

轻松解读科学奥秘

蜗牛科学系列

# 三角函数超入门

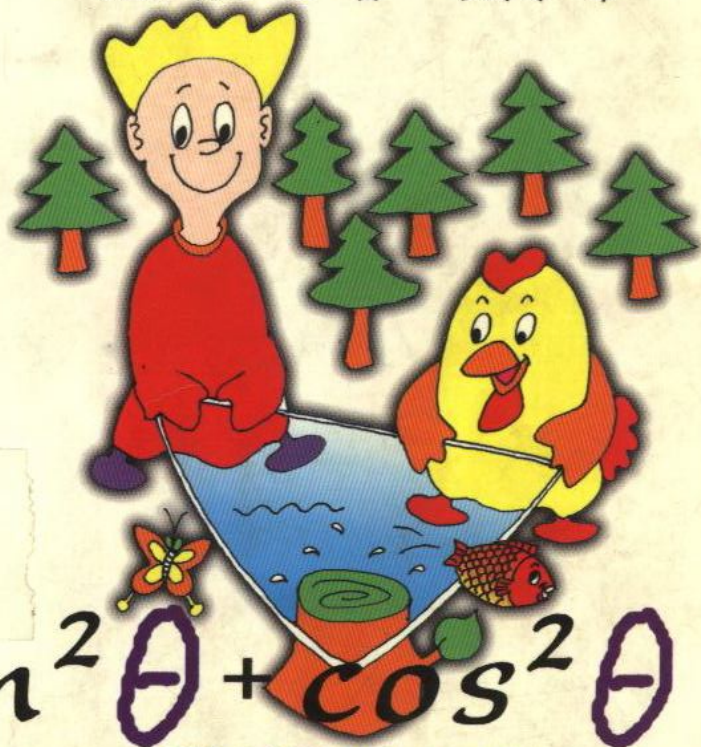
你是否因繁琐复杂的公式而对其敬而远之？

你是否担心自己学不好  $\sin$ 、 $\cos$ ？

你就是本书最合适的读者——

你将发现自己在不知不觉中，  
就已经掌握了那令人头疼的三角函数。

〔日〕坂江 正 著 丁玲玲 译



世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

轻松解读科学奥秘:三角函数超入门 / (日)坂江正著;丁玲玲译.  
—上海:上海世界图书出版公司,2005.2  
(蜗牛科学系列)  
ISBN 7-5062-6865-5

I. 轻... II. ①坂... ②丁... III. 三角函数—普及读物  
IV. O171-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 116090 号

TITLE: [エスカルゴサイエンス sinとcos 超入門]

by [坂江正]

Copyright © T. Sakae, Japan, 2001

Original Japanese language edition published by NIPPON JITSUGYO PUBLISHING CO., LTD.

All rights reserved, including the right to reproduce this book or portions thereof in any form without the written permission of the original publisher.

Chinese translation rights arranged with NIPPON JITSUGYO PUBLISHING CO., LTD., through Nippon Shuppan Hanbai Inc. Tokyo, Japan.

轻松解读科学奥秘

——三角函数超入门

[日]坂江正 著 丁玲玲 译

上海世界图书出版公司 出版发行

上海市尚文路 185 号 B 楼

邮政编码 200010

上海景皇文化发展有限公司排版

上海市印刷十厂有限公司印刷

如有印装质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话: 021-65414992)

各地新华书店经销

开本: 890 × 1240 1/32 印张: 5.75 字数: 150 000

2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1-8000

ISBN 7-5062-6865-5/O · 25

图字号: 09-2004-159

定价: 15.00 元

<http://www.wpcsh.com.cn>

## 前言

在理工科或土木建筑等领域中,熟知三角函数是最基本的要求,就像空气一样,必不可少却又容易被忽视。也许正因为如此,至今也没有出现一本适合初学者的三角函数入门书。

而如果要自学三角函数,也只能借助高中的学习参考书,但这些参考书大多只注重三角函数各种高考题型,有关三角比、三角函数的历史自不待言,连最重要的三角函数实际应用也只寥寥数笔。

正是在这一现状下,日本实业出版社决定出版一本专门介绍三角比、三角函数的入门读本。

要做到能够十分灵活地运用三角函数,微分、积分、复数等一些相关知识必不可少。但本着“超级入门”这一宗旨,本书涉及到的所有知识点都没有超出高中数学范围,其间还有不少是对初中知识点的复习。总之,尽量把入门门槛降低以适合每个初学者。而本书其实也是以笔者在高中任教时的讲义为基础的。

高中数学,尤其从实用性来看,几乎都不涉及实际问题。但三角比却是一个例外,无论是边长还是面积,它总是和那些具体问题联系在一起,在土地测量等实际作业中被频繁应用。于是,我就把三角比放在本书的第一部分里。

在第二部分“三角函数”中,有很多非常相似的公式,这也使得很多学生从这里开始对数学心生厌恶。因此,在这一部分里,本书注重的是一个公式的推导过程,而不是机械地死记硬背某个公式。



如果通过本书的学习,不仅能使读者掌握三角比、三角函数的相关公式,还能切身感到其实用性,那笔者就不胜欣慰了。另外,书中也介绍了很多古今优秀的数学家,希望能让读者感受一下数学的奥妙。

坂江 正

2001年5月



## 目 录

### 第一章 原来还有这个式子

- 1 一切都从直角开始  
——你知道“毕达哥拉斯定理”吗 / 2
- 2 已知三边之比就可以大致画出三角形的形状  
——边长比为  $1:1:\sqrt{2}$  和  $1:2:\sqrt{3}$  的三角形 / 5
- 3 不用直尺也能画直角  
——拥有 5000 年历史的边长之比为  $3:4:5$  的三角形 / 7
- 4 三角比表示的是三角形任意两边之比  
——注意分子、分母表示的是哪条边 / 9
- 5 “ $\sqrt{\quad}$ ”到底是一个什么符号  
——最早由笛卡儿使用的无理数表示法 / 11

专栏 1 流传至今的印度文明 / 15

### 第二章 首先从锐角三角形的三角比开始

- 1  $\sin, \cos, \tan$  终于出场了  
——三角比的三个标记符号 / 18
- 2  $\sin$  和  $\cos$  可以互相转换  
——请注意另一个角 / 22
- 3 从三角函数表中我们能知道什么  
—— $0^\circ$  到  $90^\circ$  之间各个角度的三角比值 / 24
- 4 三角比的基本用法  
——用三角比求边长、面积 / 26
- 5 各三角比之间有着密切的关系吗

——三角比之间的关系 / 28

6 怎么证明三角比之间的相互关系

——利用一边长为1的直角三角形 / 32

专栏2 三角比在日本 / 34

### 第三章 有点麻烦的钝角三角比

1 钝角也有三角比吗

——外角比较麻烦 / 36

2  $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 的三角比值

——为什么  $\tan 90^\circ$  不存在 / 38

3 用 $90^\circ$ 以内的锐角三角比值表示钝角的各三角比值

——注意“ $x$ ”的正负号 / 42

4 幸亏三角比也适用于钝角

——三角形面积公式 / 44

5 三角比相互关系在钝角中也能成立

——三角比相互关系 / 48

专栏3 数字模拟化 / 50

### 第四章 用余弦定理和正弦定理求三角形的边、角和面积

1 已知两边和夹角求另一边

——余弦定理公式 / 52

2 余弦定理的应用

——钝角三角形、直角三角形都适用 / 54

3 已知三边求角

——余弦定理的活用 / 58

4 已知三边求面积

——任意三角形的面积公式(海伦公式) / 60

5 已知两角和夹边求其他两边

——正弦定理公式 / 62

6 求三角形的外切圆半径

——理解正弦定理中的  $R$  / 66

7 正弦定理的应用

——灵活运用对边、对角 / 68

### 第五章 三角比的实际应用

1 更加熟练地运用余弦定理

——熟练运用根号“ $\sqrt{\quad}$ ” / 72

2 用两边和其中一边的对角来画三角形

——形状不确定的三角形 / 74

3 三角比在土地测量中的应用

——自己测量数据 / 78

### 第六章 从三角比扩展到三角函数

1 在平面坐标上思考

——从三角比扩展到三角函数 / 82

2 三角比的相互关系在三角函数中也能成立

——三角函数之间的关系 / 86

3 角度转换时  $\sin$ 、 $\cos$  和  $\tan$  的关系

——无论什么角都能进行  $\sin$ 、 $\cos$  互换 / 88

专栏4 三角函数与坐标 / 93

### 第七章 你能画出三角函数的图形吗

1  $\sin\theta$  的图象是这样的

——有周期的波形图 / 96

2  $\cos\theta$  的图象是这样的

——把  $\sin\theta$  的图象向左平移  $90^\circ$  / 100

3  $\tan\theta$  的图象是这样的

——周期为  $180^\circ$  的图象 / 104

4 改变振幅、移动中心

——几种常见函数图象 / 108

5 改变周期、移动起始位置

——改变转动的速度 / 110

6 了解角速度和频率

——使用三角函数时必须掌握的知识点 / 115

7  $\theta$  表示的是角度,还是时间

——从物理学到纯数学 / 117

## 第八章 改变角度 $\theta$ ——加法定理

1 加法定理

—— $\sin(45^\circ+30^\circ)$ 并不是  $\sin 45^\circ+\sin 30^\circ$  / 124

2 证明加法定理

——利用毕达哥拉斯定理和余弦定理 / 128

3 角度变为原来的 2 倍后

——二倍角公式 / 133

4 角度变为原来的  $\frac{1}{2}$  后

——半角公式 / 135

5 用加法来计算乘法

——积化和差公式 / 137

6 用乘法来计算加法

——和差化积公式 / 139

7 求异名三角比之和

—— $a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$  / 143

8  $a\sin\theta + b\cos\theta$  的图象是什么形状

——无论怎么组合都是正弦曲线 / 147

9 用图象表示函数的复合

——只能是同名函数之间的复合 / 149

10 用长度来度量角度

——弧度制 / 153

专栏 5 几乎接近 0 的角度 / 157

## 第九章 三角函数的应用

1 家用交流电

——图象是规则的正弦曲线 / 160

2 100 V 的交流电是 141V 吗

——为了确保与直流电消耗等量电能 / 162

3 通过图象看“傅里叶级数”

——周期不同的三角函数无限相加会得到什么图象 / 166

## A cartoon illustration of a snail with a large, light-colored shell and a smiling face, set against a background of horizontal blue and white stripes.

几何学源于测量土地、天体等实际应用中,在这些实际操作中,直角扮演着非常重要的角色,因为我们在丈量土地面积时必须要用到它。

当我们想画一个长方形时,如果仅仅画成对边相等的四边形,那么就无法保持直角(图 1-1-1),必须把两个直角三角形拼在一起才能构成长方形。这是为什么呢?因为三边一旦固定下来,三角形就不会变形。所以,直角和直角三角形在几何学中非常重要。

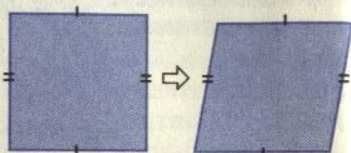


图 1-1-1

在以后的章节里将会频繁地出现三角形,在这里我们先对三角形的三个顶点和三条边的标记符号作一个统一的规定吧。

首先,三角形的三个顶点分别用大写字母 A、B、C 来表示,与顶点 A 相对的边 BC(称为 A 的对边)用小写字母 a 表示,以此类推,顶点 B 的对边用 b 表示,顶点 C 的对边用 c 来表示。

有的时候也用 x 或 y 表示边,但是在没有特别说明的情况下,△ABC 的三条边就用刚才我们所规定的符号 a、b、c 来表示。

另外,表示顶点的大写字母 A、B、C 还可以代表它所在的内角符号,表示边的小写字母 a、b、c 也可以代表边长符号,它们都可以用在计算公式里。

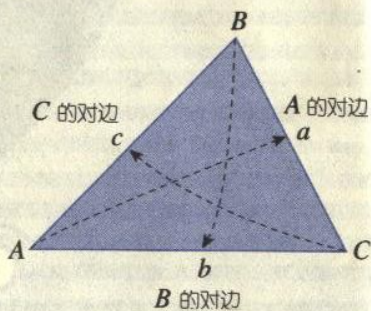


图 1-1-2

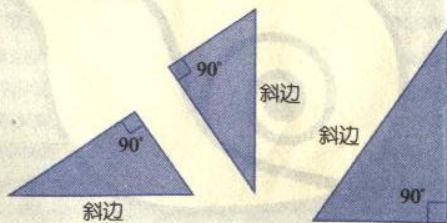


图 1-1-3



## 毕达哥拉斯定理

直角三角形有一个非常重要的性质,那就是毕达哥拉斯定理,又叫做三平方定理,即

在直角三角形中,两直角边的平方和等于斜边的平方。

斜边是直角三角形三条边中最长的,并且它一定是直角的对边。因此,不管直角三角形的直角在什么位置上,只要把直角标出来,就能立刻判断出哪条边是斜边。

两个相同数字相乘即是“平方”,而  $\text{cm} \times \text{cm}$  写作  $\text{cm}^2$ ,读作“平方厘米”。毕达哥拉斯定理中有三个平方,所以它还被称为“三平方定理”。

证明毕达哥拉斯定理的方法有很多。在此,我们可以如图 1-1-4 所示,用四个相同的直角三角形拼成的正方形来证明它。

很明显,图中大正方形的面积是  $c^2$ ,如果我们用 a、b 来计算它的话,就会得出下面的式子:

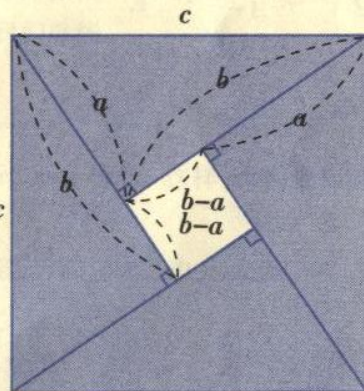


图 1-1-4

$$\begin{aligned} \text{大正方形的面积 } c^2 &= \left( \text{直角三角形} \right) \times 4 + \left( \text{中心小正方形} \right) \\ &= \frac{1}{2}ab \times 4 + (b-a)^2 \\ &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

\* 译注:在我国被称为“勾股定理”。



$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

看,我们证明出了毕达哥拉斯定理!

毕达哥拉斯定理(三平方定理)

如图 1-1-5 所示,在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中

$$a^2 + b^2 = c^2$$

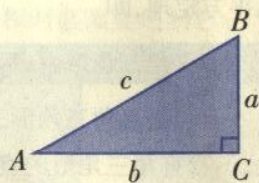


图 1-1-5

## 2

## 已知三边之比就可以大致画出三角形的形状

——边长比为  $1:1:\sqrt{2}$  和  $1:2:\sqrt{3}$  的三角形

说到直角三角形,大家的脑海里会浮现出什么样的直角三角形呢?在这里,我们列举几个具有代表性的例子。

**例 1** 用对角线把正方形一分为二,就会得到如图 1-2-1 所示的直角三角形,其中一个内角为  $45^\circ$ ,那么另一个内角理所当然也应该是  $45^\circ$ ,这就是一个等腰直角三角形。

如果我们把这两直角边当作 1 (无论是 1mm, 还是 1cm, 还是 1dm 都无关紧要, 因为对计算没有任何影响), 那么通过毕达哥拉斯定理我们就能立刻计算出斜边  $x$  的长度,

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \therefore x = \pm\sqrt{2}$$

但是三角形的斜边不可能为负数, 所以  $x = \sqrt{2}$ 。这样, 我们就知道了上面三角形的三边比为  $1:1:\sqrt{2}$ 。

其实, 只要是内角为  $45^\circ$  的直角三角形, 不管它的三边大小怎么变, 三边的比都是固定不变的, 即为  $1:1:\sqrt{2}$ 。

**例 2** 把正三角形  $ABD$  切成形状完全相同的两个三角形, 就会得到内角为  $30^\circ$  和  $60^\circ$  的直角三角形(图 1-2-2)。假设正三角形的边长为 2, 那么  $BC$  就是  $BD$  的一半, 即边长  $BC$  为 1, 通过毕达哥拉斯定理我们也能马上算出  $AC$  的长度。

$AC^2 + 1^2 = 2^2, AC^2 = 4 - 1 = 3$ 。因为  $AC$  只能为正数, 所以  $AC = \sqrt{3}$ 。这样, 我们得出

$\triangle ACB$  的三边之比为  $1:2:\sqrt{3}$ 。

其实, 只要是内角为  $30^\circ$  和  $60^\circ$  的直角三角形, 不管它的三边大小怎么

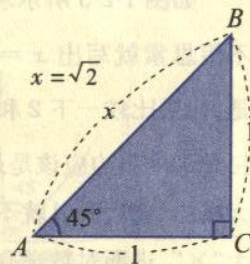


图 1-2-1

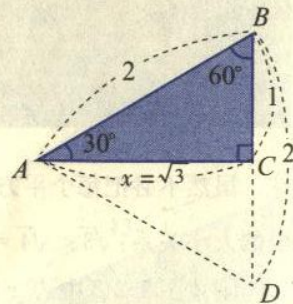


图 1-2-2



变,三边的比都是固定不变的,即为  $1:2:\sqrt{3}$ 。

但是,还要请大家注意的是:一定要弄清楚哪条边是 2,哪条边是  $\sqrt{3}$ ,因为一不小心就会很容易把它们弄反。

如图 1-2-3 所示求  $x$  的长度。肯定有人不假思索就写出  $x = \sqrt{3}$  这个答案吧。可

是,如果比较一下 2 和  $\sqrt{3}$  哪个大,你就会发现那个答案很奇怪(因为直角三角形中斜边应该是最长的)。但是,由于我们对“ $\sqrt{\quad}$ ”(根号)没有一个大概的估算,所以就不容易发现类似的错误,在考试的时候也就只能得个大“ $\times$ ”,进而对数学心生厌恶。

你也遇到过类似的情况吧。

在对那些“ $\sqrt{\quad}$ ”(根号)没有一个具体认识的前提下,只是反复、机械地做练习,久而久之就会对算术或数学产生厌恶感。

$$\sqrt{2}=1.41421356\dots$$

$$\sqrt{3}=1.7320508\dots$$

$$\sqrt{5}=2.2360679\dots$$

$$\sqrt{7}=2.64575\dots$$

虽然不必把每个平方根都背下来,但是请你留意一下几个常用平方根的大小关系:  $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ , 图 1-2-3 的边  $x$  比 2 长,所以  $x$  不可能是  $\sqrt{3}$ 。

刚才图 1-2-3 中边  $x$  的正确答案应为:

$$x^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \quad \therefore x = \sqrt{5}$$

例 1 和例 2 中的两个直角三角形是最常见的三角形,也是我们所用的三角尺的两种形状。

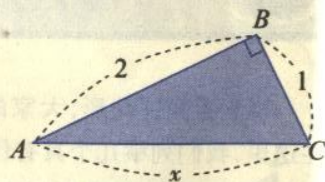


图 1-2-3

## 3

## 不用直尺也能画直角

——拥有 5000 年历史的边长之比为  $3:4:5$  的三角形

在前一节里,我们对带根号的 2、3 等数字的大小有了初步的了解。同样,对角度大小的了解也很重要。比如,当说到一个  $30^\circ$  角时,你的脑海里应该会浮现出这个角的大致形状吧。

完全靠目测不能很精确的测量出度数。例如,图 1-3-1 中所示的  $30^\circ$  角就完全标错了,那不是  $30^\circ$ ,而是  $60^\circ$ 。

因为  $90^\circ$  直角很容易判断出来,所以人们就以  $90^\circ$  角为基准,把它平均一分为二就是两个  $45^\circ$ ,平均一分为三就是三个  $30^\circ$ ,两个  $30^\circ$  就是  $60^\circ$ ,这一点请你一定要记住。

**例 1** 图 1-3-2 中的两个直角三角形在历史上很有名,因为它们的三边都是整数,特别是边长为  $3:4:5$  的直角三角形在 5000 年前的埃及就为人们所知,比毕达哥拉斯定理还要早。

据说当时,每当尼罗河泛滥,就会冲毁很多田地,等洪水退去以后,要重新划分土地,那时人们就用绳子画出边长为  $3:4:5$  的直角三角形来丈量。

但是,由于这个直角三角形的内角度数并不是整数,所以在当时并没有涉及到它的内角。在这里,顺便告诉大家,边长为  $3:4:5$  的直角三角形的内角  $A =$

$36.869897\dots$ , 边长为  $5:12:13$  的直角三角形的内角  $A = 22.619864\dots$ 。

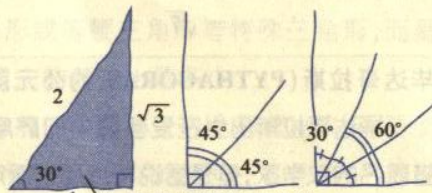


图 1-3-1

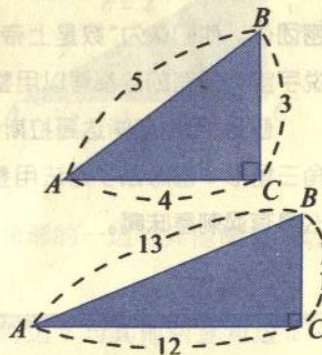


图 1-3-2



图 1-3-3 所示的直角三角形中,已知其中两边长,求第三边。很多人一看到 3、4 就下意识地认为第三边是 5。请大家注意:这道题中,  $x \neq 5$ 。正确答案应为

$$x^2 + 3^2 = 4^2$$

$$\therefore x^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\therefore x = \sqrt{7}$$

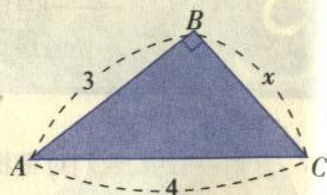


图 1-3-3

毕达哥拉斯(PYTHAGORAS, 约公元前 580~约公元前 490)

毕达哥拉斯出生在爱琴海中的萨摩斯岛(今希腊东部小岛),是古希腊著名的数学家,但是据说毕达哥拉斯定理并不是毕达哥拉斯发现的。

毕达哥拉斯在埃及和巴比伦(现在的伊拉克)学习数学,学业有成后,到意大利南部的克罗通开设学校,广收门徒,许多弟子在那里除了学习奇数、偶数、质数(又称素数)及毕达哥拉斯定理以外,还研究了正五角形的画法、黄金分割法、正多面体、管弦的长短与音阶及和音关系等各种问题。这些弟子们的研究成果被统称为毕达哥拉斯成果,并且不能随便对外发表。

这个被人们称为毕达哥拉斯学派是一个类似宗教的秘密团体。他们认为“数是上帝创造的”、“数即万物”,也就是说宇宙中所有的数都可以用整数或整数之比来表示。



但是,无论在毕达哥拉斯学派的代号(即图中的五角形)中还是在直角三角形中都隐藏了无法用整数之比来表示的数字(即无理数),这是多么具有讽刺意味啊。

## 4

## 三角比表示的是三角形任意两边之比

——注意分子、分母表示的是哪条边

通过前面的学习,我们已经知道:内角为  $30^\circ$  和  $60^\circ$  的直角三角形的三边之比为  $1:2:\sqrt{3}$ ,内角为  $45^\circ$  的直角三角形的三边之比为  $1:1:\sqrt{2}$ 。而内角为  $40^\circ$  的直角三角形的三边之比也一定为  $\bigcirc:\bigcirc:\bigcirc$ ,是一个固定不变的比值。只是如果不是正三角形或等腰三角形等特殊三角形,而是一般三角形,我们就没法一下子说出它的三边比是多少。

说这些,可并不是让你把每个一般三角形的三边比都求出来,而是要让你明白:内角为  $40^\circ$  的直角三角形和内角为  $70^\circ$  的直角三角形,它们的三边之比分别是固定不变的,而且即使不知道三边的具体数值,也可以用三边比的符号来表示边长和面积。

可是,总以三边之比  $\bigcirc:\bigcirc:\bigcirc$  来表示的话,计算很不方便,所以我们采取分别比较两边的方法,看看一边是另一边的几倍。

如图 1-4-1 所示,内角为  $30^\circ$  的直角三角形中,若边  $a$  为单位 1 的话,边  $c$  就是  $a$  的两倍,边  $b$  就是  $a$  的  $\sqrt{3}$  倍。或者以  $b$  为单位 1 的话,  $a$  就是  $b$  的  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  倍,  $c$  为  $b$  的  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  倍。只要是内角为  $30^\circ$  的直角三角形,无论它的大小如何,这些比值都是固定不变的。

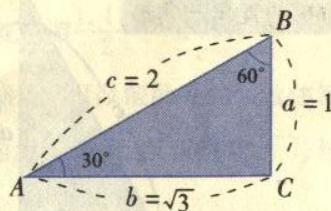


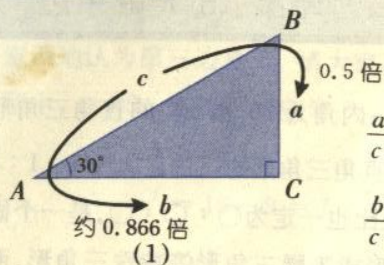
图 1-4-1

由此,我们引入“三角比”这个概念,即三角形的一边与其他任意两边之比。

如图 1-4-2 所示,在三个直角三角形中,斜边  $c$  与其他两直角边  $a$ 、 $b$  之比如下(具体计算时,  $\sqrt{2} \approx 1.414$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.732$ ):



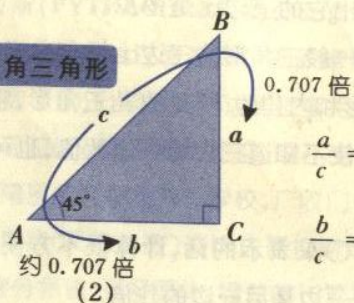
## 30°的直角三角形



$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1.732}{2} = 0.866$$

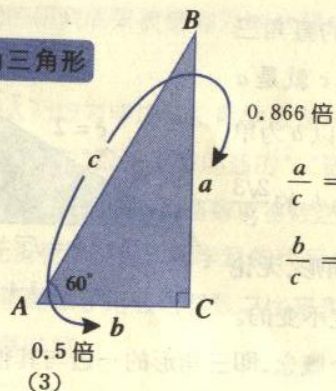
## 45°的直角三角形



$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$$

## 60°的直角三角形



$$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{2} = 0.5$$

图 1-4-2

在这里,“ $\approx$ ”是“约等于”符号,因为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 是无理数,所以我们在具体运算时要四舍五入,既然是四舍五入,那么它就不是一个精确的数值,所以需要“ $\approx$ ”来表示。有关“ $\sqrt{\quad}$ ”的知识,我们将在下一节中学习。

## 5

“ $\sqrt{\quad}$ ”到底是一个什么符号

——最早由笛卡儿使用的无理数表示法

在前一节里我们学会了怎样把分母中的根号去掉,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

②所以分子也要乘以 $\sqrt{2}$ ①为了去掉根号,分母乘以 $\sqrt{2}$ 

我们把这一过程称为分母有理化。

分母有理化的根据是:

① 通过二次方把根号去掉,  $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ ;

② 分子分母乘以同一个不为零的数,分数值不变。

为什么要这么大费周章地把分母有理化呢?

首先,分母有理化后可以大概估算出其数值。如果写成 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414}$

的话,要算出这个分数值就没有那么简单了。相反,如果把分母有理化后,就是 $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2}$ ,这么一来,通过心算就能知道 $\frac{1.414}{2} = 0.707$ 。

所以,分母有理化是一种非常重要的变形,它可以帮助我们大致估算出某个具体数值。试想,没有一个数量上的大致估算,仅仅盯着 $\sqrt{\quad}$ ,数学也会变得很无聊、枯燥的。

其次,分母有理化后就可以约分,能进一步简化分数。例如,

$$\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

如果不进行分母有理化,就不能约分,分式也就不是最简分式。所以,大多数教科书都要求先把分母有理化,然后再看能不能约分成最简形式。



但是,如果过于在乎是否要有理化,反而会影响到正题“三角比”的掌握,所以本书并不对分母有理化作硬性规定,你只要能达到“对了,这里需要进行分母有理化”这一程度就可以了。

### 平方根到底是什么数字?

$9 = 3^2$  这个等式表示 9 是 3 的平方。反过来说,就变成了 3 是 9 的平方根。但是,不要忘了,9 开平方后除了 3,还有 -3,所以 9 的平方根应该是  $\pm 3$ 。在这里,“ $\pm$ ”读作“正负”。

为了便于计算和书写,人们引入了“ $\sqrt{\quad}$ ”这个数学符号。9 的正平方根(又称算术平方根)写作  $\sqrt{9}$ ,读作根号九,负平方根写作  $-\sqrt{9}$ 。

“根”这个词来自英语“root”,意思是“原来的那个数字”,它曾经还表示过方程的答案。后来人们才把方程式的答案统称为“解”(来自英语“solution”)。

因为  $\sqrt{9}$  是一个整数,所以通常情况下不写成  $\sqrt{9}$  而直接写成 3。但是请注意: $\sqrt{9} = \pm 3$  是不对的,因为规定算术平方根只能表示正数。

9 的平方根是整数 3 还好办,如果是 5 的平方根呢?它既不是整数,也不能用分子分母同为整数的分数来表示,而是一个无理数,即无限不循环小数。例如, $\sqrt{5} = 2.23606797\dots$ 。

2.236... 这个数字写起来很麻烦,而且也不能一眼就看出它的二次方就是 5。因此,我们就保留平方根的符号,把 5 的平方根写成  $\sqrt{5}$ ,这样书写不但简洁,它与 5 的关系也一目了然。 $\sqrt{2}$  和  $\sqrt{3}$  也是出于相同的理由而保留了平方根符号。

“ $\sqrt{\quad}$ ”这个数学符号其实是由英语单词“root”的“r”这个字母符号化得来的。公元 1600 年前后,法国思想家、数学家笛卡尔在他的《几何学》



中第一次用“ $\sqrt{\quad}$ ”表示根号。

用“ $\sqrt{\quad}$ ”计算时,尽量化简二次根式,即把“ $\sqrt{\quad}$ ”里面的数字化小,这样比较便于运算。要做到这点,首先就要牢牢掌握根号的运算法则。

#### 根号的基本运算法则( $a \geq 0, b \geq 0$ )

①  $\sqrt{a^2} = a \dots\dots\dots$  根据平方根的定义

②  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \dots\dots\dots$  两边分别平方,等式仍成立( $ab$ )

③  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \dots\dots\dots$  两边分别平方,等式仍成立( $\frac{a}{b}, b \neq 0$ )

如果假设公式②中, $a = b$ 的话,那么就变为  $\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2}$ ,而这个等式的左边用公式①计算就是  $\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$ ,所以  $\sqrt{a^2} = a = \sqrt{a^2}$ ,这样我们又得出了另一个公式:

②'  $\sqrt{a^2} = a (a \geq 0)$

利用公式②和②'就可以化简根式,例如:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

※      ②      ②'

看,和  $\sqrt{12}$  比起来, $2\sqrt{3}$  这个数字看起来是不是很简单了?这就是为什么要尽量把根号里面的数字化成较小整数的原因。

有一点请注意:在计算带根号的算式时,要选择那些像 4、9 或 16 那样能开平方的数字,上面那个式子中,如果我们写成  $\sqrt{12} = \sqrt{6 \times 2}$ ,那就不能继续往下算了,也就得不出  $2\sqrt{3}$  这个数字了。

根式一旦化简后,就可以合并同类项了。



例 1 (1)  $\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3}$

$$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

(2)  $\sqrt{18} + 3\sqrt{8} = \sqrt{9 \times 2} + 3\sqrt{4 \times 2}$

$$= 3\sqrt{2} + 3 \times 2\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{2}$$

(3)  $(\sqrt{63} - \sqrt{28})^2 = (3\sqrt{7} - 2\sqrt{7})^2 = \sqrt{7}^2 = 7$

在合并同类项时,经常犯这样的错误:  $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$ , 正确答案应为  $2\sqrt{2}$ , 这个错误类似于  $3x - x = 3$ 。

正确解法应为  $3x - x = 2x$ 。为了避免运算时犯同样的错误,建议大家把“ $3x - x = 2x$ ”这个数学等式的意思表述出来: 从 3 个  $x$  中减去一个  $x$ , 还剩下 2 个  $x$ 。

这其实是一个很不错的方法。不要忘了: 数学等式并不是一些符号的罗列, 它的意义也可以用语言表述的, 这样就会对它有一个大致的印象, 从而有助于我们正确理解这些数学等式。



噢! 原来是这么一回事。

噢? 这样啊?



## 流传至今的印度文明

1、2、3 等数字是在印度被发明出来的, 而像 1024 这种在没有任何数字的数位上记“零”的占位记数法的发祥地也是印度, 这就是所谓的“零的发现”。

我们把 1、2、3 这样的数字称作“阿拉伯数字”, 其实在公元 8 世纪后半期, 这些数字由印度的天文学家传到阿拉伯国家, 再从阿拉伯国家传到了欧洲, 欧洲科学家误以为是阿拉伯人发明的, 所以才称这些数字为“阿拉伯数字”。

这和哥伦布登陆美洲大陆后误把它当成印度而称当地居民为“印第安人”一样。听说现在已经把“印第安人”改称作“土著美洲人”了, 那么会不会有一天也要把“阿拉伯数字”改称“印度数字”呢?

