

第一章 行列式

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-4) \times 3 + 0 \times (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \times 8 \\ &\quad - 0 \times 1 \times 3 - 2 \times (-1) \times 8 - 1 \times (-4) \times (-1) \\ &= -24 + 8 + 16 - 4 = -4. \end{aligned}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= acb + bac + cba - bbb - aaa - ccc \\ &= 3abc - a^3 - b^3 - c^3. \end{aligned}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= bc^2 + ca^2 + ab^2 - ac^2 - ba^2 - cb^2 \\ &= (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

$$(4) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \\ &= x(x+y)y + yx(x+y) + (x+y)yx - y^3 - (x+y)^3 - x^3 \\ &= 3xy(x+y) - y^3 - 3x^2y - x^3 - y^3 - x^3 \\ &= -2(x^3 + y^3). \end{aligned}$$

2. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4;

解 逆序数为 0

(2) 4 1 3 2;

解 逆序数为 4: 41, 43, 42, 32.

(3) 3 4 2 1;

解 逆序数为 5: 32, 31, 42, 41, 21.

(4) 2 4 1 3;

解 逆序数为 3: 21, 41, 43.

(5) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ \cdots\ (2n)$;

解 逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$:

3 2 (1 个)

5 2, 5 4 (2 个)

7 2, 7 4, 7 6 (3 个)

.....

$(2n-1)2, (2n-1)4, (2n-1)6, \dots, (2n-1)(2n-2)$ ($n-1$ 个)

(6) $1\ 3\ \dots\ (2n-1)\ (2n)\ (2n-2)\ \dots\ 2.$

解 逆序数为 $n(n-1)$:

$3\ 2$ (1 个)

$5\ 2, 5\ 4$ (2 个)

.....

$(2n-1)2, (2n-1)4, (2n-1)6, \dots, (2n-1)(2n-2)$ ($n-1$ 个)

$4\ 2$ (1 个)

$6\ 2, 6\ 4$ (2 个)

.....

$(2n)2, (2n)4, (2n)6, \dots, (2n)(2n-2)$ ($n-1$ 个)

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项的一般形式为

$$(-1)^t a_{11}a_{23}a_{3r}a_{4s},$$

其中 rs 是 2 和 4 构成的排列, 这种排列共有两个, 即 24 和 42.

所以含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项分别是

$$(-1)^t a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},$$

$$(-1)^t a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=(-1)^2 a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

4. 计算下列各行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \times (-1)^{4+3} \\ & = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1+\frac{1}{2}c_3]{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4-c_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{r_4-r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$(3) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \\ & = adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4abcdef. \end{aligned}$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \\ & = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+dc_2} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ & = (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix} = abcd + ab + cd + ad + 1. \end{aligned}$$

5. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3;$$

证明

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix} = (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3. \end{aligned}$$

$$(2) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

证明

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\
&= a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix} \\
&= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \\
&= (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

证明

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} (c_4 - c_3, c_3 - c_2, c_2 - c_1 \text{ 得}) \\
&= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} (c_4 - c_3, c_3 - c_2 \text{ 得})
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{c-b}{c(c-b)(c+b+a)} & \frac{d-b}{d(d-b)(d+b+a)} \\ 0 & c(c-b)(c+b+a) & d(d-b)(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{c(c+b+a)} & \frac{1}{d(d+b+a)} \\ c(c+b+a) & d(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

$$(5) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

证明 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1x + a_2$, 命题成立.

假设对于 $(n-1)$ 阶行列式命题成立, 即

$$D_{n-1} = x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1},$$

则 D_n 按第一列展开, 有

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= xD_{n-1} + a_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

因此, 对于 n 阶行列式命题成立.

6. 设 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90° 、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1 = D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$, $D_3 = D$.

证明 因为 $D = \det(a_{ij})$, 所以

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix} = \cdots \\
&= (-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)} D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.
\end{aligned}$$

同理可证

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D^T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

$$D_3 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D = (-1)^{n(n-1)} D = D.$$

7. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}, \text{ 其中对角线上元素都是 } a, \text{ 未写出的元素}$$

都是 0;

解

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \quad (\text{按第 } n \text{ 行展开})$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + (-1)^{2n} \cdot a \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$=(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)(n-2)} + a^n = a^n - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1).$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

解 将第一行乘 (-1) 分别加到其余各行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

$$(3) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

解 根据第 6 题结果, 有

$$D_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

此行列式为范德蒙德行列式.

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} [(a-i+1)-(a-j+1)] \\
 &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} [-(i-j)] \\
 &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n+(n-1)+\cdots+1}{2}} \cdot \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (i-j) \\
 &= \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (i-j).
 \end{aligned}$$

$$(4) D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & \ddots & & & \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & \\ & \ddots & & & \\ c_n & & & & d_n \end{vmatrix};$$

解

$$\begin{aligned}
 D_{2n} &= \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & \ddots & & & \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & \\ & \ddots & & & \\ c_n & & & & d_n \end{vmatrix} \quad (\text{按第 1 行展开}) \\
 &= a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & \\ & \ddots & & & \\ c_{n-1} & & & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$+(-1)^{2n+1}b_n \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_1 & b_1 & \\ & & & c_1 & d_1 & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & 0 \end{vmatrix}.$$

再按最后一行展开得递推公式

$$D_{2n}=a_nd_nD_{2n-2}-b_nc_nD_{2n-2}, \text{ 即 } D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2}.$$

于是
$$D_{2n}=\prod_{i=2}^n(a_id_i-b_ic_i)D_2.$$

而
$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1,$$

所以
$$D_{2n}=\prod_{i=1}^n(a_id_i-b_ic_i).$$

(5) $D=\det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$;

解 $a_{ij}=|i-j|$,

$$D_n=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_1-r_2 \\ \hline r_2-r_3 \\ \cdots \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
c_2+c_1 \\
\hline
c_3+c_1 \\
\hline
\cdots
\end{array}
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1
\end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}.$$

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
c_1-c_2 \\
\hline
c_2-c_3 \\
\hline
\cdots
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
-a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n & 1+a_n
\end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1^{-1} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2^{-1} \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_3^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & a_{n-1}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1+a_n^{-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_3^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 + \sum_{i=1}^n a_i^{-1} \end{vmatrix} \\
&= (a_1 a_2 \cdots a_n) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right).
\end{aligned}$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases};$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -284,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142,$$

所以
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -1.$$

$$(2) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}.$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1507, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -1145,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 703, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -395,$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 212,$$

所以

$$x_1 = \frac{1507}{665}, \quad x_2 = -\frac{1145}{665}, \quad x_3 = \frac{703}{665}, \quad x_4 = \frac{-395}{665}, \quad x_5 = \frac{212}{665}.$$

9. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非

零解?

解 系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = \mu - \mu\lambda.$$

令 $D=0$, 得

$$\mu=0 \text{ 或 } \lambda=1.$$

于是, 当 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时该齐次线性方程组有非零解.

10. 问 λ 取何值时, 齐次线性方程组
$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

解 系数行列式为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^3 + (\lambda-3) - 4(1-\lambda) - 2(1-\lambda)(-3-\lambda) \\ &= (1-\lambda)^3 + 2(1-\lambda)^2 + \lambda - 3. \end{aligned}$$

令 $D=0$, 得

$$\lambda=0, \lambda=2 \text{ 或 } \lambda=3.$$

于是, 当 $\lambda=0, \lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时, 该齐次线性方程组有非零解.

第二章 矩阵及其运算

1. 已知线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3 \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases},$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解 由已知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

故
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3 \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{cases}.$$

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2 \\ y_2 = 2z_1 + z_3 \\ y_3 = -z_2 + 3z_3 \end{cases},$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解 由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

所以有 $\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3 \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3 \end{cases}.$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $3AB - 2A$ 及 $A^T B$.

解 $3AB - 2A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 计算下列乘积:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$

解 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 7 + 3 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 7 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 \\ 5 \times 7 + 7 \times 2 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}.$

(2) $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$

$$\text{解} \quad (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10).$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1 \ 2);$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1 \ 2) = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times 2 \\ 1 \times (-1) & 1 \times 2 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$(5) (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

解

$$\begin{aligned} & (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 问:

(1) $AB=BA$ 吗?

解 $AB \neq BA$.

因为 $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, 所以 $AB \neq BA$.

(2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 吗?

解 $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

因为 $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix},$$

但 $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$,

所以 $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 吗?

解 $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

因为 $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

而 $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$,

故 $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

6. 举反列说明下列命题是错误的:

(1)若 $A^2=0$, 则 $A=0$;

解 取 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2=0$, 但 $A\neq 0$.

(2)若 $A^2=A$, 则 $A=0$ 或 $A=E$;

解 取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^2=A$, 但 $A\neq 0$ 且 $A\neq E$.

(3)若 $AX=AY$, 且 $A\neq 0$, 则 $X=Y$.

解 取

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $AX=AY$, 且 $A\neq 0$, 但 $X\neq Y$.

7. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^2, A^3, \dots, A^k .

解 $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$,

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$\dots\dots\dots,$

$$A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

8. 设 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 求 A^k .

解 首先观察

$$A^2=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix},$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 \\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 \\ 0 & 0 & \lambda^5 \end{pmatrix},$$

.....,

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明:

当 $k=2$ 时, 显然成立.

假设 k 时成立, 则 $k+1$ 时,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由数学归纳法原理知:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

9. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 为对称矩阵, 证明 $B^T A B$ 也是对称矩阵.

证明 因为 $A^T = A$, 所以

$$(B^T A B)^T = B^T (B^T A)^T = B^T A^T B = B^T A B,$$

从而 $B^T A B$ 是对称矩阵.

10. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵, 证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

证明 充分性: 因为 $A^T = A, B^T = B$, 且 $AB = BA$, 所以

$$(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB,$$

即 AB 是对称矩阵.

必要性: 因为 $A^T = A, B^T = B$, 且 $(AB)^T = AB$, 所以

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$$

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$$

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. $|A| = 1$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

故 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$

解 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. |A|=1 \neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix};$

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}. |A|=2 \neq 0$, 故 A^{-1} 存在. 因为

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -32 & 14 & -2 \end{pmatrix},$$

所以 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$

(4) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$

解 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$, 由对角矩阵的性质知

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

12. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$

解 $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

(2) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

解 $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad X &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

13. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

解 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{故} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而有
$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0. \\ x_3=0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

解 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

故有
$$\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=0. \\ x_3=3 \end{cases}$$

14. 设 $A^k=O$ (k 为正整数), 证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明 因为 $A^k=O$, 所以 $E-A^k=E$. 又因为

$$E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}),$$

所以 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E$,

由定理 2 推论知 $(E-A)$ 可逆, 且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

证明 一方面, 有 $E=(E-A)^{-1}(E-A)$.

另一方面, 由 $A^k=O$, 有

$$E=(E-A)+(A-A^2)+A^2-\cdots-A^{k-1}+(A^{k-1}-A^k)$$

$$=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A),$$

故 $(E-A)^{-1}(E-A)=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A),$

两端同时右乘 $(E-A)^{-1}$, 就有

$$(E-A)^{-1}(E-A)=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

15. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$, 证明 A 及 $A+2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A+2E)^{-1}$.

