

单增数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

# 单增老师 教你学数学

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

## 趣味数论

单增◎著



华东师范大学出版社



江苏教育出版社  
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

# 目 录

总序/ 1

序/ 1

前言/ 1

## 1 你最熟悉的朋友——自然数 / 1

- 1.1 华生的第一个问题 / 2
- 1.2 巨轮的长 / 3
- 1.3 孩子与门牌号码 / 3
- 1.4 荷兰人买猪 / 5
- 1.5 创纪录的因数分解 / 6
- 1.6 被 2160 整除的立方数 / 7
- 1.7 哪几盏灯亮着? / 9
- 1.8 何时重逢 / 10
- 1.9 丢番图的墓碑 / 11
- 1.10 请添三个数字 / 11
- 1.11 欧几里得永垂不朽 / 12
- 1.12 因数分解的妙法 / 14
- 1.13 十全数 / 16
- 1.14 十全数的韧性 / 18
- 1.15 分油问题 / 19
- 1.16 辗转相除法与裴蜀恒等式 / 20
- 1.17 货物的单价 / 22
- 1.18 能变成均等吗? / 23
- 1.19 素数的一个特征 / 24

- 1.20 最大公约数的性质 / 25
- 1.21 唯一分解定理的证明 / 26
- 2 多角数、完全数及其他 / 28
  - 2.1 三角形与三角数 / 28
  - 2.2 等差数列的求和 / 30
  - 2.3 正方形与平方数 / 31
  - 2.4 平方数与平方式 / 32
  - 2.5 五边形与五角数 / 33
  - 2.6 立体图形 / 35
  - 2.7 一些不难证明的公式 / 37
  - 2.8 一个不平凡的结论 / 38
  - 2.9 什么数恰好有 60 个因数? / 40
  - 2.10 因数的和 / 42
  - 2.11 完全数——人们对它的认识并不完全 / 43
  - 2.12 亲和数 / 45
  - 2.13 高阶亲和数 / 46
- 3 素数——是永恒的谜吗? / 48
  - 3.1 是合数还是素数? / 48
  - 3.2 乘法公式大显身手 / 50
  - 3.3 爱拉托斯散的筛子 / 50
  - 3.4 殆素数与  $1+2$  的  $2$  / 53
  - 3.5 辛勤劳动的结晶——素数表 / 54
  - 3.6 最大的素数 / 54
  - 3.7 修道士的工作——梅森数 / 55
  - 3.8 费尔马说错了 / 57
  - 3.9 正十七边形的尺规作图 / 58
  - 3.10 欧几里得的巧妙证明 / 59
  - 3.11 费尔马数与素数的无限性 / 60

- 3.12 量与质 / 61
- 3.13 素数定理 / 62
- 3.14 算术级数中的素数 / 64
- 3.15 素数之间的间隙 / 65
- 3.16 一个容易的问题 / 67
- 3.17 几个无理数 / 67
- 3.18 “天造地设”的素数幻方 / 68
- 3.19 有表示素数的公式吗? / 69
- 3.20 哥德巴赫猜测 / 71
- 3.21 两个合数的和 / 72
- 3.22 孪生素数 / 72
- 3.23 又一些猜测与问题 / 73
- 3.24 一个被推翻了的猜测 / 75
- 4 大师的发明——同余 / 77
  - 4.1 华生的新把戏 / 77
  - 4.2 同余 / 79
  - 4.3  $1 + 1 = 0$  / 80
  - 4.4 在费尔马失足的地方 / 82
  - 4.5 整除的判别法 / 83
  - 4.6 一个简单的数字问题 / 84
  - 4.7 求余数 / 85
  - 4.8  $47^{47} \cdots^{47}$  的个位数字 / 86
  - 4.9  $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 1989$  的末三位数字 / 87
  - 4.10 华生难倒了福尔摩斯 / 88
  - 4.11 整除问题举例 / 89
  - 4.12 三角数与偶完全数的末位数字 / 91
  - 4.13  $11 \cdots 1$  不是平方数 / 92
  - 4.14 平方数的末尾能有几个 4? / 93