用零占位的记数法使笔算变得十分简单, 也让之前广为使用的算盘从欧洲大陆上消失了。其实算盘本身也是用占位记数法来表示的, 但却没有想到用数字“零”来标记, 所以“零的发现”可以被称为是“哥伦布的鸡蛋”了。

还记得第一节中用来证明毕达哥拉斯定理的那个图吗? 在 12 世纪前半期——欧洲还被称为“黑暗的时代”——印度的数学家巴斯卡拉 (Bhaskara Acharya) 就已经用它进行数学研究了。

此外, 他还证明了公式  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ , 以及求一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的解。

第二章 首先从锐角三角形的三角比开始

锐角三角形的三角比，是三角学中最基本的概念。在直角三角形中，锐角的三角比定义为：对边与邻边的比值为正切，对边与斜边的比值为正弦，邻边与斜边的比值为余弦。这些定义在欧几里得几何中有着悠久的历史，早在古希腊时期，数学家们就已经开始研究锐角三角形的性质。随着数学的发展，三角学逐渐成为一门独立的学科，并在航海、天文学等领域得到了广泛的应用。在微积分中，三角函数的导数和积分公式也是基于锐角三角形的三角比定义的。因此，理解锐角三角形的三角比对于学习更高级的数学知识至关重要。

## 第二章 首先从锐角 三角形的 三角比开始



从这章开始,我们就要正式切入正题——三角比了。

取任意一个比  $90^\circ$  小的锐角  $A$ ,以它为顶点作一个直角三角形。如图 2-1-1 所示,我们以  $40^\circ$  的锐角  $A$  为顶点画出  $\text{Rt}\triangle ABC$  和  $\text{Rt}\triangle AB'C'$ ,这两个三角形互为相似三角形,所以  $a:b:c=a':b':c'$ 。

但是,正如前面说过的一样,三边一起比总是不太方便,所以我们只取其中任意两边用分数形式来比。一说到分数,就要决定谁作分子谁作分母了。

在这里,我们把斜边作为分母。为什么呢?首先斜边很“醒目”,无论怎么放置直角三角形,都能立刻认出哪条边是斜边。

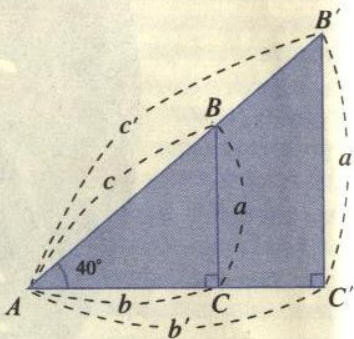


图 2-1-1

其次,以最长的斜边为分母的话,另外两边肯定是它的  $0 \cdots$  倍,那么分数值就有一个范围了,即小于 1。

### sin 和 cos

以斜边  $c$  为分母,它与其他两边之比就可以写成  $\frac{a}{c}$  和  $\frac{b}{c}$ 。我们先看看下面两条有关名称的规定:

以  $A$  的对边  $a$  为分子的分数  $\frac{a}{c}$ ,写作  $\sin A$ ,读作 **sain**

以  $A$  的邻边  $b$  为分子的分数  $\frac{b}{c}$ ,写作  $\cos A$ ,读作 **kosain**



$\sin A$  表示  $A$  的对边与斜边的比值

$\cos A$  表示  $A$  的邻边与斜边的比值

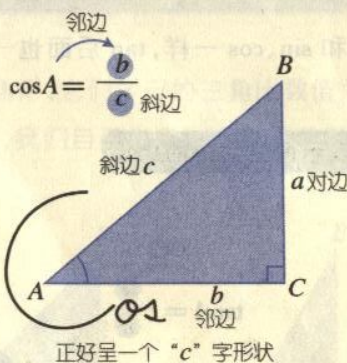
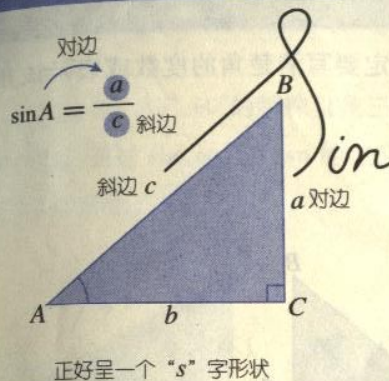


图 2-1-2

图 2-1-2 中的  $s$  和  $c$  都是拉丁字母的书写体,从  $s$  的书写体形状就会联想到它表示  $\sin$ 。 $c$  的印刷体和书写体是一样的,所以看到  $c$  就能联想到  $\cos$ 。反正无论用什么办法都可以,只要能区分这两个符号就行。

但是有一点请注意,如前图 2-1-1 所示, $\text{Rt}\triangle AB'C'$  中  $\sin A = \frac{a'}{c'}$ ,

$\text{Rt}\triangle ABC$  的  $\sin A = \frac{a}{c}$ ,但它们的数值是一样的。也就是说,这些分数与三角形的大小没有关系,只与角度有关,所以  $\sin$  和  $\cos$  的后面一定要写清楚角的度数或表示该角的字母。

例如,  $\angle A$  为  $40^\circ$  的话,写成  $\sin 40^\circ$  或  $\cos 40^\circ$ ,它们分别表示  $\angle A$  的正弦和余弦。

### tan

$\sin$  和  $\cos$  都是以直角三角形的斜边为分母的分数,如果不用斜边,只取两直角边进行比较,又能得出什么呢?在这里,我们把两直角边的比称为正切,符号为  $\tan$ 。我们以  $\angle A$  为例,它的正切是:



$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{A \text{ 的对边}}{A \text{ 的邻边}}$$

和  $\sin$ 、 $\cos$  一样,  $\tan$  后面也一定要写清楚角的度数或表示该角的字母。

**$\tan$  表示两直角边的比值**

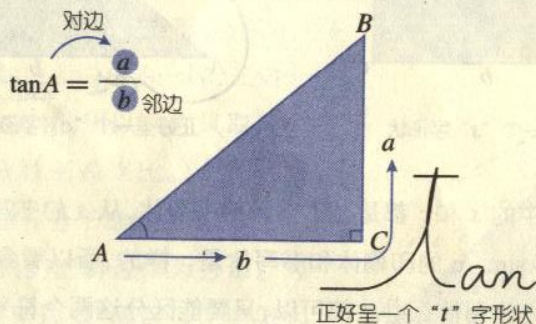


图 2-1-3

我们把上面所学的  $\sin$  (正弦)、 $\cos$  (余弦)、 $\tan$  (正切) 统称为“三角比”, 它们是在公元 1600 年左右被首次使用的。 $\sin$ 、 $\cos$  和  $\tan$  分别是 sine、cosine 和 tangent 三个单词的缩写形式。

本书中出现的例题都是用  $a$ 、 $b$ 、 $c$  这样的拉丁字母来表示三角形的三边, 但是在其他地方也许会看到其他不同的符号, 所以三角比和拉丁字母之间没有什么必然的关系, 我们要弄清楚的是它表示的是哪两条边的比。

无论直角三角形的位置如何, 也不管用什么符号字母表示, 如果以斜边为分母, 则  $\sin$  (正弦) 的分子就是被选定的那个角的对边,  $\cos$  (余弦) 的分子就是那个角的邻边。另外,  $\tan = \frac{\text{被选定的那个角的对边}}{\text{被选定的那个角的邻边}}$ , 这就是三角比的意义, 请一定要牢记记住。

三角比是拿一边的长度去除以另一边的长度, 所以“单位”会被约分约掉, 因而三角比通常都是没有单位的, 如果硬要说有的话, 那就是“倍”吧。



### 特殊三角形的 $\sin$ 、 $\cos$ 和 $\tan$

内角为  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  的特殊直角三角形, 它们各自的三角比数值为人们所熟知。通过  $\sin$ 、 $\cos$  和  $\tan$  的定义, 我们自已来求一求它们的数值。如图 2-1-4 所示,

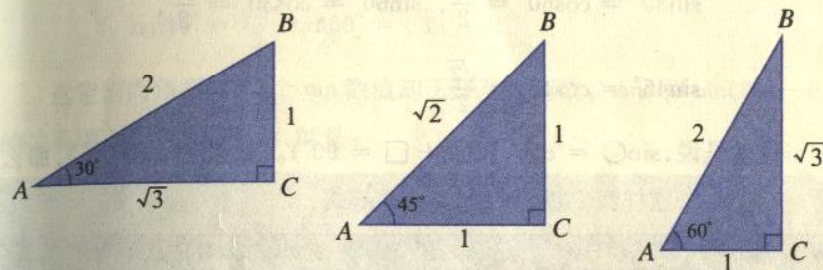


图 2-1-4

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

在今后的学习中, 我们要经常用到以上三组三角比, 如果你记不住一个个具体的数值也没关系, 重要的是要会求出这些三角比数值。

回忆一下前一节我们自己求出来的那三组三角比值,你能发现什么吗?

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

也就是说,  $\sin \bigcirc = \cos \square$  ( $\bigcirc + \square = 90^\circ$ )。如果用  $\theta$  表示  $\bigcirc$ , 那么  $\square = 90^\circ - \theta$ , 这样我们就能得出下面的等式:

$$\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta),$$

$$\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$$

把等式两边对调,等式仍然成立。

$$\sin \bigcirc = \frac{y}{r} = \cos \square$$

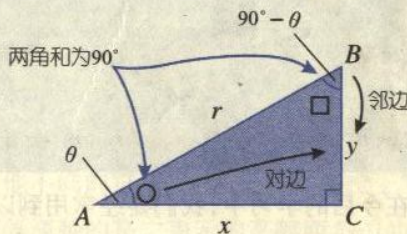


图 2-2-1

$\theta$  读作:西塔,是一个希腊字母,经常被用来表示三角形的内角。像这样,除了  $a, b, c$  以外,你也试试用其他字母来表示三角形的边长。

以斜边为分母,当分子是:被选定的是那个角的对边时,就是  $\sin$ ;被选定的是那个角的邻边时,就是  $\cos$ 。

但是,  $\sin, \cos$  的函数名并不是绝对的,即使是相同的两边之比。随



着选定的角的不同,也要相应地改变三角比的名称。

看到这里,也许有人要抱怨道:“怎么那么麻烦呢?变来变去的。”这种消极态度可要不得。应该乐观地想:原来  $\sin$  和  $\cos$  是可以随机应变的,在实际运算时,哪个方便就用哪个。

那么,如果是  $\tan$  的话,又会怎么样呢?

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

选定的内角不同,两个  $\tan$  数值却正好互为倒数。 $\tan \theta$  和  $\tan(90^\circ - \theta)$  的关系用下面的等式表示,就是:

$$\tan \theta = \frac{1}{\tan(90^\circ - \theta)}$$

1 除以不为零的数,得到的商就是这个数的倒数。

例如,图 2-2-1 中,1 除以  $\tan(90^\circ - \theta)$ , 就是,

$$\frac{1}{\tan(90^\circ - \theta)} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{1 \times y}{x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

分子分母乘以同一个不为零的数, 分数值不变

整个分式其实是繁分式的分母

像上面那个分式一样,分式里又含有分式的分式称为繁分式。

把这样的分式化“繁”为“简”还有一个办法:1 除以一个数,就相当于乘以那个数的倒数。

$$\frac{1}{\tan(90^\circ - \theta)} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = 1 \div \frac{x}{y} = 1 \times \frac{y}{x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 等特殊角度的三角比值可以用 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$ 等数字来表示,但如果是 $\sin 40^\circ$ 呢,它的数值又是多少呢?其实,我们只要知道这个数值是固定不变的就可以了,而没有必要把它们都一个一个地背下来(这也不太可能)。

数学里有一种表叫做三角函数表,它把从 $0^\circ$ 到 $90^\circ$ 之间各个角度的正弦值、余弦值和正切值都列出来了(本书最后附有三角函数表)。

下表是从三角函数表中节选出的一部分,并四舍五入到小数点后第10位数字。

$\theta$	$\sin\theta$ (正弦)	$\cos\theta$ (余弦)	$\tan\theta$ (正切)
25.0	0.42261 82617	0.90630 77870	0.46630 76582
26.0	0.43837 11468	0.89879 40463	0.48773 25886
	↖ $\sin 30^\circ$	↖ $\cos 30^\circ$	↖ $\tan 30^\circ$
30.0	0.50000 00000	0.86602 54038	0.57735 02692
31.0	0.51503 80749	0.85716 73007	0.60086 06190
32.0	0.52991 92642	0.84804 80962	0.62486 93519
33.0	0.54463 90350	0.83867 05679	0.64940 75932
34.0	0.55919 29035	0.82903 75726	0.67450 85168

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.7320508\cdots}{2} = 0.8660254\cdots,$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.7320508\cdots}{3} = 0.5773502\cdots$$

看看表中箭头的地方,它列出来的 $30^\circ$ 各三角比值和我们刚才算出来的结果是一样的吧。

也许有人认为现在用计算器或电脑就能快速而准确地算出任意一个角的任何三角比值,这个表根本就没有什么用处。其实不然,这个表能使



各个角度的三角比值一目了然。既然课本里出现了,就让我们仔细地看一看这个表,你能发现什么?

- $\sin\theta$  和  $\cos\theta$  的值介于 0 和 1 之间(即  $0 \leq \sin\theta \leq 1$ ,  $0 \leq \cos\theta \leq 1$ )。
- 随着  $\theta$  增大,  $\sin\theta$  也相应增大( $\sin 0^\circ = 0$ ,  $\sin 90^\circ = 1$ )。
- 随着  $\theta$  增大,  $\cos\theta$  反而减小( $\cos 0^\circ = 1$ ,  $\cos 90^\circ = 0$ )。
- 随着  $\theta$  增大,  $\tan\theta$  也相应增大,甚至大于 1。

$\sin$  和  $\cos$  都是以斜边为分母的,所以它们的值都不可能大于 1,从而我们得出  $0 \leq \sin\theta \leq 1$  和  $0 \leq \cos\theta \leq 1$  这两个不等式。

再仔细观察一下,你就会发现下面的规律,

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= \cos 90^\circ, \sin 10^\circ = \cos 80^\circ, \sin 45^\circ = \cos 45^\circ, \sin 80^\circ = \cos 10^\circ, \\ \sin 1^\circ &= \cos 89^\circ, \sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \sin 60^\circ = \cos 30^\circ, \sin 90^\circ = \cos 0^\circ \end{aligned}$$

这一点我们在前面已经说过了,即  $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$ 。同样,  $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$  这个等式也成立。 $\sin$  和  $\cos$  的关系从数字上就很容易看出来,但是  $\tan\theta$  和  $\tan(90^\circ - \theta)$  的关系仅从数字上就没有那么容易看出来了。例如:

$$\tan 1^\circ \approx 0.0174550649,$$

$$\tan 89^\circ \approx 57.2899616308,$$

$$\text{而 } \tan 1^\circ = \frac{1}{\tan 89^\circ},$$

即

$$0.0174550649 \approx \frac{1}{57.2899616308}$$



那么,就让我们看看如何用三角比来求边长和面积。

**例 1** 通过查三角函数表,求如图 2-4-1 所示的三角形的边  $x$ 、 $y$ 。

直角三角形中,只要知道任意两边的长,通过勾股定理就能求出第三边。但是本题却只告诉我们一边,该怎么求呢?这时,应该看到:除了已知一边的长,我们还知道一个内角的度数,所以试试用三角比来解。用  $\sin$  或  $\cos$  都可以,总之先要把式子列出来。

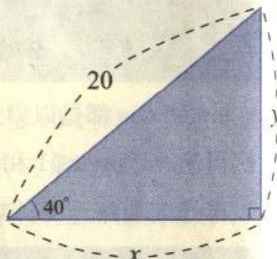


图 2-4-1

$$\begin{aligned} & \text{斜边} \rightarrow \frac{x}{20} = \cos 40^\circ, \quad \text{两边同时乘以 20, 把分母去掉} \\ & \therefore x = 20 \times \cos 40^\circ \end{aligned}$$

查三角函数表可知,  $\cos 40^\circ \approx 0.766044431$ ,

$$\therefore x \approx 20 \times 0.766044431 \approx 15.32088862$$

还可以用正弦来解:

$$\begin{aligned} & \text{斜边} \rightarrow \frac{y}{20} = \sin 40^\circ, \quad \text{两边同时乘以 20, 把分母去掉} \\ & \therefore y = 20 \times \sin 40^\circ \end{aligned}$$

查三角函数表可知,  $\sin 40^\circ \approx 0.6427876097$ ,

$$\therefore y \approx 20 \times 0.6427876097 \approx 12.855752194$$

这就是三角比最基本的用法。

如果涉及到两直角边,就选用  $\tan$  来解。所以学会选用哪个三角比是很重要的。这就好比即使有计算器,我们也要知道到底应该按哪个键一样。



在写最后答案的时候,小数点后面保留几位小数呢?本题中没有明确规定,所以计算器显示几位就写几位。如果题目规定答案保留几位小数,那么考虑到精确度,在计算过程中要取比规定位数至少多两、三位的小数进行计算,最后的答案按题目要求四舍五入。如果没有具体要求就按计算器或表中显示的数字计算。

**例 2** 计算图 2-4-2 中的三角形的面积(答案保留两位小数)。

还记得三角形的面积公式吗?

三角形的面积 = 底边  $\times$  高  $\div 2$ 。

本题中,我们选  $b$  为底边。从顶点  $B$  引出一条垂直于  $AC$  的虚线  $BH$ ,它就是三角形的高  $h$ 。画出高  $h$  后,你发现到没有:这道题又是要用三角比来解的。

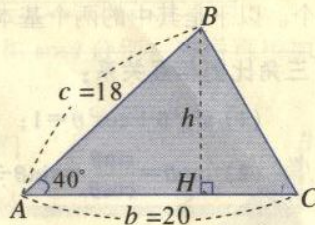


图 2-4-2

$$\therefore \frac{h}{18} = \sin 40^\circ, \therefore h = 18 \times \sin 40^\circ,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \times 20 \times 18 \times \sin 40^\circ$$

$$\approx 180 \times 0.6427876097$$

$$= 115.701769756$$

$$\approx 115.70$$

答案 115.70 中最后一个零必须保留。为什么呢?因为如果写成 115.7 的话,它的数值范围是  $115.65 \sim 115.7499 \dots$ ,误差为 0.1;而 115.70 真正的数值范围是  $115.695 \sim 115.70499 \dots$ ,误差是 0.01,精确度提高了 10 倍。

一般地,在进行近似值计算时,最终答案必须保留到规定的数位,这个数位被称为有效数位或有效数字。在物理、化学、测量等需要以实际测定为基础的学科领域中,有效数字是一个非常重要的概念。

比较一下  $\sin$ 、 $\cos$  和  $\tan$  中任意两个, 就会发现它们都分别共有一条边, 这也告诉我们这三者之间肯定有着什么密切的关系。

其实, 在三角比和三角函数里有很多公式, 但需要牢牢记住的只有 6 个。以下是其中的两个基本公式。

三角比的相互关系:

(1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ;

(2)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta$

以上两个公式中,  $\sin^2 \theta$  和  $\cos^2 \theta$  其实应该写成  $(\sin \theta)^2$  和  $(\cos \theta)^2$ , 同样  $\tan^2 \theta$  也应是  $(\tan \theta)^2$ , 但是因为加上括号写起来比较麻烦, 所以我们就可不加括号了。但是注意! 即使不加括号, 也不能写成  $\sin \theta^2$ , 因为  $\sin \theta^2$  表示  $\theta$  角的平方的正弦, 和  $\sin^2 \theta$  (即  $\theta$  的正弦的平方) 完全不一样。

$\sin^2 \theta$ 、 $\cos^2 \theta$ 、 $\tan^2 \theta$  分别读作  $\sin \theta$  的平方、 $\cos \theta$  的平方、 $\tan \theta$  的平方。

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

这个等式表示: 同一个角的正弦的平方加上其余弦的平方, 和总是 1。例如,

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

通过查三角函数表, 我们得出了表 2-5-1。



$\theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
0.0	$0.0000000000^2 + 1.0000000000^2 = 1$
1.0	$0.0174524064^2 + 0.9998476952^2 = 1$
2.0	$0.0348994967^2 + 0.9993908270^2 = 1$
3.0	$0.0523359562^2 + 0.9986295348^2 = 1$
4.0	$0.0697564737^2 + 0.9975640503^2 = 1$
5.0	$0.0871557427^2 + 0.9961946981^2 = 1$

也就是说, 三角函数表中同一列的  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  分别平方后再相加, 其结果肯定是 1。

那么如何证明这个公式呢? 在这里, 我们只需把毕达哥拉斯定理稍微变形一下就可以了。

如图 2-5-1 所示,  $\text{Rt} \triangle ABC$  中, 根据毕达哥拉斯定理,

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{等式两边同除以 } c^2, \text{得}$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{即 } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

假设  $\angle A = \theta$ , 则  $\frac{a}{c} = \sin \theta$ ,  $\frac{b}{c} = \cos \theta$ , 我或许是个天才。

所以☆处的等式就变为

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1,$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta$$

许多教科书和参考书都只把这个公式写成分式形式, 但是在实际运

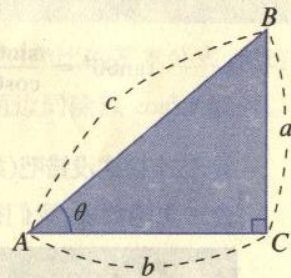


图 2-5-1

☆



我也是!

回忆一下前面学过的三角比的两个基本公式：

三角比的相互关系：

$$(1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1;$$

$$(2) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta$$

毕达哥拉斯定理等式两边同除以斜边的平方,就能得到公式(1)。

如图 2-6-1 所示,假设 Rt  $\triangle ABC$  的斜边为 1,那么其他两边就是  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$ ,把这三个边长的数值代入毕达哥拉斯定理,就得到公式(1)。

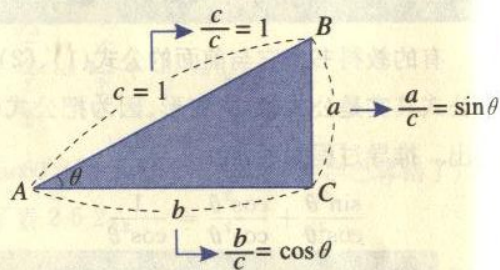
再把它们代入  $\tan \theta$  的公式,就得到了公式(2)

$$\tan \theta = \frac{CB}{AC} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

如果假设  $\theta$  的邻边  $b$  为 1(图 2-6-2),则另一直角边就是  $\tan \theta$ ,而斜边就是  $\frac{1}{\cos \theta}$ ,把它们代入毕达哥拉斯定理就得

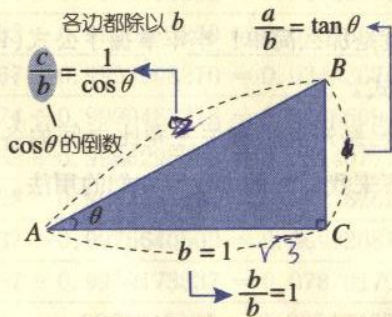
$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

再假设  $\theta$  的对边  $a$  为 1



$$BC^2 + AC^2 = AB^2, \therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

图 2-6-1



$$BC^2 + AC^2 = AB^2, \therefore \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

图 2-6-2

(图 2-6-3), 则又会得出什么新的公式呢? 你自己推导一下吧。

学了好几个公式, 有人就要问了: 那么多公式都要把它们背下来吗? 其实没有必要, 通过实际运用自然就能记住。

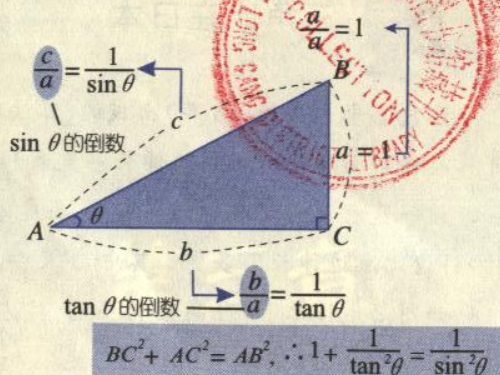


图 2-6-3

#### $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 的倒数

本课出现了好几个三角比的倒数, 这些倒数其实有另外固定的名称。

$$\frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta, \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta, \frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta$$

对此, 本书仅作以上简介, 在运算中还是写成分子为 1 的分式形式,  $\frac{1}{\sin \theta}$  和  $\csc \theta$  只是标记上的不同而已。例如, 图 2-6-3 中的式子

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad ①$$

改写成

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \quad ②$$

虽然式子②不是分式形式, 看起来也整洁一点, 但是它能让你一目了然吗? 还是式子①比较容易懂吧。另外, 计算器上可没有  $\cot$ 、 $\csc$  这类按键的。

所以在现阶段, 只要知道上面三个符号是什么就可以了, 至于以后工作中如果要经常用到的话, 到时再去习惯它们就行了。

江戸嘉永元年(1848年)出版的《算法智慧袋大全》一书中,记载了计算屋檐斜面长度时用到的伸长一览表和图解。

该一览表记录了底边为1尺\*、高度每升高5分并一直升到1尺时,斜边比底边伸长了多少。其中,1尺=10寸、1寸=10分。

如图2-6-4所示,当高度为5分时,斜边伸长的部分为0.001249。也就是说,底边为1尺、高为5分=0.05尺时的斜边比底边长0.001249,即斜边为1.001249。

如果用现在的计算方法就是:

$$(\text{斜边})^2 = 1^2 + 0.05^2 = 1.0025,$$

$$\therefore \text{斜边} = \sqrt{1.0025} = 1.0012492\dots$$

可见,在200多年前,人们就已经能列出如此精确的表了。

这个表记录的是[斜边-1(底边)],如果用三角比表示的话就是,

$$\frac{1}{\cos\theta} - 1 = \sec\theta - 1 \quad (\text{参见图2-6-2底边为1的直角三角形})$$

据说,当时的工匠们就是通过这个表计算屋檐面积,进而知道了要铺多少块瓦片的。

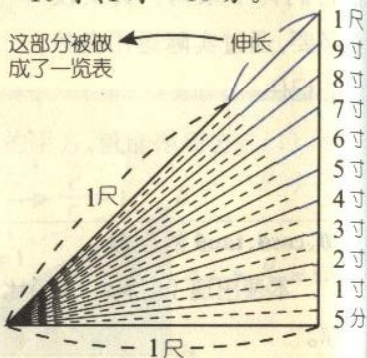


图 2-6-4

## 第三章

# 有点麻烦的 钝角三角比



\* 译注:尺为非许用单位,1尺≈33cm。

如图 3-1-1 所示,像内角  $A(=140^\circ)$  那样大于  $90^\circ$  的角称为钝角。有一个内角为钝角的三角形称为钝角三角形,三个内角都是锐角的三角形称为锐角三角形,而有一个角是直角的三角形就是直角三角形。

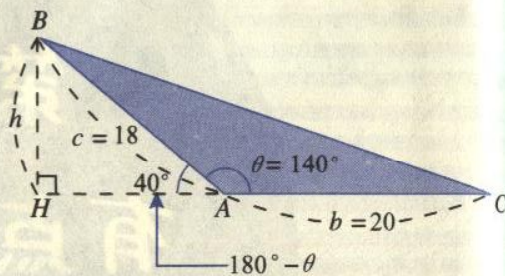


图 3-1-1

现在,大家来想一想图

3-1-1 中  $\triangle ABC$  的面积应该怎么求?

假设底边  $b = 20$ , 经过顶点  $B$  作底边  $CA$  的垂线, 则点  $H$  就会落在  $CA$  的延长线上,  $BH$  就是三角形的高  $h$ , 这正好和测量如图



图 3-1-2

3-1-2 所示的悬崖的海拔高度是一样的。

其实在作高  $h$  时, 我们无意中又作出了一个  $\triangle ABH$ , 而且它是个直角三角形, 这样不就能和三角比挂上钩了吗?

斜边  $c = 18$ , 角度是:

$$180^\circ - \theta = 180^\circ - 140^\circ$$

$$\text{由 } \frac{h}{c} = \sin 40^\circ, \text{ 得 } h = c \times \sin 40^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 18 \times \sin 40^\circ$$

\*



$$\approx 180 \times 0.6427876097$$

$$= 115.701769756$$

这个三角形的面积和前面图 2-4-2 中的三角形面积相等, 而且带 \* 的式子也完全相同。不必把这两个三角形面积都算出来, 只要看看图 3-1-3 就能明白。

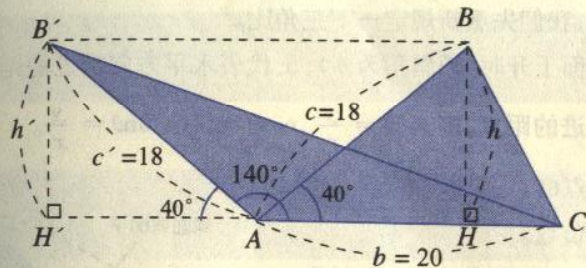


图 3-1-3

两者不同的地方是,  $\triangle ABC$  的内角  $A$  是钝角, 所以直接用  $\sin A$  来计算, 而  $\triangle AB'C$  的内角  $A$  比  $90^\circ$  大, 所以要用它的外角即  $180^\circ - \angle A$  来计算。

如果我们规定三角比只能用于锐角三角形的话, 那么在锐角三角形中可以直接用  $\sin A$ , 而要是碰到了钝角三角形, 就必须用它的外角, 也就是必须区分不同类型的三角形。但是, 如果我们也能直接用钝角的三角比, 则求  $\triangle ABC$  和  $\triangle AB'C$  的面积时都用到了内角  $A$ ,

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A, \text{ 即使 } A > 90^\circ, \text{ 也没必要用 } 180^\circ - \angle A.$$

因为这两个三角形面积相等, 所以,

$$\frac{1}{2} \times 20 \times 18 \times \sin 40^\circ = \frac{1}{2} \times 20 \times 18 \times \sin 140^\circ, \text{ 即 } \sin 40^\circ = \sin 140^\circ$$

但是在目前阶段这还只是我们的假设, 还不知道它对不对。

本节想告诉大家的只有一点, 那就是: 三角比同样也可以用于钝角。

直角三角形的内角不可能是钝角,但如图 3-2-1 所示,若把  $\theta$  看作斜面或梯子  $OP$  的倾斜角,那么随着  $OP$  移动, $\theta$  就有可能是钝角了。

在这里,我们先重新规定一下三角比。

沿着斜面上升时(倾斜角为  $\theta$ ),  $x$  代表水平方向前进的距离,  $y$  代表垂直方向前进的距离,则  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ 。

当  $x$  在点  $O$  右边时为正数,在点  $O$  左边时为负数。

同样,当  $y$  在直线  $OX$  上方时为正数,在下方时则为负。通常  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , 所以  $y$  不会是负数。

以上的新规定和锐角的三角比定义没有任何矛盾。

只要把斜边当作一个斜面向上攀登就行了。 $y$  就是  $\theta$  的对边,  $x$  就是  $\theta$  的邻边。

接下来,我们来逐次看看随着  $\theta$  的变化,三角比有什么变化。

## 倾斜角为 $0^\circ$ 的斜面

倾斜角为  $0^\circ$  的斜面也就是一个水平面。也许你从来都没有听说过什么内角为  $0^\circ$  的直角三角形,但是倾斜角为  $0^\circ$  的斜面是存在的。在这种情况下,虽说是沿着斜面  $OP$  上升,但实际上只是沿水平方向前进,

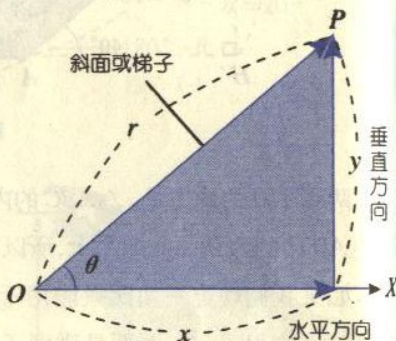


图 3-2-1

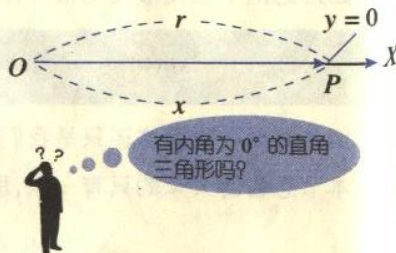


图 3-2-2



垂直方向上升的距离为零,即图 3-2-2 的点  $P$  的高度为 0,

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0, \quad \therefore \sin 0^\circ = 0$$

另外,斜面的长  $r$  和水平方向的  $x$  相等(即  $x = r$ ),所以

$$\cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1, \quad \therefore \cos 0^\circ = 1$$

还有,

$$\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0, \quad \therefore \tan 0^\circ = 0$$

现在,你能明白三角函数表里  $0^\circ$  各数值的意义了吧。

## 倾斜角为 $90^\circ$ 的斜面

下面我们来考虑一下  $90^\circ$  的斜面又是怎么回事。当然,两个角都是  $90^\circ$  的直角三角形是不存在的,还是把它想象成一个从平放在地上到被慢慢地竖起来时的梯子比较容易理解。

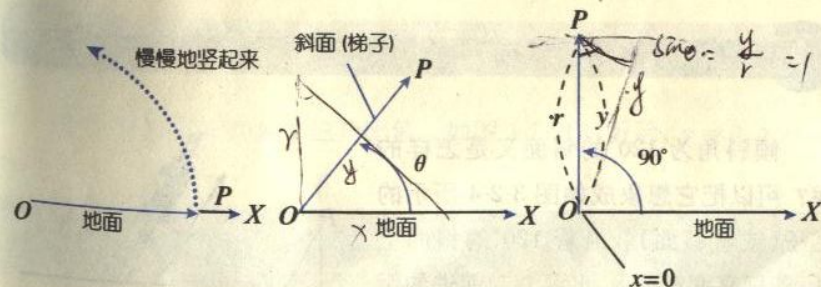


图 3-2-3

图 3-2-3 就是倾斜角为  $90^\circ$  的斜面。当沿着  $OP$  上升时,垂直方向的高度  $y$  与  $r$  是相等的,所以,



$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1, \therefore \sin 90^\circ = 1$$

水平方向前进的距离  $x$  为 0, 所以,

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0, \therefore \cos 90^\circ = 0$$

那么,  $\tan 90^\circ$  又是什么呢?

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{y}{0} = ?$$

你知道这个“?”表示什么意思吗?

查三角函数表, 发现  $\tan 90^\circ$  那一栏没写任何数字, 而是划了一条直线。用计算器输入  $\tan 90^\circ$ , 显示“输入错误”。这些都是因为: 分母为零的分式没有意义。本来, 分式是表示除法的, 例如,

$$6 \div 2 = 3, \text{反过来 } 3 \times 2 = 6, \text{但是假设 } \frac{2}{0} = 2 \div 0 = ?$$

则在“?”位置上无论放什么数字, 乘以 0 以后都得不到 2, 所以 0 作分母的分式不能成立。现在对  $\tan 90^\circ$  没有数值这一点, 你明白了吧。

通过上面的说明, 我们清楚了三角函数表的数值范围。

### 倾斜角为钝角的斜面

倾斜角为  $120^\circ$  的斜面又是怎样的呢? 可以把它想象成如图 3-2-4 所示的梯子(或者斜面)。沿着  $120^\circ$  的斜面上升, 若把高度定为  $y$ , 水平方向前进的距离定为  $x$ , 则正好形成了一个角为  $60^\circ$ 、三边之比为  $1:2:\sqrt{3}$  的直角三角形。

在本节刚开始的时候, 我们就规定

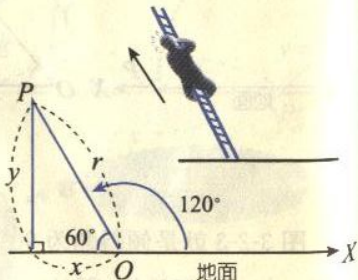
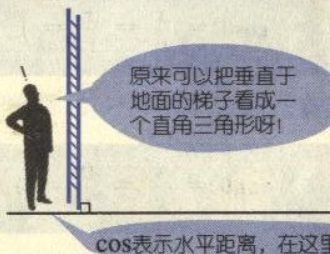


图 3-2-4



了在点  $O$  左边的  $x$  为负数, 所以当  $r = 0$  时,  $x = -1, y = \sqrt{3}$ ,

$$\therefore \sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$\cos$  和  $\tan$  出现了负数!