证明 由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A=2E, \text{ 即 } A(A-E)=2E,$$

或 $A \cdot \frac{1}{2}(A-E)=E,$

由定理 2 推论知 A 可逆, 且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E).$

由 $A^2-A-2E=O$ 得

$$A^2-A-6E=-4E, \text{ 即 } (A+2E)(A-3E)=-4E,$$

或 $(A+2E) \cdot \frac{1}{4}(3E-A)=E$

由定理 2 推论知 $(A+2E)$ 可逆, 且 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A).$

证明 由 $A^2-A-2E=O$ 得 $A^2-A=2E$, 两端同时取行列式得

$$|A^2-A|=2,$$

即 $|A||A-E|=2,$

故 $|A| \neq 0,$

所以 A 可逆, 而 $A+2E=A^2$, $|A+2E|=|A^2|=|A|^2 \neq 0$, 故 $A+2E$ 也可逆.

$$\begin{aligned} \text{由 } A^2-A-2E=O &\Rightarrow A(A-E)=2E \\ &\Rightarrow A^{-1}A(A-E)=2A^{-1}E \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又由 } A^2-A-2E=O &\Rightarrow (A+2E)A-3(A+2E)=-4E \\ &\Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (A+2E)^{-1}(A+2E)(A-3E) &=-4(A+2E)^{-1}, \\ (A+2E)^{-1} &=\frac{1}{4}(3E-A). \end{aligned}$$

16. 设 A 为 3 阶矩阵, $|A|=\frac{1}{2}$, 求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

解 因为 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, 所以

$$\begin{aligned} |(2A)^{-1}-5A^*| &= \left| \frac{1}{2}A^{-1}-5|A|A^{-1} \right| = \left| \frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1} \right| \\ &= |-2A^{-1}| = (-2)^3|A^{-1}| = -8|A|^{-1} = -8 \times 2 = -16. \end{aligned}$$

17. 设矩阵 A 可逆, 证明其伴随阵 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证明 由 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, 得 $A^*=|A|A^{-1}$, 所以当 A 可逆时, 有

$$|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1} \neq 0,$$

从而 A^* 也可逆.

因为 $A^*=|A|A^{-1}$, 所以

$$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A.$$

又 $A=\frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*=|A|(A^{-1})^*$, 所以

$$(A^*)^{-1} = |A|^{-1} A = |A|^{-1} |A| (A^{-1})^* = (A^{-1})^*.$$

18. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^* , 证明:

(1) 若 $|A|=0$, 则 $|A^*|=0$;

(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证明

(1) 用反证法证明. 假设 $|A^*| \neq 0$, 则有 $A^*(A^*)^{-1} = E$, 由此得

$$A = A A^*(A^*)^{-1} = |A| E (A^*)^{-1} = O,$$

所以 $A^* = O$, 这与 $|A^*| \neq 0$ 矛盾, 故当 $|A|=0$ 时, 有 $|A^*|=0$.

(2) 由于 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, 则 $AA^* = |A|E$, 取行列式得到

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

若 $|A| \neq 0$, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$;

若 $|A|=0$, 由(1)知 $|A^*|=0$, 此时命题也成立.

因此 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

19. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB = A + 2B$, 求 B .

解 由 $AB = A + 2E$ 可得 $(A - 2E)B = A$, 故

$$B = (A - 2E)^{-1} A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $AB + E = A^2 + B$, 求 B .

解 由 $AB+E=A^2+B$ 得

$$(A-E)B=A^2-E,$$

即 $(A-E)B=(A-E)(A+E).$

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, 所以 $(A-E)$ 可逆, 从而

$$B=A+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. 设 $A=\text{diag}(1, -2, 1)$, $A^*BA=2BA-8E$, 求 B .

解 由 $A^*BA=2BA-8E$ 得

$$(A^*-2E)BA=-8E,$$

$$B=-8(A^*-2E)^{-1}A^{-1}$$

$$=-8[A(A^*-2E)]^{-1}$$

$$=-8(AA^*-2A)^{-1}$$

$$=-8(|A|E-2A)^{-1}$$

$$=-8(-2E-2A)^{-1}$$

$$=4(E+A)^{-1}$$

$$=4[\text{diag}(2, -1, 2)]^{-1}$$

$$=4\text{diag}(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$$

$$=2\text{diag}(1, -2, 1).$$

22. 已知矩阵 A 的伴随阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$, 求 B .

解 由 $|A^*| = |A|^3 = 8$, 得 $|A| = 2$.

由 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 得

$$AB = B + 3A,$$

$$B = 3(A - E)^{-1}A = 3[A(E - A^{-1})]^{-1}A$$

$$= 3(E - \frac{1}{2}A^*)^{-1} = 6(2E - A^*)^{-1}$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

23. 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{11} .

解 由 $P^{-1}AP = \Lambda$, 得 $A = P\Lambda P^{-1}$, 所以 $A^{11} = A = P\Lambda^{11}P^{-1}$.

$$|P| = 3, \quad P^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

而
$$\Lambda^{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix},$$

故
$$A^{11} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}.$$

24. 设 $AP = P\Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$,

求 $\varphi(A) = A^8(5E - 6A + A^2)$.

解 $\varphi(\Lambda) = \Lambda^8(5E - 6\Lambda + \Lambda^2)$

$$= \text{diag}(1, 1, 5^8)[\text{diag}(5, 5, 5) - \text{diag}(-6, 6, 30) + \text{diag}(1, 1, 25)]$$

$$=\text{diag}(1,1,5^8)\text{diag}(12,0,0)=12\text{diag}(1,0,0).$$

$$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$$

$$=\frac{1}{|P|}P\varphi(\Lambda)P^*$$

$$=-2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. 设矩阵 A 、 B 及 $A+B$ 都可逆, 证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆阵.

证明 因为

$$A^{-1}(A+B)B^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=A^{-1}+B^{-1},$$

而 $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ 是三个可逆矩阵的乘积, 所以 $A^{-1}(A+B)B^{-1}$ 可逆, 即 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆.

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(A+B)B^{-1}]^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

$$26. \text{ 计算 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 设 } A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B_1=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } \begin{pmatrix} A_1 & E \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B_1 \\ O & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1B_1+B_2 \\ O & A_2B_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{而 } A_1B_1+B_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_2 B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix},$$

所以
$$\begin{pmatrix} A_1 & E \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B_1 \\ O & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 B_1 + B_2 \\ O & A_2 B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

27. 取 $A=B=-C=D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 验证 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}.$

解
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

而
$$\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}.$$

28. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & O \\ 4 & -3 & \\ O & 2 & 0 \\ & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $|A^8|$ 及 A^4 .

解 令 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

则
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

故
$$A^8 = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix},$$

$$|A|^8 \equiv |A_1|^8 |A_2|^8 \equiv |A_1|^8 |A_2|^8 = 10^{16}.$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & O \\ 0 & 5^4 & O \\ O & 2^4 & 0 \\ O & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

29. 设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆, 求

$$(1) \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1};$$

解 设 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_3 & AC_4 \\ BC_1 & BC_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

由此得
$$\begin{cases} AC_3 = E_n \\ AC_4 = O \\ BC_1 = O \\ BC_2 = E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = A^{-1} \\ C_4 = O \\ C_1 = O \\ C_2 = B^{-1} \end{cases},$$

所以
$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}.$$

解 设 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD_1 & AD_2 \\ CD_1 + BD_3 & CD_2 + BD_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

由此得
$$\begin{cases} AD_1 = E_n \\ AD_2 = O \\ CD_1 + BD_3 = O \\ CD_2 + BD_4 = E_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = A^{-1} \\ D_2 = O \\ D_3 = -B^{-1}CA^{-1} \\ D_4 = B^{-1} \end{cases},$$

所以
$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

30. 求下列矩阵的逆阵:

(1)
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

解 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

于是
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

解 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_2+(-2)r_1, r_3+(-3)r_1.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_2 \div (-1), r_3 \div (-2).)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_3-r_2.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_3 \div 3.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_2+3r_3.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_1+(-2)r_2, r_1+r_3.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_2 \times 2 + (-3)r_1, r_3 + (-2)r_1. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_3 + r_2, r_1 + 3r_2. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_1 \div 2. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_2 - 3r_1, r_3 - 2r_1, r_4 - 3r_1. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_2 \div (-4), r_3 \div (-3), r_4 \div (-5). \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_1 - 3r_2, r_3 - r_2, r_4 - r_2. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_1-2r_2, r_3-3r_2, r_4-2r_2.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_2+2r_1, r_3-8r_1, r_4-7r_1.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_1 \leftrightarrow r_2, r_2 \times (-1), r_4-r_3.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{下一步: } r_2+r_3.)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ 设 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ 求 } A.$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 是初等矩阵 } E(1, 2), \text{ 其逆矩阵就是其本身.}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是初等矩阵 $E(1, 2(1))$, 其逆矩阵是

$$E(1, 2(-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7/2 & 2 & -9/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/6 & 2/3 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{故逆矩阵为} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

故逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

4. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 X 使 $AX=B$;

解 因为

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix},$$

所以 $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 X 使 $XA=B$.

解 考虑 $A^T X^T = B^T$. 因为

$$(A^T, B^T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

所以 $X^T = (A^T)^{-1}B^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

从而 $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AX=2X+A$, 求 X .

解 原方程化为 $(A-2E)X=A$. 因为

$$(A-2E, A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $X = (A-2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

6. 在秩是 r 的矩阵中, 有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有等于 0 的 r 阶子式?

解 在秩是 r 的矩阵中, 可能存在等于 0 的 $r-1$ 阶子式, 也可能存在等于 0 的 r 阶子式.

例如, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R(A)=3.$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ 是等于 0 的 2 阶子式, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 是等于 0 的 3 阶子式.

7. 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B , 问 A, B 的秩的关系怎样?

解 $R(A) \geq R(B).$

这是因为 B 的非零子式必是 A 的非零子式, 故 A 的秩不会小于 B 的秩.

8. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1, 0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 0).$$

解 用已知向量容易构成一个有 4 个非零行的 5 阶下三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此矩阵的秩为 4, 其第 2 行和第 3 行是已知向量.

9. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ (下一步: } r_1 \leftrightarrow r_2 \text{.)} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ (下一步: } r_2 - 3r_1, r_3 - r_1 \text{.)} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \text{ (下一步: } r_3 - r_2 \text{.)} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

矩阵的秩为 2, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ 是一个最高阶非零子式.

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix};$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_1-r_2, r_2-2r_1, r_3-7r_1. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -15 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_3-3r_2. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵的秩是 2, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$ 是一个最高阶非零子式.

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_1-2r_4, r_2-2r_4, r_3-3r_4. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_2+3r_1, r_3+2r_1. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{(下一步: } r_2 \div 16r_4, r_3-16r_2. \text{)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵的秩为 3, $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$ 是一个最高阶非零子式.

10. 设 A 、 B 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $A \sim B$ 的充分必要条件是 $R(A) = R(B)$.

证明 根据定理 3, 必要性是成立的.

充分性. 设 $R(A) = R(B)$, 则 A 与 B 的标准形是相同的. 设 A 与 B 的标准形为 D , 则有

$$A \sim D, D \sim B.$$

由等价关系的传递性, 有 $A \sim B$.

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 问 k 为何值, 可使

(1) $R(A) = 1$; (2) $R(A) = 2$; (3) $R(A) = 3$.

