


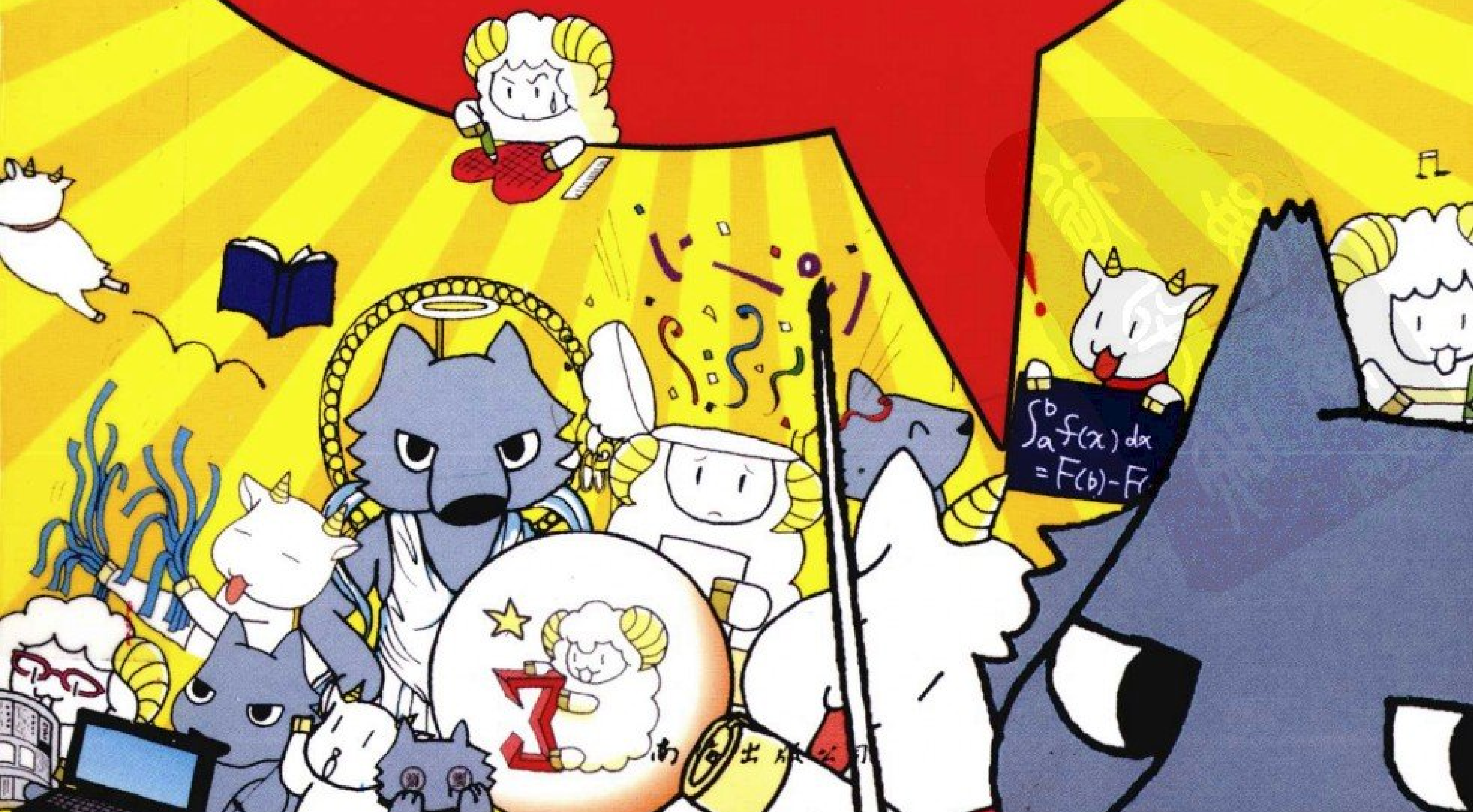
漫画+图解

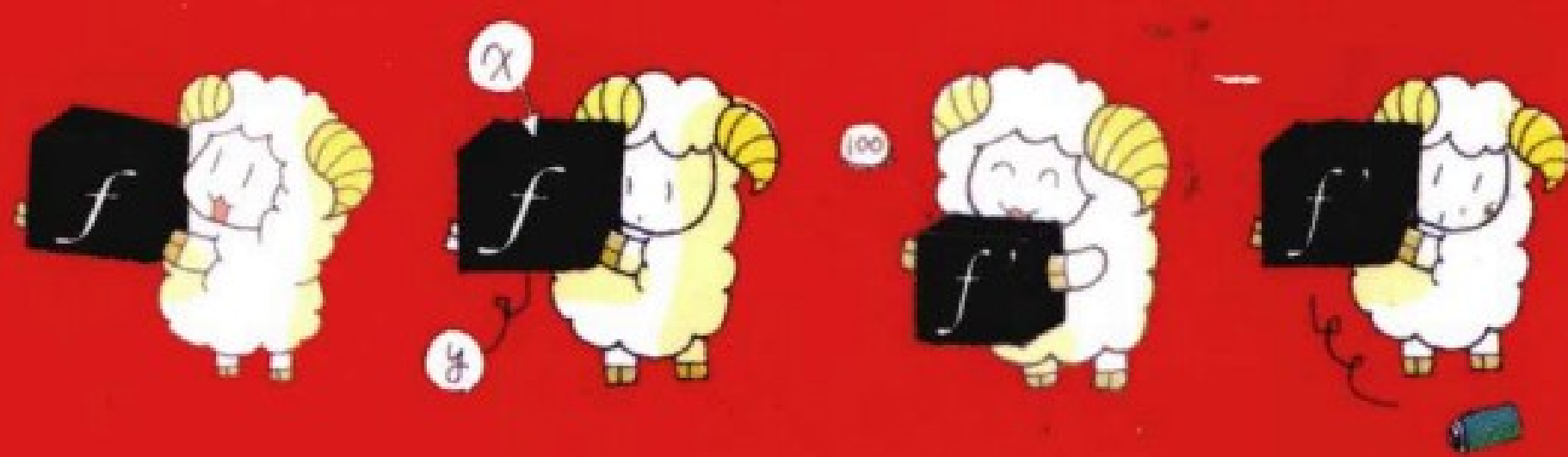

$$f' \leftarrow \int \rightarrow F$$

7天搞定微积分

マンガでわかる微分積分

〔日〕石山平 大上丈彦 著 李巧丽 译





为什么教科书里的微积分那么难懂？不要怕，这本简单、有趣的微积分入门书，帮你7天搞定它！

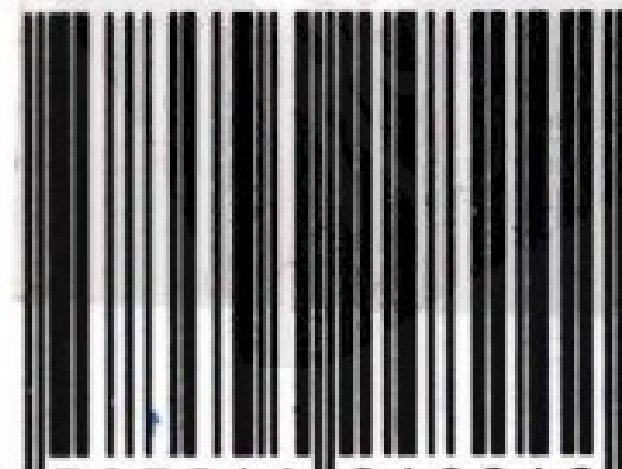
我们害怕微积分，是因为有一大堆抽象、难懂的概念、公式。其实，知道这些概念、公式是怎样创造出来的，你就能很容易理解掌握，再也不会害怕！

微积分到底有什么用？导数的结果是斜率，可以分析变化，股票、汇率与摄影都会用到；积分是导数的逆运算，目的在于找出变化的规律，求出面积！

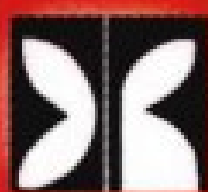


上架建议：数学学习

ISBN 978-7-5442-4824-2



9 787544 248242 >



定价 25.00元

0172/274

2010



漫画+图解

7天搞定微积分

マンガでわかる微分積分

〔日〕石山平 大上丈彦 著 李巧丽 译

南海出版公司

图书在版编目(CIP)数据

7天搞定微积分/[日]石山平,[日]大上丈彦著;李巧丽译

—海口:南海出版公司,2010.8

ISBN 978-7-5442-4824-2

I. ①7… II. ①石…②大…③李… III. ①数学—
普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第111648号

著作权合同登记号 图字:30-2008-149

MANGADE WAKARU BIBUNSEKIBUN by Taira Ishiyama and Takehiko Ohgami

Supervision by Medaka College

Copyright © 2007 Taira Ishiyama and Takehiko Ohgami

Illustration Copyright © 2007 Nejiko Morimina

Original Japanese edition published in 2007 SOFTBANK Creative Corp.

Simplified Chinese Character rights arranged with SOFTBANK Creative Corp.,
through Owls Agency Inc. and Beijing SMSQ Culture Communications Co., Ltd.

All Rights Reserved.

7天搞定微积分

[日]石山平 [日]大上丈彦 著

李巧丽 译

出版 南海出版公司 (0898)66568511

海口市海秀中路51号星华大厦五楼 邮编 570206

发行 新经典文化有限公司

电话(010)68423599 邮箱 editor@readinglife.com

经销 新华书店

绘画 [日]森皆捻子

责任编辑 李玉珍

装帧设计 蔡阳阳

内文制作 王春雪

印刷 三河市三佳印刷装订有限公司

开本 890毫米×1270毫米 1/32

印张 6.25

字数 100千

版次 2010年8月第1版

印次 2010年8月第1次印刷

书号 ISBN 978-7-5442-4824-2

定价 25.00元

版权所有, 未经书面许可, 不得转载、复制、翻印, 违者必究。

前言



近年来报刊上常有关于年轻人讨厌数学、排斥理科的报道，我想阅读本书的人可能多少也都有些反感数学吧？很少有人会说自己喜欢数学。“好恶”和“能否”本是两个问题，但似乎很多人将它们混为一谈。

其实这世上有许多人喜欢数学，只是因为不擅长而不敢大声说出来而已。而本书就是希望帮助有此类烦恼的人喜欢上数学、对数学产生兴趣。

数学确实是一门很难掌握的学问。不过人类的有趣之处便在于不会因困难而失去对事物的兴趣。对喜欢拼图游戏的人来说，越难的拼图越有趣。数学之所以难，关键在于教授方法不当。数学讲解的不是词汇、不是旋律，而是概念。

如果你觉得这种表述难以理解，那么请试想一下向他人描述你的一位朋友时的情景，“脸长得像某个演员，谈吐……”很难描述吧？那么利用肖像画、照片又如何呢？单靠这些也无法准确定义这个人。总之，要将朋友的外貌、性格和轶事总结成一个概念，是非常困难的。

但有时概念也会因为某种机缘得以传播。在听过关于某人的

多次介绍后，见面时就会有似曾相识之感，这就是概念传达巧妙之力。那么究竟该如何表述概念呢？

很遗憾，并没有一定的规则。

搜索一下书店的书架会发现有许多数学入门方面的书籍，这说明没有固定的入门方法。但如前所述，概念有时会因某种机缘得以传播。不同讲解者的讲解效果并不相同，有的清楚明确，有的不知所云。当然这也与听者的理解能力有关。这就是个体的差异性。

而对于我们这些想将数学的有趣之处传达给大家的人来说，数学入门书籍越多越好。当然，通过阅读我们 Medaka-College 教育培训公司制作的图书能够理解数学的人越多，书籍越畅销，我们和出版社越高兴。但无论我们的书多么浅显易懂，毕竟是入门书，内容有限，因此其他图书是必不可少的。入门书籍一定要种类丰富，这一点非常重要。各种入门书是以不同的方式、视角、用词阐述同一事物。学习时不必追根究底，只要有所了解即可，这就是入门。

有的入门书声称“不使用数学算式”，但本书会使用。有评论认为使用数学算式会使读者数量减少，但就像书面表达音乐的最佳方式是乐谱一样，最能巧妙展示数学特点的就是数学算式。

此外，本书虽然有很多漫画，但文字描述也不少。漫画和图表虽然便于理解，但并不是万能的。文字描述清楚易懂，就使用文字；图表一目了然就运用图表，我们会综合多种方式以使概念更加便于理解。

希望通过本书你能了解微积分是什么，它的理论基础是什么。“了解”非常重要，在入门阶段只要理解了概念即可。不过这只是一个阶段性目标，之后应该再深入学习。

微积分真的会对人生有所帮助吗？有这样疑问的人大概在实际生活中不需要具体求解数学算式。不过即便如此，数学概念对他们也很重要，数学能教会我们如何直面困难。当你略懂数学之后，以往的“难 = 无聊”或许就会变成“难 = 有趣”。

希望本书能让更多的人对数学产生“难 = 有趣”的感觉，这对我们来说将是无上的荣幸。

Medaka-College 教育培训公司





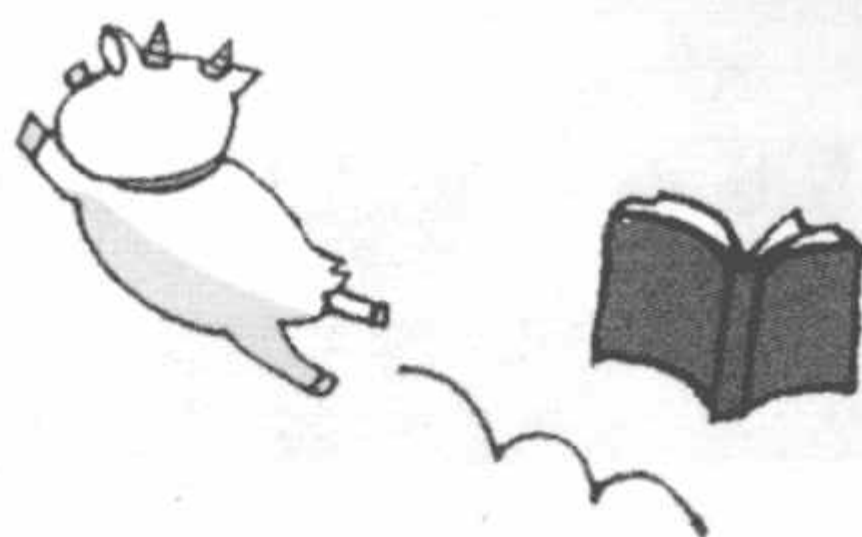
目录

第一章 导数

- 01 为什么要学数学 /2
- 02 数学过敏症的对策 /6
- 03 导数有什么用 /8
- 04 某一点的斜率和瞬间斜率 /10
- 05 曲线的高峰 /12
- 06 如何画曲线图 /14
- 07 如何使用导数 /18
- 08 用导数处理图像 /20
- 09 如何求斜率 /22
- 10 怎样在曲线上取两点 /24
- 11 使曲线上的两点不断接近 /26
- 12 什么是极限 /28
- 13 什么是无限接近 /30
- 14 怎样用数学算式表示极限 /32
- 15 极值的求法和表示方法 /34
- 16 正向接近和负向接近 /36
- 17 正无穷大和负无穷大 /38
- 18 什么是连续性 /40
- 19 开始计算斜率 /42



- 20 “滑动着”求导 /44
- 21 求某一点斜率的意义 /48
- 22 什么是导函数 /50
- 23 导数的表示方法 /52
- 24 导数的其他表示方法 /54
- 25 做做习题 /58
- 26 导函数的简单求法 /60
- 27 导数的基本公式 /62
- 28 求导最基本的工具 /64
- 29 函数和的求导公式 /66
- 30 导数的应用工具 /68
- 31 使用工具的意义 /70
- 32 x^n 的导数 /72
- 33 函数积求导的方法 /75
- 34 复合函数求导的方法 /79
- 35 使用导数绘制出图形 /83
- 36 大致画出二次函数的图形 /85
- 37 画出三次函数的图形 /89
- 38 快递包裹最多能装多少 /93
- 39 导数与积分 /97





第二章 积分

40 积分和导数的关系 /100

41 积分的表示方法 /105

42 积分的读法 /106

43 积分的计算练习 /108

44 什么是积分常数 /110

45 为什么是 C /112

46 什么是原函数 /114

47 导数和积分真的是逆运算吗 /116

48 积分是变化的集合 /118

49 从不定积分到定积分 /120

50 有区间范围的积分 /122

51 不定积分、定积分和面积 /126

52 dx 的宽度 /131

53 分割求面积的方法 /133

54 定积分的不同求解方法 /137

55 将要求的面积夹在中间 /138

56 区分求积法 I /140

57 区分求积法 II /142

58 区分求积法 III /146





59 区分求积法的实际应用 /150

60 从区分求积法到定积分 /152

61 用定积分求面积函数 /154

62 微积分的基本定理 /156

63 有负的面积吗 /159

64 求面积练习 I /162

65 求面积练习 II /164

66 积分的本质 /166

67 圆锥的体积 /168

68 球的体积 /171

69 积分的战略 /173

70 物理公式中的微积分 /175



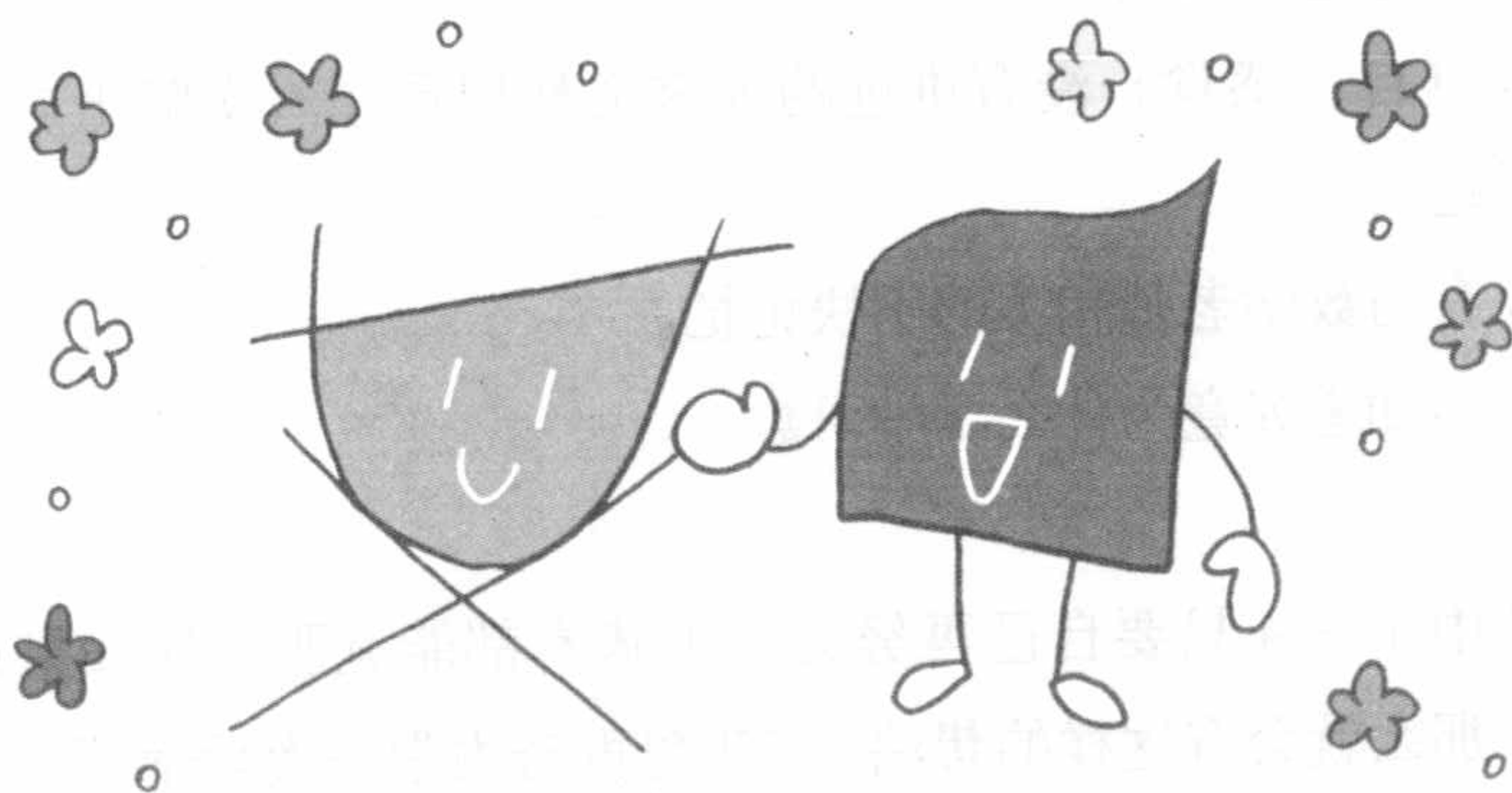
后记



第一章 导数

导数是微积分中的重要概念，它可以分析变化，股票、汇率与摄影都会用到。

本章中，我们会从斜率、极限，循序渐进地引出导数的概念、表示方法、基本公式，以及求导的方法。你会发现，原来导数这么有趣、这么好玩儿。



导数先生

积分先生



01 为什么要学数学



数学不是为“享乐”而发明的。或许痴迷于数学不思茶饭的人能在函数和数学公式中感受到乐趣，但这样的人少之又少。

公式、函数、计算方法等都是为了解决“是什么”之类的问题而创造出来的。这一点与花样滑冰很相似——为了得到高分而不断创新。

但是，为什么花样滑冰的跳跃会被人们关注，而数学，特别是导数与积分却被人排斥呢？

我想理由有以下几点：

1. x 、 y 等符号太多，不容易理解。
2. 表述起来很困难。
3. （自己感觉）没有讲过的内容突然出现了（实际上应该在哪儿学过）。
4. 有与数学老师相关的不快记忆。
5. 不知道究竟为什么要学习数学。

其中 1 ~ 4 只要自己再努力一下基本都能克服。你如果读了本书，那么就会有这样的想法：“我想再努力学一次数学。”“当时不明白，说不定现在能弄明白呢。”

不过第 5 点——究竟为什么要学习数学，确实是一个难题。花样滑冰的技术不断创新是因为“技术难度越高得分越高，视觉

效果越美”，所以才被人们关注。但是数学、微积分又如何呢？人们会怀疑“学会它们有什么用”。

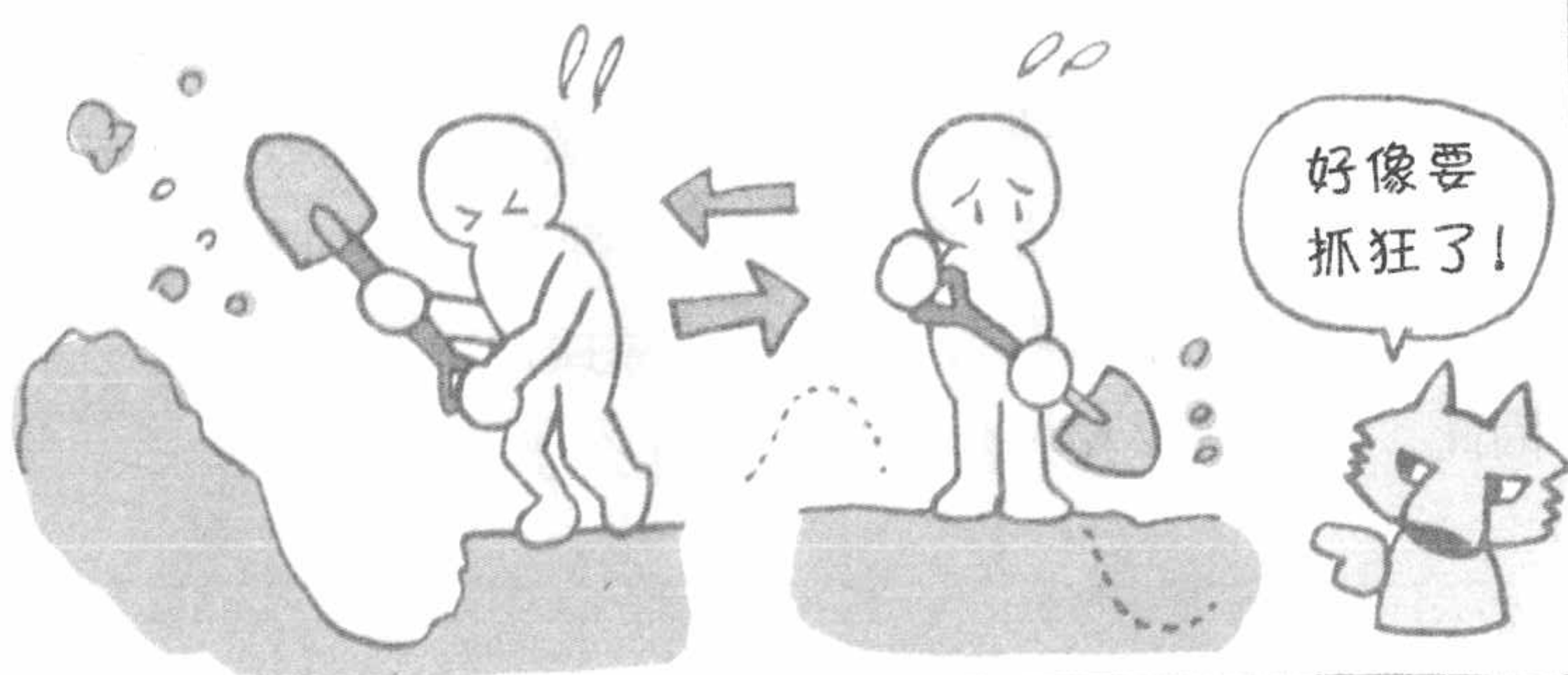
这种想法本身就说明数学的存在意义和价值尚未被理解，而这些学校也无法告诉我们。

数学学习其实并非充满快乐。与此相同，练习棒球和钢琴也不都是充满乐趣的，但它们都有明确的近期目标，这一点与数学不同。

如果做一件事却不明白“为什么要做”，很难令人鼓起干劲。就像练习棒球，如果只是每天背诵“规则”，那么不久就会有人质疑“为什么要一直这样做”，并由此对棒球产生厌恶之情。

因此，本书首先探讨的就是“为什么要学习导数”。

没有比做无用功更让人痛苦的事了！
据说西伯利亚的监狱曾有一种让犯人反复挖坑、埋坑的拷问方式。



人类不会长期坚持
做不知目的的事情。

在学校学习数学时，
我们基本上都不知道它的“目的”和“用处”！！



因此大家都不喜欢数学，
真是可惜。

排斥数学的常见理由



算数只要买东西没问题就足够了。

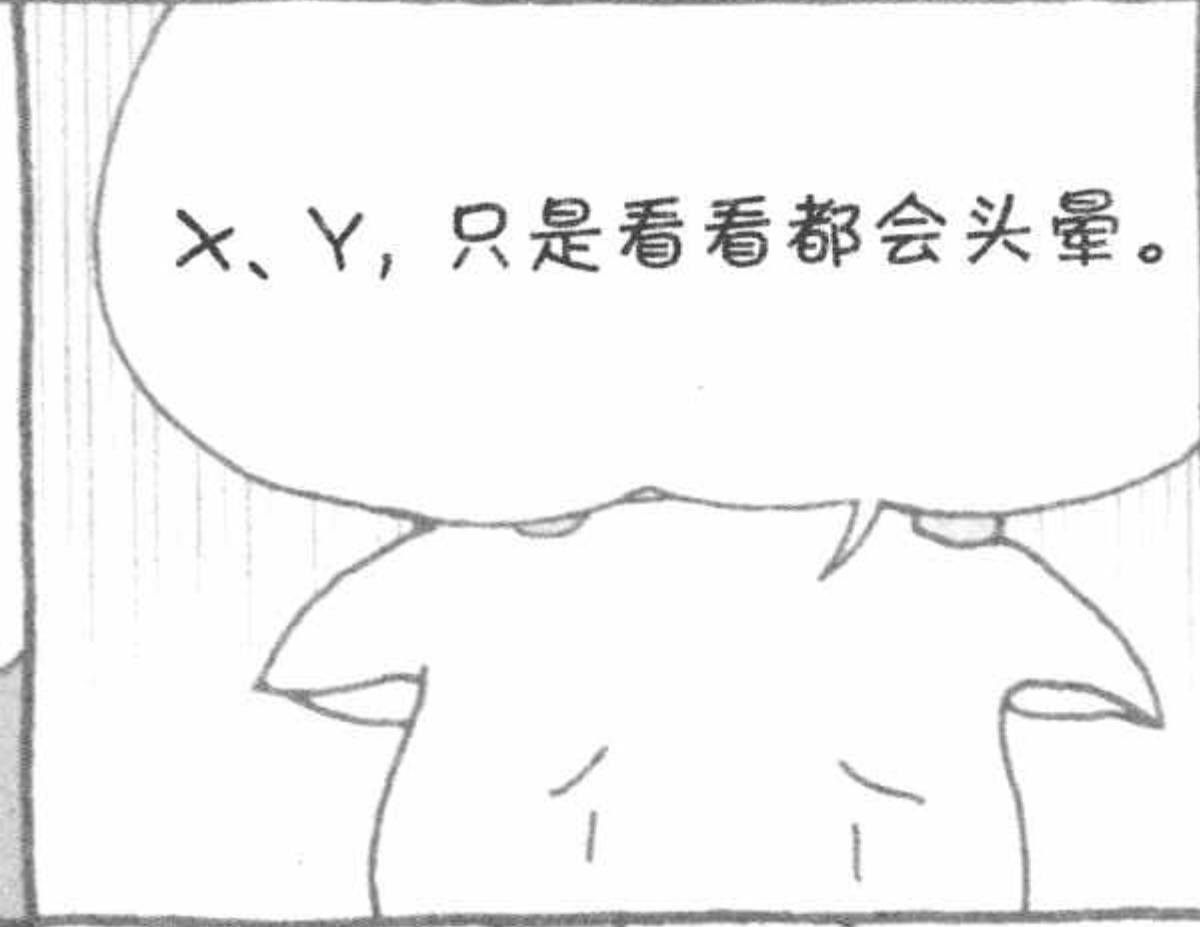


好像与日常生活无关。

背公式好烦啊。



x 、 y ，只是看看都会头晕。



数学究竟什么时候有用？



其他人只是被迫学习而已。



数学好像是为那些有能力的人发明的。

不如说

“与其说数学没什么用，

它是为了更加系统地理解事物而进行的一种锻炼。”



村上春树的世纪名著《挪威的森林》中的主人公渡边先生说：

02 数学过敏症的对策



世上有不少人称自己对数学过敏，那么该如何预防数学过敏症呢？我们考虑了以下几种对策。

1. 大致理解。

《10 分钟理解微积分》《30 分钟掌握概率统计》……介绍微积分学习法的书着实不少。但这些书多数只是“概说”，读后仍旧不明所以然。因此需要下面几步。

2. 实际动手列算式。

3. 解题。

这一步非常必要。

4. 复习。

依上述步骤便可顺利取得进步。

很多人排斥数学还有一大理由，就是认为数学公式多，必须死记硬背。

其实公式不是死记硬背的，它是推导出来的。

所以，我们的目标是——尽可能不死记硬背。不得不背时，也要先理解后记忆。

微积分是高等数学中最复杂、最奇怪的部分。

这是什么呀！
不明白……
看着都头疼……



03 导数有什么用



导数为什么会存在？当然有它的意义。至于意义为何，我们会在后面一一道来，现在先来说说导数的作用是什么。简而言之，导数是用来分析变化的。

以直线函数为例，求导后会得到斜率。

请你在头脑中试想一下直线图形。

直线上的一点如何向另一点变化，就是通过倾斜度的“缓”与“急”来表现的。对直线函数求导会得到直线的斜率，对曲线函数求导能得到各点的斜率。

综上所述，导数是用来分析“变化”的工具。

那么有多少种需要分析变化的情况呢？

还真是不少。

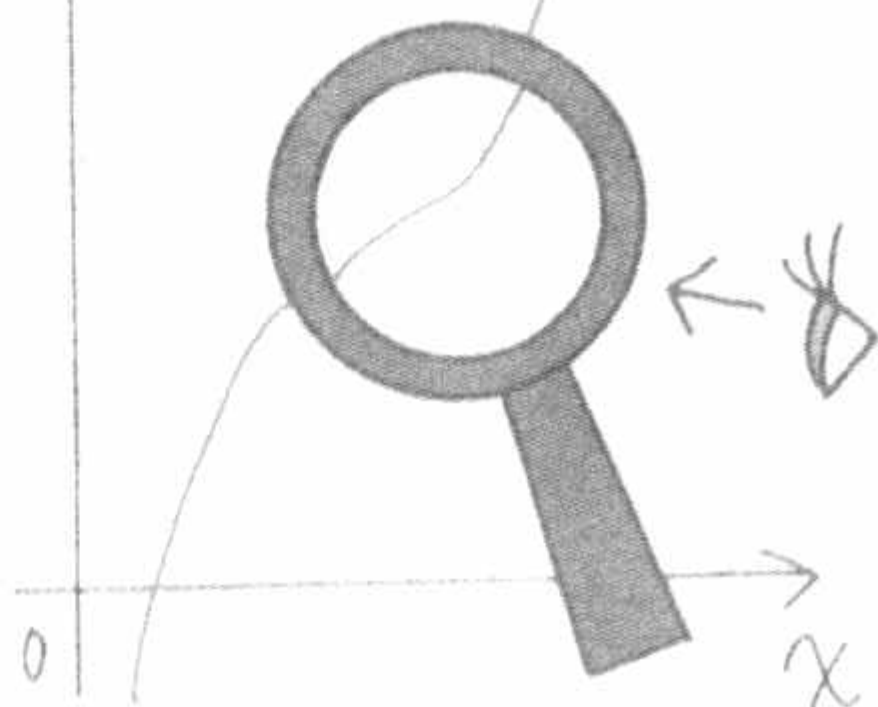
本书会举一些例子，但我介绍的只是其中极少的一部分，导数的应用范围十分广泛。

可是，学校的数学教育从来不告诉学生“导数应用广泛”，真是遗憾。

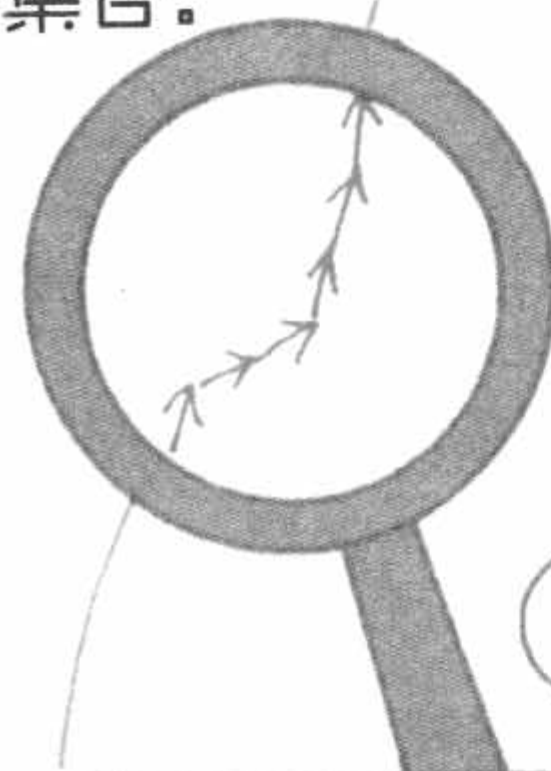
要说导数是什么,

y

例如这个图形。

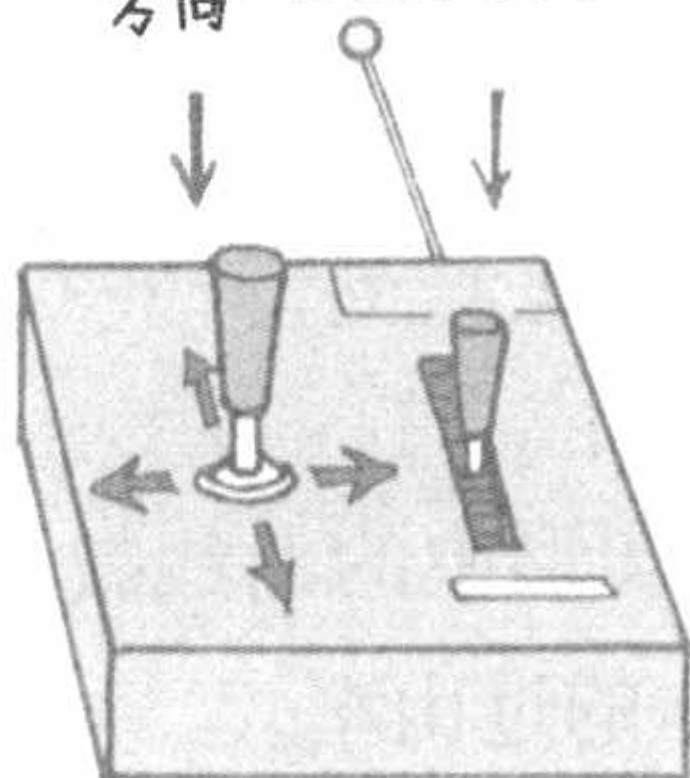


想一想, 我们将它看成微小变化的集合。



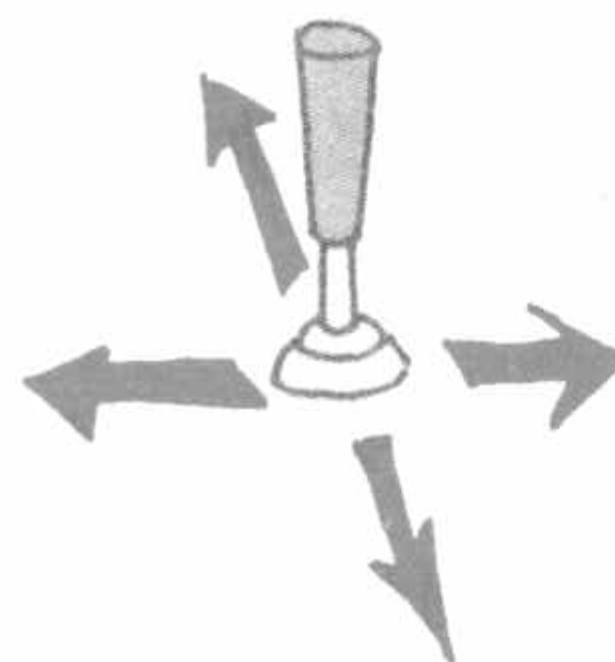
哦!

方向 加速、刹车



很像在操纵遥控车。

我们把手柄的运动方向汇集起来。



例如,

手柄这样运动,



就形成这样的线。



另外,

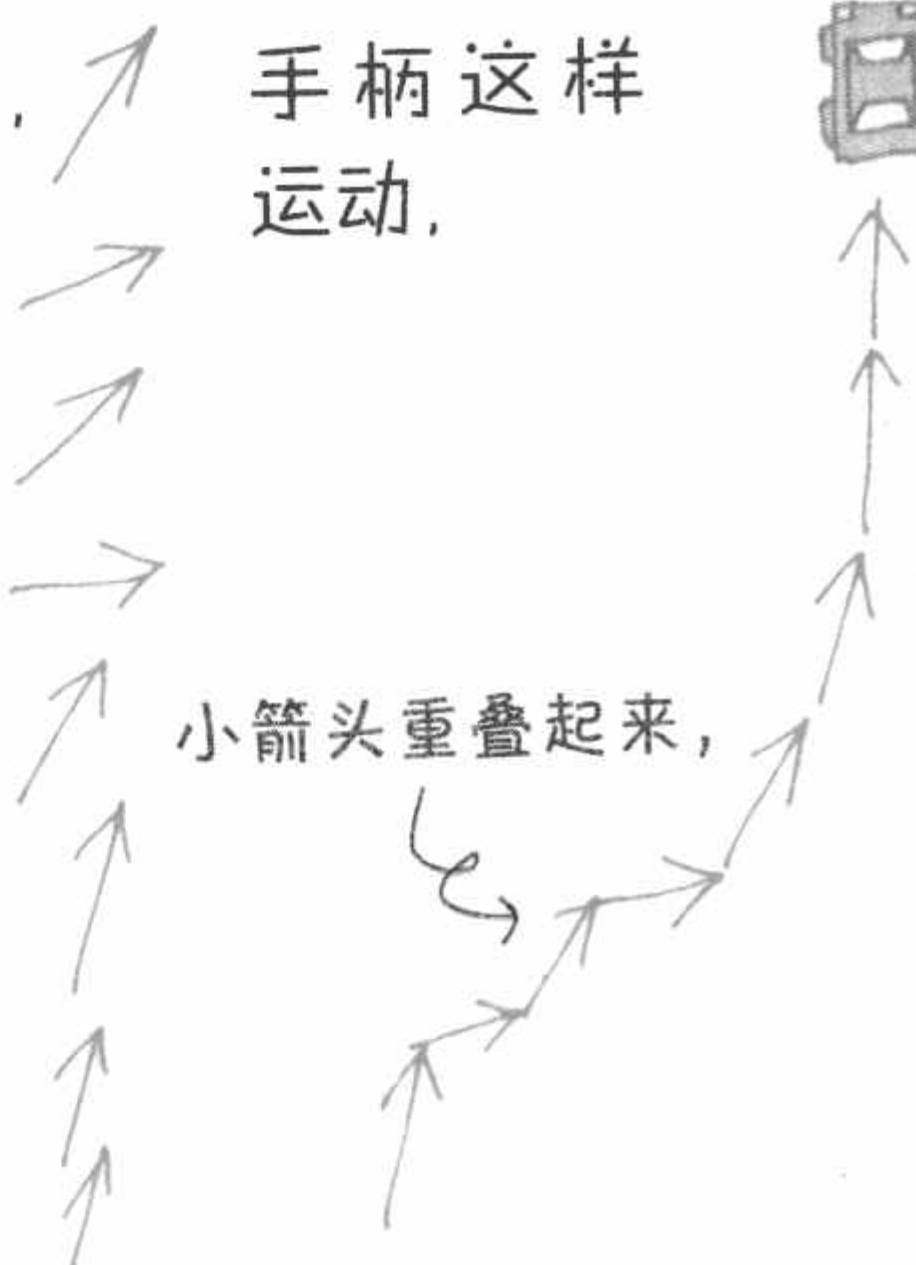


升龙拳!

就是

不对!

小箭头重叠起来,



04 某一点的斜率和瞬间斜率



前面说了，导数的目的是分析变化。突然提出“变化”，你可能无法理解，我们以过山车为例来说明一下。

过山车的车道多为曲线，因此我们可以认为乘坐者是在过山车的轨道曲线上移动。

过山车向下俯冲、水平前行、向上攀升，在不同的地点，乘坐者的身体会产生拉、拽或失重等不同感受。

这种状况出现的重要原因之一，就是身体的方向和速度发生了变化。过山车的轨道为曲线，乘客在轨道上任意一点的方向和趋势都不相同。

以数学思维来思考该话题的话，函数图形中的曲线就相当于过山车轨道，图形上的点就是飞驰在轨道上的过山车。

试着描绘一下过山车在曲线各点上的运动趋势，会发现它们都朝着各自不同的方向前进。只是不知道图形上点的移动速度而已。

从数学角度考虑点在曲线上的移动，会将该点在下一个瞬间发生的变化称为“瞬间斜率”。换言之，瞬间斜率就是曲线上各点的斜率。后面我们会进一步详细阐述。

数学上在设定斜率时，都是取两个点，这与“某一点的斜率”的说法有些矛盾，因此有时会使用“瞬间斜率”的说法。

而正因如此，有些令人费解。导数这个概念原本是从物理学和天文学这类研究物体运动的学科发展而来的，在这些领域里，“瞬

间”或许是十分平常的现象，但针对没有运动概念的数学曲线图形谈“瞬间”，有人就无法理解。

因此，本书会使用数学化、图形化的方式进行讲解，不使用“瞬间斜率”的表述方法，而代之以“某一点的斜率”。

已经习惯使用瞬间斜率的朋友，请转换一下概念，“某一点的斜率=瞬间斜率”。初次接触导数的读者也请记住瞬间斜率是常用说法。

用普通的方法很难求某一点的斜率，使用导数却能轻松求出来，请牢记这一点。

如果轨道瞬间消失了，那么急驰在上面的过山车会怎样？答案是：会沿直线飞出去，此时过山车飞出的方向就是曲线的切线方向。因此“瞬间斜率”或“某一点的斜率”也可用于求切线的斜率。

05 曲线的高峰



想知道在何种情况下应该使用导数，首先我们要了解一下如何求斜率。

斜率并不是特别的数学用语，它表示倾斜程度。倾斜角度越接近 90 度（垂直），倾斜程度越大。也就是说，此时图形的上升趋势越强。

我们试想一下在卡拉 OK 唱歌的情景。你有一首擅长的歌曲，旋律明快，你想尽可能在最佳时机（现场气氛最热烈时）展示出来，让自己成为主角。那么这个时机是什么时候呢？

我把现场气氛的热烈程度画成下页的图形。在曲线上升趋势最强时演唱你擅长的歌，一定会获得最佳效果，这时就是“最佳时机”。

那么曲线上升趋势何时最强呢？观察一下图形，我们可以找到一个大致的部位，但很难找出具体哪一点最好。（当然，唱卡拉 OK 时，并不需要追求最准确的时机……）

那么，是否存在这样的方法——不依靠眼睛观察图形来寻找，而是通过计算，求出曲线上各点瞬间的趋势。

其实这就是导数。你若能灵活运用导数，就有可能成为卡拉 OK 的主角。

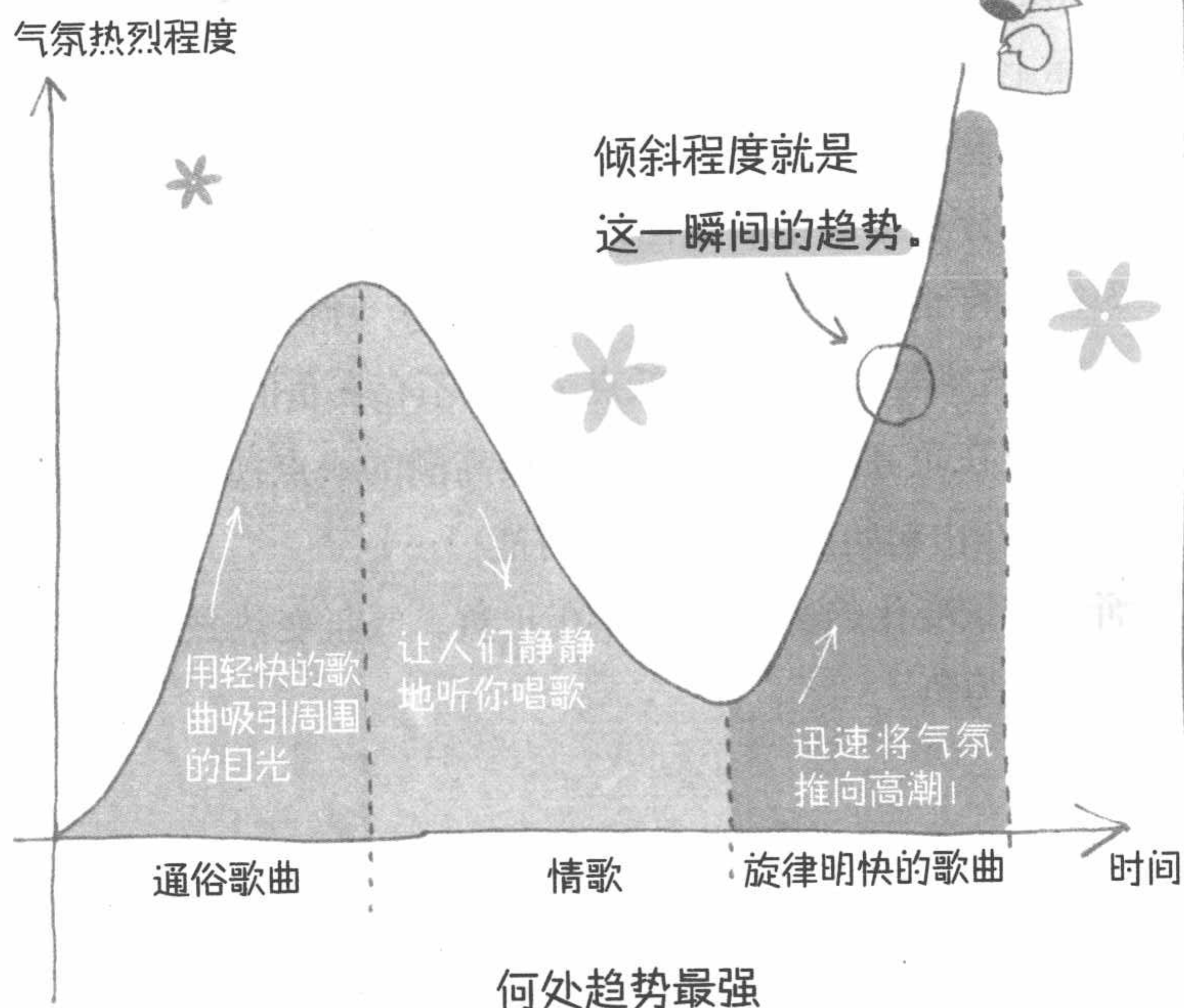
首先轻唱 Every Little Thing 组合的歌曲，清清嗓。

之后再以宇多田光的一首情歌展现雄厚的演唱实力。

在气氛热烈之时，以一首早安少女组合的歌曲结束演出。



绘制成图形的话……



06 如何画曲线图



接下来我们根据前面画的“气氛热烈程度图”来画“气氛变化趋势图”。

首先我们分析一下原始图形。气氛会随着时间的变化高涨低落。“升→降→升”用符号表示就是“+→-→+”，这样是不是一目了然？

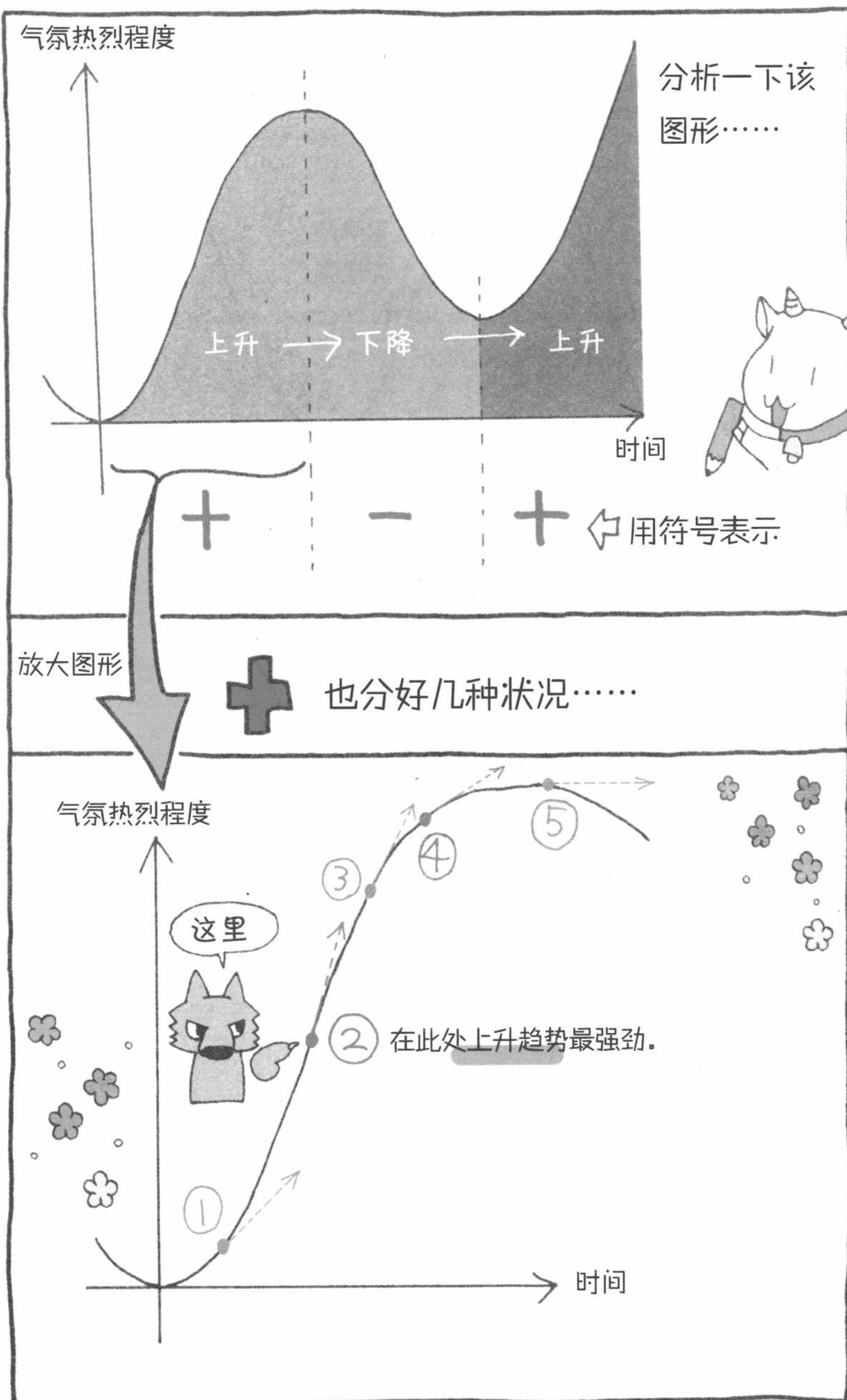
不过这个“+”也有差异。从略微上升的①开始，进而是上升趋势最为强劲的②，这之后是虽然仍在上升，但趋势已经减缓的③，以及上升趋势即将停止的④，最后是上升趋势完全停止的⑤。

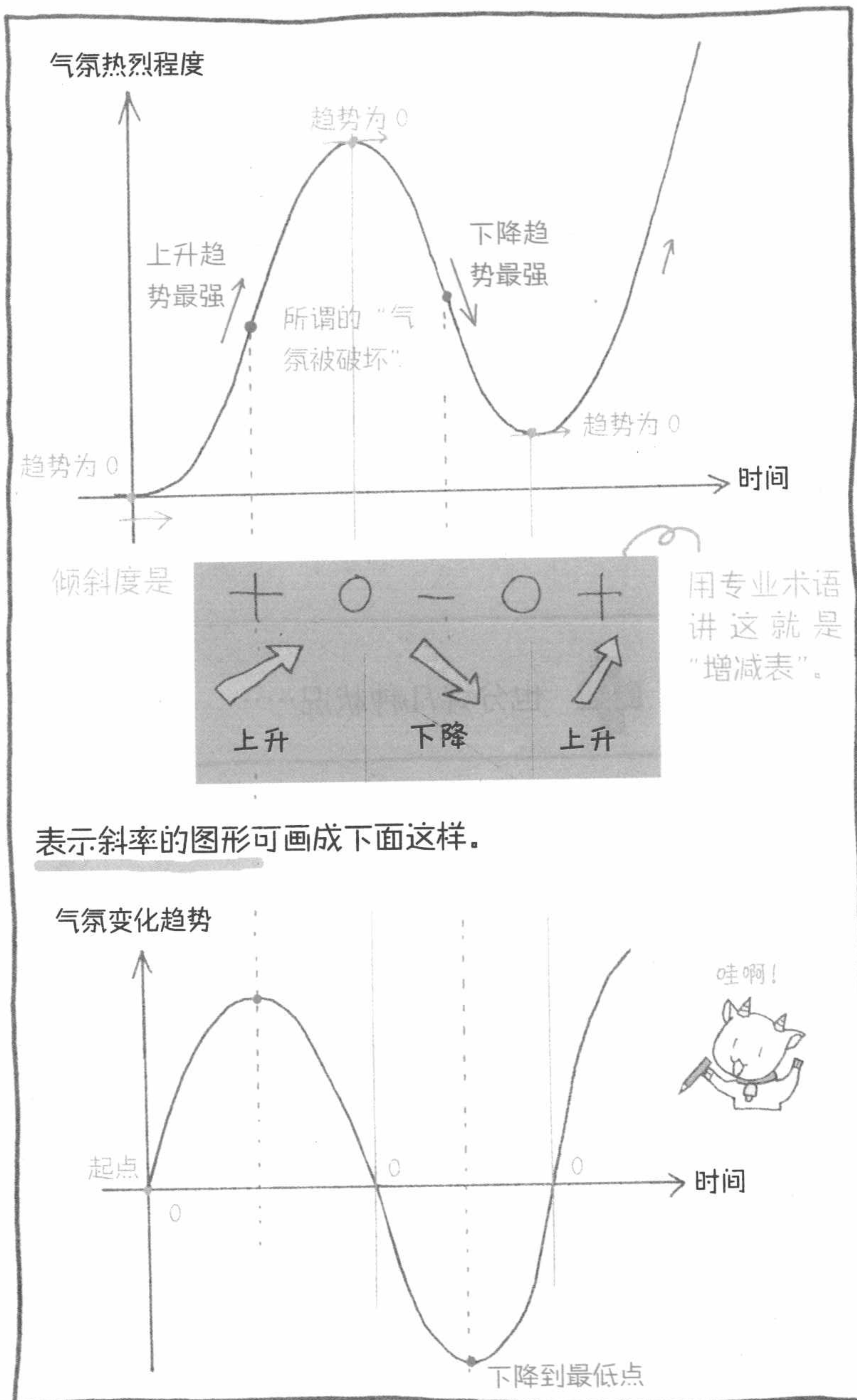
实际上，上升趋势最为强劲的是②，但上升的顶点是⑤，如果在⑤处唱歌，那之后的气氛会一直向下跌落。

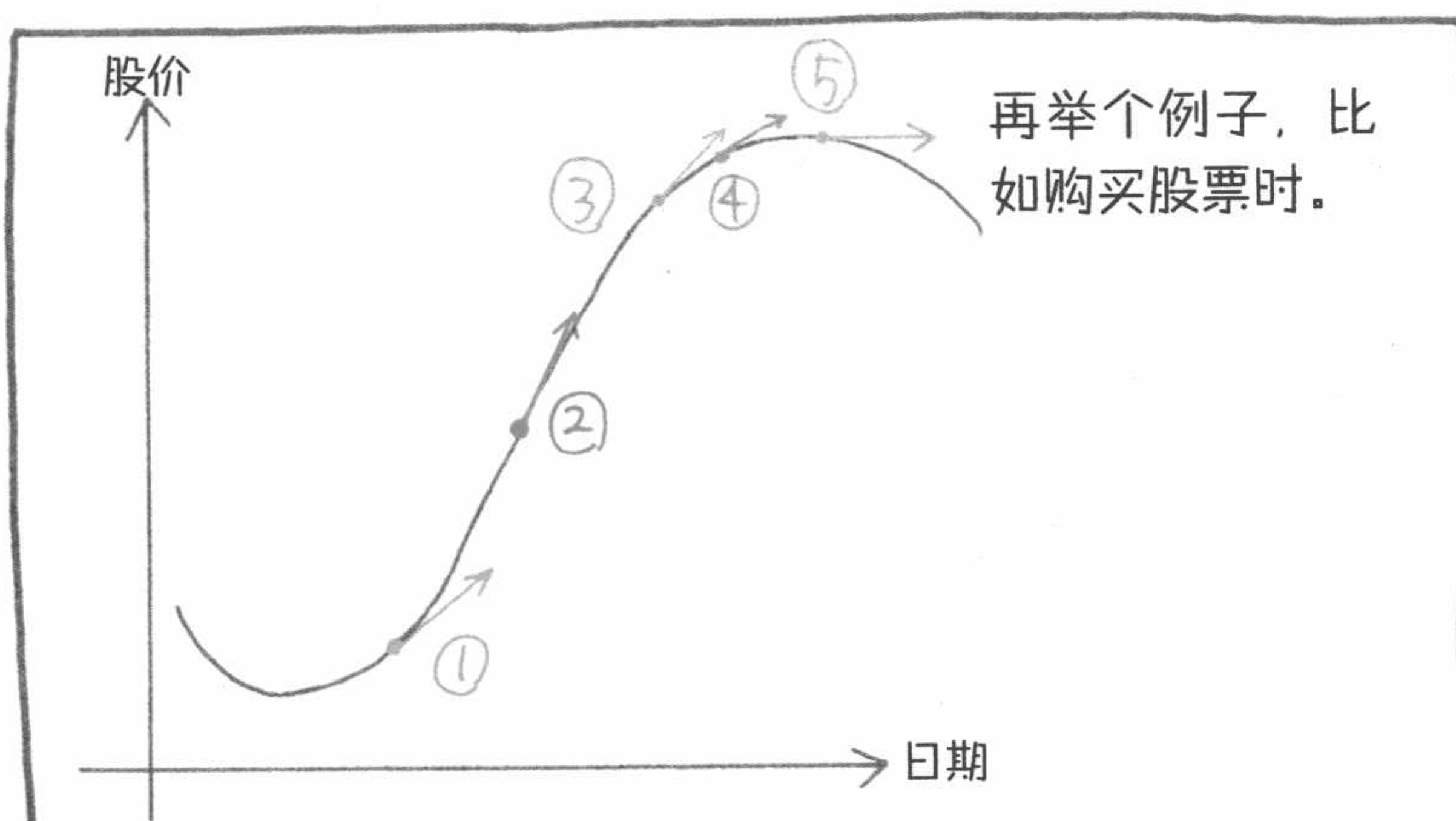
将上述分析结果绘制成图形，则可明显看到②的上升趋势最强，⑤往后的部分上升趋势为负（即此后呈下降趋势）。

“气氛热烈程度图”的最低点为0，不存在负值。（这是因为气氛不可能存在负高涨，但是如果将最高潮的一点视为起始点，设为0，则存在由起始点向下跌落的可能……）

而“气氛变化趋势图”却存在正负。气氛变热烈时为正，气氛变低落时为负。







在①和②处购买，上涨趋势强劲。

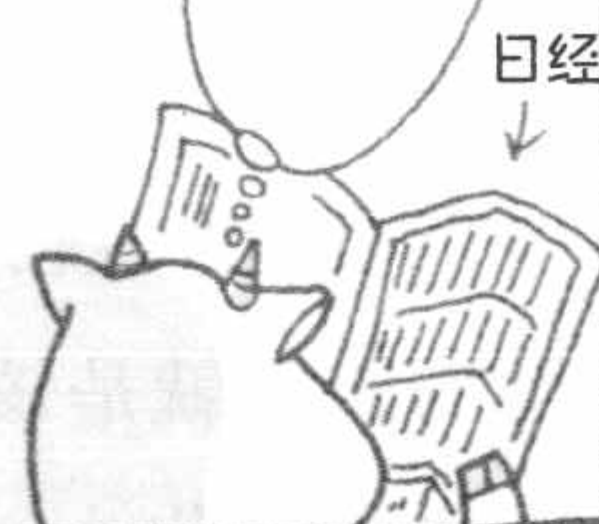


日经指数



③④处已显现出“即将触顶”“上涨后劲不足”的态势。

没怎么涨嘛……



在⑤处购买后，一路跌，真是悲惨啊！

哇~哇~
破产了！



股价在上涨，
没说不可以在
此处补仓呀。

所以有必要
研究“斜率
的变化”。

外行

07 如何使用导数



前面讲过，导数是求斜率，但我们还没有弄清楚求斜率是为了什么。这也是导数的目的。

下面研究一下导数在实际生活中能为我们提供什么帮助。

引入导数，受益最大的是物理领域。一般来说，排斥数学的人也会排斥物理，不可思议吧，因此看到这里可能你会想：“物理，饶了我吧！”

不过还是请听我说一说。

牛顿提出导数的概念，是为了思考 and 解决物理特别是力学问题，导数和物理的关系十分密切。

力学有三大要素——位置、速度、加速度，将这三大要素随时间的变化状况绘制成图形，那么位置的斜率就是该点的速度，速度的斜率就是该点的加速度。

位置变化大，速度就快；速度变化大，加速度就大；位置没有变化，就不存在斜率（斜率为0），即速度为0。速度与加速度的关系也是如此。

但这样阐述，对导数过敏的人会说：“这不是理科才学的问题嘛。”只有理科的人才用导数。

用导数的不只有数学和物理。

用导数能求得某一点的斜率。斜率表示在该点的“变化趋势(大小)”。由此我们可以了解，在连续的数据中，何处变化最大。

知道了某点的斜率，就比较容易推测出之后曲线的倾斜情况。

如果能巧妙运用这一方法，还能预测未来的动向。

使用这种方法能很方便地分析经济金融动向。

试想一下股票的K线图。股价时涨时跌，观察各点的斜率，就能判断出涨跌趋势。

简单来说，如果某处斜率为正，且数值很大，则可推测“之后股价还会上涨”；如果某处斜率为负，且斜率的绝对值较小，则可断定“下降趋势不久后停止，趋势将转为上升”。

导数不仅应用在数学、物理中，也是现代经济、金融领域不可或缺的工具。

最近学生和家庭主妇都在炒股。



要努力学习汇兑、FX……

08 用导数处理图像



过去，单反照相机、便携式镜头和胶片曾是主流摄影设备，但如今是数码相机的天下。

使用以前的相机，不但需要高超的摄影技术，冲洗技术也很关键，外行很难洗出漂亮的照片。而数码相机无需冲洗，外行也能轻松使用。

随着数码相机的普及，图像处理也能通过电脑轻松完成。甚至有人能将图像效果处理得比实际景物还要漂亮许多。其实，图像处理中也会用到导数。

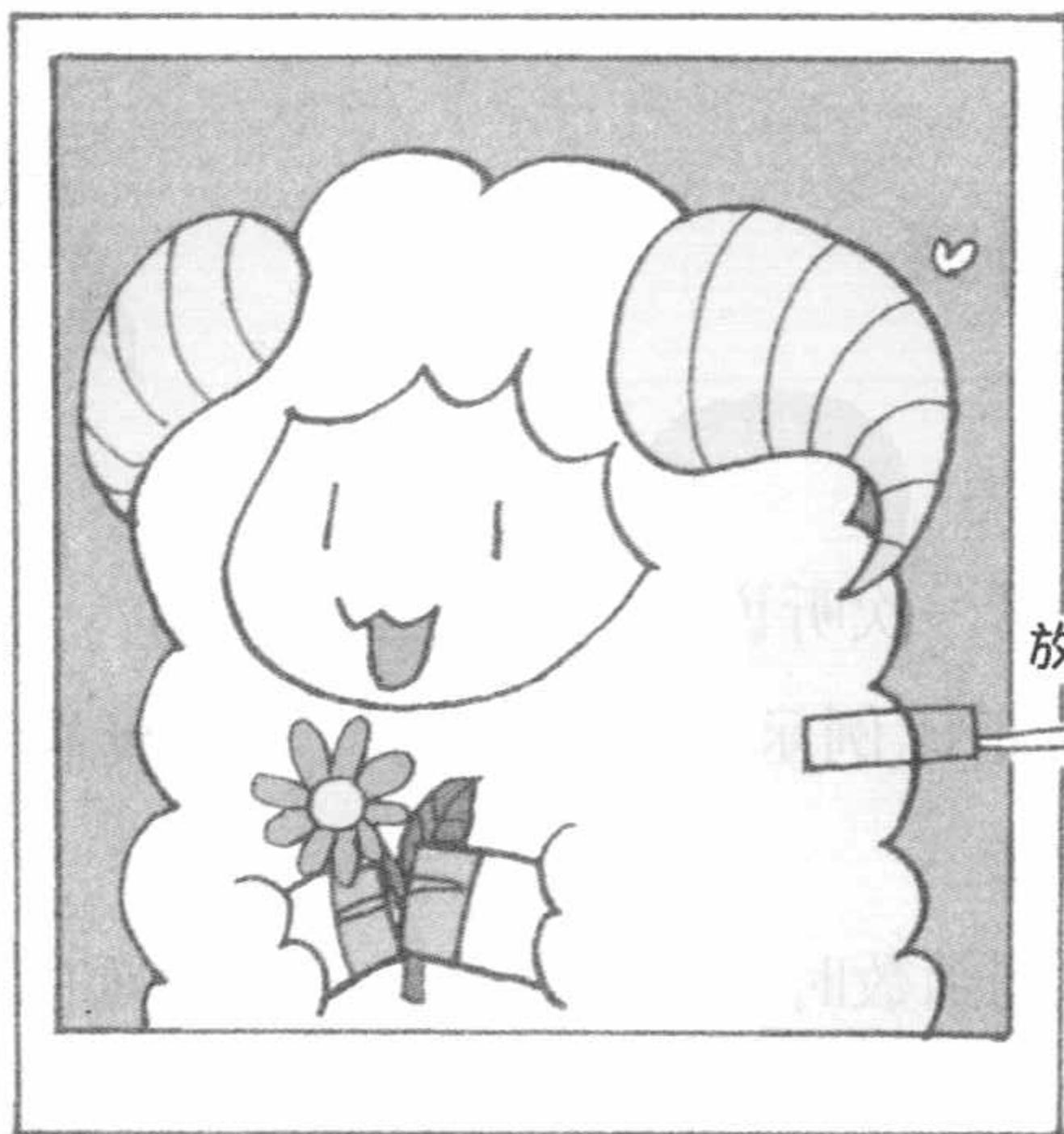
例如，仔细观察照片上人物的面部轮廓，会发现面部和背景的亮度不同。

如果可以通过计算确定亮度改变的程度，就能确定面部的轮廓。此处就要用到导数。

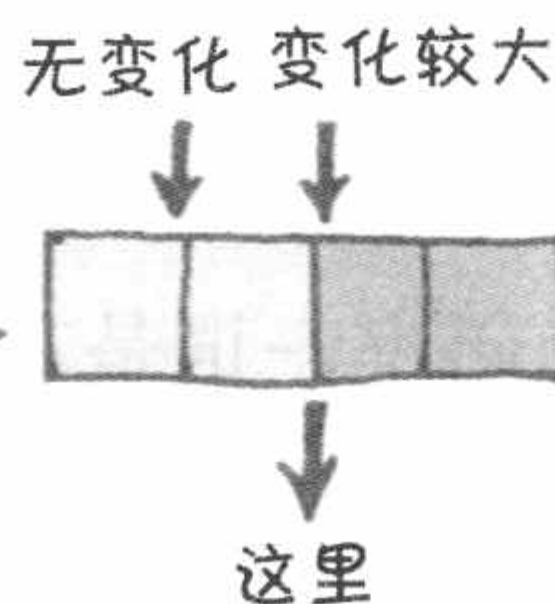
导数可以求出某一点的斜率，用电脑对图像中的各点亮度求导，就能判断出变化剧烈之处的轮廓。

