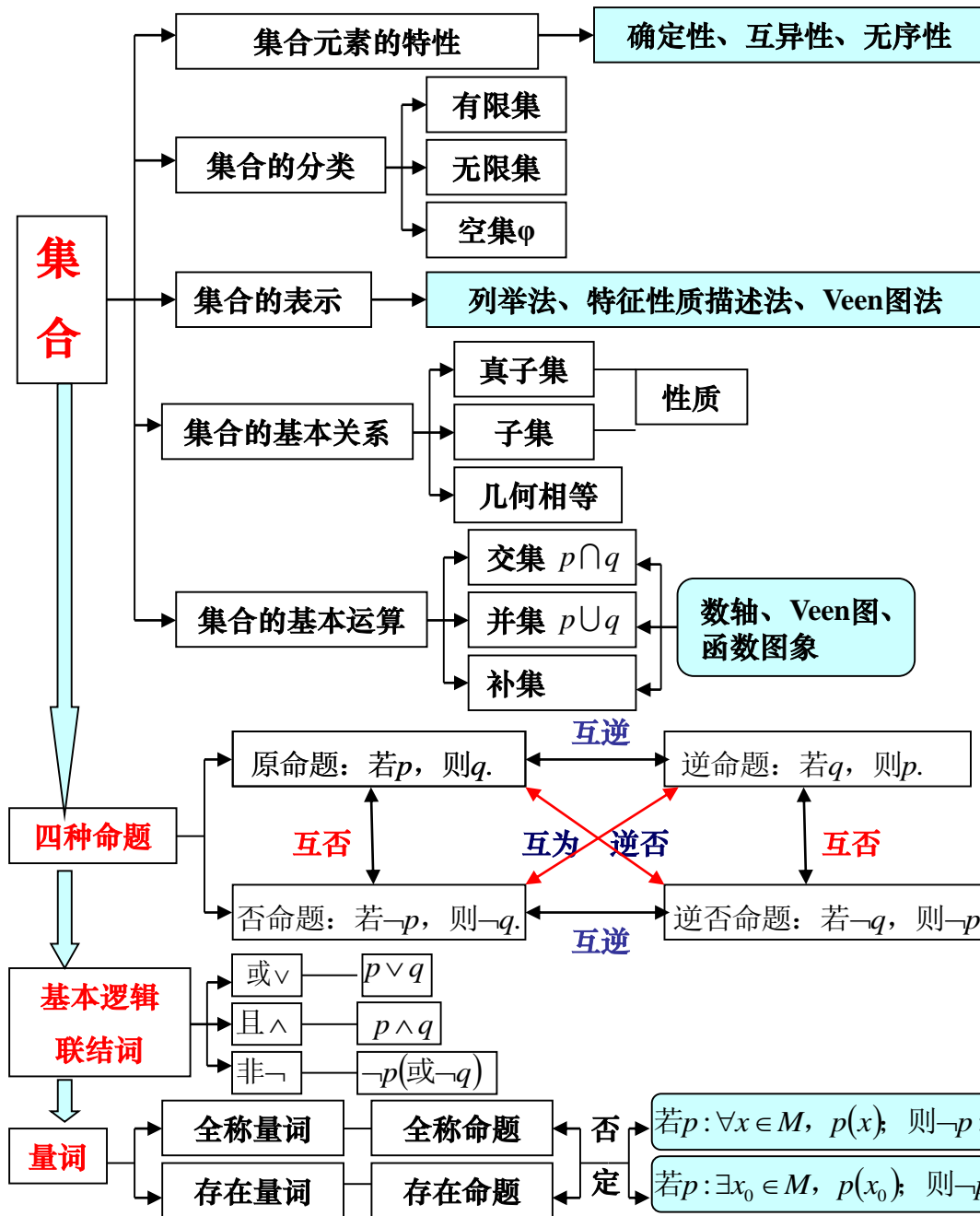


高中数学知识网络

第一部分	集合与简易逻辑
第二部分	映射、函数、导数、定积分与微积分
第三部分	三角函数与平面向量
第四部分	数列
第五部分	不等式
第六部分	立体几何与空间向量
第七部分	解析几何
第八部分	排列、组合、二项式定理、推理与证明
第九部分	概率与统计
第十部分	复数
第十一部分	算法

