



计 算 机 科 学 丛 书

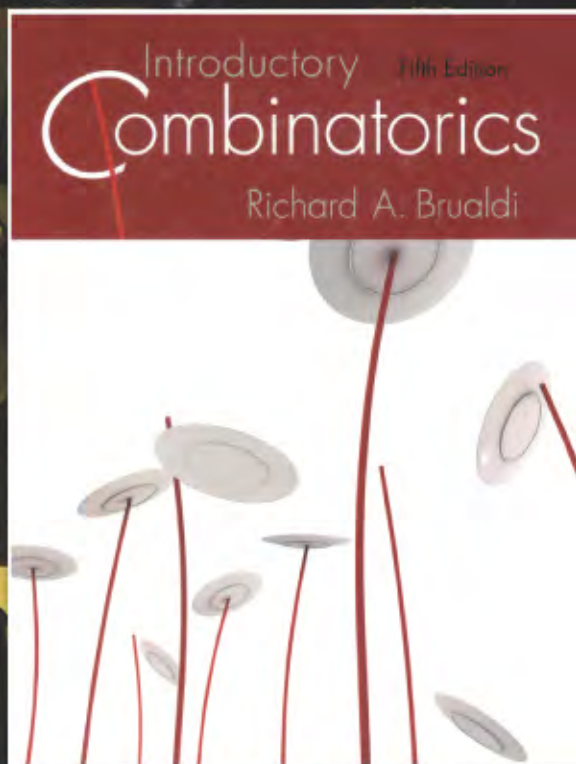
原书第5版

PEARSON

组合数学

(美) **Richard A. Brualdi** 著 冯速 等译
威斯康星大学麦迪逊分校 北京师范大学

Introductory Combinatorics
Fifth Edition



机械工业出版社
China Machine Press

计算机科学丛书

组合数学

(原书第 5 版)

Introductory Combinatorics, Fifth Edition

(美) Richard A. Brualdi 著
威斯康星大学麦迪逊分校
冯 速 等译
北京师范大学

HZ BOOKS
华章图书



机械工业出版社
China Machine Press

本书系统地阐述组合数学基础、理论和方法,侧重于组合数学的概念和思想,论述了鸽巢原理、排列与组合、二项式系数、容斥原理及应用、递推关系和生成函数、特殊计数序列、二分图中的匹配、组合设计、图论、有向图及网络、Pólya 计数法等。此外,各章均包含大量练习题,并在书末给出了参考答案与提示。

本书适合作为高等院校相关专业组合数学课程的教材。

Authorized translation from the English language edition, entitled Introductory Combinatorics, 5E, 9780136020400 by Richard A. Brualdi, published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2010, 2004, 1999, 1992, 1977 by Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., and CHINA MACHINE PRESS Copyright © 2012.

本书中文简体字版由 Pearson Education (培生教育出版集团) 授权机械工业出版社在中华人民共和国境内 (不包括中国台湾地区和香港、澳门特别行政区) 独家出版发行。未经出版者书面许可, 不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

本书封底贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签, 无标签者不得销售。

封底无防伪标均为盗版

版权所有, 侵权必究

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号: 图字: 01-2009-2363

图书在版编目 (CIP) 数据

组合数学 (原书第 5 版) / (美) 布鲁迪 (Brualdi, R. A.) 著; 冯速等译. —北京: 机械工业出版社, 2012. 4

(计算机科学丛书)

书名原文: Introductory Combinatorics, Fifth Edition

ISBN 978-7-111-37787-0

I. 组… II. ①布… ②冯… III. 组合数学 IV. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 050422 号

机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 迟振春

印刷

2012 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

185mm×260mm·23.75 印张

标准书号: ISBN 978-7-111-37787-0

定价: 69.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991; 88361066

购书热线: (010) 68326294; 88379649; 68995259

投稿热线: (010) 88379604

读者信箱: hzsj@hzbook.com

文艺复兴以降，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，计算机学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的计算机产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对计算机教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其计算机科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀计算机教材将对我国计算机教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与Pearson, McGraw-Hill, Elsevier, MIT, John Wiley & Sons, Cengage等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出Andrew S. Tanenbaum, Bjarne Stroustrup, Brian W. Kernighan, Dennis Ritchie, Jim Gray, Alfred V. Aho, John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman, Abraham Silberschatz, William Stallings, Donald E. Knuth, John L. Hennessy, Larry L. Peterson等大师名家的一批经典作品，以“计算机科学丛书”为总称出版，供读者学习、研究及珍藏。大理石纹理的封面，也正体现了这套丛书的品位和格调。

“计算机科学丛书”的出版工作得到了国内外学者的鼎力襄助，国内的专家不仅提供了中肯的选题指导，还不辞劳苦地担任了翻译和审校的工作；而原书的作者也相当关注其作品在中国的传播，有的还专程为其书的中译本作序。迄今，“计算机科学丛书”已经出版了近两百个品种，这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也被越来越多实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着计算机科学与技术专业学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外计算机教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方式如下：

华章网站：www.hzbook.com

电子邮件：hzsj@hzbook.com

联系电话：(010) 88379604

联系地址：北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码：100037



华章教育

华章科技图书出版中心

译者序

Introductory Combinatorics, 5E

组合数学是计算机出现以后迅速发展起来的一门数学分支。计算机科学即算法的科学，而计算机所处理的对象是离散的数据，所以离散对象的处理就成了计算机科学的核心，而研究离散对象的科学恰恰就是组合数学。

本书译自 Richard A. Brualdi 的《Introductory Combinatorics, Fifth Edition》一书，着重于组合学思想的阐述，包括对鸽巢原理、计数技术、排列与组合、Pólya 计数法、二项式系数、容斥原理、生成函数与递推关系以及一些组合结构（如匹配、设计和图等）的讨论。第 5 版经过较大的修订，添加了有限概率、相异代表系、匹配数等内容，同时删除若干不影响对组合数学理解的内容，或将其移作练习题，以保持本书内容不致过于庞大而使读者却步。为方便读者阅读、理解，作者在这一版中做出了很多努力。比如，使用“子集”来描述“组合”的概念，这两个术语虽然本质上是等价的，但对于初学者来说，显然“子集”要比“组合”容易理解得多。更重要的是，通过布局上的调整，使前后文更加通顺，衔接更加自然。

在本书前言中，作者比较详细地介绍了各章的内容和它们之间的关系，谈到了使用本书伸缩性的授课方案以及作者讲授时的经验和偏好，这对于我们深入了解本书的内容和结构以便将它作为教材恰当地使用是很有帮助的。本书原著通俗流畅，深入浅出，生动灵活的写作风格反映了作者对该领域的热情和作为课程讲授的乐趣。

本书第 5 版的翻译工作参考了第 4 版译稿，感谢第 4 版译者的辛勤工作。在翻译过程中，译者对原书中出现的明显排印错误进行了修改，并对基本流算法的陈述做了改写，以便更容易理解，希望不是画蛇添足。

除封面署名外，参与本书翻译工作的人员还有马晶、易超、龚治、李思源、陈辉、周亦洋、韦添等。

由于时间和水平的限制，译文中难免疏漏和错误，期盼广大读者的批评与指正。

译者

2012 年 2 月

在这一新版本中，我做了一些细微的改变，具体概括如下：

在第1章，新增加了一节（1.6节），讨论相互重叠圆的问题，用来具体说明后面章节中所讨论的某些计数问题。之前，这一节的相关内容出现在第7章。

第1章中原来关于切割立方体的一节已经删除，但是相关内容放在练习题中。

之前版本中的第2章（鸽巢原理）改成了第3章。之前版本中关于排列和组合的第3章改成了第2章。帕斯卡公式在之前的版本中第一次出现在第5章中，现在出现在第2章中。另外，为了清晰起见，在关于集合的论述中我们不再强调“组合”这一术语，而启用了本质上等价的术语“子集”。然而，在多重集合的情况下，我们继续使用“组合”，而不使用在我们看来易产生混淆的术语“多重子集”。

此版本的第2章包含一节（2.6节）有限概率简介。

此版本的第3章包含 Ramsey 定理的证明。

第7章的变化比较大，其中生成函数和指数生成函数移到了本章靠前部分（7.2节和7.3节），成为更核心的内容。

分拆数这一节（8.3节）做了扩展。

之前版本中关于二分图匹配的第9章做了根本的改变。现在的第9章是新插入的章节，讨论的是相异代表系（SDR）的问题，包括婚姻和稳定婚姻匹配问题，而不再讨论二分图。

第9章这样改动的结果是，介绍图论的章节（第11章）不再假设先前已介绍过二分图的知识。

再论图论一章（之前版本中的第13章）现在变成了第12章。在本章中，新增加了关于图的匹配数一节（12.5节），在这一节中，第9章中 SDR 的基础结果被用于二分图。

有向图和网络这一章（之前是第12章）现在是第13章。它新增加了一节，回顾了二分图的匹配，其中有些相关内容出现在之前版本的第9章中。

对于第5版，除了以上列出的这些变化之外，还更正了我注意到的所有印刷错误；增加了少量的说明；改动了一些顺序，使前后文更加通顺；另外还增加了练习题，第5版中共有700道练习题。

根据多年来很多读者的评论，这本书似乎已经通过了时间的检验。因此，我总是犹豫不决而迟迟没有做出更多的改变，也没有增加更多的新话题。我不希望一本书“太长”（这一前言也不会太长），也不愿意让这本书迎合每个人的癖好。不过，我的确做了上述细节上的改变，相信这些改变会使这本书更加完善。

与之前各版本一样，这一版可以用于一到两个学期的本科生课程。第一个学期可以侧重计数，而第二个学期可以侧重图论和设计。也可以把相关内容合并在一起作为一个学期的课程，如讲解一些计数和图论知识，或者一些计数与设计理论知识，或者选择其他的组合搭配。下面简要说明各章以及它们之间的相互关系。

第1章是介绍，我通常只从中选出一两个话题，最多花两节课时间。第2章讨论的是排列和组合，这一章应该全讲。第3章讨论的是鸽巢原理，这一章至少应该做简单介绍。但是，需要注意的是，后面没有用到一些较难的鸽巢原理应用以及关于 Ramsey 定理那一节的内容。第4章到第8章主要讨论计数技巧及计数序列的相关性质。这些内容应该按照顺序依次讲解。第4章讨论的是排列和组合的生成方案，包括4.5节的偏序和等价关系的介绍。我认为至少应该讲解等价关

系，因为它们在数学中无处不在。除了第 5 章关于偏序集这一节（5.7 节）之外，其余各章本质上都独立于第 4 章，所以这一章可以跳过或者略讲。你也可以选择根本不讲解偏序集。我把关于偏序集的内容分成两节（4.5 节和 5.7 节），目的是给学生少许时间去消化某些概念。第 5 章讨论的是二项式系数的性质，而第 6 章所涉及的是容斥原理。莫比乌斯反演那节（6.6 节）可以归结到容斥原理，这一节对后面没有用。第 7 章比较长，讨论的是生成函数和递推关系求解。第 8 章主要讨论的是 Catalan 数、第一和第二类 Stirling 数、分拆数以及大 Schröder 数和小 Schröder 数。对于这一章的各节你可以选择学习，也可以选择跳过。第 8 章之后的各章与它都没有关系。第 9 章讨论的是相异代表系（所谓的婚姻问题）。第 12 章和第 13 章要用到第 9 章的一些内容以及第 10 章中的拉丁方一节（10.4 节）。第 10 章讨论的是组合设计的某些内容，它与本书其后的内容无关。第 11 章和第 12 章对图论进行了比较全面的讨论，并稍侧重于某些图论算法。第 13 章讨论的是有向图和网络流。第 14 章讨论置换群作用下的计数问题，这一章大量使用了前面的计数思想。除了最后一个例子之外，它与关于图论和设计的各章无关。

当我将本书用于一学期课程时，喜欢以第 14 章的 Burnside 定理及其几个应用收尾。这种做法使学生们能够解决很多计数问题，而这些用前面几章的计数技巧是不能解决的。通常，我不会讲 Pólya 定理。

继第 14 章之后，我给出了本书一些练习题的答案和提示。少数练习题旁边标上了“*”号，表明它们有相当的挑战性。每一个证明结束及每一个例子结束处都标有“□”号予以明示。

很难评说学习这本书所需要的前提条件。与其他教科书一样，高度激发学生的热情、提起学生的兴趣是很有用的，另外还需要指导教师的热情投入。也许这些前提条件应该这样描述为好：有完备的数学知识，即成功地学习了数学分析相关内容以及线性代数的初等课程。本书对数学分析使用极少，而涉及线性代数的内容也不多，因此，对不熟悉这些内容的读者来说，阅读本书应该不会产生任何问题。

令我感到最欣慰的就是自从本书第 1 版出版之后三十多年来，它仍然得到数学界专业人士的认可。

我非常感谢曾对之前各版本以及这一版本做出评论的人，其中包括发现印刷错误的人。他们是：Russ Rowlett, James Sellers, Michael Buchner, Leroy F. Meyers, Tom Zaslavsky, Nils Andersen, James Propp, Louis Deaett, Joel Brawley, Walter Morris, John B. Little, Manley Perkel, Cristina Ballantine, Zixia Song, Luke Piefer, Stephen Hartke, Evan VanderZee, Travis McBride, Ben Brookins, Doug Shaw, Graham Denham, Sharad Chandarana, William McGovern, Alexander Zakharin。应出版商要求而对第 4 版做出评论以备这一版出版的 Christopher P. Grant 做了非常出色的评论。Chris Jeuell 对第 5 版提出了很多建议，使我避免了更多的印刷错误。Mitch Keller 是一位出色的精审员。虽然我希望不要出错，但是打印稿中也许还是有些错误，这一切都是我的责任。我也非常感谢那些向我指出这些错误的每一个人。Yvonne Nagel 在解决字体难题方面给予我很大的帮助，这已超出了我的专业范畴。

还要感谢 Prentice Hall 的所有出版工作人员——Bill Hoffman、Caroline Celano、Raegan Heerma，他们使第 5 版得以顺利完成。Pat Daly 是一位优秀的文案人员。

我希望这本书能够继续反映出我对组合数学这门学科的热情，以及我对讲授它的热情和方法。最后，我还要感谢我的妻子 Mona，她自始至终都给我的生活带来幸福、活力和勇气。

出版者的话

译者序

前言

第 1 章 什么是组合数学 1

1.1 例子：棋盘的完美覆盖 2

1.2 例子：幻方 4

1.3 例子：四色问题 6

1.4 例子：36 军官问题 7

1.5 例子：最短路径问题 9

1.6 例子：相互重叠的圆 10

1.7 例子：Nim 游戏 10

1.8 练习题 12

第 2 章 排列与组合 16

2.1 四个基本的计数原理 16

2.2 集合的排列 21

2.3 集合的组合（子集） 24

2.4 多重集合的排列 28

2.5 多重集合的组合 32

2.6 有限概率 34

2.7 练习题 37

第 3 章 鸽巢原理 42

3.1 鸽巢原理：简单形式 42

3.2 鸽巢原理：加强版 44

3.3 Ramsey 定理 47

3.4 练习题 50

第 4 章 生成排列和组合 53

4.1 生成排列 53

4.2 排列中的逆序 57

4.3 生成组合 60

4.4 生成 r 子集 67

4.5 偏序和等价关系 70

4.6 练习题 73

第 5 章 二项式系数 78

5.1 帕斯卡三角形 78

5.2 二项式定理 80

5.3 二项式系数的单峰性 85

5.4 多项式定理 88

5.5 牛顿二项式定理 90

5.6 再论偏序集 92

5.7 练习题 95

第 6 章 容斥原理及应用 100

6.1 容斥原理 100

6.2 带重复的组合 105

6.3 错位排列 107

6.4 带有禁止位置的排列 110

6.5 另一个禁止位置问题 113

6.6 莫比乌斯反演 114

6.7 练习题 124

第 7 章 递推关系和生成函数 128

7.1 若干数列 128

7.2 生成函数 134

7.3 指数生成函数 138

7.4 求解线性齐次递推关系 142

7.5 非齐次递推关系 152

7.6 一个几何例子 157

7.7 练习题 160

第 8 章 特殊计数序列 164

8.1 Catalan 数 164

8.2 差分序列和 Stirling 数 169

8.3 分拆数 180

8.4 一个几何问题 185

8.5 格路径和 Schröder 数 187

8.6 练习题 195

第 9 章 相异代表系 198

9.1 问题表述 198

9.2 SDR 的存在性 200

9.3 稳定婚姻 204

9.4 练习题 207

第 10 章 组合设计 210

10.1 模运算 210

10.2 区组设计 217

10.3 Steiner 三元系 224

10.4 拉丁方 228

10.5 练习题	241	12.6 连通性	303
第 11 章 图论导引	245	12.7 练习题	306
11.1 基本性质	245	第 13 章 有向图和网络	310
11.2 欧拉迹	251	13.1 有向图	310
11.3 哈密顿路径和哈密顿圈	256	13.2 网络	316
11.4 二分多重图	259	13.3 回顾二分图匹配	321
11.5 树	263	13.4 练习题	326
11.6 Shannon 开关游戏	268	第 14 章 Pólya 计数	330
11.7 再论树	271	14.1 置换群与对称群	330
11.8 练习题	278	14.2 Burnside 定理	337
第 12 章 再论图论	284	14.3 Pólya 计数公式	341
12.1 色数	284	14.4 练习题	351
12.2 平面和平面图	290	练习题答案与提示	354
12.3 五色定理	293	参考文献	363
12.4 独立数和团数	295	索引	364
12.5 匹配数	300		



什么是组合数学

在生活中组合数学随处可见。你是否曾经遇到这样的问题：有 n 个参赛队，每个队只能与其他队比赛一次，那么有多少场比赛呢？你是否曾经想过，在用笔遍历某个网络时，在笔不离开纸且网络任何一部分只能经过一次的前提下，有多少遍历方法呢？你是否计算过纸牌游戏中的满堂红的手数，以便确定满堂红的概率是多少呢？你是否尝试着解决一个数独问题呢？这些都是组合问题。正如这些例子所揭示的那样，组合数学扎根于数学和游戏之中。过去研究过的许多问题，不论是出于娱乐还是出于美学上的需求，现今在纯科学和应用科学领域都有着高度的重要性。今天，组合数学是数学的一个重要分支，组合数学高速成长起来的原因之一是计算机在我们的社会中起着重要的作用。因为计算机的速度不断增加，所以它们已经能够处理大型问题，这在之前是不可能做到的。但是计算机不能独立运行，它们必须按程序运行。这些程序的基础通常是用来解决这些问题的组合数学算法。这些程序的有效性分析主要从程序的运行时间和存储需求等方面考虑，这其中涉及更多的组合数学思想。

组合数学持续发展的另一个原因就是它能够运用到很多学科，而之前这些学科与数学几乎没有关联。因此，我们会发现组合数学的思想和技术不仅用于传统的应用科学领域（比如说物理学），还应用于社会科学、生物科学、信息论等领域。另外，组合数学和组合数学思想在很多数学分支中也变得越来越重要。

组合数学所关心的问题就是把某个集合中的对象排列成某种模式，使其满足一些指定的规则。下面是两种反复出现的通用问题：

- 排列的存在性。当我们想排列一个集合的对象使其满足特定条件时，这样的排列是否存在也许不是显然的。这是最基本的问题。如果这样的排列不总是可行的，那么我们很自然就要问，在什么样的条件（必要条件和充分条件）下可以实现所希望的排列。
- 排列的列举或分类。当指定的排列可行时，就有可能存在很多种实现它的方法。于是我们就要计数或分类不同类型的排列。

如果特定问题的排列数量较小，那么我们就可以列出这些排列。这里，重要的是要理解列出所有排列和确定它们的数量之间的差异。一旦这些排列被列出来，那么我们就可以对某个自然数 n 建立它们与整数集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 之间的一一对应，从而计数这些排列。我们的计算方法就是：1, 2, 3, ...。然而，我们主要关心的是，对于特定类型的排列，在不列出它们的情况下确定这些排列数的技术问题。当然，这个排列数目也许非常大，以至于我们无法把它们全部列出来。

下面是另外两种常常出现的组合问题。

- 研究已知的排列。在你完成了构建满足特定条件的排列之后（也许这是一项困难的工作），接下来可以研究它的性质和结构。
- 构造最优排列。如果存在多个可行的排列，那么我们也许想要确定满足某些优化标准的排列，也就是说，在某种指定的意义下去寻找一个“最好”或者“最优”的排列。

因此，关于组合数学的一般描述也许就是，组合数学是研究离散构造的存在、计数、分析和优化等问题的一门学科。虽然一些离散结构是无限的，但是在本书中，离散一般指的是有限。

组合数学验证发现的主要工具之一是数学归纳法。归纳法是一个强大的方法，在组合数学中尤为如此。通常情况下，用数学归纳法证明一个较强的结果要比证明一个较弱的结果更为容易。虽然归纳步骤需要证明更多的东西，但归纳假设可以更强。数学归纳法的技巧是寻找假设和结论的正确平衡以便进行归纳。我们假定读者熟悉归纳法，通读了这本书之后，读者会对此有更加深刻的了解。

[2]

组合问题的解决方案通常可以使用专门论证来获取，有时需要结合一般理论的使用。我们不可能总是退回到公式或者已知的结果上。组合问题的一个典型的解决方法可能包含下面几个步骤：(1) 建立数学模型；(2) 研究模型；(3) 计算若干小案例，树立信心，洞察一切；(4) 运用详细的推理和巧思最终找到问题的答案。计数问题、容斥原理、鸽巢原理、递推关系和生成函数、Burnside 定理和 Pólya 计数公式等都是—般原理和方法的案例，我们将在后面各章陆续讲解它们。然而，有时候还需要你的聪明才智，能够看破要使用的专门方法或者公式并知道如何去运用它们。因此，在解决组合问题中经验是非常重要的。也就是说，一般来说用组合数学解决问题与用数学解决问题一样，你解决的问题越多，你就越有可能解决随后的新问题。

下面我们考虑几个组合问题的粗浅例子。前面几个问题相对简单，而后面几个问题的结果曾经是组合数学的主要成就。我们将在后续章节中更加详细地讨论其中的几个问题。

1.1 例子：棋盘的完美覆盖

考虑一张普通的棋盘，它被分成 8 行 8 列共 64 个方格。假设有一些形状相同的多米诺骨牌，每张牌正好可以覆盖棋盘上两个相邻的方格。是否能够把 32 张多米诺骨牌摆放在棋盘上，使得没有两张牌重叠，且在每张牌覆盖两个方格的条件下覆盖棋盘上的所有方格呢？我们把这样的摆放称为棋盘的多米诺骨牌完美覆盖或者盖瓦。这是一个很简单的摆放问题，我们可以很快构造出很多不同的完美覆盖。计数出不同完美覆盖的数量虽说比较困难，但也不是没有可能。1961 年 Fischer^①发现了这个数，它是 $12\,988\,816 = 2^4 \times 17^2 \times 53^2$ 。我们可以用更一般的棋盘代替这常用的棋盘，这个更一般的棋盘拥有 m 行 n 列，被分成 mn 个方格。此时，它的完美覆盖不一定存在。事实上，对于 3×3 的棋盘来说，它就不存在完美覆盖。那么对于什么样的 $m \times n$ 棋盘存在完美覆盖呢？不难看出，对于 $m \times n$ 棋盘，它有完美覆盖当且仅当 m 和 n 中至少有一个是偶数，或者等价地说成：当且仅当这个棋盘的方格总数是偶数。Fischer 得出了计算 $m \times n$ 棋盘的不同完美覆盖数的一般公式，这个公式中含有三角函数。这个问题等价于分子物理学中一个非常著名的问题，即所谓的二聚物问题。这一问题始于对表面上的双原子（二聚物）吸收的研究。棋盘方格对应于分子，而多米诺骨牌对应于二聚物。

[3]

再来考虑 8×8 棋盘，并用一把剪刀剪掉一条对角线上两个对角上的两个方格，于是剩余方格总数是 62 个。那么是否有可能用 31 张多米诺骨牌得到这个“被剪过的”棋盘的完美覆盖呢？尽管这个被剪过的棋盘与 8×8 棋盘非常接近，尽管原来的棋盘有 1200 多万个完美覆盖，但是这个被剪过的棋盘却没有完美覆盖。这一结论的证明本身就是一个简单但又巧妙的组合推理的实例。在标准的 8×8 棋盘上，通常把方格交替地着上黑色和白色，于是有 32 个白色方格和 32 个黑色方格。如果我们剪掉一条对角线上的两个对角上的方格，那么就剪掉了相同颜色的两个方格，比如说是两个白色方格。因此就剩下 32 个黑色方格和 30 个白色方格。但是每一张多米诺骨牌要覆盖一个黑格和一个白格，因此在棋盘上 31 张不重叠的多米诺骨牌覆盖 31 个黑格和 31 个白格。这样我们得出结论是这个被剪过的棋盘没有完美覆盖。上述推理可以总结为：