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+2) \end{pmatrix}.$

(1) 当 $k=1$ 时, $R(A)=1$;

(2) 当 $k=-2$ 且 $k \neq 1$ 时, $R(A)=2$;

(3)当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(A)=3$.

12. 求解下列齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases};$$

解 对系数矩阵 A 进行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_4 \\ x_2 = -3x_4 \\ x_3 = \frac{4}{3}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases},$$

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases};$$

解 对系数矩阵 A 进行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_4 \end{cases},$$

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases},$$

解 对系数矩阵 A 进行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases},$$

故方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$(4) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

解 对系数矩阵 A 进行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4 \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4, \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

故方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ \frac{17}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ \frac{17}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

13. 求解下列非齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10; \\ 11x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$$

解 对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

于是 $R(A)=2$, 而 $R(B)=3$, 故方程组无解.

$$(2) \begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ x-2y+4z=-5 \\ 3x+8y-2z=13 \\ 4x-y+9z=-6 \end{cases};$$

解 对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases} x = -2z - 1 \\ y = z + 2 \\ z = z \end{cases},$$

即
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

$$(3) \begin{cases} 2x+y-z+w=1 \\ 4x+2y-2z+w=2 \\ 2x+y-z-w=1 \end{cases};$$

解 对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \\ y = y \\ z = z \\ w = 0 \end{cases},$$

即
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

(4)
$$\begin{cases} 2x + y - z + w = 1 \\ 3x - 2y + z - 3w = 4 \\ x + 4y - 3z + 5w = -2 \end{cases}.$$

解 对增广矩阵 B 进行初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/7 & -1/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & 9/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是
$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7} \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7} \\ z = z \\ w = w \end{cases},$$

即
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

14. 写出一个以

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

解 根据已知, 可得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

与此等价地可以写成

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 - c_2 \\ x_2 = -3c_1 + 4c_2, \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \end{cases}$$

这就是一个满足题目要求的齐次线性方程组.

15. λ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}.$$

(1)有唯一解; (2)无解; (3)有无穷多个解?

$$\text{解 } B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

(1)要使方程组有唯一解, 必须 $R(A)=3$. 因此当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时方程组有唯一解.

(2)要使方程组无解, 必须 $R(A) < R(B)$, 故

$$(1-\lambda)(2+\lambda)=0, (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \neq 0.$$

因此 $\lambda = -2$ 时, 方程组无解.

(3)要使方程组有有无穷多个解, 必须 $R(A)=R(B) < 3$, 故

$$(1-\lambda)(2+\lambda)=0, (1-\lambda)(\lambda+1)^2=0.$$

因此当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有无穷多个解.

16. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

当 λ 取何值时有解? 并求出它的解.

$$\text{解 } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3}(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}.$$

要使方程组有解, 必须 $(1-\lambda)(\lambda+2)=0$, 即 $\lambda=1, \lambda=-2$.

当 $\lambda=1$ 时,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases},$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

当 $\lambda=-2$ 时,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2 \\ x_2 = x_3 + 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = x_3 + 2 \\ x_2 = x_3 + 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases},$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

17. 设
$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}.$$

问 λ 为何值时, 此方程组有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有

无穷多解时求解.

$$\begin{aligned} \text{解 } B &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ & 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ & -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(10-\lambda) & (1-\lambda)(4-\lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

要使方程组有唯一解, 必须 $R(A)=R(B)=3$, 即必须

$$(1-\lambda)(10-\lambda) \neq 0,$$

所以当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, 方程组有唯一解.

要使方程组无解, 必须 $R(A) < R(B)$, 即必须

$$(1-\lambda)(10-\lambda) = 0 \text{ 且 } (1-\lambda)(4-\lambda) \neq 0,$$

所以当 $\lambda = 10$ 时, 方程组无解.

要使方程组有无穷多解, 必须 $R(A)=R(B) < 3$, 即必须

$$(1-\lambda)(10-\lambda) = 0 \text{ 且 } (1-\lambda)(4-\lambda) = 0,$$

所以当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有无穷多解. 此时, 增广矩阵为

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases},$$

或
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

18. 证明 $R(A)=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 a 及非零行向量 b^T , 使 $A=ab^T$.

证明 必要性. 由 $R(A)=1$ 知 A 的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, \cdots, 0),$$

即存在可逆矩阵 P 和 Q , 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, \cdots, 0), \text{ 或 } A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, \cdots, 0) Q^{-1}.$$

$$\text{令 } a = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, b^T = (1, 0, \cdots, 0) Q^{-1}, \text{ 则 } a \text{ 是非零列向量, } b^T \text{ 是非}$$

零行向量, 且 $A=ab^T$.

充分性. 因为 a 与 b^T 是都是非零向量, 所以 A 是非零矩阵, 从而 $R(A) \geq 1$.

因为

$$1 \leq R(A) = R(ab^T) \leq \min\{R(a), R(b^T)\} = \min\{1, 1\} = 1,$$

所以 $R(A)=1$.

19. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明

(1) 方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$;

证明 由定理 7, 方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是

$$R(A)=R(A, E_m),$$

而 $|E_m|$ 是矩阵 (A, E_m) 的最高阶非零子式, 故 $R(A)=R(A, E_m)=m$.

因此, 方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$.

(2) 方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=n$.

证明 注意, 方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $A^T Y^T = E_n$ 有解. 由(1) $A^T Y^T = E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A^T)=n$. 因此, 方程 $YA=E_n$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A^T)=n$.

20. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明: 若 $AX=AY$, 且 $R(A)=n$, 则 $X=Y$.

证明 由 $AX=AY$, 得 $A(X-Y)=O$. 因为 $R(A)=n$, 由定理 9, 方程 $A(X-Y)=O$ 只有零解, 即 $X-Y=O$, 也就是 $X=Y$.

第四章 向量组的线性相关性

1. 设 $\boldsymbol{v}_1=(1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_2=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{v}_3=(3, 4, 0)^T$, 求 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ 及 $3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2 &= (1, 1, 0)^T - (0, 1, 1)^T \\ &= (1-0, 1-1, 0-1)^T \\ &= (1, 0, -1)^T.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3 &= 3(1, 1, 0)^T + 2(0, 1, 1)^T - (3, 4, 0)^T \\ &= (3\times 1+2\times 0-3, 3\times 1+2\times 1-4, 3\times 0+2\times 1-0)^T \\ &= (0, 1, 2)^T.\end{aligned}$$

2. 设 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$, 求 \boldsymbol{a} , 其中 $\boldsymbol{a}_1=(2, 5, 1, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(10, 1, 5, 10)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(4, 1, -1, 1)^T$.

解 由 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$ 整理得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{1}{6}(3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3) \\ &= \frac{1}{6}[3(2, 5, 1, 3)^T + 2(10, 1, 5, 10)^T - 5(4, 1, -1, 1)^T] \\ &= (1, 2, 3, 4)^T.\end{aligned}$$

3. 已知向量组

$$A: \boldsymbol{a}_1=(0, 1, 2, 3)^T, \boldsymbol{a}_2=(3, 0, 1, 2)^T, \boldsymbol{a}_3=(2, 3, 0, 1)^T;$$

$$B: \boldsymbol{b}_1=(2, 1, 1, 2)^T, \boldsymbol{b}_2=(0, -2, 1, 1)^T, \boldsymbol{b}_3=(4, 4, 1, 3)^T,$$

证明 B 组能由 A 组线性表示, 但 A 组不能由 B 组线性表示.

证明 由

$$\begin{aligned}
 (A, B) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim^r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix} \\
 &\sim^r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & -15 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim^r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

知 $R(A)=R(A, B)=3$, 所以 B 组能由 A 组线性表示.

由

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim^r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim^r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(B)=2$. 因为 $R(B) \neq R(B, A)$, 所以 A 组不能由 B 组线性表示.

4. 已知向量组

$$A: \mathbf{a}_1=(0, 1, 1)^T, \mathbf{a}_2=(1, 1, 0)^T;$$

$$B: \mathbf{b}_1=(-1, 0, 1)^T, \mathbf{b}_2=(1, 2, 1)^T, \mathbf{b}_3=(3, 2, -1)^T,$$

证明 A 组与 B 组等价.

证明 由

$$(B, A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim^r \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim^r \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(B)=R(B, A)=2$. 显然在 A 中有二阶非零子式, 故 $R(A) \geq 2$, 又

$R(A) \leq R(B, A)=2$, 所以 $R(A)=2$, 从而 $R(A)=R(B)=R(A, B)$. 因此 A

组与 B 组等价.

5. 已知 $R(a_1, a_2, a_3)=2$, $R(a_2, a_3, a_4)=3$, 证明

(1) a_1 能由 a_2, a_3 线性表示;

(2) a_4 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

证明 (1)由 $R(a_2, a_3, a_4)=3$ 知 a_2, a_3, a_4 线性无关, 故 a_2, a_3 也线性无关. 又由 $R(a_1, a_2, a_3)=2$ 知 a_1, a_2, a_3 线性相关, 故 a_1 能由 a_2, a_3 线性表示.

(2)假如 a_4 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 则因为 a_1 能由 a_2, a_3 线性表示, 故 a_4 能由 a_2, a_3 线性表示, 从而 a_2, a_3, a_4 线性相关, 矛盾. 因此 a_4 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

6. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $(-1, 3, 1)^T, (2, 1, 0)^T, (1, 4, 1)^T$;

(2) $(2, 3, 0)^T, (-1, 4, 0)^T, (0, 0, 2)^T$.

解 (1)以所给向量为列向量的矩阵记为 A . 因为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(A)=2$ 小于向量的个数, 从而所给向量组线性相关.

(2)以所给向量为列向量的矩阵记为 B . 因为

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0,$$

所以 $R(B)=3$ 等于向量的个数, 从而所给向量组线性相无关.

7. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关?

$$\mathbf{a}_1=(a, 1, 1)^T, \mathbf{a}_2=(1, a, -1)^T, \mathbf{a}_3=(1, -1, a)^T.$$

解 以所给向量为列向量的矩阵记为 A . 由

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=a(a-1)(a+1)$$

知, 当 $a=-1, 0, 1$ 时, $R(A)<3$, 此时向量组线性相关.

8. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关, $\mathbf{a}_1+\mathbf{b}, \mathbf{a}_2+\mathbf{b}$ 线性相关, 求向量 \mathbf{b} 用 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性表示的表示式.

解 因为 $\mathbf{a}_1+\mathbf{b}, \mathbf{a}_2+\mathbf{b}$ 线性相关, 故存在不全为零的数 λ_1, λ_2 使

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1+\mathbf{b})+\lambda_2(\mathbf{a}_2+\mathbf{b})=\mathbf{0},$$

$$\text{由此得 } \mathbf{b}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\mathbf{a}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\mathbf{a}_2=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\mathbf{a}_1-(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})\mathbf{a}_2,$$

$$\text{设 } c=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, \text{ 则}$$

$$\mathbf{b}=c\mathbf{a}_1-(1+c)\mathbf{a}_2, c \in \mathbf{R}.$$

9. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性相关, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 也线性相关, 问 $\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2$ 是否一定线性相关? 试举例说明之.

解 不一定.