因此，导数也被应用于处理不满意的照片。只是数码图像中的曲线不光滑，无法进行严格意义上的求导，只能利用相邻点的差异计算，但不管怎样，这种做法追根究底还是得应用导数。

处理照片



放大图像



会发现色彩变化剧烈之处就是轮廓。



用鼠标选择背景。



相亲时的照片主要处理皮肤问题。

黑痣不见了，而黑痣正是她的魅力所在。

处理过度，面部器官只剩下嘴和眼睛。



稍微处理一下还好，如果过度，皮肤就会是一种颜色，失去立体感，仿佛戴了面具一样。建议你最好不要这样做。

09 如何求斜率



你还记得学数学时第一次听说斜率是什么时候吗？

斜率一词是在学习正比例函数时出现的，看来我们和斜率的渊源颇深呐。

想想看，学习正比例函数时，是用什么方法求斜率的。

为了求斜率，首先要在直线上选取两点绘制一个三角形。取两点的纵向差和横向差，用纵向差除以横向差就得到斜率。

数学上的斜率表示为“纵向长度差 ÷ 横向长度差”。（日常生活中多用角度表示斜率，但角度不易计算，所以不常使用。）

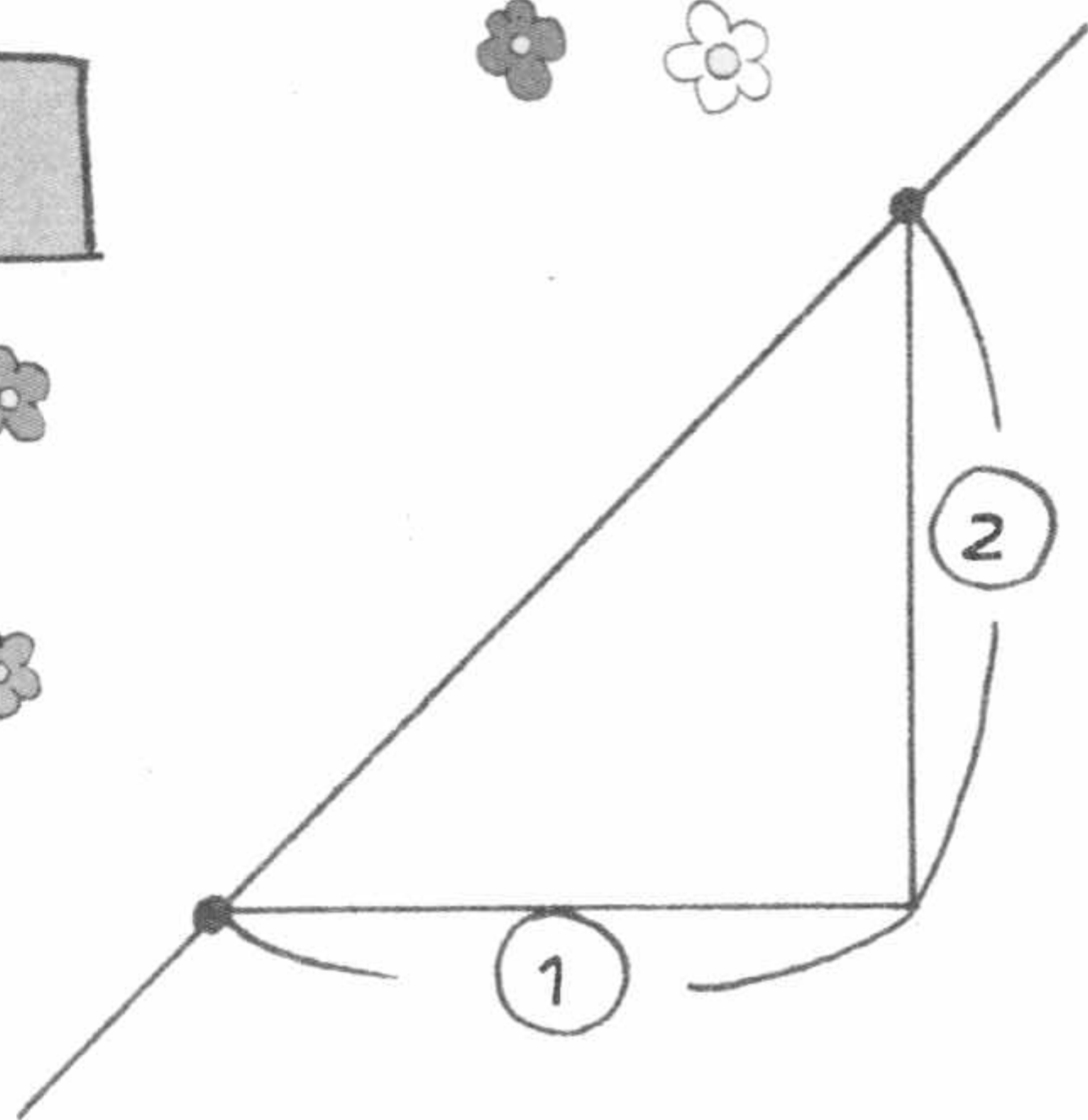
这是求斜率的基本方法，是一个基本的计算原则。

但是求曲线的斜率却不能直接使用这种方法。曲线弯弯曲曲，不能任取两点组成三角形，因为无法确定要求哪个点的斜率。

而如果是直线的话，无论在哪儿取两点，计算出的斜率都是一定的。

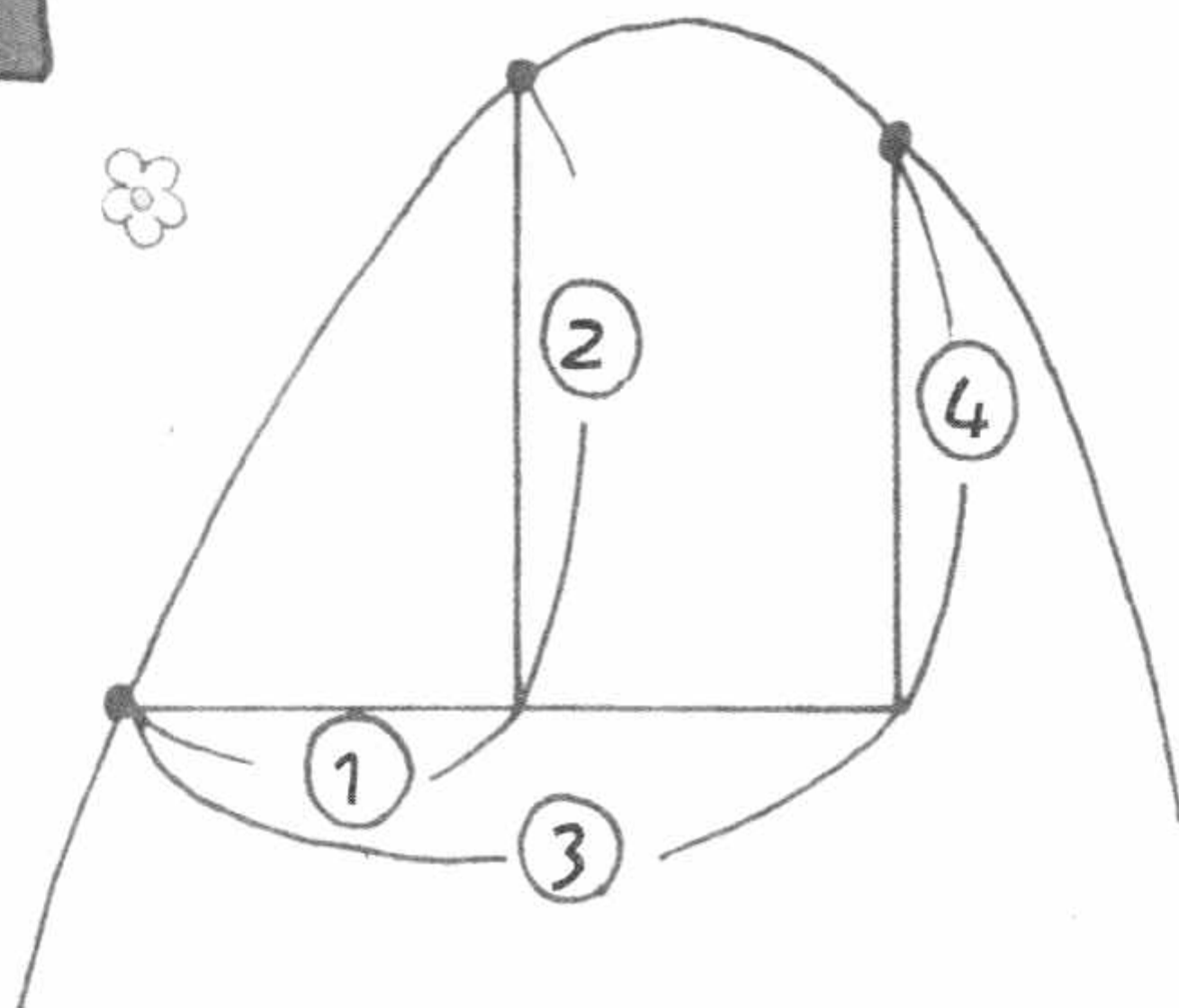
那曲线如何取点比较好？如何取点才能求出准确的斜率？都是很难的问题。

直线



直线 AB 的斜率 = $\frac{②}{①}$ ，结果通常为定值。

曲线



曲线 A 的斜率是 $\frac{②}{①}$ ？ $\frac{④}{③}$ ？好像都不对。

10 怎样在曲线上取两点



求斜率的基本方法就是取两点、连线，之后用两点间的“纵向长度差”除以“横向长度差”。

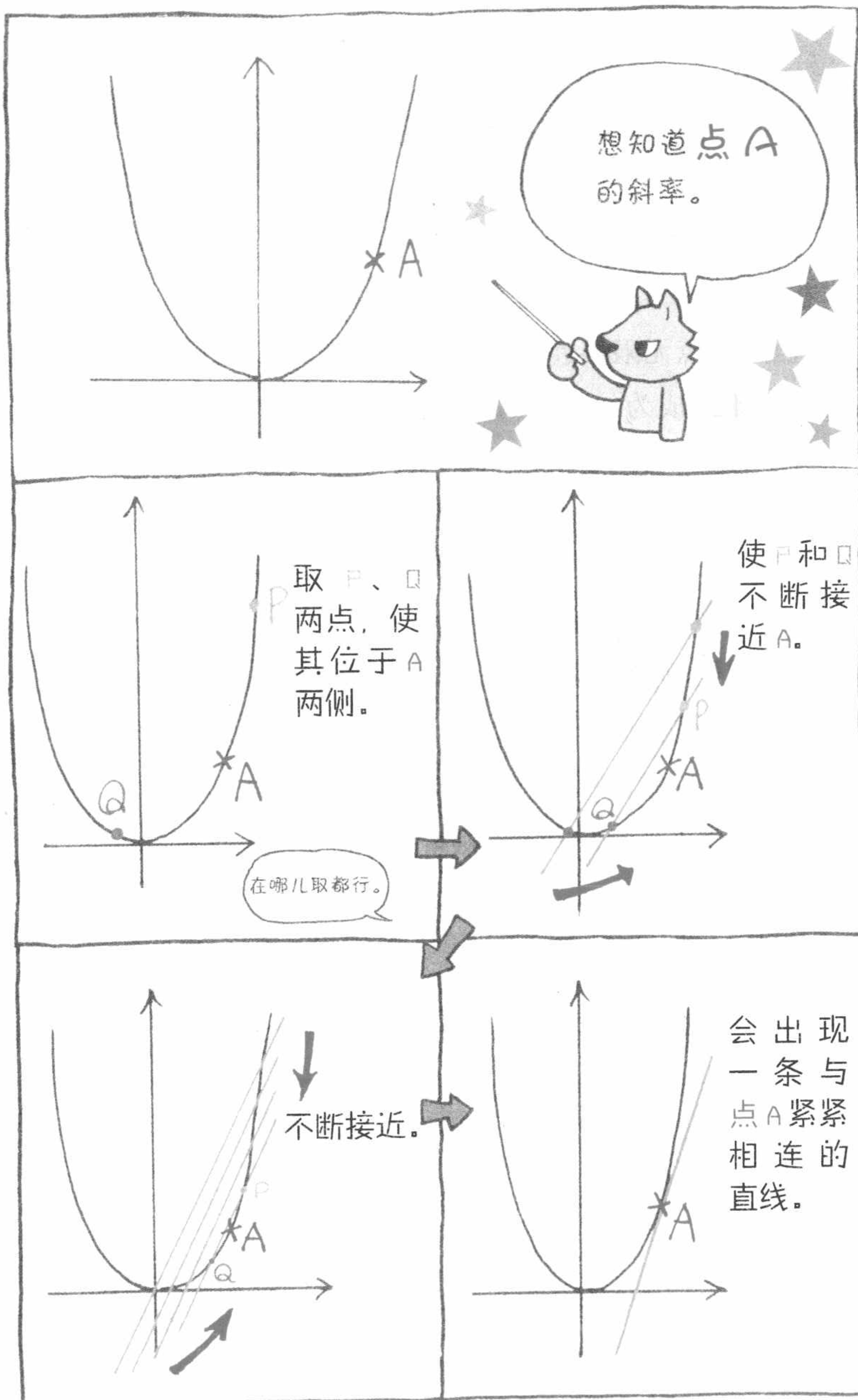
无论是直线还是曲线，这一原则都不会改变。也就是说，在求曲线上某个点的斜率时，仍需找到两个点。但实际上找到两个点是不可能的。

不可能，又必须找出来，怎么办呢？

例如，我们要求右页图中 A 点的斜率。为此需要先找到两个适当的点。

我们在曲线上取点 P 和点 Q，将点 A 夹在中间。连接点 P 和点 Q 得到直线 PQ。因 PQ 是直线，求它的斜率很容易。

之后我们使点 P 和点 Q 从左右两侧尽可能靠近点 A。这样，最终就会出现一条与点 A 紧紧相连的直线，数学上称之为曲线在点 A 的切线。



11 使曲线上的两点不断接近



在曲线上取两点时，要使其尽可能靠近点 A。

“但是两点无限接近时的斜率究竟该怎么求呢？”“两点无限接近最终不就成为一点了吗？这也不是两点呀？”……疑问随之而来。

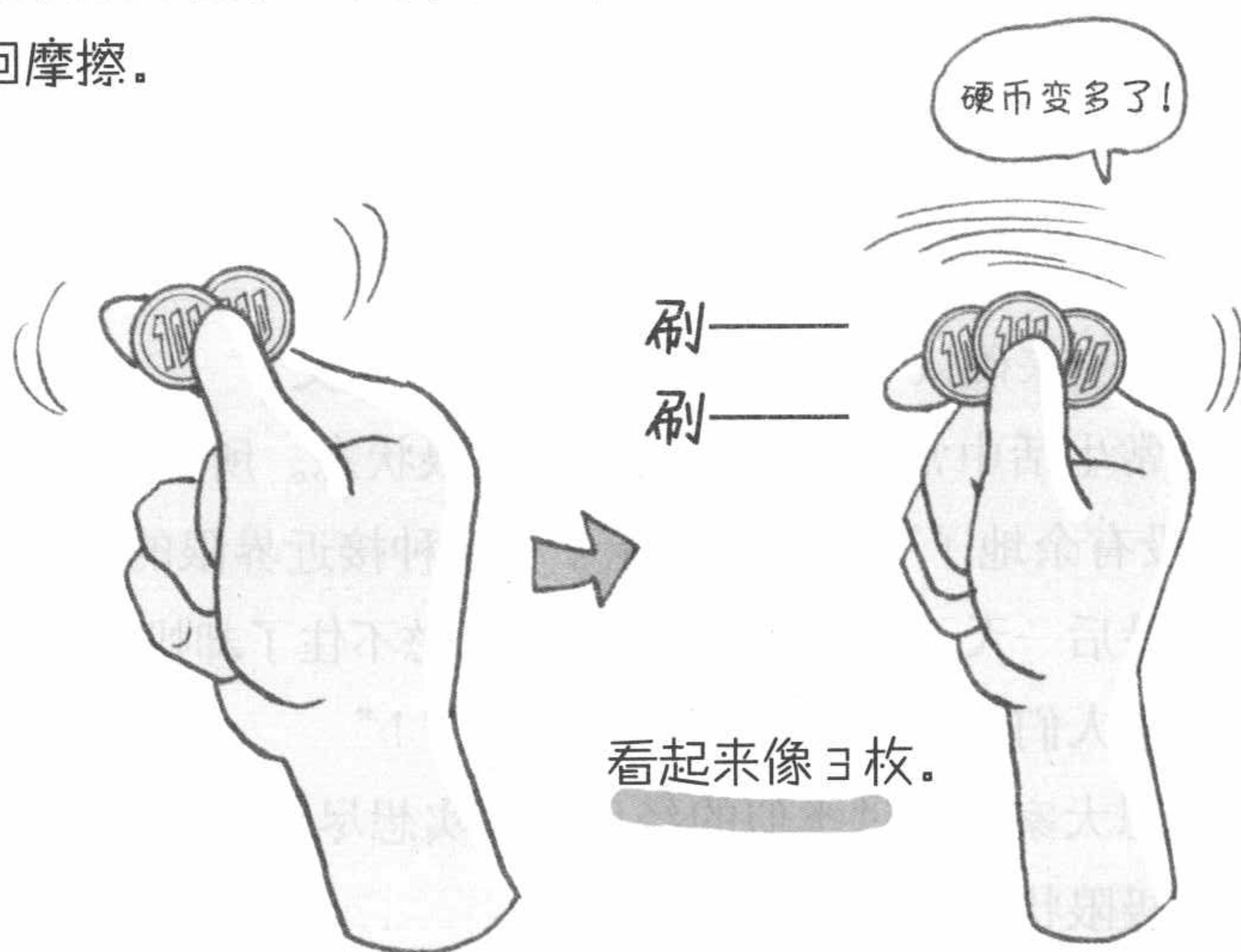
事实确实如此。如果它们完全重叠，就成为“一个点”了。但如果是非常接近呢？间距为 1 微米、1 纳米或更近……实际上确实是两点，但看起来却像一个点。

这种“使两点无限接近”、“不重叠但使其无限靠近”的数学式思维方法就是极限理念。

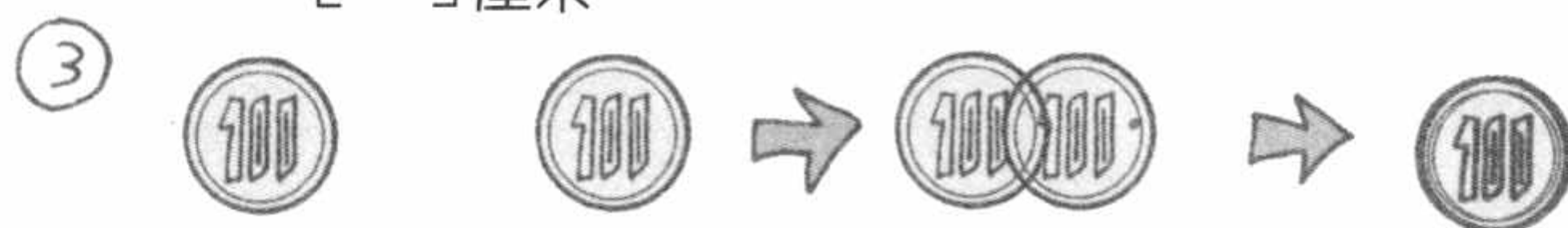
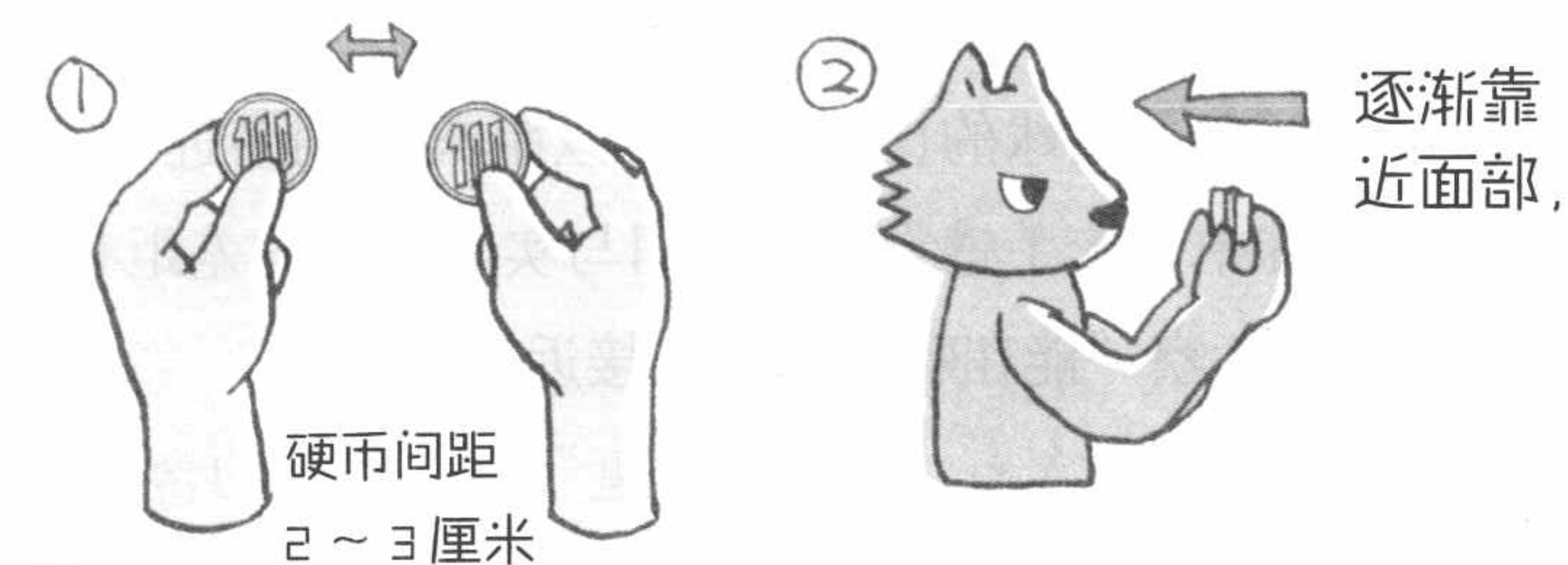
求某一点的斜率和求导离不开极限概念。

因此，接下来我们要稍稍偏离导数，先来谈谈极限。

将两枚硬币叠在一起拿在手中，
来回摩擦。



将两枚硬币置于与眼同高的位置，



它们重叠起来了，像1枚硬币。



12 什么是极限



我们先来确认一下数学中极限一词的含义。

日常生活中常用极限一词表示极限状态。所谓极限状态就是“已经没有任何余地了”、“再不可能了”这种接近界限的感觉。比如，暑假到最后一天了，但作业还没有做；憋不住了却找不到厕所……此时通常人们都会想：“不行了！不行了！”

我想大家都有过类似的经历。其实想尽量避免的困窘状态就是一种极限状态。

那数学中的极限是否与此相同呢？

如果极限表示“不行了”、“到头了”，那么此时应该是无法解决数学问题才对。

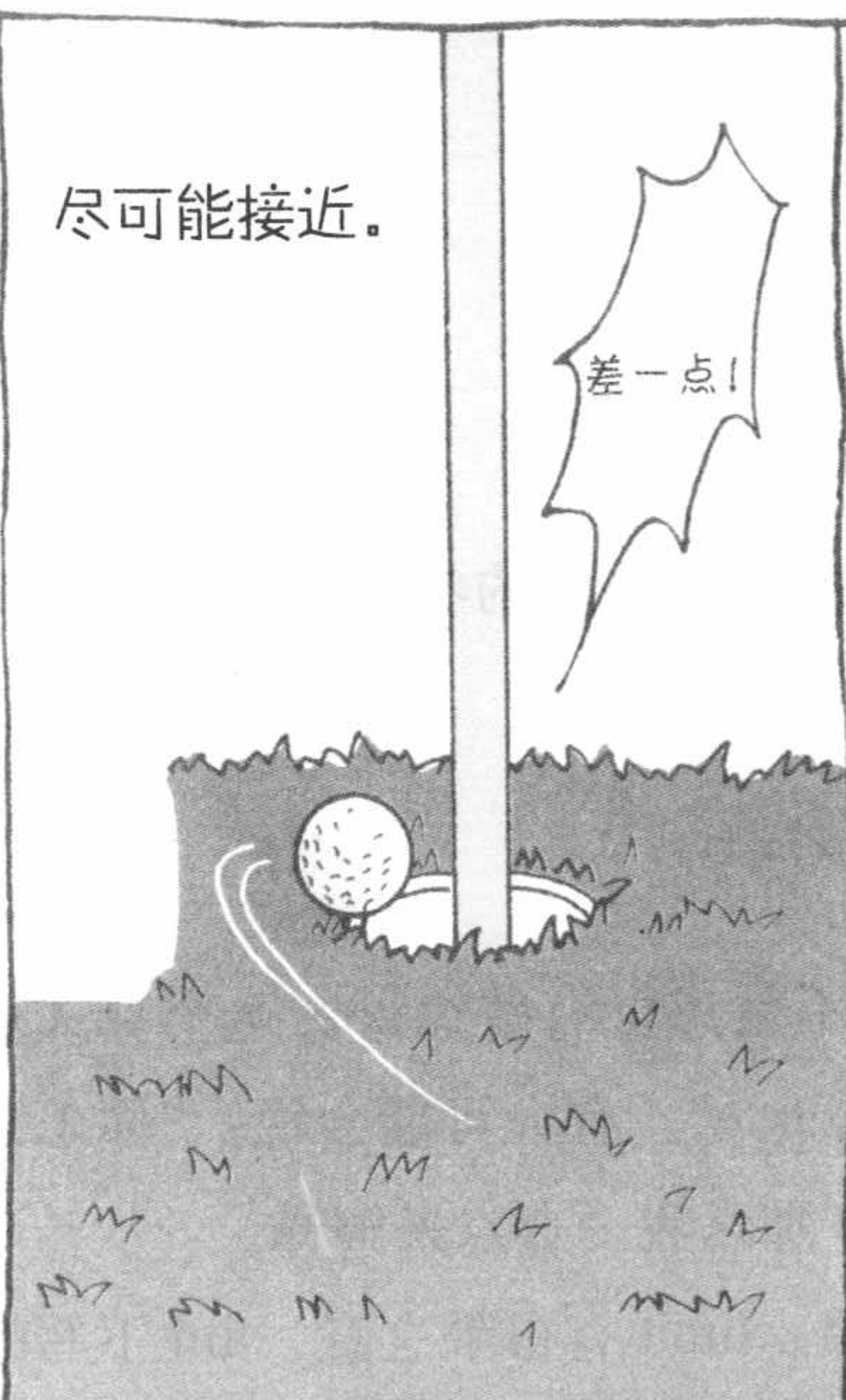
数学的极限是怎样一种感觉呢？

请想象一下高尔夫球的比赛，球可以距离球洞多近；还有在10秒钟速算比赛中，选手感觉到的时间与实际时间的差距有多短，这些比赛都是在考察“能在哪种程度上接近目标”。

数学中的极限就包含有“尽可能接近”这一积极的含义。

尽可能接近。

差一点!

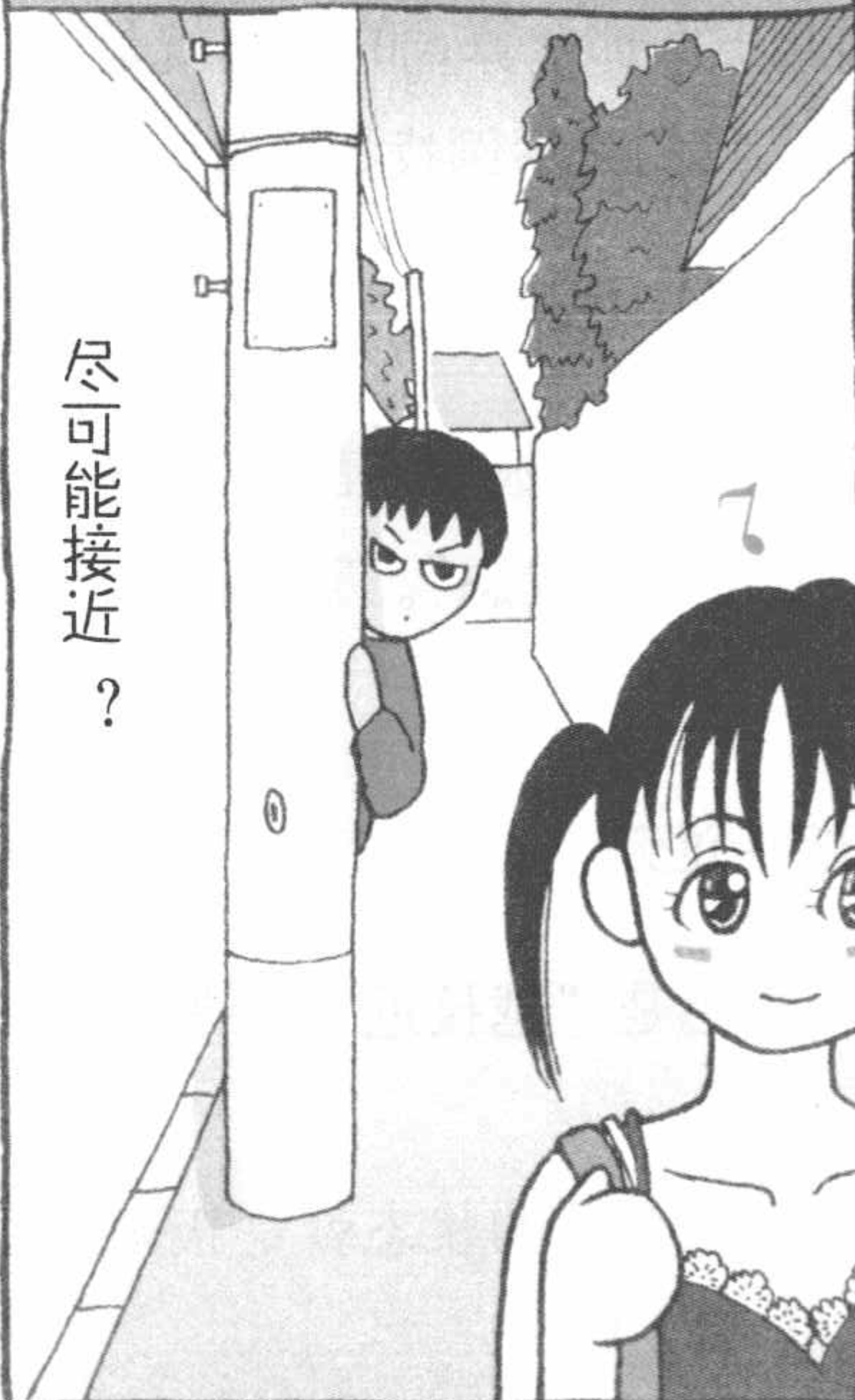


尽可能接近。

可惜!



尽可能接近?
?



恋♥就是♥
靠得越近,

越看不到对方的面
孔, 真是不可思议!

♥嗯! 嗯!♥



13 什么是无限接近



某物（数值）向他物（数值）无限接近的状态可用下面这个算式表示。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

我突然写出个算式来，你是不是感觉有些惊讶？这个算式表示“当 x 无限接近 a ， $f(x)$ 就会接近 b ”。有人可能会说：“你怎么突然讲这么抽象的事，实在……”那么我一点点来解释。

首先是 \lim ，它是 limit 的缩写。 limit 有极限之意， \lim 下写的小字表示“使什么向什么靠近”，因此上面那个算式的意思就是“使 x 向 a 靠近”。在讲述计算方法之前，我们先举例找找感觉。

$$\lim_{\text{啤酒杯数} \rightarrow 10 \text{杯}} f(\text{啤酒杯数}) = \text{烂醉}$$

找到点感觉了吗？这是用啤酒饮用量函数表示醉酒程度，意思是“啤酒喝到接近 10 杯，人就接近烂醉状态”。下面的例子比较严肃，但也可以找到些感觉。

$$\lim_{\text{工作} \rightarrow \text{每天加班}} f(\text{工作}) = \text{过劳}$$

这是表示疲劳程度的函数式。意思是“越接近每天加班，因过度疲劳而病倒的日子越近”。

综上所述，一个值无限接近另外一个值的状态就是极限。不会计算没关系，能够找到这种感觉就可以了。

我的肝脏最多只能承受10
杯啤酒，那是**极限**了。



喝1杯

第二天



舒服，什么
事都没有。



喝5杯

第二天



不太舒服。



喝9杯

嗯——



大醉两天。



脑袋一跳一跳地疼。

喝10杯

啊——



住院！



急性酒精中毒。

14 怎样用数学算式表示极限



找到极限的感觉后，这次我们试试从数学的角度来研究极限。请看看下面的算式。

$$\text{例题 1: } \lim_{n \rightarrow 1} (1-n)$$

算式表示“使 n 无限接近 1”。 n 无限接近 1，则 $1-n$ 无限接近 $1-1$ ，也就是无限接近 0。

再看下一个。

$$\text{例题 2: } \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n}$$

n 无限接近 1，则 $\frac{1}{n}$ 无限接近 $\frac{1}{1}$ ，也就是无限接近 1。

再来个难一些的。

$$\text{例题 3: } \lim_{n \rightarrow 1} (n^2 - 3n + 2)$$

难度增加了，但只要按相同方式思考就可以迎刃而解。 n 无限接近 1，则 $n^2 - 3n + 2$ 无限接近 $1^2 - 3 \times 1 + 2$ ，也就是 0。因此结果是无限接近 0。

最后一个。

$$\text{例题 4: } \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - 3n + 2}{n - 1}$$

与前三个不同，这个可没那么简单。分子与前一个算式相同，

接近于 0，但分母也接近于 0。

咦，答案是 $\frac{0}{0}$ ？有分母为 0 的分数吗？没有。0 为除数违反了算术规则，这样的分数不存在。

那该如何是好呢？实际上这个分数的分子可以因式分解。

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - 3n + 2}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n-1)(n-2)}{n-1}$$

分子分母中都含有 $n-1$ ，可以进行约分。

准确地说，因为在 \lim 情况下， $n-1$ 无限接近于 0，但并不等于 0，所以可以进行约分。

约分后剩下 $n-2$ ，所以答案是无限接近 -1 。

最后一道例题稍有些专业，目的是先让大家简单接触一下计算。接下来我们还是继续谈极限的话题。

15 极值的求法和表示方法



$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 中的 $x \rightarrow a$ 表示“ x 无限接近 a ”，但并不是等于 a 。

无论接近到何种程度都不相等，这一点很关键。

所以前面的例题 1 中，尽管 n 无限接近 1，却不是 1，因此 $1-n$ 的结果也是无限接近 0，但不是 0。正因为它不等于 0，所以例题 4 可以进行约分。

既然不等于，那么究竟“接近到何种程度呢”？回答是“带入目标值计算一下就知道了”。

是不是感觉像狡辩？

这似乎就是人们无法理解极限的一个关键原因。本书不会对此作深入探究，目前只要知道要求某一点的斜率时需要极限概念即可。

前面例题的答案都是用文字描述的，如果用算式来表示极值该怎么做呢？也就是说 $\lim_{n \rightarrow 1} (1-n)$ 的右边该怎么写。其实可以写成这样：

$$\lim_{n \rightarrow 1} (1-n) = 0$$

这个算式不表示“当 n 无限接近 1 时， $1-n$ 等于几”，而是表示“ $1-n$ 无限接近于几”。

接近的目标值就叫做极值。

都不是等于

无论多么接近

因此, $\lim_{\text{啤酒杯数} \rightarrow 10 \text{杯}} f(\text{啤酒杯数})$ 的真面目是

烂醉

我没醉!!
我才喝了 9.999 杯,
这不还剩一点嘛!

别喝了!

我必须
喝 10 杯。

哈哈
哈哈
哈哈

没事!

哈哈

你已经
完全醉
了.....

哈哈
哈哈

哈哈



16 正向接近和负向接近



之前我们一直在讲“接近……”，那么究竟如何接近呢？
例如，

$$\lim_{\text{啤酒杯数} \rightarrow 10 \text{杯}} f(\text{啤酒杯数})$$

它的意思是感觉饮酒量接近 10 杯，那么

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

它的意思是 x 不断减少，靠近 0。

发现了吗？接近有两个方向。

上面第二个算式中存在两种可能性：一是 x 开始为正值，由 0 的右侧接近；另一个是 x 开始为负值，由 0 的左侧接近。从哪方接近会改变计算的结果（请看右页的图）。

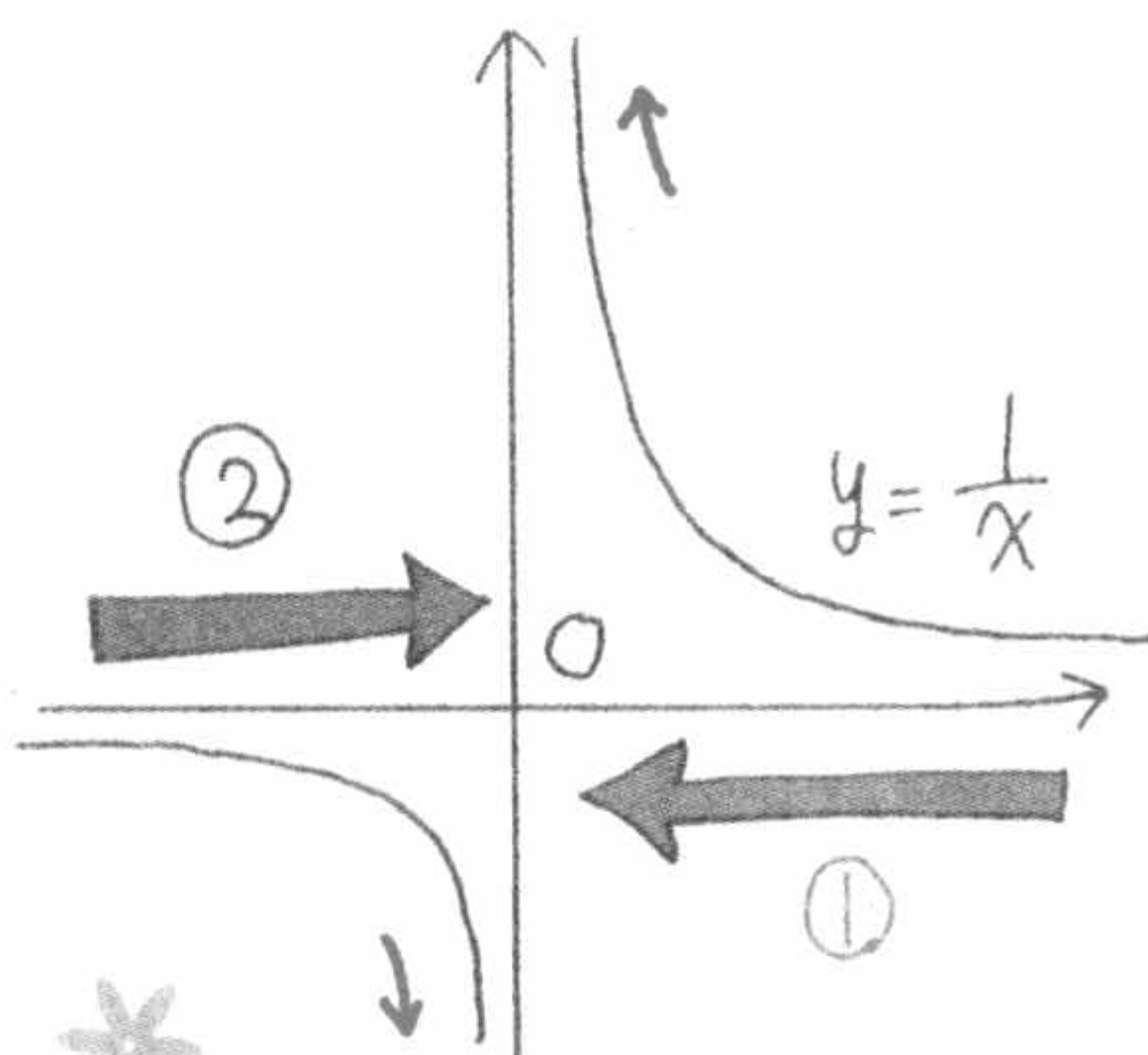
实际上，接近的方式非常重要。

顺便说一下上面第二个算式的答案是什么。答案就是没有极值。

有时的确没有答案。

那么第一个算式有答案吗？这个……

假设 x 接近 0, 则……



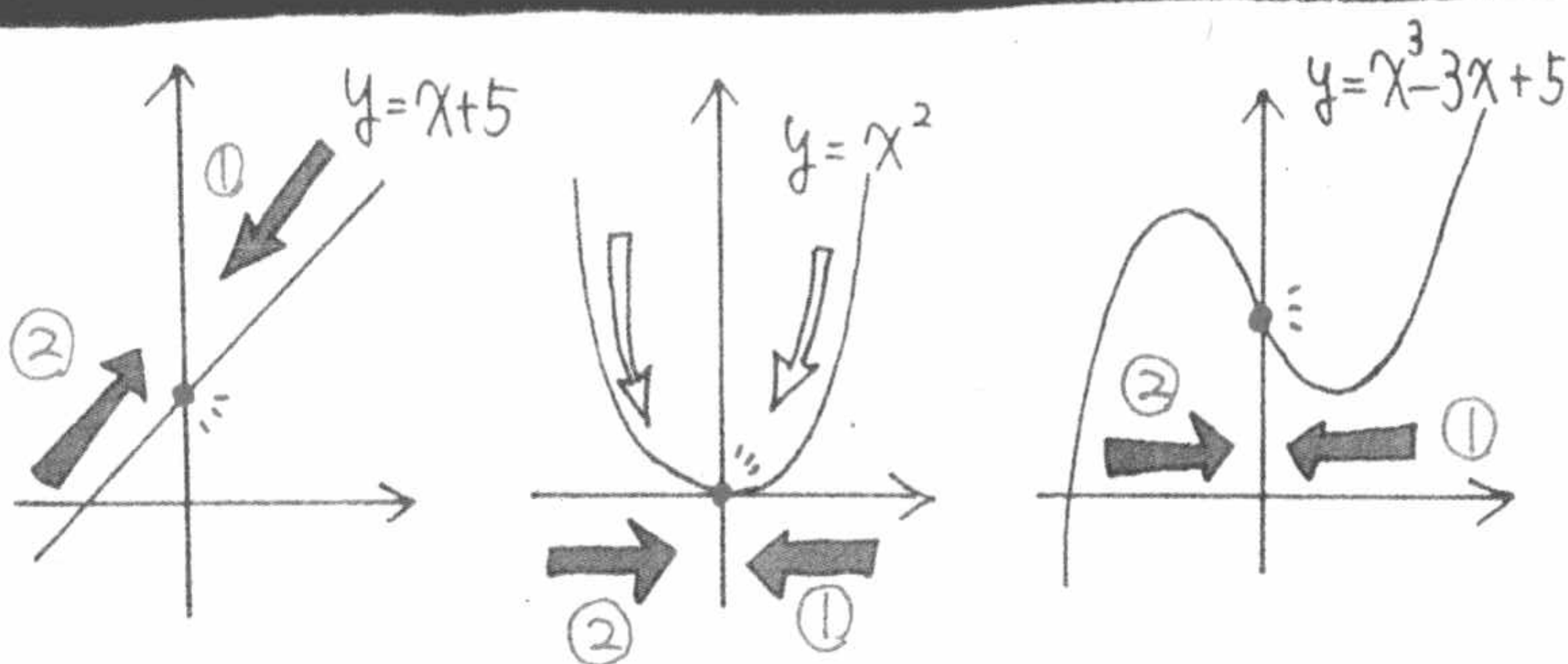
图形为这样时,
是像①那样接近,
是像②那样接近,
这是个大问题。

正相反呐。



①的话, y 就是 $+\infty$
(正无穷大);
②的话, 就是 $-\infty$
(负无穷大)。

但如果是常见的函数图形……



无论从①和②哪方接近, 最终到达的位置都是一样的, 也就是 $x = 0$ 时的点。

只需将 $x = 0$ 代入, 就能得到结果。



17 正无穷大和负无穷大



正如你在函数图形上看到的，在 $f(x) = \frac{1}{x}$ 中， x 从正向接近和从负向接近结果不同。但是简单地写成 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 是无法弄清到底是从哪方接近的。

因此，我们要引入新的书写方式。从右接近加上正号（+），从左接近则加负号（-）。

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x}$$

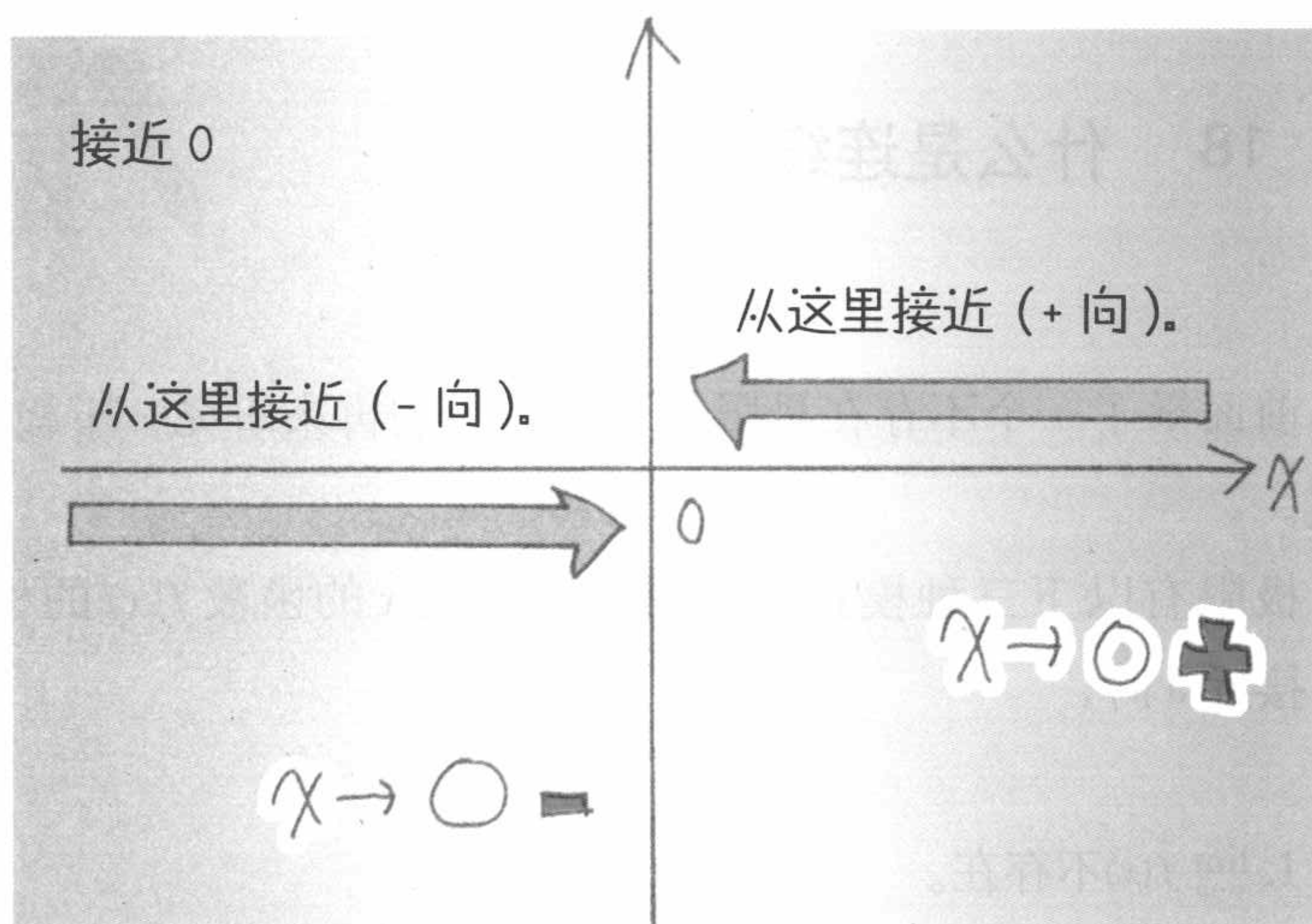
前者是正无穷大（ $+\infty$ ），后者是负无穷大（ $-\infty$ ）。像这样，当从两侧接近的结果不同时，不存在极限。

相反，从两侧接近的结果相等时，存在极限。

我们已经讨论过 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，那么对于 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $x = 0$ 时，极是否存在极限？

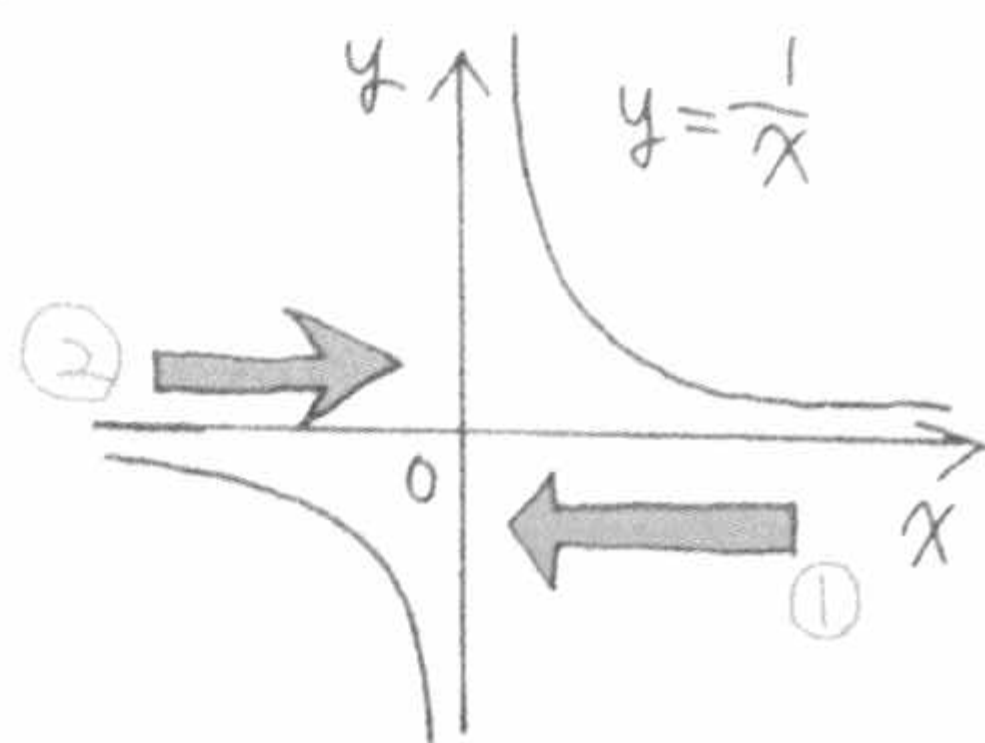
这个算式存在极限，无论从左接近还是从右接近都趋向正无穷大。

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



例 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \dots$

\Rightarrow 不存在

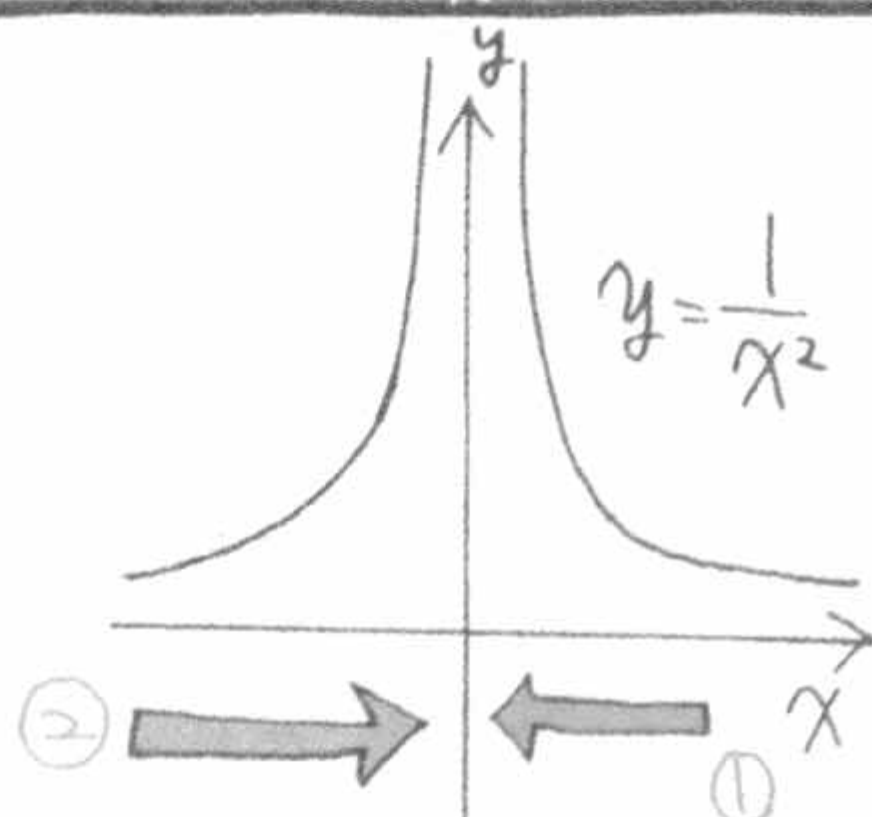


- ① $x \rightarrow 0^+$ 是 $+\infty$
- ② $x \rightarrow 0^-$ 是 $-\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不存在极值。

例 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow +\infty$



- ① $x \rightarrow 0^+$ 是 $+\infty$
- ② $x \rightarrow 0^-$ 是 $+\infty$
- 都是 $+\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ 是 $+\infty$



18 什么是连续性



前面举了一个不存在极限的例子，我们再来研究一下极限的模式。

极限有以下三种模式。假设求自变量 x 的函数 $f(x)$ 的极限，当 x 接近 a 时，

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在。
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，但不是 $f(a)$ 。
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，是 $f(a)$ 。

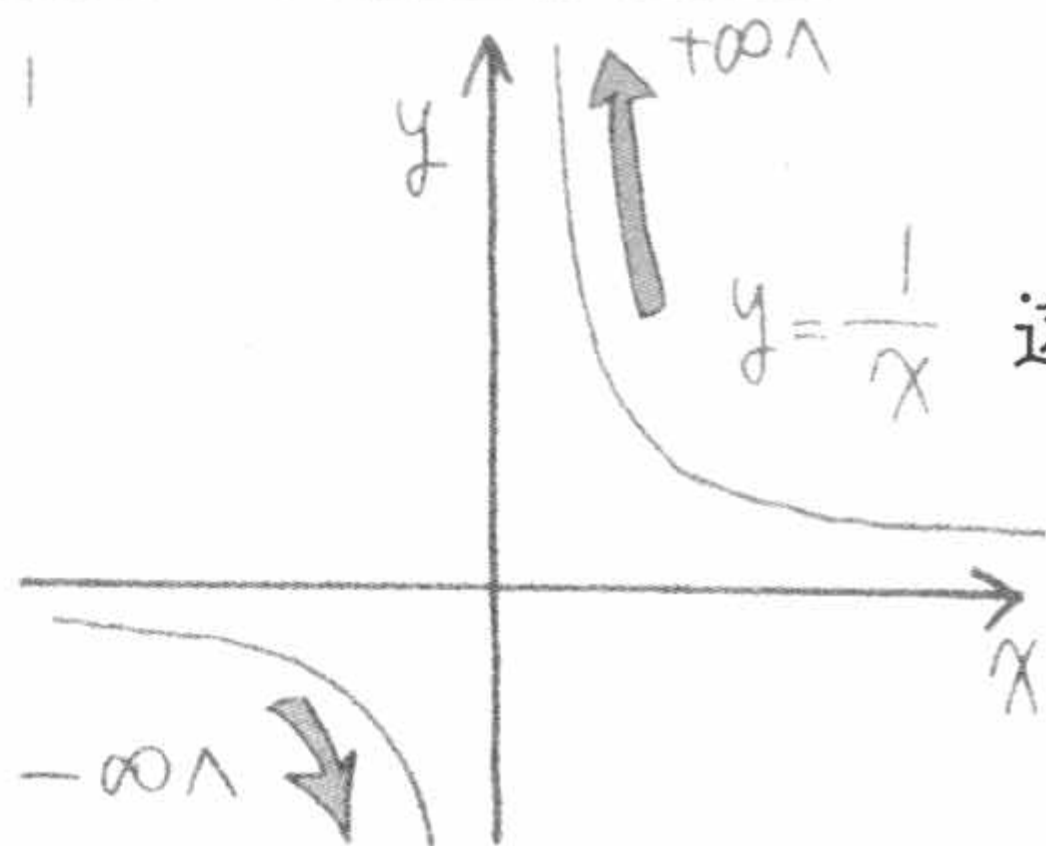
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 的情况属于第一种模式。

第二种模式则是例题 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ 的情况。在 $x = 1$ 时，分母为 0，此时极限不存在（无相应定义）。

第三种模式很常见。我们会使用特定语言描述适合这个模式的函数。如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，且其值为 $f(a)$ ，则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 点具有连续性。

看一下图形就会一目了然。

模式 1



这个出现好多次了。

都看腻了。

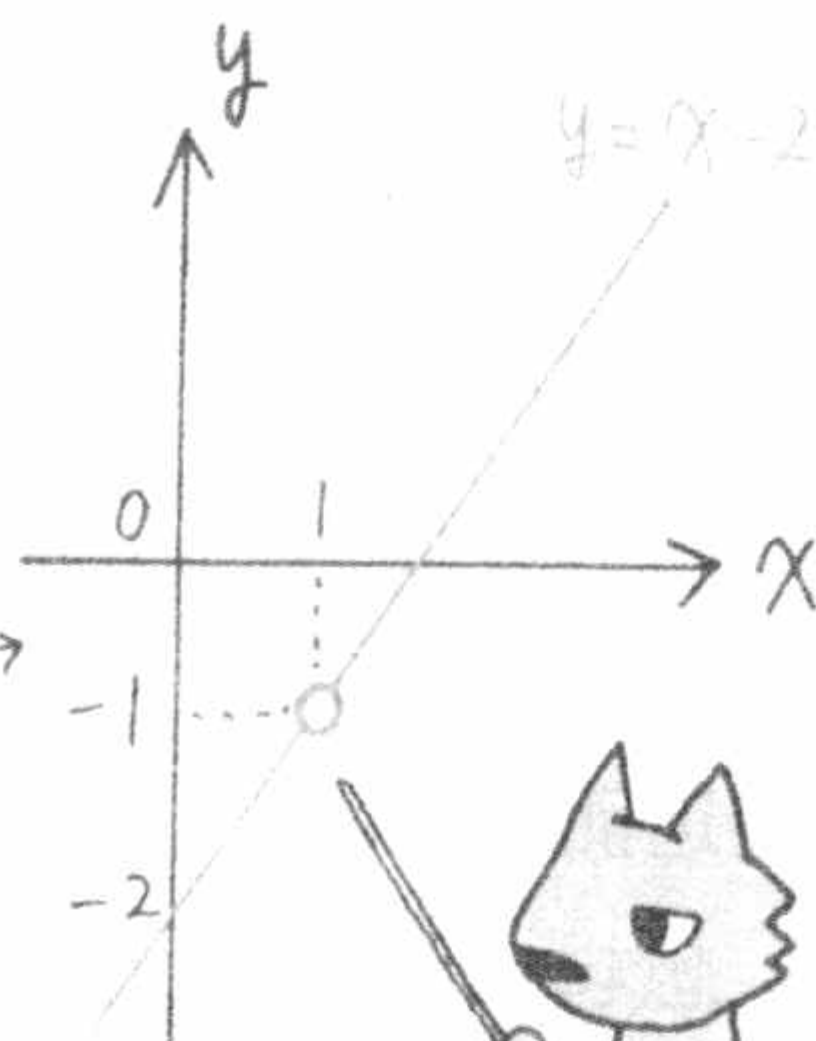


模式 2

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \quad \text{因式分解就是} \quad \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$$y = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$\begin{cases} x=1 \text{ 的时候, 不存在这样的 } y \\ x \neq 1 \text{ 的时候, } y = x-2 \end{cases}$



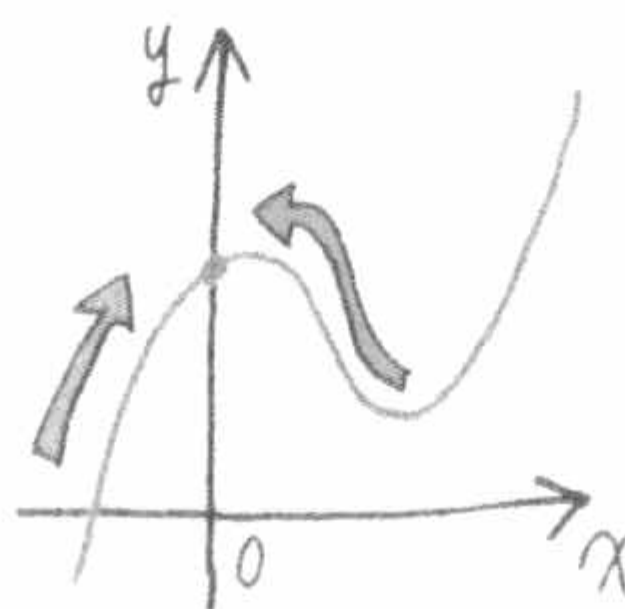
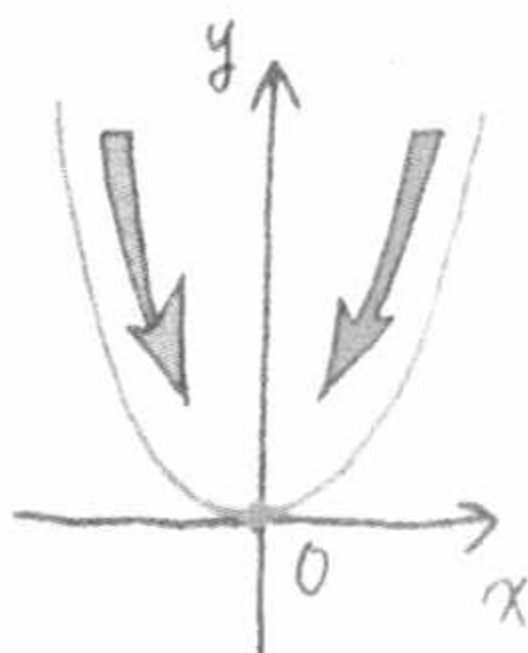
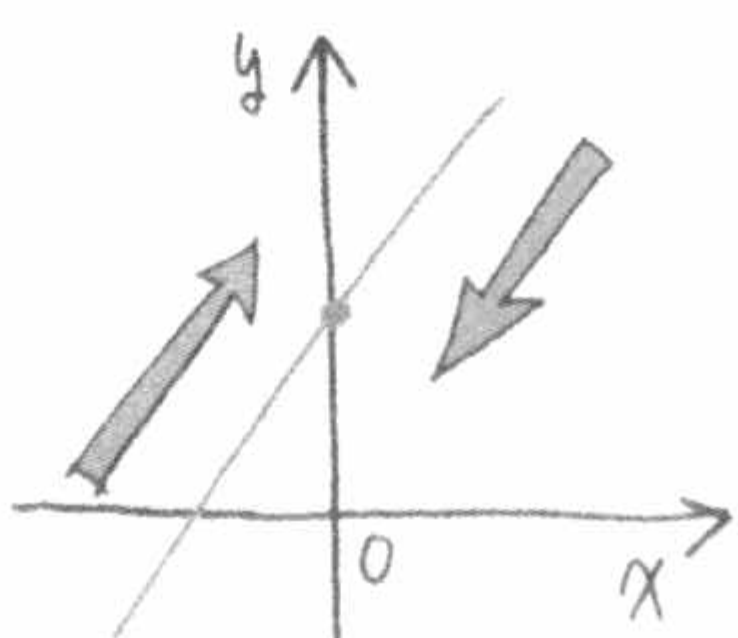
画成图就是这样。

虽然 $x = 1$ 时 y 值不存在,

但 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$ 为 -1 。

这里。

模式 3 其他的常见图形



19 开始计算斜率



前面谈了一下极限的问题。你还记得我们为什么要谈极限吗？

前面说过，导数是求函数斜率的工具。

斜率是什么？一次函数的斜率不言而喻。二次以上函数的图形是曲线，曲线的斜率是什么？此时我们可以考虑切线的斜率。那切线的斜率该如何计算呢？

斜率原本是“纵向长度差 ÷ 横向长度差”，但是曲线图形的切线仅与曲线上的一点相连，那么纵向长度差是什么，横向长度差又是什么？

由此人们产生了这样的设想——适当选取两点，并使它们逐渐接近，那么它们最终会成为一点。为了实现这一设想，极限概念应运而生。

想起来了么？

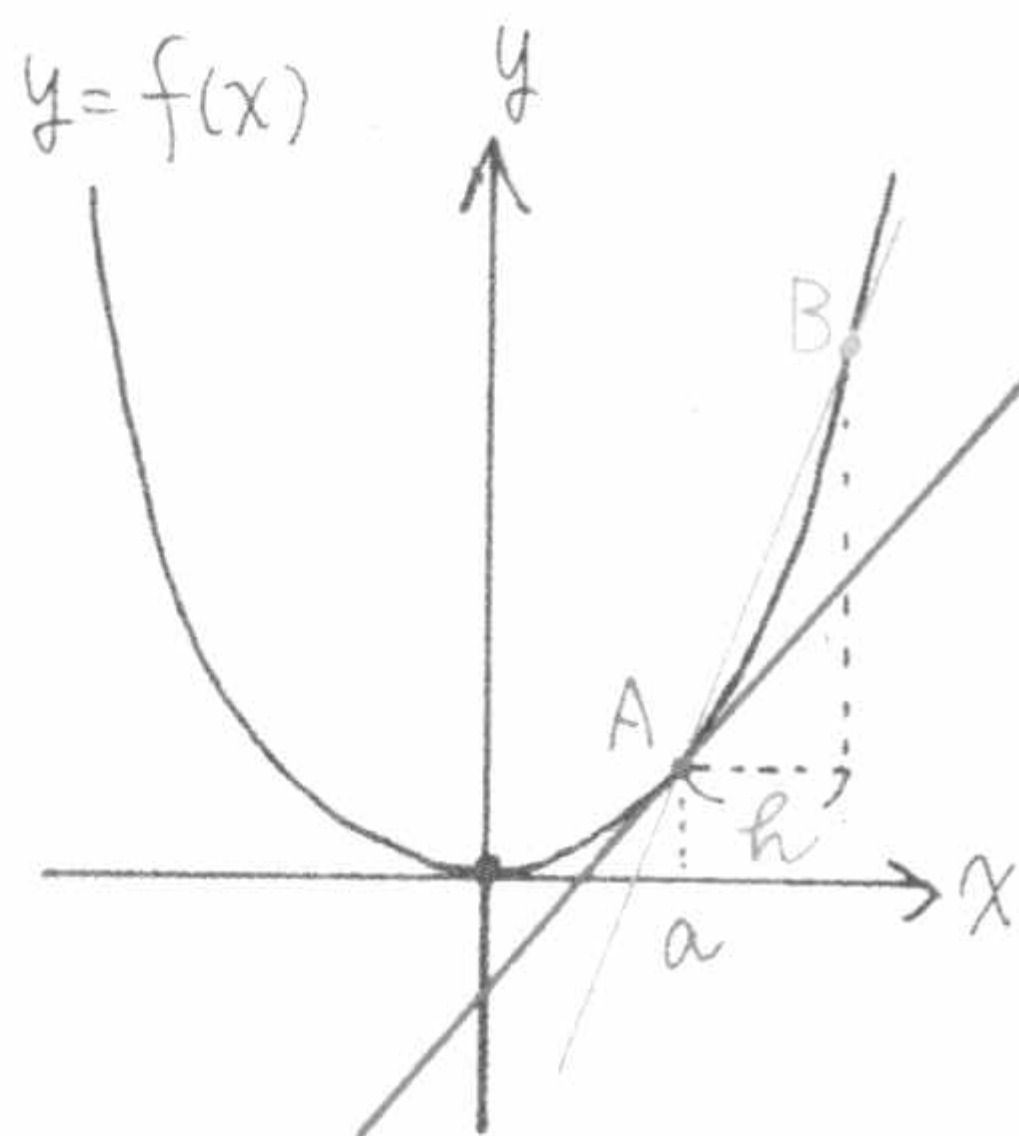
那么我们就从下一页开始讲讲斜率的具体计算方法。现在，进入正题了。

什么？你都忘了吗？

为什么要讲极限呢？

哦。

那么我们回到导数上来吧。



导数表示“瞬间的变化”，从图形上看就是某点的趋势，即斜率。

例如在考虑点A的斜率时

取适当的点B，则AB的斜率为 $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ，当h无限接近0

时，就得到点A的切线斜率。

数学就是这样。

好麻烦呀！

也就是说，是为了说明导数才有斜率，为了说明斜率才有了极限，是吧？



20 “滑动着”求导



好了，我们接着讲。

假设我们要求函数 $f(x)$ 图形上点A的斜率。设点A的坐标为 $(a, f(a))$ 。

就像我反复强调的那样，只有一点是无法求斜率的（无法取纵向长度差和横向长度差），因此我们要在附近再取一点B。假设点B比点A的 x 坐标值略大， x 坐标值的差为 h ，则B点坐标为 $(a+h, f(a+h))$ 。

我们来求一下AB的斜率。斜率为“纵向长度差÷横向长度差”，纵向长度差为 $f(a+h) - f(a)$ ，横向差为 h 。

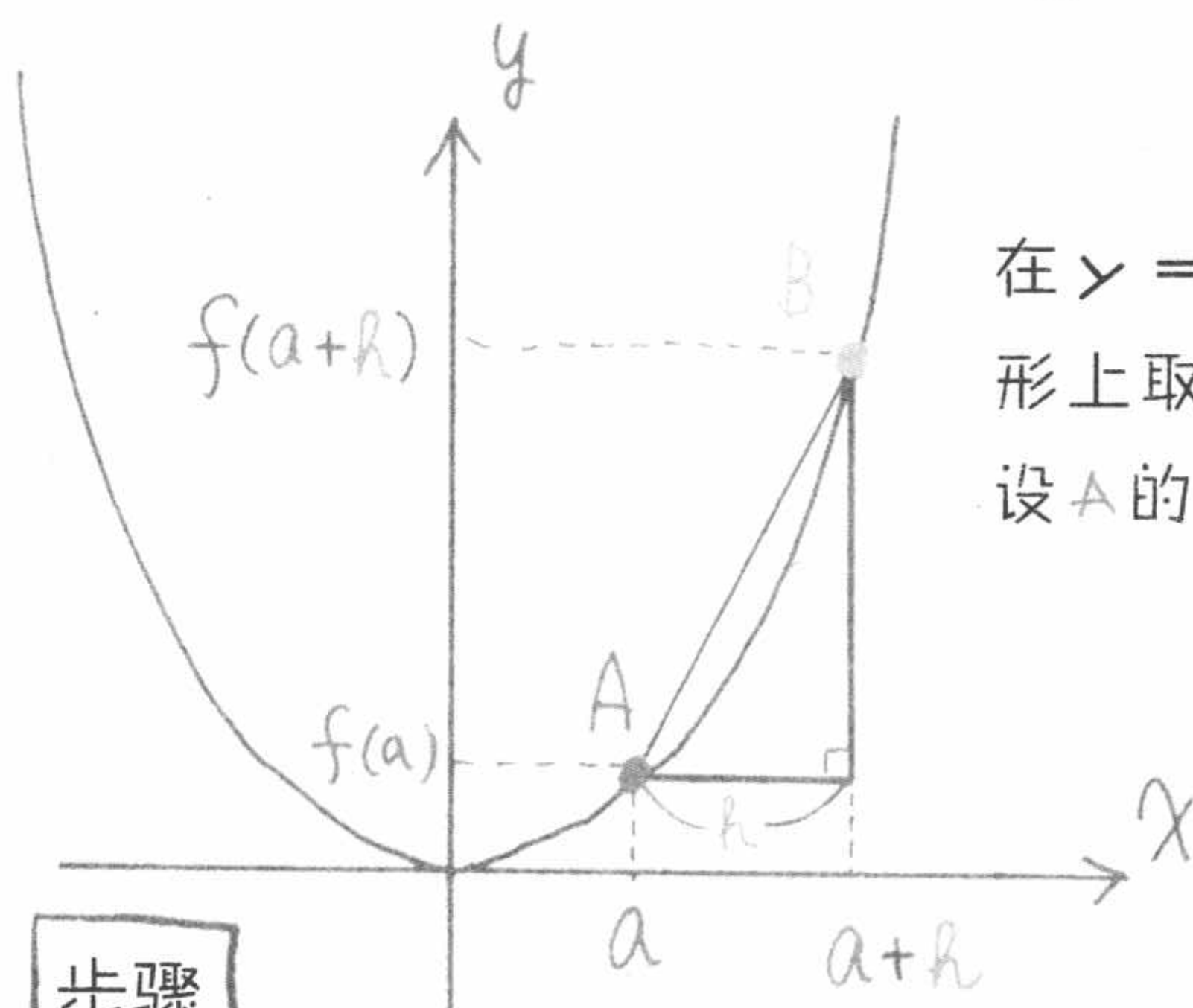
$$\text{AB 的斜率} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

现在想求的是点A的斜率。如何将AB的斜率与点A的斜率联系起来呢？我们让点B沿曲线向点A滑动，即让点B接近点A，最终两点重合，此时AB的斜率就变成A点的斜率了。

可是，如果点A和点B重合， h 就为0了，斜率算式的分母为零，这样不行呀。

别忘了，我们不是为此而引入了极限吗？

是呀， h 不断接近0，则……



在 $y = f(x)$ 函数图形上取适当一点 A, 设 A 的 x 轴坐标为 a .

