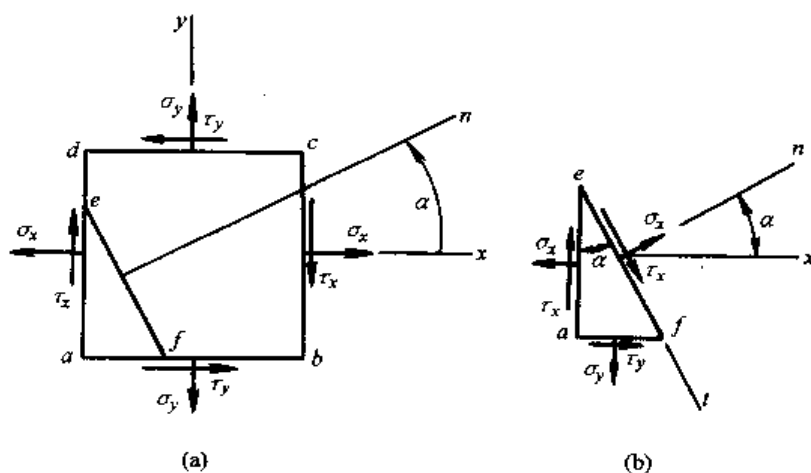


图 5.9-2

(1) 任意斜截面上的应力。过单元体取与 z 轴平行的任意斜截面 ef , 其方位以该面的外法线 n 与 x 轴的夹角 α 来表示。 ef 面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α (图 5.9-2 (b)):

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (5.9-1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \quad (5.9-2)$$

应用上述公式时, 正应力以拉应力为正; 切应力以使单元体顺时针方向旋转为正, 方位角 α 规定以 x 轴为始边, 逆时针转向为正。

通过单元体取两个互相垂直的斜截面 (图 5.9-3), n 和 n_1 是这两个斜截面的外法线,

在式 (5.9-1)、式 (5.9-2) 中以 $\beta = 90^\circ + \alpha$ 代替 α 可求出外法线为 n_1 的截面上应力:

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha \quad (a)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha \quad (b)$$

将式 (5.9-1) 与式 (a) 相加得到 $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y$, 即过单元体的两个互相垂直的截面上的正应力之和是一常量。比较式 (5.9-1) 和式 (b) 可看出 $\tau_\beta = -\tau_\alpha$, 即切应力互等。

(2) 主平面主应力。由 $d\sigma_\alpha/d\alpha = 0$, 得到正应力的极值即主应力和主平面的方向角:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (5.9-3)$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5.9-4)$$

(3) 主切应力及其作用面。由 $d\tau_\alpha/d\alpha = 0$ 得主切应力即切应力的极值及作用面方位角 α_1 :

$$\left. \begin{matrix} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (5.9-5)$$

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x} \quad (5.9-6)$$

比较式 (5.9-4) 与式 (5.9-6), 表明主切应力作用面与主平面成 45° 夹角, 即

$$\alpha_1 = \alpha_0 \pm 45^\circ \quad (5.9-7)$$

3. 平面应力状态分析的图解法

(1) 应力圆方程。将斜截面应力公式 σ_α 和 τ_α 中的参数 2α 消去, 得

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2$$

该方程为圆的方程, 圆心坐标为: $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$, 圆的半径为: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$

(2) 应力圆。对于图 5.9-4 (a) 所示单元体, 应力圆画法如下 (见图 5.9-4 (b)):

- ① 建立坐标系 $\sigma O \tau$, 选定比例尺;
- ② 在此坐标系内标出坐标为 (σ_x, τ_x) 的点 A 及坐标为 $(\sigma_y, -\tau_x)$ 的点 B, (设 $\sigma_x > \sigma_y$)。图中 A 点和 B 点分别为单元体上与 x 轴和 y 轴垂直的两个面在应力圆上的对应点;
- ③ A、B 连线和横轴交于 C 点, C 点的坐标为 $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$, 此点即为圆心;
- ④ 以 C 为圆心, \overline{CA} 为半径画圆, 即为应力圆, 又称莫尔圆, 如图 5.9-4 (b) 所示;
- ⑤ 用应力圆求法线与 x 轴夹角为 α 斜截面 ef 上的应力 σ_α 和 τ_α : 从应力圆 A 点逆时针转 2α 角, 得到圆上 G 点, 如图 $\angle ACG = 2\alpha$, G 点坐标即为该斜截面上的应力;
- ⑥ 应力圆

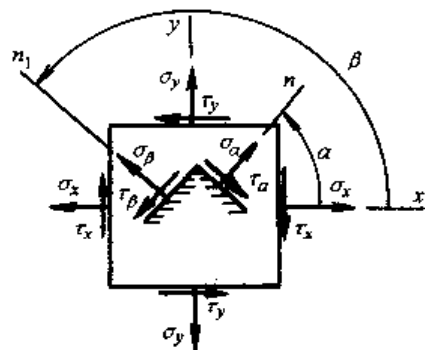


图 5.9-3

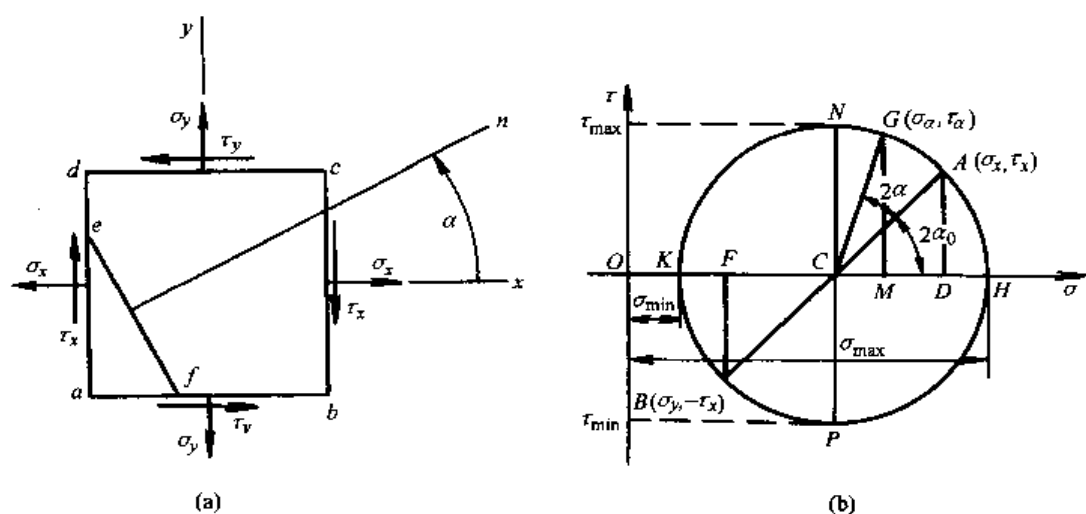


图 5.9-4

H 、 K 点的纵坐标为零，横坐标分别对应 σ_{\max} 和 σ_{\min} ，即平面应力状态的主应力 σ_1 和 σ_2 ，在应力圆上由 A 点到 H 点顺时针转过 $2\alpha_0$ ，在单元体上第一主方向为由 x 轴顺时针转 α_0 ；⑦过 C 作铅直线与应力圆交于 N 、 P 两点，此两点的纵坐标对应 τ_{\max} 和 τ_{\min} ，由应力圆可知，此两截面上正应力相等，且等于 σ_x 、 σ_y 的平均值；⑧在应力圆图上，由 H 点到 N 点，由 K 点到 P 点均转过 90° ，这说明在单元体上主方向和主剪力作用面法线之间的夹角为 45° 。

由此可以说，凡数学解析法可以解决的两向应力分析问题，使用图形解析法都可以解决，而且更为直观与具体。因而在两向应力状态分析中，解析法和图形解析法可互为补充，联合使用。

(3) 三个特殊的应力圆。

①单向拉伸（或压缩）应力圆：图 5.9-5 (a) 所示的单向拉伸应力状态， $\sigma_x = \sigma$ ， $\tau_x = \tau_y = \sigma_y = 0$ ，画出的应力圆如图 5.9-5 (b) 所示。从应力圆图可知切应力极值在法线与 x 轴成 $\pm 45^\circ$ 斜截面上， $\tau_{45^\circ} = \tau_{\max} = \sigma/2$ ， $\tau_{-45^\circ} = \tau_{\min} = -\sigma/2$ ，相应斜面的正应力 $\sigma_{45^\circ} = \sigma_{-45^\circ} = \sigma/2$ ，如图 5.9-5 (c) 内的斜单元体所示。

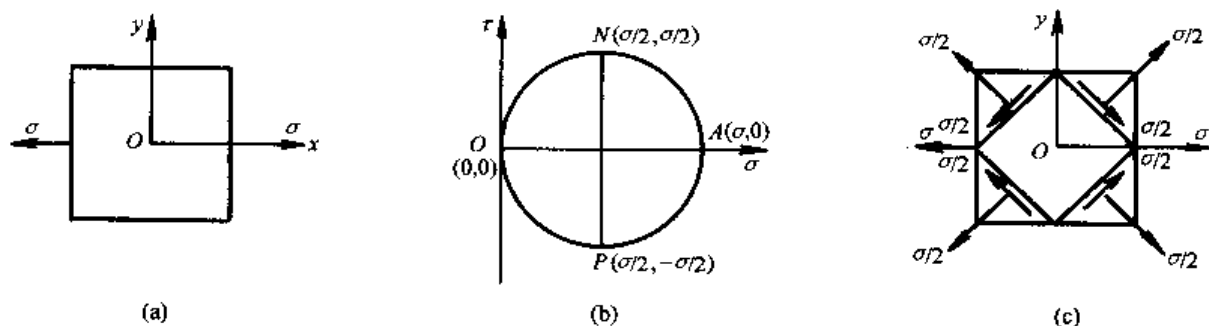


图 5.9-5

单向压缩应力状态与上述情况相似。由此可知：低碳钢拉伸试件与轴向约成 45° 的滑移线，铸铁压缩试件与轴向约成 45° 的破裂，均系 τ_{\max} 或 τ_{\min} 所为。

②纯剪切应力圆：如图 5.9-6 (a) 所示单元体，各截面上只有切应力，没有正应力，

称为纯剪切应力状态。纯剪切的应力圆如图 5.9-6 (b) 所示, 从单元体图中很容易得到: 主应力 $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, 第一主方向由 x 轴顺时针转 45° 。主单元体见图 5.9-6 (c) 中的斜单元体。

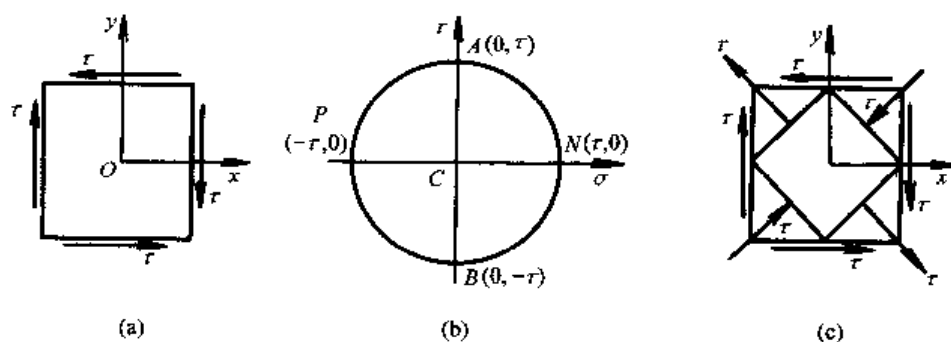


图 5.9-6

③等拉或等压应力状态的应力圆: 图 5.9-7 (a) 所示的双向等拉应力状态, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $\tau_x = \tau_y = 0$, 代表外法线为 x (或 $-x$)、 y (或 $-y$) 截面上的应力状况的 A 、 B 点在 σ - τ 坐标系上均在 σ 轴同一点上, 显然其应力圆半径无限小, 应力圆成为一个几何点。对于图 5.9-7 (b) 所示三向等拉应力状态, 应力圆也如图 5.9-7 (c) 所示。因此, 对于等拉或等压应力状态, 其任意斜截面上的正应力均为常数 σ , 切应力均为零。

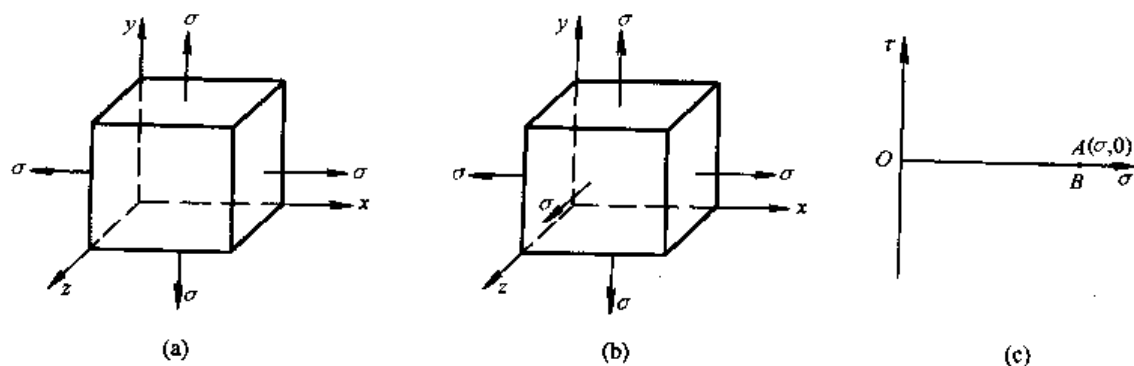


图 5.9-7

4. 三向应力状态及广义胡克定律

(1) 应力极值

一点处的最大正应力与最小正应力

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \quad (5.9-8)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 \quad (5.9-9)$$

一点处的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (5.9-10)$$

(2) 广义胡克定律: 对于各向同性材料, 在小变形线弹性条件下, 正应力仅引起线应变, 切应力仅引起切应变, 互不耦合。因此在复杂应力状态下, 广义胡克定律为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_x &= \frac{\tau_x}{G} \\ \gamma_y &= \frac{\tau_y}{G} \\ \gamma_z &= \frac{\tau_z}{G} \end{aligned} \right\} \quad (5.9-11)$$

主应力与主应变间关系：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (5.9-12)$$

即主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 与主应变 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 方向分别一致。

平面应力状态下胡克定律：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_y) \\ \gamma_x &= \frac{\tau_x}{G} \end{aligned} \right\} \quad (5.9-13)$$

5. 强度理论

(1) 强度理论的概念。材料破坏试验研究和工程实践都表明：尽管材料的破坏现象各不相同，但破坏的形式可以归纳为两类：塑性屈服和脆性断裂。

塑性屈服——材料出现显著塑性变形，失去正常工作能力。

脆性断裂——材料在无明显的变形的情况下突然断裂。

关于材料破坏原因的学说称为强度理论。

(2) 四个常用强度理论。四个常用强度理论的强度条件可以统一写成：

$$\sigma_{eqn} \leq [\sigma] \quad (5.9-14)$$

式中， σ_{eqn} 称为相当应力。

第一强度理论（最大拉应力理论）： $\sigma_{eq1} = \sigma_1$ (5.9-15)

第二强度理论（最大拉应变理论）： $\sigma_{eq2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$ (5.9-16)

第三强度理论（最大切应力理论）： $\sigma_{eq3} = \sigma_1 - \sigma_3$ (5.9-17)

第四强度理论（最大形状改变比能理论）：

$$\sigma_{eq4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (5.9-18)$$

一般脆性材料应选用最大拉应力或最大拉应变理论；塑性材料选用最大切应力或形状改变比能理论。

5.9.2 重点和难点

(1) 截取原始单元体时，应取两个横截面为其中一对平面，因为横截面上的应力可用已知的公式计算。

(2) 平面应力状态下，过一点的所有截面中，必有一对主平面和一对与主平面夹角为 45° 的主切应力截面。

(3) 平面应力状态下得到的两个主应力排序时要注意到还有一个零主应力。

(4) 在平面应力状态中，任意两个相互垂直截面上的正应力之和等于常数。

(5) 平面应力状态下有两个主方向，其最大主应力作用线所在的象限一定是两相互垂直截面上切应力箭头所对应的象限，其正应力的大小和指向仅影响主方向角 α_0 的大小。

(6) 平面应力状态下得到的最大切应力是垂直于零主应力面所有截面上切应力的最大值，并不一定是该点的最大的切应力，只有按式 (5.9-10) 计算的切应力才是最大切应力。

(7) 用应力圆分析平面应力状态时，应注意应力圆上的参考点是对应于 x 截面的 A 点。

(8) 应力圆和单元体相互对应，应力圆上的一个点对应于单体的一个面，应力圆一点的坐标为单元体相应截面上的应力值，应力圆上的两点对应的圆心角是单元体上这两点所对应的两个截面的外法线夹角的两倍，这两个角的转向相同。

应力圆与单元体之间的对应关系可总结为“点面对应、转向相同、夹角两倍”。

5.9.3 例题和解题指导

例 5.9.1 试画出图 5.9-8 所示简支梁 A 点处的原始单元体。

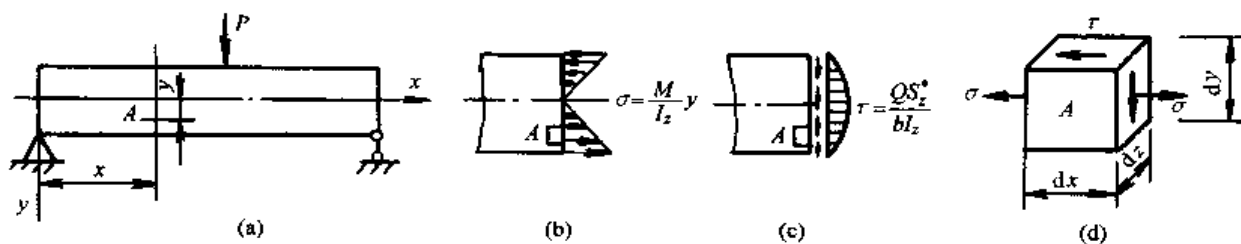


图 5.9-8

解

(1) 原始单元体要求其六个截面上的应力应已知或可利用公式直接计算，因此应选取如下三对平面：A 点左右侧的横截面，此对截面上的应力可直接计算得到；与梁 xy 平面平行的一对平面，其中靠前的平面是自由表面，所以该对平面应力均为零。再取 A 点偏上和偏下的一对与 xz 平行的平面。截取出的单元体如图 5.9-8 (d) 所示。

(2) 分析单元体各面上的应力。

A 点偏右横截面的正应力和切应力如图 5.9-8 (b)、(c) 所示，将 A 点的坐标 x 、 y 代入正应力和切应力公式得 A 点单元体左右侧面的应力为： $\sigma = \frac{M}{I_z}y$ 、 $\tau = \frac{QS_z^*}{I_z b}$ ；由切应力

互等定律, 知单元体的上下有切应力 τ ; 前后边面为自由表面, 应力为零。在单元体各面上画上应力, 得到 A 点单元体如图 5.9-8 (d)。

解题指导: 原始单元体各截面的应力应已知或可直接计算得到。一般用横截面和平行坐标平面的截面截取原始单元体。

例 5.9.2 试求图 5.9-9 (a) 所示的单元体的: (1) 图示斜截面上的应力; (2) 主方向和主应力, 画出主单元体; (3) 主切应力作用平面的位置及该平面上的正应力, 并画出该单元体。

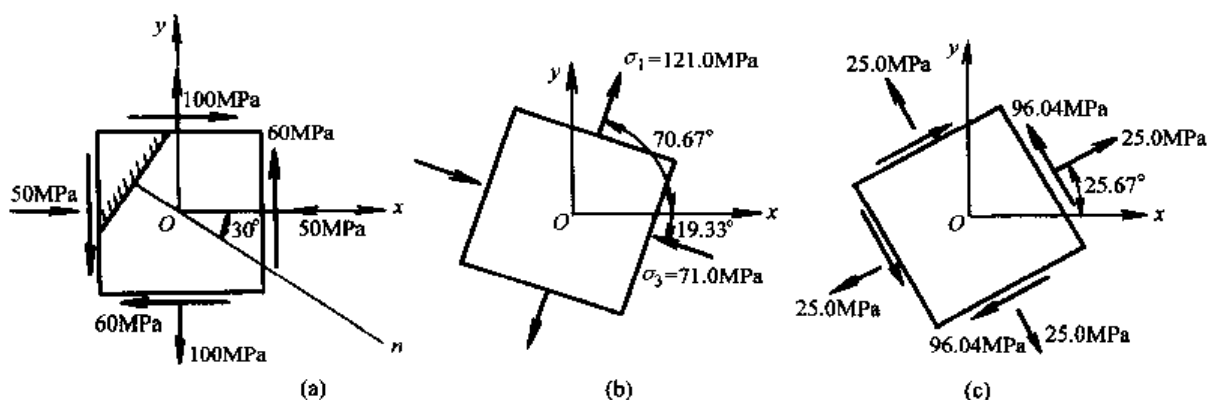


图 5.9-9

解

(1) 求斜截面上的正应力 σ_{-30° 和切应力 τ_{-30° :

$$\sigma_{-30^\circ} = \frac{-50 + 100}{2} + \frac{-50 - 100}{2} \cos(-60^\circ) - (-60) \sin(-60^\circ) = -64.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{-30^\circ} = \frac{-50 - 100}{2} \sin(-60^\circ) + (-60) \cos(-60^\circ) = 34.95 \text{ MPa}$$

(2) 求主方向及主应力:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{-120}{-50 - 100} = -0.8, 2\alpha = -38.66^\circ$$

$$\alpha_1 = -19.33^\circ, \alpha_2 = 70.67^\circ$$

由切应力方向知, 最大主应力在第一象限中, 对应的角度为 $\alpha_0 = 70.67^\circ$, 则主应力

$$\sigma_1 = \frac{-50 + 100}{2} + \frac{-50 - 100}{2} \cos(2 \times 70.67^\circ) - (-60) \sin(2 \times 70.67^\circ) = 121.0 \text{ (MPa)}$$

由 $\sigma_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_2} = \sigma_x + \sigma_y$

可解出 $\sigma_{\alpha_2} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_1 = (-50) + 100 - (121.0) = -71.0 \text{ (MPa)}$

因有一个为零的主应力, 因此

$$\sigma_3 = -71.0 \text{ MPa} \quad (\text{第三主方向 } \alpha_3 = -19.33^\circ)$$

画出主单元体如图 5.9-9 (b)。

(3) 主切应力作用面的法线方向:

$$\tan 2\alpha' = \frac{-50 - 100}{-120} = 1.25, 2\alpha' = 51.34^\circ$$

$$\alpha'_1 = 25.67^\circ, \alpha'_2 = 115.67^\circ$$

主切应力为

$$\tau_{\alpha'_1} = \frac{-50 - 100}{2} \sin(51.34^\circ) + (-60) \cos(51.34^\circ) = -96.04 \text{ MPa} = -\tau_{\alpha'_2}$$

此两截面上的正应力为

$$\sigma_{\alpha'_1} = \frac{-50 + 100}{2} + \frac{-50 - 100}{2} \cos(51.34^\circ) - (-60) \sin(51.34^\circ) = 25.0 (\text{MPa})$$

$$\sigma_{\alpha'_2} = \frac{-50 + 100}{2} + \frac{-50 - 100}{2} \cos(231.34^\circ) - (-60) \sin(231.34^\circ) = 25.0 (\text{MPa})$$

主切应力单元体如图 5.9-9 (c) 所示。

由 $\sigma_{\alpha'_1} + \sigma_{\alpha'_2} = 25.0 + 25.0 = 50 \text{ MPa} = \sigma_x + \sigma_y$, 可以验证上述结果的正确性。

解题指导: (1) 图 5.9-9 (a)、(b)、(c) 所示的单元体表示的均是同一点处的应力状况, 是对一点处应力状态的不同描述方式。(2) 正确使用平面应力状态分析公式的关键是正确地给出斜截面外法线 n 与 x 轴的夹角 α , 以逆时针为正。法线与 x 轴同向截面上的切应力以向下为正。(3) 求出平面应力状态的两个正应力后, 在确定主应力的排序时, 切记已有一个为零的主应力。

例 5.9.3 试用图形解析法, 重解例 5.9-2。

解

(1) 画应力圆。建立比例尺, 画坐标轴 σ 、 τ 。

对图 5.9-9 (a) 所示单元体, 在 σ - τ 平面上画出代表 σ_x 、 τ_x 的点 $A(-50, -60)$ 和代表 σ_y 、 τ_y 的点 $B(100, 60)$ 。连接 A 、 B , 与水平轴 σ 交于 C 点, 以 C 点为圆心, \overline{CB} (或 \overline{CA}) 为半径, 作应力圆如图 5.9-10。

(2) 斜截面上的应力。在应力圆上自 A 点顺时针转过 60° , 到达 G 点。 G 点在 σ 、 τ 坐标系内的坐标即为该斜截面上的应力, 从应力圆上可直接用比例尺测量或计算得到 G 点的水平和垂直坐标值:

$$\sigma_\alpha = -64.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_\alpha = -34.95 \text{ MPa}$$

(3) 主方向、主应力及主单元体。图 5.9-10 所示应力圆图上 H 点横坐标 \overline{OH} 为第一主应力, 即

$$\sigma_1 = \overline{OH} = 121.04 \text{ MPa}$$

K 点的横坐标 \overline{OK} 为第三主应力, 即

$$\sigma_3 = \overline{OK} = -71.04 \text{ MPa}$$

由应力圆图上可以看出, 由 B 点顺时针转过 $2\alpha_0$ 为第一主方向, 在单元体上则为由 y 轴顺时针转 α_0 , 且

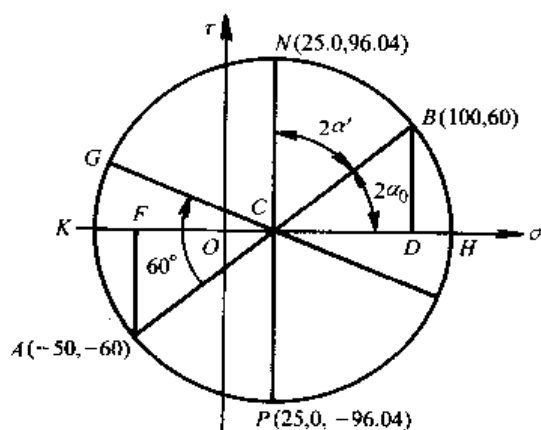


图 5.9-10

$$2\alpha_0 = 38.66^\circ, \alpha_0 = 19.33^\circ$$

应力圆图上由 A 顺时针转到 K 点 ($\angle ACK = 38.66^\circ$), 则在单元体上由 x 轴顺时针转过 19.33° 为第三主方向。

画出主单元体仍如图 5.9-9 (b) 所示。

(4) 主切应力作用面的位置及其上的应力。图 5.9-10 所示应力圆上 N、P 点分别表示主切应力作用面的相对方位及其上的应力。

在应力圆上由 B 到 N, 逆时针转过 51.34° , 单元体上 τ_{\max} 作用面的外法线方向为由 y 轴逆时针转过 25.67° , 且

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \overline{CB} = 96.04 \text{ MPa}$$

τ_{\max} 和 τ_{\min} 作用面上的正应力均为 25.0 MPa 。主切应力作用面的单元体仍如图 5.9-9 (c) 所示。

例 5.9.4 如图 5.9-11 所示两端封闭的薄壁筒同时承受内压 p 和扭矩 m 的作用。在圆筒表面 a 点用应变仪测出与 x 轴分别成正负 45° 方向两个微小线段 ab 和 ac 的应变 $\epsilon_{45^\circ} = 629.4 \times 10^{-6}$, $\epsilon_{-45^\circ} = -66.9 \times 10^{-6}$, 试求压强 p 和扭矩 m 。已知平均直径 $d = 200 \text{ mm}$, 厚度 $t = 10 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.25$ 。

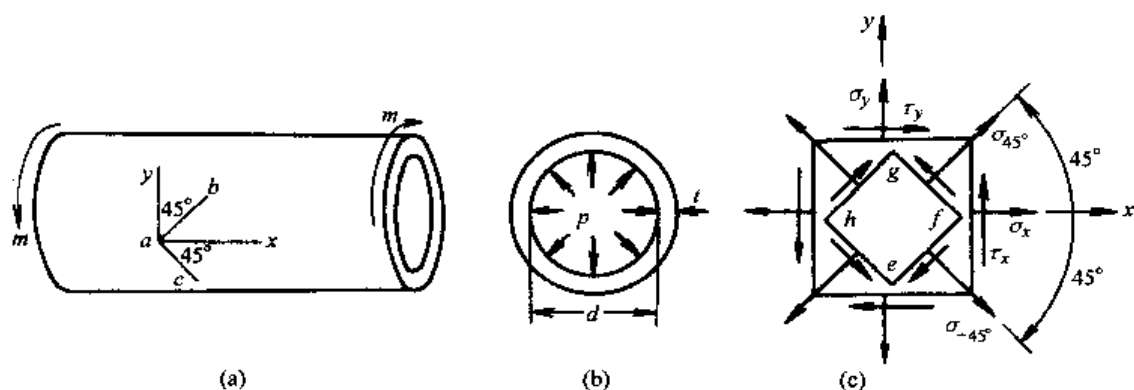


图 5.9-11

解

(1) a 点为平面应力状态。在 a 点取出如图 5.9-11 (c) 所示的原始单元体, 其上应力:

$$\sigma_x = \frac{pd}{4t}, \sigma_y = \frac{pd}{2t}, \tau_x = -\frac{2m}{\pi d^2 t}$$

(2) 求图 5.9-11 (c) 斜单元体 $efgh$ 各面上的正应力:

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_x = \frac{3}{8} \frac{pd}{t} + \frac{2m}{\pi d^2 t}$$

$$\sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_x = \frac{3}{8} \frac{pd}{t} - \frac{2m}{\pi d^2 t}$$

(3) 利用胡克定律, 列出应变 ϵ_{45° 、 ϵ_{-45° 表达式:

$$\epsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}(\sigma_{45^\circ} - \mu\sigma_{-45^\circ}) = \frac{1}{E}\left[\frac{3}{8}\frac{pd}{t}(1-\mu) + \frac{2m}{\pi d^2 t}(1+\mu)\right]$$

$$\epsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{E}(\sigma_{-45^\circ} - \mu\sigma_{45^\circ}) = \frac{1}{E}\left[\frac{3}{8}\frac{pd}{t}(1-\mu) - \frac{2m}{\pi d^2 t}(1+\mu)\right]$$

将给定数据代入上式有

$$629.4 \times 10^{-6} = \frac{1}{200 \times 10^3} \left(\frac{3}{8} \times \frac{p \times 200}{10} \times 0.75 + \frac{2m \times 10^6}{\pi \times 200^2 \times 10} \times 1.25 \right)$$

$$-66.9 \times 10^{-6} = \frac{1}{200 \times 10^3} \left(\frac{3}{8} \times \frac{p \times 200}{10} \times 0.75 - \frac{2m \times 10^6}{\pi \times 200^2 \times 10} \times 1.25 \right)$$

$$125.88 = 5.625p + 1.989 \quad (\text{m})$$

$$-13.38 = 5.625p - 1.989 \quad (\text{m})$$

得

$$p = 10 \text{ MPa}, \quad m = 35 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

解题指导：已知一点沿斜方向线应变，由线应变求解荷载或其他未知量是应力状态分析中常见问题，处理此类问题的基本方法是：先分析该点的应力状态，画出其原始单元体（由坐标平面切出的单元体）；然后利用斜截面应力公式求出与给定应变方向同向和垂直的两个正应力，并利用胡克定律建立此两个正应力与给定线应变的关系式，解出外力。用电测法测定应变，进而确定构件受力是工程中常用的方法。

例 5.9.5 图 5.9-12 所示的两个单元体，已知正应力 $\sigma = 165 \text{ MPa}$ ，切应力 $\tau = 110 \text{ MPa}$ 。试求两个单元体的第三、第四强度理论表达式。

解

(1) 图 5.9-12 (a) 所示单元体的为空间应力状态。注意到外法线为 y 及 $-y$ 的两个界面上没有切应力，因而 y 方向是一个主方向， σ 是主应力。显然，主应力 σ 对与 y 轴平行的斜截面上的

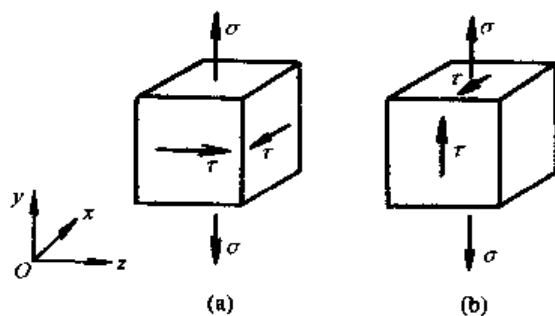


图 5.9-12

应力没有影响，因此在 xOz 坐标平面内可以按照平面应力状态问题对待。外法线为 x 、 z 轴两对平面上只有切应力 τ ，为纯剪切状态，可知其最大和最小正应力绝对值均为 τ 。则图 5.9-12 (a) 所示单元体的三个主应力为

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau$$

则第三强度理论的相当应力为

$$\sigma_{eq3}^{(a)} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma + \tau = 165 + 110 = 275 \text{ (MPa)}$$

第四强度理论的相当应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{eq4}^{(a)} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma - \tau)^2 + (\tau + \tau)^2 + (-\tau - \sigma)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(165 - 110)^2 + (2 \times 110)^2 + (-110 - 165)^2]} = 252.0 \text{ (MPa)} \end{aligned}$$

(2) 图 5.9-12 (b) 所示单元体。其主应力为

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} [\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] = \frac{1}{2} [165 \pm \sqrt{165^2 + 4 \times 110^2}] = \begin{matrix} 220.0 \\ -55.0 \end{matrix}, \quad \sigma_2 = 0$$

则第三强度理论的相当应力为

$$\sigma_{eq3}^{(b)} = \sigma_1 - \sigma_3 = 220 + 55 = 275(\text{MPa})$$

第四强度理论的相当应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{eq4}^{(a)} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [(220.0)^2 + (-55.0)^2 + (-55.0 - 220.0)^2]} = 252.0(\text{MPa}) \end{aligned}$$

解题指导：(1) 空间应力状态的一个主应力已知且不为零的情况下，另外两对与主应力平行平面构成应力状态仍可用使用平面应力状态的斜截面公式和由此推出的其他公式。(2) 同一应力状态，不同的强度理论得出的等效应力值不同，只要选用的强度理论符合要求，都可以作为强度计算的依据。

5.10 组合变形

5.10.1 基本概念和主要公式

1. 组合变形的概念

在外力作用下，构件同时产生两种或两种以上的基本变形，称为组合变形。

处理组合变形问题的基本方法是叠加法。将组合变形构件分解为几个基本变形构件，分别计算构件在每一种基本变形下的应力和变形，然后再叠加。应用叠加原理的条件是构件处于线弹性范围，并且变形很小，以至每一荷载引起的变形和内力不受其他荷载的影响。

对组合变形构件的强度分析计算方法，可概括为：

(1) 按引起的变形类型分解外力，通常是将荷载向杆件的轴线和形心主惯性轴简化，把组合变形分解为几个基本变形。

(2) 分别绘出各基本变形的内力图，确定危险截面位置，再根据各种变形应力分布规律，确定危险点。

(3) 分别计算危险点处各基本变形引起的应力。

(4) 叠加危险点的应力，叠加通常是在应力状态上的叠加。然后选择适当的强度理论进行强度计算。

组合变形问题中，强度是研究的重点。

2. 斜弯曲

1) 受力特征和变形特征

受力特征：梁上的横向外力（或外力偶）作用平面通过截面的弯曲中心，但不平行于形心主惯性平面。如图 5.10-1 所示。

变形特征：挠曲线不再与荷载作用面重合。

2) 应力计算及强度条件

图 5.10-1 所示矩形截面悬臂梁，横向力 P 不与形心主轴 y 、 z 重合，而与 y 轴夹角为 φ 时，将发生斜弯曲。这时先将力 P 沿主轴分解为 $P_y = P \cos \varphi$ ， $P_z = P \sin \varphi$ ，则梁在 P_y 、 P_z 作用下将分别以 z 、 y 为中性轴发生平面弯曲，在距固支端为 x 的横截面上，绕 z 、 y 轴

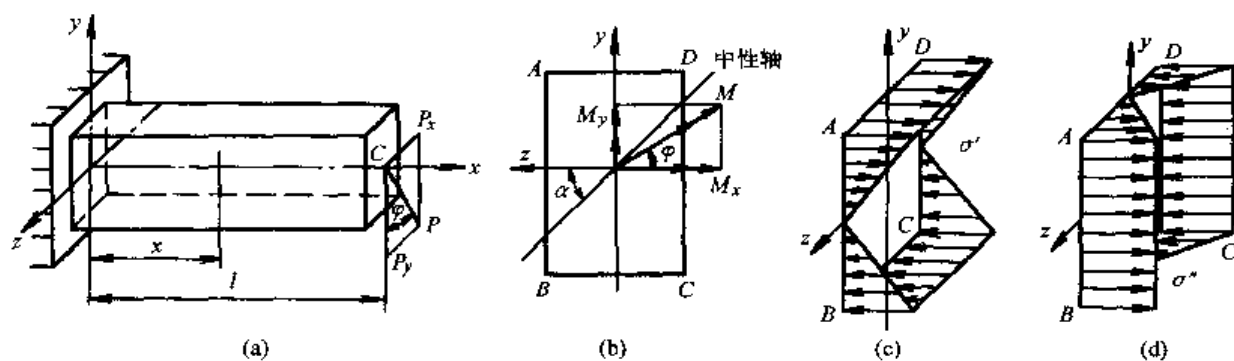


图 5.10-1

的弯矩分别是

$$M_z = P_y (l - x) = P \cos \varphi \cdot (l - x) = M \cos \varphi$$

$$M_y = P_z (l - x) = P \sin \varphi \cdot (l - x) = M \sin \varphi$$

弯矩 M_z 、 M_y 引起横截面上坐标为 (y, z) 的任意点的正应力分别为 $\sigma' = M_z y / I_z$ (图 5.10-1 (c)), $\sigma'' = M_y z / I_y$ (图 5.10-1 (d)), 根据叠加原理, 该点的正应力

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (5.10-1)$$

在上式中令 $\sigma = 0$, 得中性轴方程

$$\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0 \quad (5.10-2)$$

从式 (5.10-2) 知, 中性轴是一条通过截面形心的直线 (图 5.10-1 (b)), 与 y 轴夹角为

$$\tan \alpha = \frac{y}{z} = -\frac{I_z M_y}{I_y M_z} = -\frac{I_z}{I_y} \cdot \tan \varphi \quad (5.10-3)$$

显然当 $I_y \neq I_z$ 时, 其方位与合成弯矩的矢量 M 方向不重合, 偏向 I_{\max} 轴 (y 轴), 发生斜弯曲。

中性轴将截面分为受拉和受压两个区, 弯曲时截面绕中性轴转动。危险点位于距离中性轴最远的点, 对于图示矩形截面, 危险点在 A、C 两个对角点上, A 点有最大拉应力, C 点有最大压应力

$$\begin{aligned} (\sigma_t)_{\max} &= \pm \left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \right) \\ (\sigma_c)_{\max} & \end{aligned} \quad (5.10-4)$$

斜弯曲的危险点为单向应力状态, 其强度条件与单向拉压问题相同, 即

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (5.10-5)$$

若材料许可拉、压应力不同, 则应分别进行强度计算。

上面对矩形截面梁斜弯曲的处理方法和得到的一般结论适用于任意截面梁斜弯曲问题。

3. 轴向拉伸 (压缩) 与弯曲组合

杆件上的荷载除了有轴向力外, 同时还有横向力, 如图 5.10-2 (a) 所示。在外力作用下, 杆件将产生轴向拉伸 (压缩) 与弯曲的组合变形。

杆件横截面上任意点处的只有正应力, 其计算公式为

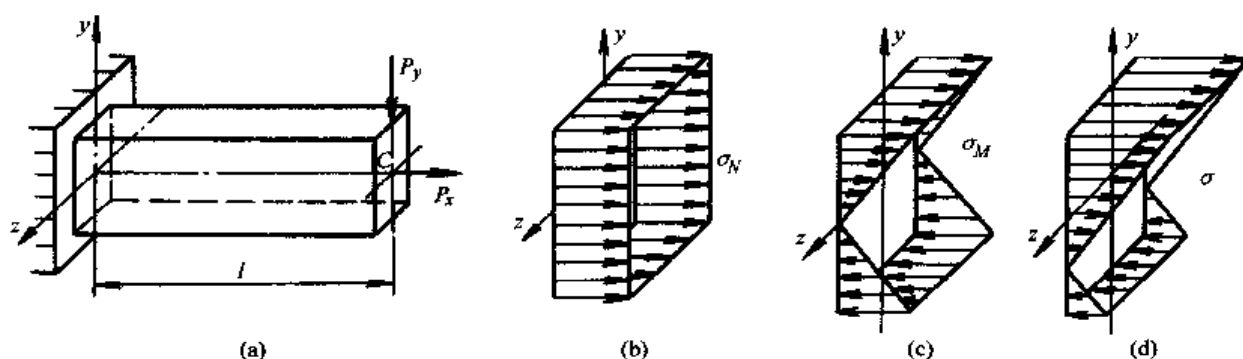


图 5.10-2

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z y}{I_z} \quad (5.10-6)$$

显然其中性轴为一条不通过形心的直线（形心处正应力恒等于 N/A ）。

正应力沿截面高度线性变化，由轴力与弯矩分别产生的正应力（图 5.10-2 (b)、(c)）相叠加结果如图 5.10-2 (d) 所示。

图 5.10-2 (a) 所示杆件的上缘有最大拉应力，下缘有最大压应力。对抗拉压性能相等的塑性材料，强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (5.10-7)$$

若材料抗拉、压性能不同，则应按最大拉、压应力分别进行强度计算。

4. 偏心拉伸（压缩）截面核心

1) 偏心拉伸（压缩）

外力作用线平行于构件轴线，但偏离形心，称为偏心拉伸（或压缩），如图 5.10-3 (a) 所示。将力 P 向形心简化，得作用于形心的集中力 P 和两个力偶矩，如图 5.10-3 (b) 所示。杆件横截面上的内力分量为：

$$N = P, \quad M_x = P y_P, \quad M_y = P z_P$$

杆件的变形为轴向拉伸和双向弯曲的组合。

由于杆件各截面的内力相同，各横截面上任意一点上的正应力为

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (5.10-8)$$

或

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{y_P}{i_x^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z \right] \quad (5.10-9)$$

式中， $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ ， $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ 称为惯性半径。

相应强度条件为

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (5.10-10)$$

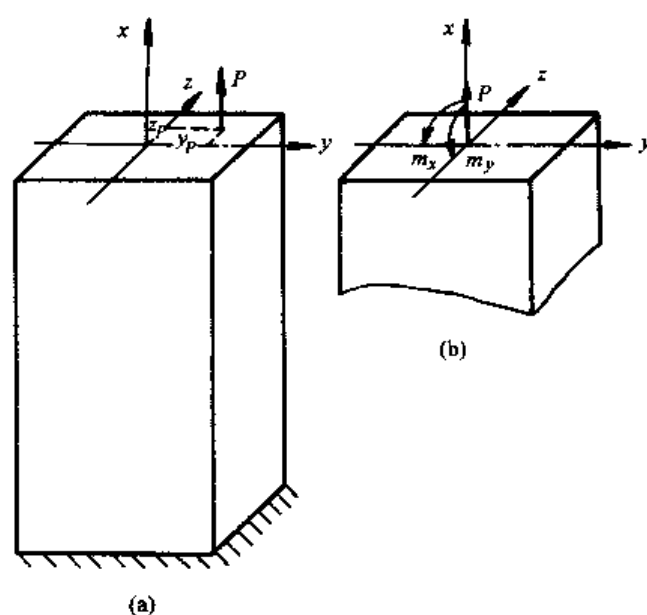


图 5.10-3

在式 (5.10-9) 中令 $\sigma=0$, 得中性轴方程

$$1 + \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z = 0 \quad (5.10-11)$$

2) 截面核心

由式 (5.10-11) 知中性轴为一条不通过截面形心的直线。中性轴的截距式方程为

$$\frac{-\frac{y}{i_z^2}}{-\frac{y_*}{i_z^2}} + \frac{\frac{z}{i_y^2}}{-\frac{z_*}{i_y^2}} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } y \text{ 轴上的截距 } a_y &= -\frac{i_z^2}{y_P} \\ \text{在 } z \text{ 轴上的截距 } a_z &= \frac{i_y^2}{z_P} \end{aligned} \right\} \quad (5.10-12)$$

上式中的负号表明中性轴与外力 P 作用点处于形心两侧, 当荷载向形心移动时, 中性轴将向远离形心的方向移动。因此偏心拉伸 (或压缩) 变形的中性轴可能在横截面之内, 也可能在横截面之外。特别地, 当荷载移至形心时, 中性轴将在无穷远处, 此即单纯轴向拉伸 (或压缩)。由此可知: 围绕截面形心有一个封闭区域, 当偏心拉伸 (或压缩) 荷载作用在这个区域的边缘时中性轴与截面的边缘相切, 作用在这个区域之内时, 中性轴在截面之外, 截面上将只出现拉伸 (或压缩) 应力。形心周围的这个区域称为截面核心, 它仅与横截面的形状与尺寸有关。工程中常用的截面及其核心如图 5.10-4 所示。

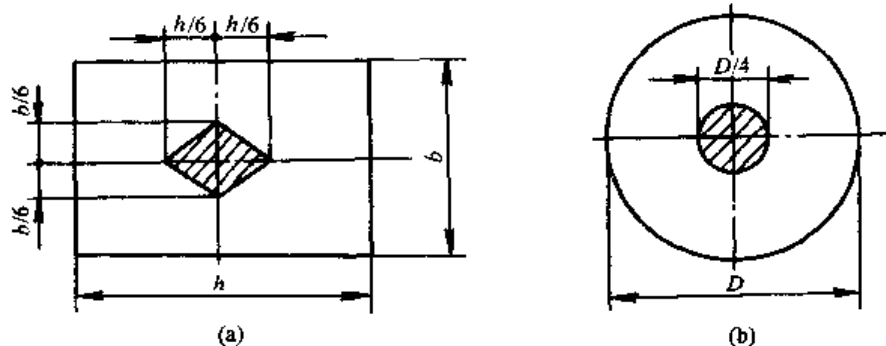


图 5.10-4

5. 弯曲与扭转组合变形

图 5.10-5 (a) 所示圆轴 AB , 左端固定, 右端的圆轮边缘 C 处承受铅直力 P 作用。将力 P 向轴 AB 的形心平移, 得到一个铅直力 P 及力偶。圆轴横截面上的内力有弯矩 M 和扭矩 M_T , 内力图如图 5.1.10-5 (c) 所示, 圆轴 AB 将发生弯曲和扭转的组合变形。杆的危险截面在端固定, 内力绝对值为弯矩 $M_{\max} = Pl$, 扭矩 $M_T = PD/2$, 由弯矩产生的最大拉应力和压应力分别发生在 a, b 两点, 由扭矩产生的切应力最大发生在截面周边上的各点, 它们分别为

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad \tau = \frac{M_T}{W_p}$$

如图 5.1.10-6 (a) 所示。圆轴上下缘 a, b 两处的原始单元体如图 5.1.10-6 (b) 所示。

显然处于平面应力状态, 在讨论此轴强度问题时, 应使用强度理论。对于塑性材料制成

的圆轴, 应使用第三或第四强度理论来建立强度条件, 危险点的主应力:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

代入第三、第四强度理论相当应力公式, 得圆轴弯扭组合变形下的强度条件:

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.10-13)$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.10-14)$$

在上式中代入应力计算公式, 注意到圆轴抗扭截面模量 W_T 是抗弯截面模量 W 的 2 倍, 则内力表示的弯扭组合变形下的强度条件为:

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\frac{M^2 + M_T^2}{W}} \leq [\sigma] \quad (5.10-15)$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{M^2 + 0.75M_T^2}{W}} \leq [\sigma] \quad (5.10-16)$$

式 (5.10-15) 及式 (5.10-16) 的强度条件是针对圆 (或圆环) 截面杆承受弯矩 M 和扭矩 M_T 写出的, 因而它们只适用于圆 (或圆环) 截面杆的弯、扭组合变形, 使用此两式可不论及危险点的应力, 较为简便。但用应力表示的强度条件式 (5.10-13) 及式 (5.10-14) 使用范围更广, 不管是何种组合变形, 只要引起的应力状态如图 (5.10-6 (b)) 所示, 均适用, 如拉伸与扭转的组合变形。

5.10.2 重点和难点

(1) 上面以四种组合变形为例讲述了处理组合变形问题的方法, 学习时应着重领会方法的实质, 而不要只是记住有关的公式, 因为组合变形问题是多种多样的, 但处理原则是一致的。如圆截面杆除承受弯扭组合变形外, 同时还承受轴向拉 (压) 变形, 按照以上处理原则, 可以写出其强度条件为:

$$\sigma_{r3} = \sqrt{(\sigma_N + \sigma_M)^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{(\sigma_N + \sigma_M)^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

(2) 组合变形下, 若危险点处为单向应力状态时, 叠加只是一种代数运算; 若危险点处为复杂应力状态时, 叠加将是应力状态的叠加, 其强度问题应使用适当的强度理论。

(3) 斜弯曲问题中, 如果截面有两对对称轴, 且对轴的惯性矩相等 $I_y = I_z$, 如圆形截面和正方形截面, 横向力 P 无论作用方向如何也不会产生斜弯曲, 只产生平面弯曲。

最大应力 $(\sigma_t)_{\max}$ 、 $(\sigma_c)_{\max}$ 将出现在截面外凸角点上。

(4) 斜弯曲时, 如果梁的横截面上没有外凸的尖角, 则不易通过简单分析与观察得到最

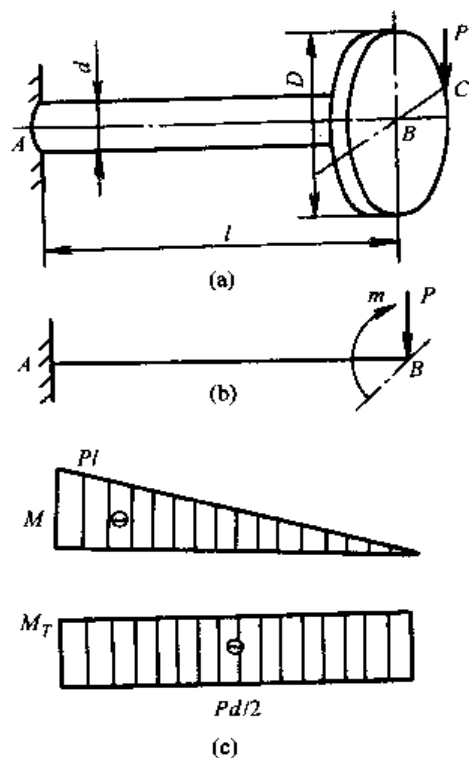


图 5.10-5

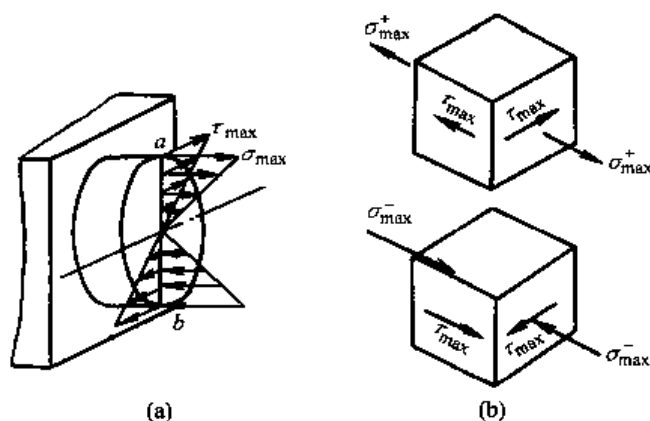


图 5.10-6

大应力的作用点，此时必须先找到中性轴，然后向外推中性轴的平行线，此平行线与截面边缘切点，即为最大拉、压应力的作用点。

(5) 截面核心是一个围绕形心的外凸封闭图形。任意形状实心截面的核心，与外缘相同的空心截面的核心是相似形。截面核心是仅与横截面形状与尺寸有关的量形。

(6) 截面核心有如下规律：由直线构成的截面边界上的一条直线，可确定相应的核心边界的一个点，该点位于形心另一侧，如矩形截面，由四条边界可确定四个点，核心形状是由这四个点组成的菱形四边形；外凸多边形截面的核心的边数等于截面的边数。对于周边有凹进的截面，不能用凹进的边线作为中性轴来确定核心边界。

5.10.3 例题与解题指导

例 5.10.1 悬臂梁的截面如图 5.10-7 所示， C 为形心，小圆圈为弯心位置，虚线表示垂直于轴线的横向力作用线方向。试问各梁发生什么变形？

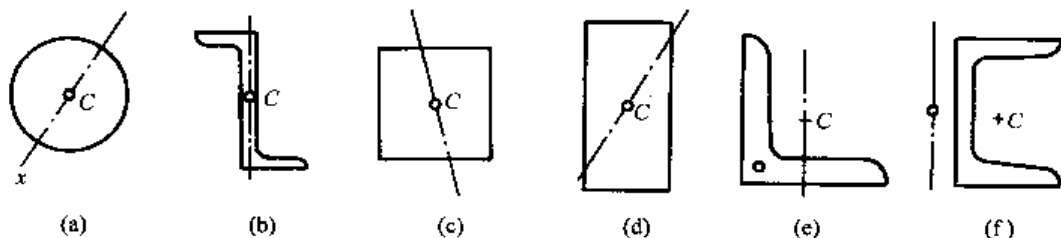


图 5.10-7

解

(a)、(c) 横截面有两对对称轴，且对任一对对称轴的惯性矩均相等，横向力又过形心（与弯心重合），因此任意方向的横向力均只引起平面弯曲。

(b)、(d) 图的横向力虽然过弯曲中心，但与形心主轴不平行，故是斜弯曲变形。

(e) 图的横向力不通过弯曲中心，且与形心主轴不平行，故是斜弯曲与扭转组合变形。

(f) 图的横向力过弯曲中心，且与形心主轴平行，是平面弯曲变形。

解题指导：分析外力引起何种变形，首先将外力向轴线及截面的形心主惯性轴方向分解，然后将横向力向弯曲中心平移，根据分解后的荷载分量判断产生何种变形。

例 5.10.2 如图 5.10-8 所示，一 Z 字形截面的悬臂梁，受竖直力 P 作用，形心主惯性矩 $I_x = 628 \times 10^4 \text{ mm}^4$ ， $I_y = 64 \times 10^4 \text{ mm}^4$ ，荷载 P 和形心主惯性轴 y 的夹角 $\alpha_0 = 27^\circ 28' 44''$ ，荷载 $P = 2 \text{ kN}$ ，梁长 $l = 1\,000 \text{ mm}$ ，试求最大的拉应力。