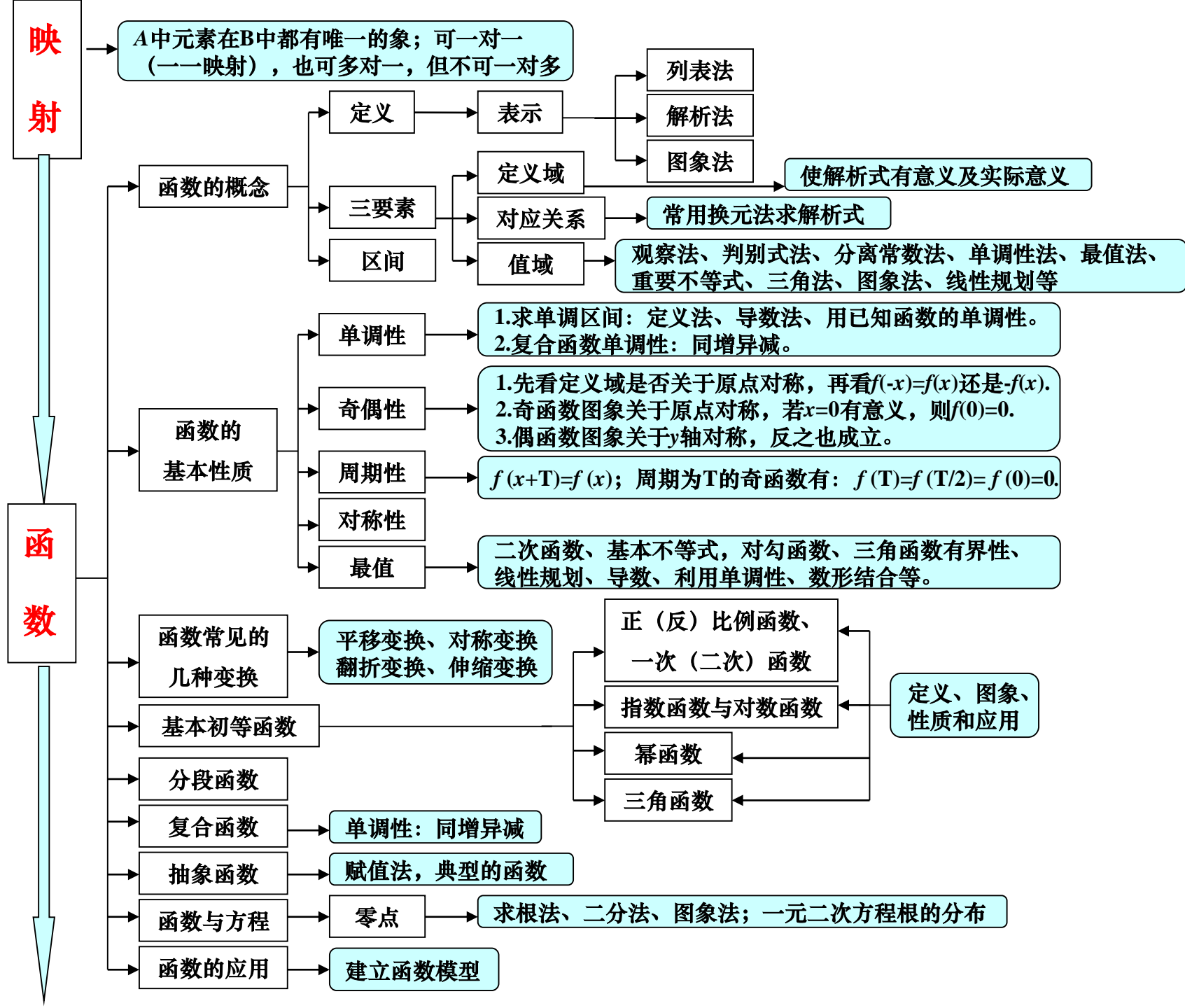
第一部分 集合与简易逻辑



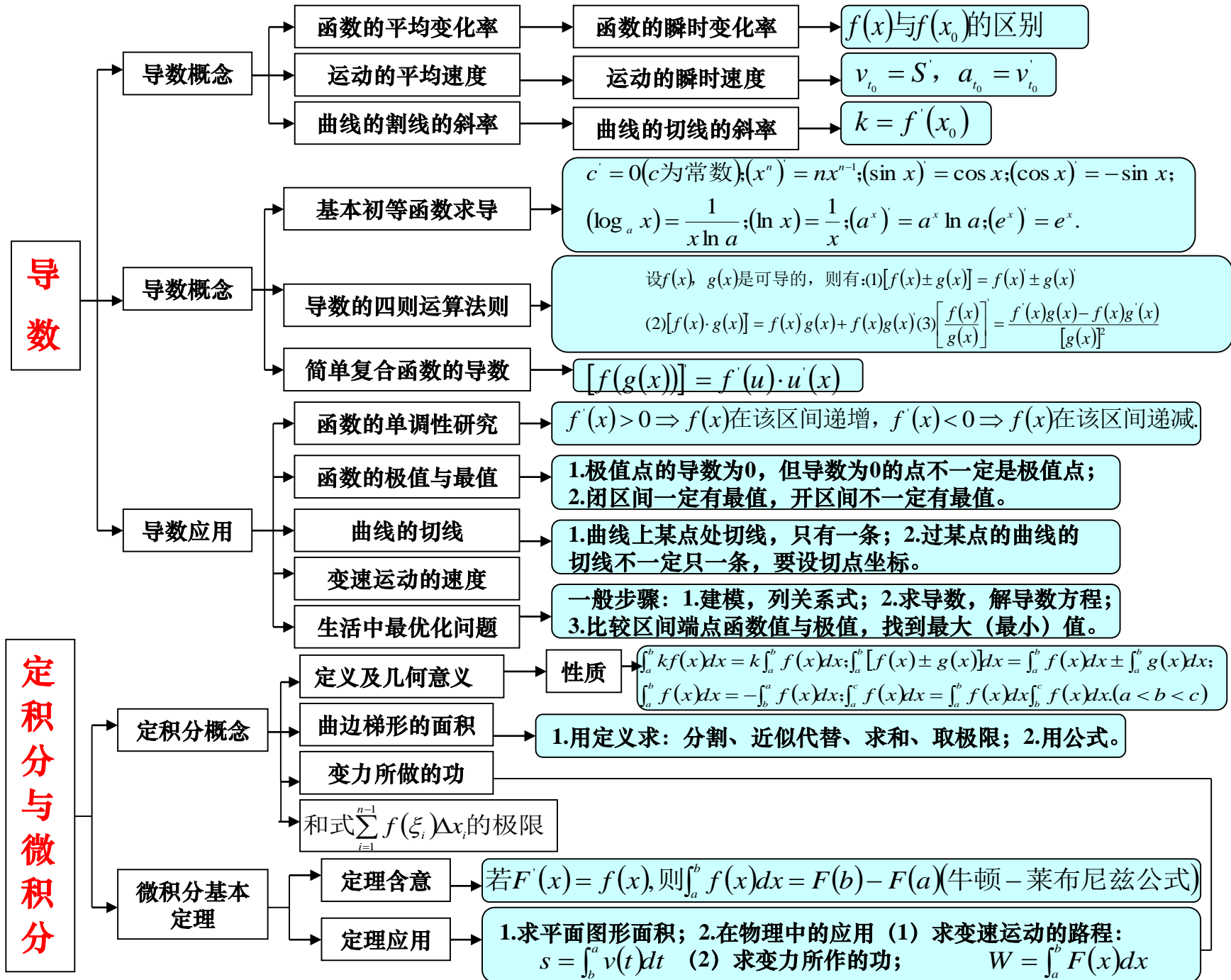
(1)空集是任何非空集合的真子集;
 (2) $A \subseteq A$; (3)则 $A \subseteq B$ 则 $A = B$ 或 $A \subsetneq B$;
 (4)若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$;
 (5)含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集,
 有 2^{n-1} 个真子集;
 (6) \in, \subseteq 的区别: \in 表示元素与集合关系,
 \subseteq 表示集合与集合关系;
 (7) a 与 $\{a\}$ 区别: 一般地, a 表示元素,
 $\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合;
 (8) $\{0\}, \{\varnothing\}, \varnothing$ 区别: $\{0\}, \{\varnothing\}$ 表示集合,
 \varnothing 表示空集, $\varnothing \subseteq \{0\}, \varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

(1) $A \cup A = A, A \cap A = A$,
 $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$;
 (2) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$,
 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$,
 $A \cap B \subseteq A$ (或 B) $\subseteq A \cup B$;
 (3) $A \cup (C_U A) = U; A \cap (C_U A) = \varnothing$;
 $C_U (C_U A) = A$;
 (4) $C_U (A \cap B) = (C_U A) \cup (C_U B)$;
 (5)分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 (6)结合律: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

第二部分 映射、函数、导数、定积分与微积分

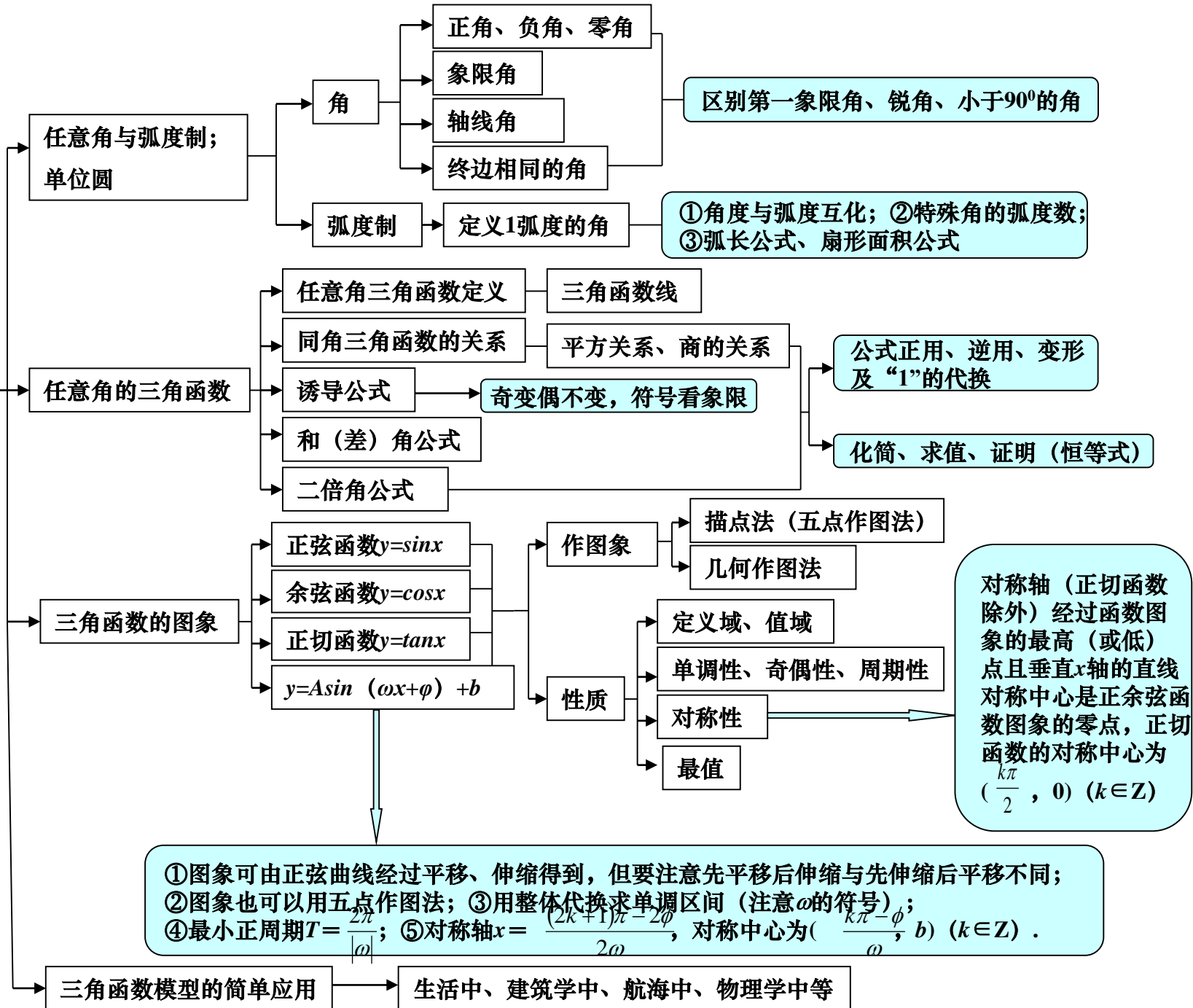


第二部分 映射、函数、导数、定积分与微积分



第三部分 三角函数与平面向量

三角函数



第三部分

三角函数与平面向量

解三角形

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ 及变式}$$

适用范围：①已知两角和任一边，解三角形；
②已知两边和其中一边的对角，解三角形。

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

推论：求角

适用范围：①已知三边，解三角形；②已知两边和它们的夹角，解三角形。

解的个数是一个？
两个？还是无解？

面积

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \left(\text{其中 } p = \frac{a+b+c}{2} \right)$$

$$= \frac{abc}{4R} \text{ (} R \text{ 是外接圆半径)}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r \text{ (} r \text{ 是内切圆半径)}$$