步骤

① 将点 A 横向平移 $+h$, 在 $a+h$ 处做垂直于 x 轴的直线, 使其与曲线相交, 交点为点 B.

② 点 A 的坐标为 $(x, y) = (a, f(a))$

点 B 的坐标为 $(x, y) = (a+h, f(a+h))$

③ 直线 AB 的斜率为 $\frac{\text{纵向长度差}}{\text{横向长度差}}$

也就是 $\frac{\text{点 B 的高度} - \text{点 A 的高度}}{h}$

从而得到 $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

④ 使 h 不断缩小, 接近 0, 则……

根据上面的分析，

$$\text{点 A 的斜率} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

如此就求得了点 A 的斜率。啪啪啪（鼓掌）。

这就是导数。

准确来说，上面的算式应叫 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的导数。

之前已经说过，点 A 不是 $f(x)$ 上某个特殊的点，而是任意一点。也就是说，无论取 $f(x)$ 上的哪个点都没问题。尝试将 a 替换为 x ，则得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

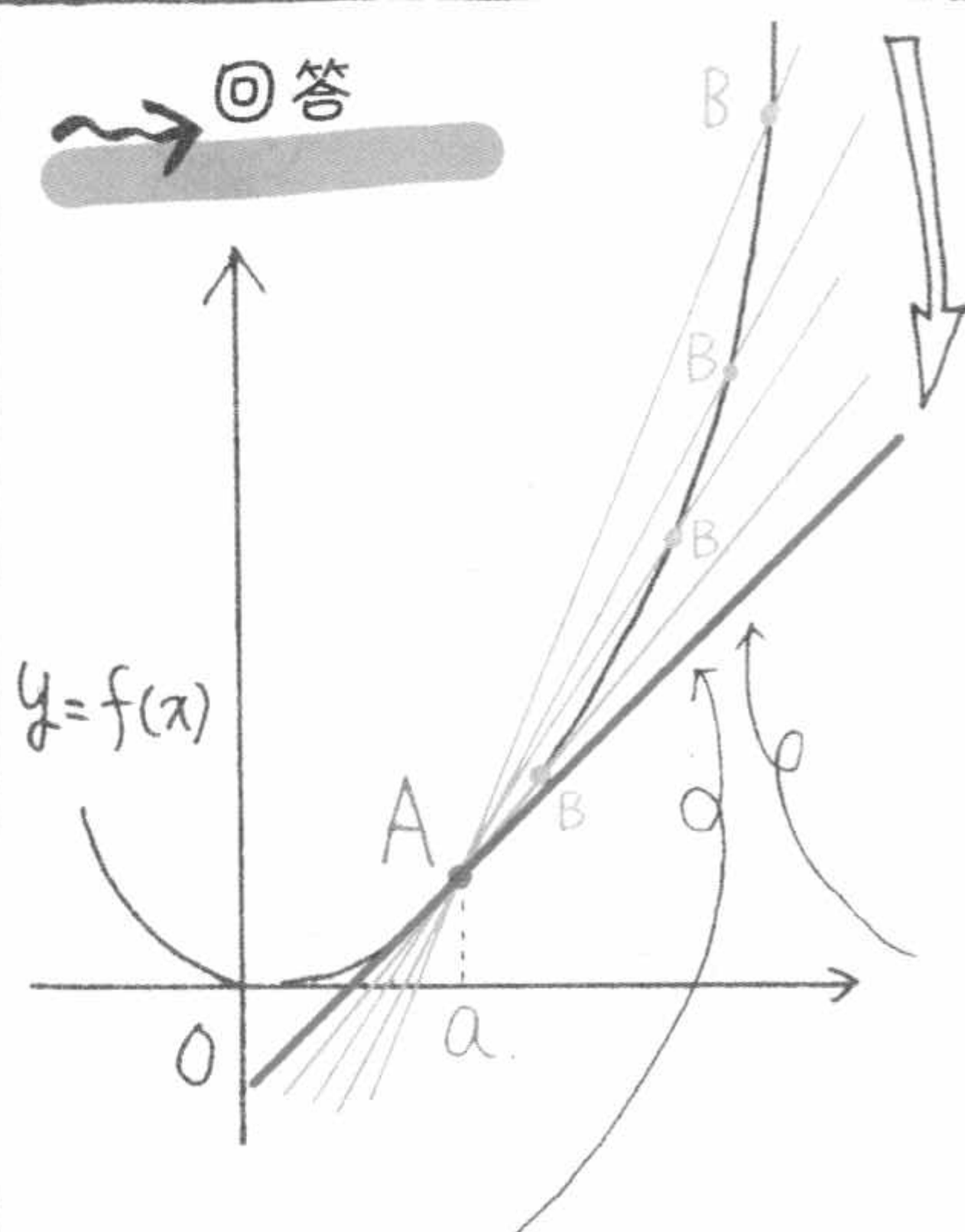
这就是 $f(x)$ 的求导公式。

让我们来使用一下这个公式，算算 $f(x) = x^2$ 在点 A (2, 4) 处的斜率。将 A 点坐标代入上式，则

$$\begin{aligned} \text{斜率} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

巧妙地约掉 h 是解题的关键（记住 h 是不会等于 0 的）。最后得到答案是 4。也就是说，点 A (2, 4) 处的斜率为 4。

→ 回答



点 B 不断接近点 A，结果就出现了与点 A 相连的切线，确定了 $f(x)$ 在点 A 的斜率。

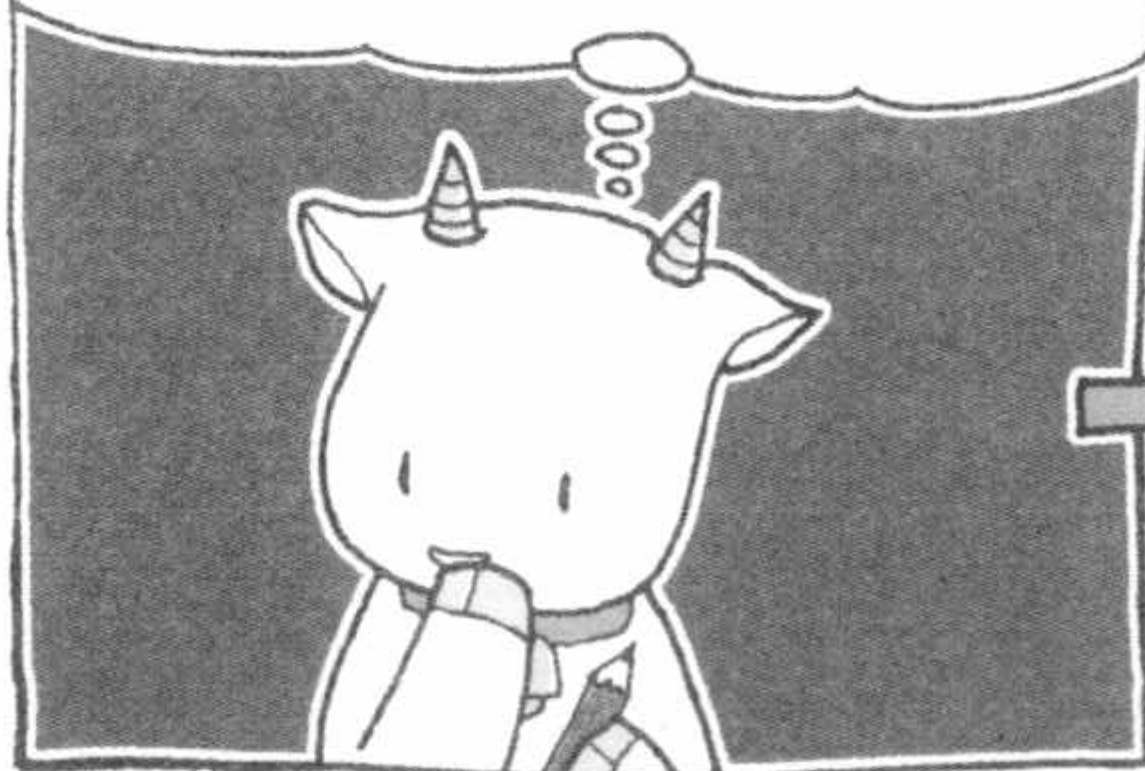
也就是说，这里的斜率是

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

这里的 a 意思是表示 “ $x = a$ ” 时的斜率……

那么将上述算式一般化，则 $y = f(x)$ 的斜率可表示为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



噢，这不就是公式吗？



21 求某一点斜率的意义



我们已经知道了求某点斜率的方法，那么使用该方法可以做什么呢？

好不容易找到了一个便利的工具，现在好想知道该如何使用。

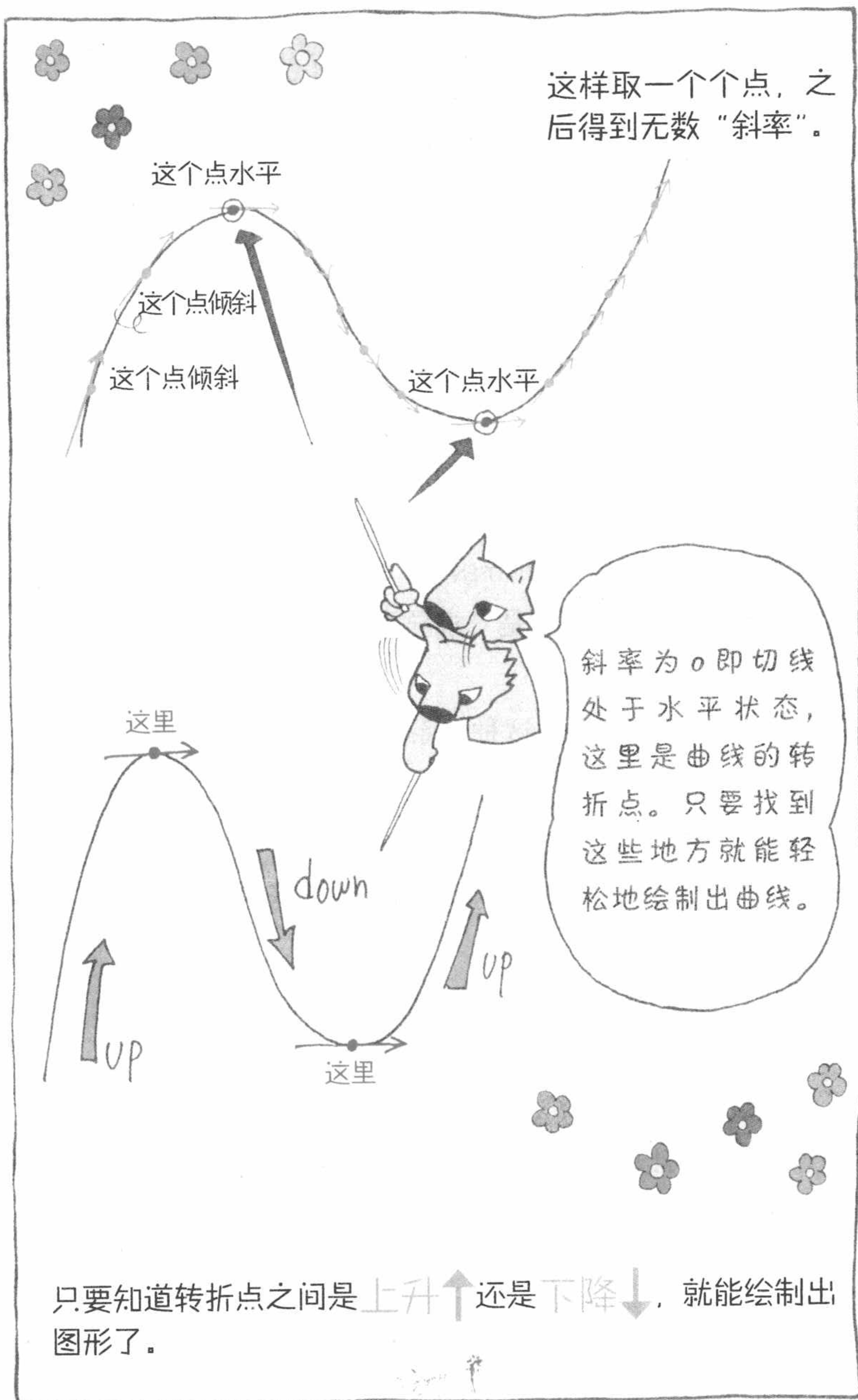
在导数的众多用途中，使用频率最高的是绘制切线和图形。

使用导数绘制切线非常方便。用导数可以求斜率，知道斜率，再知道该点的坐标，马上就能写出切线的方程。

运用导数还能绘制出曲线的大致形状。通常来说，没有电脑和专业人士的帮助很难精确绘制出曲线的图形。但使用导数可以求出曲线发生转折的极限值点和弯曲状态发生变化的拐点。

例如，假设在图形上取适当两点，一点的斜率为正，另一点的斜率为负。如果该曲线是流畅的，那么它们中间必然会有斜率为0的地方。

也就是说，如果能求导找到斜率为0的点，就能大致绘制出图形形状。这是使用导数最大的优点。





22 什么是导函数



前面我们写出了函数 $f(x)$ 的求导公式。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

该算式叫做函数 $f(x)$ 的导函数。

也就是说，“求导”就是“求导函数”。

函数是什么意思？

函数是一种关系，在这种关系中，某一个变量的任意一个值都对应某一固定的值。

$f(x)$ 中 x 为自变量。 f 很常见，它是“function（函数）”的第一个字母。函有匣子之意，意思是说将 x 放在 f 这个匣子里，就能进行计算并得到答案。

因此，对 $f(x)$ 求导得到的导函数也是函数。也就是说，代入变量 x 的值就能得到相应的斜率，非常方便。

导函数通常表示为 $f'(x)$ 。在 f 后面加上“'”，读做“ f 撇 x ”。

导函数也可以求导，得到的是导函数的导函数。此时因为是二次求导，所以写成 $f''(x)$ 。上撇号会根据求导的次数添加。

$y=f(x)$ 的斜率为 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

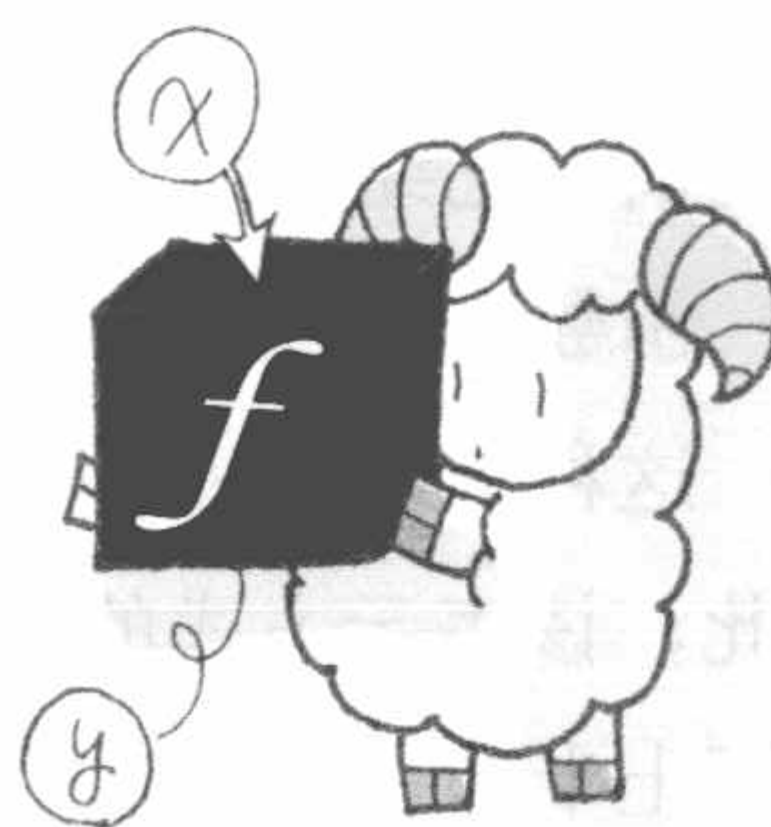
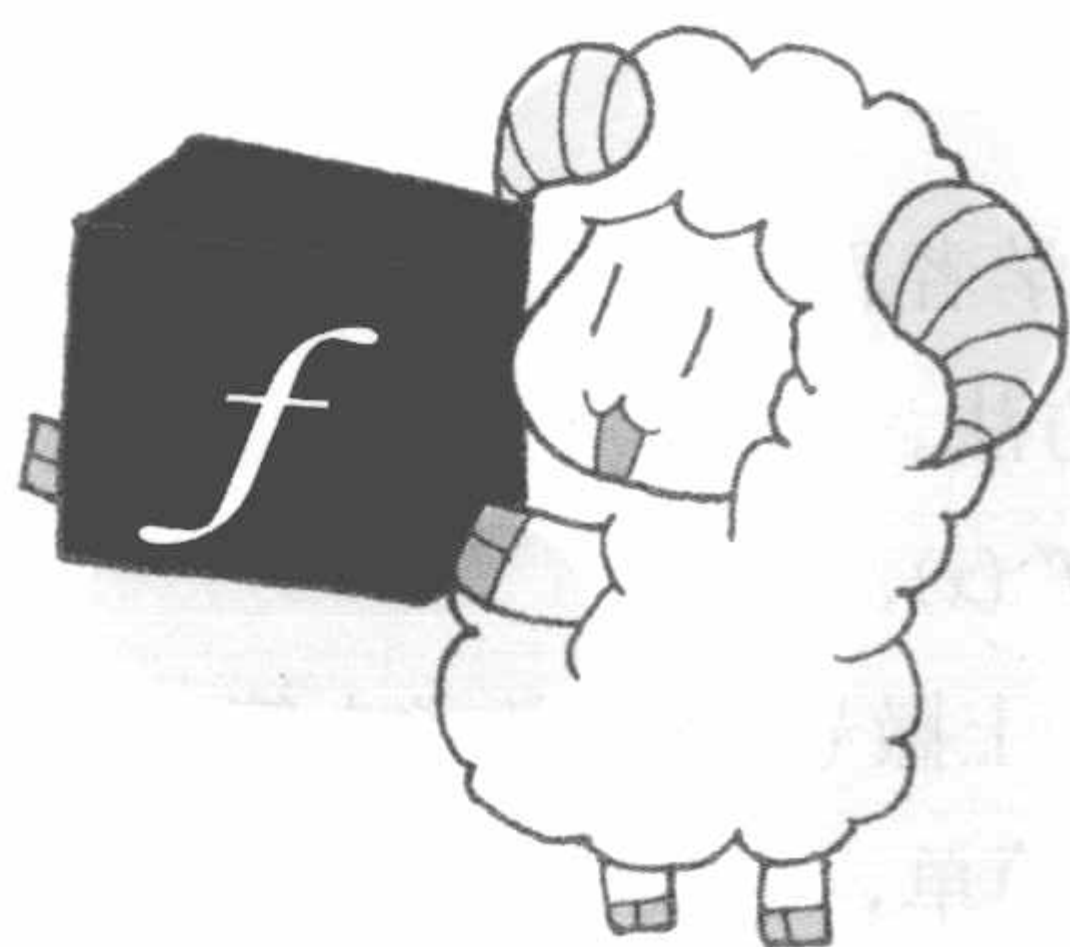
该算式简写为 $f'(x)$

叫做导函数。



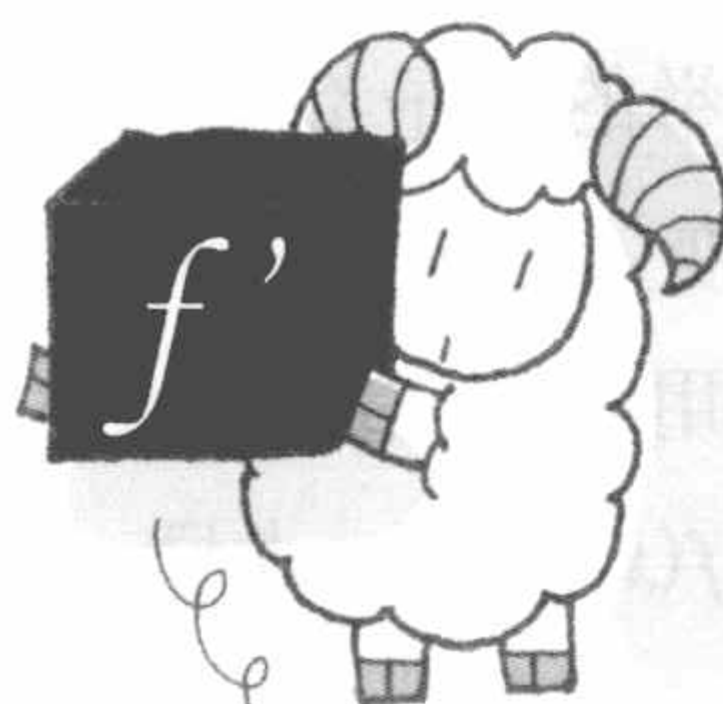
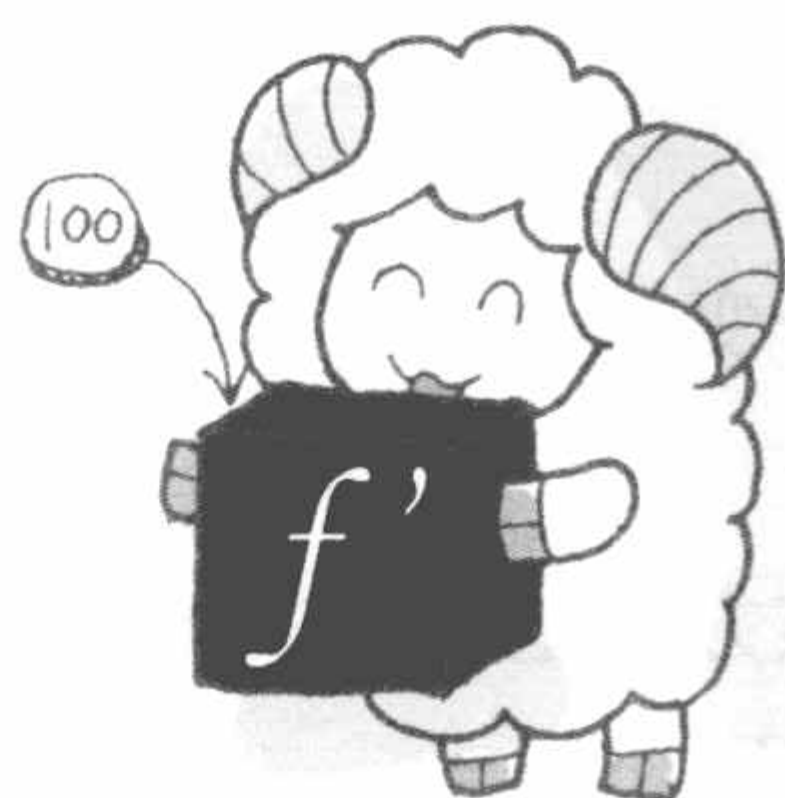
$f(x)$ 就像是把 x 放入叫做 f 的黑匣子里，

就能自动计算出结果的机器。



$f'(x)$ 则是在叫做 f' 的黑匣子里放入某数值，

便能自动计算出结果。



23 导数的表示方法



现在你可以说：“我也能求导了！”

这个世界上不是有人学会了“你好”、“再见”、“寿司”、“龙猫”，就说“我懂一些日语”吗？所以你也可以这么说。

呵呵，跑题了。再回来说导数。

好不容易能够（初步）求导了，我们让导数好好表现一下。导数的表示方式有若干种，这里我们讲一下其中最著名的两种方式。

第一种是一位叫做拉格朗日的学者思考出来的表示方法，也就是前面已经介绍过的带上撇号的方法。

函数 $y = f(x)$ 的导数写成 y' 或 $f'(x)$ ，

这种表示方法十分常见。“'”是上撇号，在导数式中简称为撇。因此，该表示方式的最大优点就是简单，形式一目了然，书写也用不上半秒钟，成为了一种主要的使用方法。

但实际上，这种表示方式存在很大的问题。

利用上撇号的表达式虽然使它一看便知是导函数，但却无法表示出是关于什么求导。

之前本书举的例子都是以 x 为唯一变量的函数，但世界上有很多存在多个变量的函数。

这就需要用到第二种表示方法。该方法是数学家莱布尼兹发明的，对函数 $f(x)$ 关于 x 求导，可表示为：

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

这些都表示“对 y 关于 x 求导”，它的读法是先读分子再读分母，例如“ dy 、 dx ”。

这里的 d 是“Derivative（导数）”的第一个字母。该方法表示对分子中的函数求关于分母中的变量的导数。与上撇号不同，它明确表示出关于什么求导，只是书写比较麻烦。

实际应用时，无论用哪种写法都可以，无需执著于某一种，可根据自己的使用习惯选用。

24 导数的其他表示方法



继续讲述前面莱布尼兹发明的导函数表示方法。

拉格朗日只是加上上撇号而已，但莱布尼兹却采用了分数的方式。说起来，对什么进行求导才是关键，那为什么非要采用分数方式表示呢？

这自然有其意义所在。

还记得导数是什么吗？是求斜率的方法。

明白了吧， $\frac{dy}{dx}$ 就是斜率——纵向差除以横向差。

这不仅用于导数中。数学中使用 Δ 表示微小的量， Δ 是希腊语，即 d 。例如， x 轴上的微小增量记为 Δx ， y 轴上的微小增量记为 Δy 。假设函数 $y = f(x)$ ，在该函数上取适当一点 A ，并沿函数图形在 A 点上方取另一点 B ，求 AB 的斜率，则该斜率可表示为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

求导的话要使点 B 无限接近点 A ，因此得到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

当接近极限时， Δ 被记为 d 。

莱布尼兹的表示方法后面我们会进一步加以拓展。

将 $\frac{dy}{dx}$ 分解，可以得到 $\frac{d}{dx}$ 和 y 。这样能看出 $\frac{d}{dx}$ 和 y 是相乘关系。

与 $\frac{d}{dx}$ 相乘即表示求关于 x 的导数。用数学术语来说， $\frac{d}{dx}$ 就是求导的计算符号。

按照拉格朗日的表示方法，二阶求导要加两个上撇号，而按照莱布尼兹的表示方法进行二阶求导则表示为

$$\left(\frac{d}{dx}\right) \times \left(\frac{d}{dx}\right) \times y = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

分子上加平方的位置是关键。

你可能会觉得这好麻烦。

其实该表达式非常方便，在后面“合成函数求导”一节中，莱布尼兹的表示方式会再次亮相。敬请期待。

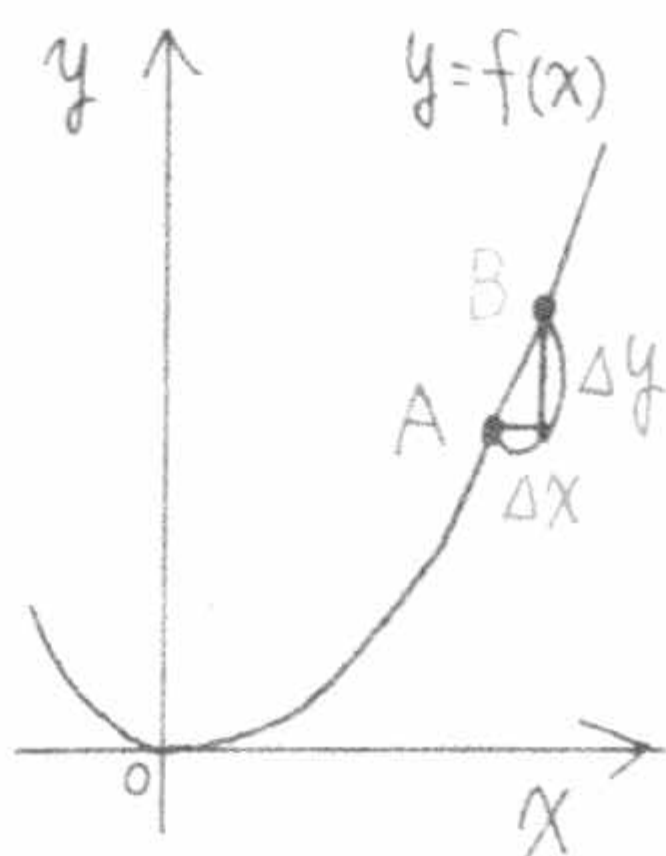
$\frac{d}{dx}$ 是什么?

d 是“导数”英文的首字母，导数是微积分学的重要概念。



伟大的先人将它从欧洲引入，介绍给我们。

要理解这个词，还要考虑一下斜率。



非常小的范围用 Δ 表示。

Δ 用这个符号。

在 $y = f(x)$ 上取点 A 和点 B，两点的距离差为 $\Delta x, \Delta y$ ，

则 AB 的斜率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

表示随着 Δx 不断变小， Δy 不断变小的程度，即接近点 A 处的斜率。

用公式表示 $y = f(x)$ ，是

$$\lim_{(\Delta x \rightarrow 0)} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{(\Delta x \rightarrow 0)} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

我们这样表示

$\Delta \rightarrow 0$ 时变为 d。



导数即求 $y = f(x)$ 的斜率，导数有若干种表示方法。

稍等。

函数

$$y = f(x)$$

求导

导函数

$$f'(x)$$

$$y'$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

是一样的。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

与之前讲过的是否相同？

问得好。

啊——
好难理解呀。

书写方法有很多种，都表示求导。

$$\frac{dy}{dx}$$

||

$$\left(\frac{d}{dx} \right) y$$

补充一下，
 $\frac{dy}{dx}$ 还可以写成这样。

$$\left(\frac{d}{dx} \right)$$

这个东西是一个整体，是“求关于 x 的导数”的命令（专业术语不称 $\frac{d}{dx}$ 为命令，而是将其称为求导计算。）

25 做做习题



下面我们做些习题练习一下。

例题 1: 求 $f(x) = x^2 - 2$ 在点 A (2, 2) 处的斜率

想一想求导公式。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

代入 A 点的值。

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(2+h)^2 - 2\} - \{2^2 - 2\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 4h + h^2 - 2}{h} = 4 \end{aligned}$$

答案为 4。

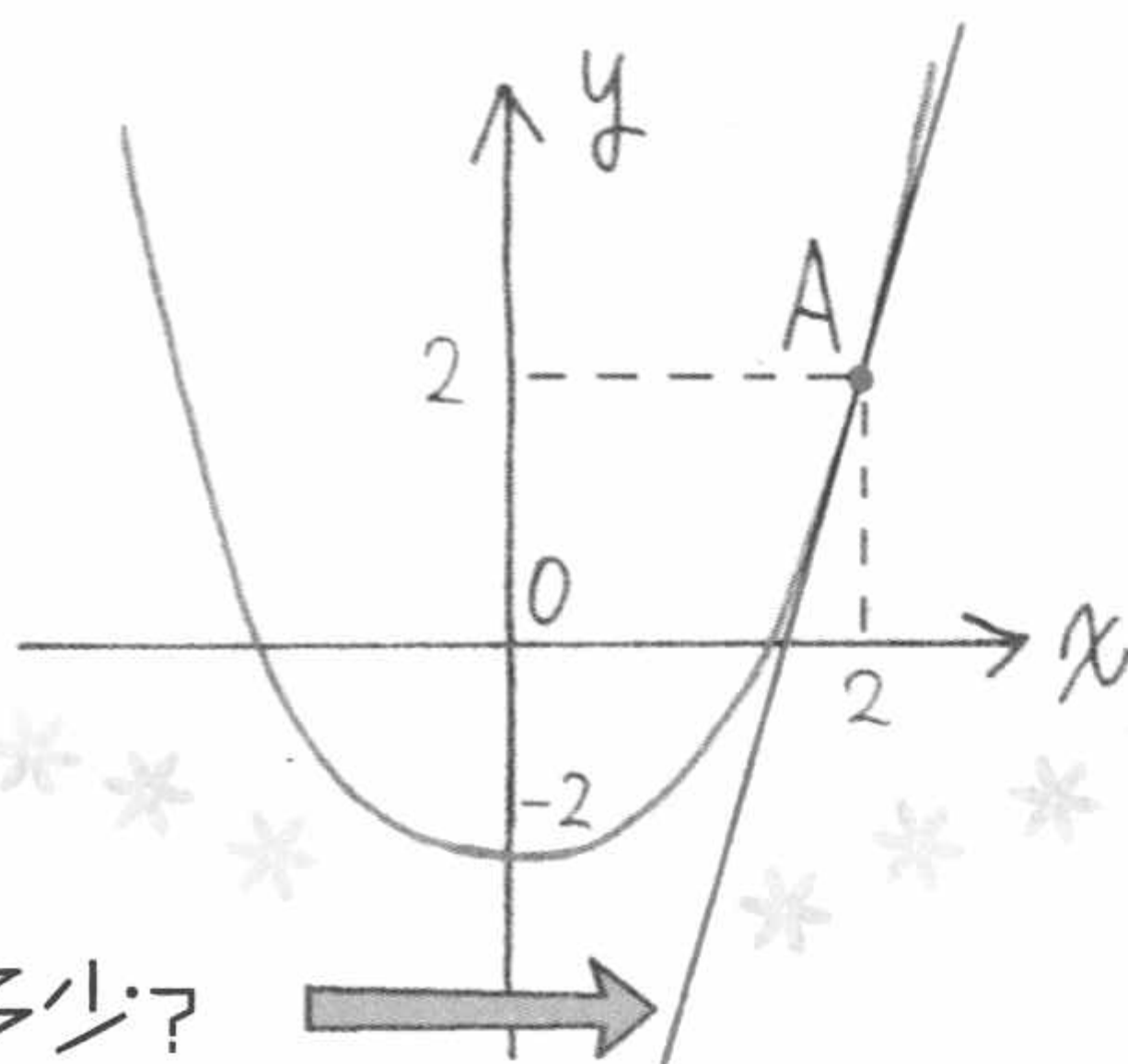
例题 2: 求 $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ 在点 A (1, -2) 处的斜率。

做法相同。

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(1+h)^3 - (1+h)^2 - 2\} - \{1^3 - 1^2 - 2\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(1+3h+3h^2+h^3) - (1+2h+h^2) - 2\} + 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 2h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 2h + 1) = 1 \end{aligned}$$

例题 1

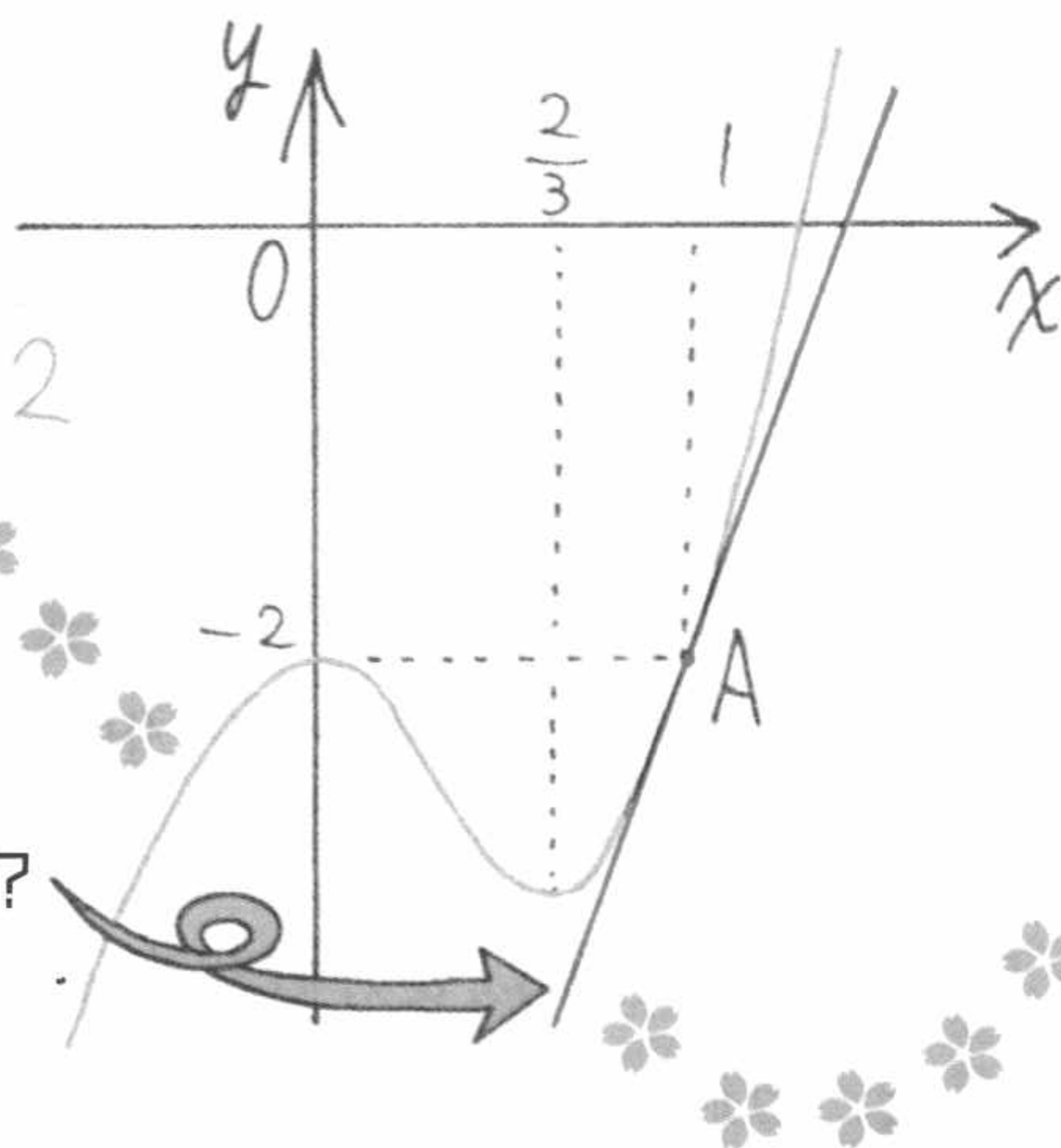
$$f(x) = x^2 - 2$$



斜率为多少?

例题 2

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2$$



斜率为多少?

计算这种问题时，导函数非常方便。

不用
担心!

一个一个代入
lim, 好麻烦呀。

转下一期!
不对, 是
下一页!

26 导函数的简单求法



前一页我们练习了两个例题。

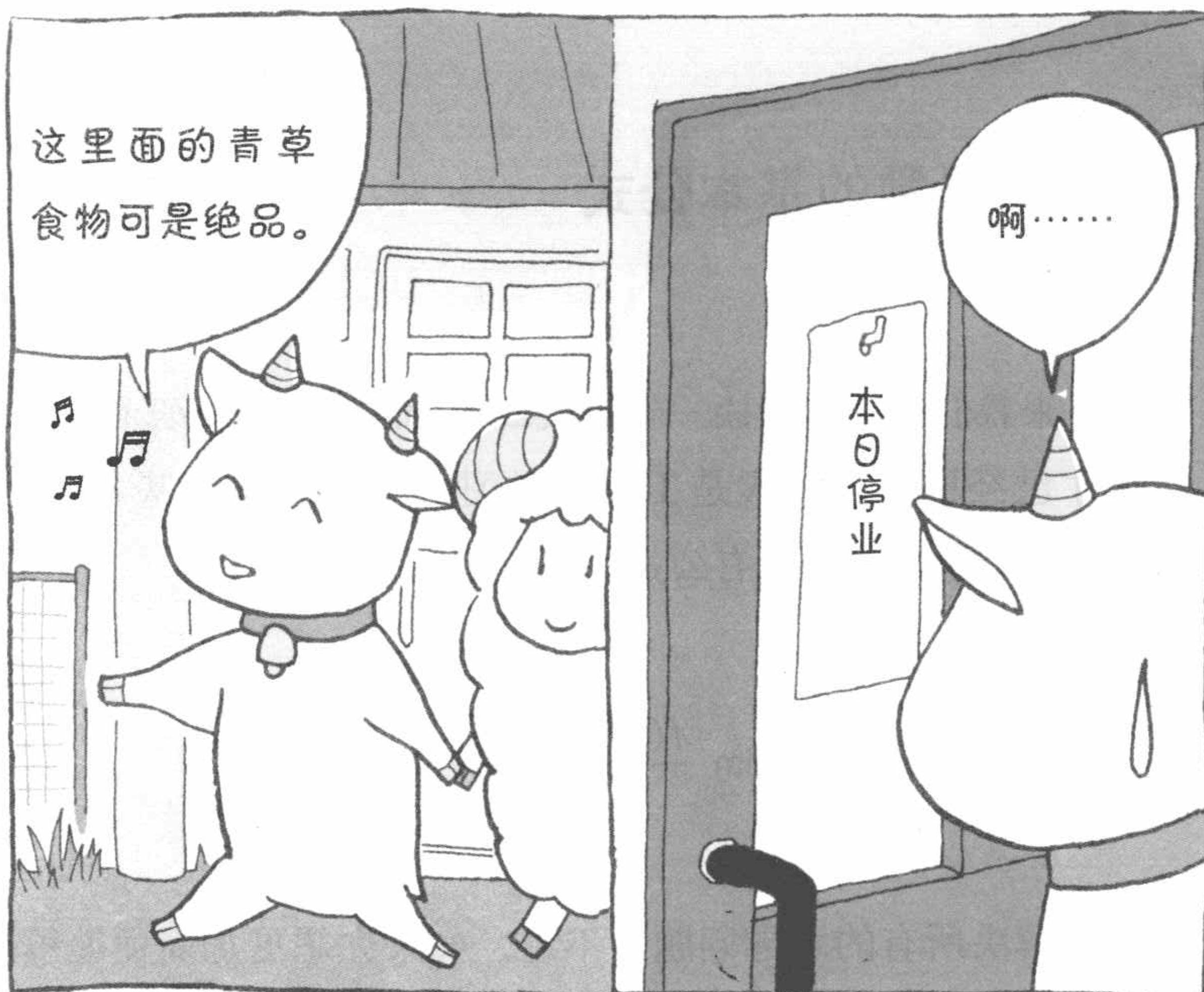
在函数上取适当的点，可以求得此处的斜率。但是这样的话，就必须逐一计算各点的导数，很麻烦。要是能对曲线整体“简单地”求导就好了。

数学中有公式这种工具，使用它只要代入数字就能得到答案。

做任何工作都应事先准备好各种工具以提高效率。就像修车需要螺丝刀和扳手一样，要高效熟练地运算导数，也要事先准备好工具，这样才更便于计算。下面我们就来介绍导数公式。

讲解之前希望各位了解一件事。公式虽然是方便的工具，但也有人会“公式中毒”，从一开始就死背公式。在他们看来，“对公式的理解可以暂且放在一边，只要把公式背下来套用就可以了”。有些人从中学开始就数学中毒，但这样的数学学习与驯猴无异，其结果将很悲惨。

我们是人类，所以要好好思考。虽然理解自己使用的工具会费些工夫，但遇到问题时，你会发现“了解工具”所带来的帮助远远大于你为此付出的努力。



27 导数的基本公式



接下来我们还要继续谈一下导数公式的问题，请认真看。

刚才已经讲了，公式是工具，学习导数需要 3 个基本公式。
当然之前我们也讲过，没有公式，可以用

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

它能解决所有的求导问题。不过，如果你想更加简便地解决导数问题，还是尽可能掌握运算工具为好。

下面这些都是关于 x 的求导公式。 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是关于 x 的函数。
求导的基本公式

1. $p' = 0$ (p 为常数)
2. $(px)' = p$ (p 为常数)
3. $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

只有刀能破解生化武器，而我就用这根球杆。



只使用一件工具或武器作战有些浪漫的感觉。



数学中的工具和武器就是“公式”和“定理”。



但还是要尽可能将工具和武器准备齐全。



接下来我会逐一讲解，相信你们能够理解。



不过没有必要记忆公式。

的确如此。



相反，不理解只是死记硬背就会马上忘记。



只有理解了才能更好地记忆。

28 求导最基本的工具



下面我们介绍一下最基本的工具—— $y = p, y = px$ (p 为常数) 的求导公式。

前面我们仅就曲线函数的导数加以说明，这并不是说直线函数不能求导。实际上，直线函数的求导与曲线函数思路相同，只是求导对直线函数求导意义不大或没有必要。因此，我们不予考虑。

原本导数是用来求某一点的斜率的。曲线图形不断变化，要探究某一点的斜率很难。但是对直线来说，无论选择哪一点，直线的斜率都一样。

因此无需考虑直线的导函数，直接使用导函数计算公式就可以了。

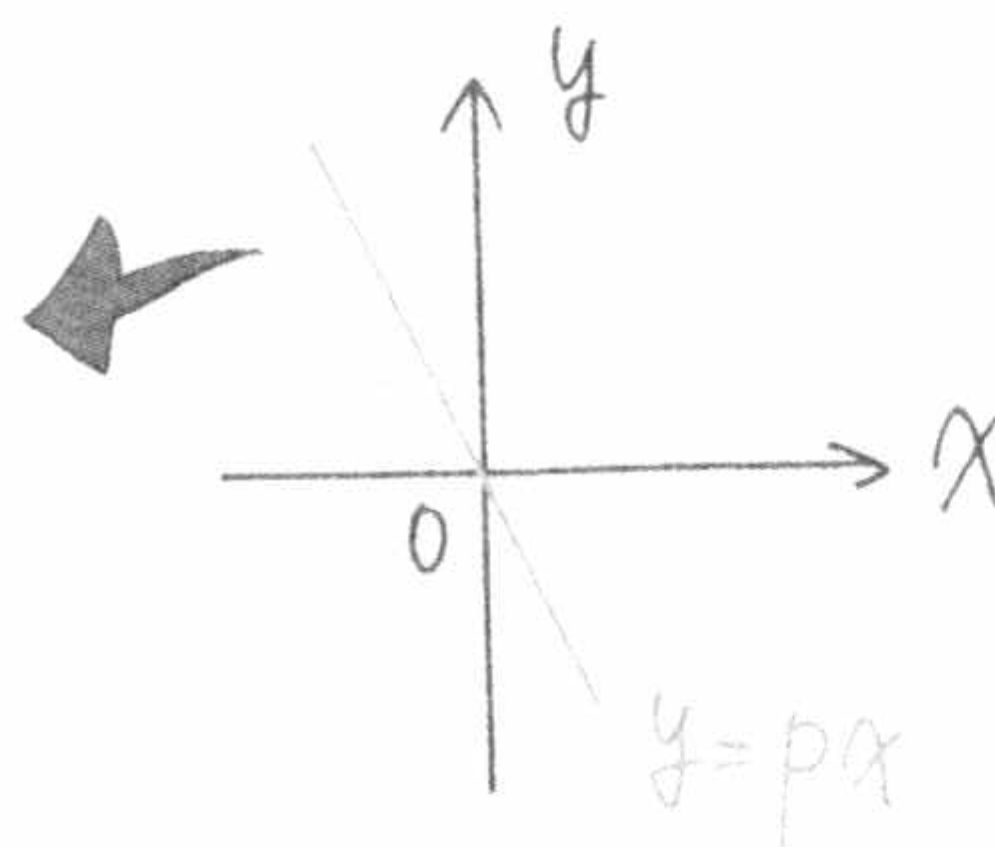
我们之所以用极限的理念求曲线上某一点的斜率，是因为无法通过在曲线上选取两点求斜率。直线任选两点就能求出其斜率，没有必要求导。

我想你已经理解了上述阐述。对以 x 为自变量的函数 $y = p, y = px$ (p 为常数) 关于 x 求导，实际就是求直线的斜率，它们原来的斜率就是 0 和 p ，因此对 $y = p$ 求导的结果为 0，对 $y = px$ 求导的结果为 p 。

$y=p$ 就像平坦的大地。斜率自然是 0。



喂，知道这道坡的斜率吗？它陡峭吗？



不知道啊——



29 函数和的求导公式



下面我们要确认一下，对两个函数的和—— $f(x) + g(x)$ ——求导，会得到 $f'(x) + g'(x)$ 。关于 x 对 $f(x)$ 求导得到

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

因此，关于 x 对 $f(x) + g(x)$ 求导，得到

$$\{f(x) + g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h}$$

整理算式，得到

$$\{f(x) + g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} + \{g(x+h) - g(x)\}}{h}$$

再次整理算式，得到

$$\{f(x) + g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

也就是

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

可能有人感觉头疼，我再总结一下，简单来说，就是“加法与求导先做哪个都可以”！

但该函数和的求导公式非常重要。没有该公式，求导就像乘坐没有车轮的汽车，无法前行。它使用起来很方便。

$$a(x+y) = ax + ay$$

这用专业术语说就是“具有线性性质”。

把工资分给 n 个人，



n 万日元

→ 统一交给一个代表。

→ 逐人分发。



1 万 1 万 1 万 1 万

不可分解的例子

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

不对！

* 正确的是
 $a^2 + b^2 + 2ab$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

不对！

乍看起来，感觉理所当然，但实际上可以分解的并不多。

嗯——写得有些复杂，实际上就是“加法可以分解”。

为什么可以分解，上面已经证明了。

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

汇总求导

分解求导

可以放心分解。



30 导数的应用工具



下面我们推导几个导数公式。有人不明白推导公式是怎么回事。你可能认为公式是给定的，应该记住。这并没错。

数学是从极少的基本法则中不断积累发展起来的学问，公式都能还原为定义或“更基本的公式”。

还原的公式还可以还原为更基本的公式，最终全部回归为定义。

定义就是“确定的事实”，无需再进行探究。（实际上对定义真实性的探求正是学问的入口。例如，对为什么负数不开根号进行探究，就引出了虚数的概念。）

导数中， $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 就是定义，任何导数公式最终都可以追溯到这个定义上来。

大家都知道“ 2×5 ”就是“2 做 5 次加法运算”，这就是乘法的定义。但即使我们知道乘法的意义也还得背乘法口诀，因为不背下来计算就会很麻烦。

导数也是一样，虽然理论上只要知道定义，就应该能解决任何关于求导的问题，但实际上并非如此。当事情太复杂时，人们会利用积累的知识，发挥智慧将其归纳成公式，同时又使智慧得到提升。

数学用品！！

刚开始只有一个简陋的武器。
公式和定理都是RPG中的武器。



用它能解决掉弱小的敌人(问题)。



用手头的武器(之前记住的公式),
我得到了新武器!



拥有大量强大的武器并熟练运用, 最终打败了大魔神。

东京大学入学考试的数学题

经过不断发展, 数学最终成为一门自然科学。



原子弹就是这么发明的。

31 使用工具的意义



推导和使用公式时都有注意事项，这就是——只可使用定义及已有公式来推导新公式。不可使用其他公式或从其他公式推导公式。

明白了吗？正因为有这一规定，我们前面才说公式都能还原为定义或更基本的公式。

认为要背公式的人可能会觉得推导公式是没有意义的。确实，考试中是不会出“推导公式”这种题的，但是推导公式是对以往知识的综合运用，对提高能力很有帮助。

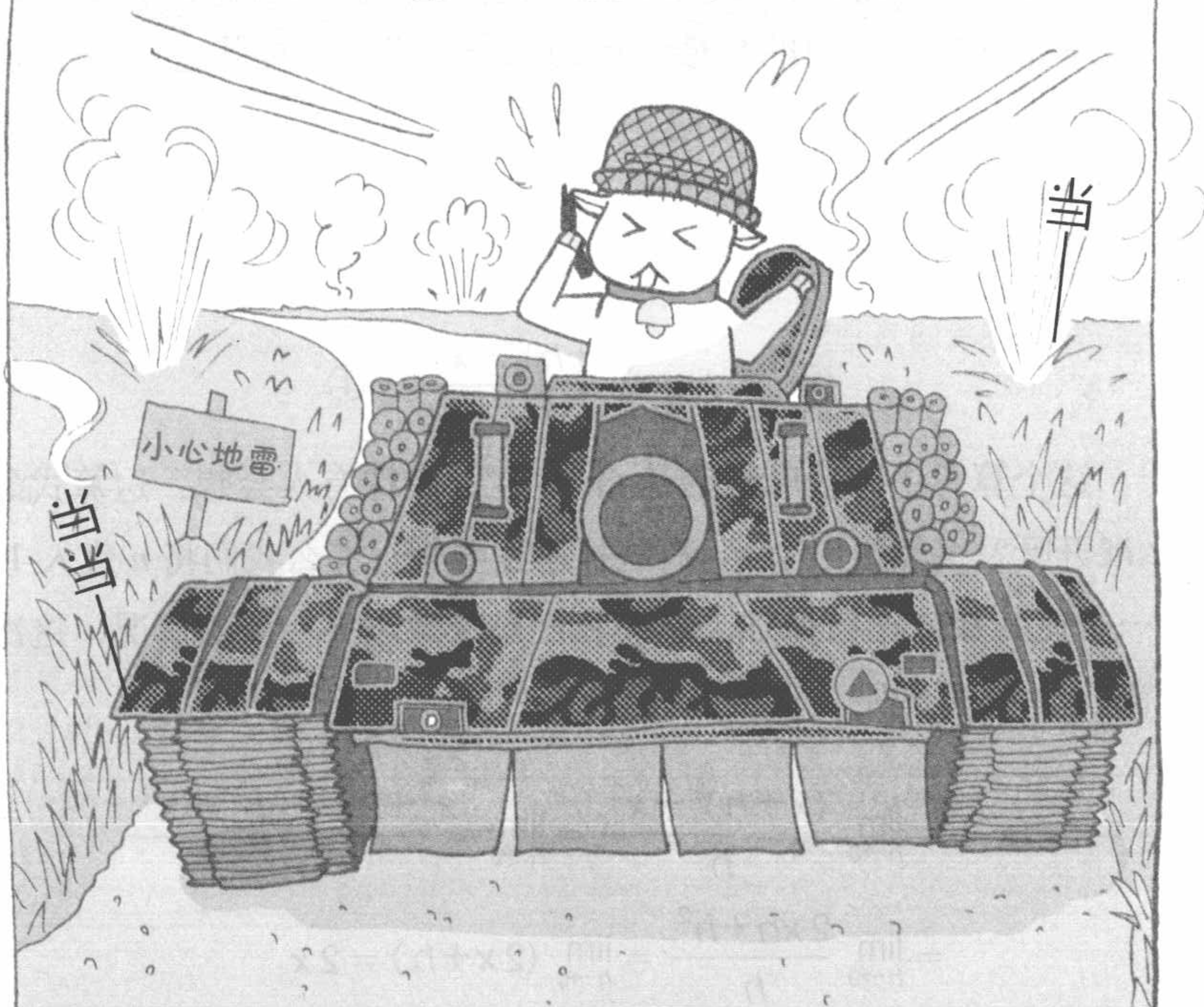
公式中蕴涵了人的智慧——“现在总结一下以后学起来更方便”。当然，“为什么在这里总结”是有其理由的。

物流也好、交通运输也好，都是为了方便人们的生活。公式也一样，每个公式都有不同的便利性，而练习推导公式则有助于更好地理解知识。

此外，人类很健忘。要想记住就要尽可能地了解来龙去脉。与记住公式本身相比，记住公式的推导方法更为重要。

队长，坦克不动了——

请叫坦克生产商来——



真了不起，不愧是前辈。



没什么，不过是履带掉了！

32 x^n 的导数



本节我们要学习的是最常用的求导公式，只要将它和 $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$ 结合使用， x 的 2 次方、3 次方…… n 次方，都能顺利地进行求导。我们做一下试试。

使用导数的基本公式来表示一下 x^n 的导数，得到

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \dots \textcircled{1}$$

这个算式中比较麻烦的是 $(x+h)^n$ 。或许有人会想：这算式怎么展开呀？突然给出个 n ，有些抓不住要领，那么我们将 n 代入 1、2……使其数值逐渐增加。之前我们已经做过 $n=1$ 的情况，这次就从 $n=2$ 开始吧，也就是计算 $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$$\begin{aligned}(x^2)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x\end{aligned}$$

下面看看 $n=3$ 的情况，即计算 $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2\end{aligned}$$

发现什么了吗？我们接着看 $n = 4$ ，计算 $(x + h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$

$$\begin{aligned}(x^4)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = 4x^3\end{aligned}$$

我们看看究竟发生了什么。

展开 $(x + h)^n$ ， x^n 项的系数为 1，所以算式①中的减法运算可以直接消掉。 $x^{n-1}h$ 项是分子分母同时除以 h 。 $x^{n-2}h^2$ 以后的各项约掉一个 h 后还会剩下 h ，因此它们会在取极限时被消掉。

关键是 $x^{n-1}h$ 项的系数。我想你已经发现了， $(x + h)$ 的 $x^{n-1}h$ 项系数为 n 。

说明这个问题要用到二项式定理，但因为需要说明的东西很多，大家只了解结论即可。二项式定理是将二项式乘方展开的公式，即表示如何展开 $(x + h)^n$ 的公式。

这就是我们这次使用的公式，那究竟是个怎样的公式呢？

$$(x + h)^n = x^n + C_1^n x^{n-1}h + C_2^n x^{n-2}h^2 + \dots + C_n^n h^n$$

又出现了新符号。 nC_k 表示“从 n 个数中挑选 k 个数的组合数”。

现在我们想知道的是 $x^{n-1}h$ 项的系数，即 nC_1 是多少。套用上面的定义就是“从 n 个数中挑选 1 个数的组合数”。那么有几种组合方式呢？有 n 种，所以是 n 。

因此结论是 x^n 的求导公式为 $(x^n)' = nx^{n-1}$ 。

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

这是使用频率最高的公式。

只要记住它，即使不太理解导数，

也能通过考试。

真不愧是最强的魔咒！



这个问题先放一下， x^{\bullet} (x 的 \bullet 次幂) 的导数是

① x^{\bullet}

把肩膀上的数字
拿到前面。

② $x^{\bullet-1}$

肩膀上的数字减去1。

好了！就是这样！

※ “伊欧”是网络游戏《勇者斗恶龙》中的咒语；“巴鲁斯”是电影《天空之城》中的毁灭咒语。

33 函数积求导的方法



下面我们推导一下两个函数的积—— $f(x) \times g(x)$ 的求导公式。

对两个函数的和求导，就是将每个函数求导后求和，那么函数积求导也是将每个函数分别求导后求积吗？

不是，两个函数积的求导公式如下所示：

$$\{f(x)g(x)\}' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

这个算式有些麻烦。为什么会是这样的算式呢？我们推导一下看看。该公式也是从导数的基本公式中推导出来的。

首先，我们代入基本求导公式。

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h)g(x+h)\} - \{f(x)g(x)\}}{h}$$

下面是关键，为了形成 $f(x+h) - f(x)$ 的形式，我们要在分子加上 $-g(x+h)f(x)$ 和 $+g(x+h)f(x)$ （注意，两个算式之和要等于0）。则等式右边变为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

稍微整理得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x+h)\{f(x+h) - f(x)\}}{h} + \frac{f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \right]$$

即 $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)$ 就是 $g(x)$ ，

$$\{f(x)g(x)\}' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$

至此，公式推导完毕。

还有一种比较简单的方法，就是用面积进行说明。请看本节的图示。

对于公式，可能要花些时间才能习惯，但它应用起来确实很方便。

实际上， x^n 的导数公式也能从函数积的求导公式中推导出来。例如，可以认为 $x^2 = x \times x$ ，则 x^2 的导数为

$$(x^2)' = x \times x' + x' \times x = x + x = 2x$$

x^3 可以认为是 $x^3 = x^2 \times x$ ，则

$$(x^3)' = x^2 \times x' + (x^2)' \times x = x^2 + 2x \times x = 3x^2$$

以此类推。指数增加，系数也会增加。

问题:

$F(x) = (x^2 + 3x + 9)(x^2 - x + 15)$ 求导。

① 如果不假思索就分解因式, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= (x^2 + 3x + 9)(x^2 - x + 15) \\ &= x^4 - x^3 + 15x^2 \\ &\quad + 3x^3 - 3x^2 + 45x \\ &\quad + 9x^2 - 9x + 135 \\ &= x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 36x + 135 \\ F'(x) &= \underline{4x^3 + 6x^2 + 42x + 36} \end{aligned}$$



这里好麻烦!