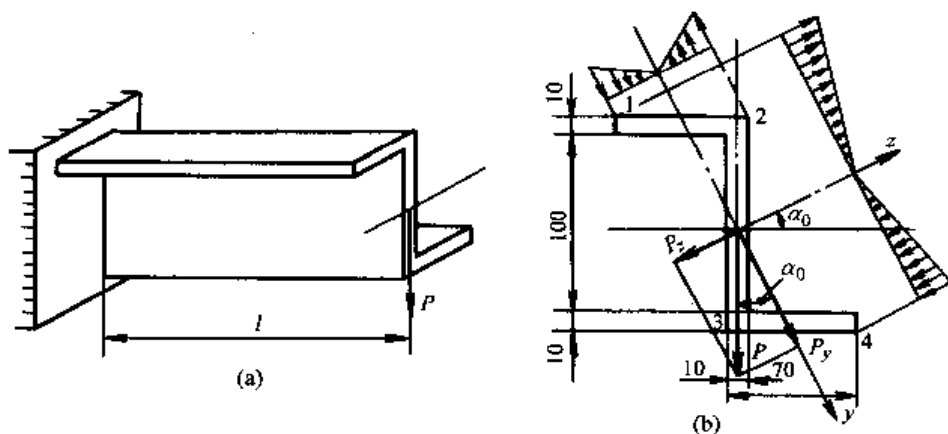


图 5.10-8

解 由图 5.10-8 可知, 力 P 与形心主轴 y 夹角为 α_0 , 将 P 沿形心主惯性轴 yz 分解, 有

$$P_y = P \cos \alpha_0 \quad P_z = P \sin \alpha_0$$

P_y 、 P_z 分别引起的横截面绕两个形心主轴的平面弯曲, 应力如图 5.10-8 (b) 所示。分析该图所示的截面四个角点 1、2、3、4 处的应力情况, 可以发现 P_y 和 P_z 均在 2 点处产生拉应力, 因而最大正应力发生在固定端处的 2 点。计算角点 2 的坐标,

$$y_2 = 60 \cos (27^\circ 28' 44'') - 65 \sin (27^\circ 28' 44'') = -83.2 \text{ mm}$$

$$z_2 = 60 \sin (27^\circ 28' 44'') - 65 \cos (27^\circ 28' 44'') = -30.2 \text{ mm}$$

计算 2 点处的拉应力 $\sigma_{(2)}$ 为

$$\begin{aligned} \sigma_{(2)} &= Pl \left(\frac{\cos \alpha_0}{I_z} y_A + \frac{\sin \alpha_0}{I_y} z_A \right) \\ &= 2 \times 10^3 \times 1.0 \times 10^3 \left(\frac{\cos 27^\circ 28' 44''}{628 \times 10^4} 83.2 + \frac{\sin 27^\circ 28' 44''}{64 \times 10^4} \times 30.2 \right) \\ &= 66.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

解题指导: 截面是外凸多边形或有外凸尖角时, 斜弯曲的最大应力点一般可以通过分析来确定。如果梁的横截面上没有外凸的尖角, 必须先找到中性轴, 距中性轴最远的截面边缘即为最大应力的作用点。

例 5.10.3 图 5.10-9 所示厚度 $t = 10 \text{ mm}$, 宽度 $b = 80 \text{ mm}$ 的钢板, 承受轴向拉伸荷载 $P = 80 \text{ kN}$ 。若在钢板的一边加工一个半径 $r = 10 \text{ mm}$ 的圆弧槽 (图 5.10-9 (b)), 求加工圆槽前后的应力。

解 加工圆槽前, 为单向拉伸问题

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{80 \times 10^3}{80 \times 10} = 100 \text{ MPa}$$

加工圆槽后, 最小横截面积为 A , 原荷载 P 对最小截面有 $e = 5 \text{ mm}$ 的偏心, 在偏心拉伸下, 最大拉应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{P}{A_1} + \frac{Pe}{W} = \frac{80 \times 10^3}{70 \times 10} + \frac{80 \times 10^3 \times 5 \times 6}{10 \times 70^2} \\ &= 163.3 \text{ (MPa)} \end{aligned}$$

加工圆槽后最大应力上升了 63.3%。

解题指导: 由此例可知, 少量的偏心会引起工作应力的很大增长, 因此偏心拉伸 (或压缩) 是一种非常不利的加载方式, 在实际工程中应设法避免出现。

例 5.10.4 试确定图 5.10-10 所示各截面的截面核心大致形状。

解 图 5.10-10 (a), 为中间挖去一个圆孔的正方形截面。其惯性矩:

$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi D^4}{64}$$

面积

$$A = a^2 - \frac{\pi D^2}{4}$$

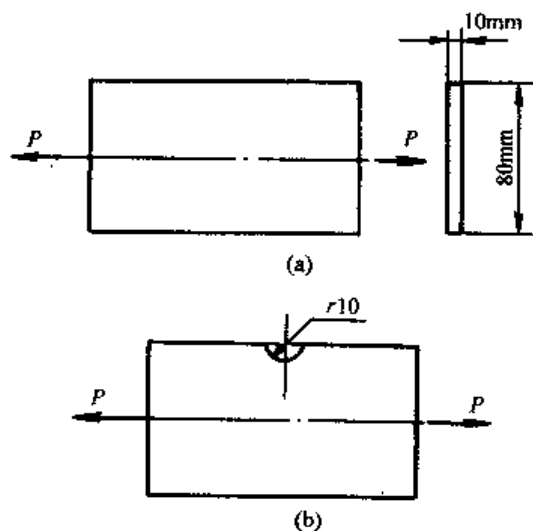


图 5.10-9

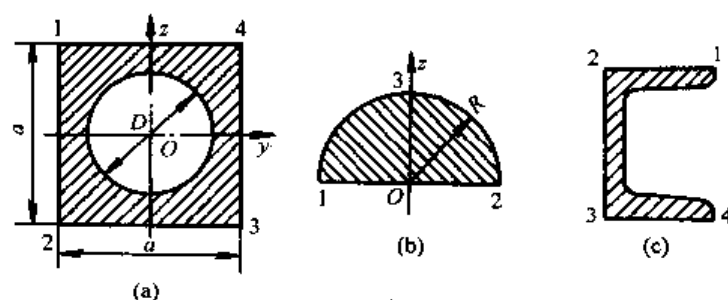


图 5.10-10

惯性半径:

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

以 $z = -a/2$ 的边界线 12 为中性轴, 中性轴在坐标 y 、 z 上的截距为

$$a_y = -\frac{a}{2}, \quad a_z = \infty$$

代入式 (5.10-12), 解出相应外力作用点, 即截面核心边界点坐标:

$$y_p = -\frac{i_z^2}{a_y}, \quad z_p = 0$$

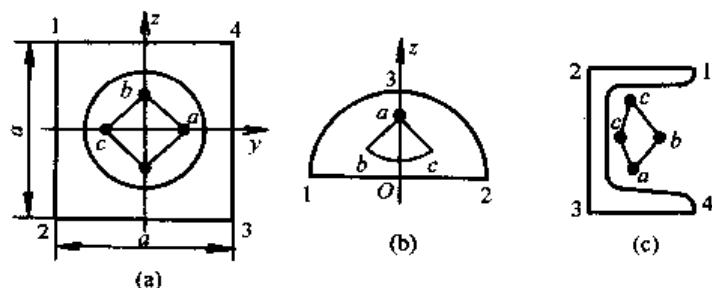


图 5.10-11

此点的大致位置在图 5.10-11 (a) 的 a 点处。仿照上面方法, 依次选取图 5.10-10 (a) 的 23 边、34 边、41 边作为中性轴, 仿照上面步骤可以分别得到截面核心边界点 b 、 c 、 d 。用直线连接四个点, 得该截面核心, 为一正方形, 对角顶点在两个对称轴上。

图 5.10-10 (b): 该截面为半圆形。以边界线 12 为中性轴, 相应截面核心边界点大致在图 5.10-11 (b) 的 a 点; 对于边界线圆弧 231, 可以选择圆弧上一系列点的切线作为中性轴, 每一条切线对应着截面核心的一个边界点, 当切线选得足够多, 这些点将组成一条圆弧线, 如图 5.10-11 (b) 所示圆弧 bc , 其截面核心为一扇形, 见图 5.10-11 (b)。

图 5.10-10 (c): 该截面为槽形截面。以边界线 12、23、34 为中性轴, 相应截面核心边界点大致在图 5.10-11 (c) 的 a 、 b 、 c 点。图 5.10-10 (c) 的 14 边界是内凹的, 而截面核心对应的中性轴是不能通过截面的, 因此, 对此内凹边界, 以 1、4 点的连线作为中性轴, 得到截面核心边界点为图 5.10-10 (c) 的 d 点。用直线连接这四点, 得到槽形截面的核心为一四边形, 四边形的对角点在形心主轴上。

解题指导: (1) 由图 5.10-10 (a) 所示空心截面的核心知, 截面核心形状由横截面外缘形状确定, 内部挖空的形状和尺寸只影响截面核心的大小。(2) 当截面有内凹边界 (工字形、槽形、角钢等截面), 如图 5.10-10 (c) 所示槽形截面, 处理方法是将 1、4 点连接起来, 作为截面边界。

5.11 压杆稳定

5.11.1 基本概念和主要公式

1. 压杆稳定性的概念

1) 压杆的稳定平衡与不稳定平衡

对任一弹性系统, 施加外界干扰使其从平衡位置发生微小偏离。撤去干扰后, 如果系统能回到其原始位置, 则称其原始位置的平衡是稳定的; 如果系统不能回到其原始位置, 则称其原始位置的平衡是不稳定的。

对于中心受压杆件, 加上微小侧向干扰使杆件偏离直线形式而微弯, 撤去干扰, 若压杆可恢复其原直立状态, 则原直立状态的平衡是稳定的; 若撤去干扰后压杆不能恢复其原直立状态, 则此压杆原直立状态的平衡是不稳定的。

2) 临界力

压杆的平衡状态与所受轴向压力 P 的大小有关。压杆有一个特定荷载值 P_{cr} , 当轴向压力 $P < P_{cr}$ 时, 压杆处于稳定平衡状态, 当 $P > P_{cr}$ 时, 压杆处于不稳定平衡状态。该特定值 P_{cr} 称为临界力或临界荷载。

压杆丧失其初始直线形式的平衡状态, 称为失稳或屈曲。

2. 细长压杆的临界力

细长压杆临界力 P_{cr} 的计算公式如下:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (5.11-1)$$

上式称为计算细长压杆临界力的欧拉公式, 式中: 乘积 EI 为压杆的抗弯刚度, 其中 E 材料弹性模量, I 为截面惯性矩。 l 为压杆实际长度。系数 μ 称为长度系数, 乘积 μl 称为压杆的相当长度或有效长度。 μ 与压杆的约束条件有关, 不同约束条件下的 μ 值如下:

一端固定一端自由压杆 $\mu = 2$; 两端铰支压杆 $\mu = 1$; 一端固定一端铰支压杆 $\mu = 0.7$; 两端固定压杆 $\mu = 0.5$, 见图 5.11-1。

从式 (5.11-1) 可看出, 压杆的临界力与弯曲刚度成正比, 与杆的相当长度 μl 的平方成反比。

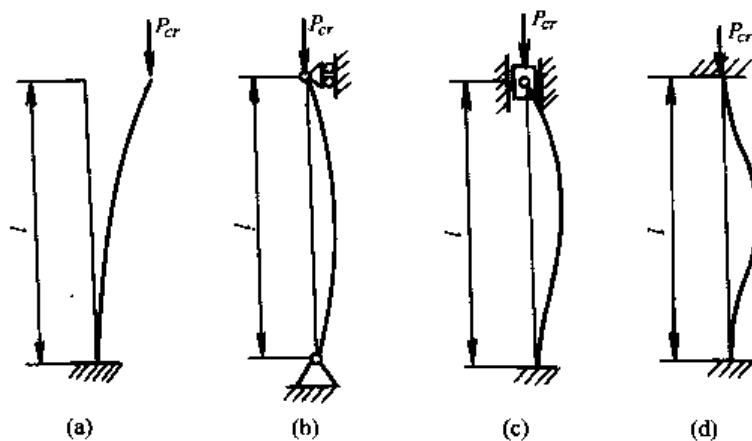


图 5.11-1

3. 临界应力欧拉公式的适用范围

(1) 临界应力

将式 (5.11-1) 的临界力除以压杆面积 A , 注意到 $i^2 = \frac{I}{A}$, i 为截面的惯性半径, 得临界应力, 用 σ_{cr} 表示:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu l)^2}$$

将与压杆几何尺寸有关的相当长度 μl 和惯性半径 i 合并, 记为

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad (5.11-2)$$

λ 称为柔度或长细比。则临界应力成为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (5.11-3)$$

上式为计算临界应力的欧拉公式。式中柔度 λ 综合地反映了压杆的长度 (l), 约束方式 (μ) 与截面几何性质 (i) 对临界力的影响。细长压杆的临界应力与柔度的平方成反比, 柔度越大, 临界应力越小。

(2) 欧拉公式的适用范围

欧拉公式是根据线弹性条件下的挠曲线近似微分方程建立的, 因此仅适用于应力小于比例极限的小变形的压杆, 即

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad (5.11-4a)$$

或

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \lambda_p \quad (5.11-4b)$$

λ_p 是仅与材料有关的常数。

4. 临界应力总图

图 5.11-2 为临界应力 σ_{cr} 随柔度 λ 的变化曲线, 称为临界应力总图。根据临界应力总图, 压杆需分成三种类型。

(1) 柔度 $\lambda \geq \lambda_p$ 的压杆, 称为大柔度杆, 或细长杆, 破坏形式是失稳, 采用欧拉公式 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ 计算其临界应力。

(2) 对 $\lambda < \lambda_p$ 的压杆, 称为非细长杆, 其临界应力的计算有很多不同方法, 现介绍“折减弹性模量理论”的临界应力计算方法。当 $\lambda < \lambda_p$ 或 $\sigma_{cr} > \sigma_p$ 时,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \quad (5.11-5)$$

式中, E_r 为折减弹性模量。

(3) 当算出的临界应力 σ_{cr} 大于 σ_s 时, 属于强度破坏问题, 应按压缩强度条件处理。

5. 压杆稳定校核

(1) 安全系数法。稳定条件为压杆的工作安全系数 n 应大于规定的稳定安全系数 n_{st} 。

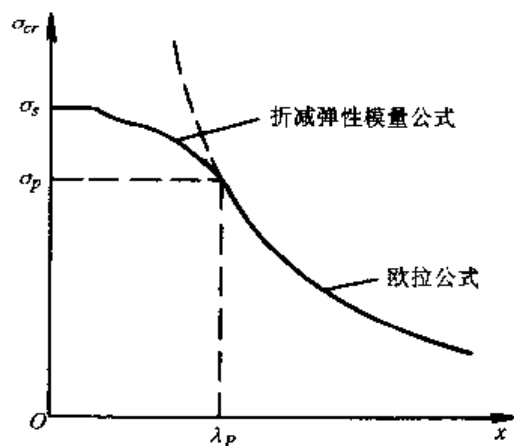


图 5.11-2

稳定条件为

$$n = \frac{P_{cr}}{P} \geq n_{st} \quad (5.11-6a)$$

用应力表示的压杆稳定条件:

$$n = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} \geq n_{st} \quad (5.11-6b)$$

式中, P_{cr} 和 σ_{cr} 是根据压杆柔度范围选用欧拉公式或折减弹性模量方法计算出的临界力和临界应力。稳定安全系数取值一般大于强度安全系数, 其值可从有关设计规范和手册中查得。

(2) 折减系数法。折减系数法的稳定条件为:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi [\sigma] \quad (5.11-7)$$

式中, $[\sigma]$ 为许可压应力; φ 为折减系数, 是 λ 的函数; $\varphi = \varphi(\lambda)$, 其值可查阅有关设计规范、手册。

6. 提高稳定性的措施

(1) 选择合理截面性状。在横截面积 A 不变的情况下, 应选择惯性矩较大的截面形状。

(2) 合理选择材料。非细长压杆的临界应力与材料的比例极限、屈服极限有关, 选用强度高的材料, 可以提高其稳定性。

(3) 加强约束, 减小杆长。临界力与相当长度 (μl) 的平方成反比, 增强对压杆的约束与合理选择杆长对提高压杆的稳定性影响极大。

5.11.2 重点和难点

(1) 欧拉力公式只适用于小变形、应力小于比例极限 σ_p 或柔度 λ 大于 λ_p 的压杆。对于给定压杆, 计算临界应力时应先计算柔度 λ , 根据 λ 值判断压杆类型, 然后选择相应的临界应力公式。切忌不加判断, 直接用欧拉公式计算。

(2) 根据压杆的约束情况正确确定长度系数 μ 值是压杆稳定计算的一个关键问题。

(3) 当工作应力达到强度的极限值时, 压杆是强度破坏问题。对塑性材料其临界应力是屈服极限 σ_s , 对脆性材料是强度极限 σ_b 。

(4) 当压杆没有局部削弱时, 稳定校核后不需再校核其压缩强度。

(5) 当压杆有局部削弱时, 因局部削弱对临界力影响不大, 故稳定校核时可不必考虑局部削弱的影响。但校核稳定后, 还须对局部削弱处进行强度校核, 其计算面积应是扣除孔洞等削弱后的实际面积。

(6) 在截面面积不变的情况下, 最理想的设计应是压杆在两个形心主轴方向同时达到临界应力。因此, 若压杆在两个形心主轴方向的约束相同时, 应选择惯性矩 $I_x = I_y$ 的截面; 若约束不同时, 应使两方向的柔度相等, 即 $\lambda_y = \lambda_z$ 。

(7) 对于超静定结构, 当其中有一杆失稳时, 结构仍可断续承受荷载。在计算结构许可荷载时, 应考虑到这一点。

5.11.3 例题与解题指导

例 5.11.1 图 5.11-3 所示连杆, 其约束情况是: 在 xy 平面内弯曲时是两端铰支, 在

xz 平面内弯曲时是两端固支, 材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, $\lambda_p = 100$ 。试求该杆的临界力 P_{cr} 。

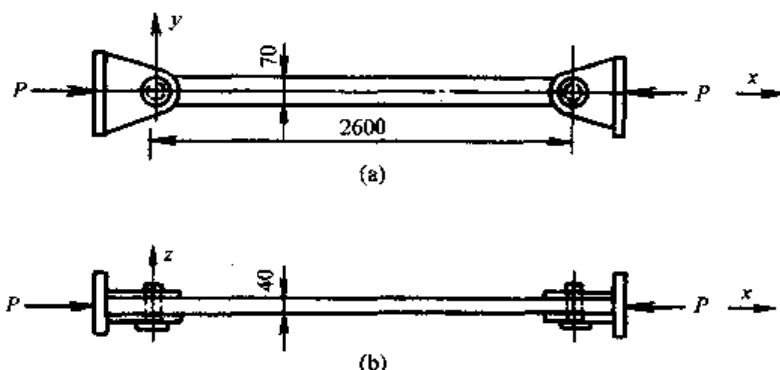


图 5.11-3

解 设连杆在 xy 面内失稳, 两端为铰支, 长度系数 $\mu = 1$, 此时截面以 z 轴为中性轴, 惯性半径及长细比是

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{70}{2\sqrt{3}} = 20.21 \text{ (mm)}$$

$$\lambda_z = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{1 \times 2600}{20.21} = 128.65 > 100$$

故是大柔度杆。

设在 xz 平面内失稳, 两端为固支, 长度系数 $\mu = 0.5$, 此时截面以 y 轴为中性轴, 惯性半径及长细比是

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{40}{2\sqrt{3}} = 11.547 \text{ (mm)}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{0.5 \times 2600}{11.547} = 112.58 > 100$$

也是大柔度杆。因 $\lambda_z > \lambda_y$, 失稳发生在 xy 平面。所以

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(\lambda_z)^2} = \frac{\pi^2 \times 2.0 \times 10^5}{(128.65)^2} = 119.26 \text{ (kN)}$$

故此杆的临界力为 $P_{cr} = 119.26 \text{ kN}$ 。

解题指导: 压杆的临界力与其刚度及约束有关, 当杆在不同平面内有不同的刚度和约束时, 必须比较杆在两个失稳平面内的柔度, 由柔度大的确定临界力, 也可以求出杆在两个面内的临界力, 其中较小者才是该杆的临界荷载。

例 5.11.2 图 5.11-4 所示立柱由两根 10 槽钢组成, 上端为球形铰支, 下端为固定, 长度 $l = 6 \text{ m}$, 材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 比例极限 $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, 试问当 a 为何值时该立柱临界荷载最大, 并求此临界荷载。

解

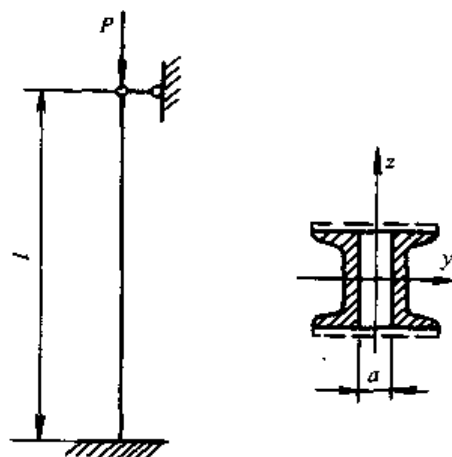


图 5.11-4

(1) 计算 λ_p :

$$\lambda_p = \pi \sqrt{E/\sigma_p} = 3.14 \sqrt{200 \times 10^3 / 200} = 99.4$$

(2) 查表, 得槽钢的截面几何性质:

截面惯性矩: $I_y = 198.3 \text{ cm}^4$, $I_{z0} = 25.6 \text{ cm}^4$

惯性半径: $i_y = 3.95 \text{ cm}$, $i_{z0} = 1.41 \text{ cm}$, 面积 $A = 12.74 \text{ cm}^2$, 槽钢截面形心 Z_0 到直边的距离 $y_0 = 1.52 \text{ cm}$ 。

(3) 计算在 xz 平面失稳的柔度 λ_y :

$$\lambda_y = \mu l / i = 0.7 \times 600 / 3.95 = 106.3$$

为大柔度杆。

(4) 计算距离 a : 注意到当 $I_y = I_z$ 时, P_{cr} 有最大值。

$$I_y = 2 \times 198.3 = 396.6 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$I_z = 2 \times [I_{z0} + A \times (y_0 + a/2)^2] = 2 \times [25.6 + 12.74 \times (1.52 + a/2)^2]$$

令 $I_y = I_z$, 解得 $a = 4.32 \text{ cm}$

(5) 计算 P_{cr} :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 2.0 \times 10^5 \times 396.6 \times 10^4}{(0.7 \times 6000)^2} = 443.8 \text{ (kN)}$$

解题指导: 在截面积不变的情况下, 压杆在 xy 和 xz 两平面内失稳的临界力相等时, 承受的临界力最大。当各方向的约束相同时, 只需使 $I_y = I_z$ 即可。

模拟试题

5.1 下列结论中正确的是 ()。

- ①若物体产生位移, 则必定同时产生变形。
 - ②若物体各点均无位移, 则该物体必定无变形。
 - ③若物体产生变形, 则物体总有一些点会产生位移。
- (A) ①② (B) ②③ (C) ①②③ (D) 全没有

5.2 下列结论正确的是 ()。

- (A) 内力为应力的代数和
- (B) 应力是内力的平均值
- (C) 应力是内力的集度
- (D) 内力必大于应力

5.3 如图, 下列构件属于轴向拉伸或压缩的是 ()。

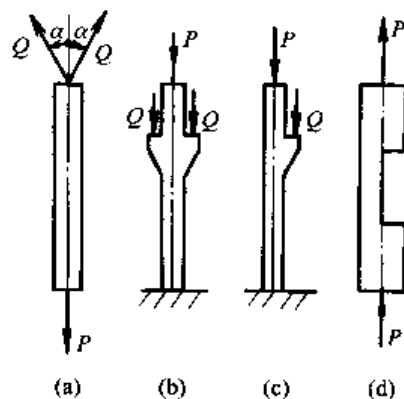
- (A) (a)、(b) (B) (b)、(c)
- (C) (a)、(e) (D) (c)、(d)

5.4 两根截面面积相等但截面形状和材料不同的拉杆受

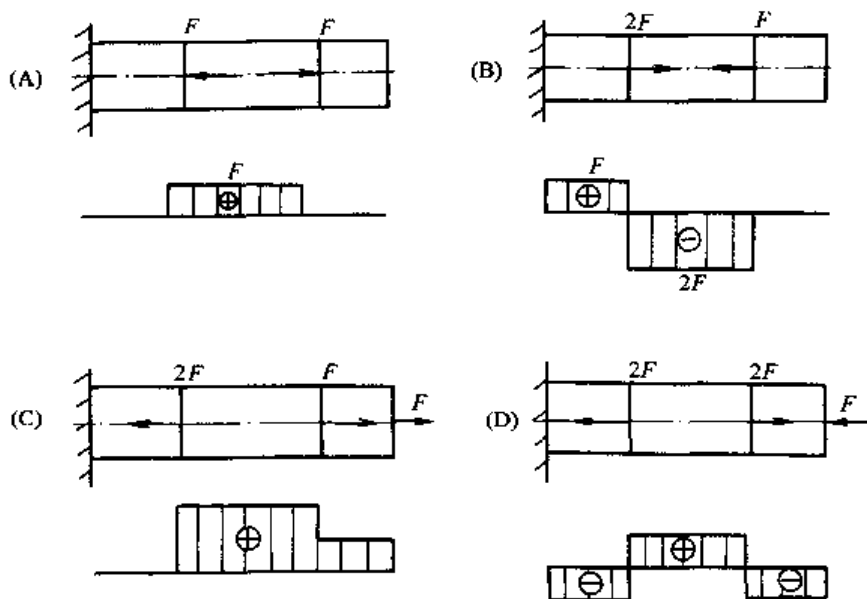
同样大小的轴向拉力, 它们的应力是否相等? ()。

- (A) 不相等 (B) 相等 (C) 不能确定

5.5 下面四个轴向拉压杆件中哪个杆件的轴力图不正确? ()。



题 5.3 图



题 5.5 图

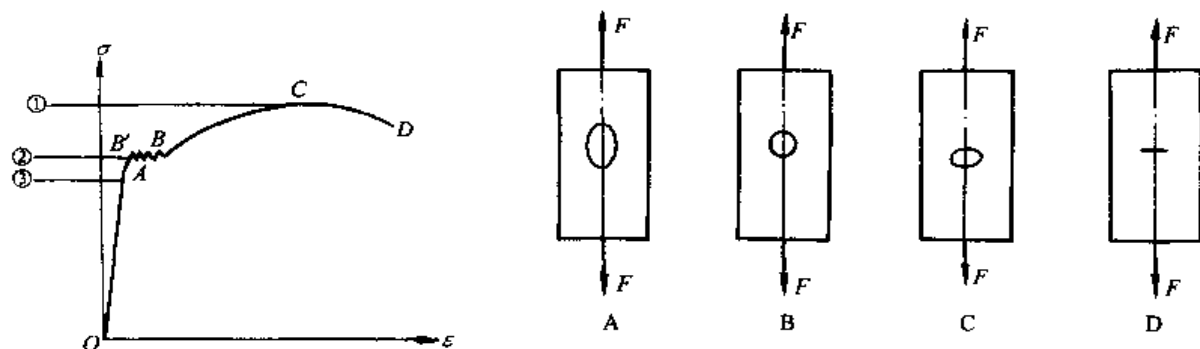
5.6 应用拉压正应力公式 $\sigma = \frac{N}{A}$ 的条件是 ()。

- (A) 应力小于比例极限 (B) 应力小于弹性极限
(C) 外力的合力沿杆轴线 (D) 应力小于屈服极限

5.7 选择拉伸曲线中三个强度指标的正确名称为 ()。

- (A) ①强度极限, ②弹性极限, ③屈服极限
(B) ①屈服极限, ②强度极限, ③比例极限
(C) ①屈服极限, ②比例极限, ③强度极限
(D) ①强度极限, ②屈服极限, ③比例极限

5.8 图示四根受拉杆危险横截面的面积相同, 首先破坏的杆件为 ()。

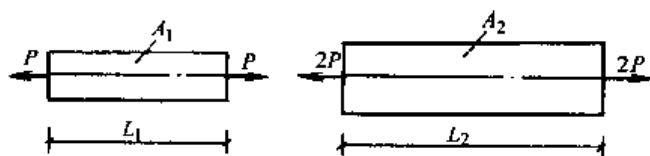


题 5.7 图

题 5.8 图

5.9 两根钢制拉杆受力如图, 若杆长 $L_2 = 2L_1$, 横截面面积 $A_2 = 2A_1$, 则两杆的伸长 ΔL 和纵向线应变 ϵ 之间的关系应为 ()。

- (A) $\Delta L_2 = \Delta L_1$, $\epsilon_2 = \epsilon_1$ (B) $\Delta L_2 = 2\Delta L_1$, $\epsilon_2 = \epsilon_1$
(C) $\Delta L_2 = 2\Delta L_1$, $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ (D) $\Delta L_2 = \frac{1}{2}\Delta L_1$, $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1$

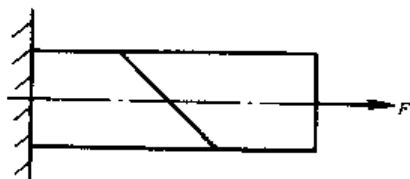


题 5.9 图

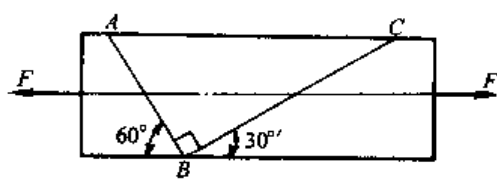
5.10 图示拉杆的外表面上有一斜线,当拉杆变形时,斜线将 ()。

- (A) 平动 (B) 转动 (C) 不动 (D) 平动加转动

5.11 矩形截面拉杆横截面面积为 A , 受轴向拉力 F , 如题 5.11 图所示。已知材料的弹性模量为 E , 泊松比为 μ , 则杆表面直角 ABC 的角度改变量为 ()。



题 5.10 图



题 5.11 图

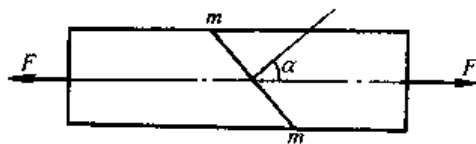
- (A) $\frac{\sqrt{3}}{8} (1 + \mu) \frac{F}{AE}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2 (1 + \mu) AE} \frac{F}{AE}$
 (C) $\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \mu) \frac{F}{AE}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \mu) \frac{F}{AE}$

5.12 图示拉杆由两段胶合而成, 胶合面 $m-m$ 的法线与轴线夹角为 α , 如题图 5.12 所示。已知胶合面的许可拉应力 $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$, 许可切应力 $[\tau] = 50 \text{ MPa}$, 问 α 角为多少时可使胶合面承受最大拉力。

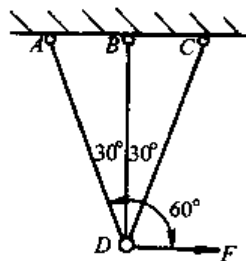
- (A) $\tan \alpha = 0.5$ (B) $\tan \alpha = 2$ (C) $\tan \alpha = 1$ (D) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5.13 一桁架及其承载情况如图, 三杆的抗拉(压)刚度 EA 相同, 则其中杆 BD 的轴力 N 为 ()。

- (A) $N = P$ (B) $N > 0$ (C) $N < 0$ (D) $N = 0$



题 5.12 图



题 5.13 图

5.14 已知题 5.14 图所示杆件横截面面积为 A , 材料的弹性模量为 E , 杆件 A 、 B 两端的支座反力为 ()。

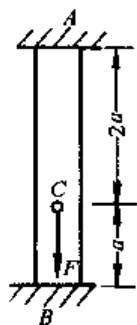
- (A) $F_A = F, F_B = 0$ (B) $F_A = \frac{2}{3} F, F_B = \frac{1}{3} F$
 (C) $F_A = \frac{1}{3} F, F_B = \frac{2}{3} F$ (D) $F_A = \frac{1}{2} F, F_B = \frac{1}{2} F$

5.15 设图示结构中 Δl_2 , Δl_3 分别表示杆②、③的伸长, Δl_1 表示杆①的缩短, 则 Δl_3 与 Δl_1 、 Δl_2 的关系式为 ()。

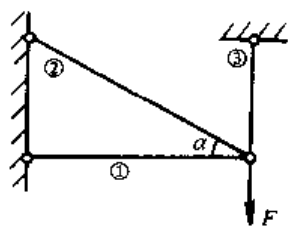
- (A) $\Delta l_3 = \Delta l_1 \tan \alpha + \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$ (B) $\Delta l_3 = \Delta l_1 \tan \alpha + \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha}$
 (C) $\Delta l_3 = \Delta l_1 \cot \alpha + \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$ (D) $\Delta l_3 = \Delta l_1 \cot \alpha + \Delta l_2 \sin \alpha$

5.16 图示杆件横截面面积 $A = 0.0025 \text{ m}^2$, $a = 0.15 \text{ m}$, $b = 0.1 \text{ m}$, 材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 力 $F = 150 \text{ kN}$, 则杆 AC 段的伸长量为 ()。

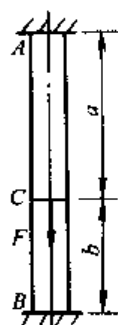
- (A) 0.036 mm (B) 0.018 mm (C) 0.18 mm (D) 0.36 mm



题 5.14 图



题 5.15 图



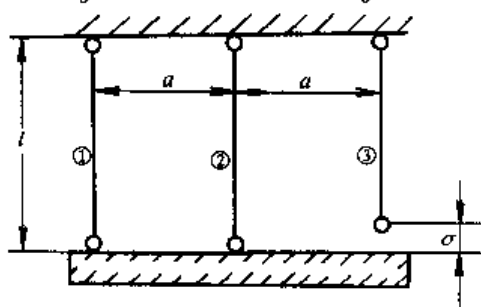
题 5.16 图

5.17 钢杆 1、2、3 的拉压刚度均为 EA , 长为 L , 若杆 3 在制造时短了 δ , 则正确的变形协调条件为 ()。

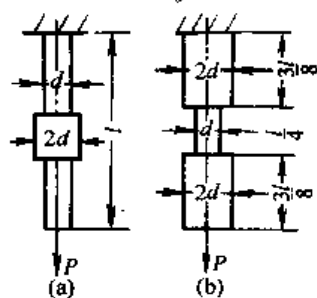
- (A) $\delta = \delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3$ (B) $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$
 (C) $\delta = \delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3$ (D) $\delta = 2\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$

5.18 两根圆截面直杆材料相同, 尺寸如题 5.18 图, 则两杆变形能的比值 ()。

- (A) $\frac{U_a}{U_b} = \frac{1}{2}$ (B) $\frac{U_a}{U_b} = \frac{16}{7}$ (C) $\frac{U_a}{U_b} = \frac{13}{7}$ (D) $\frac{U_a}{U_b} = \frac{7}{13}$



题 5.17 图



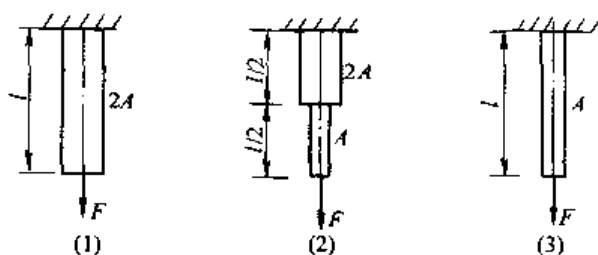
题 5.18 图

5.19 三杆材料相同, 尺寸如图, 则比较三杆弹性变形能的大小为 ()。

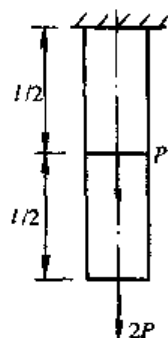
- (A) $U_1 > U_2 > U_3$ (B) $U_1 < U_2 < U_3$
 (C) $U_2 < U_1 < U_3$ (D) $U_2 > U_3 > U_1$

5.20 图示等截面直杆的抗拉刚度为 EA , 其变形能应为下列式中的 ()。

- (A) $U = 5P^2 l / (6EA)$ (B) $U = 3P^2 l / (2EA)$
 (C) $U = 9P^2 l / (4EA)$ (D) $U = 13P^2 l / (4EA)$



题 5.19 图



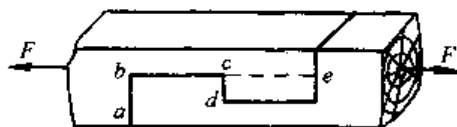
题 5.20 图

5.21 图示拉杆接头的剪切面 A 和挤压面 A_{jy} 为 ()。

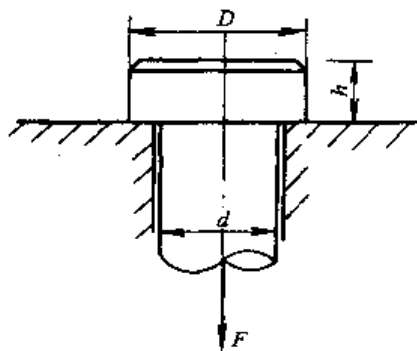
- (A) $A: ab$ $A_{jy}: cb$ (B) $A: ce$ $A_{jy}: cd$
 (C) $A: ce$ $A_{jy}: ab$ (D) $A: ce$ $A_{jy}: bc$

5.22 图示螺钉受拉力 F 作用, 螺钉头直径 $D=40$ mm, $h=12$ mm, 螺钉杆直径 $d=20$ mm, $[\tau]=60$ MPa, $[\sigma_{bs}]=200$ MPa, $[\sigma]=160$ MPa, 则螺钉可承受的最大拉力 F 为 ()。

- (A) 45 kN (B) 50 kN (C) 90 kN (D) 188.5 kN



题 5.21 图



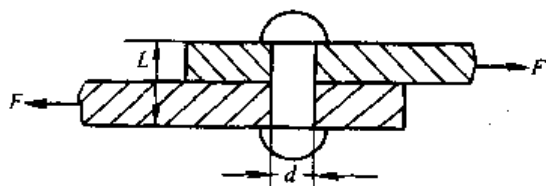
题 5.22 图

5.23 铆钉的许可切应力为 $[\tau]$, 许可挤压应力为 $[\sigma_{bs}]$, 则题 5.23 图所示铆接件的铆钉合理长细比 l/d 为 ()。

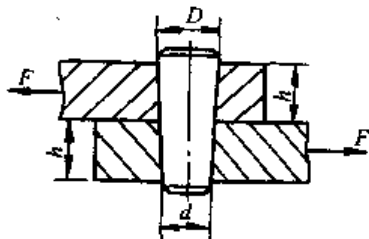
- (A) $\frac{\pi [\tau]}{8 [\sigma_{bs}]}$ (B) $\frac{8 [\sigma_{bs}]}{\pi [\tau]}$ (C) $\frac{2 [\sigma_{bs}]}{\pi [\tau]}$ (D) $\frac{\pi [\tau]}{2 [\sigma_{bs}]}$

5.24 图示两板用圆锥销钉联接, 圆锥销钉的受剪面积为 ()。

- (A) $\frac{1}{4} \pi D^2$ (B) $\frac{1}{4} \pi d^2$ (C) $\frac{\pi}{4} \left(\frac{D+d}{2} \right)^2$ (D) $\frac{h}{4} (3d+D)$



题 5.23 图



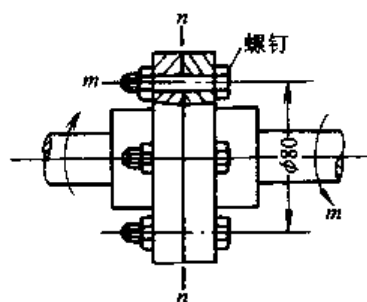
题 5.24 图

5.25 图示联轴节传递的力偶矩 $m=200$ N·m, 凸缘之间用 4 只螺栓连接, 螺栓内径 $d=10$ mm, 对称地分布在 $D=80$ mm 的圆周上。则螺栓的切应力为 ()。

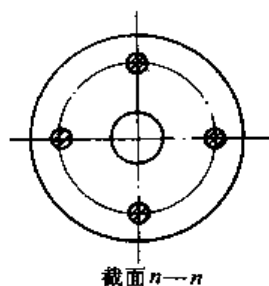
- (A) 4.0 MPa (B) 15.9 MPa (C) 8.0 MPa (D) 31.8 MPa

5.26 直径为 d 的圆柱与其圆形基座为同一整体, 已知圆形基座直径 $D = 3d$, 厚度为 t , 若假设地基对基座的支座反力均匀分布, 圆柱承受轴向压力 F , 则基座剪切面的剪力为 ()。

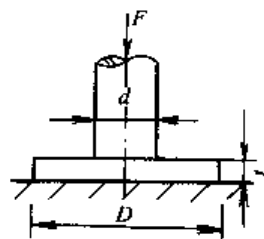
- (A) F (B) 大于 F (C) 小于 F (D) 0



题 5.25 图



题 5.26 图

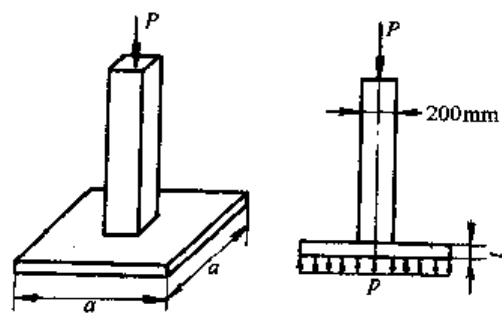


5.27 正方形截面的混凝土柱, 其横截面边长为 200 mm, 其基底为边长 $a = 1$ m 的正方形混凝土板。柱受轴向压力 $P = 100$ kN, 如图所示。假设地基对混凝土板的支反力均匀分布, 混凝土的许可切应力 $[\tau] = 1.5$ MPa, 则使柱不致穿过板, 而混凝土板所需的最小厚度 t 为 ()。

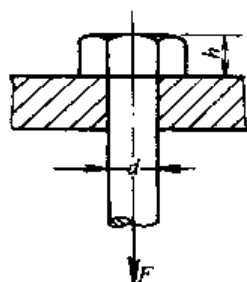
- (A) 83 mm (B) 100 mm (C) 125 mm (D) 80 mm

5.28 图示螺钉在拉力 P 作用下。已知材料的剪切许可应力 $[\tau]$ 和拉伸许用应力 $[\sigma]$ 之间的关系约为: $[\tau] = 0.6 [\sigma]$, 则螺钉直径与钉头高度的合理比值 d/h 为 ()。

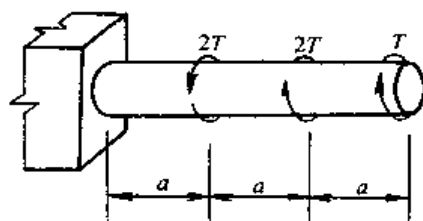
- (A) 2.4 (B) 1.2 (C) 1.0 (D) 0.76

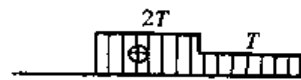
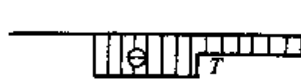

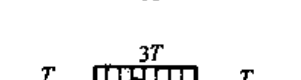


题 5.27 图



题 5.28 图

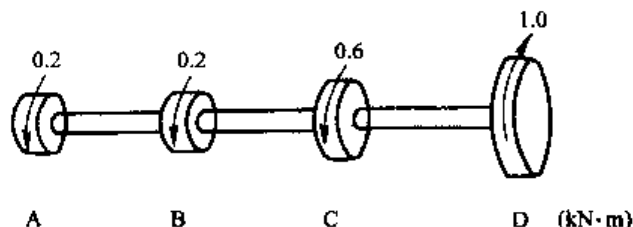


- (A) 
 (B) 
 (C) 
 (D) 

题 5.29 图

5.30 等截面圆轴上装有四个皮带轮, 则四种方案中最合理方案为 ()。

- (A) 将 C 轮与 D 轮对调;
 (B) 将 B 轮与 D 轮对调;
 (C) 将 B 轮与 C 轮对调;
 (D) 将 B 轮与 D 轮对调, 然后再将 B 轮与 C 轮对调。

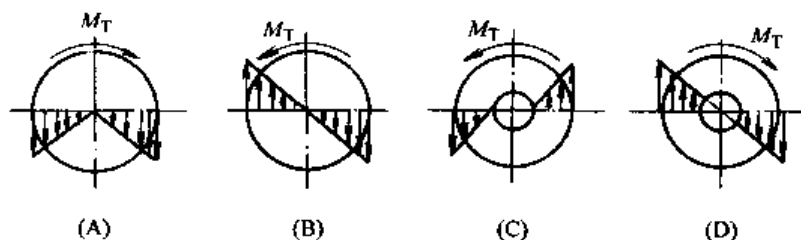


题 5.30 图

5.31 扭转切应力公式 $\tau_\rho = \frac{M_T}{I_p} \rho$ 适用于哪种杆件? ()。

- (A) 矩形截面 (B) 任意实心截面
 (C) 任意材料的圆截面 (D) 线弹性材料的圆截面

5.32 在图示受扭圆轴横截面上的切应力分布图中, 正确的结果是 ()。



题 5.32 图

5.33 内、外直径分别为 d 、 D 的空心圆轴, 其抗扭截面系数为 ()。

- (A) $W_p = (\pi D^3/16) - (\pi d^3/16)$
 (B) $W_p = (\pi D^3/32) - (\pi d^3/32)$
 (C) $W_p = [\pi/(16D)] (D^4 - d^4)$
 (D) $W_p = (\pi D^4/32) - (\pi d^4/32)$

5.34 空心圆轴, 其内外径之比为 α , 扭转时轴内的最大切应力为 τ , 这时横截面上内边缘处的切应力为 ()。

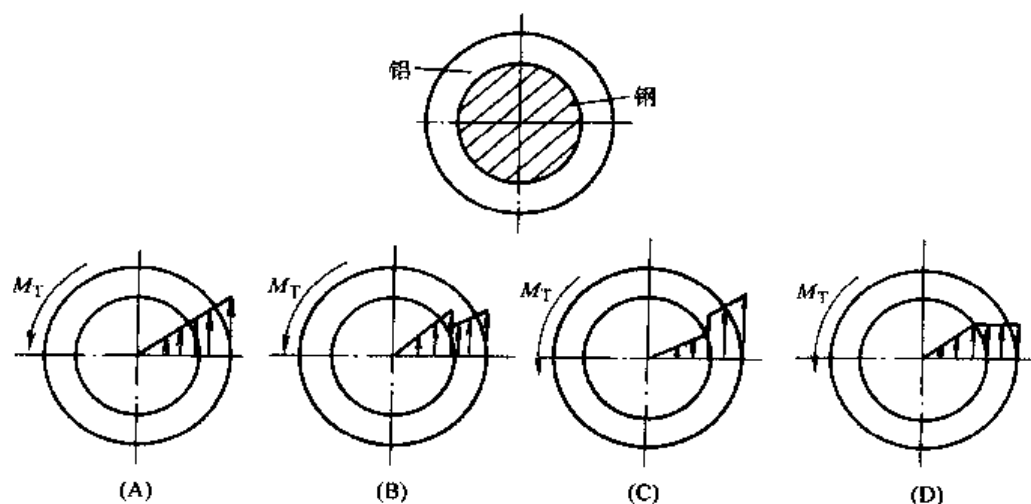
- (A) 0 (B) $\alpha\tau$ (C) τ/α (D) $(1-\alpha^4)\tau$

5.35 图示圆轴由钢杆和铝套管牢固地结合在一起。扭转变形时, 横截面上切应力分布有图示四种答案。其中正确的一种为 ()。

5.36 钢制实心轴和铝制空心圆轴 (内外径之比 $\alpha = d/D = 0.6$) 的长度及横截面积均相等, 钢的许可切应力 $[\tau_1] = 80 \text{ MPa}$, 铝的许可切应力 $[\tau_2] = 50 \text{ MPa}$ 。仅从强度条件考虑, 能承受较大扭矩的是 ()。

- (A) 铝制空心轴 (B) 钢制实心轴
 (C) 承载能力相同 (D) 无法判断

5.37 单位长度扭转角与下列哪个因素无关? ()。



题 5.35 图

(A) 材料性质

(B) 扭矩

(C) 杆的长度

(D) 截面几何性质

5.38 图示圆轴受扭, 则 A、B、C 三个横截面相对于 D 截面的扭转角的答案为 ()。

(A) $\varphi_{DA} = \varphi_{DB} = \varphi_{DC}$ (B) $\varphi_{DA} = 0, \varphi_{DB} = \varphi_{DC}$ (C) $\varphi_{DA} = \varphi_{DB} = 2\varphi_{DC}$ (D) $\varphi_{DA} = \varphi_{DC}, \varphi_{DB} = 0$

5.39 公式 $d\varphi/dx = T/(GI_P)$ 的正确使用条件是 ()。

(A) 圆截面杆扭转, 变形在线弹性范围内

(B) 圆截面杆扭转, 任意变形范围

(C) 任意截面杆扭转, 线弹性变形

(D) 矩形截面杆扭转

5.40 实心圆轴受扭, 若将轴的直径减小一半时, 则圆轴的扭转角是原来的 ()。

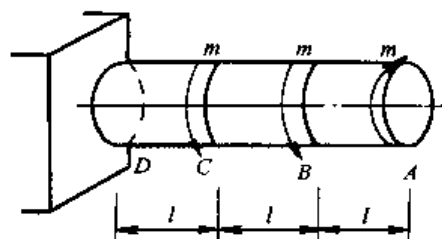
(A) 2 倍

(B) 4 倍

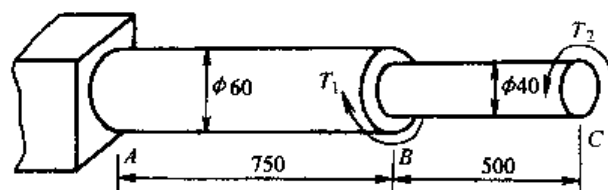
(C) 8 倍

(D) 16 倍

5.41 变截面圆轴如图示。已知 $T_1 = 2 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $T_2 = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $G = 80 \text{ GPa}$, 此轴的最大扭转角 φ_{\max} 为 ()。

(A) 1.85° (B) 1.27° (C) 1.43° (D) 1.69° 

题 5.38 图



题 5.41 图

5.42 铸铁试件扭转破坏的破坏面为 ()。

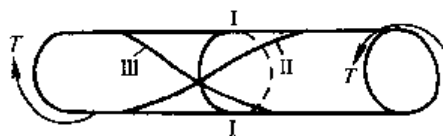
(A) 沿横截面 I - I 剪断

(B) 沿螺旋面 II (与试件轴线夹角 45°) 拉断(C) 沿螺旋面 III (与试件轴线夹角 45°) 拉断

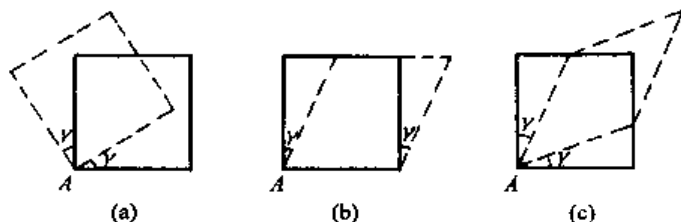
(D) 沿横截面 I - I 拉断

5.43 单元体变形后的形状如图中虚线所示, 则 A 点的切应变是 ()。

- (A) $0, 2\gamma, 2\gamma$ (B) $\gamma, \gamma, 2\gamma$
(C) $\gamma, 2\gamma, 2\gamma$ (D) $0, \gamma, 2\gamma$



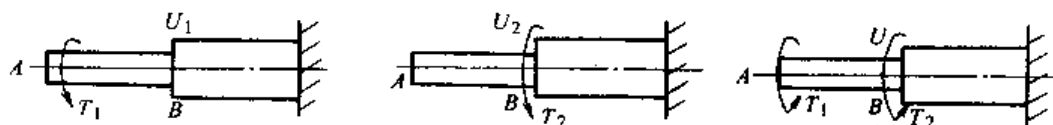
题 5.42 图



题 5.43 图

5.44 变截面圆轴如图, 当 A 截面承受转矩 T_1 时, 轴的变形能为 U_1 , A 截面的扭转角为 φ_1 ; 当 B 截面承受转矩 T_2 时, 轴的变形能为 U_2 , B 截面的扭转角为 φ_2 ; 若该轴同时承受转矩 T_1 和 T_2 , 则轴的变形能为 ()。

- (A) $U = U_1 + U_2$
(B) $U = U_1 + U_2 + T_2 \varphi_1$
(C) $U = U_1 + U_2 + T_1 \varphi_2$
(D) $U = U_1 + U_2 + \frac{1}{2} T_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} T_2 \varphi_1$