① M. E. Fischer, Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice, *Physical Review*, 124 (1961), 1664–1672。

$$31 \begin{array}{|c|c|} \hline \text{B} & \text{W} \\ \hline \end{array} \neq 32 \begin{array}{|c|} \hline \text{B} \\ \hline \end{array} + 30 \begin{array}{|c|} \hline \text{W} \\ \hline \end{array}$$

更一般地, 我们可以取一个 $m \times n$ 棋盘, 它的方格也交替地着上黑色和白色, 而且随机切掉一些方格, 于是剩下一个切过的棋盘。什么时候这个切过的棋盘有完美覆盖呢? 要使完美覆盖存在, 这个切过的棋盘必须有相同数目的黑格和白格。但是这个条件不是充分条件, 如图 1-1 所示。

因此, 我们就要问: 一个切过的棋盘存在完美覆盖的充分必要条件是什么? 我们将在第 9 章再讨论这个问题, 并得到一个圆满的答案。在那里, 我们就分配胜任工作的应用例子给出这个问题的一个实用公式。

对于 $m \times n$ 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的问题, 还有另外一个拓展。设 b 是一个正整数。现在不用多米诺骨牌, 取而代之的是 $1 \times b$ 的条形牌, 它是由 b 个 1×1 方格并排连接而成的。这样的条形牌称为 b 格牌 (b -ominoe)。它们可以覆盖一行或一列上连续的 b 个方格。图 1-2 图示的是一个 5 格牌。2 格牌是多米诺骨牌。1 格牌也被称为单牌。

4

$m \times n$ 棋盘的 b 格牌完美覆盖是棋盘上 b 格牌的一个排列, 使得 (1) 没有两个 b 格牌重叠, (2) 每一个 b 格牌覆盖棋盘上 b 个方格, (3) 棋盘上的所有方格被覆盖。什么时候 $m \times n$ 棋盘有 b 格牌覆盖的完美覆盖呢? 因为棋盘上的每一个方格正好被一个 b 格牌覆盖, 为了有完美覆盖, b 必须是 mn 的一个因子。的确, 完美覆盖存在的一个充分条件是 b 是 m 或者 n 的一个因子。因为如果 b 是 m 的一个因子, 那么我们就可以正好把 m/b 个 b 格牌覆盖在这个 $m \times n$ 棋盘上的 n 列中的每一列上, 而如果 b 是 n 的一个因子, 那么我们就可以正好把 n/b 个 b 格牌覆盖在这个 $m \times n$ 棋盘上的 m 行中的每一行上。在这里, 这个充分条件是否也是完美覆盖的必要条件呢? 暂时假设 b 是一个素数, 而且存在 $m \times n$ 棋盘的 b 格牌覆盖的完美覆盖。那么, 因为 b 是 mn 的一个因子, 根据素数的性质可知 b 是 m 或者 n 的因子。因此我们说至少当 b 是素数时, $m \times n$ 棋盘可能被 b 格牌完美覆盖的充分必要条件是 b 是 m 或者 n 的因子。

当 b 不是素数时, 我们必须采用不同的方式加以讨论。假定有 $m \times n$ 棋盘的 b 格牌覆盖的完美覆盖。我们要证明 m 或者 n 被 b 除时余数是 0。设 m 和 n 除以 b 时的商和余数分别是 p, q 和 r, s , 则:

$$m = pb + r, \quad \text{其中 } 0 \leq r \leq b-1$$

$$n = qb + s, \quad \text{其中 } 0 \leq s \leq b-1$$

如果 $r=0$, 那么 b 是 m 的一个因子。如果 $s=0$, 那么 b 是 n 的一个因子。通过交换这个棋盘的行和列, 不妨设 $r \leq s$ 。于是我们要证明 $r=0$ 。

现在把多米诺骨牌 ($b=2$) 覆盖时棋盘交替着成黑白两色的情况推广到 b 种颜色的情况。我们选出 b 种颜色并把它们标注上 $1, 2, \dots, b$ 。接下来用图 1-3 所示的方式给 $b \times b$ 棋盘着色, 然后再用图 1-4 给出的方式把这种着色扩展到 $m \times n$ 棋盘。图 1-4 是 $m=10, n=11, b=4$ 的情况。

5

W	*	W	B	W
*	W	B	*	B
W	B	*	B	W
B	W	B	W	B



1	2	3	...	$b-1$	b
b	1	2	...	$b-2$	$b-1$
$b-1$	b	1	...	$b-3$	$b-2$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
2	3	4	...	b	1

图 1-1

图 1-2 一个 5 格牌

图 1-3 使用 b 种颜色对一个 $b \times b$ 棋盘着色

完美覆盖的每一张 b 格牌覆盖 b 个方格且每一个方格覆盖一种颜色。于是, 在棋盘上每一种颜色的方格数一定相同。下面我们考虑把这个棋盘分成三个部分: 上方 $pb \times n$ 部分, 左下方 $r \times qb$ 部分和右下方 $r \times s$ 部分。(图 1-4 给出的是 10×11 棋盘, 我们已经有的三个部分是上方 8×11 ,

左下方 2×8 , 右下方 2×3 。) 在上方部分, 在每一列上, 因为每一种颜色出现 p 次, 所以它们总共出现 pn 次。在左下方部分, 在每一行上, 因为每一种颜色出现 q 次, 因此它们总共出现 rq 次。因为在整个棋盘上每一种颜色出现的次数相同, 所以我们在右下方 $r \times s$ 部分上, 每一种颜色出现的次数也一定相同。

在右下方 $r \times s$ 部分上, 颜色 1 出现多少次呢? 因为已知 $r \leq s$, 且我们的着色特点使得颜色 1 在 $r \times s$ 部分的每一行上出现一次, 所以它在 $r \times s$ 部分上出现 r 次。现在我们计数在 $r \times s$ 部分上的方格总数。一方面, 它有 rs 个方格; 另一方面, b 种颜色的每一种颜色都出 r 次, 因此总共有 rb 个方格。令它们相等, 我们得到 $rs = rb$ 。如果 $r \neq 0$, 我们得到 $s = b$, 这与 $s \leq b-1$ 矛盾。所以必须有 $r = 0$ 。我们总结如下:

$m \times n$ 棋盘有 b 格牌的完美覆盖当且仅当 b 或者是 m 的一个因子或者是 n 的一个因子。

下面给出上面陈述的一个惊人的改述: 如果完美覆盖中所有 b 格牌都是水平放置或者所有 b 格牌都是垂直放置, 则称这样的完美 b 格牌覆盖是平凡的。于是 $m \times n$ 棋盘有 b 格牌覆盖的完美覆盖当且仅当它有平凡完美覆盖。应当指出的是上面的陈述并不意味着只有平凡覆盖才是完美覆盖。它只是说如果完美覆盖是可能的, 那么平凡完美覆盖也是可能的。

下面我们给出一个很有特色的多米诺骨牌问题, 并以此结束本节的内容。

考虑 4×4 棋盘, 用 8 张多米诺骨牌就可以完美覆盖它。证明总可以把这个棋盘横着切成非空的两块或者竖着切成非空的两块而不切断 8 张多米诺骨牌中的任意一张。称这样的水平切割直线或者垂直切割直线为这个完美覆盖的断层线 (fault line)。因此一条水平断层线表明这个 4×4 棋盘的完美覆盖是由这样两个完美覆盖组成的: 对于某个 $k = 1, 2, 3$, 一个是 $k \times 4$ 棋盘的完美覆盖, 另一个是 $(4-k) \times 4$ 棋盘的完美覆盖。假设 4×4 棋盘存在这样一个完美覆盖, 使得把棋盘切成两个非空部分的三条水平切割线和垂直切割都不是断层线。设 x_1, x_2, x_3 分别是被水平切割线切到的多米诺骨牌数 (参见图 1-5)。

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2

图 1-4 10×11 棋盘的 4 颜色着色

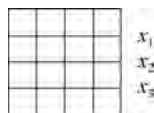


图 1-5

因为这个完美覆盖没有断层线, 所以 x_1, x_2, x_3 都是正数。一个水平方向的多米诺骨牌覆盖一行上的两个方格, 而垂直方向的多米诺骨牌在两行上分别覆盖一个方格。于是可以得出结论 x_1, x_2, x_3 都是偶数, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

而且在这个完美覆盖中至少有 6 个垂直方向上的多米诺骨牌。用类似的方法, 我们可以得出至少存在 6 个水平方向上的多米诺骨牌。由于 $12 > 8$, 于是我们得到一个矛盾的结论。因此, 4×4 棋盘的多米诺骨牌的完美覆盖不可能不产生断层线。

1.2 例子: 幻方

幻方是最古老且最流行的数学游戏之一, 它曾激起很多重要历史名人的兴趣。一个 n 阶幻方就是一个由整数 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 按照下面的方式构成的 $n \times n$ 的矩阵: 它的每一行和每一列以

及两条对角线上的数字总和相等，都等于某个整数 s 。这个整数 s 被称为这个幻方的幻和。下面是幻和分别为 15 和 34 的 3 阶幻方和 4 阶幻方：

7

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

在中世纪时代，人们对幻方有某种神秘主义的看法；人们把它们佩戴在身上用来辟邪以期获得庇护。本杰明·富兰克林就构造出很多有额外性质的幻方[⊖]。

n 阶幻方中所有整数的和是

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

上面的和利用了算术级数的求和公式（参见 7.1 节）。因为 n 阶幻方有 n 行，且幻和是 s ，所以我们可以得到关系式 $ns = n^2(n^2 + 1)/2$ 。因此，任意两个 n 阶幻方都有相同的幻和，即

$$s = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

与此相关的组合问题是确定可以构成 n 阶幻方的 n 的值以及寻找构造幻方的一般方法。不难验证不存在 2 阶幻方（这样的幻方的幻和应该是 5）。而对于其他所有 n 的值，都可以构造出 n 阶幻方。有很多特殊的构造方法，在这里我们介绍一种方法，它是 la Loubère 在 17 世纪发现的构造方法，其中 n 是奇数。首先把 1 放置在第一行的中间，其后面的整数（从 2 开始）按照它们的自然顺序放置在从左下方到右上方的一条对角线上，并做如下修正：

(1) 当到达第一行时，下一个整数的放置位置是：它所处的行是最后一行，所处的列是紧跟着前一个整数所处列的后面一列。

(2) 当到达最右边的一列时，下一个整数的放置位置是：它所处的列是最左边的列（即第一列），它所处的行是紧跟着前一个整数所处行的上一行。

(3) 当达到一个已经填上数的方格或者已经达到幻方的右上角时，下一个整数放置的位置是填写上一个数的方格的直接下方。

8

(1.1) 中的 3 阶幻方和下面的 5 阶幻方都是根据 la Loubère 的方法构造而成的。

$$\begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

至于构造阶数不等于 2 的偶数阶幻方和奇数阶幻方的其他方法可以在 Rouse Ball[⊖]的著作中找到。下面是富兰克林构造出来的两个 8 阶幻方：

$$\begin{bmatrix} 52 & 61 & 4 & 13 & 20 & 29 & 36 & 45 \\ 14 & 3 & 62 & 51 & 46 & 35 & 30 & 19 \\ 53 & 60 & 5 & 12 & 21 & 28 & 37 & 44 \\ 11 & 6 & 59 & 54 & 43 & 38 & 27 & 22 \\ 55 & 58 & 7 & 10 & 23 & 26 & 39 & 42 \\ 9 & 8 & 57 & 56 & 41 & 40 & 25 & 24 \\ 50 & 63 & 2 & 15 & 18 & 31 & 34 & 47 \\ 16 & 1 & 64 & 49 & 48 & 33 & 32 & 17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 17 & 47 & 30 & 36 & 21 & 43 & 26 & 40 \\ 32 & 34 & 19 & 45 & 28 & 38 & 23 & 41 \\ 33 & 31 & 46 & 20 & 37 & 27 & 42 & 24 \\ 48 & 18 & 35 & 29 & 44 & 22 & 39 & 25 \\ 49 & 15 & 62 & 4 & 53 & 11 & 58 & 8 \\ 64 & 2 & 51 & 13 & 60 & 6 & 55 & 9 \\ 1 & 63 & 14 & 52 & 5 & 59 & 10 & 56 \\ 16 & 50 & 3 & 61 & 12 & 54 & 7 & 57 \end{bmatrix}$$

⊖ 参见 P. C. Pasles, The Lost Squares of Dr. Franklin: Ben Franklin's Missing squares and the Secret of the Magic Circle, *Amer. Math. Monthly*, 108 (2001), 489-511. 还可以参见 P. C. Pasles, *Benjamin Franklin's Numbers: An Unsung Mathematical Odyssey*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

⊖ W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*; revised by H. S. M. Coxeter. Macmillan, New York (1962), 193-221.

这些幻方有一些有趣的性质。你能看出有什么性质吗？

人们已经研究了三维的幻方。 n 阶幻方体 (magic cube) 是按下述方式由整数 $1, 2, 3, \dots, n^3$ 组成的 $n \times n \times n$ 的立方矩阵, 即它在下列直线上的 n 个单元中的整数和 s 都相同:

- (1) 与这个立方体的边平行的直线;
- (2) 每个平面截面的两条对角线;
- (3) 四条空间对角线。

数 s 被称为这个幻方体的幻和 (magic sum), 它的值等于 $(n^4 + n)/2$ 。我们把不存在 2 阶幻方体的证明留作一道简单的练习题, 而在下面证明不存在 3 阶幻方体。

假设存在 3 阶幻方体。那么它的幻和一定等于 42。考虑任意 3×3 平面截面, 其元素如下所示:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

因为这个立方体是幻方体, 所以根据幻方体的定义下面等式成立:

$$\begin{aligned} a + y + f &= 42 \\ b + y + e &= 42 \\ c + y + d &= 42 \\ a + b + c &= 42 \\ d + e + f &= 42 \end{aligned}$$

上面等式中前三个等式之和减去后两个等式之和后, 我们得到 $3y = 42$, 因此 $y = 14$ 。这表明 14 一定是幻方体每个平面截面的中心, 因为有七个平面截面, 所以 14 应该占据 7 个位置。但是它只能占据一个位置, 所以我们得出不存在 3 阶幻方体的结论。不存在 4 阶幻方体的证明要困难得多。Gardner^① 的一篇论文中给出了一个 8 阶幻方体。

尽管幻方仍继续吸引着数学家们的注意, 但在本书中我们不再对此做进一步的讨论。

1.3 例子: 四色问题

考虑平面上的地图或者球面上的图, 其上的国家都是连通区域^②。为了快速区分出不同的国家, 我们必须给它们着色使得有共同边界的两个国家被着上不同的颜色 (角点不算作共同边界)。能够保证如此着色的每张地图所需要的最少颜色数量是多少? 直到不久前, 这一问题还是数学中尚未解决的著名问题之一。因为它陈述简单易于理解, 所以吸引了很多非专业人士。除著名的角三等分问题之外, 与其他任何著名数学问题相比, 四色问题都更能激起诸多业余人士的兴趣, 很多人提出了错误的解决方案。1850 年 Francis Guthrie 首先提出了一个解, 当时他还是一名研究生。这个问题还带来了大量的数学研究。很容易看到, 有些地图需要四种颜色。例如图 1-6 给出的地图就是一个例子。因为这张地图中四个国家中的每一对国家都有共同的边界, 很显然给这张地图着色需要四种颜色。1890 年, Heawood^③ 证明五种颜色足以给任何一张地图着色。我们将在第 12 章中给出这一结论的

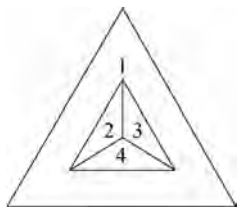


图 1-6

① M. Gardner, Mathematical Games, *Scientific American*, January (1976), 118-123。

② 因此, 密歇根州不能作为这样一张地图的国家, 除非我们承认麦肯诺斯海峡把密歇根州上下岛连通起来。肯塔基州也不能, 因为它的富尔顿县的最西端完全被密苏里州和田纳西州包围着。

③ P. J. Heawood, Map-Colour Theorems, *Quarterly J. Mathematics*, Oxford ser., 24 (1890), 332-338。

证明。也不难证明不存在这样的平面地图，它有五个国家，每一对国家都有共同的边界。如果这样的地图存在，那么它将需要五种颜色。但是没有每两个国家有共同边界的五个国家并不表示四种颜色足以给它着色。完全有可能存在某个平面地图因为某种很微妙的原因而需要五种颜色着色。 [10]

目前有很多方法证明仅用四种颜色便可以给每一张平面地图着色，但是它们实质上都需要计算机的计算[⊖]。

1.4 例子：36 军官问题

给定来自 6 种军衔和 6 个军团的 36 名军官，能不能把他们排列成一个 6×6 编队，使得每一行上和每一列上满足每个军衔有一名军官且每个军团有一名军官呢？这个问题是 18 世纪由瑞典数学家 L. Euler (欧拉) 提出的一个数学娱乐问题，它对统计学特别是试验设计等产生重要的影响 (参见第 10 章)。可以给一名军官指定一个有序对 (i, j) ，其中 $i (i=1, 2, \dots, 6)$ 表示他的军衔， $j (j=1, 2, \dots, 6)$ 表示他所属的军团。于是，这个问题要问的是：

能不能把这 36 个有序对 $(i, j) (i=1, 2, \dots, 6; j=1, 2, \dots, 6)$ 排列成一个 6×6 的矩阵，使得在每一行和每一列上整数 1, 2, \dots , 6 都能以某种顺序出现在有序对的第一个位置上，且都能以某种顺序出现在有序对的第二个位置上呢？

我们可以把这样的矩阵分割成两个 6×6 矩阵，其中一个对应于有序对的第一个位置 (军衔矩阵)，另一个对应于有序对的第二个位置 (军团矩阵)。因此，这个问题又可以陈述如下：

是否存在两个 6×6 矩阵，它们的项都取自于整数 1, 2, \dots , 6，使得

[11]

(1) 在这两个矩阵中的每一行和每一列上整数 1, 2, \dots , 6 都以某种顺序出现，而且

(2) 当并置 (juxtapose) 这两个矩阵时，所有有序对 $(i, j) (i=1, 2, \dots, 6; j=1, 2, \dots, 6)$ 全部出现呢？

为了使这个问题更具体些，我们假设有 9 名军官，分别来自 3 个不同的军衔和 3 个不同军团。于是此时这个问题的一个解是

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow & \begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \end{bmatrix} \\ \text{军衔矩阵} & \text{军团矩阵} & \text{并置矩阵} \end{array} \quad (1.2)$$

前面的军衔矩阵和军团矩阵是 3 阶拉丁方 (Latin square) 的例子；整数 1, 2, 3 分别在每一行和每一列上出现一次。下面分别是 2 阶和 4 阶拉丁方：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

(1.2) 中的两个 3 阶拉丁方称为正交的 (orthogonal)，因为当把它们并置时生成所有可能的 9 个有序对 (i, j) ，其中 $i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$ 。因此我们可以改述欧拉问题如下：

存在两个 6 阶正交拉丁方吗？

欧拉研究了更一般的 n 阶正交拉丁方的问题。很容易看到不存在 2 阶正交拉丁方，因为除了 (1.3) 中给定的 2 阶拉丁方外，另外一个只能是

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

⊖ K. Appel and W. Haken, Every Planar Map is Four Colorable, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82 (1976), 711-712; K. Appel and W. Haken, *Every Planar Map is Four Colorable*, American Math. Society, Providence, RI (1989); and N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, and R. Thomas, The Four-Colour Theorem, *J. Combin. Theory Ser. B*, 70 (1997), 2-44.

而这两个拉丁方不是正交的。对于 n 为奇数及含有因子 4 的情况，欧拉给出了如何构造 n 阶正交拉丁方对的方法。注意，这不包括 $n=6$ 的情况。经过多次尝试，他给出了结论但没有证明，其结论是不存在 6 阶正交拉丁方对，而且他猜测说对于整数 6, 10, 14, 18, \dots , $4k+2$, \dots ，不存在相应阶数的正交拉丁方对。1901 年，Tarry^① 利用穷举法证明了 $n=6$ 时欧拉的猜测是正确的。大约 1960 年前后，三位数学统计学家 R. C. Bose、E. T. Parker 和 S. S. Shrikhande^② 成功地证明了对于所有 $n>6$ 的整数，欧拉猜想是不正确的。也就是说，对于形如 $4k+2$, $k=2, 3, 4, \dots$ 的每一个 n ，他们给出了构造 n 阶拉丁方对的方法。这是一个了不起的成就，至此给欧拉猜想打上了休止符。后面我们将揭示如何利用称为有限域的有限数系来构造正交拉丁方的方法，以及如何把它们运用于试验设计之中。

作为本节的结束，我们看一下 2005 年在全世界范围开始流行的称为数独的数字放置游戏。游戏要求构造如下所示被分成 9 个 3×3 方格的特殊 9 阶拉丁方：

在每一个数独游戏中，已经用某种方法填充了 9×9 方格中的某些项，使得可以唯一合理地填充剩余方格，使其成为 9 阶拉丁方且满足特殊的限制条件，即每一个 3×3 方格都包含数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9。这样，9 行 9 列中的每一行和每一列以及 3×3 方格都要包含数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中的每一个数字一次。数独游戏的难易程度取决于确定如何填充空格以及按什么顺序填充所需的逻辑强度。

下面是一个数独游戏的例子：

3		5				2		7
			7		3			
	4	6				5	8	
	3		1		9		6	
			2		7			
	8		4		5			9
	2	1				6	3	
			8		6			
6		4				8		1

这个游戏的解是

3	9	5	6	4	8	2	1	7
2	1	8	7	5	3	9	4	6
7	4	6	9	2	1	5	8	3
5	3	2	1	8	9	7	6	4
4	6	9	2	3	7	1	5	8
1	8	7	4	6	5	3	9	2
8	2	1	5	7	4	6	3	9
9	7	3	8	1	6	4	2	5
6	5	4	3	9	2	8	7	1

① G. Tarry, Le Problème de 36 officiers, *Compte Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel*, 1 (1900), 122-123; 2 (1901), 170-203.

② R. C. Bose, E. T. Parker and S. S. Shrikhande, Further Results on the Construction of Mutually Orthogonal Latin squares and the Falsity of Euler's conjecture, *Canadian Journal of Mathematics*, 12 (1960), 189-203.

一个数独游戏的解是一个称为公平设计的拉丁方的实例，它把一个 $n \times n$ 的方格分割成 n 个区域，每个区域都含有 n 个方格且数字 $1, 2, \dots, n$ 中的每一个在它的每一行和每一列上出现一次（如刚才我们得到的拉丁方），并在 n 个区域中的每个区域上出现一次^①。

下面给出一个公平设计的简单例子，它把 4×4 的方格分割成 4 个 L 形区域，每一个 L 形区域有四个方格。如下所示，我们利用符号 ♠, ◇, ♣ 和 ♥ 来代表不同的区域。

♠	♠	♠	◇
♠	◇	◇	◇
♣	♥	♥	♥
♣	♣	♣	♥

→

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1.5 例子：最短路径问题

考虑一个由街道和交叉路口组成的系统。有个人想从交叉路口 A 走到另一个路口 B。一般来说，从 A 到 B 可能有多条可行的路径。我们的问题是确定这样一条路径，使得经过的距离尽可能短，即最短路径。这是组合优化问题的一个例子。解决这个问题一个可行方法就是以某种系统的方式列出从 A 到 B 的所有可能的路径。因为经过任何一条路径的次数都没有必要多于一次，所以这样的路径的数量是有限的。于是就可以计算每一条路径的距离并从中选出最短的路径。但这不是一个非常有效的方法，特别是当系统很大时，工作量会非常之大，从而无法在合理的时间内得到一个解。确定最短路径的算法必须具有的特性是在执行这个算法过程中所涉及的工作量不能随着系统规模的增大而增加得太快。换句话说，工作量应该受到问题规模的一个多项式函数的限定（与此相对的是受到像指数函数这样的限定）。在 11.7 节，我们将描述一个这样的算法。这样的算法的确可以找到从 A 到这个系统中的任何交叉路口的最短路径。

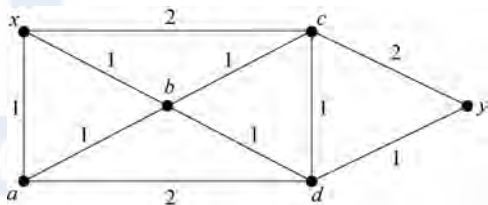


图 1-7

寻找两个交叉路口之间的最短路径的问题可以抽象地叙述如下。设 V 是称为顶点 (vertex) (它对应于交叉路口和死胡同的端点) 的对象的有限集合， E 是称为边 (edge) (它对应于街道) 的无序顶点对的集合。于是，有些顶点对被边连接起来，而有些顶点之间则没有边连接。序对 (V, E) 称为图 (graph)。在图中连接顶点 x 和 y 的途径 (walk) 是这样的顶点序列，其中第一个顶点是 x ，最后一个顶点是 y ，而且任意两个相邻的顶点由一条边连接。现在给每一条边赋予一个非负的实数，即边的长度 (length)。途径的长度就是连接途径相邻顶点的边的长度之和。给定两个顶点 x 和 y ，最短路径问题是寻找从 x 到 y 的长度最短的途径。在图 1-7 给出的图中，有 6 个顶点和 10 条边。边上的数字表示它们的长度。连接 x 和 y 的一条途径是 x, a, b, d, y ，它的长度是 4。另外一条途径是 x, b, d, y ，它的长度是 3。不难看出后者的途径给出了连接 x 和 y 的最短路径。

图是组合数学中一直在深入研究的离散结构的一个例子。其概念的一般性使其在诸如心理学、社会学、化学、遗传学以及通信科学等不同领域有着广泛的应用。因此，可以让图中的顶点对应于人，两个顶点之间有一条边连接则表示它们对应的人互相不信任，或者让顶点对应于原子，而边代表原子之间的键。你也可以想象其他的一些场景，让图模拟其中的一些现象。第 9

① R. A. Bailey, P. J. Cameron, and R. Connelly, Sudoku, Gerechte, Designs Resolutions, Affine Spaces, Spreads, Reguli, and Hamming codes, *Amer. Math. Monthly*, 115 (2008), 383-404.