例如, 当 $\mathbf{a}_1=(1, 2)^T, \mathbf{a}_2=(2, 4)^T, \mathbf{b}_1=(-1, -1)^T, \mathbf{b}_2=(0, 0)^T$ 时, 有

$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = (1, 2)^T + \mathbf{b}_1 = (0, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 = (2, 4)^T + (0, 0)^T = (2, 4)^T$,
而 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$ 的对应分量不成比例, 是线性无关的.

10. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 是线性相关的, 则 \mathbf{a}_1 可由 $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.

解 设 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = \dots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, 但 \mathbf{a}_1 不能由 $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

成立, 则 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ 亦线性相关.

解 有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0},$$

原式可化为

$$\lambda_1 (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) + \dots + \lambda_m (\mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m) = \mathbf{0}.$$

取 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = -\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2 = -\mathbf{b}_2$, \dots , $\mathbf{a}_m = \mathbf{e}_m = -\mathbf{b}_m$, 其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ 为单位坐标向量, 则上式成立, 而 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 和 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ 均线性无关.

(3) 若只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 全为 0 时, 等式

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

才能成立, 则 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性无关, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ 亦线性无关.

解 由于只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 全为0时, 等式

$$\text{由 } \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

成立, 所以只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 全为0时, 等式

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) + \lambda_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2) + \dots + \lambda_m(\mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m) = \mathbf{0}$$

成立. 因此 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m$ 线性无关.

取 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$, 取 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ 为线性无关组, 则它们满足以上条件, 但 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关.

(4)若 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ 线性相关, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ 亦线性相关, 则有不全为0的数, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{b}_m = \mathbf{0}$$

同时成立.

解 $\mathbf{a}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (2, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (0, 3)^T, \mathbf{b}_2 = (0, 4)^T,$

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2,$$

$$\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = -(3/4)\lambda_2,$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 与题设矛盾.

11. 设 $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4 = \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1$, 证明向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ 线性相关.

证明 由已知条件得

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_4 = \mathbf{b}_4 - \mathbf{a}_1,$$

于是 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$

$$= \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_4$$

$$=b_1-b_2+b_3-b_4+a_1,$$

从而 $b_1-b_2+b_3-b_4=0$,

这说明向量组 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关.

12. 设 $b_1=a_1, b_2=a_1+a_2, \cdots, b_r=a_1+a_2+\cdots+a_r$, 且向量组 a_1, a_2, \cdots, a_r 线性无关, 证明向量组 b_1, b_2, \cdots, b_r 线性无关.

证明 已知的 r 个等式可以写成

$$(b_1, b_2, \cdots, b_r) = (a_1, a_2, \cdots, a_r) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

上式记为 $B=AK$. 因为 $|K|=1 \neq 0$, K 可逆, 所以 $R(B)=R(A)=r$, 从而向量组 b_1, b_2, \cdots, b_r 线性无关.

13. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

$$(1) a_1=(1, 2, -1, 4)^T, a_2=(9, 100, 10, 4)^T, a_3=(-2, -4, 2, -8)^T;$$

解 由

$$(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 100 & -4 \\ -1 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 82 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(a_1, a_2, a_3)=2$. 因为向量 a_1 与 a_2 的分量不成比例, 故 a_1, a_2 线性无关, 所以 a_1, a_2 是一个最大无关组.

$$(2) a_1^T=(1, 2, 1, 3), a_2^T=(4, -1, -5, -6), a_3^T=(1, -3, -4, -7).$$

解 由

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -18 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) = R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2$. 因为向量 \mathbf{a}_1^T 与 \mathbf{a}_2^T 的分量不成比例, 故 $\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T$ 线性无关, 所以 $\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T$ 是一个最大无关组.

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组:

$$(1) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix};$$

解 因为

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\begin{matrix} r_2-3r_1 \\ r_3-3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

15. 设向量组

$$(a, 3, 1)^T, (2, b, 3)^T, (1, 2, 1)^T, (2, 3, 1)^T$$

的秩为 2, 求 a, b .

解 设 $\mathbf{a}_1=(a, 3, 1)^T, \mathbf{a}_2=(2, b, 3)^T, \mathbf{a}_3=(1, 2, 1)^T, \mathbf{a}_4=(2, 3, 1)^T$.

因为

$$(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & b-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a & b-5 \end{pmatrix},$$

而 $R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)=2$, 所以 $a=2, b=5$.

16. 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位坐标向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 线性无关.

证法一 记 $A=(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n), E=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. 由已知条件知, 存在矩阵 K , 使

$$E=AK.$$

两边取行列式, 得

$$|E|=|A||K|.$$

可见 $|A| \neq 0$, 所以 $R(A)=n$, 从而 a_1, a_2, \dots, a_n 线性无关.

证法二 因为 e_1, e_2, \dots, e_n 能由 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示, 所以

$$R(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq R(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

而 $R(e_1, e_2, \dots, e_n)=n$, $R(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n$, 所以 $R(a_1, a_2, \dots, a_n)=n$, 从而 a_1, a_2, \dots, a_n 线性无关.

17. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证明 必要性: 设 a 为任一 n 维向量. 因为 a_1, a_2, \dots, a_n 线性无关, 而 a_1, a_2, \dots, a_n, a 是 $n+1$ 个 n 维向量, 是线性相关的, 所以 a 能由 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示, 且表示式是唯一的.

充分性: 已知任一 n 维向量都可由 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示, 故单位坐标向量组 e_1, e_2, \dots, e_n 能由 a_1, a_2, \dots, a_n 线性表示, 于是有

$$n=R(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq R(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n,$$

即 $R(a_1, a_2, \dots, a_n)=n$, 所以 a_1, a_2, \dots, a_n 线性无关.

18. 设向量组 a_1, a_2, \dots, a_m 线性相关, 且 $a_1 \neq 0$, 证明存在某个向量 a_k ($2 \leq k \leq m$), 使 a_k 能由 a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 线性表示.

证明 因为 a_1, a_2, \dots, a_m 线性相关, 所以存在不全为零的

数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

而且 $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ 不全为零. 这是因为, 如若不然, 则 $\lambda_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, 由 $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ 知 $\lambda_1 = 0$, 矛盾. 因此存在 $k (2 \leq k \leq m)$, 使

$$\lambda_k \neq 0, \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_m = 0,$$

于是

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{a}_k = -(1/\lambda_k)(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \mathbf{a}_{k-1}),$$

即 \mathbf{a}_k 能由 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$ 线性表示.

19. 设向量组 $B: \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ 能由向量组 $A: \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ 线性表示为

$(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)K$, 其中 K 为 $s \times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关.

证明 B 组线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $R(K) = r$.

证明 令 $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$, $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)$, 则有 $B = AK$.

必要性: 设向量组 B 线性无关.

由向量组 B 线性无关及矩阵秩的性质, 有

$$r = R(B) = R(AK) \leq \min\{R(A), R(K)\} \leq R(K),$$

及 $R(K) \leq \min\{r, s\} \leq r$.

因此 $R(K) = r$.

充分性: 因为 $R(K) = r$, 所以存在可逆矩阵 C , 使 $KC = \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$

为 K 的标准形, 于是

$$(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)C = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s)KC = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r).$$

因为 C 可逆, 所以 $R(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_r) = R(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r) = r$, 从而 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_r$ 线性无关.

20. 设

$$\begin{cases} \beta_1 = & \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \\ \beta_2 = \alpha_1 & + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \\ & \dots \dots \dots \\ \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \end{cases},$$

证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价.

证明 将已知关系写成

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

将上式记为 $B=AK$. 因为

$$|K| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \neq 0,$$

所以 K 可逆, 故有 $A=BK^{-1}$. 由 $B=AK$ 和 $A=BK^{-1}$ 可知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可相互线性表示. 因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价.

21. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 x 满足 $A^3x=3Ax-A^2x$, 且向量组 x, Ax, A^2x 线性无关.

(1) 记 $P=(x, Ax, A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B , 使 $AP=PB$;

解 因为

$$\begin{aligned}AP &= A(x, Ax, A^2x) \\ &= (Ax, A^2x, A^3x) \\ &= (Ax, A^2x, 3Ax - A^2x) \\ &= (x, Ax, A^2x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

(2) 求 $|A|$.

解 由 $A^3x=3Ax-A^2x$, 得 $A(3x-Ax-A^2x)=0$. 因为 x, Ax, A^2x 线性无关, 故 $3x-Ax-A^2x \neq 0$, 即方程 $Ax=0$ 有非零解, 所以 $R(A) < 3$, $|A|=0$.

22. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases};$$

解 对系数矩阵进行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = (3/4)x_3 + (1/4)x_4 \end{cases}.$$

取 $(x_3, x_4)^T = (4, 0)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T = (-16, 3)^T$;

取 $(x_3, x_4)^T = (0, 4)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T = (0, 1)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$\xi_1 = (-16, 3, 4, 0)^T, \xi_2 = (0, 1, 0, 4)^T.$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解 对系数矩阵进行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/19 & -1/19 \\ 0 & 1 & 14/19 & -7/19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是得

$$\begin{cases} x_1 = -(2/19)x_3 + (1/19)x_4 \\ x_2 = -(14/19)x_3 + (7/19)x_4 \end{cases}.$$

取 $(x_3, x_4)^T = (19, 0)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T = (-2, 14)^T$;

取 $(x_3, x_4)^T = (0, 19)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T = (1, 7)^T$.

因此方程组的基础解系为

$$\xi_1 = (-2, 14, 19, 0)^T, \xi_2 = (1, 7, 0, 19)^T.$$

$$(3) nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0.$$

解 原方程组即为

$$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}.$$

取 $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = 0$, 得 $x_n = -n$;

取 $x_2=1, x_1=x_3=x_4=\cdots=x_{n-1}=0$, 得 $x_n=-(n-1)=-n+1$;

\cdots ;

取 $x_{n-1}=1, x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=0$, 得 $x_n=-2$.

因此方程组的基础解系为

$$\xi_1=(1, 0, 0, \cdots, 0, -n)^T,$$

$$\xi_2=(0, 1, 0, \cdots, 0, -n+1)^T,$$

\cdots ,

$$\xi_{n-1}=(0, 0, 0, \cdots, 1, -2)^T.$$

23. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 求一个 4×2 矩阵 B , 使 $AB=0$, 且 $R(B)=2$.

解 显然 B 的两个列向量应是方程组 $AB=0$ 的两个线性无关的解. 因为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & -5/8 & -11/8 \end{pmatrix},$$

所以与方程组 $AB=0$ 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=(1/8)x_3-(1/8)x_4 \\ x_2=(5/8)x_3+(11/8)x_4 \end{cases}.$$

取 $(x_3, x_4)^T=(8, 0)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T=(1, 5)^T$;

取 $(x_3, x_4)^T=(0, 8)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T=(-1, 11)^T$.

方程组 $AB=0$ 的基础解系为

$$\xi_1=(1, 5, 8, 0)^T, \xi_2=(-1, 11, 0, 8)^T.$$

因此所求矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 11 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

24. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T.$$

解 显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = 3k_2 \\ x_2 = k_1 + 2k_2 \\ x_3 = 2k_1 + k_2 \\ x_4 = 3k_1 \end{cases}, (k_1, k_2 \in \mathbf{R}),$$

消去 k_1, k_2 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases},$$

此即所求的齐次线性方程组.