题 5.44 图

5.45 请选择正确结论: 图形对其对称轴的 ()。

- (A) 静矩为零, 惯性矩不为零, 惯性积为零
(B) 静矩不为零, 惯性矩和惯性积均为零
(C) 静矩、惯性矩及惯性积均为零
(D) 静矩、惯性矩及惯性积均不为零

5.46 由惯性矩的平行移轴公式, I_{Z_2} 的答案为 ()。

- (A) $I_{Z_2} = I_{Z_1} + bh^3/4$ (B) $I_{Z_2} = I_Z + bh^3/4$
(C) $I_{Z_2} = I_Z + bh^3$ (D) $I_{Z_2} = I_{Z_1} + bh^3$

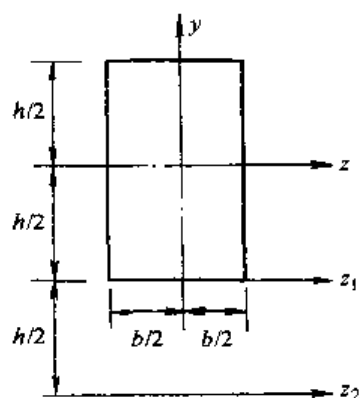
5.47 图示矩形截面, Z 轴过形心 C, 则该截面关于 Z、 Z_1 及 Z_2 轴的惯性矩关系为 ()。

- (A) $I_Z > I_{Z1} > I_{Z2}$ (B) $I_{Z2} > I_Z > I_{Z1}$
(C) $I_{Z2} > I_{Z1} > I_Z$ (D) $I_{Z1} > I_Z > I_{Z2}$

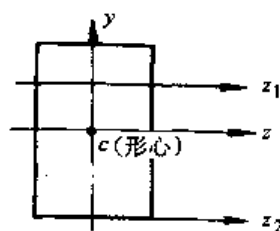
5.48 在边长为 $2a$ 的正方形中挖去一个边长为 a 的正方形, 如图示, 则该图形对 Z 轴的惯性矩 I_Z 为 ()。

- (A) $\frac{1}{4} a^4$ (B) $\frac{1}{3} a^4$ (C) $\frac{4}{5} a^4$ (D) $\frac{5}{4} a^4$

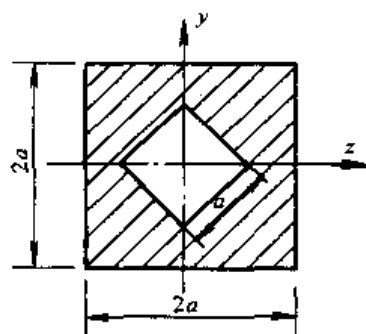
5.49 请选择图示截面对 Z 轴惯性矩的正确答案 ()。



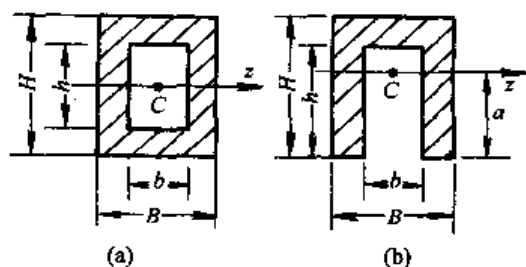
题 5.46 图



题 5.47 图



题 5.48 图

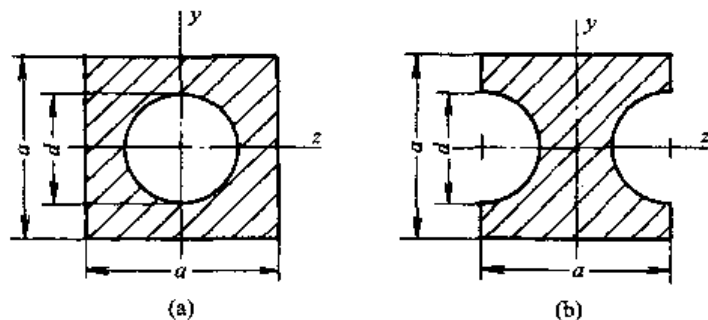


题 5.49 图

- (A) $I_{za} = I_{zb} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$
- (B) $I_{za} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$, $I_{zb} = I_{za} - bh \left(a - \frac{h}{2} \right)^2$
- (C) $I_{zb} = I_{za} + bh \left(a - \frac{h}{2} \right)^2$
- (D) $I_{za} = I_{zb} - bh \left(a - \frac{h}{2} \right)^2$

5.50 下面两图形对各自形心轴 y 、 z 的惯性矩关系为 ()。

- (A) $I_{ya} > I_{yb}$, $I_{za} = I_{zb}$
- (B) $I_{ya} = I_{yb}$, $I_{za} = I_{zb}$
- (C) $I_{ya} < I_{yb}$, $I_{za} < I_{zb}$
- (D) $I_{ya} > I_{yb}$, $I_{za} > I_{zb}$



题 5.50 图

5.51 圆形截面如图, 其中 C 为形心, K 为圆上不与形心重合的任一点, 则过 C 点和 K 点主轴的有几对主轴? ()。

- (A) 过 C 点有两对正交的形心主轴, 过 K 点有一对正交主轴

- (B) 过 C 点有无数对, 过 K 点有一对
 (C) 过 C 点有无数对, 过 K 点有两对
 (D) 过 C 点和 K 点均有一对主轴

5.52 由三个正方形组成的截面如图所示。下列结论中正确的是 ()。

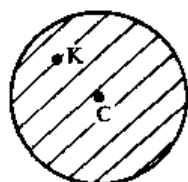
- ① $I_{xy} = (I_{xy})_{ABGH} + (I_{xy})_{BCDG} + (I_{xy})_{DEFG}$
 ② $I_{xy} = 0$
 ③ x, y 轴为主惯性轴
 ④ $I_x = I_y$

- (A) ④ (B) ①④ (C) ②③ (D) 全对

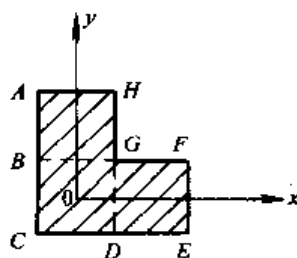
5.53 图示等边角钢的横截面积为 A , C 点为形心。下列结论中正确的是 ()。

- ① $I_x = I_y, I_{x'} = I_{y'}, I_{x''} = I_{y''}$
 ② $I_{xy} > 0, I_{x'y'} < I_{xy}, I_{x''y''} = 0$
 ③ $I_x > I_{x'}$

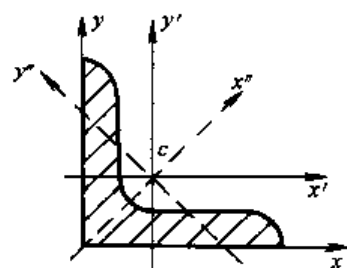
- (A) ①② (B) ②③ (C) ①③ (D) 全对



题 5.51 图



题 5.52 图



题 5.53 图

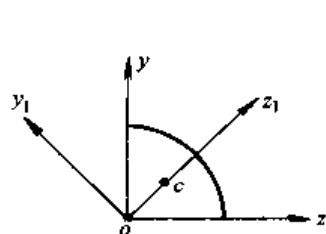
5.54 图示 1/4 圆截面, c 点为形心, 下面结论中正确的是 ()。

- (A) y_1, z_1 是主惯性轴, 而 y, z 不是
 (B) y, z 是主惯性轴, 而 y_1, z_1 不是
 (C) 两对轴都是主惯性轴
 (D) 两对轴都不是主惯性轴

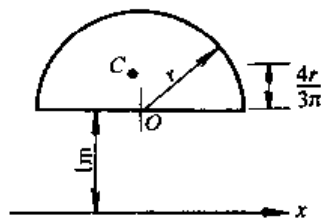
5.55 图示半圆形截面半径 $r = 1 \text{ m}$, 该截面对 x 轴的惯性矩 (形心 C 距 O 点为 $\frac{4r}{3\pi}$) 为 ()。

- (A) 1.96 (B) 0.78 (C) 3.3 (D) 3.68

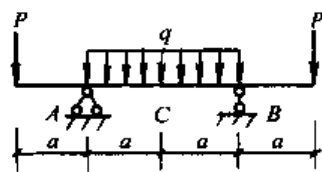
5.56 梁的荷载及支承情况关于梁中央 C 截面对称, 则下列结论中正确的是 ()。



题 5.54 图



题 5.55 图



题 5.56 图

- (A) Q 图对称, M 图对称, 且 $Q_C = 0$
 (B) Q 图对称, M 图反对称, 且 $M_C = 0$

(C) Q 图反对称, M 图对称, 且 $Q_C = 0$

(D) Q 图反对称, M 图反对称, 且 $M_C = 0$

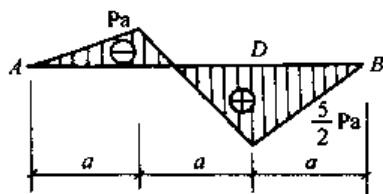
5.57 梁的弯矩图如图所示, 则梁上的最大剪力为 ()。

- (A) P (B) $\frac{5}{2}P$ (C) $\frac{3}{2}P$ (D) $\frac{7}{2}P$

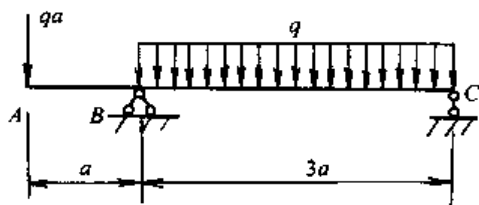
5.58 图示梁剪力等于零的截面位置 x 距 A 点之值为 ()。

- (A) $5a/6$ (B) $6a/5$ (C) $6a/7$ (D) $7a/6$

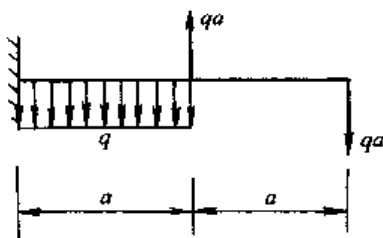
5.59 悬臂梁受载如图, 弯矩图有三种答案: 图 (A)、图 (B)、和图 (C)。其中正确的为 ()。



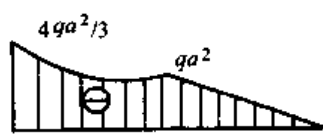
题 5.57 图



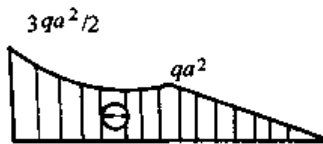
题 5.58 图



(A)



(B)

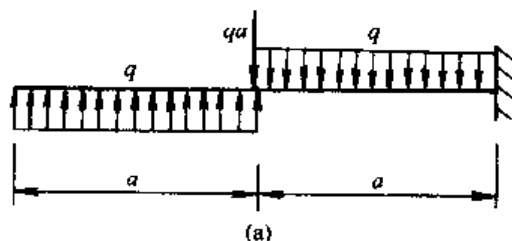


(C)

题 5.59 图

5.60 图示 (a)、(b) 两根梁, 它们的 ()。

- (A) Q 、 M 图都相同
(B) Q 、 M 图都不相同
(C) Q 图相同, M 图不同
(D) M 图相同, Q 图不同



(a)



(b)

题 5.60 图

5.61 梁的某一段内作用有均匀分布力时, 则该段内的内力图为 ()。

- (A) Q 水平线, M 斜直线
(B) Q 斜直线, M 曲线
(C) Q 曲线, M 曲线
(D) Q 斜直线, M 带拐点的曲线

5.62 梁在集中力偶作用的截面处, 它的内力图为 ()。

- (A) Q 图有突变, M 图无变化
(B) Q 图有突变, M 图有转折
(C) M 图有突变, Q 图无变化
(D) M 图有突变, Q 图有转折

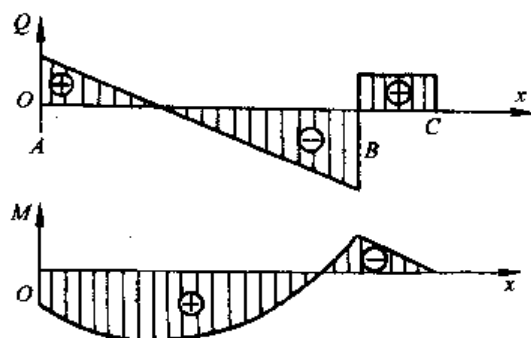
5.63 梁在集中力作用的截面处, 它的内力图为 ()。

- (A) Q 图有突变, M 图光滑连续
(B) Q 图有突变, M 图有转折
(C) M 图有突变, Q 图光滑连续

(D) M 图有突变, Q 图有转折

5.64 梁的剪力图和弯矩图如图所示, 则梁上的荷载为 ()。

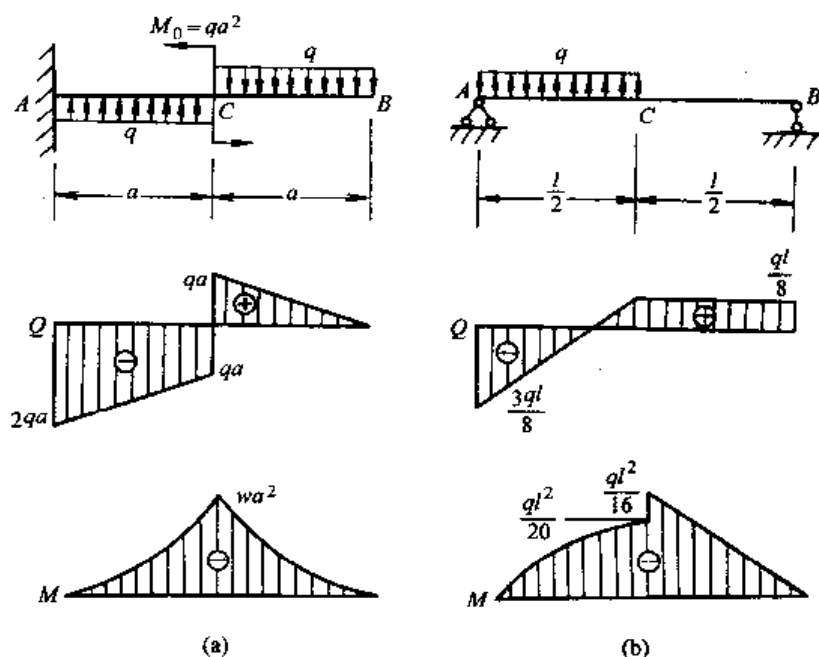
- (A) AB 段无荷载, B 截面有集中力
(B) AB 段有集中力, BC 段有均布力
(C) AB 段有均布力, B 截面有集中力偶
(D) AB 段有均布力, A 截面有集中力偶



题 5.64 图

5.65 下列剪力图和弯矩图中的错误为 ()。

(A) 梁 (a) 图 C 截面剪力应连续, C 截面弯矩应有突变; 图 (b) 梁 C 截面弯矩应连续



题 5.65 图

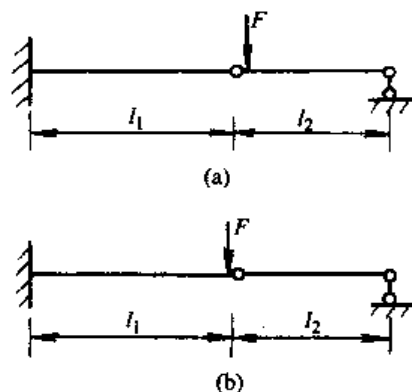
(B) 图 (a) 梁 B 截面剪力不应为零, A 截面弯矩不应为零; 图 (b) 梁 C 截面剪力应有突变, C 截面弯矩应光滑连续

(C) 图 (a) 梁 B 截面剪力应为零, 弯矩不为零; 图 (b) AC 段剪力应为曲线, 弯矩图在 AC 段有极值点

(D) 图 (a) 梁剪力在 C 截面应连续, 弯矩在 AC 段的凹向应一至, 图 (b) 梁弯矩在 C 截面应连续

5.66 连续梁两种受力情况如图所示, 力 F 非常靠近中间铰链。则下面四项中正确结论为 ()。

- (A) 两者的 Q 图和 M 图完全相同
(B) 两者的 Q 图相同, M 图不同
(C) 两者的 Q 图不同, M 图相同
(D) 两者的 Q 图和 M 图均不相同



题 5.66 图

5.67 图示简支梁中点承受集中力 F , 若分别采用图示面积相等的实心圆和空心圆同截面, 且空心圆截面的 $d_2/D_2 =$

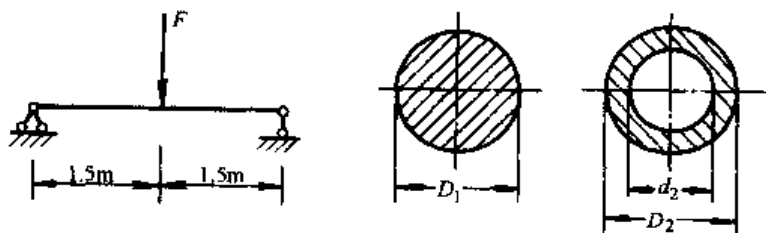
$\frac{3}{5}$, 则二者中最大正应力之比 $\sigma_{1\max}/\sigma_{2\max}$ 为 ()。

(A) 1.53

(B) 1.70

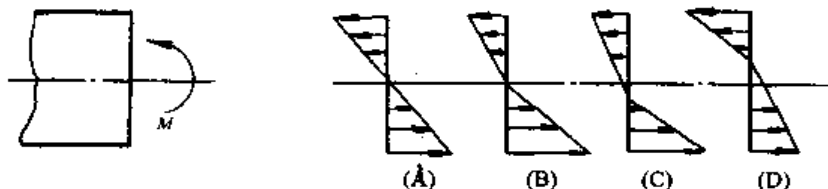
(C) 2.12

(D) 0.59



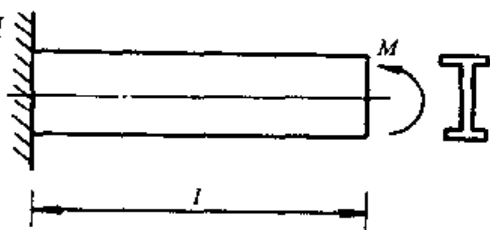
题 5.67 图

5.68 矩形截面纯弯梁, 材料的抗拉弹性模量 E_t 大于材料的抗压弹性模量 E_c 则正应力在截面上的分布图为以下四种答案中的 ()。



题 5.68 图

5.69 如图所示的工字形悬臂梁, 自由端受力偶 M 的作用, 梁中性层上正应力 σ 及切应力 τ 有 ()。

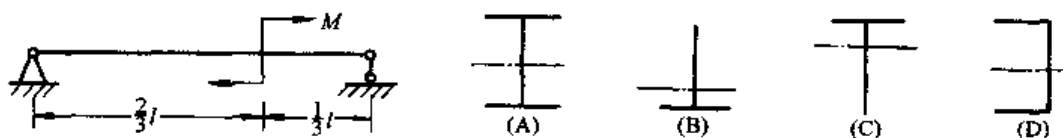
(A) $\sigma=0, \tau \neq 0$;(B) $\sigma \neq 0, \tau \neq 0$;(C) $\sigma \neq 0, \tau = 0$;(D) $\sigma=0, \tau=0$ 。

题 5.69 图

5.70 根据梁的正应力强度条件, 梁的合理截面形状应满足的条件是 ()。

(A) W/A 越小越好(B) W/A 越大越好(C) $W/A=1$ 好(D) $W/A=2$ 好

5.71 如图所示, 铸铁梁有 (A)、(B)、(C) 和 (D) 四种截面形状可供选择, 根据正应力强度条件, 合理的截面形状是 ()。



题 5.71 图

5.72 梁的截面形状如图所示, 圆截面上半部分有一圆孔。在 xOz 平面内作用有正弯矩 M , 绝对值最大的正应力位置为四种答案中的 ()。

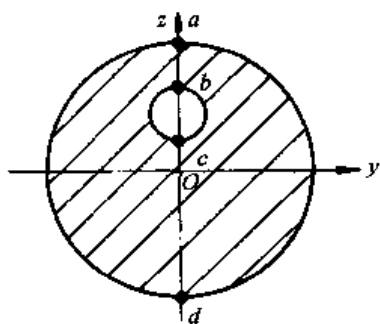
(A) a 点

(B) b 点

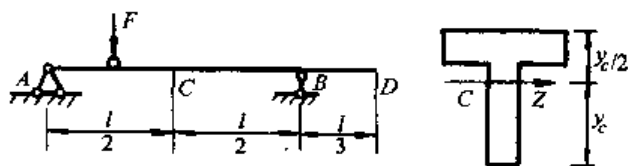
(C) c 点

(D) d 点

5.73 图示梁受移动荷载 F 作用, 当 F 移到哪个截面处梁内的压应力最大? ()。



题 5.72 图

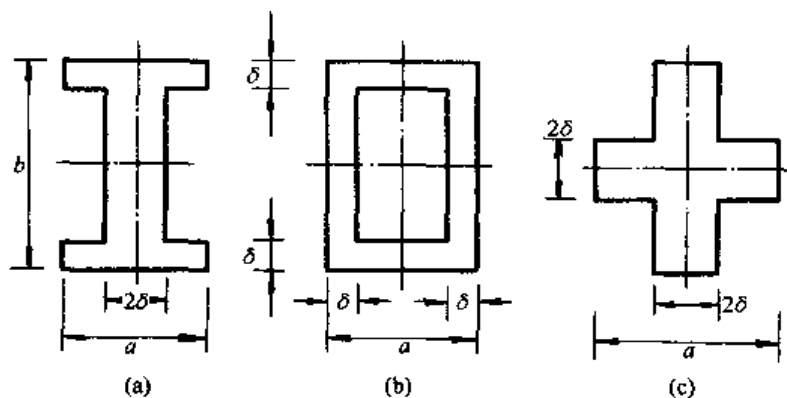


题 5.73 图

(A) 截面 A (B) 截面 B (C) 截面 C (D) 截面 D

5.74 受力情况相同的三种等截面梁, 如图 (a)、(b) (c) 所示。若用 $(\sigma_{\max})_1$, $(\sigma_{\max})_2$, $(\sigma_{\max})_3$ 分别表示这三种梁内横截面上的最大正应力, 则下列结论中正确的是 ()。

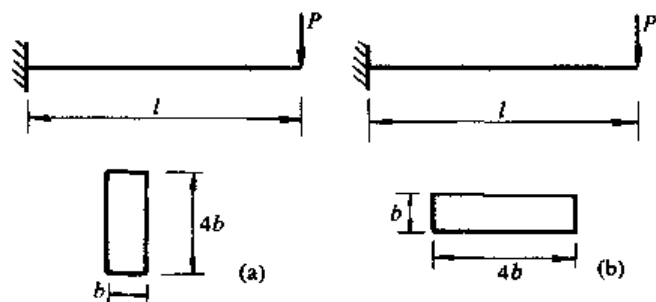
- (A) $(\sigma_{\max})_1 = (\sigma_{\max})_2 = (\sigma_{\max})_3$ (B) $(\sigma_{\max})_1 < (\sigma_{\max})_2 = (\sigma_{\max})_3$
 (C) $(\sigma_{\max})_1 = (\sigma_{\max})_2 < (\sigma_{\max})_3$ (D) $(\sigma_{\max})_1 < (\sigma_{\max})_2 < (\sigma_{\max})_3$



题 5.74 图

5.75 一梁拟用图示两种方式搁置, 则两种情况下的最大应力之比 $(\sigma_{\max})_a / (\sigma_{\max})_b$ 为 ()。

- (A) 1/4 (B) 1/16 (C) 1/64 (D) 16

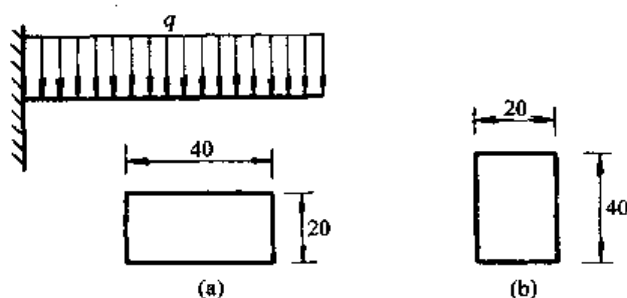


题 5.75 图

5.76 图示矩形截面采用两种放置方式, 从弯曲正应力强度观点, 承载能力 (b) 是 (a) 的多少倍? ()。

- (A) 4 (B) 2 (C) 6 (D) 8

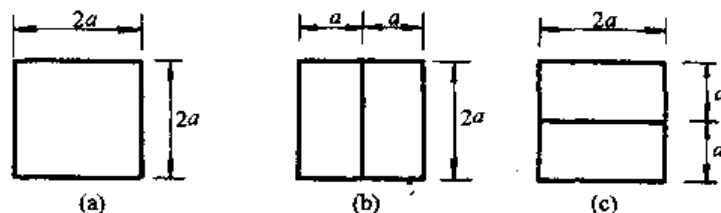
5.77 受力情况相同的三种等截面梁, 它们分别由整块材料、两块材料并列及两块材料



题 5.76 图

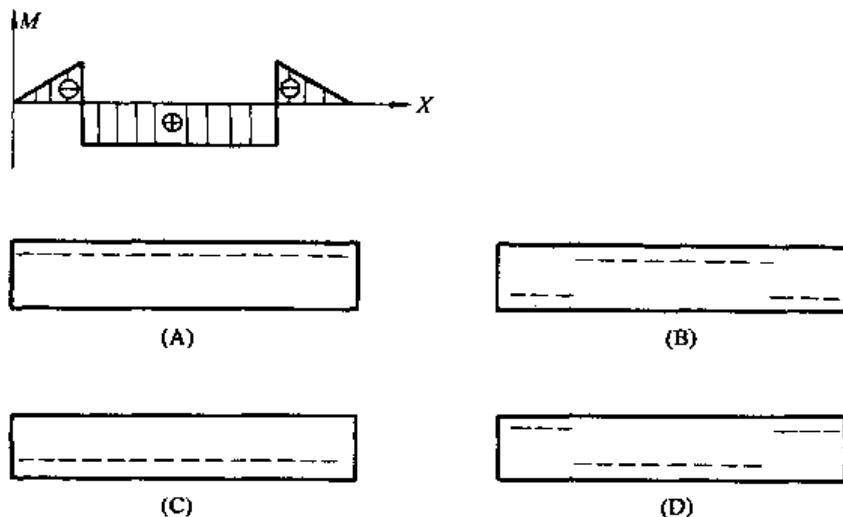
叠合（未粘接）组成，如图（a）、（b）、（c）所示。若用 $(\sigma_{\max})_1$ 、 $(\sigma_{\max})_2$ 、 $(\sigma_{\max})_3$ 分别表示这三种梁中横截面上的最大正应力，则下列结论中正确的是（ ）。

- (A) $(\sigma_{\max})_1 < (\sigma_{\max})_2 = (\sigma_{\max})_3$ (B) $(\sigma_{\max})_1 = (\sigma_{\max})_2 > (\sigma_{\max})_3$
 (C) $(\sigma_{\max})_1 > (\sigma_{\max})_2 = (\sigma_{\max})_3$ (D) $(\sigma_{\max})_1 = (\sigma_{\max})_2 < (\sigma_{\max})_3$



题 5.77 图

5.78 矩形截面混凝土梁，为提高其抗拉强度，在梁中配置钢筋。若梁弯矩如图所示，则梁内钢筋（虚线所示）的合理配置是（ ）。

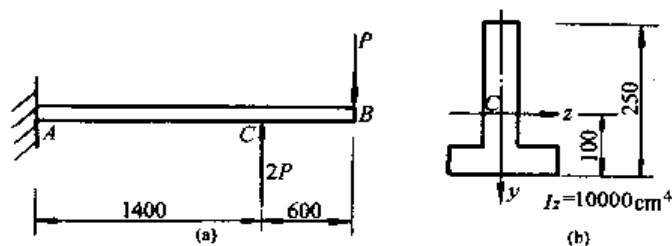


题 5.78 图

5.79 铸铁梁荷载、结构及截面尺寸如图所示，设材料的许可拉应力 $[\sigma_1] = 40 \text{ MPa}$ ，许可压应力 $[\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$ ，梁的许可荷载 $[P]$ 为（ ）。

- (A) 50 kN (B) 133.3 kN (C) 44.4 kN (D) 26.7 kN

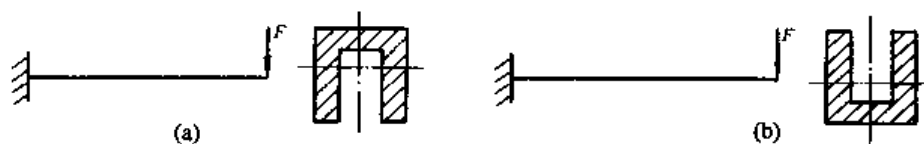
5.80 如图所示的两铸铁梁，材料相同，承受相同的荷载 F 。则当 F 增大时，破坏的



题 5.79 图

情况是 ()。

- (A) 同时破坏 (B) (a) 梁先坏 (C) (b) 梁先坏 (D) 不能确定



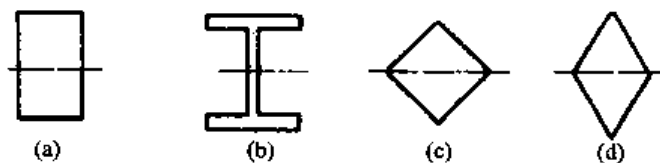
题 5.80 图

5.81 横力弯曲时, 横截面上最大切应力的发生位置是 ()。

- (A) 中性轴上 (B) 不能确定 (C) 截面最宽处 (D) 截面最窄处

5.82 图示梁的四种截面形状, 假定剪力沿垂直方向。横截面上最大切应力 (或切应力垂直分量的最大值) 的位置, 为四种答案中的 ()。

- (A) 全部在中性轴处
(B) 全部不在中性轴处
(C) (a) 和 (b) 在中性轴处, (c) 和 (d) 不在中性轴处
(D) (a) 和 (b) 不在中性轴处, (c) 和 (d) 在中性轴处



题 5.82 图

5.83 一矩形截面外伸木梁如图示。设截面的高与宽之比为 $\frac{h}{b} = 2$, 木材的许可弯曲正应力 $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$, 许用切应力 $[\tau] = 2 \text{ MPa}$, 已知 $F_1 = 40 \text{ kN}$, $F_2 = 15 \text{ kN}$, $L = 0.6 \text{ m}$ 。该梁的宽度 b 为 ()。

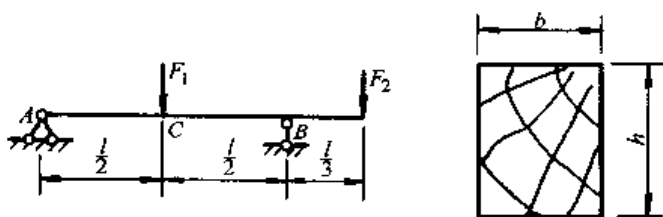
- (A) 122.5 mm (B) 87.7 mm (C) 100 mm (D) 245 mm

5.84 图示两根简支梁, 一根材料为钢, 另一根材料为铝。已知它们的抗弯刚度 EI 相同, 在相同外力作用下, 二者的不同之处为 ()。

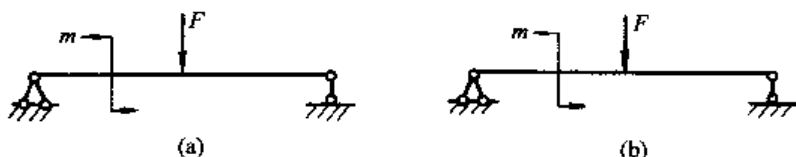
- (A) 弯曲最大正应力 (B) 剪力图 (C) 最大挠度 (D) 最大转角

5.85 选择图示梁确定积分常数的条件为 ()。

- (A) $v_A = 0$, $v_B = 0$, $v_{C左} = v_{C右}$, $\theta_C = 0$



题 5.83 图

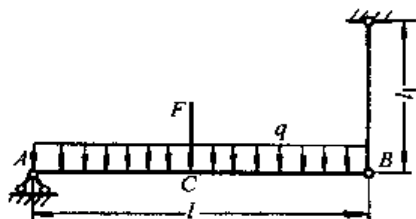


题 5.84 图

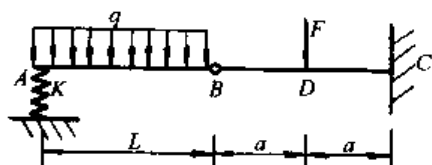
- (B) $v_A = 0$, $v_B = \Delta L$, $v_{C左} = v_{C右}$, $\theta_C = 0$
 (C) $v_A = 0$, $v_B = \Delta L$, $v_{C左} = v_{C右}$, $\theta_{C左} = \theta_{C右}$
 (D) $\theta_A = 0$, $v_B = \Delta L$, $v_C = 0$, $\theta_{C左} = \theta_{C右}$

5.86 选择图示梁确定积分常数的条件为 ()。

- (A) $v_A = 0$, $v_B = 0$, $v_{D左} = v_{D右}$, $\theta_{D左} = \theta_{D右}$, $v_C = 0$, $\theta_C = 0$
 (B) $v_A = 0$, $v_B = 0$, $\theta_B = 0$, $v_{D左} = v_{D右}$, $\theta_{D左} = \theta_{D右}$, $v_C = 0$
 (C) $v_A = \frac{F_A}{K}$, $v_{B左} = v_{B右}$, $\theta_{B左} = \theta_{B右}$, $v_{D左} = v_{D右}$, $v_C = 0$, $\theta_C = 0$
 (D) $v_A = \frac{F_A}{K}$, $v_{B左} = v_{B右}$, $\theta_{D左} = \theta_{D右}$, $v_{D左} = v_{D右}$, $v_C = 0$, $\theta_C = 0$



题 5.85 图



题 5.86 图

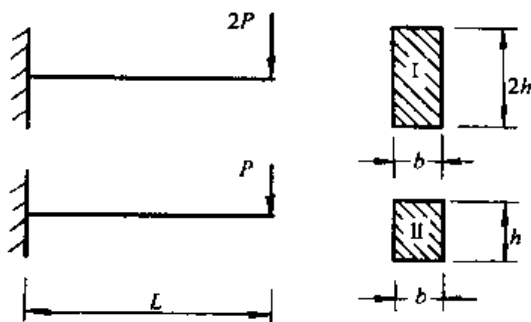
5.87 等截面直梁弯曲变形时, 挠曲线的最大曲率发生在 ()。

- (A) 挠度最大截面 (B) 转角最大截面
 (C) 剪力最大截面 (D) 弯矩最大截面

5.88 材料相同的悬臂梁 I、II, 所受荷载及截面尺寸如图所示。则两梁最大挠度之比 $v_{I \max} / v_{II \max}$ 为 ()。

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) 4

5.89 材料相同的两矩形截面梁如图所示, 其中 (b) 梁是用两根高为 $0.5h$, 宽为 b 的矩形截面梁叠合而成, 且相互间摩擦不计, 则下面结论中正确的是 ()。



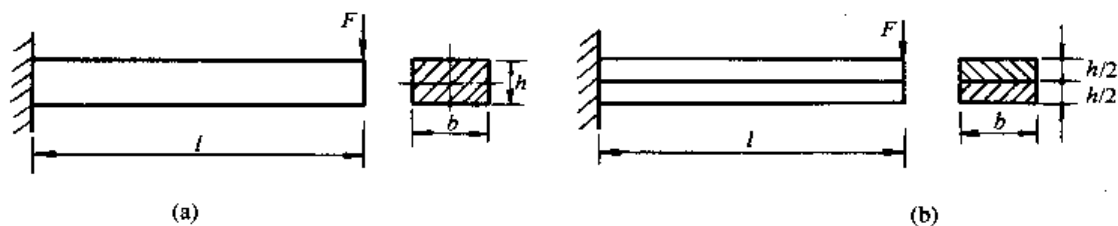
题 5.88 图

(A) 强度和刚度均不相同

(B) 强度和刚度均相同

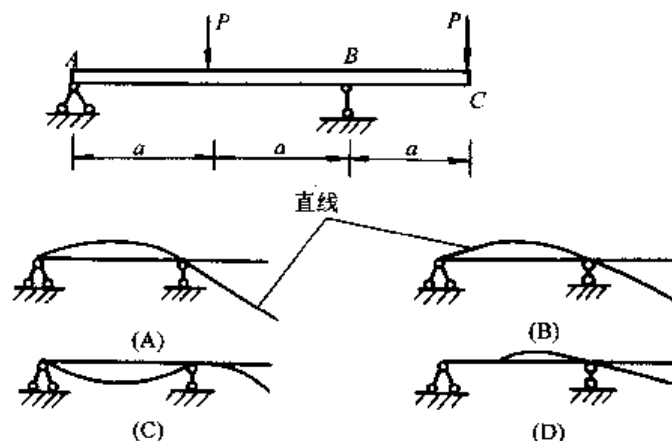
(C) 强度相同, 刚度不同

(D) 强度不同, 刚度相同



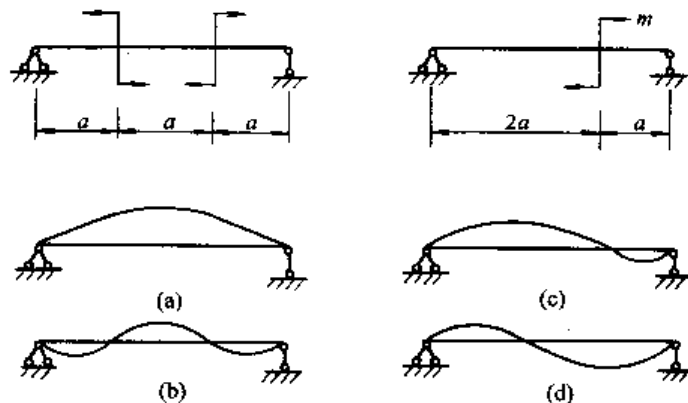
题 5.89 图

5.90 图示梁的正确挠曲线大致形状为 ()。



题 5.90 图

5.91 图示梁的正确挠曲线大致形状为 ()。



题 5.91 图

(A) (b) (d)

(B) (b) (c)

(C) (a) (c)

(D) (a) (d)

5.92 为了提高梁的承载能力, 梁的支座有图示四种方案, 则最优方案为 ()。

5.93 使用叠加原理求梁变形时必须满足的条件是 ()。

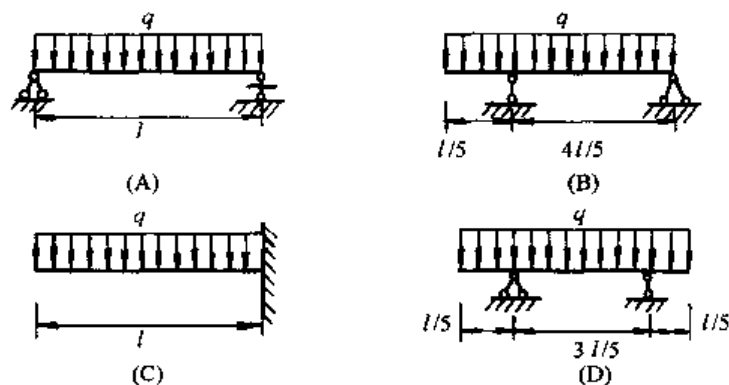
(A) 必须是静定梁

(B) 必须是小变形梁

(C) 必须是等截面直梁

(D) 必须是平面弯曲梁

5.94 用叠加法, 图示梁的 v_C 为 ()。



题 5.92 图

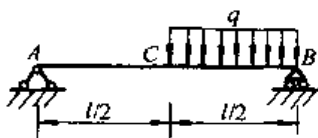
- (A) $\frac{5ql^4}{384EI}$ (B) $\frac{11ql^4}{384EI}$ (C) $\frac{5ql^4}{768EI}$ (D) $\frac{11ql^4}{768EI}$

5.95 设 B, D 间的距离为 Δ_{BD} , C, E 间的距离为 Δ_{CE} , 两梁在外力 p 作用下变形后 ()。

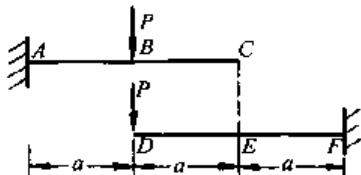
- (A) Δ_{BD} 增大, Δ_{CE} 不变 (B) Δ_{BD} 增大, Δ_{CE} 改变
(C) Δ_{BD} 减小, Δ_{CE} 不变 (D) Δ_{BD} 减小, Δ_{CE} 改变

5.96 请确定图示梁的超静定次数 ()。

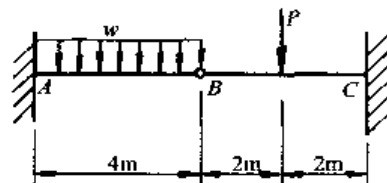
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



题 5.94 图



题 5.95 图



题 5.96 图

5.97 图 (a) 所示超静定梁, 所取的静定基分别为 (b)、(c)、(d) 三种, 其中错误的为 ()。

- (A) 图 (b) (B) 图 (c) (C) 图 (d) (D) 上述简图无错误

5.98 等截面梁如图所示, 抗弯刚度为 EI , 截面 C 处的挠度为 ()。

- (A) $\frac{Pa^3}{2EI}$ (B) $\frac{Pa^3}{3EI}$ (C) $\frac{3Pa^3}{4EI}$ (D) $\frac{5Pa^3}{6EI}$

5.99 若题 5.103 图所示梁 BC 段的弯曲刚度 EI 是 AC 段的 9 倍。则 A, B 截面弯矩之比 M_A/M_B 为 ()。

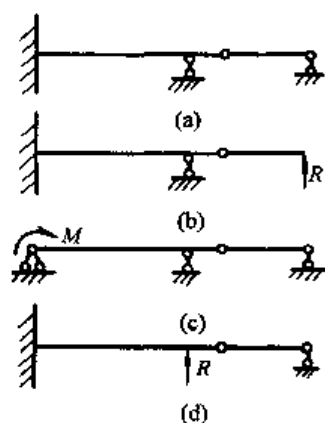
- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{9}$

5.100 梁 AB 因强度不足, 用与其材料相同、截面相同的短梁 CD 加固, 如图所示。梁 AB 在 D 处受到的支座反力为 ()。

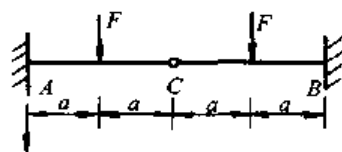
- (A) $\frac{5P}{4}$ (B) P (C) $\frac{3P}{4}$ (D) $\frac{P}{2}$

5.101 图示四种应力状态中属于单向应力状态的是 ()。

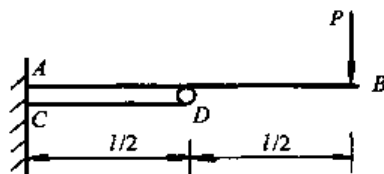
5.102 求图示平面应力状态的 $\sigma_\alpha, \varepsilon_\alpha$ 。已知 $\alpha = 45^\circ$, E, μ 分别材料的弹性模量和泊



题 5.97 图



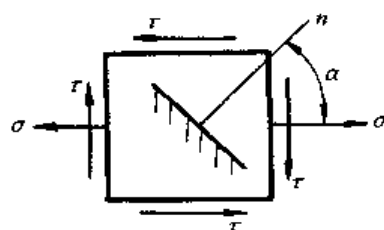
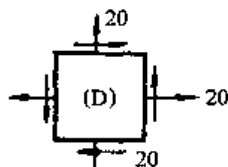
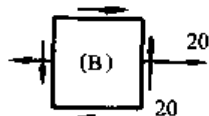
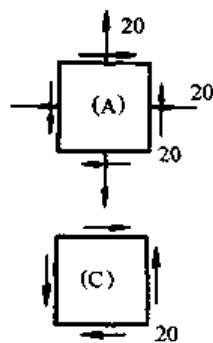
题 5.98 图



题 5.100 图

松比。()。

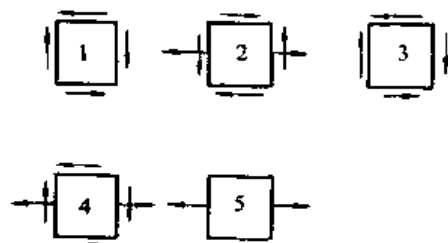
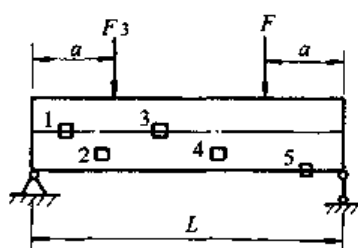
- (A) $\sigma_a = \frac{\sigma}{2} - \tau$, $\epsilon_a = \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma}{2} - \tau \right)$ (B) $\sigma_a = \frac{\sigma}{2} + \tau$, $\epsilon_a = \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma}{2} + \tau \right)$
 (C) $\sigma_a = \frac{\sigma}{2} - \tau$, $\epsilon_a = \frac{1-\mu}{2E} \sigma - \frac{1+\mu}{E} \tau$ (D) $\sigma_a = \frac{\sigma}{2} + \tau$, $\epsilon_a = \frac{1-\mu}{2E} \sigma + \frac{1+\mu}{E} \tau$



题 5.101 图

题 5.102 图

5.103 矩形截面简支梁受力如图所示, 其上各点的应力状态见图示, 关于它们的正确性有四种答案, 其中正确的一个是 ()。



题 5.103 图

- (A) 1、2 (B) 1、5 (C) 3、5 (D) 2、4

5.104 矩形截面简支梁如图所示, 已知梁的横截面面积为 A , 截面惯性矩为 I , 材料的弹性模量为 E , 泊松比为 μ , 梁外表面中性层上 A 点 45° 方向的线应变为 ϵ_{45° 。则荷载 F 为 ()。

(A) $\frac{E\varepsilon_{45^\circ}}{1-\mu}A$

(B) $\frac{E\varepsilon_{45^\circ}}{\mu-1}A$

(C) $\frac{9E\varepsilon_{45^\circ}}{4(1-\mu)}A$

(D) $\frac{4E\varepsilon_{45^\circ}}{9(1-\mu)}A$

5.105 圆轴直径 $d=20\text{ mm}$, 材料的弹性常数 $E=200\text{ GPa}$, $\mu=0.3$ 。现测得圆轴表面与轴线成 45° 方向的应变 $\varepsilon=5.2\times 10^{-4}$, 则转矩 ()。

(A) $m=1.257\text{ N}\cdot\text{m}$

(B) $m=125.7\text{ N}\cdot\text{m}$

(C) $m=233.4\text{ N}\cdot\text{m}$

(D) $m=62.8\text{ N}\cdot\text{m}$

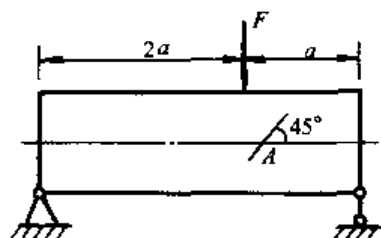
5.106 一点处的应力状态如图所示, 已知 $\sigma_x=0$, 则 σ_y 和 τ 有 ()。

(A) $\sigma_y=30\text{ MPa}$, $\tau=20\text{ MPa}$

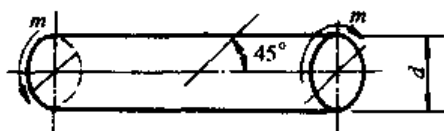
(B) $\sigma_y=60\text{ MPa}$, $\tau=20\text{ MPa}$

(C) $\sigma_y=-60\text{ MPa}$, $\tau=40\text{ MPa}$

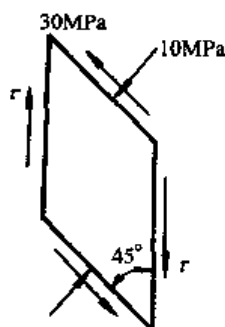
(D) $\sigma_y=60\text{ MPa}$, $\tau=40\text{ MPa}$



题 5.104 图



题 5.105 图



题 5.106 图

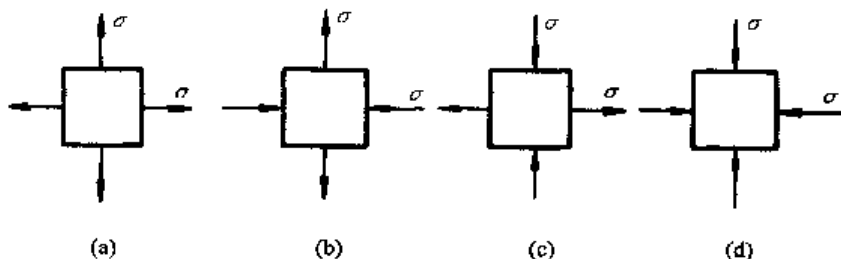
5.107 在图示四种应力状态中, 关于应力圆具有相同圆心位置和相同半径者, 为下列答案中的 ()。

(A) (a) 与 (d)

(B) (b) 与 (c)

(C) (a) 与 (d) 及 (c) 与 (b)

(D) (a) 与 (b) 及 (c) 与 (d)



题 5.107 图

5.108 图示受拉板, A 点为凸起处的最高点, A 点应力状态的应力圆有图示四种可能, 正确的答案为 ()。

5.109 从构件内某一点的周围取出一单元体如图所示。已知 $\sigma=30\text{ MPa}$, $\tau=15\text{ MPa}$, 材料的 $E=200\text{ GPa}$, $\mu=0.30$ 。则对角线 AC 的长度改变量为 ()。

(A) $3.91\times 10^{-3}\text{ mm}$

(B) $8.43\times 10^{-3}\text{ mm}$

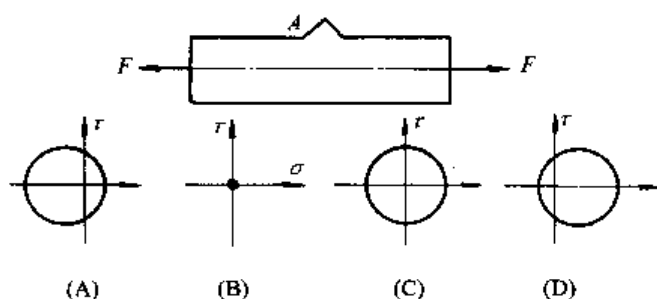
(C) $9.29\times 10^{-3}\text{ mm}$

(D) $10.25\times 10^{-3}\text{ mm}$

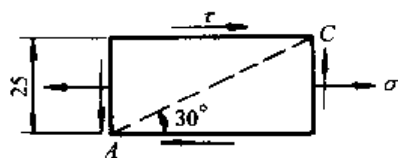
5.110 根据构件内三点处应力状态所画应力圆分别如图 (a)、(b)、(c) 所示, 按第三强度理论比较它们的危险程度, 有 ()。

(A) (a) 最危险, 其次为 (b)

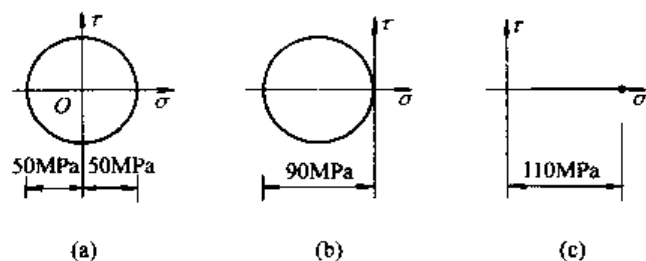
- (B) (a) 最危险, (b)、(c) 危险程度一样
 (C) (c) 最危险, 其次为 (a)
 (D) (c) 最危险, 其次为 (b)



题 5.108 图



题 5.109 图



题 5.110 图

5.111 按照第三强度理论, 比较图示两个应力状态的相当应力 (图中应力单位: MPa), 则 ()。

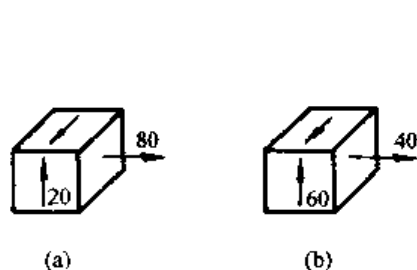
- (A) 无法判断 (B) (a) 大 (C) (b) 大 (D) 两者相同

5.112 斜支梁 AB 如图示, 确定梁的变形, 有 ()

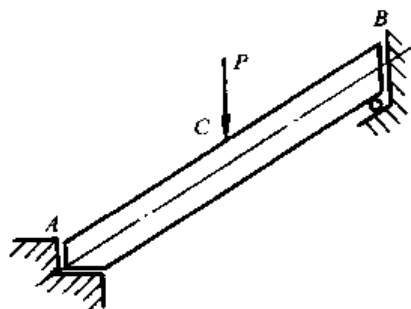
- (A) AB 梁只发生弯曲变形
 (B) AC 段发生弯曲变形, CB 段发生拉伸与弯曲组合变形
 (C) AC 段发生压缩与弯曲组合变形, BC 段发生拉伸与弯曲组合变形
 (D) AC 段发生压缩与弯曲组合变形, BC 段发生弯曲变形

5.113 图示结构中, 杆的 AC 部分将发生的变形为 ()。

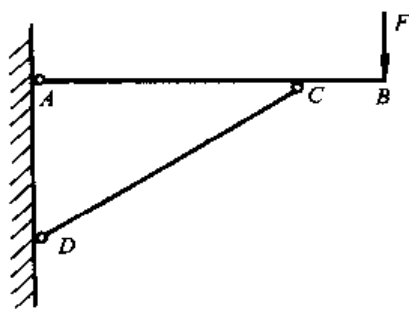
- (A) 弯曲变形 (B) 压弯变形 (C) 拉弯变形 (D) 压缩变形



题 5.111 图



题 5.112 图



题 5.113 图

5.114 三根受压杆件如图。杆 1、杆 2 和杆 3 中的最大压应力 (绝对值) 分别用 $\sigma_{\max 1}$ 、 $\sigma_{\max 2}$ 和 $\sigma_{\max 3}$ 表示, 现从下列四种答案中选择正确答案 ()。