章、第11章和第12章将研究图的一些重要概念和性质。

1.6 例子：相互重叠的圆

考虑平面上以普通位置相互重叠的 n 个圆 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 。说到相互重叠 (mutually overlapping), 我们指的是每一对圆相交于两个不同点 (因此, 不允许不相交和相切的圆)。而说到普通位置 (general position), 我们指的是不存在只有一个共同点的三个圆^①。这 n 个圆在平面内构建若干区域。我们的问题是确定如此构建的区域的数量。

设 h_n 等于构建的区域数。容易计算出 $h_1=2$ (圆 γ_1 的里面和外面两个区域), $h_2=4$ (这就是两个集合的维恩图), $h_3=8$ (这就是三个集合的维恩图)。因为从刚才的计算可以看出区域数量好像是成倍增加, 因此猜测 $h_4=16$ 。然而, 一张图可以很快说明 $h_4=14$ (参见图 1-8)。

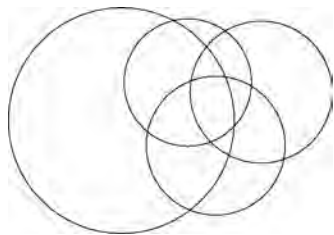


图 1-8 普通位置下的四个重叠的圆

解决这一类计数问题的一个方法就是尝试着确定当从 $n-1$ 个圆 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ 变到 n 个圆 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 时出现的区域变化。用更一般的语言表述如下: 我们尝试着确定 h_n 的一个递推关系, 即用前面的值表示 h_n 。

于是, 我们假设 $n \geq 2$ 而且在平面上已经画出普通位置下相互重叠的圆 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$, 它们构建了 h_{n-1} 个区域。然后加入第 n 个圆 γ_n 使得在普通位置下有 n 个相互重叠的圆。前 $n-1$ 个圆中的每一个圆都与第 n 个圆相交出两个点, 因为这些圆都处于普通位置上, 所以我们得到 $2(n-1)$ 个不同点 $P_1, P_2, \dots, P_{2(n-1)}$ 。这 $2(n-1)$ 个点把圆 γ_n 分割成 $2(n-1)$ 条弧: P_1 和 P_2 之间的弧, P_2 和 P_3 之间的弧, \dots , $P_{2(n-1)-1}$ 和 $P_{2(n-1)}$ 之间的弧, 以及 $P_{2(n-1)}$ 与 P_1 之间的弧。这 $2(n-1)$ 条弧中的每一条弧都把由前面 $n-1$ 个圆 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ 构成的区域分成两个区域, 创建出额外 $2(n-1)$ 个区域。因此, h_n 满足下面的关系:

$$h_n = h_{n-1} + 2(n-1) \quad (n \geq 2) \quad (1.4)$$

利用递推关系 (1.4) 可以得到由参数 n 表示的 h_n 的公式。通过反复利用 (1.4)^②, 我们得到

[16]

$$\begin{aligned} h_n &= h_{n-1} + 2(n-1) \\ h_n &= h_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) \\ h_n &= h_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) \\ &\vdots \\ h_n &= h_1 + 2(1) + 2(2) + \dots + 2(n-2) + 2(n-1) \end{aligned}$$

因为 $h_1=2$, 且 $1+2+\dots+(n-1)=n(n-1)/2$, 我们得到

$$h_n = 2 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n + 2 \quad (n \geq 2)$$

当 $n=1$ 时, 这个公式是成立的, 因为 $h_1=2$ 。我们可以用数学归纳法给出这个公式的形式证明。

1.7 例子：Nim 游戏

下面我们追溯组合数学在数学娱乐中的起源并研究一下 Nim^③ 这个古老的游戏来结束本章的介绍。这个游戏的解取决于奇偶性 (parity), 这是在组合数学中解决问题的一个重要概念。之前在研究棋盘的完美覆盖时利用了一个简单的奇偶论断, 当时我们指出一个棋盘为了有多米诺骨

① 不要求这些“圆”是圆的。只要是封闭的凸曲线就可以。

② 即一而再地利用 (1.4) 直到得到 h_1 , 我们知道这个值等于 2。

③ Nim 来自于德语的 Nimm!, 意思是取!。

牌的完美覆盖就必须有偶数个方格。

Nim 是一种两个人玩的游戏，玩家双方面对一堆硬币（或者石头或者豆粒）。假设有 $k \geq 1$ 堆硬币，每堆分别有 n_1, n_2, \dots, n_k 枚硬币。这一游戏的目标就是取得最后一枚硬币。游戏的规则如下：

(1) 玩家轮番出场（我们称第一个取子的玩家为 I，而第二个玩家为 II）。

(2) 当轮到玩家取子时，他们都要从选择的硬币堆中至少取走一枚硬币。（这位玩家也可以把所选硬币堆的硬币都取走，于是剩下一个空堆，这时它“退出”。）

当所有硬币堆都空了的时候，游戏结束。走最后一步的玩家，即取走最后一枚硬币的玩家获胜。

在这个游戏中的变量是堆数 k 和堆中的硬币数 n_1, n_2, \dots, n_k 。我们要问的组合问题是确定是第一个玩家胜还是第二个玩家胜[⊖]，以及这位玩家为了获胜应该如何取子，也就是获胜策略。

17

为了进一步理解 Nim 游戏，下面我们考虑一些特殊的情况[⊖]。如果一开始就只有一堆硬币。那么玩家 I 取走所有硬币就可以获胜。现在假设 $k=2$ ，且分别有 n_1 枚和 n_2 枚硬币。玩家 I 是否可以获胜不取决于 n_1, n_2 具体是多少，而是取决于它们是否相等。假设 $n_1 \neq n_2$ 。玩家 I 可以从大堆中取走足够多的硬币以便对于玩家 II 来说，剩余两堆的大小相同。现在，当轮到玩家 II 时，他可以模仿玩家 I 的取子方式。因此，如果玩家 II 从一堆中取走了 c 枚，那么玩家 I 则从另一堆中取走相同数目的硬币。这样的策略保证玩家 I 可以获胜。如果 $n_1 = n_2$ ，那么玩家 II 通过模仿玩家 I 的取子方式而获胜。因此，我们就完全解决了 2 堆的 Nim 游戏的取子问题。下面是 2 堆 Nim 游戏的一个例子，其堆的大小分别是 8 和 5：

$$8, 5 \xrightarrow{\text{I}} 5, 5 \xrightarrow{\text{II}} 5, 2 \xrightarrow{\text{I}} 2, 2 \xrightarrow{\text{II}} 0, 2 \xrightarrow{\text{I}} 0, 0$$

上述解决 2 堆 Nim 游戏的想法是用某种方式取子使得剩余两堆的大小相同，这一想法可以推广到任意 k 堆的情况。玩家获胜的洞察力来自于二进制整数的概念。回想一下，每一个正整数 n 都可以表示成二进制数字，其方法是反复减去一个不超过这个数的 2 的最大幂。例如，为了将十进制数 57 表示成二进制数，我们观察到

$$2^5 \leq 57 < 2^6, \quad 57 - 2^5 = 25$$

$$2^4 \leq 25 < 2^5, \quad 25 - 2^4 = 9$$

$$2^3 \leq 9 < 2^4, \quad 9 - 2^3 = 1$$

$$2^0 \leq 1 < 2^1, \quad 1 - 2^0 = 0$$

因此

$$57 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0$$

57 表示成二进制数是

$$111001$$

二进制数的每一个数字不是 0 就是 1。第 i 个位置上的数字对应于 2^i ，称为第 i ($i \geq 0$) 位[⊗]。对于每一堆硬币，对应于它的基数 2，我们可以认为它是由 2 的幂的子堆组成的。因此，53 枚硬币的一堆硬币是由下面的子堆组成的： $2^5, 2^4, 2^2, 2^0$ 。对于 2 堆 Nim 游戏，各种大小的子堆总数只能是 0, 1 或 2。具有特定大小的子堆正好有一个当且仅当这两堆的大小不同。换句话说，各种大小的子堆总数是偶数当且仅当这两堆大小相同，即当且仅当玩家 II 在这场 Nim 游戏

⊖ 发挥聪明才智。

⊖ 这是一般情况下要遵守的重要原则：为了加深理解和更加直观，先考虑较小或特殊的情况，然后再尝试着拓展你的思路去解决更一般的问题。

⊗ 位 (bit) 一词是 binary digit 的简写。

18 中获胜。

下面考虑有大小分别为 n_1, n_2, \dots, n_k 的一般的 Nim 游戏。把每一个数字 n_i 表示成二进制数：

$$\begin{aligned} n_1 &= a_s \cdots a_1 a_0 \\ n_2 &= b_s \cdots b_1 b_0 \\ &\vdots \\ n_k &= e_s \cdots e_1 e_0 \end{aligned}$$

(通过在数前补 0，可以假设所有堆的大小都是有相同位数的二进制数。) 我们称一个游戏是平衡的 (balanced)，指的是各种大小的子堆数是偶数。因此一个 Nim 游戏是平衡的当且仅当

$$\begin{aligned} a_s + b_s + \cdots + e_s &\text{ 是偶数} \\ &\vdots \\ a_i + b_i + \cdots + e_i &\text{ 是偶数} \\ &\vdots \\ a_0 + b_0 + \cdots + e_0 &\text{ 是偶数} \end{aligned}$$

若一个 Nim 游戏不是平衡的，则称它为不平衡的 (unbalanced)。我们说第 i 位是平衡的，指的是和 $a_i + b_i + \cdots + e_i$ 是偶数，否则就是不平衡的。因此，若一个游戏是平衡的，则它在各个位上都是平衡的，而对于不平衡游戏来说，至少存在一个不平衡位。

于是我们有下面的陈述：

玩家 I 能够在不平衡 Nim 游戏中获胜，而玩家 II 则能够在平衡 Nim 游戏中获胜。

为了理解上述的结论，我们扩展 2 堆 Nim 游戏中使用的策略。假设这个 Nim 游戏是非平衡的。设最大不平衡位是第 j 位。于是，玩家 I 以某种方式取走硬币给玩家 II 留下一个平衡游戏。他的作法是：选出一个第 j 位上是 1 的堆，并从中取走一定数目的硬币使得剩下的游戏是平衡的 (参见练习题 32)。无论玩家 II 怎样做，他都不得不又给玩家 I 留下一个不平衡的游戏，玩家 I 又把这个游戏变成平衡游戏。如此这般继续下去就可以保证玩家 I 获胜。如果这个游戏开始时就是平衡游戏，那么玩家 I 第一次取子使其变成不平衡游戏，此时轮到玩家 II 采用平衡游戏的策略。

例如，考虑一个 4 堆 Nim 游戏，其堆的大小分别是 7, 9, 12, 15。这些堆的大小的二进制数表示分别是 0111, 1001, 1100 和 1111。用 2 的幂的子堆表示，我们得到

	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
大小为 7 的堆	0	1	1	1
大小为 9 的堆	1	0	0	1
大小为 12 的堆	1	1	0	0
大小为 9 的堆	1	1	1	1

19

这个游戏中第 3 位、第 2 位和第 0 位是不平衡的。玩家 I 可以从大小为 12 的堆中取走 11 枚硬币，留下 1 枚硬币。因为 1 的二进制数字是 0001，此时这个游戏是平衡的。或者玩家 I 也可以从大小为 9 的堆中取走 5 枚硬币，留下 4 枚，或者从大小为 15 的堆中取走 13 枚硬币，留下 2 枚硬币。

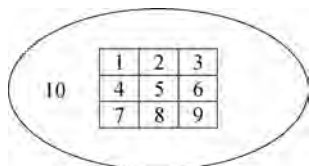
1.8 练习题

- 1. 证明 $m \times n$ 棋盘被多米诺骨牌完美覆盖当且仅当 m 和 n 中至少有一个是偶数。
- 2. 考虑 m 和 n 都是奇数的 $m \times n$ 棋盘。为了固定标记方式，假设棋盘左上角的方格被着成白色。证明如果切掉棋盘上任意一个白方格，那么这张切过的棋盘有多米诺骨牌完美覆盖。

3. 想象一座由 64 个囚室组成的监狱，这些囚室被排列成 8×8 棋盘。所有相邻的囚室间都有门。某角落处一间囚室里的囚犯被告知，如果他能够经过其他每一个囚室正好一次之后，达到对角线上相对的另一间囚室，那么他就可以获释。他能够获得自由吗？
4. (a) 设 $f(n)$ 计数 $2 \times n$ 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的数量。估计一下 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 和 $f(5)$ 。试寻找（或证明）这个计数函数 f 满足的简单关系。利用这个关系计算 $f(12)$ 。
 * (b) 设 $g(n)$ 是 $3 \times n$ 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的数量。估计 $g(1)$, $g(2)$, \dots , $g(6)$ 。
5. 求 3×4 棋盘的多米诺骨牌完美覆盖的个数。
6. 考虑下面的棋盘问题的三维形式：定义三维多米诺骨牌是这样的一个几何图形，它是由边长为一个单位的两个立方体面对面连接起来的几何体。证明有可能由多米诺骨牌构造出一个边长为 n 个单位的立方体当且仅当 n 是偶数。如果 n 是奇数，是否有可能构造出一个边长为 n 个单位的立方体，且其中心部分有一个 1×1 的洞呢？（提示：把一个边长为 n 个单位的立方体看成是由 n^3 个边长为 1 个单位的立方体组成的，用黑色和白色交替给这些立方体着色。）
7. 设 a 和 b 是正整数且 a 是 b 的因子。证明 $m \times n$ 棋盘有 $a \times b$ 牌的完美覆盖当且仅当 a 既是 m 的因子又是 n 的因子，而 b 是 m 或者 n 的因子。（提示：把 $a \times b$ 牌分割成 a 个 $1 \times b$ 牌。）
8. 利用练习题 7 证明当 a 是 b 的因子时， $m \times n$ 棋盘有 $a \times b$ 牌的完美覆盖当且仅当这个棋盘有平凡完美覆盖，其中所有的牌都指向相同的方向。
9. 证明当 a 不是 b 的因子时，练习题 8 的结论不一定成立。
10. 验证不存在 2 阶幻方。
11. 利用 Loubère 的方法构造 7 阶幻方。
12. 利用 Loubère 的方法构造 9 阶幻方。
13. 构造一个 6 阶幻方。
14. 证明 3 阶幻方的中心位置一定是 5。试推证正好有 8 个 3 阶幻方。
15. 能否尝试着填充下面的部分方格而得到一个 4 阶幻方？

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

16. 用整数 $n^2 + 1 - a$ 取代 n 阶幻方中的每一个整数 a ，证明得到的是一个 n 阶幻方。
17. 设 n 是能被 4 整除的正整数，即 $n = 4m$ 。考虑下面构造 $n \times n$ 矩阵的方法：
- (1) 依序从左到右，从第一行到第 n 行，按照顺序 $1, 2, \dots, n^2$ 填充这个矩阵。
 - (2) 把上面得到的矩阵分割成 m^2 个 4×4 的小矩阵。对于每个 4×4 小矩阵的两条对角线上的数 a ，用 a 的“补” $n^2 + 1 - a$ 替换掉 a 。
- 证明当 $n = 4$ 和 $n = 8$ 时，这样的构造方法产生 n 阶幻方。（实际上对于每一个被 4 整除的 n ，它都构造出幻方。）
18. 证明不存在 2 阶幻方体。
- * 19. 证明不存在 4 阶幻方体。
20. 证明下面这张由 10 个国家 $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 组成的地图能用 3 种颜色但不少于 3 种颜色着色。如果使用的颜色是红色、白色和蓝色，试确定不同着色的方法数。



21. (a) 是否存在 2 阶幻六边形 (magic hexagon)? 即是否有可能把数字 $1, 2, 3, \dots, 7$ 排列成下面的六边形阵使得所有 9 条“线”上的和（连接对边中点的直线所穿过的六边形盒子里的数的和）都相

等呢?



* (b) 构造一个 3 阶幻六边形, 即把整数 $1, 2, \dots, 19$ 排列成幻六边形 (一条边上有三个整数) 使得所有 15 条“线”上的和都相等 (即 38)。

22. 构造一对 4 阶正交拉丁方。

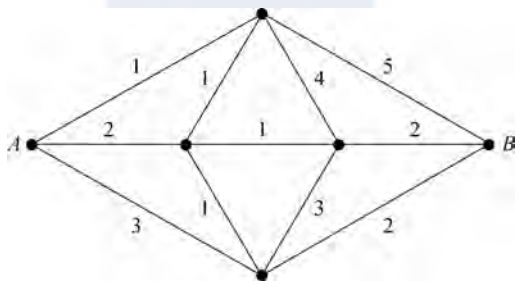
23. 构造 5 阶拉丁方和 6 阶拉丁方。

24. 求构造 n 阶拉丁方的一般方法。

25. 6×6 棋盘被 18 张多米诺骨牌完美覆盖。证明能够将棋盘沿着横向或纵向切成非空的两块而不切到任何一张多米诺骨牌, 即证明一定存在断层线。

26. 构造一个 8×8 棋盘的多米诺骨牌覆盖的完美覆盖且没有断层线。

27. 确定下图所示由交叉路口和道路组成的系统中从 A 到 B 的所有最短路径。道路上的数字代表某种度量单位下这条道路的长度。



28. 考虑堆的大小分别为 1, 2, 4 的 3 堆 Nim 游戏。证明该游戏是不平衡的, 并确定玩家 I 的第一取子方案。

29. 堆的大小分别为 22, 19, 14 和 11 的 4 堆 Nim 游戏是平衡的还是非平衡的? 玩家 I 的第一次取子是从大小为 19 的堆中取走 6 枚硬币, 玩家 II 的第一次取子应该是什么样的呢?

30. 考虑堆的大小分别为 10, 20, 30, 40, 50 的 5 堆 Nim 游戏。这局游戏是平衡的吗? 确定玩家 I 的第一次取子方案。

31. 证明玩家 I 在下面这样的 Nim 游戏中总能获胜: 有奇数个硬币的堆的数目是奇数。

32. 证明在最大不平衡位是第 j 位的非平衡 Nim 游戏中, 玩家 I 通过下面的取子方案总可以平衡这局游戏: 从任何硬币数在二进制数的第 j 位上是 1 的堆中取走硬币。

33. 假设我们更改 Nim 游戏的目标使得取走最后一枚硬币的玩家为输家 (misère 版本)。证明下面的策略是必胜策略: 游戏进行一如通常的 Nim 游戏, 直到除了一堆之外所有堆都只含一枚硬币。然后要么取走这例外的堆的所有硬币, 要么取走这例外的堆中除一枚外的所有硬币, 使得留下奇数个大小为 1 的堆。

34. 一场游戏在两个玩家之间进行, 交替轮流出场如下: 这局游戏从空堆开始。当轮到一名玩家时, 他可能往这个空堆中加入 1, 2, 3 或者 4 枚硬币。向这个空堆加入第 100 枚硬币的玩家是胜者。确定是第一位玩家还是第二玩家能够保证在这局游戏中取胜。必胜策略是什么?

[23] 35. 假设在练习题 34 中, 向空堆中加入第 100 枚硬币的玩家是输家。此时谁获胜, 怎样获胜?

36. 有 8 人参加一个派对, 把他们两两分成四队。有多少种分法? (这是一类“非结构”式的多米诺骨牌覆盖问题。)

37. n 阶拉丁方是幂等的 (idempotent), 如果整数 $\{1, 2, \dots, n\}$ 按 $1, 2, \dots, n$ 的顺序出现在对角线位置 $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$ 上; 它是对称的 (symmetric), 如果位置 (i, j) 上的整数等于位置 (j, i) 上的整数, 其中 $i \neq j$ 。不存在 2 阶对称、幂等的拉丁方。构造一个 3 阶对称且幂等的拉丁方。

证明不存在 4 阶对称且幂等的拉丁方。对于一般 n 阶拉丁方又如何呢 (n 是偶数)?