实际应用

向量的概念

零向量与单位向量

表示

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

线性运算

加、减、数乘

几何意义及运算律

平面向量基本定理

$$\vec{p} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$$\vec{b} \text{ 在 } \vec{a} \text{ 方向上的投影为 } |\vec{b}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

数量积

几何意义

投影

夹角公式

$$\text{设 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 夹角为 } \theta, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

共线与垂直

共线（平行）

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 (\vec{a} \neq \vec{0})$$

垂直

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

向量的应用

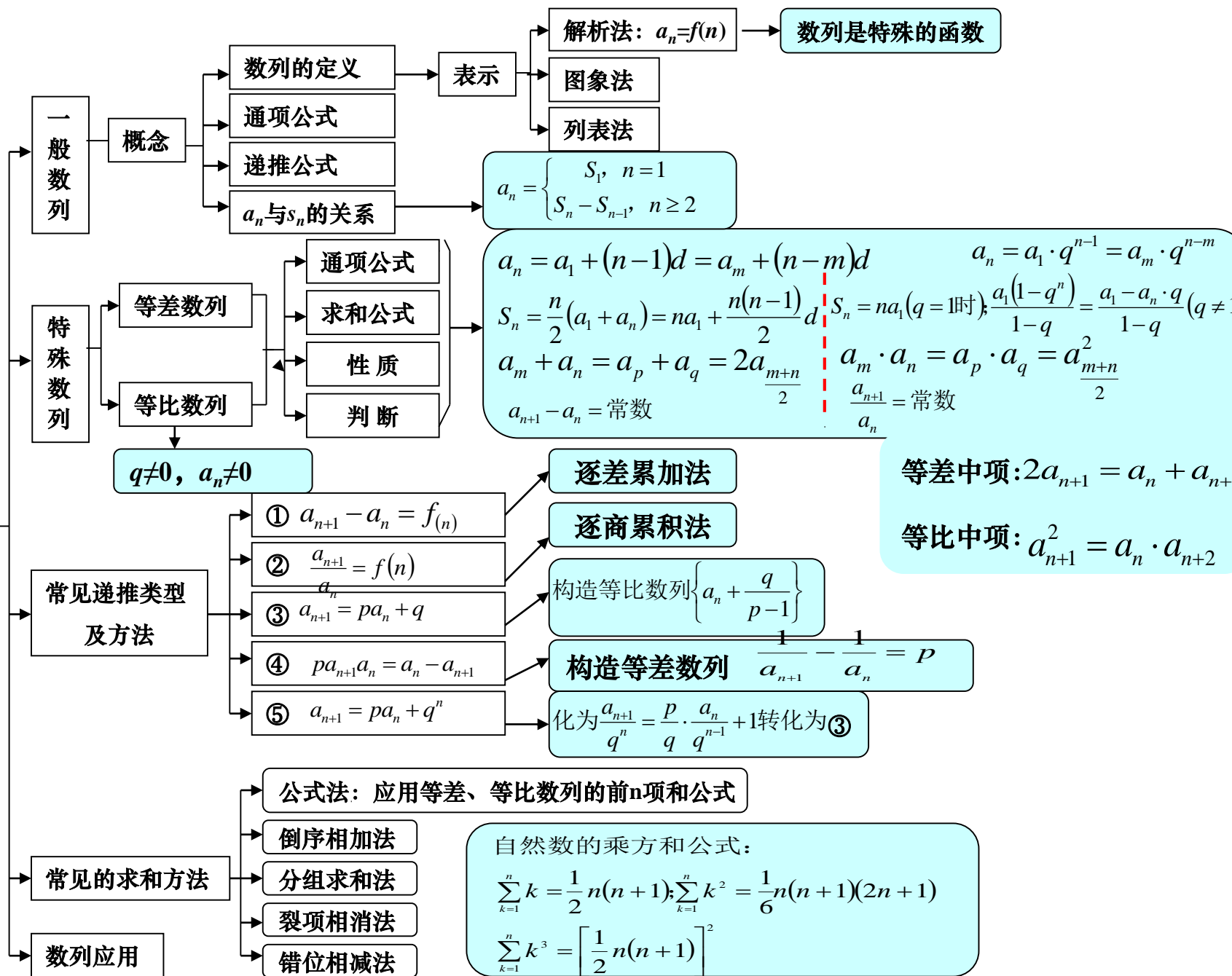
在平面（解析）几何中的应用；在物理（力向量、速度向量）中应用

(1) 解三角形时，三条边和三个角中“知三求二”。

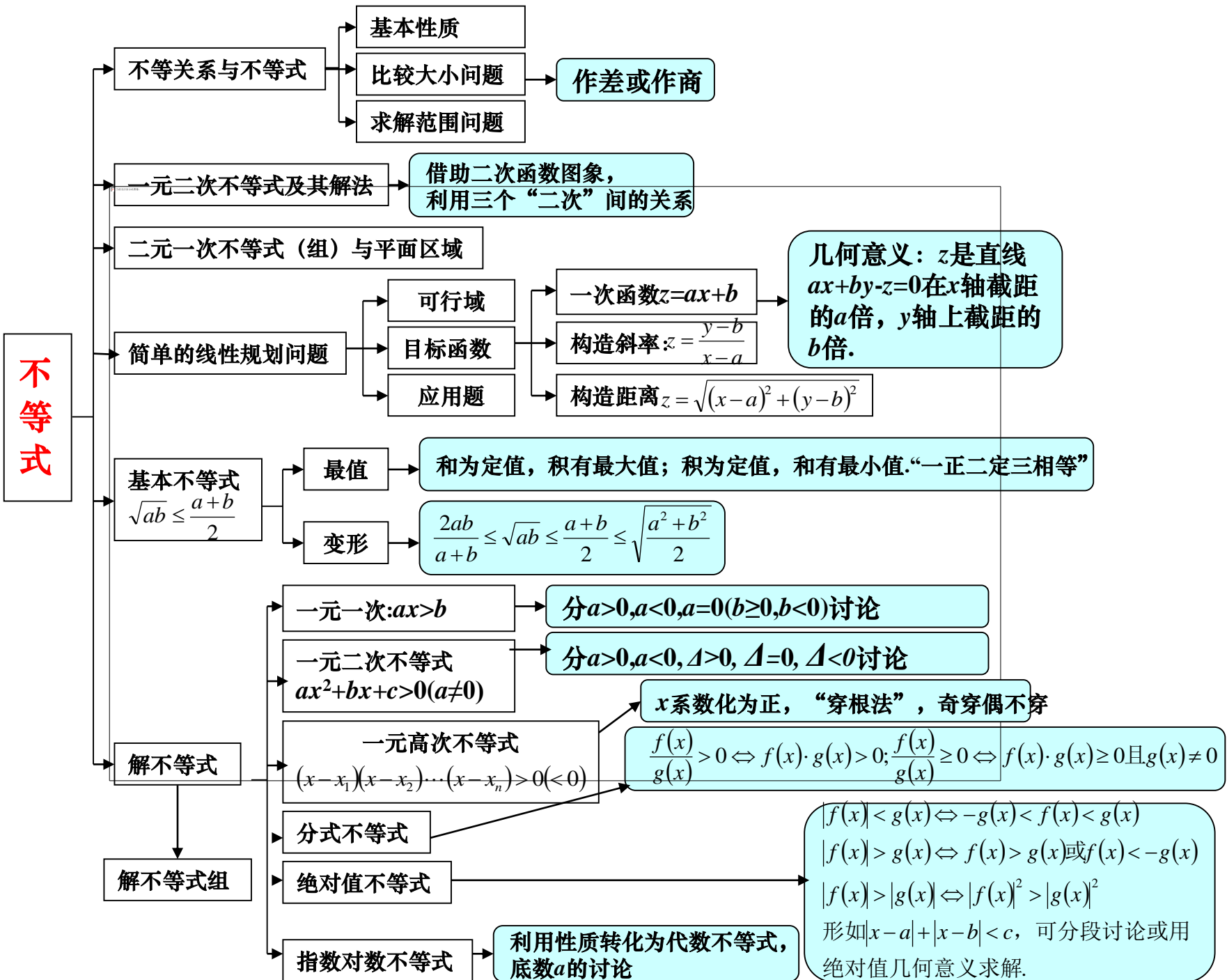
(2) 解三角形应用题步骤：先准确理解题意，然后画出示意图，再合理选择定理求解。尤其理解有关名词，如坡角、坡比、仰角和俯角、方位角、方向角等。