此外, 通过图 3-2-5 也能求出  $135^\circ$  和  $150^\circ$  的各个三角比值,

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

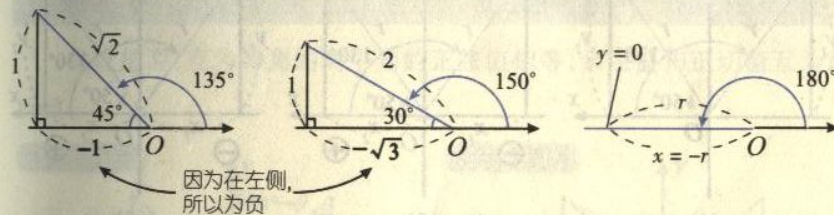
(1)  $135^\circ$  的角(2)  $150^\circ$  的角(3)  $180^\circ$  的角

图 3-2-5

### $180^\circ$ 的三角比值

最后, 看看  $180^\circ$  的各个三角比值。如图 3-2-5(3) 所示,  $y = 0, x = -r$  ( $r > 0$ ),

$$\therefore \sin 180^\circ = \frac{0}{r} = 0, \quad \cos 180^\circ = \frac{-r}{r} = -1, \quad \tan 180^\circ = \frac{0}{x} = 0$$

通过本节学习, 并不是让你把出现的各三角比值都死记硬背下来, 而是希望你能学会这种方法, 即通过画图把各三角比值求出来。

仔细看一下,就会发现本书最后附的三角函数表只到  $90^\circ$  为止,这可不是为了节约空间或纸张。其实,无论是哪种三角函数表都是只到  $90^\circ$  为止,有的表比较详细,那也只是把各角度划分得更加细微而已,角的度数都是从  $0^\circ$  到  $90^\circ$ ,这一点是共通的。

那么,为什么只到  $90^\circ$  呢? 因为到  $90^\circ$  就足够了。

例如,  $\sin 130^\circ$  是多少呢? 图 3-3-1 表示出了  $\sin 130^\circ$ 。

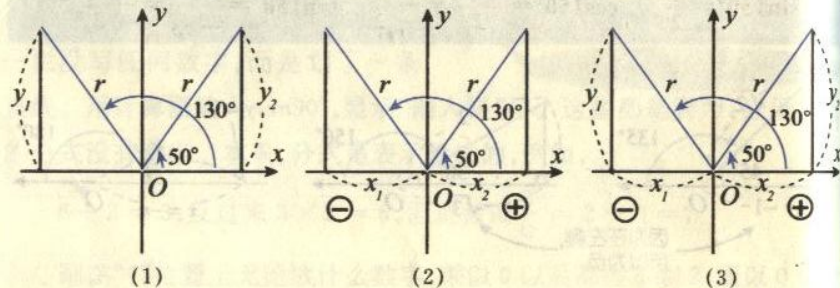


图 3-3-1

在这里,要注意的是互为补角的两个角,  $130^\circ$  的补角是  $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ 。

由图 3-3-1(1)可知,  $\sin 130^\circ = \frac{y_1}{r} = \frac{y_2}{r} = \sin 50^\circ$ , 也就是说,  $\sin 130^\circ$  的数值和三角函数表中  $\sin 50^\circ$  的数值是一样的。

$$\sin 130^\circ = \sin 50^\circ \approx 0.766044431$$

图 3-3-1(2)中,因为  $x$  本身就是负数,所以

$$\cos 130^\circ = \frac{x_1}{r} = \frac{-x_2}{r} = -\frac{x_2}{r} = -\cos 50^\circ$$

两角互为补角时,  $x$  的正负号相反,例如锐角中的  $x > 0$ , 则它的补角(肯定为钝角)中的  $x < 0$ , 当我们用锐角的  $\cos$  值来表示它的补角的  $\cos$  值时,千万不要忘记加上负号。



$$\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ \approx -0.6427876097$$

由图 3-3-1(3), 得

$$\tan 130^\circ = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{-x_2} = -\frac{y_2}{x_2} = -\tan 50^\circ$$

所以这里也需要加上一个负号。

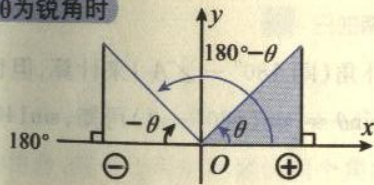
$$\tan 130^\circ = -\tan 50^\circ \approx -1.1917535926$$

通常,我们把  $\theta$  的补角写作  $180^\circ - \theta$ , 然后就得出以下三组公式(也称诱导公式):

$\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$	或者	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta;$
$\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta)$	或者	$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta;$
$\tan \theta = -\tan(180^\circ - \theta)$	或者	$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

也就是说,互为补角的两个角的正弦值相等,余弦值和正切值互为反数。

$\theta$  为锐角时



$\theta$  为钝角时

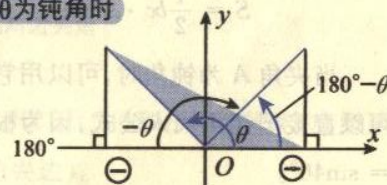


图 3-3-2

图 3-3-2 中的阴影部分表示  $\theta$ 。从中也能看出  $y$  始终大于等于零, 即  $y \geq 0$ 。

当  $\theta > 90^\circ$  时, 可以通过上面的诱导公式把  $\theta$  转换为  $90^\circ$  以内的锐角来计算。

目前, 我们已经学了好几个有关三角比之间的公式, 今后还会出现更多的三角比公式。如果仅仅死记硬背那些公式, 那你一定会觉得三角比非常枯燥无聊, 进而讨厌起它来。其实, 所有这些公式都应该通过图形去理解和掌握。

之所以把三角比也用于钝角,是因为这样一来便于求三角形的面积。

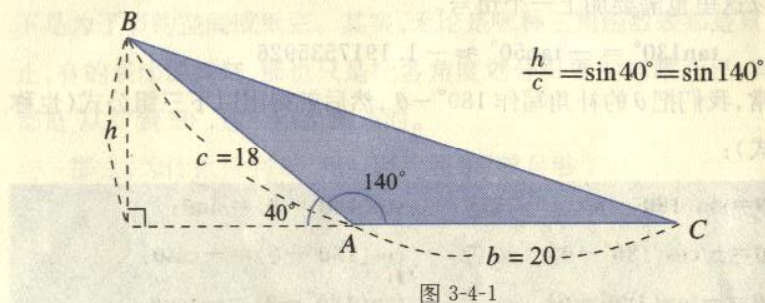


图 3-4-1

图 3-4-1 中,如果用三角形的两边和它们的夹角来表示面积的话,就是:

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A \quad (1)$$

当夹角  $A$  为钝角时,可以用它的外角(即  $180^\circ - \angle A$ )来计算,但也可以直接把钝角代入公式,因为根据  $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$  可知,  $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$ 。

当  $\angle A = 90^\circ$  时,  $\triangle ABC$  就变成了直角三角形,而底边  $b$  上的高就是  $c$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2}bc$$

如果直接把  $A = 90^\circ$  ( $\sin 90^\circ = 1$ ) 代入式子(1)中,也会得出和直角三角形面积公式一样的式子:

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2}bc$$

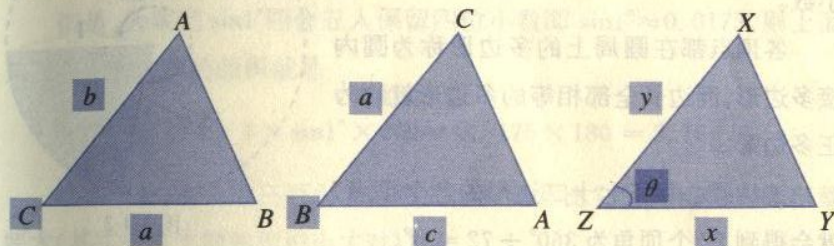
但是,在有的教科书中,三角形的面积公式通常都是以下几种形式( $S$  为面积的符号):



$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ca \cdot \sin B = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$

这三个公式只是由于用了不同的内角而显得有所不同而已,其实说的是一回事。

归纳一下上面的三个公式:  $A-b-c$ 、 $a-B-c$ 、 $a-b-C$  这三种不同组合中,每一组都有两个小写字母(即两条边)和一个大写字母(即它们的夹角),并且同一组合中不能有两个相同字母。换句话说,这是两条边和它们的夹角(即两边夹角)的组合。



已知两边和两边夹角

图 3-4-2

$A-B-c$ 、 $a-B-C$ 、 $A-b-C$ , 大写字母(角)和小写字母(边)组成的组合,即一边和它两端的两个角(两角夹边)。

在很多教科书或练习册里,说到  $\triangle ABC$  时都没有图,因为只要通过各个字母就能表示出该三角形的顶点和边的位置关系。上面的三个三角形面积也同样如此。所以说,并不是要你把这 3 个公式里的字母组合背下来,而是要会用三角形中的两边和夹角。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$$

夹角

两边

如图 3-4-2(3)所示,在  $\triangle XYZ$  中,已知两边  $x$ 、 $y$  和它们的夹角  $Z$  (用  $\theta$  表示),则三角形的面积就是:



$$S = \frac{1}{2}xy \cdot \sin\theta$$

总结一下三角形的面积公式：

$$S = \frac{1}{2} \times (\text{两边的积}) \times \sin(\text{夹角})$$

接下来,看看具体的题目吧。

**例1** 查三角函数表,求半径为1的圆的内接正七十二边形的面积,结果保留两位小数。

各顶点都在圆周上的多边形称为圆内接多边形,而边长全部相等的多边形就称为正多边形。

连结圆心和正七十二边形的各个顶点,就会得到72个顶角为  $360^\circ \div 72 = 5^\circ$ 、

腰为1(即圆的半径)的等腰三角形,所以,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 5^\circ \times 72 &\approx 0.0871557427 \times 36 \\ &= 3.13760\dots \\ &\approx 3.14 \end{aligned}$$

该正七十二边形的面积就是3.14。

3.14? 是不是在哪里见到过这个数字呢?

还记得圆的面积公式吗?

$$S = \pi r^2$$

本题中,圆的半径为1,所以这个圆的面积就是 $\pi$ ,经常把 $\pi$ 四舍五入成3.14。这么一来,正七十二边形的面积和圆的面积不就是一样了吗? 这是一种巧合吗?

如果画出这个正七十二边形,就会发现它的形状非常接近圆,也就是

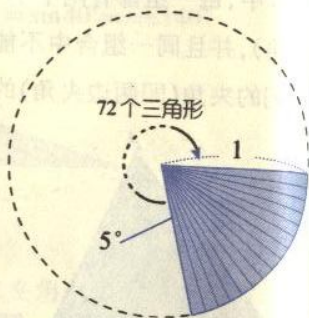


图 3-4-3



说这个正七十二边形的面积就是它的半径为1的外切圆的面积,即圆周率 $\pi$ 的近似值。

正多边形的边数越多,它的形状就越接近圆,那么它的面积也就越接近 $\pi$ 。

当它是正三百六十边形时,它的面积是

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 1^\circ \times 360 \approx 0.0174524064 \times 180 = 3.141433\dots$$

看,它的面积是不是更加接近 $\pi = 3.14159265\dots$ ?

但是,如果把 $\sin 1^\circ$ 四舍五入保留四位小数即 $\sin 1^\circ \approx 0.0175$ ,则上面正三百六十边形的面积就是

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 1^\circ \times 360 \approx 0.0175 \times 180 = 3.15$$

这么一来,这个正三百六十边形的面积竟然比它的外切圆的面积都要大(其实应该比圆的面积小才对)!

所以说,用近似值计算时,把握住它的精确度很重要。

例如,把圆周率 $\pi$ 四舍五入为3可不可以呢? 以什么为基准呢? 能不能为了图计算方便随便减少小数点后面的数位呢? 这些对学生来说都是很难把握的。



还记得前面学过的表示三角比之间的关系的几个等式吗?

$$(1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1;$$

$$(2) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta;$$

$$(3) \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

那么,这些等式在钝角中也能成立吗?

先把结论告诉你:它们在钝角中也能成立。

虽然钝角中的  $x$  为负数,但不论是正数还是负数,平方以后都是相同的正数。图 3-5-1 中,根据毕达哥拉斯定理,  $x^2 + y^2 = r^2$ , 接下来的证明和第二章第五节完全相同。

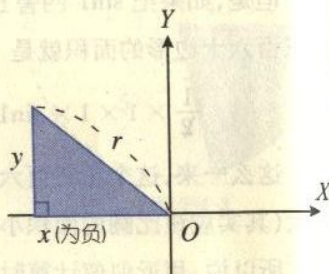


图 3-5-1

**例 1**  $\theta$  为钝角 ( $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ), 已知  $\sin \theta = 0.2$ , 求  $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  的值。

**解 1** 因为  $\theta$  为钝角, 所以  $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  的值都是负数。

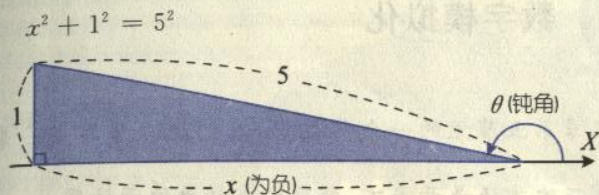
$$\therefore \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad \therefore \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25},$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{24}}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \left(0.2 = \frac{1}{5}\right)$$

$$\tan \theta = \sin \theta \div \cos \theta = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

**解 2** 根据题目画图, 如图 3-5-2 所示。

根据毕达哥拉斯定理, 得



在用毕达哥拉斯定理时, 不要忘了这一点

图 3-5-2

$$\therefore x^2 = 25 - 1 = 24$$

$$\therefore x = -\sqrt{24} = -2\sqrt{6} \quad (\theta \text{ 为钝角, 所以 } x < 0)$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \tan \theta = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

**例 2** 化简下面的式子:

$$(1 + \sin \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2 - 2(\sin \theta + \cos \theta)$$

**分析** 把  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  分别当作一个整体展开。如果还不习惯的话, 可以把式子改写成  $(1+s)^2 + (1+c)^2 - 2(s+c)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 } & (1 + \sin \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2 - 2(\sin \theta + \cos \theta) \\ &= 1 + 2\sin \theta + \sin^2 \theta + 1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta - 2\cos \theta \\ &= 3 \end{aligned}$$

今后会有越来越多的包含着三角比的式子需要计算。

引入表示三角比的各符号后, 即使不知道各个三角比的具体数值, 也可以在算式中计算各边之比。不过, 这时就需要灵活运用合适的三角比关系公式。

在第三章第五节里的一个算式中,我们把0.2写成 $\frac{1}{5}$ 来计算,因为无论是算二次方还是开平方,分数比小数更便于计算。

看到0.2,你能立刻把它换算成 $\frac{1}{5}$ 吗?是不是要经过一个中间环节?例如, $0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ 。你要做到的是快速把0.2和五等份联想在一起。

再比如,看到0.75,你的脑海里能立即浮现下图吗?

$$0.75 = \frac{3}{4} = \text{[Diagram: A square divided into 4 equal parts, with 3 parts shaded blue]} = \text{[Diagram: A circle divided into 4 equal parts, with 3 parts shaded blue]} = 75\% = \text{七成五}$$

像 $\sqrt{2}$ 那样的无理数,只能用小数表示(因为没法用分数形式表示),所以不能通过类似上面的图形来把握它。而如果有理数(即能用分子分母都为整数的分数形式来表示)的话,就要学会用上面的图形来看它们。例如, $\frac{3}{4}$ 可以读作“四等份中的三个”。分数形式与人类对数字的感觉一致,让人一目了然,所以早在数千年前就被我们的祖先广泛使用。

另一方面,如果需要非常精确地表示某时某地的某个状态时,就要用到小数形式了。但与分数比起来,它的历史却很短,从印度的占位记数法被发明算起,到现在也只有400年左右。

你知道吗,有一段时间,汽车的时速表都被改成了用数字来表示。但是,与用指针表示的时速表不同的是,数字时速表表示不出速度变化的幅度,而且数字总是在不停地变化,所以现在又都改回到指针式时速表这种形式了。

## 第四章

# 用余弦定理 和正弦定理 求三角形的 边、角和面积



本节学习在已知两边和一夹角的三角形中,怎样求另一边。并且不需要任何新的知识,只要用到已经学过的知识就能解题。

例如,在  $\triangle ABC$  中(图 4-1-1),已知  $\angle A = 60^\circ$ ,  $b = 10$ ,  $c = 15$ ,求  $a$  的长度。

要求  $a$ ,就必须作一个包含  $a$  的直角三角形。

本题中,以  $B$  为顶点向边  $b$  作垂线或以  $C$  为顶点向边  $c$  作垂线  $CH$ 。

那我们就选以  $C$  为顶点向  $c$  作垂线  $CH$ ,即高  $h$ 。

根据毕达哥拉斯定理,得

$$a^2 = CH^2 + BH^2 = h^2 + d^2$$

这样我们就知道下面该做什么了:

① 在  $\text{Rt}\triangle AHC$  中求出  $h$  和  $e$ ;

② 求出  $d$ ;

③ 在  $\text{Rt}\triangle CHB$  中,根据  $a^2 = h^2 + d^2$ ,求出  $a$ 。

在  $\text{Rt}\triangle AHC$  中,因为  $A = 60^\circ$ ,所以能立刻知道三边之比是  $1:2:\sqrt{3}$ ,这样也能求出  $h$  和  $e$ ,但是为了熟悉一下三角比用法,我们还是把它们写出来。

① 由  $\frac{h}{b} = \sin A$ , 得

$$h = b \sin A = 10 \sin 60^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

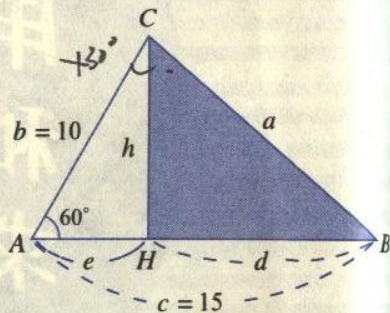


图 4-1-1



由  $\frac{e}{b} = \cos A$ , 得

$$e = b \cos A = 10 \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$\textcircled{2} d = AB - AH = c - e = c - b \cos A$$

→ 为了便于后面的解说,就用这个表达式

$$\therefore d = 15 - 5 = 10$$

$$\textcircled{3} a^2 = h^2 + d^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \quad (*) \text{ 这部分最后计算}$$

$$\therefore a^2 = (5\sqrt{3})^2 + 10^2 = 75 + 100 = 175$$

$$\therefore a = \sqrt{175} = \sqrt{25 \times 7} = 5\sqrt{7}$$

看,这样就求出了  $a$ ,而且确实没有用任何新的知识吧。

其实,在上面的运算过程中我们已经不知不觉就把余弦定理的公式写出来了,请看带  $(*)$  的那个式子,把它稍微整理一下,就是:

$$a^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2$$

$$= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A$$

合并  $b^2$  的同类项,

就会出现  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\downarrow = 1$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

这个式子就是余弦定理的公式。

余弦定理

在  $\triangle ABC$  中,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

本书里有六个必须掌握的公式,而这个就是第三个公式。还记得前两个是什么吗?想不出来的人赶快翻到前面看看吧。

和面积公式一样,不能把余弦定理公式当成一些文字或字母的组合,而应该关注一下两边及其夹角的用法。要不你就很难做到熟练地运用它。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

两边

夹角

当两边和夹角的组合为  $a-b-C$  时,  
第三边就是  $c$ ,

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

两边

夹角

当两边和夹角的组合为  $a-B-c$  时,  
第三边就是  $b$ ,

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

两边

夹角

如果再假设两边为  $s$  和  $t$ , 夹角为  $\alpha$ ,  
第三边为  $u$ , 则

$$u^2 = s^2 + t^2 - 2st \cos \alpha$$

两边

夹角

你需要做到的就是无论用什么字母来表示,都能熟练地写出相应的余弦定理公式。

另外,有的教科书或参考书里把  $a^2 = , b^2 = , c^2 =$  这三个公式都列出来了,但其实它们是一回事。

### 当夹角为钝角时

上面的几个公式中,夹角  $A$  都是锐角,如果  $A$  为钝角的话,图形会有

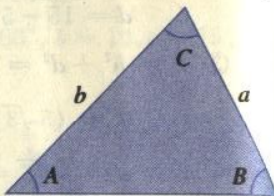


图 4-2-1



哎? 原来是这样啊!



一点不同。但公式会变成另外不同的公式吗?

如图 4-2-2 所示,以  $C$  为顶点向边  $AB$  的延长线作垂线  $CH$ , 于是在  $\text{Rt}\triangle BCH$  中,要求的  $a$  就成了斜边,根据毕达哥拉斯定理,得

$$a^2 = CH^2 + BH^2 = h^2 + d^2$$

图 4-2-2

这个式子和前一节里列出来的式子完全一样,所以现在还不能判断出  $\angle A$  是锐角还是钝角。我们先往下看。

在  $\text{Rt}\triangle ACH$  中,

$$\frac{h}{b} = \sin(180^\circ - A), \therefore h = b \sin(180^\circ - A)$$

但是,因为  $\sin(180^\circ - A) = \sin A$ ,

互为补角

← 这种情况下就要用到诱导公式

$$\therefore h = b \sin A$$

← 与前一节中①相同

另外,  $d = AB + AH = c + e$ ,

← 前一节的②是  $c - e$

$$\frac{e}{b} = \cos(180^\circ - A), \therefore e = b \cos(180^\circ - A)$$

但是,因为  $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$

互为补角

← 你能解释这里为什么要用负号吗?

$$\therefore e = -b \cos A,$$

$$\therefore d = c + e = c - b \cos A$$

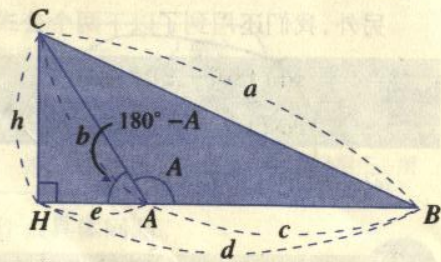
← 这与前一节的②相同

因而

$$a^2 = h^2 + d^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2$$

与前一节中带  $(*)$  的式子完全一样。

为什么会完全相同呢? 因为本题中,虽然  $d = c + e$ ,但由于  $\cos A < 0$ ,所以“加上负的  $b \cos A$ ”就相当于“减去正的  $b \cos A$ ”,结果是与前面的  $A$  为锐角时得出的式子完全相同。





另外,我们还用到了以下两个公式:

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A,$$

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

必须牢记这些相关公式。

### 余弦定理和毕达哥拉斯定理

如图 4-2-3 所示,当夹角为  $90^\circ$  时又会怎么样呢? 先根据毕达哥拉斯定理,得

$$a^2 = b^2 + c^2$$

和根据余弦定理公式得出的式子是一样的,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ \\ &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

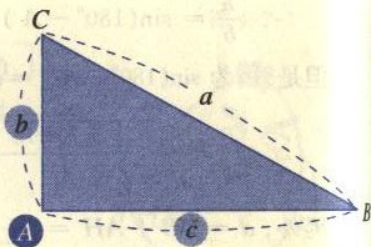


图 4-2-3

从这点可以看出,余弦定理是毕达哥拉斯定理的推广,当  $\angle A$  不是直角时要添加“ $-2bc \cos A$ ”这一项。

如图 4-2-4 所示,

伸长的部分是  $-2bc \cos \theta_2$

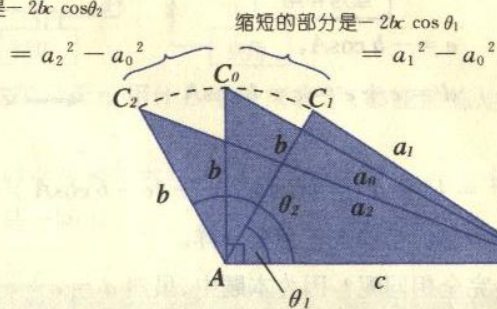


图 4-2-4



直角三角形  $a_0^2 = b^2 + c^2$

锐角三角形  $a_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_1$

钝角三角形  $a_2^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_2$

缩短

伸长

为负数(因为  $\theta_2 > 90^\circ$ )

负负得正, 所以是“加法”

最后,来看看余弦定理能解决什么具体问题。

当有障碍物阻隔而不能直接测量距离时,就可以通过余弦定理间接测量。

例 1 计算图 4-2-5 中  $PQ$  之间的距离。

如图 4-2-5 所示,  $PQ$  之间有座小山隔着,不能进行直接测量,这时可以通过下面的式子计算出来。

$$PQ^2 = 106^2 + 123^2 -$$

$$2 \times 106 \times 123 \cos 53^\circ$$

通过计算器,得

$$PQ = 103.3057 \dots$$

$$\approx 103.3 \text{ (m)}$$

答:  $PQ$  之间的距离

约为 103.3 m。

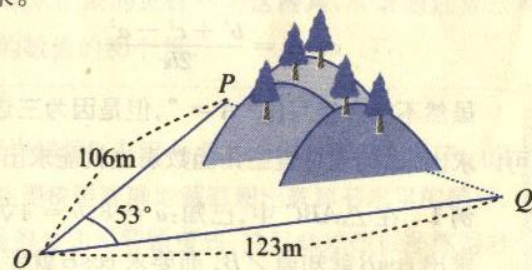


图 4-2-5

三角比是数学中最有实用性的

正如前面说过的一样,仅凭高中数学水平要达到实用阶段是很困难的,但是在为数不多的几个公式中,余弦定理算是与实际应用紧密联系的,如上面那个例题。

利用三角比进行测量的方法称为“三角法”,它在几千年的历史中不断被总结和完善。而现在我们就是在学习有关它的最基本的部分。

以后,我们还要陆续学到如何测量长度、计算面积等,而这些都离不开三角比。

此外,在力学等其他方面也会经常用到三角比的各种公式。

目前我们所接触到的都是已知两边和夹角求第三边或面积之类的题目。

在余弦定理中,如果三边都是已知的,那么很自然地就会想到能不能通过边来求角呢?试试把余弦定理稍微变一下形。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

右边 左边 左右两项互换位置

把  $a^2$  和  $-2bc \cos A$  互相调换一下位置,得

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

虽然不能直接写出“ $A =$ ”,但是因为三边都是已知的,所以  $\cos A$  就可以求出来,而通过查三角函数表也就能求出  $\angle A$  了。

**例 1** 在  $\triangle ABC$  中,已知:  $a = 8, b = 4\sqrt{7}, c = 12$ , 求  $\angle B$ 。

求出  $\cos B$  就知道  $\angle B$ , 而要求  $\cos B$  就要从  $b^2$  着手。根据这一思路,我们就列出了下面的式子,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

两边是同一字母的大小写

$$2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2,$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

把已知各数值代入上面的式子中,得

$$\cos B = \frac{8^2 + 12^2 - (4\sqrt{7})^2}{2 \times 8 \times 12} = \frac{64 + 144 - 112}{2 \times 8 \times 12}$$

←不要急着计算(因为可以约分)

$$= \frac{1}{2}$$



## 求角度

求出  $\cos B$  后,我们可以把它写成  $\cos B = \frac{1(x)}{2(y)}$

这种形式,这样就能画出一个简图 4-3-1,因为三边之比是  $1:2:\sqrt{3}$ ,所以  $\angle B$  就是  $60^\circ$ 。

其实很多出题者都故意出一些常见的角来让我们求。

所谓“常见的角”指  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ,$

$135^\circ, 150^\circ$  这些特殊角。如果求出来的正好不是这些角,那就通过查三角函数表找最接近你求出来的数值的那个角。

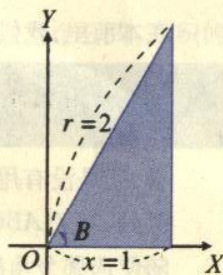


图 4-3-1

你发现了没有?

数学是不是一门记忆学科呢?在这一点上人们一直争论不休。有人认为,如果想比其他学生更快更准确地解答超出教科书水平的题目,就必须尽可能地背诵大量的公式和解题模式,并且必须做很多练习才能熟练运用那些公式。

但是,本书并不是出于这个目的。通过记忆最少最基本的公式而能把其他公式推导出来,这才是我希望你们做到的。

例如,当你牢牢掌握了余弦定理,那么在你头脑中随时都能浮现出“ $\cos A = \dots$ ”这个式子,而且在反复使用过程中,就会发现下面这个现象:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \xrightarrow{\text{以此为基础}} \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

上面的等式中分别被线连起来的 A 和 a、B 和 b、C 和 c 是同一字母的大小写,它们是对边、对角的关系。

这种组合与余弦定理公式  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  是一致的。理解了这一点,以后无论碰到用什么字母表示的三角形,都可以很快地把余弦定理公式列出来。

在本节里,我们将学习如何通过三边求三角形的面积。思路如下:

已知三边  $\rightarrow$  ①  $\cos$  的值  $\rightarrow$  ②  $\sin$  的值  $\rightarrow$  ③ 求面积

看,还是没有用任何新的知识。

例如,在  $\triangle ABC$  中,  $a=5, b=7, c=9$ , 求它的面积。

随便选哪个角都可以。在这里,我们就选  $\angle A$  吧。

①通过三边求  $\cos A$

由余弦定理,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 81 - 25}{2 \times 7 \times 9} = \frac{105}{126} = \frac{5}{6}$$

②通过  $\cos A$  求  $\sin A$  的值

不要急着计算,可以约分的。

由  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , 得  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

因为  $\sin A > 0$ ,

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

③用  $\angle A$  作夹角的面积公式求面积(注意: $A$  “两侧”的边是  $b, c$ , 别弄错了)。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 7 \times 9 \times \frac{\sqrt{11}}{6} = \frac{21\sqrt{11}}{4}$$

你试着用  $\angle B$  或  $\angle C$  再做一做。

海伦公式

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\left( s = \frac{a+b+c}{2} \right)$$



上面①、②、③步骤不用具体数字,而用符号  $a, b, c$  来计算的话,就能得到“海伦公式”,因为中间的计算比较繁琐,所以在这里,我们就把中间环节省略而直接写出结果。

有的教科书里并没有介绍“海伦公式”,但如果知道这个公式,面积的计算就会变得很方便。这个公式在纯数学里并没有被重视,但在实际测量领域里却被频繁地使用,是一大“法宝”。请注意,公式中  $s$  的分母为 2。

现在我们用“海伦公式”再把上面那个例题做一遍。

已知  $\triangle ABC$  中,  $a=5, b=7, c=9$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+7+9}{2} = \frac{21}{2}, \quad s-a = \frac{21}{2} - 5 = \frac{11}{2},$$

$$s-b = \frac{21}{2} - 7 = \frac{7}{2}, \quad s-c = \frac{21}{2} - 9 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{21}{2} \times \frac{11}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3 \times 7 \times 11 \times 7 \times 3}{4}} = \frac{21\sqrt{11}}{4}$$

通常,根号里面如果有乘法,我们不要急着把它算出来,而是看看有没有相同的两个数相乘,如果有的话就直接把那个数拿到根号外面,这可是一个小窍门噢。

海伦(HERON, 公元前 130 年左右 ~ 公元前 75 年左右)

海伦是亚历山大时代希腊著名的数学家、发明家,他一生中发明了各种各样的自动装置。例如,实用性很强的水钟、通过点火能自动开的自动门、放入一定数量的钱后自动流出圣水的机器,它可以说是现代自动售货机的原型。

但在当时,那些自动装置用在神殿里以此来显示神的权威,而不是用在人们的日常生活中。为什么呢? 因为当时的人们宁可用很廉价的奴隶,而没有必要安装那些昂贵的自动设备。

目前为止,我们都只是围绕已知两边或三边的三角形解答各种题目,而在这一节中,我们将学习怎样通过一边和它两端的两个角(即两角夹边)求其他两边。

已知边  $a$  和  $\angle B$ 、 $\angle C$ , 求边  $b$

如图 4-5-1(1)所示,已知边  $a = 10$ ,  $\angle B = 40^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ , 求其他两边  $b$ 、 $c$  和  $\angle A$ 。

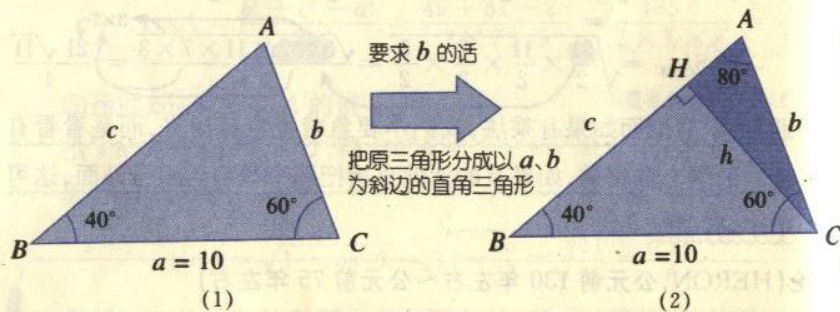


图 4-5-1

首先求  $\angle A = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$ , 这应该没有问题吧。

然后再求边  $b$ , 为了保留已知边  $a$  和要求的边  $b$ , 我们把原三角形分成如图 4-5-1(2)所示的两个直角三角形。

先在以  $a$  为斜边的  $\text{Rt}\triangle BCH$  里, 把求  $h$  的式子列出来。在这里先保留字母符号而不要把具体数值代进去, 这就是算术与数学的不同点。

$$\therefore \frac{h}{a} = \sin B, \quad \therefore h = a \sin B \quad (1)$$

然后在以  $b$  为斜边的  $\text{Rt}\triangle ACH$  中, 把求  $h$  的式子列出来。



$$\therefore \frac{h}{b} = \sin A, \quad \therefore h = b \sin A \quad (2)$$

由(1)和(2), 得

$$b \sin A = a \sin B$$

等式两边同时除以  $\sin A$ , 得

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad (3)$$

$A = 180^\circ - B - C$ 。已知  $a$ 、 $B$ 、 $C$ , 所以就可以把具体数值代入(3), 得

$$b = \frac{10 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = 6.5270364 \dots$$

虽然正弦值可以通过查表得到, 但是如果没有计算器, 那些乘法、除法还是很让人头疼的。

已知边  $a$  和  $\angle B$ 、 $\angle C$ , 求边  $c$

接下来, 求边  $c$ 。为了保留已知边  $a$  和要求的边  $c$ , 我们把原三角形分成如图 4-5-2 所示的两个直角三角形, 并列出两个关于  $h$  的等式。

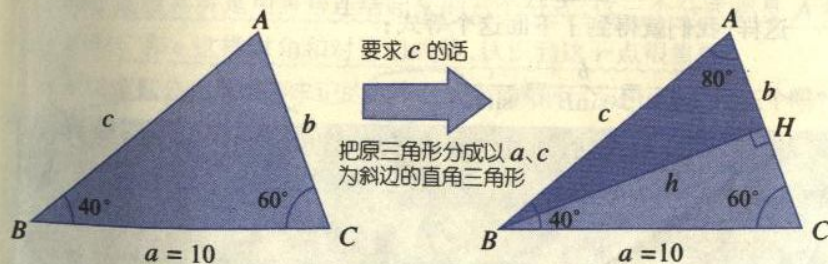


图 4-5-2

$$\therefore \frac{h}{a} = \sin C, \quad \therefore h = a \sin C \quad (4)$$

$$\therefore \frac{h}{c} = \sin A, \quad \therefore h = c \sin A \quad (5)$$

由(4)和(5), 得



$$c \sin A = a \sin C$$

$$\therefore c = \frac{a \sin C}{\sin A} \quad (6)$$

这样,我们就列出了通过  $a, B, C$  来求  $c$  的式子了,代入数值,得

$$c = \frac{10 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} = 8.7938524 \dots$$

请你仔细看看(3)和(6)这两个式子

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

发现没有?它们都有  $\frac{a}{\sin A}$  这一部分,而且  $A$  和  $a$  是对角与对边的关系。

我们再试着把  $\frac{a}{\sin A}$  这一共有部分独立出来。

$$\therefore b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \leftarrow \text{等式左右交换}$$

$$\therefore c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \leftarrow \text{等式左右交换}$$

这样,我们就得到了下面这个等式:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

当一个角为钝角时,通过作直角三角形也能得出上面那个式子。不信?往下看吧。

已知边  $a$  和  $\angle B, \angle C$ , 并且  $\angle B$  为钝角

已知边  $a$  和  $\angle B, \angle C$ , 并且  $\angle B$  为钝角,要求边  $b$  时,作如图 4-5-3 所示的以  $a, b$  为斜边的直角三角形。

在  $\text{Rt} \triangle ACH$  中,列出求  $b$  的式子,由  $\frac{h}{b} = \sin A$ , 得  $h = b \sin A$ 。



在以  $a$  为斜边的  $\text{Rt} \triangle BCH$  中,  $\sin(180^\circ - B) = \sin B$ , 因为无论是内角  $B$  还是外角  $(180^\circ - B)$ , 它们的正弦值相等。

$$\therefore \frac{h}{a} = \sin B, h = a \sin B \quad \leftarrow \text{钝角 } B \text{ 就按原样写出来}$$

$$b \sin A = a \sin B, \therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

这里关键是钝角  $B$  和锐角  $(180^\circ - B)$  的正弦值是相等的, 所以才能得到相同的式子, 有关  $c$  也是一样的。通过上面的等式, 我们就得到了正弦定理的公式。

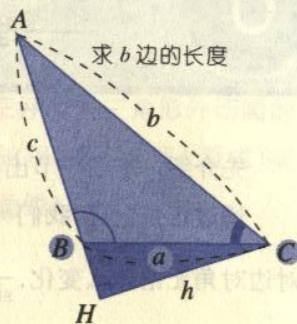


图 4-5-3

#### 正弦定理

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

其中,  $R$  表示  $\triangle ABC$  的外切圆半径。

这里突然出现了  $2R$  (即外切圆的直径), 但是不用担心, 有关这一点在接下来的章节里会学到。

正弦定理其实是用等号连结起来的三个分式, 这三个分式都是  $A$  和  $a, B$  和  $b, C$  和  $c$  这样对角和对边组成的, 认识到这一点很重要。

正弦定理公式是需要牢记的六个公式中的第四个, 还记得其他三个吗?