25. 设四元齐次线性方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \text{ II: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

求: (1) 方程 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解 (1) 由方程 I 得 $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$.

取 $(x_3, x_4)^T = (1, 0)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$;

取 $(x_3, x_4)^T = (0, 1)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T = (-1, 1)^T$.

因此方程 I 的基础解系为

$$\xi_1=(0, 0, 1, 0)^T, \xi_2=(-1, 1, 0, 1)^T.$$

由方程 II 得 $\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_3-x_4 \end{cases}.$

取 $(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T=(0, 1)^T$;

取 $(x_3, x_4)^T=(0, 1)^T$, 得 $(x_1, x_2)^T=(-1, -1)^T.$

因此方程 II 的基础解系为

$$\xi_1=(0, 1, 1, 0)^T, \xi_2=(-1, -1, 0, 1)^T.$$

(2) I 与 II 的公共解就是方程

$$\text{III: } \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的解. 因为方程组 III 的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以与方程组 III 同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=2x_4 \end{cases}.$$

取 $x_4=1$, 得 $(x_1, x_2, x_3)^T=(-1, 1, 2)^T$, 方程组 III 的基础解系为

$$\xi=(-1, 1, 2, 1)^T.$$

因此 I 与 II 的公共解为 $x=c(-1, 1, 2, 1)^T, c \in \mathbf{R}.$

26. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, E 为 n 阶单位矩阵, 证明

$$R(A)+R(A-E)=n.$$

证明 因为 $A(A-E)=A^2-A=A-A=0$, 所以 $R(A)+R(A-E)\leq n$.

又 $R(A-E)=R(E-A)$, 可知

$$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\geq R(A+E-A)=R(E)=n,$$

由此 $R(A)+R(A-E)=n$.

27. 设 A 为 n 阶矩阵($n\geq 2$), A^* 为 A 的伴随阵, 证明

$$R(A^*)=\begin{cases} n & \text{当 } R(A)=n \\ 1 & \text{当 } R(A)=n-1 \\ 0 & \text{当 } R(A)\leq n-2 \end{cases}.$$

证明 当 $R(A)=n$ 时, $|A|\neq 0$, 故有

$$|AA^*|=||A|E|=|A|\neq 0, |A^*|\neq 0,$$

所以 $R(A^*)=n$.

当 $R(A)=n-1$ 时, $|A|=0$, 故有

$$AA^*=|A|E=0,$$

即 A^* 的列向量都是方程组 $Ax=0$ 的解. 因为 $R(A)=n-1$, 所以方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只含一个解向量, 即基础解系的秩为 1. 因此 $R(A^*)=1$.

当 $R(A)\leq n-2$ 时, A 中每个元素的代数余子式都为 0, 故 $A^*=O$, 从而 $R(A^*)=0$.

28. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases};$$

解 对增广矩阵进行初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 8 \\ x_2 = x_3 + 13 \\ x_4 = 2 \end{cases}.$$

当 $x_3=0$ 时, 得所给方程组的一个解 $\eta=(-8, 13, 0, 2)^T$.

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

当 $x_3=1$ 时, 得对应的齐次方程组的基础解系 $\xi=(-1, 1, 1, 0)^T$.

$$(2) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}.$$

解 对增广矩阵进行初等行变换, 有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/7 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

与所给方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1 = -(9/7)x_3 + (1/2)x_4 + 1 \\ x_2 = (1/7)x_3 - (1/2)x_4 - 2 \end{cases}.$$

当 $x_3=x_4=0$ 时, 得所给方程组的一个解

$$\eta=(1, -2, 0, 0)^T.$$

与对应的齐次方程组同解的方程为

$$\begin{cases} x_1=-(9/7)x_3+(1/2)x_4 \\ x_2=(1/7)x_3-(1/2)x_4 \end{cases}.$$

分别取 $(x_3, x_4)^T=(1, 0)^T, (0, 1)^T$, 得对应的齐次方程组的基础解系

$$\xi_1=(-9, 1, 7, 0)^T, \xi_2=(1, -1, 0, 2)^T.$$

29. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量. 且

$$\eta_1=(2, 3, 4, 5)^T, \eta_2+\eta_3=(1, 2, 3, 4)^T,$$

求该方程组的通解.

解 由于方程组中未知数的个数是 4, 系数矩阵的秩为 3, 所以对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量, 且由于 η_1, η_2, η_3 均为方程组的解, 由非齐次线性方程组解的结构性质得

$$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1-\eta_3)=(3, 4, 5, 6)^T$$

为其基础解系向量, 故此方程组的通解:

$$\mathbf{x}=k(3, 4, 5, 6)^T+(2, 3, 4, 5)^T, (k \in \mathbf{R}).$$

30. 设有向量组 A: $\mathbf{a}_1=(\alpha, 2, 10)^T, \mathbf{a}_2=(-2, 1, 5)^T, \mathbf{a}_3=(-1, 1, 4)^T$, 及 $\mathbf{b}=(1, \beta, -1)^T$, 问 α, β 为何值时

(1)向量 \mathbf{b} 不能由向量组 A 线性表示;

(2) 向量 b 能由向量组 A 线性表示, 且表示式唯一;

(3) 向量 b 能由向量组 A 线性表示, 且表示式不唯一, 并求一般表示式.

$$\text{解 } (a_3, a_2, a_1, b) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \beta \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} -1 & -2 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1+\alpha & \beta+1 \\ 0 & 0 & 4+\alpha & -3\beta \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $\alpha = -4, \beta \neq 0$ 时, $R(A) \neq R(A, b)$, 此时向量 b 不能由向量组 A 线性表示.

(2) 当 $\alpha \neq -4$ 时, $R(A) = R(A, b) = 3$, 此时向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 而向量组 a_1, a_2, a_3, b 线性相关, 故向量 b 能由向量组 A 线性表示, 且表示式唯一.

(3) 当 $\alpha = -4, \beta = 0$ 时, $R(A) = R(A, b) = 2$, 此时向量 b 能由向量组 A 线性表示, 且表示式不唯一.

当 $\alpha = -4, \beta = 0$ 时,

$$(a_3, a_2, a_1, b) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组 $(a_3, a_2, a_1)x = b$ 的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c+1 \\ -3c-1 \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbf{R}.$$

因此 $b = (2c+1)a_3 + (-3c-1)a_2 + ca_1$,

即 $b = ca_1 + (-3c-1)a_2 + (2c+1)a_3, c \in \mathbf{R}.$

31. 设 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)^T$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3)^T$, 证明三直线

$$l_1: a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$l_2: a_2x+b_2y+c_2=0, (a_i^2+b_i^2 \neq 0, i=1, 2, 3)$$

$$l_3: a_3x+b_3y+c_3=0,$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性无关, 且向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性相关.

证明 三直线相交于一点的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \\ a_3x+b_3y=-c_3 \end{cases}$$

有唯一解. 上述方程组可写为 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=-\mathbf{c}$. 因此三直线相交于一点的充分必要条件为 \mathbf{c} 能由 \mathbf{a}, \mathbf{b} 唯一线性表示, 而 \mathbf{c} 能由 \mathbf{a}, \mathbf{b} 唯一线性表示的充分必要条件为向量组 \mathbf{a}, \mathbf{b} 线性无关, 且向量组 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性相关.

32. 设矩阵 $A=(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, 其中 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关, $\mathbf{a}_1=2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$. 向量 $\mathbf{b}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$, 求方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的通解.

解 由 $\mathbf{b}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$ 知 $\eta=(1, 1, 1, 1)^T$ 是方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一个解.

由 $\mathbf{a}_1=2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$ 得 $\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$, 知 $\xi=(1, -2, 1, 0)^T$ 是 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一个解.

由 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 线性无关知 $R(A)=3$, 故方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 所对应的齐次

方程 $Ax=0$ 的基础解系中含一个解向量. 因此 $\xi=(1, -2, 1, 0)^T$ 是方程 $Ax=0$ 的基础解系.

方程 $Ax=b$ 的通解为

$$x=c(1, -2, 1, 0)^T+(1, 1, 1, 1)^T, c \in \mathbf{R}.$$

33. 设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$, 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1) $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\eta^*, \eta^*+\xi_1, \eta^*+\xi_2, \dots, \eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关.

证明 (1)反证法, 假设 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关. 因为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 而 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关, 所以 η^* 可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表示, 且表示式是唯一的, 这说明 η^* 也是齐次线性方程组的解, 矛盾.

(2)显然向量组 $\eta^*, \eta^*+\xi_1, \eta^*+\xi_2, \dots, \eta^*+\xi_{n-r}$ 与向量组 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 可以相互表示, 故这两个向量组等价, 而由(1)知向量组 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 所以向量组 $\eta^*, \eta^*+\xi_1, \eta^*+\xi_2, \dots, \eta^*+\xi_{n-r}$ 也线性无关.

34. 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 s 个解, k_1, k_2, \dots, k_s 为实数, 满足 $k_1+k_2+\dots+k_s=1$. 证明

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_s\eta_s$$

也是它的解.

证明 因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 都是方程组 $Ax=b$ 的解, 所以

$$A\eta_i=b \quad (i=1, 2, \dots, s),$$

从而 $A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\dots+k_sA\eta_s$
 $= (k_1+k_2+\dots+k_s)b=b.$

因此 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_s\eta_s$ 也是方程的解.

35. 设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 r , $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解. 试证它的任一解可表示为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}, \text{ (其中 } k_1+k_2+\dots+k_{n-r+1}=1\text{)}.$$

证明 因为 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$ 均为 $Ax=b$ 的解, 所以 $\xi_1=\eta_2-\eta_1$, $\xi_2=\eta_3-\eta_1, \dots, \xi_{n-r}=\eta_{n-r+1}-\eta_1$ 均为 $Ax=b$ 的解.

用反证法证: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

设它们线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$, 使得

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\dots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=\mathbf{0},$$

即 $\lambda_1(\eta_2-\eta_1)+\lambda_2(\eta_3-\eta_1)+\dots+\lambda_{n-r}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)=\mathbf{0},$

亦即 $-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{n-r})\eta_1+\lambda_1\eta_2+\lambda_2\eta_3+\dots+\lambda_{n-r}\eta_{n-r+1}=\mathbf{0},$

由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r+1}$ 线性无关知

$$-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{n-r})=\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_{n-r}=0,$$

矛盾. 因此 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax=b$ 的一

个基础解系.

设 \mathbf{x} 为 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的任意解, 则 $\mathbf{x}-\eta_1$ 为 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解, 故 $\mathbf{x}-\eta_1$ 可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表出, 设

$$\begin{aligned}\mathbf{x}-\eta_1 &= k_2\xi_1+k_3\xi_2+\dots+k_{n-r+1}\xi_{n-r} \\ &= k_2(\eta_2-\eta_1)+k_3(\eta_3-\eta_1)+\dots+k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1), \\ \mathbf{x} &= \eta_1(1-k_2-k_3-\dots-k_{n-r+1})+k_2\eta_2+k_3\eta_3+\dots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}.\end{aligned}$$

令 $k_1=1-k_2-k_3-\dots-k_{n-r+1}$, 则 $k_1+k_2+k_3-\dots-k_{n-r+1}=1$, 于是

$$\mathbf{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}.$$

36. 设

$$V_1=\{\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\dots+x_n=0\},$$

$$V_2=\{\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \text{ 满足 } x_1+x_2+\dots+x_n=1\},$$

问 V_1, V_2 是不是向量空间? 为什么?