② 使用上面的公式, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x^2 + 3x + 9)'(x^2 - x + 15) + (x^2 + 3x + 9)(x^2 - x + 15)' \\ &= (2x + 3)(x^2 - x + 15) + (x^2 + 3x + 9)(2x - 1) \\ &= 2x^3 - 2x^2 + 30x \\ &\quad + 3x^2 - 3x + 45 \\ &\quad + 2x^3 - x^2 \\ &\quad + 6x^2 - 3x \\ &\quad + 18x - 9 \\ &= \underline{4x^3 + 6x^2 + 42x + 36} \end{aligned}$$



像这样, 按 x 的指数分组, 不容易出错。

不能这样说, 导数计算就是这样的。

两个都挺麻烦的。

我们用面积来证明一下。

$$\{f(x)g(x)\}'$$

$$\lim_{h \rightarrow 0}$$

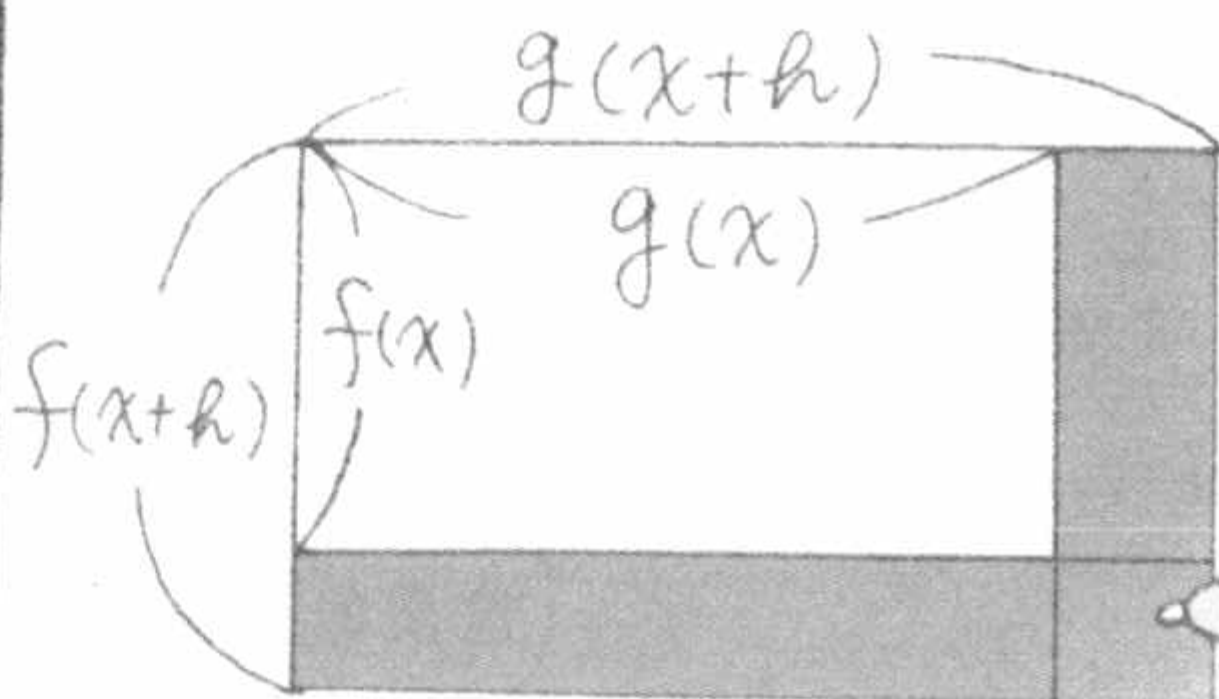
$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

有些麻烦

这个是



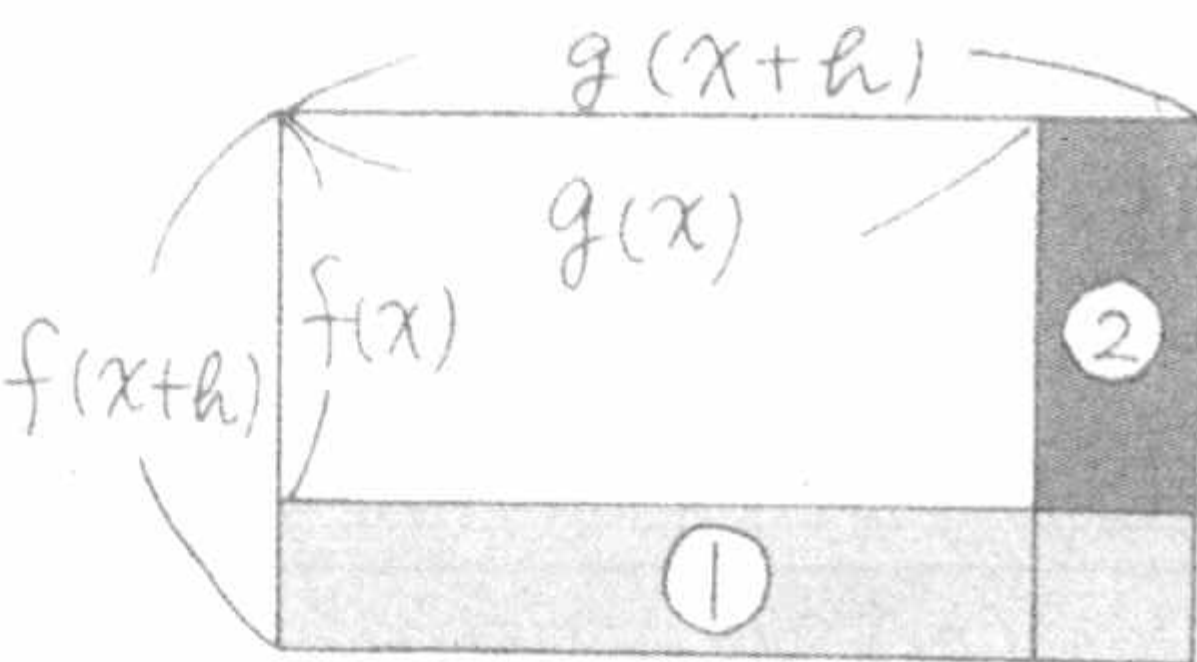
这个记为



有这样一个长方形，

$$\textcircled{*} = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)$$

相当于这部分。



和②思考一下，则

①：纵向为 $f(x+h) - f(x)$
横向 $g(x+h)$

②：纵向为 $f(x)$
横向 $g(x+h) - g(x)$

$$\textcircled{*} \text{ 是 } \textcircled{1} + \textcircled{2} = \{f(x+h) - f(x)\} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \{g(x+h) - g(x)\}$$

$$\textcircled{\star} = \frac{\textcircled{*}}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

取

$h \rightarrow 0$

于是得到

$$f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$



34 复合函数求导的方法



我们已经能够对多种函数求导了，下面再试试对 $y = (2x + 3)^8$ 这类乘方运算进行求导。

如果用以往学过的 x^n 和 $f(x) + g(x)$ 的导数公式，就需要先进行因式分解再求导。而因式分解以上那个算式会得到 “ $256x^8 + 3072x^7 + 16128x^6 + 48384x^5 + 90720x^4 + 108864x^3 + 81648x^2 + 34992x + 6561$ ”，不过说实在的，我们不能这么解。

如果有耐心和时间，这样也可以求得结果，但如果我们这样做的话，那下面介绍的方法就没有意义了。因此我们要推导一个公式，以便可以不进行因式分解就能求导。

再重复一下，公式是为简化运算而产生的。

如果用公式无法轻松处理复杂的计算，又怎么能叫“公式”呢？

简化这类运算的方法就是“复合函数求导法”。

如果该算式是 $y = x^8$ ，那么根据已知的 x^n 的求导公式，1秒钟就能得出结果。而函数式 $y = 2x + 3$ 根据 $f(x) + g(x)$ 的求导公式也能在1秒钟内计算出答案。不过将它们组合起来，就太难了，不知如何下手。

这就好像和一个小孩比赛相扑，可能瞬间就会取得胜利，但是要和一群小孩比赛相扑，就有可能被弄得很狼狈；再比如，如果只是1只史莱姆^①，那么一个回合就能将它打倒，但若是一群史

^①网络游戏《勇者斗恶龙》中的胶状魔法生物。

莱姆集合而成的一个怪兽，那就无法抵挡了。

个体都是可以瞬间解决，复合函数的基本求导思想就应该是“在个体汇集之前就解决掉它们”。

因此，我们要把 $y = (2x + 3)^8$ 分成两个部分。在组合组件时，我们通常都是先将每部分分别组合后再进行整体组装，求导也是如此，我们要将可简单求导的 $y = x^8$ 和 $y = 2x + 3$ 分别求导，然后再将其组合。

刚才我们一直在说 $y = x^8$ ，但实际上是 $(2x + 3)^8$ ，所以直接写成 $y = x^8$ 不太好处理。为此我们另外准备了一个新字母 u 。假设 $u = 2x + 3$ ，这样原来的算式可写成 $y = u^8$ 。

对函数关于 u 求导得到 $\frac{dy}{du} = 8u^7$ ，对 $u = 2x + 3$ 关于 x 求导得到 $\frac{du}{dx} = 2$ 。

突然用分数形式表示导数，还能记起来吗？这是莱布尼兹发明的表示方法。分母表示“关于什么求导”。

这样，两个“零件”就准备完毕，剩下的就是考虑如何组合。暂时先将组合好的零件放在一旁，我们先来看看原先的算式。

对 $y = (2x + 3)^8$ 关于 x 求导，可表示为 $\frac{dy}{dx}$ 。将 3 个导数算式排在一起就是 $\frac{dy}{du}$ 、 $\frac{du}{dx}$ 、 $\frac{dy}{dx}$ 。你发现了什么？

是的，通过 $\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ 可求得 $\frac{dy}{dx}$ （约掉分子和分母上的 du ）。代入 $y = (2x + 3)^8$ 、 $y = u^8$ 、 $u = 2x + 3$ ，则得到 $\{(2x + 3)^8\}' = 8u^7 \times 2$ 。

之后将置换的 u 代回原来的 $2x + 3$ ，就得到

$$\{(2x + 3)^8\}' = 8(2x + 3)^7 \times 2$$

复合函数的求导方法，就是使用新字母替代可分解的算式，在

对每个算式分别求导后，再将其组合。这个方法最重要的思路就是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

作为分数运算，这种处理理所当然，但能将该方法用于表示导数关系实在是聪明。莱布尼兹真是厉害呀！

将上面的 $8(2x + 3)^7 \times 2$ 展开，得到的结果与将原式展开后求导的结果完全相同。虽然有些费事，不过还是请你试着做一下。

$y = (2x+3)^8$ 的导数

首先，将这部分设为 u

$u = 2x+3$
是吧?



$$\frac{dy}{du} = (u^8)' = 8u^7$$

\uparrow
 u

对 y 关于 u 求导。

... (☆)



因为 $u = 2x+3$, 所以

$$\frac{du}{dx} = (2x+3)' = 2$$

\uparrow

对 u 关于 x 求导。

... (✱)

$y = (2x+3)^8$ 求导，就是 $\frac{dy}{dx}$ 是吧?

⚡ 这里是关键! ! ⚡

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

这样!



这两个约掉。

就得到.....

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 8u^7 \times 2 = 16u^7 \\ &= \underline{\underline{16(2x+3)^7}} \end{aligned}$$



35 使用导数绘制出图形



下面我们实际运用一下导数。

例题：请绘制 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$ 的图形

看到这道题可能有人会想“这么简单呀”。不过还是请稍等一下。你知道如何绘制该函数图形，但是否知道“为什么可以这样绘制”？是不是只记得这一种绘图模式？

实际上，不少人都只是将图形绘制方法作为知识和经验背下来而已，他们并不知道为什么可以使用该方法。

说得好听些，这是通过训练培养出来的思维习惯；说得难听些，这只是条件反射。

当然，能通过训练条件反射式地回答问题，进行运算也很不错。不过终究还是应该建立在理解的基础之上，否则算式稍微变变形、增加点难度就会被难住了。

现在让我们回顾一下以前的绘制方法，在此基础上再使用导数，就能绘制出未知函数的图形了。

$$3 \quad y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$$

绘制函数的图形 (20 分)



只要记住固定的解决方法就能……

轻松解决! ♪ ♡ ♡



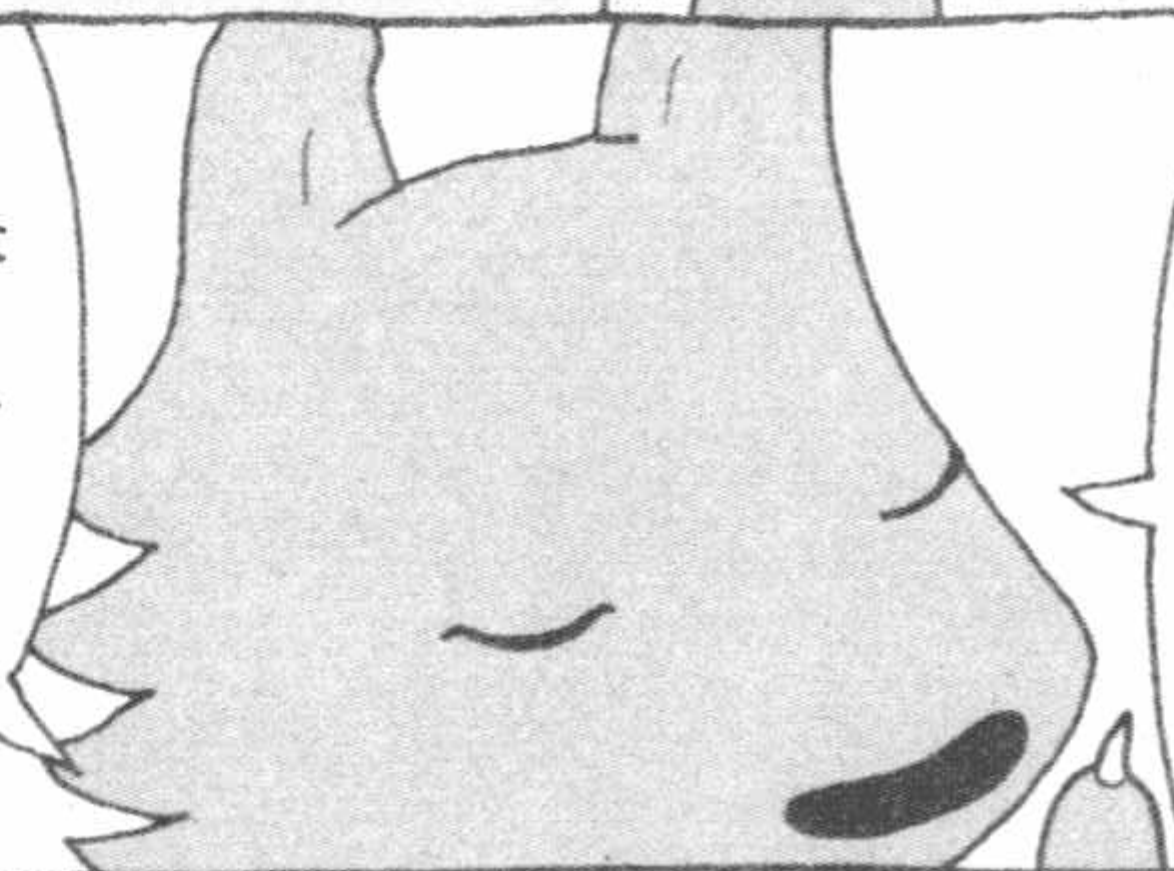
有人说死记的方法是条邪路。



但在考试时, 因为有时限制, 必须尽快把题解出来, 此时就需要更好的技巧。



当然, 条件反射也不错。



只要能充分理解原理就行。

36 大致画出二次函数的图形



中学时，我们就已经能够画出一一次函数和二次函数的图形了。对于一次函数，只要知道了某一点的斜率就能描绘出该函数的图形，因此中学时一次函数的教学要点就是“求斜率以及函数与坐标轴的交点”。也就是说，只要知道了斜率以及函数与坐标轴的交点，就能画出正确的图形。

但是二次函数就要粗略得多，我们只能求出顶点，大致描绘出抛物线的形状。与一次函数的图形不同，二次函数的图形都是曲线，因此很难用手绘制出准确的图形。

我们能正确找出二次函数的顶点坐标，还能知道函数抛物线的开口是向下还是向上（如果弄错了方向，即使画出了图形也只能得0分），但是之后要准确画出其他部分实在不容易。

当然，如果逐个点精确计算而后再画也能够得到准确的图形，但是很费时间。

因此，学会大致画出图形非常重要。

“大致画出”不是说可以不认真，而是说画出的图形可以不必很精细。因为无论二次函数的表达式多么复杂，归根结底都是抛物线，所以只要确定了顶点和开口方向就能画出大致的图形。

一次函数的图形

交点

斜率

有了这两点，

就能绘制出
准确的图形。

这样倾斜！

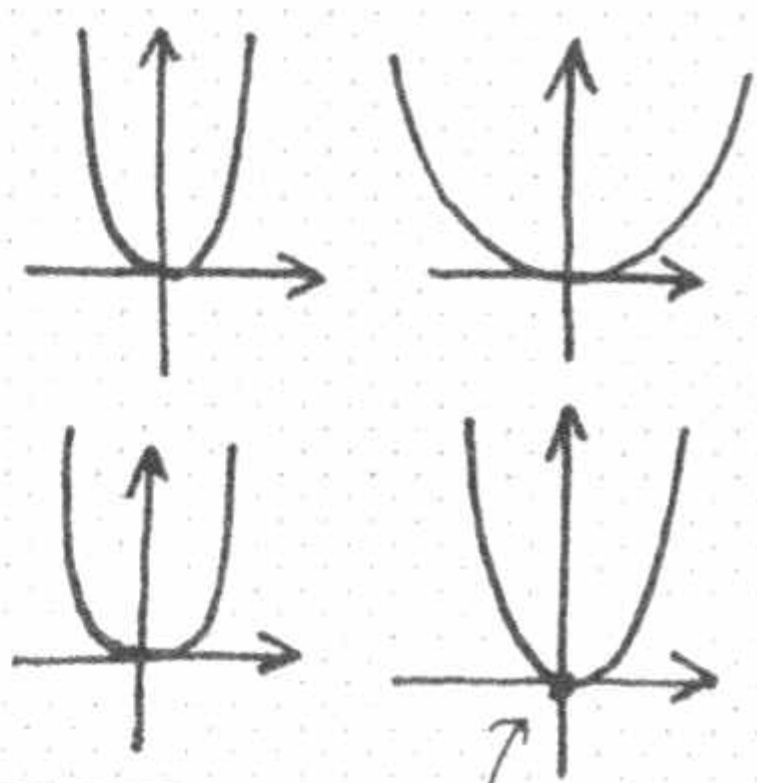
画出来了！

$$y=2x+3$$

二次函数的图形

考试时很难用手
正确画出来。

$y=x^2$ 的图形



这一点要取正确。

大致画一下
就可以了。

啊？

插画师

你是专家，
请用软件
绘制图形。

编辑

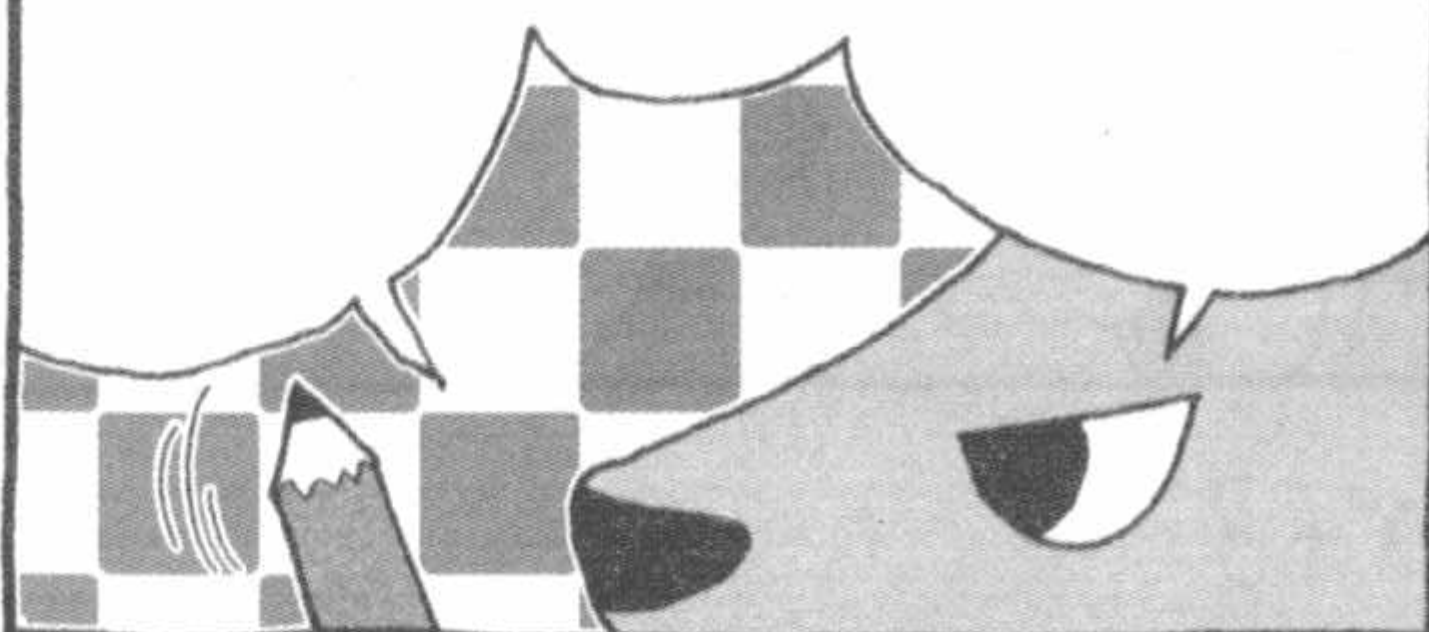
不行，这个二次
函数的图形要重
新画一下，要准
确。返工！

一点一点地画谁都能准确画出图形，但那就没有意义了。
想办法尽快大致画出来，更有意义。

哦，

不过我们画出大致的图形就可以了。

毕竟不是专业的插画家



$y = x^2$ 的图形是这样的。

关键点

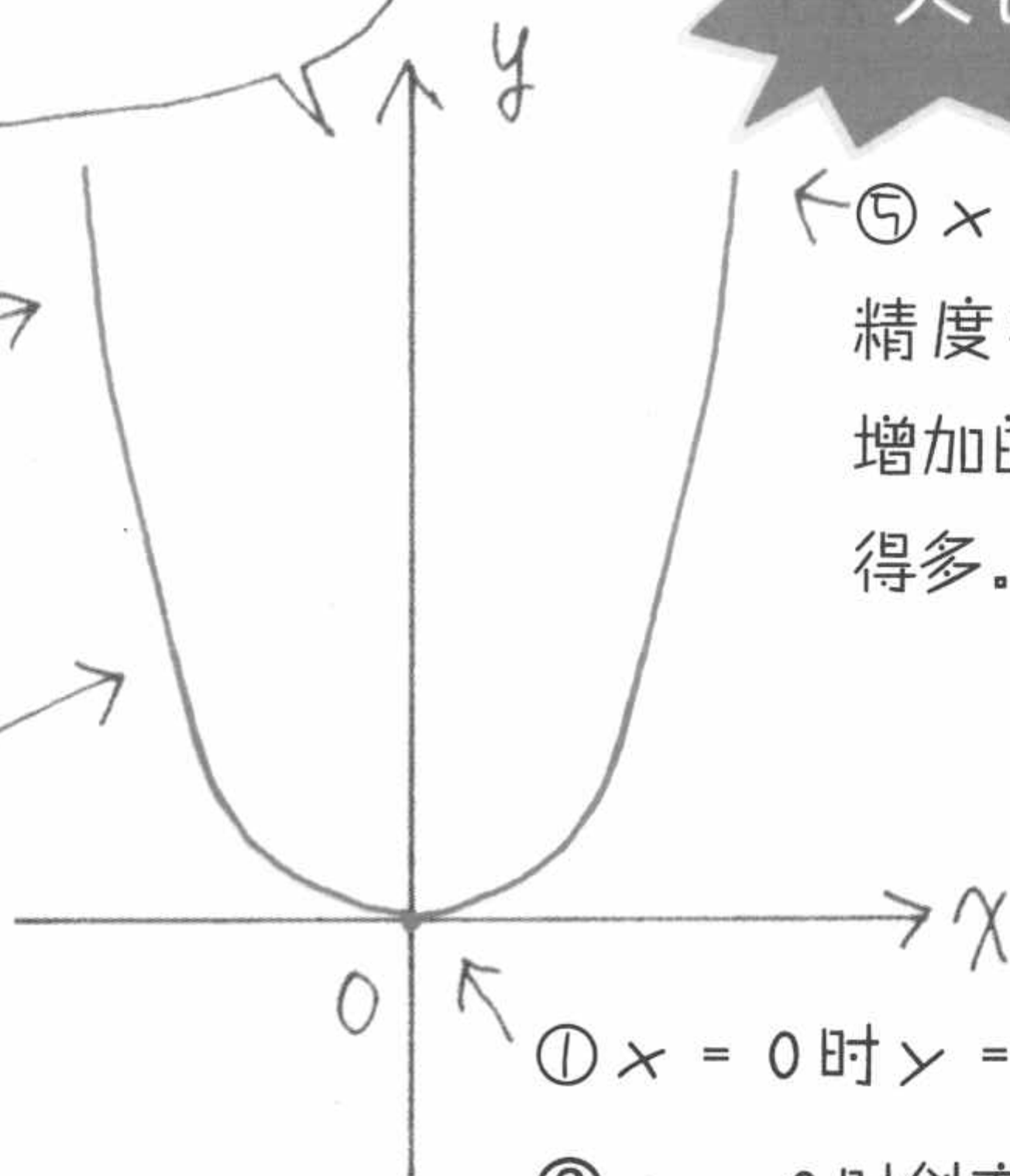
③左右对称。

④具有这样独特的弯曲度(叫做抛物线)。

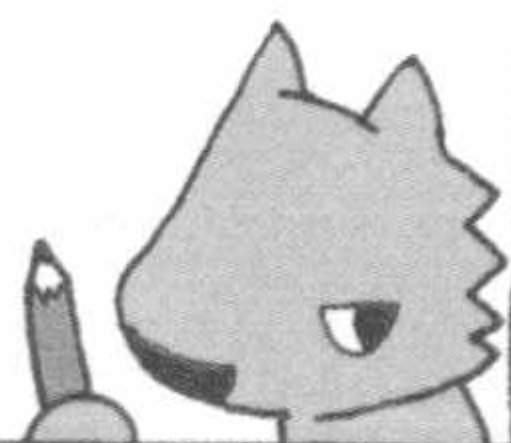
⑤ x 增加的精度很小， y 增加的幅度大得多。

① $x = 0$ 时 $y = 0$

② $x = 0$ 时斜率为 0



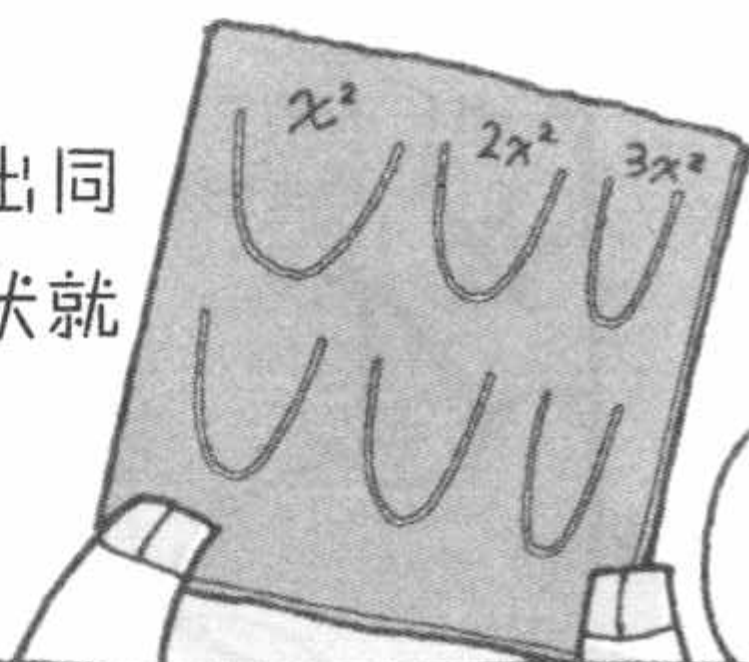
不必很精确，只要抓住要点就行。



二次函数 ($y = ax^2 + bx + c$)

只要 a 相同，二次函数图形形状就大致相同。

只要画出同
样的形状就
可以了。



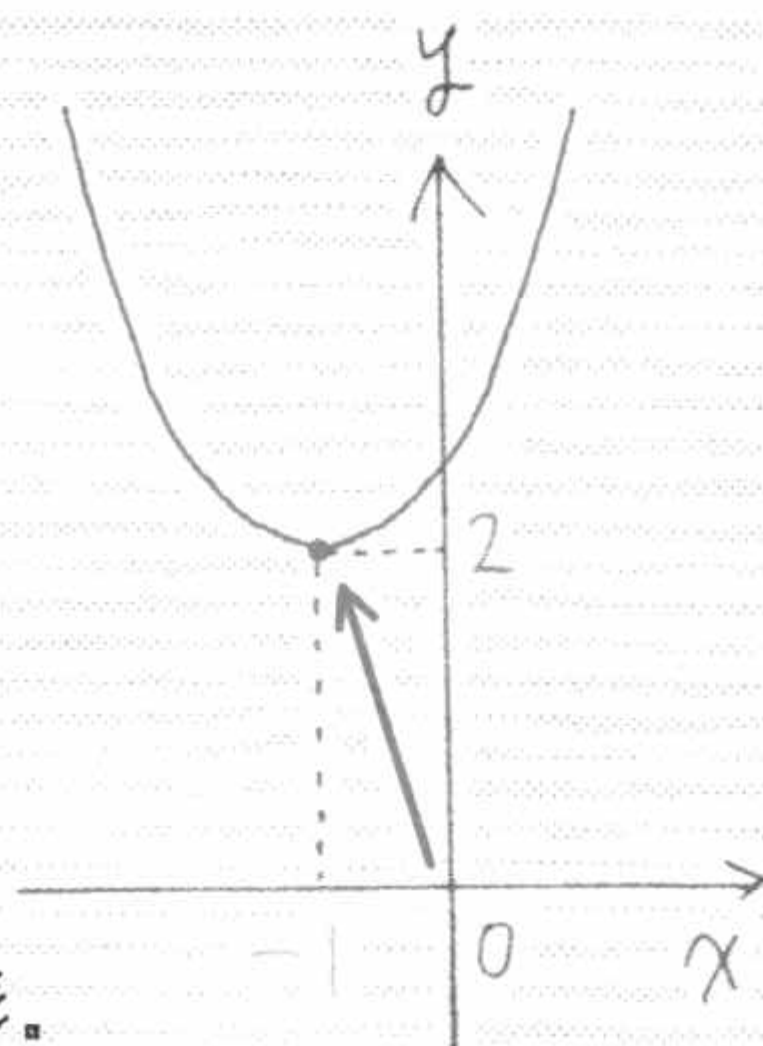
你用模板
了吧?

例如: $y = x^2 + 2x + 3$

$$y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$$

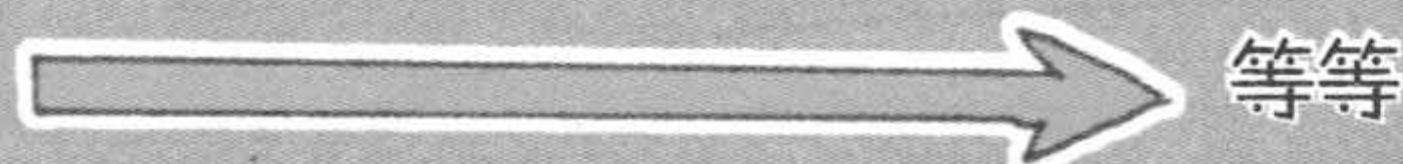
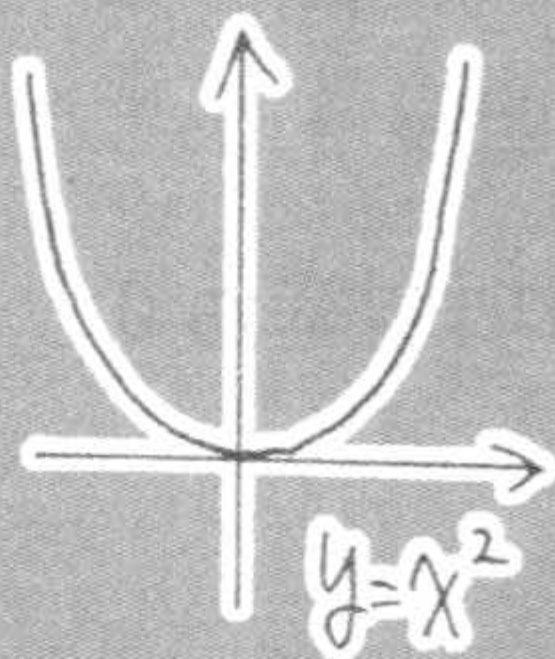
$$\rightarrow (y-2) = (x+1)^2$$

$$y = x^2 \text{ 的图形的 } \left. \begin{array}{l} x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow +2 \end{array} \right\}$$



像这样移一下位，就得到上述函数的图形。

图形形状依据 $y = \textcircled{a} x^2$
它的大小



开口会越来越窄。

等等

37 画出三次函数的图形



与一次函数和二次函数不同，三次以上函数图形都不具有固定的形状，因此不能采用“仅通过一点大致勾勒形状”的方法绘制。

不过，三次以上函数的图形与二次函数一样，也可以大致画出来。依旧是采用连接图形经过的点，大致勾勒出形状的方式来绘制。

而帮助我们找到这些点的就是导数。

我们实际勾勒一下 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$ 的图形。与二次函数求出顶点就能画出图形一样，画三次函数图形的关键也是找出“图形方向改变的点”。

那么该如何找出这一点呢？

在这一点上，函数会从递增变为递减，或者由递减变为递增。此时，切线斜率为 0。也就是说，对函数求导，计算出其导数值为 0 时的点即可。

将等式两边求导得到

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$$

$x = -2, 1$ 时，切线的斜率为 0。

之后在函数中代入 x 值，即可求出“图形方向改变的点”的坐标。分别为 $(-2, 26)$ 和 $(1, -1)$ ，该点称为极值点。极值点上的函数值（ y 轴坐标值）称为极值。

知道极值点后，我们来测定极值点间图形的形状。极值点与极值点间的图形趋势应该递增或是递减（在没有遗漏极值点的情况下）。

因此，在极值点间选取一个适当的 x 值代入导数，就能知道图形的增减状态（导数值是正还是负）。之后就可以与二次函数一样大致画出函数的图形了。

总之，绘制函数图形需要：

1. 求导找到极值点（曲线确实会通过的点）。
2. 求出极值点间的增减趋势（函数的大致形状）。

为便于了解该操作而列出的表格就是数值增减表。

基本上，函数的次数升高，极值点的个数也会相应地增加，高次函数的极值点并不一定都是可求的（二次函数不是高次函数）。而高次函数与三次函数的差异仅限于极值点的个数，图形的绘制方法没有差别。

三次函数图形的画法

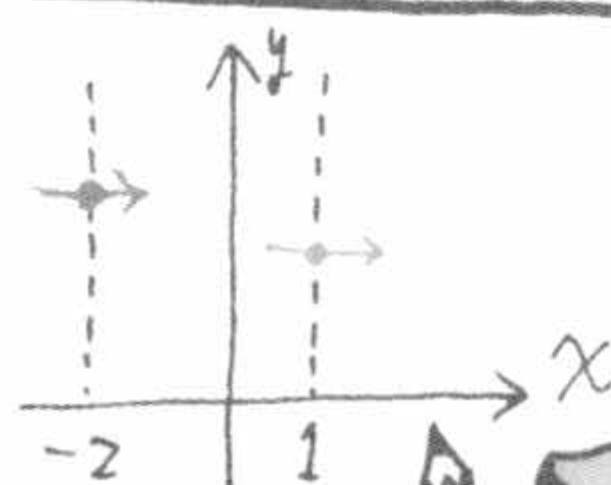
$$y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6 \text{ 求导, 得到}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x^2 + x - 2) = 6 \underline{(x+2)(x-1)}$$

- ① $x = -2$
② $x = 1$

这个是指,
在 $x = -2$ 和
 $x = 1$ 时, 值为 0。



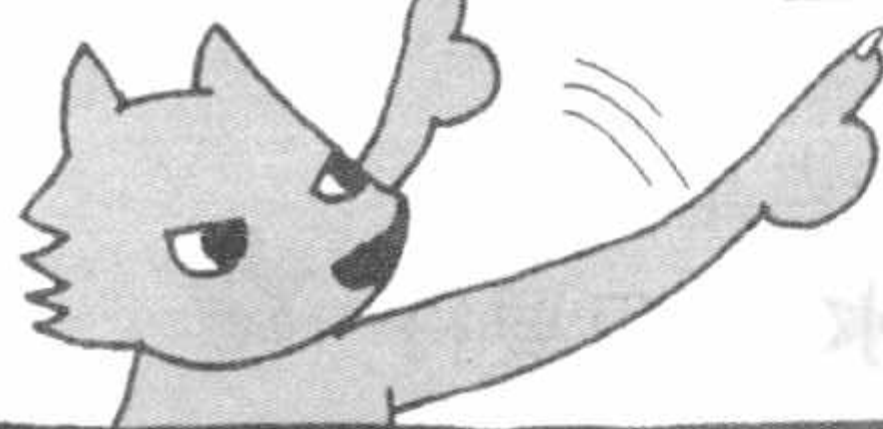
- ① $x = -2$
② $x = 1$ 时,
图形的斜率
为 0

即图形呈水平状态。

这里我们做了一个数值
增减表。

x	...	① -2	...	② 1	...
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

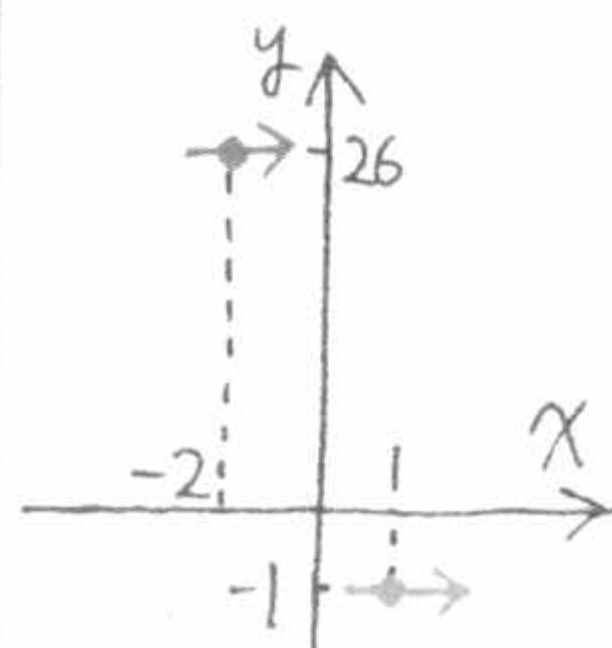
为了准确画出图形,
此处需要求出 $f(x)$
的值。



$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 6 = 26$$

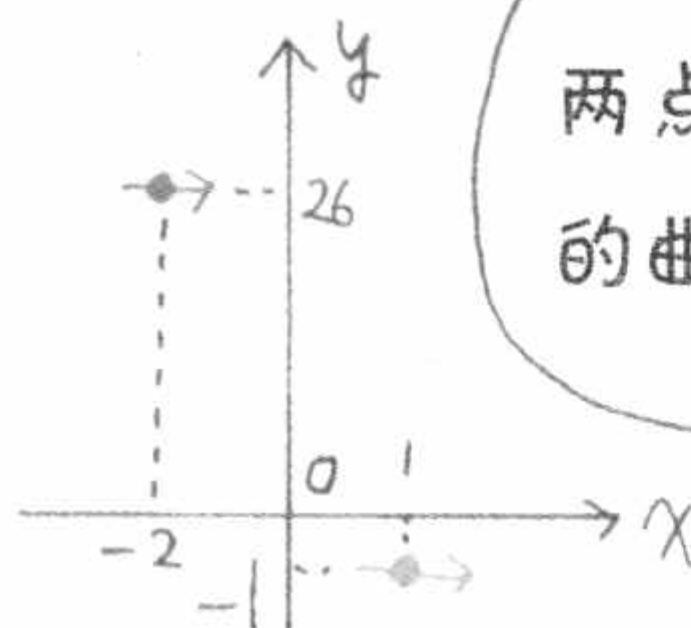
$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 6 = -1$$

图形可以画成这种样子。



之后把“空隙”接起来。

x	...	① -2	...	② 1	...
$f'(x)$	○	0	○	0	○
$f(x)$	○	26	○	-1	○



两点之间用适当的曲线连接起来。



$f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ 的斜率如下：

$x < -2$ 时, $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ ⊕

$-2 < x < 1$ 时, $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ ⊖

$x > 1$ 时, $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$ ⊕

因此, 斜率为:

⊕ 向上倾斜,

⊖ 向下倾斜,

x	...	① -2	...	② 1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	26	↘	-1	↗

在这里填上。

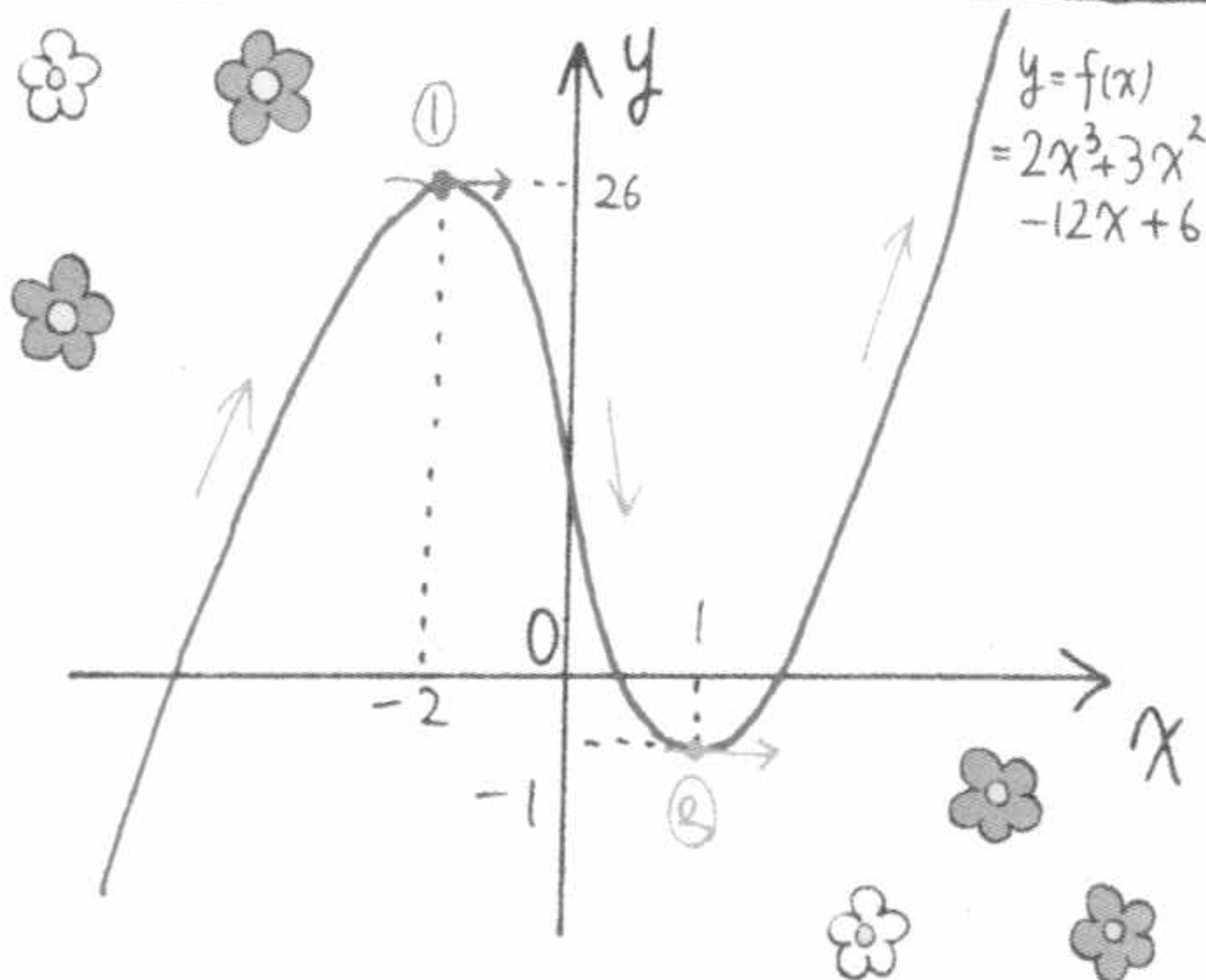
总之,

①② 这两点是关键。

两点之间部分只要符合

上升 ↗ 或下降 ↘

的趋势就可以了。



38 快递包裹最多能装多少



有关导数的讲解终于要结束了。难得学习一次导数，最后我们来讲讲导数的实际应用。

你知道邮局有“快递包裹”这项业务吧？在日本，只要购买快递专用信封，那么装在信封中的物品都能以 500 日元的价格寄往全国各地。

那么，最多能在专用信封中放多少物品呢？我们使用导数来计算一下 500 日元最多能够邮寄多少物品。

顺便说一下，该包裹的重量限制为 30 千克。专用信封的大小为 340×248 毫米，转换为数学表达方式即 $a \times b$ ($a < b$)。

信封本来是扁平的，放入物品后，被支撑起来，边缘立起的高度就是信封的高，我们将该高度设为 x 。信封的体积 V 会随 x 的变化而增减，由此 $V(x)$ 函数可写成

$$V(x) = 2x(a - 2x)(b - 2x)$$

因此，这个信封能装多少东西就要看 x 能取多大的值。

在对函数算式进行变形前，我们先确认一下函数 $V(x)$ 是否正确。

$x = 0$ （即高度为 0），则长宽分别为 b 和 a 。 $x = 0$ ，体积为 0。在此基础上， x 增大则 V 增大；但 x 越接近 $\frac{a}{2}$ ， $(a - 2x)$ 越接近于 0， V 越小。

也就是说，该区间应该是一个像山一样的形状，而且有一个最大值，那么“山顶”在何处呢？

山顶是由上坡变为下坡之处，也就是斜率为0的地方。三次函数的图形一般都有两个顶点（第2个与其说在山顶不如说是谷底），求导后， $y = 0$ 的二次方程的两个根中，其中一个就是我们想要得到的山顶位置。

$$V(x) = 8x^3 - 4(a + b)x^2 + 2abx$$

$$V'(x) = 24x^2 - 8(a + b)x + 2ab$$

要求出 $V'(x) = 0$ 时的 x 值，只要解二次方程就可以了。

解一下试试看。

$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$

其中第一个解是那个比较小的值。

那么， $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ 的值为多少呢？它比 $\sqrt{(b-a)^2}$ 略大，即大于 $(b-a)$ ，由此可判定它是一个适当的值。

因此山顶的位置为

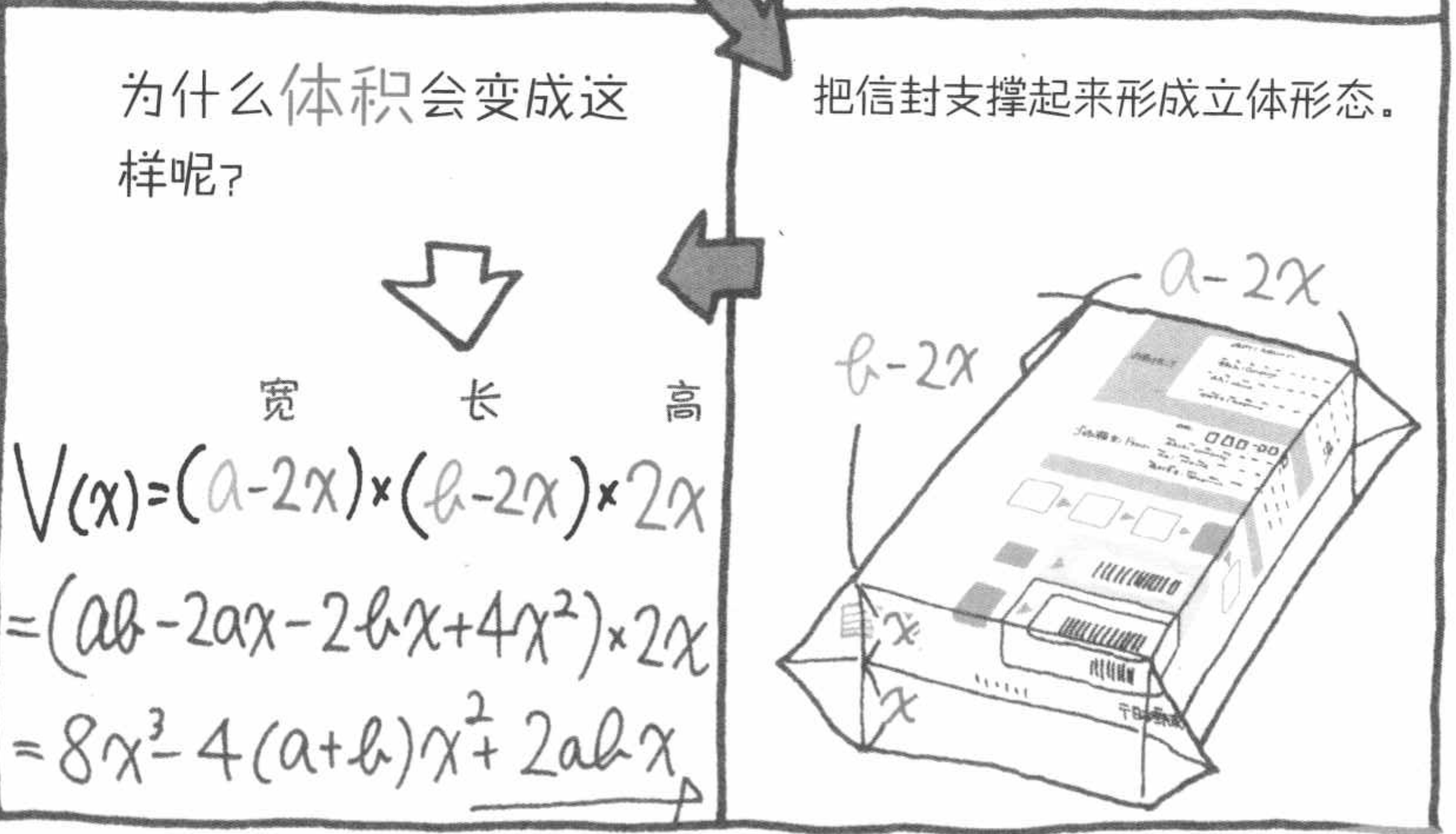
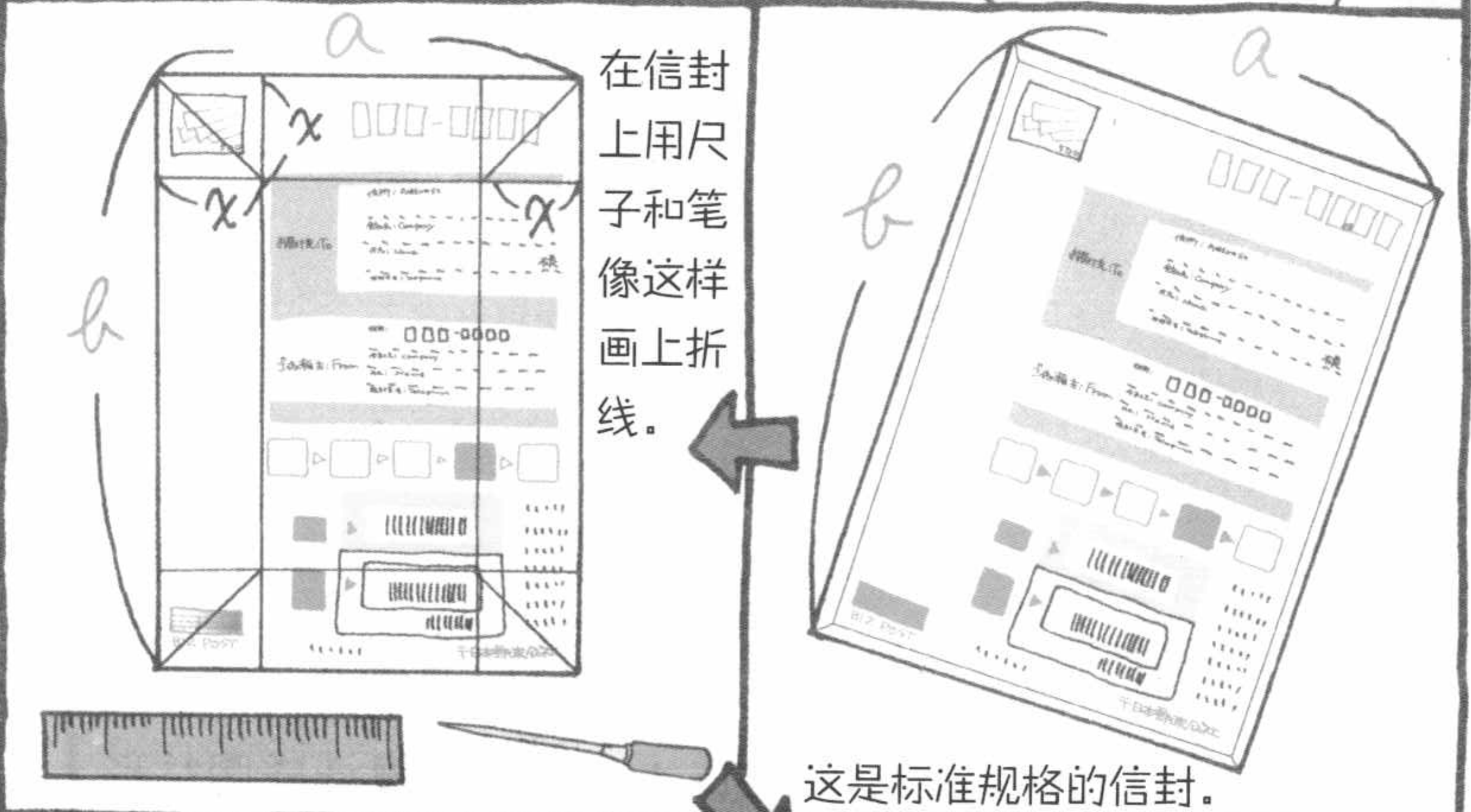
$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$

在该算式中代入 $a = 248$ ， $b = 340$ ，计算得到 $x = 47.2$ ，此时的体积为 3 561 立方厘米 \approx 3.5 升。

你可能会觉得诧异：“怎么能装入 3 升多的物品呢？算得对吗？”答案是正确的。这个纸袋中至少能装入 3 个 1 升的牛奶包。

快递包裹的重量限制为 30 千克。我们算一下能不能在信封中放入铁块。铁的密度是 8 克 / 立方厘米，最多能装重量约为 28 千克的铁块，没问题。也就是说，如果将这么大的铁块塞进信封，花上 500 日元就能寄往全国各地。

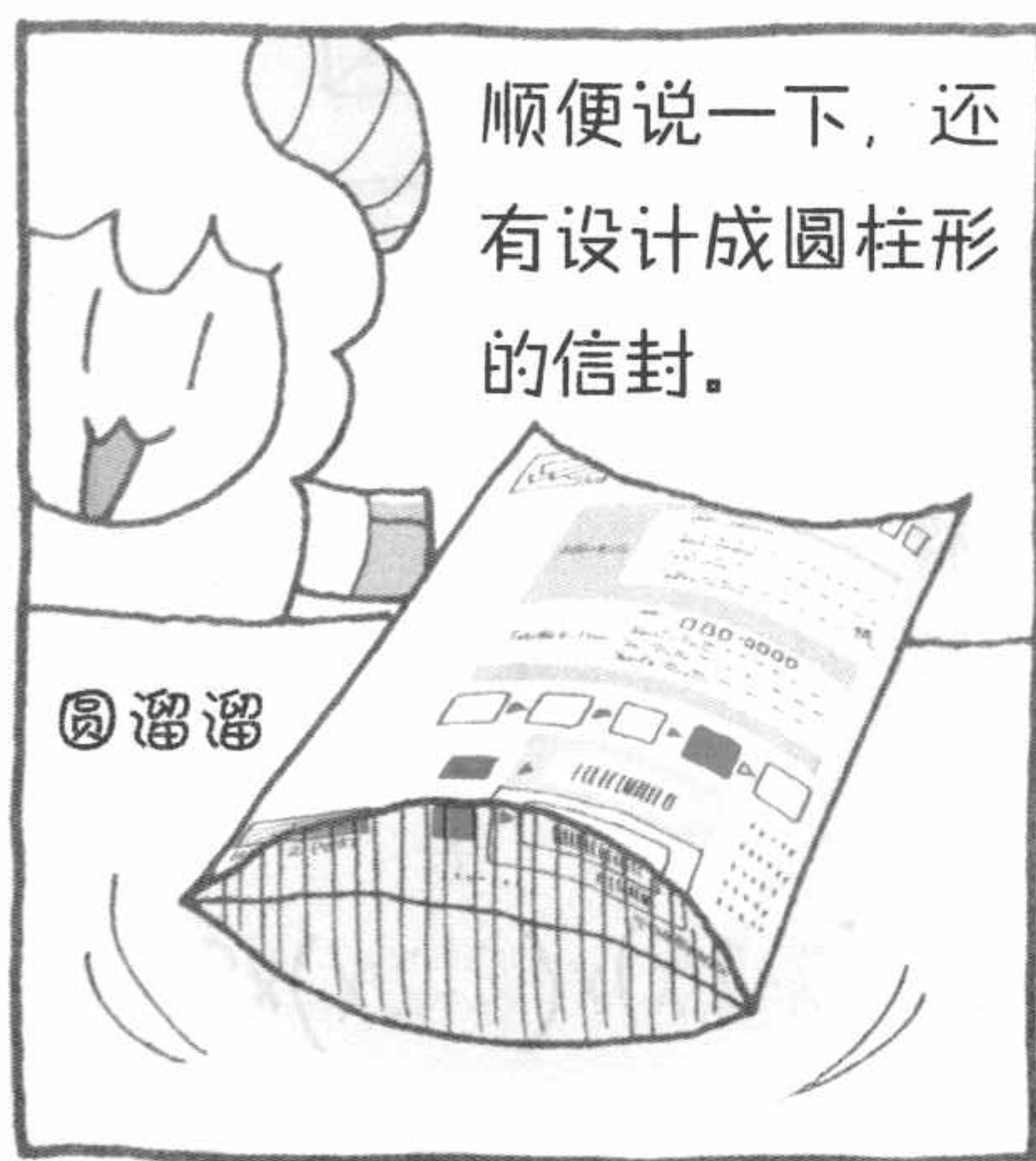
再来看一下装入其他金属会怎样。装铜的话（铜的密度为 9



克/立方厘米)，重量会达到 32 千克，超重了。装铀（铀的密度为 19.05 克/立方厘米）重量将近 70 千克，寄这个会被邮局的工作人员训斥。因此，根据我们的计算，只要物品能放得进去，基本上不必在意重量限制。这一点我们已通过导数计算得到了证实。

导数很有用吧。以往你是不是称完重量才敢寄件，其实只要不是邮寄铜、金、铀，就不必称重。

你也来试试用导数计算一下身边事物的限制条件吧。



39 导数与积分

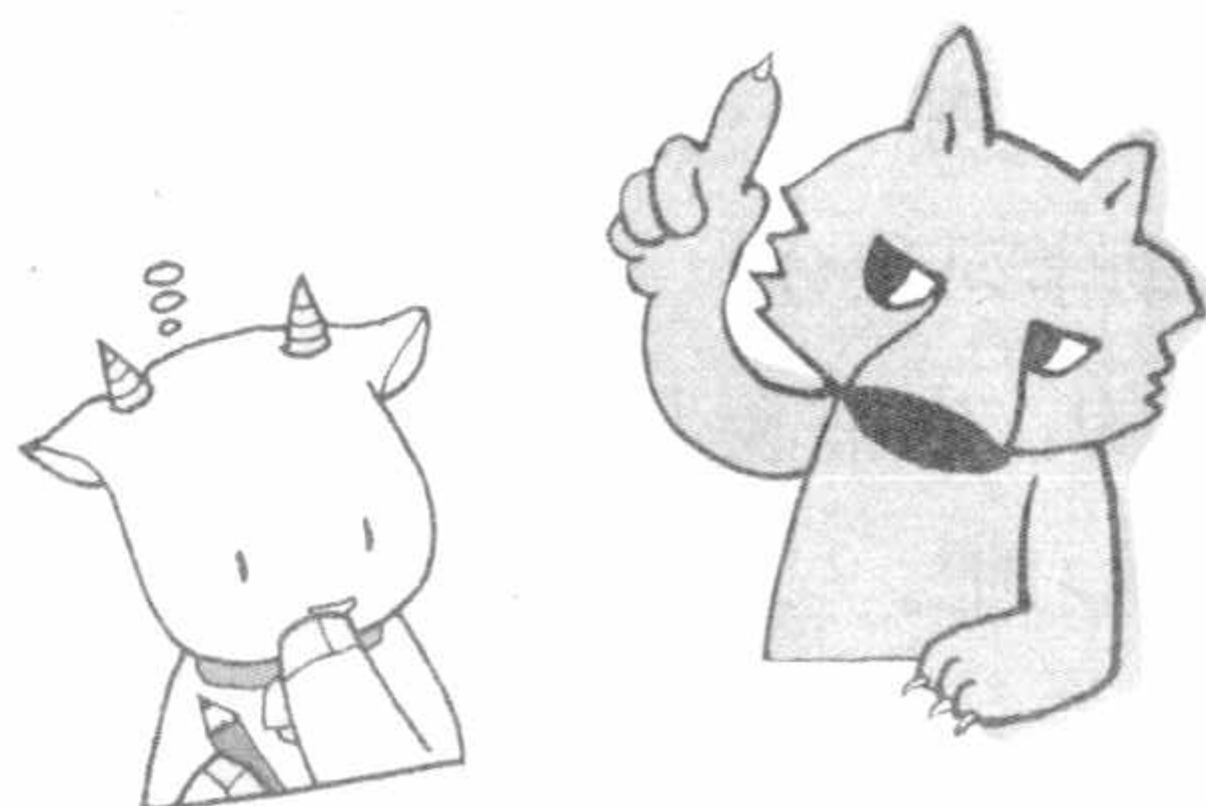


到此，导数的学习就告一段落了，各位辛苦了！

你可能会说，我们的导数学习才刚刚入门怎么就结束了呢？这些东西考试也用不上呀……说的没错，但是我告诉你们一个秘密——导数可以帮助学习积分！

积分不是孤立的，它需要与导数结合在一起。记住这一点，享受接下来的积分学习吧。





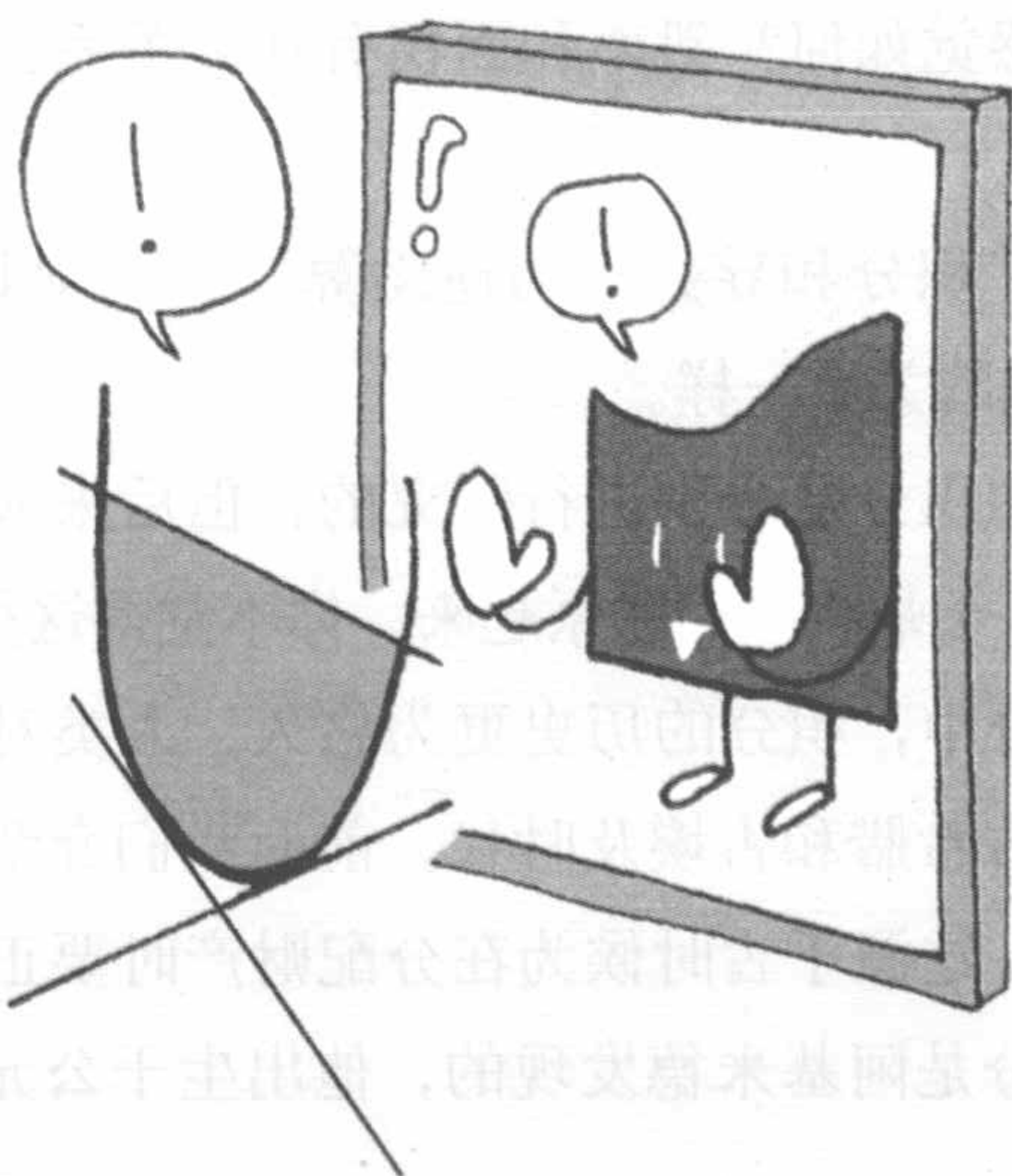
导数讲完了，
接下来我们看看和导数
密切相关的积分！



第二章 积分

积分是导数的逆运算，二者就像硬币的正反面，也像镜外的实体和镜中的影像。利用积分可以求出变化的规律和不规则图形的面积。

本章中我们同样介绍了积分的表示方法、积分与导数的关系，以及积分的求解练习。相信你读完后，一定可以牢牢掌握微积分的入门知识。



40 积分和导数的关系



本书进入了后半部分，下面我们开始谈谈积分。

导数和积分多配套使用，合称为微积分。

那么积分究竟是什么？是用来干什么的呢？

简而言之，积分就是导数的逆向运算。

正因为如此，积分和导数通常配套使用，这也导致很多刚学习积分的人感觉不明白。

确实如此。突然这么一说，的确令人难以理解。因此我们要来研究一下这句话的意思。

导数是用来求变化和斜率的，积分是用来求面积的，这一点后面我们会详细阐述。

说到这里感觉如何？斜率和面积有什么关系？是不是更明白了？

我所说的“积分和导数互为逆运算”是针对计算方式而言，就像乘法和除法的关系一样。

原本导数和积分是分别进行研究的，但后来人们发现它们是逆运算的关系，于是将它们联系起来。你不觉得这很了不起吗？

导数和积分中，积分的历史更为悠久。人类对积分的基本认识可以追溯到古希腊和古埃及时代。前面我们介绍过，积分的目的是计算面积，这源于古时候为在分配财产时要正确计算面积的需要。据说积分是阿基米德发现的，他出生于公元前 287 年，距今大约 2300 年。



而导数是在莱布尼兹和牛顿的时代被发现的，牛顿出生于1642年。

可见人类花了近2000年，才知道积分是导数的逆运算。

莱布尼兹先生、牛顿先生，非常感谢。怎么样，是不是感觉他们非常伟大？

那么知道了积分和导数是逆运算关系有什么好处呢？最大的好处就是——学习了其中一个，通过逆运算就能理解另外一个。

虽然实际上没有这么容易，但这句话在某种程度上还是有道理的。而且我们学习了导数，不能不加以利用。

导数的逆运算是积分；积分的逆运算是导数。似乎很多人都有这样的印象。

将积分视为导数的逆运算，对于已经学过导数的人（比如我们）来说，其难度会降低很多。用算式表示“导数和积分的逆运算关系”，可得到

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt$$

突然列出这个算式，你可能会想：“这是什么呀？”这里我先让它露露脸，之后本书会按照以下的顺序进行说明。

1. 积分的计算方法 = 将导数进行逆运算。
2. 积分的含义。
3. 如何理解 $f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt$ 。

首先，我们要知道导数和积分互为逆运算，而且要记住积分的算法，在此基础上我们会说明积分的含义。最后我们再进攻核心部分——理解为什么导数和积分互为逆运算。

导数的逆向是积分，

积分的逆向是导数，

这是很多人的印象……

古希腊时代

喂，你过来！

我是数学之神。

我要你执行一个命令。

在1800年以后，会出现一种叫做导数的方便的运算方法。

你现在赶紧把它的逆运算积分演算出来。

这样你就会成为预言家，成为英雄！！

那就让我埋头苦干吧！

笨蛋！

不明白，什么意思呀？

将牛顿和莱布尼兹发现的

“导数的逆运算是积分”

用数学表达算式表示出来就是

$$* f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt \quad \leftarrow \text{这个}$$



首先，

$$f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{导数的咒语}} \underbrace{\int_0^x}_{\text{积分的咒语}} f(t) dt$$