- 4.15 平方数的末位数字 / 94
- 4.16 用 1、2、3、4、5、6、7 作成的七位数 / 95
- 4.17 无相同项的两个数列 / 96
- 4.18 完全剩余系 / 97
- 4.19 有超韧性数吗? / 99
- 4.20 抽屉原则牛刀小试 / 100
- 4.21 在不定方程中的应用 / 101
- 4.22 在堆垒问题中的应用 / 103
- 5 欧拉的  $\varphi$  函数 / 107
  - 5.1 放石子 / 108
  - 5.2 空格有了石子 / 110
  - 5.3 染色问题 / 111
  - 5.4  $\varphi(n)$  的计算公式 / 112
  - 5.5 一个求和问题 / 113
  - 5.6 副产品 / 114
  - 5.7 30 有惊人的性质 / 115
  - 5.8  $\varphi(n)$  是积性函数 / 117
  - 5.9 “我正是这样想的!” / 118
  - 5.10 卡片上的数 / 119
  - 5.11 欧拉定理 / 121
  - 5.12 7 的幂结尾能是 0000001 吗? / 121
  - 5.13 数字全不为 0 的倍数 / 122
  - 5.14  $7^{9999}$  的末三位数字 / 123
  - 5.15 费尔马小定理 / 123
  - 5.16 伪素数 / 124
  - 5.17 群、环、域 / 125
- 6 一些不定方程的解 / 128
  - 6.1 百鸡问题 / 128

- 6.2 另有妙法 / 130
- 6.3 中国剩余定理 / 132
- 6.4 太阳神的牛 / 134
- 6.5 勾股数 / 135
- 6.6 换一换汤 / 138
- 6.7 复数与勾股数 / 139
- 6.8  $x^2 + y^2 = (y + 1)^2$  的解 / 140
- 6.9 单位圆上的有理点 / 141
- 6.10 距离为整数的整点 / 142
- 6.11 成等差数列的三个平方数 / 144
- 6.12 弹子的个数 / 145
- 6.13 张冠李戴的沛尔方程 / 146
- 6.14 最小解与一般解 / 147
- 6.15 罗马军团问题 / 149
- 6.16 方程  $x^2 - 2y^2 = \pm 1$  / 150
- 6.17 勾股为连续的自然数 / 152
- 6.18 小红家的号码 / 154
- 6.19 方程  $x^2 - dy^2 = n$  / 156
- 7 机器人与坑 / 158
  - 7.1 罗伯特落入坑里 / 158
  - 7.2 重蹈覆辙 / 159
  - 7.3 结论与问题 / 160
  - 7.4 小心地雷! / 161
  - 7.5 罗伯特家族 / 161
  - 7.6 狄利克雷定理 / 163
  - 7.7 克罗内克尔定理 / 164
  - 7.8 幂的前  $n$  位数字 / 165
  - 7.9 马勒的定理 / 166

- 8 形形色色的初等问题 / 168
- 8.1 哥伦布式的问题 / 168
  - 8.2 笛卡儿不敢动手 / 169
  - 8.3 欧拉的恒等式 / 171
  - 8.4  $-1$  是平方和 / 172
  - 8.5 递降法 / 173
  - 8.6 威尔逊没有证明的威尔逊定理 / 175
  - 8.7 两个完系相乘能是完系吗? / 176
  - 8.8 平方和及其他 / 179
  - 8.9 华林问题 / 181
  - 8.10 任意的七个整数 / 183
  - 8.11 剩余类相加 / 184
  - 8.12 从 7 到  $2n - 1$  / 187
  - 8.13 美国竞赛题 / 189
  - 8.14  $n!$  中  $p$  的次数 / 191
  - 8.15 二项式系数中哪些是奇数 / 194
  - 8.16 一道国际数学竞赛题 / 196
  - 8.17  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \cdots + \frac{1}{a+nd}$  不是整数 / 198
  - 8.18 最小公倍数的上界 / 201
  - 8.19 证明的完成 / 202
  - 8.20 解题能手的问题 / 205
  - 8.21 数论中的三颗明珠 / 207
- 9 分析与数论缔结姻缘 / 210
- 9.1 张教授堆砖 / 210
  - 9.2 收敛与发散 / 212
  - 9.3 这里又出现了欧拉 / 214
  - 9.4 黎曼  $\zeta$  函数 / 215