三角比的相互关系:

$$(1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(2) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta$$

余弦定理的公式:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

## 求三角形的外切圆半径

### ——理解正弦定理中的 $R$

先介绍一下前一节出现的外切圆半径  $R$ 。

通过正弦定理,我们可以知道只要一组对边对角固定下来,其他两组对边对角无论怎么变化,  $\frac{\text{边}}{\sin \text{角}}$  的值是不变的。

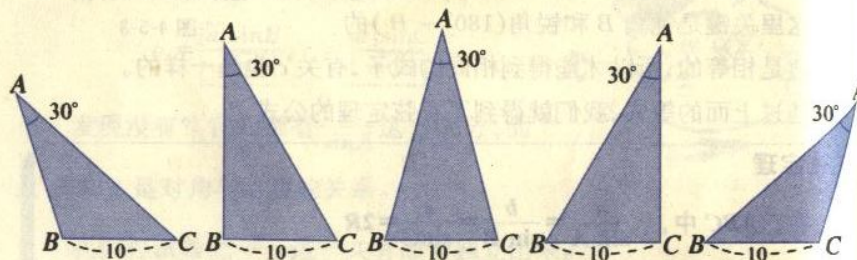


图 4-6-1

如图 4-6-1 所示,无论在哪个  $\triangle ABC$  中,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 10 \div \frac{1}{2} = 20$$

所以,无论  $B, b, C, c$  再怎么变,

$$\frac{b}{\sin B} = 20, \quad \frac{c}{\sin C} = 20 \quad (*)$$

再看图 4-6-1,你想到什么了吗?

如图 4-6-2 所示,以  $a$  为共有的边画出这些三角形,那么  $a$  就是圆的一条弦,而  $\angle A$  就是圆周角了。是不是很久都没有听到“圆周角”这个词了?

这个  $\angle A$  称为“弦  $BC$  的圆周角”,它永远都对弦  $BC$ 。

图 4-6-2 中的顶点  $A$  从 1 到 5 都被标

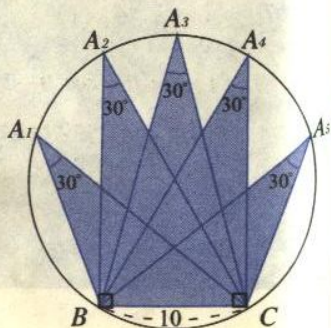


图 4-6-2



上了数字,无论在哪个三角形中,上面带  $(*)$  的等式都成立。

特别要观察一下顶点为  $A_2, A_4$  的两个三角形。

在顶点为  $A_2$  的三角形中,  $\angle B = 90^\circ$ , 边  $b$  正好经过三角形外切圆的圆心,所以  $b$  (即  $A_2C$ ) 就是外切圆的直径  $2R$  (在这里,还可以把  $b$  看成  $90^\circ$  圆周角所对的弦,或者是长方形  $A_2BCA_4$  的对角线)。

$$\therefore \sin B = \sin 90^\circ = 1,$$

由式子  $(*)$ , 得

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\sin 90^\circ} = b = 20 = A_2C = 2R = \text{外切圆的直径}$$

这样,我们就看到了由  $\frac{a}{\sin A}$  得到的 20 其实是这个三角形的外切圆的直径  $2R$ 。

在顶点为  $A_4$  的三角形中,  $c = A_4B = 2R$ 。

$$\therefore \angle C = 90^\circ, \therefore \sin C = \sin 90^\circ = 1,$$

得

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\sin 90^\circ} = c = 20 = A_4B = 2R = \text{外切圆的直径}$$

现在你明白了正弦定理公式中“ $2R$ ”这一项的意思和由来吧。

如图 4-6-2 所示,即使三角形的形状不确定,通过正弦定理公式也能求出外切圆的半径(或直径)。

例如,已知  $\angle B = 45^\circ, b = 15$ , 虽然我们不能确定三角形的形状,但是能求出它的外切圆的半径。

$$\therefore 2R = \frac{b}{\sin B}, \quad \therefore R = \frac{b}{2\sin B},$$

$$\therefore R = \frac{15}{2\sin 45^\circ} = \frac{15}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 15 \div \sqrt{2} = 15 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

正弦定理公式由三个分式构成,但是只要知道其中一组对角和对边就能把数值确定下来,以此为“钥匙”就能求出其他的边和角。

在实际用正弦定理时,我们把它两个两个地用等号连结起来。

**例 1** 如图 4-7-1 所示,在  $\triangle ABC$  中, $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 75^\circ$ 、 $c = 12$ ,求边  $a$ 。

首先,把  $\angle C$  求出来:

$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - \angle A - \angle B \\ &= 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ\end{aligned}$$

再用  $c$  和  $\angle C$ 、 $a$  和  $\angle A$  这两组对边对角列出等式:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

等式两边同时乘  $\sin A$ , 得

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{12 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}} = 6\sqrt{6}$$

如果要求边  $b$  的话,就要通过查表求  $\sin 75^\circ$ , 然后还要用到计算器。

正弦定理不像余弦定理那样可以直接求边,所以用起来也许有点困难。但是不管怎样,要先写出对边、对角的分式形式,选某一组已知的对边对角和另一组包含着要求的边或角的分式形式,再把它们用等号连结起来。

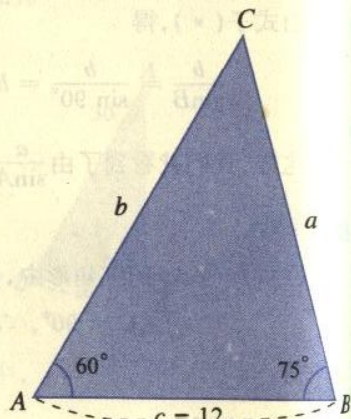


图 4-7-1



再告诉大家一个小窍门:在用正弦定理列等式的时候,把已知的对边、对角的分式写在等号右边,把要求的边或角写在等式左边,这样计算起来比较方便。

另外,当知道两角及它们的夹边后,第三个角也就知道了,那么正弦定理的公式中分式的分母就全部知道了。

### 求面积

接下来,我们再看看已知两角一边时,怎么求面积(图 4-7-2)

还记得前面的用两边和夹角表示的三角形面积公式吗?

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

现在只要把一边求出来,就能立刻求出面积了。在这里,我们要习惯用字母而不是具体数字来代替各边和角。

求  $b$  或  $c$  都行,我们就选  $b$  吧,那么

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

根据正弦定理,得

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \quad \therefore b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$= \frac{1}{2}a \frac{a \sin B}{\sin A} \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

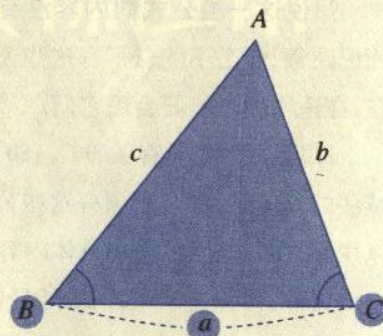


图 4-7-2

通过  $A = 180^\circ - (B + C)$  变换角

上面那个求面积的式子中,因为已知的是  $\angle B$ 、 $\angle C$ ,所以要把未知的  $\angle A$  换成用  $\angle B$ 、 $\angle C$  来表示。

因为,  $\sin A = \sin [180^\circ - (B + C)] = \sin(B + C)$ , (\*)

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B + C)}$$

带(\*)的式子其实是用下面这个公式(图 4-7-3)。

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

只是这里的  $\theta$  是  $(B + C)$ 。

虽说这一类公式的内容没有必要死记硬背,但是不能忘了有这些公式存在,在适当的时候要会用它们。

以后只要碰到有关  $90^\circ$ 、 $180^\circ$  的加减法的角度时,都要想到有这些公式可以用,然后再去回忆它的具体内容。

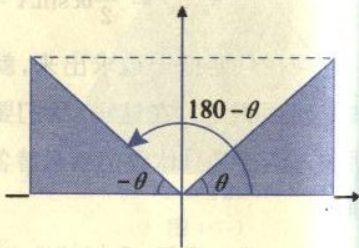


图 4-7-3

另外,再补充一句,“ $\triangle ABC$  的面积”可以直接写成“ $S_{\triangle ABC}$ ”,这种表示法在前面几个章节已经出现过了。

## 第五章

## 三角比的实际应用



前四章里,我们主要学习了正弦定理、余弦定理等有关三角比的最基本的一些公式,在这一章里,我们就来看看如何运用这些公式。

**例 1** 如图 5-1-1 所示,已知底边  $BC$  为 1,顶角  $A$  为  $30^\circ$ ,求等腰三角形的面积。

在看正确解法之前,你可以先自己试着解,错了也没关系,这样也许还能刺激一下大脑呢。

$30^\circ$  是我们所熟悉的角度,所以如果从顶点  $A$  作垂线,会把三角形分成的内角为  $15^\circ$ 、 $75^\circ$  的直角三角形,而我们也必须要用并不常见的  $15^\circ$  或  $75^\circ$  的三角比,这样  $30^\circ$  就浪费了。

所以为了要尽可能保留顶角  $A$ ,就应该选用两边和夹角表示的面积公式:

$$S = \frac{1}{2} x^2 \sin 30^\circ \quad (*)$$

在上面的式子中,只要把  $x$  求出来,面积  $S$  也就知道了。但是,请注意,也许并没有必要求出  $x$  的值,只要能直接求出  $x^2$  不更方便吗?那么,该怎么求  $x^2$  呢?

“两边和夹角”让你联想到了什么?对了,这里可以用到余弦定理:

$$1^2 = x^2 + x^2 - 2xx \cos 30^\circ$$

两边                      夹角

刚开始的时候,大概想不到这种用法吧。

把  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  代入上面的式子,再把等式两边互换,得

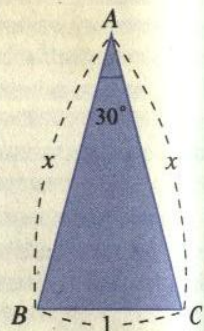


图 5-1-1



$$2x^2 - 2x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$

$$x^2(2 - \sqrt{3}) = 1,$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

再把  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  和  $x^2$  的值代入式子 (\*) 中,得

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4(2 - \sqrt{3})}$$

接下来就是把分母有理化。

通常要去掉根号就是把它平方,但本题中的分母比较特殊,如果把  $(2 - \sqrt{3})$  平方,展开后分母还是带根号。在这种情况下,我们要用到这个等式。

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

你自己可以把等式左边展开,看看是不是能得到右边的式子。

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{4(2 - \sqrt{3})} = \frac{1(2 + \sqrt{3})}{4(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \leftarrow \text{分子、分母同乘以}(2 + \sqrt{3}) \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4(4 - 3)} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

其实,在求出  $x^2$  的值时,就可以把分母有理化了。

$$x^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

如果告诉你一个三角形的边  $a = 2$ , 边  $c = 2\sqrt{2}$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , 你能大致画出这个三角形吗? 先画一条长为 2 的线段, 然后取  $c$  的长度约为 3..., 是不是很难画?

其实, 这里有一个小窍门: 先把顶点  $A$  画出来。

与  $A$  邻接的一边是  $c$ , 所以从点  $A$  引出一条长为  $2\sqrt{2}$  的边 (这里就能看出纯数学和实际绘图的不同, 实际绘图中不会说画一条长为  $2\sqrt{2}$  的边, 总是取一个近似值来画, 但在纯数学里, 虽然不是很精确, 但可以把它当成长度为  $2\sqrt{2}$  的边), 然后从边  $c$  的另一顶点 (即不是  $A$  的那个顶点) 引出一条长为 2 的边  $a$  就行了。

画出来后, 也许你发现自己的三角形和其他同学的不太一样。其实满足上面条件的三角形有两个。在这里, 虽然告诉我们的是两边和一角, 但是请注意: 不是“两边夹角”, 所以仅凭这个条件还不能确定三角形的形状。

说了这么多, 你有没有自己动手画一画呢? 不亲自画画, 只在脑海里空想的话, 就不能很好地理解题目, 觉得都是些字母符号的罗列, 从而讨厌起数学来。所以, 无论如何都请你拿起笔画一画, 被动学习是学不好数学的。

公元前 300 年左右, 大数学家欧几里德曾说过“几何学无捷径”这句话。借用在我们这里, 就是“数学无捷径”。

上面要画的三角形, 形状虽然不确定, 但是我们能以前学过的知识把两种可能的三角形的各边、角确定下来, 这就是本节我们要学的主要内容。通常, 我们把三角形的边、角称为“三角形的要素”, 而求未知的三角形的要素就称为“解三角形”。在解三角形时, 一般有以下两种思路:



① 已知边  $a$  和它的对角  $A$  时, 通过正弦定理可以求出已知边  $c$  的对角  $C$ 。

② 已知两边和一角, 通过含有  $\angle A$  的余弦定理求边  $b$  (如前一节中的例题)。

### 正弦定理的运用

由  $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ , 得  $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$ ,  $\leftarrow$  原数相等, 倒数也相等

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

再把本节一开始给出的各数值代入等式, 得

$$\sin C = \frac{2\sqrt{2} \sin 30^\circ}{2} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leftarrow y$$

如果把上面结果的分子有理化, 得出的式子还记得吗?

$$\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow y \quad \leftarrow \text{还记得 } y \text{ 和 } r \text{ 吗?}$$

把  $y$  和  $r$  用图表示出来就是图 5-2-1。

请不要忘了, 正弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的角不仅是  $45^\circ$ ,  $135^\circ$  的正弦值也是  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 互为补角两个角的正弦值相等。另外, 还记得它们的余弦值吗? 对了, 互为相反数。

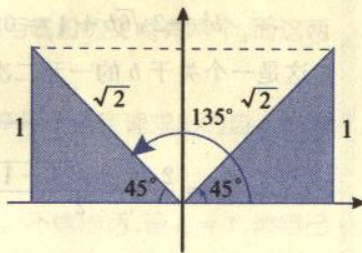


图 5-2-1

回到正题上。当  $C = 45^\circ$  时,

$$B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

$\triangle ABC$  能成立。

当  $C = 135^\circ$  时,

C



在第一部分的卷首就写道:几何学发祥于土地测量。那么,在实际测量中,三角比到底是怎么用的呢?我们通过例题来看看。

到目前为止,我们已经做了很多已知某些条件求边或面积的题目,但是如果不给已知条件,并且要求的面积不是三角形的面积时,该怎么解呢?

**例 1** 如图 5-3-1 所示,求一块形状为四边形  $ABCD$  的土地的面积。

该测量哪些边、哪些角?把四边形分成什么图形来求?这些都是要考虑的。其实,这题有很多解法。

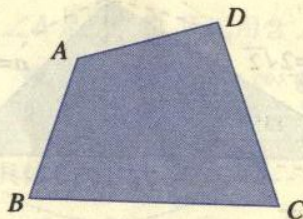


图 5-3-1

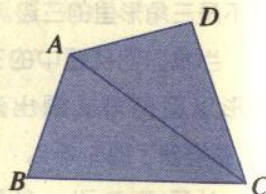


图 5-3-2

**解 1** 测出四边和对角线  $AC$  的长度。如图 5-3-2 所示,用海伦公式分别求出  $\triangle ABC$  和  $\triangle ACD$  的面积,再把它们相加就求出了四边形  $ABCD$  的面积。

**解 2** 测出四边和  $\angle B$ 。如图 5-3-3 所示,通过两边夹角求出  $\triangle ABC$  面积,再用余弦定理求  $AC$ ,这样用海伦公式就能求出  $\triangle ACD$  的面积,从而也就能求出四边形的面积了。

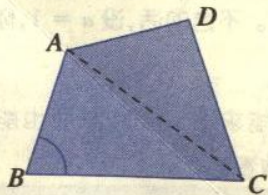


图 5-3-3

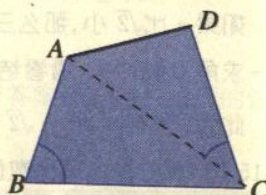


图 5-3-4



**解 3** 测出边  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  和  $\angle B$ 、 $\angle ACD$ 。如图 5-3-4 所示,通过两边夹角求出  $\triangle ABC$  面积,再用余弦定理求  $AC$ ,用两边夹角求  $\triangle ACD$  的面积,从而也就能求出四边形的面积了。

**解 4** 测出边  $BC$ 、 $CD$  和对角线  $AC$  及  $\angle ACB$ 、 $\angle ACD$ 。如图 5-3-5 所示,用两边夹角求两个三角形的面积,从而也就能求出四边形的面积了。

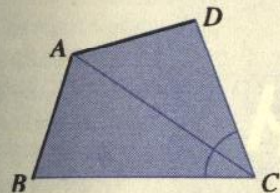


图 5-3-5

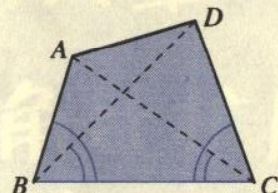


图 5-3-6

**解 5** 测出边  $BC$  及  $\angle ABC$ 、 $\angle DBC$ 、 $\angle ACB$ 、 $\angle DCB$ 。如图 5-3-6 所示,  $\triangle ABC$  中用正弦定理求边  $AC$ ,再通过边  $AC$ 、 $BC$  和  $\angle ACB$  求出  $\triangle ABC$  的面积。 $\triangle BCD$  中用正弦定理求  $CD$ ,而  $\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB$ ,所以  $\triangle ACD$  的面积可以通过边  $AC$ 、 $CD$  和  $\angle ACD$  求出,从而也就能求出四边形的面积了。

**解 6** 测出垂线  $AE$ 、 $DF$  和边  $BE$ 、 $EF$ 、 $FC$  的长度。如图 5-3-7 所示,分别求出两个直角三角形和一个梯形的面积,从而也就能求出四边形的面积了。

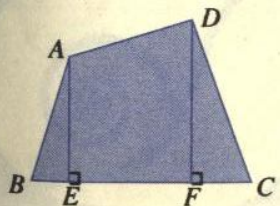
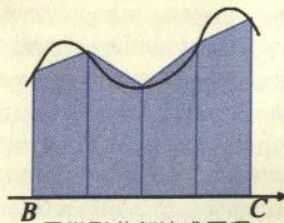


图 5-3-7



用梯形分割法求面积

图 5-3-8



最后一种解法其实并没有用到三角比。如果要测量类似图 5-3-7 所示的以边 BC(或某条道路)为基准的多边形土地的面积,我们通常都把它划分成几个直角三角形和梯形来求面积的。

这个方法也经常用于被曲线包围部分的面积(图 5-3-8)。这其实和高等数学里的积分有关,通过梯形求区间面积。

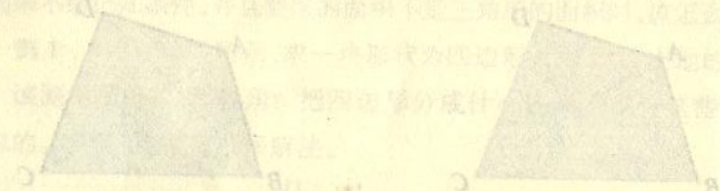


图 5-3-7 所示的多边形土地,如果以边 BC 为基准,我们可以把它划分成几个直角三角形和梯形来求面积。这个方法也经常用于被曲线包围部分的面积(图 5-3-8)。这其实和高等数学里的积分有关,通过梯形求区间面积。



## 第六章

# 从三角比扩展到三角函数



在第一部分里出现过斜面或梯子的倾斜角  $\theta$ , 如果把这个  $\theta$  看作以原点为中心像钟表的指针一样旋转射线的旋转角的话, 我们的话题就从三角比扩展到三角函数上了。

如图 6-1-1 所示, 在射线上取一点  $P(x, y)$ ,  $OP$  的长为  $r(r > 0)$ , 这样, 我们就可以定义有关  $\theta$  的各三角函数。

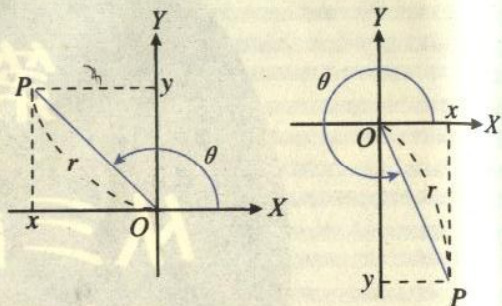


图 6-1-1

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}, \tan\theta = \frac{y}{x}$$

当  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  时, 和第一部分所规定的三角比一致。当  $OP$  从  $X$  轴正半轴开始按逆时针方向旋转时  $\theta$  为正, 反之, 若按顺时针方向旋转时  $\theta$  则为负。

这里, 需要注意的是: 虽然从图上看,  $60^\circ$  和  $300^\circ$  是一样的 [图 6-1-2(1)], 但是在三角函数中表示旋转了多少度时, 它们却是不同的角 [图 6-1-2(2)]。

$300^\circ$  和  $-60^\circ$  在图中的终边位置相同, 但是由于它们旋转方向不同, 所以它们是两个

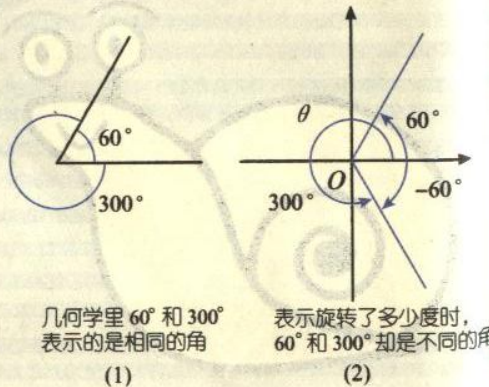


图 6-1-2



不同的角。在表示旋转角时一定要标明旋转的方向(用箭头表示)。

接下来, 我们就看看随着  $\theta$  的变化, 三角函数的值是如何变化的。

首先, 当  $\theta = 360^\circ$  和  $\theta = 0^\circ$  时终边位置相同, 所以

$$\sin 360^\circ = \sin 0^\circ, \cos 360^\circ = \cos 0^\circ, \tan 360^\circ = \tan 0^\circ$$

其他角的函数值如图 6-1-3 所示。在考虑某个角的三角函数值时, 应该把该角旋转后的终边位置用箭头标出来。

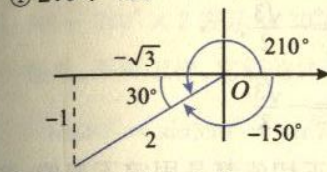
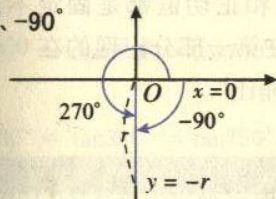
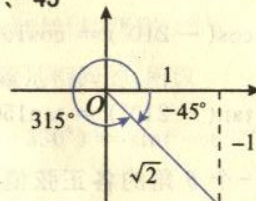
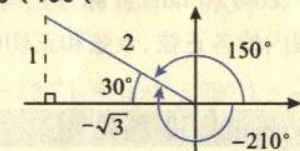
①  $210^\circ, -150^\circ$ ③  $270^\circ, -90^\circ$ ②  $315^\circ, -45^\circ$ ④  $-210^\circ, 150^\circ$ 

图 6-1-3

$$\textcircled{1} \sin 210^\circ = \sin(-150^\circ) = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 210^\circ = \cos(-150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 210^\circ = \tan(-150^\circ) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\textcircled{2} \sin 315^\circ = \sin(-45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 315^\circ = \cos(-45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 315^\circ = \tan(-45^\circ) = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\textcircled{3} \sin 270^\circ = \sin(-90^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-r}{r} = -1,$$





$$\cos 270^\circ = \cos(-90^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$\tan 270^\circ$  和  $\tan(-90^\circ)$  不存在。

关于  $\tan 270^\circ$  和  $\tan(-90^\circ)$  为什么不存在这一点,是和  $\tan 90^\circ$  不存在的原因一样的,即分母为零的分数没有意义。

$$\textcircled{4} \sin(-210^\circ) = \sin 150^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos(-210^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

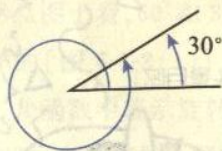
$$\tan(-210^\circ) = \tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

每一个  $\theta$  角的各正弦值、余弦值和正切值都是固定不变的,这些  $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$  和  $\tan\theta$  就称为三角函数。在第一部分出现的在  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  范围内的各正弦、余弦和正切就是“三角比”。

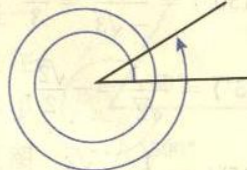
### 超过 $360^\circ$ 的角

当射线  $OP$  旋转一周后继续转动,就会出现超过  $360^\circ$  的角。其实,同一射线在旋转几圈后还可以回到原来的位置。所以,终边相同的角有无数个。

$$\begin{aligned} -690^\circ &= -360^\circ \times 2 + 30^\circ \\ &= 30^\circ - 360^\circ \times 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 390^\circ &= 360^\circ + 30^\circ \\ &= 30^\circ + 360^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 750^\circ &= 360^\circ \times 2 + 30^\circ \\ &= 30^\circ + 360^\circ \times 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -330^\circ &= -360^\circ + 30^\circ \\ &= 30^\circ - 360^\circ \end{aligned}$$

图 6-1-4

如图 6-1-4 所示,虽然是不同角度,但它们的终边  $OP$  位置却相同。



在这里,  $360^\circ + 30^\circ$  和  $30^\circ + 360^\circ$  虽然结果相同,但是它们表达的意思却不一样。

$360^\circ + 30^\circ$  表示转了一周(即  $360^\circ$ )后再转  $30^\circ$ ;

$30^\circ + 360^\circ$  表示从  $30^\circ$  的位置开始转一周(即  $360^\circ$ )。

同样,

$-360^\circ \times 2 + 30^\circ$  表示顺时针转两周后再逆时针转  $30^\circ$ ;

$30^\circ - 360^\circ \times 2$  表示从  $30^\circ$  的位置开始顺时针转两周。

但是,不管怎样,它们的终边  $OP$  的位置是相同的,所以

$$\sin 30^\circ = \sin 390^\circ = \sin 750^\circ = \sin(-330^\circ) = \sin(-690^\circ) = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \cos 390^\circ = \cos 750^\circ = \cos(-330^\circ) = \cos(-690^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ = \tan 390^\circ = \tan 750^\circ = \tan(-330^\circ) = \tan(-690^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

我们把与  $30^\circ$  有着相同终边的角表示为

$$30^\circ + 360^\circ \times n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

当  $n = 0$  时,就是  $30^\circ$ ;  $n = 1$  时,就是  $390^\circ$ 。

当  $n = -1$  时,就是  $-330^\circ$ ;  $n = -2$  时,就是  $-690^\circ$ 。

我们还可以得到下面三组等式:

$$\sin(\theta + 360^\circ \times n) = \sin \theta,$$

$$\cos(\theta + 360^\circ \times n) = \cos \theta,$$

$$\tan(\theta + 360^\circ \times n) = \tan \theta$$

正如前面已经反复强调过一样,仅仅把这些公式背下来是毫无意义的,要理解它所表达的意思。 $360^\circ \times n$  仅仅代表了某个角旋转了  $n$  转,对终边  $OP$  的位置没有任何影响,理解了这一点,就完全没有必要把上面三组公式背下来。

我们在前面已经学过的三角比的相互关系在三角函数中也能成立。那么,它们是怎么成立的呢?请看下面。

### 三角函数的相互关系

$$(1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$(2) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta$$

还记得  $\sin^2 \theta$  是什么意思吗?对了,表示  $(\sin \theta)^2$ 。

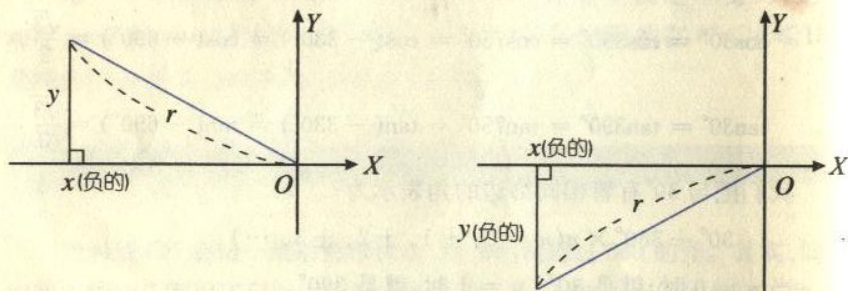


图 6-2-1

如图 6-2-1 所示,无论终边位置如何(即无论  $x$  或  $y$  是正是负),勾股定理总是成立的,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

等式两边同除以  $r^2$  就能证明出公式(1)。

把  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  的分子分母同除以  $r$  就能证明出公式(2)。

此外,把公式(1)的等式两边同除以  $\cos^2 \theta$  后通过公式(2)就能得到下面的公式,

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

推导过程与三角比相同。



### 表示终边位置的四个象限

$x$  轴、 $y$  轴把一个平面分成了四部分,那么我们就可以把终边的位置表述为终边在四个区域中的哪个区域。先向大家介绍一下四个区域。

右上角的那个区域为第一象限,按逆时针方向以此类推,其他区域就是第二象限、第三象限和第四象限(图 6-2-2)。但是这些区域都不包含  $x$  轴和  $y$  轴本身。

还要请大家注意:可以通过  $(x, y)$  正负号的不同组合来区别这些区域,而正是这些正负号决定了三角函数值的符号。例如,我们可以把  $300^\circ$  称为第四象限的角。

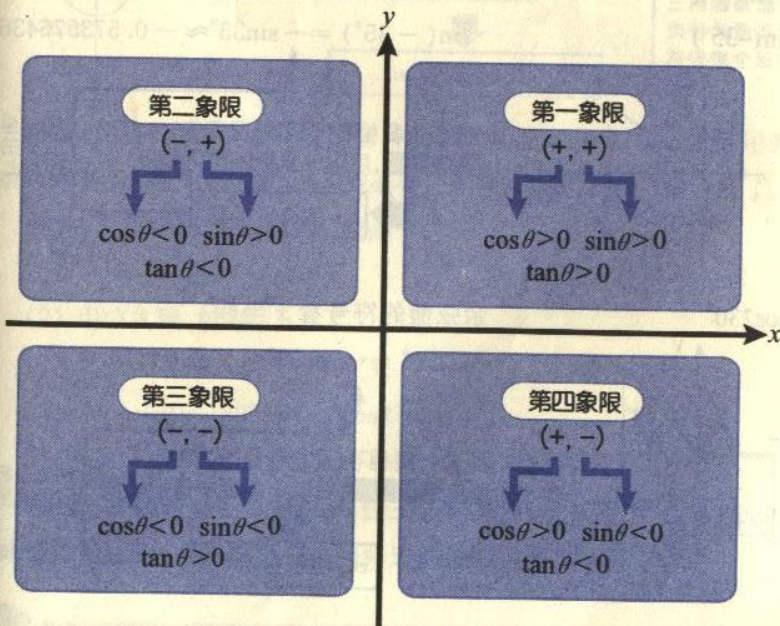


图 6-2-2

在第一部分里,我们已经学过了如何用  $90^\circ$  以下的锐角三角比值来表示钝角三角比值。而在本节里,我们要学习如何通过三角函数表来求更大角度的三角函数值。其实原理和钝角是一样的,只要利用终边位置的对称性就可以了。

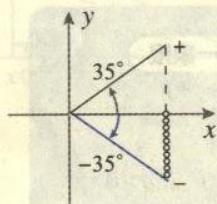
例1 查三角函数表,求下列角度的三角函数值。

(1)  $\sin(-35^\circ)$ ; (2)  $\cos 230^\circ$ ;

(3)  $\tan(-220^\circ)$ ; (4)  $\sin(-220^\circ)$

解

(1)  $\sin(-35^\circ)$

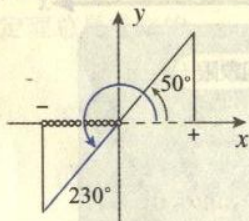


终边长度相等(而且总是正的)  
上下对称,所以  $y$  坐标的符号相反

$\sin$  的符号相反

把  $y$  坐标  
少了的负号补上

(2)  $\cos 230^\circ$



余弦值的符号看  $x$  坐标

$$\cos 230^\circ = -\cos 50^\circ \approx -0.6427876097$$

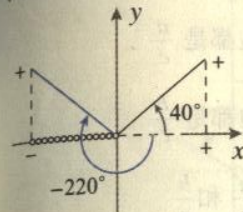
终边长度相等(而且总是正的)  
关于原点对称,所以  $x$  坐标的符号相反

$\cos$  的符号相反

把  $x$  坐标  
少了的负号补上



(3)  $\tan(-220^\circ)$



正切值的符号要看  $x$ 、 $y$  两坐标

$$\tan(-220^\circ) = -\tan 40^\circ \approx -0.8390996312$$

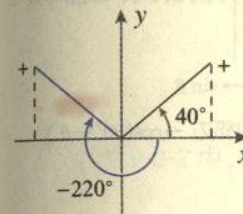
左右长度相等

左右对称,  $x$  坐标的符号相反

把  $x$  坐标少了的负号补上

$\tan$  的符号相反

(4)  $\sin(-220^\circ)$



正弦值的符号看  $y$  坐标

$$\sin(-220^\circ) = \sin 40^\circ \approx 0.6427876097$$

终边长度相等(而且总是正的)

左右  $y$  坐标的符号相同

这次就不要补负号了

三角函数值的正负号与角本身的符号完全没有关系

$\sin$  的符号相同

会做这道题了,那有关角度的各种公式就都没问题了,可以直接用教科书或参考书上写出来的公式,而没有必要去推导,因为你已经完全理解了。

例如,上题中(1)用公式做,就是

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

(2) 用公式做,就是

$$\cos\theta = -\cos(\theta - 180^\circ),$$

$$\cos(\theta - 180^\circ) = -\cos\theta$$

但是,我们没有用到这些公式不也求出了正确答案了吗?