你暂时可以这样认为，

我会逐一解释算式的意思。

41 积分的表示方法



下面我们就来学习积分的计算方法。再重复一遍，我们会在后面解释积分的意思。因此现在先不要考虑意思，请相信我，并按照本书的方法进行积分计算练习。

首先是积分算式的写法。还记得吗？导数的写法有若干种。有的比较简单，有的虽然较复杂，但能清楚地说明关于什么求导。

$$f'(x) \text{ 或者 } \frac{d}{dx} f(x)$$

关于什么求导是必须始终关注的对象。

与导数相同，学积分也必须注意关于什么求积分。这一点请务必留意。

我们举个具体例子看看。

1. 求函数 $f(x)$ 关于 x 的积分。 2. 求函数 $f(x)$ 关于 y 的积分。

第一个写成 $\int f(x)dx$ ，第二个写成 $\int f(x)dy$ 。以第一个为例，我们来看一下表示方法，它似乎是将 $f(x)$ 夹在 \int 和 dx 中间。

从表达上看，是先将 $f(x)$ 和 dx 相乘，然后求其 \int 。也就是说，应该写成 $\int (f(x) \times dx)$ ，不过现在写成了将 $f(x)$ 夹在 \int 和 dx 中间的形式。

求关于 x 的积分时，最后要加上 dx ；求关于 y 的积分时，最后要写上 dy 。也就是说，是关于 d 后面的数字求积分。

42 积分的读法



接下来是积分的读法。读法很关键，人类无法理解读不出来的东西。

$$1. \int f(x)dx \quad 2. \int f(x)dy \quad 3. \int g(x)dt$$

第1个字面上读做“积分 $f(x) dx$ ”，符号 \int 读做“积分”。不过读做“求 $f(x)$ 关于 x 的积分”要自然得多。

同样，第2个读成“求 $f(x)$ 关于 y 的积分”，第3个读成“求 $g(x)$ 关于 t 的积分”。实际上，积分的读法很自由，这就好比在婚礼上发言时，即便稿子上写着“佐藤”，也可以读成“佐藤先生”，善于表达的人甚至还会加上些修饰语。

$f(x)$ 是关于 x 的函数，所以像第1个那样求关于 x 的积分很常见。为此人们有时会将其简化为“求 $f(x)$ 的积分”，把“关于 x ”省略掉。许多教科书也这样省略了。

但是，“求 $f(x)$ 关于 y 的积分”中的“关于 y ”绝对不能省略。将自变量 x 的函数 $f(x)$ ，关于其他变量（字母）求积分（此处为 y ），这种情况很少见，因此一定要加上“关于 y ”以示强调。同样第3个也要强调是“关于 t ”求积分。

\int

= 积分符号

它是将 Summation (合计) 的开头字母 Σ 纵向拉伸后得到的。

$\int f(x) dx$: 读做 “积分 $f(x) dx$ ”

意思是: 求 $f(x)$, 关于 x 的积分。

言归正传。关于 $f(x)$ 和 $g(t)$

$$y = 3tx^2 + 2t^2x + t^3$$

以前讲过,
 $F(x)$ 就像装入
 x 就会自动得
到 $F(x)$ 的 值
的黑匣子。

例如

如果将该式中的 x
视为主角,

$$y = f(x) = 3tx^2 + 2t^2x + t^3$$

→ x 的二次函数。

变成
这样。

可以把相同
的算式转换
一下, 让其
表达不同的
内涵。

$$y = g(t) = t^3 + 2xt^2 + 3x^2t$$

→ t 的三次函数

变成
这样。

但如果将
 t 视为主
角,

43 积分的计算练习



终于要讲积分的计算方法了。

我已经重复了许多遍，积分是导数的逆运算。也就是说，如果要计算 $\int f(x) dx$ ，只需思考“关于 x 求导得到 $f(x)$ 的函数是什么”，就会找到正确答案。

$$1. \int x^2 dx \quad 2. \int x dx \quad 3. \int 2x^3 dx \quad 4. \int dx$$

第1个的意思是“关于 x 求导得到 x^2 的函数是什么”，是什么呢？ x^3 求导得到 $3x^2$ ，对吧？

差一点！再说一遍！

我们想办法巧妙地去掉3。答案是 $\frac{1}{3}x^3$ 。为了验证答案是否正确，我们对其求导看一下。

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \times (x^3)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$$

没问题。同理可证2是 $\frac{1}{2}x^2$ ，3是 $\frac{1}{2}x^4$ 。

那么第4又如何呢？它相当于 $\int 1 dx$ ，只是把1隐藏起来而已。关于 x 求导结果为1的函数就是 x 。

我们来实际验证一下

“积分是导数的逆运算”。



想一想，导数的公式是……

最强的咒语

这个！

关键是

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

肩上数字拿到前面，肩上是 $n-1$ 。

积分是它的逆运算，是指

$$(\text{?})' = n x^{n-1}$$

以这样的方式来求积分。

(1) x^2 的积分

$$(\text{?})' = x^2 \leftarrow \text{这个是 } n-1, \text{ 因此 } n \text{ 为 } 3.$$

假如? 为 x^3

这样做

$$(x^3)' = 3x^2$$

这个3是多余的！！

两边同时 $\times \frac{1}{3}$ ，则

再修正一下！！

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

做出来了！！成功了！！



x^2 的积分就是

$$\frac{1}{3}x^3$$

但是……

待续

44 什么是积分常数



“关于 x 求导得到的 x^2 的原函数是什么”，前面我们说答案是 $\frac{1}{3}x^3$ 。其实这并非正确的答案。

正如导数的规则所述，常数项在求导时会被消掉，因此求导后得 x^2 的函数除了 $\frac{1}{3}x^3$ 还有 $\frac{1}{3}x^3 + 2$, $\frac{1}{3}x^3 - 10$, $\frac{1}{3}x^3 + 771$ 。

所有这些常数项求导时都会变为 0，因此这些都可作为该积分的答案。

正因如此，只说求积分，我们会得到多个答案。或者说因为常数项可以是任何数，所以存在无数个原函数。

为此，人们设计出一种汇集所有答案的表示方法，就是

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \text{ 为积分常数})$$

用 C 这一个字母涵盖了所有可以做常数项的数字。

这样写就可以告诉别人，我们已经把所有求导时消掉的常数项都考虑在内了。

45 为什么是 C



刚才积分算式中的常数项为什么要用 C 表示？这是因为它是“Constant（常数）”的开头字母。当然用 A、B 表示也可以，只是务必要说明“ $\times \times$ 为积分常数”。

也有人或某些书中时常省略该说明。大家可曾有过这样的经历，小说中出现了一个叫“ $\times \times$ 芳”的人，一直以为是女性，但读到最后才发现原来是个男的。小说出现这种情况问题不大，但数学不行。无论 C 多么像积分常数，也不可以不加任何说明就让它突然登场。一定要写“ $+ C$ （C 为积分常数）”。

含有积分常数的积分叫做不定积分。例如，

问：求 $\int 2x dx$ 的不定积分，

答： $x^2 + C$ （C 为积分常数）

请注意，（C 为积分常数）并不是为了便于读者理解而进行的说明。因为如果没有说明，C 就成了身份不明的字母。

如果有人想用 C 以外的字母表示常数，也可以写成“ $x^2 + D$ （D 为积分常数）”，这也是正确的。使用 C 只是一种传统习惯，尽可能遵守这种表示方式有助于顺畅地交流。

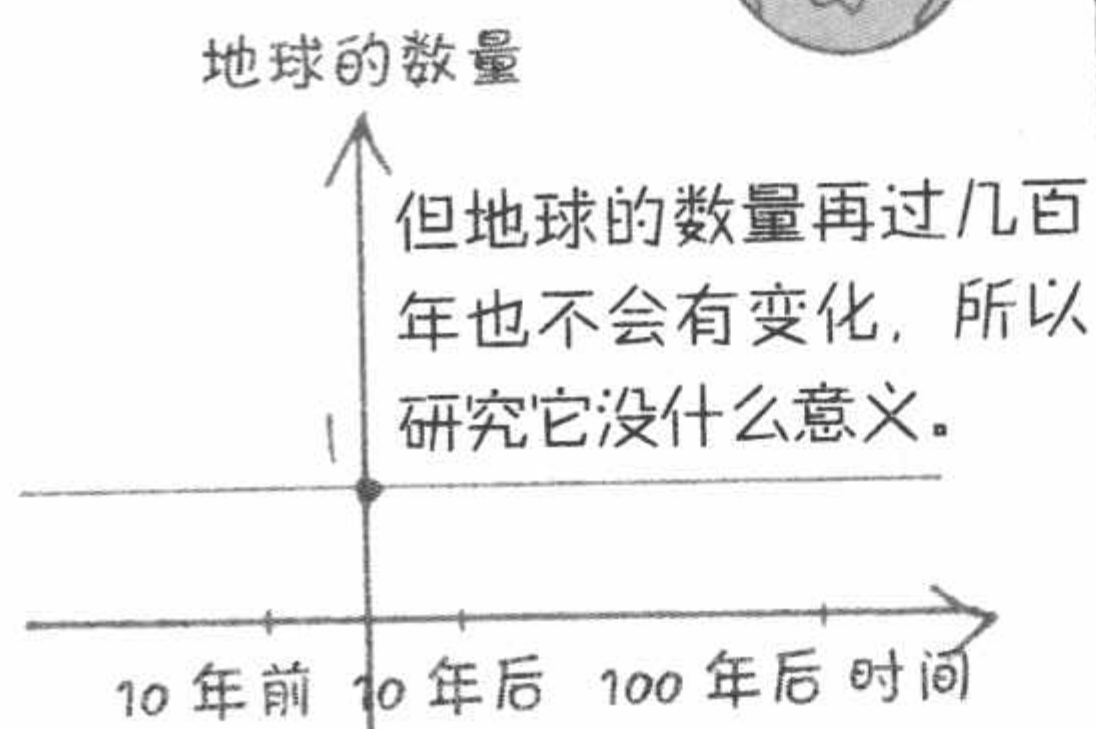
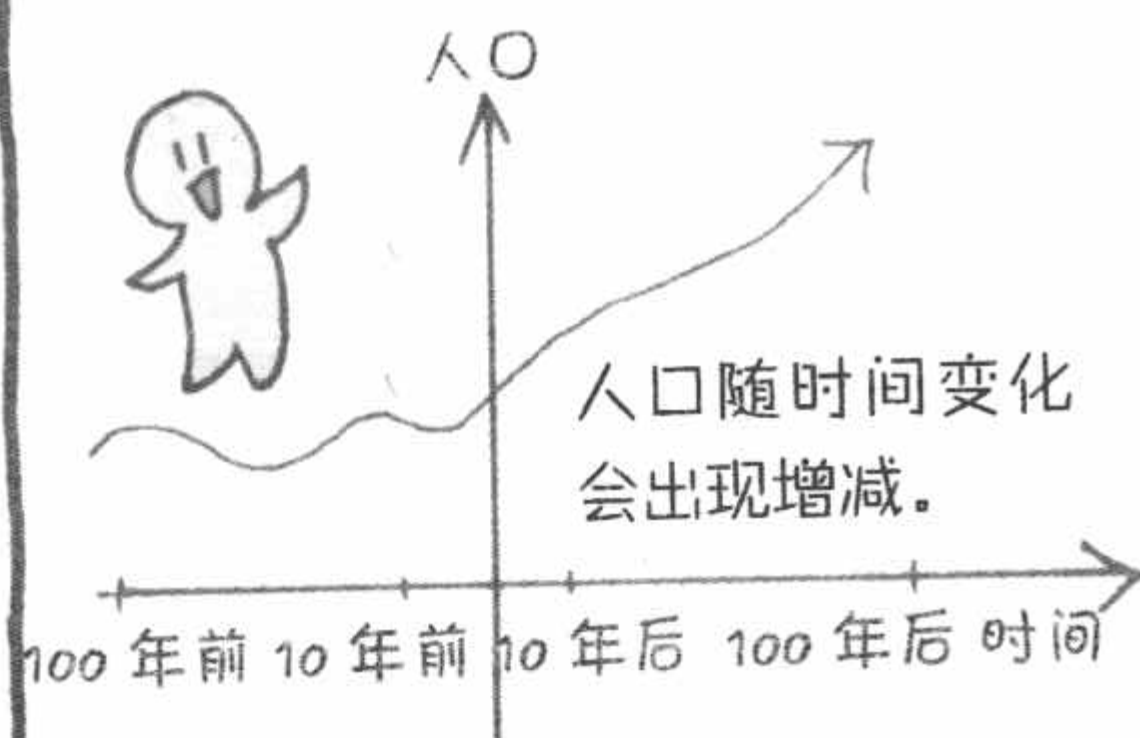
“常”就是通常的“常”，也就是不发生改变的意思。

都是些新词，好难呀。

突然出现了一个“常数”，是什么呀？

对函数来说，只有研究变化的数值（叫做“变数”）才有意义。

常数永远不会发生变化，研究它没什么意思。



c 可以是1、可以是2、可以是100，也可以是1亿。总之就是指不变的数值。

c 是CONSTANT的首字母，因此我们把不变的数
量称为“常数”
并用 c 表示。

46 什么是原函数



我们再介绍一个新概念。

计算 $\int f(x)dx$ 时，只要找到求导后得 $f(x)$ 的函数即可，那就是答案。计算 $\int f(x)dx$ 叫做“求不定积分”。

我们学过，对 $f(x)$ 求导得到形式是 $f'(x)$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$ 的函数叫做导函数。现在我们介绍一下对 $f(x)$ 求不定积分得到的函数的表示方式及名称。

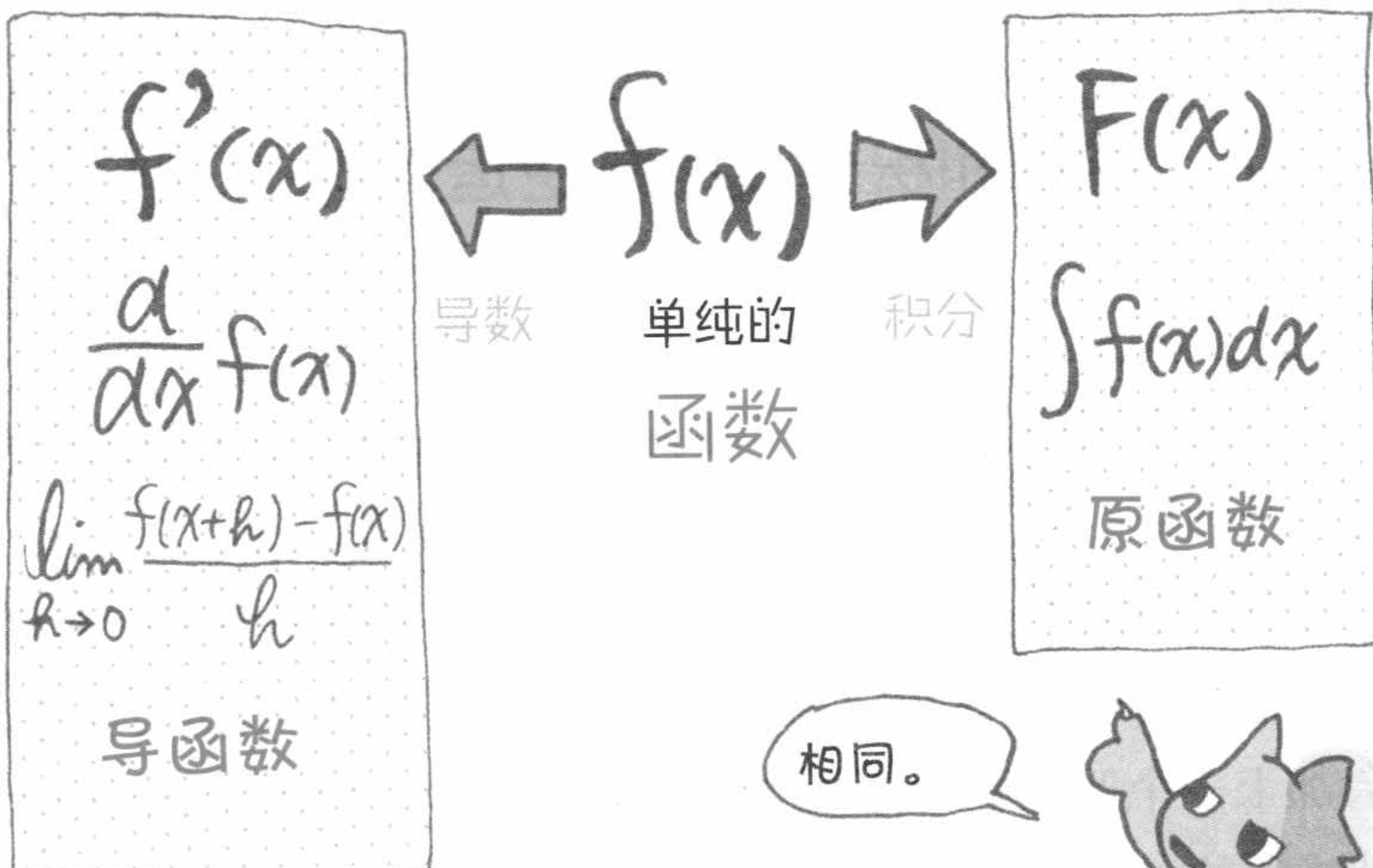
对 $f(x)$ 求不定积分得到的函数叫做原函数。

原函数的表示方式可以写成 $\int f(x)dx$ ，也可以用大写的 f ，即写成 $F(x)$ 。

“计算求导后得 $f(x)$ 的函数”、“求 $f(x)$ 的不定积分”、“求 $f(x)$ 的原函数”，这三种表达方式意思相同。

为了让大家熟悉掌握专业词汇，今后我会使用“原函数”一词进行说明。

原函数这一概念是针对不定积分而存在的，因此其中包含积分常数。不过 $F(x)$ 究竟是表示“全部原函数”还是表示“原函数中的某个特定函数”，多数情况下表述得都比较模糊，还需要根据上下文判断。



此外还有很多叫法。

例如，如果 $y = f(x) = x$ ，则

原函数为 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$

加 C 。

但下面这种情况比较多。

$F(x) = \frac{1}{2}x^2$

不加 C 。

一般不加 C 。

47 导数和积分真的是逆运算吗



所谓逆运算就是像加减、乘除这样的关系。某个数加 2 减 2 仍得原来的数，某个数乘以 2 除以 2 结果也不会改变。

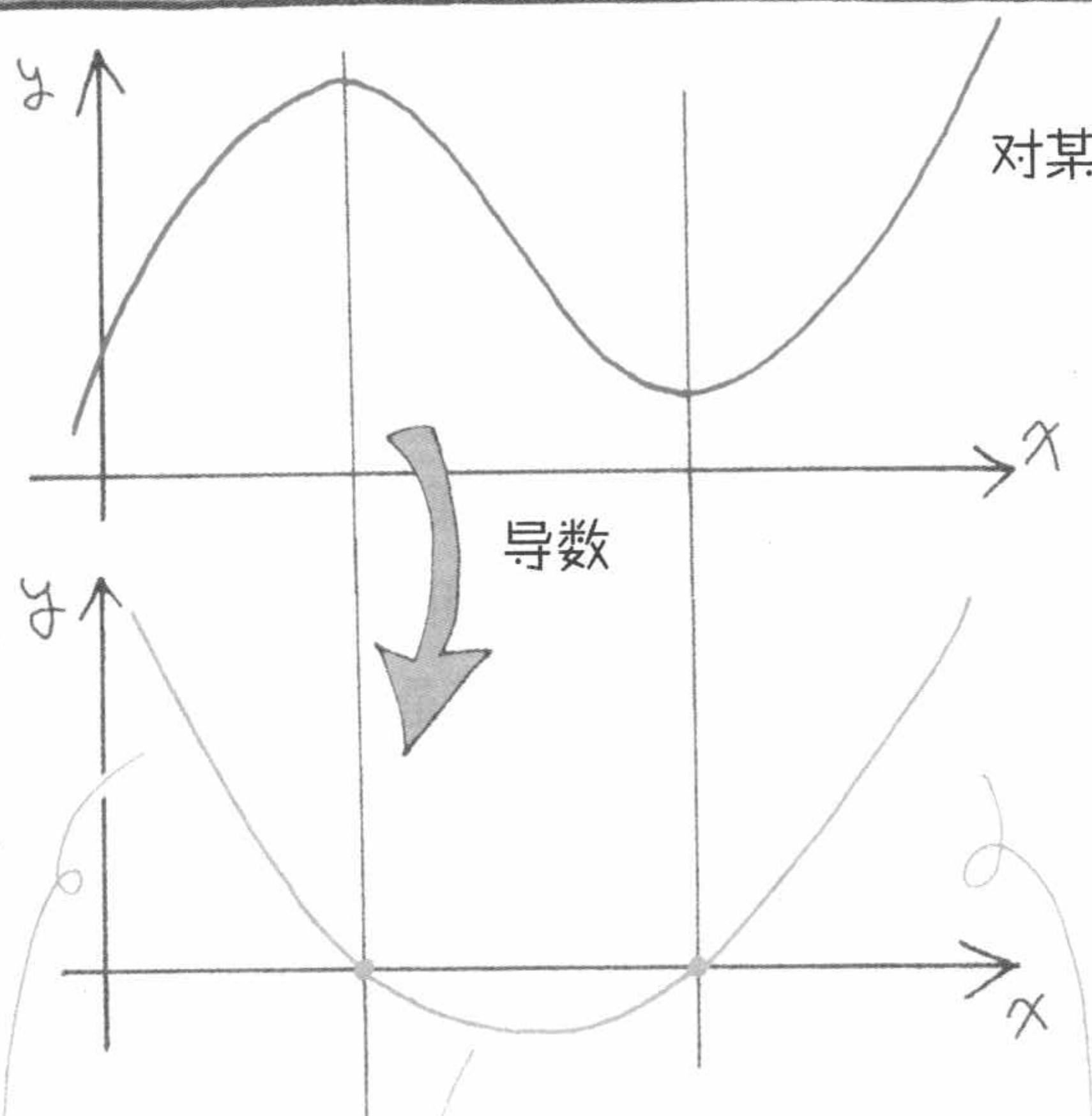
虽说积分和导数是逆运算，但是对求导后的函数进行积分运算并不会得到原来的函数。求导时常数项会被消去，而进行积分时，却会加上一个叫做积分常数的不确定的数字。被消除的常数项是无法求得的。

你可能会觉得这算不上是“逆运算”。

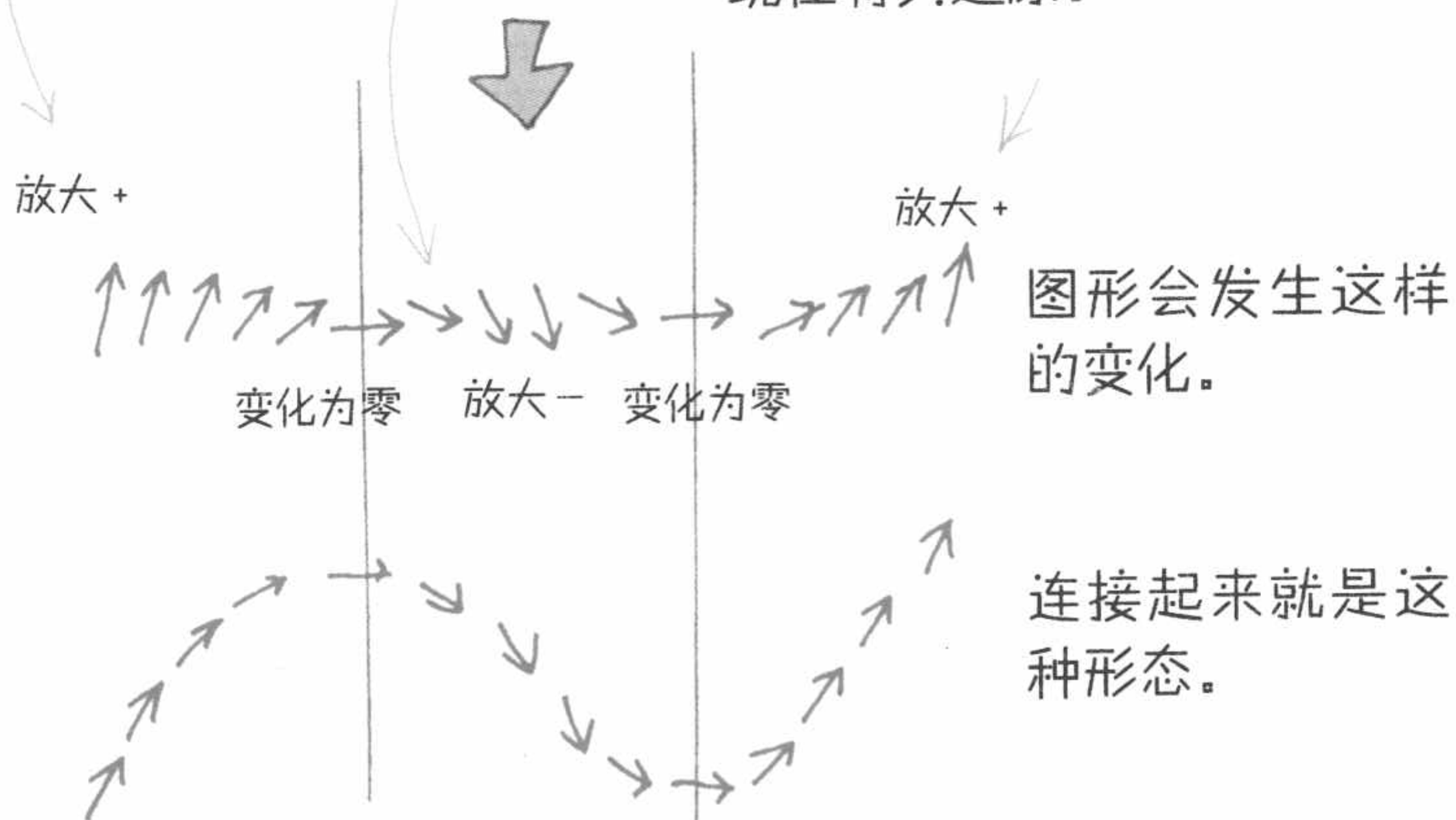
要说逆运算原本的定义是什么，这有些复杂，这里就不详细说明了。但认为只要是逆运算就必然能完全“返回”是不对的。

为了理解这个问题，我们先介绍一点关于“积分含义”的知识。

我们已经知道有积分常数 C ，
那么 C 究竟是什么呢？



下面的图形表示“变化”，
现在将其还原。



48 积分是变化的集合



如果导数表示变化，那么积分就表示变化的集合。

对某函数求导，得到的是该函数的变化状况。所谓变化，以汽车为例，就是踩踏油门和刹车的程度，以及控制方向盘的情况。

假设汽车上安装有某种装置可以记录踩油门和踩刹车的程度，以及控制方向盘的情况。那么，如果我们用它记录下了某人的驾驶状况，那此后其他人按照该记录驾驶是不是必然会到达相同的地方？

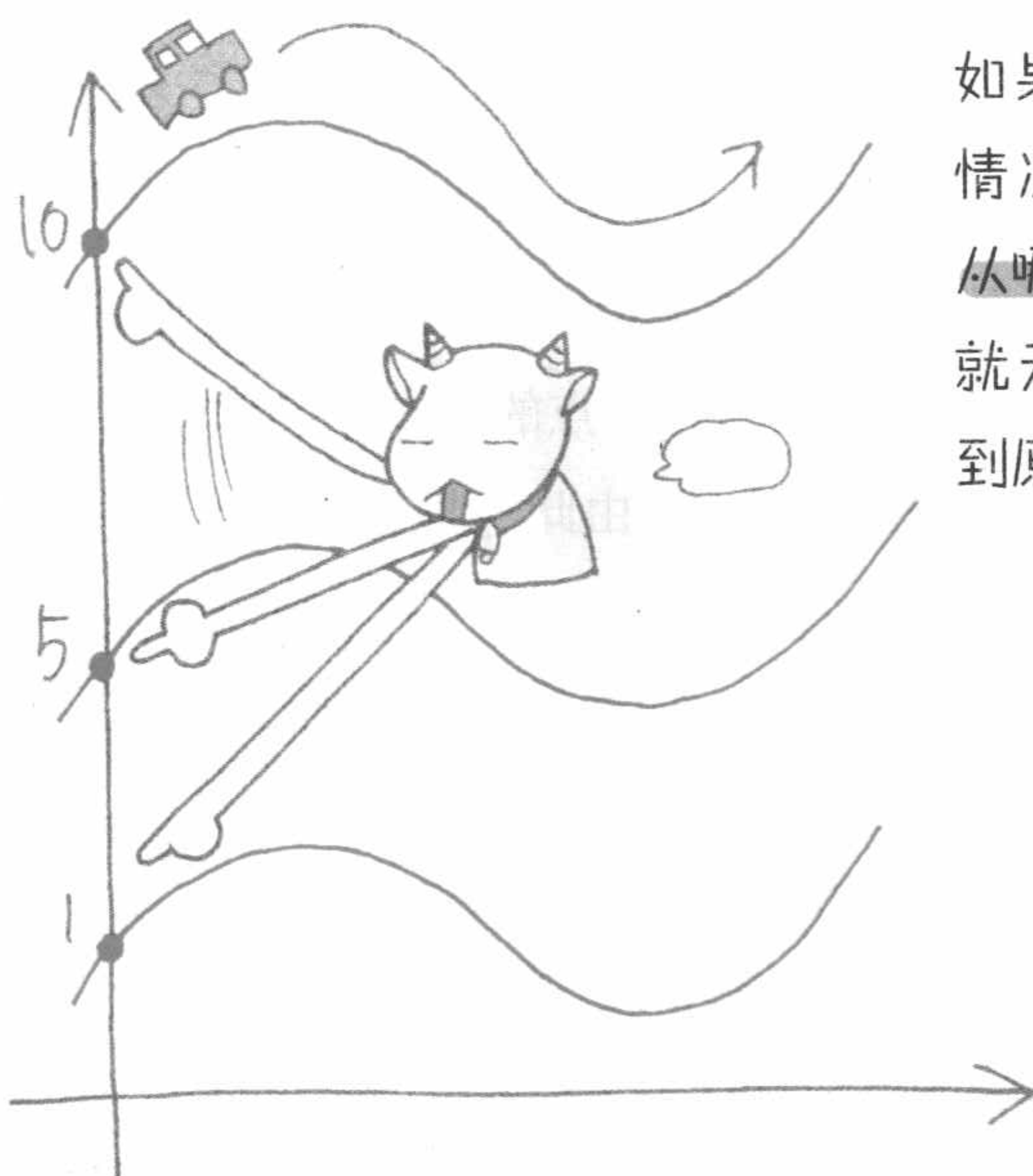
答案是——如果通过同样的操作向着相同方向行驶，就会达到相同的地方。但是如果其中某一项出现偏差，就无法到达同一地点了。

这样说就明白了吧？

与上面的例子相同，对求导的函数通过积分求其原函数，也需要初始条件。

假设起始位置和起始方向统称为初始条件，则

求导函数 + 初始条件 \longleftrightarrow 基础函数



如果只知道变化情况，却不知道从哪儿开始，就无法完全返回到原来的函数。

也就是说，
原来的函数



导数算式（斜率）。

起始点的信息。

有这两个条件就能计算出对应的原函数。



实际上，不是“起始点”也可以，只要知道图形上的任意一点就能复原原来的图形。

49 从不定积分到定积分



前面提到的初始条件，严格来说并非必须是“起始点”。不必拘泥于起始点，只要有图形上任意一点的信息就足够了。

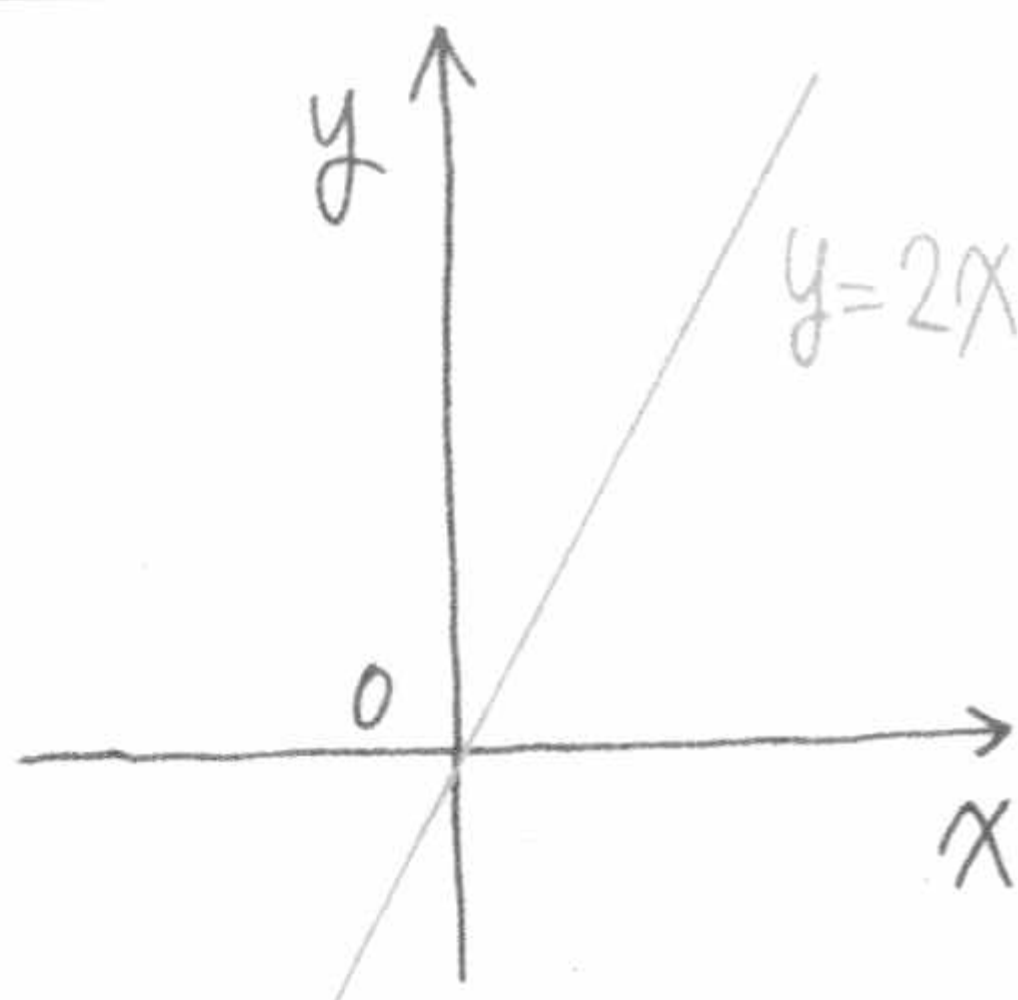
例如，如果有终点的信息，由此逆推也能再现原来的图形。虽然它不具有初始的意思，但“初始条件”中却包含了这种状况。因此很少有要求求不定积分的。那么这又是为什么呢？这是因为含有 C 的积分根本无法在实际中使用。

我们想知道的是原来的函数。

因此，即便计算中暂时出现了 C ，最终还是会将其带入具体数值或巧妙地消掉。

如果有 C ，只要知道原函数通过哪一点，就可以知道 C 是多少。

例如，求导数 $y = 2x$ 的原函数，原函数的图形经过点 $(1, 1)$ 。在解该问题时， $2x$ 的不定积分为 $x^2 + C$ ，因为该函数经过点 $(1, 1)$ ，所以求得 $C = 0$ 。这是明确给出初始条件的例子。

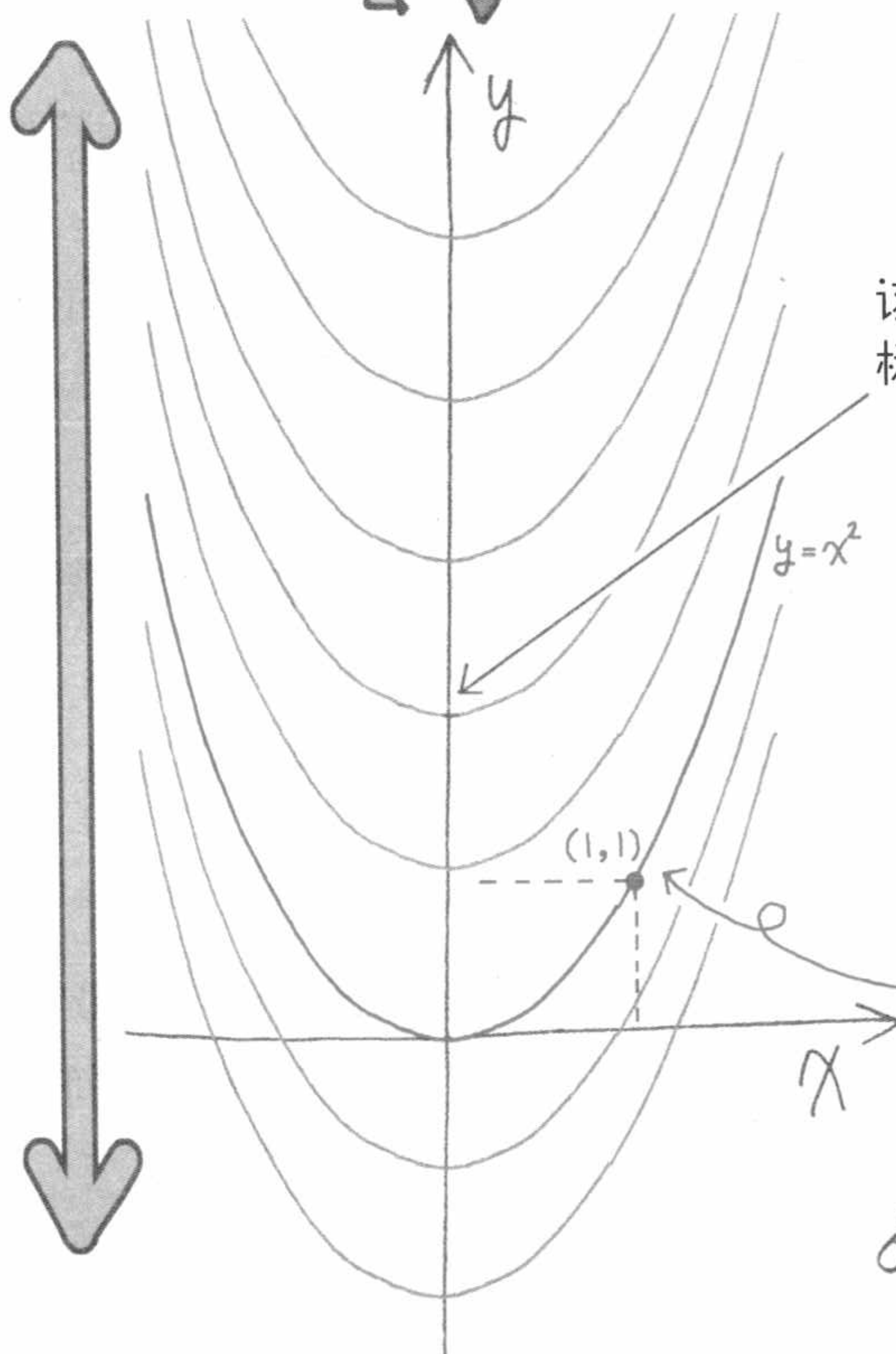


斜率为 $y = 2x$ 的图形。

积分

求导

这些都是。



该点在 y 轴上的坐标就是 C 。

这个图形经过点 $(1, 1)$ 。



50 有区间范围的积分



定积分是有区间范围的积分，下面我们来看一下它的写法。

$$\text{不定积分: } \int f(x) dx$$

$$\text{定积分: } \int_a^b f(x) dx$$

比较二者，定积分的积分号的上下都有字母，这表示“从何处到何处”的范围，因此被称为定积分。

这是新的规则——“从何处起”在下，“到何处止”在上。因此 \int_a^b 的范围就是从 a 到 b 。

不定积分和定积分看起来相似，其实存在相当大的差异。首先，不定积分是之前我们介绍的“求导得到 $f(x)$ 的函数”。假设原函数写成 $F(x)$ ，则 $F(x)$ 就是“……+ C (C 为积分常数)”。

定积分和不定积分相比多了一项运算。该运算就是

$$F(x) \Big|_a^b$$

又出现了新的写法，它表示 $F(b) - F(a)$ 。因为很多情况下需要在同一个函数中引入两个参数，进行减法运算，所以该符号应运而生。

例如，假设有一个表示当天股价的函数 $k(x)$ ，“ $k(x) \Big|_{\text{昨天}}^{\text{今天}}$ ”意思是 $[k(\text{今天}) - k(\text{昨天})]$ 。那 $3x \Big|_2^7$ 就是表示 $[3 \times 7 - 3 \times 2]$ 。

那么，它有什么
用呢？

不管是 1 还是 100，
都没有关系。

终于出现常数了。
不过在实际中不
会用到。

把它向前推进一步就是定积分。

到此为止，说“导数和积分互为逆运算”
只是一个游戏规则，

下面才
是实际
应用，



这个又
大又蠢
的 \int 是什
么？

这个是乘法运算。

$f(x)dx$

这个表示范围？

下面用文字解释
一下符号的意思。

假设 $f(x)$ 的不定积分为 $F(x)$ ，则结合上述示例，定积分表示为

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

将 a, b 带入该式，进行减法运算。如果 $F(x) = 3x + 771$ ，结果如何？

$$F(x) \Big|_a^b = (3b + 771) - (3a + 771) = 3b - 3a$$

由此可见：

1. $F(x)$ 的常数项会全部消掉。
2. 定积分的结果不是“函数”而是“常数”。

首先我们先来看看第一点，这是件非常好的事情。

虽然我们设定 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的不定积分，但不定积分总会带着积分常数，而在定积分中，无论这个常数是什么，都会在减法运算中被消掉。因此在定积分中，无需去考虑积分常数这个麻烦的东西。

其次我们来看看第二点。 x 的函数 $f(x)$ 中的 $f(a)$ 是将 a 带入 $f(x)$ 得到的结果。 $f(a)$ 就是把 $f(x)$ 中的 x 都换成 a 。

也就是说， $f(a)$ 是个常数。可见定积分的结果通常都是“常数”。

对 $f(x)$ 求积分的算式，我表示为：

$$\int f(x) dx = \underline{F(x)}$$

大写字母 F 。

这是约定俗成的。



$$\int_a^b f(x) dx$$

这样，就可以赋予积分范围。

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{F(b) - F(a)}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ - 3 \\ \hline 7 \end{array}$$

这个就像 $10 - 3 = 7$ 一样，

上面减下面。

就像列减法竖式一样。

51 不定积分、定积分和面积



$\int f(x)dx$ 的书写形式虽然是“将 $f(x)$ 夹在 \int 和 dx 之间”，但实际上它表示将 $f(x) \times dx$ 进行 \int (积分)，即 $\int(f(x) \times dx)$ ，这一点在前面已经讲过了。

\int 是从“summation (合计)”的开头字母 s 变形而来的符号，这里表示 $f(x) \times dx$ ，是合计之意。那么 $f(x) \times dx$ 是什么呢？

用图形来说， $f(x)$ 就是“与 x 对应的 y 轴坐标”。 dx 在导数部分已经讲过，表示沿 x 轴的最小增量。

还记得吗？前面曾提到过，积分是为计算面积而发明的。因此 $f(x) \times dx$ 就是面积。

准确一点说，就是宽度极小的细长条状的长方形的面积，该面积的合计就是 $f(x) \times dx$ 。如果加上范围，就表示 x 在 a 到 b 范围内，函数 $f(x)$ 与 x 轴间的面积。

说到这里，我想大家会有以下疑问：流畅的曲线图形怎么会是长方形的面积和呢？ $f(x) \times dx$ 若是长方形的面积，就应该是带直角的图形，但对象图形却是流畅的曲线，好奇怪呀。

这涉及到对极限的认识。可以将每个曲线图视为宽度极限小的长方形的集合。你可能会问：“还有这样的思考方式吗？”其实，极限概念极大促进了微积分学的进步。

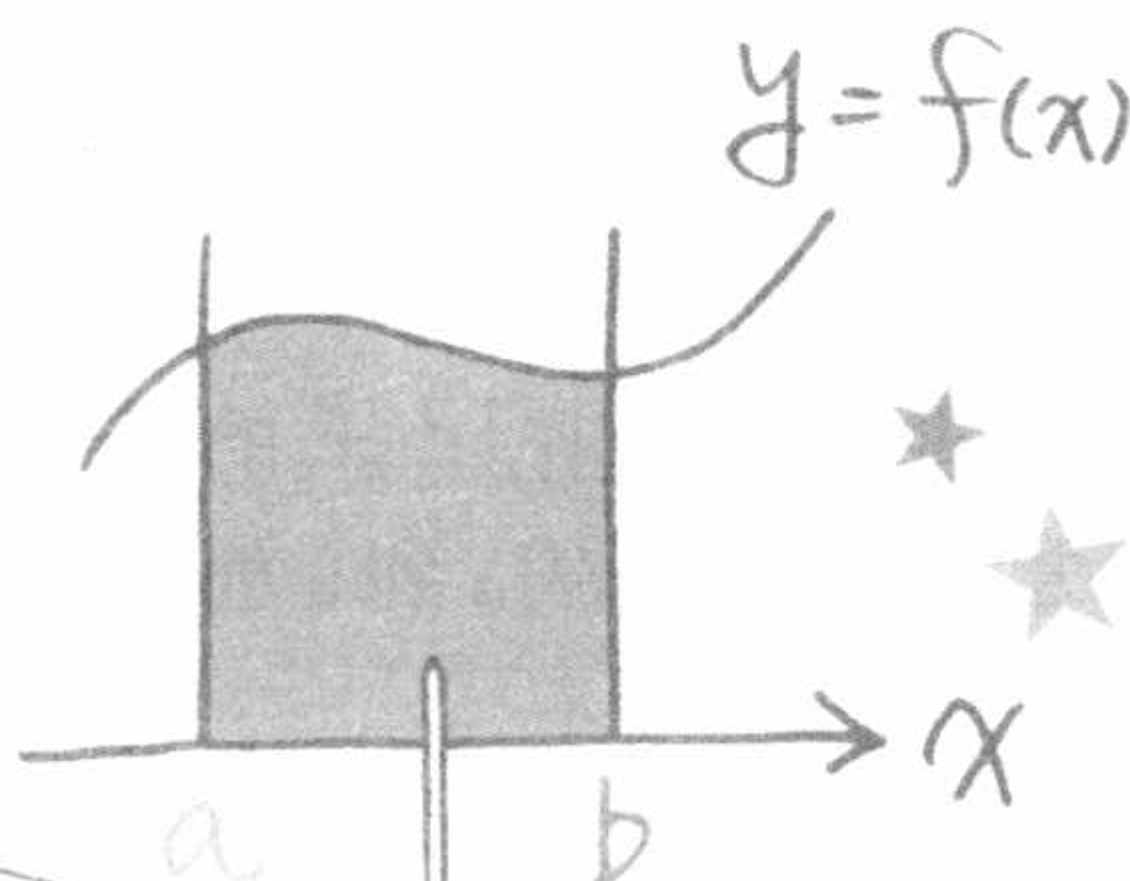
这种思考方式的争论曾持续了很久才得以解决。而我们这些现代人没有必要重新经历前人经历的一切，只要取其精华，直接为己所用就可以了。

下面我透露点超值的内幕信息。

这个实际上……

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx =$$



啊?

就是面积。

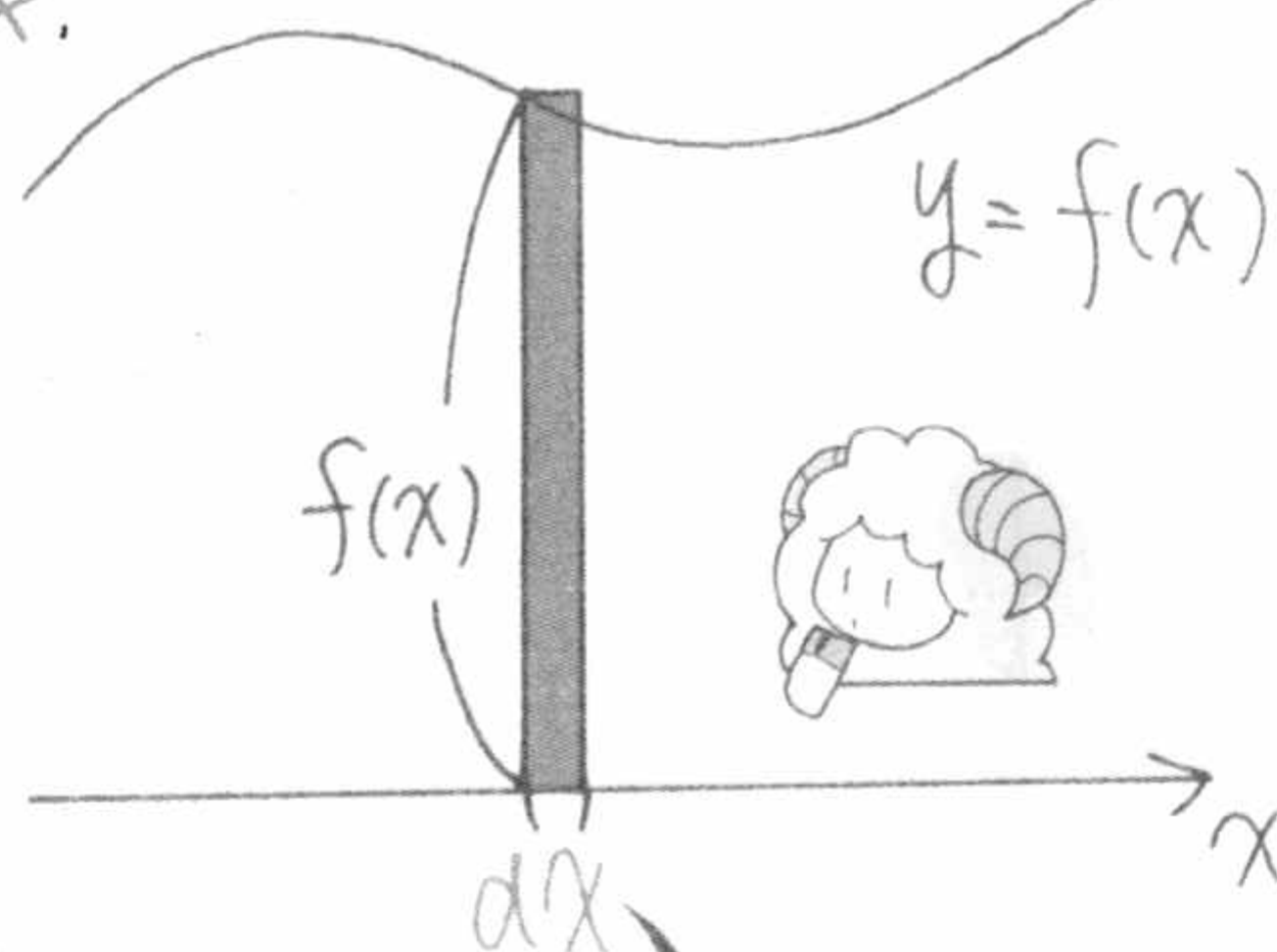
$$\int f(x) dx$$

用这个夹着的就是积分！
这是一个固定的规则。

$$f(x) \times dx \text{ 的意思。}$$

假设长方形的
宽度为 dx .

制作出一个
细长条状的
长方形。



\int 是 summation 之意,
即合计、加起来的意思。
 \int_a^b 是从 a 到 b 加
起来。

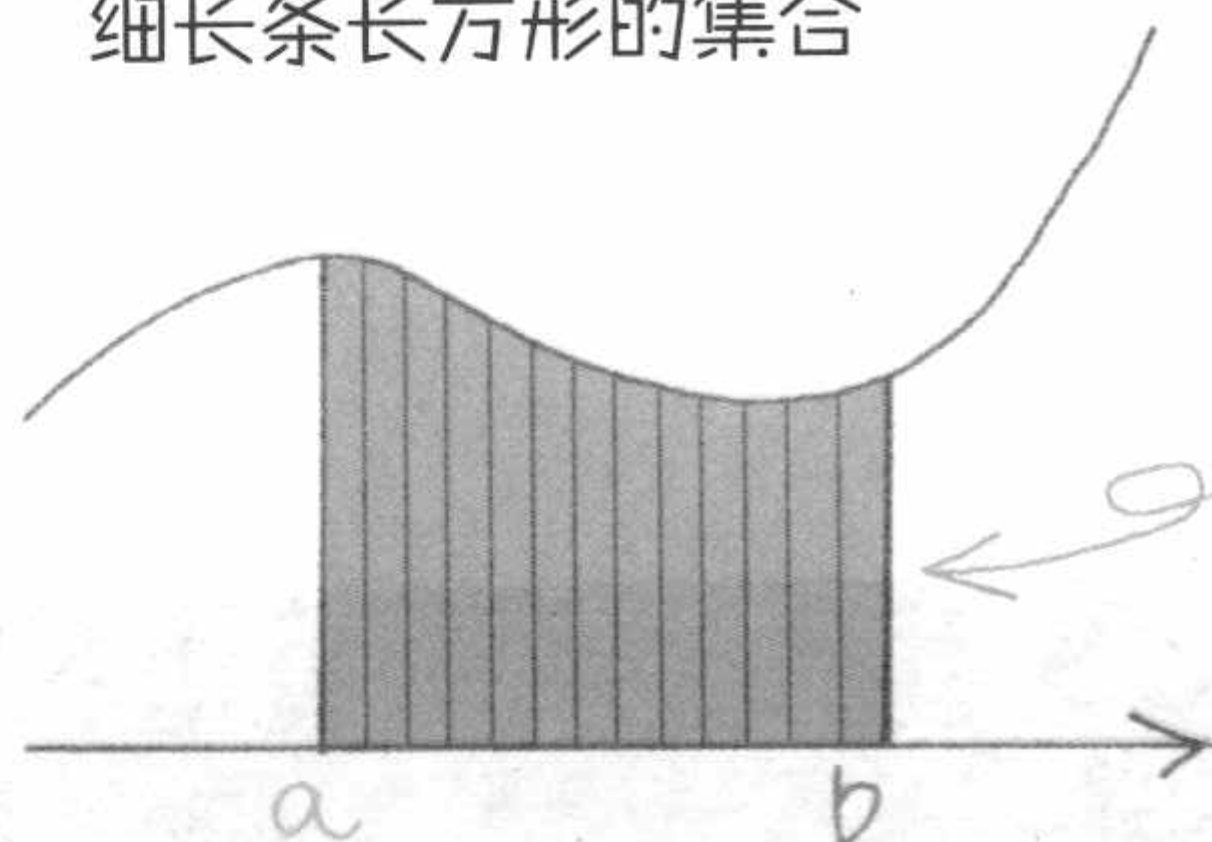
则 $f(x) \times dx$ 就是这个
长方形的面积。

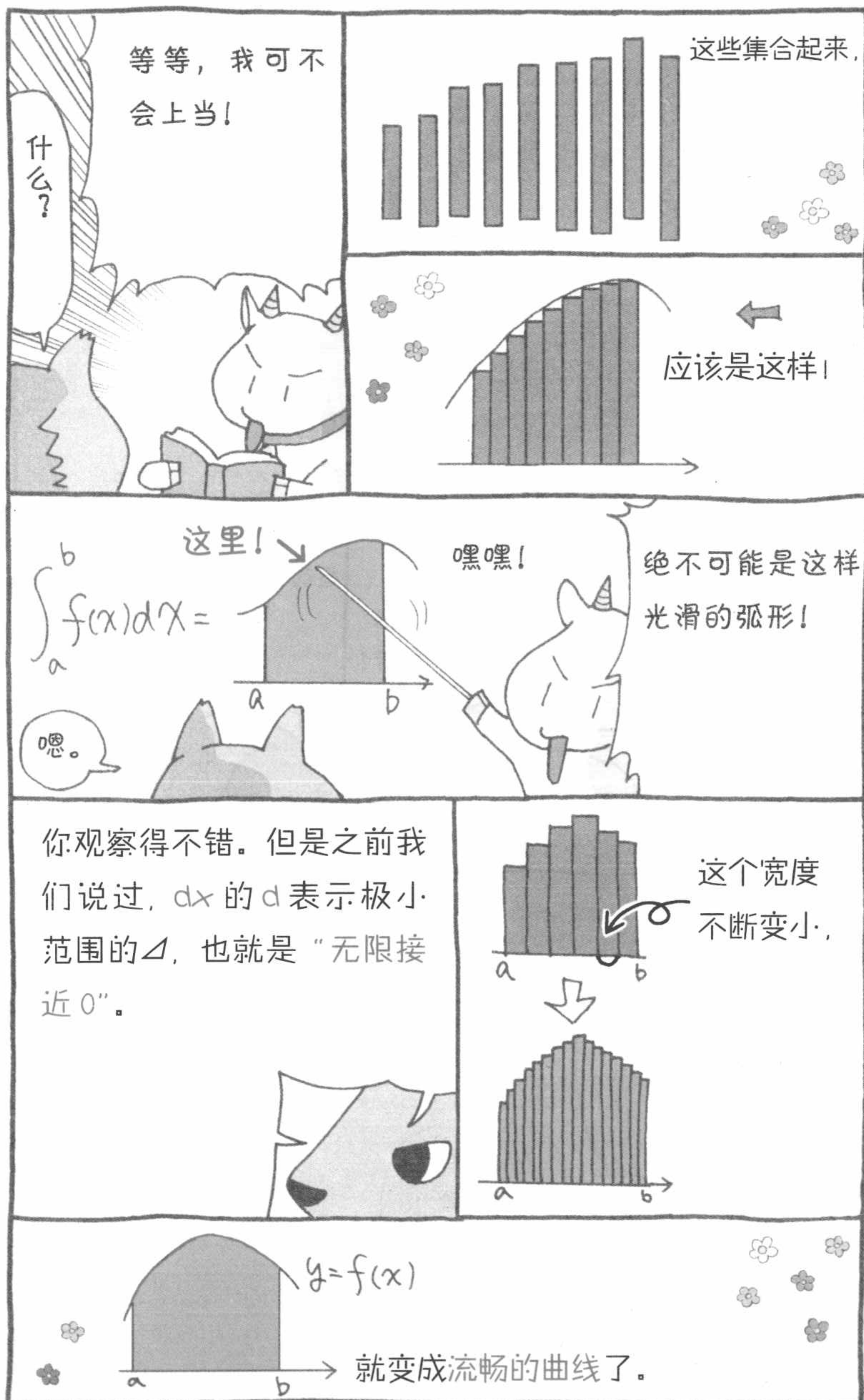


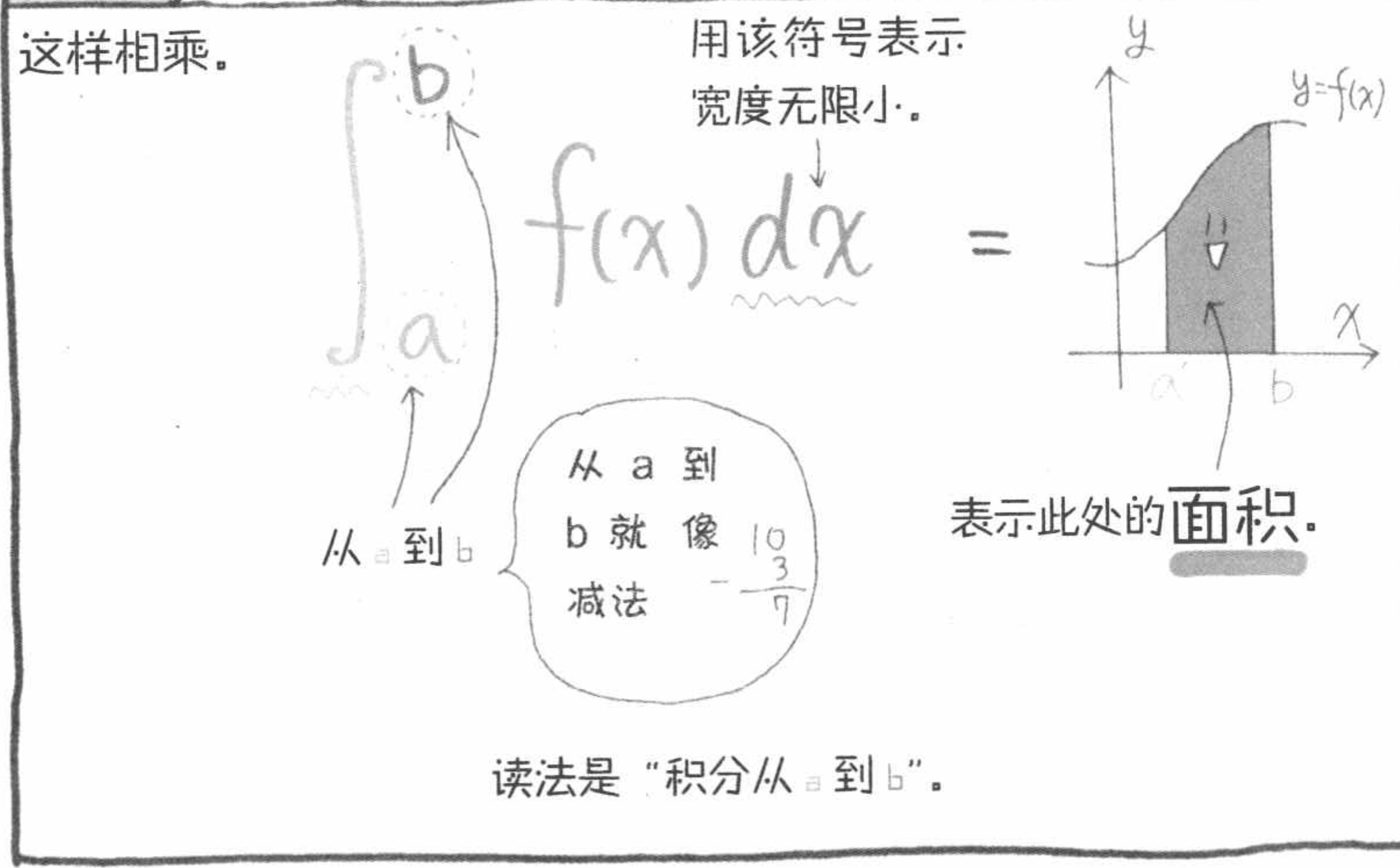
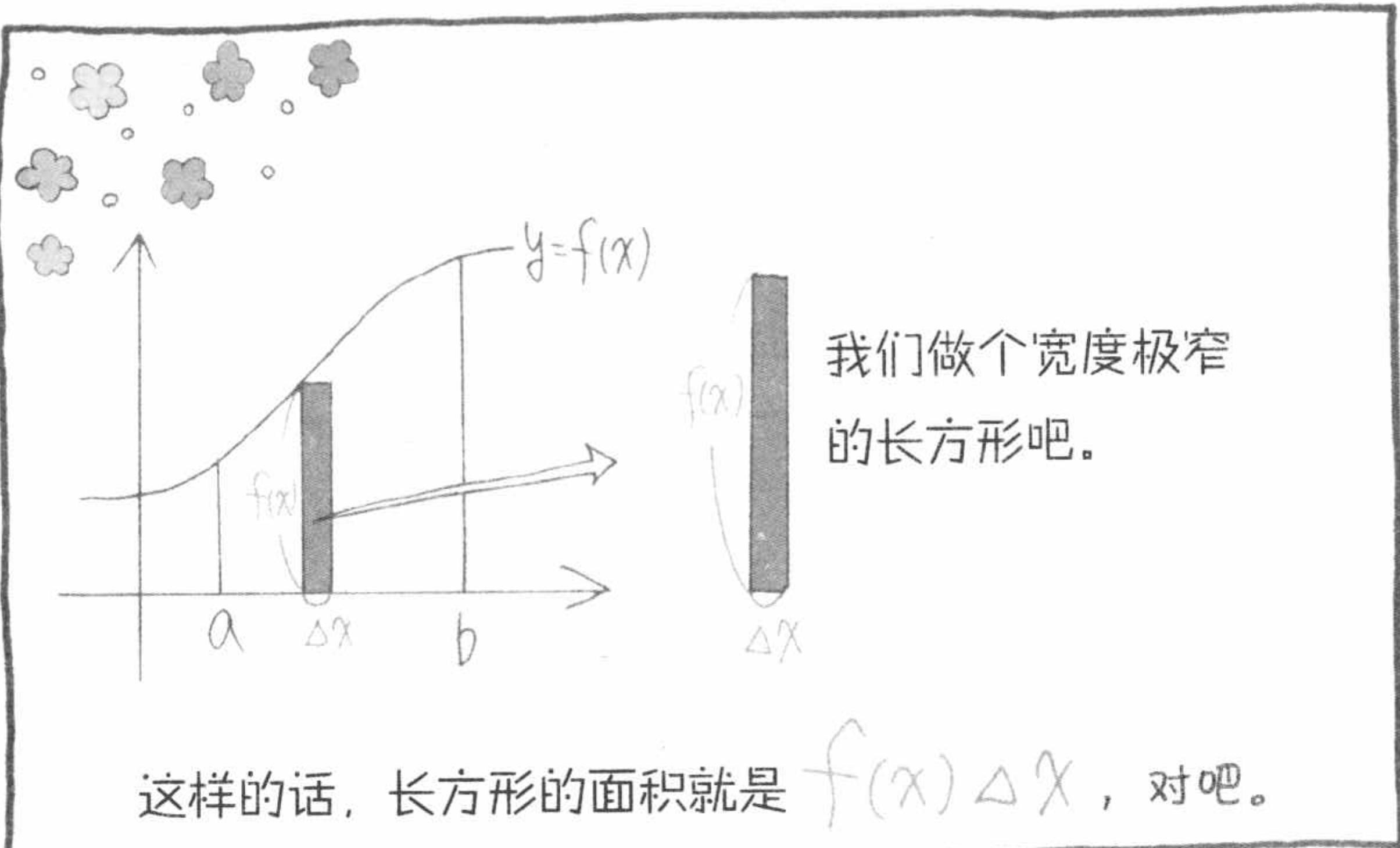
$a \rightarrow b$ 加起来。

细长条长方形的集合

从 a 到 b 加起来, 就是
表示此处的面积, 对吧?