- 9.5 “我证明了黎曼假设!” / 217
- 9.6 几乎所有 / 218
- 9.7 圆法 / 221
- 10 固若金汤的城堡——费尔马大定理 / 223
  - 10.1  $x^4 + y^4 = z^4$  无解 / 224
  - 10.2 欧拉迈出了第一步 / 226
  - 10.3 化名的女数学家 / 227
  - 10.4 从欧拉到库麦尔 / 228
  - 10.5 什么是整数 / 229
  - 10.6 高斯整数 / 230
  - 10.7  $\mathbb{Z}[i]$  中的唯一分解定理 / 232
  - 10.8 再谈勾股数 / 233
  - 10.9 1847 年发生的事 / 235
  - 10.10 唯一分解定理不一定成立 / 238
  - 10.11 更通俗的例子 / 239
  - 10.12 理想与青春之梦 / 240
  - 10.13 伯努利数与正规素数 / 241
  - 10.14 二次域 / 243
  - 10.15 证实高斯猜测的历程 / 245
  - 10.16 近年来的两大进展 / 248
  - 10.17 猜测与反例 / 249
  - 10.18 城堡终于被攻克了 / 251
- 参考书目 / 254



# 1

## 你最熟悉的朋友——自然数<sup>\*</sup>

有一位数学家克罗内克(1823—1891)说:“上帝创造了自然数,其余的都是人工。”其实,自然数也是人类创造出来的,它是我们最熟悉的朋友。

自然数(也就是正整数)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...

可以分为三类:

第一类只有一个成员,就是1,称为单位。

第二类中的成员称为素数(也就是质数),每个素数恰好有两个因数(即约数):1和这个数本身。例如:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,  
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

都是素数。

第三类中的成员称为合数,每个合数至少有三个因数,即除了1和这个数本身以外还有其他的因数(这样的因数称为真因数)。例如,4有三个因数1、2、4,其中2是真因数,所以4是合数。

每一个自然数 $n$ 都可以分解为质(素)因数的乘积,即有分解式

---

<sup>\*</sup> 编辑注:本书所述自然数是正整数,不包括数字0。

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}. \quad (1)$$

其中  $p_1, \dots, p_k$  是不同的素数,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  是正整数(当  $n = 1$  时, 约定(1)式右边为 1), 例如

$$12 = 2 \times 2 \times 3, \quad 15 = 3 \times 5.$$

并且除了因数的顺序以外, 这种分解是唯一的. 这称为算术基本定理, 也叫做唯一分解定理.

除非特别说明, 本书中的数(字母)都表示自然数.

### 1.1 华生的第一个问题

《福尔摩斯探索》是脍炙人口的故事.

且说, 有一天, 大侦探歇洛克·福尔摩斯在家里闲着无事, 他觉得十分烦闷.

“太无聊了,” 福尔摩斯说, “最近一件值得动点脑筋的案子都没有!”

“我知道你又要犯老毛病了”, 他的挚友华生医生说, “忧郁症, 你得做点体操”.

“对, 得做点思维的体操. 你出个数学题给我做吧.”

“那好”, 华生看了看桌上的纸说, “我这里有三个自然数, 它们的和是 338, 你能求出这三个数是多少吗?”

“你不觉得条件少了点吗?”

“我再添个条件. 嗯, 它们的积是 1986.”

“1986? 哈哈! 你这个条件太有用了. 你面前的三个数是 1, 6, 331.”

“你可真行! 怎么求出来的?”

“虽然你先说的条件是和, 但我解题的时候并不一定非要从

第一个条件开始. 这类问题得从乘积入手, 把它分解为

$$1986 = 2 \times 3 \times 331.$$

你那三个数的和是 338, 所以最大的一个一定是 331, 不能是  $2 \times 331$ ,  $3 \times 331$ , 更不能是  $6 \times 331$ . 另两个呢? 如果是 2、3, 它们的和是 336, 所以只能是 1、6, 它们的和恰好是 338.”

## 1.2 巨轮的长

阿道克船长(《丁丁历险记》中的主要人物)远航归来, 一些朋友来拜访他, 其中一位问道:

“阿道克, 你驾驶的这艘巨轮长多少英尺<sup>①</sup>?”