第四部分 数列

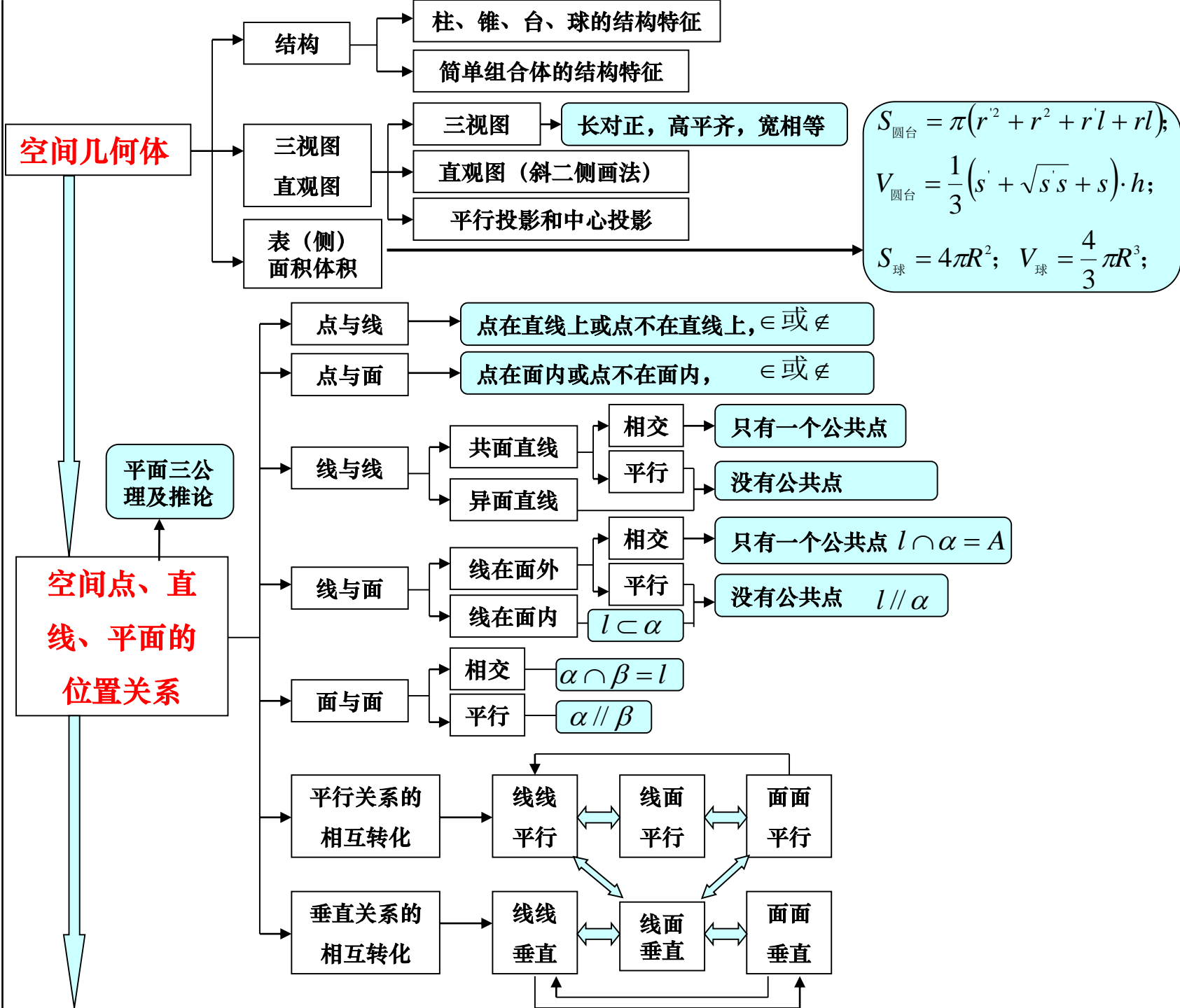
数列

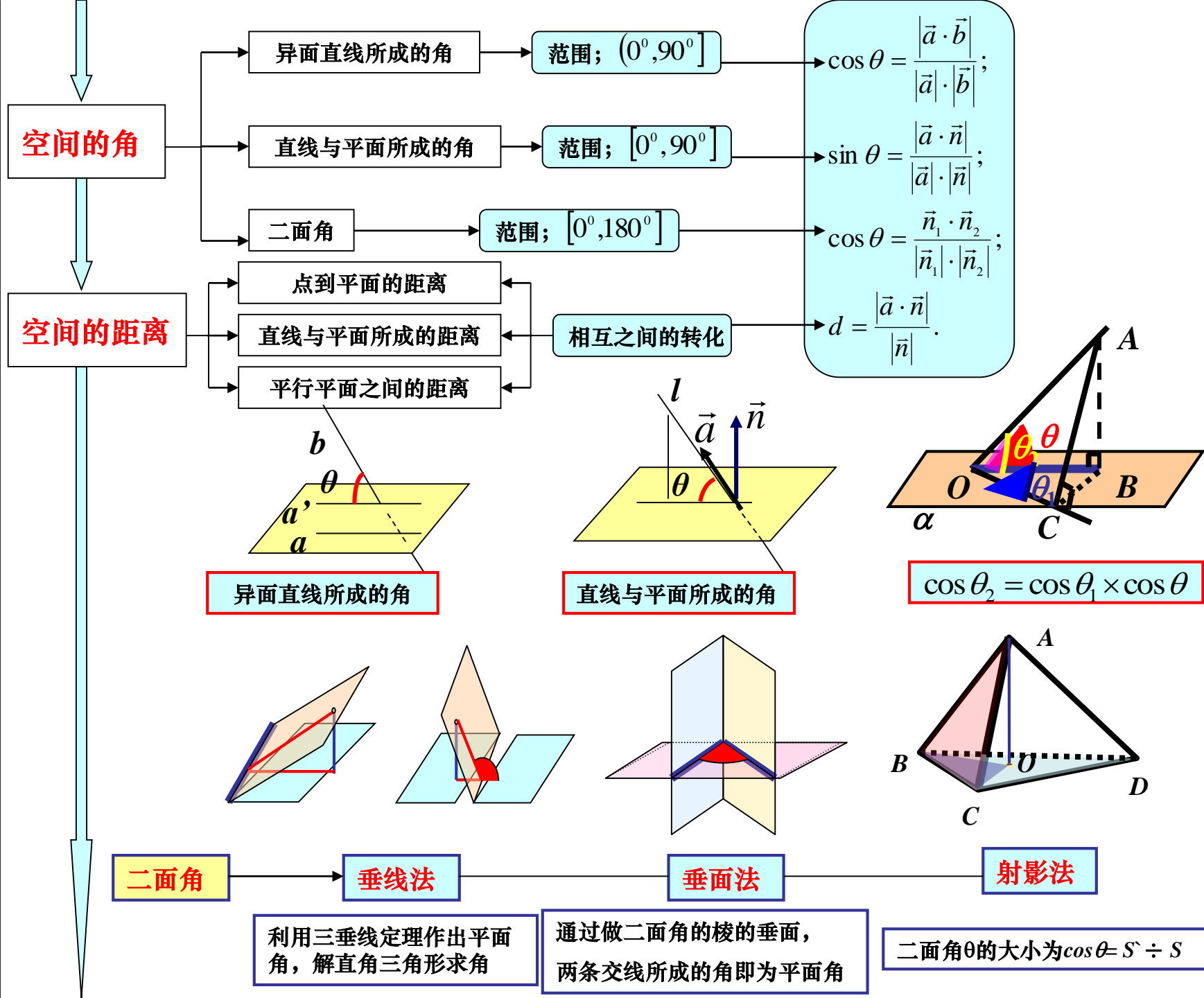


第五部分 不等式



第六部分 立体几何与空间向量





第六部分 立体几何与空间向量

空间向量与立体几何

空间向量及其运算

空间向量的
加减运算

空间向量的
数乘运算

空间向量的
数量积运算

空间向量的
坐标运算

共线向量
定理

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} (\lambda \in R) \text{ 或 } \vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{a} (t \in R, \vec{a} \text{ 为 } l \text{ 方向向量})$$

共面向量
定理

$$\vec{p} \text{ 与 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 共面} \Leftrightarrow \vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} (\vec{a}, \vec{b} \text{ 不共线})$$

$$\text{或 } \vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \text{ 或 } \vec{OP} = \vec{OA} + x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

$$= x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC} (\text{其中 } x + y + z = 1)$$

空间向量
基本定理

空间任一向量 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面)

推论: 设 $OABC$ 是不共面四点, 则对任一点 P

$$\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC} (x, y, z \in R)$$

平行与垂直的条件

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0}, \lambda \in R); \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

向量夹角

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = (\text{坐标表示})$$

向量距离

$$|\vec{AB}| = \sqrt{AB^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

立体几何中的向量方法

直线的方向向量与法向量

向量法证两直线平行与垂直

求空间角

求空间距离

点到平面的距离: $d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{MP}|}{|\vec{n}|}$ (\vec{n} 为平面 α 的法向量, $M \in \alpha, P \notin \alpha$)

线面距、面面距都可转化为点面距.