52 dx 的宽度



dx 的意思,在导数部分中已经解释过,表示 x 轴上的极小增量。这一点很重要,我反复强调了多次,这里的 d 是表示“极小”意思的符号。或者也可以这样想,它与 $-x$ 的“-”和 \sqrt{x} 的“ $\sqrt{}$ ”类似。

但容易混淆的是,这里的 d 就是普通的字母“ d ”,因此将 d 作为符号使用确实容易造成误会,虽然习惯后不会搞错,但初学者的确容易混淆。

此外, Δx 也用来表示“ x 轴上自变量的极小增幅”。从意思上看,两者都可使用。要说有什么区别的话,其实有这样一条规则:

1. dx 与 f 搭配使用
2. Δx 不与 f 搭配使用

在计算 Δx 的合计时,会使用 Σ 符号。这是希腊文中与 f 相对应的字母。总之,意思与 f 相同。

Δx 和 dx 的最大差别在于是否引入了极限概念,不过两者基本上是相同的。



这个既不是变量也不是常量，
是表示“极小”意义的符号。
如同 + 和 - 。

太深奥了，
不明白！

啊——

确实
如此。

不论怎么看，
都是一样的字
母呀。

\times 和 γ 是变量， \angle 是
常量，为什么只有 d
是符号呢？

是约定俗成的，但不能太多。这
些奇怪的规定过多且难以讲解的
话，会加重人们对数学的厌烦心
理。

数学算式中这类单
独的规定很多。

53 分割求面积的方法



这里我们先说些家常话。

求面积为什么非要将 $f(x) \times dx$ 细分后再求和呢？使用小学时就已烂熟于心的公式就能求出长方形、圆形和三角形的面积。

我们曾说过，从很早以前开始，计算土地面积就是一件非常重要的事情。而要计算面积的土地并不总是简单的长方形或三角形，例如琵琶湖（日本第一大淡水湖）。

这时，就出现了一种求面积的方法——网格法。即在图形上盖一张透明的网格纸，数出与图形重叠的网格的数量，这样就能求得面积。

那半个格怎么数？数不了吧？

这就需要我们巧妙地设定规则——半格的数量另数，看几个半格能拼成一个整格。

要想求出更精确的面积，可以将网格不断缩小。网格越小半格越少。最终（极限状态下）半格会完全消失。当然，网格越小越难计数，这就需要努力和坚持。而且现代人还有电脑这一强有力的伙伴。

还有一个计算面积的方法是“取尽法”。该方法是通过依次去除已知面积来求总面积。这种方法的最初设想与网格法相同，也是在不规则图形中填满细小的长方形。

积分式中出现的 $f(x) \times dx$ 更接近网格法的构想。网格法中使用正方形，将其边长不断缩小至极限……将这个正方形的一组边

向两侧拉伸，这样，图形就不是正方形的集合，而变成细长条状长方形的集合。

也就是说，我们对原图形进行条形分割，将条形分割的长方形的长设为 $f(x)$ ，将宽设为 dx 。

现在我们仅是在一个方向（一元）进行分割。复杂情况下，还有二元积分等。如球形表面积就是二元积分。

球体表面的展开图很难制作（为了将地球的球面用平面图表示出来，地图绘制者绞尽脑汁使用了麦卡托投影图法等各种方法）。而一元积分通常能够绘制简单的展开图。

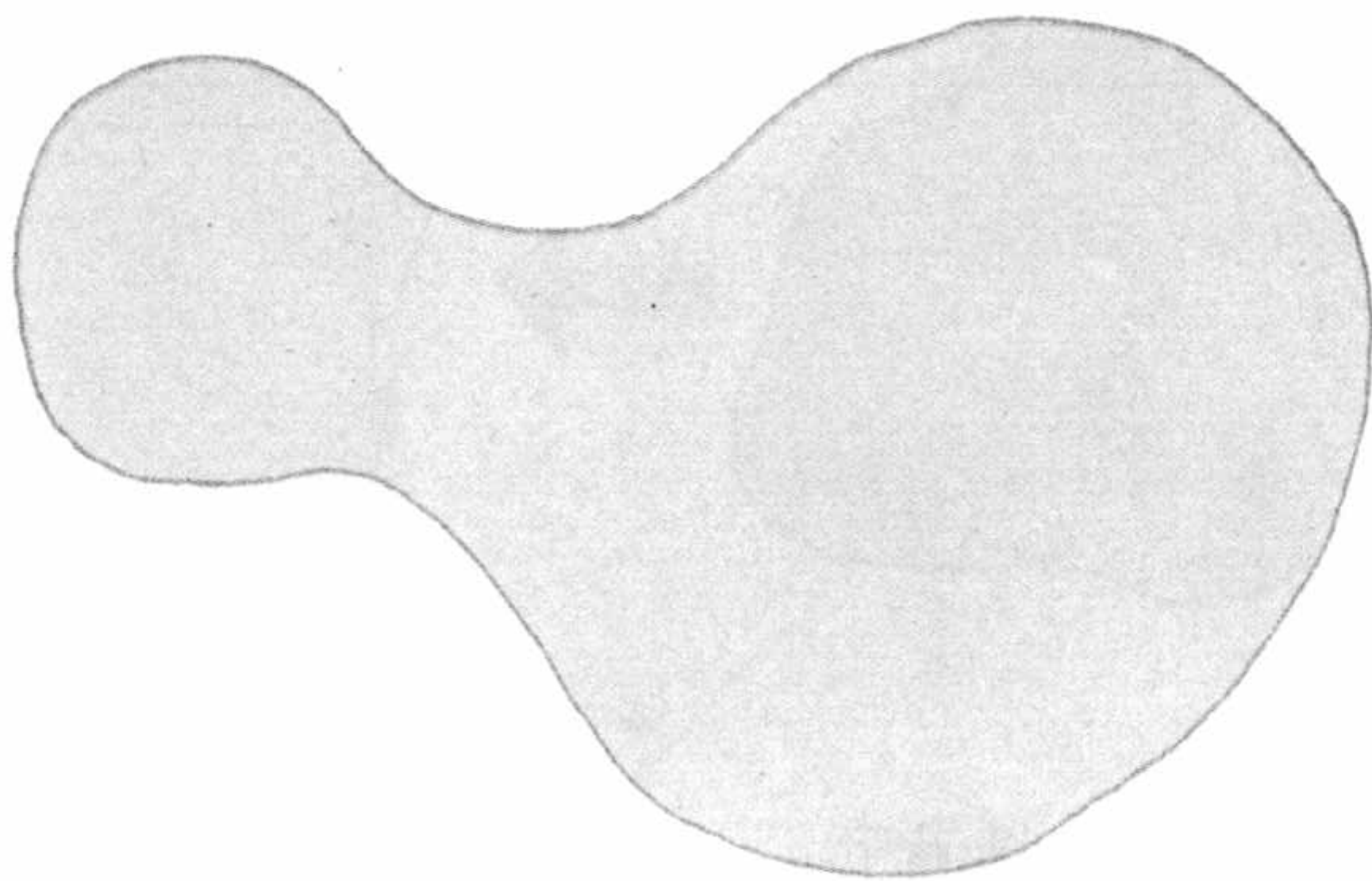
二元积分也叫做二重积分，会在大学接触到。此外还有三重积分。

不过，只要有智慧和勇气，使用一元积分也可以所向披靡。本书仅介绍一元积分。



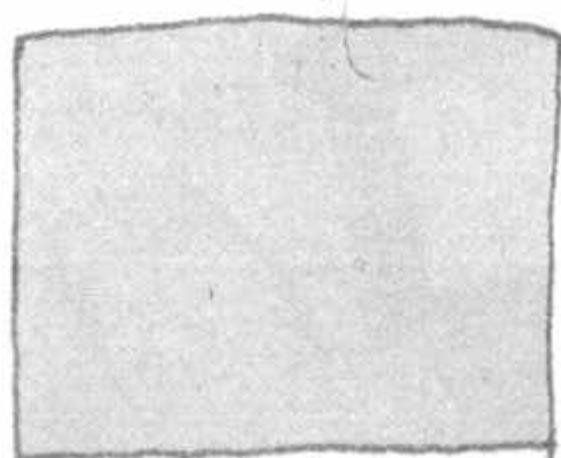
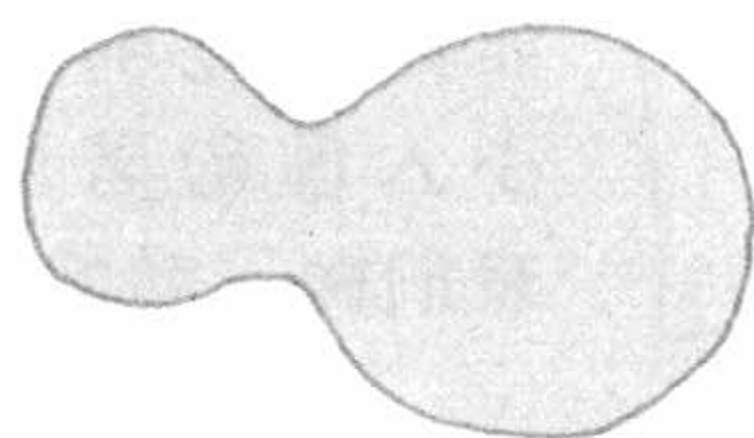
表示面积！

求该图形的面积……

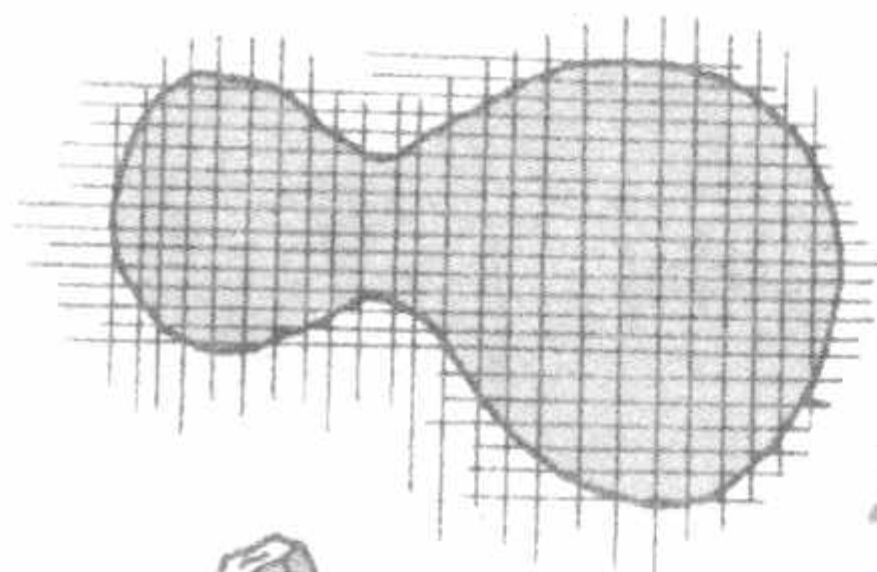
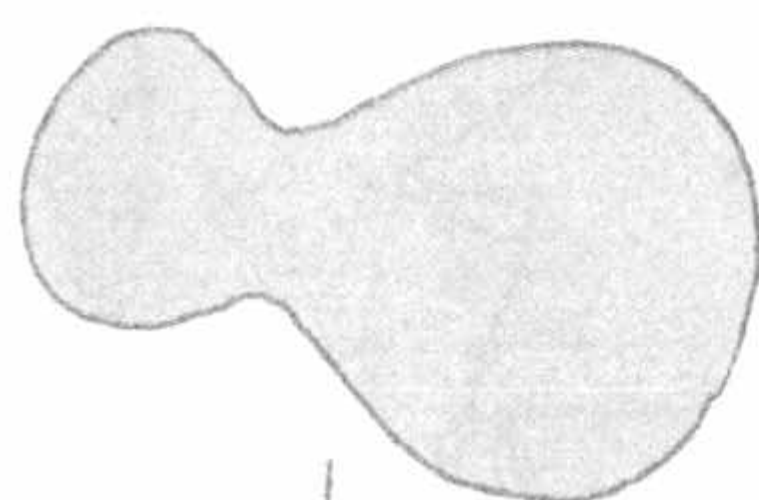


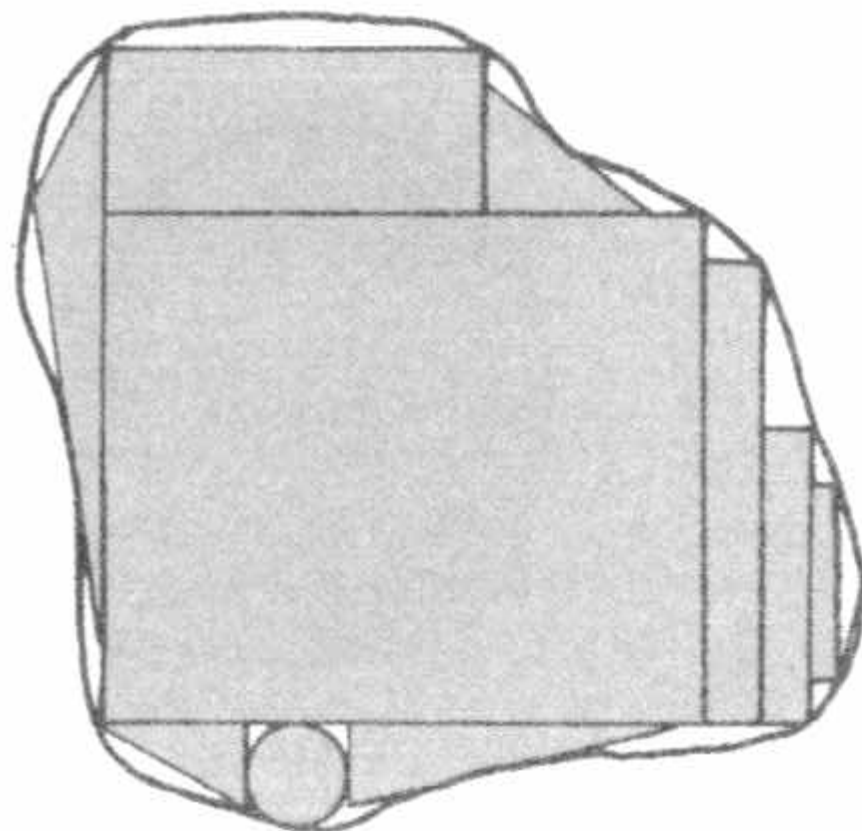
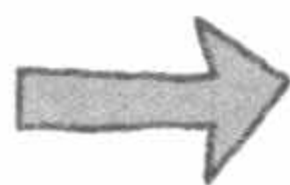
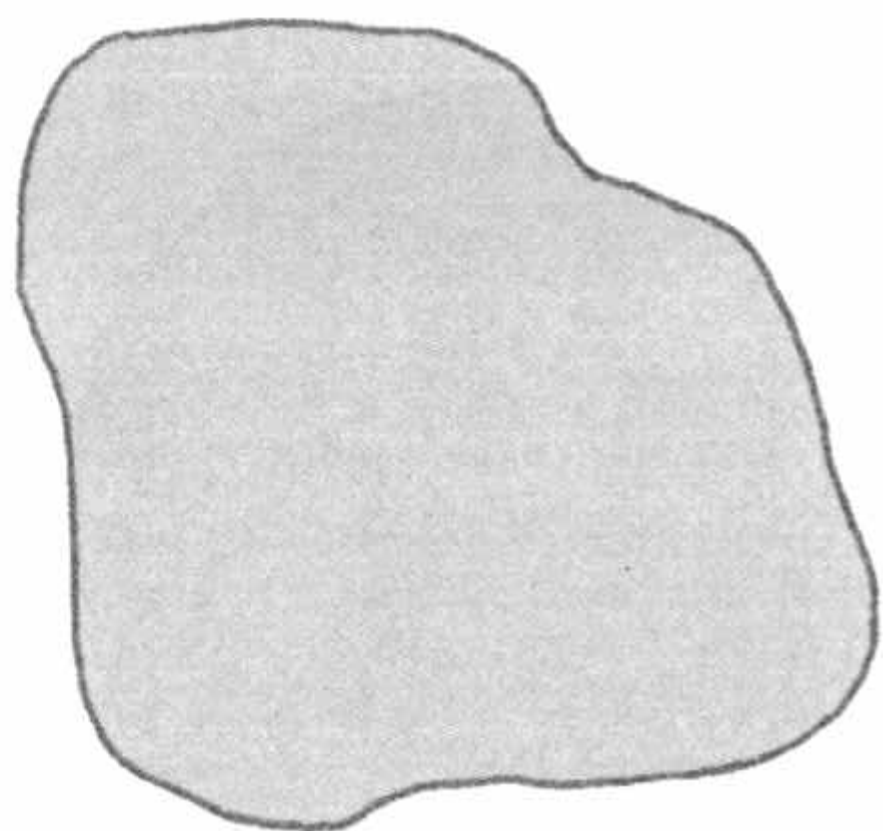
①使用魔法变成长方形。

②把它切成小块，让小人国的居民来数一数。



是这样？





没有缝隙,完全填满了。



但逐个计算这些图形的面积可真是考验。

是呀!

嗯。

要是睡觉的时候
小人国的居民帮
我们做了就好了。

哇! 哇!

看,我把现
代的小人国
居民带来了。



54 定积分的不同求解方法



定积分的定义表示为

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

此处的 $F(x)$ 是原函数。原函数就是“求导后得到 $f(x)$ 的函数”，也就是导数的逆运算，这一点我们已经讲过。

现在我们谈谈有关面积的求法。在牛顿、莱布尼兹生活的时代之前，人们主要使用区分求积法来计算面积，就是前面说的特别麻烦的那个。喂，别跑……

我曾反复说过，发明积分原本是出于求面积的需要。而需求是发明之母。

当然，三角形或圆形等有既定面积公式的图形，不必特意使用积分，积分主要是针对无法简单求解的复杂图形。

前面我们曾说过，求复杂图形面积有两种计算方法，即网格法和取尽法。但两者对细微处的处理都很麻烦。例如网格法中对半格的处理方法，如果能有一定的规则就好了；而取尽法中取不尽的细节部位，只能靠努力和耐心用更细小的图形去填补。

说明到此为止，因为再深究下去也无益。下面我要明确阐述一下面积的求法。虽然这些方法有些粗略，但能大致求面积也很不错。计算大致的面积叫做估算。

其实估算能力可以说是防止犯错的重要本领。



55 将要求的面积夹在中间



前面我们说了，可以大致估算面积。假设要大致估算一个椭圆形的面积，可以在椭圆外边画一个长方形，并使椭圆的面积大致比长方形小些。相反，如果在该椭圆中画一个正好的长方形，则可以使椭圆的面积大致比长方形大些。比较这两个长方形就可以得出

$$\text{小长方形面积} < \text{椭圆面积} < \text{大长方形面积}$$

在一定范围内计算出椭圆面积。

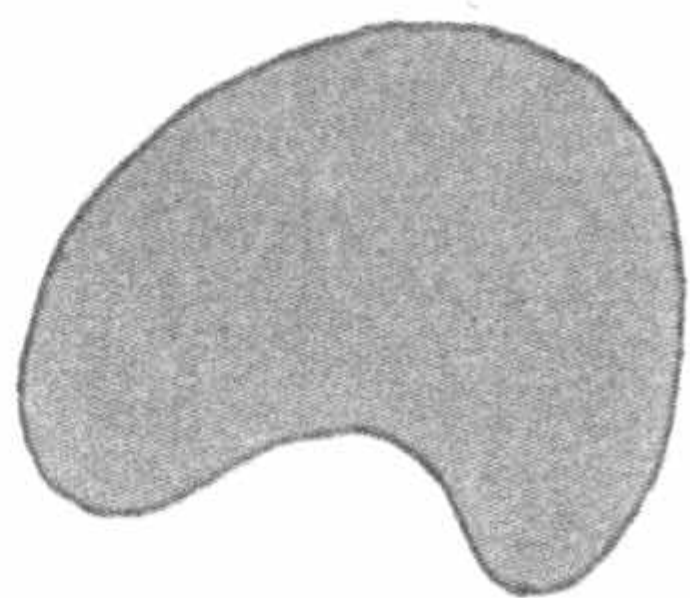
不过，用一个大长方形将不规则图形包起来，实在有些过于粗糙，因此我们尝试像图中那样用若干个长条状的长方形将原图形填满看看。注意，要尽可能接近原图的形状。如此，上述带<号的表达式就变为

$$\text{小长方形的面积和} < \text{不规则图形面积} < \text{大长方形的面积和}$$

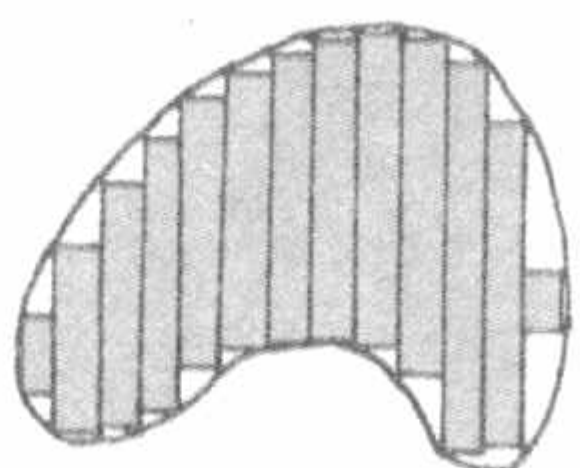
大小长方形面积之和会随长条状长方形的宽度变窄而不断接近不规则图形的面积，这就是夹击法。

即从左右两侧针对目标逐渐逼近的方法。

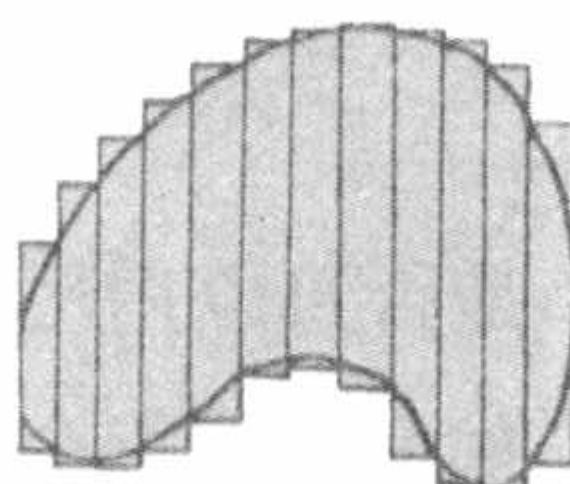
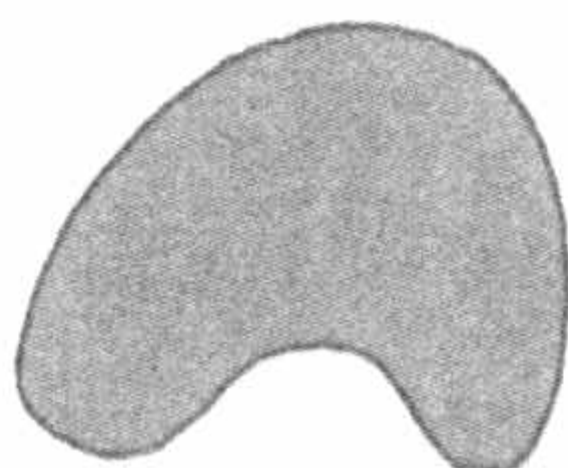
求这个图形的面积。



要多准备些这么窄的纸条。



使纸条与图形内
侧边缘相接。



使纸条与图形的
外侧边缘相接

把纸条聚集在一起。

细长条状的
长方形纸条
的集合，



方便求出面积。

数学的灵
感出现了。



如果让这些纸条尽可能变窄，
那么用它们组成的图形的面
积就会接近正确的面积。

我比20岁大，
比森光子小，
呵呵呵呵……



对不起，
请问您的
年龄……



啊

56 区分求积法 I



使用夹击法能够在一定范围内求出面积，但是这种方法有两个不足之处。这就是

1. 是否可以用范围的形式表示面积
2. 如何来求每个长方形的面积

我们先来看看第一点。说实在的，面积是不能以范围的方式表示的。否则，中小学生在考试中写“答案在 2 到 5 之间”也算正确，那可就轻松了。而这绝对是不可以的，因此我们要努力求出唯一的准确的面积。

虽然用夹击法可以求出面积的范围，但如果该范围在“1 平方厘米 $<$ 面积 $<$ 100 平方厘米”，人们可能会说：“别胡闹了。”

但是，如果范围在“1 平方厘米 $<$ 面积 $<$ 3 平方厘米”，则人们可能会说：“大概可以吧。”

也就是说，范围越小，越具有说服力。因此我们要想办法使这个范围尽量缩小。

这话似乎在哪儿听过？

没错，这里可以利用极限的思考方式。我们在学习极限时曾接触过类似的问题，当上面的例子中两侧的数值最大限度地接近，最终会与实际面积一致。

这样我们就解决了前面提到的第一个问题——用一个数值表

示面积。即只要运用极限，让小长方形的面积和与大长方形的面积和无限接近就可以了。

下面看第二个问题。如前所述，为了计算方便，我们会在不规则图形中填长方形。当图中全部填满长方形后，就能够通过长 \times 宽的方式轻松计算出长方形的面积。但这样我们必须先分别求出每个长方形的长和宽，这仍然很麻烦。

我们可以事先固定长方形的宽度，这样只需测出其中一个长方形的宽，计算因此而变得很轻松。之后只要求长度就可以了。第二个问题就可以这样解决了。

我们先总结一下本节的内容：要使用夹击法求面积，关键是运用极限和求出长度。

57 区分求积法 II



上一节我们说了要利用极限的思考方法，那么该怎么运用呢？前面我们都是针对复杂的曲线图形进行研究，这次我们研究一些简单的、教科书中常见的图形。

如第 144 页图所示，首先用 n 个长方形把曲线图形围起来。为了将曲线图形圈在其中，需要正好可以把曲线图包含在内的较大的长方形和正好嵌在曲线图中的较小的长方形。

大小长方形的长要与函数图形的高度吻合，这样，大小长方形的长度差就是紫色部分。我们再尝试将长方形的宽缩小，于是发现二者的面积差比宽度缩小前变小了。

由此可见，两种长方形的面积差随长方形的宽变小而变小。100 个长方形的面积差比 10 个长方形的面积差更小……

之后尽可能缩小长方形的宽度，将曲线图形围、嵌起来，

两种长方形的面积差要尽可能缩小，此处可以利用极限的思考方法。

现在我们考虑一下长方形的长。如前所述，假设大小长方形的两条长与图形相交于两点，则较高的点为大长方形的长，较低点为小长方形的长。

我们将长方形的宽尽可能变窄。

宽变窄后，长方形的长会发生怎样的变化呢？当宽无限小时，长方形几乎成为一条直线。按照极限的思考方法，可以认为“宽无限小 = 宽度为 0”，最终可将长方形视为一条线。

如果将长方形视为一条线，则这个长方形的长就与 $f(x)$ 的值相等。

$f(x)$ 的值是可以计算的，因此长方形的长度可求。

因为是 n 个长方形将曲线图围、嵌起来，为了将宽无限缩小，设 $n \rightarrow \infty$ ，则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \text{长方形 } 1 + \text{长方形 } 2 + \cdots + \text{长方形 } n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{长 } 1 \times \text{宽 } 1) + (\text{长 } 2 \times \text{宽 } 2) + \cdots + (\text{长 } n \times \text{宽 } n) \end{aligned}$$

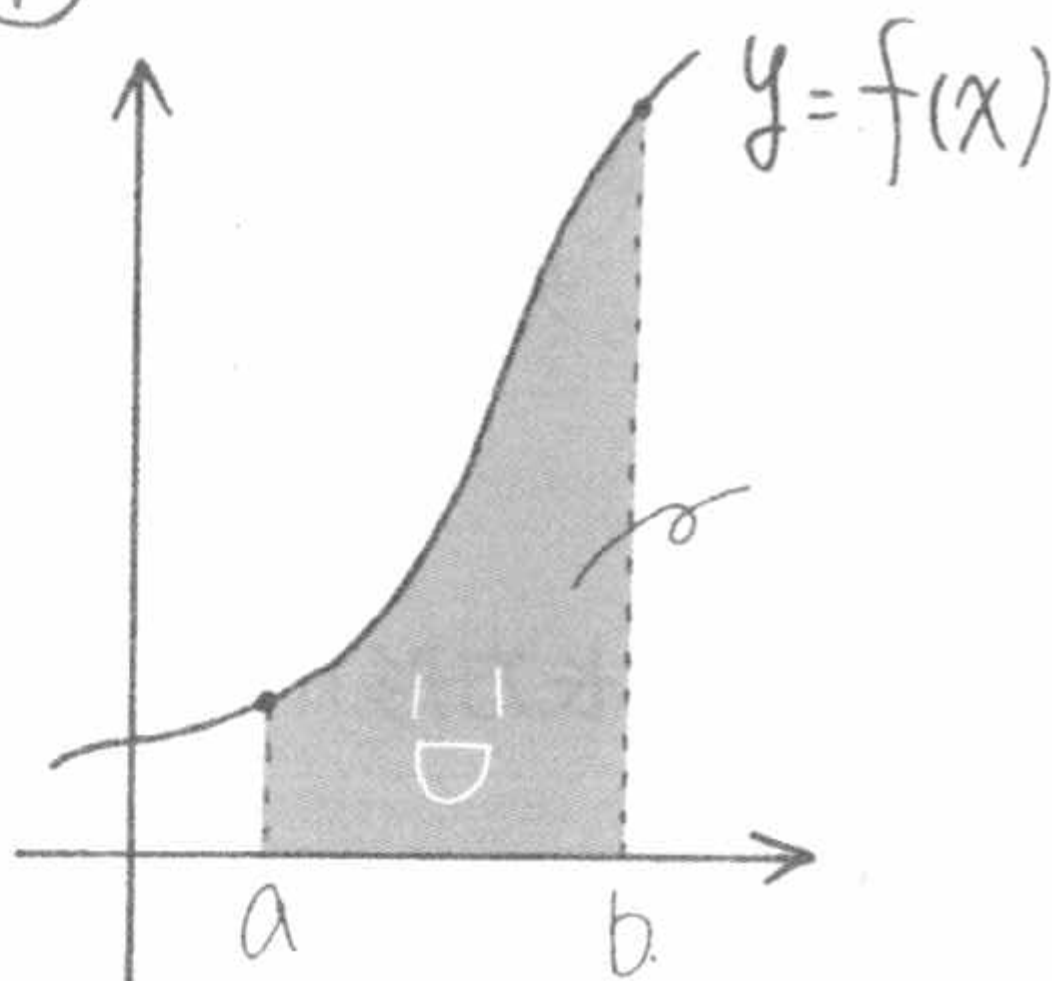
因为宽相等，所以

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{宽} \times (\text{长 } 1 + \text{长 } 2 + \cdots + \text{长 } n)$$

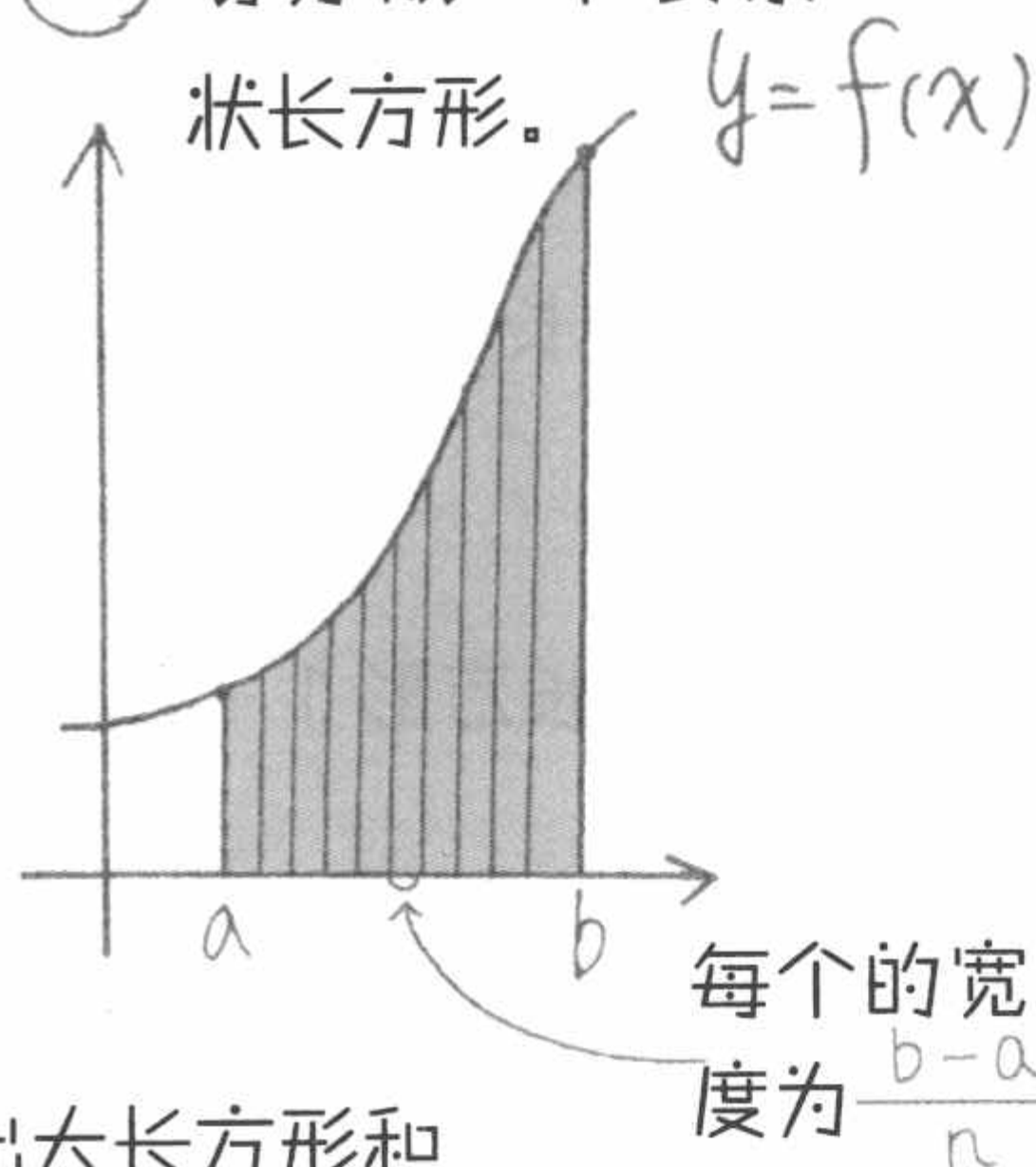
因为长方形的长等于直线的长，即各 $f(x)$ 的值，因此上面计算式可汇总为

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{宽} \times \Sigma \text{长}(n)$$

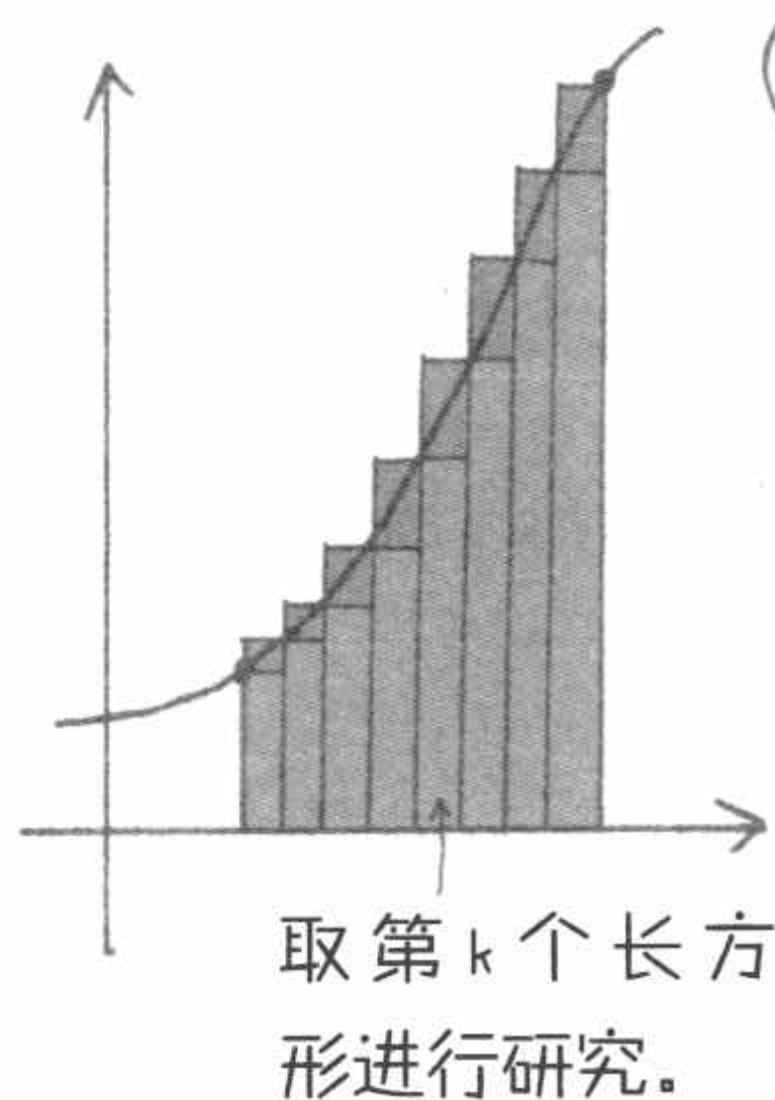
① 求此处的面积



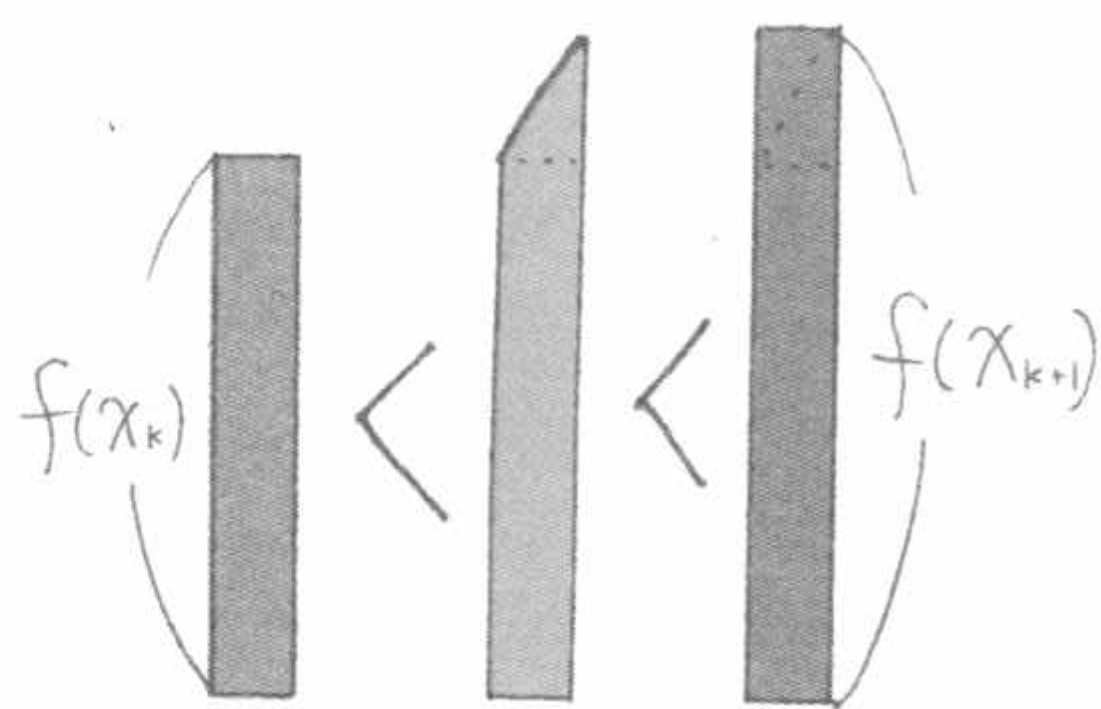
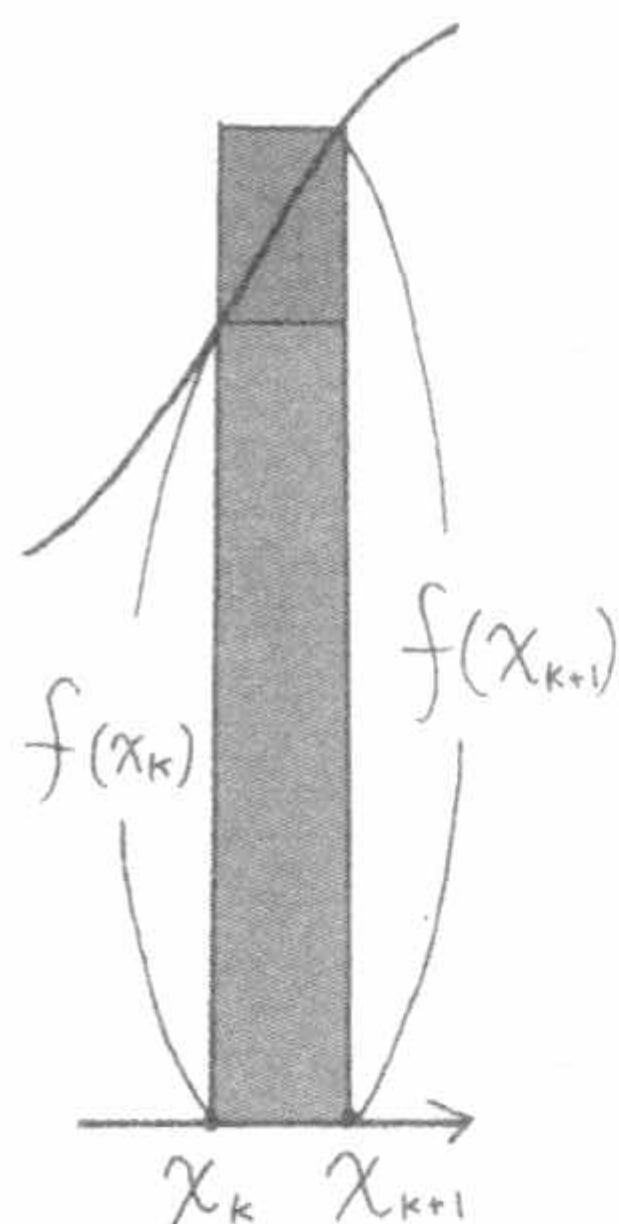
② 划分成 n 个长条



③ 画出大长方形和小长方形。



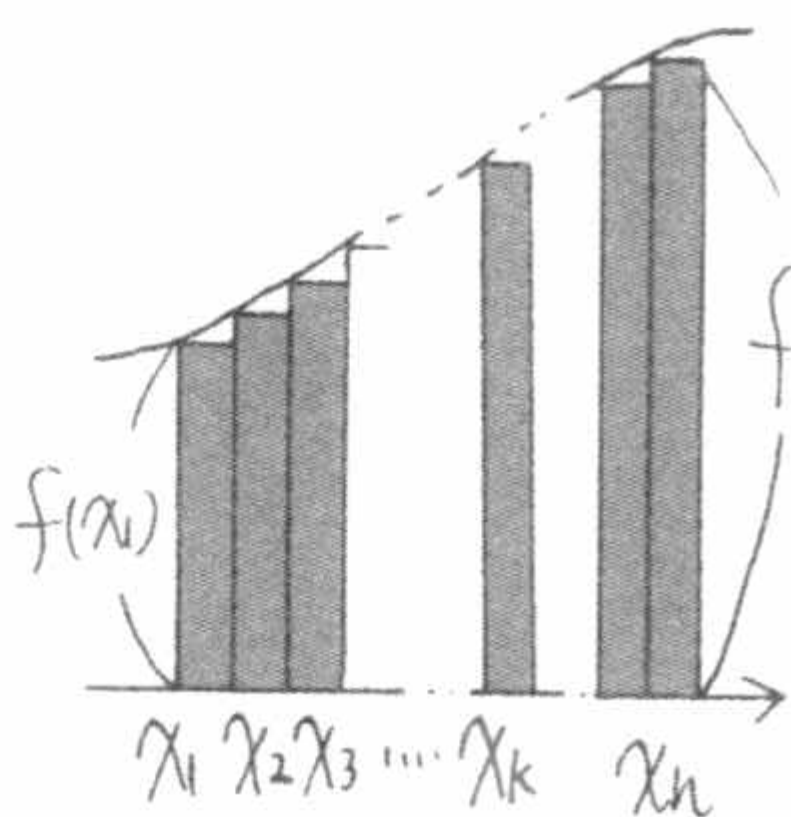
放大



长方形的宽不断变窄，则三者的差就会不断缩小。

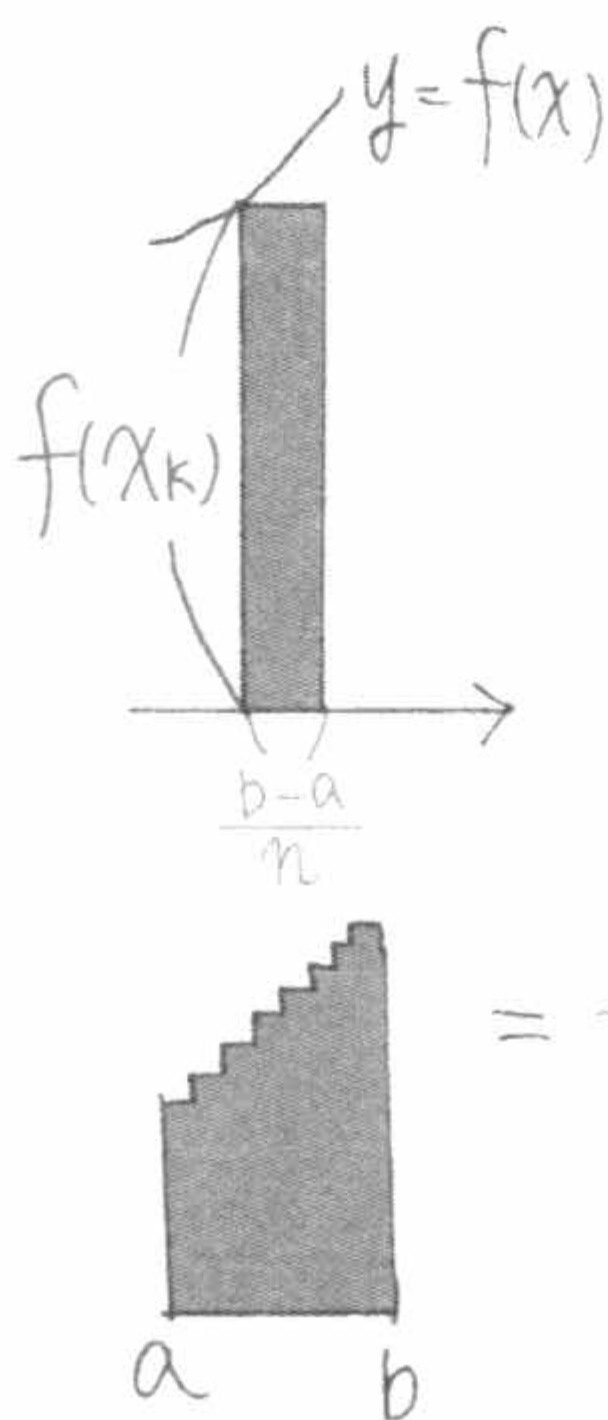
像这样分割成长方形
计算面积的方法就是
区分求积法。





假设进行 n 次分割后，长方形从左向右依次为

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_n$
我们看一下第 k 个长方形。

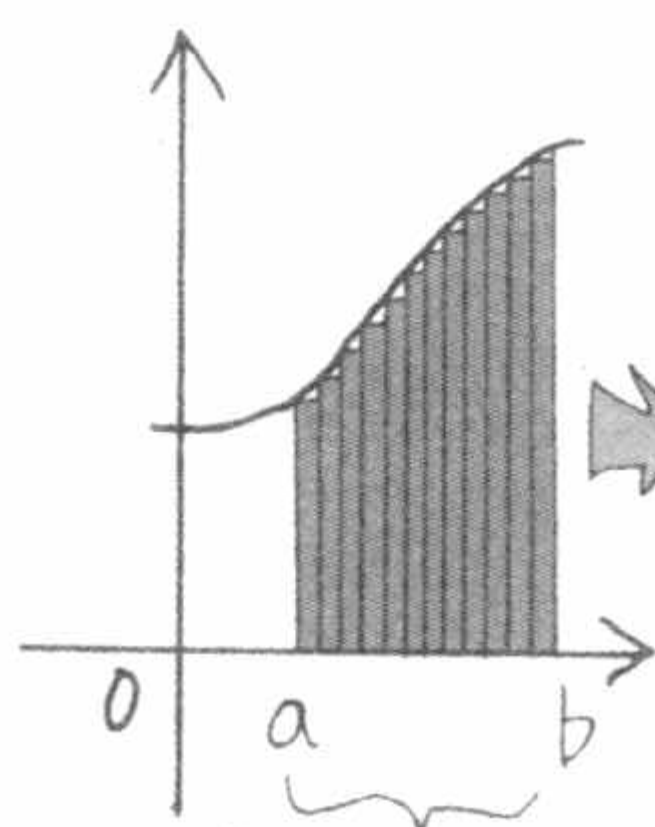


面积为 $\frac{b-a}{n} \times f(x_k)$

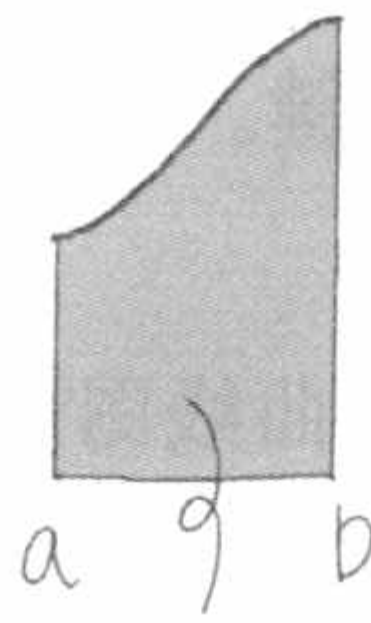
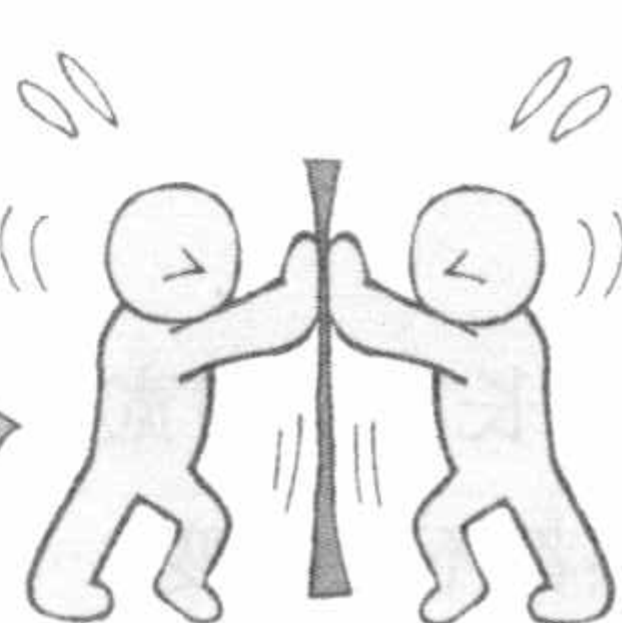
将所有的长方形全部加起来。

$$= \frac{b-a}{n} f(x_1) + \frac{b-a}{n} f(x_2) + \dots + \frac{b-a}{n} f(x_n)$$

$$= \frac{b-a}{n} \times \{ \underbrace{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)}_{\text{为从 } f(1) \text{ 到 } f(n) \text{ 的和}} \}$$



分割成 n 个长方形。



用力压扁！
就是这个图形
面积……

变成这样

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \{ f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) + \dots + f(x_n) \}$$

58 区分求积法III



前面我们尽可能不使用算式进行说明。区分求积法是求复杂图形面积的正面进攻战略，为了进一步理解该方法，下面我们用算式说明一下。

先补充一点，为了方便说明，我们假设曲线图形为单调增加（向右延伸，函数图形必然是上升趋势）。

首先，画几个长方形使其全部嵌入曲线图形内（图1）。再绘制与图1中的长方形等宽且完全涵盖住曲线图形的长方形（图2），该曲线图形的面积比图1中的长方形面积之和大，比图2中的长方形面积之和小，即

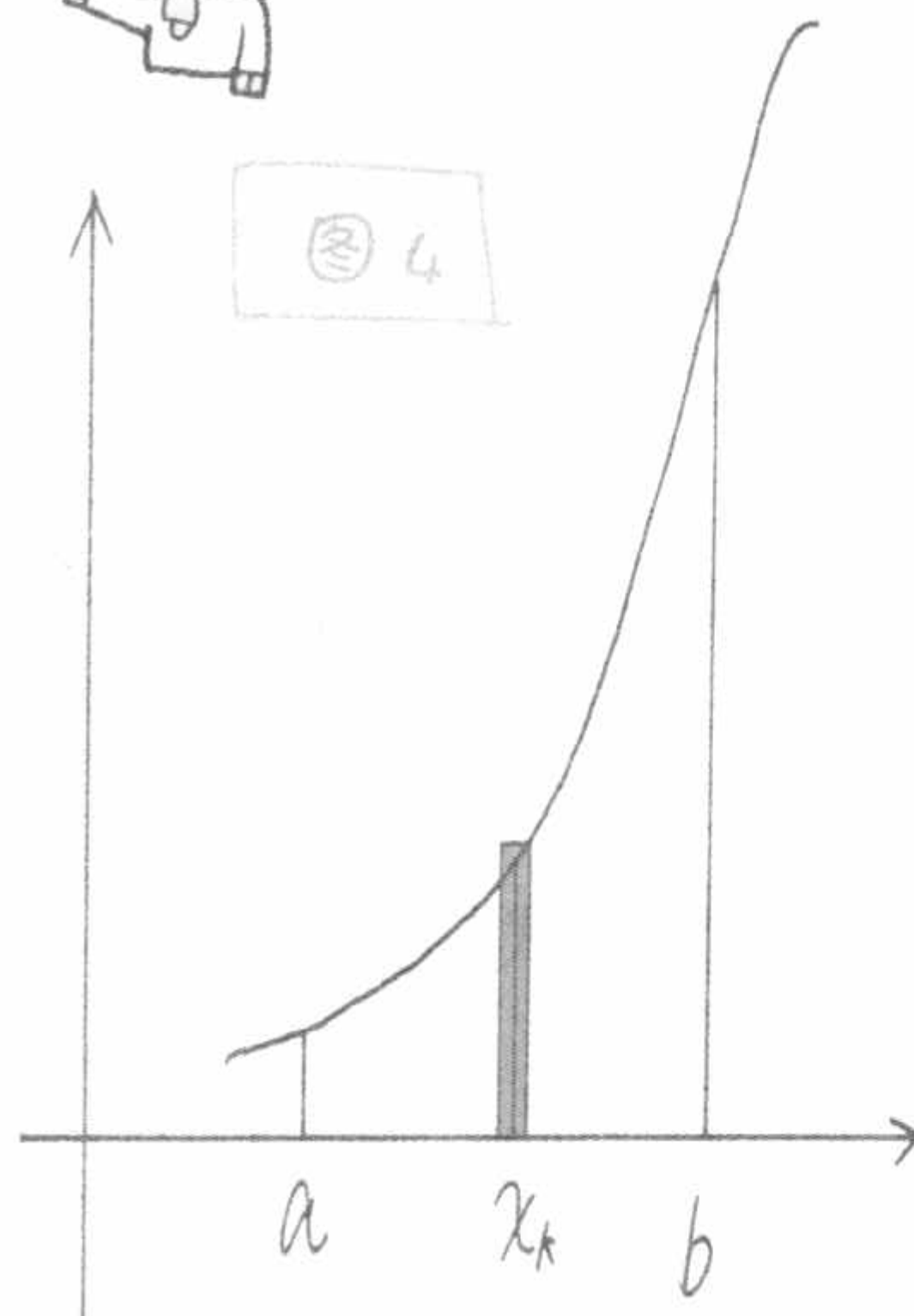
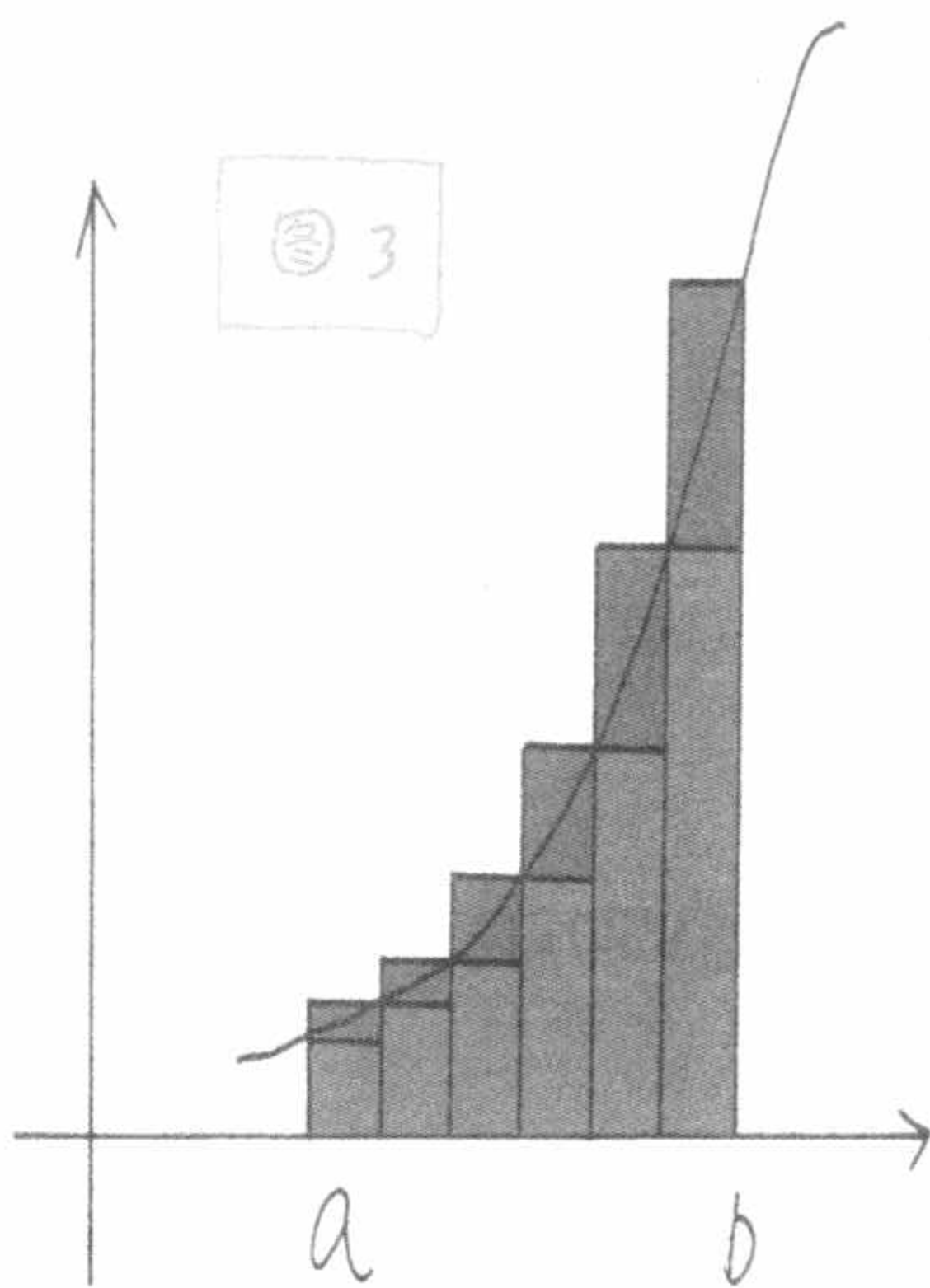
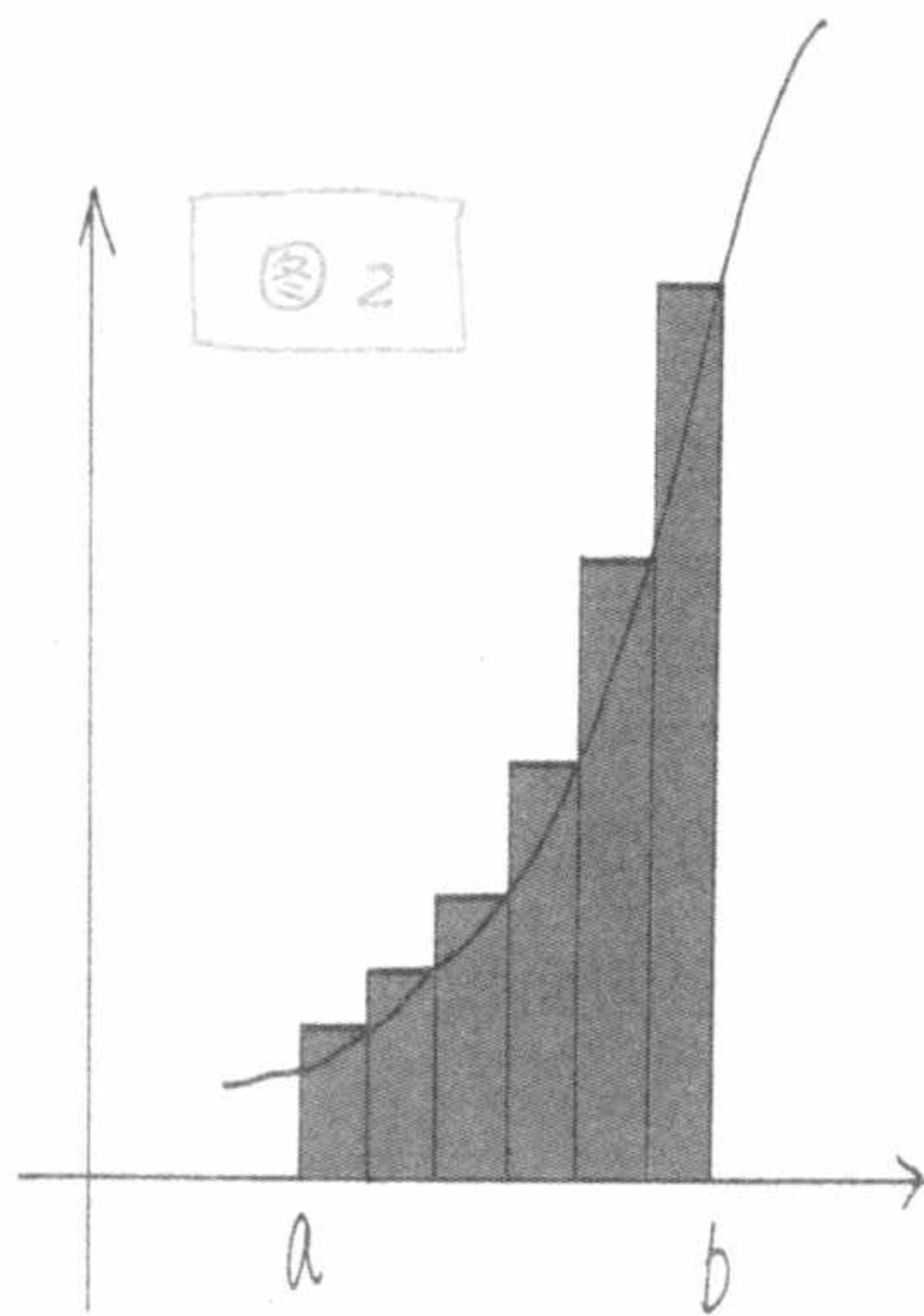
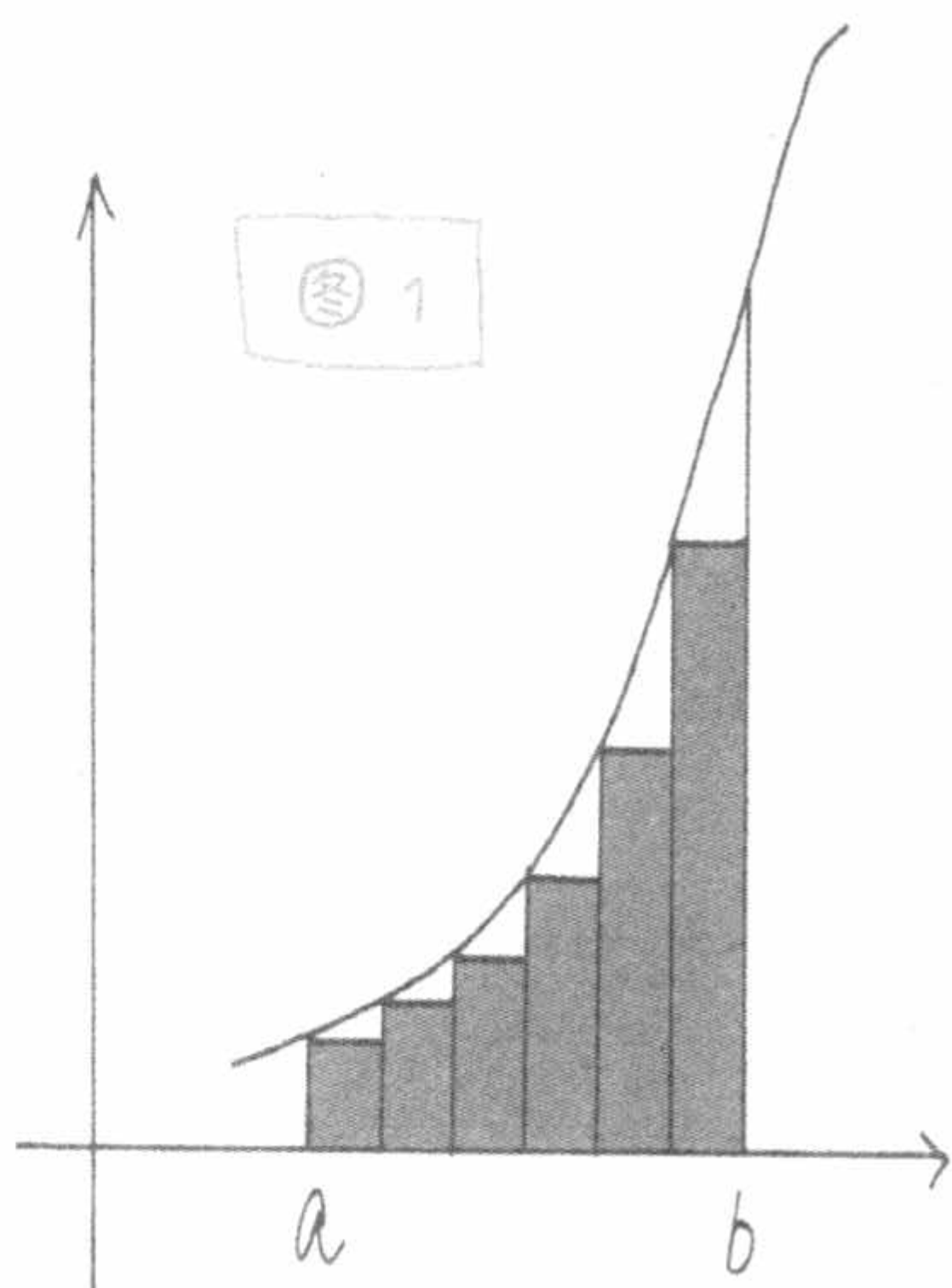
图1的长方形和 $S_1 < \text{曲线图面积 } S < \text{图2的长方形和 } S_2$

此时，长方形的面积总和之差为图3中紫色部分。下面两点非常关键。

1. 曲线图形的大小关系与长方形的宽无关，无论将长方形的宽缩小到何种程度，这一关系都不会改变。

2. 宽越小，图1的长方形面积总和与图2的长方形的面积总和越接近。

如果长方形的宽无限缩小，那么两种长方形面积和的极限值相等，则所求面积自然与这一极限值相等，这就叫做“夹击原理”。



我们使用 \lim 表示“将宽无限缩小”，两种长方形之和都取 \lim 值。假设用 n 个长方形将曲线图围住，在长方形的宽无限缩小的情况下，只要尽可能使 n 值增大即可，即设定 $n \rightarrow \infty$ 来求取面积。

如图 4 所示，我们研究一下从左侧起第 k 个长方形的面积。长方形的宽是将整体宽度 $(b - a)n$ 等分，即 $\frac{b-a}{n}$ 。

这一表达式也用于求 x_k 的坐标。小长方形长为 $f(x_k)$ ，大长方形的长为 $f(x_{k+1})$ ，代入上式，得到小长方形的长为 $f(a + k \frac{b-a}{n})$ ，大长方形的长为 $f(a + (k+1) \times \frac{b-a}{n})$ 。

长方形的面积可以简单求得，则 n 个长方形的面积和为

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{n} \times f(x_0) + \frac{b-a}{n} \times f(x_1) + \dots + \frac{b-a}{n} \times f(x_{n-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \times \{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\} \end{aligned}$$

右侧做法相同，为

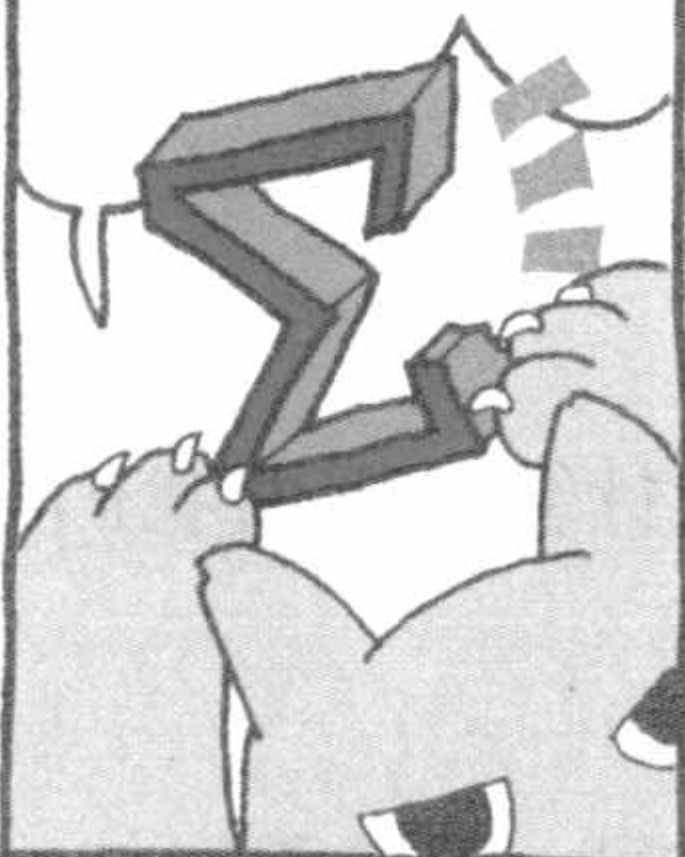
$$\frac{b-a}{n} \times \{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\}$$

即

$$S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

计算该算式，因为 $S_1 = S_2$ ，求面积 S 即可。

这里出现了一个新的符号。



就像加法的“加”一样。

Summation



西格玛

“合计”一词的开头字母S，是希腊语中的符号。

$$\sum_{a=a}^b f(\text{circle}) = f(a) + f(a+1) + \dots + f(b)$$

↓

在这个 中填入 a 到 b 的全部数值，并对计算出的值求和。

举例： $\sum_{x=1}^{10} x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 9^2 + 10^2 = 385$

这样，前面图中的算式可表示为

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \{ f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \end{aligned}$$

这是使用“区分求积法”求面积的算式。

电脑就是通过该算式计算面积的。

59 区分求积法的实际应用



前一页的算式比较抽象，不知道能否用来计算。下面我们就利用例题实际动手试试区分求积法。

例题：求函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 0$ 到 $x = 1$ 之间，函数图形与 x 轴围成的图形的面积。