“英尺数是个整数,” 船长回答说, “如果把它乘以我的年龄, 再乘以这里的人数, 得出的积是 32 118.”

这位朋友如果懂一点算术, 他就会把 32 118 分解为

$$32\,118 = 2 \times 3 \times 53 \times 101.$$

由此可以得出巨轮长 101 英尺, 阿道克的年龄是 53, 客人的人数是 5.

## 1.3 孩子与门牌号码

主人对客人说:

“院子里有三个小孩在做游戏, 他们的年龄的积是 72, 年龄的和恰好等于我家的门牌号码——这你是知道的. 你能求出这

---

① 英尺是英制长度单位,  $1 \text{ 英尺} = 0.3048 \text{ 米}$ .

些孩子的年龄吗？”

聪明的客人想了一下说：“我不能马上就确定答案。”

他站起来，走到窗前看了看楼下的孩子。

“哦，有两个很小的孩子。我知道他们的年龄了。”

更聪明的读者，你能知道主人的门牌号码是多少吗？

这个问题有点难，不过用到的知识并不多，只要读者弄清题意，仔细思考，就可以解决。

首先，三个孩子年龄的积是 72，因此，我们把 72 分解为三个因数（不一定是质因数）的积，并把各种可能的结果列成下表（表中的每个因数都小于 24，因为它们表示孩子们的年龄）。

年 龄	1	1	1	2	2	2	2	3	3
	4	6	8	2	3	4	6	3	4
	18	12	9	18	12	9	6	8	6
和	23	19	18	22	17	15	14	14	13

表中每一列的前三个数表示小孩的年龄，最下面的一个数是它们的和。例如，第一列表示三个小孩的年龄分别是 1，4，18（乘积为 72），他们的和是 23。

在表中只有两个和是相等的，都等于 14，14 就是主人的门牌号码。

为什么呢？因为聪明的客人知道主人的门牌号码，也就是三个小孩的年龄的和，如果门牌号码不是 14，他就可以立即确定孩子们的年龄，而不会说“我不能马上就确定答案”。

至于孩子的年龄，我们也能够求出来。因为客人说“有两个很小的孩子”，所以孩子们的年龄应当是 3，3，8（和为 14），而不是 2，6，6（和也为 14）。

## 1.4 荷兰人买猪

“现在我出一个真正的难题给你做，歇洛克。”

“你出吧！”福尔摩斯躺在沙发上懒懒地说。

“好，你听我说。三个荷兰人  $x$ 、 $y$ 、 $z$  与他们的妻子  $u$ 、 $v$ 、 $w$  上集镇去买猪。每个人买的猪的头数恰好等于他（她）买的每一头猪所用的元数。每个男人比他的妻子多用 63 元，并且  $x$  比  $v$  多买 23 头猪， $y$  比  $u$  少 19 头猪，问谁是谁的妻子？”

“你的题目中没有肯定  $x$  的妻子是  $u$ ， $y$  的妻子是  $v$ ， $z$  的妻子是  $w$ ？”福尔摩斯问。

“当然，当然没有肯定谁的妻子是谁。”华生说，“否则，我还会问你吗？”

“这道题确实有点难。不过，”福尔摩斯一跃而起，用铅笔在纸上写了几道式子。

“我们可以这样来解：用  $M$  表示一位男人买的猪的头数， $W$  表示他的妻子买的猪的头数，根据题意他们用的钱分别为  $M^2$  元与  $W^2$  元，并且

$$M^2 - W^2 = 63.$$

一方面

$$M^2 - W^2 = (M + W)(M - W),$$

另一方面，把 63 表示成两个因数（不一定是质因数）之积，有以下几种方式

$$63 = 63 \times 1 = 21 \times 3 = 9 \times 7.$$

如果

$$M + W = 63,$$

$$M - W = 1,$$

那么

$$M = \frac{63+1}{2} = 32,$$

$$W = \frac{63-1}{2} = 31.$$

其余的两种情况可以同样处理,综合起来得到下面的表:

$M$	32	12	8
$W$	31	9	1

在表中只有 32 与 9 的差是 23,因此  $x$  买了 32 头猪, $v$  买了 9 头猪. 同样,由于表中只有 31 与 12 的差是 19,所以  $y$  买了 12 头猪, $u$  买了 31 头猪.