- (A) $\sigma_{\max 1} = \sigma_{\max 2} = \sigma_{\max 3}$ (B) $\sigma_{\max 1} > \sigma_{\max 2} = \sigma_{\max 3}$

(C) $\sigma_{\max 2} > \sigma_{\max 1} = \sigma_{\max 3}$

(D) $\sigma_{\max 2} < \sigma_{\max 1} = \sigma_{\max 3}$

5.115 正方形受压短柱如图 (a) 所示, 若将短柱中间部分挖去一槽, 如图 (b) 所示, 则开槽后柱的最大压应力比未开槽时增加 ()。

(A) 8 倍

(B) 7 倍

(C) 2 倍

(D) 5 倍

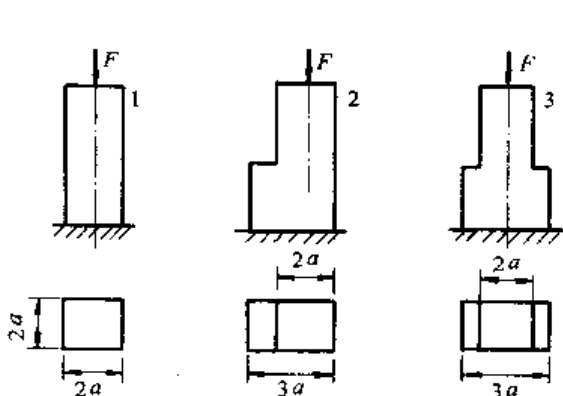
5.116 图示水塔和基础总重量 $G = 6000 \text{ kN}$, 风压的合力 $F = 60 \text{ kN}$, 作用于离地面高度 $H = 15 \text{ m}$ 处。基础埋深 $h = 3 \text{ m}$ 。土壤的许可压应力 $[\sigma] = 0.3 \text{ MPa}$, 则圆形基础所需直径 d 为 ()。

(A) 5.65 m

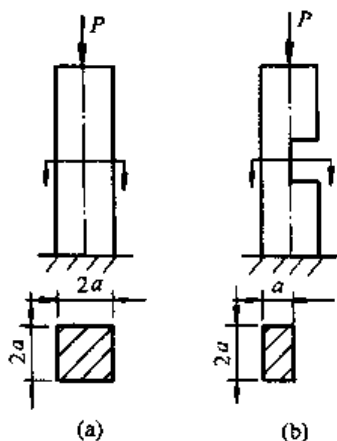
(B) 5.05 m

(C) 3.12 m

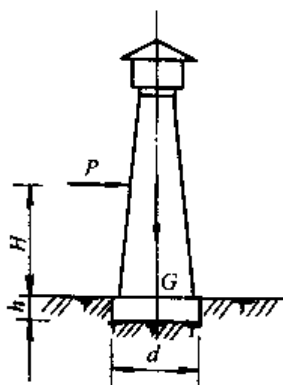
(D) 6.24 m



题 5.114 图



题 5.115 图



题 5.116 图

5.117 影响梁弯曲中心的主要因素是 ()。

(A) 材料的力学性质

(B) 荷载的分布情况

(C) 截面的几何形状和尺寸

(D) 支承条件

5.118 非对称薄壁截面梁受横向力时, 若只发生平面弯曲而无扭转, 横向力需满足 ()。

(A) 作用面与形心主惯性平面平行

(B) 作用面与形心主惯性平面重合

(C) 作用面通过弯曲中心的任意平面

(D) 作用面通过弯曲中心且平行于主惯性平面

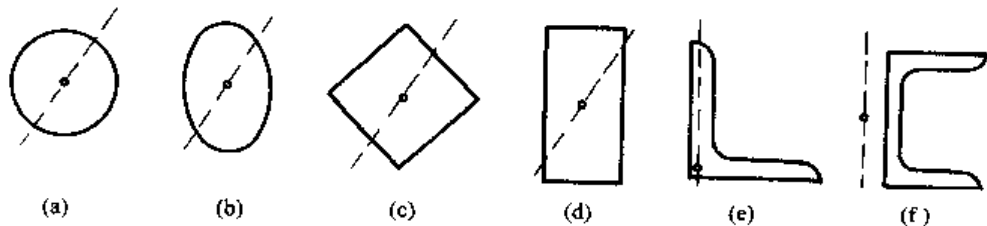
5.119 图示的各梁截面, 小圆圈为弯心位置, 虚线表示弯矩所在平面的位置。试指出斜弯曲是 ()。

(A) (b), (c), (d), (e)

(B) (b), (d), (e)

(C) (b), (d), (e), (f)

(D) (a), (b), (c), (d)



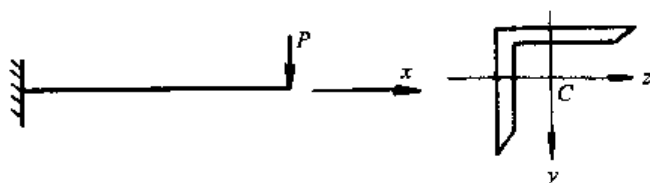
题 5.119 图

5.120 等边角钢制成的悬臂梁如题 5.120 图所示, 外力 P 垂直于梁轴线, 其作用线与形心轴 y 重合, 该梁所发生的变形是 ()

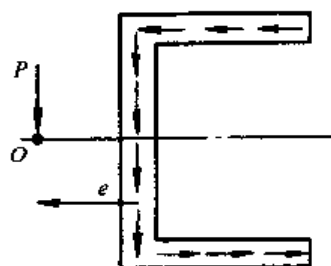
- (A) 平面弯曲
 (B) 两个相互垂直平面 (xy 面和 xz 面) 内的平面弯曲
 (C) 扭转和斜弯曲
 (D) 斜弯曲

5.121 横向力 F 通过槽形截面梁弯曲中心 O 点 (如图 5.126 所示) 的目的是 ()。

- (A) 切应力沿截面周边作用
 (B) 上下翼缘的切应力增大
 (C) 腹板切应力分布均匀
 (D) 消除截面上分布切应力引起的扭转作用



题 5.120 图



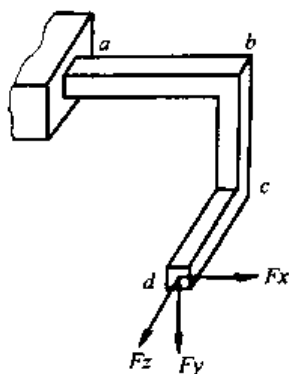
题 5.121 图

5.122 图示刚架受力如图, ab 段的变形为 ()。

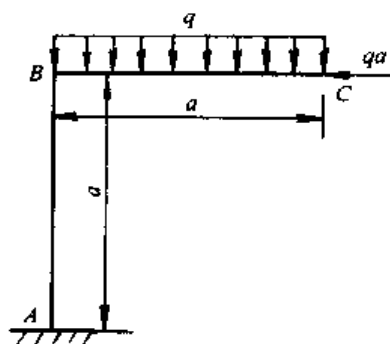
- (A) 轴向拉伸、斜弯曲和扭转
 (B) 轴向拉伸、平面弯曲和扭转
 (C) 轴向拉伸和平面弯曲
 (D) 轴向拉伸和斜弯曲

5.123 图示刚架的最大轴力 $|N|_{\max}$ 、最大剪力 $|Q|_{\max}$ 和最大弯矩 $|M|_{\max}$ 为 ()。

- (A) $|N|_{\max} = qa$, $|Q|_{\max} = qa$, $|M|_{\max} = qa^2$
 (B) $|N|_{\max} = qa$, $|Q|_{\max} = qa$, $|M|_{\max} = \frac{qa^2}{2}$
 (C) $|N|_{\max} = qa$, $|Q|_{\max} = \frac{qa}{2}$, $|M|_{\max} = \frac{qa^2}{2}$
 (D) $|N|_{\max} = \frac{qa}{2}$, $|Q|_{\max} = \frac{qa}{2}$, $|M|_{\max} = qa^2$



题 5.122 图



题 5.123 图

5.124 直径为 d 的等直圆杆, 在危险截面上同时承受弯矩为 M 和扭矩为 M_T , 按第三强度理论的相当应力为 ()。

(A) $\frac{32 \sqrt{M^2 + M_T^2}}{\pi d^3}$

(B) $\frac{32 \sqrt{M^2 + 4M_T^2}}{\pi d^3}$

(C) $\frac{16 \sqrt{M^2 + M_T^2}}{\pi d^3}$

(D) $\frac{16 \sqrt{M^2 + 0.75M_T^2}}{\pi d^3}$

5.125 圆杆横截面积为 A , 截面惯性矩为 W , 同时受到轴力 N 、扭矩 M_T 和弯矩 M 的共同作用, 则按第四强度理论的相当应力为 ()。

(A) $\frac{N}{A} + \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75M_T^2}$

(B) $\sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_T}{2W}\right)^2}$

(C) $\sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M}{W}\right)^2 + 0.75M_T^2}$

(D) $\sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_T}{W}\right)^2}$

5.126 下列截面的核心如图中阴影所示。其中错误的截面核心为 ()。



(A)



(B)



(C)



(D)

题 5.126 图

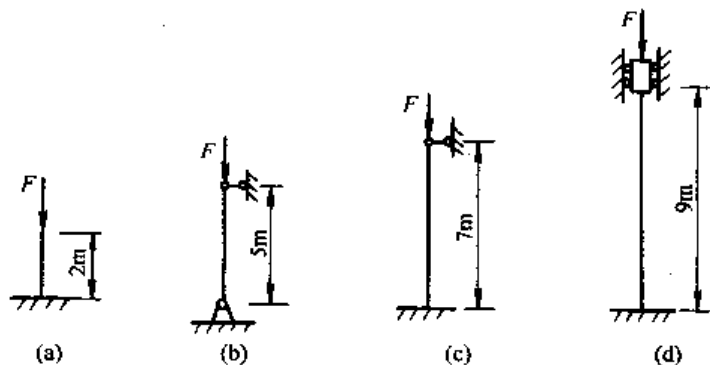
5.127 图示四根细长压杆的抗弯刚度 EI 相同, 它们失稳的先后顺序为 ()。

(A) (a), (b), (c), (d)

(B) (b), (c), (d), (a)

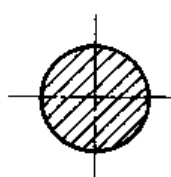
(C) (c), (d), (a), (b)

(D) (d), (a), (b), (c)

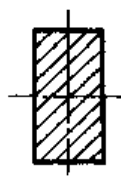


题 5.127 图

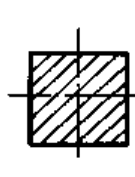
5.128 在横截面积相等, 材料性质及约束条件相同的情况下, 图示四种截面形状中稳定性最好的为 ()。



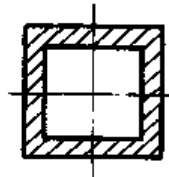
(A)



(B)



(C)



(D)

题 5.128 图

5.129 细长压杆的局部削弱对压杆的影响是 ()。

- (A) 对稳定性没影响, 对强度有影响
(B) 对稳定性有影响, 对强度没影响
(C) 对稳定性和强度都有影响
(D) 对稳定性和强度都没有影响

5.130 直径为 d 的圆截面压杆, 杆长为 L , 一端固定, 另一端铰支, 其柔度 λ 为 ()。

- (A) $2L/d$ (B) L/d (C) $2.8L/d$ (D) $8L/d$

5.131 正方形截面压杆, 当杆的横截面边长 a 与杆长 L 成比例增加时, 其柔度 λ ()。

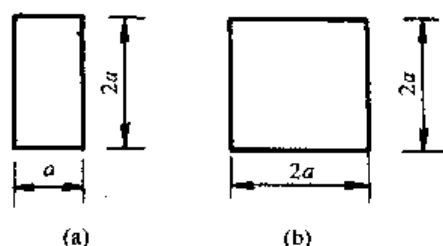
- (A) 成比例增加 (B) 保持不变
(C) 按 L/a^2 变化 (D) 按 a^2/L 变化

5.132 两根细长压杆, 材料及约束情况均相同, 截面尺寸分别如图 (a) 和图 (b), 则图 (b) 压杆的临界荷载是图 (a) 的 ()。

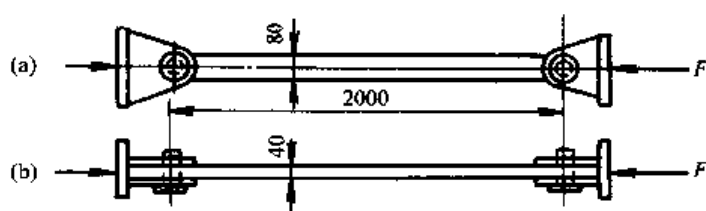
- (A) 2 倍 (B) 4 倍 (C) 8 倍 (D) 16 倍

5.133 矩形截面细长压杆尺寸如图。材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$ 。两端为柱型铰链约束, 在正视图 (a) 平面内相当于铰链约束, 在俯视图 (b) 平面内相当于固定端约束。则此杆的临界力 F_{cr} 为 ()。

- (A) 884 kN (B) 451 kN (C) 221 kN (D) 448 kN



题 5.132 图



题 5.133 图

5.134 图示细长钢管在 $T = 20^\circ\text{C}$ 时安装, 此时管子不受力。已知钢的线膨胀系数 $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, 弹性模量 $E = 206 \text{ GPa}$, 问当温度升高到多少度时管子将失去稳定? ()。

- (A) 23.7° (B) 43.7° (C) 46.4° (D) 64.6°

5.135 图示两细长压杆除图 (b) 所示压杆在跨中点增加一个活动铰链外, 其他条件均相同, 问图 (b) 压杆的临界力是图 (a) 压杆的几倍? ()。

- (A) 8 倍 (B) 4 倍 (C) 2 倍 (D) 相等

5.136 压杆下端固定, 上端与水平弹簧相连, 如图所示, 则该压杆长度系数 μ 的范围为 ()。

- (A) $\mu < 0.5$ (B) $\mu > 2.0$ (C) $0.7 < \mu < 2$ (D) $0.5 < \mu < 0.7$

5.137 用卡氏定理求解图示外伸梁 D 点挠度时, 有如下四个表达式:

a. $\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial F_2}$

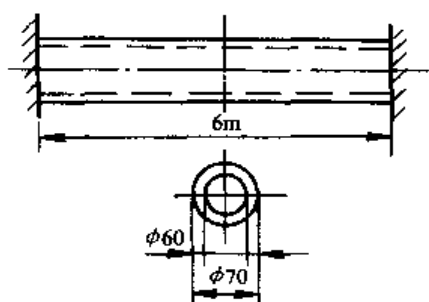
b. $\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial F_3}$

c. $\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial (F_2 - F_3)}$

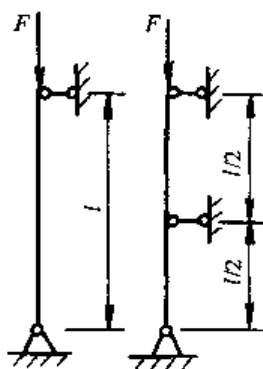
d. $\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial (F_3 - F_2)}$

其中正确的有 ()。

- (A) a、b (B) c、d (C) b、d (D) a、b、c、d



题 5.134 图



(a) (b)



题 5.136 图

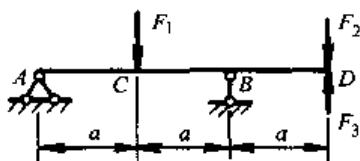
5.138 梁 AB 的 A 端为固定铰支座, B 端为弹簧支座, 弹簧刚度为 K 。在力 F 作用下梁的变形能为 U_1 , 弹簧的变形能为 U_2 , 用卡氏定理求 c 点挠度 Δ_c 的正确表达式 ()。

(A) $\Delta_c = \frac{\partial U_1}{\partial F}$

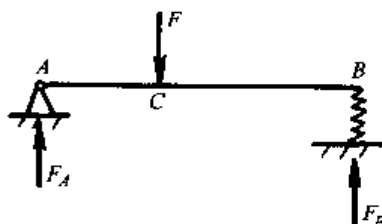
(B) $\Delta_c = \frac{\partial U_1}{\partial F} + \frac{\partial U_2}{\partial F_B}$

(C) $\Delta_c = \frac{\partial U_1}{\partial F} + \frac{\partial U_2}{\partial F}$

(D) $\Delta_c = \frac{\partial U_1}{\partial F_B} + \frac{\partial U_2}{\partial F_B}$



题 5.137 图



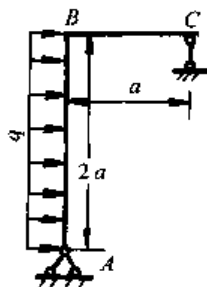
题 5.138 图

5.139 图式刚架的抗弯刚度为 EI , 试用卡氏定理求 C 点的水平位移 ()。

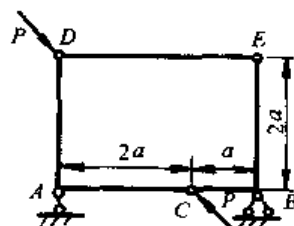
(A) $\Delta_{\text{水平}} = \frac{1qa^4}{3EI}$ (B) $\Delta_{\text{水平}} = \frac{14qa^4}{3EI}$ (C) $\Delta_{\text{水平}} = \frac{8qa^4}{3EI}$ (D) $\Delta_{\text{水平}} = \frac{5qa^4}{3EI}$

5.140 刚架 DAC 、 CBE 及直杆 DE 用铰链直接成图示结构, 各杆的拉压刚度和弯曲刚度均为 EA 和 EI , 则 CD 两点间的相对位移 Δ_{CD} 为 ()。

(A) $\frac{2Pa}{EA} + \frac{8Pa^3}{3EI}$ (B) $\frac{2Pa}{EA} - \frac{8Pa^3}{3EI}$ (C) $\frac{8Pa^3}{3EI}$ (D) $\frac{Pa}{EA} + \frac{Pa^3}{3EI}$



题 5.139 图



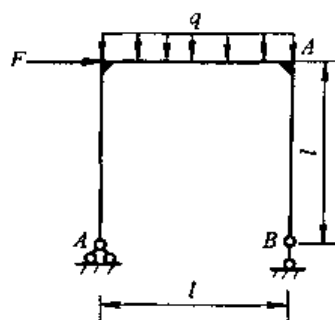
题 5.140 图

5.141 刚架的弯曲刚度为 EI ，则用卡氏定理求 B 截面的转角，其值为 ()。

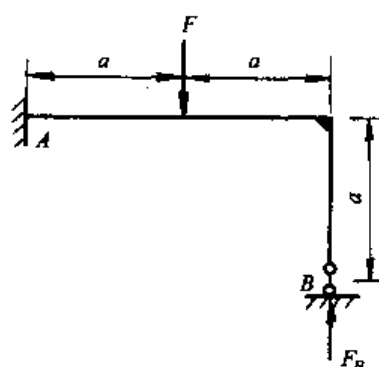
- (A) $\theta_B = \frac{l^2}{48EI} (ql + 4F)$ (✓) (B) $\theta_B = \frac{l^2}{48EI} (ql + 4F)$ (✓)
 (C) $\theta_B = \frac{l^2}{24EI} (ql + 4F)$ (✓) (D) $\theta_B = \frac{l^2}{24EI} (ql + 4F)$ (✓)

5.142 已知图示超静定刚架的弯曲刚度为 EI ，则刚架中 B 点的支反力 F_B 为 ()。

- (A) $\frac{5}{16}F$ (B) $\frac{1}{4}F$ (C) $\frac{5}{8}F$ (D) $\frac{3}{8}F$



题 5.141 图



题 5.142 图

模拟试题参考答案

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 5.1. (B) | 5.22. (A) | 5.43. (D) | 5.64. (D) |
| 5.2. (C) | 5.23. (D) | 5.44. (C) | 5.65. (A) |
| 5.3. (A) | 5.24. (C) | 5.45. (A) | 5.66. (A) |
| 5.4. (B) | 5.25. (B) | 5.46. (C) | 5.67. (B) |
| 5.5. (B) | 5.26. (C) | 5.47. (C) | 5.68. (C) |
| 5.6. (C) | 5.27. (D) | 5.48. (D) | 5.69. (D) |
| 5.7. (D) | 5.28. (A) | 5.49. (B) | 5.70. (B) |
| 5.8. (D) | 5.29. (C) | 5.50. (A) | 5.71. (C) |
| 5.9. (B) | 5.30. (A) | 5.51. (B) | 5.72. (A) |
| 5.10. (D) | 5.31. (D) | 5.52. (D) | 5.73. (D) |
| 5.11. (C) | 5.32. (D) | 5.53. (B) | 5.74. (C) |
| 5.12. (A) | 5.33. (C) | 5.54. (A) | 5.75. (A) |
| 5.13. (D) | 5.34. (B) | 5.55. (C) | 5.76. (B) |
| 5.14. (C) | 5.35. (B) | 5.56. (C) | 5.77. (D) |
| 5.15. (C) | 5.36. (A) | 5.57. (B) | 5.78. (D) |
| 5.16. (B) | 5.37. (C) | 5.58. (D) | 5.79. (C) |
| 5.17. (A) | 5.38. (B) | 5.59. (C) | 5.80. (C) |
| 5.18. (C) | 5.39. (A) | 5.60. (A) | 5.81. (B) |
| 5.19. (B) | 5.40. (D) | 5.61. (B) | 5.82. (C) |
| 5.20. (D) | 5.41. (C) | 5.62. (C) | 5.83. (A) |
| 5.21. (B) | 5.42. (B) | 5.63. (B) | 5.84. (A) |

5.85. (C)	5.100. (A)	5.115. (B)	5.130. (C)
5.86. (D)	5.101. (D)	5.116. (A)	5.131. (B)
5.87. (D)	5.102. (C)	5.117. (C)	5.132. (C)
5.88. (B)	5.103. (B)	5.118. (D)	5.133. (A)
5.89. (A)	5.104. (A)	5.119. (B)	5.134. (D)
5.90. (B)	5.105. (B)	5.120. (C)	5.135. (B)
5.91. (C)	5.106. (D)	5.121. (D)	5.136. (C)
5.92. (D)	5.107. (B)	5.122. (A)	5.137. (D)
5.93. (B)	5.108. (B)	5.123. (B)	5.138. (C)
5.94. (C)	5.109. (C)	5.124. (A)	5.139. (B)
5.95. (A)	5.110. (A)	5.125. (C)	5.140. (A)
5.96. (B)	5.111. (D)	5.126. (D)	5.141. (D)
5.97. (A)	5.112. (D)	5.127. (B)	5.142. (A)
5.98. (D)	5.113. (C)	5.128. (D)	
5.99. (C)	5.114. (C)	5.129. (A)	

6 流 体 力 学

流体力学是研究流体宏观运动和平衡规律的一门科学。主要研究以水为代表的流体宏观运动和平衡规律及其应用。

6.1 流体的主要物理力学性质

6.1.1 流体特征

1. 易流动性

固体在静止时, 可以承受切应力。流体在静止时, 不能承受切应力, 只要在微小的切应力作用下, 就发生流动而变形。流体在静止时不能承受切应力和不能抵抗剪切变形的性质称为流体的易流动性。

2. 连续介质假定

设想把所讨论的流体分割成为无数无限小的基元个体, 即相当于微小的分子集团, 称之为流体的“质点”。从而认为, 流体就是由这样的一个紧挨着一个的连续的质点所组成、没有任何空隙的连续体, 即所谓“连续介质”。同时认为, 流体的物理量, 例如密度、速度、压强和能量等, 具有随同位置而连续变化的特性, 即视为空间坐标和时间的连续函数。因此, 不再从那些微观上永远运动着的分子出发, 而是在宏观上从质点出发研究流体的运动规律, 从而可以利用连续函数的分析方法。

6.1.2 流体的主要物理力学性质

流体的物理力学性质是通过物理量之间的关系体现的。每一个物理量都包括量的数值和量的种类, 物理量的种类称为量纲; 度量物理量的基准称为单位。

物理量可分为两类: 一类是有量纲量, 如速度、加速度等; 另一类则是无量纲量, 如圆周率、摩擦系数等。有量纲量又分为基本量纲和导出量纲两种。基本量纲是性质各不相同的独立量纲, 其中任何一个不能由另外的组合而得到。研究以水为代表的流体时, 用长度 L 、时间 T 、质量 M 作为基本量纲。其他物理量的量纲, 都可以由这三个基本量纲以不同方式组合而成, 称为导出量纲, 例如速度的量纲为 LT^{-1} , 力的量纲为 MLT^{-2} 。

1. 惯性

惯性是物体保持原有运动状态的性质。当流体受外力作用使运动状态发生改变时, 由流体惯性引起的对外界抵抗的反作用力称为惯性力。

设物体的质量为 m , 加速度为 a , 则惯性力

$$F = -ma \quad (6.1-1)$$

式中负号表示惯性力的方向与物体加速度方向相反。必须指出, 惯性力不是能够引起物体运动或使物体有运动趋势的主动力, 而是为了使物体加速所必须克服的一种力。

流体的质量以密度来反映。单位体积流体所含的质量称为密度, 以 ρ 表示。对于均质流体, 若体积为 V 的流体具有的质量为 m , 则密度

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (6.1-2)$$

密度的单位为 kg/m^3 ，量纲为 ML^{-3} 。流体的密度随温度和压强的变化而变化。对液体而言，其密度随压强和温度的变化甚微，可视为常数。水的密度是以一个标准大气压强下、温度为 4°C 时的最大密度值作为计算值，即为 1000 kg/m^3 。在一个标准大气压强下，温度为 20°C 时，水银的密度为 13550 kg/m^3 ，通常取 $\rho_m = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。在一个标准大气压强下，温度为 20°C 时，干空气的密度 $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$ 。

2. 重力特性

物体受地球引力的性质，称为重力特性。地球对流体的引力即为重力，或称重量。质量为 m 的流体所受重力 G 为

$$G = mg \quad (6.1-3)$$

式中， g 为重力加速度。

流体的重量以重度来反映。单位体积流体所含的重量称为重度，以 γ 表示。对于均质流体，若体积为 V 的流体具有的重量为 G ，则重度

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g \quad (6.1-4)$$

重度的单位为 N/m^3 ，量纲为 $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$ ，流体的重度因重力加速度随纬度的变化而变化。工程上，取淡水重度为 9800 N/m^3 ，海水重度为 10000 N/m^3 ，空气重度为 12.02 N/m^3 。

3. 黏滞性

流体具有易流动性，不论多么微小的切向力一经作用于静止流体时，原来的静止状态将被破坏而开始变形，也即开始流动。但流体一旦流动，流体分子间的作用力立即显示为对流动的阻滞作用，即所谓黏滞性阻力。流体阻滞变形运动的特性称为黏滞性。应该说明：当流体运动一旦停止，这种阻力就立即消失。因此，黏滞性在流体静止或平衡时是不显示作用的。流体运动时的黏滞阻力只能使流动缓慢下来，但不能阻止静止流体在任何微小切向力作用下开始流动。流体的黏滞性使流体内部出现了成对的切力，即内摩擦力，以 T 表示

$$T = \mu A \frac{du}{dy} \quad (6.1-5)$$

单位面积上的内摩擦力称为切应力，以 τ 表示

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (6.1-6)$$

式中， μ 为随液体种类不同而异的比例系数，称为动力黏滞系数；两流层间流速差与其距离的比值 du/dy 称为速度梯度。式 (6.1-5) 或式 (6.1-6) 称为牛顿 (Newton) 内摩擦定律。可以表述为：做层流运动的流体，相邻流层间单位面积上所作用的内摩擦力或黏滞力与流速梯度成正比，同时与流体的性质有关。

如图 6.1-1，对式 (6.1-6) 中各项做一说明。

(1) 切应力 τ 表示单位面积的内摩擦力，亦称单位面积上的黏滞力，单位为 N/m^2 ，即 Pa 。量纲为 $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ 。切应力 τ 不仅有大小，而且有方向。对于相接触的两个流层来讲，作用在不同流层上的切应力，必然是大小相等、方向相反。

(2) 速度梯度 du/dy 表示速度沿垂向 y 的变化率，

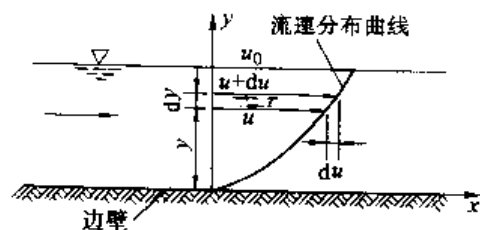


图 6.1-1 流体沿边界的直线运动

单位为 s^{-1} 。

$$\frac{du}{dy} = \frac{d\theta}{dt} \quad (6.1-7)$$

可见，速度梯度 du/dy 代表了流体微团的剪切变形率或称剪切变形速度。由此，牛顿内摩擦定律可理解为：切应力与剪切变形速度成正比。

(3) 动力黏滞系数 μ ，单位是 Ns/m^2 即 Pas ，量纲为 $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ 。其大小表征流体黏滞性的强弱。不同流体有不同的 μ 值，黏滞性大的流体 μ 值大，黏滞性小的流体 μ 值小。 μ 的物理意义可理解为：当取 $du/dy=1$ 时，则 $\tau=\mu$ ，即 μ 表征单位速度梯度作用下的切应力，反映了黏滞性的动力特性，因此称 μ 为动力黏滞系数。

流体的黏滞性常用另一种形式的黏滞系数 ν 来表示，即

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (6.1-8)$$

因为 ν 不包括力的量纲而具有运动的量纲 L^2T^{-1} ，故称 ν 为运动黏滞系数。常用单位是 m^2/s 或 cm^2/s ， $1\text{ cm}^2/\text{s}$ 称为 1 斯托克斯 (St)。同样，运动黏滞系数 ν 表征流体黏滞性的强弱。在相同条件下， ν 值愈大，黏滞性愈大，流体流动性愈低；反之， ν 值愈小，黏滞性愈小，流体流动性愈高。

流体的黏滞系数随温度而变化。水的黏滞系数随温度升高而减小。

理想流体是指不考虑黏滞性的流体。

牛顿内摩擦定律只适用部分流体，对于某些特殊流体是不适用的。一般把符合牛顿内摩擦定律即切应力与剪切变形速度成线性关系的流体称为**牛顿流体**，反之称为**非牛顿流体**。如水、空气和油类等，在温度不变条件下，这类流体的动力黏滞系数 μ 值不变，切应力 τ 与剪切变形速度 $\frac{du}{dy}$ 成线性关系，属于牛顿流体。本专业研究的是牛顿流体。

此外，流体受压，体积缩小而密度增大的性质，称流体的**压缩性**。它表现流体对于压力

的弹性抵抗能力。常用体积压缩系数 $\beta = -\frac{dV}{V dp}$ (m^2/N) 或用体积弹性系数 $K = \frac{1}{\beta}$ (N/m^2) 表示。流体受热，体积膨胀而密度减小的性质，称流体的**热胀性**。对于以上二性，考试大纲未做要求，故不宜详述。

6.1.3 作用于流体上的力

流体处于运动或平衡状态时，受到各种力的作用。按物理性质不同，可把作用于流体上的力分为惯性力、重力、黏滞力、弹性力和表面张力等。为便于分析流体的平衡及运动规律，按作用特点不同，又可把作用于流体上的力分为表面力和质量力两类。

1. 表面力

表面力是作用于流体表面并与其面积成比例的力。表面力可分为垂直于作用面的法向压力 P 和沿作用面切向的剪切力 T 。

表面力的大小除用总作用力度量外，常用**单位表面力**即单位面积上所受的表面力来表示。单位表面力的单位为 N/m^2 ，量纲为 $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ 。若单位表面力与作用面垂直，称为**压应力或压强** p ；若与作用面相切，称为**切应力** τ 。

$$p = \frac{P}{A} \quad (6.1-9)$$

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (6.1-10)$$

2. 质量力

质量力是指通过所研究流体的每一部分质量而作用于流体的, 大小与流体的质量成比例的力。质量力又称体积力。重力、惯性力都属于质量力。

质量力常用单位质量力来表示, 即作用在单位质量流体上的质量力称为单位质量力。若质量为 m 的均质流体, 质量力为 F , 则单位质量力

$$f = \frac{F}{m} \quad (6.1-11)$$

单位质量力的量纲为 LT^{-2} 。

设质量力 F 在空间坐标上的投影分别为 F_x 、 F_y 、 F_z , 则单位质量力 f 在相应坐标轴上的投影 X 、 Y 、 Z 为

$$X = \frac{F_x}{m}, \quad Y = \frac{F_y}{m}, \quad Z = \frac{F_z}{m} \quad (6.1-12)$$

当流体所受的质量力只有重力时, 重力 $G = mg$ 在直角坐标系 (设 z 轴铅直向上为正) 的 3 个轴向分量分别为 $G_x = 0$ 、 $G_y = 0$ 、 $G_z = -mg$, 单位质量重力的轴向分力为

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g \quad (6.1-13)$$

模拟试题

- 流体质点是指 ()。
 - 流体的分子
 - 流域中的几何点
 - 流体内固体微粒
 - 流体无限分割后的基元个体并含有无数分子的集团
- 易流动性的力学定义是 ()。
 - 流体容易流动的性质
 - 流体静止时, 切应力为零
 - 静止流体在切应力作用下流动
 - 静止流体在切应力作用下产生连续变形
- 关于流体的黏性, 下述四句话中错误的是 ()。
 - 液体的黏性系数随温度的升高而增大
 - 流体的黏性是产生能量损失的根源
 - 黏性就是流体具有抵抗剪切变形的能力
 - 流体具有内摩擦力的特性就是流体的黏性
- 流体黏性导致的内摩擦力存在于 ()。
 - 静止流体中
 - 运动流体中
 - 流体与固壁之间
 - 有相对运动的流层间
- 水的运动黏性系数随温度的升高而 ()。
 - 加大
 - 降低
 - 不变
 - 降低然后加大
- 随温度升高
 - 液体和气体的黏度都增大
 - 液体黏度降低, 气体黏度增大
 - 液体黏度增大, 气体黏度降低
 - 液体和气体的黏度都降低

7. 实际流体在过流断面上近壁处的流体黏滞力为 ()。
- (A) 零 (B) 最小 (C) 最大 (D) 同管轴线处值
8. 理想流体的力学模型即 ()。
- (A) 均质流体 (B) 不可压流体
(C) 不计黏性的流体 (D) 不考虑重力的流体。
9. 对于理想流体, ()。
- (A) 理想流体的压强小于理想流体的应力
(B) 理想流体的压强等于理想流体的应力
(C) 理想流体的压强大于理想流体的应力
(D) 理想流体的压强和理想流体的应力是两个不同的概念
10. 所谓牛顿流体是指 ()。
- (A) 黏性力与黏性系数成线性关系 (B) 黏性力与速度大小成线性关系
(C) 黏性力与速度梯度成线性关系 (D) 黏性力与速度梯度成二次曲线关系

6.2 流体静力学

6.2.1 流体静压强及其特性

1. 流体静压强

流体和固体一样, 由于自重而产生压力。但和固体不同的是, 因为流体具有易流动性, 流体对任何方向的接触面都会显示压力。流体对容器壁面、流体内部之间都存在压力。

静止或相对静止流体对其接触面上所作用的压力称为**流体静压力**或**静水压力**, 常以符号 P 表示。平均**流体静压强**或平均**静水压强**, 以 \bar{p} 表示

$$\bar{p} = \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (6.2-1)$$

当面积 ΔA 无限缩小至 K 点时, 比值 $\Delta P/\Delta A$ 的极限值定义为 K 点的**流体静压强**即 K 点的**静水压强**, 以 p 表示

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow K} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (6.2-2)$$

可以看出, 流体静压力和流体静压强 (平均压强或点压强) 都是压力的一种量度, 区别在于: 前者是作用于某一面积上的总压力; 后者是作用于单位面积上的平均压力或某一点上的压力。

在国际单位制中, 流体静压力的单位为 N 或 kN 。流体静压强的单位为 N/m^2 或 kN/m^2 。 N/m^2 又称为 Pa , $1 Pa = 1 N/m^2$ 。压强的量纲为 $ML^{-1}T^{-2}$ 。

2. 流体静压强的特性

流体静压强有两个重要特性。

- 1) 静压强的方向是垂直受压面, 并指向受压面。如图 6.2-1 所示。
- 2) 任一点静压强的大小和受压面方位无关, 或者说任一点各方向的静压强均相等。如图 6.2-2 所示。

根据流体静压强特性, 并应用连续介质的概念, 可以得出结论: 静止流体任一点静压强仅是空间坐标的连续函数, 而与受压面方位无关, 即

$$p = p(x, y, z) \quad (6.2-3)$$

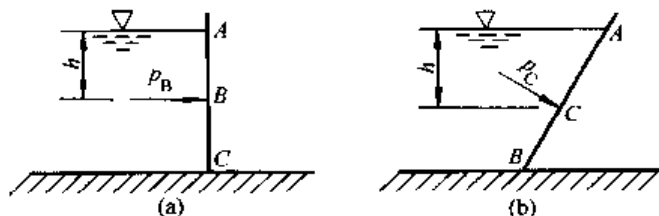


图 6.2-1 作用于平板上的点压强

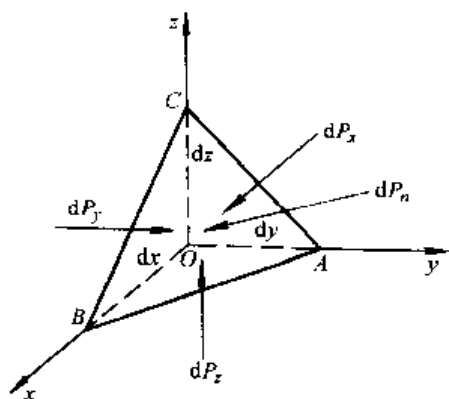


图 6.2-2 微四面体受力分析

6.2.2 流体平衡微分方程

流体平衡微分方程表征流体处于平衡状态时作用于流体上的各种力之间的关系。

1. 平衡流体受力分析

如图 6.2-3 所示, 微六面体应在所有表面力和质量力的作用下处于平衡状态。

1) 作用于微六面体的表面力

作用在 m 和 n 点的流体静压强为

$$p_m = p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}, \quad p_n = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

其中: $\frac{\partial p}{\partial x}$ 为压强沿 x 方向的变化率, 称为压强梯

度; $\frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ 为由于 x 方向的位置变化而引起的压强

差。视微六面体各面上的压强均匀分布, 并用面中心点上的压强代表该面上的平均压强。因此, 作用于边界面 $abcd$ 和 $efgh$ 上的总压力分别为

$$P_{abcd} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz$$

$$P_{pefgh} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz$$

同理, 对于沿 y 方向和 z 方向作用于相应面上的总压力可写出相应的表达式。

2) 作用于微六面体的质量力

作用于微六面体的质量力在 x 方向的投影为 $\rho dx dy dz \cdot X$, 在 y 方向的投影为 $\rho dx dy dz \cdot Y$, 在 z 方向的投影为 $\rho dx dy dz \cdot Z$ 。其中, $\rho dx dy dz$ 为微六面体流体的质量。

2. 力平衡

当微六面体处于平衡状态时, 所有作用于微六面体上的力, 在 3 个坐标轴方向的投影之和应等于零。在 x 方向有

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \rho dx dy dz \cdot X = 0$$

同理, 在 y 方向和 z 方向可写出类似结果

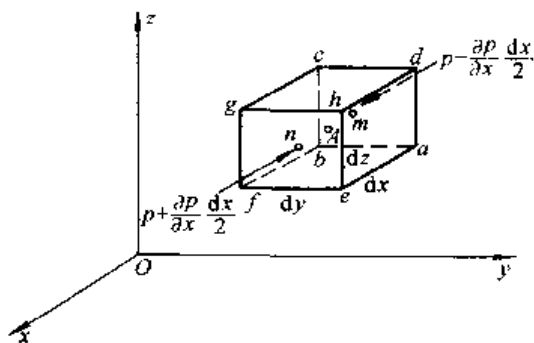


图 6.2-3 微六面体受力分析

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2-4)$$

称为欧拉 (Euler) 平衡微分方程, 表达了处于平衡状态流体中单位质量的面力和质量力之间的关系。

6.2.3 流体静压强分布规律

质量力只有重力情况下, 静止流体中各点静压强的分布规律具有工程意义。

1. 流体静压强基本公式

图 6.2-4 所示容器为静止流体。将直角坐标系的 z 轴取为垂直方向, 原点选在底面, 自由液面上的压强为 p_0 。此时, 作用在单位质量流体的质量力即重力在各坐标轴上的投影分别为 $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$, 代入 (6.2-4), 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \right\} \quad (6.2-5)$$

对于均匀不可压缩流体, ρ 为常数。积分后,

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad (6.2-6)$$

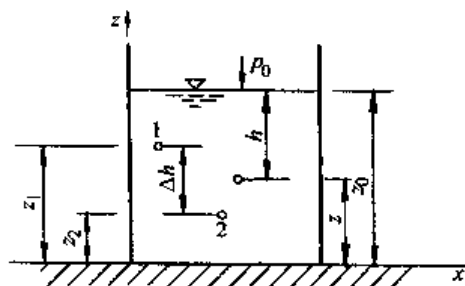


图 6.2-4 流体静压强基本公式

式中, C 为一常数。表明了静止流体中, 任一点的 $z + \frac{p}{\rho g}$ 总是一个常数。对流体内部任意两点, 有

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \quad (6.2-7)$$

在自由液面 $z = z_0$, $p = p_0$, 则式 (6.2-6) 中 $C = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}$, 有

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) \quad (6.2-8)$$

令 $h = z_0 - z$, 表示该点在自由液面以下的淹没深度

$$p = p_0 + \rho g h \quad (6.2-9)$$

即为流体静压强基本公式。它表明了静止流体内部任意点的压强 p 由两部分组成: 一部分是表面压强 p_0 , 遵循巴斯加原理等值地传递到流体内部; 另一部分是 $\rho g h$, 表示该点到流体表面的单位面积上的流体重量。显然, 压强随淹没深度按线性规律变化。

若自由液面与大气相通时, $p_0 = p_a$, p_a 为当地大气压强,

$$p = p_a + \rho g h \quad (6.2-10)$$

在同一连通的静止流体中, 已知某点的压强, 可推求任一点的压强值,

$$p_2 = p_1 + \rho g \Delta h \quad (6.2-11)$$

式中, Δh 为两点间深度差, 当点 1 高于点 2 时为正, 反之为负, 如图 6.2-4 所示。

对于气体, 因 ρ 值较小, 常忽略不计。气体中任意两点的静压强, 在两点间深度差不大时, 可视为相等。

由式 (6.2-9) 可以看出: 位于同一淹没深度即 h 为常数的各点静压强相等, 故水平面即是等压面。必须注意, 这一结论只适用于静止、均匀不可压、质量力只有重力的、同种和连续的介质。如果不是同种流体或不连续, 同一水平面上各点压强并不一定相等, 即同一水平面并不一定是等压面。如图 6.2-5 (a) 所示玻璃管与容器中的水是连通的, 因此, 任何一个水平面都是等压面; 而图 6.2-5 (b) 中, 1-1 虽然是水平面, 但为两种流体, 因而不是等压面, 只有 2-2 平面以下的各水平面才是等压面。

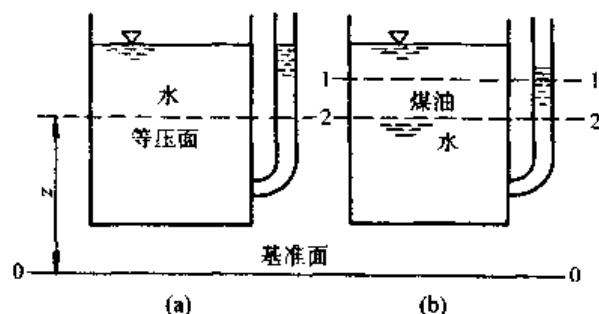


图 6.2-5 等压面的条件

2. 流体静压强的计量制和单位

1) 静压强的计量制

静压强有两种计量制, 即绝对压强和相对压强。

(1) 绝对压强: 以设想没有大气存在的绝对真空状态作为零点计量的压强, 称为绝对压强, 以 $p_{\text{绝}}$ 表示。若自由液面绝对压强为 $p_{0\text{绝}}$, 根据式 (6.2-9) 流体中某点绝对压强 $p_{\text{绝}}$ 为

$$p_{\text{绝}} = p_{0\text{绝}} + \rho gh \quad (6.2-12)$$

若自由液面压强等于当地大气压强 p_a , 则

$$p_{\text{绝}} = p_a + \rho gh \quad (6.2-13)$$

(2) 相对压强: 以当地大气压强作为零点计量的压强称为相对压强, 以 p 表示。对于水工建筑物, 水流和建筑物表面均受当地大气压强作用, 所以在计算建筑物的水压力时, 无须考虑当地大气压强的作用, 常用相对压强来表示。在今后的讨论中, 一般指相对压强, 若指绝对压强则将注明。如果自由液面压强 $p_0 = p_a$, 则由式 (6.2-9) 得自由液面下某点相对压强

$$p = \rho gh \quad (6.2-14)$$

(3) 绝对压强与相对压强的关系: 绝对压强和相对压强是按两种不同基准计算的压强, 它们之间相差一个当地大气压强值。若以 p_a 表示当地大气压强, 则绝对压强 $p_{\text{绝}}$ 与相对压强 p 的关系

$$p_{\text{绝}} = p + p_a \quad (6.2-15)$$

或

$$p = p_{\text{绝}} - p_a \quad (6.2-16)$$

绝对压强和相对压强的关系可用图 6.2-6 说明。由图看出, 绝对压强总是正值, 而相对压强可能是正值, 也可能是负值。

(4) 真空及真空压强: 当液体中某点的绝对压强 $p_{\text{绝}}$ 小于当地大气压强 p_a 或相对压强为负值时, 则称该点存在真空或负压。真空的大小常用真空压强 p_v 表示。真空压强是指该

点绝对压强小于当地大气压强的数值, 即

$$p_v = p_a - p_{\text{绝}} \quad (6.2-17)$$

由真空及真空压强的定义可知: 相对压强为负值时, 即存在真空; 相对压强的绝对值等于真空压强。

2) 静压强的单位表示法

(1) 用应力单位表示。即从压强的定义出发, 用单位面积上的力来表示, 如 N/m^2 或 Pa 、 kPa 等。

(2) 用大气压为单位表示。即 $1 \text{ atm} = 101.325 \text{ kPa}$ 。在工程中, 常用工程大气压为单位来表示压强。

(3) 用液柱高度为单位表示。由式 (6.2-14), 得知

$$h = \frac{p}{\rho g} \quad (6.2-18)$$

即对于任一点的静压强 p 可应用上式表示为密度为 ρ 的液体的液柱高度。常用水柱高度或汞柱高度表示。

上述三种压强单位表示法之间的关系为:

$$98 \text{ kPa} = 1 \text{ 个工程大气压} = 10 \text{ m (H}_2\text{O)} = 736 \text{ mm (Hg)}$$

$$101.325 \text{ kPa} = 1 \text{ 个标准大气压} = 10.33 \text{ m (H}_2\text{O)} = 760 \text{ mm (Hg)}$$

例 6.2.1 一封闭水箱如图 6.2-7 所示。水面上的绝对压强 $p_{0\text{绝}} = 85 \text{ kPa}$, 求水面下 $h = 1 \text{ m}$ 处 C 点的绝对压强、相对压强和真空压强。已知当地大气压 $p_a = 98 \text{ kPa}$, $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ 。

解 由式 (6.2-12) 或式 (6.2-9), C 点绝对压强

$$p_{\text{绝}} = p_{0\text{绝}} + \rho g h = 85 + 1 \times 9.8 = 94.8 \text{ (kN}/\text{m}^2\text{)}$$

由式 (6.2-16), C 点的相对压强

$$p = p_{\text{绝}} - p_a = 94.8 - 98 = -3.2 \text{ (kPa)}$$

相对压强为负值, 说明 C 点存在真空。相对压强的绝对值即为真空压强 $p_v = 3.2 \text{ kPa}$ 。

或由式 (6.2-17) 得

$$p_v = p_a - p_{\text{绝}} = 3.2 \text{ kPa}$$

例 6.2.2 如图 6.2-8 所示一开敞水箱, 已知当地大气压强 $p_a = 98 \text{ kPa}$, 水的密度 $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$, 重力加速度 $g = 9.8 \text{ m}/\text{s}^2$ 。求水面下 $h = 0.68 \text{ m}$ 处 M 点的相对压强和绝对压强, 并分别用应力单位、工程大气压和水柱高度表示。

解 应用式 (6.2-14), 得 M 点相对压强

$$p = \rho g h = 1000 \times 9.8 \times 0.68 = 6.66 \text{ (kPa)} = 0.068 \text{ (工程大气压)}$$

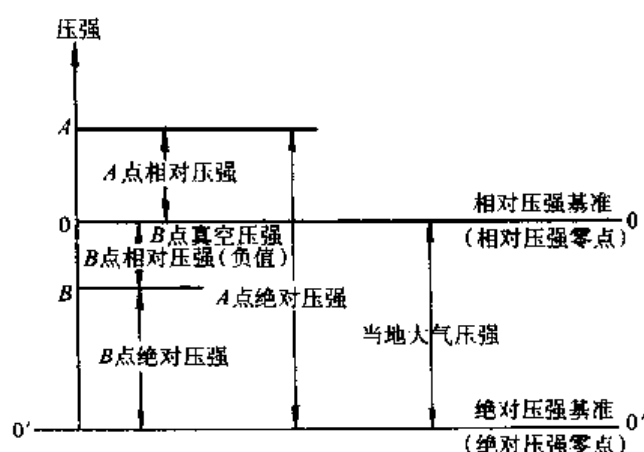


图 6.2-6 流体静压强计量基准图示

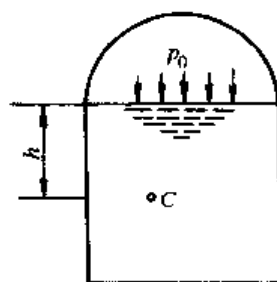


图 6.2-7 封闭水箱

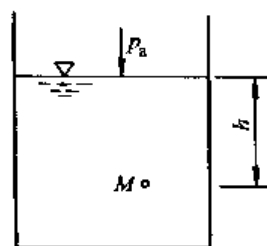


图 6.2-8 开敞水箱

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{6.66}{1000 \times 9.8} = 0.68 \text{ m (H}_2\text{O)}$$

应用式 (6.2-13), 得 M 点绝对压强

$$p_{\text{绝}} = p_a + \rho g h = 98 + 1000 \times 9.8 \times 0.68 = 104.7 \text{ (kPa)} = 1.068 \text{ (工程大气压)}$$

$$h = \frac{p_{\text{绝}}}{\rho g} = \frac{104.7}{1000 \times 9.8} = 10.68 \text{ m (H}_2\text{O)}$$

3. 流体静压强分布图

根据静压强公式中 $p_{\text{绝}} = p_{0\text{绝}} + \rho g h$ 或 $p = \rho g h$, 以及静压强方向垂直指向受压面的特点, 可用图形来表示静压强的大小和方向, 称此图形为**流体静压强分布图**。

静压强分布图绘制规则是:

- (1) 按一定比例用线段长度代表该点静压强的大小;
- (2) 用箭头表示静压强的方向, 并与受压面垂直。

不同情况流体静压强分布图的画法列举如下。

(1) 图 6.2-9 (a) 为一垂向平板闸门 AB。A 点位于自由液面上, 相对压强为零; B 点在水面下 h , 相对压强 $p_B = \rho g h$ 。绘带箭头线段 CB, 线段长度为 $\rho g h$, 并垂直指向 AB。连接直线 AC, 并在三角形 ABC 内作数条平行于 CB 带箭头的线段, 则 ABC 即表示 AB 面上的流体相对压强分布图。

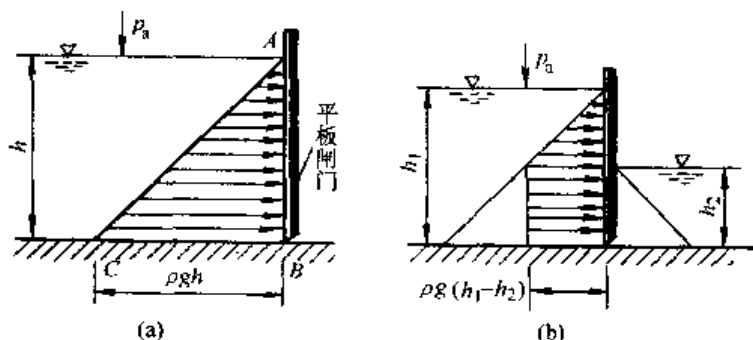


图 6.2-9 平板闸门上流体静压强分布图

如闸门两边同时承受不同水深的静压力作用, 如图 6.2-9 (b)。因闸门受力方向不同, 先分别绘出左右受压面的压强分布图, 然后两图叠加, 消去大小相同方向相反的部分, 余下的梯形即为流体静压强分布图。

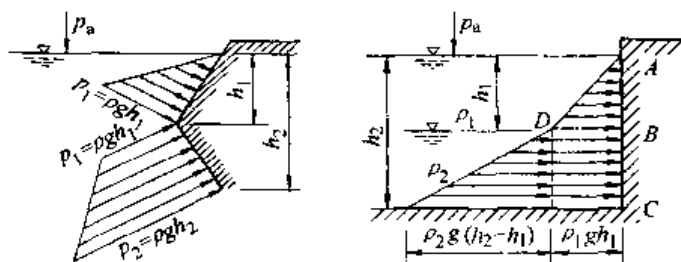


图 6.2-10 受压面为折面的流体静压强分布图

图 6.2-11 两种流体密度不同的静压强分布图

(2) 图 6.2-10 为受压面是一折面的流体静压强分布图。

(3) 图 6.2-11 中有上下两种密度不同的液体作用在平面 AC 上, 两种液体分界面在 B 点。B 点压强 $p_B = \rho_1 g h_1$, C 点压强 $p_C = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 - h_1)$ 。流体静压强分布如图所示。