将 $x = 0$ 到 $x = 1$ 的区间 n 等分。则长条状长方形的宽为 $\frac{1}{n}$ 。将 $\frac{1}{n}$ 带入上页的 S_1 算式中，得到长方形的面积和算式

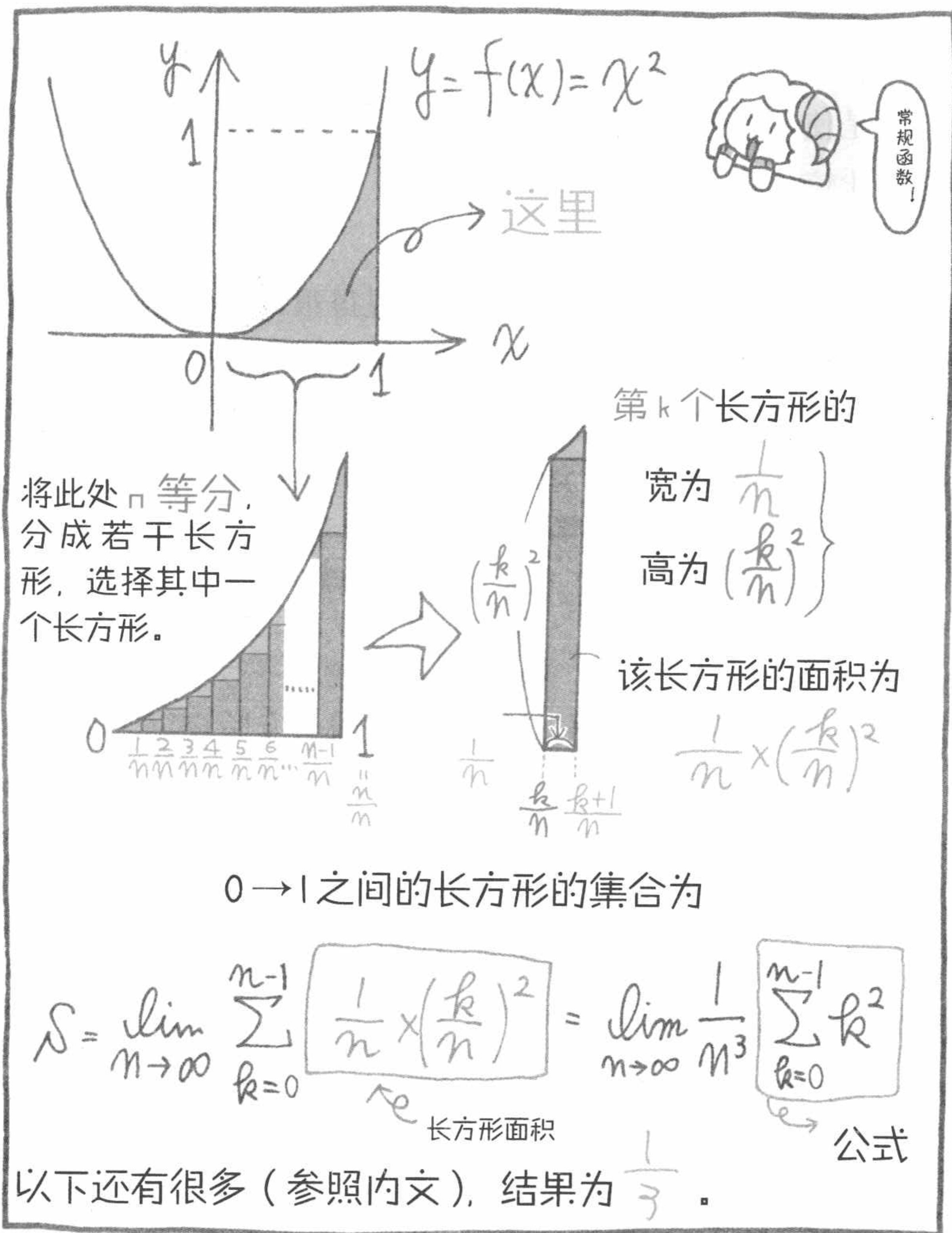
$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \frac{(n-1)}{n} \frac{n}{n} \frac{(2n-1)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) 1 \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

顺便说一下，我们使用的是 $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right)$ 公式。

看到这里，你可能要生气：“这个公式我没见过！”非常抱歉，不过这次我们关注的不是公式中的数字，而是 n 的幂是多少。将公式变形，则分母的 n 最大为 3，分子的 n 最大也是 3， n 不为零，所以可以约分，这就是关键之处。为确认答案是否正确，我们动

点小聪明，用定积分的公式验证一下看看。

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} (1)^3 - \frac{1}{3} (0)^3 = \frac{1}{3}$$



60 从区分求积法到定积分



在上页中，我们终于进行了计算，所求的面积也正确，太好了。但是使用区分求积法太麻烦了，还是用定积分方便，后者计算起来比较轻松。

那么我们就引进定积分公式吧。

积分就有一种区分求积法，它出现得很早。导数被发现后，积分为导数的逆运算才被发现。我们来看看这期间隐含的原理。

不过本书只阐述大致情况，说明可能不太充分，而且下页的公式变形也缺乏严密性，不过这些问题我们还是留给其他微积分类的书解决吧。

闲言少叙，我们现在就开始。

假设有函数 $y = f(x)$ ，求该函数 $x = a$ 到 $x = b$ 之间的面积。将 a 到 b 进行 n 等分，设各 x 坐标为 x_k 。设长方形的宽度为 Δx 。

那么面积为

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

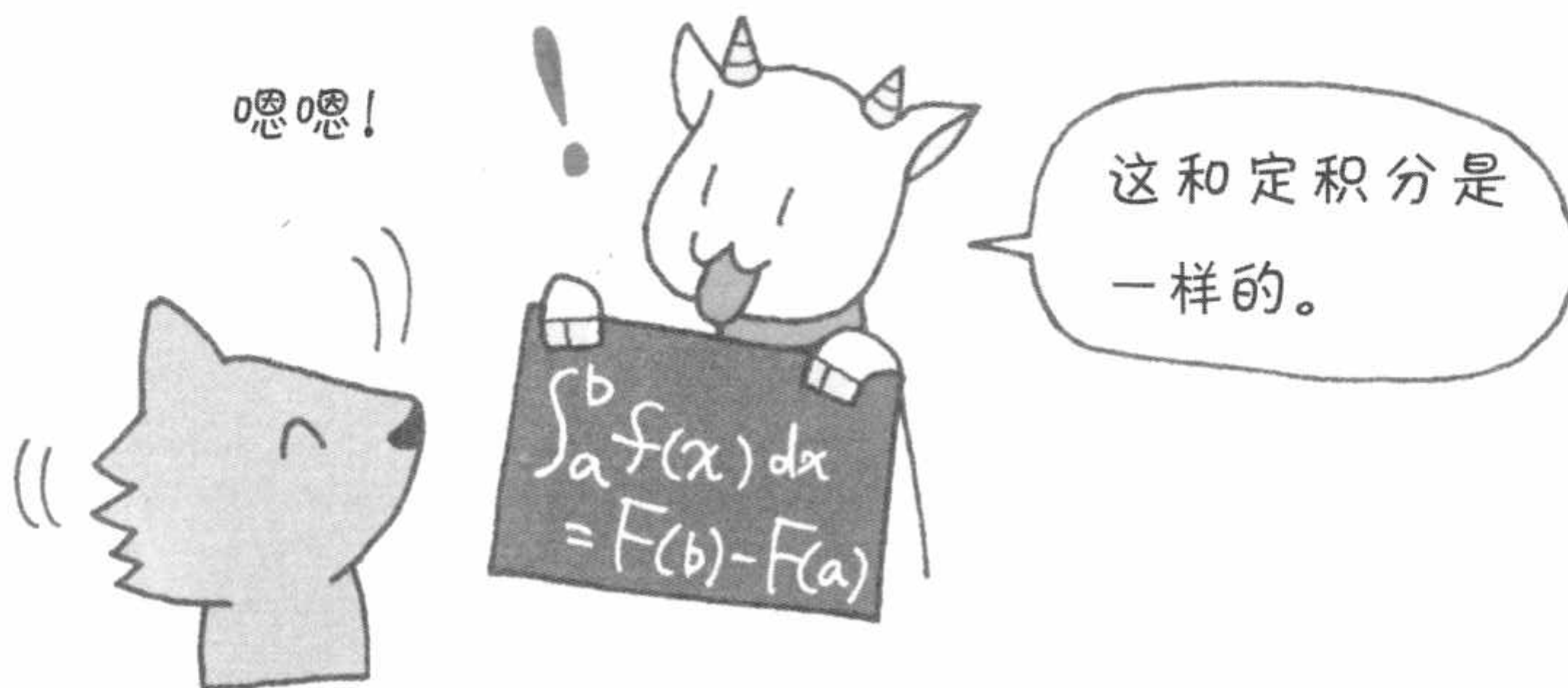
此时，我们引入原函数 $F(x)$ ，就是求导得到 $f(x)$ 的那个 $F(x)$ 。运用一下导数的定义。

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

我们将 $f(x)$ 代入上面的算式。

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F(x_k + \Delta x) - F(x_k)}{\Delta x} \Delta x \\
 S &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_k + \Delta x) - F(x_k)) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\begin{aligned} &(F(x_n) - F(x_{n-1})) + \\ &(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \\ &\quad \dots \\ &(F(x_2) - F(x_1)) + \\ &(F(x_1) - F(x_0)) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

注意，在最后的算式中，除了 $F(x_n)$ 和 $F(x_0)$ 以外，其他项都被消掉了。 $F(x_n)$ 就是 $F(b)$ ， $F(x_0)$ 就是 $F(a)$ 。答案终于出来了。



61 用定积分求面积函数



我们已经说过， $\int_a^b f(x)dx$ 是 x 在 a 到 b 的区间内， $f(x)$ 函数与 x 轴之间的面积。

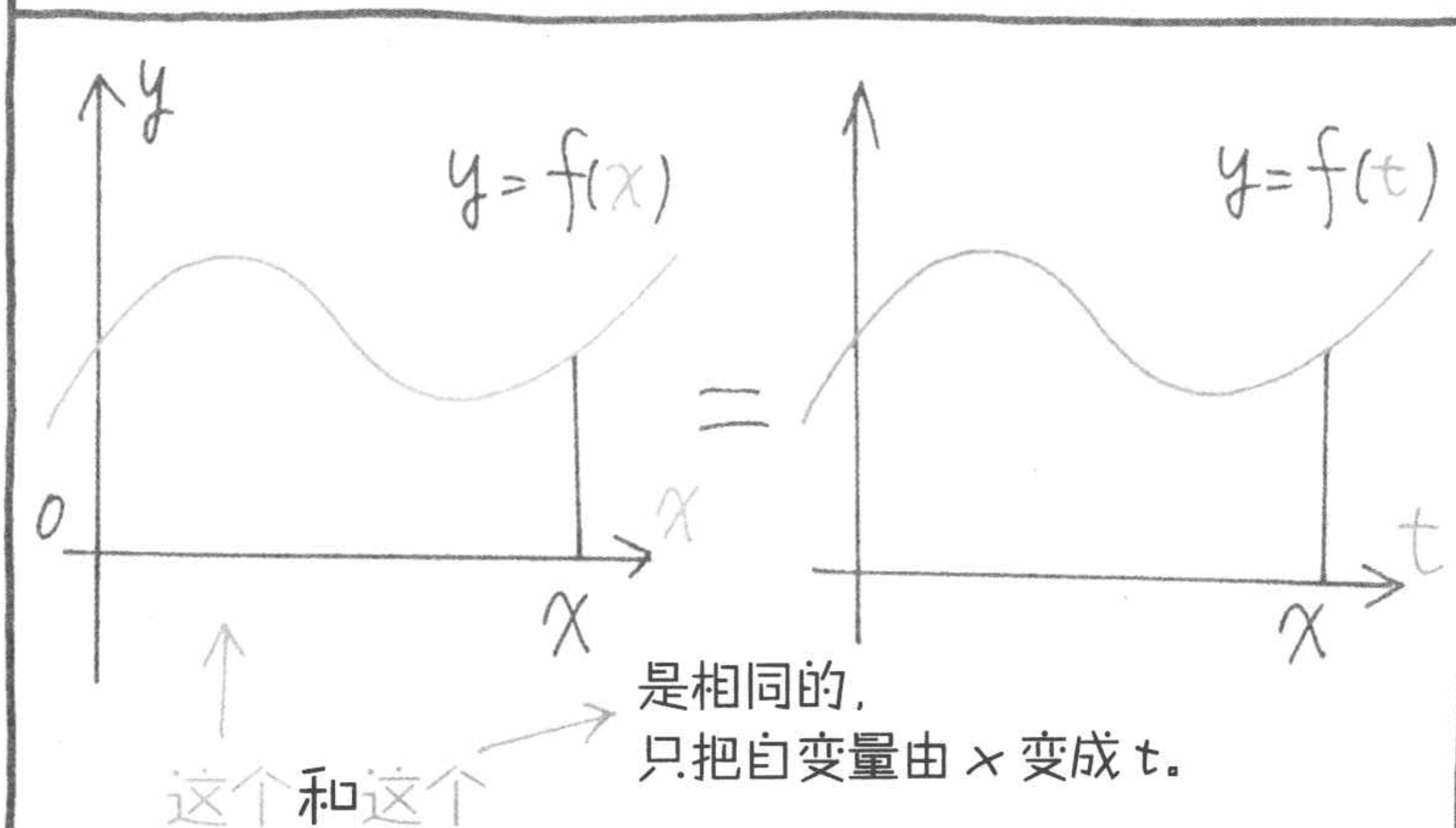
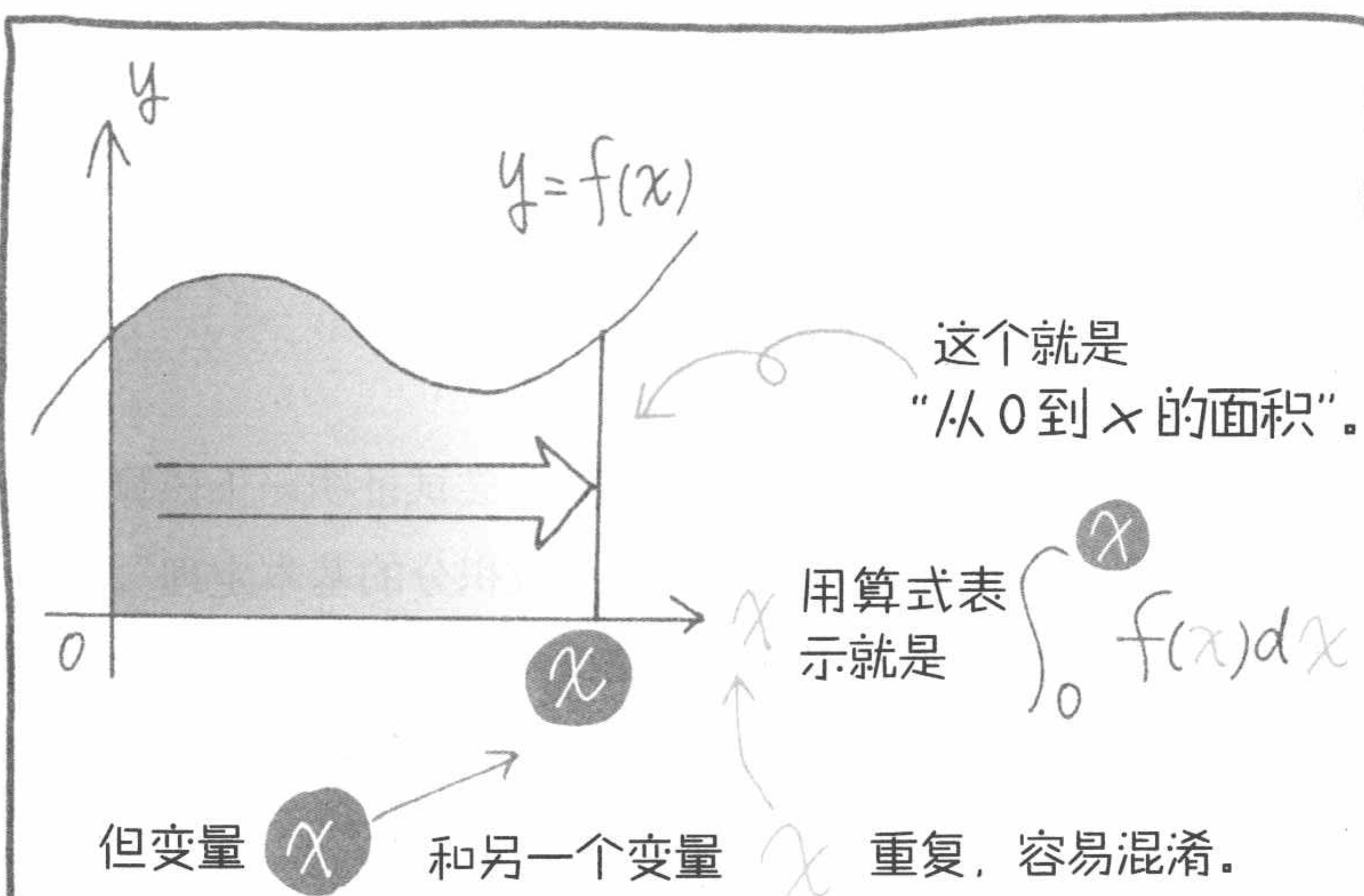
下面我们做一个表示在“从 0 到 x ”的区间上， $f(x)$ 函数与 x 轴之间面积的函数。在上式中代入“从 0 到 x ”，

$$\int_0^x f(x)dx$$

但用这种写法的话，表示区间范围的“ x ”和 $f(x)$ 与 dx 中的“ x ”就无法区分了。

我们运用点小技巧，因为 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b f(t)dt$ 是一样的，因此运用到后者中，代入“从 0 到 x ”，得到

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$



$$\int_0^x f(t) dt$$

可以这样表示。

为什么是 t ? 这是约定俗成的。

w, z, a, b 也都可以。

62 微积分的基本定理



下面我们研究一下 $f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt$ ，尝试证明一下该算式。

该算式有一个很强势的名字，叫“微积分的基本定理”。为什么要取这么一个名字呢？这是因为它是一个最基本的公式，我们在求 x^2 的积分时，之所以能通过求导逆运算快速得到答案，就是拜它所赐。

我们来回顾一下历史。自从发现导数和积分互为逆运算以来，导数和积分都取得了极大发展。这一点前面已经谈过了。

以往的积分计算都是运用区分求积法进行的，非常麻烦。多亏有了上面这个定理，积分才得以通过（乍一看似乎毫无关系）导数逆运算求得，可见它的影响之大。不过，教科书中的“微积分的基本定理证明”可丝毫没有带给我们这种“浪漫”感觉。

拿电视来说，它是一个伟大的发明，虽然我们每天都看电视，但如果没人清楚地告诉我们电视是怎么制造出来的，我们还是不知道其所以然。而举这个例子主要是希望读者们能明白该定理的影响。

好像有些跑题了，我们来证明公式吧。公式的证明有若干种方法。我们先不讲运用公式变形来证明的方法，而以形象化的语言来说明它。

假设有函数 $f(x)$ 和由其产生的面积 $S(x)$ ，这时我们考虑一下 x 和以此为起点的微小距离 dx 。当 dx 增加时，面积 $S(x)$ 会略微增加。那增加多少呢？此处我们使用具有“微小”意义的符号表示为 $dS(x)$ 。然后我们用 dx 表示面积，这样可以认为宽为 dx ，长为

$f(x)$ ，则

$$ds(x) = f(x)dx$$

可能有人认为严格来说长不是 $f(x)$ ，但在这里我们将长设为 $f(x)$ 。对导数来说，宽 dx 很小不会引发长 $f(x)$ 的变化，因此，在讨论 dx 时，是以 dx 前后的 $f(x)$ 没有变化为前提的，即可以只考虑 $f(x)$ 。

重新书写该公式，得到

$$\frac{d}{dx} S(x) = f(x)$$

另外， $S(x)$ 是 $\int_0^x f(t) dt$ ，因此，

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x)$$

至此我们求得了微积分的基本定理。

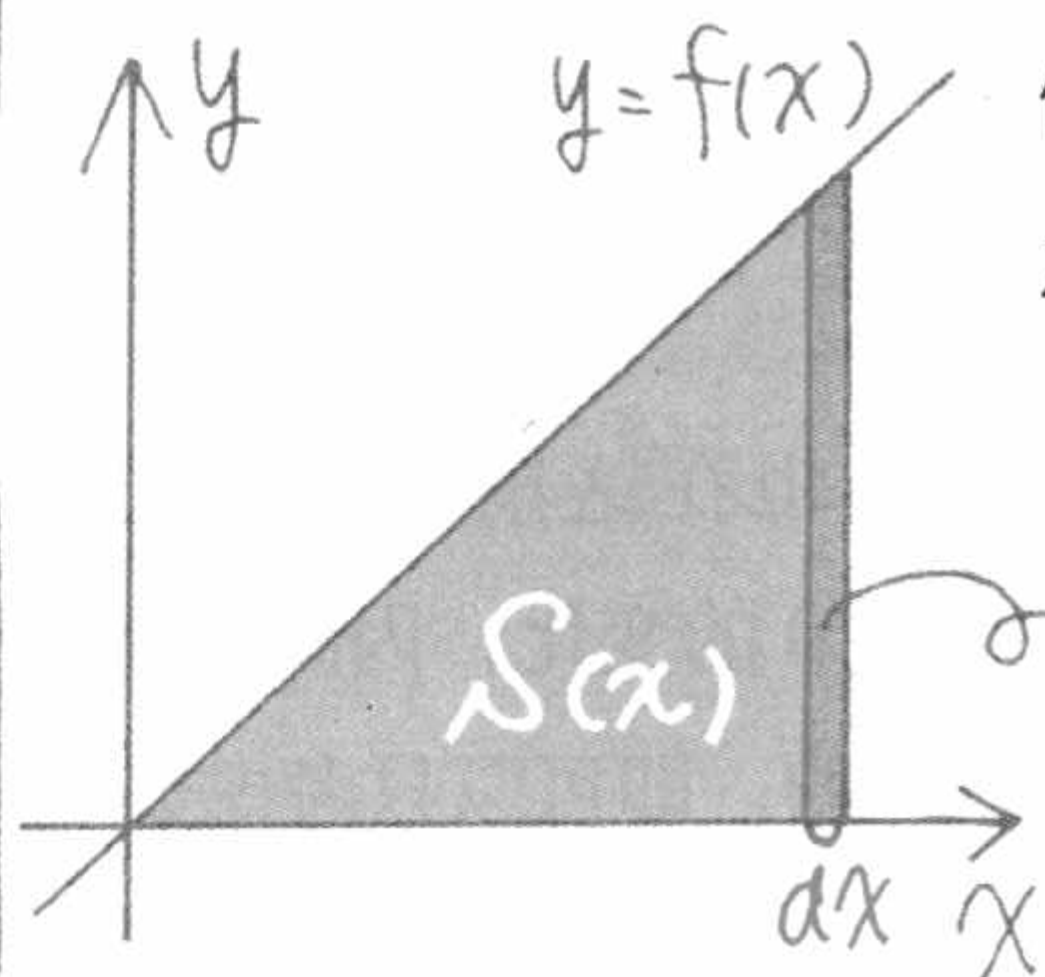
是不是出奇的简单？是有点。实际上本书的证明也仅止于此。如果是微积分类的图书，将这个基本定理阐述完毕，就要翻到下一页进入下一个话题了。

但我有些固执，希望能将你的想象力充分调动起来。

网络、手机……日常生活中我们每天都被各种工具包围，对于我们来说，收音机的发明似乎已经不太重要了。不过请试想一下如果没有收音机会怎样？

微积分基本定理的证明中也存在同样的情况。

没有导数知识的话，学习积分非常困难。而人类却不得不花费 2000 年的心血去经受这份痛苦。而基本定理的发现将人类从这份辛苦中解放了出来。这么说，你是否感觉到了一丝的浪漫？



假设 $y = f(x)$ 和 x 轴 ($x = 0 \sim x$ 之间) 围起来的面积为 $S(x)$ 。

这一小条的面积 $ds(x)$ 为

$$dS(x) = f(x)dx$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} S(x) = f(x) \dots (*)$$

$$S(x) = \int_0^x f(t) dt$$

代入 $(*)$, 得到

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x)$$

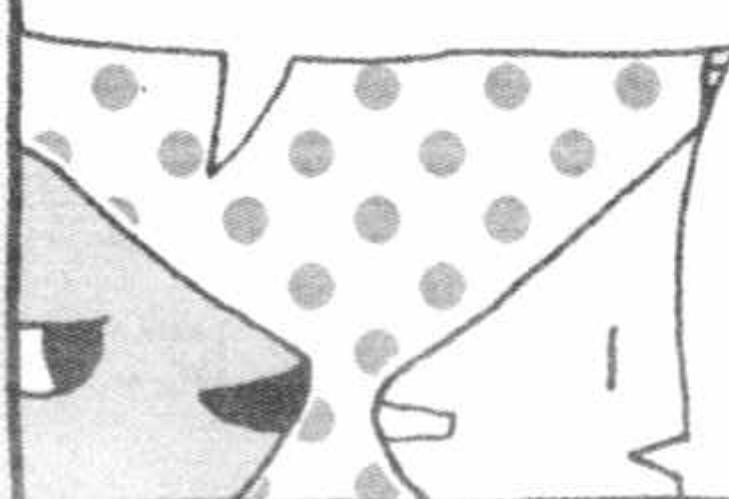
这是导数的算符

这是积分的算符

由此我们说“导数的逆运算是积分”。
不知道其他证明方法也没关系。

伟大的数学家牛顿
和莱布尼兹几乎同
时以不同方式发现
了该理论。

但究竟是谁先发现的？这
一问题让他们陷入了长达
25 年的法庭拉锯战。



天才大
战呀！

63 有负的面积吗



前面我们用积分求面积，但这并不意味着积分等于面积。积分是将乘积求和。因此如果乘积为负值，其和必然也为负值。定积分的结果也可能为负。现在我们就来探讨面积为负的问题。

这类问题有时很难理解，其实不过是将负的乘积相加得到的结果而已。那为什么会得负值？理由有二。

第一， $f(x)$ 的值为负。 $f(x)$ 是函数的 y 轴坐标，既然是坐标自然可以为负。因此在 $f(x)$ 为负的地方求积分，所得结果也会为负值。

第二，积分方向相反。写成公式为 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ 。

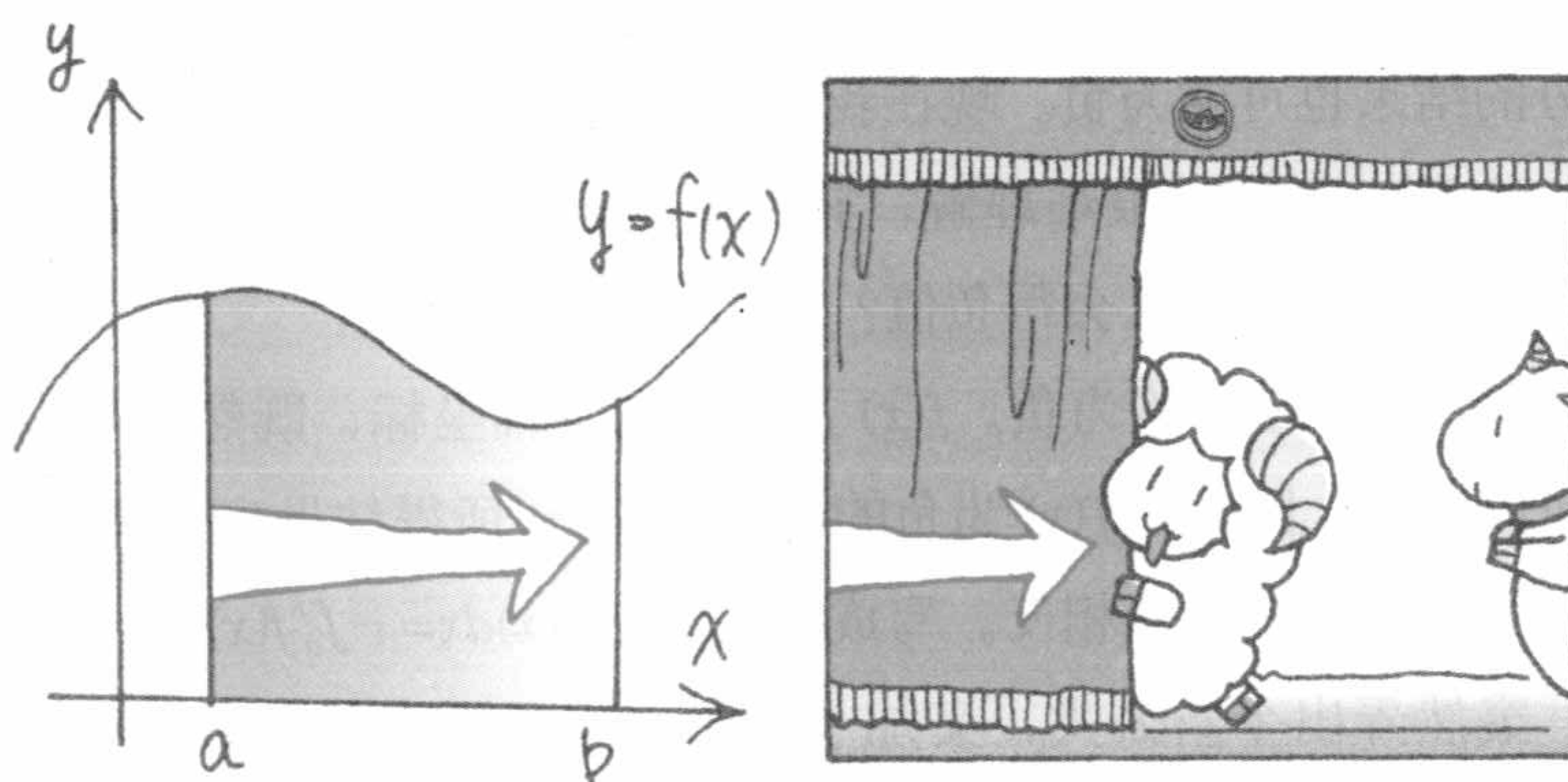
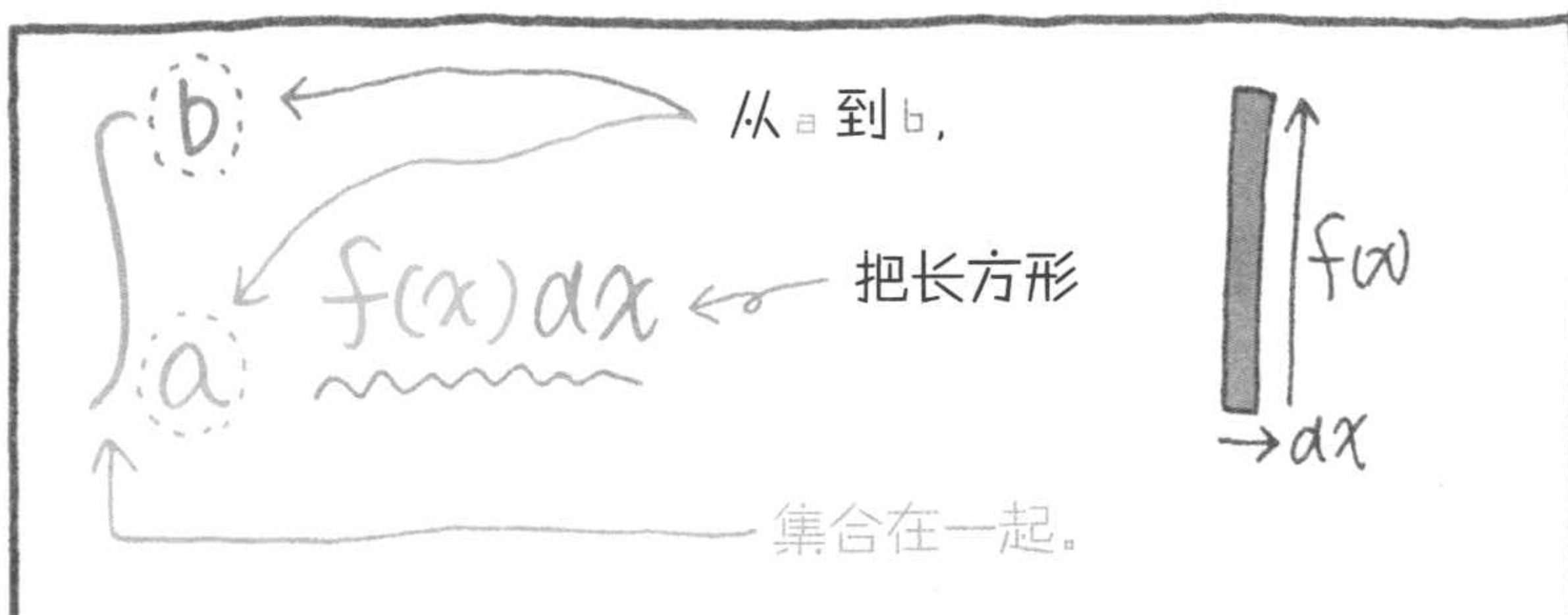
突然弄出个新公式，又加了些不知道是什么的符号，有些混乱了，很抱歉。不过如果仔细看看这个公式，我想你会理解它是怎么回事。两侧的算式中，积分号指定的区间范围是相反的。

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \quad F(x)|_b^a = F(a) - F(b)$$

明白了吧，两边的正负相反。“ dx 是 x 轴上的微小增量”，这我们已经说过很多次了，只是前面我们主要着眼于“微小增量”，实际上 x 轴的方向也是重点。如果 x 轴是正向，则 dx 为正；如果 x 轴是负向，则 dx 为负。

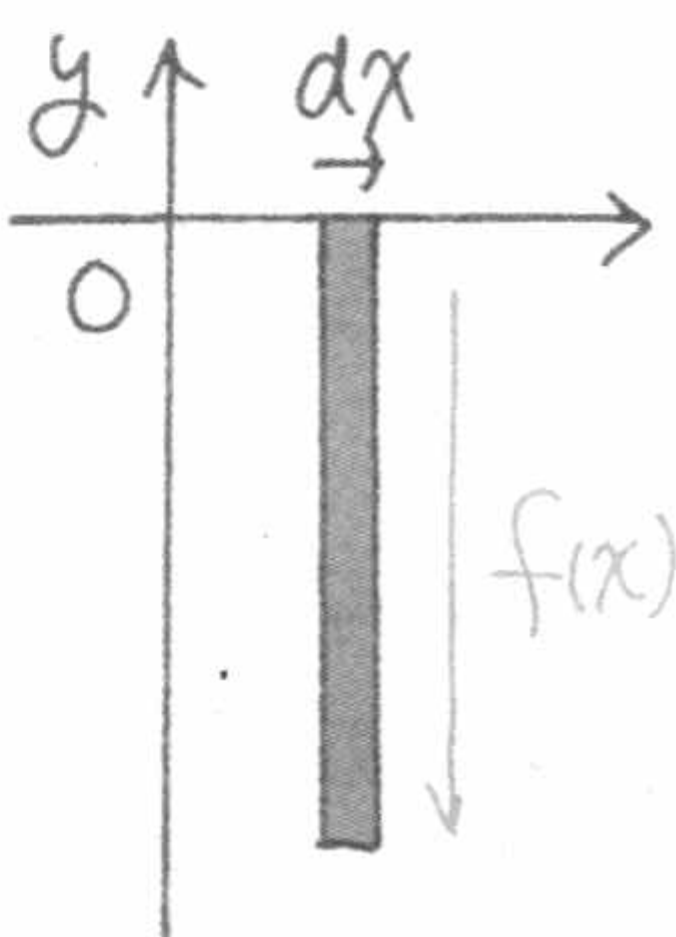
$f(x) \times dx$ 是两个值的乘法运算。如果两者同正或同负，则结果必然为正。如果一个为正一个为负，则结果就为负。

通常我们都是按照 x 轴是正向来思考，因为人类多习惯以正值思考问题。不过计算只要搞清楚符号就没有问题。

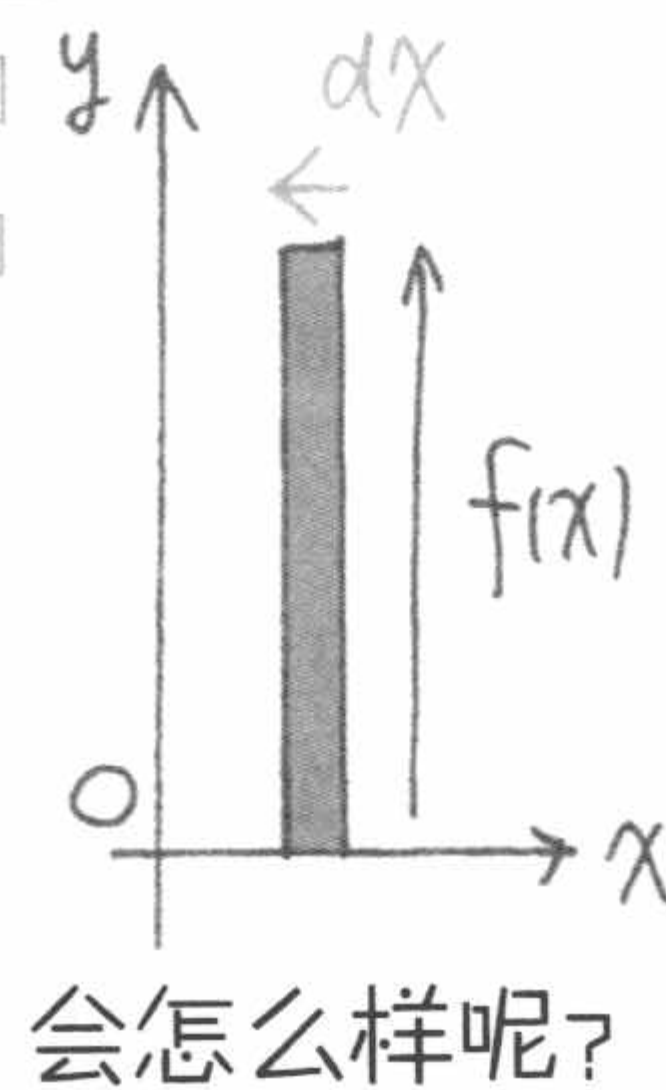


就像这样一下子把幕拉上，
求“幕布”的面积一样。

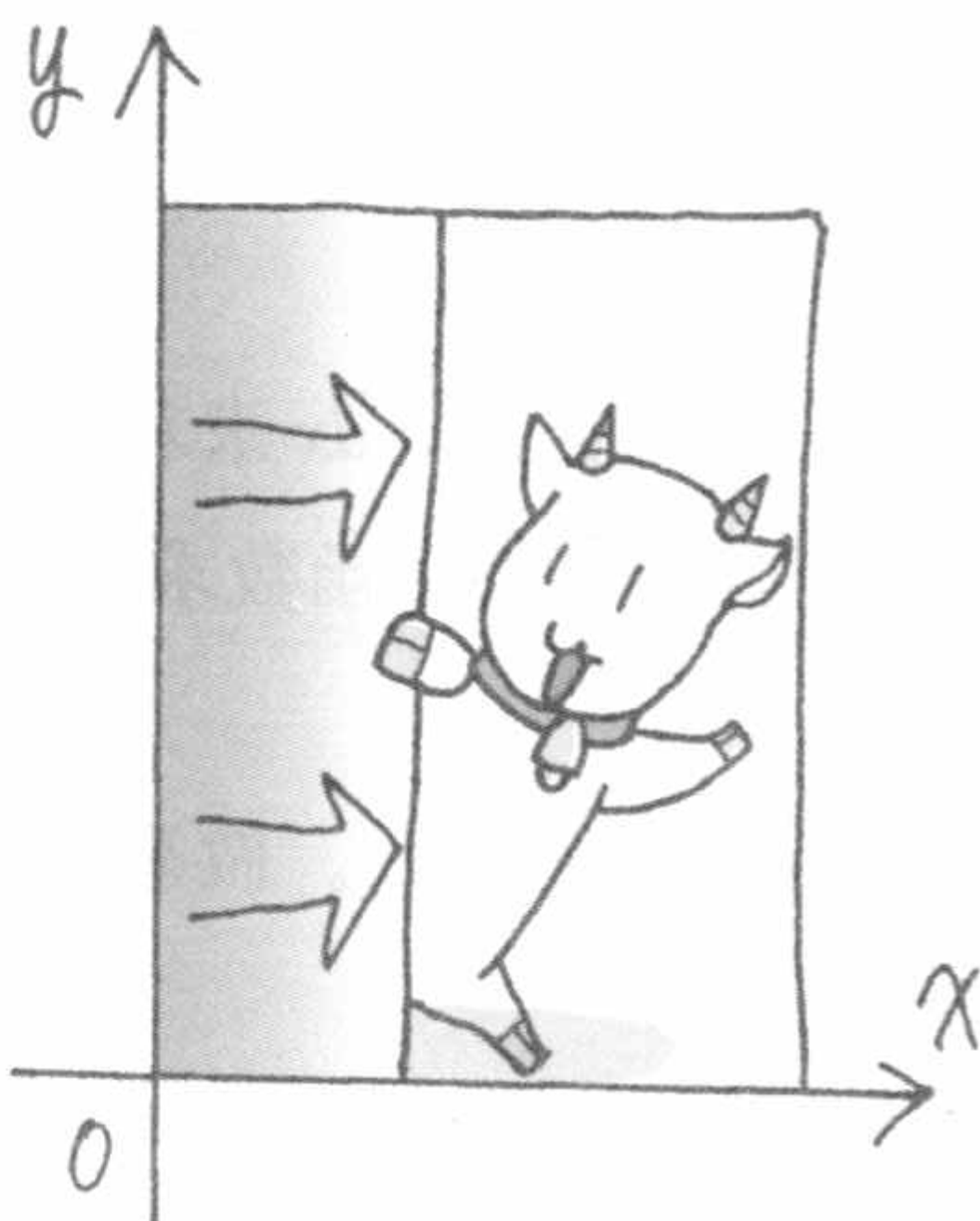
如果长方形的
长 $f(x)$ 为
负值……



就是从相
反的方向
拉幕，

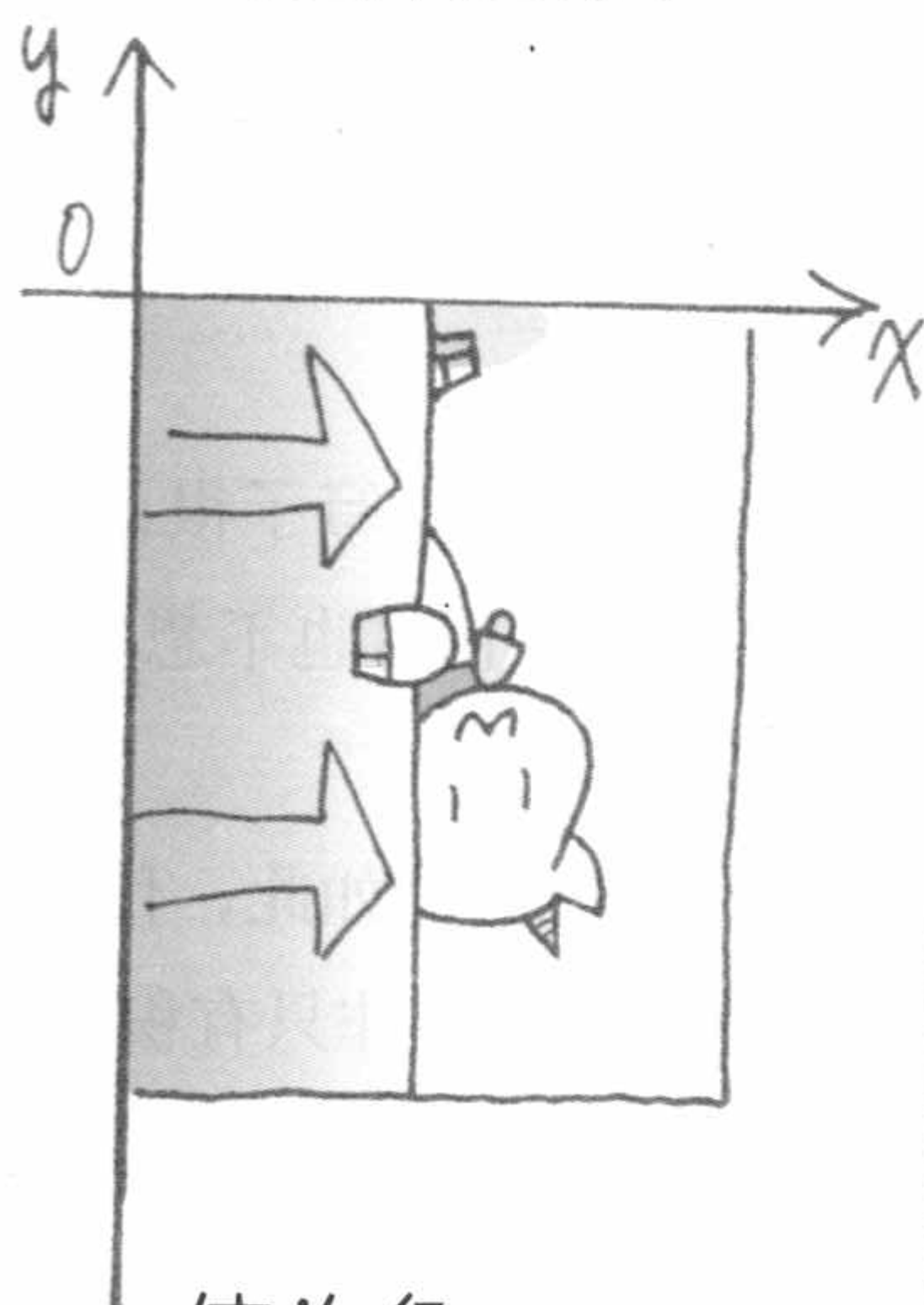


这样拉幕。



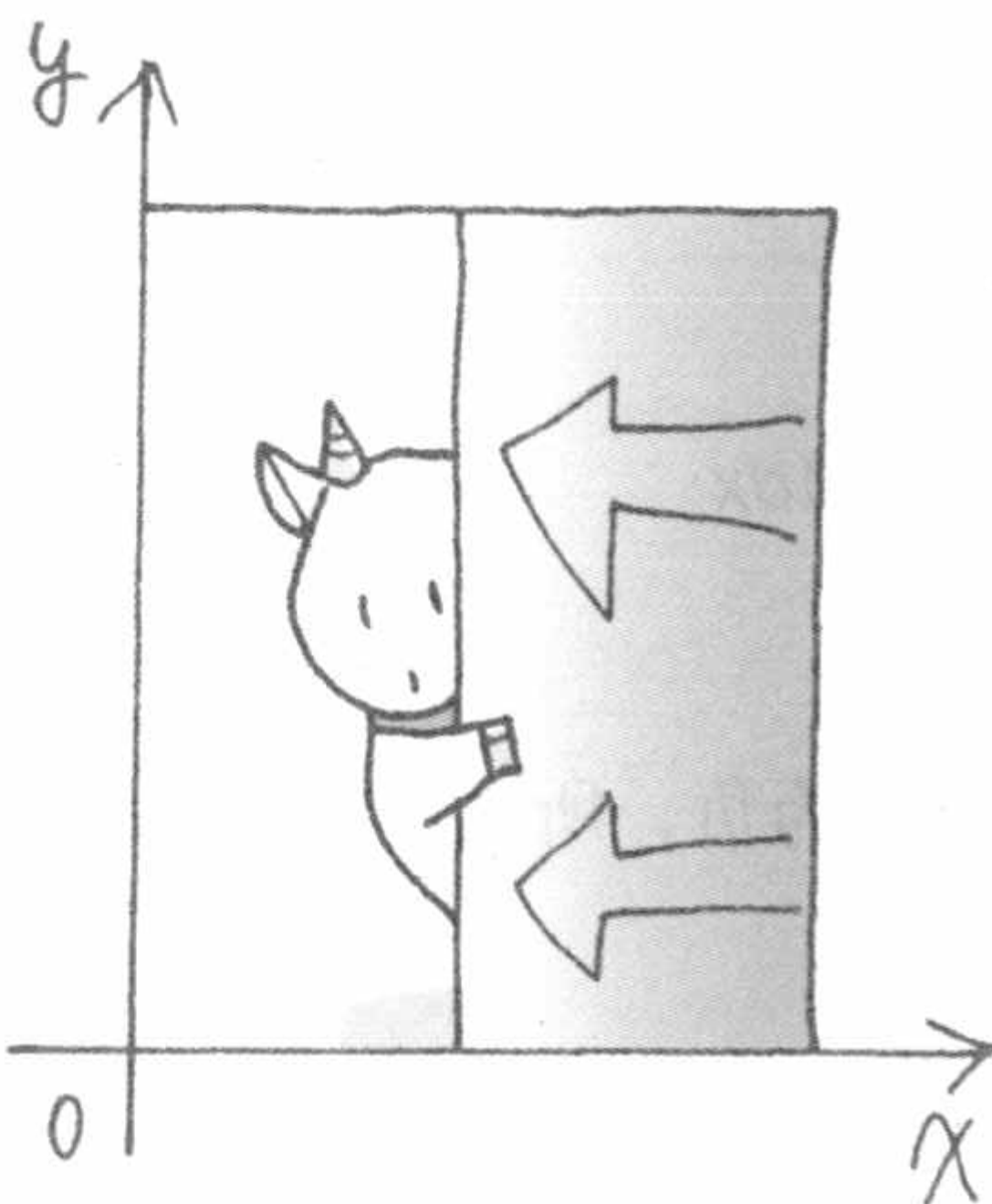
值为正 $+$

这样拉幕。



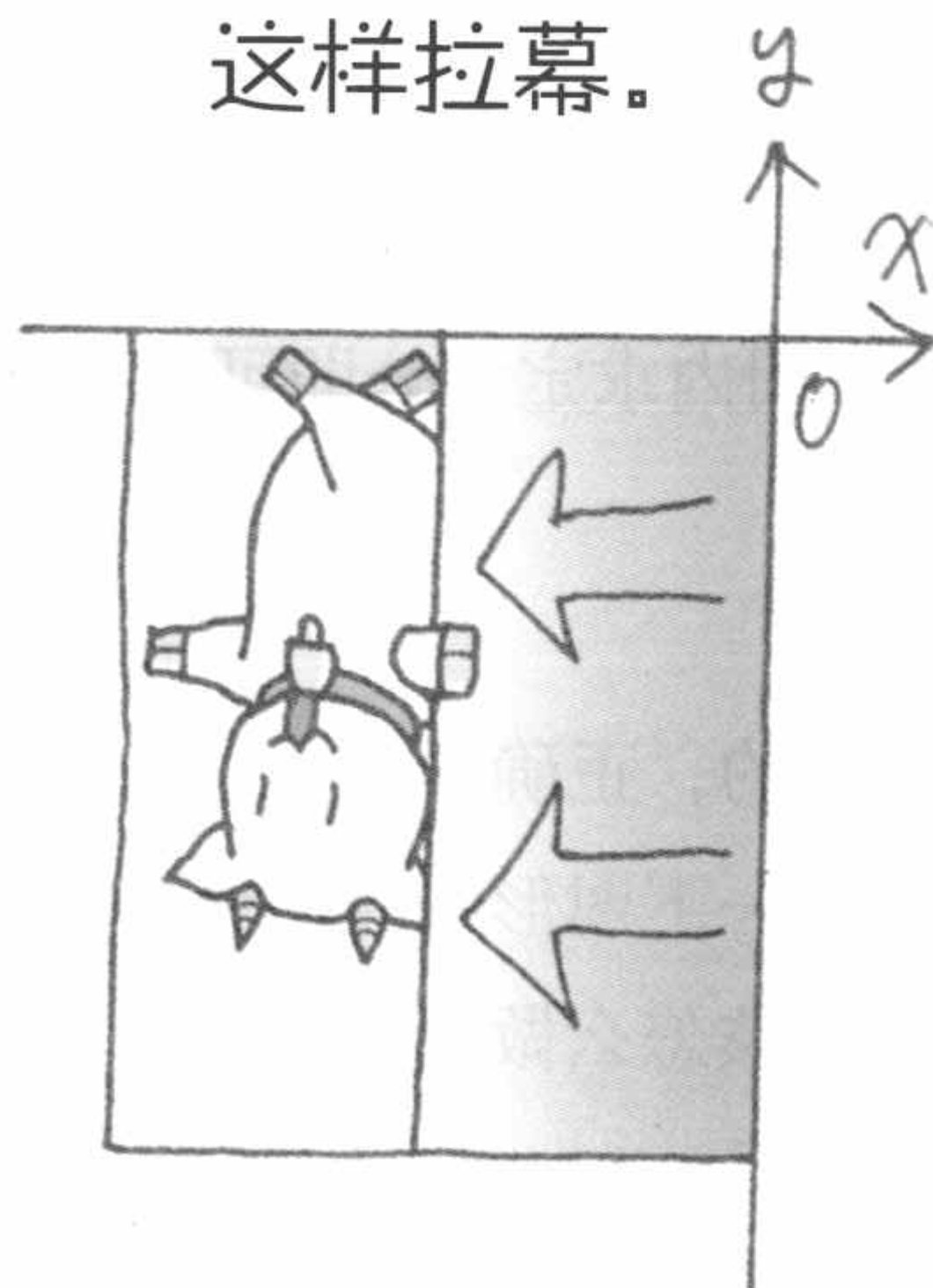
值为负 $-$

这样拉幕。



值为负 $-$

这样拉幕。



负 $-$ \times 负 $-$
得 $+$

64 求面积练习 I



我们已经反复写了很多次，积分只是将 $f(x) \times dx$ 求和，因此求面积时，如果什么也不想，仅是依葫芦画瓢似的对函数求定积分，只会失败。

人生大概也是如此，什么也不想就去做会失败。做事盲目的人总会摔跟头。并非只有积分运算如此。

我们看看下面的情况该如何处理？

例题：当 $f(x) = (x - 1)(x + 1)$ ，求函数 $y = f(x)$ 与 x 轴围起来的部分的面积。

该函数为二次函数，其图形为抛物线。顶点是 $(0, -1)$ ，当 $x = 1, -1$ 时，图形与 x 轴相交。也就是说，只要在 x 从 -1 到 1 的区间内求定积分即可。因此算式为

$$\int_{-1}^1 (x-1)(x+1)dx$$

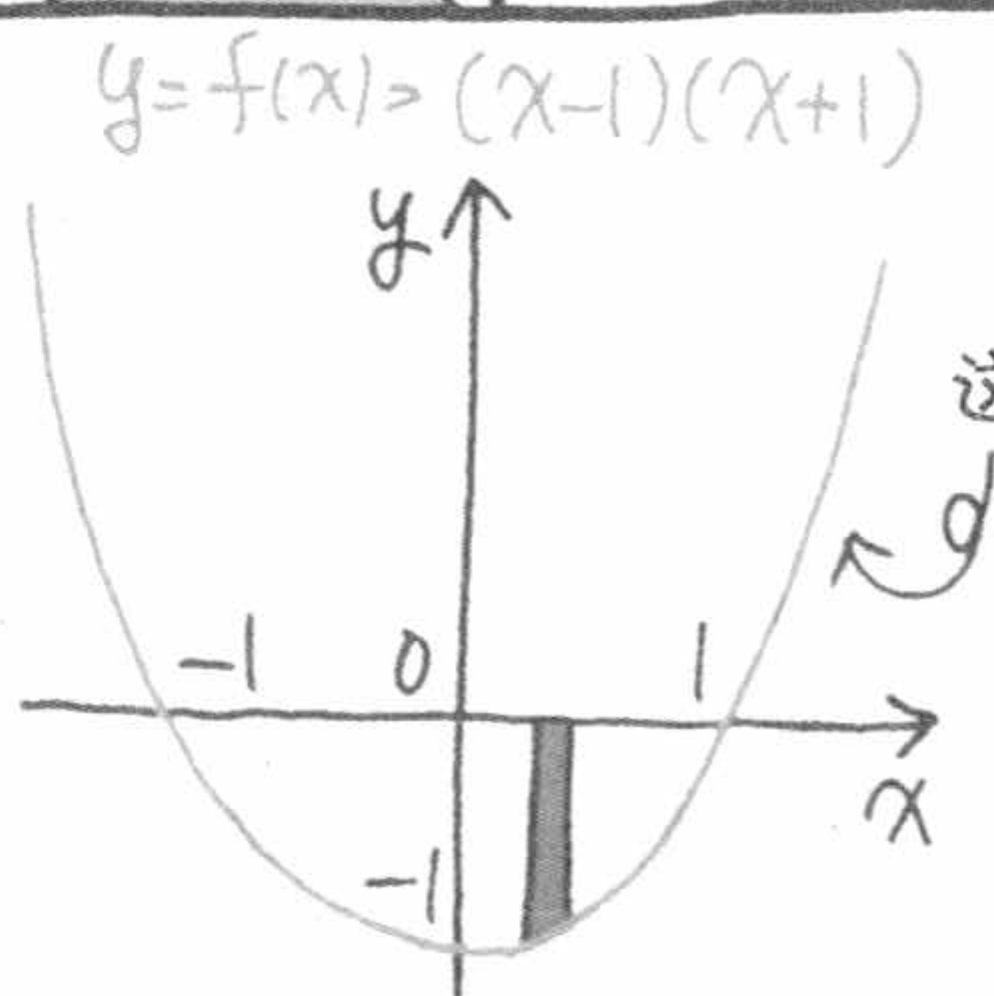
是的，正确。

看一下图形就能明白。因为 y 坐标为负，所以 $f(x) \times dx$ 为负。

那该怎么做呢？



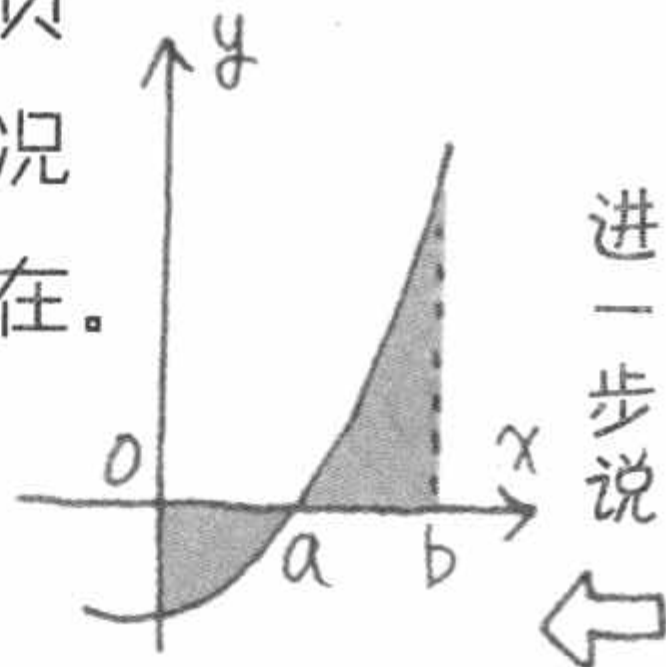
在 -1 到 1 的
区间里 $f(x)$
的值为负。



长方形的长度
 $f(x)$ 未必为正。

这样

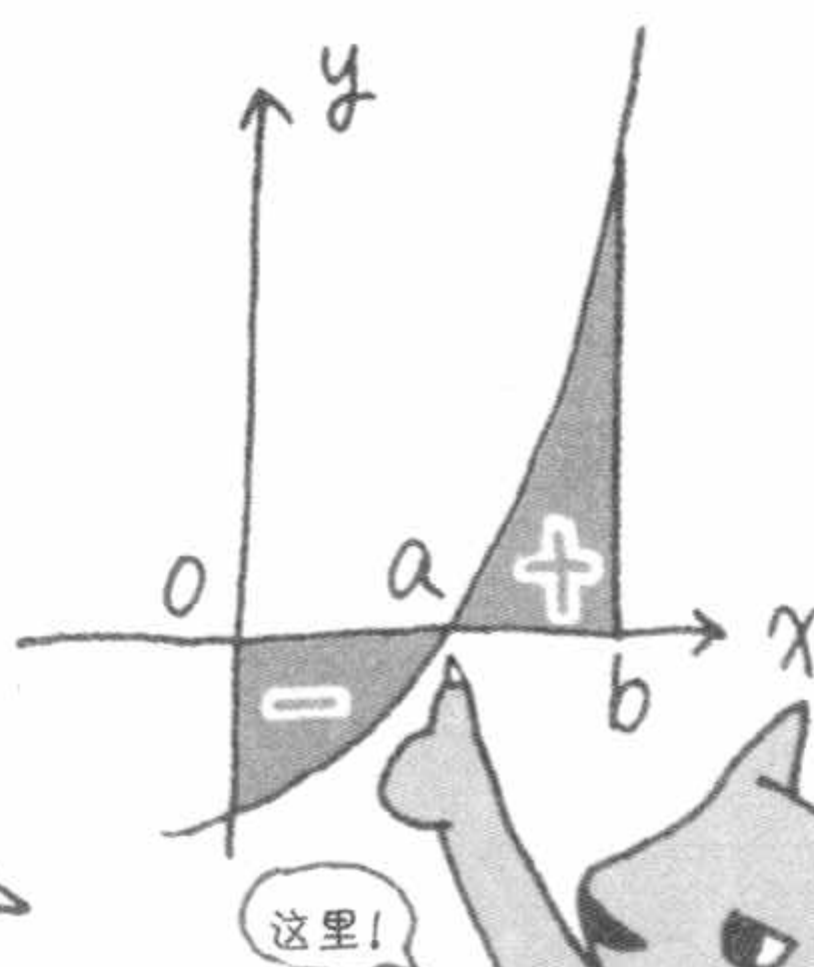
正和负
的情况
都存在。



负负为正。

也就是说, 在 -1 到 1
的区间内, 长方形的长
度应该为 $-f(x)$ 。

并划分积分区
间进行思考。



我们需要找到
正负转换点,



65 求面积练习 II



继续刚才的例题，如果只是单纯列出算式，那么 $f(x) \times dx$ 为负。但因为此处我们要求的是“面积”，想要的不是 $f(x)$ 的坐标，而是距离 x 轴的“长度”。

已知坐标为负时，如果要将其作为长度计算，也可以加上负号。也就是说，可以将算式写成 $f - f(x)$ 。

不要犹豫加不加负号。要知道，什么也不想只是依葫芦画瓢似的套用公式是不对的。

作为坐标，它是 $f(x)$ ，但是长度必须为正值，因此是 $-f(x)$ 。此处的面积为 $f - f(x) dx$ 。

例题：求函数 $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 和 x 轴围成的图形的面积

解答：
$$\int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)dx + \int_2^3 -(x-1)(x-2)(x-3)dx$$

有时候也需要分情况对积分区间进行分割再列算式。

如果不注意，面积可能会为负，也可能会相互抵消为 0。如果问题是求面积，那么 0 和负值都很奇怪。不过也有一些头脑不灵光的人什么也不考虑就直接写上“负……”的答案。

这样怎么能成为
“微积分之星”!!

傻瓜!!

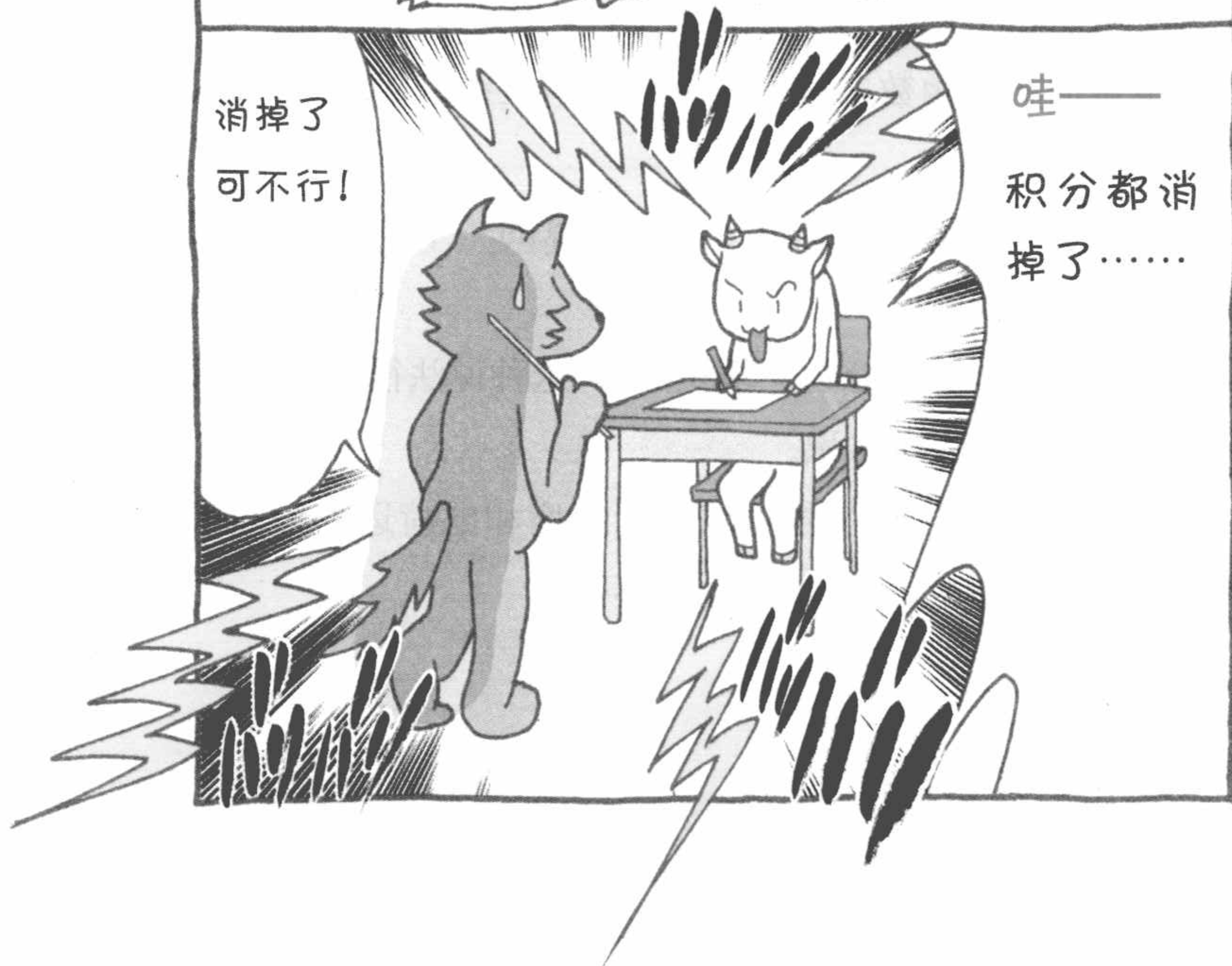
老爸，
石膏带
好紧呀

培养计算机
器的石膏带

不会吧……

消掉了
可不行!