解 V_1 是向量空间, 因为任取

$$\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in V_1, \beta=(b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in V_1, \lambda \in \mathbf{R},$$

有
$$a_1+a_2+\dots+a_n=0,$$

$$b_1+b_2+\dots+b_n=0,$$

从而
$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n)$$

$$=(a_1+a_2+\dots+a_n)+(b_1+b_2+\dots+b_n)=0,$$

$$\lambda a_1+\lambda a_2+\dots+\lambda a_n=\lambda(a_1+a_2+\dots+a_n)=0,$$

所以
$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)^T \in V_1,$$

$$\lambda\alpha=(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)^T \in V_1.$$

V_2 不是向量空间, 因为任取

$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in V_1, \beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in V_1,$
 有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1,$
 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1,$
 从而 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$
 $= (a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2,$
 所以 $\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)^T \notin V_1.$

37. 试证: 由 $\alpha_1=(0, 1, 1)^T, \alpha_2=(1, 0, 1)^T, \alpha_3=(1, 1, 0)^T$ 所生成的向量空间就是 \mathbf{R}^3 .

证明 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 由

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2 \neq 0,$$

知 $R(A)=3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维空间 \mathbf{R}^3 的一组基, 因此由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 所生成的向量空间就是 \mathbf{R}^3 .

38. 由 $\alpha_1=(1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2=(1, 0, 1, 1)^T$ 所生成的向量空间记作 V_1 , 由 $\beta_1=(2, -1, 3, 3)^T, \beta_2=(0, 1, -1, -1)^T$ 所生成的向量空间记作 V_2 , 试证 $V_1=V_2$.

证明 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2), B=(\beta_1, \beta_2)$. 显然 $R(A)=R(B)=2$, 又由

$$(A, B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(A, B)=2$, 所以 $R(A)=R(B)=R(A, B)$, 从而向量组 a_1, a_2 与向量组 b_1, b_2 等价. 因为向量组 a_1, a_2 与向量组 b_1, b_2 等价, 所以这两个向量组所生成的向量空间相同, 即 $V_1=V_2$.

39. 验证 $a_1=(1, -1, 0)^T, a_2=(2, 1, 3)^T, a_3=(3, 1, 2)^T$ 为 \mathbf{R}^3 的一个基, 并把 $v_1=(5, 0, 7)^T, v_2=(-9, -8, -13)^T$ 用这个基线性表示.

解 设 $A=(a_1, a_2, a_3)$. 由

$$|(a_1, a_2, a_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

知 $R(A)=3$, 故 a_1, a_2, a_3 线性无关, 所以 a_1, a_2, a_3 为 \mathbf{R}^3 的一个基.

设 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = v_1$, 则

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases},$$

解之得 $x_1=2, x_2=3, x_3=-1$, 故线性表示为 $v_1=2a_1+3a_2-a_3$.

设 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = v_2$, 则

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -9 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -8 \\ 3x_2 + 2x_3 = -13 \end{cases},$$

解之得 $x_1=3, x_2=-3, x_3=-2$, 故线性表示为 $v_2=3a_1-3a_2-2a_3$.

40. 已知 \mathbf{R}^3 的两个基为

$$\mathbf{a}_1=(1, 1, 1)^T, \mathbf{a}_2=(1, 0, -1)^T, \mathbf{a}_3=(1, 0, 1)^T,$$

$$\mathbf{b}_1=(1, 2, 1)^T, \mathbf{b}_2=(2, 3, 4)^T, \mathbf{b}_3=(3, 4, 3)^T.$$

求由基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 到基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 的过渡矩阵 P .

解 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是三维单位坐标向量组, 则

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

于是
$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

由基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 到基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 的过渡矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第五章 相似矩阵及二次型

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

$$(1) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix};$$

解 根据施密特正交化方法,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 - \frac{[\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3]}{[\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2]} \mathbf{b}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 根据施密特正交化方法,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{[\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2]}{[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1]} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是不是正交阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix};$$

解 此矩阵的第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

$$(2) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

解 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

3. 设 x 为 n 维列向量, $x^T x = 1$, 令 $H = E - 2xx^T$, 证明 H 是对称的正交阵.

证明 因为

$$\begin{aligned} H^T &= (E - 2xx^T)^T = E - 2(xx^T)^T = E - 2(xx^T)^T \\ &= E - 2(x^T)^T x^T = E - 2xx^T, \end{aligned}$$

所以 H 是对称矩阵.

因为

$$H^T H = H H = (E - 2xx^T)(E - 2xx^T)$$

$$\begin{aligned}
&=E-2\mathbf{x}\mathbf{x}^T-2\mathbf{x}\mathbf{x}^T+(2\mathbf{x}\mathbf{x}^T)(2\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \\
&=E-4\mathbf{x}\mathbf{x}^T+4\mathbf{x}(\mathbf{x}^T\mathbf{x})\mathbf{x}^T \\
&=E-4\mathbf{x}\mathbf{x}^T+4\mathbf{x}\mathbf{x}^T \\
&=E,
\end{aligned}$$

所以 H 是正交矩阵.

4. 设 A 与 B 都是 n 阶正交阵, 证明 AB 也是正交阵.

证明 因为 A, B 是 n 阶正交阵, 故 $A^{-1}=A^T, B^{-1}=B^T$,

$$(AB)^T(AB)=B^T A^T AB=B^{-1} A^{-1} AB=E,$$

故 AB 也是正交阵.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{解 } |A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3,$$

故 A 的特征值为 $\lambda=-1$ (三重).

对于特征值 $\lambda=-1$, 由

$$A+E=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A+E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系 $\mathbf{p}_1=(1, 1, -1)^T$, 向量 \mathbf{p}_1 就是对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征值向量.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{解 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=-1, \lambda_3=9$.

对于特征值 $\lambda_1=0$, 由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $Ax=0$ 的基础解系 $p_1=(-1, -1, 1)^T$, 向量 p_1 是对应于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征值向量.

对于特征值 $\lambda_2=-1$, 由

$$A+E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A+E)x=0$ 的基础解系 $p_2=(-1, 1, 0)^T$, 向量 p_2 就是对应于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征值向量.

对于特征值 $\lambda_3=9$, 由

$$A-9E = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A-9E)x=0$ 的基础解系 $p_3=(1/2, 1/2, 1)^T$, 向量 p_3 就是对应于特征值 $\lambda_3=9$ 的特征值向量.

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2,$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

对于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, 由

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A + E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系 $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0, -1)^T$, $\mathbf{p}_2 = (0, 1, -1, 0)^T$, 向量 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 是对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的线性无关特征值向量.

对于特征值 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, 由

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系 $\mathbf{p}_3 = (1, 0, 0, 1)^T$, $\mathbf{p}_4 = (0, 1, 1, 0)^T$, 向量 \mathbf{p}_3 和 \mathbf{p}_4 是对应于特征值 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 的线性无关特征值向量.

6. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明 A^T 与 A 的特征值相同.

证明 因为

$$|A^T - \lambda E| = |(A - \lambda E)^T| = |A - \lambda E|^T = |A - \lambda E|,$$

所以 A^T 与 A 的特征多项式相同, 从而 A^T 与 A 的特征值相同.

7. 设 n 阶矩阵 A, B 满足 $R(A)+R(B)<n$, 证明 A 与 B 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

证明 设 $R(A)=r, R(B)=t$, 则 $r+t<n$.

若 a_1, a_2, \dots, a_{n-r} 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 显然它们是 A 的对应于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

类似地, 设 b_1, b_2, \dots, b_{n-t} 是齐次方程组 $Bx=0$ 的基础解系, 则它们是 B 的对应于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

由于 $(n-r)+(n-t)=n+(n-r-t)>n$, 故 $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}, b_1, b_2, \dots, b_{n-t}$ 必线性相关. 于是有不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}, l_1, l_2, \dots, l_{n-t}$, 使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-r} a_{n-r} + l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t} = 0.$$

记 $\gamma = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-r} a_{n-r} = -(l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t})$,

则 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 不全为 0, 否则 l_1, l_2, \dots, l_{n-t} 不全为 0, 而

$$l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t} = 0,$$

与 b_1, b_2, \dots, b_{n-t} 线性无关相矛盾.

因此, $\gamma \neq 0$, γ 是 A 的也是 B 的关于 $\lambda=0$ 的特征向量, 所以 A 与 B 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

8. 设 $A^2 - 3A + 2E = O$, 证明 A 的特征值只能取 1 或 2.

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, x 是 A 的对应于 λ 的特征向量, 则

$$(A^2 - 3A + 2E)x = \lambda^2 x - 3\lambda x + 2x = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x = 0.$$

因为 $x \neq 0$, 所以 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 即 λ 是方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ 的根, 也就是说 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$.

9. 设 A 为正交阵, 且 $|A| = -1$, 证明 $\lambda = -1$ 是 A 的特征值.

证明 因为 A 为正交矩阵, 所以 A 的特征值为 -1 或 1 .

因为 $|A|$ 等于所有特征值之积, 又 $|A| = -1$, 所以必有奇数个特征值为 -1 , 即 $\lambda = -1$ 是 A 的特征值.

10. 设 $\lambda \neq 0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m \times n} B_{n \times m}$ 的特征值, 证明 λ 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

证明 设 x 是 AB 的对应于 $\lambda \neq 0$ 的特征向量, 则有

$$(AB)x = \lambda x,$$

于是 $B(AB)x = B(\lambda x),$

或 $BA(Bx) = \lambda(Bx),$

从而 λ 是 BA 的特征值, 且 Bx 是 BA 的对应于 λ 的特征向量.

11. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 求 $|A^3 - 5A^2 + 7A|$.

解 令 $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda$, 则 $\varphi(1) = 3, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 3$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值, 故

$$|A^3 - 5A^2 + 7A| = |\varphi(A)| = \varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(3) = 3 \times 2 \times 3 = 18.$$

12. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, -3$, 求 $|A^* + 3A + 2E|$.

解 因为 $|A| = 1 \times 2 \times (-3) = -6 \neq 0$, 所以 A 可逆, 故

$$A^* = |A|A^{-1} = -6A^{-1},$$

$$A^* + 3A + 2E = -6A^{-1} + 3A + 2E.$$

令 $\varphi(\lambda) = -6\lambda^{-1} + 3\lambda^2 + 2$, 则 $\varphi(1) = -1, \varphi(2) = 5, \varphi(-3) = -5$ 是 $\varphi(A)$

的特征值, 故

$$\begin{aligned} |A^*+3A+2E| &= |-6A^{-1}+3A+2E| = |\varphi(A)| \\ &= \varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(-3) = -1 \times 5 \times (-5) = 25. \end{aligned}$$

13. 设 A 、 B 都是 n 阶矩阵, 且 A 可逆, 证明 AB 与 BA 相似.

证明 取 $P=A$, 则

$$P^{-1}ABP = A^{-1}ABA = BA,$$

即 AB 与 BA 相似.

14. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 可相似对角化, 求 x .

解 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-6),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=6, \lambda_2=\lambda_3=1$.