1. 求异面直线的夹角 $\theta: \cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

(\vec{a}, \vec{b} 为方向向量)

2. 直线与平面的夹角 $\theta: \cos \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$

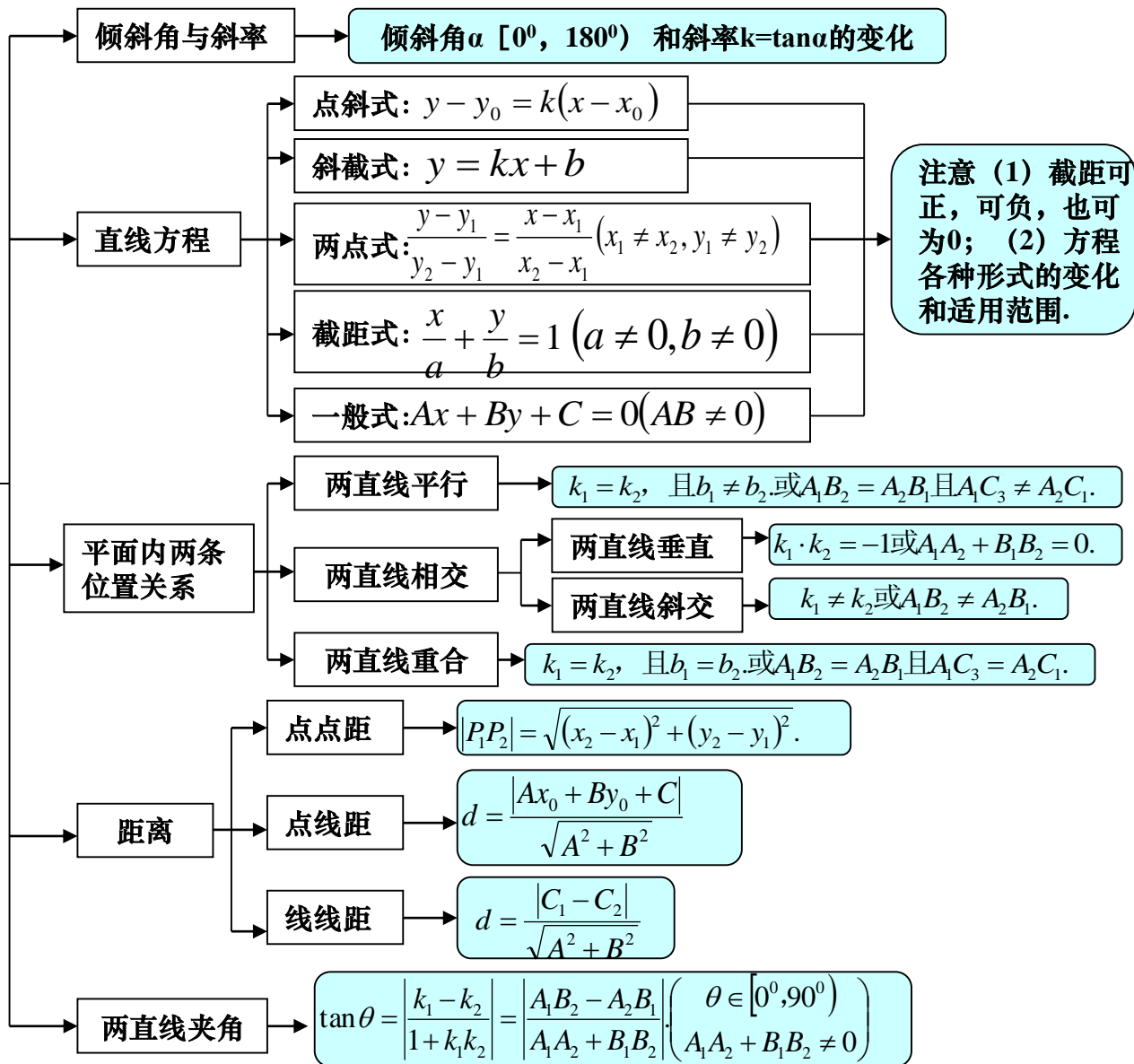
(\vec{a} 为直线方向向量, \vec{n} 为平面法向量)

3. 二面角 $\theta: \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

(\vec{n}_1, \vec{n}_2 为两平面法向量)

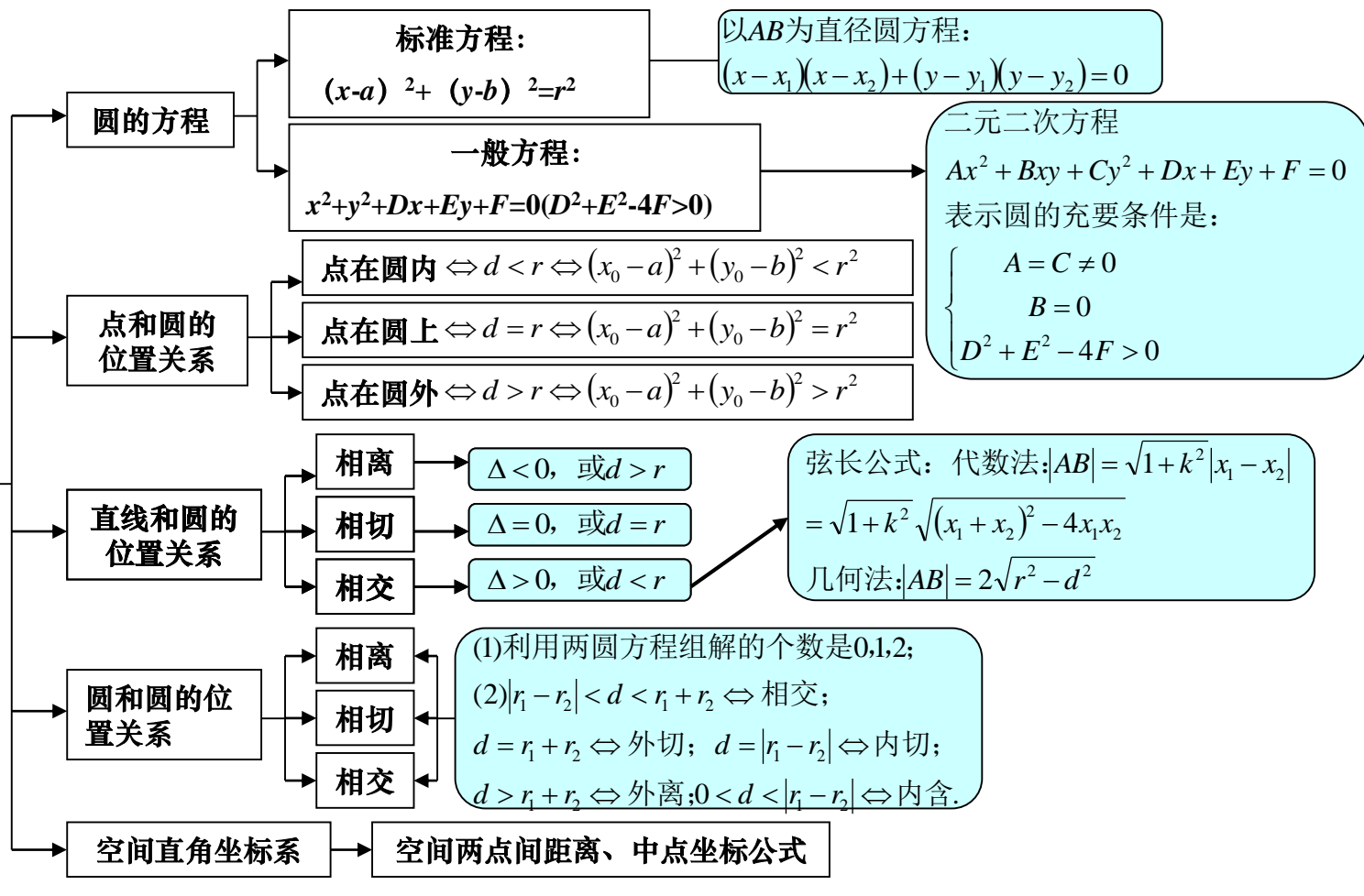
第七部分 解析几何

直线的方程



第七部分 解析几何

圆的方程



几种常见的直线系:

- (1) 共点 $P(x_0, y_0)$ 直线系: $y - y_0 = k(x - x_0)$; 特殊地 $y = kx + b$ 表示过点 $(0, b)$ 的直线系, 不包括 y 轴.
- (2) 平行直线系: $y = kx + b$ (k 为参数) 表示斜率为 k 的平行直线系; $Ax + By = \lambda$ (λ 为参数) 表示与已知 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线系; $Bx - Ay = \lambda$ (λ 为参数) 表示与已知 $Ax + By + C = 0$ 垂直的直线系.
- (3) 过两直线交点的直线系: (λ 为参数) $A_1x + By_1 + C_1 + \lambda(A_2x + By_2 + C_2) = 0$ (不包括 l_2);
 $A_2x + By_2 + C_2 + \lambda(A_1x + By_1 + C_1) = 0$ (不包括 l_1).

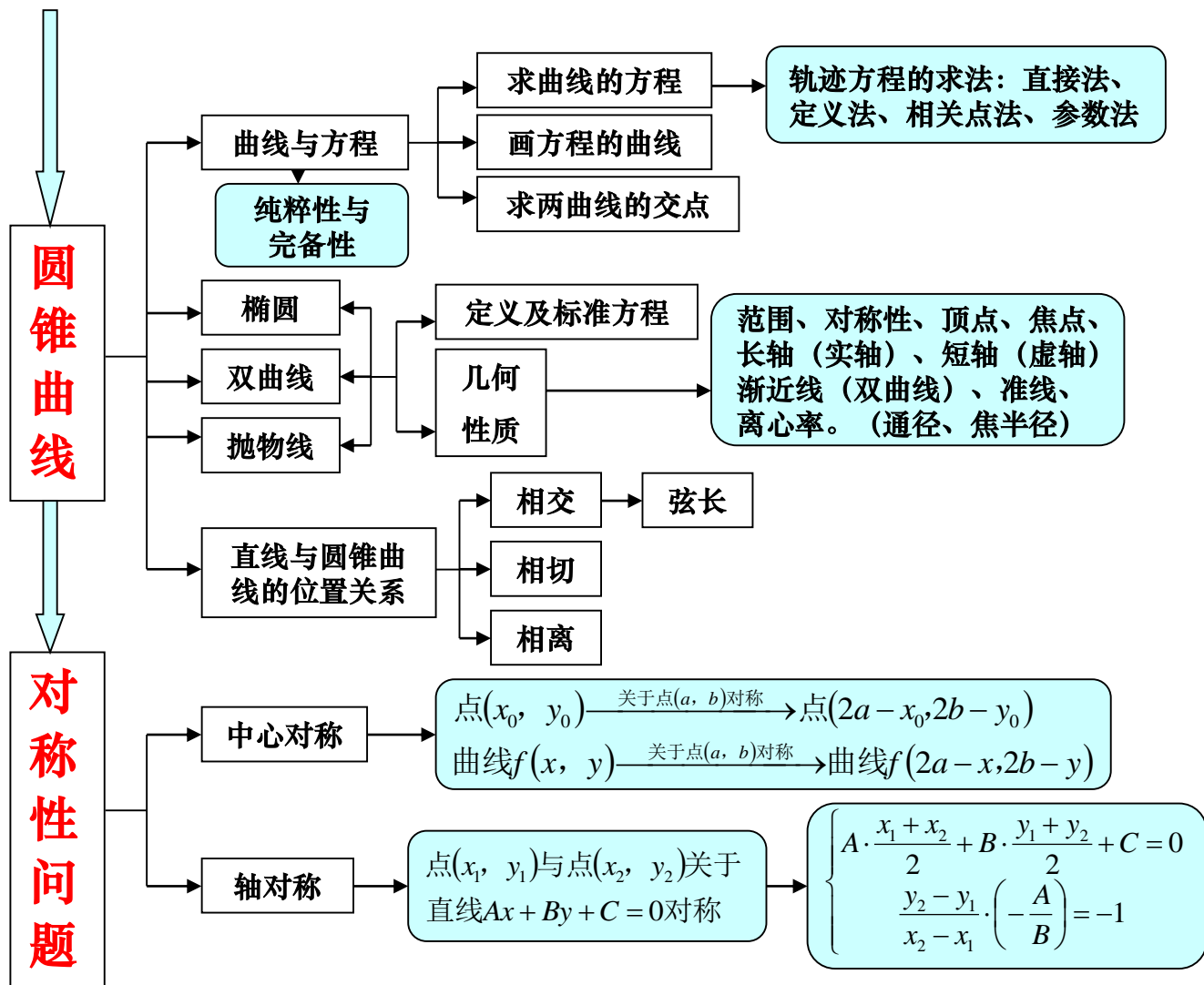
几种常见的圆系:

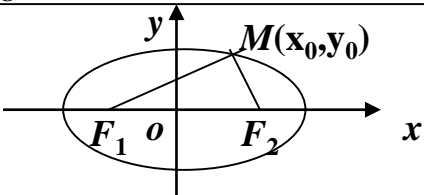
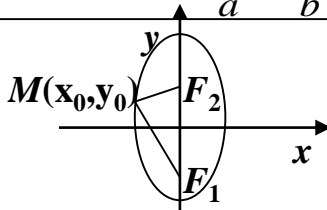
- (1) 同心圆系: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (a, r 为参数) 或 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (D, E 为常数, F 为参数, 且 $D^2 + E^2 - 4F > 0$)
- (2) 圆心在 x 轴上的圆系: $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ (a, r 为参数) 或 $x^2 + y^2 + Dx + F = 0$ (D, F 为参数, 且 $D^2 - 4F > 0$);
- (3) 圆心在 y 轴上的圆系: $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ (b, r 为参数) 或 $x^2 + y^2 + Ey + F = 0$ (E, F 为参数, 且 $E^2 - 4F > 0$);
- (4) 过原点的圆系: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$ 或 $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$;
- (5) 过两已知圆交点的圆系: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$ (不含 C_2);
 或 $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 + \lambda(x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1) = 0$ (不含 C_1). (其中 λ 为参数)

直线与圆锥曲线的位置关系:

1. 直线 $l: Ax + By + C = 0$, 二次曲线 $C: \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$ 的位置关系: 交点个数与方程组有几组解一一对应, 其交点坐标就是方程组的解;
2. 弦长: $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$ (k 为直线 l 的斜率)
3. 椭圆上 $M(x_0, y_0)$ 点处的切线为: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$; 4. 双曲线上 $M(x_0, y_0)$ 点处的切线为: $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$

第七部分 解析几何



定 义	$ MF_1 + MF_2 = 2a$ (常数 $2a > F_1F_2 = 2c$)		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$	$a = b$ 时椭圆变成圆, $x^2 + y^2 = a^2$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$
图 形			
中 心	$(0,0)$		$(0,0)$
顶 点	$(\pm a,0), (0,\pm b)$		$(0,\pm a), (\pm b,0)$
焦 点	$(\pm c,0)$		$(0,\pm c)$
对称轴	x 轴, y 轴; 原点		x 轴, y 轴; 原点
范 围	$-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b$		$-b \leq x \leq b; -a \leq y \leq a$
准线方程	$x = \pm \frac{a^2}{c}$		$y = \pm \frac{a^2}{c}$
焦半径	$ MF_1 = a + ex_0; MF_2 = a - ex_0$		$ MF_1 = a + ey_0; MF_2 = a - ey_0$
离心率	$e = \frac{c}{a}(0 < e < 1, \text{其中} c^2 = a^2 - b^2)$ $e \rightarrow 1$, 椭圆越扁; $e \rightarrow 0$, 越圆		
长轴短轴	$2a$ 叫做椭圆的长轴, a 叫做长半轴长; $2b$ 叫做椭圆的短轴, b 叫做短半轴长;		
通 径	过焦点垂直于长轴的椭圆的弦。通径长= $\frac{2b^2}{a}$		