哇——
积分都消
掉了……





66 积分的本质



我们曾经反复强调，积分是用来求面积的。在这里我必须向大家道歉。

对不起，这种说法并不完全正确。

积分有两种阐述方法，一种用于说明积分的意义；一种用于计算，我们来看看用于计算的算式。

$$\int (f(x) \times dx)$$

单从这个算式看，就是将细分的部分相乘后再相加。

使用面积一词说明积分并不充分。这是为什么呢？ $f(x)$ 也可能是横截面积的函数。如果在横截面积上乘以微小的厚度，会得到什么？是体积。

使用积分求面积只是进行积分运算的一个方面。积分是细分后求和的一种技法。

过去有时也称积分为“求积法”，这种说法很是巧妙。既可以表示面积也可以表示体积。

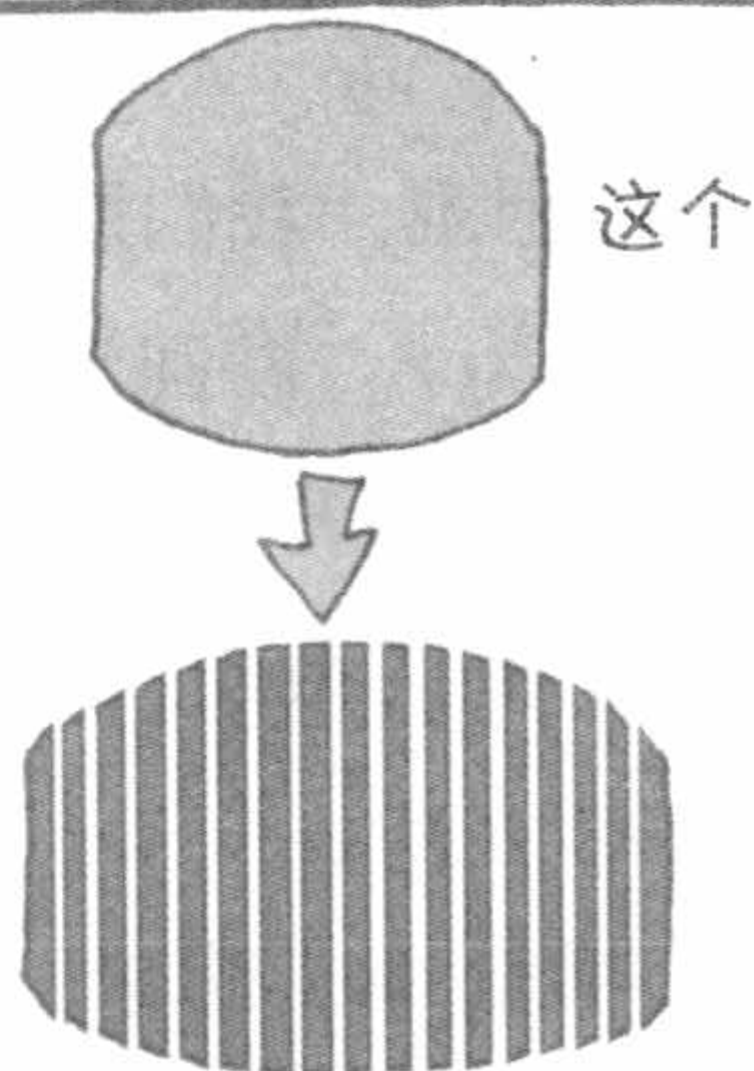
物理学中也会对各种物理量（速度和电荷运动等）求积分。现在积分的使用范围已远远不止求积。

导数是斜率，积分是面积，这当然不完全准确。

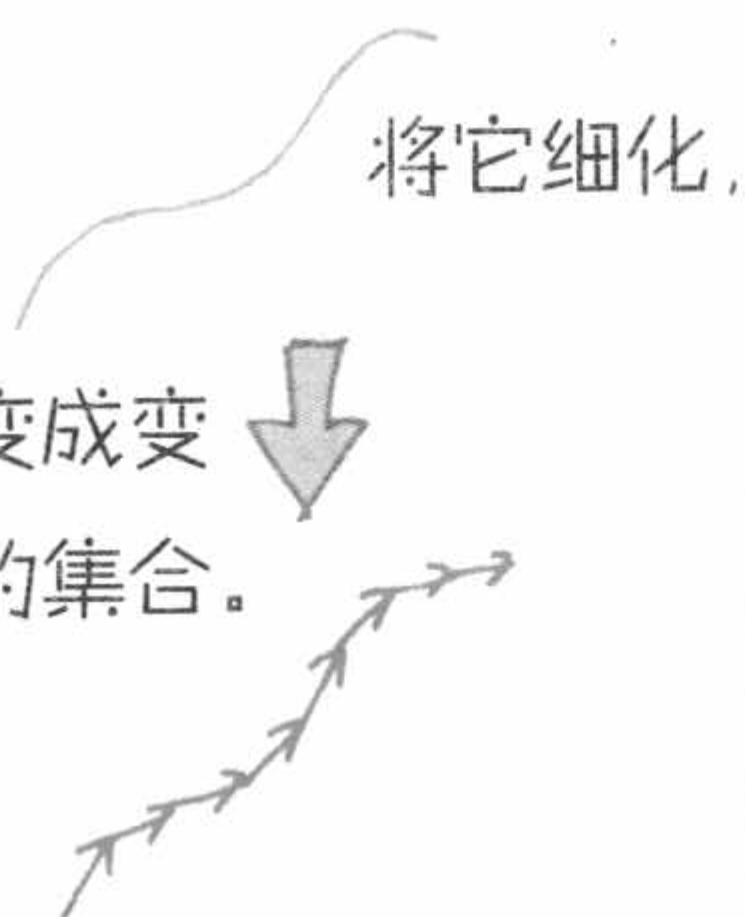
更准确的表述是这样的，

导数是细化，积分是将细化的部分汇集在一起。

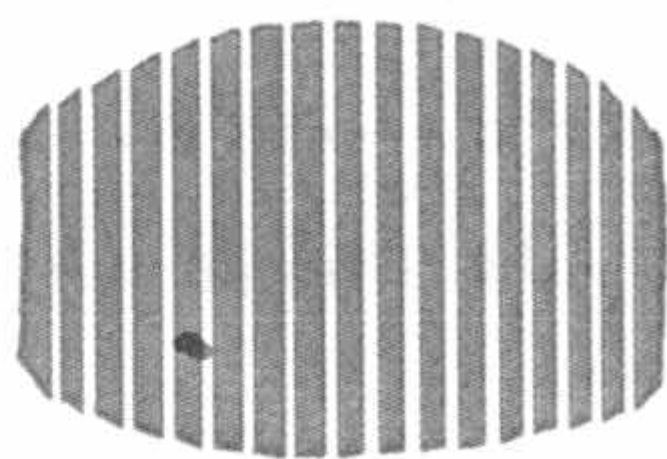
将图形细分，观察“变化”，就是导数。



就变成变化的集合。

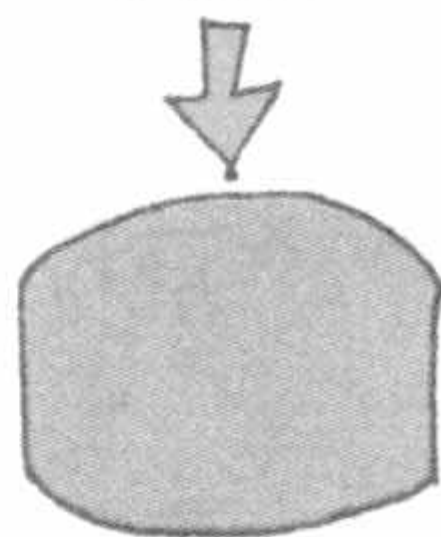


这就是积分。



很窄的长条状长方形

将细化的部分汇集起来，



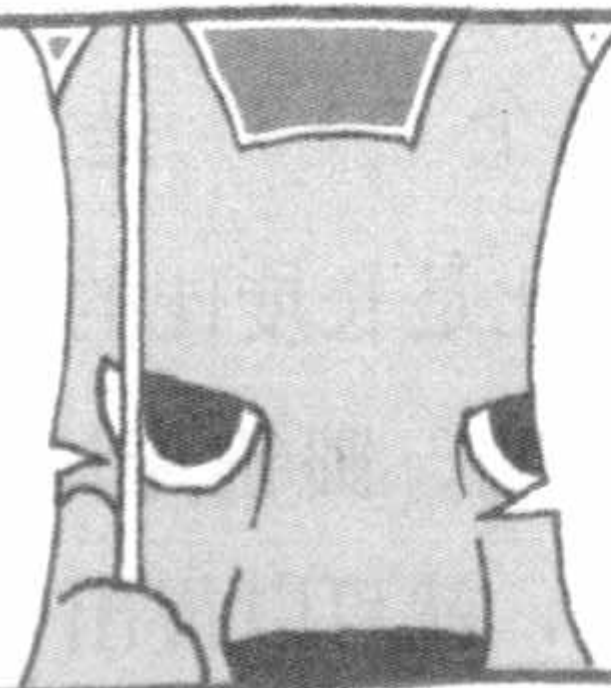
成为面积

描绘出轨迹，成为面积。



实际上就是将细化的部分汇集起来。

积分是导数的逆运算



67 圆锥的体积



从现在开始，我们进入实践篇。尝试重新推导以下的公式。

三角形的面积公式为“底面积 \times 高 $\div 2$ ”，你知道为什么要除以2呢？圆锥的体积公式为“底面积 \times 高 $\div 3$ ”，为什么要“ $\div 3$ ”呢？

使用初级几何进行证明似乎很困难，我们用积分来试一试。

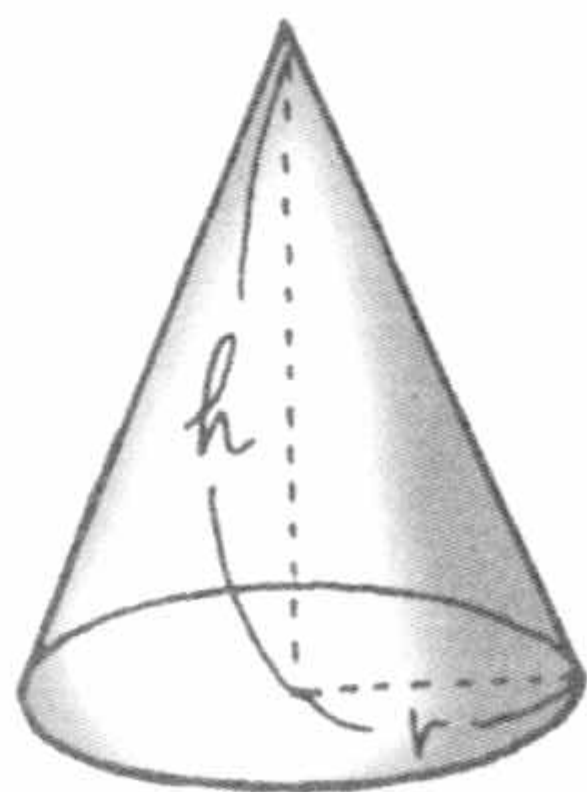
假设圆锥的高为 h ，底的半径为 r 。设圆锥的中心轴为 x 轴，顶点在原点上。那么，从顶点沿 x 轴切开，得到的截面的面积是多少？想一想，将圆锥纵向切开得到的截面，其底面的半径为 r ，距离圆锥的顶点 x 之处的半径为 $x \div h \times r$ 。

和前面一样，我们请出微小增量 dx 。想象一下顶点 x 附近的是什么形状，对了，这部分我们可以看成是厚度极小的圆柱体。求圆柱体的体积就很容易了。截面体积 $= \pi \left(\frac{x}{h}r\right)^2 \times dx$ ，之后我们移动 x 求积分。当然，移动区间为顶点（0）到底面（ h ）之间。移动 x 求所有截面的和，即求 \int 。

$$\text{圆锥的体积} = \int_0^h \pi \left(\frac{x}{h}r\right)^2 dx = \pi \times \frac{1}{3}x^3 \times \frac{r^2}{h^2} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi h r^2$$

这样，我们就推导出了圆锥的体积公式，确实是“底面积 \times 高 $\div 3$ ”。那么这个“ $\div 3$ ”是怎么回事呢？想想我们在小学学习的相似原理，面积比是长度比的平方，对该平方求积分就会出现 $\frac{1}{3}$ 。

我们已经证明，圆锥无论底面为何种形状，只要面积比是长度比的平方成立，就可以得出 $\frac{1}{3}$ 这个数。



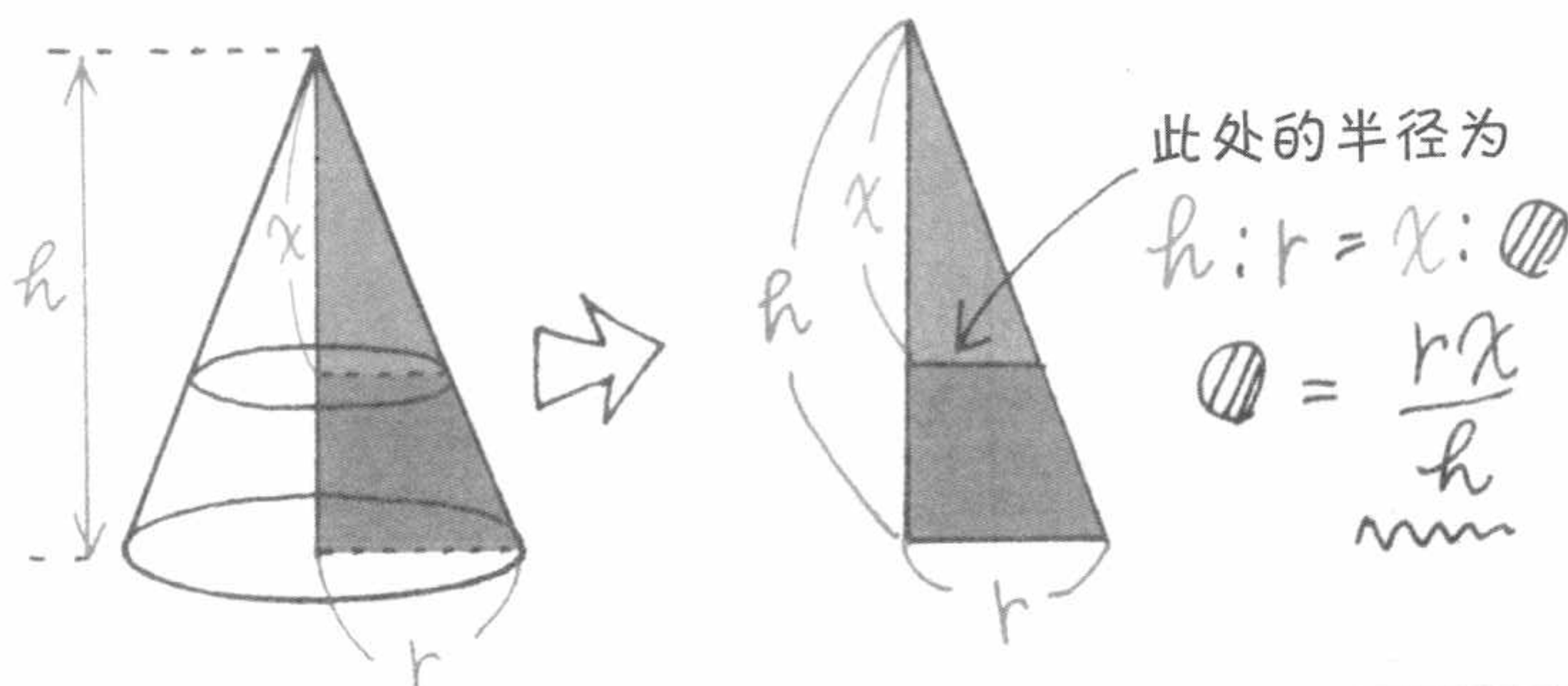
圆锥体的体积

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h$$

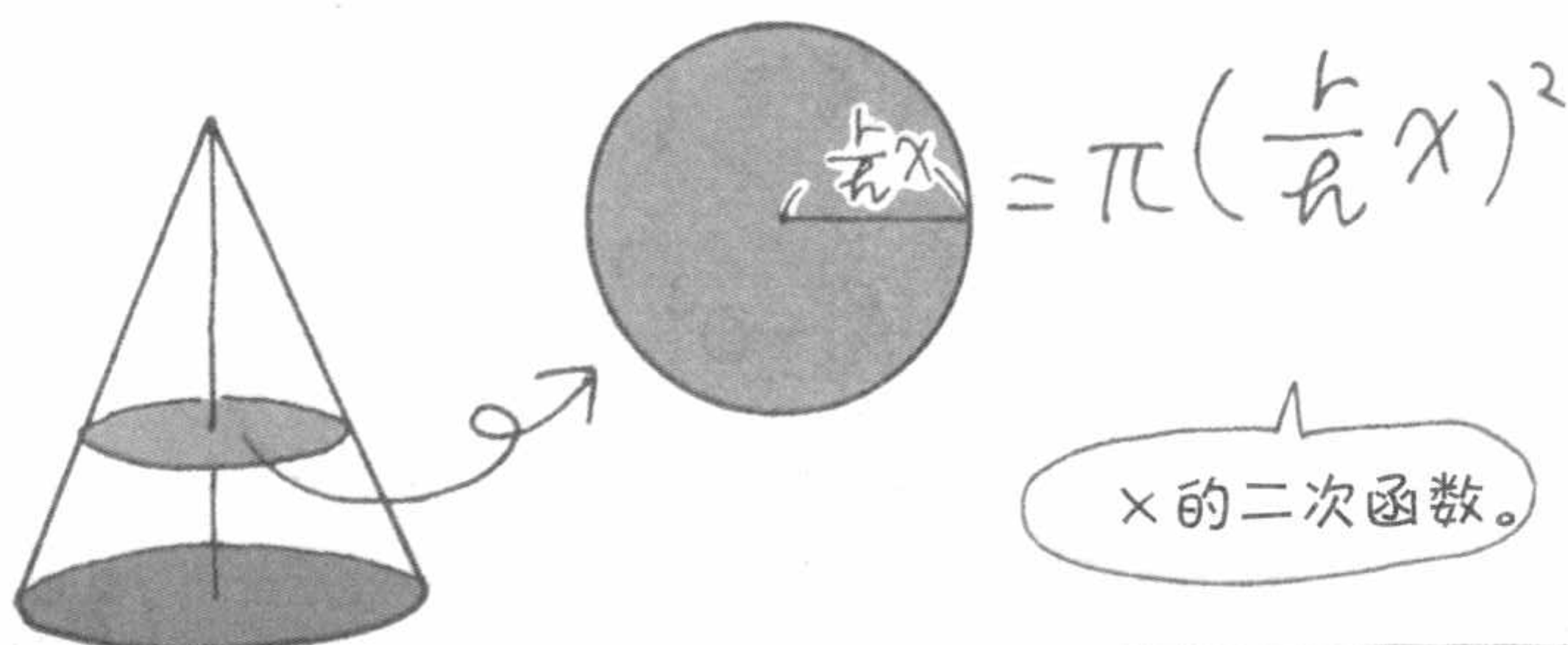
中学时，会要求
学生死记住
公式。

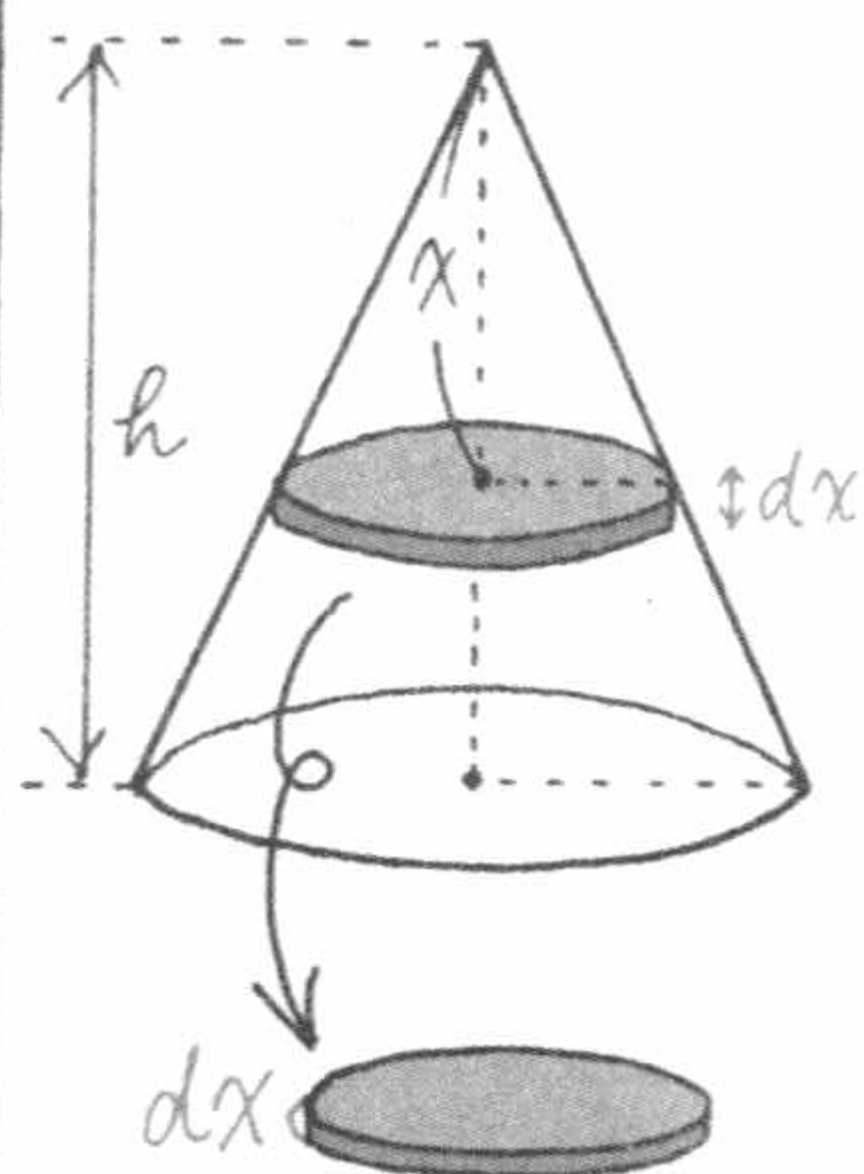
但是，为什么是 $\frac{1}{3}$ 呢？
现在我们能够解开这个谜了。

我们考虑一下距顶点 x 处的截面，



圆面积公式为半径 \times 半径 $\times \pi$ ，因此横截面面积为



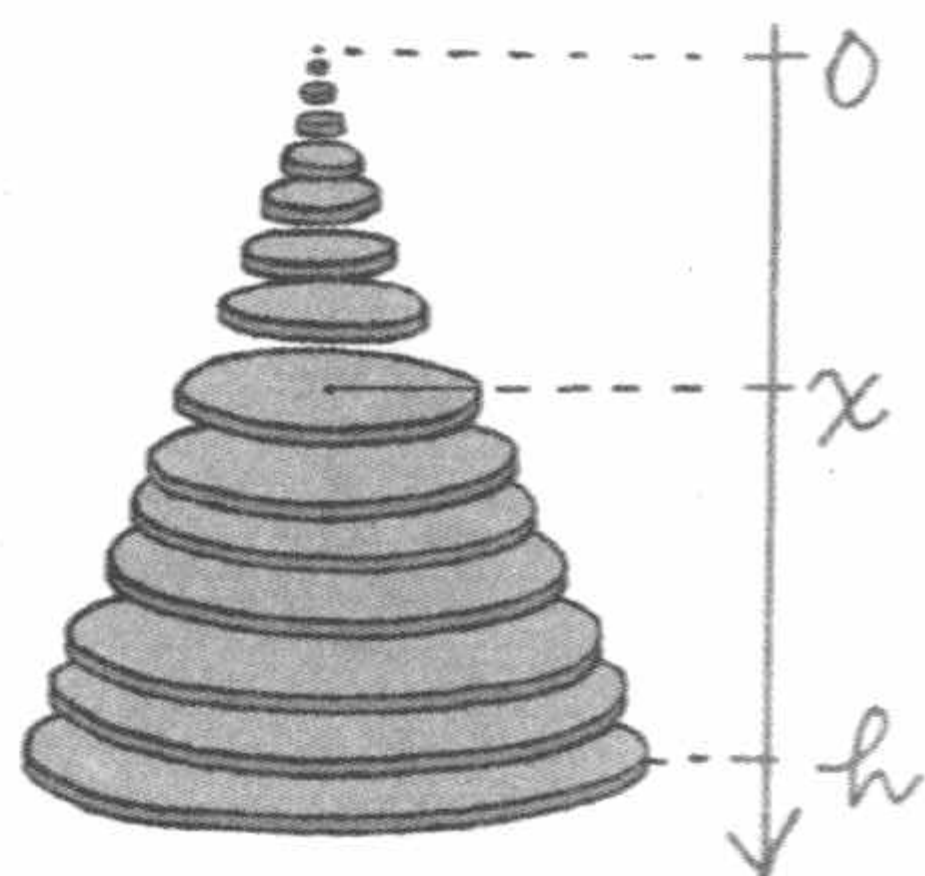


厚度极小 (dx) 的时候, 火腿片般扁薄的截块的体积。

火腿片的体积 = (截面面积) \times 厚度

$$= \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 \times dx$$

将 x 在 $0 \rightarrow h$ 区间内的火腿片加起来即可。



圆锥的体积

$$= \int_0^h (\text{火腿片})$$

$$= \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx$$

如果以 x 为自变量, 则该算式就是一个单纯的二次函数。

$$\int_0^h \left(\pi \frac{r^2}{h^2} \right) x^2 dx = \left(\pi \frac{r^2}{h^2} \right) \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^h$$

$$= \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{h^2} \{ h^3 - 0^3 \} = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{h^2} \times h^3$$

$$= \frac{1}{3} \pi h r^2 !!$$

对二次函数求积分
就得到 $\frac{1}{3}$ 。



68 球的体积



下面是球的体积。

球的体积是 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 。你们不觉得这个 r^3 与 $\frac{1}{3}$ 有某种关系吗？

一个半径为 r 的方程式为 $x^2 + y^2 = r^2$ ，将该方程改写成“ $y =$ ”的形式，则

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

在此次我们只考虑正号的情况。

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

将这个半圆旋转一周就会形成一个球。我们在 x 处截取一个薄片，可将这薄片视为一个圆柱体，其体积为

$$\pi \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi (r^2 - x^2) dx$$

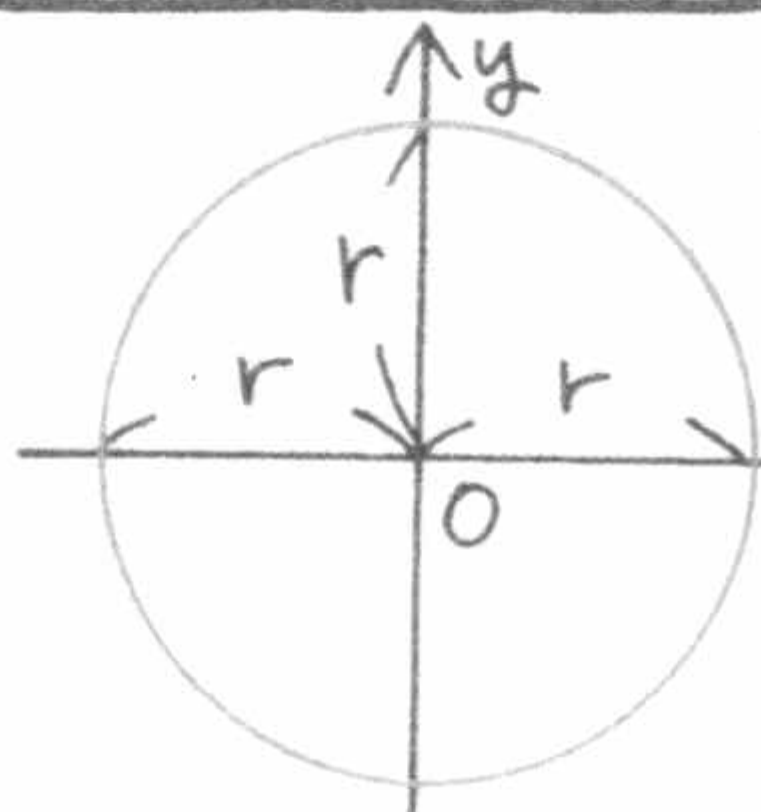
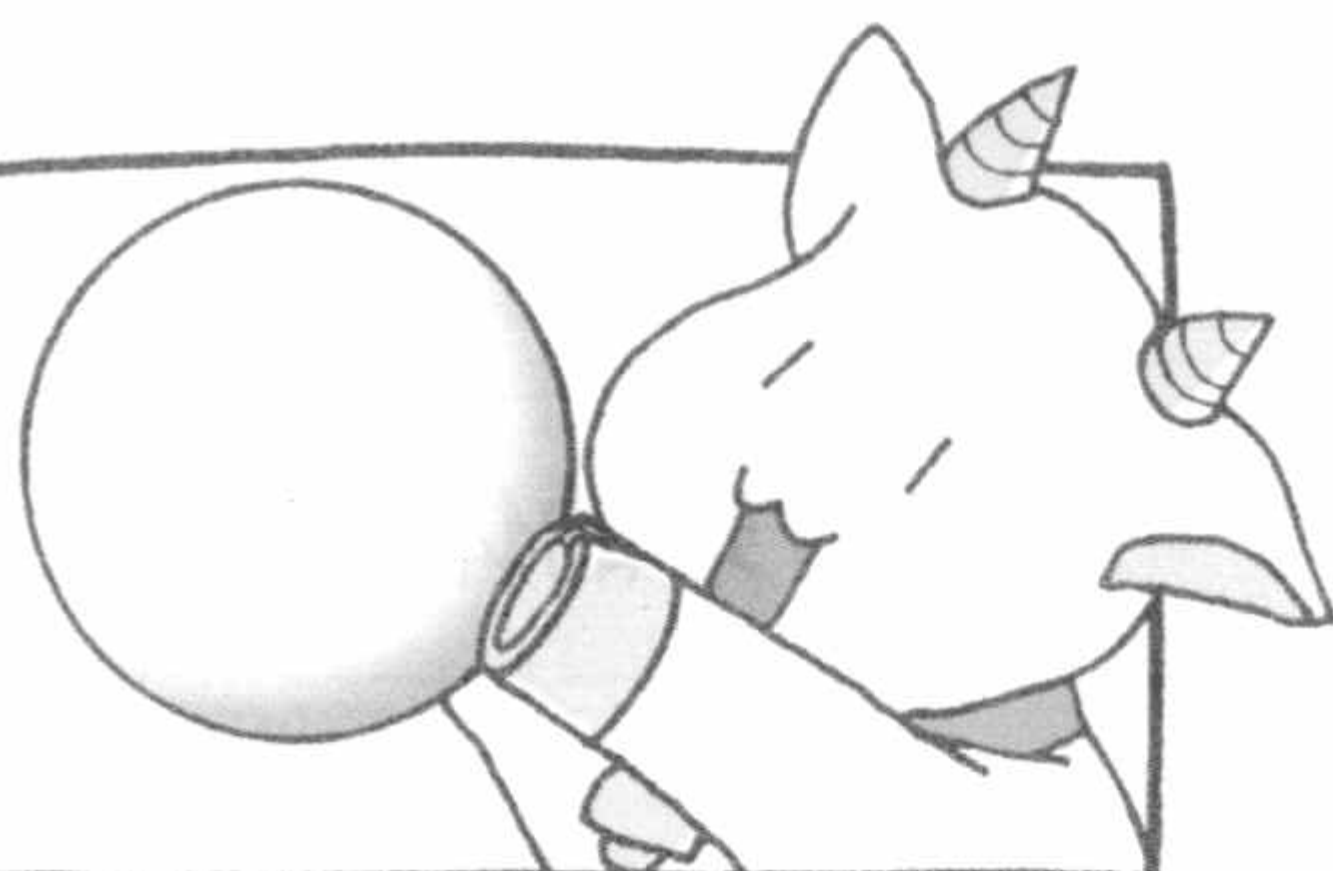
我们在 $-r$ 到 r 的区间内求积分，则

$$\int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

依旧是对平方求积分，因此出现了 $\frac{1}{3}$ （字母数字）³的形式。

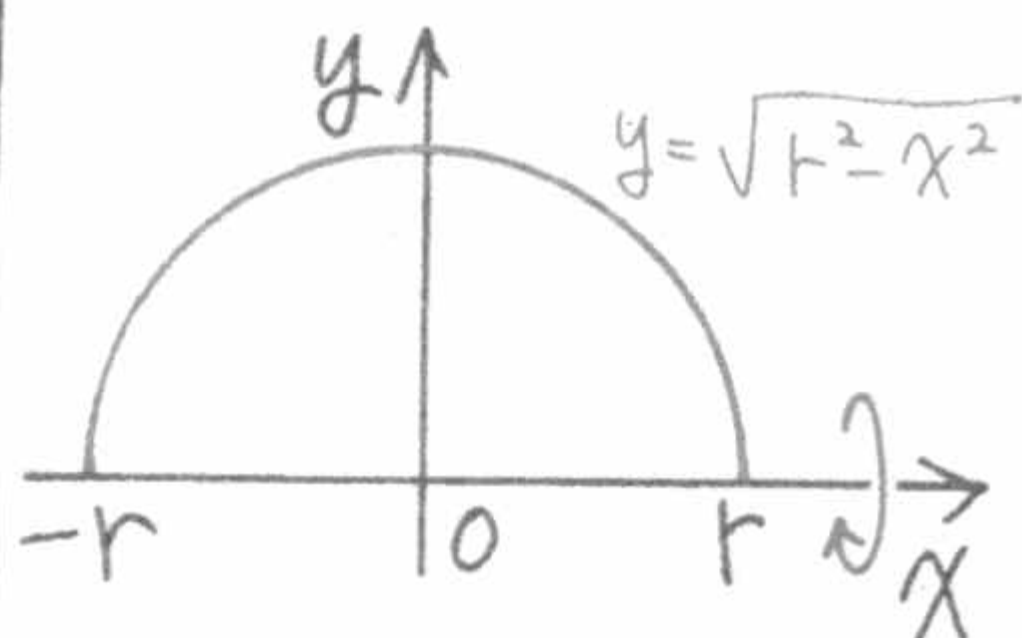
我们学过，球的体积为

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

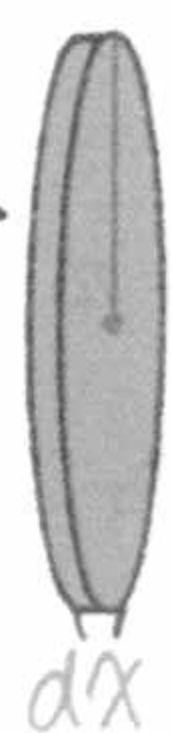
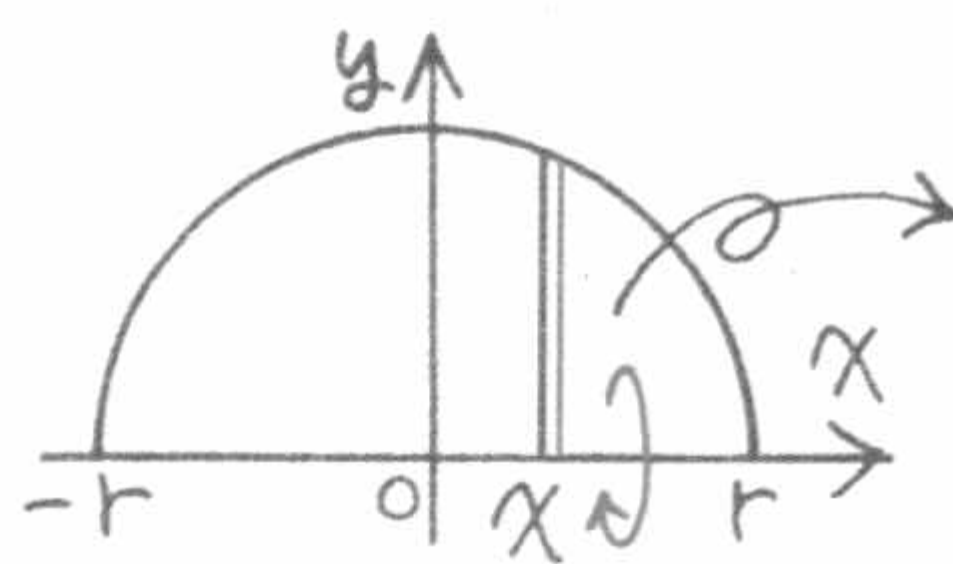


← 圆的图形是这样的。将其表示为 $y = \dots$ 的格式，则

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$



如果只看圆形的上半部分，则该图形围 x 轴旋转一周就得到一个球体。



这个就像 x 轴上的薄火腿片，它的半径为 $\sqrt{r^2 - x^2}$ 所以火腿片的面积就是

$$(\sqrt{r^2 - x^2})^2 \times \pi = \pi(r^2 - x^2)$$

火腿片的厚度为 dx ，则火腿片体积 $= \pi(r^2 - x^2)dx$

在 x 从 $-r$ 到 r 的区间内将这些体积加起来就是

$$\int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2)dx = \pi \left(r^2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

69 积分的战略



有关积分的求法，我们来复习一下之前学习的内容。积分的基本思考方式是着眼于微小部分，之后求和。

求和这部分运算使用我们之前练习的计算方法（积分是导数的逆运算）即可。

积分的做法分为以下几步。

1. 思考分割方法。
2. 根据分割方法列出算式。
3. 计算算式（积分）。

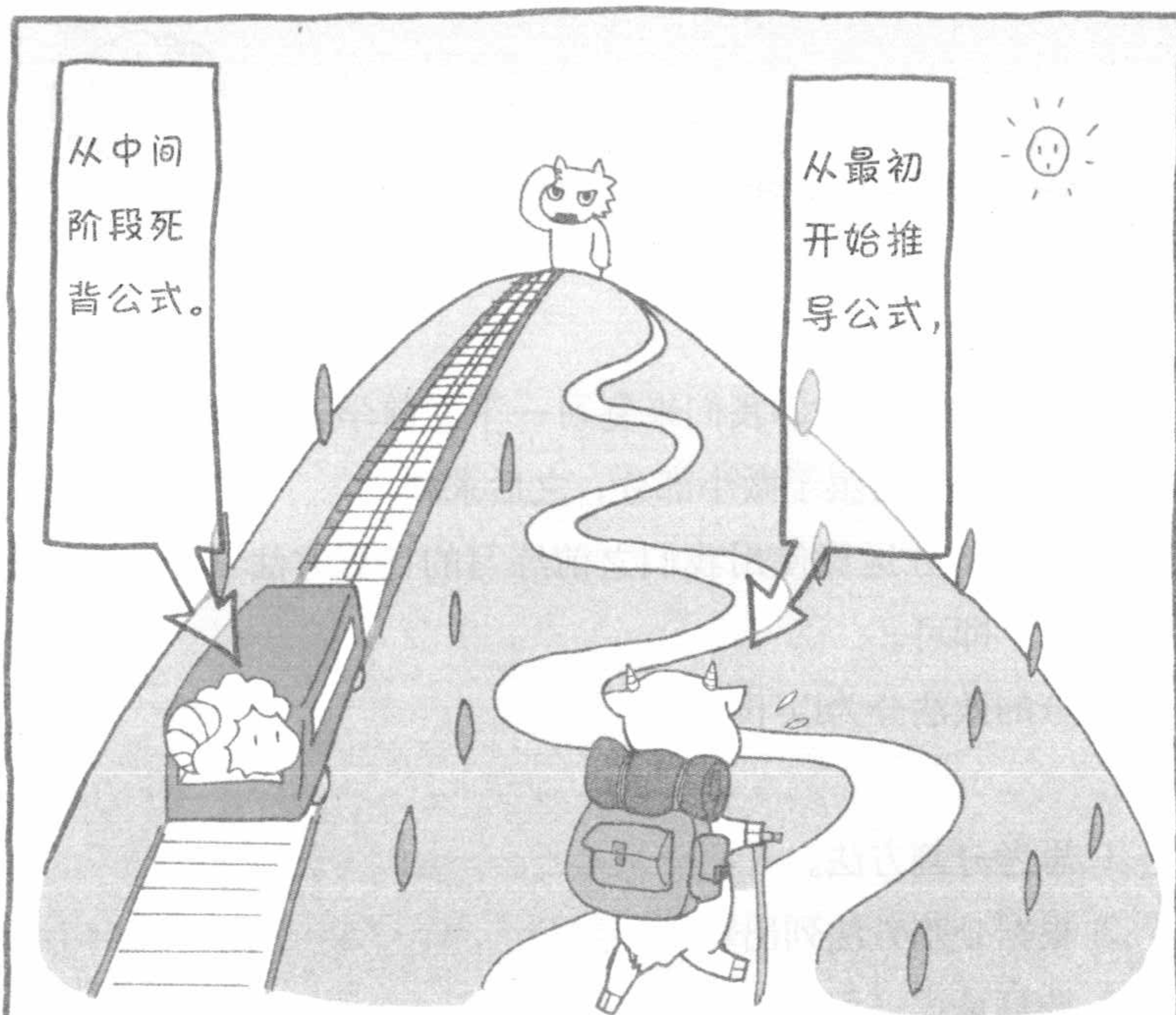
还可以将 1 和 2 合并为列式阶段，3 为解式阶段。

哪一步需要动脑筋呢？

哪一步都必须动脑筋，只是解式阶段能够按照一定的模式求解。而列式阶段，如何分割，如何列式就要绞尽脑汁地思考。

也就是说，如何列算式是关键、要点。

实际上，有时即便能够列出算式也未必就能求出积分。根据算式的列法，有些可以求积分，有些则不能求积分。



从中间
阶段死
背公式。

从最初
开始推
导公式，

两者看到的风景相同，你会从哪里走？



70 物理公式中的微积分



下面我们练习一下导数和积分，题目就选择物理题。原本微积分就是为解决物理问题产生的，所以二者有着密不可分的联系。很多人都曾被迫背诵过大量物理公式，其实很多物理公式都能从少数的基本原理中通过微积分推导出来。

那么物理和数学的区别在什么地方呢？物理中有标明“这就是物理”的代表性公式。而之后的公式变形与数学相同，只要将相应条件带入公式就能得到答案。

那么，“这就是物理”的代表性公式是什么？有若干个，第一个就是 $F = ma$ 。

一说到物理，我总会想起对弹簧施加压力弹簧就会收缩等的探讨。那力又是什么呢？牛顿先生给出的定义是：力是对某质量物体施加加速度的作用。乍一看有些令人摸不清头脑，力是 F ，质量是 m ，加速度是 a ，写成公式为

$$F = ma$$

公式表示力等于质量乘以加速度。我们知道，力和质量是正比关系，要得到相同的加速度，重的物体较轻的物体需要更大的力。什么是加速度呢？

我们来具体说明一下。

假设乘飞机从东京到大阪。我们称“位移 x 在某时间 t 内发生了多大变化”为速度。而“ x 在 t 内发生多大变化”就是关于 t 对

x 求导，即 $\frac{dx}{dt}$ 。

飞机起飞后一段时间，会以一定速度飞行，之后为着陆减速。这种“速度的变化”就叫加速度。飞机离开地面时（没坐过飞机的人请想象坐汽车、电车等你喜欢的交通工具）会有一种加速感，在着陆时会有减速感。按一定速度飞行期间（速度不变化=速度的变化率为0），加速度为0。

现在请好好看一下刚才的公式。力 F 被定义为

$$F = ma$$

如果加速度 (a) 为0，则力也为0。在飞机的例子中，能让我们感觉到力的只有加速度。

我们将 $F = ma$ 中的加速度 a 用位移的二阶导数替代。（对位移 x 求导得到速度，进一步对速度求导得到加速度。也就是说，对位置二次求导就得到加速度，但这里却用了“二阶导数”，有些混乱这个词来自英语的“floor”，译为“阶”，很容易混淆不清）。则该算式写为

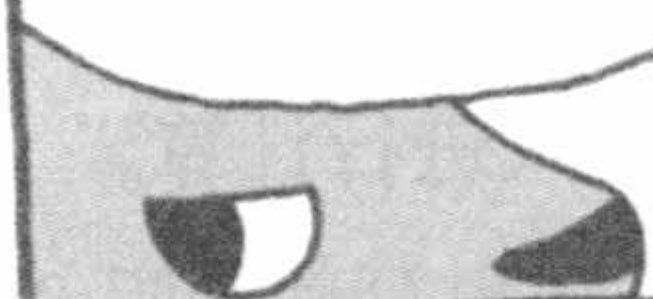
$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

你可能会觉得二阶导数的符号“2”的位置比较奇怪，其实它只表示二次求导，不必想得太多。如果想稍微探究一下符号的由来，可以像下面这样理解。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x \right)$$

二阶导数就是二次求导，括号中为 x 的导数再次求导，就是上面的算式。因此，位移 x 的二阶导数是 $\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x \right)$ ，将其与质量 m

微积分为研究物理现象
做出了巨大贡献。



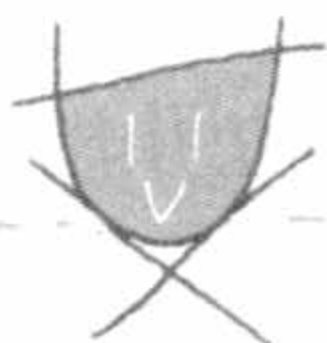
其中最著名的就是位移、
速度和加速度的关系。



速度

导数施加魔法后

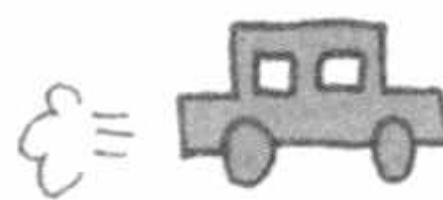
就变成了加速度。



加速度

积分施加魔法后

就恢复为速度。



对速度

求积分

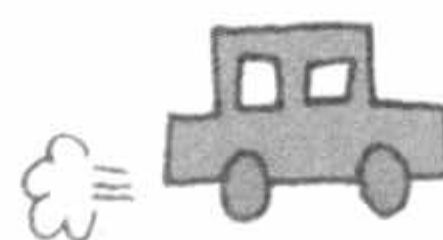
就得到距离。



对距离

求导

又得到速度。



相乘就得到 F 。

那么该 $F = ma$ 为什么是物理的代表性公式呢？这是因为该算式成立并不存在什么理由。

牛顿认为，使用 $F = ma$ 解决问题很方便，但是要说为什么方便，却找不到解释的理由。只是因为通过该算式计算的结果与实际情况相符而已，于是由此得出结论，可以用该算式进行计算。

听了上面的话，你是不是有这样的感觉——“这也算理由吗？”说得没错，的确如此。虽然理由不很清楚，但该算式成立，这就是物理的起源。

总而言之， $F = ma$ 之所以成立并没有理由。而物理这门学问就是以该公式成立为出发点的。因此要学习物理就不能对 $F = ma$ 有所质疑。

那么我们就接受 $F = ma$ ，进入下面的讨论。

力中最简单、最单纯的就是重力。

伽利略说重力是与质量成正比的力。因为重力 (F) 与质量成正比，所以我们可以将这一关系写成

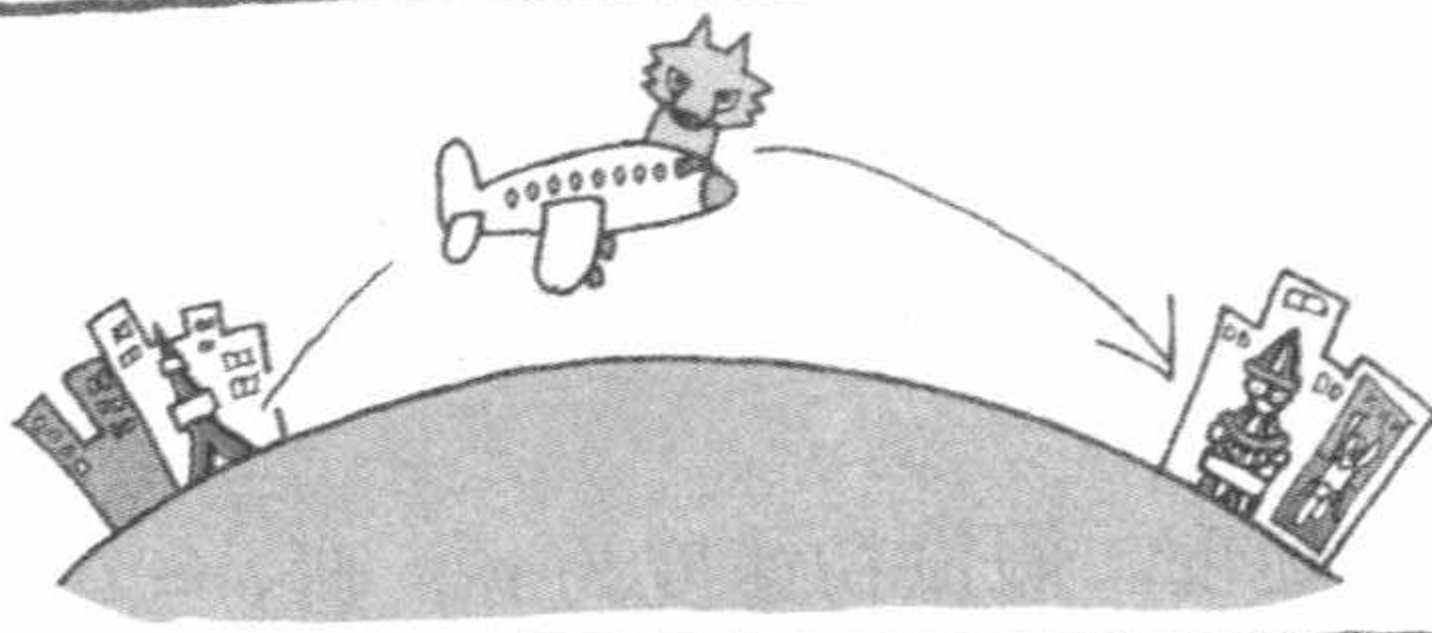
$$F = mx \text{ (常数)}$$

常数用重力 (gravity) 的开头字母 “ g ” 表示，则上面的算式变为 $F = mg$ 。

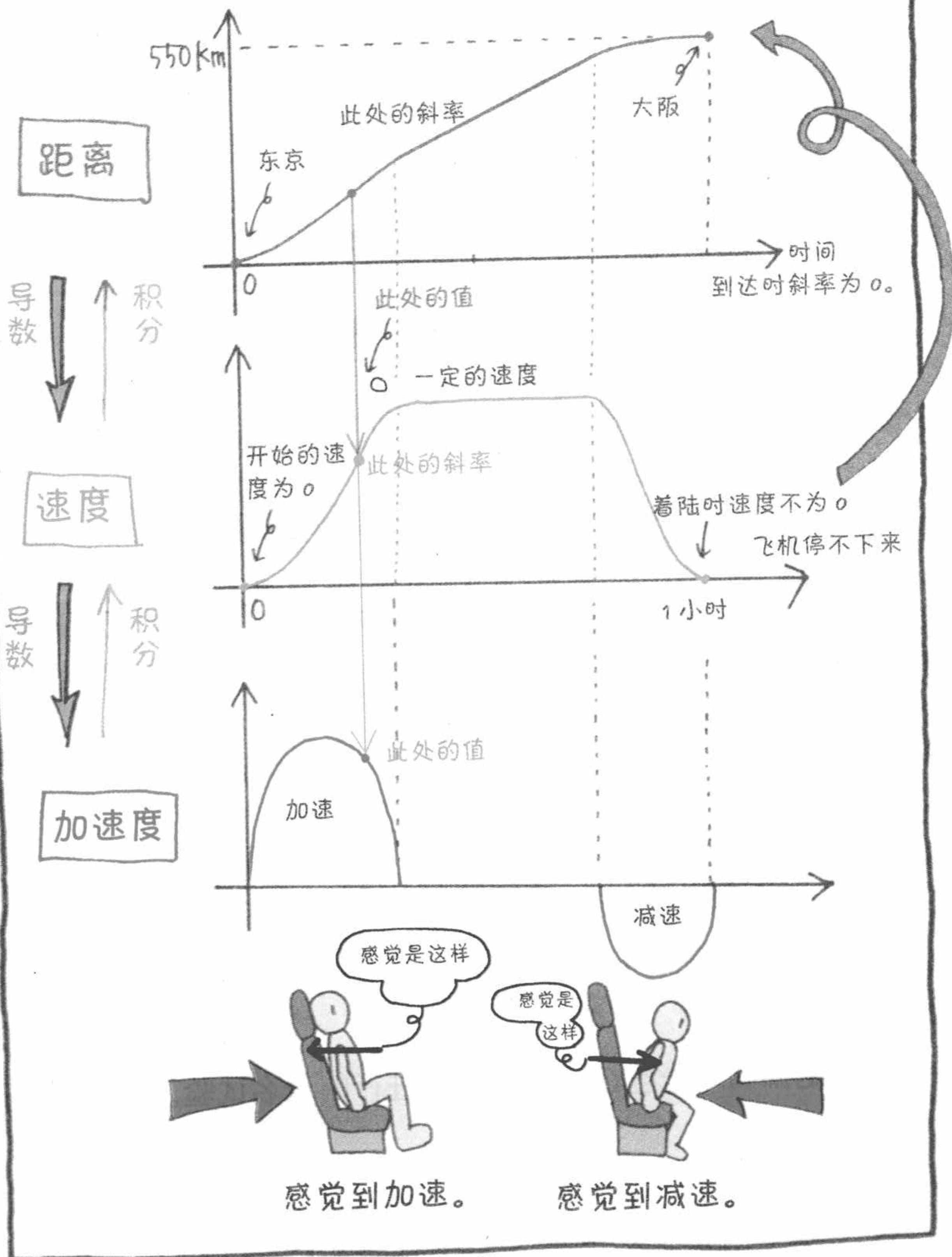
质量为 m 的球受到重力 ($F = mg$)，将球举起后突然松手，从松手的时间点开始，球受到的重力就成为使球加速下降的原动力。

$$F = m \times \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ 且 } F = mg, \text{ 因此}$$

$$m \times \frac{d^2x}{dt^2} = mg$$



以从东京飞往大阪的飞机为例……



对算式两边求关于 t 的积分，则

$$m \times \frac{dx}{dt} = mgt + C \quad (C \text{ 为积分常数})$$

$t = 0$ 时的速度被称为初速度。假设初速度为 v_0 ，则 $t = 0$ 时， mgt 为 0，因此积分常数 C 为 mv_0 。

$$m \times \frac{dx}{dt} = mgt + mv_0$$

因为是“突然松手”，可认为 v_0 为 0。因此，突然松手时球的运动方式可写成

$$m \times \frac{dx}{dt} = mgt$$

我们再对该算式的两边关于 t 求积分。

$$mx = \frac{1}{2}mgt^2 + D \quad (D \text{ 为积分常数})$$

$t = 0$ 时，位置可以是任意的，但 0 点位置为基准更便于理解，因此我们假设 $t = 0$ 时 $x = 0$ ，要使该算式成立，积分常数 D 必须为 0。因此重新整理一下该算式就得到

$$mx = \frac{1}{2}mgt^2$$

该算式表示的是位移、质量和时间之间的关系，但仔细观察会发现算式两侧都有 m 。也就是说，质量与“位移和时间的关系”无关。

这就是伽利略先生在比萨斜塔上进行的著名试验。（该故事好像是杜撰的。）

m 当然不为 0，因此两边可以同时除以 m 得到

我们考虑一下仅依靠重力球落下时的情况。



$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ 且试验证明}$$

$$F = mg$$

$$\text{因此, } m \frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

重力和球的质量成正比。

m 为质量, 只要是地球上的物体,
 m 都不会为 0。



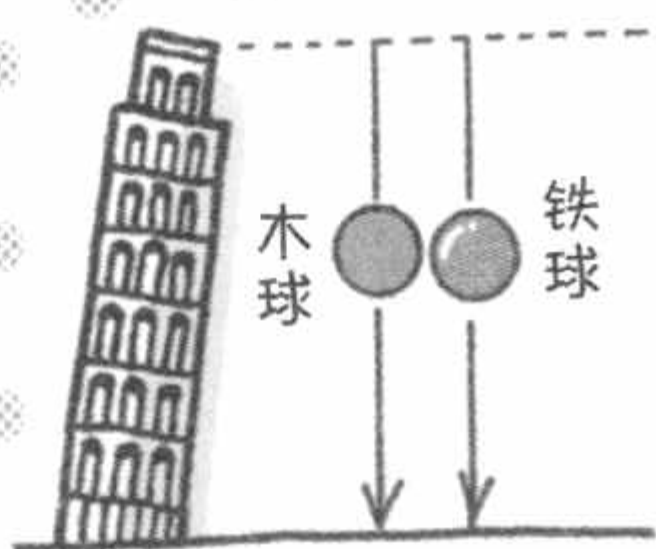
两边同除以 m , $\frac{d^2x}{dt^2} = g \xrightarrow{\text{积分}} \frac{dx}{dt} = v(t) = gt + C \xleftarrow{\text{速度}} t=0 \text{ 时初速度}$

或者说, 此时多使用 v_0 表示而不是用 C 。



再进一步求积分 $\Rightarrow x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + D \xleftarrow{\text{初始位置}} t=0 \text{ 时的}$

因此, 如果开始时在 0 点位置的初速度为 0,
则 t 秒后球会到达 $x = \frac{1}{2}gt^2$ 的位置。



该算式中没有 m , 球的重量不同, 但从比萨斜塔掉落到地面所花的时间相同。

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

该算式更清晰地表示出了 x 和 t 的关系。

人们通过大量实验，得出在地球上 $g = 9.8 \text{ 米/秒}^2$ 。因此，使用该知识计算可知，球在离手 10 秒钟后会下落 490 米。因为存在空气阻力，实际上并不会下落这么多，而在真空中会下落 490 米。因为考虑空气阻力进行计算很麻烦，因此物理问题常会给出“空气阻力不计”的条件。

我们再来考虑一下以初速度 v_0 将球向上抛出的情况，假设球仅受到重力，空气阻力忽略不计。

我们将初速度 v_0 分为 x 轴方向和 y 轴方向进行研究，设这两个方向上的初速度分别为 V_x 和 V_y 。设 x 为水平方向位移， y 为垂直方向位移。

此时如果轻率地将刚才的 $x = \frac{1}{2}gt^2$ 中的 x 变为 y ，就错了。物理学的起点是 $F = ma$ ，这是可以通过微积分计算求得的公式。我们必须从 $F = ma$ 着手，所以首先是 $F = m \times \frac{d^2y}{dt^2}$ 。这次研究的是重力，必须考虑坐标轴的方向。设向上为 y 轴的正向，重力为 mg ，重力的作用方向为负，即 $F_y = -mg$ 。

之后与前面做法相同。列算式得到

$$m \times \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

两侧都有 m ， m 不为 0，为了计算简便，先约掉 m ，得到

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

对算式两边关于 t 求积分，则

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C \quad (C \text{ 为积分常数})$$

$\frac{dy}{dt}$ 是对 y 求关于时间 t 的导数，即 y 轴上的向上速度。 $t = 0$ 时的 $\frac{dy}{dt}$ 是初速度。 $t = 0$ 时， gt 为 0，因此如果 y 向上的初速度为 V_y ，则积分常数 C 就必须是 V_y 。

$$\frac{dy}{dt} = -gt + V_y$$

再对该式求关于 t 的积分。则

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_y t + D \quad (D \text{ 为积分常数})$$

$t = 0$ 时， y 为 0（以此为基准）。要使该算式成立，积分常数 D 必须为 0。因此上面的算式变为

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_y t$$

由此求得 y 坐标与时间 t 的关系。另一方面，有关 x 的方向，如果空气阻力忽略不计，则没有作用力，因此 $F_x = 0$ 。

$$\text{因为 } F_x = m \times \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ 所以 } 0 = m \times \frac{d^2x}{dt^2}。$$

因为 m 不为 0，因此两边除以 m 得

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2}$$

按照惯例，关于时间 t 求积分。

$$\frac{dx}{dt} = C \quad (C \text{ 为积分常数})$$

$t = 0$ 时的速度应该为 V_x 。即 $C = V_x$ ，因此

$$\frac{dx}{dt} = V_x$$

再关于时间 t 求积分。

$$x = V_x t + D \text{ (D 为积分常数)}$$

$t = 0$ 时, $x = 0$ (与 y 轴相同, 以此为基准), 所以积分常数 D 为 0。综上所述得到方程组

$$\begin{cases} x = V_x t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_y t \end{cases}$$

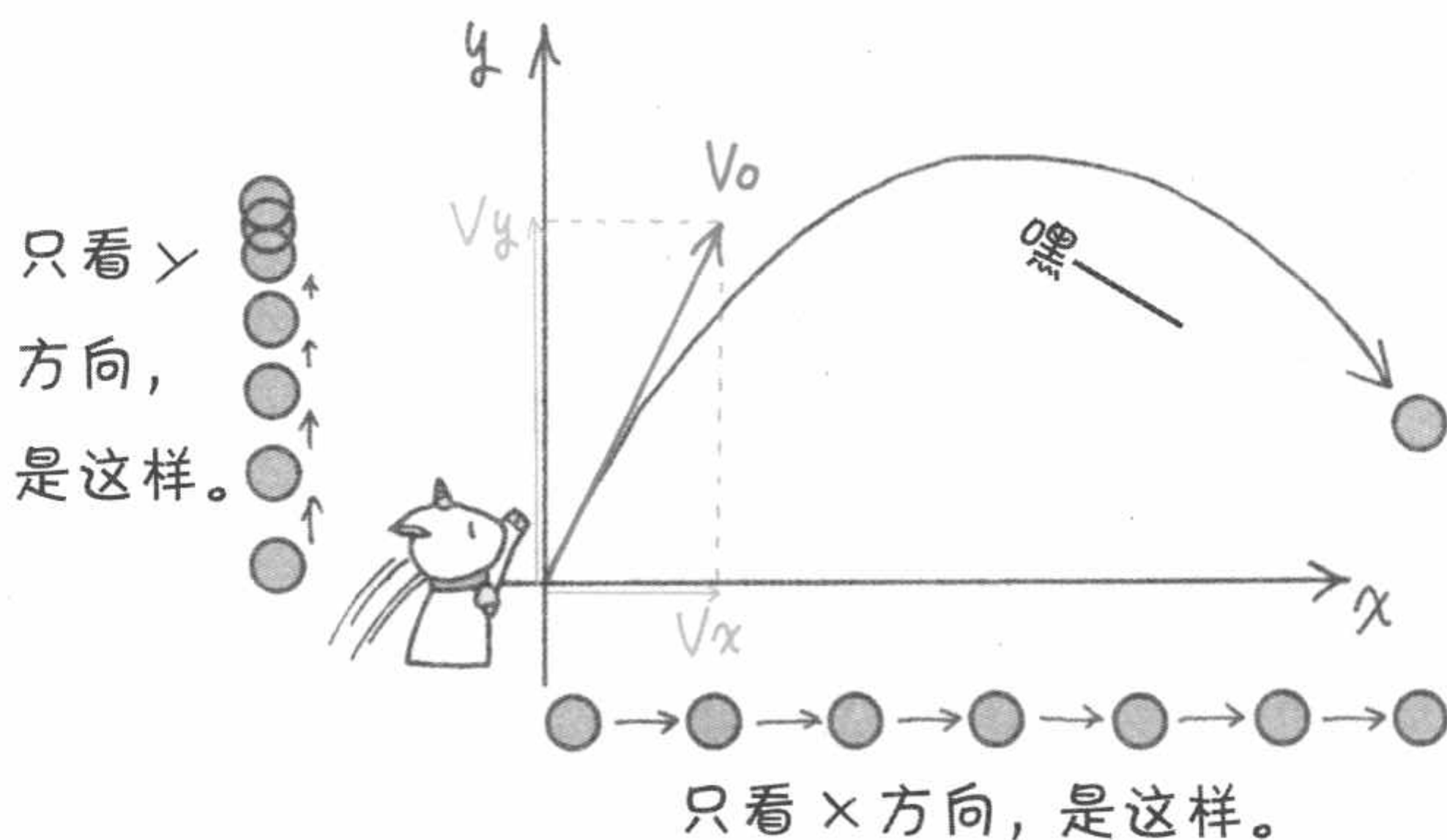
将第一个方程式改写成 $t = \frac{x}{V_x}$, 代入第二个方程。

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_x} \right)^2 + V_y \left(\frac{x}{V_x} \right)$$

该算式究竟是什么呢?

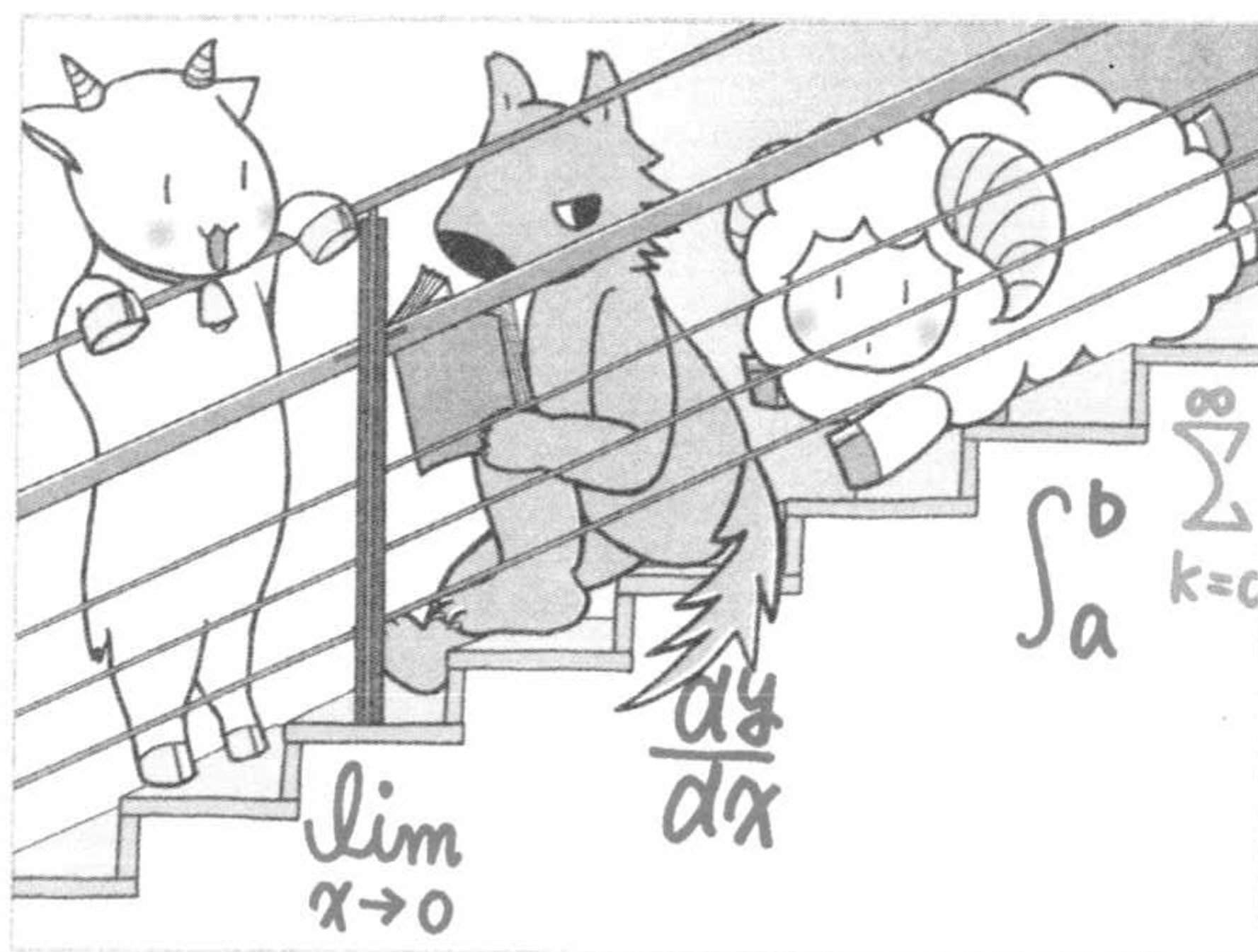
刚才进行的方程变形俗称“消 t ”。由此得到与 t 无关的 x 和 y 的关系式。与时间 t 无关的 x 与 y 的关系, 称为轨迹。即该算式表示以初速度 v_0 将球抛出时球的运行轨迹。

仔细观察该算式, 这是 x 的二次函数, 它的图形为抛物线。求



物体上抛的轨迹，就会得到 $y = (x \text{ 的二次函数})$ 的函数形式。以上我们用微积分说明了物理现象，讲得比较简单。

物理现象每时每刻都在发生变化，而导数就是描述变化的，因此物理和微积分关系紧密。



全部结束了！
都学会了吧？
谢谢你认真阅读！

后 记



我们 Medaka-College 的微积分培训怎么样？通过森皆捻子老师的图画，艰涩的数学是不是变得好懂了些？只是内容还是相当有难度，当然，大部分是简单易懂的。入门书的内容不必都理解透彻，只要理解易懂之处就可以了。

不仅仅是数学，任何一门学问都不能通过一本入门书就全部理解。人的智慧和知识都是从这本书上学一点，从那个人那里了解一些，慢慢积累起来的。因此看完这本书有一些不明之处，请在其他图书中寻找答案，仍有不明白的地方就再看其他书，也可以回头看看本书，说不定在这样研究的过程中，“理解之神”就从天而降了。

“序言”中我们也提到过，入门学习就是这样的。在编写本书时，我们多方征求建议和构思。在此对为我们提供诸多建议和构思的裕也先生，以及努力校对的有本先生、竹本先生、广濑先生致以最诚挚的谢意。

此外我还要向给与该书出版机会并始终关注本书的编辑石岛先生表示感谢。

感谢一直以来支持我们的读者，笔止于此，希望有机会再见。

本书不是艰涩难懂的专业书籍，教授的是容易理解的概念。
说明不够简单易懂是因为没有真正理解。



Medaka-College

难懂的专业图书和难懂的概念无法传达，是因为没有进行简单易懂的说明

[WWW//medaka-College.com/](http://www.medaka-college.com/)



漫画绘制 森皆捻子

医生兼漫画家



画本书的插图让我回想起高中时的应试学习，我衷心希望它能简单易懂，对你有所帮助。