因为 A 可相似对角化, 所以对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 齐次线性方程组 $(A-E)x=0$ 有两个线性无关的解, 因此 $R(A-E)=1$. 由

$$(A-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知当 $x=3$ 时 $R(A-E)=1$, 即 $x=3$ 为所求.

15. 已知 $p=(1, 1, -1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向

量.

(1)求参数 a, b 及特征向量 p 所对应的特征值;

解 设 λ 是特征向量 p 所对应的特征值, 则

$$(A-\lambda E)p=0, \text{ 即 } \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解之得 $\lambda=-1, a=-3, b=0$.

(2)问 A 能不能相似对角化? 并说明理由.

解 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

由

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(A-E)=2$, 所以齐次线性方程组 $(A-E)x=0$ 的基础解系只有一个解向量. 因此 A 不能相似对角化.

16. 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列对称阵化为对角阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

解 将所给矩阵记为 A . 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=1, \lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=-2$, 解方程 $(A+2E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

得特征向量 $(1, 2, 2)^T$, 单位化得 $\mathbf{p}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

对于 $\lambda_2=1$, 解方程 $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

得特征向量 $(2, 1, -2)^T$, 单位化得 $\mathbf{p}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T$.

对于 $\lambda_3=4$, 解方程 $(A-4E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

得特征向量 $(2, -2, 1)^T$, 单位化得 $\mathbf{p}_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$.

于是有正交阵 $P=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, 使 $P^{-1}AP=\text{diag}(-2, 1, 4)$.

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解 将所给矩阵记为 A . 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=10$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 解方程 $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得线性无关特征向量 $(-2, 1, 0)^T$ 和 $(2, 0, 1)^T$, 将它们正交化、单位化得

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T.$$

对于 $\lambda_3=10$, 解方程 $(A-10E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $(-1, -2, 2)^T$, 单位化得 $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)^T$.

于是有正交阵 $P=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, 使 $P^{-1}AP=\text{diag}(1, 1, 10)$.

17. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y ; 并

求一个正交阵 P , 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 已知相似矩阵有相同的特征值, 显然 $\lambda=5, \lambda=-4, \lambda=y$ 是 Λ 的特征值, 故它们也是 A 的特征值. 因为 $\lambda=-4$ 是 A 的特征值, 所以

$$|A+4E| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 9(x-4) = 0,$$

解之得 $x=4$.

已知相似矩阵的行列式相同, 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -100, \quad |\Lambda| = \begin{vmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{vmatrix} = -20y,$$

所以 $-20y = -100$, $y=5$.

对于 $\lambda=5$, 解方程 $(A-5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得两个线性无关的特征向量 $(1, 0, -1)^T$, $(1, -2, 0)^T$. 将它们正交化、单位化得

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, 1)^T.$$

对于 $\lambda=-4$, 解方程 $(A+4E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $(2, 1, 2)^T$, 单位化得 $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T$.

$$\text{于是有正交矩阵 } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ 使 } P^{-1}AP = \Lambda.$$

18. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=1$; 对应的特征向量依次为 $\mathbf{p}_1=(0, 1, 1)^T$, $\mathbf{p}_2=(1, 1, 1)^T$, $\mathbf{p}_3=(1, 1, 0)^T$, 求 A .

解 令 $P=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, 则 $P^{-1}AP = \text{diag}(2, -2, 1) = \Lambda$, $A = P\Lambda P^{-1}$.

因为

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $A = P \Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

19. 设 3 阶对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为 $\mathbf{p}_1=(1, 2, 2)^T, \mathbf{p}_2=(2, 1, -2)^T$, 求 A .

解 设 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$, 则 $A\mathbf{p}_1=2\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2=-2\mathbf{p}_2$, 即

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 2, \text{ --- ①} \\ x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 = -1. \text{ --- ②} \\ 2x_3 + x_5 - 2x_6 = 2 \end{cases}$$

再由特征值的性质, 有

$$x_1 + x_4 + x_6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \text{ --- ③}$$

由①②③解得

$$x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x_6, \quad x_2 = \frac{1}{2}x_6, \quad x_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}x_6,$$

$$x_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x_6, \quad x_5 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}x_6.$$

令 $x_6=0$, 得 $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=0, x_3=\frac{2}{3}, x_4=\frac{1}{3}, x_5=\frac{2}{3}.$

因此
$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=6, \lambda_2=3, \lambda_3=3$, 与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_1=(1, 1, 1)^T$, 求 A .

解 设
$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}.$$

因为 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\mathbf{p}_1=(1, 1, 1)^T$, 所以有

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_3 + x_5 + x_6 = 6 \end{cases} \text{ --- ①}.$$

$\lambda_2=\lambda_3=3$ 是 A 的二重特征值, 根据实对称矩阵的性质定理知 $R(A-3E)=1$. 利用①可推出

$$A-3E = \begin{pmatrix} x_1-3 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4-3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_4-3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6-3 \end{pmatrix}.$$

因为 $R(A-3E)=1$, 所以 $x_2=x_4-3=x_5$ 且 $x_3=x_5=x_6-3$, 解之得

$$\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_3=\mathbf{x}_5=1, \mathbf{x}_1=\mathbf{x}_4=\mathbf{x}_6=4.$$

因此
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

21. 设 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)^T, a_1 \neq 0, A=\mathbf{a}\mathbf{a}^T$.

(1) 证明 $\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值;

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, \mathbf{x} 是 A 的对应于 λ 的特征向量, 则有

$$Ax=\lambda x,$$

$$\lambda^2 x = A^2 x = aa^T aa^T x = a^T a Ax = \lambda a^T a x,$$

于是可得 $\lambda^2 = \lambda a^T a$, 从而 $\lambda=0$ 或 $\lambda=a^T a$.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值, 因为 $A=aa^T$ 的主对角线性上的元素为 $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$, 所以

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a^T a = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

这说明在 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 中有且只有一个等于 $a^T a$, 而其余 $n-1$ 个全为 0, 即 $\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值.

(2)求 A 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

解 设 $\lambda_1=a^T a, \lambda_2=\dots=\lambda_n=0$.

因为 $Aa=aa^T a=(a^T a)a=\lambda_1 a$, 所以 $p_1=a$ 是对应于 $\lambda_1=a^T a$ 的特征向量.

对于 $\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$, 解方程 $Ax=0$, 即 $aa^T x=0$. 因为 $a \neq 0$, 所以 $a^T x=0$, 即 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$, 其线性无关解为

$$p_2 = (-a_2, a_1, 0, \dots, 0)^T,$$

$$p_3 = (-a_3, 0, a_1, \dots, 0)^T,$$

$$\dots,$$

$$p_n = (-a_n, 0, 0, \dots, a_1)^T.$$

因此 n 个线性无关特征向量构成的矩阵为

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

22. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} .

解 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=5, \lambda_3=-5$.

对于 $\lambda_1=1$, 解方程 $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $\mathbf{p}_1=(1, 0, 0)^T$.

对于 $\lambda_1=5$, 解方程 $(A-5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $\mathbf{p}_2=(2, 1, 2)^T$.

对于 $\lambda_1=-5$, 解方程 $(A+5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $\mathbf{p}_3=(1, -2, 1)^T$.

令 $P=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, 则

$$P^{-1}AP = \text{diag}(1, 5, -5) = \Lambda,$$

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

$$A^{100} = P\Lambda^{100}P^{-1}.$$

因为

$$\Lambda^{100} = \text{diag}(1, 5^{100}, 5^{100}),$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{100} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5^{100} & \\ & & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}.$$

23. 在某国, 每年有比例为 p 的农村居民移居城镇, 有比例为 q 的城镇居民移居农村, 假设该国总人口数不变, 且上述人口迁移的规律也不变. 把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n ($x_n + y_n = 1$).

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 中的矩阵 A ;

解 由题意知

$$x_{n+1} = x_n + qy_n - px_n = (1-p)x_n + qy_n,$$

$$y_{n+1} = y_n + px_n - qy_n = px_n + (1-q)y_n,$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

因此 $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等, 即 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, 求

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

解 由 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 可知 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1+p+q),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=r$, 其中 $r=1-p-q$.

对于 $\lambda_1=1$, 解方程 $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $\mathbf{p}_1=(q, p)^T$.

对于 $\lambda_1=r$, 解方程 $(A-rE)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $\mathbf{p}_2=(-1, 1)^T$.

令 $P=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)=\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP=\text{diag}(1, r)=\Lambda,$$

$$A=P\Lambda P^{-1},$$

$$A^n=P\Lambda^n P^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+pr^n & q-qr^n \\ p-pr^n & p+qr^n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+pr^n & q-qr^n \\ p-pr^n & p+qr^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(p+q)} \begin{pmatrix} 2q+(p-q)r^n \\ 2p+(q-p)r^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

24. (1) 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(A)=A^{10}-5A^9$;

解 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=5$.

对于 $\lambda_1=1$, 解方程 $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

对于 $\lambda_1=5$, 解方程 $(A-5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$.

于是有正交矩阵 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP=\text{diag}(1, 5)=\Lambda$,

从而 $A=P\Lambda P^{-1}$, $A^k=P\Lambda^k P^{-1}$. 因此

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= P\varphi(\Lambda)P^{-1} = P(\Lambda^{10} - 5\Lambda^9)P^{-1} \\ &= P[\text{diag}(1, 5^{10}) - 5\text{diag}(1, 5^9)]P^{-1} \\ &= P\text{diag}(-4, 0)P^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

解 求得正交矩阵为

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

使得 $P^{-1}AP=\text{diag}(-1, 1, 5)=\Lambda$, $A=P\Lambda P^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= P\varphi(\Lambda)P^{-1} = P(\Lambda^{10} - 6\Lambda^9 + 5\Lambda^8)P^{-1} \\ &= P[\Lambda^8(\Lambda - E)(\Lambda - 5E)]P^{-1} \\ &= P\text{diag}(1, 1, 5^8)\text{diag}(-2, 0, 4)\text{diag}(-6, -4, 0)P^{-1} \\ &= P\text{diag}(12, 0, 0)P^{-1} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

$$(1) f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz;$$

$$\text{解 } f=(x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$(2) f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz;$$

$$\text{解 } f=(x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$(3) f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4.$$

$$\text{解 } f=(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

26. 写出下列二次型的矩阵:

$$(1) f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x};$$

$$\text{解 } \text{二次型的矩阵为 } A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

$$\text{解 } \text{二次型的矩阵为 } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

27. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

$$(1) f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3;$$

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=5, \lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时, 解方程 $(A-2E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-2E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $(1, 0, 0)^T$. 取 $\mathbf{p}_1=(1, 0, 0)^T$.

当 $\lambda_2=5$ 时, 解方程 $(A-5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-5E=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $(0, 1, 1)^T$. 取 $\mathbf{p}_2=(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

当 $\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $(0, -1, 1)^T$. 取 $\mathbf{p}_3=(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

于是有正交矩阵 $T=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ 和正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{y}$, 使

$$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2.$$

$$(2) f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4.$$

解 二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=3, \lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=-1$ 时, 可得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

当 $\lambda_2=3$ 时, 可得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.

当 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 可得线性无关的单位特征向量

$$\boldsymbol{p}_3=(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, \quad \boldsymbol{p}_4=(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

于是有正交矩阵 $T=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)$ 和正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$, 使

$$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

28. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-10yz=1$$

化成标准方程.