特别提示: 1. $2a = 2c$ 时, 轨迹是线段; $2a < 2c$ 时, 轨迹不存在;

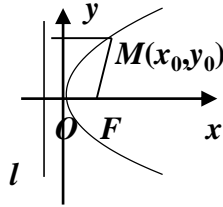
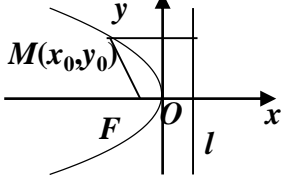
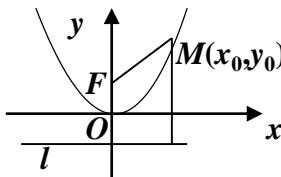
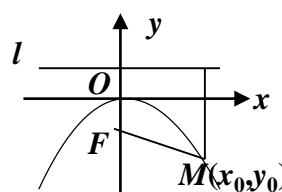
2. 焦点弦 $|AB| = |AF_1| + |BF_1| = 2a + e(x_1 + x_2)$; 3. 椭圆的焦点永远在长轴上;

定 义	$\ MF_1 - MF_2 = 2a$ (常数 $2a < 2c = F_1F_2 $)	
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
图 形		
中 心	$(0,0)$	$(0,0)$
顶 点	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
焦 点	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
对称轴	x 轴, y 轴; 原点	x 轴, y 轴; 原点
范 围	$ x \geq a, y \in R$	$ y \geq a, x \in R$
准线方程	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$
焦半径	M 在右支上: $ MF_1 = ex_0 + a; MF_2 = ex_0 - a$; M 在左支上: $ MF_1 = -(ex_0 + a); MF_2 = -(ex_0 - a)$	M 在上支上: $ MF_1 = ey_0 + a; MF_2 = ey_0 - a$; M 在下支上: $ MF_1 = -(ey_0 + a); MF_2 = -(ey_0 - a)$
渐近线	$y = \pm \frac{b}{a} x$	$y = \pm \frac{a}{b} x$
实轴虚轴	$2a$ 叫做双曲线的实轴, a 叫做实半轴长; $2b$ 叫做双曲线的虚轴, b 叫做虚半轴长;	
离心率	$e = \frac{c}{a} (e > 1, \text{其中 } c^2 = a^2 + b^2)$	$e > 1$, 越大, e 双曲线开口越大, e 越小开口越小。

特别提示: 1. $2a = 2c$ 时, M 点的轨迹是两条射线; $2a > 2c$ 时轨迹不存在; 2. 双曲线焦点永远在实轴上;

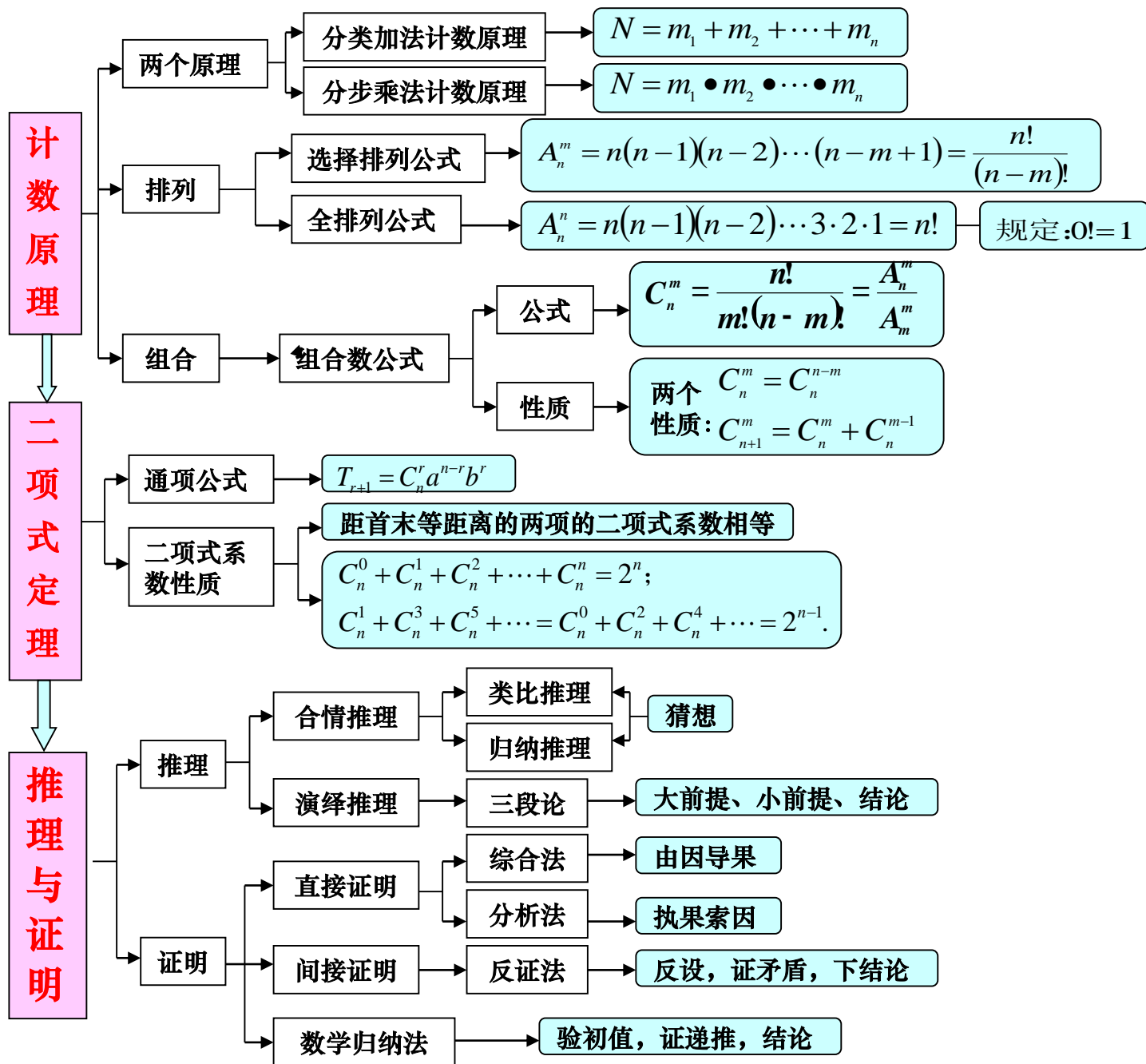
3. 等轴双曲线方程: $x^2 - y^2 = a^2$ 或 $y^2 - x^2 = a^2$, 其中 $e = \sqrt{2}$, 渐近线 $y = \pm x$; 4. 共轭双曲线: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$,

同渐近线, 四个焦点共圆, 且 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$; 5. 若直线与双曲线只有一个交点, 则直线与双曲线相切或直线与渐近线平行。

定 义	平面与定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线。即 $ MF = d$			
标准方程	$y^2 = 2px (p > 0)$	$y^2 = -2px (p > 0)$	$x^2 = 2py (p > 0)$	$x^2 = 2py (p > 0)$
简 图				
焦 点	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
顶 点	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
准线方程	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
通径端点	$\left(\frac{p}{2}, \pm p\right)$	$\left(-\frac{p}{2}, \pm p\right)$	$\left(\pm p, \frac{p}{2}\right)$	$\left(\pm p, -\frac{p}{2}\right)$
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴
范 围	$x \geq 0, y \in R$	$x \leq 0, y \in R$	$y \geq 0, x \in R$	$y \leq 0, x \in R$
焦半径	$ MF = x_0 + \frac{p}{2}$	$ MF = \frac{p}{2} - x_0$	$ MF = y_0 + \frac{p}{2}$	$ MF = \frac{p}{2} - y_0$
离心率	$e = 1$			