(4) 图 6.2-12 为作用在弧形闸门上的流体静压强分布图。闸门为一圆弧面, 面上各点压强逐点算出, 各点压强均沿法向, 指向圆弧的中心。

4. 位置水头、压强水头和测压管水头

由式 (6.2-6), 在静止流体中, 任一点的 $z + \frac{p}{\rho g}$ 总是常数。其中, z 为该点的位置相对于基准面的高度, 称为**位置水头**; $\frac{p}{\rho g}$ 是该点在压强作用下沿测压管所能上升的高度, 称为

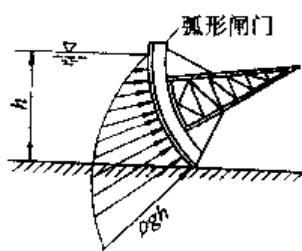


图 6.2-12 弧形闸门
上静压强分布图

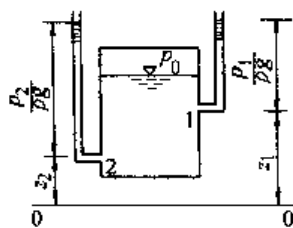


图 6.2-13 测压管水头

压强水头。所谓测压管是一端和大气相通，另一端和流体中测点相连的细管，如图 6.2-13 所示。位置水头和压强水头之和 $z + \frac{p}{\rho g}$ 称为测压管水头，表示测压管水面相对于基准面的高度。说明了同一容器静止流体各点的测压管水头均相等，即使各点的位

置水头和压强水头互不相同，但其和不变。

6.2.4 流体静压强的量测

1. 测压管

(1) 直接由同一液体引出的液柱高度来测量压强的测压管简单测压管。即一根玻璃管，一端和测点相连，另一端开口和大气相通，如图 6.2-14 所示。测压管常用来量测较小的压强。

(2) U 形水银测压管。U 形水银测压管通常是用 U 形的玻璃管制成，如图 6.2-15 所示。管内弯曲部分装有水银。管的一端与测点相连，另一端开口与大气相通。U 形水银测压管常用来量测较大的压强。

U 形管中 1、2 两点是在连通的同种液体即水银的同一水平面上，因此 1-2 是等压面，则 $p_1 = p_2$ 。根据式 (6.2-11)， $p_1 = p_A + \rho g \Delta h_1$ ，而 $p_2 = p_m g \Delta h_2$ ，故得

$$p_A = \rho_m g \Delta h_2 - \rho g \Delta h_1 \quad (6.2-19)$$

可见，在量得 Δh_1 和 Δh_2 后，即可求出点 A 的压强。测压管可用来量测正压强或负压强。

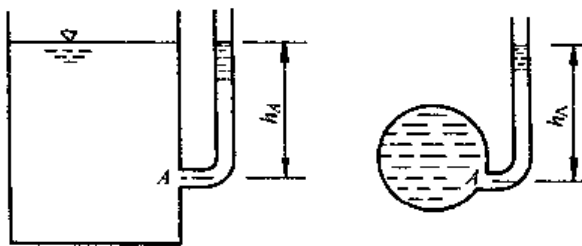


图 6.2-14 测压管

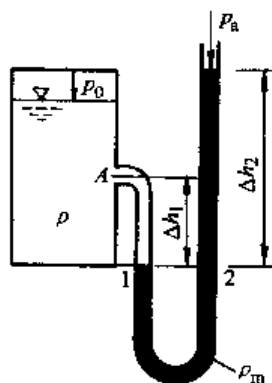


图 6.2-15 U 形水银测压管

2. 压差计

压差计是量测两点压强差的仪器。常用的压差计有空气压差计、水银压差计和斜式压差计等。各种压差计多用 U 形管制成，并根据静压强规律计算压强差。

(1) 空气压差计。图 6.2-16 是一空气压差计。因空气的密度较小，认为 U 形管中液面上压强 p_0 均相等。设两管水面高差为 Δh ，根据式 (6.2-9)，写出 $p_A = p_0 + \rho g (z_B - z_A + \Delta h)$ 和 $p_B = p_0 + \rho g z_B$ ，则

$$p_A - p_B = \rho g (\Delta h - z_A) \quad (6.2-20)$$

若管道水平放置, A、B 两点在同一水平面上, 即 $z_A = 0$, 则

$$p_A - p_B = \rho g \Delta h \quad (6.2-21)$$

(2) 水银压差计。当所测两点的压差较大时, 使用水银压差计, 如图 6.2-17 所示。

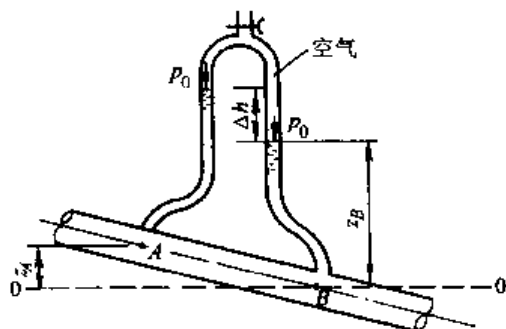


图 6.2-16 空气压差计

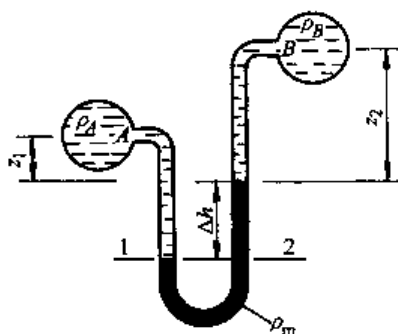


图 6.2-17 水银压差计

设 A、B 两点处液体密度分别为 ρ_A 和 ρ_B 。两点的相对位置及 U 形管中水银面之高差如图所示。根据等压面的概念, 断面 1 和断面 2 处压强相等, 即 $p_1 = p_2$ 。根据式 (6.2-11), $p_1 = p_A + \rho_A g (z_1 + \Delta h)$ 和 $p_2 = p_B + \rho_B g z_2 + \rho_m g \Delta h$, 故得

$$p_A - p_B = (\rho_m g - \rho_A g) \Delta h + \rho_B g z_2 - \rho_A g z_1 \quad (6.2-22)$$

如 A、B 两点处为同一液体, 即 $\rho_A = \rho_B = \rho$, 则

$$p_A - p_B = (\rho_m g - \rho g) \Delta h + \rho g (z_2 - z_1) \quad (6.2-23)$$

如 A、B 两点处为同一液体, 且在同一高程, 即 $z_2 - z_1 = 0$, 则

$$p_A - p_B = (\rho_m g - \rho g) \Delta h = \rho g \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) \Delta h \quad (6.2-24)$$

如 A、B 两点处的液体都是水, 因为水银与水的密度之比 $\rho_m / \rho = 13.6$, 则

$$p_A - p_B = 12.6 \rho g \Delta h \quad (6.2-25)$$

(3) 倾斜式压差计。当量测很小的压差时, 为了提高量测精度, 可采用倾斜式压差计。如图 6.2-18 所示, 垂向空气压差计中的液面高差 Δh 增大为 $\Delta h'$ ($\Delta h' = \Delta h / \sin \theta$)。于是, 所测两点的压差为

$$p_A - p_B = \rho g \Delta h' = \rho g \cdot \Delta h / \sin \theta \quad (6.2-26)$$

$\theta = 10^\circ \sim 30^\circ$, 读数增大 2~5 倍。

例 6.2.3 在某供水管路上装一复式 U 形水银测压计, 如图 2-19 所示。已知测压管显示的各液面的标高和 A 点的标高为

$$\nabla_1 = 1.8 \text{ m}, \nabla_2 = 0.6 \text{ m}, \nabla_3 = 2.0 \text{ m}, \nabla_4 = 0.8 \text{ m}, \nabla_A = \nabla_5 = 1.5 \text{ m}$$

试确定管中 A 点压强。其中, $\rho_m = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。

解 已知液面 1 上作用为当地大气压强, 因此从点 1 开始。应用等压面和流体静压强基本公式逐点推算, 便可求得 A 点压强。因 2-2、3-3、4-4 为等压面, 根据式 (6.2-11) 可得 $p_2 = \rho_m g (\nabla_1 - \nabla_2)$, $p_3 = p_2 - \rho g (\nabla_3 - \nabla_2)$, $p_4 = p_3 + \rho_m g (\nabla_3 - \nabla_4)$, 又 $p_A = p_5 = p_4 - \rho g (\nabla_5 - \nabla_4)$, 联立求得

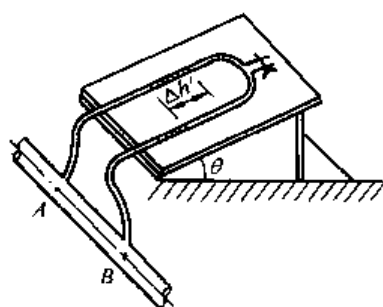


图 6.2-18 倾斜式压差计

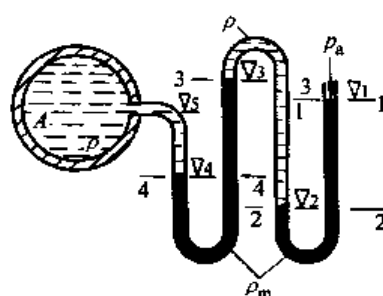


图 6.2-19 复式U形水银测压计

$$p_A = \rho_m g (\nabla_1 - \nabla_2) - \rho g (\nabla_3 - \nabla_2) + \rho_m g (\nabla_3 - \nabla_4) - \rho g (\nabla_5 - \nabla_4)$$

将已知值代入上式，得

$$p_A = 298.5 \text{ kPa}$$

从上述分析和本例题的计算过程中，可以归纳出计算压强及压强差的基本方法，即以 $p = p_0 + \rho gh$ 作为基本计算公式，用等压面作为关联条件，逐次推算即可方便地求解。

6.2.5 作用于平面上的静水总压力

静水总压力包括大小、方向和作用点（也称压力中心）。

1. 图解法

图解法是利用压强分布图计算静水总压力的方法。该法用于计算作用于矩形平面上所受的静水总压力最为方便。

1) 静水总压力的大小

作用于平面上静水总压力的大小等于分布在平面上各点静压强的总和。因而，作用于单位宽度上的静水总压力等于静压强分布图的面积；作用于矩形平面的静水总压力等于矩形平面的宽度乘以静压强分布图的面积。

图 6.2-20 所示一任意倾斜放置的矩形平面 ABEF，平面长为 l 、宽为 b 。令其静压强分布图的面积为 Ω ，则作用于矩形平面上的静水总压力

$$P = b\Omega \quad (6.2-27)$$

因为静压强分布图为梯形，其面积 $\Omega = \frac{1}{2} (\rho gh_1 + \rho gh_2) l$ ，于是

$$P = \frac{\rho g}{2} (h_1 + h_2) bl \quad (6.2-28)$$

2) 静水总压力的作用点

矩形平面有纵向对称轴，压力中心即 P 的作用点 D 必位于纵向对称轴 $O-O$ 上，同时，总压力 P 的作用点还应通过压强分布图的形心点 Q 。必须注意，压强分布图形心点 Q 与受压面形心点 C 之区别。

当压强分布为三角形时，压力中心 D 离底部距离为 $e = l/3$ ；当压强分布为梯形时，压力中心离底部的距离 $e = \frac{l(2h_1 + h_2)}{3(h_1 + h_2)}$ ，如图 6.2-21 所示。

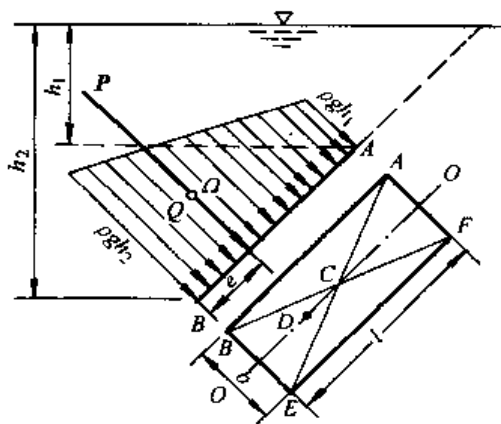


图 6.2-20 倾斜放置矩形平面静水总压力

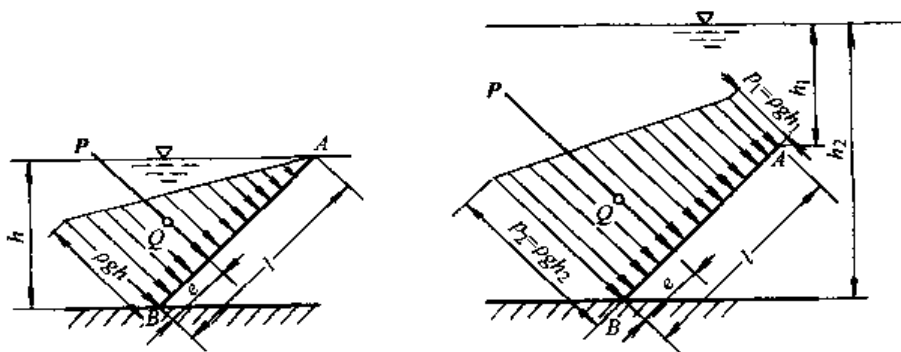


图 6.2-21 压力中心位置

2. 解析法

当受压面为任意形状时, 常用解析法求解其静水总压力的大小和作用点位置。所谓解析法是根据力学和数学分析方法求得的解析公式进行计算。

不失一般性, 有一任意形状平面 EF, 倾斜放置于水中, 与水平面的夹角为 α , 平面面积为 A , 平面形心点为 C , 如图 6.2-22 所示。

1) 静水总压力的大小

$$P = \int_A dP = \int_A \rho g h dA$$

设 M 点在 bOl 参考坐标系上的坐标为 (b, l) , 则 $h = l \sin \alpha$,

$$P = \rho g \sin \alpha \int_A l dA \quad (6.2-29)$$

式中, $\int_A l dA$ 表示平面 EF 对 Ob 轴的静矩, $\int_A l dA = l_C A$, 其中 l_C 表示平面 EF 形心点 C 至 Ob 轴的距离,

$$P = \rho g \sin \alpha l_C A = \rho g h_C A$$

式中, h_C 为平面 EF 形心点 C 在液面下的淹没深度, $h_C = l_C \sin \alpha$; 而 $\rho g h_C$ 为形心点 C 的静压强 p_C 。于是

$$P = p_C A \quad (6.2-30)$$

表明了作用于任意平面上的静水总压力, 等于平面形心点上的静压强与平面面积的乘积。形心点压强 p_C 可理解为整个平面的平均静压强。

2) 静水总压力的作用点

设总压力作用点的位置在 D , 其在 bOl 参考坐标系上的坐标为 (l_D, b_D) 。由合力矩定理, 考察静水总压力 P 对 Ob 轴的力矩, 有

$$Pl_D = \int_A l p dA \quad (6.2-31)$$

因 $p = \rho g h = \rho g l \sin \alpha$, 所以

$$Pl_D = \rho g \sin \alpha \int_A l^2 dA \quad (6.2-32)$$

令 $I_b = \int_A l^2 dA$, I_b 表示平面 EF 对 Ob 轴的惯性矩。由平行移轴定理: $I_b = I_C + l_C^2 A$ 。

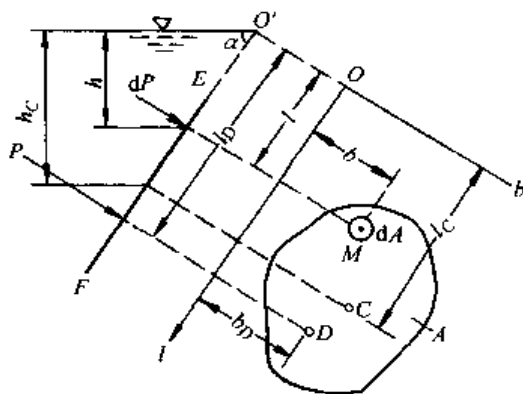


图 6.2-22 任意形状平面上静水总压力

I_C 表示平面 EF 对于通过其形心 C 且与 Ob 轴平行的轴线的惯性矩。则

$$Pl_D = \rho g \sin \alpha I_b = \rho g \sin \alpha (I_C + l_C^2 A)$$

$$l_D = \frac{\rho g \sin \alpha (I_C + l_C^2 A)}{P} = \frac{\rho g \sin \alpha (I_C + l_C^2 A)}{\rho g l_C \sin \alpha \cdot A}$$

即

$$l_D = l_C + \frac{I_C}{l_C A} \quad (6.2-33)$$

可见, 因 $I_C > 0$, $l_C > 0$, $A > 0$, 所以 $\frac{I_C}{l_C A} > 0$, 则 $l_D > l_C$, 故静水总压力作用点 D 在平面形心点 C 下方。

同理, 考察静水总压力 P 对 Ol 轴的力矩得到 b_D 的表达式

$$b_D = \frac{I_{bl}}{l_C A} \quad (6.2-34)$$

式中, $I_{bl} = \int_A b l dA$, 表示平面 EF 对 Ob 及 Ol 轴的惯性积。

例 6.2.4 一矩形闸门垂直放置如图 6.2-23 所示, 闸门顶水深 $h_1 = 1$ m, 闸门高 $h = 2$ m, 宽 $b = 1.5$ m, 试分别用解析法和图解法求静水总压力 P 的大小及作用点。

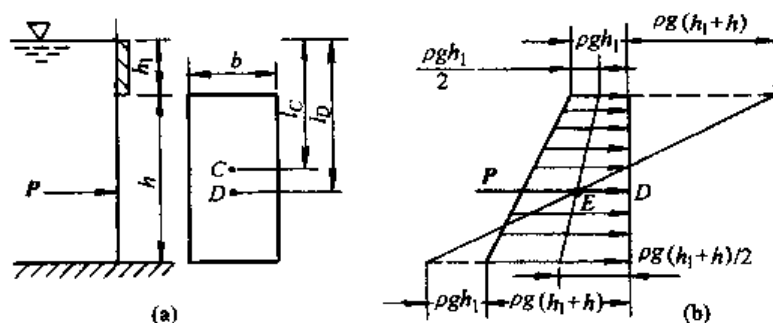


图 6.2-23 垂直矩形闸门上静水总压力

解

1. 解析法

(1) 静水总压力。如图 6.2-23 (a) 所示, $h_C = h_1 + h/2 = 2$ m, $A = bh = 1.5 \times 2 = 3$ (m^2), 代入式 (6.2-30), 则

$$P = \rho g h_C A = 1 \times 9.8 \times 2 \times 3 = 58.8 \text{ (kN)}$$

(2) 压力中心。因 $l_C = h_C = 2$ m, $I_C = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \times 1.5 \times 2^3 = 1$ (m^4), 代入式 (6.2-33), 则

$$l_D = l_C + \frac{I_C}{l_C A} = 2 + \frac{1}{2 \times 1.5 \times 2} = 2.17 \text{ (m)}$$

而且压力中心 D 在矩形的对称轴上。

2. 图解法

先绘相对压强分布图, 如图 6.2-23 (b) 所示, 静压强分布图的面积 $\Omega = \frac{1}{2} [\rho g h_1 +$

$\rho g (h_1 + h)] h = \frac{1}{2} \rho g h (2h_1 + h) = 39.2 \text{ (kN/m)}$, 闸门宽 $b = 1.5 \text{ m}$, 代入式 (6.2-27), 得

$$P = b\Omega = 1.5 \times 39.2 = 58.8 \text{ (kN)}$$

压力中心为静压强分布图梯形的形心。用作图法确定。过 E 点作垂直于受压面的矢量 P , 交点 D 即为压力中心。

例 6.2.5 图 6.2-24 所示为置于桌面上的各种不同形状的容器。各容器的底面积 A 均相同。容器中均盛有同一密度 ρ 的液体, 水深均为 h 。试分析各容器底上所受静水总压力的大小和容器对桌面的压力。其中, 容器重量略去不计。

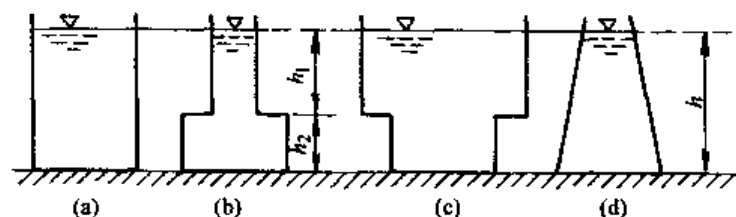


图 6.2-24 不同形状容器底上所受静水总压力

解

根据计算平面上静水总压力公式 $P = \rho g h_c A$, 分析各容器底上所受静水总压力的大小。由于在各容器底面形心点上的水深 h_c 相同, 并等于 h , 因此作用在底面积相同的各容器底上的静水总压力相同, 并且 $P = \rho g h A$ 。

为求各容器对桌面的压力, 应将各容器视为隔离体, 按力的平衡原理, 在不计容器重量的情况下, 各容器对桌面的压力等于容器中所盛液体的重量。显然, 彼此不相等。如若 $h_1 > h_2$, 则容器对桌面的压力自大至小为 $(c) > (a) > (d) > (b)$ 。

6.2.6 作用于曲线上的静水总压力

对于作用在柱形曲线上的静水总压力计算问题, 可先分别计算作用于曲面上静水总压力的水平分力 P_x 和垂直分力 P_z , 而后合成为静水总压力 P 。

1. 静水总压力的水平分力和垂直分力

在曲面 AB 上任取一微小曲面 EF , 并视为平面, 面积为 dA , 如图 6.2-25 所示。作用在此微小平面 dA 上的静水总压力 $dP = \rho g h dA$, 其中 h 为 dA 面的形心在液面以下的深度, dP 垂直于平面 dA , 与水平面的夹角为 α 。将微小总压力 dP 分解为水平和垂直两个分力:

$$\left. \begin{aligned} dP_x &= dP \cos \alpha = \rho g h dA \cos \alpha \\ dP_z &= dP \sin \alpha = \rho g h dA \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.2-35)$$

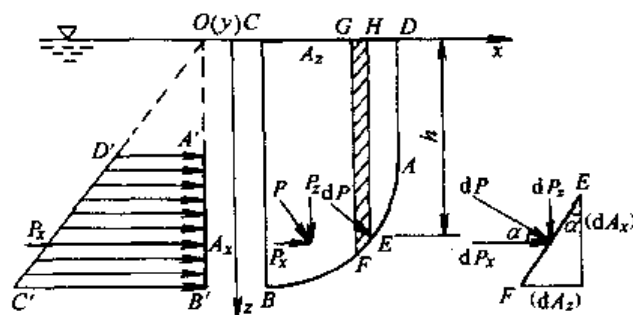


图 6.2-25 作用于柱形曲线上的静水总压力

式中 $dA \cos \alpha$ 是 dA 在垂直平面上的投影面, 具有沿 x 向的法线, 以 dA_x 表示; $dA \sin \alpha$ 是在 dA 水平面上的投影面, 具有沿 z 向的法线, 以 dA_z 表示。于是

$$\left. \begin{aligned} dP_x &= \rho g h dA_x \\ dP_z &= \rho g h dA_z \end{aligned} \right\} \quad (6.2-36)$$

积分后, 即可求得作用于 AB 面上静水总压力的水平分力和垂直分力。

1) 水平分力

$$P_x = \rho g \int_{A_x} h dA_x \quad (6.2-37)$$

式中, 垂直投影面 A_x 如图 6.2-25 中 $A'B'$, 脚标 x 表示投影面的法线方向。

显然, 求水平分力即转化为求作用于垂直投影面 A_x 上的静水总压力。

$$P_x = \rho g h_C A_x \quad (6.2-38)$$

式中, h_C 为垂直投影面的形心点在液面下的淹没深度。

水平分力 P_x 的作用线应通过 A_x 平面的压力中心, 其方向垂直指向该平面。作用于垂直投影面上的流体静压强分布图为图 6.2-25 中的梯形 $A'B'C'D'$ 。

2) 垂直分力

$$P_z = \rho g \int_{A_z} h dA_z \quad (6.2-39)$$

式中, 水平投影面 A_z 如图 6.2-25 中 CD , 脚标 z 表示投影面的法线方向; $h dA_z$ 为作用在微小曲面 EF 上的水体体积, 如图 6.2-25 中的 $EFGH$; $\int_{A_z} h dA_z$ 为作用在曲面 AB 上的水体体积, 如图 6.2-25 中的 $ABCD$ 。令

$$V = \int_{A_z} h dA_z \quad (6.2-40)$$

柱体 $ABCD$ 称为**压力体** V 。该体积乘以 ρg 即为作用于曲面上的流体 $ABCD$ 的重量

$$P_z = \rho g V \quad (6.2-41)$$

上式表明: 作用于曲面上静水总压力 P 的垂直分力 P_z 等于压力体内的水体重。显然, 垂直分力 P_z 的作用线应通过流体 $ABCD$ 的重心。

压力体只是作为计算曲面上垂直分力的一个数值当量, 不一定是由实际液体构成的。对于图 6.2-25 所示的曲面, 压力体为流体所充实, 称为**实压力体**; 但在另外一些情况下, 如图 6.2-26 的曲面, 相应的压力体 (图中阴影部分) 内并无流体, 称为**虚压力体**。

压力体应由下列周界面所围成:

(1) 受压曲面本身;

(2) 受压曲面在自由液面如图 6.2-25 或自由液面的延展面如图 6.2-26 上的投影面;

(3) 从曲面的边缘向自由液面或自由液面的延展面所作的垂直面。

垂直分力 P_z 的方向应根据曲面与压力体的关系而定: 当流体和压力体位于曲面的同侧如图 6.2-25 时, P_z 向下; 当流体和压力体各在曲面之一侧如图 6.2-26 时, P_z 向上。

当曲面为凹凸相间的复杂柱面时, 可在曲面与垂直面相切处将曲面分开, 分别绘出各部分的压力体, 并定出各部分垂直压力的方向, 而后合成即可得出总的垂直压力的方向。图 6.2-27 (a) 曲面 $ABCD$ 可分成 AC 及 CD 两部分, 其压力体及相应垂直压力的方向如图

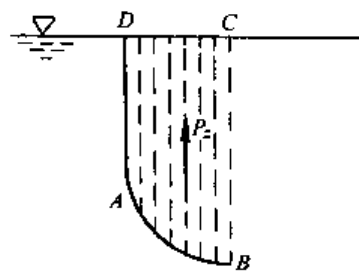


图 6.2-26 虚压力体

6.2-27 (b)、(c) 所示, 合成后的压力体则如图 6.2-27 (d) 所示, 曲面 $ABCD$ 所受总压力的垂直分力的大小及其方向, 则不难由图 (d) 确定。

2. 静水总压力

(1) 静水总压力的大小。当求得总压力的水平分力 P_x 和垂直分力 P_z 后, 则作用在曲面上静水总压力

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} \quad (6.2-42)$$

(2) 静水总压力的方向。静水总压力 P 与水平面的夹角

$$\alpha = \arctan \frac{P_z}{P_x} \quad (6.2-43)$$

静水总压力的作用线必通过 P_x 与 P_z 的交点, 而交点不一定位于曲面上。

例 6.2.6 如图 6.2-28 为一溢流坝上的弧形闸门。已知: $R = 10 \text{ m}$, 闸门宽 $B = 8 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$ 。求作用在该弧形闸门上的静水总压力的大小和方向。

解

(1) 水平分力。垂直投影面如图, 面积 $A_x = bh = 8 \times R \sin 30^\circ = 40 \text{ m}^2$, 投影面形心点淹没深度

$$h_C = 4 + \frac{h}{2} = 4 + \frac{R \sin 30^\circ}{2} = 6.5 \text{ (m)}$$

故 $P_x = \rho g h_C A_x = 1000 \times 9.8 \times 6.5 \times 40 = 2548 \text{ (kN)}$, 方向向右。

(2) 垂直分力。压力体如图 $abcde$, 压力体体积 $V = A_{abcde} \cdot b$, 因

$$A_{abcde} = A_{abce} + A_{cde}$$

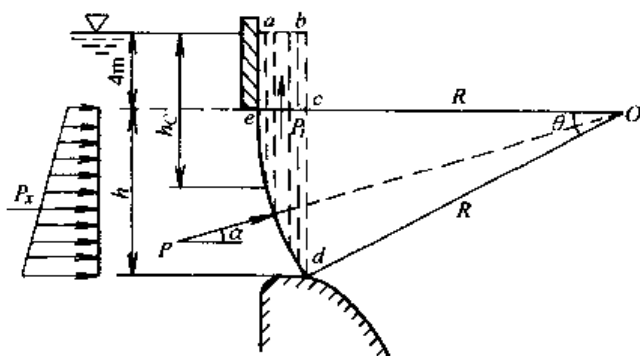


图 6.2-28 弧形闸门上的静水总压力

$$A_{cde} = \text{扇形面积 } Ode - \text{三角形面积 } Ocd = \pi R^2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} R \sin 30^\circ \cdot R \cos 30^\circ = 4.52 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$A_{abcde} = 4 \times (R - R \cos 30^\circ) = 5.36 \text{ (m}^2\text{)}$$

所以

$$A_{abcde} = 5.36 + 4.52 = 9.88 \text{ (m}^2\text{)}$$

故

$$P_z = \rho g V = 1000 \times 9.8 \times 9.88 \times 8 = 774.6 \text{ (kN)}, \text{ 方向向上。}$$

(3) 总压力

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = 2663 \text{ (kN)}$$

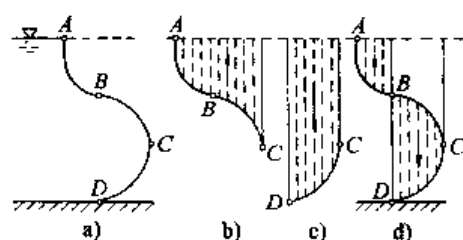


图 6.2-27 复杂柱面的压力体

(4) 作用力的方向。总压力指向曲面, 总压力作用线与水平方向的夹角

$$\alpha = \arctan \left(\frac{P_z}{P_x} \right) = \arctan \left(\frac{774.6}{2548} \right) = 16.91^\circ$$

例 6.2.7 求图 6.2-29 所示 AB 圆柱曲面单位长度上的垂直方向静水压力。

解 用图解法。

AB 面上受由 ABCD 围成的虚压力体, 方向向上, 则 AB 面所受垂向静水压力为 $(V_{OBCD} - V_{OAB})$ 的水体重, 即

$$P_z = ((R+H) \cdot R \cdot 1 - \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot 1) \rho g$$

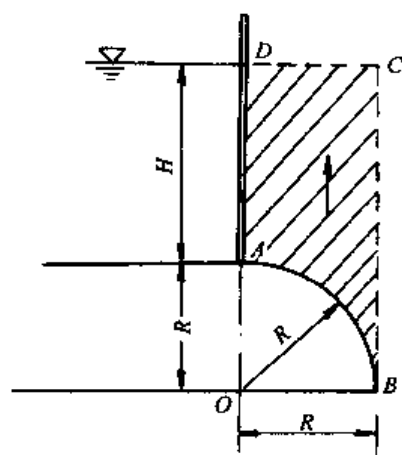
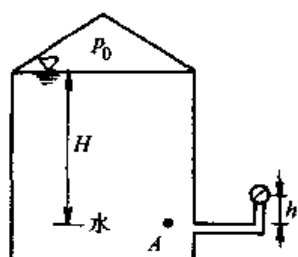


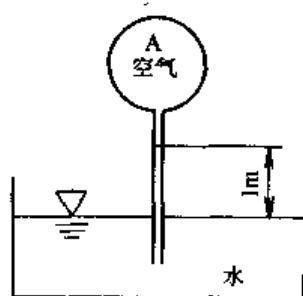
图 6.2-29 AB 曲面所受虚压力体

模拟试题

1. 设水自由液面压强为 1 个工程大气压 p_a , 则水自由液面以下 3 m 处的绝对压强为 ()。
(A) $1.0 p_a$ (B) $1.3 p_a$ (C) $1.5 p_a$ (D) $2.0 p_a$
2. 某点的绝对压强为 $p_{abs} = 68.6 \text{ kPa}$, 则其相对压强 p 和真空度 h_v 分别为 ()。
(A) $p = -29.4 \text{ kPa}$, $h_v = 3 \text{ m}$ (水柱) (B) $p = 29.4 \text{ kPa}$, $h_v = 3 \text{ m}$ (水柱)
(C) $p = -68.6 \text{ kPa}$, $h_v = 7 \text{ m}$ (水柱) (D) $p = 68.6 \text{ kPa}$, $h_v = 6 \text{ m}$ (水柱)
3. 自由液面下 2 m 处的绝对压强为 ()。
(A) 1.2 工程大气压 (B) 1.5 工程大气压
(C) 2.1 工程大气压 (D) 1.8 工程大气压
4. 设某点压力表读数为 $p = 40 \text{ kPa}$, 取 p_r 为相对压强, p_{abs} 为绝对压强, 则 ()。
(A) $p_r = 40 \text{ kPa}$, $p_{abs} = 98 \text{ kPa}$ (B) $p_r = 40 \text{ kPa}$, $p_{abs} = 138 \text{ kPa}$
(C) $p_r = 138 \text{ kPa}$, $p_{abs} = 40 \text{ kPa}$ (D) $p_r = 98 \text{ kPa}$, $p_{abs} = 40 \text{ kPa}$
5. 某点的绝对压强 $p_{abs} = 40 \text{ kPa}$, 则其相对压强 p_r 与真空值 p_v 分别为 ()。
(A) $p_r = 58 \text{ kPa}$, $p_v = 68 \text{ kPa}$ (B) $p_r = -58 \text{ kPa}$, $p_v = 68 \text{ kPa}$
(C) $p_r = -58 \text{ kPa}$, $p_v = 58 \text{ kPa}$ (D) $p_r = -58 \text{ kPa}$, $p_v = 98 \text{ kPa}$
6. 水的饱和蒸汽压强 $p_s = 1.7 \text{ kPa}$, 大气压强取 $p_a = 98 \text{ kPa}$, 则水中可能达到的最大真空度为 ()。
(A) 10 m (水柱) (B) 9.83 m (水柱)
(C) 9 m (水柱) (D) 9.8 m (水柱)
7. 如图封闭水箱中, 水深 $H = 1.5 \text{ m}$ 的 A 点上安装一压力表, 其中心距 A 点 $h = 0.5 \text{ m}$, 压力表读数为 4.9 kN/m^2 , 则水面的相对压强 p_0 为 ()。
(A) -9.8 kN/m^2 (B) 9.8 kN/m^2 (C) -4.9 kN/m^2 (D) 4.9 kN/m^2
8. 如图水沿垂直管上升 1 m, 容器 A 内的真空值为 ()。
(A) 88.2 kPa (B) 44.1 kPa (C) 19.6 kPa (D) 9.8 kPa
9. 如图用 U 形水银压差计测 A 点压强, $h_1 = 500 \text{ mm}$, $h_2 = 300 \text{ mm}$, A 点的相对压强等于
(A) 17246 N/m^2 (B) 63746 N/m^2 (C) 44125 N/m^2 (D) 235625 N/m^2



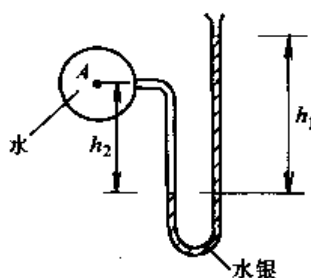
题 7 图



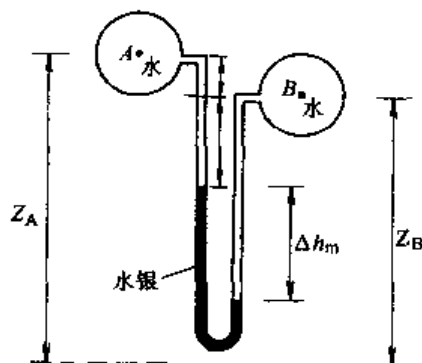
题 8 图

10. 如图所示 U 形水银压差计, A、B 两点的高程为 Z_A 、 Z_B , 管中为水, 测压管中的工作液体为水银, $\Delta h_m = 20$ cm, 则 A、B 两点的测压管水头差为 ()。

- (A) 2.52 m (水柱) (B) 2.20 m (水柱)
(C) 1.96 m (水柱) (D) 26.66 m (水柱)



题 9 图



题 10 图

11. 压力表测出的压强是 ()。

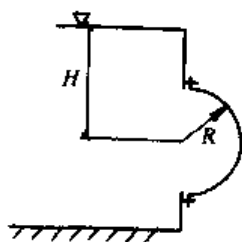
- (A) 绝对压强 (B) 真空压强 (C) 相对压强 (D) 实际压强

12. 如图水下有一个半径为 $R = 0.5$ m 的半球形侧盖, 球心至水面距离 $H = 3$ m, 作用于半球盖上水平方向静水压力是 ()。

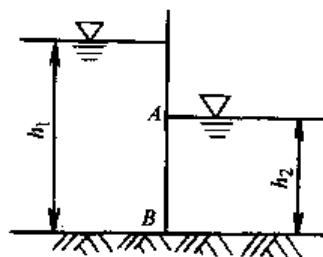
- (A) 23.1 kN (B) 29.4 kN (C) 11.5 kN (D) 2.4 kN

13. 如图正方形平板闸门 AB, 边长为 1 m, 两侧水深 $h_1 = 2$ m, $h_2 = 1$ m, 此闸所受静水总压力为 ()。

- (A) 9.8 kN (B) 19.6 kN (C) 38.6 kN (D) 54.0 kN



题 12 图



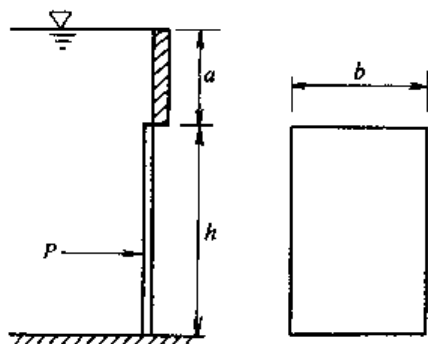
题 13 图

14. 如图所示的平面闸门, 门高 $h = 2$ m, 宽 $b = 1.5$ m, 门顶距水面 $a = 1$ m, 作用在闸门上的静水总压力为 ()。

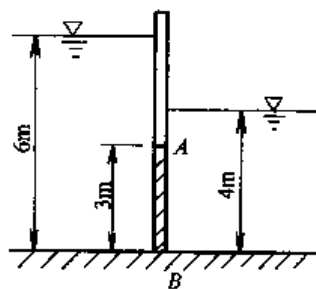
- (A) 58.8 kN (B) 70.0 kN (C) 65.5 kN (D) 68.8 kN

15. 图示矩形平板闸门 AB, 高 3 m, 宽 2 m 两侧承压, 上游水深 6 m, 下游水深 4 m, 闸门所受静水总压力为 ()。

- (A) 152.4 kN (B) 117.7 kN (C) 264.6 kN (D) 381.2 kN



题图 14



题图 15

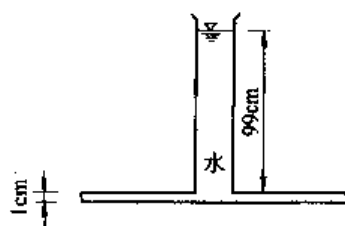
16. 图示容器 $A_1 = 1 \text{ cm}^2$, $A_2 = 100 \text{ cm}^2$, 水对容器底面的作用力为 ()。

- (A) 1.95 N (B) 9.8 N (C) 24.5 N (D) 98.0 N

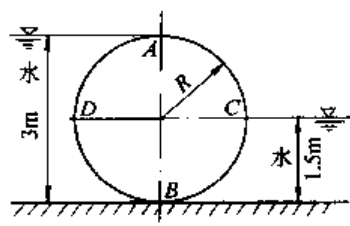
17. 图示单位长度圆管道所受水的总压力的垂直方向分量是 ()。

- (A) 17.3 kN (B) 52.0 kN (C) 69.3 kN (D) 74.0 kN

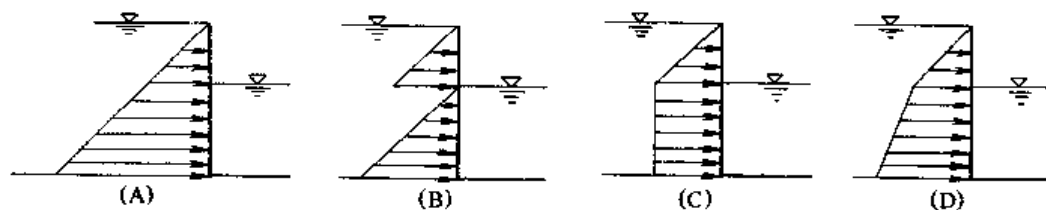
18. 如图平板闸门置于水中, 流体静压强分布图正确的是 ()。



题 16 图



题 17 图



题 18 图

6.3 流体运动学

根据流体连续介质假定, 把流体运动视为充满一定空间、由无数流体质点组成的连续介质运动。运动流体所占的空间, 称为流场。不同时刻, 流场中的质点都有一定的空间位置、流速、加速度、压强和密度等。表征流体运动状态的物理量如速度、加速度和密度等, 统称为运动要素。研究流体运动的规律, 就是分析流体的运动要素随空间和时间的变化规律。

6.3.1 描述流体运动的两种方法

描述流体运动的方法有拉格朗日法和欧拉法。

1. 拉格朗日 (Lagrange) 法

拉格朗日法以研究个别流体质点的运动为基础, 通过对每个流体质点运动规律的考察获

得整个流体的运动规律, 亦称为质点系法。

如图 6.3-1 所示, 任一瞬时 t , 质点 (a, b, c) 的空间位置 (x, y, z) 表示为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-1)$$

式中, a, b, c 称为拉格朗日变数。若给定 a, b, c 值, 可得到任一特定质点的轨迹方程。

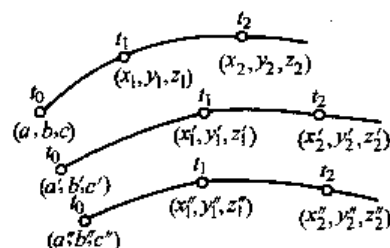


图 6.3-1 质点的运动轨迹

将式 (6.3-1) 对时间 t 取偏导数, 可得任一流体质点在任意瞬间的速度 u 在 x, y, z 轴向上的分量

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = u_x(a, b, c, t) \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = u_y(a, b, c, t) \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = u_z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-2)$$

同理, 将式 (6.3-2) 对时间取偏导数可得任一流体质点的加速度 a 在各轴向上的分量

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a_x(a, b, c, t) \\ a_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a_y(a, b, c, t) \\ a_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a_z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-3)$$

对于任一特定质点, 给定 a, b, c 值, 就可利用式 (6.3-1) ~ 式 (6.3-3) 确定不同时刻流体质点的坐标、速度和加速度。

2. 欧拉 (Euler) 法

欧拉法是以考察不同流体质点通过固定空间点的运动情况了解整个运动空间内的运动情况, 即着眼于固定空间点上各种运动要素的分布场。亦称为流场法。

采用欧拉法, 流场中任何一个运动要素可以表示为空间坐标和时间的函数。固定空间点上的流速随空间坐标 (x, y, z) 和时间 t 而变化, 固定空间点上的流速在各坐标轴上的分量为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-4)$$

式中, x, y, z 称为欧拉变数。若令 x, y, z 为常数, t 为变数, 即可求得某一固定空间点 (x, y, z) 上不同流体质点在不同时刻通过该点的流速变化情况。若令 t 为常数, x, y, z 为变数, 则可求得在同一时刻, 通过不同固定空间点上的不同流体质点的流速分布情况, 即流速场。

在流场中, 同一固定空间点上不同流体质点通过该点时流速是不同的, 即在同一固定空间点上流速随时间而变化。另一方面, 在同一瞬间不同固定空间点上流速也是不同的。因

此, 欲求某一流体质点在固定空间点上的加速度, 应同时考虑以上两种变化。任一流体质点在固定空间点上的加速度在各坐标轴上的分量为

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6.3-5)$$

式中, 等号右边第一项 $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial u_y}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial u_z}{\partial t}$ 表示在每个固定空间点上流速对时间的变化率, 称为时变加速度或当地加速度; 等号右边的第二项至第四项之和 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$ 、 $u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}$ 和 $u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$ 表示流速随坐标的变化率, 称为位变加速度或迁移加速度。

3. 迹线和流线

1) 迹线

在运动过程中, 任一流体质点在不同瞬时流经空间位置所连成的线称为迹线, 即流体质点运动时所走过的轨迹。

迹线微分方程为

$$\frac{dx}{u_x(a, b, c, t)} = \frac{dy}{u_y(a, b, c, t)} = \frac{dz}{u_z(a, b, c, t)} = dt \quad (6.3-6)$$

式中, u_x 、 u_y 、 u_z 是 a 、 b 、 c 和 t 的函数。 a 、 b 、 c 是特定质点的标记, 为不变的参数。时间 t 是自变量。积分后, 可求得该质点 (a , b , c) 的迹线方程, 即绘出迹线。

2) 流线

流线是同一瞬时在场中绘出的曲线, 曲线上所有各点的流速矢量都与该线相切, 如图 6.3-2。可以证明: 流线密处流速大, 流线稀处流速小。

流线的微分方程为
$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)} \quad (6.3-7)$$

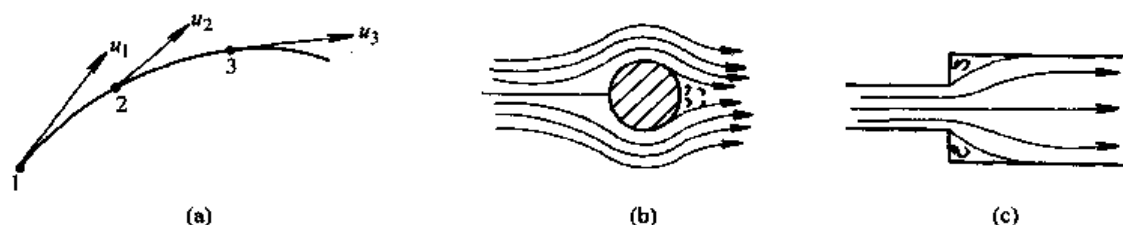


图 6.3-2 流线

式中, u_x 、 u_y 、 u_z 是变量 x 、 y 、 z 和 t 的函数, 流线只是对某一瞬时而言的。流速随时间而变化, 因而流线的位置、形状也是时间的函数。若已知流速分布, 利用式 (6.3-7), 可求得流线方程, 即绘出流线。

流线具有以下特征:

- (1) 流线不能相交;
- (2) 流线是一条光滑曲线或直线, 不会发生转折;
- (3) 流线表示瞬时流动趋势。

6.3.2 欧拉法中运动分类和术语

1. 流管、元流和总流

(1) 流管: 在流场中任意取一条微小的封闭曲线 C , 如图 6.3-3, 通过该曲线 C 上的每个点做流线, 这些流线所形成的封闭管状曲面称为流管。

(2) 元流: 充满流管中的流体称为元流或微小流束。

(3) 总流: 由无数元流组成的整个流体, 如通过河道、管道的水流称为总流。

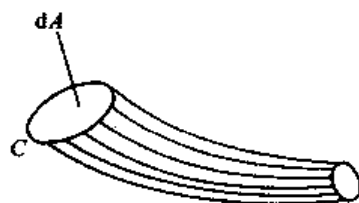


图 6.3-3 流管

2. 过流断面、流量和断面平均流速

(1) 过流断面: 垂直于流线簇所取的断面, 称为过流断面, 用 A 表示。当流线簇彼此不平行时, 过流断面为一曲面, 如图 6.3-4 (a); 当流线簇彼此平行时, 过流断面为一平面, 如图 6.3-4 (b)。例如, 在等直径管道中流动的水流过流断面为平面。

(2) 流量: 单位时间内通过某一过流断面的流体体积称为流量, 用 Q 表示, 量纲为 L^3T^{-1} , 单位为 m^3/s 。

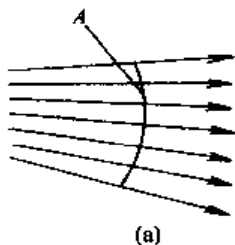
对于元流, 过流断面 dA 上各点流速视为相等, 用 u 表示, 因为过流断面与流动方向垂直, 故元流的流量

$$dQ = u dA \quad (6.3-8)$$

对于总流, 流量 Q 应等于所有元流的流量之和, 设总流过流断面面积为 A , 则

$$Q = \int_A dQ = \int_A u dA \quad (6.3-9)$$

(3) 断面平均流速。总流过流断面上各点的流速是不等的。例如, 管道中靠近管壁处流速小, 而中间流速大, 如图 6.3-5 所示, 常用一个平均值来代替各点的实际流速, 称为断面平均流速, 用 v 表示。断面平均流速是一个假想的速度, 其值与过流断面面积 A 的乘积应等于实际流速为不均匀分布时通过的流量, 即



(a)



(b)

图 6.3-4 过流断面

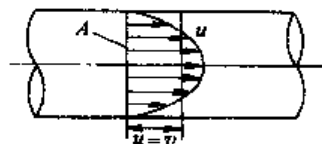


图 6.3-5 断面平均流速

$$Q = \int_A u dA = vA$$

或

$$v = \frac{Q}{A} \quad (6.3-10)$$

总流的流量 Q 就是断面平均流速 v 与过流断面面积 A 的乘积。引入断面平均流速的概

念, 可使流动的分析得到简化。

3. 一元流、二元流和三元流

采用欧拉法描述流动时, 流场中的任何运动要素可表示为空间坐标和时间的函数。在直角坐标系中, 流速是空间坐标 x, y, z 和时间 t 的函数。

按运动要素随空间坐标变化的关系, 可把流动分为一元流、二元流和三元流, 亦称一维流动、二维流动和三维流动。流体的运动要素仅随空间一个坐标包括曲线坐标流程 s 而变化的流动称为一元流。运动要素随空间两个坐标而变化的流动称为二元流。运动要素随空间三个坐标而变化的流动称为三元流。

4. 恒定流与非恒定流

(1) 恒定流: 流场中任一空间点上所有运动要素都不随时间而变的流动称为恒定流。例如, 流速

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z) \\ u_y &= u_y(x, y, z) \\ u_z &= u_z(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (6.3-11)$$

流速对时间的偏导数等于零, 即

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \quad (6.3-12)$$

对于恒定流, 在加速度式 (6.3-5) 中时变加速度或当地加速度等于零。

恒定流时, 流线的形状和位置不随时间而变, 迹线与流线重合。

(2) 非恒定流: 流场中任一空间点上有任一运动要素随时间而变的流动称为非恒定流。

5. 均匀流与非均匀流

1) 均匀流

流场中运动要素不随坐标位置或流程而变的流动称为均匀流。例如, 直径不变的直线管道中的水流就是均匀流的典型例子。均匀流具有以下特征:

(1) 均匀流的流线是彼此平行的直线, 过流断面为平面, 且过流断面的形状和尺寸沿程不变;

(2) 均匀流中, 同一流线上不同点的流速相等, 从而不同过流断面上的流速分布相同, 断面平均流速相等, 即流速沿程不变。在加速度式 (6.3-5) 中, 位变加速度或迁移加速度等于零;

(3) 均匀流过流断面上的动水压强分布规律与静水压强分布规律相同, 即在同一过流断面上各点测压管水头为一常数, 如图 6.3-6 所示,

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad (6.3-13)$$

上式表明: 均匀流过流断面上的动水压强分布规律与静水压强分布规律相同。因而过流断面上任一点动水压强或断面上动水总压力都可以按静水压强以及静水总压力的公式计算。

2) 非均匀流

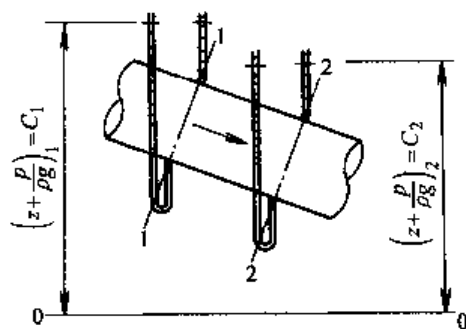


图 6.3-6 均匀流过流断面上测压管水头

流场中运动要素随坐标位置或流程而变的流动称为非均匀流。非均匀流的流线不是互相平行的直线。如果流线虽然互相平行但不是直线如管径不变的弯管中水流,或者流线虽为直线但不互相平行如管径沿程缓慢均匀扩散或收缩的渐变管中水流都属于非均匀流。

按照流线不平行和弯曲的程度,又将非均匀流分为渐变流和急变流两类。

(1) 渐变流: 流线近似于平行直线时的流动称为渐变流。渐变流的极限情况就是均匀流。如果一个实际水流的流线之间夹角很小,或流线曲率半径很大,可视为渐变流。在过流断面上动水压强的分布规律可近似地看做与静水压强分布规律相同。

(2) 急变流: 流线之间夹角很大或者流线的曲率半径很小的流动称为急变流。如图6.3-7所示,急变流时动水压强分布规律与静水压强分布规律不同。

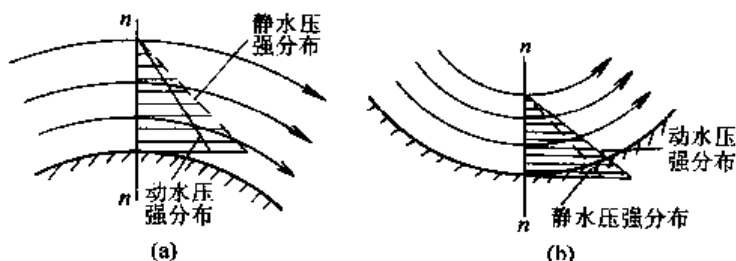


图 6.3-7 急变流过流断面上动水压强分布

6. 有压流与无压流

(1) 有压流: 过流断面的全部周界与固体边壁接触、无自由液面的流动称为有压流。如自来水管中的水流属于有压流。在有压流中,由于流体受到固体边界条件约束,流量变化只会引起压强、流速的变化,但过流断面的大小、形状不会改变。