38. 在平面上取任意 $2n$ 个点构成集合, 其中没有三个点共线, 然后随机把每个点着成红色或者蓝色。证明总能把红点和蓝点配对, 使得用线段连接配对时这些线段两两不相交。
39. 考虑 $n \times n$ 棋盘和一个 L 形四格拼板 (四个正方连接起来成为一个 L 形)。证明如果这个棋盘存在 L 形四格拼板覆盖的完美覆盖, 那么 n 可以被 4 整除。对于 $m \times n$ 棋盘情况又如何呢?
40. 求解下面的数独谜题。

			5					6
		8						7
7	5			6	4			
	3	6		8		2	4	5
	2		3		9		6	
5	1	7		2		8	3	
			2	4			7	8
4						3		
1				3				

41. 求解下面的数独谜题。

7			1	5	4			8
2		5	9		8	1		6
		6	7		3	4		
	3						2	
		7	2		9	6		
8		3	4		2	9		5
5			8	7	6			2

24

42. 设 S_n 表示有 $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$ 个方格的楼梯式棋盘。例如, S_4 如下图所示:

	×	×	×
		×	×
			×

证明对于任意的 $n \geq 1$, S_n 没有多米诺骨牌完美覆盖。

43. 考虑一块成立方体的木头, 其边长是 3 英尺。我们希望把这个立方体切割成 27 个小立方体, 其边长为 1 英尺。有一种方法可以实现这种分割, 那就是一共切 6 刀, 每一个方向上切 2 刀, 并在切割时保持这个立方体形状不变。如果在切割之后可以重新排列各块, 那么是否有可能用更少的切割次数完成上述任务呢?
44. 说明如何正好切割 6 次就把一个边长为 3 英尺的立方体切割成 27 个边长为 1 英尺的小立方体, 而且在两次切割之间重新排列切割的各块形成一个非平凡的排列。

25
26

排列与组合

本书的大部分读者都会有一些处理简单计数问题的经历，因此很可能熟悉“排列”和“组合”的概念。但是，有经验的计数者们知道，即使看似颇为简单的一些问题，也可能在它们的求解过程中出现诸多困难。众所周知，要学好数学必须去做数学，在这里尤其如此，所以认真的学生应该尝试着去解决大量的问题。

本章探讨四个一般的原理及它们所蕴涵的某些计数公式。而每一个原理又给出也要讨论的“补”原理。最后我们陈述这些原理在有限概率方面的应用。

2.1 四个基本的计数原理

第一个原理^①是非常基础性的原理，它是全体等于其各部分之和这一原理的公式表示。

设 S 是集合。集合 S 的一个划分 (partition) 是满足下面条件的 S 的子集 S_1, S_2, \dots, S_m 的集合，即使得 S 的每一个元素恰好只属于这些子集中的一个子集：

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

因此，集合 S_1, S_2, \dots, S_m 是两两不相交的集合，它们的并集是 S 。子集 S_1, S_2, \dots, S_m 称为该划分的部分 (part)。我们注意到，根据这个定义，划分的部分可以是空的，不过，考虑带有一个或多个空部分的划分通常没有意义。集合 S 的对象数目记作 $|S|$ ，有时称之为 S 的大小 (size)。

加法原理 设集合 S 被划分成两两不相交的部分 S_1, S_2, \dots, S_m 。则 S 的对象数目可以通过确定它的每一个部分的对象数目并如此相加而得到：

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_m|$$

如果允许集合 S_1, S_2, \dots, S_m 相交，那么就可以使用第6章中的一个更深刻的原理，即容斥原理来计数 S 的对象数目。

在运用加法原理时，我们通常描述式地定义部分。换句话说，把问题分割成若干穷尽所有可能的互相排斥的情况。运用加法原理的技巧就是把集合 S 划分成可计数的“易处理部分”，即划分成我们已经能够计数的部分。但是这句陈述还需要具体说明。如果把 S 划分成太多的部分，那么我们就是在给自己找麻烦。例如，如果把 S 划分成一些部分，使得每部分只含有一个对象，那么应用加法原理就等同于计数各个部分的对象数目，而这基本上也等同于列出 S 的所有对象。因此，更适当的描述应该是，运用加法原理的技巧是把集合 S 划分成少量的易处理部分。

例子 假设有求威斯康星大学麦迪逊分校所开设的不同课程的数目。我们按照列出这些课程的系来划分它们。假设没有交叉列出（当一门课程出现在两个以上的系的课程表中时，就出现了交叉列出的情况），则该大学开设的课程数目等于每个系开设的课程数目的和。 □

① 根据 *The Random House College Dictionary, Revised Edition* (1997)，原理是：(1) 一个已被接受的或者专业的操作或者行为法则，(2) 一个基本定律、公理或学说。这一节中我们所说的原理就是求解计数问题中的基本数学定律和重要操作法则。

用选择的术语给出加法原理的另一种描述如下：如果有 p 种方法能够从一个堆中选出一个物体，又有 q 种方法从另外一堆中选出一个物体，那么从这两堆中选出一个物体有 $p+q$ 种方法。这种形式的加法原理显然可以推广到多于两堆的情况。

例子 一名学生想选修一门数学课程或一门生物课程，但两者不能同时都选。如果现有 4 门数学课程和 3 门生物课程供该学生选择，那么该学生有 $4+3=7$ 种方法选择一门课程。□

第二个计数原理要稍微复杂一些。我们以两个集合为例陈述这个原理，但是同样它也可以推广到任意有限多个集合的情形。

乘法原理 令 S 是对象的有序对 (a, b) 的集合，其中第一个对象 a 来自大小为 p 的一个集合，而对于对象 a 的每个选择，对象 b 有 q 种选择。于是， S 的大小为 $p \times q$ ：

$$|S| = p \times q$$

实际上，乘法原理是加法原理的一个推论。设 a_1, a_2, \dots, a_p 是对象 a 的 p 个不同选择。我们把 S 划分成部分 S_1, S_2, \dots, S_p ，其中 S_i 是 S 中第一个对象为 $a_i (i=1, 2, \dots, p)$ 的有序对的集合。每个 S_i 的大小为 q ，根据加法原理有

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_p| = q + q + \dots + q (p \text{ 个 } q) = p \times q$$

上述推导过程中用到了整数的乘法就是重复的加法这样的基本事实。

乘法原理的第二种实用形式是：如果第一项任务有 p 个结果，而不论第一项任务的结果如何，第二项任务都有 q 个结果，那么，这两项任务连续执行就有 $p \times q$ 个结果。

例子 一名学生要修两门课程。第一门课可以安排在上午 3 个小时中的任一小时，第二门课则可以安排在下午 4 个小时的任一小时。该学生可能的课程安排数量是 $3 \times 4 = 12$ 。□

上面已经提到，乘法原理可推广到 3, 4 及任意有限多个集合的情形。下面给出 $n=3$ 和 $n=4$ 的例子，我们不针对 n 个集合的情形给出一般的公式。

例子 粉笔的长度有 3 种，颜色有 8 种，直径有 4 种。那么有多少种不同类型的粉笔？

为了确定某种类型的粉笔，我们要执行 3 项不同的任务（这 3 项任务的选取顺序不影响最后的结果）：选择一种长度，选择一种颜色，选择一种直径。根据乘法原理可知，共有 $3 \times 8 \times 4 = 96$ 种不同的粉笔。□

例子 从 5 名男士、6 名女士、2 名男孩和 4 名女孩中选择一男一女一男孩和一女孩的方法共有 $5 \times 6 \times 2 \times 4 = 240$ 种。

原因是我们要执行 4 项不同的任务：选择一名男士（有 5 种方法），选择一名女士（有 6 种方法），选择一名男孩（有 2 种方法），选择一名女孩（有 4 种方法）。另外，如果要想求出选取一个人的方法数，那么答案则是 $5+6+2+4=17$ 种。这一结果来自于 4 堆的加法原理。□

例子 确定下面这个数

$$3^4 \times 5^2 \times 11^7 \times 13^8$$

的正整数因子的个数。

3, 5, 11 和 13 都是素数。根据算术基本定理，每个因子都有

$$3^i \times 5^j \times 11^k \times 13^l$$

的形式，其中 $0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 2, 0 \leq k \leq 7, 0 \leq l \leq 8$ 。 i 有 5 种选择， j 有 3 种选择， k 有 8 种选择，而 l 有 9 种选择。根据乘法原理，因子总数为

$$5 \times 3 \times 8 \times 9 = 1080$$

在乘法原理中，对象 b 的 q 种选择可以随着 a 的选择而变化。唯一的要求是，选择的个数应是相同的 q 个，而不必是相同的选择。

例子 有多少各位数字互不相同且各位数字非零的两位数？

我们可以把一个两位数 ab 看成是一个有序对 (a, b) ，其中 a 是十位数字而 b 是个位数字。

[28]

[29]

此问题要求的是这两个数字都不能是 0，而且它们不相等。对于 a 来说有 9 种选择，即 1, 2, \dots , 9。一旦选定 a ，则 b 就有 8 种选择。如果 $a=1$ ，那么 b 的 8 种选择是 2, 3, \dots , 9；如果 $a=2$ ，那么 b 的 8 种选择是 1, 3, \dots , 9；等等。应用乘法原理的重要性在于， b 的选择总是 8 种。根据乘法原理，本题的答案为 $9 \times 8 = 72$ 。

我们还可以用另外的方法得到答案 72。两位数字数共有 90 个：10, 11, 12, \dots , 99。其中，有 9 个两位数含有 0（即 10, 20, \dots , 90），有 9 个两位数各位相等（即 11, 22, \dots , 99）。因此，各位互不相同且非零的两位数字的个数等于 $90 - 9 - 9 = 72$ 。□

上面的例子说明了两个想法。其一是，一个计数问题可能有多种方法求得答案。其二是，为了求出集合 A 的对象数目（本题是各位互不相同且各位非零的两位数集合），像下面这样做也许更容易些：先求包含 A 的一个更大集合 U （在上面的例子中，这个集合就是所有两位数的集合）的对象数目，然后再减去 U 中不属于 A 的对象数目（包含 0 或两个位上的数字相同的两位数）。我们把这个想法陈述为下面的第三个原理。

减法原理 令 A 是一个集合，而 U 是包含 A 的更大集合。设

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$$

是 A 在 U 中的补 (complement)。那么 A 中的对象数目 $|A|$ 由下列法则给出：

$$|A| = |U| - |\bar{A}|$$

在应用减法原理时，集合 U 通常是包含讨论中所有对象的某个自然集合（即所谓的泛集 (universal set)）。只有在与计数 A 中对象数目相比更容易计数 U 和 \bar{A} 的对象数目时，使用减法原理才会有效。

例子 计算机密码是由取自于数字 0, 1, 2, \dots , 9 的数字和取自于小写字母 a, b, c, \dots, z 的字母组成的长度为 6 的字符串。有多少个有重复字符的计算机密码？

我们想要计算有重复字符的计算机密码的集合 A 中的对象数目。令 U 是所有计算机密码的集合。取 A 在 U 中的补，我们得到没有重复字符的计算机密码的集合 \bar{A} 。应用两次乘法原理，可以得到

$$|U| = 36^6 = 2\,176\,782\,336$$

和

$$|\bar{A}| = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 = 1\,402\,410\,240$$

因此，有

$$|A| = |U| - |\bar{A}| = 2\,176\,782\,336 - 1\,402\,410\,240 = 774\,372\,096$$

现在我们陈述本节最后一个原理。

除法原理 令 S 是一个有限集合，把它划分成 k 个部分使得每一部分包含的对象数目相同。于是，此划分中的部分的数目由下述公式给出：

$$k = \frac{|S|}{\text{在一个部分中的对象数目}}$$

因此，如果我们知道 S 中的对象数目以及各部分所含对象数目的共同值，就可以确定部分的数目。

例子 在一排鸽巢中有 740 只鸽子。如果每个鸽巢含有 5 只鸽子，那么鸽巢的数目为

$$\frac{740}{5} = 148$$

除法原理更深奥的应用将在本书稍后给出。现在考虑下一个例子。

例子 你想送给 Mollie 大婶一篮水果。在你的冰箱里有 6 个橘子和 9 个苹果。唯一的要求是

[31] 篮子内必须至少有一个水果（即不容许水果篮是空的）。有多少种不同的水果篮？

一种计数水果篮数目的方法如下。首先，忽略篮子不能是空的要求。后面再把这个要求补进去。一篮水果与另一篮水果的区别是篮子内的橘子数和苹果数。对于橘子的数目有 7 种选择 $(0, 1, \dots, 6)$ ，而对于苹果的数目有 10 种选择 $(0, 1, \dots, 9)$ 。根据乘法原理，有 $7 \times 10 = 70$ 种可能的不同水果篮。扣除空篮子这种可能，答案是 69。注意，如果不暂时忽略篮子非空的要求，那么苹果数目是 9 种还是 10 种选择要依赖于橘子数是不是 0，因此我们也就不能直接应用乘法原理来计算了。但是，还有下面的另一种解法。把这些非空水果篮划分成两个部分 S_1 和 S_2 ，其中 S_1 是没有橘子的那些水果篮， S_2 是至少装有一个橘子的那些水果篮。 S_1 的大小是 9 $(1, 2, \dots, 9 \text{ 个苹果})$ ， S_2 的大小根据上面的推理为 $6 \times 10 = 60$ 。由加法原理可知，可能的水果篮的数目是 $9 + 60 = 69$ 。□

在前面的例子中我们做了一个含蓄的假设，现在应该把它公开。在求解过程中，我们假设橘子与橘子之间没有区别，苹果与苹果之间也没有区别。于是，装一篮水果的关键不是哪些苹果和哪些橘子装进了篮子，而仅仅是每种水果的数量。如果我们在各个橘子之间和各个苹果之间加以区别（一个橘子是圆的，另一个有磕伤，第三个汁多等），那么篮子的数目就会增大。我们将在 3.5 节再回到这个例子中来。

在考察更多例子之前，我们先讨论一些一般的想法。

很多计数问题都可归类为下面的类型之一：

(1) 计数对象的有序排列的个数或对象的有序选择的个数

- a) 任何对象都不重复；
- b) 允许对象重复（但可能是有限制的）。

(2) 计数对象的无序排列数目或者对象的无序选择数目

- a) 任何对象都不重复；
- b) 允许对象重复（但可能是有限制的）。

有时候不区分是否允许对象重复，而区分是从集合还是从多重集合中进行选择也许会更方便。多重集合 (multiset) 除其成员不必不同外与集合一样^①。例如，我们可以构建由三个 a ，一个 b ，两个 c 和四个 d 组成的多重集合 M 。即， M 有 4 种不同类型的 10 个元素：类型 a 有 3 个，类型 b 有 1 个，类型 c 有 2 个，类型 d 有 4 个。通常我们这样给出多重集合：指出其中不同类型的元素出现的次数。因此， M 可以表示为 $\{3 \cdot a, 1 \cdot b, 2 \cdot c, 4 \cdot d\}$ ^②。数 3, 1, 2 和 4 是多重集合 M 的重复数。集合是重复数皆等于 1 的多重集合。为了包含上面所列的情况 b)，即不限制各类型对象出现的次数（除受排列的大小的限制以外），我们允许有无限大的重复数^③。于是，当一个多重集合的成员 a 和 c 有无穷大重复数，而 b 和 d 的重复数分别是 2 和 4 时，这个多重集合表示为 $\{\infty \cdot a, 2 \cdot b, \infty \cdot c, 4 \cdot d\}$ 。(1) 中考虑到顺序的放置或选择通常称为排列 (permutation)，而 (2) 中与顺序无关的放置或选择称为组合 (combination)。下面两节中我们将开发若干集合及多重集合的排列数和组合数的通用公式。但是，并非所有的排列和组合问题都能够用这些公式解决。我们常常需要利用基本的加法原理、减法原理、乘法原理和除法原理来解决这些问题。

例子 在 1000 和 9999 之间有多少各位不相同的奇数？

在 1000 和 9999 之间的一个数就是 4 个数字的一个有序放置。因此，要求计数特定排列的集合。我们要做 4 种选择：个位数字、十位数字、百位数字以及千位数字。因为要计数的数是奇

① 因此多重集合破坏了集合的一个重要的法则，即在集合中元素是不可重复的——它们或者在这个集合中或者不在这个集合中。集合 $\{a, a, b\}$ 与集合 $\{a, b\}$ 是同一个集合，但是作为多重集合它们却是不同的。

② 如果我们想要遵守标准集合论的记法，就需要用有序对来指明多重集合 M ，如 $\{(a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 4)\}$ 。

③ 不存在令我们担心的不同大小的无穷大的情况。

数, 所以个位数字可以是 1, 3, 5, 7, 9 中的任一个。十位数字和百位数字可以是 0, 1, ..., 9 中的任何一个, 而千位数字可以是 1, 2, ..., 9 中的任意一个。因此, 个位数字有 5 种选择。因为各位数字要互不相同, 所以不论个位数字选择的是什么, 千位数字都有 8 种选择。于是, 不论之前两位数字选择的是什么, 百位数字都有 8 种选择, 不论之前 3 位数字选择的是什么, 十位数字都有 7 种选择。于是, 根据乘法原理, 本题的答案是 $5 \times 8 \times 8 \times 7 = 2240$ 。□

假设在前面的例子中我们以相反的顺序进行选择: 首先选千位数字, 然后再选百位数字、十位数字和个位数字。千位数字有 9 种选择, 然后百位数字有 9 种选择 (因为可以使用数字 0), 十位数字有 8 种选择, 但是现在个位数字 (必须是奇数) 的选择必须依赖于前面的各个选择了。如果还没有选到奇数数字, 那么个位数字的选择个数就是 5; 如果选择了一个奇数, 那么个位数字的选择个数就是 4; 等等。这样一来, 如果以相反的顺序进行选择, 就不能应用乘法原理了。

[33] 从这个例子中我们学到两点。第一点是只要对一个任务的选择个数的答案用到“依赖于”(或类似的词语), 那么就不能用乘法原理。第二点是如果一个任务的执行没有一个固定的顺序, 那么通过改变任务的执行顺序, 一个问题就可能变得更容易用乘法原理而得到解决。要牢记一个经验法则: 优先选择约束性最强的选择。

例子 在 0 和 10 000 之间有多少个整数恰好有一位数字是 5?

令 S 为在 0 和 10 000 之间恰好有一位数字是 5 的整数的集合。

解法一: 我们对 S 做如下划分: S_1 是 S 中的一位数的集合, S_2 是 S 中的两位数的集合, S_3 是 S 中的三位数的集合, S_4 是 S 中的四位数的集合。 S 中没有五位数。显然, 我们有

$$|S_1| = 1$$

S_2 的数很自然地分成两种类型: (1) 个位数字是 5, (2) 十位数字是 5。第一种类型的数的数目是 8 (十位数字既不能是 0 也不能是 5)。第二种类型的数的数目为 9 (个位数字不能是 5)。因此,

$$|S_2| = 8 + 9 = 17$$

用类似的推理我们得到

$$|S_3| = 8 \times 9 + 8 \times 9 + 9 \times 9 = 225$$

以及

$$|S_4| = 8 \times 9 \times 9 + 8 \times 9 \times 9 + 8 \times 9 \times 9 + 9 \times 9 \times 9 = 2673$$

因此

$$|S| = 1 + 17 + 225 + 2673 = 2916$$

解法二: 通过添加前导零 (如 6 看作 0006, 25 看作 0025, 352 看作 0352), 可以把 S 中的每一个数都当作 4 位数。现在我们根据数字 5 是位于第 1 位、第 2 位、第 3 位还是第 4 位而把 S 划分成 S'_1 , S'_2 , S'_3 和 S'_4 。这 4 个集合中的每一个都含有 $9 \times 9 \times 9 = 729$ 个整数, 从而 S 所含整数的数目等于

$$4 \times 729 = 2916$$

□

例子 由数字 1, 1, 1, 3, 8 可以构造出多少个不同的 5 位数?

这里要求我们计数一个多重集合的排列数, 这个多重集合是第一种类型的对象有 3 个, 第二种类型的对象有 1 个, 第三种类型的对象有 1 个。实际上我们只有两种选择: 数字 3 要放置在哪个数位上 (有 5 种选择), 然后是数字 8 要放置在哪个数位上 (有 4 种选择)。其余 3 个数位由 3 个 1 占据。根据乘法原理, 答案是 $5 \times 4 = 20$ 。

如果所给定的 5 个数是 1, 1, 1, 3, 3, 则答案就是 10, 是上例的一半。□

这些例子清楚地表明, 精通加法原理和乘法原理对于成为专业计数专家是必不可少的。

2.2 集合的排列

令 r 是正整数。说到一个 n 元素集合 S 的 r 排列，我们理解为 n 个元素中的 r 个元素的有序放置。如果 $S = \{a, b, c\}$ ，那么 S 的 3 个 1 排列是

$$a \quad b \quad c$$

S 的 6 个 2 排列是

$$ab \quad ac \quad ba \quad bc \quad ca \quad cb$$

S 的 6 个 3 排列是

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$$

集合 S 没有 4 排列，因为 S 的元素个数少于 4。

我们用 $P(n, r)$ 表示 n 元素集合的 r 排列的数目。如果 $r > n$ ，则 $P(n, r) = 0$ 。显然，对每个正整数 n ， $P(n, 1) = n$ 。 n 元素集合 S 的 n 排列将更简单地称为 S 的排列或 n 个元素的排列。因此，集合 S 的一个排列就是以某种顺序出现的 S 的所有元素的一个列表。上面我们已经看到 $P(3, 1) = 3$ ， $P(3, 2) = 6$ 和 $P(3, 3) = 6$ 。

定理 2.2.1 对于正整数 n 和 r ， $r \leq n$ ，有

$$P(n, r) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

证明 在构建 n 元素集合的 r 排列时，我们可以用 n 种方法选择第一项，不论第一项如何选出，都可以用 $n-1$ 种方法选择第二项， \cdots ，不论前 $r-1$ 项如何选出，都可以用 $n-(r-1)$ 种方法选择第 r 项。根据乘法原理，这 r 项可以用 $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$ 种方法选出。□

对于非负整数 n ，我们定义 $n!$ （读作 n 的阶乘）如下：

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

35

并约定 $0! = 1$ 。于是可以写成

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

对于上面的 $n \geq 0$ ，我们定义 $P(n, 0)$ 等于 1，而这正与 $r=0$ 时的公式一致。 n 个元素的排列数为

$$P(n, n) = \frac{n!}{0!} = n!$$

例子 使用字母 a, b, c, d, e 构造四字母“词”，其中每个字母最多使用一次，这样的“词”的数目等于 $P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$ 。由这些字母构成的 5 字母词的数目是 $P(5, 5) = 120$ 。□

例子 “15 迷阵”由 15 个滑动方块组成，各方块分别标有数字 1 到 15，并把它们摆放在如图 2-1 所示的 4×4 方框内。该迷阵的挑战是从给定的初始位置把诸方块移动到任意指定的位置（这一挑战不是本问题要解决的课题）。这里的位置指的是在方框内这 15 个标有数字的方块的一种摆放方法，其中有一个方块是空的。本迷阵中位置的总数是多少（不考虑是否有可能从初始位置移动到此位置）？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

图 2-1

这个问题等价于确定把数字 1, 2, \cdots , 15 分配到 4×4 的 16 个方格中，并留出一个方格的方法数目。因为我们可以把数 16 分配到空白格中，因此该问题又等价于确定将 1, 2, \cdots , 16 分配到 16 个方格的方法数目，而这正是 $P(16, 16) = 16!$ 。

那么把数字 1, 2, \cdots , 15 分配到 6×6 方格中，并留出 21 个空格的方法数目又是多少呢？这些分配方案对应于 36 个方格的 15 排列：对于将 1, 2, \cdots , 15 分配到 36 个方格中的 15 个方

格的分配方案,我们把它与36个方格的15排列联系起来,首先放置标有数字1的方格,第二个放置的是标有2的方格,以此类推。因此分配方案的总数是 $P(36, 15) = \frac{36!}{21!}$ 。□

例子 将字母表中的26个字母排序,使得元音字母 a, e, i, o, u 中任意两个都不能连续

[36] 出现,这种排序方法的总数是多少?

该问题的解(像许多计数问题一样)一旦看出如何做则可立刻得出。我们考虑要完成两个主要任务。第一个任务是决定如何排序辅音字母。总共有21个辅音字母,所以辅音字母的排列数是 $21!$ 。因为在我们最终的排列中,不能出现任意两个连续的元音字母,所以这些元音字母必须放在这些辅音字母前面、后面和它们中间的22个空位上。第二个任务是把这些元音字母放入这些位置上。对于 a 有22个位置,对于 e 有21个位置, i 有20个位置, o 有19个位置, u 有18个位置。就是说,完成第二个任务的方法数是

$$P(22, 5) = \frac{22!}{17!}$$

根据乘法原理,有序摆放26个字母使得元音字母 a, e, i, o, u 中任意两个都不连续出现的方法数为

$$21! \times \frac{22!}{17!}$$

□

例子 取自 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 的所有7位数中有多少各位互不相同,且数字5和6不连续出现的7位数?