例题1的目的可不是让你去查三角函数表,而是要学会转换角度。在做这类题目时,要在脑海中画出终边的位置以帮助思考。

### $\sin$ 和 $\cos$ 的互换

在第二章第二节中,我们学了和为  $90^\circ$  的两个角的三角比如何互相转



换,那么在三角函数中这种转换公式也能成立。

$$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta) \quad \text{图 6-3-1 中两边都是 } \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta) \quad \text{图 6-3-1 中两边都是 } \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan(90^\circ - \theta)} \quad \text{图 6-3-1 中是 } \frac{a}{b} \text{ 和 } \frac{b}{a}$$

在前几章里,我们仅把 $\theta$ 限定为锐角,所以能在同一个直角三角形中把 $\theta$ 和 $90^\circ - \theta$ 看作两个内角,从而证明出上面那组转换公式,如图6-3-1所示。

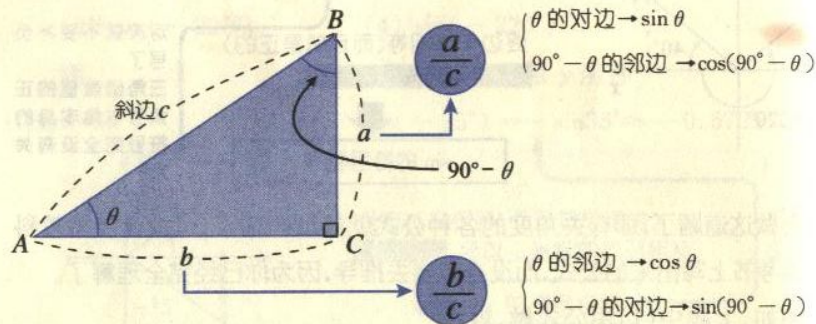


图 6-3-1

这里,想告诉你的是:不仅是锐角,对一切角来说,这种转换公式都能适用。

所以,要仔细观察 $\theta$ 的终边位置和 $90^\circ - \theta$ 的终边位置,并注意 $\theta$ 并不一定是锐角。

$90^\circ - \theta$ 的终边位置为从 $90^\circ$ (即y轴)开始顺时针转 $\theta$ 后到达的位置。

要仔仔细细地观察一下各三角函数的分子、分母在图中的哪个位置(因为这关系到三角函数值的符号)。

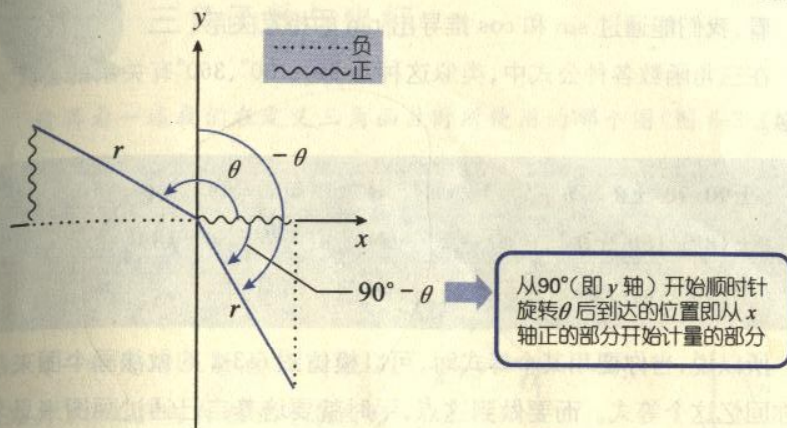


图 6-3-2

在图 6-3-2 中,

$$\sin\theta = \frac{\text{对边}}{r} = \frac{\text{邻边}}{r} = \cos(90^\circ - \theta),$$

$$\cos\theta = \frac{\text{邻边}}{r} = \frac{\text{对边}}{r} = \sin(90^\circ - \theta)$$

这样一写,你明白了吗? 总之,符号也是一致的。

那么,正切又如何呢?

$$\tan\theta = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}, \tan(90^\circ - \theta) = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}}$$

它们互为倒数的关系一目了然了吧。也就是,

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan(90^\circ - \theta)};$$

或者,

以 1 为分子就能得到原数的倒数

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{1}{\tan(90^\circ - \theta)}$$



看,我们能够通过  $\sin$  和  $\cos$  推导出  $\tan$  的相互关系。

在三角函数各种公式中,类似这种与  $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $360^\circ$  有关系的公式有很多。

$\theta \pm 90^\circ$ 、 $90^\circ \pm \theta$  与  $\theta$  的关系  $\rightarrow$  这里可看到  $90^\circ - \theta$

$\theta \pm 180^\circ$ 、 $180^\circ \pm \theta$  与  $\theta$  的关系  $\rightarrow$  前页可看到  $\theta - 180^\circ$

$\theta + 360^\circ \times n$  与  $\theta$  的关系  $\rightarrow$  前页可看到

所以说,当你要用某个等式时,可以模仿图 6-3-2 的做法画个图来帮助回忆这个等式。而要做到这点,平时就要培养自己通过画图来思考的思维习惯。

## 专栏 4

### 三角函数与坐标

请再看一遍我们在定义三角函数时所使用的图(图 6-3-3)。

通过图,可以说出点  $P$  在平面的位置,而且有两种标记方法。

一种是我们已经非常熟悉的

点坐标,

$$P(x, y)$$

另一种是用从原点  $O$  到点  $P$  的距离  $r$  和  $OP$  与  $X$  轴正半轴所形成的夹角  $\theta$  来表示,这种表示方法就是“极坐标”,写作

$$P(r, \theta)$$

正如我们看到的一样,极坐标是不需要用到  $Y$  轴和  $X$  轴负半轴。另外,射线  $OX$  还是角  $\theta$  的起始边,所以又被称为“始边”。

当用极坐标表示  $P(r, \theta)$  时(图 6-3-4),

$$\text{由 } \frac{x}{r} = \cos\theta, \text{ 得}$$

$$x = r\cos\theta,$$

$$\text{由 } \frac{y}{r} = \sin\theta, \text{ 得}$$

$$y = r\sin\theta$$

所以  $P$  的点坐标就是  $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 。

反过来,当点坐标为  $P(x, y)$  时,极坐标  $P(r, \theta)$  中的  $r$  和  $\theta$  就满足下列等式:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{x}{r}, \sin\theta = \frac{y}{r}$$

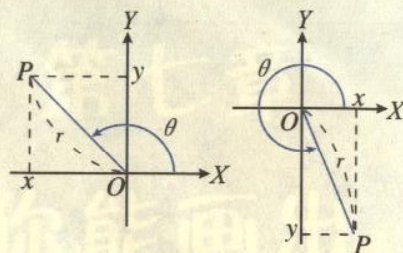


图 6-3-3

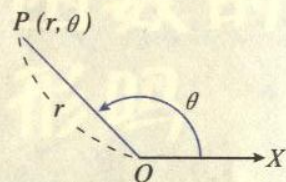


图 6-3-4



### 第七章 三角函数的图像与性质

我们知道，三角函数是描述周期运动的重要工具。在直角坐标系中，三角函数的图像具有周期性、对称性等性质。本章我们将系统地学习三角函数的图像与性质，并探讨其在实际问题中的应用。



图 7-1-1 展示了正弦函数  $y = \sin x$  和余弦函数  $y = \cos x$  的图像。正弦函数的图像是一个周期为  $2\pi$  的波，而余弦函数的图像也是一个周期为  $2\pi$  的波，但相位不同。

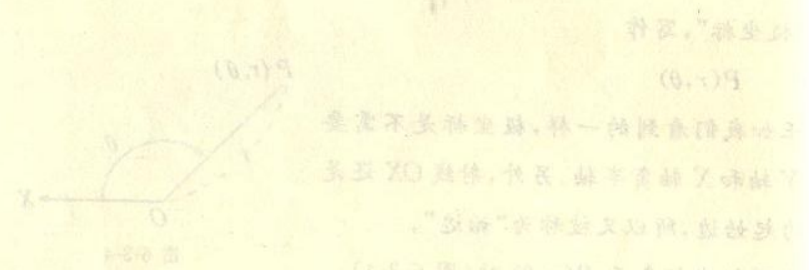


图 7-1-2 展示了正切函数  $y = \tan x$  的图像。正切函数的图像由一系列分支组成，每个分支的周期为  $\pi$ ，并且在  $x = \pi/2 + k\pi$  处有垂直渐近线。

在三角函数的学习中，我们还需要掌握一些基本的恒等式，如和角公式、差角公式等。这些公式在化简三角表达式和求解三角方程时非常有用。

本章的学习目标是：理解三角函数的图像与性质，掌握三角恒等式的推导与应用，并能解决相关的实际问题。

## 第七章

# 你能画出三角函数的图形吗



所谓“函数”，是指：

变量和自变量的关系。

其中，变量是随着自变量的变化而变化的，自变量决定变量。

例如， $y = 2x^2 + 1$ 。

当  $x = 1$  时， $y = 3$ ；当  $x = 2$  时， $y = 9$ ；当  $x = 3$  时， $y = 19$ 。

像这样，当  $x$  的值确定后， $y$  的值也相应地被确定了，所以  $y$  就是  $x$  的函数。

那么，我们写成  $y = \sin\theta$  的形式。

当  $\theta = 0^\circ$  时， $y = 0$ ；当  $\theta = 30^\circ$  时， $y = \frac{1}{2}$ ；当  $\theta = -45^\circ$  时， $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

当  $\theta$  的值确定后， $y$  的值也相应地被确定了，所以我们也说  $y$  是  $\theta$  的函数。只是因为带有  $\sin\theta$ ，所以这个函数和  $y = 2x^2 + 1$  这样的函数大不相同。

那么， $y = \sin\theta$  的值是怎么变化的呢？

翻翻三角函数表，我们至多能罗列出每个  $\theta$  所对应的  $y$  的值，作为一个函数，它的值是怎样变化的，我们就不得而知了。

或者我们能看出来，在  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  的范围内，随着  $\theta$  增大， $\sin\theta$  的值也跟着增大，但是到底怎么增大、增大的幅度又是多少，仅凭一张表是看不出来的。

人类总是不太擅长看一大堆罗列起来的数字（即数字表示法），因为，虽然数字表示法可以看到一个非常精密准确的数值，却让人无法看到这些数字整体的变化规律。

如果用图象来表示这些数值的话，虽然很难看到一个个具体的数字，



但是那些数字整体的变化规律却能很清楚地展示在我们眼前。

## $y = \sin\theta$ 的图象

现在，我们就来画  $y = \sin\theta$  这个函数的图象。怎么画出来呢？虽然可以按三角函数表里的各个数值来描点画图，但我们不用这个方法，用下面介绍的方法画。

从正弦的定义可知， $\sin\theta = \frac{y}{r}$ 。

如果我们令  $r = 1$ ，则无论  $\theta$  的终边在什么位置上，

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y,$$

也就是说， $\theta$  终边上的点的纵坐标  $y$  就是  $\sin\theta$  的数值。

如图 7-1-1 所示，在平面坐标内，以原点为圆心、半径为 1 的圆称为单位圆。

如果在方格练习簿中画一个半径为 10cm 的圆时，把这个半径看作 1，那么相应地，1cm 就是 0.1，1mm 就是 0.01 了。

我们没有必要把一个完整的圆画出来，只要画出相当于  $0^\circ \sim 90^\circ$  的四分

之一圆，再把这个图依次旋转  $90^\circ$ ，就可以得出  $90^\circ \sim 180^\circ$ 、 $180^\circ \sim 270^\circ$ 、 $270^\circ \sim 360^\circ$  各自的图了。

图 7-1-2 是通过圆规和量角器画出来的，图中  $\sin 60^\circ \approx 0.866$  或 0.867，而实际上，

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.7320508\cdots}{2} = 0.8660254\cdots$$

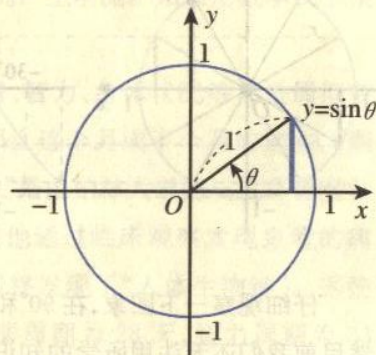


图 7-1-1



所以,我们画出来的图还是比较精确的。

在画函数图象的时候,只要看各角度对应的  $y$  坐标就可以了。

如图 7-1-3 所示,把  $y$  坐标横向移到右图中,再在其对应的  $\theta$  位置上标出度数就可以了。可以看出,  $\sin\theta$  的图象是一个非常光滑的曲线图。

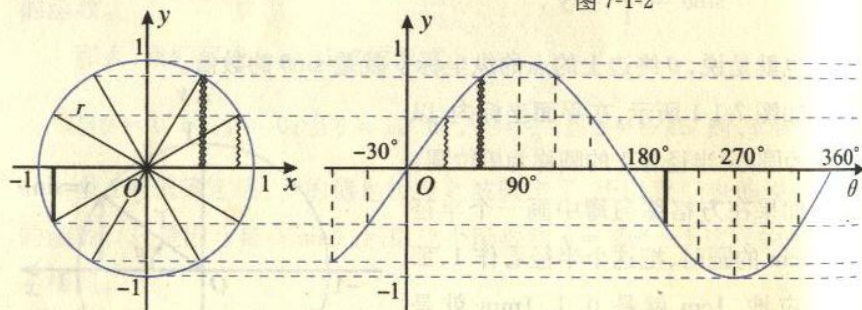


图 7-1-3

仔细观察一下图象,在  $90^\circ$  和  $270^\circ$  两个地方,曲线几乎成水平形状,虽然目前我们还无法用所学的知识解释这个现象,但如果用“微分法”就能说明清楚。感兴趣的人可以参考一些介绍微分的书。

上面那个曲线图就是正弦曲线,请你牢牢记住它的形状。

### 周期性是三角函数的最大特征

观察一下正弦函数图象,你会发现这个图象不断地重复出现相同的波浪曲线,而重复的最小单位是  $360^\circ$ 。我们把这称为周期,图 7-1-3 中函



数  $y = \sin\theta$  的周期就是  $360^\circ$ 。

有周期的函数就称为周期函数,而周期性是三角函数的最大特点。因而,在表示一些周期性变化的事物时,三角函数是不可缺少的。例如,地球绕太阳一周大约需要 365 天 6 小时左右,而表示这类行星的运动轨迹时就必须要用到三角函数。

此外,例如对钟摆、弹簧、琴弦的摆动及引擎活塞的往复运动等进行理论描述时,也都要借助三角函数来表示。

通过空气密度的变化可以传播声音,而用三角函数就能描绘出空气密度不断反复变化(稀疏或稠密)的情况。除了声音,描述波、光及电磁波等也要用到三角函数。

一般家庭里使用的都是交流电,它是通过发电机提供的,而发电机发电的原理是通过绕着导线的线圈旋转从而产生电流。如果用数学式子来表示产生的电流,还是需要借助三角函数。

你一定听说过“生物钟”吧,人的感情、智力、身体状况等都是周期性变化的。如果以人出生那天为起点算起,那么这个月或下个月的这些周期变化都能用正弦曲线表示出来。“生物钟”是由柏林大学的一位耳鼻喉科讲师 Freez 博士在 1906 年发现的。据说他通过临床观察发现患者的病情似乎有一定的周期性,并以此为契机最终发现了“人体生物钟”。据统计分析结果显示,身体周期为 23 天,感情周期为 28 天,智力周期为 33 天。

把  $\cos\theta = \frac{x}{y}$  中的  $r$  也固定为 1, 那么  $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$ , 也就是说单位圆

的圆周上的  $x$  坐标就是  $\cos\theta$  的值。

这么一来, 就不是  $y = \cos\theta$ , 而是  $x = \cos\theta$ ? 对, 暂时可以这么认为。

这样, 我们就得到了如图 7-2-2 所示的图象。

而它就是  $\cos\theta$  的图象。

现在, 看图 7-2-2(2), 因为我们已经习惯把纵轴写成  $y$  轴, 所以也把这个图中的纵轴写成  $y$ , 那么, 函数也就可以写成

$$y = \cos\theta$$

我们仔细比较一下前面学过的图 7-1-3 和刚才画出来的图 7-2-2。

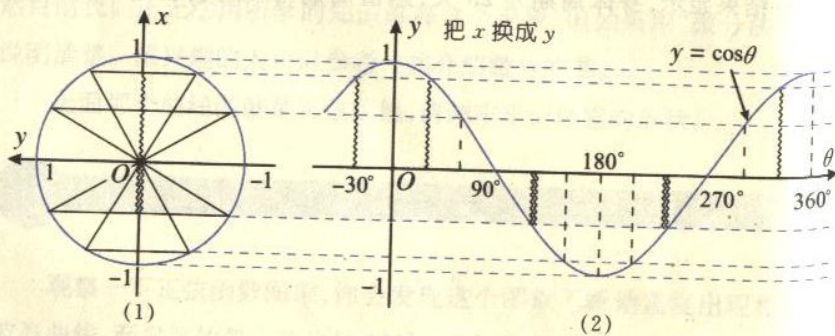


图 7-2-2

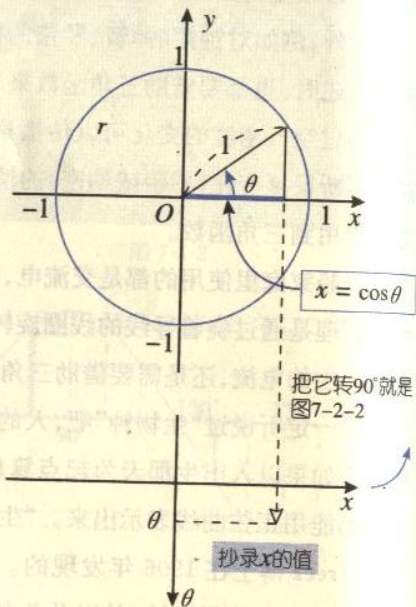


图 7-2-1



$\cos\theta$  的曲线就是  $\sin\theta$  的从 90° 开始的部分。所以,  $\cos\theta$  的图象和  $\sin\theta$  的图象完全相同, 这个曲线就称为余弦曲线, 而且周期也是 360°。这样, 我们就能说,

$\cos\theta$  的图象是  $\sin\theta$  的图象向左平移 90° 得到的。

反过来说就是,  $\sin\theta$  的图象是  $\cos\theta$  的图象向右平移 90° 得到的, 如图 7-2-3 所示。

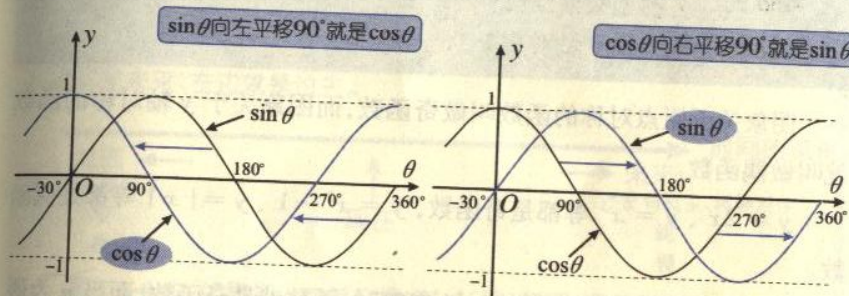


图 7-2-3

### sin $\theta$ 和 cos $\theta$ 的特征

像  $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$  那样做上下往复运动叫做振动。而从振动中心到最高点(或到最低点)的距离叫做振幅。

在描述波的时候, 周期和振幅往往都是成对出现的(图 7-2-4)。

这样, 我们就能说出  $\sin\theta$  和  $\cos\theta$  的特点了。

$\sin\theta$  和  $\cos\theta$  都是周期为 360°、振幅为 1 的周期函数。

振幅为 1, 通常就写成

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1, -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

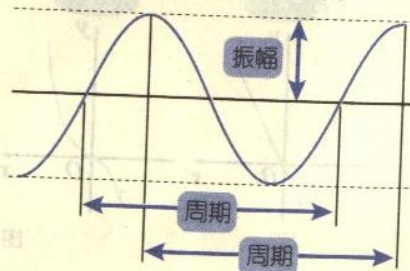


图 7-2-4



或者用绝对值表示,

$$|\sin\theta| \leq 1, |\cos\theta| \leq 1$$

另外,再告诉大家一个名词——“相位”,即波(图象)的左右的位置。而  $\sin\theta$  和  $\cos\theta$  的波(图象)的相位相差了  $90^\circ$ 。

三角函数的图象还有对称性这一特征。

$\sin\theta$  的图象关于原点对称,

$\cos\theta$  的图象关于  $y$  轴对称。

图象关于原点对称的函数叫做奇函数,而图象关于  $y$  轴对称的函数就叫做偶函数。

$y = 2x$ 、 $y = x^3$  等都是奇函数,  $y = x^2 - 1$ 、 $y = |x|$  等都是偶函数。

在  $y = x^n$  这个函数中,当  $n$  为奇数时,函数就是奇函数,而当  $n$  为偶数时,函数就是偶函数。奇函数、偶函数的“奇”、“偶”大概就是从这里来的。

偶函数关于  $y$  轴对称,也就是说它的图象被  $y$  轴分成了两部分(图 7-2-5)。

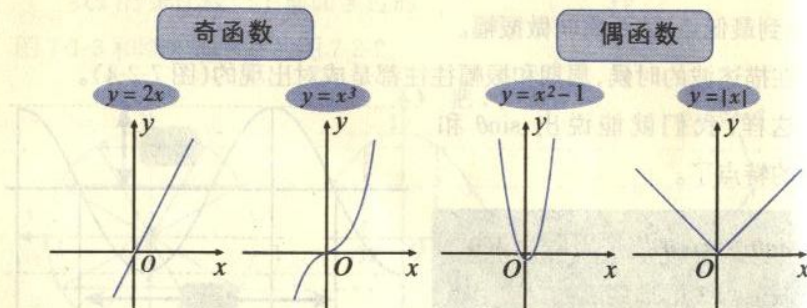


图 7-2-5



波的快慢

再稍微详细地介绍一下有关相位差。如图 7-2-6 所示。

右边  $\sin\theta$  的相位比左边  $\cos\theta$  的相位慢了  $90^\circ$ , 相反, 左边  $\cos\theta$  的相位比右边  $\sin\theta$  的相位快了  $90^\circ$ 。

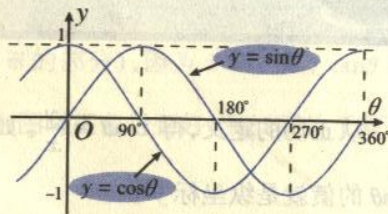


图 7-2-6

我们可以说图象的左边部分快、

右边部分慢,但是如果从左往右看整个图象,用时间流逝的横线图来表示,右边就是未来、左边就是过去。

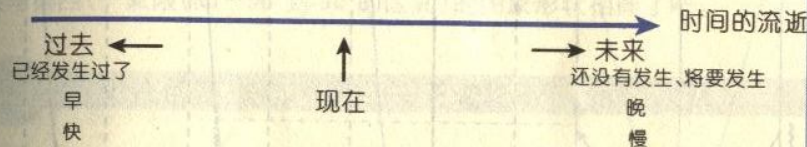


图 7-2-6 中,如果把  $\theta$  的单位换成“s”(秒)的话,我们就可以说“ $\sin\theta$ ”的波达到最高点的时间比“ $\cos\theta$ ”晚了  $90s$ 。

从正切的定义,得  $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 。如果令  $x = 1$ , 则  $\tan\theta = \frac{y}{1} = y$ , 所以  $\tan\theta$  的值就是纵坐标  $y$ 。

下面就让我们来看看正切函数的图象。

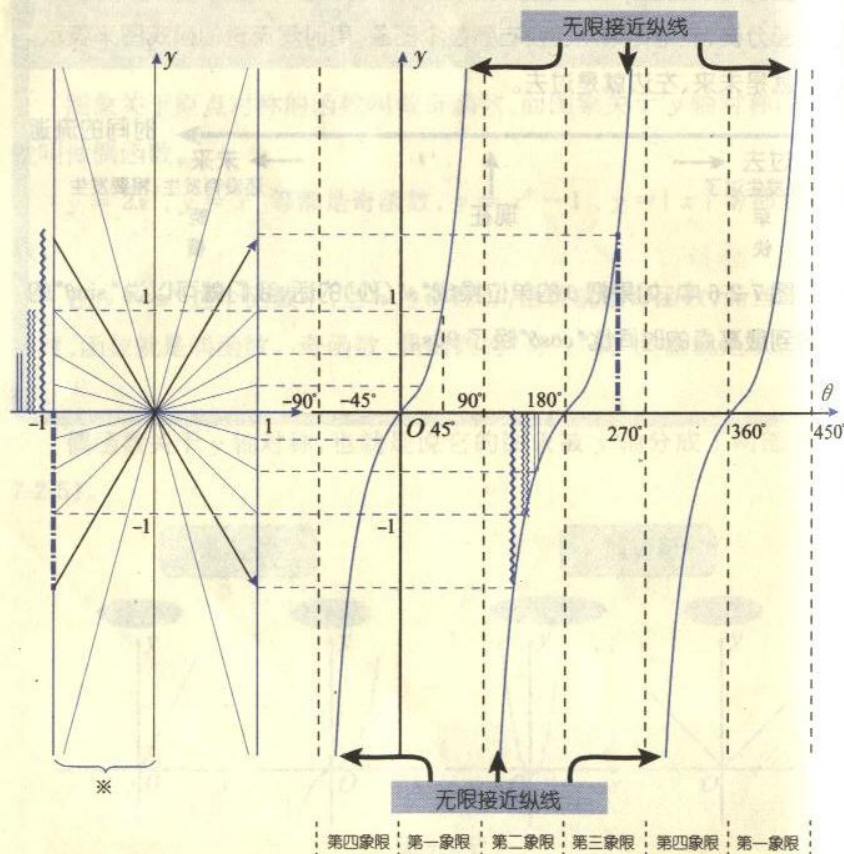


图 7-3-1



-90°到 90°的区间内,直接把左图的  $y$  值平移到右图,图象呈光滑的曲线形状。

90°到 270°的区间内(左图中标有※的部分),因为  $x = -1$ ,  $\tan\theta = \frac{y}{-1} = -y$ , 所以,左图中的  $y$  值移到右图时正负号正好相反(即关于原点对称)。

例如,左图第二象限里※部分,移到右图中,就在第四象限了;同样,原来在第三象限的部分移到右图,就相应地到第一象限里了。

这样,就应该理解了为什么第二、三象限(即 90°到 270°的区间)的图象与第四、一象限(即 -90°到 90°的区间)的图象形状相同了吧。

### 不可思议的不连续曲线——正切函数图象

$\tan\theta$  的图象很特殊,不连续性是它的一个非常显著的特点。

当  $\theta = \pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ \dots$  时,图象是一段一段断开的,而这些角度的终边都落在  $y$  轴上。

在  $\theta = \pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ \dots$  的地方,整条曲线处于无限接近某条纵线的状态,但永远不会和那条纵线相交。

通常,当一条曲线无限接近某条直线  $l$  时,我们把那条直线  $l$  称作曲线的渐近线(图 7-3-2)。

在学过的图象中,你还记得哪些有渐近线吗? 反比例函数的图

象就有渐近线,  $y = \frac{1}{x}$ 。

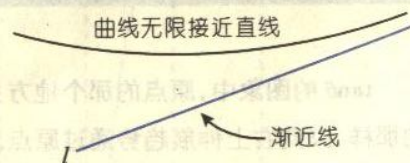


图 7-3-2



指数函数和对数函数的图象也有渐近线,如图 7-3-3 所示。

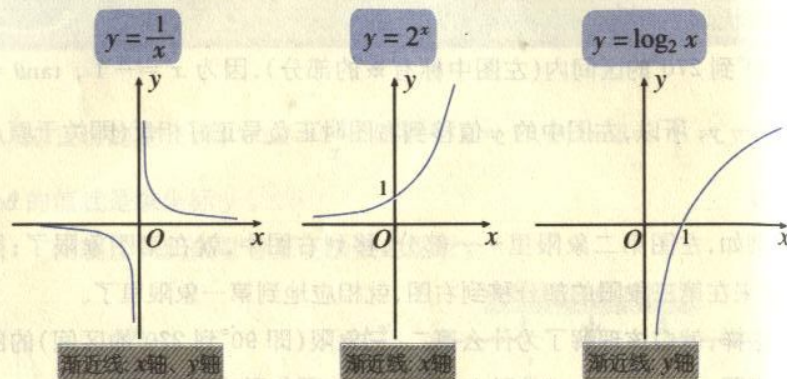


图 7-3-3

$\tan \theta$  也是一个周期函数,但是它的周期不是  $360^\circ$ ,而是  $180^\circ$ ,所以

$\tan \theta$  的周期为  $180^\circ$ 。

并且图象无限地向上、下延伸。

它还是关于原点对称的图象,所以

$\tan \theta$  是奇函数。

$\tan \theta$  的图象中,原点的那个地方并不是“水平”的,而是像图中所显示的那样,以向右上伸展趋势通过原点。而前一节最后的  $y = x^3$  图象却和正切函数图象不太一样,它通过原点时呈瞬间水平状态。

图 7-3-4 是  $y = \sin \theta$ ,  $y = \cos \theta$ ,  $y = \tan \theta$  三个函数的图象,请一定要熟记它们。

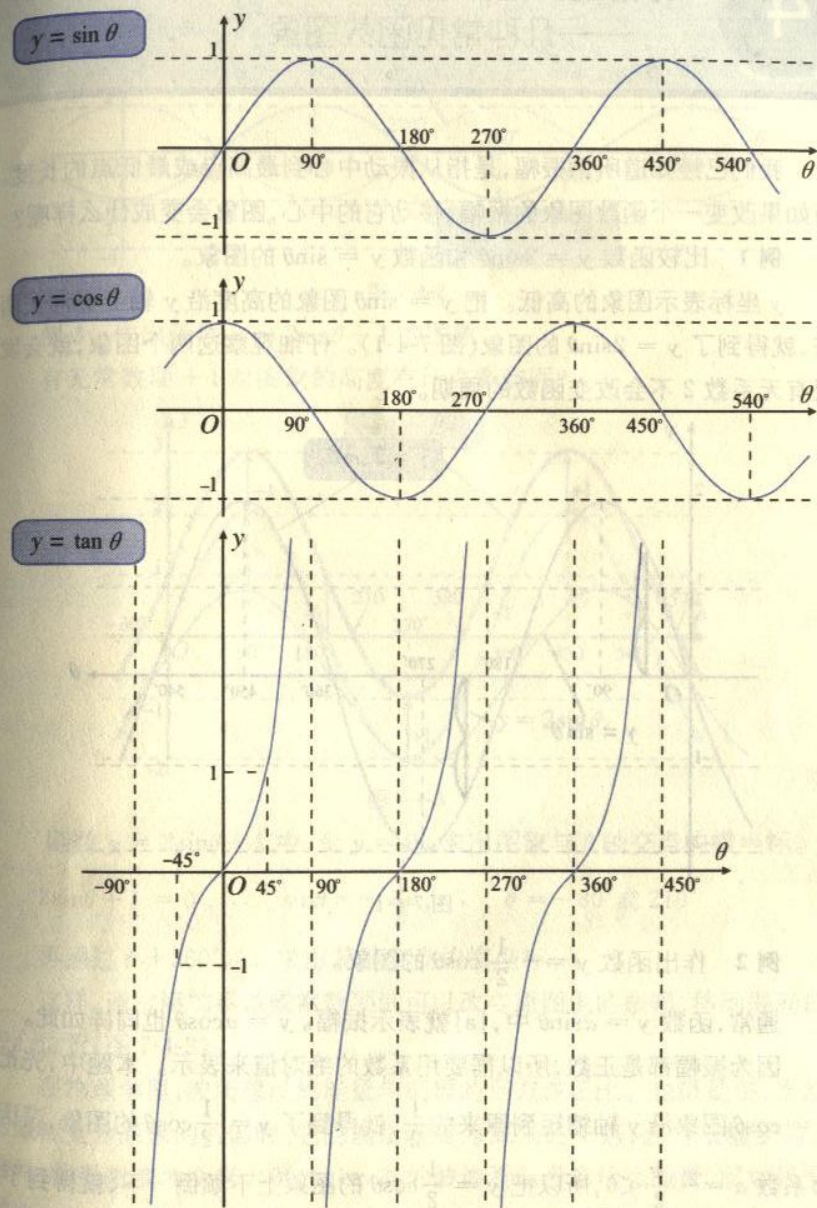


图 7-3-4

我们已经知道所谓振幅,是指从振动中心到最高点或最低点的长度。而如果改变一个函数图象的振幅、移动它的中心,图象会变成什么样呢?

**例1** 比较函数  $y = 2\sin\theta$  和函数  $y = \sin\theta$  的图象。

$y$  坐标表示图象的高低。把  $y = \sin\theta$  图象的高度沿  $y$  轴上下伸长两倍,就得到了  $y = 2\sin\theta$  的图象(图 7-4-1)。仔细观察这两个图象,就会发现有无系数 2 不会改变函数的周期。

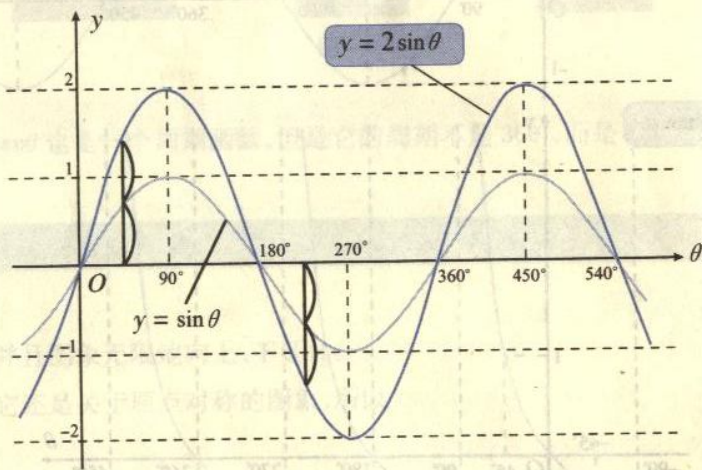


图 7-4-1

**例2** 作出函数  $y = -\frac{1}{2}\cos\theta$  的图象。

通常,函数  $y = a\sin\theta$  中,  $|a|$  就表示振幅。 $y = a\cos\theta$  也同样如此。

因为振幅都是正数,所以需要系数的绝对值来表示。本题中,先把  $y = \cos\theta$  图象沿  $y$  轴缩短到原来的  $\frac{1}{2}$ ,就得到了  $y = \frac{1}{2}\cos\theta$  的图象,又因为系数  $a = -\frac{1}{2} < 0$ ,所以把  $y = \frac{1}{2}\cos\theta$  的图象上下颠倒一下,就得到了函数  $y = -\frac{1}{2}\cos\theta$  的图象。

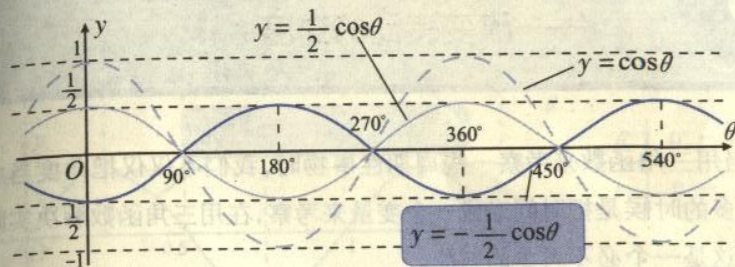


图 7-4-2

**例3** 作出函数  $y = 2\sin\theta + 1$  的图象。

有无常数项 +1 对图象的高度有什么影响呢?