(2) 无压流: 具有自由液面的流动称为无压流。如河渠中的水流属于无压流,流体在管道中未充满整个管道断面的流动也属于无压流。在无压流中,自由液面的压强为大气压强,其相对压强为零。当流量变化时,过流断面的大小、形状可随之而变,故流速和压强的变化表现为流量和水深的变化。

6.3.3 流体运动的连续性方程

流体被视为连续介质,流场中任一封闭曲面,在任一瞬时流进封闭曲面的流体质量与流出流体质量之差应等于该封闭曲面内因密度变化而引起的质量变化,即流动必须遵循质量守恒定律。

1. 流体运动的连续性微分方程

设想在流场中取一微六面体,如图6.3-8所示。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (6.3-14)$$

上式即为可压缩流体非恒定流的连续性微分方程。表达了任何可实现的流体运动所必须满足的连续性条件。其物理意义是: 流体在单位时间流经单位体积空间时,流出与流进的质量差与其内部质量变化的代数和为零,即流体质量守恒。对于均匀不可压缩流体, ρ 为常数,则

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (6.3-15)$$

即为均匀不可压缩流体的连续性微分方程。上式说明: 对于均匀不可压缩流体,单位时间流经单位体积空间,流出与流进的流体体积之差等于零,即流体体积守恒。

对于均匀不可压缩流体二元流或平面流,连续性微分方程为

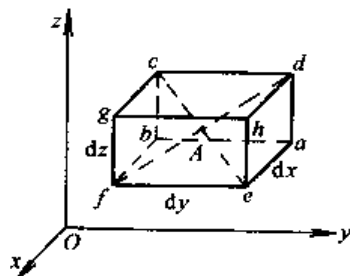


图 6.3-8 微六面体

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (6.3-16)$$

2. 总流的连续性方程

均匀不可压缩流体的总流连续性方程可由式 (6.3-15) 有

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz = 0$$

根据高斯定理, 上式的体积积分可用曲面积分表示, 即

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz = \iint_S u_n dS = 0$$

式中, S 是体积 V 的封闭表面; u_n 为封闭表面上各点处流速在其外法线方向的投影;

$\iint_S u_n dS$ 曲面积分称为通过封闭表面的速度通量。

流管的全部表面积 S 包括两端断面和四周侧表面。在流管的侧表面上 $u_n = 0$, 于是

$$-\iint_{A_1} u_1 dA_1 + \iint_{A_2} u_2 dA_2 = 0$$

式中, A_1 为流管的流进断面面积; A_2 为流管的流出断面面积。上式第一项取负号是因为流速 u_1 的方向与 dA_1 的外法线的方向相反。由此可得

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q \quad (6.3-17)$$

即为均匀不可压缩流体总流的连续性方程。式中, v_1 及 v_2 分别是总流过流断面 A_1 及 A_2 的断面平均流速。上式说明: 在均匀不可压缩流体总流中, 任意两个过流断面所通过的流量相等。换言之, 上游断面流进多少流量, 下游任何断面也将流出多少流量。

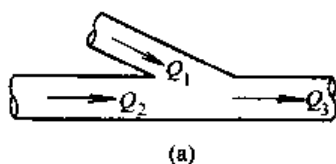
若沿程有流量流进或流出, 如图 6.3-9 (a)、(b), 则总流连续性方程可写为

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (6.3-19)$$

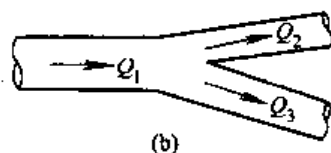
$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (6.3-20)$$

总流连续性方程是一运动方程。反映的是沿程两断面间流速关系, 对理想流体与黏性流体、恒定流与非恒定流、均匀流与非均匀流、渐变流与急变流、有压流与无压流等都适用。

例 6.3.1 水流自水箱经管径 $d_1 = 200 \text{ mm}$, $d_2 = 100 \text{ mm}$ 和 $d_3 = 50 \text{ mm}$ 的管路后流入大气中, 出口断面的流速 $v_3 = 4 \text{ m/s}$, 如图 6.3-10 所示。求流量及各管段的断面平均流速。



(a)



(b)

图 6.3-9 流动的汇流与分流

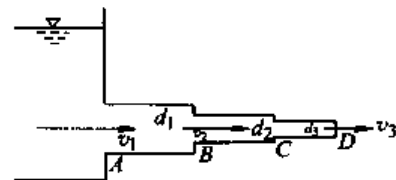


图 6.3-10 水流自水箱流出

解

$$(1) Q = v_3 A_3 = v_3 \times \frac{\pi d_3^2}{4} = 4 \times 0.785 \times 0.05^2 = 0.00785 (\text{m}^3/\text{s})$$

(2) 由连续性方程

$$v_1 = v_3 \frac{A_3}{A_1} = v_3 \frac{d_3^2}{d_1^2} = 4 \times \left(\frac{0.05}{0.2} \right)^2 = 0.25 (\text{m/s})$$

$$v_2 = v_3 \frac{A_3}{A_2} = v_3 \frac{d_3^2}{d_2^2} = 4 \times \left(\frac{0.05}{0.1} \right)^2 = 1.00 (\text{m/s})$$

例 6.3.2 设有两种均匀不可压缩的二元流动, 流速为

(1) $u_x = 2x$, $u_y = -2y$; (2) $u_x = 0$, $u_y = 3xy$

试检查流动是否满足连续条件。

解 代入连续性方程, 判断是否满足连续性条件。

(1) $\frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y} = 2 - 2 = 0$, 满足连续性条件;

(2) $\frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(3xy)}{\partial y} = 0 + 3x \neq 0$, 不满足连续性条件, 依此判断该流动不存在。

模拟试题

1. 所谓流线是指 ()。

- (A) 流域的边界线
- (B) 同一流体质点在不同瞬时所经过的空间曲线
- (C) 不同流体质点在不同瞬时所经过的空间曲线
- (D) 不同流体质点在同一瞬时的速度方向所连成的空间曲线

2. 有一变截面压力管道, 测得流量 $Q = 10 \text{ L/s}$, 其中一截面的管径 $d = 100 \text{ mm}$, 另一截面处的速度 $v_0 = 20.3 \text{ m/s}$, 此截面的管径 d_0 为 ()。

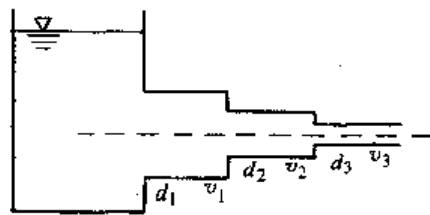
- (A) $d_0 = 30 \text{ mm}$ (B) $d_0 = 25 \text{ mm}$
- (C) $d_0 = 28 \text{ mm}$ (D) $d_0 = 20 \text{ mm}$

3. 有一变截面压力管道, 断面 A 处管径 $d_A = 100 \text{ mm}$, 断面平均流速 $u_A = 8.1 \text{ m/s}$; 断面 B 处平均流速 $v_B = 10 \text{ m/s}$, 则断面 B 处管径为 ()。

- (A) $d_B = 80 \text{ mm}$ (B) $d_B = 90 \text{ mm}$
- (C) $d_B = 110 \text{ mm}$ (D) $d_B = 120 \text{ mm}$

4. 如图水从水箱流经直径分别为 $d_1 = 10 \text{ cm}$, $d_2 = 5 \text{ cm}$ 和 $d_3 = 2.5 \text{ cm}$ 的管道流入大气中, 当出口流速为 10 m/s 时, d_1 、 d_2 管段流速 v_1 、 v_2 分别为 ()。

- (A) 40 m/s 、 20 m/s (B) 2.5 m/s 、 5.0 m/s
- (C) 16 m/s 、 4 m/s (D) 0.625 m/s 、 2.5 m/s



题 4 图

5. 空气以平均流速 $v_0 = 2 \text{ m/s}$ 流入断面积为 $0.4 \times 0.4 \text{ m}^2$ 的送风管, 而后经过四个断面积为 $0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$ 的排气孔流出, 如若每孔流速相等, 则排气孔平均流速为

- (A) 1 m/s (B) 2 m/s (C) 4 m/s (D) 8 m/s

6. 一直径为 $d_1 = 0.2 \text{ m}$ 的圆管, 突扩至直径为 $d_2 = 0.3 \text{ m}$ 的圆管, 若管中流量 $Q = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$, 则各管段流速 v_1 和 v_2 分别为 ()。

- (A) 2.39 m/s , 1.06 m/s (B) 9.55 m/s , 4.24 m/s
- (C) 4.25 m/s , 9.55 m/s (D) 1.06 m/s , 2.39 m/s

6.4 流体动力学

探讨外力作用而引起流体运动的规律, 即流体动力学问题, 以建立流体运动物理量和动

力物理量之间的关系。

6.4.1 理想流体运动微分方程及其积分

1. 理想流体动水压强的特性

因为理想流体不具有黏性，所以流体运动时不产生切应力，在作用表面上只有压应力，即动水压强。理想流体动水压强具有两个特性：

(1) 理想流体动水压强的方向总是沿着作用面的内法线方向；

(2) 理想流体中任一点动水压强的大小与其作用面的方位无关，即任一点动水压强的大小在各方向上均相等，只是位置坐标和时间的函数。

显然，理想流体动水压强的特性与静水压强的特性一致。

2. 理想流体运动微分方程

在理想流体的流场中，取一以任意点 $M(x, y, z)$ 为中心的微六面体，如图 6.4-1 所示。

1) 表面力

表面力只有动水压力。沿 x 轴方向作用于六面体 $ABCD$ 表面上的动水压强为 $p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ ，作用于 $EFGH$ 表面上的动水压强为 $p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ 。而作用于微六面体 $ABCD$ 和 $EFGH$ 表面上的动水压力分别为 $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz$ 和 $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz$ 。同

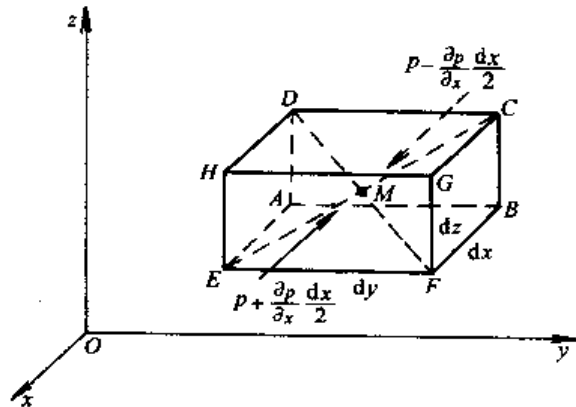


图 6.4-1 理想流体的微六面体

理，沿 y 轴方向作用于表面上的动水压力为 $\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dzdx$ 和 $\left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dzdx$ ，沿 z 轴方向作用于表面上的动水压力为 $\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dxdy$ 和 $\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dxdy$ 。

2) 质量力

作用于微六面体上的质量力在 x 、 y 、 z 轴上的分量分别为 $X\rho dxdydz$ 、 $Y\rho dxdydz$ 、 $Z\rho dxdydz$ 。其中 X 、 Y 、 Z 分别为沿 x 、 y 、 z 轴上的单位质量力。

3) 列力平衡方程

作用于微六面体上的表面力和质量力在 x 轴上的分量的代数和应等于微六面体的质量与加速度在 x 方向分量的乘积，即

$$X\rho dxdydz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz = \rho dxdydz \frac{du_x}{dt}$$

整理后为 $X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}$ ，同理可得沿 y 、 z 方向的关系式

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (6.4-1)$$

即为理想流体运动微分方程，又称欧拉运动微分方程。表述了单位质量流体的惯性力、质量

力和表面力之间的关系,适用于可压缩和不可压缩流体的恒定流与非恒定流。

因加速度为时变加速度与位变加速度之和,故欧拉运动微分方程可写为

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6.4-2)$$

对于恒定流, $\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$, 方程右侧保留迁移加速度三项。

对于静止流体, $u_x = u_y = u_z = 0$, 欧拉运动微分方程退化为欧拉平衡微分方程。

理想流体运动微分方程中共有 8 个物理量。对于均匀不可压缩流体, 密度 ρ 为常数, 单位质量力 X 、 Y 、 Z 通常是已知的, 故有 u_x 、 u_y 、 u_z 、 p 四个未知数。显然, 尚须补充一个方程, 即均匀不可压缩流体连续性微分方程。理论上, 任一流动问题, 只要联立求解以上 4 个方程式, 并满足起始条件和边界条件, 即可求解。

3. 理想流体运动微分方程的积分

在恒定、均匀不可压缩、质量力有势的条件下, 并沿流线对理想流体运动微分方程积分后

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} = C \quad (6.4-3)$$

即为著名的伯努利 (Bernoulli) 积分。表明: 对于均匀不可压缩理想流体, 在有势力作用下, 做恒定流动时, 同一条流线上 $\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right)$ 值保持不变, 而不同流线的积分常数是不同的。式中 U 为力的势函数。

如果质量力只有重力, 即 $U = -gz$ 。则

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C \quad (6.4-4)$$

对于同一流线上任意两点 1 和 2, 则

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (6.4-5)$$

即为理想流体伯努利能量方程。必须指出: 由于元流的过流断面面积微小, 认为过流断面上的流速和动水压强均匀分布。流线是元流的极限情况, 所以沿流线的伯努利方程对元流同样适用。

4. 伯努利方程的物理意义和几何意义

z 是某点距选定基准面的高度, 称位置水头, 表示单位重量流体从某一基准面算起所具有的位置势能, 简称位头。

$\frac{p}{\rho g}$ 是某点压强的作用使流体沿侧压管所能上升的高度, 称为压强水头, 表示单位重量流体相对于压强为大气压的流体所具有的压强势能, 简称压头。

$\frac{u^2}{2g}$ 是以点流速 u 为初速度的垂直上升射流所能达到的理论高度, 称为流速水头, 表示

单位重量流体所具有的动能，简称动能头或速度头。

将前两项相加，以 H_p 表示，即

$$H_p = z + \frac{p}{\rho g} \quad (6.4-6)$$

H_p 称为测压管水头，表示单位重量流体所具有的总势能。相当某点测压管水面相对于基准面的高度。

将三项相加，以 H 表示，即

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \quad (6.4-7)$$

H 称为总能头，表示单位重量流体所具有的总能量或总机械能。

伯努利能量方程表明，单位重量流体所具有的位能、压能和动能之和沿同一流线保持不变；而位能、压能、动能之间可相互转化。

5. 元流伯努利方程的应用——毕托管测点流速

以毕托管 (Pitot Tube) 为例，说明元流能量方程的应用。毕托管是广泛用于量测水流和气流点流速的一种仪器，如图 6.4-2 所示。管前端开口 a 正对水流或气流。 a 端内部有流体通路与上部 a' 端相通。管侧有多个孔口 b ， b 端内部也有流体通路与上部 b' 相通。当测定水流时， a' 、 b' 两管水面差 Δh 即反映 a 、 b 两处压差。当测定气流时， a' 、 b' 两端接液柱差压计，以测定 a 、 b 两处的压差。

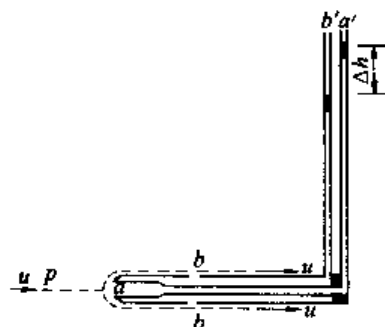


图 6.4-2 毕托管

沿 ab 流线写元流能量方程 $\frac{p_a}{\rho g} + 0 = \frac{p_b}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ ，则 $u = \sqrt{2g \frac{p_a - p_b}{\rho g}}$ 。因 $\frac{p_a - p_b}{\rho g}$ 即为 a' 和 b' 两管水面差 Δh ，则点流速

$$u = \varphi \sqrt{2g\Delta h} \quad (6.4-8)$$

式中， φ 为经实验校正的流速系数，与管的构造和加工情况有关，其值近似等于 1。

6.4.2 黏性流体恒定总流能量方程

1. 黏性流体恒定元流能量方程

对于理想流体，元流的伯努利能量方程同沿流线的伯努利能量方程，即

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}$$

实际流体具有黏性是不争的事实，在流动过程中，要消耗一部分能量用于克服摩擦力而做功，所以流体的机械能要沿流程减少，即存在着能量损失。因此，对于黏性流体，总是

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} > z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}$$

令单位重量流体从断面 1-1 流至断面 2-2 所损失的能量为 h'_w ，则

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_w \quad (6.4-9)$$

即是均匀不可压缩黏性流体恒定元流能量方程。

2. 黏性流体恒定总流能量方程

实用上, 流动一般都是总流。应用能量方程解决实际问题, 必须把元流的能量方程对总流过流断面积分, 从而推广为总流的能量方程。

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \quad (6.4-10)$$

式中: z_1 、 z_2 为 1、2 过流断面上选定点相对于选定基准面的高程; p_1 、 p_2 为相应断面选定点的压强, 同时用相对压强或同时用绝对压强; v_1 、 v_2 为相应断面的平均流速; α_1 、 α_2 为

相应断面的动能修正系数 $\alpha = \frac{\int_A u^3 dA}{v^3 A}$; h_w 为 1、2 两断面间的单位重量流体所具有的能量损失, 亦称水头损失。

其中能量损失分为沿流程均匀发生的损失 (称沿程能量损失) 和因局部障碍 (如弯头、闸阀等) 引起的损失 (称局部能量损失)。两种能量损失均表示为速度头的倍数。

上式即是均匀不可压缩黏性流体恒定总流的能量方程或黏性流体恒定总流伯努利方程。方程(6.4-10)中各项 (除 h_w 外) 的意义类似于理想流体伯努利方程中的对应项, 所不同的是各项均指平均值。总流伯努利方程表明: 总流过流断面上单位重量流体所具有的总机械能即总能头平均值沿流程减小, 所减小的高度即为平均水头损失; 而各项能头之间可以相互转化。

3. 恒定总流伯努利方程的应用

1) 应用条件

恒定总流伯努利方程是在一定条件下建立的, 应用时, 必须满足下述条件。

- (1) 流体运动恒定。
- (2) 流体均匀不可压缩。
- (3) 作用于流体上的质量力只有重力。
- (4) 所选取的两个过流断面应符合渐变流或均匀流条件, 即断面上各点测压管水头等于常数。
- (5) 流量沿程不变, 即在两个断面间没有流量流入或流出。对于两断面间有流量流入或流出的情况, 可以分别对每支流动建立能量方程。

对有流量流入如图 6.4-3 (a) 所示。

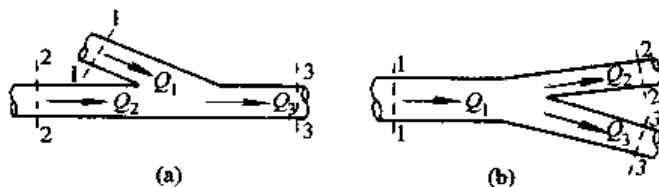


图 6.4-3 两断面间有流量流入或流出的图示

1-1 断面和 3-3 断面间

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w1-3} \quad (6.4-11)$$

2-2 断面和 3-3 断面间

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w2-3} \quad (6.4-12)$$

对有流量流出如图 6.4-3 (b)) 所示。

1-1 断面和 2-2 断面间

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \quad (6.4-13)$$

1-1 断面和 3-3 断面间

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w1-3} \quad (6.4-14)$$

可见, 两断面间虽有流出或流入流量, 但写总流能量方程时, 只考虑断面间各支流的能量损失, 而不考虑流出或流入流量的能量损失。

2) 应用伯努利方程的注意事项

(1) 选好过流断面。所取断面必须符合渐变流或均匀流条件。

(2) 选择基准面。基准面可以任意选择, 但在同一个能量方程中只能采用同一个基准面。基准面的选择要便于问题的求解, 如以通过管道出口断面中心的平面作为基准面, 则出口断面的 $z=0$ 。

(3) 能量方程中压强可以用相对压强, 也可以用绝对压强, 但对同一问题必须采用相同的标准。计算中通常采用相对压强。

(4) 应尽量选择未知量较少的过流断面。例如水箱水面、管道出口等相对压强等于零。

(5) 因渐变流同一过流断面上任意点的测压管水头 $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$ 都相等, 所以测压管水头可以选取过流断面上任意点来计算。对管道, 一般选管轴中心点; 对于明渠, 一般选在自由液面上, 此处相对压强为零, 自由液面到基准面的高度就是测压管水头。

(6) 确定动能修正系数 α 。严格来讲, 不同过流断面上的动能修正系数 α_1 与 α_2 是不相等的, 且不等于 1; 实用上对渐变流断面可令 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 。

(7) 正确计算两断面间的水头损失 h_w , 包括沿程水头损失和局部水头损失。而且, 应注意水头损失项 h_w 在能量方程式中的位置, 如流体从 1 断面流向 2 断面, 则 h_w 应与 2 断面的量一起写在方程的一端; 如流体从 2 断面流向 1 断面, 则 h_w 应与 1 断面的量一起写在方程的一端。

3) 有能量输入或输出的能量方程

如两断面间有能量输入或输出, 则将输入的单位重量流体所具有的能量 H_i 或输出的单位重量流体所具有的能量 H_o 直接加到能量方程式中。

有能量输入时

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + H_i = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \quad (6.4-15)$$

有能量输出时

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + H_o + h_{w1-2} \quad (6.4-16)$$

4) 总能量头线与测压管水头线

由于能量方程各项均是单位重量流体所具有的各种机械能, 具有长度的量纲。因此可用几何线段表示各物理量的大小, 从而形象地反映总流沿程各断面上能量的变化规律。

总能量头

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{av^2}{2g} \quad (6.4-17)$$

测压管水头

$$H_p = z + \frac{p}{\rho g} \quad (6.4-18)$$

把各断面的总能头 H 和测压管水头 H_p 的数值, 以其距基准面的垂直距离按一定比例在图中标出, 各断面的总能头的端点沿流程的连线即为总能头线; 各断面的测压管水头的端点沿流程的连线即为测压管水头线, 如图 6.4-4 所示。

由能量方程的物理意义不难得出: 黏性流体总流的总能头线必定是一条沿流程下降的曲线。而测压管水头线则可能是下降的曲线, 也可能是上升的曲线, 甚至可能是一条水平线, 视总流的几何边界变化情况而具体分析。

总能头线沿流程的降低值与流程长度 l 之比, 称为总能头线坡度, 也称水力坡度, 常以 J 表示。总能头线为直线时, 有

$$J = \frac{H_1 - H_2}{l} = \frac{h_w}{l} \quad (6.4-19)$$

当总能头线为曲线时, 坡度为变值, 在某一断面处坡度可表示为

$$J = \frac{-dH}{dl} = \frac{dh_w}{dl} \quad (6.4-20)$$

因总能头增量 dH 始终为负值, 为使 J 为正值, 上式中加“-”号。

总能头线坡度 J 表示单位流程上的水头损失。

5) 文丘里管状水表测流量

文丘里 (Venturi) 流量计是量测管道流量的一种装置。由两段锥形管和一段较细的管相连接而组成, 如图 6.4-5 (a)。前部分为收缩段, 中间为喉管, 后部分为扩散段。若欲量测某管中通过的流量, 则把文丘里流量计连接在管段之中, 在管道和喉管上分别设置测压管或设置差压计, 用以测得该两断面上测压管液面高差 Δh 。当已知测压管液面高差为 Δh 时, 运用能量方程即可计算通过管中的流量。

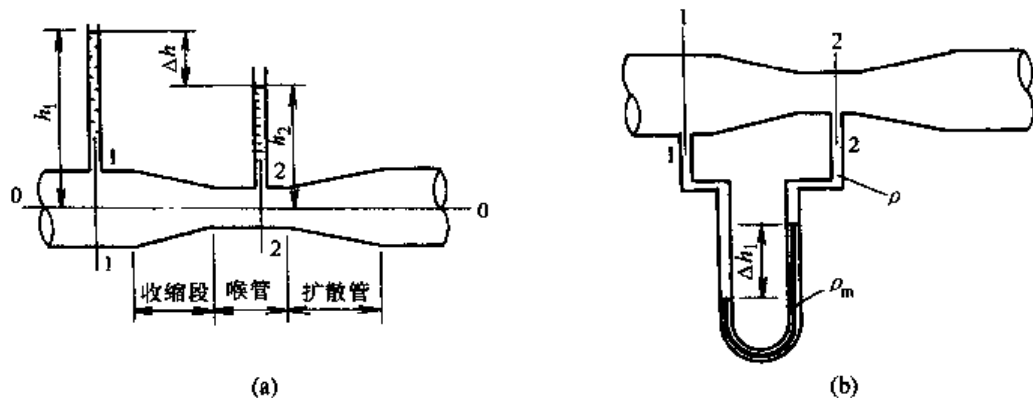


图 6.4-5 文丘里流量计

如管段水平放置, 对安装测压管的断面 1-1 和 2-2 写总流的能量方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w_{1-2}}$$

若以管轴线为基准面, 则 $z_1 = z_2 = 0$, $\frac{p_1}{\rho g} = h_1$, $\frac{p_2}{\rho g} = h_2$ 。取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 。因断面 1-1 和 2-2 相距很近, 暂不计水头损失, 即 $h_{w_{1-2}} = 0$, 能量方程为

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad \text{或} \quad h_1 - h_2 = \Delta h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

由连续性方程

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \quad \text{或} \quad v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2$$

上式, d_1 、 d_2 分别为断面 1-1 及 2-2 处管道的直径。将 v_2 与 v_1 的关系代入, 有

$$\Delta h = \frac{v_1^2}{2g} \left[\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right] \quad \text{或} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}}$$

文丘里流量计的流量

$$Q = A_1 v_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}}$$

令

$$K = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}}$$

则

$$Q = K \sqrt{\Delta h} \quad (6.4-21)$$

显然, 当水管直径 d_1 及喉管直径 d_2 确定以后, K 为一定值, 可预先算出。由式(6.4-21)可见, 只要测得水管断面与喉部断面的测压管液面高差 Δh , 即可求得流量 Q 值。

以上分析计算中, 没有考虑水头损失, 而水头损失将会使流量减小, 因而实际流量比按式(6.4-21)计算值为小, 可用流量系数 μ 来修正, 即实际流量

$$Q = \mu K \sqrt{\Delta h} \quad (6.4-22)$$

流量系数 μ 取 0.97~0.99。

如果文丘里流量计上直接安装水银差压计, 如图 6.4-5 (b), 由差压计原理可知

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{\rho_m - \rho}{\rho} \Delta h_1 = 12.6 \Delta h_1$$

式中, Δh_1 为水银差压计两支水银面高差。

文丘里流量计的流量

$$Q = \mu K \sqrt{12.6 \Delta h_1} \quad (6.4-23)$$

例 6.4.1 有一直径缓慢变化的锥形水管, 如图 6.4-6 所示。断面 1-1 处直径 $d_1 = 0.15 \text{ m}$, 中心点 A 的相对压强为 $p_1 = 7.2 \text{ kPa}$, 断面 2-2 处直径 $d_2 = 0.3 \text{ m}$, 中心点 B 的

相对压强 $p_2 = 6.1 \text{ kPa}$, 断面平均流速 $v_2 = 1.5 \text{ m/s}$, A、B 两点高差为 1 m 。试判断管中水流方向, 并求 1-1、2-2 两断面间的水头损失。

解 首先应用连续性方程求断面 1-1 的平均流速。由 $v_1 A_1 = v_2 A_2$, 故

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2 = \left(\frac{0.30}{0.15}\right)^2 v_2 = 4v_2 = 6 \text{ (m/s)}$$

因水管直径变化缓慢, 断面 1-1 及 2-2 水流可近似视为渐变流, 以过 A 点水平面为基准面分别计算两断面的总能头分别为

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = 0 + \frac{7.2}{1 \times 9.8} + \frac{6^2}{2 \times 9.8} = 2.57 \text{ (m)}$$

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_2^2}{2g} = 1 + \frac{6.1}{1 \times 9.8} + \frac{1.5^2}{2 \times 9.8} = 1.74 \text{ (m)}$$

因 $H_1 > H_2$, 管中水流应从 A 流向 B。

水头损失

$$h_w = H_1 - H_2 = 2.57 - 1.74 = 0.83 \text{ (m)}$$

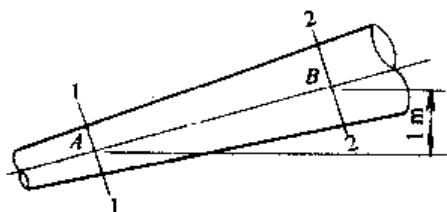


图 6.4-6 锥形水管

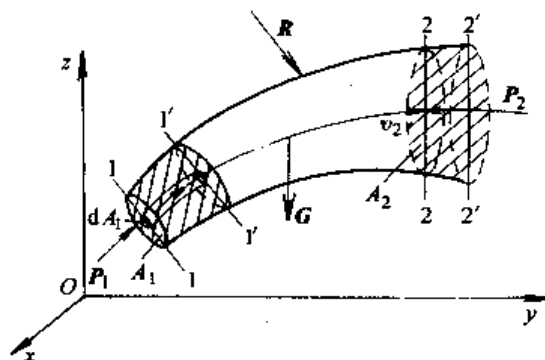


图 6.4-7 控制体的动量变化和作用于其上的外力

6.4.3 恒定总流动量方程

流体力学中的动量方程是自然界动量守恒定律在流体运动中的特殊表达, 反映了流体在运动过程中动量的改变与作用力之间的关系。

1. 恒定总流动量方程

在均匀不可压缩恒定总流中取一流段, 两端过流断面为 1-1 和 2-2, 如图 6.4-7 所示。以该流段为隔离体称为控制体。

(1) 控制段的动量变化。用断面平均流速 v 代替 u , 所造成的误差以动量修正系数 β 来修正

$$\beta = \frac{\int_A u^2 dA}{v^2 A} \quad (6.4-25)$$

动量修正系数 β 表示单位时间内通过断面的实际动量与单位时间内以相应的断面平均流速通过的动量的比值。在渐变流中, β 值约为 $1.02 \sim 1.05$ 。为方便计算, 取 $\beta = 1.0$ 。

控制体的动量变化

$$K_{2-2'} - K_{1-1'} = \rho Q (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) dt \quad (6.4-26)$$

(2) 作用于控制体段上的力。作用于控制体上的外力包括：上游流体作用于断面 1-1 上的动水压力 P_1 ，下游流体作用在断面 2-2 上的动水压力 P_2 ，重力 G ，以及四周边界对控制体的总作用力 R 。所有外力的合力为 ΣF 。

(3) 动量方程。依动量定理恒定总流动量方程

$$\rho Q(\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) = \Sigma F \quad (6.4-27)$$

方程左端表示单位时间控制体内通过下游断面流出的动量和通过上游断面流入的动量之差，右端则表示作用于总流控制体上所有外力之和。

在直角坐标系中，均匀不可压缩恒定总流的动量方程

$$\left. \begin{aligned} \rho Q(\beta_2 v_{2x} - \beta_1 v_{1x}) &= \Sigma F_x \\ \rho Q(\beta_2 v_{2y} - \beta_1 v_{1y}) &= \Sigma F_y \\ \rho Q(\beta_2 v_{2z} - \beta_1 v_{1z}) &= \Sigma F_z \end{aligned} \right\} \quad (6.4-28)$$

式中， v_{2x} 、 v_{2y} 、 v_{2z} 分别为总流下游过流断面 2-2 的断面平均流速在 3 个坐标方向的投影； v_{1x} 、 v_{1y} 、 v_{1z} 分别为上游过流断面 1-1 的断面平均流速在 3 个坐标方向的投影。 ΣF_x 、 ΣF_y 、 ΣF_z 分别为作用在 1-1 与 2-2 断面间流体上的所有外力在 3 个坐标方向的投影代数之和。

适用于恒定总流的连续性方程 (6.3-17)、能量方程 (6.4-10) 和动量方程 (6.4-28) 是流体力学中三个重要基本方程，即为进行水力计算的基本工具。

2. 恒定总流动量方程的应用

1) 注意问题

(1) 动量方程是矢量式，式中流速和作用力都是矢量。首先选定坐标系并标明其正方向，然后把流速和作用力向该坐标轴投影。坐标系的选择以方便计算为宜。

(2) 动量方程的左端是单位时间控制体的动量变化值，必须是流出的动量减去流进的动量，两者切不可颠倒。

(3) 所选择的两个过流断面应符合渐变流条件，以便于计算两端断面上的动水压力。压强采用相对压强。

(4) 根据问题的要求，选定两个渐变流断面间的流体作为控制体，作用在控制体上的外力应包括两断面上的流体压力、固定边界对流体的作用力以及流体本身的重力，缺一不可。

(5) 当所求未知作用力的方向不能事先确定时，可任意假定一个方向。若计算结果为正值，说明假定方向正确；若为负值，说明与假定方向相反。

(6) 动量方程只能求解一个未知数。若方程中未知数多于一个时，必须借助于能量方程或连续性方程联立求解。

(7) 虽然动量方程的推导是在无流量流入或流出条件下进行的，但可以应用于有流量流入或流出的情况。

2) 恒定总流动量方程的应用实例

为求水流对弯管的作用力，图 6.4-9 是转角为 α 的弯管，管轴线位于垂直平面上。弯管两端过水断面面积分别为 A_1 和 A_2 ，断面平均流速为 v_1 和 v_2 ，断面形心点压强为 p_1 和 p_2 ，弯管内通过流量 Q 。

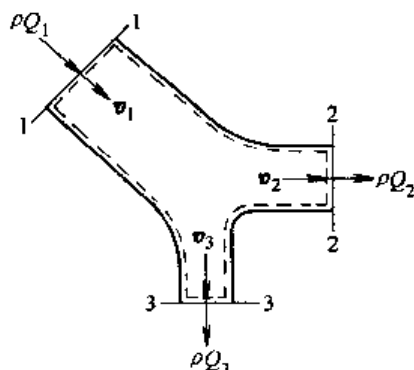


图 6.4-8 有流量流入与流出的图示

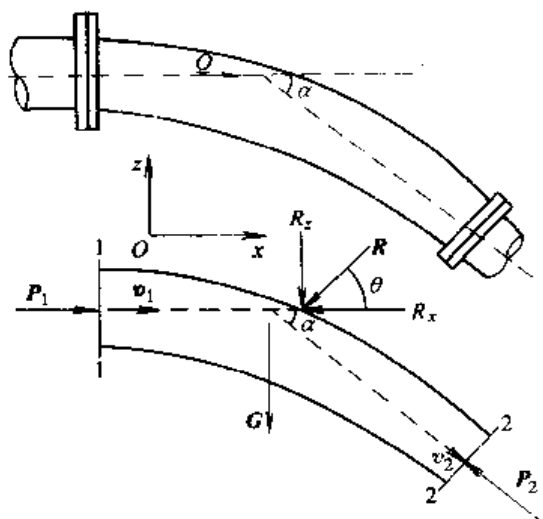


图 6.4-9 水流对弯管的作用力

弯管内的水流是急变流，不能用静水压强的计算方法求管内水流对管壁的作用力。因此，应用动量方程求解。

(1) 围取控制体，建立坐标系。在弯管进、出口水流为渐变流处，取断面 1-1 和 2-2，并取两断面间的总流作为控制体。选取坐标系如图。

(2) 分析作用于控制体上的外力。作用在此水体上的外力包括 1、2 断面上的动水压力、弯管边壁对水流的反作用力以及重力。

1、2 断面上的动水压力

$$P_1 = p_1 A_1, \quad P_2 = p_2 A_2$$

重力。因弯管的轴线是在垂直面内，应该考虑重力 G 。如 V 为弯管控制体内水的体积，有

$$G = \rho g V$$

弯管对水流的反作用力为 R ，假定方向并将其分解成 x 方向的 R_x 和 z 方向的 R_z 。

(3) 列动量方程，求解作用力。将所有外力和流速在坐标轴上投影，令 $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ，则 x 方向动量方程

$$\Sigma F_x = P_1 - P_2 \cos \alpha - R_x = \rho Q (v_2 \cos \alpha - v_1),$$

$$R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \alpha - \rho Q^2 \left(\frac{\cos \alpha}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right)$$

z 方向动量方程

$$\Sigma F_z = P_2 \sin \alpha - R_z - G = \rho Q (-v_2 \sin \alpha - 0)$$

$$R_z = p_2 \sin \alpha + \frac{\rho Q^2 \sin \alpha}{A_2} - G$$

弯管对水流作用力的合力

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2}$$

R 与水平轴的夹角

$$\theta = \arctan \frac{R_z}{R_x}$$

水流对弯管的作用力大小与 R 相等、方向相反。

例 6.4.2 有一垂直放置的弯头, 如图 6.4-10 所示, 弯头转角为 90° , 控制体起始断面 1-1 与终止断面 2-2 间的轴线长度 l 为 3.14 m, 两断面中心高差 Δz 为 2 m, 已知断面 1-1 中心处动水压强 p_1 为 117.6 kPa, 两断面之间水头损失 h_w 为 0.1 m, 管径 d 为 0.2 m。当管中通过流量 Q 为 $0.06 \text{ m}^3/\text{s}$ 时, 求水流对弯头的作用力。

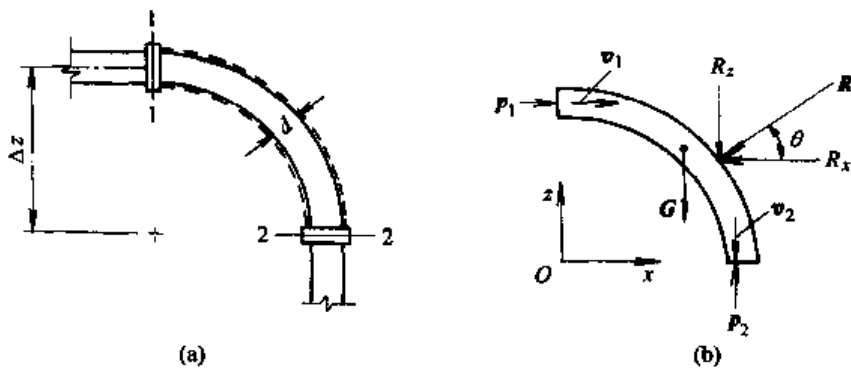


图 6.4-10 水流对弯头的作用力

解

(1) 管中流速 $V = V_1 = V_2$,

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0.06}{\pi d^2/4} = \frac{0.06}{3.14 \times 0.2^2/4} = 1.91 (\text{m/s})$$

(2) 断面 2-2 中心处动水压强 p_2 。以断面 2-2 为基准面, 对断面 1-1 与 2-2 写能量方程

$$\Delta z + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + 0 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w$$

于是

$$\frac{p_2}{\rho g} = \Delta z + \frac{p_1}{\rho g} - h_w$$

将 $h_w = 0.1 \text{ m}$, $p_1 = 117.6 \text{ kPa}$, $\Delta z = 2 \text{ m}$, 代入上式, $p_2 = 136.2 \text{ kPa}$ 。

(3) 弯头内水重 G :

$$G = \rho g V = \rho g \cdot l \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = 1 \times 9.8 \times 3.14 \times \frac{3.14}{4} \times 0.2^2 = 0.98 (\text{kN})$$

(4) 作用于断面 1-1 和 2-2 上的动水总压力。

$$P_1 = p_1 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 117.6 \times \frac{3.14 \times (0.2)^2}{4} = 3.80 (\text{kN})$$

$$P_2 = p_2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 136.2 \times \frac{3.14 \times (0.2)^2}{4} = 4.28 (\text{kN})$$

(5) 对弯头内水流沿 x 、 z 方向分别写动量方程

令管壁对水体的反作用力在水平和垂直方向的分力为 R_x 及 R_z , 沿 x 方向动量方程

$$\rho Q(0 - \beta v) = P_1 - R_x$$

$$R_x = P_1 + \beta \rho Q v = 3.7 + 1 \times 1 \times 0.06 \times 1.91 = 3.815 (\text{kN})$$

沿 z 方向动量方程

$$\rho Q(-\beta v - 0) = P_2 - G - R_z$$

$$R_z = P_2 - G + \beta \rho Q v = 4.28 - 0.98 + 1 \times 1 \times 0.06 \times 1.91 = 3.415 (\text{kN})$$

管壁对水流的总作用力

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = \sqrt{(3.815)^2 + (3.415)^2} = 5.12(\text{kN})$$

作用力 R 与水平轴 x 的夹角

$$\theta = \arctan\left(\frac{R_z}{R_x}\right) = 41'48'$$

水流对管壁的作用力与 R 大小相等、方向相反。

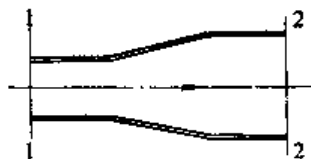
模拟试题

1. 在应用黏性总流能量方程时, 对计算断面的要求为 ()。

- (A) 任意横断面 (B) 任意过水断面
(C) 渐变流过水断面 (D) 非均匀流过水断面

2. 一水平放置的恒定变直径(沿程放大)圆管流, 当不计水头损失时, 1、2 断面形心点压强关系是 ()。

- (A) $p_1 < p_2$ (B) $p_1 = p_2$
(C) $p_1 > p_2$ (D) 不定



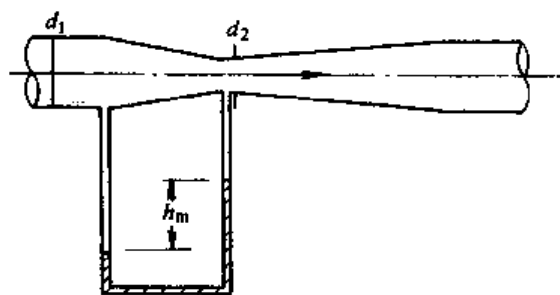
题 2 图

3. 水平放置的变直径圆管, 其一断面的水流流速为 2 m/s , 管径为 1 m , 压强为 4 m (水柱)。若不计能量损失, 管径为 0.5 m 的另一断面的压强为 ()。

- (A) 1.9 m (水柱) (B) 4.0 m (水柱) (C) 0.9 m (水柱) (D) 2.0 m (水柱)

4. 一文丘里管如图所示, 已知管道直径 $d_1 = 100 \text{ mm}$, 喉管直径 $d_2 = 50 \text{ mm}$, 文丘里流量计流量系数 $\mu = 0.94$, 水银压差计读数 $h_m = 25 \text{ cm}$, 则水流在管道通过的流量为 ()。

- (A) $0.030 \text{ m}^3/\text{s}$ (B) $0.025 \text{ m}^3/\text{s}$
(C) $0.020 \text{ m}^3/\text{s}$ (D) $0.015 \text{ m}^3/\text{s}$



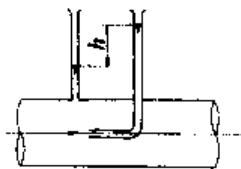
题 4 图

5. 以下仪器中, 测定流体断面点流速的是 ()。

- (A) 压差计 (B) 毕托管
(C) 文丘里管状水表 (D) 孔板流量计

6. 皮托管的测速管与测压管水面高差 $h = 0.5 \text{ m}$, 流速系数 $\varphi = 0.95$, 所测点流速为 ()。

- (A) 0.5 m/s (B) 1.0 m/s
(C) 1.52 m/s (D) 2.97 m/s



题 6 图

7. 黏性流体总流的总能头线是 ()。

- (A) 沿程下降的曲线 (B) 水平线
(C) 沿程上升的曲线 (D) 测压管水头线

8. 图示变截面圆管流动两断面①、②, 其中 $p_1 > p_2$, $v_1 > v_2$, $z_2 > z_1$, 下述说法正确的是 ()。

- (A) 因为 $p_1 > p_2$, 所以流动方向由①→②
(B) 因为 $v_1 > v_2$, 所以流动方向由①→②
(C) 因为 $z_2 > z_1$, 所以流动方向由②→①

(D) 上述三种判断均不对

9. 图示水平放置的等直径圆管内流体由 1 向 2 流动, 1、2 上压强分别表示为 p_1 、 p_2 , 则它们的关系为 ()。

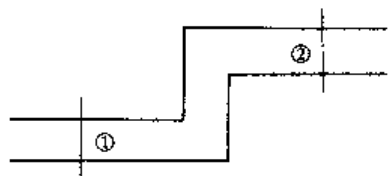
(A) $p_1 > p_2$ (B) $p_1 = p_2$ (C) $p_1 < p_2$ (D) 不确定

10. 图示一直管道, 有密度 $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ 的煤油流动, 管道直径 $d = 0.20 \text{ m}$, 两个压力表读数分别为 $p_1 = 196 \text{ kPa}$, $p_2 = 392 \text{ kPa}$, 管中流速不变, 不计水头损失, 则管段长 l 为 ()。

(A) 10 m (B) 15 m (C) 20 m (D) 25 m

11. 将一锐边平板垂直插入一水平射流中, 如图所示。已知射流速度 $v = 30 \text{ m/s}$, 总流量 $Q = 36 \text{ l/s}$, $Q_2 = 2/3 Q$, 射流偏转角 $\alpha = 30^\circ$, 平板对射流作用力 R 等于 ()。

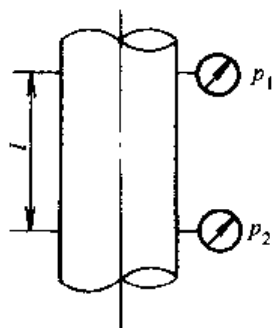
(A) 132 N (B) 145 N (C) 456 N (D) 624 N



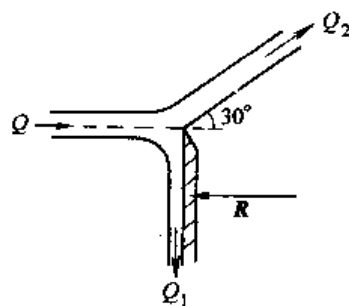
题 8 图



题 9 图



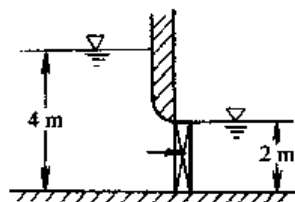
题 10 图



题 11 图

12. 图示闸孔出流, 孔宽 3 m, 流量 $42 \text{ m}^3/\text{s}$ 。水流作用在平板闸门上的水平推力约为 ()。

(A) 29.5 kN (B) 58.8 kN
(C) 147 kN (D) 235 kN



题 12 图

13. 判断以下论述, 正确的是 ()。

(A) 动量定理只适用于层流流动 (B) 动量定理只适用于紊流流动
(C) 动量定理只适用于理想流体 (D) 动量定理适用于以上所有流动

6.5 流动阻力和能量损失

实际流体都具有黏性, 流体流动会引起阻力, 阻力做功形成能量损失。流体的能量损失不仅与流体的流动路径有关, 而且与流体的流动状态有关。流体的能量损失有沿程损失和局部损失两种形式。

6.5.1 流体流动的两类流态

1. 层流和紊流

1883 年英国物理学家雷诺 (Reynolds) 通过著名的雷诺实验, 发现了流体运动有层流和紊流两种性质不同的流动状态。其内在结构有很大差别, 从而各自的速度分布和阻力规律不同。流体的流动状态简称流态。

2. 流态判别标准

临界流速。实验发现: 临界流速 v_c 与管径 d 、流体密度 ρ 和流体动力黏性系数 μ 有关。

用无因次数 Re 表示, 则

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \quad (6.5-1)$$

式中, ν 为运动黏性系数; Re 称为雷诺数。

当 $v = v_c$ 时, $Re = Re_c$ 。 Re_c 称为临界雷诺数。实验表明: 尽管不同条件下的临界流速 v_c 不同, 但对于不同管径和不同运动黏滞系数的牛顿流体, 临界雷诺数 Re_c 是相同的, 其值约为 2 300, 即

$$Re_c = \frac{v_c d}{\nu} = 2\,300 \quad (6.5-2)$$

工程上管流流态的判别式有:

$$\begin{aligned} \text{当 } Re < Re_c & \quad \text{为层流} \\ \text{当 } Re \geq Re_c & \quad \text{为紊流} \end{aligned} \quad (6.5-3)$$

雷诺数之所以能判别流态, 是因为它反映了流体内部惯性力和黏性力的相互作用关系。当黏性力起主导作用时, 扰动就受到黏性的阻滞而衰减, 流体质点有序运动, 流体呈层流流态。当惯性力起主导作用时, 黏性的稳定作用无法使扰动衰减下来, 流体质点无序随机运动, 发展为紊流流态。雷诺数所反映的正是惯性力与黏性力的比例关系。雷诺数 Re 的量纲为 $\frac{\rho L^3 v^2 L^{-1}}{\mu L^2 v L^{-1}} = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu}$ 。

例 6.5.1 水温为 $T = 15^\circ\text{C}$ 、管径为 20 mm 的管流, 平均流速为 80 cm/s。试确定管中水流流态, 并求水流流态转变时的临界流速和临界水温。

解 已知水温 $T = 15^\circ\text{C}$, 水的运动黏滞系数 $\nu = 0.0114 \text{ cm}^2/\text{s}$, 则水流雷诺数

$$Re = \frac{v d}{\nu} = \frac{8 \times 2}{0.0114} = 1\,403 < 2\,300 \quad (\text{层流})$$

依据临界雷诺数计算临界流速

$$v_c = \frac{Re_c \nu}{d} = \frac{2\,300 \times 0.0114}{2} = 13.11 \text{ (cm/s)}$$

当 v_c 增大到 13.11 cm/s 以上时, 水流流态由层流转变为紊流。

如果不改变流速 $v = 8 \text{ cm/s}$, 增加水温, 使水的运动黏滞系数 ν 减小, 水流流态同样可由层流转变为紊流。

依据临界雷诺数计算运动黏滞系数

$$\nu = \frac{v d}{Re_c} = \frac{8 \times 2}{2\,300} = 0.007 \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

相应该流动的临界水温为 $T_c = 35^\circ\text{C}$ 。当水温增大到 35°C 以上时, 水流流态由层流转变为紊流。

6.5.2 边界层的基本概念

1. 边界层

1904 年德国科学家普朗特 (Prandtl) 提出了边界层的概念, 认为在固体物面上流体质点的运动速度为零, 而离开物面的流体运动速度急剧增加, 迅速接近未受物面扰动时的流速, 在物面附近形成速度梯度大、黏滞作用不可忽略的流动区域, 此流动区域内称为边界层。区域以外的流动, 视为不受物面扰动的影响, 黏性力忽略不计, 按理想流体的势流流动处理, 区域以外的流动称为势流区。边界层外缘的流体速度为 $0.99 v_0$ 。 v_0 为势流区流速,

如图 6.5-1 所示。

在平板物面的摩擦阻力作用下, 流经平板上的流体形成平板物面附近的边界层, 边界层的厚度沿平板的长度增加。在边界层内, 从平板迎流面的端点开始, 为层流边界层; 随后当到达某一区域, 层流与紊流随机转换复杂多变, 形成过渡区边界层; 在过渡区之后, 流动发展为紊流边界层; 紊流边界层中, 在物面附近有一层极薄的黏性底层。

过渡区长度相对整个边界层而言很短, 可以将其缩为一点, 并以此点作为层流边界层转化为紊流边界层的转换点。平板的临界雷诺数

$$Re_c = \frac{v_0 x_c}{\nu} = 5 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6 \quad (6.5-4)$$

式中, v_0 为势流区来流速度; x_c 为平板前缘至流态转换点的距离; ν 为流体运动黏性系数。

2. 绕流阻力

流体绕过不同形状的固体物面, 会形成不同形状的边界层和势流区, 构成绕流阻力。绕流阻力是摩擦阻力与压差阻力 (或形状阻力) 之和。边界层内的速度梯度和流体黏性是产生摩擦阻力的原因; 边界层内的尾流区是导致压差阻力的主要原因, 流体黏性是产生压差阻力的间接原因。绕流流态、边界层的厚度、分离点位置和尾流区稳定程度取决于惯性力与黏性力之比, 即取决于绕流雷诺数大小。

1726 年牛顿 (Newton) 提出了绕流阻力公式, 认为绕流阻力与流体动能和迎流面积成正比, 即

$$F_D = C_D A \frac{\rho v_0^2}{2} \quad (6.5-5)$$

式中, A 是物体在来流方向上的投影面积; $C_D = f(Re)$ 是绕流阻力系数。例如圆柱绕流运动的阻力系数与雷诺数之间的关系可用图 6.5-2 表示。

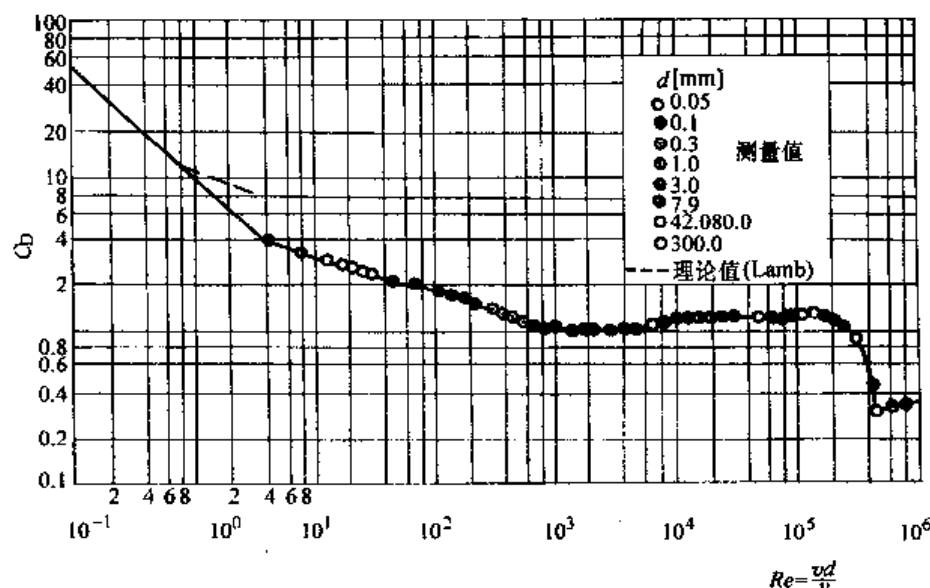


图 6.5-2 圆柱绕流阻力系数

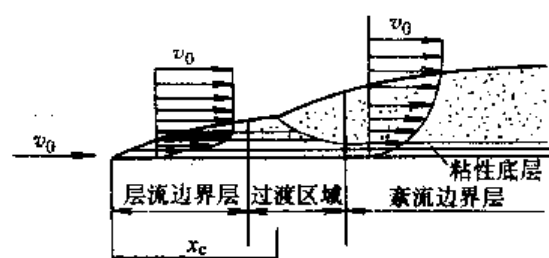


图 6.5-1 平板上的混合边界层

6.5.3 流动阻力与能量损失的关系

1. 沿程阻力和沿程损失

在边壁沿流程不变的均匀流动中, 只存在沿程均匀分布的摩擦阻力, 称为沿程阻力。克服沿程阻力引起的能量损失称为沿程损失。如长直管道中存在沿程阻力和沿程损失。沿程损失计算公式为