我们要计数集合 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 的某些7排列,并把这些7排列划分成4种类型:(1)在7位数字中5和6均不出现;(2)5可以出现在某位置上,但6不出现;(3)6可以出现在某位置上,但5不出现;(4)5和6都出现在7位数字中。类型(1)是 $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ 的7排列,它们的总数是 $P(7, 7) = 7! = 5040$ 。类型(2)的排列计数如下:数字5可以出现在7位数字中的任何数位上,其余6位数字是 $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ 的一个6排列。因此类型(2)的7位数有 $7P(7, 6) = 7(7!) = 35\,280$ 个。类似地,我们看到类型(3)的7位数有35 280个。为了计数类型(4)的排列数目,我们把类型(4)划分成三部分:

第一位数字等于5,所以第二位就不能等于6:

$$\underline{5} \quad \neq 6 \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

于是,放置数字6有5个位置。其他5个数字构成7位数字 $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ 的5排列。因此,该部分有

$$5 \times P(7, 5) = 5 \times \frac{7!}{2!} = 12\,600$$

[37] 个7位数。

最后一位数字是5,所以其前面的数位不能等于6:

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \neq 6 \quad \underline{5}$$

通过类似于前面的论述,我们得到该部分也有12 600个7位数。

数字5出现在首尾之外的其他位置上:

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \neq 6 \quad \underline{5} \quad \neq 6 \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

被5占据的位置是中间5个位置中的任意一个位置。于是,6的位置可用4种方法选择。其余5个数字构成7位数字 $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ 的一个5排列。因此此分类中的7位数有 $5 \times 4 \times P(7, 5) = 50\,400$ 个。从而,类型(4)中有

$$2(12\,600) + 50\,400 = 75\,600$$

个7位数。根据加法原理,本题答案为

$$5040 + 2(35\,280) + 75\,600 = 151\,200$$

我们刚才给出的求解过程是这样实现的：把要计数的对象集合划分成易处理的部分，即我们能够计算其对象数目的部分，然后再应用加法原理而得到解。还有另外一种相对简单得多的做法，就是运用减法原理。考虑取自 $\{1, 2, \dots, 9\}$ 的互不相同的整数而形成的 7 位数的全体的集合 T 。则 T 的大小是

$$P(9, 7) = \frac{9!}{2!} = 181\,440$$

设 S 是 T 中 5 和 6 不能连续出现的 7 位数的全体；则补 \bar{S} 就是 T 中 5 和 6 一定连续出现的 7 位数。我们希望确定 S 的大小。如果能够求出 \bar{S} 的大小，那么根据减法原理，我们的问题就解决了。那么 \bar{S} 中又有多少数呢？在 \bar{S} 中，数字 5 和 6 连续出现。因此有 6 种方法放置数字 5 后面跟着数字 6，以及 6 种方法放置数字 6 后面跟着数字 5。剩余数字构造 $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ 的 5 排列。所以 \bar{S} 的大小是

$$2 \times 6 \times P(7, 5) = 30\,240$$

于是， S 中有 $181\,440 - 30\,240 = 151\,200$ 个 7 位数。□

我们刚刚考虑过的排列更恰当些应该叫做线性排列 (linear permutation)。考虑把对象排成一条线。如果不把它们排成一条线，而是排成一个圆，那么排列的数目就要相应减少。思考这样一个问题：设 6 个孩子沿圆圈行进。他们能够以多少种不同的方式形成一个圆？因为孩子们在行进中，因此重要的是他们彼此间的相对位置而不是他们自身的位置。因此，很自然就把两个循环排列看成是相同的，只要其中一个可以通过旋转与另一个重合，即通过一个圆周位移而得到另一个。每一个循环排列对应于 6 个线性排列。例如，下面的循环排列

1

2

6

3

5

4

来自于下面的线性排列中的每一个：

123456 234561 345612

456123 561234 612345

把上面每一个排列的最后一位移到第一位之前就形成前面的循环排列。于是，6 个孩子的线性排列与 6 个孩子的循环排列之间的对应是 6 对 1。因此，为了求循环排列数目，我们把线性排列个数除以 6。因此 6 个孩子的循环排列数目是 $6!/6 = 5!$ 。

定理 2.2.2 n 元素集合的循环 r 排列的数目是

$$\frac{P(n, r)}{r} = \frac{n!}{r \cdot (n-r)!}$$

特别地， n 个元素的循环排列的数目是 $(n-1)!$ 。

证明 上述段落基本上包含了本定理的证明，我们使用除法原理完成证明。能够把线性 r 排列的集合划分成若干部分，使得两个线性 r 排列对应于同一个循环 r 排列当且仅当这两个线性 r 排列在同一部分中。因此，循环 r 排列的数目就等于划分的部分的数目。由于每一个部分都含有 r 个线性 r 排列，因此，部分数目是

$$\frac{P(n, r)}{r} = \frac{n!}{r \cdot (n-r)!}$$

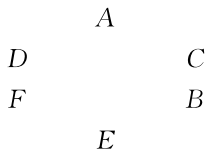
注意，前面的论证之所以可行，是因为每一个部分都含有相同数目的 r 排列，这使得我们可以运用除法原理来确定部分的数目。例如，如果把一个含有 10 个对象的集合划分成大小分别为

[38]

[39]

2, 4, 4 的三个部分, 那么就不能用 10 除以 2 或者 4 而得到部分的数目。

我们看一下另一个计数循环排列的方法: 假设想要计算 A, B, C, D, E, F 的循环排列的数目 (围绕一个桌子安排座位 A, B, C, D, E, F 的方法的数目)。因为可以自由地使人们围着桌子轮转, 所以任何一个循环排列都可以转到使 A 处在一个固定的位置——我们把它看作是“桌头”:



此时 A 是固定的, A, B, C, D, E, F 的循环排列就可以等同于 B, C, D, E, F 的线性排列 (上图中的循环排列等同于线性排列 $DFEBC$)。而 B, C, D, E, F 的线性排列有 $5!$ 个, 因此, A, B, C, D, E, F 的循环排列有 $5!$ 个。

当我们不能直接运用循环排列公式时, 这样考虑循环排列还是有用的。

例子 10 个人要围坐一圆桌, 其中有两人不愿彼此挨着就座, 共有多少圆形座位设置方法?

我们用减法原理解决这个问题。设这 10 个人是 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}$, 其中 P_1 和 P_2 是彼此不愿意坐在一起的两个人。考虑 9 个人 X, P_3, \dots, P_{10} 围坐圆桌的座位设置。共有 $8!$ 种这样的设置方法。如果在每一个座位设置方案中, 我们都用 P_1, P_2 或 P_2, P_1 代替 X , 那么都将得到 10 人的座位设置方案, 而 P_1, P_2 彼此挨着就座。因此, P_1, P_2 不坐在一起的座位设置方法总数为 $9! - 2 \times 8! = 7 \times 8!$ 。

这个问题的另一种分析方法如下: 第一个座位 P_1 在“桌头”的位置。那么 P_2 就不能在 P_1 两边的位置上。 P_1 左边的人选有 8 个, P_1 右边的人选有 7 个, 而其余的座位有 $7!$ 种方法坐上人。因此, P_1 和 P_2 不坐在一起的座位设置方法数目是

$$8 \times 7 \times 7! = 7 \times 8!$$

□

如讨论循环排列之前那样, 我们继续把“排列”当作“线性排列”。

例子 将 12 个不同的记号记在旋转的圆鼓上的方法的个数是 $P(12, 12)/12 = 11!$ 。

□

例子 用 20 个不同颜色的念珠串成一条项链, 能够做成多少不同的项链?

20 个念珠共有 $20!$ 种不同的排列。因为每条项链都可以旋转而不必改变念珠的排列, 所以项链的数目最多为 $20!/20 = 19!$ 。又因为项链还可以翻转过来而念珠的排放未改动, 因此项链的总数是 $19!/2$ 。

□

我们将在第 14 章中以更一般的方式计数循环排列和项链。

2.3 集合的组合 (子集)

设 S 是 n 元素集合。集合 S 的一个组合通常表示集合 S 的元素的一个无序选择。这样一个选择的结果是 S 的元素构成的一个子集 (subset) $A \subseteq S$ 。因此, S 的一个组合就是 S 的子集的一个选择。因此, 术语组合和子集本质上是互换的, 通常我们使用更熟悉的子集而不使用略显笨拙的组合, 除非要强调选择的过程。

现在设 r 是非负整数。提到 n 元素集合 S 的一个 r 组合, 我们把它理解为在 S 的 n 个对象中选取 r 个对象的一个无序选择。一个 r 组合的结果是 S 的一个 r 子集, 即是由 S 的 n 个对象中的 r 个对象组成的子集。同样, 我们通常使用“ r 子集”而不是“ r 组合”。

如果 $S = \{a, b, c, d\}$, 那么

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

是 S 的 4 个 3 子集。我们用 $\binom{n}{r}$ 表示 n 元素集合的 r 子集的数目[⊖]。显然

$$\binom{n}{r} = 0 \quad \text{如果 } r > n$$

还有

$$\binom{0}{r} = 0 \quad \text{如果 } r > 0$$

容易看出, 对于每一个非负整数 n , 下述事实成立:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$

特别地, $\binom{0}{0} = 1$ 。下面的定理给出 r 子集数目的基本公式。

[41]

定理 2.3.1 对于 $0 \leq r \leq n$, 有

$$P(n, r) = r! \binom{n}{r}$$

因此

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证明 令 S 是一个 n 元素集合。 S 的每个 r 排列都恰由下面两个任务的执行结果而产生:

- (1) 从 S 中选出 r 个元素。
- (2) 以某种顺序摆放选出的 r 个元素。

根据定义, 执行第一个任务的方法数目是数 $\binom{n}{r}$ 。执行第二个任务的方法数则是 $P(r, r) = r!$ 。

根据乘法原理, 我们有 $P(n, r) = r! \binom{n}{r}$ 。现在, 使用公式 $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ 得到

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \square$$

例子 在平面上给出 25 个点使得没有 3 个点共线。这些点确定多少条直线? 确定多少个三角形?

因为没有三个点在同一条直线上, 而且每一对点确定唯一一条直线, 所以确定的直线数目等于 25 元素集合的 2 子集数目, 因此这个数是

$$\binom{25}{2} = \frac{25!}{2!23!} = 300$$

类似地, 每 3 个点确定唯一一个三角形, 因此, 所确定的三角形的个数是

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3!22!} \quad \square$$

例子 有 15 人选修了一门数学课程, 但在给定的一天恰有 12 名学生听课。选出 12 名学生的不同方法数是

$$\binom{15}{12} = \frac{15!}{12!3!} \quad [42]$$

⊖ 除此之外, 对这些数还有其他一些记法, 如 $C(n, r)$, ${}_nC_r$ 。

如果教室内有 25 个座位, 那么这 12 名学生可能的就座的方法数目是 $P(25, 12) = 25!/13!$ 。因此, 一位教师看到教室里 12 名学生的就座状态数是

$$\binom{15}{12} P(25, 12) = \frac{15!25!}{12!3!13!} \quad \square$$

例子 如果每个词包含 3, 4 或 5 个元音, 那么用字母表中的 26 个字母可以构造多少个 8 字母词? 这一问题可以这样理解, 在一个词中字母的使用次数没有限制。

我们根据词中所含元音个数并运用加法原理来计数词的数量。

首先, 考虑含有 3 个元音的词。选择元音所占据的 3 个位置有 $\binom{8}{3}$ 种方法; 其余 5 个位置由辅音占据。元音的位置可由 5^3 种方式填充, 辅音位置可由 21^5 种方式填充。因此, 含有 3 个元音的词的数量是

$$\binom{8}{3} 5^3 21^5 = \frac{8!}{3!5!} 5^3 21^5$$

使用类似的方法, 我们可以看到含有 4 个元音的词的数量是

$$\binom{8}{4} 5^4 21^4 = \frac{8!}{4!4!} 5^4 21^4$$

含有 5 个元音的词的数量是

$$\binom{8}{5} 5^5 21^3 = \frac{8!}{5!3!} 5^5 21^3$$

因此, 词的总数为

$$\frac{8!}{3!5!} 5^3 21^5 + \frac{8!}{4!4!} 5^4 21^4 + \frac{8!}{5!3!} 5^5 21^3 \quad \square$$

下面的重要性质可以由定理 2.3.1 直接得出。

推论 2.3.2 对于 $0 \leq r \leq n$, 有

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \square$$

43

$\binom{n}{r}$ 有许多重要且便利的性质, 我们将在第 5 章讨论其部分性质。现在只讨论两个基本性质。

定理 2.3.3 (帕斯卡公式) 对于所有满足 $1 \leq k \leq n-1$ 的整数 n 和 k , 有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

证明 证明这个等式的一个方法是把这些数的值都代入到定理 2.3.1 中, 然后再看等式两边是否相等。我们把这直接验证留给读者。

组合推理证明 (combinatorial proof) 如下所示: 设 S 是 n 元素集合。我们指定 S 中的一个元素并把它记作 x 。设 $S \setminus \{x\}$ 是从 S 中除去这个 x 后得到的集合。把 S 的 k 子集的集合 X 划分成两个部分 A 和 B 。在 A 中放入不包含 x 的所有 k 子集。在 B 中放入包含 x 的所有 k 子集。 X 的大小是 $|X| = \binom{n}{k}$; 因此, 根据加法原理, 有

$$\binom{n}{k} = |A| + |B|$$

A 中的 k 子集正好是集合 $S \setminus \{x\}$ 的 $n-1$ 个元素的 k 子集; 因此, A 的大小是

$$|A| = \binom{n-1}{k}$$

而 B 中的 k 子集可以通过把元素 x 加到 $S \setminus \{x\}$ 的 $(k-1)$ 子集中而得到。因此, B 的大小应该是

$$|B| = \binom{n-1}{k-1}$$

把上面两个公式结合起来, 我们得到

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \square$$

为了具体说明这个证明, 设 $n=5, k=3, S=\{x, a, b, c, d\}$ 。于是 A 中的 S 的 3 子集是

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

上面这些集合是集合 $\{a, b, c, d\}$ 的 3 子集。 B 中 S 的 3 子集是

$$\{x, a, b\}, \{x, a, c\}, \{x, a, d\}, \{x, b, c\}, \{x, b, d\}, \{x, c, d\}$$

扣除上面这些集合中的元素 x 后, 我们得到

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$$

44

它们是集合 $\{a, b, c, d\}$ 的 2 子集。因此

$$\binom{5}{3} = 10 = 4 + 6 = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$$

定理 2.3.4 对于 $n \geq 0$, 有

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

且这个共同值等于 n 元素集合的子集数量。

证明 下面我们通过用不同方法证明上面的等式两边计数了 n 元集合 S 的子集数量来证明这个定理。首先, 我们发现 S 的每一个子集是相对于某个 $r=0, 1, 2, \dots, n$ 的 r 子集。因为 $\binom{n}{r}$ 等于 S 的 r 子集数量, 所以根据加法原理得

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

等于 S 的子集数量。

我们还可以这样计数 S 的子集数量: 把一个子集的选择分解成 n 项任务: 设 S 的元素是 x_1, x_2, \dots, x_n 。在选择 S 的一个子集的过程中, 对于 S 中 n 个元素中的每一个元素要作两种选择: x_1 或者进入当前这个子集, 或者它不进入这个子集, x_2 或者进入这个子集, 或者它不进入这个子集, \dots, x_n 或者进入这个子集或者不进入这个子集。因此, 根据乘法原理, 我们有 2^n 种方法得到 S 的一个子集。至此, 我们证明了这两个计数相等, 从而完成了证明。 \square

定理 2.3.4 的证明具体说明了我们可以通过用两种不同方法计数一个集合的对象 (上面的证明中, 就是 n 元素集合的子集) 并令它们相等, 从而得到所需的等式。在组合数学中, 这种“双计数”技术是非常强大的技术, 我们将会看到它的其他应用的例子。

例子 前 n 个正整数的集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的 2 子集数量是 $\binom{n}{2}$ 。根据这些 2 子集所包含的最大整数对它们进行划分。对于每一个 $i=1, 2, \dots, n$, 以 i 为最大数的 2 子集的数量是 $i-1$ (另一个整数可以是 $1, 2, \dots, i-1$)。令这两个计数相等, 我们得到下面等式

45

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

□

2.4 多重集合的排列

如果 S 是一个多重集合, 那么 S 的一个 r 排列是 S 中 r 个对象的一个有序放置。如果 S 的对象总数是 n (重复对象计数在内), 那么 S 的 n 排列也称为 S 的排列。例如, 如果 $S=\{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$, 那么

$$acbc \quad bcc$$

都是 S 的 4 排列, 而

$$abccca$$

是 S 的一个排列。多重集合 S 没有 7 排列, 因为 $7 > 2+1+3=6$, 即 7 大于集合 S 的对象个数。我们首先计算多重集合 S 的 r 排列的个数, 其每一个重复数都是无限的。

定理 2.4.1 设 S 是有 k 种不同类型对象的多重集合, 每一个元素都有无限重复数。那么, S 的 r 排列的数目是 k^r 。

证明 在构造 S 的 r 排列的过程中, 我们可以把第一项选择为 k 个类型中任意类型的一个对象。类似地, 第二项可以是 k 个类型中任意类型的一个对象, 等等。因为 S 的所有重复数都是无限的, 所以任意一项的不同选择数量也总是 k , 它不依赖于前面项的选择。根据乘法原理, r 项可以有 k^r 种选择方法。 □

这个定理的另一种描述是: k 个不同对象 (每一个对象的供给是无穷的) 的 r 排列数量等于 k^r 。我们还注意到, 如果 S 的 k 种不同类型的对象的重复数都至少是 r , 那么定理也是成立的。重复数无限的假设是保证我们在构造 r 排列时不能用尽任何类型的对象的一种简单保证。

例子 最多有 4 位的三元数^①的个数是多少?

这个问题的答案是多重集合 $\{\infty \cdot 0, \infty \cdot 1, \infty \cdot 2\}$ 或多重集合 $\{4 \cdot 0, 4 \cdot 1, 4 \cdot 2\}$ 的 4 排列的个数。根据定理 2.4.1, 这个数等于 $3^4=81$ 。 □

现在我们计数有 k 种不同类型的对象且有有限重复数的多重集合的排列。

定理 2.4.2 设 S 是多重集合, 它有 k 种不同类型的对象, 且每一种类型的有限重复数分别是 n_1, n_2, \dots, n_k 。设 S 的大小为 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 。则 S 的排列数目等于

46

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证明 给定多重集合 S , 它有 k 种类型对象, 比如说 a_1, a_2, \dots, a_k , 且重复数分别是 n_1, n_2, \dots, n_k , 对象总数 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 。我们想要这 n 个对象的排列数量。可以这样考虑这个问题。一共有 n 个位置, 而我们想要在每一个位置放置 S 中的一个对象。首先, 我们确定放置 a_1 的位置。因为在 S 中 a_1 的数量是 n_1 , 因此必须从 n 个位置的集合中取出 n_1 个位置的子集。这样做的方法数是 $\binom{n}{n_1}$ 。下一步, 要确定放置 a_2 的位置。此时还剩下 $n-n_1$ 个位置, 我们必须从中

选取 n_2 个位置来。这样做的方法数量是 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 。再接下来我们有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种方法为 a_3 选择位置。继续这样做下去, 利用乘法原理, 我们发现 S 的排列个数等于

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

① 一个三元数 (ternary numeral) 或者三进制数是用 3 的幂表示一个数而得到的数。例如, $46=1 \times 3^3+2 \times 3^2+0 \times 3^1+1 \times 3^0$ 。所以 46 的三元数是 1201。

使用定理 2.3.1, 我们看到上面这个数等于

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}$$

消去分子分母上的相同因子, 上面的数化简成为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

□

例子 词 MISSISSIPPI 中的字母的排列数是

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

因为这个数字等于多重集合 $\{1 \cdot M, 4 \cdot I, 4 \cdot S, 2 \cdot P\}$ 的排列数。 □

如果多重集合 S 只有两种类型的对象 a_1, a_2 , 且它们的重复数分别是 n_1 和 n_2 , 其中 $n=n_1+n_2$, 那么按照定理 2.4.2, S 的排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = \binom{n}{n_1}$$

因此, 我们可以把 $\binom{n}{n_1}$ 看成是 n 对象集合的 n_1 子集的数量, 还可以看成是一个有两种类型的对象且它们的重复数分别是 n_1 和 $n-n_1$ 的多重集合的排列个数。 □

[47]

在定理 2.4.2 中出现的数 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ 还有另外一种解释。它涉及这样一个问题: 把一个对象集合划分成指定大小的各个部分, 其中这些部分都有指定给它们的标签。为了理解上面这段话的意思, 我们给出下面的例子。

例子 考虑有 4 个对象的集合 $\{a, b, c, d\}$, 把它划分成两个子集, 每一个大小为 2。如果这两部分没有做标签, 那么有 3 种不同的划分:

$$\{a, b\}, \{c, d\}; \{a, c\}, \{b, d\}; \{a, d\}, \{b, c\}$$

现在假设给这些部分做上不同的标签 (例如, 红色和蓝色)。那么划分数量增大; 实际上, 有 6 个划分, 因为我们要用两种方法给划分的每一部分标上红色和蓝色。例如, 对于上面的划分 $\{a, b\}, \{c, d\}$, 有

$$\text{红盒}\{a, b\}, \quad \text{蓝盒}\{c, d\}$$

和

$$\text{蓝盒}\{a, b\}, \quad \text{红盒}\{c, d\}$$

□

在一般情形下, 我们可以用 B_1, B_2, \cdots, B_k (看成是颜色 1, 颜色 2, \cdots , 颜色 k) 标记这些部分, 并把这些部分想象成一些盒子。这时, 下面定理成立。

定理 2.4.3 设 n 是正整数, 并设 n_1, n_2, \cdots, n_k 是正整数且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 。把 n 对象集合划分成 k 个标有标签的盒子, 且第 1 个盒子含有 n_1 个对象, 第 2 个盒子含有 n_2 个对象, \cdots , 第 k 个盒子含有 n_k 个对象, 这样的划分方法数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

如果这些盒子没有标签, 且 $n_1=n_2=\cdots=n_k$, 那么划分数等于

$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证明 这一证明是乘法原理的直接应用。我们必须在满足大小限制的情况下选取哪些对象放进哪些盒子。首先, 我们选取 n_1 个对象放入第 1 个盒子, 然后从剩下的 $n-n_1$ 个对象中选取 n_2 个对象放入第 2 个盒子, 然后从剩余的 $n-n_1-n_2$ 个对象中选取 n_3 个对象放入第 3 个盒子, \cdots , 最后

将 $n - n_1 - \cdots - n_{k-1} = n_k$ 个对象放入第 k 个盒子。由乘法原理, 进行这些选择的方法数为

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdots \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

同定理 2.4.2 的证明一样, 上面这个数等于

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

如果这些盒子没有标签, 且 $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$, 那么这个结果就必须除以 $k!$ 。这是因为, 同前面的例子一样, 对于把这些对象分配到 k 个没有标签的盒子里的每一种方法, 都有 $k!$ 种方法给这些盒子标上标签 $1, 2, \cdots, k$ 。因此, 使用除法原理, 我们发现没有标签盒子的划分的个数是

$$\frac{n!}{k! n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

□

更加困难的划分计数问题就是划分的部分没有指定的大小, 我们将在 8.2 节中研究这一类计数问题。

我们用一类例子结束本节, 在本书其余部分将多次提到这些例子[⊖]。这类例子考虑的是国际象棋棋盘上的非攻击型车。为免除读者担心本书要求事先具有国际象棋的知识, 我们在这里给出唯一需要知道的国际象棋知识: 两个车能够互相攻击当且仅当它们位于棋盘的同一行或同一列上。除此之外, 无需知道国际象棋的其他知识 (且这些知识也于事无补)。因此, 棋盘上非攻击型车的集合指的就是叫做“车”的那些棋子的集合, 它们占据着棋盘上的一些方格, 并且没有两个车位于同一行或同一列上。

例子 有多少种方法在 8×8 棋盘上放置 8 个非攻击型车?