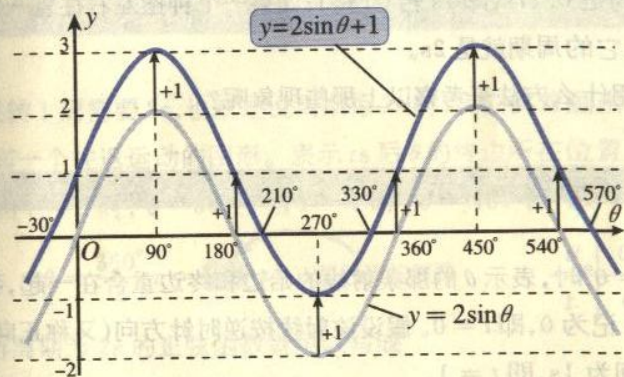


图 7-4-3

函数  $y = 2\sin\theta + 1$  中,令  $y = 0$ , 求出图象与  $\theta$  轴交点的横坐标。

$$2\sin\theta + 1 = 0, \therefore \sin\theta = -\frac{1}{2}, \therefore \theta = -30^\circ \text{ 或 } 210^\circ$$

再通过  $\theta + 360^\circ \times n$  求出其他交点的横坐标。

这样,通过添加系数或常数项就可以改变原图象的振幅,移动振动的中心位置(图 7-4-3)。

在物理学里,波所蕴涵的能量与振幅的平方成正比。也就是说,当波的振幅变为原来的两倍时,它的能量就变为原来的 4 倍;而当振幅变为 3 倍时,能量就变为 9 倍。例如,1m 高的波浪看似没有什么能量,但如果变成 3m 高,它所蕴涵的能量就远远超过你的想象了(是 1m 浪高所蕴涵的能量的 9 倍)。

当用三角函数来考察一些周期性事物时,我们不仅仅把角度当成变量,更多的时候是把时间当成一个变量来考察,在用三角函数解决实际问题时,这是一个必不可少的方法。

例如:地球绕太阳一周(即转  $360^\circ$ )的周期大约是 365 天 6 小时;一般家庭使用的交流电发电机的转动周期,东日本是 0.02s(即 1s 转 50 转),西日本大约是 0.17s(即 1s 转 60 转);如果一个钟摆左右往复一次需要 2s 的话,那么它的周期就是 2s。

应该用什么方法来考察以上那些现象呢?

### 用正弦曲线来表示“1s 转 1 周”

当  $\theta = 0^\circ$  时,表示  $\theta$  的那条射线的始边和终边重合在一起,我们把此时的时间  $t$  记为 0,即  $t = 0$ 。假设该射线按逆时针方向(又称正向)旋转一周所用时间为 1s,即  $t = 1$ 。

如果此时正弦图象的横坐标还是用角度  $\theta$  表示的话,就无法反映出时间  $t$ 。所以,在这里,我们把  $\theta = 360^\circ$  的地方换成  $t = 1$ (因为在转动 1s 后,即  $t = 1$  时, $\theta$  的终边正好到达  $360^\circ$  这个位置)。横坐标变成时间  $t$  后,我们就可以画出从 0s 到 1s 之间波往复一次的图象。这样,就可以用正弦曲线描绘“1s 转 1 周”这一现象了。

但如何把它用数学式子写出来呢?  $\sin$  的后面必须是一个相当于角度的数字,但是又不能写成  $\sin t$ 。怎么办呢? 这里,有必要把时间  $t$  换算成角度  $\theta$ 。因为,

$$\theta = 360^\circ t$$

所以,  $y = \sin \theta$  就可以写成一个关于时间  $t$  的函数,  $y = \sin(360^\circ t)$ ,这



样,  $\sin$  后面的就是个相当于角度的数字了。

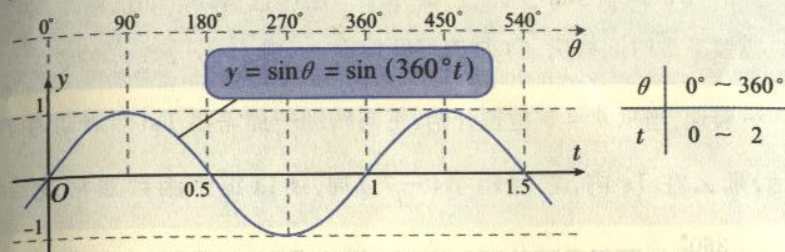


图 7-5-1

### 如果是“2s 转 1 周”,又该怎么表示呢?

如果转 1 周需要 2s,也就是说周期为 2s 时,我们试着画出从  $t = 0$  到  $t = 2$  之间一个往返运动的图形。表示  $t$ s 后  $\theta$  的终边所在位置与时间  $t$  的关系是:当  $t = 2$  时,  $\theta = 360^\circ$ ; 当  $t = 1$  时,  $\theta = 180^\circ$ ,所以

$$\theta = \frac{360^\circ}{2} t = 180^\circ t \quad \text{每秒转的度数}$$

$\theta$	$0^\circ \sim 360^\circ$
$t$	$0 \sim 2$

从而周期为 2s 的正弦函数就可以写成

$$y = \sin(180^\circ t)$$

通过以上两个例题,我们可以看到,  $t$  的系数表示的就是每秒转的度数,如图 7-5-2 所示。

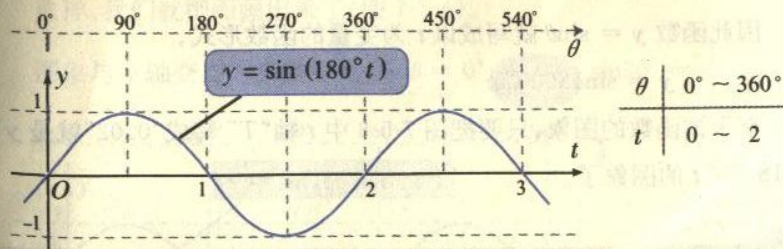


图 7-5-2

比较图 7-5-2 和图 7-5-1,两者除了  $t$  轴的刻度单位不一样,其他都完全相同,  $\theta$  的刻度单位也一样,没有变化。总之,



角度从  $0^\circ$  转到  $360^\circ$  之时,波就作了一次往返运动。而往返一次需要多少时间将决定  $t$  轴的刻度单位。

一般地,当从  $\theta = 0^\circ$  位置开始,正向转动一周需要  $T_s$ (即周期为  $T_s$ ) 的话,那么在  $1s$  内,它就转了  $(\frac{360^\circ}{T})$  周,所以正弦函数通常就写成  $y = \sin(\frac{360^\circ}{T}t)$ ,而通过正弦图象就可以描绘出从  $t = 0$  到  $t = T$  之间一个往返运动,如图 7-5-3 所示。

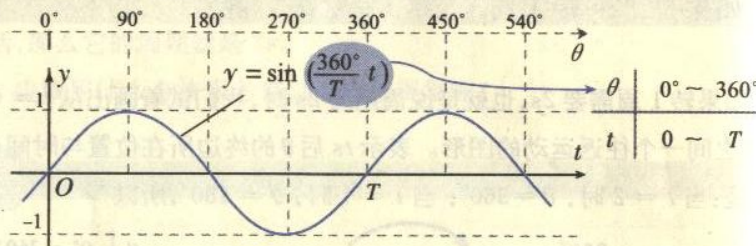


图 7-5-3

从  $\theta = 0^\circ$  位置开始,正向转动,如果在  $1s$  内转了 50 周,那么转一周所要的时间(即周期)就是  $T = 1 \div 50 = 0.02(s)$ ,而图 7-5-3 反映的是时间  $t$  从  $0 \sim 0.02$  之间  $\sin 0^\circ \sim \sin 360^\circ$  的图象。而转的度数  $\theta$  就是,

$$\theta = \frac{360^\circ}{T}t = \frac{360^\circ}{0.02}t = 18000^\circ t$$

因此函数  $y = \sin \theta$  就写成以  $t$  为变量的函数形式,

$$y = \sin 18000^\circ t$$

至于该函数的图象,只要把图 7-5-3 中  $t$  轴“ $T$ ”写成“ $0.02$ ”就是  $y = \sin 18000^\circ t$  的图象了。

### 改变图象的起始位置

现在我们试着来改变一下图象的起始位置。



目前我们画的都是当  $t = 0, \theta = 0^\circ$  的图象。但是,如果假设当  $t = 0$  时,  $\theta$  的终边已经在  $30^\circ$  的位置上,并且正向转动一周要  $6s$ (即周期为  $6s$ ) 的话,  $y = \sin \theta$  又变成什么了呢?

角度从  $0^\circ$  转到  $360^\circ$  之时,波就作了一次往返运动 (※)

这是不变的,所以只要把  $\theta$  的刻度换成  $t$  的刻度就可以了。

$6s$  转一周(即  $360^\circ$ ),那么每秒转的度数(即  $t$  的系数)就是  $360^\circ \div 6 = 60^\circ$ ,  $ts$  就转了  $60^\circ t$  周。另外,因为当  $t = 0$  时,  $\theta = 30^\circ$ ,所以  $\theta$  和  $t$  的关系就是  $\theta = 60^\circ t + 30^\circ$ ,而函数式子就可以写成,

$$y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$$

通过  $60^\circ t + 30^\circ = \theta$  算出横坐标  $t$  的单位刻度,

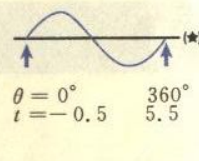
$$t = \frac{\theta - 30^\circ}{60^\circ} = \frac{\theta}{60^\circ} - \frac{1}{2} = \frac{\theta}{60^\circ} - 0.5$$

根据前面那个带(※)的图,

$\theta = 0^\circ$  的地方换成  $t = -0.5$ ,

$\theta = 360^\circ$  的地方换成  $t = \frac{360^\circ}{60^\circ} - 0.5$

$$= 6 - 0.5 = 5.5$$



这样,我们就把图画出来了(图 7-5-4)。

图象与  $y$  轴交点的纵坐标是:令  $\theta = 0^\circ$ ,则  $y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 。

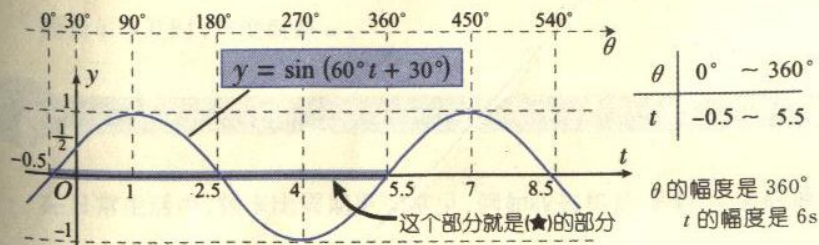


图 7-5-4



把本来以原点为起始点的正弦曲线向左平移  $0.5\text{s}$  (换算成角度就是  $30^\circ$ ) 就是图 7-5-4。

在这里,  $\sin(60^\circ t + 30^\circ)$  表示向左平移  $30^\circ$ , 既然  $+30^\circ$  (即  $+0.5\text{s}$ ) 表示向左平移, 那么  $-30^\circ$  (即  $-0.5\text{s}$ ) 自然就表示向右平移了。你可以自己动手画一画, 看看是不是这样的。

当写成  $\sin[60^\circ(t + 0.5)]$  时, 就很容易看出时间差为  $0.5$ 。

$y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像如图 7-5-4 所示。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

图 7-5-4 中,  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的图像是向左平移了  $0.5\text{s}$ 。

## 6

## 了解角速度和频率

——使用三角函数时必须掌握的知识点

## 角速度就是每秒转的度数

当以时间  $t$  为变量时,  $t$  前面的系数表示的就是每秒转的度数, 而我们就把它称为角速度。

例如当  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  时 ( $t$  的单位为  $\text{s}$ ),  $t$  的系数是  $60^\circ$ , 所以角速度就是  $60^\circ/\text{s}$ 。  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  的振幅为 1, 如果考虑到振幅不是 1 而是  $a$  的话, 函数又可以写成,

$$y = a \sin(\omega t + \alpha) \quad (\omega, \alpha \text{ 是表示角度的常数})$$

$$= a \sin[\omega(t + \frac{\alpha}{\omega})] \quad (\omega \text{ 读作欧米伽, 是个希腊字母, 它的大写字母是 } \Omega)$$

这里的  $t$  的系数  $\omega$  就是角速度。

如果  $1\text{s}$  转  $\omega$  周的话, 那么转  $360^\circ$  (即一周) 就需要  $(\frac{360^\circ}{\omega})\text{s}$ , 也就是说,

$$\text{周期 } T = \frac{360^\circ}{\omega}$$

在  $y = \sin(60^\circ t + 30^\circ)$  中, 周期  $T$  就是,

$$\text{周期 } T = \frac{360^\circ}{\omega} = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6(\text{s})$$

还记得  $\alpha$  起什么作用吗? 把正弦曲线  $y = a \sin \omega t$  沿  $t$  轴正向 (一般是向右) 平移  $\frac{\alpha}{\omega}$  (换算成角度就是  $\alpha^\circ$ ) 后, 就得到  $y = a \sin(\omega t + \alpha)$  的图象了。

而当  $t = 0$  时, 角度就是  $\alpha$ 。

## 频率表示波在 1s 内往返的次数

在日常生活中, 频率比周期更加常见, 例如收音机的频率、手机的频



率、声音的频率、高频、低频……

频率表示波在 1s 内往返的次数,单位是赫兹(Hz)。以前曾用[周/秒(c/s)]作为频率的单位。而发动机或引擎的转数单位通常用[rpm](round per minute)等来表示。

既然周期表示波往返一次所需要的时间,那么 1s 内波往返的次数(即频率)用周期来表示就是

$$\text{频率 } f = \frac{1}{T} [\text{Hz}] \quad (\text{周期 } T = \frac{1}{f})$$

而每秒转的度数是角速度  $\omega$ ,所以可以用下面的式子求出在一次往复运动中包含了几个  $360^\circ$ ,

$$\text{频率 } f = \frac{\omega}{360^\circ} [\text{Hz}] \quad (\text{角速度 } \omega = 360^\circ f)$$

例如,频率为 100[Hz]的波(如声波),表示 1s 内往返 100 次,那么往返一次需要的时间(即周期  $T$ )就是

$$T = \frac{1}{100} = 0.01(\text{s}) \quad (T = \frac{1}{f})$$

而角速度  $\omega$  就是,

$$\omega = 360^\circ \times 100 = 36000^\circ / \text{s} \quad (\omega = 360^\circ f)$$

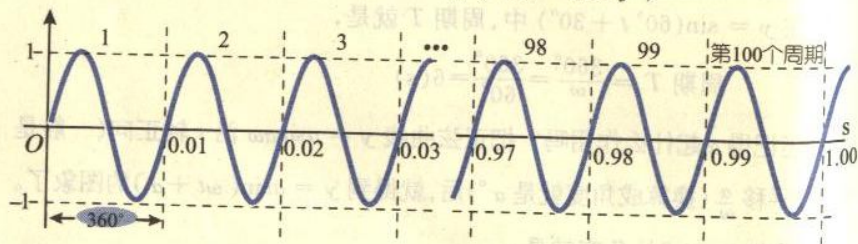


图 7-6-1

如图 7-6-1 所示的图象的函数解析式为:

$$y = \sin(36000^\circ t) = \sin(360^\circ \times 100t)$$

关于频率  $f$  的正弦函数通常写成下面的形式:

$$y = a \sin \omega t = a \sin(360^\circ f t)$$

## 7

## $\theta$ 表示的是角度,还是时间

——从物理学到纯数学

当把三角函数作为纯粹的数学对象处理时,不必考虑  $\theta$  表示的是什么物理量,而只要知道实数  $\theta$  的值就可以了,因为一旦  $\theta$  的值定下来的话,“sin”、“cos”、“tan”的值就都固定了。

$$y = \sin 2\theta$$

请大家考虑一下  $y = \sin 2\theta$  这个函数。

在这个函数里,首先我们可以把  $2\theta$  看作一个角度,因为 2 没有单位名,而  $\theta$  本身就是表示角度的。

另一方面,若把系数 2 看作角度,那么 2 就相当于角速度  $\omega$  (以每秒  $2^\circ$  的速度转),这样一来,  $\theta$  就表示时间了。

但是,在本节里,我们还是把  $\theta$  作为角度来考虑。高中数学里的三角函数也是这种观点(不过,这样就容易与物理学上的三角函数脱节)。

接下来,我们把函数  $y = \sin 2\theta$  的图象画出来。以  $\theta$  为横坐标。

正如我们反复强调的一样,

$\sin \bigcirc$  中的  $\bigcirc$  表示角度,  $\sin 0^\circ \sim \sin 360^\circ$  表示波的一个往返运动。

所以,  $\sin 2\theta$  中,  $2\theta = 0^\circ \sim 2\theta = 360^\circ$  表示波的一个往返运动。

我们用  $\Theta$  ( $\Theta$  也是个希腊字母,是  $\theta$  的大写形式)来表示  $\sin \bigcirc$  中的  $\bigcirc$ ,就是

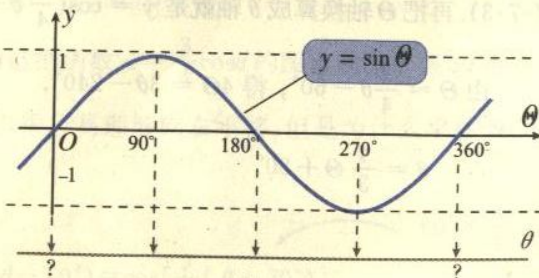


图 7-7-1



$$\Theta = 2\theta$$

这样,  $y = \sin 2\theta$  就可以写成  $y = \sin \Theta$ , 再把横坐标换成  $\Theta$ 。这不就是我们熟悉的最基本的正弦曲线吗(图 7-7-1)?

再把图 7-1-1 中的  $\Theta$  轴换成  $\theta$  轴就可以了。但是图 7-7-1 中“?”地方的刻度是多少呢? 我们需要先把它计算出来。

$$\text{由 } 2\theta = 0^\circ, \text{ 得 } \theta = 0^\circ.$$

$$\text{由 } 2\theta = 360^\circ, \text{ 得 } \theta = 180^\circ.$$

所以, 以  $\theta$  为横轴时,

图 7-7-2 中“?”地方的刻度就是  $180^\circ$ 。

最后把刻度平均分成四等份, 这样我们就画出了一个完整的图象。

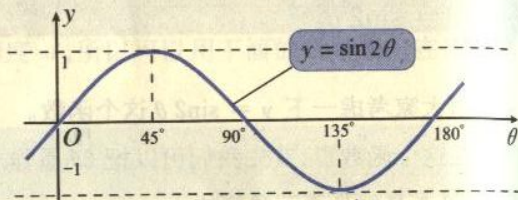


图 7-7-2

**例 1** 画出函数  $y = \cos(\frac{3}{4}\theta - 60^\circ)$  的图象。

先把  $\frac{3}{4}\theta - 60^\circ$  看成一个整体, 用  $\Theta$  来表示,

$$\Theta = \frac{3}{4}\theta - 60^\circ$$

这样, 函数就写成  $y = \cos \Theta$ , 图象也就是最基本的余弦曲线(图 7-7-3)。再把  $\Theta$  轴换算成  $\theta$  轴就是  $y = \cos(\frac{3}{4}\theta - 60^\circ)$  的图象了。

$$\text{由 } \Theta = \frac{3}{4}\theta - 60^\circ, \text{ 得 } 4\Theta = 3\theta - 240^\circ,$$

$$\therefore \theta = \frac{4}{3}\Theta + 80^\circ$$

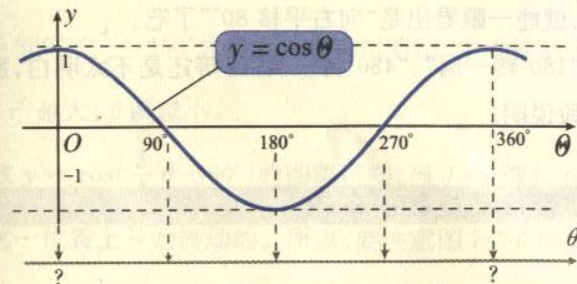


图 7-7-3

$\Theta$  和  $\theta$  的对应关系如下,

$\Theta$	$0^\circ \sim 360^\circ$	周期是 $480^\circ$ , 其四分之一就是 $120^\circ$ (画图时需要), 也就是说, $480^\circ$ 转一周。
$\theta$	$80^\circ \sim 560^\circ$	

再求出图象与  $y$  轴交点的纵坐标。令  $\theta = 0^\circ$ , 则

$$y = \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$$

这样, 我们就画出了函数图象(图 7-7-4)。

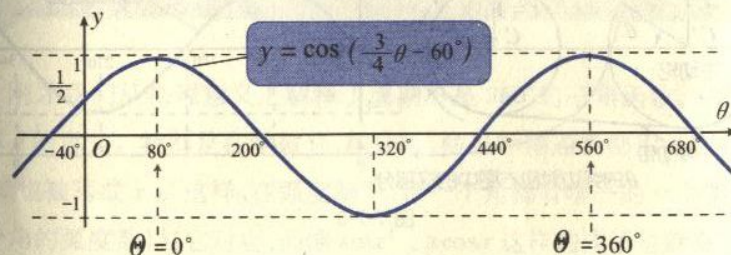


图 7-7-4

其实, 这个图象是通过把函数  $y = \frac{3}{4}\cos \theta$  的图象向右平移  $80^\circ$  而得到的。因为是“ $-60^\circ$ ”, 所以很容易理解向右平移, 但是为什么平移  $80^\circ$  呢? 这是因为

$$y = \cos(\frac{3}{4}\theta - 60^\circ) = \cos[\frac{3}{4}(\theta - 80^\circ)]$$

$60^\circ \times \frac{3}{4}$



这样写,就能一眼看出是“向右平移  $80^\circ$ ”了吧。

如果对“ $180^\circ$ 转一周”、“ $480^\circ$ 转一周”等等还是不太明白,那就仔细看看下面的这段说明。

### 由传动带带动旋转的车轮

在这里,务必请大家注意:表示横坐标轴的不是  $\theta$ ,而是  $\Theta$ ,但是在画图的时候,我们可以把  $\theta$  看作带动  $\Theta$  转动的另一个“车轮”的转角。

如图 7-7-5 所示,我们先画出一个以原点为中心、半径为  $r$  的车轮  $C$ ,而  $\Theta$  的终边就是可转动的半径。然后,画出以  $r'$  为半径的另一个车轮  $C'$ ,并把  $C$  和  $C'$  用传动带连在一起,同时规定由  $C'$  带动  $C$  转动(因此  $C'$  称为主动轮、 $C$  称为从动轮)。

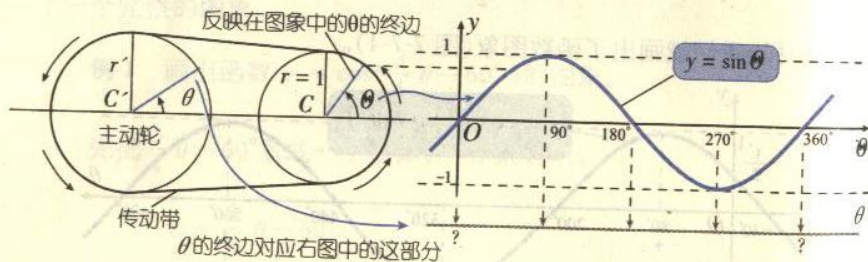


图 7-7-5

当主动轮较大(即  $r' > r$ )时,  $\theta < \Theta$  (从动轮快速转动);

当主动轮较小(即  $r' < r$ )时,  $\theta > \Theta$  (从动轮缓慢转动)。

假设主动轮半径  $r' = 2$ ,从动轮半径  $r = 1$  时,主动轮只要转  $180^\circ$  就足够带动从动轮转一周了。也就是说,

当  $\theta = 180^\circ$  时,波就做了一次往返运动。

当主动轮半径  $r' = \frac{3}{4}$  时,为了使半径  $r = 1$  的从动轮转一周,主动轮



必须转  $\theta = 360^\circ \times \frac{4}{3} = 480^\circ$  才行。从中可以看出,主动轮的半径  $r'$  与  $\theta$  成反比例,即  $r'$  越大,  $\theta$  就越小。

从函数  $y = \cos(\frac{3}{4}\theta - 60^\circ)$  的图象可知,当  $\theta = 0^\circ$  时,  $\Theta$  的终边是从  $\Theta = -60^\circ$  这一位置上开始转动的。所以,要注意图 7-7-6 中的余弦曲线的起始位置。

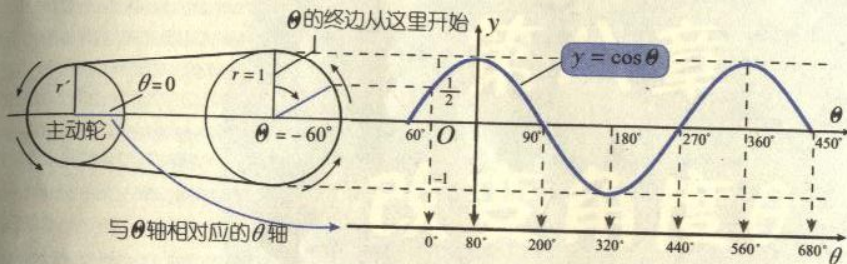


图 7-7-6

### 真正意义上的函数

刚才我们从物理意义上解释了周期不是  $360^\circ$  的三角函数,关键是要理解  $\theta$  的意义。特别是在学微分、积分时,横坐标轴通常都用弧度制来表示,  $\theta$  也被写成  $x$ 。这样,在弧度制下,每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应,而像  $\sin x^2$ 、 $x \cos x$  这样的式子也就有了意义[注意,不是  $(\sin x)^2$ ]。

同时,我们也要意识到,当不是用弧度制表示,而是用以前我们所熟悉的角度制(即用度、分、秒作为角的度量单位)来表示角的时候,像  $\sin \theta^2$ 、 $\theta \sin \theta$  这些式子都是没有意义的。认识到这一点,将有助于你理解弧度制。



如图 3-1-1 所示，设有一艘船从 A 点出发，以 10 km/h 的速度向正北方向行驶，同时另一艘船从 B 点出发，以 10 km/h 的速度向正东方向行驶。两船在 C 点相遇，求 AC 和 BC 的距离。

解：设两船相遇的时间为  $t$  小时，则 AC 的距离为  $10t$  km，BC 的距离为  $10t$  km。由于两船相遇时，AC 和 BC 垂直，所以  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形。因此，AC 和 BC 的距离均为  $10t$  km。

图 3-1-1 展示了两艘船的运动轨迹。一艘船从 A 点向正北行驶，另一艘船从 B 点向正东行驶。它们在 C 点相遇，形成了一个等腰直角三角形 ABC。

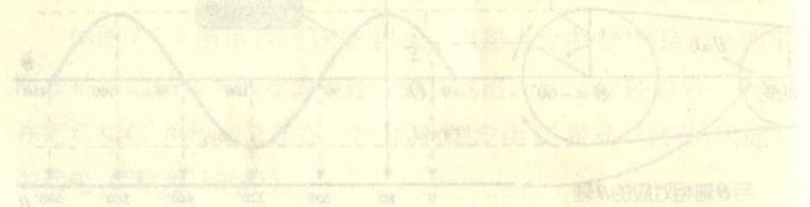


图 3-1-1

图 3-1-2 展示了两艘船的运动轨迹。一艘船从 A 点向正北行驶，另一艘船从 B 点向正东行驶。它们在 C 点相遇，形成了一个等腰直角三角形 ABC。

图 3-1-2 展示了两艘船的运动轨迹。一艘船从 A 点向正北行驶，另一艘船从 B 点向正东行驶。它们在 C 点相遇，形成了一个等腰直角三角形 ABC。

图 3-1-2 展示了两艘船的运动轨迹。一艘船从 A 点向正北行驶，另一艘船从 B 点向正东行驶。它们在 C 点相遇，形成了一个等腰直角三角形 ABC。

图 3-1-2 展示了两艘船的运动轨迹。一艘船从 A 点向正北行驶，另一艘船从 B 点向正东行驶。它们在 C 点相遇，形成了一个等腰直角三角形 ABC。

图 3-1-2 展示了两艘船的运动轨迹。一艘船从 A 点向正北行驶，另一艘船从 B 点向正东行驶。它们在 C 点相遇，形成了一个等腰直角三角形 ABC。

## 第八章

# 改变角度 $\theta$ ——加法定理



——  $\sin(45^\circ + 30^\circ)$  并不是  $\sin 45^\circ + \sin 30^\circ$

首先给大家介绍一下加法定理。

#### 加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

看到了吗?  $\sin(\alpha + \beta)$  并不简单地等于  $\sin\alpha + \sin\beta$ 。

这两个公式看起来很复杂,但只要抓住以下两点就能很容易记住。

首先,  $\sin$  从  $\sin$  开始,按  $\sin, \cos, \cos, \sin$  顺序;  $\cos$  从  $\cos$  开始,按  $\cos, \cos, \sin, \sin$  的顺序,且  $\alpha$  和  $\beta$  交替出现。

另外,  $\sin$  中 + 对 +, - 对 -;  $\cos$  中 + 对 -, - 对 +。

加上这两个公式,本书中必须掌握的 6 个公式就齐全了。

而  $\tan$  的加法定理通过  $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$  推导出来,我们来做做看。把正弦的加法定理写在上面,余弦的加法定理写在下面,中间画一条分数线,

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

这样一来,等式左边就可以写成  $\tan(\alpha + \beta)$ ,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

这个等式的右边也用  $\tan$  来表示的话,就要把等式右边的分子分母都同时除以  $\cos\alpha\cos\beta$ ,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \div \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta} + \cos\alpha\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cancel{\cos\beta} - \sin\alpha\sin\beta} \div \frac{\cancel{\cos\alpha}\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\cancel{\cos\beta}}$$

虚线处是  $\tan\alpha$ , 双下划线处是  $\tan\beta$ , 而没有记号的地方被约分成 1,



这样我们就推导出了  $\tan$  的加法定理,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

但是,我们并没有用方框把这个公式框起来,因为只要记住  $\sin$  和  $\cos$  的加法定理就可以自己推导出  $\tan$  的加法定理。

理解了推导过程,不但不会弄错等式右边分子分母的加减号,而且能立刻推算出  $\tan(\alpha - \beta)$  公式中等式右边是什么,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

关于正弦、余弦的加法定理的证明将在下节里向大家介绍,现在我们来看看如何用加法定理理解具体的问题。

$$\text{例 1 } \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{例 2 } \cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ \text{ (注意符号)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{例 3 } \tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

要做到随时都能通过  $\sin, \cos$  推导出  $\tan$  的加法定理

$$\therefore \tan 15^\circ = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

如果把分母有理化,结果将变成更加简单的形式。



$$\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = 2-\sqrt{3}$$

还记得吗,在第五章第一节里,我们也用同样的方法对分母进行有理化。

**例 4** 用加法定理推导诱导公式。

前面已经说过了,三角函数中有很多诱导公式。下面列出来的公式就是已经出现的或将要出现的各种诱导公式。

$\sin(\theta+360^\circ \times n) = \sin\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(\theta+360^\circ \times n) = \cos\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(\theta+360^\circ \times n) = \tan\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$	$\sin(\theta - 90^\circ) = -\cos\theta$
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$	$\cos(\theta - 90^\circ) = \sin\theta$
$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$	$\tan(\theta - 90^\circ) = -\frac{1}{\tan\theta}$
$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$	
$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$	
$\tan(\theta + 90^\circ) = -\frac{1}{\tan\theta}$	
$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$	$\sin(\theta \pm 180^\circ) = -\sin\theta$
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(\theta \pm 180^\circ) = -\cos\theta$
$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(\theta \pm 180^\circ) = \tan\theta$

竟然有那么多很容易混淆的公式!现在你大概会明白为什么很多人在学三角函数这部分时有一种挫败感。

那么,有没有一种记忆方法能让我们既准确又牢固地记住这些公式呢?有!那就是结合图象推导出各等式右边的式子。要知道,比起死记



硬背公式,通过推导过程掌握的知识将会更长久地留在脑海中。无论哪种方法,都得靠平时大量的练习和积累。切记:数学王国里没有捷径。

特别是  $\tan$  的各种变形公式都可以通过  $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$  立刻推导出来。

例如,当已知  $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$ ,  $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$  时,

$$\tan(\theta + 90^\circ) = \frac{\sin(\theta + 90^\circ)}{\cos(\theta + 90^\circ)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

一旦知道如何推导出关于  $\tan$  的各种公式,就没有必要把  $\tan$  的公式背下来。这样,我们的背诵数量一下子就减少了三分之一!

除了用图象来思考,通过本节的学习,我们又多了一个可以推导出那些公式的方法,那就是:所有这些公式都可以用两角和或两角差公式推算出来。

$$\begin{aligned}\text{例如, } \sin(\theta - 90^\circ) &= \sin\theta \cos 90^\circ - \cos\theta \sin 90^\circ \\ &= \sin\theta \times 0 - \cos\theta \times 1 \\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

不过,用这种方法的前提是要熟知  $90^\circ$ 、 $180^\circ$  的各三角函数值。

要学会通过各种不同方法解决问题。

先写出两角差的余弦公式。

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

如图 8-2-1 所示,画出  $OP$ 、 $OQ$ , 长度为 1。把  $OP$  看作角  $\alpha$  的终边,  $OQ$  看作角  $\beta$  的终边, 则  $\angle POQ = \alpha - \beta$ 。

虽然我们只画出了在第一象限和第二象限的角, 但无论角的终边在哪个象限, 上面的等式都成立。而且, 即使  $\alpha < \beta$ , 也不会影响计算结果。

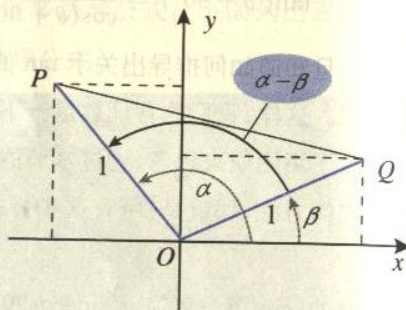


图 8-2-1

另外, 只要令  $OP = OQ$ , 那么无论它们的长度是 1 还是  $r$  都没关系, 因为即使是字母  $r$ , 最后都会被约分掉的, 所以在这里, 我们从一开始就用 1 来计算吧。如果你觉得这些规定很麻烦, 那么你就令  $PO = OQ = r$  来做做看。

思路是: 分别用两种方法表示  $PQ$  的长度, 再把得出的两个式子用等号联立。

① 点  $P$ 、 $Q$  的纵横坐标  $x$ 、 $y$  分别用关于  $\alpha$ 、 $\beta$  的三角函数表示, 而  $PQ^2$  也用  $\alpha$  和  $\beta$  的三角函数表示。

② 在  $\triangle OPQ$  中, 通过余弦定理求出  $PQ^2$ 。

③ 把 ①、② 中得到的两个式子用等号联立。

具体步骤如下:

①  $P(x, y)$  的纵横坐标是

$$\frac{x}{OP} = \cos\alpha, \quad \therefore x = \cos\alpha \quad (OP = 1)$$



$$\frac{y}{OP} = \sin\alpha, \quad \therefore y = \sin\alpha, \quad \therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$Q(x, y)$  的纵横坐标是,

$$\frac{x}{OQ} = \cos\beta, \quad \therefore x = \cos\beta \quad (OQ = 1)$$

$$\frac{y}{OQ} = \sin\beta, \quad \therefore y = \sin\beta, \quad \therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } (\cos\beta, \sin\beta)$$

通过勾股定理就能求出用  $x$ 、 $y$  表示的点  $P$ 、 $Q$  之间的距离, 而没有必要去记两点间的距离公式(图 8-2-2)。

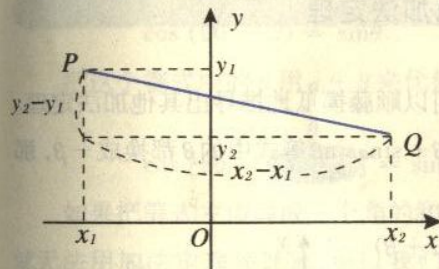


图 8-2-2

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

虽是减法, 但不用考虑谁减谁, 结果是正是负, 因为平方后都是正的了。

$$(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$$

因为待求的是  $(\alpha - \beta)$  的余弦值, 所以我们用  $(x_2 - x_1)$  和  $(y_2 - y_1)$  这个顺序。

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\ &= \underbrace{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}_{1} + \underbrace{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta}_{1} \end{aligned}$$

$$\therefore PQ^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \quad (1)$$

——括号外面是“—”, 所以这里是“+”

② 还记得余弦定理吗?