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (6.5-6)$$

式中, h_f 为单位重量流体的沿程损失或称沿程水头损失, 量纲为 L ; λ 为沿程损失系数; l 为管长; d 为管径; g 为重力加速度; v 为断面平均流速。式 (6.5-6) 称为达西 (Darcy) 公式或均匀流基本公式

2. 局部阻力和局部损失

在边壁形状急剧变化的流动区域, 由于尾流区、旋涡区等分离现象的出现, 使局部流动区域出现较集中的阻力, 这种阻力称为局部阻力。克服局部阻力引起的能量损失称为局部损失。如管道中的弯头、阀门、突然扩张、突然收缩等局部突然变化区域存在局部阻力和局部损失。局部损失的计算公式为

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (6.5-7)$$

式中, h_j 为单位重量流体的局部损失或称局部水头损失, 量纲为 L ; ζ 为局部损失系数。

沿程水头损失和局部水头损失之和表示为 $h_w = \sum h_f + \sum h_j$, 称为总水头损失。在图 6.5-3 的流动管道中, ab 、 bc 、 cd 管段存在沿程损失, a 处存在入口突然收缩的局部损失, b 处存在管道突然收缩的局部损失, c 处存在阀门引起的局部损失。

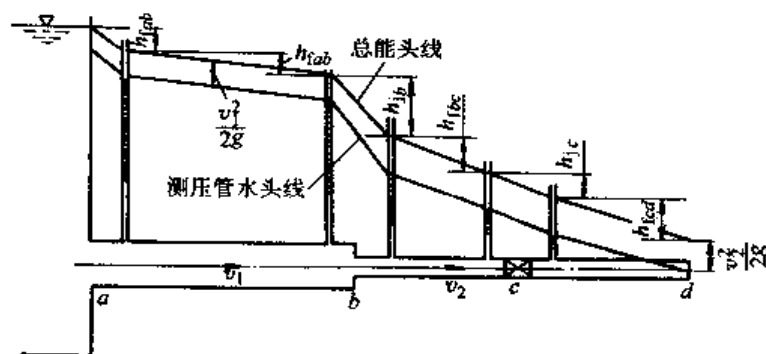


图 6.5-3 沿程水头损失和局部水头损失

3. 均匀流基本方程

长直管道或渠道中过流断面大小、形状沿程不变, 只有沿程损失, 而无局部损失。流动符合均匀流的特点。以圆管中液体流动为例, 均匀流中的沿程阻力与流速间的关系为

$$\tau_0 = \rho g R J \quad (6.5-8)$$

式中, R 为水力半径, 对于圆管 $R = \frac{d}{4} = \frac{r_0}{2} = \frac{A}{x}$, x 为湿周, 对于圆管 $x = 2\pi r_0$; J 为水力坡度, $J = \frac{h_f}{l}$ 。

式 (6.5-8) 称为均匀流基本方程。

6.5.4 流体的层流运动

1. 层流运动的流速分布

圆管层流的流速分布
$$u = \frac{\rho g J}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \quad (6.5-9)$$

表明了圆管层流的流速分布为抛物线型, 如图 6.5-4 所示。该式也可由黏性流体 N-S 方程解析求得。

当 $r=0$ 时, 轴线上流速为最大值

$$u_{\max} = \frac{\rho g J}{4\mu} r_0^2 \quad (6.5-10)$$

管壁上流速为零。

2. 层流运动的沿程损失

圆管层流的断面平均流速

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\int u dA}{A} = \frac{\int_0^{r_0} u 2\pi r dr}{A} \quad (6.5-11)$$

圆管层流的断面平均流速与最大流速关系

$$v = \frac{u_{\max}}{2} \quad (6.5-12)$$

沿程阻力系数

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.5-13)$$

表明了圆管层流的沿程损失系数 λ 与 Re 成反比, 与管壁粗糙程度无关。

沿程损失
$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (6.5-14)$$

表明了圆管层流的沿程损失与管流平均流速的一次方成正比。

例 6.5.2 一直径为 100 mm 的圆管, $\nu = 0.18 \text{ cm}^2/\text{s}$ 、 $\rho = 0.85 \text{ g/cm}^3$ 的油在管内以 $v = 6.35 \text{ cm/s}$ 的速度做层流运动。试求: (1) 管中心处的流速; (2) 距离管中心 $r = 2 \text{ cm}$ 处的流速; (3) 沿程阻力系数 λ 。

解

管中心流速为

$$u_{\max} = 2v = 2 \times 6.35 = 12.7 \text{ (cm/s)}$$

当 $r = 2 \text{ cm}$ 时, 由式 (6.5-9) 和式 (6.5-10) 有

$$u = \frac{\rho g J}{4\mu} r_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = 12.7 \left(1 - \frac{2^2}{5^2}\right) = 10.7 \text{ (m/s)}$$

因为 $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{10 \times 6.35}{0.18} = 353$, 则层流沿程阻力系数

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{353} \approx 0.181$$

例 6.5.3 水在圆管内呈层流运动, 流速 $v = 0.12 \text{ m/s}$, 在管长 $l = 20 \text{ m}$ 的管段上测得沿程水头损失 $h_f = 0.026 \text{ m}$, 水的运动黏滞系数 $\nu = 1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 求圆管直径 d 。

解

由式 (6.5-14) $h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$, 其中层流 $\lambda = \frac{64}{Re}$, $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$ 。则

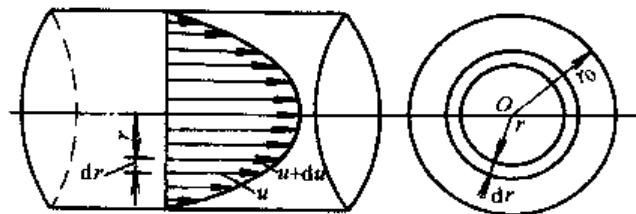


图 6.5-4 圆管中层流的流速分布

$$d = \sqrt{\frac{64 \times 1.3 \times 10^{-6} \times 20 \times 0.12}{0.026 \times 19.6}} = 0.02 \text{ (m)}$$

6.5.5 流体的紊流运动

1. 紊流运动的特征和分析方法

紊流中, 各固定空间质点的速度、压强等物理量随时间不规则变化, 称为脉动现象, 如图 6.5-5 (a) 所示。紊流瞬时流速随时间不断变化, 但从较长的时间段上看, 这种变化总是在某一平均值附近上下波动, 如图 6.5-5 (b) 所示, 说明杂乱无章的紊流运动服从数学统计规律。

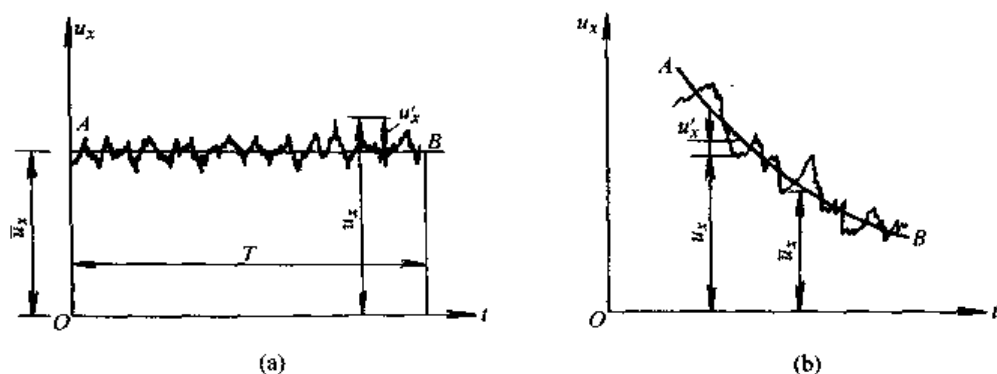


图 6.5-5 紊流运动的脉动

数学上将紊流运动的瞬时流速处理为某一时间周期 T 内的时间平均流速 \bar{u} 与瞬时脉动流速 u' 的代数和。如以 x 方向的分量为例, 即

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x \quad (6.5-15)$$

根据时均流速的定义, 显然

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_T u_x dt \quad (6.5-16)$$

$$\frac{1}{T} \int_T u'_x dt = 0 \quad (6.5-17)$$

表明了紊流运动的瞬时流速在某一时间周期 T 内的平均值为零, 由此得到分离时均流速和脉动流速的方法, 此方法被称为时均法。同理, 瞬时压强可表示为 $p = \bar{p} + p'$ 。

严格地讲, 紊流运动是非恒定流动。对于紊流运动要素时均化后, 前面所建立的概念诸如均匀流与非均匀流、恒定流与非恒定流、速度和压强等有了新的意义, 使研究对象被推广到时均量范畴。如时均恒定流是指时均流速和时均压强不随时间变化的流动, 可以按恒定流动处理, 如图 6.5-5 (a) 所示, 时均流速随时间变化的流动为非恒定流动, 如图 6.5-5 (b) 所示。

2. 紊流运动的切应力

基于时均法的研究思想, 紊流运动的瞬时切应力 τ 也可表示为时均流速引起的黏性切应力 τ_1 与脉动流速引起的惯性切应力 τ_2 之和, 即 $\tau = \tau_1 + \tau_2$ 。其中黏性切应力 τ_1 由牛顿内摩擦定律确定; 惯性切应力 τ_2 时均化后

$$\bar{\tau}_2 = -\overline{\rho u'_x u'_y} = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \cdot \frac{du}{dy} \quad (6.5-18)$$

即是以脉动流速表示的紊流惯性切应力, 又称为雷诺切应力。时均紊流切应力可完整地表达

为

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 = \tau_1 + \tau_2 = \mu \frac{du}{dy} - \overline{\rho u_x u_y} = \mu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \quad (6.5-19)$$

式中, l 为混合长度, 由实验给出。

3. 紊流运动的沿程损失系数

1) 尼古拉兹实验

为了研究沿程损失系数 λ 的变化规律, 尼古拉兹 (Nikuradse) 用多种管径 d , 将不同粒径 K 的砂粒分别粘贴在不同管径的管道内壁上,

得到了 $\frac{K}{d} = \frac{1}{30} \sim \frac{1}{1014}$ 六种不同的相对粗糙度, 如

图 6.5-6 所示。其中, K 为糙粒的凸起高度, 称为绝对粗糙度。尼古拉兹实验所采用的粗糙度称为人工 (尼古拉兹) 粗糙度。量测不同流量时的断面平均流速 v 和沿程水头损失 h_f 。

根据 $Re = \frac{vd}{\nu}$ 和 $\lambda = \frac{d}{l} \frac{2g}{v^2} h_f$ 两式, 即可算出 Re 和 λ 。把实验结果点绘在双对数坐标纸上, 得到图 6.5-7。根据 $Re - \lambda$ 的变化趋势和特征, 图中曲线可分为五个阻力区。



图 6.5-6 管壁的尼古拉兹粗糙度

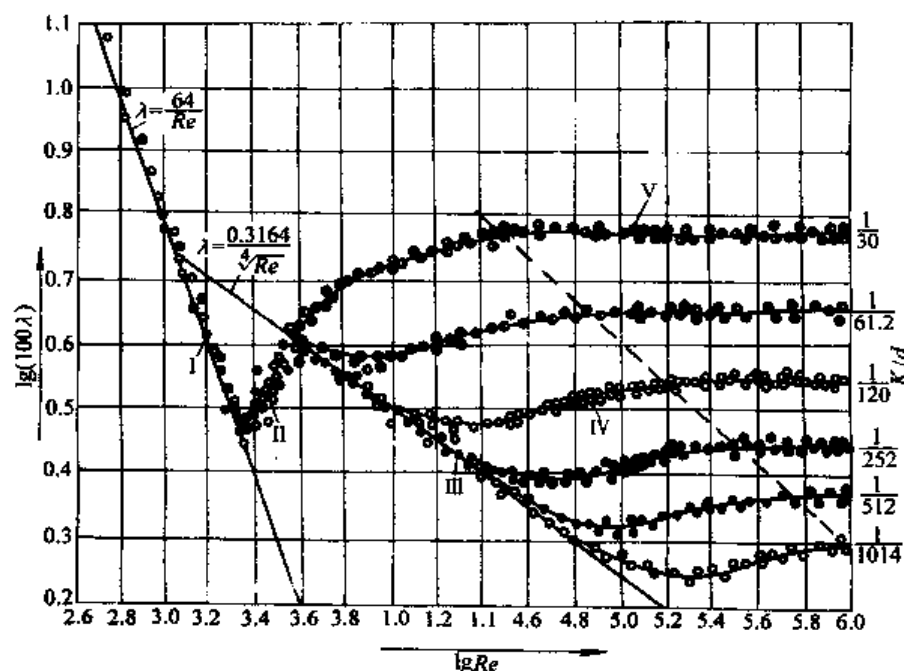


图 6.5-7 尼古拉兹实验曲线

第 I 区为层流区。当 $Re < 2300$ 时, 所有的实验点, 不论其相对粗糙度如何, 都集中在一条直线上, 且 $\lambda = \frac{64}{Re}$ 。表明 λ 仅随 Re 变化, 而与相对粗糙度 K/d 无关。

第 II 区为临界过渡区。在 $2300 < Re < 4000$ 范围内, 是由层流向紊流的转变过程。 λ 随 Re 的增大而增大, 而与相对粗糙度 K/d 无关。

在 $Re > 4000$ 以后, 流动进入紊流状态, 实验点落在 III、IV、V 的紊流区。紊流区又可分为以下三个区域。

第 III 区为紊流光滑区, 区域为斜线 III。 λ 只与 Re 有关而与相对粗糙度 K/d 无关。

第 IV 区为紊流过渡区, 为斜线 III 与虚线之间的区域。 λ 既与 Re 有关, 又与相对粗糙度

K/d 有关。

第V区为紊流粗糙区，为虚线以右区域。不同相对粗糙度的实验点，分别落在与横坐标平行的直线上。 λ 只与相对粗糙度 K/d 有关，而与 Re 无关。当 λ 与 Re 无关时，由达西公式可知，沿程损失与流速的平方成正比。因此，第V区又称为阻力平方区。

尼古拉兹实验表明，紊流中的 λ 取决于 Re 和 K/d 两个因素。沿程损失的阻力系数 λ 的变化归纳如下：

$$\text{I 层流区} \quad \lambda = f_1 (Re) \quad (6.5-20a)$$

$$\text{II 临界过渡区} \quad \lambda = f_2 (Re) \quad (6.5-20b)$$

$$\text{III 紊流光滑区} \quad \lambda = f_3 (Re) \quad (6.5-20c)$$

$$\text{IV 紊流过渡区} \quad \lambda = f_4 (Re, K/d) \quad (6.5-20d)$$

$$\text{V 紊流粗糙区即阻力平方区} \quad \lambda = f_5 (K/d) \quad (6.5-20e)$$

尼古拉兹实验比较完整地反映了沿程损失系数 λ 的变化规律，揭示了影响 λ 变化的主要因素，为补充普朗特理论和推导断面上紊流流速分布的半经验公式提供了可靠的依据。

2) 莫迪图

实际管道壁面的粗糙是凹凸不平的，不像人工粗糙那样均匀一致，因此，不能把尼古拉兹实验成果直接应用于实际管道。莫迪 (Moody) 在尼古拉兹实验的基础上，对大量金属和非金属的工业管道进行了类似的实验研究。

图 6.5-8 为根据莫迪实验所得的数据而绘制的曲线图，称为莫迪图。莫迪实验验证了尼古拉兹实验的正确性，揭示了实际管道沿程阻力系数 λ 的变化规律。

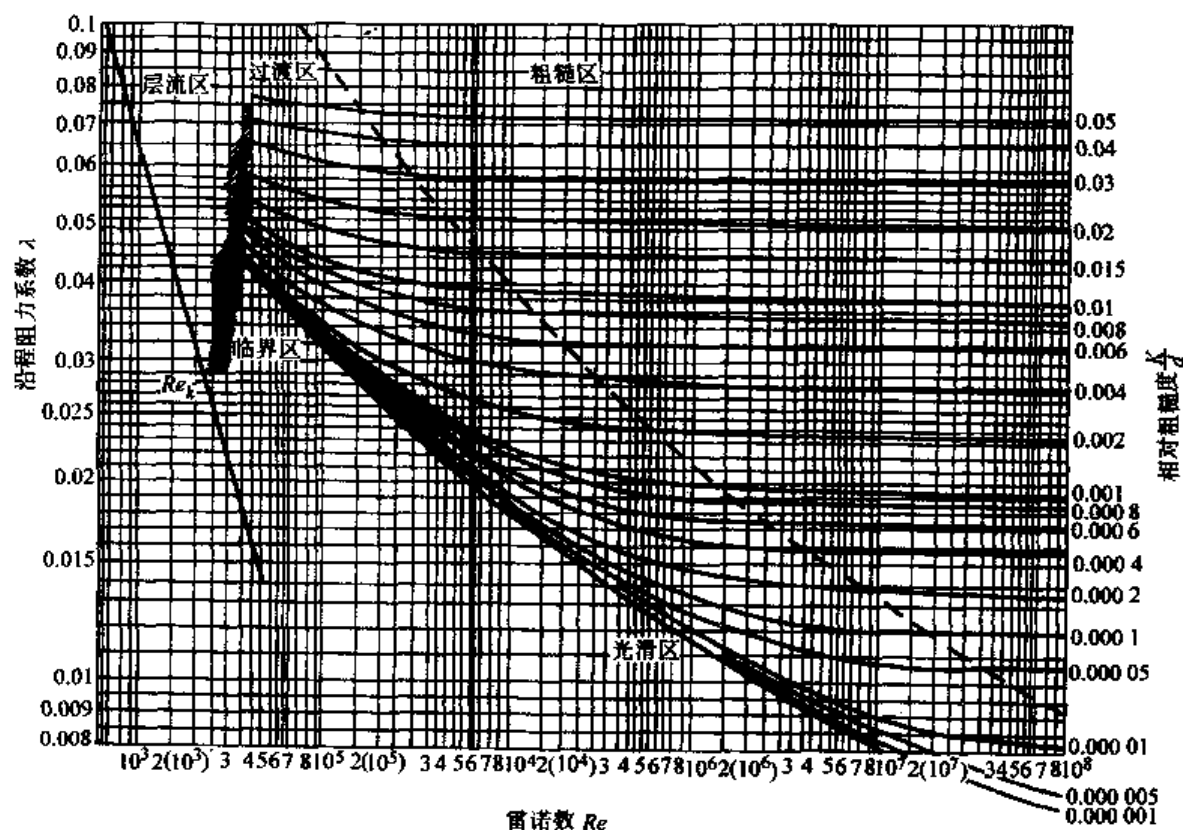


图 6.5-8 莫迪图

在工程流体力学中,把人工粗糙作为度量管壁粗糙的基本标准,提出当量粗糙高度的概念。所谓当量粗糙高度,是指和实际管道在紊流粗糙区 λ 值相等的同直径人工粗糙管的粗糙颗粒高度。当实测出某种实际管道在粗糙区时的 λ 值,与其尼古拉兹实验结果比较,找出 λ 值相等的同一管径的人工粗糙管的粗糙颗粒高度,即为实际管道的当量粗糙高度。为了叙述方便,工程中常省略“当量”两字,且仍以符号 K 表示。

4. 紊流运动的流速分布

由于质点的掺混和动量交换,紊流速度较层流速度趋于均匀化。依据实验结果,紊流流速多按指数分布或对数分布

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1/7}, \text{适用 } Re = 1.1 \times 10^5 \quad (6.5-21)$$

$$\frac{u}{v_*} = 5.75 \lg\left(\frac{yv_*}{\nu}\right) + 5.5, v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \text{ 称摩阻速度} \quad (6.5-22)$$

表 6.5.1 归纳了圆管层流和紊流的流速分布和沿程阻力系数的计算公式。

表 6.5.1 圆管主要计算公式表

流态	Re	阻力区	断面流速分布	沿程损失系数 λ
层流	< 2300		$u = \frac{\rho g J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$	$\lambda = \frac{64}{Re}$
临界	$2000 \sim 4000$			$\lambda = 0.0025 \sqrt[3]{Re}$
紊流	> 4000	光滑区 $v < 11\left(\frac{\nu}{K}\right)$	$\frac{u}{v_*} = 5.75 \lg \frac{yv_*}{\nu} + 5.5$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 0.8$ $\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}$
		过渡区 $11\left(\frac{\nu}{K}\right) \leq v < 445\left(\frac{\nu}{K}\right)$		$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{K}{3.7d} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$ $\lambda = 0.11 \left(\frac{K}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25}$
		粗糙区 $v \geq 445\left(\frac{\nu}{K}\right)$	$\frac{u}{v_*} = 5.75 \lg \frac{y}{K} + 8.48$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{3.7d}{K}$ $\lambda = 0.11 \left(\frac{K}{d} \right)^{0.25}$

例 6.5.4 在管径 $d = 300 \text{ mm}$, 相对粗糙度 $K/d = 0.002$ 的管内, 水以流速 $v = 3 \text{ m/s}$ 运动, 运动黏滞系数 $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 密度 $\rho = 999.23 \text{ kg/m}^3$ 。试求管长 $l = 300 \text{ m}$ 的管道内的沿程水头损失 h_{f0} 。

解

判别流态 $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{3 \times 0.3}{10^{-6}} = 9 \times 10^5$

流动处于紊流粗糙区。由 Re 和 K/d 查莫迪图, $\lambda = 0.0238$ 。

水头损失 $h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0.0238 \times \frac{300}{0.3} \times \frac{3^2}{2 \times 9.8} = 10.8 \text{ (m)}$

6.5.6 局部损失

1. 突放管的局部损失

突放管的局部损失系数为

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \\ \zeta_2 &= \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.5-23)$$

突放前后有两个不同的平均流速, 因而有两个相应的局部损失系数。计算时选用的局部损失系数必须与流速相对应。

当流体从管道流入断面很大的水箱中或开阔水域时, $A_1/A_2 \approx 0$, $\zeta_1 = 1$ 为突然扩大的特例, 称为管道出口淹没出流的局部损失系数。

2. 局部损失系数

局部阻力的流动障碍有多种多样, 局部损失一般通过实验数据或经验公式确定。工程上计算局部损失用流速水头的倍数表示, 即

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (6.5-24)$$

可见, 求 h_j 的问题就转变为求局部阻力系数 ζ 的问题。常用局部水头损失系数可查有关表。

例 6.5.5 两个水箱用两段不同直径的管道连接, 如图 6.5-9, 1-3 管段长 $l_1 = 10$ m, 直径 $d_1 = 200$ mm, $\lambda_1 = 0.019$; 3-6 管段长 $l_2 = 10$ m, $d_2 = 100$ mm, $\lambda_2 = 0.018$ 。管路中的局部管件: 1 为管道入口; 2 和 5 为 90° 煨弯弯头; 3 为渐缩管 ($\theta = 8^\circ$); 4 为闸阀; 6 为管道出口。若输送流量 $Q = 20$ L/s, 求两水箱水面的高差 H 。



图 6.5-9 用管道连通的水箱

解

两管段中的流速分别为

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 20 \times 10^{-3}}{3.14 \times 0.2^2} = 0.64 \text{ (m/s)}$$

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 0.64 \left(\frac{200}{100}\right)^2 = 2.56 \text{ (m/s)}$$

$$\text{速度水头} \quad \frac{v_1^2}{2g} = \frac{0.64^2}{2 \times 9.8} = 0.02 \text{ (m)}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{2.56^2}{2 \times 9.8} = 0.33 \text{ (m)}$$

由两水箱水面的能量方程

$$\begin{aligned} H &= h_{w1-6} = (h_f + \sum h_m)_{1-3} + (h_f + \sum h_m)_{3-6} \\ &= \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \zeta_1 + \zeta_2\right) \frac{v_1^2}{2g} + \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 + \zeta_6\right) \frac{v_2^2}{2g} \end{aligned}$$

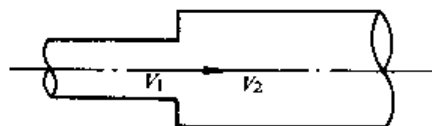
如 $\zeta_6 = 1.0$, $\zeta_1 = 0.5$, $\zeta_2 = \zeta_5 = 0.5$, $\zeta_3 = 0.024$, $\zeta_4 = 0.5$, 则

$$\begin{aligned} H &= h_{w1-6} = \left(0.019 \frac{10}{0.2} + 0.5 + 0.5\right) 0.02 + \left(0.018 \frac{10}{0.1} + 0.024 + 0.5 + 0.5 + 1.0\right) 0.33 \\ &= 0.039 + 1.262 = 1.301 \text{ (m)} \end{aligned}$$

模拟试题

1. 判别圆管流态的标准是 ()。

- (A) 平均速度 $v > 50 \text{ m/s}$ (B) 雷诺数 $Re = 5 \times 10^5$
 (C) 雷诺数 $Re = 2\,300$ (D) 相对糙度 $\Delta/d > 0.01$
2. 有压圆管中, 流量和水温不变时, 若加大管径, 则雷诺数 ()。
 (A) 减小 (B) 增大 (C) 不变 (D) 变化不定
3. 工程上判别层流和紊流, 判断根据是 ()。
 (A) 平均流速 (B) 雷诺数
 (C) 流体的运动黏滞系数 (D) 管道直径
4. 层流的沿程水头损失 ()。
 (A) 与流速的一次方成正比 (B) 与流速的一次方成反比
 (C) 与流速的平方成正比 (D) 与流速之间没有明显关系
5. 圆管层流过流断面流速分布特征为 ()。
 (A) 线性分布 (B) 对数分布 (C) 任意分布 (D) 抛物面分布
6. 对于圆管层流, 下述错误的是 ()。
 (A) 水头损失与流速无关 (B) 水头损失只与雷诺数有关
 (C) 水头损失与管壁粗糙度无关 (D) 水头损失与流速一次方成正比
7. 对于圆管紊流粗糙区有 ()。
 (A) 沿程损失 h_f 与速度 v 的一次方成正比
 (B) 沿程损失系数 λ 与雷诺数 Re 有关
 (C) 沿程损失系数 λ 只与相对糙度 K/d 有关
 (D) 沿程损失系数 λ 与雷诺数 Re 和相对糙度 K/d 有关
8. 下述正确的是 ()。
 (A) 紊流切应力取决于断面的平均流速 (B) 紊流切应力仅仅与时均速度梯度有关
 (C) 紊流切应力与流速分布有关 (D) 上述说法均不正确
9. 圆管直径 $d = 0.2 \text{ m}$, 管长 $L = 1\,000 \text{ m}$, 输送石油的流量 $Q = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$, 运动黏滞系数 $\nu = 1.6 \text{ cm}^2/\text{s}$, 则沿程损失系数 λ 等于 ()。
 (A) 0.04 (B) 0.4 (C) 0.02 (D) 不确定
10. 工业管道的沿程损失系数 λ , 在紊流过渡区随雷诺数的增加而 ()。
 (A) 增大 (B) 减小 (C) 不变 (D) 不定
11. 圆管直径 $d = 15 \text{ cm}$, 流量 $Q = 60 \text{ l/s}$, 水力坡度 $J = 0.25$, 则管道的沿程损失系数 λ 为 ()。
 (A) 0.063 8 (B) 0.067 8 (C) 0.031 9 (D) 0.045 8
12. 突然扩大管道如图所示, 细管中水的流速 $v_1 = 4 \text{ m/s}$, 粗管中水的流速 $v_2 = 1 \text{ m/s}$, 突然扩大的局部水头损失为 ()。
 (A) 0.153 m (B) 0.765 m
 (C) 0.459 m (D) 1.276 m
13. 边界层分离现象是指 ()。
 (A) 流体进入增速增压区的现象



题 12 图

- (B) 流体进入减速减压区的现象
 (C) 流体进入阻力平方区的现象
 (D) 固体边壁附近切力较大黏性影响不可忽略的薄流层离开边壁的现象
14. 减小绕流阻力的物体形状应为 ()。
 (A) 流线型 (B) 三角形 (C) 锥形 (D) 圆形
15. 边界层分离现象的后果是 ()。
 (A) 减小了液流与边壁的摩擦力 (B) 增大了液流与边壁的摩擦力
 (C) 增加了潜体运动的压差阻力 (D) 增大了液流的紊乱性
16. 关于绕流阻力, 下述错误的是 ()。
 (A) 绕流阻力可分为摩擦阻力和压差阻力
 (B) 绕流阻力可分为压差阻力和形状阻力
 (C) 摩擦阻力是物面上切应力在来流方向的总和
 (D) 形状阻力是物面上压应力在来流方向的总和
17. 沿程水头损失 h_f ()。
 (A) 与流程长度 l 成正比; 与壁面切应力 τ 和水力半径 R 成反比
 (B) 与水力半径 R 成正比; 与壁面切应力 τ 和流程长度 l 成反比
 (C) 与流程长度 l 和壁面切应力 τ 成正比; 与水力半径 R 成反比
 (D) 与壁面切应力 τ 成正比; 与流程长度 l 和水力半径 R 成反比

6.6 有压管流

有压管流的特点是: 流体充满管道过流断面, 管道内不存在自由液面, 管壁上各点的压强一般不等于大气压强。有压管流分为短管和长管。短管是指局部水头损失及流速水头在总水头损失中占有相当大的比重 (例如, 局部水头损失及流速水头之和大于沿程水头损失的 5%), 且计算时不能忽略的管道, 如水泵的吸水管、虹吸管、倒虹吸管以及送风管等。长管是指在管道的总水头损失中, 以沿程水头损失为主, 局部水头损失和流速水头所占比重很小且可忽略不计的管道, 如城市给水管网。当只考虑局部水头损失, 而忽略沿程水头损失的另一极端, 则为孔口或管嘴出流。

6.6.1 有压管流

1. 短管

1) 短管自由出流

图 6.6-1 为一短管自由出流。

管道流量

$$Q = \mu A \sqrt{2gH} \quad (6.6-1)$$

即是短管自由出流的水力计算公式, $\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}}$ 称为自由出流的流量系数。

2) 短管淹没出流

图 6.6-2 为短管淹没出流。

管道流量

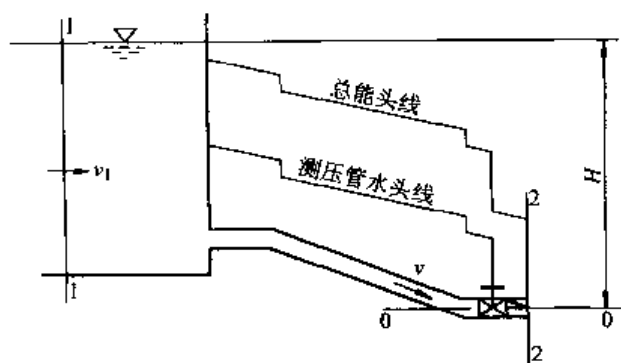


图 6.6-1 短管自由出流

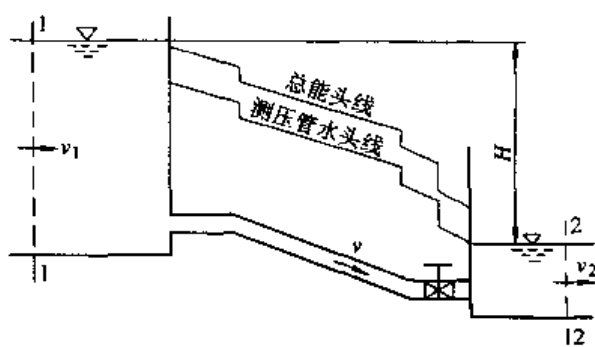


图 6.6-2 短管淹没出流

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} A \sqrt{2gH} = \mu A \sqrt{2gH} \quad (6.6-2)$$

即是短管淹没出流的水力计算公式。 $\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}}$ 称为淹没出流的流量系数。

比较短管自由出流和淹没出流的计算公式，自由出流的流量系数中多一个动能修正系数 1；淹没出流的流量系数中 $\sum \zeta$ 增加了一个出口局部水头损失系数 1。由此可见，同一短管在自由出流和淹没出流条件下，流量计算公式的形式及流量系数 μ 的数值均相同。但应注意，二者的作用水头不同。当忽略行近流速水头时，自由出流的作用水头是管道出口断面中心以上的水头；淹没出流的作用水头是上、下游液面差。

3) 短管的水力计算

(1) 虹吸管的水力计算：虹吸管是跨越高地的一种输水管道，布置形式如图 6.6-3 所示。虹吸管的工作原理为：将管内空气排除形成真空，使上游水面与管内产生压差，水流能够由上游通过虹吸管流入下游。虹吸管内的真空值，一般不大于 7~8 m 水柱高，否则管内的水将发生汽化，破坏水流的连续性。虹吸管在工程中应用较普遍，穿越高地输水，减少挖方，避免埋设管道，并便于自动操作。虹吸管的水力计算主要是确定虹吸管的流量或管径，以及虹吸管顶部的允许安装高度。虹吸管按短管计算。

例题 6.6.1 如图 6.6-3 所示虹吸管，上下游水位差 $H=2.6$ m，选用铸铁管，管径 $d=350$ mm，沿程阻力系数 $\lambda=0.0275$ ，每个弯头的局部阻力系数 $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=0.2$ ，阀门的局部阻力系数 $\zeta_4=0.15$ ，进口的局部阻力损失系数 $\zeta_5=4.0$ ，出口水头损失系数 $\zeta_6=1.0$ ，管长 AB 为 15 m，BC 为 20 m，虹吸管顶部安装高度 $h_z=4.5$ m。试求：1) 虹吸管的输水量；2) 虹吸管安装高度 h_z 是否满足要求。

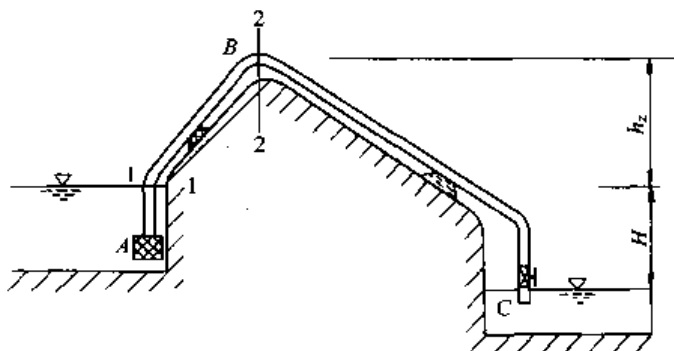


图 6.6-3 虹吸管

解 确定输水量。本题管道出口淹没在水面以下，为淹没出流。当不计行近流速时，可直接应用式 (6.6-2) 计算流量。

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{0.0275 \times \frac{15+20}{0.35} + 3 \times 0.2 + 0.15 + 4.0 + 1.0}} = 0.343$$

$$Q = \mu A \sqrt{2gH} = 0.343 \times \frac{0.35^2}{4} \times 3.14 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.6} = 0.24 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

验算虹吸管安装高度是否满足要求。取上游水面为基准面，列断面 1-1 和 2-2 的能量方程，忽略行近流速水头，则

$$0 + 0 + 0 = h_z + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

即

$$\frac{p_2}{\rho g} = - \left(h_z + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \right)$$

$$v_2 = \frac{Q}{A} = \frac{0.24}{\frac{0.35^2}{4} \times 3.14} = 2.46 \text{ (m/s)}$$

$$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = \frac{1 \times 2.46^2}{2 \times 9.8} = 0.31 \text{ (m)}$$

$$h_{w1-2} = \left(\lambda \frac{l_{AB}}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v_2^2}{2g} = \left(0.0275 \times \frac{15}{0.35} + 4.0 + 2 \times 0.2 \right) \times 0.31 = 1.73 \text{ (m)}$$

代入后，

$$\frac{p_2}{\rho g} = - \left(h_z + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \right) = - (4.5 + 0.31 + 1.73) = -6.54 \text{ (m)}$$

虹吸管最高点真空值不大于 7~8 m (水柱)，因此安装高度满足要求。

(2) 水泵吸水管的水力计算：水泵的工作原理是通过水泵转轮的转动，在泵体内形成真空，将水池中的水沿吸水管吸入，在水泵内获得新的机械能后，由压水管输出。水泵进口处的真空度是有限制的，否则水会发生汽化而形成气泡。气泡在水泵中受压破裂，引起周围高速水流向该点冲击，从而在该点形成很大的局部压强，损坏水泵，出现气蚀现象。为此，水泵生产厂家在产品样本中给出允许吸水真空高度 $[h_v]$ 。水泵吸水管的水力计算就是根据水泵的 $[h_v]$ 值确定水泵的安装高度。

例 6.6.2 如图 6.6-4 所示的离心泵，抽水流量 $Q = 25 \text{ m}^3/\text{h}$ 。吸水管长 $l = 5 \text{ m}$ ，管径 $d = 75 \text{ mm}$ ，沿程阻力系数 $\lambda = 0.0455$ ，局部阻力系数有滤网的底阀为 $\zeta_1 = 8.5$ ， 90° 弯头 $\zeta_2 = 0.3$ 。泵的允许吸入真空高度 $[h_v] = 6.0 \text{ m}$ 。试确定水泵的最大安装高度 h_s 。

解 取水池的水面为基准面，列断面 1-1 和水泵进口断面 2-2 的能量方程（采用绝对压强），忽略水池行近流速水头，池面为大气压强 p_a ，有

$$\frac{p_a}{\rho g} = h_s + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

则

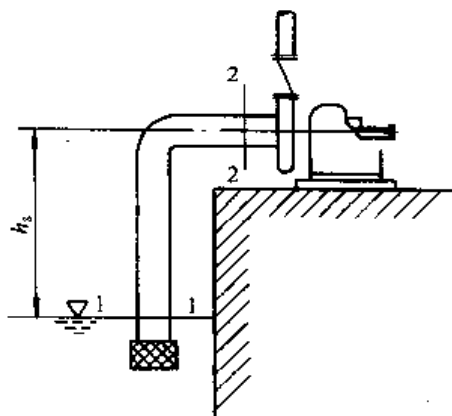


图 6.6-4 水泵吸水管

$$h_s = \frac{p_a - p_2}{\rho g} - \left(\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \right)$$

式中, $\frac{p_a - p_2}{\rho g} \leq [h_v] = 6.0 \text{ m}$, 取 $\alpha_2 = 1$, 则

$$v_2 = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{25}{3600}}{\frac{0.075^2}{4} \times 3.14} = 1.57 \text{ (m/s)}$$

$$\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = \frac{1 \times 1.57^2}{2 \times 9.8} = 0.126 \text{ (m)}$$

$$h_{w1-2} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v_2^2}{2g} = \left(0.0455 \times \frac{5}{0.075} + 8.5 + 0.3 \right) \times 0.126 = 1.49 \text{ m}$$

将上面数值代入上式, 水泵最大安装高度

$$h_s = \frac{p_a - p_2}{\rho g} - \left(\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \right) \leq 6 - (0.126 + 1.49) = 4.38 \text{ (m)}$$

(3) 倒虹吸管的水力计算: 倒虹吸管是穿越道路、河渠等障碍物的一种输水涵管。如图 6.6-5 所示, 中间部分比进出口都低。倒虹吸管的水力计算主要是确定流量和管径。

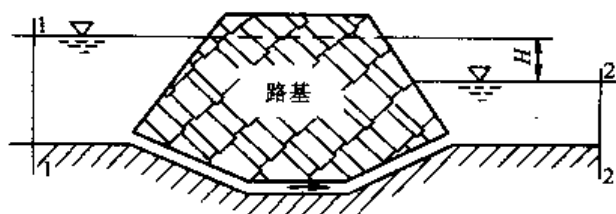


图 6.6-5 倒虹吸管

例 6.6.3 某路基下设置的钢筋混凝土倒虹吸涵管如图 6.6-5 所示。管长 $l = 50 \text{ m}$, 上下

游水位差 $H = 2.24 \text{ m}$ 。各局部阻力系数为: 进口 $\zeta_{进} = 0.5$, 两个转弯各为 $\zeta_{弯} = 0.25$, 出口 $\zeta_{出} = 1.0$, 若通过的流量为 $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$, 试确定管径。

解 以下游水面为基准面, 列上、下游过流断面 1-1、2-2 的能量方程, 忽略上、下游的行近流速水头, 则有

$$H = h_{w1-2} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g}$$

将 $H = 2.24$, $l = 50$, $\sum \zeta = \zeta_{进} + 2 \times \zeta_{弯} + \zeta_{出} = 2.0$ $v = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{3 \times 4}{\pi d^2}$, 代入上式, 得

$$3d^5 - 2.08d - 0.745 = 0$$

用试算法先设 $d = 1.0 \text{ m}$, 代入后,

$$3 \times 1 - 2.08 \times 1 - 0.745 = 0.175 \neq 0$$

再设 $d = 0.98 \text{ m}$, 代入后,

$$3 \times (0.98^5 - 2.08 \times 0.98 - 0.745) = -0.0716 \approx 0$$

故采用标准管径 $d = 1.0 \text{ m}$ 。

2. 长管

由于不计流速水头, 长管的测压管水头等于总能头, 测压管水头线与总能头线重合。

1) 简单管道

沿程管径和流量均不变的管道称为简单管道。如图 6.6-6 所示, 按长管计算, $\frac{\alpha_2 v^2}{2g}$ 和 h_i 均忽略不计, 则

$$H = h_f \quad (6.6-3)$$

表明: 长管的作用水头全部消耗于沿程阻力损失。总水头线是一条连续下降的直线, 并与测压管水头线重合。应用上式可解决与短管水力计算相同的三类问题, 即流量、作用水头和直径的求解问题。

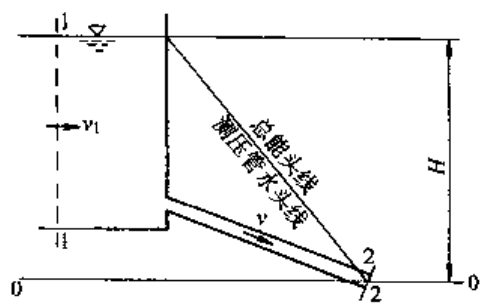


图 6.6-6 简单管道

由达西公式

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{8\lambda}{\pi^2 d^5 g} l Q^2$$

令

$$S = \frac{8\lambda}{\pi^2 d^5 g} \quad (6.6-4)$$

则

$$H = S l Q^2 \quad (6.6-5)$$

即是简单管道按比阻计算的基本公式。 S 称为管道的比阻, 物理意义是单位流量通过单位长度管道所需的作用水头, S 大小取决于沿程阻力系数 λ 和管径 d 。

式 (6.6-5) 可改写为

$$H = \frac{Q^2}{K^2} l \text{ 或 } J = \frac{Q^2}{K^2} \quad (6.6-6)$$

式中, K 称为流量模数, $K = \sqrt{\frac{1}{S}}$, 具有流量的量纲; J 为水力坡度, $J = \frac{H}{l}$ 。

2) 串联管道

串联管道是指由直径不同的管段顺序连接的管道。管径不同管段的连接点称为结点。串联管道内的流量可沿程不变, 也可沿程每隔一定距离有流量分出, 从而使沿程有不同的流量, 如图 6.6-7 所示。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= q_1 + Q_2 \\ Q_2 &= q_2 + Q_3 \end{aligned} \right\} \quad (6.6-7)$$

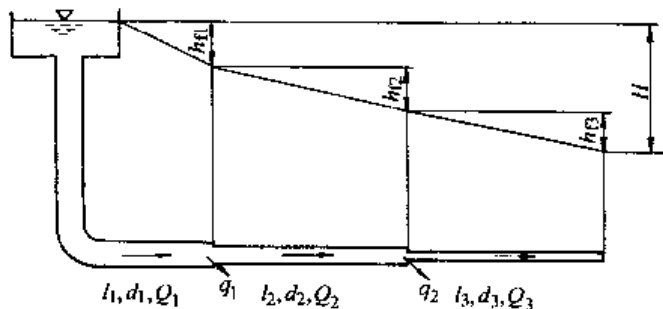


图 6.6-7 串联管道

一般通式

$$Q_i = q_i + Q_{i+1} \quad (6.6-8)$$

每一管段可以看成一简单管道, 水头损失按比阻计算

$$h_{fi} = S_i l_i Q_i^2 \quad (6.6-9)$$

串联管道的总水头损失等于各管道水头损失之和

$$H = \sum_{i=1}^n h_{fi} = \sum_{i=1}^n S_i l_i Q_i^2 \quad (6.6-10)$$

3) 并联管道

并联管道是指在两个结点间并联两个以上管段的管道, 如图 6.6-8 所示。

$$\begin{aligned}
 A \text{ 结点} \quad & Q = q_A + Q_1 + Q_2 + Q_3 \\
 B \text{ 结点} \quad & Q_1 + Q_2 + Q_3 = q_B + Q'
 \end{aligned} \tag{6.6-11}$$

水流通过并联管道系统任一条简单管道的水头损失相等, 即

$$h_{AB} = h_{f1} = h_{f2} = h_{f3} \tag{6.6-12}$$

或

$$S_1 l_1 Q_1^2 = S_2 l_2 Q_2^2 = S_3 l_3 Q_3^2 \tag{6.6-13}$$

即给出了用比阻表示的并联管段流量之间的关系。将其代入结点流量平衡关系式 (6.6-11), 便可求得并联管段分配的流量。

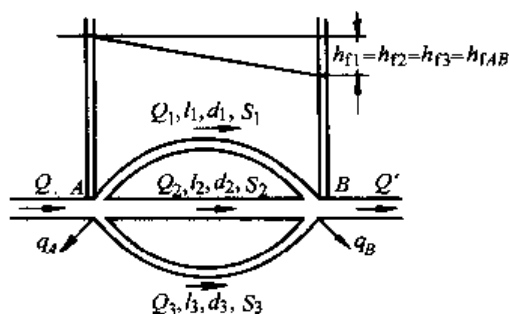


图 6.6-8 并联管道

6.6.2 孔口出流

在容器侧壁上开一小孔, 流体经孔口流出的水流现象称孔口出流。其中经孔口流入大气中的出流称为孔口自由出流, 如图 6.6-9 所示; 流入液面下的出流称为孔口淹没出流, 如图 6.6-10 所示。

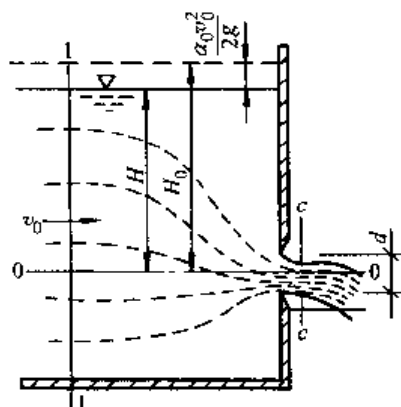


图 6.6-9 孔口自由出流

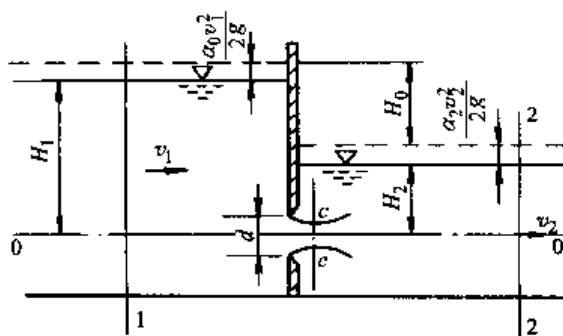


图 6.6-10 孔口淹没出流

1. 薄壁小孔口恒定自由出流

$$Q = \epsilon A v_c = \epsilon \phi A \sqrt{2gH_0} = \mu A \sqrt{2gH_0} \tag{6.6-14}$$

上式是薄壁小孔口恒定自由出流的水力计算公式。

式中, $\epsilon = \frac{A_c}{A}$, 称为孔口收缩系数; $\phi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_c}}$, 称为孔口流速系数; $\mu = \epsilon \phi$, 称为孔口流量系数。 μ 值的大小取决于 ϵ 和 ϕ , 综合反映了流体收缩和阻力损失等因素对孔口出流的影响。

2. 薄壁小孔口恒定淹没出流

$$Q = A_c v_c = \epsilon A \phi \sqrt{2gH_0} = \mu A \sqrt{2gH_0} \tag{6.6-15}$$

即为小孔口恒定淹没出流的水力计算公式, 比较式 (6.6-14) 和式 (6.6-15), 可以看出: 虽然自由出流和淹没出流水力计算基本公式的形式和系数均相同, 但要注意, 当忽略上、下游断面的行近流速水头时, 自由出流的 H_0 是指孔口形心至自由液面的深度; 淹没出流的 H_0 则是指上、下游液面的高度差。由此说明, 孔口淹没出流的流速和流量均与孔口离液面

的距离无关。

例 6.6.4 如图 6.6-11, 水箱内液面中心距孔口中心高度为 $H=2.0\text{ m}$, 孔径 $d=10\text{ mm}$, 实验测得收缩断面处的流束直径为 $d_c=8\text{ mm}$, 在 32.8 s 时间内经孔口流出的水量为 10 L , 设水箱水位恒定, 忽略行近流速水头。试确定该孔口的收缩系数 ϵ 、流量系数 μ 、流速系数 φ 和孔口局部水头损失系数 ζ_c 。

解

(1) 收缩系数 ϵ 。根据收缩系数的定义

$$\epsilon = \frac{A_c}{A} = \left(\frac{d_c}{d}\right)^2 = \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 0.64$$

(2) 流量系数 μ 。忽略行近流速水头, $H=H_0=2.0\text{ m}$, 根据式 (6.6-14)

$$\mu = \frac{Q}{A \sqrt{2gH_0}} = \frac{10 \times 10^{-3}/32.8}{\frac{\pi(0.01)^2}{4} \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.0}} = 0.62$$

(3) 流速系数

$$\varphi = \mu/\epsilon = 0.62 \times 0.64 = 0.97$$

(4) 孔口局部水头损失系数 ζ_c 。由 $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_c}}$ 可得

$$\zeta_c = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0.97^2} - 1 = 0.063$$

6.6.3 管嘴出流

在设置孔口的断面处接一直径与孔口直径相同、长度 $l=(3\sim4)d$ 的圆柱形短管, 称为圆柱形外延管嘴。水流经管嘴流出称为管嘴出流。管嘴出流的运动规律为: 水流进入管嘴后, 形成收缩断面 $c-c$, 在收缩断面附近水流与管壁分离, 形成旋涡区, 随后, 水流逐渐扩大, 在出口断面上, 重新充满整个断面, 如图 6.6-12 所示。

1. 圆柱形管嘴恒定出流

$$Q = vA = \varphi_n A \sqrt{2gH_0} = \mu_n A \sqrt{2gH_0} \quad (6.6-16)$$

即为管嘴出流的水力计算公式。

式中, φ_n 称为管嘴流速系数; μ_n 称为管嘴流量系数。因出口断面无收缩, $\epsilon=1$, 故 $\varphi_n = \mu_n = 0.82$ 。

2. 管嘴出流中收缩断面的真空度

比较小孔口恒定自由出流和管嘴恒定出流的计算公式可以看出, 两式形式相同, 但流量系数不同, $\mu=0.62\sim0.64$, $\mu_n=0.82$ 。可见在作用水头、孔口、管嘴直径都相同的情况下, 管嘴的流量是孔口的流量 1.32 倍。

在孔口处接一短管, 增加了对水流的阻力, 但流量反而增加了, 其原因是在 $c-c$ 断面处形成了负压, 对 $c-c$ 断面而言, 相当于增加了作用水头。

$$\frac{p_a - p_c}{\rho g} \approx 0.75H_0 \quad (6.6-17)$$

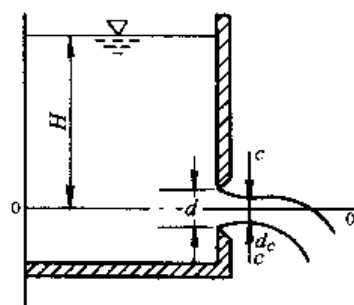


图 6.6-11 水箱孔口自由出流

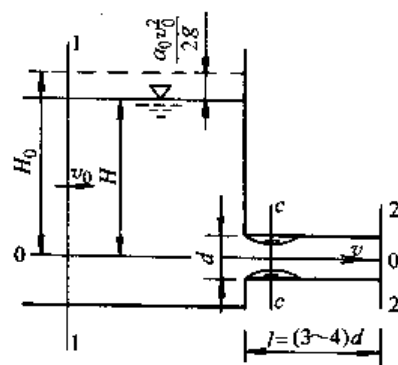


图 6.6-12 管嘴出流

上式说明管嘴收缩断面处的真空度可以达到作用水头的 0.75 倍, 相当于把管嘴的作用水头增加了 75%。

模拟试题

1. 图示一水泵装置, 允许最大真空值为 6.5 m (水柱), 吸水管直径 $d=0.1$ m, 通过流量 $Q=0.01$ m³/s, 吸水管至 $s-s$ 总水头损失为 $6(v^2/2g)$, 则水泵安装高程 H 为 ()。