在 8×8 棋盘上放置 8 个非攻击型车的例子如下:

					⊗		
							⊗
⊗							
		⊗					
				⊗			
						⊗	
	⊗						
			⊗				

我们给棋盘上每一个方格赋予一个坐标对 (i, j) 。整数 i 指明这个方格所处的行, 而整数 j 指明这个方格所处的列。因此 i, j 都是 1 和 8 之间的整数。因为这个棋盘是 8×8 的并且有 8 个不能相互攻击的车放在棋盘上, 所以每一列一定只存在一个车。因此, 这些车占据 8 个方格, 其坐标是

$$(1, j_1), (2, j_2), \cdots, (8, j_8)$$

但是, 每一列上也必须存在一个车, 这使得 j_1, j_2, \cdots, j_8 中没有两个是相等的。更准确地说,

$$j_1, j_2, \cdots, j_8$$

必须是 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的一个排列。反过来, 如果 j_1, j_2, \cdots, j_8 是 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的一个排列, 那么把车放在坐标是 $(1, j_1), (2, j_2), \cdots, (8, j_8)$ 的各个方格上, 就得到棋盘上的 8 个非攻击型车。因此, 8×8 棋盘上 8 个非攻击型车的集合与 $\{1, 2, \cdots, 8\}$ 的排列之间存在一一

⊖ 作者偏爱使用这种例子来解释诸多思想。

对应, 因为 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 有 $8!$ 个排列, 所以, 把 8 个车放到 8×8 棋盘上使得它们具有非攻击性的方法也有 $8!$ 个。

在上面讨论中, 我们实际上已经间接假设这些车彼此没有区别, 即它们构成只有一种类型的 8 个对象的一个多重集合。因此, 唯一重要的是车要占据哪些方格。如果我们有 8 个不同的车, 比如, 用 8 种不同的颜色分别给 8 个车着色, 那么还要考虑在 8 个被占据的每一个方格里放的是哪个车。假设有 8 个不同颜色的车。在决定哪 8 个方格要被这些车占据后 ($8!$ 种可能), 我们现在还要决定在每个所占据的方格上的车是什么颜色的? 观察从第一行到第 8 行的这些车时我们看到 8 种颜色的一个排列。因此, 决定了哪 8 个方格要被这些车占据之后 ($8!$ 种可能), 就必须确定 8 种颜色的哪个排列 ($8!$ 种排列)。于是, 在 8×8 棋盘上具有 8 种不同颜色的 8 个非攻击型车的放置方法数等于

$$8!8! = (8!)^2$$

现在假设不是有 8 个不同颜色的车, 而是有 1 个红 (R) 车、3 个蓝 (B) 车和 4 个黄 (Y) 车, 而且还假设同颜色的车彼此没有区别^①。现在, 当我们从第 1 行到第 8 行观察这些车时, 看到多重集合

$$\{1 \cdot R, 3 \cdot B, 4 \cdot Y\}$$

的一个颜色排列。根据定理 2.4.2, 这个多重集合的排列个数等于

$$\frac{8!}{1!3!4!}$$

50

因此, 在 8×8 棋盘上放置 1 个红车、3 个蓝车和 4 个黄车并使它们彼此不能互相攻击的方法数等于

$$8! \frac{8!}{1!3!4!} = \frac{(8!)^2}{1!3!4!}$$

□

前面例子中的推理具有相当的普遍性, 直接导致下面的定理。

定理 2.4.4 有 k 种颜色共 n 个车, 第一种颜色有 n_1 个, 第二种颜色有 n_2 个, \dots , 第 k 种颜色有 n_k 个。把这些车放置在一个 $n \times n$ 的棋盘上使得车之间不能相互攻击的方法数等于

$$n! \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} = \frac{(n!)^2}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

注意, 如果这些车都有不同的颜色 (即 $k=n$, $n_i=1$), 那么上面的公式给出的答案就是 $(n!)^2$ 。如果这些车的颜色都相同 (即 $k=1$, $n_1=n$), 那么上面的公式给出的答案就是 $n!$ 。

设 S 是 n 元素多重集合, 其重复数分别是 n_1, n_2, \dots, n_k , 且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 。定理 2.4.2 给出了求 S 的 n 排列数的简单公式。如果 $r < n$, 一般来说, 没有求 S 的 r 排列数的简单公式。尽管如此, 可以利用生成函数技术进行求解, 我们将在第 7 章对此加以讨论。在某些情况下, 还是可以像下面的例子那样进行论证。

例子 考虑 3 种类型 9 个对象的多重集合 $S=\{3 \cdot a, 2 \cdot b, 4 \cdot c\}$ 。求 S 的 8 排列的个数。 S 的 8 排列可以被划分成 3 个部分:

(i) $\{2 \cdot a, 2 \cdot b, 4 \cdot c\}$ 的 8 排列数, 有

$$\frac{8!}{2!2!4!} = 420$$

(ii) $\{3 \cdot a, 1 \cdot b, 4 \cdot c\}$ 的 8 排列数, 有

$$\frac{8!}{3!1!4!} = 280$$

① 换句话说, 我们区分车的唯一方法就是根据它们的颜色。

(iii) $\{3 \cdot a, 2 \cdot b, 3 \cdot c\}$ 的 8 排列数, 有

$$\frac{8!}{3!2!3!} = 560$$

因此, S 的 8 排列的个数是

$$420 + 280 + 560 = 1260$$

□

2.5 多重集合的组合

如果 S 是多重集合, 那么 S 的 r 组合是 S 中的 r 个对象的无序选择。因此, S 的一个 r 组合 (更严格说来, 是选择的结果) 本身也是一个多重集合, 它是一个大小为 r 的 S 的多重子集, 或者简单说来, 是一个多重 r 子集。如果 S 有 n 个对象, 那么 S 只有一个 n 组合, 即 S 自己。如果 S 含有 k 种不同类型的对象, 那么 S 就有 k 个 1 组合。与集合的组合不同, 通常我们使用组合 (combination) 而不是多重子集 (submultiset)。

例子 设 $S = \{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$, 那么 S 的 3 组合是

$\{2 \cdot a, 1 \cdot b\}, \{2 \cdot a, 1 \cdot c\}, \{1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c\}, \{1 \cdot a, 2 \cdot c\}, \{1 \cdot b, 2 \cdot c\}, \{3 \cdot c\}$ □

我们首先计数多重集合的 r 组合数, 设该多重集合中所有元素的重复数都是无限的 (或者是至少是 r)。

定理 2.5.1 设 S 是有 k 种类型对象的多重集合, 每种元素均具有无限的重复数。那么 S 的 r 组合的个数等于

$$\binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$$

证明 设 S 的 k 种类型的对象是 a_1, a_2, \dots, a_k , 使得

$$S = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$$

S 的任意 r 组合均呈 $\{x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \dots, x_k \cdot a_k\}$ 的形式, 其中 x_1, x_2, \dots, x_k 皆为非负整数, 且 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 。反过来, 每个满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 的非负整数序列 x_1, x_2, \dots, x_k 对应于 S 的一个 r 组合。因此, S 的 r 组合的个数等于方程

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$$

的解的个数, 其中 x_1, x_2, \dots, x_k 是非负整数。我们证明, 这些解的个数等于有两种不同类型对象且有 $r+k-1$ 个对象的多重集合

$$T = \{r \cdot 1, (k-1) \cdot *\}$$

的排列的个数^①。给定 T 的一个排列, $k-1$ 个 $*$ 把 r 个 1 分成 k 组。设第一个 $*$ 的左边有 x_1 个 1, 在第一个 $*$ 和第二个 $*$ 之间有 x_2 个 1, \dots , 在最后一个 $*$ 号的右边有 x_k 个 1。于是, x_1, x_2, \dots, x_k 是满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 的非负整数。反之, 给定非负整数 x_1, x_2, \dots, x_k , 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$, 我们可以把上述步骤倒推并构造 T 的一个排列^②。于是, 多重集合 S 的 r 组合的个数等于多重集合 T 的排列的个数, 由定理 2.4.2 可知它等于

$$\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = \binom{r+k-1}{r}$$

□

定理 2.5.1 的另一种表述方式是: 在每个对象的供给是无限的情况下, k 个不同对象的 r 组合个数等于

① 相当于长度为 $r+k-1$ 的 0 和 1 的序列个数, 在这些序列中有 r 个 1 和 $k-1$ 个 0。

② 例如, 如果 $k=4, r=5$, 则 $T = \{5 \cdot 1, 3 \cdot *\}$ 所给定的排列是 $*111**11$, 这个排列对应的 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ 的解为 $x_1=0, x_2=3, x_3=0, x_4=2$ 。

$$\binom{r+k-1}{r}$$

注意, S 的 k 个不同对象的重复数都至少是 r 时定理 2.5.1 仍然成立。

例子 一家面包店有 8 种炸面包圈。如果一盒内装有一打炸面包圈, 那么能够装配多少不同类型的炸面包圈盒?

假设这家面包店现有每种面包圈数量充足 (每种至少 12 个)。因为假设盒中的面包圈顺序与购买者的要求无关, 因此这是一个组合问题。不同面包圈盒的数量等于有 8 种类型对象的多重集合的 12 组合数, 其中每种类型对象供给充足。根据定理 2.5.1, 这个数等于

$$\binom{12+8-1}{12} = \binom{19}{12} \quad \square$$

例子 项取自 $1, 2, \dots, k$ 的长度为 r 的非递减序列的个数是多少?

[53]

我们可以这样得到要计数的非递减序列: 首先选取下面这个多重集合的一个 r 组合,

$$S = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \dots, \infty \cdot k\}$$

然后再以递增顺序排列这些元素。因此, 这样的序列个数就等于 S 的 r 组合个数, 因此根据定理 2.5.1, 这个数等于

$$\binom{r+k-1}{r} \quad \square$$

在定理 2.5.1 的证明中, 我们定义了有 k 种不同类型对象的多重集合 S 的 r 组合与下方方程的非负整数解集合之间的一一对应关系:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$$

在这一对应中, x_i 代表 r 组合中第 i 种类型对象的个数。可以通过对 x_i 的限制来实现对每种类型的对象在 r 组合中出现次数的限制。在下面的例子中, 我们首先对此给出具体说明。

例子 设 S 是有 4 种类型对象 a, b, c, d 的多重集 $\{10 \cdot a, 10 \cdot b, 10 \cdot c, 10 \cdot d\}$ 。每一种类型的对象至少出现一次的 S 的 10 组合的个数是多少?

本题答案是下方方程的正整数解的个数:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

其中, x_1 代表在 10 组合中 a 的个数, x_2 代表在 10 组合中 b 的个数, x_3 代表在 10 组合中 c 的个数, x_4 代表在 10 组合中 d 的个数。因为重复数都等于 10, 而且 10 又是要计数的组合的长度, 因此我们可以忽略 S 的重复数。进行变量代换:

$$y_1 = x_1 - 1, \quad y_2 = x_2 - 1, \quad y_3 = x_3 - 1, \quad y_4 = x_4 - 1$$

则方程变为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$$

其中 y_i 是非负整数。根据定理 2.5.1, 新方程的非负整数解的个数等于

$$\binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = 84 \quad \square \quad [54]$$

例子 继续考虑定理 2.5.1 后面的面包圈例子, 我们看到 8 种类型面包圈每一种至少有一个的面包圈盒的个数等于

$$\binom{4+8-1}{4} = \binom{11}{4} = 330 \quad \square$$

组合中每种类型对象出现次数的下界也可以通过变量替换来处理。对此, 我们利用下面的例子给出说明。

例子 下面的方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

的整数解的个数是多少？其中

$$x_1 \geq 3, \quad x_2 \geq 1, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 5$$

我们引入新变量：

$$y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 5$$

此时方程变为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

诸 x_i 的下界能够得到满足当且仅当这些 y_i 非负。新方程的非负整数解的个数从而也是原来方程非负整数解的个数，等于

$$\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11} = 364$$

□

多重集合的下述 r 组合计数问题更加困难：下面的多重集合 S

$$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$$

有 k 种类型的对象，且重复数分别是 n_1, n_2, \dots, n_k 。 S 的 r 组合的数量与下面方程的整数解的个数相同：

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$$

其中

$$0 \leq x_1 \leq n_1, 0 \leq x_2 \leq n_2, \dots, 0 \leq x_k \leq n_k$$

现在我们有诸 x_i 的上界，但它们的处理方法与下界的处理方法并不相同。我们将在第 6 章

[55] 指出如何利用容斥原理对此情形给出满意的方法。

2.6 有限概率

这一节我们对有限概率[⊖]作一个一般性的简略介绍。我们将看到，有限概率最终将还原成计数问题，所以本章所讨论的计数技术能够用来计算概率。

有限概率的背景是这样的：有一个实验 \mathcal{E} ，在进行这个实验时，它产生的结果是某有限结果集合中的一个。假设每一个结果都是等可能的（equally likely）（即没有哪一个结果比其他结果更有可能出现）；这时我们说这个实验是随机的（randomly）。所有可能结果的集合被称为这个实验的样本空间（sample space），并把它记作 S 。因此， S 是一个有限集合，比如说有下面 n 个元素的集合：

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

当我们进行实验 \mathcal{E} 时，每一个 s_i 都有 n 分之一的出现机会，所以说结果 s_i 的概率是 $1/n$ ，写作

$$\text{Prob}(s_i) = 1/n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

一个事件（event）就是样本空间 S 的一个子集 E ，但是我们通常是用描述式语言给出这个子集 E ，而不是实际列出 E 中的所有结果。

例子 考虑投掷 3 枚硬币的实验 \mathcal{E} ，其中每一枚落在地上或者显示正面（ H ）或者显示背面（ T ）。因为每一枚硬币都能出现正面 H 或者背面 T ，所以这个实验的样本空间是由 8 个有序对组成的集合 S ：

$$(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T) \\ (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)$$

例如，其中的 (H, T, H) 表示的是第一枚硬币出现的是 H ，第二枚硬币出现的是 T ，第三枚

⊖ 相对于以微积分为基础的连续概率。

硬币出现的是 H 。设 E 是至少有两枚硬币出现 H 的事件集合。那么

$$E = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)\}$$

因为 E 是由 8 个可能出现的结果中的 4 个结果组成的, 所以, 很自然就可以定义 E 的概率是 $4/8=1/2$ 。下面的定义更精确。□

在样本空间为 S 的实验中, 事件 E 的概率 (probability) 定义为 S 中属于 E 的结果的比率, 因此,

$$\text{Prob}(E) = \frac{|E|}{|S|} \quad [56]$$

根据定义, 事件 E 的概率满足下面的条件

$$0 \leq \text{Prob}(E) \leq 1$$

其中 $\text{Prob}(E)=0$ 当且仅当 E 是一个空事件 \emptyset (即不可能的事件), 而 $\text{Prob}(E)=1$ 当且仅当 E 是整个样本空间 S (肯定出现的事件)。因此, 为了计算一个事件 E 的概率, 我们必须做两个计算: 计算样本空间 S 中的结果个数, 计算在事件 E 中的结果个数。

例子 考虑有 52 张牌的普通纸牌, 每一张牌都是 13 个等级 1, 2, \dots , 10, 11, 12, 13 中的一个, 而且有 4 种花色——梅花 (C), 方块 (D), 红桃 (H) 和黑桃 (S) 中的一种。通常, 11 记作 J , 12 记作 Q , 13 记作 K 。另外, 1 充当两个角色: 或者就是 1 (级别低, 在 2 之下), 或者充当 A (级别高, 在 K 之上)^①。考虑随机抽出一张牌的实验 \mathcal{E} 。因此, 样本空间 S 就是 52 张牌的集合, 其中每一张牌的概率是 $1/52$ 。设 E 是抽出的牌是 5 的事件。因此,

$$E = \{(C, 5), (D, 5), (H, 5), (S, 5)\}$$

因为 $|E|=4$, $|S|=52$, 所以 $\text{Prob}(E)=4/52=1/13$ 。□

例子 设 n 是正整数。假设我们在 1 和 n 之间随机选出一个整数序列 i_1, i_2, \dots, i_n 。(1) 这个选出的序列是 1, 2, \dots, n 的排列的概率是多少? (2) 这个序列正好含有 $n-1$ 个不同整数的概率是多少?

样本空间 S 是长度为 n 的所有可能序列的集合, 其中序列的每一项是整数 1, 2, \dots, n 中的一个整数。因此 $|S|=n^n$, 这是因为 n 项中的每一个都有 n 种可能的选择。

(1) 序列是排列的事件 E 的大小满足 $|E|=n!$ 。因此,

$$\text{Prob}(E) = \frac{n!}{n^n}$$

(2) 设 F 是正好有 $n-1$ 个不同整数的序列的事件。 F 中的序列只有一个整数是重复的而且整数 1, 2, \dots, n 中正好有一个整数没有出现在这个序列之中 (所以这个序列中有 $n-2$ 个其他的整数)。这个重复的整数有 n 个选择, 没有出现的整数则有 $n-1$ 个选择。这个重复的整数的位

置有 $\binom{n}{2}$ 种; 其余 $n-2$ 个整数可以用 $(n-2)!$ 种方法放置在剩余的 $n-2$ 个位置上。因此有

$$|F| = n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{(n!)^2}{2!(n-2)!}$$

所以

$$\text{Prob}(F) = \frac{(n!)^2}{2!(n-2)!n^n} \quad \square$$

例子 5 个彼此相同的车被随机放置在 8×8 棋盘的非攻击位置上。这些车既在行 1, 2, 3,

① 对于那些不熟悉纸牌游戏或者不喜欢这种游戏的人, 下面是一种更抽象的描述: 任意一副有 52 张牌的普通纸牌抽象说来就是 52 个形如 (x, y) 这样的有序对的集合, 其中 x 是四种“花色” C, D, H, S 中的一种, 而 y 则是 13 个等级 1, 2, \dots , 13 中的一个等级, 而最小的等级 1 有时也被用作最大的等级 (所以可以认为它是跟在 13 后面的一个带圈的 1)。

4, 5 又在列 4, 5, 6, 7, 8 上的概率是多少?

我们的样本空间 S 是由棋盘上 5 个非攻击车的所有放置的全体构成的, 所以有

$$|S| = \binom{8}{5}^2 \cdot 5! = \frac{8!^2}{(3!)^2 5!}$$

设 E 是这些车既在指定的行又在指定的列上的事件。于是 E 的大小是 $5!$, 这是因为有 $5!$ 种方法把这 5 辆车放置在 5×5 棋盘上。因此我们有

$$\text{Prob}(E) = \frac{(5!)^2 3!^2}{(8!)^2} = \frac{1}{3136} \quad \square$$

例子 这是用一副普通的 52 张纸牌玩的一系列 Poker 游戏的例子。游戏中一手牌由 5 张组成。我们的实验 \mathcal{E} 是随机选出一手牌。因此, 样本空间 S 是由 $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ 种可能的手牌组成的, 而且每手牌被选中的概率相同, 等于 $1/2\,598\,960$ 。

(1) 设 E 是满堂红手牌的事件; 即有 3 张某个级别的牌和两张另一个级别的牌 (花色不重要)。为了计算 E 的概率, 需要计算 $|E|$ 。那么又如何确定满堂红的数量呢? 我们利用乘法原理, 考虑下面四项任务:

- (a) 选择有 3 张牌的那个级别。
- (b) 选择这个级别的 3 张牌, 即它们的 3 种花色。
- (c) 选择有两张牌的那个级别。
- (d) 选择这个级别的 2 张牌, 即它们的两种花色。

执行这些任务的方法数如下:

- (a) 13
- (b) $\binom{4}{3} = 4$
- (c) 12 (选择 (a) 之后, 还剩 12 个级别)
- (d) $\binom{4}{2} = 6$

因此, $|E| = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$, 所以有

$$\text{Pr}(E) = \frac{3744}{2\,598\,960} \approx 0.0014$$

(2) 设 E 是顺子手牌的事件; 即一手牌中的 5 张牌有连续的级别 (花色不重要), 请记住: 此时 1 同时也是 A。为了计算 $|E|$, 我们考虑下面两项任务:

- (a) 选择这五个连续的级别。
- (b) 选择这五个连续级别中每个级别的花色。

执行这两项任务的方法数如下:

- (a) 10 (五张顺牌可以从 1, 2, ..., 10 中的任意一个开始)
- (b) 4^5 (每一张牌有 4 种可能的花色)

因此, E 的大小是 $|E| = 10 \cdot 4^5 = 10\,240$, 从而概率是

$$\text{Pr}(E) = \frac{10\,240}{2\,598\,960} \approx 0.0039$$

(3) 设 E 是同花顺的事件; 即相同花色的连续 5 张牌。利用 (b) 中的推理, 我们看到 E 的大小是 $|E| = 10 \cdot 4 = 40$, 从而概率是

$$\text{Pr}(E) = \frac{40}{2\,598\,960} \approx 0.000\,015\,4$$

(4) 设 E 是刚好有两对牌的事件；即一手牌的 5 张牌中，有一对某个级别的牌和另一对另一个级别的牌，以及一张与前面 4 张级别都不同的牌。到此，我们要稍加小心，因为这里提到的前两个级别出现的方式相同（这与满堂红不同，满堂红是一个级别 3 张牌，另一个级别 2 张牌）。为了计算此时的 E 的大小，我们考虑下面三项任务（如果模仿 (1)，这里就是六项任务）：

- (a) 选择出现在两个对子中的两个级别。
- (b) 对两个级别分别选出两个花色。
- (c) 选择剩余的纸牌。

59

我们执行这三项任务的方法数如下：

$$(a) \binom{13}{2} = 78$$

$$(b) \binom{4}{2} \binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36$$

$$(c) 44$$

因此， E 的大小是 $|E| = 78 \cdot 36 \cdot 44 = 123\,552$ ，从而它的概率是

$$\Pr(E) = \frac{123\,552}{2\,598\,960} \approx 0.048$$

这个概率大约是 $1/20$ 。

(5) 设 E 是一手 5 张牌中至少有一张是 A。这里，我们运用减法原理。设 $\bar{E} = S \setminus E$ 是一手牌中没有 A 的补事件。于是 $|\bar{E}| = \binom{48}{5} = 1\,712\,304$ 。因此 E 的大小是 $|E| = |S| - |\bar{E}| = 2\,598\,960 - 1\,712\,304 = 886\,656$ ，从而它的概率是

$$\Pr(E) = \frac{2\,598\,960 - 1\,712\,304}{2\,598\,960} = 1 - \frac{1\,712\,304}{2\,598\,960} = \frac{886\,656}{2\,598\,960} \approx 0.34 \quad \square$$

如我们在 (5) 的计算中看到的那样，用概率语言描述时减法原理变为

$$\Pr(E) = 1 - \Pr(\bar{E}), \text{ 等价地, } \Pr(\bar{E}) = 1 - \Pr(E)$$

在练习题中我们将给出更多的概率计算。

2.7 练习题

1. 对于性质 (a) 和 (b) 的四个子集的每一种，计数各数位取自数字 1, 2, 3, 4, 5 的四位数的个数：

- (a) 各数位互不相同。
- (b) 该数是偶数。

60

注意，这里有四个问题： \emptyset （没有进一步的限制）； $\{a\}$ （性质 (a) 成立）； $\{b\}$ （性质 (b) 成立）； $\{a, b\}$ （性质 (a) 和 (b) 同时成立）。

2. 如果所有同花色牌都放在一起，那么对于 52 张一副的牌有多少种排序方法？

3. 有多少方法发一手 5 张牌？共有多少种不同的手牌？

4. 下列各数各有多少互不相同的正因子？

- (a) $3^4 \times 5^2 \times 7^6 \times 11$
- (b) 620
- (c) 10^{10}

5. 确定作为下列各数的因子的 10 的最大幂（等价于用通常的 10 进制表示时尾部 0 的个数）：

- (a) $50!$
- (b) $1000!$

6. 有多少个使下列性质同时成立且大于 5400 的整数?

- (a) 各位数字互不相同。
- (b) 数字 2 和 7 不出现。

7. 4 名男士和 8 名女士围着一张圆桌就座, 如果每两名男士之间是两名女士, 一共有多少种就座方法?

8. 6 名男士和 6 名女士围着一张圆桌就座, 如果男士和女士交替就座, 一共有多少种就座方法?

9. 15 个人围着一张圆桌就座, 如果 B 拒绝坐在 A 的旁边, 一共有多少种就座方法? 如果 B 只拒绝坐在 A 的右边, 一共有多少种就座方法?

10. 从有 10 名男会员和 12 名女会员的一个俱乐部选出一个 5 人委员会。如果这个委员会至少要包含 2 位女士, 有多少种方法形成这个委员会? 此外, 如果俱乐部里某位男士和某位女士拒绝进入该委员会一起工作, 形成委员会的方式又有多少?

61. 1 到 20 之间没有两个连续整数的 3 整数集合有多少个?

12. 从 15 个球员的集合中选出 11 个球员组成足球队, 这 15 个人当中有 5 人只能踢后卫, 有 8 人只能踢边卫, 有 2 人既能踢后卫又能踢边卫。假设足球队有 7 个人踢边卫 4 个人踢后卫, 确定足球队可能的组队方法数。

13. 一所学校有 100 名学生和 3 个宿舍 A , B 和 C , 它们分别容纳 25, 35 和 40 人。

(a) 使得 3 个宿舍都住满学生有多少种方法?

(b) 假设 100 个学生中有 50 名男生和 50 名女生, 而宿舍 A 是全男生宿舍, 宿舍 B 是全女生宿舍, 宿舍 C 男女兼收。有多少种方法可为学生安排宿舍?

14. 教室有两排座位且每排有 8 个座位。现有学生 14 人, 其中 5 人总坐在前排, 4 人总坐在后排。有多少种方法将学生分派到座位上?

15. 在一个聚会上有 15 位男士和 20 位女士。

(a) 有多少种方式形成 15 对男女?

(b) 有多少种方式形成 10 对男女?

16. 用组合式推理方法证明下面的等式

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

不要用定理 2.3.1 给出的这些值来证明。

17. 6 个没有区别的车放在 6×6 棋盘上, 使得没有两个车能够互相攻击的放置方法有多少? 如果是 2 个红车 4 个蓝车, 那么放置方法又是多少?

18. 2 个红车 4 个蓝车放在 8×8 棋盘上, 使得没有两个车可以互相攻击的放置方法有多少?

19. 给定 8 个车, 其中 5 个红车, 3 个蓝车。

(a) 将 8 个车放在 8×8 棋盘上, 使得没有两个车可以互相攻击的放置方法有多少?

(b) 将 8 个车放在 12×12 棋盘上, 使得没有两个车可以互相攻击的放置方法有多少?

62.

20. 确定 $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 的循环排列的个数, 其中 0 和 9 不在对面 (提示: 计算 0 和 9 在对面的循环排列的个数)。

21. 单词 ADDRESSES 的字母有多少排列? 这 9 个字母有多少 8 排列?

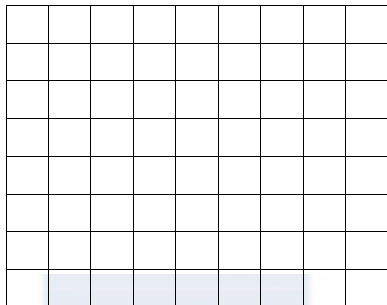
22. 在 4 个运动员之间进行竞走比赛。如果允许名次并列 (甚至是 4 个人同时到达终点), 那么比赛有多少种结束的方式?

23. 桥牌是 4 个人之间的一种游戏, 使用的是普通的 52 张一副的纸牌。开始时每人手里 13 张牌, 桥牌开局时有多少种不同的状态 (不计桥牌实际上是在两组对家之间进行的事实)?

24. 过山车有 5 个车厢, 每个车厢有 4 个座位, 两个在前, 两个在后。今有 20 人准备乘车, 有多少种乘车方式? 若有 2 人想坐在不同的车厢, 有多少种乘车方式?