表中 32、31 是一对夫妻分别买的猪的头数,所以  $u$  是  $x$  的妻子. 同样, $v$  是  $y$  的妻子. 最后, $w$  当然是  $z$  的妻子.

### 1.5 创纪录的因数分解

别以为分解因数容易,数一大可就不好办了. 例如

$$4\,294\,967\,297$$

是合数还是质数? 如果是合数,你能找出它的质因数吗? 你能把它分解为质因数的连乘积吗?

这是一个 10 位数,如果是 100 位数,那就更困难了. 虽然用超高速计算机不难判别它是不是质数,但是要找出一个大合数

的分解式却极不容易. 数太大了, 连计算机对它也无可奈何. 因此, 有人建议用 80 位以上的数作为密钥(译解密码的钥匙), 发送密码. 己方接收人员预先知道这密钥的因数分解, 可以把密码译出来. 敌方即使知道发送密码时所用的密钥(80 位以上的数), 但不知道它的分解式, 借助于计算机也无法在短期内破译, 所以这种密钥称为公开密钥.

但是, 这种想法(利用难分解的大合数作公开密钥)后来受到了严重的冲击. 1984 年美国的西蒙斯与沃诺克利用一种新型计算机及新编制的程序, 仅花了 3 小时 12 分就把一个 69 位数

132 686 104 398 972 053 177 608 575 506 090 561 429 353  
935 989 033 525 802 891 469 459 697

分解为

$$\begin{aligned} &178\,230\,287\,214\,063\,289\,511 \\ &\times 61\,676\,882\,198\,695\,257\,501\,367 \\ &\times 1\,207\,039\,617\,824\,989\,303\,969\,681. \end{aligned}$$

上面的 69 位数是梅森数(见第三章第 7 节) $2^{251} - 1$  的因数.  $2^{251} - 1$  是一个 76 位数, 早已知道它被  $503^2$  整除, 并且所得的商是上面所说的 69 位数, 但从 17 世纪到现在, 一直未能把这个 69 位数分解, 所以西蒙斯夸耀说他们解决了一个存在了三个世纪之久的问题.

## 1.6 被 2160 整除的立方数

自然数的平方称为平方数. 例如

$$4 = 2^2, 36 = 6^2$$

是平方数.

自然数的立方称为立方数. 例如

$$27 = 3^3, 125 = 5^3$$

是立方数.

如果自然数  $n$  可以分解为

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}.$$

这里  $p_1, \dots, p_k$  是不同的质数,  $e_1, e_2, \dots, e_k$  是自然数, 那么

$$n^3 = p_1^{3e_1} p_2^{3e_2} \cdots p_k^{3e_k}.$$

因此, 在一个立方数  $n^3$  的质因数分解式中, 各个幂指数  $3e_1, 3e_2, \dots, 3e_k$  都是 3 的倍数 (类似地, 在平方数的分解式中各个幂指数都是 2 的倍数).

**问题** 你能在一秒钟内求出一个被 2160 整除的立方数吗? 能求出最小的、被 2160 整除的立方数吗? 能求出所有被 2160 整除的立方数吗?

显然  $2160^3$  就是被 2160 整除的立方数. 为了回答后两个问题, 先把 2160 分解为

$$2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5.$$

于是被 2160 整除的数一定被  $2^4$  整除, 也就是说在它的质因数分解式中, 质数 2 的幂指数  $\geq 4$ .

如果这个数是立方数, 那么在它的分解式中, 2 的幂指数是 3 的倍数  $3e$ . 由

$$3e \geq 4$$

可知  $e \geq 2$ , 从而被 2160 整除的立方数一定被  $2^{3 \times 2} = 2^6$  整除.



同样,被 2160 整除的立方数一定被  $3^3$  及  $5^3$  整除.

于是,被 2160 整除的立方数是

$$2^6 \times 3^3 \times 5^3 m^3 = 216\,000 m^3.$$

其中  $m$  是自然数.