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

由 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-11)$, 得 A 的特征值

为 $\lambda_1=2, \lambda_2=11, \lambda_3=0$.

对于 $\lambda_1=2$, 解方程 $(A-2E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $(4, -1, 1)^T$, 单位化得 $\mathbf{p}_1 = (\frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$.

对于 $\lambda_2=11$, 解方程 $(A-11E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $(1, 2, -2)^T$, 单位化得 $\mathbf{p}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

对于 $\lambda_3=0$, 解方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得特征向量 $(0, 1, 1)^T$, 单位化得 $\mathbf{p}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

于是有正交矩阵 $P=(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, 使 $P^{-1}AP=\text{diag}(2, 11, 0)$, 从而有正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

使原二次方程变为标准方程 $2u^2+11v^2=1$.

29. 明: 二次型 $f=\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 在 $\|\mathbf{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

证明 A 为实对称矩阵, 则有一正交矩阵 T , 使得

$$TAT^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda$$

成立, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值, 不妨设 λ_1 最大.

作正交变换 $y = Tx$, 即 $x = T^T y$, 注意到 $T^{-1} = T^T$, 有

$$f = x^T A x = y^T T A T^T y = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

因为 $y = Tx$ 正交变换, 所以当 $\|x\| = 1$ 时, 有

$$\|y\| = \|x\| = 1, \text{ 即 } y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1.$$

因此

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_1,$$

又当 $y_1 = 1, y_2 = y_3 = \dots = y_n = 0$ 时 $f = \lambda_1$, 所以 $f_{\max} = \lambda_1$.

30. 用配方法化下列二次形成规范形, 并写出所用变换的矩阵.

$$(1) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$$

$$\text{解 } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2x_3 + 2x_2^2 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2x_2^2 + (2x_2 + x_3)^2.$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = \sqrt{2}x_2 \\ y_3 = 2x_2 + x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{5}{\sqrt{2}}y_2 + 2y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_3 = -\sqrt{2}y_2 + y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$$

$$\text{解 } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_3)^2 + x_3^2 + 2x_2x_3;$$

$$= (x_1 + x_3)^2 - x_2^2 + (x_2 + x_3)^2.$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_2 + x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3) f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

$$\text{解 } f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

$$= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 2x_3)^2 + 2x_3^2.$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} y_1 = \sqrt{2}(x_1 + \frac{1}{2}x_2) \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - 2x_3) \\ y_3 = \sqrt{2}x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_2 = \sqrt{2}y_2 + \frac{2}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

31. 设

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型, 求 a .

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 其主子式为

$$a_{11}=1, \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -a(5a+4).$$

因为 f 为正主二次型, 所以必有 $1 - a^2 > 0$ 且 $-a(5a+4) > 0$, 解之得 $-\frac{4}{5} < a < 0$.

32. 判别下列二次型的正定性:

$$(1) f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3;$$

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. 因为

$$a_{11} = -2 < 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad |A| = -38 < 0,$$

所以 f 为负定.

$$(2) f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4.$$

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{pmatrix}$. 因为

$$a_{11} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 6 > 0, \quad |A| = 24 > 0,$$

所以 f 为正定.

33. 证明对称阵 A 为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵 U , 使 $A = U^T U$, 即 A 与单位阵 E 合同.

证明 因为对称阵 A 为正定的, 所以存在正交矩阵 P 使

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda, \quad \text{即 } A = P \Lambda P^T,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为正数.

令 $\Lambda_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, 则 $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_1$, $A = P \Lambda_1 \Lambda_1^T P^T$.

再令 $U = \Lambda_1^T P^T$, 则 U 可逆, 且 $A = U^T U$.

第六章 线性空间与线性变换

1. 验证所给矩阵集合对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间, 并写出各个空间的一个基.

(1) 2 阶矩阵的全体 S_1 ;

解 设 A, B 分别为二阶矩阵, 则 $A, B \in S_1$. 因为

$$(A+B) \in S_1, kA \in S_1,$$

所以 S_1 对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间.

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是 S_1 的一个基.

(2) 主对角线上的元素之和等于 0 的 2 阶矩阵的全体 S_2 ;

解 设 $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -d & e \\ f & d \end{pmatrix}$, $A, B \in S_2$. 因为

$$A+B = \begin{pmatrix} -(a+d) & c+b \\ c+a & a+d \end{pmatrix} \in S_2,$$

$$kA = \begin{pmatrix} -ka & kb \\ kc & ka \end{pmatrix} \in S_2,$$

所以 S_2 对于矩阵的加法和乘数运算构成线性空间.

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是 S_2 的一个基.

(3) 2 阶对称矩阵的全体 S_3 .

解 设 $A, B \in S_3$, 则 $A^T = A, B^T = B$. 因为

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B, (A+B) \in S_3,$$

$$(kA)^T = kA^T = kA, kA \in S_3,$$

所以 S_3 对于加法和乘数运算构成线性空间.

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是 S_3 的一个基.

2. 验证: 与向量 $(0, 0, 1)^T$ 不平行的全体 3 维数组向量, 对于数组向量的加法和乘数运算不构成线性空间.

解 设 $V = \{\text{与向量}(0, 0, 1)^T \text{ 不平行的全体三维向量}\}$, 设 $r_1 = (1, 1, 0)^T$, $r_2 = (-1, 0, 1)^T$, 则 $r_1, r_2 \in V$, 但 $r_1 + r_2 = (0, 0, 1)^T \notin V$, 即 V 不是线性空间.

3. 设 U 是线性空间 V 的一个子空间, 试证: 若 U 与 V 的维数相等, 则 $U = V$.

证明 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 U 的一组基, 它可扩充为整个空间 V 的一个基, 由于 $\dim(U) = \dim(V)$, 从而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 也为 V 的一个基, 则: 对于 $x \in V$ 可以表示为 $x = k_1 \varepsilon_1 + k_2 \varepsilon_2 + \dots + k_r \varepsilon_r$. 显然, $x \in U$, 故 $V \subseteq U$, 而由已知知 $U \subseteq V$, 有 $U = V$.

4. 设 V_r 是 n 维线性空间 V_n 的一个子空间, a_1, a_2, \dots, a_r 是 V_r 的一个基. 试证: V_n 中存在元素 a_{r+1}, \dots, a_n , 使 $a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n$ 成为 V_n 的一个基.

证明 设 $r < n$, 则在 V_n 中必存在一向量 $a_{r+1} \notin V_r$, 它不能被 a_1, a_2, \dots, a_r 线性表示, 将 a_{r+1} 添加进来, 则 a_1, a_2, \dots, a_{r+1} 是线性

无关的. 若 $r+1=n$, 则命题得证, 否则存在 $a_{r+2} \notin L(a_1, a_2, \dots, a_{r+1})$, 则 a_1, a_2, \dots, a_{r+2} 线性无关, 依此类推, 可找到 n 个线性无关的向量 a_1, a_2, \dots, a_n , 它们是 V_n 的一个基.

5. 在 \mathbf{R}^3 中求向量 $\alpha=(3, 7, 1)^T$ 在基 $\alpha_1=(1, 3, 5)^T$, $\alpha_2=(6, 3, 2)^T$, $\alpha_3=(3, 1, 0)^T$ 下的坐标.

解 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 \mathbf{R}^3 的自然基, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A,$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1},$$

其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 5 & -15 & 8 \\ -9 & 28 & -15 \end{pmatrix}$.

因为 $\alpha=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 5 & -15 & 8 \\ -9 & 28 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 33 \\ -82 \\ 154 \end{pmatrix},$$

所以向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(33, -82, 154)^T$.

6. 在 \mathbf{R}^3 取两个基

$$\alpha_1=(1, 2, 1)^T, \alpha_2=(2, 3, 3)^T, \alpha_3=(3, 7, 1)^T;$$

$$\beta_1=(3, 1, 4)^T, \beta_2=(5, 2, 1)^T, \beta_3=(1, 1, -6)^T.$$

试求坐标变换公式.

解 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 \mathbf{R}^3 的自然基, 则

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)B,$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)B^{-1},$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)B^{-1}A,$$

其中
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

设任意向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) B^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

故 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = B^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

7. 在 \mathbf{R}^4 中取两个基

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)^T;$$

$$\alpha_1 = (2, 1, -1, 1)^T, \alpha_2 = (0, 3, 1, 0)^T, \alpha_3 = (5, 3, 2, 1)^T, \alpha_4 = (6, 6, 1, 3)^T.$$

(1) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵;

解 由题意知

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

从而由前一个基到后一个基的过渡矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 求向量 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 在后一个基下的坐标;

解 因为

$$\alpha = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

向量 α 在后一个基下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(3) 求在两个基下有相同坐标的向量.

解 令

$$\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

解方程组得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (k 为常数).

8. 说明 xOy 平面上变换 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 的几何意义, 其中

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

解 因为

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix},$$

所以在此变换下 $T(\alpha)$ 与 α 关于 y 轴对称.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

解 因为

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

所以在此变换下 $T(\alpha)$ 是 α 在 y 轴上的投影.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

解 因为

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix},$$

所以在此变换下 $T(\alpha)$ 与 α 关于直线 $y=x$ 对称.

$$(4) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 因为

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

所以在此变换下 $T(\alpha)$ 是将 α 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$.

9. n 阶对称矩阵的全体 V 对于矩阵的线性运算构成一个 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间. 给出 n 阶矩阵 P , 以 A 表示 V 中的任一元素, 变换 $T(A) = P^T A P$ 称为合同变换. 试证合同变换 T 是 V 中的线性变换.

证明 设 $A, B \in V$, 则 $A^T = A, B^T = B$.

$$\begin{aligned} T(A+B) &= P^T(A+B)P = P^T(A+B)^T P \\ &= [(A+B)P]^T P = (AP+BP)^T P \\ &= (P^T A + P^T B)P = P^T A P + P^T B P = T(A) + T(B), \\ T(kA) &= P^T(kA)P = kP^T A P = kT(A), \end{aligned}$$

从而, 合同变换 T 是 V 中的线性变换.

10. 函数集合

$$V_3 = \{ \alpha = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) e^x \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R} \}$$

对于函数的线性运算构成 3 维线性空间, 在 V_3 中取一个基

$$\alpha_1 = x^2 e^x, \alpha_2 = x e^x, \alpha_3 = e^x.$$

求微分运算 D 在这个基下的矩阵.

解 设

$$\beta_1 = D(\alpha_1) = 2xe^x + x^2e^x = 2\alpha_2 + \alpha_1,$$

$$\beta_2 = D(\alpha_2) = e^x + xe^x = \alpha_3 + \alpha_2,$$

$$\beta_3 = D(\alpha_3) = e^x = \alpha_3.$$

易知 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 故为一个基.

由 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

知即 D 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

11. 2 阶对称矩阵的全体

$$V_3 = \{A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

对于矩阵的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一个基

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在 V_3 中定义合同变换

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 T 在基 A_1, A_2, A_3 下的矩阵.

解 因为

$$T(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$T(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_2 + 2A_3,$$

$$T(A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3,$$

故 $(T(A_1), T(A_2), T(A_3)) = (A_1, A_2, A_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$

从而, T 在基 A_1, A_2, A_3 下的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

谢谢使用，请挂机。