25. 大缆车有 5 个车厢, 每个车厢有一排 4 个座位, 今有 20 人准备乘车, 有多少种乘车方式? 若有 2 人想坐在不同的车厢, 有多少种乘车方式?

26. 一群 mn 个人要被编入 m 个队, 每队 n 个队员。
- (a) 如果每队都有一个不同的名字, 确定编队的方法数。
- (b) 如果各队都没有名字, 确定编队的方法数。
27. 5 个没有区别的车放在 8×8 棋盘上, 使得没有车能够攻击别的车并且第一行和第一列都不空的放置方法有多少?
28. 一名秘书在距离他家以东 9 个街区、以北 8 个街区的一座大楼里工作。每天他都要步行 17 个街区去上班 (参见下图)。



- (a) 对他来说, 有多少条可能的路线?
- (b) 如果在他家以东 4 个街区、以北 3 个街区开始向东方向的街区在水下 (而他又不会游泳), 则有多少条不同的路线 (提示: 计数使用水下街区的路线的数目)?
29. 设 S 是重复数为 n_1, n_2, \dots, n_k 的多重集合, 其中 $n_1=1$ 。令 $n=n_2+\dots+n_k$ 。证明 S 的循环排列数等于

$$\frac{n!}{n_2! \cdots n_k!}$$

30. 我们要围着一张桌子一圈给 5 个男孩、5 个女孩和一名家长安排座位。如果男孩不坐在男孩旁边, 女孩不坐在女孩旁边, 那么有多少种座位安排方式? 如果有两名家长, 又有多少种座位安排方式?
31. 在一次有 15 个球队参加的足球锦标赛中, 最前面的 3 支球队将获得金杯、银杯和铜杯, 最后的 3 支球队将被降到低一级的联赛比赛。如果分别获得金银铜杯的那些球队是相同的, 而遭到降级的那些球队也都是相同的, 那么我们认为锦标赛的两个结果是相同的。试问锦标赛有多少种可能的不同结果?
32. 确定下面的多重集合的 11 排列的数目:

$$S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$$

33. 确定下面的多重集合的 10 排列的数目:

$$S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$$

34. 确定下面的多重集合的 11 排列的数目:

$$S = \{3 \cdot a, 3 \cdot b, 3 \cdot c, 3 \cdot d\}$$

35. 列出下面的多重集合的 3 组合和 4 组合:

$$\{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$$

36. 确定下面的多重集合的组合数量 (大小任意): 有 k 种不同类型对象, 且它们的有限重复数分别为 n_1, n_2, \dots, n_k 。

37. 一家面包店销售 6 种不同类型的酥皮糕点。如果该店每种糕点至少有 1 打, 那么可能配置成多少打不同类型的酥皮糕点? 如果在一盒中每种酥皮糕点至少有一块, 又能有多少打?

38. 方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

有多少满足 $x_1 \geq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq -5, x_4 \geq 8$ 的整数解?

39. 有 20 根完全相同的棍列成一行, 占据 20 个不同位置:



要从中选出 6 根。

- (a) 有多少种选择?
- (b) 如果所选出的棍中没有两根是相邻的, 那么又有多少种选择?
- (c) 如果在每一对所选的棍之间必须至少有两根棍, 有多少种选择?
40. 有 n 根棍列成一行并将从中选出 k 根。
- (a) 有多少种选择?
- (b) 如果所选出的棍中没有两根是相邻的, 那么又有多少种选择?
- (c) 如果在每一对所选的棍之间必须至少有 l 根棍, 有多少种选择?
41. 在 3 个孩子之间分发 12 个完全相同的苹果和 1 个橘子, 使每个孩子至少得到一个水果, 有多少种分发方法?
42. 将 10 罐橘子汁、1 罐柠檬汁和 1 罐酸橙汁分发给 4 名口渴的学生, 要求每名学生至少得到一罐饮料, 并且柠檬汁和酸橙汁要分给不同的学生, 确定分发的方法数。
43. 确定下面的多重集合的 r 组合数目:

65

$$\{1 \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$$

44. 证明: 在 k 个孩子当中分发 n 件不同物体的分发方法数等于 k^n 。
45. 要将 20 本不同的书放到 5 个书架上, 每个书架至少能够存放 20 本书。
- (a) 如果只关心书架上书的数量 (而不关心哪本书在什么地方), 那么有多少种不同的摆放方法?
- (b) 如果关心哪本书存放在什么地方, 但不关心书在书架上的顺序, 那么有多少种不同的摆放方法?
- (c) 如果需要考虑书架上书的顺序, 那么又有多少种不同的摆放方法?
46. (a) 在一次聚会上有 $2n$ 个人, 他们成对交谈, 每一个人都和另一个人交谈 (因此是 n 对)。 $2n$ 个人像这样交谈能有多少种不同的方式?
- (b) 假设在这次聚会上有 $2n+1$ 个人, 除去一人外, 每一个人都和另一个人交谈。有多少种分对交谈的方法?
47. 有 $2n+1$ 本相同的书要放入带有 3 层搁板的书柜中, 如果每一对搁板放置的书总是多于另一层搁板上放置的书, 那么有多少种方法可把书放入书柜中?
48. 证明 m 个 A 和至多 n 个 B 的排列的数目等于

$$\binom{m+n+1}{m+1}$$

49. 证明最多 m 个 A 和最多 n 个 B 的排列数等于

$$\binom{m+n+2}{m+1} - 1$$

50. 将 5 个相同的车放入 8×8 棋盘的方格中, 使得其中的 4 个车占据一个矩形的四个角, 且这个矩形的边与棋盘的边平行, 有多少种放置方法?
51. 考虑大小为 $2n$ 的多重集合 $\{n \cdot a, 1, 2, 3, \dots, n\}$, 确定它的 n 组合数。

66

52. 考虑大小为 $3n+1$ 的多重集合 $\{n \cdot a, n \cdot b, 1, 2, 3, \dots, n+1\}$, 确定它的 n 组合数。
53. 在集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列和塔状集 $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$ 间建立一一对应, 其中 $|A_k| = k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 。
54. 确定形如 $\emptyset \subseteq A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ 的塔数。
55. 下面单词中的字母有多少个排列?

- (a) TRISKAIDEKAPHOBIA (这个词的意思是“十三恐惧症”)
- (b) FLOCCINAUCINIHIPIILIFICATION (这个词的意思是“认为某事无意义”)
- (c) PNEUMONULTRAMICROSCOPICSILICOVOLCANOCONIOSIS (矽肺病) (这个词可能是英语中最长的单词)
- (d) DERMATOGLYPHICS (肌纹学) (这个单词是现在英语中不含重复字母的最长英语单词, 还有一

个相同长度的单词是 UNCOPYRIGHTABLE[⊖])。

56. 一手牌是同花顺 (即 5 张牌是相同花色的) 的概率是多少?
57. 一手牌正好有一对的概率 (即这一手牌中正好有四个不同的级别) 是多少?
58. 一手牌含有五个不同级别但不含同花顺或者顺子 (5 张牌的点数是连续的) 的概率是多少?
59. 考虑下面这样一副纸牌: 从普通的 52 张牌中去掉 J, Q 和 K 后剩余的 40 张牌, 此时 1 (A) 可以跟在一个 10 的后面。计算 2.6 节中的例子给出的各种手牌的概率。
60. 一家百吉饼店有 6 种不同的百吉饼。假设可以随机选取 15 张百吉饼。每种百吉饼至少有一张时选择的概率是多少? 如果百吉饼中有一种是芝麻口味的, 那么至少有三张芝麻口味的百吉饼时选择的概率是多少?
61. 考虑 9×9 棋盘和 9 个车, 其中有 5 个红车和 4 个蓝车。假设随机把这些车放置在棋盘上非攻击的位置。那么红车在 1, 3, 5, 7, 9 行的概率是多少? 红车既在 1, 2, 3, 4, 5 行上又在 1, 2, 3, 4, 5 列上的概率是多少?
62. 假设一手牌有 7 张牌而不是 5 张。计算下列各种手牌的概率:
 - (a) 7 顺子
 - (b) 一个级别 4 张牌, 另一个级别 3 张牌
 - (c) 一个级别 3 张牌, 另外两个不同级别各两张牌
 - (d) 三个不同级别各两张牌, 第四个级别 1 张牌
 - (e) 一个级别 3 张牌, 四个不同级别各 1 张牌
 - (f) 不同级别的七张牌
63. 投掷 4 枚标准骰子 (一个立方体, 在它的六个面上分别有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点), 每个骰子颜色不同, 每个骰子着地时都有一个面朝上, 因此就呈现出一个点子数。确定下列事件的概率:
 - (a) 呈现出的点子总数是 6 的概率
 - (b) 至多有两个骰子正好呈现出一个点的概率
 - (c) 每个骰子至少呈现出两个点的概率
 - (d) 呈现出的四个点数互不相同的概率
 - (e) 呈现出的点数正好有两个不相同的概率
64. 设 n 是正整数。假设我们在 1 到 n 之间随机选出一个整数序列 i_1, i_2, \dots, i_n 。
 - (a) 这个序列正好含有 $n-2$ 个不同整数的概率是多少?
 - (b) 这个序列正好含有 $n-3$ 个不同整数的概率是多少?

67

68

⊖ Anu Garg; *The Dord, the Diglot, and An Avocado or Two*, Plume, Penguin Group, New York (2007)。

鸽巢原理

本章考虑一个重要而又初等的组合学原理，它能够用来解决各种有趣的问题，常常得出一些令人惊奇的结论。这个原理有许多的名字，但最普通的名字叫鸽巢原理，也叫做狄利克雷 (Dirichlet) 抽屉原理，以及鞋盒 (shoebox) 原理^①。关于鸽巢原理的阐释，粗略地说就是如果有许多鸽子飞进不够多的鸽巢内，那么至少要有有一个鸽巢被两个或多个鸽子占据。下面给出更精确的叙述。

3.1 鸽巢原理：简单形式

鸽巢原理的最简单形式是如下所示的相当显然的论断。

定理 3.1.1 如果要把 $n+1$ 个物体放进 n 个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或更多的物体。

证明 用反证法进行证明。如果这 n 个盒子中的每一个都至多含有一个物体，那么物体的总数最多是 n 。这与我们有 $n+1$ 个物体矛盾，所以某个盒子至少有两个物体。□

注意，无论是鸽巢原理还是它的证明，对于找出含有两个或更多物体的盒子都没有任何帮助。它们只是简单地断言，如果人们检查每一个盒子，那么他们会发现有的盒子里面放有多个物体。鸽巢原理只是保证这样的盒子存在。因此，无论何时用鸽巢原理去证明一个排列或某种现象的存在时，在不考察所有可能性的情况下，它都不能对如何构造排列或寻找某一现象的例子给出任何有价值的指导。

还要注意，当只有 n 个（或更少）物体时是无法保证鸽巢原理的结论的。这是因为可以在 n 个盒子的每一个里面放进一个物体。当然，在盒子中分配两个物体的情况下我们可以使得盒子里有两个物体，但是这不能保证有一个盒子有两个以上物体，除非我们分配至少 $n+1$ 个物体。因此，鸽巢原理只是断言无论我们在 n 个盒子中如何分配 $n+1$ 个物体，总不能避免把两个物体放进同一个盒子中去。

我们可以把物体放入盒子改为用 n 种颜色中的一种颜色对每一个物体着色。此时，鸽巢原理断言，如果使用 n 种颜色给 $n+1$ 个物体着色，那么必然有两个物体被着成相同的颜色。

下面是两个简单的应用。

应用 1 在 13 个人中存在两个人，他们的生日在同一个月份里。□

应用 2 设有 n 对已婚夫妇。至少要从这 $2n$ 个人中选出多少人才能保证能够选出一对夫妇？

为了在这种情形下应用鸽巢原理，考虑 n 个盒子，其中一个盒子对应一对夫妇。如果我们选择 $n+1$ 个人并把他们中的每一个人放到他们夫妻所对应的那个盒子中去，那么就有一个盒子含有两个人；也就是说，我们已经选择了一对已婚夫妇。选择 n 个人使他们当中一对夫妻也没有的两种方法是选择所有的丈夫和选择所有的妻子。因此， $n+1$ 是保证能有一对夫妇被选中的最小的人数。□

有必要正式叙述一下若干与鸽巢原理相关的其他原理。

- 如果将 n 个物体放入 n 个盒子并且没有一个盒子是空的，那么每个盒子恰好有一个物体。
- 如果将 n 个物体放入 n 个盒子并且没有盒子被放入多于一个的物体，那么每个盒子里有

① “shoebox”一词是对德语的“Schubfach”的误译和一种民间的说法，这个词的意思是（书桌里的）“格子”。

一个物体。

在应用2中,如果这样选择 n 个人,即从每一对夫妻中至少选一人,那么我们就从每对夫妻中恰好选出一个人。同样,如果选择 n 个人的方法是从每一对夫妻中至多选一人,那么我们就从每对夫妻中至少(从而也恰好)选出一个人。

前面阐明的这三个原理的更抽象表述如下:

设 X 和 Y 是有限集合,并令 $f: X \rightarrow Y$ 是一个从 X 到 Y 的函数。

70

- 如果 X 的元素多于 Y 的元素,那么 f 就不是一一对应。
- 如果 X 和 Y 含有相同个数的元素,并且 f 是满射(onto),那么 f 就是一一对应。
- 如果 X 和 Y 含有相同个数的元素,并且 f 是一一对应,那么 f 就是满射。□

应用3 给定 m 个整数 a_1, a_2, \dots, a_m ,存在满足 $0 \leq k < l \leq m$ 的整数 k 和 l ,使得 $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ 能够被 m 整除。通俗地说,就是在序列 a_1, a_2, \dots, a_m 中存在连续的 a ,这些 a 的和能被 m 整除。

为了证明这一结论,考虑 m 个和

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

如果这些和当中的任意一个可被 m 整除,那么结论就成立。因此,我们可以假设这些和中的每一个除以 m 都有一个非零余数,余数等于 $1, 2, \dots, m-1$ 中的一个数。因为有 m 个和,而只有 $m-1$ 个余数,所以必然有两个和除以 m 有相同的余数。因此,存在整数 k 和 $l, k < l$,使得 $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ 和 $a_1 + a_2 + \dots + a_l$ 除以 m 有相同的余数 r :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = bm + r, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_l = cm + r$$

二式相减,我们发现 $a_{k+1} + \dots + a_l = (c-b)m$,从而 $a_{k+1} + \dots + a_l$ 能够被 m 整除。

为了具体解释上面的论断^①,设 $m=7$,且整数为 $2, 4, 6, 3, 5, 5, 6$ 。计算上面的和得到 $2, 6, 12, 15, 20, 25, 31$,这些整数被 7 除时余数分别为 $2, 6, 5, 1, 6, 4, 3$ 。有两个等于 6 的余数,这意味着结论: $6+3+5=14$ 可被 7 整除。□

应用4 一位国际象棋大师有 11 周的时间备战一场锦标赛,他决定每天至少下一盘棋,但为了不使自己过于疲劳他还决定每周不能下超过 12 盘棋。证明存在连续若干天,期间这位大师恰好下了 21 盘棋。

设 a_1 是在第一天所下的盘数, a_2 是在第一天和第二天所下的总盘数,而 a_3 是在第一天、第二天和第三天所下的总盘数,以此类推。因为每天至少要下一盘棋,故数序列 a_1, a_2, \dots, a_{77} 是一个严格递增的序列^②。此外, $a_1 \geq 1$,而且因为在任意一周下棋最多是 12 盘,所以 $a_{77} \leq 12 \times 11 = 132$ ^③。因此,我们有

71

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \leq 132$$

序列 $a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ 也是一个严格递增序列:

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 132 + 21 = 153$$

于是,这 154 个数

$$a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$$

中的每一个都是 1 到 153 之间的整数。由此可知,它们中间有两个是相等的。又因为 a_1, a_2, \dots, a_{77} 中没有相等的数,并且 $a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ 中也没有相等的数,因此必然

① 上面论述实际上包含一个非常好的算法,它的正确性依赖于鸽巢原理,为了寻找连续的 a ,这个算法比检查所有连续 a 的和效率更高。

② 这个序列的每一项都比它前面的项大。

③ 这是唯一使用了下面假设的地方,即在日历上 11 周中的任意一周内至多下了 12 盘棋。这样,这一假设可以被下面的假设替代,即 77 天内至多下 132 盘棋。

存在一个 i 和一个 j 使得 $a_i = a_j + 21$ 。从而，这位国际象棋大师在第 $j+1, j+2, \dots, i$ 天总共下了 21 盘棋。□

应用 5 从整数 $1, 2, \dots, 200$ 中选出 101 个整数。证明：在所选的这些整数之间存在两个这样的整数，其中的一个可被另一个整除。

通过分解出尽可能多的 2 因子，我们看到，任一整数都可以写成 $2^k \times a$ 的形式，其中 $k \geq 0$ 且 a 是奇数。对于 1 和 200 之间的一个整数， a 是 100 个数 $1, 3, 5, \dots, 199$ 中的一个。因此，在所选的 101 个整数中存在两个整数，当写成上述形式时这两个数具有相同的 a 值。令这两个数是 $2^r \times a$ 和 $2^s \times a$ 。如果 $r < s$ ，那么第二个数就能被第一个数整除。如果 $r > s$ ，那么第一个数就能被第二个数整除。□

注意，应用 5 在下面的意义下是最好的可能：从 $1, 2, \dots, 200$ 中可以选择 100 个数，使得其中没有一个能被另一个整除（比如，这 100 个整数是 $101, 102, \dots, 199, 200$ ）。

下面给出一个数论方面的应用，并以此结束本节的内容。首先，我们回忆一下，两个正整数 m 和 n 是互素的，如果它们的最大公约数[⊖]是 1。于是，12 和 35 互素，而 12 和 15 则不是互素的，因为 3 是 12 和 15 的公因子。

应用 6 (中国剩余定理) 设 m 和 n 是互素的正整数，并设 a 和 b 为整数，其中 $0 \leq a \leq m-1$ 以及 $0 \leq b \leq n-1$ 。于是，存在正整数 x ，使得 x 除以 m 的余数为 a ，并且 x 除以 n 的余数为 b ；
[72] 即 x 可以写成 $x = pm + a$ 的同时又可写成 $x = qn + b$ 的形式，这里， p 和 q 是两个整数。

为证明这个结论，我们考虑 n 个整数

$$a, m+a, 2m+a, \dots, (n-1)m+a$$

这些整数中的每一个除以 m 都余 a 。设其中的两个除以 n 有相同的余数 r 。令这两个数为 $im + a$ 和 $jm + a$ ，其中 $0 \leq i < j \leq n-1$ 。于是，存在两整数 q_i 和 q_j ，使得

$$im + a = q_i n + r$$

且

$$jm + a = q_j n + r$$

第二个方程减去第一个方程，得

$$(j-i)m = (q_j - q_i)n$$

上面的方程告诉我们， n 是 $(j-i)m$ 的因子。因为 n 与 m 除 1 之外没有其他公因子，因此 n 只能是 $j-i$ 的因子。然而， $0 \leq i < j \leq n-1$ 意味着 $0 < j-i \leq n-1$ ，也就是说 n 不可能是 $j-i$ 的因子。该矛盾产生于我们的假设： n 个整数 $a, m+a, 2m+a, \dots, (n-1)m+a$ 中有两个除以 n 会有相同的余数。因此我们断言，这 n 个数中的每一个数除以 n 都有不同的余数。根据鸽巢原理， n 个数 $0, 1, \dots, n-1$ 中的每一个都要作为余数出现；特别是 b 也是如此。设 p 为整数，满足 $0 \leq p \leq n-1$ ，使得数 $x = pm + a$ 除以 n 余数为 b 。则对于某个整数 q ，有

$$x = qn + b$$

因此， $x = pm + a$ 且 $x = qn + b$ ，从而 x 具有所要求的性质。□

一个有理数 a/b 最终可以写成十进制循环小数的结论实际上就是鸽巢原理的推论，我们将其证明留作练习题。

为了更深层次地运用鸽巢原理，我们需要鸽巢原理的加强版。

3.2 鸽巢原理：加强版

[73] 定理 3.1.1 是下列定理的特殊情况。

⊖ 也称为最大公因子或者最高公因子。

定理 3.2.1 设 q_1, q_2, \dots, q_n 是正整数。如果将

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$$

个物体放入 n 个盒子内, 那么或者第一个盒子至少含有 q_1 个物体, 或者第二个盒子至少含有 q_2 个物体, \dots , 或者第 n 个盒子至少含有 q_n 个物体。

证明 假设我们把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体分放到 n 个盒子中。如果对于每个 $i=1, 2, \dots, n$, 第 i 个盒子含有少于 q_i 个物体, 那么所有盒子中的物体总数不超过

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \dots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_n - n$$

由于上面这个数比分配的物体总数少 1, 矛盾, 因此我们得出结论, 对于某一个 $i=1, 2, \dots, n$, 第 i 个盒子至少包含 q_i 个物体。□

注意, 我们完全有可能将 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n$ 个物体分配到 n 个盒子中, 使得对于所有的 $i=1, 2, \dots, n$, 第 i 个盒子都不含有 q_i 个或更多的物体。其方法是把 $q_1 - 1$ 个物体放入第一个盒子, 将 $q_2 - 1$ 个物体放入第二个盒子等来实现。

鸽巢原理的简单形式可以通过取 $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 2$ 而由加强版得到。此时有

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1 = 2n - n + 1 = n + 1$$

鸽巢原理的加强版用着色的术语表述就是: 如果 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体中的每一个物体被指定用 n 种颜色中的一种着色, 那么存在某个 i , 使得第 i 种颜色的物体 (至少) 有 q_i 个。

在初等数学中, 鸽巢原理的加强版最常用于 q_1, q_2, \dots, q_n 都等于同一个整数 r 的特殊情况。我们把这种特殊情况陈述为如下的推论:

推论 3.2.2 设 n 和 r 都是正整数。如果把 $n(r-1)+1$ 个物体分配到 n 个盒子中, 那么至少有一个盒子含有 r 个或更多的物体。

可以用另一种方法陈述这一推论中的结论, 即平均原理:

如果 n 个非负整数 m_1, m_2, \dots, m_n 的平均数大于 $r-1$, 即

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} > r - 1$$

那么至少有一个整数大于或等于 r 。□

要想明白推论 3.2.2 的结论与这个平均原理之间的关系, 只要取 $n(r-1)+1$ 个物体并把它们放入 n 个盒子即可。对于 $i=1, 2, \dots, n$, 设 m_i 是第 i 个盒子中的物体个数。于是这 m 个数 m_1, m_2, \dots, m_n 的平均数为

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} = \frac{n(r-1) + 1}{n} = (r-1) + \frac{1}{n}$$

因为这个平均数大于 $r-1$, 所以整数 m_i 中有一个至少是 r 。换句话说, 这些盒子中有一个盒子至少含有 r 个物体。

一个不同的平均原理是:

如果 n 个非负整数 m_1, m_2, \dots, m_n 的平均数小于 $r+1$, 即

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} < r + 1$$

那么其中至少有一个整数小于 $r+1$ 。

应用 7 一个果篮装有苹果、香蕉和橘子。为了保证篮子中或者至少有 8 个苹果, 或者至少有 6 个香蕉, 或者至少有 9 个橘子, 则放入篮子中的水果的最小件数是多少?

由鸽巢原理的加强版可知, 无论如何选择, $8+6+9-3+1=21$ 个水果将保证篮子内的水果满足所要求的性质。但是, 7 个苹果、5 个香蕉和 8 个橘子, 总数 20 个水果则不满足所要求的性质。□

另外一个平均原理是:

如果 n 个非负整数 m_1, m_2, \dots, m_n 的平均数至少等于 r , 那么这 n 个整数 m_1, m_2, \dots, m_n 至少有一个满足 $m_i \geq r$.

应用 8 有两个碟子, 其中一个比另一个小, 它们都被分成 200 个均等的扇形[⊖]. 在大碟子中, 任选 100 个扇形并着成红色; 而其余的 100 个扇形着成蓝色. 在小碟子中, 每一个扇形或者着成红色, 或者着成蓝色, 所着红色扇形和蓝色扇形的数目没有限制. 然后, 将小碟子放到大碟子上面使两个碟子的中心重合. 证明: 能够将两个碟子的扇形对齐使得小碟子和大碟子上相同颜色重合的扇形的数目至少是 100 个.