最小的一个是 216 000,接在它后面的是

$$216\,000 \times 2^3, 216\,000 \times 3^3, \dots$$

### 1.7 哪几盏灯亮着?

一百盏灯分别标上号码 1, 2, ..., 100. 第一个人把每盏灯的拉线开关各拉一下,使得每一盏灯都亮了. 第二个人把标号是 2 的倍数的灯的开关各拉一下,第三个人把标号是 3 的倍数的灯的开关各拉一下,依此类推,直至第一百个人把标号为 100 的灯的开关拉一下.

问最后有哪几盏灯亮着?

答案是标号为平方数,即

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$$

的那 10 盏灯亮着.

理由很简单. 如果  $d$  是  $n$  的因数,那么标号为  $n$  的灯的开关就被第  $d$  个人拉了一次. 而在  $d$  为  $n$  的因数时,  $\frac{n}{d}$  也是  $n$  的因数,并且在  $n$  不是平方数时,  $d$  与  $\frac{n}{d}$  绝不会相等 (否则  $n = d^2$ ), 所以  $n$  的因数两两成对, 标号为  $n$  的灯一共被拉了偶数次, 因而不亮. 在  $n$  是平方数  $m^2$  时, 除因数  $m$  外, 其余因数两两成

对,因此标号为  $n$  的灯一共被拉了奇数次,这盏灯是亮的.

在  $d$  是  $n$  的因数时,我们把  $\frac{n}{d}$  称为  $d$  的共轭因数. 于是在  $n$  为平方数时,它有一个自共轭(自己和自己共轭)的因数  $\sqrt{n}$ . 反过来,如果  $n$  有自共轭的因数,那么它一定是平方数.

### 1.8 何时重逢

华生每十天到桥牌俱乐部去一次. 有一天他遇到一位教授戈德菲尔德,两人一见如故,谈起话来很投机. 如果这位教授每十二天去桥牌俱乐部一次,问他们什么时候再在桥牌俱乐部相遇?

解 我们分别把 10, 12 分解为

$$10 = 2 \times 5, 12 = 2^2 \times 3,$$

它们的最小公倍数是

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60.$$

也就是 60 天后,他们在俱乐部再次相遇.

一般地,如果两个自然数  $a$ 、 $b$  的质因数分解为

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n},$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n},$$

其中  $p_1, p_2, \dots, p_n$  是不同质数,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$  都是自然数或零,那么  $a$ 、 $b$  的最小公倍数(用  $[a, b]$  表示)

$$[a, b] = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}.$$

其中  $r_i$  是  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$  中较大的一个( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

## 1.9 丢番图的墓碑

丢番图是古希腊的大数学家,生活在 3 世纪.

他对数论的贡献极大,所以数论中有两个分支用了他的名字:丢番图方程(即不定方程)与丢番图逼近(参看第 6 章与第 7 章).

据说,有人给他立了一块墓碑,碑文是一道有名的数学题,大意如下:

这里埋葬着丢番图. 他生命的六分之一是欢乐的童年,再度过十二分之一,他长出了胡须,又度过了七分之一,他结了婚. 五年后,他生了儿子,可惜儿子的寿命只有父亲的一半,在儿子死后四年,丢番图也结束了人生的旅程. 问丢番图的一生究竟有多长?

这个问题可以列方程来解. 不过,下面的解法更为简单:

丢番图的岁数应当是 12 与 7 的倍数,而 12 与 7 的最小公倍数是  $12 \times 7 = 84$ ,所以丢番图的年龄就是 84 岁(12 与 7 的下一个公倍数是  $2 \times 84 = 168$ ,丢番图不可能活那么长久).

如果读者对这个答案不太放心的话,可以把这个答案代到原题中验证一下.

## 1.10 请添三个数字

请在 503 后面添三个数字,使所得的六位数被 7、9、11 整除.

如果分别考虑这个数如何能被 7 整除、被 9 整除、被 11 整除,那么问题将变得十分繁难. 解决这个问题的第一个关键是——说起来很简单,却有人会忽视它——考虑 7、9、11 的

最小公倍数, 即  $7 \times 9 \times 11 = 693$ . 被 7、9、11 整除的数也就是被 693 整除的数.

第二个关键是做除法——这是每个小学生都会的、十分简单的问题.