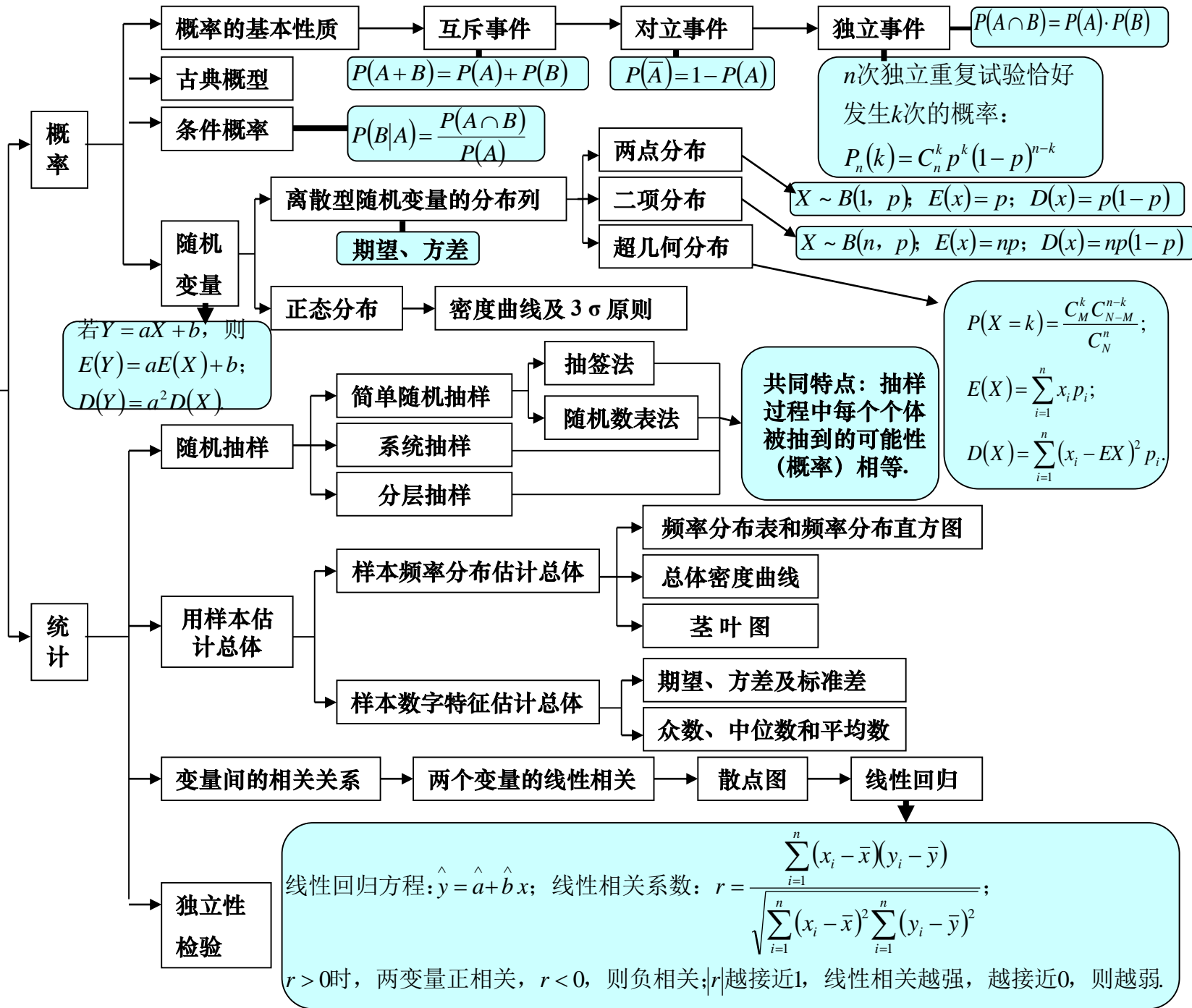
特别提示: 1. 抛物线定义中定点 F 不能在定直线 l 上, 否则轨迹是过定点且垂直于 l 的直线;
2. p 的几何意义是焦点到准线的距离, p 越大, 抛物线开口越大; 3. 直线与抛物线只有一个公共点时, 则直线与抛物线相切或直线与抛物线对称轴平行或重合。

第八部分 排列、组合、二项式定理、推理与证明



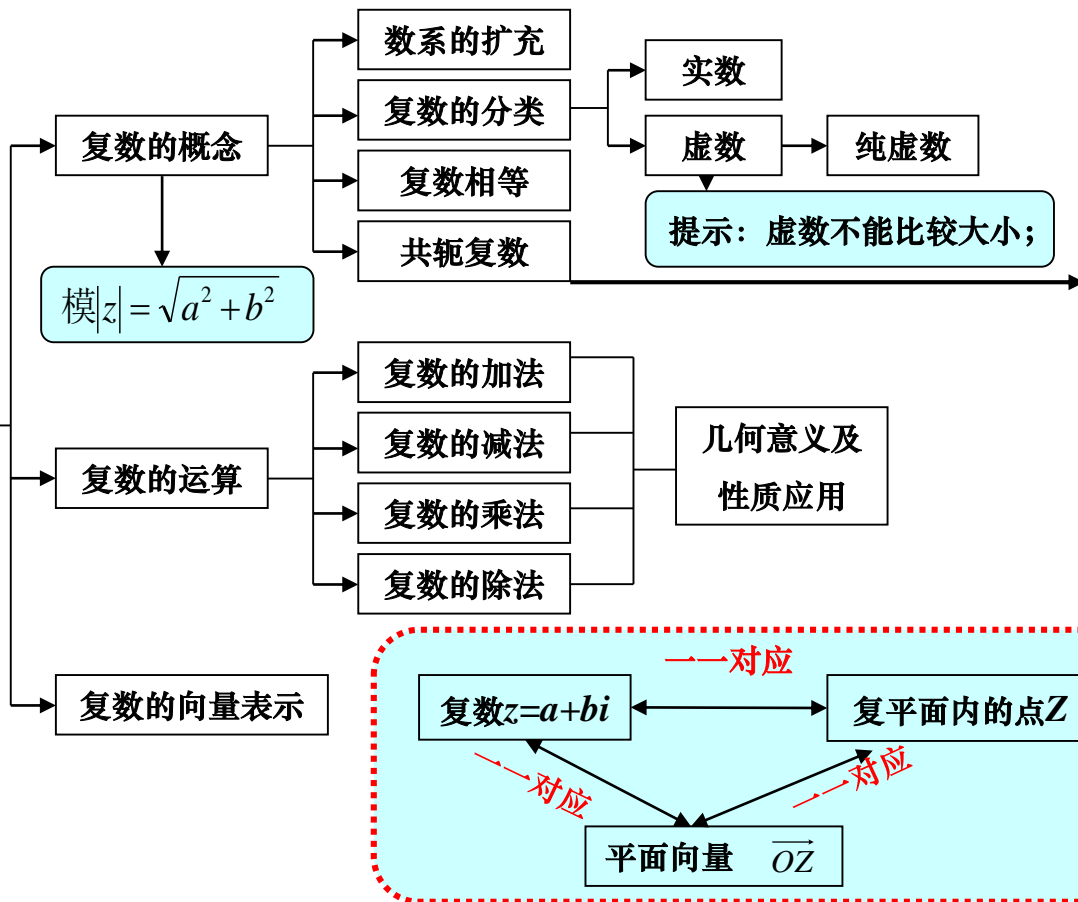
第九部分 概率与统计

概率与统计



第十部分 复数

复数



共轭复数的性质：

设 $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi(a, b \in R)$ 则

- (1) $\bar{\bar{z}} = z$;
- (2) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ 为实数;
- (3) $\bar{z} = -z$ 且 $z \neq 0 \Leftrightarrow z$ 为纯虚数;
- (4) $z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow |z| = 1$;
- (5) $\overline{Z_1 \pm Z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;
- (6) $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
- (7) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0)$;
- (8) z^n 的共轭 $= (\bar{z})^n (n \in N^*)$.

结论:(1)设 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则有 $\omega^2 = \bar{\omega}$,

$\omega^3 = 1, \omega \cdot \bar{\omega} = |\omega|^2 = |\bar{\omega}|^2 = 1, 1 + \omega + \omega^2 = 0 = \omega^n + \omega^{n+1} + \omega^{n+2} (n \in N)$;

(2) $(1 \pm i)^2 = \pm 2i; (1+i)(1-i) = 2; \frac{1}{i} = -i; \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}; \frac{1+i}{1-i} = i; \frac{1-i}{1+i} = -i$;

(3)如果 $n \in N^*$, 有 $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i$;

(4)复平面内两点 Z_1, Z_2 间距离 $d = |z_2 - z_1| = |(x_2 + y_2i) - (x_1 + y_1i)| = |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i|$;

(5)圆的方程: $|z - z_0| = r (r > 0)$;(6)线段 EF 中垂线方程: $|z - z_1| = |z - z_2|$;

(7)椭圆方程: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$;(8)双曲线方程: $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$.

复数模的运算性质: 设 $z_1, z_2 \in C$ 有

(1) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$;

(3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$;(4) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

(5) $|z^n| = |z|^n (n \in N^*)$;(6) $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$.

第十一部分 算法