在  $\triangle ABC$  中,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

↑ 两边和    ↑ 夹角



具体到图 8-2-1 中的三角形就是:(虽然字母不是  $a, b, c$  了,但你能立刻写出等式吗?)

$$\begin{aligned} PQ^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (2)$$

③ 把(1)(2)等式的右边用等号联立起来,

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta), \quad \leftarrow \text{两边同时减 2 后,再同除以 -2}$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

看,我们成功地证明出了两角差公式!

### 除 $\cos(\alpha - \beta)$ 之外的其他加法定理

把  $\cos(\alpha - \beta)$  证明出来后,就可以顺藤摸瓜地推导出其他加法定理。

首先,把  $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$  等式中的  $\beta$  都换成  $-\beta$ , 那么等式左边就变成

$$\cos[\alpha - (-\beta)] = \cos(\alpha + \beta)$$

右边就变成

$$\cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

又因为  $\beta$  和  $-\beta$  互为上下对称关系(第六章第三节),所以两个角终边的横坐标  $x$  相同,

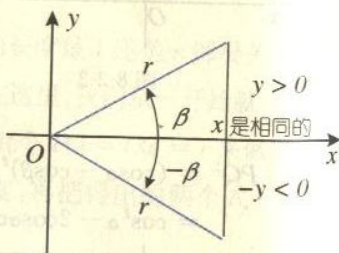


图 8-2-3

$$\cos(-\beta) = \cos\beta (= \frac{x}{r})$$

作为公式,就写成

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

另一方面,纵坐标  $y$  互为相反数,所以

$$\sin(-\beta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\beta$$



$$\therefore \sin(-\beta) = -\sin\beta$$

作为公式,就写成

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

等式右边的负号和左边的  $-\beta$  中的负号没有任何关系。如果仅仅死记硬背公式,那就很有可能犯  $\cos(-\beta) = -\cos\beta$  这样的错误。

$$\therefore \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

接下来,我们再试试用“sin”来代替“cos”,看看能推导出什么公式。

sin 和 cos 的互换公式在第一部分和第六章第三节中都出现过了。

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \quad (3)$$

把这个等式中的  $\theta$  用  $\alpha + \beta$  来代替,就可以把 cos 换成 sin 了。

$$\cos[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta) \quad (4)$$

如果把等式左边写成三个角的和差形式,即  $\cos(90^\circ - \alpha - \beta)$ , 那么就无法用加法定理来计算,所以我们要把  $90^\circ - \alpha$  看成一个整体  $A$ , 即  $[(90^\circ - \alpha) - \beta] = (A - \beta)$ , 这样就能用加法定理来计算。

$$\begin{aligned} \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] &= \cos(A - \beta) \quad (A = 90^\circ - \alpha) \\ &= \cos A \cos\beta + \sin A \sin\beta \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cos\beta + \sin(90^\circ - \alpha) \sin\beta \end{aligned}$$

根据公式(3),

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

把它们与等式(4)联立起来,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cos\beta + \sin(90^\circ - \alpha) \sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



再把  $\beta$  换成  $-\beta$ ,  $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$ , 所以

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

$\beta$  和  $-\beta$  互为上下对称关系, 所以

$$\cos(-\beta) = \cos\beta, \sin(-\beta) = -\sin\beta$$

那么,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

关于  $\tan(\alpha \pm \beta)$ , 早在第一节中我们就已经证明过了。

## 3

角度变为原来的 2 倍后  
——二倍角公式

让我们再复习一下加法定理:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

如果把公式中的  $\beta$  都换成  $\alpha$ , 则  $\alpha + \beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$ , 那么,

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\therefore \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

由  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ , 得

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \text{ 或 } \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

$\therefore \cos 2\alpha$  又能写成

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha,$$

$$\therefore \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

还能写成

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\ &= \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha, \end{aligned}$$

$$\therefore \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

所以,  $\cos 2\alpha$  一共有三种表示方法。

另外,

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

分子分母同时除以  $\cos^2\alpha$ , 得

我是天才。



我也是。



$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

这样,我们就把二倍角公式都推导出来了。

二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

这些公式不是要你背下来,而是要能随时推导出来。

下面,我们来看看如何运用二倍角公式解题。

例1 画出函数  $y = \sin\theta\cos\theta$  的图象。

尽管目前我们还不会直接画出这个函数的图象,但你要做到的是能从函数解析式右边的形式联想到二倍角公式。

$$\begin{aligned} \because \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta, \\ \therefore y = \sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{2}\sin 2\theta \quad \begin{array}{l} 2\theta \mid 0^\circ \sim 360^\circ \\ \theta \mid 0^\circ \sim 180^\circ \end{array} \text{周期} = 180^\circ \end{aligned}$$

所给出的函数图象其实是一个周期为  $180^\circ$ 、振幅为  $\frac{1}{2}$  的正弦曲线,如

图 8-3-1 所示。

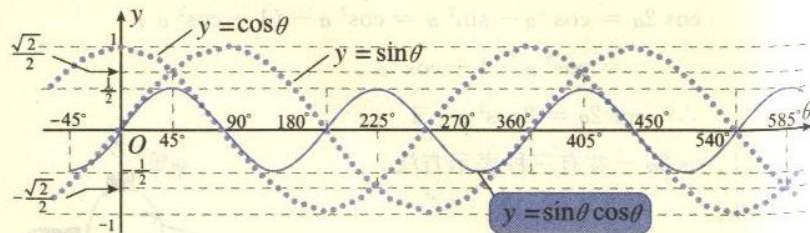


图 8-3-1

为了便于比较,我们用虚线把  $\sin\theta$  和  $\cos\theta$  也画出来了,请仔细观察,原来它们的积  $\sin\theta\cos\theta$  的图象就是一个单纯的正弦曲线。

## 4

## 角度变为原来的 $\frac{1}{2}$ 后

### ——半角公式

现在,我们重点看看二倍角公式中的  $\cos 2\alpha$ ,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

由第二个等式,得  $\sin^2\alpha$  的表达式,即

由  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ , 得

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$$

$$\therefore \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (1)$$

也就是说,通过这个公式可以求出  $2\alpha$  的半角即  $\alpha$  的正弦的平方。

这就是半角公式。

这里,我们用  $2\alpha$  表示一个角,则它的半角就是  $\alpha$ 。但为了突出半角,很多教科书或参考书里都把  $\alpha$  作为一个角,那么它的半角就是  $\frac{\alpha}{2}$ ,半角公式被写成

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \quad (1')$$

接下来,我们把二倍角公式  $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$  左右互换一下,

$$2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha, 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$\therefore \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (2)$$

这样,我们又推导出了余弦的半角公式。

由(1)、(2)可以推出  $\tan$  的半角公式,

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \times 2}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \times 2},$$



$$\therefore \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \quad (3)$$

$30^\circ, 45^\circ, 135^\circ$ 等一些特殊角的三角函数值都是我们所熟知的,所以它们的半角  $15^\circ, 22.5^\circ, 67.5^\circ$  都可以通过半角公式求出来,请你自己做做看。

下面,我们再看看半角公式如何用于作图。

**例 1** 画出函数  $y = \sin^2 \theta$  的图象。

看到这个函数你能联想到半角公式吗?做到这一点大概还需要花点工夫。虽说是半角,但如果换一种角度,也能看成是二倍角。

2 倍

$$y = \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

所以,原函数图象是一个振幅为  $\frac{1}{2}$ , 周期为  $180^\circ$ , 振动中心为  $y = \frac{1}{2}$  的正弦曲线(图 8-4-1)。

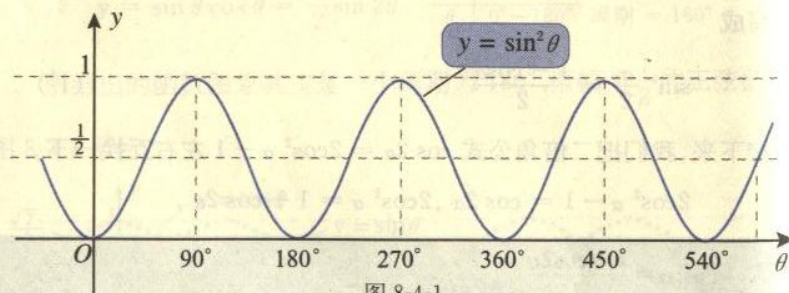


图 8-4-1

在本题中,把二次方进行降次是解决问题的关键。

在作出图象之前,也许你会以为这个二次方函数的图象可能有点歪曲。但是,画出来就会发现:它和前面两三角函数积的图象一样,都是非常标准的正弦曲线。

计算交流电的电流时经常会出现三角函数的二次方(见第九章第二节)。

## 5

用加法来计算乘法  
——积化和差公式

再看一次加法定理:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \quad (1)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta; \quad (2)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad (3)$$

把(1)中正负号分开写出来,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (1-1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (1-2)$$

把(1-1)和(1-2)加起来,就可以消掉  $\cos \alpha \sin \beta$  这一项,

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

等式左右两边互换,并同时除以 2,得

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad \textcircled{1}$$

这就是把  $\sin, \cos$  的积化成  $\sin$  的和的公式。这也不需要去背,只要会通过加法定理推导出来就可以。

刚才把两个等式加起来消掉了一项,反过来,如果把它们相减,也应该能消掉某项,即  $(1-1) - (1-2)$ ,得

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta,$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad \textcircled{1}'$$

把①式中的  $\alpha$  和  $\beta$  的位置互换一下就能得到①'式中右边的式子,也就是说把  $\alpha - \beta$  换成了  $\beta - \alpha$ ,符号也要变一变。

$$\beta - \alpha = -\alpha + \beta = -(\alpha - \beta)$$



而角度一变,  $\sin$  就出现了负号,

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin[-\overset{\theta}{(\alpha - \beta)}] = -\overset{\theta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

把①式中的  $\alpha$  和  $\beta$  的位置互换, 等式右边就变成了减法。

下面, 我们再把(2)中正负号分开写出来,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \quad (2-1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (2-2)$$

两个式子相加, 可以把  $\sin\alpha\sin\beta$  这一项消掉,

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$

左右互换, 并同除以 2, 得

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad ②$$

看, 我们把  $\cos$  的积化成  $\cos$  的和的公式也推导出来了。

再把两个式子相减, 左右互换, 并同除以 2, 得

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \quad ③$$

在三个积化和差公式中, 只有这第三个的右边是有负号的, 在用的时候注意不要忘了负号。其实, 如果自己能把它推导出来, 就不会忘了。

**例 1** 求  $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$  的值。

把公式①里的  $\alpha$  和  $\beta$  都看成  $75^\circ$ , 即  $\alpha = \beta = 75^\circ$ , 计算, 得

$$\sin 75^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{2}(\sin 150^\circ + \sin 0^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{4}$$

这道题既可以用积化和差公式来做, 也可以用二倍角公式  $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$  来解。你也试试不同的解法吧。我们还应看到, 积化和差公式不仅用来求三角比值, 它还可以把二次方降次为一次方。

## 6

### 用乘法来计算加法 ——和差化积公式

本节要介绍的和差化积公式, 其实就是把前一节学的积化和差公式的左右互换一下位置得到的, 只不过为了便于使用, 我们稍微改变了一下公式的表示方法。

还记得积化和差公式吧。

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]; \quad ①$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]; \quad ①'$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]; \quad ②$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \quad ③$$

这么多公式, 是不是已经让你头昏目眩了? 还是依次逐个地看吧。把①式的左右互换位置, 并同时乘以 2, 得,

$$\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] = \sin\alpha\cos\beta,$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \quad (*)$$

还记得在前面推导积化和差公式时, 我们把(1-1) + (1-2)后得到的那个等式吗? 不就是现在这个(\*)式子吗? 其实, 在那时我们已经写出了和化积的公式了!

但是, 这个等式的左边是两角的和差形式, 例如,

$$\begin{array}{cc} \alpha + \beta & \alpha - \beta \\ \sin 15^\circ & + \sin 75^\circ \end{array}$$

这样, 就很难看出来相当于右边的  $\alpha, \beta$  是多少度角。

所以, 为了用起来方便, 我们用一个字母来表示左边的角度, 然后再



计算出相当于  $\alpha, \beta$  的角度。

在这里,令  $A = \alpha + \beta, B = \alpha - \beta$ , 则(\*)式子的左边就可以写成,

$$\begin{array}{rcl} \sin A + \sin B & = & \begin{array}{l} A = \alpha + \beta \\ +) B = \alpha - \beta \\ \hline A + B = 2\alpha \end{array} \end{array}$$

$$\therefore A + B = 2\alpha, A - B = 2\beta,$$

$$\therefore \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2} \quad \begin{array}{l} A = \alpha + \beta \\ -) B = \alpha - \beta \\ \hline A - B = 2\beta \end{array}$$

把它们代入(\*)式子中的右边,

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (4)$$

这就是和差化积公式中的第一个公式。

把这个公式中的  $B$  换成  $-B$ , 则

$$\sin(-B) = -\sin B \quad \text{上下对称角}$$

所以,④式的左边就变成了减法,

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \quad (4')$$

这样,我们又推导出了正弦的差化积公式。把④'式右边的两个乘数互换一下,

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (4'')$$

通常,教科书里都把正弦的差化积公式写成如④''所示的形式。

而④'和④''还可以通过①'推导出来,你自己试着做做看吧。

接下来,把②式的左右互换位置,同时乘以2,并使用  $A, B$  来表示,得

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (5)$$



再把公式③的两边同时乘以  $-2$  后,互换左右位置,得

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

令  $A = \alpha + \beta, B = \alpha - \beta$ , 则

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (6)$$

为了不再让你感到头晕目眩,我们就不把④~⑥同时列出来了。你要做的就是通过加法定理依次推出前面学过的积化和差公式和今天学的和差化积公式。

例1 计算:  $\sin 195^\circ - \sin 105^\circ$ 。

$$\therefore \frac{195^\circ + 105^\circ}{2} = 150^\circ, \quad \frac{195^\circ - 105^\circ}{2} = 45^\circ,$$

$\therefore$  由公式④'',得

$$\begin{aligned} \sin 195^\circ - \sin 105^\circ &= 2 \cos 150^\circ \sin 45^\circ \\ &= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

### 三角方程

把积化成和差的好处是可以对要计算的式子进行降次。反过来,把和差化成积也有好处,其中一个好处就是化成积的形式后,可以解右边为零的方程式了。

具体说来就是,使  $X \cdot Y = 0$  成立的条件是,  $X = 0$  或  $Y = 0$ , 这和通过因式分解解二次方或三次方方程是一个道理。

以三角比为主的方程就称为三角方程式。

例2 解方程  $\sin \theta + \sin 3\theta = 0 (0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$ 。

$$\therefore \frac{\theta + 3\theta}{2} = 2\theta, \quad \frac{\theta - 3\theta}{2} = -\theta,$$

所以由公式④,得



$$\sin\theta + \sin 3\theta = 2\sin 2\theta \cos(-\theta) = 2\sin 2\theta \cos\theta$$

这样,方程就变成了  $2\sin 2\theta \cos\theta = 0$ ,

$$\therefore \sin 2\theta = 0 \text{ 或 } \cos\theta = 0$$

当  $\sin 2\theta = 0$  ( $0^\circ \leq \theta < 720^\circ$ ),

$$2\theta = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ,$$

$$\therefore \theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ,$$

当  $\cos\theta = 0$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) 时,

$$\theta = 90^\circ, 270^\circ,$$

把两种解综合起来,就是

$$\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$$

该方程的解其实就是函数  $y = \sin\theta + \sin 3\theta$  的图象与  $\theta$  轴的交点,只不过我们还不清楚函数本身的图象是什么样子的。

另外,该方程还能写成  $\sin\theta = -\sin 3\theta$ , 这样一来,方程的解还能解释为函数  $y = \sin\theta$  和  $y = -\sin 3\theta$  图象的交点。关于函数  $y = \sin\theta$  和  $y = -\sin 3\theta$  的图象应该能画出来吧。那就把它们画出来,并在图上找出它们的交点(图 8-6-1)。

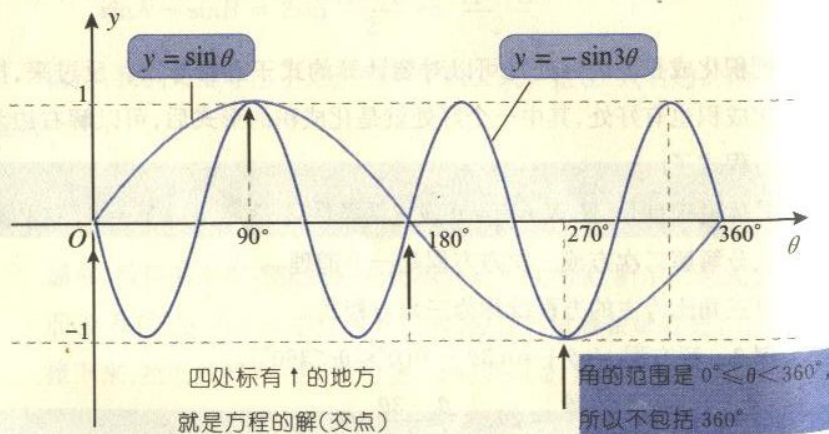


图 8-6-1

## 7

## 求异名三角比之和

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$$

前面学的和差化积公式都是“ $\sin \pm \sin$ ”或“ $\cos \pm \cos$ ”这样的同名三角函数,并且系数都是  $\pm 1$ 。但是,如本节副标题中出现的一样,如果是同一个角的异名三角比之和,并且系数也不一样,这时该怎么办呢?在介绍解法之前,有必要了解一下为什么会有这样的式子。比如,当我们用两角和公式展开下面的式子时,就出现了类似副标题中的式子。

$$\sin(\theta + 60^\circ) = \sin\theta \cos 60^\circ + \cos\theta \sin 60^\circ$$

$$= \sin\theta \times \frac{1}{2} + \cos\theta \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \sin(\theta + 60^\circ) = \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

看,如果左右位置互换一下,不就是  $a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$  的形式吗?

$$\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \sin(\theta + 60^\circ) \quad (\text{在这里, } r = 1, \alpha = 60^\circ)$$

而  $\sin(\theta + \alpha)$  又可以用两角和的正弦公式化为  $\sin\theta \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha$ , 比较一下  $a\sin\theta + b\cos\theta$ 、 $\sin\theta \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha$  两个式子中  $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$  的系数,得

$$a = \cos\alpha, b = \sin\alpha$$

此题中,  $\sin\theta$  的系数  $a = \frac{1}{2} = \cos\alpha$ ,  $\cos\theta$  的系数  $b = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\alpha$ , 所以  $\alpha = 60^\circ$ 。

但是,因为  $a, b$  的值没有范围,所以  $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha$  这样的等式不是什么情况下都能成立的。例如,把  $\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \sin(\theta + 60^\circ)$  等



式两边同乘以 2, 就得到  $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ , 而这时如果还写出  $a = 1 = \cos\alpha$ ,  $b = \sqrt{3} = \sin\alpha$  就大错特错了。不看别的,  $\sin\alpha = \sqrt{3}$  就不能成立。

记住:  $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ ,  $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ 。

否则, 好不容易得出最后答案  $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 以为可以松一口气了, 但即使不知道原题的人都能一眼看出你的答案不对。因为  $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ , 所以  $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ ,  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  不可能是  $\sin\theta$ 。

那么, 在什么情况下, 才能使  $p = \sin\alpha$ ,  $q = \cos\alpha$  呢? 换句话说,  $p, q$  应该满足什么条件才能使那两个等式恒成立呢? 首先, 因为  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ , 所以  $p, q$  肯定要满足:

$$p^2 + q^2 = 1$$

(★)

满足这一点,  $p, q$  的范围就一定为

$$-1 \leq p \leq 1, -1 \leq q \leq 1$$

为什么呢? 因为如果把  $p, q$  看作一个点的纵横坐标  $(p, q)$ , 而  $p, q$  又满足等式  $p^2 + q^2 = 1$ , 所以这个点必定在单位圆的圆周上(图 8-7-1)。而单位圆上的点的纵横坐标  $(p, q)$  一定满足

$$-1 \leq p \leq 1,$$

$$-1 \leq q \leq 1$$

那么,  $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$  的系数  $a = 1, b = \sqrt{3}$  应该怎样处理才能满足  $p^2 + q^2 = 1$  呢? 因为  $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$ , 以 4 为分母, 变成  $\frac{1^2}{4} + \frac{(\sqrt{3})^2}{4}$ 。这

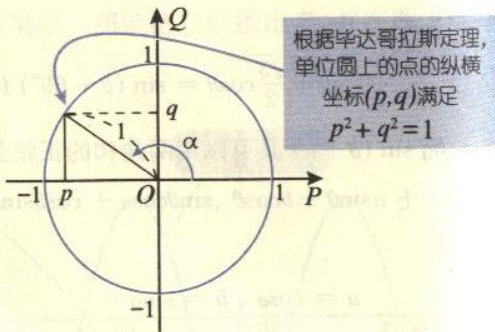


图 8-7-1



样和不就是 1 了吗? 再把  $\frac{1^2}{4}$  和  $\frac{(\sqrt{3})^2}{4}$  分别开根号, 得

$$\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

看, 这不就是我们一开始用两角和的正弦公式展开的那个式子吗? 得出这个式子, 关键是要求出平方和为 1 的两个数  $p, q$ 。本题中,

$$p = \frac{1}{2}, q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

那么, 怎么又快又准确地求出  $p, q$  呢? 可以用系数  $a, b$  来表示:

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, q = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

两系数先平方再相加最后开方。

这样, 无论  $a, b$  是什么数都能立刻求出满足  $p^2 + q^2 = 1$  的  $p$  和  $q$ 。

但是, 有一点不要忘了: 系数被调整后的式子就不能与原来那个式子划等号了。

$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \rightarrow \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

如何把两个式子之间的箭头符号换成等号呢? 只要把右边那个式子乘以 2 就可以了。让我们从头开始重新做一遍。

$$\begin{aligned} \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta &= 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\ 1^2 + (\sqrt{3})^2 &= 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2 \quad \begin{array}{l} \text{cos } \theta \text{ 的系数是 } \sin \alpha \\ \text{(两系数先平方再} \\ \text{相加最后开方)} \end{array} \\ \cos\alpha &= \frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \begin{array}{l} \text{sin } \theta \text{ 的系数是 } \cos \alpha \end{array} \\ \alpha &= \underline{60^\circ}, -60^\circ \quad \alpha = \underline{60^\circ}, 120^\circ \quad \text{通常, } \alpha \text{ 的范围是 } -180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \\ \therefore \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$



$$\therefore \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta + 60^\circ) \quad \text{取公共解}$$

$$\text{这里, } \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta.$$

$$\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta \rightarrow \text{这个式子}$$

中的  $\sin, \cos$  次序与两角和的正弦公式里的次序不一样

所以,把  $\sin, \cos$  的次序调换一下,

$$\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha$$

$$\sin \cos \cos \sin$$

这不正是两角和的正弦公式的右边吗?

再补充一点,我们一般把  $\alpha$  的范围定为  $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ 。也就是说,你只要在这一范围内找就可以。

弄清了以上的推导过程,就可以用已知的系数  $a, b$  来表示本节标题中出现的  $r(r = \sqrt{a^2 + b^2})$ ,这样,  $r$  也成了已知数。

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{这里, } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos\alpha = \frac{a}{r}, \sin\alpha = \frac{b}{r}.$$

用这个公式就可以把类似  $a\sin\theta + b\cos\theta$  这样的异名三角比的和化成同名三角比的形式。

## 8

 $a\sin\theta + b\cos\theta$  的图象是什么形状

——无论怎么组合都是正弦曲线

本节将为大家讲解如何利用  $a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$  来解题。

例1 把  $\sin\theta - \cos\theta$  用  $\theta$  的正弦表示出来。

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) \quad \text{注意不要混淆 } \theta \text{ 和 } \alpha$$

先乘后除

$$\text{由 } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 得 } \alpha = 45^\circ, -45^\circ,$$

$$\text{由 } \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 得 } \alpha = -135^\circ, -45^\circ,$$

负号也要考虑到 取公共解

$$\therefore \alpha = -45^\circ,$$

$$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta - 45^\circ)$$

例2 画出函数  $y = \sin\theta + \cos\theta$  的大致图象。

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$y = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right),$$

$$\text{由 } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 得 } \alpha = \pm 45^\circ; \text{ 由 } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 得 } \alpha = 45^\circ, 135^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 45^\circ,$$

$$\therefore y = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$$

画出函数  $y = \sin\theta + \cos\theta$  的大致图象如图 8-8-2 所示。函数图象周

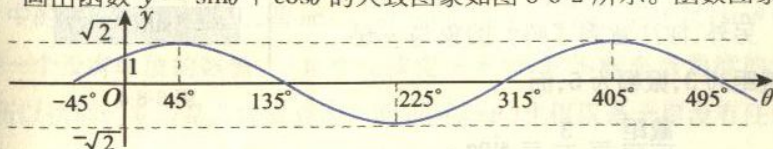


图 8-8-2



期为  $360^\circ$ 、振幅为  $\sqrt{2}$ 。当  $\theta = 0^\circ$  时,  $y = \sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ 。

是不是和你想像中的  $y = \sin \theta + \cos \theta$  图象大相径庭? 有没有猜到它其实是一个单纯的正弦曲线?

**例 3** 画出函数  $y = 4\sin \theta + 3\cos \theta$  的大致图象。

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5,$$

$$y = 4\sin \theta + 3\cos \theta = 5\left(\frac{4}{5}\sin \theta + \frac{3}{5}\cos \theta\right)$$

$$\therefore y = 5\sin(\theta + \alpha), \text{ 其中 } \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

这里, 如果没有计算器就无法知道  $\alpha$  具体的数值, 所以只能像例题那样, 把  $\cos \alpha$  和  $\sin \alpha$  的值分别写出来。你也可以通过图 8-8-3 把  $\alpha$  表示出来。

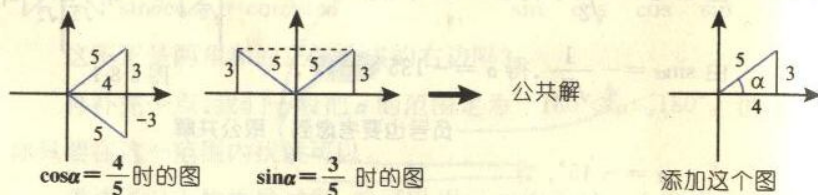


图 8-8-3

在不知道  $\alpha$  的具体数值情况下, 你还会画出函数的图象吗? 该图象周期为  $360^\circ$ 、振幅为 5, 与  $y$  轴的截距(即  $\theta = 0$  时)为  $y = 4\sin 0^\circ + 3\cos 0^\circ = 3$ 。

$$\begin{array}{c|c} \theta + \alpha & 0^\circ \sim 360^\circ \\ \hline \theta & -\alpha \sim 360^\circ - \alpha \end{array}$$

经分析, 就能看出待画函数图象其实就是函数  $y = 5\sin \theta$  图象向左平移  $\alpha$  个单位后的那个图象(图 8-8-4)。并且, 因为  $\sin \alpha > 0$ 、 $\cos \alpha > 0$ , 所以能够判断出  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  (还能由图 8-8-3 进一步判断出  $\alpha < 45^\circ$ )。

另外, 你注意到了吗? 图象与  $y$  轴的截距为 3, 振幅为 5, 而

$$\frac{\text{截距}}{\text{振幅}} = \frac{3}{5} = \sin \alpha。$$

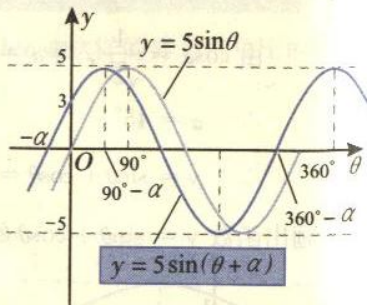


图 8-8-4

## 9

## 用图象表示函数的复合

——只能是同名函数之间的复合

前面我们已经学过了如何把  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  合二为一, 复合成同一个角的三角比。请注意“复合”一词。一般地, 当我们说两个函数复合时, 就是将一个函数的自变量用另一个函数表达式来代替。例如, 把  $y = x - 3$  和  $y = x^2$  复合成一个函数时, 思路如下:

$$\begin{array}{l} y = x - 3 \\ \downarrow \\ y = x^2 \end{array}$$

写成一个解析式, 就是

$$y = (x - 3)^2$$

这样, 我们就得出了一个复合函数。

一般地, 若把关于  $x$  的一个函数记为  $f(x)$ , 其中,  $f$  是 function 的第一个字母, 意为函数, 另一个函数记为  $g(x)$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  的复合函数就是

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ \downarrow \\ y = g(x) \\ \therefore y = g[f(x)] \end{array}$$

从这里可以很清楚地看到  $g(x)$  中的  $x$  其实就是  $f(x)$ , 而  $g[f(x)]$  就是  $f(x)$  与  $g(x)$  的复合函数。

若按上面的操作方法, 当我们要把  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  复合时, 似乎只要把  $\cos \theta$  中的  $\theta$  用  $\sin \theta$  来替代, 即  $\cos(\sin \theta)$  就可以了。但是, 请注意:  $\sin \theta$  仅仅是一个没有单位的数值, 与角度性质完全不同, 它不能充当角度的角色, 所以这样的复合是不能成立的。而  $\cos(\sin \theta)$  也仅仅是一串没有任何实际意义的符号而已(参见第七章第七节)。



三角比表示的是边长与边长之比,那么有没有与三角比性质相同并可以表示角度的数量呢?当然有,这就是弧度制。有关这一点,将在下节中为你详细讲解。

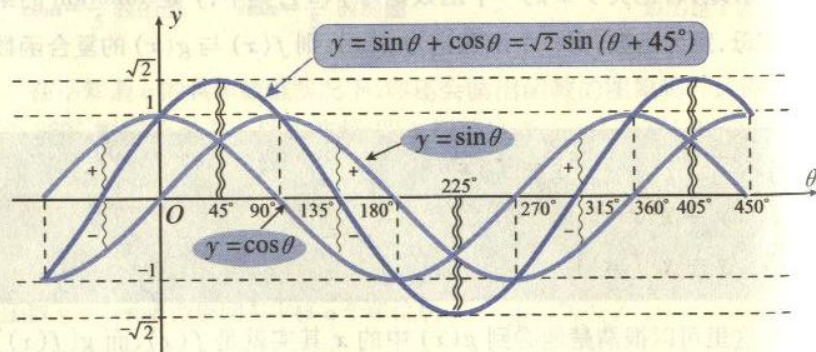
我们在前面学的  $\sin\theta$  和  $\cos\theta$  的复合,其实仅仅是把这两个函数加在一起变成  $\sin\theta + \cos\theta$  而已,与本节的复合函数是不一样的,这点请大家务必注意。

那么,两个函数的相加如何用图象来表示呢?