列出除法算式  $504\,000 \div 693$  如下:

$$\begin{array}{r}
 727 \\
 693 \overline{) 504000} \\
 \underline{4851} \phantom{00} \\
 1890 \phantom{00} \\
 \underline{1386} \phantom{00} \\
 5040 \phantom{00} \\
 \underline{4851} \phantom{00} \\
 189
 \end{array}$$

余数为 189, 而

$$\begin{array}{r}
 504000 \quad 503811 \\
 - 189 \quad - 693 \\
 \hline
 503811 \quad 503118
 \end{array}$$

因此 503 811 与 503 118 都能被 693 整除, 即所添的三个数字应当是 8、1、1 或 1、1、8.

### 1.11 欧几里得永垂不朽

一本古老的数学书——两千多年前写的, 它的内容现在的中学生还在学习. 这本书就是欧几里得写的《原本》.

欧几里得生活在公元前 3 世纪的埃及, 是一位教师, 他对那时的数学进行了系统的总结, 写下了上面所说的那本不朽的名著.

这本书在明朝末年传入我国的时候被译为《几何原本》, 其实《原本》中讲的不仅是几何, 其中有好几卷说的是数论, 包括最

大公约数的求法、唯一分解定理、素数的无限性等等.

《原本》中讨论过带余除法,也就是上节所做的那种除法:

$$504\,000 \div 693 = 727 \cdots 189.$$

这个式子也可以写成

$$504\,000 = 727 \times 693 + 189.$$

一般地,对于两个自然数  $a$ 、 $b$  ( $b \neq 0$ ),一定有整数  $q$ 、 $r$  满足

$$a = qb + r, 0 \leq r < b. \quad (1)$$

这里  $q$  称为商(或不完全商),  $r$  称为余数. 它们可以用大家在小学里就知道的尝试法(试除)来定出,即考虑  $b$  的倍数

$$0 \cdot b, 1 \cdot b, 2b, 3b, \cdots \quad (2)$$

(2)中的数严格增加,最后一定有大于  $a$  的. 在不超过  $a$  的那些倍数中最大的一个就是  $qb$ :

$$qb \leq a < (q+1)b. \quad (3)$$

$a - qb$  就是  $r$ , 由于(3),

$$0 \leq r < b.$$

(1)称为(欧几里得)带余除法. 上面的叙述表明在自然数集中带余除法成立. 类似地,在整数集中也有带余除法成立,即对于整数  $a$ 、 $b$  ( $b \neq 0$ ), 一定有整数  $q$ 、 $r$  满足

$$a = qb + r, |r| < |b|. \quad (1)$$

欧几里得带余除法虽然简单,却很有用处(简单的东西往往有很大的用处).

## “奥数”课外阅读篇

### 《单增老师教你学数学》7种

当读书不只是为了考试

你才会真正爱上数学

单增老师娓娓道来

与你分享他所理解的数学之美

**读者对象：**初高中学生，数学教师，数学爱好者



### 《单增老师教你学数学》7种

- ◆平面几何中的小花
- ◆十个有趣的数学问题
- ◆趣味数论
- ◆棋盘上的数学
- ◆覆盖
- ◆组合数学的问题与方法
- ◆解析几何的技巧

## 学奥数，这里总有一本适合你

自从 2000 年《奥数教程》中首次在图书中使用“奥数”一词以来，华东师范大学出版社已陆续出版近 200 种“奥数”图书，形成多品种、多册层次全系列。

“奥数”入门篇——《从课本到奥数》（1-9 年级）A、B 版

“奥数”智优篇——《优等生数学》（1-9 年级）

“奥数”辅导篇——《奥数教程》、《学习手册》、《能力测试》（一至高三年级）

“奥数”小学顶级篇——《高思学校竞赛数学课本》、《高思学校竞赛数学导引》

“奥数”专题篇——《数学奥林匹克小丛书》（小学、初中、高中共 30 种）

“奥数”题库篇——《多功能题典 数学竞赛》（小学、初中、高中共 3 种）

“奥数”高中预赛篇——《高中数学联赛备考手册（预赛试题集锦）》

“奥数”联赛冲刺篇——《高（初）中数学联赛考前辅导》

“奥数”IMO 终极篇——《走向 IMO：数学奥林匹克试题集锦》

“奥数”域外篇——《日本小学数学奥林匹克》、《全俄中学生数学奥林匹克》