- (A) 6.00 m (B) 5.92 m (C) 5.82 m (D) 6.22 m

2. 如图由大体积水箱供水, 且水位恒定, 水箱顶部压力表读值为 19 600 Pa, 水深 $H=2$ m, 水平管道长 $l=100$ m, 直径 $d=200$ mm, 沿程损失系数 $\lambda=0.02$, 忽略局部损失, 管道通过的流量为 ()。

- (A) 47.4 l/s (B) 59.3 l/s (C) 83.8 l/s (D) 196.5 l/s

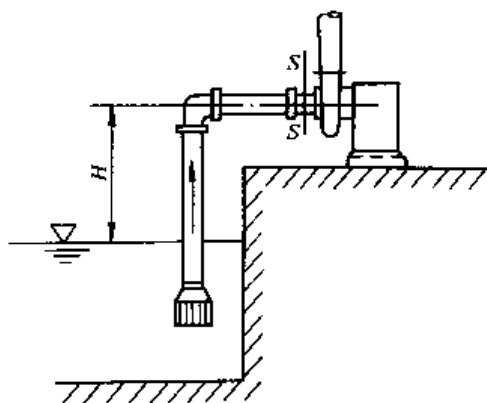


图 1

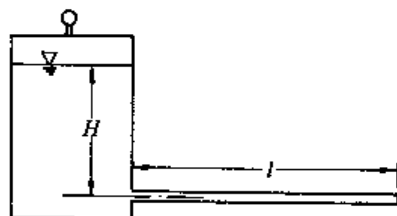


图 2

3. 在长管水力计算中, ()。

- (A) 只有速度头 $v^2/2g$ 可忽略不计
(B) 只有局部损失 h_j 可忽略不计
(C) 速度头 $v^2/2g$ 和局部损失 h_j 均可忽略不计
(D) 两断面的测压管水头差 ΔH_{p1-2} 并不等于两断面间的沿程水头损失 h_{f1-2}

4. 无分支串联长管的流动特征是 ()。

- (A) 各管段流量不相等
(B) 各管段测压管水头差不等于各管段沿程水头损失
(C) 各管段流量相等, 但测压管水头线不代表总能头线
(D) 各管段流量相等, 且总水头损失等于各管段水头损失之和

5. 并联长管的流动特征是 ()。

- (A) 各分管流量相等
(B) 各分管测压管水头差不等于各分管的总能头差
(C) 总流量等于各分管流量之和, 但各分管的水头损失不等
(D) 总流量等于各分管流量之和, 且各分管的水头损失相等

6. 并联管道的作用是 ()。

- (A) 减小水头损失 (B) 增加供水的可靠性
(C) 加大输水能力 (D) 增大管路的压差

7. 同一系统的孔口出流, 有效作用水头 H 相同, 则自由出流与淹没出流关系为 ()。

- (A) 流量系数相等, 流量相等 (B) 流量系数不等, 流量相等
(C) 流量系数相等, 流量不等 (D) 流量系数不等, 流量不等

8. 在相同水头作用和相同直径情况下, 管嘴过水能力 $Q_{\text{嘴}}$ 和孔口过水能力 $Q_{\text{孔}}$ 的关系是 ()。

- (A) $Q_{\text{嘴}} < Q_{\text{孔}}$ (B) $Q_{\text{嘴}} = Q_{\text{孔}}$ (C) $Q_{\text{嘴}} > Q_{\text{孔}}$ (D) 不定

9. 圆柱形管嘴, 直径 $d = 0.08 \text{ m}$, 作用水头 $H = 7.5 \text{ m}$, 其出口流量 Q 为 ()。

- (A) $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ (B) $0.06 \text{ m}^3/\text{s}$ (C) $0.20 \text{ m}^3/\text{s}$ (D) $0.60 \text{ m}^3/\text{s}$

10. 若作用水头和直径都相同的锐缘孔口和圆柱形外管嘴, 则出流速度 $v_{\text{孔}}$ 与 $v_{\text{嘴}}$ 的关系为 ()。

- (A) $v_{\text{孔}} > v_{\text{嘴}}$ (B) $v_{\text{孔}} = v_{\text{嘴}}$ (C) $v_{\text{孔}} < v_{\text{嘴}}$ (D) 不确定

6.7 明渠恒定均匀流

明渠是指人工修建的渠道或自然形成的河道。明渠流具有自由表面, 自由表面上各点压强均为大气压强, 相对压强为零, 故又称为无压流。天然河道、输水渠道、无压隧洞、渡槽、涵洞中的水流都属明渠水流。

当明渠流任一点的运动要素不随时间变化时, 被称做明渠恒定流; 否则, 称为明渠非恒定流。明渠恒定流中, 如果流线为一簇相互平行的直线, 水深、断面平均流速及流速分布沿程不变, 称为明渠恒定均匀流; 否则, 称为明渠恒定非均匀流。在明渠非均匀流中, 根据过水断面面积、流速沿程变化的程度, 又可分为渐变流和急变流。

6.7.1 明渠恒定均匀流的水力特征及形成条件

1. 明渠均匀流的水力特征

明渠均匀流的流线是与底坡平行的一簇平行直线, 故有以下水力特征。

- (1) 过流断面面积、水深沿程不变。
- (2) 过流断面平均流速、过流断面上流速分布沿程不变。
- (3) 底坡线、总水头线、水面线三线平行, 即相应坡度相等, $i = J = J_p$, 如图 6.7-1 所示。
- (4) 水体的重力沿水流方向的分力等于阻碍水流运动的摩阻力。

2. 明渠均匀流的形成条件

根据以上明渠均匀流的水力特征, 不难得出其形成条件。

- (1) 明渠中水流必须是恒定流。若是非恒定流, 必然形成非均匀流。水面波动时, 流线不可能为平行直线。
- (2) 渠道必须是长直棱柱形渠道, 粗糙系数 n 沿程不变, 且无闸、坝、桥、涵等建筑物。
- (3) 明渠中的流量沿程不变, 即无支流汇入或流出。
- (4) 渠道必须是顺坡, 即底坡度 $i > 0$, 否则, 水体重力沿水流方向的分力不等于摩阻力。

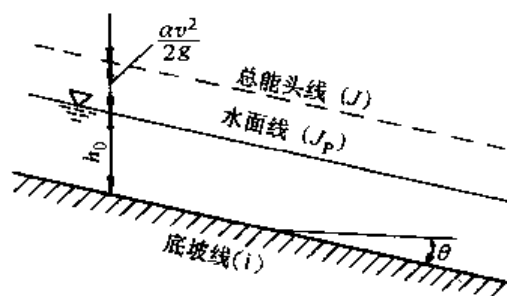


图 6.7-1 均匀流水流特征图

6.7.2 明渠恒定均匀流的基本公式

明渠水流一般都属于紊流粗糙区。其水力计算基本公式有

$$Q = Av \quad (6.7-1)$$

$$v = C \sqrt{RJ} \quad (6.7-2)$$

式 (6.7-1) 是连续性方程, 流量为常数; 式 (6.7-2) 为明渠均匀流的动力方程, 亦称谢齐 (Chézy) 公式。式中: C 为谢齐系数; R 为水力半径, $R = \frac{A}{\chi}$, χ 为湿周; J 为水力坡度。

在明渠恒定均匀流中, 水力坡度 J 与底坡度 i 相等, 式 (6.7-2) 可改写为

$$v = C \sqrt{Ri} \quad (6.7-3)$$

根据连续性方程和谢齐公式有

$$Q = AC \sqrt{Ri} \quad (6.7-4)$$

或

$$Q = K \sqrt{i} \quad (6.7-5)$$

式中, K 为明渠水流的流量模数, $K = AC \sqrt{R}$, 单位 m^3/s 与流量相同, 综合反映明渠的断面形状、尺寸和糙率对过流能力的影响。对于明渠恒定均匀流, 渠中水深定义为正常水深, 用 h_0 表示, 通常涉及某一渠道的输水能力时, 是指在一定正常水深条件下所通过的流量。相应的过流断面面积为 A_0 , 水力半径为 R_0 , 谢齐系数为 C_0 , 流量模数为 K_0 , 以便与明渠非均匀流中的水力要素相区别。谢齐系数 C 与明渠的断面形状、尺寸、护面的粗糙系数 n 有关, 即

$$C = f(R, n)$$

通常采用曼宁 (Manning) 公式

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \quad (6.7-6)$$

或巴甫洛夫斯基 (Павловский) 公式

$$C = \frac{1}{n} R^y \quad (6.7-7)$$

6.7.3 明渠恒定均匀流的水力最优断面和允许流速

1. 水力最优断面

由明渠恒定均匀流公式可知, 明渠的输水能力取决于明渠断面的形状、尺寸、底坡和粗糙系数的大小。在设计渠道时, 底坡度 i 依据地形条件, 粗糙系数 n 依据渠道的土质、护面材料及维护情况。在 i 、 n 和 A 一定的前提下, 使渠道输水能力最大的那种断面形状称为水力最优断面。

对于明渠, 半圆形断面是水力最优的。但是, 半圆形断面不易施工。

根据水力最优断面的定义, 若过水断面 A 面积一定, 则湿周 χ 为最小。

梯形断面水最大宽深为 $\beta_h = (b/h)_h = 2 (\sqrt{1+m^2} - m)$

矩形断面是梯形断面的特例, 即边坡系数 $m=0$ 。其水力最优的宽深比为 $\beta_h = (b/h)_h = 2$, 说明矩形渠道水力最优断面的底宽应是水深的 2 倍。土渠的边坡系数 m 一般大于 1, β_h 都小于 1, 即梯形渠道的水力最优断面是窄深型的。这样的断面渠道工程量虽小, 但不便

于施工和维护。所以水力最优不一定是工程上最优的。

2. 允许流速

对于设计合理的渠道, 除应考虑过流能力和工程造价等因素外, 还应保证渠道不被冲刷或淤积。因此设计流速不应大于允许流速 v' , 否则渠道将被冲刷。 v' 指渠道免遭冲刷的最大允许流速, 简称不冲流速。相反渠道中的流速也不要过小, 否则悬浮的固体颗粒下沉造成不淤流速的大小还与水流条件与挟沙特性等因素有关。设计时可查有关手册。

模拟试题

1. 如图矩形排水沟, 底宽 2 m, 水深 3 m, 水力半径为 ()。

(A) 0.6 m (B) 0.75 m (C) 1.0 m (D) 1.25 m

2. 若总能头线坡度为 J , 测压管水头线坡度为 J_p , 底坡为 i , 则明渠均匀流的水力特征是 ()。

(A) $J < J_p < i$ (B) $J = J_p = i$
(C) $J > J_p > i$ (D) $J \neq J_p \neq i$

3. 所谓明渠均匀流是指 ()。

(A) 沿程糙度、流量不变的平坡 ($i=0$) 棱柱体渠道
(B) 沿程糙度、流量不变的顺坡 ($i>0$) 棱柱体渠道
(C) 沿程糙度不变的顺坡棱柱体非恒定流
(D) 沿程糙度可变的顺坡棱柱体恒定流

4. 下述哪条不是明渠均匀流的特性? ()。

(A) 沿程不同过水断面上深度相同 (B) 同一过水断面上速度分布均匀
(C) 水力坡度、水面坡度和底坡均等 (D) 沿程不同过水断面速度分布相同

5. 明渠在坡度、粗糙度和过水断面面积给定条件下, 其水力最佳断面的含义为 ()。

(A) 允许流速最小的断面 (B) 挖土方量最小的断面
(C) 湿周最小的断面 (D) 水力半径最小的断面

6. 在渠道糙率、底坡和过水断面面积不变条件下, 水力最佳断面不正确概念为 ()。

(A) 通过流量最大 (B) 过水断面湿周最小
(C) 过水断面水力半径最小 (D) 过水断面水力半径最大

7. 矩形水力最优断面的底宽是水深的 ()。

(A) $\frac{1}{2}$ 倍 (B) 1 倍 (C) $\frac{3}{2}$ 倍 (D) 2 倍

8. 校核明渠允许流速的目的是 ()。

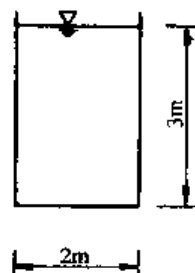
(A) 使过流量最大 (B) 达到水力最佳断面
(C) 保证明渠水流恒定 (D) 保障渠道免遭冲刷和淤积

9. 一矩形水力最优断面渠道, 底宽 $b=4$ m, 粗糙系数 $n=0.025$, 底坡度 $i=0.0002$, 则输水流量为 ()。

(A) $1.5 \text{ m}^3/\text{s}$ (B) $2.5 \text{ m}^3/\text{s}$ (C) $3.5 \text{ m}^3/\text{s}$ (D) $4.5 \text{ m}^3/\text{s}$

10. 一梯形断面明渠, 水力半径 $R=0.8$ m, 底坡 $i=0.0006$, 粗糙系数 $n=0.025$, 则输水流量为 ()。

(A) 0.84 m/s (B) 0.96 m/s (C) 1.20 m/s (D) 1.50 m/s



题图 1

6.8 堰流

堰是为了控制河渠的流量和水位,水流在其顶部自由渲泄的泄水和引水建筑物。在实验室中被广泛用做测流工具。桥孔溢流和闸槛出流当属此类。

6.8.1 堰流水流特征和类型

1. 堰流的水流特征

无压缓流流经障壁时,上游水位壅高,而后水面跌落的局部水流现象统称为堰流,如图 6.8-1 所示。

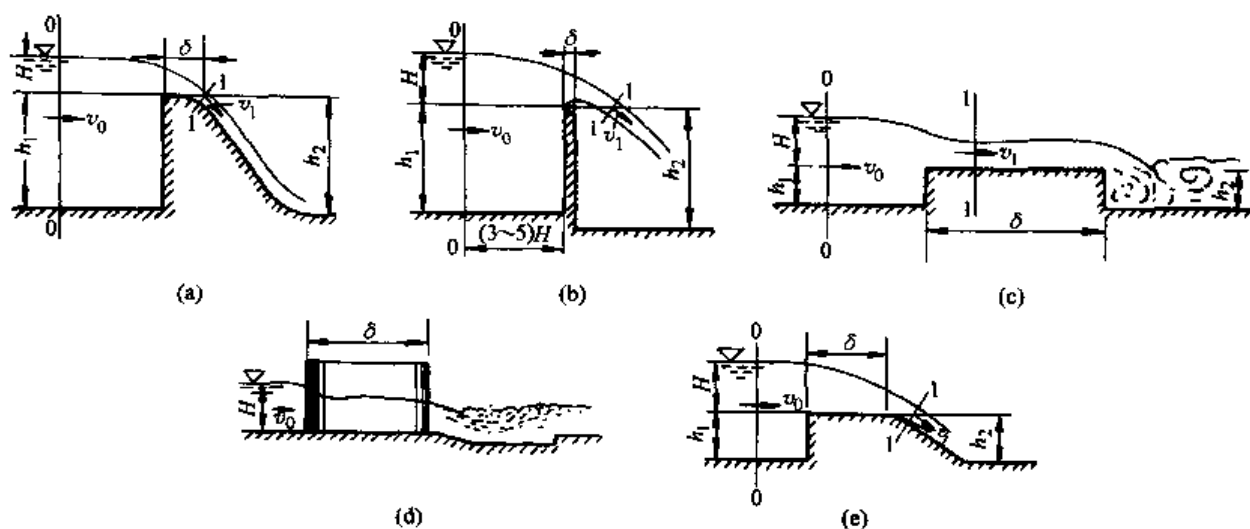


图 6.8-1 堰流示意图

2. 堰流的类型

按堰的厚度 δ 与堰上水头 H 的关系,将堰分为三种类型。

1) 薄壁堰

薄壁堰 $\delta/H < 0.67$ 。如图 6.8-1 (b) 所示,水流经过堰顶时,水舌下缘仅与堰顶的周边相接触,堰厚度对堰流的性质无影响。薄壁堰的堰口可以是三角形、矩形或梯形。薄壁堰水流平稳,常用做量测流量的装置。其中三角形堰口精度较高。

2) 实用断面堰

实用断面堰 $0.67 < \delta/H < 2.5$ 。为使堰结构稳定,常把堰壁加厚,水流经过堰顶时,水舌下缘与堰顶面接触,水流受堰顶约束。实用断面堰在工程上常用的有曲线形堰,如图 6.8-1 (a) 和折线形堰,如图 6.8-1 (e)。

3) 宽顶堰

宽顶堰 $2.5 < \delta/H < 10$ 。足够宽的堰壁厚度对水流顶托作用明显并产生一段流线近似平行的渐变流动。宽顶堰分为有坎宽顶堰如图 6.8-1 (c) 和无坎宽顶堰。图 6.8-1 (d) 为桥孔溢流示意图,水流受桥墩阻碍,上游水位壅高,下游水面跌落,属无坎宽顶堰。

此外,若 $b = B$,称为无侧收缩堰;若 $b < B$,为侧收缩堰。其中 b 为堰宽, B 为渠宽。

6.8.2 堰流的基本公式

堰的种类虽多,但水流特征相似,都能引起壅水和溢流,故统一为一个堰流流量基本公式。以薄壁堰为例,如图 6.8-2 所示。

$$Q = mb \sqrt{2gH_0^{3/2}} \quad (6.8-1)$$

式(6.8-1)为堰流流量基本公式。流量 Q 与堰顶的形式、流量系数 m 和含行近流速水头的堰上水头 H_0 有关,其中 m 与 φ 、 K 、 ζ 有关,即 $m = f(\varphi, K, \zeta)$ 。因而堰的类型不同,流量系数 m 也各不相同。如果有侧收缩,则公式中含侧收缩系数 ε ;若下游水深超过堰顶,并且下游水深对水舌有顶托作用而形成淹没出流,则公式中含淹没系数 σ ,式(6.8-1)可变为

$$Q = \varepsilon m \sigma b \sqrt{2gH_0^{3/2}} \quad (6.8-2)$$

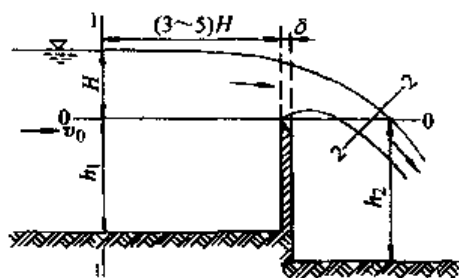


图 6.8-2 薄壁堰

模拟试题

- 使用薄壁堰可以量测 ()。
 - 压力
 - 速度
 - 流量
 - 表面张力
- 薄壁堰中量测精度最好的堰口形状是 ()。
 - 矩形
 - 圆形
 - 梯形
 - 三角形
- 桥孔溢流水力计算是基于下述哪一种堰流? ()。
 - 薄壁堰
 - 真空堰
 - 宽顶堰
 - 实用堰

6.9 渗流

液体在孔隙介质中的流动,称为渗流。所谓孔隙介质,是指由固体颗粒构成具有无数孔隙的物质。土壤、砂石、有裂隙的岩石,内部有无数孔隙,在工程中均称为孔隙介质。地下水运动是渗流的实例。

6.9.1 渗流的基本定律

1. 渗流模型

组成土壤的颗粒大小不等,形状各异,故组成的孔隙通道形状、大小和分布极不规则。在重力作用下,地下水流动的总方向是一致的。认为渗流是流体在充满包括土粒骨架在内的空间做整体连续流动。这种虚拟的渗流,被称为渗流模型。

显然,渗流模型中的流速与实际渗流中的流速是不相等的。在渗流场中取一与主流正交的微面积 ΔA ,其中包括足够多的土壤颗粒和孔隙,而实际的孔隙面积为 $m\Delta A$, m 为小于1的比例系数,通过流量为 ΔQ 。其足够多的统计平均流速 u' 用做表征渗流在实际孔隙中的流速,即

$$u' = \frac{\Delta Q}{m\Delta A} \quad (6.9-1)$$

按渗流模型的概念,把渗流视为流体在包括骨架在内的整个空间的连续流动,则

$$u = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad (6.9-2)$$

式中, u 为渗流流速。它与实际孔隙中的平均流速 u' 的关系是

$$u = mu' \quad (6.9-3)$$

因为 $m < 1.0$,所以 $u \ll u'$ 。

用渗流模型代替实际渗流,把渗流视为连续介质流动,因此,有关流体的概念,诸如流

线、元流、总流、恒定流、均匀流等仍可适用。

2. 渗流达西定律

1) 渗流达西定律

1852—1855 年法国工程师达西 (H. Darcy) 在砂质土壤研究中做了大量实验, 得出了渗流线性定律, 称为**渗流达西定律**。所用实验装置如图 6.9-1 所示。

渗流流量

$$Q = kA \frac{\Delta H}{l} = kAJ \quad (6.9-4)$$

渗流平均流速

$$v = kJ \quad (6.9-5)$$

式中, v 为渗流流速; k 为反映介质的孔隙率及孔隙分布等透水性质的综合系数, 称为渗透系数; J 为水力坡度。

对于非均匀渗流水力坡度写成微分形式, 则更加严谨,

$$J = -\frac{dH}{dl} \quad (6.9-6)$$

达西实验的渗流区为均质砂土, 属均匀渗流, 可把式 (6.9-5) 推广到任一点流速, 如图 6.9-2 所示。透水层处于有压状态, ab 表示任一元流, 在 M 点处的水力坡度为 $J = -\frac{dH}{dl}$, 则渗流点流速 u

$$u = kJ \quad (6.9-7)$$

式 (6.9-5) 和式 (6.9-7) 均为渗流达西定律表达式。公式表明: 均匀介质的渗流流速与水力坡度 J 的一次方成正比, 故达西定律也称为**线性渗流定律**。

2) 达西定律的适用范围

渗流雷诺数为

$$Re = \frac{vd}{\nu} \quad (6.9-8)$$

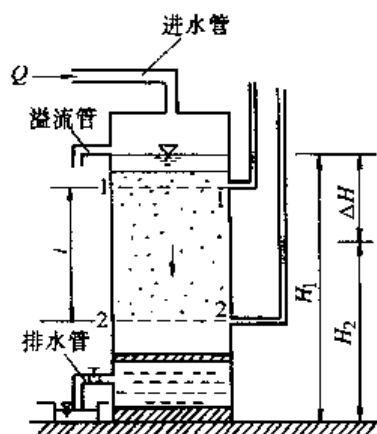


图 6.9-1 渗流实验装置图

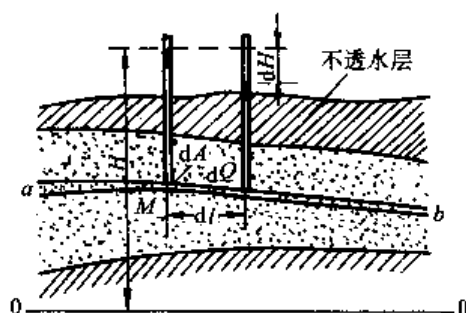


图 6.9-2 渗流元流示意图

式中, v 为渗流流速, 单位 cm/s ; d 为土壤的有效粒径, 取 d_{10} , 即筛分时占 10% 重量颗粒通过的筛孔孔径, 单位 cm ; ν 为运动黏滞系数, 单位 cm^2/s 。

实验表明: 当 $Re \leq 1 \sim 10$ 时, 达西线性定律是适用的。巴甫洛夫斯基建议达西定律的

适用范围是 $Re < 7 \sim 9$ 的地下水运动。临界雷诺数 $Re_c = 7 \sim 9$, $Re < 7 \sim 9$ 为层流。

在土木工程和水利工程中,多数渗流为层流,符合达西定律。

3) 渗透系数

在渗流计算时,要确定土壤的渗透系数 k 。 k 值的大小取决于土壤的性质,即孔隙率及土壤矿物成分等。同时,还与流体的种类及温度相关。土壤的渗透系数 k 。综合反映了岩土对流体渗透性的影响, k 的单位为 cm/s 。计算时,可查有关手册。

6.9.2 恒定均匀渗流和非均匀渐变渗流

采用渗流模型后,可借助明渠和管路中所建立的概念,把渗流分为均匀渗流和非均匀渗流。研究范围为符合达西定律的渐变渗流。工程上由于渗流空间很大,可视为平面问题。

1. 恒定均匀渗流和达西定律

对于均匀流,过流断面的压强符合静水压强分布规律。在均匀渗流中,任一断面的测压管坡度(水力坡度)都为恒定常数,不难理解断面平均流速与点流速相等。根据达西定律, $u = kJ$, 则 $u = v = kJ$ 。

2. 恒定非均匀渐变渗流和裘皮幼公式

对于非均匀渐变渗流,如图 6.9-3,取断面 1-1 和 2-2,其压强也符合静水压强分布规律。

对于匀质岩土, $u = v$, 所以

$$u = v = -k \frac{dH}{dl} = kJ \quad (6.9-9)$$

即为恒定渐变渗流一般公式,又称为裘皮幼公式。形式上与达西定律相同,但含义不同。式 (6.9-9) 表明,渗流过水断面上流速也是矩形分布。同一断面 J 为常数, u 均匀分布,但不同断面为不同常数, u 和 v 沿程而变。

6.9.3 集水廊道渗流

集水廊道一般建在无压含水层中。在给水工程中,集水廊道用于吸取地下水和基槽排水。在水利工程中,集水廊道用于排除坝身渗水和基坑排水。

集水廊道横断面为矩形,抽水时,地下水从两侧补入,一般为非恒定渗流。若集水廊道较长,含水层水体较大且土壤含水丰富,在抽水一段时间后,水深及浸润线的位置保持不变,则视为恒定渐变渗流,如图 6.9-4 所示。

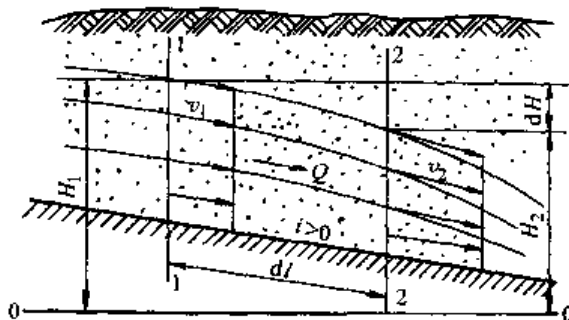


图 6.9-3 渐变渗流流速分布图

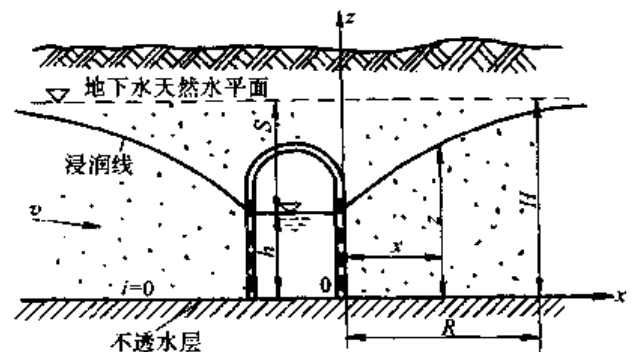


图 6.9-4 集水廊道渗流

$$q = \frac{1}{2} k (H + h) \bar{J} \quad (6.9-10)$$

式 (6.9-10) 用以估算抽水量, 式中 q 为单位长度上一侧单宽流量; \bar{j} 为渗流平均水力坡度, 其值与土壤种类有关, 如砂土为 0.005~0.015, 黏土为 0.15。

6.9.4 井的渗流

1. 井的种类

井在工程中应用普遍, 以汲取地下水水量或降低地下水水位。井可分潜水井和自流井两类。

1) 潜水井 (无压井)

具有自由水面的地下水称为无压地下水, 也称潜水。在潜水含水层中建井称为潜水井, 或称无压井。潜水井又分为完全井和不完全井。

(1) 完全井。井深直达不透水层称为普通完全井, 如图 6.9-5 所示。

(2) 不完全井。井深达不到不透水层称为普通不完全井。

2) 自流井 (承压井)

由地质构造可知, 不透水层是分层的。在两不透水层之间的含水层受到的压强大于大气压强, 此含水层称为自流层或承压层。汲取自流层地下水的井称为自流井, 或称承压井, 如图 6.9-6 所示。

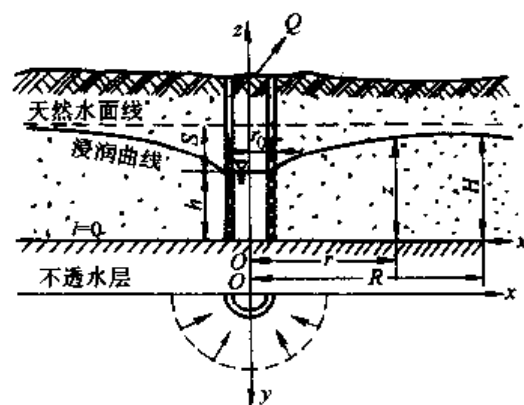


图 6.9-5 潜水完全井渗流

如图 6.9-5 所示, 完全井的井深达不透水层, 透水层底坡 $i=0$, 含水层厚度为 H , 井半径为 r_0 。抽水时, 井内和附近的地下水位下降, 形成浸润漏斗面。若含水层体积很大, 土壤含水丰富, 可无限供水。当连续抽一定水量时, 浸润漏斗面位置固定不变, 井中水深 h 不变, 此时为恒定渗流。

抽水量为

$$Q = \pi \frac{k(H^2 - h^2)}{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)} = 2.732 \frac{kHS}{\lg\left(\frac{R}{r_0}\right)} \quad (6.9-11)$$

影响半径 R , 用经验公式

$$R = 3000S\sqrt{k} \quad (6.9-12)$$

式中, 水位降深 S 以 m 计; k 以 m/s 计; R 以 m 计。细砂取 $R=100\sim200$ m, 中砂取 $R=250\sim500$ m, 粗砂取 $R=700\sim1000$ m。

工程中, 常建井底未达不透水层基底的井, 称为不完全井。与完全井不同的是, 其井底也有渗流流量。一般用经验公式确定其抽水量

$$Q = 1.366 \frac{k(H^2 - T^2)}{\lg(R/r_0)} \cdot \sqrt{\frac{h + 0.5r_0}{T}} \cdot \sqrt{\frac{2T - h}{T}} \quad (6.9-13)$$

式中, T 为井中水面到不透水层基底的距离; 其他符号同前。

3. 自流承压井渗流

图 6.9-6 为一有压单井 (自流井) 的渗流纵剖面, 具有水平不透水层基底和上顶, 渗

流层均匀厚度为 t ，井半径为 r_0 ，坐标原点选在基底的中心处。当抽水并达到恒定流状态时，井内水深为 h ，浸润线呈漏斗形曲面，这种流动是典型的点汇问题。地下水向井渗流的过水断面为一系列高度为 t 的圆筒面。

抽水量

$$Q = 2\pi \frac{kt(H-h)}{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)} = 2.73 \frac{ktS}{\lg\left(\frac{R}{r_0}\right)} \quad (6.9-14)$$

影响半径 R ，细砂取 $R = 100 \sim 200$ m，中砂取 $R = 250 \sim 500$ m，粗砂取 $R = 700 \sim 1\,000$ m。

自流不完全井也有经验公式确定其抽水量，不再列出。

例 6.9.1 有一普通潜水完全井，井半径 $r_0 = 0.2$ m，含水层厚度 $H = 15$ m，土壤渗透系数 $k = 0.000\,25$ m/s，抽不稳定后，井水深 $h = 10$ m，影响半径 $R = 250$ m，求井的抽水量。

解 由式 (6.9-11)，注意对数换算 $\ln b = 2.3 \lg b$ ，抽水量为

$$Q = 1.366 \frac{k(H^2 - h^2)}{\lg\left(\frac{R}{r_0}\right)} = 1.366 \frac{0.000\,25(15^2 - 10^2)}{\lg\left(\frac{250}{0.2}\right)} = 0.013\,8 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

例 6.9.2 有一渗流层厚度 $t = 8$ m、井直径 $d = 0.4$ m 的自流承压井，当抽水时，水位降深为 $S = 10$ m，渗流层为粗砂，渗透系数 $k = 0.05$ cm/s $= 5 \times 10^{-4}$ m/s，如图 6.9-5 所示。求抽水量。

解

影响半径

$$R = 3\,000 S \sqrt{k} = 3\,000 \times 10 \times \sqrt{5 \times 10^{-4}} = 670.8 \text{ (m)}$$

抽水量

$$Q = 2.73 \frac{ktS}{\lg\left(\frac{R}{r_0}\right)} = 2.73 \frac{5 \times 10^{-4} \times 8 \times 10}{\lg\left(\frac{670.8}{0.2}\right)} = 0.031 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

模拟试题

- 渗流达西定律 $v = kJ$ 适用于 ()。
 - 地下水渗流；
 - 沙质土壤渗流；
 - 均质土壤层流渗流；
 - 地下水层流渗流。
- 渗流达西定律 $v = kJ$ 是基于以下假定中的 ()。
 - 测压管水头线坡度与总能头线坡度平行
 - 测压管水头线坡度等于总能头线坡度
 - 测压管水头线坡度不等于总能头线坡度
 - 渗流的沿程水头损失与渗流流速的二次方成正比
- 地下水中的浸润线是 ()。
 - 地下水的流线
 - 地下水运动的迹线

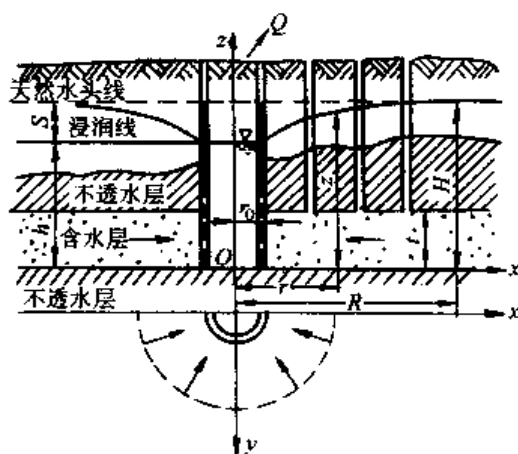


图 6.9-6 自流承压井渗流

(C) 无压地下水的自由水面线

(D) 土壤中干土与湿土的界线

4. 潜水井是指 ()。

(A) 从无自由水面的两不透水层间取水的井

(B) 从有自由水面的无压含水层中所开凿的井

(C) 井底直达不透水层的井

(D) 井底未达不透水层的井

5. 潜水完全井抽水量的大小与有关物理量的关系是 ()。

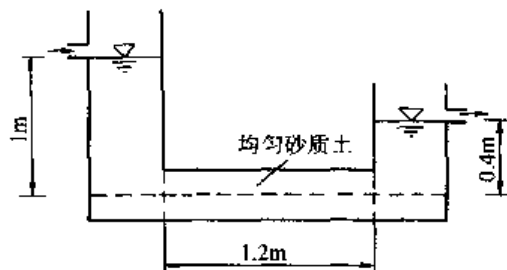
(A) 与井的半径成正比

(B) 与井的影响半径成正比

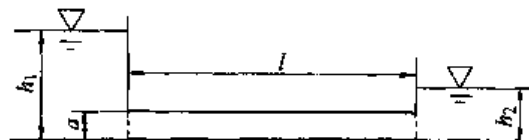
(C) 与含水层厚度成正比

(D) 与土体渗透系数成正比

6. 如图所示, 均匀砂质土壤装在容器中, 设已测得渗透系数 $k = 6 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$, 渗流流量 $Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{d}$, 则渗流流速 v 等于 ()。



题图 6



题图 7

(A) $6 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$

(B) $3 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$

(C) $9 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$

(D) $1.2 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$

7. 如图水池水深 $h_1 = 80 \text{ cm}$, $h_2 = 40 \text{ cm}$, 正方形连通管边长 $a = 20 \text{ cm}$, 长 $l = 200 \text{ cm}$, 管内充填粗砂, 粗砂的渗透系数 $k = 0.05 \text{ cm/s}$, 则渗流量为 ()。

(A) $4 \text{ cm}^3/\text{s}$

(B) $8 \text{ cm}^3/\text{s}$

(C) $12 \text{ cm}^3/\text{s}$

(D) $16 \text{ cm}^3/\text{s}$

8. 为测定土壤渗透系数, 将土样装在直径 $D = 40 \text{ cm}$ 的圆筒中, 在 100 cm 的水头差作用下, 6 小时的渗透水量为 90 L , 两侧压管距离为 50 cm , 该土壤的渗透系数 k 为 ()。

(A) 0.4 m/d

(B) 1.4 m/d

(C) 2.4 m/d

(D) 3.4 m/d

9. 渗流流速正比于水力坡度 J 的 ()。

(A) $\frac{1}{2}$ 次方

(B) 1 次方

(C) $\frac{3}{2}$ 次方;

(D) 2 次方

6.10 量纲分析和相似理论

流体力学的量纲分析和相似理论是建立参与流体运动诸物理量关系的重要方法和原理。

6.10.1 量纲分析

1. 量纲和谐原理

量纲分析的基本原理为: 任何完整的物理方程式的各项量纲必须一致, 即称为量纲和谐原理。凡是正确反映客观规律的物理方程式, 必然是一个齐次量纲式。例如, 表示物体做等加速直线运动规律的方程式为

$$s = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

式中, u_0 为初速度; t 为时间; a 为加速度; s 为经过 t 时间物体所经过的距离。该式左端量纲为 L , 右端第一项量纲为 $LT^{-1}T = L$, 右端第二项量纲为 $LT^{-2}T^2 = L$, 即该式等号两端各项量纲相同。

若已知参与某水流运动的主要物理量, 并假定物理量之间的函数关系为指数式, 且物理量小于或等于 4 个, 则利用量纲和谐原理, 可以得出物理量之间确定的关系式, 该方法称为瑞利 (Rayleigh) 量纲分析法。

例 6.10.1 已知过堰流量 Q 与堰上水头 H 、堰宽 b 、重力加速度 g 等物理量有关, 求过堰流量表达式。

解 过堰流量可写为

$$Q = m_0 b^a g^\beta H^\gamma \quad (m_0 \text{ 为一纯系数})$$

其量纲式为

$$L^3 T^{-1} = L^a (L T^{-2})^\beta L^\gamma = L^{a+\beta+\gamma} T^{-2\beta}$$

根据量纲和谐原理, 则

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ -2\beta = -1 \end{cases}$$

联立求解上式可得: $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha + \gamma = 2.5$ 。又据经验得知 Q 与 b 的一次方成比例, 即 $\alpha = 1$, 故得 $\gamma = 1.5$ 。将之代入则, $Q = m_0 b \sqrt{g} H^{3/2}$, 通常表示为

$$Q = m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2}$$

上式即为堰流流量基本公式, m_0 由实验确定。

由于基本量纲只有 3 个, 用瑞利量纲分析法只能列出 3 个方程, 对多于 3 个待定指数的问题不能用此法惟一确定。

2. π 定理

1915 年布金汉 (Buckingham) 提出著名的 π 定理。

对于任一物理过程, 如存在 n 个物理量, 涉及到 m 个基本物理量, 则这个物理过程可由 n 个物理量组成的 $(n-m)$ 个无量纲量称为 π 所表达的关系式来描述。

其中 m 个基本物理量是指: ①与基本量纲 $[M]$ $[L]$ $[T]$ 相对应, 一般也为 3 个; ②主要物理量; ③不宜选任两个量纲类同者, 如选长度 l , 则不再选面积 A ; 如选速度 v , 则不再选重力加速度 g 。

用 π 定理可以将各物理量之间的函数关系转化为无量纲量之间的函数关系。流体力学问题中一般可选 3 个基本物理量, 即 1 个几何量、1 个运动量和 1 个动力量, 每个基本物理量可以用 3 个基本量纲的组合来表示。

例 6.10.2 已知圆管两端压强降 Δp 与管道长度 l 、内径 d 、绝对粗糙度 K 、平均流速 v 以及流体的密度 ρ 和动力黏性系数 μ 有关, 试用 π 定理求压强降 Δp 的表达式。

解 根据题意, 压强降 Δp 与有关物理量 l 、 d 、 K 、 v 、 ρ 和 μ 之间存在以下函数关系, 即

$$f(\Delta p, l, d, K, v, \rho, \mu) = 0 \quad (a)$$

其中共有 $n=7$ 个物理量, 选取 d 、 v 和 ρ 为基本物理量, 即 $m=3$, 则 $(n-m)=4$ 。应用 π 定理可将上述物理量的函数关系式转化为 4 个无量纲量表示的函数关系式

$$F(\pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7) = 0 \quad (b)$$

用基本物理量表示的 π_4 的无量纲量公式为

$$\pi_4 = \frac{\Delta p}{d^\alpha v^\beta \rho^\gamma}$$

分子与分母量纲相等有

$$ML^{-1}T^{-2} = L^\alpha (LT^{-1})^\beta (ML^{-3})^\gamma$$

根据量纲和谐原理

$$\text{对 } M: \quad 1 = \gamma$$

$$\text{对 } T: \quad -2 = -\beta$$

$$\text{对 } L: \quad -1 = \alpha + \beta - 3\gamma$$

$$\text{解得} \quad \alpha = 0, \beta = 2, \gamma = 1$$

$$\text{则} \quad \pi_4 = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

同理可求得

$$\pi_5 = \frac{l}{d}, \pi_6 = \frac{K}{d}, \pi_7 = \frac{\mu}{\rho v d} = \frac{1}{Re}$$

将上述无量纲量代入式 (b), 得

$$F\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{l}{d}, \frac{K}{d}, \frac{1}{Re}\right) = 0$$

或

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = F'\left(\frac{l}{d}, \frac{K}{d}, \frac{1}{Re}\right) \quad (c)$$

实验证明: 圆管两端的压强降 Δp 与管长 l 成正比, 与管内径 d 成反比, 则式 (c) 可以改写为

$$\Delta p = f\left(\frac{K}{d}, \frac{l}{Re}\right) \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}$$

令 $\lambda = f(K/d, 1/Re)$, λ 与流态、流动阻力系数分区有关, λ 由实验或用经验公式确定, 则

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (d)$$

上式为沿程损失的达西公式。可以看出, 用 π 定理求解不会出现不确定的待定指数, 但应用 π 定理过程中, 要正确选择参与该物理过程的全部物理量, 才能得到反映客观规律的无量纲量表示的函数关系式。

6.10.2 相似理论

流体力学中的相似理论, 是指两个流动现象的力学相似, 即在相同时刻两个流动几何空间的各对应点上, 表征流动过程的所有物理量成一定比例。力学相似的充分必要条件是几何相似、运动相似和动力相似。以下标 “m” 表示模型中的物理量, 下标 “p” 表示原型中的物理量。

1. 几何相似

几何相似是指模型流动与原型流动中的固体边界形状相似, 对应的线性尺度有同一比

例, 即

$$\lambda_l = \frac{l_p}{l_m} = \text{const.} \quad (6.10-1)$$

式中, λ_l 为几何相似常数或称几何比尺; l 为特征长度。

2. 运动相似

运动相似是指模型流动与原型流动在所有对应点上、对应时刻的速度场相似, 也就是同名速度方向一致, 大小成同一比例, 即

$$\lambda_v = \frac{v_p}{v_m} = \frac{v_{xp}}{v_{xm}} = \frac{v_{yp}}{v_{ym}} = \frac{v_{zp}}{v_{zm}} = \text{const.} \quad (6.10-2)$$

式中, λ_v 为运动相似常数或称速度比尺; v 为特征速度。

3. 动力相似

动力相似是指模型流动与原型流动在对应时刻的所有对应点处, 作用在流体微团上的各种同名力方向一致, 大小成一定比例, 即

$$\lambda_F = \frac{F_p}{F_m} = \frac{I_p}{I_m} = \frac{G_p}{G_m} = \frac{T_p}{T_m} = \frac{P_p}{P_m} \quad (6.10-3)$$

式中: λ_F 为动力相似比尺; F 为任意作用力; I 为惯性力; G 为重力; T 为黏性力; P 为压力。

4. 初始条件和边界条件的相似

初始条件和边界条件的相似是保证力学相似的充分条件。因此, 要保证流动相似就得使模型流动与原型流动的初始条件和边界条件相似。在非恒定流中, 初始条件相似是必要的; 在恒定流中, 初始条件相似则失去实际意义。

对于边界条件, 分为几何的、运动的和动力的三个方面。依此确定边界条件。

6.10.3 相似准则

1. 牛顿相似准则

$$\frac{F_p}{\rho_p l_p^2 v_p^2} = \frac{F_m}{\rho_m l_m^2 v_m^2} \quad (6.10-4)$$

用无量纲数 $Ne = \frac{F}{\rho L^2 v^2}$ 代入上式, 并考虑任意作用力与惯性力之间的关系, 得

$$Ne_p = Ne_m \quad (6.10-5)$$

上式称为牛顿相似准则, Ne 称为牛顿相似准数或牛顿数。牛顿相似准则是其他动力相似准则的集中表现, 具有一般意义。

2. 重力相似准则 (弗劳德准则)

若作用在流体微团上的合外力中重力为主导因素, 当模型流动与原型流动动力相似时, 对应的重力必须相似, 即

$$\frac{v_p^2}{l_p g_p} = \frac{v_m^2}{l_m g_m} \quad (6.10-6)$$

用无量纲数 $Fr^2 = \frac{v^2}{gl}$ 代入上式, 得

$$Fr_p = Fr_m \quad (6.10-7)$$

上式称为弗劳德准则。 Fr 称为弗劳德数, 表示惯性力与重力之比值。

重力为主导因素的二相似流动的弗劳德数必定相等。因此，弗劳德准则又称为重力相似准则。

3. 黏滞力相似准则（雷诺准则）

若作用在流体微团上的合外力中黏性力为主导因素，当模型流动与原型流动动力相似时，对应的黏滞力必须相似，即

$$\frac{v_p l_p}{\nu_p} = \frac{v_m l_m}{\nu_m} \quad (6.10-8)$$

用无量纲数 $Re = \frac{vl}{\nu}$ 代入上式，得

$$Re_p = Re_m \quad (6.10-9)$$

上式称为雷诺准则。 Re 为雷诺数，表示惯性力与黏滞力之比值。

黏滞力作用下的二相似流动的雷诺数必定相等。因此，雷诺准则又称为黏滞力相似准则。

模拟试题

1. 量纲的意义是（ ）。

- (A) 物理量的单位 (B) 物理量性质类别的标志；
(C) 物理量大小的区别 (D) 长度、时间、质量三者的性质标志

2. 量纲一致性原则是指（ ）。

- (A) 量纲相同的量才可相乘除 (B) 量纲不同的量才可相加减
(C) 基本量纲不能与导出量纲相运算 (D) 物理方程式中各项的量纲必须相同

3. 若物体受力 F 按与长度 l 、速度 v 、流体密度 ρ 、重力加速度 g 有关，则本物理过程中物理量个数 n 、基本量个数 m 和无量纲 π 的个数分别应为（ ）。

- (A) $n=5, m=3, \pi=2$ (B) $n=4, m=3, \pi=1$
(C) $n=3, m=5, \pi=2$ (D) $n=3, m=5, \pi=1$

4. 几何相似、运动相似和动力相似三者之间的关系为（ ）。

- (A) 运动相似和动力相似是几何相似的前提
(B) 运动相似是几何相似和动力相似的表象
(C) 只有运动相似，才能几何相似
(D) 只有动力相似，才能几何相似

5. 雷诺数 Re 的物理意义表示（ ）。

- (A) 压力与黏性力之比 (B) 黏性力与重力之比
(C) 惯性力与黏性力之比 (D) 惯性力与重力之比

6. 弗劳德数 Fr 的物理意义表示（ ）。

- (A) 重力和压力之比 (B) 重力和黏性力之比
(C) 惯性力和重力之比 (D) 惯性力和黏性力之比

7. 合力 F ，密度 ρ ，长度 l ，流速 v 组合为无量纲的数是（ ）。

- (A) $\frac{F}{\rho v l}$ (B) $\frac{F}{\rho v^2 l}$ (C) $\frac{F}{\rho v^2 l^2}$ (D) $\frac{F}{\rho v l^2}$

8. 阻力 D 、密度 ρ 、几何尺度 l 和速度 v 组成的无量纲数为（ ）。

$$(A) \frac{D}{\frac{1}{2}\rho v^2 l^2} \quad (B) \frac{D}{\frac{1}{2}\rho v l^2} \quad (C) \frac{D}{\frac{1}{2}\rho v^2 l} \quad (D) \frac{D}{\frac{1}{2}\rho v l}$$

9. 重力加速度 g 、几何尺度 l 和速度 v 组成的无量纲数为 ()。

$$(A) \frac{vl^2}{g} \quad (B) \frac{v^2}{gl} \quad (C) \frac{v}{gl} \quad (D) \frac{v}{g^2 l}$$

10. 黏性系数 ν 、几何尺度 d 和速度 v 组成的无量纲数为 ()。

$$(A) \frac{vd}{\nu} \quad (B) \frac{vd}{\nu} \quad (C) \frac{v^2 d}{\nu} \quad (D) \frac{vd^2}{\nu}$$

11. 在模型设计中, 重力相似与黏性力相似矛盾不再存在, 并可只按重力相似准则选取几何比尺的水流条件是 ()。

- (A) 水流为紊流状态
- (B) 水流处于阻力平方区
- (C) 物理是流线型体, 或绕流阻力极小
- (D) 水流为层流状态

12. 用同种流体, 同一温度进行管道模型实验。按黏滞力相似准则, 已知模型管径 0.1 m, 模型流速 4.0 m/s 若原型管径为 1.2 m, 则原型流速为 ()。

$$(A) 0.67 \text{ m/s} \quad (B) 0.33 \text{ m/s} \quad (C) 3.33 \text{ m/s} \quad (D) 6.67 \text{ m/s}$$

13. 烟气在加热炉回热装置中流动, 拟用空气介质进行实验。已知空气黏度 $\nu_{\text{空气}} = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 烟气黏度 $\nu_{\text{烟气}} = 72 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 实际烟气流速 $v_{\text{烟气}} = 2 \text{ m/s}$ 。如若模型长度比尺 $\lambda_l = 5$, 则模型空气的流速应为 ()。

$$(A) 0.08 \text{ m/s} \quad (B) 0.48 \text{ m/s} \quad (C) 0.52 \text{ m/s} \quad (D) 2.08 \text{ m/s}$$

模拟试题参考答案

6.1 流体的主要物理力学性质

1. (D), 2. (B), 3. (A), 4. (D), 5. (B), 6. (B), 7. (C), 8. (C), 9. (B), 10. (C)。

6.2 流体静力学

1. (B), 2. (A), 3. (A), 4. (B), 5. (C), 6. (B), 7. (C), 8. (D), 9. (B), 10. (A), 11. (C), 12. (A), 13. (A), 14. (A), 15. (B), 16. (D), 17. (B), 18. (C)。

6.3 流体运动学

1. (D), 2. (B), 3. (B), 4. (D), 5. (D), 6. (B)。

6.4 流体动力学

1. (C), 2. (A), 3. (C), 4. (D), 5. (B), 6. (D), 7. (A), 8. (D), 9. (A), 10. (C), 11. (C), 12. (A), 13. (D)。

6.5 流动阻力和能量损失

1. (C), 2. (D), 3. (B), 4. (A), 5. (D), 6. (A), 7. (D), 8. (C), 9. (A), 10. (B), 11. (A), 12. (C), 13. (D), 14. (A), 15. (C), 16. (B), 17. (C)。

6.6 有压管流

1. (B), 2. (C), 3. (C), 4. (D), 5. (D), 6. (B), 7. (A), 8. (C), 9. (B), 10. (C)。

6.7 明渠恒定均匀流

1. (B), 2. (B), 3. (B), 4. (B), 5. (C), 6. (C), 7. (D), 8. (D), 9. (D), 10. (A)。

6.8 堰流

1. (C), 2. (D), 3. (C)。

6.9 渗流

1. (C), 2. (B), 3. (C), 4. (B), 5. (D), 6. (B), 7. (A), 8. (B), 9. (B)。

6.10 量纲分析和相似理论

1. (B), 2. (D), 3. (A), 4. (B), 5. (C), 6. (C), 7. (C), 8. (B), 9. (B), 10. (A), 11. (B), 12. (B), 13. (D)。

主要参考文献

1. 同济大学数学教研室. 高等数学 (上、下册) (第3版). 北京: 高等教育出版社, 1988
2. 同济大学数学教研室. 线性代数 (第2版). 北京: 高等教育出版社, 1991
3. 谢树艺. 工程数学——矢量分析与场论 (第2版). 北京: 高等教育出版社
4. 陈家鼎, 刘婉如, 汪仁室. 概率统计讲义 (第2版). 北京: 高等教育出版社
5. 浙江大学. 普通化学 (第3版). 北京: 高等教育出版社, 1988
6. 同济大学. 普通化学. 上海: 同济大学出版社, 1993
7. 刘国璞. 大学化学. 北京: 清华大学出版社, 1994
8. 余纯海, 齐昌瑶. 工程化学. 沈阳: 东北林业大学出版社, 1996
9. 孙训芳主编. 材料力学 (第3版). 北京: 高等教育出版社, 1994
10. 刘江敬主编. 材料力学 (第3版). 北京: 高等教育出版社, 1994
11. 苏夏林主编. 材料力学. 天津: 天津大学出版社, 2001
12. 赵志岗主编. 材料力学. 天津: 天津大学出版社, 2001
13. 闵行主编. 材料力学重点难点及典型题精解. 西安: 西交大出版社, 2001
14. 天津大学水力学教研室. 水力学. 北京: 人民教育出版社, 1980
15. 西南交通大学水力学教研室. 水力学. 北京: 高等教育出版社, 1991
16. 郝中堂. 应用流体力学. 杭州: 浙江大学出版社, 1991
17. 黄儒钦. 水力学教程. 成都: 西南交通大学出版社, 1998
18. 高学平. 流体力学. 天津: 天津大学出版社, 2002