为了证明这一结论, 我们做如下考察. 将大碟子固定时, 那么就存在 200 个可能的位置使得小碟子的每一个扇形含于大碟子的扇形中. 我们首先数一下两个碟子重合的 200 个扇形中颜色一致的扇形的总数. 因为大碟子每种颜色的扇形都有 100 个, 因此在 200 个可能位置中, 小碟子上的每一个扇形都恰好在 100 个位置上与大碟子上的对应扇形颜色一致. 于是, 在所有的位置上, 颜色重合的总数等于小碟子上的扇形数乘以 100, 其结果为 20 000. 因此, 每一个位置上的平均颜色重合数是 $20\,000/200=100$. 从而, 必然存在某个位置其颜色匹配数至少为 100. \square

下面讨论的应用是由 Erdős 和 Szekeres[⊖]首先发现的.

应用 9 证明每个由 n^2+1 个实数构成的序列 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 或者含有长度为 $n+1$ 的递增子序列, 或者含有长度为 $n+1$ 的递减子序列.

我们首先阐明子序列的概念. 如果 b_1, b_2, \dots, b_m 是一个序列, 那么, $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}$ 是一个子序列, 只要 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$. 因此, b_2, b_4, b_5, b_6 是 b_1, b_2, \dots, b_8 的子序列, 但 b_2, b_6, b_5 则不是. 子序列 $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}$ 若满足 $b_{i_1} \leq b_{i_2} \leq \dots \leq b_{i_k}$ 则称为递增的 (更恰当地说是非递减的), 而若满足 $b_{i_1} \geq b_{i_2} \geq \dots \geq b_{i_k}$ 则称为递减的.

现在来证明应用 9 的结论. 我们假设不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列, 证明必然存在长度为 $n+1$ 的递减子序列. 对于每一个 $k=1, 2, \dots, n^2+1$, 设 m_k 为从 a_k 开始的最长的递增子序列的长度. 假设对于每一个 $k=1, 2, \dots, n^2+1$, 有 $m_k \leq n$, 使得不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列. 因为对于每一个 $k=1, 2, \dots, n^2+1$, 都有 $m_k \geq 1$ 成立, 所以 $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ 是 1 和 n 之间的 n^2+1 个整数. 由鸽巢原理的加强版可知, $m_1, m_2, \dots, m_{n^2+1}$ 中有 $n+1$ 个是相等的. 令

$$m_{k_1} = m_{k_2} = \dots = m_{k_{n+1}}$$

其中 $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1} \leq n^2+1$. 假设对于某个 $i=1, 2, \dots, n$, 有 $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$. 那么, 由于 $k_i < k_{i+1}$, 我们可做成一个从 $a_{k_{i+1}}$ 开始的最长的递增子序列, 并将 a_{k_i} 放在前面而得到一个从 a_{k_i} 开始的递增子序列. 由于这意味着 $m_{k_i} > m_{k_{i+1}}$, 因此我们得出 $a_{k_i} \geq a_{k_{i+1}}$ 的结论. 由于这对于每一个 $i=1, 2, \dots, n$ 均成立, 因此我们有

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \dots \geq a_{k_{n+1}}$$

从而得出 $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{n+1}}$ 是一个长度为 $n+1$ 的递减子序列. \square

下面是应用 9 的一个有趣的实例. 设 n^2+1 个人肩并肩地排成一条直线. 于是, 总能选出 $n+1$ 个人向前迈出一小步, 使得从左至右他们的身高是递增 (或递减) 的. 只要用排队和身高的术语通读一遍应用 9 的证明, 即可得到这个结论的证明.

⊖ 一张馅饼的 200 个相等的切片.

⊖ P. Erdős and A. Szekeres, A Combinatorial Problem in Geometry, *Compositio Mathematica*, 2 (1935), 463-470.

3.3 Ramsey 定理

现在我们来讨论鸽巢原理的一个深刻而又重要的扩展，它就是以英国逻辑学家 Frank Ramsey 的名字命名的 Ramsey^①定理。

下面就是 Ramsey 定理的最流行且容易理解的例子：

在 6 个（或更多的）人中，或者有 3 个人，他们中的每两人都互相认识；或者有 3 个人，他们中的每两人都彼此不认识。

证明该结果的一种方法是考察这 6 个人相识和不相识的所有不同的可能方式。这是一种冗长乏味的工作，但是，坚毅的人能够完成这项工作。然而，却存在一个既简单又优美的证明，它避免了对各种情形的考虑。在给出这个证明之前，我们先对这个结果作更抽象的描述：

$$K_6 \rightarrow K_3, K_3 \quad (\text{读作 } K_6 \text{ 箭指 } K_3, K_3) \quad (3.1)$$

这是什么意思呢？首先，我们用 K_6 代表 6 个对象（例如 6 个人）和由它们配成的全部 15 对（无序对）的集合。通过在平面上选出 6 个点来画出 K_6 ，其中没有 3 个点共线。然后，画出连接每一对点的线段或边（现在，这些边就代表这些点对）。一般说来，我们用 K_n 表示 n 个对象和这些对象中每两个对象配成的对^②。 $K_n (n=1, 2, 3, 4, 5)$ 的图示由图 3-1 给出。注意， K_3 的图是一个三角形的图，我们常常把 K_3 叫做三角形。

我们把边着成红色来表示两个点相识，着成蓝色表示两个点不认识，由此可以分辨出相识的一对和不相识的一对。现在，“互相认识的 3 个人”即为“每条边都被着成红色的 K_3 ：红 K_3 ”。类似地，3 个互不相识的陌生人则形成一个蓝 K_3 。现在我们可以解释表达式 (3.1)：

$K_6 \rightarrow K_3, K_3$ 是这样的一个论断：不管用红色和蓝色如何去着色 K_6 的边，总存在一个红 K_3 （原始的 6 个点中有 3 个点，它们之间的 3 条线段均被着成红色）或蓝 K_3 （原始的 6 个点中有 3 个点，它们之间的 3 条线段均被着成蓝色），简言之，总存在一个单色三角形。

为了证明 $K_6 \rightarrow K_3, K_3$ ，我们论述如下：假设 K_6 的边已经被随意着成红色或蓝色。考虑 K_6 的任意一点 p 。它连接了 5 条边。由于这 5 条边中的每一条都被着成红色或是蓝色，因此（根据鸽巢原理的加强版可知）这 5 条边中或者至少有 3 条边着的是红色，或者至少有 3 条边着的是蓝色。设连接 p 点的这 5 条边中有 3 条边是红色的（有 3 条蓝色边时的证明类似）。令经过点 p 的这 3 条红边分别将 p 点与 a, b, c 三点相连。考虑将 a, b, c 两两相连的边。如果这些边都是蓝色的，那么 a, b, c 就确定了一个蓝色的 K_3 。如果它们中的一条边，比如说连接 a 和 b 的边是红色的，那么 p, a, b 就确定一个红 K_3 。因此，我们得出结论：的确存在一个红 K_3 或者一个蓝 K_3 。

我们发现论断 $K_5 \rightarrow K_3, K_3$ 不成立。这是因为存在某种方法给 K_5 的边着色，使得不产生红 K_3 和蓝 K_3 。这种着色方式如图 3-2 所示，其中五边形的边（以实线表示的边）是红色边，而里面的五角星形的边（以虚线表示的边）是蓝色边。

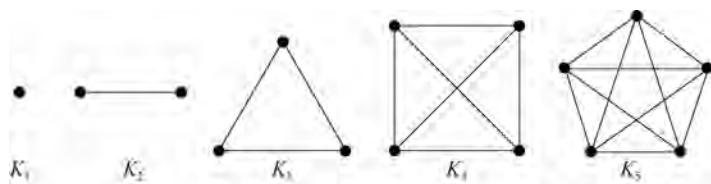


图 3-1

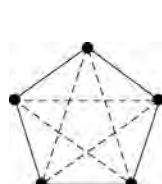


图 3-2

① Frank Ramsey 出生于 1903 年，死于 1930 年，当时他还不到 27 周岁。尽管他早早去世了，但是他为今天的 Ramsey 定理奠定了基础。

② 在后面的章节中， K_n 被称为 n 阶完全图（complete graph）。

下面我们叙述并证明 Ramsey 定理, 尽管它还不是此定理的一般形式。

定理 3.3.1 如果 $m \geq 2$ 及 $n \geq 2$ 是两个整数, 则存在正整数 p , 使得

$$K_p \rightarrow K_m, K_n$$

[78]

用语言描述的话, Ramsey 定理说的是给定 m 和 n , 存在正整数 p , 使得当把 K_p 的边着成红色或蓝色时, 或者存在一个红 K_m , 或者存在一个蓝 K_n 。无论 K_p 的边如何着色, 都保证红 K_m 或者蓝 K_n 的存在性。如果 $K_p \rightarrow K_m, K_n$, 那么对任何满足 $q \geq p$ 的整数 q , $K_q \rightarrow K_m, K_n$ 都成立。Ramsey 数 $r(m, n)$ 是使 $K_p \rightarrow K_m, K_n$ 成立的最小的整数 p 。Ramsey 定理断言 $r(m, n)$ 一定存在。通过交换红色和蓝色, 我们看到

$$r(m, n) = r(n, m)$$

$K_6 \rightarrow K_3, K_3$ 成立而 $K_5 \rightarrow K_3, K_3$ 不成立的事实表明

$$r(3, 3) = 6$$

很容易确定 Ramsey 数 $r(2, n)$ 和 $r(m, 2)$ 。下面我们证明 $r(2, n) = n$ 。

$r(2, n) \leq n$: 事实上, 如果把 K_n 的边或者着成红色或者着成蓝色, 那么, 或者 K_n 的某条边是红色的 (因此就得到一个红 K_2), 或者 K_n 所有的边都是蓝色的 (因此就得到一个蓝 K_n)。

$r(2, n) > n-1$: 事实上, 如果把 K_{n-1} 的边都着成蓝色, 那么我们既得不到红 K_2 , 也得不到蓝 K_n 。

用类似的方法可以证明 $r(m, 2) = m$ 。当 $m, n \geq 2$ 时, 这些数称为平凡的 Ramsey 数。

定理 3.3.1 的证明 我们对两个参数 $m \geq 2$ 和 $n \geq 2$ 利用 (双重) 归纳法证明 $r(m, n)$ 的存在性。如果 $m=2$, 我们知道 $r(2, n) = n$, 且如果 $n=2$, 则 $r(m, 2) = m$ 。现在假设 $m \geq 3$ 且 $n \geq 3$, 并取归纳假设为 $r(m-1, n)$ 和 $r(m, n-1)$ 存在。设 $p = r(m-1, n) + r(m, n-1)$ 。下面要证明对于这个整数 p 有 $K_p \rightarrow K_m, K_n$ 。

假设 K_p 的边已经用某种方式着成了红色或者蓝色。考虑 K_n 的一个点 x 。设 R_x 是通过红边与 x 相连的点的集合, 而 B_x 是通过蓝边与点 x 相连的点的集合。于是

$$|R_x| + |B_x| = p - 1 = r(m-1, n) + r(m, n-1) - 1$$

这表明

(1) $|R_x| \geq r(m-1, n)$, 或者

(2) $|B_x| \geq r(m, n-1)$

(如果 (1) 和 (2) 都不成立, 那么有 $|R_x| + |B_x| \leq r(m-1, n) - 1 + r(m, n-1) - 1 = p - 2$, 矛盾。)

[79]

假设 (1) 成立。设 $q = |R_x|$ 满足 $q \geq r(m-1, n)$ 。考虑由 R_x 的点组成的 K_q , 我们看到或者 K_q 中有 $m-1$ 个点 (也是 K_p 中的点) 其所有边都被着成红色 (也就是存在一个红 K_{m-1}), 或者有 n 个点, 其所有边都被着成蓝色 (也就是存在一个蓝 K_n)。如果第二个可能性成立, 那么就完成了证明, 因为我们已经有一个蓝 K_n 。如果第一种可能成立, 我们也完成了证明, 因为可以取红 K_{m-1} , 并把点 x 加入其中得到一个红 K_m , 这是因为连接 x 与 R_x 中的各点的边都是红色边。

当 (2) 成立时, 我们也可以进行类似的证明。通过归纳法可以得出结论, 对于所有整数 $m, n \geq 2$, 数 $r(m, n)$ 存在。□

定理 3.3.1 的证明不仅证明了 Ramsey 数 $r(m, n)$ 存在, 而且还证明了它们满足不等式

$$r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1) \quad (m, n \geq 3) \quad (3.2)$$

设

$$f(m, n) = \binom{m+n-2}{m-1} \quad (m, n \geq 2)$$

于是, 利用帕斯卡公式, 我们得到

$$\binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2}$$

因此有

$$f(m, n) = f(m-1, n) + f(m, n-1) \quad (m, n \geq 3)$$

上面这个关系与 (3.2) 类似, 但是它却是一个等式: 因为 $r(2, n) = n = f(2, n)$, $r(m, 2) = m = f(m, 2)$, 所以我们得出 Ramsey 数 $r(m, n)$ 满足

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-2}{n-1}$$

下面的列表^①给出了一些已知的非平凡 Ramsey 数 $r(m, n)$:

80

$$\begin{aligned} r(3, 3) &= 6 \\ r(3, 4) &= r(4, 3) = 9 \\ r(3, 5) &= r(5, 3) = 14 \\ r(3, 6) &= r(6, 3) = 18 \\ r(3, 7) &= r(7, 3) = 23 \\ r(3, 8) &= r(8, 3) = 28 \\ r(3, 9) &= r(9, 3) = 36 \\ 40 &\leq r(3, 10) = r(10, 3) \leq 43 \\ r(4, 4) &= 18 \\ r(4, 5) &= r(5, 4) = 25 \\ 35 &\leq r(4, 6) = r(6, 4) \leq 41 \\ 43 &\leq r(5, 5) \leq 49 \\ 58 &\leq r(5, 6) = r(6, 5) \leq 87 \\ 102 &\leq r(6, 6) \leq 165 \end{aligned}$$

注意, 在上面的列表中, $r(3, 10)$ 在 40 和 43 之间, 这说明

$$K_{43} \rightarrow K_3, K_{10}$$

且

$$K_{39} \not\rightarrow K_3, K_{10}$$

因此, 没有办法给 K_{43} 的边着色使得既不产生红 K_3 又不产生蓝 K_{10} , 却有办法给 K_{39} 的边着色使得既不形成红 K_3 又不形成蓝 K_{10} , 但是不知道这两个结论对 K_{40} , K_{41} 和 K_{42} 是否成立. 结论 $43 \leq r(5, 5) \leq 49$ 意味着, $K_{59} \rightarrow K_5, K_5$, 并有方法给 K_{42} 的边着色使得不形成单色的 K_5 .

Ramsey 定理可以扩展到任意多种颜色的情况. 对此我们给出一个非常简略的介绍. 如果 n_1, n_2 和 n_3 都是大于或等于 2 的整数, 则存在整数 p , 使得

$$K_p \rightarrow K_{n_1}, K_{n_2}, K_{n_3}$$

① S. P. Radziszowski 发表在 *Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Survey #1 上的论文 “Small Ramsey Numbers” 中包含这条信息和其他信息; 参见 <http://www.combinatorics.org>.

也就是说,如果把 K_p 的每条边上着红色、蓝色或绿色,那么或者存在一个红 K_{n_1} , 或者存在一个蓝 K_{n_2} , 或者存在一个绿 K_{n_3} 。使该结论成立的最小整数 p 称为 Ramsey 数 $r(n_1, n_2, n_3)$ 。已知这种类型的仅有的非平凡 Ramsey 数为

$$r(3,3,3) = 17$$

因此, $K_{17} \rightarrow K_3, K_3, K_3$, 而 $K_{16} \not\rightarrow K_3, K_3, K_3$ 。我们可以用类似的方法定义 Ramsey 数 $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$, 而对于点 Ramsey 定理的完全一般形式是这些数存在; 即存在整数 p , 使得

$$K_p \rightarrow K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_k}$$

81 成立。

Ramsey 定理还有更一般的形式, 在这种形式中点对 (两个元素的子集) 换成了 t 个元素的子集, 其中 $t \geq 1$ 是某个整数。令

$$K_n^t$$

表示 n 元素集合中所有 t 个元素的子集的集合。将上面的概念扩展, Ramsey 定理的一般形式可叙述如下:

给定整数 $t \geq 2$ 及整数 $q_1, q_2, \dots, q_k \geq t$, 存在一个整数 p , 使得

$$K_p^t \rightarrow K_{q_1}^t, K_{q_2}^t, \dots, K_{q_k}^t$$

成立。也就是说, 存在一个整数 p , 使得如果给 p 元素集合中的每一个 t 元素子集指定 k 种颜色 c_1, c_2, \dots, c_k 中的一种, 那么或者存在 q_1 个元素, 这些元素的所有 t 元素子集都被指定为颜色 c_1 , 或者存在 q_2 个元素, 这些元素的所有 t 元素子集都被指定为颜色 c_2 , \dots , 或者存在 q_k 个元素, 它的 t 元素子集都被指定为颜色 c_k 。这样的整数中最小的整数 p 为 Ramsey 数

$$r_t(q_1, q_2, \dots, q_k)$$

假设 $t=1$ 。于是, $r_1(q_1, q_2, \dots, q_k)$ 就是满足下面条件的最小的数 p : 如果 p 元素集合的元素被用颜色 c_1, c_2, \dots, c_k 中的一种颜色着色, 那么或者存在 q_1 个都被着成颜色 c_1 的元素, 或者存在 q_2 个都被着成颜色 c_2 的元素, \dots , 或者存在 q_k 个都被着成颜色 c_k 的元素。因此, 根据鸽巢原理的加强版, 有

$$r_1(q_1, q_2, \dots, q_k) = q_1 + q_2 + \dots + q_k - k + 1$$

这就证明 Ramsey 定理是鸽巢原理的加强版的扩展。

确定一般的 Ramsey 数 $r_t(q_1, q_2, \dots, q_k)$ 是一个困难的工作。关于它们的准确值我们知道得很少。但不难看出,

$$r_t(t, q_2, \dots, q_k) = r_t(q_2, \dots, q_k)$$

并且 q_1, q_2, \dots, q_k 的排列顺序不影响 Ramsey 数的值。

3.4 练习题

1. 关于应用 4, 证明对于每一个 $k=1, 2, \dots, 21$, 存在连续若干天, 在这些天中国象棋大师将恰好下完 k 局棋 (情形 $k=21$ 是在应用 4 中处理的情况)。能否论断: 存在连续若干天, 在此期间国际象棋大师将恰好下完 22 局棋?

82

* 2. 关于应用 5, 证明如果从 $1, 2, \dots, 200$ 中选出 100 个整数, 且所选的这些整数中有一个小于 16, 那么存在 2 个所选出的整数, 使得它们中的一个能被另一个整除。

3. 通过从集合 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ 中选择一些整数 (选多少?) 来扩展应用 5。

4. 证明: 如果从集合 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ 中选择 $n+1$ 个整数, 那么总存在两个整数, 它们之间相差 1。

5. 证明: 如果从 $\{1, 2, \dots, 3n\}$ 中选择 $n+1$ 个整数, 那么总存在两个整数, 它们之间最多差 2。

6. 扩展练习题 4 和练习题 5。

* 7. 证明：对任意给定的 52 个整数，存在两个整数，要么两者的和能被 100 整除，要么两者的差能被 100 整除。

8. 用鸽巢原理证明，有理数 m/n 展开的十进制小数最终是循环的。例如，

$$\frac{34\ 478}{99\ 900} = 0.345\ 125\ 125\ 125\ 12\cdots$$

9. 一个房间内有 10 个人，他们当中没有人超过 60 岁（年龄只能以整数给出）但又至少 1 岁。证明：总能够找出两组人（两组人中不含相同的人），各组人的年龄和是相同的。题中的 10 能换成更小的数吗？

10. 一个孩子每天至少看一个小时电视，总共看 7 周，但是因为父母的控制，任何一周看电视的时间从不超过 11 个小时。证明：存在连续若干天，在此期间这个孩子恰好看 20 个小时电视（假设这个孩子每天看电视的时间为整数个小时）。

11. 一个学生有 37 天用来准备考试。根据以往的经验，她知道她需要的学习时间不超过 60 小时。她还希望每天至少学习 1 个小时。证明：无论她如何安排她的学习时间（而每天的时间是一个整数），都存在连续的若干天，在此期间她恰好学习了 13 个小时。

12. 举例证明，当 m 和 n 不互素时，中国剩余定理的结论（应用 6）未必成立。

83

* 13. 设 S 是平面上 6 个点的集合，其中没有 3 个点共线。给由 S 的点所确定的 15 条线段着色，将它们或者着成红色，或者着成蓝色。证明：至少存在两个由 S 的点所确定的三角形或者是红色三角形或者是蓝色三角形（或者两者都是红色三角形，或者两者都是蓝色三角形，或者一个是红色三角形而另一个是蓝色三角形）。

14. 一只袋子里装了 100 个苹果、100 个香蕉、100 个橘子和 100 个梨。如果每分钟从袋子里取出 1 种水果，那么需要多少时间就能保证至少已拿出了 1 打相同种类的水果？

15. 证明：对任意 $n+1$ 个整数 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} ，存在两个整数 a_i 和 $a_j (i \neq j)$ ，使得 $a_i - a_j$ 能够被 n 整除。

16. 证明：在一群 $n > 1$ 个人中，存在两个人，他们在这群人中有相同数目的熟人（假设他或她不是自己的熟人）。

17. 有一个 100 人的聚会，每个人都有偶数个（有可能是 0 个）熟人。证明：在这次聚会上有 3 个人，其熟人数量相同。

18. 证明：在边长为 2 的正方形中任选 5 个点，它们当中存在 2 个点，这 2 个点的距离至多为 $\sqrt{2}$ 。

19. (a) 证明：在边长为 1 的等边三角形中任意选择 5 个点，存在 2 个点，其间距离至多为 $1/2$ 。

(b) 证明：在边长为 1 的等边三角形中任意选择 10 个点，存在 2 个点，其间距离至多为 $1/3$ 。

(c) 确定一个整数 m_n ，使得如果在边长为 1 的等边三角形中任意选择 m_n 个点，则存在 2 个点，其间距离至多为 $1/n$ 。

20. 证明： $r(3, 3, 3) \leq 17$ 。

* 21. 通过展示用红蓝绿 3 色给连接 16 个点的各线段着色的方法证明 $r(3, 3, 3) \geq 17$ ，其中，着色结果具有性质：不存在 3 个点使得连接它们的 3 条线段都被着成相同的颜色。

22. 证明：

$$r(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k+1}) \leq (k+1)(r(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_k) - 1) + 2.$$

利用该结果得出 $r(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_n)$ 的一个上界。

84

23. 将连接 10 个点的各条线段随意着成红色或蓝色。证明：一定或者存在 3 个点使得连接这 3 点的 3 条线段都是红色的，或者存在 4 个点使得连接这 4 点的 6 条线段都是蓝色的（即 $r(3, 4) \leq 10$ ）。

24. 设 q_3 和 t 为正整数且 $q_3 \geq t$ 。确定 Ramsey 数 $r_t(t, t, q_3)$ 。

25. 设 q_1, q_2, \dots, q_k, t 为正整数且 $q_1 \geq t, q_2 \geq t, \dots, q_k \geq t$ 。令 m 为 q_1, q_2, \dots, q_k 中最大者。证明

$$r_i(m, m, \dots, m) \geq r_i(q_1, q_2, \dots, q_k)$$

结论：证明 Ramsey 定理时，只要在 $q_1 = q_2 = \dots = q_k$ 的条件下证明即可。

26. 设军乐队的 mn 个人以下述方式站成 m 行 n 列的方队：在每一行中的每个人都比他或她左边的人高。假设指挥将每一列的人按身高从前至后增加的顺序重排。证明：各行仍然是按身高从左至右增加的顺序排列。
27. $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集的一个集合具有如下性质：每一对子集至少有一个公共元素。证明：在该子集的集合中最多存在 2^{n-1} 个子集。
28. 在一次舞会上有 100 位男士和 20 位女士。对于 $1, 2, \dots, 100$ 中的每个 i ，第 i 位男士选择 a_i 位女士作为他的潜在舞伴（这 a_i 位女士组成他的“舞伴清单”），这样，对任意给定的一组 20 位男士，总有可能把这 20 位男士与 20 位女士配成舞伴对，且每位男士所配的舞伴都在他的舞伴清单中。保证做到这一点的最小和 $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ 是多少？
29. 把一组不同的对象分配到 n 个盒子 B_1, B_2, \dots, B_n 中。从这些盒子中取出所有对象并把它们重新分配到新的 $n+1$ 个盒子 $B_1^*, B_2^*, \dots, B_{n+1}^*$ 中，且所有新盒子都非空（所以对象的总数至少是 $n+1$ ）。证明存在这样的两个对象，它们都有这样的性质：它所在新盒子的对象数小于原来装它的旧盒子的对象数。