其实,函数的值在图象上是用高度表示出来的,因此,两个函数值相加,在图象上就表现为两个原函数的高度相加。让我们来看一看具体的例题。

**例 1** 在同一坐标内分别画出函数  $y = \sin\theta$  和  $y = \cos\theta$  的图象,再利用这两个图象画出  $y = \sin\theta + \cos\theta$  的图象。

画出的图象如图 8-9-1 所示。



~~~~~ 正负号相加,正好为零。

~~~~~ 原图象高相等,所以新图象高为原图象的 2 倍。

—— 一原图象高为零,所以新图象的高就是另一原图象的高。

图 8-9-1

三个图象画在同一个坐标内,大概会看得不太清楚,但是还是请你仔细观察两个原函数的高相加的那些部分。



类似这样的图象的复合并不是三角函数特有的,其他函数也可以。下面就来看几个具体的例题。

**例 2** 在同一坐标内分别画出函数  $y = x^2$  和  $y = -2x$  的图象,再利用这两个图象画出  $y = x^2 - 2x$  的图象。

画出的图象如图 8-9-2 所示。

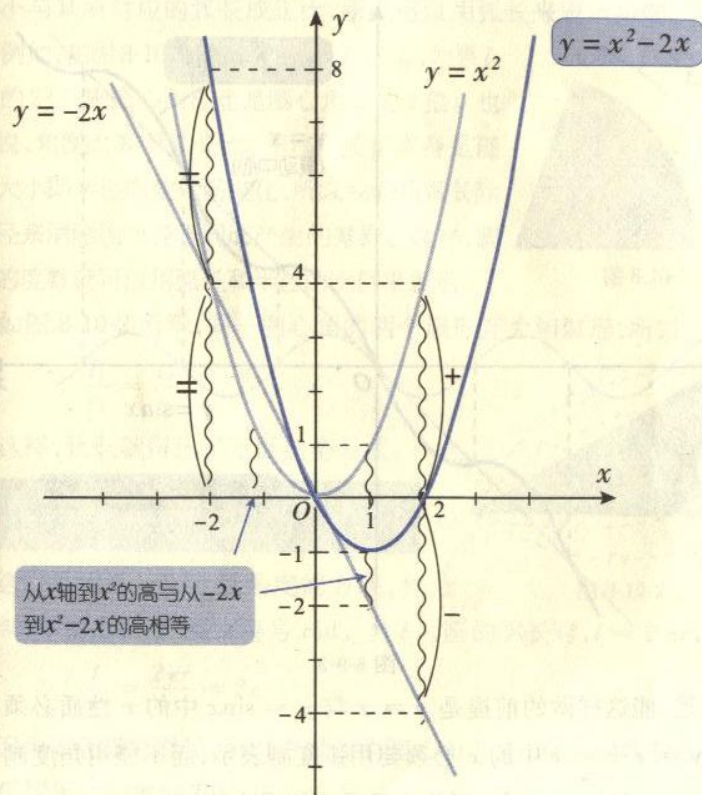


图 8-9-2

我们可以通过下面的变形求出函数  $y = x^2 - 2x$  图象的顶点坐标,这样就能更加清楚地看到它与原函数图象一样,都是抛物线。

$$y = x^2 - 2x$$

$$= x^2 - 2x + 1 - 1 \quad (\text{为了凑平方,求出 } x \text{ 系数的一半的平方,加上,再减去})$$



$$= (x-1)^2 - 1$$

所以顶点的坐标为  $(1, -1)$ 。  $y = x^2$  的图象向右向下

平移 1 个单位就得到了  $y = x^2 - 2x$  的图象。



令括号里的式子为零就能求出顶点坐标, 即  $x-1=0$ , 从而  $x=1$ 。

理解了上题后, 可以推出函数  $y = x + \sin x$  的大致图象就是以直线  $y = x$  为振动中心的  $y = \sin x$  的图象(图 8-9-3)。

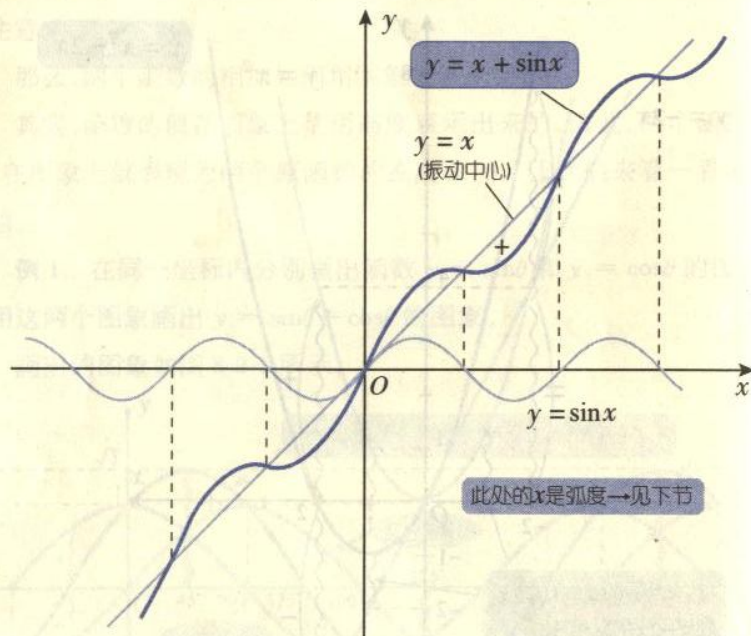


图 8-9-3

但是, 能这样做的前提是  $y = x$  与  $y = \sin x$  中的  $x$  性质必须相同。所以,  $y = x + \sin x$  中的  $x$  必须要用弧度制表示, 而不能用角度制表示。所以像  $y = 60^\circ + \sin 60^\circ$  这样的式子是不能成立的。

## 10

## 用长度来度量角度

## ——弧度制

如何用长度来度量角度呢?

在这里, 我们要把角度看作扇形的圆心角来思考这个问题。圆心角的大小与其所对应的弧长成正比, 所以可以用弧长来表示角度。

例如, 在图 8-10-1 中,  $\theta_1 : \theta_2 = l_1 : l_2$ , 如果  $l_2$  是  $l_1$  的 2 倍, 则圆心角  $\theta_2$  也是圆心角  $\theta_1$  的 2 倍。也就是说, 角度比等于弧长比。但是, 弧长本身是随扇形大小即半径的变化而变化, 所以我们用弧长除以半径来消除因半径不同而产生的差异。这样, 圆心角的度数就可以用弧长和半径的比例来表示。

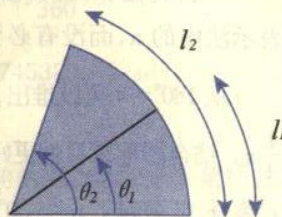


图 8-10-1

如图 8-10-2 所示, 同一圆心角的两个扇形互为相似形, 所以,

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$$

这样, 我们就得出了下面这个公式:

$$\frac{l}{r} = \frac{\text{弧长}}{\text{半径}} = \text{圆心角的度数}$$

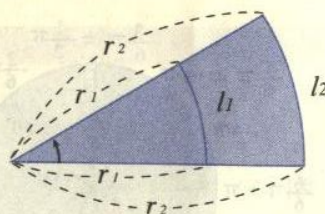


图 8-10-2

这就是用弧长来计量角度的方法, 称为弧度制, 单位是弧度, 英文符号 rad。当  $l$  为圆的周长时,  $l = 2\pi r$ , 所以

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

因为  $l$  是圆的周长, 所以它对应的圆心角就是  $360^\circ$ , 这样我们就知道了  $360^\circ$  用弧度制如何表示。

$$360^\circ = 2\pi [\text{rad}] = 6.28318 \dots [\text{rad}]$$

不言而喻, 这是一个与圆的大小无关的固定数值。

在一个半圆中, 弧长  $l = \pi r$ , 所以

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$



因为  $l$  对应的圆心角是  $180^\circ$ ,

$$\therefore 180^\circ = \pi [\text{rad}] = 3.141592\cdots [\text{rad}]$$

以此类推,可以得出四分之一圆即圆心角为  $90^\circ$  时的弧度数,

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} [\text{rad}]$$

一般情况下,在书写的时候不用把单位“rad”写出来,并且保留弧度表示法中的  $\pi$ ,而没有必要取  $\pi$  的近似值。

从  $180^\circ = \pi$  可以推出,  $30^\circ = \frac{180^\circ}{6} = \frac{1}{6}\pi$ ,  $60^\circ = \frac{180^\circ}{3} = \frac{1}{3}\pi$ 。而  $45^\circ = \frac{180^\circ}{4} = \frac{1}{4}\pi$ 。结合图形来看就更好理解了,如图 8-10-3 所示,把圆心角为  $180^\circ$  的半圆六等分,就得到了 6 个  $30^\circ$  或 3 个  $60^\circ$  的角,它们用弧度制表示分别是  $\frac{1}{6}\pi$  和  $\frac{2}{6}\pi$  (即  $\frac{1}{3}\pi$ )。若把半圆四等分就是四个  $45^\circ$  角,用弧度制表示就是  $\frac{1}{4}\pi$ 。

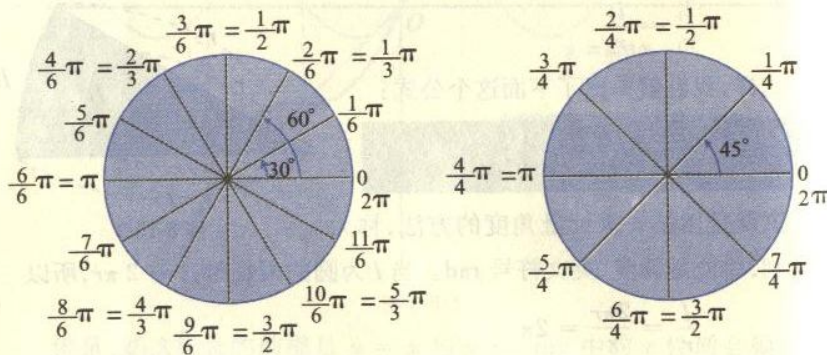


图 8-10-3

那么,  $1[\text{rad}]$  是多少度呢? 通过定义,我们知道圆心角为  $1[\text{rad}]$  就意味着它对应的弧长等于半径,即  $l=r$ ,而  $1[\text{rad}]$  要比等边三角形的内角  $60^\circ$  要小一点点。下面,我们就来计算一下  $1[\text{rad}]$  到底等于多少度。

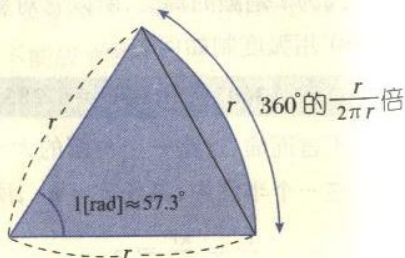


图 8-10-4



前面已经说过,弧长比等于角度比,而  $1[\text{rad}]$  的弧长  $l$  (在这里,  $l=r$ ) 相当于圆周长  $2\pi r$  的  $\frac{1}{2\pi}$ ,所以  $1[\text{rad}]$  也就相当于  $360^\circ$  的  $\frac{1}{2\pi}$ ,这样,

$$1[\text{rad}] = 360^\circ \times \frac{1}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.14159\cdots} = 57.2957795\cdots^\circ$$

反过来,  $1^\circ$  是圆周角  $360^\circ$  的  $\frac{1}{360}$ ,即是  $2\pi[\text{rad}]$  的  $\frac{1}{360}$ ,所以,

$$1^\circ = 2\pi \times \frac{1}{360} = \frac{\pi}{180} [\text{rad}] = 0.01745329\cdots [\text{rad}]$$

由此可得,一个角的度数乘以  $\frac{\pi}{180^\circ}$  就是这个角的弧度数,一个角的弧度数乘以  $\frac{180^\circ}{\pi}$  就是这个角的度数。

### 弧度制与三角函数是同一性质

今后,如果没有特别说明,不带单位名的角度都是弧度数。

如图 8-10-5 所示,弧度制实际上与三角函数是同一性质的,它们都能用以  $r$  为分母的分数形式来表示,

$$\sin x = \frac{b_1}{r}, x = \frac{l}{r} \text{ rad}, \tan x = \frac{b_2}{r}, \cos x = \frac{a}{r}$$

若扇形圆心角  $x$  为锐角时,  $b_1 < l < b_2$ 。其中,  $b_1 < l$  是显而易见的。但随着圆心角逐渐变小,就不能很肯定  $l$  一定小于  $b_2$ ,那么怎么证明  $l < b_2$  呢? 这里,我们需要通过比较扇形面积和它外面的直角三角形面积来确定  $l$  和  $b_2$  的

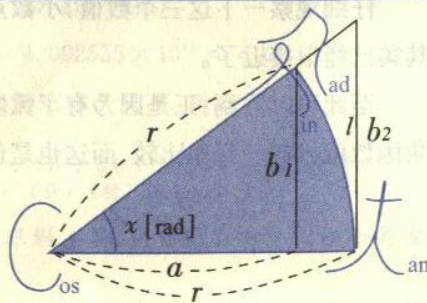


图 8-10-5



大小关系。

$$\text{扇形面积} = \text{圆面积} \times \frac{l}{\text{圆周长}} = \pi r^2 \cdot \frac{l}{2\pi r} = \frac{1}{2}rl;$$

$$\text{直角三角形面积} = \frac{1}{2}rb_2$$

很明显, 扇形面积 < 直角三角形面积, 即  $\frac{1}{2}rl < \frac{1}{2}rb_2$ ,

$$\therefore l < b_2$$

这样, 我们就能很肯定地说:  $b_1 < l < b_2$ 。

$\therefore$  当  $0 < x < \frac{1}{2}\pi$  (即  $x$  为锐角) 时,

$$\frac{b_1}{r} < \frac{l}{r} < \frac{b_2}{r},$$

$$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$$

$$\sin x < x < \tan x$$

另外, 当  $x$  无限变小时, 凭直觉我们能看出  $b_1 \approx l \approx b_2$ ,

$$\therefore \sin x \approx x \approx \tan x$$

查三角函数表可知,

$$\sin 1^\circ = 0.0174524\cdots, \tan 1^\circ = 0.0174550\cdots$$

而刚才通过计算, 我们已经知道了  $1^\circ = \frac{\pi}{180} [\text{rad}] = 0.01745329\cdots [\text{rad}]$ 。

仔细观察一下这三个数值, 小数点后面的五位数完全一样, 可见它们其实已经很接近了。

至此可以看到: 正是因为有了弧度制, 才能把一个角的角度和它的三角函数值放在一起作比较, 而这也是创立弧度制的最大理由。

## 专栏 5

### 几乎接近 0 的角度

半人马座的  $\alpha$  星是人类已探明的除太阳以外离地球最近的恒星。1838 年, 人类首次成功测量出它和地球之间的距离。

如图 8-9-6 所示,  $\theta$  表示  $\alpha$  星相对于地球公转轨道直径所张的夹角, 称为周年视差 (annual parallax), 按目前人类所能达到的水平, 测量出  $\theta$  为  $0.756''$  (秒)。而把地球与太阳之间的距离称为 1AU。“秒”是角度的单位, 如何把它化成弧度呢?

$$\because 1^\circ = 60' (\text{分}), 1' = 60'' (\text{秒}),$$

$$\therefore 0.756'' = \left(\frac{0.756}{3600}\right)^\circ = \frac{\pi}{180} \times \frac{0.756}{3600} (\text{rad}), \text{即 } 0.00021^\circ$$

可以看到,  $\theta$  是一个几乎接近于零的角, 所以  $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta$ 。而  $\triangle APS$  即使不是直角三角形, 也能得出

$$AP \approx AS, PS = 1 \approx AS \cdot \theta \quad \leftarrow \begin{array}{l} \sin \theta \text{ 与 } \tan \theta \\ \text{几乎相等} \end{array}$$

$$\therefore AS \approx \frac{1}{\theta_{\text{rad}}} = \frac{180 \times 3600}{0.756\pi} \approx 272837 (\text{AU})$$

也就是说,  $\alpha$  星与地球之间的距离大约是地球到太阳距离的 272837 倍。地球与太阳之间的距离

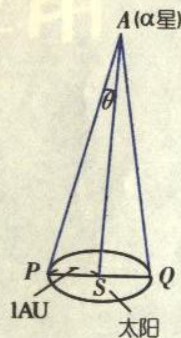


图 8-9-6

$$PS = 1 \text{ 亿 } 5000 \text{ 万} = 1.5 \times 10^8 (\text{km}),$$

$$\therefore AS = 1.5 \times 10^8 \times 272837 = 4.092555 \times 10^{13} \approx 4.09 \times 10^{13} (\text{km})$$

而光速为  $3 \times 10^5 (\text{km/s})$ , 1 秒能绕地球 7 周半, 所以

$$AS = \frac{4.09 \times 10^{13}}{3 \times 10^5} \div 60 \div 60 \div 24 \div 365 \approx 4.32 (\text{光年})$$

(秒) (分) (时) (天)

也就是说, 即使以光的速度从地球到  $\alpha$  星, 也要花上四年零四个月左右的时间。



### 第九章 三角函数的应用

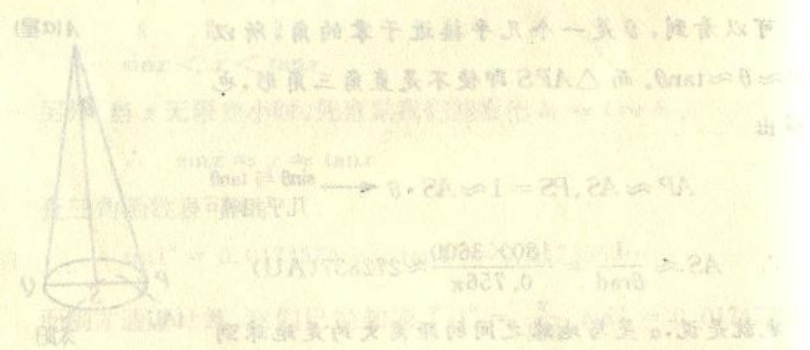
【例1】如图9-1所示，在△ABC中，AB=AC，∠A=120°，BC=10，求AB的长。

解：过点A作AD⊥BC于点D，则AD平分BC，BD=DC=5。

在Rt△ABD中，∠B=30°，BD=5，

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$AB = \frac{10}{\cos 30^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$



【例2】如图9-2所示，在△ABC中，AB=AC，∠A=120°，BC=10，求AB的长。

解：过点A作AD⊥BC于点D，则AD平分BC，BD=DC=5。

在Rt△ABD中，∠B=30°，BD=5，

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

# 第九章

## 三角函数的应用



在日本,一般家庭使用的都是 100V 电压的交流电。但富士山以东地区是 50Hz,以西地区是 60Hz。为什么东西两地的频率不一样呢?因为明治时代,引进发电机时,东京的电力公司从德国 AE 公司进口 50Hz 的发电机,而大阪的电力公司却从美国 GE 公司进口 60Hz 的发电机,从而使得日本关东、关西的电力频率不一样。战后,曾经有人主张把全日本的电力频率统一为 60Hz,但这一提案最终还是未被付诸行动。

第七章第六节里已经介绍过了频率的单位——赫兹(Hz),它是以 17 世纪德国物理学家赫兹的名字命名的。

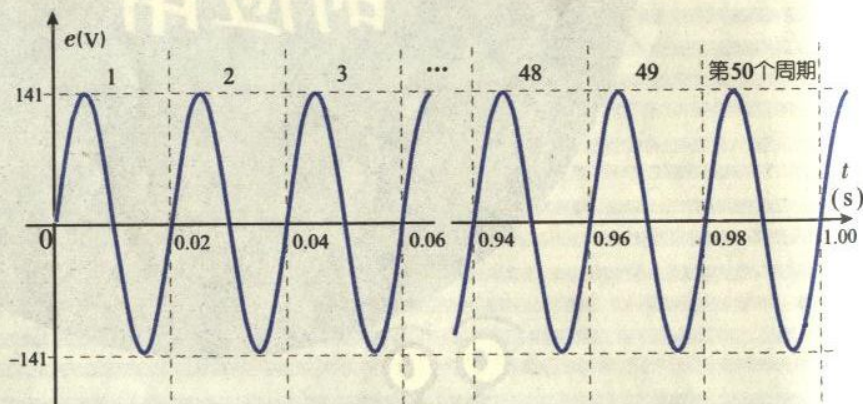


图 9-1-1

图 9-1-1 反映的是电压为 100V、频率为 50Hz 的家庭照明灯 1s 内流经的电流。

仔细观察图象,有没有什么不对劲的地方?该图象的纵坐标轴表示的是电压,不是 100 V 吗?怎么会是 141V 呢?一般家庭使用的不都是 100V 吗?这是怎么回事?别急,下一节将向你细细道来。

如果把振幅 141 记作  $U_m$ ,角速度记作  $\omega$  (本题中,因为 1s 转 50 次,所



以它的角速度为  $2\pi \times 50 = 100\pi$  (rad/s),则交流电的电压就可以表示成

$$U = U_m \sin \omega t$$

为什么能用这个式子表示呢?从发电机原理来看,由导线绕成的线圈在磁场中做切割磁感线运动时会产生电流,而该电流的电压和线圈切割磁感线的速度成正比,如果把比例系数记作  $k$ ,则

$$e = kv$$

系数  $k$  由磁场强度、线圈匝数、导线长度等因素决定。

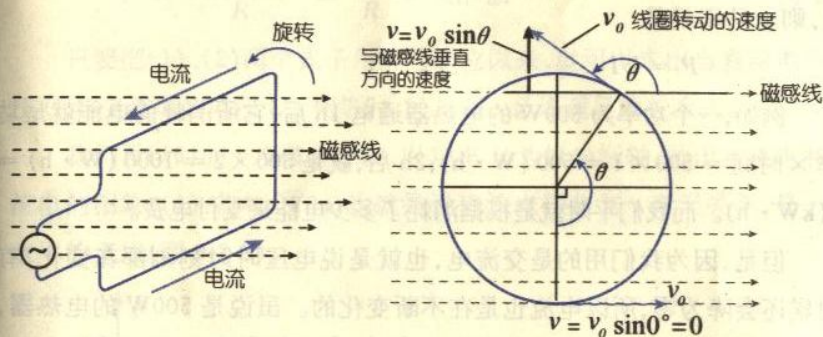


图 9-1-3

如图 9-1-3 所示,假设线圈转动的速度为  $v_0$ ,线圈切割磁感线的运动方向和磁感线的方向所成的角为  $\theta$ ,则线圈与磁感线在垂直方向上的速度  $v$

$$v = v_0 \sin \theta,$$

$$\therefore U = kv = kv_0 \sin \theta$$

最大电压为  $E_m = kv_0$ ,  $\theta$  由时间  $t$  决定,角速度记为  $\omega$ ,所以  $e$  的表达式就可以写成,

$$U = U_m \sin \omega t$$

但是,实际的发电机发出的电压并不是 141V 而是更高的电压,通过变压器把电压降低后再供给到一般家庭。而且一般发电机都采取线圈不动、磁场旋转的方式发电,即采用旋转磁极式发电机。

电流通过时,电灯发光,电动机转动,这些都是电流做功的表现,而电能通过转化为其他形式的能来发挥它的作用。用来表示消耗电能的快慢的物理量就是电功率,符号为  $P$ ,单位是  $W$ ,用电压与电流的乘积来计算电功率。电压的符号为  $U$ ,单位是  $V$ ,电流的符号为  $I$ ,单位是  $A$ ,则电功率就是

$$P = UI$$

例如,一个功率为  $500W$  的电热器通电  $1h$  后,它所消耗的电能就是功率  $\times$  时间  $= 500 \times 1 = 500 (W \cdot h)$ ;  $2h$  后,就是  $500 \times 2 = 1000 (W \cdot h) = 1(kW \cdot h)$ 。而我们平时就是根据消耗了多少电能来支付电费。

但是,因为我们用的是交流电,也就是说电压时时刻刻都在变化,有时候还会降为零,所以电流也是在不断变化的。虽说是  $500W$  的电热器,但并不是说它总是以  $100V \times 5A$  消耗电能的,因为接入的是交流电。

于是,为了达到与直流电消耗等量电能(通入直流电时,用电器总是以  $100V \times 5A$  消耗电能),我们需要规定交流电的最大电压。很容易看出,如果把最大电压定为  $100V$ ,它其实比电压同为  $100V$  的直流电所消耗的电能要少(因为交流电的最大电压为  $100V$  时,在其他很多时候它的电压达不到  $100V$ )。

因为消耗的电能等于功率  $\times$  时间,所以在一定的时间内,就可以比较直流电和交流电了。

功率 = 电压  $\times$  电流,而电流  $I$  与电压  $U$  成正比,与接在电路中的导体的电阻  $R$  成反比,即

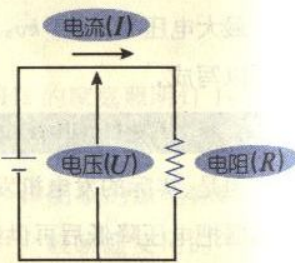


图 9-2-1



$$I = \frac{U}{R} \quad (\text{该等式又称为欧姆定律}),$$

所以功率的表达式可以写成

$$P = UI = U \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} \quad (1)$$

$R$  表示导体的电阻,是个定值(电阻单位为  $\Omega$ )。

现在,把(1)式中的电压  $U$  用交流电的电压公式表示,

$$P = \frac{U_m^2 \sin^2 \omega t}{R} = \frac{U_m^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (2)$$

只要把(1)、(2)两个式子用等号联立起来,就可以求出当直流电的电压  $U$  与交流电的电压  $U_m$  相等时, $U$  与  $U_m$  必须满足的关系式。

我们再以时间  $t$  为横坐标轴,以功率  $P$  为纵坐标轴,画出直流电和交流电的图象。(1) 式中没有  $t$ ,也就是说直流电图象与  $t$  毫无关系,是一条水平的直线(图 9-2-2)。

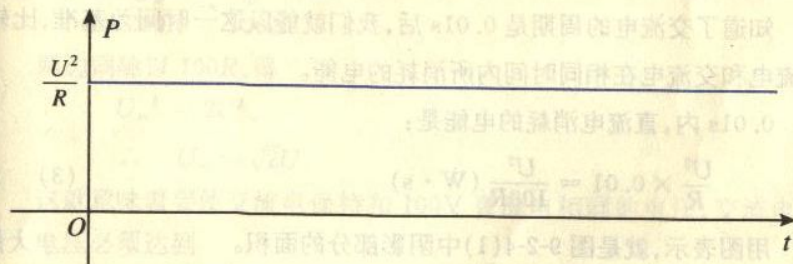


图 9-2-2

利用半角公式把(2)式变形,

$$\begin{aligned} P &= \frac{U_m^2}{R} \sin^2 \omega t = \frac{U_m^2}{R} \times \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \\ &= -\frac{U_m^2}{R} \cos 2\omega t + \frac{U_m^2}{2R} \end{aligned}$$

如果看得不太明白,可以把  $\frac{U_m^2}{2R}$  用  $A$  代替,这样,

$$P = -A \cos 2\omega t + A$$



$$= -A \cos 200\pi t + A \quad (A > 0, \omega = 100\pi)$$

发电机线圈 1s 转  $200\pi$  [rad] (即 100 周), 所以转  $2\pi$  [rad] (即 1 周) 所要的时间就是 0.01s (图 9-2-3)。

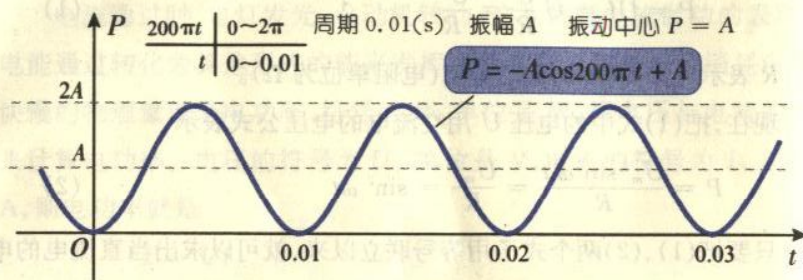


图 9-2-3

### 比较直流电和交流电在单位时间内消耗的电能

知道了交流电的周期是 0.01s 后, 我们就能以这一时间为基准, 比较直流电和交流电在相同时间内所消耗的电能。

0.01s 内, 直流电消耗的电能是:

$$\frac{U^2}{R} \times 0.01 = \frac{U^2}{100R} \quad (\text{W} \cdot \text{s}) \quad (3)$$

用图表示, 就是图 9-2-4(1) 中阴影部分的面积。

同样, 交流电在 0.01s 内消耗的电能就是图 9-2-4(2) 中阴影部分的面积。虽然前面说过不涉及微分、积分, 但要计算这一面积, 必须用到积分的知识, 所以请大家见谅。

$$\begin{aligned} \int_0^{0.01} (-A \cos 200\pi t + A) dt &= \left[ -\frac{A}{200\pi} \sin 200\pi t + At \right]_0^{0.01} \\ &= -\frac{A}{200\pi} \sin 2\pi + 0.01A - \left( -\frac{A}{200\pi} \sin 0 + 0A \right) \\ &= 0.01A = \frac{A}{100} = \frac{U_m^2}{200R} \end{aligned} \quad (4)$$

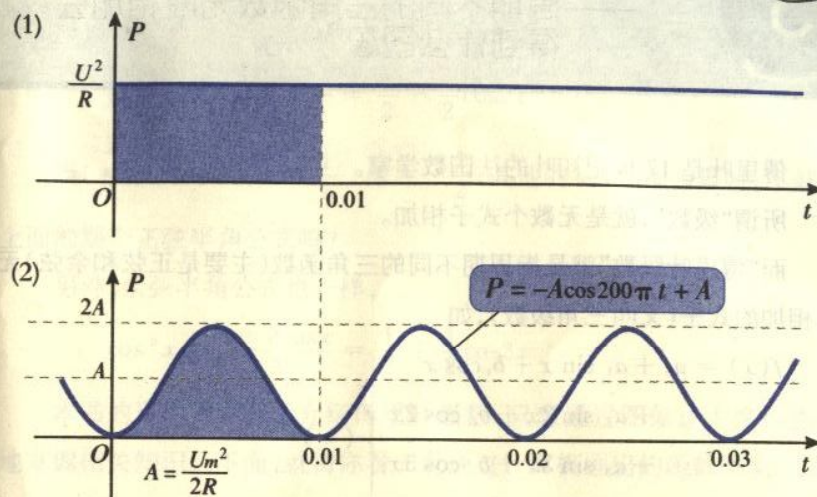


图 9-2-4

把(4)、(3)用等号联立, 得

$$\frac{U_m^2}{200R} = \frac{U^2}{100R}$$

两边同除以  $100R$ , 得

$$\begin{aligned} U_m^2 &= 2U^2, \\ \therefore U_m &= \sqrt{2}U \end{aligned}$$

这就意味着要使交流电保持和 100V 直流电相同的电压, 交流电的最大电压必须达到

$$U_m = \sqrt{2}U \approx 1.41 \times 100 = 141\text{V}$$

另外, 我们在描述交流电的电压时, 并不是用最大电压, 而是用把它换算成直流电时的电压  $U$  来表示

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707U_m$$

我们把这一电压称为交流电的有效电压, 它是最大电压的  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  倍。

至此, 你应该明白了为什么前一节图 9-1-1 “100V 交流电” 的振幅为 141V 而不是 100V 了吧。

通过本节的学习, 希望你能明白在电学中, 三角函数是不可缺少的。

傅里叶是 17 世纪初叶的法国数学家。

所谓“级数”，就是无数个式子相加。

而“傅里叶级数”就是指周期不同的三角函数(主要是正弦和余弦)无限相加的式子(又叫三角级数),如

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x \\ &\quad + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x \\ &\quad + a_3 \sin 3x + b_3 \cos 3x \\ &\quad + \dots \end{aligned} \right\} (*)$$

这么多式子加在一起,表示的是一个函数  $f(x)$ 。

傅里叶甚至提出“任一函数都可以展成三角函数的无穷级数”,也就是说任何一个函数都能展成标有(\*)的式子形式。

虽然傅里叶本人并没有证明过他的这一主张,但其后,他的学生德国数学家狄里克雷(Dirichlet, 1805~1859)却通过严密的推导过程给出了能够展成无穷级数的函数所要满足的条件(即“狄氏条件”),从而真正确立了傅里叶级数理论。

在理工科中用到的函数大部分都满足“狄氏条件”,所以傅里叶级数被非常广泛地应用在这些领域里。

有关三角函数的相加,其实我们在第八章第六至第九节中早已经接触过了,还记得  $\sin A \pm \sin B$ ,  $\cos A \pm \cos B$ ,  $a \sin \theta + b \cos \theta$  吗? 我们不但知道该怎么计算,而且还学了如何用图象表示。

这些可以说是傅里叶级数表达式(\*)的一种特殊形式。

所以,把傅里叶级数表达式看作是一些式子的扩充,这样就能对它有个大致印象了。但关键还是要抓住相加函数的大致图象。



半角公式其实也是一种特殊的傅里叶级数形式,这大概很难觉察到。

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

当(\*)式子中的  $a_0 = \frac{1}{2}$ ,  $b_2 = -\frac{1}{2}$ , 其他的  $a_n, b_n$  都为零时,不就是上面的那个正弦半角公式吗?

另外,余弦半角公式也一样,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

本书的目的并不在于介绍傅里叶级数,只想通过图象让大家能粗略地掌握相关知识。下面,就请你看一看通过计算机画出的函数图象。

例 1 函数  $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots$

① ↙
② ↙
③ ↙
④ ↙

①~④四部分的图象如图 9-3-1 所示:

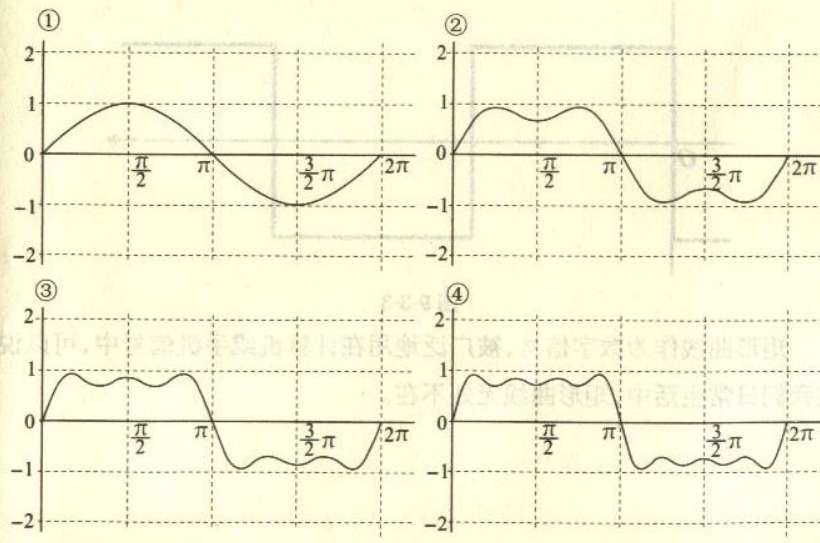


图 9-3-1



如果把上面的函数一直扩展为

$$y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \cdots + \frac{1}{63} \sin 63x$$

它的图象就如图 9-3-2 所示。可以看出,它已经很接近图 9-3-3 中的矩形曲线了。

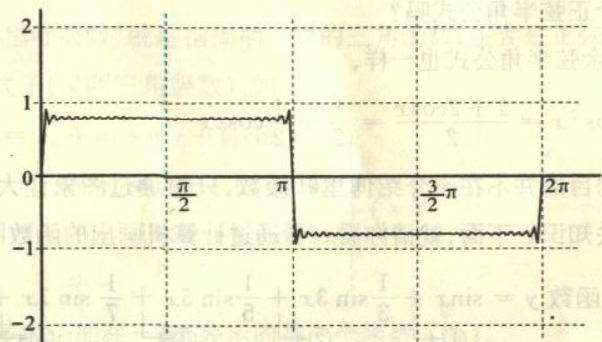


图 9-3-2

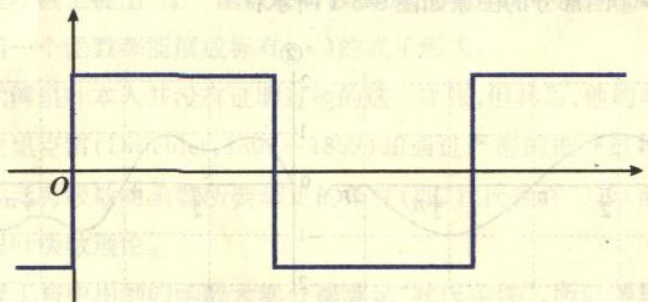


图 9-3-3

矩形曲线作为数字信号,被广泛地用在计算机或手机信号中,可以说在我们日常生活中,矩形曲线无处不在。

责任编辑 顾 泓  
封面设计 程 钢  
封面插画 傅惟本



### 蜗牛科学系列

本丛书从基础入手,遵循循序渐进的原则,深入浅出地解说基本的科学原理和最新的科学知识,注重学习方法与兴趣的培养。带着身边的问题走进它,不用死记定理,也不用硬背公式,不再乏味,不再费解,轻松步入神奇有趣、绚丽多姿的科学世界。

轻松解读科学奥秘  
——生物学超入门

轻松解读科学奥秘  
——物理学超入门

轻松解读科学奥秘  
——数学超入门

轻松解读科学奥秘  
——化学超入门

轻松解读科学奥秘  
——生化超入门

轻松解读科学奥秘  
——三角函数超入门

轻松解读科学奥秘  
——概率统计超入门

轻松解读科学奥秘  
——微积分超入门

轻松解读科学奥秘  
——免疫和自然治愈力

ISBN 7-5062-6865-5



9 787506 268653 >

ISBN 7-5062-6865-5/O ·  
WS/6865 定价: 15.00 元

自